

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
MATEMAATILISE STATISTIKA INSTITUUT

Magistritöö

Natalja Joutsi

Olulise valimi meetod krediidiriski hindamisel koopulatega

Juhendaja: prof. Tõnu Kollo

Tartu 2014

Sisukord

Lühikokkuvõte	2
Abstract	4
Sissejuhatus	5
1 Koopula mõiste	7
1.1 Koopula definitsioon	7
1.2 Koopula tihedusfunktsioon	8
1.3 Koopula omadused	10
1.4 Korrelatsioon	12
1.5 Koopulate tüübid	12
1.5.1 Gaussi koopula	13
1.5.2 Studenti t -koopula	16
1.5.3 Arhimeedilised koopulad	17
2 Faktormudelid	22
2.1 Ühe faktori mudel	22
2.2 Mitme faktori mudel	28
3 Portfelli krediitkahjude modelleerimine olulise valimi meetodi abil	32
3.1 Olulise valimi meetod	32
3.2 Ühesammuline olulise valimi meetod	37
3.3 Kahesammuline olulise valimi meetod	38
4 Modelleerimine	42
4.1 Ühesammulise olulise valimi meetodi rakendamine	42
4.2 Kahesammulise olulise valimi meetodi rakendamine	47
Kirjanduse loetelu	55
Lisad	58
A Keskmiste ja moodide vektorid	58
A.1 Tuletised	58
A.2 Gaussi mitmefaktormudel	58
A.3 Studenti t -mitmefaktormudel	59
A.4 Claytoni mitmefaktormudel	59

B	Tõepärasuhete leidmine	59
B.1	Gaussi jaotus	59
B.2	Studenti jaotus	60
B.3	Claytoni koopula	60
C	R code	61
C.1	Faktorkaarude vektorite leidmise kood	61
C.2	Optimaalse keskmise ja moodi vektori leidmise kood	62
C.3	Olulise valimi meetodi kood	66

Lühikokkuvõte

Olulise valimi meetod krediidiriski hindamisel koopulatega

Käesolev finants- ja kindlustusmatemaatika eriala magistritöö on teostatud Tartu Ülikooli Matemaatilise statistika instituudis. Töös alustatakse koopula mõiste kirjeldamisega. Koopula on mitmemõõtmeline jaotusfunktsioon, mis sisaldab infot marginaalsete tõenäosusjaotuste vahelise sõltuvuse kohta. Sealjuures on koopula funktsioon invariantne monotoonsete teisenduste suhtes. See annab võimaluse konstrueerida mitmemõõtmelisi jaotusi rakendades andmetele monotoonseid teisendusi. Koopulate kasutamine on tihedalt seotud selliste sõltuvuse karakteristikutega nagu astakorrelatsioonikordajad Kendalli τ ja Spearmani ρ_S . Need on invariantseid monotoonsete teisenduste suhtes.

Erinevad koopula tüübid, mis sobivad ekstremaalsete sündmuste modelleerimiseks, on esitatud koopulate ülevaates. Need on elliptiliste ja Arhimeediliste koopulate pered. Edasi on kirjeldatud nn faktormudeleid, mis lubavad leida tõenäosuse kliendi maksejõuetusse sattumiseks (defoldi tõenäosust) kasutades latentset muutujat. Viimane kujutab endast kohustusevõtjate süstemaatiliste ja spetsiifilise riskifaktorite kombinatsiooni.

Antud töös on peamiselt kirjeldatud ja rakendatud meetodeid, mis on esitatud P. Glassermani ja J. Li töös [4]. Olulise valimi meetod on teostatud kahes etapis: rakendame jaotuse muutmist tinglikustatud defoldi tõenäosustele, kasutades fikseeritud süstemaatilisi faktoreid ning nihutame selle abil süstemaatiliste faktorite jaotuste moodid. Jaotuste muutmise all on mõeldud jaotuste eksponentsiaalset teisendust, mis suurendab defoltide tõenäosust.

Töö viimases osas rakendame Monte Carlo simulatsiooni, kasutades dispersiooni vähendamise tehnikat - olulise valimi meetodit. Rakendame olulise valimi meetodi protseduuri Gaussi, Studenti ja Claytoni ühe- ja mitmefaktormudelite jaoks. Kasutame erinevaid koopula faktormudeleid erinevate faktorite arvuga ja Kendalli kordajaga τ selleks, et modelleerida portfelli krediidikahju ning leida hinnanguid sabatõenäosusele $P(L > x)$, kus L on portfelli kogukahju.

Märksõnad: Koopula, Faktormudelid, Olulise valimi meetod

Abstract

Importance sampling for portfolio credit risk using copulas

This Master Theses is carried out at Tartu University, Institute of Mathematical Statistics. The thesis starts with definition of a copula. The copula is a function, which maps individual marginal distributions into a joint distribution. Also the copula function is multivariate distribution function, which describes the dependency structure between uniform random variables. Strictly increasing transformations of the underlying random variables also result in the transformed variables having the same copula. Therefore copulas are invariant under strictly increasing transformations of margins. The copula is connected with scale-invariant measures of association such as Kendall's τ and Spearman's ρ_S . Those only depend on the copula and are invariant under strictly increasing transformations of margins.

In this thesis different types of copulas are described: elliptical and Archimedean copulas. And we describe a connection of copulas and factor models, which are constructed to estimate default probabilities using latent variables. The latent variable is a combination of common and specific factors. Eg in the Gaussian copula factor model, dependence is introduced through a multivariate normal vector of latent variables. In factor models default of an obligor occurs if the latent variable falls below some threshold. In this paper are shown the forms of latent variables for Gaussian, Student, Clayton and Gumbel factor models.

In this paper we mainly apply the estimators and methods derived by P. Glasserman and J. Li [4] of importance sampling methods in portfolio credit risk models. The importance sampling procedure consists of two steps: at the first step we change distribution for the conditional default probabilities, given the underlying factors, then at the second step a shift in modes of the factors themselves is added. Under the change of distribution is meant an exponential twisting procedure, which increases the default probabilities.

In the final part a Monte Carlo simulation study is carried out to measure the credit risk in portfolios of loans. In rare event simulations we need many replications to get sufficient accuracy of the estimates. To improve the efficiency we use a method of variance reduction - Importance sampling procedure. In this paper we apply the importance sampling procedure for the Gaussian, Student and Clayton copula factor models in the one factor and multifactor cases. The aim of this thesis is to use importance sampling procedure, using different copula factor models with different number of factors and different correlations τ , to estimate portfolio credit risk $P(L > x)$ and model credit loss of a portfolio L .

Keywords: Copula, Factor models, Importance Sampling

Sissejuhatus

Laenuportfelli krediikahjude modelleerimine on üks peamistest eesmärkidest krediidiriski juhtimisel. Krediidirisk on potentsiaalsete kahjude risk, mis võib tuleneda vastaspoole kohustuste mittetäitmist panga või muu finantsasutuse ees. Krediidiriski arvutamiseks on olulised järgmised parameetrid:

- Maksejõuetuse (defodi) tõenäosus (*Probability of Default PD*), mis kajastab kliendi maksuvõimetust etteantud ajahorisondi korral (üldjuhul üheaastane ajahorisont);
- Laenu suurus makseviivituse hetkel (*Exposure at Default EAD*);
- Maksejõuetusest tingitud kahjususe määr (*Loss Given Default LGD*), mis kajastab tagatise ja teisi krediidiriski vähendavaid tegureid ehk osa *EAD*-st, mis pank kaotab defoldi juhul.

Antud töös oletame, et *EAD* ja *LGD* on etteantud ja fikseeritud suurused. Ning kontsentreerume portfelli krediikahju L sabatõenäosuse $P(L > x)$ modelleerimisele. Selleks on vaja modelleerida üksikkahjud iga kohustusevõtja jaoks ning konstrueerida mudel, mis hindaks kohustusevõtjate vahelisi sõltuvusi.

Populaarne ning tihti kasutatav sõltuvuse mõõt on lineaarne korrelatsioon ehk Pearsoni korrelatsioonikordaja ρ . Korrelatsioon näitab lineaarse seose suunda ja tugevust kahe juhusliku suuruste vahel. Kuid korrelatsioonikordajal ρ on mitmeid puudusi. Nimelt korrelatsioon ei ole invariantne monotoonsete teisenduste suhtes. Sõltuvuse mõõt ρ on määratav ainult juhul kui juhuslike suuruste dispersioonid on lõplikud. Seetõttu ei saa Pearsoni korrelatsioonikordajat kasutada raskemate sabadega jaotuste korral. Need korrelatsioonikordaja ρ puudused viitavad sellele, et peame kasutama sõltuvuse kirjeldamiseks *koopulate* abi.

Koopula on mitmemõõtmeline jaotusfunktsioon, mis sisaldab infot tõenäosusjaotuste vahelise sõltuvuse kohta. Teisiti, koopula on standardse ühtlase jaotusega juhuslike suuruste ühisjaotusfunktsioon. Koopula on seotud selliste sõltuvuse karakteristikutega nagu astakorrelatsioonikordajad Kendalli τ ja Spearmani ρ_S , mis on invariantseid monotoonsete teisenduste suhtes.

Aluse koopula kasutusele matemaatikas pani A. Sklar 1959. aastal. Hiljem avastati koopulate väärtus sõltuvuse hindamise vahendina finants- ja kindlustusmatemaatika jaoks.

Koopulate teooria on tihedalt seotud faktormudelitega, mille idee seisneb selles, et kohustusevõtjate vahelisi sõltuvusi on võimalik esitada kasutades latentset muutujat. Viimane kujutab endast süstemaatiliste ja spetsiifilise riskifaktorite kombinatsiooni. Mõnikord need faktorid on majandustõlgendusega, nt tööstusfaktorid või geograafilised faktorid, kuid need võivad olla ka hindamisprotseduuri kõrvalproduktid. Osutub, et defoltide vaheline sõltuvus on esitatav läbi sõltuvuse latentsete muutujate vahel. Seega kohustusevõtjate vaheliste sõltuvuste hindamiseks peame kasutama koopula faktormudelid portfelli krediikahju sabatõenäosuse $P(L > x)$ modelleerimisel. Latentsete muutujate kujud on erinevad erinevat tüüpi koopulate

jaoks. Magistritöös on esitatud Gaussi, Studenti, Claytoni ja Gumbeli faktormudelid.

Antud töös on arvutusliku vahendina kasutatud *Monte Carlo simuleerimismeetodit*. Üldjuhul on tõhusa hinnangu leidmine krediidiriskile ajakulukas. Selleks, et tõsta simulatsiooni tõhusust kasutame dispersiooni vähendamise tehnikat - *olulise valimi meetodit*. Kirjeldame olulise valimi meetodi protseduuri võttes aluseks allika P. Glasserman ja J. Li [4]. Keskendume Gaussi, Studenti ja Claytoni koopula faktormudelitele. Nt Gaussi koopula faktormodeli juhul on kohustusevõtjate vaheline sõltuvus kirjeldatav läbi latentsete muutujate mitmemõõtmelise normaaljaotusega vektori kaudu. Kohustusevõtja on defoldis kui temaga seotud latentne muutuja jääb alla etteantud piiri. Tinglikustades läbi süstemaatiliste faktorite muutuvad kohustusevõtjad sõltumatuteks. See jagab olulise valimi meetodi kaheks osaks:

- rakendame jaotuse muutmist (eksponentsiaalset teisendust) tinglikustatud defoldi tõenäosustele fikseeritud süstemaatiliste faktorite korral;
- nihutame süstemaatiliste faktorite jaotusi moodi võrra.

Magistritöös võrdleme simulatsioonide tulemusi erinevate faktormudelite korral, erineva faktorite arvu ning erineva astakorrelatsioonikordaja τ väärtuse korral. Seejuures vaatleme kuidas süstemaatiliste riskifaktorite jaotuste nihutamine mõjutab laenuportfelli krediidikahju suurust ja sabatõenäosust $P(L > x)$. Simulatsioonid on teostatud kasutades statistikapaketti *R* 3.1.0.

Antud töö on üles ehitatud järgmiselt. Peatükis 1 on esitatud ülevaade koopulate teooriast, sh koopula definitsioon, koopula tihedusfunktsioon, koopula omadused, tinglikustamine koopulate korral ning korrelatsioon. Seejärel on lühidalt kirjeldatud koopulate põhiperesid ning lähemalt vaadeldud kahemõõtmelisi Gaussi, Studenti t , Gumbeli, Claytoni ja Franki koopulaid. Peatükk 2 on pühendatud ühe ja mitme süstemaatilise faktoriga faktormudelitele. Seal on ära toodud valemid maksejõuetuse tõenäosuste PD arvutamiseks. Kaheetapiline olulise valimi meetod on esitatud Peatükis 3. Olulise valimi meetodi rakendamise arvulised tulemused on toodud Peatükis 4. Lisas A on esitatud keskmiste ja moodide vektorite leidmise valemid olulise valimi meetodi teise etapi jaoks. Lisas B on leidud tõepärasuhted erinevate faktormudelite jaoks. Magistritöö lõpus on autori poolt kirjutatud programmid (Lisa C). Neist esimene leiab faktorikaalude vektorid, teine realiseerib algoritmi optimaalsete keskmiste ja moodide vektorite leidmiseks ning kolmas realiseerib olulise valimi meetodi protseduuri.

Koopulate teooria esitamisel on viidatud järgmisele kirjandusele ([11]; [3]; [5]; [15]; [9]; [1]). Magistritöö faktormudelite osa kirjeldamiseks on kasutatud allikaid ([8]; [1]; [13]; [10]; [16]; [17]; [18]; [9]; [2]; [12]; [14]). Peatükis 3 ehk olulise valimi meetodi osas on viited kirjandusele ([6]; [4]; [7]).

Peatükk 1

Koopula mõiste

1.1 Koopula definitsioon

Koopulate väärtus statistikas on selles, et need võimaldavad kirjeldada seda, kuidas üksikriskide marginaalsed jaotused on omavahel seotud riskiportfelli ühisjaotuses. Koopula mõiste on lihtsalt kirjeldatav: koopula on standardse ühtlase jaotusega $U(0; 1)$ juhuslike suuruste ühisjaotusfunktsioon. Formaalne definitsioon on järgmine:

Definitsioon 1.1 [1, lk. 103] *Koopula on selline n -mõõtmeline jaotusfunktsioon, mille iga ühemõõtmeline marginaaljaotus on standardne ühtlane jaotus. Koopula on funktsioon*

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1].$$

Lihtsuse mõttes piirdume esialgu kahemõõtmelise koopulaga. Koopula definitsioonist järeldub, et iga kahemõõtmeline jaotusfunktsioon, mille marginaaljaotused on standardsed ühtlased jaotused, on koopula. Seega on võimalik kahemõõtmeline koopula esitada kujul:

$$C(u, v) = P(U_1 \leq u, U_2 \leq v), \quad (1.1)$$

kus $U_1, U_2 \sim U(0, 1)$. Samas kasutatakse koopulate defineerimisel tihti teist teed, kus koopulat vaadatakse, kui teatud omadustega funktsiooni.

Definitsioon 1.2 [3, lk. 50]. *Kahemõõtmeline koopula C on järgmiste omadustega funktsioon ühikruudul $[0, 1]^2$, $C(u, v) : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$:*

1. $C(0, u) = 0 = C(v, 0)$, $u, v \in [0, 1]^2$;
2. $C(u, 1) = u$ ja $C(1, v) = v$, $u, v \in [0, 1]^2$;
3. iga $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in [0, 1]^2$ jaoks, kus $u_1 \leq v_1$ ja $u_2 \leq v_2$ kehtib

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

Juhul kui funktsioon $C(u, v)$ rahuldab tingimust 1, siis öeldatakse, et ta on *maandatud* (*grounded*).

Vaatleme juhuslikke suurusi X ja Y , mille pidevad jaotusfunktsioonid on vastavalt F_1, F_2 ning ühisjaotusfunktsioon F . Siis rakendades mõlemale juhuslikule suurusele teisendusena jaotusfunktsiooni, saame, et $F_1(X) = U_1, F_2(Y) = U_2$, kus U_1 ja U_2 on standardse ühtlase jaotusega. Eeldame lisaks, et X ja Y jaotusfunktsioonid on rangelt kasvavad, siis kehtivad võrdused $F_1^{-1}(U_1) = X$ ja $F_2^{-1}(U_2) = Y$. Seega saame esialgsete juhuslike suuruste X ja Y ühisjaotuse jaotusfunktsiooni esitada koopula kaudu:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P(X \leq x, Y \leq y) = P(F_1(X) \leq F_1(x), F_2(Y) \leq F_2(y)) \\ &= P(U_1 \leq F_1(x), U_2 \leq F_2(y)) = C(F_1(x), F_2(y)). \end{aligned} \quad (1.2)$$

See näide annab viite koopulate teooria kõige olulisemale teoreemile, mille kohaselt seos (1.2) kehtib ka üldjuhul.

Teoreem 1.1 Sklar'i teoreem [1, lk. 104]. *Olgu F n -mõõtmeline jaotusfunktsioon marginaaljaotustega F_1, \dots, F_n . Siis eksisteerib selline koopula C , et*

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)),$$

kus $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$.

Juhul kui marginaaljaotused F_1, \dots, F_n on pidevad ja rangelt monotoonselt kasvavad, siis leidub parajasti üks selline koopula C . Siit saame järgmise koopula esituse:

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)),$$

kus $(u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$. Koopula sisaldab infot marginaalsete tõenäosusjaotuste vahelise sõltuvuse kohta. Seepärast nimetatakse koopulat ka *sõltuvusfunktsiooniks*.

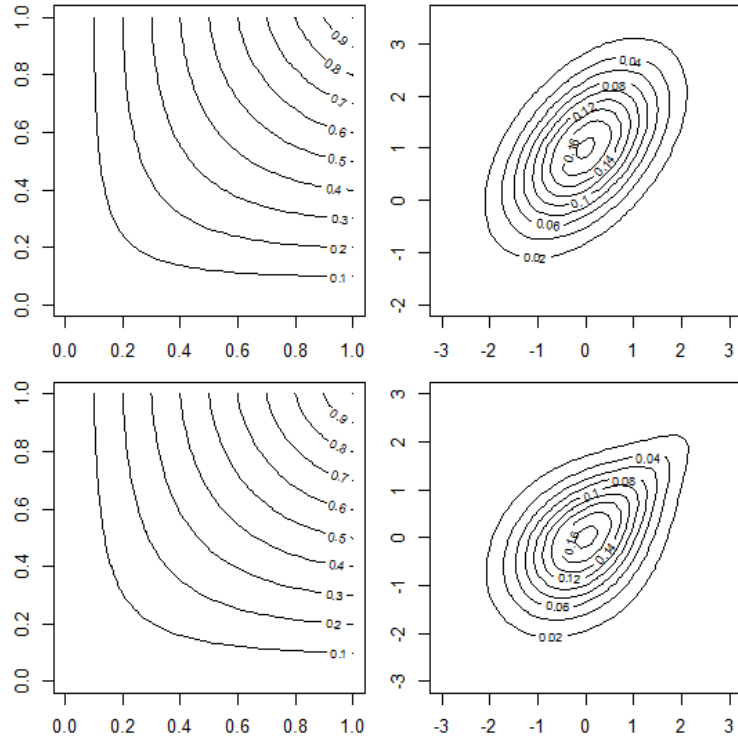
1.2 Koopula tihedusfunktsioon

Koopula tihedusfunktsioon $c(u, v)$ saadetakse jaotusfunktsioonist $C(u, v)$ diferentseerimise teel:

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v},$$

kui $C(u, v)$ on pidevalt diferentseeruv u ja v suhtes. Tihedusfunktsioon eksisteerib peaaegu kõikjal ühikruudus ning on mittenegatiivne.

Koopula tihedusfunktsioon on oluline jaotuse kirjeldamisel. Nimelt vaadeldes näiteks joonise (1.1) vasakpoolseid graafikuid, tundub, et tegemist on sarnaste koopulatega. Samas nende tihedusfunktsioonide samatõenäosusjooned paremal näitavad, et koopulate sõltuvusstruktuurid on täiesti erinevad. Ülemisel real on Gaussi koopula jaotusfunktsiooni ja tema tihedusfunktsiooni samatõenäosusjooned parameetri 0.5 korral, alumisel real vastavalt Gumbeli koopula ja selle tihedus parameetri 1.4 korral. Nende koopulate kirjeldused on hiljem esitatud tekstis.



Joonis 1.1: Koopulate jaotusfunktsioonide ja tihedusfunktsioonide võrdlus.

Koopula tihedusfunktsioon on seotud esialgsete juhuslike suuruste ühistihedusfunktsiooniga ja koopula tihedusfunktsiooni saab esitada ühistihedusfunktsiooni ja marginaaljaotuste tihedusfunktsioonide kaudu. Lähtume seostest $F_1(X) = U_1$, $F_2(Y) = U_2$, millest $X = F_1^{-1}(U_1)$, $Y = F_2^{-1}(U_2)$. Kuna pidevate juhuslike suuruste korral kasutatav teisendus on rangelt kasvav ja pidev, siis saame järgmise võrduse ahela [3, lk. 83]:

$$\begin{aligned}
 c(u, v) &= c(F_1(x), F_2(y)) = \frac{\partial^2 C(F_1(x), F_2(y))}{\partial F_1(x) \partial F_2(y)} \\
 &= f(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) \det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1^{-1}(u)}{\partial u} & \frac{\partial F_1^{-1}(u)}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2^{-1}(v)}{\partial u} & \frac{\partial F_2^{-1}(v)}{\partial v} \end{bmatrix} \\
 &= f(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) \frac{\partial F_1^{-1}(u)}{\partial F_1(F_1^{-1}(u))} \frac{\partial F_2^{-1}(v)}{\partial F_2(F_2^{-1}(v))} \\
 &= \frac{f(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v))}{f_1(F_1^{-1}(u)) f_2(F_2^{-1}(v))} = \frac{f(x, y)}{f_1(x) f_2(y)}. \tag{1.3}
 \end{aligned}$$

Siit selgub, et koopula tihedusfunktsioon on samaselt võrdne ühega ainult juhul kui juhuslikud suurused on sõltumatud. Lisaks saime esituse X ja Y ühisjaotuse tihedusfunktsiooni jaoks:

$$f(x, y) = c(F_1(x), F_2(y)) f_1(x) f_2(y).$$

1.3 Koopula omadused

Suvaline koopula on piiratud alt ja ülalt. Ülemist piiri

$$C^+ = \min(u, v)$$

nimetatakse *maksimumkoopulaks*, alumist piiri

$$C^- = \max(u + v - 1, 0)$$

miinimumkoopulaks ning neid koos nimetatakse *Frechet piirideks*. Seega iga koopula C korral kehtivad võrratused $C^- \leq C \leq C^+$ [3, lk. 52].

Oletame, et jaotusfunktsioonid juhusliku vektori $(X_1, \dots, X_n)^T$ koordinaatide jaoks on F_1, \dots, F_n ning G_1, \dots, G_n vektori $(\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n))^T$ jaoks. Kirjeldagu nende ühisjaotust vastavalt koopulad C ja C_α . Juhul kui funktsioonid α_k on rangelt kasvavad iga k korral, siis iga $x \in (-\infty; +\infty)$ korral kehtib:

$$G_k(x) = P(\alpha_k(X_k) \leq x) = P(X_k \leq \alpha_k^{-1}(x)) = F_k(\alpha_k^{-1}(x)). \quad (1.4)$$

Seega rakendades koopulafunktsiooni ning kasutades võrdust (1.4) saame [5, lk. 6]:

$$\begin{aligned} C_\alpha(G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)) &= P(\alpha_1(X_1) \leq x_1, \dots, \alpha_n(X_n) \leq x_n) \\ &= P(X_1 \leq \alpha_1^{-1}(x_1), \dots, X_n \leq \alpha_n^{-1}(x_n)) \\ &= C(F_1(\alpha_1^{-1}(x_1)), \dots, F_n(\alpha_n^{-1}(x_n))) \\ &= C(G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)). \end{aligned}$$

Võttes arvesse seda, et meil kehtib eeldus juhuslike suuruste X_1, \dots, X_n pidevuse kohta ning jaotusfunktsioonide (G_1, \dots, G_n) muutumiskiirkonnad on $[0, 1]$, siis vektorid $(X_1, \dots, X_n)^T$ ja $(\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n))^T$ on sama koopulafunktsiooniga C . Teisiti öeldes on koopulafunktsioon invariantne monotoonsete teisenduste suhtes. Seega oletades näiteks, et meil on sõltuvate krediidilepingute kogum ning soovime konstrueerida n -mõõtmelise jaotuse mudelina krediidikahjude hindamiseks, siis koopula invariantse omadus lubab väita, et krediidikahjude ühisjaotuse koopula on sama ka logaritmitud või muul viisil monotoonselt teisendatud kahjude jaoks.

Vaatleme järgnevalt veel ühte kasulikku omadust. Oletame, et juhuslikud vektorid $(X_1, \dots, X_n)^T$ ja $(\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n))^T$ on vastavalt jaotusfunktsioonidega F_1, \dots, F_n ja G_1, \dots, G_n ning koopulatega C_{X_1, \dots, X_n} ja $C_{\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)}$. Lisaks sellele olgu funktsioonid α_k rangelt kahanevad iga k korral, kus $1 \leq k \leq n$. Ilma üldisust kitsendamata kirjeldame omaduse võttes $k = 1$ ehk ainult α_1 on rangelt kahanev ning ülejäänud α_k , kus $k \geq 2$ on rangelt kasvavad [5, lk. 7].

$$\begin{aligned}
C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(G_1(x_1), \dots, G_n(x_n)) &= P(\alpha_1(X_1) \leq x_1, \dots, \alpha_n(X_n) \leq x_n) \\
&= P(X_1 > \alpha_1^{-1}(x_1), \alpha_2(X_2) \leq x_2, \dots, \alpha_n(X_n) \leq x_n) \\
&= P(\alpha_2(X_2) \leq x_2, \dots, \alpha_n(X_n) \leq x_n) \\
&\quad - P(X_1 \leq \alpha_1^{-1}(x_1), \alpha_2(X_2) \leq x_2, \dots, \alpha_n(X_n) \leq x_n) \\
&= C_{\alpha_2, \dots, \alpha_n}(G_2(x_2), \dots, G_n(x_n)) \\
&\quad - C_{X_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(F_1(\alpha_1^{-1}(x_1)), G_2(x_2), \dots, G_n(x_n)) \\
&= [G_1(x) = P(\alpha_1(X_1) \leq x) = P(X_1 > \alpha_1^{-1}(x))] \\
&= 1 - F_1(\alpha_1^{-1}(x))] = C_{\alpha_2, \dots, \alpha_n}(G_2(x_2), \dots, G_n(x_n)) \\
&\quad - C_{X_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(1 - G_1(x_1), G_2(x_2), \dots, G_n(x_n)).
\end{aligned}$$

Seega kasutades toodud koopulafunktsiooni omadusi võib järeldada, et koopula $C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ on esitatav koopula C_{X_1, \dots, X_n} kaudu. Vaatleme kahemõõtmelist näidet, kus X ja Y on pidevad juhuslikud suurused koopulaga C_{XY} ning α ja β on rangelt monotoonsed vastavates muutumispiirkondades.

