ТАРТУСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

III

ТАРТУ 1990

ТАРТУСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра теоретической механики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ
III

К. Соонетс, И. Вайникко

Тарту 1990

Утверждено на заседании совета математического факультета 16 марта 1990 г.

Учебное пособие является продолжением пособий, изданных в 1982 и 1985 годах.

В учебном пособии изложены элементы векторного исчисления, аналитической геометрии и линейной алгебры в объеме курса высшей математики для экономического факультета Тартуского университета. В Дополнении приведены некоторые понятия о множествах и отображениях, используемые в математических моделях экономики.

При составлении учебного пособия в первую очередь учтены потребности студентов-заочников. Поэтому теоретический материал иллюстрируется сравнительно большим количеством примеров.

Важнейшие формулы нумеруются в каждом параграфе отдельно. Конец примера обозначен знаком К. Студенту рекомендуется проработать и все примеры, так как они способствуют лучшему пониманию и освоению общих рассуждений. Доказательства теорем заканчиваются буквосочетанием ч.т.д. .

Авторы благодарят сотрудников кафедры теоретической механики Л.Авасте, Ю.Волмер, Х.Кайму и Х.Кулль за техническое оформление пособия и доцента кафедры алгебры и геометрии А. Парринга за ценные советы при подробе материала и примеров.

Авторы наперед весьма признательны всем за информацию о замеченных опечатках и неточностях.

Авторы

§ I. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

I. Скаляры и векторы

При изучении и описании некоторого объекта или явления определяются различные величины, так называемые параметры, характеризующие изучаемый объект или явление. Такими параметрами могут быть, например, количество рабочих, мощность станков (при описании производственных возможностей), температура, давление и влажность воздуха. Каждый из названных параметров дается лишь числовым значением и их называют скалярами. Приведем примеры другого рода. При действии силы на тело необходимо кроме величины силы знать и линию действия и направление силы. В прогнозе погоды дается скорость ветра и его направление. Скорость и сила есть примеры векторных величин.

Определение. Скалярной называется величина, определяемая числовым значением (одним числом). Векторной называется величина, определяемая числовым значением и направлением.

2. Понятие вектора

В этом параграфе мы ограничимся трехмерным пространством.

Определение. Вектором называется направленный отрезок, т.е. отрезок, у которого различают начало и конец.

Если точки A и B обозначают начало и конец вектора, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или одной строчной буквой, снабженной стрелкой (рис. Iа), например, вектор $\vec{a}$. В печати векторы часто пишутся буквами полужирного шрифта без стрелки.

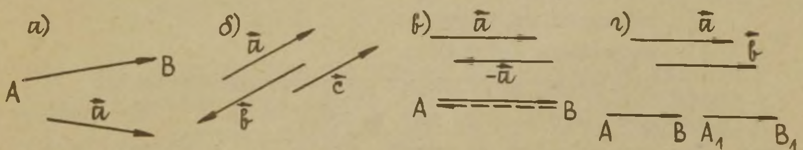

Рис. I.

Длиной вектора называется длина порождающего его отрезка AB. Это можно обозначать по-разному, например,

$$|\vec{AB}| = AB; \quad |\vec{a}| = a.$$

Если начальная и конечная точки вектора совпадают, то вектор $\vec{AA}$ называется нулевым вектором $\vec{0}$ и его длина равна 0, направление не определено.

Вектор длиной 1 называется единичным вектором.

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными (рис. 1б). Коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Коллинеарные векторы могут быть сонаправлены (рис. 1 б) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$ или противонаправлены $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Два противонаправленных, по длине равных вектора (рис.1 в) называются противоположными. Противоположный к вектору $\vec{a}$ (или $\vec{AB}$) вектор обозначается $-\vec{a}$ ($-\vec{AB}$ или $\vec{BA}$).

Векторы называются равными, если они коллинеарны, сонаправлены и имеют равные длины. На рис. 1 г указаны две пары равных векторов: $\vec{a} = \vec{b}$, $\vec{AB} = \vec{A_1B_1}$. В такой трактовке равенства векторов один вектор, приложенный в любой точке пространства, является представителем множества всех сонаправленных и по длине равных векторов. Другими словами, всякий вектор можно переносить в пространстве параллельно самому себе в произвольную точку пространства. Такие векторы называются свободными.

Векторы, лежащие в одной плоскости или параллельных плоскостях, называются компланарными.

3. Линейные операции над векторами

Рассмотрим линейные операции (действия) над свободными векторами.

Линейными операциями называются:

I сложение векторов,

II вычитание векторов,

III умножение вектора на действительное число.

I Сложение. Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Перенесем их так, что они выходят из общей, свободно выбранной точки (рис. 2а).

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}+\vec{b}$, который является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и выходящего из общего начала слагаемых векторов.

Это так называемое правило параллелограмма пригодно для сложения неколлинеарных векторов.

Правило сложения векторов можно представить и в виде правила треугольника. Построим вектор $\vec{a}$, из его конца проводим вектор $\vec{b}$ и суммой $\vec{a}+\vec{b}$ является вектор, соединяющий начало $\vec{a}$ с концом $\vec{b}$ (рис. 2б, в). Для неколлинеарных векторов это правило совпадает с правилом параллелограмма.

Если число слагаемых больше двух, то повторное применение правила треугольника приводит к правилу многоугольника, где суммой является вектор, соединяющий начало первого слагаемого с концом последнего. Этот многоугольник может быть не плоским. На рис. 2г показано сложение четырех векторов $\vec{OD} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

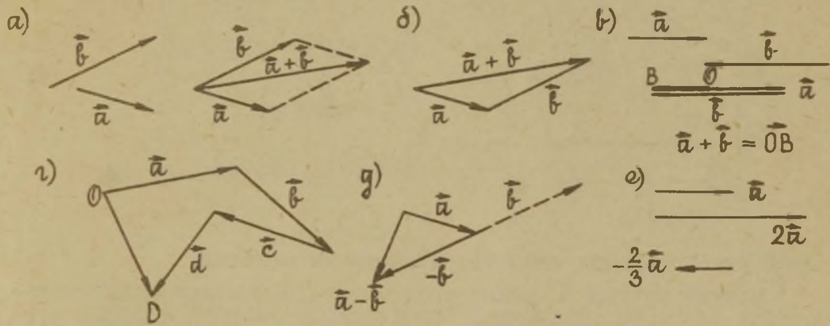

Рис. 2.

II Вычитание. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}-\vec{b}$, равный сумме уменьшаемого на противоположный вектор вычитаемого (рис. 2д):

$$\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-\vec{b}). \qquad (I)$$

III Умножение вектора на число. Произведением вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор $k\vec{a}$, который сонаправлен с $\vec{a}$ при $k>0$, противонаправлен при $k<0$ и по длине равен $|k\vec{a}| = |k|\cdot|\vec{a}|$ (рис. 2е).

При $k=0$ вектор $k\vec{a}$ превращается в нулевой вектор.

Можно доказать, что линейные операции над векторами обладают следующими **свойствами**:

$$1)\ \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a},$$
$$2)\ (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}),$$
$$3)\ k_1(k_2\vec{a})=(k_1k_2)\vec{a}, \qquad (2)$$
$$4)\ (k_1+k_2)\vec{a}=k_1\vec{a}+k_2\vec{a},$$
$$5)\ k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}.$$

Покажем правильность 5) свойства. Сначала сложим $\vec{a}+\vec{b}$ и найдем $k(\vec{a}+\vec{b})$ (рис. 3а). Затем построим $k\vec{a}$, $k\vec{b}$ и сложим $k\vec{a}+k\vec{b}$. Оказывается, что получится один и тот же вектор $\vec{OC_1}$:

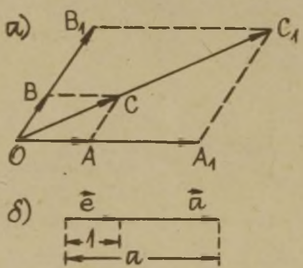

Рис. 3.

$\vec{OA}=\vec{a}$; $\vec{OB}=\vec{b}$; $\vec{OC}=\vec{a}+\vec{b}$;

$\vec{OC_1}=k(\vec{a}+\vec{b})$;

$\vec{OA_1}=k\vec{a}$; $OB_1=k\vec{b}$;

$\vec{OC_1}=k\vec{a}+k\vec{b}$;

$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ ч.т.д.

Проверку остальных свойств предоставим читателю.

Всякий вектор $\vec{a}$ можно представить с помощью единичного вектора $\vec{e}$, сонаправленного с $\vec{a}$ ($|\vec{e}|=1$, $\vec{e}\uparrow\uparrow\vec{a}$) (рис. 3б) на основании правила умножения вектора на число следующим образом:

$$\vec{a}=a\vec{e} \qquad \text{или} \qquad \vec{e}=\frac{1}{a}\vec{a}. \qquad (3)$$

П р и м е р. В параллелограмме ABCD даны векторы $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{AD}=\vec{b}$. Выразить векторы $\vec{AC}$, $\vec{MA}$, $\vec{MB}$ и $\vec{CD}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 4).

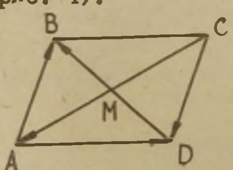

Рис. 4.

По правилу сложения векторов имеем

$$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}=\vec{a}+\vec{b}.$$

По правилу умножения вектора на число

$$\vec{MA}=-\vec{AM}=-\frac{1}{2}\vec{AC}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).$$

Из треугольника AMB получим

$$\vec{MB} = \vec{MA} + \vec{AB} = -\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}) .$$

Наконец, $\vec{CD} = -\vec{DC} = -\vec{AB} = -\vec{a}$. К.

4. Составляющая и проекция вектора на ось

Проекцией точки A на прямую l называется точка A_1 , в которой пересекается прямая l с плоскостью, проходящей через точку A и перпендикулярной к l (рис. 5а). Это означает, что проекцией точки на прямую является основание перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Пусть даны направленная прямая (ось) l и вектор $\vec{AB} = \vec{a}$. Спроектируем вектор на ось l , проекции начала и конца вектора $\vec{AB}$ обозначены через A_1 и B_1 (рис. 5б).

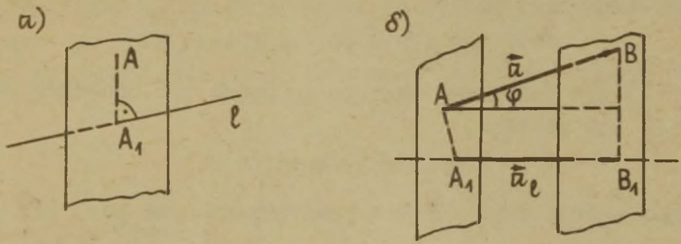

Рис. 5.

Определения. I) Составляющей вектора $\vec{a}$ на ось l называется вектор $\vec{a}_l = \vec{A_1B_1}$, соединяющий проекции начала и конца вектора на ось l (рис. 5б).

2) Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется произведение длины вектора $|\vec{a}|$ на косинус угла между вектором и осью (рис. 6а).

$$\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi , \quad 0 \le \varphi \le \pi . \qquad (4)$$

В частных случаях (рис. 6б)

$$\text{пр}_l \vec{a} = \begin{cases} 0, & \vec{a} \perp l \quad (\varphi = \frac{\pi}{2}) ; \\ a, & \vec{a} \uparrow\uparrow l \quad (\varphi = 0) ; \\ -a, & \vec{a} \uparrow\downarrow l \quad (\varphi = \pi) . \end{cases}$$

Из определений составляющей и проекции вектора на ось видно, что $\text{пр}_l \bar a$ и длина составляющей $|\bar a_l|$ связаны следующим образом:

$$\text{пр}_l \bar a = \begin{cases} a_l, & \bar a_l \uparrow\uparrow l \\ -a_l, & \bar a_l \uparrow\downarrow l \end{cases} \qquad (5)$$

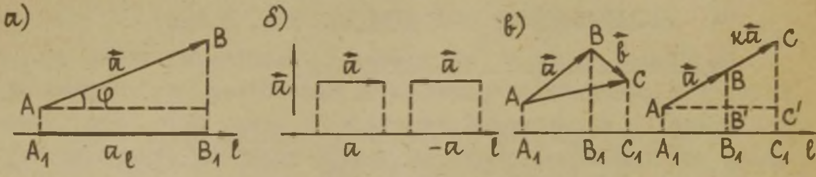

Рис. 6.

<u>Свойства проекции</u> вектора на ось:

1) проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций слагаемых векторов:

$$\text{пр}_l(\bar a + \bar b) = \text{пр}_l \bar a + \text{пр}_l \bar b \quad ;$$

2) при умножении вектора на число его проекция умножается на это же число

$$\text{пр}_l(k\bar a) = k\,\text{пр}_l \bar a \quad .$$

Правильность этих свойств усматривается из рис. 6в:

1) $A_1B_1 = \text{пр}_l \bar a$; $B_1C_1 = \text{пр}_l \bar b$; $A_1C_1 = \text{пр}_l(\bar a + \bar b)$;

$A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$ ч.т.д.;

2) $A_1B_1 = \text{пр}_l \bar a$; $A_1C_1 = \text{пр}_l(k\bar a)$.

Из подобия треугольников ABB' и ACC' следует

$$A_1C_1 = k \cdot A_1B_1 \text{ ч.т.д.}$$

5. <u>Метод координат</u>

<u>Аналитическая геометрия</u> - раздел математики, в котором изучаются геометрические объекты с помощью алгебраических методов. Основным методом аналитической геометрии является <u>метод координат</u>. Координатами точки являются числа, заданием которых определяется положение точки на прямой, плоскости или в пространстве.

Вспомним коротко понятия, изученные в средней школе.

Прямая, на которой указано положительное направление называется осью. Положительное направление обычно указывается стрелкой. Фиксируем на этой оси точку O (начало координат) и задаем отрезок, длина которого принимается за единицу длины. В таком случае говорят, что дана числовая ось. Начало координат O разбивает ось на положительную и отрицательную полуоси (рис. 7а).

I <u>Координата точки на прямой</u>. Пусть дана числовая ось Ox (в дальнейшем: ось x). Произвольной точке P оси сопоставим действительное число x , по абсолютной величине равное длине отрезка OP и взятое со знаком плюс, если точка находится на положительной полуоси и со знаком минус, если она находится на отрицательной полуоси. Если точка совпадает с началом координат, то $x=0$. Будем говорить, что точка P имеет координату x (абсцисса точки) и запишем $P(x)$. Наоборот, данному числу x можно сопоставить точку P на числовой оси. Это означает, что точки числовой оси P и действительные числа x во взаимно-однозначном соответствии

$$P \leftrightarrow x .$$

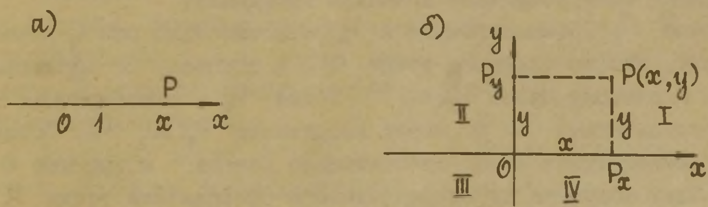

Рис. 7.

II <u>Координаты точки на плоскости</u>. Рассмотрим множество точек плоскости. Проведем через некоторую точку две взаимно перпендикулярные оси x и y и примем точку пересечения этих осей за начало координат O (рис. 7б). Ось x называется осью абсцисс, ось y - осью ординат и они составляют прямоугольную систему координат на плоскости. Оси координат делят плоскость на четыре квадранта.

Определим положение произвольной ~~точки~~ плоскости P относительно выбранной нами системы координат следующим образом (рис. 7б). Проектируем точку P на оси координат - получим точки P_x и P_y. Точкам P_x и P_y на осях x и y

2

соответствуют действительные числа – координаты точек $P_x(x)$ и $P_y(y)$. Пара чисел (x, y) составляет <u>координаты точки</u> плоскости P и это запишется в виде $P(x, y)$. Первая координата x называется <u>абсциссой</u>, вторая координата y – <u>ординатой</u> точки P.

Если задана пара чисел (x, y), то отложим на осях координат отрезки $OP_x = x$ и $OP_y = y$. Из точек P_x и P_y восстановим осям координат перпендикуляры. Точка пересечения этих перпендикуляров является точкой P, имеющей координаты (x, y). Из построений ясно, что в данной системе координат каждой точке P соответствует только одна пара чисел (x, y) и по данной паре (x, y) можно построить лишь одну точку.

Таким образом, в данной системе координат точки плоскости и упорядоченные пары действительных чисел во взаимно-однозначном соответствии

$$P \leftrightarrow (x, y).$$

<u>Пример</u>. Точка $P_1(a, b)$ принадлежит первому квадранту $(a > 0,\ b > 0)$. Найти координаты точек, симметричных к ней относительно осей координат и начала координат.

Точка P_2, симметричная к P_1 относительно оси y, имеет ординату, равную ординате точки P_1, а абсциссу с обратным знаком и поэтому имеем $P_2(-a, b)$. Точка P_4, симметричная к P_1 относительно оси x имеет координаты $P_4(a, -b)$. Точка P_3, симметричная к P_1 относительно начала координат O может быть получена путем зеркального отображения точки P_2 относительно оси x (или точки P_4 относительно оси y) и имеем $P_4(-a, -b)$. К.

6. <u>Прямоугольные координаты точки в пространстве</u>

Геометрическое (или реальное) пространство, в котором мы живем, трехмерно. Здесь мы имеем в виду тот факт, что объекты этого пространства характеризуются, как правило, тремя измерениями – длиной, шириной и высотой (или глубиной). Для изучения геометрии трехмерного пространства, аналогично тому, как это было сделано на плоскости, введем в пространстве прямоугольную систему координат.

Проведем через какую-нибудь точку O три взаимно перпендикулярные числовые оси. Точку O примем за начало координат на каждой оси и укажем на них единицу длины. Эти оси образуют систему координат в пространстве и назовем соответственно осью абсцисс (ось x), осью ординат (ось y) и осью аппликат (ось z) (рис. 8). При повороте по меньшему углу от положительного направления оси x на положительное направление оси y происходит перемещение оси правого винта по положительному направлению оси z и поэтому данная система координат называется системой правой руки. Меняя положительное направление какой-нибудь одной оси на обратное, получим систему левой руки.

Плоскости, проведенные через попарно взятые оси, образуют координатные плоскости xy, yz, zx. Координатные плоскости делят все пространство на восемь октантов, отсчет которых ведется против часовой стрелки: четыре над плоскостью xy и четыре под ней.

Наглядное представление о координатных осях и плоскостях получим, совмещая начало координат O с углом комнаты и направляя оси x и y вдоль сторон пола, ось z вертикально вверх. В роли координатных плоскостей будут тогда пол и две скрещивающиеся стены.

Положение точки P относительно выбранной системы координат определим через координаты проекций точки на координатные оси. Проекции точки P на оси обозначены на рис. 8 через P_x, P_y, P_z. Координаты проекций на соответствующих осях назовем координатами точки P: абсцисса x, ордината y, аппликата z. Обстоятельство, что точка P имеет названные координаты, запишется $P(x,y,z)$. Координаты точки указываются в строгом порядке – они представляют упорядоченную тройку чисел. Отрезки OP_x, OP_y, OP_z, взятые со знаком плюс или минус в зависимости от расположения P_x, P_y, P_z на соответствующих осях, называются координатными отрезками.

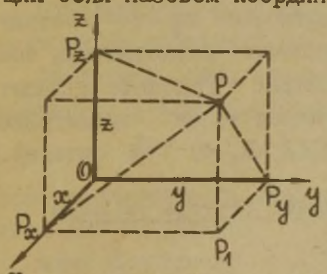

Рис. 8.

Проектирование точки P на координатные оси можно осуществить и следующим образом (рис. 8). Спроектируем точку P на плоскость xy (точка P_1) и затем точку P_1 на оси x и y. Тогда имеем равные отрезки $OP_x = P_yP_1 = x$, $OP_y = P_xP_1 = y$, $OP_z = P_1P = z$. Используя эти равенства, легко построить точку P по ее заданным координатам (x,y,z) : из точки O отложим отрезок $OP_x = x$, из точки P_x отрезок $P_xP_1 = y$ параллельно оси y и наконец из точки P_1 восставим перпендикуляр $P_1P = z$ к координатной плоскости xy.

Из определения координат точки P в пространстве и способа построения точки по заданной тройке чисел (x,y,z) следует, что каждой точке P соответствует точно одна упорядоченная тройка чисел (x,y,z) и наоборот.

В данной пространственной системе координат точки пространства и упорядоченные тройки чисел (x,y,z) во взаимно-однозначном соответствии

$$P \leftrightarrow (x, y, z).$$

Примеры. I) Начало координат имеет нулевые координаты $O(0,0,0)$.

2) Точки оси y имеют нулевые абсциссу и аппликату: $P(0,y,0)$.

3) Точки плоскости xy имеют нулевую аппликату и все точки с координатами $P(x,y,0)$ принадлежат плоскости xy.

4) Дана точка $P_1(2,3,-4)$. Найдем симметричные к ней точки относительно координатных плоскостей.

Точка P_1 находится в $\overline{\text{V}}$ октанте на 4 единицы ниже плоскости xy. Симметричная точка P_2 относительно плоскости xy находится на 4 единицы выше плоскости xy и поэтому имеем $P_2(2,3,4)$ (I октант). Аналогично, симметричная точка относительно плоскости yz находится в $\overline{\text{VI}}$ октанте и имеет координаты $P_3(-2,3,-4)$ и симметричная точка относительно плоскости zx имеет координаты $P_4(2,-3,-4)$ ($\overline{\text{VIII}}$ октант).К.

7. Координаты вектора. Разложение вектора по осям координат

I Координаты вектора. Рассмотрение векторов только в виде направленных отрезков ограничивает возможности их использования. Постараемся векторы описывать при помощи совокупности чисел.

Пусть в прямоугольной системе координат задан вектор $\overrightarrow{AB}$ (рис. 9а). Построим из начала координат вектор $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{OP}$ является представителем всех векторов, сонаправленных и по длине равных с ним. Так можно из точки O провести вектор в произвольную точку пространства P.

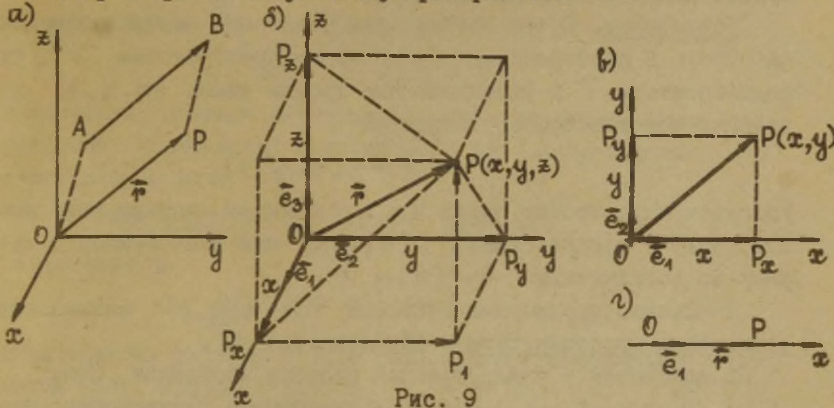

Рис. 9

<u>Определение</u>. Вектор $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$, ведущий из начала координат O в точку пространства P, называется <u>радиусвектором точки</u> P.

Находим составляющие и проекции радиусвектора $\overrightarrow{OP}$ на координатные оси (рис. 9б). Составляющими этого вектора являются векторы $\overrightarrow{OP_x}$, $\overrightarrow{OP_y}$, $\overrightarrow{OP_z}$, а проекциями – отрезки $OP_x = x$, $OP_y = y$, $OP_z = z$, взятые с надлежащим знаком.

<u>Определение</u>. <u>Координатами вектора</u> называются проекции вектора на координатные оси.

Обстоятельство, что вектор $\vec{r}$ имеет координаты x, y, z, запишется следующим образом:

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad . \qquad (6a)$$

Если рассматривать векторы только на плоскости Oxy, то имеем лишь две координаты $\vec{r} = (x, y)$ (рис. 9в), на числовой оси – одну координату $\vec{r} = (x)$ (рис. 9г).

По рисунку 9б видно, что координаты точки $P(x,y,z)$ равны координатам радиусвектора $\vec{r}$ этой точки. Таким образом, каждому данному вектору $\vec{r}$ соответствуют тройка чисел (x,y,z) и если задана тройка чисел (x,y,z), то этой тройке соответствует вектор $\vec{r}$ или $\vec{r} \leftrightarrow (x,y,z)$.

На основании сказанного и также заключения предыдущего пункта можно сказать следующее.

<u>Заключение</u>. Пусть задана прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве. Тогда точки пространства P, их радиусвекторы $\vec{r}$ и упорядоченные тройки чисел (x,y,z) во взаимно-однозначном соответствии

$$P \leftrightarrow \vec{r} \leftrightarrow (x,y,z).$$

Упорядоченную тройку чисел (x,y,z) можно истолковать или как точку с координатами $P(x,y,z)$ или как вектор с такими же координатами $\vec{r} = (x,y,z)$.

Множество трехмерных векторов $\vec{r} = (x,y,z)$ называется <u>трехмерным пространством</u> и обозначается $\mathbb{R}^3$.

На плоскости в прямоугольной системе координат Oxy $P \leftrightarrow \vec{OP} \leftrightarrow (x,y)$ – взаимно-однозначное соответствие между упорядоченными парами чисел, векторами плоскости и точками плоскости. Множество векторов на плоскости $\vec{r} = (x,y)$ называется двумерным пространством и обозначается $\mathbb{R}^2$.

На числовой оси Ox имеем $P \leftrightarrow \vec{OP} \leftrightarrow (x)$. Множество векторов на прямой $\vec{r} = (x)$ называется <u>одномерным пространством</u> и обозначается $\mathbb{R}$.

II <u>Разложение</u> вектора по осям координат. Возьмем на осях координат единичные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (рис. 9б) $(|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1)$. Эти векторы часто называются ортами осей координат или <u>базисными векторами</u> и говорят, что они образуют единичный базис в трехмерном пространстве. Базисные векторы имеют следующие координаты:

$$\vec{e}_1 = (1,0,0); \quad \vec{e}_2 = (0,1,0); \quad \vec{e}_3 = (0,0,1).$$

Действительно, например, орт $\vec{e}_1$ направлен по оси x и проекция на ось x равна $|\vec{e}_1| = 1$, на оси y и z – 0.

Покажем, как вектор можно выразить через базисные векторы – это называется разложением вектора по осям координат (по единичному базису).

Теорема. Всякий вектор $\bar{r} = (x, y, z)$ имеет единственное разложение по осям координат в виде

$$\bar{r} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3 . \qquad (6б)$$

Доказательство. Из рис. 9б видно, что вектор $\bar{r} = \overline{OP}$ может быть представлен в виде суммы трех векторов

$$\overline{OP} = \overline{OP_x} + \overline{P_xP_1} + \overline{P_1P} ,$$

при этом $\overline{P_xP_1} = \overline{OP_y}$, $\overline{P_1P} = \overline{OP_z}$ и следовательно,

$$\overline{OP} = \overline{OP_x} + \overline{OP_y} + \overline{OP_z} .$$

На основании правила умножения вектора на число можно составляющие (компоненты) вектора $\overline{OP}$ на координатные оси представить в виде

$$\overline{OP_x} = x\bar{e}_1 , \quad \overline{OP_y} = y\bar{e}_2 , \quad \overline{OP_z} = z\bar{e}_3$$

и окончательно

$$OP = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3 \qquad \text{ч.т.д.}$$

Представления вектора в виде (6а) и (6б) равносильны – одну запись можно заменить другой.

Пример. Даны разложения векторов

а) $\bar{p} = 2\bar{e}_1 - 5\bar{e}_2 + \bar{e}_3$; б) $\bar{q} = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_3$. Выписать координаты векторов.

Сравнивая (6а) и (6б), имеем а) $\bar{p} = (2,-5,1)$; б) $\bar{q} = (3,0,-2)$. Равенство нулю второй координаты означает, что $\bar{q} \perp Oy$. К.

В двумерном пространстве вводится единичный базис

$$\bar{e}_1 = (1, 0) , \quad \bar{e}_2 = (0, 1)$$

и всякий вектор $\bar{r} = (x, y)$ имеет разложение

$$\bar{r} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 . \qquad (7а)$$

В одномерном пространстве имеется единичный базис $\bar{e}_1 = (1)$ и вектор $\bar{r} = (x)$ выражается в виде

$$\bar{r} = x\bar{e}_1 . \qquad (7б)$$

8. Операции над векторами в координатной форме

I Найдем правила нахождения координат векторов $\bar{a} \pm \bar{b}$, $k\bar{a}$, если даны векторы в координатной форме $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и число k.

Векторы представим как разложения по осям

$$\bar{a} = x_1\bar{e}_1 + y_1\bar{e}_2 + z_1\bar{e}_3, \qquad \bar{b} = x_2\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + z_2\bar{e}_3 .$$

$\underline{\bar{a} \pm \bar{b}}$. Сложим (вычитаем) векторы и используем свойства линейных операций (формулы (2) из 3 пункта) над ортами.

Получим

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (x_1\bar{e}_1 + y_1\bar{e}_2 + z_1\bar{e}_3) \pm (x_2\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + z_2\bar{e}_3) =$$
$$= (x_1 \pm x_2)\bar{e}_1 + (y_1 \pm y_2)\bar{e}_2 + (z_1 \pm z_2)\bar{e}_3 .$$

Коэффициенты при ортах являются координатами вектора $\bar{a} \pm \bar{b}$ или

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (x_1 \pm x_2,\ y_1 \pm y_2,\ z_1 \pm z_2) \qquad (8)$$

– координаты суммы (разности) двух векторов равны суммам (разностям) одноименных координат слагаемых векторов.

$\underline{k\bar{a}}$. Аналогично предыдущему случаю

$$k\bar{a} = k(x_1\bar{e}_1 + y_1\bar{e}_2 + z_1\bar{e}_3) = (kx_1)\bar{e}_1 + (ky_1)\bar{e}_2 + (kz_1)\bar{e}_3$$

или

$$k\bar{a} = (kx_1,\ ky_1,\ kz_1) \qquad (9)$$

– при умножении вектора на число умножаются координаты вектора на это число.

Заключение. При выполнении линейных операций над векторами выполняются аналогичные операции над соответствующими координатами векторов.

II Признак равенства двух векторов. Если $\bar{a} = \bar{b}$, то их проекции на оси координат равны:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2 \qquad (10)$$

– у равных векторов соответствующие координаты равны.

III Найдем координаты вектора $\overline{AB} = (x, y, z)$, заданного своими начальной и конечной точками $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$.

Из рис. I0 видно, что $\vec{r}_A + \vec{AB} = \vec{r}_B$ или

$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A .$$

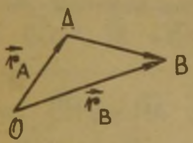

Рис. I0

Согласно формуле (8) разность $\vec{r}_B - \vec{r}_A$ имеет координаты

$$\vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A) .$$

Следовательно, координаты вектора $\vec{AB}$, определенного начальной и конечной точками, равны разностям одноименных координат конечной и начальной точек вектора

$$x = x_B - x_A , \qquad y = y_B - y_A , \qquad z = z_B - z_A . \qquad (II)$$

<u>Пример I</u>. Даны векторы $\vec{a} = (3,-2,I)$, $\vec{b} = (0,I,-I)$. Найти координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Проведем указанные операции над соответствующими координатами:

$$(x_c, y_c, z_c) = 2\cdot(3,-2,I) - 3\cdot(0,I,-I) = (6,-7,5) ;$$

$$\vec{c} = (6,-7,5).$$ К.

<u>Пример 2</u>. Даны три вершины параллелограмма $A(3,-I,2)$, $B(I,2,-4)$, $C(-I,I,2)$ (рис. 4 на стр. 6).Найти координаты вектора $\vec{MB} = (x, y, z)$ и четвертую вершину $D(x_D, y_D, z_D)$.

В примере 3 пункта было уже найдено

$$\vec{MB} = \frac{1}{2}(\vec{AB} - \vec{BC}) .$$

Координаты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$ находим по координатам вершин: $\vec{AB} = (I-3,\ 2-(-I),\ -4-2) = (-2,3,-6)$; $\vec{BC} = (-2,-I,6)$. Координаты вектора $\vec{MB}$ будут равны $x = (-2+2)/2 = 0$, $y = 2$, $z = -6$ и так $\vec{MB} = (0,2,-6)$. Так как $x = 0$, то $\vec{MB} \perp Ox$.

