Ueber eine Methode

zur

Darstellung der Determinantentheorie.

Von

Adolf Kneser.

Sonderabdruck aus den Sitzungsberichten der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft Bd. IX,
Sitzung vom 17. Okt. 1891.

Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.

1891.

Дозволено цензурою. — Дерптъ, 27-го Декабря 1891 г.

Die meisten Darstellungen der Determinantentheorie leiden unter dem Uebelstande, dass sie nicht von demjenigen Problem ausgehen, in dessen Lösung der eigentliche Beruf der Determinanten besteht, nämlich der Auflösung der linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten; dabei pflegen combinatorische Betrachtungen über gerade und ungerade Permutationen an die Spitze gestellt zu werden, deren Nothwendigkeit nicht von vorneherein einleuchtet. Im folgenden skizzire ich eine Methode zur Einführung in die Determinantentheorie, welche die bezeichneten Uebelstände vermeidet. Vom Problem der Auflösung der linearen Gleichungen ausgehend wird aus ihm die Nothwendigkeit einer von n zu $n+1$ stufenweise fortschreitenden Definition der Determinanten abgeleitet, und es werden auf Grund derselben die Fundamentaleigenschaften der Determinanten allgemein nach der Methode der vollständigen Induction bewiesen.

Selbstverständlich kann es sich bei der ganz elementaren Natur des Gegenstandes nicht darum handeln, wesentlich neue Einsichten oder gar Resultate zu erzielen; vielleicht hat aber die mitzutheilende Methode der Darstellung ein gewisses didaktisches Interesse.

§ 1.

Definition der Determinanten.

Definirt man die Determinanten zweiter Ordnung durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC,$$

so sind erstens die beiden Grundeigenschaften evident, dass die Vertauschung der Horizontalreihen nur das Vorzeichen der Determinante ändert, und dass das System der Horizontalreihen mit dem der Vertikalreihen vertauscht werden kann; zweitens lehrt die direkte Ausrechnung, dass ein System von zwei homogenen linearen Gleichungen mit drei Unbekannten

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 &= 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 &= 0 \end{aligned}$$

durch folgende Proportion aufgelöst wird:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Geht man jetzt zur Auflösung dreier Gleichungen mit vier homogen auftretenden Unbekannten über,

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 &= 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 &= 0 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 &= 0, \end{aligned}$$

so multiplicire man diese mit derartigen Factoren α, β, γ, dass bei Addition der multiplicirten Gleichungen die Unbekannten x_3 und x_4 fortfallen; dann erhält man für die Multiplicatoren die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 &= 0 \\ \alpha a_4 + \beta b_4 + \gamma c_4 &= 0, \end{aligned}$$

denen nach dem Obigen genügt wird, wenn man setzt

$$\alpha : \beta : \gamma = \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_4 & c_4 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_3 & c_3 \\ a_4 & c_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung, welche das Verhältniss $x_1 : x_2$ bestimmt, wird hiernach

$$x_1 \left\{ a_1 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_4 & c_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_3 & c_3 \\ a_4 & c_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \right\}$$

$$+ x_2 \left\{ a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_4 & c_4 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_3 & c_3 \\ a_4 & c_4 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \right\} = 0.$$

Es treten also bei der Auflösung von drei homogenen Gleichungen mit vier Unbekannten gewisse ganze Functionen von neun Argumenten auf, z. B. von den Grössen des folgenden Schemas:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4\,, \end{matrix}$$

und diese Functionen sind nach folgender Regel gebildet. Man multiplicire jedes Glied der ersten Horizontalreihe mit der Determinante zweiter Ordnung derjenigen Grössen, welche nach Fortlassung der das betreffende Glied enthaltenden Verticalreihe und der ersten Horizontalreihe übrig bleiben; diese Producte werden abwechselnd mit dem positiven und negativen Zeichen versehen und addirt. Der so erhaltene Ausdruck, die Determinante des obigen Schemas, ändert, wie die Ausrechnung lehrt, sein Zeichen bei Vertauschung zweier Horizontalreihen, und bleibt ungeändert, wenn man das System der Horizontalreihen durch das der Verticalreihen ersetzt.

