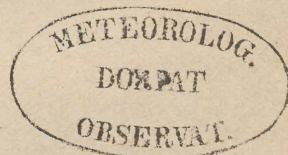


MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VII^E SÉRIE.
TOME XXVIII, N^o 6.

ZUR THEORIE
DES
ENCKE'SCHEN COMETEN

VON
O. BACKLUND.

(Lu le 2 Septembre 1880.)



N^o 708.

ST.-PÉTERSBOURG, 1881.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg:
MM. Eggers et C^{ie}
et J. Glasounof;

à Riga:
M. N. Kymmel;

à Leipzig:
Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 70 Kop. = 2 Mk. 30 Pf.

MEMOIRE
DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES DE S. PETERSBOURG
TOME LXXII. 1881.

PARIS

FRANCOISES COMPTES

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.

Mai 1881.

C. Vessélofski, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

I.

Die vorliegende Arbeit schliesst sich eng an die v. Asten'sche Abhandlung über die absoluten Jupiterstörungen des Encke'schen Cometen an. Es sind hier die allgemeinen Ausdrücke der Störungen erster Ordnung der sogenannten Hansen'schen Elemente, der mittleren Anomalie, des Logarithmus des Radius Vectors und des Sinus der Breite ermittelt für denjenigen Theil der Cometenbahn, welcher von den wahren Anomalien $f = 180^\circ$ und $f = 190^\circ$ eingeschlossen wird, so weit diese Ermittlung möglich ist ohne Kenntniss der entsprechenden Ausdrücke für die übrigen Theile der Bahn. Da Asten's Rechnungen sich auf denjenigen Theil der Cometenbahn beziehen, welcher zwischen $f = 170^\circ$ und $f = 180^\circ$ liegt, so kann man wohl jetzt die Hauptschwierigkeit bei der Ableitung der absoluten Jupiterstörungen als bewältigt ansehen, denn in den übrigen Theilen der Bahn weilt der Comet stets in grösserer Entfernung vom Jupiter.

Der Grund, warum ich diese Arbeit veröffentliche, ehe sämtliche Jupiterstörungen berechnet sind, ist vorwiegend theoretischer Natur. Die Methode, die ich bei der Entwicklung der Haupttheile der Störungfunction und deren Differentialquotienten angewandt habe, ist nämlich wesentlich von derjenigen verschieden, welcher Asten sich bediente.

Bekanntlich hat auch Asten seine betreffenden Rechnungen nach Gylden's Methode ausgeführt und zwar entwickelt er nach dessen älteren Vorschriften die Haupttheile der Störungfunction. Er substituirt also schon in dem Ausdruck für $(\Delta)^2$, das Quadrat der Entfernung der beiden Himmelskörper, das elliptische Integral für c' . Dadurch wurden — was ja auch das Hauptziel der Gylden'schen Methode ist — die Entwicklungen der negativen Potenzen von (Δ) oder vielmehr von $(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{1}{2}} (\Delta)$ sehr convergent. Für die Herstellung der Differentialausdrücke der Störungen hat man aber auch die Producte aus den negativen Potenzen von (Δ) in andere Grössen, welche Functionen der Coordinaten des störenden Körpers sind, nöthig. Die Einführung des elliptischen Integrales anstatt c' verringert die Convergenz dieser Grössen, und in Folge dessen wird auch die Bildung der genannten Pro-

ducte sehr mühsam. Selbstverständlich müssen überall in der Bahn die Endresultate nach demselben Argument in Bezug auf den störenden Körper angegeben werden, so lange die Partition nur bezüglich des gestörten Körpers stattgefunden hat. Das hindert aber nicht, dass in den vorhergehenden Entwicklungen verschiedene andere Argumente benutzt werden können; diese müssen jedoch so gewählt werden, dass nicht nur die Entwicklungen einfacher werden, sondern auch dass der Uebergang zu dem für die Endresultate festgesetzten Argumente ohne Schwierigkeit geschehen kann.

In einigen Aufsätzen in den «Comptes Rendus» und in Liouville's «Journal de Mathématiques», aber vor allem in seiner an eleganten Formeln und Entwicklungen reichhaltigen Arbeit: «Recueils de Tables» setzt Gylden auseinander, wie man die ersten Entwicklungen nach Functionen des elliptischen Integrals — nach elliptischen Functionen oder Verbindungen elliptischer Functionen — bewerkstelligen, und dann diese Entwicklungen in andere mit dem elliptischen Integrale als Argument verwandeln soll. Es wird zunächst nöthig sein, an die Hauptmomente dieser Auseinandersetzung zu erinnern.

Es lässt sich das Quadrat der Entfernung des Cometen vom Planeten in folgender Weise ausdrücken:

$$(\Delta)^2 = M'_0 + M'_1 \cos c' + M'_2 \cos 2c' + \dots \\ + N'_1 \sin c' + N'_2 \sin 2c' + \dots$$

wo c' die mittlere Anomalie des Planeten zu gewissen durch endliche Intervalle getrennten Zeiten ist. M'_0, M'_1, M'_2, \dots und N'_1, N'_2, \dots sind Functionen der Coordinaten des Cometen. Im Folgenden wird aber vorausgesetzt, dass sie numerische Coefficienten sind, was immer der Fall ist, wenn die Entwicklungen nach der partiellen Anomalie des Cometen mit Hilfe der mechanischen Quadratur ausgeführt werden. M'_2 und N'_2 sind von der ersten Ordnung, M'_3 und N'_3 von der zweiten u. s. w. in Bezug auf die Excentricität des störenden Planeten. Anstatt c' wird nun $\xi + F$ eingeführt — F ist eine Constante — und die daraus resultirende Gleichung wird dann mit

$$1 + x \cos \xi + y \sin \xi$$

multiplicirt. x und y sollen dabei so bestimmt werden, dass die Glieder in 2ξ verschwinden. Es wird also

$$(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)(\Delta)^2 = M_0 + M_1 \cos \xi + M_3 \cos 3\xi + \dots \\ + N_1 \sin \xi + N_3 \sin 3\xi + \dots$$

Wenn man nun

$$T_1 = M_0 + M_1 \cos \xi + N_3 \sin \xi$$

und

$$T_2 = M_3 \cos 3\xi + M_4 \cos 4\xi + \dots \\ + N_3 \sin 3\xi + N_4 \sin 4\xi + \dots$$

setzt, so wird

$$(1 + x \cos \xi + y \sin \xi) (\Delta)^2 = T_1 + T_2$$

In der Entwicklung

$$(\Delta)^{-n} = (1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{n}{2}} \left\{ T_1^{-\frac{n}{2}} - \frac{n}{2} T_1^{-\frac{n+2}{2}} T_2 + \frac{n(n+2)}{2 \cdot 4} T_1^{-\frac{n+4}{2}} T_2^2 - \dots \right\}$$

wo n eine ganze ungerade Zahl ist, kann man im Allgemeinen höhere Potenzen von T_2 als die zweite unberücksichtigt lassen, da T_2 von der zweiten Ordnung der Excentricität ist. Nach der Art, wie x und y bestimmt sind, ersieht man sogleich, dass diese Grössen von der ersten Ordnung sind. Die Entwicklung der Potenzen von

$$(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{1}{2}}$$

und von T_2 nach den Vielfachen von ξ bietet also keine Schwierigkeiten. Anders verhält es sich mit den negativen Potenzen von T_1 . Wenn nämlich M_0 und M_1 wenig von einander verschieden sind, wenn also das Verhältniss $\frac{M_1}{M_0}$ nahe gleich Eins ist, so wird die Reihe von $T_1^{-\frac{n}{2}}$ nach den Vielfachen von ξ nur sehr schwach convergiren, und in gewissen Fällen, wo der Comet und Planet einander nahe kommen können, wird eine derartige Entwicklung sogar practisch unausführbar. Diese Schwierigkeit wird von Gyldén dadurch beseitigt, dass er anstatt ξ ein anderes Argument einführt.

Setzt man

$$\frac{M_1}{M_0} = \Phi \cos \Lambda$$

$$\frac{N_1}{M_0} = -\Phi \sin \Lambda$$

so wird

$$T_1 = M_0 \{1 + \Phi \cos (\xi + \Lambda)\}$$

Gyldén's bekannte Substitution besteht nun darin, dass für ξ ein elliptisches Integral eingeführt wird durch die Gleichung

$$\xi = 2am \frac{2K}{\pi} x \pmod{k}$$

wo K , wie gewöhnlich, das vollständige elliptische Integral erster Gattung bedeutet. Diese Substitution bildet die Grundlage von Gyldén's schöner Theorie.

Der Ausdruck für T_1 wird dann

$$T_1 = M_0 \left\{ 1 + \Phi \cos \left(2am \frac{2K}{\pi} x + \Lambda \right) \right\} \dots \dots \dots \text{I}$$

Es ist

$$\text{Cos } 2 \text{ am } \frac{2k}{\pi} x = \frac{2}{k^2} \left(\Delta \text{ am } \frac{2K}{\pi} x \right)^2 - \frac{2-k^2}{k^2}$$

Mit Hülfe dieser Relation kann man schreiben

$$T_1 = M_0 k' (1 - k_1 \Phi \text{ Cos } \Lambda) \left(\frac{\Delta}{k'} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{2 \Phi \text{ Cos } \Lambda (1+k_1^2) - 2k_1}{k^2 (1+k_1)^2 (1-k_1 \Phi \text{ Cos } \Lambda)} - \frac{2 \Phi \text{ Cos } \Lambda (1+k_1^2) - 2k_1}{k^2 k' (1+k_1)^2 (1-k_1 \Phi \text{ Cos } \Lambda)} \left(\frac{k'}{\Delta} \right)^2 - \frac{\Phi \text{ Sin } \Lambda}{1-k_1 \Phi \text{ Cos } \Lambda} \frac{k' \text{ Sin } \xi}{\Delta} \right\}$$

Der Kürze wegen wird Δ anstatt $\Delta \text{ am } \frac{2K}{\pi} x$ geschrieben. Eine Verwechslung mit der Bezeichnung der Entfernung der Himmelskörper kann nicht stattfinden, da diese immer mit (Δ) bezeichnet werden wird. Ferner bedeutet k' den complementären Modulus von k , und k_1 den transformirten Modulus, der also mit k durch

$$k^2 = \frac{4k_1}{(1+k_1)^2}$$

verbunden ist, und mit k' durch

$$k' = \frac{1-k_1}{1+k_1}$$

Wird nun gesetzt

$$\begin{aligned} \Phi_1 \text{ Cos } \Lambda_1 &= \frac{\Phi \text{ Cos } \Lambda - k_1}{1 - k_1 \Phi \text{ Cos } \Lambda} \\ \Phi_1 \text{ Sin } \Lambda_1 &= \frac{\sqrt{1-k_1^2} \Phi \text{ Sin } \Lambda}{1 - k_1 \Phi \text{ Cos } \Lambda} \end{aligned}$$

so geht folgender Ausdruck hervor:

$$T_1 = M_0 k' (1 - k_1 \Phi \text{ Cos } \Lambda) \left(\frac{\Delta}{k'} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{2 \Phi_1 \text{ Cos } \Lambda_1 - k_1}{k^2 (1+k_1)^2} - \frac{2 \Phi_1 \text{ Cos } \Lambda_1 - k_1}{k^2 k' (1+k_1)^2} \left(\frac{k'}{\Delta} \right)^2 - \frac{\Phi_1 \text{ Sin } \Lambda}{\sqrt{1-k_1^2}} \frac{k' \text{ Sin } \xi}{\Delta} \right\} \dots \dots \dots \text{II}$$

Diese Formel findet man in der Einleitung zu den «Recueils de Tables». Durch dieselbe kann man unter gewissen Umständen folgende Entwicklung mit Vortheil herstellen:

$$T_1^{-\frac{n}{2}} = \sum \mu_{2i}^{(n)} \left(\frac{k'}{\Delta} \right)^{2i+1} + \frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \sum \nu_{2i} \left(\frac{k'}{\Delta} \right)^{2i}$$

Wird das dem Modulus k_1 zugehörige vollständige Integral mit K_1 bezeichnet, und

$$\text{am } \frac{2K_1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) = \psi$$

gesetzt, so kann man mit Hülfe der Anfangsgründe der elliptischen Functionen leicht beweisen, dass die Gleichungen

$$\frac{k'}{\Delta} = k' \frac{1 - k_1 \sin \psi}{1 + k_1 \sin \psi}$$

$$\sin \xi = \frac{\sqrt{1 - k_1^2} \cos \psi}{1 - k_1 \sin \psi}$$

bestehen müssen. Führen wir diese Ausdrücke in II ein, so resultirt zunächst

$$T_1 = M_0 (1 - k_1 \Phi \cos \Lambda) \frac{1 + k_1 \sin \psi}{1 - k_1 \sin \psi} \left\{ 1 + \frac{(\Phi_1 \cos \Lambda_1 - k_1) \sin \psi - \Phi_1 \sin \Lambda_1 \cos \psi}{1 + k_1 \sin \psi} \right\}$$

und daraus nach einer leichten Reduction folgende, ebenfalls in der genannten Einleitung gegebene Formel:

$$T_1 = M_0 \frac{1 - k_1 \Phi \cos \Lambda}{1 - k_1 \sin \psi} \left\{ 1 + \Phi_1 \sin(\psi - \Lambda_1) \right\} \dots \dots \dots \text{III}$$

Man hätte diese Formel auch unmittelbar aus I ableiten können, und dann III aus II. Da zufolge der Definition von Φ_1 diese Grösse nothwendig kleiner ist als Φ , so lassen sich die negativen Potenzen der Grösse innerhalb der Klammer nach den Vielfachen von ψ mit Vortheil entwickeln. Es wird

$$T_1^{-\frac{n}{2}} = (1 - k_1 \sin \psi)^{\frac{n}{2}} \left\{ \begin{aligned} &L_{c,0}^{(n)} + L_{c,1}^{(n)} \cos \psi + L_{c,2}^{(n)} \cos 2 \psi + \dots \\ &+ L_{s,1}^{(n)} \sin \psi + L_{s,2}^{(n)} \sin 2 \psi + \dots \end{aligned} \right\}$$

Es können auch mehrere andere Formen für T_1 aufgestellt werden. In der Einleitung zu den «Recueil de Tables» gibt Gylden noch zwei Formen, welche in Bezug auf ihre Entwickelbarkeit in Reihen genau denselben Bedingungen unterliegen wie II. Da sie im Folgenden keine Verwendung finden, so wird es überflüssig sein, sie hier anzuführen.

Da meine Rechnungen sich an diejenigen Asten's anschliessen sollen, so stand mir natürlicherweise die Wahl des Modulus nicht mehr frei. Dieser ist also derselbe, welchen Gylden schon in seiner ersten Abhandlung über die Anwendung der Theorie der elliptischen Functionen auf die Störungstheorie angenommen hat, und der seinen Tafeln zu Grunde gelegt ist, nämlich:

$$\log k = 9,99736685.$$

Die Zweckmässigkeit dieser Wahl hat sich in Bezug auf den Encke'schen Cometen gut bewährt, nicht nur für die Jupiterstörungen, sondern auch für die Erdstörungen.

Die Anwendbarkeit der Formel II hängt nun wesentlich von der Grösse $\Phi_1 \cos \Lambda_1 - k_1$ ab, denn bei der Einführung von ξ durch

$$c' = \xi + F$$

wird es vortheilhaft sein, F so zu bestimmen, dass die Sinus-Glieder möglichst klein werden, namentlich in der Nähe der Minima von (Δ) . Λ_1 ist also in der Nähe dieser Minima ein

kleiner Winkel, der langsam variirt; $\Phi_1 \sin \Lambda_1$ wird deshalb meistens eine so kleine Grösse sein, dass daraus keinerlei Schwierigkeiten entstehen für die Entwicklung der negativen Potenzen von T_1 . In Folge des angenommenen Werthes von k kann aber $\Phi_1 \cos \Lambda_1 - k_1$ nie in grossen Entfernungen des Cometen vom Planeten hinreichend klein werden, um die Formel II anwendbar zu machen. Wenn mehr als 17 Potenzen von $\frac{k'}{\Delta}$ berücksichtigt werden müssen, so hört sie überhaupt auf, mit Erfolg anwendbar zu sein. In den Minima von (Δ) und deren Nähe ist aus denselben Gründen $\Phi_1 \cos \Lambda_1 - k_1$ eine kleine Grösse, und in der That kann in solchen Fällen bei den Jupiterstörungen $T_1^{-\frac{n}{2}}$ in rasch convergirende Reihen entwickelt werden.

Von grösserer Wichtigkeit ist die Formel III, denn sie ist immer anwendbar, wo überhaupt davon die Rede sein kann, absolute Störungen zu berechnen. Dass sie in ihrer Anwendung schwieriger wird bei grossen und kleinen Entfernungen der beiden Körper, als bei mittleren, ersieht man sofort aus der Definition von Φ_1 .

Die angedeuteten Entwicklungen, sei es nach den Potenzen von $\frac{k'}{\Delta}$, wenn dies zweckmässig ist, sei es in trigonometrische Reihen nach den Vielfachen von ψ , lassen sich immer leicht ausführen. Hat man nun $T_1^{-\frac{n}{2}}$ in der einen oder anderen Weise entwickelt, so könnte man mittelst Gylden's Tafeln das Argument α einführen und, nachdem die Factoren dieser Grösse ebenfalls durch dasselbe Argument ausgedrückt sind, $(\Delta)^{-n}$ nach gehörigen Multiplicationen durch trigonometrische Reihen nach dem Argumente α darstellen. Abgesehen davon, dass dieser Weg gewiss nicht der einfachste ist, würde er zu denselben Operationen bei der Bildung der Producte $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \cos f'$ und $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \sin f'$ führen, welche nach Asten's Erfahrungen besonders mühsam sind, und es waren gerade diese Operationen, die vermieden werden sollten. In der Einleitung zu den «Recueils de Tables» wird folgende Methode angegeben. Bei der Ableitung von $(\Delta)^{-3}$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \cos f'$ und $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \sin f'$ *) müssen die $T^{-\frac{n}{2}}$ mit Reihen von der Form

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cos \xi + a_2 \cos 2\xi + \dots \\ + b_1 \sin \xi + b_2 \sin 2\xi + \dots \end{aligned}$$

multiplicirt werden. Das Resultat muss also, wenn die $T_1^{-\frac{n}{2}}$ nach den steigenden Potenzen von $\frac{k'}{\Delta}$ entwickelt worden sind, aus einem Aggregat von Gliedern bestehen, deren allgemeine Form ist

$$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{2s+1} \cos i\xi, \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{2s+1} \sin i\xi, \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{2s} \frac{\sin \xi}{\Delta} \cos i\xi, \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{2s} \frac{\sin \xi}{\Delta} \sin i\xi$$

*) Ich werde im Folgenden immer $(\Delta)^{-3}$ in den Formeln anwenden, da in den Störungsausdrücken erster Ordnung nur diese Potenz von (Δ) vorkommt.

Mit Hülfe der Gyldén'schen Tafeln erhält man dann die Grössen $(\Delta)^{-3}$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Cos } f'$ und $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Sin } f'$ als trigonometrische Reihen nach den Vielfachen von x . In dieser Weise werden aber die Vortheile, welche die Form II gestattet, bei den Entwicklungen von $T_1 - \frac{n}{2}$ nicht verwerthet; wenn nämlich beispielsweise $T - \frac{3}{2}$ 16 Glieder enthält, so wird $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Cos } f'$ mehr als hundert der angeführten Art enthalten; und es entsteht also factisch eine sehr schwach convergirende Reihe. Der grösste Nachtheil liegt aber nicht in der mühsamen Herstellung der angeführten Form, sondern in der grossen Arbeit, die der Uebergang zum Argument x fordert; diese kann nicht in mässiger Zeit bewältigt werden. Es ist mir gelungen, eine leichte Methode zu finden, mittelst welcher $(\Delta)^{-3}$ und die Producte $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Cos } f'$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Sin } f'$ auf dieselbe Form gebracht werden können wie $T_1 - \frac{n}{2}$. In der folgenden Abtheilung wird dieselbe auseinandergesetzt werden.

Aus der Definition von ψ folgt.

$$\text{Cos } i \xi = \frac{m_0^{(i)} + m_1^{(i)} \text{Sin } \psi + m_2^{(i)} \text{Cos } 2\psi + \dots + m_i^{(i)} \text{Cos } i\psi}{(1 - k_1 \text{Sin } \psi)^i}$$

$$\text{Sin } i \xi = \frac{n_0^{(i)} + n_1^{(i)} \text{Cos } \psi + n_2^{(i)} \text{Sin } 2\psi + \dots + n_i^{(i)} \text{Sin } i\psi}{(1 - k_1 \text{Sin } \psi)^i}$$

Diese Ausdrücke zu Grunde legend, zeigt Gyldén, wie mit Hülfe einer Tafel in der «Collection des Formules» $(\Delta)^{-3}$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Cos } f'$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Sin } f'$ auf die Form

$$(1 - k_1 \text{Sin } \psi)^{\frac{1}{2}} \sum \frac{\alpha_i^{(1)} \text{Cos } i\psi}{\beta_i^{(1)} \text{Sin } i\psi} + (1 - k_1 \text{Sin } \psi)^{-\frac{1}{2}} \sum \frac{\alpha_i^{(2)} \text{Cos } i\psi}{\beta_i^{(2)} \text{Sin } i\psi} + (1 - k_1 \text{Sin } \psi)^{-\frac{3}{2}} \sum \frac{\alpha_i^{(3)} \text{Cos } i\psi}{\beta_i^{(3)} \text{Sin } i\psi}$$

gebracht werden können. $(1 - k_1 \text{Sin } \psi)^{\frac{1}{2}} \frac{\text{Cos } i\psi}{\text{Sin } i\psi}$, $(1 - k_1 \text{Sin } \psi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\text{Cos } i\psi}{\text{Sin } i\psi}$ und $(1 - k_1 \text{Sin } \psi)^{-\frac{3}{2}} \frac{\text{Cos } i\psi}{\text{Sin } i\psi}$ sind in den «Recueils de Tables» in trigonometrische Reihen nach den Vielfachen von x gegeben; mittelst dieser erhält man also das erwünschte Resultat in Reihen nach x ausgedrückt. Die angeführte Formel ist aber nicht zweckmässig, denn die Berechnung der Coefficienten in derselben ist besonders zeitraubend; die mit $(1 - k_1 \text{Sin } \psi)^{-\frac{3}{2}}$ multiplicirte Reihe muss z. B. mit einer Decimalstelle mehr entwickelt werden als die beiden anderen, da die Ausdrücke von $(1 - k_1 \text{Sin } \psi)^{-\frac{3}{2}} \frac{\text{Cos } i\psi}{\text{Sin } i\psi}$ nach x mehrere Coefficienten enthalten, die grösser sind als Eins. Noch lästiger ist jedoch die Mühe, welche mit der Anwendung der Tafeln behufs Ueberganges zum Argument x verbunden ist. Die Berechnung eines speciellen Werthes von $(\Delta)^{-3}$ überzeugte mich, dass es vortheilhafter ist, die eben auseinandergesetzte Methode auf diese Grösse $(\Delta)^{-3}$ zu beschränken und dann, nachdem $\frac{r'}{a'} \text{Cos } f'$ und $\frac{r'}{a'} \text{Sin } f'$ in x aus-

gedrückt sind, durch mechanische Multiplication die Producte $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Cos } f'$ und $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Sin } f'$ zu bilden. Dies zeigt also ohne Weiteres, dass durchaus ein anderer Weg eingeschlagen werden muss. In der That kann man den Grössen $(\Delta)^{-3}$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Cos } f'$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Sin } f'$ die einfache Form geben:

$$(1 - k_1 \text{Sin } \psi)^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum \frac{\alpha_i \text{Cos}}{\beta_i \text{Sin}} \right\} i \psi$$

Dadurch wird die Arbeit, namentlich bei dem Umtausch von ψ gegen x , bedeutend reducirt. Wird Gyldén's neue Methode so angewandt, wie ich in den nächsten Abtheilungen auseinandersetzen werde, so wird sie, dessen bin ich überzeugt, nicht unbedeutende Vorzüge vor der älteren, von Asten angewandten Methode besitzen.

II.

Es wäre vielleicht richtiger, die Formel III zuerst zu behandeln, da diese hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit von allgemeinerer Bedeutung ist. Wenn wir jedoch erst die Formel II einer näheren Untersuchung unterwerfen, so geschieht das, weil sie in den folgenden Rechnungen eine grössere Verwendung gefunden hat.

Die Formel II ist im Allgemeinen anwendbar, so lange $\Phi_1 \text{Cos } \Lambda_1 - k_1$ positiv ist; bei den Jupiterstörungen verliert sie aber ihre Vorzüge mit dem Zeichenwechsel dieser Grösse. Unter der Voraussetzung, dass $\Phi_1 \text{Cos } \Lambda_1 - k_1$ positiv ist, wird es zweckmässig sein, sie folgendermaassen zu schreiben:

$$T_1 = B \left(\frac{\Delta}{k'} \right)^2 \left\{ 1 - C \left(\frac{k'}{\Delta} \right)^2 - D \frac{k' \text{Sin } \xi}{\Delta} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

wo also

$$B = M_0 k' (1 - k_1 \Phi \text{Cos } \Lambda) \left(1 + \frac{2}{k^2} \frac{\Phi_1 \text{Cos } \Lambda_1 - k_1}{(1 + k_1)^2} \right)$$

$$C = \frac{2 M_0 k' (1 - k_1 \Phi \text{Cos } \Lambda) (\Phi_1 \text{Cos } \Lambda_1 - k_1)}{k^2 k' (1 + k_1)^2 B}$$

$$D = \frac{M_0 k' (1 - k_1 \Phi \text{Cos } \Lambda) \Phi_1 \text{Sin } \Lambda_1}{\sqrt{1 - k_1^2} B}$$

Man kann auch unmittelbar aus

$$T = M_0 + M_1 \cos \xi + N_1 \sin \xi$$

eine der Formel (I) ähnliche Form ableiten.

Berücksichtigen wir nämlich die Relation

$$\cos \xi = \frac{2}{k^2} \Delta^2 - \frac{1+k'^2}{k^2}$$

und setzen

$$\mu = M_0 - M_1 - (M_0 + M_1) k'^2$$

so giebt eine leichte Rechnung

$$T_1 = \frac{2k'^2 M_1}{k^2} \left(\frac{\Delta}{k'}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{\mu}{2k'^2 M_1} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^2 + \frac{k^2 N_1}{2k' M_1} \frac{k'}{\Delta} \frac{\sin \xi}{\Delta} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Diese Form ist für numerische Rechnungen oft bequemer als (1); sie gestattet aber nicht immer eine hinreichend convergente Reihenentwicklung, wo dies mit (1) der Fall ist.

Um nun die negativen Potenzen von T_1 zu entwickeln, schreiben wir

$$U = \frac{C}{\lambda} \frac{k'}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta} + a \frac{\sin \xi}{\Delta} \right)$$

Es ist hier

$$a = \frac{D}{C}$$

gesetzt, und λ bedeutet den grössten numerischen Werth von

$$C \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^2 + D \frac{k'}{\Delta} \frac{\sin \xi}{\Delta}$$

U kann deshalb den Werth Eins nicht übersteigen, und wir können $T_1^{-\frac{n}{2}}$ nach den steigenden Potenzen von λ entwickeln, wenn diese Grösse kleiner als Eins ist. Es ist aber zweckmässiger, eine andere Grösse η einzuführen, welche durch

$$\lambda = \frac{2\eta}{1+\eta^2}$$

mit λ verbunden ist. Damit die Formel (1) bei der Ermittlung der Jupiterstörungen überhaupt anwendbar sei, darf λ den Werth 0,35 nicht wesentlich überschreiten; diese Substitution muss also zur Erreichung einer grösseren Convergenz sehr wirksam sein.

Es wird dadurch

$$T_1 = \frac{B}{1+\eta^2} \left(\frac{\Delta}{k'}\right)^2 \{1 - 2\eta U + \eta^2\}$$

und daraus

$$T_1 - \frac{n}{2} = \left(\frac{1+\eta^2}{B}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^n \{U_0^{(n)} + \eta U_1^{(n)} + \eta^2 U_2^{(n)} + \dots\}$$

Mit U sind die $U^{(n)}$ verbunden durch

$$U_0^{(n)} = 1$$

$$U_1^{(n)} = \frac{n}{2} \cdot 2U$$

$$U_2^{(n)} = \frac{n}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot 2^2 U^2 - \frac{s}{2}$$

$$U_3^{(n)} = \frac{n}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} \cdot 2^3 U^3 - \frac{n}{2} \cdot \frac{n+1}{1} \cdot 2U$$

.....

$$U_m^{(n)} = \frac{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} + 1 \dots \frac{n}{2} + m - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \left\{ 2^m U^m - \frac{m(m-1)}{1 \left(\frac{n}{2} + m - 1\right)} 2^{m-2} U^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \left(\frac{n}{2} + m - 1\right) \left(\frac{n}{2} + m - 2\right)} 2^{m-4} U^{m-4} - \dots \right\}$$

.....

Diesen Relationen zufolge können wir schreiben:

$$T_1 - \frac{n}{2} = \left(\frac{1+\eta^2}{B}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^n \{E_0^{(n)} + E_1^{(n)} U + E_2^{(n)} U^2 + \dots\}$$

Es sollen also die Coefficienten in dieser Reihe ermittelt werden. Zu dem Zwecke bemerken wir, dass die Zahl der Glieder hier genau dieselbe ist, welche in der Reihe nach η berücksichtigt wird.

Wir nehmen dann an, dass die Annäherung die Berücksichtigung der m^{ten} Potenz von η fordert, und es sei zuerst m eine gerade Zahl $= 2s$. Dann ist

$$E_0^{(n)} = 1 - \frac{n}{2} \eta + \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \eta^2 - \dots + (-1)^s \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \dots \frac{n+s-1}{s} \eta^s$$

$$E_1^{(n)} = \frac{n}{2} \cdot 2\eta \left\{ 1 - \frac{\frac{n}{2}+1}{1} z + \frac{\frac{n}{2}+1}{1} \cdot \frac{\frac{n}{2}+2}{2} z^2 - \dots + (-1)^{s-1} \frac{\frac{n}{2}+1}{1} \cdot \frac{\frac{n}{2}+1}{2} \dots \frac{\frac{n}{2}+s-1}{s-1} z^{s-1} \right\}$$

$$E_2^{(n)} = \frac{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}+1}{1 \cdot 2} \cdot 2^2 \eta^2 \left\{ 1 - \frac{\frac{n}{2}+2}{1} z + \frac{\frac{n}{2}+2}{1} \cdot \frac{\frac{n}{2}+3}{2} z^2 - \dots + (-1)^{s-1} \frac{\frac{n}{2}+2}{1} \cdot \frac{\frac{n}{2}+3}{2} \dots \frac{\frac{n}{2}+s}{s-1} z^{s-1} \right\}$$

$$E_3^{(n)} = \frac{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}+1 \cdot \frac{n}{2}+2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2^3 \eta^3 \left\{ 1 - \frac{\frac{n}{2}+3}{1} z + \frac{\frac{n}{2}+3}{1} \cdot \frac{\frac{n}{2}+4}{2} z^2 - \dots + (-1)^{s-2} \frac{\frac{n}{2}+3}{1} \cdot \frac{\frac{n}{2}+4}{2} \dots \frac{\frac{n}{2}+s}{s-2} z^{s-2} \right\}$$

Wenn m ungerade ist und $= 2s + 1$, so wird

$$E_0^{(n)} = 1 - \frac{n}{2} z + \frac{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}+1}{1 \cdot 2} z^2 - \dots + (-1)^s \frac{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}+1}{1 \cdot 2} \dots \frac{\frac{n}{2}+s-1}{s} z^s$$

$$E_1^{(n)} = \frac{n}{2} \cdot 2\eta \left\{ 1 - \frac{\frac{n}{2}+1}{1} z + \frac{\frac{n}{2}+1}{1} \cdot \frac{\frac{n}{2}+2}{2} z^2 - \dots + (-1)^s \frac{\frac{n}{2}+1}{1} \cdot \frac{\frac{n}{2}+2}{2} \dots \frac{\frac{n}{2}+s}{s} z^s \right\}$$

$$E_2^{(n)} = \frac{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}+1}{1 \cdot 2} \cdot 2^2 \eta^2 \left\{ 1 - \frac{\frac{n}{2}+2}{1} z + \frac{\frac{n}{2}+2}{1} \cdot \frac{\frac{n}{2}+3}{2} z^2 - \dots + (-1)^{s-1} \frac{\frac{n}{2}+2}{1} \cdot \frac{\frac{n}{2}+3}{2} \dots \frac{\frac{n}{2}+s}{s-1} z^{s-1} \right\}$$

$$E_3^{(n)} = \frac{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}+1 \cdot \frac{n}{2}+2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2^3 \eta^3 \left\{ 1 - \frac{\frac{n}{2}+3}{1} z + \frac{\frac{n}{2}+3}{1} \cdot \frac{\frac{n}{2}+4}{2} z^2 - \dots + (-1)^{s-1} \frac{\frac{n}{2}+3}{1} \cdot \frac{\frac{n}{2}+4}{2} \dots \frac{\frac{n}{2}+s+1}{s-1} z^{s-1} \right\}$$

Im Aufsätze*) «Zur Entwicklung der negativen ungeraden Potenzen der Quadrat-

*) Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St.-Petersbourg. Tome V.

wurzel der Function $(1 - 2\eta U + \eta^2)$ habe ich folgende Relationen zwischen den E -Coefficienten abgeleitet:

$$E_{2i-1}^{(n)} = -\frac{2\eta}{2i-1} \frac{\partial E_{2i-2}^{(n)}}{\partial z}$$

$$E_{2i}^{(n)} = -\frac{2\eta}{2i} \frac{\partial E_{2i-1}^{(n)}}{\partial z} + (-1)^{n-i} \frac{\Pi\left(\frac{n}{2} - 1 + s + i\right)}{\Pi\left(\frac{n}{2} - 1\right) \Pi(2i) \Pi(n-i)} \cdot 2^{2i} \eta^{2i} z^{s-i}$$

oder:

$$E_{2i-1}^{(n)} = -\frac{2\eta}{2i-1} \frac{\partial E_{2i-2}^{(n)}}{\partial z} + (-1)^{n+1-i} \frac{\Pi\left(\frac{n}{2} - 1 + s + i\right)}{\Pi\left(\frac{n}{2} - 1\right) \Pi(2i-1) \Pi(n+1-i)} 2^{2i-1} \eta^{2i-1} z^{n+1-i}$$

$$E_{2i}^{(n)} = -\frac{2\eta}{2i} \frac{\partial E_{2i-1}^{(n)}}{\partial z}$$

je nachdem m gerade oder ungerade ist. Es ist $z = \eta^2$, Π das Gaussische Zeichen und also

$$\Pi\left(\frac{n}{2} + s\right) = \left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{n}{2} + 2\right) \dots \left(\frac{n}{2} + s\right) \Pi\left(\frac{n}{2}\right)$$

Mittelst dieser Formeln ist die beigefügte Tafel für $n = 3$ berechnet. Ihr Zweck ist, die E für dieses n leicht zu geben. $E_0^{(3)}$ ist in derselben nicht aufgenommen, da dieser Coefficient sich leichter durch

$$(1 + \eta^2)^{-\frac{3}{2}}$$

berechnen lässt.

	1	η^2	η^4	η^6
$\frac{1}{\eta} E_1^{(3)}$	0,4771213	0,8750613 _n	1,1180993	1,2941905 _n
$\frac{1}{\eta^2} E_2^{(3)}$	0,8750613	1,4191293 _n	1,7713118	2,0345532 _n
$\frac{1}{\eta^3} E_3^{(3)}$	1,2430380	1,8962505 _n	2,3355832	
$\frac{1}{\eta^4} E_4^{(3)}$	1,5952205	2,3355832 _n	2,8474667	
$\frac{1}{\eta^5} E_5^{(3)}$	1,9376432	2,7505567 _n		
$\frac{1}{\eta^6} E_6^{(3)}$	2,2734354	3,1484967 _n		
$\frac{1}{\eta^7} E_7^{(3)}$	2,6044287			
$\frac{1}{\eta^8} E_8^{(3)}$	2,9317876			

Die Zahlen sind Logarithmen. Die Anwendung dieser Tafel ist ohne Weiteres klar.

Für $n = 5, 7$ u. s. w. könnte man wohl dasselbe Verfahren bei der Berechnung der E anwenden, da aber diese für höhere Werthe von n aus den oben angeführten Gründen nicht mit demselben Grad von Annäherung ermittelt zu werden brauchen wie $E_i^{(3)}$, so wird die folgende bequeme Methode hinreichend genau sein.

Aus

$$(1 - 2\eta U + \eta^2)^{-\frac{n}{2}} = E_0^{(n)} + E_1^{(n)} U + E_2^{(n)} U^2 + E_3^{(n)} U^3 + \dots$$

erhält man durch Differentiation nach η

$$(1 - 2\eta U + \eta^2)^{-\frac{n+2}{2}} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\eta} E_1^{(n)} - \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{\eta} E_2^{(n)} U - \frac{3}{n} \cdot \frac{1}{\eta} E_3^{(n)} U^2 - \dots$$

andererseits ist

$$(1 - 2\eta U + \eta^2)^{-\frac{n+2}{2}} = E_0^{(n+2)} + E_1^{(n+2)} U + E_2^{(n+2)} U^2 + \dots$$

es wird also

$$E_i^{(n+2)} = -\frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{\eta} E_{i+1}^{(n)}$$

Nachdem die E -Coefficienten für alle nöthigen Werthe von n berechnet sind, müssen die Potenzen von U auf die Form

$$U^i = p_0^{(i)} + p_2^{(i)} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^2 + \dots + p_i^{(i)} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{2i} \\ + \frac{\sin \xi}{\Delta} \left\{ p_1^{(i)} \frac{k'}{\Delta} + \dots + p_{i-1}^{(i)} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{2i-1} \right\}$$

gebracht werden.

Wir hatten

$$U = \frac{C}{\lambda} \cdot \frac{k'}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta} + a \frac{\sin \xi}{\Delta} \right)$$

und folglich wird

$$U^i = \left(\frac{C}{\lambda}\right)^i \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^i \left\{ \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^i + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} \alpha^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{i-2} \frac{\sin^2 \xi}{\Delta^2} + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^4 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{i-4} \frac{\sin^4 \xi}{\Delta^4} + \dots \right. \\ \left. + \frac{\sin \xi}{\Delta} \left(i \alpha \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{i-1} + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{i-3} \frac{\sin^2 \xi}{\Delta^2} + \frac{i(i-1)\dots(i-4)}{1 \cdot \dots \cdot 5} \alpha^5 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{i-5} \frac{\sin^4 \xi}{\Delta^4} + \dots \right) \right\}$$

Die Functionen $\frac{\sin^{2r} \xi}{\Delta^{2r}}$ werden eliminirt durch die Formel (Gylden: «Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie», pag. 65):

$$\begin{aligned} \frac{k^{4r}}{2^r} \frac{\sin^{2r} \xi}{\Delta^{2r}} &= 1 + \frac{r}{1} \cdot \frac{r}{1} k'^2 + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} k'^4 + \dots \\ &- \frac{r}{1} \left\{ 1 + \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} k'^2 + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(r-1)(r-2)}{2 \cdot 3} k'^4 + \dots \right\} \left\{ \left(\frac{k'}{\Delta} \right)^2 + \Delta^2 \right\} \\ &+ \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} \left\{ 1 + \frac{r}{1} \cdot \frac{r-2}{3} k'^2 + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(r-2)(r-3)}{3 \cdot 4} k'^4 + \dots \right\} \left\{ \left(\frac{k'}{\Delta} \right)^4 + \Delta^4 \right\} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Wodurch die obige Form erlangt wird. Man könnte auch die p -Coefficienten successive durch mechanische Multiplication berechnen und jedesmal $\frac{\sin^2 \xi}{\Delta^2}$ durch die eben angeführte Formel, so wie sie sich für $r = 1$ gestaltet, eliminiren. Dieses Verfahren ist entschieden vortheilhafter, wenn man genöthigt ist, die Form

$$U = \alpha + \beta \left(\frac{k'}{\Delta} \right)^2 + \gamma \left(\frac{k'}{\Delta} \right) \frac{\sin \xi}{\Delta}$$

beizubehalten.

Wenn die Ausdrücke für U^i ermittelt sind, so müssen sie mit den zugehörigen $\left(\frac{B}{1+\eta^2} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{k'}{\Delta} \right)^n E_i^{(n)}$ multiplicirt werden. In dieser Weise erhalten dann die $T_1 - \frac{n}{2}$ nach gehöriger Reduction die Form

$$f_1 \left(\frac{k'}{\Delta} \right) + \frac{\sin \xi}{\Delta} f_2 \left(\frac{k'}{\Delta} \right)$$

wo $f_1 \left(\frac{k'}{\Delta} \right)$ und $f_2 \left(\frac{k'}{\Delta} \right)$ nach den Potenzen von $\frac{k'}{\Delta}$ fortschreitende Reihen bedeuten, die erste nach den ungeraden, die zweite nach den geraden.

Es wurde für diese Darlegung die binomische Form von U gewählt; dass sie auch gilt, wenn die trinomische — was selten eintritt — angewandt werden muss, ist leicht einzusehen.

Ein durchgeführtes Beispiel wird am Besten die auseinandergesetzte Methode beleuchten.

