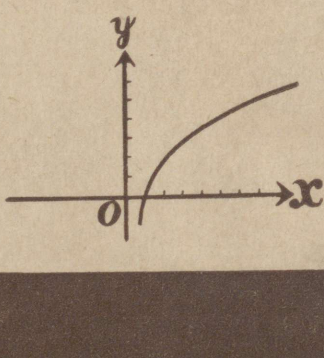
KESKKOOLI

ALGEBRA

II



K./Ü. „LOODUS"

A. BORKVELL / A. KASVAND / F. LAARENS
K. MAASIK / O. PAAS / A. VIHMAN

KESKKOOLI
ALGEBRA II

ÕPPERAAMAT
progümnaasiumi IV ja V klassile
ja reaalkooli II ja III klassile

K./Ü. „LOODUS", 1937

OSAÜHING „ILUTRÜKK“, TARTU, 1937.

SISUKORD.

Kolmas osa.

Neljas osa.

Kolmas osa.

I. Ruutjuur ja selle arvutamine.

1. Ruutolenevus ja ruutjuure mõiste.

Ruutolenevus.

1. a) Ruudu külg on x cm pikk. Leia ruudu pindala s!

b) Ruudukujulise parkettkivi külg on l cm pikk. Põranda pinna katmiseks kulus n niisugust kivi. Leia põranda pindala s!

c) Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga kaatet on a cm pikk. Avalda kolmnurga pindala s kaateti a kaudu!

2. a) Koolis on n abiturienti. Nad lepivad omavahel kokku oma päevapilte vahetada nii, et igaühel oleks enese ja kõigi oma kaaslaste pildid. Mitu pilti p on tarvis tellida?

b) Tõmba k püstjoont ja niisama palju rõhtjooni! Mitu lõikepunkti l tekib?

c) Ruudusse, mille külg on c, on joonestatud ring, mis puutub ruudu külgi. Leia selle ringi pindala s!

3. Vabalt langeva keha poolt läbitud tee pikkuse s saame ligikaudu meetrites valemi $s = 5t^2$ abil, kus t on sekundite arv, arvatud langemise algmomendist. Kujuta arvu s käik arvu t suurenemisel, alates $t = 0$ kuni $t = 10$! (Graafikus kujuta 1 m ühe millimeetrina ja 1 sek. ühe sentimeetrina!)

4. Koosta tabelid ja kujuta graafiliselt ühes ja samas teljestikus olenevused!

a) $y = 0{,}2x^2$; c) $y = x^2$; e) $y = 3x^2$.
b) $y = 0{,}5x^2$; d) $y = 1{,}75x^2$;

Kuidas oleneb kõvera kuju x^2 kordajast?

Olenevust, mida võime üldiselt kirjutada kujul $y = ax^2$, nimetame **ruutolenevuseks** ehk **ruutfunktsiooniks.** Ruutfunktsiooni muutumise käigu graafiline kuju on kõver, mida nimetatakse **parabooliks.**

Ruutjuure mõiste.

Lahendame ülesande: Ruudukujulise õue pindala $s = 49$ m². Leia õue pikkus ja laius!

Olgu õue pikkus kui ka laius x meetrit, siis on õue pindala ruutmeetrites x^2 ja $x^2 = 49$.

x peab olema niisugune arv, mille ruut on 49. Niisugune arv on 7, sest $7^2 = 49$.

Nimetame käesolevas ülesandes otsitavat arvu ruutjuureks 49-st ja tähistame järgmiselt:

$$x = \sqrt{49} = 7.$$

Märk $\sqrt{}$ asendab sõna ruutjuur.

Üldiselt: kui $x^2 = a$, siis $x = \sqrt{a}$, sest $(\sqrt{a})^2 = a$.

Sõnades: **Antud arvu ruutjuureks on niisugune arv, mille ruut on võrdne selle arvuga.**

5. Ülesandest nr. 1 leia:

a) ruudu külg x, kui ruudu pindala $s = 81$ cm²;

b) parkettkivi külg l, kui 1 m² põrandapinna katmiseks kulus 25 kivi;

c) võrdhaarse kolmnurga kaatet a, kui kolmnurga pindala $s = 112{,}5$ cm²!

6. Ülesandest nr. 2 leia:

a) kooli abiturientide arv n, kui tellitud piltide arv $p = 900$;

b) püstjoonte arv k, kui lõikepunktide arv $l = 121$;

c) ruudu külg c, kui ringi pindala on 314 cm²!

7. Ülesandest nr. 3 leia langemise aeg t, kui:

a) $s = 45$ m; b) $s = 80$ m;
c) $s = 125$ m; d) $s = 1125$ m;

Olgu $x^2 = 36$, siis $x = \sqrt{36}$. Nõutud tingimustele vastab arv $+6$, sest $(+6)^2 = 36$.

Samuti vastab nõutud tingimusele arv -6, sest $(-6)^2 = 36$.

Seega kirjutame saaduse järgmiselt:

$$x = \sqrt{36} = \pm 6.$$

Otsides $\sqrt{-4}$ veendume, et ei ole niisugust arvu, mille ruut oleks -4. Samasugusele tulemusele jõuame ka igasuguse teise negatiivse arvu korral.

Pea meeles: **Negatiivsest arvust pole võimalik ruutjuurt leida.**

2. Ruutjuure arvutamine.

Leia proovimise teel!

	a	b	c	d
8.	$\sqrt{9}$	$\sqrt{144}$	$\sqrt{225}$	$\sqrt{400}$
9.	$\sqrt{64}$	$\sqrt{169}$	$\sqrt{289}$	$\sqrt{900}$
10.	$\sqrt{100}$	$\sqrt{196}$	$\sqrt{324}$	$\sqrt{1600}$
11.	$\sqrt{3600}$	$\sqrt{8100}$	$\sqrt{4900}$	$\sqrt{625}$
12.	$\sqrt{1,21}$	$\sqrt{3,61}$	$\sqrt{0,01}$	$\sqrt{0,25}$
13.	$\sqrt{6,25}$	$\sqrt{1,44}$	$\sqrt{0,09}$	$\sqrt{0,81}$
14.	$\sqrt{2,25}$	$\sqrt{4,41}$	$\sqrt{0,04}$	$\sqrt{0,49}$
15.	$\sqrt{0,16}$	$\sqrt{0,64}$	$\sqrt{0,0004}$	$\sqrt{0,0036}$

Ruutjuure lähisväärtus.

Ruutjuure otsimisel mistahes arvust veendume, et iga kord pole võimalik leida niisugust täisarvu, mis vastaks ruutjuure tingimusele.

Otsides $\sqrt{29}$ näeme, et $5^2 = 25$ ja $6^2 = 36$, seega $5 < \sqrt{29} < 6$.

Täpsem $\sqrt{29}$ väärtus peaks peituma 5 ja 6 vahel. Seesugusel korral ütleme, et meil on leitud $\sqrt{29}$ lähisväärtus täpsusega kuni 1, kusjuures 5 on $\sqrt{29}$ puudusega ja 6 on $\sqrt{29}$ liiaga.

Leia proovimise teel täpsusega kuni 1!

	a	b	c	d
16.	$\sqrt{17}$	$\sqrt{21}$	$\sqrt{42}$	$\sqrt{65}$
17.	$\sqrt{54}$	$\sqrt{48}$	$\sqrt{88}$	$\sqrt{90}$
18.	$\sqrt{108}$	$\sqrt{304}$	$\sqrt{421}$	$\sqrt{751}$
19.	$\sqrt{319}$	$\sqrt{300}$	$\sqrt{834}$	$\sqrt{1032}$
20.	$\sqrt{1500}$	$\sqrt{3000}$	$\sqrt{5400}$	$\sqrt{6740}$

Proovimise abil näeme, et

$$5{,}3 < \sqrt{29} < 5{,}4.$$

Me ütleme: 5,3 on $\sqrt{29}$ lähisväärtus täpsusega kuni 0,1. Edasiproovimise abil näeme, et

$$5{,}38 < \sqrt{29} < 5{,}39.$$

Me ütleme: 5,38 on $\sqrt{29}$ lähisväärtus täpsusega kuni 0,01. Võrdleme

$$(5{,}38)^2 \approx 28{,}94 \text{ ja } (5{,}39)^2 \approx 29{,}05.$$

Näeme, et $(5{,}39)^2$ on lähem 29-le, ja seepärast me ütleme, et 5,39 on $\sqrt{29}$ lähisväärtus täpsusega kuni 0,005.

Arvuta proovimise teel täpsusega kuni 0,005!

	a	b	c	d
21.	$\sqrt{11}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{31}$	$\sqrt{57}$
22.	$\sqrt{7}$	$\sqrt{59}$	$\sqrt{73}$	$\sqrt{103}$

Märkus. Väiksemate arvude korral võime ruutjuurte lähisväärtuste kiireks leidmiseks kasustada vastavat tabelit.

Ruutjuure leidmine graafiliselt.

23. Täida tabel:

y	0	$\pm 0{,}5$	$\pm 0{,}8$	± 1	$\pm 1{,}2$	$\pm 1{,}8$	± 2	$\pm 2{,}2$	$\pm 2{,}5$	$\pm 2{,}8$	± 3	$\pm 3{,}2$	$\pm 3{,}5$
$x=y^2$	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......

ja kujuta olenevus $y^2 = x$ graafiliselt!

Olenevus $y^2 = x$ on sama, mis olenevus $y = \sqrt{x}$, ja seepärast võime saadud graafilist kujutust kasustada ruutjuure kiireks leidmiseks väiksemate arvude puhul.

24. Kasustades olenevuse $y = \sqrt{x}$ graafikut, täida tabel:

s	0,4	0,9	1,6	2	2,5	3	3,8	4,3	5	6	7	8
$\sqrt{s}$	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......

Märkus. Leia proovimise teel, kui suure täpsusega võimaldab sinu graafik ruutjuure leidmist!

Harjutusi.

25. Kujuta allpool-antud avaldiste väärtuste käik avaldises esineva tähe muutumisel etteantud vahemikus!

a) $s = 2\sqrt{m+3}$ $\qquad 0 \leqq m \leqq 5$

b) $v = \dfrac{\sqrt{u}+5}{3}$ $\qquad 0 \leqq u \leqq 10$

c) $z = 0{,}01\sqrt{0{,}5x}$ $\qquad 0 \leqq x \leqq 10$

d) $s = 0{,}4\sqrt{t} - 1{,}4$ $\qquad 0 \leqq t \leqq 5$

e) $y = \dfrac{\sqrt{x+7}}{x-1}$ $\qquad 2 \leqq x \leqq 10$

26. a) $t = \dfrac{\sqrt{6s}}{3}$ $\qquad$ Leia t väärtus, kui $s = 5$!

b) $t = \sqrt{\dfrac{2s}{3}}$ $\qquad$ Leia t „ „ $s = 5$!

c) $y=\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$ Leia y väärtus, kui $x=8$!

d) $y=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ Leia y „ „ $x=8$!

e) $y=\frac{\sqrt{x}-2}{2-\sqrt{x}}$ Leia y „ „ $x=7{,}5$!

27. a) Ruudu pindala on 14 cm^2. Leia ruudu külg!

b) Ruudu diagonaal on 28 cm. Leia ruudu külg!

c) Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 2 cm ja 3 cm. Leia hüpotenuus!

28. a) Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 7 cm ja üks kaatet 5 cm. Leia teine kaatet!

b) Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 13 cm ja hüpotenuus 15 cm. Leia teine kaatet!

Ruutjuur korrutisest ja jagatisest.

Ruutjuure definitsioonist järgneb, et

a) $\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot 3$, sest $(2\cdot 3)^2=2^2\cdot 3^2=4\cdot 9$.

b) $\sqrt{16\cdot 25}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{25}=4\cdot 5$, sest $(4\cdot 5)^2=4^2\cdot 5^2=16\cdot 25$.

Üldiselt on maksev:

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b},$$

s. o. **ruutjuur korrutisest on tegurite ruutjuurte korrutis.**

a) $\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$, sest $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

b) $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}$, sest $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$.

Üldiselt on maksev:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

s. o. **ruutjuur murrust on selle murru lugeja ja nimetaja ruutjuurte jagatis.**

Harjutusi.

Avalda järgnevad arvud võimalikult lihtsate juurte kaudu!

Näidis:

$$\sqrt{425} = \sqrt{25 \cdot 17} = 5\sqrt{17}.$$

	a	b	c	d
29.	$\sqrt{300}$	$\sqrt{279}$	$\sqrt{720}$	$\sqrt{816}$
30.	$\sqrt{360}$	$\sqrt{525}$	$\sqrt{1500}$	$\sqrt{891}$
31.	$\sqrt{500}$	$\sqrt{333}$	$\sqrt{1700}$	$\sqrt{1440}$
32.	$\sqrt{700}$	$\sqrt{405}$	$\sqrt{2300}$	$\sqrt{1210}$
33.	$\sqrt{800}$	$\sqrt{675}$	$\sqrt{1000}$	$\sqrt{1044}$

Arvuta ruutjuured järgmistest arvudest!

Märkus. Enne ruutjuure leidmist teisenda murdu nii, et murru nimetaja oleks täisruut!

Näidis:

$$\sqrt{\frac{6}{7}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 7}{7 \cdot 7}} = \frac{\sqrt{42}}{7} \approx \frac{6,48}{7} \approx 0,93$$

	a	b	c	d
34.	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{3\frac{1}{4}}$
35.	$\sqrt{\frac{5}{9}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{3}{8}}$	$\sqrt{2\frac{1}{2}}$
36.	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{15}}$	$\sqrt{1\frac{2}{5}}$
37.	$\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\sqrt{\frac{5}{10}}$	$\sqrt{\frac{11}{12}}$	$\sqrt{3\frac{2}{3}}$

Näidis:

$$\sqrt{0,7} = \sqrt{\frac{70}{100}} = \frac{\sqrt{70}}{10} \approx \frac{8.37}{10} \approx 0,84.$$

	a	b	c	d
38.	$\sqrt{0,02}$	$\sqrt{0,4}$	$\sqrt{0,12}$	$\sqrt{1,2}$
39.	$\sqrt{0,05}$	$\sqrt{0,6}$	$\sqrt{0,33}$	$\sqrt{2,4}$
40.	$\sqrt{0,08}$	$\sqrt{0,9}$	$\sqrt{0,51}$	$\sqrt{6,4}$
41.	$\sqrt{0,03}$	$\sqrt{0,8}$	$\sqrt{0,69}$	$\sqrt{8,1}$
42.	$\sqrt{0,07}$	$\sqrt{0,11}$	$\sqrt{0,81}$	$\sqrt{22,5}$

Ruutjuure arvutamine mitmekohasest arvust.

43. Kasusta tabelit

$$\sqrt{1} = 1$$
$$\sqrt{100} = 10$$
$$\sqrt{10000} = 100$$
$$\sqrt{1000000} = 1000$$
$$\sqrt{100000000} = 10000$$

ja vasta kirjalikult küsimustele:

a) Mitu täisarvu numbrit võib olla ühe- ja kahekohase arvu ruutjuurel?

b) Mitu täisarvu numbrit võib olla kolme- ja neljakohase arvu ruutjuurel?

c) Mitu täisarvu numbrit võib olla viie- ja kuuekohase arvu ruutjuurel?

Ruutjuuri on kerge leida proovimise teel, kui juuritavad arvud on väikesed ja kui juureks on täisarv.

Kui juuritav arv on kolmekohane ja suurem, siis rakendame korrutamise abivalemit:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Leiame ruutjuure arvust 4489. Juur on kahekohane arv, s. t. ta koosneb kümnelistest ja ühelistest.

Kui märgime kümneliste arvu y-ga ja üheliste arvu x-ga, siis võime koguarvu kirjutada järgmiselt:

$$10y + x.$$

Selle arvu ruut peaks olema võrdne 4489-ga:

$$(10y + x)^2 = 4489$$

ehk

$$(10y)^2 + 2 \cdot (10y) \cdot x + x^2 = 4489.$$

Siit järgneb, et

$$100y^2 < 4489$$
$$y^2 < 44{,}89.$$

Kümneliste arv võib olla ainult täisarv ja seega y kõige suurem väärtus võib olla ainult 6.

Siit näeme, et ruutjuure kümneliste ruut peitub ainult juuritava arvu sajalistes.

Teades, et kümneliste arv $y = 6$, võime selle y väärtuse asetada võrrandisse $100y^2 + 2 \cdot 10yx + x^2 = 4489$, saame:

$$100 \cdot 6^2 + 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot x + x^2 = 4489$$
$$3600 + 2 \cdot 60 \cdot x + x^2 = 4489$$
$$2 \cdot 60x + x^2 = 4489 - 3600 = 889$$
$$x(2 \cdot 60 + x) = 889.$$

Siit järgneb, et

$$2 \cdot 60 \cdot x < 889$$
$$x < \frac{889}{120}.$$

x-ga tähistasime otsitava juure üheliste arvu, mis võib olla ainult täisarv, seega

$$x = 7 \text{ või väiksem.}$$

Asetame $x = 7$ võrrandisse $x(2 \cdot 60 + x) = 889$, saame $7(2 \cdot 60 + 7) = 889$. Näeme, et $x = 7$ rahuldab võrrandit.

Seega on otsitav arv 67.

Kontroll: $67^2 = 67 \cdot 67 = 4489$.

Järelikult: $\sqrt{4489} = 67$.

Eespool-käsiteldud mõttekäigu korraldame lühidalt järgmiselt:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{7056} = 80 + 4 = 84 \\
 & 6400 \\
\hline
160 & 656 \\
+4 & 656 \\
\hline
164 & \\
\times 4 &
\end{array}
$$

1. Kümneliste arv on antud näite korral $y = 8$ ja $(10y)^2 = 6400$.
2. Lahutame 6400 juuritavast arvust, saame jäägi 656.
3. Vaatame, mitu korda mahub $2 \cdot 80$ jäägisse 656; seega saame otsitava üheliste arvu $x = 4$.
4. Proovides näeme $4(160 + 4) = 656$.

Lihtsamaks ja praktilisemaks osutub arvutust korraldada järgmiselt:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{70'56} = 84 \\
 & 64 \\
\hline
164 & 656 \\
4 & 656 \\
\hline
\end{array}
$$

44. Leia näidatud viisil ruutjuur arvudest 1369; 5184; 529; 3364; 7396; 8281!

Kui juuritavaks on suurem kui neljakohane arv, siis loeme juure ikkagi kümneliste ja üheliste summaks ja käime eespool-antud juhise järgi.

Näidis:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{61'15'24} = 782 \\
 & 49 \\
\hline
148 & 1215 \\
8 & 1184 \\
\hline
1562 & 3124 \\
2 & 3124 \\
\hline
\end{array}
$$

Ruutjuure leidmiseks mitmekohasest täisarvust on kasulik järgmist meeles pidada:

1. Jaotame täisarvu paremalt poolt rühmadeks, nii et igas rühmas on kaks numbrit, välja arvatud viimane (vasakpoolne), milles võib olla ka üks ainus number.

2. Rühmade arv näitab, mitmekohane on otsitav täisarvuline juur.

Harjutusi.

	a	b	c	d
45.	$\sqrt{484}$	$\sqrt{3481}$	$\sqrt{2809}$	$\sqrt{5329}$
46.	$\sqrt{361}$	$\sqrt{7396}$	$\sqrt{6241}$	$\sqrt{43681}$
47.	$\sqrt{3136}$	$\sqrt{25281}$	$\sqrt{47961}$	$\sqrt{14641}$
48.	$\sqrt{9409}$	$\sqrt{83521}$	$\sqrt{81225}$	$\sqrt{259081}$
49.	$\sqrt{1849}$	$\sqrt{56169}$	$\sqrt{18225}$	$\sqrt{54756}$
50.	$\sqrt{32400}$	$\sqrt{8410000}$	$\sqrt{980100}$	$\sqrt{998001}$
51.	$\sqrt{10201}$	$\sqrt{40401}$	$\sqrt{11664}$	$\sqrt{94249}$
52.	$\sqrt{164025}$	$\sqrt{491401}$	$\sqrt{1046529}$	$\sqrt{1162081}$

Ruutjuure lähisväärtuse leidmine mitmekohasest arvust ja kümnendmurrust.

Kui arvust pole võimalik leida täpset ruutjuure väärtust, siis piirdume lähisväärtustega.

Alljärgnevad näidised selgitagu, kuidas on võimalik praktiliselt leida ruutjuure lähisväärtust.

Näidised:

a) $\sqrt{6'54} = 25{,}57\,.\,.$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4 \\
\hline
45 & 254 \\
5 & 225 \\
\hline
505 & 2900^{*} \\
5 & 2525 \\
\hline
5107 & 37500^{**} \\
7 & 35749 \\
\hline
 & 175100^{***}
\end{array}
$$

* Juuritavale kaks nulli juurde kirjutades suurendame juuritava arvu 100 korda ja juur suureneb 10 korda.

Jagades juure 10-ga saame ruutjuure lähisväärtuse kuni 0,1.

** Kui kirjutame juuritavale juurde veel kaks nulli, siis suurendame sellega juuritava arvu 10 000 korda ja juur suureneb 100 korda.

Jagades juure 100-ga saame ruutjuure lähisväärtuse kuni 0,01.

*** Analoogiliselt edasi minnes võime leida ruutjuure lähisväärtuse mistahes nõutud kümnendkohani.

b) $\sqrt{32{,}7} = \sqrt{32',70} = 5{,}7\,.\,.$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 25 \\
\hline
107 & 770 \\
7 & 749 \\
\hline
 & 2100
\end{array}
$$

jne., nagu näidise a korral.

Ruutjuure leidmisel kümnendmurrust tuleb sel juhul, kui kümnendkohtade arv on paaritu, nulli juurdekirjutamisega muuta kümnendkohtade arv paarisarvuliseks.

Harjutusi.

	a	b	c	d
53.	$\sqrt{28}$	$\sqrt{104}$	$\sqrt{2,15}$	$\sqrt{72,5}$
54.	$\sqrt{92}$	$\sqrt{417}$	$\sqrt{50,2}$	$\sqrt{7,91}$
55.	$\sqrt{921}$	$\sqrt{1527}$	$\sqrt{34,21}$	$\sqrt{6,283}$
56.	$\sqrt{1147}$	$\sqrt{3601}$	$\sqrt{2,548}$	$\sqrt{49,25}$
57.	$\sqrt{7002}$	$\sqrt{1101}$	$\sqrt{0,243}$	$\sqrt{0,642}$
58.	$\sqrt{4783}$	$\sqrt{5781}$	$\sqrt{0,054}$	$\sqrt{0,144}$
59.	$\sqrt{7396}$	$\sqrt{16129}$	$\sqrt{103,17}$	$\sqrt{0,0582}$
60.	$\sqrt{81225}$	$\sqrt{998001}$	$\sqrt{5,335}$	$\sqrt{0,00103}$
61.	$\sqrt{494209}$	$\sqrt{142884}$	$\sqrt{91,006}$	$\sqrt{0,0009}$
62.	$\sqrt{8,1}$	$\sqrt{0,1}$	$\sqrt{0,4}$	$\sqrt{0,9}$
63.	$\sqrt{0,64}$	$\sqrt{1,69}$	$\sqrt{0,009}$	$\sqrt{0,001}$
64.	$\sqrt{22,5}$	$\sqrt{160,2}$	$\sqrt{1017,61}$	$\sqrt{0,049}$

Näidis:

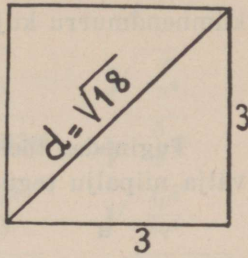
$$\sqrt{15\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{47\cdot 3}{3\cdot 3}} = \frac{\sqrt{141}}{3} \approx \frac{11,87}{3} \approx 3,96.$$

	a	b	c	d
65.	$\sqrt{25\frac{1}{4}}$	$\sqrt{19\frac{5}{6}}$	$\sqrt{52\frac{3}{5}}$	$\sqrt{4\frac{3}{25}}$
66.	$\sqrt{42\frac{2}{3}}$	$\sqrt{7\frac{2}{9}}$	$\sqrt{7\frac{11}{16}}$	$\sqrt{37\frac{5}{8}}$

3. Irratsionaalsed arvud.

Lahendame ülesande:

Ruudu külje pikkus on 3 cm. Leida ruudu diagonaali pikkus!



1. joonis.

$$d^2 = 9 + 9 = 18$$
$$d = \sqrt{18} \text{ cm.}$$

On teada, et $\sqrt{18}$ ei või olla täisarv, sest $4^2 = 16$ ja $5^2 = 25$; seega

$$4 < \sqrt{18} < 5.$$

Tõestame, et $\sqrt{18}$ pole võrdne liigmurruga, mille lugejaks ja nimetajaks pärast taandamist on vastavalt m ja n.

Olgu $$\sqrt{18} = \frac{m}{n}.$$

Võtame mõlemad pooled ruutu:

$$\left(\sqrt{18}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$
$$18 = \frac{m^2}{n^2} = \frac{m \cdot m}{n \cdot n}.$$

Viimane võrdus pole õige, sest m ja n, kui taandatud murru lugeja ja nimetaja, ei sisalda ühiseid tegureid suuremaid kui 1 ja n^2 ei mahu m^2-sse täisarv korda, nagu näitab võrdus.

Järeldus: $\sqrt{18}$ pole täisarv ega murdarv.

Ülesande lahendusest aga selgub, et $\sqrt{18}$ on niisuguse ruudu diagonaali mõõtarv, mille küljepikkuseks on 3.

Analoogiliselt võime näidata, et arve $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{23}$ jne. ei saa paigutada täisarvude ega murdarvude valdkonda. Ruutjuured arvudest, mis pole täisruudud, on iseliiki arvud. Me nimetame niisuguseid arve **irratsionaalseteks arvudeks.**

Irratsionaalne arv ei võrdu täpselt täisarvuga ega ka murdarvuga.

Irratsionaalsele arvule võime leida aga lähisväärtuse kümnendmurru kujul nõutava täpsuseni.

Harjutusi.

Tuginedes tõele $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, too juuremärgi alt välja niipalju tegureid, kui võimalik!

	a	b	c	d
67.	$\sqrt{8}$	$\sqrt{32}$	$\sqrt{27}$	$\sqrt{125}$
68.	$\sqrt{50}$	$\sqrt{40}$	$\sqrt{90}$	$\sqrt{180}$
69.	$\sqrt{48}$	$\sqrt{72}$	$\sqrt{54}$	$\sqrt{162}$
70.	$\sqrt{4a}$	$\sqrt{16x}$	$\sqrt{25b}$	$\sqrt{18m}$
71.	$\sqrt{a^3}$	$\sqrt{c^4}$	$\sqrt{b^5}$	$\sqrt{p^3}$
72.	$\sqrt{2a^2}$	$\sqrt{5x^3}$	$\sqrt{8b^2}$	$\sqrt{3n^3}$
73.	$\sqrt{a^2b}$	$\sqrt{xy^2}$	$\sqrt{k^3l}$	$\sqrt{x^2y^2}$
74.	$\sqrt{4tp^2}$	$\sqrt{3\pi r^2}$	$\sqrt{12v^2t^2}$	$\sqrt{25a^2b^2}$
75.	$\sqrt{(a+b)^2}$	$\sqrt{(x-1)^2}$	$\sqrt{(t-2)^3}$	$\sqrt{a^2-b^2}$
76.	$\sqrt{4(x+y)}$	$\sqrt{9a-9b}$	$\sqrt{16-16t}$	$\sqrt{a^3-a^2}$
77.	$\sqrt{18(m-n)}$	$\sqrt{a^2-2ab+b^2}$	$\sqrt{2(x^2-2xy+y^2)}$	
		$\sqrt{25-25a^2}$		

Korruta juured ja too juuremärgi alt välja niipalju tegureid, kui võimalik!

	a	b	c
78.	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$	$\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$	$\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}$
79.	$\sqrt{15}\cdot\sqrt{5}$	$\sqrt{21}\cdot\sqrt{7}$	$\sqrt{72}\cdot\sqrt{2}$
80.	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$	$\sqrt{2n}\cdot\sqrt{8n}$	$\sqrt{5x}\cdot\sqrt{4y}$
81.	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{2a^3}$	$\sqrt{98x}\cdot\sqrt{0{,}5x}$	$\sqrt{9a}\cdot\sqrt{3ab}$

Tuginedes juuredefinitsioonile ja tõele $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ too juuremärgi alt välja niipalju tegureid, kui võimalik!

	a	b	c	d
82.	$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$	$\sqrt{\frac{x^2}{y^2}}$	$\sqrt{\frac{x}{25}}$	$\sqrt{\frac{m}{n^2}}$
83.	$\sqrt{\frac{3}{4}a^2}$	$\sqrt{0{,}25a}$	$\sqrt{0{,}03t^2}$	$\sqrt{\frac{5}{9}v}$
84.	$\sqrt{\frac{9a}{b^2}}$	$\sqrt{\frac{p^3}{9}}$	$\sqrt{\frac{16n^3}{25}}$	$\sqrt{\frac{4p^4}{9q^4}}$
85.	$\sqrt{\frac{st^2}{v^4}}$	$\sqrt{\frac{m^2n^2}{16}}$	$\sqrt{\frac{25x^2y^2}{49a^2b^6}}$	$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{(a-b)^2}}$

Jaga juured ja lihtsusta!

	a	b	c	d
86.	$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}}$	$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$
87.	$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$	$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{8}}$
88.	$\frac{\sqrt{12a}}{\sqrt{a}}$	$\frac{\sqrt{a^2b}}{\sqrt{b}}$	$\frac{\sqrt{24a^3}}{\sqrt{6a}}$	$\frac{\sqrt{2m^2n}}{\sqrt{0{,}5mn}}$
89.	$\frac{\sqrt{45n^2}}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{ax^2}}{\sqrt{a^2x}}$	$\frac{\sqrt{7{,}2x^3y^2}}{\sqrt{0{,}8x}}$	$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a-b}}$

II. Ruutvõrrandid.

1. Täielikud ja mittetäielikud ruutvõrrandid.

Nimetame võrrandit, milles tundmatu kõige kõrgem astendaja pärast võrrandi lihtsustamist on 2, **ruutvõrrandiks.**

Ruutvõrrandi lihtsustamiseks võime rakendada kõiki neidsamu teisendusi, missuguseid oleme tarvitanud esimese astme võrrandi lihtsustamisel.

Pärast lihtsustamist viime ruutvõrrandi korral kõik liikmed vasakule poolele, kuna paremale poole kirjutame 0. Näiteks:

$$3x^2 - 5x + 7 = 0; \quad 5x^2 + 6x = 0; \quad 3x^2 - 21 = 0$$

on ruutvõrrandid lihtsustatud kujul.

Üldiselt on täieliku ruutvõrrandi normaalkuju:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

Ruutvõrrand kujul: $ax^2 = b$.

Lahendame ülesande:

Kui ruudu ühte külge suurendame 3 cm võrra ja teist külge vähendame 3 cm võrra, siis saame ristküliku, mille pindala on 40 cm^2. Leida ruudu külg!

Lahendus:

Ruudu külg olgu x cm. Ristküliku mõõtmed on siis cm-tes $x + 3$ ja $x - 3$ ja pindala on cm^2-tes

$$(x + 3) \cdot (x - 3).$$

Saame võrrandi:

$$(x+3)(x-3)=40$$
$$x^2-9=40$$
$$x^2=49$$
$$x=\sqrt{49}=\pm 7$$

Tähistame tundmatu x ühe väärtuse x_1-ga ja teise väärtuse x_2-ga ning kirjutame

$$x_1=+7;\quad x_2=-7.$$

Nimetame neid ruutvõrrandi **lahenditeks** ehk **juurteks.**

Näeme, et võrrandil $x^2=49$ on kaks lahendit. Lahend $x_2=-7$ ei kõlba meie ülesande vastuseks; seega on otsitav ruudu külg 7 cm.

Lahenda järgnevad ruutvõrrandid!

1. a) $x^2=121$ **2.** a) $\frac{2}{3}x^2-96=0$

b) $2x^2-50=0$ b) $\frac{v^2}{6}=24$

c) $0{,}5t^2=18$ c) $\frac{7}{x^2}=14$

d) $1{,}2v^2-3{,}6=0$ d) $\frac{0{,}8}{t^2}-0{,}1=0$

3. a) $(2x-5)(2x-5)=81$ **4.** a) $ax^2-b=0$

b) $\left(\frac{2}{3}x+1\right)\left(\frac{2}{3}x-1\right)=0{,}25$ b) $(x-m)^2=n$

c) $\frac{y^2}{4}-5=\frac{1}{2}-\frac{5y^2}{2}$ c) $x^2+2bx+b^2=c$

d) $\frac{40}{v}-9v=v$ d) $\frac{nx}{a-1}=\frac{a-1}{nx}$

Koosta võrrand ja lahenda!

5. a) Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 2 korda pikem kui teine kaatet; hüpotenuus on 20 cm pikk. Leia kaatetid!

b) Kaks teed ristuvad täisnurgi. Teede ristmekohalt väljuvad samal ajal auto ja jalgrattur, üks üht ja teine teist teed mööda. Auto sõidab 15 m sekundis ja jalgrattur 5 m sekundis. Mitme sekundi järel on auto ja jalgratta kaugus teineteisest 2 km?

c) Lõppklassi õpilased lepivad omavahel kokku oma päevapilte vahetada nii, et igaühel oleks enese ja kõigi oma kaaslaste pildid. Valmistatud 32 tosinast osutusid 23 pilti üleliigseteks. Mitu õpilast oli klassis?

6. Pikendame ühte ruudu lähisküljedest k cm võrra ja teist lühendame niisama palju, siis on saadud ristküliku diagonaal l cm pikk. Kui pikk on ruudu külg?

a) $k = 3;\ l = 10$ b) $k = 0{,}5;\ l = 29$

c) $k = 17;\ l = 628$ d) $k = 7\frac{2}{3};\ l = 128\frac{4}{9}$

7. Kui pikk on ruudu diagonaal, mille ümbermõõt on: a) 12 cm; b) 150 cm; c) $2p$; d) m?

8. Kui pikk on ruudu ümbermõõt, mille diagonaal on: a) 20 cm; b) 1 m; c) $8a$; d) m?

Ruutvõrrand kujul: $ax^2 + bx = 0$.

Lahendame ülesande:

Missuguse küljepikkusega ruut on pindvõrdne 7 cm kõrguse kolmnurgaga, kui kolmnurga alus ühtib ruudu küljega?

Olgu ruudu külg x cm, siis ruudu pindala on x^2 cm^2 ja kolmnurga pindala on $\frac{7x}{2}$ cm^2.

Saame võrrandi:

$$x^2 = \frac{7x}{2} \text{ ehk } 2x^2 - 7x = 0.$$

See on ruutvõrrand, sest tundmatu kõige kõrgem astendaja on 2.

Lahendame nii:

Toonud x sulgude ette, saame

$$x(2x - 7) = 0.$$

Seda võrrandit rahuldab $x = 0$.

Samuti muutub võrrandi vasak pool 0-ks, kui tegur $2x - 7 = 0$; siis $2x = 7$ ja $x = 3\frac{1}{2}$.

Seega on võrrandi

$$2x^2 - 7x = 0$$

lahendid

$$x_1 = 0 \text{ ja } x_2 = 3\tfrac{1}{2}.$$

Meie ülesande vastuseks sobib $x_2 = 3\frac{1}{2}$.

Märkus. Jagades võrrandi $2x^2 = 7x$ mõlemaid pooli x-iga saame:

$$2x = 7 \quad \text{ja} \quad x = 3\tfrac{1}{2}.$$

Meie oleme kaotanud seega võrrandi ühe lahendi, mis pole aga lubatud.

Pane tähele! Kui kõik võrrandi liikmed sisaldavad tundmatut ühise tegurina, pole lubatud võrrandi mõlemaid pooli jagada selle tundmatuga.

Lahendada järgnevad ruutvõrrandid!

9. a) $x^2 - 2x = 0$

b) $x^2 - \frac{3}{4}x = 0$

c) $5x^2 - 3\frac{1}{3}x = 0$

d) $2\frac{3}{4}x^2 = 5\frac{1}{2}x$

10. a) $(x-3)(x-4) = 12$

b) $(x+3)^2 - (2x+9) = 10x$

c) $\frac{x+2}{2} = \frac{2}{x+2}$

d) $\frac{2x+2}{2x-2} = 5x - 1$

11. a) $x^2 - bx = 0$

b) $ax^2 - bx = 0$

c) $px^2 + qx = 0$

d) $ax^2 - cx = bx^2$

Võrrandid, mida me siiamaani oleme lahendanud, omavad pärast lihtsustamist kuju

$$ax^2 = b.$$

või

$$ax^2 + bx = 0.$$

Niisuguseid võrrandeid nimetatakse **mittetäielikkudeks ruutvõrranditeks.**

Ruutvõrrand kujul: $x^2 + px + q = 0$.

Kui ruudukujulise aknaklaasi kahest lähisäärest ära lõigati 4 dm ja 2 dm laiused ribad, siis saadi aknaklaas, mille pindala oli 24 dm². Kui pikk oli esialgse ruudukujulise aknaklaasi külg?

Olgu esialgse aknaklaasi külg x dm. Pärast ribade äralõikamist olid aknaklaasi mõõtmed dm-tes $x - 4$ ning $x - 2$ ja pindala dm²-tes on $(x - 4)(x - 2)$.

Saame võrrandi:

$$(x - 4)(x - 2) = 24.$$

Kui avame sulud ja koondame, siis saame:

$$x^2 - 6x + 8 = 24$$
$$x^2 - 6x - 16 = 0.$$

Selle võrrandi lahendamiseks kasustame korrutamise abivalemit $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Teisendame võrrandit nii, et tema vasak pool oleks mingi binoomi täisruut.

Kui viime -16 paremale poole ja liidame võrrandi kummalegi poolele 9, saame:

$$x^2 - 2 \cdot 3x + 9 = 16 + 9$$
$$\text{ehk } (x - 3)^2 = 25$$
$$\text{ja } x - 3 = \pm 5.$$

Võrrandi lahendid on:

$$x_1 = 5 + 3 = 8; \quad x_2 = -5 + 3 = -2.$$

Meie ülesande vastuseks kõlbab ainult $x_1 = 8$; seega on otsitava ruudukujulise aknaklaasi külg 8 dm.

Täienda järgnevad binoomid või trinoomid täisruutudeks!

Näidised:

a) $x^2 - 10x$.

Liites binoomile $+25$ saame:

$$x^2 - 2 \cdot 5x + 25 = (x-5)^2.$$

b) $t^2 + 6t + 15.$

Liites trinoomile -6 saame:

$$t^2 + 6t + 15 - 6 = t^2 + 2 \cdot 3t + 9 = (t+3)^2.$$

12. a) $x^2 + 4x$
b) $x^2 - 2x$
c) $z^2 - 6z$
d) $u^2 - 8u$

13. a) $x^2 - 3x$
b) $v^2 + 5v$
c) $t^2 - \frac{3}{2}t$
d) $y^2 + 1{,}2y$

14. a) $x^2 + 4x + 3$
b) $v^2 - 5v + 7$
c) $t^2 - 2t - 1$
d) $s^2 + 6\frac{1}{2}$

15. a) $x^2 - 1{,}8x + 7$
b) $v^2 + 30v - 11$
c) $y^2 + 7y - 7$
d) $t^2 - \frac{2}{5}t + 1$

Täienda võrrandi vasak pool täisruuduks ja lahenda!

16. a) $x^2 - 4x + 4 = 0$
b) $x^2 + 2x - 15 = 0$
c) $x^2 + 6x + 8 = 0$
d) $x^2 - x - 2 = 0$

17. a) $x^2 - 11x + 30 = 0$
b) $x^2 + 7x - 5 = 0$
c) $x^2 - 15x + 34 = 0$
d) $x^2 + 8x + 9 = 0$

18. a) $x^2 + x - \frac{3}{4} = 0$
b) $x^2 + 3x + 1{,}25 = 0$
c) $x^2 + 1\frac{1}{3}x - 1\frac{1}{3} = 0$
d) $x^2 - 0{,}2x - 0{,}6 = 0$

Ruutvõrrand kujul: $ax^2 + bx + c = 0$.

Kui võrrand omab kuju $3x^2 - 10x - 13 = 0$, siis jagame kõik võrrandi liikmed x^2 kordajaga, s. o. 3-ga, ja me saame:

$$x^2 - \frac{10}{3}x - \frac{13}{3} = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{5}{3}x = \frac{13}{3}.$$

Kui liidame võrrandi mõlemale poolele $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$, saame:

$$x^2 - 2 \cdot \frac{5}{3}x + \frac{25}{9} = \frac{13}{3} + \frac{25}{9}$$

$$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{64}{9}$$

$$x-\frac{5}{3}=\pm\frac{8}{3}$$

$$x_1=\frac{8}{3}+\frac{5}{3}=4\frac{1}{3}\,;\quad x_2=-\frac{8}{3}+\frac{5}{3}=-1\,.$$

Näidatud viisil lahendada järgnevad võrrandid!

19. a) $4x^2-4x-35=0$
b) $3x^2-2x-2=0$
c) $2x^2-7x+3=0$
d) $3x^2-15x+18=0$

20. a) $5x^2+2x-3=0$
b) $3x^2-x-2=0$
c) $5x^2+3x-2=0$
d) $6x^2-7x-5=0$

Võrrandit, mis pärast tarvilikke lihtsustamisi ja kõigi liikmete ületoomist võrduse vasakule poolele omab kuju $\boldsymbol{x^2+px+q=0}$, või $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$, nimetame **täielikuks ruutvõrrandiks.**

Võrrandi vasak pool sisaldab kolm liiget: 1) liikme, mis sisaldab tundmatut ruudus, 2) liikme, mis sisaldab tundmatut esimeses astmes, ja 3) vabaliikme, mis sisaldab $x^0=1$.

2. Ruutvõrrandi lahendamine graafiliselt.

Eespool tutvusime olenevusega $y=ax^2$, mida nimetasime ruutolenevuseks ehk ruutfunktsiooniks. Ruutvõrrandite käsitlemisel nägime, et ühe muutujaga teise astme algebralise avaldise üldisem kuju on ax^2+bx+c.

Tähistades väärtused, mida omab see avaldis, kui anname x-le väärtusi oma äranägemise järgi y-ga, saame üldkujul:

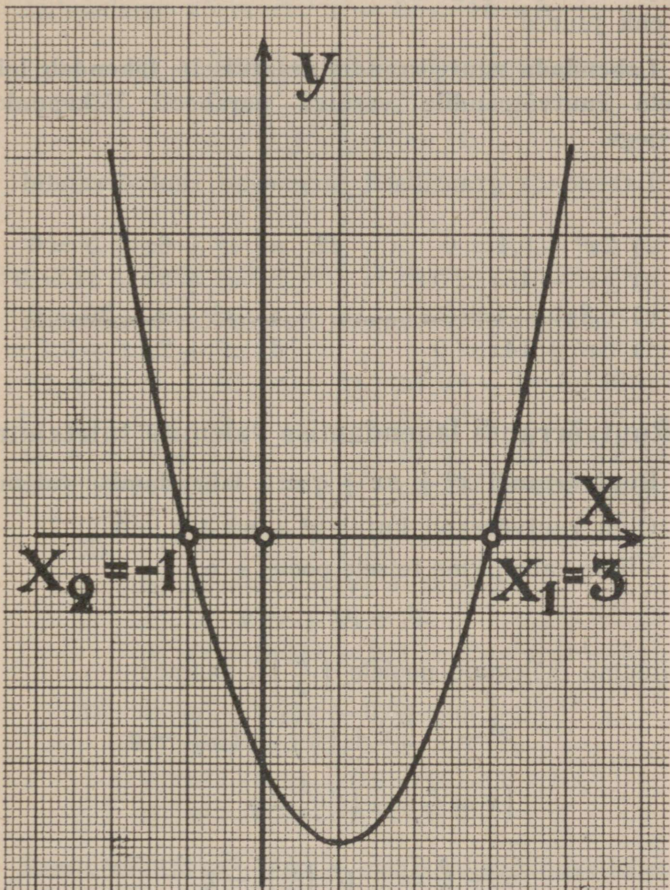
$$y=ax^2+bx+c.$$

See on ruutolenevuse üldine kuju.

Ruutolenevusest üldpildi saamiseks kujutame graafiliselt funktsiooni $y=x^2-2x-3$.

Kui $x=$	0	0,5	1	1,5	2	2,5
siis $y=$	—3	—3,75	—4	—3,75	—3	—1,75

kui $x =$	3	3,5	4	—0,5	—1	—1,5	—2
siis $y =$	0	3,25	5	—1,75	0	2,25	5



2. joonis.

Saadud kõver kujutab antud funktsiooni väärtuste käiku olenematu muutuja x muutumisel.

Lahendada võrrandit

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

tähendab leida niisugused x väärtused, mille korral y väärtus saab võrdseks nulliga. Graafilises kujus on niisugused x väärtused $x_1 = 3$ ja $x_2 = -1$. Need on kõvera lõikepunktid x-teljega ja ühtlasi ka meie võrrandi lahendid ehk juured

Lahendada ruutvõrrandit graafiliselt tähendab leida sellele ruutvõrrandile vastava parabooli lõikepunktid x-teljega.

Lahendada graafiliselt järgnevad ruutvõrrandid!

21. a) $2x^2 + 5{,}4 = 0$
b) $5x^2 - 18x = 0$
c) $0{,}8x^2 - 4 = 0$
d) $3x^2 + 14x = 0$

22. a) $x^2 + 6x + 5 = 0$
b) $x^2 + 9x + 14 = 0$
c) $x^2 - x - 20 = 0$
d) $x^2 + 2{,}1x - 5{,}4 = 0$

3. Ruutvõrrandi lahendamise valemite tuletamine.

Ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendamise valem.

Olgu ruutvõrrand kujul $x^2 + px + q = 0$.

Viime vabaliikme teisele poole, s. o.

$$x^2 + px = -q$$

ja liidame mõlemale poolele $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, saame:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Sõnades: **Ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendiks on tundmatu esimese astme pool kordajat vastasmärgiga pluss**

ja miinus ruutjuur selle poole kordaja ruudust ilma vabaliikmeta.

Näidis:

Lahendame võrrandi: $x^2 - 5x - 14 = 0$.

$$p = -5;\quad -\frac{p}{2} = \frac{5}{2};\quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{25}{4};\quad q = -14$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - (-14)}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \frac{9}{2};\quad x_1 = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = 7 \text{ ja } x_2 = \frac{5}{2} - \frac{9}{2} = -2.$$

Lahendada valemi abil järgnevad võrrandid!

23. a) $x^2 + 8x + 12 = 0$
b) $x^2 + 6x = 16$
c) $v^2 + 5v + 4 = 0$
d) $t^2 + 14 = 8t$

24. a) $x^2 - 4x - 140 = 0$
b) $y^2 - 11y + 18 = 0$
c) $z^2 - 51z + 410 = 0$
d) $k(k + 85) = 164$

25. a) $x^2 - x = 5 + 2x$
b) $12 - x(x - 6) + 13 = 0$
c) $l(l + 4) + 14 = 8l$
d) $(r + 2r)(r - 2r) = 12 - r(4r - 5)$

26. a) $x^2 - 0{,}25x - 0{,}84 = 0$
b) $d^2 + \frac{2}{3}d - 2\frac{2}{3} = 0$
c) $p^2 - 0{,}8p - 0{,}9 = 0$
d) $x^2 + 0{,}6x - 0{,}147 = 0$

Ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendamise valem.

Kui ruutvõrrand omab kuju $ax^2 + bx + c = 0$, siis jagame kõik võrrandi liikmed x^2 kordajaga, s. o. a-ga, mille tagajärjel saame:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Saadud võrrandis on $p = \frac{b}{a}$ ja $q = \frac{c}{a}$.

Asetame ja teostame vajalikud teisendused:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Sõnades: **Ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendiks on murd, mille lugejaks on tundmatu esimese astme kordaja vastasmärgiga pluss ja miinus ruutjuur selle kordaja ruudust ilma tundmatu ruudu kordaja ja vabaliikme neljakordse korrutiseta, ning nimetajaks tundmatu ruudu kahekordne kordaja.**

Näidis:

$$3x^2 + 2x - 21 = 0.$$

Selles võrrandis on $a = 3$; $b = 2$ ja $c = -21$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-21}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{256}}{6}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 16}{6} = 2\frac{1}{3} \text{ ja } x_2 = \frac{-2 - 16}{6} = -3.$$

Lahendada valemi abil võrrandid!

27. a) $3x^2 - 17x + 10 = 0$
b) $12t^2 - t - 1 = 0$
c) $2p^2 - 3p - 9 = 0$
d) $3v^2 + 5v - 7 = 0$

28. a) $6x^2 + 13x + 9 = 0$
b) $z^2 - 4{,}5z + 2 = 0$
c) $x^2 - 5\frac{3}{4}x = 18$
d) $0{,}2x^2 - \frac{3}{4}x = 2$

29.	30.
a) $7x^2 - 4x - 3 = 0$	a) $(2x - 3)^2 = 8x$
b) $2x^2 + 1 = 3x$	b) $n^2 + 10n = 48 - 2n(3 - n)$
c) $3 - i(7i - 4) = 0$	c) $(x - 2)^2 - 3(5 - x)^2 = 23$
d) $6s^2 - 25\frac{1}{2}s + 12 = 0$	d) $(t + 9)^2 - (3t - 1)^2 = 5t - 1$

Ruutvõrrandi $ax^2 + 2kx + c = 0$ lahendamise valem.

Kui ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ keskmise liikme kordaja on paarisarv, siis võttes $b = 2k$, kus k on positiivne või negatiivne täisarv, saame võrrandi kujul: $ax^2 + 2kx + c = 0$.

Korrutame võrrandi kõik liikmed a-ga ja lahendame meile tuntud võtete abil järgmiselt:

$$a^2x^2 + 2akx + ac = 0$$
$$a^2x^2 + 2akx = -ac$$
$$a^2x^2 + 2akx + k^2 = k^2 - ac$$
$$(ax + k)^2 = k^2 - ac$$
$$ax + k = \pm\sqrt{k^2 - ac}$$
$$ax = -k \pm \sqrt{k^2 - ac}$$

$$\boxed{x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}}, \text{ kus } k = \frac{b}{2}.$$

Sõnades: **Kui ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ tundmatu esimese astme kordaja on paarisarv, siis on selle võrrandi lahendiks murd, mille lugejaks on tundmatu esimese astme pool kordajat vastupidise märgiga pluss ja miinus ruutjuur selle poole kordaja ruudust ilma tundmatu ruudu kordaja ja vabaliikme korrutiseta, ning nimetajaks tundmatu ruudu kordaja.**

Lahendada valemi abil järgnevad võrrandid!

31.	32.
a) $9x^2 - 12x + 4 = 0$	a) $49x^2 + 196x - 165 = 0$
b) $3x^2 - 16x + 13 = 0$	b) $40x^2 + 46x - 5 = 0$
c) $2x^2 + 16x - 7 = 0$	c) $7x^2 - 42x - 637 = 0$
d) $3x^2 - 42x + 99 = 0$	d) $5x^2 + 92x + 416 = 0$

4. Ruutvõrrandi lahendite arv ja omadused.

Ruutvõrrandi lahendamise valem sisaldab juuravaldist $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ või $\sqrt{b^2 - 4ac}$. Ruutvõrrandeid lahendades paneme tähele:

1) Kui juuremärgi alune arv on positiivne, siis on ruutvõrrandil 2 isesugust lahendit.

2) Kui juuremärgi alune arv on null, siis ütleme, et sellel võrrandil on kaks võrdset lahendit.

3) Kui juuremärgi alune arv on negatiivne, siis sellel võrrandil reaalseid lahendeid ei ole ja me ütleme, et lahendid on imaginaarsed.

Lahenda järgnevad võrrandid graafiliselt ja numbriliselt!

33. a) $x^2 - 2x - 8 = 0$; b) $x^2 - 6x + 9 = 0$;
c) $x^2 - 6x + 10 = 0$.

Leia järgnevatel võrranditel lahendite summa ning lahendite korrutis ja võrdle neid võrrandi kordajatega!