Вершину D найдем из условия $\vec{CD} = -\vec{AB}$. В координатах будем иметь $x_D - (-1) = -(-2)$ или $x_D = 1$. Аналогично будет $y_D = -2$, $z_D = 8$. Четвертая вершина имеет координаты $(I,-2,8)$. К.

<u>Пример 3</u>. Даны вершины треугольника $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$. Найти координаты точки $M(x_M, y_M, z_M)$ пересечения медиан (центра тяжести) треугольника.

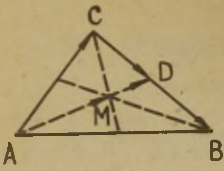

Рис. II

Решим эту задачу с помощью векторов (рис. II).

Выразим вектор $\vec{AM}$ через векторы $\vec{AC}$ и $\vec{CB}$ сторон треугольника: $\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB}$.

Так как $AM : MD = 2:1$ то $\vec{AM} = 2\vec{MD}$ и $\vec{AD} = \frac{3}{2}\vec{AM}$.

Приравнивая выражения для $\vec{AD}$ имеем $\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB} = \frac{3}{2}\vec{AM}$, откуда

$$\vec{AM} = \frac{1}{3}(2\vec{AC} + \vec{CB}).$$

Кроме того $\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$ и $\vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC}$. Теперь $\vec{AM} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$ или в координатах

$$x_M - x_1 = \frac{1}{3}(x_2 - x_1 + x_3 - x_1) \Rightarrow x_M = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3).$$

Аналогично получим остальные координаты. Окончательно имеем

$$x_M = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad y_M = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \quad z_M = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$$

– координаты центра тяжести треугольника равны средним арифметическим координат вершин треугольника. К.

9. Деление отрезка в данном отношении

Пусть на плоскости дан отрезок P_1P_2 (рис. I2) и на линии отрезка взята точка P. Число λ, определяемое равенством

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}$$

называется отношением, в котором точка P делит отрезок P_1P_2.

Если точка P лежит внутри отрезка, то говорят о внутреннем делении и $\lambda > 0$. Если же точка P находится вне отрезка P_1P_2, то говорят о внешнем делении и отношение считается отрицательным: $\lambda < 0$.

Например, на рис. II точка M делит отрезок AD в отношении $\lambda_1 = AM : MD = 2:1 = 2$, отрезок DA в отношении $\lambda_2 = DM:MA = 1 : 2 = 0,5$. Точка D делит отрезок AM (внешнее деление!) в отношении $\lambda_3 = AD : DM = -3 : 1 = -3$.

Пусть на плоскости даны точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ и известно отношение $\lambda = P_1P : PP_2$. Найти координаты точки деления $P(x, y, z)$.

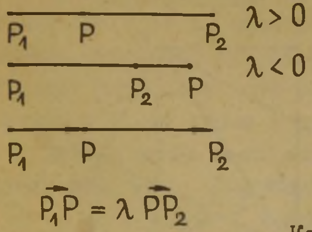

Рис. I2.

Решим эту задачу с помощью векторов (рис.I2). Так как $P_1P : PP_2 = \lambda$ и $\overrightarrow{P_1P} \parallel \overrightarrow{PP_2}$, то $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$. Это векторное равенство заменится двумя скалярными равенствами $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$, $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$, откуда находим x и y .

Координаты точки деления отрезка определяются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad (I2)$$

Обратите внимание на то, что на λ умножается координата того конца отрезка, к которому мы движемся при определении отношения λ .

Частный случай. При делении отрезка пополам $\lambda = 1$ и

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (I3)$$

П р и м е р. Даны точки $P_1(I,I)$ и $P_2(7,4)$. Найти точку $P(x,y)$, которая I) два раза ближе к P_1 чем к P_2 ; 2) делит отрезок P_1P_2 пополам.

I) Отношение $\lambda = P_1P : PP_2 = 1 : 2 = 0{,}5$. По формулам (I2) находим $x = 3$, $y = 2$.

2) Середина отрезка имеет координаты $x = (I+7)/2 = 4$, $y = 5/2$. К.

I0. Преобразование координат

Рассмотрим, как связаны координаты точек на плоскости в разных системах координат. Ограничимся двумя случаями.

I Параллельный перенос осей. Пусть имеются две системы координат (рис. I3а): система Oxy (так называемая старая система) и новая система $O'XY$, оси которой параллельны соответствующим старым осям. Начало новой системы имеет в старой системе координаты $O'(x_0, y_0)$. Единицу измерения длин в обеих системах примем одинаковой. В обеих системах орты параллельных осей координат равны (на рис. I3а они обозначены через $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$).

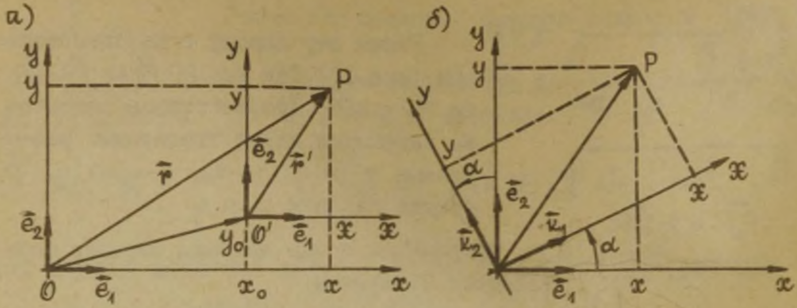

Рис. I3.

Координаты произвольной точки P в старой системе обозначим через (x,y), в новой – $(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$. Они являются одновременно и координатами радиусвекторов $\overrightarrow{OP}=(x,y)$, $\overrightarrow{O'P}=(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$; вектор $\overrightarrow{OO'}=(x_0,y_0)$. Из рис. I3а видно, что $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}$ или

$$x\vec{e}_1+y\vec{e}_2=(x_0\vec{e}_1+y_0\vec{e}_2)+(\mathfrak{X}\vec{e}_1+\mathfrak{Y}\vec{e}_2).$$

После приведения подобных членов имеем

$$x\vec{e}_1+y\vec{e}_2=(x_0+\mathfrak{X})\vec{e}_1+(y_0+\mathfrak{Y})\vec{e}_2.$$

Из равенства соответствующих координат вытекают формулы, выражающие старые координаты через новые

$$\begin{aligned} x &= x_0+\mathfrak{X}, \\ y &= y_0+\mathfrak{Y}. \end{aligned} \qquad (I4)$$

Если известны старые координаты (x,y), то выразим новые координаты через старые:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= x-x_c, \\ \mathfrak{Y} &= y-y_0. \end{aligned} \qquad (I4a)$$

Пример I. Путем параллельного переноса осей за новое начало координат взята точка $O'(2,-5)$. Найти координаты точки P в новой системе, если ее координаты в старой системе равны $(-3,4)$.

Имеем $x_0=2$, $y_0=-5$ и $x=-3$, $y=4$. Согласно формулам (I4a) получим $\mathfrak{X}=-3-2=-5$, $\mathfrak{Y}=4+5=9$. Точка имеет в новой системе координаты $P(-5,9)$. К.

II <u>Поворот осей</u>. Пусть новая система получена путем поворота на угол α против часовой стрелки ($\alpha > 0$) вокруг общего начала координат (рис. I3б). При повороте по часовой стрелке считается, что $\alpha < 0$. Находим связь между координатами (x, y) точки в старой системе и новой – ($\mathfrak{X}, \mathcal{Y}$).

С этой целью выпишем разложения радиусвектора $\vec{OP}$ в обеих системах. Орты осей старой системы обозначены через $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, – новой системы через $\vec{\kappa}_1$, $\vec{\kappa}_2$. Разложения в обеих системах дают один и тот же вектор $\vec{OP}$, то есть

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \mathfrak{X}\vec{\kappa}_1 + \mathcal{Y}\vec{\kappa}_2 . \qquad (I5)$$

Находим координаты новых ортов $\vec{\kappa}_1$ и $\vec{\kappa}_2$ в старой системе. Ими являются проекции векторов $\vec{\kappa}_1$ и $\vec{\kappa}_2$ на оси x и y :

$$\kappa_{1x} = |\vec{\kappa}_1|\cos\alpha = \cos\alpha ; \qquad \kappa_{1y} = |\vec{\kappa}_1|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha ;$$
$$\kappa_{2x} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha ; \qquad \kappa_{2y} = \cos\alpha .$$

Таким образом,

$$\vec{\kappa}_1 = \cos\alpha \cdot \vec{e}_1 + \sin\alpha \cdot \vec{e}_2 ; \qquad \vec{\kappa}_2 = -\sin\alpha \cdot \vec{e}_1 + \cos\alpha \cdot \vec{e}_2 .$$

Точно также можно орты старой системы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ выразить через орты новой системы:

$$e_{1x} = \cos\alpha ; \qquad e_{1y} = -\sin\alpha ; \qquad e_{2x} = \sin\alpha ; \qquad e_{2y} = \cos\alpha ;$$
$$\vec{e}_1 = \cos\alpha \cdot \vec{\kappa}_1 - \sin\alpha \cdot \vec{\kappa}_2 ; \qquad \vec{e}_2 = \sin\alpha \cdot \vec{\kappa}_1 + \cos\alpha \cdot \vec{\kappa}_2 .$$

Для нахождения зависимости старых координат через новые подставим в правую часть равенства (I5) разложения новых ортов в старой системе и сгруппируем слагаемые; в результате получим

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = (\mathfrak{X}\cos\alpha - \mathcal{Y}\sin\alpha)\vec{e}_1 + (\mathfrak{X}\sin\alpha + \mathcal{Y}\cos\alpha)\vec{e}_2 .$$

Равенство соответствующих коэффициентов при ортах даст формулы, выражающие старые координаты через новые:

$$\begin{aligned} x &= \mathfrak{X}\cos\alpha - \mathcal{Y}\sin\alpha , \\ y &= \mathfrak{X}\sin\alpha + \mathcal{Y}\cos\alpha . \end{aligned} \qquad (I6a)$$

Если подставить в левую часть равенства (I5) вместо $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ их выражения через $\vec{\kappa}_1$ и $\vec{\kappa}_2$, то получим аналогично (проверить!) формулы, выражающие новые координаты через старые

$$\mathscr{X} = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad (16б)$$
$$\mathscr{Y} = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

П р и м е р 2. Новые оси повернуты относительно старых на угол $\alpha = \pi/4$. Найти выражения старых координат произвольной точки плоскости (x , y) через ее новые координаты ($\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$)

Используем формулы (16а) с учетом того, что $\cos\pi/4 = 1/\sqrt{2}$, $\sin\pi/4 = 1/\sqrt{2}$. Тогда имеем

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{X} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{Y}; \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{X} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{Y};$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathscr{X} - \mathscr{Y}); \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathscr{X} + \mathscr{Y}). \quad \text{К.}$$

П р и м е р 3. Найти координаты точки P в новой системе, повернутой относительно старой на угол $\alpha = \pi/6$, если ее координаты в старой системе равны (-2,3).

Воспользуемся формулами (16б) и тем, что $\cos\pi/6 = \sqrt{3}/2$, $\sin\pi/6 = 1/2$. Получим

$$\mathscr{X} = \frac{-2\cdot\sqrt{3}}{2} + \frac{3\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}(3 - 2\sqrt{3}),$$

$$\mathscr{Y} = \frac{2\cdot 1}{2} + \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(2 + 3\sqrt{3}). \quad \text{К.}$$

II. Скалярное произведение векторов

Для векторов вводятся различные операции умножения.

I Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и угол φ между ними.

Определение. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число $\vec{a}\cdot\vec{b}$, равное произведению длин этих векторов, помноженному на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\varphi. \qquad (17)$$

Скалярное произведение обозначается и в виде ($\vec{a}$, $\vec{b}$) или $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$.

Скалярное произведение равно нулю в следующих случаях:
1) один из множителей есть нулевой вектор;
2) множители перпендикулярные векторы.

Действительно, если $a = 0$ или $b = 0$ или $\varphi = \pi/2$, то из (17) следует, что $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.

Скалярное произведение положительно, если $0\le\varphi<\pi/2$ и отрицательно, если $\pi/2<\varphi\le\pi$.

Теорема. Скалярное произведение двух векторов равно произведению длины одного вектора на проекцию другого вектора на направление первого:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a\,\text{пр}_a\bar{b}=b\,\text{пр}_b\bar{a}\,. \qquad (18)$$

Доказательство. По определению проекции вектора (формула (4)) $\text{пр}_a\bar{b}=b\cos\varphi$ или $\text{пр}_b\bar{a}=a\cos\varphi$. Подставляя в формулу (17) вместо $a\cos\varphi$ (или $b\cos\varphi$) выражение проекции,получим действительно равенство (18), ч.т.д.

Свойства скалярного произведения:

$$\begin{aligned}
&1)\quad \bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}\,;\\
&2)\quad \bar{a}\cdot(k\bar{b})=k(\bar{a}\cdot\bar{b})\,; \qquad (19)\\
&3)\quad \bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}\,.
\end{aligned}$$

Правильность первогс свойства следует из определения

$$ab\cos\varphi=ba\cos\varphi\,.$$

Вторoe равенство можно доказать следующим образом:

$$\bar{a}\cdot(k\bar{b})=a\,\text{пр}_a(k\bar{b})=a(k\,\text{пр}_a\bar{b})=k(a\,\text{пр}_a\bar{b})=k(\bar{a}\cdot\bar{b})\,.$$

Докажите сами третье свойство.

Скалярное произведение вектора $\bar{a}$ на самого себя называется скалярным квадратом вектора и он равняется

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=a^2\,.$$

П р и м е р. Дано $|\bar{a}|=8$, $|\bar{b}|=4$ и угол между этими векторами $\varphi=2\pi/3$. Найти 1) $\bar{a}\cdot\bar{b}$, 2) $\text{пр}_a\bar{b}$, 3) $\text{пр}_b\bar{a}$.

По формуле (17) имеем $\bar{a}\cdot\bar{b}=8\cdot4\cos 2\pi/3=-16$. По формуле (18) найдем

$$\text{пр}_a\bar{b}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{a}=-\frac{16}{8}=-2\,;\quad \text{пр}_b\bar{a}=-\frac{16}{4}=-4\,. \quad \text{К.}$$

VV

II Выведем правило нахождения скалярного произведения, если векторы даны в координатной форме:

$$\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)\,,\qquad \bar{b}=(x_2,y_2,z_2)\,.$$

Сначала найдем скалярные произведения ортов осей координат по правилу (I7):

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1 \ ; \qquad (20)$$
$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 = 1 \cdot 1 \cdot \cos \pi/2 = 0 \ .$$

Теперь представим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ через компоненты и вычислим скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b}$, используя свойства (I9):

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (x_1\bar{e}_1 + y_1\bar{e}_2 + z_1\bar{e}_3) \cdot (x_2\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + z_2\bar{e}_3) =$$
$$= \underline{x_1x_2\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1} + x_1y_2\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 + x_1z_2\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 +$$
$$+ y_1x_2\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 + \underline{y_1y_2\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2} + y_1z_2\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 +$$
$$+ z_1x_2\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1 + z_1y_2\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2 + \underline{z_1z_2\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3} \ .$$

Согласно (20) произведения одноименных ортов равны I, остальные произведения – 0. В последнем выражении сохраняются лишь подчеркнутые слагаемые и получим правило

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \qquad (21)$$

– скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат векторов.

Частный случай. Пусть $\bar{b} = \bar{a}$. Тогда $\bar{a} \cdot \bar{a} = x^2 + y^2 + z^2$. С другой стороны $\bar{a} \cdot \bar{a} = a^2$. Получим правило нахождения длины вектора

$$a^2 = x^2 + y^2 + z^2 \ ,$$
$$a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ . \qquad (22)$$

Следствия. I) Расстояние между двумя точками $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ равно

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \ , \qquad (23)$$

так как $AB = |\overline{AB}|$ и $\overline{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A)$.

2) Косинус угла между двумя векторами равен

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{ab} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{ab} \ , \qquad (24)$$

где a и b вычисляются по формуле (22). Формула (24) вытекает из сопоставления правых частей равенств (I7) и (2I).

П р и м е р 2. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a} = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + 6\bar{e}_3$ и $\bar{b} = 5\bar{e}_2 - 12\bar{e}_3$ и косинус угла между ними.

Векторы имеют координаты $\bar{a} = (2, 3, 6)$, $\bar{b} = (0, 5, -12)$ и согласно формуле (21) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot (-12) = -57$. Векторы имеют длины $a = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$, $b = 13$ и по формуле (24) получим

$$\cos\varphi = -\frac{57}{7 \cdot 13} = -\frac{57}{91}.$$

Так как косинус угла отрицательный, то угол между векторами тупой. К.

12. Условия коллинеарности и перпендикулярности векторов. Направляющие косинусы

Пусть даны векторы $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Выясним, каким условиям удовлетворяют координаты векторов в случае их коллинеарности и перпендикулярности.

I $\bar{a} \parallel \bar{b}$. Если векторы коллинеарны, то они параллельны одной прямой и согласно правилу умножения вектора на число можем написать $\bar{a} = k\bar{b}$, где k некоторое число. Тогда и $x_1 = kx_2$, $y_1 = ky_2$, $z_1 = kz_2$ или, исключая коэффициент k, имеем

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \tag{25}$$

– соответствующие координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

II $\bar{a} \perp \bar{b}$. Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$. Запишем это в координатной форме:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \tag{26}$$

– сумма произведений одноименных координат перпендикулярных векторов равна нулю.

Решим следующую задачу. Дан вектор $\bar{a} = (x, y, z)$. Найти координаты единичного вектора $\bar{e}\ (|\bar{e}| = 1)$ по направлению $\bar{a}$: $\bar{e} \uparrow\uparrow \bar{a}$. По формуле (3) из 3 пункта $\bar{e} = 1/a \cdot \bar{a}$ и следовательно

$$\bar{e} = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right). \tag{27}$$

П р и м е р I. Проверить, какие из векторов $\bar{a}=(-1,2,3)$, $\bar{b}=(1,-2,-3)$, $\bar{c}=(2,1,0)$ коллинеарны? перпендикулярны?

Векторы $\bar{a}\parallel\bar{b}$, так как $-1:1 = 2:(-2) = 3:(-3)$. Векторы $\bar{a}\nparallel\bar{c}$, так как $-1:2 \neq 2:1 \neq 3:0$.

Скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{c} = -2 + 2 + 0 = 0$, т.е. $\bar{a}\perp\bar{c}$. Также $\bar{b}\perp\bar{c}$. К.

III Направление вектора можно задать и с помощью углов α, β, γ, которые вектор составляет с осями координат. Косинусы этих углов называются <u>направляющими косинусами</u> вектора $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Выведем правило их нахождения, если вектор задан в координатной форме $\bar{a}=(x,y,z)$.

Мы знаем (п.4 и 7), что с одной стороны проекция вектора на координатную ось равна произведению длины вектора на косинус угла между ними и с другой координате вектора. Для оси x (аналогично для y и z) имеем $a\cos\alpha = x$, откуда

$$\cos\alpha=\frac{x}{a}, \qquad \cos\beta=\frac{y}{a}, \qquad \cos\gamma=\frac{z}{a}. \tag{28}$$

Если возвести эти равенства в квадрат и складывать, то

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}=\frac{a^2}{a^2}=1$$

или направляющие косинусы любого вектора удовлетворяют условию

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Сравнение формул (27) и (28) показывает, что координаты единичного вектора по направлению вектора $\bar{a}$ равны направляющим косинусам этого вектора:

$$\bar{e}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

П р и м е р 2. Дан вектор $\bar{a} = (-4, 3, 0)$. Найти его направляющие косинусы и единичный вектор по направлению $\bar{a}$.

Длина вектора $\bar{a} = \sqrt{16 + 9 + 0} = 5$. Направляющие косинусы и единичный вектор таковы:

$$\cos\alpha=-\frac{4}{5}, \quad \cos\beta=\frac{3}{5}, \quad \cos\gamma=0; \quad \bar{e}=\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5},0\right).$$ К.

13. Векторное произведение векторов

I Определение. Векторным произведением векторов $\bar a$ и $\bar b$ называется вектор $\bar a \times \bar b$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) он перпендикулярен к плоскости, построенной на данных векторах;

2) его направление определится правилом правой руки: при повороте первого множителя на второй по меньшему углу вектор $\bar a \times \bar b$ направлен в сторону перемещения оси винта;

3) длина $|\bar a \times \bar b|$ равна произведению длин множителей и синуса угла между множителями:

$$|\bar a \times \bar b| = ab\sin\varphi . \qquad (29)$$

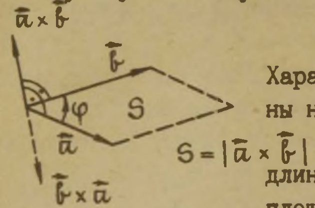

Рис.14.

Характерные элементы определения указаны на рис. 14.

Из этого определения следует, что длина вектора $\bar a \times \bar b$ численно равна площади параллелограмма, построенного на множителях $\bar a$ и $\bar b$:

$$|\bar a \times \bar b| = S .$$

Примечание. Обозначение $\bar a \times \bar b$ часто произносят „a крест b". В литературе используется и обозначение $[\bar a, \bar b]$.

Векторное произведение равно нулю $\bar a \times \bar b = \bar 0$, если

1) один из множителей нулевой вектор (или $a = 0$ или $b = 0$);

2) множители коллинеарны $\bar a \parallel \bar b$ $(\varphi = 0, \pi)$.

Это следует непосредственно из (29).

Сравнивайте условия, когда $\bar a \times \bar b = \bar 0$, $\bar a \cdot \bar b = 0$ и произведение действительных чисел $a \cdot b = 0$!

Свойства векторного произведения:

1) при перестановке множителей знак векторного произведения меняется на обратный:

$$\bar a \times \bar b = -\bar b \times \bar a ;$$

2) $$\bar a \times (k\bar b) = k(\bar a \times \bar b) ; \qquad (30)$$

3) $$\bar a \times (\bar b + \bar c) = \bar a \times \bar b + \bar a \times \bar c .$$

Пример 1. Найти длину векторного произведения $|\bar a \times \bar b|$, если 1) $a = 6$, $b = 5$ и угол между ними $\varphi = \pi/6$;

2) $a = 10$, $b = 2$, $\bar{a}\cdot\bar{b} = 12$.

I) По определению векторного произведения

$$|\bar{a}\times\bar{b}| = 6\cdot 5\cdot \sin\frac{\pi}{6} = 15 .$$

2) Необходимо найти $\sin\varphi$. По известному скалярному произведению $\bar{a}\cdot\bar{b}$ узнаем

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{ab} = \frac{12}{10\cdot 2} = \frac{3}{5} \qquad \text{и} \qquad \sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \frac{4}{5} .$$

Теперь $|\bar{a}\times\bar{b}| = 10\cdot 2\cdot\frac{4}{5} = 16$. К.

II Выведем правило нахождения $\bar{a}\times\bar{b}$, если множители заданы в координатной форме $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Предварительно найдем векторные произведения ортов осей координат:

$$\bar{e}_1\times\bar{e}_1 = \bar{e}_2\times\bar{e}_2 = \bar{e}_3\times\bar{e}_3 = \bar{0} \qquad (31а)$$

из-за коллинеарности множителей;

$$\begin{matrix} \bar{e}_1\times\bar{e}_2 = \bar{e}_3, & \bar{e}_2\times\bar{e}_3 = \bar{e}_1, & \bar{e}_3\times\bar{e}_1 = \bar{e}_2, \\ \bar{e}_2\times\bar{e}_1 = -\bar{e}_3, & \bar{e}_3\times\bar{e}_2 = -\bar{e}_1, & \bar{e}_1\times\bar{e}_3 = -\bar{e}_2 \end{matrix} \qquad (31б)$$

исходя из определения векторного произведения. Например,

$$|\bar{e}_1\times\bar{e}_2| = 1\cdot 1\cdot \sin\pi/2 = 1 \qquad \text{и} \qquad \bar{e}_1\times\bar{e}_2$$

по правилу правой руки направлен по $\bar{e}_3$ (по оси z). Теперь представим множители $\bar{a}$ и $\bar{b}$ через компоненты и перемножим с учетом свойств векторного произведения (30):

$$\begin{aligned} \bar{a}\times\bar{b} &= (x_1\bar{e}_1 + y_1\bar{e}_2 + z_1\bar{e}_3)\times(x_2\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + z_2\bar{e}_3) = \\ &= x_1x_2\bar{e}_1\times\bar{e}_1 + x_1y_2\bar{e}_1\times\bar{e}_2 + x_1z_2\bar{e}_1\times\bar{e}_3 + \\ &+ y_1x_2\bar{e}_2\times\bar{e}_1 + y_1y_2\bar{e}_2\times\bar{e}_2 + y_1z_2\bar{e}_2\times\bar{e}_3 + \\ &+ z_1x_2\bar{e}_3\times\bar{e}_1 + z_1y_2\bar{e}_3\times\bar{e}_2 + z_1z_2\bar{e}_3\times\bar{e}_3 . \end{aligned}$$

Учитывая формулы (31а) и (31б) и собирая подобные слагаемые, получим

$$\bar{a}\times\bar{b} = (y_1z_2 - z_1y_2)\bar{e}_1 + (z_1x_2 - x_1z_2)\bar{e}_2 + (x_1y_2 - y_1x_2)\bar{e}_3$$

или

$$\bar{a}\times\bar{b} = \left\| \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\| , \qquad (32)$$

где координаты вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ записаны в виде определителей второго порядка.

Координаты вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ удобно найти с помощью определителя третьего порядка, в первой строке которого орты осей координат, во второй и третьей – координаты первого и второго множителей. Координаты вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ получаются при разложении определителя по первой строке:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\bar{e}_1-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\bar{e}_2+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\bar{e}_3 . \qquad (33)$$

<u>П р и м е р 2.</u> Найти векторное произведение векторов $\bar{a}=(0,\ 5,\ I)$ и $\bar{b}=(-3,\ 2,\ I)$ и площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

Представим векторное произведение в виде определителя и разложим по первой строке согласно формуле (33):

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3\\ 0 & 5 & 1\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix}=(5\cdot1-2\cdot1)\bar{e}_1-[0\cdot1-(-3)\cdot1]\bar{e}_2+[0\cdot2-5\cdot(-3)]\bar{e}_3=$$

$$=3\bar{e}_1-3\bar{e}_2+15\bar{e}_3=(3,-3,15) .$$

Площадь параллелограмма $S=|\bar{a}\times\bar{b}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+15^2}=\sqrt{243}$. К.

§ 2. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

I. <u>Уравнение линии на плоскости</u>

Под линией (кривой) на плоскости понимают геометрическое место (множество) точек, обладающих определенным свойством, исключительно им присущим.

Например, I) окружностью называется множество точек, равноудаленных от центра;

2) перпендикуляр, проведенный через середину отрезка есть прямая, каждая точка которой равноудалена от концов этого отрезка.

В аналитической геометрии выражают свойство, присущее точкам линии, при помощи уравнений, связывающих координаты точек. Говорят об аналитическом представлении линии.

Пусть нами определена на плоскости некоторая линия. Выберем на этой плоскости определенную прямоугольную систему координат Oxy. Возьмем на кривой произвольную (текущую) точку P, координаты которой обозначим через x и y и назовем текущими координатами. От точки к точке эти координаты меняются не произвольно, а таким образом, чтобы было выполнено общее для всех точек линии свойство. Другими словами, координаты текущей точки $P(x,y)$ линии связаны и эта связь выражается в виде определенного уравнения.

Уравнением линии называется такое уравнение

$$F(x,y)=0$$

между переменными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки этой линии и только эти.

Пример I. Дано уравнение $y-x^2=0$. Проверить, проходит ли эта линия через точки $O(0,0)$, $A(-2,4)$, $B(1,-4)$.

Для проверки подставим в уравнение вместо x и y соответствующие координаты точек и выясним, сохраняется ли равенство. Для точек O и A имеем $0-0=0$, $4-(-2)^2=0$ – эти точки лежат на данной линии. В случае точки B получим $-4-1^2\neq 0$ – точка не принадлежит данной линии. К.

Рассмотрим, как составить уравнение линии. Это состоит из следующих этапов. I) Выберем систему координат и возьмем текущую точку $P(x,y)$ в предположении, что она находится на линии. 2) Найдем согласно геометрическим свойствам линии связь между текущими координатами и заданными величинами. 3) Упростим полученное уравнение.

Пример 2. Составить уравнение линии, точки которой удалены от оси ординат на два раза больше чем от оси абсцисс.

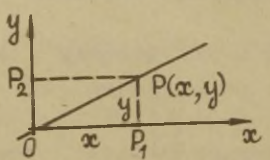

Рис. I5.

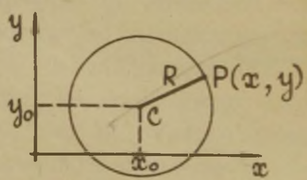

Рис. I6.

На рис. I5 указана система координат и выбрана текущая точка $P(x,y)$ с расчетом, что $P_2P = 2P_1P$. Так как $P_2P = OP_1 = x$ и $P_1P = OP_2 = y$, то получим $x = 2y$ или $x - 2y = 0$. Это есть уравнение прямой. К.

<u>Пример 3</u>. Составить уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(x_0, y_0)$. На рис. I6 указаны система координат и точка C. Возьмем от C на расстоянии R текущую точку $P(x,y)$. Согласно определению окружности $CP = R$. Находим расстояние между точками C и P по формуле

$$CP = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\ .$$

<u>Уравнение окружности</u> примет вид

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R$$

или после возведения квадрат обеих частей равенства

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2\ . \qquad \text{К.} \qquad \text{(I)}$$

Рассмотрим решение обратной задачи: по данному уравнению линии $F(x,y)=0$ построить линию. С этой целью дадим одной координате (например x) числовое значение x_0 и поставим в уравнение. Затем решим уравнение относительно y и получим $y = y_0$. Таким путем мы получили пару значений (x_0, y_0), которая определяет точку линии $P_0(x_0, y_0)$. Аналогично находим координаты необходимого числа точек линии. Эти значения целесообразно привести в таблице

x	x_0	x_1	x_2	...
y	y_0	y_1	y_2	...

Затем выберем систему координат и построим точки $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ и т.д. Соединяя эти точки плавной линией, получим геометрическую линию. Например, для построения прямой достаточно найти лишь две точки и провести через них прямую. Уравнение $F(x,y)=0$ может определить или бесконечное множество точек (тогда имеем линию) или конечное множество изолированных точек (даже одну точку) или даже ни одной точки.

<u>Примеры</u>.

4) Уравнение $x^2 + y^2 = 9$ определяет окружность с центром в начале координат $O(0,0)$ радиуса 3 (сравните с формулой (I)).

5) Уравнение $x^2+y^2=0$ удовлетворяется лишь при значениях $x=0$, $y=0$ – уравнение определяет лишь одну точку $O(0,0)$.

6) Уравнению $x^2+y^2+1=0$ не удовлетворяет ни одна пара действительных чисел – данное уравнение не определяет никакой линии. К.

Вместо того, чтобы говорить о линии с уравнением $F(x,y)=0$ будем часто говорить о линии $F(x,y)=0$.

2. Основные задачи, решаемые с помощью уравнения линии

Опишем в общих чертах некоторые задачи, решаемые с помощью уравнения линии.

I Проверить, находится ли точка $P_0(x_0,y_0)$ на линии $F(x,y)=0$.

Для проверки подставим координаты точки в уравнение линии. Если равенство удовлетворяется, то точка находится на линии, в противном случае нет. Так мы и поступили в примере I предыдущего пункта.

II Известно, что точка P_0 с абсциссой x_0 находится на данной линии $F(x,y)=0$. Найти ординату этой точки.

По определению уравнения линии координаты точки P_0 должны удовлетворять уравнению линии. Поэтому подставим в уравнение $x=x_0$ и решим полученное уравнение $F(x_0,y)=0$ относительно y. Решение обозначим через $y=y_0$.

Аналогично происходит нахождение абсциссы точки линии по известной ординате, т.е. абсцисса $x=x_0$ является решением уравнения $F(x,y_0)=0$.

III Найти точки пересечения линии с осями координат.

Находим точки пересечения с осью x. Точки оси x имеют ординату $y=0$. Данная задача сведена к II задаче: абсцисса точки пересечения линии с осью x является решением $x=x_0$ уравнения $F(x,0)=0$ и точка пересечения имеет координаты $A(x_0,0)$. Если это уравнение имеет несколько решений, то линия пересекает ось x в нескольких точках; при отсутствии решения таких точек нет.

Аналогично находим ординату $y=y_0$ точки(ек) пересечения линии с осью y путем решения уравнения $F(0,y)=0$. Обозначим точку пересечения с осью y через $B(0,y_0)$.

