Die Entwickelung der Mathematik

und ihre

Beziehung zur Naturwissenschaft.

Von

Carl Lais,

Oberlehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium
zu Reval.

Reval, 1868.

Druck von J. H. Gressel.

Von der Censur gestattet. — Dorpat, den 18. October 1868.

№ 146.

Vorrede.

Die vorliegende kleine Schrift bezweckt, den durch die ganze Gymnasialbildung herangereiften Schülern der ersten Klasse, vor ihrem Uebergange zur Universität noch einen Blick auf die eigenthümliche Entwickelungsgeschichte der Mathematik zu eröffnen, wie diese von jeher als Stütze für die immer größere Wichtigkeit gewinnenden Naturwissenschaften gedient hat, und soll zugleich darthun, daß nur die saure Mühe des ernsten Denkens und Schaffens einen reellen Fortschritt in der Entwickelung des Menschengeschlechts bildet.

Die Grundzüge zu dieser kurzen Entwickelungsgeschichte verdanke ich zum größten Theil dem vortrefflichen Werke des Prof. Arneth: die Geschichte der reinen Mathematik; aber auch die Geschichte der Mathematik von Poppe habe ich hie und da benutzt.

Der Verfasser.

Einleitung.

Die Natur in ihrer vollen Pracht und in dem Glanze ihrer Erscheinungen hat seit den ältesten Zeiten auf die verschiedensten Völker einen mächtigen Eindruck ausgeübt. Aber erst als der Mensch in seiner Entwickelung so weit gekommen war, daß nicht mehr die Sorge für seine Existenz, der Kampf mit der Natur und die Sicherstellung seines Verhältnisses zur Außenwelt ihn allein in Anspruch nahm, vermochte er sich mehr und mehr der Ausbildung seines Geistes zuzuwenden, und allmählig wurde in ihm das Verlangen wach, die mächtigen, zur Furcht und Bewunderung zwingenden Naturerscheinungen zu überschauen und in ihren Ursachen zu ergründen.

Ueberall, wohin er blickte, sah er Thätigkeiten, Lebensäußerungen der Natur, welche er als nahe liegend vergleichen mußte mit der eigenen Thätigkeit, mit dem eigenen Leben. Es war daher ganz natürlich, wenn ihm die Natur und alle ihre Theile belebt erschienen; es war das eine Poesie, wie sie nothwendig dem jugendlichen Menschengeiste entsprechen mußte. Tausende von Naturerscheinungen gaben der Phantasie Stoff genug zu den mannigfaltigsten Dichtungen, welche theilweise bis in unsere Zeit herein sich erhalten haben. Allein die einzelnen Erscheinungen, die er bei einer mehr oder weniger regen Phantasie zu kleinen anmuthigen Dichtungen zusammengefaßt hatte, genügten ihm nicht ganz; er strebte dahin, die Natur, wie sie sich ihm darbot, als Ganzes zu erfassen. Aber dieses Streben, den Totaleindruck des Naturganzen zu erkennen, mußte, da dem ungeübten Geiste noch die sichere Grundlage einer langen wissenschaftlichen Erfahrung fehlte, die erst das Gesetzmäßige in jeder einzelnen Erscheinung aufsucht und eine regelmäßige Veränderung in dem scheinbar Unveränderlichen zu ermitteln trachtet, zur Sage und Dichtung führen, und wir finden daher im Alterthume keine eigentliche Naturwissenschaft, sondern nur Dichtungen über die Natur. Diese sind oft so poetisch schön, daß wir sie noch jetzt an den Alten bewundern; aber wenn ein mehr oder weniger unbefangener Sinn in ihnen auch das Richtige traf, so bleiben sie dennoch Dichtungen, denn auch das Wahre bleibt Dichtung, wenn es nicht als das Nothwendige erkannt wird.

Erst als ein unbefangener nüchterner Forschergeist die Bewunderer der überreichen Natur nicht mehr zurückschrecken ließ vor dem langen Wege der Erforschung, und die Geringfügigkeit des beobachteten Gegenstandes ihnen im Verhältniß zum großen Naturganzen nicht mehr zu unwichtig erschien, sondern als mit der ernsten Absicht, die Natur und ihre Gesetze zu ergründen, die richtige Ansicht entstanden war, daß nur mit dem kleinsten und scheinbar geringfügigsten Gegenstande begonnen werden müsse; erst dann entwickelte sich das sicher zum Ziele führende wissenschaftliche Denken, das sich nicht mehr durch neue Dichtungen befriedigen ließ.

Erste Regungen des mathematischen Denkens.

Mit solcher Ansicht ausgerüstet, richtete der Beobachter sein Augenmerk zuerst auf die äußere Form der Erscheinung und suchte diejenige Form zu erfassen, die als einfachste dem Verständnisse zugänglich erschien. Als solche stellte jeder in ein ruhiges Wasser herabfallende Regentropfen den Kreis dar, bei welchem sich sofort die erste Eigenschaft desselben ergab, daß die sich bildende krummlinige Gestalt gleich weit vom erzeugenden Wassertropfen entfernt ist. Einmal durch die Anschauung auf eine solche regelmäßige Gestalt aufmerksam gemacht, erkannte man dieselbe auch bald bei der täglichen Bewegung der Sonne und der Gestirne.

Dem aufmerksamen Beobachter mußte ebenso der tangirende Sonnenstrahl als gerade Linie auffallen und jeder aufrechtstehende Stab mit seinem Schatten und dem begrenzenden Sonnenstrahle ihm die Gestalt eines rechtwinkligen Dreiecks zum Bewußtsein bringen. Diese aus der Naturbetrachtung gewonnenen einfachen Gestalten waren die erste Grundlage, an der sich das Nachdenken üben, deren Eigenschaften man untersuchen und ihre Beziehung zu einander ermitteln konnte.

Gleichzeitig entstand aber auch durch die häufige Wiederholung von Gegenständen und Erscheinungen derselben Art der Begriff der Zahl.

Form und Zahl waren somit die ersten durch die sinnliche Anschauung unmittelbar gebotenen Elemente, an denen sich das tiefere Denken des Menschen heranbilden sollte und aus welchen sich die Geometrie und die Arithmetik herausgebildet hat.

Es währte aber sehr lange, bis der Mensch sich zur vollen, reinen Abstraction erheben konnte. Am frühesten löste sich wol die Zahl von dem dazugehörigen Gegenstande ab, indem sie auf alle Dinge ohne Unterschied angewandt wurde; aber erst eine höhere Stufe geistiger Kultur vermochte die Form von ihrem Inhalte zu trennen und sie als abstracte Form dem Nachdenken zu übergeben.

Der Schwierigkeit des Gegenstandes gemäß konnte die Forschung in diesem Gebiete des reinen Denkens nur sehr langsam fortschreiten und das geistige Schaffen durch Erfolg gekrönt werden. Einzelne Eigenschaften der sich darbietenden Elemente, anfänglich oft nur durch Zufall gefunden, ohne irgend einen natürlichen oder künstlichen Zusammenhang, waren der mühsam errungene Lohn des nach Erkenntniß ringenden Menschenverstandes, und nur die unmittelbare Anschauung mußte die Ueberzeugung von den gefundenen Eigenschaften unterstützen. Dies reichte aber auch vollkommen für die erste Geistesthätigkeit hin, und ein strenger Beweis mußte auf dieser ersten Stufe der Geistesentwickelung als durchaus unnöthig erscheinen, umsomehr als ein solcher auch für das jugendliche Denken noch zu schwierig war.

In Aegypten und den Euphratländern hatte das erste abstracte Denken im mathematischen Sinne begonnen und zu einer Reihe von Wahrheiten geführt, die zunächst oft nur zu practischen Zwecken verwandt wurden; allein die gewöhnlichen Lebensverhältnisse hätten dieses Streben der Menschen nicht sehr weit geführt, wenn nicht wieder die Natur und besonders die Astronomie zu immer weiterem Studium in der Geometrie und Arithmetik angeregt hätte.

So gelangten die Völker, bei denen wir die ersten Regungen des mathematischen Denkens antreffen, nach einem langen und mühevollen Entwickelungswege, von dem wir nur wenig wissen, zu einem gewissen Höhepunkte in der Erforschung sowohl arithmetischer als geometrischer Wahrheiten, über den hinauszugehen es ihnen unmöglich gewesen wäre, da ihre Ideen zu stereotyp geworden waren. Daher wurden die Resultate dieser Bestrebungen zweien Völkern, den Griechen und Indern, zugeführt, die eine hohe Kultur bereits besaßen, und welche bestimmt waren, die ihnen übermittelten Resultate zu einer Wissenschaft zu gestalten.

Von diesen haben die Griechen ausschließlich die Form in das Bereich ihrer Betrachtung gezogen und die heutige Geometrie geschaffen; die Inder dagegen wandten sich dem zweiten Elemente der mathematischen Betrachtung, der Zahl, zu und machten die Arithmetik zum Gegenstande ihres Forschens, wodurch jede Wissenschaft für sich zu einer ungewöhnlichen Höhe der Entwickelung geführt wurde. Denn wie wir den Griechen unsere ganze elementare Geometrie verdanken, ist unsere ganze Arithmetik und Algebra, bis auf die bequemere Form der Neuzeit, ein unbestreitbares Eigenthum der Inder.

Diese beiden Völker haben bei der Entwickelung der Mathematik eine wichtige Rolle gespielt und scheinen besonders dazu berufen gewesen zu sein, so gesondert die Ausbildung der erwähnten Theile zu übernehmen, damit dann der gegenseitige Einfluß beider wissenschaftlichen Disciplinen auf einander einen steten Impuls zum weitern Aufbau der ganzen Wissenschaft abgeben konnte. Diese belebende Einwirkung werden wir durch die ganze Entwickelungsgeschichte erkennen, und dadurch zu der Ueberzeugung gedrängt, daß der Schöpfer planmäßig die Menschen zu immer klarerer Erkenntniß der Natur und ihrer ewigen Gesetze erziehen wollte.