Von den im Folgenden gegebenen in Bezug auf die partielle Anomalie speciellen Werthen von T_1 wählen wir:

$$T_1 = 47,065291 + 46,143744 \cos \xi - 1,526680 \sin \xi \dots (\alpha)$$

Durch Anwendung der Formel (2) erhalten wir nach der Reihe

$$\begin{aligned} \log \frac{\mu}{2 k'^2 M_1} &= 9,2588998_n \log \lambda = 9,4242761 \\ \text{» } \frac{k^2 n_1}{2 k' M_1} &= 9,1727915_n \text{ » } \eta = 9,1311179 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \left\{ \frac{2 k'^2 M_1}{k^2 (1 + \eta^2)} \right\}^{\frac{3}{2}} m' &= 2,2277877 \text{ in Secunden} \\ \text{» } \left\{ \frac{2 k'^2 M_1}{k^2 (1 + \eta^2)} \right\}^{\frac{5}{2}} m' &= 2,1841556 \text{ » } \text{ »} \\ \text{» } \left\{ \frac{2 k'^2 M_1}{k^2 (1 + \eta^2)} \right\}^{\frac{7}{2}} m' &= 2,1405235 \text{ » } \text{ »} \end{aligned}$$

wo m' die Jupitermasse bedeutet. Mit Hülfe der gegebenen Tafel und der Formel

$$E_i^{(n+2)} = - \frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{\eta} E_{i+1}^{(n)}$$

berechnen wir die E -Coefficienten für $n = 3, 5$ und 7 , und erhalten

i	$\log E_i^{(3)}$	$\log E_i^{(5)}$	$\log E_i^{(7)}$
0	2,2159800	2,164475	2,11302
1	1,816346	1,986735	2,08139
2	1,337576	1,654083	1,8550
3	0,828833	1,251623	1,5415
4	0,301434	0,81315	1,2395
5	9,766056	0,4142	0,8477
6	9,287931	9,9433	
7	8,75504		

Die Factoren $\left\{ \frac{2 k'^2 M_1}{k^2 (1 + \eta^2)} \right\}^{\frac{n}{2}} m'$ sind schon in diesen Zahlen enthalten. Mit dem vorstehend gegebenen Werthe von ξ gibt die directe Rechnung

$$T_1^{-\frac{3}{2}} = 173''4140; T^{-\frac{5}{2}} = 159''58; T^{-\frac{7}{2}} = 146''8$$

Aus den E -Coefficienten erhalten wir

$$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^3 \sum_{i=0}^{i=7} E_i^{(3)} = 173''4137; \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^5 \sum_{i=0}^{i=6} E_i^{(5)} = 159''55; \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^7 \sum_{i=0}^{i=5} E_i^{(7)} = 146''8$$

woraus wir ersehen, dass die Rechnungen richtig sind. Weiter wird

$$U = 9,8346237_n \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^2 + 9,7485154_n \frac{k'}{\Delta} \frac{\sin \xi}{\Delta}$$

und daraus

	U^2	U^3	U^4	U^5	U^6	U^7
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^0$	8,190718 _n		6,3814		4,572 _n	
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^2$	0,1148964	8,502463	8,60657 _n	6,9160 _n	6,9736	5,2553
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^4$	9,9139238 _n	0,4265715 _n	0,228750	9,140162 _n	8,893319 _n	7,65292 _n
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^6$		0,3653962	9,471399	0,769712 _n	0,318781	9,57922
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^8$			0,238357 _n	0,863374	0,739122	1,036160 _n
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{10}$				0,231107 _n	1,105584 _n	1,092143
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{12}$					0,729448	0,380866
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{14}$						0,637845 _n
$\frac{k'}{\Delta} \frac{\sin \xi}{\Delta}$		7,93923		6,1299 _n		4,320
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^3 \frac{\sin \xi}{\Delta}$	9,8841691	9,8633418 _n	8,37592 _n	8,35509	6,7424	6,7221 _n
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^5 \frac{\sin \xi}{\Delta}$		8,804058 _n	0,300026	9,969770 _n	8,96786 _n	8,638081
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^7 \frac{\sin \xi}{\Delta}$			0,099120 _n	0,184524 _n	0,594966	0,043027 _n
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^9 \frac{\sin \xi}{\Delta}$				0,262151	0,483799 _n	0,760612 _n
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{11} \frac{\sin \xi}{\Delta}$					9,470483 _n	0,965122
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{13} \frac{\sin \xi}{\Delta}$						0,447768 _n

Wenn man in diesen Reihen die Werthe von $\frac{k'}{\Delta}$ und $\frac{\sin \xi}{\Delta}$ einführt, welche dem angeführten Werth von ξ entsprechen, d. h. in diesem Falle

$$\log \frac{k'}{\Delta} = 9,9406592$$

$$\text{» } \frac{\sin \xi}{\Delta} = 9,9921328$$

so muss die Summe jeder verticalen Reihe gleich 1 sein. Dadurch wird diese Rechnung controlirt. Werden dann diese Ausdrücke für U^i in gehöriger Weise mit den schon berechneten $E_i^{(n)}$ multiplicirt, so ergeben sich, nach einfacher Zusammenziehung der Glieder gleicher Potenz, die $T_1^{-\frac{3}{2}}$, $T_1^{-\frac{5}{2}}$, $T_1^{-\frac{7}{2}}$ als Reihen nach den Potenzen von $\frac{k'}{\Delta}$; sie werden später bei der Zusammenstellung sämtlicher Rechnungen dieser Art auftreten und zwar bei $w_4 = 75^\circ$. Die Substitution der schon gefundenen Werthe für $\frac{k'}{\Delta}$ und $\frac{\sin \xi}{\Delta}$ muss dann wieder die angeführten Werthe von $T_1^{-\frac{3}{2}}$, $T_1^{-\frac{5}{2}}$, $T_1^{-\frac{7}{2}}$ geben. Es wird resp.

$$173,4136; 159,55; 146,8.$$

Wir haben bei diesem Beispiele die Formel (2) zum Ausgangspunkt genommen. Die Formel (1) hätte einen etwas kleineren Werth von η gegeben.

Die eben beschriebenen Rechnungen lassen sich sehr leicht ausführen; mit einiger Uebung kann man, wenn (α) gegeben ist, $T_1^{-\frac{3}{2}}$, $T_1^{-\frac{5}{2}}$, $T_1^{-\frac{7}{2}}$ in die angegebenen Reihen bequem in 4 Stunden entwickeln.

Herr Gylden hat mir eine Methode mitgetheilt, $T^{-\frac{n}{2}}$ zu entwickeln, die an Eleganz und, wie es scheint, auch an Zweckmässigkeit nichts zu wünschen übrig lässt. Obgleich ich bis jetzt keine Gelegenheit gehabt habe, diese Methode anzuwenden, so wird die gegenwärtige Untersuchung der Form II wesentlich gewinnen, wenn ich von seiner freundlichen Erlaubniss, sie hier mitzutheilen, Gebrauch mache.

Es sei

$$\begin{aligned}\cos \gamma &= 1 - \frac{2}{k^2} + \frac{2}{k^2} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^2 \\ \sin \gamma &= \frac{k'}{\Delta} \cdot \frac{\sin \xi}{\Delta}\end{aligned}$$

oder

$$\gamma = 2 \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

wird ferner gesetzt

$$\begin{aligned}\Phi' \cos \Lambda' &= \frac{\Phi_1 \cos \Lambda_1 - k_1}{1 - k_1 \Phi_1 \cos \Lambda_1} \\ \Phi' \sin \Lambda' &= \frac{\sqrt{1 - k_1^2} \Phi_1 \sin \Lambda_1}{\sqrt{1 - k_1 \Phi_1 \cos \Lambda_1}}\end{aligned}$$

dann wird

$$T_1 = \frac{k'(1 - k, \Phi \cos \Lambda)(1 - k_1 \Phi_1 \cos \Lambda_1)}{1 - k_1^2} \left(\frac{\Delta}{k'}\right)^2 \left\{1 - \Phi' \cos(\gamma - \Lambda')\right\}$$

Führt man hier η , durch

$$\Phi' = \frac{2\eta}{1 + \eta^2}$$

bestimmt, ein, so ergibt sich diese Grösse nicht unbedeutend kleiner, als sie aus den Formeln (1) oder (2) erhalten wird.

Die Entwicklung von

$$\left\{1 - 2\eta \cos(\eta - \Lambda') + \eta^2\right\}^{-\frac{n}{2}}$$

nach den Vielfachen von γ muss also sehr rasch convergiren, ein Umstand, der die Anwendung von

$$\text{Cos } r \gamma = g_r^{(r)} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{2r} - g_{r-1}^{(r)} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{2r-2} + \dots$$

$$\text{Sin } r \gamma = \frac{1}{2} k^2 g_r^{(r)} \text{Sin } \xi \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{2r-2} - \dots$$

(siehe folgende Seite) ermöglicht, wodurch $T^{-\frac{n}{2}}$ fast unmittelbar unter der Form

$$f_1 \left(\frac{k'}{\Delta}\right) + \frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} f_2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^2$$

hervorgeht.

Ein Hauptvorthail bei dieser Methode liegt darin, dass die $g^{(r)}$ ein für allemal berechnet werden können.

Die unten zusammengestellten numerischen Entwicklungen von $T_1^{-\frac{n}{2}}$ zeigen uns sofort, dass es sehr zweckmässig wäre, wenn man in leichter Weise $(\Delta)^{-3}$ unter dieselbe Form stellen könnte. Es soll jetzt gezeigt werden, dass dies geschehen kann.

In

$$(\Delta)^{-3} = (1 + x \text{Cos } \xi + y \text{Sin } \xi)^{\frac{3}{2}} \left\{ T_1^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} T_1^{-\frac{5}{2}} T_2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} T_1^{-\frac{7}{2}} T^2 - \dots \right\}$$

ist

$$T_2 = M_3 \text{Cos } 3 \xi + M_4 \text{Cos } 4 \xi + \dots$$

$$N_3 \text{Sin } 3 \xi + N_4 \text{Sin } 4 \xi + \dots$$

woraus man durch Quadrirung eine ähnliche Reihe für T^2 erhält. Ferner ist

$$\begin{aligned} (1 + x \text{Cos } \xi + y \text{Sin } \xi)^{\frac{3}{2}} &= 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2 + y^2}{4} + \left(\frac{3}{2} x - \frac{3}{8} \cdot \frac{x \cdot x^2 + y^2}{4} \right) \text{Cos } \xi + \left(\frac{3}{2} y - \frac{3}{8} \cdot \frac{y \cdot x^2 + y^2}{4} \right) \text{Sin } \xi \\ &+ \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2 - y^2}{4} \text{Cos } 2\xi + \frac{3}{2} \cdot \frac{x y}{4} \text{Sin } 2\xi \\ &+ \frac{1}{8} \left(3 \cdot \frac{x \cdot y^2}{4} - \frac{x \cdot x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{4} \right) \text{Cos } 3\xi + \frac{1}{8} \left(-3 \cdot \frac{y \cdot x^2}{4} + \frac{y \cdot y^2}{2} \cdot \frac{y^2}{4} \right) \text{Sin } 3\xi \\ &\dots \end{aligned}$$

Nach den Vielfachen desselben Argumentes werden dann auch $\frac{r'}{\omega} \text{Cos } f'$ und $\frac{r'}{\omega} \text{Sin } f'$ entwickelt.

Diese Reihen können wir in andere nach den Potenzen von Δ verwandeln.

Es ist nämlich:

$$\text{Cos } r \xi = g_r^{(r)} \Delta^{2r} - g_{r-1}^{(r)} \Delta^{2r-2} + \dots \pm g_0^{(r)}$$

$$\text{Sin } n \xi = \frac{k^2}{2} \text{Sin } \xi \left\{ g_r^{(r)} \Delta^{2r-2} - \frac{r-1}{r} g_{r-1}^{(r)} \Delta^{2r-4} + \dots \mp g_1^{(r)} \right\}$$

Die Ableitung dieser Gleichungen und die Ausdrücke für $g^{(n)}$ findet man in Gylden's «Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie», pag. 83. Die folgenden Werthe der Coefficienten sind den «Recueil de Tables» entnommen:

	0	1	2	3	4	5
$\log g_r^{(1)}$	0,0104695	0,3062963				
» $g_r^{(2)}$	0,0409151	0,9188260	0,9136226			
» $g_r^{(3)}$	0,0887705	1,2882392	1,7022434	1,5209489		
» $g_r^{(4)}$	0,1506590	1,5618008	2,2396610	2,4345084	2,1282752	
» $g_r^{(5)}$	0,2231321	1,7853635	2,6560966	3,0888665	3,1387447	2,7356015

woraus

$\log \frac{k^2}{2} g_r^{(1)}$	0,0000000					
» $\frac{k^2}{2} \cdot \frac{r}{2} g_r^{(2)}$	0,3114997	0,6073263				
» $\frac{k^2}{2} \cdot \frac{r}{3} g_r^{(3)}$	0,5048216	1,2198558	1,2146526			
» $\frac{k^2}{2} \cdot \frac{r}{4} g_r^{(4)}$	0,6534445	1,6323347	2,0032734	1,8219789		
» $\frac{k^2}{2} \cdot \frac{r}{5} g_r^{(5)}$	0,7800972	1,9518603	2,5607215	2,7355384	2,4293052	

Mit Hülfe dieser Zahlen können wir alle Reihen, mit denen die $T_1^{-\frac{n}{2}}$ multiplicirt werden sollen, auf die Form

$$\varphi_1(\Delta) + \frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \varphi_2(\Delta)$$

bringen, wo φ_1 nach den geraden und φ_2 nach den ungeraden Potenzen von Δ fortschreitet. Die Bildung von $(\Delta)^{-3}$ und dessen Producte in $\frac{r'}{\alpha} \text{Cos } f'$ und $\frac{r'}{\alpha} \text{Sin } f'$ wird also wesentlich darin bestehen, Potenzreihen mit einander zu multipliciren, von denen die eine hauptsächlich nach den negativen, die andere immer nach den positiven Potenzen von Δ fortgeht.

Die allgemeinsten Ausdrücke für $f_1\left(\frac{k'}{\Delta}\right)$, $f_2\left(\frac{k'}{\Delta}\right)$, $\varphi_1(\Delta)$ und $\varphi_2(\Delta)$, so wie sie in den vorliegenden Rechnungen vorkommen, sind

$$\begin{aligned} f_1\left(\frac{k'}{\Delta}\right) &= \alpha \Delta + a_1\left(\frac{k'}{\Delta}\right) + a_3\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^3 + \dots \\ f_2\left(\frac{k'}{\Delta}\right) &= a_0 + a_2\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^2 + a_4\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^4 + \dots \\ \varphi_1(\Delta) &= A_0 + A_2 \Delta^2 + A_4 \Delta^4 + \dots \\ \varphi_2(\Delta) &= A_1 \Delta + A_3 \Delta^3 + A_5 \Delta^5 + \dots \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung

$$\frac{k^4 \sin^2 \xi}{4 \Delta^2} = 1 + k'^2 - \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^2 - \Delta^2$$

werden wir dann erhalten

$$\begin{aligned} \left\{ f_1\left(\frac{k'}{\Delta}\right) + \frac{\sin \xi}{\Delta} f_2\left(\frac{k'}{\Delta}\right) \right\} \left\{ \varphi_1(\Delta) + \frac{\sin \xi}{\Delta} \varphi_2(\Delta) \right\} = \\ b_1\left(\frac{k'}{\Delta}\right) + b_3\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^3 + b_5\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^5 + \dots \\ + \beta_1 \Delta + \beta_3 \Delta^3 + \beta_5 \Delta^5 + \dots \\ + \frac{\sin \xi}{\Delta} \left\{ b_0 + b_2\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^2 + b_4\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^4 + \dots \right. \\ \left. + \beta_2 \Delta^2 + \beta_4 \Delta^4 + \dots \right\} \end{aligned}$$

Die Coefficienten in dieser Reihe lassen sich leicht durch α , a_i und A_i ausdrücken. Führen wir nämlich die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \frac{k^4}{4} L' &= A_1 k' \\ \frac{k^4}{4} L_1 &= A_1 + (A_3 - A_1) k'^2 \\ \frac{k^4}{4} L_3 &= A_3 - A_1 + (A_5 - A_3) k'^2 \\ \frac{k^4}{4} L_5 &= A_5 - A_3 + (A_7 - A_5) k'^4 \\ &\dots \end{aligned}$$

ein, so finden wir ohne Schwierigkeit folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= a_0 L' + a_1 A_0 + a_2 L_1 k' + a_3 A_2 k'^2 + \dots \\
 b_3 &= a_2 L' + a_3 A_0 + a_4 L_1 k' + a_5 A_2 k'^2 + \dots \\
 &\dots \\
 b_0 &= a_0 A_0 + a_1 A_1 k' + a_2 A_2 k'^2 + a_3 A_3 k'^3 + \dots \\
 b_2 &= a_2 A_0 + a_3 A_1 k' + a_4 A_2 k'^2 + a_5 A_3 k'^3 + \dots \\
 &\dots \\
 \beta_1 &= A_0 \alpha + L_1 a_0 + A_2 a_1 k' + L_3 a_2 k'^2 + \dots \\
 \beta_3 &= A_2 \alpha + L_3 a_0 + A_4 a_1 k' + L_5 a_2 k'^2 + \dots \\
 &\dots \\
 \beta_2 &= A_1 \alpha + A_2 a_0 + A_3 a_1 k' + A_4 a_2 k'^2 + \dots \\
 \beta_4 &= A_3 \alpha + A_4 a_0 + A_5 a_1 k' + A_6 a_2 k'^2 + \dots \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Da $k' = 0,1097861$, so sieht man, dass die b_i sich sehr leicht berechnen lassen; die β_i sind so klein, dass β_4 selten berücksichtigt zu werden braucht.

Es ist also jetzt der Weg vollständig angegeben worden, auf welchem man für die Grössen $(\Delta)^{-3}$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \cos f'$ und $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \sin f'$ zu der Form

$$f_1 \left(\frac{k'}{\Delta} \right) + \frac{\sin \xi}{\Delta} f_2 \left(\frac{k'}{\Delta} \right)$$

gelangen kann. Die lästige Arbeit der Multiplication von trigonometrischen Reihen ist dadurch vermieden.

Bei den numerischen Rechnungen hat sich folgender Gang als zweckmässig erwiesen: zuerst wird T_2 nach den Potenzen von Δ ausgedrückt, und dann diese Reihe quadriert, wodurch man T_2^2 erhält. Die Producte $\frac{3}{2} T_1^{-\frac{5}{2}} T_2$ und $\frac{3}{2} \frac{5}{4} T_1^{-\frac{7}{2}} T_2^2$ werden in der eben angegebenen Weise gebildet; nach gehöriger Reduction ergibt sich darauf

$$(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{3}{2}} (\Delta)^{-3} = f_1 \left(\frac{k'}{\Delta} \right) + \frac{\sin \xi}{\Delta} f_2 \left(\frac{k'}{\Delta} \right)$$

Nachdem $(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{3}{2}}$, $\frac{r'}{a'} \cos f'$, $\frac{r'}{a'} \sin f'$ ebenfalls in Potenzreihen nach Δ verwandelt sind, erhält man durch die Reihe auf der rechten Seite dieser Gleichung $(\Delta)^{-3}$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \cos f'$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \sin f'$. Jede der beiden letzten Grössen kann in einer Stunde, $(\Delta)^{-3}$ in weniger als einer Stunde entwickelt werden, wenn $T^{-\frac{n}{2}}$ und die übrigen

nöthigen Grössen schon als Potenzreihen vorhanden sind. Durch die Tabellen I und II im Anhange kann man wohl kaum jede der drei genannten Grössen in trigonometrische Reihen nach x in kürzerer Zeit als $1\frac{1}{4}$ Stunde verwandeln.

Da ein so eminenter Rechner wie Asten durchschnittlich $4\frac{1}{2}$ Stunden brauchte, um jedes der Producte $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Cos } f'$ $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Sin } f'$ zu bilden, wenn $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Cos } f'$, $\frac{r'}{a'} \text{Sin } f'$ als trigonometrische Reihen nach x gegeben waren (vergl. Asten's Abhandlung über die absoluten Jupiterstörungen des Encke'schen Cometen, pag. 45), so wird es nicht übertrieben sein, zu behaupten, dass die jetzt auseinandergesetzte Methode doppelt so leicht ist als die von Asten angewandte.

Die gewonnenen Mittel wollen wir nun anwenden, so weit sie ausreichen, auf die gestellte Aufgabe: die Jupiterstörungen erster Ordnung des Encke'schen Cometen zu ermitteln für den zwischen Aphel und $f = 190^\circ$ liegenden Theil der Cometenbahn. Da die zu ermittelnden Störungen sich streng an die von Asten für den Bahntheil zwischen $f = 170^\circ$ und Aphel gegebenen anschliessen sollen, so kann der Ausdruck II für $(\Delta)^2$ pag. 31 in Asten's Abhandlung als Ausgangspunkt genommen werden.

Dieser ist

$$(\Delta)^2$$

	Cos 0 ξ	Cos ξ	Sin ξ	Cos 2 ξ	Sin 2 ξ	Cos 3 ξ	Sin 3 ξ	Cos 4 ξ	Sin 4 ξ	Cos 5 ξ	Sin 5 ξ
Cos 0 ω_4	+45,533891	+43,346550	-2,982209	-0,953829	-0,329558	+0,026050	+0,023952	-0,000585	-0,001338	-0,000001	+0,000066
Cos ω_4	+ 1,260119	+ 1,805768	+2,776027	+0,032917	-0,216862	-0,007702	+0,010489	+0,000678	-0,000363	-0,000044	+0,000004
Cos 2 ω_4	- 0,315484	- 0,427652	+0,223615	+0,023139	-0,003162	-0,001506	-0,000578	+0,000076	+0,000092	-0,000002	-0,000008
Cos 3 ω_4	- 0,019803	- 0,025086	-0,027867	+0,000531	+0,002489	+0,000043	-0,000193	-0,000012	+0,000013	+0,000002	-0,000001
Cos 4 ω_4	+ 0,001897	+ 0,002177	-0,002821	-0,000227	+0,000114	+0,000021	+0,000002				
Cos 5 ω_4	+ 0,000195	+ 0,000256	+0,000158	-0,000012	-0,000020						
Cos 6 ω_4	- 0,000008	- 0,000015	+0,000030	+0,000001	-0,000003						

ξ ist mit c'_1 verbunden durch

$$c'_1 = \xi + 147^\circ 42'$$

und ω_4 bedeutet die partielle Anomalie des Cometen in dem betreffenden Bahntheil, die also alle Werthe von 0° bis 360° annimmt, wenn f sich zwischen den Grenzen 180° und 190° ändert.

Die Art und Weise, wie der angeführte Ausdruck von $(\Delta)^2$ abgeleitet worden ist, und die zu Grunde gelegten Elemente sind von Asten in seiner Abhandlung vollständig angegeben, weshalb es überflüssig ist, sich weiter darauf hier einzulassen.

Nach dem Beispiele Astens wurde die Peripherie in Bezug auf ω_4 in 24 Theile getheilt. Die daraus resultirenden 11 verschiedenen Specialwerthe von $(\Delta)^2$ sind hier zusammengestellt:

$$(\Delta)^2$$

$\omega_4 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
Cos 0 ξ	+46,464850	+46,466334	+46,436899	+46,340637	+46,148391	+45,851280	+45,467723	+45,040715	+44,627089	+44,284082	+44,058392
Cos 1 ξ	+44,703848	+44,695269	+44,638802	+44,487370	+44,203349	+43,776394	+43,232643	+42,631174	+42,049944	+41,568031	+41,250716
Sin 1 ξ	- 0,128191	- 0,465046	- 0,996847	- 1,676616	- 2,488929	- 3,208675	- 3,915623	- 4,508536	- 4,961929	- 5,272994	- 5,451735
Cos 2 ξ	- 0,901736	- 0,913629	- 0,930693	- 0,949362	- 0,965849	- 0,977196	- 0,982113	- 0,981206	- 0,976511	- 0,970663	- 0,966072
Sin 2 ξ	- 0,539957	- 0,518984	- 0,484762	- 0,438967	- 0,384670	- 0,326279	- 0,268856	- 0,217107	- 0,174582	- 0,143402	- 0,124521
Cos 3 ξ	+ 0,017348	+ 0,018616	+ 0,020553	+ 0,022898	+ 0,025341	+ 0,027577	+ 0,029387	+ 0,030686	+ 0,031505	+ 0,031956	+ 0,032166
Sin 3 ξ	+ 0,033448	+ 0,032746	+ 0,031504	+ 0,029678	+ 0,027305	+ 0,024532	+ 0,021601	+ 0,018802	+ 0,016396	+ 0,014578	+ 0,013458
Cos 4 ξ	+ 0,000128	+ 0,000040	- 0,000098	- 0,000272	- 0,000468	- 0,000661	- 0,000834	- 0,000974	- 0,001072	- 0,001134	- 0,001166
Sin 4 ξ	- 0,001599	- 0,001606	- 0,001604	- 0,001579	- 0,001521	- 0,001430	- 0,001315	- 0,001189	- 0,001072	- 0,000978	- 0,000916
Cos 5 ξ	- 0,000045	- 0,000040	- 0,000033	- 0,000024	- 0,000012	+ 0,000001	+ 0,000014	+ 0,000024	+ 0,000032	+ 0,000036	+ 0,000038
Sin 5 ξ	+ 0,000062	+ 0,000065	+ 0,000068	+ 0,000073	+ 0,000075	+ 0,000074	+ 0,000071	+ 0,000067	+ 0,000062	+ 0,000059	+ 0,000056

Diese Reihen wurden mit dem Trinom $1 + x \text{Cos } \xi + y \text{Sin } \xi$ multiplicirt, nachdem für jede Reihe x und y in der oben angegebenen Weise bestimmt worden waren. Es ergab sich:

$$(1 + x \text{Cos } \xi + y \text{Sin } \xi) (\Delta)^2$$

$\omega_4 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
Cos 0 ξ	+47,362723	+47,368212	+47,344265	+47,253500	+47,065291	+46,769687	+46,384783	+45,954038	+45,535385	+45,187441	+44,958196
Cos 1 ξ	+46,548874	+46,557242	+46,525452	+46,401810	+46,143744	+45,736898	+45,205369	+44,608506	+44,026338	+43,540862	+43,220143
Sin 1 ξ	+ 0,998734	+ 0,633015	+ 0,054098	- 0,688895	- 1,526680	- 2,378544	- 3,167626	- 3,836112	- 4,353033	- 4,711687	- 4,919729
Cos 3 ξ	+ 0,005738	+ 0,006181	+ 0,006863	+ 0,007688	+ 0,008553	+ 0,009349	+ 0,010001	+ 0,010477	+ 0,010785	+ 0,010957	+ 0,011042
Sin 3 ξ	+ 0,011616	+ 0,011385	+ 0,010972	+ 0,010356	+ 0,009557	+ 0,008620	+ 0,007621	+ 0,006665	+ 0,005836	+ 0,005211	+ 0,004818
Cos 4 ξ	+ 0,000071	+ 0,000032	- 0,000031	- 0,000109	- 0,000197	- 0,000285	- 0,000366	- 0,000432	- 0,000477	- 0,000505	- 0,000519
Sin 4 ξ	- 0,000714	- 0,000721	- 0,000713	- 0,000712	- 0,000688	- 0,000648	- 0,000598	- 0,000543	- 0,000490	- 0,000448	- 0,000418
Cos 5 ξ	- 0,000023	- 0,000020	- 0,000017	- 0,000013	- 0,000007	0,000000	+ 0,000007	+ 0,000011	+ 0,000015	+ 0,000016	+ 0,000018
Sin 5 ξ	+ 0,000032	+ 0,000033	+ 0,000035	+ 0,000037	+ 0,000038	+ 0,000037	+ 0,000035	+ 0,000034	+ 0,000032	+ 0,000030	+ 0,000029
x	+0,0402394	+0,0406026	+0,0411588	+0,0418418	+0,0425746	+0,0432834	+0,0439102	+0,0444208	+0,0448036	+0,0450636	+0,0452130
y	+0,0242518	+0,0236258	+0,0226198	+0,0212944	+0,0197386	+0,0180664	+0,0164038	+0,0148742	+0,0135832	+0,0126100	+0,0120072

Nur auf die sieben ersten von diesen Reihen konnte die Formel II angewandt werden. Bei den übrigen vier wird η so gross, nach welcher Methode diese Grösse auch berechnet werden mag, dass es unzweckmässig wäre, $T^{-\frac{n}{2}}$ nach den Potenzen von $\frac{k'}{\Delta}$ zu entwickeln.

Es ergaben sich für diese sieben Werthe folgende Reihen für $T_1^{-\frac{3}{2}}$, $T_1^{-\frac{5}{2}}$, $T_1^{-\frac{7}{2}}$, in welchen der Factor $m' \cdot 206264,8$, wo $m' = \text{Jupitermasse}$, enthalten ist.

$$T_1^{-\frac{3}{2}}$$

$\omega_4 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^3$	+162',1478	+162',1876	+162',4094	+162',9934	+164',0926	+165',7866	+168',0247
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^5$	+ 80,6121	+ 74,3007	+ 67,9377	+ 66,1925	+ 72,8137	+ 88,8877	+112,1694
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^7$	+ 25,0141	+ 25,0231	+ 23,6664	+ 18,1835	+ 3,4547	- 29,1030	- 87,8411

$\omega_4 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{10}$	-23,63	-14,51	- 1,12	+12,01	+16,46	- 2,07	- 77,73
» $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{12}$	-11,52	- 7,18	- 0,62	+ 5,01	- 0,76	-46,88	-115,70
» $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{14}$	- 4,58	- 3,69	- 0,38	+ 1,93	- 7,41	-10,26	+ 1,11
» $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{16}$	+ 1,25	- 0,94		+ 0,11	- 0,26	+13,30	+123,41
» $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{18}$							- 55,01

$T_1^{-\frac{7}{2}}$

$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^7$	+125''	+125''	+126''	+127''	+129''	+131''	+ 134''
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^9$	+163	+141	+124	+127	+174	+267	+ 408
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{11}$	+102	+ 89	+ 77	+ 69	+ 60	+ 54	- 64
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{13}$	+ 50	+ 43	+ 38	+ 26	- 26	-317	- 613
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{15}$	- 3	+ 18	+ 19	+ 1	- 89	- 65	- 482
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{17}$	- 33	- 9	+ 11	- 9	+ 14	+105	+1210
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{19}$							- 483
$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^8$	- 42	- 27	- 2	+ 29	+ 67	+108	+ 151
» $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{10}$	- 60	- 37	- 3	+ 35	+ 80	+135	+ 200
» $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{12}$	- 49	- 28	- 2	+ 25	+ 43	+ 37	- 6
» $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{14}$	- 34	- 20	- 1	+ 14	- 9	-178	- 718
» $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{16}$	- 2	- 9	- 1	+ 3	- 15	+ 53	+ 667
» $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{18}$							- 181

Die $T_1^{-\frac{5}{2}}$ und $T_1^{-\frac{7}{2}}$ sind nicht alle nach der Formel

$$E_i^{(s+2)} = -\frac{i+1}{s} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot E_{i+1}^{(s)}$$

berechnet, einige wurden nach den strengeren Recursionsformeln abgeleitet, welche im Aufsätze «Zur Entwicklung etc.» gegeben sind.

Die Prüfung dieser Rechnungen geschah in oben angegebener Weise.

Den angeführten Reihen liegen folgende Werthe von ξ und η zu Grunde.

$\omega_4 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
ξ	183°54'53",80	182°36'19",44	180°14'20",18	176°47'27",59	172°54'0",84	169°16'33",04	191°15'10",60
log η	9,1730909	9,1484869	9,1146165	9,0934222	9,1311179	9,1361443	9,2462617 _n

Für $\omega_4 = 75^\circ$ ist η nicht in derselben Weise berechnet wie für die übrigen Specialwerthe von ω_4 , welche nach der Formel II, also unter Anwendung der trinomischen Form von U abgeleitet sind. In der That wissen wir ja schon nach dem oben angeführten Beispiel, dass die Formel (2) für den Specialwerth $\omega_4 = 75^\circ$ benutzt wurde. Wenn in diesem Falle η berechnet worden wäre wie die anderen η , so würden wir erhalten haben

$$\log \eta = 9,1051\dots *)$$

Mit Hülfe der angeführten Werthe der g -Coefficienten erhalten wir jetzt:

		$-\frac{3}{2} T_2$						
$\omega_4 =$		15°	30°	45°	60°	75	90°	105°
Δ^0		+0,0103567	+0,0112590	+0,0126619	+0,0143518	+0,0161397	+0,0178112	+0,0191978
Δ^2		-0,16147	-0,17647	-0,20017	-0,22900	-0,25928	-0,28791	-0,31198
Δ^4		+0,39948	+0,44526	+0,51595	+0,60052	+0,69288	+0,78072	+0,85584
Δ^6		-0,21433	-0,25781	-0,32504	-0,40323	-0,49323	-0,58164	-0,66002
$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta}$	Δ	-0,060826	-0,059773	-0,057756	-0,054804	-0,050829	-0,046050	-0,040908
	» Δ^3	+0,33930	+0,33414	+0,32361	+0,30844	+0,28719	+0,26118	+0,23282
	» Δ^5	-0,41099	-0,40692	-0,39664	-0,38239	-0,35971	-0,33009	-0,29687

Hieraus bekommt man:

		$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} T_2^2$						
Δ^0		-0,0000628	-0,0000415	-0,0000042	+0,0000441	+0,0001108	+0,0001771	+0,0002383
Δ^2		+0,01170	+0,01065	+0,00852	+0,00630	+0,00317	-0,00023	-0,00341
Δ^4		-0,13832	-0,11975	-0,07403	-0,07374	-0,03847	-0,00092	+0,03471
Δ^6		+0,53888	+0,38598	+0,29123	+0,21536	+0,08536	+0,05669	-0,19260

*) Wir können setzen

$$\eta = f(\omega)$$

Geometrisch betrachtet bedeutet diese Relation eine Curve, die auf dem Gebiete, über welches sich die obigen Rechnungen erstrecken, aus zwei durch die Abscissenaxe getrennten Zweigen besteht. Von $\omega = 0$ bis zu einem Punkte zwischen $90^\circ - 105^\circ$ ist der obere Zweig weiter entfernt von der Abscissenaxe als der

untere. Jenseits dieses Punktes entfernt sich der untere Zweig mehr als der obere von der Axe. Der obere Zweig gibt also die sechs ersten angeführten Werthe von η , und der untere gibt den letzten. Der obere Zweig gibt für $\omega = 105^\circ$ den für die Reihenentwicklung unbrauchbaren Werth

$$\log \eta = 9,1667\dots$$

Der entsprechende Werth von ξ ist $166^\circ 3'$.

$\omega_4 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta}$	-0,001050	-0,001122	-0,001216	-0,001310	-0,000680	-0,001361	-0,001310
Δ^3	+0,02222	+0,02404	+0,02610	+0,02826	+0,01484	+0,02984	+0,02872
Δ^5	-0,09131	-0,14500	-0,15763	-0,17243	-0,09140	-0,18526	-0,17940

Beim ersten Anblick dieser Reihen könnte man wohl versucht sein zu glauben, dass zu wenige Glieder berücksichtigt wären, oder dass überhaupt die Methode unsicher wäre, da die g -Coefficienten sehr grosse Zahlen einführen. Eine nähere Betrachtung der Formeln pag. 21 zeigt aber, dass dies nicht der Fall ist. Denn in $T_1^{-\frac{5}{2}}$ ist $\alpha = a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ und in $T_1^{-\frac{7}{2}}$ ist ausserdem $a_5 = a_6 = 0$. Es wird also bei der Bildung der Producte $\frac{3}{2} T_1^{-\frac{5}{2}} T_2$ und $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} T_1^{-\frac{7}{2}} T_2^2$ der Coefficient von Δ mit k' , der Coefficient von Δ^2 mit k'^2 u. s. w. multiplicirt.

