

Tartu Ülikool
Matemaatika-Informaatikateaduskond
Matemaatilise statistika instituut

Liile Jõgi

**ÜHE AKTSIA KÄITUMIST KIRJELDAVATE
BLACK-SCHOLESI TÜÜPI TURUMODELITE
PARAMEETRITE HINDAMISEST**

Magistritöö

Juhendaja: professor Raul Kangro

Tartu 2005

SISUKORD

1. MÕISTETE TUTVUSTUS	5
1.1. OPTSIOONI MÕISTE.....	5
1.2. OPTSIOONIDE PÕHILIIGITUS	5
1.3. OPTSIOONIDE KASUTAMINE	6
1.4. TURU MUDEL	7
1.5. OPTSIOONI HINNA MÄÄRAMISEST	8
2. KONSTANTSE VOLATIILISUSE HINDAMINE	10
2.1. KONSTANTSE TRENDI JA VOLATIILISUSEGA MUDELI KEHTIVUSE KONTROLLIMINE.	10
2.2. TRENDI JA VOLATIILISUSE HINDAMINE KONSTANTSETE KORDAJATEGA MUDELI KORRAL	11
2.3. NÄIDE KONSTANTSETE KORDAJATEGA MUDELI KEHTIVUSE KONTROLLIMISEST....	12
2.4. KONSTANTSE VOLATIILISUSE HINDAMINE MITTEKONSTANTSE TRENDI KORRAL	16
2.5. KONSTANTSE VOLATIILISUSE HINNANGU TÄPSUSE ANALÜÜS	18
2.6. NÄIDE KONSTANTSE VOLATIILISUSE HINDAMISE KOHTA TRENDI MITTEKONSTANTSE EELDUSEL	20
2.7. KAUDNE VOLATIILISUSE HINNANG.....	24
3. MITTEKONSTANTSE VOLATIILISUSE HINDAMINE.....	26
3.1. VOLATIILISUSE SÕLTUVUS AINULT AJAST	26
3.2. VOLATIILISUSE SÕLTUVUS AINULT AKTSIA HINNAST	30
3.3. NÄIDE AKTSIA HINNAST SÕLTUVA VOLATIILISUSE HINDAMISE KOHTA.....	31
3.4. TEINE VÕIMALUS PARAMEETRITE σ_0 JA σ_1 MÄÄRAMISEKS.....	37
3.5. KAALUTUD ERINEVUSTE KASUTAMINE PARAMEETRITE σ_0 JA σ_1 MÄÄRAMISEL...	39
4. KOKKUVÕTE.....	43
LISA	45
KASUTATUD KIRJANDUS	46
SUMMARY	47

SISSEJUHATUS

Maaailma finantsturgudel kaubeldakse aktiivselt tuletisväärtpaberitega, sealhulgas optsioonidega. Üheks olulisemaks probleemiks on optsiooni sellise müügihinna määramine, mis tagaks optsiooni väljaandja jaoks minimaalse riski. Optsiooni hinna määramise esimesteks etappideks on väärtpaberi (optsiooni alusvara) hinna käitumisega kooskõlas oleva turumudeli valimine ning selle parameetrite hindamine. Mudeli lihtsus või keerukus sõltub parameetrite arvust mudelis. Mida vähem parameetreid on mudelis, seda usaldusväärsemad hinnangud on neile võimalik saada, kuid selline mudel ei pruugi reaalsust hästi kirjeldada. Keerukam, st suurema arvu parameetritega mudel kirjeldab reaalsust paremini, kuid seejuures väheneb parameetrite hinnangute usaldusväärsus. Parim mudel on suhteliselt väikese arvu parameetritega, kuid kirjeldab reaalsust piisavalt hästi. Enamasti alustatakse lihtsamate mudelite uurimisest ja liigutakse samm-sammult keerulisemate mudelite poole.

Käesoleva töö eesmärgiks on tutvumine optsiooni kui ühe tuletisväärtpaberi alaliigi mõistega, Euroopa tüüpi optsioonide hinna määramise teooriaga ning selle rakendamiseks vajalike Black-Scholes'i tüüpi turumudelite parameetrite hindamise võimaluste süstematiseeritud käsitluse esitamine. Osa esitatud meetoditest on originaalsed, pole teada, et neid oleks varem kirjanduses käsitletud.

Opsiooni hinna määramiseks on vaja turumudeli põhjal hinnata alusvara hinna käitumist kirjeldavaid parameetreid – trendi ja volatiilsust. Nende hindamise meetodikate käsitlemist alustatakse lihtsaimast mudelist, milles trend ja volatiilsus on konstantsed suurused ning liigutakse samm-sammult keerulisemate mudeliteni loobudes esmalt trendi konstantsuse nõudest ning edaspidi ka volatiilsuse konstantsuse nõudest. Mittekonstantse volatiilsusega mudelite puhul vaadeldakse võimalike variantidena eraldi volatiilsuse sõltuvust ajast ja volatiilsuse sõltuvust väärtpaberi hinnast. Iga mudeli juures vaadeldakse näitena ka vähemalt ühe väärtpaberi hinna käitumise mudelile vastavuse kontrollimist ja võimaluse korral ka väärtpaberi trendi ja volatiilsuse hindamist selle mudeli põhjal.

Töö koosneb järgmistest osadest:

1. **Mõistete tutvustus.**

Opsiooni mõiste tutvustus, Black-Scholes'i tüüpi turumudeli kirjeldus ning Euroopa tüüpi optsioonide hinna määramise teooria lühiülevaade.

2. **Konstantse volatiilsuse hindamine.**

Konstantse volatiilsusega turumudelite tutvustus, nende kehtivuse kontrollimine ning parameetrite (trendi ja volatiilsuse) hindamine, sh. hinnangute täpsuse analüüs. Esmalt vaadeldakse mudelit, kus nii trend kui ka volatiilsus on konstantsed suurused, seejärel loobutakse trendi konstantsuse nõudest. Konstantsete kordajatega turumudeli kehtivuse kontrollimine Hansapanga lihtaktsia ja Volvo aktsia näitel. Konstantse volatiilsuse kaudse hinnangu leidmise lühitutvustus Hansapanga lihtaktsia näitel.

3. **Mittekonstantse volatiilsuse hindamine.**

Volatiilsuse sõltuvus ainult ajast, mudeli kehtivuse kontroll *Cannondale Corporation* aktsia näitel. Volatiilsuse sõltuvus ainult väärtpaberi hinnast, mudeli tutvustus ja volatiilsust kirjeldava funktsiooni määramise erinevate võimaluste kirjeldamine. Aktsia hinnast sõltuva volatiilsuse hindamine *Cannondale Corporation* aktsia näitel.

Töö ülevaatliskus osas on kasutatud raamatuid:

1. **Paul Wilmott, Sam Howison, Jeff Dewynne**, “The Mathematics of Financial Derivatives”, Cambridge University Press 1996;
2. **Villu Zirnask, Karin Liikane**, “Raha, pangad ja finantsturud”, Iosa, HP Toimetised Tallinn 1994;
3. **I. Karatzas, S.E. Shreve**, “Brownian Motion and Stochastic Calculus”, Springer – Verlag 1994;
4. **Priit Sander**, “Portfelliteooria I”, Tartu Ülikooli Kirjastus – 1999.

Eestikeelsete mõistete selgitamisel on kasutatud raamatuid:

1. **Olev Raudsepp**, “Väike pangandusleksikon”, Tallinn 1997;
2. **“Inglise – Eesti majandussõnaraamat”**, Tallinn 1995

1. MÕISTETE TUTVUSTUS

1.1. *Opsiooni mõiste*

Opsioon kitsamas mõttes on tuletisväärtpaber, mis annab selle omanikule õiguse osta opsiooni väljaandjalt (müüa opsiooni väljaandjale) finantsvara varem kindlaksmääratud ajal ja hinnaga. Opsiooni omanik ei ole kohustatud ostma (müüma) finantsvara, kui ta seda ei soovi. Seega on opsioon väljaandja jaoks tinglik kohustus, mida ta peab täitma, kui opsiooni ostja oma õigust kasutada soovib. Opsiooni väljaandja ei pea olema selle vara omanik, mille kohta ta opsiooni välja annab. Opsiooniks laiemas mõttes nimetatakse võimalust saada tulevikus tulu olevikus kindlaksmääratud tingimustel.

Opsiooni hinnaks ehk ajapreemiaks nimetatakse summat, mille opsiooni ostja maksab opsiooni väljaandjale lepingu sõlmimisel. Teisiti öeldes on see tasu tulevikus kindla hinnaga ostu- või müügivõimaluse eest. **Opsiooni täitmishinnaks** nimetatakse lepingus kindlaksmääratud hinda, millega tehing tulevikus toimub. Lepingus fikseeritud tehingu toimumise aega nimetatakse **opsiooni täitmispäevaks**. Finantsvara, mille kohta opsioon on välja antud, nimetatakse **opsiooni alusvaraks**.

1.2. *Opsioonide põhiliigitus*

Opsioonid jaotatakse kahte suurde liiki: **Euroopa ja Ameerika opsioonideks**. Euroopa opsiooni saab realiseerida ainult ühel kindlal päeval, s.o. lepingus fikseeritud täitmispäeval. Ameerika opsiooni võib realiseerida igal päeval opsiooni ostmisest kuni täitmispäevani. Selle põhjal, kas täitmispäeval on opsiooni ostjal õigus osta või müüa väljaandjale alusvara, jaotatakse opsioonid ostu- ja müügiopsioonideks.

Opsiooni ostmisel tuleb tasuda mingi summa – ajapreemia ehk opsiooni hind. Selle summa suurust mõjutavad mitmed tegurid, mida võib jagada kahte rühma: opsiooni iseloomustavad tegurid (täitmishind ja täitmispäev) ja opsiooni alusvara iseloomustavad tegurid (aktsia hind, volatiilsus ja intressimäär). Tegurid, mis mõjutavad **ostuopsiooni** hinda, on järgmised:

1. **Opsiooni täitmishind:** mida kõrgem on opsiooni täitmishind, seda madalam on opsiooni väärtus. Kõrgema täitmishinna korral on vähem tõenäoline, et alusvara turuhind sellest kõrgemale tõuseb. Müügiopsiooni korral on see seos vastupidine – kõrgema täitmishinna korral on opsioon väärtuslikum.
2. **Opsiooni täitmispäev:** Ameerika opsiooni korral on kaugema täitmisajaga opsioon väärtuslikum, sest siis on see aeg pikem, mille jooksul võib opsiooni realiseerida, ja seega rohkem võimalusi alusvara hinna muutumiseks sobivas suunas. Ameerika opsiooni korral tuleb määrata, millal on parim aeg opsiooni realiseerimiseks.

3. **Alusvara hind:** mida kõrgem on alusvara hind ostuoptsiooni ostmise hetkel, seda kallim on optsioon. Seda sellepärast, et aktsia hinna tõustes kasvab tulu, mida saadakse optsiooni realiseerimisel. Müügioptsiooni korral on seos vastupidine – alusvara hinna tõustes optsiooni hind väheneb.
4. **Volatiilsus** ehk alusvara hinna varieeruvus: mida enam kõigub alusvara hind, seda väärtuslikum on optsioon. Varieeruvama hinnaga alusvara hinnamuutus on suurema tõenäosusega, kui püsivama hinnaga alusvara oma. See, et suurema varieeruvuse korral on hinna langemise tõenäosus samuti suurem, ei ole ostuoptsiooni korral oluline, sest ostja ei ole kohustatud optsiooni realiseerima, kui alusvara hind langeb.
5. **Intressimäär:** ostuoptsioon on väärtuslikum kõrgete ja vähem väärtuslik madalate pangaintresside korral. Optsiooni ostja ei pea alusvara eest maksma enne täitmispäeva. Makse edasilükkamise võimalus on väärtuslikum siis, kui intressimäärad on kõrged. Müügioptsiooni korral vähendab kõrgem intressimäär optsiooni väärtust, sest täitmishinna nüüdisväärtus on sel juhul madalam ja tulevikus alusvara müügist saadav tulu seega väiksem.

Põhilised küsimused optsioonide uurimisel on optsiooni hinna ehk ajapreemia määramine ja optsiooni väljaandja riski minimeerimise võimaluste uurimine.

1.3. Optsioonide kasutamine

Opsioonide kaks põhilist kasutusvaldkonda on spekulatsioon ja riskide maandamine ehk *hedging*. Spekulatsiooniks nimetatakse investoreid, kes loodab väärtuspaberite hinnamuutuse pealt kasumit teenida. Ta ostab mingit aktsiat lootuses, et selle hind tulevikus tõuseb ning kui tema ootus õigeks osutub, teenib ta kasumit. Kui aga investor eksib, siis ta kaotab osa investeeritud rahast. Optsioonide abiga on võimalik kasumi protsenti suurendada, kuid samas on ka kaotuse risk oluliselt suurem. Spekulatsioon võib samuti mängida väärtuspaberite hinna langemise peale. Kui investor arvab, et mingi aktsia hind tulevikus langeb, siis ta võib müüa aktsia või osta müügioptsiooni. On võimalus müüa aktsiat, mida tal endal pole (sellist olukorda nimetatakse lühikeseks positsiooniks) ja teenida kasumit aktsiahinna languse pealt. Kui investor soovib rohkem riskida, et saada võimalusel suuremat tulu, siis ta võib kaubelda müügioptsioonidega. Ka siin ilmneb samasugune kasumi ja riski võimendus nagu ostuoptsiooni korral.

Teine optsioonide kasutusvaldkond on *hedging*. See on püüd saavutada võimalikult stabiilset ja riskivaba investeringut. Kuna müügioptsiooni väärtus tõuseb alusvara hinna langedes, siis investeringuportfell, mis sisaldab mõlemat – nii alusvara kui ka sellele väljakirjutatud müügioptsiooni – reageerib alusvara hinna langemisele hoopis vähem kui portfell, mis sisaldab ainult alusvara. On olemas selline alusvara ja müügioptsiooni suhe, mille korral väiksemad alusvara hinnamuutused ei mõjuta üldse portfelli tulukust. Seega kui portfell sisaldab õiges vahekorras nii optsiooni kui alusvara, on võimalik saavutada peaaegu riskivaba portfell. See ongi *hedging*'u eesmärk.

1.4. Turu mudel

Üheks põhilisemaks probleemiks optsioonidega kauplemisel on nende hinna määramine. Selleks, et omada tulevikus võimalust tulu teenida, tuleb täna selle eest maksta. Optsiooni ostja maksab optsiooni väljaandjale optsiooni hinna ehk optsioonipremia, mis ei kuulu optsiooni kasutamata jätmisel tagastamisele.

Nagu eespool näha oli, mõjutavad optsiooni hinna järgmised parameetrid:

- optsiooni täitmishind;
- optsiooni täitmispäev;
- alusvara hind – tehingu aluseks oleva finantsvara turuhind;
- volatiilsus – statistiline hinnang alusvara turuhinna muutumise suurusele;
- intressimäär – lühiajalise laenu pangaprotsent.

Neist üks tähtsamaid on volatiilsus. Mida suurem on alusvara hinna volatiilsus, seda ebastabiilsem on oodatavalt antud alusvara hind tulevikus ja seda suurem on tõenäosus, et alusvara hind muutub täitmispäevaks optsiooni ostjale sobivas suunas.

Selleks, et leida optsioonipremia suurust, tehakse eeldused turu käitumise kohta. Põhieelduseks optsioonide hindamise teoorias on see, et mitte kunagi ei tea ja ei saa ennustada väärtpaberi homset hinda. Saab ainult hinnata hinna ajaloo põhjal keskmist juurdekasvu kiirust ning volatiilsust. Teiseks eelduseks on see, et turg peab vastama efektiivse turu hüpoteesile, mille kohaselt peavad väärtpaberite hinnad liikuma juhuslikult, st. väärtpaberi hinna minevik kajastub täielikult praeguses hinnas, kuid ei anna mingit infot tuleviku kohta ning turg reageerib koheselt igale uuele infole väärtpaberite kohta. Uuritakse mitte aktsiahinna absoluutset muutust, vaid hinna ja muutuse suhet. Olgu hetkel t aktsia hind S . Aja muutudes dt (väike ajavahemik) võrra saab hinnaks $S+dS$. Eeldatakse, et hind muutub proportsionaalselt hinna suurusega, st. madalale hinnale vastab väike muutus ja kõrgele hinnale vastab suur muutus. Uuritav suurus dS/S jaotatakse kahte ossa:

- 1) oodatav tulu – vastab aktsiahinna pikaajalisele keskmisele protsentuaalsele suurenemisele. Siit saame suuruse μdt , kus μ on aktsia hinna keskmise protsentuaalse kasvamise kiirus ehk trend;
- 2) ennustamatu tulu – juhuslik suurus, vastab väliste mõjudele, ootamatutele uudistele aktsia kohta. See annab suuruse σdB , kus σ on volatiilsus, mõõdab tulu standardhälvet.

Kui eelpool toodud tingimused on täidetud, kirjeldab turu käitumist mudel:

$$dS(t) = S(t)(\mu(t, S(t))dt + \sigma(t, S(t))dB(t)), \quad (1.1)$$

kus S on finantsvara turuhind, μ on hinna trend, σ on hinna volatiilsus ja $B(t)$ on Browni liikumine ning dt on “väike” ajavahemik.