IУ Даны уравнения двух линий $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$. Найти точку(и) пересечения этих линий.

Точка пересечения двух линий лежит одновременно на обеих линиях и следовательно, координаты этой точки должны удовлетворять обоим уравнениям. Координаты точки пересечения получим путем решения системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0. \end{cases}$$

Если система имеет решение $x=x_0$, $y=y_0$, то имеем точку пересечения $P_0(x_0,y_0)$. При нескольких решениях имеем несколько точек пересечения; в случае бесконечного множества решений линии совпадают; при отсутствии решений линии не пересекаются.

У Исследовать симметрию линии $F(x,y)=0$ относительно осей координат и начала координат.

Симметричная к точке $P(x,y)$ точка относительно оси y имеет координаты $Q(-x,y)$, относительно оси x – $R(x,-y)$ и относительно начала координат $S(-x,-y)$.

Считая точку с текущими координатами (x,y) принадлежащей данной линии, в случае симметрии линии относительно оси y должны уравнению линии удовлетворять и координаты $(-x,y)$. Следовательно, для выяснения симметрии линии относительно оси y следует в уравнение линии подставить вместо x значение $-x$. Если равенство $F(-x,y)=0$ сохранится, то линия симметрична относительно оси y, в противном случае нет.

Аналогично при проверке симметрии относительно оси x следует проверить выполненность равенства $F(x,-y)=0$ и относительно начала координат проверить равенство $F(-x,-y)=0$.

Иллюстрируем решение описанных задач примерами.

<u>П р и м е р I</u>. Дана линия $y=x^2-1$. Найти I) точки пересечения линии с осями координат, 2) координаты точек линии, имеющих а) абсциссу $x=-3$; б) ординату $y=3$. 3) Выяснить, симметрична ли линия относительно осей координат.

I) Подставляя в уравнение значение $x=0$, получим сразу $y=-1$. Линия пересекает ось y в точке $P_1(0,-1)$. Подставляя туда же $y=0$, получим уравнение $x^2-1=0$, решениями которого являются $x=\pm 1$. Таким образом, данная парабола пересекает ось x в двух точках $P_2(-1,0)$ и $P_3(1,0)$.

2) Подставляя в уравнение $x=-3$ имеем $y=8$ — точка линии имеет координаты $(-3, 8)$; в случае б) получим уравнение $3=x^2-1$, решениями которого являются $x=\pm 2$. Это означает, что на линии имеются две точки $P_4(-2,3)$ и $P_5(2,3)$ с равной ординатой.

3) Исследуем симметрию относительно оси y. С этой целью заменим в уравнении x на $-x$: $y=(-x)^2-1$. Так как $(-x)^2=x^2$, то уравнение линии сохраняет прежний вид — линия симметрична относительно оси y.

При исследовании симметрии относительно оси x заменим y на $-y$: $-y=x^2-1$. Это уже не совпадает с исходным уравнением $y=x^2-1$ — линия не симметрична относительно оси x. К.

<u>П р и м е р 2.</u> Найти точки пересечения линии $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ с осями координат.

Ось x: примем $y=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$. Линия пересекает ось x в точках $A(-3,0)$, $B(3,0)$.

Ось y: примем $x=0 \Rightarrow y^2=-4$. Это уравнение решений не имеет — линия не пересекает ось y. В дальнейшем будет показано, что линия с данным уравнением является гиперболой. К.

3. <u>О способах определения положения прямой</u>

Рассмотрим прямую на плоскости и совместим с этой плоскостью систему координат Oxy. Положение прямой относительно выбранной системы координат можно определить разными способами. Опишем некоторые из них.

I Даны одна точка P_0 прямой и вектор $\bar{b}$, к которому прямая параллельна. Этот вектор называется <u>направляющим вектором</u> прямой (рис. 17а).

II Известны одна точка прямой P_0 и вектор $\bar{n}$, перпендикулярный к прямой. Этот вектор называется <u>нормальным вектором</u> (рис. 17а).

III Через две заданные точки P_1 и P_2 можно провести лишь одну прямую (рис. 17б).

IУ Прямая определена, если известны отрезки OA и OB, которые она отсекает на координатных осях. Эти отрезки обычно называются <u>начальными отрезками</u> – <u>начальная абсцисса</u> $OA=a$ и <u>начальная ордината</u> $OB=b$. Исключением является случай, когда прямая проходит через начало координат, так как для всех таких прямых $a=0$, $b=0$ (рис. 17б).

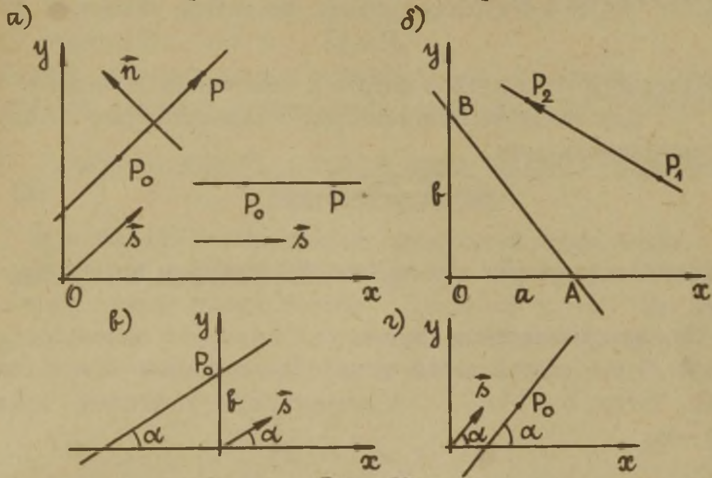

Рис. 17

У Ориентацию прямой можно определить с помощью угла α между осью x и прямой. Задавая еще начальную ординату b, прямая однозначно определена (рис. 17в). Угол α называется <u>углом наклона</u> прямой и его тангенс называется <u>угловым коэффициентом</u> прямой

$$\tan\alpha = k .$$

Угловой коэффициент не определен для прямой, параллельной оси y $(\alpha = \pi/2)$.

УI Положение прямой может быть задано и комбинацией данных: известны одна точка прямой и направление прямой через угловой коэффициент k (рис. 17г).

Описанные способы задания прямой являются основными. В последующих пунктах составляем уравнения прямой в зависимости от способа задания прямой.

4. Каноническое уравнение прямой

Прямая проходит через точку $P_0(x_0, y_0)$ и параллельна направляющему вектору $\vec{s} = (l, m)$ (рис. I7а).

Составим уравнение прямой. Возьмем на прямой текущую точку $P(x, y)$ и образуем вектор $\vec{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$. Для каждой точки P прямой вектор $\vec{P_0P} \parallel \vec{s}$. Условие коллинеарности векторов выразится в виде

$$\vec{P_0P} = t\vec{s} ,$$

где параметр t меняется вместе с изменением положения точки P. Для коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} . \qquad (2)$$

Полученное уравнение называется каноническим уравнением прямой.

Рассмотрим частные случаи.

а) Пусть направляющий вектор $\vec{s}$ параллелен оси x (рис. I7а). Тогда $\vec{s} = (l, 0)$ и каноническое уравнение примет вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{0} .$$

Появилось деление на 0. Как это истолковать? В данном случае прямая параллельна оси x и все точки имеют ординату, равную $y = y_0$. Это означает, что и числитель равен $y - y_0 = 0$. Это и является уравнением прямой.

б) Вектор $\vec{s}$ параллелен оси y. Тогда $\vec{s} = (0, m)$ и аналогично предыдущему случаю из канонического уравнения

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{m}$$

следует $x - x_0 = 0$.

Если прямая совпадает с осью x, то $y_0 = 0$ и прямая имеет уравнение $y = 0$. Уравнение прямой, совпадающей с осью y есть $x = 0$.

П р и м е р ы. I) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P_0(3,-2)$ параллельно вектору $\bar{s}=(-2,1)$.

Согласно формуле (2) напишем каноническое уравнение

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-(-2)}{1} \quad \text{или} \quad \frac{x-3}{-2}=y+2 .$$

После упрощений получим $x+2y+1=0$.

2) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P_0(3,4)$ параллельно оси x.

Прямая отсекает на оси отрезок $y_0=4$ и согласно рассмотренному частному случаю имеем уравнение $y-4=0$ или $y=4$.К.

5. Уравнение прямой, заданной двумя точками. Уравнение прямой в отрезках

I Составим уравнение прямой, проходящей через точки $P_1(x_1,y_1)$ и $P_2(x_2,y_2)$ (рис. I7б). В данном случае примем за направляющий вектор прямой вектор $\overline{P_1P_2}=(x_2-x_1,\, y_2-y_1)$. Мы можем воспользоваться каноническим уравнением прямой в виде (2), принимая за заданную точку прямой точку P_1 (или P_2). Получим

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \qquad (3)$$

которое называется уравнением прямой, проходящей через две заданные точки.

Частные случаи. а) Если оказывается, что $x_2-x_1=0$, то точки P_1 и P_2 лежат на прямой, параллельной оси x. В уравнении (3) следует приравнять нулю и числитель и уравнением прямой является $x-x_1=0$. б) Если оказывается, что $y_2-y_1=0$, то прямая параллельна оси y и уравнение прямой имеет вид $y-y_1=0$.

II Пусть заданы отрезки a и b, отсекаемые прямой на координатных осях (рис. I7б). Эти отрезки определяют две точки прямой $A(a,0)$ и $B(0,b)$. Уравнение прямой можем составить согласно (3) в виде

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b} \quad \text{или} \quad -\frac{x}{a}+1=\frac{y}{b},$$

которое перепишем в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 . \qquad (4)$$

Это и называется <u>уравнением прямой в отрезках</u>.

Если прямая параллельна оси x, то говорят, что прямая пересекает ось x в бесконечно удаленной точке и иногда записывают $a=\infty$. Точно также $b=\infty$, если прямая параллельна оси y.

<u>Примеры</u>. I) Составить уравнение прямой, проходящей через точки $P_1(2,-5)$ и $P_2(1,3)$.

Согласно уравнению (3) напишем

$$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-(-5)}{3-(-5)} \quad \text{или} \quad \frac{x-2}{-1}=\frac{y+5}{8},$$

которое можно преобразовать к виду

$$8x+y-11=0 .$$

2) Прямая отсекает на осях отрезки $a=-4$, $b=3$. Составить уравнение прямой.

На основании формулы (4) имеем

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1 \quad \text{или} \quad 3x-4y+12=0 .$$

3) Дана прямая уравнением $4x-3y+12=0$. Представить это уравнение в виде уравнения в отрезках.

Начальные отрезки легко найти как координаты точек пересечения прямой с осями координат.

Приравнивая $y=0$, получим $4x+12=0$, откуда $x=-3$. Прямая пересекает ось x в точке $P_1(-3,0)$ и $a=-3$.

При $x=0$ имеем $-3y+12=0$ и $y=4$, т.е. начальная ордината равна $b=4$. Уравнение прямой в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1 .$$

4) Найти начальные отрезки прямой $3x+5=0$.

Данная прямая параллельна оси y, т.к. уравнение не содержит переменной y. Начальная абсцисса $x=-5/3$, начальная ордината отсутствует (или $b=\infty$). К.

6. Уравнение прямой, заданной угловым коэффициентом и начальной ординатой

Составим уравнение прямой, если известны угловой коэффициент $k=\tan\alpha$ и начальная ордината b (рис. I7в). Знание $\tan\alpha$ равносильно знанию самого угла α. Сначала составим каноническое уравнение прямой и затем перейдем к заданным величинам. За данную точку прямой примем точку пересечения с осью y — $P_0(0,b)$. За направляющий вектор $\vec{b}$ прямой примем единичный вектор, составляющий с осью x угол α. Тогда этот вектор определен своими направляющими косинусами $\vec{b}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Согласно (2) уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\sin\alpha} \qquad \text{или} \qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x=y-b .$$

Выражая отсюда y, и учитывая, что $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha=k$, получим

$$y=kx+b, \tag{5}$$

которое называется <u>уравнением прямой с заданным угловым коэффициентом и начальной ординатой</u>.

При $k>0$ прямая составляет с осью x острый угол, при $k<0$ — тупой угол, при $k=0$ прямая параллельна оси x. Если $b>0$, то прямая пересекает ось y выше начала координат, при $b<0$ — ниже. Если $b=0$, то прямая проходит через начало координат и ее уравнением послужит

$$y=kx . \tag{5a}$$

Рассматривая равенства (5) и (5а) как линейную функцию и пропорциональную зависимость, соответственно, можем сказать: I) графиком линейной функции является прямая; 2) график пропорциональной зависимости есть прямая, проходящая через начало координат.

<u>П р и м е р</u>. Составить уравнение прямой, составляющей с осью x угол $\alpha=60^\circ$ и имеющей начальную ординату 6.

Находим угловой коэффициент прямой $k=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$. Согласно уравнению (5) имеем $y=\sqrt{3}x+6$. К.

7. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении

Составим уравнение прямой, проходящей через точку $P_0(x_0,y_0)$

и имеющей угловой коэффициент k (рис. 17г).

Уравнение прямой составим аналогично предыдущему случаю. Подставляя координаты данной точки $P_0(x_0, y_0)$ и координаты единичного направляющего вектора $\bar{s} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ в каноническое уравнение прямой (2), имеем

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha}; \quad (x - x_0)\tan\alpha = y - y_0 \quad \text{или} \tag{6}$$
$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

которое называется <u>уравнением прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении</u>.

<u>Примеры</u>. 1) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P_0(2, -3)$ и имеющей угловой коэффициент $k = 2$.

Согласно формуле (6) имеем

$$y + 3 = 2(x - 2) \quad \text{или} \quad 2x - y - 7 = 0.$$

2) Составить уравнения прямых, проходящих через точку $P_0(3, -4)$ параллельно осям координат.

Прямая, параллельная оси x, имеет угловой коэффициент $k = 0$ и из формулы (6) следует, что $y + 4 = 0$.

Для прямой, параллельной оси y угловой коэффициент не определен ($k = \infty$) и формула (6) не применима. Все точки требуемой прямой имеют абсциссу $x = 3$ и уравнением служит $x - 3 = 0$. К.

8. <u>Общее уравнение прямой</u>

1 Составим уравнение прямой, определенной одной точкой $P_0(x_0, y_0)$ и нормальным вектором $\bar{n} = (A, B)$ (рис. 17е).

Взяв на прямой текущую точку $P(x, y)$, построим вектор $\overline{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$. Для любого такого вектора $\overline{P_0P} \perp \bar{n}$. По признаку перпендикулярности векторов

$$\bar{n} \cdot \overline{P_0P} = 0$$

или в координатной форме имеем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{7}$$

Раскроем скобки и обозначим $-Ax_0 - By_0 = C$. Тогда получим уравнение

$$Ax + By + C = 0, \tag{8}$$

которое называется <u>общим уравнением прямой</u>.

Подчеркиваем, что в общем уравнении коэффициенты A и B можно всегда истолковать как координаты вектора нормали к прямой.

<u>Пример I.</u> Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P_0(-3, 4)$ перпендикулярно к вектору $\bar{n}=(2,-1)$.

Согласно формуле (7) получим $2\cdot(x+3)-1\cdot(y-4)=0$ или $2x-y+10=0$. К.

<u>Пример 2</u>. Даны уравнения прямых $3x+4=0$ и $y-5=0$. Найти их нормальные векторы.

Уравнение $3x+4=0$ перепишем в виде общего уравнения прямой $3x+0y+4=0$ и одним нормальным вектором служит $\bar{n}_1=(3, 0)$. Нормальным вектором может послужить и любой коллинеарный с ним вектор $\lambda\bar{n}_1$ $(\lambda\neq 0)$.

Во втором случае примем за нормальный вектор $\bar{n}_2=(0,1)$. К.

II При составлении уравнения прямой ему обычно придают один из видов:

$$Ax+By+C=0\ ;$$
$$y=kx+b.$$

Объясним, как из общего уравнения прямой найти угловой коэффициент и начальную ординату. Для этого надо общее уравнение прямой решить относительно y:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

и, следовательно,

$$k=-\frac{A}{B}, \quad b=-\frac{C}{B} \qquad (9)$$

– угловой коэффициент прямой, заданной общим уравнением, равно отношению коэффициентов при x и y, взятому с обратным знаком.

Если $B=0$, то угловой коэффициент k не определен; в этом случае прямая параллельна оси y.

<u>Пример 3</u>. Найти угловые коэффициенты следующих прямых: I) $2x-3y+1=0$; 2) $6x+7y+2=0$; 3) $3y-4=0$; 4) $5x-8=0$.

I) Решим уравнение относительно y:

$$-3y=-2x-1; \quad y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} \Rightarrow k=\frac{2}{3}.$$

2) Разделим коэффициент при x на коэффициент при y и получим $k=-6/7$.

3) Находим $y=4/3$ или $y=0\cdot x+4/3 \Rightarrow k=0$. Можно рассуждать и так: уравнение не содержит x — прямая параллельна оси x и $\alpha=0$ и $k=0$.

4) Данное уравнение нельзя представить в виде $y=kx+b$. Угловой коэффициент не определен ($k=\infty$). По-другому: прямая $x=8/5$ параллельна оси y и k не определен.

9. Исследование общего уравнения прямой

I Начнем с теоремы, определяющей порядок уравнения прямой.

Теорема. В двумерной прямоугольной системе координат всякая прямая определяется линейным уравнением

$$Ax+By+C=0$$

и наоборот, всякое линейное уравнение, у которого хотя бы один из коэффициентов A, B не равен нулю, определяет прямую.

Доказательство. В пункте 8 было составлено общее уравнение прямой в виде (7), которое линейное уравнение. Это и служит доказательством первой половины теоремы.

Докажем и вторую половину теоремы. Пусть точка $P_0(x_0, y_0)$ удовлетворяет линейному уравнению: $Ax_0+By_0+C=0$. Вычтем это равенство из уравнения $Ax+By+C=0$; получим

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \quad \text{или} \quad Ax+By+C=0,$$

которое с одной стороны, является уравнением прямой вида (7) и с другой стороны, совпадает с линейным уравнением $Ax+By+C=0$. Тем самым теорема доказана.

II Если $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, то прямая отсекает на осях координат отрезки, отличные от нуля и прямая пересекает обе оси координат, не проходя через начало координат.

Исследуем, как зависит расположение прямой относительно осей координат в зависимости от того, если в уравнении некоторые коэффициенты равны нулю.

При равенстве нулю всех коэффициентов уравнение теряет смысл.

Пусть лишь $C = 0$. Уравнение примет вид

$$Ax + By = 0 \quad \text{или} \quad y = kx, \quad \text{где} \quad k = -A/B.$$

Прямая проходит через начало координат, т.к.начальная ордината $b = 0$.

Пусть лишь $B = 0$. Уравнение $Ax + C = 0$ можно преобразовать к виду $x = -C/A = x_0$ – прямая параллельна оси y.

Пусть лишь $A = 0$. Уравнение $By + C = 0$ преобразуется к виду $y = -C/B = y_0$ – прямая параллельна оси x.

По двум последним частным случаям делаем вывод: если в уравнении прямой отсутствует одна из переменных, то прямая параллельна одноименной оси координат. При $A = C = 0$ имеем $By = 0$ или $y = 0$ – прямая совпадает с осью x.

При $B = C = 0$ имеем $x = 0$ – прямая совпадает с осью y.

III Поясним на примерах, как удобно построить прямую по заданному уравнению. С этой целью найдем точки пересечения прямой с осями координат (если они существуют): приравниваем $x = 0$ и находим начальную ординату $y = -C/B = b$ и также при $y = 0$ – начальную абсциссу $x = -C/A = a$. Они определяют две точки прямой $P_1(0, b)$ и $P_2(a, 0)$ и через них проведем прямую.

П р и м е р ы. Построить прямые I) $3x - 4y + 12 = 0$; 2) $2x + 3y = 0$; 3) $5x - 8 = 0$; 4) $3y + 7 = 0$.

I) При $x = 0$ получим $y = 3$; при $y = 0$ имеем $x = -4$. Начальные отрезки равны $a = -4$, $b = 3$. Прямая проходит через точки $P_1(-4, 0)$ и $P_2(0, 3)$ (рис. I8).

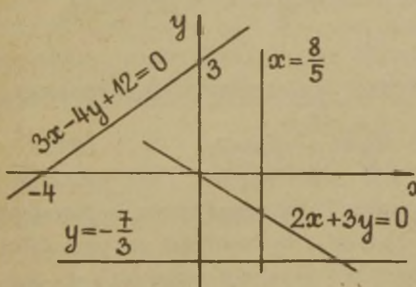

Рис. I8.

2) Свободный член $C = 0$ – прямая проходит через начало координат. Вторую точку найдем, приписывая абсциссе произвольное конкретное значение. Пусть $x = 3$. Тогда $y = -2$. Прямая проходит через точку

$$P(3, -2).$$

3) В уравнении отсутствует y – прямая парал-

лельна оси y : начальная абсцисса $a = 8/5$.

4) Прямая параллельна оси x : начальная ордината $b=-7/3$. К.

10. О взаимном расположении двух прямых

Пусть заданы две прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 ,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 .$$

I Точка пересечения прямых принадлежит одновременно обеим прямым и ее координаты находятся путем решения системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 , \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 . \end{cases} \tag{10}$$

Если система решений не имеет, то прямые параллельны; если решений бесконечно много, то прямые совпадают.

II Найдем угол между двумя прямыми.

1) способ. Угол φ между прямыми равен углу между нормалями прямых (рис. 19а). Из общих уравнений прямых определим нормальные векторы $\bar{n}_1 = (A_1, B_1)$, $\bar{n}_2 = (A_2, B_2)$.

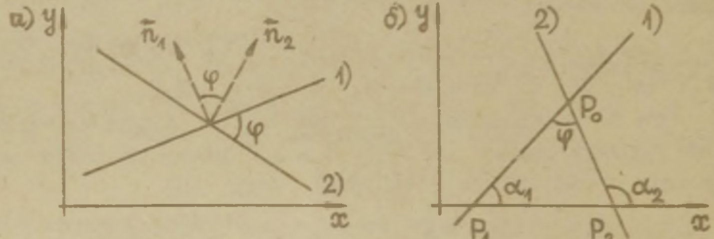

Рис. 19.

Угол между векторами вычисляется по известному правилу

$$\cos\varphi = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} . \tag{11}$$

2) способ. Угол между прямыми часто выражают через угловые коэффициенты k_1 , k_2 прямых. Рассмотрим на рис. 19б треугольник $P_0P_1P_2$, для которого внешний угол $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$, где α_1 , α_2 – углы наклона данных прямых. Найдем тангенс угла $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$; $\tan\varphi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ и преобразуем правую

часть по известной формуле из тригонометрии

$$\tan(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_1\cdot\tan\alpha_2}\ .$$

Дальше учтем, что $\tan\alpha_1=k_1$, $\tan\alpha_2=k_2$. Получим формулу

$$\tan\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\ . \qquad (12)$$

Для получения острого угла следует найти абсолютную величину от правой части равенства (12).

Формула не применима, если угловой коэффициент прямой не определен ($k=\infty$). Тогда лучше воспользоваться формулой (11).

III <u>Условие параллельности</u> прямых. Если прямые параллельны, то угол между ними $\varphi=0 \Rightarrow \tan\varphi=0 \Rightarrow k_2-k_1=0$. Условие параллельности через угловые коэффициенты:

$$k_1=k_2\ . \qquad (13а)$$

Выразим это условие и через коэффициенты общего уравнения прямой:

$$k_1=-\frac{A_1}{B_1}, \quad k_2=-\frac{A_2}{B_2}; \text{ из (13а) следует } \frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}\ .$$

Переставляя внутренние члены пропорции, получим условие параллельности в виде

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\ . \qquad (13б)$$

IУ <u>Условие перпендикулярности</u> прямых. Если прямые перпендикулярны, то $\tan\pi/2$ не существует. Формула (12) теряет смысл, если знаменатель равен нулю. Из этого следует <u>условие перпендикулярности через угловые коэффициенты</u>:

$$k_1k_2=-1\ . \qquad (14а)$$

Из формулы (11) следует при $\varphi=\pi/2$, что $\cos\pi/2=0$ и отсюда получим <u>условие перпендикулярности через коэффициенты общих уравнений</u>:

$$A_1A_2+B_1B_2=0\ . \qquad (14б)$$

П р и м е р ы. I) Найти острый угол между прямыми $2x + y - 1 = 0$ и $y = 3x + 2$.

Угловые коэффициенты $k_1 = -2$, $k_2 = 3$. По формуле (I2) находим

$$\tan\varphi = \left|\frac{3-(-2)}{1+3\cdot(-2)}\right| = 1; \quad \varphi = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

2) Найти угол между прямыми $2x - 3y + 5 = 0$ и $x - 3 = 0$.

Для второй прямой угловой коэффициент не определен. Вместо $\tan\varphi$ находим $\cos\varphi$ по формуле (II):

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 1 - 3\cdot 0}{\sqrt{2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}; \qquad \varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

3) Выяснить, какие пары данных прямых параллельны, какие перпендикулярны:

I) $2x - 3y + 5 = 0$, 2) $4x - 6y + 7 = 0$, 3) $3x + 2y + 1 = 0$, 4) $3x - 5 = 0$, 5) $2y + 1 = 0$.

Находим угловые коэффициенты прямых:

1) $k_1 = \frac{2}{3}$, 2) $k_2 = \frac{2}{3}$, 3) $k_3 = -\frac{3}{2}$, 4) $k_4 = \infty$, 5) $k_5 = 0$.

Итак: I) и 2) прямые параллельны; I) и 3), а также 2) и 3) перпендикулярны; 4) и 5) перпендикулярны, так как 4) параллельна оси y и 5) параллельна оси x.

4) Даны вершины треугольника $P(1, 3)$, $Q(-3, 5)$, $R(0, -6)$. Найти а) уравнение медианы, опущенной из вершины R; б) уравнение высоты, опущенной из вершины Q; в) уравнение прямой, проходящей через вершину Q параллельно стороне RP; г) точку пересечения найденных медианы и высоты.

а) Медиана проходит через вершину R и середину S отрезка PQ. Найдем координаты точки S:

$$x_S = \frac{1}{2}(x_P + x_Q) = -1, \qquad y_S = \frac{1}{2}(3-5) = -1.$$

Составим уравнение медианы, проходящей через точки R и S:

$$\frac{x-0}{-1-0} = \frac{y+6}{-1+6} \qquad \text{или} \qquad 5x + y + 6 = 0.$$

б) Для высоты известна одна точка. Угловой коэффициент находим следующим образом. Составим уравнение стороны RP

(в принципе нам нужен лишь угловой коэффициент этой прямой) по двум точкам и затем находим угловой коэффициент из условия перпендикулярности основания и высоты.

Сторона RP : $\dfrac{x-0}{1-0}=\dfrac{y+6}{3+6}$ или $9x-y-6=0$;

откуда $k_1=9$. Обозначая угловой коэффициент высоты через k_2, имеем $9k_2=-1$, откуда $k_2=-1/9$.

Уравнение высоты есть $y+5=-1/9\cdot(x+3)$ или $x+9y-48=0$.

в) Угловой коэффициент k требуемой прямой равен угловому коэффициенту стороны RP, т.е. $k=9$. Уравнение прямой есть $y+5=9(x+3)$ или $9x-y+22=0$.

г) Точку пересечения медианы и высоты находим путем решения системы уравнений

$$\begin{cases} 5x+y+6=0, \\ x+9y-48=0. \end{cases}$$

Решим систему способом сложения: умножим второе уравнение на -5 и сложим уравнения:

$$-44y+246=0; \qquad y=\frac{246}{44}=\frac{123}{22}.$$

Умножая первое уравнение на -9 и складывая уравнения, получим

$$-44x-102=0; \qquad x=-\frac{51}{22}.$$

Точка пересечения T этих прямых имеет координаты $T\left(-\frac{51}{22}, \frac{123}{22}\right)$. К.

II. Расстояние от точки до прямой

Даны точка $P_0(x_0, y_0)$ и прямая $Ax+By+C=0$. Найти расстояние от точки до прямой.

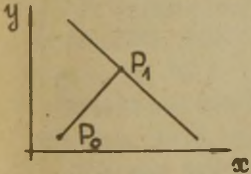

Рис. 20.

Поясним идею решения задачи с помощью рис. 20. Через точку P_0 проведем прямую, перпендикулярную к данной прямой. Угловой коэффициент данной прямой $k_1=-A/B$ – перпендикуляра $k_2=B/A$ и уравнение перпендикулярной прямой есть $y-y_0=B/A(x-x_0)$ или $Bx-Ay+(-Bx_0+Ay_0)=0$. Затем находим точку пересечения

P_1 этих прямых и наконец расстояние между точками $P_0P_1 = d$. Если провести соответствующие вычисления, получим следующую формулу

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} . \qquad (15)$$

Обратим внимание на то, что в числителе стоит левая часть общего уравнения прямой, где переменные x и y заменены координатами данной точки, а в знаменателе длина вектора нормали прямой.

Пример. Найти расстояние от точки $(-1, 1)$до прямой $3x - 4y + 5 = 0$.

Согласно формуле (15) имеем

$$d = \frac{|3\cdot(-1) - 4\cdot 1 + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2}{5} . \qquad К.$$

§ 3. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Парабола

В настоящем параграфе изучаем линии второго порядка. Все эти задачи служат примерами того, как составить уравнение линии по ее геометрическим свойствам и изучать свойства линии по уравнению. Общая методика исследования уравнения линии изложена в 1 и 2 пунктах предыдущего параграфа.

1 Начнем с параболы, рассматриваемой и в школьной математике как график квадратичной функции.

Определение. Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).

На рис. 21а указаны фокус F и директриса ℓ. Пусть расстояние от фокуса до директрисы равно p, которое называется параметром параболы.

Составление уравнения параболы начнем с выбора системы координат. Сделаем это следующим образом (рис. 21а): ось y направим перпендикулярно к директрисе через фокус с положительным направлением от директрисы к фокусу, ось x разделит расстояние между директрисой и фокусом пополам. Затем фиксируем текущую точку параболы P. Согласно определению параболы расстояния $FP = QP$. Выразим это условие на языке координат. Для нахождения указанных расстояний определим

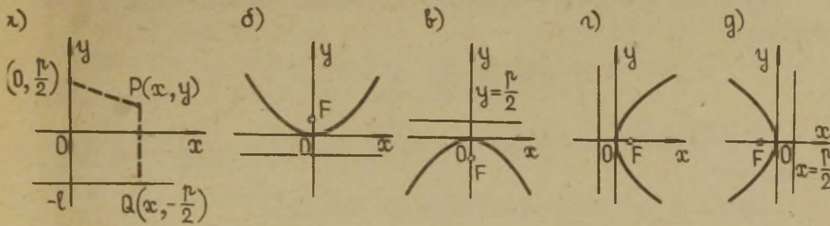

Рис. 21

координаты точек F, P и Q. Текущая точка имеет координаты $P(x,y)$. Учитывая выбор системы координат, фокус имеет координаты $F(0,p/2)$. Точка Q находится на директрисе $y=-p/2$, ее абсцисса равна абсциссе точки P; имеем $Q(x,-p/2)$. Вычисляя длины отрезков FP и QP и приравнивая их выражения, получим

$$\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2+\left(y+\frac{p}{2}\right)^2} .$$

В общих чертах уравнение параболы составлено. Упростим это равенство, возведя равенство в квадрат и перегруппируя слагаемые. Получим

$$x^2+y^2-py+\frac{p^2}{4} = y^2+py+\frac{p^2}{4}$$

и окончательно

$$x^2 = 2py , \qquad (I)$$

которое называется <u>каноническим уравнением параболы</u>.

II Переходим к выяснению свойств параболы или другими словами, будем исследовать уравнение параболы.

Находим точки пересечения параболы с осями координат. Если $x=0$, то и $y=0$ – парабола проходит через начало координат $O(0,0)$. Других точек пересечения с осями нет.

Так как $x^2 \geqslant 0$ и $p>0$, то $y \geqslant 0$. Это означает, что точки параболы не находятся ниже оси x.

Изучаем симметрию параболы относительно осей координат. Подставляя в уравнение вместо x значение $-x$, получим

$(-x)^2 = 2py$ или $x^2 = 2py$ – уравнение параболы не менялось. Это означает, что парабола симметрична относительно оси ординат. Ось симметрии параболы называется <u>осью параболы</u> и точка пересечения параболы со своей осью – <u>вершиной</u> параболы.

Выясним, как будут расположены точки параболы при $x \to \pm\infty$. Найдем

$$\lim_{x\to\infty} y = \frac{1}{2p} \lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty$$

– с удалением от оси параболы точки параболы уходят в бесконечность.

Парабола $x^2 = 2py$ построена на рис. 21б.