Durch Anwendung der Formeln pag. 21 gehen nun folgende Reihen für $-\frac{3}{2} T_1^{-\frac{5}{2}} T_2$ und $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} T_1^{-\frac{7}{2}} T_2^2$ hervor:

		$-\frac{3}{2} T_1^{-\frac{5}{2}} T_2$						
$\omega_4 =$		15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)$	+0,0100	+0,0103	+0,0109	+0,0114	+0,0122	+0,0131	+0,0142
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^3$	-0,3448	-0,3429	-0,3416	-0,3410	-0,3418	-0,3474	-0,3569
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^5$	+2,1726	+1,9576	+1,6230	+1,1941	+0,7055	+0,2055	-0,2787
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^7$	+1,3002	+1,1859	+1,1481	+1,3654	+2,0400	+3,3237	+5,2792
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^9$	+0,2203	+0,3642	+0,5503	+0,7863	+1,0855	+1,3633	+1,6161
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{11}$	-0,1738	+0,0110	+0,2193	+0,3074	+0,0989	-0,4145	-2,4923
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{13}$	-0,1492	-0,0260	+0,0914	+0,0928	-0,2231	-2,9121	-10,4758
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{15}$	-0,2344	-0,0591	+0,0407	+0,0304	-0,2870	+1,4642	+14,1260
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{17}$	-0,0163	-0,0512		-0,0191	+0,0700	-0,0770	-6,4156
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{19}$							+1,0060
	Δ	-0,0005	-0,0006	-0,0007	-0,0007	-0,0009	-0,0010	-0,0012
$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta}$	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^0$	-0,0009	-0,0009	-0,0009	-0,0010	-0,0009	-0,0009	-0,0008
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^2$	+0,0612	+0,0610	+0,0605	+0,0600	+0,0600	+0,0597	+0,0600

$\omega_4 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
$\frac{\sin \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^4$	-0,8318	-0,8422	-0,8604	-0,8895	-0,9289	-0,9784	-1,0364
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^6$	-1,0940	-0,9076	-0,6315	-0,3040	+0,0460	+0,4004	+0,7653
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^8$	-0,7294	-0,5736	-0,3199	+0,0437	+0,5357	+1,4125	+2,7019
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{10}$	-0,3159	-0,2700	-0,1352	+0,0989	+0,3823	+0,5907	-0,0867
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{12}$	-0,1224	-0,1094	-0,0584	+0,0588	+0,1500	-0,2442	-0,6706
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{14}$	+0,0007	-0,0452	-0,0301	+0,0345	-0,0792	-0,7765	-4,0613
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{16}$	+0,0456	+0,0045		+0,0107	-0,0304	+0,3369	+4,8042
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{18}$							-1,5233
$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} T_1^{-\frac{7}{2}} T_2^2$							
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)$	+0,0001	0,0000	+0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^3$	-0,0021	-0,0019	-0,0017	-0,0017	-0,0016	-0,0015	-0,0014
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^5$	+0,0093	+0,0101	+0,0118	+0,0128	+0,0151	+0,0176	+0,0204
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^7$	+0,0307	+0,0234	+0,0121	-0,0014	-0,0182	-0,0381	-0,0636
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^9$	+0,0129	+0,0111	+0,0073	+0,0055	+0,0090	+0,0165	+0,0443
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{11}$	-0,0033	-0,0020	+0,0030	+0,0094	+0,0197	+0,0304	-0,0068
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{13}$	-0,0055	-0,0019	+0,0012	+0,0058	+0,0243	+0,1168	+0,5385
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{15}$	-0,0195	-0,0062	+0,0013	+0,0061	-0,0030	-0,1626	-1,1252
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{17}$	+0,0011	-0,0041	-0,0005	+0,0014	-0,0077	+0,0510	+0,8376
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{19}$							-0,2214
$\frac{\sin \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^2$	-0,0003	-0,0003	-0,0003	-0,0004	-0,0004	-0,0004	-0,0004
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^4$	+0,0042	+0,0042	+0,0041	+0,0042	+0,0042	+0,0044	+0,0047
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^6$	-0,0147	-0,0140	-0,0125	-0,0118	-0,0105	-0,0097	-0,0087
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^8$	-0,0207	-0,0176	-0,0142	-0,0120	-0,0135	-0,0185	-0,0315
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{10}$	-0,0127	-0,0114	-0,0092	-0,0057	+0,0009	+0,0031	+0,0314
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{12}$	-0,0075	-0,0059	-0,0045	-0,0016	+0,0050	+0,0516	+0,0979

$\omega_4 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{14}$	+0,0013	-0,0028	-0,0020	+0,0004	+0,0124	-0,0172	-0,0827
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{16}$	+0,0040	+0,0015	-0,0015	+0,0013	-0,0038	-0,0064	-0,0260
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{18}$							+0,0263

Diese Reihen mit denen für $T_1^{-\frac{3}{2}}$ vereinigt geben :

$$(1 + x \text{Cos } \xi + y \text{Sin } \xi)^{-\frac{3}{2}} (\Delta)^{-3}$$

$\omega_4 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)$	+ 0,0101	+ 0,0103	+ 0,0108	+ 0,0114	+ 0,0122	+ 0,0131	+ 0,0141
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^3$	+161,8009	+161,8438	+162,0665	+162,6507	+163,7492	+165,4377	+167,6664
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^5$	+ 82,7940	+ 76,2684	+ 69,5719	+ 67,3994	+ 73,5343	+ 89,1108	+111,9111
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^7$	+ 26,3450	+ 26,2324	+ 24,8269	+ 19,5475	+ 5,4765	- 25,8214	- 82,6255
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^9$	+ 3,8769	+ 6,9144	+ 8,2239	+ 3,9714	- 10,1358	- 37,4654	- 92,8414
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{11}$	- 1,4799	+ 1,3940	+ 2,5635	+ 0,4142	- 5,9315	- 20,1690	+ 14,5373
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{13}$	- 1,2732	+ 0,0180	+ 0,8872	- 0,2889	- 2,3752	+ 21,7330	+ 46,3966
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{15}$	- 1,4742	- 0,5610	+ 0,3549	- 0,2935	+ 0,6156	- 3,0015	+ 20,1412
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{17}$	- 0,2311	- 0,0553	- 0,0005	- 0,0177	+ 0,3066	- 0,0260	- 43,7652
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{19}$							+ 13,9788
Δ	- 0,0005	- 0,0006	- 0,0007	- 0,0008	- 0,0009	- 0,0010	- 0,0012
$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^0$	- 0,0009	- 0,0009	- 0,0009	- 0,0010	- 0,0009	- 0,0009	- 0,0008
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^2$	+ 0,0609	+ 0,0607	+ 0,0602	+ 0,0598	+ 0,0596	+ 0,0593	+ 0,0596
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^4$	- 24,3117	- 15,7227	- 2,1308	+ 15,4482	+ 35,7333	+ 57,2843	+ 78,5928
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^6$	- 19,0691	- 11,9094	- 1,5327	+ 10,2412	+ 21,5600	+ 30,3555	+ 34,7438
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^8$	- 9,4382	- 5,9990	- 0,7666	+ 4,4650	+ 5,5201	- 3,6581	- 34,1763
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{10}$	- 3,4152	- 2,4560	- 0,3208	+ 1,5738	- 0,4137	- 12,8927	- 24,4977
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{12}$	- 1,0824	- 1,0164	- 0,1390	+ 0,5133	- 1,1792	- 1,7843	- 10,0131
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{14}$	- 0,0987	- 0,2504	- 0,0679	+ 0,0585	- 0,6430	+ 2,0958	+ 48,2062

$\omega_4 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
$\frac{\sin \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{16}$	+ 0,2509	+ 0,0060	- 0,0015	+ 0,0120	+ 0,1235	+ 0,3505	- 30,2638
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{18}$							+ 6,1418

Um zunächst $(\Delta)^{-3}$ zu erhalten, werden die $(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{3}{2}}$ in Reihen nach den Vielfachen von ξ entwickelt, und dann diese in Potenzreihen nach Δ . Die letzteren sind:

		$(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{3}{2}}$						
$\omega_4 =$		15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
Δ^0		+0,9387987	+0,9382528	+0,9374170	+0,9363912	+0,9352905	+0,9342272	+0,9332871
Δ^2		+0,120581	+0,121589	+0,123133	+0,125025	+0,127052	+0,129007	+0,130733
Δ^4		+0,001579	+0,001676	+0,001822	+0,002007	+0,002207	+0,002408	+0,002588
$\frac{\sin \xi}{\Delta}$	Δ	+0,0356199	+0,0346940	+0,0332069	+0,0312497	+0,0289548	+0,0264920	+0,0240462
	Δ^3	+0,001510	+0,001483	+0,001440	+0,001379	+0,001302	+0,001212	+0,001117
	Δ^5	-0,000028	-0,000027	-0,000027	-0,000026	-0,000025	-0,000025	-0,000023

Aus diesen Reihen für $(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{-\frac{3}{2}} (\Delta)^{-3}$ und $(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{3}{2}}$ wurden die folgenden für $(\Delta)^{-3}$ berechnet:

		$(\Delta)^{-3}$						
$\omega_4 =$		15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)$	+ 0,2501	+ 0,2506	+ 0,2521	+ 0,2541	+ 0,2576	+ 0,2623	+ 0,2682
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^3$	+151,6270	+151,7151	+151,9947	+152,6235	+153,7326	+155,3807	+157,5123
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^5$	+ 77,8474	+ 71,6560	+ 65,2635	+ 63,0692	+ 68,6021	+ 82,8934	+103,8493
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^7$	+ 24,8915	+ 24,7144	+ 23,2965	+ 18,2297	+ 4,8984	- 24,5859	- 78,0064
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^9$	+ 3,7336	+ 6,5446	+ 7,7192	+ 3,6787	- 9,5661	- 35,1441	- 86,5217
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{11}$	- 1,3539	+ 1,3302	+ 2,4071	+ 0,3727	- 5,5613	- 18,6765	+ 13,7900
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{13}$	- 1,1817	+ 0,0280	+ 0,8333	- 0,2775	- 2,2137	+ 20,3455	+ 43,9726
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{15}$	- 1,3786	- 0,5225	+ 0,3337	- 0,2754	+ 0,5861	- 2,8251	+ 17,8751
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{17}$	- 0,2210	- 0,0520	- 0,0005	- 0,0168	+ 0,2352	- 0,0282	- 40,4288
	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{19}$							+ 12,9798
	Δ	- 0,0002	- 0,0004	- 0,0004	- 0,0004	- 0,0003	- 0,0004	- 0,0005

$\omega_4 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
$\frac{\sin \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^0$	- 0,0004	- 0,0004	- 0,0004	- 0,0004	- 0,0004	- 0,0005	- 0,0004
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^2$	+ 0,6548	+ 0,6505	+ 0,6441	+ 0,6371	+ 0,6311	+ 0,6256	+ 0,6223
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^4$	-22,5276	-14,4788	- 1,7461	+14,7122	+33,6876	+53,8229	+73,6998
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^6$	-17,8127	-11,0830	- 1,3473	+ 9,6634	+20,1908	+28,2781	+32,1539
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^8$	- 8,8504	- 5,6059	- 0,6892	+ 4,1970	+ 5,1301	- 3,5466	-32,1800
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{10}$	- 3,2132	- 2,3005	- 0,2915	+ 1,4759	- 0,4072	-12,1061	-22,8408
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{12}$	- 1,0213	- 0,9539	- 0,1272	+ 0,4798	- 1,1115	- 1,6004	- 9,1467
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{14}$	- 0,0982	- 0,2371	- 0,0622	+ 0,0537	- 0,5992	+ 1,9497	+44,9956
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{16}$	+ 0,2347	+ 0,0054	- 0,0014	+ 0,0111	+ 0,1165	+ 0,3087	-28,3507
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{18}$							+ 5,7690

Nach den Formeln in Gylden's Abhandlung «Ueber eine Methode, die Störungen eines Cometen etc.», welche auch von Asten reproducirt sind, habe ich mit den Daten in Asten's Abhandlung folgende Ausdrücke für $\frac{r'}{a'} \cos f'$ und $\frac{r'}{a'} \sin f'$ abgeleitet:

	$\frac{r'}{a'} \cos f'$						
	$\cos 0\omega_4$	$\cos \omega_4$	$\cos 2\omega_4$	$\cos 3\omega_4$	$\cos 4\omega_4$	$\cos 5\omega_4$	$\cos 6\omega_4$
$\cos c'_1$	8,8594725 _n						
$\cos c'_1$	9,9922508	8,342840	7,69377 _n	6,4903 _n	5,450	4,519	3,48
$\sin c'_1$	9,1745514 _n	9,1650194	7,58202	6,7334 _n	5,556 _n	4,379	3,48
$\cos 2c'_1$	8,351933	7,31851	6,6598 _n	5,538 _n	4,467	3,598	
$\sin 2c'_1$	7,84552 _n	7,82969	6,4668	5,588 _n	4,571 _n	3,321	
$\cos 3c'_1$	6,8718	6,2146	5,539 _n	4,534 _n	3,417		
$\sin 3c'_1$	6,5593 _n	6,5324	5,403	4,491 _n	3,608 _n		
$\cos 4c'_1$	5,448	5,077	4,376 _n	3,508 _n			
$\sin 4c'_1$	5,288 _n	5,244	4,332	3,382 _n			
$\cos 5c'_1$	4,046	3,919	3,182 _n				
$\sin 5c'_1$	4,020 _n	3,952	3,243				
	$\frac{r'}{a'} \sin f'$						
$\cos c'_1$	9,1743027	9,1647707 _n	7,58177 _n	6,7332	5,555	4,379 _n	3,48 _n
$\sin c'_1$	9,9920021	8,342591	7,69352 _n	6,4901 _n	5,449	4,518	3,48
$\cos 2c'_1$	7,84534	7,82952 _n	6,4666 _n	5,588	4,571	3,301 _n	
$\sin 2c'_1$	8,351763	7,31834	6,6596 _n	5,538 _n	4,467	3,598	

	Cos $0\omega_4$	Cos ω_4	Cos $2\omega_4$	Cos $3\omega_4$	Cos $4\omega_4$
Cos $3c'_1$	6,5592	6,5323 _n	5,403 _n	4,491	3,609
Sin $3c'_1$	6,8717	6,2145	5,539 _n	4,534 _n	3,417
Cos $4c'_1$	5,287	5,243 _n	4,331 _n	3,381	
Sin $4c'_1$	5,447	5,076	4,375 _n	3,507 _n	
Cos $5c'_1$	4,019	3,950 _n	3,242 _n		
Sin $5c'_1$	4,045	3,918	3,181 _n		

In diesen Ausdrücken wurden ω_4 nun der Reihe nach die Werthe 15° , 30° etc. zuge-
theilt, und dann ξ durch die Relation

$$c'_1 = \xi + 147^\circ 42'$$

eingeführt. Auf diese Weise wurden die speciellen Werthe von $\frac{r'}{a'} \cos f'$ und $\frac{r'}{a'} \sin f'$ be-
rechnet.

Um gegen etwaige Fehler sicher zu sein, wurden dieselben speciellen Werthe auch
auf anderem Wege berechnet.

Für $\omega_4 = 0$ wird $c'_1 = g'$, der mittleren Anomalie des Jupiter. Die obigen Ausdrücke
müssen also für $\omega_4 = 0$ dieselben Reihen geben für $\frac{r'}{a'} \cos f'$ und $\frac{r'}{a'} \sin f'$, welche Asten
in seiner Abhandlung pag. 45 angeführt hat, nämlich:

$$\begin{array}{rcl} \frac{r'}{a'} \cos f' = & 8,8594725_n & \frac{r'}{a'} \sin f' = \\ & +9,9996166 \cos g' & 9,9993679 \sin g' \\ & +8,3816781 \cos 2g' & +8,3815076 \sin 2g' \\ & +6,93980 \cos 3g' & +6,93970 \sin 3g' \\ & +5,5724 \cos 4g' & +5,5712 \sin 4g' \\ & +4,245 \cos 5g' & +4,245 \sin 5g' \end{array}$$

Es ist aber

$$g' = c'_1 - \eta_0 - \eta_1 \cos \omega_4 - \eta_2 \cos 2\omega_4 - \dots *)$$

oder

$$g' = \xi + \varphi$$

wo also φ für specielle Werthe von ω_4 entsprechende specielle Werthe erhält. Für φ er-
gibt sich der Ausdruck

$$\begin{array}{r} \varphi = 156^\circ 21' 4''64 - 30611''89 \cos \omega_4 \\ \quad - 629,57 \cos 2\omega_4 \\ \quad + 92,47 \cos 3\omega_4 \\ \quad + 4,75 \cos 4\omega_4 \\ \quad - 0,34 \cos 5\omega_4 \\ \quad - 0,03 \cos 6\omega_4 \end{array}$$

*) Asten a. a. O.

woraus

ω_4	φ	ω_4	φ	ω_4	φ
15	148° 0' 18",3	75°	154° 17' 3",5	135°	162° 22' 51",0
30	148 53 57,1	90	156 31 39,0	150	163 37 37,9
45	150 19 8,8	105	158 43 20,9	165	164 23 45,3
60	152 9 38,5	120	160 42 55,6		

Wenn diese Werthe in

$$g' = \xi + \varphi$$

substituirt werden, und dann die g' in die letzten Ausdrücke für $\frac{r'}{a'} \text{Cos } f'$ und $\frac{r'}{a'} \text{Sin } f'$, so erhält man wiederum diese Grössen als Reihen nach den Vielfachen von ξ .

Die in beiderlei Weisen ermittelten Reihen sind:

$$\frac{r'}{a'} \text{Cos } f'$$

$\omega_4 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
0ξ	8,8594725n	8,8594725n	8,8594725n	8,8594725n	8,8594725n	8,8594725n	8,8594725n	8,8594725n	8,8594725n	8,8594725n	8,8594725n
1ξ	9,9280611n	9,9322221n	9,9385351n	9,9461973n	9,9543220n	9,9621053n	9,9689553n	9,9745380n	9,9787504n	9,9816379n	9,9833075n
2ξ	8,023680	8,050399	8,088919	8,132880	8,176482	8,215905	8,248927	8,274805	8,293772	8,306511	8,313791
3ξ	5,95809	5,7007	5,1584n	5,9926n	6,28735n	6,46509n	6,58398n	6,66578n	6,72066n	6,75565n	6,77510n
4ξ	5,3598n	5,3243n	5,2529n	5,1335n	4,9191n	4,4150n	4,4926	4,9294	5,0969	5,1903	5,2330
5ξ	4,230	4,204	4,176	4,114	4,041	3,954	3,779	3,477	3,000	3,000n	3,6021n
6ξ	9,7237650n	9,7127247n	9,6943700n	9,6689277n	9,6370136n	9,5998367n	9,5593862n	9,5184725n	9,4806136n	9,4496911n	9,4293498n
7ξ	8,335299	8,328424	8,316380	8,298591	8,274804	8,245417	8,211809	8,176485	8,142838	8,114801	8,096177
8ξ	6,93742n	6,93902n	6,93972n	6,93702n	6,92881n	6,91387n	6,89292n	6,86753n	6,84130n	6,81849n	6,80284n
9ξ	5,4669	5,4886	5,5159	5,5403	5,5611	5,5747	5,5717	5,5613	5,5478	5,5315	5,5198
10ξ	3,778n	3,845n	3,954n	4,041n	4,114n	4,176n	4,205n	4,230n	4,230n	4,230n	4,255n

$$\frac{r'}{a'} \text{Sin } f'$$

1ξ	9,7235162	9,7124760	0,6941213	9,6686791	9,6367649	9,5995880	9,5591375	9,5182238	9,4803649	9,4494424	9,4291011
2ξ	8,335131n	8,328254n	8,316220n	8,298421n	8,274634n	8,245247n	8,211638n	8,176315n	8,142668n	8,114631n	8,095964n
3ξ	6,93732	6,93892	6,93962	6,93692	6,92865	6,91377	6,89282	6,86743	6,84120	6,81839	6,80250
4ξ	5,4654n	5,4874n	5,5147n	5,5391n	5,5599n	5,5735n	5,5705n	5,5603n	5,5466n	5,5303n	5,5172n
5ξ	3,699	3,844	3,952	4,041	4,114	4,175	4,204	4,230	4,230	4,230	4,230
6ξ	9,9278125n	9,9319734n	9,9382864n	9,9459484n	9,9540733n	9,9618566n	9,9687066n	9,9742893n	9,9785017n	9,9813892n	9,9830588
7ξ	8,023507	8,050239	8,088748	8,132660	8,176306	8,215135	8,248756	8,274635	8,293603	8,306341	8,313618
8ξ	5,9576	5,7006	5,1583n	5,9925n	6,28725n	6,46499n	6,58388n	6,66568n	6,72056n	6,75555n	6,77503n
9ξ	5,3579n	5,3231n	5,2517n	5,1323n	4,9138n	4,4138n	4,4914	4,9187	5,0957	5,1891	5,2405
10ξ	4,2304	4,203	4,175	4,113	4,040	3,953	3,778	3,477	3,000	3,000n	3,602n

Die den Werthen $\omega_4 = 15^\circ \dots 105^\circ$ entsprechenden Reihen in Potenzreihen nach Δ verwandelt, sind:

	$\frac{r'}{a'} \text{Cos } f'$						
$\omega_4 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
Δ^0	9,9069399	9,9118330	9,9192504	9,9282426	9,9377649	9,9468773	9,9548880
Δ^2	0,2553369n	0,2608343n	0,2691803n	0,2793210n	0,2900838n	0,3004101n	0,3095090n
Δ^4	8,887824	8,930093	8,989113	9,054195	9,116841	9,172177	9,217667
Δ^6	8,05409	7,97163	7,79460	7,30775	7,44797n	7,90428n	8,11394n
Δ^8	7,73370n	7,70220n	7,65031n	7,55823n	7,41982n	7,15746n	6,4120n
Δ^{10}	6,9660	6,9397	6,9117	6,8495	6,7770	6,6387	6,4346
$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta}$							
Δ	9,7608907n	9,7502420n	9,7324894n	9,7077890n	9,6766803n	9,6402907n	9,6005470n
» Δ^3	9,014095	9,008809	8,999205	8,984346	8,963788	8,937463	8,906607
» Δ^5	8,239643n	8,245596n	8,252885n	8,257102n	8,257461n	8,249820n	8,234914n
» Δ^7	7,35626	7,38475	7,42594	7,46258	7,50207	7,52366	7,53067
» Δ^9	6,2073	6,2746n	6,3835n	6,4707n	6,5754n	6,6335n	6,6597n

	$\frac{r'}{a'} \text{Sin } f'$						
Δ^0	9,7534743n	9,7426362n	9,7245925n	9,6995330n	9,6680338n	9,6312633n	9,5911773n
Δ^2	0,1032621	0,0930163	0,0758815	0,0519393	0,0216592	9,9860757	9,9470567
Δ^4	9,354538n	9,350154n	9,341807n	9,328418n	9,309562n	9,284795n	9,255321n
Δ^6	8,571486	8,580274	8,589678	8,596102	8,599649	8,594308	8,581239
Δ^8	7,66389n	7,70658n	7,75053n	7,78946n	7,83365n	7,85736n	7,86560n
Δ^{10}	6,4346	6,5796	6,6886	6,7756	6,8817	6,9397	6,9660
$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta}$							
Δ	9,9335631n	9,9433709n	9,9506684n	9,9595316n	9,9689358n	9,9779541n	9,9858955n
Δ^3	8,603200	8,639239	8,690259	8,747296	8,802909	8,852477	8,893409
Δ^5	7,64366	7,54700	7,32367	6,3564	7,28717n	7,62742n	7,80499n
Δ^7	7,38693n	7,35510n	7,30079n	7,20564n	7,06040n	6,7788n	6,0817n
Δ^9	6,6597	6,6326	6,6044	6,5423	6,4707	6,3324	6,2075

Es ist vielleicht überflüssig zu bemerken, dass in allen Ausdrücken für $\frac{r'}{a'} \text{Cos } f'$ und $\frac{r'}{a'} \text{Sin } f'$ die Coefficienten logarithmisch angesetzt sind.

Die letzten Ausdrücke für $\frac{r'}{a'} \text{Cos } f'$ und $\frac{r'}{a'} \text{Sin } f'$ verbunden mit den für $(\Delta)^{-3}$ früher ermittelten geben schliesslich:

$$(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Cos } f'$$

$\omega_4 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
$(\frac{k'}{\Delta})$	- 3",3426	- 3",3478	- 3",3594	- 3",3884	- 3",4221	- 3",4781	- 3",5490
$(\frac{k'}{\Delta})^3$	+126,7247	+126,1081	+125,3263	+124,6850	+124,4899	+124,9679	+126,2037
$(\frac{k'}{\Delta})^5$	+ 61,1024	+ 57,1077	+ 53,5738	+ 54,1870	+ 62,1658	+ 78,8706	+102,8025
$(\frac{k'}{\Delta})^7$	+ 17,7053	+ 18,6551	+ 19,0124	+ 16,6151	+ 7,6707	- 14,6793	- 56,6209
$(\frac{k'}{\Delta})^9$	+ 1,5885	+ 4,4809	+ 6,2594	+ 3,7312	- 6,9772	- 28,9358	- 79,9631
$(\frac{k'}{\Delta})^{11}$	- 1,6326	+ 0,7468	+ 1,9403	+ 0,5497	- 4,6147	- 19,0707	+ 9,0343
$(\frac{k'}{\Delta})^{13}$	- 1,1622	- 0,1462	+ 0,6688	- 0,1312	- 2,0392	+ 17,3683	+ 29,2929
$(\frac{k'}{\Delta})^{15}$	- 1,1952	- 0,4868	+ 0,2623	- 0,2234	+ 0,3479	- 2,1775	+ 30,3487
$(\frac{k'}{\Delta})^{17}$	- 0,1175	- 0,0410	- 0,0007	- 0,0117	+ 0,2720	+ 0,0357	- 42,8933
$(\frac{k'}{\Delta})^{19}$							+ 12,7336
Δ	- 0,0096	- 0,0099	- 0,0106	- 0,0115	- 0,0130	- 0,0139	- 0,0150
Δ^3	- 0,0003	- 0,0005	- 0,0004	- 0,0005	- 0,0002	- 0,0003	- 0,0003
$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} (\frac{k'}{\Delta})^0$	- 0,0097	- 0,0098	- 0,0097	- 0,0096	- 0,0093	- 0,0089	- 0,0087
» $(\frac{k'}{\Delta})^2$	- 8,5711	- 8,5127	- 8,4304	- 8,3389	- 8,2529	- 8,1833	- 8,1318
» $(\frac{k'}{\Delta})^4$	- 22,7209	- 15,9981	- 5,2866	+ 8,7193	+ 25,1388	+ 42,9672	+ 61,0842
» $(\frac{k'}{\Delta})^6$	- 15,7604	- 10,4494	- 2,4837	+ 7,0743	+ 17,1179	+ 26,2824	+ 33,1766
» $(\frac{k'}{\Delta})^8$	- 7,3102	- 4,9293	- 1,0232	+ 3,3179	+ 4,9529	- 1,1636	- 24,6560
» $(\frac{k'}{\Delta})^{10}$	- 2,4862	- 1,9390	- 0,3817	+ 1,2193	- 0,0371	- 9,7759	- 20,9601
» $(\frac{k'}{\Delta})^{12}$	- 0,7476	- 0,7752	- 0,1536	+ 0,4210	- 0,8335	- 2,4391	- 11,2732
» $(\frac{k'}{\Delta})^{14}$	+ 0,0031	- 0,1613	- 0,0713	+ 0,0606	- 0,5525	+ 1,8532	+ 40,4667
» $(\frac{k'}{\Delta})^{16}$	+ 0,2033	+ 0,0075	- 0,0011	+ 0,0103	+ 0,0860	+ 0,2745	- 23,9249
» $(\frac{k'}{\Delta})^{18}$							+ 4,6319
» Δ^2	+ 0,0008	+ 0,0008	+ 0,0009	+ 0,0010	+ 0,0008	+ 0,0009	+ 0,0010

$$(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Sin } f'$$

$(\frac{k'}{\Delta})$	+ 1,8038	+ 1,7922	+ 1,7749	+ 1,7567	+ 1,7398	+ 1,7261	+ 1,7170
-----------------------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

$\omega_4 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^3$	- 75,6842	- 76,8204	- 78,7182	- 81,3505	- 84,6313	- 88,3985	- 92,3998
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^5$	- 45,5456	- 40,5626	- 34,4376	- 29,2872	- 26,3082	- 25,0016	- 23,6117
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^7$	- 17,5253	- 15,7132	- 12,5076	- 6,8503	+ 3,8768	+ 23,6713	+ 57,5805
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^9$	- 4,3278	- 4,8971	- 4,2184	- 0,7266	+ 6,6996	+ 18,5358	+ 29,9081
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{11}$	- 0,1021	- 1,2633	- 1,3303	+ 0,2156	+ 2,8592	+ 3,7547	- 10,5677
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{13}$	+ 0,2898	- 0,3051	- 0,4629	+ 0,3096	+ 0,8273	- 10,2646	- 40,9598
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{15}$	+ 0,6470	+ 0,1924	- 0,2014	+ 0,1551	- 0,5697	+ 1,9085	+ 24,7345
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{17}$	+ 0,2168	+ 0,0307	- 0,0003	+ 0,0130	- 0,0840	+ 0,1441	+ 1,0163
$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{19}$							- 2,5507
Δ	+ 0,0165	+ 0,0200	+ 0,0206	+ 0,0208	+ 0,0199	+ 0,0190	+ 0,0169
Δ^3	- 0,0013	- 0,0014	- 0,0019	- 0,0020	- 0,0019	- 0,0022	- 0,0013
$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^0$	- 0,0048	- 0,0049	- 0,0055	- 0,0058	- 0,0062	- 0,0067	- 0,0073
» $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^2$	- 15,1615	- 15,1914	- 15,2576	- 15,3303	- 15,5745	- 15,8466	- 16,1866
» $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^4$	+ 5,0801	+ 0,9362	- 5,4875	- 13,5413	- 22,4413	- 31,3438	- 39,4515
» $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^6$	+ 7,5900	+ 3,6626	- 4,5776	- 6,6040	- 9,8380	- 9,5768	- 4,6047
» $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^8$	+ 4,6120	+ 2,4344	- 0,3949	- 2,4491	- 1,4146	+ 5,0416	+ 21,5068
» $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{10}$	+ 1,9350	+ 1,1294	- 0,0830	- 0,7697	+ 0,7437	+ 7,1115	+ 7,3505
» $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{12}$	+ 0,6898	+ 0,5212	- 0,0147	- 0,2118	+ 0,7362	- 1,4159	- 0,6225
» $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{14}$	+ 0,1906	+ 0,1814	+ 0,0003	+ 0,0007	+ 0,2206	- 0,5357	- 19,7592
» $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{16}$	- 0,1119	+ 0,0020	+ 0,0007	- 0,0039	- 0,0334	- 0,1292	+ 15,4191
» $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{18}$							- 3,6300
» Δ^2	- 0,0002	- 0,0003	- 0,0005	- 0,0003	+ 0,0001	- 0,0002	+ 0,0005

Bei der Beurtheilung der Convergenz dieser Reihen darf man nicht vergessen, dass die Entwicklung ursprünglich nach den Potenzen von η bewerkstelligt worden, und nachher die Glieder nach den Potenzen von $\frac{k'}{\Delta}$ geordnet sind.

Zu den Vorzügen der jetzt angewandten Methode, die Grössen $(\Delta)^{-3}$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Cos } f'$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Sin } f'$ zu entwickeln, gehört auch die leichte Prüfung der Rechnung.

Es wurde eine vorläufige Controle für $\xi = 180^\circ$ ausgeführt. Aus den Ausdrücken für $(\Delta)^2$ auf pag. 23 wurden für diesen Werth von $\xi(\Delta)^{-3}$, $\frac{r'}{\alpha'} \text{Cos } f'$ und $\frac{r'}{\alpha'} \text{Sin } f'$ direct berechnet und die Producte $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{\alpha'} \text{Cos } f'$ und $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{\alpha'} \text{Sin } f'$ gebildet, für die entsprechenden Werthe $\left(\frac{k'}{\Delta}\right) = 1$ und $\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} = 0$ müssen dann die angeführten Potenzreihen dasselbe Resultat liefern. Die vollständige Controle wurde für denjenigen Werth von ξ , welcher der Berechnung von η zu Grunde gelegt worden ist, ausgeführt. Da die Potenzen von $\frac{k'}{\Delta}$ schon in den früheren Rechnungen berechnet sind, so sieht man, dass die Controle leicht ist; dass sie auch hinreichend ist, sieht man ohne Schwierigkeit ein.

Der nächste Schritt wäre nun, $(\Delta)^{-3}$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{\alpha'} \text{Cos } f'$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{\alpha'} \text{Sin } f'$ durch die Tafeln in trigonometrische Reihen nach x zu entwickeln. Es wurde aber vorgezogen, diese Verwandlung aufzuschieben, bis diejenigen Theile der Differentialquotienten der Elemente, welche Functionen von $(\Delta)^{-3}$ sind, gebildet waren. Dieses Verfahren wurde nur bei den sechs ersten speciellen Werthen angewandt; bei $\omega_4 = 105$ erwies es sich als unzuverlässig.

Aus der Grösse der Coefficienten sieht man, dass für $\omega_4 = 105$ die Grenze der bequemen Anwendung der Formel II schon überschritten ist. In der That sind die Coefficienten für die höheren Potenzen von $\frac{k'}{\Delta}$ so gross, dass die vorhandenen Tafeln nicht hinreichend genau sind, um einen sicheren Uebergang zu trigonometrischen Reihen zu gestatten, abgesehen davon, dass sie nur die 17 ersten Potenzen von $\frac{k'}{\Delta}$ in Reihen nach den Vielfachen von x geben. Es war deshalb nöthig, für den genannten Specialwerth von ω_4 einen anderen Weg einzuschlagen, um die Ausdrücke für $(\Delta)^{-3}$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{\alpha'} \text{Cos } f'$ und $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{\alpha'} \text{Sin } f'$ in trigonometrische Reihen zu verwandeln.

Wird $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{m-2}$ zweimal in Bezug auf x differentiirt, so erhalten wir

$$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^m = \frac{m-2}{m-1} (1 + k'^2) \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{m-2} - \frac{m-3}{m-1} k'^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{m-4} - \frac{1}{(m-1)(m-2)} \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 D^2 x \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{m-2} \dots (\beta)$$

Differentiiren wir diese Gleichung und berücksichtigen die Relation

$$D_x \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^m = m \frac{k^2}{2} \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \cdot \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^m$$

so geht

$$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^m = \frac{(m-2)(m-2)}{m(m-1)} (1 + k'^2) \frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{m-2} - \frac{(m-3)(m-4)}{m(m-1)} k'^2 \frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{m-4} \dots (\gamma)$$

$$- \frac{1}{m(m-1)(m-2)} \cdot \frac{2}{k^2} \left(\frac{\pi}{2K}\right)^3 D^3 x \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{m-2}$$

hervor.

Mit Hilfe der Gleichungen (β) und (γ) leitete ich aus den früher für $\omega_4 = 105$ gegebenen Potenzreihen die folgenden ab:

$(\Delta)^{-3}$		$(\Delta)^{-3} \frac{r'}{\alpha'} \text{Cos } f'$		$(\Delta)^{-3} \frac{r'}{\alpha'} \text{Sin } f'$	
9,42846	$\frac{k'}{\Delta}$	0,55011 _n	$\frac{k'}{\Delta}$	0,23477	$\frac{k'}{\Delta}$
2,1973144	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^3$	2,1010721	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^3$	1,965671 _n	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^3$
2,0180580	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^5$	2,0137598	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^5$	1,373127 _n	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^5$
2,0693091 _n	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^7$	1,990681 _n	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^7$	1,762335	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^7$
6,699	Δ	8,1761 _n	Δ	0,62799	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^9$
9,172173	$D_x^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^7$	6,477	Δ^3	8,2279	Δ
8,998816 _n	$D_x^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^9$	9,195091	$D_x^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^7$	7,114 _n	Δ^3
8,713939 _n	$D_x^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{11}$	8,897753 _n	$D_x^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^9$	8,777627	$D_x^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^9$
7,965769	$D_x^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{13}$	8,644194 _n	$D_x^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{11}$	8,435674	$D_x^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{11}$
8,346112 _n	$D_x^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{15}$	7,045362 _n	$D_x^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{13}$	8,388202 _n	$D_x^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{13}$
7,906364 _n	$D_x^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{17}$	8,386059	$D_x^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{15}$	7,051415	$D_x^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{15}$
		7,898047 _n	$D_x^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{17}$	7,199756	$D_x^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{17}$
6,4771 _n	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^0$	7,93952 _n	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^0$	7,86381 _n	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^0$
9,79400	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^2$	0,91018 _n	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^2$	1,209156 _n	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^2$
1,867466	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^4$	1,785929	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^4$	1,596064 _n	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^4$
1,507234	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^6$	1,520832	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^6$	0,663201 _n	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^6$
1,507586 _n	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^8$	1,391923 _n	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^8$	1,332576	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^8$
1,362236 _n	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{10}$	1,324986 _n	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{10}$	0,870398	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{10}$
1,060637	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{12}$	0,904055	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{12}$	0,921510 _n	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{12}$
		7,000	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \Delta^2$	6,699	$\frac{\text{Sin } \xi}{\Delta} \Delta^2$
7,292711 _n	$D_x^3 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{12}$	7,263591 _n	$D_x^3 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{12}$	6,864154	$D_x^3 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{12}$
7,068627	$D_x^3 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{14}$	6,999281	$D_x^3 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{14}$	6,789696 _n	$D_x^3 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{14}$
6,295781 _n	$D_x^3 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{16}$	6,200442 _n	$D_x^3 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{16}$	6,094591	$D_x^3 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{16}$

Diese Reihen können leicht und sicher durch die Tafel II im Anhange und durch Tafel 2 des «Recueil de Tables» in trigonometrische Reihen verwandelt werden.

Aus den Tafeln 2*) der «Recueils de Tables» lassen sich nämlich einfach durch Differentiation Tafeln für $D_x^2 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^i$ und $D_x^3 \left(\frac{k'}{\Delta}\right)^i$ ableiten. Da diese wohl nur ausnahmsweise Anwendung finden würden, so sind sie hier nicht aufgenommen.

In den jetzt angeführten Reihen sind die Coefficienten in Secunden ausgedrückt und logarithmisch angesetzt.

III.

Die in dem vorigen Abschnitte auseinandergesetzte und angewandte Methode leidet freilich an dem Mangel, dass sie verhältnissmässig wenig verwendbar ist. Da sie aber gerade bei kleinen Entfernungen der beiden Himmelskörper eine sehr leichte Entwicklung für die Haupttheile der Störungfunction ermöglicht, so darf ihre Bedeutung in der Störungstheorie nicht unterschätzt werden. Wo man diese Methode überhaupt anwenden kann, ist sie immer die zweckmässigste, und das, was man an Gleichförmigkeit der Operationen durch die Nothwendigkeit, sogar in derselben Abtheilung der Bahn eine zweite Methode herbeiziehen zu müssen, opfert, wird durch die geringere Arbeit reichlich ersetzt.

Die Formel III hätte wohl der Entwicklung sämmtlicher Partialwerthe zu Grunde gelegt werden können; die practischen Schwierigkeiten wären aber dabei recht bedeutend geworden, denn bei einigen Partialwerthen wäre man genöthigt gewesen, die Entwicklung bis zum 20-fachen des Argumentes zu treiben, d. h. trigonometrische Reihen herzustellen, deren Gliederanzahl 41 betrüge, während die entsprechenden Reihen nach den Potenzen von $\frac{k'}{\Delta}$ im Allgemeinen nicht mehr als 21 Glieder enthalten. Aber gerade da, wo die Formel II ihre Brauchbarkeit verliert, bietet die Formel III weiter keine wesentlichen Schwierigkeiten. Für die vier letzten Partialwerthe von ω_4 konnte diese Formel mit Vortheil angewandt werden.

Nach Hansen's bekannter Methode wurde

$$\{1 + \Phi_1 \cos(\psi - \Lambda_1)\}^{-\frac{n}{2}}$$

in trigonometrische Reihen nach den Vielfachen von ψ entwickelt. Es ergab sich:

*) Die obere Hälfte dieser Tafel wurde natürlich vor | die Glieder dort durchgängig falsche Vorzeichen er-
der Anwendung corrigirt; wie man leicht einsieht, haben | halten.

$\omega_4 =$	$T_1^{-\frac{3}{2}}$							
	120°		135°		150°		165°	
	$(1 - k_1 \sin \psi)^{\frac{3}{2}}$		$(1 - k_1 \sin \psi)^{\frac{3}{2}}$		$(1 - k_1 \sin \psi)^{\frac{3}{2}}$		$(1 - k_1 \sin \psi)^{\frac{3}{2}}$	
i	Cos	Sin	Cos	Sin	Cos	Sin	Cos	Sin
0	+15,6156		+14,4709		+13,6299		+13,1219	
1	+ 5,9845	-20,2358	+ 6,2181	-17,9421	+ 6,2769	-16,2725	+ 6,2688	-15,2725
2	-10,5750	- 6,8531	- 8,6138	- 6,7856	- 7,2552	- 6,5749	- 6,4718	- 6,3894
3	- 5,4198	+ 4,6423	- 5,0506	+ 3,2370	- 4,6469	+ 2,3392	- 4,3607	+ 1,8556
4	+ 1,6026	+ 3,5811	+ 0,7456	+ 3,0959	+ 0,2629	+ 2,6683	+ 0,0307	+ 2,3945
5	+ 2,0977	- 0,2812	+ 1,6503	+ 0,1610	+ 1,3061	+ 0,3614	+ 1,1034	+ 0,4364
6	+ 0,1731	- 1,1133	+ 0,3558	- 0,7740	+ 0,4025	- 0,5427	+ 0,4021	- 0,4179
7	- 0,5370	- 0,2539	- 0,3128	- 0,3000	- 0,1785	- 0,2819	- 0,1132	- 0,2568
8	- 0,2071	+ 0,2317	- 0,1948	+ 0,0996	- 0,1603	+ 0,0319	- 0,1347	+ 0,0035
9	+ 0,0853	+ 0,1376	+ 0,0152	+ 0,1087	- 0,0136	+ 0,0784	- 0,0229	+ 0,0601
10	+ 0,0807	- 0,0220	+ 0,0538	+ 0,0106	+ 0,0331	+ 0,0198	+ 0,0223	+ 0,0209
11	+ 0,0009	- 0,0431	+ 0,0137	- 0,0236	+ 0,0147	- 0,0114	+ 0,0132	- 0,0060
12	- 0,0210	- 0,0067	- 0,0088	- 0,0103	- 0,0026	- 0,0086	- 0,0003	- 0,0068
13	- 0,0064	+ 0,0094	- 0,0062	+ 0,0024	- 0,0044	- 0,0003	- 0,0030	- 0,0011
14	+ 0,0037	+ 0,0045	+ 0,0002	+ 0,0033	- 0,0009	+ 0,0020	- 0,0010	+ 0,0011
15	+ 0,0027	- 0,0011	+ 0,0016	+ 0,0002	+ 0,0007	+ 0,0007	+ 0,0003	+ 0,0006
16	- 0,0002	- 0,0015	+ 0,0005	- 0,0006	+ 0,0005	- 0,0002	+ 0,0003	
17	- 0,0007	- 0,0001	- 0,0002	- 0,0001	- 0,0002	- 0,0003		
18	- 0,0003	+ 0,0003	- 0,0002					

$\omega_4 =$	$T_1^{-\frac{5}{2}}$							
	$(1 - k_1 \sin \psi)^{\frac{5}{2}}$		$(1 - k_1 \sin \psi)^{\frac{5}{2}}$		$(1 - k_1 \sin \psi)^{\frac{5}{2}}$		$(1 - k_1 \sin \psi)^{\frac{5}{2}}$	
	Cos	Sin	Cos	Sin	Cos	Sin	Cos	Sin
0	+ 4,901		+ 4,176		+ 3,680		+ 3,397	
1	+ 2,404	- 8,129	+ 2,327	- 6,714	+ 2,222	- 5,761	+ 2,143	- 5,221
2	- 5,304	- 3,437	- 4,055	- 3,195	- 3,250	- 2,945	- 2,809	- 2,774
3	- 3,279	+ 2,809	- 2,881	+ 1,847	- 2,532	+ 1,274	- 2,308	+ 0,982
4	+ 1,138	+ 2,543	+ 0,501	+ 2,081	+ 0,169	+ 1,716	+ 0,019	+ 1,498
5	+ 1,712	- 0,230	+ 1,278	+ 0,125	+ 0,968	+ 0,268	+ 0,796	+ 0,315
6	+ 0,160	- 1,027	+ 0,312	- 0,678	+ 0,338	- 0,455	+ 0,329	- 0,342
7	- 0,552	- 0,261	- 0,306	- 0,293	- 0,168	- 0,266	- 0,104	- 0,236
8	- 0,236	+ 0,263	- 0,210	+ 0,107	- 0,167	+ 0,033	- 0,137	+ 0,004
9	+ 0,106	+ 0,171	+ 0,018	+ 0,129	- 0,015	+ 0,089	- 0,026	+ 0,067
10	+ 0,109	- 0,030	+ 0,069	+ 0,014	+ 0,041	+ 0,025	+ 0,027	+ 0,025
11	+ 0,001	- 0,062	+ 0,019	- 0,032	+ 0,020	- 0,015	+ 0,017	- 0,008
12	- 0,033	- 0,011	- 0,013	- 0,015	- 0,004	- 0,012		- 0,010
13	- 0,011	+ 0,016	- 0,010	+ 0,004	- 0,007	- 0,001		
14	+ 0,006	+ 0,008		+ 0,006				
15	+ 0,005	- 0,002						

$\omega_4 =$	$T_1^{-\frac{7}{2}}$							
	$(1 - k_1 \sin \psi)^{\frac{7}{2}}$		$(1 - k_1 \sin \psi)^{\frac{7}{2}}$		$(1 - k_1 \sin \psi)^{\frac{7}{2}}$		$(1 - k_1 \sin \psi)^{\frac{7}{2}}$	
	Cos	Sin	Cos	Sin	Cos	Sin	Cos	Sin
0	+ 1,84		+ 1,44		+ 1,18		+ 1,04	
1	+ 0,97	- 3,29	+ 0,87	- 2,50	+ 0,78	- 2,02	+ 0,72	- 1,75
2	- 2,39	- 1,55	- 1,70	- 1,34	- 1,29	- 1,17	- 1,07	- 1,05
3	- 1,65	+ 1,41	- 1,35	+ 0,86	- 1,14	+ 0,57	- 0,99	+ 0,43
4	+ 0,64	+ 1,42	+ 0,26	+ 1,10	+ 0,03	+ 0,86	+ 0,01	+ 0,72
5	+ 1,07	- 0,14	+ 0,75	+ 0,07	+ 0,54	+ 0,15	+ 0,43	+ 0,17

$\omega_4 =$	120°		135°		150°		165°	
6	+ 0,11	- 0,70	+ 0,20	- 0,44	+ 0,21	- 0,28	+ 0,19	- 0,20
7	- 0,41	- 0,20	- 0,22	- 0,21	- 0,11	- 0,18	- 0,06	- 0,14
8	- 0,19	+ 0,21	- 0,16	+ 0,08	- 0,13	+ 0,03	- 0,10	0,00
9	+ 0,09	+ 0,15	+ 0,01	+ 0,10	- 0,01	+ 0,07	- 0,02	+ 0,06
10	+ 0,10	- 0,03	+ 0,06	+ 0,01	+ 0,03	+ 0,02	+ 0,03	+ 0,03
11	0,00	- 0,06	+ 0,01	- 0,03	+ 0,02	- 0,01	+ 0,02	- 0,01

Für $\omega_4 = 165^\circ$ wurde $(\Delta)^{-3}$ genau nach den Vorschriften im «Recueil de Tables» entwickelt. Wie die Entwicklung für die übrigen drei Partialwerthe bewerkstelligt worden ist, soll jetzt auseinandergesetzt werden.

