

A. Kisseļov

ALGEBRA

VI—VIII KLASSILE

DK
Pedagoogiline Kirjandus.
Tallinn

A-17881

A. KISSELJOV

ALGEBRA

ÕPIK

SEITSMEKLASSILISE KOOLI JA KESKKOOLI

VI, VII JA VIII KLASSILE

Kohustuslik kontrollseksemplar

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

TALLINN 1949



18666

Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt kinnitatud.

A 17881

Esimene jagu.

EELMÕISTED.

I. Algebraalne sümboolika.

1. Tähtede kasutamine.

a) *Arvude ühtste omaduste väljendamisest.*

Olgu meil soov lühidalt kirjutada, et kahe arvu korrutis ei muutu, kui korrutaja ja korrutatava teineteisega vahetame. Tähistanud ühe arvu tähega a ja teise tähega b , võime kirjutada võrduse $a \cdot b = b \cdot a$ ehk, lühemalt, $ab = ba$, kokku leppides alatiseks, et kui kahe kõrvuti seisva tähe vahel ei ole mingit märki, siis see tähendab, et nende vahel mõeldakse korrutamismärki. Arvude tähistamist tähtedega kasutatakse juhul, kui soovitakse öelda, et mingi omadus kuulub mitte mõningatele üksikutele, vaid kõikidele arvudele.

Arvude tähistamiseks kasutatakse harilikult ladina tähestiku tähti.

b) *Ülesannete lahendamisest üldkujul.*

Ülesandeid, mis on oma tingimustelt sarnased, kuid erinevad ainult antud arvude suuruse poolest, saab lahendada tähtede abil väljendatud eeskirja järgi.

Oletame, et me lahendame näiteks ülesannet:

Leida 3% arvust 520.

Siis arutame nii:

1% mingist arvust on $\frac{1}{100}$ sellest arvust; järelikult:

$$1\% \text{ arvust } 520 \text{ on } \frac{520}{100} = 5,2;$$

$$3\% \text{ arvust } 520 \text{ on } \frac{520}{100} \cdot 3 = 15,6.$$

Kui oleme lahendanud mõned sedasama liiki ülesanded, siis märkame, et protsentide leidmiseks mingist arvust piisab selle arvu jagamisest 100-ga ja tulemuse korrutamisest protsentide arvuga. Lahendame selle ülesande järgneval üldkujul:

Leida $p\%$ arvust a .

Ülesande lahendame nii:

$$1\% \text{ arvust } a \text{ on } \frac{a}{100},$$

$$p\% \text{ arvust } a \text{ on } \frac{a}{100} \cdot p.$$

Tähistanud otsitava arvu tähega x , saame kirjutada võrduse

$$x = \frac{a}{100} \cdot p,$$

millest otsekohe nähtub, kuidas leida protsente mistahes antud arvust.

Võtame veel ühe näite. Murdude korrutamise eeskirja sõnastame aritmeetikas järgmiselt: selleks, et korrutada murdu murruga, on vaja korrutada eraldi nende lugejad ja nende nimetajad ning esimene korrutis jagada teisega. Kasutades tähelist märkimisviisi, saame selle eeskirja väljendada väga lühidalt. Tähistanud esimesel murrul lugeja tähega a , nimetaja tähega b , teisel murrul aga vastavalt tähtedega c ja d , saame kirjutada:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Ei ole raske näha, et see kirjutus annab üldise eeskirja kõikide murdude korrutamiseks, sest tähtede all saame mõelda igasuguseid arve.

Niisamuti saame murruga jagamise eeskirja jaoks kirjutuse

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Iga võrdust või võrratust, mis numbrite, tähtede ja tehetemärkide abil väljendab arvude või nendega sooritatud tehetetulemuste suurusjärjestust, nimetatakse seoseks.

Võrdust, milles on vasakul pool võrdsusmärki üksainus täht (või koostatud tähis), nimetatakse valemiks.

Toome mõned näited valemitest.

Kui ristküliku alust ja kõrgust mõõdame ühe ja sama pikkusühikuga ja aluse jaoks saame arvu b ning kõrguse jaoks arvu h , siis selle ristküliku pindala S , väljendatult vastavates pindalaühikutes, on määratud valemiga $S = bh$. Samades tähistes saame kolmnurga pindala jaoks valemi

$$S = \frac{1}{2}bh.$$

Füüsikast on teada, et mingi aine erikaalu saamiseks on vaja antud aine hulk jagada tema ruumalaga. Tähistades keha kaalu (grammides) tähega p , tema ruumala (kuupsentimeetrites) tähega v ja erikaalu tähega d , saame toodud erikaalu leidmise eeskirja lühidalt väljendada valemiga

$$d = \frac{p}{v}.$$

2. Algebraalne avaldis.

Kui mõned tähtedega (või tähtedega ja numbritega) kirjutatud arvud on omavahel ühendatud märkidega, mis näitavad, missuguseid tehteid ja missuguses järjekorras nende arvudega tuleb teostada, siis niisugust kirjutust nimetatakse *algebraiseks avaldiseks*.

Niisugused on näiteks avaldised:

$$\frac{a}{100} \cdot p; \quad ab; \quad 2x + 1.$$

Lühiduse mõttes ütleme sageli „algebraalse avaldise” asemel lihtsalt „avaldis”.

Arvutada mingi avaldise väärtus tähtede antud numbrilistel väärtustel tähendab asendada temas tähed nende numbriliste väärtustega ja teostada kõik avaldises näidatud tehted; nii saadud arvu nimetatakse algebraalse avaldise *numbriliseks* väärtuseks tähtede antud numbrilistel väärtustel. Näiteks avaldise $\frac{a}{100} \cdot p$ numbriline väärtus juhul, kui $p = 3$ ja $a = 520$, on

$$\frac{520}{100} \cdot 3 = 5,2 \cdot 3 = 15,6.$$

3. Algebraas vaadeldavad tehted.

Algebraas esinevad järgmised tehted: *liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine, astendamine ja juurimine*. Aritmeetikast on teada, mis on esimesed neli tehet. Viies tehe — astendamine — tähendab korrutamise erijuhtu, kus korrutatakse mitu võrdset tegurit. Niisuguste tegurite korrutist nimetatakse *astmeks* ja nende tegurite arvu — *astendajaks*. Korduvat tegurit nimetatakse *astendatavaks* ehk astme aluseks. Kui mingi arv võetakse tegurina kaks korda, siis korrutist nimetatakse *teiseks astmeks*; kui mingi arv võetakse tegurina kolm korda, siis korrutist nimetatakse selle arvu *kolmandaks astmeks*, jne. Nii on arvu 5 teine aste $5 \cdot 5$ ehk 25. Arvu $\frac{1}{2}$ kolmas aste on korrutis $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ehk $\frac{1}{8}$. Arvu esimeseks astmeks nimetatakse seda arvu ennast. Teist astet nimetatakse ka *ruuduks* ja kolmandat astet *kuubiks*. Niisugused nimetused on antud sellepärast, et

korrutis $a \cdot a$ väljendab (pindalaühikutes) ruudu pindala, kui ruudu külge on a pikkusühikut, ja korrutis $a \cdot a \cdot a$ väljendab (ruumalaühikutes) kuubi ruumala, kui kuubi serv on a pikkusühikut.

Juurimisest me esialgu ei kõnele, sest seda tehet algebra alguses ei kasutata.

4. Algebras kasutatavad märgid.

Esimese nelja tehte märkimiseks kasutatakse algebras neidsamu märke, mida aritmeetikaski, ainult et korrutamismärki, nagu kõnelesime, harilikult ei kirjutata, kui mõlemad tegurid või üks neist on täheline. Näiteks $a \cdot b$ (ehk $a \times b$) asemel kirjutatakse lihtsalt ab ja $3 \cdot a$ (ehk $3 \times a$) asemel $3a$. Jagamismärgina kasutatakse kas kaksikpunkti „ : ” või rõhtkriipsu; nii tähendavad avaldised $a : b$ ja $\frac{a}{b}$ üht ja sama, nimelt arvude a ja b jagatist.

Astendamist tavaliselt märgitakse lühidalt nõnda: kirjutatakse tegurina võetav arv (astendatav) ja selle peal paremal pool märgitakse teine arv (astendaja), mis näitab, mitu korda astendatav peab esinema tegurina. Nii asendab 3^4 (mida loetakse: kolme neljas aste) täielikku kirjutust

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3.$$

Kui arvul ei ole mingit astendajat, siis võib tema astendajana mõelda arvu 1; näiteks a tähendab sedasama, mis a^1 . Mingi kahe avaldise võrdsust tähistatakse märgiga $=$, võrratust aga märgiga $>$, mille teravik peab suunduma väiksema arvu poole. Kui on kirjutatud näiteks

$$5 + 2 = 7, \quad 5 + 2 < 10, \quad 5 + 2 > 6,$$

siis see tähendab: $5 + 2$ on võrdne 7-ga; $5 + 2$ on väiksem kui 10; $5 + 2$ on suurem kui 6.

5. Tehete järjekord.

Algebralises avaldises näidatud tehete teostamise järjekorra suhtes on kokku lepitud teostada esmalt kõrgemat järku tehete, s. o. astendamine ja juurimine, selle järel korrutamine ja jagamine ning lõpuks liitmine ja lahutamine.

Niisiis avaldise $3a^2b - \frac{b^3}{c} + d$ numbrilise väärtuse arvutamisel teostatakse esmalt astendamine (arv a astendada kahega ja arv b kolmega), siis korrutamine ja jagamine (3 korrutada a^2 -ga ja saadud tulemus korrutada b -ga; b^3 jagada c -ga) ja lõpuks liitmine ning lahutamine (arvust $3a^2b$ lahutada $\frac{b^3}{c}$ ja tulemusega liita d).

Kui ülesande tingimuste kohaselt tuleb loobuda sellest tehete järjekorrast, siis kasutatakse sulgusid. Sulud näitavad, et tehe arvudega, mis on sulustatud, tuleb teostada enne teisi. Näiteks avaldised

$$5 + 7 \cdot 2 \quad \text{ja} \quad (5 + 7) \cdot 2$$

ei tähenda üht ja sama. Esimesel juhul tuleb 7 korrutada 2-ga ja tulemus liita 5-ga (saame 19). Teisel juhul tuleb esmalt liita 5 ja 7 ning tulemus korrutada 2-ga (saame 24).

Niisamuti kirjutus

$$(a + b)c - d$$

tähendab, et esmalt on vaja liita a ja b , saadud arv korrutada arvuga c ja sellest, mis saadakse, lahutada d .

Kui tuleb sulustada avaldis, milles on juba olemas oma sulud, siis uutele sulgudele antakse mingi teine kuju. Näiteks avaldis

$$a\{b - [c + (d - e)]\}$$

tähendab, et arvust d lahutatakse e , saadud vahe liidetakse arvuga c , saadud summa lahutatakse arvust b ja selle vahega korrutatakse a .

Sulgudele antakse harilikult järgmised nimetused: () on ümmargused sulud, [] on nurgelised sulud, { } on loogelised sulud.

Kui avaldises esinevad mitmed sulud, siis esmalt teostatakse tehted arvudega, mis on paigutatud ümmargustesse sulgudesse, seejärel arvudega nurgelistes sulgudes ja lõpuks arvudega loogelistes sulgudes. Teostades sulgudes näidatud tehted me kaotame ehk, nagu öeldakse, a v a m e sulud. Avaldises niiviisi avaldises

$$5 \cdot \{24 - 2 \cdot [10 + 2 \cdot (6 - 2) - 3 \cdot (5 - 2)]\}$$

esmalt ümmargused sulud, saame:

$$5 \cdot \{24 - 2 \cdot [10 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3]\}.$$

Siis avame nurgelised sulud:

$$5 \cdot \{24 - 2 \cdot 9\}.$$

Lõpuks avame loogelised sulud:

$$5 \cdot 6 = 30.$$

Harjutused.

1. Ruudu külj on a m; avaldada ruudu ümbermõõt ja pindala.
2. Kuidas avalduvad kuubi pindala ja ruumala, kui kuubi serv on m cm?
3. Ristküliku alus on x m ja kõrgus on d m alusest lühem. Avaldada ristküliku pindala.
4. Teatav kahekohaline arv sisaldab x kümmet ja y lihtühikut. Mitu lihtühikut on kokku selles arvus?
5. Kolmekohalises arvus on a sada, b kümmet ja c lihtühikut. Millise avaldisega saab esitada selle arvu lihtühikute koguarvu?
6. On segatud kaht sorti teed: esimesest sordist võeti a kg, teisest b kg. Esimese sordi kilogramm maksab m rbl., teise sordi kilogramm n rbl. Avaldada segu ühe kilogrammi hind.
7. Kirjutada algebraliste märkide abil:
1) arvude x ja y ruutude summa; 2) samade arvude summa ruut;
3) nende arvude ruutude korrutis; 4) nende korrutise ruut; 5) arvude a

ja b summa ning vahe korrutis; 6) arvude m ja n summa ning vahe jagatis (viimane avaldada kahel viisil, s. t. märgi „:” abil ja kriipsu abil).

8. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused juhul, kui $a = 20$, $b = 8$ ja $c = 3$:

1) $(a + b)c$; 2) $a + bc$; 3) $(a + b)a - b$;

4) $(a + b)(a - b)$; 5) $(a + b) : c$; 6) $\frac{a + b}{b - c}$.

9. Kirjutada avaldis, mis saadakse, kui korrutises $3ab$ asendada a summaga $x + y$ ja b vahega $x - y$.

Ajaloolisi teatmeid.

Sõna „algebra” on araabia päritoluga. Selle sõnaga algas araabia õpetlase Al-Khwārizmī poolt kirjutatud ühe matemaatilise teose (a. 820) pealkiri.

Euroopas kasutas seda sõna esimesena itaalia matemaatik Bombelli a. 1572 oma matemaatilise teose pealkirjana; hiljem hakkasid seda sõna järk-järgult kasutama kõik matemaatikud.

Selle sõna tähendus selgub pärast võrandeid käsitleva peatüki läbivõtmist.

Tähed arvude märkimiseks võttis esimesena tarvitusele prantsuse matemaatik Viëta a. 1591. Pärast teda kasutas eriti laialt tähtavaldisi kuulus prantsuse filosoof ja matemaatik René Descartes (1596—1650).

Tänapäeval algebras kasutatavad märgid on tarvitusele võetud mitmete matemaatikute poolt erinevatel aegadel. Tehete märkimiseks kasutati varem tervet sõna või isegi lauset. Praktiline vajadus võimalikult kiireks arvutamiseks viis katsetele lühendada üksikuid kõige enam kasutatavaid sõnu, kuni lõpuks need sõnad või nende lühendid asendusid erimärkidega. Näitame kõige enam kasutatavate märkide ilmumise aja.

Liitmismärgi „+” ja lahutamismärgi „-” võttis tarvitusele saksa matemaatik Widmann a. 1489. Enne teda esinevad nad siiski juba suure itaalia kunstniku Leonardo da Vinci käsikirjades.

Võrduse märkimiseks võttis inglise algebraist Recorde tarvitusele (a. 1557) märgi „=”, „sest,” nagu ta kirjutas, „mingid kaks asja ei saa olla enam võrdsed kui kaks võrdsete pikkustega paralleelset joont”. Teine inglise matemaatik Herriot hakkas kasutama märke „>” ja „<” (a. 1631) ning punkti kui korrutamismärki.

Kuulsa saksa matemaatiku Leibniz'i poolt on (a. 1694) tarvitu-
sele võetud jagamismärk „:”, mille asemel varem esines kriips.

Sulud (), [] ja {} esinevad esmakordselt flaami matemaatiku
Girard'i töödes (a. 1629).

Mitte kõik need märgid ei tulnud kohe üldisele kasutamisele. Mõned
matemaatikud jätkasid osaliselt vanade märkimisviiside kasutamist.
Lõplikult kujunenuks võib algebralist sümboolikat tema tänapäevakujul
lugeda XVII sajandi lõpuks. Väga suurt mõju selles suhtes avaldasid
suure inglise õpetlase Isaac Newton'i (1642—1727) tööd.

II. Esimese nelja aritmeetilise tehte omadused.

Meenutame aritmeetikast tuntud liitmise, lahutamise,
korrutamise ja jagamise tähtsamaid omadusi, sest neid oma-
dusi tuleb algebras sageli kasutada.

6. Liitmine.

a) **Summa ei muutu liidetavate järjekorra muutmisel**
(liitmise kommutatiivsus- ehk vahetuvusseadus). Nii

$$3 + 8 = 8 + 3; 5 + 2 + 4 = 2 + 5 + 4 = 4 + 2 + 5.$$

Üldiselt:

$$a + b = b + a; a + b + c + \dots = b + a + c + \dots = \\ = c + a + b + \dots$$

Punktide rida näitab, et liidetavate arv võib olla ka suu-
rem kui kolm.

b) **Mitme liidetava summa ei muutu, kui mõned neist**
asendada nende summaga (liitmise assotsiatiivsus- ehk
ühenduvusseadus). Nii

$$3 + 5 + 7 = 3 + (5 + 7) = 3 + 12 = 15; \\ 4 + 7 + 11 + 6 + 5 = 7 + (4 + 5) + (11 + 6) = \\ = 7 + 9 + 17 = 33.$$

Üldiselt:

$$a + b + c = a + (b + c) = b + (a + c) \text{ jms.}$$

Seda seadust sõnastatakse mõnikord ka järgmiselt: **liidetavaid võib ühendada ükskõik missugusteks rühmadeks.**

c) Selle asemel, et mingi arvuga liita mitme arvu summat, võib liita eraldi iga liidetava üksteise järel. Nii

$$5 + (7 + 3) = (5 + 7) + 3 = 12 + 3 = 15.$$

Üldiselt:

$$a + (b + c + d + \dots) = a + b + c + d + \dots$$

7. Lahutamine.

a) Selle asemel, et mingist arvust lahutada mitme arvu summat, võib lahutada eraldi iga liidetava üksteise järel. Nii

$$20 - (5 + 8) = (20 - 5) - 8 = 15 - 8 = 7.$$

Üldiselt:

$$a - (b + c + d + \dots) = a - b - c - d - \dots$$

b) Selle asemel, et liita kahe arvu vahet, võib liita vähendatava ja siis lahutada lahutatava. Nii

$$8 + (11 - 5) = 8 + 11 - 5 = 14.$$

Üldiselt:

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

c) Selle asemel, et lahutada vahet, võib esmalt liita lahutatava ja siis lahutada vähendatava. Nii

$$18 - (9 - 5) = 18 + 5 - 9 = 14.$$

Üldiselt:

$$a - (b - c) = a + c - b.$$

8. Korrutamine.

a) Korrutis ei muutu tegurite järjekorra muutmisel (korrutamise vahetuvusseadus). Nii

$$4 \cdot 5 = 5 \cdot 4; \quad 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 \cdot 2.$$

Üldiselt:

$$ab = ba; \quad abc \dots = bac \dots = cba \dots$$

b) Mitme teguri korrutis ei muutu, kui mõned neist asendada nende korrutisega (korrutamise ühenduvusseadus).
Nii

$$7 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot (3 \cdot 7) = 5 \cdot 21 = 105.$$

Üldiselt:

$$abc = a(bc) = b(ac) \quad \text{jms.}$$

c) Selle asemel, et mingit arvu korrutada mitme teguri korrutisega, võib selle arvu korrutada esimese teguriga, saadud tulemuse korrutada teise teguriga jne. Nii

$$3 \cdot (5 \cdot 4) = (3 \cdot 5) \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60.$$

Üldiselt:

$$a(bcd \dots) = \{[(ab)c]d\} \dots$$

d) Selle asemel, et mitme teguri korrutist korrutada mingi arvuga, võib korrutada selle arvuga ühe teguritest, jättes teised muutmata. Nii

$$(3 \cdot 2 \cdot 5) \cdot 3 = (3 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 5 = 3 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 = 3 \cdot 2 \cdot (5 \cdot 3).$$

Üldiselt:

$$(abc \dots)m = (am)bc \dots = a(bm)c \dots \quad \text{jms.}$$

e) Selle asemel, et summat korrutada mingi arvuga, võib iga liidetava korrutada selle arvuga ja saadud tulemused liita.
Nii

$$(5 + 3) \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 3 \cdot 7.$$

Üldiselt:

$$(a + b + c + \dots)m = am + bm + cm + \dots$$

Korrutamise vahetuvusseaduse tõttu võib seda omadust sõnastada ka nii: selle asemel, et mingit arvu korrutada mitme arvu summaga, võib selle arvu korrutada iga liidetavaga eraldi ja saadud tulemused liita. Nii

$$5 \cdot (4 + 6) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 6.$$

Üldiselt:

$$m(a + b + c + \dots) = ma + mb + mc + \dots$$

Seda omadust nimetatakse korrutamise *distributiivsus*-ehk *jaotuvusseaduseks*, sest summa korrutamine *jaotub* iga liidetava üksikult korrutamiseks.

f) Jaotuvusseadust saab rakendada ka vahe puhul. Nii $(8 - 5) \cdot 4 = 8 \cdot 4 - 5 \cdot 4$; $7 \cdot (9 - 6) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 6$.

Üldiselt:

$$(a - b)c = ac - bc; \quad a(b - c) = ab - ac,$$

s. t. selle asemel, et vahet korrutada mingi arvuga, võib selle arvuga korrutada eraldi vähendatava ja lahutatava ning esimesest tulemusest lahutada teise; selle asemel, et mingit arvu korrutada vahega, võib selle arvu korrutada eraldi vähendatavaga ja lahutatavaga ning esimesest tulemusest lahutada teise.

9. Jagamine.

a) Selle asemel, et summat jagada mingi arvuga, võib iga liidetava eraldi jagada selle arvuga ja saadud tulemused liita:

$$\frac{30 + 12 + 5}{3} = \frac{30}{3} + \frac{12}{3} + \frac{5}{3} = 10 + 4 + 1\frac{2}{3}.$$

Üldiselt:

$$\frac{a + b + c + \dots}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \dots$$

b) Selle asemel, et vahet jagada mingi arvuga, võib vähendatava ja lahutatava eraldi jagada selle arvuga ja esimesest tulemusest lahutada teise:

$$\frac{20 - 8}{5} = \frac{20}{5} - \frac{8}{5} = 4 - 1\frac{3}{5}.$$

Üldiselt:

$$\frac{a - b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}.$$

c) Selle asemel, et mitme teguri korrutist jagada mingi arvuga, võib ühe teguri jagada selle arvuga, jättes teised muutmata:

$$(40 \cdot 12 \cdot 8) : 4 = 10 \cdot 12 \cdot 8 = 40 \cdot 3 \cdot 8 = 40 \cdot 12 \cdot 2.$$

Üldiselt:

$$(abc \dots) : m = (a : m)bc \dots = a(b : m)c \dots \text{ jne.}$$

d) Selle asemel, et mingit arvu jagada mitme teguri korrutisega, võib selle arvu jagada esimese teguriga, saadud tulemuse jagada teise teguriga jne.:

$$120 : (2 \cdot 5 \cdot 3) = [(120 : 2) : 5] : 3 = (60 : 5) : 3 = 12 : 3 = 4.$$

Üldiselt:

$$a : (bcd \dots) = [(a : b) : c] : d \dots \text{ jne.}$$

e). Esitame veel jagamise järgmise omaduse:

Kui jagatav ja jagaja korrutada (või jagada) ühe ning sama arvuga, siis jagatis ei muutu.

Selgitame seda omadust järgmise kahe näite abil:

$$1) 8 : 3 = \frac{8}{3}.$$

Korrutame jagatava ja jagaja, ütleme, 5-ga; siis uue jagatise saame

$$(8 \cdot 5) : (3 \cdot 5) = \frac{8 \cdot 5}{3 \cdot 5},$$

mis pärast murru taandamist 5-ga annab endise jagatise $\frac{8}{3}$.

$$2) \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5}.$$

Korrutame jagatava ja jagaja, ütleme, $\frac{2}{7}$ -ga; siis uue jagatise saame

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7}\right) : \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{7}\right),$$

mis murdude korrutamise ja jagamise eeskirjade kohaselt on

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2}{4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 2 \cdot (6 \cdot 7)}{4 \cdot 7 \cdot (5 \cdot 2)} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2},$$

mis pärast taandamist 2-ga ja 7-ga annab endise jagatise

$$\frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5}.$$

Üldiselt: olgu a , b ja m mistahes arvud, ikka

$$(am) : (bm) = a : b,$$

mida võib kirjutada ka kujul

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

Et jagatis ei muutu jagatava ja jagaja korrutamisel ühe ning sama arvuga, siis ta ei muutu ka jagatava ja jagaja jagamisel ühe ning sama arvuga, sest jagamine mingi arvuga on samaväärne pöördarvuga korrutamisega.

10. Tehete omaduste rakendamine.

Käsitletud tehete omadusi saab sageli kasutada algebra-
liste avaldiste teisendamisel; näiteks:

a) $a + b + a + 2 + b + a + 8$. Kasutades liitmise ühendus-
seadust, rühmitame liidetavad järgmiselt:

$$(a + a + a) + (b + b) + (2 + 8).$$

Selle summa saab lühemalt kirjutada järgmiselt:

$$(a \cdot 3) + (b \cdot 2) + 10,$$

mida võib korrutamise vahetuvusseaduse alusel kirjutada ka
nii:

$$3a + 2b + 10.$$

b) $a + (b + a)$. Selle asemel, et arvuga a liita summat
 $(b + a)$, võime a -ga liita b ja siis veel a ; saame $a + b + a$.
Rühmitame liidetavad järgmiselt:

$$(a + a) + b.$$

Selle summa saab lühemalt kirjutada nii:

$$a \cdot 2 + b \quad \text{ehk} \quad 2a + b.$$

c) $a \cdot (3x^2a)$. Selle asemel, et arvu a korrutada korrutisega $3x^2a$, võib a korrutada 3-ga, saadud tulemuse korrutada x^2 -ga jne. Saame $a3x^2a$. Selle korrutise võime kirjutada kujul $3a^2x^2$, asetades tähed tähestikulisse järjekorda ja numbrilise teguri esikohale.

d) $(\frac{1}{2}ax) \cdot 10$. Korrutise korrutamiseks 10-ga võib mingi ühe teguri korrutada 10-ga. Korrutame $\frac{1}{2}$ arvuga 10; siis saame $2ax$.

e) $(a + x + 1) \cdot 3$. Korrutamise jaotuvusseaduse kohaselt saame

$$(a \cdot 3) + (x \cdot 3) + (1 \cdot 3),$$

mida võib kirjutada kujul

$$3a + 3x + 3.$$

f) $\frac{9ab}{3}$. Korrutise $9ab$ jagamiseks 3-ga võib 3-ga jagada teguri 9; pärast jagamist saame $3ab$.

Harjutused.

Lihtsustada järgmised avaldised, selgitades iga näite puhul, misguseid tehete omadusi tuleb selleks kasutada.

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 10. $a + b + a + b + a$; | $x + 10 + (12 - x) + 3$. |
| 11. $5 + a(b - 5) + a$; | $x + (a + x)$. |
| 12. $m + (n - m)$; | $5aabxabxx$. |
| 13. $(3xy) \cdot (2z)$; | $(\frac{2}{3}ax) \cdot 3$. |
| 14. $(x + 3) \cdot 5$; | $7(x + y + z)$. |
| 15. $(2a + 8b - 4c) : 4$; | $(10a^2b) : 2$. |
| 16. $(72x - 18y) : 9$; | $(20a^2x^3) : (5ax^2)$. |
| 17. $\frac{a}{4} : \frac{b}{4}$; | $\frac{15ax}{7} : \frac{5a}{7}$. |

RELATIIVSED ARVUD JA TEHTED NENDEGA.

I. Vastandsuunaliste suuruste mõiste.

11. Ülesanded.

Ülesanne 1. Kraadiklaas näitas keskööl 2° ja keskpäeval 5° . Mitme kraadi võrra ja kuidas muutus temperatuur keskööst keskpäevani?

Selles ülesandes ei ole tingimused väljendatud küllalt täielikult: on vaja öelda veel, kas kraadiklaas näitas keskööl 2° sooja või 2° külma; samasugused täiendused tuleb teha temperatuuri kohta ka keskpäeval. Kui näiteks keskööl ja keskpäeval kraadiklaas näitas sooja, siis selles ajavahemikus temperatuur tõusis 2° -st kuni 5° -ni, tähendab, tõusis 3° ; kui aga keskööl kraadiklaas näitas 2° külma (alla 0°) ja keskpäeval 5° sooja (üle 0°), siis temperatuur tõusis $2 + 5$, s. o. 7° võrra, jms.

Selles ülesandes kõneldakse suurusest, mida saab lugeda kahes vastandsuunas: temperatuuri kraadide arvu saab lugeda nullkriipsust ülespoole ja allapoole. Tavaliselt loetakse temperatuuri üle 0° (soe) positiivseks ja tähistatakse märgiga $+$ kraadide arvu ees, temperatuuri alla 0° (külm) aga negatiivseks ja tähistatakse märgiga $-$ kraadide arvu ees (arusamatust ei tekita ka, kui esimene arv anda ilma märgita).

Sõnastame oma ülesande nüüd näiteks nii: „Kraadiklaas näitas keskööl -2° ja keskpäeval $+5^{\circ}$. Mitme kraadi võrra

ja kuidas muutus temperatuur keskööst keskpäevani? Ülesanne sel kujul omab täiesti määratud vastust: temperatuur tõusis $2 + 5$, s. o. 7° võrra.

Ülesanne 2. Kui (Moskvat Leningradiga ühendava) Oktoobriraudtee kiirrong oli 100 km kaugusel Bologoje jaamast (mis asetseb ligikaudu Moskva ja Leningradi vahemaa keskkohal), siis sama raudtee postirong oli 50 km kaugusel Bologojest. Kui kaugel teineteisest olid need kaks rongi?

Niisugusel kujul ei ole see ülesanne täiesti määratud: selles ei ole öeldud, kas rongid asetsesid Bologojest ühel pool, näiteks Leningradi pool, või olid nad Bologojest üks ühel, teine teisel pool. Esimesel juhul rongide-vaheline kaugus ilmselt oli $100 - 50$, s. o. 50 km, teisel juhul aga $100 + 50$, s. o. 150 km. Tähendab, selleks et see ülesanne oleks määratud, ei ole küllalt, kui anda rongide kaugused Bologoje jaamast, vaid on veel vaja näidata, missuguses suunas tuleb lugeda neid kaugusi Bologojest.

Meil on siin jälle näide suurusest, millel peale ulatuse võib veel näha ka suunda. Üht ja sama kaugust (näiteks 100 km) rongist Bologojeni saab vaadelda ühes suunas (näiteks Moskva poole), aga ka teises, eelmise vastandsuunas (Leningradi poole). Aritmeetilised arvud harilikult näitavad ainult kauguse ulatust, ei ütle aga midagi suunast, milles see kaugus on võetud.

Antud juhul tuleks kaugust näitavale arvule lisada märke suuna kohta, näiteks 100 km Moskva pool, 50 km Leningradi pool jms. Ainult siis muutub ülesanne täiesti määratuks.

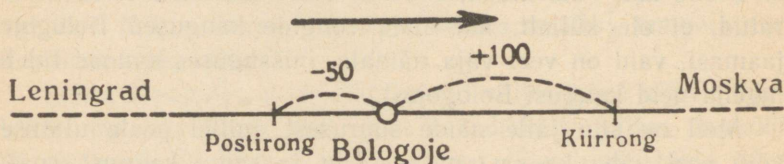
Suuna märkimist saab teostada järgmiselt.

Nimetame Oktoobriraudtee kahest suunast mingi ühe (näiteks suuna Leningradi poolt Moskva poole) **positiivseks** ja vastandsuuna (Moskva poolt Leningradi poole) **negatiivseks**; kooskõlas sellega nimetame kaugusi **positiivses suunas** **positiivseteks kaugusteks** ja kaugusi **negatiivses suunas** **negatiivseteks kaugusteks**. Esi-

mesi neist väljendame +- (pluss-) märgiga arvudega või märgita arvudega, teisi aga -- (miinus-) märgiga arvudega.

Kui näiteks rongi asukoht on 100 km Bologojest Moskva pool, siis ütleme, et tema kaugus Bologojest on +100 km (ehk lihtsalt 100 km); kui aga rong asetseb, ütleme, 50 km Bologojest Leningradi pool, siis ütleme, et tema kaugus Bologojest on -50 km. Märgid + ja - ei tähenda siin muidugi liitmist ja lahutamist, vaid kokkuleppe kohaselt märgivad ainult suunda.

Sõnastame oma ülesande nüüd nõnda: Kui Oktoobriraudtee kiirrong oli Bologojest +100 km (ehk lihtsalt 100 km) kaugusel, siis sama raudtee postirong oli Bologojest -50 km kaugusel. Kui suur oli kaugus nende rongide vahel? Nüüd



Joon. 1.

on ülesanne sõnastatud päris täpselt ja vastus temale kujuneb üheseks (vt. joon. 1, millel nool näitab tee positiivset suunda): rongid olid teineteisest $100 + 50$, s. o. 150 km kaugusel.

12. Teisi vastandsuunalisi suurusi.

Peale eelmistes ülesannetes näidatud suuruste saab veel mitmeid muid suurusi vaadelda kahes vastandlikus mõttes. Niisugused on näiteks:

sissetulek ja selle vastandmõiste väljaminek			
võit	„	„	kaotus
kasu	„	„	kahju
vara	„	„	võlg

jms.

Kui lepime kokku pidada sissetulekut, võitu, kasu, vara jms. positiivseteks suurusteks ja väljendame neid $+$ -märgiga (või ilma märgita) arvudega, siis väljaminek, kaotus, kahju, võlg jms. loetakse tavaliselt sama liiki negatiivseteks suurusteks ja väljendatakse $-$ -märgiga arvudega; siis saab öelda, et väljaminek on negatiivne sissetulek, kaotus on negatiivne võit jne. Niisuguse kokkuleppe korral on arusaadavad näiteks järgmised väljendid: elamuühingul oli sissetulekuid korteritest: jaanuaris $+ 200$ rbl., veebruaris $+ 150$ rbl., märtsis $- 50$ rbl. (tähendab, märtsis tekkis kahju 50 rbl.); või niisugused: vanemal vennal oli vara 500 rbl. väärtuses, keskmisel vennal 300 rbl. väärtuses ja nooremal $- 500$ rbl. väärtuses (tähendab, nooremal vennal oli 500 rbl. võlgu).

Tuleb märkida, et kirjeldatud suuruste kõrval leidub palju niisuguseid suurusi, millel ei saa näidata „suunda”; nii näiteks ei saa mõista kahes vastandtäheanduses suurusi, nagu ruumala, pindala ja mitmed teised.

13. Relatiivsed arvud.

Aritmeetikas tundmaõpitavad arvud leiavad kasutamist niisuguste suuruste väljendamisel, millede suunda ei vaadelda (kui näiteks soovitakse teada mingi kauguse ulatust, mitte aga suunda, milles seda loetakse). Algebras vaadeldavad arvud aga leiavad kasutamist suuruste ulatuse ja suuna väljendamisel. Selleks avaldatakse suurus, mida mõistetakse mingis ühes tähenduses, arvuga, mille ees seisab märk $+$, sama suurus aga, mõistetud vastandtäheanduses, avaldatakse arvuga, mille ees seisab märk $-$.

Arvu märgiga $+$ (mida tavaliselt ei kirjutata) nimetatakse *positiivseks*; arvu märgiga $-$ nimetatakse *negatiivseks*. Nii on $+ 10$, $+\frac{1}{2}$, $+ 0,3$ positiivsed arvud, $- 8$, $-\frac{5}{7}$, $- 3,25$ aga negatiivsed arvud. Arvude hulka kuulub veel 0 (null),

mida ei loeta ei positiivseks ega negatiivseks. Avaldise $+0$, -0 ja lihtsalt 0 peetakse üheväärsesks.

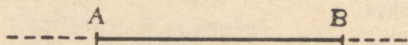
Positiivseid arve, negatiivseid arve ja nulli nimetatakse ühiselt *relatiivseteks* arvudeks, eristades neid harilikest (ehk aritmeetilistest) arvudest, millede ees ei ole mingit märki.

Relatiivse arvu *absoluutväärtuseks* nimetatakse seda arvu võetuna ilma märgita; nii on arvu -10 absoluutväärtus 10 ja arvu $+5$ absoluutväärtus 5 .

Kaks relatiivset arvu loetakse *võrdseks*, kui neil on ühesugused absoluutväärtused ja ühesugused märgid.

14. Arvu kujutamine arvteljel.

Sirgjoone lõiguks (joon. 2) nimetatakse mingi sirgjoone osa, mis on mõlemalt poolt piiratud, näiteks ühelt poolt punktiga A ja teiselt poolt punktiga B . Iga lõigu juures saab

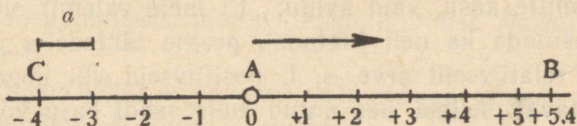


Joon. 2.

eristada esiteks tema pikkust ja teiseks suunda, mis igal antud lõigul võib olla kaheksugune. Näiteks võetud lõigul võib eristada suunda kas punkti A poolt punkti B poole või vastupidiselt — punkti B poolt punkti A poole. Kui võetud lõigu vaatleme suunaga A poolt B poole, siis nimetame punkti A lõigu alguseks ja punkti B tema lõpuks.

Niisuguste lõikude abil saame relatiivseid arve järgneval viisil näitlikult kujutada. Võtame mingi sirge (näiteks rõhtsirge) ja lepime kokku, missugune selle sirge kahest suunast tuleb lugeda positiivseks (joon. 3). Võtame positiivseks näiteks suuna vasakult paremale (mis on näidatud noolega); siis vastandsuuna — paremalt vasakule — loeme negatiivseks.

Edasi võtame pikkusühikuks mingi lõigu a (mis on joonisel näidatud). Olgu nüüd antud mingi positiivne arv, näiteks $+5,4$. Võtame oma sirgel mingi meelevaldse punkti A ja loeme selle lõikude alguseks; sellest punktist möödame siis paremale $5,4$ pikkusühikut, mis on võrdsed a -ga. Nii saame lõigu AB , mille pikkus on $5,4$ ühikut ja mille suund on positiivne. Selle lõigu lõpp B kujutab meile näitlikult arvu $+5,4$. Võtame nüüd negatiivse arvu, näiteks -4 . Selleks, et teda näitlikult kujutada, möödame samast punktist A vasakule 4 pikkusühikut. Siis saame lõigu AC , mille pikkus on 4 ühikut ja mille suund on negatiivne; selle lõigu lõpp C kujutab arvu -4 .



Joon. 3.

Kujutleme, et kõik relatiivsed arvud on niiviisi kujutatud suunaga lõikude lõppudena, mis on möödunud ühe ja sama sirge ühest ja samast, lõikude alguseks võetud punktist A . Siis positiivsed arvud on kujutatud punktidenä sirge sellel osal, mis on punktist A paremal, ja negatiivsed arvud sirge sellel osal, mis on punktist A vasakul. Arvu null kujutab sellel sirgel punkt A . Niisugust sirget nimetatakse sageli *arvsirgeks* ehk *arvoteljeks*.

Et suund neil lõikudel, millede lõpud kujutavad arve märgiga $+$, on vastupidine suunale neil lõikudel, mis kujutavad arve märgiga $-$, siis ka neid märke endid tavaliselt nimetatakse *vastandmärktideks*. Iga kaht arvu, nagu $+3$ ja -3 , $+\frac{1}{2}$ ja $-\frac{1}{2}$ jms., millede märgid on vastandlikud, absoluutväärtused aga võrdsed, nimetatakse *vastandarvudeks*.

Vaatleme nüüd, kuidas toimuvad mitmesugused tehted relatiivsete arvudega.

II. Relatiivsete arvude liitmine.

15. Ülesanne.

Kooperatiivühistu sai jaanuaris kasu a rbl. ja veebruaris b rbl. Kui palju kasu sai ühistu kahes kuus kokku?

Kirjutame valemi selle ülesande lahendamiseks. On ilmne, et kahes kuus kokku saadud kasu võrdub üksikutes kuudes saadud kasude summaga. Tähistades otsitava summa tähega x , saame valemi:

$$x = a + b.$$

Kuid kooperatiiv võib saada ühes või koguni mõlemas neist kuudest mitte kasu, vaid kahju. Et meie valemit oleks võimalik kasutada ka neil juhtudel, peame tähtede a ja b all mõistma relatiivseid arve, s. t. positiivseid või negatiivseid arve vastavalt sellele, kas antud kuus saadi kasu või kahju. Niisiis peame oskama liita relatiivseid arve.

