TARTU ÜLIKOOL

Toivo Leiger

FUNKTSIONAALANALÜÜSI MEETODID SUMMEERUVUSTEOORIAS

TARTU 1992

TARTU ÜLIKOOL
Matemaatilise analüüsi kateeder

Toivo Leiger

FUNKTSIONAALANALÜÜSI MEETODID SUMMEERUVUSTEOORIAS

TARTU 1992

Kinnitatud matemaatikateaduskonna nõukogus 20. märtsil 1992.a.

Toivo Leiger.
FUNKTSIONAALANALÜÜSI MEETODID SUMMEERUVUSTEOORIAS.
Tartu Ülikool.
EE2400 Tartu, Ülikooli 18.
Vastutav toimetaja L. Loone.
11,73.12,75.T.334.300.
TÜ trükikoda. EE2400 Tartu, Tiigi 78.

Eessõna

Summeeruvusteooria on viimasel neljal aastakümnel olnud Tartu Ülikoolis põhiliseks uurimissuunaks matemaatilise analüüsi valdkonnas. Viiekümnendatel-kuuekümnendatel aastatel kujunes välja uurimiskeskus, mille vaimseks juhiks kuni oma surmani 1975. aastal oli professor Gunnar Kangro. Võib vaielda selle üle, kas on tegemist teadusliku koolkonnaga, kuid kahtlemata on Tartu matemaatikud andnud summeeruvusteooria arengusse märkimisväärse panuse. Tartu selle-alaseid uurimusi iseloomustab lai teemade ring, summeeruvusteooria kõige üldisematest probleemidest kuni tema rakendusteni funktsiooniteoorias. Eraldi väärib märkimist G.Kangro rajatud mitmesugustele rakendustele orienteeritud kiirusega summeeruvuse teooria, mille funktsionaalanalüütilised alused leiab lugeja käesoleva raamatu teises osas. Lisaks sellele on autor püüdnud näidata ka teisi oma õpetajate ning kolleegide töödes käsitletud probleeme üldise teooria taustal.

Kuid käesolev raamat ei ürita anda ülevaadet Tartu matemaatikute summeeruvusteooriaalastest töödest ja tulemustest. Ta on mõeldud eeskätt õppevahendiks üliõpilastele vastavasuunaliste erikursuste õppimisel. Teisalt püüab ta olla käsiraamatuks neile, kes tegelevad summeeruvus- või topoloogiliste jadaruumide teooriaga magistri- või doktoriõppes. Selleks on põhitekstile igas paragrahvis (erandiks on §4) lisatud täiendused ja märkused. Nende eesmärgiks on juhatada lugejat vastava kirjanduse ning uute, põhitekstist väljakasvavate probleemide juurde. Seejuures ei pretendeeri viited kirjandusele ühelgi juhul täielikkusele. Eriti kehtib see esimese, sissejuhatava paragrahvi puhul, mille täienduste ja märkuste osa on pühendatud sellest raamatust väljajäänud summeeruvusteooria küsimustele.

Raamat eeldab lugejalt teadmisi funktsionaalanalüüsi põhikursuse ulatuses. Nendele, kes ei ole tuttavad lokaalselt kumerate ruumidega, on neljandas paragrahvis esitatud F-ruumide teooria põhimõisted ja -faktid.

Autor avaldab tänu ja tunnustust pr. Karin Pihlale ja pr. Svetlana Saprõkovale, kes tegid kogu töö käsikirja tehnilisel vormistamisel.

Tartus 1992.a.

Autor

I OSA

§1. SUMMEERUVUSTEOORIA PÕHIPROBLEEMID

Kõige laiemas tähenduses mõistetakse summeeruvusteooria all õpetust koonduvusprotsessidest ja piirväärtustest. Sellisena hõlmab ta märkimisväärse osa matemaatilisest analüüsist. Kitsamas, enamkasutatavas tähenduses on summeeruvusteooria matemaatiline distsipliin, mis uurib jadade, ridade ning integraalide erinevaid koonduvuse eeskirju ning nende omavahelisi seoseid.

See jada koonduvuse definitsioon, mida me tunneme koolimatemaatikast ning matemaatilise analüüsi kursusest, pärineb A.L.Cauchy'lt 1821. aastast. Tegelikult kasutasid matemaatikud koonduvaid ridu ning jadasid paljude ülesannete lahendamisel juba märksa varem. Valitses arvamus, et iga rida on koonduv, täpsemalt öeldes, iga rea korral on võimalik valida niisugune koonduvuse eeskiri, mille suhtes see rida koondub. Tüüpiline näide sellise mõtteviisi kohta on L.Euleri väide, et rea $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ summa on $1/2$, selle põhjendamiseks lähtus ta valemist

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad (x \neq 1).$$

Taoliste summeerimisreeglite rakendamine andis paljudel juhtudel õigeid tulemusi, kuid viis tihtipeale paratamatult ka vastuoludele. Kõige halvem oli sealjuures see, et ridade teooriat kasutati mitmete matemaatikas põhimõttelist tähtsust omavate teoreemide tõestamisel ning seetõttu oli "... olulisem osa matemaatikast ilma vundamendita", nagu kirjutas 1826. aastal N.H.Abel. Temal ja Cauchy'l oli suuri teeneid vana mõtteviisi murdmisel ning matemaatilise ranguse printsiibi esikohale seadmisel. Võimalikuks sai see tänu koonduvuse mõiste rangele definitsioonile, mis jagas read ning jadad koonduvateks ja hajuvateks. See oli tähtis samm matemaatika ajaloos, milleta edasine areng poleks olnud mõeldav.