Eeldused suuruse $dB(t)$ kohta on järgmised:

- 1) $dB(t)$ on normaaljaotusega juhuslik suurus;
- 2) $E(dB(t))=0$;
- 3) $D(dB(t))=dt$.

Lihtsamates mudelites võetakse μ ja σ konstantsed suurused, keerukamates võivad need olla kas ajast või aktsia hinnast sõltuvad funktsioonid või isegi juhuslikud suurused.

1.5. Optsiooni hinna määramisest

Majandusteoorias on leitud reeglid euroopa tüüpi optsioonide hinna, st. optsioonipreemia suuruse leidmiseks. Konstantse volatiilsuse korral saab Euroopa tüüpi optsiooni hinna määramiseks kasutada **Black-Scholes'i valemeid**. Eeldame, et vaadeldava aktsiahinna käitumist kirjeldab mudel (1.1). Lisaks eeldame, et riskivaba intressimäär on vaadeldaval perioodil konstantne ning et raha laenamise pangaprotsent on võrdne hoiustamise pangaprotsendiga, st. riskivaba intressimääraga. Sellistel tingimustel saab Euroopa tüüpi ostuoptsiooni hinna leida valemiga (vt. [1] lk. 48)

$$C(S, t) = S \cdot N(d_1) - E \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2) \quad (1.2)$$

ja Euroopa tüüpi müügioptsiooni hinna valemiga

$$P(S, t) = E \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(-d_2) - SN(-d_1), \quad (1.3)$$

kus

$$d_1 = \frac{\left[\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T-t) \right]}{\sqrt{\sigma^2 \cdot (T-t)}},$$

$$d_2 = \frac{\left[\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T-t) \right]}{\sqrt{\sigma^2 \cdot (T-t)}}.$$

Valemities kasutatud sümbolite tähendused on järgmised:

$C(S, t)$ – ostuoptsiooni hind ajal t , st optsioonipreemia suurus;

$P(S, t)$ – müügioptsiooni hind ajal t ;

S – aktsia hind päeval t ;

E – optsiooni täitmishind;

r – riskivaba intressimäär;

σ^2 – aktsia hinna volatiilsus;

T – täitmispäev, $(T - t)$ on aeg täitmispäevani aastates;

$N(d_i)$ – tõenäosus, et standardse normaaljaotusega juhuslik suurus on väiksem või võrdne d_i -ga.

Valemeid (1.2) ja (1.3) nimetatakse Black-Scholes'i valemiteks.

Müümisega seotud riski elimineerimiseks peab ostuoptsiooni väljaandjal igal ajamomendil olema olemas aktsiate hulk, mis on võrdne ostuoptsiooni hinna tuletisega aktsia turuhinna järgi:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$$

ja müügioptsiooni väljaandjal aktsiate hulk, mis on võrdne müügioptsiooni hinna tuletisega aktsia turuhinna järgi:

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1.$$

Mittekonstantse volatiilsuse korral kasutatakse Euroopa tüüpi optsioonide hinna määramiseks **Black-Scholes'i võrrandit**. See võrrand võimaldab optsioonide hinna määramise taandada osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendamisele järgmise tulemuse põhjal (vt. [5]):

Teoreem. Olgu $p : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mingi lokaalselt integreeruv funktsioon ning olgu v võrrandi

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{s^2 \sigma^2(s)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + rs \frac{\partial v}{\partial s} - rv = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 < s < \infty \quad (1.4)$$

tingimust

$$v(s, T) = p(s), \quad 0 < s < \infty$$

rahuldav piirkonnas $(0, \infty) \times (0, T)$ kaks korda pidevalt diferentseeruv alt tõkestatud lahend. Siis realiseerimisajaga $t=T$ ning kasumifunktsiooniga $p(S(T))$ Euroopa tüüpi optsiooni õiglaseks hinnaks ajal $t=0$ on $v(S(0), 0)$. Selle optsiooni müüja peab igal ajamomendil t omama $\eta(t) = \frac{\partial v}{\partial S}(S(t), t)$ aktsiat.

Võrrandit (1.4) nimetatakse Black-Scholes'i võrrandiks. Eelpooltoodud teoreem võimaldab leida Euroopa tüüpi optsiooni hinna diferentsiaalvõrrandi (1.4) numbrilise lahendamise teel.

Seega tuleb igal juhul optsiooni hinna määramiseks uurida alusvaraks oleva aktsia(te) turuhinna käitumist ning hinnata alusvara hinna volatiilsust.

2. KONSTANTSE VOLATIILSUE HINDAMINE

2.1. Konstantse trendi ja volatiilsusega mudeli kehtivuse kontrollimine

Juhuslike protsesside teooriast on teada, et kui aktsia turuhind käitub vastavalt punktis 1.4 toodud mudelile (1.1), siis kehtib (piisavalt hea funktsiooni f korral) **Itó valem** (vt. [1] lk. 27):

$$df(S(t)) = f'(S(t))dS + \frac{1}{2} f''(S(t))\sigma^2 S(t)^2 dt. \quad (2.1)$$

Järgnevalt vaatame turumudelit

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dB(t)), \quad (2.2)$$

st. mudelit (1.1), milles on parameetrid μ ja σ konstantsed suurused.

Kui $f(S) = \ln S$, siis saame Itó valemist:

$$d \ln(S(t)) = \frac{1}{S(t)} dS(t) - \frac{1}{2S(t)^2} \sigma^2 S(t)^2 dt = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB(t).$$

Integreerides seda lõigus $[t, t + \Delta t]$ saame:

$$\ln(S(t + \Delta t)) - \ln(S(t)) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma (B(t + \Delta t) - B(t)).$$

Tähistagu S_i aktsia hinda hetkel t_i ja S_{i+1} aktsia hinda hetkel $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Arvestades, et eelduse kohaselt on suurus $dB \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$, saame, et peab kehtima:

$$\ln \frac{S_{i+1}}{S_i} \sim N \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t} \right). \quad (2.3)$$

Seega, kui tahame kontrollida, kas mingi väärtipaberiturg või sellel kaubeldava aktsia hind käitub vastavalt konstantsete kordajatega mudelile (2.2), siis võime kontrollida, kas hinnad vastavad tingimusele (2.3).

2.2. *Trendi ja volatiilsuse hindamine konstantsete kordajatega mudeli korral*

Parameetrite μ ja σ hindamiseks oletame, et aktsia hind käitub vastavalt konstantsete kordajatega mudelile (2.2), st. on täidetud tingimus (2.3). Aktsia sulgemishinnad on määratud iga börsipäeva viimase tehinguga, seega intervalliga üks tööpäev. Olgu n vaatluste arv, S_i aktsia sulgemishind i -ndal tööpäeval ja τ ajaintervallide pikkus aastates (aastas on umbes 255 tööpäeva, järelikult aastase perioodi korral $\tau \approx 1/255$). Tähistame

$u_i = \ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right)$, kus $i=1..n-1$. Võrrandi (2.3) põhjal saame, et suuruse u_i standardhälve on $\sigma\sqrt{\tau}$, mille hinnanguks on vaadeldava aktsia sulgemishindade põhjal leitud suuruste u_i standardhälve (tähistame s). Seega σ ise on hinnatav suurusega $\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$. Analoogiliselt

saame, et suuruse u_i keskväärus on $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \tau$, mille hinnanguks on vaadeldava aktsia sulgemishindade põhjal leitud suuruste u_i keskväärus $\bar{x}$ ning μ ise on hinnatav suurusega $\hat{\mu} = \frac{\bar{x}}{\tau} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}$.

Seega on konstantsete kordajatega mudeli kehtimise korral väärtpaberi hinna trendi ja volatiilsuse hinnangud leitavad seostest:

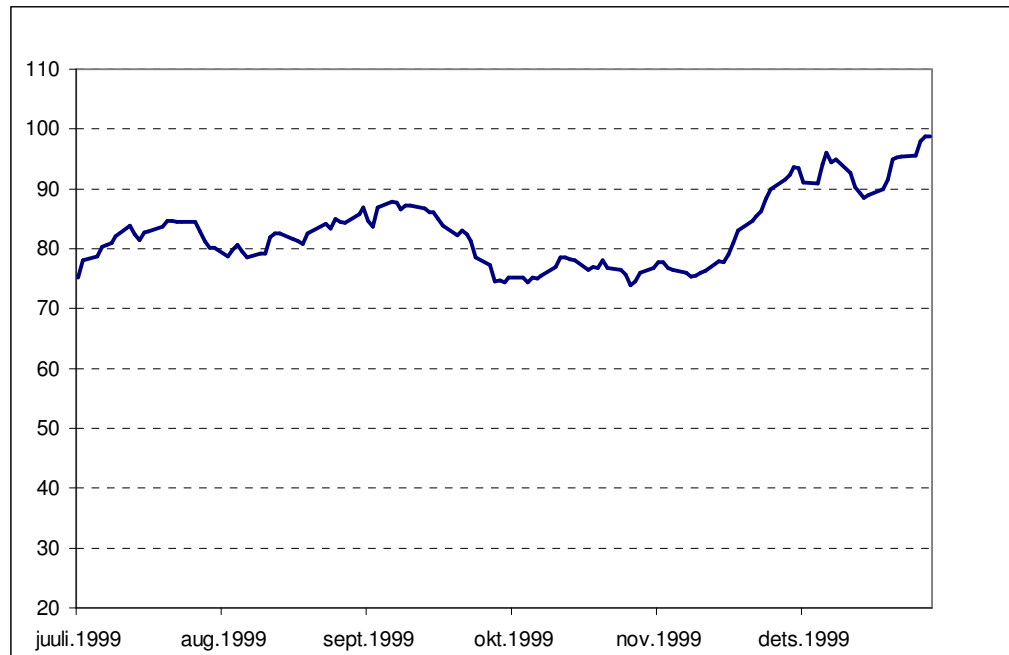
$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{\tau}}, \text{ kus } \tau \approx 1/255 \text{ ja } s \text{ on suuruste } u_i \text{ standardhälve;}$$

$$\mu = \frac{\bar{x}}{\tau} + \frac{\sigma^2}{2}, \text{ kus } \bar{x} \text{ on suuruste } u_i \text{ keskväärus.}$$

Kui on teada mudeli kehtivus ja hinnang parameetritele σ , siis on võimalik Black-Scholes'i valemeid kasutades leida optsiooni hind nii, et optsiooni väljaandja saaks võimalikult hästi kindlustada end kahjudega kauplemise vastu.

2.3. Näide konstantsete kordajatega mudeli kehtivuse kontrollimisest

Vaatleme Eesti väärtpaberiturul kaubeldava Hansapanga aktsia päeva keskmiseid hindu ajavahemikus 01. juuli – 31. detsember 1999. a. Sellel perioodil kõikus nimetaud aktsia hind vahemikus 73 – 99 EEK. Hansapanga aktsia hindu vaadeldaval ajaperioodil kirjeldab järgmine graafik.



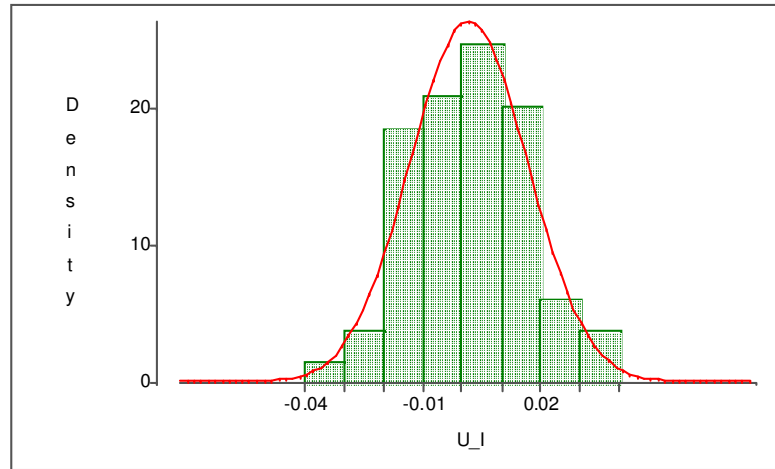
Mudeli (2.2) kehtivuse kontrollimiseks Hansapanga aktsia jaoks vaadeldaval ajavahemikul tuleb veenduda tingimuse (2.3) täidetuses. Selleks leiame Hansapanga aktsia jaoks suurused u_i iga tööpäeva kohta ajavahemikul 01. juuli – 31. detsember 1999. a. ja püstitame hüpoteesid:

H_0 : suurused u_i on normaaljaotusega,

H_1 : suurused u_i ei ole normaaljaotusega,

Kontrollime neid hüpoteese valides testi olulisuse nivooks $\alpha=0,05$. Kasutades olulisuse tõenäosuse p väärtuse leidmiseks paketi SAS INSIGHT protseduuri *Distribution(Y)*, saame tulemuseks, et $p>0,15$ ja seega tuleb meil jääda nullhüpoteesi H_0 juurde, st. suurused u_i on normaaljaotusega, kusjuures u_i keskvväärtuseks saame $\bar{x} = 0,002114$ ja standardhälbeks saame $s = 0,015041$. Seega võib Hansapanga aktsia hindade käitumise kirjeldamiseks kasutada konstantsete kordajatega mudelit (2.2).

Järgnev joonis illustreerib tegelike andmete ja vastavate parameetritega normaaljaotuse erinevust:



Saadud tulemuste põhjal võime oletada, et Hansapanga aktsia hinna käitumine vaadeldaval perioodil vastab konstantsete kordajatega turumudelile ning seega võime trendi ja volatiilsuse hindamiseks kasutada sellele vastavaid valemeid.

Seega saame Hansapanga aktsia trendi ja volatiilsuse hinnanguteks vaadeldud ajavahemiku põhjal

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{x}}{\tau} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} = \frac{0,002114}{1/255} + \frac{0,015041^2}{2} \approx 0,567863$$

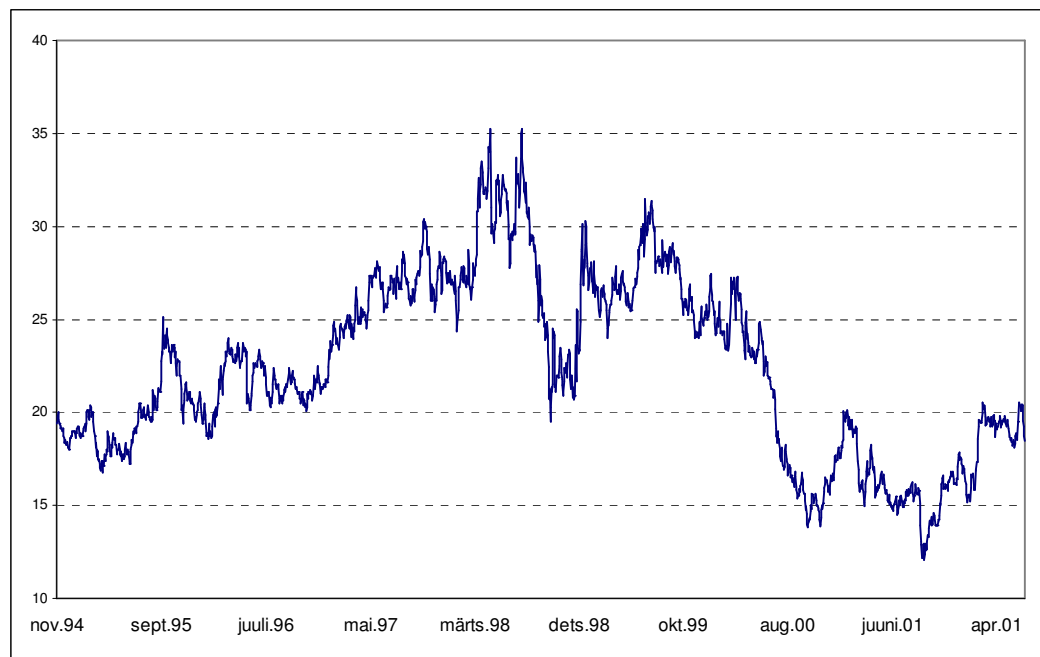
$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}} = \frac{0,015041}{\sqrt{1/255}} \approx 0,240186.$$

Vajadusel saab nüüd Hansapanga aktsia kohta väljaantud Euroopa tüüpi ostu- või müügioptsiooni hinna leida, asendades saadud väärtused valemitesse (1.2) või (1.3).

Vaatleme veel teise näitena Rootsi firma AB Volvo aktsia hindade vastavust konstantsete kordajatega turumudelile (2.2). Grupi AB Volvo põhitegevuseks on raskeveokite ja teiste mootorsõidukite; nende varuosade ja lisavarustuse; gaasi- ja diiselmootorite (Volvo Penta) ning lennukimootorite osade (Volvo Aero) tootmine ja arendamine nii tsiviil-, tööstuslikuks kui ka sõjaliseks otstarbeks. Tegevusvaldkondade jaotus 2002. a. seisuga oli järgmine: veoautod 67%; varuosad 12%; bussid 8%; Volvo Aero 5%; Volvo Penta 4%, muud 4%.

Uurime Volvo aktsia sulgemishindu ajavahemikul 16. november 1994. kuni 17. juuli 2002. Sellel perioodil kõikus aktsia hind vahemikus 12,05 kuni 35,25 dollarit.