34. a) $x^2 - 9x + 14 = 0$
b) $x^2 + 6x + 9 = 0$
c) $x^2 - 6x - 55 = 0$
d) $x^2 - 22x + 105 = 0$

35. a) $x^2 + \frac{4}{3}x - 11 = 0$
b) $x^2 + 0{,}4x - 7{,}8 = 0$
c) $x^2 - \frac{4}{7}x - \frac{45}{7} = 0$
d) $x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{55}{3} = 0$

Pea meeles: Kui anname ruutvõrrandile kuju $x^2 + px + q = 0$, siis

$$x_1 + x_2 = -p$$
ja
$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Sõnades: **Kui ruutvõrrandi tundmatu ruudu kordaja on 1, siis selle võrrandi lahendite summa on tundmatu esimese astme kordaja vastupidise märgiga ja lahendite korrutis on selle võrrandi vabaliige.**

Tõestame üldkujul.

Võrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid on

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{ja} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Liidame võrdused, siis kaovad juuravaldised kui kaks võrdset avaldist vastupidiste märkidega ja me saame

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p\,.$$

Korrutades võrdused saame:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) =$$

$$= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = q.$$

Olgu x_1 ja x_2 ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid; siis võime kirjutada ruutvõrrandit järgmiselt:

$$\mathbf{x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 x_2 = 0.}$$

Koosta ruutvõrrand, mille lahendid on antud!

Näidis:

$$x_1 = -4 \text{ ja } x_2 = 1{,}5$$
$$x^2 - (-4 + 1{,}5)x - 4 \cdot 1{,}5 = 0$$
$$x^2 + 2{,}5x - 6 = 0.$$

36. a) $x_1 = -2;\ x_2 = 5$
b) $x_1 = 3;\ x_2 = 3$
c) $x_1 = -4{,}2;\ x_2 = 5$
d) $x_1 = -2{,}5;\ x_2 = 2{,}5$

37. a) $x_1 = -100;\ x_2 = 1$
b) $x_1 = -7;\ x_2 = -7$
c) $x_1 = \frac{2}{7};\ x_2 = \frac{7}{2}$
d) $x_1 = 0;\ x_2 = 9$

38. a) $x_1 = 5\frac{1}{2};\ x_2 = 0$
b) $x_1 = 1{,}7;\ x_2 = -1{,}7$
c) $x_1 = 3{,}2;\ x_2 = 0$
d) $x_1 = 3\frac{1}{4};\ x_2 = -5\frac{2}{3}$

39. a) $x_1 = a;\ x_2 = -a$
b) $x_1 = \frac{m}{n};\ x_2 = n$
c) $x_1 = a + b;\ x_2 = a - b$
d) $x_1 = \frac{k}{3};\ x_2 = 3l$

5. Harjutusi ja ülesandeid.

Lahendada järgnevad ruutvõrrandid!

40. a) $x^2 - 99x - 100 = 0$
b) $3\frac{1}{7}x - 11x = 0$
c) $6a^2 - a - 15 = 0$
d) $7v^2 - 64v + 105 = 0$

41. a) $4x^2 + 20x + 25 = 0$
b) $x^2 - 9x + 14 = 0$
c) $2x^2 - x + 6{,}25 = 0$
d) $\frac{1}{5}t^2 - 5 = 0$

42. a) $x^2 + 3x - 88 = 0$
b) $10v^2 - 29v - 440 = 0$
c) $3x + 4x - 32 = 0$
d) $7x^2 - 2x = x(3x - 2)$

43. a) $x^2 + 10x - 11 = 0$
b) $25x^2 - 30x + 9 = 0$
c) $49t^2 - 14t + 1 = 0$
d) $x^2 - 1,6x + 1 = 0$

44.
a) $5x^2 - 19x - 30 = 0$
b) $v^2 - 4v + 3 = 0$
c) $3x^2 + 24x + 48 = 0$
d) $10t^2 + 2\frac{1}{2}t - \frac{3}{5} = 0$

45.
a) $25x^2 + 200x + 400 = 0$
b) $6r^2 - 23r + 15 = 0$
c) $4x^2 + 44x + 105 = 0$
d) $14z^2 + 45,5z + 36,26 = 0$

46.
a) $12x^2 - 3x + 15 = 0$
b) $t^2 - \frac{t}{9} = 0$
c) $10p^2 + 47p + 55 = 0$
d) $4x^2 + 11\frac{2}{3}x - 12\frac{1}{2} = 0$

47.
a) $2x^2 + 6x - 176 = 0$
b) $0,2n^2 = 0,6n$
c) $0,25y^2 + 2x + 4 = 0$
d) $7,82x^2 - 33,1x + 35 = 0$

48.
a) $6v^2 + 3\frac{1}{5}v - 1\frac{1}{2} = 0$
b) $5t^2 + 2\,{}^{1}t = {}^{3}$
c) $2w^2 + 15,9 = 13,6w$
d) $9\frac{1}{3}x^2 - 90\frac{1}{3}x + 195 = 0$

49.
a) $kx^2 - lx = 0$
b) $ax^2 - 2bx + c = 0$
c) $x^2 + ab = (a + b)x$
d) $kx^2 - l = mx^2 + n$

Ülesandeid ruutvõrrandite koostamiseks.

50. a) Kahe arvu summa on 75, nende korrutis on 1376. Leia need arvud!

b) Kahe arvu korrutis on 840, nende summa on 59. Leia need arvud!

c) Kahe arvu vahe on 7, nende arvude korrutis on 368. Leia need arvud!

51. a) Lõik, mille pikkus on 30 cm, jagada kahte ossa nii, et neile osadele ehitatud ristküliku pindala oleks 209 cm².

b) Ristküliku pindala on 84 cm^2; selle ristküliku pikkuse ja laiuse summa on 20 cm. Leia ristküliku pikkus ja laius!

c) Ristküliku pindala on 286 cm^2; selle ristküliku ümbermõõt on 70 cm. Leia ristküliku pikkus ja laius!

52. a) Kahe teineteisele järgneva arvu korrutis on 342. Leia need arvud!

b) Kahe teineteisele järgneva paaritu arvu korrutis on 195. Leia need arvud!

c) Kahe teineteisele järgneva paarisarvu korrutis on 840. Leia need arvud!

53. a) Täisnurkse kolmnurga kaatetite summa on 14 cm, hüpotenuus on 12 cm. Leia kaatetid!

b) Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on teisest kaatetist 2,2 cm võrra pikem, hüpotenuus on 11 cm. Leia kaatetid!

c) Täisnurkse kolmnurga kaatetite vahe on $1\frac{1}{3}$ cm, hüpotenuus on $6\frac{2}{3}$ cm. Leia kaatetid!

54. a) Kahe teineteisele järgneva paarisarvu ruutude summa on 340. Leia need arvud!

b) Täisnurkse kolmnurga külgede pikkused on kolm teineteisele järgnevat täisarvu. Leia need arvud!

c) Täisnurkse kolmnurga külgede pikkused on kolm teineteisele järgnevat paarisarvu. Leia need arvud!

55. a) Ruudukujulisest papitükist valmistatakse karp mahuga 2 dm^3. Selleks lõigatakse nurkadest ära 5 cm küljepikkusega ruudud. Missuguse küljepikkusega peab olema papitükk?

b) Ristkülikukujulisest plekitükist on tarvis valmistada karp mahuga 3,4 dm^3, nii et laius on $\frac{2}{3}$ pikkusest. Selleks lõigatakse nurkadest ära 4,5 cm küljepikkusega ruudud. Missugune peab olema plekitüki laius ja pikkus?

56. a) Laste mänguväli on ristkülikukujuline mõõtmetega 8 m ja 4 m. Mänguväli tehakse kaks korda suuremaks, suurendades võrdselt pikkust ja laiust. Kui palju tuleb pikendada pikkust ja laiust?

b) Ristkülikukujulisel muruplatsil, mille mõõtmed on 36 m ja 20 m, on tarvis ääred kaevata peenardeks, mis ümbritseksid muruplatsi. Kui lai tuleks kaevata peenar, et peenra pind moodustaks 15 % muruplatsi endisest pinnast?

57. a) Ringi raadius on 14 cm. Mitme cm võrra tuleks ringi raadiust vähendada, et saaksime ringi pinnaga 220 cm²? (Võta $\pi = 3\frac{1}{7}$!)

b) Ringi raadius on 10 cm. Kui palju tuleks ringi raadiust suurendada, et ringi pind suureneks 2 korda?

58. Püstsilindri üldpinna arvutamiseks tuleb kasustada valemit $P = 2\pi R(h + R)$, kus R on põhja raadius ja h on silindri kõrgus. Leia silindri põhja raadius!

a) $h = 10$; $P = 748$; b) $h = 7{,}6$; $P = 563{,}2$;
c) $h = 27$; $P = 3960$; d) $h = 7\frac{2}{3}$; $P = 146\frac{2}{3}$.

59. Püstkoonuse üldpinna arvutamiseks tuleb kasustada valemit $P = \pi r(l + r)$, kus r on põhja raadius ja l on silindri moodustaja. Leia koonuse põhja raadius! (Võta $\pi = 3{,}14$!)

a) $l = 8$; $P = 628$; b) $l = 15$; $P = 942$;
c) $l = 60$; $P = 2000$; d) $l = 6{,}5$; $P = 109{,}9$.

Üldharjutusi.

60. a) $\frac{3}{5x^2} - \frac{2}{x} - 5 = 0$

b) $\frac{1}{2y} - 2y + 2 = 0$

c) $\frac{w}{3} + 4 = \frac{2}{w}$

d) $\frac{7}{x^2} + \frac{2}{x} = 5$

61. a) $2t + \frac{5}{t} = 7t$

b) $x - \frac{0{,}8}{x} = \frac{2}{5}$

c) $x^2 - \frac{4}{5}x - 0{,}9 = 0$

d) $1{,}2x^2 = \frac{x}{4} - 5$

62. a) $(3z + 2)(2z + 3) = (z - 3)(2z - 4)$

b) $9(y - 1)^2 - 4(y - 2)^2 = 4$

c) $(v - 5)^2 - v = \frac{v + 6}{3} + 2v + 7$

d) $\frac{1}{8}x(4\frac{4}{9}x+3\frac{1}{3})=\frac{1}{9}(5x^2+6\frac{2}{3})$

63. a) $\frac{97-17z^2}{22}=10\frac{1}{11}-z^2$

b) $\frac{3x^2}{2}+\frac{5x^2-1}{3}=2\frac{5}{6}$

c) $\frac{n^2}{2}+7\frac{3}{8}=8+\frac{n}{3}$

d) $1\frac{1}{3}x^2-\frac{3x+2x^2}{6}=1\frac{1}{2}x$

64. a) $\frac{w^2}{w-4}+\frac{1}{5}=0$

b) $\frac{x}{x-3}-\frac{3x}{4}=\frac{5}{2}$

c) $\frac{t+2}{t-1}-\frac{4-t}{2t}=\frac{7}{3}$

d) $\frac{2x+3}{5}=\frac{6-x}{x-3}+2$

65. a) $\frac{2-3x}{4}=\frac{11}{4}+\frac{4-x}{x-2}$

b) $\frac{3x-5}{2x-5}-\frac{2x+5}{3x+5}=1$

c) $\frac{4v-9}{4v-3}-\frac{2v-3}{2v}=9$

d) $\frac{5}{y+4}-6=\frac{3}{y-2}$

66. a) $\frac{3x}{2x-5}-\frac{7}{3x+1}=\frac{3}{2}$

b) $\frac{t}{3}+\frac{2t^2}{3t-4}=\frac{9t-2}{9}$

c) $\frac{2z-1}{2}-\frac{6z-5}{6}=\frac{z+2}{2z+5}$

d) $\frac{10-7x}{x-1}=\frac{5}{x+1}-7$

67. a) $\frac{a}{x^2}-b=0$

b) $\frac{x^2}{m+n}=m-n$

c) $\frac{c-x^2}{2}=bx$

d) $\frac{c}{x-b}+x=0$

68. a) $\frac{a^2}{x}+x=2a$

b) $x-\frac{3}{2}b=\frac{b^2}{x}$

c) $a(3x+10)=x^2$

d) $\frac{x-1}{m}=\frac{m-2}{x+1}$

69. a) $\frac{x}{n+x}=\frac{m-x}{n-x}$

b) $\frac{k}{l-ax}=\frac{k-lx}{l}$

c) $x-\frac{a}{b}=\frac{1}{x}-\frac{b}{a}$

d) $\frac{n-x}{x}+\frac{n}{n+x}=\frac{11}{10}$

Koosta ja lahenda võrrandid!

70. a) õpilaspere peoks müüdi kahesuguse hinnaga 230 piletit. õpilaspilet maksis 20 senti vähem kui külalispilet. Õpilaspiletite müügist saadi 56 krooni, külalispilettite müügist 54 krooni. Kui kallid olid piletid?

b) Pühadeks osteti apelsine ja sidruneid kokku 25 tükki. Apelsin maksis 8 senti rohkem kui sidrun. Apelsinide eest maksti 4 kr. ja sidrunite eest 60 senti. Kui palju maksis apelsin?

71. a) Õpilaste ekskursiooniks oli autobus palgatud 36 kr. eest. Kogunemisel selgus, et õpilasi oli 4 võrra rohkem, kui esialgu arvati. Seepärast tuli igal õpilasel maksta 10 senti vähem. Mitu õpilast võttis ekskursioonist osa?

b) Kooli kirjandusringil oli poolaasta kuludeks ette nähtud 15 krooni, mis tuli katta liikmemaksudest. 25 uue õpilase astumine ringi liikmeks võimaldas liikmemaksu vähendamist 5 sendi võrra. Mitu liiget on ringil ja kui suureks kujunes liikmemaks?

72. a) Kaks aurikut väljuvad ühel ja samal ajal Tallinnast, et sõita Helsingisse. Esimene aurik sõidab 5 km tunnis rohkem kui teine ja jõuab 1 tund 25 min. varemini kohale. Mitu km sõidab kumbki aurik tunnis, kui Tallinna ja Helsingi vahemaa on 85 km?

b) Kaks jalgratturit väljuvad ühel ja samal ajal külast, et sõita linna, mis asub külast 18 km kaugusel. Üks jalgrattur jääb teisest iga minut 50 m võrra maha ja jõuab seetõttu 18 min. hiljemini kohale. Mitu kilomeetrit sõidab kumbki jalgrattur ühes tunnis?

73. a) Mootorratturile, kes 18 min. eest oli välja sõitnud, saadeti järele auto, mille kiirus oli mootorratta omast 15 km võrra suurem. Auto jõudis mootorratturile järele 90 km kaugusel lähtekohast. Missuguse tunnikiirusega sõitis mootorrattur?

b) Kaks venda Uno ja Vello kavatsesid pühapäeva veeta Piirital, kuhu oli poiste kodust 6 km. Uno läks kodunt välja jala ja 42 min. varemini kui Vello, kes sõitis jalgrattaga. Piritale jõudsid nad ühel ajal. Kui palju aega kulus Unol Piritale minemiseks, kui on teada, et Vello sõidab tunnis 7 km võrra kiiremini, kui suutis käia Uno jalą?

74. a) 4000-kroonine kapital paigutati mittevõrdsetes osades kahte panka. Ühes pangas andis kapital aastas 40 kr. ja teises 135 kr. intressi. Mitu %-i andis kumbki pank, kui teine pank maksab 0,5 % rohkem kui esimene?

b) Keegi paigutas oma 24 000-kroonise kapitali mittevõrdsetes osades ärilistesse ettevõtetesse. Aasta lõpul andis üks ettevõte 980 kr., teine 1100 kr. puhaskasu. Mitu %-i andis kumbki ettevõte, kui esimene andis 4 % vähem kui teine?

75. a) Panka pandud kapitalilt maksis pank aastas 200 kr. intressi. Kapital ühes intressiga jäeti veel aastaks panka. Pärast seda muutus kapital ühes intressiga 4410 krooniks. Kui suur oli alguskapital?

b) Keegi andis oma raha panka hoiule ja pank maksis talle aasta möödumisel 120 kr. intressi. Järgmisel aastal paigutas sama isik oma raha ühes saadud intressiga teise panka, kes maksis 1 % rohkem. Aasta möödumisel sai isik ühes intressiga 3276 kr. Kui palju raha paigutati esialgu panka?

76. a) Aerutaja tarvitab 5 km sõitmiseks päri jõge ja niisama pika tee tagasisõitmiseks 2,5 tundi. Leia aerutaja kiirus seisvas vees, kui jõevoolu kiirus on 1,8 km tunnis!

b) Jõe-aurik sõitis 42 km päri voolu ja niisama palju vastu voolu. Sõiduks edasi ja tagasi, peatused maha arvatud, kulus aurikul 5 tundi 20 min. Leia auriku kiirus seisvas vees, kui jõevoolu kiirus on 2 km tunnis!

77. a) Vann täitub veega $6\frac{2}{3}$ min. jooksul, kui avada korraga sooja- ja külmavee-kraanid. Kui avada ainult külmavee-kraan, siis kuluks vanni täitmiseks 3 min. vähem aega, kui tarvitataks vanni täitmiseks ainult kuumavee-kraani. Mitme minutiga täitub vann, kui on avatud ainult kuumavee-kraan?

b) Veepaak täitub peapumba abil 20 min. kiiremini kui tagavarapumba abil. Mõlemad pumbad, töötades koos, täidavad veepaagi 29 min. 10 sekundi jooksul. Mitme minutiga täidab veepaagi kumbki pump eraldi?

78. a) Kaks üheskoos töötavat töölist lõpetasid ettevõetud töö 7 tunni 28 minutiga. Esimene tööline tarvitaks üksi töötades selle töö ärategemiseks 2 tundi rohkem aega kui teine. Mitu tundi kulub esimesel töölisel selle töö tegemiseks?

b) Isa ja poeg, töötades koos, suudavad maha niita oma talu heina 30 tunniga. Kui oleks poeg selle heina üksinda maha niitnud, siis oleks kulunud tal 8 tundi rohkem aega, kui seda oleks teinud isa üksinda. Mitme tunniga suudab kumbki üksinda kogu heina maha niita?

Ülesandeid vanaaja ülesannete-kogudest.

79. a) Ahvikarja kaheksas osa, võetud ruudus, hüples murul, mängust rõõmu tundes; ülejäänud 12 ahvi näeme künkal lobisemas. Kui suur oli ahvikari?

b) Ahvikarja viiendik osa, kolme võrra vähendatult, võetud ruudus, istus koopas peidus. Näha võis ainult ühte ahvi, kes oli puu otsa roninud. Kui suur oli ahvikari?

80. a) 20 jala kõrgune puu murdub 8 jala kõrgusel maapinnalt. Kui kaugele tüvest langeb latv?

b) 20 jala kõrgune puu kasvab 6 jala laiuse tiigi kaldal. Kui kõrgelt peaks puu murduma, et tema latv ulatuks parajasti tiigi teisele kaldale?

81. a) Kahe torni kaugus teineteisest on 60 küünart. Ühe torni kõrgus on 50 küünart, teise torni kõrgus 40 küünart. Kahe torni vahel asub kaev, mille kaugused tornide tippudest on võrdsed. Kui kaugel asub kaev kummastki tornist?

b) 13 jala pikkuse redeli alumine ots asub 5 jala kaugusel müürist. Redeli alumist otsa nihutatakse veel 7 jala võrra seinast eemale. Kui palju nihkub seina mööda allapoole redeli ülemine osa?

III. Hulkliikme tegureiks lahutamine. Algebralised murrud.

1. Hulkliikmete tegureiks lahutamine ja selle rakendusi.

Ühise teguri sulgude ette toomine.

Kujuta järgnevad hulkliikmed korrutisena, tuues sulgude ette kõigi liikmete suurim ühistegur!

Näidis:

$$3a^2b^2 + 6a^2c^2 + 9a^2d^2 = 3a^2(b^2 + 2c^2 + 3d^2)$$

1\. a) $3a + 3b$
b) $2m - 4n$
c) $-9c + 6d$
d) $24k - 36l$

2\. a) $2a - 5ab$
b) $-6xy + 3x^2$
c) $2\pi rh + 2\pi rl$
d) $5abx - 10bcx$

3\. a) $a^4 + a^2$
b) $-2x^3 + 3x^2$
c) $x^3y^2 - xy^2$
d) $-21m^4 + 14m^3n$

4\. a) $7a - 7b + 7c$
b) $4x - 4y + 8z$
c) $-3km + 6lm - 9mn$
d) $12xy - 18y^2 - 24yz$

5\. a) $p^3q^3 + p^2q^2 - pq$
b) $b^3 - b^4 + b^5$
c) $10m^3 + 15m^2 - 2m$
d) $-4x^2y - 8x^3y^2 - 12x^4y^3$

6\. a) $a(a + b) - 2(a + b)$
b) $3(x - y) + a(x - y)$

c) $3t(T+t)-6T(T+t)$
d) $15M(m+1)-10(m+1)$

7. a) $(x+y)^2-(x+y)$
b) $(m-1)^3-5(m-1)$
c) $(a+3)^3-(a+3)^2$
d) $a(x-y)+b(x-y)+c(x-y)$

Taanda järgnevad murrud!

8. a) $\frac{6x-6y}{9x+9y}$
b) $\frac{cd-ad}{ad+cd}$
c) $\frac{m-1}{m^2-m}$
d) $\frac{3-3a}{a-a^2}$

9. a) $\frac{x^2+y^2}{5bx^2-5cx^2}$
b) $\frac{15-10b}{6b-4b^2}$
c) $\frac{2a+2b+2c}{a^2+ab+ac}$
d) $\frac{4x^2-8xy+12y^2}{6x^3-12x^2y+18xy^2}$

Märkus. Kui murd omab kuju $\frac{b-a}{a-b}$, siis

1) $\frac{b-a}{a-b}=\frac{(-1)\cdot(-b+a)}{a-b}=\frac{(-1)(a-b)}{a-b}=-1$, või

2) $\frac{b-a}{a-b}=\frac{b-a}{(-1)(-a+b)}=\frac{b-a}{(-1)(b-a)}=-1.$

Taanda näidatud viisil järgnevad murrud!

10. a) $\frac{m-n}{n-m}$
b) $\frac{b-a}{2a-2b}$
c) $\frac{a-1}{1-a}$
d) $\frac{3m-3}{1-m}$

11. a) $\frac{ac-bc}{bd-ad}$
b) $\frac{1-x^2}{x^3-x}$
c) $\frac{3m-6n}{4n-2m}$
d) $\frac{7-7a^2}{8a^3-8a}$

Kaksliikme lahutamine tegureiks.

Me teame, et $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, järelikult

$$\mathbf{a^2-b^2=(a+b)(a-b).}$$

Kontrolli, tegureid korrutades, et

1) kahe arvu kuupide summa:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

2) kahe arvu kuupide vahe:

$$a^3 + b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Kahe arvu ruutude summat $a^2 + b^2$ pole võimalik tegureiks lahutada.

Näidised:

a) $49u^2 - 4v^2 = (7u)^2 - (2v)^2 = (7u + 2v)(7u - 2v)$

b) $125 + a^3 = 5^3 + a^3 = (5 + a)(5^2 - 5a + a^2)$

c) $8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 = (2x - 3y)(4x^2 +$
$+ 6xy + 9y^2)$

Lahuta näidatud viisil tegureiks järgnevad binoomid!

12. a) $x^2 - y^2$ b) $m^3 + n^3$ c) $m^2 - n^2$ d) $v^3 - u^3$

13. a) $T^2 - t^2$ b) $M^2 - m^2$ c) $R^3 - r^3$ d) $r^3 + R^3$

14. a) $1 - c^3$ b) $k^2 - 1$ c) $m^3 - 1$ d) $1 - t^2$

15. a) $a^6 - b^6$ b) $1 - 4n^4$ c) $27R^3 + 1$ d) $9 - 4t^2$

16. a) $a^2 - 25$ b) $81c^2 - 49$ c) $m^4 - n^4$ d) $64m^3 + 27$

17. a) $27x^3 - 8y^3$ b) $x^2 - 0{,}01$ c) $\frac{1}{8} - k^6$ d) $\frac{1}{4}x^2 - y^2$

18. a) $9a^2 - \frac{1}{16}$ b) $0{,}04t^2 - s^2$ c) $125p^3 - 216$ d) $1{,}21 - 4a^2$

19. a) $0{,}16u^2 - 0{,}09v^2$ b) $x^3 - 0{,}008$ c) $\frac{1}{8} - 8m^3$ d) $(a + b)^2 - c^2$

20. a) $(m - n)^2 - 16$ b) $9 - (a - b)^2$ c) $a^2 - (b - c)^2$ d) $(a+b)^2 - (a-b)^2$

Taanda järgnevad murrud!

21. a) $\dfrac{a + b}{a^3 + b^3}$ b) $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ c) $\dfrac{m^3 - 1}{m^2 + m + 1}$ d) $\dfrac{x^2 - 9}{x^3 - 27}$

22. a) $\frac{c^2-d^2}{c^3-d^3}$ c) $\frac{1-b^3}{b^2-1}$

b) $\frac{8k^3-27}{4k^2+6k+9}$ d) $\frac{64+x^3}{4+x}$

Kolmliikme lahutamine tegureiks.

Me teame, et $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, järelikult

$$\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2} \text{ ja}$$
$$\boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 = (b-a)^2.}$$

Näidis:

$$9a^2 + 12ab + 4b^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 2b + (2b)^2 = \\ = (3a + 2b)^2.$$

Lahuta näidatud viisil tegureiks järgnevad trinoomid!

23. a) $x^2 + 2xy + y^2$
b) $m^2 - 2mn + n^2$
c) $t^2 - 2st + s^2$
d) $R^2 - 2Rr - r^2$

24. a) $a^2 - 2a + 1$
b) $1 + 2x + x^2$
c) $4 + 4m + m^2$
d) $R^2 - 6R + 9$

25. a) $u^2 - 10u + 25$
b) $v^2 + 8v + 16$
c) $a^2b^2 + 2ab + 1$
d) $9x^2 - 12xy + 4x^2$

26. a) $r^2 + r + \frac{1}{4}$
b) $a^2 - 2\frac{1}{2}a + \frac{25}{16}$
c) $c^4 - 6c^2 + 9$
d) $x^6 + 14x^3 + 49$

27. a) $a^2 + b^2 - 2ab$
b) $a^4 - 2a^2x + x^2$
c) $a^2 + 4m^2 - 4am$
d) $9x^2 + 24ax + 4a^2$

28. a) $a^2m^2 - 4am + 4$
b) $t^4 + 2nt^3 + n^2t^2$
c) $9a^4 + n^4 - 6a^2n^2$
d) $16a^2b^4 + 9 + 24ab^2$

Pane tähele! Enne tegureiks lahutamist püüa kõigepealt selgusele jõuda, kas on võimalik ühist tegurit sulgude ette tuua!

29. a) $\pi r^2 - \pi x^2$ c) $5x^2 - 10xy + 5y^2$

b) $3a^3 - 75ab^2$ d) $3 - 6a + 3a^2$

30. a) $c^2x^2 - b^2$
b) $a^2x^2 + 2a^2x + a^4$
c) $4ax - 2a^2 - 2x^2$
d) $250x^3 - 16$

31. a) $R^3 - Rr^2$
b) $Rr_1^2 - Rr_2^2$
c) $-5m^3 + 40$
d) $4t^2 - 8st + 4s^2$

32. a) $75\pi R^2 - 12r^2$
b) $2 + 54t^3$
c) $6u^3 + 54ut^2$
d) $2nx^2 + 8nx + 8n$

33. a) $12a^2b - 27b^3$
b) $\pi r^2h - \frac{2}{3}\pi r^2k$
c) $-12a^2b + 27b^3$
d) $-2x^4 + 12x^3y - 2x^2y^2$

34. a) $8R^2 - 8$
b) $\pi r_1^2 + 2\pi r_2^2$
c) $-c^4 - 2c^3n - c^2n$
d) $9k^6 - 9l^6$

Taanda järgnevad murrud!

35. a) $\frac{a^3+1}{6a+6}$
b) $\frac{a^2-1}{an+n}$
c) $\frac{7a+7}{2a^2+4a+2}$
d) $\frac{mx+my}{7x^2+14xy+7y^2}$

36. a) $\frac{3a^2-6ab+b^2}{5a^2-5b^2}$
b) $\frac{40x^3-5}{8x-x^4}$
c) $\frac{1-2m+m^2}{2m^2-2}$
d) $\frac{t^3+27}{4t^2+12t+36}$

37. a) $\frac{a^2-a^2x^2}{2a^2x-2a^2x^2}$
b) $\frac{9-6x+x^2}{x^2-4xy+4y^2}$
c) $\frac{(a^3-b^3)(a+c)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$
d) $\frac{(a+b)^2-c^2}{2a+2b+2c}$

38. a) $\frac{3M^2+12Mm+12m^2}{aM^3+8am^3}$
b) $\frac{2a^2-2a^2b^2}{3a^3b^3-3a^3}$
c) $\frac{500y^3-32z^3}{100y^2-16z^2}$
d) $\frac{15t^3v^4-15t^3v^2}{20t^2v^5-40t^2v^2+20t^2v^3}$

Teosta murdudega nõutavad tehted ja anna saadustele lihtsaim kuju!

Kui murdude liikmed on hulkliikmelised, siis enne korrutamist lahuta nad tegureiks, et oleks võimalik murdu taandada!

39. a) $\frac{a+3}{a-3} : \frac{a^2}{a^2-9}$

b) $\frac{1-a}{5x^3} \cdot \frac{x^2}{1-a^2}$

c) $\frac{a-b}{14a^2+28ab+14b^2} \cdot 28(a^2-b^2)$

d) $\frac{u+2v}{u^2-2uv+v^2} : (3u^2-12v^2)$

40. a) $\frac{a^4-2}{a+2} \cdot \frac{9a^2+36a+36}{3a^2-2}$

b) $\frac{m-n}{15m^3-15n^3} \cdot (12m^2+12n^2-12mn)$

c) $\frac{x^2-1}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-4x+4}{x^2+x}$

d) $\frac{27r^3-64s^3}{12rs} : (9r^2-16s^2)$

41. a) $\frac{a^2b+ab}{a^2b+b} : \frac{4a^3b+8a^2b^2+4ab^3}{a^4-1}$

b) $\frac{x^2+16x+64}{x^2+4x+16} \cdot \frac{x^3-64}{x^2-64}$

c) $\frac{3ah}{a^2-9h^2} : \frac{6h^2}{a^2-6ah+9h^2}$

d) $(3z^5-3y^3z^2) : \frac{2z^2}{6z^2+6yz-6z^2}$

42. a) $(2m^4-2n^4) : \frac{m^6-n^6}{3}$

b) $\frac{c^2n+cn^2}{c^2n+n^3} : \frac{5c^3n+10c^2n^2+5cn^3}{c^4-n^4}$

c) $(9-12r+4r^2) \cdot \frac{3+2r}{6r-4r^2} \cdot \frac{8r^2}{9-4r^2}$

d) $\frac{Mm}{M+m} \cdot \frac{6M^2m-4Mm^2}{45M^2-30m^2} \cdot \frac{3M+3m}{4M^2m^2}$

Kolmliikme ax^2+bx+c tegurid.

Kui kolmliiget pole võimalik lahutada tegureiks meile tuntud korrutamise abivalemite abil, siis on see kolmliige pärast kõigi liikmete ühise teguri sulgude ette toomist sagedasti tegurite $(x + m)$ ja $(x + n)$ korrutis. Korrutis

$$(x + m)(x + n) = x^2 + mx + nx + mn =$$
$$= x^2 + (m + n)x + mn.$$

Järelikult:

$$\boldsymbol{x^2 + (m + n)x + mn = (x + m)(x + n)},$$

kus x esimese astme kordaja on vabaliikme tegurite summa ja x^2 kordaja on 1.

Näidised:

a) Lahutame tegureiks kolmliikme $x^2 + 5x + 6$.

Vabaliige on tegurite 2 ja 3 korrutis, x esimese astme kordaja on vabaliikme tegurite summa ja x^2 kordaja on 1. Järelikult: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

b) $a^2 - 2a - 24$.

Vabaliige on tegurite -1 ja 24, -2 ja 12, -3 ja 8, -4 ja 6, -6 ja 4, -8 ja 3, -12 ja 2 ning -24 ja 1 korrutis. Neist valime selle paari, mille summa on a esimese astme kordaja -2, s. o. -6 ja 4.

Järelikult: $a^2 - 2a - 24 = (a - 6)(a + 4)$.

Lahuta näidatud viisil tegureiks järgnevad trinoomid!

43. a) $x^2 + 7x + 10$
b) $t^2 + 6t + 8$
c) $m^2 + 9m + 14$
d) $z^2 - 5z + 6$

44. a) $u^2 + u - 30$
b) $v^2 - 6v - 7$
c) $y^2 - 11y + 18$
d) $a^2 + 9a - 10$

Kui ruutvõrrand on kujul $x^2 + px + q = 0$ ja vabaliikme tegurite summa on võrdne tundmatu esimese astme kordajaga, siis võime selle võrrandi vasaku poole kirjutada kujul:

$$(x + m)(x + n) = 0.$$

Siit näeme, et võrrandi lahendid on

$$x_1 = -m \text{ ja } x_2 = -n.$$

Leia teguriteks lahutamise abil järgnevate ruutvõrrandite lahendid!

Näidis:

$$x^2 + 10x - 11 = 0$$
$$(x - 1)(x + 11) = 0$$
siit $x_1 = -(-1) = 1$ ja $x_2 = -11$.

45. a) $x^2 + 4x - 21 = 0$
b) $x^2 - 7x + 10 = 0$
c) $u^2 + u - 2 = 0$
d) $t^2 - 2t - 15 = 0$

46. a) $x^2 + 10x + 21 = 0$
b) $z^2 - 12z + 11 = 0$
c) $s^2 - 18x + 17 = 0$
d) $t^2 + t - 110 = 0$.

Kui x^2 kordaja ei ole 1, siis trinoom on sagedasti tegurite $ax + b$ ja $cx + d$ korrutis. Korrutis

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd.$$

Järelikult:

$$\boldsymbol{acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d).}$$

Nii näeme, et

x^2 kordaja on tegurite $a \cdot c$ korrutis,
vabaliige „ „ $b \cdot d$ „

x esimese astme kordaja on $ad + bc$, s. o. diagonaalselt korrutatud tegurite summa.

Näidised:

a) Lahutame tegureiks kolmliikme

$$10x^2 + 29x + 21.$$

x^2 koefitsient on $2 \cdot 5$,
$\times$
vabaliige „ $3 \cdot 7$,

x esimese astme koefitsient peab olema

$$2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 29;$$

järelikult

$$10x^2 + 29x + 21 = (2x + 3)(5x + 7)$$

b) $9t^2 - 6t - 8$

t^2 koefitsient on $3 \cdot 3$,
vabaliige on $2 \cdot -4$,
t esimese astme koefitsient peab olema

$$3 \cdot (-4) + 2 \cdot 3 = -6;$$

järelikult:

$$9t^2 - 6t - 8 = (3t + 2)(3t - 4).$$

Märkus. Kui valitud tegurite korrutiste summa ei ole võrdne keskmise liikme koefitsiendiga, siis tuleb võtta teine tegurite kombinatsioon.

Näiteks: $12 = 3 \cdot 4 = 2 \cdot 6 = 1 \cdot 12$.

Lahuta näidatud viisil tegureiks järgnevad trinoomid ja kontrolli, korrutades tegureid!

47. a) $2a^2 - 3a - 5$
b) $6x^2 - 7x - 5$
c) $6m^2 + 13m + 7$
d) $2x^2 - 4x + 2$

48. a) $t^2 + 10t + 10$
b) $4p^2 - 6p - 4$
c) $35m^2 - 29m - 36$
d) $10z^2 - 13z - 30$

49. a) $x^2 + 8x + 15$
b) $3m^2 - 36m + 105$
c) $3v^2 - 17v + 10$
d) $33r^2 - 83r + 14$

50. a) $2x^2 + 19x + 1$
b) $t^2 - 2t - 24$
c) $10z^2 - 11z - 6$
d) $6a^2 + 31a + 33$

Taanda järgnevad murrud!

51. a) $\dfrac{R^2 - 2R - 3}{R^2 - R - 2}$
b) $\dfrac{12 - 3x}{x^2 - 11x + 28}$
c) $\dfrac{a^2 - 5a - 14}{5a^3 + 40}$
d) $\dfrac{10t^2 + 55t + 75}{8t^2 - 50}$

52. a) $\dfrac{T^2 - 4Tt + 4t^2}{3T^3 - 24t^3}$
b) $\dfrac{54 - 24v^2}{15 - 31v + 14v^2}$
c) $\dfrac{9 - 6c + 4c^2}{27 - 8c^3}$
d) $\dfrac{23 - 91m}{13m^2 - 36m + 39}$

Neliliikme lahutamine tegureiks.

Me teame, et $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, järelikult

$$\boldsymbol{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3}$$

ja

$$\boldsymbol{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3}.$$

Näidised:

a) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + {}$
$+ 3 \cdot 2x \cdot y^2 + y^3 = (2x + y)^3$

b) $t^3 - 21t^2 + 147t - 343 = t^3 - 3 \cdot t^2 \cdot 7 + 3 \cdot t \cdot 7^2 - {}$
$- 7^3 = (t - 7)^3$

Kui neliliige ei ole kahe arvu summa või vahe kuup, siis on see neliliige sagedasti tegurite $(a + b)$ ja $(c + d)$ korrutis.

Lahutame tegureiks neliliikme:

$$ac + bc + ad + bd.$$

Rühmitame ta kaheks rühmaks nii, et rühma liikmed sisaldaksid ühise teguri, mille toome sulgude ette:

$$(ac + bc) + (ad + bd) = c(a + b) + d(a + b).$$

Saame kaksliikme, milles võime tuua tema ühise teguri $(a + b)$ sulgude ette; saame:

$$(a + b)(c + d).$$

Näidis:

$$a^2x - ax^2 - 7a + 7x = (a^2x - ax^2) - (7a - 7x) =$$
$$= ax(a - x) - 7(a - x) = (a - x)(ax - 7).$$

Lahuta tegureiks järgnevad neliliikmed ja kontrolli, korrutades tegureid!

53.

a) $am + bm + an + bn$
b) $m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3$
c) $c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$
d) $ax + bx - ay - by$

54.

a) $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$
b) $kp - pl - kq + lq$
c) $cd + 3d + 4c + 12$
d) $4 - 12k + 12k^2 - 4k^3$

55.

a) $8 - 12x + 6x^2 - x^3$
b) $15 - 3x - 5y + xy$
c) $z^3 + 9z^2 + 27z + 27$
d) $2t^3 - 30t^2 + 150t - 250$

56.

a) $3k^3 + 21k^2 + 3k + 21$
b) $64 - 48l + 12l^2 - l^3$
c) $15x^3 - 6x^2 - 30x + 12$
d) $27a^3 + 54a^2 + 36a + 8$

57. a) $125x^3 - 300x^2y + 240xy^2 - 64y^3$
b) $ax^3 - 3ax^2 + ax - 3a$
c) $a^3 - 9a^2x + 27ax^2 - 27x^3$
d) $acm + 5ac - 2m - 10$

58. a) $9ru - 18rv - su + 2sv$
b) $216 + 540z + 450z^2 + 125z^3$
c) $8m^3 - 36m^2n + 54mn^2 - 27n^3$
d) $8Mt - 2MT - 4mt + mT$

Leia järgnevate murdude numbriline väärtus!

59. a) $\frac{ac - ad + bc - bd}{cm - cn - dm + dn}$, kui $a = 7$; $b = 2$; $m = -4$; $n = 5$
b) $\frac{a^2 + 2a + 1}{a^3 + a^2 + a + 1}$, kui $a = -3$
c) $\frac{m^3 + 3m^2 + 3m + 1}{m^4 - 2m^2 + 1}$, kui $m = 1\frac{2}{3}$
d) $\frac{ax - ab}{ax + 3x - 3b - ab}$, kui $a = -2$

60. a) $\frac{z^2 - 14z + 49}{z^3 - 7z^2 - z + 7}$, kui $z = -5$
b) $\frac{t - t^3}{1 + 3t + 3t^2 + t^3}$, kui $t = -7$
c) $\frac{2a^3 + 3a^2 - 20a - 30}{4a^2 - 9}$, kui $a = 11$
d) $\frac{v^3 - 12v^2 + 48v - 64}{v^3 - 4v^2 - v + 4}$, kui $v = -1{,}4$

2. Suurim ühistegur ja väikesim ühiskordne.

Leia antud arvude suurim ühistegur!

61. a) 84; 150
b) 308; 385
c) 98; 210
d) 632; 1000

62. a) 240; 400; 720
b) 630; 840; 990
c) 840; 1600; 320
d) 450; 1375; 2100

Leia antud arvude väikesim ühiskordne!

63. a) 42; 5; 25
b) 15; 18; 30
c) 18; 72; 99
d) 77; 105; 140

64. a) 80; 25; 125; 250
b) 1000; 80; 120; 240
c) 90; 210; 300; 500
d) 51; 153; 1530; 1700

Kahe või rohkem avaldiste **suurim ühistegur** on nende avaldiste kõikide ühiste tegurite korrutis.

Suurima ühisteguri leidmiseks lahutame antud avaldised algtegureiks, kirjutame välja nende ühised tegurid ja korrutame need omavahel.

Näidis:

$$6a^3b + 12a^2b = 6a^2b(a + 2) = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} + 2)$$
$$15a^3b - 60ab = 15ab(a^2 - 4) = \boldsymbol{3} \cdot 5 \cdot a \cdot \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} + 2) \cdot (a - 2)$$
$$3a^2b + 12ab + 12b = 3b(a^2 + 4a + 4) = \boldsymbol{3} \cdot \boldsymbol{b} \cdot (a + 2) \cdot (\boldsymbol{a} + 2)$$

Suurim ühistegur $= 3 \cdot b \cdot (a + 2) = 3ab + 6b.$

Kahe või rohkem avaldiste **väikesim ühiskordne** on niisugune avaldis, mis sisaldab iga antud avaldiste algtegureid ainult niipalju, kui neid on avaldises.

Väikesima ühiskordse leidmiseks lahutame antud avaldised algtegureiks, võtame ühe avaldise algtegurid ja kirjutame sinna juurde korrutajatena need tegurid, mis on teistes avaldistes, aga puuduvad võetud avaldises ja juurdekirjutatud tegurite hulgas.

Näidis:

$$3m^2 + 6mx + 3x^2 = 3(m^2 + 2mx + x^2) = 3 \cdot (m + x)^2$$
$$2m^3 - 2mx^2 = 2m(m^2 - x^2) = 2 \cdot m \cdot (m + x) \cdot (m - x)$$
$$6mn = 2 \cdot 3 \cdot m \cdot n$$

Väikesim ühiskordne on $= 3 \cdot (m + x)^2 \cdot 2 \cdot m \cdot (m - x) \cdot n =$
$= 6mn(m + x)^2 (m - x).$

Leia järgnevate avaldiste suurim ühistegur ja väikesim ühiskordne!

65. $24r$; $36s$; $48rs$
b) $a^3 - ab^2$; $a^2 + ab$
c) $12a^2 - 12$; $8b$
d) $8b^3 - 4ab^2$; $24a^2b^2$

66. a) $48xy$; $32\,yz$; $6x^2y^2z^2$
b) $5am + 5m^2$; $3a^2 + 3am$
c) $15m^3 - 12m^2b$; $40ab^2$
d) $6a^4b^2x^3 - b^6x^3$; $15abx$

67. a) $2c^2 - 10c + 50$; $6c^2 - 150$
b) $3x - 3$; $3x^2 - 2$; $x + 1$
c) $6a$; $12ax - 6a^2$; $a - 2x$
d) $2u^4 + 2u^3v$; $2u^3v - 2u^4$; $u^4 + u^2v^2$

68. a) $4 - 8x + 4m^2$; $4 - 4m^2$; $8 + 8m$
b) $5a + 10$; $a^2 - 4$; $3a^2 - 3a - 18$
c) $\pi R^2 - 25\pi$; $2\pi R^2 - 4\pi R + 2\pi$; $2\pi R$
d) $3a - 3$; $6a^2 - 6ab$; $3a^3 - 9a^2 + 9a - 3$

3. Tehteid murdudega.

Murdude liitmine ja lahutamine.

69. a) $\frac{43}{75} - \frac{51}{100} + \frac{14}{125}$
b) $\frac{17}{20} + \frac{22}{75} - \frac{5}{36}$
c) $\frac{3}{28} + \frac{5}{42} - \frac{9}{35}$
d) $\frac{2}{54} - \frac{5}{36} - \frac{13}{20}$

70. a) $24\frac{5}{9} - \frac{25}{27} + 1\frac{3}{4} + 100\frac{4}{5}$
b) $39\frac{5}{22} - 14\frac{7}{33} - \frac{21}{55} + \frac{1}{3}$
c) $720\frac{7}{12} - \left(124\frac{7}{54} + 3\frac{7}{9}\right)$
d) $36\frac{10}{21} - \left(97\frac{8}{63} - 100\frac{5}{42}\right)$

71. a) $\frac{a}{(a-t)^2} + \frac{2a}{a-t} - 1$
b) $x - \frac{x^2 - y^2}{x - y} + y$
c) $\frac{2v^2 - 4vt}{v^2 - t^2} - \frac{2v - t}{t - v}$
d) $\frac{3c}{c^2 - 4} + \frac{1}{2 - c}$

72. a) $\frac{2c + 3d}{2c - 3d} + \frac{2c - 3d}{3d - 2c}$
b) $\frac{m}{m^2 - 2m + 1} - \frac{m + 1}{m^2 - m}$
c) $\frac{1}{1 + x} - 2 + \frac{3x}{x + 1} - 4$
d) $\frac{y^3 - yz^2}{y^2 - yz + z^2} - y - z$

73. a) $\frac{1}{m^2 + mn} + \frac{1}{mn + n^2}$
b) $\frac{a - 0,4}{2a + 2b} + \frac{1}{5a + 5b}$
c) $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{5}{x^2 + 2x - 15}$
d) $\frac{2n}{n^2 - 6n + 5} + \frac{2n + 3}{5 - n}$

74. a) $\frac{2a}{a^2 - 1} + \frac{1}{a + 1}$
b) $\frac{x - 3y^2}{2x^2 - 2xy} + \frac{2x + y}{x - y}$
c) $\frac{a^2 - ab}{a^2 - 6ab + 9b^2} - \frac{a + b}{a - 3b}$
d) $\frac{2 + 3t - 5t^2}{t^3 - 3t^2 + 3t - 1} - \frac{2t + 5}{t^2 - 2t + 1}$

75. a) $\frac{5n}{6} - \frac{10n^2 - 17n}{12n - 6} + \frac{6}{2n - 1}$

b) $\frac{2}{10a^3 + 2a^4} - \frac{1}{10a^3 - 2a^4} + \frac{1}{25a^2 - a^4}$

c) $\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{2x - 3}{x^3 + 3x^3 + 2x} + \frac{1}{x^2 + 2x}$

d) $\frac{8}{a - 2t} - \frac{2a - 4t}{a^2 - 4t^2} + \frac{3a - 3t}{2t + a}$

76. a) $\frac{a + 1}{2a - 2} + \frac{2a - 3}{a + 1} - \frac{a^2 + 3}{2a^2 - 2}$

b) $\frac{n^2}{nr + r^2} - \frac{r^2}{n^2 + nr} + \frac{r^2 - n^2}{nr}$

c) $\frac{1}{a - x} - \frac{3x}{a^2 - x^2} + \frac{ax}{a^3 - x^3}$

d) $\frac{a - 2}{a^2 - 4a + 4} + \frac{1}{a - 2} - \frac{2a}{a^2 - 4}$

77. a) $\frac{t}{t - v} + \frac{t}{t + v} + \frac{4v^2t^2}{t^4 - v^4}$

b) $\frac{a^2 - 2ab}{a^3 - b^3} + \frac{b}{a^2 + ab + b^2} + \frac{1}{a - b}$

c) $\frac{2}{x + 3} + \frac{1}{x - \frac{9}{x}} - \frac{1}{6 - 2x}$

d) $\frac{8}{2c - 3} - \frac{3c + 8}{2c^2 - c - 3} + \frac{3}{3 - 2c}$

78. a) $\frac{10a^3}{25ab - 20b^2} + \frac{3b^2}{2a} + \frac{12b^3}{10a^2 - 8ab} - \frac{2a^2}{5b}$

b) $\frac{1}{t + v} + \frac{t - v}{t^2 - tv + v^2} - \frac{t(t - v)}{t^3 + v^3}$

c) $\frac{z - 4}{2z + 1} - \frac{3z - 5}{z + 2} + \frac{5z^2 + 9z + 14}{2z^2 + 3z - 2}$

d) $\frac{a}{a + b - c} - \frac{b}{a + b + c} + \frac{ab - b\,(2c + a)}{(a + b)^2 - c^2}$

Üldharjutusi.

79. a) $(x + y) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$

b) $\frac{1 - a}{5x^3} \cdot \frac{x^2}{1 - a^2}$

c) $\frac{2a}{2b - c} \cdot \left(\frac{b + c}{4} - \frac{c}{2}\right)$

d) $\frac{2}{a + b} \cdot \frac{3a^2 - 3b^2}{2a} : 3a$

80. a) $\left(\frac{2}{a}-\frac{3}{b}\right):\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)$ c) $\left(\frac{x}{y}+\frac{5y}{x}-1\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2x}{3}+\frac{2y}{5}\right)$

b) $\left(\frac{u}{v}-\frac{2}{3}\right)\cdot(3u+2v)$ d) $\left(2t^2-\frac{1}{4t}\right):\left(2t+1+\frac{1}{2t}\right)$

81.

a) $\left(\frac{2}{b^3}+\frac{1}{c}+\frac{4}{b}\right)\cdot 3b^2$

b) $\left(4r^2-\frac{1}{9s^2}\right):\left(2r-\frac{1}{3s}\right)$

c) $\left(\frac{v-1}{v+1}+1\right)\cdot\left(\frac{v+1}{v-1}-1\right)$

d) $\frac{4a+2}{a}:\frac{2}{a^2+a}$

82.

a) $\left(x-\frac{y}{x+y}\right):\left(2-\frac{x}{x+y}\right)$

b) $\left(6+\frac{5n+2}{n^2-1}\right):\left(2+\frac{1}{n-1}\right)$

c) $\left(\frac{k^2}{l^2}-1\right):\left(1+\frac{k^2-l^2}{2kl}\right)$

d) $\left(\frac{25}{y^2}-\frac{1}{x^2}\right):\left(\frac{25x}{y}+10+\frac{y}{x}\right)$

83. a) $\dfrac{3}{1+\frac{2}{m}}$

b) $\dfrac{\frac{2}{a}}{2-\frac{1}{a}}$

c) $\dfrac{1+\frac{1}{2x}}{x-\frac{1}{4x}}$

d) $\dfrac{\frac{1}{n^3}-n}{\frac{1}{n^2}-1}$

84. a) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}}$

b) $\dfrac{b-\frac{c}{3}}{\frac{b}{3}-c}$

c) $\dfrac{\frac{t}{t-v}}{\frac{v}{t^2-v^2}}$

d) $\dfrac{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}}{\frac{u-v}{uv}}$

85. a) $\dfrac{\frac{a}{a-b}}{\frac{b}{a^2-b^2}}$

b) $\dfrac{\frac{M}{M^2-m^2}}{\frac{m}{M-m}}$

c) $\dfrac{\frac{r}{s}-2+\frac{s}{r}}{\frac{r}{s}-\frac{s}{r}}$

d) $\dfrac{\frac{x(x-y^3)}{y^3}-x}{\frac{x(1+x)}{y^3}-\frac{x^2}{y^3}}$

86. a) $\dfrac{\dfrac{v^2}{t^2}-\dfrac{8t}{v}}{\dfrac{v}{t}+2+\dfrac{4t}{v}}$ b) $\dfrac{\dfrac{p}{2p-v}-1}{p-\dfrac{p^2}{2p-v}}$

c) $\dfrac{\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x^2-y^2}{x}+\dfrac{xy-y^2}{x-y}}$ d) $\dfrac{\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n-2}}{1+\dfrac{n}{n^2-4}}$

87. a) $\left(\dfrac{a^2}{a+2b}-b\right):\left(\dfrac{a-4}{2a}-\dfrac{b-2}{2b}\right)$

b) $\dfrac{c-1}{c+1}:\left(\dfrac{1-c}{4-c^2}\cdot\dfrac{2-2c}{c}\right)$

c) $\dfrac{7x+21}{5xy}\cdot\dfrac{xy^2}{6x+9+x^2}:\dfrac{y}{10}$

d) $\left(1+\dfrac{m}{v}\right)\cdot\left(1-\dfrac{m}{v}\right):\dfrac{m}{m^2-v^2}$

88. a) $\left(\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{2}{st}+\dfrac{1}{t^2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{2s}{t-s}\right):\left(\dfrac{t}{s}-\dfrac{s}{t}\right)$

b) $\left(\dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u}-2\right)\cdot\left(\dfrac{1}{v-u}+\dfrac{1}{(v-u)^2}\right):-\dfrac{1}{u}$

c) $\left(\dfrac{x-v}{x+v}+\dfrac{(x+v)^2-4x^2}{v^2-x^2}\right):\dfrac{8x}{x+v}$

d) $\dfrac{x^2+x-12}{x^2-3x-10}:\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-7x+10}\cdot\dfrac{x^2+x-2}{x^2-5x+6}$

89. a) $\left(\dfrac{1}{R^2-2Rr+r^2}-\dfrac{1}{R^2}\right):\left(R-\dfrac{r}{2}\right)$

b) $\left(\dfrac{a-b}{a+b}-2-\dfrac{a+b}{b-a}\right):\dfrac{4}{\dfrac{a}{b}-1}$

c) $\left[\dfrac{M-m}{M}-\dfrac{M+m}{m}+2(M+m)\right]:\dfrac{M^2-m^2}{Mm}$

d) $\left(\dfrac{2T+3t}{3T-2t}-\dfrac{2T-3t}{3T+2t}\right):\dfrac{4T^2-9t^2}{4t^2-9T^2}$

90. a) $\dfrac{x^4-16x^2}{15x^2-15}\cdot\dfrac{12x-16}{x^4\left(x+\dfrac{8(x+2)}{x}\right)}$

b) $\left[(0{,}04+0{,}2a+a^2):\left(\dfrac{0{,}008}{a}-a^2\right)\right]\cdot\dfrac{0{,}04-a^2}{a}$

c) $\frac{(n+1)^2}{n^2-n-12} \cdot \frac{n^2-4}{n^2+3n+2} : \frac{n^2-n-2}{n^2-4n}$

d) $\left[\left(\frac{1}{a+m} - \frac{a+m}{a^2-am+m^2}\right) \cdot \frac{a^3+m^3}{3m^3a^3+7am}\right] : \frac{3}{3a^2m^2+7}$

91. a) $\frac{1-a^2}{x^2+x} \cdot \left(1 - \frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right) \cdot \frac{1+x-x^2-x^3}{1-a^2}$

b) $\left(\frac{a^2-2a}{2a^2+8} - \frac{2a^2}{8-4a+2a^2-a^3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2}\right)$

c) $\left[\left(n + \frac{1}{n^2}\right) : \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2}\right)\right] \cdot \frac{1-n}{n+2n^2+n^3}$

d) $\left[\frac{a^2+ax}{2x} : (a^2-x^2)\right] \cdot \left[\frac{(a+x)^2}{4ax} - 1\right]$

Avalda järgnevaist sidemeist nõutud suurus!

