Tartu Ülikool

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Hanna Britt Soots

Murruliste diferentsiaaloperaatorite omavahelised seosed

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: lektor Kaido Lätt
professor Arvet Pedas

Tartu 2019

Murruliste diferentsiaaloperaatorite omavahelised seosed

Bakalaureusetöö

Hanna Britt Soots

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös tutvustatakse Riemanni-Liouville'i diferentsiaaloperaatori, Caputo diferentsiaaloperaatori ning Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori pöördoperaatori põhilisi omadusi ja nendevahelisi seoseid. Käsitletakse murruliste tuletiste olemasoluga seotud küsimusi ning tuuakse näiteid konkreetsete funktsioonide murruliste tuletiste leidumise kohta.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.
Märksõnad. Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori pöördoperaator, Riemanni-Liouville'i diferentsiaaloperaator, Caputo diferentsiaaloperaator.

Connections between different fractional differentiation operators

Bachelor's thesis

Hanna Britt Soots

Abstract. The purpose of this Bachelor's thesis is to present definitions and some properties of Riemann-Liouville fractional differentiation operator, Caputo fractional differentiation operator and inversion of Riemann-Liouville integral operator and their connections. Also we are going to bring examples of fractional differentiation operators and examine the existance of fractional derivatives of concrete functions.

CERCS research specialisation: P130 Functions, diferential equations.
Key words. Inversion of Riemann-Liouville integral operator, Riemann-Liouville fractional differentiation operator, Caputo fractional differentiation operator.

Sisukord

Sissejuhatus

Arutelu funktsioonide murruliste tuletiste mõiste üle algas 17. sajandi lõpus. Kui alguses oli tegemist puhta matemaatika uurimisvaldkonnaga, muutus valdkonna käsitlus 20. sajandi keskpaigast rakenduslikumaks. See muutus oli tingitud tulenevalt uutest rakendustest füüsikas, keemias, bioloogias ning majanduses. Murrulised tuletised on eriti kasulikud kirjeldamaks materjale ning süsteeme, mis sõltuvad nende varasemast käitumisest. [1]

Riemanni-Liouville'i ja Caputo diferentsiaaloperaatorite teemadel on Tartu Ülikoolis varem kaitstud bakalaureusetööd [2] ja [3]. Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori pöördoperaatorit ega funktsioonide murrulist diferentseeruvust nendes vaadeldud ei ole.

Käesolevas bakalaureusetöös käsitletakse erinevate murruliste tuletiste omadusi ja nendevahelisi seoseid. Toome näiteid funktsioonide murrulistest tuletistest ning uurime konkreetsete funktsioonide murrulise diferentseeruvusega seotud küsimusi.
Töö esimeses peatükis tuuakse sisse meile vajalikud definitsioonid ning abitulemused.
Teises ja kolmandas peatükis esitatakse Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori, Riemanni-Liouville'i diferentsiaaloperaatori ja Caputo diferentsiaaloperaatori definitsioonid ning tähtsamad omadused. Samuti toome näiteid konstantse funktsiooni ning astmefunktsiooni Riemanni-Liouville'i ja Caputo murrulise tuletise leidmise kohta.
Neljandas peatükis defineeritakse murruline diferentsiaaloperaator Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori pöördoperaatori abil ning uuritakse erinevate diferentisaaloperaatorite vahelisi seoseid.
Viiendas peatükis esitatakse teoreem funktsiooni murrulisest diferentseeruvusest ning uuritakse konkreetsete funktsioonide murrulist diferentseeruvust.
Allikatena on kasutatud peamiselt monograafiat [4] ning Gennadi Vainikko 2016. aastal ilmunud artiklit *Which functions are fractionally differentiable?* [5].

1. Abitulemused

Selles peatükis on esitatud meile vajalikud definitsioonid, omadused ning teoreemid, mida kasutatakse edaspidises töös. Materjalidena on kasutatud raamatut [4] ning õpikuid [6] ja [7].
Tähistame $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ ning $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
Olgu $m \in \mathbb{N}_0$. Kõigi lõigus $[0, T]$ m-korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ ruumi tähistame $C^m := C^m[0, T]$, seejuures $C^0 := C$. Funktsioonide $f \in C^m$, kus $f(0) = f'(0) = f^{(2)}(0) = ... = f^{(m)}(0) = 0$, ruumi tähistame $C_0^m := C_0^m[0, T]$.
Me märgime tähistusega D operaatorit, mis viib diferentseeruva funktsiooni f tema tuletiseks f' ehk

$$(Df)(x) := f'(x), \quad x \in [0, T].$$

Analoogiliselt märgime tähistusega J operaatorit, mis viib lõigus $[0, T]$ Riemanni mõttes integreeruva funktsiooni f funktsiooniks Jf, mis on defineeritud võrdusega

$$(Jf)(x) := \int_0^x f(t)dt, \quad x \in [0, T].$$

Tähistusega J^n ja D^n ($n \in \mathbb{N}$) märgime n-järku iteratsiooni operaatoritest J ja D (näiteks $D^1 = D$ ja $D^2 = DD$ jne). Kui $n = 0$, siis $D^0 := I$, $J^0 := I$, kus I on ühikoperaator.

Definitsioon 1. Parameetrist $\alpha \in (0, \infty)$ sõltuvat päratut integraali

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

nimetatakse *gammafunktsiooniks.*

Lemma 2. Iga naturaalarvu n korral

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,, \tag{1.1}$$

kus $0! := 1$.

Tõestus. Tõestame selle väite matemaatilise induktsiooniga.
Kui $n = 1$, siis definitsiooni 1 kohaselt:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}t^0 dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = \lim_{l\to\infty} \int_0^l e^{-t} dt = \lim_{l\to\infty}(-e^{-l} + e^0) = 1.$$

Kuna $0! = 1$, siis oleme näidanud, et induktsiooni baas kehtib.
Oletame, et valem (1.1) kehtib $n = k$ korral ehk $\Gamma(k) = (k-1)!$. Näitame, et valem kehtib ka $n = k+1$ korral. Tõepoolest, ositi integreerides (võttes $u = t^k$ ning $dv = e^{-t}dt$) saame:

$$\begin{aligned}
\Gamma(k+1) &= \int\limits_0^\infty e^{-t}t^k dt \\
&= \lim_{l\to\infty} \int_0^l e^{-t}t^k dt \\
&= \lim_{l\to\infty} \left(-e^{-t}t^k \Big|_{t=0}^{t=l} + \int_0^l kt^{k-1}e^{-t}dt \right) \\
&= \lim_{l\to\infty} \left(-e^{-l}l^n + e^0 0^k + \int_0^l kt^{k-1}e^{-t}dt \right) \\
&= k\int_0^\infty t^{k-1}e^{-t}dt = k\Gamma(k) = k(k-1)! = k!\ .
\end{aligned}$$

Kokkuvõttes saame, et võrdus (1.1) kehtib iga naturaalarvu n korral. □

Märkus 3. Lemma 2 tõestusest näeme, et kehtib seos

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Selle tulemuse saame üldistada (vt [7, lk 253]) järgmiselt:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \alpha \in [0,\infty).$$

Definitsioon 4. Parameetritest $\alpha, \beta \in (0,\infty)$ sõltuvat päratut integraali

$$\mathrm{B}\,(\alpha,\beta) := \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt \tag{1.2}$$

nimetatakse *beetafunktsiooniks.*

Gamma- ja beetafunktsiooni vahel kehtib järgmine seos:

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{1.3}$$

Seega

$$\int_0^x t^{\alpha-1}(x-t)^{\beta-1}dt = x^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{1.4}$$

Võrduse (1.3) tõestuse saab leida õpikust [7, lk 249].