Setzen wir

$$T_1^{-\frac{3}{2}} = (1 - k_1 \sin \psi)^{\frac{3}{2}} S^{(3)}$$

$$T_1^{-\frac{5}{2}} = (1 - k_1 \sin \psi)^{\frac{5}{2}} S^{(5)}$$

$$T_1^{-\frac{7}{2}} = (1 - k_1 \sin \psi)^{\frac{7}{2}} S^{(7)}$$

.....

wo die $S^{(n)}$ nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von ψ fortschreitende Reihen bedeuten, so kann man schreiben:

$$(\Delta)^{-3} = (1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{3}{2}} (1 - k_1 \sin \psi) \sqrt{1 - k_1 \sin \psi} \{ S^{(3)} - \frac{3}{2} (1 - k_1 \sin \psi) T_2 (S^{(5)} - \frac{5}{4} (1 - k_1 \sin \psi) T_2 (S^{(7)} - \frac{7}{6} (1 - k_1 \sin \psi) T_2 (S^{(9)} - \dots)) \}$$

oder, da höhere Potenzen von T_2 als die zweite vernachlässigt werden können:

$$(\Delta)^{-3} = (1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{3}{2}} (1 - k_1 \sin \psi) \sqrt{1 - k_1 \sin \psi} \{ S_1^{(3)} - \frac{3}{2} (1 - k_1 \sin \psi) T_2 [S^{(5)} - \frac{5}{4} (1 - k_1 \sin \psi) T_2 S^{(7)}] \}.$$

Um nun zuerst den Ausdruck innerhalb der Klammer { } auf die Form

$$\sum \left. \begin{matrix} a_n \cos \\ b_n \sin \end{matrix} \right\} n\psi$$

die wir mit S bezeichnen wollen, zu bringen, wird das Hauptgeschäft darin bestehen, die Coefficienten α und λ in der Reihe

$$(1 - k_1 \sin \psi) \left. \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} i \xi S^{(m)} = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \psi + \alpha_2 \cos 2\psi + \dots \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (A)$$

$$+ \lambda_1 \sin \psi + \lambda_2 \sin 2\psi + \dots \dots \dots$$

zu ermitteln. Da T_2 von der Form

$$\begin{aligned} & M_3 \cos 3\xi + M_4 \cos 4\xi + \dots \\ & + N_3 \sin 3\xi + N_4 \sin 4\xi + \dots \end{aligned}$$

ist, so ist hier der niedrigste Werth von $i = 3$.

Sind die x und λ bestimmt, so hat die Herstellung von S weiter keine Schwierigkeiten, und wir bekommen:

$$(\Delta)^{-3} = (1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{3}{2}} (1 - k_1 \sin \psi) \sqrt{1 - k_1 \sin \psi} S,$$

woraus

$$(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \cos f' = (1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{3}{2}} \frac{r'}{a'} \cos f' (1 - k_1 \sin \psi) \sqrt{1 - k_1 \sin \psi} S,$$

$$(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \sin f' = (1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{3}{2}} \frac{r'}{a'} \sin f' (1 - k_1 \sin \psi) \sqrt{1 - k_1 \sin \psi} S.$$

Da sowohl $(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{3}{2}}$ wie $(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{3}{2}} \frac{r'}{a'} \cos f'$ und $(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{3}{2}} \frac{r'}{a'} \sin f'$ durch trigonometrische Reihen nach den Vielfachen von ξ angegeben werden, so müssen wir die durch die Formel (A) angedeuteten Operationen wiederholen, um jeden der drei angeführten Ausdrücke unter die folgende Form stellen zu können:

$$\sqrt{1 - k_1 \sin \psi} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 + \alpha_1 \cos \psi + \alpha_2 \cos 2\psi + \dots \\ + \beta_1 \sin \psi + \beta_2 \sin 2\psi + \dots \end{array} \right\}$$

Es muss aber bemerkt werden, dass i hier auch die Werthe 0, 1, 2 annimmt.

Der Definition von ψ zufolge leitet man leicht die beiden Relationen ab:

$$\left. \begin{aligned} \cos \xi &= \frac{\sin \psi - k_1}{1 - k_1 \sin \psi} \\ \sin \xi &= \frac{\sqrt{1 - k_1^2} \cos \psi}{1 - k_1 \sin \psi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B)$$

Man sieht dann sofort ein, dass die Bestimmung von x und λ für $i = 0$ und $i = 1$ ohne irgend welche Schwierigkeiten geschehen kann. Setzen wir nämlich

$$\begin{aligned} (1 - k_1 \sin \psi) S &= x_0^{(0)} + x_1^{(0)} \cos \psi + x_2^{(0)} \cos 2\psi + \dots \\ &+ \lambda_1^{(0)} \sin \psi + \lambda_2^{(0)} \sin 2\psi + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1 - k_1 \sin \psi) \cos \xi S &= x_0^{(c)} + x_1^{(c)} \cos \psi + x_2^{(c)} \cos 2\psi + \dots \\
 &+ \lambda_1^{(c)} \cos \psi + \lambda_2^{(c)} \sin 2\psi + \dots \\
 (1 - k_1 \sin \psi) \sin \xi S &= x_0^{(s)} + x_1^{(s)} \cos \psi + x_2^{(s)} \cos 2\psi + \dots \\
 &+ \lambda_1^{(s)} \sin \psi + \lambda_1^{(s)} \sin 2\psi + \dots
 \end{aligned}$$

so ergibt sich unmittelbar, wenn die Coefficienten in der S -Reihe wie oben mit a_n, b_n bezeichnet werden:

$x_0^{(0)} = a_0 - \frac{k_1}{2} b_1$	$\lambda_1^{(0)} = b_1 - \frac{k_1}{2} (2a_0 - a_2)$
$x_1^{(0)} = a_1 - \frac{k_1}{2} b_2$	$\lambda_2^{(0)} = b_2 - \frac{k_1}{2} (a_1 - a_3)$
$x_2^{(0)} = a_2 + \frac{k_1}{2} (b_1 - b_3)$	$\lambda_3^{(0)} = b_3 - \frac{k_1}{2} (a_2 - a_4)$
$x_3^{(0)} = a_3 + \frac{k_1}{2} (b_2 - b_4)$	$\lambda_4^{(0)} = b_4 - \frac{k_1}{2} (a_3 - a_5)$
$x_4^{(0)} = a_4 + \frac{k_1}{2} (b_3 - b_5)$	
.....
$x_0^{(c)} = -k_1 a_0 + \frac{1}{2} b_1$	$\lambda_1^{(c)} = -k_1 b_1 + \frac{1}{2} (2a_0 - a_2)$
$x_1^{(c)} = -k_1 a_1 + \frac{1}{2} b_2$	$\lambda_2^{(c)} = -k_1 b_2 + \frac{1}{2} (a_1 - a_3)$
$x_2^{(c)} = -k_1 a_2 - \frac{1}{2} (b_1 - b_3)$	$\lambda_3^{(c)} = -k_1 b_3 + \frac{1}{2} (a_2 - a_4)$
$x_3^{(c)} = -k_1 a_3 - \frac{1}{2} (b_2 - b_4)$	$\lambda_4^{(c)} = -k_1 b_4 + \frac{1}{2} (a_3 - a_5)$
$x_4^{(c)} = -k_1 a_4 - \frac{1}{2} (b_3 - b_5)$	
.....
$x_0^{(s)} = \frac{1}{2} k'_1 a_1$	$\lambda_1^{(s)} = \frac{1}{2} k'_1 b_2$
$x_1^{(s)} = \frac{1}{2} k'_1 (2a_0 + a_2)$	$\lambda_2^{(s)} = \frac{1}{2} k'_1 (b_1 + b_3)$
$x_2^{(s)} = \frac{1}{2} k'_1 (a_1 + a_3)$	$\lambda_3^{(s)} = \frac{1}{2} k'_1 (b_2 + b_4)$
$x_3^{(s)} = \frac{1}{2} k'_1 (a_2 + a_4)$	
.....

Es ist hier

$$k'_1 = \frac{1 - k_2}{1 + k_2} = \sqrt{1 - k_1^2}.$$

Für $i > 1$ gestaltet sich aber die Sache nicht so einfach. Um in diesem Falle die Formeln übersichtlich zu machen, wird es zweckmässig sein, für die Cosinus und Sinus die entsprechenden Exponentialfunctionen einzuführen.

(B) giebt, wenn man die oben angeführte Relation zwischen k_1 und k_2 berücksichtigt:

$$e^{V^{-1}\xi} = \sqrt{-1} \frac{e^{-V^{-1}\psi}}{1+k_2} \frac{(1+\sqrt{-1}\sqrt{k_2}e^{V^{-1}\psi})^2}{1-k_1 \sin \psi}.$$

Ferner ist

$$1 - k_1 \sin \psi = \frac{(1+\sqrt{-1}\sqrt{k_2}e^{V^{-1}\psi})(1-\sqrt{-1}\sqrt{k_2}e^{-V^{-1}\psi})}{1+k_2}.$$

Daraus wird

$$(1 - k_1 \sin \psi) e^{iV^{-1}\xi} = (-1)^{\frac{i}{2}} \frac{e^{-iV^{-1}\psi}}{1+k_2} \cdot \frac{(1+\sqrt{-1}\sqrt{k_2}e^{V^{-1}\psi})^{i+1}}{(1-\sqrt{-1}\sqrt{k_2}e^{-V^{-1}\psi})^{i-1}}.$$

In der Entwicklung

$$\frac{(1+\sqrt{-1}\sqrt{k_2}e^{V^{-1}\psi})^{i+1}}{(1-\sqrt{-1}\sqrt{k_2}e^{-V^{-1}\psi})^{i-1}} = V_0^{(i)} + \sqrt{-1}V_1^{(i)}e^{V^{-1}\psi} - V_2^{(i)}e^{2V^{-1}\psi} - \sqrt{-1}V_3^{(i)}e^{3V^{-1}\psi} + \dots$$

$$+ \sqrt{-1}V_{-1}^{(i)}e^{-V^{-1}\psi} - V_{-2}^{(i)}e^{-2V^{-1}\psi} - \sqrt{-1}V_{-3}^{(i)}e^{-3V^{-1}\psi} + \dots$$

findet man nun folgende Ausdrücke für die Coefficienten:

$$V_0^{(i)} = 1 - \frac{i+1}{1} \cdot \frac{i-1}{1} k_2 + \frac{(i+1)i}{1.2} \cdot \frac{(i-1)i}{1.2} k_2^2 - \frac{(i+1)i(i-1)}{1.2.3} \cdot \frac{(i-1)i(i+1)}{1.2.3} k_2^3 + \dots$$

$$V_1^{(i)} = \sqrt{k_2} \left\{ \frac{i+1}{1} - \frac{(i+1)i}{1.2} \cdot \frac{i-1}{1} k_2 + \frac{(i+1)i(i-1)}{1.2.3} \cdot \frac{(i-1)i}{1.2} k_2^2 - \dots \right\}$$

$$V_2^{(i)} = k_2 \left\{ \frac{(i+1)i}{1.2} - \frac{(i+1)i(i-1)}{1.2.3} \cdot \frac{i-1}{1} k_2 + \frac{(i+1)i(i-1)(i-2)}{1.2.3.4} \cdot \frac{(i-1)i}{1.2} k_2^2 - \dots \right\}$$

$$\dots$$

$$V_{-1}^{(i)} = \sqrt{k_2} \left\{ \frac{i-1}{1} - \frac{(i-1)i}{1.2} \cdot \frac{i+1}{1} k_2 + \frac{(i-1)i(i+1)}{1.2.3} \cdot \frac{(i+1)i}{1.2} k_2^2 - \dots \right\}$$

$$V_{-2}^{(i)} = k_2 \left\{ \frac{(i-1)i}{1.2} - \frac{(i-1)i(i+1)}{1.2.3} \cdot \frac{i+1}{1} k_2 + \frac{(i-1)i(i+1)(i+2)}{1.2.3.4} \cdot \frac{(i+1)i}{1.2} k_2^2 - \dots \right\}$$

$$\dots$$

Diese Ausdrücke hätte man auch aus den W -Coefficienten im «Recueil de Tables» pag. 17 ableiten können dadurch, dass

$$h = i + 1 \text{ und } r = i - 1$$

gesetzt werden.

Für $i = 2$ ergibt sich sofort:

$$\begin{aligned} V_0^{(2)} &= (1 - k_2)^3 \\ V_1^{(2)} &= \sqrt{k_2} (3 - 3k_2 + k_2^2) \\ V_2^{(2)} &= k_2 (3 - k_2) \\ V_3^{(2)} &= k_2 \sqrt{k_2} \end{aligned}$$

Die Berechnung der übrigen Coefficienten ist aber leichter mit Hülfe der Recursionsgleichungen:

$$\begin{aligned} V_0^{(i+1)} &= \frac{1}{i-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_2}} V_{-1}^{(i)} - \frac{i+3}{i-1} V_{-2}^{(i)} \\ V_1^{(i+1)} &= \frac{i+2}{i-1} V_{-1}^{(i)} \\ V_{s+1}^{i+1} &= \frac{s}{i-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_2}} V_s^{(i)} - \frac{i+2-s}{i-1} V_{s-1}^{(i)} \\ V_{-s+1}^{i+1} &= \frac{s}{i-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_2}} V_{-s}^{(i)} - \frac{i+2+s}{i-1} V_{s-1}^{(i)} \end{aligned}$$

Für $i = 2$ hat man ausserdem die bequeme Formel:

$$V_{-s+1}^{(2)} = (\sqrt{k_2})^{s-1} V_0^{(2)}$$

Die Ableitung dieser Formeln geschieht in ähnlicher Weise, wie Gylden a. a. O. die entsprechenden Recursionsformeln für W ableitet.

Es sind in der folgenden Tafel die $\frac{1}{1+k_2} V_s^{(i)}$ für $i = 2, 3, 4$ und 5 zusammengestellt.

s	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
-16	0,000006	0,000064	0,00038	0,0015
-15	0,000011	0,000119	0,00066	0,0024
-14	0,000022	0,000221	0,00114	0,0039
-13	0,000043	0,000409	0,00195	0,0062
-12	0,000086	0,000749	0,00330	0,0096
-11	0,000171	0,001364	0,00547	0,0145
-10	0,000341	0,002461	0,00895	0,0213
-9	0,000679	0,004392	0,01426	0,0302
-8	0,001352	0,007733	0,02212	0,0405
-7	0,002691	0,013385	0,03297	0,0508
-6	0,005359	0,022643	0,04687	0,0573

s	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
-5	0,010667	0,037104	0,06163	0,0547
-4	0,021244	0,057991	0,07148	+0,0327
-3	0,042298	0,083836	0,06396	-0,0157
-2	0,084219	0,103946	+0,01842	-0,0869
-1	0,167685	+0,081578	-0,08646	-0,1461
0	0,333869	-0,087225	-0,23063	-0,1003
+1	0,925229	+0,670737	+0,20394	-0,1729
2	0,553501	0,840578	0,84219	+0,5197
3	0,101172	0,353645	0,66752	0,8460
4		0,050813	0,21562	0,4869
5			0,02553	0,1274
6				0,0129

Es ist nun leicht, die Coefficienten in

$$(1 - k_1 \sin \psi) e^{i\sqrt{-1}\xi} S = \sum p_\mu e^{\mu\sqrt{-1}\psi} + \sqrt{-1} \sum q_\nu e^{\nu\sqrt{-1}\psi}$$

zu berechnen. Um diese Arbeit noch zu erleichtern, sind hier die aus den angeführten $\sqrt{-1}$ -Coefficienten resultirenden Ausdrücke für

$$\frac{1}{2}(1 - k_1 \sin \psi) e^{i\sqrt{-1}\xi} e^{n\sqrt{-1}\psi}$$

gegeben.

	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
t^n	9,442089	9,247539 _n	9,03266	8,8041 _n
t^{n-2}	9,222546 _n	9,525521	9,62438 _n	9,6263
t^{n-4}	8,624379	8,61054	9,06188 _n	8,9368
t^{n-6}	8,026212 _n	8,62240 _n	7,9642 _n	8,8637
t^{n-8}	7,42805	8,26839	8,5531	7,8946 _n
t^{n-10}	6,8299 _n	7,82562 _n	8,3698 _n	8,4372 _n
t^{n-12}	6,2317	7,3416	8,0438	8,4055
t^{n-14}	5,634 _n	6,834 _n	7,6506 _n	8,1787 _n
$\sqrt{-1}t^{n+1}$	8,704028	8,40495 _n	8,1060	7,8078 _n
» t^{n-1}	9,665220 _n	9,623548	9,52344 _n	9,3864
» t^{n-3}	8,923463 _n	8,63961	9,00848	9,4148 _n
» t^{n-5}	8,325296	8,71578	8,6358 _n	8,7005 _n
» t^{n-7}	7,72713 _n	8,46234 _n	8,5049 _n	8,6389
» t^{n-9}	7,12896	8,05392	8,4888	8,2134
» t^{n-11}	6,5308 _n	7,5874 _n	8,2171 _n	8,4572 _n
» t^{n-13}	5,933	7,0899	7,8532	8,3063

Der Kürze wegen ist $e^{\sqrt{-1}\psi}$ mit t bezeichnet.

Nachdem diese Reihen in gehöriger Weise mit den Coefficienten in den S -Reihen multiplicirt sind, erhält man durch Trennung des Reellen und Imaginären:

$$(1 - k_1 \sin \psi) \cos i\xi \cdot S = x_0^{(e, i)} + x_1^{(e, i)} \cos \psi + \dots + \lambda_1^{(e, i)} \sin \psi + \dots$$

$$(1 - k_1 \sin \psi) \sin i\xi \cdot S = x_0^{(s, i)} + x_1^{(s, i)} \cos \psi + \dots + \lambda_1^{(s, i)} \sin \psi + \dots$$

Sind diese Ausdrücke für alle nöthigen i hergestellt, so ist die übrige Arbeit, um die besprochene Form für $(\Delta)^{-3}, (\Delta)^{-3} \frac{r'}{a} \cos f'$ und $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a} \sin f'$ zu erhalten, sehr geringfügig.

Es folgen jetzt die Haupttheile der in der auseinandergesetzten Weise ausgeführten Rechnungen. Es ergibt sich nämlich aus den früher angeführten Zahlen:

$$- \frac{5}{4} (1 - k_1 \sin \psi) T_2 S^{(7)}$$

$\omega_4 =$	120°		135°		150°	
	Cos	Sin	Cos	Sin	Cos	Sin
0	+0,029		+0,023		+0,020	
1	+0,009	-0,060	+0,007	-0,046	+0,006	-0,038
2	-0,049	-0,015	-0,040	-0,015	-0,031	-0,014
3	-0,019	+0,039	-0,018	+0,027	-0,017	+0,020
4	+0,025	+0,022	+0,015	+0,019	+0,009	+0,017
5	+0,020	-0,014	+0,017	-0,008	+0,014	-0,002
6	-0,006	-0,016	-0,001	-0,011	0,000	-0,008
7	-0,010	+0,001	-0,007	-0,002	-0,004	-0,003
8	-0,002	+0,007	-0,002	+0,004	-0,002	+0,002
9	+0,004	+0,003	+0,002	+0,002	+0,001	+0,001
10	+0,001	-0,002	+0,001	-0,001	+0,001	
11	-0,001	-0,001				

$$- \frac{3}{2} T_2 (1 - k_1 \sin \psi) \{S^{(5)} - \frac{5}{4} T_2 (1 - k_1 \sin \psi) S^{(7)}\}$$

0	+0,0933		+0,0791		+0,0694	
1	+0,0079	-0,1798	+0,0118	-0,1522	+0,0133	-0,1320
2	-0,1532	-0,0256	-0,1266	-0,0304	-0,1083	-0,0318
3	-0,0430	+0,1084	-0,0456	+0,0842	-0,0448	+0,0679
4	+0,0651	+0,0467	+0,0447	+0,0455	+0,0320	+0,0416
5	+0,0397	-0,0335	+0,0356	-0,0188	+0,0304	-0,0100

$\omega_4 =$	120°		135°		150°	
	Cos	Sin	Cos	Sin	Cos	Sin
6	-0,0136	-0,0297	-0,0040	-0,0242	+0,0007	-0,0192
7	-0,0193	+0,0032	-0,0135	-0,0021	-0,0097	-0,0038
8	-0,0015	+0,0117	-0,0037	+0,0070	-0,0042	+0,0044
9	+0,0063	+0,0024	+0,0031	+0,0030	+0,0015	+0,0027
10	+0,0025	-0,0032	+0,0023	-0,0011	+0,0018	0,0000
11	-0,0011	-0,0018	-0,0002	-0,0014	+0,0003	-0,0009
12	-0,0012	+0,0004	-0,0006	0,0000	-0,0002	-0,0002
13	0,0000	+0,0005	-0,0002	+0,0004	-0,0002	+0,0001
14	+0,0002	+0,0002	+0,0001	+0,0001		

In Verbindung mit den früher angeführten Ausdrücken für $S^{(3)}$ geben die letzten Reihen:

$$\frac{(\Delta)^{-3}}{(1+x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{3}{2}} (1-k_1 \sin \psi) \sqrt{1-k_1 \sin \psi}}$$

$\omega_4 =$	120°		135°		150°	
	Cos	Sin	Cos	Sin	Cos	Sin
0	+15,7089		+14,5500		+13,6995	
1	+ 5,9924	-20,4183	+ 6,2299	-18,0943	+ 6,2902	-16,4045
2	-10,7282	- 6,8787	- 8,7404	- 6,8160	- 7,3635	- 6,6067
3	- 5,4628	+ 4,7507	- 5,0962	+ 3,3214	- 4,6917	+ 2,4071
4	+ 1,6677	+ 3,6278	+ 0,7903	+ 3,1414	+ 0,2949	+ 2,7100
5	+ 2,1374	- 0,3147	+ 1,6859	+ 0,1424	+ 1,3365	+ 0,3514
6	+ 0,1595	- 1,1430	+ 0,3518	- 0,7982	+ 0,4034	- 0,5620
7	- 0,5563	- 0,2507	- 0,3263	- 0,3021	- 0,1882	- 0,2857
8	- 0,2086	+ 0,2434	- 0,1985	+ 0,1066	- 0,1648	+ 0,0363
9	+ 0,0916	+ 0,1400	+ 0,0183	+ 0,1117	- 0,0121	+ 0,0811
10	+ 0,0832	- 0,0252	+ 0,0561	+ 0,0095	+ 0,0348	+ 0,0198
11	- 0,0002	- 0,0449	+ 0,0135	- 0,0250	+ 0,0150	- 0,0123
12	- 0,0222	- 0,0063	- 0,0094	- 0,0103	- 0,0028	- 0,0088
13	- 0,0064	+ 0,0099	- 0,0066	+ 0,0028	- 0,0046	- 0,0003
14	+ 0,0039	+ 0,0047	+ 0,0003	+ 0,0034	- 0,0009	+ 0,0021
15	+ 0,0027	- 0,0013	+ 0,0016	+ 0,0002	+ 0,0007	+ 0,0007
16	- 0,0003	- 0,0014	+ 0,0005	- 0,0006	+ 0,0005	- 0,0002
17	- 0,0007	- 0,0001	- 0,0002	- 0,0001		

Es sind nun die folgenden Ausdrücke nöthig:

$$(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{3}{2}}$$

$\omega_4 =$	120°	135°	150°
Cos 0ξ	0,0001786	0,0001784	0,0001782
Cos ξ	8,823647	8,827374	8,829888
Cos 2ξ	6,51652	6,53376	6,54524
Cos 3ξ	3,959 _n	4,0077 _n	4,0390 _n
Sin ξ	8,348497	8,309061	8,276774
Sin 2ξ	6,39405	6,35834	6,32857
Sin 3ξ	4,1220 _n	4,0931 _n	4,0698 _n

Und hieraus in Verbindung mit den Reihen für $\frac{r'}{a'} \cos f'$ und $\frac{r'}{a'} \sin f'$

$\omega_4 =$	$(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{3}{2}} \frac{r'}{a'} \cos f'$			$(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{\frac{3}{2}} \frac{r'}{a'} \sin f'$		
	120°	135°	150°	120°	135°	150°
Cos 0ξ	9,0313172 _n	9,0312347 _n	9,0311664 _n	6,67495	6,66370	6,65658
Cos ξ	9,9766568 _n	9,9808653 _n	9,9837505 _n	9,5179383	9,9800787	9,4491549
Cos 2ξ	7,95167 _n	7,96790 _n	7,97866 _n	7,81329	7,77625	7,74540
Cos 3ξ	6,06893 _n	6,12646 _n	6,16584 _n	6,29226	6,26998	6,24895
Cos 4ξ	4,3802	4,5911	4,6990	5,0899 _n	5,0719 _n	5,0645 _n
Cos 5ξ	3,477	3,000		3,954	3,778	3,845
Sin ξ	9,5204711 _n	9,4826035 _n	9,4516721 _n	9,9740121 _n	9,9782241 _n	9,9811115
Sin 2ξ	7,814853 _n	7,77783 _n	7,74694 _n	7,950155 _n	7,96386 _n	7,97716 _n
Sin 3ξ	6,29292 _n	6,26775 _n	6,24871 _n	6,06893 _n	6,12710 _n	6,16643 _n
Sin 4ξ	5,0828	5,0719	5,0645	4,3802	4,5911	4,699
Sin 5ξ	3,845 _n	3,699 _n	3,845 _n	3,477	3,000	

Nach den gegebenen Vorschriften ergeben sich dann:

$\omega_4 =$	$(\Delta)^{-3}$					
	120°		135°		150°	
	$\sqrt{1 - k_1} \sin \psi$		$\sqrt{1 - k_1} \sin \psi$		$\sqrt{1 - k_1} \sin \psi$	
	Cos	Sin	Cos	Sin	Cos	Sin
0	+ 22",4343		+ 20",4674		+ 19",0310	
1	+ 8,3430	- 34",8988	+ 8,5263	- 31",0898	+ 8,4927	- 28",3420
2	- 19,4238	- 10,8339	- 16,1459	- 10,7065	- 13,8768	- 10,3670
3	- 9,1028	+ 9,0419	- 8,5347	+ 6,6283	- 7,9047	+ 5,7024
4	+ 3,4228	+ 6,2628	+ 1,8976	+ 5,4894	+ 1,0167	+ 4,7964
5	+ 3,7944	- 0,8373	+ 3,0521	- 0,0129	+ 2,4716	+ 0,3842
6	+ 0,1378	- 2,0779	+ 0,5046	- 1,4970	+ 0,6224	- 1,0921

$\omega =$	120°		135°		150°	
7	— 1,0377	— 0,3789	— 0,6409	— 0,4925	— 0,3968	— 0,4820
8	— 0,3445	+ 0,4684	— 0,3421	+ 0,2265	— 0,2919	+ 0,0979
9	+ 0,1849	+ 0,2416	+ 0,0522	+ 0,2005	— 0,0061	+ 0,1504
10	+ 0,1474	— 0,0571	+ 0,1036	+ 0,0078	+ 0,0673	+ 0,0291
11	— 0,0068	— 0,0814	+ 0,0203	— 0,0477	+ 0,0249	— 0,0254
12	— 0,0413	— 0,0085	— 0,0191	— 0,0173	— 0,0070	— 0,0156
13	— 0,0102	+ 0,0189	— 0,0117	+ 0,0062	— 0,0084	0,0000
14	+ 0,0079	+ 0,0080	+ 0,0012	+ 0,0061	— 0,0012	+ 0,0039
15	+ 0,0048	— 0,0028	+ 0,0030	+ 0,0003	+ 0,0015	+ 0,0013
16	— 0,0007	— 0,0026	+ 0,0006	— 0,0012	+ 0,0018	— 0,0005
17	— 0,0012	0,0000	— 0,0004	— 0,0004	— 0,0001	— 0,0005
18	— 0,0002	+ 0,0004	— 0,0002	+ 0,0001		

$$(\Delta)^{-3} \frac{r'}{\alpha'} \text{Cos } f'$$

	$\sqrt{1-k_1 \text{Sin } \psi}$		$\sqrt{1-k_1 \text{Sin } \psi}$		$\sqrt{1-k_1 \text{Sin } \psi}$	
	Cos	Sin	Cos	Sin	Cos	Sin
0	+18,2926		+16,7661		+15,6345	
1	+ 4,8311	—30,5043	+ 5,2287	—27,5273	+ 5,3794	—25,3439
2	—17,6923	— 7,8433	—15,0151	— 8,0504	—13,1183	— 7,9838
3	— 7,1411	+ 8,6573	— 6,9201	+ 6,5907	— 6,5514	+ 5,2189
4	+ 3,5469	+ 5,1606	+ 2,1778	+ 4,6702	+ 1,3530	+ 4,1734
5	+ 3,2380	— 1,0815	+ 2,6958	— 0,2994	+ 2,2396	+ 0,1044
6	— 0,0735	— 1,8321	+ 0,3040	— 1,3732	+ 0,4492	— 1,0359
7	— 0,9452	— 0,2339	— 0,6154	— 0,3740	— 0,4018	— 0,3913
8	— 0,2571	+ 0,4437	— 0,2810	+ 0,2346	— 0,2513	+ 0,1167
9	+ 0,1858	+ 0,1939	+ 0,0658	+ 0,1724	+ 0,0095	+ 0,1350
10	+ 0,1238	— 0,0641	+ 0,0927	— 0,0034	+ 0,0629	+ 0,0192
11	— 0,0141	— 0,0712	+ 0,0132	— 0,0445	+ 0,0197	— 0,0254
12	— 0,0369	— 0,0034	— 0,0188	— 0,0135	— 0,0080	— 0,0134
13	— 0,0076	+ 0,0180	— 0,0097	+ 0,0066	— 0,0075	+ 0,0013
14	+ 0,0076	+ 0,0061	+ 0,0019	+ 0,0054	— 0,0007	+ 0,0036
15	+ 0,0046	— 0,0029	+ 0,0026	0,0000	+ 0,0015	+ 0,0009
16	— 0,0009	— 0,0022	+ 0,0004	— 0,0012	+ 0,0007	— 0,0003
17	— 0,0011	+ 0,0001	— 0,0005	— 0,0004	— 0,0001	— 0,0004
18	— 0,0001	+ 0,0004	— 0,0002	+ 0,0001		

$$(\Delta)^{-3} \frac{r'}{\alpha'} \text{Sin } f'$$

	$\sqrt{1-k_1 \text{Sin } \psi}$		$\sqrt{1-k_1 \text{Sin } \psi}$		$\sqrt{1-k_1 \text{Sin } \psi}$	
	Cos	Sin	Cos	Sin	Cos	Sin
0	— 9,0318		— 7,8788		— 7,0636	
1	— 8,3955	+13,9945	— 8,1819	+11,7945	— 7,9407	+10,2689

$\omega =$	120°		135°		150°	
2	+ 6,6811	+ 7,9523	+ 4,9125	+ 7,4058	+ 3,7570	+ 6,8928
3	+ 5,6141	- 2,3310	+ 4,8995	- 1,1715	+ 4,3039	- 0,4921
4	- 0,3270	- 3,3878	+ 0,2966	- 2,7104	+ 0,5958	- 2,1992
5	- 1,8272	- 0,3616	- 1,3006	- 0,6222	- 0,9415	- 0,6948
6	- 0,4683	+ 0,8857	- 0,5289	+ 0,5303	- 0,4992	+ 0,3146
7	+ 0,3811	+ 0,3728	+ 0,1681	+ 0,3457	+ 0,0570	+ 0,2883
8	+ 0,2454	- 0,1367	+ 0,1942	- 0,0231	+ 0,1430	+ 0,0254
9	- 0,0324	- 0,1435	+ 0,0209	- 0,0963	+ 0,0368	- 0,0608
10	- 0,0766	- 0,0051	- 0,0423	- 0,0257	- 0,0214	- 0,0275
11	- 0,0137	+ 0,0376	- 0,0192	+ 0,0158	- 0,0163	+ 0,0048
12	+ 0,0164	+ 0,0123	+ 0,0044	+ 0,0117	- 0,0007	+ 0,0083
13	+ 0,0084	- 0,0064	+ 0,0060	0,0000	+ 0,0035	+ 0,0017
14	- 0,0018	- 0,0050	+ 0,0010	- 0,0030	+ 0,0013	- 0,0011
15	- 0,0027	+ 0,0001	- 0,0012	- 0,0009	- 0,0004	- 0,0009
16	- 0,0003	+ 0,0013	- 0,0006	+ 0,0004	- 0,0005	0,0000
17	+ 0,0005	+ 0,0003	+ 0,0001	+ 0,0003	- 0,0001	+ 0,0002
18	+ 0,0002	- 0,0002	+ 0,0002			

Nach der im «Recueil de Tables» dargelegten Methode wurde folgender Ausdruck für $(\Delta)^{-3}$ für den Specialwerth $\omega_4 = 165^\circ$ erhalten:

	$(\Delta)^{-3}$					
	$(1 - k_1 \sin \psi)^{\frac{1}{2}}$		$(1 - k_1 \sin \psi)^{-\frac{1}{2}}$		$(1 - k_1 \sin \psi)^{-\frac{3}{2}}$	
	Cos	Sin	Cos	Sin	Cos	Sin
0	+18,0528		+ 0,1978		+0,00394	
1	+ 8,3814	-26,4921	+ 0,0507	- 0,3689	-0,00093	-0,00794
2	-12,3988	-10,0176	- 0,2924	- 0,0970	-0,00778	+0,00082
3	- 7,3830	+ 4,1201	- 0,1221	+ 0,1889	-0,00029	+0,00668
4	+ 0,5323	+ 4,2823	+ 0,0937	+ 0,1145	+0,00475	+0,00141
5	+ 2,0778	+ 0,5595	+ 0,0859	- 0,0312	+0,00185	-0,00271
6	+ 0,6398	- 0,8405	+ 0,0005	- 0,0352	-0,00120	-0,00162
7	- 0,2603	- 0,4417	- 0,0282	- 0,0105	-0,00115	+0,00033
8	- 0,2442	+ 0,0353	- 0,0111	+ 0,0118	-0,00005	+0,00067
9	- 0,0286	+ 0,1145	+ 0,0043	+ 0,0098	+0,00034	+0,00016
10	+ 0,0452	+ 0,0333	+ 0,0048	- 0,0001	+0,00015	-0,00014
11	+ 0,0225	- 0,0139	+ 0,0004	- 0,0020	-0,00004	-0,00009
12	- 0,0016	- 0,0124	- 0,0010	+ 0,0004	-0,00006	0,00000
13	- 0,0058	- 0,0013	- 0,0006	+ 0,0003	-0,00001	+0,00002
14	- 0,0016	+ 0,0023				
15	+ 0,0008	+ 0,0010				
16	+ 0,0006	- 0,0001				

Es wurde bei dieser Entwicklung folgender Ausdruck für $(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^3$ angewandt:

$$\begin{aligned} (1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^3 = & 0,0001781 + 8,831325 \cos \xi + 8,255490 \sin \xi \\ & + 6,55169 \cos 2\xi + 6,30878 \sin 2\xi \\ & + 4,041_n \cos 3\xi + 4,0414_n \sin 3\xi \end{aligned}$$

Bei den Entwicklungen nach ψ wurde die Hauptcontrole immer für $\psi = \Delta_1 - 90^\circ$ ausgeführt und zwar in folgender Weise. In den Ausdruck für $(\Delta)^3$ pag. 22 wurde der entsprechende Werth von ξ eingeführt und dann $(\Delta)^{-3}$ berechnet. Das Resultat musste also, nach Multiplication mit $206264.8 m'$, mit dem aus der Entwicklung von $(\Delta)^{-3}$ für denselben Werth von ψ abgeleiteten übereinstimmen. $\frac{r'}{a} \cos f'$ und $\frac{r'}{a} \sin f'$ wurden darauf mit demselben Werth von ξ berechnet, und die Producte $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a} \cos f'$ und $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a} \sin f'$ gebildet, wodurch die Controle für die Entwicklung dieser Grössen erlangt wurde. Dass die Controlrechnungen bei dieser Entwicklungs-Methode mühsamer sein müssen als bei der in der vorigen Abtheilung dargelegten und angewandten, liegt in der Natur der Sache.

Für die Specialwerthe von ω_4 120° , 135° und 150° wurden die oben angeführten Ausdrücke für $(\Delta)^{-3}$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a} \cos f'$ und $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a} \sin f'$ mit Hülfe der Tafeln im Anhang in Reihen nach den Vielfachen von x verwandelt. Um den Ausdruck von $(\Delta)^{-3}$ für $\omega_4 = 165^\circ$ in ähnliche Reihen zu verwandeln, waren noch die Tafeln 16 und 17 des «Recueil de Tables» nöthig. Die diesem Werthe von ω_4 entsprechenden $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a} \cos f'$ und $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a} \sin f'$ wurden dann durch mechanische Multiplication abgeleitet; dazu war es aber zuerst erforderlich, $\frac{r'}{a} \cos f'$ und $\frac{r'}{a} \sin f'$ nach den Vielfachen von x auszudrücken, oder $\frac{r'}{a} e^{\sqrt{-1}f'}$ auf die Form

$$\sum \gamma_{2i} e^{2i\sqrt{-1}x} + \sqrt{-1} \sum \delta_{2i} e^{2i\sqrt{-1}x}$$

zu bringen. Die Coefficienten in dieser Reihe wurden in derselben Weise ermittelt, wie Asten a. a. O. die entsprechenden Coefficienten ermittelte.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{r'}{a} e^{\sqrt{-1}f'} \\ & -0,0000001 e^{-14\sqrt{-1}x} + \sqrt{-1} \left\{ \begin{array}{l} -0,0000001 e^{-14\sqrt{-1}x} \\ -0,0000006 e^{-12\sqrt{-1}x} \\ -0,0000018 e^{-10\sqrt{-1}x} \\ -0,0000067 e^{-8\sqrt{-1}x} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} -0,0000001 e^{-14\sqrt{-1}x} \\ -0,0000001 e^{-12\sqrt{-1}x} \\ -0,0000004 e^{-10\sqrt{-1}x} \\ -0,0000015 e^{-8\sqrt{-1}x} \end{array} \right. \end{aligned}$$

-0,0000374 $e^{-6\sqrt{-1}x}$	-0,0000006 $e^{-6\sqrt{-1}x}$
-0,0008215 $e^{-4\sqrt{-1}x}$	+0,0001953 $e^{-4\sqrt{-1}x}$
-0,0246835 $e^{-2\sqrt{-1}x}$	+0,0069844 $e^{-2\sqrt{-1}x}$
+0,1843223	-0,0625493
-0,3833760 $e^{2\sqrt{-1}x}$	+0,1094377 $e^{2\sqrt{-1}x}$
-0,1868412 $e^{4\sqrt{-1}x}$	+0,0511429 $e^{4\sqrt{-1}x}$
-0,0669968 $e^{6\sqrt{-1}x}$	+0,0170254 $e^{6\sqrt{-1}x}$
-0,0208471 $e^{8\sqrt{-1}x}$	+0,0047242 $e^{8\sqrt{-1}x}$
-0,0059303 $e^{10\sqrt{-1}x}$	+0,0011333 $e^{10\sqrt{-1}x}$
-0,0015769 $e^{12\sqrt{-1}x}$	+0,0002327 $e^{12\sqrt{-1}x}$
-0,0003963 $e^{14\sqrt{-1}x}$	+0,0000379 $e^{14\sqrt{-1}x}$
-0,0000946 $e^{16\sqrt{-1}x}$	+0,0000034 $e^{16\sqrt{-1}x}$
-0,0000214 $e^{18\sqrt{-1}x}$	-0,0000008 $e^{18\sqrt{-1}x}$
-0,0000047 $e^{20\sqrt{-1}x}$	-0,0000005 $e^{20\sqrt{-1}x}$
-0,0000010 $e^{22\sqrt{-1}x}$	-0,0000001 $e^{22\sqrt{-1}x}$
-0,0000002 $e^{24\sqrt{-1}x}$	

Nachdem der Ausdruck für $(\Delta)^{-3}$ mit dieser Reihe multiplicirt wurde, ergaben sich durch Trennung der reellen und imaginären Theile die trigonometrischen Reihen für $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a} \text{Cos } f'$ und $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a} \text{Sin } f'$.

In der folgenden Zusammenstellung sind auch die Ausdrücke für $\omega_4 = 105^\circ$, deren Ableitung nach den Vielfachen von x am Ende der letzten Abtheilung beschrieben wurde, mit aufgenommen.