16. Kahe arvu liitmine.

Vaatleme esmalt relatiivsete arvude liitmise kaht erijuhtu.

a) Kahe vastandaru summa on null. Nii

$$(+5) + (-5) = 0; \quad (-3) + (+3) = 0;$$

$$(+4,7) + (-4,7) = 0.$$

Üldiselt:

$$(+a) + (-a) = 0.$$

Tõepoolest, kui kooperatiiv näiteks sai ühes kuus kasu, kuid teises kuus niisama palju kahju, siis kogusummas ei ole tal kasu ega kahju.

Niisamuti rong, mis sõitis jaamast mingis suunas 5 km ja siis vastupidises suunas samuti 5 km, jõudis seega samasse jaama, tähendab, ei olnud lõpuks sellest eemaldunud.

b) Liita mingi arvuga null või liita nulliga mingi arv tähendab jätta see arv muutmata. Nii

$$(+75) + 0 = +75; \quad (-75) + 0 = -75.$$

$$0 + (+3,5) = +3,5; \quad 0 + (-3,5) = -3,5.$$

Üldiselt:

$$(+a) + 0 = +a; \quad (-a) + 0 = -a.$$

Tõepoolest, kui näiteks kooperatiiv sai esimeses kuus 75 rbl. kasu või kahju, kuid teises kuus ta ei saanud ei kasu ega kahju, siis tulemusena jäi tal see kasu või kahju, mis ta oli saanud esimeses kuus.

Läheme nüüd tagasi eelmise paragrahvi ülesande juurde. Selle lahendamiseks me kirjutasime üldise valemi, nimelt: $x = a + b$.

Vaatleme kõiki erijuhtusid, mis saavad esineda tähtede a ja b asendamisel antud arvudega.

1. juhtum. *Mõlemas kuus on saadud kasu.*

Olgu näiteks esimeses kuus saadud 200 rbl. kasu ja teises kuus 150 rbl. kasu.

Sel juhul $a = +200$; $b = +150$. On ilmne, et

$$x = (+200) + (+150) = +350,$$

s. t. kooperatiiv sai kahes kuus kokku 350 rbl. kasu.

2. juhtum. *Mõlemas kuus on saadud kahju.*

Olgu näiteks esimeses kuus saadud 200 rbl. ja teises kuus 150 rbl. kahju.

Sel juhul $a = -200$; $b = -150$. On ilmne, et

$$x = (-200) + (-150) = -350,$$

s. t. kooperatiiv sai kahes kuus kokku 350 rbl. kahju.

Neist näidetest saab teha järgmise järelduse:

Selleks, et liita kaks ühesuguste märkidega arvu, on vaja liita nende absoluutväärtused ja võtta see sama märgiga.

3. juhtum. Ühes kuus saadi kasu, aga teises kuus kahju, kusjuures kasu saadi enam kui kahju. Olgu näiteks esimeses kuus saadud 200 rbl. kasu, kuid teises kuus 150 rbl. kahju.

Sel juhul $a = +200$; $b = -150$. On ilmne, et kooperatiiv sai kogusummas kõigest 50 rbl. kasu, s. t.

$$x = (+200) + (-150) = +50.$$

4. juhtum. Ühes kuus saadi kasu, aga teises kuus kahju, kusjuures kasu saadi vähem kui kahju. Olgu näiteks esimeses kuus saadud 200 rbl. kahju, aga teises kuus 150 rbl. kasu.

Sel juhul $a = -200$; $b = +150$. On ilmne, et kahe kuu kohta kokku sai kooperatiiv 50 rbl. kahju, s. t.

$$x = (-200) + (+150) = -50.$$

Viimasest kahest näitest saab teha järgmise järelduse:

Selleks, et liita kaks erinevate märkidega arvu, on vaja leida nende absoluutväärtuste vahe ja selle ette panna selle arvu märk, kummal on suurem absoluutväärtus.

Jättes ära positiivse arvu eest märgi +, saame ülalantud võrdused kirjutada lühemalt:

$$200 + (-150) = 50; \quad -200 + 150 = -50.$$

17. Liitmise eeskirjade teine sõnastus.

Meie poolt näidatud liitmise kaks eeskirja saab asendada kahe teise eeskirjaga, mis rakendamiseks on eriti mõnusad.

a) Liita positiivne arv tähendab liita tema absoluutväärtus.

Nii

$$\begin{aligned} (+7) + (+3) &= +10 \quad \text{ja} \quad (+7) + 3 = 7 + 3 = 10; \\ -7 + (+3) &= -4 \quad \text{ja} \quad (-7) + 3 = -7 + 3 = -4. \end{aligned}$$

b) Liita negatiivne arv tähendab lahutada tema absoluutväärtus. Nii

$$\begin{aligned} (+7) + (-10) &= -3 \quad \text{ja} \quad (+7) - 10 = 7 - 10 = -3; \\ (-7) + (-10) &= -17 \quad \text{ja} \quad (-7) - 10 = -7 - 10 = -17. \end{aligned}$$

Neid kaht eeskirja saab lühidalt avaldada järgmiste kahekordsete märkide valemitega:

$$+ (+a) = +a; \quad + (-a) = -a.$$

18. Kolme ja enama arvu liitmine.

Esmalt leitakse esimese kahe liidetava summa, sellega liidetakse kolmas liidetav jne. Olgu näiteks vaja leida summa

$$(+8) + (-5) + (-4) + (+3),$$

mida saab lühemalt kirjutada nii:

$$8 + (-5) + (-4) + 3.$$

Liitmist teostame niisuguses järjekorras:

$$8 + (-5) = 3; \quad 3 + (-4) = -1; \quad (-1) + 3 = 2.$$

Sellest järjekorrast muide ei tarvitse kinni pidada, sest (nagu peatselt näeme, § 25) liidetavaid võib ümber asetada ja ühendada mistahes rühmadesse.

Harjutused.

18. $(+7) + (+3); \quad (-7) + (-3); \quad \left(+\frac{1}{2}\right) + \left(+2\frac{1}{2}\right)$

19. $\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-2\frac{1}{2}\right); \quad (+10) + (-2); \quad (+10) + (-12).$

20. $(-5) + (+5); \quad (-5) + (+2); \quad 4 + (-3).$

21. $(-4) + 3; \quad 8 + (-10); \quad (-8) + 10.$

22. $(+8) + (-5) + (-3) + (+2).$

23. $(-7) + (-3) + (-1) + (+11).$

III. Relatiivsete arvude lahutamine.

19. Ülesanne.

Vabriku kasu kahe kuu — jaanuari ja veebruari kohta oli a rubla. Kui suur oli kasu ainult veebruaris, kui on teada, et jaanuaris vabrik andis b rbl. kasu.

Kasu kahe kuu kohta on üksikutes kuudes saadud kasude summa, kusjuures kasu mõnikord avaldub positiivse arvuna, mõnikord negatiivse arvuna (kahju).

Seetõttu otsitav kasu veebruari kohta peab olema niisugune positiivne või negatiivne arv, mis relatiivsete arvude liitmise eeskirjade järgi liidetuna jaanuari kasuga annab summas kahe kuu kohta saadud kasu. Niisiis meie ülesandes on antud summa a ja üks liidetav b ning nõutakse teise liidetava leidmist.

Tehet, mille abil kahe liidetava summa ja ühe liidetava järgi leitakse teine liidetav, nimetatakse lahutamiseks, sõltumatult sellest, kas antud arvud on aritmeetilised või relatiivsed; seejuures antud summat nimetatakse vähendatavaks, antud liidetavat — lahutatavaks ja otsitavat arvu — vaheks. Sellest järeldub, et lahutamist saame alati kontrollida liitmise abil: leidnud otsitava vahe, liidame ta lahutatavaga; kui summaks saame vähendatava, siis lahutamine on õieti teostatud.

20. Vahe kui ühe liidetava leidmine.

Tähistades meie ülesandes otsitava vahe tähega x , saame kirjutada

$$x = a - b.$$

Leiame vahe $a - b$ suuruse järgmistel erijuhtudel.

a) Olgu $a = +1000$; $b = +400$. See tähendab, et jaanuaris andis vabrik 400 rbl. kasu ja kahe kuu kohta kokku

saadi 1000 rbl. kasu; on ilmne, et veebruar andis samuti kasu, nimelt 600 rbl. Tähendab,

$$x = (+1000) - (+400) = +600$$

ehk, lihtsamalt,

$$x = 1000 - 400 = 600.$$

Tulemust kontrollime liitmise abil:

$$(+600) + (+400) = +1000.$$

b) Olgu $a = +1000$ ja $b = +1000$. See tähendab, et jaanuaris andis vabrik 1000 rbl. kasu ja kahe kuu kasu kujunes niisama suureks. On ilmne, et veebruaris ei andnud vabrik ei kasu ega kahju. Tähendab,

$$x = (+1000) - (+1000) = 0.$$

Tulemust kontrollime liitmisega:

$$(+1000) + 0 = +1000.$$

Lahutamine on õieti teostatud. Niisamuti arutades leiame, et

$$(-1000) - (-1000) = 0.$$

c) $a = +1000$; $b = +1200$. See tähendab, et jaanuaris andis vabrik 1200 rbl. kasu, kuid kahe kuu kasu oli kõigest 1000 rbl. On ilmne, et osa jaanuarikuu kasust, nimelt 200 rbl., läks veebruarikuu kahju katteks. Siit

$$x = (+1000) - (+1200) = -200$$

ehk, lihtsamalt,

$$x = 1000 - 1200 = -200.$$

Tulemust kontrollime liitmisega:

$$(-200) + (1200) = +1000.$$

d) $a = +1000$; $b = -200$. See tähendab, et jaanuaris andis vabrik 200 rbl. kahju, kuid kahe kuu kohta kokku oli kasu 1000 rbl. On ilmne, et selle kasu andis veebruar, mis peale selle kattis veel jaanuarikuu kahju 200 rbl., s. t. veebruar pidi andma kasu üldse 1200 rbl. Siit

$$x = (+1000) - (-200) = +1200 \text{ ehk}$$

$$x = 1000 - (-200) = 1200.$$

Tulemust kontrollime liitmisega:

$$(+1200) + (-200) = +1000.$$

e) $a = -100$; $b = +800$. See tähendab, et jaanuar andis 800 rbl. kasu, kuna kahe kuu kohta kokku saadi 100 rbl. kahju. On ilmne, et veebruar tõi kahju, mis hävitas kogu jaanuarikuu kasu 800 rbl. ja jättis peale selle veel 100 rbl. kahju, s. t. kogu veebruarikuu kahju oli 900 rbl. Siit

$$x = (-100) - (+800) = -900 \text{ ehk} \\ x = -100 - 800 = -900.$$

Tulemust kontrollime liitmisega:

$$(-900) + (+800) = -100.$$

f) $a = -100$; $b = -150$, s. t. jaanuar andis 150 rbl. kahju, kuid kahe kuu kohta tekkis kahju ainult 100 rbl. Tähendab, osa jaanuarikuu kahjust, nimelt 50 rbl., kaeti veebruarikuu niisama suure kasuga. Siit

$$x = (-100) - (-150) = +50.$$

Tulemust kontrollime liitmisega:

$$50 + (-150) = -100.$$

21. Lahutamise eeskiri.

Vaadeldes eelmises paragrahvis toodud näiteid võib tähele panna, et igal käsitletud juhul me oleksime võinud antud arvu lahutamise asendada tema vastandarvu liitmisega.

Tõepoolest, võtame näiteks juhu a):

$$(+1000) - (+400) = +600.$$

Arvu $+400$ lahutamise asemel liidame tema vastandarvu:

$$(+1000) + (-400) = +600.$$

Nagu näeme, saame sama tulemuse.

Võtame juhu d):

$$(+1000) - (-200) = +1200.$$

Lahutamise asendame vastandarvu liitmisega:

$$(+1000) + (+200) = +1200.$$

Tulemus on sama.

Võtame lõpuks juhu e):

$$(-100) - (+800) = -900.$$

Ja täpselt niisamuti

$$(-100) + (-800) = -900.$$

Sedasama saab näidata ka kõikidel ülejäänud juhtudel. Niisiis igal juhul võib antud arvu lahutamise asendada lahutatava vastandarvu ja vähendatava liitmisega. Teiste sõnadega: lahutamise võib asendada liitmisega, mille teostamist me juba oskame. Siit järeldub eeskiri:

Selleks, et lahutada mingit arvu, tuleb vähendatavaga liita lahutatava vastand arv.

22. Kahekordsete märkide valemid.

Niisiis vastavalt antud eeskirjale võib arvu $+a$ lahutamise asendada vastandarvu $-a$ liitmisega ja arvu $-a$ lahutamise vastandarvu $+a$ liitmisega; seda asjaolu saab väljendada niisuguste kahekordsete märkide valemitega:

$$-(+a) = -a; \quad -(-a) = +a.$$

23. Algebraalne summa ja vahe.

Relatiivsed arvud võimaldavad iga vahet esitada summana ja, ümberpöörduvalt, iga summat esitada vahena. Näiteks vahet $7 - 3$ saab kirjutada nii: $(+7) + (-3)$ ehk lihtsamalt $7 + (-3)$; summat $4 + 2$ saab kujutada nii: $(+4) - (-2)$ ehk lihtsamalt $4 - (-2)$.

Selle eeskujul saab summana esitada iga avaldist, mis sisaldab rea üksteisele järgnevaid liitmisi ja lahutamisi. Näiteks

$$20 - 5 + 3 - 7 = 20 + (-5) + 3 + (-7).$$

Seetõttu algebras on võimalik relatiivsete arvude liitmise ja lahutamise kõik juhud ühendada üheks tehteks, mida nimetatakse *algebraliseks liitmiseks*.

Summat, mille liidetavaiks võivad olla positiivsed arvud, negatiivsed arvud või null, nimetatakse tavaliselt *algebraliseks summaks*, eristades teda aritmeetilisest summast, milles kõik liidetavad on harilikud (aritmeetilised) arvud. Niisamuti nimetatakse vahet *algebraliseks*, kui selles vähendatav ja lahutatav on relatiivsed arvud.

24. Relatiivsete arvude suuruse võrdlemine.

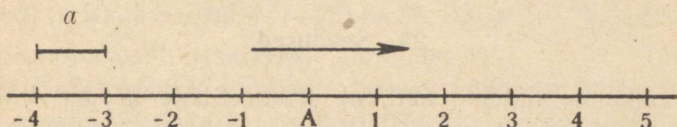
Kui ütleme, et 10 on suurem kui 7, siis see tähendab, et vahe $10 - 7$ on positiivne arv, kuna vahe $7 - 10$ on negatiivne. Lepime kokku kasutada seda mõistet suuremast ja väiksemast arvust ka relatiivsete arvude puhul ja ütleme, et **relatiivne arv a on suurem teisest relatiivsest arvust b juhul, kui vahe $a - b$ on positiivne, ja a on väiksem kui b juhul, kui vahe $a - b$ on negatiivne.** Selle kokkuleppe korral peame tunnistama, et:

1. Iga positiivne arv on suurem kui null ja suurem kui iga negatiivne arv; näiteks $8 > 0$ ja $8 > -10$, sest mõlemad vahed $8 - 0$ ja $8 - (-10)$ on positiivsed arvud.

2. Iga negatiivne arv on väiksem kui null ja väiksem kui iga positiivne arv; näiteks $-5 < 0$ ja $-5 < +2$, sest vahed $-5 - 0$ ja $-5 - (+2)$ on negatiivsed arvud.

3. Kahest negatiivsest arvust on see suurem, mille absoluutväärtus on väiksem; nii $-5 > -12$, sest vahe $-5 - (-12)$ on positiivne arv $+7$.

Selge kujutluse saamiseks relatiivsete arvude võrdlevast suurusel on sobiv kasutada nende näitlikku kujutamist arvteljel. Valides meelevaldse pikkusühiku a (joon. 4) kujutleme, et (lõpmatul) sirgel alates alguseks võetud mingist punktist A on paremale mõõdetud lõigud, mis kujutavad positiivseid arve, ja samast punktist vasakule on mõõdetud lõigud, mis kujutavad negatiivseid arve. Liikudes siis mööda seda sirget vasakult paremale (nagu näitab joonisel nool), me läheme väiksemate arvude juurest järjest suuremate juurde; liikudes aga vastupidises suunas, s. o. paremalt vasakule, läheme suuremate arvude juurest järjest väiksemate juurde. Teiste sõnadega, mistahes kahest arvust on see



Joon. 4.

suurem, mis arvteljel asetseb paremal. Selle telje abil on kerge kontrollida eespool sõnastatud kolme väite kehtivust relatiivsete arvude võrdleva suuruse kohta.

M ä r k u s. Kui soovitakse näidata, et arv a on positiivne, siis kirjutatakse $a > 0$; kui aga tuleb näidata, et a on negatiivne arv, siis kirjutatakse $a < 0$.

Harjutused.

24. Kaup osteti a rbl. eest ja müüdi b rbl. eest. Kui palju saadi kasu? Arvutada see kasu, kui $a = 40$ ja $b = 35$. Mida tähendab siin negatiivne vastus?

25. Kellegi igakuune sissetulek on m rbl. ja väljaminek n rbl. Kui palju tal igas kuus järele jääb? Leida vastus, kui $m = 120$ ja $n = 130$. Mida näitab negatiivne vastus?

Järgmistes näidetes teostada näidatud tehted:

26. $12 - (-2)$; $5 - (-5)$; $(+8) - (-10)$; $(+1) - (-1)$.

27. $a - (-b)$; $(+m) - (-n)$; $(+2x) - (-3x)$.

28. $10 + (+2) - (-4) - (+2) + (-2)$.

29. Arvutada summa $a + b + c + d$, kui $a = 2$, $b = -3$, $c = -\frac{1}{2}$, $d = -\frac{1}{4}$.

30. Arvutada vahe $m - n$, kui $m = -10$ ja $n = -15$.

31. Esitada avaldis $10 - 2 - 3 + 7$ relatiivsete arvude summana.

32. Esitada summa $10 + 8$ relatiivsete arvude vahena.

IV. Relatiivsete arvude liitmise ja lahutamise tähtsamad omadused.

25. Seadused.

Veendume näidete abil, et aritmeetiliste arvude liitmise ja lahutamise kohta näidatud omadused (§ 6, 7) jäävad kehtima ka relatiivsete arvude puhul.

a) Vahetuvusseadus: **summa ei muutu liidetavate järjekorra muutumisel.** Näiteks

$$(+20) + (-5) = +15 \quad \text{ja} \quad (-5) + (+20) = +15;$$

$$(-10) + (-2) + (+40) = +28;$$

$$(+40) + (-10) + (-2) = +28;$$

$$(-2) + (+40) + (-10) = +28 \quad \text{jms.}$$

b) Ühenduvusseadus: **summa ei muutu, kui mõned liidetavad asendame nende summaga.**

Arvutades nii summat

$$(-4) + (+3) + (-1) + (+5) = +3$$

võime mõned liidetavad, näiteks teise ja kolmanda asendada nende summaga, leides selle enne: $(+3) + (-1) = +2$; siis saame: $(-4) + (+2) + (+5) = +3$, s. t. saame endise summa.

c) Selle asemel, et mingi arvuga liita mitme liidetava summat, võib selle arvuga liita iga liidetava üksteise järel.

Olgu vaja näiteks arvuga 40 liita summa $20 + (-5) + (+7)$, mida saab kirjutada nii:

$$40 + [20 + (-5) + (+7)].$$

Selleks tuleks esmalt arvutada liidetav summa:

$$20 + (-5) = 20 - 5 = 15; \quad 15 + (+7) = 15 + 7 = 22$$

ja siis arvuga 40 liita saadud arv + 22:

$$40 + (+22) = 62.$$

Kuid selle asemel võime 40-ga liita esmalt esimese liidetava 20, siis teise liidetava -5 ja lõpuks kolmanda liidetava $+7$:

$$40 + 20 = 60; \quad 60 + (-5) = 55; \quad 55 + (+7) = 62.$$

Lõppsumma osutub samaks, mis enne.

d) Selle asemel, et mingist arvust lahutada mitme liidetava summat, võib sellest arvust lahutada eraldi iga liidetava üksteise järel.

Olgu vaja näiteks 20-st lahutada summa $10 + (-4) + (-3)$; seda saab avaldada nii:

$$20 - [10 + (-4) + (-3)].$$

Me võime esmalt leida lahutatava summa:

$$10 + (-4) = 10 - 4 = 6; \quad 6 + (-3) = 6 - 3 = 3;$$

nüüd tuleb saadud arv lahutada 20-st:

$$20 - 3 = 17.$$

Kuid selle asemel võime 20-st lahutada esmalt esimese liidetava 10, siis teise liidetava -4 ja lõpuks kolmanda liidetava -3 :

$$20 - 10 = 10; \quad 10 - (-4) = 10 + 4 = 14;$$

$$14 - (-3) = 14 + 3 = 17.$$

Saime sama arvu, mis varem.

Niisamuti saab näidata liitmise ja lahutamise ülejäänud omaduste kehtivust relatiivsete arvude puhul.

V. Relatiivsete arvude korrutamise.

26. Ülesanne.

Oktoobriraudteel sõidab rong keskmise kiirusega v kilomeetrit tunnis¹. Keskpäeval on rong Bologoje jaamas. Kus asub rong t tunni pärast?

Tuletame ülesande lahendamiseks valemi. Kui 1 tunnis rong jõuab edasi v kilomeetrit, siis t tunnis ta sõidab t korda pikema vahemaa. Tähendab, otsitav kaugus x võrdub v ja t korrutisega:

$$x = vt.$$

Kui näiteks $v = 40$ ja $t = 3$, siis rong asub $40 \cdot 3 = 120$ km kaugusel Bologoje jaamast.

See lahendus ei anna siiski täpset vastust ülesandes seatud küsimusele. Me ei tea nimelt, mis suunas peame mõõtma selle 120 km: kas Moskva poole või Leningradi poole. Relatiivsete arvude kasutamine võimaldab anda seatud küsimusele täpse vastuse.

Loeme suuna Leningradist Moskva poole positiivseks. Siis on positiivsed kõik kaugused, mis mõõdame Bologoje jaamast Moskva poole, ja negatiivsed kõik kaugused Leningradi poole. Kooskõlas sellega on kiirus, s. t. rongi poolt 1 tunnis sõidetud tee pikkus, positiivne, kui rong sõidab Moskva poole, ja negatiivne, kui ta sõidab Leningradi poole.

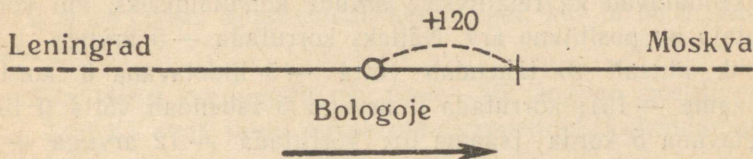
Nüüd saame seatud küsimusele anda täpse vastuse.

Kui rong läks Moskvasse, siis tema kiirus oli $+40$ km tunnis, ja 3 tunni pärast ta oli Bologojest $x = (+40) \cdot 3 = +120$ km kaugusel, s. t. ta oli edasi liikunud 120 km Moskva suunas (joon. 5). Kui rong läks Leningradi, siis

¹ Arvutamise lihtsustamiseks me ei arvesta seisuaegu jaamades ja eeldame, et rong sõidab kogu aja ühe ja sama kiirusega.

tema kiirus oli -40 km, ja 3 tunni pärast ta asus Bologojest $(-40) + (-40) + (-40) = -120$ km kaugusel, s. t. 120 km Leningradi suunas (joon. 6). Sellest järeldame, et

$$x = (-40) \cdot 3 = -120.$$



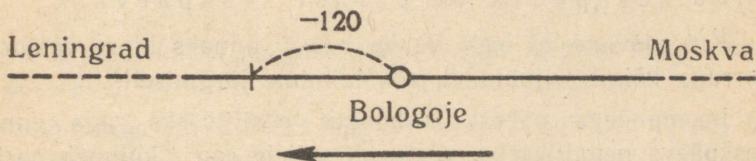
Joon. 5.

Nüüd meie valem $x = vt$ annab meile täpse vastuse küsimusele rongi asukoha kohta, ainult et v omandab positiivseid või negatiivseid väärtusi vastavalt suunale, milles rong liigub.

Kui näiteks $v = +50$ ja $t = +4$, siis valem annab:

$$x = (+50) \cdot (+4) = +200,$$

s. t. rong asub 200 km Bologojest Moskva pool.



Joon. 6.

Kui $v = -30$ ja $t = +2$, siis

$$x = (-30) \cdot (+2) = -60,$$

s. t. rong asub 60 km Bologojest Leningradi pool.

Aritmeetikast on teada, et **korrumine täisarvuga on tehe, mille abil üks arv (korrumatav) võetakse niimitu korda**

liidetavana, kuimitu ühikut on teises arvus (korrutajas). Korrutamine murruga on tehe, mille abil korrutatavast leitakse niisugune murdosaj, nagu korrutaja moodustab ühikust.

Eelmisest ülesandest nähtub, et need määrangud on rakendatavad ka relatiivsete arvude korrutamiseks, kui korrutaja on positiivne arv. Näiteks korrutada -5 arvuga $+3$ (ehk lihtsalt 3) tähendab võtta -5 liidetavana 3 korda (saame -15); korrutada 0 arvuga 5 tähendab võtta 0 liidetavana 5 korda (saame 0); korrutada -12 arvuga $+\frac{2}{3}$ (ehk lihtsalt $\frac{2}{3}$) tähendab leida $\frac{2}{3}$ arvust -12 (saame -9).

27. Korrutamine negatiivse arvuga.

Muudame eelmist ülesannet nõnda: Praegu, keskpäeval, asub rong Bologoje jaamas; kus ta oli 3 tundi tagasi? Ülesande lahendamiseks peame jällegi rongi liikumiskiiruse korrutama liikumisajaga. Mõlemal ülesandel on sarnased tingimused ja ühesugune lahendamisviis, kuid vastus kujuneb erinevaks vastavalt sellele, kas kõneldakse kolmest tunnist enne keskpäeva või pärast keskpäeva.

Kui soovime, et meie valem $x = vt$ annaks täpse vastuse korraga kõigil erijuhtudel, siis toimime järgmiselt.

Loeme aega pärast keskpäeva positiivseks, aga enne keskpäeva negatiivseks; vastavalt sellele aeg t kujuneb positiivseks või negatiivseks sõltuvalt sellest, missugusest ajast on jutt. Niiviisi saavad nüüd mõlemad tegurid v ja t omandada positiivseid ja negatiivseid väärtusi.

Vaatleme kõiki juhtusid, mis võivad esineda meie ülesande lahendamisel, kusjuures eeldame ikka, et keskpäeval rong on Bologojes ja sõidab kiirusega 40 km tunnis.

1. juhtum. Rong sõidab Moskvasse; kus ta on 3 tunni pärast?

Sel juhul kiirus on positiivne: $v = +40$; aeg on samuti positiivne: $t = +3$. Seda juhtu oleme juba vaadelnud ja vastuseks saanud, et

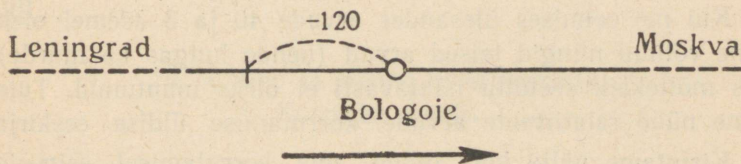
$$x = (+40) \cdot (+3) = +120.$$

2. j u h t u m. Rong sõidab Leningradi; kus ta on 3 tunni pärast?

Siin kiirus on negatiivne: $v = -40$; aeg on positiivne: $t = +3$. Ka seda juhtu oleme juba vaadelnud. Lahendamise annab:

$$x = (-40) \cdot (+3) = -120.$$

3. j u h t u m. Rong sõidab Moskvasse; kus ta oli 3 tundi tagasi?



Joon. 7.

Sel juhul kiirus on positiivne: $v = 40$; aeg on negatiivne: $t = -3$.

On ilmne, et 3 tundi tagasi asus rong Leningradi ja Bologoje jaama vahel, 120 km kaugusel viimasest (joon. 7):

Kaugus 120 km on vasakul Bologojest, järelikult ta on negatiivne. Niisiis

$$x = (+40) \cdot (-3) = -120$$

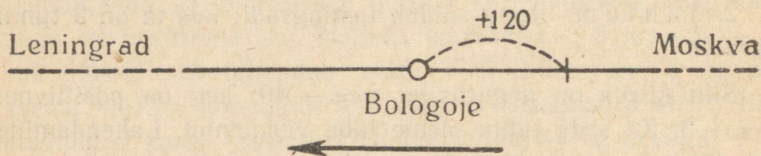
4. j u h t u m. Rong sõidab Leningradi; kus ta oli 3 tundi tagasi?

Siin on niihästi kiirus kui ka aeg negatiivsed: $v = -40$ ja $t = -3$.

On ilmne, et 3 tundi tagasi asus rong Moskva ja Bologoje vahel, kaugusel 120 km viimasest (joon. 8).

Et kaugus Bologojest Moskva poole on positiivne, siis

$$x = (-40) \cdot (-3) = +120.$$



Joon. 8.

28. Korrutamise eeskiri.

Kui me eelmises ülesandes arvude 40 ja 3 asemel oleksime võtnud mingid teised arvud (nende hulgas ka murde), siis mõttekäik seetõttu nähtavasti ei oleks muutunud. Tuleta me nüüd relatiivsete arvude korrutamise üldise eeskirja.

Kirjutame välja kõik juhud, mis korrutamisel esinesid, ja üldistame need mistahes arvude jaoks:

$$\begin{aligned} (+40) \cdot (+3) &= +120 \text{ ehk üldiselt: } (+a) \cdot (+b) = +ab; \\ (-40) \cdot (+3) &= -120 \text{ „ „ } (-a) \cdot (+b) = -ab; \\ (+40) \cdot (-3) &= -120 \text{ „ „ } (+a) \cdot (-b) = -ab; \\ (-40) \cdot (-3) &= +120 \text{ „ „ } (-a) \cdot (-b) = +ab; \end{aligned}$$

Kõrvutades neid juhtusid üksteisega, paneme tähele, et:

1. kui mõlemad tegurid on ühesuguste märkidega, siis korrutis on positiivne;

2. kui tegurid on vastandmärkidega, siis korrutis on negatiivne;

3. korrutise absoluutväärtus võrdub tegurite absoluutväärtuste korrutisega.

Siit saame järgmise üldise eeskirja:

Selleks, et leida kahe relatiivse arvu korrutist, on vaja korrutada nende absoluutväärtused ja võtta korrutis märgiga +, kui tegurid on ühesuguste märkidega, ja märgiga —, kui nad on erinevate märkidega.

Selle eeskirja osa, mis käsitleb märke, kannab *märkide eeskirja* nimetust. Harilikult sõnastatakse see nii: kahe arvu korrutamisel ühesugused märgid annavad +, kuid erinevad märgid —.

Toodud näiteid vaadeldes saab märkida veel järgmise eeskirja, mida edaspidi tuleb mõnikord kasutada: korrutamisel positiivse arvuga jääb korrutatava märk püsima (s. t. korrutisel on sama märk, mis korrutataval); korrutamisel negatiivse arvuga muutub korrutatava märk vastandmärgiks.

Märgime veel, et korrutis on null, kui üks tegureist on null.

29. Kolme ja enama arvu korrutis.

Korrutise märk.

Olgu vaja arvutada korrutis

$$(+2) \cdot (-1) \cdot (+3) \cdot (-10) \cdot (-4) \cdot (-5).$$

Selleks korrutame esimese arvu teisega, saadud korrutise kolmandaga, uue korrutise neljandaga jne.

$$\begin{aligned} (+2) \cdot (-1) &= -2; & (-2) \cdot (+3) &= -6; \\ (-6) \cdot (-10) &= +60; & (+60) \cdot (-4) &= -240; \\ & & (-240) \cdot (-5) &= +1200. \end{aligned}$$

Kui korrutatakse ainult positiivseid arve, siis korrutis on positiivne. Kui aga kõik või mõned tegurid on negatiivsed, siis korrutis osutub positiivseks sel juhul, kui negatiivseid tegureid on paarisarv, ja negatiivseks sel juhul, kui neid tegureid on paaritu arv. Nii

ühe negatiivse teguri puhul:

$$(+2) \cdot (-1) \cdot (+3) = -6;$$

kahe negatiivse teguri puhul:

$$(+2) \cdot (-1) \cdot (+3) \cdot (-10) = +60;$$

kolme negatiivse teguri puhul:

$$(+2) \cdot (-1) \cdot (+3) \cdot (-10) \cdot (-4) = -240, \text{ jne.}$$

30. Negatiivse arvu aste.

Rakendame eelmise paragrahvi eeskirja võrdsete tegurite korrutamiseks, s. t. astendamiseks.

Leiame mingi negatiivse arvu ruudu:

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9;$$

$$(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = +49.$$

Üldiselt:

$$(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = +a^2,$$

s. t. **negatiivse arvu ruut on positiivne.**

Leiame nüüd mingi negatiivse arvu kuubi:

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8;$$

$$(-6)^3 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = -216.$$

Üldiselt:

$$(-a)^3 = (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) = -a^3,$$

s. t. **negatiivse arvu kuup on negatiivne.**

On kerge näha, et **negatiivse arvu astendamisel mistahes paarisarvuga saadakse positiivne arv**, sest negatiivseid tegureid on sel juhul paarisarv (vt. § 29). Nii

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81;$$

$$(-2)^6 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +64, \text{ jne.}$$

Samal põhjusel **negatiivse arvu iga paaritu arvulise astendajaga aste on negatiivne arv**. Nii

$$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243;$$

$$(-2)^7 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -128, \text{ jne.}$$

Niisiis

negatiivse arvu paarisarvulise astendajaga aste on positiivne arv ja paarituurvulise astendajaga aste on negatiivne arv. Eriti märgime, et

$$(-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^6 = \dots = +1,$$

$$(-1)^3 = (-1)^5 = (-1)^7 = \dots = -1.$$

Harjutused.

33. $(-2) \cdot (-3)$; $(+7) \cdot (-2)$; $(-8) \cdot (-10)$.

34. $(-8\frac{1}{2}) - (+2\frac{3}{4})$; $(+0,36) \cdot (-\frac{3}{8}) \cdot (-\frac{2}{9})$.

35. $(-1)^2$; $(-1)^3$; $(-1)^4$; $(-1)^5$.

36. Leida avaldise $ax^2 + bx + c$ väärtus juhul, kui $a=3$, $b=-4$, $c=-5$ ja $x=4$.

37. Leida sama avaldise väärtus juhul, kui $a=-3$, $b=4$, $c=5$ ja $x=4$.

38. $4 \cdot 0$; $5\frac{1}{2} \cdot 0$; $0,3 \cdot 0$; $-8\frac{3}{4} \cdot 0$; $0 \cdot x$.

39. $(-\frac{1}{2}) \cdot (+3,5) \cdot (+2) \cdot (-\frac{7}{8})$.

VI. Relatiivsete arvude jagamine.

31. Definiitsioon.

Relatiivsete (kui ka aritmeetiliste) arvude jagamine on tehe, mille abil antud (kahe teguri) korrutise ja ühe teguri järgi leitakse teine tegur. Arv $+10$ jagada arvuga -2 tähendab siis leida niisugune arv x , et $(-2) \cdot x$ oleks $+10$; niisugune arv on -5 , sest arvude -5 ja -2 korrutis on $+10$.

Sellest definiitsioonist järeldub, et jagamist saab kontrollida korrutamiseega: kui jagatise korrutamisel jagajaga saame jagatava, siis tehe on õieti teostatud.

32. Jagamise eeskirja tuletamine.

Vaatleme järgmisi relatiivsete arvude jagamise näiteid:

$$(+10) : (+2) = +5, \text{ sest } (+2) \cdot (+5) = +10;$$

$$(-10) : (-2) = +5, \text{ ,, } (-2) \cdot (+5) = -10;$$

$$(-10) : (+2) = -5, \text{ ,, } (+2) \cdot (-5) = -10;$$

$$(+10) : (-2) = -5, \text{ ,, } (-2) \cdot (-5) = +10.$$

Neist näidetest järeldame eeskirja:

Selleks, et jagada üht arvu (jagatav) teisega (jagaja), on vaja jagatava absoluutväärtus jagada jagaja absoluutväärtusega ja võtta tulemus märgiga $+$, kui mõlemad antud arvud on ühesuguste märkidega, ja märgiga $-$, kui nad on erinevate märkidega.

Niisiis jagamise puhul märkide eeskiri on sama, mis korrutamise puhul.

33. Juhud, kui jagatav või jagaja on null.

a) Olgu vaja 0 jagada mingi arvuga, näiteks arvuga $+10$. See tähendab, et tuleb leida niisugune arv, mis korrutatult arvuga $+10$ annab korrutiseks 0. Niisugune arv on 0 ja ainult 0, sest $0 \cdot (+10) = 0$, kuid iga muu, nullist erineva arvu ja $+10$ korrutis ilmselt ei ole 0. Niisamuti leiame, et

$$0 : (-2) = 0, \text{ sest } (-2) \cdot 0 = 0;$$

$$0 : \frac{3}{4} = 0, \text{ sest } \frac{3}{4} \cdot 0 = 0, \text{ jne.}$$

Tähendab, kui jagatav on null, aga jagaja ei ole null, siis jagatis peab olema null.

b) Oletame nüüd, et jagaja on 0, kuid jagatav on mingi muu arv, näiteks $+5$. Jagamine $(+5) : 0$ tähendab, et tuleb leida niisugune arv, mis korrutatult arvuga 0 annab $+5$. Kuid missuguse arvu me ka arvuga 0 korrutaksime, mingit muud arvu kui 0 me ei saa; tähendab, jagatis $(+5) : 0$ ei

võrdu ühegi arvuga. Niisamuti on võimatud järgmised jagamised:

$$(-5) : 0; (+0,3) : 0; (-7,26) : 0 \text{ jms.}$$

Üldiselt: kui jagaja on null, kuid jagatav ei ole null, siis jagamine ei ole võimalik.

c) Võtame lõpuks niisuguse juhu, kus jagatav on 0 ja ka jagaja on 0:

$$0 : 0 = ?$$

Sel juhul ei ole mõtet kõnelda jagatisest, sest iga arv korrutatult nulliga annab tulemuseks nulli.

Näiteks

$$5 \cdot 0 = 0; 7 \cdot 0 = 0; (-100) \cdot 0 = 0 \text{ jne.}$$

Seepärast on kokku lepitud, et avaldisel $\frac{0}{0}$ ei olegi numbrilist väärtust.

Harjutused.

40. $(+20) : (+4); (+20) : (-4); (-20) : (+4); (-20) : (-4).$

41. $(+2a) : (-2); (-5x) : x; (-7x^2) : (-7).$

42. $0 : 8; 0 : \frac{1}{2}; 0 : 0,3; 0 : a.$

VII. Korrutamise ja jagamise tähtsamad omadused.

34. Veendume näidete abil, et korrutamise ja jagamise omadused, mida vaatlesime aritmeetiliste arvude puhul (§ 8 ja 9), jäävad kehtima ka relatiivsete arvude puhul.

a) *Vahetuvusseadus*: korrutis ei muutu tegurite järjekorra muutumisel.

Vaatleme esmalt ainult kahe arvu korrutamise näiteid:

$$(+5) \cdot (+2) = +10 \text{ ja } (+2) \cdot (+5) = +10;$$

$$(-5) \cdot (+2) = -10 \text{ ,, } (+2) \cdot (-5) = -10;$$

$$(-\frac{3}{8}) \cdot (-\frac{3}{4}) = +\frac{9}{20} \text{ ,, } (-\frac{3}{4}) \cdot (-\frac{3}{8}) = +\frac{9}{20}, \text{ jms.}$$

Võtame nüüd enam kui kahest tegurist koosneva korrutise, näiteks $(-2) \cdot (-5) \cdot (+3)$. Selle korrutise absoluutväärtus on $2 \cdot 5 \cdot 3$, märk aga $+$ või $-$ vastavalt sellele, kas negatiivseid tegureid on paaris- või paaritu arv (meie näites tuleb märk $+$). Kui muudame tegurite järjekorra näiteks nii: $(+3) \cdot (-5) \cdot (-2)$, siis saame korrutise, mille absoluutväärtus on $3 \cdot 5 \cdot 2$, märk aga $+$ või $-$ vastavalt sellele, kas negatiivseid tegureid on paaris- või paaritu arv. Kuid $3 \cdot 5 \cdot 2 = 2 \cdot 5 \cdot 3$ (aritmeetiliste arvude korrutamise vahetuvusseaduse järgi) ja negatiivsete tegurite arv on sama, mis enne. Tähendab, mõlemal korrutisel on absoluutväärtused võrdsed ja märgid ühesugused. Seepärast

$$(-2) \cdot (-5) \cdot (+3) = (+3) \cdot (-5) \cdot (-2).$$

b) *Ühenduvusseadus*: mitme teguri korrutis ei muutu, kui mõned neist asendada nende korrutisega.