92.

a) $v = \frac{s}{t}$ avalda t

b) $J = \frac{E}{R}$ „ R

c) $s = \frac{at^2}{2}$ „ t

d) $W = T_1(v - T_2 v)$ avalda T_2

93.

a) $i = \frac{E}{r+R}$ avalda R ja r

b) $n = \frac{s}{w} - 1$ „ s ja w

c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$ „ f ja k

d) $s = \frac{rl-a}{r-1}$ „ a ja r

94.

a) $V = Vo + at$ avalda t

b) $f = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$ „ m_2 ja r

c) $p = \frac{(a+b)n}{2}$ „ a ja b

d) $s = \frac{n}{2}(a_1 + A_n)$ „ a_1 ja A_n

95.

a) $P = \pi l(r - r_1)$ avalda r_1

b) $P = \pi ab - \pi a^2$ „ a

c) $s = \pi^2(R_1^2 - R_2^2)$ „ R_1 ja R_2

d) $s = \pi l(r_1 + r_2)$ „ r_1 ja r_2

96.

a) $n = \frac{wh}{d(w+p)}$ avalda p ja d

b) $q = 1 + \frac{p}{100}$ „ p

c) $S = 2\pi r(h+r)$ avalda h

d) $V = \pi h^2(R - \frac{h}{3})$ „ R

97. a) $m = l \cdot \left(\frac{d-4}{4}\right)^2$ avalda d

b) $s = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ „ d ja n

c) $\frac{1}{w} = uv\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)$ „ w ja v

d) $\frac{1}{T} = \frac{2n}{\frac{1}{k} + \frac{1}{l}}$ „ T ja l

Võrrandeid.

98. a) $\frac{5x}{3x+1} - \frac{1}{9x+3} = 1\frac{1}{6}$

b) $\frac{2}{v-7} + \frac{1}{7+v} + \frac{v^2}{v^2-7} = 0$

c) $\frac{7}{45t} + \frac{0,2}{9-3t} = \frac{1}{15t}$

d) $\frac{21}{30-10z} + \frac{4,2}{7z+3} - \frac{5}{1,2-4z}$

99. a) $\frac{3(y-1)}{y+1} - \frac{2(y+1)}{y-1} = 5$

b) $\frac{3-4x}{2x+1} + \frac{x+1,2}{7+x} + \frac{4x^2+3x-2}{2x^2+15x+7} = 0$

c) $\frac{2u-4}{5} - \frac{5}{1,4-u} = \frac{3,2u+4}{2}$

d) $\frac{1}{2} + \frac{2}{s+2} = 1\frac{5}{8} - \frac{5s}{4s+8}$

100. a) $\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{3x-4}{3x+3}$

b) $\frac{x}{x-5} - 1 = \frac{10}{x^2-7x+10}$

c) $\frac{4}{3} + \frac{6z-1}{9z-6} = 2 - \frac{z-8}{9z^2-4}$

d) $\frac{4t+1}{t+1} - 4 = \frac{t-1}{t^2-2t+1}$

101. a) $\frac{2s+7}{6s-4} - \frac{3s-5}{9s+6} = \frac{17s+7}{9s^2-4}$

b) $\frac{3-2w}{2+w}-\frac{2+3w}{2-w}=\frac{1}{3}+\frac{16w+w^2}{w^2-4}$

c) $\frac{5y+2}{3y-1}=\frac{5y^2+3}{3y^2-7y+2}=\frac{7y+4}{y-2}$

d) $\frac{1+x+x^2}{1+x+x^2+x^3}-\frac{1-x+x^2}{1-2x^2+x^4}-\frac{1}{1+x}$

102. a) $\frac{9-x}{x-6}-\frac{6+x}{9-x}=\frac{81}{9x+6x-54-x^2}$

b) $\frac{2-t}{3}-\frac{2-t^2}{4-t-2\,(1-t)}-\frac{t}{2+t}=0$

c) $\frac{3v+14}{4v^2+16\,(v+1)}+\frac{4v+10}{8v+v^4}=\frac{4-4v+3v^2}{16v-8v^2+4v^3}$

d) $\frac{2x^2+2x+1}{x^2+3x+2}+\frac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+3}=\frac{2x^2+2}{x^2+5x+6}+2$

103.

a) $\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a+x}=\frac{a}{a^2-x^2}$

b) $\frac{a}{x-b}+2=\frac{b}{b-x}$

c) $\frac{v}{a+1}+\frac{1-a}{2a-v}=0$

d) $\frac{a+1}{c-1}=\frac{a+z}{c-z}$

104.

a) $\frac{m(n^2+x^2)}{nx}=3m+\frac{mx}{n}$

b) $\frac{a-2x}{a^2-x}-\frac{a}{x}=0$

c) $\frac{z}{mn-n^2}-\frac{z}{m^2-mn}=\frac{m+n}{16-m^2}$

d) $\frac{1}{(a^2-x)^2}=\frac{4x}{4x^3+5a^6}$

105. a) $\frac{a}{x}+2+\frac{b^2}{ax}=\frac{2b}{x}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

b) $\frac{7c}{2v-5c}=\frac{7(c+2)}{2v}-\frac{7c}{5c-2v}$

c) $\frac{n}{n^2-y^2}=\frac{y+n}{n-y}+\frac{y+n}{n+y}$

d) $\frac{6m+5n}{6m}-1=\frac{4nz}{3m^2}-\frac{nz}{m^2+mn}$

106. a) $\frac{t}{a-b}-a=\frac{2b}{a+b}-1+\frac{t}{a^2-b^2}-b$

b) $\frac{2c}{c+x}=\left(\frac{x}{c-x}+1\right)\left(1-\frac{x}{c+x}\right)$

c) $\left(\frac{z}{4b}-1\right)\left(\frac{z}{2b}-1\right)=\left(3-\frac{z}{8b}\right)\cdot\left(1-\frac{z}{b}\right)$

d) $\frac{5}{x^2+ax-13a^2}+\frac{2}{x^2-16a^2}=\frac{1}{x^2-7ax+12a^2}$

4. Võrded.

Võrde põhiomadus.

Võrre (proportsioon) on kahe suhte võrdus.

$a:b=c:d$ ehk $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ on võrre.

Iga võrre koosneb neljast liikmest. Esimene ja neljas (a ja d) on võrde äär-, teine ja kolmas (b ja c) on võrde siseliikmed. a ja c on võrde eesliikmed; b ja d on tagaliikmed.

Korrutame võrde $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ mõlemad pooled bd-ga, saame $\frac{a\cdot bd}{b}=\frac{c\cdot bd}{d}$ ja pärast taandamist:

$$\boldsymbol{ad=cb.}$$

Sõnades: **Võrde äärliikmete korrutis on võrdne siseliikmete korrutisega.**

See on võrde põhiomadus.

Võrde põhiomaduse abil kontrolli, kas on järgnevad võrded õiged!

107. a) $\frac{7}{3}=\frac{91}{39}$

b) $\frac{13}{7}=\frac{169}{91}$

c) $\frac{17}{9}=\frac{187}{97}$

d) $\frac{17}{23}=\frac{323}{437}$

108. a) $\frac{41}{31}=\frac{697}{527}$

b) $4\frac{3}{7}=4\frac{51}{119}$

c) $1\frac{8}{29}=1\frac{17}{67}$

d) $1\frac{6}{17}=\frac{229}{221}$

109. a) $\frac{1}{2}:\frac{5}{8}=\frac{2}{3}:\frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{6}:\frac{7}{8}=\frac{3}{5}:\frac{7}{9}$

c) $16\frac{1}{2}:5\frac{3}{4}=14\frac{2}{3}:5\frac{1}{9}$ d) $74{,}34:24{,}78=89{,}28:29{,}76$

110. a) $\frac{x^2+2xv+y^2}{x^2-y^2}=\frac{x+y}{x-y}$

b) $\frac{a^3-8}{a^3-4a^2+4a+8}=\frac{a-2}{a+2}$

c) $\frac{m^4+m^2n^2-m^2n^3+n^5}{m^4+m^2n^2-m^3n^2-m^5}=\frac{m^2-n^3}{n^2-m^3}$

d) $\frac{c^3-3c^2+3c-1}{c^3-c^2-c+1}=\frac{c-1}{c+1}$

Leia järgnevatest võrretest võrde tundmatu liige x!

111. a) $17:5=68:x$

b) $x:5{,}2=57{,}5:9{,}2$

c) $5ab:7bc=x:3\frac{1}{2}c$

d) $x:\frac{k}{m}=\frac{m}{n}:\frac{k}{l}$

112. a) $4{,}125:x=3\frac{1}{7}:26\frac{2}{3}$

b) $x:4km=2\frac{1}{4}an:kn$

c) $\frac{14q}{p}:x=\frac{7q}{3r}:\frac{p}{2r}$

d) $\frac{a+5}{a-5}:\frac{a^2-25}{5a}=x:\frac{(a-5)^2}{2a}$

Leia kolmele antud arvule neljas võrdeline!

Näidis:

$$6;\ 21;\ 22.$$

$$6:21=22:x;\qquad 6x=22\cdot 21;$$

$$x=\frac{22\cdot 21}{6}=77.$$

113. a) $4;\ 9;\ 18\frac{2}{3}$

b) $-6;\ -8;\ 12$

c) $\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4}$

d) $3{,}2;\ 18;\ 28$

114. a) $3a;\ 5b;\ 6ab$

b) $\frac{3}{4}m;\ \frac{5}{6}n;\ \frac{8}{9}m^2;$

c) $5\frac{2}{3};\ 9\frac{1}{6};\ 10\frac{1}{5}$

d) $a^2-a+1;\ a-1;\ a^3+1$

Kui võimalik, siis koosta võrded järgnevatest arvude rühmadest!

115. a) $3;\ 4;\ 150;\ 200$

b) $8;\ 6;\ 6;\ 4\frac{1}{2}$

c) $-5;\ +17;\ +20;\ -64$

d) $m;\ m^2;\ \frac{1}{m};\ \frac{1}{m^2}$

116. a) $32;\ 24;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3}$

b) $10;\ 100;\ 3;\ 4$

c) $-9;\ 8;\ -3;\ 24$

d) $a+3;\ a-3;\ a^2-9;\ 1$

Võrrete teisendusi.

117. Kasustades võrde põhiomadust, tõesta, et igas võrdes võime ümber vahetada:

a) siseliikmed $\boldsymbol{a : c = b : d}$,

b) äärliikmed $\boldsymbol{d : b = c : a}$,

c) mõlemad siseliikmed mõlemate äärliikmetega

$$\boldsymbol{b : a = d : c.}$$

118. Antud võrdustest moodusta kõik võimalikud võrded!

a) $8 \cdot 27 = 9 \cdot 24$ b) $180 \cdot 56 = 84 \cdot 120$

c) $x \cdot y = u \cdot v$ d) $2{,}6 \cdot 15{,}5 = 6{,}5 \cdot 6{,}2$

119. Antud võrretest moodusta kõik võimalikud võrded!

a) $100 : 25 = 24 : 6$ b) $84 : 72 = 49 : 42$

c) $m : n = k : l$ d) $2{,}4 : 1{,}6 = 4{,}5 : 3$

Võrdetegur.

Kui on antud võrre

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$$

ja kui märgime iga antud suhte väärtuse k-ga, siis:

$$\frac{a}{a_1} = k \text{ ja } a = ka_1$$

$$\frac{b}{b_1} = k \text{ ja } b = kb_1 \text{ jne.}$$

Tegurit k nimetame **võrdeteguriks.**

120. Antud võrretest leia võrdetegur!

a) $\frac{10}{12} = \frac{25}{30}$ b) $\frac{12}{16} = \frac{13{,}5}{18}$

c) $0{,}9 : 0{,}02 = 5 : \frac{1}{9}$ d) $2{,}5m : 5mn = 6{,}5am : 13an$

Kui on antud võrdsete suhete rida: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k$, siis: $a = ka_1$; $b = kb_1$ ja $c = kc_1$.

Liites võrdused saame:

$$a + b + c = ka_1 + kb_1 + kc_1$$
$$a + b + c = k(a_1 + b_1 + c_1)$$
$$\frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1} = k = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Kui on kaks või rohkem võrdset suhet, siis suhtub nende suhete eesliikmete summa tagaliikmete summasse, nagu suhtub iga eesliige enda tagaliikmesse.

Märkus. Võrdsete suhete rea $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ võime kirjutada ka järgneval kujul:

$$a : b : c = a_1 : b_1 : c_1 .$$

121. Leia võrdetegur ja proovi praegu tõestatud omadust järgnevate võrdsete suhete juures!

a) $\frac{10}{5} = \frac{18}{9} = \frac{14}{7}$ b) $\frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{21}{14}$

c) $\frac{5}{6} = \frac{6}{7{,}2} = \frac{1{,}5}{1{,}8}$ d) $8\frac{2}{3} : 52 = 1\frac{1}{2} : 9 = 2\frac{5}{6} : 17$

Keskmine võrdeline.

Kui võrdes on samad kas mõlemad äär- või mõlemad siseliikmed, siis nimetame seda korduvat liiget **keskmiseks võrdeliseks** ehk **keskgeomeetriliseks.**

Võrdes $a : x = x : b$ on x a ja b keskmine võrdeline. Võrde põhiomaduse põhjal on

$$x^2 = ab,$$

millest $x = \sqrt{ab}$.

Tähendab: **Kahe arvu keskgeomeetriline on võrdne nende arvude korrutise ruutjuurega.**

Leia järgnevate arvupaaride keskmine võrdeline!

122. a) 2 ja 18 c) 4 ja 49

b) 3 „ 27 d) 3,6 „ 0,9

123. a) 2,4 ja 0,6 c) $8\frac{1}{4}$ ja $1\frac{1}{11}$
b) 7 „ 0,42 d) $15\frac{1}{3}$ „ $34\frac{1}{2}$

124. a) 4 ja 18
b) 5 „ 30
c) 0,6 „ 50
d) $3\frac{3}{4}$ „ $6\frac{2}{3}$

125. a) $9a^2b$ ja $4bc^2$
b) $\frac{6mn}{5p}$ „ $\frac{3mp}{4n}$
c) $\frac{2}{3}uv^2$ „ $\frac{3}{8}v$
d) $\frac{75r^2-3}{32}$ „ $\frac{10r+2}{15r-3}$

126. Sirglõigu pikkus on 48 cm. Jaga sirglõik kaheks osaks, nii et suurema osa pikkus oleks terve sirglõigu ja tema väiksema osa keskmine võrdeline!

Kui sirglõik jagatud kaheks osaks nii, et suurema osa pikkus on terve sirglõigu ja tema väiksema osa keskmine võrdeline, siis öeldakse, et sirglõik on jagatud **kuldlõikes.**

127. a) Kunstnikud tunnustavad kõige korrapärasemaks niisugust kuju, milles pihajoon jagab kogu kasvu kuldlõikes. Kui kõrgelt peaks läbitama monumendiks valmistataval inimesekujul pihajoon, kui kuju peab olema 4 m kõrge?

b) Raamatu kuju loetakse meeldivaks, kui raamatu pikkus ja laius on kuldlõikes jagatud sirglõigu osad. Leia raamatu laius, kui raamatu pikkus peab olema 22 cm!

c) Ristküliku ümbermõõt on $2p$. Leia ristküliku pikkus, nii et see oleks poole ümbermõõdu ja laiuse keskmine võrdeline!

IV. Võrrandsüsteemid kahe tundmatuga.

1. Üks võrrand kahe tundmatuga.

Lahendame ülesande: 3 sulge ja 5 poognat paberit maksavad 16 senti. Kui palju maksab üks sulg ja kui palju üks poogen paberit?

Olgu ühe sule hind x senti ja ühe poogna paberi hind y senti, siis

$$3x + 5y = 16.$$

See on esimese astme võrrand kahe tundmatuga.

Järelekatse näitab, et seda võrrandit rahuldab $x = 2$ ja $y = 2$, samuti rahuldab seda võrrandit $x = 1{,}5$ ja $y = 2{,}3$. On kerge järeldada, et on väga palju niisuguseid x ja y väärtustepaare, mis rahuldavad seda võrrandit. Koostame niisuguste väärtustepaaride tabeli ja kujutame need väärtustepaarid graafiliselt.

Et väärtustepaare kiiremini arvutada, selleks lahendame võrrandi y suhtes; saame:

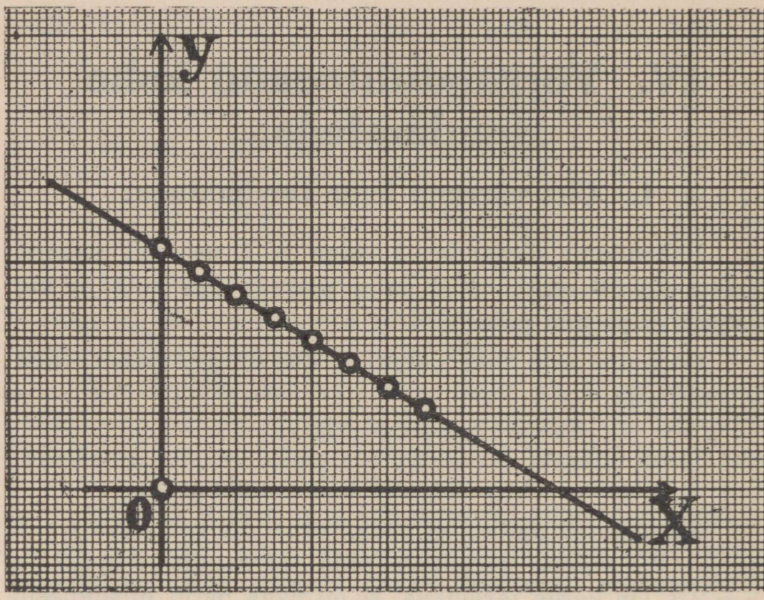
$$y = \frac{16}{5} - \frac{3}{5}x$$

$$\text{ehk } y = 3{,}2 - 0{,}6x$$

Kui $x =$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3.5
siis $y =$	3,2	2,9	2,6	2,3	2	1,7	1,4	1,1

Joonisest on kerge järeldada, et punktid, mille koordinaadid kujutavad meie ülesande lahendeid, asuvad ühel ja samal sirgel.

Ja ka ümberpöördult: sirge mistahes punkti koordinaadid rahuldavad meie võrrandit.



3. joonis.

Seda üldistades võime öelda: **Kahe tundmatuga esimese astme võrrandi normaalkuju on**

$$ax + by = c.$$

Üks võrrand kahe tundmatuga on määratamatu; ta võimaldab lõpmata palju lahendite paare.

Sellele võrrandile vastab graafiliselt sirge, mille mistahes punkti koordinaadid on võrrandi lahendid.

1. Kujuta graafiliselt: a) $y = 2x - 3$; b) $4x + 3y = 0$; c) $2x - y + 5 = 0$; d) $2x - 3y + 7 = 0$; e) $x - 2y + 2 = 0$.

Leia graafiliselt igale võrrandile vähemalt viis lahendite paari!

2. Võrrandsüsteem kahe tundmatuga.

Lahendame ülesande:

Kui esimese arvu kolmekordsega liidame teise arvu viiekordse, saame 19; kui esimese arvu neljakordsest lahutame teise arvu kolmekordse, saame 6. Leia need arvud!

Kui märgime esimese arvu x-ga ja teise arvu y-ga, siis

$$\text{I}\quad 3x + 5y = 19$$
$$\text{ja II}\quad 4x - 3y = 6.$$

Selles ülesandes on antud kaks tingimust ja kumbki tingimus annab meile ühe võrrandi kahe tundmatuga.

Esimesel kui ka teisel võrrandil on lõpmata palju lahendeid. Meil on tarvis aga leida niisugune x ja y väärtustepaar, mis rahuldab ühtlasi mõlemaid võrrandeid.

Niisuguseid paare, mis rahuldavad mõlemaid võrrandeid, on olemas ainult üks; see selgub, kui kujutame mõlemad võrrandid graafiliselt samas teljestikus.

$$\text{I}\quad 3x + 5y = 19 \quad \text{ehk} \quad y = 3{,}8 - 0{,}6x$$
$$\text{II}\quad 4x - 3y = 6 \quad \text{ehk} \quad y = \tfrac{4}{3}x - 2$$

I

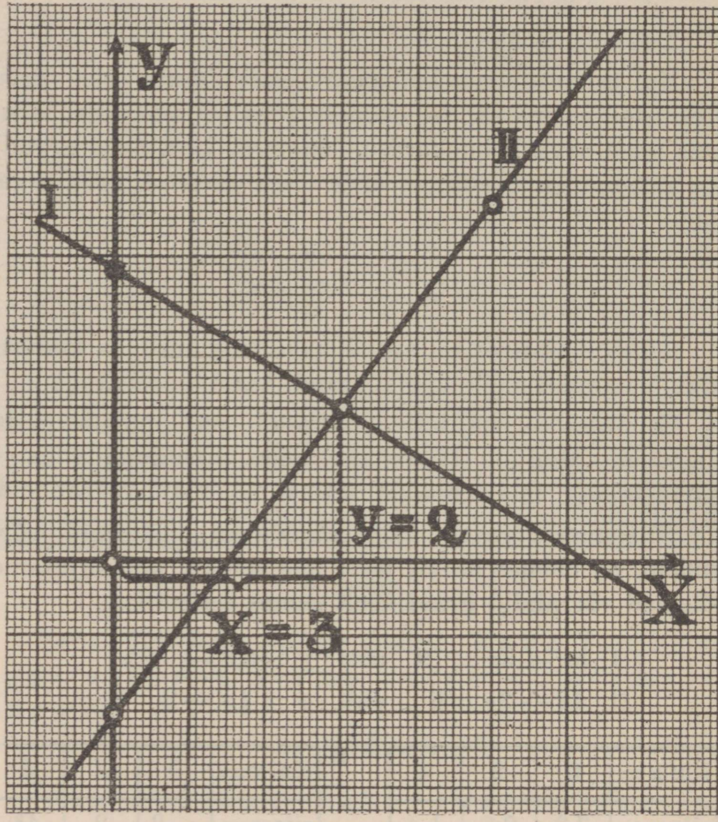
Kui $x =$	0	2	4
siis $y =$	3,8	2,6	1,4

II

Kui $x =$	0	3	5
siis $y =$	-2	2	$4\frac{2}{3}$

Nende kahe sirge lõikepunkti koordinaadid kuuluvad esimese kui ka teise sirge punktile, ja seega rahuldab väärtustepaar $x = 3$ ja $y = 2$ mõlemaid võrrandeid, ühtlasi meie ülesande tingimusi.

Kahel sirgel on ainult üks lõikepunkt ja seetõttu on kahel võrrandil kahe t u n d m a t u g a a i n u l t ü k s t u n d m a t u t e v ä ä r t u s t e p a a r, m i s r a h u l d a b ü h t e a e g u m õ l e m a i d v õ r r a n d e i d.



4. joonis.

Ainult kaks võrrandit koos määravad ära kaks tundmatut arvu. Mõlemad võrrandid peavad olema teineteisest olenematud, s. t. pole võimalik teisenduste abil ühte võrrandit tuletada teisest.

Kaht võrrandit kahe tundmatuga nimetame **võrrandsüsteemiks** kahe tundmatuga.

Võrrandsüsteemile kahe tundmatuga anname teisenduste abil kuju (normaalkuju)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Lahendada võrrandsüsteem kahe tundmatuga tähendab leida niisugune tundmatute väärtustepaar, mis rahuldab ühteaegu mõlemaid võrrandeid.

Lahendada graafiliselt võrrandsüsteemid!

2. a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ y = x - 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 4y = 8 \\ 2y = x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4v + 48u = 0 \\ 6u + 5v = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

3. a) $\begin{cases} x - 3 = 1{,}5y \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3u + 5v + 7 = 0 \\ 3u - 5v + 2 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4y = 10x - 8 \\ 2y - 5x = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 8s + 5t = 83 \\ 8t - 5s = 26 \end{cases}$

4. a) $\begin{cases} 3y = 4x \\ 1{,}5y - 2x + 3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 15x + 20y + 4 = 0 \\ 4x + 6y + 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5{,}6x + 10y = 48 \\ 7x + 12{,}5y = 60 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 4y = 3x \end{cases}$

3. Kahe tundmatuga võrrandsüsteemi lahendamisvõtteid.

Võrrandsüsteemi lahendamisel püüame mõlemaid võrrandeid niiviisi ühendada, et kõrvalduks üks tundmatu ja et meil tekiks üks võrrand ühe tundmatuga, mida oskame juba lahendada.

Tutvume niisuguste võtetega.

Liitmisvõte.

Anname võrrandsüsteemile normaalkuju. Kui võrrandsüsteemis on ühe ja sama tundmatu kordajad isesugused, siis korrutame esimese ja teise võrrandi mõlemaid pooli niisuguste arvudega, et ühe ja sama tundmatu kordajate absoluutsed väärtused saaksid võrdseteks, kuid märkide poolest vastupidisteks; siis liidame liikmeti ühe võrrandi teisega. Seeläbi kõrvaldub üks tundmatu ja me saame ühe võrrandi ühe tundmatuga, mille siis lahendame.

Näidised:

a)
$$\left\{\begin{array}{l} 8x + 15y = 54 \\ 12x - 5y = 26 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 3 \end{array}\right| \begin{array}{r} 8x + 15y = 54 \\ 36x - 15y = 78 \\ \hline 44x = 132 \\ x = 3. \end{array}$$

Teise tundmatu arvutamiseks asetame leitud tundmatu väärtuse ühte olemasolevasse lihtsamasse võrrandisse ja sealt arvutame ka teise tundmatu väärtuse.

Asetame $x = 3$ võrrandisse $8x + 15y = 54$. Saame
$8 \cdot 3 + 15y = 54; \quad 15y = 54 - 24; \quad y = 2.$

b)
$$\left\{\begin{array}{l} 21x - 25y = 13 \\ 14x - 15y = 12 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot (-3) \end{array}\right| \begin{array}{r} 42x - 50y = 26 \\ -42x + 45y = -36 \\ \hline -5y = -10 \\ y = 2; \end{array}$$

$$14x - 15 \cdot 2 = 12; \quad 14x = 42; \quad x = 3.$$

Lahenda liitmisvõtte abil järgnevad võrrandsüsteemid!

5. a) $\left\{\begin{array}{l} 7x - 2y = 27 \\ 5x + 2y = 33 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} 5x + 8y = 31 \\ 3x + 8y = 25 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} 7x + 6y = 29 \\ -5x + 8y = 10 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} 7u - 4v = 85 \\ 5u - 6v = 1 \end{array}\right.$

6. a) $\left\{\begin{array}{l} 5x + 9y = 47 \\ 10x + 13y = 79 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} 7s - 3t = 3 \\ 8s + 3t = 19{,}5 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} 2x + 9y = 65 \\ 6x + 5y = 85 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} 3u - 5v = 4 \\ 7u - 7v = 5 \end{array}\right.$

7. a) $\begin{cases} 2x - 9y = -8 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2{,}4x - 5y = 2 \\ 1{,}2x - y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x - 6y = 8{,}6 \\ 7x + 6y = 36{,}2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{4}{5}x + y = 8 \\ \frac{2}{5}x + 1{,}2y = 6{,}8 \end{cases}$

8. a) $\begin{cases} k - 0{,}3l = 3 \\ 0{,}3k - l = 0{,}9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{2}{5}y = 2 \\ 1\frac{1}{3}x + \frac{3}{5}y = 18 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 10y = 8 \\ 4x + 2y = \frac{2}{5} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 1{,}3s + 2{,}4t = 4{,}3 \\ 2{,}6s + 0{,}8t = 3{,}6 \end{cases}$

Võrdlemisvõte.

Ilmutame mõlematest võrranditest ühe ja sama tundmatu teise tundmatu kaudu. Niiviisi saadud kaks avaldist on võrdsed, sest me otsime ainult niisugust tundmatu väärtust, mis on mõlematel võrranditel ühine. Saame võrrandi ühe tundmatuga, mida oskame lahendada.

Seda võtet on eriti kasulik tarvitada juhul, kui mõlemates võrrandites on ühe ja sama tundmatu kordaja 1.

Näidised:

a) $\begin{cases} y - 3x = -2 \\ y - 2x = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3y - 2x = 1 \\ 2y = 3x - 6 \end{cases}$

Ilmutame võrrandid y suhtes:

a) $y = 3x - 2$
$y = 2x + 1$

b) $3y = 2x + 1$
$y = \frac{2x+1}{3}$
$y = \frac{3x-6}{2}$

y väärtused on omavahel võrdsed:

a) $3x - 2 = 2x + 1$

siit

$x = 3$

ja

$y = 2 \cdot 3 + 1$
$y = 7.$

b) $\frac{2x+1}{3} = \frac{3x-6}{2}$

siit $4x + 2 = 9x - 18$
$-5x = -20$
$x = 4$

ja $y = \frac{2 \cdot 4 + 1}{3}$
$y = 3.$

Lahenda võrdlemisvõtte abil järgnevad võrrandsüsteemid!

9. a) $\begin{cases} y - 5x = 2 \\ y + 5x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ 2y - x = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2y + 3x = 4 \\ 4y + 6x = 7 \end{cases}$

10. a) $\begin{cases} y = 0{,}5x - 2 \\ y - 0{,}2x = 0{,}4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2u - 3v = 9{,}5 \\ 6u + v = 13{,}5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = \frac{1}{3}y - 2 \\ 2x - 4y = -24 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5s - 4t = 31 \\ 4s - 5t = 23 \end{cases}$

11. a) $\begin{cases} 7x + y = 21 \\ 3x = 2y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2u + v = 18 \\ 5u - v = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1\frac{1}{2}y = 5x \\ 2y - 5x + 3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5k + 4l = 51 \\ 2k + 2l = 22 \end{cases}$

Asendamisvõte.

Ilmutame ühest võrrandist ühe tundmatu teise tundmatu kaudu ja asetame saadud tundmatu väärtuse teise võrrandisse selle tundmatu asemele Saame võrrandi ühe tundmatuga, mida oskame lahendada.

Seda võtet on kasulik tarvitada juhul, kui vähemalt ühes võrrandis on ühe tundmatu kordaja 1.

Näidis:

$$\begin{cases} 4y - 5x = -5 \\ y + 5x = 5 \end{cases}$$

Ilmutame teisest võrrandist y, saame:

$$y = 5 - 5x.$$

Selle asetame I võrrandisse y asemele, saame:

$$\begin{aligned} 4(5 - 5x) - 5x &= -5 \\ 20 - 20x - 5x &= -5 \\ -25x &= -25 \\ x &= 1; \end{aligned}$$

$$y = 5 - 5 \cdot 1 = 0.$$

L a h e n d a a s e n d a m i s v õ t t e a b i l j ä r g - n e v a d v õ r r a n d s ü s t e e m i d !

13. a) $\begin{cases} 4x + y = 29 \\ 7x - 2y = 47 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2u - 3v = 3 \\ 8u - 3v = 21 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 8x - 5y = 16 \\ 10x - 3y = 17 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 8y = 3x + 25 \\ 8y = x + 19 \end{cases}$

14. a) $\begin{cases} 7y = 3x + 20 \\ 7y + 4x = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}s = 1 - t \\ \frac{1}{6}s = 3 - 4\frac{1}{4}t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = 21 \\ 5x + 4y = 72 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2u = 3v - 1 \\ 2v = u + 3 \end{cases}$

15. a) $\begin{cases} 3x + 14y = 47 \\ 2x - 21y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7k + 4l = 78 \\ 5k + 7l = 64 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}y - 3x = 2 \\ y - 14x = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 0{,}3y - 1{,}18 = 0{,}5x \\ 1{,}6y + 2x = 3{,}04 \end{cases}$

16. a) $\begin{cases} 7x = 5y \\ 15y + 70 = 28x \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x}{3} + 4y = 66 \\ 3x + \frac{y}{4} = 22 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2\frac{1}{2}m - 1\frac{1}{4}n = 7{,}5 \\ 1{,}2m + 0{,}7n = 8{,}8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 4\frac{1}{3} \\ 1{,}5y - 1\frac{2}{9} = \frac{5x}{3} \end{cases}$

4. Harjutusi ja ülesandeid.

Lahenda järgnevad võrrandsüsteemid, kasustades kõige sobivamat võtet!

17. a) $\begin{cases} y + 2x = 15 \\ y = 3x \end{cases}$

b) $\begin{matrix} 3x - y = 22 \\ x = 2y \end{matrix}$

c) $\begin{cases} 4y = 3x \\ 3x - y = 11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 12y - 5x = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$

18. a) $\begin{cases} x - y = 7 \\ x = 3y + 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2y - x = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 2y + 3 \\ x = 8y - 15 \end{cases}$

19. a) $\begin{cases} 4x - 3y = 3 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 13 - 5y \\ 5y + x = 23 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 1 - x \\ 5y = 11 - 3x \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x = 4 + 3y \\ x = 7 - y \end{cases}$

20. a) $\begin{cases} 12x - 25y = 10 \\ 3x - 8y = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2u + 3v = 11 \\ 2u - 3v = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 8s - 3t = 11 \\ 6s - 5t = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7p - 5q = 25 \\ 7p = 10q + 15 \end{cases}$

21. a) $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 3 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = \frac{1}{4}x - 2 \\ y = \frac{x-3}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + \frac{5}{4}y = 10 \\ y = \frac{5}{4}x - 2\frac{1}{4} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y = 1\frac{3}{5} \\ 2x + y = \frac{1}{5} \end{cases}$

22. a) $\begin{cases} 3{,}2R = 5r \\ R = 14\frac{1}{2} - 7{,}5r \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0{,}25u + 0{,}1v = 13 \\ u - 1\frac{1}{2}v = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{4}x = 2 + \frac{1}{3}y \\ 4{,}5x - 81 = y \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{s}{2} + \frac{t}{5} = 11 \\ \frac{s}{9} + \frac{t}{2} = 7 \end{cases}$

23. a) $\begin{cases} \frac{1}{2}u = v \\ \frac{1}{6}u = 3 - 4\frac{1}{2}v \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{4}{9}t = 2\frac{1}{2}s - 1 \\ 8t = 66 + 3s \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{r_1}{2} = \frac{r_2}{3} + 1 \\ \frac{r_1}{4} = \frac{4r_2}{3} - 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2\frac{1}{4}m = 3\frac{1}{2}n + 4 \\ \frac{11m}{5} = \frac{10n}{3} - 47 \end{cases}$

24.

a) $\begin{cases} 2{,}3u - 3{,}2v + 0{,}22 = 0 \\ 0{,}3u - 0{,}4v + 0{,}02 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1{,}4R + 5{,}5r = 31{,}7 \\ 1\frac{1}{5}R + 2\frac{2}{3}r = 25\frac{14}{15} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4}y = 35 \\ 3\frac{3}{5}x - 3\frac{1}{3}y = 9\frac{1}{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3\frac{1}{4}r_1 + 4\frac{2}{3}r_2 = 84\frac{2}{3} \\ 2{,}8r_1 - 1{,}25r_2 = 36{,}05 \end{cases}$

25.

a) $\begin{cases} 3(y+3) - 2(x+5) = 0 \\ 2(y+6) = 3(x+2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9(v-9) = 11(u-21) \\ 11(v-11) = 9(u-19) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 10(3x-5y) - 9(x+y) = 644 \\ 5(7x-2y) = 8(8-y+5) + 271 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 19(5m+n) - 14(n-m) = 2(3m-4n) + 3(35m+4n) \\ 3m + 7 = 5n \end{cases}$

26.

a) $\begin{cases} 3(5x+0{,}5y) - (4x-0{,}4y) = 5(7x+0{,}4) - 0{,}75y \\ 10x + 3y = 32 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (y-3)(x+5) - 2 = xy \\ (x-1)(x+3) = xy + 22 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (5k-7)(7l-5) = 35kl - 39 \\ 11 - (5l-7)(5-7k) = 35kl \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3(x-1)(x-1) - 2(3x-7y) = (3x+2)(x-5) + 70 \\ 4(y-2)^2 - 7(x-2y) = 13 + y(4y-3) \end{cases}$

Järgnevad võrrandsüsteemid lahenevad lihtsalt, kui asetame uued abitundmatud $u = \frac{1}{x}$ ja $v = \frac{1}{y}$.

27. a) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=6 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{7}{x}-\frac{1}{y}=3{,}5 \\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{8}{y}=5-\frac{2}{x} \\ \frac{6}{y}-\frac{3}{x}=4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{4y}=1 \\ \frac{1}{5y}-\frac{1}{3x}=4 \end{cases}$

28. a) $\begin{cases} \frac{2}{5y}-\frac{1}{x}=1 \\ \frac{2}{y}+\frac{1}{4x}=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{4}{3x}-\frac{5}{y}=2 \\ \frac{6}{x}-\frac{4{,}5}{5y}=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3y-2x=6xy \\ y+x=7xy \end{cases}$

d) $\begin{cases} 8y=xy+9x \\ 10y=7xy-6x \end{cases}$

Harjutusi.

29.

a) $\begin{cases} \frac{u+v}{3}-\frac{u-v}{2}=2 \\ u=2v+3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x+1}{3}-\frac{2(x-y)}{5}=\frac{y+2}{4} \\ \frac{x-3}{4}-2y+x=\frac{y-3}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{k+2l}{7}-\frac{k-l}{2}=1 \\ k+3l=18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{25y-3x}{3}+0{,}4x=16+2y \\ 8x+14y=82 \end{cases}$

30.

a) $\begin{cases} \frac{x+2y}{5}-\frac{y+2x}{3}=1 \\ \frac{y+2y}{4}+\frac{x+y}{3}=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{5y+x}{4}-\frac{5x-y}{6}=26 \\ \frac{x-y}{6}-\frac{x-y}{4}=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{17-2t}{8}=\frac{3t-2s}{2} \\ \frac{3s+4}{4}=t-1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{4x+y}{5}-\frac{4x-3y}{6}=1\frac{1}{2} \\ \frac{2x}{3}-\frac{y}{2}=\frac{3}{4} \end{cases}$

31.

a) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y-1}{3}=y \\ \dfrac{9+y}{2}=1\frac{1}{3}x-6\frac{2}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5+4(0{,}1x+1)=1{,}1y \\ 6+4\left(\frac{1}{x}-1\right)=\dfrac{11+0{,}3y}{x} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{m+1}{5}+0{,}3(n-2)-1=0 \\ \dfrac{n-3}{4}-\dfrac{4m+9}{20}+1\frac{1}{2}=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{3y}{5}+\dfrac{8x-9y-1}{12}=1\frac{7}{8}x \\ x+\frac{1}{5}y+8=\frac{1}{2}(2y+x) \end{cases}$

32.

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{3x-4}=\dfrac{3}{4}:y \\ \dfrac{1}{y-1}=\dfrac{1}{y+1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{8x+1}{1{,}5-y}=11 \\ \dfrac{7y+0{,}3}{2x-0{,}3}=6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{t-3}{v+2}=\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{t+1}{v-2}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{r+3s+13}{4r+5s-25}=3 \\ 2(4r+3)+s=5(5r+3s)-115 \end{cases}$

33. a) $\begin{cases} \dfrac{6x-5y}{2}+\dfrac{3x+11\frac{2}{3}y}{3}=3\frac{1}{2} \\ \dfrac{4x-3y}{13}-\dfrac{3x+5y}{75}=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{0{,}2x+0{,}1y}{2}-\dfrac{3x-0{,}5y}{30}=\dfrac{3(2x-y)}{10} \\ 3{,}125-\dfrac{0{,}8x-5y}{41}=\dfrac{3x+2y}{8} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{5x-y}{7}-\frac{2}{5}y=\dfrac{y-16}{14}-3 \\ 12+\dfrac{x+3y}{10}=\frac{1}{3}y+\dfrac{3x+y}{15} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x-9}{x-4}=\dfrac{12y-3}{12y+4} \\ \frac{2}{3}x+\dfrac{3(10y-1)}{4}=2\frac{1}{2} \end{cases}$

34. a) $\begin{cases} \dfrac{1-9k}{1-l}+4=0 \\ \dfrac{k}{2k-10}+\dfrac{1}{4k-20}=\dfrac{5l}{6k-30} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{y-6}{x-4}+\dfrac{10}{x^2-16}=\dfrac{y+6}{x+4} \\ \dfrac{10}{xy}-\dfrac{5}{3x-x^2}=\dfrac{3}{xy-3y} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{13}{6x-3}+\dfrac{5(y+1)}{4x-2}+\dfrac{2x}{2x-1}=2 \\ \dfrac{y(2x-9)}{10y+45}=0,2x-\dfrac{3x-5}{4y+18} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{3x+4}{2}-3\dfrac{1}{4}=\dfrac{6x+9}{4}-\dfrac{3x+5y}{6-4x} \\ \dfrac{6x-3y}{2y-8}-4=\dfrac{4y-9}{5}-\dfrac{8y+7}{10} \end{cases}$

Ülesandeid võrrandsüsteemide koostamiseks.

Võrrandsüsteemi abil kahe tundmatuga võime lahendada niisuguseid ülesandeid, milles nõutakse kahe tundmatu suuruse leidmist kahe tingimuse abil, mis sisaldavad olenevust nende tundmatute ja antud suuruste vahel.

Tundmatute tähistamiseks võtame eri tähed ja koostame kaks võrrandit vastavalt ülesande tingimustele.

35. a) Kahe arvu summa on 152, nende vahe on 118. Leia need arvud!

b) Kahe arvu summa on 29, nende vahe on 4,6. Leia need arvud!

c) Üks arv on teisest $\frac{5}{6}$ võrra suurem, nende arvude summa on $6\frac{1}{6}$. Leia need arvud!

36. a) Kahe arvu summa on 104, nende arvude jagatis on $\frac{6}{7}$. Leia need arvud!

b) Kahe arvu vahe on 5,6, nende jagatis on $\frac{3}{11}$. Leia need arvud!

c) Üks arv on teisest $3\frac{1}{2}$ korda suurem, nende arvude vahe on 15. Leia need arvud!

37. a) Kahe arvu summa on 14, nende arvude ruutude vahe on 168. Leia need arvud!

b) Kahe arvu vahe on 1, nende arvude ruutude vahe on 15. Leia need arvud!

c) Kahe arvu summa on $7\frac{1}{4}$, nende arvude ruutude vahe on 16,3125. Leia need arvud!

38. a) Kui murru lugejast lahutame 1, saame $\frac{1}{5}$, kui murru nimetajast lahutame 1, saame $\frac{1}{4}$. Leia see murd!

b) Murdarv muutub pärast taandamist $\frac{3}{4}$-ks. Kui selle murdarvu lugejaga ja nimetajaga liidame 4, siis saame $\frac{4}{5}$. Leia see murd!

c) Kui murru lugejaga liidame 5, saame 1; kui aga murru nimetajast lahutame 11, saame 3. Leia see murd!

39. a) Kahe arvu summa on 37. Kui jagame suurema arvu väiksemaga, saame jagatises 3 ja jäägis 5. Leia need arvud!

b) Kahe arvu vahe on 84. Kui jagame suurema arvu väiksemaga, saame jagatises 3 ja jäägis 10. Leia need arvud!

c) Esimene arv suhtub teisesse nagu 12 : 5. Kui jagame esimese arvu teisega, saame jagatises 2 ja jäägis 6. Leia need arvud!

40. a) Kui kahekohase arvu jagame selle arvu ristsummaga, saame jagatises 8; kui ümber vahetame kümnelised ja ühelised, saame arvu, mis on endisest 45 võrra väiksem. Leia see arv!

b) Kahekohase arvu ristsumma on 13; kui jagame kümneliste arvu üheliste arvuga, saame jagatises 2 ja jäägis 1. Leia see arv!

c) Kui kahekohase arvu jagame selle arvu ristsummaga, saame jagatises 4 ja jäägis 9; kui otsitavas arvus vahetame ümber kümneliste ja üheliste arvu ja jagame selle arvu ristsummaga, siis saame jagatises 6 ja jäägis 6. Leia see arv!

41. a) Kolmnurgas on üks nurk 47^0; kahe ülejäänud nurga vahe on 33^0. Leia kolmnurga nurgad!

b) Kolmnurga välisnurk on 111^0; selle välisnurgaga mitte kõrvu seisvate nurkade vahe on 40^0. Leia kolmnurga nurgad!

c) Kolmnurga suurim nurk on keskmisest 12^0 võrra suurem, keskmine on väikesimast $12^0 45'$ võrra suurem. Leia kolmnurga nurgad!

42. a) Ristküliku ümbermõõt on 25 cm; tema kaks lähiskülge suhtuvad nagu 3:2. Leia ristküliku küljed!

b) Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 65 cm; selle kolmnurga alus suhtub haarasse nagu 5:4. Leia kolmnurga küljed!

c) Kahe ringi ümbermõõtude vahe on 113,04 cm; nende ringide diameetrite suhe on $\frac{4}{5}$. Leia ringide raadiused! (Võta $\pi = 3{,}14$!)

43. a) Ristküliku ümbermõõt on 40 cm; selle ristküliku üks külg on teisest 9 cm võrra pikem. Kui pikad on ristküliku küljed?

b) Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 43 cm; selle kolmnurga alus on haarast 5,6 cm võrra lühem. Kui pikad on kolmnurga küljed?

c) Kolmnurga ümbermõõt on 36 cm; selle kolmnurga väikesim külg on keskmisest 4,2 cm võrra lühem ja keskmine külg on suurimast 2,7 cm võrra lühem. Kui pikad on selle kolmnurga küljed?

44. a) Kahe kontsentrilise ringi punktide vaheline väikesim kaugus on 8 cm ja suurim kaugus on 22 cm. Leia ringide raadiused!

b) Maakera ja Marss tiirlevad ümber Päikese ligikaudu ringjoonelisi teid mööda. Ajal, mil nad teineteisele kõige lähemal seisavad, on nendevaheline kaugus ümmarguselt 95 milj. km; ajal, mil nad teineteisest kõige kaugemal asetsevad, on nende kaugus ümmarguselt 355 milj. km. Leia nende planeetide kaugused Päikesest!

c) Raudteed mööda Tallinnast Narva on 210 km; Tallinnast Tartu 191 km ja Tartust Narva 255 km. Kui palju maad on Tapalt Tallinna ja Tapalt Tartu?

45. a) Lapse hoiukarbis olid kahesendised ja viiesendised rahad, kokku 43 raha 107 sendi väärtuses. Mitu viiesendist ja mitu kahesendist raha oli hoiukarbis?

b) Kassas on viiekroonised ja kümnekroonised rahad, kokku 18 raha 145 kr. väärtuses. Mitu viiekroonist ja mitu kümnekroonist raha on kassas?

c) Klassis on kaheistmelisi ja üheistmelisi pinke, kokku 20 pinki 37 õpilase jaoks. Mitu kaheistmelist ja mitu üheistmelist pinki on klassis?

46. a) Aino maksis 3 sidruni ning 8 apelsini eest 2,12 krooni. Uno ostis sama hinnaga 2 sidrunit ning 10 apelsini ja maksis 2,44 kr. Kui palju maksis üks apelsin ja kui palju üks sidrun?

b) Perenaine maksis 2 kg suhkru ja 400 g riisi eest 1,14 kr. Teine kord ostis sama hinnaga 1 kg suhkrut ja 600 g riisi, makstes 81 senti. Kui palju maksis 1 kg suhkrut ja kui palju 1 kg riisi?

c) Isa ja poeg töötasid üheskoos. Esimesel nädalal töötas isa 6 päeva ja poeg 4 päeva, selle nädala töötasuks maksti neile kokku 17,20 krooni. Järgmisel nädalal töötas isa 5 päeva, poeg 6 päeva ja mõlemad teenisid kokku 17 krooni. Kui suur oli isa päevapalk ja kui suur poja päevapalk?

47. a) Õpilane tahtis osta 6 sulge ja 10 poognat paberit, mis maksid 27 senti. Et õpilasel oli kaasas ainult 22 senti, siis sai ta selle raha eest osta vaid 5 sulge ja 8 poognat paberit. Kui palju maksis üks sulg ja kui palju 1 poogen paberit?

b) Pereema ostis keediste jaoks 8 l maasikaid ja 5 l vabarnaid, makstes kokku 266 senti. Maasikate eest maksis pereema 86 senti rohkem. Kui palju maksis 1 l maasikaid ja kui palju 1 l vabarnaid?

c) Rahakotis on 20-sendised ja 1-kroonised rahad, kokku 14 raha. 1-kroonistes on 80 sendi võrra raha rohkem kui 20-sendistes. Mitu 20-sendist ja mitu 1-kroonist raha on rahakotis?

48. a) Taluomanik sai $4\frac{1}{2}$ kg või ja 12 l piima eest 5,26 kr. Kui või hind oli tõusnud 15 % ja piima hind 10 %

võrra, sai taluomanik 3 kg või ja 20 liitri piima eest 5,21 kr. Kui palju maksis 1 kg võid ja kui palju 1 l piima?

b) Kaks ühiskauplust müüsid kaupa jaanuarikuus kokku 4200 kr. eest. Veebruarikuu läbimüük oli esimesel kauplusel 12% ja teisel kauplusel 8% võrra suurem kui jaanuaris; kokku oli läbimüük veebruaris 4608 kr. Leia kummagi kaupluse jaanuarikuu läbimüük!

c) Kapital 7500 kr. laenati välja kahes osas: esimene osa 6%-ga ja teine osa 4%-ga. Aastas saadi kogu kapitalit 490 kr. intressi. Kui suur oli kumbki osa väljalaenatud kapitalist?