	$(\Delta)^{-3}$				
$\omega =$	105°	120°	135°	150°	165°
Cos $0x$	+35,9460	+31,9971	+28,7671	+26,4432	+25,0605
Cos $2x$	-59,0277	-51,5130	-45,4596	-41,1639	-38,6354
Cos $4x$	+34,1713	+27,8591	+23,0131	+19,7271	+17,8584
Cos $6x$	-14,3318	-9,8234	-6,6604	-4,7002	-3,6647
Cos $8x$	+3,8976	+1,2421	-0,3404	-1,1528	-1,5077
Cos $10x$	+0,0008	+1,2299	+1,7377	+1,8587	+1,8445
Cos $12x$	-0,8385	-1,2195	-1,2056	-1,0631	-0,9404
Cos $14x$	+0,6741	+0,6769	+0,5152	+0,3560	+0,2579
Cos $16x$	-0,3668	-0,2640	-0,1264	-0,0320	+0,0158
Cos $18x$	+0,1557	+0,0634	-0,0115	-0,0479	-0,0590
Cos $20x$	-0,0500	+0,0045	+0,0326	+0,0388	+0,0360
Cos $22x$	+0,0091	-0,0145	-0,0205	-0,0170	-0,0130

$\omega =$	105°	120°	135°	150°	165°
Cos 24x	+ 0,0019	+ 0,0105	+ 0,0077	+ 0,0037	+ 0,0009
Cos 26x	- 0,0049	- 0,0047	- 0,0012	+ 0,0008	+ 0,0024
Cos 28x	+ 0,0024	+ 0,0011	- 0,0006	- 0,0015	- 0,0015
Cos 30x	- 0,0012	+ 0,0003	+ 0,0009	+ 0,0012	+ 0,0002
Cos 32x	+ 0,0005	- 0,0006	- 0,0004	- 0,0004	- 0,0001
Sin 2x	+11,2939	+11,8925	+11,8752	+11,6140	+11,3678
Sin 4x	-15,5733	-15,9080	-15,4231	-14,7215	-14,1782
Sin 6x	+13,1512	+12,6980	+16,6432	+10,6049	+ 9,9048
Sin 8x	- 8,2981	- 7,2888	- 6,0568	- 5,0516	- 4,4241
Sin 10x	+ 4,1719	+ 3,1140	+ 2,1237	+ 1,4324	+ 1,0594
Sin 12x	- 1,6790	- 0,8933	- 0,3032	+ 0,0358	+ 0,2144
Sin 14x	+ 0,4981	+ 0,0477	- 0,2135	- 0,3153	- 0,3381
Sin 16x	- 0,0598	+ 0,1449	+ 0,2131	+ 0,2085	+ 0,1830
Sin 18x	- 0,0504	- 0,1161	- 0,1086	- 0,0791	- 0,0574
Sin 20x	+ 0,0510	+ 0,0578	+ 0,0344	+ 0,0129	+ 0,0017
Sin 22x	- 0,0297	- 0,0202	- 0,0031	+ 0,0063	+ 0,0105
Sin 24x	+ 0,0134	+ 0,0038	- 0,0043	- 0,0062	- 0,0074
Sin 26x	- 0,0049	+ 0,0015	+ 0,0035	+ 0,0030	+ 0,0023
Sin 28x	+ 0,0012	- 0,0021	- 0,0023	- 0,0004	+ 0,0002
Sin 30x	+ 0,0002	+ 0,0010	+ 0,0008	+ 0,0004	- 0,0001
Sin 32x	- 0,0003	- 0,0008	- 0,0004	- 0,0002	+ 0,0005

$$(\Delta)^{-3} \frac{r'}{\alpha'} \text{Cos } f'$$

Cos 0x	+29,8659	+26,8347	+24,2971	+22,4433	+21,3287
Cos 2x	-50,6076	-44,7868	-39,9827	-36,5144	-34,4527
Cos 4x	+30,5001	+25,4428	+21,4468	+18,6751	+17,0768
Cos 6x	-13,4872	- 9,7040	- 6,9472	- 5,1834	- 0,2309
Cos 8x	+ 4,1277	+ 1,7775	+ 0,2932	- 0,5173	- 0,8963
Cos 10x	- 0,3965	+ 0,7694	+ 1,3204	+ 1,5060	+ 1,5377
Cos 12x	- 0,5617	- 0,9775	- 1,0338	- 0,9492	- 0,8607
Cos 14x	+ 0,5337	+ 0,5877	+ 0,4768	+ 0,3495	+ 0,2690
Cos 16x	- 0,3109	- 0,2453	- 0,1334	- 0,0496	- 0,0046
Cos 18x	+ 0,1393	+ 0,0672	+ 0,0006	- 0,0346	- 0,0479
Cos 20x	- 0,0484	- 0,0018	+ 0,0253	+ 0,0329	+ 0,0324
Cos 22x	+ 0,0108	- 0,0110	- 0,0175	- 0,0154	- 0,0122
Cos 24x	+ 0,0006	+ 0,0088	+ 0,0071	+ 0,0035	+ 0,0019
Cos 26x	- 0,0026	- 0,0044	- 0,0018	+ 0,0004	+ 0,0014
Cos 28x	+ 0,0018	+ 0,0010	- 0,0002	- 0,0009	- 0,0013
Cos 30x	- 0,0010	0,0000	+ 0,0011	+ 0,0009	+ 0,0006
Cos 32x	+ 0,0003	- 0,0003	- 0,0004	- 0,0005	- 0,0002
Sin 2x	+ 6,7221	+ 7,6458	+ 7,9736	+ 7,9965	+ 7,9291
Sin 4x	-10,7349	-11,5994	-11,6425	-11,3557	-11,0749

$\omega_4 =$	105°	120°	135°	150°	165°
Sin 6x	+10,0391	+10,1469	+ 9,6028	+ 8,9351	+ 8,4419
Sin 8x	— 6,7799	— 6,2278	— 5,3595	— 4,5913	— 4,1068
Sin 10x	+ 3,5951	+ 2,8347	+ 2,0434	+ 1,4598	+ 1,1165
Sin 12x	— 1,5295	— 0,9007	— 0,3886	— 0,0762	+ 0,0779
Sin 14x	+ 0,4958	+ 0,1072	— 0,1366	— 0,2444	— 0,2867
Sin 16x	— 0,0876	+ 0,0999	+ 0,1755	+ 0,1825	+ 0,1621
Sin 18x	— 0,0286	— 0,0948	— 0,0973	— 0,0755	— 0,0585
Sin 20x	+ 0,0390	+ 0,0515	+ 0,0340	+ 0,0154	+ 0,0049
Sin 22x	— 0,0249	— 0,0201	— 0,0049	+ 0,0039	+ 0,0080
Sin 24x	+ 0,0118	+ 0,0044	— 0,0029	— 0,0057	— 0,0063
Sin 26x	— 0,0045	+ 0,0008	+ 0,0029	+ 0,0029	+ 0,0021
Sin 28x	+ 0,0012	— 0,0015	— 0,0018	— 0,0011	— 0,0005
Sin 30x	— 0,0002	+ 0,0013	+ 0,0008	0,0000	— 0,0002
Sin 32x	— 0,0002	— 0,0008	— 0,0001	+ 0,0002	+ 0,0003

$$(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \text{Sin } f'$$

Cos 0x	—15,0698	—12,6838	—10,8300	— 9,5452	— 8,8013
Cos 2x	+24,5323	+20,0614	+16,6549	+14,3385	+13,0125
Cos 4x	—13,0524	— 9,4932	— 6,9539	— 5,3336	— 4,4575
Cos 6x	+ 4,3142	+ 2,0129	+ 0,5742	— 0,2211	— 0,6075
Cos 8x	— 0,2971	+ 0,8569	+ 1,3959	+ 1,5821	+ 1,6158
Cos 10x	— 0,7760	— 1,1689	— 1,2038	— 1,1071	— 1,0157
Cos 12x	+ 0,7052	+ 0,7262	+ 0,5890	+ 0,4427	+ 0,3531
Cos 14x	— 0,4067	— 0,3121	— 0,1775	— 0,0792	— 0,0159
Cos 16x	+ 0,1811	+ 0,0885	+ 0,0084	— 0,0343	— 0,0447
Cos 18x	— 0,0617	— 0,0044	+ 0,0292	+ 0,0387	+ 0,0385
Cos 20x	+ 0,0134	— 0,0133	— 0,0219	— 0,0187	— 0,0157
Cos 22x	+ 0,0017	+ 0,0106	+ 0,0095	+ 0,0054	+ 0,0030
Cos 24x	— 0,0037	— 0,0055	— 0,0024	0,0000	+ 0,0015
Cos 26x	+ 0,0025	+ 0,0021	— 0,0002	— 0,0011	— 0,0019
Cos 28x	— 0,0013	— 0,0004	+ 0,0004	+ 0,0005	+ 0,0003
Cos 30x	+ 0,0005	— 0,0001	— 0,0005	— 0,0006	0,0000
Cos 32x	— 0,0002	0,0000	+ 0,0001	0,0000	+ 0,0001
Sin 2x	—10,8120	—10,5330	—10,0514	— 9,5857	— 9,2661
Sin 4x	+12,2295	+11,5021	+10,5593	+ 9,7291	+ 9,1884
Sin 6x	— 8,5258	— 7,4767	— 6,3622	— 5,4755	— 4,9289
Sin 8x	+ 4,5475	+ 3,5092	+ 2,5714	+ 1,9077	+ 1,5329
Sin 10x	— 1,9327	— 1,1523	— 0,5598	— 0,2008	— 0,0189
Sin 12x	+ 0,6192	+ 0,1547	— 0,1258	— 0,2536	— 0,2997
Sin 14x	— 0,1015	+ 0,1174	+ 0,2041	+ 0,2144	+ 0,2048
Sin 16x	— 0,0430	— 0,1191	— 0,1196	— 0,0953	— 0,0722
Sin 18x	+ 0,0535	+ 0,0654	+ 0,0438	+ 0,0225	+ 0,0091

$\omega_4 =$	105°	120°	135°	150°	165°
Sin 20x	— 0,0336	— 0,0252	— 0,0075	+ 0,0034	+ 0,0072
Sin 22x	+ 0,0154	+ 0,0059	— 0,0030	— 0,0064	— 0,0070
Sin 24x	— 0,0059	+ 0,0005	+ 0,0035	+ 0,0038	+ 0,0039
Sin 26x	+ 0,0013	— 0,0015	— 0,0022	+ 0,0010	— 0,0008
Sin 28x	+ 0,0002	+ 0,0011	+ 0,0007	0,0000	— 0,0005
Sin 30x	— 0,0003	— 0,0007	+ 0,0001	0,0000	+ 0,0004
Sin 32x	+ 0,0002	+ 0,0004	— 0,0003	— 0,0003	0,0000

Wie man die Benutzung der Tafeln zu controliren hat, ist so einleuchtend, dass eine Auseinandersetzung darüber mir überflüssig erscheint.

IV.

Die Berechnung der Differentialquotienten von den Elementenstörungen Y, Ψ etc. wurde nach den bekannten Vorschriften von Hansen ausgeführt. Die dabei benutzten Formeln sind so ausführlich von Asten reproducirt, dass es eine unnöthige Raumverschwendung sein würde, sie hier im Detail aufzunehmen.

Der von der Entfernung der beiden Himmelskörper abhängige Theil von $\frac{dY}{d\omega_4}$ etc. wurde also nach den Formeln berechnet:

$$\frac{1}{12} \frac{dY}{d\omega_4} = P_1 \rho (\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \cos f' + Q_1 \rho (\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \sin f' + R_1 \rho (\Delta)^{-3}$$

$$\frac{1}{12} \frac{d\Psi}{d\omega_4} = P_2 \rho (\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \cos f' + Q_2 \rho (\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \sin f' + R_2 \rho (\Delta)^{-3}$$

$$\frac{1}{12} \frac{d\Xi}{d\omega_4} = P_3 \rho (\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \cos f' + Q_3 \rho (\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \sin f' + R_3 \rho (\Delta)^{-3}$$

$$\frac{1}{12} \operatorname{Sec} i \frac{dp_1}{d\omega_4} = P_4 \rho (\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \cos f' + Q_4 \rho (\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \sin f'$$

$$\frac{1}{12} \operatorname{Sec} i \frac{dq_1}{d\omega_4} = P_5 \rho (\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \cos f' + Q_5 \rho (\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \sin f'$$

Den von der Entfernung unabhängigen Theil erhält man daher durch folgende Formeln:

$$\frac{1}{12} \frac{dY_2}{d\omega_4} = - P_1 \frac{\rho}{a'} \frac{\cos f'}{r'^2} - Q_1 \frac{\rho}{a'} \frac{\sin f'}{r'^2}$$

$$\frac{1}{12} \frac{dY_2}{d\omega_4} = - P_2 \frac{\rho}{a'} \frac{\cos f'}{r'^2} - Q_2 \frac{\rho}{a'} \frac{\sin f'}{r'^2}$$

$$\frac{1}{12} \frac{dY_2}{d\omega_4} = - P_3 \frac{\rho}{a'} \frac{\cos f'}{r'^2} - Q_3 \frac{\rho}{a'} \frac{\sin f'}{r'^2}$$

$$\frac{1}{12} \text{Sec } i \frac{dp_2}{d\omega_4} = - P_4 \frac{\rho}{a'} \frac{\cos f'}{r'^2} - Q_4 \frac{\rho}{a'} \frac{\sin f'}{r'^2}$$

$$\frac{1}{12} \text{Sec } i \frac{dq_2}{d\omega_4} = - P_5 \frac{\rho}{a'} \frac{\cos f'}{r'^2} - Q_5 \frac{\rho}{a'} \frac{\sin f'}{r'^2}$$

Es ist $\rho = \frac{aa_1^2}{12}$ gesetzt. Die analytischen Ausdrücke für P_1, Q_1 etc. sind von Hansen in seiner Pariser Preisschrift pag. 203 gegeben.

Zur Berechnung von P_1, Q_1 etc. wurden die folgenden Ausdrücke für $\frac{r}{a} \cos f, \frac{r}{a} \sin f$ und $\frac{ndt}{d\omega_4}$ angewandt:

$\frac{r}{a} \cos f =$	$\frac{r}{a} \sin f =$	$\frac{ndt}{d\omega_4} =$
0,2510504 _n	9,184138 _n	+9,7275942 Sin ω_4
+8,934164 _n Cos ω_4	+9,172091 Cos ω_4	+8,341779 Sin $2\omega_4$
+8,298369 Cos $2\omega_4$	+7,69293 Cos $2\omega_4$	+7,68488 _n Sin $3\omega_4$
+6,9478 Cos $3\omega_4$	+6,8523 _n Cos $3\omega_4$	+6,5199 _n Sin $4\omega_4$
+5,9435 _n Cos $4\omega_4$	+5,620 _n Cos $4\omega_4$	+5,476 Sin $5\omega_4$
+4,820 _n Cos $5\omega_4$	+4,477 Cos $5\omega_1$	+4,544 Sin $6\omega_4$
+3,80 Cos $6\omega_4$	+3,00 Cos $6\omega_4$	

wobei die Coefficienten Logarithmen sind. Diese Ausdrücke sind bis auf die Zeichen für $\frac{r}{a} \sin f$ und $\frac{ndt}{d\omega_4}$ dieselben, welche Asten in seiner erwähnten Abhandlung pag. 49 gegeben hat. Von den Hilfs-Größen

$G = 48^\circ 56' 20,05$	$G' = 317^\circ 14' 22,77$
$\Gamma = 236 51 54,96$	$\Gamma' = 145 9 57,68$
$\log \gamma = 9,9943139$	$\log \gamma' = 9,9929190$

unterscheiden sich G und Γ um 0,44 von den Werthen, welche Asten angenommen hat.

Aus diesen Daten ergaben sich die folgenden Zahlen:

$\omega_4 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	156°
log P_1	9,4006487n	9,6832081n	9,8270548n	9,9041568n	9,9356934n	9,9301102n	9,8908850n	9,8179701n	9,7059036n	9,5357266n	9,2368797
» Q_1	9,5772600n	9,8640513n	0,0146415n	0,1005264n	0,1422178n	0,1473479n	0,1185344n	0,0549564n	9,9505413n	9,7859645n	9,4905024
» R_1	6,737956	7,618043	8,106311	8,421950	8,631859	8,7643629	8,8330732	8,8436042	8,7933349	8,6668744	8,3934715
» P_2	9,2802187	9,5495910	9,6725161	9,7229533	9,7247345	9,6895091	9,6239848	9,5305706	9,4047173	9,2267368	8,9243358
» Q_2	9,1303974n	9,4498412n	9,6485193n	9,7911715n	9,8922155n	9,9546233n	9,9777731n	9,9587147n	9,8900040n	9,7514515n	9,4717986
» R_2	9,2643951n	9,5498721n	9,6983855n	9,7815984n	9,8202434n	9,8222041n	9,7903437n	9,7240533n	9,6174192n	9,4512106n	9,1547566
» P_3	9,5413820n	9,8209903n	9,9599969n	0,0304873n	0,0538043n	0,0386474n	9,9888994n	9,9051694n	9,7829020n	9,6042485n	9,2997577
» Q_3	9,7194369n	0,0075369n	0,1601921n	0,2487485n	0,2935443n	0,3020273n	0,2766166n	0,2162780n	0,1147116n	9,9523730n	9,6583421
» P_4	6,01401	6,89410	7,38236	7,698005	7,907914	8,040418	8,109128	8,119659	8,069890	7,942929	7,669526
» Q_4	6,06096	6,94104	7,42931	7,744950	7,954859	8,087363	8,156073	8,166604	8,116834	7,989874	7,716471
» P_5	8,540449	8,825927	8,974440	9,057653	9,096298	9,098259	9,066398	9,000108	8,893473	8,727265	8,430812
» Q_5	8,587394	8,872872	9,021385	9,104598	9,143243	9,145204	9,113343	9,047053	8,940418	8,774210	8,477756

Nachdem diese Zahlen mit $\frac{1}{12} aa_1^2$ multiplicirt worden, war die Bildung von $\frac{1}{12} \frac{dY_1}{d\omega_4}$ etc. leicht. Dabei wurden, wie früher bemerkt, die Differentialquotienten für die sechs ersten Special-Werthe zuerst durch Potenzreihen nach $\left(\frac{h'}{\Delta}\right)$ dargestellt und diese dann mit Hilfe der Tafeln in trigonometrische verwandelt.

Um die Grössen $\frac{1}{12} \frac{dY_2}{d\omega_4}$ etc. abzuleiten, wurde folgender Weg eingeschlagen. Es sei

$$m = - \frac{\rho \cos f'}{r'^2 a'}$$

$$n = - \frac{\rho \sin f'}{r'^2 a'}$$

und

$$m = \mu_1 \cos g' + \mu_2 \cos 2g' + \mu_3 \cos 3g' + \dots$$

$$n = \nu_1 \sin g' + \nu_2 \sin 2g' + \nu_3 \sin 3g' + \dots$$

oder

$$m + \sqrt{-1} n = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i e^{i\sqrt{-1}g'},$$

wo

$$\alpha_i = \frac{\mu_i + \nu_i}{2}$$

$$\alpha_{-i} = \frac{\mu_i - \nu_i}{2}$$

Wird nun der Winkel ξ eingeführt durch die Gleichung

$$g' = \xi + \varphi,$$

wo φ dieselbe Bedeutung wie auf Seite 32 hat, so erhalten wir

$$m + \sqrt{-1} n = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i \operatorname{Cos} i\varphi e^{i\sqrt{-1}\xi} + \sqrt{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i \operatorname{Sin} i\varphi e^{i\sqrt{-1}\xi}.$$

Nach den von Asten in seiner Abhandlung pag. 49 gegebenen Ausdrücken für m und n wird

$$\begin{aligned} \log \alpha_{-2} &= 6,0310_n \\ \text{» } \alpha_{-1} &= 7,30524_n \\ \text{» } \alpha_1 &= 0,8426580_n \\ \text{» } \alpha_2 &= 9,826815_n \\ \text{» } \alpha_3 &= 8,73717_n \\ \text{» } \alpha_4 &= 7,6190_n \\ \text{» } \alpha_5 &= 6,490_n \end{aligned}$$

Da nun

$$e^{i\sqrt{-1}\xi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{2i'} e^{2i'\sqrt{-1}x}$$

ist, so wird man mittelst der Tafeln die Coefficienten $a_{2i'}$ und $b_{2i'}$ in der Gleichung

$$m + \sqrt{-1} n = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{2i'} e^{2i'\sqrt{-1}x} + \sqrt{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_{2i'} e^{2i'\sqrt{-1}x}$$

leicht berechnen können. Durch Trennung der reellen und imaginären Bestandtheile ergibt sich dann

$$\begin{aligned} m &= h_{0,c} + h_{1,c} \operatorname{Cos} 2x + h_{2,c} \operatorname{Cos} 4x + \dots \\ n &= h_{1,s} \operatorname{Sin} 2x + h_{2,s} \operatorname{Sin} 4x + \dots \end{aligned}$$

Bei der Ableitung von m und n ist es eine wesentliche Erleichterung, mit Exponentialfunctionen zu operiren. Die trigonometrischen Functionen sind weniger zweckmässig, da sie auf doppelt so zeitraubende Arbeit beim Uebergang zum Argument x führen.

Es scheint mir nicht überflüssig, die numerischen Ausdrücke für m und n anzuführen. In denselben ist, wie überall im Folgenden, $2x = \chi$ gesetzt. Die Coefficienten sind mit der Jupitersmasse multiplicirt und in Secunden verwandelt.

$\omega =$	m										
	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
Cos 0 χ	-2,7517	-2,7833	-2,8317	-2,8919	-2,9571	-3,0210	-3,0785	-3,1259	-3,1625	-3,1876	-3,2024
Cos χ	+5,1209	+5,1829	+5,2782	+5,3973	+5,5259	+5,6525	+5,7662	+5,8604	+5,9330	+5,9831	+6,0126
Cos 2 χ	+2,2642	+2,2801	+2,3044	+2,3341	+2,3660	+2,3966	+2,4235	+2,4457	+2,4624	+2,4738	+2,4803
Cos 3 χ	+0,7425	+0,7413	+0,7396	+0,7368	+0,7336	+0,7301	+0,7269	+0,7233	+0,7208	+0,7189	+0,7177
Cos 4 χ	+0,1943	+0,1915	+0,1869	+0,1814	+0,1751	+0,1690	+0,1633	+0,1586	+0,1549	+0,1524	+0,1509
Cos 5 χ	+0,0381	+0,0368	+0,0344	+0,0313	+0,0284	+0,0254	+0,0226	+0,0206	+0,0188	+0,0178	+0,0170
Cos 6 χ	+0,0031	+0,0026	+0,0019	+0,0008	-0,0001	-0,0010	-0,0019	-0,0026	-0,0030	-0,0034	-0,0035
Cos 7 χ	-0,0018	-0,0019	-0,0021	-0,0024	-0,0026	-0,0026	-0,0029	-0,0030	-0,0031	-0,0031	-0,0032
Cos 8 χ	-0,0013	-0,0013	-0,0014	-0,0012	-0,0013	-0,0013	-0,0013	-0,0014	-0,0013	-0,0013	-0,0013
Cos 9 χ	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0005	-0,0005	-0,0004	-0,0004	-0,0004	-0,0004
Cos 10 χ	-0,0002	-0,0002	-0,0001	-0,0002	-0,0002	-0,0002	-0,0001	-0,0001	-0,0001	-0,0001	-0,0002
Sin χ	+3,1056	+3,0323	+2,9133	+2,7554	+2,5677	+2,3649	+2,1594	+1,9696	+1,8079	+1,6856	+1,6096
Sin 2 χ	+1,2574	+1,2233	+1,1689	+1,0983	+1,0157	+0,9287	+0,8430	+0,7647	+0,6991	+0,6500	+0,6195
Sin 3 χ	+0,2479	+0,2386	+0,2241	+0,2061	+0,1863	+0,1662	+0,1476	+0,1316	+0,1182	+0,1089	+0,1031
Sin 4 χ	-0,0069	-0,0081	-0,0101	-0,0120	-0,0135	-0,0147	-0,0151	-0,0150	-0,0148	-0,0141	-0,0139
Sin 5 χ	-0,0296	-0,0296	-0,0288	-0,0279	-0,0266	-0,0250	-0,0230	-0,0213	-0,0198	-0,0186	-0,0177
Sin 6 χ	-0,0155	-0,0152	-0,0146	-0,0138	-0,0129	-0,0117	-0,0108	-0,0097	-0,0090	-0,0083	-0,0080
Sin 7 χ	-0,0055	-0,0054	-0,0049	-0,0046	-0,0043	-0,0039	-0,0035	-0,0031	-0,0029	-0,0026	-0,0025
Sin 8 χ	-0,0016	-0,0015	-0,0015	-0,0013	-0,0012	-0,0009	-0,0008	-0,0008	-0,0006	-0,0006	-0,0006
Sin 9 χ	-0,0004	-0,0003	-0,0002	-0,0002	-0,0002	-0,0002	-0,0002	-0,0001	0,0000	-0,0002	-0,0002
Sin 10 χ	-0,0001	-0,0001	-0,0001			+0,0001	+0,0001	+0,0002	+0,0001		

$\omega =$	n										
	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
Cos 0 χ	+1,8493	+1,8047	+1,7329	+1,6377	+1,5250	+1,4029	+1,2807	+1,1675	+1,0713	+0,9986	+0,9532
Cos χ	-3,5294	-3,4459	-3,3107	-3,1310	-2,9179	-2,6855	-2,4538	-2,2376	-2,0547	-1,9156	-1,8290
Cos 2 χ	-1,2670	-1,2325	-1,1779	-1,1065	-1,0235	-0,9359	-0,8494	-0,7705	-0,7045	-0,6550	-0,6241
Cos 3 χ	-0,2475	-0,2382	-0,2239	-0,2059	-0,1861	-0,1660	-0,1474	-0,1314	-0,1182	-0,1089	-0,1032
Cos 4 χ	+0,0071	+0,0083	+0,0101	+0,0120	+0,0135	+0,0147	+0,0151	+0,0150	+0,0148	+0,0141	+0,0139
Cos 5 χ	+0,0296	+0,0296	+0,0288	+0,0279	+0,0266	+0,0250	+0,0230	+0,0213	+0,0198	+0,0186	+0,0177
Cos 6 χ	+0,0155	+0,0152	+0,0146	+0,0138	+0,0129	+0,0117	+0,0108	+0,0097	+0,0090	+0,0083	+0,0080
Cos 7 χ	+0,0055	+0,0054	+0,0049	+0,0046	+0,0043	+0,0039	+0,0035	+0,0031	+0,0029	+0,0026	+0,0025
Cos 8 χ	+0,0016	+0,0015	+0,0015	+0,0013	+0,0012	+0,0009	+0,0008	+0,0008	+0,0006	+0,0006	+0,0006
Cos 9 χ	+0,0004	+0,0003	+0,0002	+0,0001	+0,0002	+0,0002	+0,0002	+0,0001	+0,0001	+0,0002	+0,0002
Cos 10 χ	+0,0001	+0,0001	+0,0001								
Sin χ	+4,5015	+4,5561	+4,6410	+4,7443	+4,8575	+4,9689	+5,0688	+5,1520	+5,2156	+5,2595	+5,2852
Sin 2 χ	+2,2442	+2,2599	+2,2842	+2,3135	+2,3452	+2,3752	+2,4021	+2,4243	+2,4406	+2,4520	+2,4583
Sin 3 χ	+0,7415	+0,7403	+0,7386	+0,7360	+0,7326	+0,7291	+0,7259	+0,7223	+0,7198	+0,7179	+0,7167
Sin 4 χ	+0,1941	+0,1913	+0,1867	+0,1812	+0,1749	+0,1688	+0,1631	+0,1584	+0,1549	+0,1522	+0,1507
Sin 5 χ	+0,0381	+0,0368	+0,0344	+0,0313	+0,0284	+0,0254	+0,0226	+0,0206	+0,0188	+0,0178	+0,0170
Sin 6 χ	+0,0031	+0,0026	+0,0019	+0,0008	-0,0001	-0,0010	-0,0019	-0,0026	-0,0030	-0,0034	-0,0035
Sin 7 χ	-0,0018	-0,0019	-0,0021	-0,0024	-0,0026	-0,0026	-0,0029	-0,0030	-0,0031	-0,0031	-0,0032
Sin 8 χ	-0,0013	-0,0013	-0,0014	-0,0012	-0,0013	-0,0013	-0,0013	-0,0014	-0,0013	-0,0013	-0,0013
Sin 9 χ	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0005	-0,0005	-0,0004	-0,0004	-0,0004	-0,0004
Sin 10 χ	-0,0002	-0,0002	-0,0001	-0,0002	-0,0002	-0,0002	-0,0001	-0,0001	-0,0001	-0,0001	-0,0002

Aus diesen Ausdrücken und den angeführten Werthen von P_1, Q_1 etc. erhalten wir

	$\frac{1}{12} \frac{dY_2}{d\omega_4}$										
Cos 0 χ	-0,0064	+0,0224	+0,1093	+0,2551	+0,4342	+0,6023	+0,7119	+0,7310	+0,6507	+0,4845	+0,2576
Cos χ	+0,0452	+0,0207	-0,1203	-0,3825	-0,7167	-1,0418	-1,2613	-1,3144	-1,1806	-0,8840	-0,4715
Cos 2 χ	-0,0909	-0,1980	-0,3292	-0,4771	-0,6202	-0,7265	-0,7691	-0,7338	-0,6223	-0,4493	-0,2348
Cos 3 χ	-0,0935	-0,1833	-0,2651	-0,3314	-0,3744	-0,3885	-0,3717	-0,3266	-0,2607	-0,1803	-0,0919
Cos 4 χ	-0,0516	-0,0984	-0,1359	-0,1606	-0,1697	-0,1645	-0,1467	-0,1213	-0,0919	-0,0609	-0,0303
Cos 5 χ	-0,0208	-0,0393	-0,0529	-0,0603	-0,0614	-0,0567	-0,0478	-0,0378	-0,0273	-0,0175	-0,0084
Cos 6 χ	-0,0067	-0,0124	-0,0164	-0,0180	-0,0178	-0,0156	-0,0127	-0,0093	-0,0065	-0,0039	-0,0019

$\omega =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
Cos 7 χ	-0,0016	-0,0030	-0,0037	-0,0039	-0,0038	-0,0033	-0,0023	-0,0015	-0,0010	-0,0005	-0,0003
Cos 8 χ	-0,0003	-0,0005	-0,0006	-0,0006	-0,0006	-0,0002	-0,0001	+0,0002	+0,0002	+0,0001	
Cos 9 χ		+0,0001	+0,0002	+0,0004	+0,0002	0,0000	+0,0001	+0,0002	+0,0002	+0,0001	
Cos 10 χ			-0,0001	+0,0002	+0,0002	+0,0003	+0,0001	0,0000	+0,0001		
Sin χ	-2,4820	-4,7936	-6,7565	-8,1897	-8,9539	-8,9895	-8,3389	-7,1424	-5,5726	-3,7918	-1,9129
Sin 2 χ	-1,1642	-2,2424	-3,1475	-3,7969	-4,1296	-4,1253	-3,8116	-3,2542	-2,5331	-1,7211	-0,8675
Sin 3 χ	-0,3426	-0,6564	-0,9144	-1,0930	-1,1772	-1,1651	-1,0685	-0,9063	-0,7023	-0,4760	-0,2395
Sin 4 χ	-0,0716	-0,1360	-0,1863	-0,2188	-0,2311	-0,2245	-0,2026	-0,1699	-0,1307	-0,0882	-0,0443
Sin 5 χ	-0,0070	-0,0126	-0,0163	-0,0172	-0,0165	-0,0144	-0,0118	-0,0094	-0,0067	-0,0045	-0,0021
Sin 6 χ	+0,0028	+0,0055	+0,0078	+0,0101	+0,0113	+0,0114	+0,0109	+0,0095	+0,0073	+0,0050	+0,0025
Sin 7 χ	+0,0021	+0,0040	+0,0055	+0,0067	+0,0073	+0,0070	+0,0065	+0,0054	+0,0043	+0,0028	+0,0014
Sin 8 χ	+0,0010	+0,0017	+0,0024	+0,0025	+0,0028	+0,0026	+0,0023	+0,0020	+0,0015	+0,0010	+0,0005
Sin 9 χ	+0,0003	+0,0005	+0,0007	+0,0009	+0,0010	+0,0008	+0,0008	+0,0006	+0,0004	+0,0004	+0,0001
Sin 10 χ	+0,0001	+0,0001	+0,0002	+0,0003	+0,0003	+0,0002	+0,0001	+0,0001	+0,0001	+0,0001	+0,0001

$$\frac{1}{12} \frac{d\Phi_2}{d\omega_4}$$

Cos 0 χ	-0,7743	-1,4951	-2,1036	-2,5405	-2,7587	-2,7417	-2,5120	-2,1222	-1,6347	-1,1007	-0,5515
Cos χ	+1,4528	+2,8081	+3,9570	+4,7873	+5,2085	+5,1845	+4,7573	+4,0231	+3,1015	+2,0893	+1,0471
Cos 2 χ	+0,6028	+1,1555	+1,6086	+1,9174	+2,0539	+2,0155	+1,8266	+1,5304	+1,1722	+0,7866	+0,3933
Cos 3 χ	+0,1750	+0,3298	+0,4475	+0,5166	+0,5344	+0,5067	+0,4459	+0,3649	+0,2748	+0,1826	+0,0909
Cos 4 χ	+0,0360	+0,0656	+0,0834	+0,0885	+0,0824	+0,0695	+0,0544	+0,0400	+0,0279	+0,0178	+0,0085
Cos 5 χ	+0,0033	+0,0047	+0,0034	-0,0006	-0,0057	-0,0101	-0,0123	-0,0124	-0,0106	-0,0075	-0,0038
Cos 6 χ	-0,0015	-0,0034	-0,0056	-0,0081	-0,0102	-0,0110	-0,0111	-0,0097	-0,0078	-0,0053	-0,0027
Cos 7 χ	-0,0010	-0,0022	-0,0032	-0,0041	-0,0047	-0,0048	-0,0045	-0,0038	-0,0032	-0,0020	-0,0010
Cos 8 χ	-0,0005	-0,0008	-0,0012	-0,0014	-0,0016	-0,0014	-0,0013	-0,0010	-0,0008	-0,0006	-0,0003
Cos 9 χ	-0,0002	-0,0003	-0,0004	-0,0004	-0,0005	-0,0004	-0,0004	-0,0002	-0,0001	-0,0002	-0,0001
Cos 10 χ		-0,0001		-0,0001	-0,0001	0,0000		-0,0002	+0,0001		
Sin χ	-0,0157	-0,2089	-0,6954	-1,4773	-2,4277	-3,3189	-3,9074	-4,0165	-3,5894	-2,6835	-1,4311
Sin 2 χ	-0,0633	-0,2030	-0,4670	-0,8501	-1,2911	-1,6852	-1,9275	-1,9449	-1,7170	-1,2740	-0,6765
Sin 3 χ	-0,0528	-0,1241	-0,2234	-0,3462	-0,4727	-0,5755	-0,6276	-0,6121	-0,5287	-0,3867	-0,2037
Sin 4 χ	-0,0275	-0,0569	-0,0878	-0,1183	-0,1437	-0,1592	-0,1613	-0,1491	-0,1240	-0,0883	-0,0459
Sin 5 χ	-0,0107	-0,0209	-0,0290	-0,0341	-0,0363	-0,0351	-0,0312	-0,0260	-0,0196	-0,0132	-0,0065
Sin 6 χ	-0,0034	-0,0061	-0,0077	-0,0078	-0,0067	-0,0048	-0,0027	-0,0009	0,0000	+0,0005	+0,0003
Sin 7 χ	-0,0008	-0,0014	-0,0014	-0,0009	-0,0002	+0,0004	+0,0013	+0,0015	+0,0017	+0,0014	+0,0007
Sin 8 χ	-0,0001	-0,0001	-0,0001	0,0000	+0,0004	+0,0007	+0,0009	+0,0011	+0,0008	+0,0006	+0,0003
Sin 9 χ		+0,0001	+0,0002	+0,0003	+0,0004	+0,0003	+0,0004	+0,0004	+0,0003	+0,0003	+0,0001
Sin 10 χ		+0,0001		+0,0001	+0,0002	+0,0002	+0,0001		+0,0001	+0,0001	+0,0001

$$\frac{1}{12} \frac{dE_2}{d\omega_4}$$

Cos 0 χ	-0,0121	+0,0067	+0,0767	+0,1984	+0,3492	+0,4901	+0,5793	+0,5918	+0,5231	+0,3866	+0,2046
Cos χ	+0,0686	+0,0742	-0,0262	-0,2387	-0,5184	-0,7951	-0,9813	-1,0291	-0,9231	-0,6888	-0,3662
Cos 2 χ	-0,1235	-0,2558	-0,3983	-0,5419	-0,6660	-0,7435	-0,7565	-0,6982	-0,5762	-0,4076	-0,2104
Cos 3 χ	-0,1286	-0,2486	-0,3507	-0,4253	-0,4645	-0,4653	-0,4298	-0,3652	-0,2833	-0,1915	-0,0961
Cos 4 χ	-0,0713	-0,1353	-0,1850	-0,2159	-0,2248	-0,2141	-0,1876	-0,1522	-0,1133	-0,0738	-0,0364
Cos 5 χ	-0,0287	-0,0545	-0,0730	-0,0830	-0,0844	-0,0778	-0,0655	-0,0517	-0,0372	-0,0239	-0,0115
Cos 6 χ	-0,0092	-0,0172	-0,0228	-0,0253	-0,0253	-0,0223	-0,0185	-0,0139	-0,0099	-0,0060	-0,0029
Cos 7 χ	-0,0023	-0,0042	-0,0052	-0,0055	-0,0056	-0,0049	-0,0038	-0,0027	-0,0019	-0,0011	-0,0005
Cos 8 χ	-0,0003	-0,0006	-0,0009	-0,0010	-0,0009	-0,0004	-0,0002	+0,0001	0,0000	-0,0001	
Cos 9 χ		+0,0001	+0,0002	+0,0004	+0,0003	+0,0002	+0,0001	+0,0001	+0,0001	+0,0002	
Cos 10 χ				+0,0002	+0,0002	+0,0003	+0,0001	+0,0003	+0,0001		
Sin χ	-3,4397	-6,6439	-9,3681	-11,3682	-12,4553	-12,5459	-11,6883	-10,0607	-7,8889	-5,3909	-2,7276
Sin 2 χ	-1,6137	-3,1096	-4,3692	-5,2804	-5,7596	-5,7765	-5,3633	-4,6037	-3,6025	-2,4586	-1,2429
Sin 3 χ	-0,4748	-0,9113	-1,2725	-1,5262	-1,6511	-1,6433	-1,5164	-1,2943	-1,0091	-0,6871	-0,3470
Sin 4 χ	-0,0994	-0,1893	-0,2608	-0,3084	-0,3285	-0,3223	-0,2938	-0,2485	-0,1927	-0,1308	-0,0658
Sin 5 χ	-0,0097	-0,0178	-0,0236	-0,0256	-0,0258	-0,0236	-0,0203	-0,0168	-0,0125	-0,0085	-0,0042
Sin 6 χ	+0,0038	+0,0075	+0,0106	+0,0134	+0,0144	+0,0148	+0,0141	+0,0121	+0,0094	+0,0063	+0,0032