Die eigenthümliche Vorliebe der Griechen für die Form, und der Inder für die Zahl ist so innig mit der Individualität, dem Character und den Lebensverhältnissen eines jeden Volkes zusammenhängend und eine natürliche Folge der sie umgebenden Natur, daß wir, um darauf besonders aufmerksam zu machen, zunächst jedes Volk und seine Leistungen besonders betrachten wollen.

Die gesonderte Betrachtung der beiden Kulturvölker.

Die Griechen, welche durch ihre riesige Thatkraft und Frische der geistigen Productivität im Alterthume so hervorragend dastehen, waren in jeder Beziehung ein kräftiges, gestaltend ins Leben eingreifendes Volk, das selbst die Begriffe der höhern Mächte nicht in abstracte Begriffe kleidete, sondern ihnen Körper und Gestalt verlieh, wodurch sie nichts als idealisirte Menschen wurden. Ein solches Volk konnte von der wunderbaren Regelmäßigkeit der Naturgebilde und Naturerscheinungen nur in der Weise zum Nachdenken angeregt werden, daß es die äußere Gestalt, die Form der Erscheinungen seinem Nachdenken unterwarf und durch Aufsuchen ihrer Eigenschaften die Geometrie bildete.

Aus Aegypten war die Geometrie als Erfahrungswissenschaft nach Griechenland gekommen; hier trat sie in eine andere Phase und erreichte eine Höhe der Ausbildung, die sie nie in ihrem Mutterlande erlangen konnte. Denn den Griechen genügte nicht mehr, wie den ersten Forschern, die nackte Wahrheit, die durch Zufall in einem glücklichen Augenblicke gefunden wurde, sie mußten auch den Grund, das Warum derselben zu ermitteln suchen und die ihnen einleuchtende Wahrheit konnte für sie nur dann Werth erhalten, wenn sie im Stande waren, die Richtigkeit des Gefundenen zu beweisen. Bei diesem Streben war die synthetische Methode des Beweises in aphoristischer Form für das jugendlich wissenschaftliche Denken die angemessenste und die, welche die Griechen allgemein in ihrer Geometrie befolgten. Allein diese Form des Beweises ist keine zufällige, sondern dadurch bedingt, daß die Griechen zu den zum Theil überkommenen Theoremen die Beweise finden mußten, sie eignet sich aber ganz für ein künstliches System, wo die einzelnen Sätze in der Art zusammengestellt werden, daß jeder folgende den vorhergehenden voraussetzt, während dagegen die genetische Form mehr dem Ergebniß der Forschung in einem natürlichen Systeme entspricht und eine zu einem gewissen Grade entwickelte Wissenschaft beansprucht.

In dieser streng wissenschaftlichen Weise war das mathematische Denken der Griechen darauf gerichtet, mehr und mehr Eigenschaften der Figuren zu erforschen, um diese geistige Schöpfung dann auf die einfachen Erscheinungen der Natur anzuwenden und diese dadurch wissenschaftlich zu ergründen. Aber da ihr Bemühen, selbst etwas zu schaffen, ehe sie Entsprechendes in der sie umgebenden Natur wiederzufinden hoffen konnten, mit günstigem Erfolge gekrönt wurde, ward dieses geistige Schaffen ihnen so lieb, daß sie darüber bald ganz den ursprünglichen Beweggrund zu dieser geistigen Gymnastik, die Anwendung, vergaßen und die Geometrie nur um ihrer selbst willen cultivirten. Dabei fühlte sich das jugendlich frische Denken schon kräftig genug, die ursprünglich gebotenen einfachen Gebilde, gerade Linie, Kreis und Dreieck, zu überschreiten und mit der Erforschung von andern Gestalten, wie die Kegelschnittlinien, die Cycloiden, Spiralen, und andere eigenthümlich krumme Linien, die mit besonderen Namen, wie Cissoide, Conchoide, Quadratrix u. s. w. bezeichnet wurden, sich zu beschäftigen, und ihrem Scharfsinne gelang es, merkwürdige Eigenschaften derselben zu entdecken. Diese Schöpfungen des reinen Denkens standen ohne irgend eine nur zu ahnende Beziehung zur Natur und könnten dadurch wol als nutzlose Speculationen erscheinen.

Genug, in der ungewöhnlich kurzen Zeit von c. 300 Jahren, im Vergleich zu der früher langsamen, mehrere Jahrtausende dauernden ersten Entwickelung des mathematischen Denkens, hatte der griechische Geist die Mathematik bedeutend gefördert. Wir sehen zuerst in den griechischen Kolonien von Kleinasien, wo die Geistesbestrebungen früherer Kulturen in den reichen Handelsstädten zusammenflossen, die Mathematik in wissenschaftlicher Weise sich entwickeln, und als der bedeutendste Mathematiker dieser Zeit muß Thales von Milet (um 600), ein Zeitgenosse des Krösus, genannt werden, der bereits im Stande war, eine Sonnenfinsterniß voraus zu bestimmen. Darauf wurden durch Pythagoras (um 530) und seine Schule in den griechischen Kolonien von Unter-Italien die mathematischen Studien eifrig betrieben, in einer Zeit, wo im fernen Osten der Chinese Confutius und der Perser Zoroaster als Reformatoren auftraten. Endlich wird auch im eigentlichen Mutterlande die Mathematik wesentlich gefördert durch Plato und seine Schule, zu einer Zeit, wo die politische und nationale Größe des griechischen Volkes schon zu erlöschen begonnen hatte. Plato selbst (429—347), dessen Jugend in die Zeit des peloponnesischen Krieges fällt, legte so großen Werth auf die mathematischen Kenntnisse, daß er keinen Zuhörer an seinem Unterrichte theilnehmen ließ, der in der Mathematik unerfahren war, indem er voraussetzte, daß ein solcher nicht die nöthige geistige Reife besitze, um seinen philosophischen Lehren folgen zu können. Mit ihm beginnt eine neue große Zeit der Mathematik, indem er an Stelle der synthetischen Methode die analytische zu mathematischen Forschungen anwenden lehrte, die die Grundlage der spätern Analysis bildet und damals unsere analytische Geometrie mit ihrer Coordinatenmethode vertrat, wie sie noch jetzt dieselbe einleitet und den ersten Theil unserer analytischen Geometrie, in moderner Form dargestellt, bildet.

Das entschieden größte Verdienst aber erwarb er sich dadurch, daß er das größte und glänzendste Erzeugniß des griechischen Geistes, die Kegelschnittlinien als einen Hauptgegenstand der mathematischen Betrachtungen in seinen Lehren empfahl und sie der griechischen Geometrie einverleibte. Durch diesen Akt hat er ein würdiges und unzerstörbares Denkmal dem griechischen Geiste aufgerichtet. Seinen Schülern schreibt man noch das Verdienst zu, die früher auf anderem Wege gefundenen merkwürdigen Linien, an die sich eigentlich beinahe die ganze Mathematik knüpft und welche später eine so hohe Bedeutung in der Naturwissenschaft gewinnen sollten, aus dem Kegel abgeleitet und unter dem Namen Kegelschnittlinien in die Wissenschaft eingeführt zu haben. Ein späterer hochberühmter Geometer, Apollonius von Perga (um 240), der in Alexandrien lebte, hat die Untersuchung dieser Linien in so bedeutender Weise erweitert, daß man diese als das Höchste bezeichnen kann, was das Alterthum in der Art hervorgebracht hat.

Von dem bedeutenden Aufschwunge der Wissenschaft begeistert, machte Archytas von Tarent, ein Freund und Zeitgenosse Platos, der als Staatsmann, Feldherr und Gelehrter gleich berühmt war, einen Versuch, die Mathematik auf die Mechanik anzuwenden, der sehr glücklich gewesen sein muß, da uns von seinen Leistungen Fabelhaftes erzählt wird, so daß wir ihn als den eigentlichen Begründer der wissenschaftlichen Mechanik ansehen müssen.

Platos Schüler Aristoteles (384—322), der sich in würdigster Weise an die hervorragendsten Persönlichkeiten der Wissenschaft schließt, ist zwar als Mathematiker weniger bedeutend, aber durch sein entschiedenes Streben zum Empirischen ist er für die gesammte Naturwissenschaft von der größten Wichtigkeit geworden. Er weist auf das Bestimmteste darauf hin, daß nur durch das Erforschen des Gegebenen in seinem innern Zusammenhange, ein Schließen vom Besondern auf das Allgemeine möglich sei, um so durch die Wirklichkeit zur Wahrheit zu gelangen.

So ward von den ausgezeichnetsten Geistern des Volks ein reicher Schatz von Material zu einem dereinstigen Aufbau der Naturwissenschaften zusammengetragen. Dieses Material bestand anfänglich jedoch größtentheils aus einzelnen unzusammenhängenden Sätzen, die von Zeit zu Zeit, je nach dem Fortschritt der Wissenschaft, gesammelt und in eine künstliche Ordnung gebracht wurden.

Eine derartige Zusammenstellung lieferte Hippokrates von Chios (etwa um 450), der ursprünglich Kaufmann war, durch seine geringen Anlagen für diesen Beruf aber in seinen Vermögensverhältnissen sehr zurückkam, sich darauf der Wissenschaft widmete und als Gelehrter zu den Bedeutendsten seiner Zeit gehörte. Bekannt ist die Quadratur seiner mondförmigen Figuren (Lunulae Hippocratis), in welchen er die Gleichheit eines von krummen Linien eingeschlossenen Raumes mit einem von geraden Linien umgrenzten rechtwinkligen Dreiecke nachwies. Aber die ungenügende Begabung dieses Mannes für den Handel sollte ihn auch in seiner neuen Laufbahn nicht verlassen; er war der erste, der durch seine Umstände gedrängt für Geld unterrichtete, und wurde daher von der Gelehrtenwelt verachtet. Seine zur Zeit sehr geschätzte und verbreitete Zusammenstellung der geometrischen Lehrsätze, wurde durch eine vollkommenere von Euklides (geb. 308) verdrängt. In dieser müssen wir noch jetzt die eigenthümliche logische Anordnung bewundern, wo jeder vorhergehende Satz dem folgenden immer als Stütze dienen muß, wie es denn dem Streben des griechischen Geistes, gründlich zu überzeugen und nicht den geringsten Zweifel übrig zu lassen, völlig entsprach. Für das erste wissenschaftliche Denken war eine solche künstliche Anordnung eine durchaus nothwendige, indem der noch ungeübte Verstand, wie von Sprosse zu Sprosse, zur Erkenntniß der höhern Wahrheit heranklimmen konnte. Aus diesem Grunde wird diese künstliche Zusammenstellung noch jetzt, nach mehr denn 2000 Jahren, in den Schulen Englands mit dem günstigsten Erfolge angewandt.