1. Olgu α rangelt kasvav ja β rangelt kahanev, siis:

$$C_{\alpha(X), \beta(Y)}(u, v) = C_{\alpha(X)}(u) - C_{\alpha(X), Y}(u, 1 - v) = u - C_{X, Y}(u, 1 - v).$$

2. Olgu α rangelt kahanev ja β rangelt kasvav, siis:

$$C_{\alpha(X), \beta(Y)}(u, v) = C_{\beta(Y)}(v) - C_{X, \beta(Y)}(1 - u, v) = v - C_{X, Y}(1 - u, v).$$

3. Juhul kui mõlemad funktsioonid α ja β on rangelt kahanevad, siis:

$$\begin{aligned}
C_{\alpha(X), \beta(Y)}(u, v) &= v - C_{X, \beta(Y)}(1 - u, v) \\
&= v - (1 - u - C_{X, Y}(1 - u, 1 - v)) \\
&= u + v - 1 + C_{X, Y}(1 - u, 1 - v).
\end{aligned}$$

Koopulate väärtuslikuks omaduseks on tingliku jaotuse esitamise võimalus. Olgu $C_1(u, v)$ koopula $C(u, v)$ osatuletis esimese argumendi järgi. Tähistagu juhuslike suuruste X ja Y ühisjaotust $F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$. Siis juhusliku suuruse Y jaotus fikseeritud $X = x$ korral avaldub kujul [9, lk. 163]:

$$F(y|X = x) = F_{Y|X}(y) = C_1(F_X(x), F_Y(y)) = \frac{\partial C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial F_X(x)}. \quad (1.5)$$

Ilmselge on, et sõltumatuse korral $C(u, v) = uv$ ning juhusliku suuruse tinglik jaotus fikseeritud U korral on võimalik avaldada kujul

$$C_1(u, v) = v = P(V \leq v|U = u).$$

1.4 Korrelatsioon

Finantsülesannetes on tegemist sõltuvate juhuslike suurustega ning on vaja sõltuvust hinnata. Selle mõõtmiseks leidub mitu võimalust: näiteks lineaarne korrelatsioonikordaja ρ ning astakorrelatsioonikordajad Kendalli τ ja Spearmani ρ_S . Koopulate rakendamisel on korrektne kasutada astakorrelatsioonikordajaid, kuna need on invariantseid monotoonsete teisenduste suhtes. Lineaarne ehk Pearsoni korrelatsioonikordaja ρ omab mitmeid puudusi, nimelt:

- Juhul kui juhuslike suuruste dispersioonid ei ole lõplikud, siis Pearsoni korrelatsioonikordaja pole määratud.
- Kovariatsiooni ja lineaarset korrelatsioonikordajat ei leidu kahe t -jaotusega juhusliku suure vahel, kui vabadusastmete arv on väiksem võrdne kahest. Kuna finantsülesannetes tihti esinevad raskete sabadega jaotused, siis antud omadus on oluline.
- Lineaarne korrelatsioonikordaja ei ole invariantne mittelineaarse rangelt kasvava teisenduse suhtes. Näiteks korrelatsioon $\log(X)$ ja $\log(Y)$ vahel pole üldjuhul sama, mis korrelatsioon X ja Y vahel. Seega finantsandmete teisendus võib moonutada korrelatsiooni hinnanguid.

Toodud puudused viitavad sellele, et juhuslike suuruste omavaheliste seoste hindamiseks peame kasutama astakorrelatsiooni kordajaid.

Kendalli τ ja Spearmani ρ_S on defineeritavad koopula abil järgmiselt:

$$\tau = 4 \iint_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 1, \quad (1.6)$$

$$\rho_S = 12 \iint_{I^2} C(u, v) dudv - 3. \quad (1.7)$$

Need valemid on tuletatud näiteks allikas [11, lk. 168,176]. Vaatleme järgnevalt erinevaid koopulate tüüpe.

1.5 Koopulate tüübid

Eksisteerivad mitmeid koopulate pered; näiteks elliptilised, Arhimeedilised, ekstremaalsed jt koopulad. Järgnevalt kirjeldame neist olulisemaid.

Sõltumatu koopula kirjeldab sõltumatute juhuslike suuruste jaotust ning on defineeritud järgmisel viisil:

$$C(u, v) = uv.$$

Elliptilised koopulad on saadud elliptilistest jaotustest. Siia kuuluvad enimkasutatavatena Gaussi koopula ja Studenti t -koopula.

Arhimeedilised koopulad on populaarsed, kuna need võimaldavad modelleerida reaalsust vaid ühe parameetri abil, mis reguleerib tunnuste sõltuvuse tugevust. Nende eeliseks on konstrueerimise lihtsus ning koopulate lai valik. Puuduseks on vaid ühe parameetri valiku võimalus, mis alati ei pruugi sobida andmetega. Lisaks loetletud koopulatele on mitmeid **muid koopulaid**, mis ei kuulu eelnevat klassidesse. Märkime siin näiteks *Farlie-Gumbel-Morgensterni* ning *Placketti* koopulaid. *Placketti* koopula avastati algebralisel viisil analüütiliste tabelite põhjal, kus arvutati ridade ja veergude vahelisi sõltuvusi. Lisainformatsiooni selle algebralise meetodi kohta on võimalik leida allikas [11, lk. 89]. *Placketti* koopula on järgmisel kujul:

$$C(u, v) = \begin{cases} \frac{(1+(\eta-1)(u+v)) \pm \sqrt{(1+(\eta-1)(u+v))^2 - 4uv\eta(\eta-1)}}{2(\eta-1)}, & \text{kui } \eta \neq 1; \\ u \cdot v, & \text{kui } \eta = 1. \end{cases}$$

Farlie-Gumbel-Morgensterni koopula on määratud suhteliselt lihtsa valemiga:

$$C(u, v) = uv + \eta uv(1-u)(1-v).$$

Antud koopulat kasutatakse harva finantsülesannetes, kuna ta lubab modelleerida ainult nõrka sõltuvuse taset.

Eraldi võiks välja tuua **ekstremaalsete koopulate** klassi, mis eksisteerivad juhul, kui $t > 0$ korral kehtib seos:

$$C(u^t, v^t) = C^t(u, v).$$

Vaatleme järgnevalt põhjalikumalt elliptilisi ning Arhimeedilisi koopulaid.

1.5.1 Gaussi koopula

Üks sageli kasutatav koopula on kahemõõtmeline Gaussi koopula C_G .

Definitsioon 1.3 [3, lk. 112] *Gaussi koopula on esitatav järgmiselt:*

$$C_G(u, v) = \Phi_{\rho_{XY}}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)), \quad (1.8)$$

kus funktsioon $\Phi_{\rho_{XY}}$ on kahemõõtmelise normaaljaotusega vektori ühisjaotusfunktsioon, korrelatsioonimaatriksiga¹

$$\rho_{XY} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{XY} \\ \rho_{XY} & 1 \end{pmatrix}$$

ning Φ on standardse normaaljaotuse jaotusfunktsioon.

Definitsioon 1.3 on samaväärne järgmise esitusega:

$$\Phi_{\rho_{XY}}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} e^{-\frac{x^2 - 2\rho_{XY}xy + y^2}{2(1-\rho_{XY}^2)}} dx dy. \quad (1.9)$$

¹Siin on tegemist Pearsoni korrelatsioonikordajaga ρ_{XY} .

Normaaljaotuse korral on sõltumatus ekvivalentne nullilise korrelatsiooni väärtusega, s.t. kui $\rho_{XY} = 0$, siis Gaussi koopula on sõltumatu.

Kirjutame välja kahemõõtmelise Gaussi koopula tihedusfunktsiooni kasutades valemit (1.3), kus kehtib seos $F_1 = F_2 = \Phi$. Kahemõõtmelise ja ühemõõtmelise standardse normaaljaotuse tihedusfunktsioonid tähistame vastavalt järgmiselt: $\phi_{\rho_{XY}}$ ja ϕ .

$$\begin{aligned} c_G(u, v) &= \frac{f(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v))}{f_1(F_1^{-1}(u))f_2(F_2^{-1}(v))} = \frac{\phi_{\rho_{XY}}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))}{\phi(\Phi^{-1}(u))\phi(\Phi^{-1}(v))} \\ &= \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho_{XY}xy+y^2}{2(1-\rho_{XY}^2)}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}} = \frac{e^{-\frac{x^2-2\rho_{XY}xy+y^2}{2(1-\rho_{XY}^2)} + \frac{x^2+y^2}{2}}}{\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Siit saame Gaussi koopula esituse kujul:

$$C_G(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{1}{\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho_{XY}xy+y^2}{2(1-\rho_{XY}^2)} + \frac{x^2+y^2}{2}} ds dt,$$

kus $x = \Phi^{-1}(s)$ ja $y = \Phi^{-1}(t)$. Esitame lisaks kahemõõtmelise Gaussi koopula tinglikud jaotused seosest (1.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_G}{\partial u} &= \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(v) - \rho_{XY}\Phi^{-1}(u)}{\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \right); \\ \frac{\partial C_G}{\partial v} &= \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u) - \rho_{XY}\Phi^{-1}(v)}{\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Esitame nüüd Gaussi koopula järgmise teoreemina.

Teoreem 1.2 [15, lk. 59]. *Gaussi koopula on avaldatav kujul:*

$$C_G(u, v) = \int_0^u \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(v) - \rho\Phi^{-1}(t)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) dt. \quad (1.12)$$

Tõestus: Olgu standardse normaaljaotusega juhuslike suuruste vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ ning nendevaheline lineaarse korrelatsioonikordaja ρ . Olgu X_3 selline standardse normaaljaotusega juhuslik suurus, mis on X_1 -st sõltumatu ning kehtib võrdus

$$X_2 = \rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2} X_3.$$

Siis

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = E[P(X_1 \leq x_1, \rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2} X_3 \leq x_2 | X_1)] \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \Phi \left(\frac{x_2 - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Seega Gaussi koopula kui jaotusfunktsioon on järgmisel kujul:

$$C_G(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(v) - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \phi(x) dx = \int_0^u \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(v) - \rho \Phi^{-1}(t)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) dt.$$

■

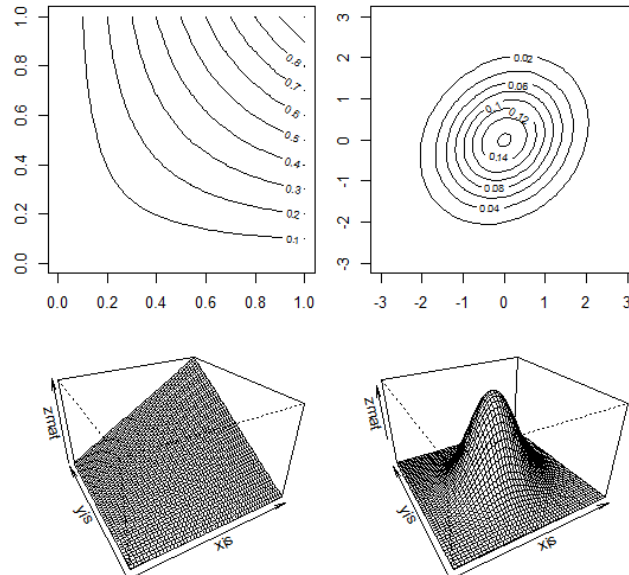
Gaussi koopulas esineb Pearsoni korrelatsioonikordaja, mis ei ole invariantne esialgsete muutujate monotoonse teisenduse suhtes. Alternatiivselt võib selle asemel kasutada nt Kendalli astakorrelatsioonikordajat, mis on invariantne monotoonse teisenduse suhtes ning üks-üheses funktsionaalses seoses Pearsoni korrelatsioonikordajaga. Normaalkoopula korral on teada ka selle seose kuju [3, lk. 116]:

$$\tau_{XY} = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{XY}, \quad \rho_{XY} = \sin \frac{\pi}{2} \tau_{XY}. \quad (1.13)$$

Seega kasutades astakorrelatsioonikordajat avaldub kahemõõtmeline Gaussi koopula kujul:

$$C_G^\tau = \int_0^u \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(v) - \sin \frac{\pi}{2} \tau_{XY} \Phi^{-1}(t)}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{2} \tau_{XY}}} \right) dt. \quad (1.14)$$

Esitame nüüd graafiliselt kahemõõtmelise Gaussi koopula jaotus- ja tihedusfunktsiooni juhul kui $\rho_{XY} = 0.2$.



Joonis 1.2: Gaussi koopula jaotusfunktsioon ja tihedusfunktsioon.

Jooniselt (1.2) on näha, et tegemist on sümmeetrilise jaotusega.

1.5.2 Studenti t -koopula

Enam kui Gaussi koopula huvitab finantsmaailma Studenti t -koopula. Põhjuseks on see, et t -koopula kirjeldab paremini suurte väärtuste vahelise sõltuvuse fenomeni, mis tihti esineb finantsandmestikes.

Kahemõõtmeline Studenti t koopula C_t ühendab sama vabadusastmete arvuga ühemõõtmelised marginaalsed t -jaotused kahemõõtmeliseks t -jaotuseks. Olgu t_ν ühemõõtmeline Studenti t -jaotusfunktsioon vabadusastmete arvuga ν [3, lk. 116]:

$$t_\nu(u) = \int_{-\infty}^u \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dx,$$

kus Γ on Euleri Γ -funktsioon. Olgu T_ν on kahemõõtmeline Studenti t -jaotusfunktsioon Pearsoni korrelatsioonikordajaga ρ [3, lk. 116].

$$T_\nu(u, v) = \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^v \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} dx dy.$$

Definitsioon 1.4 [3, lk. 116] *Kahemõõtmeline Studenti t -koopula C_t vabadusastmete arvuga ν on esitatav järgmiselt :*

$$\begin{aligned} C_t(u, v) &= T_\nu(t_\nu^{-1}(u), t_\nu^{-1}(v)) \\ &= \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} dx dy. \end{aligned} \quad (1.15)$$

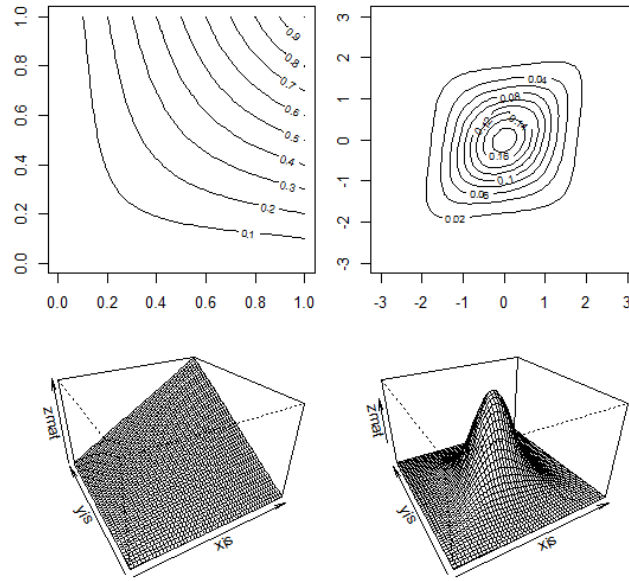
Juhul kui $\nu \rightarrow \infty$, siis Studenti t -koopula läheneb Gaussi koopulale, samas $\nu \rightarrow 1$ korral Studenti koopula läheneb Cauchy koopulale.

Studenti t -koopula tihedusfunktsioon on kujul [3, lk. 117]:

$$c_t(u, v) = \rho^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})^2} \frac{\left(1 + \frac{\varsigma_1^2 - 2\rho\varsigma_1\varsigma_2 + \varsigma_2^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}}}{\prod_{j=1}^2 \left(1 + \frac{\varsigma_j^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}}}, \quad (1.16)$$

kus Γ on Euleri Γ -funktsioon, $\varsigma_1 = t_\nu^{-1}(u)$, $\varsigma_2 = t_\nu^{-1}(v)$.

Märgime, et kui lineaarne korrelatsioonikordaja võrdub nulliga ei tähenda see sõltumatust lõpliku vabadusastmete arvu ν korral. Oluline on, et Kendall's τ kuju on sama nii Gaussi kui ka Studenti koopula jaoks (1.13) [5, lk. 25]. Esitame Studenti t -koopula jaotusfunktsiooni ja tihedusfunktsiooni graafikud, kui $\rho_{XY} = 0.2$ ning vabadusastmete arv on $\nu = 3$:



Joonis 1.3: Studenti t -koopula jaotusfunktsioon ja tihedusfunktsioon.

Võrreldes Studenti t -koopula joonist (1.3) ning Gaussi joonist (1.2) on näha, et jaotused on mõlemad sümmeetrilised, kuid t -koopula korral esinevad suuremad väärtused suurema tõenäosusega.

1.5.3 Arhimeedilised koopulad

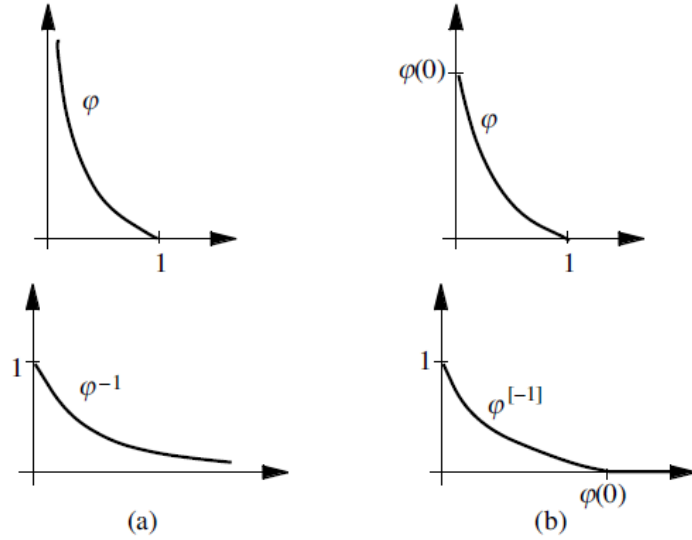
Arhimeedilised koopulad konstrueeritakse kasutades funktsiooni φ , mis on määratud poollõigul $(0, \infty)$, on kumer ja pidev funktsioon, kahanev lõigul $[0, 1]$ ning kehtib seos $\varphi(1) = 0$. Sellist funktsiooni nimetatakse *generaatoriks*. Juhul, kui kehtib seos $\varphi(0) = \infty$, siis nimetatakse funktsiooni φ *rangeks generaatoriks*. Funktsiooni φ pseudo-pöördfunktsioon $\varphi^{[-1]}(u)$ on järgmiselt defineeritud [3, lk. 121]:

$$\varphi^{[-1]}(u) = \begin{cases} \varphi^{-1}(u), & \text{kui } 0 \leq u \leq \varphi(0); \\ 0, & \text{kui } \varphi(0) \leq u \leq \infty. \end{cases}$$

Pseudo-pöördfunktsiooni definitsioonist järeldub, et kehtib seos:

$$\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u, u \in [0, 1].$$

Lisaks sellele langeb pseudo-pöördfunktsioon kokku tavalise pöördfunktsiooniga juhul kui φ on range generaator. Funktsioon φ ning selle pöördfunktsioon φ^{-1} ja pseudo-pöördfunktsioon $\varphi^{[-1]}$ on esitatud skemaatiliselt järgmisel joonisel [11, lk. 113]:



Joonis 1.4: Range (a) ja mitterange (b) generaator ja selle pöördfunktsioon.

Definitsioon 1.5 [3, lk. 121] Antud generaatori φ ja selle pöördfunktsiooni φ^{-1} korral on Arhimeediline koopula C_A defineeritud järgmiselt:

$$C_A(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)), \quad (1.17)$$

kus $u, v \in [0, 1]$. Juhul kui generaator on range, siis nimetatakse koopulat rangeks Arhimeediliseks koopulaks.

Arhimeedilised koopulad said oma nime tänu analoogiale arhimeedilisuse aksioomiga. Aksioomi kohaselt leidub iga kahe positiivse reaalarvu a ja b jaoks selline naturaalarv n , et kehtib $na > b$. Kasutame järgmisi tähistusi koopulate jaoks: $u_C^1 = C(u, 1) = u$ ja $u_C^n = C(u, u_C^{n-1})$. Siis iga u, v jaoks lõigust $[0, 1]$ leidub selline naturaalarv n , et kehtib $u_C^n < v$. Kuna $\varphi(u)$ ja $\varphi(v)$ on positiivsed reaalarvud, siis on võimalik rakendada arhimeedilisuse aksioomi ehk leidub selline naturaalarv n , et kehtib seos $n\varphi(u) > \varphi(v)$. Kuna $v > 0$ ning funktsioon φ on kahanev, siis $\varphi(v) < \varphi(0)$. Seega kehtib:

$$v = \varphi^{-1}(\varphi(v)) > \varphi^{-1}(n\varphi(u)) = u_C^n,$$

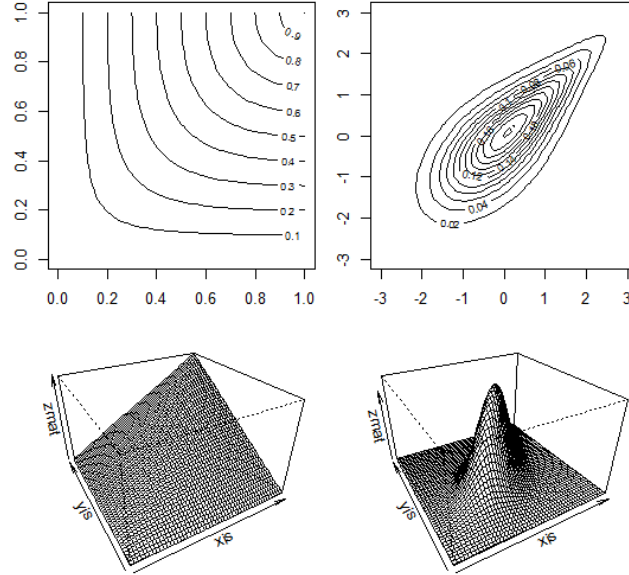
(vaata ka joonist (1.4)). Järgnevalt kirjeldame mõnesid kahemõõtmelisi Arhimeedilisi koopulaid.

Definitsioon 1.6 [5, lk. 31] Kahemõõtmeline **Gumbeli koopula** C_{Gumbel}^η on kujul:

$$C_{Gumbel}^\eta(u, v) = e^{-\left((-\ln u)^\eta + (-\ln v)^\eta\right)^{\frac{1}{\eta}}},$$

kus $\eta \geq 1$ ning generaator on antud kujul $\varphi(t) = (-\ln t)^\eta$.

Juhul kui $\eta = 1$, siis Gumbeli koopula on võrdne sõltumatu koopulaga.



Joonis 1.5: Gumbeli koopula jaotusfunktsioon ja tihedusfunktsioon.

Joonisest (1.5) on näha, et Gumbeli koopula sõltuvusstruktuur on asümmeetriline ning ülemine saba on raskem kui alumine. Antud joonisel on toodud Gumbeli koopula parameetriga $\eta = 2$.

Definitsioon 1.7 [5, lk. 31] Kahemõõtmeline **Claytoni koopula** $C_{Clayton}^\eta$ on kujul:

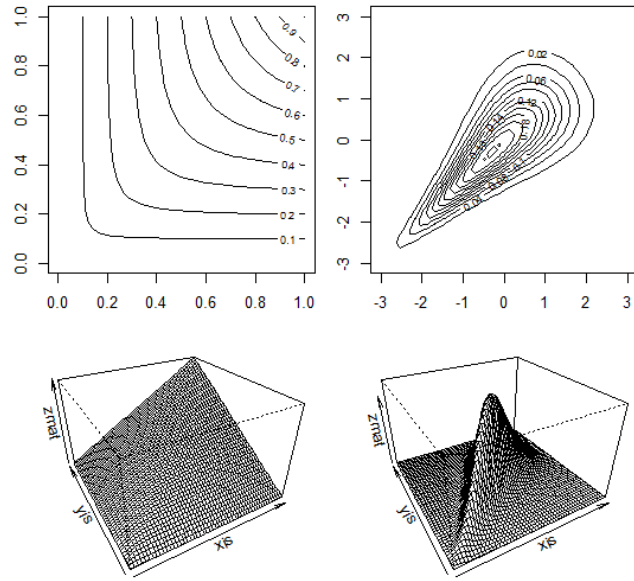
$$C_{Clayton}^\eta(u, v) = \max[(u^{-\eta} + v^{-\eta} - 1)^{-\frac{1}{\eta}}, 0],$$

kus $\eta \in [-1, 0) \cup (0, \infty)$ ning generaator $\varphi(t) = \frac{1}{\eta}(t^{-\eta} - 1)$.

Juhul kui $\eta > 0$, on Claytoni koopula esitatav lihtsamal kujul:

$$C_{Clayton}^\eta(u, v) = (u^{-\eta} + v^{-\eta} - 1)^{-\frac{1}{\eta}}.$$

Järgmisel joonisel on esitatud Claytoni koopula jaotusfunktsioon ja tihedusfunktsioon parameetriga $\eta = 2$. Jooniselt on näha, et sõltuvusstruktuur on asümmeetriline ning alumine saba on oluliselt raskem.



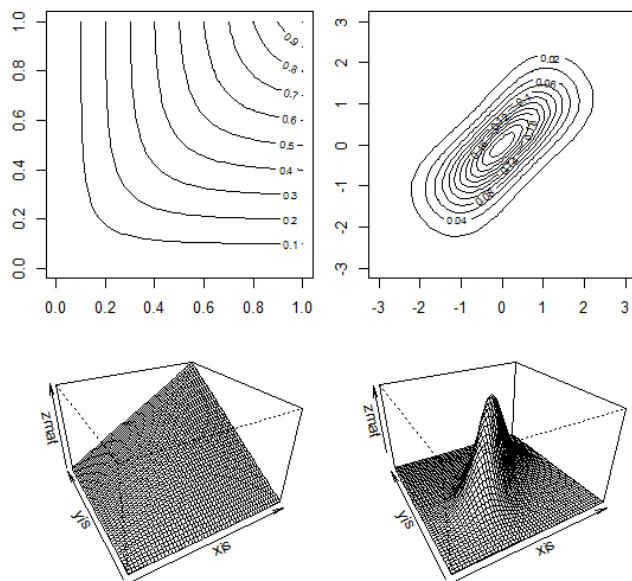
Joonis 1.6: Claytoni koopula jaotusfunktsioon ja tihedusfunktsioon.