$\omega_4 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
Sin 7χ	+0,0028	+0,0055	+0,0075	+0,0092	+0,0100	+0,0095	+0,0089	+0,0074	+0,0059	+0,0038	+0,0020
Sin 8χ	+0,0013	+0,0023	+0,0034	+0,0035	+0,0038	+0,0036	+0,0033	+0,0028	+0,0021	+0,0015	+0,0007
Sin 9χ	+0,0004	+0,0009	+0,0011	+0,0012	+0,0014	+0,0010	+0,0011	+0,0008	+0,0005	+0,0006	+0,0002
Sin 10χ	+0,0001	+0,0003	+0,0002	+0,0003	+0,0004	+0,0003	+0,0002				+0,0001

$$\frac{1}{12} \text{Sec } i \frac{dp_2}{d\omega_4}$$

Cos 0χ	+0,0001	-0,0007	-0,0021	-0,0053	-0,0102	-0,0160	-0,0213	-0,0241	-0,0231	-0,0181	-0,0100
Cos χ	+0,0001	+0,0011	+0,0038	+0,0095	+0,0184	+0,0292	+0,0389	+0,0444	+0,0428	+0,0337	+0,0186
Cos 2χ	+0,0001	+0,0007	+0,0025	+0,0054	+0,0099	+0,0149	+0,0190	+0,0209	+0,0197	+0,0153	+0,0084
Cos 3χ	+0,0001	+0,0004	+0,0012	+0,0026	+0,0042	+0,0060	+0,0072	+0,0076	+0,0070	+0,0052	+0,0029
Cos 4χ		+0,0002	+0,0005	+0,0010	+0,0015	+0,0021	+0,0023	+0,0019	+0,0020	+0,0014	+0,0008
Cos 5χ			+0,0002	+0,0004	+0,0004	+0,0006	+0,0006	+0,0006	+0,0005	+0,0003	
Cos 6χ				+0,0001	+0,0001	+0,0001	+0,0001	+0,0001	+0,0001		
Sin χ	+0,0008	+0,0063	+0,0195	+0,0401	+0,0646	+0,0867	+0,1003	+0,1015	+0,0894	+0,0661	+0,0354
Sin 2χ	+0,0003	+0,0030	+0,0089	+0,0184	+0,0293	+0,0392	+0,0452	+0,0457	+0,0401	+0,0296	+0,0157
Sin 3χ	+0,0001	+0,0008	+0,0025	+0,0051	+0,0081	+0,0107	+0,0123	+0,0123	+0,0108	+0,0080	+0,0037
Sin 4χ		+0,0002	+0,0005	+0,0009	+0,0015	+0,0019	+0,0021	+0,0021	+0,0018	+0,0014	+0,0007
Sin 5χ				+0,0001	+0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
Sin 6χ				-0,0001	-0,0001	-0,0001	-0,0002	-0,0001	-0,0001	-0,0001	

$$\frac{1}{12} \text{Sec } i \frac{dq_2}{d\omega_4}$$

Cos 0χ	-0,0242	-0,0517	-0,0849	-0,1219	-0,1570	-0,1828	-0,1925	-0,1826	-0,1541	-0,1107	-0,0578
Cos χ	+0,0412	+0,0899	+0,1499	+0,2180	+0,2840	+0,3336	+0,3533	+0,3368	+0,2850	+0,2054	+0,1068
Cos 2χ	+0,0296	+0,0607	+0,0935	+0,1257	+0,1530	+0,1698	+0,1721	+0,1587	+0,1313	+0,0931	+0,0481
Cos 3χ	+0,0162	+0,0319	+0,0462	+0,0579	+0,0657	+0,0684	+0,0656	+0,0577	+0,0461	+0,0319	+0,0163
Cos 4χ	+0,0070	+0,0134	+0,0187	+0,0222	+0,0238	+0,0233	+0,0209	+0,0176	+0,0134	+0,0090	+0,0045
Cos 5χ	+0,0024	+0,0049	+0,0062	+0,0071	+0,0072	+0,0067	+0,0056	+0,0045	+0,0032	+0,0020	+0,0010
Cos 6χ	+0,0007	+0,0013	+0,0017	+0,0018	+0,0018	+0,0015	+0,0012	+0,0008	+0,0006	+0,0007	+0,0001
Cos 7χ	+0,0001	+0,0003	+0,0003	+0,0003	+0,0003	+0,0002	+0,0002		+0,0001		
Cos 8χ	+0,0001			+0,0001		-0,0001	-0,0001				
Sin χ	+0,2818	+0,5431	+0,7622	+0,9183	+0,9960	+0,9908	+0,9096	+0,7712	+0,5962	+0,4027	+0,2022
Sin 2χ	+0,1304	+0,2505	+0,3502	+0,4198	+0,4530	+0,4483	+0,4100	+0,3468	+0,2675	+0,1805	+0,0905
Sin 3χ	+0,0373	+0,0712	+0,0987	+0,1172	+0,1251	+0,1227	+0,1114	+0,0936	+0,0720	+0,0485	+0,0243
Sin 4χ	+0,0073	+0,0138	+0,0186	+0,0217	+0,0226	+0,0218	+0,0195	+0,0162	+0,0123	+0,0082	+0,0041
Sin 5χ	+0,0005	+0,0007	+0,0009	+0,0008	+0,0007	+0,0004	+0,0003	+0,0002	+0,0001	+0,0001	0,0000
Sin 6χ	-0,0004	-0,0008	-0,0012	-0,0015	-0,0016	-0,0016	-0,0016	-0,0013	-0,0010	-0,0007	-0,0003
Sin 7χ	-0,0003	-0,0005	-0,0007	-0,0008	-0,0009	-0,0009	-0,0008	-0,0006	-0,0005	-0,0003	-0,0002
Sin 8χ	-0,0001	-0,0002	-0,0003	-0,0003	-0,0003	-0,0003	-0,0003	-0,0002	-0,0001	-0,0001	
Sin 9χ			-0,0001	-0,0001	-0,0001	-0,0001	-0,0001				

Da wir nun haben

$$\frac{1}{12} \frac{dY}{d\omega_4} = \frac{1}{12} \frac{dY_1}{d\omega_4} + \frac{1}{12} \frac{dY_2}{d\omega_4}$$

$$\frac{1}{12} \frac{d\Phi}{d\omega_4} = \frac{1}{12} \frac{d\Phi_1}{d\omega_4} + \frac{1}{12} \frac{d\Phi_2}{d\omega_4}$$

$$\frac{1}{12} \frac{dE}{d\omega_4} = \frac{1}{12} \frac{dE_1}{d\omega_4} + \frac{1}{12} \frac{dE_2}{d\omega_4}$$

$$\frac{1}{12} \text{Sec } i \frac{dp}{d\omega_4} = \frac{1}{12} \text{Sec } i \frac{dp_1}{d\omega_4} + \frac{1}{12} \text{Sec } i \frac{dp_2}{d\omega_4}$$

$$\frac{1}{12} \text{Sec } i \frac{dq}{d\omega_4} = \frac{1}{12} \text{Sec } i \frac{dq_1}{d\omega_4} + \frac{1}{12} \text{Sec } i \frac{dq_2}{d\omega_4},$$

so werden die vollständigen Ausdrücke der Differentialquotienten der Störungen der Elemente die folgenden sein:

		$\frac{1}{12} \frac{dY}{d\omega_4}$											
$\omega_4 =$		15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	
Cos	0 χ	+ 0,9222	+ 1,3870	+ 1,0825	- 0,0518	- 1,6867	- 3,2477	- 4,2047	- 4,3646	- 3,7998	- 2,7463	- 1,4252	
Cos	χ	- 2,0886	- 2,8534	- 1,3442	+ 2,4752	+ 7,5042	+11,9353	+14,2962	+14,1297	+11,9246	+ 8,4392	+ 4,3370	
Cos	2 χ	+ 2,6528	+ 3,2679	+ 0,4569	- 5,7116	-13,3072	-19,4248	-21,9963	-20,7898	-16,9046	-11,6287	- 5,8574	
Cos	3 χ	- 2,8873	- 3,6823	- 0,9397	+ 5,1720	+12,3815	+17,5437	+18,8478	+16,7191	+12,7433	+ 8,2956	+ 4,0411	
Cos	4 χ	+ 2,1977	+ 2,7180	+ 0,3871	- 4,5499	- 9,9487	-13,0963	-12,9115	-10,3872	- 7,1653	- 4,2698	- 1,9418	
Cos	5 χ	- 1,5588	- 1,9751	- 0,4098	+ 2,8916	+ 6,2007	+ 7,5539	+ 6,5871	+ 4,4907	+ 2,5282	+ 1,2094	+ 0,4640	
Cos	6 χ	+ 0,9348	+ 1,1809	+ 0,2037	- 1,7915	- 3,5522	- 3,8341	- 2,7440	- 1,3402	- 0,3832	+ 0,0266	+ 0,0780	
Cos	7 χ	- 0,5341	- 0,6850	- 0,1298	+ 0,9819	+ 1,8109	+ 1,6567	+ 0,8226	+ 0,0731	- 0,2598	- 0,2758	- 0,1756	
Cos	8 χ	+ 0,2836	+ 0,3687	+ 0,0681	- 0,5182	- 0,8631	- 0,6173	- 0,1055	+ 0,2123	+ 0,2617	+ 0,1825	+ 0,0749	
Cos	9 χ	- 0,1444	- 0,1911	- 0,0358	+ 0,2607	+ 0,3837	+ 0,1831	- 0,0835	- 0,1735	- 0,1349	- 0,0696	- 0,0256	
Cos	10 χ	+ 0,0704	+ 0,0960	+ 0,0181	- 0,1262	- 0,1595	- 0,0300	+ 0,0833	+ 0,0823	+ 0,0436	+ 0,0096	+ 0,0008	
Cos	11 χ	- 0,0835	- 0,0469	- 0,0090	+ 0,0597	+ 0,0621	- 0,0101	- 0,0501	- 0,0295	- 0,0043	+ 0,0060	+ 0,0043	
Cos	12 χ	+ 0,0153	+ 0,0224	+ 0,0044	- 0,0276	- 0,0222	+ 0,0138	+ 0,0222	+ 0,0060	- 0,0048	- 0,0053	- 0,0038	
Cos	13 χ	- 0,0069	- 0,0105	- 0,0021	+ 0,0123	+ 0,0071	- 0,0093	- 0,0080	+ 0,0006	+ 0,0051	+ 0,0029	+ 0,0020	
Cos	14 χ	+ 0,0031	+ 0,0049	+ 0,0010	- 0,0056	- 0,0019	+ 0,0050	+ 0,0023	- 0,0006	- 0,0015	- 0,0003	+ 0,0004	
Cos	15 χ	- 0,0013	- 0,0021	- 0,0004	+ 0,0023	+ 0,0002	- 0,0022	- 0,0002	+ 0,0007	- 0,0002	+ 0,0006	- 0,0005	
Cos	16 χ	+ 0,0005	+ 0,0010	+ 0,0001	- 0,0010	+ 0,0001	+ 0,0008	+ 0,0004	+ 0,0008	0,0000	0,0000	- 0,0002	
Sin	χ	+15,0303	+29,0430	+40,6514	+48,1757	+50,3748	+47,2864	+40,3507	+31,6057	+22,6920	+14,4425	+ 6,9805	
Sin	2 χ	-19,3037	-37,3852	-52,3258	-61,6057	-63,3589	-57,8751	-47,6672	-35,9070	-24,8519	-15,3517	- 7,2766	
Sin	3 χ	+11,4409	+22,3357	+31,2664	+35,9992	+34,9354	+28,7815	+20,3557	+12,5753	+ 6,9069	+ 3,3692	+ 1,3268	
Sin	4 χ	- 6,3599	-12,5860	-17,6813	-19,8153	-17,7555	-12,4524	- 6,5279	- 2,1462	+ 0,1264	+ 0,7931	+ 0,5795	
Sin	5 χ	+ 3,0116	+ 6,1187	+ 8,6869	+ 9,8614	+ 7,3186	+ 3,5488	+ 0,1226	- 1,7039	- 2,0376	- 1,5634	- 0,8048	
Sin	6 χ	- 1,3451	- 2,8464	- 4,1149	- 4,2179	- 2,6668	- 0,3420	+ 1,3191	+ 1,7803	+ 1,4604	+ 0,9179	+ 0,4252	
Sin	7 χ	+ 0,5687	+ 1,2792	+ 1,9023	+ 1,8351	+ 0,8220	- 0,4444	- 1,0846	- 0,9969	- 0,6254	- 0,3054	- 0,1098	
Sin	8 χ	- 0,2230	- 0,5508	- 0,8535	- 0,7625	- 0,1627	+ 0,4513	+ 0,6047	+ 0,3997	+ 0,1554	+ 0,0272	- 0,0050	
Sin	9 χ	+ 0,0827	+ 0,2333	+ 0,3817	+ 0,3117	- 0,0166	- 0,2805	- 0,2564	- 0,0992	+ 0,0183	+ 0,0430	+ 0,0294	
Sin	10 χ	- 0,0270	- 0,0954	- 0,1677	- 0,1224	+ 0,0466	+ 0,1424	+ 0,0864	- 0,0061	- 0,0421	- 0,0337	- 0,0150	
Sin	11 χ	+ 0,0073	+ 0,0381	+ 0,0736	+ 0,0470	- 0,0358	- 0,0627	- 0,0145	+ 0,0256	+ 0,0249	+ 0,0143	+ 0,0052	
Sin	12 χ	- 0,0009	- 0,0147	- 0,0318	- 0,0175	+ 0,0211	+ 0,0237	- 0,0025	- 0,0160	- 0,0095	- 0,0032	- 0,0015	
Sin	13 χ	- 0,0007	+ 0,0055	+ 0,0138	+ 0,0062	- 0,0111	- 0,0071	+ 0,0073	+ 0,0064	+ 0,0035	- 0,0012	- 0,0003	
Sin	14 χ	+ 0,0006	- 0,0019	- 0,0067	- 0,0021	+ 0,0052	+ 0,0014	- 0,0058	- 0,0020	+ 0,0008	+ 0,0018	+ 0,0012	
Sin	15 χ	- 0,0005	+ 0,0007	+ 0,0023	+ 0,0006	- 0,0023	+ 0,0003	+ 0,0029	0,0000	- 0,0022	+ 0,0008	- 0,0004	
Sin	16 χ	+ 0,0002	- 0,0002	- 0,0011	- 0,0002	+ 0,0010	- 0,0006	- 0,0008	0,0000	+ 0,0016	+ 0,0004	- 0,0003	
		$\frac{1}{12} \frac{d\mathcal{F}}{d\omega_4}$											
Cos	0 χ	+ 8,0799	+15,5863	+21,7201	+25,5918	+26,5759	+24,7620	+20,9759	+16,3068	+11,6344	+ 7,3680	+ 3,5513	
Cos	χ	-15,3815	-29,7036	+41,3257	-48,2753	-49,1985	-44,4441	-36,0843	-26,7031	-18,0971	-10,9541	- 5,1138	
Cos	2 χ	+12,6841	+24,5813	+34,0959	+39,0341	+37,9200	+31,4959	+22,5430	+14,0561	+ 7,7042	+ 3,6931	+ 1,4188	
Cos	3 χ	- 6,8270	-13,3735	-18,4699	-20,1986	-17,3675	-11,0722	- 4,1974	+ 0,7700	+ 3,0237	+ 3,0777	+ 1,8293	
Cos	4 χ	+ 3,6165	+ 7,1937	+ 9,8991	+10,2190	+ 7,3340	+ 2,4789	- 1,8755	- 4,1274	- 4,3090	- 3,2499	- 1,6843	
Cos	5 χ	- 1,6863	- 3,4550	- 4,7726	- 4,5670	- 2,3683	+ 0,6917	+ 2,8358	+ 3,3473	+ 2,7353	+ 1,7571	+ 0,8294	
Cos	6 χ	+ 0,7495	+ 1,6013	+ 2,2306	+ 1,9367	+ 0,5012	- 1,1648	- 0,9541	- 1,7383	- 1,1076	- 0,5516	- 0,2154	
Cos	7 χ	- 0,3177	- 0,7224	- 1,0251	- 0,7962	+ 0,0395	+ 0,8275	+ 0,9696	+ 0,6184	+ 0,2234	+ 0,0129	- 0,0486	
Cos	8 χ	+ 0,1263	+ 0,3143	+ 0,4579	+ 0,3079	- 0,1422	- 0,4628	- 0,3838	- 0,1202	+ 0,0586	+ 0,0995	+ 0,0526	
Cos	9 χ	- 0,0477	- 0,1345	- 0,2044	- 0,1161	+ 0,1104	+ 0,2164	+ 0,1053	- 0,0341	- 0,0887	- 0,0708	- 0,0349	
Cos	10 χ	+ 0,0162	+ 0,0560	+ 0,0898	+ 0,0411	- 0,0670	+ 0,0881	- 0,0112	+ 0,0460	+ 0,0496	+ 0,0257	+ 0,0111	
Cos	11 χ	- 0,0047	- 0,0229	- 0,0391	- 0,0137	+ 0,0359	+ 0,0301	- 0,0139	- 0,0247	- 0,0166	- 0,0041	- 0,0002	

$\omega_4 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
Cos 12 χ	+ 0,0009	+ 0,0091	+ 0,0170	+ 0,0040	- 0,0160	- 0,0078	+ 0,0131	+ 0,0121	+ 0,0024	- 0,0024	- 0,0020
Cos 13 χ	0,0000	- 0,0035	- 0,0074	- 0,0009	+ 0,0078	+ 0,0007	- 0,0023	- 0,0043	+ 0,0010	+ 0,0023	+ 0,0017
Cos 14 χ	- 0,0003	+ 0,0012	+ 0,0031	+ 0,0001	- 0,0033	+ 0,0010	+ 0,0026	+ 0,0005	- 0,0006	- 0,0002	- 0,0001
Cos 15 χ	+ 0,0002	- 0,0006	- 0,0013	+ 0,0001	+ 0,0013	- 0,0008	- 0,0008	- 0,0002	+ 0,0019	+ 0,0008	+ 0,0001
Cos 16 χ	- 0,0001	+ 0,0002	+ 0,0005	- 0,0001	- 0,0005	+ 0,0004	0,0000	+ 0,0011	+ 0,0001	- 0,0001	0,0000
Sin χ	- 0,5769	+ 0,5669	+ 4,5241	+11,0817	+18,5115	+24,3368	+26,7261	+25,3210	+20,9226	+14,6728	+ 7,5054
Sin 2 χ	+ 1,0534	- 0,3525	- 5,7829	-14,8585	-24,9026	-32,2468	-34,5308	-31,7606	-25,5076	-17,4755	- 8,8132
Sin 3 χ	- 1,3370	- 0,7160	+ 3,1246	+ 9,7394	+16,6091	+20,6157	+20,3993	+16,9493	+12,2226	+ 7,5985	+ 3,5704
Sin 4 χ	+ 1,0537	+ 0,7460	- 1,8180	- 6,2056	-10,3250	-11,8788	-10,4154	- 7,3582	- 4,3560	- 2,1994	- 0,8827
Sin 5 χ	- 0,7668	- 0,6984	+ 0,7803	+ 3,3150	+ 5,3682	+ 5,4875	+ 3,8376	+ 1,7726	+ 0,3470	- 0,2405	- 0,2659
Sin 6 χ	+ 0,4646	+ 0,4592	- 0,3646	- 1,7446	- 2,6400	- 2,2420	- 0,9804	+ 0,1336	+ 0,6226	+ 0,6007	+ 0,3237
Sin 7 χ	- 0,2685	- 0,2853	+ 0,1497	+ 0,8622	+ 1,1932	+ 0,7523	- 0,0105	- 0,4689	- 0,5212	- 0,3636	- 0,1817
Sin 8 χ	+ 0,1436	+ 0,1604	- 0,0624	- 0,4150	- 0,5051	- 0,1783	+ 0,2052	+ 0,3280	+ 0,2461	+ 0,1286	+ 0,0446
Sin 9 χ	- 0,0735	- 0,0858	+ 0,0252	+ 0,1945	+ 0,1999	+ 0,0010	- 0,1583	- 0,1501	- 0,0683	- 0,0149	+ 0,0029
Sin 10 χ	+ 0,0360	+ 0,0444	- 0,0098	- 0,0889	- 0,0722	+ 0,0339	+ 0,0844	+ 0,0488	+ 0,0011	- 0,0147	- 0,0086
Sin 11 χ	- 0,0172	- 0,0220	+ 0,0038	+ 0,0399	+ 0,0234	- 0,0274	- 0,0338	- 0,0073	+ 0,0118	- 0,0124	+ 0,0063
Sin 12 χ	+ 0,0079	+ 0,0106	- 0,0014	- 0,0175	- 0,0061	+ 0,0159	+ 0,0115	- 0,0049	- 0,0084	- 0,0067	- 0,0031
Sin 13 χ	- 0,0036	- 0,0053	+ 0,0006	+ 0,0076	+ 0,0008	- 0,0075	- 0,0006	+ 0,0042	+ 0,0050	+ 0,0009	+ 0,0005
Sin 14 χ	+ 0,0016	+ 0,0023	- 0,0003	- 0,0032	+ 0,0006	+ 0,0030	- 0,0021	- 0,0019	- 0,0012	- 0,0003	+ 0,0003
Sin 15 χ	- 0,0005	- 0,0011	+ 0,0001	+ 0,0013	- 0,0006	- 0,0012	+ 0,0007	+ 0,0028	- 0,0011	- 0,0006	- 0,0008
Sin 16 χ	+ 0,0002	+ 0,0004	0,0000	- 0,0006	+ 0,0002	+ 0,0002	- 0,0004	- 0,0009	+ 0,0009	+ 0,0014	- 0,0002

$$\frac{1}{12} \frac{d\Xi}{d\omega_4}$$

Cos 0 χ	+ 1,3120	+ 2,1734	+ 2,2651	+ 1,4677	+ 0,0486	- 1,4605	- 2,5191	- 2,9080	- 2,6511	- 1,9562	- 1,0225
Cos χ	- 2,9588	- 4,4343	- 3,3198	+ 0,5050	+ 5,9005	+10,8770	+13,7467	+13,9190	+11,8860	+ 8,4559	+ 4,3560
Cos 2 χ	+ 3,7292	+ 4,9242	+ 1,8378	- 5,5181	-14,8323	-22,5342	-26,0002	-24,8379	-20,3232	-14,0380	- 7,0835
Cos 3 χ	- 4,0295	- 5,3173	- 1,9512	+ 5,9083	+15,3878	+22,4072	+24,5016	+22,0596	+17,0355	+11,2097	+ 5,5013
Cos 4 χ	+ 3,0602	+ 3,8816	+ 0,8851	- 5,6515	-12,9512	-17,4120	-17,4844	-14,3354	-10,0844	- 6,1182	- 2,8193
Cos 5 χ	- 2,1671	- 2,7911	- 0,7356	+ 3,7076	+ 8,2667	+10,2940	+ 9,1958	+ 6,4676	+ 3,7937	+ 1,9079	+ 0,7672
Cos 6 χ	+ 1,2986	+ 1,6617	+ 0,3611	- 2,3513	- 4,8120	- 5,3211	- 3,9444	- 2,0580	- 0,7091	- 0,0815	+ 0,0513
Cos 7 χ	- 0,7413	- 0,9609	- 0,2159	+ 1,3048	+ 2,4791	+ 2,3379	+ 1,2337	+ 0,2028	- 0,2920	- 0,3485	- 0,2324
Cos 8 χ	+ 0,3934	+ 0,5157	+ 0,1104	- 0,6952	- 1,1930	- 0,8888	- 0,1965	+ 0,2573	+ 0,3490	+ 0,2529	+ 0,1063
Cos 9 χ	- 0,2001	- 0,2674	- 0,0566	+ 0,3517	+ 0,5341	+ 0,2729	- 0,0956	- 0,2336	- 0,1918	- 0,1037	- 0,0398
Cos 10 χ	+ 0,0979	+ 0,1340	+ 0,0282	- 0,1716	- 0,2242	- 0,0513	+ 0,1092	+ 0,1162	+ 0,0659	+ 0,0177	+ 0,0034
Cos 11 χ	- 0,0464	- 0,0661	- 0,0138	+ 0,0815	+ 0,0881	- 0,0100	- 0,0687	- 0,0429	- 0,0088	+ 0,0067	+ 0,0054
Cos 12 χ	+ 0,0212	+ 0,0311	+ 0,0066	- 0,0378	- 0,0317	+ 0,0179	+ 0,0321	+ 0,0099	- 0,0059	- 0,0070	- 0,0053
Cos 13 χ	- 0,0097	- 0,0144	- 0,0030	+ 0,0171	+ 0,0102	- 0,0123	- 0,0109	0,0000	+ 0,0067	+ 0,0041	+ 0,0029
Cos 14 χ	+ 0,0043	+ 0,0067	+ 0,0014	- 0,0077	- 0,0027	+ 0,0066	+ 0,0035	- 0,0007	- 0,0020	- 0,0004	+ 0,0006
Cos 15 χ	- 0,0018	- 0,0029	- 0,0007	+ 0,0034	+ 0,0003	- 0,0029	0,0000	+ 0,0008	0,0000	+ 0,0009	- 0,0006
Cos 16 χ	+ 0,0008	+ 0,0014	+ 0,0003	- 0,0016	+ 0,0001	+ 0,0011	+ 0,0004	+ 0,0012	0,0000	+ 0,0010	- 0,0002

Sin χ	+20,8270	+40,2399	+56,3775	+67,0168	+70,5072	+66,8063	+57,7064	+45,8229	+33,3455	+21,4652	+10,4529
Sin 2 χ	-26,7475	-51,7964	-72,5670	-85,7405	-88,8166	-82,0583	-68,6052	-52,5761	-37,0221	-23,2095	-11,1124
Sin 3 χ	+15,8495	+30,9282	+43,3489	+50,1655	+49,2304	+41,3495	+30,1234	+19,4191	+11,2838	+ 5,8814	+ 2,4556
Sin 4 χ	- 8,8095	-17,4239	-24,5162	-27,6637	-25,1857	-18,2401	-10,2315	- 4,0854	- 0,6807	+ 0,5501	+ 0,5386
Sin 5 χ	+ 4,1705	+ 8,4644	+12,0403	+13,0925	+10,4801	+ 5,4461	+ 0,7278	- 1,9282	- 2,5631	- 2,0416	- 1,0736
Sin 6 χ	- 1,8623	- 3,9355	- 5,7036	- 5,9142	- 3,8794	- 0,7280	+ 1,6138	+ 2,3576	+ 2,0056	+ 1,2946	+ 0,6074
Sin 7 χ	+ 0,7870	+ 1,7671	+ 2,6359	+ 2,5793	+ 1,2292	- 0,5116	- 1,4469	- 1,3080	- 0,9080	- 0,4653	- 0,1783
Sin 8 χ	- 0,3082	- 0,7605	- 1,1826	- 1,0749	- 0,2669	+ 0,5890	+ 0,8361	+ 0,5807	+ 0,2484	+ 0,0616	+ 0,0032
Sin 9 χ	+ 0,1141	+ 0,3222	+ 0,5288	+ 0,4409	- 0,0055	- 0,3793	- 0,3650	- 0,1562	+ 0,0104	+ 0,0516	+ 0,0378
Sin 10 χ	- 0,0375	- 0,1313	- 0,2323	- 0,1745	+ 0,0579	+ 0,1979	+ 0,1277	+ 0,0004	- 0,0542	- 0,0460	- 0,0212
Sin 11 χ	+ 0,0099	+ 0,0524	+ 0,1017	+ 0,0672	- 0,0469	- 0,0881	- 0,0242	- 0,0322	+ 0,0343	+ 0,0208	+ 0,0079
Sin 12 χ	- 0,0013	- 0,0201	- 0,0442	- 0,0247	+ 0,0235	+ 0,0340	- 0,0018	- 0,0218	- 0,0140	- 0,0055	- 0,0026
Sin 13 χ	- 0,0009	+ 0,0076	+ 0,0190	+ 0,0089	- 0,0146	- 0,0109	+ 0,0096	+ 0,0092	+ 0,0055	- 0,0009	- 0,0003
Sin 14 χ	+ 0,0010	- 0,0026	- 0,0082	- 0,0030	+ 0,0073	+ 0,0024	- 0,0077	- 0,0030	+ 0,0008	+ 0,0022	+ 0,0016
Sin 15 χ	- 0,0007	+ 0,0008	+ 0,0034	+ 0,0011	- 0,0033	+ 0,0002	+ 0,0038	+ 0,0006	- 0,0032	- 0,0010	- 0,0007
Sin 16 χ	+ 0,0005	- 0,0004	- 0,0013	- 0,0002	+ 0,0016	- 0,0007	- 0,0009	- 0,0001	+ 0,0023	+ 0,0009	- 0,0003

$$\frac{1}{12} \text{Sec } i \frac{dp}{d\omega_4}$$

ω_4	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
Cos 0 χ	+ 0,0051	+ 0,0391	+ 0,1323	+ 0,2969	+ 0,5098	+ 0,7063	+ 0,8185	+ 0,8121	+ 0,6948	+ 0,4992	+ 0,2590
Cos χ	- 0,0082	- 0,0681	- 0,2325	- 0,5278	- 0,9110	- 1,2629	- 1,4561	- 1,4325	- 1,2147	- 0,8661	- 0,4472
Cos 2 χ	+ 0,0054	+ 0,0456	+ 0,1627	+ 0,3817	+ 0,6687	+ 0,9230	+ 1,0441	+ 0,9993	+ 0,8236	+ 0,5732	+ 0,2911
Cos 3 χ	- 0,0024	- 0,0231	- 0,0895	- 0,2201	- 0,3886	- 0,5192	- 0,5504	- 0,4834	- 0,3632	- 0,2327	- 0,1116
Cos 4 χ	+ 0,0010	+ 0,0111	+ 0,0466	+ 0,1199	+ 0,2095	+ 0,2621	+ 0,2462	+ 0,1817	+ 0,1104	+ 0,0558	+ 0,0219
Cos 5 χ	- 0,0003	- 0,0043	- 0,0218	- 0,0594	- 0,1004	- 0,1107	- 0,0805	- 0,0347	- 0,0007	+ 0,0121	+ 0,0095
Cos 6 χ		+ 0,0015	+ 0,0100	+ 0,0288	+ 0,0458	+ 0,0405	+ 0,0145	- 0,0110	- 0,0221	- 0,0199	- 0,0109
Cos 7 χ		- 0,0005	- 0,0045	- 0,0133	- 0,0190	- 0,0111	+ 0,0052	+ 0,0157	+ 0,0164	+ 0,0114	+ 0,0059
Cos 8 χ			+ 0,0019	+ 0,0062	+ 0,0074	+ 0,0012	- 0,0071	- 0,0096	- 0,0073	- 0,0039	- 0,0013
Cos 9 χ			- 0,0010	- 0,0028	- 0,0025	+ 0,0013	+ 0,0046	+ 0,0041	+ 0,0019	+ 0,0004	- 0,0001
Cos 10 χ			+ 0,0004	+ 0,0013	+ 0,0007	- 0,0013	- 0,0021	- 0,0011	+ 0,0001	+ 0,0005	+ 0,0004
Sin χ	- 0,0057	- 0,0410	- 0,1175	- 0,2137	- 0,2831	- 0,2912	- 0,2417	- 0,1677	- 0,0999	- 0,0513	- 0,0205
Sin 2 χ	+ 0,0072	+ 0,0537	+ 0,1515	+ 0,2689	+ 0,3389	+ 0,3204	+ 0,2309	+ 0,1258	+ 0,0471	+ 0,0070	- 0,0038
Sin 3 χ	- 0,0047	- 0,0332	- 0,0914	- 0,1460	- 0,1438	- 0,0657	+ 0,0470	+ 0,1317	+ 0,1583	+ 0,1321	+ 0,0726
Sin 4 χ	+ 0,0028	+ 0,0199	+ 0,0519	+ 0,0741	+ 0,0490	- 0,0262	- 0,1076	- 0,1505	- 0,1446	- 0,1077	- 0,0553
Sin 5 χ	- 0,0015	- 0,0104	- 0,0258	- 0,0311	- 0,0039	+ 0,0491	+ 0,0925	+ 0,1020	+ 0,0833	+ 0,0542	+ 0,0256
Sin 6 χ	+ 0,0008	+ 0,0052	+ 0,0124	+ 0,0120	- 0,0078	- 0,0378	- 0,0541	- 0,0480	- 0,0310	- 0,0158	- 0,0060
Sin 7 χ	- 0,0003	- 0,0025	- 0,0059	- 0,0042	+ 0,0074	+ 0,0222	+ 0,0245	+ 0,0157	+ 0,0053	- 0,0003	- 0,0014
Sin 8 χ	+ 0,0002	+ 0,0009	+ 0,0028	+ 0,0015	- 0,0051	- 0,0109	- 0,0087	- 0,0022	+ 0,0025	+ 0,0033	+ 0,0020
Sin 9 χ		- 0,0005	- 0,0010	- 0,0002	+ 0,0029	+ 0,0046	+ 0,0020	- 0,0018	- 0,0028	- 0,0021	- 0,0012
Sin 10 χ		+ 0,0003	+ 0,0005	0,0000	- 0,0014	- 0,0017	+ 0,0001	+ 0,0016	+ 0,0015	+ 0,0009	+ 0,0003

$$\frac{1}{12} \text{Sec } i \frac{dq}{d\omega_4}$$

Cos 0 χ	+ 1,6301	+ 3,3660	+ 5,1716	+ 6,7996	+ 7,8633	+ 8,0713	+ 7,4196	+ 6,1656	+ 4,6278	+ 3,0377	+ 1,4946
Cos χ	- 2,7924	- 5,8309	- 9,0862	- 12,0843	- 14,0594	- 14,4285	- 13,1963	- 10,8752	- 8,0915	- 5,2710	- 2,5815
Cos 2 χ	+ 1,8013	+ 3,9094	+ 6,3608	+ 8,7418	+ 10,3197	+ 10,5452	+ 9,4619	+ 7,5878	+ 5,4867	+ 3,4880	+ 1,6797
Cos 3 χ	- 0,8447	- 1,9871	- 3,4978	- 5,0413	- 5,9938	- 5,9306	- 4,9878	- 3,6710	- 2,4197	- 1,4158	- 0,6449
Cos 4 χ	+ 0,3453	+ 0,9296	+ 1,8177	+ 2,7493	+ 3,2347	+ 2,9937	+ 2,2311	+ 1,3830	+ 0,7361	+ 0,3410	+ 0,1263
Cos 5 χ	- 0,1001	- 0,3669	- 0,8512	- 1,3621	- 1,5507	- 1,2654	- 0,7285	- 0,2619	- 0,0049	+ 0,0747	+ 0,0557
Cos 6 χ	+ 0,0155	+ 0,1363	+ 0,3948	+ 0,6604	+ 0,7032	+ 0,4614	+ 0,1316	+ 0,0834	- 0,1470	- 0,1209	- 0,0631
Cos 7 χ	+ 0,0099	- 0,0422	- 0,1757	- 0,3067	- 0,2938	- 0,1264	+ 0,0469	+ 0,1204	+ 0,1092	+ 0,0696	+ 0,0338
Cos 8 χ	- 0,0121	+ 0,0095	+ 0,0774	+ 0,1398	+ 0,1142	+ 0,0134	- 0,0635	- 0,0734	- 0,0484	- 0,0234	- 0,0073
Cos 9 χ	+ 0,0090	+ 0,0001	- 0,0337	- 0,0621	- 0,0402	+ 0,0137	+ 0,0410	+ 0,0312	+ 0,0129	+ 0,0023	- 0,0006
Cos 10 χ	- 0,0057	- 0,0020	+ 0,0146	+ 0,0270	+ 0,0124	- 0,0137	+ 0,0195	- 0,0082	+ 0,0004	+ 0,0033	+ 0,0020
Cos 11 χ	+ 0,0031	+ 0,0017	- 0,0063	- 0,0117	- 0,0028	+ 0,0086	+ 0,0074	+ 0,0004	- 0,0027	- 0,0024	- 0,0011
Cos 12 χ	- 0,0017	- 0,0011	+ 0,0026	+ 0,0049	0,0000	- 0,0044	- 0,0021	+ 0,0013	+ 0,0018	+ 0,0009	+ 0,0005
Cos 13 χ	+ 0,0008	+ 0,0007	- 0,0011	- 0,0020	+ 0,0004	+ 0,0019	+ 0,0001	- 0,0009	- 0,0008	+ 0,0004	- 0,0001
Sin χ	- 1,8800	- 3,5069	- 4,5912	- 4,8855	- 4,3672	- 3,3251	- 2,1899	- 1,2726	- 0,6647	- 0,3128	- 0,1204
Sin 2 χ	+ 2,4599	+ 4,5744	+ 5,9266	+ 6,1509	+ 5,2367	+ 3,6626	+ 2,0928	+ 0,9543	+ 0,3153	+ 0,0429	- 0,0223
Sin 3 χ	- 1,5682	- 2,8777	- 3,5748	- 3,3399	- 2,2191	- 0,7491	+ 0,4258	+ 1,0015	+ 1,0549	+ 0,8042	+ 0,4218
Sin 4 χ	+ 0,9301	+ 1,6950	+ 2,0326	+ 1,6960	+ 0,7569	- 0,3004	- 0,9779	- 1,1422	- 0,9629	- 0,6493	- 0,3191
Sin 5 χ	- 0,4816	- 0,8761	- 1,0105	- 0,7129	- 0,0627	+ 0,5615	+ 0,3396	+ 0,7752	+ 0,5551	+ 0,3297	+ 0,1477
Sin 6 χ	+ 0,2367	+ 0,4332	+ 0,4829	+ 0,2745	- 0,1194	- 0,4323	- 0,4904	- 0,3653	- 0,2076	- 0,0963	- 0,0348
Sin 7 χ	- 0,1117	- 0,2080	- 0,2257	- 0,0976	+ 0,1189	+ 0,2503	+ 0,2220	+ 0,1183	+ 0,0350	- 0,0018	- 0,0080
Sin 8 χ	+ 0,0502	+ 0,0961	+ 0,1026	+ 0,0294	- 0,0810	- 0,1242	- 0,0791	- 0,0166	+ 0,0164	+ 0,0203	+ 0,0110
Sin 9 χ	- 0,0224	- 0,0438	- 0,0465	- 0,0070	+ 0,0456	+ 0,0528	+ 0,0180	- 0,0110	- 0,0189	- 0,0134	- 0,0065
Sin 10 χ	+ 0,0092	+ 0,0195	+ 0,0206	+ 0,0003	- 0,0233	- 0,0198	+ 0,0009	+ 0,0117	+ 0,0100	+ 0,0051	+ 0,0017
Sin 11 χ	- 0,0038	- 0,0087	- 0,0090	+ 0,0011	+ 0,0108	+ 0,0057	- 0,0045	- 0,0068	- 0,0032	- 0,0009	- 0,0001
Sin 12 χ	+ 0,0016	+ 0,0036	+ 0,0040	- 0,0009	- 0,0049	- 0,0009	+ 0,0031	+ 0,0025	+ 0,0004	- 0,0004	- 0,0002
Sin 13 χ	- 0,0005	- 0,0016	- 0,0016	+ 0,0005	+ 0,0020	- 0,0003	- 0,0018	- 0,0004	+ 0,0001	+ 0,0005	+ 0,0002

Aus diesen Ausdrücken wurden mit Hülfe der Mechanischen Quadratur die Differentialquotienten $\frac{dY}{d\omega_4}$, $\frac{d^2Y}{d\omega_4^2}$ etc. auf die Form

$$\sum_i i \left\{ s_1 \sin \omega_4 + s_2 \sin 2\omega_4 + s_3 \sin 3\omega_4 + \dots \right\} \begin{matrix} \text{Cos} \\ \text{Sin} \end{matrix} i\chi^*)$$

gebracht, wobei das von Asten in seiner Abhandlung pag. 44 aufgestellte Schema benutzt wurde.