Teoreem 5 (Leibnizi integreerimisreegel)**.** [7, lk 237] Olgu funktsioonid $a(x), b(x)$ diferentseeruvad lõigus $[a, b]$ ja nende muutumispiirkonnad kuuluvad lõiku $[c, d]$. Olgu funktsioonid $f(x, y)$ ja $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y)$ pidevad ristkülikus $[a, b] \times [c, d]$. Siis integraali

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)dy, \quad (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$$

tuletis on avaldatav kujul

$$F'(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)dy - a'(x)f(x, a(x)) + b'(x)f(x, b(x)).$$

Teoreem 6 (Diferentsiaal-integraalarvutuse põhiteoreem)**.** [6, lk 367] Olgu $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon ja olgu $F : [0, T] \to \mathbb{R}$, kus

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x \in [0, T].$$

Siis funktsioon F on diferentseeruv, kusjuures

$$F' = f.$$

2. Riemanni-Liouville'i integraal ja tuletis

Käesolevas peatükis esitatud materjal tugineb monograafiale [4]. Enne murrulise Riemanni-Liouville'i integraal- ja diferentsiaaloperaatorite defineerimist esitame meile vajalikud integraal- ja diferentsiaaloperaatorite omadused.

Lemma 7. Olgu $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Diferentsiaal-integraalarvutuse põhiteoreemi järgi kehtib võrdus

$$DJf = f,$$

st D on vasakpoolne pöördoperaator operaatorile J ruumis $J(C)$.
Lemmast 7 järeldub vahetult, et iga pideva funktsiooni $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ korral kehtib võrdus

$$D^n J^n f = f, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Näiteks $n = 2$ korral (võttes $Jf = f_1$):

$$D^2 J^2 f = DDJJf = DDJf_1 = Df_1 = DJf = f.$$

Lemma 8. Olgu $m, n \in \mathbb{N}$ ja $m \geq n$. Siis kehtib võrdus

$$D^n D^{m-n} = D^m.$$

Tõestus. Olgu m, n naturaalarvud ning $m \geq n$. Siis

$$D^n D^{m-n} = \underbrace{D..D}_{n}\underbrace{D...D}_{m-n} = \underbrace{D...D}_{(n+m-n)} = \underbrace{D...D}_{m} = D^m.$$

□

Analoogiliselt lemma 8 tõestusele saab näidata, et $m, n \in \mathbb{N}, m \geq n$ korral kehtib järgmine võrdus:

$$J^n J^{m-n} = J^m. \tag{2.2}$$

Tõestus. Olgu m, n naturaalarvud ning $m \geq n$. Siis

$$J^n J^{m-n} = \underbrace{J..J}_{n}\underbrace{J...J}_{m-n} = \underbrace{J...J}_{(n+m-n)} = \underbrace{J...J}_{m} = J^m.$$

□

Lemma 9 ([4] lemma 1.2)**.** Olgu $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$ ja f vähemalt n-korda pidevalt diferentseeruv funktsioon, siis

$$D^n f = D^m J^{m-n} f. \tag{2.3}$$

Tõestus. Olgu $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$ ja f vähemalt n-korda pidevalt diferentseeruv funktsioon. Võrduse (2.3) kehtivuse näitamiseks kasutame võrdust (2.1) ning lemmat 8:

$$D^n f = D^n D^{m-n} J^{m-n} f = D^m J^{m-n} f.$$

□

Lause 10. Olgu funktsioon f Riemanni mõttes integreeruv lõigus $[0, T]$. Iga naturaalarvu n korral kehtib võrdus

$$(J^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt, \quad x \in [0, T]. \tag{2.4}$$

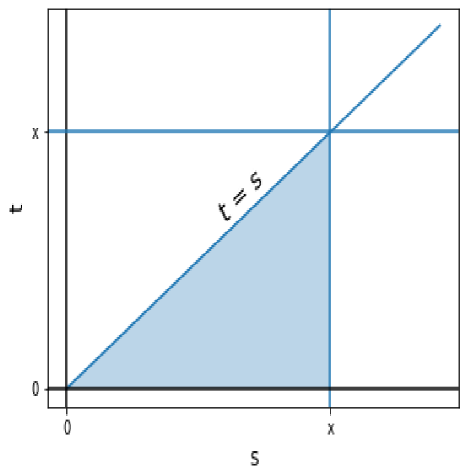
Tõestus. Olgu f Riemanni mõttes integreeruv lõigus $[0, T]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tõestame väite matemaatilise induktsiooniga.
Kui $n = 1$, siis integraaloperaatori J definitsiooni kohaselt:

$$(J^1 f)(x) = \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{(1-1)!}\int_0^x (x-t)^{1-1} f(t)dt.$$

Seega oleme näidanud, et baas on tõene.
Oletame, et võrdus (2.4) kehtib $n = k$ korral ja näitame, et see kehtib ka $n = k + 1$ korral. Operaatori J^{k+1} definitsiooni ja induktsiooni eelduse kohaselt:

$$\begin{aligned}(J^{k+1} f)(x) &= (J(J^k) f)(x) \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x ds \int_0^s (s-t)^{k-1} f(t)dt, \quad x \in [0, T]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Kahekordse integraali (2.5) integreerimispiirkond on kujutatud joonisel 2.1 värvitud kolmnurgana. Integreerimise järjekorra muutmisel saame



Joonis 2.1: Integraali (2.5) integreerimispiirkond

$$(J^{k+1}f)(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x f(t)dt \int_t^x (s-t)^{k-1}ds, \quad x \in [0,T].$$

Paneme tähele, et viimases integraalis

$$\int_t^x (s-t)^{k-1}ds = \frac{(x-t)^k}{k}, \quad x \in [0,T].$$

Seega

$$\begin{aligned}(J^{k+1}f)(x) &= \frac{1}{(k-1)!}\frac{1}{k}\int_0^x (x-t)^k f(t)dt \\ &= \frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k f(t)dt, \quad x \in [0,T].\end{aligned}$$

Sellega oleme tõestanud, et valem (2.4) kehtib iga naturaalarvu n korral. □

Valemit (2.4) tuntakse ka Cauchy valemina.
Järgmisena defineerime murrulise Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori ning esitame tema olulisemad omadused.

Definitsioon 11. Olgu funktsioon $f \in C$ ning α positiivne reaalarv. Operaatorit $J^{\alpha}_{\text{R-L}}$, mis on defineeritud võrdusega

$$(J^{\alpha}_{\text{R-L}}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \quad x \in [0,T], \tag{2.6}$$

nimetatakse *α-järku Riemanni-Liouville'i integraaloperaatoriks.*

Defineerime $J^0 := I$, kus I on ühikoperaator.
Paneme tähele, et kui $\alpha \in \mathbb{N}$, siis $J^{\alpha}_{\text{R-L}} = J^{\alpha}$, ehk $\alpha \in \mathbb{N}$ korral ühtib Riemanni-Liouville'i murruline integraaloperaator tavalise integraaloperaatoriga.

Lause 12. Olgu α, β positiivsed reaalarvud ja $f \in C$, siis

$$J^{\alpha}_{\text{R-L}} J^{\beta}_{\text{R-L}} f = J^{\alpha+\beta}_{\text{R-L}} f.$$

Tõestus. Olgu α, β positiivsed reaalarvud ning $f \in C$. Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori definitsiooni kohaselt

$$\left(J^{\alpha}_{\text{R-L}} J^{\beta}_{\text{R-L}} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s) ds dt, \quad x \in [0,T].$$

Muudame integreerimisjärjekorda (analoogiliselt lause 10 tõestusega):

$$\left(J^{\alpha}_{\text{R-L}} J^{\beta}_{\text{R-L}} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(s) \int_s^x (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} dt ds, \quad x \in [0,T].$$

Teeme muutujavahetuse $t = s + r(x-s)$, siis

$$\begin{aligned}
&\left(J^{\alpha}_{\text{R-L}} J^{\beta}_{\text{R-L}} f\right)(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(s) \int_0^1 (x-s-rx+rs)^{\alpha-1} (s+rx-rs-s)^{\beta-1} (x-s) dr ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(s) \int_0^1 (x-s)^{\alpha-1} (1-r)^{\alpha-1} r^{\beta-1} (x-s)^{\beta} dr ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(s) (x-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r^{\beta-1} dr ds, \quad x \in [0,T].
\end{aligned}$$