49. a) Tädi saatis lastele pühadeks õunu. Kui iga laps oleks saanud 4 õuna, siis oleks tulnud 2 õuna puudu; kui aga iga laps oleks saanud 3 õuna, siis oleks jäänud 3 õuna järele. Mitu last oli ja mitu õuna saatis tädi?

b) Kui haridusselts oma eelarve tasakaalustamiseks oleks määranud liikmemaksuks 120 senti liikmelt, siis oleks tekkinud eelarves 9,6-kroonine puudujääk, kui aga oleks liikmemaksuks määratud 150 senti, siis oleksid tulud ületanud eelarve 18 kr. võrra. Mitu liiget oli seltsis ja missugune summa oli ette nähtud tuluna liikmemaksudest?

c) Kui autobus sõidaks keskmiselt kiirusega 30 km tunnis, siis kuluks sõiduks 4 min. rohkem, kui on ette nähtud; kui aga autobuse kiirust suurendada 5 km võrra tunnis, siis kuluks sõiduks 8 min. vähem, kui on ette nähtud. Mitu minutit on sõiduks ette nähtud ja kui pikk on sõidutee?

50. a) Keegi sai oma hoiusummalt aastas 156 kr. intressi. Pärast hoiuprotsendi vähendamist $\frac{1}{2}$ % võrra sai ta aastas 12 kr. vähem intressi. Kui suur on hoiusumma ja mitu protsenti maksis pank?

b) Määra kindlaks hoiul olev rahasumma ja selle protsent, kui on teada, et see hoiusumma ühes intressiga oleks $2\frac{1}{3}$ aasta pärast olnud 2031 kr. suur, aga $4\frac{1}{2}$ aasta pärast 2245,5 kr.!

c) Kui tasuda tehtud laen 8 kuu pärast, siis tuleks maksta ühes intressiga 162 krooni; kui aga tasuda laen $1\frac{1}{2}$ aasta pärast, siis tuleks maksta ühes intressiga 177 kr. Kui suur oli laen ja mitu protsenti võeti laenult?

51. a) Isa ütles tütrele: „Olen praegu sinust 3 korda vanem, aga 11 aastat tagasi olin sinust 14 korda vanem.“ Kui vana oli kõnealusel momendil isa ja kui vana oli tütar?

b) Ema ja poja vanus kokku on 53 aastat. Neli aastat tagasi oli ema oma pojast 4 korda vanem. Kui vana on praegu ema ja kui vana on poeg?

c) Venna ja õe vanuse suhe on $\frac{4}{3}$. Kaheksa aastat tagasi oli vend õest kaks korda vanem. Kui vana on käesoleval korral vend ja kui vana on õde?

52. a) 5 aastat tagasi oli õe ja venna vanuse suhe $\frac{4}{3}$, aga 7 aasta pärast on nende vanuste suhe $\frac{7}{6}$. Kui vana on praegu vend ja kui vana on õde?

b) Kahelt vennalt küsiti, kui vanad nad on. Vanem vend vastas: „Mina olen kaks korda nii vana, kui mu vend oli siis, kui mina olin nii vana kui mu vend on praegu; meie mõlemate vanus kokku on 28 aastat.“ Leia kummagi vanus!

c) Kahelt õelt küsiti, kui vanad nad on. Vanem õde vastas: „Kui minu õde saab nii vanaks kui mina, siis puudub minu aastatest veel 7 aastat, et olla kaks korda nii vana, kui õde on praegu. Käesoleval korral on meie vanuse vahe 3 aastat.“ Leia kummagi õe vanus!

53. a) Üks sõber ütleb teisele: „Anna mulle 60 senti oma rahast, siis on mul niisama palju raha kui sinul.“ Teine vastab: „Anna sina mulle 60 senti oma rahast, siis on mul kaks korda rohkem raha kui sinul.“ Kui palju raha on kummalgi sõbral?

b) Kaks naist lähevad turule mune müüma. Esimene ütleb teisele: „Anna mulle 13 muna, siis on mul mune 2 korda rohkem kui sinul.“ Teine vastab: „Anna sina mulle 12 muna, siis on mul 3 korda rohkem mune kui sinul.“ Mitu muna oli kummalgi müüjal?

c) On kaks taldrikut. Kui asetada esimesele taldrikule 400 g võid, siis kaalub see taldrik ühes võiga kolm korda rohkem kui teine taldrik. Kui asetada aga teisele taldrikule 400 g võid, siis kaalub see taldrik ühes võiga 4 korda rohkem kui esimene taldrik. Kui palju kaalub kumbki taldrik?

54. a) Mootorpaat sõidab jõel päri voolu kiirusega 16,5 km tunnis ja vastu voolu kiirusega 11,5 km tunnis. Leia mootorpaadi kiirus seisvas vees ja veevoolu kiirus!

b) Narva ja Narva-Jõesuu vahemaa on jõge mööda 13,6 km. Aurik „Paul“ sõidab Narvast Narva-Jõesuhu 40 minutiga ja Narva-Jõesuust Narva 50 minutiga. Leia aurik „Pauli“ kiirus seisvas vees ja Narva jõe voolu keskmine kiirus Narva ja Narva-Jõesuu vahel!

c) Pirita ja Tallinna vahemaa on 6 km. Kõva tuul puhub Piritalt Tallinna poole. Nende kohtade vahel ühendust pidav aurik tarvitab Tallinnast Piritale sõiduks 30 min. ja tagasisõiduks 20 min. Mitu km tunnis sõidab see aurik vaikse ilmaga?

55. a) Tartu ja Viljandi vaheline maantee on 80 km pikk. Tartust sõitis välja omnibus reisijatega Viljandisse ja samal ajal väljus Viljandist auto Tartu suunas. Nad kohtusid ühe tunni järel. Teine kord sõitis seesama omnibus Viljandist välja Pärnu poole ja samal ajal väljus Tartust seesama auto, et sõita Viljandi kaudu Pärnu. Auto möödus omnibusest 4 tunni järel pärast väljasõitu. Mitu km tunnis sõitis auto ja mitu km tunnis sõitis omnibus?

b) Kaks keha tiirlevad ringjoont mööda, mille pikkus on 300 cm. Kui nad tiirlevad teineteisele vastu, siis kohtuvad nad iga 4 sek. järel; tiirlevad nad aga samas sihis, siis kohtuvad nad iga 20 sek. järel. Missuguse kiirusega liiguvad kehad?

c) Talust linna võib sõita kas I klassi teed või külavaheteed mööda, kusjuures külavaheteed mööda on linna

6 km vähem maad. Talunik sõitis hobusega talust linna I kl. teed mööda 3 tunni 20 minutiga ja tagasi linnast koju külavaheteed mööda 3 tunni 15 minutiga, kusjuures sõidukiirus oli tagasiteel 2 km võrra tunnis vähem. Mitu km tunnis sõitis talunik linnasõidul ja kui palju maad on talust linna I kl. teed mööda?

56. a) Taluperemees palkas turbalõikamiseks teatava arvu töölisi. Üks palgatud töölistest ei ilmunud tööle ja seepärast oleksid pidanud kohale tulnud töölised 3 päeva võrra kauemini töötama. Peremees palkas veel 5 töölist juurde ja töö lõpetati 2 päeva võrra varemini, kui oli tööks ette nähtud. Mitu töölist oli esialgu kaubeldud ja mitu päeva oli kavatsetud turbalõikamiseks?

b) Ettevõetud töö jaoks palgati 2 rühma töölisi, kusjuures esimene rühm pidi töötama 8 päeva ja teine rühm 5 päeva. Tegelikult töötas aga esimene rühm 5 päeva ja teine rühm 8 päeva ja teostati seetõttu ainult 95% kogu ettevõetud tööst. Mitme päevaga oleks kumbki rühm üksikult kogu ettevõetud töö ära teinud?

c) Kaks töölist lubasid ettevõetud töö lõpetada 16 päevaga. Pärast 4-päevast ühistööd loobus üks tööline tööst ja teine tööline tegi ülejäänud töö ära 36 päevaga. Mitu päeva oleks kulunud kummalgi töölisel üksikult selle töö tegemiseks?

57. a) Mitu liitrit puhast vett ja mitu liitrit 5%-st soolalahust tuleks segada, et saada 14 liitrit 2%-st soolalahust?

b) Mitu cm^3 väävelhapet, mille erikaal on 1,84, ja mitu cm^3 puhast vett tuleks segada, et saaksime 800 cm^3 segu, mille erikaal oleks 1,15?

c) Mitu cm^3 95% piiritust ja mitu cm^3 puhast vett tuleks segada, et saada 500 cm^3 42% segu?

58. a) On olemas väävelhape erikaaluga 1,84 ja lahjendatud väävelhape, mille erikaal on 1,15. Mitu cm^3 tuleks võtta esimesest ja mitu cm^3 teisest happest, et saada 1,5 l segu, mille erikaal oleks 1,24?

b) Kui palju tuleks võtta 900-proovilist hõbedat ja kui palju 740-proovilist hõbedat, et saada 120 g sulatist, mille proov oleks 835?

c) Kui palju tuleks võtta 350-proovilist kulda ja kui palju 960-proovilist kulda, et saada 24 g sulatist, mille proov oleks 750?

Võrrandsüsteeme täheliste kordajatega.

59. a) $\begin{cases} x + y = m \\ x - y = n \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x = y + a \\ y = a + b \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y = m \\ 2x + y = n \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - 2m = 3x \\ x - y = m \end{cases}$

60. a) $\begin{cases} \frac{x}{y} = k \\ x - y = l \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = a \\ x : y = b \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{m}{n} \\ x - y = 2n \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x : y = a : b \end{cases}$

61. a) $\begin{cases} ax + by = 1 \\ ax - by = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ x = y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x : y = a : b \end{cases}$

62. a) $\begin{cases} ax + by = 2a \\ a^2x + b^2y = a + b \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax - by = a^2 - b^2 \\ a^2x - ay = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 2 \\ mx + ny = m^2 + n^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} ax + by = 2 \\ a^2x - by = a - b \end{cases}$

63. a) $\begin{cases} a(x - a) = 1 - ay \\ 2x = a(3 - ay) \end{cases}$

b) $\begin{cases} a(x - y) = 1 \\ x + y = \frac{3}{a} \end{cases}$

c) $\begin{cases} a(y-a) - by = b(a-x) \\ a(x+y) - b(y+b) = ab \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{k} + \frac{y}{l} = 8 \\ \frac{x}{3k} - \frac{y}{2l} = 3 \end{cases}$

64. a) $\begin{cases} \dfrac{3(x-a)}{a}+\dfrac{2y}{b}=0 \\ \dfrac{3(3x-a)}{a}=\dfrac{6y}{b} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{2}{x+y}=a \\ \dfrac{2}{ay+x}=\dfrac{1}{a} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2-y}-m=0 \\ y=1+m(m-x) \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y=6a \\ \dfrac{5-y}{x-1}=a \end{cases}$

65. a) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{a}-\dfrac{y-1}{b}=0 \\ (a+b)(x-y)+2b^2=(a+b)^2-2ab \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{a-b}-\dfrac{ax}{ay-by}=\dfrac{b}{y} \\ \dfrac{1}{a}-\dfrac{y}{ab}=\dfrac{b-a}{bx} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{(x-a)^2}{x-y}+\dfrac{(y-a)^2}{y-x}=x+y \\ (a+2)x-(a-1)y=1-2a \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{m-1}{m^2y-2my}-\dfrac{x+y}{2y}=\dfrac{1}{m} \\ \dfrac{y}{2m}+\dfrac{x}{2m-4}=\dfrac{m+1}{m^3-4m} \end{cases}$

Ülesandeid võrrandsüsteemide koostamiseks täheliste kordajatega.

66. a) Kahe arvu summa on s; nende arvude vahe on d. Leia need arvud!

b) Kahe arvu jagatis on m; nende arvude summa on s. Leia need arvud!

c) Kahe arvu suhe on $\frac{a}{b}$; nende arvude vahe on c. Leia need arvud!

d) Leia kaks arvu, nii et esimene oleks teisest k võrra ja k korda suurem!

Leia niisugused arvupaarid, võttes $k=2; 3; 4; 5; 6$!

67. a) Valimisringkonnas oli n hääletajat. Ettepandud kandidaadi poolthäälte arv oli p võrra suurem kui vastuhäälte arv. Mitu häält sai ettepandud kandidaat poolt ja mitu vastu?

b) Mingi ettepaneku hääletamisel, millest võttis osa k hääletajat, oli poolthäälte arvu suhe vastuhäälte arvuga nagu $a : b$; erapooletuid oli c. Mitu häält sai ettepanek poolt ja mitu vastu?

Arvuta poolthäälte arv, kui

1) $k=42;\ \frac{a}{b}=\frac{3}{2};\ c=2!$

2) $k=102;\frac{a}{b}=\frac{4}{5};\ c=12!$

c) Valimisringkonnas on n hääleõiguslikku kodanikku. Ettepandud kandidaadi hääletamisest võttis osa $a\,\%$ hääleõiguslikkudest ja kandidaadi vastuhäälte arv oli $l\,\%$ poolthäälte arvust. Mitu häält sai kandidaat poolt ja mitu vastu?

Arvuta poolthäälte ja vastuhäälte arv, kui

1) $n=9824;\quad a=67\,\%;\ l=34\,\%!$.

2) $n=10204;\ a=86\,\%;\ l=22\,\%!$

68. a) Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on m cm; selle kolmnurga alus suhtub haarasse nagu $a : b$. Leia selle kolmnurga alus ja haar!

Arvuta, kui

1) $m=84;\quad a:b=2:5!$

2) $m=17{,}5;\ a:b=3:2!$

b) Trapetsi keskjoon on k cm pikk; selle trapetsi rööbikud küljed suhtuvad nagu $\frac{a}{b}$. Leia trapetsi rööbikud küljed!

Arvuta, kui

1) $k=33;\quad \frac{a}{b}=\frac{2}{9}!$

2) $k=120;\quad \frac{a}{b}=\frac{5}{7}!$

c) Kahe sarnase kujundi vastavad küljed on a ja b cm. Esimese kujundi pind on teise kujundi pinnast d cm võrra suurem. Kui suured on nende kujundite pinnad?

Arvuta, kui

1) $a = 24$; $b = 16$; $d = 15$!

2) $a = 4{,}7$; $b = 2{,}3$; $d = 16\frac{2}{3}$!

69. Kahe sirglõigu pikkuste summa on s. Kui pikendada esimest sirglõiku a korda ja teist sirglõiku b korda, siis saame võrdsed sirglõigud. Kui pikad on sirglõigud?

b) Kahe ratta ümbermõõtude jagatis on a. Kui suurendame esimese ratta ümbermõõtu m võrra ja teise ratta ümbermõõtu vähendame n võrra, siis on nende rataste ümbermõõdud võrdsed. Leia rataste ümbermõõdud!

c) Vankri tagumise ratta ümbermõõt on esimese ratta ümbermõõdust d võrra suurem. Kui esimene ratas on teinud k pööret, siis on tagumine ratas niisama pikal maal teinud l pööret. Leia rataste ümbermõõdud!

70. a) Jõe-aurik sõitis s km pikkuse tee päri voolu a tunniga ja niisama pika tee vastu voolu b tunniga. Leia auriku kiirus seisvas vees ja jõe veevoolu kiirus!

b) Kahest kohast, mille kaugus teineteisest on s km, väljuvad ühel ja samal ajal sõidukid. Kui nad liiguvad teineteisele vastu, siis kohtuvad nad t min. pärast; kui nad liiguvad samas sihis, siis möödub järeletulev sõiduk esimesest T min. pärast. Missuguse kiirusega liigub kumbki sõiduk?

c) Kaks jalgratturit sõidavad velodroomil, mille ümbermõõt on p meetrit. Alates liikumist ühest ja samast punktist vastassuunas, kohtuvad nad iga k sek. järel; sõidavad nad aga samas suunas, siis möödub kiirem sõitja aeglasemast sõitjast iga l sek. järel. Missuguse kiirusega sõidab kumbki jalgrattur?

71. a) Veepaak täitub kahe toru kaudu, kui esimene toru on avatud k minutit ja teine toru l minutit; kui aga esimene toru on avatud m minutit ja teine toru l minutit, siis täitub $a\%$ veepaagist. Mitme minutiga täidaks kumbki toru üksikult veepaagi?

Arvuta, kui

1) $k=30$; $l=6$; $m=8$; $n=7{,}5$; $a=30$!

a) $k=8$; $l=22$; $m=2$; $n=1$; $a=5$!

b) Ettevõetud töö kavatsesid lõpetada kaks töölist, kui esimene oleks töötanud a päeva ja teine b päeva. Tegelikult töötas aga esimene tööline c päeva ja teine d päeva, kusjuures teostati $p\%$ kogu ettevõetud tööst. Mitme päevaga oleks kumbki tööline selle üksikult lõpetanud?

Arvuta, kui

1) $a=2$; $b=4$; $c=4$; $d=1$; $p=80$!

2) $a=10$; $b=5$; $c=2$; $d=7$; $p=70$!

c) Veepaaki saab ühe toru kaudu täita ja teise toru kaudu tühjendada. Veepaak täitub, kui avada esimene toru a minutiks ja teine toru b minutiks; kui aga avada esimene toru c minutiks ja teine toru d minutiks, siis täitub $\frac{1}{m}$ veepaagist. Mitme minutiga täidab esimene toru veepaagi, kui teine toru pole avatud, ja mitme minutiga tühjendab teine toru veepaagi, kui esimene toru on suletud?

Arvuta, kui

1) $a=20$; $b=4{,}5$; $c=14$; $d=6$; $m=3{,}5$!

2) $a=15$; $b=3$; $c=10$; $d=7{,}5$; $m=1\frac{2}{3}$!

V. Astmed ja juured.

1. Astmeline olenevus ja selle pööre.

1. a) Kuubi serv on a cm. Leia kuubi ruumala v cm^3-tes!

b) Kuubi serv on s meetrit. Leia kuubi ruumala v dm^3-tes!

c) Kuubi serv on l mm. Leia kuubi ruumala v cm^3-tes!

d) Kuubi serv on p cm. See kuup lõigati 20 ühesuuruseks plaadiks. Leia plaadi ruumala v cm^3-tes?

2. a) Igal isikul on kaks vanemat; igal vanemal jälle kaks vanemat jne. Mitu esivanemat on isikul 5. põlves, arvates käesolevast ajast tagasi?

b) x noormeest leppisid omavahel kokku anda kirjalikult edasi mingi teatis tingimusega, et igaüks teatab x isikule ja iga teatise saaja on kohustatud seda jälle edasi teatama kirjalikult x isikule jne. Seejuures tuleb oletada, et teatise edasiandmine toimub korrapäraselt ja teatiste edasiandmise kestus ühelt isikult järgmistele on üks päev. Mitu isikut y saavad selle kirjaliku teatise 6. päeval?

c) Aednik tellis endale välismaalt ühe haruldase taime seemneid arvult a tükki. Aasta möödudes andis iga taim u seemet, järgmisel aastal jällegi u seemet jne. Oletades, et kõik seemned on kasustatud istutamiseks ja et iga seeme annab elujõulise taime, leia, mitu seemet s on aednikul 4 aasta möödudes!

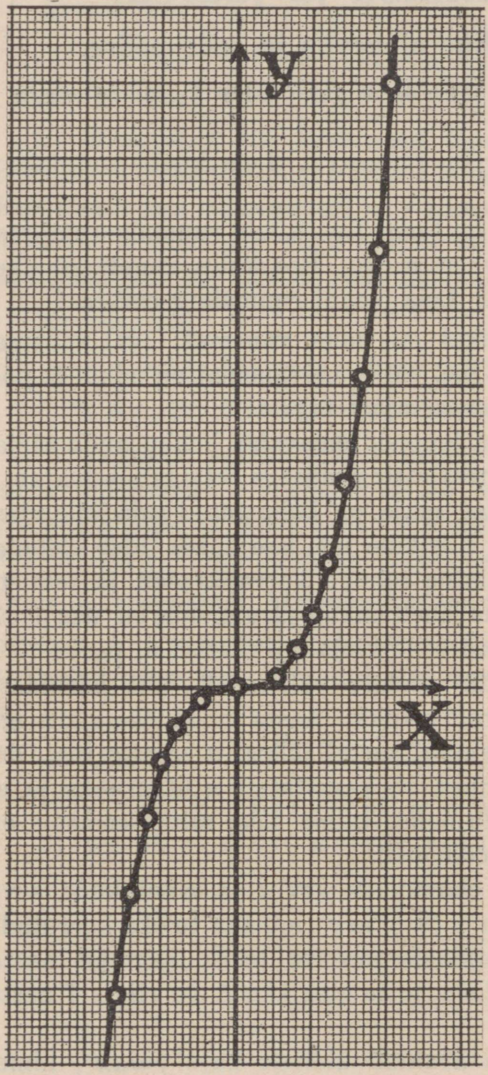
d) Olgu riigi elanikkude arv c ja elanikkude arvu suurenemistegur on q (s. o. arv, millega tuleks korrutada olemasolevate elanikkude arv, et leida järgmise aasta elanikkude arvu). Leia, mitu elanikku E on riigis 7 aasta pärast?

Olenevust, mis avaldub üldiselt kujul $y = ax^n$, nimetame **astmeliseks olenevuseks.**

Funktsiooni $y = x^3$ graafiline kuju.

Kujutame graafiliselt olenevuse $y = x^3$.

x	$y = x^3$
0	
+0,5	+0,125
+0,8	+0,512
+1	+1
+1,2	+1,728
+1,4	+2,744
+1,6	+4,096
+1,8	+5,832
+2	+8
—0,5	—0,125
—0,8	—0,512
—1	—1
—1,2	—1,728
—1,4	—2,744
—1,6	—4,096
—1,8	—5,832
—2	—8



5. joonis.

Kõverat nimetatakse kuubiliseks parabooliks.

3.

a) Kujuta graafiliselt samas teljestikus olenevused!

a) $y = 0,1x^3$;
b) $y = 0,5x^3$;
c) $y = x^3$;
d) $y = 2x^3$.

Kuidas oleneb kõvera kuju x^3 koefitsiendist?

b) Kujuta graafiliselt samas teljestikus olenevused:

a) $y = x$; b) $y = x^2$; c) $y = x^3$; d) $y = x^4$.

Astmelise olenevuse pööre.

Lahendame ülesande:

Olgu kuubi serva pikkus x cm; kuubi ruumala on siis cm^3-tes x^3 ja $x^3 = 729$.

x peab olema niisugune arv, mis, võetud kuubis, annab 729. Niisugune arv on 9, sest $9^3 = 729$.

Nimetame lahendatud ülesandes otsitava arvu kuupjuureks 729-st ja märgime järgmiselt:

$$x = \sqrt[3]{729} = 9.$$

b) Olgu $x^4 = 16$. Siis $x = \sqrt[4]{16} = 2$. Me ütleme, et $x = 2$ on neljas juur 16-st.

4. Leia järgmistest võrranditest astme alus!

a) $v^2 = 16$	b) $0{,}2y^4 = 125$	c) $\frac{1}{3}u^5 = 81$	d) $a^3 = n$
$c^3 = 8$	$z^3 = 343$	$s^3 = 216$	$ck^5 = m$
$z^5 = 32$	$x^6 = 1$	$3t^4 = 30000$	$av^7 = x$

5. Ülesandeist nr. 1 leia:

a) kuubi serv a, kui kuubi ruumala $v = 64$ cm^3!

b) kuubi serv s meetrites, kui kuubi ruumala $v = 343$ dm^3!

c) kuubi serv l mm-tes, kui kuubi ruumala on 0,216 cm^3!

d) kuubi serv l, kui plaadi ruumala on 50 cm^3!

6. Ülesandest nr. 2 leia:

a) isikute arv x, kui kuuendal päeval said kirjaliku teatise 729 isikut!

b) seemnete arv u, kui aednik tellis $a = 15$ seemet ja neljanda aasta möödudes oli aednikul $s = 121\,500$ seemet!

c) elanikkude arvu suurenemise tegur q, kui praegu on riigis a elanikku ja 7 aasta pärast on ette näha E elanikku!

Ülesandeis nr. 5 ja 6 otsime astme alust, kui on teada aste ja astendaja. See on astendamise pöördtehe. Seda tehet nimetatakse **juurimiseks.** Juurimistehte märgina tarvitame $\sqrt{}$ (võõrkeelne nimetus radikaal).

Definitsioon: **Antud arvu a n-es juur on arv, mis n astmes annab antud arvu a.**

$$\text{Kui on } \sqrt[n]{a}, \text{ siis } \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Me ütleme: $\sqrt[n]{a}$ on n-s juur a-st, kus a on **juuritav** ja n on juurejärgunäitaja ehk **juurija.**

Tuginedes $\sqrt[n]{a}$ definitsioonile leia juurte absoluutsed väärtused!

Näidis: $\sqrt[3]{5^6} = 5^2$, sest $(5^2)^3 = 5^6$.

	a	b	c	d
7.	$\left(\sqrt{5}\right)^2$	$\left(\sqrt[3]{11}\right)^3$	$\left(\sqrt[4]{9}\right)^4$	$\left(\sqrt[p]{x}\right)^p$
8.	$\sqrt{9^2}$	$\sqrt[3]{13^3}$	$\sqrt[5]{2^5}$	$\sqrt[n]{3^n}$
9.	$\sqrt{7^4}$	$\sqrt[3]{15^6}$	$\sqrt[4]{8^8}$	$\sqrt[p]{5^{pq}}$
10.	$\sqrt[3]{7^9}$	$\sqrt[5]{2^{10}}$	$\sqrt[4]{3^{12}}$	$\sqrt[n]{a^{mn}}$
11.	$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3$	$\sqrt[6]{b^{12}}$	$\left(\sqrt[5]{a^3}\right)^5$	$\sqrt[p]{3^{3p}}$
12.	$\sqrt{a^6}$	$\left(\sqrt[4]{b^2}\right)^4$	$\sqrt[4]{m^{16}}$	$\left(\sqrt[k]{u^2}\right)^k$

Leia juurte absoluutsed väärtused!

Näidis:

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3, \text{ sest } 3^4 = 81.$$

	a	b	c	d
13.	$\sqrt{121}$	$\sqrt[3]{8}$	$\sqrt[4]{1}$	$\sqrt[5]{32}$

	a	b	c	d
14.	$\sqrt{81}$	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt[4]{16}$	$\sqrt[5]{243}$
15.	$\sqrt[3]{216}$	$\sqrt[4]{81}$	$\sqrt[5]{1024}$	$\sqrt[4]{625}$
16.	$\sqrt{0{,}49}$	$\sqrt[3]{0{,}125}$	$\sqrt[4]{0{,}0016}$	$\sqrt[5]{0{,}00032}$
17.	$\sqrt{1{,}69}$	$\sqrt[3]{0{,}001}$	$\sqrt[4]{0{,}0001}$	$\sqrt[5]{0{,}00243}$

Juurte märgid.

Tuginedes $\sqrt[n]{a}$ definitsioonile leia juured, arvestades juuremärki!

Näidised: a) $\sqrt[3]{27} = +3$, sest $(+3)^3 = 27$

b) $\sqrt[3]{-27} = -3$, sest $(-3)^3 = -27$

c) $\sqrt[4]{16} = +2$, sest $(+2)^4 = 16$

d) $\sqrt[4]{16} = -2$, sest $(-2)^4 = 16$.

		a	b	c	d
18.	1)	$\sqrt{4}$	$\sqrt{-4}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{-16}$
	2)	$\sqrt[3]{8}$	$\sqrt[3]{-8}$	$\sqrt[3]{27}$	$\sqrt[3]{-27}$
	3)	$\sqrt[3]{-64}$	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt[3]{125}$	$\sqrt[3]{-125}$
	4)	$\sqrt[4]{16}$	$\sqrt[4]{-16}$	$\sqrt[4]{81}$	$\sqrt[4]{-81}$
	5)	$\sqrt[5]{1}$	$\sqrt[5]{-1}$	$\sqrt[5]{32}$	$\sqrt[5]{-32}$

Selle ülesande tulemusi võime üldistada ja kokku võtta järgmiselt:

1. *Paarisarvulise juurija korral saame positiivsest arvust kaks juurt, mille absoluutsed väärtused on võrdsed, kuid märgid on vastupidised.*

2. *Paarisarvulise juurija korral pole juurt negatiivsest arvust olemas; seesuguseid arve, nagu* $\sqrt{-4}$; $\sqrt[4]{-16}$; $\sqrt{-3}$; $\sqrt[4]{-2}$ jne., nimetatakse **imaginaarseteks arvudeks.**

3. Paarituarvulise juurija korral saame positiivsest arvust ühe positiivse juure ja negatiivsest arvust ühe negatiivse juure.

Irratsionaalsed arvud.

Juure otsimisel mistahes arvust veendume, et iga kord pole võimalik leida niisugust täisarvu, mis vastaks juure tingimusele.

Samuti pole olemas niisugust murdarvu, mis rahuldaks täpselt juure definitsiooni. (Tõesta, nagu I, 3!)

Seega ei kuulu suurem hulk juuri, näiteks $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{17}$, $\sqrt[5]{7}$ jne., siiamaani käsiteldud arvude valdkonda; neid iseliiki arvusid nimetatakse **irratsionaalseteks arvudeks.**

Irratsionaalset arvu pole võimalik täpselt avaldada täis- ega murdarvu abil.

Irratsionaalsele arvule võime aga leida lähisväärtuse kümnendmurru kujul, niisuguse täpsusega, nagu soovime.

2. Tehteid juuravaldistega.

Juurte korrutamine.

Tõestame, et $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$.

Võtame võrduse vasaku poole kolmandasse astmesse, saame

$$\left(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 = ab\,.$$

Kui korrutise $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ kolmas aste on ab, siis juure definitsiooni põhjal on see korrutis $\sqrt[3]{ab}$.

Üldiselt on maksev $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}$

ja ka ümberpöördult $\sqrt[n]{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}}.$

Sõnades: **Samade juurijate puhul on juurte korrutis võrdne juuritavate korrutise juurega.**

Ja ümberpöördult: **Korrutise juur on võrdne tegurite juurte korrutisega.**

Näidised:

a) $\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{64} = 4$

b) $\sqrt{162} = \sqrt{2 \cdot 81} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{81} = 9\sqrt{2}.$

Avalda järgnevad arvud ja juuravaldised võimalikult lihtsate juurte kaudu!

	a	b	c	d
19.	$\sqrt{72}$	$\sqrt{147}$	$\sqrt[3]{16}$	$\sqrt[3]{54}$
20.	$\sqrt{200}$	$\sqrt{363}$	$\sqrt[3]{-48}$	$\sqrt[4]{512}$
21.	$\sqrt{768}$	$\sqrt{288}$	$\sqrt[3]{-5000}$	$\sqrt[3]{108}$
22.	$\sqrt{648}$	$\sqrt{846}$	$\sqrt[3]{250}$	$\sqrt[5]{486}$
23.	$\sqrt{363}$	$\sqrt{128}$	$\sqrt[3]{-1024}$	$\sqrt[3]{16000}$
24.	$\sqrt{a^2}$	$\sqrt{ax^4}$	$\sqrt[3]{8a^3b}$	$\sqrt[4]{ba^8}$
25.	$\sqrt{x^5y}$	$\sqrt{5a^2x}$	$\sqrt[3]{8x^3y^6}$	$\sqrt[3]{40a^4b^3}$
26.	$\sqrt{-80x^3}$	$\sqrt{125x^3}$	$\sqrt[3]{81x^4}$	$\sqrt[3]{8a^5b}$
27.	$\sqrt{a^4bc}$	$\sqrt{4a^4b}$	$\sqrt[3]{54u^3v^4}$	$\sqrt[4]{-48c^5a^9}$
28.	$3\sqrt{18}$	$5\sqrt{-45}$	$2\sqrt[3]{320}$	$4\sqrt[4]{96}$
29.	$-2\sqrt{32}$	$\frac{1}{2}\sqrt{48}$	$\frac{2}{5}\sqrt{300}$	$0{,}2\sqrt[4]{-375}$
30.	$\frac{2}{3}\sqrt{63}$	$-0{,}6\sqrt{50}$	$0{,}2\sqrt[3]{192}$	$\frac{3}{4}\sqrt{2000}$
31.	$-\sqrt{3a^2}$	$xy\sqrt{9x^3}$	$-3\sqrt[3]{-8x^4}$	$\frac{1}{4}\sqrt[4]{81a^5b^9}$
32.	$0{,}2a\sqrt{a^2b^3}$	$-\frac{3}{x}\sqrt{8x^2}$	$\frac{1}{6}\sqrt[3]{54a^3b}$	$\frac{a}{c^2}\sqrt[4]{16a^{10}b^5c}$

	33.	**34.**	**35.**
a)	$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{72}$	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$
b)	$\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$	$\sqrt{6} \cdot \sqrt{15}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$
c)	$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$	$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{32}$	$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{100}$
d)	$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$	$\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49}$	$\sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{100}$

36.

a) $\sqrt{22} \cdot \sqrt{66}$
b) $\sqrt{30} \cdot \sqrt{30}$
c) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{80}$
d) $\sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{27}$

37.

$\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}$
$\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{3}$
$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5}$
$\sqrt[4]{24} \cdot \sqrt[4]{24}$

38.

$\sqrt{12} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{5}$
$0{,}5\sqrt{6} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{4}$
$\frac{2}{7}\sqrt[3]{72} \cdot \sqrt[3]{12}$
$\frac{2}{5}\sqrt[3]{80} \cdot \sqrt[3]{250}$

39.

a) $\sqrt{3x} \cdot \sqrt{5x}$
b) $\sqrt{2v} \cdot \sqrt{8v}$
c) $\sqrt[3]{2c} \cdot \sqrt[3]{4c^2}$
d) $\sqrt[4]{3a^2} \cdot \sqrt[4]{27a^3}$

40.

$\sqrt{7u} \cdot \sqrt{14u}$
$\sqrt{x^5} \cdot \sqrt{x^3}$
$\sqrt[3]{9v^3} \cdot \sqrt[3]{24v}$
$\sqrt[5]{9x^4} \cdot \sqrt[5]{27x}$

41.

$\sqrt{6a} \cdot \sqrt{2ab}$
$\sqrt{5m} \cdot \sqrt{10m^3}$
$\sqrt[3]{9x} \cdot \sqrt[3]{6x^2y}$
$\sqrt[4]{2x^7} \cdot \sqrt[4]{x^6}$

42.

a) $2\sqrt{c} \cdot \sqrt{c}$
b) $\frac{1}{3}\sqrt{2a} \cdot \sqrt{a}$
c) $\sqrt[3]{m} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot \sqrt[3]{m}$
d) $\frac{2}{a}\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[4]{16a^2}$

43.

$\sqrt{2x} \cdot \sqrt{6x} \cdot \sqrt{15}$
$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{15y}$
$2\sqrt[3]{25a^5} \cdot 3\sqrt[3]{15a^4}$
$5\sqrt[3]{12a^2} \cdot 2\sqrt[3]{18a^5}$

44.

a) $\frac{a}{2}\sqrt{3a} \cdot \frac{3}{b}\sqrt{6b}$
b) $m^2\sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \frac{5}{m}\sqrt{6m}$
c) $a^2\sqrt[3]{2x} \cdot \frac{1}{a}\sqrt[3]{4x}$
d) $\pi\sqrt[3]{aR^2} \cdot \frac{2}{3}\pi\sqrt[3]{a^2R^2}$

45.

$\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$
$\sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$
$\sqrt{5}(3\sqrt{3}+\sqrt{10})$
$3\sqrt{2}(\sqrt{8}-2\sqrt{5})$

46.

a) $\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{ab})$
b) $\sqrt{2x}(\sqrt{2}-\sqrt{6x})$
c) $m\sqrt{n}(\sqrt{mn}-2\sqrt{m})$
d) $5\sqrt{3c}(\sqrt{3c}+2\sqrt{ac})$

Juurte jagamine.

Üldiselt on maksev:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

ja ka ümberpöördult:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

M ä r k u s. Tõesta samuti, kui korrutise korral!

Sõnades: **Samade juurijate puhul on juurte jagatis võrdne juuritavate jagatise juurega.**

Ümberpöördult: **Murru juur on võrdne murru lugeja ja nimetaja juurte jagatisega.**

Näidised:

$$\text{a)}\ \frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{\frac{135}{5}}=\sqrt[3]{27}=3$$

$$\text{b)}\ \sqrt[3]{\frac{8}{125}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{2}{5}$$

Avalda järgnevad arvud ja avaldised võimalikult lihtsate juurte kaudu!

	a	b	c	d
47.	$\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$	$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$	$\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$
48.	$\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$	$\frac{\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{8}}$	$\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$
49.	$\frac{\sqrt{490}}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{507}}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{4}}$	$\frac{\sqrt[5]{160}}{\sqrt[5]{5}}$
50.	$\frac{\sqrt{a^3b}}{\sqrt{ab}}$	$\frac{\sqrt{x^5y^2z}}{\sqrt{xy^4z}}$	$\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a}}$	$\frac{\sqrt[3]{48x^5}}{\sqrt[3]{6x^2}}$

	a	b	c	d
51.	$\sqrt{\frac{25}{16}}$	$\sqrt{\frac{5}{24}}$	$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$	$\sqrt[3]{\frac{125}{64}}$
52.	$\sqrt{5\frac{4}{9}}$	$\sqrt{7\frac{9}{16}}$	$\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$	$\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$
53.	$\sqrt{1\frac{1}{15}}$	$\sqrt{1{,}21}$	$\sqrt[3]{1{,}024}$	$\sqrt[3]{1{,}458}$

54. a) $\sqrt{\frac{9b}{12}}$ b) $20\sqrt{\frac{a^2}{4b^2}}$

c) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{8}a}$ d) $\sqrt[3]{\frac{27a}{b^3}}$

55. a) $\sqrt{1\frac{7}{9}x^3}$ b) $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{4}a^2b}$

c) $\frac{2}{5}\sqrt[3]{\frac{625x^2y^4}{8}}$ d) $0{,}1\sqrt[3]{\frac{6000ab^3}{3a}}$

56. a) $\sqrt{\frac{12}{35}} : \sqrt{\frac{7}{5}}$

b) $\sqrt{2\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{0{,}1}$

c) $\sqrt[3]{96} : \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

d) $\sqrt[4]{27a^3} : \sqrt[4]{\frac{a^2}{3}}$

57. $\sqrt{\frac{5a}{3b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{3}}$

$\sqrt{\frac{21m}{5n}} : \sqrt{\frac{5}{7n}}$

$\sqrt[3]{\frac{R^2}{12a}} : \sqrt[3]{\frac{aR}{18}}$

$\sqrt[3]{\frac{5ab^2}{2m^2n}} : \sqrt[3]{\frac{2mn^2}{75b}}$

58. a) $\frac{\sqrt{(x+y)^2}}{\sqrt{x^2-y^2}}$ b) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}}$

c) $\frac{\sqrt[3]{m^3-n^3}}{\sqrt[3]{m-n}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{1-8x^3}}{\sqrt[3]{1+2x+4x^2}}$

Juurte astendamine.

Et aste on võrdsete tegurite korrutis, siis

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^3 = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot a \cdot a} = \sqrt[n]{a^3}.$$

Üldistades saame:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Sõnades: **Et astendada juurt, selleks on tarvis astendada juuritavat.**

Näidis: $\left(\sqrt{2a}\right)^3 = \sqrt{2^3a^3} = 2a\sqrt{2a}$

Astenda järgmised juured ja lihtsusta!

	a	b	c	d
59.	$\left(\sqrt{2}\right)^4$	$\left(\sqrt{3}\right)^3$	$\left(\sqrt[3]{4}\right)^2$	$\left(\sqrt[4]{12}\right)^2$
60.	$\left(\sqrt[3]{8}\right)^2$	$\left(\sqrt{6}\right)^3$	$\left(\sqrt[3]{30}\right)^2$	$\left(\sqrt{24}\right)^4$
61.	$\left(\sqrt[3]{9}\right)^5$	$\left(\sqrt[3]{4}\right)^6$	$\left(\sqrt[5]{25}\right)^3$	$\left(\sqrt[3]{72}\right)^2$
62.	$\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^3$	$\left(\sqrt{2\frac{5}{6}}\right)^2$	$\left(\sqrt[3]{4\frac{3}{4}}\right)^3$	$\left(\sqrt[3]{5\frac{2}{5}}\right)^2$
63.	$\left(\sqrt{2a^2}\right)^3$	$\left(\sqrt[3]{3x^2}\right)^2$	$\left(\sqrt[3]{a^{12}}\right)^2$	$\left(\sqrt[4]{bx^8}\right)^3$
64.	$\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^4$	$\left(\sqrt[3]{4x^2}\right)^2$	$\left(\sqrt{6mn}\right)^3$	$\left(\sqrt[4]{6r^2}\right)^3$

65. a) $\left(2x\sqrt{3a^2x}\right)^4$ b) $\left(ax^2\sqrt{2ax^2}\right)^2$

c) $\left(2x\sqrt[3]{\frac{3}{x^2}}\right)^4$ d) $\left(-5r\sqrt[3]{\frac{12rs^2}{25}}\right)^2$

Juurte juurimine.

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[15]{a}$, sest võttes mõlemad võrduse pooled esiteks 5-ndas ja siis 3-ndas astmes saame jälle võrdsed pooled.

$$\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}\right)^5 = \left(\sqrt[15]{a}\right)^5$$

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[15]{a^5}$$

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \left(\sqrt[15]{a^5}\right)^3$$
$$a = \sqrt[15]{a^{15}}$$
$$a = a.$$

Üldistades saame: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$

Sõnades: **Juure juurimisel korrutame juurijad.**

Arvuta juur järgnevatest juuravaldistest!

	a	b	c	d
66.	$\sqrt{\sqrt{16}}$	$\sqrt{\sqrt{81}}$	$\sqrt[3]{\sqrt{128}}$	$\sqrt{\sqrt[3]{512}}$
67.	$\sqrt{\sqrt{256}}$	$\sqrt{\sqrt{625}}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}}$	$\sqrt[4]{\sqrt{6561}}$
68.	$\sqrt{\sqrt{a^4}}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{25}}}$	$\sqrt[3]{\sqrt{a}}$	$\sqrt[4]{\sqrt{ab}}$

69. a) $\sqrt{\sqrt{8ab^4}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{b^{12}}}$

c) $\sqrt{\sqrt[5]{\frac{243}{1024}x^5b^{10}}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{729a^7b^8}}$

70. a) $\sqrt{2\sqrt{3}}$ b) $\sqrt[3]{3\sqrt{5}}$

c) $\sqrt{a\sqrt{a}}$ d) $\sqrt{2a\sqrt[3]{\frac{1}{4}a}}$

Irratsionaalsuse kaotamine murru nimetajast.

Arvutused juurtega lihtsustuvad tunduvalt, kui murru nimetajas pole irratsionaalset arvu. Murdu on võimalik alati teisendada, nii et nimetaja muutub ratsionaalseks arvuks.

Näidised:

a) $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

c) $\dfrac{a}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{a(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \dfrac{a(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} =$

$$= \frac{a(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}.$$

Teisenda järgnevad murrud nii, et nimetaja oleks ratsionaalne!

	a	b	c	d
71.	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{7}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{4}{5}}$
72.	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{7}{8}}$	$\sqrt{\frac{2}{11}}$	$\sqrt{\frac{7}{13}}$
73.	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{6}{\sqrt[3]{7}}$
74.	$\sqrt{\frac{5}{12}}$	$\sqrt{\frac{7}{24}}$	$\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$
75.	$\sqrt{\frac{1}{2{,}5}}$	$\sqrt{\frac{3}{4{,}9}}$	$\sqrt{\frac{7}{0{,}5}}$	$\sqrt{\frac{5}{0{,}2}}$
76.	$\sqrt{\frac{x}{a}}$	$\sqrt{\frac{m}{2n}}$	$\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^2}}$	$\sqrt{\frac{c}{d^3}}$
77.	$\frac{a}{\sqrt{a}}$	$\frac{x}{\sqrt{x}}$	$\frac{2m}{\sqrt[3]{3m}}$	$\frac{5b}{\sqrt[3]{4b}}$
78.	$\frac{5}{\sqrt{4m}}$	$\frac{2u}{\sqrt{6u}}$	$\frac{1-v}{2\sqrt{v}}$	$\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}}$
79.	$\frac{5}{2+\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{\sqrt{6}}{2-\sqrt{7}}$	$\frac{3}{\sqrt{8}+1}$
80.	$\frac{a}{2\sqrt{2}-1}$	$\frac{x}{2\sqrt{x}+2}$	$\frac{\sqrt{2c}}{c\sqrt{c}-5}$	$\frac{3m}{m\sqrt{n}+a}$
81.	$\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{12}}{3\sqrt{6}+\sqrt{2}}$	$\frac{15}{2\sqrt{7}-\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$
82.	$\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$	$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$	$\frac{2x}{\sqrt{x}+\sqrt{3x}}$	$\frac{5k}{2\sqrt{k}-\sqrt{5}}$

Juuravaldiste koondamine.

Juuravaldised on sarnased, kui neil on samad juurijad kui ka juuritavad. Sarnaseid juuri võime ühendada; seda nimetame juuravaldiste koondamiseks. Juuravaldiste sarnasus ilmneb alles siis, kui juuremärgi alt välja toome tegureid niipalju kui võimalik.

Näidiseid:

a) $\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48}=\sqrt{4\cdot 3}+\sqrt{9\cdot 3}-\sqrt{16\cdot 3}=$
$=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-4\sqrt{3}=\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{7}+3\sqrt{7}+4\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{7}=5\sqrt{7}+3\sqrt[3]{7}$

Koonda järgnevad juuravaldised!

83. a) $5\sqrt{3}+\sqrt{3}$
b) $6\sqrt{5}-4\sqrt{5}$
c) $6\sqrt{7}-2\frac{1}{2}\sqrt{7}+\sqrt{7}$
d) $4\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{6}-4\sqrt[3]{6}$

84. $\sqrt{8}+\sqrt{18}$
$0{,}5\sqrt{50}-\sqrt{32}$
$\sqrt{8}+\sqrt{50}+\sqrt{72}$
$2\sqrt{6}+3\sqrt{24}-\frac{2}{5}\sqrt{54}$

85.
a) $7\sqrt{5}-3\sqrt{45}+5\sqrt{125}$
b) $10\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}$
c) $5\sqrt[3]{6}+4\sqrt[3]{162}-8\sqrt[3]{48}$
d) $7\sqrt{12}-2\sqrt{27}-\sqrt{96}$

86.
$2\sqrt{a}-\sqrt{a}+5\sqrt{a}$
$3\sqrt{x}+\sqrt{a}-4\sqrt{x}$
$3\sqrt[3]{m}-2{,}5\sqrt{m}+\sqrt[3]{m}$
$\sqrt{ab}+\sqrt{a}-\sqrt{ab}$

87. a) $\sqrt{363}-\sqrt{243}+\sqrt{392}+\sqrt{288}-\sqrt{507}$
b) $4\sqrt{r}+\sqrt{s}-4\sqrt{t}+2\sqrt{r}-3\sqrt{s}$
c) $2\sqrt{a}+3\sqrt{b}-\sqrt{a}-3\sqrt{b}-4\sqrt{a}$
d) $3\sqrt{u^2v}-2\sqrt{uv^2}+4\sqrt{uv}+\sqrt{u}-5\sqrt{v}$

88. a) $3\sqrt{8}+2\sqrt{32}-5\sqrt{72}-7\sqrt{50}+6\sqrt{98}$
b) $5\sqrt{x^5}-3\sqrt{y^3}-4\sqrt{x^7}+6\sqrt{y}$

c) $0{,}5\sqrt{36}+3\tfrac{1}{2}\sqrt{54}+2\tfrac{1}{3}\sqrt{196}-5\sqrt{486}$

d) $3\sqrt{8at^2}-3\sqrt{72a}+2\sqrt{18at^4}-5\sqrt{2at^2}$

Segaharjutusi.

89. a) $\sqrt{\frac{25}{27}}:10-\frac{\sqrt{3}}{6}$

b) $\sqrt[3]{25u}\cdot\sqrt[3]{50u^2}$

c) $\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{6}{25}}$

d) $\sqrt{\frac{5}{8}}:\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{8}{9}}:6$

90. $\sqrt{\frac{5}{8}}:\frac{5}{4}+20:5\sqrt{\frac{4}{5}}$

$3\sqrt{\frac{5a}{b^2}}:2\sqrt{\frac{4b^4}{5a^3}}$

$\sqrt{m+\frac{1}{m^2}}$

$\sqrt{R^2-\frac{3}{4}R^2}$

91. a) $\sqrt{\frac{a^2}{b}:a-b\sqrt{b}}$ b) $\sqrt{\frac{39}{64}-\frac{1}{2}}\cdot 6\sqrt{7}$

c) $\sqrt{\frac{2x^2-4xy}{y}+2}$ d) $2R\sqrt[3]{R-\frac{4}{R^3}}$

92. a) $2\sqrt[3]{\frac{4}{25}}:\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{125}}$ b) $5a\sqrt{a^2-\frac{1}{4}a^2}$

c) $\sqrt{3-\frac{6a}{b}+\frac{3a^2}{b^2}}$ d) $\frac{x}{m}\sqrt[3]{\frac{m^2}{x}}\cdot\frac{1}{4}m\sqrt[3]{\frac{8m}{x^4}}$

93. a) $2ax\sqrt{\frac{7x^2}{24a}}\cdot\frac{3}{a^2}\sqrt{\frac{5a^7}{18x}}$ b) $\frac{\sqrt{5{,}4}}{\sqrt{2{,}4}}-\sqrt{\frac{0{,}8}{3{,}6}}$

c) $2\pi\sqrt[3]{R^3-\frac{3}{8}R^3}$ d) $\sqrt[4]{27a^3}:\sqrt[4]{\frac{a^2}{3}}$

94. a) $\sqrt{\frac{m^2}{n^2}-\frac{2m}{n}+1}$ b) $3\sqrt{\frac{xy^3}{2}}:\frac{1}{xy}\sqrt[4]{x^3y^2}$

c) $\sqrt{\frac{1}{0{,}75}}-\frac{\sqrt{3}}{0{,}5}\cdot\sqrt{\frac{0{,}15}{5{,}4}}$ d) $\sqrt{4at^2-1\frac{3}{4}at^2}$

95. a) $(2\sqrt{12}+3\sqrt{75}-\sqrt{15}+2\sqrt{24})\cdot\sqrt{6}$

b) $(\sqrt{15}-5\sqrt{12}+4\sqrt{21}):\sqrt{3}$

c) $(3\sqrt{18}+5\sqrt{32}-\sqrt{72}-3\sqrt{128})\cdot\sqrt{5}$

d) $(3\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{24}+5\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{3}):\sqrt[3]{3}$

96. a) $(\sqrt{108}+\sqrt{405}+\sqrt{147}-\sqrt{500}):2\frac{1}{2}\sqrt{15}$

b) $(4\sqrt{8}+\frac{1}{12}\sqrt{12}-\frac{1}{4}\sqrt{32})\cdot 8\sqrt{32}$

c) $(\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{4\frac{1}{2}}+\sqrt{0{,}02})\cdot 20\sqrt{10}$

d) $(2\sqrt[3]{135}-5\sqrt[3]{5}-10\sqrt[3]{15})\cdot\frac{1}{2}\sqrt[3]{75}$

97. a) $(6\sqrt{xy}-3\sqrt{x^3y}+2\sqrt{xy^3}-4\sqrt{xy})\cdot\sqrt{x}$

b) $(2\sqrt{ab}-a\sqrt{b}+b\sqrt{a}):\sqrt{ab}$

c) $\left(\sqrt[3]{m^2n}-\sqrt[3]{mn^2}+\sqrt[3]{\frac{n^2}{m^2}}\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{m^2}{n^2}}$

d) $(\sqrt[3]{18t^2}-\sqrt[3]{9t}-3\sqrt[3]{3t^2})\cdot\frac{1}{3}\sqrt[3]{-9t}$

98. a) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-3\sqrt{2})$

b) $(5\sqrt{x}-3\sqrt{y})(2\sqrt{x}-\sqrt{y})$

c) $(7+2\sqrt{2})(7-2\sqrt{2})$

d) $(1-\sqrt{3})^2$

99. a) $(2a+\sqrt{b})(3a-\sqrt{b})$

b) $(3\sqrt{2}-5\sqrt{5})(2\sqrt{5}-\sqrt{2})$

c) $(2\sqrt{b}-a)(3a+4\sqrt{b})$

d) $(c-3):(\sqrt{c}-\sqrt{3})$

100. a) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$

b) $(\sqrt{r}-3\sqrt{5})(\sqrt{r}+3\sqrt{5})$

c) $(\sqrt{32}-4\sqrt{2})^2$

d) $(1-\sqrt{2})^3$

101. a) $(\sqrt{45}-3\sqrt{15})^2$

b) $(2-\sqrt{3})^3$

c) $(2\sqrt{m}+5\sqrt{n})^2$

d) $(2\sqrt{3}-5\sqrt{6})(2\sqrt{3}+5\sqrt{6})$

102. a) $(2\sqrt{15}-5\sqrt{6})(\sqrt{5}+2\sqrt{2})$

b) $(x-a\sqrt{y})^2$

c) $(a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac})(a\sqrt{bc}-b\sqrt{ac})$

d) $(2\sqrt{v}-u):(2\sqrt{v}+u)$

103. a) $(1-u):(1-\sqrt{u})$

b) $(3\sqrt{x}+5\sqrt{y})^2$

c) $(5\sqrt{10}-4\sqrt{13})^2$

d) $\left(\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

104. a) $(\sqrt{1\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\sqrt{1\frac{1}{2}})(\sqrt{1{,}25}+\frac{1}{2}\sqrt{1{,}5})$

b) $(-10-\sqrt{1{,}1})(\sqrt{1{,}1}-10)$

c) $(2\sqrt{5}-\sqrt{3})^3$

d) $(\sqrt[4]{25l}-\sqrt[4]{9m})(\sqrt[4]{25l}+\sqrt[4]{9m})$

105. a) $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6})^2$

b) $(2\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3$

c) $\left(\frac{5}{\sqrt[3]{2}}-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)^3$

d) $(\sqrt{u-v}+\sqrt{v})^2$

Juurvõrrandeid.