Järgnev graafik kirjeldab Volvo aktsia sulgemishindade väärusi vaadeldaval ajaperioodil.



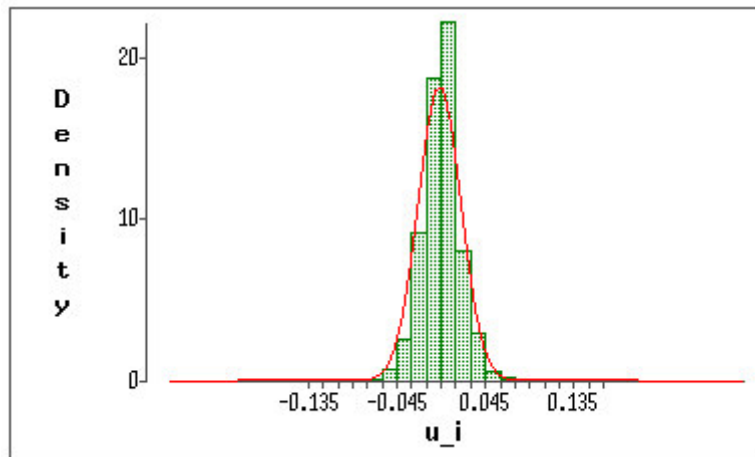
Mudeli (2.2) kehtivuse kontrollimiseks tuleb veenduda tingimuse (2.3) täidetuses Volvo aktsia hindade jaoks vaadeldaval ajaperioodil. Selleks püstitame hüpoteesid:

H_0 : suurused u_i on normaaljaotusega,

H_1 : suurused u_i ei ole normaaljaotusega,

ja kontrollime neid valides testi olulisuse nivooks $\alpha=0,05$. Kasutades olulisuse tõenäosuse p väärtuse leidmiseks paketi SAS INSIGHT protseduuri *Distribution(Y)*, saame tulemuseks, et $p<0,01$ ja seega tuleb lugeda õigeks sisukas hüpotees H_1 , st. ei saa tõestada, et suurused u_i on normaaljaotusega ning seega ei ole õige Volvo aktsia sulgemishindade käitumise kirjeldamiseks kasutada konstantsete kordajatega mudelit (2.2).

Järgnev joonis illustreerib tegelike andmete ja vastavate parameetritega normaaljaotuse erinevust:



Saadud tulemuste põhjal on näha, et tingimus (2.3) ei ole vaadeldava aktsia jaoks täidetud. Seega tõenäoliselt Volvo aktsia hinna käitumine ei vasta konstantsete kordajatega mudelile ning trendi ja volatiilsust ei tohi lugeda konstantseteks suurusteks. Järelikult ei saa Volvo aktsia trendi ja volatiilsuse hindamisel võtta aluseks konstantsete kordajatega turumodelit (2.2).

2.4. Konstantse volatiilsuse hindamine mittekonstantse trendi korral

Üldiselt ei sobi konstantse trendi ja volatiilsusega mudel turu kirjeldamiseks, sest enamasti ei ole trend konstantne suurus. Seega tuleks optsiooni hinna määramiseks turu mudelit täpsustada, loobudes trendi konstantsuse nõudest.

Järgnevalt püüame hinnata alusvara hinna volatiilsust, loobudes parameetri μ konstantsuse nõudest. Seega on järgnevas osas vaatluse all mudel:

$$dS(t) = S(t)(\mu(t, S(t))dt + \sigma dB(t)), \quad (2.4)$$

milles alusvara hinna keskmise kasvamise kiirus $\mu(t, S(t))$ on mingi tõkestatud funktsioon ja volatiilsus σ on konstantne suurus.

Kui σ on konstantne suurus ja alusvara hind $S(t)$ rahuldab turu mudelit (1.1), siis **Ito lemma** (vt. punkt 2.1) põhjal:

$$d \ln S(t) = \left(\mu(t, S(t)) - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB(t),$$

kus $dB(t) \sim N(0, \sqrt{dt})$.

Fikseerime ajaperioodi $[t, T]$ ja jaotame selle n osaks intervalliga $\Delta t = \frac{T-t}{n}$. Veel tähistame $t_i = t + i \cdot \Delta t$. Integreerides nüüd suurust $d \ln S(t)$ üle lõigu $[t_i, t_{i+1}]$, saame:

$$\ln \left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)} \right) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\mu(t, S(t)) - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma X_i,$$

kus $X_i = B(t_{i+1}) - B(t_i)$. Browni liikumise omaduste põhjal on X_i sõltumatud juhuslikud suurused ja kehtib $X_i \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$.

Tähistame $u_i = \ln \left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)} \right)$ ja $\mu_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\mu(t, S(t)) - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt$.

Mudeli (2.4) põhjal on $\mu(t, S(t))$ mingi tõkestatud funktsioon, st $|\mu(t, S(t))| \leq \mu_0$, kus μ_0 on mingi konstant. Seega

$$|\mu_i| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| \mu(t, S(t)) - \frac{\sigma^2}{2} \right| dt \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\mu_0 + \frac{\sigma^2}{2} \right) dt \leq c \Delta t,$$

kus $c = \mu_0 + \frac{\sigma^2}{2}$.

Vaatleme nüüd keskväärtust

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right) &= E\left(\sum_{i=1}^n (\mu_i^2 + 2\mu_i\sigma X_i + \sigma^2 X_i^2)\right) = E\left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2\right) + 2E\left(\sum_{i=1}^n \mu_i\sigma X_i\right) + E\left(\sum_{i=1}^n \sigma^2 X_i^2\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n E(\mu_i^2) + 2\sum_{i=1}^n E(\mu_i\sigma X_i) + \sum_{i=1}^n E(\sigma^2 X_i^2). \end{aligned}$$

Uurime neid kolme keskväärtust veidi lähemalt.

Esimese keskväärtuse $E\left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2\right)$ vaatlemisel näeme, et

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^2 \leq \sum_{i=1}^n c^2 (\Delta t)^2 = nc^2 (\Delta t)^2 = c^2 \Delta t (T - t),$$

sest $|\mu_i| \leq c\Delta t$ ja $n\Delta t = T - t$. Seega saame, et $E\left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2\right) \leq c^2 \Delta t (T - t)$. Paneme tähele, et $c^2 \Delta t (T - t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ ja järelikult küllalt väikese Δt korral $E\left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2\right) \approx 0$.

Teise keskväärtuse $E\left(\sum_{i=1}^n \mu_i\sigma X_i\right)$ vaatlemisel näeme, et

$$E(|\mu_i\sigma X_i|) \leq E(c\Delta t\sigma |X_i|) = c\Delta t\sigma E(|X_i|).$$

Keskväärtuse omaduste põhjal saame, et

$$E(|X_i|) \leq \sqrt{E(X_i^2)} = \sqrt{\Delta t},$$

ja seega $\left|\sum_{i=1}^n E(\mu_i\sigma X_i)\right| \leq \sum_{i=1}^n (c\Delta t\sigma\sqrt{\Delta t}) = c(T-t)\sigma\sqrt{\Delta t}$, mis aga analoogiliselt esimesega küllalt väikese Δt korral läheneb nullile ja ka $E(\mu_i\sigma X_i) \approx 0$.

Kolmanda keskväärtuse $E(\sigma^2 X_i^2)$ korral saame, et $E(\sigma^2 X_i^2) = \sigma^2 E(X_i^2)$ ja kuna $X_i \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$, siis $E(X_i^2) = \Delta t$ ning seega $E(\sigma^2 X_i^2) = \sigma^2 \Delta t$. Kokku saame, et $\sum_{i=1}^n E(\sigma^2 X_i^2) = n\sigma^2 \Delta t = \sigma^2 (T - t)$.

Kokkuvõttes oleme jõudnud seoseni, et küllalt väikese Δt korral $E\left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right) \approx \sigma^2 (T - t)$ ja

$$\text{siit saame volatiilsuse jaoks hinnangu } \sigma^2 \approx \frac{1}{T-t} E\left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right). \quad (2.5)$$

Saadud hinnangu sõltuvuse uurimiseks ajavahemiku Δt pikkusest fikseeritakse ajahetked $[t, T]$ ning vaadeldakse nende vahele jääval perioodil hindu intervalliga $\Delta t = k\tau$ erinevate k väärtuste korral (näiteks $k=10, 9, \dots, 1$). Sisuliselt tähendab see, et vaadeldakse alusvara

sulgemishindu üle k -päevaste vahemike ja leitakse nende põhjal suurused $u_i = \ln \frac{S_{(i+1)k}}{S_{i,k}}$,

mis seejärel summeeritakse. Tulemuseks on üks arv $\sum_{i=1}^{n(k)} u_i^2$ ($n(k)$ on suuruse $\frac{T-t}{k\tau}$

täisosa), mille kohta on teada, et $E\left(\sum_{i=1}^{n(k)} u_i^2\right) \approx \sigma^2(T-t)$ ja volatiilsuse hinnanguks on seose

(2.5) põhjal $\sigma^2 \approx \frac{1}{T-t} \sum_{i=1}^{n(k)} \left(\ln \frac{S_{(i+1)k}}{S_{i,k}} \right)^2$. Kui ajavahemik Δt on piisavalt lühike, peaks k

väärtuse vähenedes olema täheldatav saadud hinnangute mingile fikseeritud väärtusele. Kui koondumist ei toimu, ei ole Δt piisavalt väike, et saadud hinnangut õigeaks lugeda ning tuleks vaadelda alusvara hindu üle veelgi lühemate ajavahemike.

Konstantse volatiilsuse korral on ootuspärane, et selle väärtus ei sõltu fikseeritud ajaperioodist $[t, T]$ ning selle pikkusest. Seega tuleks leida volatiilsuse hinnang erinevate perioodide $[t, T]$ jaoks, kusjuures varieerida tuleks ka vaadeldava perioodi pikkust. Kui saadud hinnangud erinevate perioodide korral oluliselt ei erine, võib eeldada, et volatiilsus on konstantne, st alusvara hinna käitumist kirjeldab turumudel (2.4) ja seega võib optsiooni hinna arvutamisel võtta aluseks Black-Scholes'i valemid (1.2) ja (1.3).

2.5. Konstantse volatiilsuse hinnangu täpsuse analüüs

Saadud hinnangu $\sigma^2 \approx \frac{1}{T-t} \sum_{i=1}^n \left(\ln \frac{S_{(i+1)k}}{S_{i,k}} \right)^2$ täpsuse analüüsimiseks tuleks hinnata suuruse $\sum_{i=1}^n u_i^2$ dispersiooni.

Punktis 2.4 toodud tähistusi kasutades $u_i = \mu_i + \sigma X_i$, kus μ_i ei ole sõltumatud, aga nende kohta on teada, et $|\mu_i| \leq c\Delta t$ ja $E(\mu_i) \approx \Delta t$. Suurused X_i on sõltumatud, sama jaotusega juhuslikud suurused, $X_i \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$.

Vaatleme nüüd dispersiooni $D\left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right) = D\left(\sum_{i=1}^n (\mu_i^2 + 2\mu_i\sigma X_i + \sigma^2 X_i^2)\right)$.

Saab näidata, et kehtib hinnang $D\left(\sum_{i=1}^m Y_i\right) \leq m \sum_{i=1}^m DY_i$ (vt. [7]). (2.6)

Seega

$$D\left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2\right) = D\left(\sum_{i=1}^n (\mu_i^2 + 2\mu_i\sigma X_i + \sigma^2 X_i^2)\right) \leq 3\left(D\left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2\right) + D\left(\sum_{i=1}^n 2\mu_i\sigma X_i\right) + D\left(\sum_{i=1}^n \sigma^2 X_i^2\right)\right)$$

Vaatleme neid kolme dispersiooni lähemalt.

Esimese liidetava korral näeme, et

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^2 \leq \sum_{i=1}^n (c\Delta t)^2 = nc^2(\Delta t)^2 = c^2\Delta t(T-t).$$

$$\text{Seega } D\left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2\right)^2 - \left(E\left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2\right)\right)^2 \leq E\left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2\right)^2 \leq (c^2\Delta t(T-t))^2.$$

Teise liidetava korral saame seose (2.6) põhjal hinnanguks

$$D\left(2\sigma\sum_{i=1}^n \mu_i X_i\right) = 4\sigma^2 D\left(\sum_{i=1}^n \mu_i X_i\right) \leq 4\sigma^2 n \sum_{i=1}^n D(\mu_i X_i).$$

Arvestades sellega, et $X_i \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$, saame, et $D(X_i) = E(X_i^2) = \Delta t$. Seega

$$\begin{aligned} 4\sigma^2 n \sum_{i=1}^n D(\mu_i X_i) &= 4\sigma^2 n \sum_{i=1}^n (E(\mu_i^2 X_i^2) - (E(\mu_i X_i))^2) \leq 4\sigma^2 n \sum_{i=1}^n (E(\mu_i^2 X_i^2)) \leq \\ &\leq 4\sigma^2 n \sum_{i=1}^n E((c\Delta t)^2 \cdot X_i^2) = 4\sigma^2 n \sum_{i=1}^n (c\Delta t)^2 \cdot E(X_i^2) = 4\sigma^2 n^2 (c\Delta t)^2 \Delta t = 4\sigma^2 c^2 (T-t)^2 \Delta t. \end{aligned}$$

Teise dispersiooni hinnanguks on seega $D\left(2\sigma\sum_{i=1}^n \mu_i X_i\right) \leq 4\sigma^2 c^2 (T-t)^2 \Delta t$.

Kolmanda dispersiooni hindamisel kasutame kõigepealt asjaolu, et suurused X_i on sõltumatud sama jaotusega juhuslikud suurused. Seega dispersiooni omaduste põhjal

$$\begin{aligned} D\left(\sum_{i=1}^n \sigma^2 X_i^2\right) &= D\left(\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \sigma^4 D\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \sigma^4 \sum_{i=1}^n D(X_i^2) = \\ &= \sigma^4 \sum_{i=1}^n (EX_i^4 - (EX_i^2)^2). \end{aligned}$$

Nagu eespool nägime, $EX_i^2 = DX_i = \Delta t$. Suurus EX_i^4 on normaaljaotusega juhusliku suuruse $X_i \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$ neljandat järku moment. Juhusliku suuruse $Y \sim N(\mu, \sigma)$ neljas moment on $EY^4 = \mu^4 + 6\sigma^2\mu^2 + 3\sigma^4$ (vt. [7], 13. teema). Seega $EX_i^4 = 3(\Delta t)^2$ ja kokkuvõttes saame

$$\begin{aligned}\sigma^4 \sum_{i=1}^n \left(EX_i^4 - (EX_i^2)^2 \right) &= \sigma^4 \sum_{i=1}^n \left(3(\Delta t)^2 - (\Delta t)^2 \right) = \sigma^4 \sum_{i=1}^n 2(\Delta t)^2 = \\ &= \sigma^4 n 2(\Delta t)^2 = 2\sigma^4 \Delta t (T-t).\end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme saanud hinnangu:

$$\begin{aligned}D\left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right) &\leq 3\left[c^2(T-t)\Delta t\right]^2 + 4\sigma^2 c^2(T-t)^2 \Delta t + 2\sigma^4(T-t)\Delta t = \\ &= 3(T-t)\Delta t(c^4(T-t)\Delta t + 4\sigma^2 c^2 + 2\sigma^4).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Seega on suuruste $\sum_{i=1}^n u_i^2$ dispersioon seda väiksem, mida väiksem on ajaintervall Δt , üle mille hindu kasutatakse ja konstantse volatiilsuse hinnangu piisava täpsuse tagamiseks tuleb vaadelda väärtpaberi hindu piisavalt lühikeste ajaintervallide järel.

2.6. Näide konstantse volatiilsuse hindamise kohta trendi mittekonstantsuse eeldusel

Näitena vaatleme jällegi grupi AB Volvo aktsia sulgemishindu ajavahemikul 16. november 1994. kuni 17. juuli 2002 (vt. punkt 2.3). Konstantse volatiilsuse hinnang ei tohiks sõltuda vaadeldava ajavahemiku algus- ja lõpp-kuupäevast.

Selleks, et kontrollida, kas AB Volvo aktsia hind vastab konstantse volatiilsusega turumudelile (2.4), leiame volatiilsuse hinnangu, kasutades aktsia hindu erinevatel ajavahemikel:

1. 16.11.1994 – 17.07.2002 e kogu vaatlusperiood;
2. 16.11.1994 – 31.12.1999;
3. 03.01.2000 – 17.07.2002;
4. 02.01.2001 – 31.12.2001.

Igal perioodil leiame volatiilsuse hinnangu valemi (2.5) põhjal, kasutades hindu k -päevaste vahemike järel, $k=10, 9, \dots, 1$. Ajaintervalli lühenedes arvutustes kasutatavate hindade vahel peaks toimuma volatiilsuse hinnanguks saadud suuruse väärtuste koondumine. Kui koondumist ei toimu, ei tohi saadud hinnangut õigeks lugeda ning volatiilsuse hindamiseks tuleks kasutada arvutustes alusvara hindu veelgi lühemate ajaintervallide järel.