Kahjuks jäid sealjuures hajuvad read ja jadad ligi pooleks sajandiks matemaatikute huviorbiidist kõrvale. Sellele aitasid Abel ja Cauchy suuresti oma autoriteediga kaasa (Abel nimetas hajuvaid ridu koguniati "saatana leiutiseks"). Ainuõigeks peeti Cauchy koonduvuse definitsiooni, ülejäänud ei olnud vastuvõetavad, sest nad toovat matemaatikasse loogilisi vasturääkivusi.

Selline ortodoksaalne lähenemine hajuvatele ridadele ja jadadele kestis 19. sajandi lõpuni, kuni E.Cesàro, G.Frobenius ja E.Borel hakkasid taas oma töödes hariliku koonduvuse kõrval käsitlema ka teisi, tihtipeale konkreetsete probleemide lahendamisele orienteeritud koonduvuse eeskirju. Nende matemaatikute töödest saigi alguse summeeruvusteooria.

Kaasaegse summeeruvusteooria uurimisobjektideks võivad olla väga erinevad koonduvusprotsessid. Kuigi me oma käsitluses piirdume vaid arvjadade ning -ridadega, lähtume me sealjuures järgmisest üpris avarast sumeerimismenetluse definitsioonist.

Olgu M, N ja Y hulgad, kus hulga N mingis alamhulgas Z on defineeritud koonduvuseeskiri $f:Z\to Y$. *Summeerimismenetluseks* $\mathcal{V}$ nimetatakse kolmikut $(V,\ c_V,\ V\text{-lim})$, kus

1) $V : D_V \to N$ on operaator määramispiirkonnaga $D_V \subset M$,
2) $c_V := V^{-1}[Z]$ on *summeeruvusväli*,
3) $V\text{-lim} := f \circ V|_{c_V}$ on summeerimiseeskiri e. V-*piirväärtus*.

Elemente $x \in c_V$ nimetatakse $\mathcal{V}$-*summeeruvateks*.

Tulles jadade ja ridade summeerimise juurde, märgime kõigepealt, et mitmel põhjusel on meil kasulik võtta indeksite hulka ka arv 0. Niisiis on jadad kujul

$$x := (x_0, x_1, x_2, \dots).$$

Seejuures tähistame $\mathbb{N} := \{0,1,\dots\}$ ning

$$\sum_k x_k := \sum_{k=0}^{\infty} x_k := x_0 + x_1 + \dots\ .$$

Tähega $\mathbb{K}$ märgime kõigi reaalarvude või kõigi kompleksarvude hulka, s.t. $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} := \mathbb{C}$. Tähistame

$$\omega := \{x = (x_k) \mid x_k \in \mathbb{K} \quad (k \in \mathbb{N})\}$$

(*kõigi arvjadade hulk*),

$$c := \{x \in \omega \mid \exists \lim_k x_k =: \lim x\}$$

(*kõigi koonduvate arvjadade hulk*).

Teatavasti on ω vektorruum, kus lineaarsed tehted on defineeritud koordinaaditi, c on aga tema alamruum, milles lim on lineaarne funktsionaal. Kui me eelpooltoodud summeerimismenetluse definitsioonis võtame $M := N := \omega$, $Z := c$ ning $f := \lim$, siis saame summeerimismenetluse tema kõige levinumas tähenduses. Seejuures on operaator V enamasti määratud mingi lõpmatu arvmaatriksiga

$$A := (a_{nk}) := \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0k} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots \\ \dots & & & & \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots \\ \dots & & & & \end{bmatrix}$$

täpsemalt maatriksteisendusega

$$y_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.1}$$

Tähistame

$$\omega_A := \{x \in \omega \mid \exists Ax := (y_n)\},$$

see on *teisendusega* (1.1) *defineeritud operaatori* A *määramispiirkond*. Me saame *maatriksmenetluse* $A := (A, c_A, \lim_A)$, kus

$$c_A := \{x \in \omega_A \mid \exists \lim_n y_n =: \lim_A x\}$$

ongi menetluse A summeeruvusväli. Rõhutame veel, et nii maatriksit kui ka tema poolt määratud operaatorit märgime me ühe ja sama tähega. Muuhulgas tähistab I nii ühikmaatriksit kui ka ühikoperaatorit.

Märgime, et kui A on *lõplike ridadega maatriks*, s.t. kui tema igas reas on vaid lõplik arv nullist erinevaid liikmeid, siis operaator A on määratud kogu vektorruumis ω, tähendab $\omega_A = \omega$. Erijuhul, kui $a_{nk} = 0$ iga $k > n$ korral $(n \in \mathbb{N})$, nimetatakse maatriksit A *kolmnurkseks*. Kui sealjuures $a_{nn} \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, siis öeldakse, et A on *normaalne*.