Выражая y из уравнения (1), получим квадратичную функцию

$$y = ax^2, \quad \text{где} \quad a = \frac{1}{2p} .$$

Это означает, что графиком квадратичной функции $y = ax^2$ является парабола с вершиной в начале координат и при $a > 0$ ветви направлены в положительную сторону оси y.

III На примере параболы покажем, как вид уравнения линии зависит от выбора системы координат.

Пусть положительное направление оси y выбрано от фокуса в сторону директрисы. На рис. 21в фокус расположен ниже директрисы. Тогда уравнение директрисы $y = p/2$, фокус имеет координаты $F(0, -p/2)$ и уравнение параболы примет вид (самим проверить!)

$$x^2 = -2py \tag{1а}$$

или

$$y = ax^2, \quad a = -\frac{1}{2p} < 0 .$$

Ветви параболы направлены против положительного направления оси y.

Направляя ось x через фокус от директрисы в сторону фокуса (рис. 21г) роли координат x и y поменяются. Директрисой служит прямая $x = -p/2$ и уравнение параболы примет вид

$$y^2 = 2px . \tag{1б}$$

Направляя ось x через фокус в сторону директрисы (рис. 21д), директриса расположена правее оси y и имеет уравнение $x = p/2$. Уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = -2px . \tag{1в}$$

П р и м е р 1. Составить каноническое уравнение параболы, если

1) параметр равен $p = 8$ и ось y направлена вдоль оси параболы от вершины в сторону фокуса;

2) параметр равен $p = 6$ и ось x направлена вдоль оси параболы от фокуса в сторону директрисы. Определить координаты фокуса и уравнение директрисы.

1) Фокус F находится на оси ординат на расстоянии $p/2$ от начала координат. Таким образом имеем

$$F(0,4) \text{ и директрису } y = -4 .$$

Уравнение параболы $x^2 = 2 \cdot 8y$ или $x^2 = 16y$.

2) Фокус лежит на оси x левее оси y . Поэтому имеем фокус $F(-3,0)$, директрису $x = 3$ и уравнение параболы $y^2 = -12x$ (ветви открываются влево). К.

П р и м е р 2. Дано уравнение параболы: 1) $x^2 = 4y$, 2) $x^2 = -6y$, 3) $y^2 = 6x$. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы.

1) Осью параболы является ось y и ветви открываются вверх. Из уравнения видно, что $2p = 4$ и $p/2 = 1$. Получим фокус $F(0,1)$ и директрису $y = -1$.

2) Ветви параболы открываются вниз. Так как $2p = 6$, то $p/2 = 3/2$ и имеем фокус $F(0, -3/2)$, директрису $y = 3/2$.

3) Ветви параболы открываются в положительную сторону оси x , $2p = 6$, $p/2 = 3/2$ и фокус имеет координаты $F(3/2, 0)$, уравнение директрисы $x = -3/2$. К.

2. График квадратичной функции

В школьной математике объясняют, как выглядит график общей квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c .$$

Проведем этот анализ методами аналитической геометрии. Выделим в квадратичной функции полный квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} .$$

Будем иметь

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}. \qquad (2)$$

Переходим к новой системе координат следующим образом. Примем за начало новой системы координат точку $O'(x_0, y_0)$, где

$$x_0=-\frac{b}{2a}, \qquad y_0=\frac{4ac-b^2}{4a} \qquad (3)$$

и направим новые оси $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ параллельно старым осям x, y, соответственно. Старые координаты (x, y) и новые ($\mathcal{X}, \mathcal{Y}$) при параллельном переносе осей координат связаны друг с другом по формулам

$$x=x_0+\mathcal{X}, \qquad y=y_0+\mathcal{Y}.$$

Подставим выражения для x и y в уравнение (2) и учтем смысл обозначений x_0, y_0 по (3). Тогда равенство (2) примет вид уравнения параболы $\mathcal{Y}=a\mathcal{X}^2$.

Заключение. Уравнение $y=ax^2+bx+c$ определяет параболу, ось которой параллельна оси ординат. Ветви параболы открываются при $a>0$ в положительную сторону оси ординат, при $a<0$ – в отрицательную сторону. Координаты вершины параболы определены формулами (3). Ось параболы имеет уравнение $x=x_0$, параметр равен $p=1/2a$.

Пример. Найти вершину и ось параболы $y=2x^2-8x+5$.

Одна возможность воспользоваться готовыми формулами. Мы повторим предыдущий ход рассуждений и на примере. Выделим полный квадрат:

$$2x^2-8x+5=2\left(x^2-4x+\frac{5}{2}\right)=2\left[\left(x^2-2\cdot\frac{4}{2}x+2^2\right)-2^2+\frac{5}{2}\right]=$$
$$=2(x-2)^2-3;$$
$$y+3=2(x-2)^2.$$

Для получения зависимости в новых координатах $\mathcal{Y}=a\mathcal{X}^2$ следует брать $y+3=\mathcal{Y}$, $x-2=\mathcal{X}$ и следовательно, $x_0=2$ и $y_0=-3$. Это означает, что вершина параболы находится в точке $O'(2,-3)$ и ось параболы имеет уравнение $x=2$. Параметр параболы $p=1/2a=1/4$. К.

По параболе движутся, например, тела, брошенные наклонно к горизонту; спутники Земли, имеющие определенную начальную скорость, также часть комет.

3. Эллипс

Определение. Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний каждой от двух данных точек (фокусов), есть величина постоянная.

Обозначим расстояние между фокусами F_1 и F_2 через $2c$ и заданную постоянную величину через $2a$.

Для составления уравнения эллипса выберем систему координат следующим образом (рис. 22а). Направим ось x вдоль прямой, проходящей через фокусы и ось y по середине между фокусами. Текущая точка эллипса имеет координаты $P(x,y)$. Согласно выбору системы координат фокусы имеют координаты $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$. По определению эллипса сумма отрезков F_1P и F_2P удовлетворяет условию

$$F_1P + F_2P = 2a .$$

Выразим это условие через координаты текущей точки в виде

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a .$$

Преобразуем это уравнение, освобождаясь от корней. С этой

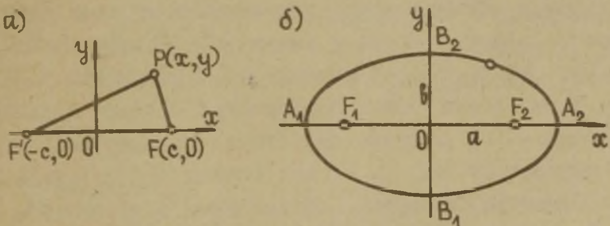

Рис. 22.

целью перенесем один корень в правую сторону и возведем равенство в квадрат. Затем упростим выражение и возведем обе стороны еще в квадрат. Реализация этого рассуждения даст:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 ;$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2 ;$$

сократим, перегруппируем слагаемые и разделим на 4:

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx \ ;$$

$$a^2(x^2+2cx-c^2+y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \ ;$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \ .$$

Деление обеих частей на $a^2(a^2-c^2)$ даст

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \ .$$

По рис. 22а видно, что в треугольнике F_1F_2P $F_1P + F_2P > F_1F_2$ или $2a > 2c$ и $a > c$. Поэтому всегда $a^2 - c^2 > 0$ и обозначим

$$a^2 - c^2 = b^2 \ .$$

Уравнение эллипса примет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \qquad (4)$$

которое называется каноническим уравнением эллипса.

4. Исследование уравнения эллипса

Выясним свойства эллипса, вытекающие из уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

I Находим точки пересечения эллипса с осями координат. Для получения абсцисс точек пересечения с осью x подставим в уравнение эллипса $y = 0$ и имеем $x^2 = a^2$ или $x = \pm a$. Эллипс пересекает ось x в двух точках $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$.

При определении точек пересечения с осью y подставим в уравнение $x = 0$ и получим аналогично предыдущему случаю, что эллипс пересекает ось y в двух точках $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$.

II Симметрия эллипса. Подставляя в уравнение эллипса вместо x значение $-x$ и вместо y значение $-y$ увидим, что вид уравнения не меняется, так как $(-x)^2 = x^2$ и $(-y)^2 = y^2$. Это означает, что эллипс симметричен относительно обеих осей координат и также начала координат. Линии симметрии эллипса называются осями эллипса и центр симметрии центром эллипса.

III Выразим y через x:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2} \qquad \text{или} \qquad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \ .$$

Должно быть $a^2 - x^2 \geq 0$, откуда следует, что

$$-a \leq x \leq a .$$

Выражая x через y , имеем

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} ,$$

откуда следует, что $-b \leq y \leq b$.

Резюмируя полученные результаты, можем сказать, что точки эллипса не выходят из прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$ и эллипс является замкнутой линией.

Оси эллипса равны $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2b$; отрезки длиной a и b называются полуосями. Полуоси и половина расстояния между фокусами связаны равенством

$$a^2 - b^2 = c^2 . \qquad (5)$$

Эллипс с указанием его характерных отрезков построен на рис. 22б.

III <u>Частный случай</u>. Если $a = b$, то уравнение эллипса примет вид

$$x^2 + y^2 = a^2 ,$$

которое определяет окружность радиуса a с центром в точке $O(0,0)$. Оба фокуса совпадают с центром.

IУ Для окружности $b/a = 1$. Если $b/a < 1$, то эллипс по оси x растянут (по оси y сжат) по сравнению с окружностью радиуса a. Степень сплющенности эллипса относительно длинной оси (оси x) измеряется эксцентриситетом эллипса

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} . \qquad (6)$$

Преобразование даст

$$\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{c}{a} ;$$

<u>эксцентриситет</u> эллипса определяется и формулой

$$\varepsilon = \frac{c}{a} . \qquad (6а)$$

Эксцентриситет эллипса заключен в интервале

$$0 \leq \varepsilon < 1 ,$$

так как в случае окружности ($a = b$) имеем $\varepsilon = 0$ и с уменьшением b/a величина $\varepsilon \to 1$.

П р и м е р ы. 1) Составить каноническое уравнение эллипса, если даны полуоси $a = 5$, $b = 3$. Найти эксцентриситет эллипса.

По формуле (4) получим

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 .$$

Эксцентриситет (формула (6а)) равен

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{16}}{5}=\frac{4}{5} .$$

2) Дано уравнение эллипса

$$16x^2+25y^2-400=0 .$$

Найти оси эллипса, расстояние между фокусами и эксцентриситет.

Приведем уравнение к каноническому виду, превращая свободный член в 1. С этой целью перенесем -400 вправо и разделим на 400. Получим

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 .$$

Из уравнения видно, что полуоси равны $a=5$, $b=4$.
Находим $c=\sqrt{25-16}=3$ и $2a=10$, $2b=8$, $2c=6$, $\varepsilon=3/5$.

3) Составить каноническое уравнение эллипса, если длинная ось равна 16 и эксцентриситет 0,5.

Длинная полуось $a = 8$. Короткую полуось находим с помощью эксцентриситета из равенств

$$\varepsilon=\frac{c}{a}, \qquad a^2-b^2=c^2 .$$

Получим $c = a\varepsilon = 8\cdot 0,5 = 4$; $b^2 = 64 - 16 = 48$.
Уравнение эллипса есть

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1 . \qquad \text{К.}$$

Планеты движутся по эллипсам, в одном фокусе которого находится Солнце. Спутники при определенной стартовой скорости движутся по эллипсам (в частном случае по окружности).

5. Гипербола

Определение. Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний которых от двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная.

Обозначим расстояние между фокусами $F_1F_2 = 2c$ и заданную постоянную через $2a$. Интерес не представляют случаи I) $2a=0$; 2) $2a = 2c$. Если $2a = 0$, то расстояния текущих точек P от фокусов $F_1P = F_2P$, а это присуще точкам среднего перпендикуляра отрезка F_1F_2 (рис. 23а). Если же $2a=2c$, то текущие точки образуют полупрямые, начиная от фокусов влево и вправо (рис. 23б).

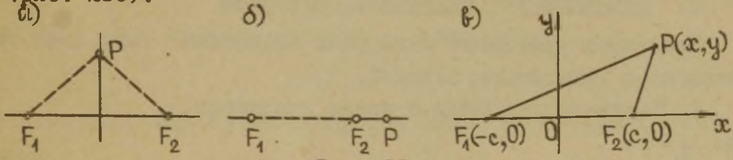

Рис. 23.

В дальнейшем предположим, что $2c > 2a$.

Выберем систему координат следующим образом (рис. 23в). Ось x направим вдоль прямой, проходящей через фокусы и ось y разделит фокусное расстояние пополам. При таком выборе системы координат фокусы имеют координаты $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ и текущая точка $P(x,y)$. По определению гиперболы

$$|F_1P - F_2P| = 2a .$$

По определению абсолютной величины можем написать

$$F_1P - F_2P = 2a, \quad \text{если} \quad F_1P - F_2P > 0 ;$$
$$-(F_1P - F_2P) = 2a, \quad \text{если} \quad F_1P - F_2P < 0$$

или в виде объединенного равенства

$$F_1P - F_2P = \pm 2a .$$

Вычисляя расстояния F_1P и F_2P, получим

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a .$$

Дальнейшее упрощение уравнения проводим аналогично тому, как делалось в случае эллипса. Перенесем один радикал в правую сторону, возведем обе стороны в квадрат и сократим подобные члены:

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx .$$

Возведение этого равенства в квадрат и сокращение дают

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad |: a^2(c^2 - a^2)$$

8

Из-за $c > a$ и $c^2 - a^2 > 0$ обозначим

$$c^2 - a^2 = b^2 .$$

Окончательно получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 . \qquad (7)$$

6. Исследование уравнения гиперболы

Исследуем уравнение гиперболы аналогично тому, как это делалось с уравнением эллипса.

I Точки пересечения с осями координат.

При $y = 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm a .$$

Гипербола пересекает ось x в двух точках $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$. Эти точки называются <u>вершинами</u> гиперболы.

При $x = 0$:

$$-\frac{y^2}{b^2} = 1 ; \qquad y^2 = -b^2$$

— это уравнение решений не имеет и следовательно, гипербола ось y не пересекает.

II Гипербола симметрична относительно осей координат и начала координат, т.к. при замене $x \to -x$ и $y \to -y$ уравнение (7) удовлетворяется. Центр симметрии O называется центром гиперболы.

III Выразим y через x:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} .$$

Так как должно быть $x^2 - a^2 \geq 0$, то $x \leq -a$ или $x \geq a$. Это означает, что внутри полосы $-a < x < a$ точек гиперболы нет.

При увеличении $|x|$ $(x \to \pm\infty)$ также $|y|$ возрастает $(y \to \pm\infty)$ — точки гиперболы удаляются от осей координат или другими словами, гипербола открытая линия.

IУ Асимптоты гиперболы. Сначала дадим понятие асимптоты линии. <u>Асимптотой</u> данной линии называется прямая, к которой беспредельно приближаются точки линии при неограниченном продолжении линии или, другими словами, расстояние от точки линии до асимптоты стремится к нулю при движении точки вдоль линии в бесконечность. Например, для графика функции $y = 2^x$ асимптотой является ось x ($y = 0$), т.к. при $x \to -\infty$ значения функции стремятся к нулю.

Убедимся, что гипербола имеет две асимптоты. Рассмотрим часть гиперболы, лежащей правее оси y:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} .$$

Если $x \to +\infty$ то $\sqrt{x^2 - a^2} \to x$ и разность

$$\pm \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) \to 0 .$$

Это означает, что точки гиперболы будут все ближе и ближе к прямым

$$y = \frac{b}{a}x , \quad y = -\frac{b}{a}x \quad \text{или} \quad y = \pm\frac{b}{a}x , \tag{8}$$

которые называются асимптотами гиперболы. Аналогичное происходит благодаря симметрии гиперболы и при $x \to -\infty$.

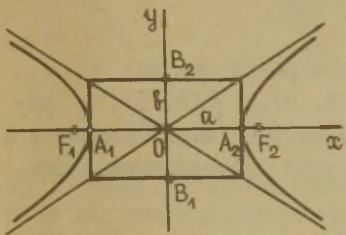

Рис. 24.

Асимптотами гиперболы служат диагонали прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$, построенного около начала координат (рис. 24).

На рис. 24 построена гипербола и показаны характерные точки и отрезки. Отрезки $A_1A_2 = 2a$ и $B_1B_2 = 2b$ называются действительной и мнимой осями, отрезки длины a и b есть полуоси. Гипербола симметрична относительно своих осей. Полуоси связаны с помощью формулы

$$b^2 = c^2 - a^2 . \tag{9}$$

Для построения гиперболы по заданному уравнению целесообразно предварительно провести асимптоты.

<u>Эксцентриситетом</u> гиперболы называется величина

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \tag{10}$$

и $\varepsilon > 1$ (для гиперболы $c > a$).

Сообщая спутнику достаточно большую начальную скорость, он будет двигаться по одной ветви гиперболы. Часть комет движется по гиперболической орбите.

П р и м е р ы. I) Составить каноническое уравнение гиперболы, если даны вершины гиперболы $A_{1,2}(\pm 3,0)$ и эксцентриситет равен $\varepsilon = 5/3$. Составить уравнения асимптот.

По координатам вершин узнаем, что $a = 3$. По формуле (I0) найдем $c = a \cdot \varepsilon = 5$. Из формулы (9) найдем мнимую полуось $b^2 = 25 - 9 = 16$, $b = 4$. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1,$$

асимптотами являются прямые

$$y = -\frac{4}{3}x, \quad y = \frac{4}{3}x.$$

2) По уравнению гиперболы $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ найти а) полуоси, б) вершины, в) фокусы, г) эксцентриситет, д) асимптоты.

Сначала приведем уравнение к каноническому виду: в правой части должно стоять I. Перенесем -144 вправо и разделим равенство почленно на 144; получим

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Из уравнения следует, что а) полуоси равны $a = 4$, $b = 3$; б) вершинами являются точки $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$; в) вычислим $c^2 = a^2 + b^2 = 25$, $c = 5$ и фокусы имеют координаты $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$; г) $\varepsilon = c/a = 5/4$; д) уравнения асимптот $y = \pm 3/4\, x$. К.

7. Равносторонняя гипербола

Определение. Гипербола с равными полуосями $a = b$ называется равносторонней.

Ее уравнение можно представить в виде

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad \text{(II)}$$

Асимптотами равносторонней гиперболы служат прямые $y = -x$ и $y = x$. Они являются бисектрисами координатных квадрантов и перпендикулярны друг к другу. Эксцентриситет $\varepsilon = c/a = \sqrt{2}$.

Примем за новые оси координат асимптоты равносторонней гиперболы (рис. 25а) и находим уравнение гиперболы в новых координатах X и Y. Новые оси повернуты относительно старых на угол $\alpha = -\pi/4$. Старые координаты выражаются через новые по формулам (см. формулы (I4) на стр. 20):

$$x = \mathfrak{X}\cos\alpha - \mathcal{Y}\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{X} + \mathcal{Y}),$$
$$y = \mathfrak{X}\sin\alpha + \mathcal{Y}\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathfrak{X} + \mathcal{Y}).$$

Подстановка правых частей этих равенств в уравнение (II)вместо x и y и упрощение последнего приведут к уравнению

$$\mathfrak{X} \cdot \mathcal{Y} = \kappa, \quad \kappa = \frac{a^2}{2}. \qquad (12)$$

Уравнение (I2) выражает обратно-пропорциональную зависимость $\mathcal{Y} = \kappa/\mathfrak{X}$. На рис. 25б картина с рис. 25а повернута на угол $\pi/4$ против часовой стрелки и переобозначены координаты $\mathfrak{X} \to x$, $\mathcal{Y} \to y$, т.е. построена линия $xy = \kappa$.

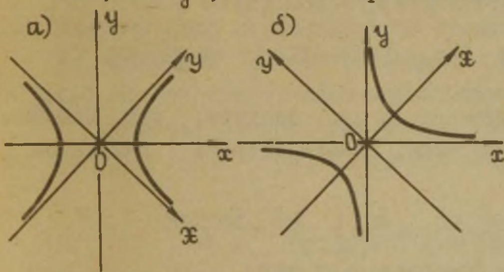

Рис. 25.

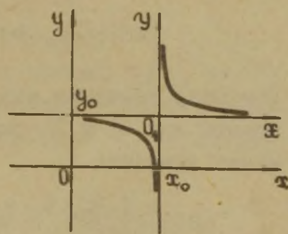

Рис. 26.

Заключение. Графиком обратно-пропорциональной зависимости является равносторонняя гипербола с центром в начале координат и асимптотами ее послужат оси координат.

8. График дробно-линейной функции

Дробно-линейной называется функция вида

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}. \qquad (13)$$

Выясним, какая линия служит графиком этой функции. Функция определена на всей числовой оси кроме $x = -d/c$. При $x \to -d/c$ функция $y \to \pm\infty$. Если же $x \to \pm\infty$, то предел

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c}.$$

Это означает, что график данной функции имеет две асимптоты:

вертикальная прямая $x = -\frac{d}{c} = x_0$,

горизонтальная прямая $y = \frac{a}{c} = y_0$.

Осуществим параллельный перенос осей координат, принимая за новое начало координат точку $O'(x_0, y_0)$ и за оси координат $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{Y}$ асимптоты (рис. 26). Как известно, старые координаты выражаются через новые по формулам $x = x_0 + \mathfrak{X}$, $y = y_0 + \mathcal{Y}$. Подставим эти выражения в равенство (13) и преобразуем его, сгруппируя слагаемые по переменным:

$$(y_0 + \mathcal{Y})[c(x_0 + \mathfrak{X}) + d] = a(x_0 + \mathfrak{X}) + b \ ;$$

$$c\mathfrak{X}\mathcal{Y} + (cy_0 - a)\mathfrak{X} + (cx_0 + d)\mathcal{Y} = ax_0 + b - cx_0y_0 - dy_0 \ .$$

Учитывая значения величин x_0 и y_0, следует, что коэффициенты при $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{Y}$ равны нулю, правая сторона равенства имеет значение

$$a\cdot\left(-\frac{d}{c}\right) + b - c\cdot\frac{a}{c}\left(-\frac{d}{c}\right) - a\frac{d}{c} = b - \frac{ad}{c} = \frac{bc - ad}{c} \ .$$

Исходное равенство преобразовалось к виду

$$c\mathfrak{X}\mathcal{Y} = \frac{bc - ad}{c} \ .$$

Обозначим

$$k = \frac{bc - ad}{c^2} \ .$$

Тогда получим уравнение равносторонней гиперболы $\mathfrak{X}\cdot\mathcal{Y} = k$.

Заключение. Графиком дробно-линейной функции является равносторонняя гипербола с центром в точке $O'(x_0, y_0)$ и асимптотами, параллельными осям координат: $x = x_0$, $y = y_0$, где $x_0 = -d/c$, $y_0 = a/c$. При $k > 0$ гипербола находится в I и III квадрантах новой системы координат, при $k < 0$ — во II и IУ квадрантах.

9. Линии второго порядка

Линия, определяемая общим уравнением второго порядка вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \ ,$$

где коэффициенты A , B и C не равны нулю одновременно, называется <u>линией второго порядка</u>.

Можно доказать, что путем параллельного переноса и поворота осей координат можно это общее уравнение упростить. В зависимости от конкретных значений коэффициентов могут получиться канонические уравнения или окружности, эллипса, гиперболы, параболы или уравнения пары пересекающихся или параллельных прямых. Уравнение может не определять и ни одной линии.

Приведем несколько исключительных примеров. Уравнения $y^2+3x^2+1=0$, $x^2+4=0$ не определяют ни одной линии.

Уравнение $4x^2-y^2=0$ можно представить в виде $(2x-y)(2x+y)=0$ или приравнивая нулю оба множители, получим пару пересекающихся прямых.

Из уравнения $y^2-16=0$ следует $(y-4)(y+4)=0$ и этому соответствует пара параллельных прямых $y=4$, $y=-4$.

Окружность, эллипс, гипербола, парабола – линии второго порядка. Линий первого порядка только одна – это прямая.

§ 4. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. <u>Уравнения поверхности и линии</u>

I Поверхность рассматривается как множество точек в пространстве, обладающих определенным свойством. Если выбрана определенная система прямоугольных координат $Oxyz$, то в аналитической геометрии присущее точкам поверхности свойство(а) выражается на языке координат. Поясним это на одном примере.

<u>Пример I</u>. Сфера радиуса R имеет центр в точке с координатами $C(x_0, y_0, z_0)$. Возьмем на сфере произвольную (текущую) точку P с текущими координатами (x, y, z). Для точек сферы характерно, что расстояние $CP=R$. Выразим это расстояние через координаты точек и приравниваем радиусу R:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R.$$

После возведения в квадрат получим

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-R^2=0.$$

Если поместить начало координат в центре сферы, то имеем

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0 .$$

Оба уравнения определяют сферу, только в разных системах координат. К.

Аналогично можно поступить и при составлении уравнений других поверхностей.

<u>Определение</u>. Уравнением поверхности называется такое уравнение $F(x,y,z)=0$ между переменными x , y , z ,которому удовлетворяют координаты любой точки этой поверхности и не удовлетворяют координаты ни одной точки,не принадлежащей ей.

Если сравнивать определения уравнения линии на плоскости и уравнения поверхности в пространстве,то видим, что они сходны и в уравнении поверхности в общем случае прибавляется третья переменная.

Если речь идет о конкретной поверхности,то для нее всегда можно составить уравнение

$$F(x,y,z)\equiv 0 .$$

Задачи, решаемые с помощью уравнения поверхности,аналогичны задачам, решаемым для линии на плоскости (см. вводные пункты § 2).

Заданному уравнению $F(x,y,z)=0$ может соответствовать определенная поверхность (бесконечное множество точек) или конечное множество изолированных точек или даже ни одной точки. Примером бесконечного множества точек является уравнение сферы. Но уравнению $x^2+y^2+z^2=0$ удовлетворяет лишь одна точка $O(0,0,0)$. Уравнение $x^2+y^2+z^2+1=0$ не определяет никакой поверхности, так как не существует ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы этому уравнению (сумма положительных чисел не может равняться нулю).

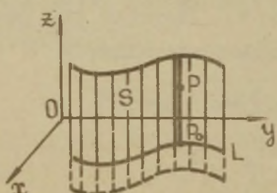

Рис. 27.

II Остановимся на понятии <u>цилиндрической поверхности</u>. Пусть в плоскости xy лежит линия L (рис. 27), имеющая уравнение $F(x,y)=0$. Проведем через каждую точку линии L прямую, параллельную оси z . Множество этих прямых образует поверхность S , которая называется цилиндрической. Линия L называется направляющей поверхности, указанные прямые – образующими. Оказывается, что уравнение цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси z не содержит координаты z и совпадает с уравнением направляющей на плоскости xy:

$$F(x, y) = 0 . \qquad (I)$$

Действительно, пусть точка $P_0(x,y,0)$ принадлежит линии L. Возьмем на образующей, проходящей через точку P_0 произвольную точку $P(x,y,z)$. Так как координаты точки P_0 удовлетворяют уравнению $F(x, y)=0$, то ему удовлетворяют и числа x, y, z, поскольку выражение $F(x,y)$ от z не зависит. Если же брать точку $P(x,y,z)$ не с поверхности, то и точка $P_0(x,y,0)$ не принадлежит линии L и числа x, y не удовлетворяют уравнению (I). Таким образом, уравнение (I) является уравнением цилиндрической поверхности.

П р и м е р ы. 2) Уравнение $x^2+y^2=R^2$ определяет круговой цилиндр – направляющей является окружность.

3) Пусть на плоскости xy взята парабола $2py=x^2$. В трехмерной системе координат этим же уравнением определяется параболический цилиндр.

4) Если на плоскости xy брать за направляющую прямую $x=y$, то это же уравнение определяет в пространстве плоскость, проходящую через ось z и делящую I (У) и IУ (УIII) октанты пополам. К.

Уравнение вида $F(y,z)=0$ определяет цилиндрическую поверхность, направляющая которой лежит в плоскости yz и образующие параллельны оси x. Аналогично можно рассуждать в случае уравнения, не содержащего переменную y : $F(x,z)=0$.

III В пространстве будем линию рассматривать как пересечение двух поверхностей. Если заданы две поверхности $F_1(x,y,z)=0$ и $F_2(x,y,z)=0$, то система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

определяет линию, координаты точек которой одновременно удовлетворяют обоим уравнениям. Если эта система решений не имеет, то она никакой линии не определяет, так как поверхности не пересекаются.

П р и м е р 5. Пересечением сферы $x^2+y^2+z^2=16$ (пример I) и плоскости $x=y$ (пример 4) являевся окружность радиуса 4 и она определяется уравнениями

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=16, \\ x=y. \end{cases}$$

2. Векторное и общее уравнения плоскости

Перечислим некоторые способы задания плоскости в прямоугольной системе координат.

I) Задана одна точка плоскости и нормаль к плоскости.

2) Заданы три точки плоскости.

3) Заданы прямая и одна точка, через которые плоскость проходит.

Составим уравнение плоскости, если на плоскости дана точка $P_0(x_0,y_0,z_0)$ и известен нормальный вектор плоскости $\vec{n}=(A, B, C)$ (рис. 28). Возьмем произвольную точку плоскости $P(x,y,z)$. Вектор $\overrightarrow{P_0P}$ лежит в плоскости и, следовательно, $\overrightarrow{P_0P}\perp\vec{n}$, т.е.

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0.$$

Обозначим радиусвекторы точек P_0 и P через $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ и $\vec{r}=(x,y,z)$. Тогда $\overrightarrow{P_0P}=\vec{r}-\vec{r}_0$. Условие перпендикулярности векторов $\overrightarrow{P_0P}$ и $\vec{n}$ представится в виде

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0, \qquad (2)$$

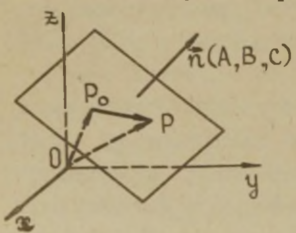

Рис. 28.

которое называется векторным уравнением плоскости. Запишем условие (2) в координатной форме:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (3)$$

Преобразование последнего даст

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0.$$

Обозначим через $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ и получим

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (4)$$

Это уравнение называется общим уравнением плоскости.

Составление общего уравнения плоскости похоже составлению общего уравнения прямой на плоскости; прибавляется лишь координата z.

Пример I. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P_0(-2,5,0)$ и имеющей нормальный вектор $\bar{n} = (4, -2, 3)$. Проверить, лежат ли на этой плоскости точки $K(1,0,-6)$ и $L(2,4,-6)$.

Согласно формуле (3) получим

$4(x+2)-2(y-5)+3(z-0)=0$ или $4x-2y+3z+18=0$.

Точка находится на данной плоскости, если ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости. Проверим это.

Точка K: $4\cdot 1 - 2\cdot 0 + 3\cdot(-6) + 18 = 0$; $4 \neq 0$ – точка K не принадлежит данной плоскости.

Точка L: $4\cdot 2 - 2\cdot 4 + 3\cdot(-6) + 18 = 0$; $0 = 0$ – точка L принадлежит данной плоскости. К.

Пример 2. Определить координаты нормального вектора к плоскости $3x-2y+5=0$.

За нормальный вектор плоскости можно принимать любой вектор, координаты которого пропорциональны коэффициентам текущих координат в уравнении плоскости. Таким образом можем взять за нормальный вектор $\bar{n} = (3, -2, 0)$ или $k\bar{n}=(3k,-2k,0)$, где k любое отличное от нуля число. К.

3. Исследование общего уравнения плоскости

I Теорема. В трехмерной прямоугольной системе координат всякая плоскость определяется линейным уравнением вида (4)

$$Ax+By+Cz+D=0$$

и наоборот, всякое линейное уравнение, у которого хотя бы один из коэффициентов A, B, C не равен нулю, определяет плоскость.

Доказательство. Первая половина теоремы уже доказана – в предыдущем пункте было составлено общее уравнение плоскости и оно оказалось линейным.

Докажем и вторую половину. Пусть точка $P_0(x_0,y_0,z_0)$ удовлетворяет уравнению первой степени, т.е.

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 .$$

Вычтем это равенство из общего линейного уравнения и получим

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 ,$$

которое совпадает с уравнением плоскости (3).Кроме того, из этого уравнения получается и линейное уравнение (4).Теорема доказана.

II Для очерчения плоскости в системе координат целесообразно найти отрезки, которые плоскость отсекает на координатных осях и прямые, по которым плоскость пересекает координатные плоскости.

Пример I. Найти точки пересечения с осями координат и отрезки, отсекаемые на осях плоскостью

$$2x-3y+6z-6=0 .$$

Для точки пересечения плоскости с осью x координаты $y = z = 0$. Подставляя эти значения в уравнение плоскости,получим уравнение для нахождения абсциссы x : $2x-6=0 \Rightarrow x=3$. Это значение определяет и отрезок a, отсекаемый плоскостью на оси x. Таким образом, плоскость пересекает ось x в точке $P_1(3,0,0)$ и $a=3$.