Juurvõrrand on niisugune võrrand, milles juuravaldised sisaldavad tundmatuid juuremärgi all.

Juurvõrrandite lahendamisel peetagu silmas järgmist:

1) Juuravaldistest vabanemiseks tuleb võrrandi mõlemaid pooli astendada kas üks kord või mitu korda järjest.

2) Enne astendamist tuleb võrrand lihtsustada, niipalju kui võimalik.

Näidised:

Lahendame juurvõrrandi $x + \sqrt{16x + x^2} = 8$.

Kui võrrandis on ainult üks juuravaldis, siis jätame selle avaldise võrrandi ühele poolele, kuna kõik teised liikmed viime teisele poolele.

$$\sqrt{16x + x^2} = 8 - x.$$

Võtame võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$(\sqrt{16x + x^2})^2 = (8 - x)^2$$
$$16x + x^2 = 64 - 16x + x^2$$
$$32x = 64$$
$$x = 2.$$

Lahenda järgnevad võrrandid!

106. a) $2 + 3\sqrt{x} = 5$
b) $\sqrt{2x} - 1 = 7$
c) $6 + \sqrt{u - 2} = 11$
d) $2\sqrt{5v - 3} - 5 = 6$

107. a) $2\sqrt{3 - 2x} = 7$
b) $\sqrt[3]{6(3 - x)} - 6 = 0$
c) $8 - \sqrt{3z + 7} = 5$
d) $\sqrt[3]{x - 5} = 10$

108.
a) $x - \sqrt{169 - x^2} = 7$
b) $t + \sqrt{25 - t^2} = 1$
c) $7\sqrt{3v} - 1 = 5\sqrt{3v} + 5$
d) $5\sqrt{v} - 7 = 3\sqrt{v} - 2$

109.
a) $2\sqrt{4 - x} - 5\sqrt{3 + x} = 0$
b) $\sqrt{3y} = 5 - \sqrt{y}$
c) $\sqrt{v} - 7 = 2\sqrt{4v} - 1$
d) $(3 - \sqrt{z})(4 - \sqrt{z}) = z + 3$

110. a) $\sqrt{x + 20} - \sqrt{x - 1} = 3$
b) $\sqrt{r + 5} - \sqrt{r - 5} = 2\sqrt{2}$
c) $\sqrt{s - 7} = \sqrt{s + 1} - 2$
d) $\sqrt{x} + \sqrt{x + 5} = \sqrt{4x + 11}$

111. a) $4\sqrt{R+2}-3\sqrt{R+7}=\sqrt{R-1}$

b) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}=12$

c) $\sqrt{v+3}+\sqrt{v+8}=5\sqrt{v}$

d) $\sqrt{17-\sqrt{x-8}}=4$

3. Astendaja mõiste laiendamine.

Negatiivsed astendajad.

Tehetest astmetega järgneb, et $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$. Et $a^m = a^m$ ja kahe võrdse suuruse jagatis on ikka 1, võime järeldada, et

$$\boxed{a^0 = 1}$$

Iga arv 0 astmes on 1.

Tehetest astmetega järgneb, et $a^2 : a^5 = a^{-3}$. Selle jagatise võime kirjutada ka murru kujul, mis pärast taandamist omandab kuju:

$$\frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3}.$$

Siit järgneb, et $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

Üldiselt on ka maksev:

$$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$

ja ka ümberpöördult $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$.

Sõnades: **Negatiivse astendajaga aste on võrdne murruga, mille lugejaks on 1 ja nimetajaks antud astme alus positiivse astendajaga.**

Kaota järgnevate avaldiste negatiivsed astendajad!

Näidised:

a) $2a^2b^{-3}c^{-2} = 2a^2 \cdot \frac{1}{b^3} \cdot \frac{1}{c^2} = \frac{2a^2}{b^3c^2}$

b) $\frac{5a}{3x^{-2}} = \frac{5a}{3} \cdot \frac{1}{x^{-2}} = \frac{5ax^2}{3}$

	a	b	c	d
112.	$5a^{-2}$	$3ab^{-3}$	$2a^2x^{-3}$	$8m^{-2}n^{-1}$
113.	$\frac{3}{x^{-5}}$	$\frac{5m}{2n^{-6}}$	$\frac{ac^{-2}}{5n^{-2}}$	$\frac{7xy^{-5}}{3x^{-5}y}$
114.	$(\frac{2}{3})^{-2}$	$(\frac{1}{4})^{-2}$	$(2\frac{1}{2})^{-3}$	$(-3\frac{1}{4})^{-4}$
115.	$(\frac{3}{10})^{-3}$	$(0{,}2)^{-2}$	$(-1{,}5)^{-1}$	$(0{,}0001)^{-1}$
116.	$2 \cdot 10^{-2}$	$(20)^{-2}$	$3{,}4 \cdot 10^{-4}$	$5{,}42 \cdot 10^{-6}$

Kirjuta järgnevad murrud ilma nimetajata, kasustades negatiivseid astendajaid!

Näidised: a) $\frac{5a}{2x^3} = \frac{5}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{x^3} = 2{,}5ax^{-3}$

b) $\frac{2{,}3}{10\,000} = 2{,}3 \cdot \frac{1}{10^4} = 2{,}3 \cdot 10^{-4}$

	a	b	c	d
117.	$\frac{2}{a^3}$	$\frac{a^2}{a^5}$	$\frac{3x^2}{x^3}$	$\frac{4am}{5a^2m^3}$
118.	$\frac{7}{100}$	$\frac{2{,}3}{10\,000}$	$\frac{6{,}68}{100\,000\,000}$	$\frac{3}{200}$
119.	$\frac{1{,}4}{7000}$	$\frac{6{,}9}{230\,000}$	$\frac{6{,}9}{13\,000}$	$\frac{5}{0{,}0005}$

Kõik tehted astmetega, millel on negatiivsed astendajad, teostame samade juhiste järgi, nagu positiivsete astendajate puhul.

120. Korruta alltoodud avaldised

1) antud kujul!

2) kaotades enne korrutamist negatiivsed astendajad! Võrdle saadusi!

$a^{-3} \cdot a^5$; $m^3 \cdot m^{-6}$; $x^{-2} \cdot x^{-3}$; $4a^{-2}x \cdot 2\frac{1}{2}a^{-2}x^{-1}$.

121. Jaga alltoodud avaldised

1) antud kujul!

2) kaotades enne jagamist negatiivsed astendajad! Võrdle saadusi!

$a^{-2}:a^3$; $c^5:c^{-3}$; $b^{-3}:b^{-5}$; $2a^2x^{-2}:0{,}5a^{-3}x^{-5}$.

122. Astenda alltoodud avaldised

1) antud kujul!

2) kaotades enne astendamist negatiivsed astendajad! Võrdle saadusi!

$(a^{-2})^5$; $(x^3)^{-5}$; $(m^{-2})^{-3}$; $(5c^{-1}x^3)^4$.

Teosta järgnevate avaldistega nõutavad tehted ja kirjuta saadus nii, et temas ei esineks astmenäitajana 0 ega negatiivsed arvud!

123. a) $2a^6 \cdot 3^{-5}$
b) $1{,}6a^2:4a^{-2}$
c) $\frac{3}{4}m^{-4} \cdot \frac{4}{5}m$
d) $\frac{2}{3}b^{-2}:2b^{-3}$

124. $9^3 \cdot 9^{-3}$
$(2 \cdot 3^{-3})^3$
$1{,}5:4^{-1}$
$(5 \cdot 10^{-2})^3$

125. $3{,}5c^2:7c^{-3}$
$2am^{-2} \cdot 0{,}5a^{-1}m$
$9a^3x^{-2}:4{,}5a^{-2}x^3$
$1{,}8ab^{-2} \cdot 0{,}5a^{-2}b$

126. a) $5^3 \cdot 3^{-5}$
b) $12^{-2} \cdot 18^3$
c) $(-1)^4 \cdot 6^{-3}$
d) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}:4^{-2}$

127. $(0{,}2a^{-2})^{-3}$
$\left(\frac{3}{4}m^3\right)^{-2}$
$(0{,}1a^2x^{-1})^3$
$(1{,}2a \cdot 5a)^{-2}$

128. $2{,}4 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-4}$
$8 \cdot 10^{-3}:2 \cdot 10^{-5}$
$1{,}16 \cdot 10^{-5}:4 \cdot 10^4$
$(2 \cdot 10^{-3})^{-2}$

129. Tarvita kümne astmeid ja avalda:

a) 1 km cm-tes
1 mm m-tes
1 kg g-des
1 g kg-des

b) 2,5 m cm-tes
0,2 mm dm-tes
5 cm km-tes
72 mg kg-des

c) 2 mg t-des
50 l cm³-tes
1,5 m² ha-des
0,7 ha m²-tes

d) *a* km cm-tes
s mm² dm²-tes
v cm³ l-tes
p g t-des

Murrulised astendajad.

Astme juurimisel paneme tähele, et juuritava astendaja tuleb jagada juurijaga.

Näiteks: $\sqrt[3]{a^9} = a^{\frac{9}{3}} = a^3$.

Laiendame selle juhise niisugustele juhtudele, kus astendaja ja juurija jagatis ei ole täisarv, vaid murdarv. Seesugusel juhul saame juure arvutamise saadusena murrulise astendajaga astme.

Näiteks: $\sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{5}{3}}$;

üldkujul $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ja ka ümberpöördult

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Sõnades: **Murrulise astendajaga aste on sama, mis juur, mille juurijaks on astendaja nimetaja ja juuritava astendajaks on astendaja lugeja.**

Kirjuta järgnevad avaldised juuremärgiga ja lihtsusta!

	a	b	c	d
130.	$25^{\frac{1}{2}}$	$16^{\frac{2}{3}}$	$x^{\frac{2}{5}}$	$a^{\frac{7}{4}}$
131.	$216^{\frac{1}{3}}$	$4^{\frac{3}{2}}$	$c^{\frac{5}{3}}$	$b^{\frac{4}{3}}$
132.	$(1{,}21)^{\frac{1}{2}}$	$32^{\frac{1}{5}}$	$p^{\frac{5}{6}}$	$s^{1\frac{2}{3}}$
133.	$0{,}027^{\frac{1}{3}}$	$0{,}0016^{\frac{1}{4}}$	$m^{0{,}4}$	$n^{0{,}5}$
134.	$25^{-\frac{1}{2}}$	$8^{-\frac{2}{3}}$	$a^{1{,}5}$	$x^{2{,}5}$
135.	$100\,000^{\frac{2}{3}}$	$(0{,}01)^{-\frac{1}{2}}$	$b^{-\frac{5}{4}}$	$m^{-\frac{5}{6}}$
136.	$\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{5}{2}}$	$\left(\frac{25}{49}\right)^{\frac{3}{2}}$	$2a^{\frac{2}{3}}$	$(2a)^{\frac{2}{3}}$
137.	$a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}$	$2ab^{\frac{1}{2}}$	$(5x)^{\frac{3}{2}}$	$5x^{\frac{3}{2}}$

Kirjuta järgnevad avaldised murruliste astendajatega!

	a	b	c	d
138.	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt{a^3}$	$\sqrt[3]{m^2}$
139.	$\sqrt{ax}$	$5\sqrt[3]{a^2}$	$a\sqrt[3]{x^2}$	$\sqrt[3]{a^2b^4}$
140.	$2\sqrt[5]{ax^3}$	$\sqrt[4]{a^2b^3}$	$5x\sqrt[3]{x^2y^2}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{m^2}}$

Tehteid astmetega, millel on murrulised astendajad, võime teostada samade juhiste järgi, mis on maksvad täisarvuliste astendajate kohta.

Teosta nõutud tehted enne murruliste astendajatega, siis kirjuta antud avaldised juuremärgi kaudu ja teosta veel kord nõutud tehted! Võrdle saadusi!

141. a) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$	**142.** $b^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}}$	**143.** $\left(c^{\frac{1}{2}}\right)^2$
b) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$	$b^{\frac{2}{3}} : b^{\frac{1}{3}}$	$\left(c^{\frac{1}{3}}\right)^3$
c) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$	$b^{\frac{4}{5}} : b^{\frac{3}{5}}$	$\left(c^{\frac{2}{3}}\right)^3$
d) $2a^{\frac{2}{5}} \cdot 3a^{\frac{2}{5}}$	$6b^{\frac{5}{3}} \cdot 2b^{\frac{2}{3}}$	$\left(2c^{\frac{2}{5}}\right)^4$

Kirjuta juuravaldised murruliste astendajatega ja teosta nõutud tehted! Tulemus kirjuta juuremärgi abil!

144. a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$	**145.** $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$
b) $\sqrt[3]{x^2} : \sqrt{x}$	$\sqrt[3]{16} : \sqrt{2}$
c) $\sqrt[3]{m^2} \cdot \sqrt{m}$	$\sqrt[4]{a^3b^3} : \sqrt[3]{a^2b^2}$
d) $\sqrt{b^3} : \sqrt[4]{b}$	$\sqrt{5a} \cdot \sqrt[3]{25a^2}$

Teosta nõutud tehted ja kirjuta saadus esiteks murrulise astendajaga, siis juuremärgiga!

146. a) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$	c) $b^0 \cdot b^{\frac{3}{4}}$
b) $c \cdot c^{-\frac{1}{2}}$	d) $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{4}}$

147. $m : m^{-\frac{1}{2}}$

$x^{\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{x}$

$a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$

$l^0 \cdot a^{-\frac{3}{4}}$

148. $c^{\frac{1}{2}} : c^{\frac{1}{6}}$

$(x^6)^{\frac{1}{3}}$

$(a^8)^{\frac{3}{4}}$

$x^{\frac{2}{3}} : \sqrt[3]{x}$

149. a) $\left(m^{-2}\right)^{\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt[3]{x} : x^{-\frac{2}{3}}$

c) $\left(q^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

d) $x^{\frac{2}{7}} \cdot y^{\frac{2}{7}}$

150. $\left(-3^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}$

$\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\sqrt[3]{3}\,\right)^{\frac{3}{2}}$

$\left(5\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{2}{3}}$

$\left(4\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{2}}$

VI. Ülesandeid üldiseks kordamiseks.

1. Arvuta peast!

a) Leia 6% 150-st
„ 7% a-st
„ 9% $3x$-st
„ 16% $\frac{3}{4}c$-st

b) Leia terve, kui 12% on 30
„ „ „ 2% on a
„ „ „ 80% on $10x$
„ „ „ 6,5% on $13c$

c) Leia, mitu %-ti
6 on 15-st
c on 10-st
5 on $15a$-st
$2m$ on $8n$-st

d) Leia antud avaldiste suhe %-des!
$\frac{2}{3}a^2$; $\frac{1}{3}a$
$2x-2y$; x^2-y^2
$a-1$; a^2-2a+1
$\frac{m+n}{4}$; $\frac{m^2-n^2}{4}$

2. Lahenda peast võrrandid!

a) $\frac{T}{2}=7$　　b) $\frac{5}{v}=4$　　c) $\frac{x}{5}=\frac{3}{10}$

$\frac{5,4}{m}=9$　　$\frac{4}{T+1}=2$　　$\frac{4}{m}=\frac{2}{3}$

$\frac{x+1}{3}=2$　　$\frac{8}{t-1}=4$　　$\frac{9}{5}=\frac{2}{t}$

$\frac{z-5}{3}=4$　　$\frac{1,6}{5t}=10$　　$1,2:x=2:5$

d) $\frac{2+x}{3}=\frac{3}{4}$;　$\frac{5}{p-1}=\frac{1}{3}$;　$\frac{7}{2t}=\frac{5}{7}$;　$\frac{4}{R}=\frac{R}{9}$

3. Lahenda peast võrrandid!

a) $\frac{2}{3}x-5=3$　　$7-\frac{2}{R}=3$

$\frac{5}{t}-2=3$　　$\frac{10}{R+5}=2$

b) $10 = \frac{T-2}{5}$ c) $\frac{\sqrt{x}}{5} = 2$

$\frac{5x^2}{3} = 15$ $\frac{3}{\sqrt{y}} = 3$

$\frac{50}{t^2} = 2$ $5 = \frac{5}{\sqrt{u}}$

$10 + v^2 = 1 + 2v^2$ $5 = \sqrt{5 + 2x}$

4. Leia järgnevate arvude lähisväärtus, kui $\sqrt{2} = 1{,}41$ ja $\sqrt{3} = 1{,}73$!

Arvuta peast!

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}+2}{10}$; $5\sqrt{3}$; $2-\sqrt{2}$.

b) $\frac{5}{\sqrt{2}}$; $\frac{10}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$.

c) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}$.

5. Arvuta peast!

a) Mingi arvu kolmekordse ja selle arvu kahekordse vahe on 10. Leia see arv!

b) Kui arvu ruudust lahutame selle arvu kahekordse, siis saame 0. Leia see arv!

c) Ruudu külg on 5. Leia ruudu diagonaal!

d) Ruudu diagonaal on 18. Leia ruudu külg!

6. Arvuta peast!

a) $(\sqrt{7})^2$; $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; $\sqrt{50} : \sqrt{2}$; $(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^2$.

b) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$; $\left(2\sqrt[3]{2}\right)^3$; $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$; $\sqrt{125} : \sqrt{5}$.

c) $16^{\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}$; $9 \cdot 9^{\frac{1}{2}}$; $125^{\frac{2}{3}} : 125^{\frac{1}{3}}$.

d) 3^{-2}; $2 \cdot 3^{-1}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

7.

a) Lihtsusta avaldis: $\frac{3a^2}{4} - \frac{2ab}{5} + \frac{4b^2}{3} : \frac{2xy}{5}$!

b) Lahenda võrrand: $5 - [7x - (3 + 5)] -$
$- [12 - (7 + 3x)] = 0$!

c) Lahenda võrrand: $\frac{3}{4} - \frac{x - 0,2}{x + 0,2} + \frac{0,25(x - 1)}{x + 1} = 0$!

d) Lapse hoiukarbis olid kümnesendised ja viiesendised rahad, kokku 16 raha 110 sendi väärtuses. Mitu viiesendist ja mitu kümnesendist raha oli hoiukarbis?

e) Kell on 7 ja 8 vahel ja minutinäitaja katab tunninäitajat. Kui palju on kell?

8. Lihtsusta avaldis:

a) $4a - 3b - [(2a + 4b) + 3a - \{9a - b +$
$+ (2b - a)\} + a - b]$!

b) Lihtsusta avaldis: $x - \left[x - \left(x - \frac{x}{1 - a}\right)\right]$!

c) Lahenda võrrand: $\frac{3,2 - z}{z + 1,4} = \frac{5,6 + z}{3 - 2,1z}$!

d) Lahenda võrrandsüsteem:

$$\begin{cases} \frac{x}{2,8} + 5y = 20 \\ 10x - \frac{1}{3}y = 54,8! \end{cases}$$

e) Noormees müüs ära oma jalgratta 96 kr. eest; see müügiraha oli nii mitu % rohkem, kui mitu krooni ta ise maksis ratta eest. Kui palju maksis noormees jalgratta eest?

9. Lihtsusta järgnevad avaldised:

a) $\left(\frac{a^2}{x^2} + \frac{x^2}{a^2} + 1\right) \cdot \left(\frac{a}{x} - \frac{x}{a}\right)$!

b) $\frac{6x + 7}{6} = x - \frac{7x - 13}{4x + 2} + 2$!

c) Võrrandist $\frac{nN}{mM} = \frac{r}{p - r}$ avalda r!

d) Valemist $S = vt + \frac{1}{2}at^2$ avalda t!

e) Kooli eelarves on veekuludena ette nähtud a kr. Veehinna alanemise tagajärjel oli koolil võimalik veetarvet suurendada d hektoliitri võrra. Kui palju alandati veehinda hektoliitrilt, kui enne maksis hl vett 4 senti?

10. a) Arvuta $\frac{15 - \sqrt{75}}{\sqrt{48} - 2}$!

b) Sidemest $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ avalda l!

c) Avaldisest $\left(\frac{1}{x^3y^5}\right)^{-\frac{2}{3}}$ kaota negatiivne ja murruline astmenäitaja!

d) Lihtsusta avaldis: $\sqrt{x^3} - \sqrt{4x} + \frac{3\text{[illegible]}}{x\sqrt{x}} - 4x\sqrt[3]{\frac{1}{4x}}$!

e) Kaks lennukit väljuvad samal ajal Tallinnast, üks põhjasihis, teine idasihis. Ühe lennuki tunnikiirus on teise omast 36 km võrra suurem. Kahe tunni järel on lennukite kaugus teineteisest 450 km. Missuguse kiirusega lendab kumbki lennuk?

11. a) Lihtsusta avaldis: $\left[\left(\frac{1}{b} + \frac{2}{a}\right)^2 - \frac{b}{ab}\right] : \left(\frac{a}{b^2} + \frac{8}{a^2}\right)$!

b) Lahenda võrrand: $5x - \{8x - 3[16 - 6x - (4 - 5x)]\} = 6$!

c) Lahenda võrrandsüsteem: $\begin{cases} \frac{v}{3} + \frac{u}{2} = 1 \\ \frac{3 + 2v}{5} - \frac{1 + 5u}{11} = 2! \end{cases}$

d) Leia avaldiste $24ab^3$ ja $6a^3b$ keskmine võrdeline!

e) Vabrikus, milles töötab a töölist, vähendati tööpäeva pikkust 8 tunnilt $7\frac{1}{2}$ tunnile. Mitu samavõimelist töölist tuleks juurde võtta, et vabriku toodang ei väheneks?

12. a) Anna avaldisele $\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{1}{3}}$ arvutamiseks kõige lihtsam kuju!

b) Koonda avaldis: $\sqrt{8a} - 2\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{50a}$!

c) Arvuta: $(2\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} \cdot (15\frac{5}{8})^{\frac{2}{3}} \cdot (6\frac{1}{4})^{-1}$!

d) Valemist $f = \frac{4\pi^2 Rm}{T^2}$ avalda T!

e) Missugune kapital muutub aasta jooksul 13 167 krooniks, kui pank maksab $4\frac{1}{2}\,\%$?

13. a) Lihtsusta avaldis: $\frac{9a}{2} : a\left(6 - \frac{3b}{14}\right)$!

b) Lahenda võrrandsüsteem:

$$3s - \tfrac{1}{4}(2s + t + 6) = 5t$$
$$\tfrac{1}{6}(3s + 2t) - \tfrac{1}{4}(2t - 3) = -8!$$

c) Lihtsusta avaldis: $\dfrac{16c^2 - \frac{1}{c^2}}{\left(1 + \frac{1}{c^2}\right) - \frac{1}{4c^2}}$.

d) Valemist $P = Q\frac{R - r}{2R}$ avalda R!

e) Keegi kulutab $\frac{1}{n}$ oma sissetulekust raamatute ostmiseks. Sissetulekute suurenemise tõttu a kr. võrra kuus võis ta raamatute ostmiseks kulutada $\frac{1}{n-3}$ oma sissetulekust, kusjuures ülejäänud kulutused jäid endisteks. Kui suur oli selle isiku endine sissetulek kuus? Arvuta, kui $n = 8$ ja $a = 15$!

14. a) Koosta ruutvõrrand, mille lahendid on:

$$x_1 = 2\tfrac{1}{3} \text{ ja } x_2 = -1\tfrac{1}{2}!$$

b) Lihtsusta avaldis: $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6\frac{3}{4}}}$!

c) Valemist $v = \sqrt{c^2 - 2gy}$ avalda y!

d) Lahenda võrrand: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x - 1} = 1\frac{1}{2}$!

e) Rombikujulise raami ümbermõõt on 2,5 m; selle raami kindlustamiseks on tarvis diagonaalideks 1,6 m pikkust latti. Leia selle raami diagonaalide pikkused!

15. a) Lihtsusta avaldis: $\left(\frac{1}{5}a^2+\frac{2ab}{15}-\frac{b^2}{10}\right):\frac{xy}{10}$!

b) Lahenda võrrand: $0{,}2x+\frac{2x}{7}+\frac{3x}{9}-2=1\frac{1}{4}x$!

c) Lahenda võrrand: $\frac{2v-4}{5}-\frac{5}{1{,}4-v}=\frac{3{,}2v+4}{2}$!

d) Taanda murd: $\frac{r^2+2r+1}{3r+3}$!

e) Valemist $v=\frac{2\pi r}{T}$ avalda r ja T!

16. a) 15 ühesuguse võimsusega masinat suudavad 10-tunnise tööpäeva kestel täita vabriku päevase normi. Mitu masinat 25% võrra suurema võimsusega tuleks juurde muretseda, et 8-tunnise tööpäeva kestel oleks saavutatud sama norm?

b) Kas on õige võrre: $\frac{1{,}2}{3{,}7}=\frac{4{,}8}{14{,}8}$?

c) Lihtsusta avaldis: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$!

d) Lahenda võrrand: $8-2\sqrt{x}=x$!

e) Ristkülikukujulise maatüki pindala on 4400 m^2; selle piiramiseks aiaga kulub 300 jooksvat meetrit traatvõrku. Leia maatüki mõõtmed!

17. a) Lihtsusta avaldis:

$$\left(\frac{2}{x^2-3x-2}-\frac{1}{x-1}\right):\left(\frac{1}{x^2-3x+2}-\frac{1}{x-2}\right)!$$

b) Lahenda võrrandsüsteem:

$$\begin{cases}\frac{x}{3a}+\frac{y}{3b}=a+b\\ x-y=3(a^2-b^2)!\end{cases}$$

c) Lahenda y suhtes võrrand:

$$\frac{1}{a+b+y}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{y}!$$

d) Valemist $\frac{1}{a}+\frac{1}{k}=(n-1)\frac{1}{r}$ avalda r!

e) Mitu korda tuleks murru $\frac{a}{b}$ lugejaga liita c ühikut ja murru nimetajaga d ühikut, et saada murd, mille väärtus on $\frac{p}{q}$? Arvuta, kui $\frac{a}{b}=\frac{7}{20}$; $c=8$; $d=4$; $\frac{p}{q}=\frac{9}{10}$!

18. a) Leia avaldise $\frac{2}{r\sqrt{3}-1}-\frac{3}{r\sqrt{3}}$ arvuline väärtus, kui $r=0{,}6$!

b) Valemist $w=\frac{4\pi^2 n}{T^2}$ avalda T!

c) Lihtsusta avaldis: $\frac{a^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}}}{b^{-\frac{1}{3}}\sqrt[3]{a}}$!

d) Lahenda võrrand: $\frac{x}{\sqrt{3}}-1=\frac{2\sqrt{3}}{x}-2$!

e) Kiirrong sõidab Tallinnast Tartu (190 km) 3 tunniga. Teel ettetulnud takistuse tõttu peatus rong 15 min. Pärast takistuse kõrvaldamist suurendas vedurijuht rongi kiirust 13 km võrra tunnis ja jõudis õigel ajal Tartu. Kui kaugel Tallinnast peatus rong ja kui suur on rongi kiirus normaalselt?

Neljas osa.

VII. Logaritmid.

1. Astendajate kasustamine arvutamise lihtsustamiseks.

Selgitamiseks. On teada: Ühe ja sama arvu astmete korrutamisel liidetakse astendajad:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Ühe ja sama arvu astmete jagamisel lahutatakse jagatava astendajast jagaja astendaja:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Astme astendamisel korrutatakse astendajad:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Juurimisel jagatakse juuritava astendaja juurijaga:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Võtame arvu 2 mitmesugused astmed ja korraldame need astmeväärtused ühes vastavate astendajatega tabelisse:

$$2^{-10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}; \quad 2^{-9} = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512} \text{ jne.}$$

$$2^0 = 1; \; 2^1 = 2; \; 2^2 = 4; \; 2^3 = 8 \text{ jne.}$$

astme väärtus	astendaja	astme väärtus	astendaja	astme väärtus	astendaja
$\frac{1}{1024}$	—10	$\frac{1}{4}$	—2	64	6
$\frac{1}{512}$	—9	$\frac{1}{2}$	—1	128	7
$\frac{1}{256}$	—8	1	0	256	8
$\frac{1}{128}$	—7	2	1	512	9
$\frac{1}{64}$	—6	4	2	1024	10
$\frac{1}{32}$	—5	8	3	2048	11
$\frac{1}{16}$	—4	16	4	4096	12
$\frac{1}{8}$	—3	32	5	8192	13

Kasustame seda tabelit arvutamiseks.

Näidiseid:

a) Leiame arvude 32 ja 256 korrutise.

Tabelist näeme, et arvule 32 vastab astendaja 5 ja 256-le vastab astendaja 8; siis

$$32 = 2^5$$
$$256 = 2^8$$
$$\overline{32 \cdot 256 = 2^{5+8} = 2^{13}}$$

Otsides tabelist astendaja 13, näeme, et temale vastab astme väärtus 8192. Järelikult $32 \cdot 256 = 8192$.

b) Leiame arvude 4096 ja 256 jagatise.

Tabeli abil võime kirjutada

$$4096 = 2^{12}$$
$$256 = 2^8$$
$$\overline{4096 : 256 = 2^{12} : 2^8 = 2^{12-8} = 2^4}$$

Et astendajale 4 vastab tabelis astmeväärtus 16, siis $4096:256=16$.

c) Leiame $\left(\frac{1}{8}\right)^3$.

Tabelist näeme, et arvule $\frac{1}{8}$ vastab astendaja -3. Siis

$$\left(\frac{1}{8}\right)^3=(2^{-3})^3=2^{-3\cdot 3}=2^{-9}.$$

Astendajale -9 vastab astmeväärtus $\frac{1}{512}$.

Järelikult: $\left(\frac{1}{8}\right)^3=\frac{1}{512}$.

d) Arvutame $\sqrt[3]{4096}$.

Arvule 4096 vastab tabelis astendaja 12.

$$\sqrt[3]{4096}=\sqrt[3]{2^{12}}=2^{\frac{12}{3}}=2^4.$$

Et astendajale 4 vastab tabelis astmeväärtus 16, siis

$$\sqrt[3]{4096}=16.$$

Neist näidistest selgub, et kasustades eespool-toodud tabelit saame arvutamist teostada palju lihtsamalt. Nimelt võime arvude korrutamise asemel piirduda astendajate liitmisega, jagamise asemel — astendajate lahutamisega; astendamise asemel korrutame astendajaid ja juurimise asemel jagame juuritava astendajat juurijaga.

Praktilist väärtust eespool-toodud tabelil siiski ei ole, sest temas puuduvad arvud 2 ja 4, 4 ja 8 vahel jne. Alles siis, kui täidaksime need tühikud arvudega ja vastavate astendajatega, saaksime tabelit praktiliselt kasustada.

Harjutusi.

1. Leia tabeli abil ja kontrolli tuntud tehete kaudu vastus!

a) $512 \cdot 16$

b) $32 \cdot 64$

c) $\frac{1}{64} \cdot 2048$

d) $\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{64}$

e) $1024 : 128$

f) $64 : \frac{1}{32}$

g) $\frac{1}{128} : 8$

h) $\frac{1}{512} : \frac{1}{128}$

i) 64^2

j) 8^4

k) $\left(\frac{1}{16}\right)^2$

l) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-6}$

m) $\sqrt{1024}$

n) $\sqrt[3]{512}$

o) $\sqrt[4]{\frac{1}{256}}$

p) $\sqrt[-3]{\frac{1}{512}}$

2. Arvu logaritmi mõiste.

Selgitamiseks. Astendamisel esinevad kolm suurust: astme alus, astendaja ja aste. Näiteks: $3^4 = 81$, kus 3 on astme alus, 4 on astendaja ja 81 on aste.

Üldiselt, kui

$$a^m = N,$$

siis a on astme alus, m on astendaja ja N on aste. Seda tehet, mille varal otsitakse antud astme aluse a ja astendaja m kaudu astme väärtust N, nimetasime astendamiseks. Astendamisele vastavad kaks pöördtehet, selle järgi, kas peale astme väärtuse N on antud veel astendaja m või astme alus a. Kui on antud astme väärtus N ja astendaja m ja otsitakse astme alust a, siis nimetasime niisugust tehet juurimiseks. Seega

$$\sqrt[m]{N} = a.$$

Teise pöördtehte saame, kui antud astme väärtuse ja astme aluse põhjal otsitakse astendajat.

Olgu astme alus 4 ja astme väärtus 64, astendaja olgu x. Siis

$$4^x = 64.$$

Siin $x = 3$, sest $4^3 = 64$.

Astendajat 3 nimetame ka arvu 64 **logaritmiks** alusel 4 ja kirjutame

$$\log_4 64 = 3.$$

Üldiselt: kui

$$a^x = N,$$

siis $$x = \log_a N.$$

Antud arvu logaritmiks antud alusel nimetame astendajat, millega tuleb alust astendada, et saada antud arvu.

Logaritmi leidmine tähendab astendaja leidmist antud aluse ja astmeväärtuse puhul. Astme alust nimetame **logaritmi aluseks;** astme väärtus on arv, mille logaritmiks on aluse astendaja; seda arvu nimetame ka **nuumeruseks.**

logaritm	logaritm
$\nwarrow$	$\nwarrow$
$4^3 = 64$	$a^x = N$
$\swarrow \quad \searrow$	$\swarrow \quad \searrow$
log. alus nuumerus	log. alus nuumerus

Harjutusi.

2. Avalda järgnevad võrdused logaritmide abil!

a) $2^3 = 8$ f) $9^{\frac{1}{2}} = 3$ k) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

b) $4^4 = 256$ g) $64^{\frac{1}{3}} = 4$ l) $(0{,}1)^{-1} = 10$

c) $3^5 = 243$ h) $10^0 = 1$ m) $10^4 = 10\,000$

d) $5^3 = 125$ i) $8^{-2} = \frac{1}{64}$ n) $10^{-2} = 0{,}01$

e) $7^2 = 49$ j) $16^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$ o) $100^2 = 10\,000$

p) $100^{-1} = 0{,}01$

3. Avalda järgnevad võrdused astmete abil!

a) $\log_4 81 = 3$ f) $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$ k) $\log_{\frac{1}{11}} 121 = -2$

b) $\log_2 16 = 4$ g) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$ l) $\log_{10} 1 = 0$

c) $\log_{10} 10 = 1$ h) $\log_4 \frac{1}{64} = -3$ m) $\log_{10} 1000 = 3$

d) $\log_7 49 = 2$ i) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} = -1$ n) $\log_{10} 0{,}001 = -3$

e) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ j) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$ o) $\log_{10} 0{,}1 = -1$

4. Antud logaritmi ja aluse põhjal leia arv!

log	2	3	4	4	3	0	-1	-3	-2	-3
alus	3	5	10	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	7	10	8	$\frac{1}{4}$	0,5
arv										

Näidis: $\log_6 x = 3;\ \ x = 6^3 = 216.$

5. Antud arvu ja tema logaritmi põhjal leia alus!

arv	8	625	1000	$\frac{1}{32}$	$\frac{27}{64}$	12	$\frac{1}{49}$	128	$\sqrt{5}$	$\sqrt[3]{15}$
log	3	4	3	5	3	1	-2	-7	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
alus										

Näidis: $\log_x \frac{1}{64} = 3.$

$$x^3 = \frac{1}{64};\ \ x^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3;\ \ x = \frac{1}{4}.$$

6. Antud arvu ja antud aluse puhul leia arvu logaritm!

arv	27	32	343	$\frac{1}{81}$	$\frac{16}{25}$	8	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{16}$	$\sqrt[5]{8}$
alus	3	2	7	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{5}$	8	4	6	2	2
log										

Näidis: $\log_{27} \frac{1}{81} = x.$

$$27^x = \frac{1}{81};\ 3^{3x} = \frac{1}{3^4};\ 3^{3x} = 3^{-4};\ 3x = -4;$$

$$x = -\frac{4}{3}.$$

7. Missuguste arvude logaritmid aluse puhul 3 on $1, 2, 3, 0, -1, -2, -3$?

8. Missuguste arvude logaritmid aluse puhul $1\frac{1}{3}$ on $1, 2, 3, 0, -1, -2, -3$?

9. Missuguse aluse puhul on 125 logaritm $1, 3, -1, -3, \frac{3}{2}$?

10. Logaritmide alus on 3. Leia arvude $3, 9, 27, 81, 243, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \sqrt{3}, \sqrt{27}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{81}$ logaritmid!

11. Aluseks on 10. Leia arvude $10, 100, 1000, 1, 0{,}1; 0{,}01; 0{,}001; \sqrt{10}, \sqrt[3]{10}, \sqrt[4]{10^3}, \sqrt[5]{100}$ logaritmid!

12. Aluseks on $\frac{1}{4}$. Leia arvude $2, 4, 8, 16, 32, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \sqrt{2}, \sqrt{2^5}, \sqrt{32}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{16}$ logaritmid!

13. Aluseks on positiivne arv a. Leia arvude $a, a^2, a^n, 1, \sqrt{a}, \sqrt[4]{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^n}, \sqrt[n]{a^m}, \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ logaritmid!

Logaritmi definitsioonist järgneb: Kui on antud võrdus $\log_2 = 8$, siis $2^3 = 8$, ehk asendades 3-e sümboliga $\log_2 8$ saame $2^{\log_2 8} = 8$; samuti $10^{\log_{10} 5} = 5$.

Üldiselt, kui $\log_a N = x$, siis $a^x = N$.

Asetades x asemele $\log_a N$ saame

$$\boxed{a^{\log_a N} = N}$$

Kui logaritmi alust astendada mingi arvu logaritmiga, siis saame selle arvu enese.

14. Lähtudes logaritmi definitsioonist, leia!

$$5^{\log_5 3};\ 7^{\log_7 21};\ 10^{\log_{10} 100};\ 10^{\log_{10} 3{,}4};$$

$$10^{\log_{10} 0{,}028};\ 10^{\log_{10} a};\ 10^{\log_{10} ab};\ 10^{\log_{10} \sqrt{\frac{a}{b}}}.$$

15. Lahenda järgnevad võrrandid!

a) $x = \log_8 128$	e) $x = \log_{\frac{1}{8}} 256$	i) $x = \log_{10} 1$
b) $x = \log_{27} 81$	f) $x = \log_9 \frac{1}{729}$	j) $x = \log_{10} 1000$
c) $x = \log_2 0{,}25$	g) $x = \log_{81} \sqrt[5]{9}$	k) $x = \log_{10} 0{,}0001$
d) $x = \log_5 0{,}04$	h) $x = \log_{\frac{1}{7}} \sqrt[3]{49}$	l) $x = \log_{10} \sqrt[3]{100}$

16. Lahenda järgnevad võrrandid!

a) $\log_2 x = 4$	d) $\log_{\frac{1}{3}} x = 4$	g) $\log_{10} x = 5$
b) $\log_3 x = 5$	e) $\log_5 x = -4$	h) $\log_{10} x = -3$
c) $\log_7 x = 4$	f) $\log_{\frac{1}{7}} x = -3$	i) $\log_{10} x = 0$

17. Lahenda järgnevad võrrandid!

a) $\log_x 169 = 2$	d) $\log_x 343 = -3$	g) $\log_x 1000 = 3$
b) $\log_x 216 = 3$	e) $\log_x \sqrt{8} = \frac{2}{3}$	h) $\log_x 0{,}0001 = -4$
c) $\log_x \frac{1}{64} = 3$	f) $\log_a \sqrt[3]{25} = -2$	i) $\log_x \sqrt[3]{10000} = \frac{4}{3}$

3. Logaritmide omadusi.

Selgitamiseks. Kui on antud olenevus kahe muutuja vahel kujul:

$$y = a^x, \quad (1)$$

siis võime sama olenevuse kirjutada logaritmi definitsiooni põhjal kujul

$$x = \log_a y. \quad (2)$$

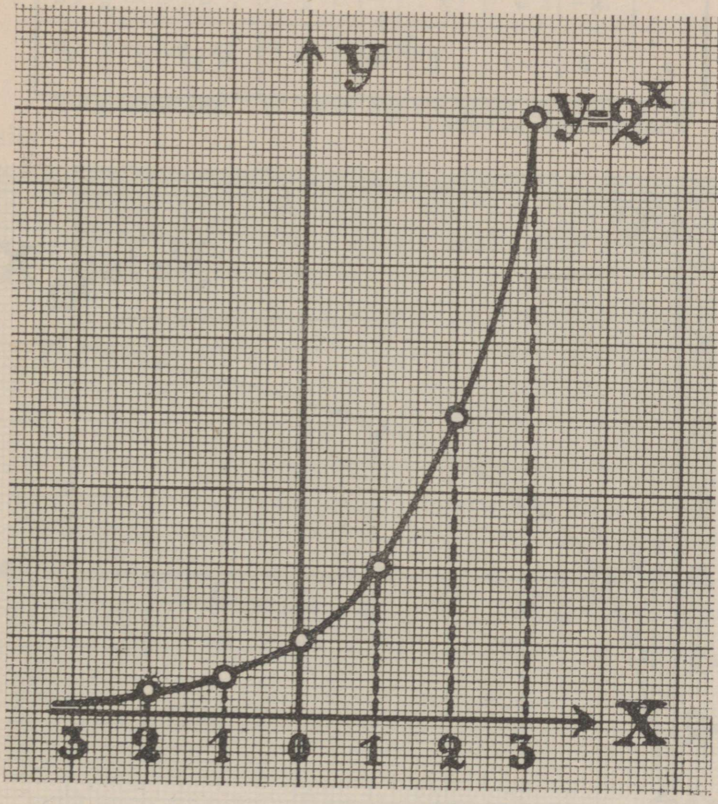
Esimest funktsiooni nimetame **eksponentfunktsiooniks**, teist **logaritmfunktsiooniks.** Et eksponent- kui ka logaritmfunktsioon määravad ühe ja sama olenevuse muutujate vahel, siis rahuldavad neid mõlemaid ühed ja samad väärtustepaarid.

Joonestame funktsiooni

$$y = 2^x$$

käigu kõvera, mis on sama kui funktsiooni $x = \log_2 y$ muutumise käiku kujutav kõver:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



Märkus: X-telje all lugeda: -3 -2 -1 0 1 2 3.

6. joonis.

Vahetame aga funktsiooni $x = \log_2 y$ muutujate kohad, saame logaritmfunktsiooni kujul

$$y = \log_2 x, \quad (3)$$

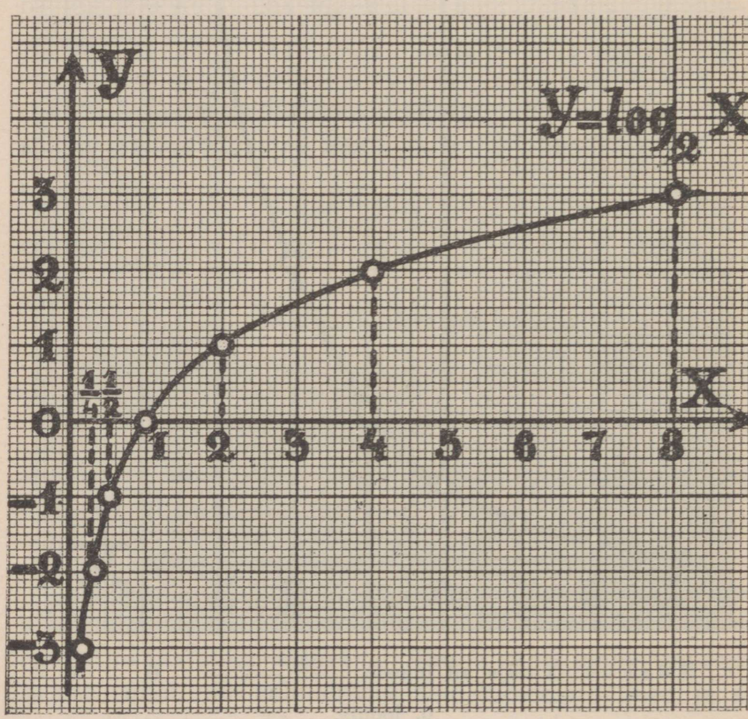
mis on samaväärne eksponentfunktsiooniga

$$x = 2^y. \quad (4)$$

Esitame funktsioonid (3) ja (4) graafiliselt. Leiame väärtustepaarid:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Joonestame kõvera:



7. joonis.

18. Leia jooniselt $\log_2 3$; $\log_2 1{,}5$; $\log_2 6{,}8$!

19. Leia arv, mille logaritm alusel 2 on: $-0{,}5$; $0{,}5$; $1{,}8$; $2{,}5$!

20. Joonesta ühes ja samas teljestikus funktsioonide $y = 3^x$ ja $y = \log_3 x$ käigu kõverad!

21. Joonesta järgnevate funktsioonide käigu kõverad!

a) $y = \frac{1}{1} \cdot 2^x$; b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; c) $y = 1 + 2^x$;

d) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; e) $y = 2 \log_2 x$.

Selgitamiseks. Võtame logaritmide aluseks arvu 10, siis

$$y = \log x \text{ ehk } x = 10^y .$$

Aluse 10 jätame kirjutamata kokkuleppe põhjal.
Leiame väärtustepaarid:

x	0,01	0,1	1	10	100	1000
y	-2	-1	0	1	2	3

Nagu tabelist näha, tekib funktsiooni käigu kõvera joonestamisel raskusi, sest punktid järgnevad üksteisele suurte vahemikkude järel. Raskusest saame üle, kui kirjutame logaritmile ette valitud väärtused ja nende põhjal leiame vastavad arvud. Sellega täiendame tabelit.

Kui $y = \frac{1}{8}$, siis $x = 10^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{10} = 1{,}33\ldots$

$\log 1{,}33\ldots = 0{,}125$;

„ $y = \frac{1}{4}$, „ $x = 10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10} = 1{,}78\ldots$

$\log 1{,}78\ldots = 0{,}25$;

„ $y = \frac{1}{2}$, „ $x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}16\ldots$

$\log 3{,}16\ldots = 0{,}5$;

„ $y = \frac{3}{4}$, „ $x = 10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{1000} = 5{,}62\ldots$

$\log 5{,}62\ldots = 0{,}75$;

kui $y = \frac{7}{8}$, siis $x = 10^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{10000000} = 7{,}5\ldots$

$$\log 7{,}5\ldots = 0{,}875;$$

„ $y = -\frac{1}{2}$, „ $x = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0{,}316\ldots$

$$\log 0{,}316\ldots = -0{,}5;$$

„ $y = -\frac{1}{4}$, „ $x = 10^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{10}} = 0{,}562\ldots$

$$\log 0{,}562\ldots = -0{,}25.$$

Märkus. Et leida $\sqrt[4]{10}$, selleks kirjutame $\sqrt{\sqrt{10}}$ ja peame silmas, et esimene juur tuleb leida täpsusega kuni 0,0001. Samuti $\sqrt[8]{10} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$; siin tuleb esimene juur võtta täpsusega kuni 0,00000001.

Täiendades endist tabelit uute väärtustepaaridega saame:

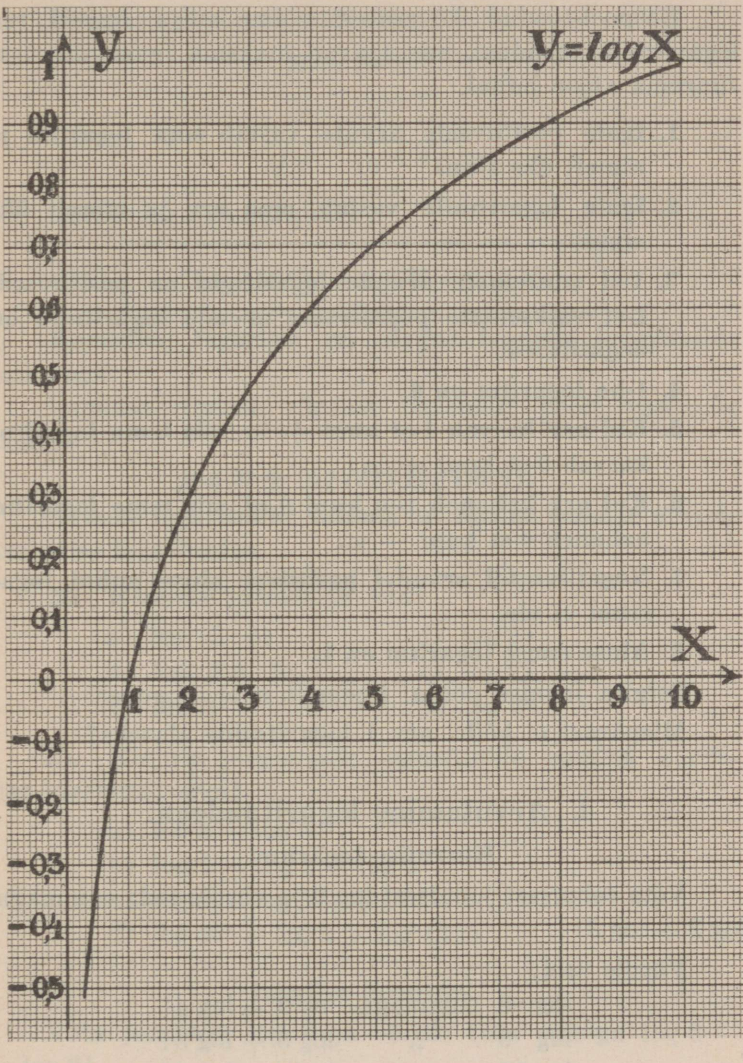
x	0,01	0,1	0,32...	0,56...	1
y	−2	−1	−0,5	−0,25	0

x	1	1,33...	1,78...	3,16...	5,62...	7,5	10
y	0	0,125	0,25	0,5	0,75	0,875	1

Nende väärtustepaaride alusel joonestame funktsiooni $y = \log x$ käigu kõvera. Joonise selguse mõttes võtame logaritmide jaoks 10 korda pikema ühiku kui arvude jaoks. (Vaata 8. joon.!)

Harjutusi.

22. Määra joonise põhjal!
log 2; log 3; log 3,5; log 4; log 4,8; log 5; log 6; log 7; log 8; log 9; log 0,9; log 0,8.



8. joonis.