Definitsioon 1.8 [5, lk. 32] Kahemõõtmeline **Franki koopula** C_{Frank}^η on järgmiselt defineeritud:

$$C_{Frank}^\eta(u, v) = -\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\eta u} - 1)(e^{-\eta v} - 1)}{e^{-\eta} - 1} \right),$$

kus $\eta \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Generaator on sellel juhul $\varphi(t) = -\ln \frac{e^{-\eta t} - 1}{e^{-\eta} - 1}$.

Jooniselt (1.7) nähtub, et Franki koopula sõltuvusstruktuur on sümmeetriline ning võrreldes Gaussi koopulaga omab Franki koopula suuremat tõenäosust keskosas ning jaotuse sabad on kergemad. Antud joonisel on esitatud Franki koopula jaotus ja tihedusfunktsioonid parameetriga $\eta = 5.736$.



Joonis 1.7: Franki koopula jaotusfunktsioon ja tihedusfunktsioon.

Esitame nüüd teoreemi Kendalli astakorrelatsioonikordaja τ^A kohta Arhimeediliste koopulate korral.

Teoreem 1.3 [11, lk. 163] *Olgu X ja Y on juhuslikud suurused Arhimeedilise koopulaga C_A generaatoriga φ . Siis Kendalli korrelatsioonikordaja τ^A juhuslike suuruste X ja Y vahel on esitatav kujul:*

$$\tau^A = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

Selle teoreemi tõestus on esitatud allikas [11, lk. 163]. Kasutades antud võrdust toome ära Kendalli τ^A avaldised vaadeldud Arhimeediliste koopulate jaoks [3, lk. 126].

Pere	Kendalli τ^A
Gumbel (1960)	$1 - \eta^{-1}$
Clayton (1978)	$\eta/(\eta + 2)$
Frank (1979)	$1 + 4(D_1(\eta) - 1)/\eta$

Tabel 1.1: Arhimeediliste koopulate Kendalli τ^A

Franki koopula korral tabelis esinev funktsioon $D_1(\eta)$ on nn Debye funktsioon, mis on defineeritud järgmiselt:

$$D_1(\eta) = \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \frac{t}{e^t - 1} dt.$$

Peatükk 2

Faktormudelid

2.1 Ühe faktori mudel

Koopulad olid kasutusel statistilise vahendina mitmemõõtmiliste jaotuste konstrueerimisel enne kui avastati nende väärtus riskijuhtimise jaoks. Antud töö eesmärgiks on kasutada koopulaid selleks, et modelleerida laenuportfelli krediidikahjud ning leida hinnangut krediidiriskile. Praktikas ei ole portfelli krediidikahju tõenäosuslik hindamine lihtne ülesanne. See eeldab portfellis olevate erinevatest riskipositsioonidest tekkivate potentsiaalsete kahjude vaheliste korrelatsioonide hindamist, riskikontsentratsioonide tuvastamist jne. Osutub, et antud ülesanne on lahendatav kasutades faktormudelit, mis eeldab, et korrelatsioon defoltide (ehk klientide maksejõuetusse sattumiste) vahel on esitatav läbi kohustusevõtjate latentse muutuja. Latentne muutuja kujutab endast kohustusevõtjate süstemaatiliste ja spetsiifilise riskifaktorite kombinatsiooni. Süstemaatilise riskifaktori all on mõeldud makroökonomilisi näitajaid: majandusindeksite muutumist, majandusharu sektorite näitajate kõikumist, riigi põhilisi erifaktoreid jne. Kohustusevõtja latsentse muutuja riski osa, mis jääb süstemaatiliste riskidega kirjeldamata, on kliendipõhine spetsiifiline risk. Eeldame, et spetsiifilise riski faktorid on üksteisest sõltumatud ja ei korreleeru süstemaatilise riski faktoritega. Aastal 1974 pakkus R.C. Merton välja krediidimudeli allikas [8], mille idee seisnes selles, et kohustusevõtja on defoltis juhul kui temaga seotud latentne muutuja jääb alla etteantud piiri. Tegelikult on väga palju faktoreid, mis võivad mõjutada krediidikohustusevõtjate käitumist. Kuid lihtsuse mõttes vaatleme situatsiooni, kus latentne muutuja on esitatav läbi järgmise süstemaatilise ja spetsiifilise riskifaktorite lineaarkombinatsiooni:

$$X_k = \beta_1 Z + \beta_2 \varepsilon_k. \quad (2.1)$$

Siin X_k on k -nda kohustusevõtja latentne muutuja, Z on süstemaatiline risk, ε_k on spetsiifiline risk kohustusevõtja k jaoks ning koefitsiendid β_1 ja β_2 määravad latentse muutuja kirjeldatavuse Z ja ε_k kaudu.

Illustreerimiseks vaatleme järgmist näidet raamatust [1, lk. 37]. Oletame, et kohustusevõtjateks on kaks ettevõtet A ja B. Mõlemad firmad tegutsevad samas majanduslikus sektoris ja samas riigis. Need faktorid kujutavad endast süstemaatilist

riski ja mõjutavad oluliselt ettevõtete majanduslikku tulevikku. Intuitiivselt on selge, et muutused majandussektoris mõjutavad mõlema ettevõtte maksejõulisust samasuunaliselt. Juhul kui aktiivsus antud sektoris kahaneb, siis ettevõtete defoldi tõenäosus kasvab. Teine süstemaatiline faktor, mis võib muuta defoldi tõenäosust, on riigi majandustase. Ettevõtete varade volatiilsuse osa, mis jäi kirjeldamata süstemaatiliste faktorite kaudu, on nn spetsiifiline faktor.

Oletame, et nii süstemaatiline kui ka spetsiifiline risk on normaaljaotusega. Lihtsuse mõttes eeldame, et korrelatsioon ¹ ρ_{ij} iga kohustusevõtja paari jaoks on sama. Tähistame korrelatsiooni latentse muutuja ja süstemaatilise riski vahel ρ_{XZ} . Osutub, et standardse normaaljaotusega juhuslikud suurused, mis on paaride kaupa võrdselt korreleeritud, on võimalik esitada kahe standardse normaaljaotusega juhusliku suuruse ja korrelatsioonikordaja kaudu [13]. Ehk kordajad β_1 ja β_2 mudelis (2.1) on esitatavad korrelatsiooni ρ_{XZ} abil:

$$X_i = Z\rho_{XZ} + \varepsilon_i\sqrt{1 - \rho_{XZ}^2}.$$

Raskus seisneb selles, et suurust ρ_{XZ} ei ole võimalik otseselt empiirilistest andmetest hinnata. Samal ajal korrelatsioon kohustusevõtjate vahel ρ_{ij} on tuvastatav ajalooliste kahjude kaudu. Näitame, et suurus ρ_{XZ} on esitatav ρ_{ij} kaudu. Järgmine tõestus on võetud allikast [10, lk. 29-31]. Oletame, et eksisteerivad kaks kohustusevõtjat i ja j , keda võrdselt mõjutab majanduslik faktor Z ja vastavad spetsiifilised riskid on $\varepsilon_i, \varepsilon_j$.

$$X_i = aZ + b\varepsilon_i;$$

$$X_j = aZ + b\varepsilon_j.$$

Kuna $X_i, X_j, Z, \varepsilon_i, \varepsilon_j$ on standardse normaaljaotusega, siis paarid $(Z, \varepsilon_i), (Z, \varepsilon_j)$ ja $(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ on üksteisest sõltumatud. Koefitsendid a ja b on tundmatud, kuid normaaljaotuse omadustest on teada, et need on seotud korrelatsioonikordajatega X_i ja X_j vahel, ρ_{ij} ning X ja Z vahel, ρ_{XZ} . Standardhälvet tähistame σ . Siis kehtivad järgmised omadused:

1. $\sigma(X_i) = \sigma(X_j) = \sigma(Z) = \sigma(\varepsilon_i) = \sigma(\varepsilon_j) = 1$;
2. $\rho_{XZ} = \frac{Cov(X_i, Z)}{\sigma(X_i)\sigma(Z)} \stackrel{(1)}{=} Cov(X_i, Z)$;
3. $\rho_{ij} = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sigma(X_i)\sigma(X_j)} \stackrel{(1)}{=} Cov(X_i, X_j)$;
4. $Cov(Z, \varepsilon_i) = Cov(Z, \varepsilon_j) = 0$, kuna süstemaatiline risk ja spetsiifilised riskid on sõltumatud;
5. $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, tänu spetsiifiliste faktorite sõltumatusale.

¹Korrelatsiooni all on mõeldud Pearsoni korrelatsioonikordajat. Kuid kuna lineaarkorrelatsioonil on eelnimetatud puudused, teeme hiljem ülemineku astakorrelatsioonikordajale.

Nüüd leiame valemid kovariatsiooni ja dispersiooni arvutamise jaoks, kus juhuslikud suurused on esitatud kahe juhusliku suuruse summana:

$$\begin{aligned} Cov(mX_1 + nX_2, pX_3 + qX_4) &= mpCov(X_1, X_3) + mqCov(X_1, X_4) \\ &\quad + npCov(X_2, X_3) + nqCov(X_2, X_4); \end{aligned}$$

$$\sigma(mX_1 + nX_2) = m^2\sigma(X_1) + n^2\sigma(X_2) + 2nmCov(X_1, X_2).$$

Esiteks leiame korrelatsioonikordaja latentse muutuja ja süstemaatilise faktori vahel. Kasutame ülaltoodud omadusi ning esitame süstemaatilise riski Z uuel kujul $Z = rZ + sZ$, kus $r + s = 1$:

$$\begin{aligned} \rho_{XZ} &\stackrel{2}{=} Cov(X_i, Z) = Cov(aZ + b\varepsilon_i, rZ + sZ) \\ &= arCov(Z, Z) + asCov(Z, Z) + brCov(\varepsilon_i, Z) \\ &\quad + bsCov(\varepsilon_j, Z) \stackrel{4}{=} ar + as = a. \end{aligned}$$

See tähendab, et koefitsient, mis esitab seost iga latentse muutuja ja süstemaatilise riski vahel, on tegelikult korrelatsioon nende muutujate vahel. Nüüd proovime hinnata koefitsienti b . Selleks leiame X_i dispersiooni, kasutades normaaljaotuse omadusi 1 ja 4:

$$\sigma(X_i) = \sigma(aZ + b\varepsilon_i) = a^2\sigma(Z) + b^2\sigma(\varepsilon_i) + 2ab\sigma(Z, \varepsilon_i) \stackrel{1,4}{=} a^2 + b^2.$$

Vastavalt esimesele omadusele $\sigma(X_i) = 1$ ehk kehtib:

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Kovariatsioon kahe latentse muutuja vahel on:

$$\begin{aligned} Cov(X_i, X_j) &= Cov(aZ + b\varepsilon_i, aZ + b\varepsilon_j) = a^2Cov(Z, Z) + b^2Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \\ &\quad + abCov(Z, \varepsilon_j) + baCov(\varepsilon_i, Z) \\ &\stackrel{5,4}{=} a^2(1) + b^2(0) + ab(0) + ba(0) = a^2. \end{aligned}$$

Seega, kuna $Cov(X_i, X_j) \stackrel{3}{=} \rho_{ij} = a^2$ ning tõestasime, et $\rho_{XZ} = a$, kehtib järgmine seos:

$$\rho_{ij} = a^2 \leftrightarrow a = \sqrt{\rho_{ij}} = \rho_{XZ}.$$

Kasutades juba leitud sõltuvust a ja b vahel saame:

$$b = \sqrt{1 - \rho_{ij}}.$$

Seega korrelatsioon latentse muutuja ja süstemaatilise riski vahel võrdub ruutjuuriga korrelatsioonist iga kahe latentse muutuja vahel ehk kehtib:

$$\rho_{XZ} = \sqrt{\rho_{ij}}. \tag{2.2}$$

Kasutades korrelatsioonikordajate vahelist seost saame:

$$X_i = Z\sqrt{\rho_{ij}} + \varepsilon_i\sqrt{1 - \rho_{ij}}. \quad (2.3)$$

Edasi kasutame valemit (2.3) selleks, et hinnata defoldi tõenäosust sõltuvalt konkreetsetest majanduslikest tingimustest. Nagu varem öeldud, tõenäosus, et kohustusvõtja i on defoldis (tähistame PD - *Probability of Default*) on tegelikult tõenäosus, et temaga seotud latentne muutuja X_i jääb alla etteantud piiri x_c . Seega kehtib võrdus $PD = P(X_i \leq x_c)$. Nüüd tinglikustame antud valemit läbi majandusliku taseme fikseerimise $Z = z^*$:

$$PD^* = P(X_i \leq x_c | Z = z^*).$$

Rakendades valemit (2.3) saame:

$$PD^* = P(Z\sqrt{\rho_{ij}} + \varepsilon_i\sqrt{1 - \rho_{ij}} \leq x_c | Z = z^*).$$

Kasutame saadud valemit ε_i jaoks ning rakendame majandusliku taseme fikseeritud väärtust $Z = z^*$:

$$PD^* = P\left(\varepsilon_i \leq \frac{x_c - \sqrt{\rho_{ij}}z^*}{\sqrt{1 - \rho_{ij}}}\right).$$

Kuna kehtib eeldus, et ε_i on standardse normaaljaotusega, saame eelmise võrratuse esitada kujul:

$$PD^* = \Phi\left(\frac{x_c - \sqrt{\rho_{ij}}z^*}{\sqrt{1 - \rho_{ij}}}\right). \quad (2.4)$$

Tänu X_i normaalsusele, saame esitada defoldi tõenäosuse kasutades jaotuse $N(0, 1)$ jaotusfunktsiooni: $PD = \Phi(x_c)$, kust $x_c = \Phi^{-1}(PD)$.

Majanduslik tase $Z = z^*$ viitab Z jaotuse piirkonnale, mis paikneb allpool fikseeritud punkti z^* . Seega tähistades antud piirkonda A_Z^* , saame $A_Z^* = \Phi(z^*)$, kust $z^* = \Phi^{-1}(A_Z^*)$. Asendades x_c ja z^* võrrandis (2.4), saame tingliku majandusliku tasemega defoldi tõenäosuse **Gaussi faktormudeli** korral kujul:

$$PD^* = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) - \sqrt{\rho_{ij}}\Phi^{-1}(A_Z^*)}{\sqrt{1 - \rho_{ij}}}\right). \quad (2.5)$$

Antud valem omab praktilist kasutust nt Baseli nõuetes² selleks, et hinnata ootamatute krediidikahjude suurust, milleks finantsasutus peab alati valmis olema. Baseli reeglite järgi kõige ekstremaalsem stsenaarium z^* on antud valemiga $\Phi^{-1}(0.001)$. Seega tänu normaaljaotuse sümmeetrilisusele saame $\Phi^{-1}(0.001) =$

²Basel on kapitali adekvaatsust käsitlev kokkulepe. Aastal 1988 avaldati Basel I, mis keskendus krediidiriski juhtimisele, esitades minimaalseid kapitalinõudeid. Aastal 2004 Basel I asendati uue versiooniga Basel II, mille eesmärgiks oli riski juhtimise kvaliteedi tõstmine, mis omalt poolt tugevdas kogufinantsriski süsteemi. Üleminek kokkuleppele Basel III on kavandatud aastatel 2012-2019. Antud kokkulepe kontsentreerib tähelepanu pangasüsteemi likviidsuse ja kapitaalidekvaatsuse reguleerimisele. Lisainformatsiooni Baseli kohta on võimalik leida allikates [16], [17], [18].

$-\Phi^{-1}(0.999)$, kust:

$$PD^* = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho_{ij}}\Phi^{-1}(0.999)}{\sqrt{1 - \rho_{ij}}} \right).$$

See on hinnang potentsiaalsetele krediidikahjudele juhul, kui realiseerub halvim stsenaarium tõenäosusega 0.999 normaalsuse eeldusel.

Võttes arvesse Pearsoni korrelatsioonikordaja puudusi asendame lineaarkorrelatsioonikordaja Kendalli τ kordajaga valemi (1.6) abil. Seega, juhul kui tegemist on Gaussi koopulaga, rakendame seost (1.13) ning valem (2.5) on kujul:

$$PD_{\tau} = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD) - \sqrt{\sin \frac{\pi}{2}\tau_{ij}}\Phi^{-1}(A_Z^*)}{\sqrt{1 - \sin \frac{\pi}{2}\tau_{ij}}} \right). \quad (2.6)$$

Samas oletus jaotuste normaalsuse kohta on optimistlik. Mõistlik on vaadelda juhtumit, kus normaaljaotuse asemel on kasutatud raskema sabaga jaotust, mis tihti esineb finantsandmetes. Tegelikult võivad kõik kolm komponenti X_i , Z ja ε_i olla erinevalt jaotunud. Olgu nende vastavad jaotusfunktsioonid F , G , H . Sellistel eeldustel on ka võimalik hinnata tingliku majandusliku taseme korral defoldi tõenäosust kasutades valemit [9, lk.162]:

$$P(X_i \leq x_c | Z = z^*) = H \left(\frac{F^{-1}(PD) - \sqrt{\rho_{ij}}G^{-1}(A_Z^*)}{\sqrt{1 - \rho_{ij}}} \right). \quad (2.7)$$

Siin A_Z^* on piirkond allpool fikseeritud majandusliku taseme punkti z^* . PD on ajalooline defoldi tõenäosus ning ρ_{ij} on Pearsoni korrelatsioonikordaja kohustusevõtjate paaride jaoks. Kindlasti saab seda tõenäosust leida vaid eeldusel, et kõik kolm jaotust on teada. Tegelikult lineaarse korrelatsioonikordaja kasutamine valemis (2.7) pole matemaatiliselt korrektne, kuna valem kehtib standardse normaaljaotusega muutujate korral. Juhul kui tegemist mitternormaalsete jaotustega, peame koefitsientidest ρ_{ij} ja $\sqrt{1 - \rho_{ij}}$ loobuma ning alustama valemi (2.5) tuletamist võrrandist (2.1) kasutades tundmatuid koefitsiente β_1 ja β_2 . Seega on valemi (2.7) asemel korrektsem kasutada võrdust:

$$P(X_i \leq x_c | Z = z^*) = H \left(\frac{F^{-1}(PD) - \eta_{XZ}G^{-1}(A_Z^*)}{\sqrt{1 - \eta_{XZ}^2}} \right), \quad (2.8)$$

kus η_{XZ} koopula sõltuvusparameeter latentse muutuja ja süstemaatilise riski vahel. Vaatleme lisaks teisi koopula faktormudeleid. Juhul kui tegemist on **Studenti t-faktormudeliga**, siis iga k -nda kliendi latentne muutuja X_k^t on t-jaotusega vabadusastmete arvuga ν ning on avaldatav järgmisel kujul:

$$X_k^t = \sqrt{\frac{\nu}{V}} \left(\beta_k Z + \sqrt{1 - \beta_k^2} \varepsilon_k \right),$$

kus Z ja ε_k on standardse normaaljaotusega ning on üksteisest sõltumatud. Juhuslik suurus V on χ^2 jaotusega vabadusastmete arvuga ν . Studenti t -faktormodeli

puhul süstemaatiline ja spetsiifiline riskid on vastavalt $T := \sqrt{\frac{\nu}{V}}Z$ ja $\sqrt{\frac{\nu}{V}}\varepsilon_k$. Nüüd leiame defoldi tõenäosuse tingimusel $Z = z^*$ ning $V = v$:

$$\begin{aligned} PD_k^t &= P(X_k^t \leq x_k | Z = z^*, V = v) \\ &= P\left(\sqrt{\frac{\nu}{V}}(\beta_k Z + \sqrt{1 - \beta_k^2}\varepsilon_k) \leq x_k | Z = z^*, V = v\right) \\ &= P\left(\sqrt{\frac{\nu}{v}}(\beta_k z^* + \sqrt{1 - \beta_k^2}\varepsilon_k) \leq x_k\right) = P\left(\varepsilon_k \leq \frac{\sqrt{\frac{\nu}{v}}x_k - \beta_k z^*}{\sqrt{1 - \beta_k^2}}\right). \end{aligned}$$

Analoogiliselt Gaussi faktormudeli juhule tähistame Z jaotuse piirkonda, mis paikneb allpool fikseeritud punkti z^* tähisega A_Z^* . Kuna Z ja ε_k on standardse normaaljaotusega, siis $z^* = \Phi^{-1}(A_Z^*)$. Võttes arvesse fakti, et latentne muutuja X_k^t on t -jaotusega vabadusastmete arvuga ν , siis võrdusest $PD_k = P(X_k^t \leq x_k)$ saame, et $x_k = T_\nu^{-1}(PD_k)$. Seega Studenti t -faktormudeli defoldi tinglik tõenäosus on kujul:

$$PD_k^t = \Phi\left(\frac{\sqrt{\frac{\nu}{v}}T_\nu^{-1}(PD_k) - \beta_k\Phi^{-1}(A_Z^*)}{\sqrt{1 - \beta_k^2}}\right). \quad (2.9)$$

Vaatleme lisaks Arhimeedilisi faktormudeleid, nende korral k -nda kliendi latentne muutuja X_k^A on avaldatav järgmisel kujul [2, lk. 18]:

$$X_k^A = \varphi^{-1}\left(-\frac{\ln \varepsilon_k}{Z}\right),$$

kus ε_k on k -nda kliendi standardse ühtlase jaotusega spetsiifiline risk. Seejuures süstemaatiline risk Z ja ε_k on üksteisest sõltumatud. Funktsioon φ^{-1} on Arhimeedilise koopula generaatori pöördfunktsioon. Meenutame, et Gumbeli koopula puhul generaator ja generaatori pöördfunktsioon on järgmised:

$$\varphi(t) = (-\ln t)^\eta, \quad \varphi^{-1}(t) = e^{-t^{\frac{1}{\eta}}}.$$

Siit **Gumbeli faktormudeli** korral iga k -nda kliendi latentset muutujat võib esitada kujul:

$$X_k^{Gumbel} = e^{\left(\frac{\ln \varepsilon_k}{Z}\right)^{\frac{1}{\eta}}}.$$

Süstemaatiline risk Z on stabiilse jaotusega, mis sõltub parameetrist η , tähistame seda $Z \sim S(\eta)$. Allika [12, lk. 4] järgi jaotus on stabiilne juhul kui kehtib järgmine stabiilsuse omadus. Olgu X_1 ja X_2 juhusliku suuruse X sõltumatud koopiad. Juhuslik suurus X on stabiilse jaotusega juhul, kui leiduvad sellised positiivsed konstandid a , b ja c ning $d \in \mathbb{R}$ nii, et juhuslik suurus $aX_1 + bX_2$ on juhusliku suurusega $cX + d$ sama jaotusega.

Tinglikustame defoldi tõenäosust k -nda kliendi jaoks tingimusel $Z = z^*$.

$$\begin{aligned} PD_k^{Gumbel} &= P(X_k^{Gumbel} \leq x_k | Z = z^*) = P\left(e^{\left(\frac{\ln \varepsilon_k}{z^*}\right)^{\frac{1}{\eta}}} \leq x_k | Z = z^*\right) \\ &= P\left(\left(\frac{\ln \varepsilon_k}{z^*}\right)^{\frac{1}{\eta}} \leq \ln x_k\right) = P\left(\frac{\ln \varepsilon_k}{z^*} \leq (\ln x_k)^\eta\right) \\ &= P(\ln \varepsilon_k \leq z^*(\ln x_k)^\eta) = P(\varepsilon_k \leq e^{z^*(\ln x_k)^\eta}). \end{aligned}$$

Analoogiliselt Gaussi faktormudeli juhuga tähistame Z jaotuse piirkonda, mis paikneb allpool fikseeritud punkti z^* tähisega A_Z^* . Kuna riskifaktor Z on stabiilse jaotusega, saame võrduse $z^* = S^{-1}(A_Z^*)$. Võttes arvesse, et ε_k on standardse ühtlase jaotusega, saame:

$$PD_k^{Gumbel} = F_U \left(e^{S^{-1}(A_Z^*)(\ln PD_k)^\eta} \right). \quad (2.10)$$

Kasutades sama loogikat vaatame **Claytoni faktormudelit**. Claytoni koopula generaator ja generaatori pöördfunktsioon on:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\eta}(t^{-\eta} - 1), \quad \varphi^{-1}(t) = (t\eta + 1)^{-\frac{1}{\eta}}.$$

Claytoni faktormudelis iga k -nda kliendi latentne muutuja $X_k^{Clayton}$ on esitatav järgmiselt:

$$X_k^{Clayton} = \left(1 - \eta \frac{\ln \varepsilon_k}{Z} \right)^{-\frac{1}{\eta}},$$

kus süstemaatiline risk Z on gammajaotusega kujuparameetriga $\frac{1}{\eta}$, kus $\eta > 0$ ning skaala parameetriga 1. Esitame tingliku defoldi tõenäosuse k -nda kliendi jaoks Claytoni faktormudeli korral.

$$\begin{aligned} PD_k^{Clayton} &= P(X_k^{Clayton} \leq x_k | Z = z^*) = P \left(\left(1 - \eta \frac{\ln \varepsilon_k}{Z} \right)^{-\frac{1}{\eta}} \leq x_k | Z = z^* \right) \\ &= P \left(1 - \eta \frac{\ln \varepsilon_k}{z^*} \geq x_k^{-\eta} \right) = P \left(\ln \varepsilon_k \leq \frac{z^*}{\eta} (1 - x_k^{-\eta}) \right) \\ &= P \left(\varepsilon_k \leq e^{\frac{z^*}{\eta} (1 - x_k^{-\eta})} \right). \end{aligned}$$

Kuna riskifaktor Z on gammajaotusega, siis kehtib võrdus $z^* = \Gamma^{-1}(A_Z^*)$. See- ga tingliku defoldi tõenäosuse arvutamise valem Claytoni faktormudeli korral on kujul:

$$PD_k^{Clayton} = F_U \left(e^{\frac{\Gamma^{-1}(A_Z^*)}{\eta} (1 - PD_k^{-\eta})} \right). \quad (2.11)$$

Kuna reaalsem on juhtum, kus kliendi maksekäitumist mõjutab rohkem faktoreid, siis edasi vaatame mitmemõõtmelist mudelit.