В точке пересечения плоскости с осью y имеем $x=z=0$ и из уравнения плоскости следует, что $y=-2$.Точка пересечения с осью y имеет координаты $P_2(0,-2,0)$ и отсекаемый на оси y отрезок $b=-2$.

Аналогично, плоскость пересекает ось z в точке $P_3(0,0,1)$ и отсекает на оси z отрезок $c=1$. К.

Следом плоскости на координатной плоскости называется прямая пересечения плоскости с координатной плоскостью.

Пример 2. Найти следы плоскости из примера 1 на координатных плоскостях.

След на плоскости xy. Все точки плоскости xy имеют координату $z=0$. Это является и уравнением координатной плоскости xy. Уравнения следа как линии пересечения двух плоскостей даются системой

$$\begin{cases} 2x-3y+6z-6=0 , \\ z=0 . \end{cases}$$

Результат можно выразить условно и одним уравнением, если в словесной форме указывается, на какой координатной плоскости след находится. Тогда равная нулю координата из уравнения плоскости отпадает. Таким образом: следом плоскости на плоскости xy является прямая $2x-3y-6=0$.

Следами на плоскостях yz и xz являются прямые

$$\begin{cases} 2x-3y+6z-6=0, \\ x=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-3y+6z-6=0, \\ y=0 \end{cases}$$

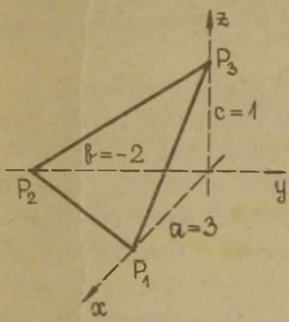

Рис. 29.

или: на плоскости yz следом является прямая $y-2z+2=0$, на плоскости xz – прямая $x+3z-3=0$. На рис. 29 следы нарисованы непрерывными линиями и показаны также отрезки, отсекаемые плоскостью на осях. К.

III Исследование общего уравнения плоскости заключается в рассмотрении частных случаев, когда часть коэффициентов в уравнении плоскости равны нулю. Проведем такое исследование.

I) $\underline{D=0}$.

Примечание: здесь и в дальнейшем предположим, что не указанные коэффициенты отличны от нуля.

Уравнение имеет вид

$$Ax+By+Cz=0.$$

Такому уравнению удовлетворяют координаты начала координат $O(0,0,0)$, т.е. плоскость проходит через начало координат.

2) $\underline{C=0}$. Плоскость задана уравнением

$$Ax+By+D=0.$$

Нормальный вектор плоскости $\bar{n}=(A,B,0)$; он перпендикулярен к оси z – сама плоскость параллельна оси z.

3) $\underline{B=0}$. Уравнение плоскости:

$$Ax+Cz+D=0.$$

Вектор $\bar{n}=(A,0,C)$ перпендикулярен к оси y и плоскость параллельна оси y.

4) $\underline{A=0}$. Уравнение

$$By+Cz+D=0$$

определяет плоскость, параллельную оси x.

5) Пусть нулю равны два коэффициента, например, $A=B=0$. Уравнение имеет вид

$$Cz+D=0 \quad \text{или} \quad z=-D/C.$$

На основании только что сказанного плоскость одновременно параллельна оси x и оси y, т.е. параллельна плоскости xy или перпендикулярна к оси z, отсекая на ней отрезок $c=-D/C$.

Картина аналогична и в остальных частных случаях.

6) Пусть один из коэффициентов и свободный член равны нулю, например, $A=D=0$. Уравнение имеет вид $By+Cz=0$. Плоскость параллельна оси x ($A=0$) и проходит через начало координат ($D=0$). Это означает,что плоскость проходит через ось x. Аналогичную картину имеем и при других комбинациях коэффициентов.

7) $\underline{A=B=D=0}$. Из уравнения $Cz=0$ следует, что $z=0$ – это есть уравнение координатной плоскости xy.

Аналогично уравнения $y=0$ и $x=0$ определяют остальные координатные плоскости xz и yz, соответственно.

<u>Заключение</u>: I) Уравнение $Ax+By+Cz=0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат;

2) плоскость параллельна той оси координат,название которой в уравнении отсутствует;

3) при отсутствии в уравнении свободного члена и одной координаты плоскость проходит через ту ось,название которой в уравнении отсутствует;

4) если в уравнении отсутствуют две координаты,то плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости;

5) уравнения координатных плоскостей следующие : плоскость xy — $z=0$, плоскость yz — $x=0$,плоскость xz — $y=0$.

<u>Примеры</u>. Определить расположение следующих плоскостей относительно системы координат: I) $3x-5y+6z=0$; 2) $5y+4z-3=0$; 3) $2x-5z=0$; 4) $2x-9=0$.

I) Плоскость проходит через начало координат. Следы на координатных плоскостях следующие прямые: на плоскости xy — $3x-5y=0$; на плоскости yz — $-5y+6z=0$; на плоскости xz — $x+2z=0$.

2) Плоскость параллельна оси x $(A=0)$.

3) Плоскость проходит через ось y $(B=D=0)$.

4) Плоскость параллельна плоскости yz или другими словами, перпендикулярна к оси x и отсекает на этой оси отрезок $a=9/2$. След на плоскости xy определяется уравнением $x=9/2$ - это прямая, параллельная оси y . Следом на плоскости xz является также прямая $x=9/2$, параллельная оси z .К.

4. Примеры составления уравнения плоскости

В данном пункте объясним на примерах, как составить уравнение плоскости, заданной разными способами.

I Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

Пример I. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $P_1(0,0,3)$, $P_2(-4.2.I)$, $P_3(I,3,-I)$.

Для составления уравнения плоскости в духе формулы (2) требуется кроме одной точки плоскости знание нормального вектора. Так как векторы $\vec{P_1P_2}$ и $\vec{P_1P_3}$ лежат на плоскости, то их векторное произведение перпендикулярно к плоскости, определяемой этими векторами. Найдем вектор $\vec{n}_1=\vec{P_1P_2}\times\vec{P_1P_3}$. Координаты векторов $\vec{P_1P_2}=(-4,\ 2,\ -2)$, $\vec{P_1P_3}=(I,\ 3,\ -4)$ и затем

$$\vec{n}_1=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ -4 & 2 & -2\\ 1 & 3 & -4\end{vmatrix}=-2\vec{e}_1-18\vec{e}_2-14\vec{e}_3=(-2,-18,-14).$$

За нормальный вектор примем коллинеарный данному вектору вектор $\vec{n}=-0{,}5\,\vec{n}_1=(I,\ 9,\ 7)$. За данную точку плоскости можно выбирать любую из заданных трех, например, точку $P_1(0,0,3)$. По формуле (3) найдем $x+9y+7(z-3)=0$ или $x+9y+7z-21=0$. Нетрудно проверить, что координаты точек P_2 и P_3 удовлетворяют составленному уравнению. К.

II Составить уравнение плоскости, проходящей через две заданные точки (или прямую) и параллельной данному вектору.

П р и м е р 2. Плоскость проходит через точки $P_1(2,-4,3)$, $P_2(1,-2,5)$ и параллельна вектору $\vec{a}=(2,-3,1)$. Составить уравнение плоскости.

Вектор $\overrightarrow{P_1P_2}$ лежит на плоскости; $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\vec{a}$ компланарны. За нормальный вектор плоскости возьмем $\vec{n}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\vec{a}$ — ведь тогда $\vec{n}\perp\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\vec{n}\perp\vec{a}$.

Найдем $\overrightarrow{P_1P_2}=(-1,2,2)$ и затем

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=(8,5,-1).$$

За данную точку примем $P_1(2,-4,3)$ и согласно формуле (3) получим уравнение плоскости: $8(x-2)+5(y+4)-(z-3)=0$; $8x+5y-z+7=0$. К:

5. Уравнения прямой

В пространстве можно прямую задавать разными способами, например, одной точкой и направлением, двумя точками, как линию пересечения двух плоскостей и т.д.

Пусть дан вектор $\vec{s}=(l,m,n)$, параллельный прямой. Этот вектор называется направляющим вектором прямой. Прямая проходит через точку $P_0(x_0,y_0,z_0)$. Составим уравнение прямой.

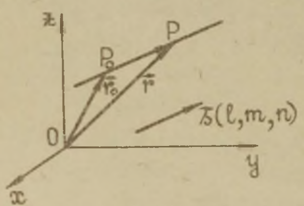

Рис. 30.

Возьмем на прямой текущую точку $P(x,y,z)$ (рис. 30). Для любой точки прямой $\overrightarrow{P_0P}\parallel\vec{s}$, а это означает, что $\overrightarrow{P_0P}=t\vec{s}$. Параметр t имеет для каждой точки P определенное значение. $\overrightarrow{P_0P}$ можно выразить через радиус-векторы точек P_0 и P следующим образом: $\overrightarrow{P_0P}=\vec{r}-\vec{r}_0$. Подставляя это выражение в условие коллинеарности, получим

$$\vec{r}-\vec{r}_0=t\vec{s}, \tag{8}$$

которое называется векторным уравнением прямой.

В проекциях на координатные оси получим параметрические уравнения прямой

$$\begin{aligned} x-x_0&=tl,\\ y-y_0&=tm,\\ z-z_0&=tn. \end{aligned} \tag{9}$$

Выразим из каждого равенства параметр t и приравниваем правые части равенств, в результате имеем два равенства, объединенные в цепочку:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\ (=t). \tag{10}$$

Уравнения (10) называются канонческими уравнениями прямой.

На плоскости мы имели аналогичное уравнение (см. § 2, п.4).

Прямая образуется и при пересечении двух плоскостей

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{и} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Координаты точек прямой $P(x,y,z)$ удовлетворяют обоим уравнениям, т.е. системе

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{11}$$

Уравнения вида (11) называются общими уравнениями прямой.

Уравнения (10) можем переписать и в виде

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m},\\[2mm] \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{z-z_0}{n}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m},\\[2mm] \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}. \end{cases}$$

Каждое уравнение в отдельности определяет плоскость. Прямая в первом случае является линией пересечения плоскости, параллельной оси z (z не содержится в первом уравнении) с плоскостью, параллельной оси y ; во втором случае та же самая прямая есть линия пересечения плоскости, параллельной оси z с плоскостью, параллельной оси x.

Всегда возможен переход от одного вида уравнений к другому. Соответствующую методику можно проследить на примерах.

П р и м е р 1. Прямая параллельна вектору $\vec{s}=(3,-4,2)$ и проходит через точку $P_0(5,0,-4)$. Составить ее канонические уравнения.

Нам следует воспользоваться уравнениями (10):

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z+4}{2}. \qquad \text{К.}$$

П р и м е р 2. Составить параметрические, общие и канонические уравнения прямой, проходящей через точку $P_0(-3,1,0)$ параллельно вектору $\vec{s}=(7,0,-3)$.

По уравнениям (9) получим параметрические уравнения

$$\begin{cases} x+3=7t, \\ y-1=0, \\ z\quad=-3t. \end{cases}$$

Общие уравнения можно вывести из параметрических уравнений путем исключения параметра t; прямая образуется путем пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{7}=\dfrac{z}{-3}, \\ y-1=0. \end{cases}$$

Второе уравнение определяет плоскость, параллельную координатной плоскости xz.

Канонические уравнения можно записать так:

$$\frac{x+3}{7}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{-3}.$$

Появление нуля в знаменателе означает лишь обстоятельство, что вектор $\vec{s}$ перпендикулярен к оси y. К.

П р и м е р 3. Прямая проходит через точку $P_0(3,7,-12)$ параллельно прямой $x+3=2t$, $y-1=6t$, $z+2=-5t$. Составить канонические уравнения прямой.

Направляющий вектор обеих прямых общий. Его координатами являются коэффициенты при параметре t в параметрических уравнениях: $\vec{s}=(2,6,-5)$. Канонические уравнения имеют вид

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-7}{6}=\frac{z+12}{-5}. \qquad \text{К.}$$

П р и м е р 4. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки $P_1(2,-5,3)$ и $P_2(-1,0,2)$.

За данную точку можно принимать любую из заданных (возьмем P_2). В качестве направляющего вектора можно взять вектор $\vec{s} = \overrightarrow{P_1P_2} = (-3, 5, -1)$. Уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{-1} .$$

Проверим, находится ли точка P_1 на этой прямой. С этой целью подставим ее координаты в уравнения:

$$\frac{2+1}{-3} = \frac{-5}{5} = \frac{1}{-1} ; \quad -1 = -1 = -1 .$$

Уравнения удовлетворены — точка P_1 принадлежит данной прямой. К.

<u>Пример 5</u>. Составить общие и канонические уравнения прямой пересечения плоскостей $x+2y-z-6=0$ и $2x-y+z+1=0$.

По формуле (11) общие уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} x+2y-z-6=0, \\ 2x-y+z+1=0 . \end{cases}$$

Для записи канонических уравнений необходимо знать одну точку P_0 прямой и направляющий вектор. За точку P_0 обычно принимают точку пересечения прямой с одной координатной плоскостью. Пусть выбрана точка пересечения с плоскостью xy, на которой $z=0$. Это значение подставим в общие уравнения прямой и путем решения системы уравнений узнаем остальные координаты точки P_0:

$$\begin{cases} x+2y-6=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{4}{5}, \quad y=\frac{13}{5} ; \quad P_0\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}, 0\right) .$$

Направляющий вектор прямой $\vec{s}$ перпендикулярен одновременно обоим нормальным векторам плоскостей и поэтому его найдем следующим образом:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -3, -5) .$$

Запишем канонические уравнения прямой

$$\frac{x-4/5}{1} = \frac{y-13/5}{-3} = \frac{z}{-5} . \qquad \text{К.}$$

П р и м е р 6. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к прямой

$$\frac{x-2}{3} = y = \frac{z-1}{0}$$

и проходящей через точку $P_0(3,-2,7)$.

Нормальным вектором плоскости послужит направляющий вектор прямой: $\vec{n} = (3, 1, 0)$. Составим общее уравнение плоскости $3(x-3)+(y+2)=0$; $3x+y-7=0$. Плоскость параллельна оси z. Это согласуется с исходными данными: прямая, следовательно и $\vec{n}$ перпендикулярны к оси z. К.

По заданным прямым можно найти угол между ними как угол между их направляющими векторами. Нахождение угла φ между плоскостью и прямой сводится к нахождению угла $\pi/2-\varphi$ между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой.

П р и м е р 7. Найти угол φ между прямой

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$$

и плоскостью $2x+3y+z-6=0$ и точку их пересечения.

Найдем угол между векторами $\vec{s} = (1, -2, 2)$ и $\vec{n} = (2,3,1)$. Этот угол дополняет угол φ до $\pi/2$. Получим

$$\cos(\pi/2-\varphi) = \sin\varphi = \frac{\vec{s}\cdot\vec{n}}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{2-6+2}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{4+9+1}} = -\frac{2}{3\sqrt{14}} \approx -0{,}178.$$

Острый угол $\varphi = \arcsin 0{,}178 \approx 10^\circ 15'$.

Точку пересечения прямой с плоскостью удобно найти с помощью уравнений прямой в параметрической форме: $x-2=t$, $y+1=-2t$, $z=2t$. Из них выразим координаты x, y, z через параметр t и подставим в уравнение плоскости:

$$2(t+2)+3(-2t-1)+2t-6=0 \; ; \quad -2t-5=0 .$$

Это уравнение определяет значение параметра t, соответствующее точке пересечения $t=-2{,}5$. Подстановка этого значения в параметрические уравнения прямой определяет координаты искомой точки $x = -2{,}5 + 2 = -0{,}5$; $y = 4$; $z = -5$. К.

§ 5. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

I. Матрицы. Операции над матрицами

I Матрицей называется прямоугольная таблица упорядоченных чисел

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Входящие в матрицу числа называются элементами матрицы ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$). Матрицы обозначаются часто большими буквами с указанием общего элемента a_{ij} , взятого или между двумя парами вертикальных черточек или в круглые скобки: $A = \|a_{ij}\|$. Мы будем применять первую запись. Упорядоченные наборы чисел по горизонтали составляют <u>строки</u> матрицы

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

упорядоченные наборы чисел по вертикали – <u>столбцы</u> матрицы

$$\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Матрица с m строками и n столбцами называется матрицей порядка $m \cdot n$ или коротко $m \cdot n$-матрицей, напр. $A_{m \cdot n}$. Элементы матрицы снабжены двумя индексами: первый индекс обозначает номер строки, второй – номер столбца.

Матрица с равным количеством строк и столбцов $m = n$ называется <u>квадратной</u> порядка n . Элементы квадратной матрицы с равными первыми и вторыми индексами составляют <u>главную диагональ</u> матрицы (элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$).

<u>Диагональной</u> называется квадратная матрица, элементы которой вне главной диагонали равняются нулю:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

<u>Треугольной</u> называется квадратная матрица, элементы которой на одной стороне главной диагонали равны 0.

<u>Единичной</u> называется диагональная матрица, элементы главной диагонали которой равны 1. Единичную матрицу мы будем обозначать через I.

<u>Нулевой</u> называется матрица, все элементы которой равны 0. Ее будем обозначать через 0.

<u>П р и м е р I</u>. Выпишем по элементам единичную матрицу четвертого порядка и нулевую матрицу порядка 2·3:

$$I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad 0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \quad К.$$

Поменяя местами строки и столбцы, из матрицы A получается матрица A^T, которая называется <u>транспонированной</u> по отношению к A. Таким образом, матрица $A_{m\cdot n}$ имеет транспонированную матрицу $A^T_{n\cdot m}$.

<u>П р и м е р 2</u>. Даны матрица A и ее транспонированная матрица A^T:

$$1)\ A = \begin{Vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -1 & 5 & 7 \end{Vmatrix}, \qquad A^T = \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 5 \\ 0 & 7 \end{Vmatrix}.$$

$$2)\ A = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{Vmatrix}, \qquad A^T = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{Vmatrix}. \quad К.$$

В случае квадратной матрицы ее транспонированная матрица получается путем поворота матрицы вокруг главной диагонали на 180°.

Матрица, состоящая из одной строки

$$A_{1\cdot n} = \| a_1 \ \ a_2 \ \dots \ a_n \|$$

называется <u>вектор-строкой</u>.

Аналогично матрица

$$B_{m-1} = \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{matrix} \right\|$$

называется <u>вектор-столбцом</u>. Нередко для удобства вектор-столбец записывается также в виде строки

$$B^T = \| b_1 \ \ b_2 \ \ldots \ b_m \| ,$$

которая получается транспонированием вектор-столбца.

Разобьем матрицу A на части с помощью вертикальных и горизонтальных прямых. Полученные части называются блоками.

<u>Пример 3</u>. Матрица

$$\left\| \begin{array}{ccc|cc} 3 & 8 & 5 & I & 4 \\ -I & 0 & 4 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 7 & I & 0 & -2 \\ 9 & 0 & -I & I & 3 \end{array} \right\|$$

разделена на четыре блока. К.

II Дадим определения основных операций над матрицами.

I) Две матрицы равного порядка называются <u>равными</u>, если равны между собой соответствующие элементы обеих матриц, т.е. для матриц $A_{m \cdot n} = \| a_{ij} \|$ и $B_{m \cdot n} = \| b_{ij} \|$ имеет место $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$ при всех i и j.

Основными операциями над матрицами являются сложение, вычитание, умножение матрицы на число и умножение матрицы на матрицу.

2) <u>Суммой</u> (<u>разностью</u>) двух матриц равного порядка $A = \| a_{ij} \|$ и $B = \| b_{ij} \|$ называется матрица $C = A \pm B$, элементы которой равняются сумме (разности) соответствующих элементов матриц A и B:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \ . \qquad \text{(I)}$$

3) <u>Произведением матрицы $A = \| a_{ij} \|$ на число k</u> назы-

вается матрица kA, элементы которой получаются умножением элементов a_{ij} на число k:

$$kA = k\|a_{ij}\| . \tag{2}$$

<u>Пример 4</u>. Найти матрицу $C = 2A - 3B$, если

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Вычислим: $2A - 3B =$

$$= 2\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{Vmatrix} - 3\begin{Vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -7 & 6 & 1 \\ 6 & -2 & -20 \end{Vmatrix}. \quad К.$$

4) <u>Произведением</u> матриц $A_{m\cdot p}$ и $B_{p\cdot n}$ называется $m\cdot n$-матрица $C = AB$, элементы которой c_{ij} вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}, \tag{3}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n).$$

Умножать можно только такие матрицы, у которых число столбцов первого множителя равно числу строк второго множителя.

Например, элемент c_{11} вычисляется следующим образом:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1p}b_{p1} .$$

<u>Пример 5</u>. Найти $C_1 = AB$ и $C_2 = BA$, если

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \\ 1 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Вычислим подробнее элемент c_{11}. Для этого выпишем первую строку матрицы A и первый столбец матрицы B и найдем

$$c_{11} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix} = 1\cdot 3 + 0\cdot(-2) + 2\cdot 1 = 5.$$

Аналогично

$$c_{12} = 1\cdot 0 + 0\cdot 4 + 2\cdot 6 = 12,$$
$$c_{21} = 3\cdot 3 + 5\cdot(-2) - 1\cdot 1 = -2,$$
$$c_{22} = 3\cdot 0 + 5\cdot 4 - 1\cdot 6 = 14$$

и матрица

$$C_1 = \begin{Vmatrix} 5 & 12 \\ -2 & 14 \end{Vmatrix} .$$

Аналогично найдем

$$C_2 = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 10 & 20 & -8 \\ 19 & 30 & -4 \end{Vmatrix} .$$

К.

Произведение двух матриц, как правило, некоммутативно, т.е. $AB \neq BA$. При умножении квадратной матрицы A порядка n на единичную матрицу I имеет место равенство

$$AI = IA = A$$

(проверить это самостоятельно по правилу (3)!).

Единичная матрица играет при умножении матриц такую же роль, как число 1 при умножении действительных чисел (этим и объясняется термин „единичная матрица").

Аналогично $0 \cdot A = A \cdot 0 = 0$, т.е. нулевая матрица играет роль нулевого элемента среди матриц.

Операции над матрицами обладают следующими свойствами:

$$A + B = B + A ,$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) ,$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) ,$$

$$(A + B) \cdot C = AC + BC .$$

В правильности этих свойств легко убедиться с помощью формул (2) и (3).

<u>П р и м е р 6</u>. Предприятие изготовляет 4 типа деталей, которые используются при монтаже 3 типов комплектов. Эти комплекты будут использованы при выпуске готовой продукции двух видов. Необходимые количества деталей для монтажа одного комплекта и также количества комплектов для единицы готовой продукции указаны в следующих таблицах:

Типы деталей	Номер комплекта I	2	3
I	3	2	0
2	I	5	2
3	0	4	I
4	3	2	4

Номер комплекта	Вид продукции I	2
I	4	5
2	3	I
3	0	2

Подсчитать необходимое количество деталей для выпуска единицы продукции обоих видов.

Непосредственный подсчет даст, что необходимое количество деталей I типа для готовой продукции I вида равно $3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 18$, для продукции 2 вида: $3 \cdot 5 + 2 : 1 + 0 \cdot 2 = 17$ и т. д. К результату можно прийти путем умножения матриц

$$\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 18 & 17 \\ 19 & 14 \\ 12 & 6 \\ 18 & 25 \end{Vmatrix} .$$

В первой строке необходимые количества деталей I типа для готовой продукции обоих видов и т.д. К.

2. Определители

Квадратной матрице ставится по определенному правилу в соответствие число, которое называется определителем (детерминантом). Определитель n-го порядка обозначается следующим образом:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Правило нахождения определителя дается ниже формулой (9).

Числа a_{ij}, расположенные в n строках и столбцах, называются элементами определителя. В общих рассуждениях часто говорят, что матрице $A = \| a_{ij} \|$ ставится в соответствие определитель $D = |a_{ij}|$.

Элементы с равными индексами составляют главную диагональ определителя (главная диагональ идет с верхнего левого угла в нижний правый угол); диагональ, ведущая с верхнего правого угла в нижний левый угол называется побочной.

В средней школе при решении системы уравнений с двумя неизвестными

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1 ,$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2 ,$$

использовалось понятие определителя второго порядка. Составим матрицу коэффициентов при неизвестных:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} .$$

Матрице второго порядка ставится в соответствие определитель со следующим правилом вычисления:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} . \tag{4}$$

Правило нахождения определителя третьего порядка следующее:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}) - \tag{5}$$
$$- (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33}) .$$

Схематически можно это правило представить в виде, изображенном на рис. 3I (правило Сарруса). Между собой умножаются элементы определителя, соединенные отрезками. От суммы произведений элементов, соединенных между собой в группе (I) вычитается сумма произведений элементов группы (II),

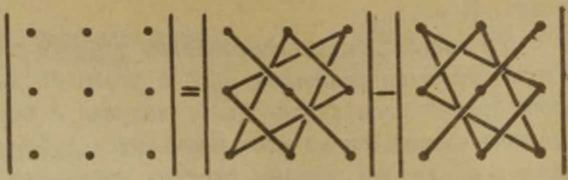

Рис. 3I.

П р и м е р I. Найти значение определителя

$$D = \begin{vmatrix} I & -I & 2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} .$$

Сумма произведений по направлению главной диагонали равна

$$I \cdot 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 7 \cdot 2 + (-I) \cdot 4 \cdot 5 = -62;$$

по направлению побочной диагонали:

$$5 \cdot 0 \cdot 2 + 7 \cdot 4 \cdot I + (-3) \cdot (-I) \cdot 3 = 37.$$

Значение определителя равно $D = -62 - 37 = -99$. Правило вычисления определителя более высоких порядков будет дано ниже. К.

3. Минор и алгебраическое дополнение

Рассмотрим определитель n-го порядка. Если в данном определителе вычеркнуть элементы i-й строки и j-го столбца ($i, j = I, 2, \ldots, n$), то получится определитель, имеющий порядок на единицу меньше. Этот определитель называется минором элемента a_{ij} и обозначается символом M_{ij}. Элемент a_{ij} находится на пересечении i-ой строки и j-го столбца.

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,j-1} & & a_{1\,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,j-1} & & a_{2\,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \ldots & a_{i-1\,j-1} & & a_{i-1\,j+1} & \ldots & a_{i-1\,n} \\ & & & & a_{ij} & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & a_{i+1\,j-1} & & a_{i+1\,j+1} & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

<u>П р и м е р I</u>. Найти миноры элементов a_{11}, a_{23}, a_{32} определителя

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -I \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Вычеркиванием первой строки и первого столбца получим

$M_{II}=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 23$. Аналогично $M_{23}=\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -5I$, $M_{32}= I5$. К.

<u>Алгебраическим дополнением</u> A_{ij} элемента определителя a_{ij} называется число, полученное при умножении минора на $(-I)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} . \tag{6}$$

<u>П р и м е р 2</u>. Найдем алгебраические дополнения элементов a_{11}, a_{23}, a_{32} для определителя в примере I.

Согласно формуле (6) получим

$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=23$; $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=51$; $A_{32}=-M_{32}=-15$. К.

Теперь дадим правило вычисления определителя порядка n через определители порядка $n-1$.

Определителем порядка n называется число, которое вычисляется по следующему правилу:

$$D=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} . \tag{7}$$

Это правило называется <u>разложением определителя по элементам первой строки</u>.

Например, определитель 3-го порядка вычисляется по правилу (7) следующим образом:

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} . \qquad (8)$$

После нахождения определителей 2-го порядка получим правую часть формулы (5).

П р и м е р 3. Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} .$$

Разложим определитель по элементам первой строки. Получим

$$D = 1\cdot A_{11} + (-3)\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13} + 0\cdot A_{14} = A_{11} - 3A_{12} .$$

Затем вычислим алгебраические дополнения как определители третьего порядка

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -7 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3,$$

и наконец $D = -8 - 3\cdot 3 = -17$.

Как видно, вычисление определителя в данном примере упростилось за счет того, что в первой строке находятся нулевые элементы (отпала необходимость в вычислении A_{13} и A_{14}). К.

4. Свойства определителей

Перечислим основные свойства определителей.

1) Транспонирование определителя, т.е. замена строк столбцами и наоборот, не меняет его значения.

Другими словами, строки и столбцы определителя равноправны. Последующие свойства верны и для столбцов.

2) Перестановка любых двух строк меняет лишь знак определителя на обратный.

П р и м е р 1. Переставим в определителе D второй и третий столбцы. Вычислим оба определители по правилу Сарруса:

$$D=\begin{vmatrix}3 & 5 & 6\\ 2 & 2 & I\\ 5 & 3 & 2\end{vmatrix} = 73 - 89 = -I6;\ D'=\begin{vmatrix}3 & 6 & 5\\ 2 & I & 2\\ 5 & 2 & 3\end{vmatrix} = 89 - 73 = I6.$$

К.

3) Определитель можно разложить по его любой строке, т.е.

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}\ , \quad (i=1,2,\ldots,n). \qquad (9)$$

Это называется <u>формулой Лапласа</u> (Laplace).

4) Общий множитель всех элементов одной строки можно вынести за знак определителя.

На примере определителя 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что при умножении матрицы на число умножаются все элементы на это число, при умножении определителя на число умножаются на него лишь элементы какой-либо одной строки.

5) Если соответствующие элементы двух строк определителя между собой равны или пропорциональны, то определитель равен нулю. Определитель также равен нулю, если все элементы одной строки равны нулю.

6) Значение определителя не изменится, если к элементам одной строки добавить соответствующие элементы какой-либо другой строки, умноженные на одно и то же число.

Например, для определителя 3-го порядка имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} & a_{23}+ka_{33}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

7) Сумма произведений элементов какой-либо строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0\ , \quad i \neq j\ . \qquad (I0)$$

Левую часть равенства (I0) можно истолковать как разложение по j-ой строке такого определителя, в котором в j-ой строке стоят элементы i-ой строки. Другими словами, левая часть (10) есть разложение определителя с двумя равными строками, а такой определитель равен 0.

Объединяем формулы (9) и (10). Имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad (11)$$

5. Вычисление определителя

Определители 2-го и 3-го порядков обычно вычисляются непосредственно по их определению. Если элементы какой-либо строки или столбца имеют общий множитель, то это можно вынести за знак определителя (свойство 4).

Пример 1. Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 125 \\ 12 & 24 & -60 \\ -1 & 7 & 50 \end{vmatrix}$$

Пользуясь непосредственно правилом Сарруса придется перемножить довольно большие числа. Но сразу видно, что элементы второй строки имеют общий множитель 12, элементы третьего столбца – множитель 5. Из первого столбца можно еще вынести множитель -1. Тогда имеем

$$D = (-1)\cdot 5\cdot 12 \begin{vmatrix} 6 & 0 & 25 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 10 \end{vmatrix} = -60(-55-8) = 3780. \quad К.$$

Вычисление определителя более высокого порядка основано на формуле (9). При этом используют перечисленные в предыдущем пункте свойства определителя. В первую очередь пытаются вынести за знак определителя общие множители из строк и столбцов. Затем разлагают определитель по некоторой строке или столбцу (учитываются свойства 1 и 3) по формуле (9). Разложение содержит миноры, которые являются определителями порядка $n-1$. Их нахождение сводится опять к вычислению определителей порядка $n-2$ и т.д., пока дойдем до определителей третьего или даже второго порядка. С помощью свойства 6 можно в нужных строках создать нулевые элементы (в принципе можно преобразовать в нули все элементы кроме одного). Для нулевых элементов нет необходимости в вычислении миноров и тем самым объем вычислений уменьшается. Проиллюстрируем это рассуждение примерами.

П р и м е р 2. Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 \\ 4 & -5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & I & 2 \\ -3 & 3 & I2 & 0 \end{vmatrix}$$

Вынесем из первой и последней строк общие множители 2 и 3. Тогда

$$D = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} I & -2 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & I & 2 \\ -I & I & 4 & 0 \end{vmatrix} .$$

Так как в первой строке уже есть один нулевой элемент, то выгодно преобразовать определитель по свойству(6)так,чтобы в первой строке обратились в нули и элементы a_{12} и a_{14}. Воспользуемся для этого первым столбцом. Прибавим ко второму столбцу двукратный первый столбец, а от четвертого столбца вычитаем трехкратный первый. Затем разложим определитель по первой строке и вычислим полученный определитель третьего порядка по правилу Сарруса:

$$D = 6 \begin{vmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 6 & -5 \\ 3 & 6 & I & -7 \\ -I & -I & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot I \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 6 & I & -7 \\ -I & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-98) = -588.$$

К.