23. Määra joonisest arvud, mille logaritmid on! 0,3; 0,4; 0,45; 0,5; 0,6; 0,65; 0,7; 0,8; 0,9; — 0,2; — 0,5.

Eespool-toodud kõveratest võime välja lugeda rea logaritmide omadusi, mis jäävad maksma igasuguse 1-st suurema aluse puhul.

1. **Igale positiivsele arvule vastab oma logaritm ja nimelt üks ainus.**
2. **Igale logaritmile vastab oma arv ja nimelt üks ainus.**
3. **1-st suuremate arvude logaritmid on positiivsed, 1-st väiksemate positiivsete arvude logaritmid on negatiivsed.**
4. **1-he logaritm on 0.**
5. **Kui arv kasvab 1-st kuni $+\infty$, siis tema logaritm kasvab 0-st kuni $+\infty$.**
6. **Kui arv kahaneb 1-st kuni 0-ni, siis tema logaritm kahaneb 0-st kuni $-\infty$.**
7. **Negatiivsetel arvudel positiivse aluse puhul logaritmi ei ole.**
8. **Aluse enese logaritm on 1.**

Selgita joonise põhjal ligemalt neid omadusi!

Mispärast ei kõlba arv 1 logaritmide aluseks?

4. Arvutamine logaritmidega.

Korrutise logaritm.

Võta eelmisest joonisest log 6 ja võrdle teda summaga $\log 2 + \log 3$!

Võrdle veel:

log 8	summaga	$\log 2 + \log 4$!
log 9	„	$\log 3 + \log 3$!
log 10	„	$\log 2 + \log 5$!
log 7	„	$\log 2 + \log 3{,}5$!

Näib, et korrutise logaritm on võrdne tegurite logaritmide summaga.

Näiteks, $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3$.

Näitame, et see on alati nii:

$$\frac{\begin{array}{c} M = 10^{\log M} \\ N = 10^{\log N} \end{array}}{MN = 10^{\log M + \log N}}$$

Definitsioonist järgneb:

$$\boxed{\log (MN) = \log M + \log N}$$

Korrutise logaritm on võrdne tegurite logaritmide summaga.

Lugedes viimast võrdust paremalt poolt vasemale saame

$$\log M + \log N = \log (MN).$$

Arvude logaritmide summa on võrdne samade arvude korrutise logaritmiga.

24. Kasusta joonist ja leia!

a) $\log (3 \cdot 4)$ d) $\log 24$
b) $\log (2{,}5 \cdot 6)$ e) $\log 27$
c) $\log 16$ f) $\log 36$

25. Kirjuta järgnevate logaritmide summa korrutise logaritmi näol!

a) $\log 5 + \log 4$
b) $\log 7 + \log 2 + \log 5$
c) $\log a + \log b + \log c$
d) $\log m^2 + \log n + \log (3n)$

Jagatise logaritm.

Võta joonisest log 2 ja võrdle teda vahega log 6 — — log 3!

Võrdle veel:

log 2 vahega log 8 — log 4!
log 5 „ log 10 — log 2!
log 3,5 „ log 7 — log 2!

Näib, et jagatise logaritm on võrdne jagatava ja jagaja logaritmide vahega.

Näiteks, $\log 2 = \log \frac{8}{4} = \log 8 - \log 4$.

Tõesti

$$M = 10^{\log M}$$
$$N = 10^{\log N}$$
$$\frac{M}{N} = 10^{\log M - \log N}$$

$$\boxed{\log \frac{M}{N} = \log M - \log N}$$

Jagatise logaritm on võrdne jagatava ja jagaja logaritmide vahega.

Lugedes eelmist võrdust vasemalt poolt paremale saame

$$\log M - \log N = \log \frac{M}{N}$$

Kahe arvu logaritmide vahe on võrdne samade arvude jagatise logaritmiga.

26. Kirjuta järgnevad logaritmid logaritmide vahe näol!

a) $\log \frac{3}{7}$ d) $\log 0{,}032$

b) $\log 2\frac{1}{3}$ e) $\log \frac{a}{b}$

c) $\log 15\frac{2}{9}$ f) $\log \frac{a^2}{b^3}$

27. Kirjuta järgnevad logaritmide vahed jagatise logaritmi näol!

a) $\log 8 - \log 3$ d) $\log m - \log n$

b) $\log 7 - \log 4 - \log 5$ e) $\log (2m) - \log n^2$

c) $\log 5 - \log 2$ f) $\log a + \log b - \log c$

Astme logaritm.

$$N = 10^{\log N}.$$

Astendame võrduse mõlemaid pooli arvuga m:

$$N^m = (10^{\log N})^m = 10^{m \log N}.$$

$$\boxed{\log N^m = m \log N}$$

Astme logaritm on võrdne astme aluse logaritmi ja astendaja korrutisega.

Lugedes eelmist võrdust vasemalt poolt paremale saame

$$m \log N = \log N^m.$$

28. Kasusta joonist ja leia!

a) log 16 c) log 49 e) log 125
b) log 25 d) log 81 f) log 729

29. Kirjuta järgnevad logaritmid astme logaritmi näol!

a) $2 \log 5$ d) $k \log \left(\frac{a}{b}\right)$

b) $3 \log \frac{2}{3}$ e) $2 \log (a + b)$

c) $n \log a$ f) $n \log (a - b)$

Juure logaritm.

Juure logaritmi leidmiseks kasustame astme logaritmi valemit:

$$\log \sqrt[m]{N} = \log N^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} \log N.$$

$$\boxed{\log \sqrt[m]{N} = \frac{\log N}{m} = \frac{1}{m} \log N}$$

Juure logaritm on võrdne juuritava logaritmi ja juurija jagatisega.

Ümberpöördult

$$\frac{\log N}{m} = \frac{1}{m} \log N = \log \sqrt[m]{N}.$$

30. Kasusta joonist ja leia!

a) $\log \sqrt{3}$ d) $\log \sqrt[3]{10}$

b) $\log \sqrt[3]{5}$ e) $\log \sqrt[4]{6^3}$

c) $\log \sqrt[4]{8}$ f) $\log \sqrt[5]{7^3}$

31. Kirjuta järgnevad logaritmid juure logaritmi näol!

a) $\frac{1}{2}\log 8$ d) $\frac{2}{3}\log 15$ g) $\frac{1}{5}\log (a+b)$

b) $\frac{1}{3}\log 16$ e) $\frac{3}{4}\log 50$ h) $\frac{2}{5}\log m$

c) $\frac{1}{3}\log 3{,}2$ f) $\frac{1}{3}\log a$ i) $\frac{3}{4}\log (a-b)$

Tõestasime eelmised laused, võttes logaritmide aluseks 10. Tõestus jääb samaks igasuguse aluse puhul.

Märkus.

$\log (a+b)$ ei ole $\log a + \log b$, sest
$\log a + \log b$ on $\log (ab)$.
$\log (a-b)$ ei ole $\log a - \log b$, sest
$\log a - \log b$ on $\log \frac{a}{b}$.
$\log \sqrt[n]{a}$ ei ole $\log \frac{a}{n}$, vaid $\frac{\log a}{n}$.

32. a) $\log 15$ määramiseks kasusta $\log 3$ ja $\log 5$!

b) $\log \frac{2}{3}$ „ „ $\log 2$ ja $\log 3$!

c) $\log 1\frac{4}{7}$ „ „ $\log 11$ ja $\log 7$!

d) $\log 27$ „ „ $\log 3$!

e) $\log \sqrt{5}$ „ „ $\log 5$

f) $\log \frac{16}{125}$ „ „ $\log 2$ ja $\log 5$!

g) $\log \sqrt[3]{243}$ „ „ $\log 3$!

33. On teada, et

$$\log 2 = 0{,}3010$$
$$\log 3 = 0{,}4771$$
$$\log 5 = 0{,}6990$$

Määra!

a) $\log 6$
b) $\log 8$
c) $\log 15$
d) $\log 45$
e) $\log 10$
f) $\log 1000$
g) $\log 4\frac{1}{2}$
h) $\log \frac{4}{25}$
i) $\log 0{,}032$
j) $\log 20$
k) $\log 400$
l) $\log 1500$
m) $\log 0{,}3$
n) $\log 0{,}03$
o) $\log 0{,}001$
p) $\log 0{,}005$
q) $\log \sqrt{2}$
r) $\log \sqrt[3]{5}$

34. Logaritmi järgnevad avaldised!

a) $5ab$
b) m^2n^3
c) $7a^2b^2c^4$
d) $\frac{mn}{p}$
e) $\frac{(pq)^2}{2r}$
f) $\frac{a^2b^2}{8c^3}$
g) $6(a+b)$
h) $15b(c-d)^2$
i) $\frac{3a}{(a+b)^3}$
j) $\frac{5m}{m^2-n^2}$
k) $\frac{(a-b)^2c^3}{2(a^2+b^2)}$
l) $9a\sqrt{b}$
m) $2m\sqrt[3]{mn^2}$
n) $\sqrt[3]{\frac{25a^2b}{cd^2}}$
o) $a\sqrt[3]{a^2(a+b)^2}$
p) $\frac{12a^2b}{c\sqrt{d^3}}$

Näidis:

$$\log \frac{7m^3n^2}{p^2(m+n)^2} = \log 7m^3n^2 - \log p^2(m+n)^2 =$$
$$= \log 7 + 3\log m + 2\log n - 2\log p - 2\log(m+n).$$

35. a) $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{15}}}$

b) $\sqrt[3]{2a^2\sqrt{ab}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{m^2n}{\sqrt{3p}}}$

d) $\sqrt{\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt[3]{12}}}$

e) $\sqrt[-2]{\frac{a}{\sqrt{ab}}\sqrt{2a}}$

f) $\frac{a^{\frac{2}{3}}\, b^{-3}}{c^{-\frac{1}{2}}}$

36. a) $18x^2y\sqrt{(x^2+y^2)z}$ d) $\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3$

b) $\frac{28m(a-b)^3}{25\sqrt{(am-b)}}$ e) $\frac{a-b}{c-d}\sqrt[3]{\frac{a-b}{c-d}}$

c) $\frac{1}{(2a+b^2)^3}$ f) $\frac{1}{a^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{(a-b)^2}}$

37. Logaritmitud avaldise põhjal leia esialgne avaldis!

a) $\log a + \log b - \log c$
b) $\log m - (\log p + \log q) + \log n$
c) $2\log a - 3\log b + 4\log c$
d) $\log a - 2\log b - 3\log c$
e) $\frac{1}{2}\log a - \log b + \log c$
f) $\frac{3}{2}\log(x-y) - \frac{4}{3}\log(x+y)$
g) $\log(a+b) - \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\log a + \frac{3}{4}\log b)$
h) $\frac{1}{2}\log(m^2+n^2) - \frac{1}{2}[\log(m+n) +$
$+ \log(m-n)]$
i) $\frac{\log a + \log b}{3} - \frac{1}{3}\log(c+d)$

Näidis:

$$\log x = 2\log k - 3\log m - \frac{2}{3}\log n =$$
$$= \log k^2 - \log m^3 - \log\sqrt[3]{n^2} =$$
$$= \log\frac{k^2}{m^3\sqrt[3]{n^2}};$$
$$x = \frac{k^2}{m^3\sqrt[3]{n^2}}.$$

38. Lahenda järgnevad eksponentvõrrandid!

a) $100^x = 10\,000$ e) $\sqrt{a^{x+2}} = \sqrt[3]{a^{2x}}$

b) $\frac{1}{7^x} = 343$ f) $\sqrt[3]{a^{2x-5}} = 1$

c) $(0{,}25)^x = 32$ g) $81^x = \frac{1}{27}$

d) $\left(\frac{25}{36}\right)^x = \left(\frac{6}{5}\right)^{-4}$ h) $\sqrt[2x]{512} = 8$

i) $7^{(3-x)(x+5)} = 1$

j) $\sqrt[x]{6561} = 9^x$

k) $\left(\frac{1}{1,25}\right)^x = 1\frac{9}{16}$

l) $\sqrt[x-2]{a} = \sqrt[2x+1]{a^3}$

m) $\sqrt{a^{3-2x}}\sqrt[3]{a^{1-x}} = 1$

n) $\left(1\frac{2}{3}\right)^x = \sqrt[3]{\frac{9}{25}}$

39. a) $6^x - 6^{x-1} = 30$

b) $3 \cdot 2^x + 2^{x+2} = 28$

c) $2^x \cdot 5^{2x} = 2500$

d) $\left(\frac{2}{7}\right)^x 14^x = 32$

e) $4^{1-x} = 17^{x-1}$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-2}$

g) $8^{\sqrt{x-1}} = 16 \cdot 2^{\sqrt{x-1}}$

h) $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$

40. Lahenda järgnevad logaritmvõrrandid!

a) $\log x = \log 15 - \log 5 + \log 2$

b) $\log x = 2 \log 3 + 3 \log 2 - 2 \log 5$

c) $\log x = \frac{1}{2} \log 3 - \frac{2}{3} \log 6$

d) $\log x = 2 \log 4 - \frac{1}{2} \log 64 - \frac{1}{3} \log 27$

e) $\log x = 1 - 2 \log 3$

f) $\log x = -3 \log 2 - 2 \log 5$

41. Leia x!

a) $x^{2x} = x$

b) $x^{\log x} = 10000$

c) $x^{\log x} = 100x$

d) $\sqrt[3]{x^{\log x + 1}} = 100$

e) $\log(x+2) - \log 3 = \log 6$

f) $\log\sqrt{x+2} + \log\sqrt{3x-2} - \log 4 = 0$

g) $\frac{\log(3-x)}{\log(x-3)} = 2$

P e a m e e l e s!

$2 \log 3 = \log 3^2 = \log 9;$

$\log 3 \cdot \log 3 = (\log 3)^2 = \log^2 3;$

$\log \log 100 = \log(\log 100) = \log 2.$

42. Arvuta!

a) $\log^2 1000;$ b) $\log(1000)^2;$ c) $\log\log 1000;$

d) $\log^2_2 16;$ e) $\log_2(16^2);$ f) $\log\log_2 16.$

43. Arvuta!

a) $10^{\log 11};$ b) $10^{1-\log 2};$ c) $10^{2+\log 2\frac{1}{2}};$

d) $10^{-\log 0,25};$ e) $10^{\frac{1}{2} - \log 0,125\sqrt{10}}.$

5. Kümnendlogaritmide omadusi.

Selgitamiseks.

Ühe ja sama aluse põhjal arvutatud logaritmid moodustavad logaritmide süsteemi. Kasustatakse peaasjalikult kahte süsteemi: loomulikkude logaritmide süsteemi ja kümnendlogaritmide süsteemi. Esimeses süsteemis on mõnesugustel teoreetilistel kaalutlustel aluseks võetud arv $e = 2{,}718281828\ldots$; teises on aluseks võetud arv **10**. Harilikult kasustatakse viimast süsteemi arvutusabinõuna.

Kasustame edaspidi kõik aeg kümnendlogaritme.

Kümnendlogaritmidel on mitmeid omadusi omaette; leiame nad.

Et

$$
\begin{array}{rl}
10 = 10^1, & \text{siis } \log 10 = 1 \\
100 = 10^2, & \quad ,, \quad \log 100 = 2 \\
1000 = 10^3, & \quad ,, \quad \log 1000 = 3 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\underbrace{100\ldots0}_{n \text{ nulli}} = 10^n, & \text{siis } \log \underbrace{100\ldots0}_{n \text{ nulli}} = n.
\end{array}
$$

Kui täisarv on kirjutatud 1-he ja temale järgnevate nullide abil, siis tema logaritm koosneb nii mitmest positiivsest ühelisest, kui mitu nulli on selle arvu kirjutises.

44. Määra, missuguse kahe täisarvu vahel asuvad järgnevate arvude logaritmid!

$\log 8$; $\log 54$; $\log 843{,}2$; $\log 4573$; $\log 61\,790$; $\log 781\,943$.

Võtame mingi täisarvu N, mis ei ole kirjutatud 1-he ja 1-le järgnevate nullide abil,

$$\text{siis } N \neq 100\ldots.0.$$

Oletame, et $\log N = k$ (täisarv),

$$\text{siis } N = 10^k = 1\underbrace{00\ldots 0}_{k \text{ nulli}}.$$

Viimane võrdus on tingimuse põhjal võimatu.

Oletame, et $\log N = \frac{p}{q}$, kus $\frac{p}{q}$ ei ole taanduv murd,

$$\text{siis } N = 10^{\frac{p}{q}} \text{ ehk } N^q = 10^p.$$

Viimane võrdus on võimatu, sest 10^p annab arvu, milles esinevad ainult tegurid 2 ja 5, neist kumbki p korda, kuna N^q niisugust arvu ei anna.

Saame lause:

Kui täisarv ei ole kirjutatud 1-he ja temale järgnevate nullide abil, siis tema logaritm ei avaldu täpselt ei täisarvu ega ka murru näol.

Et suurema osa arvude logaritmid täpselt ei avaldu täisarvu ega murru näol, siis määratakse nad ligikaudu kümnendmurru näol. Selle järgi, mitu kohta on võetud pärast koma, saame vastavad tabelid. On tabelites antud neli kohta pärast koma, siis on tabelid neljakohased; on viis kohta, siis viiekohased jne.

Et neljakohastes tabelites on kümnetuhandendikkude ümmardamisel arvesse võetud ka sajatuhandendikud, siis neis esinevad logaritmid on täpsed kuni 0,00005.

Igal logaritmil on kaks osa: **täisosa** ehk **karakteristik** ja **murdosa** ehk **mantiss.**

Vaatame, kuidas leitakse arvu logaritmi täisosa.

Võtame näiteks arvu 239,8.

$$100 < 239{,}8 < 1000$$
$$\log 100 < \log 239{,}8 < \log 1000$$
$$2 < \log 239{,}8 < 3$$

Järelikult: $\log 239{,}8 = 2 + \text{murdosa}$.

Täisarvu või segaarvu logaritmi täisosa koosneb nii mitmest positiivsest ühelisest, kui mitu kohta on selle arvu täisosa kirjutises ilma 1-ta.

Tõestame seda üldkujul.

Olgu N niisugune arv, mille täisosa on n kohta.

$$10^{n-1} < N < 10^n$$

10^{n-1} on kõige väiksem arv, mille täisosa on n kohta; 10^n on arv, mille täisosa on $n+1$ kohta.

$$\log 10^{n-1} < \log N < \log 10^n$$

$$n - 1 < \log N < n$$

Järelikult: **log $N = (n - 1) +$ murdosa.**

45. Määra järgnevate logaritmide täisosa!

$\log 3{,}7$; $\log 28$; $\log 456{,}9$; $\log 1000{,}2$; $\log 62453\frac{2}{3}$; $\log 2\,460\,000$.

46. Mitu täiskohta on arvus, kui tema logaritm on: 0,5436; 2,7934; 1,1256; 4,8888; 10,9425?

Logaritmi negatiivse murdosa muutmine positiivseks.

Eespool nägime, et kui arv oli väiksem ühest, siis tema logaritm on negatiivne, s. o. ta koosneb negatiivsest täisosast ja negatiivsest murdosast. Sel puhul on võimalik logaritmi alati niiviisi teisendada, et murdosa saab positiivseks. Nimelt lisame täisosale juurde -1 ja murdosale $+1$.

Näiteks: $-2{,}5084 = -2 - 0{,}5084 =$

$$= -2 - 1 + 1 - 0{,}5084 = -3 + 0{,}4916 = \overline{3}{,}4916.$$

Ehk lühemalt:

$$-2{,}5084 = -\overset{-1+1}{2{,}5084} = \overline{3}{,}4916.$$

Tegelikult on 1-st väiksemate arvude logaritmid alati antud nii, et nende murdosad on positiivsed.

47. Muuda järgnevate logaritmide murdosa positiivseks!

a) $-0,7589$; $-3,4690$; $-4,2599$; $-1,7846$
b) $-2,0091$; $-5,9999$; $-6,7436$; $-8,0001$
c) $-\overline{1},3259$; $-\overline{2},6435$; $-\overline{5},4688$; $-\overline{3},4900$
d) $-\overline{4},5436$; $-\overline{1},9889$; $-\overline{6},7708$; $-\overline{8},4395$

Logaritmi positiivse murdosa muutmine negatiivseks. Sel puhul lisame täisosale juurde $+1$ ja murdosale -1.

Näiteks: $\overline{4},9651 = -4 + 0,9651 = -4 + 1 - 1 + 0,9651 = -3 - 0,0349 = -3,0349.$

48. Leia järgnevate logaritmide tõeline väärtus! $\overline{1},4758$; $\overline{2},4936$; $\overline{3},9980$; $\overline{4},0099$; $\overline{5},7111$.

Kui arvu korrutada või jagada arvuga 10^n, siis tema logaritmi positiivne murdosa ei muutu, kuna täisosa suureneb või väheneb *n* ühelise võrra.

Olgu $\log N = k +$ murdosa,

siis $\log (N \cdot 10^n) = \log N + \log 10^n =$
$= k +$ murdosa $+ n = (k + n) +$ murdosa

$\log \frac{N}{10^n} = \log N - \log 10^n =$
$= k +$ murdosa $- n = (k - n) +$ murdosa.

Järeldused:

1. **Logaritmi positiivne murdosa ei muutu, kui koma logaritmitavas arvus viia edasi paremale või vasemale poolele.**

Näiteks arvude 0,000527; 0,0527; 5,27; 527 logaritmid erinevad ainult täisosade poolest.

2. **Kui täisarvud erinevad ainult nullide arvu poolest nende kirjutise lõpus, siis nende logaritmid erinevad ainult täisosa poolest.**

Näiteks arvude 75, 750, 7500, 75000 logaritmid erinevad ainult täisosade poolest.

49. Antud $\log 857 = 2{,}9330$, $\log 403 = 2{,}6053$. Leia järgnevate arvude logaritmid!

a) 8,57; 8570; 85,70; 85700; 0,857; 0,000857; 0,0857.

b) 40,3; 4030; 4,03; 40300; 4030000; 0,403; 0,0403; 0,0000403.

Ühest väiksemate arvude logaritmi täisosa määramine.

Et $0{,}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$, siis $\log 0{,}1 = -1$

„ $0{,}01 = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$, „ $\log 0{,}01 = -2$

„ $0{,}001 = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$, „ $\log 0{,}001 = -3$

. . . .

. . . .

„ $\underbrace{0{,}00\ldots01}_{n \text{ nulli}} = \frac{1}{10^n} = 10^{-n}$, siis $\log \underbrace{0{,}00\ldots01}_{n \text{ nulli}} = -n$

Kui kümnendmurd on kirjutatud nullide ja neile järgneva 1 kaudu, siis tema logaritm koosneb nii mitmest negatiivsest ühelisest, kui mitu nulli on selle arvu kirjutises.

50. Missuguste täisarvude vahel asuvad järgnevate arvude logaritmid:

log 0,103; log 0,37; log 0095; log 0,017; log 0,0054; log 0,000392?

Leiame arvu 0,00017 logaritmi täisosa.

$$0{,}0001 < 0{,}00017 < 0{,}001$$

$$\log 0{,}0001 < \log 0{,}00017 < \log 0{,}001$$

$$-4 < \log 0{,}00017 < -3$$

$$\log 0{,}00017 = -4 + \text{positiivne mantiss.}$$

Kui kümnendmurd ei ole kirjutatud nullide ja neile järgneva 1 abil, siis tema logaritmi täisosa koosneb, pärast seda kui murdosa on muudetud positiivseks, nii mitmest

negatiivsest ühelisest, kui mitu nulli on selle murru kirjutises eespool esimest väärtusega numbrit.

Tõestame selle lause üldkujul.

Olgu antud murd $N = \underbrace{0{,}00\ldots0}_{n \text{ nulli}}\alpha\beta$

$$\text{siis } \underbrace{0{,}00\ldots0}_{n \text{ nulli}}1 < \underbrace{0{,}00\ldots0}_{n \text{ nulli}}\alpha\beta < \underbrace{0{,}00\ldots0}_{(n-1) \text{ nulli}}1$$

$$\log \underbrace{0{,}00\ldots0}_{n \text{ nulli}}1 < \log \underbrace{0{,}00\ldots0}_{n \text{ nulli}}\alpha\beta < \log \underbrace{0{,}00\ldots0}_{(n-1) \text{ nulli}}1$$

$$-n < \log \underbrace{0{,}00\ldots0}_{n \text{ nulli}}\alpha\beta < -(n-1)$$

$$\mathbf{\log} \underbrace{\mathbf{0{,}00\ldots0}}_{n \text{ nulli}}\alpha\beta = -\mathbf{n} + \textbf{positiivne murdosa.}$$

Eelmistest lausetest järgneb, et nii täisarvu kui ka kümnendmurru logaritmi täisosa leitakse ilma tabeliteta. Peale selle nägime, et logaritmi murdosa ei olene koma asukohast; selle tõttu esinevad tabelites ainult täisarvude logaritmide murdosad.

6. Arvude logaritmide määramine.

Esimesed logaritmide tabelid valmistas šoti matemaatik John Neper. Ta avaldas nad aastal 1614. Ta võttis aluseks arvu $\frac{1}{l}$. Neper'i õpilane Briggs valmistas uued tabelid, võttes aluseks arvu 10. Viimased on praegusel ajal igal pool tarvitusel.

Kui võtta logaritmide aluseks 10, siis on kergesti määratavad ainult arvude 1; 10; 100; 1000; ....; 0,1; 0,01; 0,001 jne. logaritmid. Kõikide teiste arvude logaritmide määramine nõuab küllalt tülikat arvutamist.

Vaatleme ligemalt ühte võimalust arvude logaritmide määramiseks.

Katsume leida näiteks arvu 3 logaritmi

$$10^{\log 3} = 3.$$

Võtame võrduse mõlemad pooled ruutu, saame

$$10^{2 \log 3} = 9.$$

Võtame uuesti ruutu:

$$10^{4 \log 3} = 81$$

Et $10 < 81 < 100,$

siis $10^1 < 10^{4 \log 3} < 10^2$

$$1 < 4 \log 3 < 2$$

$$0{,}25 < \log 3 < 0{,}5$$

Võttes jälle ruutu:

$$10^{8 \log 3} = 6561$$

$$10^3 < 10^{8 \log 3} < 10^4$$

$$3 < 8 \log 3 < 4$$

$$0{,}375 < \log 3 < 0{,}5$$

Jätkates niiviisi ruututõstmist võime leida log 3 nõutud täpsusega.

Kõikide arvude logaritmide määramisel niiviisi toimida ei ole tarvis. On küllalt, kui leiame algarvude logaritmid; kordarvude logaritmid leitakse algarvude logaritmide abil.

N ä i t e k s:

$$\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2$$

$$\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3$$

$$\log 72 = \log (2^3 \cdot 3^2) = 3 \log 2 + 2 \log 3.$$

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$$

M ä r k u s. Logaritmide tegelik arvutamine tabelite koostamiseks sünnib koguni teistel alustel, mis viivad kiiremini eesmärgile, kuid selleks on tarvis laiemaid teadmisi matemaatikast.

7. Tabelite tarvitamine.

Antud arvude logaritmi leidmine neljakohaste tabelite abil.

Leiame arvu 42,8 logaritmi. Logaritmi täisosa on 1. Et arvu 42,8 logaritmi murdosa on sama, mis arvu 428 logaritmi murdosa, siis leiame viimase jaoks tabelist ta murdosa 6314 ja saame:

$$\log 42{,}8 = 1{,}6314.$$

Kui võtame arvu 564,6, siis niisugust arvu meie tabelites ei ole. On aga küll arvud 564 ja 565. Et leida arvu 564,6 logaritmi, selleks võtame arvu 564 logaritmi ja teeme vastava paranduse. Parandus leitakse nn. lineaarse interpolatsiooni kaudu.

$$\log 564 = 2{,}7513$$
$$\log 565 = 2{,}7520$$

Loeme logaritmi kasvud võrdelisteks arvu kasvudega, siis

$$\log 564{,}6 - \log 564 = x$$
$$\frac{x}{0{,}0007} = \frac{0{,}6}{1}$$
$$x = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}0007}{1} \approx 0{,}0004.$$

Kui märkida x-ga kümnetuhandendikud, siis võime kirjutada

$$\frac{x}{7} = \frac{0{,}6}{1}$$
$$x \approx 4 \text{ (kümnetuhandendikku)}$$

ja $\log 564{,}6 = 2{,}7517$.

Leiame veel arvu 0,03498 logaritmi:

$\log 0{,}0349 \ldots \bar{2}{,}5428$

$\phantom{\log 0{,}034}8 \ldots\ldots 10$

$\log 0{,}03498 = \bar{2}{,}5438$

$$\frac{x}{13} = \frac{0{,}8}{1}$$
$$x = 0{,}8 \cdot 13 = 10{,}4 \text{ (kümnetuhandendikku)}$$

Antud logaritmi järgi arvu määramine.

Olgu $\log N = 2{,}7956$.

Tabelis niisugust logaritmi ei leidu. On aga küll

$$2{,}7952 = \log 624$$
$$2{,}7959 = \log 625$$

Et $2{,}7952 < 2{,}7956 < 2{,}7959$, siis peitub arv N arvude 624 ja 625 vahel.

$N = 624 +$ parandus.

Märgime x-ga paranduse, siis

$$\frac{0{,}0004}{0{,}0007} = \frac{x}{1}\,; \quad x = \frac{4}{7} \approx 0{,}6.$$
$$N = 624{,}6.$$

Leiame veel arvu, mille logaritm on $\overline{2},2998$.

$$\begin{array}{lcl} \text{log} & & \text{nuum.} \\ \overline{2},2989 & \ldots\ldots & 0{,}0199 \\ 9 & \ldots\ldots & 4 \\ \hline \overline{2},2998 & \ldots\ldots & 0{,}01994 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \frac{9}{21} = \frac{x}{1} \\ \\ x = 0{,}4 \end{array}$$

51. Leia tabelist järgnevate arvude logaritmid!

a) 3; 29; 346; 4590; 89900; 7,8; 92,4; 83,6.

b) 0,6; 0,078; 0,0854; 0,00729; 0,495; 0,000391.

c) 5,962; 82,39; 495,6; 6913; 7,469; 12,49.

d) 0,4522; 0,01173; 0,001039; 0,01008; 0,9986.

d) 34582; 6,2796; 0,21085; 72,889; 0,0485999.

f) $24\frac{1}{4}$; $122\frac{1}{5}$; $5\frac{3}{8}$; $24\frac{7}{25}$; $649\frac{3}{4}$.

52. Leia järgnevate logaritmide põhjal arvud!

a) 0,4548; 0,9159; 1,7364; 3,8069; 1,6021.

b) 4,8569; 2,0067; 1,9562; 5,3876; 3,2495.

c) 0,4922; $\overline{1},3296$; $\overline{2},0154$; $\overline{3},2792$; $\overline{4},5566$.

d) 0,0493; $\overline{2},2222$; $\overline{3},8964$; 6,3925; 1,7346.

53. Muuda järgnevate logaritmide murdosad positiivseiks!

a) — 0,4563; — 2,7890; — 3,4899; — 1,5688; — 1,0089.

b) $-\bar{1},2956$; $-\bar{2},7828$; $-\bar{3},1090$; $-\bar{1},2296$.

54. Leia järgnevate logaritmide tõeline väärtus!
$\bar{1},7989$; $\bar{2},3999$; $\bar{5},0909$; $\bar{1},6250$; $\bar{4},1821$.

Tehted negatiivsete logaritmidega.

Näidiseid:

a) $$\begin{array}{r} 4,7954 \\ +\,\bar{3},6522 \\ \hline 0,4476 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{r} \bar{1},2095 \\ +\,\bar{2},9122 \\ \hline 2,1217 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{r} 2,5463 \\ -\,\bar{3},6914 \\ \hline 4,8549 \end{array}$$

d) $$\begin{array}{r} \overset{-1}{\bar{2}},\overset{+1}{3}\,7\,9\,6 \\ -\,1,6\,9\,5\,4 \\ \hline \bar{4},6\,8\,4\,2 \end{array}$$

e) $3\cdot\bar{2},8962=\bar{4},6886$

f) $\bar{1},7694:3=(-3+2,7694):3=-1+0,9231=$
$=\bar{1},9231,$

lühemalt: $\overset{-2}{\bar{1}},\overset{+2}{7}\,6\,9\,4:3=\bar{1},9\,2\,3\,1.$

55. Täida järgnev tabel!

a	2,4568	$\bar{3},4164$	$\bar{1},8463$	$\bar{2},2546$	0,1918	$\bar{2},0000$
b	$\bar{3},9463$	$\bar{4},7517$	$\bar{1},6914$	$\bar{5},9168$	$\bar{2},7319$	$\bar{3},0000$
c	2	3	5	10	12	4
$a+b$						
$a-b$						
bc						
$\frac{b}{c}$						

8. Arvutamine logaritmide abil.

Näidiseid:

1) Leiame logaritmide abil arvude 34,2 ja 2,57 korrutise:

$$34{,}2 = 10^{\log 34{,}2} = 10^{1{,}5340}$$
$$2{,}57 = 10^{\log 2{,}57} = 10^{0{,}4099}$$
$$34{,}2 \cdot 2{,}57 = 10^{1{,}5340 + 0{,}4099} = 10^{1{,}9439}$$

$10^{1{,}9439}$-le vastab tabelites arv 87,88, seega:

$$34{,}2 \cdot 2{,}57 = 87{,}88.$$

Praktiliselt rakendatakse eelmine korrutise leidmine järgmiselt:

$$x = 34{,}2 \cdot 2{,}57.$$

$$\log x = \log 34{,}2 + \log 2{,}57$$

$$\begin{aligned} \log 34{,}2 &= 1{,}5340 \\ \log 2{,}57 &= 0{,}4099 \\ \hline \log x &= 1{,}9439 \\ x &= 87{,}88 \end{aligned}$$

2) Leiame veel $\sqrt[3]{39{,}6}$

$$x = \sqrt[3]{39{,}6} = \sqrt[3]{10^{\log 39{,}6}} = 10^{\frac{1{,}5978}{3}} = 10^{0{,}5326}.$$

Tabelist järele vaadates leiame

$$x = \sqrt[3]{39{,}6} = 3{,}408$$

Praktilisemalt:

$$x = \sqrt[3]{39{,}6}.$$

$$\log x = \tfrac{1}{3} \log 39{,}6 = \tfrac{1}{3} \cdot 1{,}5978 = 0{,}5326.$$
$$x = 3{,}408.$$

3) $x = \dfrac{24{,}56 \sqrt[3]{0{,}35}}{37 \cdot 0{,}0254 \sqrt{(0{,}1789)^3}}$

$$\log x = \log 24{,}56 + \tfrac{1}{3} \log 0{,}35 - \log 37 -$$
$$- \log 0{,}0254 - \tfrac{3}{2} \log 0{,}1789.$$

Leiame lugeja ja nimetaja logaritmid eraldi:

$$\begin{array}{rl|l}
\log 24{,}56 & = 1{,}3902 & \text{Koht kõrval-} \\
\frac{1}{3}\log\ 0{,}35 & = \overline{1}{,}8480 & \text{tehete jaoks.} \\
\hline
\text{Lugeja } \log & = 1{,}2382 & \\
\log 37 & = 1{,}5682 & \\
\log\ 0{,}0254 & = \overline{2}{,}4048 & \\
\frac{3}{2}\log\ 0{,}1789 & = \overline{2}{,}8756 & \\
\hline
\text{Nimetaja } \log & = \overline{2}{,}8486 &
\end{array}$$

Lahutades lugeja logaritmist nimetaja logaritmi, saame:

$$\begin{array}{rl|l}
 & 1{,}2382 & \text{log} \qquad \text{nuum.} \\
 & \overline{2}{,}8486 & 2{,}3896 \\
\hline
\log x = & 2{,}3896 & \underline{892} \ldots\ldots 245 \\
 & & \quad 4 \ldots\ldots\ldots 2 \\
 & & \overline{2{,}3896 = \log 245{,}2} \\
x = & 245{,}2 &
\end{array}$$

Kasustades täienduslogaritme rakendame arvutamise teisiti:

$$\begin{array}{rlll}
 & \log 24{,}56 & = & 1{,}3902 \\
 & \frac{1}{3}\log 0{,}35 & = & \overline{1}{,}8480 \\
— & \log 37 & = —1{,}5682 = & \overline{2}{,}4318 \\
— & \log 0{,}0254 & = —\overline{2}{,}4048 = & 1{,}5952 \\
— & \frac{3}{2}\log 0{,}1789 & = —\overline{2}{,}8756 = & 1{,}1244 \\
\hline
 & \log x & = & 2{,}3896 \\
 & x = 245{,}2 & &
\end{array}$$

M ä r k u s. Kõik kõrvaltehted, mida ei saa teha peast, peab selleks otstarbeks eraldatud kohale korralikult vihikusse ära tehtama.

Harjutusi ja ülesandeid.

Arvuta logaritmide abil!

56. a) $345 \cdot 27{,}8$ b) $0{,}00259 \cdot 36{,}2$ c) $476{,}9 \cdot 5{,}432$ d) $24{,}88 \cdot 0{,}05936$ e) $4569{,}8 \cdot 0{,}79882$ f) $53{,}62591 \cdot 3{,}9992$

57. a) $5493 : 31{,}9$ b) $79{,}62 : 0{,}5946$ c) $0{,}005468 : 0{,}0893$ d) $0{,}084321 : 3{,}675$

58. a) $32{,}4^2$ b) $1{,}785^3$ c) $0{,}0256^3$ d) $1{,}526^7$ e) $\left(\frac{11}{12}\right)^4$ f) $\left(\frac{27}{35}\right)^3$ g) $\left(\frac{3432}{1991}\right)^2$ h) $\left(22\frac{1}{3}\right)^3$ i) $\left(\frac{0{,}5432}{0{,}04935}\right)^2$

59. a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{9}$ c) $\sqrt[3]{10}$ d) $\sqrt[3]{0{,}01}$ e) $\sqrt[3]{-4578}$ f) $\sqrt[10]{243{,}9}$ g) $\sqrt[7]{10000}$ h) $\sqrt{0{,}789}$ i) $\sqrt{0{,}0101}$ j) $\sqrt[3]{0{,}000543}$ k) $\sqrt[5]{-0{,}09814}$ l) $\sqrt[4]{0{,}396}$ m) $\sqrt[7]{0{,}00129}$ n) $\sqrt[-2]{49{,}25}$ o) $\sqrt[-2]{0{,}003812}$ p) $\sqrt[-3]{7{,}486}$ q) $\sqrt[-2]{0{,}001}$ r) $\sqrt[3]{0{,}1001}$

60. a) $\sqrt{\frac{29}{43}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{78}{47}}$ c) $\sqrt[5]{19\frac{5}{7}}$ d) $\sqrt[3]{208\frac{4}{11}}$ e) $\sqrt[4]{\frac{215}{7932}}$ f) $\sqrt[3]{259{,}6^2}$ g) $\sqrt{0{,}3719^2}$ h) $\sqrt[5]{0{,}04816^3}$ i) $\sqrt[3]{\left(\frac{41{,}96}{5{,}923}\right)^2}$

61. a) $\frac{6{,}219 \cdot 72{,}87}{846{,}3}$ b) $\frac{59{,}242 \cdot 0{,}0439}{0{,}009371}$ c) $\frac{0{,}316 \cdot 192{,}4}{81{,}32}$ d) $\frac{51{,}6}{397 \cdot 0{,}05462}$ e) $\frac{291}{412{,}6 \cdot 1239}$ f) $\frac{0{,}912 \cdot 69{,}17}{131{,}4 \cdot 0{,}0819}$

62. a) $(0{,}08151)^{1,6}$ b) $(0{,}003327)^{0,8}$

63. a) $812 \cdot \sqrt{0{,}1792}$ b) $57{,}12\sqrt[3]{1{,}325^2}$

64. a) $\dfrac{83{,}81 \cdot \sqrt{0{,}754^3}}{0{,}742\sqrt[3]{412{,}2^2}}$ b) $\dfrac{613{,}4\sqrt[3]{0{,}0581^2}}{384\sqrt{0{,}00853^3}}$

65. a) $\sqrt[3]{\dfrac{21{,}9}{0{,}09152\sqrt{3}}}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{0{,}712\sqrt{29}}{54{,}1\sqrt[3]{25}}}$

66. a) $\dfrac{0{,}0739}{8{,}4756}\sqrt{\dfrac{96}{0{,}003964}}$ b) $\sqrt[3]{0{,}0956\sqrt{\dfrac{72}{0{,}5469}}}$

67. a) $\left(\dfrac{415\sqrt[3]{0{,}005843}}{7{,}462 \cdot 0{,}06483}\right)^4$ b) $\left(\dfrac{12{,}71 \cdot 0{,}0395}{243{,}29\sqrt{0{,}00511}}\right)^3$

68. a) $\dfrac{1}{0{,}712^2\sqrt{27}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{0{,}0052\sqrt{24{,}785}}}$

69. a) $\sqrt{293{,}4^2 - 51{,}7^2}$ b) $\sqrt{0{,}419^2 - 0{,}0562^2}$

c) $\sqrt{31 - \sqrt[3]{4{,}184}}$ d) $\sqrt[5]{2{,}97 - \sqrt{0{,}432}}$

70. a) $\sqrt[3]{\dfrac{37 + \sqrt{53{,}9}}{0{,}99}}$ b) $\sqrt[4]{\dfrac{2{,}49}{\sqrt{34} - \sqrt{17}}}$

c) $4\sqrt[3]{\dfrac{17^2 + 3\sqrt{19{,}4}}{\sqrt{0{,}81}}}$ d) $5\sqrt{\dfrac{19^3 - 2\sqrt{0{,}72}}{3\sqrt[3]{42{,}9}}}$

71.

a) $\sqrt[-3]{\left(4{,}51 + \sqrt[3]{-7{,}142}\right)^2}$ b) $\sqrt{\left(\dfrac{1}{0{,}816}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{3{,}72}\right)^2}$

72. a) $\dfrac{\log 5}{\log 3}$ b) $\dfrac{\log 8}{\log 16}$

73. Lahenda järgnevad eksponentvõrrandid!

a) $2^x = 10$ e) $0{,}0342^x = 1000$

b) $10^x = 8$ f) $7{,}426^x = 3{,}94$

c) $9^x = 200$ g) $10^x = 4{,}92^{10}$

d) $100^x = 0{,}0542$ h) $10^{3x} = 8{,}42$

i) $294^x = 0{,}00061$ n) $5 \cdot 2^x = 3 \cdot 3^x$

j) $0{,}046^x = 0{,}005$ o) $\sqrt[x]{2{,}493} = 0{,}57$

k) $\left(\frac{3}{7}\right)^x = 16$ p) $\sqrt[x]{0{,}091} = 30{,}8$

l) $\left(2\frac{1}{7}\right)^x = 0{,}093$ q) $2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1}$

m) $10^x = \sqrt[x]{4}$ r) $11^{x-1} + 11^{x-2} = 7^{x-1} + 7^{x-2}$

74. Lahenda järgnevad võrrandsüsteemid!

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 34 \\ \log x - \log y = \log 1\frac{1}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log x + \log y = 5 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ \log x + \log y = 1{,}301 \end{cases}$

Järgnevate ülesannete lahendamisel kasusta logaritmide tabeleid!

75. Määra korrapärase kolmnurga pindala, kui külg $a = 49{,}32$ meetrit!

76. Korrapärase kolmnurga pindala $S = 6724$ m^2. Leia kolmnurga külg!

77. Ringi raadius $R = 5{,}46$ m. Leia ringi sisse joonestatud korrapärase kuusnurga pindala!

78. Ringi pindala on $0{,}76$ m^2. Leia ringi raadius!

79. Leia Maa ruumala, kui lugeda Maa kerakujuliseks, mille raadius $R = 6370$ km! (Kera ruumala $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.)

80. Leia kera raadius, kui tema ruumala $V = 642{,}5$ cm^3!

81. Kui palju kaalub klassiruumitäis õhku, kui ruumi pikkus on 10,4 m, laius 8,72 m ja kõrgus 5,26 m? Õhu erikaal on 0,001293.

82. Kui pikk on kera raadius, kui tema pindala on 1 m^2? (Kera pindala $S = 4\pi R^2$.)

83. Klaasist kera kaalub 11,85 kg. Kui pikk on kera raadius? (Klaasi erikaal on 2,5.)

84. Korrapärase kuusnurga pindala $S = 4{,}897$ m^2. Leia kuusnurga külg!

85. Arvuta rombi pindala, kui külg $a = 4{,}052$ ja üks diagonaalidest $d = 6{,}829$!

86. Täisnurkses kolmnurgas on kaatetite projektsioonid hüpotenuusil $f = 46{,}74$ ja $g = 62{,}86$. Leia kolmnurga pindala!

87. Kui kõrge on vasest silinder, mille põhja raadius on 8,2 cm ja mis kaalub 2,456 kg. (Vase erikaal $e = 8{,}8$ ja silindri ruumala $V = \pi r^2 h$.)

88. Ringi raadius $r = 46{,}18$ cm. Kui pikk on kõõl, mille kaugus ringi keskpunktist on 29,44 cm?

89. Täisnurkses kolmnurgas on kaatet $a = 36{,}58$ cm ja selle kaateti projektsioon hüpotenuusile $f = 22{,}14$ cm. Leia hüpotenuus!

90. Kui kaugele on näha merele, kui silma kõrgus merepinnast on 20 m?

91. Kui kaugelt on näha 15-meetrise laevamasti tipp, kui silma kõrgus merepinnalt on 10 m?

92. Laeva laelt on tuletorni märgituli, mille kõrgus merepinnast on 61,4 m, vaatepiiril näha, kui vaatleja silma kõrgus merepinnast on 6,5 m. Mitu meremiili on laev tuletornist eemal, kui kiirte murdumine õhus suurendab kauguse tõelist väärtust 7,7 %? (1 meremiil = 1,852 km.)

93. Kui pikk on raudtraat, kui ta kaalub 10,54 kg ja ta läbimõõt on 0,46 mm? (Raua erikaal $e = 7{,}5$.)

94. Kui palju kaalub Cheops'i püramiid, mille kõrgus $h = 148$ m ja põhja külg $a = 233$ m? Kivi erikaal $e = 2{,}75$. (Püramiidi ruumala $v = \frac{1}{3}a^2h$.)

95. Kui pikk on tinast kuubi serv, kui kuup kaalub 5,68 kg? Tina erikaal $e = 11{,}3$.

96. Mitu numbrit on arvu 9^{100} kirjutises?

97. Mitmendal kohal pärast koma asub arvu $0{,}0078^{80}$ kirjutises esimene väärtusega number?

98. Mitu kohta on järgnevate arvude kirjutises: a) 9^9; b) $(9^9)^9$; c) $9^{(9^9)}$? Viimasel juhul määra kohtade arv, nii täpselt kui saad!

99. Kordamiseks.

1) Lahenda järgnevad ruutvõrrandid!

a) $4x^2 - 25 = 0$ c) $2x^2 = -7x$

b) $3x^2 = 5x$ d) $x^2 - x - 42 = 0$

2) Millega võrdub ruutvõrrandi juurte summa? juurte korrutis?

3) Arvuta 0,001 täpsusega:

a) $\sqrt{0{,}9}$; b) $\sqrt{0{,}001}$; c) $\sqrt{2{,}5}$.

4) Näita, et väikese α puhul on maksvad järgnevad valemid!

a) $\frac{1}{1-\alpha} \approx 1 + \alpha$ c) $(1 + \alpha)^2 \approx 1 + 2\alpha$

b) $\frac{1}{1+\alpha} \approx 1 - \alpha$ d) $(1 - \alpha)^2 \approx 1 - 2\alpha$

e) $(1 + \alpha)^3 \approx 1 + 3\alpha$

f) $(1 - \alpha)^3 \approx 1 - 3\alpha$

5) Arvuta eelmiste valemite põhjal:

a) $\frac{1}{1,004}$ e) $(1,002)^2$ i) $(1,008)^3$

b) $\frac{1}{1,0015}$ f) $(1,0034)^2$ j) $(1,011)^3$

c) $\frac{1}{0,999}$ g) $(0,996)^2$ k) $(0,995)^3$

d) $\frac{1}{0,9987}$ h) $(0,989)^2$ l) $(0,9984)^3$

6) Näita, et väikese α puhul:

a) $\sqrt{1+2\alpha} \approx 1+\alpha$ c) $\sqrt[3]{1+3\alpha} \approx 1+\alpha$

b) $\sqrt{1-2\alpha} \approx 1-\alpha$ d) $\sqrt[3]{1-3\alpha} \approx 1-\alpha$

7) Arvuta ligikaudu eelmiste valemite põhjal:

a) $\sqrt{1,002}$ c) $\sqrt{0,998}$ e) $\sqrt[3]{1,006}$ g) $\sqrt[3]{0,994}$

b) $\sqrt{1,0085}$ d) $\sqrt{0,9984}$ f) $\sqrt[3]{1,0018}$ h) $\sqrt[3]{0,988}$

8) Kaota nimetajast irratsionaalsus!

a) $\sqrt{\frac{3}{8}}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{\frac{5}{12}}$ d) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ f) $\frac{3-2\sqrt{2}}{5-3\sqrt{2}}$

9) Arvuta!

a) $64^{\frac{1}{3}}$; b) $216^{-\frac{1}{3}}$; c) $8^{\frac{2}{3}}$ d) $16^{-\frac{5}{4}}$; e) $32^{0,4}$

10) Lahenda võrrand

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x-5}-\sqrt{2x+18}=0$$

11) Arvuta!

a) $25^3 \cdot 4^3$ c) $\frac{81^3}{9^3}$

b) $(0,2)^5 \cdot 5^5$ d) $\frac{(0,32)^4}{(0,16)^4}$

VIII. Read.

1. Aritmeetiline rida.

1. a) Elektrivoolu eest tuleb maksta ühes kuus 30 senti voolumõõtja üüri ja iga äratarvitatud kilovatt-tunni (kWh) elektri eest 24 senti. Kui palju tuleb maksta, kui voolu tarvitati ühe kuu jooksul 1 kWh, 2 kWh, 3 kWh, 4 kWh jne.?

Missugune omadus on saadud arvude real?

b) Kuni 20-grammise lihtkirja saatmise eest postiga tuleb maksta 10 senti ja iga järgmise 20 grammi või selle osa eest 5 senti. Kui palju tuleb maksta, kui kirja kaal on 0—20 g; 20—40 g; 40—60 g; 60—80 g jne.?

Missugune omadus on saadud arvude real?

c) Postiga rahasaatmise eest tuleb maksta 10 senti alusmaksu ja iga 10 kr. või selle osa eest 5 senti. Kui palju tuleb maksta kuni 10 kr.; 10 kr. — 20 kr.; 20 kr. — 30 kr.; 30 kr. — 40 kr. jne. saatmise eest?

Missugune omadus on saadud arvude real?

Ülesandest nr. 1 saadud arvude ridu nimetame **aritmeetilisteks ridadeks.**

Aritmeetiline rida (ehk aritmeetiline progressioon) on niisugune arvude rida, milles iga arvu ja tema eelmise vahe on jääv.

Näiteks read:

$$5;\ 8;\ 11;\ 14;\ 17;\ 20$$

$$8;\ 6;\ 4;\ 2;\ 0;\ -2;\ -4$$

on aritmeetilised read.

Arvud, mis moodustavad rea, on selle rea liikmed ja neid tähistame üldkujul:

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ \ldots\ a_k;\ \ldots\ a_n.$$

Aritmeetilise rea iga liikme ja selle eelmise vahe märgime d-ga ja nimetame seda r e a v a h e k s (ehk võõrkeelse nimetusega d i f e r e n t s i k s).

Rida on k a s v a v või k a h a n e v. Kasvavas reas on vahe p o s i t i i v n e, kahanevas reas n e g a t i i v n e.

2. Määra aritmeetilise rea

a) 1; 6; 11 jne. 10 esimest liiget!
b) 29; 23; 17 jne. 8 „ „
c) 1,5; 2,9; 4,3 jne. 7 „ „
d) $9\frac{5}{6}$; $7\frac{1}{6}$; $4\frac{1}{2}$ jne. 6 „ „

3. Määra aritmeetilise rea

a) $5c$; $6{,}5c$; $8c$ jne. 9 esimest liiget!
b) $9ab$; $7ab$; $5ab$ jne. 10 „ „
c) $m + 2n$; m; $m - 2n$ jne. 6 „ „
d) $a + b$; $2a$; $3a - b$ jne. 7 „ „

Rea üldliige.