Konkreetsel k väärtusel korral tuleb ajavahemiku lõpukuupäevaks valida see tööpäev, millele vastavat sulgemishinda viimasena arvutustes kasutame. Vastavalt muutub ka suuruse $T-t$ väärtus.

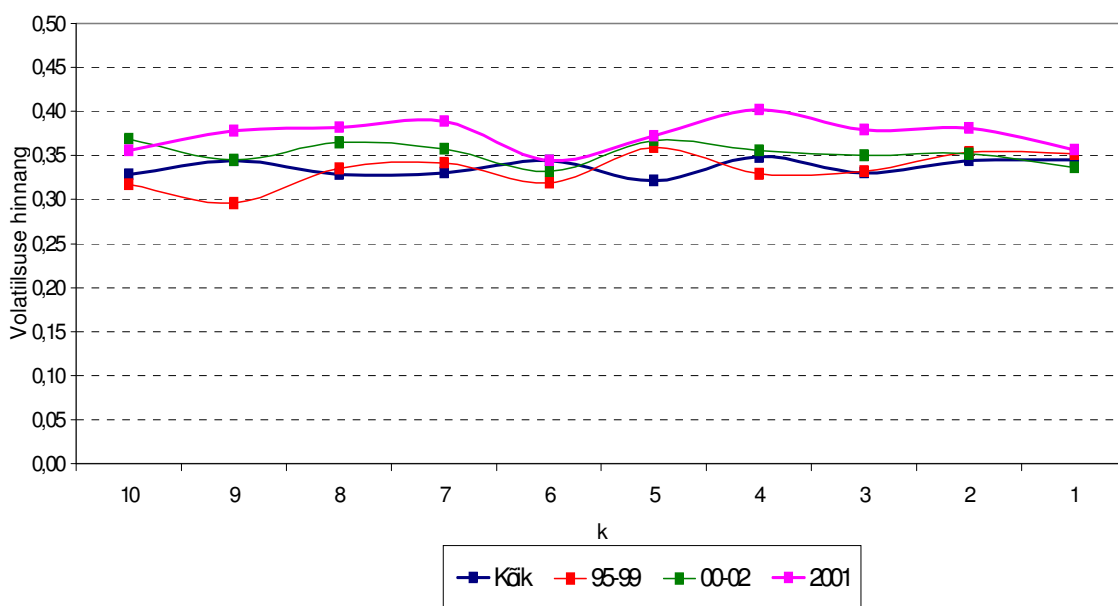
Saadud tulemused on esitatud järgmises kokkuvõtlikus tabelis:

Periood		$k=1$	$K=2$	$k=3$	$K=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
02.01.2001 – 31.12.2001	$T-t$	0,97	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96	0,94	0,95	0,94
	Volatiilsuse hinnang	0,36	0,38	0,38	0,40	0,37	0,34	0,39	0,38	0,38	0,36
03.01.2000 – 17.07.2002	$T-t$	2,48	2,48	2,48	2,48	2,47	2,47	2,47	2,48	2,47	2,47
	Volatiilsuse hinnang	0,34	0,35	0,35	0,36	0,37	0,33	0,36	0,37	0,35	0,37
16.11.1994 – 31.12.1999	$T-t$	4,95	4,95	4,94	4,94	4,94	4,94	4,94	4,93	4,94	4,94
	Volatiilsuse hinnang	0,35	0,35	0,33	0,33	0,36	0,32	0,34	0,34	0,30	0,32
16.11.1994 – 17.07.2002	$T-t$	7,56	7,55	7,55	7,55	7,55	7,55	7,55	7,53	7,55	7,53
	Volatiilsuse hinnang	0,34	0,34	0,33	0,35	0,32	0,34	0,33	0,33	0,34	0,33

Tabel 1

Siit on näha, et saadud volatiilsuse hinnangud kõiguvad vahemikus 0,3 ... 0,4 ja mida väiksem on vaadeldavate hindade vahele jääv ajaintervall, seda väiksem on kõikumine volatiilsuse hinnagute väärtustes ja seega on üks tööpäev piisavalt väike ajaintervall, et võiks saadud hinnangud õigeks lugeda.

Tabelit illustreerib järgmine graafik:



Jooniselt on näha, et erinevused volatiilsuse hinnangutes erinevatel ajaperioodidel on üsna väikesed ja samuti k väärtuse vähenedes toimub volatiilsuse hinnangute kõikumise vähenemine.

Saadud tulemuste põhjal tundub, et Volvo aktsia hinna volatiilsus on üsnagi tõenäoliselt konstantne suurus. Seega võib Euroopa tüüpi optsiooni hinna, mille alusvaraks on Volvo aktsia, määramiseks kasutada Black-Scholes'i valemeid (1.2) ja (1.3).

Järgnevalt tuleb veel uurida saadud hinnangu täpsust. Selleks hindame valemi (2.7) põhjal saadud volatiilsuse hinnangute dispersiooni. Konstandi c väärtuse määramisel arvestame sellega, et oletades konstantsete kordajatega mudeli kehtivust, saame trendi hinnanguks $\mu \approx 0,05$ ja volatiilsuse hinnanguks võime eelnevate tulemuste põhjal võtta $\sigma \approx 0,35$. Seega võime eeldada, et trend ei ületa 10% piiri, st võime valida $\mu_0 = 0,1$ ja kokkuvõttes

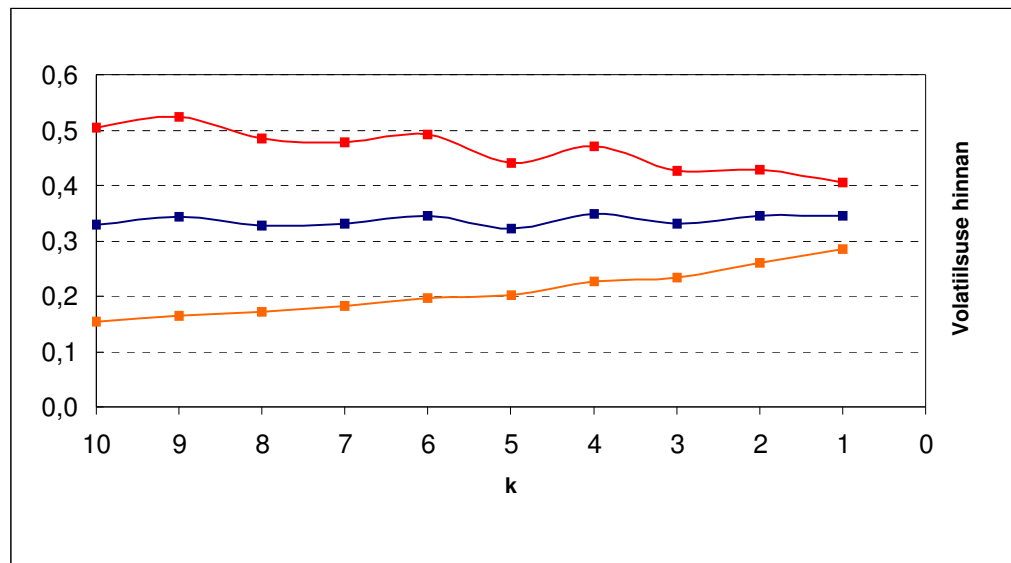
saame võtta $c = 0,1 + \frac{0,35^2}{2} \approx 0,16$. Volvo aktsia volatiilsuse hinnangute standardhälbed on toodud järgmises tabelis:

Periood		$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
02.01.2001 – 31.12.2001	Volatiilsuse hinnang	0,36	0,38	0,38	0,40	0,37	0,34	0,39	0,38	0,38	0,36
	Standard-hälve	0,0228	0,0361	0,0438	0,0558	0,0546	0,0524	0,0696	0,0714	0,0752	0,0707
03.01.2000 – 17.07.2002	Volatiilsuse hinnang	0,34	0,35	0,35	0,36	0,37	0,33	0,36	0,37	0,35	0,37
	Standard-hälve	0,0330	0,0504	0,0614	0,0725	0,0856	0,0790	0,0967	0,1074	0,1034	0,1218
16.11.1994 – 31.12.1999	Volatiilsuse hinnang	0,35	0,35	0,33	0,33	0,36	0,32	0,34	0,34	0,30	0,32
	Standard-hälve	0,0505	0,0719	0,0790	0,0898	0,1167	0,1046	0,1268	0,1310	0,1132	0,1340
16.11.1994 – 17.07.2002	Volatiilsuse hinnang	0,34	0,34	0,33	0,35	0,32	0,34	0,33	0,33	0,34	0,33
	Standard-hälve	0,0601	0,0848	0,0969	0,1222	0,1195	0,1471	0,1482	0,1564	0,1800	0,1753

Tabel 2

On näha, et standardhälve väheneb oluliselt ajaintervalli lühenedes arvutustes kasutatavate hindade vahel, st k väärtuse vähenedes. Kuid ka juhul, kui kasutame iga tööpäeva hindu, st $k=1$ korral on hinnang küllaltki ebatäpne. Seega võiks antud näites konstantse volatiilsuse hindamiseks kasutada hindu veelgi lühemate ajaintervallide järel, st vaadelda ka Volvo aktsia hinna päevasisest käitumist. Kahjuks aga polnud vastavad andmed lihtsasti kättesaadavad ja seega ei õnnestu meil Volvo aktsia hinna volatiilsusele täpsemat hinnangut leida hetkel.

Lisame siinkohal ka graafiku, mis illustreerib volatiilsuse hinnangut ja selle täpsust koguperioodi 16.11.1994 – 17.07.2002 jaoks.



Ka graafik näitab, et volatiilsuse hinnangule saadud piirid on suhteliselt laiad ja seega võiks kaaluda arvutustes kasutatavate hindade vahele jääva ajaintervalli veelgi lühemaks muutmist.

2.7. Kaudne volatiilsuse hinnang

Opsiooni alusvara hinna volatiilsuse määramiseks kasutatakse kahte põhilist meetodit:

- 1) volatiilsuse hindamine alusvara hinna ajaloo põhjal (*Historical volatility*);
- 2) volatiilsuse hindamine turul kaubeldavate opsioonide hindade põhjal, nn. kaudne volatiilsuse hinnang (*Implied volatility*).

Siiani vaadeldud meetodid lähtuvad otse alusvara hinna ajaloost. Finantsvara ajaloo põhjal leitud volatiilsuse hinnang kirjeldab, kui kõikuv oli selle hind minevikus. Kuid meetodid, millega saab sel viisil volatiilsust hinnata, on suhteliselt keerukad. Seetõttu kasutatakse praktikas vahetevahel ka volatiilsuse määramist turul kaubeldavate opsioonide hinna põhjal. Kaudse hinnangu eelduseks on, et turul kaubeldakse selle finantsvara opsioonidega, mille volatiilsust on vaja hinnata. Kuna turul kaubeldava opsiooni kohta on eeldatavasti teada alusvara hind, opsiooni täitmishind ja -aeg, riskivaba pangaprotsent ning valem opsiooni hinna määramiseks, siis on võimalik nende andmete põhjal koostada võrrandid, milles ainsaks tundmatuks jääb alusvara hinna volatiilsus. Fikseerides ajahetke ja koostades sellele vastavate algandmete põhjal võrrandid, on võimalik nende põhjal hinnata alusvara hinna volatiilsust. Saadud tulemus ütleb meile milline on alusvara volatiilsuse hinnang vaadeldaval ajahetkel opsioonituru "arvates". Kaudse volatiilsuse üheks eeliseks ongi see, et ta sisaldab turu ootusi hindade käitumise kohta tulevikus (opsiooni eluea jooksul). Hindade ajaloolised aegread seda aga ei peegelda. Volatiilsuse kaudset hinnangut saab kasutada näiteks muude sama alusvara kohta väljaantud opsioonide hindade määramisel.

Eestis kaubeldakse Euroopa tüüpi ostuopsioonidega, mille alusvaraks on Hansapanga aktsia. Hansapanga aktsia volatiilsuse kaudseks määramiseks fikseerime kuupäeva – 01. aprill 2003. Sellel kuupäeval olid turul kaubeldavate Hansapanga aktsia kohta väljaantud Euroopa tüüpi ostuopsioonide hinnad (EEK), mille täitmisaeg on 26. juuni 2003 a. erinevate täitmishindade korral järgmised:

Täitmishind	Opsiooni hind
230,00	20,90
235,00	17,05
240,00	13,55
245,00	10,45
250,00	8,20
255,00	6,40
260,00	4,95

Tabel 3

Riskivaba pangaprotsendi suurus oli sel ajal umbes 6%. Seega on meil teada järgmised suurused:

- täitmispäev – 20. juuni 2003, aeg täitmispäevani aastates – 0,22;
- aktsia hind vaadeldaval ajahetkel – 243,62;
- riskivaba intressimäär – 6%;
- ostuopsiooni hind erinevate täitmishindade korral.

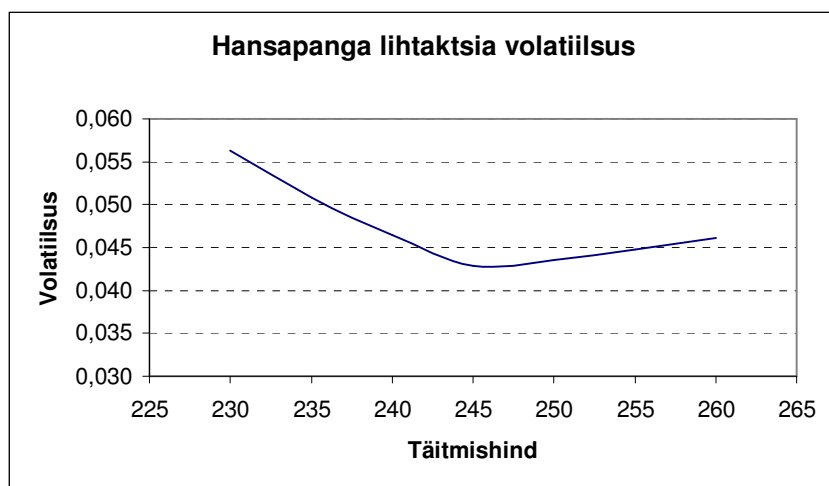
Otsitav suurus on σ – aktsia hinna volatiilsus.

Euroopa tüüpi ostuoptsiooni hind määratakse Black-Scholes'i valemiga (1.2). Asendades nüüd iga erineva täitmishinna korral vastavad teadaolevad suurused nimetatud valemisse ja lahendades selle σ suhtes, saame järgmised tulemused:

Täitmishind	Opsiooni hind	Volatiilsuse hinnang
230,00	20,90	0,0563012
235,00	17,05	0,0508642
240,00	13,55	0,0464985
245,00	10,45	0,0429133
250,00	8,20	0,0435764
255,00	6,40	0,0448220
260,00	4,95	0,0461318

Tabel 4

Eelmist tabelit illustreerib järgmine graafik:



Siit on näha, et turul ei käsitleta volatiilsust konstantse suurusena – mida erinevam on täitmishind alusvara hinna hetkeväärtusest, seda suurem on opsiooni hinna määramisel kasutatav volatiilsus. Saadud pilti nimetatakse sageli ka “volatiilsuse naeratuseks”.

Kaudne volatiilsuse hindamine ei eelda tegelikult volatiilsuse konstantsust tulevikus. Leides volatiilsuse hinnangu erineva täitmisaajaga opsioonide baasil, saab põhimõtteliselt koostada kaudse volatiilsuse aegstruktuuri (vt. [8] lk. 41). Seega tuleks volatiilsuse kaudsel hindamisel aluseks võtta sama tähtajaga opsioonid, kui see, mille hinda soovitakse määrata.

3. MITTEKONSTANTSE VOLATIILISUSE HINDAMINE

3.1. Volatiilsuse sõltuvus ainult ajast

Eelnevate tulemuste põhjal tundub, et üldjuhul ei ole turul kaubeldavate väärtpaberite hindade volatiilsus konstantne suurus. Seega tuleks parema mudeli saamiseks lubada volatiilsusel sõltuda ajast, alusvara hinnast või mõlemast korraga. Milline see sõltuvus täpselt on, pole teada. Saab ainult hinnata alusvara ajaloo põhjal, milline funktsioon võiks kõige paremini kirjeldada volatiilsuse käitumist.