Paneme tähele, et

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r^{\beta-1} dr = \mathrm{B}(\beta, \alpha),$$

kus $\mathrm{B}(\beta,\alpha)$ on beetafunktsioon. Seega

$$\begin{aligned}
\big(J^{\alpha+\beta}f\big)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_0^x f(s)(x-s)^{\alpha+\beta-1}\mathrm{B}(\beta,\alpha)ds \\
&= \frac{\mathrm{B}(\beta,\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_0^x f(s)(x-s)^{\alpha+\beta-1}ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_0^x f(s)(x-s)^{\alpha+\beta-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int\limits_0^x f(s)(x-s)^{\alpha+\beta-1}ds \\
&= \big(J^{\alpha+\beta}_{\text{R-L}}f\big)(x), \quad x\in[0,T].
\end{aligned}$$

Viimases võrduste ahelas kasutasime beetafunktsiooni omadust, mis aitab meil üle minna beeta funktsioonilt gamma funktsioonile (vaata võrdust (1.3)). Seega oleme näidanud, et

$$\big(J^{\alpha}_{\text{R-L}}J^{\beta}_{\text{R-L}}f\big)(x) = \big(J^{\alpha+\beta}_{\text{R-L}}f\big)(x), \quad x\in[0,T].$$

□

Definitsioon 13. Olgu $m\in\mathbb{N}$ ning $\alpha\in(m-1,m]$. Operaatorit $D^{\alpha}_{\text{R-L}}$, mis on defineeritud võrdusega

$$D^{\alpha}_{\text{R-L}}f := D^m J^{m-\alpha}_{\text{R-L}}f, \quad f\in C^{m-1}, \quad J^{m-\alpha}_{\text{R-L}}f\in C^m \tag{2.7}$$

nimetatakse *α-järku Riemanni-Liouville'i diferentsiaaloperaatoriks.*

Defineerime $D^0_{\text{R-L}} := I$, kus I on ühikoperaator.
Paneme tähele et kui $\alpha = n\in\mathbb{N}$, siis $D^n_{\text{R-L}} = D^n$, ehk $\alpha\in\mathbb{N}$ korral ühtib Riemann-Liouville'i diferentsiaaloperaator tavalise diferentsiaaloperaatoriga.

Lause 14. Olgu $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in(n-1,n]$ ja $m\in\mathbb{N}$ selline, et $m>\alpha$. Kehtib võrdus

$$D^{\alpha}_{\text{R-L}} = D^m J^{m-\alpha}_{\text{R-L}}. \tag{2.8}$$

Tõestus. Teisendame avaldist $D^m J^{m-\alpha}_{\text{R-L}}$ kasutades seost (2.1), lemmat 8 ja lauset 12:

$$D^m J^{m-\alpha}_{\text{R-L}} = D^n D^{m-n} J^{m-\alpha}_{\text{R-L}} = D^n D^{m-n} J^{m-n} J^{n-\alpha}_{\text{R-L}} = D^n J^{n-\alpha}_{\text{R-L}} = D^{\alpha}_{\text{R-L}}.$$

Antud võrdused kehtivad seetõttu, et meie eelduse kohaselt $m>\alpha$, seega saame järeldada, et $m\geq n$ ning võime lemmat 8 kasutada. □

Lause 15. Olgu $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n-1, n]$ ning $f \in C$. Siis

$$\big(D^{\alpha}_{\text{R-L}} J^{\alpha}_{\text{R-L}} f\big)(x) = f(x), \quad x \in [0, T].$$

Tõestus. Olgu $f \in C$, $n \in \mathbb{N}$ ja $n-1 < \alpha \leq n$. Kasutame lauset 12 ja võrdust (2.8):

$$D^{\alpha}_{\text{R-L}} J^{\alpha}_{\text{R-L}} f = D^n J^{n-\alpha}_{\text{R-L}} J^{\alpha}_{\text{R-L}} f = D^n J^n f = f.$$

□

Järgmisena leiame α-järku Riemann-Lioville'i tuletise konstantsest funktsioonist ning astmefunktsioonist. Paneme tähele, et konstantse funktsiooni Riemanni-Liouville'i tuletis ei ole üldjuhul võrdne nulliga, mida peetakse ka Riemanni-Liouville'i tuletise üheks suuremaks puudujäägiks.

Näide 16. Olgu $m \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in (m-1, m]$. Vaatame α-järku Riemanni-Liouville'i tuletist konstantsest funktsioonist $f(x) = c$, $x \in [0, T]$.
Kui $\alpha = m$, siis $\alpha \in \mathbb{N}$ ning $\big(D^{m}_{\text{R-L}} f\big)(x) = \big(D^m f\big)(x) = 0$, $x \in [0, T]$.
Vaatame nüüd juhtu $m - 1 < \alpha < m$. Riemanni-Liouville'i diferentsiaaloperaatori definitsioonist saame

$$\begin{aligned}
\big(D^{\alpha}_{\text{R-L}} f\big)(x) &= \big(D^m J^{m-\alpha}_{\text{R-L}} f\big)(x) \\
&= D^m\left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} c \, dt\right) \\
&= D^m\left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \cdot \frac{c}{m-\alpha} (x-t)^{m-\alpha}\Big|_{t=0}^{t=x}\right) \\
&= D^m\left(\frac{c \cdot x^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)(m-\alpha)}\right) \\
&= \frac{c}{\Gamma(m-\alpha)(m-\alpha)} D^m(x^{m-\alpha}), \quad x \in [0, T].
\end{aligned}$$

Rakendame funktsioonile $x^{m-\alpha}$ m-korda järjest operaatorit D:

$$(D^m)(x^{m-\alpha}) = (m-\alpha)(m-\alpha-1)\cdots(-\alpha+1)x^{-\alpha}, \quad x \in [0, T].$$

Kasutame märkust 3 ning rakendame seda $(m-1)$-korda:

$$\begin{aligned}
(D^{\alpha}_{\text{R-L}} f)(x) &= \frac{c \cdot (m-\alpha)(m-\alpha-1)\cdots(1-\alpha)x^{-\alpha}}{(m-\alpha-1)\cdots(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)(m-\alpha)} \\
&= \frac{cx^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad x \in [0, T].
\end{aligned}$$

Seega oleme saanud, et kui $\alpha \notin \mathbb{N}$ ja $c \neq 0$, siis konstantse funktsiooni $f = c$ α-järku Riemanni-Liouville'i tuletis ei ole võrdne nulliga.

Näide 17. Olgu $m \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in (m-1, m]$. Leiame α-järku Riemanni-Liouville'i tuletise funktsioonist

$$f(x) = x^c, \quad x \in [0, T], \quad c \geq 0.$$

Leiame kõigepealt α-järku Riemanni-Liouville'i integraali funktsioonist $f(x) = x^c$:

$$\begin{aligned}(J^{\alpha}_{\text{R-L}} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^c dt.\end{aligned}$$

Kasutame võrdust (1.4):

$$\begin{aligned}(J^{\alpha}_{\text{R-L}} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+1+c)} x^{\alpha+c} \\ &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(\alpha+c+1)} x^{\alpha+c}, \quad x \in [0, T].\end{aligned}$$

Kui $\alpha - c \in \mathbb{N}$, siis $\alpha > c$ ning $m > m - (\alpha - c) \in \mathbb{N}$ ning seega kehtib

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{\text{R-L}} f)(x) = (D^m J^{m-\alpha}_{\text{R-L}} f)(x) &= D^m \left(\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(m-\alpha+c+1)} x^{m-\alpha+c} \right) \\ &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(m-\alpha+c+1)} D^m (x^{m-\alpha+c}) = 0, \quad x \in [0, T].\end{aligned}$$