Olgu a_1; a_2; a_3; a_4 .... a_n aritmeetiline rida, mille vahe on d

ja esimene liige a_1,
siis teine „ $a_2 = a_1 + d$,
kolmas „ $a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$,
neljas „ $a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$,
üld- ehk lõppliige

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Sõnades: **Aritmeetilise rea üldliige (lõppliige) on võrdne esimese liikmega + vahe, mis on võetud üldliikme (lõppliikme) ees seisvate liikmete arvu kordselt.**

4. Leia täisarvude reas

a) 23-as paarisarv!

b) 17-nes paarituarv!

5. Arvuta aritmeetilise rea

a) 21; 28; 35 jne. 10. liige!

b) 32; 27; 22 jne. 9. liige!

c) —17; —14; —11 jne. 12. liige!

d) —7; —3; +1 jne. 13. liige!

e) 6,2; 8,7; 11,2 jne. 20. liige!

f) $5\frac{2}{3}$; $9\frac{1}{2}$; $13\frac{1}{3}$ jne. 18. liige!

6. a) Aritmeetilise rea esimene liige on 2 ja 17. liige 50. Leia rea vahe!

b) Aritmeetilise rea vahe on $1\frac{1}{2}$, selle rea 33. liige on 77. Leia esimene liige!

7. a) Aritmeetilise rea esimene liige on 5,2 ja vahe 0,4. Mitmes liige on 22?

b) Aritmeetilise rea esimene liige on $-4\frac{1}{2}$, vahe on $5\frac{1}{2}$. Leia 20. liige!

Aritmeetilise rea liikme arvutamist võime alata mistahes liikmest.

Kui on teada aritmeetilise rea

viies liige a_5, siis
kuues „ $a_6 = a_5 + d$,
seitsmes „ $a_7 = a_6 + d = a_5 + d + d = a_5 + 2d$,
kaheksas „ $a_8 = a_7 + d = a_5 + 2d + d = a_5 + 3d$,
jne.

Üldiselt: kui on teada aritmeetilise rea k-s liige, siis n-s liige

$$\boxed{a_n = a_k + (n - k)d}$$

8. Arvuta aritmeetilise rea

a) 8. liige, kui $a_3 = 8{,}4$ ja $d = 1{,}6$!

b) 23. liige, kui $a_{15} = 72{,}5$ ja $d = -0{,}5$!

c) 17. liige, kui $a_9 = -17$ ja $d = 2{,}2$!

d) 36. liige, kui $a_{24} = 18{,}36$ ja $d = -1{,}56$!

9. a) Aritmeetilise rea 6. liige on 23 ja 11. liige 43. Leia rea esimene liige ja vahe!

b) Aritmeetilise rea kaheksas liige on 19,4 ja 15. liige 24,3. Leia rea esimene liige ja vahe!

c) Aritmeetilise rea 11. liige on 20,8 ja 26. liige 310. Leia rea 50. liige!

d) Aritmeetilise rea 7. liige on 19 ja 19. liige 55. Mitmes liige on 28?

10. Kaevukaevajale makstakse esimese kuupmeetri väljakaevamise eest 2 krooni ja iga järgneva kuupmeetri eest 60 senti rohkem kui eelmise eest. Kui palju tuleb maksta 14. kuupmeetri väljakaevamise eest?

11. Vabalt langev keha langeb esimesel sekundil 4,9 m. Kui palju langeb keha 16. sekundil, kui langemistee pikkus kasvab igas sekundis 9,8 meetri võrra? Mitmendal sekundil langeb keha 249,9 m?

12. Ametnik palgati 720-kroonise aastapalgaga. Iga aasta järel suurendati ametniku palka 18 kr. võrra. Kui suur on ametniku palk 15-aastase teenistuse järel?

13. Matkaja, kes iga päev 1,5 km võrra väiksema tee ära käib kui eelmisel päeval, matkab 9. päeval 16 km. Mitu kilomeetrit käis matkaja esimesel päeval?

14. Tööline kogus endale esimesel aastal 110 krooni ja igal järgneval aastal ühe ja sama summa võrra rohkem kui eelmisel aastal. 15. aastal kogus ta endale 208 kr. Mitu krooni kogus ta iga aasta rohkem kui eelmisel?

15. Jalgrattur sõidab esimesel tunnil 20 km, igal järgneval tunnil sõidab ta 0,8 km vähem kui eelmisel.

Mitu tundi sõitis jalgrattur, kui ta viimasel tunnil sõitis 16 km?

16. Paiguta 12 ja 24 vahele 19 arvu, nii et nad kõik kokku moodustaksid aritmeetilise rea. Leia selle rea vahe!

17. Mitu liiget on aritmeetilisel real, mille esimene liige on $3\frac{1}{4}$, teine liige $5\frac{1}{8}$ ja mis lõpeb $72\frac{1}{4}$-ga?

18. Aseta arvude a ja p vahele n arvu, nii et nad kõik kokku moodustaksid aritmeetilise rea! Kirjuta üles selle rea 4 liiget!

Rea liikmete summa.

Kui aritmeetilise rea esimene liige on a_1 ja rea vahe d, siis selle rea 5 liikme summa on:

$$s = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + a_5 .$$

Summa ei muutu, kui kirjutame rea ümberpöördult, võttes viimase liikme esimeseks, eelviimase teiseks jne. Rida on siis kahanev, kusjuures rea vahe on $-d$ ja 5 liikme summa on:

$$s = a_5 + (a_5 - d) + (a_5 - 2d) + (a_5 - 3d) + a_1 .$$

Liites mõlemad summad saame:

$$2s = (a_1 + a_5) + (a_1 + a_5) + (a_1 + a_5) + $$
$$+ (a_1 + a_5) + (a_1 + a_5)$$
$$2s = (a_1 + a_5) \cdot 5$$
$$s = \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2}.$$

Kui liikmete arv on n, siis

$$\boxed{s = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$$

Sõnades: **Aritmeetilise rea liikmete summa on võrdne äärliikmete poole summa ja liikmete arvu korrutisega.**

Kui asetame saadud summa valemisse

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, \text{ saame:}$$

$$s = \frac{[2a_1 + (n - 1)d] \cdot n}{2}$$

Seda valemit kasustame juhul, kui viimane liige pole antud.

Kujutame aritmeetilise rea liikmed ristkülikute pindaladena, mille aluseks on 1 ja kõrguseks rea vastav liige, siis on 5 liikme summaks 9. joonisel kujutatud kujundi pindala.

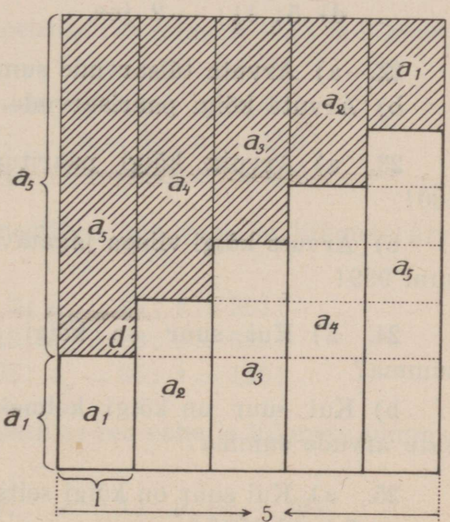
Kui joonestame saadud kujundile kongruentse kujundi ja asetame need nii, nagu joonisel on näidatud, siis saame ristküliku, mille pindala

$$2s = (a_1 + a_5) \cdot 5$$

ja mis kujutab aritmeetilise rea 5 liikme kahekordset summat.

Rea summa on seega

$$s = \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2}$$



9. joonis.

Mida kujutavad joonestatud ristküliku ribade pindalad?

Kasustades 9. joonist põhjenda, et

aritmeetilise rea äärtest ühekaugusel olevate liikmete summa on võrdne äärliikmete summaga!

19. Arvuta aritmeetilise rea

a) 12 liikme summa, kui esimene liige on 1 ja 12. liige 34;

b) 24 liikme summa, kui esimene liige on 3 ja rea vahe $1\frac{1}{3}$!

20. a) 19 liikme summa, kui esimene liige on 2,3 ja 19. liige 25,7;

b) 22 liikme summa, kui esimene liige on $-37\frac{1}{2}$ ja rea vahe 4!

21. Arvuta aritmeetilise rea

a) $4;\ 3\frac{3}{4};\ 3\frac{1}{2}$ jne.	13	liikme summa!
b) $2;\ 1\frac{5}{9};\ 1\frac{1}{9}$ jne.	10	„ „
c) $-38;\ -36;\ -34$ jne.	15	„ „
d) $5;\ 1\frac{1}{2};\ -2$ jne.	13	„ „

22. a) Arvuta täisarvude summa 1 kuni 100!

b) Arvuta kõigi paarisarvude summa 1 kuni 100!

23. a) Arvuta kõigi paarituarvude summa 1 kuni 100!

b) Arvuta kõigi viiega jagatavate arvude summa 100 kuni 999!

24. a) Kui suur on kõigi kolmekohaste arvude summa?

b) Kui suur on kõigi kolmekohaste kolmega jaguvate arvude summa?

25. a) Kui suur on kõigi seitsmega jaguvate arvude summa 7 kuni 350?

b) Kui suur on kõigi c-ga jaguvate arvude summa c-st kuni nc-ni?

26. a) Mitu silma kokku on täringu 6 tahul?

b) Mitu pauku lööb öö-päeva jooksul harilik seinakell, mis märgib täied tunnid vastava hulga löökidega ja pooled tunnid ühe löögiga?

27. Arvuta aritmeetilise rea

a) $(c+8);\ (c+5)$ jne.	n	liikme summa!
b) $(n+1);\ (2n+4)$ jne.	n	„ „
c) $\frac{2}{3}l;\ l$ jne.	n	„ „
d) $\frac{n-1}{n};\ \frac{n-2}{n}$ jne.	n	„ „

Ülesandeid.

28. Arvuta aritmeetilise rea viimane liige ja liikmete summa, kui

a) $a_1 = 1$; $d = 12$; $n = 40$!
b) $a_1 = 21$; $d = 5$; $n = 17$!
c) $a_1 = 60$; $d = 1\frac{1}{4}$; $n = 21$!

29. Arvuta aritmeetilise rea esimene liige ja liikmete summa, kui

a) $d = -10$; $n = 11$; $a_n = 10$!
b) $d = 7$; $n = 30$; $a_n = 223$!
c) $d = 5\frac{1}{2}$; $n = 20$; $a_n = 100$!

30. Arvuta aritmeetilise rea vahe ja liikmete arv, kui

a) $a_1 = 2$; $a_n = 87$; $s = 801$!
b) $a_1 = 19$; $a_n = 23$; $s = 588$!
c) $a_1 = 25$; $a_n = 35$; $s = 120$!

31. Arvuta aritmeetilise rea vahe ja liikmete summa, kui

a) $a_1 = 5$; $n = 13$; $a_n = -37$!
b) $a_1 = 4$; $n = 37$; $a_n = 188$!
c) $a_1 = 169$; $n = 24$; $a_n = 8$!

32. Arvuta aritmeetilise rea viimane liige ja vahe, kui

a) $a_1 = 20$; $n = 30$; $s = 3645$!
b) $a_1 = 2$; $n = 10$; $s = 0$!
c) $a_1 = \frac{3}{4}$; $n = 26$; $s = 60\frac{1}{8}$!

33. Arvuta aritmeetilise rea esimene liige ja vahe, kui

a) $n = 91$; $a_n = 0$; $s = 6825$!
b) $n = 60$; $a_n = 1{,}75$; $s = 1432{,}5$!
c) $n = 100$; $a_n = 0{,}5$; $s = 3762{,}5$!

34. Arvuta aritmeetilise rea liikmete arv ja liikmete summa, kui

a) $a_1 = -6$; $d = \frac{3}{4}$; $a_n = 15\frac{3}{4}$!
b) $a_1 = -4{,}5$; $d = 3{,}1$; $a_n = 119{,}5$!
c) $a_1 = 1$; $d = 3$; $a_n = 22$!

35. Arvuta aritmeetilise rea esimene ja viimane liige, kui

a) $d = 0{,}5$; $n = 25$; $s = -75$!
b) $d = -5$; $n = 17$; $s = -323$!
c) $d = 1\frac{1}{3}$; $n = 24$; $s = 448$!

36. Arvuta aritmeetilise rea liikmete arv ja viimane liige, kui

a) $a_1 = 4$; $d = 5$; $s = 265$!
b) $a_1 = 7$; $d = 3$; $s = 420$!
c) $a_1 = 40$; $d = -4$; $s = 180$!

37. Arvuta aritmeetilise rea liikmete arv ja esimene liige, kui

a) $d = 6$; $a_n = 49$; $s = 209$!
b) $d = 12$; $a_n = 15$; $s = -45$!
c) $d = 1{,}3$; $a_n = 25{,}7$; $s = 266$!

38. Aritmeetilise rea esimene liige on 5, teine liige $4\frac{1}{2}$, liikmete arv 11. Leia kõigi liikmete summa!

39. Aritmeetilise rea 4. liige on $1\frac{1}{4}$ ja 9. liige $\frac{5}{6}$. Leia selle rea 10 liikme summa!

40. Paiguta 0 ja 16 vahele arvud nii, et nad kõik kokku moodustaksid aritmeetilise rea, mille kõigi liikmete summa oleks 40!

41. Aritmeetilise rea vahe on 0,5, 5. liige 5 ja kõigi liikmete summa 97,5. Leia esimene ja viimane liige!

42. Aritmeetilise rea kõigi liikmete summa on 28, 3. liige 8 ja 4. liige 5. Leia esimene ja viimane liige!

43. Aritmeetilise rea esimeste 37 liikme summa on 888; kui lahutame 31. liikmest 13. liikme, siis saame 126. Leia esimene liige ja rea vahe!

44. Mitu pauku lööb raekoja kell öö-päeva jooksul, kui ta märgib veerandtunni ühe löögiga, poole tunni kahe löögiga, kolmveerand tunni kolme löögiga, täistunni nelja löögiga ja peale selle veel kesköõst või keskpäevast möödunud tundide arvu vastava arvu löökidega?

45. Mitu silma on täielikul mängukaartidekomplektil, kui piltidega kaardid jäävad arvestamata ja äss loeb 11 silma?

46. Põõsad aias on 10 ritta istutatud, nii et esimeses reas on 30 põõsast ja igas järgnevas reas on 2 põõsa võrra vähem kui eelmises. Mitu põõsast on aias?

47. Küüni katus on külgedelt trapetsikujuline ja otstest võrdhaarse kolmnurga kujuline. Katus tuleb katta kividega. Katuse alumise ääre pikkus mahutab 110 kivi ja laius 55 kivi, iga järgnev rida mahutab 2 kivi vähem kui eelmine. Mitu kivi tuleb katuse katmiseks tellida, kui kivide ridade arv alt üles on 19?

48. a) Asjade loosimiseks korraldati loterii piletite arvuga 1 kuni 100. Pileti hinnaks on väljatõmmatud number sentides. Leia sissetulek sellest loteriist!

b) Mitu piletit tuleks valmistada eelmise ülesande kohaselt korraldatud loteriiks, et sissetulek oleks vähemalt 120 krooni?

49. Pargi puiesteele istutati sirgjooneliselt 80 puud üksteisest 8 meetri kaugusele. Puude kastmiseks peab pargivaht igale üksikule puule tooma eraldi vett kaevust, mis asub esimesest puust 12 m kaugusel. Kui pika tee peab pargivaht ära käima, et kõik puud ära kasta, tulles iga kord tagasi kaevu juurde?

50. Perepoeg jalutab külast koju, mis asub 1,2 km kaugusel külast, ja jõuab igas minutis 40 meetrit edasi. Temaga ühel ajal algab kojutulekut ka perekoer, kes jookseb igas minutis 110 m. Koer ei jää mitte koju, vaid jookseb vahet pidamata kodu ja perepoja vahet, kuni perepoeg on koju jõudnud. Mitu meetrit on koer perepoja kojutulekuni ära joosnud?

51. Võistluse auhindadeks määrati 1000 kr. Suurim auhind on 300 kr. ja iga järgmise auhinna suurus väheneb ühe ja sama suuruse võrra kuni kõige väiksemani, mille suurus on 100 kr. Mitu auhinda määrati?

52. 12 stipendiumiks määrati 4500 krooni, nii et alates suurimast oli iga järgmine stipendium 6 krooni võrra väiksem kui eelmine. Kui suur on suurim ja kui suur on väikesim stipendium?

53. Kasustades ülesande nr. 11 andmeid leia lennuki lennukõrgus, kui kivi, mis lasti lennukilt vabalt alla langeda, jõudis 34 sek. järel maapinnale!

54. Kasustades ülesande nr. 11 andmeid leia, mitu sekundit kulub vabalt langemiseks 397 m kõrguselt!

55. Ametnik laenutas oma tuttavale 210 kr. ilma protsentideta, tingimusega, et tasub iga kuu 3 kr. võrra rohkem kui eelmisel kuul. Kui palju tasus tuttav esimesel kuul ja mitme kuuga tasus ta niiviisi kogu võla, kui viimasel kuul tuli maksta 34 krooni?

56. 1375-kroonine laen lubati tasuda järgmiselt: esimesel kuul tasutakse 85 kr. ja igal järgneval kuul 2,5 kr. võrra vähem kui eelmisel kuul. Mitme kuuga tasutakse kogu võlg ja kui palju tuleb maksta viimasel kuul?

57. Kaevukaevajale makstakse esimese sügavusemeetri eest 1,2 kr. ja iga järgneva meetri eest 40 senti rohkem kui eelmise eest. Kui palju tuleb maksta kaevukaevajale, kui kaev on 21 m sügav?

58. Puurkaevu puurimisel nõudis ettevõtja esimese meetri puurimise eest 4 kr. ja iga järgneva meetri puurimise eest 80 senti rohkem kui eelmise eest. Kui sügavaks puuriti kaev, kui ettevõtja sai töö eest 364 krooni?

59. Noorkotkaste rühm läks matkale, lubades iga päev rännata 18 km. Samal ajal läks matkale sama teed mööda skautide rühm, lubades rännata esimesel päeval 8 km ja igal järgneval päeval 2 km võrra rohkem kui eelmisel. Mitme päeva järel pärast matka algust on noorkotkad ja skaudid jälle koos?

60. Jalgrattur sõitis huvireisule ümber Eesti, lubades iga päev sõita 88 km. 4 päeva pärast alustas sama reisu samu teid mööda mootorrattur, lubades sõita esimesel päeval 140 km ja igal järgneval päeval 24 km võrra rohkem kui eelmisel. Mitme päeva pärast saab mootorrattur jalgratturi kätte ja kui palju on siis sõidetud, lähtekohast arvates?

2. Geomeetriline rida.

61. a) Kolm isikut annavad igaüks edasi mingi sõnumi 2 tuttavale. Iga sõnumiteadja annab selle jälle edasi oma 2 tuttavale jne. Kui oletada, et selle sõnumi levitamiseks ühelt tuttavalt järgmisele kulub 1 tund aega, leia, mitu isikut on selle sõnumi teada saanud 1 tunni, 2 tunni, 3 tunni, 4 tunni jne. möödumisel!

Missugune omadus on saadud arvude real?

b) Külasepp nõudis hobuserautamisest esimese sisselöödud naela eest 1 sendi, teise eest 2 senti, kolmanda eest 4 senti jne., iga järgmise sisselöödud naela eest kaks korda rohkem kui eelmise eest. Mitu senti tuleb maksta sepale 1., 2., 3., 4., 5. jne. sisselöödud naela eest?

Missugune omadus on saadud arvude real?

c) Aednik pani kevadel 3 seemet kasvama. Igast seemnest saadud taim andis sügisel 7 seemet. Järgmisel kevadel pani aednik kõik seemned kasvama ja iga taim andis jälle 7 seemet jne. Mitu seemet oli aednikul 1., 2., 3., 4., 5. jne. aasta sügisel, kui igast seemnest kasvas taim ja iga taim andis 7 seemet?

Missugune omadus on saadud arvude real?

Ülesandeist nr. 61 saadud arvude ridu nimetame **geomeetrilisteks ridadeks.**

Geomeetriline rida (ehk geomeetriline progressioon) on niisugune arvude rida, milles iga arvu ja selle eelmise jagatis on jääv.

Näiteks read:

$$2;\ 6;\ 18;\ 54;\ 162 \text{ ja}$$
$$16;\ 8;\ 4;\ 2;\ 1;\ \tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{4}$$

on geomeetrilised read.

Arvud, mis moodustavad geomeetrilise rea, on selle rea liikmed; neid tähistame üldkujul

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots\ a_k;\ \ldots\ a_n.$$

Mistahes liikme ja järgneva selle ees seisva liikme jagatise märgime q-ga ja nimetame seda r e a t e g u r i k s. Tegur

$$q = \frac{a_k}{a_{k-1}}.$$

Rida on k a s v a v või k a h a n e v. Kasvavas reas on rea tegur $q > 1$, kahanevas reas $0 < q < 1$.

62. Arvuta geomeetrilise rea

a) 5; 10; 20 jne.	10 esimest liiget!
b) 72; 24; 8 jne.	8 „ „
c) 2; 8; 32 jne.	9 „ „
d) 15; 9; 5,4 jne.	7 „ „

Kui rea tegur q on negatiivne, siis saame v a h e l d u v a t e m ä r k i d e g a g e o m e e t r i l i s e r e a või l i h t s a l t v a h e l d u v a r e a.

Rea üldliige.

Kui $a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots\ldots\ a_n$ on geomeetriline rida, mille tegur on q,
ja esimene liige a_1,

siis teine liige $a_2 = a_1 q$,
kolmas „ $a_3 = a_2 q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$,
neljas „ $a_4 = a_3 q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$,
üld- ehk lõppliige

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Sõnades: **Geomeetrilise rea üldliige (lõppliige) on esimese liikme korrutis rea teguriga, mis on võetud üldliikme (lõppliikme) ees seisvate liikmete arvu astmes.**

63. Arvuta geomeetrilise rea

a) 1; 2; 4; 8 jne. 14. liige!
b) 1; 3; 9; 27 jne. 10. „
c) 18; 12; 8 jne. 12. „
d) 1; $2\frac{1}{2}$; $6\frac{1}{4}$ jne. 8. „

64. Arvuta geomeetrilise rea
a) 2,4; 3,6 jne. 9. liige!
b) 43,5; 26,1 jne. 6 esimest liiget!
c) 5; —25 jne. 8 „ „
d) 1000; —400 jne. 7 „ „

65. Arvuta geomeetrilise rea
a) $\sqrt{6}$; $3\sqrt{2}$ jne. 5 esimest liiget!
b) $\frac{27}{8}\sqrt{2}$; $\frac{9}{4}\sqrt{3}$ jne. 12. liige!
c) $2ab$; $\frac{b^2}{4}$ jne. 6. „
d) $27\sqrt{m}$; $9m$ jne. 7 esimest liiget!

Geomeetrilise rea liikme arvutamist võime alata mistahes liikmest.

Kui on teada geomeetrilise rea
neljas liige a_4, siis
viies „ $a_5 = a_4 q$,
kuues „ $a_6 = a_5 q = a_4 q \cdot q = a_4 q^2$,
seitsmes „ $a_7 = a_6 q = a_4 q^2 \cdot q = a_4 q^3$ jne.

Üldiselt: Kui on teada geomeetrilise rea k-s liige, siis n-s liige

$$\boxed{a_n = a_k q^{n-k}}$$

M ä r k u s. Kui a, b ja c on geomeetrilise rea kolm üksteisele järgnevat liiget, siis rea definitsiooni põhjal

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}.$$

Siit järgneb, et $b^2 = ac$ ja $b = \sqrt{ac}$.

Sõnades: Geomeetrilise rea liige on oma naaberliikmete keskmine võrdeline.

66. Arvuta geomeetrilise rea
a) 7. liige, kui $a_3 = 35$ ja $q = 5$!
b) 15. liige, kui $a_9 = \frac{1}{2}$ ja $q = \frac{1}{2}$!
c) 24. liige, kui $a_{18} = 1000$ ja $q = 0{,}1$!
d) 19. liige, kui $a_{10} = 10\,000$ ja $q = 0{,}2$!

67. Arvuta geomeetrilise rea
a) 13. liige, kui $a_7 = 0{,}2187$ ja $q = 1\frac{2}{3}$!
b) 6. liige ja tegur, kui $a_5 = 4$ ja $a_7 = 169$!
c) 9. liige ja tegur, kui $a_8 = 0{,}64$ ja $a_{10} = 9$!
d) 15. liige ja tegur, kui $a_{14} = 9$ ja $a_{16} = 6\frac{1}{4}$!

68. Arvuta geomeetrilise rea esimene liige, kui
a) $a_n = 640$; $n = 8$; $q = 2$;
b) $a_n = 135$; $n = 5$; $q = 3$;
c) $a_n = 500$; $n = 6$; $q = 1{,}2$;
d) $a_n = 3125$; $n = 6$; $q = 2{,}5$!

69. Arvuta geomeetrilise rea tegur, kui
a) $a_1 = \frac{1}{9}$; $a_n = 2187$; $n = 10$;
b) $a_1 = 6{,}25$; $a_n = 0{,}0256$; $n = 7$;
c) $a_1 = \frac{1}{64}$; $a_n = 64$; $n = 13$;
d) $a_1 = 25\,600$; $a_n = 12{,}5$; $n = 12$!

Lahendame ülesandeid:

a) Arvuta geomeetrilise rea liikmete arv n, kui $a_1 = 5$, $a_n = 320$ ja $q = 2$!

Asetades lõppliikme valemisse tähtede asemele nende numbrilised väärtused, saame:

$$320 = 5 \cdot 2^{n-1}$$

siit: $2^{n-1} = 320 : 5 = 64$;
et $64 = 2^6$, siis $2^{n-1} = 2^6$.

Kui võrdsete alustega astmed on võrdsed, siis on võrdsed ka nende astendajad ja seega

$$n - 1 = 6$$
$$\text{ja} \quad n = 7.$$

b) Arvuta geomeetrilise rea liikmete arv n, kui $a_1 = 2{,}5$, $a_n = 5{,}184$ ja $q = 1{,}2$!

$$5{,}184 = 2{,}5 \cdot 1{,}2^{n-1};$$

$$\text{siit } 1{,}2^{n-1} = \frac{5{,}184}{2{,}5}.$$

Logaritmime võrrandi mõlemaid pooli:

$$(n - 1) \log 1{,}2 = \log 5{,}184 - \log 2{,}5;$$

$$\text{siit } n - 1 = \frac{\log 5{,}184 - \log 2{,}5}{\log 1{,}2}$$

$$n - 1 = \frac{0{,}7147 - 0{,}3979}{0{,}0792} = 4$$

ja $n = 5$.

70. Arvuta geomeetrilise rea liikmete arv n, kui

a) $a_1 = 1{,}5$; $a_n = 96$; $q = 4$;
b) $a_1 = 500$; $a_n = 0{,}108$; $q = 0{,}6$;
c) $a_1 = 74{,}67$; $a_n = 2{,}333$; $q = 0{,}5$;
d) $a_1 = 100$; $a_n = 142{,}3$; $q = 1{,}04$!

Järgnevate ülesannete lahendamisel kasuta logaritme!

71. Arvuta geomeetrilise rea esimene liige, kui

a) $q = 0{,}75$; $n = 5$; $a_n = 1{,}9$;
b) $q = 1{,}083$; $n = 41$; $a_n = 239{,}6$!

72. Arvuta geomeetrilise rea viimane liige, kui

a) $a_1 = 2$; $q = 1{,}229$; $n = 20$;
b) $a_1 = 1$; $q = 1{,}334$; $n = 25$!

73. Arvuta geomeetrilise rea tegur, kui

a) $a_1 = 4593$; $n = 9$; $a_n = 7$;

b) $a_1 = 0{,}102$; $n = 8$; $a_n = 5{,}005$!

Rea liikmete summa.

Kui geomeetrilise rea esimene liige on a_1, rea tegur q, siis on selle rea 5 liikme summa

$$s = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4.$$

Korrutame võrduse mõlemaid pooli q-ga, saame:

$$sq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + a_1q^5.$$

Kui lahutame viimasest võrdusest eelmise, siis langevad samad liikmed vastupidiste märkidega välja ja me saame:

$$sq - s = a_1q^5 - a_1 .$$

Lahendame viimase võrrandi s suhtes, saame:

$$s(q - 1) = a_1(q^5 - 1);$$

$$s = a_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1}.$$

Kui liikmete arv on n, siis

$$\boxed{s = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Korrutanud murru lugejat ja nimetajat — 1-ga ja positiivsed liikmed esikohale ümber paigutanud, saame

$$\boxed{s = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

Viimast valemit kasustame juhul, kui rida on kahanev, sest siis $1 > q$ ja $1 > q_n$.

Sõnadega: **Geomeetrilise rea liikmete summa on selle rea esimese liikme korrutis murruga, mille lugejaks on ühe võrra vähendatud rea teguri liikmete arvu aste ja nimetajaks ühe võrra vähendatud rea tegur.**

Valemit $s = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ võime teisendada järgmiselt: $s = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 q^{n-1} \cdot q - a_1}{q - 1}$.

Et $a_n = a_1 q^{n-1}$, siis

$$s = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

ehk $$s = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}$$

Kaht viimast valemit kasustame juhul, kui viimane liige on antud.

74. Leia geomeetrilise rea

a) 1; 2; 4 jne.	10	liikme summa!
b) 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$ jne.	6	„ „
c) 6; 9; 13,5 jne.	7	„ „
d) 36; —24; 16 jne.	8	„ „

75. Leia geomeetrilise rea

a) 2; $2\sqrt{2}$; 4 jne.	8	liikme summa!
b) 6; $3\sqrt{3}$; $4\frac{1}{2}$ jne.	12	„ „
c) —12,5; 5; —2 jne.	10	„ „
d) $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[3]{4}$; 1 jne.	9	„ „

76. a) Arvude 18 ja 1,62 vahele paiguta üks arv, nii et nad antud arvudega kokku moodustaksid geomeetrilise rea!

b) Arvude 4 ja 972 vahele paiguta neli arvu, nii et nad antud arvudega kokku moodustaksid geomeetrilise rea!

77. Leia neli arvu, mis moodustavad geomeetrilise rea, kui äärmiste arvude summa on 140 ja keskmiste summa 60!

78. Leia neli arvu, mis moodustavad geomeetrilise rea, kui teine arv on esimesest 12 võrra suurem ja neljas arv kolmandast 108 võrra suurem!

79. Geomeetrilises reas on kolmas liige 80 ja viies liige 51,2. Leia selle rea 6 liikme summa!

80. Geomeetrilises reas on kolmas liige $3\frac{1}{8}$ ja neljas liige $4\frac{11}{16}$. Leia selle rea 8 liikme summa!

81. Geomeetrilise rea esimene liige on 5 ja üheksas liige on 327 680. Leia selle rea 9 liikme summa!

82. a) Geomeetrilises reas, milles on 10 liiget, on kaks keskmist liiget $\frac{27}{128}$ ja $\frac{81}{512}$. Leia selle rea summa!

b) Geomeetrilises reas, milles on 8 liiget, on kaks keskmist liiget $9\sqrt{2}$ ja $9\sqrt{6}$ Leia selle rea summa!

83. Arvuta geomeetrilise rea esimene liige ja summa, kui

a) $a_n = 312{,}5$; $q = 2{,}5$; $n = 6$;
b) $a_n = \frac{2187}{128}$; $q = \frac{3}{2}$; $n = 8$;
c) $a_n = 625$; $q = 5$; $n = 9$!

84. Arvuta geomeetrilise rea tegur ja summa, kui

a) $a_1 = 1000$; $a_n = 327{,}68$; $n = 6$;
b) $a_1 = 180$; $a_n = \frac{20}{81}$; $n = 7$;
c) $a_1 = \frac{128}{81}$; $a_n = \frac{27}{128}$; $n = 8$!

85. Arvuta geomeetrilise rea liikmete arv ja summa, kui

a) $a_1 = 3$; $q = 2$; $a_n = 192$;
b) $a_1 = 100$; $q = 0{,}4$; $a_n = 0{,}4096$;
c) $a_1 = 1$; $q = 5{,}623$; $a_n = 1000$!

86. Arvuta geomeetrilise rea esimene ja viimane liige, kui

a) $q = 2$; $n = 8$; $s = 325\,380$;
b) $q = 1\frac{1}{2}$; $n = 6$; $s = 665$;
c) $q = 0{,}9$; $n = 5$; $s = 409{,}51$!

87. Arvuta geomeetrilise rea tegur ja liikmete arv, kui

a) $a_1 = 2$; $a_n = 486$; $s = 728$;
b) $a_1 = 1{,}5$; $a_n = 96$; $s = 127{,}5$;
c) $a_1 = 6{,}25$; $a_n = 0{,}0256$; $s = 10{,}3996$!

88. Arvuta geomeetrilise rea esimene liige ja liikmete arv, kui

a) $q = 2$; $a_n = 128$; $s = 254$;
b) $q = 3$; $a_n = 2187$; $s = 3280\frac{4}{9}$;
c) $q = \frac{2}{3}$; $a_n = 10\frac{2}{3}$; $s = 140\frac{2}{3}$!

89. Aednik tellis endale 20 haruldase taime seemneid. Ta külvas kevadel kõik seemned ja sai igal sügisel igalt taimelt 7 seemet. Oletades, et ükski seeme ei lähe kaduma, leia, mitmendal aastal saab aednik 5 kg seemneid, kui 40 seemet kaalub 1 g!

90. Mitmekaraadiline on kalliskivi, mis maksab 1944 krooni, kui ühekaraadiline kivi maksab 24 krooni, kahekaraadiline 72 krooni jne., s. o. kui karaatide arvu suurenemisega ühe võrra suureneb kivi hind 3 korda?

91. Malemängu leiutaja soovis endale tasu nisuterades, ja nimelt: 1 tera malelaua esimesele ruudule, malelaua teisele ruudule 2 tera, kolmandale 4 tera jne., s. o. igale järgnevale ruudule kaks korda rohkem teri kui eelmisele. Kui suurt tasu soovis endale malemängu leiutaja?

Leia niisuguse viljasalve ruumala, mis mahutaks endasse kõik need terad, kui 1 liitrisse mahub ligikaudu 16 000 tera!

92. Tööline nõudis enesele tuletikuvabrikandilt tasuks esimese töötunni eest ühe tuletiku, teise eest 5 tuletikku, jne. iga järgmise töötunni eest 5 korda rohkem kui eelmise eest. Mitu toosi tikke tuleks anda töölisele 8-tunnise tööpäeva eest, kui üks toos mahutab endasse 50 tuletikku?

93. Üks kooliõpilastest väitis teistele, et Emajõgi kattub jääga Tartu kohal 10. detsembriks, ja vedas kihla, et kui kattub hiljemini, siis maksab tema teistele esimese hilinemispäeva eest 5 senti, teise eest 10 senti, kolmanda eest 20 senti jne. Kui aga jõgi kattub jääga varemini, siis maksavad teised temale esimese päeva eest, mil jõgi varemini külmunud, 5 senti, teise eest 10 senti, kolmanda eest 15 senti jne. Emajõgi kattus jääga 16. detsembril. Kui palju peab maksma kaotaja?

94. Tsemenditünnist võeti $\frac{1}{4}$ tsemendist ära ja täideti tünn liivaga, mis segati tsemendiga. Saadud segust võeti jälle ära $\frac{1}{4}$ ja täideti uuesti liivaga jne. Missugune osa tsemendist jääb veel tünni järele, kui toimida sedaviisi 5 korda?

95. Pudelis on 2 liitrit 95-kraadilist piiritust. Võtame 1 klaasitäie (200 cm^3) piiritust ära ja lisame niisama palju vett juurde. Saadud segust võtame jälle klaasitäie ära ja täidame pudeli uuesti veega. Mitmeprotsendine on piiritus, kui oleme toiminud sedaviisi 5 korda?

96. Taluomanik suurendas iga aasta olemasolevat põllupinda $\frac{1}{15}$ võrra. Mitme aastaga on niiviisi tema põllupind suurenenud 50% võrra?

97. Mitme aastaga suureneb metsa puumass kahekordseks, kui aastane juurdekasv on $\frac{1}{50}$ olemasolevast?

98. Ruutu, mille külg on 10 cm, on joonestatud ring, mis puutub ruudu külgi. Sellesse ringi on joonestatud jälle ruut, mille tipud asuvad ringil, ruudusse jälle ring jne. Leia niiviisi joonestatud kuue ruudu ümbermõõtude summa ja kuue ringi ümbermõõtude summa!

99. Võrdkülgsesse kolmnurka, mille küljepikkus on 1 meeter, joonestati teine võrdkülgne kolmnurk, mille tipud asetsevad esimese kolmnurga külgede keskpunktides. Niiviisi saadud kolmnurka joonestati samal viisil jälle uus kolmnurk jne. Kokku oli 8 kolmnurka. Mitu meetrit traati vajame sellise kolmnurkade-võrgu valmistamiseks?

3. Lõpmata kahanev geomeetriline rida.

100. Märgi üles geomeetrilise rea

a) 8; 4; 2 jne. 20 liiget!

b) 81; 27; 9 jne. 15 liiget!

101. Arvuta, kasustades logaritme, geomeetrilise rea

a) 50. liige, kui $a_1 = 1000$ ja $q = 0{,}2$!

b) 100. liige, kui $a_1 = 750$ ja $q = 0{,}8$!

Mida võime öelda kahaneva geomeetrilise rea liikme kohta, mille järjekorra-number on suur?

Kui arvude järjestust, mis moodustab geomeetrilise rea, võime jätkata lõpmatuseni, siis nimetame seda rida **lõpmatuks geomeetriliseks reaks.**

Lõpmata kahaneva geomeetrilise rea liige, mille järjekorra-number on väga suur, on väga väike arv; järjekorra-numbri suurenemisega väheneb liige. Me võime öelda, et see liige püüab saada nulliks.

102. Leia, missugusest kõige väiksemast arvust ei saa suuremaks lõpmata kahaneva geomeetrilise rea liikmete summa!

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

b) $5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \ldots$

c) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \ldots$

Näidetest selgub, et lõpmata kahaneva geomeetrilise rea liikmete summa ei kasva lõpmata suureks, vaid läheneb kindlale arvule, nii et selle arvu ja liikmete summa vahe püüab saada nulliks.

Me nimetame seda kindlat arvu lõpmata kahaneva geomeetrilise rea liikmete summa p i i r i k s.

Kahaneva geomeetrilise rea liikmete summa arvutamiseks kasustame valemit: $s = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}$.

Kui n kasvab lõpmatult, siis a_n püüab saada nulliks ja samuti ka korrutis $a_n q$, sest $q < 1$.

Seega võime summa valemis liikme $a_n q$ ära jätta ja me saame valemi:

$$\boxed{s = \frac{a_1}{1-q}}$$

mille abil võime arvutada lõpmata kahaneva geomeetrilise rea liikmete summat.

Sõnades: **Lõpmata kahaneva geomeetrilise rea liikmete summa on võrdne murruga, mille lugejaks on rea esimene liige ja nimetajaks 1-he ja rea teguri vahe.**

Arvuta valemi abil järgnevate lõpmata kahanevate geomeetriliste ridade liikmete summa!

103. a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$

b) $5 + 1\frac{2}{3} + \frac{5}{9} + \ldots.$

c) $100 + 90 + 81 + \ldots.$

d) $1{,}5 + 0{,}9 + 0{,}54 + \ldots.$

104. a) $10 + 9 + 8{,}1 + \ldots.$

b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \ldots.$

c) $8\frac{2}{5} + 1{,}68 + \ldots.$

d) $\sqrt{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \ldots.$

105. Ruutu, mille külg on a, on joonestatud ruut, mille tipud asetsevad esimese ruudu külgede keskpunktides. Sellesse ruutu on joonestatud niisamuti uus ruut, jne. kuni lõpmatuseni. Leia niiviisi saadud kõikide ruutude

a) ümbermõõtude summa!

b) pindalade summa!

Perioodilised kümnendmurrud.

Muudame kümnendmurruks:

a) $\frac{5}{9} = 0{,}5555\ldots..$ ehk lühemalt: $\frac{5}{9} = 0{,}55\ldots = 0,(5)$; loe: null koma 5 perioodis.

b) $\frac{25}{33} = 0{,}757575\ldots..$ ehk lühemalt: $\frac{25}{33} = 0{,}7575\ldots = 0,(75)$;

loe: null koma 75 perioodis.

c) $\frac{17}{18} = 0{,}94444\ldots\ldots$ ehk lühemalt: $\frac{17}{18} = 0{,}944\ldots =$
$= 0{,}9(4)$;

loe: null koma 9 ja 4 perioodis.

Kümnendmurdu, milles kümnendkohtade numbrid korduvad, nimetatakse perioodiliseks murruks.

106. Muuda kümnendmurdudeks järgnevad lihtmurrud ja segaarvud!

$\frac{2}{3}$; $5\frac{4}{9}$; $\frac{13}{9}$; $\frac{50}{99}$; $1\frac{13}{18}$; $\frac{29}{45}$; $1\frac{17}{90}$; $2\frac{171}{180}$; $\frac{2}{7}$; $1\frac{5}{13}$.

N ä i d i s e d:

a) Muudame lihtmurruks 0,88...

Seda murdu võime kirjutada kujul

$$0{,}88\ldots = \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \ldots.$$

Võrduse parem pool on lõpmata kahaneva geomeetrilise rea liikmete summa, mille esimene liige on $\frac{8}{10}$ ja mille teguriks on $\frac{1}{10}$.

Summa valemi abil leiame, et

$$s = \frac{\frac{8}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{8 \cdot 10}{10 \cdot 9} = \frac{8}{9};$$

seega $0{,}88\ldots = \frac{8}{9}$.

b) Muudame lihtmurruks 0,81313...

$$0{,}81313\ldots = \frac{8}{10} + \frac{13}{1000} + \frac{13}{100000} + \ldots.$$

Selle võrduse parem pool, alates teisest liikmest, on lõpmata kahaneva geomeetrilise rea liikmete summa, mille esimene liige on $\frac{13}{1000}$ ja rea tegur on $\frac{1}{100}$.

Summa valemi abil leiame, et

$$s = \frac{\frac{13}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{13 \cdot 100}{1000 \cdot 99} = \frac{13}{990}$$

ja $0{,}81313\ldots = \frac{8}{10} + \frac{13}{990} = \frac{161}{198}$.

Muuda lihtmurdudeks järgmised perioodilised murrud!

	a	b	c	d
107.	0,(2)	0,(7)	0,(9)	0,(8)
108.	0,(10)	0,(23)	0,(11)	0,(90)
109.	0,(06)	0,(175)	0,(237)	0,(500)
110.	0,5(1)	0,8(9)	0,1(20)	0,4(45)
111.	2,(61)	5,2(4)	6,36(7)	15,17(5)

IX. Protsentarvutamine.

Kordamiseks.

1. Leia peast
   a) 50% arvust 13;
   b) 25% arvust 24;
   c) 20% arvust 115;
   d) 40% arvust 2,5!

2. Leia peast arvud, millest
   a) 20% on 1,4;
   b) 60% on 30;
   c) 50% on 7,5;
   d) 75% on 1,2!

3. Leia peast, mitu protsenti
   a) 2,5 on 5-st;
   b) 0,7 on 5,6-st;
   c) 12 on 60-st;
   d) 30 on 400-st!

4. Leia
   a) 1,1% arvust 11;
   b) 5,7% arvust 12,35;
   c) 124% arvust 15;
   d) 10,9% arvust 8,4!

5. Leia arvud, millest
   a) 2,4% on 1,6;
   b) 27% on 92;
   c) 105% on 64;
   d) 64,2% on 3,2!

6. Leia, mitu protsenti
   a) 9 on 1,8-st;
   b) 3,5 on 2-st;
   c) 74 on 96-st;
   d) 32,5 on 125-st!

1. Lihtprotsendid.

Hoiusumma.

Rahasummat ehk kapitali, mis hoiule antakse, nimetame **hoiusummaks;** kasu, mis sellelt hoiusummalt saadakse, **intressiks;** kasu kroonides, mis saadakse igalt 100 kroonilt ühes aastas, **protsendimääraks** ehk lihtsalt **protsendiks.**

Kapitali, mis on hoiule antud, nimetame **algkapitaliks** ja algkapitali ühes intressiga — **lõppkapitaliks.**

Lahendame ülesande:

Kui suureks kasvab kapital k krooni p protsendiga t aasta jooksul?

100 kroonilt saame ühe aasta jooksul intressi p krooni

1 „ „ „ „ „ „ $\frac{p}{100}$ krooni

k „ „ „ „ „ „ $\frac{kp}{100}$ krooni

k „ „ t aasta jooksul intressi $\frac{kpt}{100}$ krooni.

Seega intress $i = \frac{kpt}{100} = 0{,}01\ kpt.$

Algkapital ühes intressiga ehk lõppkapital on:

$$K_t = k + i = k + \frac{kpt}{100},$$

$$\boxed{K_t = k\left(1 + \frac{pt}{100}\right)}$$

Kui valemis $i = \frac{kpt}{100}$ või $K_t = k\left(1 + \frac{pt}{100}\right)$ on neljast suurusest kolm antud, siis võime arvutada neljanda suuruse.

7. Kui suureks kasvab kapital k krooni p protsendiga t aasta jooksul?

Arvuta, kui

a) $k = 260$ kr.; $p = 5\,\%$; $t = 3$ aastat !
b) $k = 153{,}24$ kr.; $p = 4\frac{1}{2}\%$; $t = 2\frac{2}{3}$ aastat!
c) $k = 750$ kr.; $p = 6{,}5\,\%$; $t = 4$ aast. 5 kuud!
d) $k = 972$ kr.; $p = 5\frac{1}{2}\,\%$; $t = 6$ kuud 24 päeva!

8. Kui suur kapital anti hoiule, kui see p protsendiga t aasta jooksul andis i krooni intressi?

Arvuta, kui

a) $i = 3{,}44$ kr.; $p = 5\,\%$; $t = 25$ päeva!
b) $i = 12{,}67$ kr.; $p = 6\,\%$; $t = 2$ kuud 18 päeva!

c) $i = 24{,}08$ kr.; $p = 4\%$; $t = 3$ kuud 21 päeva!
d) $i = 124$ kr.; $p = 5{,}5\%$; $t = 1\frac{3}{4}$ aastat!

9. Kui suur kapital anti hoiule, kui see p protsendiga t aasta jooksul kasvas K -krooniseks kapitaliks?

Arvuta, kui

a) $K_t = 180$ kr.; $p = 5\%$; $t = 4$ a.!
b) $K_t = 460$ kr.; $p = 6\%$; $t = 2$ a. 6 kuud!
c) $K_t = 1060$ kr.; $p = 8\%$; $t = 9$ kuud!
d) $K_t = 267{,}19$ kr.; $p = 5{,}5\%$; $t = 1\frac{1}{4}$ a. !

10. Mitme protsendiga oli hoiule pandud kapital k krooni, mis t aasta jooksul kasvas K_t-krooniseks kapitaliks?

Arvuta, kui

a) $k = 600$ kr.; $t = 6$ kuud; $K_t = 612$ kr.!
b) $k = 1530$ kr.; $t = 2\frac{2}{3}$ a.; $K_t = 1621{,}6$ kr.!
c) $i = 18{,}55$ kr.; $t = 42$ päeva; $K_t = 2138{,}55$ kr.!
d) $i = 420{,}5$ kr.; $t = 1$ a. 3 k. 15 p.; $K_t = 7200$ kr.!

11. Kui kaua oli k krooni hoiul p protsendiga, kui ta hoiuaja lõpuks kasvas K_t-krooniseks kapitaliks?

Arvuta, kui

a) $k = 136$ kr.; $p = 6\%$; $K_t = 200$ kr.!
b) $k = 1700$ kr.; $p = 4\frac{1}{2}\%$; $K_t = 1719$ kr.!
c) $i = 154{,}2$ kr.; $p = 6{,}5\%$; $K_t = 750$ kr.!
d) $k = 7530$ kr.; $p = 5{,}5\%$; $i = 242{,}63$ kr.!

Veksel.

Veksel on võlakohustus, mis kirjutatakse erilisele riigi poolt trükitud ja müügile lastud vekslipaberile.

Vekslile kirjutatud võlasumma on **veksli valuut.**

Kui veksel antakse panka, siis ei maksa pank välja vekslile märgitud summat, vaid arvab sealt maha protsentrahad ehk intressi veksli esitamise päevast kuni veksli tähtpäevani. Seda toimingut nimetatakse veksli diskonteerimiseks. Rahasumma, mis vekslilt diskonteerimisel maha arvatakse, on **diskonto** ehk **oodus.** Rahasumma, mis veksli andmisel saadakse, on veksli hind. Peale selle veel arvatakse pankades iga veksli kohta maha kindel summa kirja- ehk portokulu.

Veksli diskonto leidmiseks kasustame valemit:

$$i = \frac{kpt}{100},$$

kus k on veksli valuut, p — protsendimäär ja t — aeg aastates veksli diskonteerimisest kuni veksli tähtpäevani.

12. Leia veksli diskonto ja veksli hind, kui veksel

a) 450 kr. diskonteeriti 7 %-ga 8 kuud enne tähtaega!

b) 75 kr. diskonteeriti 5 %-ga 3 kuud 18 päeva enne tähtaega!

c) 240 kr. diskonteeriti 6,5 %-ga 72 päeva enne tähtaega!

d) 94,50 kr. diskonteeriti 4,5 %-ga $2\frac{1}{2}$ kuud enne tähtaega!

13. Leia veksli valuut, kui veksel diskonteeriti t aastat enne tähtaega p %-ga ja veksli eest saadi h krooni!

Märkus. Veksli valuut $k = h + i$ aseta valemisse $i = \frac{kpt}{100}$ ja avalda i!

14. Leia veksli valuut, kui veksel,

a) mille tähtaeg oli 5. juunil, diskonteeriti 25. aprillil 8 %-ga ja veksli eest saadi 892 krooni!

b) diskonteeriti 2 kuud 15 päeva enne tähtaega 7 %-ga ja veksli eest saadi 177,37 krooni!

c) mille tähtaeg oli 13. dets., diskonteeriti 1. nov. 6 %-ga ja veksli eest saadi 834,12 krooni!

d) mille tähtaeg oli 5. sept., diskonteeriti 20. juunil 6 %-ga ja veksli eest saadi 414,75 krooni!

15. a) Kui palju aega enne tähtaega diskonteeritakse 320-kroonine veksel 5 %-ga, kui selle eest makstakse 316 krooni?

b) Millal diskonteeriti 320-kroonine veksel, mille tähtaeg oli 30. sept., kui veksli eest saadi 315 kr. ja diskontoprotsent oli 7,5?

c) Millal oli 200-kroonise veksli tähtaeg, kui 12. aug. seda 8 %-ga diskonteerides saadi selle eest 196 kr.?

d) 240-kroonine veksel müüdi 233 krooni eest $7\frac{1}{2}$ %-se diskontoga. Mitu päeva enne tähtaega diskonteeriti veksel?

16. a) Mitme protsendiga diskonteeriti 240-kroonine veksel, mille eest saadi 15 päeva enne tähtaega 239,5 kr.?

b) Mitme protsendiga diskonteeriti 180-kroonine veksel, mille eest saadi 2,5 kuud enne tähtaega 177,75 kr.?

c) Mitme protsendiga diskonteeriti 75-kroonine veksel, mille diskonto oli 2 kuud 20 päeva enne tähtaega 1,25 krooni?

d) Mitme protsendiga diskonteeriti 45-kroonine veksel, mille diskonto oli $\frac{5}{9}$ aastat enne tähtaega 2 krooni?

Ülesandeid.

17. Kapital 720 kr., olles hoiul 1 aasta 4 kuud 20 päeva, andis 15,75 kr. kasu. Leia protsendimäär!

18. Kodanik laenas pangast 3 kuu peale 245 kr., mille eest arvati maha intressi 4 kr. 90 s. Mitu protsenti võeti laenult?