П р и м е р 3. Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 0 & I & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -5 & I & 2 & 6 \\ I & -4 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & -2 & I \\ 7 & 2 & -I & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем элементы первого столбца в нули кроме $a_{31}=1$ и затем разложим по первому столбцу. С этой целью вычитаем из второй, четвертой и пятой строк соответственно трех-,пяти- и семикратную третью строку. Оказывается, что из второй строки можно вынести множитель -7 и пятой – -2. Затем разложим по первому столбцу:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & I & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -I4 & -7 & 0 \\ I & -4 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 24 & -22 & -I7 & -9 \\ 0 & 30 & -36 & -I8 & -I0 \end{vmatrix} = (-7)\cdot(-2)\cdot(-I)^{3+I}\cdot I\cdot \begin{vmatrix} I & 2 & -3 & 4 \\ -I & 2 & I & 0 \\ 24 & -22 & -I7 & -9 \\ -I5 & I8 & 9 & 5 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель четвертого порядка разложим по второй строке, создавая там предварительно больше нулей. С этой целью сложим с первым столбцом третий и из второго вычтем двукратный третий. После этих преобразований и разложения будем иметь

$$D = I4\cdot \begin{vmatrix} -2 & 8 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 7 & I2 & -I7 & -9 \\ -6 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix} = I4\cdot(-I)^{2+3}\cdot I\cdot \begin{vmatrix} -2 & 8 & 4 \\ 7 & I2 & -9 \\ -6 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Из первой строки вынесем множитель 2, из второго столбца 4 и воспользуемся правилом Сарруса:

$$D = -I4\cdot 2\cdot 4\cdot \begin{vmatrix} -I & I & 2 \\ 7 & 3 & -9 \\ -6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -II2\cdot [(-I5+54)-(-36+35)] = -4480.$$

К.

Определитель можно вычислить и следующим образом. Преобразуем определитель к треугольному виду. Чтобы достичь этого, вычитаем из второй строки первую строку, умноженную на a_{21}/a_{11}: $a_{21} - a_{11} \cdot a_{21} / a_{11} = 0$; из третьей строки первую, умноженную на a_{31}/a_{11} и так далее. Новые элементы обозначим через a'_{ij}. Дальше преобразуем в нули элементы второго столбца начиная с третьей строки, вычитая из третьей строки вторую, умноженную на a'_{32}/a'_{22} : $a'_{32} - a'_{22} \cdot a'_{32}/a'_{22} = 0$ и так далее до последней строки. Продолжая в таком духе, определитель преобразуется к треугольному виду

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & a'_{32} & \dots & a'_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a''_{nn} \end{vmatrix} .$$

Теперь разложим определитель по первому столбцу. Полученный определитель n-I порядка разложим опять по первому столбцу. Продолжая разложение по первым столбцам, приходим к результату:

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a''_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a'_{22} a''_{33} \dots a''_{nn} .$$

В итоге можно сказать: определитель треугольного вида равен произведению элементов главной диагонали.

<u>П р и м е р 4</u>. Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -6 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} .$$

Для иллюстрации предыдущих рассуждений преобразуем в нули элементы под главной диагональю. Следует вычитать из второй строки первую, умноженную на I/2, из третьей удвоенную и из четвертой первую, умноженную на 3/2. Затем с третьей строкой сложим вторую, умноженную на 4/9. С четвертой строкой сложим вторую, умноженную на 17/9. Результат преобразований следующий:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -9/2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -10 & 1 \\ 0 & 17/2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -9/2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & 17/9 \\ 0 & 0 & 3 & 43/9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -9/2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & 17/9 \\ 0 & 0 & 0 & 481/90 \end{vmatrix} .$$

На последнем шаге с четвертой строкой сложена третья, умноженная на 3/10. Наконец

$$D = 2 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) \cdot (-10) \cdot \frac{481}{90} = 481 .$$

Аналогичные преобразования будут в дальнейшем часто использованы для создания нулевых элементов в матрицах. К.

6. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу $A = \| a_{ij} \|$ порядка $m \cdot n$. Одним важным показателем является ранг матрицы.

Выбираем из матрицы произвольные k (k = 1, 2,...) строк и столько же столбцов и составим из общих элементов этих строк и столбцов определитель порядка k, который называется минором порядка k для данной матрицы.

П р и м е р 1. Составить все миноры матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \end{Vmatrix} .$$

Минорами первого порядка являются сами элементы матрицы.

Миноры второго порядка можно составить следующим образом. Например, выбирая первую и третью строки, а второй и третий столбцы, получим определитель

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -9 .$$

Комбинируя всеми парами строк и столбцов, находим все миноры второго порядка (в данном примере их всего 9):

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}.$$

Миноров третьего порядка есть только один – определитель матрицы A :

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0. \quad К.$$

Пример 2. Дана матрица

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 19 & 11 \end{Vmatrix}.$$

Найти все миноры наивысшего порядка.

Наивысший порядок минора равен меньшему из числа строк и столбцов, в данном случае 3. Включая все три строки, комбинируем всеми столбцами и получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 8 & 3 & 19 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & 11 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 19 & 11 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 19 & 11 \end{vmatrix}.$$

Нетрудно вычислить значения этих определителей и оказывается, что все они равны нулю. К.

Определение. Рангом матрицы r называется наивысший порядок ее миноров, отличных от нуля. Все миноры более высокого порядка чем r равняются нулю.

Один способ определения ранга матрицы заключается в последовательном вычислении значений миноров различного порядка. Если например хоть один минор второго порядка отличен от нуля, перейдем к вычислению миноров третьего порядка. Если хоть один минор среди них отличен от нуля, составим миноры четвертого порядка и т.д. Если окажется, что хоть один минор порядка r отличен от нуля, но все миноры порядка $r+1$

нули, то ранг равняется r . Если в матрице m строк и n столбцов, то ранг не может превышать меньшего из этих чисел, то есть $r \le min(m, n)$. Ведь наивысший порядок миноров, которых можно составить для матрицы $A_{m \cdot n}$ не может превышать меньшего из чисел m и n .Описанный способ нахождения ранга матрицы обычно очень трудоемкий и применяется редко. Ниже приведем другой способ нахождения ранга.

При вычислении ранга матрицы существенную роль играют элементарные преобразования матрицы:

I) перестановка любых двух строк (столбцов);

2) умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) на одно и то же отличное от нуля число или короче говоря: умножение строки на число;

3) прибавление ко всем элементам какой-либо строки (столбца) соответствующих элементов произвольной другой строки (столбца), умноженных на некоторое число или короче: сложение с одной строкой другой строки, умноженной на число.

В ходе элементарных преобразований элементы матрицы меняются, но можно показать, что ранг при этом не меняется.

Если в ходе элементарных преобразований в некоторой строке (столбце) все элементы превратятся в нули, то эту строку можно вычеркнуть. Это не влияет на ранг матрицы, так как минор, содержащий нулевую строку, равняется нулю.

Матрицы A и B , имеющие равные ранги, называются эквивалентными и в этом случае пишут $A \sim B$.

Начнем с нахождения ранга квадратной матрицы $A = \| a_{ij} \|$ порядка n . Путем элементарных преобразований над строками преобразуем матрицу к треугольному виду

$$A' = \begin{Vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ & & a'_{33} \dots & a'_{3n} \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a'_{nn} \end{Vmatrix} .$$

Определитель матрицы $|A'|$ является и минором порядка n .Его значение равно произведению элементов главной диагонали. Если среди них нет нулевых элементов, то $|A'| \ne 0$ и ранг матрицы A равен $r = n$.Если же имеются нулевые элементы на главной диагонали, то $|A'| = 0$ и $r < n$. Вычеркиваем строки и столбцы, на пересечении которых находятся нулевые элементы. Из сохранившихся строк и столбцов составим снова треугольный определитель, который отличен от нуля. Порядок этого минора и равняется рангу матрицы A.

<u>Заключение</u>. Для определения ранга квадратной матрицы следует ее преобразовать к треугольному виду. Ранг матрицы равен числу ненулевых элементов главной диагонали.

<u>Пример 3</u>. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -2 & -6 \end{Vmatrix}.$$

Во второй строке единичный элемент. С помощью его легче провести элементарные преобразования и поэтому поменяем первые две строки. Затем проведем следующие преобразования (римские цифры означают номер строки, с которой проводятся операции): II - 2 I, III + 3 I, IУ - I. В итоге получим

$$A \sim \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -2 & -6 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & 7 & 10 & 11 \\ 0 & -7 & -5 & -10 \end{Vmatrix}$$

(продолжение следует после объяснений);

теперь III + 7·II, IУ - 7·II и наконец 5·IУ + 6·III :

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -25 & -31 \\ 0 & 0 & 30 & 32 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -25 & -31 \\ 0 & 0 & 0 & -23 \end{Vmatrix}.$$

В полученной треугольной матрице все элементы главной диагонали отличны от нуля и определитель матрицы $|A| \neq 0$, следовательно $r = 4$. К.

<u>Пример 4</u>. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ I & 8 & -7 & I2 \end{Vmatrix}.$$

Проведем следующие элементарные преобразования: II - 2·I, III - I, 2·IУ - I:

$$A \sim \begin{Vmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & -I \\ 0 & II & -6 & I6 \end{Vmatrix} \sim$$ (продолжение следует после объяснений);

разделим II строку на 7 и затем III - 2·II, I + II·II; наконец IУ - 5·III:

$$\sim \begin{Vmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -I & I & -I \\ 0 & -2 & 3 & -I \\ 0 & II & -6 & I6 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -I & I & -I \\ 0 & 0 & I & I \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -I & I & -I \\ 0 & 0 & I & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Матрица приведена к треугольному виду и четвертая строка нулевая. Наивысший порядок отличного от нуля минора равен 3 и ранг $r = 3$. К.

Для прямоугольной матрицы преобразуем элементы в нули ниже диагонали, состоящей из элементов с двумя равными индексами a_{11}, a_{22}, a_{33} и т. д. ~~Тогда аналогично квадратной матрице ранг равен числу ненулевых элементов на названной диагонали~~.

П р и м е р 5. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} I & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -I & 3 & I \\ 8 & 3 & I9 & II \end{Vmatrix}.$$

Так как число строк равно 3, то ранг $r \le 3$. Для создания нулей в первом столбце проведем следующие преобразования: II - 2·I, III - 8·I:

$$A \sim \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & -21 & -21 & -21 \end{Vmatrix} \sim$$

вторую строку разделим на -7 и третью на -21 и затем III-II:

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} \boxed{\begin{matrix} \underline{1} & 3 \\ 0 & \underline{1} \end{matrix}} & \begin{matrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \underline{0} & 0 \end{matrix} \end{Vmatrix} .$$

На диагонали с подчеркнутыми элементами два отличных от нуля элемента. Отличный от нуля минор в квадрате второго порядка и ранг $r = 2$. К.

7. Обратная матрица

Понятие обратной матрицы связано лишь с квадратной матрицей. Для каждого числа $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1}, дающее в произведении с a единицу: $a \cdot a^{-1} = 1$. Оказывается, что для квадратных матриц, имеющих отличный от нуля определитель $|A| \neq 0$ существует также такая матрица, произведение которой с матрицей A даст единичную матрицу.

Квадратная матрица A , определитель которой $|A| \neq 0$, называется невырожденной (неособенной), а матрица с равным нулю определителем – вырожденной (особенной).

Определение. Для данной невырожденной квадратной матрицы обратной называется матрица A^{-1}, которая удовлетворяет условиям

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \quad . \qquad (12)$$

Так как единичная матрица выступает среди матриц в роли единицы, то A^{-1} в роли обратного элемента. Символ A^{-1} не означает $1/A$ или I/A , операции деления среди матриц нет.

Введем понятие присоединенной матрицы к матрице A следующим образом. Составим определитель $|A|$ матрицы и находим алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов a_{ij} . Из алгебраических дополнений A_{ij} составим матрицу

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix}$$

и ее транспонированную матрицу

$$A^* = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad (I3)$$

которая называется присоединенной матрицей к матрице A.

Можно доказать следующую теорему.

Теорема. Обратная матрица A^{-1} для невырожденной матрицы равна

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* . \qquad (I4)$$

Пример I. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & I & -I \\ I & I & 2 \\ 2 & 0 & I \end{Vmatrix} .$$

Вычислим определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & I & -I \\ I & I & 2 \\ 2 & 0 & I \end{vmatrix} = 4 - (-I) = 5.$$

Матрица невырожденная и A^{-1} существует. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$A_{II} = \begin{vmatrix} I & 2 \\ 0 & I \end{vmatrix} = I; \quad A_{I2} = -\begin{vmatrix} I & 2 \\ 2 & I \end{vmatrix} = 3; \quad A_{I3} = \begin{vmatrix} I & I \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 ;$$

$$A_{2I} = -\begin{vmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{vmatrix} = -I; A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -I \\ 2 & I \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & I \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 ;$$

$$A_{3I} = \begin{vmatrix} I & -I \\ I & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & -I \\ I & 2 \end{vmatrix} = -I; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & I \\ I & I \end{vmatrix} = -I .$$

Составим присоединенную матрицу

$$A^* = \begin{Vmatrix} I & -I & 3 \\ 3 & 2 & -I \\ -2 & 2 & -I \end{Vmatrix} .$$

Обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{I}{|A|} A^* = \frac{I}{5} \begin{Vmatrix} I & -I & 3 \\ 3 & 2 & -I \\ -2 & 2 & -I \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{I}{5} & -\frac{I}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{I}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{I}{5} \end{Vmatrix} .$$

Для проверки вычислим

$$AA^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & I & -I \\ I & I & 2 \\ 2 & 0 & I \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} I & -I & 3 \\ 3 & 2 & -I \\ -2 & 2 & I \end{Vmatrix} = \frac{I}{5} \begin{Vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{Vmatrix} = I. \text{К.}$$

Можно показать, что обратная матрица получится и следующим образом. Расширим данную матрицу, прибавляя к ней справа единичную матрицу

$$\| A \,\vdots\, I \| .$$

Затем проведем над строками элементарные преобразования так, что матрица A (левая часть расширенной матрицы) переходит в единичную матрицу. Тогда на месте I (правая часть расширенной матрицы) создается обратная матрица для матрицы A. Символически можно это записать в виде

$$\| A \,\vdots\, I \| \rightarrow \| I \,\vdots\, A^{-1} \| .$$

П р и м е р 2. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ I & -I & 0 \\ -I & 2 & I \end{Vmatrix} .$$

Составим матрицу

$$\left\Vert \begin{array}{ccc:ccc} 2 & 2 & 3 & I & 0 & 0 \\ I & -I & 0 & 0 & I & 0 \\ -I & 2 & I & 0 & 0 & I \end{array} \right\Vert .$$

На первом шагу поменяем первую и вторую строки, затем вычтем из второй строки удвоенную первую и третью строку сложим с первой. Получим

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc} I & -I & 0 & 0 & I & 0 \\ 2 & 2 & 3 & I & 0 & 0 \\ -I & 2 & I & 0 & 0 & I \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} I & -I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 4 & 3 & I & -2 & 0 \\ 0 & I & I & 0 & I & I \end{array}\right\| \sim$$

На втором шагу поменяем вторую и третью строки и затем I+II, II - 4II:

$$\sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} I & -I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & I & 0 & I & I \\ 0 & 4 & 3 & I & -2 & 0 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} I & 0 & I & 0 & 2 & I \\ 0 & I & I & 0 & I & I \\ 0 & 0 & -I & I & -6 & -4 \end{array}\right\| \sim$$

На третьем шагу проведем преобразования I + III, II + III и наконец умножим третью строку на -1 :

$$\sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} I & 0 & 0 & I & -4 & -3 \\ 0 & I & 0 & I & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -I & I & -6 & -4 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|ccc} I & 0 & 0 & I & -4 & -3 \\ 0 & I & 0 & I & -5 & -3 \\ 0 & 0 & I & -I & 6 & 4 \end{array}\right\| .$$

Справа от пунктирной линии находится обратная матрица

$$A^{-1} = \left\|\begin{array}{ccc} I & -4 & -3 \\ I & -5 & -3 \\ -I & 6 & 4 \end{array}\right\| .$$

Проверьте, что $A \cdot A^{-1} = I$! К.

§ 6. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

I. Система линейных уравнений, ее матричная запись

Всякую систему из m линейных уравнений с n неизвестными можно привести к виду:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m . \end{aligned} \qquad (I)$$

Это так называемая нормальная форма системы линейных уравнений.

Решением системы (I) называется упорядоченная совокупность чисел α_1, α_2, ... , α_n, которая обращает каждое из уравнений системы при $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ... , $x_n = \alpha_n$ в тождество.

Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной, в противном случае – несовместной (противоречивой). Совместная система, имеющая единственное решение, называется определенной, а имеющая более одного решения – неопределенной.

Если все свободные члены (правые части) $b_i = 0$ ($i = 1,2, \ldots , m$), то система называется однородной, в противном случае неоднородной.

Из коэффициентов при неизвестных в системе можно составить матрицу A, которая называется матрицей системы. Прибавляя к матрице системы столбец свободных членов, получим расширенную матрицу системы $\tilde{A}$. Введя еще матрицу неизвестных X в виде вектор-столбца и вектор-столбец свободных членов B , можно на основании правила умножения матриц систему уравнений записать в матричной форме

$$AX = B , \qquad (2)$$

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} , \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} , \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix} . \qquad (3)$$

П р и м е р ы. I) Дана система уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + 5x_2 \qquad &= -3, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 . \end{aligned}$$

Составить матрицу и расширенную матрицу системы и вектор-столбец свободных членов.

Согласно вышесказанному

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{Vmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 4 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{Vmatrix} .$$

2) Даны матрица системы и вектор-столбец свободных членов

$$A = \begin{Vmatrix} 5 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{Vmatrix} .$$

Выписать систему уравнений.

Обозначим элементы вектор-столбца неизвестных через x_j (j = I, 2, 3, 4). Составим матричное уравнение (2) и перемножим матрицы:

$$\begin{Vmatrix} 5 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{Vmatrix}; \quad \begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0, \\ 2x_1 \qquad + 3x_3 + 7x_4 &= -3, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 4. \end{aligned}$$

К.

Будем рассматривать две важные задачи: I) имеет ли система решение(я); 2) если решение существует, то найти его.

2. Правило Крамера

Рассмотрим систему уравнений, в которой число неизвестных равняется числу уравнений $m = n$. Определитель матрицы коэффициентов $A = \|a_{ij}\|$ обозначим через $D = |a_{ij}|$ и назовем определителем системы.

Пусть $D \neq 0$, т.е. матрица A невырожденная.

I Рассмотрим матричный способ решения системы уравнений, удовлетворяющей приведенным условиям. Запишем систему в матричной форме $AX = B$.

Умножим обе части равенства слева на обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}A\mathfrak{X} = A^{-1}B$$

и учтем, что $A^{-1}A = I$ и $I\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$. Получим решение системы в матричной форме

$$\mathfrak{X} = A^{-1}B\ . \qquad (4)$$

Пользуясь формулой (4) для решения системы, следует I) найти обратную матрицу A^{-1} согласно формулам (I3) и (I4) из предыдущего параграфа (стр. 98); 2) найти произведение $A^{-1}B$ — этим является вектор-столбец; 3) выписать решение: значения неизвестных равняются элементам вектор-столбца.

II Путем преобразования правой части равенства (4) можно решение системы представить через определители в форме, называемой правилом Крамера (Cramer).

Обратная матрица A^{-1} определяется по правилу

$$A^{-1} = \frac{1}{D}A^{*}\ ,$$

где A^{*} присоединенная матрица к матрице A. Решение системы в виде (4) можем теперь написать следующим образом:

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{D}A^{*}B\ . \qquad (5)$$

Вычислим произведение матриц

$$A^{*}B = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \dots + b_nA_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \dots + b_nA_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Оказывается, что элементы этого вектор-столбца равняются определителям, полученным из определителя системы D путем замены отдельных столбцов столбцом свободных членов системы. Например, заменяя в определителе D первый столбец столбцом свободных членов, получим определитель D_1, разложение которого по первому столбцу действительно даст первый элемент вектор-столбца в (5):

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1}\ ,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{n2} .$$

Аналогично, второй элемент равняется определителю D_2 , полученному из D посредством замены его второго столбца столбцом свободных членов и т.д. Таким образом,

$$A^* B = \begin{Vmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{Vmatrix}$$

и решение (5) можно записать в виде

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = \frac{1}{D} \begin{Vmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{Vmatrix} ,$$

откуда $x_1 = D_1 / D$, $x_2 = D_2 / D$, ... , $x_n = D_n / D$. Выведенный результат сформулируем в виде следующей теоремы, носящей имя правила Крамера.

Правило Крамера. Пусть для системы линейных уравнений $AX = B$ число неизвестных равно числу уравнений и определитель системы отличен от нуля $D = |a_{ij}| \neq 0$. Тогда решение системы имеет вид (формулы Крамера):

$$x_j = \frac{D_j}{D} , \ (j = 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

где определители D_j образуются из определителя системы D посредством замены j-го столбца столбцом свободных членов.

Формулы Крамера не применимы, если $D = 0$ — появится деление на 0.

П р и м е р. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &= 6, \\ 2x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 &= 3, \\ x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Найдем определитель системы

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5.$$

Определитель $D \neq 0$, следовательно, формулы Крамера применимы. Составим и вычислим определители D_j :

$$D_1=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5,\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -10,\ D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15.$$

Решение данной системы равно:

$$x_1=\frac{-5}{-5}=1, \qquad x_2=\frac{-10}{-5}=2, \qquad x_3=\frac{-15}{-5}=3. \quad К.$$

Если число уравнений достаточно велико, то решение системы по правилу Крамера становится очень трудоемким. В 4 пункте будет изложен и другой способ решения линейной системы.

3. Общий случай решения системы линейных уравнений. Однородные системы

Поясним, когда система (I) совместна, т.е. имеет решение независимо от числа уравнений и неизвестных. Можно доказать теорему Кронекера-Капелли (Kronecker-Capelli): система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы А равен рангу расширенной матрицы системы $\tilde{A}$:

$$r(A)=r(\tilde{A}).$$

Ранги матриц А и $\tilde{A}$ находятся по правилам, указанным в предыдущем параграфе.

Далее допустим, что система совместна и проанализируем, каково может быть количество решений системы в зависимости от числа неизвестных n и уравнений m .

I) Пусть число уравнений равно числу неизвестных и ранг равен им:

$$r=m=n.$$

В данном случае определитель $D \neq 0$ и из предыдущего пункта известно, что система имеет единственное решение.

2) Пусть число уравнений меньше числа неизвестных и ранг равен числу уравнений:

$$r = m < n\ .$$

Тогда обязательно хоть один минор m-го порядка отличен от нуля. Перегруппируем слагаемые в системе так, чтобы отличный от нуля минор m-го порядка составляется из коэффициентов m первых столбцов системы.

Затем перенесем остальные $n - m$ слагаемых в правую сторону знака равенства. Система примет вид

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 - a_{1\,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{1n}x_n,\\
&a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 - a_{2\,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{2n}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mm}x_m = b_m - a_{m\,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{mn}x_n.
\end{aligned} \tag{7}$$

Неизвестным $x_{m+1}, \ \ldots\ , x_n$ можно придать произвольные значения $x_{m+1} = C_1$, $x_{m+2} = C_2$, ... , $x_n = C_{n-m}$. Эти неизвестные называются <u>свободными</u>. Неизвестные x_1 , ... , x_m , определяемые через свободные, называются <u>базисными</u>. При конкретном выборе свободных неизвестных имеем дело со случаем I) $r = m$ и система имеет единственное решение. Свободные неизвестные можно выбирать бесконечно многим образом. Таким образом, система имеет бесконечное множество решений, т.е.система неопределенная. Решение системы, содержащее произвольные значения свободных неизвестных, называется <u>общим решением</u>. Приписывая свободным неизвестным конкретные значения, получим <u>частное решение</u>. Решение, которое получится при нулевых значениях свободных неизвестных, называется <u>базисным</u>:

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \ldots, \quad x_m = \alpha_m, \quad x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0.$$

Так как отличных от нуля миноров порядка $m = r$, составленных из коэффициентов неизвестных, может быть больше чем один, то выбор базисных неизвестных не определен однозначно.

3) Пусть уравнений больше чем неизвестных и

$$r = n < m\ .$$

Тогда выберем из системы n таких уравнений, для которых определитель коэффициентов порядка n отличен от нуля и для этих уравнений получим единственное решение по формулам Крамера. Оказывается, что остальные отброшенные $m - n$ уравнений являются последствиями выбранных n уравнений и удовлетворены также при полученном решении. И так, в данном случае система имеет единственное решение.

4) Пусть ранг меньше числа уравнений и неизвестных:

$$r < m \leq n .$$

Тогда выберем за базисные r таких неизвестных, определитель коэффициентов которых отличен от нуля и остальные $n-r$ неизвестных являются свободными. Из общего числа уравнений m выберем r штук, остальные $m-r$ можно выразить через выбранные r уравнений и их можно исключить из рассмотрения. Останется система, состоящая из r уравнений с n неизвестными. Этот случай рассмотрен во 2) случае и, следовательно, система имеет бесконечное множество решений.

Заключение. Если выполнено условие равенства рангов $r(A) = r(\tilde{A}) = r$, то система совместна. Количество решений зависит от взаимоотношения числа неизвестных n, числа уравнений m и ранга матрицы системы r.

I) Если $r = m = n$, то система имеет единственное решение.

2) Если $r = n < m$, то система имеет единственное решение. Для его нахождения следует решить систему из n таких уравнений, определитель которого отличен от нуля.

3) Если $r = m < n$,то система имеет бесконечное множество решений. Свободными являются $n-m$ неизвестных. Можно найти и базисное решение при каждом конкретном выборе базисных неизвестных.

4) Если $r < m \leq n$, то система имеет бесконечное множество решений . Свободными являются $n-r$ неизвестных. Можно также найти базисные решения как и во втором случае.

Частный случай. Пусть система (I) однородна. Расширенная матрица А получается путем добавления нулевого столбца к матрице системы А и поэтому всегда $r(A) = r(\tilde{A})$. Это означает, что однородная система всегда совместна. Непосредственная проверка подверждает, что однородная система имеет непременно нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, которое называется тривиальным решением.

Если $r = n < m$ или $r = n = m$, то система имеет в качестве единственного решения (I) и 2) пункты заключения) лишь нулевое решение. В этом случае определитель системы

$D \neq 0$. Если же в случае $m = n$ определитель $D = 0$, то $r < m$ и кроме нулевого решения существует бесконечное множество ненулевых решений (3) пункт заключения). Если $m < n$, то также решений бесконечно много.

Заключение. Однородная система имеет всегда хоть нулевое решение. Если в случае $m = n$ определитель $D \neq 0$,то нулевое решение единственное; при $D = 0$ решений бесконечно много. При $m < n$ решений бесконечно много.

Примеры. I) Решить систему

$$3x_1 + 4x_2 = 0,$$
$$2x_1 - 5x_2 = 0.$$

Вычислим определитель системы $D = -23 \neq 0$. Система имеет лишь нулевое решение $x_1 = x_2 = 0$.

2) Решить систему

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0,$$
$$5x_1 + x_2 - x_3 = 0,$$
$$12x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

Вычислим определитель

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 12 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 29 - 29 = 0,$$

следовательно, система имеет кроме нулевого решения и ненулевые решения. Решим систему способом подстановки: из первого выразим $x_3 = 3x_2 - 2x_1$ и подставим в остальные два. Получим два совпадающих уравнения $7x_1 - 2x_2 = 0$. Примем за свободную неизвестную $x_1 = C_1$, тогда $x_2 = 7/2\,C_1$ и наконец $x_3 = 21/2\,C_1 - 2C_1 = 17/2\,C_1$. Общее решение следующее: $x_1 = C_1$, $x_2 = 7/2\,C_1$, $x_3 = 17/2\,C_1$.

Выберем в качестве свободной неизвестной $x_2 = C_1$. Тогда $x_1 = 2/7\,C_1$, $x_3 = 17/7\,C_1$.

Принимаем за свободную неизвестную $x_3 = C_1$. Тогда целесообразно выразить из второго уравнения, например, $x_2 = x_3 - 5x_1$ и подставить в остальные: получим два совпадающих уравнения $17x_1 - 2x_3 = 0$, откуда $x_1 = 2/17\,C_1$. Затем $x_2 = C_1 - 10/17\,C_1 =$

$= 7/17C_1$. Общее решение:

$$x_1 = 2/17C_1 , \quad x_2 = 7/17C_1 , x_3 = C_1 . \quad К.$$

4. Метод последовательного исключения неизвестных

Ранее было сказано, что решение систем с квадратной матрицей при $n \geq 4$ с помощью правила Крамера очень громоздко. Для решения неопределенной системы это правило практически не применяется.

Ниже изложим один метод решения линейной системы, не требующий даже предварительной проверки совместности системы. Несовместность системы обнаруживается в ходе решения системы. Этот метод называется методом Гаусса или методом последовательного исключения неизвестных. В школьной математике применяется этот метод обычно под названием способа сложения.

I Начнем ознакомление с этим методом в случае, когда $m=n$ и $D \neq 0$.

Составим расширенную матрицу системы

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{Vmatrix} .$$

I) этап. Путем элементарных преобразований преобразуем матрицу так, чтобы матрица системы приняла треугольный вид. Обозначим преобразованные элементы через a'_{ij} и b'_i . Матрица представится в виде

$$\begin{Vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \ldots & a'_{3n} & b'_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a'_{nn} & b'_n \end{Vmatrix} .$$

Преобразования проводятся лишь над строками и на первом шагу создают нули в первом столбце, начиная со второй строки, на втором шагу – во втором столбце, начиная с третьей строки и т.д. Элемент столбца, с помощью которого преобразуют в нули остальные, называется разрешающим элементом. Преобразования, проводимые на I) этапе над строками расширенной матрицы, означают для самой системы уравнений последовательное исключение неизвестных из уравнений. Из второго уравнения исключается x_1, из третьего x_1, x_2 и т.д.

На I) этапе система преобразуется к треугольному виду

$$
\begin{aligned}
a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n &= b'_1\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a'_{n-1\,n-1}x_{n-1} + a'_{n-1\,n}x_n &= b'_{n-1}\,, \\
a'_{nn}x_n &= b'_n\,.
\end{aligned} \tag{8}
$$

На 2) этапе происходит последовательное нахождение значений неизвестных, начиная с последнего уравнения. Последнее уравнение содержит одну неизвестную и получим $x_n = b'_n / a'_{nn} = \alpha_n$. Это значение подставим в предпоследнее уравнение, которое превращается также в уравнение с одной неизвестной:

$$a'_{n-1\,n-1}x_{n-1} + a'_{n-1\,n}\alpha_n = b'_{n-1} \qquad \text{, откуда}$$

$$x_{n-1} = (b'_{n-1} - a'_{n-1\,n}\alpha_n)/a'_{n-1\,n-1} = \alpha_{n-1}\,.$$

Найденные значения $x_n = \alpha_n$ и $x_{n-1} = \alpha_{n-1}$ подставим в свою очередь в уравнение на одну строку выше, откуда находим x_{n-2} и т.д. до первого уравнения, откуда находим $x_1 = \alpha_1$. Решение системы найдено: $x_i = \alpha_i$ (i = I, 2, ... , n). Решение записывается и в виде $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Один сравнительно удобный способ оформления хода расчетов будет демонстрирован на примере.

П р и м е р I. Решить систему уравнений

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8, \\
x_1 - 3x_2 \qquad - 6x_4 &= -9, \\
2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5, \\
x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

В таблицу внесем расширенную матрицу системы и добавим так называемый контрольный столбец Σ, элементы которого равны сумме всех элементов строки. Элементарные преобразования, проводимые над строками, распространяются и на контрольный столбец. Сумма элементов строки расширенной матрицы должна на каждом шагу совпадать с элементами контрольного столбца.

При составлении исходной таблицы напишем в первую строку коэффициенты второго уравнения. Тогда разрешающим элементом в первом столбце будет I. Рядом с таблицей укажем характер проводимого преобразования. Например, (II) - 2 (I) означает, что от элементов II строки вычтены удвоенные элементы I строки. Разрешающие элементы столбцов подчеркнуты.

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ	Преобразование
$\underline{\text{I}}$	3	0	-6	-9	-I7	
2	I	-5	I	8	7	
0	2	-I	2	-5	-2	
I	4	-7	6	0	4	
I	-3	0	-6	-9	-I7	
0	$\underline{7}$	-5	I3	26	4I	(II) - 2(I)
0	2	-I	2	-5	-2	
0	7	-7	I2	9	2I	(IУ) - (I)
I	-3	0	-6	-9	-I7	
0	7	-5	I3	26	4I	
0	0	$\underline{3}$	-I2	-87	-96	7 (III) - 2 (II)
0	0	-2	-I	-I7	-20	(IУ) - (II)
I	-3	0	-6	-9	-I7	
0	7	-5	I3	26	4I	
0	0	I	-4	-29	-32	(III):4
0	0	0	-27	-225	-252	(IУ) + 2 (III)

Матрица коэффициентов приведена к треугольному виду. I) этап завершен.