Niisiis, selle asemel, et teostada korrutamist

$$(-5) \cdot (+3) \cdot (-2)$$

tegurite kirjutamise järjekorras, s. t. nii:

$$(-5) \cdot (+3) = -15, \quad (-15) \cdot (-2) = +30,$$

võime võtta mistahes kaks tegurit, näiteks $+3$ ja -2 , asendada need nende korrutisega, s. o. arvuga -6 , ja korrutada siis selle arvuga kolmanda teguri: $(-5) \cdot (-6) = +30$. Seega

$$(-5) \cdot (+3) \cdot (-2) = (-5) \cdot [(+3) \cdot (-2)].$$

c) Selle asemel, et mingit arvu korrutada mitme teguri korrutisega, võib selle arvu korrutada esimese teguriga, saadud korrutise korrutada teise teguriga jne. Ja täpselt samuti: selle asemel, et mingit arvu jagada mitme teguri korrutisega, võib selle arvu jagada esimese teguriga, tulemuse jagada teise teguriga jne.

Et korrutada arvu $+10$ korrutisega $(-2) \cdot (+3)$, võime esmalt arvutada selle korrutise (mis on -6) ja siis $+10$

korrutada selle korrutisega (saame -60); kuid võime ka $+10$ korrutada esmalt teguriga -2 (saame -20) ja siis saadud korrutise korrutada teguriga $+3$ (saame -60). Niisiis

$$(+10) \cdot [(-2) \cdot (+3)] = (+10) \cdot (-2) \cdot (+3).$$

Üldiselt:

$$a(bc) = (a \cdot b)c.$$

Niisamuti

$$10 : [(-2) \cdot (+3)] = [10 : (-2)] : (+3),$$

sest

$$10 : [(-2) \cdot (+3)] = 10 : (-6) = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}.$$

ja

$$[10 : (-2)] : (+3) = (-5) : (+3) = -\frac{5}{3}.$$

Üldiselt:

$$a : (bc) = (a : b) : c.$$

Niisamuti saab näidata ka jaotuvusseaduse kehtivust.

d) Näitame veel jagamise järgmist omadust: **kui jagatav ja jagaja korrutada (või jagada) ühe ning sama arvuga (välja arvatud null), siis jagatis ei muutu.**

Nagu varem nägime (§ 9, e), kõikide aritmeetiliste täis- ja murdarvude puhul kehtib võrdus $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$. Proovimise teel veendume nüüd, et see võrdus jääb kehtima ka siis, kui kõik või mõned arvudest a , b ja m tähendavad relatiivseid arve.

Võtame mingi jagamise näite, ütleme $5 : 0,8$, ja korrutame jagatava ning jagaja näiteks arvuga 3 . Sellega jagatis ei muutu, sest kõik arvud on aritmeetilised, ja seetõttu võime kirjutada võrduse

$$\frac{5}{0,8} = \frac{5 \cdot 3}{0,8 \cdot 3} = \frac{15}{2,4}.$$

Võtame nüüd selles võrduses mingi arvu negatiivse; olgu näiteks arvu 5 asemele võetud -5 :

$$\frac{-5}{0,8} = \frac{-5 \cdot 3}{0,8 \cdot 3} = -\frac{15}{2,4}.$$

Võrdus on jäänud õigeks, sest kummagi jagatise absoluutväärtus ei ole muutunud, ja mõlemad jagatised on negatiivsed arvud.

Niisamuti on kerge kontrollida, et võrdus jääb õigeks ka siis, kui teine või kolmas arv teha negatiivseks. Tähendab, missuguseid positiivseid või negatiivseid arve me a , b ja m all ka mõtleksime, võrdus $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ jääb ikka õigeks.

Jagatis ei muutu ka jagatava ja jagaja jagamisel ühe ning sama arvuga, sest jagamine on samaväärne pöördarvuga korrutamiselega.

Märgime siiski, et arv, millega jagatavat ja jagajat korrutame (või jagame), ei või olla null, sest sel juhul jagatis kaotab mõtte (§ 33, c).

Harjutused.

43. Proovimisega veenduda, et järgmised võrdused on õiged:

$$\begin{aligned}(-5) \cdot (+2) \cdot (-1) &= (+2) \cdot (-1) \cdot (-5) = \\ &= (+2) \cdot (-5) \cdot (-1); \\ 10 \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (+5) &= 10 \cdot [(-3) \cdot (-2) \cdot (+5)] = \\ &= 10 \cdot (-2) \cdot [(-3) \cdot (+5)]; \\ [10 + (-3) + (-2)] \cdot (-7) &= \\ &= 10 \cdot (-7) + (-3) \cdot (-7) + (-2) \cdot (-7); \\ \left(\frac{3}{4} - 0,2 + \frac{7}{8}\right) \cdot 0,3 &= \frac{3}{4} \cdot 0,3 - 0,2 \cdot 0,3 + \frac{7}{8} \cdot 0,3.\end{aligned}$$

44. Toetudes korrutamise ühenduvusomadusele, leida järgmiste korrutiste arvutamiseks kõige sobivam viis:

$$8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 125; \quad 2,5 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 5; \quad \frac{3}{4} \cdot 8,2 \cdot 4 \cdot 10.$$

45. Kontrollida, et jagatis $3,5 : (-7)$ ei muutu, kui jagatava ja jagaja korrutame arvuga 4; jagame arvuga $-0,75$.

ÜKSLIHKMELISED JA HULKLIHKMELISED TÄISAVALDISED. ALGEBRALISED MURRUD.

I. Eelmõisted.

35. Üksliige ja hulkliige.

Algebraised avaldised jaotatakse kahte rühma selle järgi, missugune algebraalne tehe neis teostatakse viimasena.

Algebraalist avaldist, milles viimane tehe ei ole liitmise ega lahutamise, nimetatakse üksliikmeks (ehk monoomiks).

Tähendab, üksliikmeks on kas tähega või numbritega kirjutatud üksikarv, näiteks $-a$, $+10$, või korrutis, näiteks ab , $(a+b)c$, või jagatis, näiteks $\frac{a-b}{c}$, või aste, näiteks b^2 , kuid üksliikmeks ei ole ei summa ega vahe.

Kui üksliikme numbrilise väärtuse arvutamisel esineb jagamine, siis nimetatakse üksliiget murruliseks, kui aga mitte, siis täis-üksliikmeks. Nii on $\frac{a-b}{c}$ murd-üksliige, $(x-y) \cdot ab$, $a(x+b)^2$ aga täis-üksliikmed. Et algebra algõpetuses tegeleme ainult täis-üksliikmetega, siis lühiduse mõttes nimetame neid lihtsalt üksliikmeteks.

Algebraalist avaldist, mis on koostatud mitmest üksteisega märkide $+$ või $-$ abil ühendatud üksliikmest, nimetatakse hulklitkimeks (ehk polünoomiks).

Niisugune on näiteks avaldis

$$ab - a + b^2 - 10 + \frac{a-b}{2}.$$

Üksikuid avaldisi, millede ühendamisel märkide + ja — abil tekkis hulkliige, nimetatakse tema *liikmeteks*. Hulkliikme liikmeid vaadeldakse koos nende märkidega, mis seisavad nende ees, näiteks öeldakse: liige — a , liige + b^2 jne. Esimese liikme ees tuleb mõista märki +, kui tema ette ei ole pandud mingit märki; nii on meie näites esimeseks liikmeks ab ehk + ab .

Kahest liikmest koosnevat avaldist nimetatakse *kaksliikmeks* (ehk *binoomiks*) ja kolmest liikmest koosnevat avaldist *kolmeliikmeks* (ehk *trinoomiks*) jne. Kui hulkliikme kõik liikmed on täisavaldised, siis hulkliiget nimetatakse *täis-hulkliikmeks*.

36. Kordaja (koefitsient).

Olgu antud korrutis

$$a3ab(-2),$$

milles mõned tegurid on kirjutatud numbritega, teised tähtedega. Niisuguseid korrutisi on võimalik nõnda teisendada (kasutades korrutamise ühenduvusseadust), et üheks rühmaks ühendatakse kõik tegurid, mis on kirjutatud tähega a , jne., mille järel saame

$$3 \cdot (-2) \cdot (aa) \cdot b,$$

mille kirjutame lühemalt

$$-6a^2b.$$

Numbrilist tegurit, mis on paigutatud täheliste tegurite ette, nimetatakse üksliikme *kordajaks* (*koefitsiendiks*). Nii on üksliikme $-6a^2b$ kordajaks arv -6 .

Märgime, et positiivne täisarvuline kordaja näitab, mitu korda tuleb võtta liidetavana seda tähest

avaldist, mille juurde ta kuulub; nii tähendab $3ab$ sedasama, mis $ab + ab + ab$. Kui kordaja on negatiivne täisarv, siis ta näitab, mitu korda tuleb võtta lahutatava seda tähest avaldist, mille juurde ta kuulub; nii $-3x$ tähendab $-x - x - x$. Kui kordaja on murd, siis ta näitab, missugune osa võetakse tähelise avaldise numbrilisest väärtusest. Nii tähendab $\frac{2}{3}ax$ nimelt $\frac{2}{3}$ arvust ax .

37. Hulkliikme omadused.

Iga hulkliiget saab vaadelda tema liikmete algebralise summana. Näiteks hulkiige $2a - b + c$ on summa $2a + (-b) + (+c)$, sest avaldis $+(-b)$ on samaväärne avaldisega $-b$ ja avaldis $+(+c)$ tähendab sedasama, mis $+c$. Selle tagajärjel relatiivsete arvude summa kõik omadused (§ 25) kuuluvad ka hulkliikmele. Meenutame neist kaht omadust.

a) *Vahetuvusseadus*: hulkliikme numbriline väärtus ei muutu tema (ühes märkidega võetud) liikmete järjekorra muutmisel.

b) *Ühenduvusseadus*: hulkliikme numbriline väärtus ei muutu, kui tema mõned liikmed asendada nende algebralise summaga.

Näitame veel hulkliikme järgmist omadust:

c) kui hulkliikme iga liikme ees muuta märk vastupidiseks, siis hulkliikme numbrilise väärtuse märk muutub samuti vastupidiseks, tema absoluutväärtus aga ei muutu.

Näiteks hulkliikme $2a^2 - ab + b^2 - \frac{1}{2}a$ numbriline väärtus juhul, kui $a = -4$ ja $b = -3$, on:

$$2 \cdot (-4)^2 - (-4) \cdot (-3) + (-3)^2 - \frac{1}{2} \cdot (-4) = \\ = 2 \cdot 16 - 12 + 9 + 2 = 32 - 12 + 9 + 2 = 31,$$

ja hulkliikme $-2a^2 + ab - b^2 + \frac{1}{2}a$ numbriline väärtus tähtede samadel väärtustel on

$$\begin{aligned} & -2 \cdot (-4)^2 + (-4) \cdot (-3) - (-3)^2 + \frac{1}{2}(-4) = \\ & = -2 \cdot 16 + 12 - 9 - 2 = -32 + 12 - 9 - 2 = -31. \end{aligned}$$

Harjutused.

46. Lihtsustada järgmised korrutised:

$$ax10xaax; aa(-5) \cdot bxx(+2); ab \cdot \frac{3}{4}axx(-\frac{1}{2}); 5mxy(-4)mxyy.$$

47. Esitada summana avaldised: $2a$; $3ax$; $5a^2b$; $4(a+1)$.

48. Arvutada järgmiste üksliikmete numbriline väärtus:

$$\begin{aligned} & 7a^2bc, \text{ kui } a=3, b=2, c=\frac{5}{7}; \\ & 0,80(b+c), \text{ kui } a=1, b=\frac{5}{8}, c=0,25; \\ & 3(a+b)^2c, \text{ kui } a=1, b=\frac{5}{8}, c=0,25; \\ & -7x^2y^3, \text{ kui } x=-2, y=1; \\ & 0,52ax^2y, \text{ kui } a=100, x=-3, y=-2. \end{aligned}$$

49. Arvutada järgmiste hulkliikmete numbriline väärtus:

$$\begin{aligned} & 2x^4 - x^3 + 5x^2 - 7x + 1, \text{ kui } x=1; \text{ kui } x=2; \\ & ax^2 + bx + c, \text{ kui } a=3, b=-2, c=-5, x=1. \end{aligned}$$

50. Proovimise teel veenduda, et juhul, kui $x=2$, hulkliikmed $x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ ja $-x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ annavad absoluutväärtuse poolest võrdsed, kuid märgi poolest vastupidised arvud.

38. Sarnaste liikmete koondamine.

Hulkliikme liikmeid, mis üksteisest erinevad ainult kordajate poolest või üldse ei erine, nimetatakse sarnasteks.

Näiteks hulkliikme

$$\underline{4a} - \underline{3x} + \underline{0,5a} + \underline{8x} + \underline{3ax} - \underline{2x}$$

esimene liige on sarnane kolmandaga (nad on ühe joonega alla kriipsutatud), teine liige on sarnane neljandaga ja kuuendaga (kahe joonega alla kriipsutatud), kuna viiendale liikmele ei leidu sarnast.

Kui hulkliikmes esineb sarnaseid liikmeid, siis liitmise ühenduvusseaduse alusel saab neid ühendada üheks liikmeks. Nii saab äsjatoodud näites liikmeid ühendada järgmisteks rühmadeks:

$$(4a + 0,5a) + (-3x + 8x - 2x) + 3ax.$$

On ilmne, et 4 mingit arvu ja 0,5 sedasama arvu moodustavad 4,5 seda arvu. Tähendab, $4a + 0,5a = 4,5a$. Nii samuti $-3x + 8x = 5x$ ja $5x - 2x = 3x$. Tähendab, hulkliiget võib kirjutada nii:

$$4,5a + 3x + 3ax.$$

Hulkliikme sarnaste liikmete ühendamist üheks liikmeks nimetatakse hulkliikme sarnaste liikmete koondamiseks.

Märkus. Kaks sarnast liiget, millede kordajad erinevad ainult märkidelt, hävivad vastastikku; niisugused on näiteks liikmed

$$2a \text{ ja } -2a \text{ või } -\frac{1}{2}x^2 \text{ ja } +\frac{1}{2}x^2.$$

Näited.

$$1. \ a + \underline{5mx} - \underline{2mx} + \underline{7mx} - \underline{8mx} = a + 2mx.$$

$$2. \ \underline{4ax} + b^2 - \underline{7ax} - \underline{3ax} + \underline{2ax} = -4ax + b^2 = \\ = b^2 - 4ax.$$

$$3. \ \underline{4a^2b^3} - \underline{3ab} + \underline{0,5a^2b^3} + 3a^2c + \underline{8ab} = \\ = 4,5a^2b^3 + 5ab + 3a^2c.$$

Harjutused.

$$51. \ a^3x^2 + 3a^2x^3 + \frac{1}{2}a^2x^3 + a^2x^3.$$

$$52. \ 2x - 5xy - 8xy - 3,1xy - 0,2xy.$$

$$53. \ a + 8mxy^2 - 4\frac{1}{2}mxy^2. \quad 54. \ a - 8mxy^2 + 4\frac{1}{2}mxy^2.$$

$$55. \ 5a^3 - 7a^2b + 7ab^2 + a^2b - 2a^3 - 8ab^2 + a^3 - 12ab^2 + 3a^2b.$$

$$56. \ x^5 - 4ax^4 - 2ax^4 + 2a^2x^3 + 5ax^4 - 2a^2x^3 + ax^4 - 7a^2x^3.$$

Ajaloolisi teatmeid.

Negatiivseid arve leidub juba kreeka matemaatikul Diophantos'el (m. a. IV sajandil), kuid ta nimetab neid „lubamatuiks” ja ei omista neile tähtsust ülesannete lahendamisel. Seal, kus tuleb korrutada kaks arvu, millel on märk —, ta siiski kasutab eeskirja, mis on sarnane meie eeskirjaga. Ta ütleb: „Lahutatav arv, korrutatud lahutavaga, annab liidetava arvu.” Nii ta saab:

$$(7 - 3) \cdot (5 - 2) = 7 \cdot 5 - 7 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 12.$$

Hindu matemaatik Brahmagupta annab (a. 620) juba relatiivsete arvude liitmise ja lahutamise eeskirjade üksikasjalise loetelu. Esitame mõned neist.

„Kahe vara summa on vara”, s. t. näiteks $(+2) + (+3) = 5$.

„Kahe võla summa on võlg”, s. t. $(-2) + (-3) = -5$.

„Vara ja võla summa võrdub nende vahega”, s. t. $(+5) + (-7) = -2$.

„Nullist lahutatult muutub võlg varaks, vara aga võlaks”:
 $0 - (-3) = +3$; $0 - (+3) = -3$, jne.

Euroopas nimetab veel a. 1544 matemaatik Stifel negatiivseid arve „mõttetuiks”. Girard oma töös (a. 1629) kasutab juba negatiivseid arve, kuid lõplikult tõi nad matemaatikasse Descartes (a. 1637), kes ka selgitas nende kui suunaliste suuruste mõtte. Liitmise ja lahutamise märkimiseks kasutati varem tervikuna ladina sõnu *plus* ja *minus*, mis hiljem lühendati ühe täheni *p* ja *m* kriipsukesega nende peal.

II. Algebraalne liitmine ja lahutamine.

39. Üksliikmete liitmine.

Olgu vaja liita mitu üksliiget: $3a$; $-5b$; $+0,2a$; $-7b$ ja c .

Nende summa avaldub nii:

$$3a + (-5b) + (+0,2a) + (-7b) + c.$$

Kuid avaldised $+(-5b)$, $+(+0,2a)$, $+(-7b)$ on sama-
väärised avaldistega $-5b$, $+0,2a$ ja $-7b$; antud üksliik-
mete summa võib seetõttu lihtsamalt kirjutada nii:

$$\underline{3a} - \underline{5b} + \underline{0,2a} - \underline{7b} + c,$$

mis pärast sarnaste liikmete koondamist on

$$3,2a - 12b + c.$$

Eeskiri. Selleks, et liita mitu üksliiget, on vaja nad ühes
nende märkidega kirjutada üksteise järele ja koondada sar-
nased liikmed, kui neid leidub.

40. Hulkliikmete liitmine.

Olgu vaja liita hulkliige $a - b + c$ mingi algebralise
avaldisega, mille tähistame ühe tähega m . Otsitava summa
saab avaldada nii:

$$m + (a - b + c).$$

Selle avaldise teisendamiseks võtame arvesse, et hulk-
liige $a - b + c$ on summa $a + (-b) + c$; kuid summa
liitmise asemel võib liita selle kõik liidetavad üksteise
järel. Seepärast

$$m + (a - b + c) = m + a + (-b) + c.$$

Et liita $-b$ on sama, mis lahutada b , siis

$$m + (a - b + c) = m + a - b + c.$$

Eeskiri. Selleks, et mingi algebralise avaldisega liita hulk-
liiget, on vaja selle avaldise juurde kirjutada hulkliikme kõik
liikmed ühes nende märkidega üksteise järele ja koondada
sarnased liikmed, kui neid leidub.

Kui esimese liikme ees ei ole märki, siis mõeldakse
seal $+$.

Näide. $3a^2 - 5ab + b^2 + (4ab - b^2 + 7a^2)$.

Algebraline avaldis, mille varem tähistasime ühe tähega
 m , on selles näites antud hulkliikme $3a^2 - 5ab + b^2$ kujul.

Rakendades ülalantud eeskirja, saame:

$$\begin{aligned} & 3a^2 - 5ab + b^2 + (4ab - b^2 + 7a^2) = \\ & = 3a^2 - 5ab + b^2 + 4ab - b^2 + 7a^2 = 10a^2 - ab. \end{aligned}$$

Märkus. Kui liitmiseks antud hulkliikmed sisaldavad sarnaseid liikmeid (nagu meie näites), siis liidetavaid saab kirjutada üksteise alla nii, et sarnased liikmed on kohakuti:

$$\begin{array}{r} 3a^2 - 5ab + b^2 \\ + 7a^2 + 4ab - b^2 \\ \hline 10a^2 - ab. \end{array}$$

Harjutused.

Liita järgmised hulkliikmed, kirjutades nad üksteise alla (sarnased liikmed kohakuti):

57. $(2x - y - z) + (2y + z - x) + (2z - x - y)$.

58. $(3x^3 - 4x^2 + 2x - 1) + (2x^2 - 3x + 4) + (x^3 - 2 + 4x + 3x^2)$.

59. $(4a^3 - 5a^2b + 7ab^2 - 9b^3) + (-2a^3 + 4a^2b - ab^2 - 4b^3) + (8ab^2 - 10a^2b + 6a^3 + 10b^3)$.

41. Üksliikmete lahutamine.

Olgu vaja üksliikmest $10ax$ lahutada üksliige $-3ax$. Otsitav vahe avaldub nii:

$$10ax - (-3ax).$$

Arvu $-3ax$ lahutamise, vastavalt selle tehte eeskirjale, võib asendada $-3ax$ vastandarvu liitmisega. See arv on $+3ax$, mistõttu

$$10ax - (-3ax) = 10ax + (+3ax) = 10ax + 3ax = 13ax.$$

Eeskiri. Selleks, et lahutada üksliiget, on vaja ta vastu-
pidise märgiga kirjutada vähendatava juurde ja koondada sarnased liikmed, kui neid leidub.

42. Hulkliikme lahutamine.

Olgu vaja mingist algebraisest avaldisest, mille tähistame ühe tähega m , lahutada hulkliige $a - b + c$; seda saab avaldada nii:

$$m - (a - b + c).$$

Lahutamise eeskirja kohaselt on selleks vaja avaldisega m liita arvu $a - b + c$ vastand arv. Selleks arvuks on $-a + b - c$; tähendab:

$$m - (a - b + c) = m + (-a + b - c).$$

Rakendades nüüd hulkliikmete liitmise eeskirja, saame:

$$m - (a - b + c) = m - a + b - c.$$

Eeskiri. Selleks, et mingist algebraisest avaldisest lahutada hulkliiget, on vaja selle avaldise juurde kirjutada lahutatava hulkliikme kõik liikmed vastandmärkidega ja koondada sarnased liikmed, kui neid leidub.

Märkus. Kui ühest hulkliikmest tuleb lahutada teine ja neis hulkliikmeis leidub sarnaseid liikmeid, siis saab vähendatava alla kirjutada lahutatava hulkliikme vastandmärkidega nii, et sarnased liikmed asetseksid kohakuti. Näiteks lahutamist

$$(7a^2 - 2ab + b^2) - (5a^2 + 4ab - 2b^2)$$

on kõige sobivam paigutada nii:

$$\begin{array}{r} 7a^2 - 2ab + b^2 \\ - 5a^2 - 4ab + 2b^2 \\ \hline 2a^2 - 6ab + 3b^2. \end{array}$$

Harjutused.

60. $(2p^2 - 4p + 8) - (p^2 - 5p - 7).$

61. Lahutada hulkliikmest $4x^2 + y^2 + 5$ hulkliige $2y^2 + y + 6.$

62. Lahutada hulkliikmest $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$ hulkliige $\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}.$

63. Lihtsustada avaldis

$$(2a^2 - 2b^2 + c^2) - (a^2 - 2b^2 - c^2) + (3a^2 + 4b^2 - 3c^2).$$

43. Sulgude avamine, kui nende ees on märk + või —.

Olgu vaja avada sulud avaldises

$$2a + (a - 3b + c) - (2a - b + 2c).$$

Seda tuleb mõista nii, et sulgudes olevate hulkliikmetega on vaja teostada need tehted, mida osutavad sulgude ees seisvad märgid. Meie näites seisab esimeste sulgude ees märk + ja teiste ees märk —. Teostades antud eeskirjade järgi liitmise ja lahutamise, saame ilma sulgudeta avaldise:

$$2a + a - 3b + c - 2a + b - 2c = a - 2b - c.$$

Niisiis, kui sulgude ees on märk +, siis sulgude avamisel ei tule muuta sulgude sees olevaid märke; kui aga sulgude ees on märk —, siis sulgude avamisel tuleb igal liikmel, mis on sulgude sees, muuta märk vastupidiseks.

Olgu veel vaja avada sulud avaldises

$$10p - [3p + (5p - 10) - 4].$$

Sobivam on avada enne ümmargused sulud ja siis nurgelised:

$$\begin{aligned} 10p - [3p + 5p - 10 - 4] &= \\ = 10p - 3p - 5p + 10 + 4 &= 2p + 14. \end{aligned}$$

44. Hulkliikme osa sulustamine.

Hulkliikme teisendamisel on mõnikord kasulik sulustada tema mingi liikmete rühm, kusjuures ükskord sulgude ette on soovitatav saada märk +, s. t. esitada hulkliige summana, teinekord aga märk —, s. t. esitada hulkliige vahena. Olgu meil soov sulustada näiteks hulkliikme $a + b - c$ viimased kaks liiget nii, et sulgude ees oleks märk +. Siis kirjutame nii:

$$a + b - c = a + (b - c),$$

s. t. sulgudes jätame igale liikmele sama märgi, mis tal oli enne. Kui liitmise eeskirja kohaselt avame sulud, siis

veendume, et see teisendus on õige: me saame uuesti endise hulkliikme.

Olgu vaja samas hulkliikmes sulustada viimased kaks liiget nii, et sulgude ees oleks märk —. Siis kirjutame nii:

$$a + b - c = a - (-b + c) = a - (c - b),$$

s. t. sulgudes muudame iga liikme märgi vastandmärgiks. Kui lahutamise eeskirja kohaselt avame sulud, siis veendume, et see teisendus on õige: me saame jällegi endise hulkliikme.

Võib sulustada ka kogu hulkliikme, pannes sulgude ette märgi + või —. Näiteks hulkliikme $a + b - c$ võib kirjutada nii:

$$+ (a + b - c) \text{ või } - (a - b + c).$$

Harjutused.

Avada sulud ja lihtsustada:

64. $x + [x - (x - y)]; m - \{n - [m + (m - n)] + m\}.$

65. $a + b - c - [a - (b - c)] - [a + (b - c) - (a - c)].$

66. $(3x^2 - 4y^2) - (x^2 - 2xy - y^2) + [2x^2 + 2xy + (-4xy) + 3y^2].$

67. Hulkliikmes $a - b - c + d:$

a) sulustada viimased kolm liiget, pannes sulgude ette märgi —;

b) sulustada viimased kaks liiget, pannes sulgude ette märgi +;

c) sulustada keskmised kaks liiget, pannes sulgude ette märgi —.

III. Algebraalne korrutamine.

45. Üksliikmete korrutamine.

a) Olgu vaja a^3 korrutada avaldisega a^2 ; seda saab kirjutada kujul $a^3 \cdot a^2$ ehk üksikasjalisemalt $(aaa) \cdot (aa)$. Siin korrutis aaa korrutatakse teise korrutisega aa . Kuid selle asemel, et mingit arvu korrutada korrutisega, võib selle arvu korrutada esimese teguriga, saadud tulemuse korrutada teise teguriga jne. Seetõttu

$$a^3 \cdot a^2 = (aaa) \cdot aa,$$

mida võib kirjutada ka ilma sulgudeta, sest tehete järjekord jääb siin ka ilma sulgudeta samaks:

$$a^3 \cdot a^2 = aaaaa = a^5.$$

Nagu näeme, korrutise astendaja võrdub tegurite astendajate summaga.

Võtame veel näite: korrutada x^3 ja x^4 . Arutades niisamuti, nagu eelmisel juhul, saame:

$$x^3 \cdot x^4 = (xxx) \cdot (xxxx) = xxxxxxx = x^7.$$

Üldiselt, astmete a^m ja a^n korrutamisel

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Tähendab, ühe ja sama arvu astmete korrutis võrdub selle arvu niisuguse astmega, millel astendajaks on korrutatavate astmete astendajate summa. Lühemalt väljendatakse seda järgmiselt:

ühe ja sama arvu astmete korrutamisel astendajad liidetakse.

Niiviisi

$$m^2m^3 = m^5; \quad x^3x = x^4; \quad y^2yy^3 = y^6.$$

b) Olgu vaja korrutada

$$3ax^2 \cdot (-5abx).$$

Et üks liige $-5abx$ on korrutis, siis piisab, kui korrutava korrutame esimese teguriga -5 , tulemuse korrutame teise teguriga a jne. Täheandab:

$$3ax^2 \cdot (-5abx) = 3ax^2 \cdot (-5) \cdot abx.$$

Kasutades korrutamise ühenduvusseadust ühendame saadud korrutises tegurid järgmistesse rühmadesse:

$$(+3) \cdot (-5) \cdot (aa) \cdot b \cdot (x^2x).$$

Teostades korrutamise igas rühmas, saame: $-15a^2bx^3$.

Eeskiri. Selleks, et üksliiget korrutada üksliikmega, on vaja korrutada nende kordajad, liita ühesuguste tähtede astendajad ja kirjutada korrutisse oma astendajatega need tähed, mis esinevad ainult korrutatavas või ainult korrutajas.

Näited.

$$1. 0,7a^3x \cdot (3a^4x^2y^2) = 2,1a^7x^3y^2.$$

$$2. -3,5x^2y \cdot \left(\frac{3}{4}x^3\right) = -\frac{21}{8}x^5y.$$

46. Üksliikme ruut ja kuup.

Me teame, et leida mingi arvu ruut või kuup tähendab võtta see arv tegurina kaks korda või kolm korda; näiteks:

$$11^2 = 11 \cdot 11 = 121; \quad (-1\frac{1}{2})^2 = (-1\frac{1}{2}) \cdot (-1\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{4};$$

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64; \quad (-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125.$$

Rakendame seda definitsiooni täis-üksliikmete ruudu ja kuubi leidmiseks.

1. Olgu nõutud a^4 ruut või kuup. Vastavalt definitsioonile

$$(a^4)^2 = a^4 \cdot a^4; \quad (a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4.$$

Rakendades üksliikmete korrutamise eeskirja, saame:

$$(a^4)^2 = a^8; \quad (a^4)^3 = a^{12}.$$

Täpselt niisamuti

$$(a^3)^2 = a^6; \quad (a^3)^3 = a^9.$$

Üldiselt:

$$(a^m)^2 = a^m \cdot a^m = a^{2m}; \quad (a^m)^3 = a^m \cdot a^m \cdot a^m = a^{3m},$$

s. t. selleks, et saada astme ruutu või kuupi, on vaja astendaja korrutada vastavalt kahega või kolmega.

Nii

$$(4^2)^2 = 4^4 = 256; \quad (2^2)^3 = 2^6 = 64, \text{ jne.}$$

2. Olgu nõutud korrutise abc ruut või kuup. Vastavalt definitsioonile

$$(abc)^2 = (abc) \cdot (abc); \quad (abc)^3 = (abc) \cdot (abc) \cdot (abc).$$

Korrutamise omadusi rakendades saame:

$$(abc)^2 = abcabc = (aa) \cdot (bb) \cdot (cc) = a^2b^2c^2;$$

$$(abc)^3 = abcabcabc = (aaa) \cdot (bbb) \cdot (ccc) = a^3b^3c^3,$$

s. t. selleks, et saada korrutise ruutu või kuupi, on vaja võtta iga teguri vastav aste eraldi ja tulemused korrutada.

Nii: $(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900;$

$$(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216.$$

3. Olgu nüüd vaja leida üksliikme $-4a^3bc^4$ ruut või kuup. Rakendades äsjatuletatud eeskirju, saame:

$$(-4a^3bc^4)^2 = (-4)^2 \cdot (a^3)^2 \cdot (b)^2 \cdot (c^4)^2 = 16a^6b^2c^8;$$

$$(-4a^3bc^4)^3 = (-4)^3 \cdot (a^3)^3 \cdot (b)^3 (c^4)^3 = -64a^9b^3c^{12}.$$

Eeskirjad. 1. Selleks, et saada täis-üksliikme ruutu, on vaja üksliikme kordaja astendada kahega ja tähtede astendajad korrutada kahega.

2. Selleks, et saada täis-üksliikme kuupi, on vaja üksliikme kordaja astendada kolmega ja tähtede astendajad korrutada kolmega.

47. Hulkliikme korrutamine üksliikmega.

Olgu antud korrutada hulkliige $a + b - c$ mingi algebra-lise avaldisega, näiteks üksliikmega, mille tähistame ühe tähega m :

$$(a + b - c) \cdot m.$$

Rakendades korrutamise jaotuvusseadust, saame:

$$(a + b - c) \cdot m = am + bm - cm.$$

Eeskiri. Selleks, et hulkliiget korrutada üksliikmega, on vaja hulkliikme iga liige korrutada selle üksliikmega ja saadud korrutised liita.

Et korrutis ei muutu tegurite järjekorra muutmisel, siis on see eeskiri rakendatav ka üksliikme korrutamisel hulkliikmega. Niisiis $m(a + b - c) = ma + mb - mc$.

Näited.

$$1. (3x^2 - 2ax + 5a^2) \cdot (-4ax).$$

Hulkliikme liikmete korrutamist antud üksliikmega tuleb teostada üksliikmete korrutamise eeskirja järgi, arvestades ka märkide eeskirja: ühesugused märgid annavad korrutamisel +, erisugused aga —.

Korrutame üksliikmega $-4ax$ hulkliikme iga liikme eraldi:

$$(3x^2)(-4ax) = -12ax^3; \quad (-2ax)(-4ax) = +8a^2x^2; \\ (+5a^2)(-4ax) = -20a^3x.$$

Liites saadud tulemused, saame nüüd, et

$$(3x^2 - 2ax + 5a^2) \cdot (-4ax) = -12ax^3 + 8a^2x^2 - 20a^3x.$$

$$2. (a^2 - ab + b^2)(3a) = a^2(3a) - (ab)(3a) + b^2(3a) = \\ = 3a^3 - 3a^2b + 3ab^2.$$

$$3. (7x^2 + \frac{3}{4}ax - 0,3)(2,1a^2x) = (7x^2)(2,1a^2x) + \\ + (\frac{3}{4}ax)(2,1a^2x) - 0,3(2,1a^2x) = \\ = 14,7a^2x^3 + 1,575a^3x^2 - 0,63a^2x.$$

$$4. 2a(3a - 4ax + \frac{1}{2}x^2) = 6a^2 - 8a^2x + ax^2.$$

48. Hulkliikme korrutamine hulkliikmega.

Olgu antud korrutada hulkliige $a + b - c$ hulkliikmega $m - n$; seda saab kirjutada nii:

$$(a + b - c)(m - n).$$

Vaadeldes tegurit $(m - n)$ kui üht arvu (kui üksliiget), rakendame hulkliikme ja üksliikme korrutamise eeskirja:

$$(a + b - c)(m - n) = a(m - n) + b(m - n) - c(m - n).$$

Saadud hulkliikme iga liige kujutab endast üksliikme ja kaksliikme korrutist. Rakendades jällegi eelmist seadust, saame:

$$(am - an) + (bm - bn) - (cm - cn).$$

Avades sulud liitmise ja lahutamise eeskirja kohaselt, saame lõpuks, et

$$(a + b - c)(m - n) = am - an + bm - bn - cm + cn.$$

Eeskiri. Selleks, et hulkliiget korrutada hulkliikmega, on vaja esimese hulkliikme iga liige korrutada teise hulkliikme iga liikmega ja saadud korrutised liita.

Muidugi tuleb ühe hulkliikme liikmete korrutamisel teise hulkliikme liikmetega juhinduda märkide eeskirjadest: ühesugused märgid annavad +, erisugused —.

Näiteks:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)(a^3 - 3ab^2 + b^3).$$

Esmalt korrutame korrutatava kõik liikmed korrutaja esimese liikmega:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)a^3 = a^5 - 5a^4b + a^3b^2 - 3a^3.$$

Siis korrutame korrutatava kõik liikmed korrutaja teise liikmega:

$$\begin{aligned} (a^2 - 5ab + b^2 - 3)(-3ab^2) = \\ = -3a^3b^2 + 15a^2b^3 - 3ab^4 + 9ab^2. \end{aligned}$$

Edasi korrutame kolmanda liikmega:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)(+b^3) = a^2b^3 - 5ab^4 + b^5 - 3b^3;$$

Lõpuks liidame kõik saadud korrutised ja koondame sarnased liikmed; tulemus on:

$$\begin{aligned} a^5 - 5a^4b - 2a^3b^2 - 3a^3 + 16a^2b^3 - \\ - 8ab^4 + 9ab^2 + b^5 - 3b^3. \end{aligned}$$

Näited.

1. $(a - b)(m - n - p) =$
 $= am - bm - an + bn - ap + bp.$
2. $(x^2 - y^2)(x + y) = x^3 - xy^2 + x^2y - y^3.$
3. $(3an + 2n^2 - 4a^2)(n^2 - 5an) =$
 $= 3an^3 + 2n^4 - 4a^2n^2 - 15a^2n^2 - 10an^3 + 20a^3n =$
 $= -7an^3 + 2n^4 - 19a^2n^2 + 20a^3n.$

$$\begin{aligned}
 4. \quad (2a^2 - 3)^2 &= (2a^2 - 3)(2a^2 - 3) = \\
 &= (2a^2)^2 - 3(2a^2) - (2a^2)3 + 9 = \\
 &= 4a^4 - 6a^2 - 6a^2 + 9 = 4a^4 - 12a^2 + 9.
 \end{aligned}$$

Harjutused.

68. $(5a^2b^3)(3ab^4c)$; $(\frac{3}{4}ax^3)(\frac{5}{8}ax^3)$.
69. $(0,3abx)(2,7a^2bx^2)$; $(7a^2b^4c)(3ab^3c^2)(\frac{1}{2}a^3b)$.
70. $(\frac{3}{7}mx^2y^3)^2$; $(2a^3bx^2)^3$.
71. $(0,1xmy^3)^2$; $(\frac{1}{2}m^2ny^3)^3$.
72. $(3a^2 - 2b^3 + c)2ab$.
73. $(5a - 4a^2b + 3a^3b^2 - 7a^4b^3)5a^2b$.
74. $(a + b - c)(m - n)$; $(2a - b)(3a + b^2)$.
75. $(a + \frac{1}{2}b)(2a - b)$; $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$.
76. $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$.
77. $(2x + 3y)(3x - 2y)$; $(y - 1)(y^3 + y^2 + y + 1)$.

49. Korrastatud hulkliige.

Korrastada hulkliige mingi tähe astmete järgi tähendab kirjutada tema liikmed niisuguses järjestuses, et selle tähe astendajad esimesest liikmest viimase poole kasvaksid või kahaneksid. Nii on hulkliige $1 + 2x + 3x^2 - x^3$ korrastatud tähe x tõusvate astmete järjekorras. Sama hulkliige on korrastatud tähe x alanevate astmete järjekorras, kui tema liikmed kirjutame vastupidises järjekorras: $-x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

Tähte, mille järgi hulkliige on korrastatud, nimetatakse tema *põhitäheks*. Liiget, mis sisaldab põhitähte kõige suurema astendajaga, nimetatakse hulkliikme *pealükmeks*; liige, mis sisaldab põhitähte kõige väiksema astendajaga või ei sisaldagi seda, on hulkliikme *madalaim liige*.

50. Korrastatud hulkliikmete korrutamine.

Hulkliikmete korrutamist on kõige sobivam teostada nii, nagu on näidatud järgnevas näites.

Korrutada $3x - 5 + 7x^2 - x^3$ hulkliikmega $2 - 8x^2 + x$.

Mõlemad hulkliikmed korrastatakse tähe x alanevate astmete järjekorras, korrutaja kirjutatakse korrutatava alla ja tema alla tõmmatakse joon:

$$\begin{array}{r} -x^3 + 7x^2 + 3x - 5 \\ -8x^2 + x + 2 \\ \hline 8x^5 - 56x^4 - 24x^3 + 40x^2 \\ -x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 5x \\ -2x^3 + 14x^2 + 6x - 10 \\ \hline 8x^5 - 57x^4 - 19x^3 + 57x^2 + x - 10 \end{array}$$

Korrutatava kõik liikmed korrutatakse korrutaja esimese liikmega ($-8x^2$) ja saadud korrutis kirjutatakse joone alla. Siis korrutatakse korrutatava kõik liikmed korrutaja teise liikmega ($+x$) ja saadud teine korrutis kirjutatakse esimese alla nii, et sarnased liikmed asetseksid sarnaste all. Edasi toimitakse niisamuti. Viimase korrutise alla tõmmatakse joon, mille alla kirjutatakse täielik korrutis, liites kõik osakorrutised.