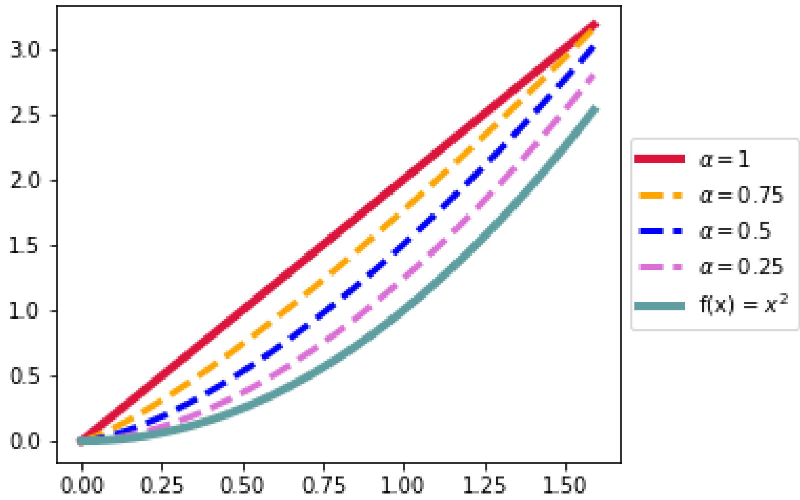
Kui $\alpha - c \notin \mathbb{N}$, siis

$$\begin{aligned}(D^m J^{m-\alpha}_{\text{R-L}} f)(x) &= D^m \left(\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(m-\alpha+c+1)} x^{m-\alpha+c} \right) \\ &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(-\alpha+c+1)} x^{-\alpha+c}, \quad x \in [0, T].\end{aligned}$$

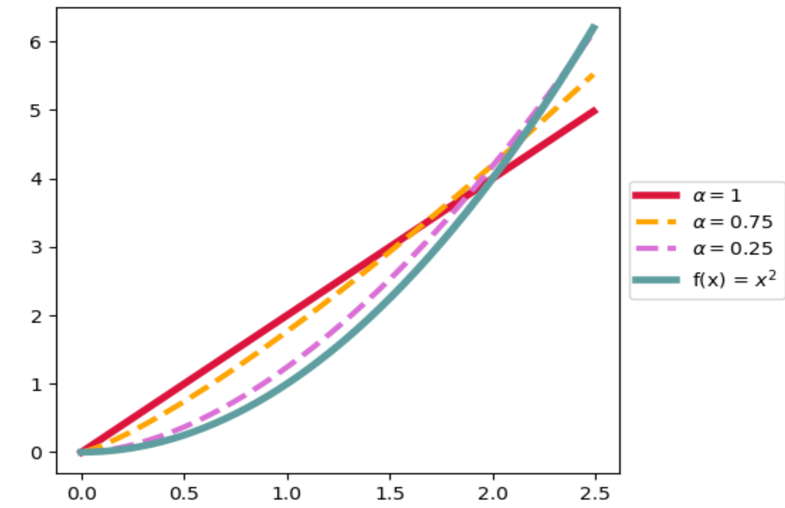
Viimases võrduses kasutasime analoogilist võtet kui näites 16.
Seega funktsiooni $f(x) = x^c$ α-järku Riemanni-Liouville'i tuletis on võrdne nulliga juhul kui $\alpha - c \in \mathbb{N}$ ja muul juhul võrdne funktsiooniga

$$\left(D^{\alpha}_{\text{R-L}} f\right)(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(-\alpha+c+1)} x^{c-\alpha}, \quad x \in [0, T].$$

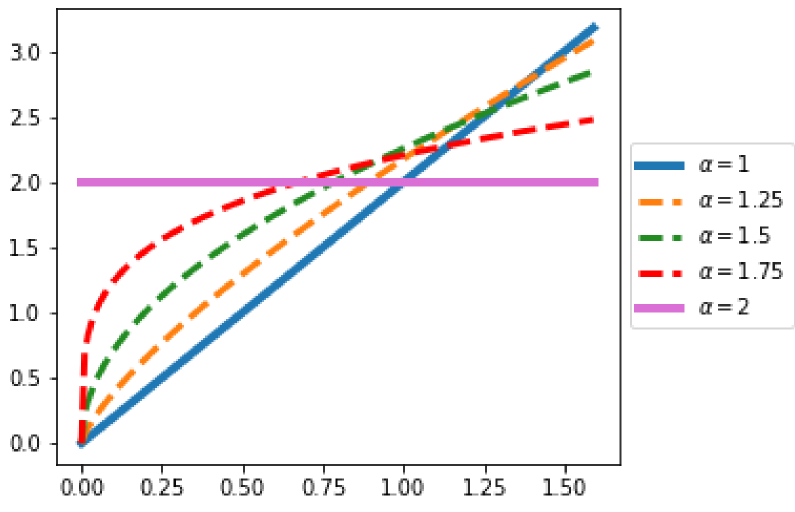
Märkus 18. Vaatleme Riemanni-Liouville'i murrulist tuletist funktsioonist $f(x) = x^2$. Joonistel 2.2—2.5 on vastavate funktsioonide graafikud esitatud pideva joonega, kui $\alpha \in \{0, 1, 2\} \subset \mathbb{N}$ ehk $D^{\alpha}_{\text{R-L}} f = D^{\alpha} f$ ning muudel juhtudel on funktsioonid esitatud katkendliku joonega.



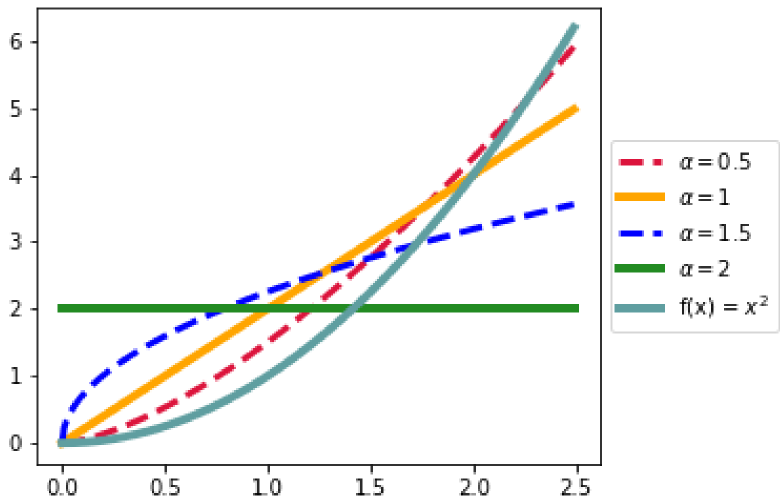
Joonis 2.2: Riemanni-Liouville'i murruline tuletis funktsioonist $f(x) = x^2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$



Joonis 2.3: Riemanni-Liouville'i murruline tuletis funktsioonist $f(x) = x^2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$



Joonis 2.4: Riemanni-Liouville'i murruline tuletis funktsioonist $f(x) = x^2, \quad 1 \leq \alpha \leq 2$



Joonis 2.5: Riemanni-Liouville'i murruline tuletis funktsioonist $f(x) = x^2, \quad 0 \leq \alpha \leq 2$

3. Caputo tuletis

Selles peatükis defineerime Caputo tuletise, sõnastame olulisemad omadused ning toome näiteid konkreetsete funktsioonide Caputo tuletistest. Siin peatükis on kasutatud peamiselt raamatuid [1] ja [4].
Olgu m naturaalarv ning $f \in C^m$. Funktsiooni f m-järku Taylori polünoom $T_m f$ punktis 0 on defineeritud järgmiselt:

$$\big(T_m f\big)(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k, \quad t \in [0, T].$$

Definitsioon 19. Olgu $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (m-1, m]$ ning olgu funktsioon $f \in C^{m-1}$ selline, et $J_{\text{R-L}}^{m-\alpha}(f - T_{m-1}f) \in C^m$. Operaatorit D_{Cap}^{α}, mis on defineeritud võrdusega

$$(D_{\text{Cap}}^{\alpha} f)(t) = (D^m J_{\text{R-L}}^{m-\alpha}(f - T_{m-1}f))(t), \quad t \in [0, T],$$

nimetatakse *α-järku Caputo diferentsiaaloperaatoriks.*

Kui definitsioonis 19 on $\alpha = m \in \mathbb{N}$, siis

$$D_{\text{Cap}}^{\alpha} f = D_{\text{Cap}}^{m} f = D^m f, \quad f \in C^m. \tag{3.1}$$

Tõepoolest, leiame $D_{\text{Cap}}^{\alpha} f$ tuginedes definitsioonile 19:

$$\begin{aligned} D_{\text{Cap}}^{\alpha} f &= D^m J_{\text{R-L}}^{m-\alpha}(f - T_{m-1}f) = D^m J_{\text{R-L}}^{m-m} f - D^m J_{\text{R-L}}^{m-m}(T_{m-1}f) \\ &= D^m f - D^m(T_{m-1}f) = D^m f. \end{aligned}$$

Viimases võrduses kasutasime asjaolu, et $D^m(T_{m-1}f) = 0$, sest $T_{m-1}f$ on $(m-1)$-järku polünoom.