Начинается 2) этап. Последней строке соответствует уравнение $-27x_4 = -225$, откуда $x_4 = 25/3$. Предпоследней строке соответствует уравнение $x_3 - 4x_4 = -29$. Подставляя сюда только что найденное значение x_4, получим $x_3 = -29 + 4\cdot 25/3 = 13/3$. Продвигаясь на одну строку выше, имеем $7x_2 - 5x_3 + 13x_4 = 26$, откуда

$$x_2=\frac{1}{7}\left(26+5\cdot\frac{13}{3}-13\cdot\frac{25}{3}\right)=-\frac{26}{3}\ .$$

Аналогично из первой строки получим

$$x_1 = -9 + 3x_2 + 6x_4 = -9 - 26 + 50 = 15.$$

Задача решена: $x_1 = 15$, $x_2 = -26/3$, $x_3 = 13/3$, $x_4 = 25/3$.К.

II Общий случай, когда $r < n$. За разрешающие элементы принимаем элементы с равными индексами a_{11}, a_{22}, ... , a_{rr}. Путем элементарных преобразований приходим к матрице

$$\left\|\begin{array}{cccc|cccc} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & a'_{1\,r+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & a'_{2\,r+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & a'_{r\,r+1} & \dots & a'_{rn} & b'_r \end{array}\right\| ,$$

откуда нулевые строки вычеркнуты. Если система разрешима,то нулевых строк будет точно $m-r$.

Блок, обведенный прямоугольником, определяет коэффициенты базисных неизвестных, в остальных столбцах коэффициенты свободных неизвестных. Свободным неизвестным придаем произвольные значения $x_{r+1} = C_1$, $x_{r+2} = C_2$, ... Последней матрице соответствует треугольная система, где слагаемые со свободными неизвестными перенесены в правые стороны уравнений. Это соответствует первому этапу метода Гаусса. Выпишем только два уравнения преобразованной системы:

$$\begin{gathered} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{r-1\,r-1}x_{r-1} + a'_{r-1\,r}x_r = b'_{r-1} - a'_{r-1\,r+1}C_1 - \dots \\ a'_{rr}x_r = b'_r - a'_{r\,r+1}C_1 - \dots \quad . \end{gathered}$$

На втором этапе найдем из последнего уравнения x_r как линейную комбинацию свободных неизвестных, затем из предпоследнего уравнения x_{r-1} и т.д. согласно методу Гаусса.

Несовместность системы обнаруживается в ходе преобразований расширенной матрицы. Если все коэффициенты неизвестных какой-либо строки равны нулю, но свободный член не равен нулю, то система несовместна. Действительно, такой строке соответствует уравнение $0\cdot x_1 + \dots + 0\cdot x_n = b \neq 0$ и такому равенству не удовлетворяет никакая совокупность чисел.

П р и м е р 2. Решить систему уравнений

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6,$$
$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4,$$
$$9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2.$$

Располагаем коэффициенты в последующей таблице и проведем необходимые преобразования.

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ	Преобразование
2	7	3	I	6	I9	
3	5	2	2	4	I6	
9	4	I	7	2	23	
2	7	3	I	6	I9	
0	-II	-5	I	-I0	-25	2 (II) - 3 (I)
0	-55	-25	5	-50	-I25	2 (III)- 9 (I):5

Элементы третьей строки пропорциональны элементам второй строки и после деления третьей строки на 5 две строки совпадают. Одну из них можно вычеркнуть. Ранг матрицы равен 2. В роли свободных неизвестных выступают x_3 и x_4. Обозначим $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$. Второй строке соответствует уравнение

$$-11x_2 - 5C_1 + C_2 = -10,$$

откуда найдем

$$x_2 = \frac{10}{11} - \frac{5}{11}C_1 + \frac{1}{11}C_2 .$$

Из первого уравнения $2x_1 + 7x_2 + 3C_1 + C_2 = 6$ следует

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[6 - 7\left(\frac{10}{11} - \frac{5}{11}C_1 + \frac{1}{11}C_2\right) - 3C_1 - C_2\right] = -\frac{2}{11} + \frac{1}{11}C_1 - \frac{9}{11}C_2 .$$

Общее решение системы имеет вид:

$$x_1 = -\frac{2}{11} + \frac{1}{11}C_1 - \frac{9}{11}C_2, \qquad x_2 = \frac{10}{11} - \frac{5}{11}C_1 + \frac{1}{11}C_2, \qquad x_3 = C_1, \qquad x_4 = C_2 .$$

Приравнивая свободные неизвестные нулю: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, получим одно базисное решение $x_1 = -2/II$, $x_2 = I0/II$, $x_3 = x_4 = 0$.

За базисные неизвестные можно выбирать и другие пары неизвестных, например, x_1 и x_3 или x_1 и x_4 и т.д. Если в роли базисных x_3 и x_4, то за разрешающие элементы целесообразно выбрать единицы из третьего и четвертого столбцов. Для реализации метода Гаусса можно в таблице в первые два столбца написать коэффициенты при x_3 и x_4, поменяя при этом первую и третью строки:

x_3	x_4	x_1	x_2	b	Σ	Преобразование	
I	7	9	4	2	23		
2	2	3	5	4	I6		
3	I	2	7	6	I9		
I	7	9	4	2	23		
0	-I2	-I5	-3	0	-30	(II)- 2 (I)	:(-3)
0	-20	-25	-5	0	-50	(III)- 3 (I)	:(-5)
I	7	9	4	2	23		
0	4	5	I	0	I0		
0	4	5	I	0	I0		

Примем $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$. Тогда

$$4x_4 + 5C_1 + C_2 = 0; \qquad x_4 = -\frac{5}{4}C_1 - \frac{I}{4}C_2 ;$$

$$x_3 = 2 - 7x_4 - 9C_1 - 4C_2 = 2 - \frac{I}{4}C_1 - \frac{9}{4}C_2 .$$

Общее решение: $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, $x_3 = 2 - C_1/4 - 9C_2/4$, $x_4 = -5\,C_1/4 - C_2/4$. Второе базисное решение: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$. К.

5. <u>Метод полного исключения неизвестных</u>

Метод Гаусса можно реализовать и немного иным путем. С помощью разрешающего элемента можно в каждом столбце преобразовать в нули все остальные элементы. Если разрешающие элементы выбраны на главной диагонали, то расширенная матрица преобразуется к диагональному виду

$$\left\| \begin{array}{|cccc|cccc} a'_{11} & & & 0 & a'_{1\,r+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ & a'_{22} & & & & & & \\ & & \ddots & & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & & & a'_{rr} & a'_{r\,r+1} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \end{array} \right\| .$$

Каждой строке соответствует уравнение лишь с одной неизвестной и получим легко значения неизвестных. И так, из первой строки следует

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1' - a'_{1\,r+1}C_1 - \ldots - a'_{1n}C_r\right) \text{ и т.д.,}$$

где свободные неизвестные обозначены $x_{r+1} = C_1$, ... , $x_n = C_r$. Этот способ иногда называется методом полного исключения неизвестных.

При практической реализации даже необязательно разрешающие элементы выбирать на главной диагонали. Необходимо лишь, чтобы в каждой строке и столбце не было более одного разрешающего элемента. В столбцах свободных неизвестных (если они будут) нет разрешающих элементов. Практическую реализацию демонстрируем на примерах.

Пример I. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 9,\\
3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1,\\
x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 2,\\
2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 3x_4 &= -1.
\end{aligned}$$

Составим расширенную матрицу системы и прибавим контрольный столбец. Разрешающие элементы подчеркнуты. За таблицей указаны проводимые преобразования.

По строкам можем выписать решение: из первой строки $x_2 = 2$, из второй $x_3 = 0$, из третьей $x_1 = 1$, из четвертой $x_4 = -1$. Решение оформим в виде $\vec{x} = (1, 2, 0, -1)$. К.

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ	Преобразование
2	3	4	-I	9	I7	
3	-I	I	2	-I	4	
I	I	-5	I	2	0	
2	-3	-4	-3	-I	-9	

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ	Преобразование	
0	I	I4	-3	5	I7	(I) - 2 (III)	
0	-4	I6	-I	-7	4	(II) - 3 (III)	
$\underline{\text{I}}$	I	-5	I	2	0		
0	-5	6	-5	-5	-9	(IУ) - 2(III)	
0	$\underline{\text{I}}$	I4	-3	5	I7		
0	0	72	-I3	I3	72	(II) + 4(I)	
I	0	-I9	4	-3	-I7	(III) - (I)	
0	0	76	$\underline{-20}$	20	76	(IУ) + 5(I)	:4
0	5	I3	0	I0	28	5(I) - 3(IУ)	
0	0	$\underline{\text{II3}}$	0	0	II3	5(II) - I3(IУ)	:II3
5	0	-I9	0	5	-9	5(III) + 4(IУ)	
0	0	I9	-5	5	I9		
0	5	0	0	I0	I5	(I) - I3(II)	:5
0	0	I	0	0	I		
5	0	0	0	5	I0	(III) + I9(II)	:5
0	0	0	-5	5	0	(IУ) - I9(II)	:(-5)

П р и м е р 2. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 &= 5,\\
2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 - 7x_5 &= 3,\\
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4,\\
3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 8.
\end{aligned}$$

Уже до решения можем сказать, что если система совместна, то решений будет бесконечно много, т.к. число уравнений меньше числа неизвестных. Решим задачу методом полного исключения неизвестных. Разрешающие элементы подчеркнуты.

Вычеркнем четвертую строку как нулевую. Кстати, это можно было делать уже на предпоследнем шагу, где вторая и четвертая строки совпали. Остаются три уравнения с пятью неизвестными. За базисные неизвестные выберем те, столбцы коэффициентов которых единичные векторы: x_1 , x_4 и по собственному выбору x_2 или x_3 : столбцы по x_2 и x_3 содержат элемент I в одной и той же строке. Примем за базисную неизвестную x_3 . Свободными неизвестными являются тогда $x_2 = C_1$, $x_5 = C_2$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ	Преобразование
I	2	2	I	3	5	I4	
2	-3	-3	I	-7	3	-7	
I	I	I	2	0	4	9	
3	-I	-I	2	-4	8	7	
I	2	2	I	3	5	I4	
0	-7	-7	-I	-I3	-7	-35	(II) - 2(I)
0	-I	-I	I	-3	-I	-5	(III) - (I)
0	-7	-7	-I	-I3	-7	-35	(IУ) - 3(I)
I	3	3	0	6	6	I9	(I) - (III)
0	-I	-I	0	-2	-I	-5	(II) + (III) :8
0	-I	-I	I	-3	-I	-5	
0	-I	-I	0	-2	-I	-5	(IУ) + (III) :8
I	0	0	0	0	3	4	(I) + 3(II)
0	I	I	0	2	I	5	-(II)
0	0	0	I	-I	0	0	(III) - (II)
0	0	0	0	0	0	0	(IУ) - (II)

Из первой строки следует $x_1 = 3$, из второй – $C_1 + x_3 + 2C_2 = I$ или $x_3 = I - C_1 - 2C_2$, из третьей $x_4 = C_2$.

Общее решение следующее: $x_1 = 3$, $x_2 = C_1$, $x_3 = I - C_1 - 2C_2$, $x_4 = C_2$, $x_5 = C_2$. Базисное решение: $\bar{X}_1 = (3,I,0,0,0)$. При выборе свободных неизвестных $C_1 = 2$, $C_2 = -I$ получим кроме базисного следующее частное решение: $\bar{X}_2 = (3,2,I,2,-I)$. К.

П р и м е р 3. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad + x_4 - \ x_5 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 5, \\ x_2 + \ x_3 + x_4 + \ x_5 &= I, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 \qquad - 6x_5 &= 2. \end{aligned}$$

Решим систему методом полного исключения неизвестных. Так как $m < n$, то заранее известно, что имеется не менее одной свободной неизвестной.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ	Преобразование
I	0	0	I	-I	3	4	
I	2	2	I	-3	5	I4	
0	I	I	I	I	I	5	
I	-3	-3	0	-6	2	-9	
I	0	0	I	-I	3	4	
0	2	2	0	4	2	I0	(II) - (I)
0	I	I	I	I	I	5	
0	-3	-3	-I	-5	-I	-I3	(IУ) - (I)
I	0	0	I	-I	3	4	
0	0	0	-I	I	0	0	(II) - (III) :2
0	I	I	I	I	I	5	
0	0	0	I	-I	I	I	(IУ) + 3(III) :2
I	0	0	0	0	2	3	(I) - (IУ)
0	0	0	0	0	I	I	(II) + (IУ)
0	I	I	0	2	0	4	(III) - (IУ)
0	0	0	I	-I	I	I	

Во второй строке все элементы нули кроме свободного члена. Этой строке соответствует уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 1$, которое противоречиво. Следовательно, система уравнений решений не имеет (несовместна). К.

§ 7. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

I. Множество n-мерных векторов

В § I было введено понятие геометрического вектора как направленного отрезка $\bar{x}$. В прямоугольной системе координат было построено взаимно-однозначное соответствие между геометрическим вектором, упорядоченной совокупностью чисел и точкой. В настоящем параграфе будем оси координат в трехмерном случае обозначать через x_1, x_2, x_3 вместо привычных символов x, y, z. Координаты точки обозначим через $P(x_1, x_2, x_3)$ и координаты вектора через $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Вектор $\bar{x}$ разлагается по ортам осей координат $\bar{e}_1 = (1,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0)$, $\bar{e}_3 = (0,0,1)$ в виде $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$.
Отсюда вытекают частные случаи:
на координатной плоскости (двумерный случай)

$$P(x_1, x_2); \qquad \bar{x} = (x_1, x_2) = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 ;$$

на координатной оси (одномерный случай)

$$P(x_1); \qquad \bar{x} = (x_1) \quad = x_1\bar{e}_1 .$$

Целесообразно обобщить рассмотренные понятия. Это делается так, чтобы уже рассматренные случаи вошли в более общую систему.

Определение. Упорядоченная совокупность n действительных чисел (x_1 , x_2 , ... , x_n) называется n-мерным вектором.

Это запишется в виде $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Числа $x_1, \ldots, x_n$ называются координатами вектора $\bar{x}$.

Нулевым вектором называется вектор $\bar{0} = (0,0, \ldots, 0)$.

Пусть даны два n-мерных вектора

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n); \quad \bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) .$$

Векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называются равными $\bar{x} = \bar{y}$, если соответствующие координаты равны между собой: $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., $x_n = y_n$.

Операции над n-мерными векторами определяются следующим образом:

а) суммой (разностью) векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называется вектор $\bar{x} \pm \bar{y}$, имеющий координаты

$$\bar{x} \pm \bar{y} = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \ldots, x_n \pm y_n); \qquad (1)$$

б) произведением вектора $\bar{x}$ на число k называется вектор $k\bar{x}$, имеющий координаты

$$k\bar{x} = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n); \qquad (2)$$

в) скалярным произведением двух n-мерных векторов называется число $\bar{x} \cdot \bar{y}$, вычисляемое по правилу

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i . \qquad (3)$$

Скалярным квадратом вектора $\bar{x}$ называется число

$$\bar{x} \cdot \bar{x} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Длиной или модулем вектора $\bar{x}$ называется число

$$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}} = \sqrt{\sum_i x_i^2} \quad . \qquad (4)$$

Можно показать, что перечисленные операции обладают такими же свойствами, как трехмерные векторы (см. формулы (2) и (II) из §I, стр. 6 и 23).

Если $\bar{x}\cdot\bar{y} = 0$, то векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называются перпендикулярными.

Единичным называется n-мерный вектор, имеющий единичную длину.

Единичными являются и векторы, имеющие одну координату, равную I и все остальные 0. Очевидно, что существует n различных единичных векторов такого вида $\bar{e}_1 = (I,0,0, \ldots , 0)$, $\bar{e}_2 = (0,I,0,0, \ldots , 0), \ldots , \bar{e}_n = (0,0, \ldots , 0,I)$. Все эти векторы являются перпендикулярными, так как их попарно взятые скалярные произведения равны 0:

$\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2 = I\cdot 0 + 0\cdot I + 0\cdot 0 + \ldots + 0\cdot 0 = 0, \bar{e}_1\cdot\bar{e}_3 = 0, \bar{e}_2\cdot\bar{e}_3 = 0$ и т.д.

Оказывается, что всякий вектор $\bar{x} = (x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ можно выразить с помощью единичных векторов $\bar{e}_i (i = I,2,\ldots,n)$ в следующем виде

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i \quad . \qquad (5)$$

Действительно, используя операции (I) и (2) над n-мерными векторами, имеем

$x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n = x_1\cdot(I,0, \ldots , 0) + x_2\cdot(0,I,0, \ldots , 0) + \ldots + x_n\cdot(0,0, \ldots , 0,I) = (x_1, 0, \ldots , 0) + (0, x_2 ,0, \ldots , 0) + \ldots + (0,0, \ldots , 0, x_n) = (x_1 , x_2 , \ldots , x_n) = \bar{x}$.

Говорят, что векторы $\bar{x} = (x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ одинаковой размерности n образуют множество n-мерных векторов R^n. Совокупность единичных векторов $\bar{e}_i$ ($i = I,2, \ldots , n$) называется единичным базисом множества $\mathbb{R}^n$ и равенство (5) разложением вектора $\bar{x}$ по единичному базису. Частные случаи формулы (5) при $n = I, 2, 3$ были представлены в начале настоящего пункта (см. также §I).

П р и м е р I. Даны 5-мерные векторы $\bar{x} = (0,I,-2,-3,2)$

и $\bar{y} = (1,4,1,0,-3)$. Найти вектор $2\bar{x} - 3\bar{y}$, $\bar{x}\cdot\bar{y}$ и $|\bar{x}|$.

Имеем:

$2\bar{x} - 3\bar{y} = 2\cdot(0,1,-2,-3,2) - 3\cdot(1,4,1,0,-3) = (-3,-10,-7,-6,13)$;

$$\bar{x}\cdot\bar{y} = 0\cdot 1 + 1\cdot 4 + (-2)\cdot 1 + (-3)\cdot 0 + 2\cdot(-3) = -4;$$

$$|\bar{x}| = \sqrt{0+1+4+9+4} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}. \qquad \text{К.}$$

Пример 2. Предприятие выпускает продукцию n видов в количествах $q_1, q_2, \ldots, q_n$ единиц и стоимости единицы продукции соответственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Найти суммарную стоимость продукции.

Суммарную стоимость $p_1q_1 + \ldots + p_nq_n = \sum p_iq_i$ можно вычислить и следующим образом. Составляем вектор $\bar{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, именуемый вектором объема продукции и вектор цен $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Суммарная стоимость продукции вычисляется как скалярное произведение

$$\bar{p}\cdot\bar{q} = \sum_{i=1}^{n} p_iq_i \ . \qquad \text{К.}$$

Пример 3. а) Дан вектор $\bar{x} = (3,-1,0,1)$. Написать его разложение по единичному базису четырехмерного пространства. б) В пятимерном пространстве дано разложение вектора $\bar{y} = \bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + 5\bar{e}_4 - \bar{e}_5$. Определить координаты вектора $\bar{y}$.

Согласно правилу (5) разложения вектора имеем

а) $\bar{x} = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_4$; б) $\bar{y} = (1,-3,0,5,-1)$. К.

Совокупность из n чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно истолковать и следующим образом. Тройке чисел (x_1, x_2, x_3) соответствует в трехмерной прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ точка $P(x_1, x_2, x_3)$ и начало координат имеет координаты $O(0,0,0)$. По аналогии с этим говорят, что совокупность из n чисел определяет точку n-мерного пространства и сами числа называются координатами точки. Это записывается в виде $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Точка $O(0,0,\ldots,0)$ называется началом координат. Совокупность этих точек называется n-мерным пространством точек. В такой трактовке можно сказать, что упорядоченные совокупности чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, n-мерные векторы $\bar{x}$ и точки P n-мерного пространства во взаимно-однозначном соответствии:

$$P \longleftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longleftrightarrow \bar{x} \ .$$

При размерности $n \geq 4$ нет возможности в наглядном представлении вектора как направленного отрезка и точки пространства $\mathbb{R}^n$.

2. <u>Линейная зависимость векторов</u>

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ дана система из m векторов с координатами

$$\bar{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}), \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

<u>Линейной комбинацией</u> данных векторов называется вектор

$$\bar{y} = k_1\bar{x}_1 + k_2\bar{x}_2 + \ldots + k_m\bar{x}_m, \tag{6}$$

где k_i – действительные числа ($k_i \in \mathbb{R}$).

Например, линейная комбинация одного вектора $\bar{x}$ есть вектор $k\bar{x}$; комбинации двух векторов $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ есть $\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2$, $2\bar{x}_1 + 5\bar{x}_2$, $\bar{x}_1 + 0 \cdot \bar{x}_2$ и т.д.

<u>Определение</u>. Данные векторы $\bar{x}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) называются <u>линейно зависимыми</u>, если существуют числа k_1, k_2, ... , k_m, не все равны нулю и такие, что линейная комбинация векторов равна нулю (нулевому вектору)

$$k_1\bar{x}_1 + k_2\bar{x}_2 + \ldots + k_m\bar{x}_m = \bar{0}. \tag{7}$$

Если же равенство нулю линейной комбинации векторов возможно лишь в случае, когда все $k_i = 0$, то векторы называются <u>линейно независимыми</u>.

Рассмотрим одну крайность: система состоит лишь из одного вектора $\bar{x}$. Когда эта система линейно зависимая, т.е. когда $k\bar{x} = \bar{0}$ при $k \neq 0$? Это возможно лишь при $\bar{x} = \bar{0}$. Если же $\bar{x} \neq 0$, то имеем $k\bar{x} = \bar{0}$ лишь при $k = 0$ и это означает, что $\bar{x}$ является линейно независимой системой.

Остановимся на двух свойствах линейно зависимой системы векторов. Их можно объединить в следующую теорему.

<u>Теорема</u>. Данные векторы линейно зависимы тогда и только тогда, когда по крайней мере один из них можно выразить как линейную комбинацию других.

Доказательство. Предположим, что векторы зависимы. Тогда имеет место равенство (7), причем хоть один из коэффициентов не нуль. Пусть ради конкретности $k_1 \neq 0$. Разделим равенство (7) на k_1 и перенесем слагаемые кроме $\bar{x}_1$ вправо.

Получим

$$\bar{x}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\bar{x}_2 - \frac{k_3}{k_1}\bar{x}_3 - \ldots - \frac{k_m}{k_1}\bar{x}_m ,$$

а это и означает, что вектор $\bar{x}_1$ является линейной комбинацией остальных. Так можно любой из векторов, коэффициент которого в равенстве (7) не равен нулю, выразить через другие.

Теперь предположим, что один из векторов можно представить как линейную комбинацию других. Пусть имеем

$$\bar{x}_m = k_1\bar{x}_1 + k_2\bar{x}_2 + \ldots + k_{m-1}\bar{x}_{m-1} .$$

Перенеся все члены в одну сторону знака равенства, получим

$$k_1\bar{x}_1 + k_2\bar{x}_2 + \ldots + k_{m-1}\bar{x}_{m-1} - \bar{x}_m = \bar{0} .$$

В этом равенстве по крайней мере один коэффициент не нуль: коэффициент при $\bar{x}_m$ равен -I. Это согласуется с определением линейной зависимости векторов (7).

Теорема доказана.

<u>П р и м е р I</u>. Для трех векторов имеет место равенство

$$3\bar{x}_1 - 4\bar{x}_2 + \bar{x}_3 = \bar{0}.$$

Являются ли эти векторы линейно зависимыми или независимыми?

Линейная комбинация векторов равна нулю при ненулевых коэффициентах — векторы линейно зависимы.

В данном случае можно любой из векторов выразить как линейную комбинацию остальных:

$$\bar{x}_1 = \frac{4}{3}\bar{x}_2 - \frac{1}{3}\bar{x}_3 , \qquad \bar{x}_2 = \frac{3}{4}\bar{x}_1 + \frac{1}{4}\bar{x}_3 , \qquad \bar{x}_3 = -3\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 . \quad \text{К.}$$

Можно доказать, что максимальное число линейно независимых векторов в множестве векторов $\mathbb{R}^n$ равно числу n. Эти n линейно независимых векторов можно конечно выбирать разным образом.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ одну систему линейно независимых векторов образуют орты $\bar{e}_1 = (I,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,I,0)$, $\bar{e}_3 = (0,0,I)$. Для проверки этого утверждения составим равенство типа (7):

$$k_1\bar{e}_1 + k_2\bar{e}_2 + k_3\bar{e}_3 = \bar{0}$$

и выясним, при каких значениях k_1, k_2, k_3 это возможно. Представим это равенство через координаты векторов:

$$k_1\cdot(1,0,0) + k_2\cdot(0,1,0) + k_3\cdot(0,0,1) = (0,0,0);$$
$$(k_1,0,0) + (0,k_2,0) + (0,0,k_3) = (0,0,0);$$
$$(k_1,k_2,k_3) = (0,0,0).$$

Из последнего равенства следует, что $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. По определению линейной зависимости это означает, что $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ действительно линейно независимы. Всякий вектор можно выразить в виде линейной комбинации этих ортов $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$, т.е. система, состоящая уже из 4 векторов, линейно зависимая.

Аналогично получается, что в множестве $\mathbb{R}^n$ n единичных векторов $\bar{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, ..., $\bar{e}_n = (0,0,\ldots,0,1)$ линейно независимые и всякий вектор $\bar{x}$ выражается как линейная комбинация этих по формуле (5).

3. Гиперплоскость

Интерпретируем линейное уравнение относительно n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0 .$$

При $n = 1$ имеем уравнение $a_1x_1 + b = 0$. Этому уравнению удовлетворяет координата точки $P_1(x_1)$ числовой оси $x_1 = -b/a_1$. Точка P_1 разделит числовую ось на две полупрямые. Координаты точек этих полупрямых удовлетворяют следующим неравенствам: $a_1x_1 + b < 0$ левее и $a_1x_1 + b > 0$ правее точки P_1.

При $n = 2$ в прямоугольной системе координат $0x_1x_2$ множество точек $P(x_1, x_2)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$, образует прямую, разделяющую координатную плоскость на две полуплоскости. Координаты точек с одной стороны прямой удовлетворяют неравенству $a_1x_1 + a_2x_2 + b > 0$, с другой стороны – неравенству $a_1x_1 + a_2x_2 + b < 0$.

При $n = 3$ в трехмерной системе координат точки $P(x_1,x_2,x_3)$, удовлетворяющие уравнению $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b = 0$ определяют плоскость. Эта плоскость разделит трехмерное пространство на два полупространства, координаты точек которых удовлетворяют неравенствам

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b > 0 \quad \text{и} \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b < 0.$$

Объединим сказанное в единую систему, используя понятие

n-мерного пространства.

Рассмотрим n-мерное пространство точек $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Множество точек, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0 , \qquad (8)$$

называется гиперплоскостью в n-мерном пространстве. Само уравнение (8) называется уравнением гиперплоскости.

Гиперплоскость (8) разделит n-мерное пространство V на два полупространства V^+ и V^-, координаты точек которых удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} V^+ &: \ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b > 0 , \\ V^- &: \ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b < 0 . \end{aligned} \qquad (9)$$

Подставляя координаты точки $O(0,0, \ldots , 0)$ в уравнение (8), можно определить, какому полупространству она принадлежит. Если $b > 0$, то точка $O \in V^+$, при $b < 0$ $O \in V^-$. При $b = 0$ начало координат находится на самой гиперплоскости.

После введения понятия гиперплоскости можем сказать, что в трехмерном пространстве гиперплоскостью является плоскость, в двумерном – прямая, в одномерном – точка. При $n > 3$ мы уже не можем уравнению гиперплоскости дать наглядную геометрическую интерпретацию.

Пример. Определить, по какую сторону от плоскостей $F_1 = 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2 = 0$ и $F_2 = x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$ лежат полупространства $F_1 < 0$ и $F_2 > 0$.

В первом случае подставим в уравнение плоскости $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и получим $F_1 = 2 > 0$. Полупространство $F_1 = 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2 > 0$ содержит начало координат O.

Во втором случае плоскость $F_2 = 0$ проходит через начало координат. Подставим в уравнение плоскости координаты какой-нибудь другой точки, например, $P_1(1,0,0)$ и получим $F_2 = 1 > 0$ – полупространство $F_2 = x_1 - 2x_2 + 3x_3 > 0$ лежит по ту же сторону плоскости, что и точка P_1. К.

4. О линейных неравенствах. Графическое решение систем неравенств с двумя переменными

Пусть дано линейное неравенство с n неизвестными

$$F_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b > 0 .$$

Областью решений данного неравенства называется множество точек n-мерного пространства, координаты которых удовлетворяют неравенству.

Из предыдущего пункта нам известно, что областью решений служит полупространство V^+ с граничной гиперплоскостью $F_1 = 0$.

Пусть дана система линейных неравенств

$$\begin{aligned} F_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 > 0, \\ F_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 > 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m > 0. \end{aligned}$$

Областью решений системы неравенств называется множество точек n-мерного пространства, координаты которых удовлетворяют каждому неравенству системы. Каждое неравенство в отдельности определяет полупространство. Область решений есть пересечение (общая часть) этих полупространств.

Наглядную геометрическую интерпретацию решения системы неравенств с двумя переменными поясним на примерах.

Пример I. Найти область решений системы

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 6 &\geq 0, \\ 3x_1 - x_2 &< 0, \\ 2x_2 - 9 &\leq 0. \end{aligned}$$

Решение задачи можно разбить на следующие этапы.

I) Построим граничные прямые (2-мерные гиперплоскости)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 6 &= 0, \quad \text{(I)} \\ 3x_1 - x_2 &= 0, \quad \text{(II)} \\ 2x_2 - 9 &= 0. \quad \text{(III)} \end{aligned}$$

Проще всего построить прямую по точкам пересечения прямой с осями координат (для прямой (II) нужно взять одну точку вне осей координат).

(I) $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$; $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$; $P_1(0,2)$; $P_2(3,0)$;

(II) прямая проходит через $O(0,0)$ и $P_3(I,3)$– если $x_1=I$, то $x_2=3$;
(III) прямая параллельна оси x_1: $x_2 = 9/2$.
Прямые построены на рис. 32а.

2) Определим области (полуплоскости) решений каждого неравенства. Первое неравенство при $x_1 = x_2 = 0$ не удовлетворяется – область решений лежит по другую сторону от прямой (I), чем начало координат. На рисунке полуплоскости решений указаны стрелкой. В область решений первого неравенства входят и точки граничной прямой. Область решений (II) неравенства определим с помощью точки (I,I): $3\cdot I - I \not\leqslant 0$ – область решений лежит по другую сторону от прямой (II), чем точка (I,I). Область решений (III) неравенства содержит начало координат, включая и точки граничной прямой.

3) Пересечением найденных полуплоскостей является треугольник BCD – область решений системы неравенств замкнута.

К.

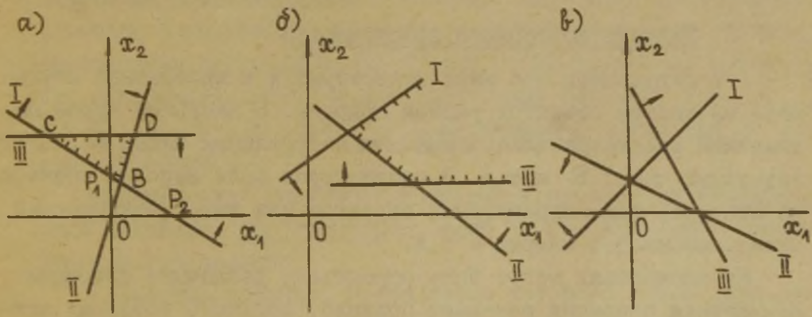

Рис. 32

П р и м е р 2. Найти область решений системы неравенств

$$-2x_1 + 3x_2 < 6,$$
$$4x_1 + 5x_2 > 20,$$
$$x_2 \geqslant I.$$

I) Построим граничные прямые (рис. 32б)

$$-2x_1 + 3x_2 = 6, \quad (I)$$
$$4x_1 + 5x_2 = 20, \quad (II)$$
$$x_2 = I. \quad (III)$$

2) Полуплоскости, определяемые данными неравенствами, находим путем подстановки в неравенства значений $x_1 = x_2 = 0$, на рисунке стрелки направлены в сторону полуплоскостей решений.