19. Missugune summa tuleb maksta võla 420 kr. katteks, kui võlg on tehtud 7,5 %-ga, tingimusel, et intress arvatakse võla tasumisel võlasummale korraga juurde, ja kui võlg tasuti 2 aasta 48 päeva pärast?

20. Metsakaupmehel oli 4820 kr. raha, millest ta 40 % pani 12. mail 5 %-ga jooksvale arvele ja ülejäänud osa samal ajal 5,5 %-ga tähtajalisele arvele. Tähtajalise arve lõppedes 25. oktoobril võttis ta mõlemad summad ühes intressiga korraga välja. Kui palju sai ta pangast raha?

21. Missugune on veksli valuut, kui selle veksli diskonto 3 kuu eest $3\frac{1}{4}$ %-ga moodustas 5,20 kr.?

22. Kui palju makstakse 600-kroonise veksli eest 4 kuud 15 päeva enne tähtaega, kui veksel diskonteeritakse $4\frac{1}{2}$ %-ga?

23. 315-kroonine veksel, mille tähtaeg oli 17. dets., diskonteeriti 27. sept. 311,85 kr. eest. Mitme %-ga diskonteeriti veksel?

24. Veksel, mille tähtaeg oli 26. juulil, diskonteeriti 16. apr. 3918,20 kr. eest, kusjuures diskontoks arvati 41,80 kr. Mitme %-ga diskonteeriti veksel?

25. Keegi isik andis laenuks 9000 kr. 2,75 %-ga ja sai selle eest 371,25 krooni intressi. Missuguse aja eest arvati see intress?

26. 19. juunil müüdi 1410-kroonine veksel $6\frac{1}{4}$ %-ga 1374,75 kr. eest. Määra veksli tähtaeg!

27. Missugune kapital oli hoiul 4,5 %-ga 1 a. 3 k. 12 p., kui pank maksis välja 2665,43 kr.?

28. Asunik oodustas pangas 6 %-ga 2 k. 15 päeva enne tähtaega veksli ja sai selle eest 256,75 kr. Kui suur oli veksli valuut?

29. Leia diskontoprotsent, kui 120-kroonise veksli eest 6 kuud enne tähtaega maksti 115,30 kr.! Portokuludeks arvati 50 senti.

30. Leia diskontoprotsent, kui 200-kroonise veksli eest, mille tähtpäev oli 10. veebruaril, maksti 21. detsembril 198 krooni? Portokulu oli 50 senti.

31. Keegi annab hoiule 750 krooni 4 %-ga ja samal ajal 600 krooni 5,5 %-ga. Mitme aasta pärast saavad mõlemad kapitalid võrdseteks, kui pank intresside eest protsente ei anna?

32. Keegi annab hoiule 1000 krooni 5 %-ga ja samal ajal 800 krooni 4,5 %-ga. Mitme aasta pärast on esimene kapital kasvanud kaks korda suuremaks kui teine, kui pank intresside eest protsente ei maksa?

33. Vallavalitsus sai laenuks 45 000 krooni 2,5 %-ga ja laenutas saadud raha põllupidajatele 6 %-ga. Kui palju teenib vallavalitsus 3 aasta jooksul?

34. Alevivalitsus laenas 85 000 krooni $2\frac{1}{4}$ %-ga ja andis selle raha laenuks alevi kodanikkudele. Mitu protsenti peaks alevivalitsus kodanikkudelt võtma, et teenida selt ettevõttelt 16 aasta jooksul 50 000 krooni?

2. Liitprotsendid.

Kui hoiule antud või laenutatud kapitalile iga aasta lõpul arvatakse juurde selle kapitali eest saadud intressid ja igal järgneval aastal kannab protsente kapital ühes eelmiste aastate intressidega, siis ütleme, et kapital on hoiul või välja laenatud **liitprotsentidega.**

Lahendame ülesande:

Kui suureks muutub kapital k krooni p liitprotsendiga t aasta jooksul?

1 kroonist saame aasta jooksul $\frac{p}{100}$ kr. intressi.

1 kroon muutub aasta jooksul $1+\frac{p}{100}$ krooniks.

k krooni muutub aasta jooksul

$$K_1 = k\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Tähistame lihtsuse mõttes teguri

$$1+\frac{p}{100} = q,$$

saame $K_1 = kq$,

kus q nimetatakse **protsent-teguriks.** Protsent-tegur on arv, milleks muutub 1 kroon p %-ga ühe aasta jooksul.

Teise aasta alul on hoiul seega kq krooni, mis teise aasta lõpuks muutub

$$K_2 = kq \cdot q = kq^2.$$

Kolmanda aasta alul on meil hoiul nüüd kq^2 krooni, mis sama aasta lõpuks muutub

$$K_3 = kq^2 \cdot q = kq^3 \text{ jne.}$$

t aasta lõpuks muutub kapital

$$\boxed{K_t = kq^t}$$

kus $q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + 0{,}1p.$

Selles valemis on 4 suurust:

1) algkapital k, 2) protsent-tegur q, 3) aeg aastates t ja 4) lõppkapital K_t.

Sõnadega: **Lõppkapital liitprotsentide korral on võrdne algkapitaliga, korrutatud protsent-teguriga, mis on võetud aastate arvu astmes.**

35. Leia protsent-tegur q, kui protsent p on:

a) 4%; 5%; $3\frac{1}{2}$%; $6\frac{1}{2}$%;
b) $2\frac{1}{4}$%; $5\frac{3}{4}$%; $8\frac{1}{3}$%; $4\frac{2}{3}$%;
c) 4,2%; 7,25%; 15,8%; 15,7%!

36. Leia protsent p, kui protsent-tegur q on:

a) 1,06; 1,04; 1,07; 1,11;
b) 1,025; 1,15; 1,074; 1,032;
c) $1\frac{1}{20}$; 1,005; 1,0125; 1,0935!

Kui valemis $K_t = kq^t$ on neljast suurusest kolm antud, siis võime arvutada neljanda suuruse. Arvutamiseks kasustatakse logaritme.

Lõppkapitali leidmine.

37. Kui suureks kasvab kapital k krooni p liitprotsendiga t aasta jooksul?

Arvuta, kui

a) $k = 300$; $p = 5$; $t = 8$!
b) $k = 150$; $p = 4$; $t = 10$!

c) $k = 25$; $p = 4\frac{1}{2}$; $t = 25$!

d) $k = 1$; $p = 6$; $t = 100$!

e) $k = 1000$; $p = 3\frac{1}{2}$; $t = 20$!

f) $k = 2500$; $p = 3$; $t = 12$!

g) $k = 2536$; $p = 6$; $t = 16$!

Algkapitali leidmine.

38. Missugune kapital muutub p liitprotsendiga t aasta jooksul K_t-krooniseks kapitaliks?

Arvuta, kui

a) $p = 6$; $t = 10$; $K_t = 1000$!

b) $p = 6{,}5$; $t = 15$; $K_t = 1200$!

c) $p = 5$; $t = 20$; $K_t = 935$!

d) $p = 3\frac{1}{2}$; $t = 16$; $K_t = 7000$!

e) $p = 4$; $t = 18$; $K_t = 5675$!

f) $p = 4{,}25$; $t = 8$; $K_t = 2400$!

g) $p = 4\frac{1}{2}$; $t = 20$; $K_t = 13147$!

h) $p = 5$; $t = 100$; $K_t = 1$!

Aastate arvu leidmine.

39. Mitme aastaga muutub kapital k krooni p liitprotsendiga K_t-krooniseks kapitaliks?

Arvuta, kui

a) $k = 2000$; $p = 4\frac{1}{2}$; $K_t = 10\,000$!

b) $k = 3000$; $p = 4$; $K_t = 3650$!

c) $k = 2200$; $p = 3$; $K_t = 2706$!

d) $k = 8024{,}5$; $p = 4\frac{1}{2}$; $K_t = 1000$!

e) $k = 1$; $p = 5$; $K_t = 100$!

f) $k = 5$; $p = 6$; $K_t = 50\,000$!

g) $k = 1$; $p = 4\frac{1}{2}$; $K_t = 2$!

h) $k = 24\,000$; $p = 5$; $K_t = 39\,094$!

Protsendimäära leidmine.

40. Mitme liitprotsendiga muutub kapital k krooni t aasta jooksul K_t-krooniseks kapitaliks?

Arvuta, kui

a) $k = 2500$; $t = 12$; $K_t = 4000$!
b) $k = 2494$; $t = 20$; $K_t = 8000$!
c) $k = 1$; $t = 10$; $K_t = 10$!
d) $k = 3500$; $t = 8$; $K_t = 4790$!
e) $k = 10\,000$; $t = 18$; $K_t = 20\,258$!
f) $k = 250$; $t = 10$; $K_t = 370$!
g) $k = 10$; $t = 5$; $K_t = 20$!
h) $k = 1$; $t = 50$; $K_t = 10\,000$!

Ülesandeid.

41. Isa soovis tütrele, kes oli aastane, kindlustada teatava summa. Selleks pani ta panka 500 krooni. Kui suureks muutub kapital tütre 21 aasta sünnipäevaks, kui pank annab 5% ja intressid arvatakse iga aasta järel hoiuleantud summale juurde?

42. Isa soovis pojale, kes oli 3-aastane, kindlustada ta 25 aasta sünnipäevaks teatava kapitali. Mitu krooni pidi isa panka hoiule andma $4\frac{1}{2}$ liitprotsendiga, et poeg saaks oma 25 aasta sünnipäeval 8000 krooni?

43. Ametnik andis panka hoiule 350 krooni. Saadud intressid liideti iga aasta hoiusummaga. 9 aasta pärast maksis pank ametnikule 543,15 krooni. Mitme protsendiga oli kapital hoiul?

44. Käsitööline andis panka hoiule 225 krooni $4\frac{1}{2}$ liitprotsendiga. Mitme aasta pärast kasvab tema kapital 1500 krooniks?

45. Mitme aasta pärast muutub kapital kahekordseks, kui see hoitakse pangas $4\frac{1}{2}$ liitprotsendiga?

46. Võla eest nõutakse 7 %. Mitme aastaga kasvab võlg kahekordseks, kui võla protsentrahad arvatakse iga aasta võlale juurde?

47. Kui suure liitprotsendiga muutub hoiuleantud kapital 25 aasta jooksul neljakordseks?

48. Kapital laenati välja 6 %-ga ja protsentrahad arvati iga aasta kapitalile juurde. Mitmekordseks oli kasvanud väljalaenatud kapital 16 aasta jooksul?

49. Taluomanik võib oma metsast saada praegu 12 500 kuupmeetrit küttepuid. Teades, et selle metsa puumaterjali aastane juurdekasv on $2\frac{1}{4}$ %, leia, mitu kuupmeetrit puid saab taluomanik 7 aasta pärast!

50. Majaomanik hindab oma maja väärtust praegu 24 500 kroonile. Oletades, et maja kaotab iga aasta 1,5 % enda iga-aastasest väärtusest, leia maja väärtus 50 aasta pärast!

51. Linnas on praegu 59 500 elanikku. Mitu elanikku on linnas 25 aasta pärast, kui selle linna elanikkude arvu aastane juurdekasv on $3\frac{3}{4}$ %?

52. Linnas on praegu 138 000 elanikku. 16 aastat tagasi oli selles linnas 115 000 elanikku. Leia selle linna elanikkude arvu aastane juurdekasvu protsent!

53. Missugune peaks olema linna elanikkude arvu aastane juurdekasvu protsent, et 34 aasta pärast oleks selles linnas 2 korda rohkem elanikke?

54. Linna elanikkude arvu aastane juurdekasv on 3,3 %. Mitme aasta pärast on selle linna elanikkude arv kolmekordistunud?

55. Vabriku sisseseade maksis uuena 22 500 krooni. Kui kõrgelt tuleb hinnata vabriku sisseseadet 15 aasta pärast, kui iga-aastasel hindamisel kustutatakse sisseseade kulumise tõttu 7 % maha eelmise aasta väärtusest?

56. Auto maksis uuena 3750 krooni. 13 aasta tarvitamise järel hinnati selle auto väärtus 875 kroonile. Leia selle auto iga-aastane kulumisprotsent!

57. Kui palju intressi saame 1735-krooniselt kapitalilt, kui see on hoiul 4 liitprotsendiga $12\frac{1}{2}$ aastat?

58. Kapital, mis oli hoiul 5 liitprotsendiga 8 aastat 9 kuud, kasvas 7945,8-krooniseks kapitaliks. Leia hoiuleantud kapital!

59. Mitme liitprotsendiga tuleks anda panka hoiule 270 krooni, et see 20 aasta pärast kasvaks niisama suureks kui 1000 kr. $4\frac{1}{2}$ liitprotsendiga?

60. Mitme liitprotsendiga tuleks anda panka hoiule 480 krooni, et ta 12 aasta pärast kasvaks niisama suureks kui 300 krooni 5 liitprotsendiga?

61. Mitmeks aastaks tuleks anda panka hoiule 10 000 krooni 4 liitprotsendiga, et sellest kasvaks kapital, mis annaks iga aasta 6 %-ga 1800 krooni tulu?

62. Kui suur kapital tuleks anda panka hoiule $4\frac{1}{2}$ liitprotsendiga, et see 10 aasta möödumisel annaks 5 %-ga iga aasta 1440 krooni tulu?

63. Mitme aastaga muutub 120 krooni 3 liitprotsendiga niisama suureks kui 80 krooni 4 liitprotsendiga?

64. Mitme aastaga muutub 760 krooni $5\frac{1}{2}$ liitprotsendiga niisama suureks kui 900 krooni $3\frac{1}{2}$ liitprotsendiga?

65. Ühes linnas on praegu 4250 elanikku, selle linna elanikkude arvu aastane juurdekasv on 3,2 %. Teises linnas on praegu 12 570 elanikku ja elanikkude arvu aastane juurdekasv on 1,8 %. Mitme aasta pärast on esimese linna elanikkude arv niisama suur kui teise linna elanikkude arv?

66. Kahes linnas on praegu ühepalju elanikke. Esimese linna elanikkude arvu aastane juurdekasv oli $2\frac{1}{4}$ %

ja teise linna elanikkude arvu juurdekasv $1\frac{3}{4}\%$. Missugune oli nende linnade elanikkude arvu suhe 32 aastat tagasi?

67. 1922. aasta rahvaloenduse andmete järgi oli Eesti Vabariigis 1 107 059, 1934. aasta rahvaloenduse andmete järgi aga 1 126 413 elanikku.

Arvuta!

a) Kui suur on Eesti Vabariigi elanikkude arvu aastane juurdekasvu protsent?

b) Kui suur on Eesti Vabariigi elanikkude arv 1950. aastal, kui rahvaarv kasvab edaspidi niisamuti nagu siiamaani?

c) Kui suur peaks olema Eesti Vabariigi elanikkude arvu aastane juurdekasvu protsent, et Eestis oleks 1975. aastal 2 000 000 elanikku?

Eesti Vabariigi linnade elanikkude arv 1922. ja 1934. aasta rahvaloenduse andmete järgi on:

Linna nimetus	1922. a.	1934. a.	Linna nimetus	1922. a.	1934. a.
Tallinn	122 419	137 792	Rakvere	7660	10 027
Haapsalu	4251	4649	Tapa	2398	3751
Kuressaare	3364	4478	Tartu	50 342	58 876
Narva	26 912	23 512	Tõrva	1810	2599
Nõmme	5150	15 105	Türi	2099	2903
Paide	2980	3285	Valga	9455	10 842
Paldiski	1053	851	Viljandi	9400	11 788
Petseri	2013	4274	Võru	5077	5332
Pärnu	18 499	20 334	Otepää	1777	2015
Põltsamaa	2100	2609			

68. Kasustades tabelit leia

a) Valga linna elanikkude arvu suurenemise protsent ajavahemikus 1922—1934!

b) Petseri linna elanikkude arvu suurenemise protsent ajavahemikus 1922—1934!

c) Mitme aasta pärast saab Petseri linna elanikkude arv võrdseks Valga linna elanikkude arvuga, oletades, et elanikkude arvu suurenemise protsent ei muutu?

Kasusta linnade elanikkude arvu tabelit ja koosta ise mitmesuguse sisuga ülesandeid ja lahenda need!

3. Tähtajalised maksud.

Tähtajaline maks on rahasumma, mis tuleb maksta määratud tähtajal, et aja jooksul koguda kapitali.

Käsitleme juhust, kus tähtajaline summa makstakse iga aasta alul.

Lahendame ülesande:

Kui suure kapitali kogume 5 aasta jooksul, kui iga aasta alul paneme kasvama k krooni p liitprotsendiga?

Summa, mis toodud

1. aasta alul, kasvab kq^5 krooniks,
2. „ „ „ kq^4 „
3. „ „ „ kq^3 „
4. „ „ „ kq^2 „
5. „ „ „ kq „

ja viie aasta jooksul on kogu kapital kroonides

$$K_5 = kq^5 + kq^4 + kq^3 + kq^2 + kq.$$

Võttes paremal pool teguri kq sulgude ette saame:

$$K_5 = kq(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$$

ehk

$$K_5 = kq(1 + q + q^2 + q^3 + q^4).$$

Sulgudes on geomeetrilise rea 5 liikme summa, milles esimene liige on 1 ja rea tegur on q.

Avaldades sulgudes oleva avaldise summa valemi kaudu saame:

$$K_5 = kq\frac{q^5 - 1}{q - 1}.$$

Üldiselt: Kui koguda kapitali t aastat, makstes iga aasta alul k krooni, siis on t aasta lõpuks p liitprotsendiga kogutud kapital kroonides:

$$\boxed{K_t = kq\frac{q^t - 1}{q - 1}}$$

kus $q = 1 + \frac{p}{100}$.

69. Kui suure kapitali kogume t aasta jooksul, kui iga aasta alul paneme kasvama k krooni p liitprotsendiga?

Arvuta, kui

a) $k = 20$ kr.; $p = 5\,\%$; $t = 15$ a.!
b) $k = 150$ kr.; $p = 4\frac{1}{2}\,\%$; $t = 12$ a.!
c) $k = 300$ kr.; $p = 5{,}5\,\%$; $t = 20$ a.!
d) $k = 750$ kr.; $p = 6\,\%$; $t = 16$ a.!

70. Missugune summa tuleks maksta iga aasta alul, et t aasta jooksul koguda p liitprotsendiga K_t krooni?

Arvuta, kui

a) $p = 5\,\%$; $t = 20$ a.; $K_t = 10\,000$ kr.!
b) $p = 4{,}5\,\%$; $t = 10$ a.; $K_t = 1500$ kr.!
c) $p = 5{,}5\,\%$; $t = 12$ a.; $K_t = 3200$ kr.!
d) $p = 4\,\%$; $t = 50$ a.; $K_t = 50\,000$ kr.!

71. Mitme aastaga kogume K_t -kroonise kapitali, kui iga aasta anname hoiule k krooni p liitprotsendiga?

Arvuta, kui

a) $k = 150$ kr.; $p = 5\,\%$; $K_t = 3400$ kr.!
b) $k = 225$ kr.; $p = 3\,\%$; $K_t = 6225$ kr.!

c) $k = 24$ kr.; $p = 5{,}5\,\%$; $K_t = 1000$ kr.!
d) $k = 1200$ kr.; $p = 6\,\%$; $K_t = 16\,770$ kr.!

Ülesandeid.

72. Poja sünnipäeva puhul maksab isa iga aasta alul panka poja nimele 60 krooni. Kui palju on isa niiviisi kogunud poja 25 aasta sünnipäevaks, kui pank annab sissemakstud summadelt 5 liitprotsenti?

73. Ametnik andis iga aasta alul panka hoiule kindla summa. 15 aasta jooksul kogus ametnik niiviisi 4800 kr. Missuguse summa maksis ametnik iga aasta, kui pank andis sissemakstud summadelt $4\frac{1}{2}$ liitprotsenti?

74. Ärimees tahtis kindlustada pojale, kes praegu kaheaastane, tema 21-aastaseks saamisel 10 000-kroonise kapitali. Missuguse summa peab ärimees selleks otstarbeks iga aasta alul panka hoiule andma, kui pank maksab sissemakstud summade eest 5,5 liitprotsenti?

75. Põllumees laenas talu ostmiseks 6450 krooni. Missuguse summa peaks põllumees iga aasta alul panka maksma, et 16 aasta jooksul kogutud kapital võimaldaks tasuda laenu, kui pank maksab 5 liitprotsenti ja kui oletada, et laenu protsendid tasub põllumees iga aasta korralikult ära?

76. Keegi kindlustas enda elu 7500-kroonise summaga. Iga aasta alul maksis ta preemiaks 210 krooni. 22 aasta pärast suri see isik. Kas kindlustusselts võitis või kaotas ja kui palju, kui sissemakstud preemiatelt arvestatakse 4 liitprotsenti?

77. 32-aastane ametnik kindlustab oma elu 3000-kroonise summaga. Ta sureb 59-aastaselt. Kui suur oli iga-aastane sissemaks, kui kindlustuselts ei saanud selle kindlustuse tagajärjel ei kahju ega kasu ja kui sissemakstud preemiatelt arvestatakse 5 liitprotsenti?

78. Isa tahab tütrele, kes on praegu 5-aastane, 20-aastaseks saamise puhul kindlustada 1500-kroonise kapitali; selleks maksab ta kindlustusseltsile iga aasta 70 krooni. Kui palju oleks isa kogunud 15 aasta jooksul juhul, kui ta iga aasta alul oleks maksnud panka 70 krooni ja kui pank maksab sissemakstud summadelt 5 liitprotsenti?

79. Mitme aastaga võib koguda 18 000 krooni, kui iga aasta alul hoiule viia 1200 krooni, kusjuures pank maksab sissemakstud summadelt 5,5 liitprotsenti?

80. Mitme aastaga on kogutud 11 000 krooni, kui iga aasta alul makstakse panka 420 krooni ja pank maksab sissemakstud summadelt 5 liitprotsenti?

81. Kodanik kindlustab enda elu 5000-kroonise summaga ja maksab iga aasta alul 189 krooni preemiaid. Mitme aasta pärast on sissemakstud summad võrdsed elukindlustussummaga, kui kindlustusselts arvestab 5,5 liitprotsenti?

82. Keegi viib 5 aastat järjest 90 kr. hoiule. Kui suure kapitali peab pank välja maksma 19 aasta pärast, kui pank annab sissemakstud summadelt 5 liitprotsenti?

83. Käsitööline paneb aasta alul panka hoiule 74 krooni. Iga aasta pärast maksab juurde 30 kr. Kui suure kapitali on kogunud endale käsitööline 18 aasta jooksul, kui pank maksab sissemakstud summadelt 4 liitprotsenti?

84. 16-aastane õpilane paneb talle kingitud raha 250 krooni aasta alul panka hoiule ja lisab iga aasta sellele summale juurde 12 krooni. Kui suure kapitali on ta endale kogunud 25-ndaks eluaastaks, kui pank maksab 5,5 liitprotsenti?

X. Kordamiseks.

1. a) Kuidas kontrollida jagamise tulemust?

b) Leia x, kui

1) $\frac{x}{6} = 0{,}2$; 2) $\frac{2x}{1{,}5} = 4$; 3) $\frac{5{,}12}{x} = 6$; 4) $\frac{1{,}5}{2x} = 28$!

c) Missugusest arvust $\frac{3}{4}$ on 7,5?

d) Elektrijaamas on 2 dünamot koguvõimsusega 168 HP. Ühe dünamo võimsus suhtub teise omasse nagu 13 : 11. Leia kummagi dünamo võimsus!

2. a) Missugusel lausel põhineb murru taandamine?

b) Taanda murrud!

1) $\frac{a+b}{b-a}$; 2) $\frac{5m-10n}{20an-10am}$; 3) $\frac{a^2x^2-2a^2x+a^2}{a-ax}$.

c) Kahe poolega kangi otstesse on riputatud pommid, mis kaaluvad kokku 12,74 kg. Tasakaalu korral suhtuvad kangi õlad nagu 9 : 5. Kui suured on raskused kangi otstes?

3. a) Ristküliku kõrgus on $\frac{3}{5}$ alusest. Leia selle ristküliku pindala, kui alus on 0,12 m!

b) Leia ristküliku kõrgus, kui ristküliku alus on 6,5 m, ristküliku pindala aga 0,26 aari!

c) Ristküliku küljed suhtuvad nagu 2 : 3, ristküliku ümbermõõt on 2 m. Leia küljed!

4. Arvuta!

a) $3{,}6-(+2{,}7)$	f) $5\frac{1}{4}-(-2{,}75)$	k) $(-5{,}8):(-2{,}9)$
b) $5{,}2-(-2{,}8)$	g) $(-2)(+3)$	l) $(+5\frac{1}{5}):(-2\frac{1}{2})$
c) $2\frac{3}{4}-(-5\frac{1}{2})$	h) $(-1\frac{1}{5})(-2\frac{1}{2})$	m) $(-2)^3-(+3)^2$
d) $2+(-1\frac{7}{8})$	i) $(+3\frac{3}{8})\cdot(-\frac{5}{9})$	n) $(-\frac{1}{2})^3+(\frac{2}{3})^2$
e) $4{,}2+(-2\frac{7}{10})$	j) $(-3\frac{3}{8}):(+2\frac{2}{3})$	o) $4\frac{1}{2}-(-1\frac{1}{2})^2$

5. Leia $a + b$; $a - b$; ab; $\frac{a}{b}$; $(a + b)^2$ ja $(a - b)^3$, kui a) $a = 3{,}75$; $b = -2\frac{1}{2}$! b) $a = -2\frac{3}{8}$; $b = -1\frac{1}{3}$!

6. Kolmnurga alus on a, kõrgus b. Anna kolmnurga pindala arvutamiseks eeskiri!

Arvuta, kui

a) $a = 5{,}2$ m; $b = 3{,}6$ m!
b) $a = 2\frac{3}{4}$ dm; $b = 1{,}5$ dm!

7. Trapetsi alused on a ja b, kõrgus h. Anna pindala arvutamiseks eeskiri!

Arvuta, kui

a) $a = 7{,}2$ cm; $b = 6{,}8$ cm; $h = 5$ cm!
b) $a = 3\frac{1}{2}$ m; $b = 1{,}6$ m; $h = 8$ dm!
c) $a = 7$ m 2 dm; $b = 5$ m 6 dm; $h = 7{,}2$ m!

8. Ringjoone pikkus on c. Anna ringi raadiuse ja pindala arvutamise eeskiri!

Arvuta, kui

a) $c = 6{,}28$ m; $\pi = 3{,}14$!
b) $c = 4{,}4$ m; $\pi = 3\frac{1}{7}$!
c) $c = 7{,}2$ dm; $\pi = 3{,}14$!
d) $c = 12{,}1$ m; $\pi = 3\frac{1}{7}$!

9. Kuubi ruumala on V. Leia kuubi serva pikkus!

Arvuta, kui

a) $V = 17{,}6$ dm^3!
b) $V = 20{,}8$ dm^3!
c) $V = 1{,}8$ liitrit!

10. Risttahuka servad suhtuvad nagu $3 : 4 : 5{,}5$. Leia selle risttahuka servade pikkused, kui risttahuka ruumala on V!

Arvuta, kui

a) $V = 3{,}8$ m^3!
b) $V = 4{,}25$ liitrit!
c) $V = 12{,}5$ cm^3!

11. Müüdi ruudukujuline tükk maad, mille külje pikkus on a meetrit, hinnaga s kr. aar. Leia maatüki hind!

Arvuta, kui

a) $a = 12$ m; $s = 25$ kr.!
b) $a = 32{,}5$ m; $s = 18$ kr.!
c) $a = 42$ m; $s = 32{,}5$ kr.!

12. Pandi hoiule k krooni t aastaks p lihtprotsendiga. Kui palju saadi sellelt hoiusummalt intressi?

Arvuta, kui

a) $k = 1240$; $p = 6$; $t = 1\frac{1}{2}$!
b) $k = 780$; $p = 4{,}8$; $t = \frac{2}{3}$!
c) $k = 156$; $p = 5{,}2$; $t = \frac{1}{4}$!

13. Diskonteeriti veksel, mille valuut oli k krooni, t päeva enne tähtaega p protsendiga. Anna diskonto arvutamise eeskiri ja leia veksli hind h, kui

a) $k = 720$; $p = 72$; $t = 60$!
b) $k = 460$; $p = 6{,}5$; $t = 45$!
c) $k = 280$; $p = 5{,}8$; $t = 12$!

14. Mitme protsendiga p diskonteeriti k-kroonine veksel t päeva enne tähtaega, kui on teada, et selle veksli diskontoks arvati d krooni?

Arvuta, kui

a) $k = 720$; $d = 6{,}20$; $t = 30$!
b) $k = 540$; $d = 5{,}40$; $t = 45$!
c) $k = 160$; $d = 2{,}24$; $t = 72$!

15. a) Leia hoiuaeg, kui on teada, et 75 kroonilt 4%-ga maksti 1,50 krooni intressi!

b) Leia kapital, mis 5%-ga 4 kuud 20 päeva hoiul olles andis 5,40 krooni intressi!

c) Leia, kui kaua oli kapital 180 krooni hoiul, kui 5,5%-ga saadi 4,40 krooni intressi!

16. Veehulka, mis läbib veetorustiku, määratakse kindlaks valemi $Q = 0{,}25\pi d^2 v$ abil, kus Q on liitrite arv sekundis, d — toru läbimõõt millimeetrites ja v — veevoolu kiirus $\frac{\text{m}}{\text{sek.}}$. Leia toru läbimõõt, kui $Q = 415{,}7$ l; $v = 0{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{sek.}}$!

17. a) Millega on võrdne kahe arvu summa ruut?

b) Leia!
a) $(2a + 3b)^2$; 2) $(1 + 0{,}01p)^2$; 3) $(2m^2 + 3\frac{1}{2})^2$; 4) 102^2;

$$5)\ \left(\frac{1}{2} + 2\sqrt{2}\right)^2;\ 6)\ \left(\frac{x}{4}\sqrt{xy} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

c) Arvuta täpsusega kuni 0,01!

$$1)\ \sqrt{0{,}001};\quad 2)\ 6\sqrt{3};\quad 3)\ \sqrt{\frac{5}{12}};\quad 4)\ \frac{3}{\sqrt{6}};\quad 5)\ \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{0{,}5}}.$$

d) Lahenda võrrandid!

$$1)\ x^2 + x - 6 = 0;\quad 2)\ 4x^2 = 4x + 15;$$
$$3)\ x^2 + 8mx + 15m^2 = 0.$$

e) Kui paks on risttahuka-kujuline ujuv jäätükk, kui tast ulatub veest välja 8 cm? Jää erikaal $e = 0{,}9$.

18. a) Millega on võrdne kahe arvu vahe ruut?

b) Leia! 1) $(3m^2 - 4n)^2$; 2) $(1 - 0{,}03m)^2$; 3) 998^2;

$$4)\ (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2;\quad 5)\ (-4a + 5b)^2;$$
$$6)\ \left(2\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right)^2;\quad 7)\ \left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{3}{\sqrt{b}}\right)^2.$$

c) Arvuta täpsusega kuni 0,01!

$$6\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{6}} + \sqrt{16\frac{2}{3}} + 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

d) Lahenda võrrandid!

$$1)\ \sqrt{6 + x} + \sqrt{10 + 2x} = 7;$$
$$2)\ \sqrt{2x + 7} - \sqrt{7x + 1} + \sqrt{3x - 18} = 0.$$

e) Korgitüki külge on seotud tükk tina, mille raskus on 1 kg. Leia korgitüki ruumala, kui selle süsteemi kandejõud on 3 kg! Korgi erikaal on 0,24 ja tina erikaal 11,2.

19. a) Millega võrdub kahe arvu summa ja vahe korrutis?

b) Leia!

1) $(3f^2 - 4g)(3f^2 + 4g)$; 2) $(-2a + b)(b + 2a)$;
3) $(-4m - 5)(-4m + 5)$; 4) $68 \cdot 72$; 5) $997^2 - 3^2$;

$$6)\ \left(\sqrt{11 + 4\sqrt{7}} - \sqrt{11 - 4\sqrt{7}}\right)^2;$$

$$7)\ \left(\sqrt{3a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\left(\sqrt{3a} - \frac{2}{2\sqrt{a}}\right).$$

c) Arvuta täpsusega kuni 0,01!

$$1)\ \frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}};\quad 2)\ \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}.$$

d) Lahenda võrrandid!

1) $5x^2 - 4x = 0$; 2) $m^2x^2 = x$; 3) $9x^2 - 4 = 0$;
4) $ax^2 - 2b + 1 = 0$.

e) Pealt lahtine rauast kast, mille pikkus, laius ja kõrgus on väljastpoolt 50, 40 ja 41 cm, kuna seinte paksus on 1 cm, ujub vees. Kui sügavale vajub kast vette, kui kasti asetada kivi, mille raskus on 2,2 kg? Raua erikaal $e = 7,5$.

20. a) Millega on võrdne kahe arvu summa kuup? vahe kuup?

b) Leia! 1) $(2s + 3t^2)^3$; 2) $(1 - 0,01p)^3$;
3) $(2 + 3u)(4 - 6u + 9u^2)$.

c) Taanda murrud!

$$\frac{2(n-p)}{p^2 - 2np + n^2};\quad \frac{3u - 6v}{4v^2 - u^2};\quad \frac{2a - 3b}{27b^3 - 8a^3}.$$

d) Lahenda võrrandsüsteemid!

1) $\begin{cases} 2y - 7x + 2 = 0 \\ 47 - 3y = 2x \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} - 2 = 0 \\ \frac{x-1}{7} - \frac{y-1}{8} = \frac{5}{8} \end{cases}$

e) Sürakuusa kuninga Hieron'i kroon kaalus õhus 20 naela, vees aga $1\frac{1}{4}$ naela vähem. Kui palju kulda ja kui palju hõbedat sisaldas kroon, kui on teada, et $19\frac{1}{4}$ naela kulda kaotab vees 1 naela oma raskusest ja $10\frac{1}{2}$ naela hõbedat 1 naela oma raskusest?

21. a) Defineeri, mida nimetame: võrduseks; võrdeks; samasuseks; võrrandiks!

b) Lahuta tegureiks! 1) $25x^2 + 10x + 1$;

2) $a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$; 3) $7a^4 - \frac{28}{49}b^2$; 4) $m^2 - 2mn + n^2 - 1$.

c) Koosta ruutvõrrand, kui lahendid on:

1) -5 ja 0; 2) $+4$ ja -4; 3) $\frac{2}{3}$ ja $\frac{1}{3}$;

4) $\frac{a}{1-b}$ ja $\frac{b}{1-a}$!

d) Arvuta!

1) $(5^{-3})^{\frac{1}{3}}$; 2) $\sqrt[-2]{\frac{16}{25}}$; 3) $\sqrt[3]{\left(\frac{8}{343}\right)^{-2}}$; 4) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$.

e) Kui sügav on kaev, kui kivi kukkumine selle kaevu vette on kuulda $6\frac{9}{17}$ sekundi järel? Vaba langemise kiiruse kasv 1 sekundis olgu 10 $\frac{\text{m}}{\text{sek.}}$ ja heli levimise kiirus õhus 340 $\frac{\text{m}}{\text{sek.}}$.

22. a) Missugused teisendamised esinevad võrrandi lahendamisel?

b) Korruta peast!

1) $(x+3)(x+7)$; 2) $(x+5)(x-2)$;

3) $(x-15)(x+12)$; 4) $(x-9)(x-4)$.

c) Lahenda graafiliselt võrrandid!

1) $2x^2 - x - 6 = 0$; 2) $3x^2 + 7x - 6 = 0$.

d) Lihtsusta!

1) $\frac{m+n}{m} + \frac{n}{n-m} + \frac{n^2+mn}{m^2-mn}$; 2) $\frac{4a+5}{5a-10} + \frac{2a-3}{6-3a} - \frac{a+4}{a^2-4}$.

e) Kaks keha asetsevad täisnurga haaradel: esimese kaugus tipust on 102 m, teise kaugus 16 m. Esimene liigub tipu poole kiirusega 3 m sekundis, teine kaugeneb tipust kiirusega 4 m sekundis. Mitme sekundi järel on kehade kaugus teineteisest 95 m?

23. a) Kuidas korrutada ühe ja sama arvu astmeid? Kuidas neid jagada? Kuidas astendada astet? Kuidas juurida astet?

b) Lihtsusta!

1) $\frac{3a^2b}{5c^2d^3} \cdot \frac{25c^2d}{9a^3b^2}$; 2) $3a^2b^2 \cdot \frac{4a^3}{9b^3c}$; 3) $-\frac{12p^2q}{25r^3} : \frac{6pq^3}{35r^4}$.

c) Astenda ja juuri!

1) $\left(-\frac{2}{7}a^2bc^3\right)^3$; 2) $\left(-\frac{3a^2r}{11bs^3}\right)^2$; 3) $\sqrt{0{,}09x^4y^2}$; 4) $\sqrt[3]{-64a^6b^3}$.

d) Lahenda võrrandid!

1) $\frac{3}{x} = 8$; 2) $\frac{5}{2x-3} = 9$; 3) $\frac{6}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} - \frac{x}{4-x^2} = 0$.

e) Kahes anumas on 2 isesugust vedelikku. Kui võtta ühest anumast 200 cm³ ja teisest 240 cm³, siis saame 398 g segu. Kui aga võtta ühest anumast 150 cm³ ja teisest 200 cm³, siis saame 318,5 g segu. Leia vedelikkude erikaalud!

24. a) Mida nimetame astendamiseks? mida juurimiseks?

b) Lahuta peast teguriteks!

1) $x^2 + 5x + 6$; 2) $x^2 + 3x - 10$;

3) $x^2 - 4x - 12$; 4) $x^2 - 9x + 20$.

c) Lahenda peast võrrandid!

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $x - 3x - 4 = 0$;

3) $x^2 + 3x - 18 = 0$; 4) $x^2 + 11x + 28 = 0$.

d) Arvuta!

1) $\frac{-3x^3 + 4}{-2x - 7}$, kui $x = -4$; 2) $\frac{a\sqrt{4a^2 - 12a + 9}}{3 - 2a}$, kui $a = 2{,}8$;

3) $\frac{8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3}{4a^2 - 12ab + 9b^2}$, kui $a = 4$ ja $b = 2$.

e) Kaks kapitali suhtuvad nagu 5 : 4. Suurem neist on antud hoiule 4 liitprotsendiga ja väiksem 5 liitprotsendiga. Mitme aasta pärast saavad kapitalid võrdseiks?

25. a) Anna arvu logaritmi definitsioon!

b) Leia!

1) $\log_3 243$; 2) $\log_{16} \frac{1}{64}$; 3) $\log_{\frac{1}{25}} 125$;

4) $\log_7 \sqrt{343}$; 5) $\log 1000$; 6) $\log 0{,}01$;

7) $\log(-100)$; 8) $\log \log 100$.

c) Leia!

1) 7% arvust 200; 2) 0,6% arvust $36\frac{2}{3}$;

3) $33\frac{1}{3}$% „ 5,4; 4) p% „ 764;

5) 46,2% „ 65; 6) $\frac{a}{b}$% „ $5c + d$.

d) Lihtsusta!

1) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{512}}$; 2) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$; 3) $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{b\sqrt{c}}}$;

4) $\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^5\sqrt[4]{\frac{1}{a}}}}$.

e) Teemandi hind on võrdeline raskuse ruuduga. Keegi vahetab 10-karaadilise teemandi 3 väiksema teemandi vastu, milledest esimene on 5-karaadiline ja teine 7-karaadiline. Kui raske peab olema kolmas?

26. a) Anna aritmeetilise rea definitsioon!

b) Missuguse arvu logaritm aluse 10 puhul on:
$1; 3; 0; -1; -5; 1{,}5; -1{,}5$?

c) Mitu protsenti moodustab arv a arvust b?
1) $a = 12$ ja $b = 48$; 2) $a = 0{,}25$ ja $b = 18$;
3) $a = 46$ ja $b = 20$; 4) $a = 2\frac{5}{7}$ ja $b = 15\frac{3}{4}$;
5) $a = 2p + 3q$ ja $b = 4p^2 + 12pq + 9q^2$.

d) Leia!

1) $5^{10} \cdot (0{,}2)^{10}$; 2) $8^7 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^7$; 3) $\frac{144^3}{72^3}$; 4) $\left(-6\frac{2}{7}\right)^0$;
5) $\left(\frac{2a-b^2}{b^2-3a^2}\right)^0$; 6) $\left(-5\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

e) Ärimees paigutas oma raha kahes osas panka. Esimese osa pealt sai ta 5%, teise osa pealt $5\frac{1}{2}$%. 1 a. 8 k. järel sai ärimees 2350 kr. intressi. Kui ta oleks saanud esimeselt osalt $5\frac{1}{2}$% ja teiselt osalt 5%, siis oleks ta saanud aastas 1425 kr. intressi. Kui suur oli kumbki osa?

27. a) Millega on võrdne aritmeetilise rea liikmete summa?

b) Arvuta ilma tabeliteta!

1) $10^{\log 5}$; 2) $10^{-\log 0{,}5}$; 3) $10^{-\log 0{,}625}$; 4) $10^{\frac{1}{2} - \log 0{,}25 \sqrt{10}}$

c) Mitu % suureneb suurringi pindala, kui raadiust suurendada 10% võrra? Mitme % võrra suureneb sel puhul kera ruumala?

d) Korruta ja astenda!
1) $(5\sqrt{7} - 2\sqrt{5})\ (3\sqrt{7} + 10\sqrt{5})$;
2) $(5 - 2\sqrt{3})\ (6 + 5\sqrt{3})$; 3) $(2 - \sqrt{3})^3$.

e) Kahuri pauk oli kuulda päri tuult 2,5 km kaugusele 7,5 sek. järel pärast lasku ja vastu tuult 7,8 sek. järel. Leia hääle ja tuule levimise kiirus!

28. a) Anna geomeetrilise rea definitsioon!

b) Lahenda võrrandid!

1) $0{,}7^{2x-5} = 0{,}343$; 2) $3^x - 3^{x-1} = 162$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 7\frac{19}{32}$.

c) Millega on võrdne kõikide 7-ga jaguvate arvude summa esimese tuhande piirkonnas?

d) Lahenda peast!

1) $(4a^2 - 9b^2) : (2a - 3b)$; 2) $(x^2 + 6x + 9) : (x + 3)$; 3) $(a^6 - 1) : (a^2 - 1)$.

e) Ristkülikukujulise raami mõõtmed on 40 cm ja 36 cm. Leia raami laius, kui raami pealmise pinna pindala on $\frac{9}{10}$ raami poolt piiratud pildi pindalast!

29. a) Missugused järgnevatest võrdustest on õiged, missugused valed?

1) $-3a^2 = 9a^2$; 2) $\frac{am^2 + b}{cm^2 + a} = \frac{a + b}{c + d}$; 3) $\frac{(k - l)}{(l - k)} = -1$;

4) $\frac{2a - 2a}{3b - 3b} = 1$; 5) $\frac{1}{m^2 + n^2} = m^{-2} + n^{-2}$;

6) $\frac{2a - 3b}{(3b - 2a)^2} = \frac{1}{2a - 3b}$; 7) $\frac{5}{2b - 2b} = 5$.

b) Ping-pongi pall langeb lauale 1 m kõrguselt ja põrkab tagasi $\frac{1}{2}$ m kõrgusele; siis langeb uuesti lauale ja tõuseb $\frac{1}{4}$ m kõrgusele jne. Kui pika tee kulgeb ping-pongi pall lauale seisma jäämiseni?

30. a) Millega on võrdne lõpmata kahaneva geomeetrilise rea liikmete summa?

b) Lahenda võrrandid!

1) $\log \sqrt{x + 2} + \frac{1}{2} \log (3x - 2) - 0{,}6021 = 0$;

2) $\frac{\log (4 - x)}{\log (5 + x)} = 1$.

c) Lihtsusta $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a \ldots}}}$!

d) Leia järgnevatest võrretest x!

1) $2{,}5m^{-1} : x = 2\frac{1}{4}m : 6m^4$;

2) $\frac{4{,}5}{1 - 3^{-1}} : \frac{26}{4\frac{1}{3}} = \frac{26}{4\frac{1}{2}} : x$.

31. a) Nimeta logaritmide omadused, kui logaritmide alus $a > 1$!

b) Arvuta!

1) $\log^3 10\,000$; 2) $\log^4 0{,}01$; 3) $\log 100^3$;
4) $\log 0{,}001^2$; 5) $\log \log 1000$.

c) Mitme aastaga kasvab kapital 5 liitprotsendiga kolmekordseks?

d) Rombi pindala on 396 dm^2. Rombi üks diagonaalidest on teisest 1,7 dm võrra pikem. Leia rombi diagonaalide pikkused!

32. a) Mida nimetame üksliikmeks? mida hulkliikmeks? Missugused liikmed on sarnased?

b) Leia x!

1) $\log x = 2 \log 3 + \log 4^2$; 2) $\log x = -\log 5 - 2 \log 7$;

$$3)\ \log \log x = 0{,}301.$$

c) Leia murru $\frac{x^3 - (x-2)6x - 8}{x(x-4) + 4}$ numbriline väärtus, kui $x = 8{,}281$!

d) Lahenda võrrandsüsteemid!

$$1) \begin{cases} x + y = 14 \\ xy = 45 \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

e) Tööettevõtja maksis töölistele, igaühele võrdselt, kokku 70 krooni päevas. Kui töölise päevapalka suurendada 50 sendi võrra ja tööliste arvu vähendada 6 võrra, siis tuleks päevas palkadeks maksta 56 kr. Mitu töölist oli tööl ja kui suur oli töölise päevapalk?

33. a) Missuguseid arve nimetame relatiivseteks? Mida nimetame arvu absoluutseks väärtuseks?

b) Leia x!

1) $\log x = -2{,}2567$; 2) $\log x = -\overline{3}{,}4756$;

$$3)\ x = \sqrt[3]{-100}.$$

c) Aritmeetilise rea kolmas liige on 6 ja kaheksas liige 24. Leia kümne liikme summa!

d) Arvude 7 ja 92 vahele aseta 16 niisugust arvu, mis koos antud arvudega moodustaksid aritmeetilise rea!

e) Sidemest $v = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$ avalda y!

34. a) Missugused arvud kuuluvad ratsionaalsete arvude hulka? missugused irratsionaalsete arvude hulka? Missugust arvu nimetame imaginaarseks?

b) Järgnevate arvude hulgast eralda ratsionaalsed, siis irratsionaalsed ja lõpuks imaginaarsed arvud!

$\sqrt{5}$; $3\frac{1}{5}$; $0{,}27^2$; $\sqrt[3]{12}$; $\sqrt{-5}$; $3\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt{9}$; -5; $2\sqrt[5]{-32}$; $\sqrt[5]{8}$; $(\sqrt{2})^0$; $5^{\frac{3}{4}}$; $7^{-\frac{1}{3}}$; $\sqrt{-1}$; $1^{\frac{2}{3}}$.

c) Leia x! 1) $x = \frac{\log 4{,}32}{\log 0{,}0579}$; 2) $x = \frac{\log 0{,}06273}{\log 0{,}0024}$.

d) Võrrandis $4x^2 + bx - 6 = 0$ määra b, kui võrrandi üks juurtest on 2!

e) Planeetide tiirlemise aegade ruudud ümber Päikese suhtuvad nagu nende, Päikesest arvatud, keskmiste kauguste kuubid.

1) Leia planeet Marsi tiirlemise aeg ümber Päikese, kui tema ja Maa kauguste suhe Päikesest on $1:1{,}5$!

2) Leia Veenuse ja Maa kauguse suhe Päikesest, kui Veenus teeb täistiiru ümber Päikese 225 päevaga!

35. a) Kuidas liita hulkliikmeid? Kuidas lahutada? Kuidas korrutada? Kuidas jagada?

b) Kirjuta ilma negatiivsete astendajateta!

1) $\frac{3a^2b^{-3}}{4c^{-2}d^4}$; 2) $\frac{5^{-1}m^{-3}n^{-3}}{4p^2q^{-2}}$; 3) $-\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} c^{-n}}{\left(\frac{a}{b}\right)^{-4} c^k}$;

4) $\frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-4} - b^{-4}}$.

c) Kirjuta ilma nimetajateta!

$$1)\ \frac{5ab}{c^{-3}d};\quad 2)\ \frac{3}{x}+\frac{3}{y};\quad 3)\ \frac{2a}{a^2+b^2}.$$

d) Kahes anumas on vesi erisugustel temperatuuridel. Kui võtta esimesest anumast 120 g ja teisest 150 g vett, siis on segu temperatuur 65°. Kui võtta esimesest anumast 80 g ja teisest 120 g, siis on segu temperatuur 63°. Leia vee temperatuur kummaski anumas?

36. a) Missuguseid viise kasustame lineaarsete võrrandsüsteemide lahendamisel? Selgita neid lähemalt!

b) Leia järgnevate perioodiliste murdude tõeline väärtus!

0,444...; 2,7272...; 3,3(81).

c) Sidemest $Kq^t = k\frac{q^t-1}{q-1}$ avalda t!

d) Isa kinkis pojale igaks sünnipäevaks nii mitu raamatut, kui mitu aastat sai poeg vanaks. 15. sünnipäeval leidis poeg, et ta on kingituseks saanud üldse 92 raamatut. Kui vanana sai poeg esimesed raamatud kingituseks?

37. õhupallilt lasti alla kaks liivakotti, üks kott 2 sekundit hiljemini kui teine. Mitme sekundi järel on langevate kottide vahemaa 78,4 meetrit, kui on teada, et vabalt langev keha langeb esimesel sekundil 4,9 m ja igal järgneval sekundil ikka 9,8 m rohkem kui eelmisel?

Valemite tabel.

Liitmine.

$$(+a) + (+b) = a + b$$
$$(+a) + (-b) = a - b$$
$$(-a) + (+b) = -a + b$$
$$(-a) + (-b) = -a - b.$$

Kommutatiivsuseseadus:

$$a + b = b + a.$$

Assotsiatiivsuseseadus:

$$a + (b + c) = a + b + c$$
$$a + (b - c) = a + b - c.$$

Lahutamine.

$$(+a) - (+b) = a - b$$
$$(+a) - (-b) = a + b$$
$$(-a) - (+b) = -a - b$$
$$(-a) - (-b) = -a + b$$
$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Korrutamine.

$$(+a) \cdot (+b) = ab$$
$$(+a) \cdot (-b) = -ab$$
$$(-a) \cdot (+b) = -ab$$
$$(-a) \cdot (-b) = ab.$$

Kommutatiivsuseseadus:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Assotsiatiivsuseseadus:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Distributiivsuseseadus:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Jagamine.

$$(+a) : (+b) = \frac{a}{b}$$
$$(+a) : (-b) = -\frac{a}{b}$$
$$(-a) : (+b) = -\frac{a}{b}$$
$$(-a) : (-b) = \frac{a}{b}.$$
$$(a + b) : c = \frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$
$$(a - b) : c = \frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$$
$$(a \cdot b) : c = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$
$$(a : b) : c = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b = \frac{a}{bc}.$$

Astendamine.

$$a^m \quad a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^0 = 1 \, ; \; a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$ab^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Abivalemid.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab$$

$$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab.$$

Juurimine.

Kui $a^n = N$, siis $\sqrt[n]{N} = a$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Ruutvõrrandid.

$$x^2 + px + q = 0; \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$ax^2 + 2kx + c = 0; \quad x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Logaritmid.

Kui $a^n = N$, siis $\log_a N = n$

$$a^{\log_a N} = N$$

$$\log (MN) = \log M + \log N$$

$$\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$$

$$\log N^m = m \log N$$

$$\log \sqrt[m]{N} = \frac{\log N}{m}$$

$$\log_a a = 1; \ \log_a 1 = 0.$$

Read.

Aritmeetiline rida:

$$a_n = a_k + (n - k)d$$

$$s = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)\, d]\, n}{2}.$$

Geomeetriline rida:

$$a_n = a_k q^{n-k}$$

$$s = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Liitprotsendid.

$$K_t = kq^t, \text{ kus } q = 1 + \frac{P}{100}.$$

Tähtaegsed maksud.

Sissemaks:

$$K_t = kq \frac{q^t - 1}{q - 1}.$$

Kustutusmaks:

$$K_t q^t = k \frac{q^t - 1}{q - 1}.$$

HIND 2 KR. 70 SENTI