2.2 Mitme faktori mudel

Oletame, et klientide defolti mõjutavad d faktorit, siis **Gaussi mitmefaktormudeli** korral iga k -nda kliendi latentset muutujat võib esitada kujul:

$$X_k^* = \alpha_{k1}Z_1 + \dots + \alpha_{kd}Z_d + \beta_k\varepsilon_k.$$

Analoogiliselt ühe faktori mudelile leiduvad järgmised faktorite kaalude vektorid $\boldsymbol{\alpha}_k = (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{kd})^T$ ja β_k , mis vastavad süstemaatiliste riskide vektorile $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)^T$ ja spetsiifilisele riskile ε_k . Faktorite kaalude vektorid on sellised, et $\alpha_{k1}^2 + \dots + \alpha_{kd}^2 \leq 1$ ja $\beta_k = \sqrt{1 - (\alpha_{k1}^2 + \dots + \alpha_{kd}^2)}$. Juhuslikud suurused \mathbf{Z} ja ε_k olgu standardse normaaljaotusega. Faktorite kaalude vektor $\boldsymbol{\alpha}_k = (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{kd})^T$ on mittenegatiivne, mis sisuliselt tähendab eeldust, et defauldi indikaatorid on positiivselt korreleeritud. Seega tinglik defoldi tõenäosus k -nda kliendi jaoks antud riskifaktorite $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)^T$ korral on:

$$\begin{aligned} PD_k^* &= P(X_k^* \leq x_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}^*) = P(\boldsymbol{\alpha}_k^T \mathbf{Z} + \beta_k \varepsilon_k \leq x_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}^*) \\ &= P\left(\varepsilon_k \leq \frac{x_k - \boldsymbol{\alpha}_k^T \mathbf{z}^*}{\beta_k}\right). \end{aligned}$$

Analoogiliselt ühe faktori juhuga tähistame \mathbf{Z} jaotuste piirkonda, mis paikneb allpool fikseeritud punkte \mathbf{z}^* tähistega $A_{\mathbf{Z}}^*$. Kasutades eeldust, et riskifaktorite vektor \mathbf{Z} on standardse normaaljaotusega, saame siit võrduse $\mathbf{z}^* = \Phi_d^{-1}(A_{\mathbf{Z}}^*)$, kus Φ_d^{-1} on d -mõõtmeline jaotusfunktsioon. Kuna samuti kehtib eeldus $X_k^* \sim N(0, 1)$, siis $x_k = \Phi^{-1}(PD_k)$. Sellega valem (2.5) on mitmemõõtmelisel juhul esitatav kujul:

$$PD_k^* = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD_k) - \boldsymbol{\alpha}_k^T \Phi_d^{-1}(A_{\mathbf{Z}}^*)}{\beta_k}\right). \quad (2.12)$$

Studenti t -mitmefaktormudel iga k -nda kliendi latentne muutuja X_k^{t*} on Studenti t -jaotusega juhuslike suuruste kaalutud summa ning on esitatav järgmiselt [2, lk. 12]:

$$X_k^{t*} = \sqrt{\frac{\nu}{V}} (\alpha_{k1} Z_1 + \dots + \alpha_{kd} Z_d + \beta_k \varepsilon_k).$$

Siin vektor $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)^T$ ning ε_k on standardse normaaljaotusega. Juhuslik suurus V on χ^2 jaotusega vabadusastmete arvuga ν . Studenti t -mitmefaktormudeli puhul süstemaatiliste riskide vektor on $\sqrt{\frac{\nu}{V}} \mathbf{Z}$ ja spetsiifiline risk on $\sqrt{\frac{\nu}{V}} \varepsilon_k$. Esitame nüüd tingliku defoldi tõenäosuse k -nda kliendi jaoks Studenti mitmefaktormudeli korral. Tinglikustame võttes $\mathbf{Z} = \mathbf{z}^*$ ning $V = \nu$:

$$\begin{aligned} PD_k^{t*} &= P(X_k^{t*} \leq x_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}^*, V = \nu) = P\left(\sqrt{\frac{\nu}{V}} (\boldsymbol{\alpha}_k^T \mathbf{Z} + \beta_k \varepsilon_k) \leq x_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}^*, V = \nu\right) \\ &= P\left(\sqrt{\frac{\nu}{\nu}} (\boldsymbol{\alpha}_k^T \mathbf{z}^* + \beta_k \varepsilon_k) \leq x_k\right) = P\left(\varepsilon_k \leq \frac{\sqrt{\frac{\nu}{\nu}} x_k - \boldsymbol{\alpha}_k^T \mathbf{z}^*}{\beta_k}\right). \end{aligned}$$

Analoogiliselt Gaussi mitmefaktormudeli juhule riskifaktorid \mathbf{Z} ning ε_k on standardse normaaljaotusega ja $\mathbf{z}^* = \Phi_d^{-1}(A_{\mathbf{Z}}^*)$. Kuna latentne muutuja X_k^{t*} on t -jaotusega vabadusastmete arvuga ν , siis võrdusest $PD_k = P(X_k^{t*} \leq x_k)$ saame, et $x_k = T_\nu^{-1}(PD_k)$. Seega defoldi tõenäosuse arvutamise valem Studenti t -mitmefaktormudeli korral on kujul:

$$PD_k^{t*} = \Phi\left(\frac{\sqrt{\frac{\nu}{\nu}} T_\nu^{-1}(PD_k) - \boldsymbol{\alpha}_k^T \Phi_d^{-1}(A_{\mathbf{Z}}^*)}{\beta_k}\right). \quad (2.13)$$

Arhimeediliste mitmefaktormudelites iga k -nda kliendi latentset d faktoritega muutajat $X_k^{A^*}$ võib esitada kujul [14, lk. 14]:

$$X_k^{A^*} = \varphi^{-1} \left(-\frac{\ln \varepsilon_k}{\boldsymbol{\gamma}_k^T \mathbf{Z}} \right).$$

Siin funktsioon φ^{-1} on Arhimeedilise koopula generaatori pöördfunktsioon. Spetsiifiline risk ε_k on standardse ühtlase jaotusega ning süstemaatiliste riskide vektorist \mathbf{Z} sõltumatu. Ning $\boldsymbol{\gamma}_k = (\gamma_{k1}, \dots, \gamma_{kd})^T$ on mittenegatiivne faktorite kaalude vektor.

Gumbeli mitmefaktormudeli korral iga k -nda kliendi latentne d faktoritega muutuja on:

$$X_k^{Gumbel^*} = e^{\left(\frac{\ln \varepsilon_k}{\boldsymbol{\gamma}_k^T \mathbf{Z}} \right)^{\frac{1}{\eta}}},$$

Analoogiliselt ühefaktorilise mudeliga süstemaatiliste riskide vektori \mathbf{Z} iga element on stabiilse jaotusega ning sõltub parameetrist η , tähistame seda $\mathbf{Z} \sim S_d(\eta)$. Seega tinglik defoldi tõenäosus k -nda kliendi jaoks antud riskifaktorite $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)$ korral on:

$$\begin{aligned} PD_k^{Gumbel^*} &= P(X_k^{Gumbel^*} \leq x_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}^*) = P\left(e^{\left(\frac{\ln \varepsilon_k}{\boldsymbol{\gamma}_k^T \mathbf{z}^*} \right)^{\frac{1}{\eta}}} \leq x_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}^* \right) \\ &= P\left(\left(\frac{\ln \varepsilon_k}{\boldsymbol{\gamma}_k^T \mathbf{z}^*} \right)^{\frac{1}{\eta}} \leq \ln x_k \right) = P\left(\frac{\ln \varepsilon_k}{\boldsymbol{\gamma}_k^T \mathbf{z}^*} \leq (\ln x_k)^\eta \right) \\ &= P(\ln \varepsilon_k \leq \boldsymbol{\gamma}_k^T \mathbf{z}^* (\ln x_k)^\eta) = P\left(\varepsilon_k \leq e^{\boldsymbol{\gamma}_k^T \mathbf{z}^* (\ln x_k)^\eta} \right). \end{aligned}$$

Tähistame \mathbf{Z} jaotuste piirkonda, mis paikneb allpool fikseeritud punkte \mathbf{z}^* tähistega $A_{\mathbf{Z}}^*$. Kuna riskifaktorid Z_1, \dots, Z_d on stabiilse jaotusega saame võrduse $\mathbf{z}^* = S_d^{-1}(A_{\mathbf{Z}}^*)$. Võttes arvesse, et ε_k on standardse ühtlase jaotusega, saame:

$$PD_k^{Gumbel^*} = F_U \left(e^{\boldsymbol{\gamma}_k^T S_d^{-1}(A_{\mathbf{Z}}^*) (\ln PD_k)^\eta} \right). \quad (2.14)$$

Claytoni mitmefaktormudelis iga k -nda kliendi latentne d faktoritega muutuja $X_k^{Clayton^*}$ on esitatav kujul:

$$X_k^{Clayton^*} = \left(1 - \eta \frac{\ln \varepsilon_k}{\boldsymbol{\gamma}_k^T \mathbf{Z}} \right)^{-\frac{1}{\eta}},$$

kus süstemaatiliste riskide vektor $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)^T \sim \Gamma_d\left(\frac{1}{\eta}, I_d\right)$. Esitame tingliku defoldi tõenäosuse k -nda kliendi jaoks Claytoni mitmefaktormudeli korral.

$$\begin{aligned} PD_k^{Clayton^*} &= P(X_k^{Clayton^*} \leq x_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}^*) = P\left(\left(1 - \eta \frac{\ln \varepsilon_k}{\boldsymbol{\gamma}_k^T \mathbf{z}^*} \right)^{-\frac{1}{\eta}} \leq x_k | \mathbf{Z} = \mathbf{z}^* \right) \\ &= P\left(1 - \eta \frac{\ln \varepsilon_k}{\boldsymbol{\gamma}_k^T \mathbf{z}^*} \geq x_k^{-\eta} \right) = P\left(\ln \varepsilon_k \leq \frac{\boldsymbol{\gamma}_k^T \mathbf{z}^*}{\eta} (1 - x_k^{-\eta}) \right) \\ &= P\left(\varepsilon_k \leq e^{\frac{\boldsymbol{\gamma}_k^T \mathbf{z}^*}{\eta} (1 - x_k^{-\eta})} \right). \end{aligned}$$

Kasutades toodud Gumbeli mitmefaktormudeli puhul tähistust $A_{\mathbf{Z}}^*$ ning fakti, et riskifaktorite vektor \mathbf{Z} on gammajaotusega, saame $\mathbf{z}^* = \Gamma_d^{-1}(A_{\mathbf{Z}}^*)$. Seega tinglik defoldi tõenäosus Claytoni mitmefaktormudelil on:

$$PD_k^{Clayton^*} = F_U \left(e^{\frac{\gamma_{\mathbf{k}}^T \Gamma_d^{-1}(A_{\mathbf{Z}}^*)}{\eta} (1 - PD_k^{-\eta})} \right). \quad (2.15)$$

Tuletatud valemeid kasutame edaspidi modelleerimisel, va Gumbeli faktormudelit. Kuna stabiilsete jaotuste korral on üldjuhul analüütiline kuju teada vaid karakteristliku funktsiooni jaoks, on Gumbeli faktormudeli kasutamine komplitseeritud ja rakendustes me seda mudelit ei kasuta.

Peatükk 3

Portfelli krediidikahjude modelleerimine olulise valimi meetodi abil

Portfelli krediidi kogukahju kujutab endast portfelli üksikosade kahjude summat. Juhul kui üksikkahjud oleksid sõltumatud, siis krediidi kogukahju leidmiseks oleks piisav leida üksikkahjude marginaalsed jaotused. Kuid üldjuhul praktikas on üksikkahjud sõltuvad. Seetõttu portfelli krediidikahju modelleerimise peamiseks ülesandeks on kohustusvõtjate vahelise sõltuvuse hindamine. Vaatleme kahjusid, mis tekkisid üle fikseeritud horisondi kohustuste võtja defolti sattumise tõttu. Tähistame muutujad:

m - kohustuste võtjate (klientide) arv;

Y_k - maksejõuetusse sattumise indikaator kliendi k jaoks;

p_k - kliendi k defoldi marginaalne tõenäosus ehk PD_k ;

c_k - kliendi k defolti sattumisega seotud kahju, kus $c_k = EAD_k LGD_k$;

$L = \sum_{k=1}^m (c_k Y_k)$ defoldi kogukahju;

Oletame, et defoldi tõenäosused p_k on teada nt klientide krediidireitingutest. Lihtsuse mõttes oletame, et klientide defolti sattumisega seotud kahjud c_k on etteantud konstandid.

3.1 Olulise valimi meetod

Olulise valimi meetod on dispersiooni vähendamise tehnika, mida kasutatakse Monte Carlo meetodite korral. Monte Carlo simuleerimise käigus on mõnede väärtuste mõju hinnatavale parameetrile oluliselt tugevam võrreldes teiste väärtustega. Juhul kui saavutatakse nende *oluliste* väärtuste esinemise kõrge sagedus, siis hinnangu dispersiooni on võimalik vähendada. Seega olulise valimi meetodi

põhimõte seisneb selles, et muuta mõnede parameetrite jaotuste tõenäosusmõõtu nii, et simuleerimisel *olulised* väärtused saaksid suurema kaalu ning ilmuksid sa-gedamini tõstes valimi efektiivsust. Selle meetodi kasutamine võimaldab hinnata riski piisava täpsusega kasutades selleks väiksemat simuleerimiste arvu. Krediidi-riski juhtimise kontekstis *olulised* väärtused on need, mille realiseerimisel kahju on suurem. Lisainformatsiooni olulise valimi meetodi kohta on võimalik leida allikast [6, lk. 187-189].

Edasi kirjeldame meetodit allika [4] põhjal. Tõenäosuse $P(L > x)$ hindamiseks olulise valimi meetodil vaadatakse juhuslike suuruste summat, kus juhuslikud suurused on sõltumatud, kuid mitte sama jaotusega. Meid huvitab tõenäosuse hinnang, et portfelli krediidikahju ületab etteantud piiri ehk parema saba tõenäosus $P(L > x)$ eriti suurte x väärtuste korral.

Defolti sattumise indikaator

$$Y_k = \begin{cases} 1, & \text{juhul kui } k \text{ klient on defoldis;} \\ 0, & \text{maksejõulisuse korral} \end{cases}$$

on Bernoulli jaotusega, mille tõenäosusfunktsioon on kujul:

$$f(y) = p_k^y (1 - p_k)^{1-y}, \quad y = 0, 1.$$

Intuiitiivselt on selge, et saba tõenäosuse hinnangu $P(L > x)$ parandamiseks on vaja defolti tõenäosust suurenda. Selleks rakendame defolti tõenäosustele eksponentsiaalset teisendust, kasutades kumulante genereerivat funktsiooni. Juhusliku suuruse Y kumulante genereerivaks funktsiooniks nimetatakse funktsiooni:

$$C_Y(t) = \ln M_Y(t),$$

kus $M_Y(t)$ on juhusliku suuruse Y momente genereeriv funktsioon:

$$M_Y(t) = E(e^{tY}).$$

Seega Bernoulli jaotuse korral momente genereeriv funktsioon juhusliku suuruse Y_k korral on järgmine:

$$M_{Y_k}(\Theta) = E_f(e^{\Theta c_k Y_k}) = p_k e^{\Theta c_k} + 1 - p_k,$$

kust kumulante genereeriv funktsioon on kujul:

$$C_{Y_k}(\Theta) = \ln(M_{Y_k}(\Theta)) = \ln(p_k e^{\Theta c_k} + 1 - p_k).$$

Uus teisendatud tõenäosusfunktsioon kujul

$$f_{\Theta}(y) = \frac{e^{\Theta c_k} f(y)}{E_f(e^{\Theta c_k Y_k})}$$

annab defolti tõenäosustele kuju:

$$p_{k,\Theta} = \frac{p_k e^{\Theta c_k}}{p_k e^{\Theta c_k} + 1 - p_k}. \quad (3.1)$$

Need teisendatud juhuslikud suurused on jälle Bernoulli jaotusega. Rakendatud teisendusel on kaks olulist omadust, nimelt:

- üleminek $\Theta \rightarrow p_k$ on rangelt monotoonne;
- juhul kui $\Theta = 0$, siis $p_{k,\Theta} = p_k$.

Juhul kui $\Theta > 0$, suurendab antud teisendus defolti tõenäosust ning laenusummade mõju. Üldine idee seisneb selles, et asendame vanad defoldi tõenäosused uutega ehk teiste sõnadega, vahetame tõenäosusmõõtu. Olgu $\Theta = E_f(h(Y))$ ning $g(y) = 0$ parajasti siis, kui $f(y) = 0$, siis $\Theta = E_g\left(\frac{h(Y)f(Y)}{g(Y)}\right)$. Pärast sellist muutmist on meid huvitav tõenäosus $P(L > x)$ kujul [4, lk. 4]:

$$P(L > x) = \tilde{E} \left(I_{L>x} \prod_{k=1}^m \left(\frac{p_k}{p_{k,\Theta}} \right)^{Y_k} \left(\frac{1-p_k}{1-p_{k,\Theta}} \right)^{1-Y_k} \right),$$

kus keskvärtus \tilde{E} on leitud kasutades uusi teisendatuid defolte ning korrutis keskvärtuse all on esialgse ja uue jaotuse tõepärasuhe. Vaatleme nüüd eraldi tõepärasuhet:

$$W = \prod_{k=1}^m \left(\frac{p_k}{p_{k,\Theta}} \right)^{Y_k} \left(\frac{1-p_k}{1-p_{k,\Theta}} \right)^{1-Y_k}$$

ja rakendame sellele juba eelnevalt leitud $p_{k,\Theta}$ avaldist:

$$\begin{aligned} W &= \prod_{k=1}^m \left(\frac{p_k(p_k e^{\Theta c_k} + 1 - p_k)}{p_k e^{\Theta c_k}} \right)^{Y_k} \left(\frac{(1-p_k)(p_k e^{\Theta c_k} + 1 - p_k)}{p_k e^{\Theta c_k} + 1 - p_k - p_k e^{\Theta c_k}} \right)^{1-Y_k} \\ &= \prod_{k=1}^m (p_k e^{\Theta c_k} + 1 - p_k) e^{-\Theta c_k Y_k}. \end{aligned}$$

Võtame logaritmi

$$\ln W = \sum_{k=1}^m \ln(p_k e^{\Theta c_k} + 1 - p_k) - \Theta \sum_{k=1}^m c_k Y_k.$$

Kasutame teadmist, et

$$\sum_{k=1}^m c_k Y_k = L, (p_k e^{\Theta c_k} + 1 - p_k) = E(e^{\Theta c_k Y_k})$$

ning võtame eksponendi:

$$W = e^{\ln(E(e^{\Theta L})) - \Theta L}.$$

Toome lisaks sisse uue tähistuse

$$\psi(\Theta) = \ln(E(e^{\Theta L})),$$

kus $\psi(\Theta)$ on kahju L kumulante genereeriv funktsioon. Seega W on avaldatav kujul:

$$W = \prod_{k=1}^m \left(\frac{p_k}{p_{k,\Theta}} \right)^{Y_k} \left(\frac{1-p_k}{1-p_{k,\Theta}} \right)^{1-Y_k} = e^{\psi(\Theta) - \Theta L}. \quad (3.2)$$

Kasutades võrdust (3.2), saame hinnangu tõenäosusele $P(L > x)$ iga $\Theta > 0$ jaoks:

$$P(L > x) = E(I_{L>x} e^{\psi(\Theta) - \Theta L}), \quad (3.3)$$

kui L on leitud kasutades tõenäosust $p_{k,\Theta}$. Seega järeldub võrdusest (3.2), et eksponentsiaalse teisenduse rakendamine tõenäosustele $p_{k,\Theta}$ on samaväärne eksponentsiaalse teisenduse rakendamisega suurusele L . Kogu ülesanne taandub sellele, et leida parameeter Θ nii, et ta minimeeriks dispersiooni. Samaväärseks nõudeks on teise momendi minimeerimine. Teine moment avaldub järgmiselt:

$$M_2(x, \Theta) = E_{\Theta} (I_{L>x} e^{2\psi(\Theta) - 2\Theta L}) \leq e^{2\psi(\Theta) - 2\Theta x}. \quad (3.4)$$

Siin keskvärtus E_{Θ} on matemaatiline ootus juhuslikust suurusest millele on rakendatud eksponentsiaalne teisendus ning ülemine tõke kehtib, kui $\Theta \geq 0$. Kuna teist järku momendi minimeerimine on üsna keeruline, proovime kõigepealt minimeerida tema ülemist tõket. Selleks piisab maksimiseerida suurust

$$\Theta x - \psi(\Theta) \rightarrow \max$$

üle $\Theta \geq 0$. Näitame, et funktsioon $\psi(\Theta)$ on kumer ja läbib teljestiku alguspunkti:

$$\begin{aligned} \psi(\Theta) &= \sum_{k=1}^m \ln(p_k e^{\Theta c_k} + 1 - p_k), \quad \psi(0) = 0, \\ \psi'(\Theta) &= \sum_{k=1}^m \frac{p_k c_k e^{\Theta c_k}}{p_k e^{\Theta c_k} + 1 - p_k}, \quad \psi''(\Theta) = \sum_{k=1}^m \frac{p_k c_k^2 e^{\Theta c_k} - p_k^2 c_k^2 e^{\Theta c_k}}{p_k e^{\Theta c_k} + 1 - p_k} \geq 0. \end{aligned}$$

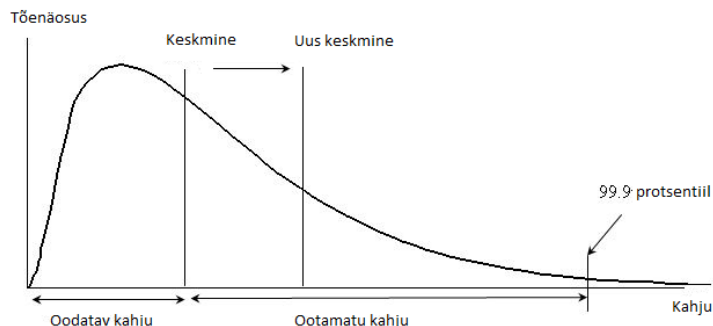
Funktsiooni $\psi(\Theta)$ maksimum on saadav juhul kui:

$$\Theta_x = \begin{cases} \psi'(\Theta) = x, & \text{kui } x > \psi'(0); \\ 0, & \text{kui } x \leq \psi'(0), \end{cases} \quad (3.5)$$

kus $\psi'(0) = \sum_{k=1}^m p_k c_k$. Selleks, et hinnata tõenäosust $P(L > x)$ kasutame suurust Θ_x . Rakendades üleminekut ühelt mõõdult teisele ning seost $f_{\Theta}(x) = e^{\psi(\Theta) - \Theta L} f(x)$, saame:

$$\psi'(\Theta) = \frac{E(L e^{\Theta L})}{E(e^{\Theta L})} = \frac{E(L e^{\Theta L})}{e^{\psi(\Theta)}} = E(L e^{\Theta L - \psi(\Theta)}) = E_{\Theta}(L).$$

Kasutades varem leitud Θ_x väärtust: $\psi'(\Theta_x) = E_{\Theta_x}(L) = x$, oleme L jaotust niimoodi nihutanud, et nüüd tema keskvärtuseks on x , kui $x > E(L)$. Juhul kui $x \leq E(L)$, sündmused $\{x < L\}$ ei ole nii haruldased ning seepärast ei hakatud tõenäosusi muutma.



Joonis 3.1: Kahjujaotuse keskmise nihutamine olulise valimi meetodiga.

Kuid jaotuse nihutamisel tekib täiendav probleem. Nimelt muutuvad ekstremaalsed kahjud järjest haruldasemateks. Seega selleks, et näidata haruldaste sündmuste simulatsioonihinnangu tõhusust, on vaja näidata, et hinnang on asümptootiliselt optimaalne. Asümptootiline optimaalsus tähendab, et $M_2(x)$ kahaneb eksponentsiaalselt sama kiirusega nagu x kasvab. Asümptootilise optimaalsuse tulemused põhinevad ligikaudsetel seostel:

$$P(L > x) \approx e^{-\gamma x}, M_2(x) \approx e^{-2\gamma x},$$

$\gamma > 0$ korral. Seega teine moment vähendab tõenäosust kahekordselt. Jenseni võrratusest¹

$$M_2(x) \geq (P(L > x))^2,$$

mis ongi suurim võimalik vähenemise määr.

Täpsema tulemuse saavutamiseks lubame kohustusevõtjate arvu m kasvada koos piiriga x . Sel juhul räägime portfelist m . Sisuliselt tähendab see, et panga portfellis võib olla tuhandeid kohustusevõtjaid. Mudelina vaatame kohustusevõtjate lõpmatut jada p_k, c_k , kus $k = 1, 2, \dots$. Nüüd defineerime kumulante genereeriva funktsiooni $\psi_m(\Theta)$ portfelli m kahjude jaoks:

$$\psi_m(\Theta) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln(p_k e^{\Theta c_k} + 1 - p_k) \rightarrow \bar{\psi}(\Theta), \quad (3.6)$$

iga Θ ja rangelt kumera $\bar{\psi}$ jaoks. Seos (3.6) kehtib juhul kui p_k muutumispiirkond on $(0, 1)$ ja $c_k \in (0, \infty)$. Tähistame L_m -ga portfelli m kahjud. Parameeter Θ_{xm} on Θ_m väärtus portfelli m korral, kus Θ_m on määratud seosega (3.5). Ning olgu $M_2(xm, \Theta_m)$ olulise valimi meetodit kasutades leitud hinnangu $P(L_m > xm)$ teine moment parameeteriga Θ_m .

Teoreem 3.1 [4, lk. 7]. Kehtigu (3.6) iga Θ jaoks ning olgu $\bar{\Theta}_x > 0$ selline, et $\bar{\psi}'(\bar{\Theta}_x) = x$. Siis

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln P(L_m > xm) = -\gamma,$$

¹Olgu g kumer funktsioon, kusjuures $E|g(X)| < \infty$ ja $E|X| < \infty$. Siis $Eg(X) \geq g(EX)$. Selle võrratuse tõestus on näiteks allikas [7, lk. 108].

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln M_2(xm, \Theta_m) = -2\gamma,$$

kus

$$\gamma = \sup_{\Theta} (\Theta x - \bar{\psi}(\Theta))$$

ning olulise valimi hinnang on asümptootiliselt optimaalne.