Esmalt vaatleme olukorda, kus volatiilsus sõltub ainult ajast, st. eeldame, et $\sigma = \sigma(t)$. Mittekonstantse volatiilsuse korral kasutatakse Euroopa tüüpi optsioonide hinna määramiseks **Black-Scholes'i** võrrandit (1.4). Konstantse volatiilsuse korral on võimalik anda täpsed valemid optsiooni hinna määramiseks – **Black-Scholes'i** valemid (1.2) ja (1.3). Saab näidata (vt. [1] lk. 102-103), et ainult ajast sõltuva volatiilsuse korral sobib Euroopa tüüpi optsiooni hinna määramiseks Black-Scholes'i valem, milles σ^2 on asendatud suurusega

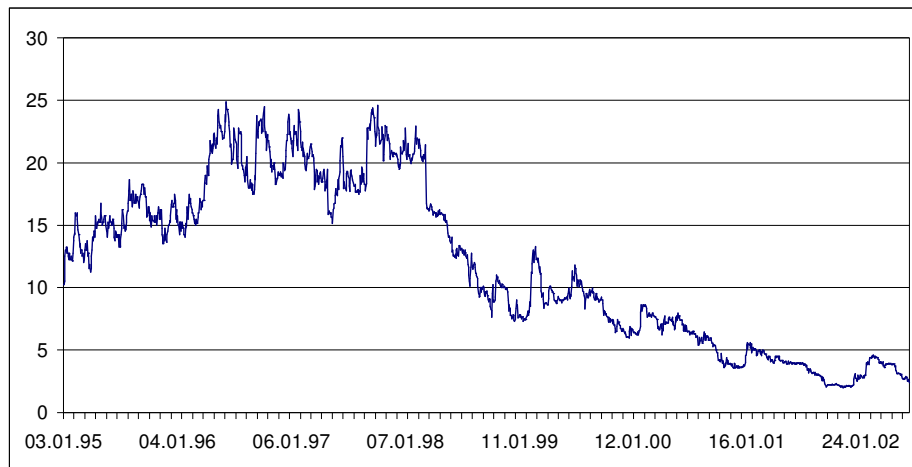
$$\frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(\tau) d\tau. \quad (3.1)$$

Seega kasutatakse ajast sõltuva volatiilsuse korral Black-Scholes'i valemis volatiilsuse ruudu keskmist üle optsiooni täitmispäevani jäänud aja. Kirjeldatud mudelit on mõtet kasutada optsiooni hinna määramiseks, kui alusvara hinna volatiilsuse sõltuvus ajast on suhteliselt lihtne.

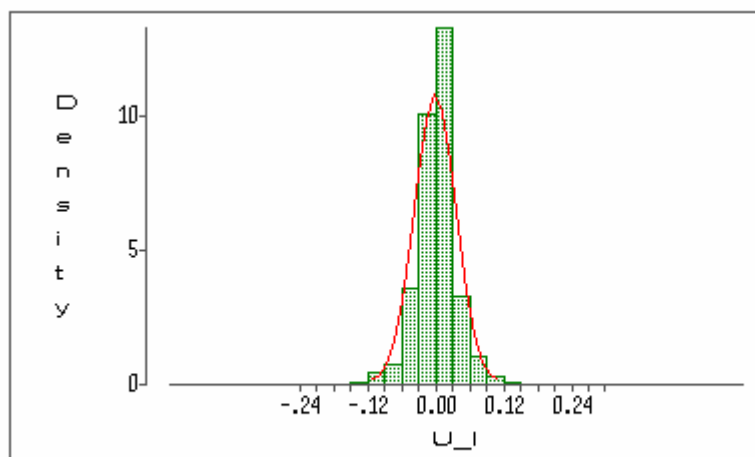
Selle asenduse kasutamiseks tuleb eelnevalt uurida optsiooni alusvara hinna volatiilsuse käitumist ajas. Üheks võimaluseks volatiilsuse aegstruktuuri uurimiseks eeldusel, et lühikestel perioodidel on volatiilsus siiski konstantne, on jagada kogu vaadeldav ajaperiood osadeks ning leida iga osa jaoks volatiilsuse hinnang. Analüüsides seejärel tekkinud aegrida, on võimalik hinnata kas volatiilsuse käitumises ilmneb mingeid perioodilisi võnkeid ja (või) trendi.

Kahjuks ei leidnud kinnitust oletus, et aktsia hinna volatiilsus võiks sõltuda ainult ajast. Vaadeldes seitset NASDAQ börsil kaubeldavat aktsiat 1995 a. algusest kuni 2002 a. I poolaasta lõpuni (*Microsoft Corporation*; *3M Company*; *3Com Corporation*; *Apple Computer Inc.*; *Cannondale Corporation*; *Farmer Brothers Company*; *Alaska Air Group Inc.*) ja nelja Tallinna Börsil kaubeldavat aktsiat 1996. a. septembri algusest kuni 2003. a. aprilli lõpuni (*Hansapank*; *Saku Õlletehas*; *Rakvere Lihakombinaat*; *Eesti Telekom*), ei olnud ühegi korral märgata selget sõltuvust ainult ajast. Iga aktsia puhul on eelnevalt veendunud, et nende sulgemishindade kirjeldamiseks ei sobi konstantsete kordajatega turumudel (2.2) ega mittekonstantset trendi ja konstantset volatiilsust sisaldav mudel (2.4). Näitena esitame siinkohal firma *Cannondale Corporation* aktsiaga läbiviidud analüüsi tulemused.

Vaatleme *Cannondale Corporation* aktsia sulgemishindu ajavahemikul 03. jaanuar 1995 kuni 28. juuni 2002. Hindade käitumist nimetatud ajavahemikul kirjeldab järgmine graafik:



Esimesena tuleb veenduda, et selle väärtpaberi hindade käitumist ei kirjelda konstantsete kordajatega turumudel (2.2). Selleks toimime samuti nagu punktis 2.3, st. leiame *Cannondale Corporation* aktsia sulgemishindade põhjal suurused $u_i = \ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right)$ ja kontrollime paketi SAS INSIGHT protseduuri *Distribution(Y)* abil, kas need on normaaljaotusega. Testi olulisuse nivooks olgu jällegi $\alpha=0,05$. Tulemuseks saame, et $p>0,01$ ja seega ei saa tõestada, et suurused u_i on normaaljaotusega. Siinkohal ka tiheduste graafik:

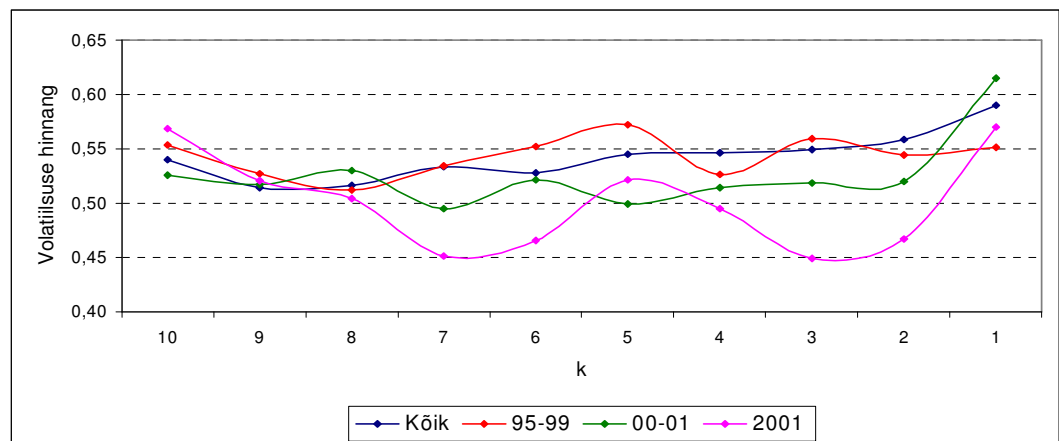


Seega ei ole õige *Cannondale Corporation* aktsia sulgemishindade käitumise kirjeldamiseks kasutada konstantsete kordajatega turumudelit (2.2).

Järgmisena tuleks nüüd kontrollida, kas võiks kasutada konstantse volatiilsuse ja mittekonstantse trendiga mudelit. Selleks toimime samuti nagu punktis 2.6, st. vaatame nelja erinevat ajaperioodi:

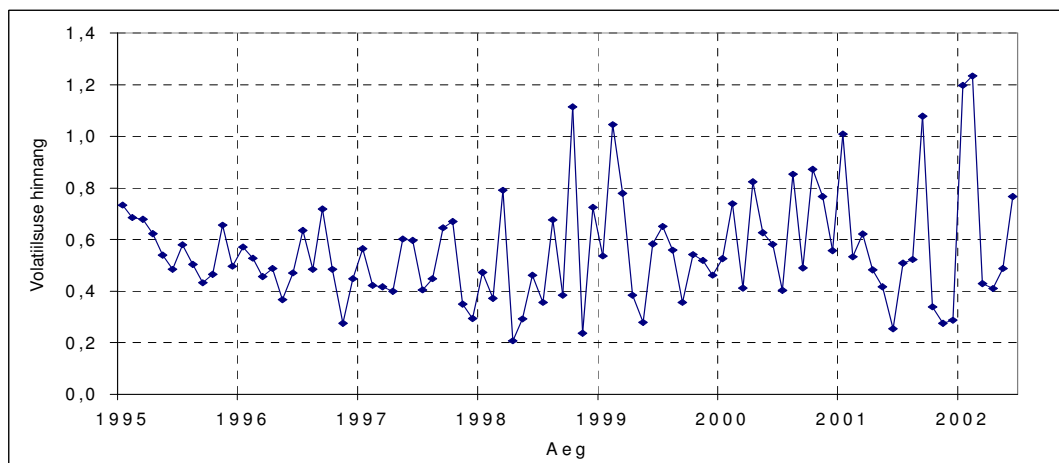
1. 03.01.1995 – 28.06.2002 (st. kogu vaatlusperiood)
2. 03.01.1995 – 31.12.1999 (st. aastad 1995-1999)
3. 03.01.2000 – 31.12.2001 (st. aastad 200-2001)
4. 02.01.2001 – 31.12.2001 (st. aasta 2001)

Igal perioodil leiame jällegi volatiilsuse hinnangu valemi (2.5) põhjal, kasutades hindu k -päevaste vahemike järel, $k=10, 9, \dots, 1$. Saadud tulemusi illustreerib järgmine graafik:



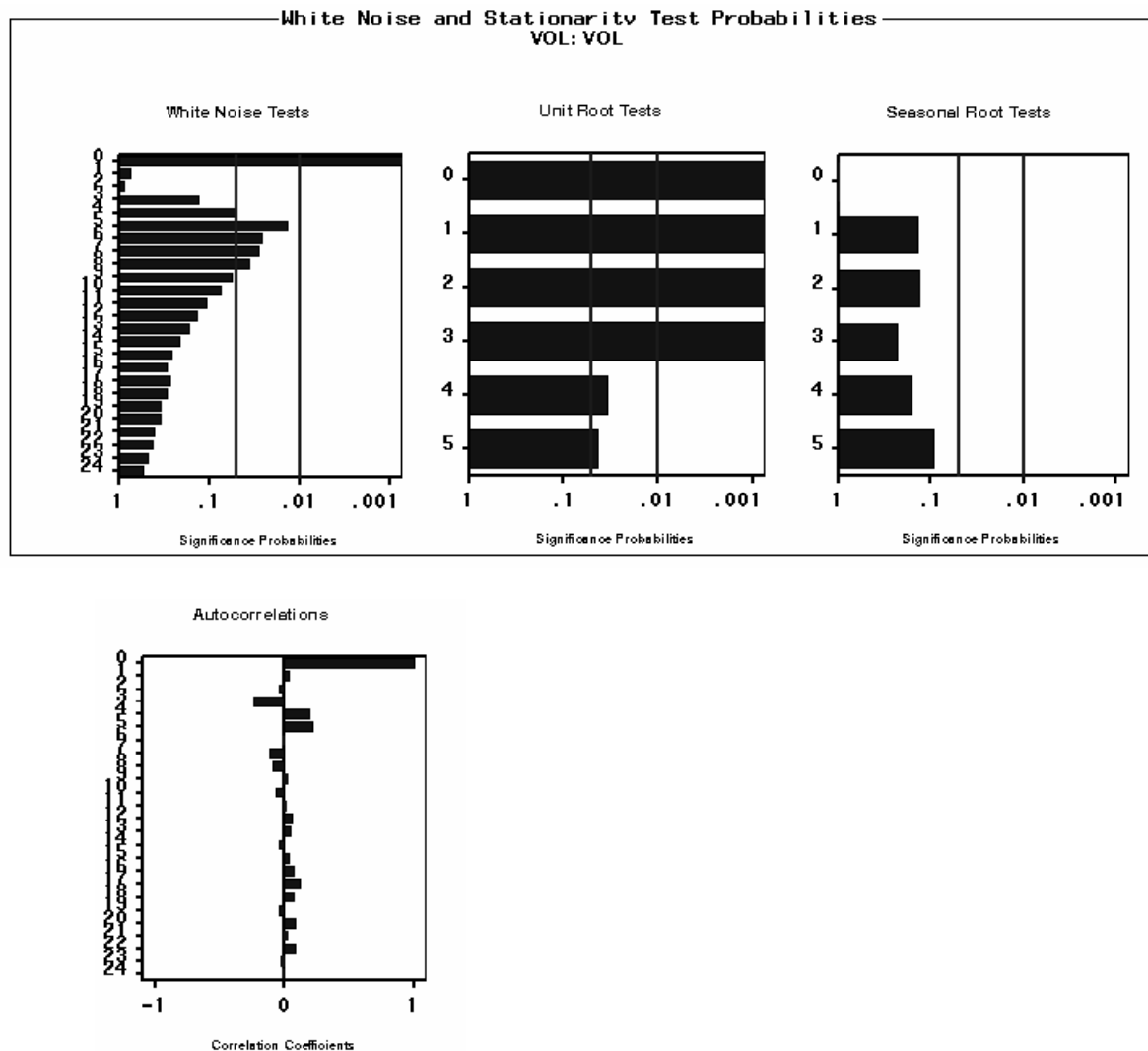
Graafikult on näha, et volatiilsuse hinnangud on erinevatel ajaperioodidel küllaltki erinevad. Seega ei ole õige väita, et *Cannondale Corporation* aktsia hinna volatiilsus on konstantne suurus.

Kuna läbiviidud analüüsi põhjal ei ole *Cannondale Corporation* aktsia hinna volatiilsus ilmselt konstantne suurus, tuleb mudeli täpsustamiseks uurida volatiilsuse sõltuvust ajast. Selleks jagame vaadeldava koguperioodi 03. jaanuar 1995 a. kuni 28. juuni 2002 a. kalendrikuudele vastavateks osadeks ja leiame iga kalendrikuu viimasel tööpäeval selle kuu hindade volatiilsuse eeldusel, et ühe kuu jooksul on volatiilsus konstantne, aga trend ei ole. Nii moodustub aegrida, mis kirjeldab aktsia hinna volatiilsust igal kalendrikuul. Saadud rida illustreerib järgmine graafik:



Analüüsides saadud aegrida paketi *SAS FORECASTING* abil, saame tulemuseks, et tõenäoliselt on tegemist juhusliku ekslemisega.

Vaadeldava rea esmase vaatluse tulemusena võib väita, et rida on juhuslik, trendi ja sessoonsust pole.



Unit Root Test'i põhjal võib vaadeldava rea lugeda statsionaarseks ja kuna autokorrelatsioonifunktsiooni väärtused on nullilähedased, siis ei esine järjestikuliste vaatluste vahel ilmselt mingit seost, st reas ei esine trendi. *Seasonal Root Test* annab tulemuseks, et reas sessoonsust ilmselt ei esine. Valge müra testi põhjal ei saa väita, et rida on täiesti juhuslik, kuid reas esinevad seaduspärad on väga nõrgad ja halvasti kirjeldatavad.

Mudeli automaatsel sobitamisel pakuti välja *Simple Exponential Smoothing* (*Root Mean Square Error* 0,21129). Kuna eesmärgiks oli kontrollida, kas volatiilsuse ja aja vahel esineb tugev seos, siis läbiviidud analüüsi põhjal seda väita ei saa. Seega võib rea lugeda juhuslikuks, trendi ja sessoonset komponenti reas ei esine.

Tulemused olid analoogilised ka kõigi ülejäänud vaadeldud väärtpaberite korral.

Seega ei ole väärtpaberite puhul ilmselt tegemist ainult ajast sõltuva volatiilsusega ning optiooni hinna arvutamiseks ei sobi kasutada asendust (3.1).

Järgmise sammuna tuleks nüüd uurida mudelit, milles volatiisus sõltub ainult aktsia hinnast.

3.2. Volatiilsuse sõltuvus ainult aktsia hinnast

Eelnevate tulemuste põhjal tundub, et üldjuhul ei ole aktsia hinna volatiisus konstantne suurus, samuti ei ole see ka ainult ajast sõltuv funktsioon. Järgmise sammuna parema mudeli saamisel tuleks uurida volatiilsuse sõltuvust ainult aktsia hinnast, st. $\sigma = \sigma(S)$. Täpne sõltuvus ei ole jällegi teada, kuid andmete põhjal on võimalik uurida, milline funktsioon võiks kõige paremini kirjeldada volatiilsuse käitumist sõltuvalt aktsia hinnast.

Volatiilsuse sõltuvuse aktsia hinnast määramiseks tuleb teha eeldusi $\sigma = \sigma(S)$ kuju kohta, lubades viimasel sõltuda lõplikult arvust parameetritest. Volatiilsuse hindamiseks tuleb siis andmete põhjal need parameetrid määrata.

Oletame, et volatiilsuse käitumist kirjeldab funktsioon

$$\sigma(S) = \sigma_0 + \sigma_1(f(S)), \quad (3.2)$$

kus S on alusvara hind, σ_0 ja σ_1 arvud. St volatiilsuse väärtus koosneb kahest komponendist – konstantne osa σ_0 , millele lisandub alusvara hinnast S sõltuv osa $\sigma_1(f(S))$.