Bei einer solchen Anordnung ist es aber unvermeidlich, daß nicht ihrer Natur nach zusammengehörige Sätze durch andere getrennt, zerstreut und bunt durcheinander gemischt werden und in eigenthümlicher Mischung Probleme mit Theoremen abwechseln. Vom Standpunkte der Wissenschaft jedoch betrachtet, ist die Euklidische Zusammenstellung nur ein erster, für die Schule berechneter Versuch, die Geometrie als abgerundetes Ganze darzustellen. Dem schrittweise folgenden Fassungsvermögen des in der ersten Entwickelung begriffenen Menschenverstandes genügte dieses, da der Geist noch zu sehr an dem Einzelnen klebte und das Unwesentliche ihn noch zu oft gefangen nahm, um die Eigenschaften und Merkmale der zu betrachtenden Gebilde von einem allgemeinen Gesichtspunkte aus zu überschauen. Erst eine gereiftere Entwickelungsperiode des Menschengeistes vermochte die Geometrie in einem natürlichen Systeme darzustellen, in welchem man vom Einfachen zum Zusammengesetzten fortschreitend, die Sätze nach ihrem innern Zusammenhange in Gruppen zusammenfaßte und aus einem Grundbegriff wie von einem Kerne ausgehend, alle Eigenschaften einfach natürlich hervorgehen ließ.

Zu einem solchen Lehrgebäude der Geometrie, wie es Steiner und Poncelet in der Neuzeit geliefert haben, hat Euklides nicht unwesentliche Bausteine in seinen Daten und Porismen geliefert, und wir erkennen durch diese, wie bedeutend sich die Mathematik von Plato bis Euklides erweitert hat. In den Daten lehrte er, wie an gewisse Dinge andere geknüpft sind, deren nähere Untersuchung reichen Stoff zur weitern Verarbeitung bietet. Sie bilden den Uebergang von den Elementen zu einer andern Klasse von Untersuchungen, die er Porismen nannte und die das Auffinden und nähere Erforschen eines aus einer allgemeinen Grundlage Gesuchten verlangen.

Die Inder, jenes zweite Volk, welches das mathematische Denken in einer ganz andern Richtung ausbildete, dessen einstige hohe Kultur uns aber nur bruchstückweise aufbewahrt ist, kannten in ihrem überreichen Tropenlande nicht die Sorge für ihre Existenz, wie die Griechen, die in ihrem zwar schönen, aber nicht überreichen Lande, nur mit Anstrengung und Mühe sich die nothwendigsten Lebensbedürfnisse verschaffen konnten. Während daher die rege Thätigkeit die Griechen an Leib und Geist kräftig erhielt, erschlaffte die behagliche Ruhe die Inder und verlieh ihrem Geiste nicht die den Griechen eigenthümliche schaffende, sondern eine mehr beschauende und reflectirende Thätigkeit.

Auch die Lebensverhältnisse waren in Indien andere, als in Griechenland. Dort in Indien herrschte noch, wie in Aegypten, die aus einer naturgemäßen Arbeitstheilung hervorgegangene Kasteneinrichtung, welche durch den Egoismus der herrschenden Priesterklasse zu einer schauderhaft gemißbrauchten Einrichtung geworden war, woraus ein starres Abschließungssystem hervorging. Durch solche schroffe Abschließung war in Indien nur ein Stand, nicht wie in Griechenland das ganze Volk, berechtigt, sich mit höhern Dingen zu beschäftigen, und dieser eine Stand, der ganz vom bewegten Leben zurückgezogen lebte, mußte bei seiner Muße, durch die Beschauung der in jeder Beziehung großartigen Natur zum Nachdenken getrieben werden, welches aber durch die sehr bald gewonnene Erkenntniß des stets Veränderlichen und Vergänglichen in der Natur, auf das sich richtete, was unvergänglich und ewig ist. In keinem Lande ist daher über die letzten Ursachen aller Dinge, über die Entwickelung, den Zweck und das Ende der Welt und aller irdischen Dinge mehr nachgedacht worden, als in Indien.

Diese abstracte Richtung der ganzen Geistesthätigkeit der Inder, denen die Form als das Veränderliche und Vergängliche kein Interesse abgewann und nur der Inhalt, die Substanz, als das Ewige, Unveränderliche, Würdigung zu verdienen schien, mußte sich auch in ihrer Mathematik in ähnlicher Weise aussprechen. Während daher die Griechen die Form der sie umgebenden Natur erfaßten und sich daraus als reine geistige Schöpfung die Geometrie bildeten, würdigten die Inder nur die Zahl, als den von der Form abstrahirten Begriff der Menge, eines Nachdenkens, dem wir unsere Arithmetik verdanken. Diese Vorliebe für die Beschäftigung mit den Zahlen ist beiläufig eine charakteristische Eigenthümlichkeit des ganzen Orients.

Dennoch ist die Mathematik in Indien nie eine selbstständige Wissenschaft gewesen, sondern wurde nur zu astronomischen und practischen Zwecken betrieben, woher sie auch nur capitelweise in den astronomischen Werken angetroffen wird. Aus diesen zusammengestellt bildet sie aber ein bewunderungswürdiges Lehrgebäude der Arithmetik und Algebra.

Wir finden in der Arithmetik Regeln für die Ausführung aller Operationen mit allen uns bekannten Größen, selbst den negativen und irrationalen, nur mit Ausnahme der imaginären. Dazu kommt als ein Hauptgegenstand die Lehre von den einfachen und zusammengesetzten Proportionen mit ihren Anwendungen auf das bürgerliche Leben. Auch das Quadriren und Kubiren, sowie die Quadrat- und Kubikwurzelausziehung wird klar und einfach angegeben, wobei ihnen der Doppelwerth der Quadratwurzel bereits bekannt war, sowie auch die Unmöglichkeit, dieselbe aus einer negativen Zahl zu ziehen.

Nicht geringere Beachtung verdient ihre Buchstabenrechnung, die bis auf die äußere unbequeme und schwerfällige Form mit der unsern übereinstimmt und in der auch Untersuchungen aus der Combinationslehre, sowie über arithmetische und geometrische Progressionen enthalten sind.

Mit besonderer Vorliebe haben sie aber die Gleichungslehre, wegen ihrer naheliegenden Anwendung auf die Astronomie cultivirt, und mit Leichtigkeit und Gewandtheit die Gleichungen des ersten

Grades mit einer und mehreren Unbekannten, sowie die Gleichungen des zweiten Grades gelöst, ja selbst von Gleichungen höherer Grade kommen Beispiele vor, die uns ihren Scharfsinn bewundern lassen.

Der schönste Theil der indischen Algebra, worin sie das Glänzendste geleistet haben, ist aber die Behandlung der unbestimmten Gleichungen, nicht bloß des ersten, sondern auch des zweiten Grades. Die Auflösung der Gleichungen des ersten Grades in ganzen Zahlen ist durch einfache Regeln auf das Vollständigste gegeben. Für die des zweiten Grades werden eine Menge allgemeiner Regeln angegeben, welche meistens darauf berechnet sind, die Gleichung in ganzen Zahlen zu lösen. Die Auflösungen in gebrochenen Zahlen hatten für sie keinen besondern Werth, dienten nur als Uebergang zu ganzen Zahlen und wurden nur dann angegeben, wenn kein anderer Werth existirte. Sie suchten die meisten Gleichungen auf die Form $ax^2 + b = y^2$ zurückzuführen, auf deren Lösung sie ihren ganzen Scharfsinn concentrirten. Die cyklische Methode zur Lösung der Gleichung $ax + 1 = y^2$ ist so elegant, daß sie mit wenigen, einfachen Verbesserungen schneller und leichter zum Ziele führt, als alle bis jetzt bekannten Methoden.

Aber als ein charakteristisches Merkmal der ganzen indischen Mathematik muß der Mangel jedes Beweises und einer Andeutung des Weges, auf dem man zu der Regel gelangte, besonders hervorgehoben werden, wodurch sie sich nicht bloß dem Gegenstande, sondern auch der äußern Form nach wesentlich von der griechischen Mathematik unterscheidet. Statt des strengen Beweises wurde die Richtigkeit der Behauptung nur an Beispielen dargethan, oder bei der Vorschrift eine Gleichung zu lösen bloß nachgewiesen, daß der so gefundene Zahlenwerth der Gleichung Genüge leistet.

Allein auch diese Eigenthümlichkeit liegt im Wesen und dem Ideenkreise der Inder tief begründet. Denn während der Grieche Alles auf ausgezeichnet begabte Menschen zurückführte, dachten sich jene jede solche Erfindung durch unmittelbare Eingebung der Gottheit hervorgegangen, wodurch natürlich jeder Beweis überflüssig wurde.