Hulkliikmed võib korrastada ka tõusvate astmete järjekorras ja siis teostada korrutamine sama korra järgi, mis praegu näidati.

51. Korrutise pealiige ja madalaim liige.

Eelmise näite vaatlemisel selgub, et:

korrutise pealiige võrdub korrutatava ja korrutaja pealiikmete korrutisega;

korrutise madalaim liige võrdub korrutatava ja korrutaja madalaimate liikmete korrutisega.

Et korrutise iga ülejäänud liikmes põhitähe astendaja kujuneb väiksemaks kui pealiikmes ja ühtlasi suuremaks kui madalaimas liikmes, siis ei leidu korrutise pealiikmega ega madalaima liikmega sarnaseid liikmeid.

Korrutise ülejäänud liikmed võivad tekkida mitme sarnase liikme ühendamisel üheks liikmeks. Võib juhtuda isegi, et pärast sarnaste liikmete koondamist korrutises hävivad kõik liikmed peale pealiikme ja madalaima liikme, nagu see nähtub järgnevast näitest:

$$\begin{array}{r}
 x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4 \\
 x - a \\
 \hline
 x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x \\
 - ax^4 - a^2x^3 - a^3x^2 - a^4x - a^5 \\
 \hline
 x^5 - a^5 = x^5 - a^5
 \end{array}$$

52. Korrutise liikmete arv.

Olgu korrutatavas 5 liiget ja korrutajas 3 liiget. Korrutades korrutatava iga liikme korrutaja esimese liikmega, saame korrutisse 5 liiget; korrutades siis korrutatava iga liikme korrutaja teise liikmega, saame korrutisse veel 5 liiget jne.; tähendab, korrutisse tuleb üldse $5 \cdot 3$, s. o. 15 liiget. Üldiselt: **korrutise liikmete arv enne sarnaste liikmete koondamist võrdub korrutatava liikmete arvu ja korrutaja liikmete arvu korrutisega.**

Et korrutises pealiikmega ja madalaima liikmega sarnaseid liikmeid ei ole, kõik teised liikmed aga võivad hävida, siis **kahe või mitme hulkliikme korrutise liikmete arv pärast sarnaste liikmete koondamist ei saa olla väiksem kui kaks.**

Harjutused.

78. Korrastada järgmised hulkliikmed tähe x alanevate astmete järjekorda ja korrutada:

$$24x + 6x^2 + x^3 + 60 \quad \text{ja} \quad 12x - 6x^2 + 12 + x^3.$$

79. $(x^5 - x^3 + x - 1)(x^4 + x^2 - 1)$.

80. $(x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5)(x + a)$.

53. Mõned kaksliikmete korrutamise valemid.

Järgmised kaksliikmete korrutamise valemid on kasulik meeles pidada:

$$\begin{aligned} \text{a) } (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned}$$

Näiteks:

$$\begin{aligned} 17^2 &= (10 + 7)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 7 + 7^2 = \\ &= 100 + 140 + 49 = 289. \end{aligned}$$

Niisiis kahe arvu summa ruut võrdub esimese arvu ruuduga pluss kahekordne esimese ja teise arvu korrutis pluss teise arvu ruut.

$$\begin{aligned} \text{b) } (a - b)^2 &= (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2. \end{aligned}$$

Näiteks:

$$\begin{aligned} 19^2 &= (20 - 1)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = \\ &= 400 - 40 + 1 = 361. \end{aligned}$$

Niisiis kahe arvu vahe ruut võrdub esimese arvu ruuduga miinus kahekordne esimese ja teise arvu korrutis pluss teise arvu ruut.

c) Et kahe arvu kui ka üldiselt kahe algebralise avaldise vahet saab esitada algebralise summana, siis mõlemad eelmised eeskirjad saab ühendada üheks ja sõnastada nii:

kaksliikme ruut võrdub esimese liikme ruuduga pluss kahekordne esimese ja teise liikme korrutis pluss teise liikme ruut.

Näiteks:

$$1. (2ab - c^2)^2 = (2ab)^2 + 2(2ab)(-c^2) + (-c^2)^2 = \\ = 4a^2b^2 - 4abc^2 + c^4.$$

$$2. (-m + 3n^3)^2 = (-m)^2 + 2(-m)(3n^3) + (3n^3)^2 = \\ = m^2 - 6mn^3 + 9n^6.$$

$$d) (a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Näiteks:

$$25 \cdot 15 = (20 + 5) \cdot (20 - 5) = \\ 20^2 - 5^2 = 400 - 25 = 375.$$

Niisiis kahe arvu summa ja nende vahe korrutis võrdub nende arvude ruutude vahega.

54. Nende valemite rakendamine.

Saadud valemite abil on hulkliikmete korrutamist mõnikord lihtsam teostada kui harilikul viisil.

Näited.

$$1. (4a^3 - 1)^2 = (4a^3)^2 - 2(4a^3) \cdot 1 + 1^2 = \\ = 16a^6 - 8a^3 + 1.$$

$$2. (x + y)(y - x) = (y + x)(y - x) = y^2 - x^2.$$

$$3. (x + y + 1)(x - y + 1) = \\ = [(x + 1) + y][(x + 1) - y] = \\ = (x + 1)^2 - y^2 = x^2 + 2x + 1 - y^2.$$

$$4. (a - b + c)(a + b - c) = \\ = [a - (b - c)][a + (b - c)] = a^2 - (b - c)^2 = \\ = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - b^2 + 2bc - c^2.$$

Harjutused.

$$81. (a + 1)^2; \quad (1 + 2a)^2; \quad (x + \frac{1}{2})^2.$$

$$82. (3a^2 + 1)^2; \quad (0,1mx + 5x^2)^2.$$

$$83. (5a - 2)^2; \quad (3x - 2a)^2; \quad (3a^2 - \frac{1}{2})^2.$$

84. Kasutades $(a + b)^2$ ja $(a - b)^2$ valemeid, leida järgmised ruudud:

$$101^2; \quad 997^2; \quad 96^2; \quad 57^2; \quad 72^2; \quad 89^2.$$

$$85. (2m - 3n)^2; \quad (3a^2x - 4ay)^2; \quad (0,2x^3 - \frac{3}{8})^2.$$

$$86. (\frac{1}{2}x^2 - 3\frac{1}{2}x)^2; \quad (0,25p - 0,2q)^2.$$

$$87. (a + 1)(a - 1); \quad (2a + 5)(2a - 5).$$

$$88. (2x - 3)(3 + 2x); \quad (a^2 + 1)(1 - a^2).$$

Leida järgmised korrutised lühendatud viisil:

$$89. (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1); \quad (4x^2 + y^2)(2x + y)(2x - y).$$

$$90. (m + n - p)(m + n + p); \quad [a + (b + c)][a - (b + c)].$$

55. Kahe arvu summa kuup ja vahe kuup.

Kaksliikmete korrutamise valemitele lisandame veel järgmised kaks valemit:

$$\begin{aligned} a) \quad (a + b)^3 &= (a + b)^2(a + b) = \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = \\ &= a^3 + \underline{2a^2b} + \underline{ab^2} + \underline{a^2b} + \underline{2ab^2} + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \end{aligned}$$

s. t. kahe arvu summa kuup võrdub esimese arvu kuubiga pluss kolmekordne esimese arvu ruudu ja teise arvu korrutis pluss kolmekordne esimese arvu ja teise arvu ruudu korrutis pluss teise arvu kuup.

Näiteks:

$$\begin{aligned} 11^3 &= (10 + 1)^3 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot 1 + 3 \cdot 10 \cdot 1^2 + 1^3 = \\ &= 1000 + 300 + 30 + 1 = 1331; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad (a - b)^3 &= (a - b)^2(a - b) = \\ &= (a^2 - 2ab + b^2)(a - b) = \\ &= a^3 - \underline{2a^2b} + \underline{ab^2} - \underline{a^2b} + \underline{2ab^2} - b^3 = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \end{aligned}$$

s. t. kahe arvu vahe kuup võrdub esimese arvu kuubiga miinus kolmekordne esimese arvu ruudu ja teise arvu korrutis pluss kolmekordne esimese arvu ja teise arvu ruudu korrutis miinus teise arvu kuup.

Näiteks:

$$29^3 = (30 - 1)^3 = 30^3 - 3 \cdot 30^2 \cdot 1 + 3 \cdot 30 \cdot 1^2 - 1^3 = \\ = 27\,000 - 2\,700 + 90 - 1 = 24\,389.$$

Kui astendatava kaksliikme liikmed võtta nende märki-
dega, siis mõlemad eelmised eeskirjad saab ühendada üheks:

kaksliikme kuup võrdub esimese liikme kuubiga pluss
kolmekordne esimese liikme ruudu ja teise liikme korrutis
pluss kolmekordne esimese liikme ja teise liikme ruudu korrutis
pluss teise liikme kuup.

Näiteks:

$$(2a - 3b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(-3b) + \\ + 3(2a)(-3b)^2 + (-3b)^3 = \\ = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3.$$

Harjutused.

91. $(a + 1)^3$; $(a - 1)^3$; $(2x + 3)^3$; $(5 + 3x)^3$.
92. $(\frac{1}{2}m - 2)^3$; $(\frac{3}{4}p + \frac{1}{3}q)^3$; $(5 - 3x)^3$.

IV. Algebraalne jagamine.

56. Üksliikmete jagamine.

a) Nõutagu jagada:

$$a^5 : a^2.$$

Et jagatav peab võrduma jagaja ja jagatise korrutisega ning et ühesuguste tähtede astendajad korrutamisel liidetakse, siis otsitavas jagatises tähe a astendajaks peab olema niisugune arv, mis liitmisel arvuga 2 annab 5; see arv on vahe $5 - 2$. Tähendab:

$$a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3.$$

Niisamuti leiame, et

$$x^3 : x^2 = x; \quad y^4 : y = y^3 \text{ jms.}$$

Tähendab, ühe ja sama arvu astmete jagatis võrdub selle arvu niisuguse astmega, millel astendajaks on jagatava astendaja ja jagaja astendaja vahe. Seda väljendatakse lühemalt nõnda: **ühe ja sama arvu astmete jagamisel lahutatakse jagatava astendajast jagaja astendaja.**

b) Olgu antud jagada:

$$12a^3b^2x : 4a^2b^2.$$

Vastavalt jagamise mõistele jagatise ja jagaja korrutis peab võrduma jagatavaga. Seepärast otsitava jagatise kordaja peab olema $12 : 4$, see on 3; tähe a astendaja saadakse jagatavas esineva selle tähe astendajast lahutades jagajas esineva sama tähe astendaja, täht b üldse ei tule jagatisse ja täht x läheb jagatisse ühes oma astendajaga.

Niisiis $12a^3b^2x : 4a^2b^2 = 3ax.$

Kontroll: $3ax \cdot 4a^2b^2 = 12a^3b^2x.$

Eeskiri. Selleks, et üksliiget jagada üksliikmega, on vaja jagatava kordaja jagada jagaja kordajaga, jagatava tähtede astendajaist lahutada jagaja samade tähtede astendajad ja kanda üle jagatisse ilma astendajate muutmiseta need jagatava tähed, mis jagajas ei esine.

Näited:

1. $3m^3n^4x : 4m^2nx = \frac{3}{4}mn^3.$

2. $-ax^4y^3 : (-\frac{5}{8}axy^2) = +\frac{6}{5}x^3y.$

3. $0,8ax^n : (-0,02ax) = -40x^{n-1}.$

57. Nulliline astendaja.

Kui ühe ja sama arvu astmete jagamisel jagaja astendaja osutub võrdseks jagatava astendajaga, siis jagatis peab olema 1; näiteks $a^3 : a^3 = 1$, sest $a^3 = a^3 \cdot 1$. Lepime kokku teostada astendajate lahutamist ka sel juhul; me saame siis jagatiseks nullilise astendajaga tähe: $a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0.$

See astendaja muidugi ei oma seda tähendust, mis astendajale varem andsime, sest arvu ei ole võimalik võtta 0 korda tegurina. Me lepime kokku mõista avaldist a^0 kui arvu a ühesuguste astmete jagatist, ja kuna see jagatis on 1, siis a^0 loeme arvuks 1.

58. Üksliikmete jagamise võimatuse tunnused.

Kui täis-üksliikmete jagamise tulemust ei saa täpselt avaldada täis-üksliikmena, siis öeldakse, et see jagamine on võimatu. Üksliikmete jagamine on võimatu kahel juhul.

a) **Kui jagajas on tähti, mida ei leidu jagatavas.** Näiteks ei ole võimalik $4ab^2$ jagada üksliikmega $2ax$, sest iga täis-üksliikme korrutamisel avaldisega $2ax$ saadakse korrutis, mis sisaldab tähte x , mida aga meie jagatavas üldse ei ole.

b) **Kui mingi tähe astendaja jagajas on suurem kui sama tähe astendaja jagatavas.** Näiteks jagamine $10a^3b^2 : 5ab^3$ on võimatu, sest missuguse täis-üksliikme me ka jagatiseks kirjutaksime, korrutatult jagajaga annab ta ikka üksliikme, milles tähe b astendaja ei ole väiksem kui 3, kuid jagatavas see täht esineb ainult astendajaga 2.

Kui üks üksliige ei jagu teisega, siis jagatist on võimalik tähistada jagamismärkide abil; nii on üksliikmete $4a$ ja $5b$ jagatis

$$4a : 5b \text{ ehk } \frac{4a}{5b}.$$

Harjutused.

93. $8a^5x^3y : 4a^3x^2; \quad 3ax^3 : (-5ax).$

94. $a^8b : (-\frac{5}{8}a^5b); \quad 12amb^3 : 4ab.$

59. Hulkliikme jagamine üksliikmega.

Oletame, et nõutakse hulkliikme $a + b - c$ jagamist mingi üksliikmega, mille tähistame ühe tähega m :

$$(a + b - c) : m \text{ ehk } \frac{a + b - c}{m}.$$

Hulkliige $a + b - c$ on algebraalne summa, ja algebra-
lise summa jagamiseks mingi arvuga võib selle arvuga
jagada iga liidetava eraldi. Seetõttu

$$\frac{a + b - c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}.$$

Selles saab veenduda ka kontrollimisega: korrutades hulk-
liikme $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}$ jagajaga m , saame jagatava $a + b - c$.

Eeskiri. Selleks, et hulkliiget jagada üksliikmega, on vaja
selle üksliikmega jagada hulkliikme iga liige ja saadud jaga-
tised liita.

Näited.

$$1. (20a^3 - 8a^2 - a) : 4a = 5a^2 - 2a - \frac{1}{4}.$$

$$2. (4x^2 - 2x + 10) : 2x = 2x - 1 + \frac{5}{x}.$$

$$3. (\frac{1}{2}x^3 - 0,3x^2 + 1) : 2x^2 = \frac{1}{4}x - 0,15 + \frac{1}{2x^2}.$$

Harjutused.

$$95. (4a^2b + 6ab^2 - 12a^3b^5) : \frac{2}{3}ab.$$

$$96. (36a^2x^5 - 24a^3x^4 + 4a^4x^3) : 4a^2x^3.$$

$$97. (3a^2y - 6a^2y^2 + 3a^2y^3 - 3a^2y^4) : 3a^2y.$$

60. Üksliikme jagamine hulkliikmega.

Oletame, et nõutakse näiteks jagada üksliige a hulkliik-
mega $b + c - d$. Seda jagatist ei saa avaldada ei täis-üks-
liikmena ega ka täis-hulkliikmena, sest kui oletame, et jaga-
tis on võrdne mingi täis-üksliikmega või täis-hulkliikmega,
siis korrutades selle jagatise hulkliikmega $b + c - d$, saak-
sime samuti hulkliikme, mitte aga üksliikme (§ 45, 47).
Tulemust, mis saadakse a jagamisel hulkliikmega $b + c - d$,
tähistatakse jagatismärkide abil nii:

$$a : (b + c - d) \text{ ehk } \frac{a}{b + c - d}.$$

61. Hulkliikme jagamine hulkliikmega.

Kahe hulkliikme jagatis on ainult erandjuhtudel avaldatav täis-hulkliikme kujul. Näiteks

$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b,$$

sest

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

Üldiselt aga selliseid jagatise saab tähistada jagamisjärki abil. Näiteks hulkliikmete $a - b + c$ ja $d - e$ jagatis avaldub nõnda:

$$\frac{a - b + c}{d - e} \text{ ehk } (a - b + c) : (d - e).$$

62. Korrastatud hulkliikmete jagamine.

Mõnikord õnnestub kahe hulkliikme jagatist avaldada täis-hulkliikme kujul. Näitame järgneva näite abil, kuidas seda teha:

$$(5x^2 - 19x^3 + 17x + 6x^4 - 4) : (1 - 5x + 3x^2).$$

Kirjutame mõlemad hulkliikmed tähe x alanevate astmete järjekorras ja paigutame jagamise nii, nagu ta paikneb täisarvude jagamisel:

	$6x^4 - 19x^3 + 5x^2 + 17x - 4$	$3x^2 - 5x + 1$
	$- 6x^4 + 10x^3 - 2x^2$	$\frac{2x^2 - 3x - 4}{}$
1. jääk	$- 9x^3 + 3x^2 + 17x - 4$	
	$+ 9x^3 - 15x^2 + 3x$	
2. jääk	$- 12x^2 + 20x - 4$	
	$+ 12x^2 - 20x + 4$	
3. jääk	0	

Oletame, et otsitav jagatis on mingi hulkliikme ja et see hulkliikme on samuti korrastatud tähe x alanevate astmete järjekorras.

Jagatav peab võrduma jagaja ja jagatise korrutisega. Korrastatud hulkliikmete korrutamisesest on teada, et korrutise pealiige võrdub korrutatava pealiikme ja korrutaja pealiikme korrutisega. Jagatava pealiige on esimene, jagajas ja jagatavas on pealiikmed samuti esimesed. Tähendab, jagatava esimene liige ($6x^4$) peab olema jagaja esimese liikme ($3x^2$) ja jagatise esimese liikme korrutis. Siit järeldub, et jagatise esimese liikme leidmiseks tuleb jagatava esimene liige jagada jagaja esimese liikmega. Jagades leiame, et jagatise esimene liige on $2x^2$. Selle kirjutame joone alla jagatisse.

Korrutame jagaja kõik liikmed jagatise esimese liikmega ja saadud korrutise lahutame jagatavast. Selleks kirjutame ta jagatava alla nii, et sarnased liikmed asetseksid sarnaste liikmete all, ja muudame lahutatava kõikide liikmete märgid vastandmärkideks. Pärast lahutamist saame esimese jäägi. Kui see jääk osutuks nulliks, siis see tähendaks, et jagatises muid liikmeid peale leitud esimese liikme ei ole, s. t. jagatis oleks üksliige. Kui aga esimene jääk ei ole null, nagu meie näites, siis arutame edasi nõnda:

Jagatav peab tekkima jagaja kõikide liikmete korrutamisel jagatise iga liikmega. Me lahutasime jagatavast ainult avaldise, mis tekkis jagaja kõikide liikmete korrutamisel jagatise esimese liikmega; järelikult esimene jääk sisaldab kõik järgmised osakorrutised, mis saadakse jagaja kõikide liikmete korrutamisel jagatise teise liikmega, kolmanda liikmega ja kõikide ülejäänud liikmetega. Jäägi pealiige on esimene; jagaja pealiige on samuti esimene; jagatise järgmine liige on teine. Tähendab, jäägi esimene liige ($-9x^3$) peab võrduma jagaja esimese liikme ja jagatise teise liikme korrutisega. Siit järeldub, et jagatise teise liikme leidmiseks tuleb esimese jäägi esimene liige jagada jagaja esimese liikmega. Jagades leiame, et jagatise teine liige on $-3x$. Selle kirjutame jagatisse.

Korrutame jagaja kõik liikmed jagatise teise liikmega ja saadud korrutise lahutame esimesest jäägist. Saame teise jäägi. Kui see jääk on null, siis jagamine on lõppenud; kui aga teine jääk ei ole null, nagu meil näites, siis arutame nii:

Teine jääk sisaldab liikmeid, mis saadakse jagaja kõikide liikmete korrutamisel jagatise kolmanda, neljanda ja järgnevate liikmetega. Et neist jagatise liikmeist kõrgeim on kolmas, siis eelneva eeskujul jagatise kolmanda liikme leiame, kui teise jäägi esimese liikme jagame jagaja esimese liikmega. Jagades saame — 4. Korrutades jagaja kõik liikmed — 4-ga ja lahutades korrutise jäägist, saame kolmanda jäägi. Meie näites see jääk osutub nulliks; see näitab, et jagatises rohkem liikmeid ei saa olla. Kui kolmas jääk ei oleks null, siis selle jäägi esimene liige tuleks jagada jagaja esimese liikmega; sellega saaksime jagatise neljanda liikme, jne.

Jagatavat ja jagajat oleks võinud korrastada ühe ja sama tähe tõusvate astmete järjekorras ja siis toimida nii, nagu praegu kirjeldatud; seejuures oleks tulnud tugineda sellele, et korrutise madalaim liige võrdub korrutatava madalaima liikme ja korrutaja madalaima liikme korrutisega.

Näited.

$$\begin{array}{r|l}
 \text{a) } 28x^4 - 13ax^3 - 26a^2x^2 + 15a^3x & 7x^2 + 2ax - 5a^2 \\
 \text{,, } - 8ax^3 + 20a^2x^2 & \hline
 - 21ax^3 - 6a^2x^2 + 15a^3x & \\
 \text{,, } + 6a^2x^2 - 15a^3x & \\
 \hline
 & 0
 \end{array}$$

Siin me ei kirjutanud jagaja esimese liikme korrutist jagatise esimese liikmega, jagaja teise liikmega jne., sest need korrutised on alati võrdsed nende liikmetega, mille alla

asuda jagamise teostamisele ja jätkata seda seni, kuni lõplikult veendume hulkliikme-kujulise jagatise saamise võimalikkuses või võimatuses.

Harjutused.

98. $(x^2 - 3x - 4) : (x + 1); \quad (y^2 - y - 2) : (y - 2).$
 99. $(6x^3 + 2 - 3x^2 - 4x) : (2x - 1).$
 100. $(3ax^5 - 15a^2x^4 + 6a^3x^3) : (x^2 - 5ax + 2a^2).$
 101. $(x^6 - a^6) : (x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5).$

V. Teguriteks lahutamine.

64. Eelmärkus.

Algebralisest jagamisest kõneldes näitasime, et mõnel juhul on jagatist võimalik tähistada ainult jagatismärgi abil. Seejuures saadavaid avaldisi, nagu $\frac{a}{b}$, $\frac{2x}{3a}$, $\frac{x^2 - 4x + 4^2}{x + y}$ jt., nimetatakse tavaliselt *algebralisteks murdudeks*.

Peatselt näeme, et algebralisi murde, nagu aritmeetilisigi, on mõnikord võimalik taandamise teel lihtsustada, s. t. jagatav ja jagaja jagada nende ühiste teguritega, kui selliseid leidub. Selleks, et niisugust taandamist oleks võimalik ilma raskusteta teha, tuleb õppida algebralisi avaldisi teguriteks lahutama (niisamuti nagu aritmeetikas murdude taandamiseks on vaja osata täisarve lahutada neid moodustavaks tegureiks).

65. Täis-üksliikmete teguriteks lahutamine.

Võtame mingi täis-üksliikme, näiteks $6a^2b^3$. Et ta on korutis, siis tema välise kuju järgi on otsekohe võimalik teda tegureiks lahutada. Nii

$$6a^2b^3 = 2 \cdot 3 (aa) (bbb) = 2 \cdot 3aabb^3.$$

Ühendades need tegurid mingisugustesse rühmadesse (korrutamise ühenduvusseaduse alusel), saame näidata selle üksliikme mitmesuguseid lahutusi, näiteks:

$$6a^2b^3 = (6a)(ab^3) = (2a^2b)(3b^2) = (3ab^2)(2ab) \text{ jms.}$$

66. Hulkliikme teguriteks lahutamine.

Näitame hulkliikme teguriteks lahutamise lihtsamaid juh-
tusid.

a) Et

$$(a + b - c) m = am + bm - cm,$$

siis ka ümberpöördult

$$am + bm - cm = (a + b - c) m.$$

Niisiis hulkliikme kõikide liikmete ühise teguri võib sulgu-
dest välja viia.

Näited:

1. $x^6 - 2x^2 + 3x = x(x^5 - 2x + 3).$

2. $16a^2 - 4a^3 = 4a^2(4 - a).$

3. $5m(x - 1) + 3n(x - 1) = (x - 1)(5m + 3n).$

b) Et

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

siis ka ümberpöördult

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Niisiis kahe arvu ruutude vahe võib asendada nende
arvude summa ja vahe korrutisega.

N ä i t e d.

1. $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2).$

2. $y^2 - 1 = y^2 - 1^2 = (y + 1)(y - 1).$

3. $9a^2 - \frac{1}{4} = (3a)^2 - (\frac{1}{2})^2 = (3a + \frac{1}{2})(3a - \frac{1}{2}).$

4. $25x^2 - 0,01 = (5x)^2 - 0,1^2 = (5x + 0,1)(5x - 0,1).$

5. $m^4 - n^4 = (m^2)^2 - (n^2)^2 = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2) =$
 $= (m^2 + n^2)(m + n)(m - n).$

$$6. \quad x^2 - (x-1)^2 = [x + (x-1)] [x - (x-1)] = \\ = (x+x-1)(x-x+1) = 2x-1.$$

c) Et

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ja $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
siis ka ümberpöördukt

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

ja

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 = (a-b)(a-b).$$

Tähendab, kui kolmliige kujutab endast kahe arvu ruutude summat, mis on suurendatud või vähendatud nende arvude kahekordse korrutise võrra, siis teda võib asendada nende arvude summa või vahe ruuduga.

Näited.

1. $a^2 + 2a + 1$.

Et

$$1 = 1^2 \text{ ja } 2a = 2 \cdot a \cdot 1, \text{ siis } a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2.$$

2. $x^4 + 4 - 4x^2$.

Siin $x^4 = (x^2)^2$, $4 = 2^2$ ja $4x^2 = 2x^2 \cdot 2$; seetõttu

$$x^4 + 4 - 4x^2 = (x^2 - 2)^2.$$

Võib kirjutada ka, et $x^4 + 4 - 4x^2 = (2 - x^2)^2$, sest kaksliikmete $x^2 - 2$ ja $2 - x^2$ ruudud on kolmliikmed, mis erinevad ainult liikmete järjekorra poolest:

$$(x^2 - 2)^2 = x^4 - 4x^2 + 4; \quad (2 - x^2)^2 = 4 - 4x^2 + x^4.$$

3. $-x + 25x^2 + 0,01$.

Siin on kaks ruutu: $25x^2 = (5x)^2$ ja $0,01 = 0,1^2$. Arvude $5x$ ja $0,1$ kahekordne korrutis on $2 \cdot 5x \cdot 0,1 = x$. Et antud kolmliikmes mõlemad ruudud on märgiga +, kahekordne korrutis (s. o. x) aga märgiga -, siis

$$-x + 25x^2 + 0,01 = 25x^2 - x + 0,01 = \\ = (5x - 0,1)^2 = (0,1 - 5x)^2.$$

$$4. -x^2 - y^2 + 2xy.$$

Viime märgi — sulgude ette: $-(x^2 + y^2 - 2xy)$. Sulgudes seisev kolmliige on ilmselt $(x - y)^2$. Tähendab:

$$\begin{aligned} -x^2 - y^2 + 2xy &= -(x^2 + y^2 - 2xy) = \\ &= -(x - y)^2 = -(y - x)^2. \end{aligned}$$

d) Mõnikord saab hulkliiget teguriteks lahutada tema liikmete mõnesuguse rühmitamise abil.

Näited.

$$1. ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by) = \\ = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b).$$

$$2. 12 - 4x - 3x^2 + x^3 = (12 - 4x) - (3x^2 - x^3) = \\ = 4(3 - x) - x^2(3 - x) = (3 - x)(4 - x^2) = \\ = (3 - x)(2 + x)(2 - x).$$

$$3. m^2 + n^2 - 2mn - p^2 = (m^2 + n^2 - 2mn) - p^2 = \\ = (m - n)^2 - p^2 = (m - n + p)(m - n - p).$$

$$4. x^2 - y^2 + 6y - 9 = x^2 - (y^2 - 6y + 9) = \\ = x^2 - (y - 3)^2 = [x + (y - 3)][x - (y - 3)] = \\ = (x + y - 3)(x - y + 3).$$

e) Mõnikord on kasulik lisada abistavaid liikmeid või mingi liige lahutada kaheks liikmeks.

Näited.

$$1. a^3 - b^3 = a^3 - a^2b + a^2b - b^3 = \\ = a^2(a - b) + b(a^2 - b^2) = \\ = a^2(a - b) + b(a + b)(a - b) = (a - b)[a^2 + b(a + b)] = \\ = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

$$2. a^3 + b^3 = a^3 + a^2b - a^2b + b^3 = \\ = a^2(a + b) - b(a^2 - b^2) = (a + b)[a^2 - b(a - b)] = \\ = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

$$3. 2x^2 + 3xy + y^2 = 2x^2 + 2xy + xy + y^2 = \\ = 2x(x + y) + y(x + y) = (x + y)(2x + y).$$

Harjutused.

102. $2a + 2x$; $ax + ay$; $4y^2 - 6xy$.
103. $4ax - 2ay$; $6x^2y + 9xy^2$.
104. $12a^2b - 9a^2b^2 - 6ab^3$; $xy^2 - 7xy + 4x^2y$.
105. $m^2 - n^2$; $a^2 - 1$; $1 - a^2$.
106. $x^2 - 4$; $m^2 - 9$; $4x^2 - y^2$.
107. $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{9}y^6$; $0,01a^6 - 9$; $3a^5 - 48ab^8$.
108. $(x - y)^2 - a^2$; $9(a + 2b)^2 - 1$; $a^2 - (b + c)^2$.
109. $(x + y)^2 - (x - y)^2$; $16x^2 - 4(x + y)^2$.
110. $x^2 - 2xy + y^2$; $m^2 + n^2 + 2mn$.
111. $2ab + a^2 + b^2$; $a^2 - 4ab + 4b^2$.
112. $x^2 + 8x + 16$; $x^2 + 1 + 2x$.
113. $5a^3 - 20a^2b + 20ab^2$.
114. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$; $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$.
115. $ax + bx + ay + by$; $ac - ad + bd - bc$.
116. $a^2 + ab - a - b$; $xz - 3y - 3z + xy$.
117. $4mn + xy - 2nx - 2my$; $8a^3 - 12a^2 - 18a + 27$ (kolmeks teguriks).

VI. Algebraised murrud.

67. Algebraise murru erinevus aritmeetilisest murrust.

Kahe algebraise avaldise jagatist nimetatakse *algebra-liseks murruks*. Niisugused on näiteks

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a+b}{c-d}, \quad \frac{2x^2-x+5}{x+2}.$$

Vaatleme mõningaid algebraiste murrude iseärasusi.

Võtame murru $\frac{a}{b}$; leiame tema numbrilise väärtuse juhul, kui $a = 12$ ja $b = 4$, siis juhul, kui $a = 3$ ja $b = 7$, edasi juhul, kui $a = -20$ ja $b = 30$, lõpuks juhul, kui $a = 0$ ja $b = 3$. Saame vastavalt arvud 3 , $\frac{3}{7}$, $-\frac{2}{3}$ ja 0 . Niisiis

algebraise murru numbriline väärtus võib olla täisarv või murdarv, positiivne arv või negatiivne arv või ka null.

Et a ja b saavad omandada, sõltuvalt ülesande tingimustest, igasuguseid numbrilisi väärtusi, siis:

algebraalse murru lugeja kui ka nimetaja võib olla täisarv ja murdarv, positiivne ja negatiivne. Murru lugeja võib muutuda ka nulliks; kui aga nimetaja muutub nulliks, siis murd kaotab mõtte (sest nulliga jagada ei saa).

Niisiis algebraalse murru mõiste on laiem aritmeetilise murru mõistest. Viimast saab vaadelda kui algebraalse murru erijuhtu.

68. Murru põhiomadus.

Et murd on tema lugeja ja nimetaja jagatis ja et jagatis ei muutu jagatava ja jagaja korrutamisel (või jagamisel) ühe ja sama arvuga (välja arvatud null, § 34, d), siis sama omadus on ka murrul, s. o. murru suurus ei muutu, kui tema lugeja ja nimetaja korrutada (või jagada) ühe ja sama arvuga (peale nulli). Kui näiteks murru $\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}}$ lugeja ja nimetaja korrutame arvuga $-\frac{4}{9}$, siis endine murd on

$$-\frac{2}{3} : \frac{7}{5} = -\frac{10}{21};$$

uus murd on

$$\begin{aligned} \left[\left(-\frac{2}{3} \right) \cdot \left(-\frac{4}{9} \right) \right] : \left[\frac{7}{5} \cdot \left(-\frac{4}{9} \right) \right] &= \left(+\frac{8}{27} \right) : \left(-\frac{28}{45} \right) = \\ &= -\frac{8 \cdot 45}{27 \cdot 28} = -\frac{8 \cdot 5}{3 \cdot 28} = -\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = -\frac{10}{21}; \end{aligned}$$

me näeme, et murru suurus on jäänud endiseks.

Seda murru omadust kasutades saame algebraaliste murdudega teostada neidsamu teisendusi, mida aritmeetika näitab aritmeetiliste murdude jaoks, s. o. me võime murde taandada, kui see on võimalik, ja teisendada neid ühenimelisteks, kui see on vajalik.

69. Lugeja ja nimetaja teisendamine täisavaldisteks.

Kui juhtub, et murru lugeja ja nimetaja ise sisaldavad murde, siis korrutades neid sobivalt valitud arvuga või algebralise avaldisega saab vabaneda neist murdudest. Näiteks:

- 1) $\frac{\frac{3}{4}a}{b}$; korrutades lugeja ja nimetaja arvuga 4, saame $\frac{3a}{4b}$;
- 2) $\frac{\frac{2}{8}m}{\frac{7}{8}n}$; „ „ „ „ „ „ 24, „ $\frac{16m}{21n}$;
- 3) $\frac{ax-1}{1-\frac{1}{x}}$; „ „ „ „ „ „ x , „ $\frac{ax^2-x}{x-1}$.

Harjutused.

Teisendada lugeja ja nimetaja täisavaldisteks:

$$118. \frac{\frac{5}{7}x}{y}; \frac{0,3ab}{m}; \frac{a^2}{1\frac{3}{8}b}; \frac{m}{2,36n}. \quad 119. \frac{\frac{3}{4}ab}{\frac{5}{6}x^2}; \frac{3\frac{1}{2}a^3}{3\frac{3}{4}b}; \frac{3x-\frac{1}{4}}{a-b}.$$

$$120. \frac{2\frac{1}{8}(a+b)}{4\frac{1}{4}}; \frac{3a-\frac{7}{8}}{1-\frac{1}{6}a}. \quad 121. \frac{ax+b+\frac{c}{x}}{ax+1}; \frac{1+\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}.$$

70. Lugeja ja nimetaja märkide muutmise.

Muuta märk murru lugejal ja nimetajal vastandmärgiks tähendab nende korrutamist arvuga -1 , mis teatavasti murru suurust ei muuda.

Näiteks:

$$\frac{-8}{-4} = 2 \text{ ja } \frac{+8}{+4} = 2; \quad \frac{-10}{+2} = -5 \text{ ja } \frac{+10}{-2} = -5.$$

Kui muudame märgi murru enda ees ja ühtlasi lugeja (või nimetaja) ees, siis murru suurus samuti ei muutu; näiteks:

$$\frac{-10}{+2} = -5; \quad -\frac{-10}{-2} = -5; \quad -\frac{+10}{+2} = -5.$$

Neid murru omadusi saab mõnikord kasutada murru teisendamisel, näiteks:

$$\frac{m^2 - n^2}{n - m} = -\frac{m^2 - n^2}{-(n - m)} = -\frac{(m + n)(m - n)}{m - n} = -(m + n).$$

Harjutused.

Muuta märgid murru lugejal ja nimetajal:

122. $\frac{1 - x}{-x}; \quad \frac{-3a^2}{a - b}; \quad \frac{1 - a}{2 - b}.$

123. $\frac{-a^2 - b^2 + 2ab}{b - a}; \quad \frac{1 - m^2}{-m + 1}.$

124. Panna märk — iga murru ette nii, et murru suurus ei muutuks:

$$\frac{-3a}{6}; \quad \frac{5x^2}{-3}; \quad \frac{1 - a}{b}; \quad \frac{a}{2 - x}; \quad \frac{m^2 - n^2}{n - m}.$$

71. Murdude taandamine.

Kui algebralise murru lugejal ja nimetajal leidub ühiseid tureid, siis saab murdu anda lihtsamal kujul.

Näited.

$$\frac{48ab}{60ac} = \frac{4b}{5c}; \quad \frac{3a^2b}{7a^3b} = \frac{3}{7a}; \quad \frac{160a^5b^2cd^2}{120a^3b^5c} = \frac{4a^2d^2}{3b^3}.$$

Toodud näidetest nähtub, et

murdude taandamisel lugeja ja nimetaja kordajad jagatakse nende ühise teguriga ja ühise tähega tegurid jagatakse selle ühise astmega, millega nad esinevad lugejas ja nimetajas.

Kui murru lugeja vői nimetaja (vői see ja teine) on hulkliikmed, siis esmalt on vaja need hulkliikmed lahutada teguriteks (nii, nagu näidati §-s 66); kui nende hulgas leidub ühesuguseid tegureid, siis nendega vöib murdu taandada.

Näited.

$$\frac{6x^2 + 8xy}{9xy + 12y^2} = \frac{2x(3x + 4y)}{3y(3x + 4y)} = \frac{2x}{3y};$$

$$\frac{x^2 - 1}{2x + 2} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{2(x + 1)} = \frac{x - 1}{2} = \frac{1}{2}(x - 1).$$

(2-ga jagamine on asendatud $\frac{1}{2}$ -ga korrutamisega.)

Harjutused.

Taandada murrud:

125. $\frac{7}{7x}; \frac{2m}{3m^2}; \frac{4a^2b}{6ab^2}; \frac{42x^3y^3}{112x^2y^2}.$

126. $\frac{12ab}{8ax}; \frac{3a^2bc}{12ab^2}; \frac{48a^3x^2y^4}{45a^2xy}.$

127. $\frac{ab}{a^2 + ab}; \frac{9xy}{3x^2 - 3xy}; \frac{4a + 8}{4a - 8}.$

128. $\frac{a^2 + a}{a^2 - a}; \frac{x - 3}{x^2 - 9}; \frac{a^2 + a}{a^2 - 1}.$

129. $\frac{x(x - 1)^2}{2x^2(x - 1)(x + 1)}; \frac{ax + x^2}{3bx - cx^2}; \frac{5a^2 + 5ax}{a^2 - x^2}.$

130. $\frac{(a + b)^2(a - b)^2}{a^2 - b^2}; \frac{p^2 - 1}{(1 + py)^2 - (p + y)^2}.$

72. Murdude teisendamine ühenimeliseks.

a) Vaatleme murde, millede nimetajad on üksliikmed, näiteks:

$$\frac{a}{2b}; \frac{c}{3ab}; \frac{d}{5ab^2}.$$

Ühiseks nimetajaks tuleb võtta nähtavasti $30ab^2$. Täiendusteguriteks on siis $15ab$, $10b$ ja 6 .

$$\frac{\overbrace{15ab}^a}{2b} = \frac{15a^2b}{30ab^2}; \quad \frac{\overbrace{10b}^c}{3ab} = \frac{10bc}{30ab^2}; \quad \frac{\overbrace{6}^d}{5ab^2} = \frac{6d}{30ab^2}.$$

Võtame veel näite:

$$\frac{a}{12b^2c}; \quad \frac{3b}{8a^3c^4d^2}; \quad \frac{5c}{18ab}.$$

Ühine nimetaja peab jaguma iga antud nimetajaga. Tähendab, ühise nimetaja kõige väiksemaks kordajaks on antud kordajate väikseim ühiskordne. Tähelised tegurid peavad esinema ühises nimetajas niisugusel astmel, mis jaguks iga astmega, milles see tegur on nimetajates. Tähendab, antud näites ühise nimetaja kordajaks peame võtma arvude 12, 8 ja 18 väikseima ühiskordse, s. o. 72. Teguri a peame võtma astendajaga 3, teguri b astendajaga 2 jne. Ühiseks nimetajaks saame $72a^3b^2c^4d^2$.