Näide 20. Olgu $m \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in (m-1, m]$. Leiame α-järku Caputo tuletise konstantsest funktsioonist $f(t) = c$, $t \in [0, T]$. Definitsiooni 19 põhjal saame iga $t \in [0,T]$ korral, et:

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{\text{Cap}} f)(t) &= (D^{\alpha}_{\text{R-L}}(f - T_{m-1}f))(t) \\ &= D^{\alpha}_{\text{R-L}}\left(c - \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k\right) \\ &= D^{\alpha}_{\text{R-L}}\big(c - c\big) = D^{\alpha}_{\text{R-L}}\big(0\big).\end{aligned}$$

Näitest 16 saame, et α-järku Riemanni-Liouville'i tuletis konstantsest funktsioonist $g(x) = c$, on võrdne $(D^{\alpha}_{\text{R-L}} g)(x) = \frac{cx^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$, $x \in [0,T]$. Järelikult

$$D^{\alpha}_{\text{R-L}}\big(0\big) = \frac{0x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = 0.$$

Seega α-järku Caputo tuletis konstantsest funktsioonist on alati võrdne nulliga.

Näide 21. Olgu $m \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in (m-1, m]$. Vaatame α-järku Caputo tuletist funktsioonist $f(x) = x^b$, $x \in [0,T]$, $0 \leq b < m-1$
Vaatleme $(m-1)$-järku Taylori polünoomi funktsioonist $f(x) = x^b, x \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}(T_{m-1}f)(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k \\ &= \frac{f^{(0)}(0)}{0!}t^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}t^1 + ... + \frac{f^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}t^{m-1}, \quad t \in [0,T].\end{aligned}$$

Kuna $f^{(k)}(0) = 0$ iga $0 \leq k < b$ korral, siis $(m-1)$-järku Taylori polünoom on võrdne nulliga. Definitsioonist 19 näeme, et $f(x) = x^b$ korral α-järku Caputo tuletis ühtib α-järku Riemanni-Liouville'i tuletisega ehk $(D^{\alpha}_{\text{Cap}})f(x) = (D^{\alpha}_{\text{R-L}} f)(x)$, $x \in [0,T]$ (vaata näide 17).

4. Diferentsiaaloperaatorite $D^{\alpha}_{\mathrm{R-L}}$, D^{α}_{Cap} ja D^{α}_{0} vahelised seosed

See peatükk tugineb Gennadi Vainikko artiklile *Which functions are fractionally differentiable?* [5].
Olgu $m \in \mathbb{N}$. Paneme tähele, et integraaloperaatori J^m korral

$$J^m C = \{f \in C^m : f(0) = f'(0) = ... = f^{(m-1)}(0) = 0\} = C^m_0.$$

Järelikult operaatoril $J^m : C \to C^m_0$ leidub pöördoperaator $D^m_0 := (J^m)^{-1}$, kus $D^m_0 : C^m_0 \to C$.

Definitsioon 22. Olgu $m \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in (m-1, m]$. Defineerime α-järku murrulise diferentsiaaloperaatori D^{α}_0 kui Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori pöördoperaatori:

$$D^{\alpha}_0 f = (J^{\alpha}_{\text{R-L}})^{-1} f, \quad f \in J^{\alpha}_{\text{R-L}} C.$$

Käesolevas peatükis uurime operaatorite D^{α}_0, $D^{\alpha}_{\text{R-L}}$ ja D^{α}_{Cap} omavahelisi seoseid.
Murrulise diferentsiaaloperaatori D^{α}_0 ning Riemanni-Liouville'i murrulise diferentsiaaloperaatori $D^{\alpha}_{\text{R-L}}$ definitsioonid erinevad üksteisest eelduste poolest. Tuleb välja, et kui $f \in C^{m-1}$, siis eeldused on samaväärsed ning

$$D^{\alpha}_{\text{R-L}} f = D^{\alpha}_0 f. \tag{4.1}$$

Teoreem 23. [vt 5] Olgu $m \in \mathbb{N}$, $f \in C^{m-1}$ ja $\alpha \in (m-1, m)$. Kehtib järgmine ekvivalents:

$$J^{m-\alpha}_{\text{R-L}} f \in C^m \Longleftrightarrow J^{m-\alpha}_{\text{R-L}} f \in C^m_0.$$

Tõestus. ($\Leftarrow$) Olgu $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (m-1, m)$ ja $f \in C^{m-1}$. Ruumide C^m_0 ja C^m definitsiooni kohaselt $C^m_0 \subset C^m$, seega

$$J^{m-\alpha}_{\text{R-L}} f \in C^m_0 \Rightarrow J^{m-\alpha}_{\text{R-L}} f \in C^m.$$

($\Rightarrow$) Olgu $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (m-1, m)$, $f \in C^m$ ja $J_{\text{R-L}}^{m-\alpha} f \in C^m$. Peame näitama, et $J_{\text{R-L}}^{m-\alpha} f \in C_0^m$. Kuna $C_0^m \subset C^m$, on vaja näidata, et

$$(J_{\text{R-L}}^{m-\alpha} f)^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, .., m-1.$$

Riemanni-Liouville'i integraaloperaatori definitsiooni kohaselt

$$\begin{aligned}(J_{\text{R-L}}^{m-\alpha} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int\limits_0^t s^{m-1-\alpha} f(t-s) ds, \quad t \in [0, T].\end{aligned}$$

Viimane võrdus kehtib, sest integraalis $\int\limits_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} f(s) ds$ võime teha muutujavahetuse $s' = t - s$.

Kui $m = 1$, siis $\left(J_{\text{R-L}}^{1-\alpha} f\right)(0) = 0$ ning järelikult $J_{\text{R-L}}^{1-\alpha} \in C_0^1$.

Olgu $m = 2$, siis $f \in C^1$ ning funktsioonil $J_{\text{R-L}}^{2-\alpha} f$ leidub tuletis $(J_{\text{R-L}}^{2-\alpha} f)'$. Kasutades teoreemi 5 saame, et

$$\begin{aligned}&\Gamma(2-\alpha)(J_{\text{R-L}}^{2-\alpha} f)'(t) = \\ &= t^{1-\alpha} f(t-t) + \int\limits_0^t s^{1-\alpha} f'(t-s) ds \\ &= t^{1-\alpha} f(0) + \int\limits_0^t s^{1-\alpha} f'(t-s) ds, \quad t \in [0, T].\end{aligned}$$

Järelikult kehtib võrdus

$$\Gamma(2-\alpha) \left(J_{\text{R-L}}^{2-\alpha} f\right)'(t) = t^{1-\alpha} f(0) + \int\limits_0^t s^{1-\alpha} f'(t-s) ds, \quad t \in [0, T]. \tag{4.2}$$

Kuna $\alpha \in (1, 2)$, siis funktsioon $t^{1-\alpha}$ on iseärane punktis $t = 0$. Järelikult saab võrdus (4.2) kehtida iga $t \in [0, T]$ korral ainult sel juhul, kui $f(0) = 0$. Seega kehtivad võrdused

$$\left(J_{\text{R-L}}^{2-\alpha} f\right)^{(k)}(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int\limits_0^t s^{1-\alpha} f^{(k)}(t-s) ds, \quad k \in \{0, 1\}, \quad t \in [0, T].$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et $m = 2$ korral

$$(J_{\text{R-L}}^{2-\alpha} f)(0) = \left(J_{\text{R-L}}^{2-\alpha} f\right)'(0) = 0,$$

st $J_{\text{R-L}}^{2-\alpha} f \in C_0^2$.