Tõestus: Kasutades seoseid (3.3) ja (3.4) saame, et

$$\begin{aligned} \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln P(L_m > xm) &= \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln E(I_{L_m > xm} e^{\psi_m(\Theta_m) - \Theta_m L_m}) \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln E(I_{L_m > xm} e^{\psi_m(\Theta_m) - \Theta_m x}) \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} (\psi_m(\bar{\Theta}_x) - \bar{\Theta}_x x) \\ &= (\bar{\psi}(\Theta) - \Theta x) = -\gamma. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Analoogiliselt

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln M_2(xm, \Theta_m) &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} (-2\Theta_m x + 2\psi_m(\Theta_m)) \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} (-2\bar{\Theta}_x x + 2\psi_m(\bar{\Theta}_x)) \\ &= -2\bar{\Theta}_x x + 2\bar{\psi}(\bar{\Theta}_x) = -2\gamma. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Jenseni võrratust kasutades:

$$\begin{aligned} M_2(xm, \Theta_m) &= E_{\Theta_m} (I_{L > xm} e^{2\psi(\Theta_m) - 2\Theta_m L}) \\ &\geq (E_{\Theta_m} (I_{L > xm} e^{\psi(\Theta_m) - \Theta_m L}))^2 \\ &= (P(L > xm))^2. \end{aligned}$$

Seega *lim inf* võrratuses (3.7) ja *lim sup* võrratuses (3.8) kehtivad ka piirväärtuse korral. ■

Oleme tõestanud, et hinnang tõenäosusele $P(L > x)$ on asümptootiliselt optimaalne juhul, kui kohustusevõtjate arv m kasvab koos piiriga x .

3.2 Ühesammuline olulise valimi meetod

Seome olulise valimi meetodi peatükist 3 koopula faktormudelitega, mis on esitatud peatükis 2. Tinglikustatud süstemaatilise faktoriga $Z = z^*$ defoldi indikaatorid Y_k , kus $k = 1, \dots, m$, on sõltumatud ning on tinglik defoldi tõenäosus $p_k(Z)$ iga k -nda kohustusvõtja jaoks määratud valemitega (2.6), (2.9) ja (2.11) ühefaktorilise mudeli puhul. Mitmefaktorilise mudeli puhul tinglikustatud süstemaatilise faktorvektoriga $\mathbf{Z} = \mathbf{z}^*$ on tinglik defoldi tõenäosus $p_k(\mathbf{Z})$ iga k -nda kohustusvõtja jaoks määratud valemitega (2.12), (2.13) ja (2.15). Esitame algoritmi kahju hindamise jaoks mitmefaktorilise mudeli puhul [4, lk. 8].

1. Omistada väärtus x .
2. Genereerida juhusliku suuruse $V \sim \chi_\nu^2$ väärtus vabadusastmete arvuga ν Studenti faktormudeli jaoks.
3. Genereerida juhusliku vektori $\mathbf{Z} \sim N_d(0, \mathbf{I}_d)$ väärtus d -mõõtmelisest normaalfaotusest, kus d on süstemaatiliste faktorite arv. Juhul kui tegemist on Claytoni faktormudeliga, siis $\mathbf{Z} \sim \Gamma_d(\frac{1}{\eta}, \mathbf{I}_d)$.

4. Arvutada tinglikud defoldi tõenäosused $p_k(\mathbf{Z})$, kus $k = 1, \dots, m$. Leida $\Theta_x(\mathbf{Z})$:

$$\Theta_x(\mathbf{Z}) = \begin{cases} \frac{\partial \psi_m(\Theta, \mathbf{Z})}{\partial \Theta} = x, & x > \psi'_m(0); \\ 0, & x \leq \psi'_m(0), \end{cases} \quad (3.9)$$

kus

$$\begin{aligned} \psi_m(\Theta, \mathbf{Z}) &= \sum_{k=1}^m \ln(p_k(\mathbf{Z})e^{\Theta c_k} + 1 - p_k(\mathbf{Z})); \\ \psi'_m(0) &= \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{Z})c_k \equiv E(L|\mathbf{Z} = \mathbf{z}^*). \end{aligned}$$

5. Genereerida defoldi indikaatorid Y_1, \dots, Y_m kasutades eksponentsiaalselt teisendatud tingliku defoldi tõenäosusi

$$p_{k, \Theta_x}(\mathbf{Z}) = \frac{p_k(\mathbf{Z})e^{\Theta_x(\mathbf{Z})c_k}}{p_k(\mathbf{Z})e^{\Theta_x(\mathbf{Z})c_k} + 1 - p_k(\mathbf{Z})}.$$

6. Arvutada krediidikahju kasutades valemit $L = \sum_{k=1}^m c_k Y_k$ ning esitada hinnang tõenäosusele $P(L > x) = E(I_{L>x} e^{\psi(\Theta_x(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}) - \Theta_x(\mathbf{Z})L})$.

Algoritmi on samuti võimalik rakendada ühefaktorilise mudeli korral. Antud algoritmi efektiivsus sõltub korrelatsiooni tugevusest laenuvõtjate vahel. Juhul kui sõltuvused on nõrgad, siis tingliku defoldi tõenäosuse suurendamisest piisab selleks, et saavutada märkimisväärset dispersiooni vähenemist. Kuid tugevate seoste puhul antud meetodi tõhusus kahaneb. Protseduuri võib teostada mitu korda leides iga kord hinnangu tõenäosusele $P(L > x)$.

3.3 Kahesammuline olulise valimi meetod

Nagu öeldud, on eelnimetatud algoritm efektiivne ainult sõltumatute või nõrgalt sõltuvate laenuvõtjate korral. Tegelikult on see liiga optimistlik oletus, kuna üldjuhul on laenuvõtjate vahel seos, nt portfellis eksisteerivad kontsernidele kuuluvad ettevõtted. Sealjuures tugeva korrelatsiooni korral krediidikahju suured väärtused võivad tekkida suurte \mathbf{Z} väärtuste tõttu. Osutub, et sel juhul peame nihutama faktorvektori \mathbf{Z} jaotuse keskmist väärtusest $0 \in R^d$ väärtuseni $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_d)^T \in$

R^d . See aga tähendab, et rakendame olulise valimi meetodit süstemaatiliste faktore vektori $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)^T$ jaotusele. Mistahes tõenäosuse $P(L > x)$ hinnangu \hat{p}_x jaoks kehtib seos [4, lk. 10]:

$$\text{Var}[\hat{p}_x] = E[\text{Var}[\hat{p}_x|\mathbf{Z}]] + \text{Var}[E[\hat{p}_x|\mathbf{Z}]]. \quad (3.10)$$

Optimaalse olulise valimi meetodi rakendamine tinglikustatud defoltidele vähendab seose (3.10) esimest liidetavat, kuid antud protseduur ei mõjuta seose teist liidetavat. Kuna \hat{p}_x on tõenäosuse $P(L > x)$ hinnang, siis kehtib $E[\hat{p}_x|\mathbf{Z}] = P(L > x|\mathbf{Z})$. Seega peame valima vektori \mathbf{Z} jaotuse nii, et ta minimiseeriks tõenäosuse $P(L > x|\mathbf{Z})$ hinnangu dispersiooni.

Allika [4, lk. 11] järgi on selleks \mathbf{Z} jaotuseks Gaussi mitmefaktormudeli jaoks on $N_d(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_d)$, kus keskmiste vektor $\boldsymbol{\mu}$ on võrdne \mathbf{Z} jaotuse moodiga. Osutub, et vektori $\boldsymbol{\mu}$ valik seisneb optimeerimisprobleemi:

$$\max_{\mathbf{z}^*} P(L > x|\mathbf{Z} = \mathbf{z}^*) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{*T}\mathbf{z}^*}, \quad (3.11)$$

lahendamises. Selleks kasutame nn *sabatõkke lähendusmeetodit (tail bound approximation)*, mis on asümptootiliselt optimaalne homogeense ühefaktorilise mudeli juhul [4, lk. 9]. Sabatõkke lähendusmeetodil lähendatakse tõenäosust $P(L > x|\mathbf{Z} = \mathbf{z}^*)$, tema ülemise tõkkega. Defineerime $F_x(\mathbf{z}^*)$ järgmisel kujul:

$$F_x(\mathbf{z}^*) = \psi(\Theta_x(\mathbf{z}^*), \mathbf{z}^*) - \Theta_x(\mathbf{z}^*)x, \quad (3.12)$$

mis on tõenäosuse (3.3) tõepärasuhte logaritmi, kus $L = x$. Funktsioon $F_x(\mathbf{z}^*)$ saavutab oma maksimumi 0 ainult juhul, kui $E(L|\mathbf{Z} = \mathbf{z}^*) \geq x$.

Seega võrratus $I_{L>x} \leq e^{\Theta(L-x)}$, kus $\Theta \geq 0$, annab:

$$P(L > x|\mathbf{Z} = \mathbf{z}^*) \leq E(e^{\Theta_x(\mathbf{Z})L - \Theta_x(\mathbf{Z})x}|\mathbf{Z} = \mathbf{z}^*) = e^{F_x(\mathbf{z}^*)}.$$

Nüüd kasutades (3.11) saame:

$$\max_{\mathbf{z}^*} e^{F_x(\mathbf{z}^*)} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{*T}\mathbf{z}^*} = \max_{\mathbf{z}^*} e^{F_x(\mathbf{z}^*) - \frac{1}{2}\mathbf{z}^{*T}\mathbf{z}^*}.$$

Võttes logaritmi, saame keskmiste vektori $\boldsymbol{\mu}$ Gaussi mitmefaktormudeli jaoks kujul:

$$\boldsymbol{\mu} = \arg \max_{\mathbf{z}^*} \left\{ F_x(\mathbf{z}^*) - \frac{1}{2}\mathbf{z}^{*T}\mathbf{z}^* \right\}. \quad (3.13)$$

Studenti t -mitmefaktormudeli puhul peame leidma optimaalse vektori $\boldsymbol{\mu}$ süstemaatiliste riskide vektori $\sqrt{\frac{V}{\nu}}\mathbf{Z}$ nihutamiseks, kus $V \sim \chi_\nu^2$ vabadusastmete arvuga ν . Osutub, et $\boldsymbol{\mu}$ on leitav kasutades järgmist optimeerimisprobleemi:

$$\max_{t^*} P(L > x|\mathbf{Z} = \mathbf{z}^*, V = v) \left(1 + \frac{\sqrt{\frac{v}{\nu}}\mathbf{z}^{*T}\sqrt{\frac{v}{\nu}}\mathbf{z}^*}{\nu} \right)^{-\frac{\nu+d}{2}}, \quad (3.14)$$

kus tegur $\left(1 + \frac{\sqrt{\frac{\nu}{v}} \mathbf{z}^{*T} \sqrt{\frac{\nu}{v}} \mathbf{z}^*}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}}$ on Studenti t -jaotuse tiheduse väärtus kohal \mathbf{z}^* . Nüüd kasutades sabatõkke lähendusmeetodit saame keskmise vektori $\boldsymbol{\mu}$ Studenti t -mitmefaktormudeli jaoks kujul:

$$\boldsymbol{\mu} = \arg \max_{\mathbf{z}^*} \left\{ F_x(\mathbf{z}^*) - \left(\frac{\nu + d}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{\sqrt{\frac{\nu}{v}} \mathbf{z}^{*T} \sqrt{\frac{\nu}{v}} \mathbf{z}^*}{\nu} \right) \right\}. \quad (3.15)$$

Claytoni faktormudeli puhul süstemaatiliste riskide vektor $\mathbf{Z} \sim \Gamma_d(\frac{1}{\eta}, \boldsymbol{\zeta})$, kus $\boldsymbol{\zeta} = \frac{\mathbf{m}}{\frac{1}{\eta}-1}$ ning $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)^T$ on moodide vektor. Seega optimaalne mood m_i , kus $i = 1, \dots, d$ Claytoni mitmefaktormudeli jaoks on järgmise optimeerimisprobleemi lahend:

$$\max_{z_i^*} P(L > x | Z_i = z_i^*) z_i^{*\frac{1}{\eta}-1} e^{-z_i^*}, \quad (3.16)$$

kus $z_i^{*\frac{1}{\eta}-1} e^{-z_i^*}$ on seotud gammajaotuse tihedusega kujuparameetriga $\frac{1}{\eta}$, kus $\eta > 0$ ning skaala parameetriga 1. Seega optimaalsete moodide vektori \mathbf{m} iga element Claytoni mitmefaktormudeli jaoks sabatõkke lähendusmeetodi järgi on:

$$m_i = \arg \max_{z_i^*} \left\{ F_x(z_i^*) + \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) \ln z_i^* - z_i^* \right\}, \quad (3.17)$$

Keskmete $\boldsymbol{\mu}$ ja moodide \mathbf{m} vektorite leidmine on üksikasjalikult esitatud Lisas A lk. 58.

Analoogiliselt ühesammulise olulise valimi meetodiga on tinglik defoldi tõenäosus $p_k(\mathbf{Z})$ iga k -nda kohustusvõtja jaoks määratud valemitega (2.6), (2.9) ja (2.11) ühiefaktorilise mudeli puhul. Tinglikustatud süstemaatilise faktorvektoriga $\mathbf{Z} = \mathbf{z}^*$ tinglik defoldi tõenäosus $p_k(\mathbf{Z})$ iga k -nda kohustusvõtja jaoks on määratud valemitega (2.12), (2.13) ja (2.15) mitmefaktorilise mudeli puhul. Seega tugevalt sõltuvate laenuvõtjate korral näeb kahju hindamise algoritm mitmefaktorilise mudeli puhul välja järgmine:

1. Omistada väärtus x .
2. Genereerida juhusliku suuruse $V \sim \chi_\nu^2$ väärtus vabadusastmete arvuga ν Studenti faktormudeli jaoks.
3. Genereerida juhusliku vektori $\mathbf{Z} \sim N_d(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_d)$ väärtus elliptiliste faktormudelite puhul ning Claytoni mudeli puhul $\mathbf{Z} \sim \Gamma_d(\frac{1}{\eta}, \boldsymbol{\zeta})$, kus $\boldsymbol{\zeta} = \frac{\mathbf{m}}{\frac{1}{\eta}-1}$ ning $\boldsymbol{\mu}$ ja \mathbf{m} on vastavalt faktormudelile võrduste (3.13), (3.15) ja (3.17) lahendid.
4. Arvutada teisendatud tingliku defoldi tõenäosused $p_{k, \Theta_x}(\mathbf{Z})$:

$$p_{k, \Theta_x}(\mathbf{Z}) = \frac{p_k(\mathbf{Z}) e^{\Theta_x(\mathbf{Z})c_k}}{p_k(\mathbf{Z}) e^{\Theta_x(\mathbf{Z})c_k} + 1 - p_k(\mathbf{Z})},$$

kus

$$\Theta_x(\mathbf{Z}) = \begin{cases} \frac{\partial \psi_m(\Theta, \mathbf{Z})}{\partial \Theta} = x, & x > \psi'_m(0); \\ 0, & x \leq \psi'_m(0), \end{cases}$$

$$\psi_m(\Theta, \mathbf{Z}) = \sum_{k=1}^m \ln(p_k(\mathbf{Z})e^{\Theta c_k} + 1 - p_k(\mathbf{Z})),$$

$$\psi'_m(0) = \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{Z})c_k \equiv E(L|\mathbf{Z} = \mathbf{z}^*).$$

5. Genereerida defoldi indikaatorid Y_1, \dots, Y_m kasutades eksponentsiaalselt teisendatud tingliku defoldi tõenäosusi $p_{k, \Theta_x}(\mathbf{Z})$.
6. Arvutada krediidikahju $L = \sum_{k=1}^m c_k Y_k$ ning

- (a) esitada hinnang tõenäosusele Gaussi mitmefaktormudeli puhul

$$P(L > x) = E \left(I_{L > x} e^{\psi(\Theta_x(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}) - \Theta_x(\mathbf{Z})L} e^{-\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{Z} + \frac{\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu}}{2}} \right).$$

Siin tegur $e^{-\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{Z} + \frac{\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu}}{2}}$ on jaotuste $N_d(0, \mathbf{I}_d)$ ja $N_d(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_d)$ tõepärasuhe.

- (b) esitada hinnang tõenäosusele Studenti t -mitmefaktormudelite puhul

$$P(L > x) = E \left(I_{L > x} e^{\psi(\Theta_x(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}) - \Theta_x(\mathbf{Z})L} W_\nu \right).$$

Siin $W_\nu = \left(\frac{\sqrt{\frac{\nu}{\nu}} \mathbf{Z}^T \sqrt{\frac{\nu}{\nu}} \mathbf{Z} + \nu}{\sqrt{\frac{\nu}{\nu}} \mathbf{Z}^T \sqrt{\frac{\nu}{\nu}} \mathbf{Z} + \nu - 2\boldsymbol{\mu}^T \sqrt{\frac{\nu}{\nu}} \mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu}} \right)^{-\frac{\nu+d}{2}}$ on jaotuste $t_\nu(0, \mathbf{I}_d)$ ja $t_\nu(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_d)$ tõepärasuhe.

- (c) esitada hinnang tõenäosusele Claytoni mitmefaktormudeli puhul

$$P(L > x) = E \left(I_{L > x} e^{\psi(\Theta_x(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}) - \Theta_x(\mathbf{Z})L} e^{\frac{1}{\eta^d} \sum_{i=1}^d \ln \zeta_i - \sum_{i=1}^d \left(Z_i - \frac{Z_i}{\zeta_i} \right)} \right),$$

kus tegur $e^{\frac{1}{\eta^d} \sum_{i=1}^d \ln \zeta_i - \sum_{i=1}^d \left(Z_i - \frac{Z_i}{\zeta_i} \right)}$ on jaotuste $\Gamma_d(\frac{1}{\eta}, \mathbf{I}_d)$ ja $\Gamma_d(\frac{1}{\eta}, \boldsymbol{\zeta})$ tõepärasuhe. Siin $\boldsymbol{\zeta} = \frac{\mathbf{m}}{\frac{1}{\eta} - 1}$ ning \mathbf{m} on optimaalne mood.

Tõepärasuhete leidmine on esitatud Lisas B lk. 59. Edasi hakkame kirjeldatud meetodeid rakendada.

Peatükk 4

Modelleerimine

Antud peatükis on rakendatud mudeleid, mis on esitatud paragrahvides 3.2 ja 3.3. Modelleerimine põhineb peamiselt allikas [4, lk. 15] toodud näitel ning on realiseeritud statistikapaketis *R* 3.1.0.

Vaatleme laenuportfelli mahuga 30 ehk $m = 30$. Olgu k -ndal laenuvõtjal parajasti üks laen, mille laenusumma c_k ning marginaalne defoldi tõenäosus PD_k on antud järgmiselt:

$$PD_k = 0.05(1 + \sin \frac{16\pi k}{m});$$

$$c_k = \left(\left\lceil \frac{10k}{m} \right\rceil \right)^2,$$

kus $k = 1, \dots, m$. Seega marginaalsed defauldi tõenäosused protsentides varieeruvad 0.03% ja 9.97% vahel. Minimaalne laenusumma on 1 ning maksimaalne 100 ühikut. Koguportfelli laenusumma on 1155 ühikut.

Oletame, et faktormudelite latentset muutujad on simuleeritud kasutades sama astakorrelatsiooni latentsete muutujate vahel. Võrdleme tulemusi erinevalt korreleeritud latentsete muutujate korral, nimelt võtame $\tau_1 = 0.05$ ja $\tau_2 = 0.3$. Vastavad Pearsoni korrelatsioonikordajad elliptiliste faktormudelite puhul on vastavalt $\rho_1 = 0.08$ ja $\rho_2 = 0.45$ ning Claytoni faktormudeli parameetrid on $\eta_1 = 0.11$ ja $\eta_2 = 0.86$.

4.1 Ühesammulise olulise valimi meetodi rakendamise

Esiteks koostame järgmised ühe süstemaatilise faktoriga mudelid:

- Gaussi faktormudel;
- Studenti t -faktormudelid vabadusastmete arvudega $\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 10$, $\nu_3 = 20$;

- Claytoni faktormudel.

Kordame punktis 3.2 ühesammulise olulise valimi meetodi algoritmi 1000 korda, leides iga kord erinevad hinnangud sabatõenäosusele $P(L > x)$, kahju suurusele, defoltide sagedusele ning defoltide arvule. Arvutame eelnimetatud näitajate keskmised ning vaatleme piiri x nihutamise mõju keskmisele kahjule (EL), kahju standardhälbele ($\sigma(L)$), keskmisele tõenäosuse hinnangule $P(L > x)$, keskmisele defoltide sagedusele ($DF\%$) ja keskmisele defoltide arvule (ED). Selleks võtame erinevaid kahjupiire $x = (231, 404.25, 577.5, 750.75)$, mis on vastavalt 20%, 35%, 50% ja 65% koguportfelli laenusummast.

	Piir x	EL	$\sigma(L)$	$P(L > x)$	$DF\%$	ED
Gauss	231.00	231.60	110.28	1.7566e-02	0.1331	3.99
Student $\nu_1 = 5$	231.00	233.93	100.44	4.8739e-02	0.1320	3.96
Student $\nu_2 = 10$	231.00	233.36	103.74	3.6814e-02	0.1311	3.93
Student $\nu_3 = 20$	231.00	236.68	108.08	2.6978e-02	0.1330	3.99
Clayton	231.00	229.90	60.01	2.5826e-14	0.0828	2.48
Gauss	404.25	403.84	110.18	3.6327e-04	0.2126	6.38
Student $\nu_1 = 5$	404.25	407.16	97.62	4.0444e-03	0.2141	6.42
Student $\nu_2 = 10$	404.25	404.23	106.33	1.8917e-03	0.2114	6.34
Student $\nu_3 = 20$	404.25	399.44	103.73	1.8264e-03	0.2103	6.31
Clayton	404.25	404.05	34.33	4.5892e-21	0.1640	4.92
Gauss	577.50	576.49	98.26	1.5957e-06	0.3010	9.03
Student $\nu_1 = 5$	577.50	573.09	75.41	1.3696e-03	0.3030	9.09
Student $\nu_2 = 10$	577.50	577.95	86.96	2.2758e-04	0.3038	9.12
Student $\nu_3 = 20$	577.50	573.70	90.22	2.4673e-04	0.3023	9.07
Clayton	577.50	576.66	25.77	9.4312e-42	0.2598	7.79
Gauss	750.75	749.81	89.33	1.3059e-09	0.3954	11.86
Student $\nu_1 = 5$	750.75	747.03	70.23	1.4385e-05	0.4130	12.39
Student $\nu_2 = 10$	750.75	750.92	72.95	8.3524e-07	0.4078	12.23
Student $\nu_3 = 20$	750.75	751.90	75.42	7.7102e-08	0.4048	12.14
Clayton	750.75	751.74	31.67	7.8711e-56	0.3580	10.74

Tabel 4.1: Ühesammulise olulise valimi meetodi tulemuste võrdlus erinevate faktormudelite ja piiride jaoks, kus $\tau = 0.05$

Tabelis (4.1) on näha, et keskmine kahju jääb suhteliselt samale tasemele faktormudelite lõikes ning piiri nihutamisel kahju kasvab koos piiriga. Kahju standardhälve üldiselt väheneb piiri nihutamisel ning ta on vähim Claytoni faktormudeli korral. Tõenäosuse hinnang kahaneb stabiilselt piiri nihutamisel iga faktormudeli puhul. Kuid Claytoni faktormudeli puhul hinnang $P(L > x)$ on oluliselt väiksem. Ning juhul kui x on 65% koguportfelli laenusummast, on eelnimetatud tõenäosus nullilähedane. Kõige suurem tõenäosus, et kahju ületab piiri on Studenti $\nu_1 = 5$ faktormudeli rakendamisel. Keskmine defoldi sagedus ($DF\%$) varieerub 0.0828 ja 0.4130 vahel. Defoltide arv on vähim Claytoni faktormudeli puhul. Claytoni ühefaktormudeli rakendamisel sabatõenäosus $P(L > x)$ on oluliselt alahinnatud, seega

ei sobi antud mudel krediidiriski hindamiseks, juhul kui $\tau = 0.05$. Konservatiivse hinnangu saamiseks sobib Studenti $\nu_1 = 5$ faktormudel.

Uurime nüüd kuidas τ kasvamine mõjutab tabelis (4.1) toodud näitajaid ehk rakendame ühesammulist olulise valimi meetodit juhul kui $\tau = 0.3$. Tulemuste võrdlus on toodud tabelis (4.2). Piiri nihutamisel jääb keskmine kahju suhteliselt samale tasemele faktormudelite lõikes. Kahju standardhälve väheneb koos piiri nihkega ning on vähim Claytoni faktormudeli puhul. Sabatõenäosus $P(L > x)$ kahaneb stabiilselt koos piiri nihkega iga faktormudeli puhul. Kuid võrreldes tabeli (4.1) tulemustega on tõenäosuse hinnangu $P(L > x)$ kahanemise kiirus oluliselt aeglasem. Vähim tõenäosus, et kahju ületab piiri, on üldjuhul Gaussi faktormudeli korral. Suurim tõenäosus on Claytoni mudeli puhul. Võrreldes tabeli (4.1) tulemustega jäävad τ kasvamisel keskmine defoltide sagedus ning keskmine defoltide arv suhteliselt samale tasemele, v.a. Claytoni faktormudeli korral, mille defoldi näitajad on oluliselt suuremad. Tabeli (4.2) järgi keskmine defoldi sagedus (DF%) varieerub 0.1268 ja 0.4620 vahel. Defoltide arv on suurim Claytoni faktormudeli puhul ning üldjuhul vähim Gaussi faktormudeli puhul. See viitab sellele, et piisavalt konservatiivse hinnangu sabatõenäosusele saamiseks sobib Claytoni ühefaktoriline mudel.