Täiendusteguriteks on siis: $6a^3c^3d^2$, $9b^2$ ja $4a^2bc^4d^2$.

$$\frac{\overbrace{6a^3c^3d^2}^a}{12b^2c} = \frac{6a^4c^3d^2}{72a^3b^2c^4d^2}; \quad \frac{\overbrace{9b^2}^{3b}}{8a^3c^4d^2} = \frac{27b^3}{72a^3b^2c^4d^2};$$

$$\frac{\overbrace{4a^2bc^4d^2}^{5c}}{18ab} = \frac{20a^2bc^5d^2}{72a^3b^2c^4d^2}.$$

Neist näidetest nähtub:

üksliikmeliste nimetajatega algebraalsete murdude ühiseks nimetajaks on korrutis, mille teguriteks on antud nimetajate kordajate väikseim ühiskordne ja antud nimetajate iga täheiline tegur kõige suurema astendajaga, millega ta esineb antud nimetajates.

b) Edasi vaatleme murde, millede nimetajad on hulkliikmed, näiteks:

$$\frac{x}{a-b}; \quad \frac{y}{a+b}; \quad \frac{z}{a^2-b^2}.$$

Lahutame iga nimetaja teguriteks. Esimest kaht nimetajat ei saa teguriteks lahutada, kolmas on aga $(a+b)(a-b)$. Tähendab, ühiseks nimetajaks on a^2-b^2 ; saame:

$$\frac{\overbrace{x}^{a+b}}{a-b} = \frac{ax+bx}{a^2-b^2}; \quad \frac{\overbrace{y}^{a-b}}{a+b} = \frac{ay-by}{a^2-b^2}; \quad \frac{z}{a^2-b^2}.$$

c) Võib juhtuda, et ühelgi nimetajate paaril ei ole ühiseid tegureid. Siis tuleb toimida nii, nagu tehakse aritmeetikas, nimelt: korrutada iga murru lugeja ja nimetaja kõigi ülejäänud murdude nimetajate korrutisega.

Näited.

$$1. \quad \frac{a}{3m}; \quad \frac{2b}{5n}; \quad \frac{3c}{2p} \quad \text{teisend.} \quad \frac{a \cdot 5n \cdot 2p}{3m \cdot 5n \cdot 2p}; \quad \frac{2b \cdot 3m \cdot 2p}{5n \cdot 3m \cdot 2p}; \quad \frac{3c \cdot 3m \cdot 5n}{2p \cdot 3m \cdot 5n}, \quad \text{s. t.}$$

$$\frac{10anp}{30mnp}; \quad \frac{12bmp}{30mnp}; \quad \frac{45cmn}{30mnp}.$$

$$2. \quad \frac{a}{a+b}; \quad \frac{b}{a-b}; \quad \text{teisend.} \quad \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)}; \quad \frac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)}, \quad \text{s. t.}$$

$$\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}; \quad \frac{ab+b^2}{a^2-b^2}.$$

Harjutused.

Teisendada murrud ühenimelisteks:

$$131. \quad \frac{3}{a}, \quad \frac{4}{b}, \quad \frac{x}{3y}, \quad \frac{y}{4x}, \quad \frac{x}{4}, \quad \frac{4}{x}.$$

$$132. \quad \frac{2}{a}, \quad \frac{3}{b}, \quad \frac{1}{2c}, \quad \frac{7x}{4a^2}, \quad \frac{2}{3b^2}, \quad \frac{4b^2}{5x}.$$

$$133. \quad \frac{5xy}{3a^2bc}, \quad \frac{3ab}{4mx^2y}, \quad \frac{x}{4ab}, \quad \frac{y}{8a^3b^2}.$$

$$134. \quad \frac{3}{8ab}, \quad 3x, \quad \frac{a}{5x^3} \quad \left(\text{esitada } 3x \text{ murruna } \frac{3x}{1} \right).$$

$$135. \frac{x+y}{2x-2y}, \frac{x-y}{3x+3y}; \frac{1}{m+1}, \frac{2}{m^2-1}, \frac{3}{m-1}.$$

$$136. \frac{2}{x^2-2x+1}, \frac{3a}{x-1}; \frac{1}{x-1}, \frac{2}{2x-1}, \frac{1}{(x-1)(2x-1)}.$$

$$137. \frac{x}{28a^3b^2}, \frac{y}{21a^2b}; \frac{a-b}{b}, \frac{2a}{a-b}, \frac{1}{a^2-b^2}.$$

73. Murdude liitmine ja lahutamine.

Hulkliikme ja üksliikme jagamise eeskirja järgi (§ 59) saame kirjutada:

$$\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}; \quad \frac{a-b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}.$$

Lugedes neid võrdusi paremalt poolt vasakule, saame:

1. Selleks, et liita ühesuguste nimetajatega murde, on vaja liita nende lugejad ja saadud summa alla kirjutada nende ühine nimetaja.

2. Selleks, et murrust lahutada samanimelist murdu, on vaja esimese murru lugejast lahutada teise lugeja ja vahe alla kirjutada ühine nimetaja.

Kui liitmiseks või lahutamiseks antud murdul on erinevad nimetajad, siis esmalt tuleb nad teisendada ühennimeliseks.

Näited.

$$1. \frac{\overbrace{df}^d}{b} + \frac{\overbrace{cf}^c}{d} + \frac{\overbrace{ef}^e}{f} = \frac{adf + cbf + ebd}{bdf}.$$

$$2. \frac{\overbrace{2b}^2b}{10a^2bc} - \frac{\overbrace{5ac}^5ac}{4ab^2} = \frac{6bm^2 - 25acn^2}{20a^2b^2c}.$$

$$3. \frac{x+1}{2x-2} - \frac{x^2+3}{2x^2-2}.$$

$$2x-2 = 2(x-1)$$

$$2x^2-2 = 2(x^2-1) = 2(x+1)(x-1)$$

$$\text{Ühine nim. } 2(x+1)(x-1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Täiendustegur} = x+1 \\ \text{„} \quad \quad \quad = 1 \end{array} \right\}$$

Lahutamise tulemusena saame:

$$\frac{(x+1)^2 - (x^2 + 3)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 - 3}{2(x+1)(x-1)} = \frac{2x - 2}{2(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x+1}.$$

Harjutused.

138. $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c}; \frac{2}{x^2} + \frac{5}{3x}; \frac{a-1}{2} - \frac{2x+3}{4}.$

139. $1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}$ (kujutada 1 murruna $\frac{1}{1}$).

140. $1 + \frac{x-1}{2}; x - \frac{2(3-x)}{3}; 1 - \frac{2(x-1)}{3}.$

141. $\frac{2+x}{1+2x} - \frac{2-x}{1-2x} - \frac{1+6x}{4x^2-1}.$ 142. $\frac{2ab}{a^2-b^2} + \frac{b}{a^2+ab} - \frac{a+b}{a^2-ab}.$

143. Milleks teisendub murd $\frac{m-x}{n-1}$, kui x asendada avaldisega $\frac{mn}{m+n}$?

74. Murdude korrutamise.

Selleks, et murdu korrutada murruga, on vaja lugeja korrutada lugejaga, nimetaja nimetajaga ja võtta esimene korrutis lugejaks, teine aga nimetajaks, s. o.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}. \quad (1)$$

See eeskiri on samane aritmeetiliste murdude korrutamise eeskirjaga. Et aga tähtede all saab mõista mitte ainult positiivseid täisarve, vaid ka murrulisi ja negatiivseid arve, siis on vaja kontrollida selle eeskirja kehtivust ka algebraliste murdude puhul, kus a, b, c ja d on mistahes arvud. Eeldame esmalt, et kõik need arvud on positiivsed ja murrulised. Olgu näiteks

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{7}{8}, \quad c = \frac{5}{6} \quad \text{ja} \quad d = \frac{9}{4}.$$

Asetades need arvud võrdusesse (1), arvutame eraldi võrduse vasaku ja parema poole ja võrdleme tulemusi. Võrduse vasak pool annab:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 8}; \quad \frac{c}{d} = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{4} = \frac{5 \cdot 9}{6 \cdot 4};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 8} \cdot \frac{5 \cdot 9}{6 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 9}{3 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4}$$

(arvutamist me lõpuni ei teosta).

Leiame nüüd võrduse (1) parema poole:

$$ac = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6}; \quad bd = \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{4} = \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 4};$$

$$\frac{ac}{bd} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{3 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9}.$$

Saadud tulemusi võrreldes näeme, et nad on võrdsed, sest (täisarvude korrutamise vahetuvusseaduse järgi) $2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 = 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4$ ja $3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 9 = 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9$. Järelikult sel juhul võrdus (1) jääb õigeks.

Oletame nüüd, et üks arvudest a , b , c ja d saab negatiivseks. Olgu näiteks $a = -\frac{2}{3}$ (b , c ja d omavad endisi väärtusi). Siis murd $\frac{a}{b}$ muutub negatiivseks ja võrduse (1) kogu vasak pool saab negatiivseks. Parem pool korrutis ac muutub negatiivseks ja seetõttu kogu parem pool saab negatiivseks. Vasaku poole ja parema poole absoluutväärtused jäävad seejuures endisteks. Täheleb, võrdus (1) jääb kehtima. Niisamuti saame veenduda, et võrdus (1) jääb õigeks ka siis, kui teised arvud muutuvad negatiivseks.

Kõik see, mis praegu rääkisime ühe erinäite kohta, on korratav iga teise näite puhul; tähendab, võrdus (1) on õige tähtede a , b , c ja d igasuguste väärtuste puhul.

75. Murru ruut ja kuup.

Rakendame murdude korrutamise eeskirja murru ruudu ja kuubi arvutamiseks. Eeskirja kohaselt:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}.$$

Siit järeldub:

selleks, et algebralist murdu astendada kahega või kolmega, on vaja selle arvuga astendada eraldi lugeja ja nimetaja.

76. Murdude jagamine.

Selleks, et murdu jagada murruga, on vaja korrutada esimese murru lugeja teise murru nimetajaga ja esimese murru nimetaja teise murru lugejaga ning võtta esimene korrutis lugejaks, teine aga nimetajaks, s. o.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Jagamise kontrollimisega saab veenduda, et see võrdus on õige igasuguste arvude a , b , c , d puhul: korrutades jagatise jagajaga, saame jagatava:

$$\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}.$$

77. Märkused.

1) Et $\frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, siis jagamise eeskirja võib sõnastada ka nii:

selleks, et murdu jagada murruga, võib esimese murru korrutada teise pöördarvuga.

2) Iga algebralist täisavaldist saab vaadelda kui murdu, mille lugejaks on see täisavaldis ja nimetajaks on 1; näiteks:

$a = \frac{a}{1}$; $3x^2 = \frac{3x^2}{1}$ jms. Seetõttu meie poolt antud eeskirjad teheteks murdudega on rakendatavad ka neil juhtudel, kus üks antud avaldistest on täisavaldis. Näiteks:

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}.$$

Harjutused.

$$144. -\frac{3x}{5a} \cdot \frac{10ab}{7x^3}; \frac{1-a}{5x^3} \cdot \frac{x^2}{1-a^2}. \quad 145. \frac{4x^2y^2}{15n^4a^3} \cdot 45p^2q^2; \frac{x^2-1}{3} \cdot \frac{6a}{x+1}.$$

$$146. \left(a + \frac{ab}{a+b}\right) : \left(b - \frac{ab}{a+b}\right); \frac{3a^2b^5c^4}{4x^2y^2z^4} : \frac{4a^4b^3c^2}{3x^4y^2z^2}.$$

$$147. \frac{12a^4b^2}{5mp} : 4ab^2; \quad 81a^3b^2 : \frac{27ab^2}{5x^2y}.$$

$$148. \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} : \frac{5a^2+5b^2}{a+b}; \quad \left(x + \frac{xy}{x-y}\right) : \left(x - \frac{xy}{x+y}\right).$$

Neljas jagu.

ESIMESE ASTME VÖRRANDID.

I. Võrrandite üldised omadused.

78. Võrdused ja nende omadused.

Kaks arvu või kaks algebralist avaldist, mis on omavahel ühendatud märgiga $=$, moodustavad võrduse. Neid arve või avaldise nimetatakse võrduse *poolteks*; see, mis seisab vasakul märgist $=$, on võrduse *vasak* pool, ja see, mis seisab paremal sellest märgist, on võrduse *parem* pool. Näiteks võrduse

$$a + a + a = a \cdot 3$$

vasak pool on summa $a + a + a$ ja parem pool on korrutis $a \cdot 3$.

Tähistades võrduse kummagi poole ühe tähega, saame võrduse tähtsamaid omadusi väljendada nii:

a) Kui $a = b$, siis ka $b = a$, s. t. võrduse pooli võib teineteisega vahetada.

b) Kui $a = b$ ja $b = c$, siis $a = c$, s. t. kui kaks arvu on eraldi võrdsed mingi kolmanda arvuga, siis on nad ka omavahel võrdsed.

c) Kui $a = b$ ja $m = n$, siis $a + m = b + n$ ja $a - m = b - n$, s. t. kui võrdsete arvudega liidame võrdsed arvud või võrdsetest arvudest lahutame võrdsed arvud, siis võrdus jääb kehtima.

d) Kui $a = b$ ja $m = n$, siis $am = bn$ ja $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$, s. t. kui võrdsed arvud korrutame või jagame võrdsete arvudega, siis võrdus jääb kehtima.

On kasulik tähele panna, et võrduse mõlema poole korrutamine või jagamine arvuga -1 on samaväärne võrduse poolte ees olevate märkide muutmisega. Nii näiteks korrutades võrduse $-x = -5$ mõlemad pooled arvuga -1 , saame $x = 5$.

79. Samasus.

Kaht algebralist avaldist nimetatakse *samasteks*, kui nad saavad neis esinevate tähtede igasuguste numbriliste väärtuste puhul ühe ja sama numbrilise väärtuse. Niisugused on näiteks avaldised:

$$ab \text{ ja } ba; \quad a + (b + c) \text{ ja } a + b + c.$$

Kui mingi võrduse poolteks on samased algebralised avaldised, siis seda võrdust nimetatakse *samasuseks*. Selleks on näiteks võrdus

$$a + b + c = a + (b + c).$$

Samasuseks nimetatakse ka niisugust, ainult numbritega kirjutatud arve sisaldavat võrdust, mille mõlemad pooled pärast kõikide neis näidatud tehete teostamist annavad ühe ja sama arvu, näiteks

$$(40 \cdot 5) : 8 = 5^2.$$

80. Võrrand.

Oletame, et soovime lahendada järgmist ülesannet: Isa on 40 aastat vana, poeg aga 17 aastat. Mitme aasta pärast on isa pojast kaks korda vanem?

Harilikul (aritmeetilisel) teel on seda ülesannet raske lahendada. Lahendame selle tähelist märkimisviisi kasuta-

des. Tähistame otsitava aastate arvu tähega x . Isa vanus on x aasta pärast $40 + x$ aastat ja poja vanus $17 + x$ aastat. Ülesande tingimuse kohaselt peab isa aastate arv ($40 + x$) olema kaks korda suurem poja aastate arvust ($17 + x$). Seda saame kirjutada võrduse kujul:

$$40 + x = 2(17 + x).$$

Proovimise teel veendume, et see võrdus on õige, kui $x = 6$. Tõepoolest, sellel x väärtusel saame:

$$40 + 6 = 2(17 + 6); \quad 46 = 46.$$

Ühegi muu arvu puhul, mille paigutame x asemele, võrdus ei kehti.

Seda võrdust ei saa nimetada samasuseks, sest ta ei ole õige temas esinevate tähtede igasuguste väärtuste puhul. Ainult x -i asendamine arvuga 6 muudab selle võrduse samasuseks:

$$46 = 46.$$

Kui üht või mitut tähte sisaldava võrduse pooled saavad ühe ja sama numbrilise väärtuse nende tähtede mingisuguste, aga mitte igasuguste numbriliste väärtuste korral, siis antud võrdust nimetatakse *võrrandiks*, ja nende tähtedega tähistatud arve nimetatakse võrrandi *tundmatuteks* (arvudeks). Neid arve tähistatakse harilikult ladina tähestiku viimaste tähtedega (x, y, z, \dots).

Võrrandeid on ühe tundmatuga, kahe tundmatuga jne.

Lahendada võrrand tähendab leida temas esinevate tundmatute need väärtused, mis rahuldavad võrrandit, s. o. muudavad ta samasuseks. Neid tundmatute väärtusi nimetatakse võrrandi *lahenditeks*.

Ühe tundmatuga võrrandil võib olla üks lahend või kaks lahendit või rohkemgi lahendeid; näiteks võrrandil $3x - 2 = 13$ on üks lahend (5), võrrandil $x^2 + 2 = 3x$ on kaks lahendit (1 ja 2), võrrandil $(x - 1)(x - 2)(x + 1) = 0$ on

kolm lahendit (1, 2 ja -1)* jms. Võib juhtuda ka, et võrrandil üldse ei ole lahendit. Niisugune on näiteks võrrand $x^2 = -4$; missuguse positiivse või negatiivse arvu me ka paigutaksime x asemele, selle arvu ruut ei saa võrduda negatiivse arvuga.

Meie ülesande tingimustest eespool tuletatud võrrandi lahendiks on 6. See ongi vastus ülesande küsimusele. Tõepoolest, 6 aasta pärast on isa 46 aastat vana, poeg aga 23 aastat, s. o. kaks korda vähem.

Niisiis mõnede ülesannete lahendamiseks on kasulik rakendada võrrandite koostamist ja õppida nende lahendamist; selleks aga on vaja tutvuda võrrandite mõnede üldiste omadustega.

Näitena lahendame eespool toodud võrrandi

$$40 + x = 2(17 + x).$$

Avame sulud võrrandi paremal poolel:

$$40 + x = 34 + 2x.$$

Lahutame x võrrandi mõlemast poolest; saame:

$$40 = 34 + x.$$

Lõpuks lahutame võrrandi mõlemast poolest 34; saame:

$$6 = x, \text{ tähendab } x = 6.$$

Niisiis meie võrrandi mõnesuguste teisenduste kaudu saame x jaoks väärtuse 6.

Nagu edaspidi näeme, saab niisamuti lahendada ka teisi võrrandeid.

Harjutused.

149. Missuguseid järgnevate võrduste hulgast saab nimetada samasusteks, missuguseid võrranditeks?

$$x + y = y + x; \quad (a - b + x)c = ac - bc + xc;$$

$$3a - 4 = 2a + 1; \quad 8x + 1 = 5x + 7; \quad a(bc) = abc;$$

$$2x = x + 1; \quad (xy) : y = x; \quad a : 2b = \frac{a}{2} : b.$$

* Meenutame, et kui mingi tegur võrdub nulliga, siis ka korrutis võrdub nulliga, ja ümberpöörduvalt.

81. Samaväärsed võrrandid.

Kaht võrrandit nimetatakse samaväärseks (ehk ekvivalentseks), kui esimese võrrandi kõik lahendid on teise võrrandi lahenditeks ja, ümberpöörduvalt, teise võrrandi kõik lahendid on esimese võrrandi lahenditeks. Näiteks kaks võrrandit

$$x^2 + 2 = 3x \quad \text{ja} \quad 3x - 2 = x^2$$

on samaväärsed, sest neil on ühed ja samad lahendid, nimelt 1 ja 2; võrrandid

$$7x = 14 \quad \text{ja} \quad x^2 + 2 = 3x$$

aga ei ole samaväärsed, sest esimesel neist on ainult üks lahend 2, kuna teisel on peale selle lahendi veel teine lahend 1.

Kui mingi võrrandi lahendamisel me teeme selles mõnesuguseid teisendusi, siis nende teisendustega me asendame antud võrrandi järk-järgult uute ja lihtsamatega, kuni lõpuks saame kõige lihtsama kujuga võrrandi $x = a$; siis ütleme, et see arv a ongi antud võrrandi lahend. Kuid eksimatult saame seda väita ainult siis, kui oleme veendunud, et kõik teisendamistega saadud võrrandid on antud võrrandiga samaväärsed.

Teisendused, mida võrranditega tuleb teostada, on rajatud võrrandite kahele omadusele, mida otsekohe vaatleme.

82. Võrrandite esimene omadus.

Võtame mingi võrrandi, näiteks niisuguse:

$$x^2 + 2 = 3x. \tag{1}$$

Oletame, et võrrandi mõlema poolega oleme liitnud mingi ühe ja sama arvu m (positiivse, negatiivse või nulli); siis saame uue võrrandi

$$x^2 + 2 + m = 3x + m. \tag{2}$$

Tõestame, et see võrrand on samaväärne antuga. Selleks on küllalt, kui veenduda esiteks selles, et võrrandi (1) iga lahend rahuldab ka võrrandit (2), ja teiseks selles, et ka ümberpöördult — võrrandi (2) iga lahend rahuldab võrrandit (1).

a) Leidugu võrrandil (1) mingi lahend, näiteks $x=1$. See tähendab, et kui selles võrrandis x asendada arvuga 1, siis avaldis $x^2 + 2$ muutub võrdseks avaldisega $3x$ (kumbki neist avaldistest muutub arvuks 3). Kuid siis $x=1$ juhul summa $x^2 + 2 + m$ saab võrdseks summaga $3x + m$, sest kui võrdsete arvudega (3 ja 3) liidame ühe ja sama arvu (m), siis saame võrdsed arvud ($3 + m$ ja $3 + m$). Tähendab, lahend $x=1$ peab olema ka võrrandi (2) lahendiks. Kui võrrandil (1) on veel mingi lahend, siis selle kohta saab öelda sedasama, mis praegu ütlesime lahendi $x=1$ kohta, s. t. ta rahuldab ka võrrandit (2). Niisiis võrrandi (1) iga lahend on ka võrrandi (2) lahendiks.

b) Olgu võrrandil (2) mingi lahend, näiteks $x=2$. See tähendab, et kui selles võrrandis x asendada arvuga 2, siis avaldis $x^2 + 2 + m$ saab võrdseks avaldisega $3x + m$ (kumbki neist avaldistest muutub nimelt arvuks $6 + m$). Kuid siis juhul $x=2$ saavad võrdseks ka avaldised $x^2 + 2$ ja $3x$, sest lahutades võrdsetest arvudest ($6 + m$ ja $6 + m$) ühe ning sama arvu (m), saame võrdsed arvud. Tähendab, $x=2$ on ka võrrandi (1) lahendiks. Kui võrrandil (2) leiduks veel mingi lahend, siis selle kohta saab öelda sedasama, mis praegu ütlesime lahendi $x=2$ kohta, s. o. ta peab rahuldama ka võrrandit (1). Tähendab, võrrandi (2) iga lahend peab olema ka võrrandi (1) lahendiks.

Kui aga võrranditel (1) ja (2) on ühed ja samad lahendid, siis need võrrandid on samaväärsed. See omadus kehtib ka võrrandi pooltest ühe ja sama arvu lahutamise suhtes, sest mingi arvu lahutamine on samaväärne selle vastand-arvu liitmisega.

Niisiis, kui võrrandi mõlema poolega liidame või neist lahutame ühe ja sama arvu, siis saame uue võrrandi, mis on esimesega samaväärne.

83. Järeldused.

Sellest omadusest saab teha järgmised järeldused, mida võrrandite lahendamisel tuleb sageli kasutada.

1. Võrrandi liikmeid võib viia tema ühelt poolt teisele, muutes nende liikmete märgid vastandmärkideks. Näiteks liites võrrandi

$$8 + x^2 = 7x - 2$$

mõlema poolega 2, saame:

$$8 + x^2 + 2 = 7x.$$

Liige -2 paremalt poolt läks üle vasakule poolele vastandmärgiga $+$. Lahutades viimase võrrandi pooltest x^2 , saame:

$$8 + 2 = 7x - x^2.$$

Liige $+x^2$ vasakult poolt läks üle paremale poolele vastandmärgiga.

2. Kui võrrandi eri pooltel on kaks ühesugust liiget ühesuguste märkidega, siis need liikmed võib kustutada. Kui on antud näiteks võrrand

$$6x + 3 = x^2 + 3,$$

siis, lahutades selle pooltest 3, saame:

$$6x = x^2.$$

84. Võrrandite teine omadus.

Võtame endise võrrandi

$$x^2 + 2 = 3x$$

ja korrutame selle mõlemad pooled mingi arvuga m , mis võib olla positiivne või negatiivne (ainult mitte null). Siis saame uue võrrandi

$$(x^2 + 2)m = 3xm.$$

Selleks, et näha nende võrrandite samaväärsust, arutame just niisamuti nagu arutasime esimese omaduse puhul, nimelt: näitame esiteks, et võrrandi (1) iga lahend rahuldab ka võrrandit (2), ja teiseks, et ka ümberpöördult — võrrandi (2) iga lahend rahuldab võrrandit (1).

a) Olgu võrrandil (1) mingi lahend, näiteks $x = 1$. See tähendab, et kui selles võrrandis asendame x arvuga 1, siis avaldis $x^2 + 2$ saab võrdseks avaldisega $3x$ (kumbki neist avaldistest muutub arvuks 3). Kuid siis juhul $x = 1$ saavad võrdseks ka avaldised $(x^2 + 2)m$ ja $3xm$, sest kui võrdsed arvud (3 ja 3) korrutame ühe ja sama arvuga (m), siis saame võrdsed arvud ($3m$ ja $3m$). Tähendab, lahend $x = 1$ peab olema ka võrrandi (2) lahendiks. Et kõike öeldut võib korrata võrrandi (1) iga muu lahendi puhul, siis järeldame, et võrrandi (1) iga lahend on ka võrrandi (2) lahendiks.

b) Olgu, ümberpöördult, võrrandil (2) mingi lahend, näiteks, $x = 2$. See tähendab, et kui selles võrrandis asendame x arvuga 2, siis korrutised $(x^2 + 2)m$ ja $3xm$ saavad võrdseks (kumbki neist muutub arvuks $6m$). Kuid siis juhul $x = 2$ saavad võrdseks ka avaldised $x^2 + 2$ ja $3x$, sest kui võrdsed arvud ($6m$ ja $6m$) jagame ühe ja sama, nullist erineva arvuga m , siis saame võrdsed arvud. Tähendab, lahend $x = 2$ ja niisamuti võrrandi (2) iga muu lahend on ka võrrandi (1) lahendiks; seega need võrrandid on samaväärsed.

Oletame nüüd, et arv m , millega korrutasime võrrandi mõlemaid pooli, on null. Korrutame nulliga mõlemaid pooli näiteks võrrandil $x^2 + 2 = 3x$, millel on kaks lahendit: 1 ja 2; siis saame uue võrrandi:

$$(x^2 + 2) \cdot 0 = 3x \cdot 0.$$

Seda võrrandit rahuldavad mitte ainult 1 ja 2, vaid ka mistahes muu x väärtus. Asendades x näiteks arvudega 5, 6 jne., saame:

$$(5^2 + 2) \cdot 0 = 3 \cdot 5 \cdot 0; \quad (6^2 + 2) \cdot 0 = 3 \cdot 6 \cdot 0,$$

$$s. t. \quad 27 \cdot 0 = 15 \cdot 0; \quad 38 \cdot 0 = 18 \cdot 0$$

$$ehk \quad 0 = 0 \quad 0 = 0$$

(sest iga arvu korrutis nulliga on null). Tähendab, nulliga korrutamise tagajärjel võrrandite samaväärsus võib kaduda.

Niisiis, kui võrrandi mõlemad pooled korrutame või jagame ühe ja sama, nullist erineva arvuga, siis saame uue võrrandi, mis on esimesega samaväärne.

85. Järeldused.

Võrrandite teisest omadusest saab teha järgmised kolm järeldust.

1. Kui võrrandi kõikidel liikmetel on ühine tegur, mis ei ole null ega sisalda tundmatuid, siis võrrandi kõik liikmed võib jagada selle teguriga. Näiteks:

$$60x - 160 = 340 - 40x.$$

Jagades kõik liikmed arvuga 20, saame lihtsama võrrandi:

$$3x - 8 = 17 - 2x.$$

2. Võrrandi saab vabastada murrulistest liikmetest, mille nimetajad ei sisalda tundmatut. Näiteks:

$$\frac{7x-3}{6} - \frac{x-5}{4} = \frac{43}{6}.$$

Teisendame kõik liikmed ühenimeliseks:

$$\frac{14x-6}{12} - \frac{3x-15}{12} = \frac{86}{12} \quad \text{ehk} \quad \frac{14x-6-(3x-15)}{12} = \frac{86}{12}.$$

Jättes ära ühise nimetaja, me korrutame võrrandi mõlemad pooled ühe ja sama arvuga, mis ei ole null (12-ga); seega saame võrrandi, mis on antuga samaväärne:

$$14x - 6 - (3x - 15) = 86 \quad \text{ehk} \quad 14x - 6 - 3x + 15 = 86.$$

3. Võrrandi kõikide liikmete märgid võib muuta vastandmärkideks, sest see on sama, mis võrrandi mõlema poole korrutamine arvuga -1 . Teostades näiteks võrrandi $-8 - x^2 = -7 + 2$ poolte niisuguse korrutamise, saame $8 + x^2 = 7 - 2$.

86. Võrrandi poolte korrutamine või jagamine ühe ja sama algebralise avaldisega.

Antud võrrandi teisendamiseks tuleb mõnikord selle mõlemad pooled korrutada (või jagada) ühe ja sama algebralise avaldisega (nagu järgmise paragrahvi näites näeme). Pärast korrutamist saadud uus võrrand osutub antud võrrandiga samaväärseks ainult siis, kui algebraline avaldis, millega antud võrrandi pooli korrutame (või jagame), ei ole null, sest nulliga korrutamise tagajärjel võrrandite samaväärsus kaob.

87. Võõrlahendid.

Võrrandi mõlemad pooli tuleb korrutada ühe ja sama algebralise avaldisega siis, kui lahendame võrrandit, mis sisaldab murde, millede nimetajates esineb tundmatu. Olgu vaja lahendada näiteks võrrand

$$\frac{x^2}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{2x+2}{(x-2)^2}. \quad (1)$$

On ilmne, et murdude ühine nimetaja on $(x-2)^2$. Teisendame kõik liikmed sellenimeliseks:

$$\frac{x^2}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{x-2}{(x-2)^2} + \frac{2x+2}{(x-2)^2};$$

jätame selle nimetaja ära ehk, teiste sõnadega, korrutame kõik liikmed avaldisega $(x-2)^2$:

$$x^2 + 2 = x - 2 + 2x + 2,$$

s. o.

$$x^2 + 2 = 3x. \quad (2)$$

Sellel võrrandil on kaks lahendit: 1 ja 2. Kuid ei saa tagada, et mõlemad need lahendid kõlbavad ka esialgselt võrrandile, sest meil tuli selle võrrandi mõlemad pooled korrutada avaldisega $(x-2)^2$, mis muutub nulliks juhul, kui $x=2$; kuid korrutamisel nulliga võrrandite samaväärsus võib kaduda.

Jääb üle kontrollida leitud lahendite 1 ja 2 sobivust mitte ainult võrrandile (2), vaid ka võrrandile (1). Lahend $x=1$ rahuldab võrrandit (1):

$$\frac{1^2}{(1-2)^2} + \frac{2}{(1-2)^2} = \frac{1}{1-2} + \frac{2 \cdot 1 + 2}{(1-2)^2},$$

$$\frac{1}{(-1)^2} + \frac{2}{(-1)^2} = \frac{1}{-1} + \frac{2+2}{(-1)^2},$$

$$1 + 2 = -1 + 4, \text{ s. o. } 3 = 3.$$

Kuid teine lahend, $x=2$, ei kõlba võrrandile (1), sest juhul, kui $x=2$, see võrrand kaotab mõtte:

$$\frac{4}{0} + \frac{2}{0} = \frac{1}{0} + \frac{6}{0}$$

(nulliga jagamine ei ole võimalik).

Niisiis me näeme, et kui antud võrrand sisaldab murde, millede nimetajas esineb tundmatu, ja neist nimetajatest vabanemiseks võrrandi mõlemad pooled oleme korrutanud ühise nimetajaga, siis, leidnud saanud võrrandi lahendid, me peame neid veel asendusega kontrollima, et selgitada, kas nende hulgas ei leidu võõrlahendeid.

Jagades võrrandi mõlemad pooled algebralise avaldisega, mis sisaldab tundmatut, me võime mõned lahendid kaotada.

Jagades näiteks võrrandi

$$(2x + 3)(x - 3) = (3x - 1)(x - 3)$$

mõlemad pooled vahega $x-3$, saame uue võrrandi

$$2x + 3 = 3x - 1,$$

mis antuga ei ole samaväärne, sest tal on ainult üks lahend $x=4$, kuna esimesel võrrandil on kaks lahendit: $x=4$ ja $x=3$.

II. Ühe tundmatuga võrrand.

88. Ühe tundmatuga esimese astme võrrandi lahendamine.

Näitame kahe järgneva näite abil ühe tundmatuga esimese astme võrrandi lahendamiseviisi.

1. Lahendada võrrand

$$3x + 2(4x - 3) = 5(x + 2) - 4.$$

Avades sulud saame:

$$3x + 8x - 6 = 5x + 10 - 4.$$

Viime tundmatut sisaldavad liikmed võrrandi vasakule poolele ja tuntud liikmed paremale poolele (vt. võrrandi esimese omaduse järeldust):

$$3x + 8x - 5x = 10 - 4 + 6.$$

Koondame sarnased liikmed:

$$6x = 12.$$

Lõpuks jagame võrrandi mõlemad pooled arvuga 6 (võrrandi teise omaduse alusel). Vastusena saame

$$x = 2.$$

Veendumiseks selles, et me ei ole teinud võrrandi lahendamisel mingit viga, on vaja lahendit kontrollida. Selleks asendame antud võrrandis x leitud lahendiga, teostame võrrandis näidatud tehted, ja kui võrrand muutub samasuseks, siis lahend on õieti leitud. Meie juhul saame:

$$3 \cdot 2 + 2(4 \cdot 2 - 3) = 5(2 + 2) - 4$$

ehk

$$16 = 16.$$

Tähendab, lahendus on õige.

2. Lahendada võrrand

$$\frac{3x-4}{2} + \frac{3x+2}{5} - x = \frac{7x-6}{6} - 1.$$

Teisendame kõik liikmed ühenimeliseks, võttes ühiseks nimetajaks 30:

$$\frac{15(3x-4)}{30} + \frac{6(3x+2)}{30} - \frac{30x}{30} = \frac{5(7x-6)}{30} - \frac{30}{30}.$$

Korrutame võrrandi kõik liikmed 30-ga (ehk, mis on seesama, jätame ära ühise nimetaja):

$$15(3x-4) + 6(3x+2) - 30x = 5(7x-6) - 30.$$

Sama tulemuse oleksime saanud, kui võrrandi kõik liikmed korruga oleksime korrutanud nende ühise nimetajaga:

$$\frac{30(3x-4)}{2} + \frac{30(3x+2)}{5} - 30x = \frac{30(7x-6)}{6} - 30 \cdot 1 \text{ ehk pärast taandamist:}$$

$$15(3x-4) + 6(3x+2) - 30x = 5(7x-6) - 30.$$

Avame sulud:

$$45x - 60 + 18x + 12 - 30x = 35x - 30 - 30.$$

Viime tundmatut sisaldavad liikmed võrrandi vasakule poolele ja tuntud liikmed paremale poolele:

$$45x + 18x - 30x - 35x = 60 - 12 - 30 - 30.$$

Koondame sarnased liikmed:

$$-2x = -12.$$

Jagame mõlemad pooled tundmatu juures oleva kordajaga (enne võiks veel võrrandi mõlemad pooled korrutada arvuga -1 , et teha need positiivseks):

$$x = \frac{-12}{-2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Teeme kontrolli:

$$\frac{3 \cdot 6 - 4}{2} + \frac{3 \cdot 6 + 2}{5} - 6 = \frac{7 \cdot 6 - 6}{6} - 1; 7 + 4 - 6 = 6 - 1; 5 = 5.$$

Toodud näidetest selgub, et ühe tundmatuga esimese astme võrrandi lahendamiseks on vaja:

1. vabastada võrrand murrulistest liikmetest;
2. avada sulud;

3. viia tundmatut sisaldavad liikmed ühele poolele ja tuntud liikmed teisele poolele;

4. koondada sarnased liikmed;

5. jagada võrrandi mõlemad pooled tundmatu juures oleva kordajaga.

Edasi tuleb leitud lahendit kontrollida selle asetamisega esialgsesse võrrandisse.

On arusaadav, et sõltuvalt võrrandi kujust ei tule alati teostada kõiki viit näidatud operatsiooni.

M ä r k u s. Pärast esimese nelja operatsiooni teostamist jääb meil võrrandi kummalegi poolele üks liige: vasakule liige, mis sisaldab tundmatut, paremale tuntud liige. Üldkujul saab selle võrrandi esitada järgmiselt:

$$ax = b,$$

kus a ja b võivad olla positiivsed arvud, negatiivsed arvud või nullid. Sellekujulist võrrandit nimetatakse ühe tundmatuga esimese astme võrrandi normaalkujuks.

Harjutused.

Lahendada järgmised võrrandid:

150. $2x + 1 = 35$; $19 = 4 + 3y$; $7y - 11 = 24$.

151. $3x + 23 = 104$; $89 = 11y - 10$; $38 = 2 + 3x$.

152. $3x = 15 - 2x$; $4x - 3 = 9 - 2x$; $5x + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{2}$.

153. $2,5x - 0,86 = 4 + 0,7x$; $29 + 2x = (x - 7) \cdot 3$.

154. $x - 7 = \frac{3x + 13}{20}$; $-x = 3$; $-2x = 8$.

155. $\frac{2x + 1}{2} = \frac{7x + 5}{8}$; $x + \frac{11 - x}{3} = \frac{20 - x}{2}$.

156. $x + \frac{3x - 9}{5} = 11 - \frac{15x - 12}{3}$.

$$157. 3x - 4 - \frac{4(7x - 9)}{15} = \frac{4}{5} \left(6 + \frac{x - 1}{3} \right).$$

$$158. 2x - \frac{19 - 2x}{2} = \frac{2x - 11}{2}.$$

$$159. \frac{x - 1}{7} + \frac{23 - x}{5} = 2 - \frac{4 + x}{4}.$$

89. Võrrandite koostamise idee.

Võrrandite abil saab võrdlemisi lihtsalt lahendada ülesandeid, mida aritmeetilisel teel on raske või koguni võimatu lahendada. Kogu raskus seisab vaid selles, kuidas koostada niisugune võrrand, mille lahend annaks otsitava vastuse. Üldist viisi võrrandite koostamiseks ei ole võimalik anda, sest ülesannete tingimused võivad olla väga mitmesugused. Saab näidata ainult mõnda üldist võtet võrrandi koostamiseks ülesande andmete põhjal. Sellekohast oskust aga annab üldiselt praktika.

Näitame võrrandite koostamise üldisi võtteid järgneva näite abil.

Ülesanne. Koolile osteti kokku 80 kaustikut ja vihikut. Kaustik maksab 35 kop., vihik 4 kop. Kui palju osteti ühte-
sid ja kui palju teisi, kui kokku maksti 9 rbl. 40 kop.?

1. Määrame, millise tundmatu suuruse tähistame tähega x .

Meie ülesandes on kaks tundmatut: kaustikute arv ja vihikute arv. Tähistame x -ga näiteks kaustikute arvu. Et kaustikuid ja vihikuid kokku on 80, siis vihikuid on $80 - x$.

Kaustikute arv on x .

Vihikute „ „ $80 - x$.

2. Avaldame kõik ülesande tingimused matemaatiliselt ülesande andmete ja x abil.

Meie ülesandes on öeldud, et kaustik maksab 25 kop. ja vihik 4 kop. Järelikult võime küsida, mis maksid kõik oste-

tud kaustikud ja mis maksid vihikud (sellise küsimuse seame sellepärast, et ülesandes on öeldud, mis nad kokku maksid).

Kaustikud maksid $35x$ kop.

Vihikud „ $4(80 - x)$ kop.

Kõik kokku „ aga 9 rbl. 40 kop.

3. Koostame võrrandi.

Kuna ülesandes on öeldud, et kaustikud ja vihikud kokku maksid 9 rbl. 40 kop., siis kaustikute eest makstud $35x$ ja vihikute eest makstud $4(80 - x)$ peavad summas olema just 9 rbl. 40 kop.:

$$35x + 4(80 - x) = 940.$$

Selle võrrandi lahendamisel saame x jaoks arvu 20.

Tähega x märkisime kaustikute arvu. Järelikult kaustikuid osteti 20 ja vihikuid

$$80 - 20 = 60.$$

Märgime, et harilikult on ülesandes andmeid täpselt nii-palju, kuipalju neid on vaja võrrandi koostamiseks. Seetõttu võrrandi koostamisel on kasulik vaadata, kas ülesande kõik andmed on kasutatud, s. o. kas kõik ülesandes antud arvud ühel või teisel kujul on läinud võrrandisse.

Harjutused.