Ein analoger Uebergang wie von den Determinanten zweiter zu denen dritter Ordnung führt von diesen zu denen vierter Ordnung u. s. f. Man denke sich auf diese Weise die Determinanten successive bis zur $(n-1)$ten Ordnung einschliesslich definirt; dann wird die Determinante $n$ter Ordnung aus n^2 quadratisch angeordneten Grössen

$$(1) \qquad \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & s_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & s_n\,, \end{matrix}$$

in welchen $a, b, \dots s$ etwa n verschiedene Buchstaben bedeuten mögen, durch folgende Vorschrift erklärt. Man multiplicire jedes Glied der ersten Horizontalreihe mit der Determinante $(n-1)$ter Ordnung derjenigen Grössen, welche in obigem Schema (1) übrig bleiben nach Streichung der das betreffende Glied enthaltenden Verticalreihe und der ersten

Horizontalreihe; diese Producte versehe man abwechselnd mit dem positiven und negativen Zeichen und addire sie dann.

Diese Definition kann in einer Formel dargestellt werden mit Hülfe der folgenden abgekürzten Bezeichnung. Ist r_ν irgend eine Grösse des Schemas (1), so werde durch $[r_\nu]$ die Determinante derjenigen Grössen bezeichnet, welche nach Streichung der in r_ν sich kreuzenden Reihen übrig bleiben; dieser Ausdruck enthält offenbar den Buchstaben r und den Index ν nicht. Sind ferner p_μ und r_ν irgend zwei Grössen des Schemas (1), die nicht derselben Reihe angehören, so werde durch $[p_\mu\, r_\nu]$ die Determinante $(n-2)$ter Ordnung derjenigen Grössen bezeichnet, welche nach Streichung der in p_μ und r_ν sich kreuzenden Reihen übrig bleiben; da man diese $(n-2)^2$ Grössen aus dem Schema (1) auch dadurch erhält, dass man die Buchstaben p und r und die Indices μ und ν verschwinden lässt, so folgt $[p_\mu\, r_\nu] = [p_\nu\, r_\mu]$.

Die Determinante des Systems (1) kann jetzt durch folgende Gleichung definirt werden:

$$(2)\quad D = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & s_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & \dots & s_n \end{vmatrix} = a_1[a_1] - b_1[b_1] + c_1[c_1] - \dots \pm s_1[s_1],$$

wobei im letzten Gliede das obere Zeichen für ungerade, das untere für gerade Werthe von n gilt.

§ 2.

Ableitung der beiden Fundamentaleigenschaften.

Es seien nun für Determinanten bis zur $(n-1)$ten Ordnung einschliesslich die zwei Grundeigenschaften bewiesen, welche bei der zweiten und dritten Ordnung evident sind,

I. dass die Vertauschung zweier Horizontalreihen nur das Vorzeichen, nicht den absoluten Betrag der Determinante ändert;

II. dass das System der Horizontalreihen durch das

System der Verticalreihen ersetzt werden kann ohne Aenderung des Werthes der Determinante.

Um diese Eigenschaften auch bei Determinanten $n$ter Ordnung auf Grund der gegebenen Definition nachzuweisen, gehen wir von folgenden Gleichungen aus, die aus der Definition der Determinanten $(n-1)$ter Ordnung durch diejenigen der $(n-2)$ten Ordnung folgen:

$$\begin{aligned}
[a_1] &= b_2\,[a_1\,b_2] - c_2\,[a_1\,c_2] + d_2\,[a_1\,d_2] - \dots \\
[b_1] &= a_2\,[b_1\,a_2] - c_2\,[b_1\,c_2] + d_2\,[b_1\,d_2] - \dots \\
&\vdots \\
[s_1] &= a_2\,[s_1\,a_2] - b_2\,[s_1\,b_2] + c_2\,[s_1\,c_2] - \dots
\end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck D ein und berücksichtigt die Gleichungen $[a_1\,b_2] = [a_2\,b_1]$ u. s. w., so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
D = (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,[a_1\,b_2] - (a_1\,c_2 - a_2\,c_1)\,[a_1\,c_2] + \dots \\
- (b_1\,c_2 - b_2\,c_1)\,[b_1\,c_2] + \dots
\end{aligned}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Grösse D nur ihr Zeichen ändert, wenn man die Indices 1 und 2 vertauscht; denn dadurch werden die Ausdrücke $[a_1\,b_2]$ u. s. w., in denen ja Grössen mit den Indices 1 und 2 überhaupt nicht vorkommen, nicht geändert. Die Vertauschung der ersten und zweiten Horizontalreihe führt also D in $-D$ über. Gleiches gilt bei Vertauschung irgend zweier der $n-1$ letzten Horizontalreihen, da eine solche jede der Determinanten $[a_1]$, $[b_1]$,... nach der für Determinanten $(n-1)$ter Ordnung als bekannt vorausgesetzten Eigenschaft I in ihr Entgegengesetztes überführt. Die Eigenschaft I ist also für Determinanten $n$ter Ordnung bewiesen.