	Piir x	EL	$\sigma(L)$	$P(L > x)$	DF%	ED
Gauss	231.00	232.85	104.19	5.4800e-02	0.1270	3.81
Student $\nu_1 = 5$	231.00	239.19	103.32	6.6882e-02	0.1268	3.80
Student $\nu_2 = 10$	231.00	231.92	112.07	7.6305e-02	0.1279	3.84
Student $\nu_3 = 20$	231.00	236.84	107.48	7.0692e-02	0.1276	3.83
Clayton	231.00	250.64	116.30	8.2799e-02	0.1337	4.01
Gauss	404.25	416.62	101.00	2.2813e-02	0.2157	6.47
Student $\nu_1 = 5$	404.25	422.49	96.44	2.1682e-02	0.2162	6.49
Student $\nu_2 = 10$	404.25	417.92	96.70	2.5212e-02	0.2131	6.39
Student $\nu_3 = 20$	404.25	415.68	97.71	1.8190e-02	0.2124	6.37
Clayton	404.25	414.98	89.12	3.8580e-02	0.2060	6.18
Gauss	577.50	580.36	82.93	5.9368e-03	0.2973	8.92
Student $\nu_1 = 5$	577.50	579.15	68.71	7.2839e-03	0.3019	9.06
Student $\nu_2 = 10$	577.50	580.77	71.91	8.4383e-03	0.3008	9.02
Student $\nu_3 = 20$	577.50	580.69	77.70	8.1768e-03	0.2998	8.99
Clayton	577.50	580.00	57.55	1.7153e-02	0.3042	9.12
Gauss	750.75	750.84	74.82	7.4205e-04	0.3957	11.87
Student $\nu_1 = 5$	750.75	748.24	64.52	2.7146e-03	0.4146	12.44
Student $\nu_2 = 10$	750.75	753.69	66.70	1.4259e-03	0.4042	12.13
Student $\nu_3 = 20$	750.75	751.90	67.01	1.4846e-03	0.4021	12.06
Clayton	750.75	750.83	35.01	4.9385e-03	0.4620	13.86

Tabel 4.2: Ühesammulise olulise valimi meetodi tulemuste võrdlus erinevate mudelite ja piiride jaoks, kus $\tau = 0.3$

Järgnevalt konstrueerime Gaussi faktormudeli, Studenti faktormudelid vabadusastmete arvudega $\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 10$ ja $\nu_3 = 20$ ning Claytoni faktormudeli 10

süsteemaatilise faktori korral. Faktorkaalude vektor elliptiliste mitmefaktormudelite puhul $\alpha_{\mathbf{k}} = (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{kd})^T$, kus $d = 10$ on genereeritud ühtlasest jaotusest $U(0, \sqrt{\frac{\rho}{d}})$ ja sõltumatult võttes arvesse, et $\alpha_{k1}^2 + \dots + \alpha_{kd}^2 \leq 1$. Siin ρ arvutamiseks on kasutatud valemit (1.13). Faktorkaalude vektor $\gamma_{\mathbf{k}} = (\gamma_{k1}, \dots, \gamma_{kd})^T$ on genereeritud sõltumatult ühtlasest jaotusest $U(0, \sqrt{\frac{1}{d}})$. Claytoni mitmefaktormudeli korral täidab iga vektor tingimust $\sum_{j=1}^d \gamma_{kj} = 1$. Analoogiliselt ühefaktorilise juhuga kordame punktis 3.2 esitatud algoritmi 1000 korda, leides iga kord hinnangud sabaõenäosusele $P(L > x)$, kahju suurusele, defoltide sagedusele ning defoltide arvule. Vaatleme kuidas faktorite arvu suurendamine mõjutab eelnimetatud näitajaid.

	Piir x	EL	$\sigma(L)$	$P(L > x)$	DF%	ED
Gauss	231.00	228.55	107.39	1.0840e-02	0.1323	3.97
Student $\nu_1 = 5$	231.00	231.45	105.60	3.2254e-02	0.1304	3.91
Student $\nu_2 = 10$	231.00	227.69	102.83	3.1701e-02	0.1309	3.93
Student $\nu_3 = 20$	231.00	226.35	104.88	1.6939e-02	0.1285	3.86
Clayton	231.00	229.27	58.43	9.7634e-29	0.0835	2.51
Gauss	404.25	405.59	105.60	5.5179e-05	0.2136	6.41
Student $\nu_1 = 5$	404.25	405.61	92.96	4.8457e-03	0.2122	6.37
Student $\nu_2 = 10$	404.25	404.34	104.73	1.0485e-03	0.2138	6.41
Student $\nu_3 = 20$	404.25	406.84	107.66	3.7981e-04	0.2151	6.45
Clayton	404.25	404.82	41.18	1.1279e-47	0.1642	4.93
Gauss	577.50	568.63	103.24	3.9247e-08	0.2987	8.96
Student $\nu_1 = 5$	577.50	578.11	76.09	2.4634e-04	0.3050	9.15
Student $\nu_2 = 10$	577.50	575.85	90.07	5.0111e-06	0.3027	9.08
Student $\nu_3 = 20$	577.50	578.06	91.07	3.1888e-06	0.3043	9.13
Clayton	577.50	577.41	26.93	2.1386e-75	0.2607	7.82
Gauss	750.75	750.14	90.72	4.3344e-12	0.3957	11.87
Student $\nu_1 = 5$	750.75	748.60	73.03	5.3262e-07	0.4148	12.45
Student $\nu_2 = 10$	750.75	752.26	72.16	1.3023e-07	0.4081	12.24
Student $\nu_3 = 20$	750.75	750.24	81.23	4.9522e-10	0.4025	12.08
Clayton	750.75	749.98	34.60	6.7983e-119	0.3580	10.74

Tabel 4.3: Ühesammulise olulise valimi meetodi tulemuste võrdlus erinevate mudelite ja piiride jaoks, kus $\tau = 0.05$ ning faktorite arv 10

Tabelis (4.3) on esitatud ühesammulise valimi meetodi rakendamise tulemused $\tau = 0.05$ korral. Keskmise kahju kasvab koos piiriga ning selle väärtus on lähedane piiri väärtusele. Üldjuhul kahju standardhälve kahaneb koos piiri kasvuga ning ta on väiksem Claytoni mitmefaktormudeli rakendamise korral. Sabatõenäosuse hinnang $P(L > x)$ kahaneb stabiilselt piiri nihutamisel iga mitmefaktormudeli korral. Üldjuhul sabatõenäosus, keskmine defoltide sagedus ning keskmine defoltide arv on suurimad Studenti $\nu_1 = 5$ mitmefaktormudeli korral. Eelnimetatud näitajad on väiksemad Claytoni mitmefaktormudeli rakendamise puhul. Keskmise

defoltide sagedus varieerub 0.0848 ja 0.4075 vahel. Seega analoogiliselt ühefaktorilise juhuga konservatiivse hinnangu sabatõenäosusele $P(L > x)$ saamiseks peame valima Student $\nu_1 = 5$ mitmefaktorilise mudeli.

Tabelist (4.4) on näha, et keskmine kahju kasvab stabiilselt koos piiri nihkega. Üldjuhul kahju standardhälve kahaneb piiri kasvamisel. Sabatõenäosus $P(L > x)$ on suurim Studenti $\nu_1 = 5$ mitmefaktormudeli korral ning vähim Claytoni mitmefaktormudeli korral. Võrreldes tabelis (4.3) esitatud tulemustega, on sabatõenäosuse kahenemise kiirus aeglasem. Keskmine defoltide sagedus varieerub 0.1019 ja 0.4431 vahel. Üldjuhul defoltide arv on suurim Studenti $\nu_1 = 5$ mitmefaktormudeli puhul ning vähim Claytoni mitmefaktormudeli puhul. Kuid piiri nihkega kuni 65% keskmine defoltide arv (13.29) on suurim Claytoni mitmefaktormudeli puhul. Kuna üldjuhul Claytoni mitmefaktori mudeli hinnanguid alahinnavad sabatõenäosust, ei saa seda mudelit kasutada riskijuhtimisel. Piisavalt konservatiivse tulemuse annab Studenti $\nu_1 = 5$ mitmefaktormudel.

	Piir x	EL	$\sigma(L)$	$P(L > x)$	DF%	ED
Gauss	231.00	243.29	101.73	2.0178e-02	0.1373	4.12
Student $\nu_1 = 5$	231.00	239.14	102.99	4.4302e-02	0.1331	3.99
Student $\nu_2 = 10$	231.00	239.29	102.62	3.2005e-02	0.1348	4.04
Student $\nu_3 = 20$	231.00	247.08	105.92	3.3081e-02	0.1413	4.24
Clayton	231.00	235.08	73.58	1.8453e-07	0.1019	3.06
Gauss	404.25	416.06	108.12	9.3123e-04	0.2207	6.62
Student $\nu_1 = 5$	404.25	418.10	98.30	7.1186e-03	0.2194	6.58
Student $\nu_2 = 10$	404.25	411.03	103.94	4.5225e-03	0.2169	6.51
Student $\nu_3 = 20$	404.25	414.85	104.89	1.3685e-03	0.2197	6.59
Clayton	404.25	403.76	59.61	6.9594e-12	0.1785	5.35
Gauss	577.50	585.02	97.23	5.8023e-05	0.3056	9.17
Student $\nu_1 = 5$	577.50	589.15	79.45	3.9268e-04	0.3119	9.36
Student $\nu_2 = 10$	577.50	584.71	84.53	6.6643e-05	0.3073	9.22
Student $\nu_3 = 20$	577.50	587.94	91.92	8.1171e-06	0.3087	9.26
Clayton	577.50	575.36	41.73	6.7286e-19	0.2808	8.42
Gauss	750.75	760.36	87.00	3.7514e-09	0.4018	12.05
Student $\nu_1 = 5$	750.75	757.00	66.53	2.0761e-04	0.4203	12.61
Student $\nu_2 = 10$	750.75	758.74	70.59	6.1705e-06	0.4118	12.35
Student $\nu_3 = 20$	750.75	754.46	75.89	3.8061e-08	0.4053	12.16
Clayton	750.75	751.84	27.23	1.2949e-34	0.4431	13.29

Tabel 4.4: Ühesammulise olulise valimi meetodi tulemuste võrdlus erinevate mudelite ja piiride jaoks, kus $\tau = 0.3$ ning faktorite arv 10

4.2 Kahesammulise olulise valimi meetodi rakendamise

Eelmises punktis rakendasime ühesammulist olulise valimi meetodit ühefaktoriliste mudelite korral ning 10 faktoriga mudelitele. Kahesammulise meetodi korral, peame lisaks olulise valimi meetodi rakendamisele tinglikustatud defoltidele, nihutama süstemaatiliste faktorvektorite jaotusi. Antud probleem seisneb optimaalsete keskmiste ja moodi vektorite leidmisel. Seega lahendame keskmiste ja moodide vektorite leidmise optimiseerimisprobleemi järgmiste mudelite jaoks:

- Gaussi faktormudel;
- Studenti faktormudelid vabadusastmete arvudega $\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 10$ ja $\nu_3 = 20$;
- Claytoni faktormudel.

Arvutuste käigus selgus, et optimaalsed moodide vektorid on nullilähedased Claytoni faktormudeli korral. Nt juhul kui on tegemist 10 faktori Claytoni mudeliga, kus astakorrelatsioonikordaja $\tau = 0.3$ ja kahjupiir 50%, on optimaalsed moodid järgmised:

m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
5.87e-05	3.60e-05	7.80e-05	6.04e-05	3.64e-05
m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}
7.80e-05	7.80e-05	-6.91e-05	7.80e-05	-4.68e-05

Tabel 4.5: Optimaalne moodide vektor \mathbf{m} Claytoni 10 faktorilise mudeli korral, $\tau = 0.3$, kahju piir 50%

Seega on nii gammajaotuse skaalaparameetri kui ka süstemaatiliste faktorite väärtused nullilähedased ja edaspidine Claytoni faktormudeli analüüs on võimatu kahesammulise meetodi korral. Kuid see annab võimaluse uurida ülejäänud mudelid suurema korrelatsiooni korral.

Analoogiliselt ühesammulisele meetodile kordame punktis 3.3 esitatud kahesammulise olulise valimi meetodi algoritmi 1000 korda, leides iga kord hinnangud saba-tõenäosusele $P(L > x)$, kahju suurusele, defoltide sagedusele ning defoltide arvule. Võrdleme algoritmi tulemusi piiri nihutamisel ja korrelatsiooni τ väärtuste 0.05, 0.3 ja 0.5 korral.

Rakendame kahesammulist olulise valimi meetodit ühefaktoriliste mudelitele nõrga korrelatsiooni juhul. Sellel korral on optimaalsed keskmised μ erinevate mudelite ja piiride korral järgmised:

Piir	Gauss	Student $\nu_1 = 5$	Student $\nu_2 = 10$	Student $\nu_3 = 20$
231.00	-1.17	-1.38	-1.10	-1.68
404.25	-2.11	-4.44	-2.62	-3.23
577.50	-2.97	-6.74	-4.88	-5.02
750.75	-3.82	-8.93	-7.00	-6.94

Tabel 4.6: Optimaalne μ kui $\tau = 0.05$

Tabelist (4.7) on näha, et keskmine kahju on kasvanud võrreldes, nii piiri väärtuse, kui ka ühesammulise meetodi tulemustega. See on tingitud süstemaatilise faktori keskmisest negatiivsest väärtusest. Piiri nihutamisel kahju kasvab koos piiriga. Tõenäosuse hinnang kahaneb stabiilselt piiri nihutamisel iga faktormudeli korral. Sabatõenäosuse hinnangud on sarnased ühesammulise meetodi hinnangutega. Suurim on tõenäosus, et krediidikahju ületab etteantud piiri Studenti $\nu_1 = 5$ mudeli rakendamisel. Defoltide arv on ka üldjuhul suurim selle mudeli puhul. Defoltide sagedus $DF\%$ varieerub 0.1565 ja 0.6912 vahel. Vähima sabatõenäosuse ja defoltide arvu annab Gaussi faktormudeli rakendamine. Seega jälgides konservatiivsuse printsiipi võime järeldada, et Studenti $\nu_1 = 5$ faktormudel paremini sobib kahjude ja sabatõenäosuse modelleerimiseks, oletusel, et defolti tõenäosust mõjutab ainult üks faktor ning portfellis olevate klientide vahel on nõrk seos.

	Piir x	EL	$\sigma(L)$	$P(L > x)$	$DF\%$	ED
Gauss	231.00	257.27	111.05	1.9371e-02	0.1657	4.97
Student $\nu_1 = 5$	231.00	259.44	108.41	4.2896e-02	0.1668	5.00
Student $\nu_2 = 10$	231.00	249.29	110.33	3.0788e-02	0.1565	4.70
Student $\nu_3 = 20$	231.00	260.25	112.46	2.2866e-02	0.1791	5.37
Gauss	404.25	440.40	118.71	4.3837e-04	0.2775	8.32
Student $\nu_1 = 5$	404.25	486.56	134.79	8.6653e-03	0.3605	10.82
Student $\nu_2 = 10$	404.25	449.77	115.83	1.2323e-03	0.2912	8.74
Student $\nu_3 = 20$	404.25	463.14	120.69	1.0373e-03	0.3218	9.65
Gauss	577.50	623.51	111.28	3.9610e-06	0.3998	11.99
Student $\nu_1 = 5$	577.50	682.06	118.70	5.6981e-03	0.5326	15.98
Student $\nu_2 = 10$	577.50	655.79	108.10	1.6131e-04	0.4738	14.21
Student $\nu_3 = 20$	577.50	666.40	118.79	7.5023e-05	0.4913	14.74
Gauss	750.75	795.12	99.78	1.1732e-08	0.5212	15.64
Student $\nu_1 = 5$	750.75	849.20	92.92	4.5116e-03	0.6912	20.74
Student $\nu_2 = 10$	750.75	848.53	95.73	1.2438e-04	0.6566	19.70
Student $\nu_3 = 20$	750.75	854.99	102.68	2.1576e-05	0.6658	19.97

Tabel 4.7: Kahesammulise olulise valimi meetodi tulemuste võrdlus erinevate mudelite ja piiride jaoks, kus $\tau = 0.05$ ning faktorite arv 1

Uurime nüüd kuidas muutuvad tulemused eeldusel, et astakorrelatsioonikordaja $\tau = 0.3$. Kõigepealt toome välja keskmised süstemaatilise faktori nihutamise jaoks:

Piir	Gauss	Student $\nu_1 = 5$	Student $\nu_2 = 10$	Student $\nu_3 = 20$
231.00	-1.37	-1.33	-1.28	-1.16
404.25	-1.93	-2.01	-1.89	-1.73
577.50	-2.42	-2.63	-2.45	-2.24
750.75	-2.90	-3.33	-3.04	-2.76

Tabel 4.8: Optimaalne μ kui $\tau = 0.3$

Kahesammulise olulise valimi meetodi rakendamise tulemused on esitatud tabelis (4.9). Analoogiliselt $\tau = 0.05$ juhuga on keskmine kahju suurem võrreldes piiri väärtusega, kuid ta kasvab stabiilselt piiri nihutamisel. Krediidikahju ja defoltide arvu kasv on tingitud süstemaatilise faktori keskmise negatiivsest väärtusest. Sabatõenäosus $P(L > x)$ kahaneb stabiilselt piiri nihutamisel iga faktormudeli korral. Kuid võrreldes tabeli (4.7) tulemustega sabatõenäosuse hinnangu kaanemise kiirus on aeglasem. Vähim sabatõenäosus on Gaussi mudeli korral ning suurim Student $\nu_1 = 5$ mudeli korral. Defoltide sagedus $DF\%$ varieerub 0.2340 ja 0.6744 vahel. Vaatamata selle, et Gaussi faktormudeli rakendamisel on vähim sabatõenäosus $P(L > x)$, antud mudel genereerib rohkem defolte võrreldes teiste mudelitega.

	Piir x	EL	$\sigma(L)$	$P(L > x)$	$DF\%$	ED
Gauss	231.00	341.15	182.74	7.0394e-02	0.2653	7.96
Student $\nu_1 = 5$	231.00	320.51	185.13	7.1682e-02	0.2353	7.06
Student $\nu_2 = 10$	231.00	316.99	177.04	6.9024e-02	0.2377	7.13
Student $\nu_3 = 20$	231.00	314.54	171.19	7.6180e-02	0.2340	7.02
Gauss	404.25	512.77	168.25	1.9475e-02	0.3965	11.90
Student $\nu_1 = 5$	404.25	512.82	169.95	3.4651e-02	0.3821	11.46
Student $\nu_2 = 10$	404.25	512.22	162.56	2.2624e-02	0.3827	11.48
Student $\nu_3 = 20$	404.25	500.42	153.58	2.6672e-02	0.3679	11.04
Gauss	577.50	692.23	140.97	5.7633e-03	0.5362	16.09
Student $\nu_1 = 5$	577.50	677.82	133.62	1.8396e-02	0.5164	15.49
Student $\nu_2 = 10$	577.50	678.44	131.92	8.5354e-03	0.5141	15.42
Student $\nu_3 = 20$	577.50	668.20	131.39	1.0301e-02	0.5020	15.06
Gauss	750.75	860.42	111.86	1.0014e-03	0.6744	20.23
Student $\nu_1 = 5$	750.75	839.24	100.16	1.3588e-02	0.6692	20.08
Student $\nu_2 = 10$	750.75	841.66	105.42	3.0177e-03	0.6655	19.97
Student $\nu_3 = 20$	750.75	845.10	109.32	3.6221e-03	0.6522	19.57

Tabel 4.9: Kahesammulise olulise valimi meetodi tulemuste võrdlus erinevate mudelite ja piiride jaoks, kus $\tau = 0.3$ ning faktorite arv 1

Suurendame faktorite arvu ning vaatleme selle mõju tulemustele. Esitame optimaalsete keskmiste vektorid erinevate mudelite ja piiride korral:

	Gauss	Student $\nu_1 = 5$	Student $\nu_2 = 10$	Student $\nu_3 = 20$
Piir	231.00	231.00	231.00	231.00
m_1	-0.1200	-0.0269	-0.0528	-0.1064
m_2	-0.2730	-0.0609	-0.1205	-0.2466
m_3	-0.1959	-0.0422	-0.0845	-0.1699
m_4	-0.2607	-0.0591	-0.1163	-0.2399
m_5	-0.2455	-0.0558	-0.1092	-0.2217
m_6	-0.2184	-0.0493	-0.0970	-0.1993
m_7	-0.1859	-0.0420	-0.0824	-0.1674
m_8	-0.2135	-0.0485	-0.0951	-0.1945
m_9	-0.2161	-0.0482	-0.0949	-0.1923
m_{10}	-0.2620	-0.0579	-0.1150	-0.2355
Piir	404.25	404.25	404.25	404.25
m_1	-0.2313	-0.0541	-0.1060	-0.2064
m_2	-0.5340	-0.1263	-0.2479	-0.4882
m_3	-0.3939	-0.0893	-0.1781	-0.3470
m_4	-0.4960	-0.1187	-0.2320	-0.4585
m_5	-0.4699	-0.1127	-0.2190	-0.4293
m_6	-0.4186	-0.0996	-0.1946	-0.3831
m_7	-0.3622	-0.0871	-0.1691	-0.3327
m_8	-0.4064	-0.0971	-0.1895	-0.3729
m_9	-0.4218	-0.0996	-0.1949	-0.3811
m_{10}	-0.5158	-0.1211	-0.2387	-0.4705
Piir	577.50	577.50	577.50	577.50
m_1	-0.3596	-0.0917	-0.1808	-0.3521
m_2	-0.8003	-0.2081	-0.4110	-0.8053
m_3	-0.6319	-0.1598	-0.3200	-0.6237
m_4	-0.7205	-0.1885	-0.3718	-0.7285
m_5	-0.7133	-0.1888	-0.3664	-0.7169
m_6	-0.6170	-0.1583	-0.3118	-0.6106
m_7	-0.5539	-0.1486	-0.2868	-0.5632
m_8	-0.6046	-0.1593	-0.3112	-0.6107
m_9	-0.6433	-0.1677	-0.3298	-0.6404
m_{10}	-0.7866	-0.2050	-0.4051	-0.7939
Piir	750.75	750.75	750.75	750.75
m_1	-0.5216	-0.1590	-0.3210	-0.6438
m_2	-1.0685	-0.3390	-0.6881	-1.3733
m_3	-0.9125	-0.2920	-0.5915	-1.1749
m_4	-0.9361	-0.3027	-0.6122	-1.2168
m_5	-0.9927	-0.3094	-0.6196	-1.2427
m_6	-0.8415	-0.2512	-0.5110	-1.0300
m_7	-0.7628	-0.2375	-0.4758	-0.9535
m_8	-0.8092	-0.2565	-0.5167	-1.0347
m_9	-0.8957	-0.2872	-0.5774	-1.1407
m_{10}	-1.0609	-0.3349	-0.6813	-1.3575

Tabel 4.10: Optimaalsed μ vektorid erinevate kahjupiiride korral kui $\tau = 0.05$

Tabelist (4.11) on näha, et keskmine kahju suurus ületab etteantud piiri. See on tingitud süstemaatiliste faktorite keskmiste negatiivsetest väärtustest. Võrreldes ühesammulise meetodi tulemustega on sabatõenäosus $P(L > x)$ sarnase käitumisega. Suurim on tõenäosus, et krediidikahju ületab kahjupiiri Studenti $\nu_1 = 5$ mudeli korral. Vähim sabatõenäosus on Gaussi mitmefaktormudeli korral. Defoldi sagedused varieeruvad 0.1374 ja 0.4483 vahel. Defoltide arv on üldjuhul suurim Gaussi ja Studenti $\nu_3 = 20$ mudelite korral. Mitmefaktormudeli Studenti $\nu_1 = 5$ rakendamine annab vähima defoltide arvu võrreldes teiste mudelitega.

	Piir x	EL	$\sigma(L)$	$P(L > x)$	DF%	ED
Gauss	231.00	254.39	110.37	1.0815e-02	0.1488	4.46
Student $\nu_1 = 5$	231.00	245.59	105.60	3.9703e-02	0.1374	4.12
Student $\nu_2 = 10$	231.00	240.55	104.00	2.6969e-02	0.1392	4.18
Student $\nu_3 = 20$	231.00	248.96	107.49	1.6484e-02	0.1454	4.36
Gauss	404.25	420.94	110.11	5.8671e-05	0.2337	7.01
Student $\nu_1 = 5$	404.25	419.95	101.28	4.3373e-03	0.2206	6.62
Student $\nu_2 = 10$	404.25	414.74	105.97	1.3028e-03	0.2230	6.69
Student $\nu_3 = 20$	404.25	422.04	112.98	3.8625e-04	0.2322	6.96
Gauss	577.50	593.33	105.33	4.9769e-08	0.3323	9.97
Student $\nu_1 = 5$	577.50	588.83	83.06	7.6095e-05	0.3148	9.44
Student $\nu_2 = 10$	577.50	592.71	90.47	3.3328e-05	0.3203	9.61
Student $\nu_3 = 20$	577.50	593.53	95.82	2.3116e-06	0.3318	9.96
Gauss	750.75	767.07	94.50	5.5116e-12	0.4381	13.14
Student $\nu_1 = 5$	750.75	758.74	74.98	1.1044e-05	0.4286	12.86
Student $\nu_2 = 10$	750.75	759.12	75.13	2.5936e-07	0.4289	12.87
Student $\nu_3 = 20$	750.75	765.84	84.48	3.2523e-08	0.4483	13.45

Tabel 4.11: Kahesammulise olulise valimi meetodi tulemuste võrdlus erinevate mudelite ja piiride jaoks, kus $\tau = 0.05$ ning faktorite arv 10

Vaatleme nüüd kuidas τ suurendamine mõjutab kahjusuurst, sabatõenäosust ja defoltide arvu. Alustame keskmiste vektorite μ esitamisega tabelis 4.12:

	Gauss	Student $\nu_1 = 5$	Student $\nu_2 = 10$	Student $\nu_3 = 20$
Piir	231.00	231.00	231.00	231.00
m_1	-0.3742	-0.0405	-0.1519	-0.3034
m_2	-0.2886	-0.0311	-0.1157	-0.2299
m_3	-0.3821	-0.0421	-0.1596	-0.3178
m_4	-0.5381	-0.0585	-0.2249	-0.4515
m_5	-0.4347	-0.0475	-0.1801	-0.3604
m_6	-0.4646	-0.0501	-0.1898	-0.3799
m_7	-0.3080	-0.0332	-0.1231	-0.2459
m_8	-0.3368	-0.0362	-0.1376	-0.2747
m_9	-0.4820	-0.0522	-0.1985	-0.3953
m_{10}	-0.3680	-0.0393	-0.1476	-0.2961
Piir	404.25	404.25	404.25	404.25
m_1	-0.6534	-0.0966	-0.3248	-0.5890
m_2	-0.5271	-0.0775	-0.2591	-0.4683
m_3	-0.6357	-0.0968	-0.3237	-0.5798
m_4	-0.9132	-0.1386	-0.4710	-0.8506
m_5	-0.7388	-0.1116	-0.3766	-0.6802
m_6	-0.8170	-0.1221	-0.4121	-0.7440
m_7	-0.5577	-0.0819	-0.2758	-0.5016
m_8	-0.6023	-0.0887	-0.3001	-0.5417
m_9	-0.8362	-0.1259	-0.4217	-0.7538
m_{10}	-0.6572	-0.0959	-0.3248	-0.5935
Piir	577.50	577.50	577.50	577.50
m_1	-0.9197	-0.1753	-0.6110	-0.9516
m_2	-0.7625	-0.1439	-0.4990	-0.7764
m_3	-0.8723	-0.1672	-0.5775	-0.8964
m_4	-1.1999	-0.2348	-0.8168	-1.2709
m_5	-0.9967	-0.1942	-0.6761	-1.0510
m_6	-1.1298	-0.2191	-0.7583	-1.1728
m_7	-0.7988	-0.1543	-0.5346	-0.8270
m_8	-0.8546	-0.1588	-0.5563	-0.8704
m_9	-1.1755	-0.2256	-0.7762	-1.1997
m_{10}	-0.9206	-0.1766	-0.6187	-0.9648
Piir	750.75	750.75	750.75	750.75
m_1	-1.1924	-0.3477	-1.1942	-1.4302
m_2	-1.0273	-0.2919	-1.0053	-1.2096
m_3	-1.1331	-0.3180	-1.0960	-1.3229
m_4	-1.3895	-0.4085	-1.4010	-1.6810
m_5	-1.2039	-0.3651	-1.2432	-1.4787
m_6	-1.4197	-0.4229	-1.4173	-1.6929
m_7	-1.0437	-0.3120	-1.0359	-1.2361
m_8	-1.1245	-0.3088	-1.0920	-1.3258
m_9	-1.5477	-0.4449	-1.5296	-1.8387
m_{10}	-1.1487	-0.3508	-1.1845	-1.4063

Tabel 4.12: Optimaalsed μ vektorid erinevate kahjupiiride korral kui $\tau = 0.3$

Tabelist (4.13) on näha, et keskmine kahju suurus ületab etteantud piiri, kuna nihutasime süstemaatiliste faktorite keskmised negatiivsesse suunda. Analoogiliselt kahesammulise olulise valimi meetodi tulemustega $\tau = 0.05$ korral, sabatõenäosuse $P(L > x)$ käitumine on stabiilne: see kahaneb koos piiri nihkega ja tema suurus on võrreldav ühesammulise olulise valimi meetodi tulemustega. Suurim on sabatõenäosus Studenti $\nu_1 = 5$ mudeli korral. Vähim sabatõenäosus on Gaussi mitmefaktormudeli korral. Defoltide sagedused varieeruvad 0.1367 ja 0.5957 vahel. Analoogiliselt tabeli (4.11) tulemustega on defoltide arv üldjuhul suurim Gaussi ja Studenti $\nu_3 = 20$ mudelite korral. Ning mitmefaktormudeli Studenti $\nu_1 = 5$ rakendamisel defoltide arv on vähim.