160. Kahe arvu summa on 2548; leida need arvud, kui on teada, et üks neist on teisest 148 võrra väiksem.

161. Kolme liidetava summa on 100; teine liidetav on esimesest 10 võrra suurem ja kolmas liidetav on teisest 20 võrra suurem. Leida need liidetavad.

162. Ratsanik sõidab temast 15 km ees oleva jalakäija järel. Mitme tunni pärast jõuab ratsanik jalakäijani, kui igas tunnis esimene sõidab 10 km, teine käib aga ainult 4 km?

163. Kahest teesordist koostati 32 kg segu. Esimese sordi kilogramm maksis 8 rbl. ja teise sordi kilogramm 6 rbl. 50 kop. Mitu

kilogrammi võeti ühest ja mitu teisest sordist, kui segu kilogramm maksab (ilma kasu ja kahjuta) 7 rbl. 10 kop.?

164. Jalgrattur sõitis teatava kauguse kiirusega 8 km tunnis. Tagasisõiduks oli ta sunnitud kasutama teist teed, mis oli esimesest 3 km pikem, ja kulutas selleks $7\frac{1}{2}$ minutit enam aega, kuigi ta sõitis tagasi kiirusega 9 km tunnis. Kui pikad olid need teed?

90. Tähelised võrrandid.

Ei ole vajalik, et tundmatut tähistataks alati tähega x : teda võib tähistada ka mistahes teise tähega. Võtame näiteks valemi

$$s = \frac{1}{2} bh,$$

mis väljendab pindala s kolmnurgal, mille alus on b pikkusühikut ja kõrgus h sedasama ühikut. See valem on võrrand, milles igaühe tähtedest s , b ja h võib võtta tundmatuks. Olgu antud näiteks niisugune ülesanne: leida kolmnurga alus, kui kõrgus on h mingit pikkusühikut ja pindala on s vastavat pindalaühikut. Siis tuleb meie valemis tundmatuks lugeda arv b , tuntuiks aga s ja h . Tundmatu aluse võime muidugi tähistada tähega x ja kirjutada võrrandi nii:

$$s = \frac{1}{2} hx,$$

millest

$$x = s : \frac{1}{2} h = 2s : h = \frac{2s}{h}.$$

Kuid võib ka jätta b tähega x asendamata ja avaldada b võrrandist $s = \frac{1}{2}bh$ suuruste s ja h kaudu:

$$s = \frac{1}{2}bh; 2s = bh; b = \frac{2s}{h}.$$

Üldiselt on vaja harjuda lahendama mitte ainult numbri- lisi võrrandeid, milles antud arvud on väljendatud numbri- tega ja tundmatu tähistatud tähega x , vaid ka tähelisi võr- randeid, milles antud arvud ja tundmatu on tähistatud mis- tahes tähtedega.

Näited.

$$\begin{aligned} 1. \quad a + bx &= c; \\ bx &= c - a; \\ x &= \frac{c - a}{b}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad a(x - c) &= b(x + d); \\ ax - ac &= bx + bd; \\ ax - bx &= bd + ac; \\ x(a - b) &= bd + ac; \\ x &= \frac{bd + ac}{a - b}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \frac{y}{a} - y &= b; \\ y - ay &= ab; \\ y(1 - a) &= ab; \\ y &= \frac{ab}{1 - a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad \frac{x}{a} + \frac{x}{b} &= 1; \\ bx + ax &= ab; \\ x(b + a) &= ab; \\ x &= \frac{ab}{a + b}. \end{aligned}$$

Harjutused.

165. $(a + x)(b + x) = (a - x)(b - x)$.

166. $(x - a)(x + b) + c = (x + a)(x - b)$.

167. Võrrandist $a + bx = 4 - 3(a - x)$ avaldada x arvude a ja b kaudu.

168. Pindala q trapetsil, mille alused on b_1 ja b_2 ning kõrgus on h , arvutatakse valemi järgi: $q = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$. Avaldada siit h suuruste q , b_1 ja b_2 kaudu.

III. Esimese astme võrrandite süsteemid.

Kahe võrrandi süsteem kahe tundmatuga.

91. Ülesanne.

Katse abil leiti, et hõbedast ja vasest koosnev kang, mille kaal on 148 kg, kaotab vees oma kaalust $14\frac{2}{3}$ kg. Leida, kui palju ta sisaldab hõbedat ja kui palju vaske, teades, et vees 21 kg hõbedat kaotab 2 kg ja 9 kg vaske kaotab 1 kg oma kaalust.

Oletame, et antud kang sisaldab x kg hõbedat ja y kg vaske. Siis üks võrrand on:

$$x + y = 148.$$

Teise võrrandi koostamiseks paneme tähele, et kui 21 kg hõbedat kaotab vees oma kaalust 2 kg, siis see tähendab, et 1 kg hõbedat kaotab vees $\frac{2}{21}$ kg. Seega x kg peab kaotama vees oma kaalust $\frac{2}{21}x$ kg.

Niisamuti: kui 9 kg vaske kaotab vees oma kaalust 1 kg, siis see tähendab, et 1 kg vaske kaotab $\frac{1}{9}$ kg; järelikult y kg vaske kaotab $\frac{1}{9}y$ kg. Seetõttu teine võrrand on:

$$\frac{2}{21}x + \frac{1}{9}y = 14\frac{2}{3}.$$

Nii oleme saanud kaks võrrandit kahe tundmatuga:

$$x + y = 148 \quad \text{ja} \quad \frac{2}{21}x + \frac{1}{9}y = 14\frac{2}{3}.$$

Teist võrrandit saab lihtsustada, kui vabastame ta murdest. Selleks korrutame võrrandi mõlemad pooled arvuga 63, mille järel saame temaga samaväärse võrrandi

$$6x + 7y = 924.$$

Nüüd meil on kaks võrrandit:

$$x + y = 148 \quad \text{ja} \quad 6x + 7y = 924.$$

Neid kaht võrrandit saame lahendada mitmel viisil. Näiteks: avaldame esimesest võrrandist x suuruse y kaudu:

$$x = 148 - y.$$

Et teises võrrandis x ja y tähistavad neidsamu arve, mis esimeses, siis võime teises võrrandis x asendada vahega $148 - y$:

$$6(148 - y) + 7y = 924.$$

Lahendame selle ühe tundmatuga võrrandi:

$$888 - 6y + 7y = 924; \quad y = 924 - 888 = 36.$$

Siis

$$x = 148 - 36 = 112.$$

Nõnda siis antud kang sisaldab 112 kg hõbedat ja 36 kg vaske.

92. Kahe tundmatuga esimese astme võrrandi normaalkuju.

Võtame kahe tundmatuga võrrandi niisuguse näite:

$$2(2x + 3y - 5) = \frac{5}{8}(x + 3) + \frac{3}{4}(y - 4).$$

Selle võrrandi lihtsustamiseks teostame temas kõik need-samad teisendused, mis varem näidati ühe tundmatuga võr-randi puhul, nimelt:

1. Avame sulud:

$$4x + 6y - 10 = \frac{5}{8}x + \frac{15}{8} + \frac{3}{4}y - 3.$$

2. Vabaneme nimetajaist, korrutades kõik liikmed 8-ga:

$$32x + 48y - 80 = 5x + 15 + 6y - 24.$$

3. Viime tundmatud liikmed võrrandi ühele poolele ja tuntud liikmed teisele poolele:

$$32x + 48y - 5x - 6y = 15 - 24 + 80.$$

4. Koondame sarnased liikmed:

$$27x + 42y = 71.$$

Niisiis pärast näidatud teisendusi antud võrrand oman-dab kuju, milles võrrandi vasakul poolel leidub ainult kaks liiget: üks tundmatuga x (esimesel astmel) ja teine tundma-tuga y (esimesel astmel); võrrandi parem pool aga koosneb ainult ühest liikmest, mis ei sisalda tundmatuid. Tundmatute x ja y juures olevad kordajad on kas mõlemad positiivsed (nagu meie poolt võetud näites) või mõlemad negatiivsed (millise juhu saab võrrandi kõikide liikmete korrutamisel arvuga -1 taandada eelmisele) või üks neist on positiivne ja teine negatiivne; paremal poolel leiduv liige on kas posi-tiivne arv (nagu meie näites) või negatiivne arv või isegi null. Tähistades x ja y kordajad tähtedega a ja b ning tund-matut mittesisaldava liikme tähega c , saame kahe tundma-tuga esimese astme võrrandi üldkujul esitada nii:

$$ax + by = c.$$

Võrrandi sellist kuju nimetatakse kahe tundmatuga esi-mese astme võrrandi *normaalkujuks*.

93. Kahe tundmatuga võrrandi määramatus.

Kahe tundmatuga võrrandil on arvutu hulk lahendeid. Tõepoolest, kui ühe tundmatu väärtuseks valime mingi meelevaldse arvu ja selle arvu asetame võrrandisse, siis saame võrrandi ainult teise tundmatuga, mille saab leida sellest võrrandist. Valides esimese liidetava väärtuseks mingi teise arvu, saame samal teel teise tundmatu jaoks uue arvu jne. Sel viisil võime saada kuitahes palju lahendeid.

Olgu meil antud näiteks niisugune ülesanne: Leida võrdhaarse kolmnurga küljed, kui kolmnurga übermõõt on 40 m. Tähistanud kolmnurga aluse pikkuse tähega x ja kummagi haara pikkuse tähega y , saame kirjutada võrrandi:

$$x + 2y = 40.$$

Valime x väärtuseks mingi meelevaldse arvu, näiteks 10. Siis saame: $10 + 2y = 40$, $2y = 30$, $y = 15$. Tähendab, kui kolmnurga alus on 10 m, siis kumbki ülejäänud külg on 15 m. Valime nüüd x väärtuseks mingi teise arvu, näiteks 8. Siis $2y = 32$ ja $y = 16$. Niiviisi saame leida kuitahes palju lahendeid, ja järelikult võrrand ning ülesanne osutuvad määramatuiks.

94. Võrrandisüsteem.

Tavaliselt öeldakse, et mitu võrrandit moodustavad süsteemi, kui kõigis neis võrrandis iga täht x , y , ... tähendab üht ja sama arvu. Kui näiteks kaht võrrandit

$$\begin{cases} 2x - 5 = 3y - 2 \\ 8x - y = 2y + 21 \end{cases}$$

vaadeldakse tingimusel, et täht x , niisamuti ka täht y , tähendab mõlemas võrrandis üht ja sama arvu, siis niisugused võrrandid moodustavad süsteemi. Süsteem saadakse iga

kord siis, kui võrrandid on koostatud ühe ja sama ülesande põhjal.

Näitame kahest kahe tundmatuga esimese astme võrrandist koosneva süsteemi kaht lahendamisevõtet.

95. Asendusvõte.

Seda võtet me rakendasime juba varem, kui lahendasime ülesannet hõbe- ja vaskkangist.

Võtame nüüd keerulisema näite:

$$8x - 5y = -16; \quad 10x + 3y = 17.$$

(Mõlemad võrrandid on teisendatud normaalkujulisteks.)

Avaldame ühest võrrandist, näiteks esimesest, ühe tundmatu, näiteks y , teise tundmatu kaudu ¹:

$$y = \frac{8x + 16}{5}.$$

Et teist võrrandit peavad rahuldama needsamad väärtused mis esimest, siis võime temas y asendada leitud avaldisega, mistõttu saame võrrandi ühe tundmatuga x :

$$10x + 3 \cdot \frac{8x + 16}{5} = 17.$$

Lahendame selle võrrandi:

$$10x + \frac{24x + 48}{5} = 17; \quad 50x + 24x + 48 = 85; \quad x = \frac{1}{2}.$$

Siis

$$y = \frac{8x + 16}{5} = \frac{4 + 16}{5} = 4.$$

Me oleksime võinud ühest võrrandist avaldada tundmatu x teise tundmatu y kaudu ja saadud avaldise asetada x asemele teise võrrandisse; siis oleksime saanud võrrandi tundmatuga y .

¹ Selle valemi tuletamiseks viime liikme $-5y$ paremale, liikme -16 vasakule poolele, siis jagame võrrandi mõlemad pooled 5-ga ja vahetame võrrandi pooled. On vaja harjuda neid teisendusi peast teostama.

See võte on rakendamiseks sobiv eriti siis, kui mingi tundmatu juures kordaja on 1. Sel juhul on kõige parem avaldada see tundmatu teise kaudu (sest kordajaga jagada siis ei tule).

Näiteks:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 4x + y = 22. \end{cases}$$

Teisest võrrandist leiame: $y = 22 - 4x$.

Esimene võrrand annab siis:

$$3x - 2(22 - 4x) = 11; \quad 3x - 44 + 8x = 11;$$

$$11x = 44 + 11 = 55; \quad x = \frac{55}{11} = 5; \quad y = 22 - 4 \cdot 5 = 2.$$

Eeskiri. Selleks, et asendusvõtte abil lahendada kahe võrrandi süsteemi kahe tundmatuga, on vaja ühest võrrandist avaldada üks tundmatu teise kaudu ja saadud avaldis asetada teise võrrandisse; sellega saadakse ühe tundmatuga võrrand. Selle lahendamisel leitakse üks tundmatu. Asetades leitud arvu esimese tundmatu varemsaadud avaldisse, leitakse ka see tundmatu.

96. Liitmisvõte.

Eeldame esmalt, et antud süsteemi võrrandeis (mis on enne teisendatud normaalkujulisteks) mingi ühe tundmatu, näiteks y kordajad erinevad ainult märkide poolest. Olgu meil antud näiteks süsteem:

$$\begin{cases} 7x - 2y = 27 \\ 5x + 2y = 33. \end{cases}$$

Me teame, et kui võrdsete arvudega liidame (või neist lahutame) võrdsed arvud, siis saame võrdsed arvud. Liites (või lahutades) antud võrrandite vasakud pooled omavahel ja paremad pooled omavahel, jääb seetõttu märk $=$ püsima (seda väljendatakse lühemalt nõnda: võrrandeid võib liikmeti liita ja lahutada).

Seda teades liidame antud võrrandid; siis liikmed $-2y$ ja $+2y$ vastastikku hävivad ja me saame võrrandi ühe tundmatuga x :

$$+ \begin{cases} 7x - 2y = 27 \\ 5x + 2y = 33 \end{cases} \\ \hline 12x = 60, \text{ millest } x = 5.$$

Asendades ühes antud võrrandeist x leitud arvuga 5, saame võrrandi, millest leiame y :

$$7 \cdot 5 - 2y = 27; \quad 35 - 2y = 27; \quad 35 - 27 = 2y; \\ 8 = 2y; \quad y = 4.$$

Kui võrrandites kordajad kõrvaldatavate tundmatute ees oleksid ühesugused nii absoluutväärtuse kui ka märgi poolest, siis mingi ühe võrrandi kõikide liikmete märkide muutmisega vastandmärkideks taandaksime selle juhu äsjavaadeldud juhule. Niisiis, kui on antud süsteem

$$\begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 3x + 7y = 32, \end{cases}$$

mille mõlemas võrrandis tundmatu x ees on üks ja sama kordaja $+3$, siis muudame, ütleme, esimeses võrrandis märgid vastandmärkideks (teiste sõnadega, korrutame võrrandi mõlemad pooled arvuga -1) ja liidame seejärel võrrandid ¹:

$$+ \begin{cases} -3x + 5y = -8 \\ 3x + 7y = 32 \end{cases} \\ \hline 12y = 24 \quad y = 2.$$

$$3x + 7 \cdot 2 = 32; \quad 3x = 32 - 14 = 18; \quad x = 6.$$

¹ Muuta võrrandi kõikide liikmete märgid vastandmärkideks ja siis teda liikmeti liita teise võrrandiga tähendab muidugi sedasama, mis teda liikmeti lahutada sellest teisest võrrandist.

Võtame nüüd süsteemi, milles kordajad on erinevad, näiteks niisuguse:

$$\begin{cases} 7x + 6y = 29 \\ -5x + 8y = 10. \end{cases}$$

Esmalt võrdsustame mingi ühe tundmatu, näiteks x kordajate absoluutväärtused. Selleks leiame arvude 7 ja 5 ühise kordse (kõige parem — väikseima) ja korrutame kummagi võrrandi mõlemad pooled vastava täiendusteguriga (nagu see toimub murdude ühenimeliseks teisendamisel):

$$\begin{cases} 7x + 6y = 29 & (5\text{-ga}) \\ -5x + 8y = 10 & (7\text{-ga}) \end{cases} \begin{cases} 35x + 30y = 145 \\ -35x + 56y = 70; \end{cases}$$

vaadeldav juhtum on seega taandatud eelmisele.

Eeskiri. Selleks, et liitmisvõtte abil lahendada kahe võrrandi süsteemi kahe tundmatuga, võrdsustatakse antud võrrandis esmalt kordajate absoluutväärtused ühel kahest tundmatust ja siis juhul, kui need kordajad on võrrandis ühesuguste märkidega, muudetakse ühes võrrandis märgid vastandmärkideks. Võrrandite liitmisel saadakse siis üks võrrand ühe tundmatuga, mis leitaksegi sellest võrrandist. Leitud arv asetatakse ühesse antud võrrandis ja leitakse siis teine tundmatu.

97. Täheliste kordajatega võrrandisüsteem.

Mõnikord tuleb lahendada niisugust võrrandisüsteemi, milles kordajad on märgitud tähtedega. Olgu nõutud lahendada näiteks süsteem:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Selle süsteemi võime lahendada ükskõik kumma, numbriliste kordajatega süsteemi puhul näidatud võtte abil. Antud

juhul kõige lihtsam on rakendada liitmisvõtet, s. o. toimida nii: muuta märgid ühes võrrandis vastandmärkideks, võrdsustada ühe tundmatu, näiteks y kordajate absoluutväärtused ja liita võrrandid:

$$\begin{array}{l} ax + by = c \\ -a'x - b'y = -c' \end{array} \left| \begin{array}{l} b' \\ b \end{array} \right. \begin{array}{l} ab'x + bb'y = b'c \\ -a'bx - bb'y = -bc' \end{array}$$

$$\frac{(ab' - a'b)x}{(ab' - a'b)x} = \frac{b'c - bc'}{b'c - bc'}$$

millest leiame, kui $ab' - a'b \neq 0$:

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}.$$

Niisamuti leiame y :

$$\begin{array}{l} ax + by = c \\ -a'x - b'y = -c' \end{array} \left| \begin{array}{l} a' \\ a \end{array} \right. \begin{array}{l} aa'x + a'by = a'c \\ -aa'x - ab'y = -ac' \end{array}$$

$$\frac{(a'b - ab')y}{(a'b - ab')y} = \frac{a'c - ac'}{a'c - ac'}$$

millest

$$y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}.$$

Harjutused.

169. Asendusvõtte abil lahendada järgmised võrrandisüsteemid:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + y = 3 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ x + 4y = -15 \end{cases}$$

170. Liitmisvõtte abil lahendada järgmised võrrandisüsteemid:

$$\begin{cases} 4x + 7y = 5 \\ -2x + 5y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 5y = 20 \\ 2x - 10y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 8y = 19 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}$$

171. Mingi võtte abil lahendada järgmised võrrandisüsteemid:

$$\begin{cases} (2x - 1)(y + 2) = (x - 2)(2y + 5) \\ 5x - 2 = 2y + 15 \end{cases}$$

$$172. \begin{cases} ax + by = c \\ y = mx \end{cases} \quad \begin{cases} x + a = my \\ y + b = nx \end{cases}$$

173. Leida a ja b väärtus kaksliikmes $y = ax + b$ eeldustel, et $y = -11$, kui $x = -2$, ja $y = 1$, kui $x = 2$.

174. Osteti 8 kg üht kaupa ja 19 kg teist ning maksti kogu ostu eest 16 rbl. 40 kop.; samade hindadega osteti teine kord 20 kg üht kaupa ja 16 kg teist kaupa ning maksti kokku 28 rbl. 40 kop. Leida kummagi kauba kilogrammi hind.

175. Trust sai müügiks jalgrattaid ja mootorrattaid kokku 65 tükki. Jalgrataste eest ta maksis 100 rbl. tükist ja mootorrataste eest 400 rbl. tükist. Kogu selle kauba müügist sai trust 2980 rbl. kasu, kusjuures jalgrattad müüdi kasuga 12% ja mootorrattad kasuga 25%. Kui palju oli neid ja teisi?

176. Insener pidi panema telefoniposte kahe koha vahele. Ta arvestas, et kui panna post kummassegi äärmisesse punkti ja iga 50 m järele nende vahele, siis tuleb 21 posti puudu. Kui aga panna post iga 55 m järele, siis tuleb ainult üks post puudu. Kui palju oli poste ja missuguste vahedega ta peab need panema?

177. Kahel täisnurksel kolmnurgal on võrdsed hüpotenuusid. Esimesel kolmnurgal on üks kaatet 4 m lühem ja teine 8 m pikem teise kolmnurga vastavast kaatetist. Arvutada nende kaatetite pikkused, kui on teada, et esimese kolmnurga pindala on 34 m^2 võrra suurem teise pindalast.

Kolme võrrandi süsteem kolme tundmatuga.

98. Kolme tundmatuga esimese astme võrrandi normaalkuju.

Kui esimese astme võrrandis kolme tundmatuga x , y ja z teostada needsamad teisendused, mis eespool näitasime ühe ja kahe tundmatuga võrrandi puhul, siis anname võrrandile niisuguse (normaalseks nimetatava) kuju, mille puhul võrrandi vasakul poolel on ainult kolm liiget: üks x -ga, teine y -ga ja kolmas z -ga, ning võrrandi paremal poolel on üks otsitavaid mittedivideeritav liige.

Selline on näiteks võrrand

$$5x - 3y - 4z = -12.$$

Tema üldkuju (normaalkuju) on järgmine:

$$ax + by + cz = d,$$

kus a , b , c ja d on mingid antud relatiivsed arvud.

99. Kolme tundmatuga kahe ja ühe võrrandi määratus.

Olgu antud kahe võrrandi süsteem kolme tundmatuga:

$$5x - 3y + z = 2; \quad 2x + y - z = 6.$$

Anname ühele tundmatule, näiteks z -le, mingi meelevaldse väärtuse, ütleme väärtuse 1, ja asendame z selle arvuga:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 1 = 2 \\ 2x + y - 1 = 6 \end{cases}, \text{ s. o. } \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 2x + y = 7 \end{cases}.$$

Niiviisi saame kahe võrrandi süsteemi kahe tundmatuga. Lahendades selle mingil viisil, leiame:

$$x = 2, \quad y = 3;$$

tähendab, antud kolme tundmatuga süsteem on rahuldatud, kui $x = 2$, $y = 3$ ja $z = 1$. Anname nüüd tundmatule z mingi teise väärtuse, näiteks $z = 0$, ja asetame selle väärtuse antud võrrandesse:

$$5x - 3y = 2; \quad 2x + y = 6.$$

Me saame jällegi kahe võrrandi süsteemi kahe tundmatuga. Lahendades selle mingi võttega, leiame:

$$x = \frac{20}{11} = 1 \frac{9}{11}; \quad y = 2 \frac{4}{11}.$$

Tähendab, antud süsteem on rahuldatud, kui $x = 1 \frac{9}{11}$, $y = 2 \frac{4}{11}$ ja $z = 0$. Andes z -le veel mingi (kolmanda) väärtuse, me saame jälle kahe võrrandi süsteemi kahe tundmatuga, millest leiame x ja y väärtused. Et z -le võime anda kuitahes palju erinevaid väärtusi, siis ka y ja x jaoks võime saada kuitahes palju väärtusi (mis vastavad z võetud väärtusele). Täheleb, kahel võrrandil kolme tundmatuga on üldiselt arvu hulk lahendeid; teiste sõnadega, niisugune süsteem on määratu.

Veel suurem on määramatus, kui vaadeldakse ainult üht võrrandit kolme tundmatuga. Siis on võimalik anda meelevaldsed väärtused mingile kahele tundmatule; kolmas tundmatu aga leitakse antud võrrandist, kui selles kaks tundmatut asendada neile meelevaldselt antud väärtustega.

100. Kolme võrrandi süsteem kolme tundmatuga.

Selleks, et saaks leida kolme tundmatu kindlaid numbrilisi väärtusi, on vaja, et oleks antud kolme võrrandi süsteem. Niisugust süsteemi saab lahendada niihästi asendusvõttega kui ka liitmisvõttega. Näitame nende võtete rakendamist järgmisel näitel (kus igale võrrandile on enne antud normaalkuju):

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 7 \\ 7x + 4y - 8z = 3 \\ 5x - 3y - 4z = -12. \end{cases}$$

101. Asendusvõte.

Ühest võrrandist, näiteks esimesest, avaldame ühe tundmatu, näiteks x -i, kahe ülejäänud tundmatu kaudu:

$$x = \frac{7 + 2y - 5z}{3}.$$

Et x kõigis võrrandis tähendab üht ja sama arvu, siis ülejäänud võrrandis võime x -i asendada leitud avaldisega:

$$7 \cdot \frac{7 + 2y - 5z}{3} + 4y - 8z = 3,$$

$$5 \cdot \frac{7 + 2y - 5z}{3} - 3y - 4z = -12.$$

Niiviisi saame kahe võrrandi süsteemi kahe tundmatuga y ja z . Lahendades selle süsteemi ühe varemkirjeldatud võtte abil, leiame y ja z numbrilised väärtused. Meie näites nendeks

väärtusteks on: $y = 3$, $z = 2$; asetades need arvud meie poolt leitud x -i avaldisse, leiame ka selle tundmatu:

$$x = \frac{7 + 2 \cdot 3 - 5 \cdot 2}{3} = 1.$$

Niisiis esitatud süsteemi lahendiks on $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$ (nagu kontrollimisel võib veenduda).

102. Liitmisvõtte.

Antud kolmest võrrandist võtame kaks võrrandit, näiteks esimese ja teise. Võrdsustades neis ühe tundmatu, näiteks z kordajate absoluutväärtused, kõrvaldame neist selle tundmatu liitmisvõtte abil; sellega saame ühe võrrandi kahe tundmatuga x ja y . Edasi võtame antud kolmest mingi teise paari võrrandeid, näiteks esimese ja kolmanda (või teise ja kolmanda), ja sama võtte abil kõrvaldame neist sellesama tundmatu, s. o. z -i; sellega saame veel ühe võrrandi tundmatutega x ja y :

1) $3x - 2y + 5z = 7$	(4-ga)	$24x - 16y + 40z = 56$
2) $7x + 4y - 8z = 3$	(8-ga)	$35x + 20y - 40z = 15$
		<hr style="width: 100%;"/> $59x + 4y = 71$
1) $3x - 2y + 5z = 7$	(5-ga)	$12x - 8y + 20z = 28$
2) $5x - 3y - 4z = -12$	(5-ga)	$25x - 15y - 20z = -60$
		<hr style="width: 100%;"/> $37x - 23y = -32$

Lahendame saadud kaks võrrandit; saame $x = 1$, $y = 3$. Need arvud asetame ühte antud võrrandisse, näiteks esimesse:

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 5z = 7; 5z = 7 - 3 + 6 = 10; z = 2.$$

M ä r k u s. Samade võtete abil saame nelja võrrandi süsteemi nelja tundmatuga taandada kolme võrrandi süsteemiks kolme tundmatuga (ja selle süsteemi — kahe võrrandi süs-

teemiks kahe tundmatuga jne.). Üldiselt m võrrandi süsteemi m tundmatuga saame taandada $m - 1$ võrrandi süsteemiks $m - 1$ tundmatuga (ja selle süsteemi $m - 2$ võrrandi süsteemiks $m - 2$ tundmatuga jne.).

Harjutused.

$$178. \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$$

$$180. \begin{cases} 3x - y + z = 17 \\ 5x + 3y - 2z = 10 \\ 7x + 4y - 5z = 3. \end{cases}$$

$$179. \begin{cases} 2x + 5y - 3z - 6\frac{1}{4} = 0 \\ 5x - 6y + 2z = 12 \\ 5z = 42\frac{1}{4} - 7x + y. \end{cases}$$

$$181. \begin{cases} \frac{x + 2y}{5x + 6} = \frac{7}{9} \\ \frac{3y + 4z}{x + 2y} = \frac{8}{7} \\ x + y + z = 128. \end{cases}$$

Võrrandisüsteemide mõned erikujud.

103. Juhtum, kus iga antud võrrand ei sisalda kõiki otsitavaid,

näiteks:

$$\begin{cases} 10x - y + 3z = 5 \\ 4v - 5x = 6 \\ 2y + 3z = 6 \\ 3y + 2v = 4. \end{cases}$$

Sel juhul süsteem laheneb kiiremini kui harilikult, sest mõnedest võrranditest on need või teised tundmatud juba kõrvaldatud. On vaja ainult taibata, missugused tundmatud missugustest võrranditest tuleb veel kõrvaldada, et võimalikult kiiresti jõuda ühe võrrandini ühe tundmatuga. Kõrvaldades meie näites z esimesest ja kolmandast võrrandist ning v teisest ja neljandast võrrandist, saame kaks võrrandit tundmatutega x ja y :

$$\begin{array}{rcl} 10x - y + 3z & = & 5 \\ -2y - 3z & = & -6 \\ \hline 10x - 3y & = & -1; \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 4v - 5x & = & 6 \\ -4v - 6y & = & -8 \\ \hline -5x - 6y & = & -2. \end{array}$$

Lahendades need võrrandid, leiame: $x = 0$; $y = \frac{1}{3}$.

Need arvud asetame nüüd teise ja kolmandasse võrrandisse; siis saame:

$$v = \frac{3}{2}; \quad z = \frac{16}{9} = 1 \frac{7}{9}.$$

**104. Juhtum, kus tundmatud esinevad ainult
murdude $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, ... kujul.**

Olgu antud näiteks süsteem:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{7}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Niisugust süsteemi on kõige lihtsam lahendada abitudmatute võttega. Tähistame.

$$\frac{1}{x} = x', \quad \frac{1}{y} = y' \quad \text{ja} \quad \frac{1}{z} = z'.$$

Siis saame järgmise süsteemi tundmatutega x' , y' ja z' :

$$\begin{cases} x' + y' - z' = \frac{7}{6} \\ x' - y' - z' = -\frac{5}{6} \\ y' - x' - z' = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Lahendades selle süsteemi, leiame:

$$x' = \frac{1}{2}, \quad y' = 1, \quad z' = \frac{1}{3},$$

s. o.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{y} = 1, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{3}.$$

Lõpuks leiame siit:

$$x = 2, \quad y = 1, \quad z = 3.$$

Võtame veel teise näite:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} = -13 \\ \frac{6}{x} - \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = 5\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{x} + \frac{7}{y} + \frac{2}{z} = 3\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Murde $\frac{3}{x}$, $\frac{2}{y}$ jms. saab vaadelda kui korrutisi $3 \cdot \frac{1}{x}$, $2 \cdot \frac{1}{y}$ jne. Seetõttu tähistusega $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$ ja $\frac{1}{z} = z'$ kujuneb antud süsteem niisuguseks:

$$\begin{cases} 3x' + 2y' - 4z' = -13 \\ 6x' - 3y' - z' = 5\frac{1}{2} \\ -5x' + 7y' + 2z' = 3\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Neist võrrandeist leiame:

$$x' = 2, \quad y' = \frac{1}{2}, \quad z' = 5;$$

tähendab:

$$\frac{1}{x} = 2, \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{z} = 5,$$

millest

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = 2, \quad z = \frac{1}{5}.$$

105. Juhtum, kus antud võrrandid on kasulik liita.

Olgu antud süsteem

$$\begin{cases} x + y = a. \\ y + z = b. \\ x + z = c. \end{cases}$$

Liites kõik võrrandid, leiame:

$$2(x + y + z) = a + b + c;$$

$$x + y + z = \frac{a + b + c}{2}.$$

Lahutades viimasest võrrandist iga antud võrrandi, saame:

$$z = \frac{a+b+c}{2} - a; \quad x = \frac{a+b+c}{2} - b; \quad y = \frac{a+b+c}{2} - c.$$

Harjutused.

$$182. \begin{cases} 3x + 5y = 74 \\ 7x + 2z = 66 \\ 2y + z = 25. \end{cases}$$

$$183. \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 1 \\ \frac{30}{x} + \frac{31}{y} = 6. \end{cases}$$

$$184. \begin{cases} 4x - 3z + u = 10 \\ 5y + z - 4u = 1 \\ 3y + u = 17 \\ x + 2y + 3u = 25. \end{cases}$$

$$185. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{4}{z} = \frac{1}{12} \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = \frac{19}{24} \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} + \frac{1}{z} = \frac{6}{z}. \end{cases}$$

186. Kuidas on kõige lihtsam lahendada süsteemi:

$$\begin{cases} x + y + z = 29 \frac{1}{4} \\ x + y - z = 18 \frac{1}{4} \\ x - y + z = 13 \frac{3}{4}. \end{cases}$$

187. Kolm ostjat ostis kohvi, suhkrut ja teed. Esimene ostja maksis 8 kg kohvi, 10 kg suhkrut ja 3 kg tee eest 35 rbl.; teine ostja maksis 4 kg kohvi, 15 kg suhkrut ja 5 kg tee eest 40 rbl. ja kolmas ostja kulutas 82 rbl. 50 kop., ostes 12 kg kohvi, 20 kg suhkrut ja 10 kg teed. Leida kohvi, suhkrut ja tee kilogrammi hind.

188. On kolm tükki kulla, hõbedat ja vase sulamit, mis sisaldavad vastavalt:

1) 5 osa kulda, 6 osa hõbedat ja 8 osa vaske;

2) 3 „ „ 5 „ „ 7 „ „

3) 7 „ „ 13 „ „ 18 „ „

Mitu kilogrammi tuleb võtta igast tükist, et moodustada sulamit, milles oleks 79 kg kulda, 118 kg hõbedat ja 162 kg vaske?

Ajaloolisi teatmeid.

Võrrandeid kohtame juba antiikajal egiptlaste juures. Ahmes'e poolt (2000 aastat e. m. a.) kirjutatud papüüruses leidub esimese astme võrrandeid ühe tundmatuga, kusjuures tundmatut märgiti sõnaga „*hau*” — kuhi.

Kreeka matemaatikul Diophantos'el (m. a. IV saj.) leiame väga mitmesuguseid võrrandeid, nende hulgas ka mitme tundmatuga võrrandeid, kuid ta ei anna nende lahendamiseks üldist võtet.

Newton esitab juba mitu võtet võrrandisüsteemide lahendamiseks, nende hulgas ka asendusvõtte.

Palju tegelesid võrranditega araabia õpetlased, kusjuures nad võrrandite lahendamiseks kasutasid võrdsete liikmete liitmist võrrandi mõlema poolega ja lahutamist mõlemast poolest. Esimest tehet nimetati „taasseadmiseks”, araabia keeles „*algebre*”, teist „vastandamiseks” — „*almukabalah*”. Esimesest neist sõnadest (*aldžebr*) on tulnudki nimetus „algebra”.

Viies jagu.

RUUTJUURE LEIDMINE.

I. Juurte põhiomadused.

106. Juure definitsioon.

Teiseks juureks (ehk ruutjuureks) arvust a nimetatakse niisugust arvu, mille ruut võrdub arvuga a . Nii on ruutjuur 49-st arv 7 ja samuti ka arv -7 , sest $7^2 = 49$ ja $(-7)^2 = 49$. Kolmandaks juureks (kuupjuureks) arvust a nimetatakse niisugust arvu, mille kuup võrdub arvuga a . Näiteks kuupjuur -125 -st on -5 , sest $(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$.

Üldiselt n -es juur arvust a on niisugune arv, mille n -es aste võrdub arvuga a .

Arvu n , mis näitab, mitmes juure aste on a , nimetatakse juurijaks.

Juurt märgitakse sümboliga $\sqrt{\quad}$ (juuremärk). Tema rõhtkriipsu alla kirjutatakse arv, millest juurt leitakse (juuritav), ja nurga ava peale paigutatakse juuriija. Niisiis

kuupjuur 27-st märgitakse kujul $\sqrt[3]{27}$;

viies juur 32-st „ „ $\sqrt[5]{32}$.

Tavaliselt ruutjuure puhul juuriijat üldse ei kirjutata; näiteks $\sqrt{16}$ asemel kirjutatakse $\sqrt{16}$.

Teht, mille abil leitakse juurt, nimetatakse juurimiseks; see on astendamise pöördtehe, sest selle tehte abil leitakse arv, mis astendamisel on antud (nimelt astendatav), ja antud on arv, mida astendamisel otsitakse (nimelt aste ise). See-tõttu juurimist saame alati kontrollida astendamisega. Näiteks et kontrollida võrdust $\sqrt[3]{125} = 5$, on küllalt, kui 5 astendada 3-ga; saanud juuri-tava 125, me järeldame, et 5 on tõepoolest kuupjuur 125-st.

107. Aritmeetiline juur.

Juurt nimetatakse aritmeetiliseks, kui ta on positiivne arv ja on saadud positiivse arvu juurimisel. Näiteks aritmeeti-line ruutjuur arvust 49 on 7, kuna arvu -7 , mis ka on ruut-juur 49-st, ei nimetata aritmeetiliseks.

Näitame aritmeetilise juure järgmist kaht omadust.

a) Olgu nõutud leida aritmeetiline $\sqrt{49}$. See juur on 7, sest $7^2 = 49$. Seame endale küsimuse, kas on võimalik leida mingit teist positiivset arvu x , mille ruut samuti oleks 49. Oletame, et niisugune arv leidub. Siis ta peab olema kas väiksem kui 7 või suurem kui 7. Kui oletame, et $x < 7$, siis $x^2 < 49$ (korrutatava ja korrutaja vähenemisel korrutis väheneb, kui tegurid on positiivsed); kui aga oletame, et $x > 7$, siis ka $x^2 > 49$. Tähendab, ükski 7-st väiksem ega 7-st suurem positiivne arv ei saa võrduda $\sqrt{49}$. Niisiis saab olla ainult üks antud juurijaga aritmeetiline juur antud arvust.

b) Võtame mingi kaks mittevõrdset positiivset arvu, näi-teks 49 ja 64. Sellest, et $49 < 64$, saame järeldada, et $\sqrt{49} < \sqrt{64}$ (sest märgiga $\sqrt{\quad}$ tähistame ainult aritmeetilist

ruutjuurt). Tõepoolest: $7 < 8$. Niisamuti sellest, et $64 < 125$, saame järeldada, et ka $\sqrt[3]{64} < \sqrt[3]{125}$. Tõepoolest:

$$\sqrt[3]{64} = 4 \quad \text{ja} \quad \sqrt[3]{125} = 5 \quad \text{ning} \quad 4 < 5. \quad \text{Üldiselt:}$$

väiksemale positiivsele arvule vastab ka väiksem aritmeetiline juur (ühe ja sama juurija puhul).

108. Algebraalne juur.

Juurt nimetatakse algebraaliseks, kui ei nõuta, et ta oleks positiivne ja oleks saadud positiivse arvu juurimisel. Niisiis, kui avaldist $\sqrt[n]{a}$ mõistetakse n -nda algebraalise juurena, siis see tähendab, et arv a võib olla nii positiivne kui ka negatiivne ja juur ise võib olla nii positiivne kui ka negatiivne.

Näitame algebraalise juure järgmist nelja omadust.

a) Paaritu arvulise juurijaga juur positiivsest arvust on positiivne arv.

Nii peab $\sqrt[3]{8}$ olema positiivne arv (ta on 2), sest negatiivse arvu paaritu arvulise astendajaga aste on negatiivne arv.

b) Paaritu arvulise juurijaga juur negatiivsest arvust on negatiivne arv.

Nii peab $\sqrt[3]{-8}$ olema negatiivne arv (ta on -2), sest positiivse arvu mistahes astendajaga aste on positiivne arv, mitte aga negatiivne.

c) Paarisarvulise juurijaga juur positiivsest arvust omab kaht väärtust, mis on vastandmärkidega ja ühesuguste absoluutväärtustega.

Nii $\sqrt{+4} = +2$ ja $\sqrt{+4} = -2$, sest $(+2)^2 = +4$ ja $(-2)^2 = +4$; täpselt niisamuti $\sqrt[4]{+81} = +3$ ja

$\sqrt[4]{+81} = -3$, sest astmed $(-3)^4$ ja $(+3)^4$ võrduvad ühe ja sama arvuga $+81$. Algebraalse juure kaht väärtust märgitakse harilikult kahe märgi paigutamise aritmeetilise juure ette; nii jääb juure tähis ka siis ainult ühe väärtuse, nimelt aritmeetilise juure sümboliks. Seega tingimust $x^2 = 25$ täitev algebraalne juur $x = \pm \sqrt{25} = \pm 5$.

d) Paarisarvulise juurijaga juur negatiivsest arvust ei saa võrduda ühegi positiivse ega ühegi negatiivse arvuga, sest nii üks kui ka teine neist astendamisel paarisarvuga annab positiivse arvu, mitte aga negatiivse. Näiteks $\sqrt{-9}$ ei võrdu $+3$ -ga, ei -3 -ga ega ühegi muu arvuga.