Dieser Mangel jedes Beweises und das Fehlen jeder Auseinandersetzung, wie man zu der Wahrheit gelangt, muß durchaus ungünstig, ja hindernd und verzögernd für die Entwickelung der Mathematik in Indien gewesen sein, da jede neue Generation die Errungenschaft ihrer Vorgänger nur schwer benutzen konnte. Nach

Berücksichtigung dieser, nur eine langsame Entwickelung gestattenden indischen Verhältnisse und des dennoch hohen Standes der Wissenschaft, sind wir gezwungen, da jede Wissenschaft eine natürliche, stufenweise Entwickelung haben muß, die Blüthe der indischen Mathematik mindestens gleichzeitig mit der der griechischen zu setzen. Dafür spricht auch eine merkwürdige Stelle im Epos Nal und Damajanti, welche erkennen läßt, daß bereits 1000 Jahre vor unserer Zeitrechnung in Indien von einer Zahlenwissenschaft gesprochen werden konnte, die unser jetzt gebräuchliches Decimalsystem bereits erfunden hatte.

Wie aber die indischen Sätze durch den Mangel des Beweises von denen der Griechen abweichen, so unterscheiden sie sich auch durch die Form und Fassung derselben von jenen. Als bloße Vorschriften und Regeln, die man wissen mußte, wurden die empirisch gefundenen Sätze in poetische Form gekleidet, um dieselben so dem Gedächtnisse leichter einzuprägen und die Ueberlieferung solcher Regeln zu erleichtern.

Wir erfahren aus der nur spärlich uns erhaltenen Literatur von einem Astronomen Aryabhatta (um 350 v. Ch.), auf den Alles zurückgeführt wird, zu einer Zeit, wo aber die Blüthe der indischen Mathematik längst erloschen sein mußte, und der wol nur Sammler und Ordner der indischen Geistesschätze gewesen ist, also ein Euklides der Inder, ohne seine Werke selbst zu besitzen. Dieser Mann ist aber in anderer Beziehung deshalb besonders beachtenswerth, weil er zuerst die richtige Ansicht von der Axendrehung der Erde lehrte und den Umfang derselben ziemlich genau bestimmte. Aber seine Lehre hat das Schicksal vieler großen Ideen getheilt, daß sie von den Zeitgenossen bekämpft und endlich verworfen wurde, wie solches schon der Grieche Aristarch aus Samos (264 v. Ch.) erfahren hatte, der die richtige Auffassung unseres Sonnensystems aussprach, lange zuvor, ehe Ptolemäus (125 n. Ch.) sein System aufstellte, das Jahrhunderte hindurch als unantastbare Wahrheit galt und nur nach heftigen Kämpfen dem Copernicanischen weichen mußte.

Uns sind nur zwei Denkmäler der indischen Mathematik und zwar aus einer noch viel neuern Zeit erhalten, die jedoch bloße Compilationen, aber uns eben dadurch wol zum größten Theil den ganzen Schatz der indischen Mathematik bewahrt haben. Das eine

Werk rührt von Brahmegupta um 628 n. Ch., das andere von Bhaskara um 1150 n. Ch. her.

Das Werk des Letztern zerfällt in zwei Theile. Der erste umfaßt die Rechenkunst, die er in der poetischen Sprache seines Buches Lilavati nennt, indem er sich die Arithmetik verkörpert denkt und sie als die Reizende, die Schöne bezeichnet. In ihr stehen oben an die Regel von den drei Gliedern und ihre Anwendungen auf das practische Leben, woraus wir erkennen, daß aus Indien unsere früher allein gebräuchliche Methode, die Regeldetriaufgaben durch Proportionen zu lösen, stammt, deren mehr oder weniger mechanische Behandlungsweise mehrere Tausend Jahre beibehalten wurde, bis sie erst in der Neuzeit durch die einfache logische Schlußrechnung überflüssig gemacht wurde. — Der zweite Theil enthält die Algebra oder Vija-Ganita, von der Bhaskara selbst sagt: „wenn die Arithmetik aus der Regel der drei Glieder besteht, so ist die Algebra dagegen Scharfsinn," und wir haben alle Ursache, den indischen Scharfsinn bei der Lösung der Gleichungen zu bewundern.

Einwirkung der beiden Kulturvölker auf einander.

Diese beiden eben geschilderten verschiedenen Richtungen des mathematischen Denkens waren bestimmt, auf einander einzuwirken, um dadurch immer neues Leben und höhern Aufschwung in dem mathematischen Entwickelungsproceß zu erzeugen.

So erkennen wir denn auch schon frühzeitig eine solche unzweifelhafte Einwirkung der indischen Mathematik auf Griechenland in Pythagoras. Er eröffnet die Zeit, wo eine neue Richtung in die Mathematik der Griechen kommt, indem er die Zahlenlehre zuerst nach Griechenland verpflanzte. Derselbe mußte durch seine vielen Reisen nach Aegypten und Persien und durch seine lange Gefangenschaft in Babylon, die eigenthümliche Richtung der Mathematik im Oriente kennen gelernt haben, wofür die für einen Griechen auffallende Vorliebe für die Zahlenlehre deutlich spricht, in welcher er und seine Schule das Wesen aller Dinge zu erkennen und geheime Beziehungen zum Universum, der Weltbildung und Weltordnung zu finden glaubte. Aber diese mystische Zahlensymbolik hat einen reellen Fortschritt in der Arithmetik gestört. Sein Columnensystem deutet darauf hin, daß er höchstwahrscheinlich unser Zahlensystem gekannt hat und Boethius, ein Zeitgenosse Theodorich's, berichtet uns, Pythagoras habe alle Zahlen mit 9 Ziffern geschrieben. Trotz dem blieb diese bequeme Schreibweise der Zahlen, als etwas dem griechischen Geiste Fremdartiges, unbeachtet. Damit soll aber nicht behauptet werden, daß die Griechen nicht zu practischem Zwecke vor ihm schon zu rechnen verstanden; sie unterschieden aber die bloße Rechenkunst, die sie Logistik nannten, von der eigentlichen Zahlenlehre oder Arithmetik. Seiner Vorliebe für die Zahlenlehre verdanken wir außer der Berechnung der musikalischen Verhältnisse auch die Erfindung der Polygonal- und Pyramidalzahlen, die eine Art Verbindung der Arithmetik und Geometrie bilden, so wie den wichtigen Satz der Geometrie, der seinen Namen führt, aber eigentlich auch aus Indien stammt, wo man sich viel damit beschäftigt hat, zwei Zahlen zu finden, deren Quadrate zusammen wieder ein Quadrat bilden, so daß jener Satz nur die Umgestaltung der indischen Idee in die griechische Form ist.

Ebenso würden wir wol auch einen bestimmten Einfluß der griechischen Mathematik in Indien nachzuweisen im Stande sein, wenn wir nicht, wie gesagt, eine so geringe mathematische Literatur der Inder besäßen, die uns nur in der Form einer Compilation die Blüthe der indischen Mathematik aufbewahrt hat.

Bedeutender und erfolgreicher mußte diese gegenseitige Einwirkung werden, als durch Alexanders des Großen Eroberungen die bisherige starre Abgeschlossenheit der Völker zerstört und ein allgemeinerer Austausch der verschiedenartigsten Kenntnisse und Begriffe möglich wurde. Zwar lagen die auf diese Weise den Völkern zugeführten fremden Ideen den eigenen Begriffen und Anschauungen eines Volkes oft zu fern, um sogleich begriffen zu werden und Anklang zu finden; aber wenn immer und immer wieder, wie es ein lebendiger Verkehr veranlaßt, die Kenntnisse von solchen fremdartigen geistigen Bestrebungen einem Volke zugeführt werden, tauchen endlich Einzelne auf, die das Fremdartige beachten und indem sie dasselbe in einer ihrem Volkscharakter entsprechenden Weise umgestalten, selbstständig zu bearbeiten anfangen.

So treffen wir in Indien, wo bei dem mangelnden Sinne für die Form eine eigentliche Geometrie nicht gesucht werden darf, dennoch geometrische Untersuchungen, aber diese nur in engster Verbindung mit der Arithmetik. Sie bestimmten den Flächeninhalt des Dreiecks, des Vierecks, des Kreises, ermittelten die Größe des Kreis-umfangs zum Durchmesser u. s. w., wogegen ihnen aber alle Grundbegriffe von Parallellinien, Winkeln, Congruenz und Aehnlichkeit der Figuren mangelte, ohne welche eine eigentliche Geometrie undenkbar ist. Mit solchen geometrischen Untersuchungen stand die Trigonometrie, als eine besondere Art der rechnenden Geometrie, die durch die Beschäftigung mit der Astronomie ins Leben gerufen wurde, im natürlichen Zusammenhange, und hier dürfte die erste Entstehung dieses Zweiges der Mathematik zu suchen sein.

Ebenso fing man in Griechenland die nach und nach kennen gelernten arithmetischen Wahrheiten in geometrischer Weise zu behandeln an, und hier läßt sich durch die reiche Literatur bestimmter der steigende Einfluß der indischen Richtung verfolgen, bis wir endlich in der alexandrinischen Schule, wo die Ideenkreise aller damaligen Kulturvölker zu einem regen Geistesleben zusammenflossen, die beiden verschiedenen Richtungen der Mathematik zu unmittelbarer Einwirkung auf einander sich vereinigen sehen. Hier in Alexandria schrieb Euklides seine sogenannten arithmetischen Bücher (das 7., 8. und 9. Buch seiner Elemente), in welchen die schon den Indern so wichtigen Lehren der Proportionen behandelt werden, aber eben nur im geometrischen Gewande, an Linien und Flächen erläutert.

Mit Archimedes (287—212), einem Schüler des Euklides, dem größten Mathematiker des Alterthums, der anfänglich in Alexandria, später in Syracus lebte, tritt die Einwirkung der Arithmetik auf die bisherigen geometrischen Untersuchungen entschiedener und bestimmter hervor, und seine Arbeiten reichen weit über die arithmetischen Schriften des Euklides hinaus. Er ist der Erste, der Linien durch Zahlen darstellt und Rechnungen zu geometrischen Zwecken ausführt, dem wir die bekannte Bestimmung von $\pi = 3\,{}^1/_7$, die sogenannte Rectification des Kreises verdanken. Er lehrte nicht nur die noch jetzt allgemein gebräuchliche Inhaltsbestimmung des Kreises (der Inhalt des Kreises ist gleich einem Dreiecke, dessen Basis die Peripherie und dessen Höhe der Radius), sowie der Kugel, auf welche letztere er selbst den größten Werth gelegt zu haben scheint, indem er die geometrische Figur derselben als Inschrift auf sein Grab setzen ließ, sondern ging weiter und lehrte durch scharfsinnige Schlüsse auch den Inhalt der Parabel und Hyperbel, sowie der aus diesen durch Umdrehung entstehenden Körper, des Paraboloid und Hyperboloid, bestimmen.