	Piir x	EL	$\sigma(L)$	$P(L > x)$	DF%	ED
Gauss	231.00	257.11	109.81	2.0394e-02	0.1709	5.13
Student $\nu_1 = 5$	231.00	238.66	105.93	4.2236e-02	0.1367	4.10
Student $\nu_2 = 10$	231.00	242.40	105.78	3.9479e-02	0.1462	4.38
Student $\nu_3 = 20$	231.00	257.02	109.67	3.0444e-02	0.1675	5.03
Gauss	404.25	447.70	116.06	6.5706e-04	0.2955	8.86
Student $\nu_1 = 5$	404.25	420.83	98.46	9.7342e-03	0.2278	6.83
Student $\nu_2 = 10$	404.25	422.27	104.15	3.6495e-03	0.2435	7.30
Student $\nu_3 = 20$	404.25	444.22	115.16	1.7725e-03	0.2850	8.55
Gauss	577.50	655.66	114.42	7.7918e-06	0.4711	14.13
Student $\nu_1 = 5$	577.50	593.98	78.74	8.7541e-04	0.3343	10.03
Student $\nu_2 = 10$	577.50	644.88	97.81	1.9352e-04	0.4591	13.77
Student $\nu_3 = 20$	577.50	666.66	106.88	6.4702e-05	0.5067	15.20
Gauss	750.75	806.18	103.22	3.6916e-08	0.5593	16.78
Student $\nu_1 = 5$	750.75	763.01	70.30	8.4443e-05	0.4495	13.48
Student $\nu_2 = 10$	750.75	794.64	87.34	3.1966e-05	0.5518	16.55
Student $\nu_3 = 20$	750.75	819.26	94.27	1.5295e-05	0.5957	17.87

Tabel 4.13: Kahesammulise olulise valimi meetodi tulemuste võrdlus erinevate mudelite ja piiride jaoks, kus $\tau = 0.3$ ning faktorite arv 10

Suurendame astakorrelatsiooni kordajat τ väärtuseni 0.5. Sellel juhul vastav Pearsoni korrelatsioonikordaja on $\rho = 0.71$. Esitame keskmiste vektori $\tau = 0.5$ korral:

	Gauss	Student $\nu_1 = 5$	Student $\nu_2 = 10$	Student $\nu_3 = 20$
Piir	231.00	231.00	231.00	231.00
m_1	-0.4292	-0.2613	-0.2683	-0.3167
m_2	-0.3389	-0.1998	-0.2075	-0.2473
m_3	-0.3059	-0.1824	-0.1873	-0.2236
m_4	-0.5379	-0.3531	-0.3467	-0.4023
m_5	-0.3068	-0.1784	-0.1879	-0.2249
m_6	-0.5785	-0.3948	-0.3796	-0.4365
m_7	-0.5070	-0.3148	-0.3184	-0.3755
m_8	-0.5172	-0.3281	-0.3309	-0.3861
m_9	-0.4588	-0.2924	-0.2933	-0.3425
m_{10}	-0.4192	-0.2561	-0.2651	-0.3118
Piir	404.25	404.25	404.25	404.25
m_1	-0.7146	-0.6235	-0.5435	-0.5910
m_2	-0.5670	-0.4822	-0.4242	-0.4653
m_3	-0.5272	-0.4222	-0.3807	-0.4258
m_4	-0.8474	-0.7991	-0.6706	-0.7156
m_5	-0.5191	-0.4333	-0.3880	-0.4278
m_6	-0.8955	-0.8649	-0.7159	-0.7591
m_7	-0.8314	-0.7171	-0.6312	-0.6895
m_8	-0.8289	-0.7729	-0.6552	-0.7002
m_9	-0.7455	-0.6832	-0.5812	-0.6243
m_{10}	-0.6898	-0.6252	-0.5366	-0.5769
Piir	577.50	577.50	577.50	577.50
m_1	-0.9861	-1.1963	-0.9109	-0.8987
m_2	-0.7880	-0.9514	-0.7286	-0.7195
m_3	-0.7781	-0.8891	-0.7009	-0.7023
m_4	-1.0644	-1.3791	-1.0287	-0.9984
m_5	-0.7382	-0.8778	-0.6918	-0.6838
m_6	-1.1219	-1.4584	-1.0807	-1.0472
m_7	-1.1359	-1.3350	-1.0562	-1.0454
m_8	-1.0591	-1.4032	-1.0316	-0.9974
m_9	-1.0040	-1.2672	-0.9505	-0.9275
m_{10}	-0.9479	-1.2462	-0.9049	-0.8766
Piir	750.75	750.75	750.75	750.75
m_1	-1.2712	-1.8291	-1.3611	-1.2684
m_2	-1.0171	-1.4489	-1.1011	-1.0224
m_3	-1.0535	-1.5635	-1.1643	-1.0677
m_4	-1.2153	-1.7990	-1.3783	-1.2512
m_5	-0.9609	-1.4899	-1.1151	-0.9995
m_6	-1.2943	-1.8262	-1.4161	-1.3088
m_7	-1.4451	-2.1155	-1.6080	-1.4729
m_8	-1.2264	-1.9048	-1.4205	-1.2745
m_9	-1.2528	-1.8241	-1.3667	-1.2623
m_{10}	-1.2135	-1.7801	-1.3186	-1.2206

Tabel 4.14: Optimaalsed $\boldsymbol{\mu}$ vektorid erinevate kahjupiiride korral kui $\tau = 0.5$

Tabelist (4.15) on näha, et keskmine krediidikahju ületab vastava piiri kuna süstemaatiliste faktorite keskmised on negatiivsed. Samas keskmine krediidikahju kahaneb stabiilselt koos piiri nihkega. Simuleerimistulemuste põhjal on suurim sabaõenäosus $P(L > x)$ Studenti $\nu_1 = 5$ mitmefaktormudeli korral. Vähima sabaõenäosuse annab Gaussi mitmefaktormudeli rakendamine. Defoltide sagedus varieerub 0.1625 ja 0.6743 vahel. Keskmine defoltide arv on suurim Gaussi faktormudeli jaoks väiksemate piiride korral, kuid suuremate piiride korral tekitab suurima defoltide arvu Studenti $\nu_1 = 5$ mitmefaktormudel. Seega konservatiivse hinnangu saamiseks sobib Studenti $\nu_1 = 5$ mitmefaktoriline mudel juhul kui on tegemist tugevalt seotud kohustusevõtjatega.

	Piir x	EL	$\sigma(L)$	$P(L > x)$	DF%	ED
Gauss	231.00	270.15	114.54	3.2576e-02	0.1957	5.87
Student $\nu_1 = 5$	231.00	251.93	110.69	5.8526e-02	0.1625	4.87
Student $\nu_2 = 10$	231.00	255.43	111.30	4.2810e-02	0.1660	4.98
Student $\nu_3 = 20$	231.00	262.06	111.33	4.6245e-02	0.1761	5.28
Gauss	404.25	462.27	116.51	2.1815e-03	0.3290	9.87
Student $\nu_1 = 5$	404.25	444.27	109.13	1.3832e-02	0.2968	8.90
Student $\nu_2 = 10$	404.25	448.01	112.24	7.1538e-03	0.2907	8.72
Student $\nu_3 = 20$	404.25	444.40	111.17	5.1545e-03	0.3004	9.01
Gauss	577.50	656.29	118.75	8.0800e-05	0.4788	14.36
Student $\nu_1 = 5$	577.50	653.06	111.56	3.5815e-03	0.4955	14.86
Student $\nu_2 = 10$	577.50	634.58	105.21	9.0015e-04	0.4426	13.28
Student $\nu_3 = 20$	577.50	635.11	105.97	5.8208e-04	0.4481	13.44
Gauss	750.75	839.81	102.00	1.6891e-06	0.6151	18.45
Student $\nu_1 = 5$	750.75	834.42	94.26	9.7642e-04	0.6743	20.23
Student $\nu_2 = 10$	750.75	829.61	96.15	1.1611e-04	0.6267	18.80
Student $\nu_3 = 20$	750.75	831.39	100.82	1.0295e-04	0.6132	18.40

Tabel 4.15: Kahesammulise olulise valimi meetodi tulemuste võrdlus erinevate mudelite ja piiride jaoks, kus $\tau = 0.5$ ning faktorite arv 10

Nüüd võrdleme kahesammulise olulise valimi meetodi tulemusi erinevate τ väärtuste korral. Juhul kui on tegemist mitmefaktorilise mudeli rakendamisega nõrgalt korreleeritud krediidiportfellile, siis on raske eristada kindlat tüüpi mudelit. See asjaolu viitab sellele, et väikeste korrelatsioonide korral on sobiv kasutada lihtsamat ühesammulist olulise valimi meetodit. Samas juhul kui seosed muutuvad tugevamateks, siis konservatiivsema hinnangu saame kasutades Studenti $\nu_1 = 5$ mitmefaktormudelit.

Käesolev analüüs näitas, et nii astakorrelatsioonikordaja τ väärtus, kui ka faktorite arvu suurendamine mõjutavad sabaõenäosust, defoltide arvu ja krediidikahju suurust. Seega etteantud korrelatsiooni ja süstemaatiliste riskifaktorite korral on võimalik valida faktormudel, mis võimaldab valida konservatiivset otsustusstrateegiat.

Kirjandus

- [1] Bluhm C., Overbeck L., Wagner C., 2002. *An Introduction to Credit Risk Modeling*. London: Chapman and Hall/CRC.
- [2] Brereton T. J., Chan J. C., Kroese D. P., 2012. *Monte Carlo Methods for Portfolio Credit Risk*. ANU Working Papers in Economics and Econometrics.
- [3] Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W., 2004. *Copula Methods in Finance*. John Wiley and Sons Ltd.
- [4] Glasserman P. and Li. J., 2005. Importance sampling for portfolio credit risk. *Management Science*, **51**:1643-1656.
- [5] Embrechts P., Lindskog F. and McNeil A., 2001. *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*. Department of Mathematics ETHZ. www.math.ethz.ch/finance.
- [6] Kollo T., 2004. *Monte Carlo meetodid*. Tartu Ülikooli kirjandus, Tartu.
- [7] Lember J., 2012. *Tõenäosusteooria II, loengukonspekt ja ülesanded*, <http://www.ms.ut.ee/sites/default/files/math/tenosusteooriaii2012.pdf>.
- [8] Merton, R., 1974. On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *Journal of Finance* **29**: 449-470.
- [9] Moreira, Fernando F., 2011. *Inaccurate Dependence Measures in Credit Models for Non-Normal Variables*. Banking and Finance Review, North America. <http://www.bankingandfinancereview.com/bfr/index.php/bfr/article/view/238>.
- [10] Moreira, Fernando F., 2011. *Enhancing Basel Method Via Conditional Distributions that Capture Stronger Connection Among Credit Losses in Downturns*. Working paper, <http://ssrn.com/abstract=1784242>.
- [11] Nelsen, Roger B., 2006. *An Introduction to Copulas*. New York: Springer. 2nd edition.
- [12] Nolan, John P., 2009. *Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data*. Birkhäuser, Boston, In progress, Chapter 1 online at <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/chap1.pdf>.

- [13] Owen, D. B. and Steck, G. P., 1962. Moments of order statistics from the equicorrelated multivariate normal distribution. *Annals of Mathematical Statistics* **33**: 1286–1291.
- [14] Rogge, E. and Schönbucher P., 2003. *Modelling Dynamic Portfolio Credit Risk*. Working paper, Imperial College.
- [15] Roncalli, T., 2003. *Gestion des Risques Multiples: Le Risque de Credit 2ème partie*. Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais. Working paper.
- [16] Wikipedia 2013. Basel I, artikkel, Internetientsüklopeedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Basel_I.
- [17] Wikipedia 2013. Basel II, artikkel, Internetientsüklopeedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Basel_II.
- [18] Wikipedia 2013. Basel III, artikkel, Internetientsüklopeedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Basel_III.

Lisad

A Keskmiste ja moodide vektorid

A.1 Tuletised

$$\begin{aligned}F_x(\mathbf{z}^*) &= \psi_m(\Theta, \mathbf{z}^*) - \Theta x; \\ \psi_m(\Theta, \mathbf{z}^*) &= \sum_{k=1}^m \ln(p_k(\mathbf{z}^*)e^{\Theta c_k} + 1 - p_k(\mathbf{z}^*)); \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^*} F_x(\mathbf{z}^*) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^*} \psi_m(\Theta, \mathbf{z}^*); \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^*} \psi_m(\Theta, \mathbf{z}^*) &= \sum_{k=1}^m \frac{e^{\Theta c_k} - 1}{p_k(\mathbf{z}^*)e^{\Theta c_k} + 1 - p_k(\mathbf{z}^*)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^*} p_k(\mathbf{z}^*).\end{aligned}$$

A.2 Gaussi mitmefaktormudel

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= \arg \max_{\mathbf{z}^*} \left\{ F_x(\mathbf{z}^*) - \frac{1}{2} \mathbf{z}^{*T} \mathbf{z}^* \right\}; \\ p_k(\mathbf{z}^*) &= \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD_k) - \boldsymbol{\alpha}_k^T \mathbf{z}^*}{\beta_k} \right); \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^*} p_k(\mathbf{z}^*) &= -\phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD_k) - \boldsymbol{\alpha}_k^T \mathbf{z}^*}{\beta_k} \right) \frac{\boldsymbol{\alpha}_k^T}{\beta_k}; \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^*} \left\{ F_x(\mathbf{z}^*) - \frac{1}{2} \mathbf{z}^{*T} \mathbf{z}^* \right\} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^*} F_x(\mathbf{z}^*) - \mathbf{z}^*.\end{aligned}$$

A.3 Studenti t -mitmefaktormudel

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= \arg \max_{\mathbf{z}^*} \left\{ F_x(\mathbf{z}^*) - \left(\frac{\nu + d}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{\sqrt{\frac{\nu}{v}} \mathbf{z}^{*T} \sqrt{\frac{\nu}{v}} \mathbf{z}^*}{\nu} \right) \right\}; \\ p_k(\mathbf{z}^*) &= \Phi \left(\frac{\sqrt{\frac{\nu}{v}} T_\nu^{-1}(PD_k) - \boldsymbol{\alpha}_k^T \mathbf{z}^*}{\beta_k} \right); \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^*} p_k(\mathbf{z}^*) &= -\phi \left(\frac{\sqrt{\frac{\nu}{v}} T_\nu^{-1}(PD_k) - \boldsymbol{\alpha}_k^T \mathbf{z}^*}{\beta_k} \right) \frac{\boldsymbol{\alpha}_k^T}{\beta_k}; \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^*} \left\{ F_x(\mathbf{z}^*) - \left(\frac{\nu + d}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{\sqrt{\frac{\nu}{v}} \mathbf{z}^{*T} \sqrt{\frac{\nu}{v}} \mathbf{z}^*}{\nu} \right) \right\} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^*} F_x(\mathbf{z}^*) - \left(\frac{(\nu + d) \mathbf{z}^*}{v - \mathbf{z}^{*T} \mathbf{z}^*} \right).\end{aligned}$$

A.4 Claytoni mitmefaktormudel

$$\begin{aligned}m_i &= \arg \max_{z_i^*} \left\{ F_x(z_i^*) + \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) \ln z_i^* - z_i^* \right\}; \\ p_k(z_i^*) &= F_U \left(e^{\frac{\gamma_{ki} z_i^*}{\eta} (1 - PD_k^{-\eta})} \right); \\ \frac{\partial}{\partial z_i^*} p_k(z_i^*) &= f_u \left(e^{\frac{\gamma_{ki} z_i^*}{\eta} (1 - PD_k^{-\eta})} \right) e^{\frac{\gamma_{ki} z_i^*}{\eta} (1 - PD_k^{-\eta})} \frac{\gamma_{ki}}{\eta} (1 - PD_k^{-\eta}); \\ \frac{\partial}{\partial z_i^*} \left\{ F_x(z_i^*) + \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) \ln z_i^* - z_i^* \right\} &= \frac{\partial}{\partial z_i^*} F_x(z_i^*) + \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) \frac{1}{z_i^*} - 1.\end{aligned}$$

B Tõepärasuhete leidmine

B.1 Gaussi jaotus

Jaotuste $N_d(0, \mathbf{I}_d)$ ja $N_d(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_d)$ tõepärasuhe:

$$\begin{aligned}f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z}}; \\ f_{\mathbf{z}+\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{z}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu})^T (\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu})}; \\ \frac{f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})}{f_{\mathbf{z}+\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{z})} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu})^T (\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu})}} = e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z} + \frac{1}{2} (\mathbf{z}^T \mathbf{z} - 2\mathbf{z}^T \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu})} = e^{-\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{z} + \frac{\boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu}}{2}}.\end{aligned}$$

B.2 Studenti jaotus

Jaotuste $t_\nu(0, \mathbf{I}_d)$ ja $t_\nu(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_d)$ tõepärasuhe:

$$\begin{aligned}
 f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}^d \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{\sqrt{\frac{\nu}{V}} \mathbf{z}^T \sqrt{\frac{\nu}{V}} \mathbf{z}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}}; \\
 f_{\mathbf{Z}+\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{z}) &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}^d \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{(\sqrt{\frac{\nu}{V}} \mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^T (\sqrt{\frac{\nu}{V}} \mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}}; \\
 \frac{f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}{f_{\mathbf{Z}+\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{z})} &= \frac{\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}^d \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{\sqrt{\frac{\nu}{V}} \mathbf{z}^T \sqrt{\frac{\nu}{V}} \mathbf{z}}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}}}{\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}^d \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{(\sqrt{\frac{\nu}{V}} \mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^T (\sqrt{\frac{\nu}{V}} \mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}}} = \left(\frac{\nu + \sqrt{\frac{\nu}{V}} \mathbf{z}^T \sqrt{\frac{\nu}{V}} \mathbf{z}}{\nu + (\sqrt{\frac{\nu}{V}} \mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^T (\sqrt{\frac{\nu}{V}} \mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}} \\
 &= \left(\frac{\nu + \sqrt{\frac{\nu}{V}} \mathbf{z}^T \sqrt{\frac{\nu}{V}} \mathbf{z}}{\nu + \sqrt{\frac{\nu}{V}} \mathbf{z}^T \sqrt{\frac{\nu}{V}} \mathbf{z} - 2\sqrt{\frac{\nu}{V}} \mathbf{z}^T \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\mu}}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}}.
 \end{aligned}$$

B.3 Claytoni koopula

Jaotuste $\Gamma_d\left(\frac{1}{\eta}, \mathbf{I}_d\right)$ ja $\Gamma_d\left(\frac{1}{\eta}, \boldsymbol{\zeta}\right)$ tõepärasuhe, kus $\boldsymbol{\zeta} = \frac{\mathbf{m}}{\frac{1}{\eta}-1}$ ning \mathbf{m} on optimaalne moodide vektor, leidmiseks võtame $d = 1$:

$$\begin{aligned}
 f_Z(z) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right)} z^{\frac{1}{\eta}-1} e^{-z}; \\
 f_{Z_m}(z) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right) \zeta^{\frac{1}{\eta}}} z^{\frac{1}{\eta}-1} e^{-\frac{z}{\zeta}}; \\
 \frac{f_Z(z)}{f_{Z_m}(z)} &= \frac{\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right)} z^{\frac{1}{\eta}-1} e^{-z}}{\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\eta}\right) \zeta^{\frac{1}{\eta}}} z^{\frac{1}{\eta}-1} e^{-\frac{z}{\zeta}}} = \zeta^{\frac{1}{\eta}} e^{-z + \frac{z}{\zeta}}.
 \end{aligned}$$

Võtame logaritmi:

$$\ln\left(\frac{f_Z(z)}{f_{Z_m}(z)}\right) = \frac{1}{\eta} \ln \zeta - z + \frac{z}{\zeta}.$$

Võtame eksponendi:

$$\frac{f_Z(z)}{f_{Z_m}(z)} = e^{\frac{1}{\eta} \ln \zeta - z + \frac{z}{\zeta}}.$$

Võttes arvesse, et süstemaatilised riskid on sõltumatud tõepärasuhe $d > 1$ korral avaldub kujul:

$$\frac{f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}{f_{\mathbf{Z}_m}(\mathbf{z})} = e^{\frac{1}{\eta^d} \sum_{i=1}^d \ln \zeta_i - \sum_{i=1}^d \left(z_i - \frac{z_i}{\zeta_i}\right)}.$$

C R code

C.1 Faktorkaalude vektorite leidmise kood

```
1 library(xtable)
2 #Faktorkaalude vektorite leidmine
3 samplesize=30
4 sim=1000
5 factors=10
6 #Kendalli korrelatsioonikordaja klientide/laenude vahel tau
   =0.05,tau=0.3 and tau=0.5:
7 tau=0.5
8 corr=sin(pi*tau/2)
9 eta_clayton=2*tau/(1-tau)
10 #faktorite vektorid alpha, beta ja gamma
11 alpha_f=function(d,m,cor){
12   a=matrix(0,d,m)
13   for (i in 1:m){
14     for (j in 1:d){
15       a[j,i]=runif(1,min=0,max=sqrt(cor/d))
16     }
17     while (sum(a[,i]^2)>1){
18       for (j in 1:d){
19         a[j,i]=runif(1,min=0,max=sqrt(cor/d))
20       }
21     }
22   }
23
24   return(a)
25 }
26 alpha=alpha_f(factors,samplesize,corr)
27 beta=sqrt(1-apply(alpha^2,2,FUN=sum))
28
29 gamma_f=function(d,m){
30   g=matrix(0,d,1)
31   for (j in 1:d){
32     g[j]=runif(1,min=0,max=1/sqrt(d))
33   }
34   while (abs(sum(g)-1)>0.0001){
35     for (j in 1:d){
36       g[j]=runif(1,min=0,max=1/sqrt(d))
37     }
38   }
39
40   return(g)
41 }
```

```

42 gamma=do.call(rbind, lapply(1:samplesize, function(i) as.
    numeric(gamma_f(factors, samplesize))))
43 #kirjutame failid sisse
44 alpha.table=xtable(alpha)
45 write.table(alpha.table, "C:/Users/user/Documents/MAGISTER1/
    magister/alpha.txt")
46 gamma.table=xtable(t(gamma))
47 write.table(gamma.table, "C:/Users/user/Documents/MAGISTER1/
    magister/gamma.txt")

```

C.2 Optimaalse keskmise ja moodi vektori leidmise kood

```

1 library(mvtnorm)
2 library(mnormt)
3 library(xtable)
4 library(rootSolve)
5 #Optimaalse keskmise leidmine
6 samplesize=30
7 #Kendalli korrelatsioonikordaja klientide/laenude vahel tau
    =0.05, tau=0.3 and tau=0.5:
8 tau=0.3
9 corr=sin(pi*tau/2)
10 eta_clayton=2*tau/(1-tau)
11 #faktorite arv 1 voi 10
12 factors=10
13 #Laenusuurused
14 C=matrix(0,1,samplesize)
15 for (j in 1:samplesize){
16 C[j]=(ceiling(10*j/samplesize))^2
17 }
18 #Defoldi esialgsed toenaosused
19 PD=matrix(0,1,samplesize)
20 for (j in 1:samplesize){
21 PD[j]=0.05*(1+sin(16*pi*j/samplesize))
22 }
23 #Kahju piirid
24 X=c(0.2*sum(C), 0.35*sum(C), 0.5*sum(C), 0.65*sum(C))
25 #Vabadusastmete arvud
26 t1=5
27 t2=10
28 t3=20
29 #faktorite vektorid alpha, beta ja gamma
30 if (tau==0.05){
31   if (factors>1){
32     alpha=as.matrix(read.table("C:/Users/user/Documents/
        MAGISTER1/magister/alpha.txt", header=T, as.is=TRUE))} else
        {alpha=matrix(sqrt(corr), factors, samplesize)}
33   if (factors>1){