Harjutused.

Millega võrduvad järgmised avaldised:

189. $\sqrt{100}$; $\sqrt{0,01}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$; $\sqrt[3]{\frac{9}{16}}$; $\sqrt{a^2}$; $\sqrt{x^2}$.

190. $(\sqrt{5})^2$; $(\sqrt[3]{27})^3$; $(\sqrt[5]{a})^5$; $(\sqrt{1+x})^2$.

191. $\sqrt[3]{+27}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$; $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; $\sqrt[3]{-0,001}$.

192. $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$; $\sqrt[4]{81}$; $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-a^2}$; $\sqrt[4]{-16}$.

109. Korrutise, astme ja murru juurimine.

a) Olgu vaja leida aritmeetiline ruutjuur korrutisest abc . Kui nõutaks korrutise astendamist kahega, siis, nagu nägime (§ 46), võiks astendada kahega iga teguri eraldi. Et juurimine on astendamise pöördtehe, siis peab ootama, et korrutise juurimiseks võib juurida iga tegurit eraldi, s. t. et

$$\sqrt{abc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Selleks, et veenduda selle võrduse kehtivuses, astendame tema parema poole kahega (korrutise astendamise teoreemi järgi):

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 \cdot (\sqrt{c})^2.$$

Kuid juure definitsiooni järgi

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad (\sqrt{b})^2 = b, \quad (\sqrt{c})^2 = c.$$

Järelikult

$$(\sqrt{a} \sqrt{b} \sqrt{c})^2 = abc.$$

Kui korrutise $\sqrt{a} \sqrt{b} \sqrt{c}$ ruut võrdub abc -ga, siis see tähendab, et see korrutis võrdub ruutjuurega abc -st. Nii-samuti

$$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b} \sqrt[3]{c},$$

sest

$$(\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b} \sqrt[3]{c})^3 = (\sqrt[3]{a})^3 (\sqrt[3]{b})^3 (\sqrt[3]{c})^3 = abc.$$

Tähendab, selle asemel, et võtta aritmeetilist juurt korrutisest, võib võtta selle igast tegurist eraldi.

b) Proovimise teel on kerge veenduda, et järgmised võrdused on õiged:

$$\sqrt{a^4} = a^2, \text{ sest } (a^2)^2 = a^4,$$

$$\sqrt[3]{x^{12}} = x^4, \quad ,, \quad (x^4)^3 = x^{12}, \text{ jms.}$$

Tähendab, selle asemel, et juurida astet, mille astendaja jagub juurijaga, võib astendaja jagada juurijaga.

c) Õigeteks osutuvad ka järgmised võrdused:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}, \text{ sest } \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16},$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}, \quad ,, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}.$$

Üldiselt:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

Tähendab, selle asemel, et juurida murdu, võib juurida lugejat ja nimetajat eraldi.

Meenutame, et neis eeskirjades eeldatakse, et jutt on aritmeetilistest juurtest.

Näited.

$$1. \sqrt{9a^4b^6} = \sqrt{9} \sqrt{a^4} \sqrt{b^6} = 3a^2b^3.$$

$$2. \sqrt[3]{125a^6x^9} = \sqrt[3]{125} \sqrt[3]{a^6} \sqrt[3]{x^9} = 5a^2x^3.$$

Harjutused.

$$193. \sqrt{4 \cdot 9}; \quad \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 0,01 \cdot 25}; \quad \sqrt{4a^2b^2}; \quad \sqrt{9a^2x^2y^4}.$$

$$194. \sqrt[3]{-27a^3b^3}; \quad \sqrt[4]{\frac{1}{16}a^4x^4}; \quad \sqrt[5]{abc}.$$

$$195. \sqrt{a^4}; \quad \sqrt{2^4}; \quad \sqrt{x^6}; \quad \sqrt{(a+b)^4}.$$

$$196. \sqrt[3]{2^6}; \quad \sqrt[3]{-a^6}; \quad \sqrt[3]{x^9}; \quad \sqrt[3]{(m+n)^6}.$$

$$197. \sqrt[3]{\frac{8}{125}}; \quad \sqrt[3]{-\frac{27}{1000}}; \quad \sqrt[3]{\frac{a^6}{b^3}}; \quad \sqrt[3]{\frac{x}{y^3}}; \quad \sqrt[3]{\frac{x}{y}}.$$

$$198. \sqrt{25a^6b^2c^4}; \quad \sqrt{0,36x^4y^2}; \quad \sqrt{\frac{1}{4}(b+c)^6x^4}.$$

II. Ruutjuure leidmine arvudest.

110. Eelmärgused.

a) Kõne lühendamiseks ütleme „ruutjuure” asemel käesolevas peatükis lihtsalt „juur”.

b) Kui loomuliku arvuderea arvud

1, 2, 3, 4, 5, ...

astendame 2-ga, siis saame niisuguse ruutude tabeli:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, ...

On ilmne, et leidub väga palju täisarve, mida selles tabelis ei ole; juured neist arvudest muidugi ei ole täisarvud. Seetõttu nõuet, leida juur mingist täisarvust, näiteks leida $\sqrt{4082}$, me lepime kokku mõista nii: leida täisarv, mille ruut on 4082, kui see on võimalik, või, kui see osutub võimatuks, leida kõige suurem täisarv, mille ruut sisaldub arvus 4082 (see arv on 63, sest $63^2 = 3969$, kuid $64^2 = 4096$).

c) Kui antud arv on 100-st väiksem, siis juur temast leitakse korrutamistabeli abil.

111. Juure leidmine täisarvust, mis on väiksem kui 10 000, kuid suurem kui 100.

Olgu vaja leida $\sqrt{4082}$. Et see arv on väiksem kui 10 000, siis juur temast on väiksem kui 100. Teiselt poolt, antud arv on suurem kui 100, tähendab juur temast on suurem kui 10 (või võrdne 10-ga). Kuid iga arv, mis on 10-st suurem (või võrdne 10-ga) ja 100-st väiksem, omab kaht numbrit, tähendab, otsitav juur on summa

kümned + lihtühikud

ja seepärast tema ruut peab võrduma summaga

$$(\text{kümned})^2 + 2 \cdot (\text{kümned}) \cdot (\text{lihtühikud}) + (\text{lihtühikud})^2.$$

See summa peab olema suurim ruut, mida sisaldab arv 4082. Et $(\text{kümned})^2$ moodustavad sajad, siis kümnete ruutu tuleb otsida antud arvu sadades. Sadasid antud arvus on 40 (nende arvu leiame, kui paremalt komaga eraldame kaks numbrit). Kuid 40 sisaldab mitu täisruutu: 36, 25, 16, ... jt. Võtame neist suurima, s. o. 36, ja oletame, et juure kümnete ruut võrdub nimelt selle suurima ruuduga. Siis juure kümnete arv peab olema 6. Veendume nüüd, et see alati peab olema nii, s. o. alati juure kümnete arv võrdub suurima täis-

arvulise juurega juuritava sadade arvust. Tõepoolest, meie näites juure kümnete arv ei saa olla suurem kui 6, sest $(7 \text{ kümmet})^2 = 49 \text{ sada}$, mis ületab 4082. Kuid ta ei saa olla ka väiksem kui 6, sest 5 kümmet (koos lihtühikutega) on väiksem kui 6 kümmet, ja $(6 \text{ kümmet})^2 = 36 \text{ sada}$, mis on väiksem kui 4082. Et me otsime suurimat täisarvulist juurt, siis juure jaoks ei tule võtta 5 kümmet, kui isegi 6 kümmet ei ole palju. Nõnda siis oleme leidnud juure kümnete arvu, nimelt 6. Selle numbriga kirjutame märgist = paremale, meeles pidades, et ta tähendab juure kümneid. Võttes tema ruudu, saame 36 sada. Need 36 sada lahutame juuritava 40 sajast ja jäägi juurde kirjutame arvu 82:

$$\begin{array}{r} \sqrt{40'82} = 6 \\ \quad 36 \\ \hline \quad 48'2 \end{array}$$

Arv 482 peab sisaldama summat:

$$2 \cdot (6 \text{ kümmet}) \cdot (\text{lihtühikud}) + (\text{lihtühikud})^2.$$

Korrutis $2 \cdot (6 \text{ kümmet}) \cdot (\text{lihtühikud})$ peab andma kümned, mistõttu kümnete ja lihtühikute korrutise kahekordset tuleb otsida jäägi kümnetes, s. o. arvus 48 (nende arvu saame, kui jäägis $48'2$ eraldame ühe numbriga paremalt). Juure kümnete arvu kahekordne on 12. Tähendab, kui 12 korrutada juure lihtühikute arvuga (mis praegu veel ei ole teada), siis peame saama arvu, mis sisaldub 48-s. Seepärast 48 jagame 12-ga. Selleks tõmbame jäägist vasakul püstkriipsu ja kirjutame selle ette (taandudes kriipsust peatselt selguval eesmärgil ühe koha võrra vasakule) juure esimese numbriga kahekordse, s. o. 12, ja jagame 48 sellega.

Jagatiseks saame 4. Kuid ette ei saa vastutada, et numbriga 4 võib võtta juure lihtühikuteks, sest me jagasime 12-ga jäägi kõik kümned, kuna osa neist võib-olla ei kuulu kümnete ja lihtühikute korrutise kahekordsesse, vaid lihtühikute

ruudusse. Seetõttu number 4 võib osutada liiga suureks. Teda on vaja proovida. On ilmne, et ta sobib sel juhul, kui summa $2 \cdot (6 \text{ kümnet}) \cdot 4 + 4^2$ osutub mittersuuremaks jäägist 482. Seda summat saab arvutada järgmisel lihtsal viisil: püstkriipsu ette juure numbriga kahekordse (12) kõrvale paremale kirjutame numbriga 4 (seepärast me taandusimegi kriipsust ühe koha võrra) ja temaga korrutame saadud arvu (124 korrutame 4-ga):

$$\begin{array}{r} \sqrt{40'82} = 6 \\ \quad 36 \\ 124 \overline{) 48'2} \\ \quad 4 96 \end{array}$$

Tõepoolest, selle korrutamise teostamisel 4 korrutame 4-ga, tähendab, leiame juure lihtühikute ruudu; siis 12 kümnet korrutame 4-ga, tähendab, leiame juure kümnete ja lihtühikute korrutise kahekordse. Tulemusena saame korruga ühe ja teise summa. Selleks korrutiseks tuli 496, mis on suurem kui jääk 482; tähendab, number 4 on liiga suur. Siis proovime niisamuti järgnevat väiksemat numbrit, s. o. 3. Selleks kustutame numbriga 4 ning korrutise 496 ja numbriga 4 asemele kirjutame 3 ning korrutame 123 arvuga 3:

$$\begin{array}{r} \sqrt{40'82} = 63 \\ \quad 36 \\ 123 \overline{) 48'2} \\ \quad 3 69 \\ \quad \quad 113 \end{array}$$

Korrutis 369 osutus väiksemaks jäägist 482; tähendab, number 3 sobib (kui oleks juhtunud, et see number oleks olnud liiga suur, siis oleks vaja proovida järgmist väiksemat numbrit, s. o. 2). Numbriga 3 kirjutame juure kümnete numbrist paremale. Viimane jääk 113 näitab, mille võrra

antud arv ületab suurima temas sisalduva ruudu. Kontrolliks astendame 63 arvuga 2 ja tulemusega liidame 113:

$$\begin{array}{r} 63^2 = 3969 \\ + 113 \\ \hline 4082 \end{array}$$

Et summaks saime antud arvu 4082, siis tehe on õieti teostatud.

Näited.

$$1. \sqrt{12'25} = 35$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 65 \overline{) 32'5} \\ \underline{5 \quad 32 \quad 5} \\ 0 \end{array}$$

$$2. \sqrt{86'55} = 93$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 183 \overline{) 55'5} \\ \underline{3 \quad 54 \quad 9} \\ 6 \end{array}$$

$$3. \sqrt{16'05} = 40$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 8 \overline{) 0'5} \end{array}$$

$$4. \sqrt{8'72} = 29$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 49 \overline{) 4 \quad 7'2} \\ \underline{9 \quad 4 \quad 4 \quad 1} \\ 3 \quad 1 \end{array}$$

$$5. \sqrt{64'00} = 80$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \hline 00 \end{array}$$

Neljandas näites jäägi kümnete 47 jagamisel 4-ga saame jagatisena 11. Et aga juure lihtühikute numbriks ei saa olla kahekohaline arv 11 või 10, siis tuleb otsekohe proovida numbrit 9.

Viiendas näites pärast 8 ruudu lahutamist esimesest rühmast osutub jääk võrdseks 0-ga ja järgmine rühm koosneb samuti nullidest. See näitab, et otsitav juur koosneb ainult 8 kümnest, ja seepärast lihtühikute kohale tuleb panna null.

112. Juure leidmine täisarvust, mis on suurem kui 10 000.

Olgu nõutud leida $\sqrt{35782}$, Et juuritav ületab 10 000, siis juur temast on suurem kui $\sqrt{10\,000} = 100$, ja tähendab, ta koosneb kolmest või enamast numbrist. Koosnegu ta kui tahes mitmest numbrist, ikka võime teda vaadelda ainult

kümnete ja lihtühikute summana. Kui juur oleks näiteks 482, siis võime teda lugeda summaks 48 kümnet + 2 lihtühikut. Siis juure ruut koosneb endiselt kolmest liidetavast:

$$(\text{kümned})^2 + 2 \cdot (\text{kümned}) \cdot (\text{lihtühikud}) + (\text{lihtühikud})^2.$$

Nüüd saame arutada täiesti niisamuti nagu $\sqrt{4082}$ leidmisel (eelmises paragrahvis). Erinevus ilmneb ainult selles, et juure kümnete leidmiseks 4082 puhul meil tuli leida juur 40-st, mida sai teha korrutamistabeli abil; nüüd aga $\sqrt{357'82}$ kümnete saamiseks tuleb leida juur 357-st, mida ei saa teha korrutamistabeli abil. Kuid $\sqrt{357}$ saame leida viisil, mis on kirjeldatud eelmises paragrahvis, sest arv $357 < 10\,000$:

$$\sqrt{3'57'82} = 189$$

	1		25	7				
28		8		338	2			
8		9		332	1			
369		61						

Suurim täisarvuline juur 357-st on 18. Tähendab, $\sqrt{3'57'82}$ peab sisaldama 18 kümnet.

Selleks, et leida lihtühikuid, on vaja 3'57'82-st lahutada 18 kümne ruut, milleks on küllalt, kui 18 ruut lahutada 357-st sajast ja jäägi juurde üle kanda juuritava kaks viimast numbrit. Jääk, mis tekib 18 ruudu lahutamisel 357-st, on meil juba olemas: see on 33. Tähendab, selleks et saada jääki, mis tekib 18 kümne ruudu lahutamisel 3'57'82-st, tuleb 33 kõrvale paremale kirjutada numbrid 82.

Edasi toimime nii, nagu toimisime $\sqrt{4082}$ leidmisel, nimelt: vasakul jäägist 3382 tõmbame püstkriipsu ja selle ette kirjutame (taandudes kriipsust ühe koha võrra) juure

leitud kümnete arvu kahekordse, s. o. 36 (kaks korda 18). Jäägis eraldame paremalt ühe numברי ja jäägi kümnete arvu, s. o. 338 jagame 36-ga. Jagatisena saame 9. Proovime seda arvu, milleks kirjutame ta 36 kõrvale paremale ja korrutame temaga. Korrutiseks tuli 3321, mis on jäägist väiksem. Tähendab, number 9 sobib ja võime ta kirjutada juuresse.

Üldiselt, selleks et leida ruutjuurt mistahes täisarvust, on vaja esmalt leida juur tema sadade arvust; kui see arv ületab 100, siis tuleb leida juur selle sadade arvu sadadest, s. o. antud arvu kümnetuhandetest; kui ka see arv on suurem kui 10 000, siis tuleb leida juur kümnetuhandete arvu sadadest, s. o. antud arvu miljonitest, jne.

Näited.

$$1. \sqrt{8'72'00'00} = 2952. \quad 2. \sqrt{3'50'32'60'89} = 18\,717$$

	4	
49	47'2	
9	441	
585	310'0	
5	2925	
5902	1750'0	
2	11804	
	5696	

	1				
28	25'0				
8	224				
367	263'2				
7	2569				
3741	636'0				
1	3741				
37427	26198'9				
7	261989				
	0				

$$3. \sqrt{9'51'10'56} = 3084$$

	9	
608	51'0	
8	4864	
6164	2465'6	
4	24656	
	0	

Viimases näites esimese numברי leides ja tema ruudu lahutades saame jäägiks 0. Kaanname alla 2 numברי 51. Eralda-

des kümned, saame 5 kümmet, kuna juure leitud numbriga kahekordne on 6. Tähenäib, 5 jagamisel 6-ga saame 0. Juures kirjutame teisele kohale 0 ja jäägi juurde kanname järgmised 2 numbrit; saame 5110. Edasi jätkame nagu harilikult.

$$4. \quad \sqrt{81'00'00} = 900$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \hline 0 \end{array}$$

Selles näites otsitav juur koosneb ainult 9 sajast ja seepärast kümnete kohale ning lihtühikute kohale tuleb panna nullid.

Eeskiri. Selleks, et leida ruutjuurt antud täisarvust, jaotatakse tema numbrid, paremalt vasakule poole minnes, kahe- numbrilisteks rühmadeks, kusjuures esimeses (äärmises vasakpoolses) rühmas võib olla ka üksainus number.

Juure esimese numbriga saamiseks leitakse ruutjuur esimesest rühmast.

Juure teise numbriga saamiseks lahutatakse esimesest rühmast juure esimese numbriga ruut, jäägi kõrvale kantakse teine rühm ja saadud arvu kümnete arv jagatakse juure esimese numbriga kahekordsega; saadud täisarvu proovitakse.

See proovimine toimub nii: püstkriipsu ette (jäägist vasakule) kirjutatakse juure varem leitud arvu kahekordne ja tema kõrvale paremale poole kirjutatakse proovitav number; pärast seda juurdekirjutamist saadud arv korrutatakse proovitava numbriga. Kui korrutamisel saadakse jäägist suurem arv, siis proovitav number ei kõlba ja tuleb proovida järgmist, väiksemat numbrit.

Juure järgmised numbrid leitakse sellesama võtte abil.

Kui pärast rühma ülekandmist saadud arvu kümnete arv osutub jagajast väiksemaks, s. o. väiksemaks kui juure leitud osa kahekordne, siis juures kirjutatakse 0, kantakse üle järgmine rühm ja jätkatakse tegevust endiselt.

113. Juure numbrite arv.

Juure leidmise protsessi vaatlusest selgub, et juures peab olema niimitu numbrit, kuipalju juuritav sisaldab kahenumbri-¹⁸rilisi rühmi (vasakpoolses rühmas võib olla ka üks number); teiste sõnadega: kui juuritava numbrite arv on paarisarv, siis juure numbrite arv on sellest kaks korda väiksem; kui aga juuritava numbrite arv on paaritu arv, siis juure numbrite arv on kaks korda väiksem selle paaritu arvu ja 1 summast.

Harjutused.

Leida ruutjuur järgmistest arvudest.

199. $\sqrt{289}$; $\sqrt{4225}$; $\sqrt{61009}$; $\sqrt{582169}$.

200. $\sqrt{135424}$; $\sqrt{956484}$; $\sqrt{57198969}$.

201. $\sqrt{68492176}$; $\sqrt{422220304}$. 202. $\sqrt{285970396644}$.

203. Selgitada, miks ükski täisarv, mis lõpeb numbriga 2, 3, 7 või 8, ei saa olla täpne ruut.

III. Ligikaudsete ruutjuurte leidmine.

114. Kaks juhtu, kus täpset juurt ei leidu.

Täpseks ruutjuureks antud täis- või murdarvust nimetatakse niisugust arvu, mille ruut täpselt võrdub antud arvuga. Näitame tunnused, mille järgi mõnikord saab otsustada, et antud arvust täpset juurt ei ole võimalik leida.

a) Kui antud täisarvust ei saa leida täpset täisarvulist juurt (juurimisel tekib jääk), siis sellest arvust ei saa leida ka täpset murdarvulist juurt, sest iga, täisarvuga mittevõrduv murd, korrutatud iseendaga, annab korrutisena murru, mitte aga täisarvu.

b) Et juur murrust on võrdne juurega lugejast, jagatud juurega nimetajast, siis taandumatust murrust ei saa leida

täpset juurt juhul, kui seda ei saa leida lugejast ja nimetajast. Näiteks murdudest $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{9}$ ja $\frac{1\frac{1}{4}}{1}$ ei saa leida täpset juurt, sest esimesel murrul ei saa seda leida nimetajast, teisel murrul — lugejast ja kolmandal murrul — ei lugejast ega nimetajast.

Arvudest, milledest juurt ei saa leida, on võimalik leida ligikaudseid juuri, millest kõneleme praegu kohe.

115. Ligikaudne juur täpsusega kuni 1.

Ligikaudseks ruutjuureks antud (täis- või murd-) arvust täpsusega kuni 1 nimetatakse arvu, mis täidab järgmist kaht nõuet: 1) selle arvu ruut on antud arvust väiksem (või võrdub sellega), kuid 2) sellest arvust 1 võrra suurema arvu ruut on antud arvust suurem. Teiste sõnadega: *ligikaudseks ruutjuureks täpsusega kuni 1 nimetatakse suurimat täisarvu, mille ruut ei ületa antud arvu*, s. o. seda juurt, mille leidsime eelmises peatükis. Seda juurt nimetatakse täpsusega kuni 1, sest täpse juure saamiseks oleks vaja selle ligikaudse juurega liita veel üks ühest väiksem arv, nii et võttes tundmatu täpse juure asemele tema ligikaudse, teeme vea, mis on väiksem kui 1.

Olgu nõutud leida ligikaudne juur arvust 395,74 täpsusega kuni 1. Jättes murru tähele panemata, leiame siis juure ainult täisarvust:

$$\sqrt{395} = 19$$

	1	
29	29	5
9	26	1
	34	

Saadud juur 19 ongi otsitav, sest

$$19^2 < 395,74 \quad \text{ja} \quad 20^2 > 395,74.$$

Eeskiri. Selleks, et leida ligikaudset ruutjuurt täpsusega kuni 1, on vaja leida suurim täisarvuline juur antud arvu täisosast.

Selle eeskirja järgi leitud arv on ligikaudne juur $p u u d u - s e g a$, sest täpsest juurest puudub temas mingi (ühed väiksem) arv. Kui seda juurt suurendame 1 võrra, siis saame teise arvu, milles täpseks juureks on midagi liiga ja see liigne osa on väiksem kui 1. Seda 1 võrra suurendatud juurt võib samuti nimetada ligikaudseks juureks täpsusega kuni 1, kuid liiga.

116. Ligikaudne juur täpsusega kuni $\frac{1}{10}$.

Olgu nõutud leida $\sqrt{2,35104}$ täpsusega kuni $\frac{1}{10}$ (puudusega). See tähendab, et tuleb leida niisugune kümnendmurd, mis koosneb täisühikutest ja kümnendikest ja mis rahuldab järgmist kaht nõuet: 1) selle murru ruut ei ületa arvu 2,35104, kuid 2) temast $\frac{1}{10}$ võrra suurema murru ruut ületab arvu 2,35104.

$$\begin{array}{r} \sqrt{2'35'10'4} = 1,5 \\ 1 \\ 25 \overline{) 13'5} \\ \underline{5} \quad 12'5 \\ \underline{10} \end{array}$$

Niisuguse murru leidmiseks leiame esmalt ligikaudse juure täpsusega kuni 1, s. o. leiame juure ainult täisarvust 2. Saame 1 (ja jäägi 1). Kirjutame juures numbril 1 ja paneme tema järele koma. Nüüd hakkame otsima kümnendike numbrit. Selleks kirjutame jäägi juurde numbrid 35, mis seisavad komast paremal, ja jätkame juurimist nii, nagu me juuriksime täisarvu 235. Leitud numbril 5 kirjutame juure kümnendike kohale. Juuritava ülejäänud numbreid (104) ei ole meil vaja. Et saadud arv 1,5 tõepoolest on ligikaudne

juur täpsusega kuni $\frac{1}{10}$, see nähtub järgnevast: kui me oleksime leidnud suurima täisarvulise juure 235-st täpsusega kuni 1, siis oleksime saanud 15, tähendab:

$$15^2 \leq 235, \text{ kuid } 16^2 > 235.$$

Jagades kõik need arvud 100-ga, saame:

$$\frac{15^2}{100} \leq 2,35; \quad \frac{16^2}{100} > 2,35,$$

s. o.

$$\left(\frac{15}{10}\right)^2 \leq 2,35; \quad \left(\frac{16}{10}\right)^2 > 2,35$$

ehk

$$1,5^2 \leq 2,35; \quad 1,6^2 > 2,35.$$

Järelikult

$$1,5^2 < 2,35104; \quad 1,6^2 > 2,35104^*.$$

Tähendab, arv 1,5 on see kümnendmurd, mida nimetasime ligikaudseks juureks täpsusega kuni $\frac{1}{10}$.

Leiame selle võtte abil veel järgmised ligikaudsed juured täpsusega kuni 0,1:

$$\begin{array}{r} \sqrt{57,40} = 7,5 \\ 49 \\ 145 \overline{) 84'0} \\ 5 \overline{) 725} \\ 115 \end{array} \quad \sqrt{0,30} = 0,5 \quad \begin{array}{r} 25 \\ \overline{) 5} \end{array} \quad \sqrt{0,03'8} = 0,1 \quad \begin{array}{r} 1 \\ \overline{) 28} \end{array}$$

117. Ligikaudne juur täpsusega kuni $\frac{1}{100}$, kuni $\frac{1}{1000}$ jne.

Olgu nõutud leida täpsusega kuni $\frac{1}{100}$ ligikaudne $\sqrt{248}$ puudusega. See tähendab: leida niisugune kümnendmurd, mis koosneb täisühikutest, kümnendikest ja sajandikest ning

* Arvu 0,00104 lisandamise tõttu kahekordne märk \leq peab nähtavasti muutuma märgiks $<$, kuid märk $>$ jääb püsima (sest $0,00104 < 0,01$).

mis rahuldab kaht nõuet: 1) tema ruut ei ületa arvu 248, kuid 2) temast $\frac{1}{100}$ võrra suurema murru ruut ületab arvu 248. Seda murdu otsime järgmiselt: esmalt leiame täisosa, siis leiame kümnendike numbr, seejärel sajandike numbr. Juur täisosast on 15. Kümnendike numbr saamiseks on vaja, nagu nägime, jäägi 23 juurde kirjutada veel 2 numbrit, mis seisavad komast paremal:

$$\sqrt{2'48',00'00} = 15,74$$

	1		
25	14'8		
2	125		
307	230'0		
7	2149		
3144	1510'0		
4	12576		
	2524		

Meie näites neid numbreid üldse ei ole; nende kohale kirjutame nullid. Kirjutades need jäägi juurde ja jätkates tööd nii, nagu leiaksime juure täisarvust 24 800, me saame kümnendike numbr 7. Jäeb leida veel sajandike number. Selleks kirjutame jäägi 151 juurde veel 2 nulli ja jätkame juurimist, nagu leiaksime juure täisarvust 2 480 000. Saame 15,74. Et see arv tõepoolest on puudusega võetud ligikaudne juur 248-st täpsusega kuni $\frac{1}{100}$, see nähtub järgnevast. Kui me leiaksime suurima täisarvulise ruutjuure täisarvust 2 480 000, siis saaksime 1574; tähendab:

$$1574^2 \leq 2\,480\,000, \text{ kuid } 1575^2 > 2\,480\,000.$$

Jagades kõik arvud arvuga 10 000 ($= 100^2$), saame:

$$\frac{1574^2}{100^2} \leq 248,0000; \quad \frac{1575^2}{100^2} > 248,0000,$$

s. o.

$$\left(\frac{1574}{100}\right)^2 \leq 248,0000; \quad \left(\frac{1575}{100}\right)^2 > 248,0000.$$

ehk

$$15,74^2 \leq 248; \quad 15,75^2 > 248.$$

Tähendab, 15,74 on kümnendmurd, mida nimetasime puudusega võetud ligikaudseks juureks 248-st täpsusega kuni $\frac{1}{100}$.

Rakendades seda võtet ligikaudse juure leidmiseks täpsusega kuni $\frac{1}{1000}$, täpsusega kuni $\frac{1}{10\,000}$ jne., selgub järgmine eeskiri.

Eeskiri. Selleks, et antud täisarvust või kümnendmurrust leida puudusega võetud ligikaudset juurt täpsusega kuni $\frac{1}{10}$, kuni $\frac{1}{100}$, kuni $\frac{1}{1000}$ jne., leitakse esmalt puudusega võetud ligikaudne juur täpsusega kuni 1, võttes juure täisarvust (kui see puudub, siis juures kirjutatakse 0 tervet).

Siis leitakse kümnendike number. Selleks kirjutatakse jäägi juurde kaks komast paremal seisvat juuritava numbrit (kui neid ei ole, siis jäägi juurde kirjutatakse kaks nulli) ja jätkatakse juurimist nõnda, nagu seda tehakse täisarvu juurimisel. Saadud number kirjutatakse juure kümnendike kohale.

Seejärel leitakse sajandike number. Selleks kirjutatakse jäägi juurde uuesti kaks numbrit paremalt neist, mis äsja üle kanti, jne.

Niisiis juure leidmisel täisarvust koos kümnendmurruga tuleb arvu numbrid jaotada kahenumbrilisteks rühmadeks, alates komast vasakule (arvu täisosas) kui ka komast paremale (arvu murdosas).

Näited.

1. Leida juured kuni $\frac{1}{100}$: a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{0,3}$.

$$\text{a) } \sqrt{2} = 1,41$$

$$\begin{array}{r} 24 \overline{) 10'0} \\ \underline{4 96} \\ 281 \overline{) 40'0} \\ \underline{1 281} \\ 119 \end{array}$$

$$\text{b) } \sqrt{0,30} = 0,54$$

$$\begin{array}{r} 104 \overline{) 50'0} \\ \underline{4 416} \\ 84 \end{array}$$

2. Juurida kuni $\frac{1}{10000}$: a) $\sqrt{0,38472}$; b) $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

$$\text{a) } \sqrt{0,38'47'20} = 0,6202$$

$$\begin{array}{r} 122 \overline{) 24'7} \\ \underline{2 244} \\ 12402 \overline{) 3200'0} \\ \underline{2 24804} \\ 7196 \end{array}$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{0,42'85'71'42}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{0,42'85'71'42} = 0,6546 \\ 36 \\ 125 \overline{) 68'5} \\ \underline{5 625} \\ 1304 \overline{) 607'1} \\ \underline{4 5216} \\ 13086 \overline{) 8554'2} \\ \underline{6 78516} \\ 7026 \end{array}$$

Viimases näites teisendasime murru $\frac{3}{7}$ kümnendmurruks, arvutades tema 8 kümnendkohta, et saada juure 4 kümnendkoha leidmiseks vajalikud 4 numbrirühma.

Märkus. On olemas erilised tabelid, milledesse on paigutatud (teatava täpsusega arvutatud) ruutjuured õige paljudest arvudest. Nende tabelite kasutamiskiisid on harilikult näidatud tabelite eessõnas.

118. Juure leidmine harilikest murdudest.

Taandumatust harilikust murrust saab leida täpse ruutjuure ainult juhul, kui murru lugeja ja nimetaja on täpsed

ruudud (§ 114). Juure leidmiseks sel juhul on vaja ainult eraldi juurida lugejat ja nimetajat, näiteks:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}.$$

Harilikust murrust ligikaudset juurt mingi kümnendmurrulise täpsusega on kõige lihtsam leida sel teel, et esmalt teisendada see harilik murd kümnendmurruks, arvutades temast kümnendkohti pärast koma kaks korda enam, kui neid peab olema otsitavas juures. Olgu vaja leida näiteks $\sqrt{2\frac{3}{7}}$ täpsusega kuni 0,01, s. o. kahe kümnendkohaga pärast koma. Selleks teisendame $2\frac{3}{7}$ kümnendmurruks nelja kümnendkohaga: $2\frac{3}{7} = 2,4285 \dots$ ja leiame ligikaudse juure arvust 2,4285 täpsusega kuni 0,01:

$$\begin{array}{r} \sqrt{2,4285} = 1,55 \\ \begin{array}{r} 1 \\ 25 \overline{) 14'2} \\ \underline{5} \\ 305 \overline{) 178'5} \\ \underline{5} \\ 260 \end{array} \end{array}$$

Võib toimida muide ka teisiti. Selgitame seda järgmise näite abil.

Leida ligikaudne $\sqrt{\frac{5}{24}}$.

Teeme murru nimetaja täpseks ruuduks. Selleks oleks ainult vaja korrutada murru mõlemad liikmed nimetajaga 24; kuid selles näites saab toimida teisiti. Lahutame 24 algteguriteks: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Sellest lahtusest nähtub, et kui 24 korrutada 2-ga ja veel 3-ga, siis korrutises iga algtegur esineb paarisarv korda ja järelikult nimetaja saab ruuduks:

$$\sqrt{\frac{5}{24}} = \sqrt{\frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{24 \cdot 3^2}} = \frac{\sqrt{30}}{2^2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{30}}{12}.$$

Jäeb leida veel $\sqrt{30}$ mingi täpsusega ja tulemus jagada 12-ga. Seejuures tuleb arvestada, et 12-ga jagamisel väheneb ka murd, mis näitab täpsuse astet. Leides $\sqrt{30}$ näiteks täpsusega kuni $\frac{1}{10}$ ja jagades tulemuse 12-ga, saame ligikaudse juure murrust $\frac{5}{24}$ täpsusega kuni $\frac{1}{120}$ (saame nimelt $\frac{54}{120}$ ja $\frac{55}{120}$).

Harjutused.

204. $\sqrt{13}$ täpsusega 1; $\sqrt{13}$ täpsusega 0,1; $\sqrt{13}$ täpsusega 0,001.

205. $\sqrt{101}$ täpsusega $\frac{1}{100}$; $\sqrt{0,8}$ täpsusega 0,01.

206. $\sqrt{0,0081}$ täpsusega $\frac{1}{100}$; $\sqrt{19,0969}$ täpsusega $\frac{1}{100}$.

207. $\sqrt{356}$ kuni 1, siis kuni 0,1, edasi kuni 0,01.

208. Arvutada kuni 0,01 ruutjuur igast järgnevast murrust, teisedades nad küllaldase kohtade arvuga kümnendmurdudeks:

$$\frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{7}{11}, \frac{5}{12}, \frac{7}{250}.$$

209. Arvutada ruutjuur samadest murdudest, ilma nende teisendamiseta kümnendmurdudeks, tehes nimetajad täpseteks ruutudeks.

210. Arvutada juured:

$$\sqrt{0,3}, \sqrt{5,7} \left(\text{mõlemad kuni } \frac{1}{10} \right);$$

$$\sqrt{2,313}, \sqrt{0,00264} \left(\text{mõlemad kuni } \frac{1}{100} \right).$$

Ajaloolisi teatmeid.

Juurimistehte märkimiseks kasutatava sümboli $\sqrt{\quad}$ tõi matemaatikasse Rudolf a. 1525. Varem kirjutati lihtsalt terve sõna „juur” (ladina keeles *radix*), mis hiljem lühendati ühe täheni, ja sellest aja jooksul kujuneski $\sqrt{\quad}$.

K u u e s j a g u.

Ruutvõrrand.

119. Ülesanne.

Mootorpaat sõitis mööda jõge 28 km pärivett alla ja sealt otsekohe tagasi; selleks kulus tal 7 tundi. Leida paadi sõidukiirus seisvas vees, kui on teada, et jõe voolukiirus on 3 km tunnis.

Olgu paadi sõidukiirus seisvas vees x km tunnis; siis pärivett ta liigub kiirusega $(x + 3)$ km tunnis ja vastuvett kiirusega $(x - 3)$ km tunnis. Tähendab, 28 km sõiduks kulus tal pärivett liikudes $\frac{28}{x+3}$ tundi ja vastuvett liikudes $\frac{28}{x-3}$ tundi. Vastavalt ülesande tingimusele saame võrrandi:

$$\frac{28}{x+3} + \frac{28}{x-3} = 7.$$

Vabastades võrrandi nimetajaist, saame

$$28(x-3) + 28(x+3) = 7(x+3)(x-3),$$

s. o.

$$28x - 84 + 28x + 84 = 7(x^2 - 9)$$

ehk

$$56x = 7x^2 - 63.$$

Me saime võrrandi, milles on liige tundmatuga teisel astmel, kuid ei ole liikmeid, mis sisaldaksid tundmatut veel kõrgemal astmel. Niisugust võrrandit nimetatakse *teise astme võrrandiks* ehk *ruutvõrrandiks*.

Otsese asendusega veendume, et selle võrrandi lahendeiks on 9 ja -1 , milledest ülesande västuseks saab olla ainult esimene lahend.

Tuletame ruutvõrrandite lahendamiseks üldise eeskirja.

120. Ruutvõrrandi normaalkuju.

Tavaliselt viiakse ruutvõrrandi (ja samuti ka kõrgema astmeliste võrrandite) kõik liikmed pärast võrrandi lihtsustamist selle vasakule poolele, nii et võrrandi parem pool saab võrdseks nulliga. Nii omandab võrrand, mille koostasime eelmise ülesande lahendamiseks, pärast liikmete üleviimist kuju

$$56x - 7x^2 + 63 = 0$$

ehk, pärast liikmete korrastamist tähe x alanevate astmete järjekorda,

$$-7x^2 + 56x + 63 = 0.$$

Arve -7 , $+56$ ja $+63$ nimetatakse selle ruutvõrrandi *kordajaiks*: neist arvu $+63$ nimetatakse *vabalikmeks*, arve -7 ja $+56$ aga *esimeseks* ja *teiseks kordajaks* (me eeldame, et võrrandi liikmed alati on järjestatud tähe x alanevate astmete järgi). Need arvud võivad olla nii positiivsed kui ka negatiivsed ja ka nullid (peale esimese kordaja, mis ei saa olla null, sest vastasel juhul võrrand ei oleks ruutvõrrand). Kui ükski kolmest kordajast ei ole null, siis võrrandit nimetatakse *täielikuks*. Niisuguse võrrandi üldkuju (*normaalkuju*) on järgmine:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Märgime, et esimese kordaja a saame ikka teha positiivseks, muutes vajaduse korral iga liikme märgi vastandmärgiks (teiste sõnadega, korrutades võrrandi mõlemad pooled arvuga -1). Nõnda võime ülaltoodud võrrandi kirjutada kujul

$$7x^2 - 56x - 63 = 0.$$

121. Mittetäielike ruutvõrrandite lahendamine.

Ruutvõrrandid nimetatakse *mittetäielikuks*, kui temas puudub liige, milles x on esimesel astmel, või puudub vabaliige; teiste sõnadega, kui teine kordaja b võrdub nulliga või vabaliige c võrdub nulliga. Esimesel juhul võrrand omab kuju $ax^2 + c = 0$, teisel juhul kuju $ax^2 + bx = 0$ (võib juhtuda, et üheaegselt $b = 0$ ja $c = 0$; siis võrrandil on kuju $ax^2 = 0$). Vaatleme kõikide nende mittetäielike võrrandite lahendamist.

1. Mittetäielik ruutvõrrand $ax^2 + c = 0$. Võtame järgnevad kolm näidet:

a) $3x^2 - 27 = 0$. Viies vabaliikme paremale, saame $3x^2 = 27$ ja järelikult $x^2 = 9$. Tähendab, x on algebraline ruutjuur 9-st, s. o. arv $+3$ või arv -3 . Märgiga $\sqrt{\quad}$ tähistades alati ainult aritmeetilist ruutjuurt võime kirjutada: $x = \pm \sqrt{9} = \pm 3$. Niisiis antud võrrandil on kaks lahendit. Tähistades ühe neist x_1 ja teise x_2 , saame need lahendid kirjutada nii:

$$x_1 = \sqrt{9} = +3, \quad x_2 = -\sqrt{9} = -3.$$

b) $2x^2 - 0,15 = 0$. Viies vabaliikme üle, saame:

$$2x^2 = 0,15 \quad \text{ja} \quad x^2 = 0,075.$$

Tähendab,

$$x = \pm \sqrt{0,075}.$$

Leiame $\sqrt{0,075}$ täpsusega, ütleme, kuni $\frac{1}{100}$ (§ 117):

$$\sqrt{0,0750} = 0,27$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 47 \overline{) 35'0} \\ \underline{7} \\ 32'9 \\ \underline{21} \\ 9 \end{array}$$

Järelikult $x_1 = 0,27$ ja $x_2 = -0,27$.

c) $2x^2 + 50 = 0$. Viies 50 paremale, saame:

$$2x^2 = -50; \quad x^2 = -\frac{50}{2} = -25; \quad x = \pm \sqrt{-25}.$$

Et negatiivsest arvust ei saa olla ruutjuurt, siis antud võrrandil ei ole lahendeid.