Am auffallendsten zeigt sich der indische Einfluß in seiner Berechnung der Sandeszahl, durch welche er darthun will, daß er jede noch so große Zahl darzustellen im Stande sei, indem er Ordnungen nach Zehntausenden oder Myriaden anwendet und Myriaden mal Myriaden zu Perioden zusammenfaßt. Man erkennt hieraus, daß die Griechen zu verschiedenen Zeiten, früher durch Pythagoras, jetzt durch Archimedes, die Idee eines einfachen Zahlensystems, worauf sich die Arithmetik leicht hätte aufbauen lassen, gekannt, aber als ihrer Natur zu fremdartig nicht hinreichend gewürdigt haben, denn sonst würde diese Disciplin in der Hand der Griechen die Entwickelung der Mathematik mehrere Jahrhunderte früher entfaltet haben.

Diese durch die gegenseitige Einwirkung der Arithmetik und Geometrie errungenen wichtigen Fortschritte der Mathematik suchte man von Zeit zu Zeit immer wieder auf die Natur anzuwenden, und nicht ohne Erfolg waren diese Versuche. Schon Euklides hatte in dieser Beziehung einen glücklichen Anfang mit den optischen Erscheinungen gemacht; an diesen reihte sich Archimedes mit einer umfassenden Anwendung der Mathematik auf die Mechanik. In ähnlicher Weise leitete Hipparch (125 v. Ch.), den man mit Recht den Begründer der mathematischen Astronomie nennen kann, später Ptolemäus (150 n. Ch.) wichtige Folgerungen aus der Sternkunde mit Hülfe der Mathematik ab, welche namentlich Ptolemäus uns in seinem berühmten Werke Almagest überliefert hat. Ueberhaupt muß besonders auf das große Verdienst der alexandrinischen Gelehrten aufmerksam gemacht werden, welches darin bestand, daß sie genaue Messungen dringend empfahlen und selbst, namentlich zu astronomischen Zwecken, anzustellen begannen, welche für die spätern Fortschritte der Naturwissenschaften so ungemein fördernd geworden sind.

Endlich war in Alexandria der unmittelbare Einfluß der indischen Wissenschaft auf die griechische so weit gediehen, daß ein Grieche Diophant, dessen Zeit nicht genau angegeben werden kann (c. 360 n. Ch.), mit einer selbstständigen Untersuchung ganz im indischen Geiste auftrat. Das Werk Diophants enthält zwar lauter der indischen Mathematik nahe verwandte Untersuchungen, seine Darstellungsweise bekundet aber eine unverkennbare Selbstständigkeit, wozu die den Griechen eigene Lebendigkeit und Gewandtheit in der äußern Form kommt, durch die es sich wesentlich von der ernsten, gemessenen indischen Darstellungsweise unterscheidet, so daß man an ein vollständiges Entlehnen durchaus nicht denken darf. Diophant ist der erste, der statt der gewöhnlichen Wortbeschreibung, den ersten Keim zu dem in der Folge so wichtigen Gedanken in den fruchtbaren Boden der Wissenschaft streute, eine Bezeichnung zu leichterer Ausdrucksweise einzuführen, indem er einen Buchstaben, das Schluß-s, für die unbekannte Größe wählte, der noch nicht wie die übrigen eine bestimmte Zahl bezeichnete.

Mit dieser Benutzung nur eines Zeichens für unbekannte Größen, weiß er mit großer Gewandtheit und besonderm Scharfsinne bei Gleichungen mit mehreren Unbekannten, diese als Functionen einer Unbekannten auszudrücken. Zugleich zeigt der Verfasser umfassende Kenntnisse in der analytischen Behandlung und Auflösung der Gleichung des zweiten Grades, die bereits Euklides durch den sogenannten goldenen Schnitt geometrisch gelöst hatte, ohne den Zusammenhang dieser geometrischen Aufgabe mit der Gleichung des zweiten Grades zu ahnen, denn das Gebiet der Gleichungen war den Griechen völlig fremd. Die unbestimmten Gleichungen, welche entschieden indischen Ursprungs sind, lernen wir zuerst durch ihn kennen, weswegen dieselben noch jetzt allgemein Diophantische genannt werden, wenngleich er die Bedingung, die wir jetzt machen, nur ganze Zahlen als Werthe zuzulassen, noch nicht stellt, sondern nur positive rationale Zahlen fordert. Die Behandlungsweise dieser unbestimmten Gleichungen, die er auf eine große Zahl einzelner Fälle anwandte, nöthigt uns in vollem Maße die ihm gebührende Bewunderung seines Scharfsinns ab, indem er bei Auflösung derselben durchaus keine allgemeine Methode anwendet, sondern bei jeder neuen Aufgabe ein anderes Kunststück der Lösung zeigt. Ueberhaupt muß als charakteristisches Merkmal der Diophantischen Untersuchungen hervorgehoben werden, daß er jede allgemeine Betrachtung, die seine Erläuterungen zu einer allgemeinen Methode erhoben hätten, vermeidet, so daß man überall nur kleine, von einander unabhängige Kreise von Untersuchungen findet, die bei jeder Aufgabe ein Ganzes bilden. Dieses beweist wol, daß er auf fremdem Boden steht, auf welchem die griechische Eigenthümlichkeit sich noch nicht völliges Bürgerrecht verschafft hatte, da bei griechischem Ursprunge wol ein ganzes Lehrgebäude der Arithmetik mit strengen Beweisen und systematischer Anordnung entstanden wäre, nicht aber nur, wie er sein

Werk selbst bezeichnet, „Arithmetisches“ d. h. viele einzelne zur Arithmetik gehörige Wahrheiten.

So hatte Alexandria, der Stapelplatz indischer Wissenschaft, in Diophant eine neue künstliche Blüthe griechischen Geistes zu entfalten vermocht, aber die gegenseitige Einwirkung beider Richtungen, die diese neue Geistesthätigkeit hervorgerufen hatte, sollte auf diese Weise weder in Griechenland die arithmetische, noch in Indien die geometrische Richtung zur vollen Entwickelung bringen, was auch wol nicht vollständig bei der zu großen Verschiedenheit der Geistesrichtung beider Völker möglich gewesen wäre.

Aber als ein unbestreitbares Eigenthum bleibt jedem Volke eine besonders glänzende Blüthe ihrer bisherigen Entwickelung, den Griechen die merkwürdigen Kegelschnittlinien und die Curvenlehre, den Indern die unbestimmten Gleichungen, welche unabhängig von diesen im 17. Jahrhundert wieder erfunden wurden und eine rasche Beziehung zu den übrigen Theilen der Mathematik eröffneten. Nachdem jedes Volk in seiner Weise seinen Höhepunkt der mathematischen Entwickelung erreicht, wozu es gewissermaßen seine Kräfte erschöpft hatte, mußte die geistige Productivität allmählig erlöschen, um eine vollständige Durchdringung beider so verschiedenen Richtungen der Mathematik möglich zu machen, was aber erst auf neuem Boden und mit neuen Kräften sich verwirklichen sollte.

Ueberblicken wir beim Erlöschen dieser großen Zeit das geistige Leben und Streben derselben, so müssen wir bewundernd anerkennen, daß überall, wo sich Griechen ansiedelten, mindestens ein glänzender Name von ihrer Geistesthätigkeit Kunde giebt. Können wir solche glänzende Namen von den Indern nicht anführen, so liegt der Grund zum Theil in der geringen uns erhaltenen Literatur, vornehmlich aber in dem Umstande, daß nach der ganzen indischen Anschauung der Einzelne, dem diese oder jene Entdeckung zuzuschreiben wäre, unwesentlich ist, da ihm die Erfindung nur durch höhere Eingebung zugekommen zu sein schien.

Die Mathematik des Abendlandes.

Mit dem allmähligen Hinwelken der einstigen Blüthen beider Völker trat eine mehrere Jahrhundert lange tiefe geistige Finsterniß ein, in der man nicht ahnen konnte, daß sie die Entwickelungskeime einer neuen Kultur zeitigte, die aber die nothwendige Vorbereitungsperiode eines neuen regen Lebens bildete. Während dieser Zeit waren die Araber bestimmt, die dem Vergessen anheimfallenden mühsam errungenen Geistesschätze stückweise aufzunehmen, um sie als Träger dem Abendlande zu überbringen, wo sie auf neuem Boden, neuen Volksstämmen überliefert wurden, die naturkräftig und in ungeschwächter sittlicher Kraft die vollständige Ausbildung der Mathematik zum Dienste der Naturwissenschaft übernehmen sollten. So hatten die Araber ohne ein bestimmtes Interesse für eine dieser Richtungen beide gleichmäßig aufgenommen und dann weniger für die Fortentwickelung, als für die Erhaltung und Ausbreitung der reichen Geistesschätze des Alterthums Sorge getragen. Ihnen muß unstreitig das große Verdienst zuerkannt werden, das Aufgenommene mit Gewandtheit behandelt und mit einer gewissen Einfachheit in eine leicht zugängliche Form gebracht zu haben. Daher sind sie die nothwendigen Mittelglieder für die fernere Entwickelung der Mathematik geworden und bereiteten so auf das eigentliche Studium des reichen Materials vor; denn ohne eine solche mündliche Ueberlieferung wäre Europa in dem damaligen Zustande gar nicht fähig gewesen, die schriftlichen Denkmäler jener Blüthenzeit wegen des Reichthums des Stoffes zu benutzen.