Die Eigenschaft II der Determinanten $(n-1)$ter Ordnung besagt, dass man z. B. die Determinanten $[b_1]$, $[c_1]$, ... entwickeln kann nach den Gliedern der ersten Verticalreihe:

$$\begin{aligned}
[b_1] &= a_2\,[b_1\,a_2] - a_3\,[b_1\,a_3] + a_4\,[b_1\,a_4] - \dots \\
[c_1] &= a_2\,[c_1\,a_2] - a_3\,[c_1\,a_3] + c_4\,[c_1\,a_4] - \dots \\
&\dots\dots
\end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in die Definitionsgleichung (2) ein, und ordnet nach den Grössen a_1, $-a_2$, $+a_3$, $-a_4$, ... so folgt

$$\begin{aligned}D &= a_1[a_1] - a_2 \{b_1[b_1 a_2] - c_1[c_1 a_2] + d_1[d_1 a_2] - \ldots\} \\ &\quad + a_3 \{b_1[b_1 a_3] - c_1[c_1 a_3] + d_1[d_1 a_3] - \ldots\} - \ldots \\ &= a_1[a_1] - a_2[a_2] + a_3[a_3] - \ldots\end{aligned}$$

Das wäre aber nach der Gleichung (2) genau derjenige Ausdruck, der die Determinante des Systems

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 \; . \; . \; . & a_n \\ b_1 & b_2 \; . \; . \; . & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_1 & s_2 \; . \; . \; . & s_n \end{array}$$

darstellt; die Eigenschaft II ist damit auch für Determinanten $n$ter Ordnung bewiesen.

Aus diesen Eigenschaften I und II und der aus unsrer Definition der Determinanten unmittelbar evidenten Thatsache, dass dieselben homogene Functionen der $n$ten Dimension und in den Glieder der ersten Horizontalreihe homogen linear sind, folgt offenbar, dass sie in den Gliedern jeder beliebigen Reihe homogen linear sind; hieraus können unter weiterer Benutzung der Eigenschaften I und II die zur praktischen Berechnung dienenden Sätze über die Addition der Parallelreihen u. s. w. in bekannter Weise hergeleitet werden.

Wie sich die Auflösung der linearen Gleichungen gestaltet, ist jetzt ebenfalls leicht zu übersehen. Sind etwa n Gleichungen mit $n+1$ homogen auftretenden Unbekannten gegeben:

$$\begin{array}{lcccccccl} (3) \quad & a_1 x_1 & + & a_2 x_2 & + \; . \; . \; . & + & a_{n+1} x_{n+1} & = 0 \\ & b_1 x_1 & + & b_2 x_2 & + \; . \; . \; . & + & b_{n+1} x_{n+1} & = 0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ & s_1 x_1 & + & s_2 x_2 & + \; . \; . \; . & + & s_{n+1} x_{n+1} & = 0 \end{array}$$

so bestimme man die n Grössen $\alpha, \beta, \ldots \sigma$ durch die Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{array}{l} \alpha a_3 + \beta b_3 + \ldots + \sigma s_3 = 0 \\ \alpha a_4 + \beta b_4 + \ldots + \sigma s_4 = 0 \\ \vdots \\ \alpha a_{n+1} + \beta b_{n+1} + \ldots + \sigma s_{n+1} = 0. \end{array}$$