Ito lemma (vt. punkt 2.1) põhjal:

$$d \ln S(t) = \left(\mu(t, S(t)) - \frac{\sigma^2(S(t))}{2} \right) dt + \sigma(S(t)) dB(t).$$

Ühe võimaluse parameetrite σ_0 ja σ_1 määramiseks annab järgmine tulemus stohhastilise integraali teooriast (vt. [6] lk. 32 ja lk. 137):

$$\sum_{i=0}^n \ln \left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)} \right)^2 \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^T \sigma^2(S(t)) dt.$$

Teiselt poolt trapetsvalemi põhjal:

$$\int_0^T \sigma^2(S(t)) dt \approx \Delta t \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \sigma^2(S(t_0)) \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma^2(S(t_i)) + \frac{1}{2} \sigma^2(S(T)) \right].$$

Seega saame, et

$$\sum_{i=0}^n \ln \left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)} \right)^2 \approx \Delta t \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \sigma^2(S(t_0)) \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma^2(S(t_i)) + \frac{1}{2} \sigma^2(S(T)) \right]. \quad (3.3)$$

Arvestades $\sigma = \sigma(S)$ kuju saame, et

$$\sigma(S)^2 = \sigma_0^2 + 2\sigma_0\sigma_1(f(S)) + \sigma_1^2(f^2(S))$$

ja seega saame esitada seose (3.3) kujul

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \ln \left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)} \right)^2 &\approx \Delta t \cdot \frac{1}{2} (\sigma_0^2 + 2\sigma_0\sigma_1 f(S(t_0)) + \sigma_1^2 f^2(S(t_0))) + \\ &+ \Delta t \cdot \frac{1}{2} (\sigma_0^2 + 2\sigma_0\sigma_1 f(S(t_n)) + \sigma_1^2 f^2(S(t_n))) + \\ &+ \Delta t \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (\sigma_0^2 + 2\sigma_0\sigma_1 f(S(t_i)) + \sigma_1^2 f^2(S(t_i))). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Arvestades, et parameetrid σ_0 ja σ_1 on konstantsed suurused, saame

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \ln \left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)} \right)^2 &\approx \Delta t n \sigma_0^2 + 2\Delta t \sigma_0 \sigma_1 \left(\frac{1}{2} f(S(t_0)) + \frac{1}{2} f(S(t_n)) + \sum_{i=1}^{n-1} f(S(t_i)) \right) + \\ &+ \Delta t \sigma_1^2 \left(\frac{1}{2} f^2(S(t_0)) + \frac{1}{2} f^2(S(t_n)) + \sum_{i=1}^{n-1} f^2(S(t_i)) \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Parameetrite σ_0 ja σ_1 määramiseks on vaja vähemalt kahte võrrandit. Selleks tuleb vaadelda vähemalt kahte erinevat perioodi, leida nende jaoks suurused $\sum_{i=0}^n \ln \left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)} \right)^2$ ja $f(S(t_i))$, $i=0\dots n$ ning asendada need võrrandisse (3.5). Saadud ruutvõrrandite süsteemi võime lahendada ruutkeskmise vea minimiseerimise mõttes.

Opsiooni hinna saab määrata pärast volatiilsuse hinnangu leidmist Black-Scholes'i võrrandite numbrilise lahendamise teel.

3.3. Näide aktsia hinnast sõltuva volatiilsuse hindamise kohta

Vaatleme jällegi *Cannondale Corporation* aktsia sulgemishindu ajavahemikul 03. jaanuar 1995 kuni 28. juuni 2002. Nagu eespool selgus, ei ole selle aktsia sulgemishindade volatiilsus konstantne suurus ja samuti ei ole tegemist ainult ajast sõltuva volatiilsusega. Järgmine samm volatiilsuse hindamisel on nüüd kontrollida, kas volatiilsuse kirjeldamiseks sobib mingi ainult aktsia hinnast sõltuv funktsioon. Tehes eelduse, et

volatiilsust kirjeldab funktsioon (3.2), püüame määrata konstandid σ_0 ja σ_1 . Vaadeldaval ajavahemikul on *Cannondale Corporation* aktsia hinna vähim väärtus 2,02 ja suurim väärtus 24,88 USD. Jagame hinnad klassidesse, mille pikkus on 2.- USD. Kui eeldada, et klassi piires on volatiilsus konstantne ja klassi kuulub piisav arv sulgemishindu, siis võib

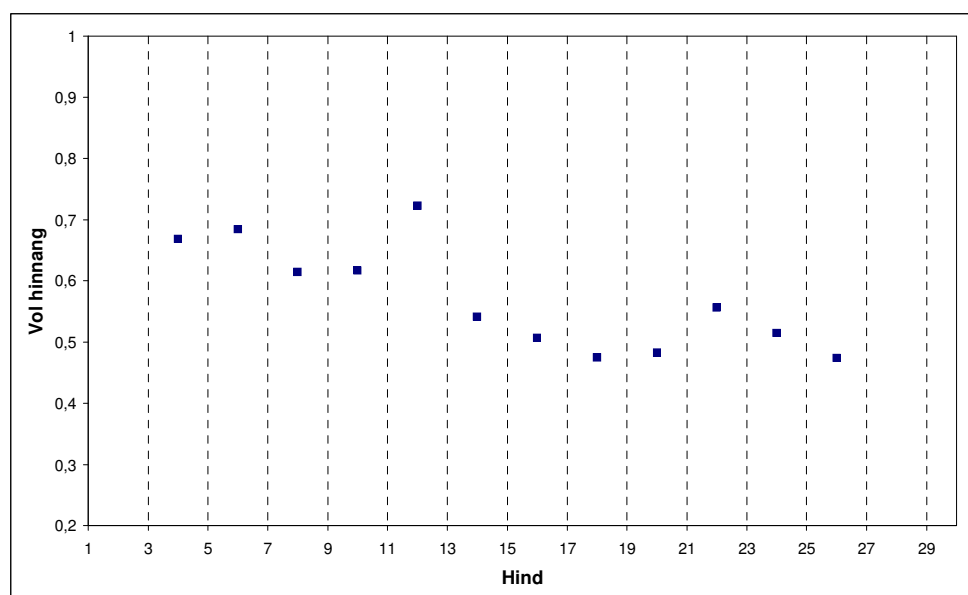
volatiilsuse hinnanguks klassis võtta suuruse $\sqrt{\frac{\sum(u_i)^2}{n_i \cdot \tau}}$, kus n_i on klassi kuuluvate hindade arv ning summeeritakse ainult vastavasse klassi kuuluvate suuruste u_i ruutusi.

Saame järgmised tulemused:

Klass	Hindade arv	Vol. hinnang
[2...4)	287	0,667136077
[4...6)	174	0,682840352
[6...8)	240	0,612658688
[8...10)	182	0,615398888
[10...12)	93	0,721052044
[12...14)	111	0,540275675
[14...16)	189	0,505693951
[16...18)	157	0,473212916
[18...20)	150	0,481610615
[20...22)	178	0,555090103
[22...24)	110	0,513109332
[24...26)	16	0,472572306

Tabel 5

Enamus klassides on piisavalt palju hindu, välja arvatud viimane klass. Seega üldjoontes peaks saadud tulemused kirjeldama volatiilsuse väärtust klassi piires hästi. Tabelis olevaid väärtusi illustreerib järgmine graafik:



Graafikult on näha, et sõltuvus aktsia hinna ja volatiilsuse vahel on mingil määral olemas, kuid mitte väga tugev. Võib oletada, et väiksemate hindade korral on volatiilsus umbes 0,65 ja siis umbes 13 USD kohal langeb ning suuremate hindade korral on umbes 0,55. Sellise kahe väärtuse vahelise ülemineku kirjeldamiseks võib kasutada näiteks hüperboolse tangensi funktsiooni, kui eelnevalt viia läbi selline aktsiahindade teisendus, et üleminekukoht teiseneks nulliks, üleminekukohast väiksemad väärtused muutuksid negatiivseteks ning suuremad positiivseteks. Üheks sobivaks teisenduseks on $x = \ln(S) - \ln 13$ ning sobiva käitumisega funktsiooniks võib võtta $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1(1 + \tanh(\ln(S) - \ln(13)))$.

Arvestades, et $\tanh(S) = \frac{e^S - e^{-S}}{e^S + e^{-S}}$ ja, et $\ln S - \ln 13 = \ln \frac{S}{13}$, saame selle funktsiooni esitada

kujul $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \left(1 + \frac{S^2 - 169}{S^2 + 169} \right)$. Kuid võrreldes saadud funktsiooni ja klasside kaupa

leitud volatiilsuse hinnangu graafikut, siis selgub, et funktsiooni y väärtuste kahanemine kohal $S=13$, ei ole piisavalt kiire. Seega tuleb veel sisse tuua parameeter k , mille väärtus tuleks valida sobivalt nii, et funktsiooni väärtuste kahanemine kohal $S=13$ langeks enam-vähem kokku volatiilsuse kahanemisega sellel kohal.

Seega lõplik funktsioon, mida kasutame volatiilsuse kirjeldamiseks on

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \cdot \left(1 + \frac{\left(\frac{S}{13} \right)^{2k} - 1}{\left(\frac{S}{13} \right)^{2k} + 1} \right) \quad (3.6)$$

Parameetri k väärtuseks valime 18, sest graafikute võrdlemisel tundub see olevat sobivaim.

Volatiilsuse hindamiseks on seega vaja võrrandites (3.5) võtta

$$f(S) = 1 + \frac{\left(\frac{S}{13} \right)^{2k} - 1}{\left(\frac{S}{13} \right)^{2k} + 1}, \quad k = 18. \quad \text{Parameetrite } \sigma_0 \text{ ja } \sigma_1 \text{ väärtuste määramiseks on vaja}$$

vähemalt kahte võrrandit. Valime vaadeldavast ajavahemikust 03. jaanuar 1995 kuni 28. juuni 2002 kaks võrdse pikkusega perioodi ja koostame nende jaoks võrrandid (3.6). Valime nendeks perioodideks ajavahemikud 01.02.1996 – 12.31.98 ning 01.04.1999 – 12.31.01. Leiame mõlemas perioodis igale ajahetkele vastavad funktsiooni (3.6) väärtused ja asendame need võrranditesse (3.5). Saame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} 0,831723 = 2,988189\sigma_0^2 + 9,879941\sigma_0\sigma_1 + 9,737984\sigma_1^2 \\ 1,082628 = 2,96063\sigma_0^2 + 0,060893\sigma_0\sigma_1 + 0,023299\sigma_1^2 \end{cases}.$$

Lahendades selle võrrandisüsteemi *Maple* abil, saame järgmised tulemused:

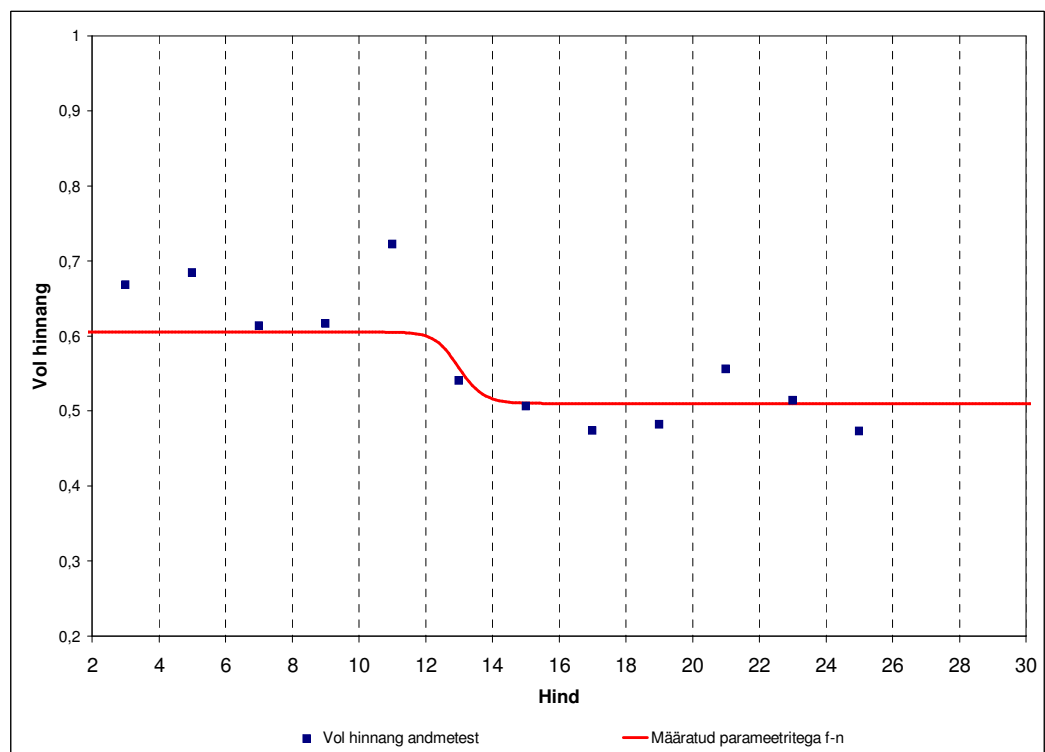
$$\begin{aligned} \{\sigma_0 = 0,6084761323, \sigma_1 = -0,5676650367\} \\ \{\sigma_0 = 0,6051858297, \sigma_1 = -0,04763066709\} \\ \{\sigma_0 = -0,6051858297, \sigma_1 = 0,04763066709\} \\ \{\sigma_0 = -0,6084761323, \sigma_1 = 0,5676650367\} \end{aligned}$$

Kuna volatiilsus on kindlasti positiivne, siis kaks viimast lahendit ei sobi meie tingimustega, sest seal $\sigma_0 < 0$ ja seega tuleks volatiilsus väiksemate hindade korral negatiivne. Kahest sobib andmetega teine lahend, sest esimese lahendipaari korral tuleks volatiilsus negatiivne suurte hindade korral. Seega tuleks volatiilsuse hindamiseks kasutada lahendit $\{\sigma_0 = 0,6051858297, \sigma_1 = -0,04763066709\}$.

Asendades leitud parameetrid avaldisesse (3.6), saame seega *Cannondale Corporation* aktsia hinna volatiilsuse kirjeldamiseks kasutada funktsiooni

$$\sigma = 0,6051858297 - 0,04763066709 \cdot \left(1 + \frac{\left(\frac{S}{13}\right)^{2k} - 1}{\left(\frac{S}{13}\right)^{2k} + 1} \right), k=18.$$

Leitud funktsiooni ja andmete põhjal hinnatud volatiilsuse väärtuseid iseloomustab järgmine graafik.



Tundub, et leitud funktsioon kirjeldab päris hästi volatiilsuse käitumist suuremate hindade korral, kuid väiksemate hindade korral on erinevused funktsiooni väärtuste ja andmete põhjal hinnatud volatiilsuse väärtuste vahel suuremad. Kusjuures hinnavaheemikus 2-11 USD on funktsiooni põhjal määratud volatiilsus väiksem kui tundub olevat tegelik volatiilsus selles hinnavaheemikus.

Parameetrite σ_0 ja σ_1 täpsemaks määramiseks võib proovida suurendada järgnevalt võrrandite arvu, st koostada võrrandid (3.5) nelja ja kuue ajavaheemiku jaoks. Nii saame vastavalt neljast või kuuest võrrandist koosneva kahe tundmatuga võrrandisüsteemid, mille lahendid leiame vähimruutude meetodil *Maple* abil. Loodetavasti saame nii parameetrite σ_0 ja σ_1 jaoks õigemad väärtused, sest võrrandisüsteemis on nüüd võrrandite arv suurem, kuid tundmatute arv ikka endiselt kaks.

Valime vaadeldavast ajavaheemikust (03. jaanuar 1995 kuni 28. juuni 2002) neli 1,5 aasta pikkusega perioodi:

1. 01. jaanuar 1996 – 30. juuni 1997;
2. 01. juuli 1997 – 31. detsember 1998;
3. 01. jaanuar 1999 – 30. juuni 2000;
4. 01. juuli 2000 – 31. detsember 2001.