3) Пересечение трех полуплоскостей является областью решений системы — она неограниченная фигура. К.

<u>Пример 3</u>. Найти область решений системы неравенств

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 - 4 &> 0,\\
x_1 + 2x_2 - 8 &< 0,\\
2x_1 + x_2 - 16 &> 0.
\end{aligned}
$$

Построим граничные прямые

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 - 4 &= 0, \quad (I)\\
x_1 + 2x_2 - 8 &= 0, \quad (II)\\
2x_1 + x_2 - 16 &= 0 \quad (III)
\end{aligned}
$$

и определим полуплоскости решений отдельных неравенств (рис. 32в). Из рисунка видно, что пересечение этих трех полуплоскостей пустое множество. Система неравенств несовместна. К.

5. Понятие векторного пространства

I В окружающем нас мире существуют и в математике изучаются множества объектов разной природы. В школьном курсе математики рассматривались множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, действительных чисел $\mathbb{R}$ и т.д. В нашем курсе были изучены множества векторов как направленных отрезков или как совокупностей чисел, множество матриц и т.д.

На множествах могут быть определены различные операции. Конкретная операция означает правило, согласно которому каждой паре элементов данного множества сопоставляется определенный элемент из того же множества или также из какого-нибудь другого множества. Например, в множестве действительных чисел для $x, y \in \mathbb{R}$ сопоставляется путем сложения число $x + y = z_1$, путем умножения чисел α, $x \in \mathbb{R}$ число $\alpha x = z_2 \in \mathbb{R}$. В множестве натуральных чисел сумма двух чисел также натуральное число, но при умножении натурального числа на любое действительное число произведение уже не всегда натуральное число. В множестве геометрических векторов сумма двух векторов $\bar{x} + \bar{y}$, также произведение вектора на действительное число $\alpha\bar{x}$ есть векторы, но скалярное произведение

$\bar{x} \cdot \bar{y}$ является уже элементом множества действительных чисел. Правило сложения действительных чисел отличается от правила сложения векторов, но в обоих случаях мы говорим об операции сложения.

Особый интерес представляют множества, в которых определены две операции, условно именуемые „сложением" и „умножением на действительное число". Правила проведения этих операций на разных множествах могут быть различными, но мы постараемся эти операции сформулировать так, чтобы они подчинялись определенным общим законам. Например, как на множестве действительных чисел, так и на множестве геометрических векторов сложение коммутативно: $a + b = b + a$, $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$, при умножении на число I имеем $1 \cdot a = a$, $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$ и т.д.

II Будем рассматривать такие непустые множества V , на которых даны две операции: сложение и умножение на действительное число, от которых требуем, чтобы они удовлетворяли некоторым дополнительным условиям – аксиомам. Договоримся элементы множества V обозначать малыми латинскими буквами, снабженными черточками над буквой. Действительные числа будем обозначать латинскими и греческими буквами. Итак, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{u} \in V$; a , b , α , $\beta \in \mathbb{R}$. Сами элементы множества V назовем векторами.

Определение. Непустое множество V называется векторным (или линейным) пространством, если на нем выполнены следующие три требования:

I Имеется правило, посредством которого любым двум векторам $\bar{x}$, $\bar{y} \in V$ сопоставляется третий вектор $\bar{z} \in V$, называемый суммой векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и обозначаемый символом $\bar{x} + \bar{y} = \bar{z}$. Сама операция сопоставления векторам $\bar{x}$ и $\bar{y}$ вектора $\bar{z}$ называется сложением.

II Имеется правило, посредством которого любому вектору $\bar{x} \in V$ и любому действительному числу $\alpha \in \mathbb{R}$ сопоставляется вектор $\bar{v} \in V$, называемый произведением вектора $\bar{x}$ на число α и обозначаемый символом $\alpha\bar{x} = \bar{v}$. Сама операция называется умножением вектора на число.

III Операции сложения и умножения на число удовлетворяют следующим восьми аксиомам:

1) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$;

2) $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$;

3) существует нулевой вектор $\bar{0}$ такой, что $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$ для любого вектора $\bar{x}$;

4) для каждого вектора $\bar{x}$ существует противоположный вектор $-\bar{x}$ такой, что $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$;

5) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$ для любого вектора $\bar{x}$;

6) $\alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$;

7) $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$;

8) $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$.

Другими словами, множество V называется векторным пространством,если на этом множестве определены две операции – сложение и умножение на число, удовлетворяющие перечисленным выше 8 аксиомам. Мы абстрагируемся и от природы изучаемых объектов и от конкретного вида правила сложения и умножения на число; важно лишь, чтобы эти два правила удовлетворяли сформулированным аксиомам.

Рассмотрим несколько примеров. Отметим, что в случае конкретных множеств элементы могут быть и обозначены без черточки над буквой.

Пример 1. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является векторным пространством, если операции сложения и умножения на число совпадают с обыкновенными операциями сложения и умножения чисел.

Нам следует проверить, удовлетворяются ли перечисленные аксиомы. Из школьной математики известно, что сложение и умножение чисел удовлетворяют аксиомам 1,2,5,6,7 и 8. В роли нулевого вектора число 0, т.к. $x + 0 = x$ (3 аксиома). Противоположным к числу x является число $-x$, т.к. $x + (-x) = 0$.

Множество натуральных чисел $n \in \mathbb{N}$ не является векторным пространством относительно сложения и умножения действительных чисел, поскольку произведение $\alpha \cdot n$ при $\alpha \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ не всегда принадлежит к множеству $\mathbb{N}$ (при $\alpha \notin \mathbb{N}$). По той же причине множество рациональных чисел также не является векторным пространством. К.

Пример 2. Множество геометрических векторов является векторным пространством. Действительно, на этом множестве введены операции $\bar{x} + \bar{y}$ и $\alpha\bar{x}$ и эти операции удовлетворяют аксиомам векторного пространства (см. § I). Нулевым является вектор $\bar{0}$, противоположным к вектору $\bar{x}$ вектор $-\bar{x}$. К.

П р и м е р 3. Множество матриц порядка $m \cdot n$ является векторным пространством. Операции сложения матриц $X = \|x_{ij}\|$ и $Y = \|y_{ij}\|$ и умножения на действительное число α

$$X + Y = \|x_{ij} + y_{ij}\|, \qquad \alpha X = \|\alpha x_{ij}\|$$

удовлетворяют всем аксиомам векторного пространства. К.

П р и м е р 4. Множество многочленов любых степеней относительно сложения и умножения на число является векторным пространством. В роли вектора выступает каждый конкретный многочлен произвольной степени.

Зато множество многочленов конкретной степени относительно указанных операций не является векторным пространством, т.к. сумма двух многочленов степени n может уже не оказаться многочленом той же степени. Например, при $n = 5$ сумма многочленов $3x^5 - 2x^4 + x - 5$ и $-3x^5 + 5x^4 + x^2 - x + I$ уже многочлен 4-ой степени $3x^4 + x^2 - 4$. К.

П р и м е р 5. Множество n-мерных векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, в котором определены операции сложения и умножения на число по правилам, указанным в I пункте настоящего параграфа, является векторным пространством. Третья аксиома выполнена, если за нулевой вектор принимать $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$. Четвертая аксиома удовлетворена, если в качестве противоположного вектора к вектору $\bar{x}$ взять $-\bar{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$, т.к. $\bar{x} + (-\bar{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) = \bar{0}$. Следует проверить и остальные аксиомы. Демонстрируем эту проверку на 8 аксиоме (проверку остальных предоставим читателю):

$$\underline{\alpha(\bar{x}+\bar{y})} = \alpha[(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)] = \alpha(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) =$$
$$= (\alpha(x_1 + y_1), \dots, \alpha(x_n + y_n)) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \dots, \alpha x_n + \alpha y_n) =$$
$$= \alpha(x_1, \dots, x_n) + \alpha(y_1, \dots, y_n) = \underline{\alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}}.$$

Сравнивая подчеркнутые выражения, увидим, что 8 аксиома выполняется. Размерность пространства $n = I, 2, 3, \dots$. К.

Повторяем еще раз, что векторное пространство одномерных векторов (действительных чисел) обозначается через $\mathbb{R}$, двумерных – $\mathbb{R}^2$, трехмерных – $\mathbb{R}^3$ и так далее ... $\mathbb{R}^n$.

П р и м е р 6. Демонстрируем на одном примере, как характер определяемых операций влияет на то, является ли рассматриваемое множество векторным пространством или нет.

Множество положительных действительных чисел $\mathbb{R}^+$ относительно операций сложения и умножения чисел не является векторным пространством т.к. произведение $\alpha \cdot x \notin \mathbb{R}^+$ при $\alpha \leq 0$.

Определим теперь „сложение" $\oplus$ как произведение чисел и „умножение на число" $\circ$ как возведение в степень:

$$x \oplus y = x \cdot y, \quad \alpha \circ x = x^\alpha; \quad x, y \in \mathbb{R}^+, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Проверим выполненность аксиом I – 8, учитывая свойства действительных чисел.

I) $x \oplus y = x \cdot y; \quad \underline{y \oplus x} = y \cdot x = x \cdot y = \underline{x \oplus y}$.

2) $\underline{(x \oplus y) \oplus z} = (xy)z = xyz$;

$\underline{x \oplus (y \oplus z)} = x(yz) = xyz$.

3) Нулевым вектором является $\bar{0} = I$, т.к. $x \oplus \bar{0} = x \cdot I = x$.

4) Противоположный к вектору x есть обратное число $I/x \in \mathbb{R}^+$, т.к. $x \oplus I/x = x \cdot I/x = I = \bar{0}$.

5) $I \circ x = x^1 = x$.

6) $\underline{\alpha \circ (\beta \circ x)} = (\beta \circ x)^\alpha = (x^\beta)^\alpha = x^{\alpha\beta} = \underline{(\alpha\beta) \circ x}$.

7) $\underline{(\alpha + \beta) \circ x} = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta = x^\alpha \oplus x^\beta = \underline{\alpha \circ x + \beta \circ x}$.

8) $\underline{\alpha \circ (x \oplus y)} = \alpha \circ (xy) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = x^\alpha \oplus y^\alpha = \underline{\alpha \circ x + \alpha \circ y}$.

Все аксиомы выполнены – множество $\mathbb{R}^+$ является векторным пространством относительно данных операций.

Зато множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ относительно операций $x \oplus y = xy$, $\alpha \circ x = x^\alpha$ векторным пространством уже не является, поскольку при $\alpha = 0$, $x = 0$ произведение $\alpha \circ x = x^\alpha = 0^0$ в $\mathbb{R}$ не определено.

6. Евклидово пространство

Среди векторных пространств целесообразно выделить пространства, обладающие некоторыми дополнительными свойствами.

I Определение Векторное пространство называется **евклидовым** пространством, если выполнены следующие два требования:

А. Имеется правило, посредством которого любым двум векторам этого пространства $\bar{x}$ и $\bar{y}$ ставится в соответствие действительное число, называемое скалярным произведением этих векторов и обозначаемое символом $\bar{x} \cdot \bar{y}$.

Б. Скалярное произведение подчинено следующим аксиомам:

1) $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$;

2) $(\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{z} = \bar{x} \cdot \bar{z} + \bar{y} \cdot \bar{z}$;

3) $(\alpha \bar{x}) \cdot \bar{y} = \alpha \cdot (\bar{x} \cdot \bar{y})$;

4) $\bar{x} \cdot \bar{x} \geqslant 0$, причем $\bar{x} \cdot \bar{x} = 0$, если $\bar{x}$ нулевой вектор.

Термин „евклидово пространство" введен в честь греческого математика Евклида (Eukleides).

Пример 1. Множество геометрических векторов является евклидовым пространством. В примере 2 предыдущего пункта было показано, что это множество есть векторное пространство. Введенное в § 1 понятие скалярного произведения $\bar{x} \cdot \bar{y} = xy\cos\varphi$ обладает свойствами, удовлетворяющими аксиомам евклидова пространства и $\bar{x} \cdot \bar{x} = 0$ лишь при $\bar{x} = \bar{0}$. К.

Пример 2. В векторном пространстве $\mathbb{R}^n = \{\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)\}$ было введено понятие скалярного произведения по формуле (3):

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i ,$$

свойства которого удовлетворяют и аксиомам евклидова пространства. Таким образом, векторное пространство $\mathbb{R}^n$, в том числе и $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ являются евклидовыми пространствами. В пространстве $\mathbb{R}$ скалярное произведение равно произведению действительных чисел. К.

Пример 3. Определим скалярное произведение на $\mathbb{R}^3$ по-другому, а именно $\bar{x} \cdot \bar{y} = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Легко видеть, что первые три аксиомы евклидова пространства удовлетворены. Но $\bar{x} \cdot \bar{x} = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ может оказаться или отрицательным или нулем при $\bar{x} \neq \bar{0}$. Это означает, что аксиома 4 не удовлетворяется. Векторное пространство $\mathbb{R}^3$ с указанным скалярным произведением не является евклидовым пространством. К.

И так, если речь идет об евклидовом пространстве, то это пространство заведомо и векторное. Векторное пространство же становится и евклидовым, если на нем скалярное произведение определяется так, чтобы выполнялись и аксиомы 1–4.

Для евклидова пространства можно доказать неравенство Коши-Буняковского (Cauchy):

$$|\bar{x}\cdot\bar{y}|\le|\bar{x}|\cdot|\bar{y}| . \qquad (10)$$

Например, в пространстве $\mathbb{R}$ имеем равенство $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$.

Для геометрических векторов $|\bar{x}\cdot\bar{y}| = |\bar{x}|\cdot|\bar{y}|\cos\varphi$.При ненулевых и неколлинеарных векторах $|\cos\varphi|<1$ и $|\bar{x}||\bar{y}||\cos\varphi|<|\bar{x}||\bar{y}|$ и выполняется строгое неравенство $|\bar{x}\cdot\bar{y}|<|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|$. Если один из множителей нулевой вектор или $\bar{x}\parallel\bar{y}$, то выполняется равенство $|\bar{x}\cdot\bar{y}|=|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|$.

II Важное место в векторных пространствах занимает понятие нормы вектора.

Определение. Нормой (или длиной) вектора $\bar{x}\in V$, обозначаемой через $|\bar{x}|$, называется сопоставляемое каждому вектору по определенному правилу действительное число. Норма подчинена следующим аксиомам:

1) $|\bar{x}|>0$, если $\bar{x}$ ненулевой вектор; $|\bar{x}| = 0$,если $\bar{x} = \bar{0}$;

2) $|\alpha\bar{x}|=|\alpha|\cdot|\bar{x}|$;

3) для любых двух векторов $\bar{x},\bar{y}\in V$ справедливо неравенство треугольника

$$|\bar{x}+\bar{y}|\le|\bar{x}|+|\bar{y}| .$$

Можно показать, что в евклидовом пространстве удовлетворяет всем аксиомам нормы величина $\sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}}$ и обычно в качестве нормы и берется

$$|\bar{x}|=\sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}} . \qquad (11)$$

Справедливость для нормы 1) аксиомы сразу вытекает из 4) аксиомы скалярного произведения: $\bar{x}\cdot\bar{x}>0$ при $\bar{x}\ne\bar{0}$. Справедливость для нормы 2) аксиомы:

$$|\alpha\bar{x}|=\sqrt{(\alpha\bar{x})\cdot(\alpha\bar{x})}=\sqrt{\alpha^2(\bar{x}\cdot\bar{x})}=|\alpha|\sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}}=|\alpha|\cdot|\bar{x}| .$$

При проверке 3) аксиомы для нормы используем аксиомы скалярного произведения и неравенство Коши-Буняковского в виде

$$|\bar{x}\cdot\bar{y}|\le\sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}}\cdot\sqrt{\bar{y}\cdot\bar{y}} .$$

Найдем норму суммы $|\bar{x}+\bar{y}|$:

$$|\bar{x}+\bar{y}|=\sqrt{(\bar{x}+\bar{y})\cdot(\bar{x}+\bar{y})}=\sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}+2\bar{x}\cdot\bar{y}+\bar{y}\cdot\bar{y}}\le$$

$$\leq \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x} + 2\sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}}\ \sqrt{\bar{y}\cdot\bar{y}} + \bar{y}\cdot\bar{y}} = \sqrt{(\sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}} + \sqrt{\bar{y}\cdot\bar{y}})^2} =$$

$$= \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}} + \sqrt{\bar{y}\cdot\bar{y}} = |\bar{x}| + |\bar{y}|\ ,\ \text{т.е.}\ |\bar{x}+\bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|\ .$$

Примеры. I) Для действительных чисел (пространство $\mathbb{R}$) нормой числа x является его абсолютная величина (модуль) $|x|$. $|x|>0$ при $x \neq 0$ и $|0| = 0$. Абсолютная величина произведения $|\alpha \cdot x| = |\alpha|\cdot|x|$. 3) аксиома $|x+y| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|$ также выполняется. Например, $|3 + 8| = |3|+|8| = 11$; $|3 - 5| < |3| + |-5|$.

2) Нормой геометрических векторов является длина вектора $|\bar{x}|$. Справедливость первых двух аксиом нормы очевидна. 3) аксиома также выполняется: по определению сложения векторов $|\bar{x} + \bar{y}| < |\bar{x}| + |\bar{y}|$ при $\bar{x} \not\uparrow\uparrow \bar{y}$ и $|\bar{x} + \bar{y}| = |\bar{x}|+|\bar{y}|$ при $\bar{x} \uparrow\uparrow \bar{y}$.

3) В пространстве $\mathbb{R}^n$ норма вектора ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) равна

$$|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ .$$

ДОПОЛНЕНИЕ

Приведем некоторые сведения, связанные с понятиями множества и отображения.

I. Множества

I Понятие множества является в математике одним из начальных и его нельзя определить через более простые математические понятия. Его можно лишь описывать.

Множество объясняется как совокупность (набор) некоторых объектов произвольной природы, объединенных по каким-либо общим для них свойствам. Объекты, из которых состоит множество, называются его элементами. Множество обычно обозначается большой буквой, например, множества $\mathfrak{X}$, $\mathcal{Y}$, R и т.д.

Если множество состоит из конечного числа элементов, то его можно задавать перечнем его элементов. Например, запись $\mathfrak{X} = \{1,2,3\}$ означает, что множество $\mathfrak{X}$ состоит из элементов I, 2, 3. Если множество имеет бесконечное число элементов, то оно задается своим общим элементом (например, x) с указанием того свойства $T(x)$, которым элементы x обладают. Это записывается в виде $\mathfrak{X} = \{x \mid T(x)\}$. Например, запись $\mathfrak{X} = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$ означает, что множество $\mathfrak{X}$ состоит из действительных чисел, удовлетворяющих условию $-1 \leq x < 2$. Это неравенство является свойством $T(x)$. Иногда свойство $T(x)$ трудно записать в виде формулы. Тогда оно описывается словесно. Например, множество $\mathfrak{X}$ состоит из всех треугольников плоскости – свойство задается словами „все треугольники плоскости". Принадлежность элемента x к множеству $\mathfrak{X}$ обозначается записью $x \in \mathfrak{X}$. Запись $x \notin \mathfrak{X}$ означает, что элемент x не принадлежит множеству $\mathfrak{X}$.

Чаще всего встречаются числовые множества. Вспомним обозначения числовых множеств, изученных в школе:

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Множество $\mathfrak{X}$ называется <u>подмножеством</u> другого множества $\mathfrak{Y}$, если каждый элемент множества $\mathfrak{X}$ является одновременно и элементом множества $\mathfrak{Y}$. Это записывается в виде $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$ (читается: „ $\mathfrak{X}$ содержится (включается) в $\mathfrak{Y}$").

Множества $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ называются <u>равными</u> и пишется $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, если одновременно $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X}$, т. е. $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ состоят из одних и тех же элементов.

<u>Примеры</u>. 1) Если множеством А являются студенты первого курса и множество В состоит из всех студентов факультета, то $A \subset B$.

2) Дано множество $\mathfrak{X} = \{1,2,3,4,5\}$. Тогда $1 \in \mathfrak{X}$, $6 \notin \mathfrak{X}$.

3) Множество P состоит из точек (x, y) параболы $x^2 = 2py$ – $P = \{(x, y) \mid x^2 = 2y\}$. Тогда $(0,0) \in P$, $(1, 1/2p) \in P$, но $(2, 2/p) \notin P$.

4) Имеют место следующие включения: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. К.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется <u>пустым</u> множеством 0. Множество 0 является подмножеством любого множества.

II Операции над множествами.

I) Объединением или суммой множеств $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{Y}$ называется множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств и обозначается $\mathfrak{X} \cup \mathcal{Y}$.

2) Пересечением множеств $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{Y}$ называется множество всех элементов, принадлежащих одновременно обоим множествам и обозначается $\mathfrak{X} \cap \mathcal{Y}$.

3) Разностью множеств $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{Y}$ называется множество тех элементов множества $\mathfrak{X}$, которые не содержатся во множестве $\mathcal{Y}$ и обозначается $\mathfrak{X} \setminus \mathcal{Y}$.

4) Прямым произведением $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$ множеств $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{Y}$ называется множество всех упорядоченных пар (x , y), где $x \in \mathfrak{X}$, $y \in \mathcal{Y}$.

Понятия объединения, пересечения и прямого произведения могут быть обобщены и на случай любого числа множеств.

П р и м е р ы. I) Пусть $\mathfrak{X}$ – множество всех натуральных чисел, делящихся на 2, а $\mathcal{Y}$ – множество всех натуральных чисел, делящихся на 5. Множество $\mathfrak{X} \cup \mathcal{Y}$ состоит из чисел, делящихся или на 2 или на 5. Множеством $\mathfrak{X} \cap \mathcal{Y}$ является множество чисел, делящихся и на 2 и на 5, т.е. делящихся на IO.

2) Даны множества $A = \{I,2,3,4,5\}$ и $B = \{3,5\}$. Найти $A \setminus B$, $B \setminus A$ и $A \times B$. Получим $A \setminus B = \{I,2,4\}$; $B \setminus A = 0$ – в множестве B нет элементов, не содержащихся в множестве A ;

$$A \times B = \{(I, 3), (I, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 3), (4, 5), (5, 3), (5, 5)\}.$$

3) Пусть на плоскости две числовые оси перпендикулярны и общее начало координат находится в точке их пересечения. Координаты точек одной оси составляют множество $\mathbb{R}$, и второй оси также множество $\mathbb{R}$. Тогда прямое произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ состоит из пар действительных чисел, являющихся координатами точек этой плоскости в прямоугольной системе координат. К.

III В математических предложениях (формулировках определений, теорем и т.д.) часто повторяются отдельные слова и целые выражения. Целесообразно их заменить специальными символами. Приведем несколько самых простых и чаще применяемых символов.

$\exists$ – означает „существует" или „найдется" (перевернутая латинская буква Е от английского слова Existence –

существование); $\nexists$ – не существует.

$\forall$ – „любой", „каждый" (перевернутое латинское А от английского слова Any– любой).

$\Rightarrow$ – если ..., то...; $A \Rightarrow B$ читается: из А следует В или если А, то В.

$\Leftrightarrow$ – знак эквивалентности или равносильности; $A \Leftrightarrow B$ означает, что из предложения А следует предложение В и наоборот, из В следует А.

$\wedge$ – „и"; $A \wedge B$ – А и В.

$\vee$ – „или"; $A \vee B$ – А или В.

Приведенные символы называются логическими.

Примеры. Расшифровать предложения: I) $\exists x \in \mathfrak{X}$; 2) $\forall x \in \mathfrak{X}$; 3) $\exists x\,(x+3=20)$; 4) $\nexists x\,(x^2<0)$; 5) $\forall x\,(x^2+6>0)$; 6) $4x>8 \Rightarrow x>2$; 7) $7>5 \Leftrightarrow 5<7$.

I) Существует элемент x из множества $\mathfrak{X}$; 2) для любого элемента x из множества $\mathfrak{X}$; 3) существует число x, такое, что $x+3=20$; 4) не существует такого числа x, чтобы $x^2<0$; 5) для любого x выполняется $x^2+6>0$; 6) из неравенства $4x>8$ следует, что $x>2$; 7) из неравенства $7>5$ следует, что $5<7$ и из $5<7$ следует $7>5$. К.

2. Отображение. Функция

Отображение – одно из фундаментальных понятий математики. Поясним содержание этого понятия.

Пусть даны два непустых множества со своими элементами $x \in \mathfrak{X}$ и $y \in \mathfrak{Y}$. Если каждому элементу множества $\mathfrak{X}$ ставится в соответствие некоторый вполне определенный элемент множества $\mathfrak{Y}$, то говорят, что определено отображение множества $\mathfrak{X}$ в множество $\mathfrak{Y}$. Отображение следует рассматривать как операцию, переводящую каждый элемент x в некоторый элемент y. Это обозначается $x \mapsto y$. Элемент x называется прообразом элемента y; элемент y, сопоставленный элементу x – образом элемента x при этом отображении. Отображений из множества $\mathfrak{X}$ в множество $\mathfrak{Y}$ может быть много. Сами отображения будем обозначать малыми латинскими буквами, например, через f, g или буквосочетаниями, например, $\sin$, $\log$. Обстоятельство, что f есть отображение из множества $\mathfrak{X}$ в множество $\mathfrak{Y}$, обозначается $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ или $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y}$. Множество $\mathfrak{X}$ называется исходным, а множество $\mathfrak{Y}$ – конечным множеством отображения.

Целесообразно образ обозначать так, чтобы он содержал информацию об отображении f и прообразе x. Поэтому образ часто обозначается через $f(x)$ вместо символа y. Следует различать понятия „отображение f" и „элемент $f(x)$". Например, $\sin$ (синус) означает отображение, $\sin x$ является образом элемента x – результатом отображения $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$. В речи и часто употребляют термин „отображение (функция) $\sin x$" вместо более корректного „отображение (функция) $\sin$".

Множество образов $\{f(x) \mid x \in \mathfrak{X}\}$ обозначается и короче $f(\mathfrak{X})$ и называется образом множества $\mathfrak{X}$ при отображении f. Если это множество $f(\mathfrak{X})$ является числовым, то употребляется и термин „множество значений отображения f". При отображении $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ множество образов $f(\mathfrak{X}) \subset \mathfrak{Y}$. Может случиться, что $f(\mathfrak{X}) = \mathfrak{Y}$, т.е. каждый элемент множества $\mathfrak{Y}$ имеет хотя бы один прообраз.

Отображение $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, при котором каждый элемент y конечного множества $\mathfrak{Y}$ имеет точно один прообраз x, называется биективным. В таком случае каждому элементу y множества $\mathfrak{Y}$ сопоставляется элемент x из множества $\mathfrak{X}$. Это новое отображение называется обратным отображением к отображению $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ и обозначается $f^{-1}: \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$. Исходное и конечное множества в отображениях f и f^{-1} поменяют места.

Среди отображений очень важными являются два частных случая: функционал и функция.

Функционалом называется отображение $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, конечным множеством $\mathfrak{Y}$ которого является множество действительных чисел $\mathbb{R}$ или его подмножество.

Функцией называется отображение $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, если исходным и конечным множествами $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ являются (под)множества действительных чисел. Отображение $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является также функцией. Отображение, обратное к функции f, называется обратной функцией. Для существования обратной функции f^{-1} к функции f она как отображение должна быть также биективной. На подробностях существования обратной функции мы здесь останавливаться не будем.

Если отображение f является функцией, то оно обычно дается формулой $f(x)$. Прообраз x называется аргументом, $f(x)$ – функцией. Исходное множество $\mathfrak{X}$ называется областью определения функции f и множество $f(\mathfrak{X})$ – множеством значений функции.

П р и м е р ы. I) Рассмотрим два множества: элементами множества $\mathfrak{X}$ служат слова русского словаря, множество $\mathcal{Y}$ состоит из букв русского алфавита. Построим отображение $f: \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ следующим образом: каждому слову сопоставляется его заглавная буква. Образом элемента „кошка" служит буква к, студент – с, соль – с. Хотя студент $\neq$ соль, имеем f(студент) = f(соль) = с. Кроме того, для элемента ъ $\in \mathcal{Y}$ не существует слова в $\mathfrak{X}$, т.е. $f(\mathfrak{X}) \neq \mathcal{Y}$.

Сопоставляем еще каждому слову как элементу множества $\mathfrak{X}$ его третью букву. Мы не получим отображения $g: \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$, так как слова с одной и двумя буквами не имеют образов в множестве $\mathcal{Y}$, а это не согласуется с определением отображения.

2) Сопоставление $\sin: \mathbb{R} \to [0,1]$ не является отображением, так как образы всех элементов исходного множества $\mathbb{R}$ не входят в конечное множество $[0,I]$, например при $x = 3\pi/2$ его образ $\sin(3\pi/2) = -I \notin [0,I]$. Заданное нами конечное множество слишком „узкое".

3) Векторы $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ являются элементами векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Их сумму, определяемую формулой $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ можно рассматривать как отображение $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, если образ элемента $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ определяется по формуле $f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} + \bar{y}$. Здесь множество $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ является прямым произведением множества $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^n$ (см. I пункт дополнения). Данное отображение f обратного отображения не имеет, так как одну и ту же сумму можно получить путем сложения различных пар векторов. Например, сумма векторов $\bar{x}_1 = (I,-I,5)$ и $\bar{y}_1 = (3,-2,-6)$ равна $\bar{x}_1 + \bar{y}_1 = (4,-3,-I)$, а также сумма векторов $\bar{x}_2 = (2,0,4)$ и $\bar{y}_2 = (2,-3,-5)$ равна $\bar{x}_2 + \bar{y}_2 = (4,-3,-I)$.

Рассматриваемое отображение не удовлетворяет требованиям, обеспечивающим существование обратного отображения.

4) Скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^3$, данное формулой $\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ можно рассматривать как отобра-

жение $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, определяя образ произвольного элемента ($\bar{x}$, $\bar{y}$) по формуле $f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y}$. Это отображение является функционалом, так как конечное множество есть числовое.

5) Пусть M множество всех квадратных матриц. Каждой матрице A сопоставляем ее определитель $|A| \in \mathbb{R}$. Получим отображение $f: M \to \mathbb{R}$, являющееся функционалом и данное формулой $f(A) = |A|$. Обратного отображения нет (объясните,почему).

6) Любому числу $x \in \mathbb{R}$ соответствует точка P числовой оси. Обозначим множество точек числовой оси через P . Имеем отображение $f: \mathbb{R} \to P$, заданное формулой $f(\mathbb{R}) = P$. Данное отображение имеет и обратное отображение $f^{-1}: P \to \mathbb{R}$ по формуле $f^{-1}(P) = x$.

Обозначая множество точек P плоскости через $\mathfrak{X}$, т.е.$P \in \mathfrak{X}$ и элементы множества $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$, то имеем отображение $f: \mathbb{R}^2 \to \mathfrak{X}$ и его обратное отображение $f^{-1}: \mathfrak{X} \to \mathbb{R}^2$ – каждой паре действительных чисел (x , y) соответствует точка плоскости P и наоборот.

7) Множество $\mathfrak{X}$ состоит из натуральных чисел $n < 1000$, т.е. $\mathfrak{X} = \{n \mid 0 < n < 1000\}$, множество $\mathcal{Y} = \{0, 1, \dots, 9\}$. Отображение $f: \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$, сопоставляющее каждому числу $n \in \mathfrak{X}$ цифру его сотен $y \in \mathcal{Y}$ является функцией (исходное и конечное множества числовые). Например, $f(365) = 3$, $f(389) = 3$, $f(8) = 0$. Обратной функции нет, так как из условия $x_1 \neq x_2$ не следует $f(x_1) \neq f(x_2)$.

8) Отображение $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, данное формулой $f(x) = x + 4$, является функцией, имеющей и обратную функцию $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,определяемой формулой $f^{-1}(y) = y - 4$. В более простой записи: функция $y = x + 4$ имеет обратную функцию $x = y - 4$.

9) Функция $f(x) = x^2 - 4x - 5$ имеет область определения $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ и область значений $f(\mathfrak{X}) = \{y \mid y \geq -9\} \subset \mathbb{R}$.

Функция $f(x) = x^3$ имеет область определения $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ и также область значений функции $f(\mathfrak{X}) = \mathbb{R}$.   К.

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ III.
Составители Калью С о о н е т с, Ийви В а й н и к к о.
На русском языке.
Тартуский университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, I8.
Ответственный редактор М. Хейнлоо.
Подписано к печати I2.04.I990.
Формат 60x84/I6.
Бумага ротаторная.
Машинопись. Ротапринт.
Условно-печатных листов 8,37.
Учетно-издательских листов 8,II. Печатных листов 9,0.
Тираж 400.
Заказ № 253.
Цена I руб. 60 коп.
Типография ТУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Тийги, 78.

1 руб. 60 коп.