```

```

34   gama=as.matrix(read.table("C:/Users/user/Documents/
      MAGISTER1/magister/gamma.txt", header=T, as.is=TRUE))
35 } else {gama=matrix(1, factors, samplesize)}
36 }
37 if (tau==0.3){
38   if (factors >1){
39     alpha=as.matrix(read.table("C:/Users/user/Documents/
      MAGISTER1/magister/alpha_tau2.txt", header=T, as.is=TRUE))
      } else {alpha=matrix(sqrt(corr), factors, samplesize)}
40   if (factors >1){
41     gama=as.matrix(read.table("C:/Users/user/Documents/
      MAGISTER1/magister/gamma_tau2.txt", header=T, as.is=TRUE))
42   } else {gama=matrix(1, factors, samplesize)}
43 }
44 if (tau==0.5){
45   if (factors >1){
46     alpha=as.matrix(read.table("C:/Users/user/Documents/
      MAGISTER1/magister/alpha_tau3.txt", header=T, as.is=TRUE))
      } else {alpha=matrix(sqrt(corr), factors, samplesize)}
47   }
48 beta=sqrt(1-apply(alpha^2, 2, FUN=sum))
49 #-----
50 #Optimaalne keskmiste vektor Gaussi faktormudeli jaoks
51 myy_new_fN=function(pd, a, b, c, d, m, x){
52   x_c=matrix(qnorm(pd, 0, 1), m, 1)
53   myy_fun=function(z, theta){
54     p_z=pnorm((x_c-crossprod(a, z))/b)
55     theta_new_fun=function(theta){apply((as.vector(p_z)*c*exp(
      theta*c))/(as.vector(p_z)*exp(theta*c)-as.vector(p_z)+1)
      , 1, sum)-x}
56     theta=uniroot(theta_new_fun, lower = -1, upper = 1, tol =
      0.0001)$root
57     p_z_der=-as.vector(dnorm((x_c-crossprod(a, z))/b))*t(a/b)
58     const2=(exp(theta*c)-1)/(as.vector(p_z)*exp(theta*c)-as.
      vector(p_z)+1)
59     f3=function(p_d){const2*p_d}
60     F_z_der=apply(p_z_der, 2, FUN=f3)
61     if (theta <0){F_z_der=matrix(0, m, d)}
62     if (apply(as.vector(p_z)*c, 1, sum)>x){F_z_der=matrix(0, m, d)}
63     muu_der=apply(F_z_der, 2, FUN=sum)-z
64     return(muu_der)
65   }
66   muu_new=multiroot(f=myy_fun, start = rep(-3, d))$root
67   return(muu_new)
68 }
69
70 optimal_myy_N=function(x){

```

```

71 myy_op=matrix(0,4,factors)
72 for (i in 1:4){
73   myy_op[i,]=myy_new_fN(PD,alpha,beta,C,factors,samplesize,x[
       i])
74 }
75 return(myy_op)
76 }
77 myy_matrix_n=optimal_myy_N(X)
78 myy_matrix_n.table=xtable(myy_matrix_n)
79 write.table(myy_matrix_n.table,"C:/Users/user/Documents/
       MAGISTER1/magister/optimal_myy_Ntau2f10.txt")
80 #Optimaalne keskmiste vektor Studenti faktormudeli jaoks
81 #Simuleerime Chi^2 jaotusest
82 V_f=function(t){rchisq(1,df=t,ncp=0)}
83 V1=V_f(t1)
84 V2=V_f(t2)
85 V3=V_f(t3)
86 cbind(V1,V2,V3)
87 myy_new_fST=function(pd,a,b,c,d,m,x,t,V){
88   x_c=matrix(qt(pd,df=t,ncp=0),m,1)
89   ratio=sqrt(V/t)
90   myy_fun=function(z){
91     p_z=pnorm((ratio*x_c-crossprod(a,z))/b)
92     theta_new_fun=function(theta){apply((as.vector(p_z)*c*exp(
       theta*c))/(as.vector(p_z)*exp(theta*c)-as.vector(p_z)+1)
       ,1,sum)-x}
93     theta=uniroot(theta_new_fun,lower=-3,upper=3,tol=
       0.0001)$root
94     f1=function(ab){-dnorm((ratio*x_c-crossprod(a,z))/b)*ab}
95     p_z_der=apply(a/b,1,FUN=f1)
96     const2=(exp(theta*c)-1)/(as.vector(p_z)*exp(theta*c)-as.
       vector(p_z)+1)
97     f3=function(p_d){const2*p_d}
98     F_z_der=apply(p_z_der,2,FUN=f3)
99     if(theta<0){F_z_der=matrix(0,m,d)}
100    if(apply(as.vector(p_z)*c,1,sum)>x){F_z_der=matrix(0,m,d)}
101    muu_der=apply(F_z_der,2,FUN=sum)-(t+d)*z/(V+crossprod(z,z))
102    return(muu_der)
103  }
104  muu_new=multiroot(f=myy_fun,start=rep(0,d))$root
105  return(muu_new)
106 }
107 optimal_myy_St1=function(x){
108   myy_op=matrix(0,4,factors)
109   for (i in 1:4){
110     myy_op[i,]=myy_new_fST(PD,alpha,beta,C,factors,samplesize,x
       [i],t1,V1)

```

```

111     }
112     return(myy_op)
113 }
114 myy_matrix_St1=optimal_myy_St1(X)
115 optimal_myy_St2=function(x){
116     myy_op=matrix(0,4,factors)
117     for(i in 1:4){
118         myy_op[i,]=myy_new_fST(PD,alpha,beta,C,factors,samplesize,x
119                               [i],t2,V2)
120     }
121     return(myy_op)
122 }
123 myy_matrix_St2=optimal_myy_St2(X)
124 optimal_myy_St3=function(x){
125     myy_op=matrix(0,4,factors)
126     for(i in 1:4){
127         myy_op[i,]=myy_new_fST(PD,alpha,beta,C,factors,samplesize,x
128                               [i],t3,V3)
129     }
130     return(myy_op)
131 }
132 myy_matrix_St3=optimal_myy_St3(X)
133 myy_matrix_St1.table=xtable(myy_matrix_St1)
134 write.table(myy_matrix_St1.table,"C:/Users/user/Documents/
135             MAGISTER1/magister/optimal_myy_St1tau2f10.txt")
136 myy_matrix_St2.table=xtable(myy_matrix_St2)
137 write.table(myy_matrix_St2.table,"C:/Users/user/Documents/
138             MAGISTER1/magister/optimal_myy_St2tau2f10.txt")
139 myy_matrix_St3.table=xtable(myy_matrix_St3)
140 write.table(myy_matrix_St3.table,"C:/Users/user/Documents/
141             MAGISTER1/magister/optimal_myy_St3tau2f10.txt")
142 #Optimaalne moodi vektor Claytoni faktormudeli jaoks
143 myy_new_fCl=function(pd,g,eta,c,d,m,x){
144     x_cl=matrix(pd,m,1)
145     myy_fun=function(z){
146         p_z=exp(g*z/eta*(1-x_cl^{-eta}))
147         const1=p_z*g
148         p_z_der=const1*(1-x_cl^{-eta})/eta
149         theta_new_fun=function(theta){apply((as.vector(p_z)*c*exp(
150             theta*c))/(as.vector(p_z)*exp(theta*c)-as.vector(p_z)+1)
151             ,1,sum)-x}
152         theta=uniroot(theta_new_fun,lower=-1,upper=1,tol=
153             0.0001)$root

```

```

150   const2=(exp(theta*c)-1)/(as.vector(p_z)*exp(theta*c)-as.
      vector(p_z)+1)
151   F_z_der=as.vector(const2)*p_z_der
152   if (theta<0) {F_z_der=matrix(0,m,1)}
153   if (apply(as.vector(p_z)*c,1,sum)>x){F_z_der=matrix(0,m,1)}
154   muu_der=sum(F_z_der)+(1/eta-1)/z-1
155   return(muu_der)
156 }
157 muu_new=uniroot(f=my_fun,lower = -1.5, upper = 1.5, tol =
      0.0001)$root
158 return(muu_new)
159 }
160
161 optimal_myy_CI=function(x){
162   myy_op=matrix(0,3,factors)
163   for (i in 1:3){
164     for (j in 1:factors){
165       myy_op[i,j]=myy_new_fCI(PD,gama[j,],eta_clayton,C,factors,
          samplesize,x[i])
166     }
167   }
168   return(myy_op)
169 }
170 myy_matrix_CI=optimal_myy_CI(X)
171 myy_matrix_CI.table=xtable(myy_matrix_CI)
172 write.table(myy_matrix_CI.table,"C:/Users/user/Documents/
      MAGISTER1/magister/optimal_myy_CItau2f10.txt")

```

C.3 Olulise valimi meetodi kood

```

1 library(mvtnorm)
2 library(mnormt)
3 library(xtable)
4 library(FAdist)
5 library(rootSolve)
6 #IS meetod
7 samplesize=30
8 sim=1000
9 #Kendalli korrelatsioonikordaja klientide/laenude vahel tau
      =0.05,tau=0.3 and tau=0.5:
10 tau=0.3
11 corr=sin(pi*tau/2)
12 eta_clayton=2*tau/(1-tau)
13 #faktorite arv 1 voi 10
14 factors=10
15 #Laenusuurused
16 C=matrix(0,1,samplesize)
17 for (j in 1:samplesize){

```

```

18 C[j]=(ceiling(10*j/samplesize))^2
19 }
20 #Defoldi esialgsed toenaosused
21 PD=matrix(0,1,samplesize)
22 for (j in 1:samplesize){
23 PD[j]=0.05*(1+sin(16*pi*j/samplesize))
24 }
25 #Standardhalve
26 sigma=matrix(0,factors,factors)
27 diag(sigma)=1
28 #Vabadusastmete arvud
29 t1=5
30 t2=10
31 t3=20
32 #faktorite vektorid alpha, beta ja gamma
33 if (tau==0.05){
34   if (factors >1){
35     alpha=as.matrix(read.table("C:/Users/user/Documents/
      MAGISTER1/magister/alpha.txt",header=T,as.is=TRUE))} else
      {alpha=matrix(sqrt(corr),factors,samplesize)}
36   if (factors >1){
37     gamma=as.matrix(read.table("C:/Users/user/Documents/
      MAGISTER1/magister/gamma.txt",header=T,as.is=TRUE))
38   }else {gamma=matrix(1,factors,samplesize)}
39 }
40 if (tau==0.3){
41   if (factors >1){
42     alpha=as.matrix(read.table("C:/Users/user/Documents/
      MAGISTER1/magister/alpha_tau2.txt",header=T,as.is=TRUE))
      } else {alpha=matrix(sqrt(corr),factors,samplesize)}
43   if (factors >1){
44     gamma=as.matrix(read.table("C:/Users/user/Documents/
      MAGISTER1/magister/gamma_tau2.txt",header=T,as.is=TRUE))
45   }else {gamma=matrix(1,factors,samplesize)}
46 }
47 beta=sqrt(1-apply(alpha^2,2,FUN=sum))
48 #-----
49 # Kahju piirid: 20%, 35%, 50%, 65%
50 piirid=c(0.2*sum(C),0.35*sum(C),0.5*sum(C),0.65*sum(C))
51 k=1
52 X=piirid[k]
53 #-----
54 #keskmised ja moodid
55 #Eialgsed keskmised ja mood
56 myy_n=rep(0,factors)
57 myy_t1=rep(0,factors)
58 myy_t2=rep(0,factors)

```

```

59 myy_t3=rep(0, factors)
60 myy_cl=rep(1/eta_clayton-1, factors)
61 #Optimaalne keskmiste vektor kahesammulise olulise valimi
    rakendamiseks
62 #myy_n=as.vector(as.matrix(read.table("C:/Users/user/Documents/
    MAGISTER1/magister/optimal_myy_Ntau2f10.txt", header=T))[k,])
63 #myy_t1=as.vector(as.matrix(read.table("C:/Users/user/Documents
    /MAGISTER1/magister/optimal_myy_St1tau2f10pr.txt", header=T))
    [k,])
64 #myy_t2=as.vector(as.matrix(read.table("C:/Users/user/Documents
    /MAGISTER1/magister/optimal_myy_St2tau2f10pr.txt", header=T))
    [k,])
65 #myy_t3=as.vector(as.matrix(read.table("C:/Users/user/Documents
    /MAGISTER1/magister/optimal_myy_St3tau2f10pr.txt", header=T))
    [k,])
66 #-----
67 #Sustemaatiliste faktorite simuleerimine
68 Z_fun=function(n, mu, sig){
69   Z_f=rmnorm(n, mu, sig)
70   return(Z_f)
71 }
72 Z_fun_cl=function(n, d, mu, eta){
73   Z_cl=matrix(0, d, n)
74   zeta=rep(0, d)
75   for (i in 1:d){
76     zeta[i]=mu[i]/(1/eta-1)
77     Z_cl[i,]=rgamma(n, 1/eta, scale=zeta[i])
78   }
79   return(t(Z_cl))
80 }
81 Z_n=Z_fun(sim, myy_n, sigma)
82 Z_t1=Z_fun(sim, myy_t1, sigma)
83 Z_t2=Z_fun(sim, myy_t2, sigma)
84 Z_t3=Z_fun(sim, myy_t3, sigma)
85 Z_clayton=Z_fun_cl(sim, factors, myy_cl, eta_clayton)
86 #Arvutame uued PD kasutades koopula faktormudelid
87 Prob_N=function(m, n, Z, pd, a, b){
88   #Defineerime piirid Gaussi latentsete muutujate jaoks
89   x_c=matrix(qnorm(pd, 0, 1), m, n)
90   #Gaussi koopula faktormudel
91   XN=pnorm((x_c-crossprod(a, t(Z)))/b)
92   return(t(XN))
93 }
94 Prob_t=function(m, n, Z, t, pd, a, b){
95   #Defineerime piirid Studenti latentsete muutujate jaoks
96   x_ct=matrix(qt(pd, df=t, ncp=0), m, n)
97   V=rchisq(n, df=t, ncp = 0)

```

```

98 #Studenti koopula faktormudel
99 Xtcop=pnorm((sqrt(V/t)*t(x_ct)-t(crossprod(a,t(Z))))/b)
100 T=sqrt(t/V)*Z
101 return(cbind(Xtcop,T))
102 }
103 Prob_clayton=function(m,n,Z,pd,g,eta,d){
104 #Definierime piirid Claytoni latentsete muutujate jaoks
105 x_cl=matrix(pd,m,n)
106 #Claytoni koopula faktormudel
107 XCl=punif(exp(crossprod(g,t(Z))/eta*(1-x_cl^{-eta})))
108 return(t(XCl))
109 }
110 XNcop=Prob_N(samplesize,sim,Z_n,PD,alpha,beta)
111 t1cop=Prob_t(samplesize,sim,Z_t1,t1,PD,alpha,beta)
112 t2cop=Prob_t(samplesize,sim,Z_t2,t2,PD,alpha,beta)
113 t3cop=Prob_t(samplesize,sim,Z_t3,t3,PD,alpha,beta)
114 Xt1cop=t1cop[,1:samplesize]
115 Xt2cop=t2cop[,1:samplesize]
116 Xt3cop=t3cop[,1:samplesize]
117 T_t1=as.matrix(t1cop[, (samplesize+1):(samplesize+factors)])
118 T_t2=as.matrix(t2cop[, (samplesize+1):(samplesize+factors)])
119 T_t3=as.matrix(t3cop[, (samplesize+1):(samplesize+factors)])
120 XClcop=Prob_clayton(samplesize,sim,Z_clayton,PD,gamma,
eta_clayton,factors)
121 #Otsime optimaalset Theta
122 #Definierime funktsiooni Phi tuletist
123 Theta=function(m,n,pd,c,x){
124 theta_m=rep(0,n)
125 f1=function(z)(z*c)
126 const1=apply(pd,1,FUN=f1)
127 const2=matrix(c,m,n)
128 const3=matrix(1,n,m)-pd
129 for(i in 1:n){
130 f2=function(theta)(apply(t(const1)*exp(theta*t(const2)))/(
pd*exp(theta*t(const2))+const3),1,FUN=sum)-x[i]
131 theta_m[i]=uniroot(f2,lower=-7,upper=7,tol=
0.0001)$root
132 }
133 return(theta_m)
134 }
135 theta_m=Theta(samplesize,sim,XNcop,C,X)
136 theta_m_t1=Theta(samplesize,sim,Xt1cop,C,X)
137 theta_m_t2=Theta(samplesize,sim,Xt2cop,C,X)
138 theta_m_t3=Theta(samplesize,sim,Xt3cop,C,X)
139 theta_m_cl=Theta(samplesize,sim,XClcop,C,X)
140 #Definierime Theta suurte kahjude jaoks
141 Theta_new=function(pd,c,x,theta,n){

```

```

142 dphi_0=matrix(0, n, 1)
143 for (j in 1:n){
144     dphi_0[j,] = sum(pd[j,]*c)
145     if (dphi_0[j,]>=x){theta[j]=0}
146     }
147     theta[j]=max(theta[j],0)
148 return(theta)
149 }
150 theta_m=Theta_new(XNcop,C,X,theta_m,sim)
151 theta_m_t1=Theta_new(Xt1cop,C,X,theta_m_t1,sim)
152 theta_m_t2=Theta_new(Xt2cop,C,X,theta_m_t2,sim)
153 theta_m_t3=Theta_new(Xt3cop,C,X,theta_m_t3,sim)
154 theta_m_cl=Theta_new(XClcop,C,X,theta_m_cl,sim)
155 #Arvutame eksponentsiaalselt teisendatud defoldi toenaosused
156 Twisted_prob=function(pd,theta,c,m,n){
157     p=matrix(0,n,m)
158     for(j in 1:n){
159         for (i in 1:m){
160             p[j,i]=pd[j,i]*exp(theta[j]*c[i])/(pd[j,i]*exp(theta[j]*c
161                 [i])+1-pd[j,i])
162         }
163     }
164     return(p)
165 }
166 p_tw=Twisted_prob(XNcop,theta_m,C,samplesize,sim)
167 p_tw_t1=Twisted_prob(Xt1cop,theta_m_t1,C,samplesize,sim)
168 p_tw_t2=Twisted_prob(Xt2cop,theta_m_t2,C,samplesize,sim)
169 p_tw_t3=Twisted_prob(Xt3cop,theta_m_t3,C,samplesize,sim)
170 p_tw_cl=Twisted_prob(XClcop,theta_m_cl,C,samplesize,sim)
171 #Arvutame defolte kasutades Bernoulli juhuslike suuruste
    generaator
172 Indicator=function(p,m,n){
173     def=matrix(0,n,m)
174     for (j in 1:n){
175         for (i in 1:m){
176             def[j,i]=rbinom(1,1,p[j,i])
177         }
178     }
179     return(def)
180 }
181 ndef=Indicator(p_tw,samplesize,sim)
182 t1def=Indicator(p_tw_t1,samplesize,sim)
183 t2def=Indicator(p_tw_t2,samplesize,sim)
184 t3def=Indicator(p_tw_t3,samplesize,sim)
185 cldef=Indicator(p_tw_cl,samplesize,sim)
186 #Arvutame defoltide sagedused, defoltide arvu ja kahju iga
    simulatsiooni jaoks

```

```

186 Default=function (def ,m,n,c){
187   DF=rep(0,n)
188   default=rep(0,n)
189   Loss=rep(0,n)
190   for (j in 1:n){
191     DF[j]=sum(def[j,])/m
192     default[j]=sum(def[j,])
193     for (i in 1:m){
194       Loss[j]=sum(def[j,]*c)
195     }
196   }
197   return (cbind(DF, default , Loss))
198 }
199 Loss_matrix=Default(ndef , samplesize , sim ,C) [,3]
200 Loss_matrix_t1=Default (t1def , samplesize , sim ,C) [,3]
201 Loss_matrix_t2=Default (t2def , samplesize , sim ,C) [,3]
202 Loss_matrix_t3=Default (t3def , samplesize , sim ,C) [,3]
203 Loss_matrix_cl=Default (cldef , samplesize , sim ,C) [,3]
204 #Arvutame keskmist kahju iga kliendi jaoks
205 Customer_loss=function (def ,m,n,c){
206   customer_loss=rep(0,m)
207   customer_df=rep(0,m)
208   for (i in 1:m){
209     customer_loss[i]=mean(def[,i]*c[i])
210     customer_df[i]=mean(def[,i])
211   }
212   return (cbind(customer_loss , customer_df))
213 }
214 customer_loss_n=Customer_loss(ndef , samplesize , sim ,C) [,1]
215 customer_loss_t1=Customer_loss(t1def , samplesize , sim ,C) [,1]
216 customer_loss_t2=Customer_loss(t2def , samplesize , sim ,C) [,1]
217 customer_loss_t3=Customer_loss(t3def , samplesize , sim ,C) [,1]
218 customer_loss_cl=Customer_loss(cldef , samplesize , sim ,C) [,1]
219 #Sabatoenaosuse hinnangu arvutamise
220 #Defineerime Phi funktsiooni
221 Phi=function (pd , theta , c,m,n){
222   phi=matrix(0,n,m)
223   phi_matrix=matrix(0,n,1)
224   for (j in 1:n){
225     for (i in 1:m){
226       phi[j,i]=log(pd[j,i]*exp(theta[j]*c[i])+1-pd[j,i])
227     }
228     phi_matrix[j]=sum(phi[j,])
229   }
230   return(phi_matrix)
231 }
232 phi_matrix=Phi(XNcop , theta_m , C, samplesize , sim)

```

```

233 phi_matrix_t1=Phi(Xt1cop,theta_m_t1,C,samplesize,sim)
234 phi_matrix_t2=Phi(Xt2cop,theta_m_t2,C,samplesize,sim)
235 phi_matrix_t3=Phi(Xt3cop,theta_m_t3,C,samplesize,sim)
236 phi_matrix_cl=Phi(XClcop,theta_m_cl,C,samplesize,sim)
237 #Defineerime toenaosuste maatriks
238 Probability_n=function(Loss,x,phi,theta,mu,z,n){
239   P=rep(0,n)
240   ratio=rep(0,n)
241   for(j in 1:n){
242     ratio[j]=exp(-crossprod(mu,z[j,])+crossprod(mu,mu)/2)
243     if(Loss[j]>x){P[j]=exp(phi[j]-theta[j]*Loss[j])*ratio[j]}
244     else {P[j]=0}
245   }
246   return(cbind(P,ratio))
247 }
248 Probability_t=function(Loss,x,phi,theta,mu,t,T,n,d){
249   P=rep(0,n)
250   ratio=rep(0,n)
251   for(j in 1:n){
252     ratio[j]=((crossprod(T[j,],T[j,])+t)/(crossprod(T[j,],T[j,],)+t-2*crossprod(mu,T[j,])+crossprod(mu,mu)))^(-(t+d)/2)
253     if(Loss[j]>x){P[j]=exp(phi[j]-theta[j]*Loss[j])*ratio[j]}
254     else {P[j]=0}
255   }
256   return(cbind(P,ratio))
257 }
258 Probability_cl=function(Loss,x,phi,theta,mu,z,n,eta,d){
259   P=rep(0,n)
260   ratio=rep(0,n)
261   zeta=mu/(1/eta-1)
262   for(j in 1:n){
263     #ratio[j]=crossprod((z[j,]/(z[j,]+mu))^(1/eta-clayton-1),
264     exp(mu))
265     ratio[j]=exp(sum(d/eta*log(zeta)-z[j,]+z[j,]/zeta))
266     if(Loss[j]>x){P[j]=exp(phi[j]-theta[j]*Loss[j])*ratio[j]}
267     else {P[j]=0}
268   }
269   return(cbind(P,ratio))
270 }
P=Probability_n(Loss_matrix,X,phi_matrix,theta_m,myy_n,Z_n,sim)
[,1]
271 P_t1=Probability_t(Loss_matrix_t1,X,phi_matrix_t1,theta_m_t1,
myy_t1,t1,T_t1,sim,factors)[,1]
272 P_t2=Probability_t(Loss_matrix_t2,X,phi_matrix_t2,theta_m_t2,
myy_t2,t2,T_t2,sim,factors)[,1]

```

```

273 P_t3=Probability_t(Loss_matrix_t3,X,phi_matrix_t3,theta_m_t3,
    myy_t3,t2,T_t3,sim,factors)[,1]
274 P_cl=Probability_cl(Loss_matrix_cl,X,phi_matrix_cl,theta_m_cl,
    myy_cl,Z_clayton,sim,eta_clayton,factors)[,1]
275 #Tulemuste esitamise tabelina
276 simulation <- matrix(as.numeric(c(rep(X,5),
277 mean(Default(ndef,samplesize,sim,C)[,3]),mean(Default(t1def,
    samplesize,sim,C)[,3]),
278 mean(Default(t2def,samplesize,sim,C)[,3]),mean(Default(t3def,
    samplesize,sim,C)[,3]),mean(Default(cldef,samplesize,sim,C)
    [,3]),
279 sd(Default(ndef,samplesize,sim,C)[,3]),sd(Default(t1def,
    samplesize,sim,C)[,3]),
280 sd(Default(t2def,samplesize,sim,C)[,3]),sd(Default(t3def,
    samplesize,sim,C)[,3]),sd(Default(cldef,samplesize,sim,C)
    [,3]),
281 mean(P),mean(P_t1),mean(P_t2),mean(P_t3),mean(P_cl),
282 mean(Default(ndef,samplesize,sim,C)[,1]),mean(Default(t1def,
    samplesize,sim,C)[,1]),
283 mean(Default(t2def,samplesize,sim,C)[,1]),mean(Default(t3def,
    samplesize,sim,C)[,1]),mean(Default(cldef,samplesize,sim,C)
    [,1]),
284 mean(Default(ndef,samplesize,sim,C)[,2]),mean(Default(t1def,
    samplesize,sim,C)[,2]),
285 mean(Default(t2def,samplesize,sim,C)[,2]),mean(Default(t3def,
    samplesize,sim,C)[,2]),mean(Default(cldef,samplesize,sim,C)
    [,2]))),ncol=6)
286 colnames(simulation) <- c('Piiir','Keskmise kahju','Kahju
    standarthalve','Toenaosuse hinnang','Keskmise DF%','
    Keskmise defoltide arv')
287 rownames(simulation) <- c('Gauss','Student $\\nu_1=5$',
    'Student $\\nu_2=10$', 'Student $\\nu_3=20$', 'Clayton')
288 simulation.table <- xtable(simulation,caption="IS",label="
    koopula_vorreldus")
289 digits(simulation.table)[5] <- 4
290 display(simulation.table)[5] <- "e"
291 digits(simulation.table)[6] <- 4
292 print(simulation.table,type="latex",sanitize.text.function =
    function(x){x})

```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina **Natalja Joutsi**, isikukood: **48704142219** annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose **Olulise valimi meetod krediidiriski hindamisel koopulatega**, mille juhendaja on **prof. Tõnu Kollo**,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus _____

Allkiri _____