Koostades iga perioodi jaoks võrrandid (3.5), saame järgmise süsteemi:

$$\begin{cases} 0,38 = 1,482353\sigma_0^2 + 5,923498\sigma_0\sigma_1 + 5,917749\sigma_1^2 \\ 0,449925 = 1,486275\sigma_0^2 + 3,902012\sigma_0\sigma_1 + 3,76636\sigma_1^2 \\ 0,535637 = 1,478431\sigma_0^2 + 0,060654\sigma_0\sigma_1 + 0,023208\sigma_1^2 \\ 0,550258 = 1,466667\sigma_0^2 + (5,17 \cdot 10^{-12}) \cdot \sigma_0\sigma_1 + (2,94 \cdot 10^{-22}) \cdot \sigma_1^2. \end{cases}$$

Lahenditeks annab *Maple* vähimruutude meetod:

$$\begin{aligned} &\{\sigma_0 = 0, \sigma_1 = 0\} \\ &\{\sigma_0 = -0,00337956, \sigma_1 = 0,28523439\} \\ &\{\sigma_0 = 0,00337956, \sigma_1 = -0,28523439\} \\ &\{\sigma_0 = -0,60847295, \sigma_1 = 0,04944459\} \\ &\{\sigma_0 = 0,60847295, \sigma_1 = -0,04944459\} \\ &\{\sigma_0 = 0,61407537, \sigma_1 = -0,56788143\} \\ &\{\sigma_0 = -0,61407537, \sigma_1 = 0,56788143\} \\ &\{\sigma_0 = -0,63308538, \sigma_1 = 0,32003582\} \\ &\{\sigma_0 = 0,63308538, \sigma_1 = -0,32003582\} \end{aligned}$$

Jällegi tuleb koheselt vaatluse alt välja jätta need lahendid, milles $\sigma_0 \leq 0$, sest siis tuleks väiksemate hindade korral volatiilsus negatiivne. Lahenditest, kus $\sigma_0 > 0$ on ainult viies sobiv, sest ülejäänute puhul tuleks volatiilsus suurte hindade korral negatiivne. Seega

tuleks valida parameetrite σ_0 ja σ_1 jaoks saadud lahendite hulgast välja väärtused $\{\sigma_0 = 0,60847295, \sigma_1 = -0,04944459\}$, st kasutada volatiilsuse kirjeldamiseks funktsiooni

$$\sigma = 0,60847295 - 0,04944459 \cdot \left(1 + \frac{\left(\frac{S}{13}\right)^{2k} - 1}{\left(\frac{S}{13}\right)^{2k} + 1} \right), k=18.$$

Parameetrite σ_0 ja σ_1 väärtused saime neljast võrrandist koosneva süsteemi lahendamisel ligikaudu samad, mis kahest võrrandist koosneva süsteemi lahendamisel. Seega võrrandite arvu suurendamine olulist efekti ei andnud.

Proovime täpsema lahendi saamiseks suurendada võrrandite arvu süsteemis veel korra kahe võrra. Koostame võrrandid nüüd kuue perioodi jaoks, st valime uuritavast ajavahemikust (03. jaanuar 1995 kuni 28. juuni 2002) kuus ühe aasta pikkust perioodi, st vaatleme eraldi iga kalendriaasta hindu aastatel 1996 a. – 2001 a.

Saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} 0,254326 = 0,992157\sigma_0^2 + 3,978622\sigma_0\sigma_1 + 3,973094\sigma_1^2 \\ 0,249422 = 0,988235\sigma_0^2 + 3,952715\sigma_0\sigma_1 + 3,952489\sigma_1^2 \\ 0,327975 = 0,984314\sigma_0^2 + 1,894173\sigma_0\sigma_1 + 1,758526\sigma_1^2 \\ 0,342257 = 0,984314\sigma_0^2 + 0,060654\sigma_0\sigma_1 + 0,023208 \cdot \sigma_1^2 \\ 0,429169 = 0,984314\sigma_0^2 + (5,52 \cdot 10^{-8}) \cdot \sigma_0\sigma_1 + (1,46 \cdot 10^{-15}) \cdot \sigma_1^2 \\ 0,314470 = 0,968627\sigma_0^2 + (5,53 \cdot 10^{-15}) \cdot \sigma_0\sigma_1 + (2,6 \cdot 10^{-28}) \cdot \sigma_1^2. \end{cases}$$

Lahendades selle jällegi vähimruutude meetodil *Maple* abil, saame järgmised lahendid:

$$\begin{aligned} &\{\sigma_0 = -0,00466716, \sigma_1 = 0,27584708\} \\ &\{\sigma_0 = 0,00466716, \sigma_1 = -0,27584708\} \\ &\{\sigma_0 = 0,61866963, \sigma_1 = -0,56708349\} \\ &\{\sigma_0 = -0,61866963, \sigma_1 = 0,56708349\} \\ &\{\sigma_0 = 0,62954857, \sigma_1 = -0,31742673\} \\ &\{\sigma_0 = -0,62954857, \sigma_1 = 0,31742673\} \\ &\{\sigma_0 = 0,61107445, \sigma_1 = -0,05152588\} \\ &\{\sigma_0 = -0,61107445, \sigma_1 = 0,05152588\} \end{aligned}$$

Analoogiliselt eelnevaga tuleb kõrvale jätta kõik lahendid peale lahendipaari $\{\sigma_0 = 0,61107445, \sigma_1 = -0,05152588\}$,

st volatiilsuse kirjeldamiseks tuleks kasutada funktsiooni

$$\sigma = 0,61107445 - 0,05152588 \cdot \left(1 + \frac{\left(\frac{S}{13} \right)^{2k} - 1}{\left(\frac{S}{13} \right)^{2k} + 1} \right), k=18. \quad (3.7)$$

Ka kuuest võrrandist koosneva süsteemi kasutamine parameetrite σ_0 ja σ_1 määramisel ei anna vaadeldud näite korral oluliselt erinevat tulemust võrreldes esialgse süsteemiga, milles kasutasime kahte võrrandit.

Võrrandite tuletamisel kogu vaatlusperioodi jaotamisel suureks arvuks osaperioodideks on oluliseks miinuseks see, et ühte osapiirkonda kuuluvate andmete hulk jääb liiga väikeseks. Järgmises punktis kirjeldame alternatiivset võimalust parameetrite σ_0 ja σ_1 määramiseks.

3.4. Teine võimalus parameetrite σ_0 ja σ_1 määramiseks

Eeldame, et *Cannondale Corporation* aktsia hinna volatiilsust kirjeldab funktsioon (3.6). Olles iga klassi kohta leidnud volatiilsuse hinnangu selles klassis punktis 3.3 kirjeldatud viisil (vt. tabel X), kirjutame välja iga klassi jaoks funktsiooni (3.6) väärtuse selle klassi keskpunktis ning leiame erinevuse ruudu nende kahe suuruse vahel. St. iga klassi jaoks leiame erinevused: $[(\sigma_0 + \sigma_1 \cdot f(s_i)) - \hat{\sigma}_i]^2$, kus s_i on i -nda hinnaklassi keskpunkt,

$$f(s_i) = 1 + \frac{\left(\frac{s_i}{13} \right)^{2k} - 1}{\left(\frac{s_i}{13} \right)^{2k} + 1} \quad \text{ja} \quad \hat{\sigma}_i \text{ on leitud volatiilsuse hinnang } i\text{-ndas klassis. Seejärel}$$

summeerime saadud avaldised üle klasside ning leiame sellised parameetrite σ_0 ja σ_1 väärtused, mille korral saadud summa on vähim.

Peale ruututõstmist saame avaldise $[(\sigma_0 + \sigma_1 \cdot f(s_i)) - \hat{\sigma}_i]^2$ esitada järgmisel kujul:

$$[(\sigma_0 + \sigma_1 \cdot f(s_i)) - \hat{\sigma}_i]^2 = \sigma_0^2 + 2\sigma_0\sigma_1 f(s_i) + \sigma_1^2 f^2(s_i) - 2\sigma_0\hat{\sigma}_i - 2\sigma_1 f(s_i)\hat{\sigma}_i + \hat{\sigma}_i^2.$$

Summeerime saadud avaldised üle klasside, saame summaks:

$$n\sigma_0^2 + 2\sigma_0\sigma_1 \sum_{i=1}^n f(s_i) + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^n f^2(s_i) - 2\sigma_0 \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i - 2\sigma_1 \sum_{i=1}^n f(s_i)\hat{\sigma}_i + \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^2 \quad (3.8).$$

Seega tuleb meil leida järgmised summad:

$$\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i, \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^2, \sum_{i=1}^n f(s_i), \sum_{i=1}^n f^2(s_i), \sum_{i=1}^n f(s_i)\hat{\sigma}_i.$$

Tulemused on toodud järgmises tabelis:

x_i	$\hat{\sigma}_i$	$\hat{\sigma}_i^2$	$f(s_i)$	$f^2(s_i)$	$f(s_i) \hat{\sigma}_i$
3	0,66844805	0,44682279	0,00000000	0,00000000	0,00000000
5	0,68418321	0,46810666	0,00000000	0,00000000	0,00000000
7	0,61386352	0,37682843	0,00000000	0,00000000	0,00000000
9	0,61660911	0,38020680	0,00000356	0,00000000	0,00000220
11	0,72247004	0,52196296	0,00487692	0,00002378	0,00352343
13	0,54133817	0,29304701	1,00000000	1,00000000	0,54133817
15	0,50668843	0,25673317	1,98848675	3,95407954	1,00754324
17	0,47414352	0,22481208	1,99987212	3,99948850	0,94822641
19	0,48255774	0,23286197	1,99999767	3,99999067	0,96511435
21	0,55618173	0,30933811	1,99999994	3,99999975	1,11236342
23	0,51411840	0,26431773	2,00000000	3,99999999	1,02823679
25	0,47350165	0,22420382	2,00000000	4,00000000	0,94700331
Σ	6,85410357	3,99924152	12,99323695	24,95358223	6,55335130

Tabel 6

Asendades saadud summad avaldisesse (3.8) ja arvestades asjaoluga, et *Cannondale Corporation* aktsia hinnad on jagatud 12 klassi, tuleb meil seega leida, milliste σ_0 ja σ_1 väärtuste korral on avaldise

$$12\sigma_0^2 + 25,9864739\sigma_0\sigma_1 + 24,95358223\sigma_1^2 - 13,70820714\sigma_0 - 13,106703\sigma_1 + 3,99924152$$

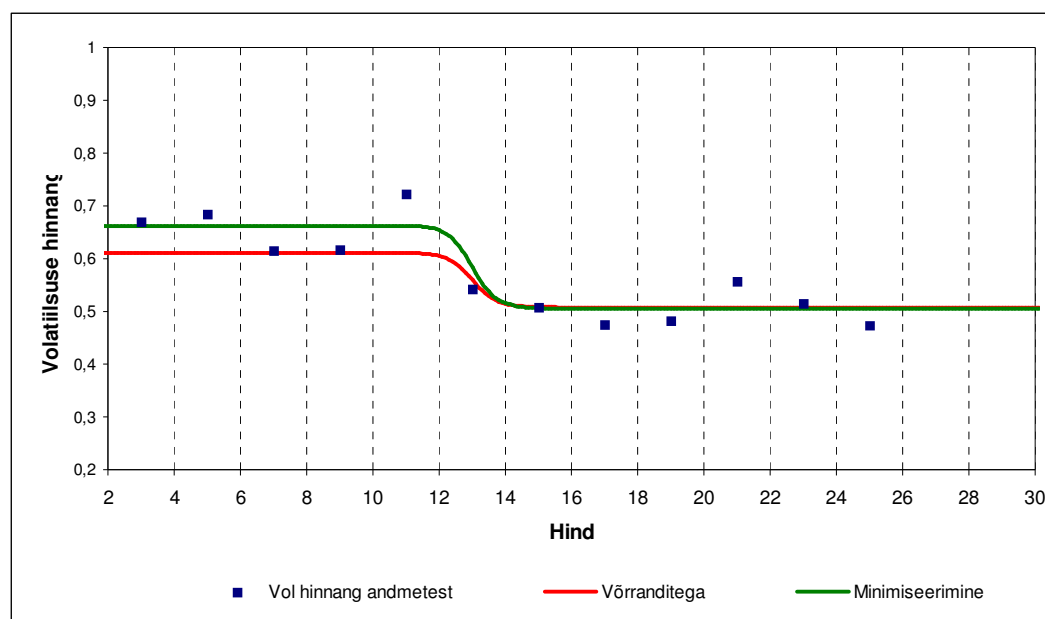
väärtus väikseim.

Lahendades selle minimiseerimisülesande *MsExcel Solver*'i abil, saame avaldise vähimaks väärtuseks 0,01511919 ja see kehtib parameetrite väärtuste $\sigma_0 = 0,65752558$, $\sigma_1 = -0,07974946$ korral.

Seega saame *Cannondale Corporation* aktsia hinna volatiilsuse kirjeldamiseks kasutada funktsiooni

$$\sigma = 0,65752558 - 0,07974946 \cdot \left(1 + \frac{\left(\frac{S}{13} \right)^{2k} - 1}{\left(\frac{S}{13} \right)^{2k} + 1} \right), k=18. \quad (3.9)$$

Saadud funktsiooni (3.9), võrrandisüsteemide abil määratud funktsiooni (3.7) ja andmete põhjal leitud volatiilsuse hinnangu väärtuseid klassides kirjeldab järgmine graafik:



Graafiku põhjal tundub, et saadud funktsioon (3.9) sobib paremini volatiilsuse hinnangutega klassides kui eelmises punktis saadud funktsioon (3.7), kuid see on ka loogiline, kuna selles punktis kirjeldatud meetod lähtub volatiilsuse hinnangutest klassides, aga eelmises punktis kirjeldatud meetod arvestab kõiki vaadeldavas ajavahemikus kuuluvaid hindu.

3.5. Kaalutud erinevuste kasutamine parameetrite σ_0 ja σ_1 määramisel

Kirjeldame siinkohal veel lühidalt kolmandat võimalust parameetrite σ_0 ja σ_1 määramiseks funktsiooni (3.6) avaldises.

Eeldame, et *Cannondale Corporation* aktsia hinna volatiilsust kirjeldab funktsioon (3.6). Jagame aktsia hinnad klassidesse ja leiame punktis 3.3 kirjeldatud viisil volatiilsuse hinnangud klassides (vt. tabel X). Sarnaselt punktis 3.4 kirjeldatud meetodile, leiame iga klassi jaoks erinevused $[(\sigma_0 + \sigma_1 \cdot f(s_i)) - \hat{\sigma}_i]^2$. Kuid seekord kasutame minimiseerimisel kaalutud erinevusi. Seega tuleb meil nüüd minimiseerida summa

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot [(\sigma_0 + \sigma_1 \cdot f(s_i)) - \hat{\sigma}_i]^2, \text{ kus } \omega_i \text{ on } i\text{-nda klassi kaal.}$$

$$\begin{aligned} \omega_i \cdot [(\sigma_0 + \sigma_1 \cdot f(s_i)) - \hat{\sigma}_i]^2 &= \\ &= \omega_i \sigma_0^2 + 2\sigma_0 \sigma_1 \omega_i f(s_i) + \sigma_1^2 \omega_i f^2(s_i) - 2\sigma_0 \omega_i \hat{\sigma}_i - 2\sigma_1 \omega_i f(s_i) \hat{\sigma}_i + \omega_i \hat{\sigma}_i^2, \end{aligned}$$

seega tuleb meil nüüd leida avaldise

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \sigma_0^2 + 2\sigma_0 \sigma_1 \sum_{i=1}^n \omega_i f(s_i) + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^n \omega_i f^2(s_i) - 2\sigma_0 \sum_{i=1}^n \omega_i \hat{\sigma}_i - 2\sigma_1 \sum_{i=1}^n \omega_i f(s_i) \hat{\sigma}_i + \sum_{i=1}^n \omega_i \hat{\sigma}_i^2 \quad (3.10)$$

vähim väärtus.

Kaalude valikuks ühtset reeglit pole ja see jääb enamasti analüüsi läbiviija otsustada. Kaalud võib valida näiteks vastavalt klassi kuuluvate hindade arvule. Kaalud võiks valida ka nii, et saavutaksime volatiilsust kirjeldava funktsiooni suurema täpsuse hinnavahelemikus 10-16 USD ja lubaksime suuremaid erinevusi nimetatud vahemikust väiksemate ja suuremate hindade korral.

Valides kaaludeks hindade arvu klassis, saame järgmised tulemused:

x_i	ω_i	$\omega_i \hat{\sigma}_i$	$\omega_i \hat{\sigma}_i^2$	$\omega_i f(s_i)$	$\omega_i f^2(s_i)$	$\omega_i f(s_i) \hat{\sigma}_i$
3	287	191,8445895	128,2381412	0,00000000	0,00000000	0,00000000
5	174	119,0478778	81,4505586	0,00000000	0,00000000	0,00000000
7	240	147,3272458	90,4388223	0,00000001	0,00000000	0,00000001
9	182	112,2228586	69,1976373	0,0006484	0,00000000	0,0003998
11	93	67,1897141	48,5425557	0,4535536	0,0022119	0,3276789
13	111	60,0885363	32,5282180	111,0000000	111,0000000	60,0885363
15	189	95,7641140	48,5225689	375,8239951	747,3210334	190,4256715
17	157	74,4405330	35,2954965	313,9799229	627,9196941	148,8715466
19	150	72,3836605	34,9292954	299,9996501	599,9986004	144,7671521
21	178	99,0003473	55,0621841	355,9999887	711,9999548	198,0006884
23	110	56,5530237	29,0749499	219,9999997	439,9999989	113,1060473
25	16	7,5760264	3,5872610	32,0000000	64,0000000	15,1520529
Σ	1887	1103,4385270	656,8676890	1709,2577587	3302,2414935	870,7397739

Tabel 7

Seega tuleb leida meil parameetrite σ_0 ja σ_1 väärtused, mille korral on avaldise

$$1887\sigma_0^2 + 3418,5155174\sigma_0\sigma_1 + 3302,2414935\sigma_1^2 - 2206,8770541\sigma_0 - 1741,4795477\sigma_1 + 656,867689$$

väärtus minimaalne.

Lahendades selle minimiseerimisülesande jällegi *MsExcel Solver*'i abil, saame avaldise vähimaks väärtuseks 2,170429545 ja see kehtib parameetrite väärtuste $\sigma_0 = 0,65125471$, $\sigma_1 = -0,07341147$ korral.