Diesen Gleichungen kann nach der für $n-1$ Gleichungen als gültig vorauszusetzenden, für zwei Gleichungen mit drei Unbekannten in § 1 aufgestellten Formel genügt werden durch folgende Proportion:

$$(5)\qquad \alpha : \beta : \ldots = \begin{vmatrix} b_3 & c_3 & \ldots s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n+1} & c_{n+1} & \ldots s_{n+1} \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_3 & c_3 & \ldots s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1} & c_{n+1} & \ldots s_{n+1} \end{vmatrix} : \ldots,$$

wo rechts die abwechselnd mit dem positiven und negativen Vorzeichen versehenen Determinanten aus den Coefficienten des Gleichungssystems (4) gebildet sind, indem man successive die erste, zweite, ... letzte Verticalreihe fortlässt. Addirt man die Gleichungen (3) nach Multiplication mit den Factoren $\alpha, \beta, \ldots \sigma$, so ergiebt sich

$$x_1(\alpha a_1 + \beta b_1 + \ldots + \sigma s_1) + x_2(\alpha a_2 + \beta b_2 + \ldots + \sigma s_2) = 0,$$

oder

$$x_1 : x_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & \ldots s_2 \\ a_3 & b_3 & \ldots s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1} & b_{n+1} & \ldots s_{n+1} \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots s_1 \\ a_3 & b_3 & \ldots s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1} & b_{n+1} & \ldots s_{n+1} \end{vmatrix},$$

oder mit Berücksichtigung der Eigenschaft II

$$x_1 : x_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \ldots a_{n+1} \\ b_2 & b_3 & \ldots b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_2 & s_3 & \ldots s_{n+1} \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \ldots a_{n+1} \\ b_1 & b_3 & \ldots b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_1 & s_3 & \ldots s_{n+1} \end{vmatrix}$$

Da nun irgend zwei Unbekannte z. B. x_ν und $x_{\nu+1}$ mit ihren Coefficienten im System (3) an die erste und zweite Stelle geschoben werden können, so ergiebt sich weiter:

$$x_\nu : x_{\nu+1} = \begin{vmatrix} a_{\nu+1} & a_1 \ldots a_{\nu-1} & a_{\nu+2} \ldots a_{n+1} \\ b_{\nu+1} & b_1 \ldots b_{\nu-1} & b_{\nu+2} \ldots b_{n+1} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ s_{\nu+1} & s_1 \ldots s_{\nu-1} & s_{\nu+2} \ldots s_{n+1} \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_\nu & a_1 \ldots a_{\nu-1} & a_{\nu+2} \ldots a_{n+1} \\ b_\nu & b_1 \ldots b_{\nu-1} & b_{\nu+2} \ldots b_{n+1} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ s_\nu & s_1 \ldots s_{\nu-1} & s_{\nu+2} \ldots s_{n+1} \end{vmatrix},$$

oder, wenn man mehrmals die Eigenschaft I benutzt,

$$x_\nu : x_{\nu+1} = \begin{vmatrix} a_1 \ldots a_{\nu-1} & a_{\nu+1} \ldots a_{n+1} \\ b_1 \ldots b_{\nu-1} & b_{\nu+1} \ldots b_{n+1} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ s_1 \ldots s_{\nu-1} & s_{\nu+1} \ldots s_{n+1} \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_1 \ldots a_\nu & a_{\nu+2} \ldots a_{n+1} \\ b_1 \ldots b_\nu & b_{\nu+2} \ldots b_{n+1} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ s_1 \ldots s_\nu & s_{\nu+2} \ldots s_{n+1} \end{vmatrix}$$

Die hiermit formulirte Lösung des Systems (3) ist offenbar nach genau derselben Regel gebildet, wie die unter (5) angegebene Lösung der $n-1$ Gleichungen (4); es ist also durch den Schluss von $n-1$ auf n bewiesen, dass die Unbekannten des Systems (3) den mit abwechselndem Vorzeichen genommenen Determinanten proportional sind, welche aus den Coefficienten im System (3) gebildet sind, indem man successive die erste, zweite, ... letzte Verticalreihe streicht.

§ 3.

Beweis des Multiplicationstheorems.