Kui $m \geq 3$, siis viies läbi analoogilise arutelu, kui juhul $m = 2$, saame näidata, et

$$\begin{aligned}\Gamma(m-\alpha)(J_{\text{R-L}}^{m-\alpha} f)^{(k)} &= \int\limits_0^t s^{m-1-\alpha} f^{(k)}(t-s)ds \\ &= \int\limits_0^t (t-s)^{m-1-\alpha} f^{(k)}(s)ds, \quad k = 0, 1, ..., m-1, \quad t \in [0, T].\end{aligned}$$

Järelikult kehtib võrduste ahel

$$(J_{\text{R-L}}^{m-\alpha} f)(0) = (J_{\text{R-L}}^{m-\alpha} f)'(0) = ... = (J_{\text{R-L}}^{m-\alpha} f)^{(m-1)}(0) = 0$$

ehk $J_{\text{R-L}}^{m-\alpha} f \in C_0^m$.

Seega oleme näidanud, et kui funktsioon $f \in C^{m-1}$ on Riemanni-Liouville'i mõttes diferentseeruv, siis on ta ka D_0^α-mõttes diferentseeruv.

□

Märkus 24. Paneme tähele, et kui $\alpha = m \in \mathbb{N}$, siis ei lange diferentsiaaloperaatorid $D_{\text{R-L}}^\alpha$ ja D_0^α kokku.

Teoreem 25. Olgu $m \in \mathbb{N}$ ning $\alpha \in (m-1, m)$. Funktsioonil $f \in C^{m-1}$ leidub Caputo tuletis $D_{\text{Cap}}^\alpha f \in C$ parajasti siis, kui funktsioonil $f - T_{m-1}f$ on murruline tuletis $D_0^\alpha(f - T_{m-1}f) \in C$. Sel juhul kehtib ka võrdus

$$D_0^\alpha(f - T_{m-1}f) = D_{\text{Cap}}^\alpha f.$$

Tõestus. ($\Rightarrow$) Leidugu funktsioonil $f \in C^{m-1}$ α-järku Caputo tuletis

$$D_{\text{Cap}}^\alpha f = D^m J_{\text{R-L}}^{m-\alpha}(f - T_{m-1}f),$$

kus $f \in C^{m-1}$ ning $J_{\text{R-L}}^{m-\alpha}(f - T_{m-1}f) \in C^m$. Teoreemi 23 kohaselt $J_{\text{R-L}}^{m-\alpha}(f - T_{m-1}f) \in C_0^m$. Toetudes Riemann-Lioville'i diferentsiaaloperaatori ja Caputo diferentsiaaloperaatori definitsioonidele ning võrdusele (4.1) saame:

$$D_{\text{Cap}}^\alpha f = D^m J_{\text{R-L}}^{m-\alpha}(f - T_{m-1}f) = D_{\text{R-L}}^\alpha(f - T_{m-1}f) = D_0^\alpha(f - T_{m-1}f). \quad (4.3)$$

Järelikult, kui funktsioonil $f \in C^{m-1}$ leidub α-järku Caputo tuletis, siis funktsioonil$f - T_{m-1}f$ on olemas ka D_0^α tuletis $D_0^\alpha(f - T_{m-1}f) \in C$.

($\Leftarrow$) Kui funktsioonil $f - T_{m-1}f$ on olemas murruline tuletis $D_0^\alpha(f - T_{m-1}f) \in C$, siis kasutades taaskord teoreemi 23 võime järeldada, et $J_{\text{R-L}}^{m-\alpha}(f - T_{m-1}f) \in C^{m-1}$ ning kehtib võrdus (4.3).
Järelikult funktsioonil $f \in C^{m-1}$ leidub Caputo murruline tuletis ning $D_{\text{Cap}}^\alpha f \in C$ $\square$

5. Funktsioonide murruline diferentseeruvus

Antud peatükk tugineb artiklile [5]. Eelmises peatükis esitasime kaks olulist teoreemi, mis toovad välja diferentsiaaloperaatorite D_0^α, $D_{\text{R-L}}^\alpha$ ja D_{Cap}^α vahelised seosed. Meid huvitab, milliste funktsioonide $f \in C$ korral kehtib, et $J_{\text{R-L}}^{m-\alpha} f \in C_0^m$ (ehk f on D_0^α-diferentseeruv). Selleks esitame teoreemi, mis annab meile kriteeriumid funktsiooni D_0^α-diferentseeruvuse kohta ning toome konkreetseid näiteid funktsioonide D_0^α-diferentseeruvusest.

Definitsioon 26. Olgu $\alpha \in (0, 1]$. Ruumi $\mathcal{H}^\alpha := \mathcal{H}^\alpha[0, T]$, mis koosneb funktsioonidest $f \in C$, kus

$$\|f\| := \max_{0 \le t \le T} |f(t)| + \sup_{0 \le s,t \le T, s \ne t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|^\alpha} < \infty,$$

nimetatakse Hölderi ruumiks.

Kirjanduses nimetatakse ruumi $\mathcal{H}^\alpha$ (eriti kui $\alpha = 1$) ka Lipschitzi ruumiks.

Ruumi $\mathcal{H}^\alpha$ kinnist alamruumi, mis koosneb funktsioonidest $f \in \mathcal{H}^\alpha$, mille korral

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\substack{0 \le s,t \le T \\ 0 < |s-t| \le \varepsilon}} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|^\alpha} = 0,$$

tähistame $\mathcal{H}_0^\alpha := \mathcal{H}_0^\alpha[0, T]$.

Teoreem 27. [5] Olgu $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (m - 1, m)$ ja $f \in C$. Järgmised väited on samaväärsed:

(i) $f \in J_{\text{R-L}}^\alpha C$ ehk leidub murruline tuletis $D_0^\alpha f = (J_{\text{R-L}}^\alpha)^{-1} \in C$;

(ii) funktsiooni $f \in C_0^{m-1}$ puhul leidub lõplik piirväärtus

$$\gamma_{m-1} := \lim_{t \to 0} t^{m-1-\alpha} f^{(m-1)}(t) \tag{5.1}$$

ning kehtib võrdus

$$\lim_{\theta\to 1}\sup_{0\le t\le T}\left|\int\limits_{\theta t}^{t}(t-s)^{m-1-\alpha-1}(f^{(m-1)}(t)-f^{(m-1)}(s))ds\right|=0; \qquad (5.2)$$

(iii) $f\in C_0^{m-1}$, funktsioon $f^{(m-1)}$ on avaldatav kujul

$$f^{(m-1)}(t)=\gamma_{m-1}t^{m-1-\alpha}+v_{m-1}(t),\quad t\in[0,T],$$

kus γ_{m-1} on konstant, $v_{m-1}\in\mathcal{H}_0^{\alpha-(m-1)}$, $v_{m-1}(0)=0$ ja Riemanni integraal

$$w_{m-1}(t):=\int\limits_{0}^{t}(t-s)^{m-1-\alpha-1}(v_{m-1}(t)-v_{m-1}(s))ds$$

koondub iga $t\in(0,T]$ korral ning defineerib funktsiooni $w_{m-1}\in C$, mille korral $w_{m-1}(0)=0$.