Tausend Jahre hatten die Griechen zur Ausbildung ihrer Mathematik gebraucht, abermals tausend Jahre bedurfte das Abendland, um sich die Kenntnisse des Alterthums anzueignen und erst in der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts war der Stoff bewältigt, die Reproduction hört auf und ein selbstständiger Fortschritt beginnt.

Die endlich errungene Selbstständigkeit bekundete sich auch sofort darin, daß man sich kräftig genug fühlte, die gewonnenen Kenntnisse der Mathematik auf die Erklärung der Naturerscheinungen anzuwenden, und zweien Männern, welche das Jahrhundert geistig weit überragten, glückte es, die Uebereinstimmung der Geistesschöpfungen mit den Gesetzen der Natur nachzuweisen.

Kepler (1571—1630) zeigte, daß die den Alten bekannten Kegelschnittlinien, die bisher als nutzlose Ergebnisse des denkenden Geistes angesehen werden konnten, in den Bahnen der Himmelskörper verwirklicht seien und überzeugte uns dadurch, daß diese unabhängig von der Natur durch reine Geistesthätigkeit des Menschen gefundenen mathematischen Wahrheiten, auch die Gedanken des

Schöpfers gewesen sein müssen, weil wir sie in der Natur verwirklicht wiederfinden. Und während Kepler auf diese Weise die Wunder des Himmels erschloß, entwickelte Galilei die Gesetze der Schwere in den Erscheinungen der irdischen Natur, von denen Newton später zeigte, daß dieselben Gesetze der Schwerkraft auch in den Himmelsräumen walten, aus welchen mit Nothwendigkeit die Formen der Planetenbahnen hervorgehen.

Als wichtigste Schöpfung dieser neuen Entwickelungsperiode der Mathematik, mit welcher eigentlich die neuere Mathematik beginnt, müssen wir den zu Ende des 16. Jahrhunderts von Vieta (um 1540 zu Fontenay in Frankreich geb.) ausgesprochenen überaus glücklichen Gedanken bezeichnen, eine allgemeine Zeichensprache zu bilden, wodurch der bisher unendlich schwerfällige Weg, alles durch Worte zu beschreiben, aufgegeben werden konnte. Zu dieser Zeichensprache benutzte er Buchstaben, die jede beliebige Zahl bedeuten sollten, und verband dieselben durch Operationszeichen zu Formen, die wieder zu Gleichungen, Formeln genannt, zusammengesetzt werden, so daß wir in einer solchen Formel eine mehr oder weniger reiche Combination von Begriffen vor uns haben. Die Form kann als ein fertiger Gedankencomplex wieder mit einem Buchstaben bezeichnet werden, um mit andern Formen, in ähnlicher Weise bezeichnet, zu neuen umfassendern Gedankencomplexen verbunden zu werden. So gelangen wir denn zu einem immer höhern Standpunkt des Gedankenprocesses und steigen, wie von Stufe zu Stufe, ebenso einfach und sicher, wie bei der Bildung jeder einzelnen Gruppe, höher und höher, ohne nur die Ermüdung zu spüren, die eine so lange Reihe von Gedankenentwickelungen nothwendiger Weise zur Folge haben müßte. Der Gedanke hat sich auf diese Weise eine Welt geschaffen ebenso reich und mannigfaltig an Formen und Gestalten, als die Fülle der Natur uns offenbart. Der ätherische Leib dieser Gedankenwelt ist die Formel; in ihr hat sich der mathematische Gedanke verkörpert, wie in der Farbe und dem Marmor der Gedanke des bildenden Künstlers. Die scheinbar todte Formel enthält somit eine beredte Sprache, zwar nur dem Kundigen verständlich, die so klar und präcise und in einer so leicht überschaulichen Form einen Gedankenreichthum ausspricht, wie keine andere Sprache es im Stande ist.

Mit Hilfe dieser Zeichensprache wurde die Mathematik in rascher Entwickelung weiter geführt, und Vieta selbst machte sogleich von ihr eine glückliche Anwendung im Gebiete der Geometrie, indem er zeigte, wie eine geometrische Aufgabe, gleich jeder andern aus einem beliebigen Gebiete, sich in die mathematische Zeichensprache übertragen läßt, was man eine Aufgabe in Gleichung setzen nennt, welche Gleichung dann nach den Gesetzen der Gleichungslehre gelöst werden kann. Um diese Lösung aber für die geometrische Aufgabe selbst brauchbar zu machen, lehrte er noch, wie jeder algebraische Ausdruck sich wiederum geometrisch darstellen läßt; so daß die Arithmetik und Geometrie hiernach nur noch als zwei verschiedene Methoden zur Lösung einer und derselben mathematischen Aufgabe betrachtet werden können.

Dies läßt sich auch an der in diese Zeit fallenden Erfindung der Logarithmen erkennen, wo die consequente Verfolgung sowol der geometrischen als arithmetischen Richtung zu demselben Ziele führte. Die übergroße Mühe, welche die astronomischen Rechnungen erforderten, machte eine Verkürzung derselben zum dringenden Bedürfnisse; wenn aber ein solches Bedürfniß als unabweisbar empfunden wird, so werden alle Kräfte angespannt, um die Schwierigkeit fortzuräumen. Wir sehen daher einen deutschen Mathematiker Michael Stiefel im Jahre 1554 der Erfindung der Logarithmen sehr nahe kommen, indem er eine Potenzenreihe mit der natürlichen Zahlenreihe verglich. Da er aber in der Potenzenreihe keine Brüche als Exponenten annahm, ging die Erfindung für ihn verloren und die Welt mußte noch 70 Jahre warten, bis sie in einer andern, aber sehr künstlichen Weise, dem schottischen Edelmanne John Napier im Jahre 1614 gelang. Dieser ging von geometrischen Vorstellungen aus und fand die Logarithmen der Sinus, wodurch die trigonometrischen Rechnungen vereinfacht wurden. Zu derselben Zeit etwa nahm der Schweizer Jobst Burgi den Gedanken Stiefels wieder auf, ließ aber in der Potenzenreihe auch Brüche als Exponenten zu, wodurch er bei der Vergleichung beider Zahlenreihen die Glieder der einen Reihe als die Logarithmen der andern erkannte und so auf rein arithmetischem Wege ein ähnliches Resultat erreichte, welches eine Vereinfachung der Rechnungen mit großen Zahlen möglich machte. Die Erfindung der Logarithmen wurde wie ein erwarteter Freund begrüßt und nicht bloß sogleich verstanden, sondern auch bald eine einfachere Form derselben erkannt, welches Verdienst dem Engländer Henry Briggs (1560—1630) gebührt, der ein System wählte, in welchem 0 der

Logarithmus von 1 und 1 der von 10 ist. Man war damals noch nicht so weit und durchschaute noch nicht so klar, wie jetzt, den Zusammenhang der Dinge, daß man gleich den einfachsten Weg zur Erfindung einer solchen Vereinfachung der Rechnungen einschlagen konnte, indem man die Gesetze der Potenzen benutzte und so unmittelbar die Erfindung der Logarithmen herbeiführte.

Eine bedeutende Erleichterung und Vereinfachung der Rechnungen war auch durch die Einführung der Decimalbrüche erzielt worden. Als erster Schritt zu dieser Vereinfachung muß die vom Prof. Purbach in Wien um c. 1450 eingeführte Decimaleintheilung bei seinen neuen Sinustafeln bezeichnet werden. Sein berühmter Schüler und Nachfolger Johannes Müller, gewöhnlich Regiomontanus genannt, der die griechische Mathematik in treuerer Weise als die Araber erschloß, erweiterte den Gebrauch derselben; bis endlich der niederländische Mathematiker Simon Stevin 1585 die Decimalbrüche besonders empfahl, die seit jener Zeit immer größere und allgemeinere Verbreitung fanden.

Die bedeutenden Fortschritte der Mathematik, die mit Vieta begonnen hatten, erreichten durch die analytische Geometrie des französischen Philosophen und Mathematikers Descartes (1596—1650) ihren Gipfelpunkt, indem die schon im Alterthume angebahnte Wechselwirkung der Arithmetik und Geometrie jetzt zur vollständigen Verschmelzung gelangte. Sein großer und wesentlich neuer Gedanke war die Einführung der Coordinatenmethode, durch die er jede Linie als eine Reihe aufeinanderfolgender Punkte darstellte, die alle einem bestimmten Gesetze unterworfen sind. Mit dieser Methode löste er jede geometrische Aufgabe mit spielender Leichtigkeit zum höchsten Staunen der damaligen Gelehrten, die seither in einer Art Geistesturnier sich gegenseitig schwierige Aufgaben stellten und mit ihrer Lösung geheimhaltend triumphirten, wenn eine solche von ihnen allein gelöst blieb. Diese neue Methode verwandelte alles sinnlich Wahrnehmbare in abstracte Begriffe, d. h. lehrte die Gleichung jeder krummen Linie oder Curve finden, aus der man die Eigenschaften leicht ableiten kann, ohne wie bisher einem glücklichen Gedanken ihre Entdeckung zu verdanken, und so zu Entdeckungen gelangt, die dem Auge unter andern Umständen vielleicht verborgen geblieben wären.

Die Veröffentlichung derselben zerstörte daher mit einemmal die Geheimthuerei der Zeit.

Die Gleichung einer Curve tritt hiernach als eine geistige Auffassung der mannigfaltigen Gestalten auf und wie wir die Gleichungen nach ihrem Grade unterscheiden, ordnen wir diese in bestimmte Gruppen, je nach dem Grade der Gleichungen, denen sie entsprechen. So enthalten die Gleichungen des ersten Grades nur gerade Linien, die Gleichung des zweiten Grades umfaßt alle Kegelschnittlinien (Kreis, Parabel, Ellipse und Hyperbel) und während die Gleichung des dritten Grades eine Mannigfaltigkeit von 71 verschiedenen Gebilden liefert, ist man bisher noch nicht im Stande gewesen, den Reichthum von Linien in den höhern Graden zu erschöpfen.