Die in dieser Weise erhaltenen Reihen nach beiden Argumenten, ω_4 und χ , ergaben durch Integration in Bezug auf ω_4 die folgenden Ausdrücke für die Elementenstörungen:

		Y										
		Cos ω_4	Cos $2\omega_4$	Cos $3\omega_4$	Cos $4\omega_4$	Cos $5\omega_4$	Cos $6\omega_4$	Cos $7\omega_4$	Cos $8\omega_4$	Cos $9\omega_4$	Cos $10\omega_4$	Cos $11\omega_4$
Cos	0 χ	+ 30,9888	-14,6342	- 2,5181	+0,1539	+0,0768	+0,0056	-0,0039	-0,0031	-0,0001	+0,0008	-0,0018
Cos	χ	-116,459	+39,750	+ 8,462	-0,315	-0,272	-0,017	+0,004	-0,001	-0,001	+0,001	-0,002
Cos	2 χ	+186,233	-51,920	-14,754	+0,156	+0,503	+0,054	-0,015	-0,001	-0,001	-0,001	+0,001
Cos	3 χ	-155,237	+40,754	+17,234	+0,387	-0,697	-0,096	+0,014	+0,006	-0,002	+0,001	0,000
Cos	4 χ	+107,232	-22,210	-15,408	-1,008	+0,725	+0,150	-0,016	-0,006	-0,005	+0,001	0,000
Cos	5 χ	- 54,262	+ 8,285	+11,092	+1,395	-0,613	-0,176	+0,007	+0,011	0,000	0,000	0,000
Cos	6 χ	+ 23,778	- 1,220	- 6,722	-1,416	+0,417	+0,179	+0,002	-0,013	+0,001	-0,001	0,000
Cos	7 χ	- 8,349	- 0,878	+ 3,505	+1,154	-0,214	-0,167	-0,003	+0,006	+0,005	-0,002	+0,001
Cos	8 χ	+ 2,433	+ 0,940	- 1,560	-0,815	+0,086	+0,118	+0,017	-0,011	-0,003	-0,001	+0,001
Cos	9 χ	- 0,507	- 0,544	+ 0,598	+0,494	-0,005	-0,083	-0,016	+0,006	+0,002	-0,001	+0,001
Cos	10 χ	+ 0,054	+ 0,218	- 0,189	-0,263	-0,026	+0,049	+0,016	-0,004	-0,002	+0,001	-0,001
Cos	11 χ	+ 0,020	- 0,063	+ 0,045	+0,126	+0,029	-0,027	-0,012	+0,002	+0,001	0,000	0,000
Cos	12 χ	- 0,013	+ 0,008	- 0,007	-0,054	-0,021	+0,012	+0,008	0,000	-0,001	0,000	0,000
Cos	13 χ	+ 0,007	+ 0,006	- 0,001	+0,021	+0,013	-0,005	-0,005	0,000	0,000	-0,001	-0,001
Cos	14 χ	- 0,005	- 0,002	0,000	-0,007	-0,007	+0,001	+0,003	+0,001	-0,001	-0,001	+0,001
Cos	15 χ	+ 0,002	+ 0,001	+ 0,001	+0,002	+0,003	0,000	-0,001	-0,001	-0,001	+0,001	-0,001
Cos	16 χ	- 0,004	0,000	0,000	-0,001	-0,001						
Sin	χ	-552,487	-53,991	+ 5,066	+1,708	+0,045	-0,038	-0,004	+0,001	-0,001	0,000	0,000
Sin	2 χ	+674,775	+82,671	- 6,852	-3,174	-0,147	+0,082	+0,012	0,000	0,000	-0,001	+0,001
Sin	3 χ	-334,810	-73,409	+ 4,102	+3,864	+0,313	-0,111	-0,024	+0,002	0,000	+0,001	-0,001
Sin	4 χ	+149,467	+53,780	- 0,886	-3,714	-0,486	+0,120	+0,036	0,000	-0,002	+0,001	
Sin	5 χ	- 49,838	-32,466	- 1,338	+2,928	+0,580	-0,096	-0,046	-0,001	+0,001	-0,001	
Sin	6 χ	+ 13,667	+16,910	+ 2,106	-1,926	-0,578	+0,060	+0,047	+0,003	-0,002	+0,001	
Sin	7 χ	- 3,073	- 7,645	- 1,887	+1,072	+0,484	-0,019	-0,044	-0,004	+0,001	-0,001	
Sin	8 χ	+ 0,501	+ 3,009	+ 1,295	-0,491	-0,356	-0,008	+0,033	+0,008	-0,001	+0,002	
Sin	9 χ	- 0,180	- 1,031	- 0,741	+0,176	+0,228	+0,023	-0,023	-0,007	0,000	-0,001	
Sin	10 χ	+ 0,129	+ 0,306	+ 0,362	-0,036	-0,133	-0,025	+0,013	+0,006	0,000		
Sin	11 χ	- 0,101	- 0,078	- 0,152	-0,011	+0,068	+0,023	-0,008	-0,005	0,000		
Sin	12 χ	+ 0,052	+ 0,022	+ 0,057	+0,012	-0,030	-0,015	+0,003	+0,003	+0,001		
Sin	13 χ	- 0,029	- 0,007	- 0,017	-0,011	+0,012	+0,010	-0,001	-0,001	-0,002		
Sin	14 χ	+ 0,013	+ 0,006	+ 0,003	+0,007	-0,004	-0,006	0,000	+0,002			
Sin	15 χ	- 0,003	- 0,003	0,000	-0,002	0,000	+0,003	0,000	-0,001			
Sin	16 χ	- 0,001	+ 0,003	- 0,001	+0,001	0,000	-0,002	0,000	0,000			
		Ψ										
		Cos ω_4	Cos $2\omega_4$	Cos $3\omega_4$	Cos $4\omega_4$	Cos $5\omega_4$	Cos $6\omega_4$	Cos $7\omega_4$	Cos $8\omega_4$	Cos $9\omega_4$	Cos $10\omega_4$	Cos $11\omega_4$
Cos	0 χ	-290,1030	-30,3084	+ 2,4148	+0,9258	+0,0354	-0,0143	-0,0010	+0,0010	+0,0015	+0,0017	-0,0005
Cos	χ	+518,812	+69,839	- 5,053	-2,455	-0,124	+0,051	+0,003	-0,005	-0,002	0,000	-0,001
Cos	2 χ	-366,442	-79,434	+ 4,297	+3,551	+0,252	-0,083	-0,018	+0,005	+0,001	+0,002	0,000
Cos	3 χ	+132,182	+64,813	- 1,046	-3,911	-0,448	+0,111	+0,026	+0,001	-0,003	0,000	0,000
Cos	4 χ	- 38,903	-42,932	- 1,949	+3,382	+0,599	-0,101	-0,043	+0,001	+0,002	+0,001	0,000
Cos	5 χ	+ 4,849	+22,736	+ 3,178	-2,334	-0,653	+0,071	+0,047	+0,003	-0,002	0,000	-0,001
Cos	6 χ	+ 1,878	-10,095	- 2,942	+1,304	+0,586	-0,027	-0,045	-0,005	+0,003	0,000	0,000

*) Es darf vielleicht nicht unerwähnt bleiben, dass überall zur Anwendung kam, wo sie eine wirkliche Kontrolle der Rechnungen gewährt.

$$d\Xi = -\frac{3}{4} \frac{r}{a} \text{Cos } f dY - \frac{3}{4} \frac{r}{a} \text{Sin } f d\Psi$$

	Cos ω_4	Cos $2\omega_4$	Cos $3\omega_4$	Cos $4\omega_4$	Cos $5\omega_4$	Cos $6\omega_4$	Cos $7\omega_4$	Cos $8\omega_4$	Cos $9\omega_4$	Cos $10\omega_4$	Cos $11\omega_4$
Cos 7χ	- 1,263	+ 3,710	+ 2,051	-0,580	-0,440	-0,016	+0,043	+0,005	+0,001	-0,003	+0,001
Cos 8χ	+ 0,380	- 1,114	- 1,160	+0,165	+0,298	+0,028	-0,026	-0,009	+0,002	0,000	0,000
Cos 9χ	+ 0,074	+ 0,246	+ 0,560	0,000	-0,171	-0,036	+0,017	+0,008	-0,001	-0,001	+0,001
Cos 10χ	- 0,117	- 0,037	- 0,229	-0,042	+0,086	+0,030	-0,009	-0,005	-0,001	+0,001	-0,001
Cos 11χ	+ 0,072	+ 0,007	+ 0,077	+0,036	-0,036	-0,023	+0,003	+0,005	0,000	-0,001	0,000
Cos 12χ	- 0,040	- 0,004	- 0,020	-0,022	+0,014	+0,014	-0,001	-0,003	0,000	-0,001	0,000
Cos 13χ	+ 0,006	+ 0,006	+ 0,006	+0,009	-0,005	-0,006	-0,001	+0,001	+0,001	-0,001	0,000
Cos 14χ	- 0,006	- 0,002	- 0,001	-0,003	+0,001	+0,003	+0,001	-0,001	-0,001	-0,001	0,000
Cos 15χ	0,000	+ 0,003	- 0,001	+0,001	0,000	-0,001	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000	0,000
Cos 16χ	- 0,002	+ 0,001	0,000	-0,001	0,000	0,000	-0,000	-0,000	-0,000	-0,000	0,000

Sin χ	-253,930	+49,095	+12,128	-0,115	-0,335	-0,034	+0,007	0,000	0,000	0,000	0,000
Sin 2χ	+326,153	-58,939	-19,221	-0,199	+0,616	+0,077	-0,010	-0,004	+0,001	-0,001	+0,001
Sin 3χ	-188,697	+26,891	+18,312	+0,962	-0,733	-0,133	+0,016	+0,003	0,000	0,000	+0,002
Sin 4χ	+ 97,414	- 7,101	-13,898	-1,575	+0,678	+0,170	-0,008	-0,011	+0,001	0,000	0,000
Sin 5χ	- 37,692	- 1,887	+ 8,579	+1,746	-0,480	-0,199	+0,007	+0,007	+0,003	-0,002	0,000
Sin 6χ	+ 12,436	+ 3,496	- 4,401	-1,532	+0,270	+0,177	+0,012	-0,013	0,000	-0,001	+0,001
Sin 7χ	- 3,063	- 2,450	+ 1,879	+1,101	-0,088	-0,148	-0,013	+0,008	+0,003	-0,002	+0,001
Sin 8χ	+ 0,440	+ 1,230	- 0,628	-0,636	-0,006	+0,101	+0,019	-0,007	-0,002	-0,002	-0,002
Sin 9χ	+ 0,038	- 0,472	+ 0,141	+0,368	+0,046	-0,063	-0,017	+0,004	+0,002	+0,002	+0,002
Sin 10χ	- 0,053	+ 0,135	0,000	-0,172	-0,048	+0,036	+0,013	-0,001	-0,002	-0,002	-0,002
Sin 11χ	+ 0,012	- 0,019	- 0,019	+0,070	+0,034	-0,014	-0,010	0,000	+0,002	+0,002	+0,002
Sin 12χ	+ 0,004	- 0,008	+ 0,013	-0,025	-0,020	+0,004	+0,007	0,000	-0,001	-0,001	-0,001
Sin 13χ	- 0,008	+ 0,008	- 0,003	+0,007	+0,011	-0,001	-0,004	-0,001	0,000	0,000	0,000
Sin 14χ	+ 0,005	- 0,003	0,000	-0,001	-0,004	0,000	+0,002	+0,001	-0,001	-0,001	-0,001
Sin 15χ	- 0,001	+ 0,001	+ 0,002	-0,001	+0,002	+0,001	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001
Sin 16χ	0,000	- 0,001	- 0,001	+0,001	-0,001	-0,001	+0,001	0,000	0,000	0,000	0,000

E

Cos 0χ	+ 10,3670	-14,7331	- 2,7359	+0,2076	+0,0766	+0,0047	-0,0051	-0,0028	+0,0004	-0,0003	-0,0027
Cos χ	-101,552	+45,566	+ 9,135	-0,459	-0,310	-0,015	+0,005	-0,002	-0,001	+0,001	-0,003
Cos 2χ	+213,529	-66,310	-17,898	+0,309	+0,614	+0,062	-0,020	-0,001	-0,001	-0,001	+0,001
Cos 3χ	-198,303	+56,609	+22,009	+0,343	-0,885	-0,114	+0,015	+0,004	-0,004	+0,002	-0,001
Cos 4χ	+143,361	-32,357	-20,241	-1,153	+0,944	+0,186	-0,023	-0,007	-0,002	+0,001	0,000
Cos 5χ	- 74,664	+12,921	+14,902	+1,708	-0,811	-0,222	+0,010	+0,014	0,000	0,000	0,000
Cos 6χ	+ 33,409	- 2,515	- 9,201	-1,798	+0,571	+0,230	+0,001	-0,017	0,000	-0,001	+0,001
Cos 7χ	-11,938	- 0,866	+ 4,882	+1,499	-0,303	-0,218	-0,001	+0,008	+0,006	-0,004	+0,002
Cos 8χ	+ 3,544	+ 1,191	- 2,212	-1,082	+0,131	+0,157	+0,022	-0,014	-0,001	-0,001	+0,001
Cos 9χ	- 0,751	- 0,735	+ 0,866	+0,666	-0,017	-0,111	-0,021	+0,009	+0,002	-0,001	+0,001
Cos 10χ	+ 0,084	+ 0,306	- 0,282	-0,360	-0,030	+0,067	+0,020	-0,005	-0,004	+0,002	-0,001
Cos 11χ	+ 0,028	- 0,092	+ 0,072	+0,176	+0,037	-0,037	-0,016	+0,002	+0,002	-0,001	-0,001
Cos 12χ	- 0,021	+ 0,015	- 0,012	-0,076	-0,028	+0,017	+0,011	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001
Cos 13χ	+ 0,008	+ 0,006	0,000	+0,030	+0,017	-0,006	-0,006	0,000	+0,001	-0,001	-0,001
Cos 14χ	- 0,006	- 0,002	- 0,001	-0,010	-0,009	+0,002	+0,003	+0,001	-0,001	-0,001	-0,001
Cos 15χ	+ 0,002	+ 0,002	+ 0,001	+0,003	+0,004	0,000	-0,002	-0,001	+0,001	+0,001	+0,001
Cos 16χ	- 0,004	+ 0,002	- 0,001	-0,002	-0,001	-0,001	+0,001	0,000	0,000	0,000	0,000

Sin χ	-781,531	- 69,233	+ 6,800	+2,098	+0,043	-0,048	-0,005	+0,002	-0,001	-0,001	-0,001
Sin 2χ	+957,391	+106,947	- 9,403	-3,964	-0,161	+0,101	+0,013	0,000	0,000	-0,002	0,000
Sin 3χ	-480,080	- 96,631	+ 6,053	+4,939	+0,367	-0,144	-0,028	+0,002	0,000	+0,001	-0,001
Sin 4χ	+216,681	+ 71,972	- 1,830	-4,854	-0,592	+0,156	+0,045	0,000	-0,002	0,000	-0,001
Sin 5χ	- 73,310	- 44,209	- 1,295	+3,907	+0,728	-0,131	-0,058	-0,001	+0,002	+0,001	0,000
Sin 6χ	+ 20,513	+ 23,383	+ 2,542	-2,626	-0,739	+0,085	+0,061	+0,004	-0,003	0,000	0,000
Sin 7χ	- 4,679	- 10,734	- 2,413	+1,492	+0,633	-0,033	-0,058	-0,005	+0,002	+0,001	0,000
Sin 8χ	+ 0,756	+ 4,284	+ 1,711	-0,704	-0,472	-0,005	+0,044	+0,009	-0,002	-0,002	0,000
Sin 9χ	- 0,234	- 1,488	- 1,002	+0,264	+0,308	+0,028	-0,031	-0,009	+0,001	+0,003	-0,002
Sin 10χ	+ 0,160	+ 0,446	+ 0,501	-0,062	-0,182	-0,031	+0,019	+0,008	0,000	-0,001	-0,001
Sin 11χ	- 0,133	- 0,115	- 0,213	-0,009	+0,094	+0,029	-0,011	-0,006	+0,001	-0,001	-0,001
Sin 12χ	+ 0,071	+ 0,030	+ 0,081	+0,017	-0,042	-0,021	+0,005	+0,004	+0,001	+0,001	+0,001
Sin 13χ	- 0,040	- 0,008	- 0,025	-0,014	+0,017	+0,013	-0,001	-0,003	-0,001	-0,001	-0,001
Sin 14χ	+ 0,016	+ 0,006	+ 0,004	+0,009	-0,006	-0,008	-0,008	+0,002	+0,002	+0,002	+0,002
Sin 15χ	- 0,005	- 0,004	0,000	-0,003	+0,001	+0,005	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001
Sin 16χ	- 0,001	+ 0,003	- 0,001	+0,001	0,000	-0,002	-0,002	-0,001	-0,001	-0,001	-0,001

Sec $i \delta p$

	Cos ω_4	Cos $2\omega_4$	Cos $3\omega_4$	Cos $4\omega_4$	Cos $5\omega_4$	Cos $6\omega_4$	Cos $7\omega_4$	Cos $8\omega_4$
Cos 0χ	- 7",7440	+ 1",6884	+0",2236	-0",0475	-0",0116	0",0000	+0",0003	
Cos χ	+ 13,710	- 2,948	-0,438	+0,092	+0,025	-0,001	-0,001	
Cos 2χ	- 9,714	+ 1,983	+0,405	-0,078	-0,027	+0,001	+0,001	
Cos 3χ	+ 5,026	- 0,819	-0,351	+0,046	+0,028	+0,001	-0,001	
Cos 4χ	- 2,228	+ 0,185	+0,260	-0,014	-0,026	-0,002	+0,001	
Cos 5χ	+ 0,753	+ 0,072	-0,158	-0,008	+0,019	+0,003	-0,001	
Cos 6χ	- 0,187	- 0,106	+0,078	+0,017	-0,012	-0,003	+0,001	
Cos 7χ	+ 0,014	+ 0,071	-0,029	-0,015	+0,006	+0,003		
Cos 8χ	+ 0,015	- 0,034	+0,007	+0,011	-0,002	-0,002		
Cos 9χ	- 0,010	+ 0,013	+0,001	-0,006	0,000	+0,001		
Cos 10χ	+ 0,003	- 0,003	-0,002	+0,003	+0,001	-0,001		
Sin χ	+ 2,670	+ 0,062	-0,265	-0,049	+0,006	+0,003	0,000	
Sin 2χ	- 2,769	- 0,328	+0,346	+0,084	-0,008	-0,005	0,000	
Sin 3χ	+ 0,114	+ 0,767	-0,219	-0,098	+0,004	+0,006	+0,001	
Sin 4χ	+ 0,544	- 0,609	+0,082	+0,085	+0,002	-0,006	-0,001	
Sin 5χ	- 0,531	+ 0,342	+0,007	-0,060	-0,006	+0,005	+0,001	
Sin 6χ	+ 0,297	- 0,140	-0,036	+0,034	+0,008	-0,003	-0,001	
Sin 7χ	- 0,122	+ 0,038	+0,033	-0,015	-0,007	+0,002		
Sin 8χ	+ 0,037	- 0,002	-0,020	+0,005	+0,005	-0,001		
Sin 9χ	- 0,007	- 0,005	+0,009	0,000	-0,003			
Sin 10χ	- 0,001	+ 0,004	-0,004	-0,001	+0,001			

Sec $i \delta q$

Cos 0χ	- 90,0028	- 1,6668	+2,2237	+0,2658	-0,0358	-0,0118	+0,0001	+0",0005
Cos χ	+159,455	+ 3,064	-4,435	-0,564	+0,077	+0,026	+0,001	-0,001
Cos 2χ	-113,544	- 2,728	+4,198	+0,636	-0,083	-0,035	-0,001	+0,001
Cos 3χ	+ 60,706	+ 3,363	-3,370	-0,695	+0,075	+0,043	+0,003	-0,002
Cos 4χ	- 28,831	- 3,386	+2,298	+0,677	-0,047	-0,047	-0,005	+0,002
Cos 5χ	+ 11,273	+ 2,670	-1,299	-0,574	+0,013	+0,044	+0,006	-0,002
Cos 6χ	- 3,876	- 1,734	+0,596	+0,424	+0,014	-0,036	-0,007	+0,001
Cos 7χ	+ 1,097	+ 0,934	-0,208	-0,274	-0,030	+0,027	+0,007	
Cos 8χ	- 0,256	- 0,425	+0,037	+0,157	+0,031	-0,016	-0,007	
Cos 9χ	+ 0,047	+ 0,165	+0,014	-0,079	-0,026	+0,008	+0,005	
Cos 10χ	- 0,012	- 0,052	-0,019	+0,034	+0,018	-0,003	-0,004	
Cos 11χ	+ 0,006	+ 0,014	+0,012	-0,013	-0,011	+0,001	+0,002	
Cos 12χ	- 0,003	- 0,002	-0,005	+0,004	+0,006	0,000	-0,002	
Cos 13χ	+ 0,001	0,000	+0,001	-0,001	-0,003	0,000	+0,001	
Sin χ	+ 42,272	+11,790	+0,660	-0,362	-0,074	+0,004	+0,003	0,000
Sin 2χ	- 48,498	-16,849	-1,273	+0,575	+0,138	-0,005	-0,006	-0,001
Sin 3χ	+ 15,243	+13,895	+1,766	-0,569	-0,180	+0,002	+0,008	+0,001
Sin 4χ	- 2,806	- 8,976	-1,794	+0,424	+0,192	+0,004	-0,010	-0,002
Sin 5χ	+ 1,369	+ 4,664	+1,473	-0,240	-0,174	-0,011	+0,010	+0,002
Sin 6χ	- 1,369	- 2,024	-1,025	+0,091	+0,137	+0,016	-0,008	-0,002
Sin 7χ	+ 0,654	+ 0,730	+0,614	-0,004	-0,094	-0,018	+0,006	+0,002
Sin 8χ	+ 0,219	- 0,210	-0,321	-0,031	+0,057	+0,016	-0,003	-0,002
Sin 9χ	- 0,033	+ 0,044	+0,148	+0,034	-0,030	-0,013	+0,001	-0,001
Sin 10χ	- 0,011	- 0,005	-0,060	-0,025	+0,014	+0,009		
Sin 11χ	+ 0,015	0,000	+0,021	+0,015	-0,005	-0,006		
Sin 12χ	- 0,008	- 0,001	-0,006	-0,007	+0,001	+0,003		
Sin 13χ	+ 0,004	+ 0,001	+0,001	+0,003	0,000	-0,002		

Ueber die diesen Ausdrücken hinzuzufügenden Integrationsconstanten $Y_0, \Phi_0, \Xi_0, \delta p_0, \delta q_0$ ist hier nicht die rechte Stelle zu sprechen. Denn ihre vollständige Bestimmung wird

erst dann erfolgen, wenn die Störungen für die ganze Cometenbahn fertig berechnet sind, eine Arbeit, die in der nächsten Zeit absolvirt wird *).

Es erübrigt jetzt nur die Störungen der Coordinaten zu geben. Zur Berechnung von $n\delta z$, w und δs , d. h. der Störungen der mittleren Anomalie, des Logarithmus des Radius vectors und des Sinus der Breite dienen die Formeln

$$n\delta z = (n\delta z_0) + \int \left\{ Y \frac{ndt}{d\omega_4} \frac{r}{a} \cos f + \Psi \frac{ndt}{d\omega_4} \frac{r}{a} \sin f + \Xi \frac{ndt}{d\omega_4} \right\} d\omega_4$$

$$w = -Y \frac{1}{2} \frac{r}{a} \cos f - \Psi \frac{1}{2} \frac{r}{a} \sin f - \frac{2}{3} \Xi$$

$$\delta s = \delta q \sin f - \delta p \cos f$$

Die in der letzten Formel angewandten Ausdrücke für $\cos f$ und $\sin f$ sind:

$$\begin{aligned} \cos f &= 9,997516_n + 7,880814_n \cos \omega_4 & \sin f &= 8,939569_n + 8,938795 \cos \omega_4 \\ &+ 7,277380 \cos 2\omega_4 & &+ 6,27085 \cos 2\omega_4 \\ &+ 4,5985 \cos 3\omega_4 & &+ 5,4926_n \cos 3\omega_4 \end{aligned}$$

Dem Beispiele Asten's folgend, führe ich auch diejenigen Glieder an, welche Y_0 , Ψ_0 , Ξ_0 , δp_0 , δq_0 enthalten, und lasse ($n\delta z_0$) weg.

$$\begin{aligned} n\delta z &= + Y_0 \cdot 0,9583268 \cos \omega_4 \\ &+ Y_0 \cdot 0,0310670 \cos 2\omega_4 \\ &- Y_0 \cdot 0,0043435 \cos 3\omega_4 \\ &- Y_0 \cdot 0,0003135 \cos 4\omega_4 \\ &+ Y_0 \cdot 0,0000202 \cos 5\omega_4 \\ &+ Y_0 \cdot 0,0000026 \cos 6\omega_4 \\ &+ \Psi_0 \cdot 0,0812962 \cos \omega_4 \\ &- \Psi_0 \cdot 0,0180805 \cos 2\omega_4 \\ &- \Psi_0 \cdot 0,0012251 \cos 3\omega_4 \\ &+ \Psi_0 \cdot 0,0001109 \cos 4\omega_4 \\ &+ \Psi_0 \cdot 0,0000119 \cos 5\omega_4 \\ &- \Psi_0 \cdot 0,0000005 \cos 6\omega_4 \end{aligned}$$

*) In diesem Augenblick sind die Jupiterstörungen erster Ordnung ermittelt für 4 der 6 Theile, in welche Asten die Cometenbahn getheilt hat. Der zwischen $f = 190^\circ$ und $f = 207^\circ 38' 52''{,}78$ liegende Theil wird von anderer Hand bearbeitet und wird voraussichtlich in den nächsten Monaten fertig. Der dem letztgenannten sym-

metrische Theil ist noch nicht in Angriff genommen. Da der Betrag der Störungen in demselben verhältnissmässig klein und also die Berechnung derselben keineswegs schwierig ist, so steht zu hoffen, dass vor Jahresfrist die vollständige Berechnung der Jupiterstörungen erster Ordnung des Encke'schen Cometen vorgelegt werden kann.

O. BACKLUND,

$$\begin{aligned}
& - \mathbb{H}_0 . 0,5340651 \text{ Cos } \omega_4 \\
& - \mathbb{H}_0 . 0,0109837 \text{ Cos } 2\omega_4 \\
& + \mathbb{H}_0 . 0,0016134 \text{ Cos } 3\omega_4 \\
& + \mathbb{H}_0 . 0,0000828 \text{ Cos } 4\omega_4 \\
& - \mathbb{H}_0 . 0,0000060 \text{ Cos } 5\omega_4 \\
& - \mathbb{H}_0 . 0,0000006 \text{ Cos } 6\omega_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 10''6206 \text{ Cos } \omega_4 \\
& - 0,5852 \text{ Cos } 2\omega_4 \\
& - 0,5479 \text{ Cos } 3\omega_4 \\
& - 0,0186 \text{ Cos } 4\omega_4 \\
& + 0,0016 \text{ Cos } 5\omega_4 \\
& - 0,0006 \text{ Cos } 6\omega_4 \\
& - 0,0002 \text{ Cos } 7\omega_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 22''142 \text{ Cos } \chi . \text{ Cos } \omega_4 \\
& + 4,746 \text{ Cos } \chi . \text{ Cos } 2\omega_4 \\
& + 0,619 \text{ Cos } \chi . \text{ Cos } 3\omega_4 \\
& - 0,127 \text{ Cos } \chi . \text{ Cos } 4\omega_4 \\
& - 0,004 \text{ Cos } \chi . \text{ Cos } 5\omega_4 \\
& + 0,005 \text{ Cos } \chi . \text{ Cos } 6\omega_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 1''647 \text{ Sin } \chi . \text{ Cos } \omega_4 \\
& + 32,512 \text{ Sin } \chi . \text{ Cos } 2\omega_4 \\
& + 3,159 \text{ Sin } \chi . \text{ Cos } 3\omega_4 \\
& - 0,297 \text{ Sin } \chi . \text{ Cos } 4\omega_4 \\
& - 0,073 \text{ Sin } \chi . \text{ Cos } 5\omega_4 \\
& - 0,002 \text{ Sin } \chi . \text{ Cos } 6\omega_4 \\
& + 0,001 \text{ Sin } \chi . \text{ Cos } 7\omega_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 21,140 \text{ Cos } 2\chi . \text{ Cos } \omega_4 \\
& - 9,742 \text{ Cos } 2\chi . \text{ Cos } 2\omega_4 \\
& + 0,211 \text{ Cos } 2\chi . \text{ Cos } 3\omega_4 \\
& + 0,421 \text{ Cos } 2\chi . \text{ Cos } 4\omega_4 \\
& + 0,009 \text{ Cos } 2\chi . \text{ Cos } 5\omega_4 \\
& - 0,012 \text{ Cos } 2\chi . \text{ Cos } 6\omega_4 \\
& - 0,001 \text{ Cos } 2\chi . \text{ Cos } 7\omega_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4,530 \text{ Sin } 2\chi . \text{ Cos } \omega_4 \\
& - 39,904 \text{ Sin } 2\chi . \text{ Cos } 2\omega_4 \\
& - 4,501 \text{ Sin } 2\chi . \text{ Cos } 3\omega_4 \\
& + 0,435 \text{ Sin } 2\chi . \text{ Cos } 4\omega_4 \\
& + 0,122 \text{ Sin } 2\chi . \text{ Cos } 5\omega_4 \\
& + 0,003 \text{ Sin } 2\chi . \text{ Cos } 6\omega_4 \\
& - 0,002 \text{ Sin } 2\chi . \text{ Cos } 7\omega_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 12,654 \text{ Cos } 3\chi . \text{ Cos } \omega_4 \\
& + 9,095 \text{ Cos } 3\chi . \text{ Cos } 2\omega_4 \\
& - 0,726 \text{ Cos } 3\chi . \text{ Cos } 3\omega_4 \\
& - 0,555 \text{ Cos } 3\chi . \text{ Cos } 4\omega_4 \\
& - 0,021 \text{ Cos } 3\chi . \text{ Cos } 5\omega_4 \\
& + 0,017 \text{ Cos } 3\chi . \text{ Cos } 6\omega_4 \\
& + 0,002 \text{ Cos } 3\chi . \text{ Cos } 7\omega_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 7,042 \text{ Sin } 3\chi . \text{ Cos } \omega_4 \\
& + 19,820 \text{ Sin } 3\chi . \text{ Cos } 2\omega_4 \\
& + 3,500 \text{ Sin } 3\chi . \text{ Cos } 3\omega_4 \\
& - 0,179 \text{ Sin } 3\chi . \text{ Cos } 4\omega_4 \\
& - 0,121 \text{ Sin } 3\chi . \text{ Cos } 5\omega_4 \\
& - 0,008 \text{ Sin } 3\chi . \text{ Cos } 6\omega_4 \\
& + 0,003 \text{ Sin } 3\chi . \text{ Cos } 7\omega_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 6,580 \text{ Cos } 4\chi . \text{ Cos } \omega_4 \\
& - 6,688 \text{ Cos } 4\chi . \text{ Cos } 2\omega_4 \\
& + 0,435 \text{ Cos } 4\chi . \text{ Cos } 3\omega_4 \\
& + 0,505 \text{ Cos } 4\chi . \text{ Cos } 4\omega_4 \\
& + 0,036 \text{ Cos } 4\chi . \text{ Cos } 5\omega_4 \\
& - 0,017 \text{ Cos } 4\chi . \text{ Cos } 6\omega_4 \\
& - 0,003 \text{ Cos } 4\chi . \text{ Cos } 7\omega_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 6,185 \text{ Sin } 4\chi . \text{ Cos } \omega_4 \\
& - 8,801 \text{ Sin } 4\chi . \text{ Cos } 2\omega_4 \\
& - 2,433 \text{ Sin } 4\chi . \text{ Cos } 3\omega_4 \\
& + 0,016 \text{ Sin } 4\chi . \text{ Cos } 4\omega_4 \\
& + 0,106 \text{ Sin } 4\chi . \text{ Cos } 5\omega_4 \\
& + 0,013 \text{ Sin } 4\chi . \text{ Cos } 6\omega_4 \\
& - 0,002 \text{ Sin } 4\chi . \text{ Cos } 7\omega_4
\end{aligned}$$

+ 2,588 Cos 5 χ . Cos ω_4	— 4,078 Sin 5 χ . Cos ω_4
+ 3,615 Cos 5 χ . Cos 2 ω_4	+ 2,839 Sin 5 χ . Cos 2 ω_4
— 0,132 Cos 5 χ . Cos 3 ω_4	+ 1,442 Sin 5 χ . Cos 3 ω_4
— 0,360 Cos 5 χ . Cos 4 ω_4	+ 0,072 Sin 5 χ . Cos 4 ω_4
— 0,044 Cos 5 χ . Cos 5 ω_4	— 0,077 Sin 5 χ . Cos 5 ω_4
+ 0,013 Cos 5 χ . Cos 6 ω_4	— 0,014 Sin 5 χ . Cos 6 ω_4
+ 0,004 Cos 5 χ . Cos 7 ω_4	+ 0,002 Sin 5 χ . Cos 7 ω_4
— 0,772 Cos 6 χ . Cos ω_4	+ 2,215 Sin 6 χ . Cos ω_4
— 1,701 Cos 6 χ . Cos 2 ω_4	— 0,676 Sin 6 χ . Cos 2 ω_4
— 0,040 Cos 6 χ . Cos 3 ω_4	— 0,757 Sin 6 χ . Cos 3 ω_4
+ 0,212 Cos 6 χ . Cos 4 ω_4	— 0,091 Sin 6 χ . Cos 4 ω_4
+ 0,042 Cos 6 χ . Cos 5 ω_4	+ 0,048 Sin 6 χ . Cos 4 ω_4
— 0,008 Cos 6 χ . Cos 6 ω_4	+ 0,014 Sin 6 χ . Cos 6 ω_4
— 0,004 Cos 6 χ . Cos 7 ω_4	— 0,001 Sin 6 χ . Cos 7 ω_4
+ 0,089 Cos 7 χ . Cos ω_4	— 1,008 Sin 7 χ . Cos ω_4
+ 0,663 Cos 7 χ . Cos 2 ω_4	+ 0,072 Sin 7 χ . Cos 2 ω_4
+ 0,092 Cos 7 χ . Cos 3 ω_4	+ 0,351 Sin 7 χ . Cos 3 ω_4
— 0,111 Cos 7 χ . Cos 4 ω_4	+ 0,076 Sin 7 χ . Cos 4 ω_4
— 0,034 Cos 7 χ . Cos 5 ω_4	— 0,026 Sin 7 χ . Cos 5 ω_4
+ 0,004 Cos 7 χ . Cos 6 ω_4	— 0,011 Sin 7 χ . Cos 6 ω_4
+ 0,003 Cos 7 χ . Cos 7 ω_4	
+ 0,057 Cos 8 χ . Cos ω_4	+ 0,397 Sin 8 χ . Cos ω_4
— 0,224 Cos 8 χ . Cos 2 ω_4	+ 0,047 Sin 8 χ . Cos 2 ω_4
— 0,072 Cos 8 χ . Cos 3 ω_4	— 0,143 Sin 8 χ . Cos 3 ω_4
+ 0,049 Cos 8 χ . Cos 4 ω_4	— 0,053 Sin 8 χ . Cos 4 ω_4
+ 0,023 Cos 8 χ . Cos 5 ω_4	+ 0,011 Sin 8 χ . Cos 5 ω_4
— 0,001 Cos 8 χ . Cos 6 ω_4	+ 0,009 Sin 8 χ . Cos 6 ω_4
— 0,002 Cos 8 χ . Cos 7 ω_4	
— 0,048 Cos 9 χ . Cos ω_4	— 0,130 Sin 9 χ . Cos ω_4
+ 0,062 Cos 9 χ . Cos 2 ω_4	— 0,032 Sin 9 χ . Cos 2 ω_4
+ 0,041 Cos 9 χ . Cos 3 ω_4	+ 0,050 Sin 9 χ . Cos 3 ω_4
— 0,018 Cos 9 χ . Cos 4 ω_4	+ 0,029 Sin 9 χ . Cos 4 ω_4
— 0,014 Cos 9 χ . Cos 5 ω_4	— 0,003 Sin 9 χ . Cos 5 ω_4
— 0,001 Cos 9 χ . Cos 6 ω_4	— 0,005 Sin 9 χ . Cos 6 ω_4
+ 0,002 Cos 9 χ . Cos 7 ω_4	
+ 0,021 Cos 10 χ . Cos ω_4	+ 0,037 Sin 10 χ . Cos ω_4
— 0,014 Cos 10 χ . Cos 2 ω_4	+ 0,014 Sin 10 χ . Cos 2 ω_4
— 0,019 Cos 10 χ . Cos 3 ω_4	— 0,015 Sin 10 χ . Cos 3 ω_4
+ 0,005 Cos 10 χ . Cos 4 ω_4	— 0,015 Sin 10 χ . Cos 4 ω_4
+ 0,006 Cos 10 χ . Cos 5 ω_4	0,000 Sin 10 χ . Cos 5 ω_4
+ 0,001 Cos 10 χ . Cos 6 ω_4	+ 0,003 Sin 10 χ . Cos 6 ω_4
— 0,001 Cos 10 χ . Cos 7 ω_4	+ 0,001 Sin 10 χ . Cos 7 ω_4

— 0,005 Cos 11 χ . Cos ω_4	— 0,008 Sin 11 χ . Cos ω_4
+ 0,001 Cos 11 χ . Cos 2 ω_4	— 0,003 Sin 11 χ . Cos 2 ω_4
+ 0,007 Cos 11 χ . Cos 3 ω_4	— 0,001 Sin 11 χ . Cos 3 ω_4
0,000 Cos 11 χ . Cos 4 ω_4	+ 0,006 Sin 11 χ . Cos 4 ω_4
— 0,004 Cos 11 χ . Cos 5 ω_4	+ 0,003 Sin 11 χ . Cos 5 ω_4
— 0,001 Cos 11 χ . Cos 6 ω_4	— 0,002 Sin 11 χ . Cos 6 ω_4
+ 0,001 Cos 11 χ . Cos 7 ω_4	— 0,001 Sin 11 χ . Cos 7 ω_4
— 0,001 Cos 12 χ . Cos ω_4	+ 0,002 Sin 12 χ . Cos ω_4
0,000 Cos 12 χ . Cos 2 ω_4	+ 0,001 Sin 12 χ . Cos 2 ω_4
— 0,001 Cos 12 χ . Cos 3 ω_4	+ 0,001 Sin 12 χ . Cos 3 ω_4
+ 0,001 Cos 12 χ . Cos 4 ω_4	— 0,002 Sin 12 χ . Cos 4 ω_4
+ 0,001 Cos 12 χ . Cos 5 ω_4	0,000 Sin 12 χ . Cos 5 ω_4
	+ 0,001 Sin 12 χ . Cos 6 ω_4

$$w = + Y_0 . 0,8912927$$

$$+ Y_0 . 0,0429669$$

$$- Y_0 . 0,0099389$$

$$- Y_0 . 0,0004434$$

$$+ Y_0 . 0,0000439$$

$$+ Y_0 . 0,0000033$$

$$+ \Phi_0 . 0,0764026$$

$$- \Phi_0 . 0,0743123$$

$$- \Phi_0 . 0,0024655$$

$$+ \Phi_0 . 0,0003558$$

$$+ \Phi_0 . 0,0000208$$

$$- \Phi_0 . 0,0000015$$

$$- \Xi_0 . 0,6666667$$

$$+ 11,5560$$

$$- 0,4331 \text{ Cos } \omega_4$$

$$+ 5,7032 \text{ Cos } 2\omega_4$$

$$+ 0,4122 \text{ Cos } 3\omega_4$$

$$- 0,0222 \text{ Cos } 4\omega_4$$

$$- 0,0052 \text{ Cos } 5\omega_4$$

$$- 0,0002 \text{ Cos } 6\omega_4$$

— 22,066 Cos χ	— 2,225 Sin χ
+ 1,708 Cos χ . Cos ω_4	+ 9,246 Sin χ . Cos ω_4
— 10,897 Cos χ . Cos 2 ω_4	— 0,923 Sin χ . Cos 2 ω_4
— 0,646 Cos χ . Cos 3 ω_4	+ 0,513 Sin χ . Cos 3 ω_4
+ 0,041 Cos χ . Cos 4 ω_4	+ 0,072 Sin χ . Cos 4 ω_4
+ 0,007 Cos χ . Cos 5 ω_4	— 0,006 Sin χ . Cos 5 ω_4

+ 17,976 Cos 2 χ	+ 2,038 Sin 2 χ
— 2,934 Cos 2 χ . Cos ω_4	— 11,680 Sin 2 χ . Cos ω_4
+ 8,894 Cos 2 χ . Cos 2 ω_4	+ 0,753 Sin 2 χ . Cos 2 ω_4
+ 0,337 Cos 2 χ . Cos 3 ω_4	— 1,138 Sin 2 χ . Cos 3 ω_4
— 0,022 Cos 2 χ . Cos 4 ω_4	— 0,089 Sin 2 χ . Cos 4 ω_4
	+ 0,009 Sin 2 χ . Cos 5 ω_4
— 8,533 Cos 3 χ	+ 0,152 Sin 3 χ
+ 2,935 Cos 3 χ . Cos ω_4	+ 6,520 Sin 3 χ . Cos ω_4
— 4,239 Cos 3 χ . Cos 2 ω_4	+ 0,290 Sin 3 χ . Cos 2 ω_4
— 0,160 Cos 3 χ . Cos 3 ω_4	+ 0,378 Sin 3 χ . Cos 3 ω_4
+ 0,004 Cos 3 χ . Cos 4 ω_4	+ 0,039 Sin 3 χ . Cos 4 ω_4
— 0,001 Cos 3 χ . Cos 5 ω_4	+ 0,002 Sin 3 χ . Cos 5 ω_4
+ 3,915 Cos 4 χ	— 0,670 Sin 4 χ
— 2,262 Cos 4 χ . Cos ω_4	— 3,227 Sin 4 χ . Cos ω_4
+ 1,956 Cos 4 χ . Cos 2 ω_4	— 0,495 Sin 4 χ . Cos 2 ω_4
+ 0,096 Cos 4 χ . Cos 3 ω_4	— 0,091 Sin 4 χ . Cos 3 ω_4
— 0,004 Cos 4 χ . Cos 4 ω_4	— 0,008 Sin 4 χ . Cos 4 ω_4
— 1,417 Cos 5 χ	+ 0,496 Sin 5 χ
+ 1,321 Cos 5 χ . Cos ω_4	+ 1,241 Sin 5 χ . Cos ω_4
— 0,709 Cos 5 χ . Cos 2 ω_4	+ 0,361 Sin 5 χ . Cos 2 ω_4
— 0,089 Cos 5 χ . Cos 3 ω_4	— 0,013 Sin 5 χ . Cos 3 ω_4
+ 0,002 Cos 5 χ . Cos 4 ω_4	— 0,011 Sin 5 χ . Cos 4 ω_4
— 0,002 Cos 5 χ . Cos 5 ω_4	
+ 0,462 Cos 6 χ	— 0,258 Sin 6 χ
— 0,638 Cos 6 χ . Cos ω_4	— 0,403 Sin 6 χ . Cos ω_4
+ 0,159 Cos 6 χ . Cos 2 ω_4	— 0,198 Sin 6 χ . Cos 2 ω_4
+ 0,099 Cos 6 χ . Cos 3 ω_4	+ 0,013 Sin 6 χ . Cos 3 ω_4
0,000 Cos 6 χ . Cos 4 ω_4	+ 0,012 Sin 6 χ . Cos 4 ω_4
— 0,003 Cos 6 χ . Cos 5 ω_4	+ 0,091 Sin 6 χ . Cos 5 ω_4
— 0,136 Cos 7 χ	+ 0,090 Sin 7 χ
+ 0,287 Cos 7 χ . Cos ω_4	+ 0,101 Sin 7 χ . Cos ω_4
— 0,058 Cos 7 χ . Cos 2 ω_4	+ 0,086 Sin 7 χ . Cos 2 ω_4
— 0,041 Cos 7 χ . Cos 3 ω_4	— 0,004 Sin 7 χ . Cos 3 ω_4
— 0,001 Cos 7 χ . Cos 4 ω_4	— 0,012 Sin 7 χ . Cos 4 ω_4
+ 0,002 Cos 7 χ . Cos 5 ω_4	— 0,001 Sin 7 χ . Cos 4 ω_4
+ 0,036 Cos 8 χ	— 0,022 Sin 8 χ
— 0,107 Cos 8 χ . Cos ω_4	— 0,015 Sin 8 χ . Cos ω_4
+ 0,010 Cos 8 χ . Cos 2 ω_4	— 0,031 Sin 8 χ . Cos 2 ω_4
+ 0,021 Cos 8 χ . Cos 3 ω_4	0,000 Sin 8 χ . Cos 3 ω_4
+ 0,003 Cos 8 χ . Cos 4 ω_4	+ 0,006 Sin 8 χ . Cos 4 ω_4
— 0,002 Cos 8 χ . Cos 5 ω_4	+ 0,001 Sin 8 χ . Cos 5 ω_4