Seega annab kaalutud (kaalud võetud võrdseks hindade arvuga klassis) erinevuste meetodi kasutamine *Cannondale Corporation* aktsia hinna volatiilsuse funktsiooniks

$$\sigma = 0,65125471 - 0,07341147 \cdot \left(1 + \frac{\left(\frac{S}{13} \right)^{2k} - 1}{\left(\frac{S}{13} \right)^{2k} + 1} \right), k=18.$$

Olulist erinevust eelmise meetodiga jällegi pole, mis on ka põhjendatud, sest hindade arvud klassides ei ole väga erinevad, v.a. viimane klass, milles on väga vähe hindu. Seega pole kaalude sellise valiku korral nende mõju eriti märgatav.

Cannondale Corporation aktsia hinnad jäävad piiridesse 2-26 USD. Kui me sooviksime saada hinnangut aktsia hinna volatiilsusele nii, et see oleks täpsem hinnavahemikus 10-16 USD, st vahemikus, kus meie oletuse kohaselt volatiilsuse väärtus muutub, siis peaksime suurema kaaluga arvestama sellesse vahemikku jäävaid hindu ja väiksema kaaluga kogu hinnapiirkonna otstesse jäävaid hindu. Valime kaalud järgmiselt:

x_i	ω_i	$\omega_i \hat{\sigma}_i$	$\omega_i \hat{\sigma}_i^2$	$\omega_i f(s_i)$	$\omega_i f^2(s_i)$	$\omega_i f(s_i) \hat{\sigma}_i$
3	0,05	0,0334224	0,0223411	0,0000000	0,0000000	0,0000000
5	0,05	0,0342092	0,0234053	0,0000000	0,0000000	0,0000000
7	0,05	0,0306932	0,0188414	0,0000000	0,0000000	0,0000000
9	0,05	0,0308305	0,0190103	0,0000002	0,0000000	0,0000001
11	0,15	0,1083705	0,0782944	0,0007315	0,0000036	0,0005285
13	0,15	0,0812007	0,0439571	0,1500000	0,1500000	0,0812007
15	0,15	0,0760033	0,0385100	0,2982730	0,5931119	0,1511315
17	0,15	0,0711215	0,0337218	0,2999808	0,5999233	0,1422340
19	0,05	0,0241279	0,0116431	0,0999999	0,1999995	0,0482557
21	0,05	0,0278091	0,0154669	0,1000000	0,2000000	0,0556182
23	0,05	0,0257059	0,0132159	0,1000000	0,2000000	0,0514118
25	0,05	0,0236751	0,0112102	0,1000000	0,2000000	0,0473502
Σ	1	0,5671692	0,3296176	1,1489854	2,1430383	0,5777307

Tabel 8

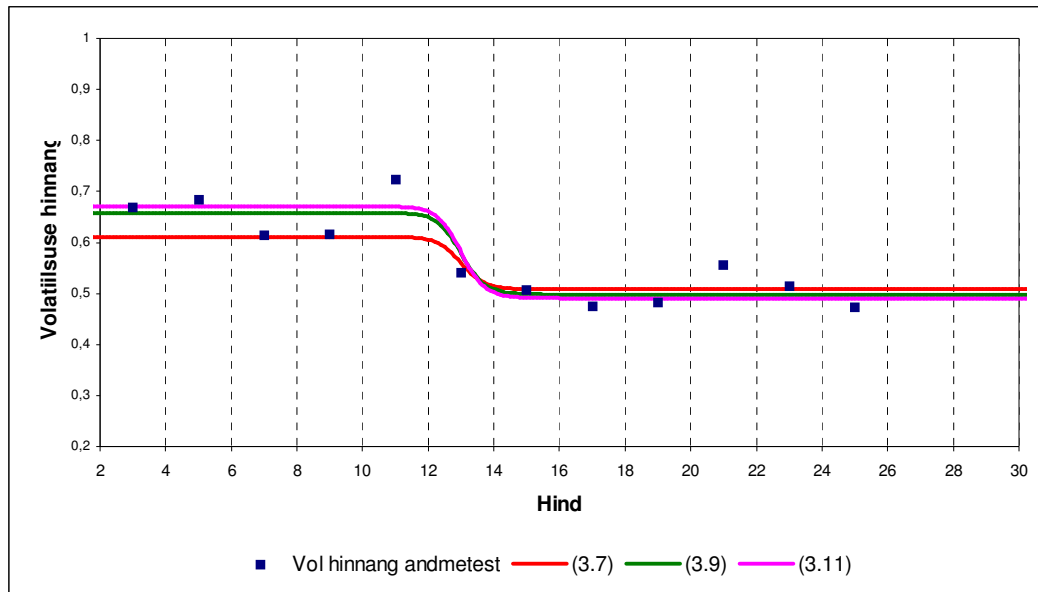
Kaalude kirjeldatud valik tagab selle, et tugevamalt arvestatakse ka hinnale 11 USD vastava väärtusega ja see peaks ilmselt põhjustama tulemustes parameetri σ_0 väärtuse suurenemise.

Asendades saadud summad tabelist avaldisesse (3.10) ja leides selle vähima väärtuse *MsExcel Solver*'i abil, saame volatiilsuse kirjeldamiseks funktsiooni

$$\sigma = 0,67041042 - 0,08985432 \cdot \left(1 + \frac{\left(\frac{S}{13} \right)^{2k} - 1}{\left(\frac{S}{13} \right)^{2k} + 1} \right), k=18. \quad (3.11)$$

Siin on juba erinevused parameetrite σ_0 ja σ_1 väärtustes võrreldes eelnevate meetoditega märgatavamad.

Lisame siinkohal illustratsiooniks veel ka graafiku, millelt on näha kolmel erineval meetodil hinnatud *Cannondale Corporation* aktsia hinna volatiilsust kirjeldavad funktsioonid, st funktsioonid (3.8) (3.9) ja (3.11).



Tundub, et funktsioon (3.11) sobib andmete põhjal leitud volatiilsuse hinnangutega klassis kõige paremini. Seega võiks *Cannondale Corporation* aktsia kohta välja antud Euroopa tüüpi optsiooni hinna määramisel Black-Scholes'i võrrandite abil kasutada just seda funktsiooni.

Järgnev samm mudeli täpsustamisel oleks lubada volatiilsusel sõltuda mitmest suurusest korraga, näiteks ajast ja aktsia hinnast. Veelgi parema sobivuse ajalooliste andmetega võib saada, kui lubada stohhastilist volatiilsust, aktsiahinna mittepidevat muutumist jne. Kuid need mudelid lähevad juba väga keerukaks, arvutuste maht liiga suureks ning rakendamine reaalse andmete analüüsis ei pruugi anda piisavalt täpseid parameetrite hinnanguid.

4. KOKKUVÕTE

Finantsturgudel kaubeldavate Euroopa tüüpi optsioonide hinna määramise ühe alaülesandena on vaja hindade ajaloo põhjal hinnata alusvara hinna volatiilsust. Optsiooni alusvaraks oleva väärtpaberi hinna S käitumise kirjeldamiseks saab kasutada Black-Scholes'i turumudelit $dS(t) = S(t)(\mu(t, S(t))dt + \sigma(t, S(t))dB(t))$, kus μ on väärtpaberi hinna keskmise protsentuaalse kasvamise kiirus ehk trend, σ on hinna volatiilsus ja B tähistab Browni liikumist. Mida väiksema arvu parameetritega on trend ja volatiilsus kirjeldatavad, seda täpsemini on võimalik neid hinnata. Kuid liiga lihtsate ja väikese arvu parameetritega mudel ei pruugi reaalseid andmeid piisavalt hästi kirjeldada. Samas aga toob parameetrite arvu suurenemine kaasa suurema ebatäpsuse nende hindamisel. Seega tuleks leida selline mudel, milles on piisavalt vähe parameetreid, samas aga kirjeldab piisavalt adekvaatselt tegelikke andmeid. Käesolevas töös lähtuti kõige lihtsamast turumudelist, milles aktsia hinna trend ja volatiilsus on konstantsed suurused – $dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dB(t))$. Kontrollides konstantsete kordajatega turumudeli kehtivust erinevate maailma finantsturgudel kaubeldavate aktsiate jaoks, saadi tulemuseks, et üldjuhul ei vasta väärtpaberite käitumine konstantsete kordajatega turumudelile ja seega seda mudelit pole otstarbekas kasutada väärtpaberi hinna volatiilsuse hindamiseks.

Järgmise sammuna võeti vaatluse alla veidi keerukam mudel, milles ei eeldatud enam aktsia hinna trendi konstantsust – $dS(t) = S(t)(\mu(t, S(t))dt + \sigma dB(t))$. Konstantse volatiilsusega turumudelile vastavust kontrolliti Volvo aktsia päevaste sulgemishindade näitel, mis andis positiivse tulemuse. Kuid saadud hinnangu täpsuse analüüsimisel selgus, et sulgemishindade kasutamine konstantse volatiilsuse hindamisel annab liialt ebatäpse tulemuse. Tööpäev osutus liiga pikaks ajaintervalliks, konstantse volatiilsuse hindamiseks mittekonstantse trendi puhul tuleks kasutada aktsia hindu lühemate ajavahemike järel.

Kuna ka volatiilsuse kaudne hinnang annab märku sellest, et turul ei käsitleta volatiilsust konstantse suurusena, siis tuli järgmise sammuna mudeli täpsustamisel loobuda ka volatiilsuse konstantsuse nõudest, lubades sellel sõltuda asjast või aktsia hinnast.

Esmalt vaadati olukorda, kus volatiilsus sõltub vaid ajast, st mudelit kujul $dS(t) = S(t)(\mu(t, S(t))dt + \sigma(t)dB(t))$. Kuid vaadeldes seitset USA börsidel kaubeldavat aktsiat ja nelja Eesti börsil kaubeldavat aktsiat, ei olnud ühelgi juhul märgata selget sõltuvust ajast. Seega võib öelda, et üldjuhul ei ole väärtpaberite hinna volatiilsus ainult ajast sõltuv suurus.

Järgmisena prooviti väärtpaberite hinna käitumist kirjeldada turumudeliga, milles volatiilsus on ainult aktsia hinnast sõltuv funktsioon – $dS(t) = S(t)(\mu(t, S(t))dt + \sigma(S(t))dB(t))$. Sellisel kujul volatiilsuse hindamiseks tuleb aktsia hindade ajaloo põhjal leida volatiilsuse väärtus teatud hindade korral, teha nende põhjal eeldused volatiilsust kirjeldava funktsiooni kuju kohta ning seejärel koostada võrrandid funktsiooni täpseks määramiseks. Saadud võrrandisüsteemi põhjal määratakse volatiilsust kirjeldava funktsiooni täpne kuju. Aktsia hinnast sõltuva volatiilsuse hindamine viidi läbi *Cannondale Corporation* aktsia näitel. Tulemused näitasid, et nimetatud aktsia puhul on volatiilsus ilmselt aktsia hinnast sõltuv suurus, kuid võrrandite tuletamisel ajalooliste andmete jaotamisel väikeseks arvuks osaperioodideks ei saadud tulemusena väga hästi

tegeline hindade volatiilsust kirjeldavat funktsiooni. Võrrandite arvu suurendamine aga toob kaasa osaperioodi lühenemise ja seega sinna kuuluvate andmete hulga vähenemise. Seetõttu pakuti välja ka alternatiivne võimalus aktsia hinna volatiilsust kirjeldava funktsiooni täpse kuju määramiseks – tegelike hindade põhjal leitud volatiilsuse väärtuste ja eeldatava funktsiooni abil arvutatud volatiilsuse väärtuste erinevuste ruutkeskmise minimiseerimise teel. Aktsia hinna volatiilsust kirjeldava funktsiooni määramist prooviti ka kaalutud erinevuste abil. Viimane meetod andiski parima tulemuse *Cannondale Corporation* aktsia hinna käitumise kirjeldamiseks.

Üsna mitme vaatluse all olnud väärtpaberi hinna käitumise uurimisel ei tulnud välja selget sõltuvust aktsia hinna ja volatiilsuse vahel. Seega võib oletada, et reaalselt turul kaubeldavate aktsiate hindade volatiilsus võib sõltuda korraga nii ajast kui ka aktsia hinnast või koguni sisaldada juhuslikku komponenti. Selliste mudelite käsitlemine polnud aga käesoleva töö eesmärgiks.

Kuna töös sai vaadeldud ja näidetega illustreeritud mitmeid erineva keerukusega turumudeleid ja nende parameetrite hindamise meetodeid, siis on töö eesmärgid ilmselt täidetud.

LISA

Tööle on lisatud CD-plaat *MsExcel*'i failidega, milles on töös kasutatud andmed ja nendega teostatud arvutused.

1. Const_mudel_Hansa.xls – konstantsete parameetritega turumudeli kehtivuse kontrollimine ja parameetrite hindamine Hansapanga aktsia näitel (punkt 2.3);
2. Const_vol_Volvy.xls – konstantse volatiilsusega mudeli kehtivuse kontrollimine, konstantse volatiilsuse hindamine trendi mittekonstantsuse eeldusel ja täpsuse analüüs Volvo aktsia näitel (punktid 2.3, 2.6);
3. Naeratus.xls – volatiilsuse kaudne hinnang Hansapanga aktsia näitel (punkt 2.7);
4. Ajast_sõltuv_Eesti.xls – mittekonstantse volatiilsusega turumudeli, kus volatiilsus on ainult ajast sõltuv funktsioon, kehtivuse kontrollimine mõnede Eesti börsil kaubeldavate aktsiate jaoks (punkt 3.1);
5. Ajast_sõltuv_USA.xls – mittekonstantse volatiilsusega turumudeli, kus volatiilsus on ainult ajast sõltuv funktsioon, kehtivuse kontrollimine mõnede USA börsidel kaubeldavate aktsiate jaoks (punkt 3.1);
6. Hinnast_sõltuv_Bike.xls – mittekonstantse volatiilsusega turumudeli, kus volatiilsus on ainult aktsia hinnast sõltuv funktsioon, kehtivuse kontrollimine ja volatiilsuse hindamine *Cannondale Corporation* aktsia jaoks (punktid 3.3, 3.4 ja 3.5);
7. Hinnast_sõltuv_vol.xls – mittekonstantse volatiilsusega turumudeli, kus volatiilsus on ainult aktsia hinnast sõltuv funktsioon, kehtivuse kontrollimine mõnede USA börsidel kaubeldavate aktsiate jaoks.

KASUTATUD KIRJANDUS

1. **Paul Wilmott, Sam Howison, Jeff Dewynne**
“The Mathematics of Financial Derivatives”
Cambridge University Press 1996
2. **Villu Zirnask, Karin Liikane**
“Raha, pangad ja finantsturud”, Iosa
HP Toimetised
Tallinn 1994
3. **Olev Raudsepp**
“Väike pangandusleksikon”
Tallinn 1997
4. **“Inglise – Eesti majandussõnaraamat”**
Tallinn 1995
5. **Raul Kangro**
“Finantsmatemaatikast”
Eesti Matemaatika Seltsi aastaraamat 1997 lk 68-72
Tartu 1999
6. **I. Karatzas, S.E. Shreve**
“Brownian Motion and Stochastic Calculus”
Springer – Verlag 1994
7. **Jüri Lember**
„Tõenäosusteooria II“ (Loengu- ja praktikumimaterjalid)
<http://www.ms.ut.ee/ained/juhpr/toen2.htm>
8. **Priit Sander**
“Portfelliteooria I”
Tartu Ülikooli Kirjastus – 1999

ESTIMATION OF PARAMETERS OF BLACK-SCHOLES TYPE MARKET MODELS DESCRIBING THE BEHAVIOUR OF ONE STOCK

LIILE JÕGI

SUMMARY

Options and other derivative securities play an important role in every financial market. Therefore it is important to know how to price them and how to estimate the required market parameters.

The aim of this work is to present a systemized approach for the estimation possibilities of Black-Scholes market models' parameters starting with the simplest models and moving towards more complicated ones. Throughout the paper it is assumed that the stocks behave according to the equation

$$dS = S(\mu dt + \sigma dB),$$

where μ is the mean return of the stock, B is the Brownian motion and σ is the volatility of the stock. First a procedure for estimating the market parameters under the hypothesis that μ and σ are constants is introduced. Since on the basis of the given data it is possible to claim that the stock prices do not act according to the model with constant coefficients in general, the assumption of the trends' constancy is abandoned in the next market model and a procedure for estimating the parameters of the market model with constant volatility and with nonconstant trend is presented and error bounds for the estimate of the volatility are derived. According to the error bounds, estimating the volatility by using daily closing prices may not give very good results, thus more detailed market data is needed.

Since often the observed stock prices do not behave according to a market model with constant volatility, the market models where the volatility depends on one variable, time or the price of the stock, are also considered. For every model the possibilities for testing the models' validity and the description of the technics of estimating the parameters are presented and as an example the utilization of the theory is examined on the basis of the real historical data of some stock.

In the examples the historical prices of different stocks, which are traded on Estonian and USA financial markets, are used.

As on the basis of real data it is possible to find examples about stocks, whose prices act according to the Black-Scholes market models of different complexity, it is important to know how to choose the least complex market model adequately describing the real data and estimate its parameters. Hopefully the thesis provides this knowledge.