Die bisher benutzte Methode des Uebergangs von $n-1$ zu n kann auch zum Beweis des Multiplicationstheorems benutzt werden, wenn man dieses gleich in der allgemeinsten Form ansetzt, wo es die Multiplication rechteckiger Matrices liefert.

Es seien $A, B, \ldots S$ wiederum n Buchstaben, k irgend eine ganze Zahl $\geqq n$; es bedeute ferner

Σ die Summation über den Index $\nu = 1, 2, \ldots k$;

Σ' die Summation über alle Systeme von $n-1$ ganzen Zahlen $b, c, \ldots s$, welche der Ungleichung $1 \leqq b < c < \ldots < s \leqq k$ genügen;

Σ'' die Summation über alle Systeme von n ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \sigma$, welche der Ungleichung $1 \leqq \alpha < \beta < \ldots < \sigma \leqq k$ genügen. Setzt man dann

$$P = \begin{vmatrix} \Sigma A_\nu A'_\nu & \Sigma A_\nu B'_\nu & \ldots & \Sigma A_\nu S'_\nu \\ \Sigma B_\nu A'_\nu & \Sigma B_\nu B'_\nu & \ldots & \Sigma B_\nu S'_\nu \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Sigma S_\nu A'_\nu & \Sigma S_\nu B'_\nu & \ldots & \Sigma S_\nu S'_\nu \end{vmatrix}$$

so besteht das Multiplicationstheorem in folgender Gleichung:

$$(6) \qquad P = \Sigma'' \begin{vmatrix} A_\alpha & B_\alpha & \ldots & S_\alpha \\ A_\beta & B_\beta & \ldots & S_\beta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_\sigma & B_\sigma & \ldots & S_\sigma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A'_\alpha & B'_\alpha & \ldots & S'_\alpha \\ A'_\beta & B'_\beta & \ldots & S'_\beta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A'_\sigma & B'_\sigma & \ldots & S'_\sigma \end{vmatrix}$$

Für $n = 2$ hat man die leicht durch Rechnung zu verificirende Gleichung

$$\begin{vmatrix} \Sigma A_\nu A'_\nu & \Sigma A_\nu B'_\nu \\ \Sigma A_\nu B'_\nu & \Sigma B_\nu B'_\nu \end{vmatrix} = \Sigma'' \begin{vmatrix} A_\alpha & B_\alpha \\ A_\beta & B_\beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A'_\alpha & B'_\alpha \\ A'_\beta & B'_\beta \end{vmatrix},$$

welche die Grundlage bildet für den Beweis der Gleichung (6) nach der Methode der vollständigen Induction.

Entwickelt man die Determinante P nach den Gliedern der ersten Horizontalreihe, so ergiebt sich:

$$P = \begin{vmatrix} \Sigma B_\nu B'_\nu \dots \Sigma B_\nu S'_\nu \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \Sigma S_\nu B'_\nu \dots \Sigma S_\nu S'_\nu \end{vmatrix} \cdot \Sigma A_\nu A'_\nu$$

$$- \begin{vmatrix} \Sigma B_\nu A'_\nu & \Sigma B_\nu C'_\nu \dots \Sigma B_\nu S'_\nu \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ \Sigma S_\nu A'_\nu & \Sigma S_\nu C'_\nu \dots \Sigma S_\nu S'_\nu \end{vmatrix} \cdot \Sigma A_\nu B'_\nu + \dots$$

Jede der hier auftretenden Determinanten $(n-1)$ter Ordnung kann nach dem für solche als bekannt vorausgesetzten Multiplicationstheorem als eine Summe von Determinantenproducten dargestellt werden. Um die resultirende Gleichung bequemer schreiben zu können, berücksichtige man, dass Determinanten, bei welchen in allen Gliedern einer Horizontalreihe derselbe Buchstabe, in allen Gliedern einer Verticalreihe derselbe Index vorkommt, durch Angabe ihrer von links oben nach rechts unten gehenden Diagonalreihe eindeutig bestimmt sind; derartige Determinanten mögen durch das in eckige Klammern geschlossene Diagonalglied bezeichnet werden. Dann liefert der letzte Ausdruck für P folgendes Resultat:

$$\begin{aligned} P = {} & \Sigma A_\nu A'_\nu \cdot \Sigma' \left[B_b\, C_c \dots S_s\right] \left[B'_b\, C'_c \dots S'_s\right] \\ & - \Sigma A_\nu B'_\nu \cdot \Sigma' \left[B_b\, C_c \dots S_s\right] \left[A'_b\, C'_c \dots S'_s\right] \\ & + \Sigma A_\nu C'_\nu \cdot \Sigma' \left[B_b\, C_c \dots S_s\right] \left[A'_b\, B'_c\, D'_d \dots S'_s\right] - \dots \\ = {} & \Sigma A_\nu \Sigma' \left[B_b C_c \dots S_s\right] \left\{A'_\nu \left[B'_b C'_c \dots S'_s\right] - B'_\nu \left[A'_b C'_c \dots S'_s\right] + \dots\right\} \\ = {} & \Sigma A_\nu \Sigma' \left[B_b C_c \dots S_s\right] \left[A'_\nu\, B'_b\, C'_c \dots S'_s\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

In dieser Summe kommt wegen des Sinnes der Summationszeichen Σ und Σ' als System der Indices ν, b, c, ... s jedes System von n Zahlen der Reihe 1, 2, ... k vor, in welchem die letzten $n-1$ Zahlen nach steigenden Werthen geordnet sind; ist etwa ν einer der Zahlen b, c, ... gleich, so verschwindet das betreffende Glied zufolge der Fundamentaleigenschaft I. Ist dagegen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \rho, \sigma$ irgend ein System von n wachsend geordneten Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots k$, so kommt die Determinante $\left[A'_\alpha\, B'_\beta \ldots S'_\sigma\right]$ in obiger Summe vor; wir fragen nun, in welchen Gliedern mit ihr die Determinante $\left[A'_\nu\, B'_b\, C'_c \ldots S'_s\right]$ entweder völlig oder bis auf das Vorzeichen identisch ist. Dies kann, da die Grössensysteme $\alpha, \beta, \ldots \sigma$ und $b, c, \ldots s$ nach steigenden Werthen geordnet sind, nur eintreten, wenn eins der folgenden Gleichungssysteme besteht:

$$
\begin{array}{llll}
1) & \nu = \alpha, & b = \beta, & c = \gamma, \ldots s = \sigma \\
2) & \nu = \beta, & b = \alpha, & c = \gamma, \ldots s = \sigma \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
n) & \nu = \sigma, & b = \alpha, & c = \beta, \ldots s = \rho
\end{array}
$$

In den Fällen 1), 3), 5) ... hat man offenbar nach der Grundeigenschaft I

$$\left[A'_\nu\, B'_b\, C'_c \ldots S'_s\right] = + \left[A'_\alpha\, B'_\beta \ldots S'_\sigma\right]$$

dagegen in den Fällen 2), 4), ...

$$\left[A'_\nu\, B'_b\, C'_c \ldots S'_s\right] = - \left[A'_\alpha\, B'_\beta \ldots S'_\sigma\right]$$

In der letzten für P erhaltenen Doppelsumme (7) ist also die Determinante $\left[A'_\alpha\, B'_\beta \ldots S'_\sigma\right]$ mit folgender Summe multiplicirt:

$$A_\alpha\left[B_\beta\, C_\gamma \ldots S_\sigma\right] - A_\beta\left[B_\alpha\, C_\gamma \ldots S_\sigma\right] + A_\gamma\left[B_\alpha\, C_\beta\, D_\delta \ldots S_\sigma\right] - \ldots$$
$$= \left[A_\alpha\, B_\beta \ldots S_\sigma\right].$$

Da nun jeder Ausdruck $\left[A'_\nu\, B'_b \ldots S'_s\right]$ einer Determinante $\pm \left[A'_\alpha\, B'_\beta \ldots S'_\sigma\right]$ gleich ist, und ferner, wie bemerkt, alle Determinanten dieser Form wirklich vorkommen, so ergiebt sich schliesslich

$$P = \Sigma'' \left[A_\alpha\, B_\beta \ldots S_\sigma\right]\left[A'_\alpha\, B'_\beta \ldots S'_\sigma\right],$$

womit das Multiplicationstheorem in der allgemeinsten Form bewiesen ist.

15