Kui $f\in J^{\alpha}_{\text{R-L}}C$, siis

$$(D_0^\alpha f)(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\Bigg[t^{m-1-\alpha}f^{(m-1)}(t)+$$
$$+(\alpha-m+1)\int\limits_0^t(t-s)^{m-1-\alpha-1}(f^{(m-1)}(t)-f^{(m-1)}(s))ds\Bigg],\quad t\in(0,T],$$
$$(D_0^\alpha f)(0)=\Gamma(\alpha+1-m+1)\gamma_{m-1}.$$

Sõnastatud teoreem aitab meil uurida funktsioonide D_0^α-difernetseeruvust.

Näide 28. Olgu $0<\beta<1$ ning funktsioon $f\in\mathcal{H}^\beta$ selline, et $f(0)=0$. Näitame teoreemi 27 abil, et murruline tuletis $D_0^\alpha f$, $0\le\alpha<\beta$ leidub. Selleks kontrollime väite (ii) kehtivust: Hölderi ruumi definitsiooni järgi $f\in C$, ning eelduse järgi $f(0)=0$, seega $f\in C_0$. Kuna

$$\gamma_0=\lim_{t\to 0}t^{-\alpha}f(t)=0,$$

siis leidub lõplik piirväärtus $\gamma_0 = 0$.
Näitame, et kehtib võrdus (5.2):

$$\lim_{\theta\to 1}\sup_{0\le t\le T}\left|\int_{\theta t}^{t}(t-s)^{-\alpha-1}(f(t)-f(s))ds\right|$$

$$\le \lim_{\theta\to 1}\int_{\theta t}^{t}\sup_{0\le t\le T}|(t-s)^{-\alpha-1}(f(t)-f(s))|ds$$

$$= \lim_{\theta\to 1}\int_{\theta t}^{t}\sup_{0\le t\le T}\left|\frac{f(t)-f(s)}{(t-s)^{\alpha+1}}\right|ds \le \lim_{\theta\to 1}\int_{\theta t}^{t}\sup_{0\le t\le T}\frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^{\beta}}ds.$$

Paneme tähele, et $\sup_{0\le t\le T}\frac{|f(s)-f(t)|}{|s-t|^{\beta}} \le \|f\|_{\mathcal{H}^\beta}$, seega

$$\lim_{\theta\to 1}\int_{\theta t}^{t}\sup_{0\le t\le T}\frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^{\beta}}ds \le \lim_{\theta\to 1}\int_{\theta t}^{t}\|f\|_{\mathcal{H}^\beta}ds$$

$$= \|f\|_{\mathcal{H}^\beta}\lim_{\theta\to 1}\int_{\theta t}^{t}ds = \|f\|_{\mathcal{H}^\beta}\cdot 0 = 0.$$

Oleme näidanud, et teoreemi 27 väide (ii) kehtib, seega funktsioonil $f \in \mathcal{H}^\beta$ leidub murruline tuletis $D_0^\alpha f \in C$.

Näide 29. Olgu $\alpha \in (0,1)$, näitame, et funktsioonil $f(t) = t^\alpha$, $t \in [0,T]$ leidub murruline tuletis $D_0^\alpha f \in C$, kasutades teoreemi 27.
Kasutame jällegi väidet (ii). Kuna $f(0) = 0$, siis $f \in C_0$. Leiame piirväärtuse (5.1):

$$\gamma_0 = \lim_{t\to 0} t^{-\alpha}t^\alpha = \lim_{t\to 0}\frac{t^\alpha}{t^\alpha} = 1.$$

Näitame, et kehtib võrdus (5.2). Vaatleme integraali $\int_{\theta t}^{t}(t-s)^{-\alpha-1}(t^\alpha - s^\alpha)ds$.

Peame näitama, et kui $\theta \to 1$, siis $\sup_{0\le t\le T}|\int_{\theta t}^{t}(t-s)^{\alpha-1}(t^\alpha - s^\alpha)ds| \to 0$.
Paneme tähele, et

$$\int_{\theta t}^{t}(t-s)^{-\alpha-1}(t^\alpha - s^\alpha)ds = \int_{\theta t}^{t}\frac{t^\alpha}{(t-s)^{\alpha+1}}ds - \int_{\theta t}^{t}\frac{s^\alpha}{(t-s)^{\alpha+1}}ds.$$

Vaatleme viimase võrduse paremal poolel olevaid liidetavaid. Esimese liidetava saame kirjutada kujul

$$\begin{aligned}\int\limits_{\theta t}^{t} \frac{t^\alpha}{(t-s)^{\alpha+1}} ds = t^\alpha \int\limits_{\theta t}^{t} \frac{1}{(t-s)^{\alpha+1}} ds = t^\alpha \int\limits_{\theta t}^{t} \frac{-1}{(t-s)^{\alpha+1}} d(t-s) \\ = \frac{t^\alpha}{(-1)\cdot(-\alpha)} \frac{1}{(t-s)^\alpha}\Big|_{s=\theta t}^{s=t} = \frac{t^\alpha}{\alpha(t-s)^\alpha}\Big|_{s=\theta t}^{s=t}.\end{aligned}$$

Teise liidetava puhul kasutame ositi integreerimist, võttes $u = s^\alpha$ ning $dv = \frac{1}{(t-s)^{\alpha+1}} ds$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\theta t}^{t} \frac{s^\alpha}{(t-s)^{\alpha+1}} ds &= \frac{s^\alpha}{\alpha(t-s)^\alpha}\Big|_{s=\theta t}^{s=t} - \int\limits_{\theta t}^{t} \frac{\alpha s^{\alpha-1}}{(t-s)^\alpha \alpha} ds \\ &= \frac{s^\alpha}{\alpha(t-s)^\alpha}\Big|_{s=\theta t}^{s=t} - \int\limits_{\theta t}^{t} \frac{s^{\alpha-1}}{(t-s)^\alpha} ds.\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}\int\limits_{\theta t}^{t} (t-s)^{-\alpha-1}(t^\alpha - s^\alpha) ds &= \frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha(t-s)^\alpha}\Big|_{s=\theta t}^{s=t} + \int\limits_{\theta t}^{t} \frac{s^{\alpha-1}}{(t-s)^\alpha} ds \\ &= -\frac{t^\alpha(1-\theta^\alpha)}{\alpha t^\alpha (1-\theta)^\alpha} + \int\limits_{\theta t}^{t} \frac{s^{\alpha-1}}{(t-s)^\alpha} ds \\ &= -\frac{(1-\theta^\alpha)}{\alpha(1-\theta)^\alpha} + \int\limits_{\theta t}^{t} \frac{s^{\alpha-1}}{(t-s)^\alpha} ds.\end{aligned}$$

Integraali $\int\limits_{\theta t}^{t} \frac{s^{\alpha-1}}{(t-s)^\alpha} ds$ saame ümber kirjutada järgmiselt:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\theta t}^{t} \frac{s^{\alpha-1}}{(t-s)^\alpha} ds &= \int\limits_{\theta t}^{t} \frac{(t-s)^{-\alpha}}{t^{1-\alpha}} \frac{s^{\alpha-1}}{t^{\alpha-1}} ds \\ &= \int\limits_{\theta t}^{t} \frac{1}{t} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-\alpha} \left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha-1} ds.\end{aligned}$$

Viimases integraalis teeme muutujavahetuse $x = \frac{s}{t}$. Siis saame võrduse

$$\int\limits_{\theta t}^{t} \frac{s^{\alpha-1}}{(t-s)^{\alpha}} ds = \int\limits_{\theta}^{1} (1-x)^{-\alpha} x^{\alpha-1} dx.$$

Järelikult

$$\int\limits_{\theta t}^{t} (t-s)^{-\alpha-1}(t^{\alpha}-s^{\alpha}) ds = -\frac{(1-\theta^{\alpha})}{\alpha(1-\theta)^{\alpha}} + \int\limits_{\theta}^{1} (1-x)^{-\alpha} x^{\alpha-1} dx.$$