Wir rufen daher durch irgend welche Function zweier Variablen, die wir niederschreiben, absichtslos Formen hervor, die möglicherweise mit der wunderbaren Regelmäßigkeit der verschiedengestalteten Blumenblätter übereinstimmen. Auf diese Weise wird die Zeichensprache für uns zu einer schöpferischen, die für uns bildet und schafft, dichtet und denkt und uns zu immer neuen überraschenden Entdeckungen führt.

Mit der Uebertragung aller geometrischen Untersuchungen auf das Gebiet der Gleichungen, gewannen diese eine besondere Wichtigkeit und hohe Bedeutung, so daß die bedeutendsten Kräfte ihre weitere Ausbildung übernahmen. Und da bereits zu Anfange dieser neuen Entwickelungsperiode der Mathematik Cardan (1501—1575), oder eigentlich Tartaglia, die allgemeine Gleichung des dritten Grades, sowie Ferrari (1522—1565) die des vierten Grades gelöst hatten, wurden jetzt wunderbare Entdeckungen in den merkwürdigen Eigenschaften der Gleichungen überhaupt gemacht.

Der Engländer Harriot (1560—1630) lehrte nach einfacher Formänderung der Gleichung, die er gleich Null setzte, daß jede Gleichung sich in soviel Factore des ersten Grades zerlegen läßt, als der Grad der Gleichung beträgt. Durch Descartes Auffassung konnte man sich jetzt von dem eigentlichen Wesen der negativen Wurzeln, die bisher als falsche, bedeutungslose angesehen wurden, eine richtige Vorstellung verschaffen. Indem man sich zu der gegebenen Gleichung die ihr entsprechende Curve darstellt und untersucht, ob sie die Abscissenaxe schneidet, berührt oder dieselbe gar nicht trifft, erkennt man die drei Beziehungen, die den Wurzeln einer Gleichung entsprechen. Die Anzahl der Durchschnittspunkte bestimmen dann die Zahl der reellen Wurzeln, die positiv sind, wenn sie auf der einen, negativ, wenn sie auf der andern Seite vom Anfangspunkte der Coordinatenaxen liegen. Das bloße Berühren der Abscissenaxe aber entspricht den gleichen, das gar nicht Schneiden den imaginären Wurzeln einer Curve. Gestützt auf die richtige Erkenntniß der verschiedenen Wurzeln lehrte Descartes, daß die Zahl der Wurzeln genau mit dem Grade der Gleichung übereinstimmt und macht darauf aufmerksam, daß die Anzahl der Zeichenwechsel in den einzelnen Gliedern vorausbestimmen läßt, wieviel positive Wurzeln eine Gleichung haben könne. Später, wo man größere Aufmerksamkeit auch den imaginären Wurzeln schenkte, wurde erkannt, daß die Anzahl der Wurzeln sich in reelle und imaginäre theile, die letztern aber ihrer Natur nach nur paarweise vorhanden sind. Das Streben, den numerischen Werth der Wurzeln einer Gleichung zu finden, führte den niederländischen Geometer Albert Girard (1629) zu der merkwürdigen Entdeckung, daß die Coefficienten der geordneten Gleichung alle Wurzeln derselben in verschiedenen Combinationen enthalten und zwar der Coefficient des zweiten Gliedes die Summe der einzelnen Wurzeln, der des dritten Gliedes die Summe der Wurzeln zu 2 combinirt, des vierten Gliedes die Summe aller zu 3 combinirten Wurzeln u. s. w., bis endlich das letzte Glied der Gleichung das Product aller Wurzeln vereinigt. Auf diesen merkwürdigen Zusammenhang hat in der neuesten Zeit Gräfe in Zürich eine Methode zur angenäherten Bestimmung der Wurzeln von numerischen Gleichungen höherer Grade gegründet, da eine allgemeine Lösung einer algebraischen Gleichung von höherm als dem vierten Grade, wie Abel und Rufini nachgewiesen haben, unmöglich ist. Diese Methode lehrt zu gleicher Zeit reelle und imaginäre Wurzeln der Gleichung finden, während mehrfache mit sehr gutem Erfolge gekrönte Leistungen nur die reellen Wurzeln einer Zahlengleichung zu bestimmen, vorangegangen waren. Eine bequeme und oft angewandte Annäherungsmethode der Art ist die von Fourier, die auf den Descartesschen Gedanken, die Wurzeln aus dem Zeichenwechsel der Glieder zu bestimmen, im wesentlichsten beruht, und sich durch Einfachheit und Eleganz auszeichnet; die aber durch eine, kurz darauf im Jahre 1832 erschienene Methode von Sturm noch übertroffen wird, welche so einfach ist, daß sie schwerlich von einer andern verdrängt werden wird. ?

Mit Descartes geistvoller Umgestaltung der Mathematik war der nächsten Zukunft die sichere Grundlage für eine höhere, mit der

Natur mehr übereinstimmende Auffassung geboten und die ganze Zeitrichtung drängte zur Entwickelung einer solchen Hauptstütze der Naturwissenschaft.

Die bisherige Betrachtungsweise hatte ja nur solche Gebilde dem Nachdenken unterworfen, die eine bestimmte unwandelbare Form besaßen, oder Formeln untersucht, die trotz des beliebigen Werthes doch nur bestimmte Größen enthielten. So sehr diese Betrachtungsweise als nothwendige Vorschule angesehen werden muß, so mußte sie dennoch endlich aufgegeben werden, wenn sie besser zur Erkenntniß der Natur dienen sollte. Denn jeder aufmerksame Beobachter erkennt sehr bald, daß in der ganzen Natur und allen ihren Gestaltungen nichts Festes und Unwandelbares enthalten ist; wollte also die Mathematik ein mächtiges Hülfsmittel zu einer immer umfassenderen Naturerkenntniß werden, so mußte sie sich daran machen, solche Gestalten, Größen und Formeln zu betrachten, die, in einer der Natur entsprechenden Weise, in jedem Augenblicke veränderlich sind. Um aber für solche Betrachtungen vorzubereiten, war es unumgänglich, die Idee des Unendlichen und Veränderlichen in die Mathematik einzuführen, ohne welche kein eigentlicher Fortschritt möglich gewesen wäre.

Keplern gebührt das Verdienst, diese fruchtbaren Begriffe in die Mathematik aufgenommen und den Begriff der Function begründet zu haben. Wenn man sich auch anfänglich dagegen sträubte, einen Kreis etwa aus unendlich vielen unendlich kleinen Theilen zusammengesetzt anzusehen, so bürgerten sich diese Begriffe immer mehr ein und treten bei jedem spätern Mathematiker klarer und reiner hervor. Allein das angedeutete Feld der Untersuchungen ist ein so mannigfaltiges und schwieriges, daß die ganze bisherige Mathematik, die Untersuchungen und Bestrebungen der Alten, nur als die ersten furchtsamen Schritte auf dem Gebiete der Mathematik erscheinen und ihre Untersuchungen nur als elementare betrachtet werden können. — So schließt denn, durch eine natürliche Grenze bestimmt, mit dem Aufhören der Betrachtung des Endlichen, Unveränderlichen die elementare und beginnt mit den Untersuchungen des Unendlichen und Veränderlichen die höhere Mathematik.

Die höhere Mathematik.

Indem wir das vielfach mit günstigem Erfolge gekrönte Streben der hervorragendsten Geister des Jahrhunderts, die Idee des Unendlichen und Veränderlichen für die Mathematik fruchtbar zu machen, übergehen, bezeichnen wir nur den Mann, der die Idee zur vollen Reife und Klarheit herausgebildet hat und dadurch uns die beiden bedeutendsten Zweige der höhern Mathematik, die Differential- und Integralrechnung schuf. Dieser hochverdiente Mann ist der bekannte deutsche Philosoph Leibnitz (1646—1716). Zwar wurde die Priorität seiner Erfindung ihm durch Newtons sogenannte Fluxionsrechnung streitig gemacht, allein so leidenschaftlich dieser Streit, der viel zur Beleuchtung und Läuterung beider Ansichten beigetragen hat, auch geführt wurde, so hat er jetzt bei der unbefangenen Vergleichung beider Erfindungen kein anderes Interesse, als daß wir wiederum erkennen, wie Arithmetik und Geometrie in ihrer consequenten Verfolgung zu demselben Ziele führten. Newton gelangte, durch Anwendung jener beiden fruchtbaren Ideen des Unendlichen und Veränderlichen auf die Geometrie, zu seiner Fluxionsrechnung, die eine allgemeine geometrische Methode zur Bestimmung des Umfangs und des Flächeninhalts jeder krummen Linie, sowie der Tangenten an dieselbe ist, was mit einen wesentlichen Theil der Differential- und Integralrechnung ausmacht. Allein so Großes dieselbe auch in der Hand des Erfinders leistete, kann sie doch den Vorzug vor der Leibnitzschen Erfindung nicht beanspruchen. Jene ist bloß eine eigenthümliche geometrische Methode, die nur auf gewisse Functionen anwendbar ist, nicht aber wie die Leibnitzsche Differential- und Integralrechnung eine allgemeine Rechnungsmethode, der jedes Problem und jede nur mögliche Function unterworfen werden kann. Dieser Methode zufolge ermittelt die Differentialrechnung das Characteristische der Veränderung jeder einzelnen Function und zeigt, daß jede Function zu etwas Bestimmtem, ihrer Form nach Eigenthümlichem anwachsen oder abnehmen muß, bei einer unendlich kleinen gleichförmigen Aenderung einer oder mehrerer in ihr vorkommenden Variablen, wogegen die Integralrechnung aus der Art der Aenderung auf die ursprüngliche Function zurückschließt, oder mit andern Worten uns die Summation im unendlich Kleinen lehrt. Die Integralrechnung insbesondere, durch ihre Eigenthümlichkeit einer indirecten Operation, hat uns ein weites, noch lange nicht erforschtes Gebiet der Mathematik erschlossen.