Niisiis mittetäielik ruutvõrrand $ax^2 + c = 0$ üldiselt lahendatakse nii:

$$ax^2 = -c; \quad x^2 = -\frac{c}{a}; \quad x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Kui avaldis $-\frac{c}{a}$ on positiivne arv (see on, kui arvud a ja c on erinevate märkidega), siis temast saab leida ruutjuurt (kas täpselt või ligikaudselt) ja seega x jaoks saame kaks absoluutväärtuse poolest võrdset arvu, milledest üks on positiivne ja teine negatiivne. Kui aga avaldis $-\frac{c}{a}$ on negatiivne arv (see on, kui arvud c ja a on ühesuguste märkidega), siis võrrandil ei ole lahendeid.

2. Mittetäielik ruutvõrrand $ax^2 + bx = 0$. Erinäitena lahendame võrrandi $2x^2 - 7x = 0$. Selle võrrandi vasakul poolel viime x tegurina sulgude ette:

$$x(2x - 7) = 0.$$

Nüüd võrrandi vasak pool on korrutis ja parem pool on null. Kuid korrutis võrdub nulliga ainult siis, kui mingi üks tegur võrdub nulliga; seetõttu meie võrrand on rahuldatud ainult siis, kui esimene tegur x võrdub nulliga või teine tegur $2x - 7$ võrdub nulliga (ja järelikult $x = \frac{7}{2}$). Tähendab, antud võrrandil on kaks lahendit:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

Niisiis, mittetäielik ruutvõrrand $ax^2 + bx = 0$ lahendatakse üldiselt nii:

$$ax^2 + bx = 0; \quad x(ax + b) = 0;$$
$$x_1 = 0; \quad ax_2 + b = 0; \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

3. Mittetäielik ruutvõrrand $ax^2 = 0$. Niisuguse võrrandi lahendiks on ilmselt ainult $x = 0$.

Harjutused.

211. $3x^2 - 147 = 0$; $\frac{1}{3}x^2 - 3 = 0$; $x^2 + 25 = 0$.

212. $\frac{3(x^2 - 11)}{5} - \frac{2(x^2 - 60)}{7} = 36$; $\frac{4}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{1}{3}$.

213. $2x^2 - 7x = 0$; $\frac{3}{7}x^2 + x = 0$; $0,2x^2 - \frac{3}{4}x = 0$.

214. $x^2 = x$; $x^2 - 16x = 0$; $7x^2 = 0$; $0,7x^2 = 0$.

215. $(x-2)(x-5) = 0$; $x(x+4) = 0$; $3(y-2)(y+3) = 0$.

122. Täielike ruutvõrrandite lahendamise näited.

Esimeseks näiteks võtame võrrandi, mille koostasime § 119 ülesande lahendamiseks:

$$7x^2 - 56x - 63 = 0.$$

Jagame tema kõik liikmed 7-ga ja viime vabaliikme paremale:

$$x^2 - 8x = 9.$$

Küsime nüüd, kas kaksliikmega $x^2 - 8x$ saaks liita niisugust kolmandat liiget, et tekiks täisruutu kujutav kolmeliige. Seatud küsimusele on kerge vastata, kui kaksliikme kujutame nii:

$$x^2 - 2x \cdot 4.$$

Nüüd on selge, et täiendades seda kaksliiget liikmega 4^2 , saame kolmeliikme

$$x^2 - 2x \cdot 4 + 4^2,$$

mis võrdub vahe $x - 4$ ruuduga. Aga et me võrrandi vasaku poolega liitsime 4^2 (s. o. 16), siis peame sama arvu liitma ka võrrandi parema poolega. Seda tehes saame:

$$x^2 - 8x + 16 = 9 + 16, \text{ s. o. } (x - 4)^2 = 25.$$

Niisiis vahe $x - 4$ on niisugune arv, mille ruut on 25; tähendab, see vahe peab võrduma algebralise ruutjuurega 25-st, s. o. arvuga 5 või arvuga -5 :

$$x - 4 = +\sqrt{25} = +5 \text{ või } x - 4 = -\sqrt{25} = -5.$$

Viies nüüd liikme -4 võrrandi paremale poolele, saame kaks lahendit:

$$x_1 = 4 + 5 = 9 \text{ ja } x_2 = 4 - 5 = -1.$$

Need lahendid mõlemad sobivad antud võrrandile (nagu proovimisega saab veenduda), kuid ülesandele, millest võrrandi tuletasime, negatiivne lahend -1 ei kõlba, sest ülesandes küsitakse kiiruse absoluutväärtust, mitte aga tema suunda.

Teiseks näiteks võtame võrrandi

$$3x^2 + 15x - 7 = 0.$$

Jagame kõik liikmed 3-ga ja viime vabaliikme paremale:

$$x^2 + 5x = \frac{7}{3}.$$

Kaksliikmest $x^2 + 5x$ saab teha summa ruudu, kui teda täiendada kolmanda liikmega $(\frac{5}{2})^2$. Liites selle liikme võrrandi mõlema poolega, saame:

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{3},$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{7}{3} = \frac{75 + 28}{12} = \frac{103}{12}.$$

Siit nähtub, et $x + \frac{5}{2} = \pm \sqrt{\frac{103}{12}}$; järelikut

$$x_1 = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{103}{12}}; \quad x_2 = -\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{103}{12}}.$$

Arvutame $\sqrt{\frac{103}{12}}$ täpsusega, ütleme, kuni $\frac{1}{10}$:

$$\sqrt{\frac{103}{12}} = \sqrt{8,58} \dots = 2,9 \dots$$

järelikult

$$x_1 = -2,5 + 2,9 \dots = 0,4 \dots,$$

$$x_2 = -2,5 - 2,9 \dots = -5,4 \dots$$

123. Taandatud ruutvõrrandi lahendite valem.

Ruutvõrrandit nimetatakse *t a a n d a t u k s*, kui tema esimene kordaja on $+1$. Niisuguse kuju saab võrrandile anda ka siis, kui esimene kordaja ei peaks olema 1, nagu äsja näidetes nägime; tarvitseb vaid võrrandi kõik liikmed jagada selle arvuga. Taandatud võrrand kirjutatakse üldkujul härelikult nii:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Lahendame selle tähelise võrrandi, teostades temas needsamad teisendused, mis näitasime erinäidete puhul:

$$x^2 + px = -q.$$

Et $px = 2x \cdot \frac{p}{2}$, siis, soovides saada võrrandi vasakul poolel täisruutu, liidame võrrandi mõlema poolega $\left(\frac{p}{2}\right)^2$:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Nüüd saab võrrandi anda nii:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q,$$

millest leiame:

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{ja} \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Selle valemi võib sõnastada järgmiselt:

Taandatud ruutvõrrandi lahend on vastandmargiga pool teisest kordajast pluss-miinus ruutjuur sama poole kordaja ruudu ja vabaliikme vahest.

Näited.

1. $x^2 - x - 6 = 0$. Selle võrrandi sarnastamiseks tähelise võrrandiga $x^2 + px + q = 0$ esitame ta nii:

$$x^2 + (-1)x + (-6) = 0.$$

Nüüd on näha, et selles näites $p = -1$ ja $q = -6$; seepärast:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2};$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3; \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2.$$

Kontroll: $3^2 - 3 - 6 = 0$; $(-2)^2 - (-2) - 6 = 0$.

2. $x^2 - 18x + 81 = 0$; siin $p = -18$, $q = 81$; seepärast

$$x = 9 \pm \sqrt{81 - 81} = 9 \pm 0 = 9.$$

Võrrandil on ainult üks lahend.

3. $x^2 - 2x + 5 = 0$; $x = 1 \pm \sqrt{1 - 5} = 1 \pm \sqrt{-4}$.

Lahendeid ei ole.

Harjutused.

216. $x^2 + 10x + 5 = 2x^2 - 6x + 53$.

217. $x^2 + 6x = 27$.

218. $x^2 - 5\frac{3}{4}x = 18$.

219. $12x - \frac{6}{x} = 21$.

220. $\frac{x}{7} + \frac{21}{x+5} = 6\frac{5}{7}$.

221. $x + 2 = \frac{9}{x+2}$.

222. $\frac{x-5}{4} - \frac{4}{5-x} = \frac{3x-1}{4}$.

223. $x + \frac{1}{x-3} = 5$.

224. $\frac{2x}{x-d} = \frac{x-d}{d}$.

225. Missuguse t väärtuse puhul $2t - 5$ ja $t - 4$ korrutis võrdub summaga $t + 8$?

226. $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$.

124. Ruutvõrrandi lahendite üldvalem.

Võrrand $ax^2 + bx + c = 0$ pärast tema liikmete jagamist a -ga omab taandatud kuju

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Lahendades selle võrrandi taandatud võrrandi lahendite valemi järgi, leiame:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}.$$

Seda avaldist saab lihtsustada nii:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \\ &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

On kasulik see valemi lihtsustatud kuju meeles pidada; seda saab sõnastada nii:

Täieliku ruutvõrrandi lahend võrdub murruga, mille lugeja on teise kordaja vastand arv, pluss-miinus ruutjuur sama kordaja ruudu ning esimese kordaja ja vabaliikme neljakordse korrutise vahest, ja nimetaja on esimese kordaja kahekordne.

Seda valemit võib nimetada *üldiseks*, sest ta kõlbab lahendi leidmiseks nii taandatud võrrandi puhul (kui eeldame, et $a = 1$) kui ka mittetäielike võrrandite puhul (kui eeldame, et $b = 0$ või $c = 0$).

125. Üldvalemi lihtsustamine juhul, kui kordaja b on paarisarv.

Kui kordaja b on paarisarv, siis üldvalemit saab lihtsustada. Eeldades, et $b = 2k$, leiame siis:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} = \\ &= \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \end{aligned}$$

See valem erineb üldisest numbriliste tegurite 4 ja 2 puudumisega.

126. Ruutvõrrandi lahendite arv.

Me nägime, et ruutvõrrandil on mõnikord kaks lahendit, mõnikord üks, mõnikord ei ühtegi. Siiski on kokku lepitud lugeda, et ruutvõrrandil on igal juhul kaks lahendit, mõistes seda nii, et lahendid võivad mõnikord olla võrdsed, mõnikord puududa. Mainitud kokkuleppe põhjus peitub selles, et ruutvõrrandi üldine lahendite valem annab lahenditeks alati kaks avaldist (olguigi et neil iga kord ei ole arvu tähendust). Ühe lahendiga ruutvõrrandi puhul siis öeldaksegi, et tal on kaks võrdset lahendit.

Harjutused.

227. $2x^2 - 3x - 5 = 0$. 228. $(2x - 3)^2 = 8x$.

229. $5x^2 - 8x + 0,24 = 0$. 230. $65x^2 + 118x - 55 = 0$.

231. $(x - 3)(x - 4) = 12$. 232. $\frac{x}{x + 60} = \frac{7}{3x - 5}$. 233. $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$

234. Leida kolm järjestikust paarisarvu nii, et nende ruutude summa oleks 776.

235. Ristküliku pindala on 48 cm^2 ja tema übermõõt on 28 cm . Leida küljed.

236. Leida täisnurkse kolmnurga küljed, teades, et nad avalduvad kolme järjestikuse täisarvuga.

237. Kui hulknurgal on n külge, siis tema diagonaalide arv on $\frac{1}{2}n(n - 3)$. Leida, mitu külge peab olema hulknurgal, et tema diagonaalide arv oleks 54.

238. Lennuk lendas sirgjoones 450 km , pöördus otsekohe ümber ja piki sirgjoont lennates jõudis $5\frac{1}{2}$ tundi pärast lennu algust lähtekohta tagasi. Sinna ta lendas västutuult, tagasi aga pärituult. Kui suur oli tuule kiirus, kui lennuki omakiirus tuulevaikse ilmaga on 165 km tunnis?

239. Osteti mõned rätikud 60 rbl. eest . Kui selle summa eest oleks saadud kolm rätikut enam, siis iga rätik oleks maksnud 1 rbl. vähem . Mitu rätikut osteti?

240. Kooli esimeses klassis jaotati 240 lehte paberit võrdselt kõikide õpilaste vahel. Teises klassis jaotati niisama palju lehti ja jällegi kõikidele võrdselt. Selle klassi iga õpilane sai kaks lehte enam kui esimeses klassis. Mitu lehte sai esimese klassi iga õpilane, kui teises klassis oli 10 õpilast vähem kui esimeses?

Harjutuste vastused.

1. $4a$; a^2 . 2. $6m^2$; m^3 . 3. $x(x-d)$. 4. $10x + y$. 5. $100a + 10b + c$.
 6. $\frac{ma + nb}{a + b}$. 7. $x^2 + y^2$; $(x + y)^2$; x^2y^2 ; $(xy)^2$; $(a + b)(a - b)$; $\frac{m + n}{m - n}$ ehk $(m + n) : (m - n)$. 8. 84; 44; 552; 336; $9\frac{1}{3}$; $5\frac{2}{3}$. 9. $3(x + y)(x - y)$.
 10. $3a + 2b$; $13 + 12 = 25$. 11. $5 + ab - 4a$; $a + 2x$. 12. n ; $5a^3b^2x^3$.
 13. $6xyz$; $2ax$. 14. $5x + 15$; $7x + 7y + 7z$. 15. $\frac{a}{2} + 2b - c$; $5a^2b$.
 16. $8x - 2y$; $4ax$. 17. $\frac{a}{b}$; $3x$. 18. $+10$; -10 ; $+3$. 19. -3 ; $+8$; -2 .
 20. 0 ; -3 ; $+1$. 21. -1 ; -2 ; $+2$. 22. $+2$. 23. 0 . 24. $b - a$; -5 (kahju).
 25. $m - n$; -10 (võlg). 26. 14; 10; 18; 2. 27. $a + b$; $m + n$; $5x$. 28. 12.
 29. $-1\frac{3}{4}$. 30. $+5$. 31. $10 + (-2) + (-3) + 7$. 32. $10 - (-8)$.
 33. $+6$; -14 ; $+80$. 34. $-23\frac{2}{3}$; 0,054. 35. $+1$; -1 ; $+1$; -1 .
 36. 27. 37. -27 . 38. 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 . 39. $3\frac{1}{16}$. 40. $+5$; -5 ; -5 ; $+5$.
 41. $-a$; -5 ; x^2 . 42. 0 ; 0 ; 0 ; 0 . 43, 44, 45 ei vaja vastust.
 46. $10a^3x^3$; $-10a^2bx^2$; $-\frac{2}{3}a^2bx^2$; $-20m^2x^2y^3$. 47. $a + a$; $ax + ax + ax$;
 $a^2b + a^2b + a^2b + a^2b + a^2b$; $(a + 1) + (a + 1) + (a + 1) + (a + 1)$.
 48. 90; $1\frac{1}{5}$; $2\frac{2}{5}$; -28 ; -936 . 49. 0 ; 31 ; -4 . 50. $+1$. ja -1 .
 51. $a^3x^2 + 4\frac{1}{2}a^2x^3$. 52. $2x - 16,3xy$. 53. $a + 3\frac{1}{2}mxy^2$. 54. $a - 3\frac{1}{2}mxy^2$.
 55. $4a^3 - 3a^2b - 13ab^2$. 56. $x^5 - 7a^2x^3$. 57. 2z. 58. $4x^3 + x^2 + 3x + 1$.
 59. $8a^3 - 11a^2b + 14ab^2 - 3b^3$. 60. $p^2 + p + 15$. 61. $4x^2 + 3y^2 - y - 1$.
 62. $\frac{1}{4}x^2 - x + \frac{3}{8}$. 63. $4a^2 + 4b^2 - c^2$. 64. $x + y$; $2m - 2n$. 65. $b - 2c$.
 66. $4x^2$. 67. $a - (b + c - d)$; $a - b + (-c + d)$; $a - (b + c) + d$.
 68. $15a^3b^7c$; $\frac{5}{3}a^2x^6$. 69. $0,81a^3b^2x^3$; $a^6b^8c^3$. 70. $\frac{9}{4}m^2x^4y^6$; $8a^9b^3x^6$.
 71. $0,01x^2m^2y^6$; $\frac{1}{8}m^6n^3y^9$. 72. $6a^3b - 4ab^4 + 2abc$. 73. $25a^3b - 20a^4b^2 +$
 $+ 15a^5b^3 - 35a^6b^4$. 74. $am + bm - cm - an - bn + cn$; $6a^2 - 3ab +$
 $+ 2ab^2 - b^3$. 75. $2a^2 - \frac{1}{2}b^2$; $x^3 - y^3$. 76. $x^3 + y^3$. 77. $5x^2 + 5xy - 6y^2$;
 $y^4 - 1$. 78. $x^6 + 1008x + 720$. 79. $x^9 - x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1$.
 80. $x^6 - a^6$. 81. $a^2 + 2a + 1$; $1 + 4a + 4a^2$; $x^2 + x + \frac{1}{4}$. 82. $9a^4 + 6a^2 +$
 $+ 1$; $0,01m^2x^2 + mx^3 + 25x^4$. 83. $25a^2 - 20a + 4$; $9x^2 - 12ax + 4a^2$;
 $9a^4 - 3a^2 + \frac{1}{4}$. 84. $101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10201$;

- $997^2 = (1000 - 3)^2 = \dots = 994009$ jne. 85. $4m^2 - 12mn + 9n^2$; $9a^4x^2 - 24a^3xy + 16a^2y^2$; $0,04x^6 - 0,15x^3 + \frac{9}{64}$. 86. $\frac{1}{4}x^4 - 3\frac{1}{2}x^3 + 12\frac{1}{4}x^2$; $0,0625p^2 - 0,1pq + 0,04q^2$. 87. $a^2 - 1$; $4a^2 - 25$. 88. $4x^2 - 9$; $1 - a^4$.
 89. $(x^2 + 1)(x^2 - 1) = x^4 - 1$; $(4x^2 + y^2)(4x^2 - y^2) = 16x^4 - y^4$.
 90. $[(m + n) - p][(m + n) + p] = (m + n)^2 - p^2$; $a^2 - (b + c)^2 = a^2 - b^2 - 2bc - c^2$. 91. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$; $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$;
 $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$; $125 + 225x + 135x^2 + 27x^3$. 92. $\frac{1}{8}m^3 - \frac{3}{2}m^2 + 6m - 8$;
 $\frac{2}{6}\frac{1}{4}p^3 + \frac{9}{4}p^2q + \frac{1}{4}pq^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{7}q^3$; $125 - 225x + 135x^2 - 27x^3$.
 93. $2a^2xy - \frac{8}{3}x^2$. 94. $-\frac{6}{5}a^3$; $3a^{m-1}b^2$. 95. $5\frac{1}{3}a + 8b - 16a^2b^4$.
 96. $9x^2 - 6ax + a^2$. 97. $1 - 2y + y^2 - y^3$. 98. $x - 4$; $y + 1$. 99. $3x^2 - 2$.
 100. $3ax^3$. 101. $x - a$. 102. $2(a + x)$; $a(x + y)$; $2y(2y - 3x)$.
 103. $2a(2x - y)$; $3xy(2x + 3y)$. 104. $3ab(4a - 3ab - 2b^2)$; $xy(y - 7 + 4x)$.
 105. $(m + n)(m - n)$; $(a + 1)(a - 1)$; $(1 + a)(1 - a)$.
 106. $(x + 2)(x - 2)$; $(m + 3)(m - 3)$; $(2x + y)(2x - y)$. 107. $(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3)(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^3)$;
 $(0,1a^3 + 3)(0,1a^3 - 3)$; $3a(a^2 + 4b^4)(a + 2b^2)(a - 2b^2)$. 108. $(x - y + a)(x - y - a)$;
 $[3(a + 2b) + 1][3(a + 2b) - 1]$;
 $(a + b + c)(a - b - c)$. 109. $(x + y + x - y)(x + y - x + y) = 2x \cdot 2y = 4xy$;
 $4(x - y)(3x + y)$. 110. $(x - y)^2$; $(m + n)^2$. 111. $(a + b)^2$;
 $(a - 2b)^2$. 112. $(x + 4)^2$; $(x + 1)^2$. 113. $5a(a - 2b)^2$. 114. $(a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$;
 $a^2 - (b^2 + 2bc + c^2) = a^2 - (b + c)^2 = (a + b + c)(a - b - c)$. 115. $(a + b)x + (a + b)y = (a + b)(x + y)$;
 $a(c - d) + b(d - c) = a(c - d) - b(c - d) = (c - d)(a - b)$. 116. $a(a + b) - (a + b) = (a + b)(a - 1)$;
 $xz + xy - 3y - 3z = x(y + z) - 3(y + z) = (y + z)(x - 3)$. 117. $4mn - 2nx + xy - 2my = 2n(2m - x) + y(x - 2m) = 2n(2m - x) - y(2m - x) = (2m - x)(2n - y)$;
 $(2a - 3)(2a - 3)(2a + 3)$. 118. $\frac{5x}{7y}$; $\frac{3ab}{10m}$; $\frac{8a^2}{11b}$; $\frac{25m}{59n}$.
 119. $\frac{9ab}{10x^2}$; $\frac{14a^3}{15b}$; $\frac{12x - 1}{4a - 4b}$. 120. $\frac{17(a + b)}{34} = \frac{a + b}{2}$; $\frac{2(9a - 7)}{6 - a}$.
 121. $\frac{ax^2 + bx + c}{ax^2 + x}$; $\frac{x^2 + ax - b}{x^2 - x}$. 122. $\frac{x - 1}{x}$; $\frac{3a^2}{b - a}$; $\frac{a - 1}{b - 2}$.
 123. $\frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a - b}$; $\frac{m^2 - 1}{m - 1}$. 124. $-\frac{3a}{6}$; $-\frac{5x^2}{3}$; $-\frac{a - 1}{b}$; $-\frac{a}{x - 2}$;
 $-\frac{m^2 - n^2}{m - n}$. 125. $\frac{1}{x}$; $\frac{2}{3m}$; $\frac{2a}{3b}$; $\frac{3xy}{8}$. 126. $\frac{3b}{2x}$; $\frac{ac}{4b}$; $\frac{16axy^3}{15}$.
 127. $\frac{b}{a + b}$; $\frac{3y}{x - y}$; $\frac{a + 2}{a - 2}$. 128. $\frac{a + 1}{a - 1}$; $\frac{1}{x + 3}$; $\frac{a}{a - 1}$.

129. $\frac{x'-1}{2x(x+1)}$; $\frac{a+x}{3b-cx}$; $\frac{5a}{a-x}$. 130. $(a+b)(a-b)$; $\frac{1}{y^2-1}$.
131. $\frac{3b}{ab}$, $\frac{4a}{ab}$, $\frac{4x^2}{12xy}$, $\frac{3y^2}{12xy}$, $\frac{x^2}{4x}$, $\frac{16}{4x}$. 132. $\frac{4bc}{2abc}$, $\frac{6ac}{2abc}$, $\frac{ab}{2abc}$;
- $\frac{105b^2x^2}{60a^2b^2x}$, $\frac{40a^2x}{60a^2b^2x}$, $\frac{48a^2b^4}{60a^2b^2x}$. 133. $\frac{20mx^3y^2}{12a^2bcmx^2y}$, $\frac{9a^3b^2c}{12a^2bcmx^2y}$, $\frac{2a^2bx}{8a^3b^2}$;
- $\frac{y}{8a^3b^2}$. 134. $\frac{15x^3}{40abx^3}$, $\frac{120abx^4}{40abx^3}$, $\frac{8a^2b}{40abx^3}$. 135. $\frac{3(x+y)^2}{6(x^2-y^2)}$, $\frac{2(x-y)^2}{6(x^2-y^2)}$;
- $\frac{m-1}{m^2-1}$, $\frac{2}{m^2-1}$, $\frac{3(m+1)}{m^2-1}$. 136. $\frac{2}{(x-1)^2}$, $\frac{3a(x-1)}{(x-1)^2}$;
- $\frac{2x-1}{(x-1)(2x-1)}$, $\frac{2(x-1)}{(x-1)(2x-1)}$, $\frac{1}{(x-1)(2x-1)}$. 137. $\frac{3x}{84a^3b^2}$;
- $\frac{4aby}{84a^3b^2}$, $\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{b(a^2-b^2)}$, $\frac{2ab(a+b)}{b(a^2-b^2)}$, $\frac{b}{b(a^2-b^2)}$.
138. $\frac{6bc+3ac+2ab}{6abc}$; $\frac{6+5x}{3x^2}$; $\frac{2a-2x-5}{4}$. 139. $\frac{x^2-5x+2}{x^2}$.
140. $\frac{1+x}{2}$; $\frac{5x-6}{3}$; $\frac{5-2x}{3}$. 141. $\frac{1}{1-4x^2}$. 142. $\frac{2a^2b-ab-2b^2-a^2}{a(a+b)(a-b)}$
143. $\frac{m^2}{(m+n)(n-1)}$. 144. $-\frac{6b}{7x^2}$; $\frac{1}{5(1+a)x}$. 145. $\frac{12p^2q^2x^2y^2}{n^4a^3}$; $2a(x-1)$.
146. $\frac{a(a+2b)}{b^2}$; $\frac{9b^2c^2x^2}{16a^2z^2}$. 147. $\frac{3a^3}{5mp}$; $15a^2x^2y$. 148. $\frac{1}{5(a-b)}$; $\frac{x+y}{x-y}$
149. Vördused 3, 4 ja 6 on vörrandid, ülejäänud — samasused.
150. 17; 5; 5. 151. 27; 9; 12. 152. 3; 2; $\frac{1}{2}\frac{3}{0}$. 153. 2,7; 50. 154. 9; -3; -4.
155. 1; $5\frac{3}{7}$. 156. $2\frac{6}{4}$. 157. $7\frac{1}{8}$. 158. 2. 159. $-17\frac{2}{7}\frac{5}{7}$. 160. 1348 ja 1200. 161. 20, 30, 50. 162. $2\frac{1}{2}$. 163. 12,8 kg ja 19,2 kg. 164. 15 km ja 18 km. 165. 0. 166. $\frac{c}{2(a-b)}$. 167. $\frac{4-4a}{b-3}$. 168. $h = \frac{2q}{b_1+b_2}$.
169. $x=2$, $y=1$; $x=1$, $y=-2$; $x=-3$, $y=-3$. 170. $x=-\frac{1}{2}$, $y=1$;
- $x=5$, $y=1$; $x=7$, $y=2$. 171. $x=\frac{3}{4}\frac{5}{8}$; $y=-\frac{2}{4}\frac{3}{8}$. 172. $x = \frac{c}{a+bm}$;
- $y = \frac{mc}{a+bm}$; $x = \frac{a+bm}{mn-1}$, $y = \frac{an+b}{mn-1}$. 173. $a=3$, $b=-5$. 174. 1 rbl. 10 kop. ja 40 kop. 175. 40 ja 25. 176. 200; 11 km. 177. $12\frac{2}{3}$ m; $13\frac{1}{3}$ m ja $9\frac{2}{3}$ m, $9\frac{1}{3}$ m. 178. $x=2$, $y=3$, $z=5$. 179. $x=3\frac{1}{2}$, $y=2\frac{1}{4}$, $z=4$.
180. $x=4$, $y=0$, $z=5$. 181. $x=51$, $y=76$, $z=1$. 182. $x=8$, $y=10$,

$z = 5$. 183. $x = 36$, $y = 6$. 184. $x = 2$, $y = 4$, $z = 1$, $u = 5$. 185. $x = 6$,
 $y = 12$, $z = 8$. 186. Liites 2. võrrandi 1-sega, saame $2x = 32$, $x = 16$. Lahuta-
des 1-sest võrrandist 2-se, saame $2z = 11$, $z = 5\frac{1}{2}$. Lõpuks lahutades
1-sest võrrandist 3-nda, leiame: $2y = 15\frac{1}{2}$; $y = 7\frac{3}{4}$. 187. $1\frac{7}{8}$ rbl.; $\frac{1}{2}$ rbl.;
5 rbl. 188. 133; 150; 76. 189. ± 10 ; $\pm 0,1$; $\pm \frac{1}{2}$; $\pm \frac{3}{4}$; $\pm a$; $\pm x$.
190. 5; 27; a ; $1 + x$. 191. $+3$; -3 ; $+\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$, $-0,1$. 192. ± 2 ; $\pm \frac{1}{2}$;
 ± 3 ; pole arvud. 193. ± 6 ; $\pm 0,25$; $\pm 2ab$; $\pm 3axy^2$. 194. $-3ab$;
 $\pm \frac{1}{2}ax$; $\sqrt[5]{a}$. $\sqrt[5]{b}$. $\sqrt[5]{c}$. 195. $\pm a^2$; $\pm 2^2$; $\pm x^3$; $\pm (a + b)^2$. 196. 2^2 ;
 $-a^2$; x^3 ; $(m + n)^2$. 197. $\frac{2}{5}$; $-\frac{3}{40}$; $\frac{a^2}{b}$; $\frac{\sqrt[3]{x}}{y}$; $\pm \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$. 198. $\pm 5a^3bc^2$;
 $\pm 0,6x^2y$; $\pm \frac{1}{2}(b + c)^3x^2$. 199. 17; 65; 247; 763. 200. 368; 978; 7563.
201. 8276; 20 548. 202. 534 762. 203. Täisarvu ruudu viimane number
peab olema üks neist numbritest, millega lõpevad esimese 10 arvu
0, 1, 2, ..., 9 ruudud. Kuid ükski neist ruutudest ei lõpe 2-ga, 3-ga,
7-ga ega 8-ga. 204. 3; 3,6; 3,606. 205. 10,05; 0,89. 206. 0,09; 4,37.
207. 19; 18,9; 18,89. 208. 0,77; 0,65; 0,79; 0,65; 0,17. 209. $\frac{1}{5}\sqrt{15} = \frac{3}{5}\frac{8}{00}$
(täps. kuni $\frac{1}{5000}$); $\frac{1}{7}\sqrt{21} = \frac{4}{7}\frac{5}{00}\frac{8}{0}$ (täps. kuni $\frac{1}{7000}$); $\frac{1}{4}\sqrt{77} = \frac{8}{4}\frac{7}{00}\frac{7}{0}$
(täps. kuni $\frac{1}{44000}$); $\frac{1}{42}\sqrt{60} = \frac{7}{42}\frac{7}{00}\frac{4}{00}$ (täps. kuni $\frac{1}{42000}$); $\frac{1}{250}\sqrt{1750} =$
 $= \frac{4}{25}\frac{1}{00}\frac{8}{00}\frac{3}{00}$ (täps. kuni $\frac{1}{250000}$). 210. 0,5; 2,4; 1,52; 0,05. 211. ± 7 ; ± 3 ;
 $\pm \sqrt{-25}$. 212. ± 9 ; ± 9 . 213. 0 ja $3\frac{1}{2}$; 0 ja $-2\frac{1}{3}$; 0 ja 3,75.
214. 0 ja 1; 0 ja 16; 0; 0. 215. 2 ja 5; 0 ja -4 ; 2 ja -3 .
216. 12 ja 4. 217. 3 ja -9 . 218. 8 ja $-2\frac{1}{4}$. 219. 2 ja $-\frac{1}{4}$.
220. 44 ja -2 . 221. 1 ja -5 . 222. 6 ja -3 . 223. 4. 224. $d(2 \pm \sqrt{3})$.
225. $t_1 = 6$; $t_2 = 1$. 226. $\frac{a}{b}$ ja $\frac{b}{a}$. 227. $2\frac{1}{2}$ ja -1 . 228. $4\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{2}$.
229. $\approx 1,5694$ ja $\approx 0,0306$. 230. $\frac{5}{4^3}$ ja $-\frac{1}{5}$. 231. 7 ja 0. 232. 14 ja
 -10 . 233. a ja $\frac{1}{a}$. 234. 14, 16, 18 ja -18 , -16 , -14 . 235. 6 ja 8.
236. 3, 4, 5. 237. 12. 238. 15 km tunnis. 239. 12. 240. Klassis, kus
oli 40 õpilast, sai iga õpilane 6 lehte.

Sisukord.

Esimene jagu.

Eelmõisted.

I. Algebraalne sümboolika.

	Lk.
1. Tähtede kasutamine	3
2. Algebraalne avaldis	5
3. Algebras vaadeldavad tehted	6
4. Algebras kasutatavad märgid	7
5. Tehete järjekord	8

II. Esimese nelja aritmeetilise tehte omadused.

6. Liitmine	11
7. Lahutamine	12
8. Korrutamine	12
9. Jagamine	14
10. Tehete omaduste rakendamine	16

Teine jagu.

Relatiivsed arvud ja tehted nendega.

I. Vastandsuunaliste suuruste mõiste.

11. Ülesanded	18
12. Teisi vastandsuunalisi suurusi	20
13. Relatiivsed arvud	21
14. Arvu kujutamine arvteljel	22

II. Relatiivsete arvude liitmine.

	Lk.
15. Ülesanne	24
16. Kahe arvu liitmine	24
17. Liitmise eeskirjade teine sõnastus	26
18. Kolme ja enama arvu liitmine	27

III. Relatiivsete arvude lahutamine.

19. Ülesanne	28
20. Vahe kui ühe liidetava leidmine	28
21. Lahutamise eeskiri	30
22. Kahekordsete märkide valem	31
23. Algebraalne summa ja vahe	31
24. Relatiivsete arvude suuruse võrdlemine	32

IV. Relatiivsete arvude ja lahutamise tähtsamad omadused.

25. Seadused	34
------------------------	----

V. Relatiivsete arvude korrutamise.

26. Ülesanne	36
27. Korrutamine negatiivse arvuga	38
28. Korrutamise eeskiri	40
29. Kolme ja enama arvu korrutis. Korrutise märk	41
30. Negatiivse arvu aste	42

VI. Relatiivsete arvude jagamine.

31. Definitsioon	43
32. Jagamise eeskirja tuletamine	44
33. Juhud, kui jagatav või jagaja on null	44

VII. Korrutamise ja jagamise tähtsamad omadused	45
---	----

Üksliikmelised ja hulkliikmelised täisavaldised.
Algebralised murruõ.

I. Eelmõisted.

	Lk.
35. Üksliige ja hulkliige	49
36. Kordaja (koefitsient)	50
37. Hulkliikme omadused	51
38. Sarnaste liikmete koondamine	52

II. Algebraline liitmine ja lahutamine.

39. Üksliikmete liitmine	54
40. Hulkliikmete liitmine	55
41. Üksliikmete lahutamine	56
42. Hulkliikmete lahutamine	57
43. Sulgude avamine, kui nende ees on märk + või -	58
44. Hulkliikme osa sulustamine	58

III. Algebraline korrutamine.

45. Üksliikmete korrutamine	59
46. Üksliikme ruut ja kuup	61
47. Hulkliikme korrutamine üksliikmega	62
48. Hulkliikme korrutamine hulkliikmega	63
49. Korrastatud hulkliige	65
50. Korrastatud hulkliikmete korrutamine	66
51. Korrutise pealiige ja madalaim liige	66
52. Korrutise liikmete arv	67
53. Mõned kaksliikmete korrutamise valemid	68
54. Nende valemite rakendamine	69
55. Kahe arvu summa kuup ja vahe kuup	70

IV. Algebraline jagamine.

56. Üksliikmete jagamine	71
57. Nulliline astendaja	72

	Lk.
58. Üksliikmete jagamise võimatuse tunnused	73
59. Hulkliikme jagamine üksliikmega	73
60. Üksliikme jagamine hulkliikmega	74
61. Hulkliikme jagamine hulkliikmega	75
62. Korrastatud hulkliikmete jagamine	75
63. Hulkliikmete jagamise võimatuse tunnused	78

V. Teguriteks lahutamine.

64. Eelmärkus	79
65. Täis-üksliikmete teguriteks lahutamine	79
66. Hulkliikme teguriteks lahutamine	80

VI. Algebralised murrud.

67. Algebralise murru erinevus aritmeetilisest murrust	83
68. Murru põhiomadus	84
69. Lugeja ja nimetaja teisendamine täisavaldisteks	85
70. Lugeja ja nimetaja märkide muutmine	85
71. Murdude taandamine	86
72. Murdude teisendamine ühenimeliseks	87
73. Murdude liitmine ja lahutamine	90
74. Murdude korrutamine	91
75. Murru ruut ja kuup	92
76. Murdude jagamine	93
77. Märkused	93

Neljas jagu.

Esimese astme võrrandid.

I. Võrrandite üldised omadused.

78. Võrdused ja nende omadused	95
79. Samasus	96
80. Võrrand	96
81. Samaväärsed võrrandid	99
82. Võrrandite esimene omadus	99

	Lk.
83. Järeldused	101
84. Võrrandite teine omadus	101
85. Järeldused	103
86. Võrrandi poolte korrutamine ja jagamine ühe ja sama algebralise avaldisega	104
87. Võõrlahendid	104

II. Ühe tundmatuga võrrandid.

88. Ühe tundmatuga esimese astme võrrandi lahendamine	106
89. Võrrandite koostamise idee	109
90. Tähelised võrrandid	111

III. Esimese astme võrrandite süsteemid.

91. Ülesanne	112
92. Kahe tundmatuga esimese astme võrrandi normaalkuju	114
93. Kahe tundmatuga võrrandi määramatus	115
94. Võrrandisüsteem	115
95. Asendusvõte	116
96. Liitmisvõte	117
97. Täheliste kordajatega võrrandisüsteem	119

Kolme võrrandi süsteem kolme tundmatuga.

98. Kolme tundmatuga esimese astme võrrandi normaalkuju	121
99. Kolme tundmatuga kahe ja ühe võrrandi määramatus	122
100. Kolme võrrandi süsteem kolme tundmatuga	123
101. Asendusvõte	123
102. Liitmisvõte	124

Võrrandisüsteemide mõned erikujud.

103. Juhtum, kus iga antud võrrand ei sisalda kõiki otsita- vaid	125
104. Juhtum, kus tundmatud esinevad ainult murdude $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \dots$ kujul	126
105. Juhtum, kus antud võrrandid on kasulik liita	127

Ruutjuure leidmine.**I. Juurte põhiomadused.**

	Lk
106. Juure definitsioon	130
107. Aritmeetiline juur	131
108. Algebraalne juur	132
109. Korrutise, astme ja murru juurimine	133

II. Ruutjuure leidmine arvudest.

110. Eelmärgused	135
111. Juure leidmine täisarvust, mis on väiksem kui 10 000, kuid suurem kui 100	136
112. Juure leidmine täisarvust, mis on suurem kui 10 000	139
113. Juure numbrite arv	143

III. Ligikaudsete ruutjuurte leidmine.

114. Kaks juhtu, kus täpset juurt ei leidu	143
115. Ligikaudne juur täpsusega kuni 1	144
116. Ligikaudne juur täpsusega kuni $\frac{1}{10}$	145
117. Ligikaudne juur täpsusega kuni $\frac{1}{100}$, kuni $\frac{1}{1000}$ jne.	146
118. Juure leidmine harilikust murrust	149

Kuues jagu.

Ruutvõrrand.

119. Ülesanne	152
120. Ruutvõrrandi normaalkuju	153
121. Mittetäielike ruutvõrrandite lahendamine	154
122. Täielike ruutvõrrandite lahendamise näited	156
123. Taandatud ruutvõrrandi lahendite valem	158
124. Ruutvõrrandi lahendite üldvalem	160
125. Üldvalemi lihtsustamine juhul, kui kordaja b on paarisarv	160
126. Ruutvõrrandi lahendite arv	161
Harjutuste vastused	162

Tõlkinud E. Etverk.
Vastutav toimetaja A. Humal.
Keeleline toimetaja E. Kindlam.

Ladumisele antud 6. IV 1949. Trükkimisele antud 1. VI 1949.
Trükiarv 37 000. Paber 56 × 79, ¹/₁₆. Trükipoognaid 10,75. Trükitähti
trükipoognas 37 300. Arvutuspoognaid 10. MB-03690. Trükikoda
„Hans Heidemann“, Tartu, Vallikraavi 4. Tellimise nr. 967.

На эстонском языке.

А. П. Киселёв. Алгебра. Учебник для семилетней школы и VI—VIII
классов средней школы.

Rbl. 4.50

A-17881

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00463082 0

10 000