Peame näitama, et kehtib võrdus (5.2) ehk

$$\lim_{\theta \to 1} \sup_{0 \le t \le T} \left| -\frac{(1-\theta^{\alpha})}{\alpha(1-\theta)^{\alpha}} + \int\limits_{\theta}^{1} (1-x)^{-\alpha} x^{\alpha-1} dx \right| = 0.$$

Kuna vaadeldav avaldis ei sõltu muutujast t, on meil vaja näidata, et

$$-\frac{(1-\theta^{\alpha})}{\alpha(1-\theta)^{\alpha}} + \int\limits_{\theta}^{1} (1-x)^{-\alpha} x^{\alpha-1} dx \to 0, \text{ kui } \theta \to 1.$$

Esimese liidetava piirväärtuse saame leida L'Hospitali reegli järgi:

$$\lim_{\theta \to 1} \frac{1-\theta^{\alpha}}{\alpha(1-\theta)^{\alpha}} = \lim_{\theta \to 1} \frac{-\alpha\theta^{\alpha-1}}{-\alpha(1-\theta)^{\alpha-1}} = \lim_{\theta \to 1} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\alpha-1} = 0.$$

Hindame teist liidetavat ülevalt funktsiooniga, mis koondub samuti nulliks:

$$0 \le \int\limits_{\theta}^{1} (1-x)^{-\alpha} x^{\alpha-1} dx \le \int\limits_{\theta}^{1} (1-x)^{-\alpha} \theta^{\alpha-1} dx = -\theta^{\alpha-1} \int\limits_{\theta}^{1} (1-x)^{-\alpha} d(1-x)$$

$$= -\theta^{\alpha-1} \frac{(1-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_{x=\theta}^{x=1} = -\theta^{\alpha-1} \frac{(1-\theta)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \to 0, \text{ kui } \theta \to 1.$$

Seega oleme näidanud, et teoreemi 27 väide (ii) kehtib ning järelikult funktsioonil $f(t) = t^{\alpha}$ leidub murruline tuletis $D_0^{\alpha} f \in C$.

Järgmisena vaatleme funktsiooni, mis on väliselt sama sile kui $f(t) = t^{\alpha}$, $t \in [0, T]$ aga mis ei ole D_0^{α}-diferentseeruv.

Näide 30. Olgu $\alpha \in (0,1)$ ja $f(t) = (T-t)^\alpha - T^\alpha$, kus $0 \le t \le T$. Näitame, et f ei ole D_0^α-diferentseeruv.
Kasutame teoreemi 27 väidet (iii). Vaatleme juhtu $t = T$. Me näeme, et integraal $w_m(T)$ ei koondu. See järeldub asjaolust, et

$$\begin{aligned} w_m(T) &= \int_0^T (T-s)^{-\alpha-1}((T-T)^\alpha - T^\alpha) - (T-s)^\alpha + T^\alpha)ds \\ &= -\int_0^T (T-s)^{-1}ds. \end{aligned}$$

Kuna viimane integraal hajub, siis ka $w_m(T)$ hajub. Seega väide (iii) ei kehti ja funktsioon $f(t) = (T-t)^\alpha - T^\alpha$ ei ole D_0^α-diferentseeruv.

Märkus 31. Kasutades teoreemi 23, saame teoreemi 27 ümber formuleerida funktsiooni $f \in C^{m-1}$ Riemanni-Liouville'i diferentsiaaloperaatori kohta (sest me teame, et sel juhul $D_{\text{R-L}}^\alpha f = D_0^\alpha f$). Ainuke muutus seisneb selles, et väite (i) asemel on väide (i)$_{\text{R-L}}$:

(i)$_{\text{R-L}}$ leidub murruline tuletis $D_{\text{R-L}}^\alpha f \in C$.

Sõnastame ümber teoreemi 27 Caputo diferentsiaaloperaatori jaoks.

Teoreem 32. Olgu $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (m-1, m)$ ja $f \in C^{m-1}$. Järgmised väited on samaväärsed:

(i)$_{\text{Cap}}$ leidub murruline tuletis $D_{\text{Cap}}^\alpha f \in C$;

(ii)$_{\text{Cap}}$ leidub lõplik piirväärtus

$$\gamma_{m-1} := \lim_{t\to 0} t^{m-1-\alpha}(f^{(m-1)}(t) - f^{(m-1)}(0)) \tag{5.3}$$

ning kehtib võrdus

$$\lim_{\theta\to 1} \sup_{0\le t\le T} \left| \int_{\theta t}^{t} (t-s)^{m-1-\alpha-1}(f^{(m-1)}(t) - f^{(m-1)}(s))ds \right| = 0; \tag{5.4}$$

(iii)$_{\text{Cap}}$ funktsioon $f^{(m-1)}$ on avaldatav kujul

$$f^{(m-1)}(t) - f^{(m-1)}(0) = \gamma_{m-1}t^{m-1-\alpha} + v_{m-1}(t), \quad t \in [0,T],$$

kus γ_{m-1} on konstant, $v_{m-1} \in \mathcal{H}_0^{\alpha-m+1}$ ja Riemanni integraal

$$w_{m-1}(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{m-1-\alpha-1}(f^{(m-1)}(t) - f^{(m-1)}(s))ds,$$

koondub iga $t \in (0,T]$ korral ning defineerib funktsiooni $w_{m-1} \in C(0,T]$, kus $\lim_{t\to 0} w_{m-1}(t) = w_{m-1}(0)$.

Kui funktsioon $f \in C^m$ ja $D^\alpha_{\mathrm{Cap}} f \in C$, siis

$$\begin{aligned}(D^\alpha_{\mathrm{Cap}} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \big[& t^{m-1-\alpha}(f^{(m-1)}(t) - f^{(m-1)}(0)) \\ & + (\alpha - m + 1) \int\limits_0^t (t-s)^{m-1-\alpha-1}(f^{(m-1)}(t) - f^{(m-1)}(s))ds \big], \quad 0 < t \leq T,\end{aligned}$$

$$(D^\alpha_{\mathrm{Cap}} f)(0) = \Gamma(\alpha + 1 - m + 1)\gamma_{m-1}.$$

Teoreemi 32 tõestus põhineb teoreemidel 25, 27 ja järgmisel võrdusel

$$(f - T_m f)^{(m-1)}(t) = f^{(m-1)}(t) - f^{(m-1)}(0), \quad t \in [0,T]. \tag{5.5}$$

Näitame, et (5.5) kehtib:

$$\begin{aligned}(f - T_m f)^{(m-1)}(t) &= f^{(m-1)}(t) - (T_m f)^{(m-1)}(t) \\ &= f^{(m-1)}(t) - \left[\frac{f^{(0)}(0)}{0!} t^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} t^1 + ... + \frac{f^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} t^{(m-1)} \right]^{(m-1)} \\ &= f^{(m-1)}(t) - \frac{(m-1)(m-2) \cdot ... \cdot (m-m+1) f^{m-1}(0)}{(m-1)!} \\ &= f^{(m-1)}(t) - f^{(m-1)}(0), \quad t \in [0,T].\end{aligned}$$

Kirjandus

[1] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations.* Academic Press, San Diego, 1999.

[2] M. Lillemäe, *Numbriline meetod Caputo tuletisega diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks (bakalaureusetöö).* Tartu Ülikool, Tartu, 2016.

[3] K. Väljako, *Murrulised tuletised ja Caputo tuletisega lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamine (bakalaureusetöö).* Tartu Ülikool, Tartu, 2016.

[4] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type.* Lecture Notes in Mathematics 2004, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.

[5] G. Vainikko, "Which functions are fractionally differentiable?," *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, vol. 35, no. 4, pp. 465–487, 2016.

[6] G. Kangro, *Matemaatiline analüüs I.* Valgus, Tallinn, 1982.

[7] G. Kangro, *Matemaatiline analüüs II.* Valgus, Tallinn, 1968.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Hanna Britt Soots

1. Annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose, Murruliste diferentsiaaloperaatorite omavahelised seosed, mille juhendajad on lektor Kaido Lätt ning professor Arvet Pedas reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni,

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Hanna Britt Soots

08.05.2019