Mit der lebhaftesten Begeisterung wurden diese beiden viel versprechenden Zweige der Mathematik von den Naturforschern aufgenommen und erfreuten sich rasch einer bedeutenden Fortbildung und Erweiterung durch die begabtesten Geister des Jahrhunderts, unter welchen die beiden Brüder Bernoulli so Vorzügliches leisteten, daß Leibnitz selbst vorurtheilsfrei erklärte, die Analysis des Unendlichen verdanke diesen beiden ebensoviel, als ihm selbst.

Rüstig ward seitdem an der weitern Entwickelung fort und fort gearbeitet, denn es ist ein unbegrenztes Feld der Erforschung, wo immer noch zu schaffen und zu wirken genug übrig bleibt. Aber während ein großer Theil der Forscher den großen Bau zu erweitern und zu vervollständigen sucht, arbeitet ein anderer Theil derselben unverdrossen daran, den gebahnten Weg durch Vereinfachung der Darstellung zu ebnen, um die so viel versprechende Wissenschaft allgemein verständlich zu machen. Unter Vielen verdient das berühmte Mitglied der Petersburger Akademie Euler aus Basel (1707—1783) eine besondere Anerkennung, indem er nicht bloß den großen Bau in vielfacher Beziehung erweiterte, sondern den frühern Erfindungen eine vollendetere Form und eine einfache klare Darstellung gab.

Eine solche Wissenschaft, die den Naturerscheinungen und ihren Veränderungen so nahe angepaßt war, mußte in der Hand des Naturforschers Ungewöhnliches leisten. Und in der That hat sie die glänzendsten Erfolge in den Naturwissenschaften möglich gemacht, die unser Jahrhundert in großer Zahl aufzuweisen hat.

Insbesondere haben Astronomie und Physik die neuen Schöpfungen der Mathematik auf alle ihre Gebiete anzuwenden gewußt und dadurch an Wunder grenzende Resultate erzielt.

Aus der geringen Anzahl von Beobachtungen, die Piazzi an dem von ihm entdeckten ersten Planetoiden Ceres angestellt hatte, welcher indessen bald darauf nicht wieder aufgefunden werden konnte, ermittelte der noch jugendliche Gaus durch seine scharfsinnigen Rechnungen, zum Staunen der Mitwelt, den Ort der verloren gegangenen Ceres und hat also diese durch seine Rechnungen zum zweiten Mal entdeckt.

Später gelang es zweien genialen Astronomen, dem Franzosen Leverrier und dem Engländer Adams, den größten Triumph, den je die Wissenschaft erwarten konnte, durch die Macht ihrer Formeln zu feiern, indem sie in ihrer einsamen Studirstube aus ihren, durch die geringen Abweichungen eines bekannten Planeten von seiner gesetzmäßigen Bahn hervorgerufenen Rechnungen den Ort bestimmten, wo ein vorher nie gesehener Planet, der Neptun, sich befinden müsse. Diese kühne Vorausbestimmung war selbst den Männern der Wissenschaft so überraschend neu, daß sie nicht bloß daran zweifelten, sondern dieselbe mit Achselzucken ignorirten, bis die wirkliche Bestätigung des an der bezeichneten Stelle gefundenen neuen Weltkörpers ihnen jeden Zweifel benahm.

Die Mathematik hat selbst den Triumph errungen, Dinge zu offenbaren, die auf dem Wege der Erfahrung nicht nur nie gefunden wären, sondern nachdem die Existenz derselben unbezweifelbar festgestellt ist, vielleicht nie durch die Beobachtung bestätigt werden können. Dahin gehören die durch die astronomischen Rechnungen des berühmten Astronomen Bessel gefundenen dunklen Körper, um welche sich hellleuchtende Sonnen, wie Sirius und Procyon bewegen und als Trabanten derselben erscheinen, die aber durch die größten und vollkommensten optischen Instrumente nicht gesehen werden können, so daß eine paradox klingende Wissenschaft, die Astronomie des Unsichtbaren, erschlossen wurde.

Auch in der Physik und namentlich in der Lehre vom Licht haben die neuen Entdeckungen der Mathematik überraschende Aufschlüsse ergeben.

Die merkwürdigen und interessanten Erscheinungen der Interferenz, Beugung, Polarisation und Doppeltenstrahlenbrechung, sowie die damit verbundenen glänzenden Farbenerscheinungen, lassen sich nur durch die Heygenssche Vibrationstheorie erklären und begründen, wozu die Kenntniß der höchsten Theile der Mathematik erforderlich ist. Durch mathematische Schlüsse sind wir im Stande, die Wellenlänge des farbigen Strahls zu berechnen, die so gering ist, daß kein Mikroskop je dieselbe messen könnte. Ja die Polarisation gestattet dem Physiker, einen Blick in den innern Bau der Krystalle zu werfen und zu unterscheiden, wie die Lamellen in denselben gelagert sind. An der Hand der Mathematik verfolgt er in gleicher Weise das Wogen einer geheimnißvollen Kraft in der Materie, welche die Atome derselben, oder den Aether in ihren Zwischenräumen zur Bewegung zwingt. Als Wirkung dieser Kraft erkennt er die wunderbar regelmäßigen Gestalten der Krystalle, welche in solcher Form als die wahre Gestalt der Materie auftreten und durch die Bewegung der Atome in ungestörter Verborgenheit erzeugt wurden, während er die Bewegungen des Aethers als die Erscheinungen des Magnetismus, der Electricität, der Wärme und des Lichts auffaßt. Bei der Untersuchung jener leuchtenden Krystalle hat die Mathematik auch in der Physik einen ebenso glänzenden Triumph gefeiert, wie in der Astronomie. Fresnel, einer der größten mathematischen Physiker dieses Jahrhunderts, hatte kurz vor seinem frühen Tode eine Formel für die Lichtwelle eines bestimmten doppeltbrechenden Krystalls entwickelt; aus dieser erkannte der englische Astronom Hamilton, daß die Lichtwelle Aehnlichkeit mit einem Apfel habe, der bekanntlich zwei eigenthümliche Krümmungen an Stiel- und Blüthenende hat, von welchen jene aber an 4 Stellen solche Krümmungen besitzt. An diesen Stellen muß, wie man aus der Fresnelschen Formel erkennt, ein einfacher Lichtstrahl kreisförmig erscheinen. Durch die mathematische Formel zunächst darauf aufmerksam gemacht, ließ sich aus derselben die Stelle genau bestimmen, wo eine solche Erscheinung eintreten muß und Hamilton fand dann beim Aragonit dies vollkommen bestätigt. Eine solche Vorausbestimmung erhebt die physikalische Hypothese, daß das Licht eine Vibrationserscheinung ist, fast zur absoluten Gewißheit.

Wenn die höhere Mathematik demnach als ein wichtiges Mittel erscheint, welches den geistigen Blick in die Natur schärft und erweitert, so hat sie in gleicher Weise wichtige, die Lebensverhältnisse umgestaltende Vortheile erschlossen und viele Zweige der Naturwissenschaft ringen darnach, eine so gewaltige Kraft der Erkenntniß in dieselben einzuführen. Und bereits hat die Botanik soviel errungen, daß sie die auffallende Regelmäßigkeit der Blattstellung auf einfache Zahlenverhältnisse zurückzuführen im Stande ist und angeben kann, wie jedes Blatt in einer spiralförmigen Linie dem andern folgt.

Ebenso hat die Chemie in den merkwürdigen, ganz bestimmten Mischungsverhältnissen der Stöchiometrie mathematisch aufzufassende Bedingungen erschlossen und weitere Aufschlüsse aus der Mathematik wird sich gewiß diese unermüdet fortstrebende Wissenschaft noch erringen, die als organische Chemie sich schon die Wissenschaft von der Vergangenheit, der Gegenwart und Zukunft aller Stoffe nennen darf, die bereits im Stande ist, aus den Typen ihres Systems die ganze Erde mit einer neuen Flora organischer Wesen zu bekleiden, die aber dieselben nur entstehen läßt, wenn sie dem Techniker, dem Physiker oder Arzte ihre Dienste leisten sollen, und sie darauf wieder in die geheimnißvolle Verborgenheit, in die Welt des bloßen Gedankens zurücktreten heißt.

Die unverwelklichen Lorbeeren, welche sich die höhere Mathematik auf dem Gebiete der Naturwissenschaft erwarb, machen aber deshalb nicht die Elementarmathematik überflüssig, denn die Natur verschmäht es nicht, auch manche ihrer Gestalten in ganz elementarem Sinne zu schaffen und in rein Euklidischer Weise gleichsam mit Zirkel und Lineal zu construiren, wie die wunderbar regelmäßigen Schneeflocken und die große Mannigfaltigkeit der übrigen Krystalle uns lehren. Allein sie bleibt, wie wir wissen, bei diesen gradlinigen Gestalten nicht stehen, in ihren organischen Gebilden ist nichts gradlinig oder eckig, die bunte Mannigfaltigkeit der krummlinigen Schöpfungen macht ja die höhere Mathematik nothwendig, mit der man die geheimsten in der Natur enthaltenen Gesetze zu entdecken sucht. — Hegt aber die Natur Gesetze, die sich mathematisch auffassen lassen, so liegen sie bereits vor ihrer Entdeckung auch schon in der Mathematik. Haben wir uns erst diese vollständig erschlossen, dann werden wir mit der ganzen Mathematik im Stande sein, den in der Natur enthaltenen Gottesgedanken allmählig immer vollkommener nachzudenken und den begeisterten Worten des berühmten französischen Mathematikers Fourier beistimmen, daß die Mathematik eine Kraft des menschlichen Geistes ist, die vom Schöpfer dem Menschen verliehen wurde, um ihn vielleicht für die Unvollkommenheit seiner Sinne und die Kürze des Lebens zu entschädigen.