$-0,012 \text{ Cos } 9\chi$	$-0,001 \text{ Sin } 9\chi$
$+0,034 \text{ Cos } 9\chi \cdot \text{Cos } \omega_4$	$-0,002 \text{ Sin } 9\chi \cdot \text{Cos } \omega_4$
$0,000 \text{ Cos } 9\chi \cdot \text{Cos } 2\omega_4$	$+0,010 \text{ Sin } 9\chi \cdot \text{Cos } 2\omega_4$
$-0,009 \text{ Cos } 9\chi \cdot \text{Cos } 3\omega_4$	$+0,004 \text{ Sin } 9\chi \cdot \text{Cos } 3\omega_4$
$-0,003 \text{ Cos } 9\chi \cdot \text{Cos } 4\omega_4$	$-0,003 \text{ Sin } 9\chi \cdot \text{Cos } 4\omega_4$
$+0,005 \text{ Cos } 10\chi$	$+0,003 \text{ Sin } 10\chi$
$-0,012 \text{ Cos } 10\chi \cdot \text{Cos } \omega_4$	$+0,003 \text{ Sin } 10\chi \cdot \text{Cos } \omega_4$
$-0,001 \text{ Cos } 10\chi \cdot \text{Cos } 2\omega_4$	$-0,001 \text{ Sin } 10\chi \cdot \text{Cos } 2\omega_4$
$+0,004 \text{ Cos } 10\chi \cdot \text{Cos } 3\omega_4$	$-0,004 \text{ Sin } 10\chi \cdot \text{Cos } 3\omega_4$
$+0,002 \text{ Cos } 10\chi \cdot \text{Cos } 4\omega_4$	$+0,001 \text{ Sin } 10\chi \cdot \text{Cos } 4\omega_4$
$-0,002 \text{ Cos } 11\chi$	$-0,002 \text{ Cos } 11\chi$
$+0,003 \text{ Cos } 11\chi \cdot \text{Cos } \omega_4$	$0,000 \text{ Cos } 11\chi \cdot \text{Cos } \omega_4$
$+0,001 \text{ Cos } 11\chi \cdot \text{Cos } 2\omega_4$	$0,000 \text{ Cos } 11\chi \cdot \text{Cos } 2\omega_4$
$-0,003 \text{ Cos } 11\chi \cdot \text{Cos } 3\omega_4$	$+0,001 \text{ Cos } 11\chi \cdot \text{Cos } 3\omega_4$
$-0,001 \text{ Cos } 11\chi \cdot \text{Cos } 4\omega_4$	$-0,001 \text{ Cos } 11\chi \cdot \text{Cos } 4\omega_4$
$+0,001 \text{ Cos } 12\chi$	$+0,001 \text{ Cos } 12\chi$
$+0,002 \text{ Cos } 12\chi \cdot \text{Cos } \omega_4$	$-0,001 \text{ Cos } 12\chi \cdot \text{Cos } \omega_4$
$-0,001 \text{ Cos } 12\chi \cdot \text{Cos } 2\omega_4$	$+0,001 \text{ Cos } 12\chi \cdot \text{Cos } 2\omega_4$
$0,000 \text{ Cos } 12\chi \cdot \text{Cos } 3\omega_4$	$0,000 \text{ Cos } 12\chi \cdot \text{Cos } 3\omega_4$
$+0,001 \text{ Cos } 12\chi \cdot \text{Cos } 4\omega_4$	$+0,002 \text{ Cos } 12\chi \cdot \text{Cos } 4\omega_4$

$$\delta s = -\delta q_0 \cdot 0,084730$$

$$+ \delta q_0 \cdot 0,084578 \text{ Cos } \omega_4$$

$$+ \delta q_0 \cdot 0,000182 \text{ Cos } 2\omega_4$$

$$- \delta q_0 \cdot 0,000030 \text{ Cos } 3\omega_4$$

$$+ \delta p_0 \cdot 0,968255$$

$$+ \delta p_0 \cdot 0,007401 \text{ Cos } \omega_4$$

$$- \delta p_0 \cdot 0,001844 \text{ Cos } 2\omega_4$$

$$- \delta p_0 \cdot 0,000003 \text{ Cos } 3\omega_4$$

$$-3,8367$$

$$+0,0625 \text{ Cos } \omega_4$$

$$-1,9627 \text{ Cos } 2\omega_4$$

$$-0,0260 \text{ Cos } 3\omega_4$$

$$+0,0244 \text{ Cos } 4\omega_4$$

$$+0,0023 \text{ Cos } 5\omega_4$$

$$-0,0005 \text{ Cos } 6\omega_4$$

$+6,797 \text{ Cos } \chi$	$+1,798 \text{ Sin } \chi$
$-0,115 \text{ Cos } \chi \cdot \text{Cos } \omega_4$	$-0,497 \text{ Sin } \chi \cdot \text{Cos } \omega_4$
$+3,487 \text{ Cos } \chi \cdot \text{Cos } 2\omega_4$	$+0,884 \text{ Sin } \chi \cdot \text{Cos } 2\omega_4$

+0,048 Cos χ . Cos $3\omega_4$	+0,173 Sin χ . Cos $3\omega_4$
-0,049 Cos χ . Cos $4\omega_4$	+0,008 Sin χ . Cos $4\omega_4$
-0,006 Cos χ . Cos $5\omega_4$	-0,003 Sin χ . Cos $5\omega_4$
-4,840 Cos 2χ	-2,063 Sin 2χ
+0,106 Cos 2χ . Cos ω_4	+0,713 Sin 2χ . Cos ω_4
-2,506 Cos 2χ . Cos $2\omega_4$	-1,003 Sin 2χ . Cos $2\omega_4$
-0,045 Cos 2χ . Cos $3\omega_4$	-0,248 Sin 2χ . Cos $3\omega_4$
+0,046 Cos 2χ . Cos $4\omega_4$	-0,016 Sin 2χ . Cos $4\omega_4$
+0,006 Cos 2χ . Cos $5\omega_4$	+0,004 Sin 2χ . Cos $5\omega_4$
+2,587 Cos 3χ	+0,644 Sin 3χ
-0,139 Cos 3χ . Cos ω_4	-0,590 Sin 3χ . Cos ω_4
+1,362 Cos 3χ . Cos $2\omega_4$	+0,282 Sin 3χ . Cos $2\omega_4$
+0,055 Cos 3χ . Cos $3\omega_4$	+0,207 Sin 3χ . Cos $3\omega_4$
-0,037 Cos 3χ . Cos $4\omega_4$	+0,020 Sin 3χ . Cos $4\omega_4$
-0,006 Cos 3χ . Cos $5\omega_4$	-0,005 Sin 3χ . Cos $5\omega_4$
-1,227 Cos 4χ	-0,117 Sin 4χ
+0,142 Cos 4χ . Cos ω_4	+0,382 Sin 4χ . Cos ω_4
-0,663 Cos 4χ . Cos $2\omega_4$	-0,022 Sin 4χ . Cos $2\omega_4$
-0,058 Cos 4χ . Cos $3\omega_4$	-0,133 Sin 4χ . Cos $3\omega_4$
+0,026 Cos 4χ . Cos $4\omega_4$	-0,022 Sin 4χ . Cos $4\omega_4$
+0,006 Cos 4χ . Cos $5\omega_4$	+0,004 Sin 4χ . Cos $5\omega_4$
+0,480 Cos 5χ	-0,060 Sin 5χ
-0,113 Cos 5χ . Cos ω_4	-0,200 Sin 5χ . Cos ω_4
+0,268 Cos 5χ . Cos $2\omega_4$	-0,062 Sin 5χ . Cos $2\omega_4$
+0,046 Cos 5χ . Cos $3\omega_4$	+0,070 Sin 5χ . Cos $3\omega_4$
-0,014 Cos 5χ . Cos $4\omega_4$	+0,017 Sin 5χ . Cos $4\omega_4$
-0,005 Cos 5χ . Cos $5\omega_4$	-0,001 Sin 5χ . Cos $5\omega_4$
-0,165 Cos 6χ	+0,059 Cos 6χ
+0,074 Cos 6χ . Cos ω_4	+0,085 Cos 6χ . Cos ω_4
-0,098 Cos 6χ . Cos $2\omega_4$	+0,051 Cos 6χ . Cos $2\omega_4$
-0,029 Cos 6χ . Cos $3\omega_4$	-0,031 Cos 6χ . Cos $3\omega_4$
+0,006 Cos 6χ . Cos $4\omega_4$	-0,012 Cos 6χ . Cos $4\omega_4$
+0,004 Cos 6χ . Cos $5\omega_4$	+0,001 Cos 6χ . Cos $5\omega_4$
+0,046 Cos 7χ	-0,027 Sin 7χ
-0,039 Cos 7χ . Cos ω_4	-0,032 Sin 7χ . Cos ω_4
+0,027 Cos 7χ . Cos $2\omega_4$	-0,027 Sin 7χ . Cos $2\omega_4$
+0,017 Cos 7χ . Cos $3\omega_4$	+0,011 Sin 7χ . Cos $3\omega_4$
-0,001 Cos 7χ . Cos $4\omega_4$	+0,006 Sin 7χ . Cos $4\omega_4$
-0,002 Cos 7χ . Cos $5\omega_4$	

$-0,011 \cos 8\chi$	$+0,009 \sin 8\chi$
$+0,019 \cos 8\chi \cdot \cos \omega_4$	$+0,008 \sin 8\chi \cdot \cos \omega_4$
$-0,006 \cos 8\chi \cdot \cos 2\omega_4$	$+0,012 \sin 8\chi \cdot \cos 2\omega_4$
$-0,007 \cos 8\chi \cdot \cos 3\omega_4$	$-0,002 \sin 8\chi \cdot \cos 3\omega_4$
$+0,001 \cos 8\chi \cdot \cos 4\omega_4$	$-0,003 \sin 8\chi \cdot \cos 4\omega_4$
$+0,001 \cos 8\chi \cdot \cos 5\omega_4$	
$+0,002 \cos 9\chi$	$-0,001 \sin 9\chi$
$-0,007 \cos 9\chi \cdot \cos \omega_4$	$-0,002 \sin 9\chi \cdot \cos \omega_4$
$+0,001 \cos 9\chi \cdot \cos 2\omega_4$	$-0,004 \sin 9\chi \cdot \cos 2\omega_4$
$+0,004 \cos 9\chi \cdot \cos 3\omega_4$	$0,000 \sin 9\chi \cdot \cos 3\omega_4$
	$+0,002 \sin 9\chi \cdot \cos 4\omega_4$
$-0,001 \cos 10\chi$	$0,000 \sin 10\chi$
$+0,002 \cos 10\chi \cdot \cos \omega_4$	$0,000 \sin 10\chi \cdot \cos \omega_4$
$0,000 \cos 10\chi \cdot \cos 2\omega_4$	$+0,001 \sin 10\chi \cdot \cos 2\omega_4$
$-0,001 \cos 10\chi \cdot \cos 3\omega_4$	$0,000 \sin 10\chi \cdot \cos 3\omega_4$
	$-0,001 \sin 10\chi \cdot \cos 4\omega_4$

Wenn wir nun einen Rückblick auf unsere Rechnungen werfen, so geschieht dies hauptsächlich, um noch ein Paar Bemerkungen über die bei der Entwicklung von $(\Delta)^{-3}$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a} \cos f'$ und $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a} \sin f'$ angewandten Argumente hinzuzufügen.

Dass es am zweckmässigsten ist, die Differential-Quotienten $\frac{dY}{d\omega}$, $\frac{d\Phi}{d\omega}$ etc. durch trigonometrische Reihen nach x , oder — was auf dasselbe herauskommt — nach χ auszudrücken, geht aus mehreren Umständen hervor. Dies ist unumgänglich nothwendig, wenn die verschiedenen Specialwerthe der Grössen $(\Delta)^{-3}$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a} \cos f'$ und $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a} \sin f'$ nach verschiedenen Argumenten entwickelt sind, denn bei der Anwendung der mechanischen Quadratur müssen die Specialwerthe, auf welche diese angewandt werden soll, selbstverständlich durch dasselbe Argument ausgedrückt sein. Wenn, wie in dieser Abhandlung geschehen ist, die mechanische Quadratur erst auf die Grössen $\frac{dY}{d\omega}$, $\frac{d\Phi}{d\omega}$ etc. angewandt wird, so wird es fast nothwendig, schon die $\frac{dY}{d\omega}$ etc. als trigonometrische Reihen nach x ausgedrückt zu haben, weil die Differential-Quotienten $\frac{dY_2}{d\omega}$ etc. sich am bequemsten nach diesem Argument entwickeln lassen. Man könnte wohl die Frage stellen, ob es nicht zweckmässiger wäre, eins der beiden Argumente $\frac{k'}{\Delta}$ oder ψ durchgängig anzuwenden, wenn $(\Delta)^{-3}$ sich nach demselben für die ganze Cometenbahn entwickeln liesse, wobei man sich ausserdem die immerhin zeitraubende Arbeit des Ueberganges zum Argument x ersparen könnte. Ohne das delicate Summationsproblem, das bei der Bestimmung der Integrationsconstanten auftritt, zu berühren, wird man diese Frage befriedigend beantworten können.

Denn angenommen, dass die Grössen $\frac{dY_1}{d\omega}$ in allen Theilen der Bahn auf die Form

$$f_1\left(\frac{k'}{\Delta}\right) + \frac{\sin \xi}{\Delta} f_2\left(\frac{k'}{\Delta}\right)$$

gebracht werden könnten, so würden die $\frac{dY}{d\omega}$ etc. das Aussehen

$$f_1\left(\frac{k'}{\Delta}\right) + \varphi_1(\Delta) + \frac{\sin \xi}{\Delta} \left\{ f_2\left(\frac{k'}{\Delta}\right) + \varphi_2(\Delta) \right\}$$

erhalten, da die $\frac{dY_2}{d\omega}$ etc. von der Form

$$\varphi_1(\Delta) + \frac{\sin \xi}{\Delta} \varphi_2(\Delta)$$

sind. $f_1\left(\frac{k'}{\Delta}\right)$, $f_2\left(\frac{k'}{\Delta}\right)$, $\varphi_1(\Delta)$, $\varphi_2(\Delta)$ haben hier die frühere Bedeutung. Es ist aber aus dem Vorhergehenden nicht schwer zu ersehen, dass die Zahl der Glieder, die in diesem Ausdrucke für die $\frac{dY}{d\omega}$ etc. berücksichtigt werden müssen, sogar grösser ist als in

$$\frac{dY}{d\omega} = \sum \left. \begin{matrix} \alpha_i \text{ Cos} \\ \beta_i \text{ Sin} \end{matrix} \right\} 2ix$$

Die Coefficienten im letzteren Ausdrucke sind ausserdem wesentlich kleiner und ihr Gang ist viel regelmässiger. Der Umstand, dass die $\frac{dY}{d\omega}$ etc. sich nicht wesentlich durch positive Potenzen von $\frac{k'}{\Delta}$ ausdrücken lassen, enthält also eine bestimmte Antwort auf die angeregte Frage bezüglich dieses Argumentes.

Stellt man die Grössen $\frac{dY_1}{d\omega}$ etc. unter der Form

$$\sqrt{1 - k_1} \sin \psi \sum \left. \begin{matrix} a_i \text{ Cos} \\ b_i \text{ Sin} \end{matrix} \right\} i\psi$$

dar, so würde man doch nicht den $\frac{dY_2}{d\omega}$ etc. bequem dieselbe Form geben können. Für die letzteren hätte man den Ausdruck

$$\sum \left. \begin{matrix} c_i \text{ Cos} \\ d_i \text{ Sin} \end{matrix} \right\} i\psi,$$

und damit

$$\frac{dY}{d\omega} = \sqrt{1-k_1} \sin \psi \sum \left\{ \frac{a_i \cos}{b_i \sin} \right\} i\psi + \sum \left\{ \frac{c_i \cos}{d_i \sin} \right\} i\psi,$$

eine Form, deren Unzweckmässigkeit sofort einleuchtet. Könnte man aber die Form

$$\frac{dY}{d\omega} = \sum \left\{ \frac{\gamma_i \cos}{\delta_i \sin} \right\} i\psi$$

leicht erlangen, so wäre eine entscheidende Antwort nicht so leicht, würde aber auch hier keine wesentliche Bedeutung haben. Nur so viel mag hier bemerkt werden, dass die Convergenz nach x um die Minima von (Δ) herum etwas grösser ist als nach ψ , eine Thatsache, die sich schwer analytisch beweisen lässt.

Die Operation mit den Argumenten $\frac{k'}{\Delta}$ und ψ in dem Umfange, wie es in diesen Rechnungen geschehen ist, gewährt aber entschieden grosse Vortheile. Dass diese Argumente die zweckmässigsten sind, die man hätte wählen können, wäre wohl eben so gewagt zu behaupten, wie zu sagen, dass die Theorie der elliptischen Functionen abgeschlossen und ihre mächtigen Hilfsmittel für die Störungstheorie erschöpft sind.

Bei der Wahl der vorläufigen Argumente dürfen vor Allem zwei Umstände nicht übersehen werden. Erstens ist es für eine bequeme numerische Rechnung nothwendig, dass die Grössen $\frac{r'}{a'} \cos f'$ und $\frac{r'}{a'} \sin f'$ wesentlich convergenter werden als $(\Delta)^{-3}$ oder das Argument muss sonst so beschaffen sein, dass die Bildung der Producte $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \cos f'$ und $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \sin f'$ möglichst leicht geschehen kann. Das Argument $\frac{k'}{\Delta}$ erfüllt diese Bedingung. $\frac{r'}{a'} \cos f'$ und $\frac{r'}{a'} \sin f'$ nach den Vielfachen von ψ ausgedrückt sind nicht erheblich convergenter als $(\Delta)^{-3}$ nach demselben Argument ausgedrückt; die Art und Weise, wie die genannten Producte gebildet werden können, zeigt aber die Zweckmässigkeit dieses Argumentes. Zweitens muss das vorläufige Argument so beschaffen sein, dass der Uebergang zu dem für das Endresultat festgestellten Argument mit möglichst geringer Mühe sich bewerkstelligen lässt. Aus dem Vorhergehenden ersieht man, dass für die beiden Argumente $\frac{k'}{\Delta}$ und ψ die einfachste Form der Ausdrücke und der bequemste Uebergang zu x zusammenfallen.

Es wird schliesslich nicht unpassend sein, hier ein Paar Worte über die Theilung der Cometenbahn in Bezug auf die Berechnung der Jupiterstörungen hinzuzufügen. Man kann jetzt leicht einsehen, dass es nicht unbedeutend zweckmässiger gewesen wäre, keinen Theilpunkt ins Aphel zu verlegen, dagegen den oberen Theil von vorn herein etwas kleiner zu machen. Es wäre nämlich viel besser gewesen, wenn man die beiden ersten Theilpunkte dahin verlegt hätte, wo die jetzigen partiellen Anomalien ω_3 und $\omega_4 = 100^\circ$ sind. Den unteren Theil hätte man dann wesentlich in derselben Weise theilen können, wie Asten es gethan hat, nur dass man die in Bezug auf die grosse Axe symmetrischen Theilpunkte etwas weiter vom Perihel zu rücken gehabt hätte. Die Convergenz nach ω würde auf diese Weise keine namhafte Beeinträchtigung erlitten haben. Durch diese Theilung hätte

man den oberen Theil auf einmal absolviren können und zwar bedeutend leichter als bei der jetzigen Theilung die eine Hälfte dieses Theiles; denn in dem gedachten Falle wäre es möglich gewesen $(\Delta)^{-3}$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a} \text{Cos } f'$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a} \text{Sin } f'$ für den ganzen oberen Theil nach den Potenzen von $\frac{k'}{\Delta}$ zu entwickeln. Der Uebelstand des Auftretens von Sinusreihen nach ω wäre verschwindend gering gewesen im Vergleich mit den erzielten Vortheilen.

A n h a n g.

Die beigelegten Tafeln II und III werden in den allermeisten Fällen ausreichend sein, um die in den Störungsrechnungen auftretenden Ausdrücke nach $\frac{k'}{\Delta}$ und ψ in trigonometrische Reihen nach x zu verwandeln.

Tafel I, die der Tafel 6 im «Recueil de Tables» entnommen ist, giebt die Coefficienten der Entwicklung

$$e^{i\sqrt{-1}\xi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} H_{2i'} e^{2i'\sqrt{-1}x}$$

Tafel II ist zum Theil mit Tafel 1 des «Recueil de Tables» identisch, zum Theil aus dieser abgeleitet.

Tafel III ist die Tafel 15 im «Recueil de Tables» mit Ausnahme der Columnen mit den Ueberschriften $\sqrt{1-k_1} \sin \psi \left. \begin{matrix} \text{Cos} \\ \text{Sin} \end{matrix} \right\} 14\psi, \sqrt{1-k_1} \sin \psi \left. \begin{matrix} \text{Sin} \\ \text{Cos} \end{matrix} \right\} 15\psi, \sqrt{1-k_1} \sin \psi \left. \begin{matrix} \text{Cos} \\ \text{Sin} \end{matrix} \right\} 16\psi$. Die Zahlen in diesen sind nicht alle scharf abgeleitet; einige sind direct berechnet, die übrigen sind intra- und extrapolirt. Bei der Anwendung haben sie sich als hinreichend genau erwiesen.

Tafel I.

$2i'$	$e^{\sqrt{-1}\xi}$	$e^{2\sqrt{-1}\xi}$	$e^{3\sqrt{-1}\xi}$	$e^{4\sqrt{-1}\xi}$	$e^{5\sqrt{-1}\xi}$
- 4	3,954	4,763			
- 3	5,5966	6,1082	5,750 <i>n</i>		
- 2	7,20984	7,04606	7,3245 <i>n</i>	7,3606	
- 1	9,700293	8,63121 <i>n</i>	8,52427	8,41024 <i>n</i>	8,2952
0	9,6552115 <i>n</i>	9,453536	9,288864 <i>n</i>	9,14166	9,0047 <i>n</i>
+ 1	9,8934261	9,824347 <i>n</i>	9,717395	9,60338 <i>n</i>	9,4881

+	2	9,5961089	9,432326	9,710710n	9,74684	9,7173n
	3	9,1756264	9,687571	9,329772n	9,05521n	9,5176
	4	8,703999	9,539113	9,405570	9,59734n	9,4016
	5	8,204342	9,263421	9,596973	9,00457n	9,3644n
	6	7,68696	8,919938	9,507138	9,35037	9,4960n
	7	7,15734	8,53332	9,30238	9,53608	8,7933n
	8	6,6188	8,11655	9,02983	9,48411	9,2911
	9	6,0734	7,6773	8,71120	9,32537	9,4873
	10	5,5226	7,2209	8,35874	9,10063	9,4647
	11	4,967	6,7505	7,9802	8,8295	9,3402
	12	4,409	6,2689	7,5810	8,5242	9,1513
	13	3,847	5,778	7,1646	8,1897	8,9164
	14	3,282	5,279	6,734	7,8259	8,6384
	15	2,72				

Tafel II.

	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)$	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^3$	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^5$	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^7$	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^9$	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{11}$	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{13}$	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{15}$	$\left(\frac{k'}{\Delta}\right)^{17}$
Cos 0x	9,6394090	9,3435822	9,2169785	9,1374266	9,079280	9,03344	8,99559	8,9634	8,9353
Cos 2x	9,6179196n	9,5653939n	9,4768610n	9,4107842n	9,359488n	9,31778n	9,28271n	9,2525n	9,2259n
Cos 4x	9,0465554	9,3532488	9,3573278	9,3289587	9,297531	9,26800	9,24113	9,2168	9,1946
Cos 6x	8,451655n	9,0456647n	9,1687285n	9,1962243n	9,195886n	9,18587n	9,17231n	9,1576n	9,1427n
Cos 8x	7,855196	8,6738790	8,9222468	9,0171492	9,056743	9,07260	9,07699	9,0753	9,0705
Cos 10x	7,25864n	8,258959n	8,628546n	8,796859n	8,882772n	8,92969n	8,95608n	8,9708n	8,9795n
Cos 12x	6,66207	7,813994	8,296717	8,540467	8,676881	8,75890	8,81071	8,8445	8,8669
Cos 14x	6,06550n	7,347191n	7,934062n	8,252712n	8,44201n	8,56207n	8,64207n	8,6974n	8,7367n
Cos 16x	5,4689	6,86391	7,54630	7,937816	8,18100	8,34113	8,4515	8,5303	8,5883
Cos 18x	4,8724n	6,36778n	7,13787n	7,59941n	7,89648n	8,09790n	8,2402n	8,3445n	8,4226n
Cos 20x	4,2758	5,8614	6,71222	7,24061	7,59090	7,8342	8,0097	8,1402	8,2398
Cos 22x	3,679n	5,3466n	6,2721n	6,8641n	7,2664n	7,5517n	7,7610n	7,9190n	8,0411n
Cos 24x	3,083	4,8249	5,8197	6,4720	6,9250	7,2521	7,4957	7,6819	7,827
Cos 26x		4,2972n	5,3566n	6,0662n	6,5684n	6,9367n	7,2146n	7,4295n	7,599n
Cos 28x		3,765	4,8845	5,6486	6,1982	6,6070	6,9196	7,1635	7,358
Cos 30x		3,228n	4,404n	5,220n	5,815n	6,264n	6,610n	6,883n	7,101n
Cos 32x		2,69	3,917	4,782	5,421	5,908	6,288	6,590	6,834
Sin 2x	0,2810001	9,5598181	9,1626305	8,9101064	8,727327	8,584394	8,46710	8,3677	8,2814
Sin 4x		9,5383287n	9,3097117n	9,1138709n	8,957814n	8,830208n	8,72231n	8,6303n	8,5492n
Sin 6x	9,0592105	9,2922710	9,2500867	9,1338269	9,018701	8,915427	8,82401	8,7428	8,6700
Sin 8x		8,9454750n	9,0760771n	9,0507593n	8,936879n	8,915427n	8,84540n	8,7794n	8,7180n
Sin 10x	7,86596	8,542721	8,826230	8,895133	8,889128	8,85533	8,81128	8,7642	8,7170
Sin 12x		8,104517n	8,522435n	8,684095n	8,739581n	8,74767n	8,73333n	8,7079n	8,6775n
Sin 14x	6,67284	7,64185	8,178548	8,429108	8,547466	8,60026	8,61855	8,6179	8,6064
Sin 16x		7,16128n	7,80387n	8,13347n	8,31955n	8,41871n	8,47178n	8,4978n	8,5071n
Sin 18x	5,4795	6,6670	7,40484	7,81841	8,06105	8,20735	8,29669	8,3510	8,3829
Sin 20x		6,1620n	6,98619n	7,47376n	7,77622n	7,96974n	8,09630n	8,1801n	8,2358n
Sin 22x	4,287	5,6482	6,5513	7,1083	7,46847	7,7088	7,8731	7,9874	8,0679
Sin 24x		5,128n	6,1030n	6,7251n	7,1407n	7,4271n	7,6292n	7,7747n	7,8809n
Sin 26x	3,094	4,601	5,6432	6,3266	6,7955	7,1270	7,3667	7,5444	7,676
Sin 28x		4,068n	5,174n	5,9144n	6,4342n	6,8096n	7,0863n	7,296n	7,455n
Sin 30x		3,53	4,696	5,4906	6,0601	6,478	6,793	7,033	7,221
Sin 32x		2,99n	4,210n	5,057n	5,672n	6,132n	6,483n	6,754	6,967

Tafel III.

	$\sqrt{1-k_1 \sin \psi}$	$\sqrt{1-k_1 \sin \psi}$ X Sin ψ	$\sqrt{1-k_1 \sin \psi}$ X Cos 2ψ	$\sqrt{1-k_1 \sin \psi}$ X Sin 3ψ	$\sqrt{1-k_1 \sin \psi}$ X Cos 4ψ	$\sqrt{1-k_1 \sin \psi}$ X Sin 5ψ	$\sqrt{1-k_1 \sin \psi}$ X Cos 6ψ	$\sqrt{1-k_1 \sin \psi}$ X Sin 7ψ	$\sqrt{1-k_1 \sin \psi}$ X Cos 8ψ
Cos $0x$	9,9750337	9,3904087n	8,9716951n	8,596150	8,240699	7,89702n	7,56098n	7,2304	6,9085
Cos $2x$	9,6653978n	9,9885853	9,4488240	9,2047086n	8,782602n	8,50990	8,12775	7,8457n	7,4843n
Cos $4x$	8,724638n	9,3477222n	9,9687392n	9,4311567	9,322333	8,86808n	8,67589n	8,26174	8,03543
Cos $6x$	8,165847	8,938710n	9,2962008	9,9589808n	9,440857n	9,421533	8,95704	8,82575n	8,39550n
Cos $8x$	7,42649	8,325557	9,1623454	9,2509182	9,946201	9,449057n	9,498562n	9,03153	8,95124
Cos $10x$	6,84485n	7,83757	8,525508n	9,3061292	9,197906n	9,929537	9,453535	9,55949n	9,09381n
Cos $12x$	6,15806n	7,23035n	8,207524n	8,649899n	9,409783n	9,134525n	9,908714n	9,45419	9,60827
Cos $14x$	5,5705	6,70927n	7,58335	8,461819n	8,73478	9,488977n	9,057628	9,88341n	9,45102n
Cos $16x$	4,9085	6,10483	7,18781	7,82357	8,65476	8,79485	9,551348	8,96204	9,85319
Cos $18x$	4,3010n	5,5658	6,57031n	7,52951	8,00346n	8,80928	8,83724n	9,60119	8,88828n
Cos $20x$	3,6021n	4,9590n	6,13098n	6,90075n	7,79581n	8,14523n	8,93724n	8,86587n	9,64111n
Cos $22x$	3,000	4,4150n	5,5172	6,54531n	7,15655n	8,01368n	8,26041	9,04548n	8,88298
Cos $24x$		3,778	5,0531	5,9227	6,8745	7,36474	8,19756	8,35564	9,13843
Cos $26x$		3,000	4,431n	5,5263	6,2430n	7,14737	7,53895n	8,35603	8,43537n
Cos $28x$			3,954n	4,9031n	5,909n	6,5092n	7,38039n	7,6875n	8,49471n
Cos $30x$			3,477	4,491n	5,279	6,2304n	6,7340	7,5832n	7,8169
Cos $32x$			3,000	3,845	4,954	5,591	6,5079	6,9243	7,7627
Cos $34x$				3,447	4,301n	5,301	6,563n	6,7404	7,1004n
Cos $36x$					4,000n	4,602n	5,602n	6,1139n	6,9638n
Cos $38x$						4,301n	4,954	5,903n	6,3222
Cos $40x$							4,602	5,301	6,1461
Cos $42x$							4,000n	5,000	5,477n
Cos $44x$									5,301n
Cos $0x$		$\sqrt{1-k_1 \sin \psi}$ X Sin 9ψ	$\sqrt{1-k_1 \sin \psi}$ X Cos 10ψ	$\sqrt{1-k_1 \sin \psi}$ X Sin 11ψ	$\sqrt{1-k_1 \sin \psi}$ X Cos 12ψ	$\sqrt{1-k_1 \sin \psi}$ X Sin 13ψ	$\sqrt{1-k_1 \sin \psi}$ X Cos 14ψ	$\sqrt{1-k_1 \sin \psi}$ X Sin 15ψ	$\sqrt{1-k_1 \sin \psi}$ X Cos 16ψ
Cos $2x$		6,5798n	6,000n						
Cos $4x$		7,1790	6,845	6,477n	6,000n				
Cos $6x$		6,6444n	7,3979n	7,0414	6,778	6,301n	6,000		
Cos $8x$		8,21590	7,8062	7,6021n	7,2304n	7,000	6,602		
Cos $10x$		8,51202n	8,3729n	7,9395	7,7782	7,3802n	7,114n	7,001	
Cos $12x$		9,05778	8,6128	8,5092n	8,0719n	7,9395	7,505	7,301n	
Cos $14x$		9,14635n	9,14953n	8,7016	8,6304	8,1903n	8,0899n	7,602	
Cos $16x$		9,64738	9,19089	9,22917n	8,7803n	8,7388	8,2967	8,204n	8,000n
Cos $18x$		9,44398n	9,67843n	9,22866	9,29863	8,8506n	8,8363n	8,398	8,301
Cos $20x$		9,81748	9,43297	9,70252n	9,26031n	9,35965	8,9143	8,9243n	8,477n
Cos $22x$		8,66549n	9,77554n	9,41780	9,72049	9,28668n	9,41347n	8,9731	9,000
Cos $24x$		9,67282n	8,3802	9,72624n	9,39829n	9,73280	9,30899	9,4609n	9,041n
Cos $26x$		8,88981	8,6975	7,3802	9,66811	9,37420n	9,73973n	9,3284	9,491
Cos $28x$		9,21909	8,8871n	9,71584	8,2648	9,59879	9,34518	9,7412n	9,342n
Cos $30x$		8,50229n	9,28959n	8,8745n	9,72852n	8,5798	9,51561n	9,3118	9,732
Cos $32x$		8,61752n	8,5587	9,35141n	8,8525	9,73584n	8,7466n	9,4099n	9,279n
Cos $34x$		7,9299	8,7275	8,6053	9,40569	8,8195	9,73799	8,8451n	9,255
Cos $36x$		7,9238	8,0294n	8,8261	8,6435n	9,45347	8,7731n	9,7356	8,903
Cos $38x$		7,2529n	8,0682n	8,1173n	8,9101n	8,6749n	9,49624n	8,8129n	9,724n
Cos $40x$		7,1614n	7,3979	8,2014n	8,1959	8,9917n	8,7007	9,5328n	8,845
Cos $42x$		6,5051	7,3424	7,5185	8,3222	8,2648	9,06558	8,7324	9,556
Cos $44x$		6,3617	6,699n	7,5051	7,6335n	8,4314	8,3054n	9,1335	8,778n
Cos $46x$		5,699n	6,602n	6,778n	7,6435n	7,7324n	8,5315n	8,3424n	9,204n
Cos $48x$		5,477n	6,000	6,699n	6,954	7,7853n	7,806	8,6128n	8,301
Cos $50x$		5,00	6,000	6,000	6,903	7,0792	7,924	7,845	8,699
				6,000	6,301n	7,0792	7,176n	8,000	8,000n

	$\sqrt{1-k_1}\sin\psi$ X Cos ψ	$\sqrt{1-k_1}\sin\psi$ X Sin 2ψ	$\sqrt{1-k_1}\sin\psi$ X Cos 3ψ	$\sqrt{1-k_1}\sin\psi$ X Sin 4ψ	$\sqrt{1-k_1}\sin\psi$ X Cos 5ψ	$\sqrt{1-k_1}\sin\psi$ X Sin 6ψ	$\sqrt{1-k_1}\sin\psi$ X Cos 7ψ	$\sqrt{1-k_1}\sin\psi$ X Sin 8ψ
Sin $2x$	9,9573724	9,3708000n	9,1606726n	8,715719	8,461799	8,064608n	7,7945n	7,4233
Sin $4x$	9,3176422n	9,9670888	9,4252594	9,319882n	8,863246n	8,673021	8,25744	8,03463n
Sin $6x$	8,934945n	9,2946615n	9,9588849n	9,440439	9,421388	8,956711n	8,82562n	8,39550
Sin $8x$	8,320522	9,1622808n	9,2508305	9,946194n	9,449033n	8,498553	9,03153	8,95124n
Sin $10x$	7,83582	8,525404	9,3061322	9,197906	9,929537	9,453535n	9,55949n	9,09381
Sin $12x$	7,22827n	8,207516	8,649899n	9,409783	9,134525n	9,908714	9,45419	9,60827n
Sin $14x$	6,70834n	7,58332n	8,461819n	8,73478n	9,488977n	9,057628n	9,88341n	9,45102
Sin $16x$	6,10346	7,1878n	7,82357	8,65476n	8,79485	9,551348n	8,96204	9,85319n
Sin $18x$	5,5647	6,57031	7,52951	8,00346	8,80928	8,83724	9,60119	8,83828
Sin $20x$	4,959n	6,13098	6,90075n	7,79581	8,14523n	8,93724	8,86587n	9,64111
Sin $22x$	4,415n	5,5172n	6,54531n	7,15655n	8,01368n	8,26041n	9,04548n	8,88298n
Sin $24x$	3,778	5,0531n	5,9227	6,8745n	7,36474	8,19756n	8,35564	9,13843n
Sin $26x$	3,000	4,431	5,5263	6,2430	7,14737	7,53895	8,35603	8,43537
Sin $28x$		3,954	4,903n	5,9085	6,5092n	7,38039	7,6875n	8,49471
Sin $30x$		3,477n	4,491n	5,279n	6,2304n	6,7340n	7,5832n	7,8161n
Sin $32x$		3,000n	3,845	4,954n	5,591	6,5079n	6,9243	7,7627n
Sin $34x$			3,447	4,301	5,301	5,863	6,7404	7,1004
Sin $36x$				4,000	4,602n	5,602	6,114n	6,9638
Sin $38x$					4,301n	4,954n	5,903n	6,322n
Sin $40x$						4,602n	5,301	6,146n
Sin $42x$						4,000	5,000	5,477
Sin $44x$								5,301

	$\sqrt{1-k_1}\sin\psi$ X Cos 9ψ	$\sqrt{1-k_1}\sin\psi$ X Sin 10ψ	$\sqrt{1-k_1}\sin\psi$ X Cos 11ψ	$\sqrt{1-k_1}\sin\psi$ X Sin 12ψ	$\sqrt{1-k_1}\sin\psi$ X Cos 13ψ	$\sqrt{1-k_1}\sin\psi$ X Sin 14ψ	$\sqrt{1-k_1}\sin\psi$ X Cos 15ψ	$\sqrt{1-k_1}\sin\psi$ X Sin 16ψ
Sin $2x$	7,1732	6,8451n	6,477n	6,000				
Sin $4x$	7,6444n	7,3979	7,0414	6,778n	6,301n	6,000n		
Sin $6x$	8,21590	7,8062n	7,6021n	7,2304	7,000	6,602n		
Sin $8x$	8,51202n	8,3729	7,9395	7,7782n	7,3802n	7,1139	7,001	
Sin $10x$	9,05778	8,6128n	8,5092n	8,0719	7,9395	7,5051n	7,301n	
Sin $12x$	9,14635n	9,14953	8,7016	8,6304n	8,1903n	8,0599	7,612	
Sin $14x$	9,64738	9,19089n	9,22917n	8,7803	8,7388	8,2967n	8,2041n	8,000
Sin $16x$	9,44398n	9,67843	9,22866	9,29863n	8,8506n	8,8363	8,3979	8,301n
Sin $18x$	9,81748	9,43297n	9,70252n	9,26023	9,35965	8,9143n	8,9243n	8,477
Sin $20x$	8,66549n	9,77554	9,41780	9,72049n	9,28668n	9,41347	8,9731	9,000n
Sin $22x$	9,67282n	8,3802n	9,72624n	9,39829	9,73280	9,30899n	9,4609n	9,041
Sin $24x$	8,88981	9,69749n	7,3802	9,66811n	9,37420n	9,73973	9,3234	9,491n
Sin $26x$	9,21909	8,8871	9,71584	8,2648n	9,59879	9,34518n	9,7412n	9,342
Sin $28x$	8,50229n	9,23959	8,8745n	9,72852	8,5798	9,51561	9,3118	9,732n
Sin $30x$	8,61752n	8,5587n	9,35141n	8,8525n	9,73584n	8,7466	9,4099n	9,279
Sin $32x$	7,9299	8,7275n	8,6053	9,40569n	8,8195	9,73799n	8,8451n	9,255n
Sin $34x$	7,9238	8,0294	8,8261	8,6435	9,45347	8,7731	9,7356	8,903n
Sin $36x$	7,2529n	8,0682	8,1173n	8,9101	8,6749n	9,49624	8,8129n	9,724
Sin $38x$	7,1614n	7,3979n	8,2014n	8,1959n	8,9917n	8,7007n	9,5328n	8,845n
Sin $40x$	6,505	7,3424n	7,5185	8,3222n	8,2648	9,06558n	8,7324	9,556n
Sin $42x$	6,362	6,699	7,5051	7,6335	8,4314	8,3054	9,1335	8,778
Sin $44x$	5,699n	6,602	6,778n	7,6435	7,7324n	8,5315	8,3424n	9,204
Sin $46x$	5,477n	6,000n	6,699n	6,954n	7,7853n	7,8062n	8,6128n	8,301n
Sin $48x$	5,000	6,000n	6,000	6,903n	7,0792	7,9243n	7,8451	8,699n
Sin $50x$			6,000	6,301	7,0792	7,1761	8,0000	8,000

Berichtigungen.

Seite 9 Zeile 3 von oben statt: eine der Formel (1) ähnliche Form lies: diese Formel.

» » » 10 » » » (1) lies: II

» » » 11 » » » (1) » II

» 14 nach der letzten Zeile soll stehen: $\xi = 172^\circ 54' 0'',84$

» 17 Zeile 2 von oben statt: (1) lies: II

» 19 » 5 von unten statt: φ_1 und φ_2 soll es sein: $\varphi_1(\Delta)$ und $\varphi_2(\Delta)$

» 40 und 41 die Coefficienten dieser Reihen enthalten den Factor m' .

» 56 Zeile 7 von unten statt: $\frac{1}{12} \frac{dY}{d\omega_4}$ lies: $\frac{dY_1}{d\omega_4}$

» » » 6 » » » $\frac{1}{12} \frac{d\Phi}{d\omega_4}$ » $\frac{d\Phi_1}{d\omega_4}$

» » » 5 » » » $\frac{1}{12} \frac{d\Xi}{d\omega_4}$ » $\frac{d\Xi_1}{d\omega_4}$