Me vaatleme allpool eranditult maatriksmenetlusi kui kõige olulisemat summeerimismenetluste klassi. On ilmne, et maatriks A määrab üheselt ära menetluse kõik kolm komponenti. Seepärast kasutame me terminit "summeerimismenetlus" edaspidi vaid konkreetsete klassikaliste menetluste puhul, üldjuhul kasutame aga terminit "maatriks".

Niisiis, jada x on *maatriksiga* A *summeeruv* ehk *A-summeeruv* parajasti siis, kui read $\sum_k a_{nk} x_k$ $(n \in \mathbb{N})$ koonduvad ning eksisteerib piirväärtus $\lim_n \sum_k a_{nk} x_k$.

Iga summeerimismenetlus A määrab teatava koonduvuseeskirja, mille mõttes on koonduvad parajasti kõik A-summeeruvad jadad. Vaatleme mõningaid näiteid.

<u>Näide 1.</u> Kui A on ühikmaatriks, s.t. $A := I := (\delta_{nk})$, siis $c_A = c$ ja $\lim_A = \lim$. Niisiis, ühikmaatriks määrab jada tavalise koonduvuse.

<u>Näide 2.</u> Olgu $A := \Sigma := (\delta_{nk})$, kus

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, \text{ kui } k \le n, \\ 0, \text{ kui } k > n. \end{cases}$$

Sel juhul

$$c_\Sigma = cs := \{x \in \omega \mid \sum_k x_k \text{ koondub}\}$$

(*kõigi koonduvate ridade hulk*)

ja

$$\lim_\Sigma x = \sum_k x_k \quad (x \in c_\Sigma).$$

Seega on jada (x_k) Σ-summeeruvus samaväärne rea $\sum_k x_k$ koonduvusega.

<u>Näide 3.</u> Olgu $A := \nabla := (d_{nk})$, kus

$$d_{nk} := \begin{cases} 1, \text{ kui } k = n, \\ -1, \text{ kui } k = n-1, \\ 0, \text{ kui } k < n-1 \text{ või } k > n. \end{cases}$$

Siis

$$c_\nabla = \{x \in \omega \mid \exists \lim(x_n - x_{n-1}) =: \lim_\nabla x \}.$$

<u>Näide 4.</u> Olgu $A := Z^*_{1/2} := (z_{nk})$, kus

$$z_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ kui } k = n \text{ või } k = n-1, \\ 0, \text{ kui } k < n-1 \text{ või } k > n. \end{cases}$$

Siis

$$c_{Z^*_{1/2}} = \{x \in \omega \mid \exists \frac{1}{2} \lim_n (x_{n-1} + x_n) =: \lim_{Z^*_{1/2}} x \}.$$

Näide 5. Olgu $\alpha := (\alpha_k)$ selline arvjada, et $\sum_k |\alpha_k| < \infty$, ning olgu $A := \Sigma(\alpha) := (\delta_{nk}\alpha_k)_{n,k}$, s.t.

$$a_{nk} = \begin{cases} \alpha_k, & \text{kui } k \le n, \\ 0, & \text{kui } k > n. \end{cases}$$

Siis

$$c_{\Sigma(\alpha)} = \{x \in \omega \mid \sum_k \alpha_k x_k \text{ koondub }\}$$

ja

$$\lim_{\Sigma(\alpha)} x = \sum_k \alpha_k x_k .$$

Näide 6. Olgu $A := C_1 := (c_{nk})$, kus

$$c_{nk} := \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{kui } k \le n, \\ 0, & \text{kui } k > n. \end{cases}$$

Siis

$$c_{C_1} = \{x \in \omega \mid \exists \lim \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} x_k =: \lim_{C_1} x \}.$$

Niisiis, jada x on C_1-summeeruv parajasti siis, kui tema koordinaatide aritmeetiliste keskmiste jada koondub. Seetõttu nimetatakse maatriksiga C_1 määratud summeerimismenetlust *aritmeetiliste keskmiste menetluseks* ehk Cesàro menetluseks.

Lähtudes defineeritud maatriksmenetluse mõistest, esitame me nüüd summeeruvusteooria põhiprobleemid, mida me järgnevates paragrahvides püüame lahendada. Ühtlasi defineerime me suure osa allpoolkäsitletavatest põhimõistetest.

1. **Maatriksite konservatiivsus ja regulaarsus.** Nagu me eespool märkisime, määrab iga maatriks A mingi jadade koonduvuse eeskirja ning ühtlasi selle eeskirja järgi koonduvate jadade hulga. Kerkib loomulik küsimus selle uue koonduvuse, s.o. A-summeeruvuse, ning hariliku koonduvuse vahekorrast.

Maatriksit A nimetatakse *konservatiivseks* ehk *koonduvust säilitavaks*, kui iga koonduv jada on A-summeeruv, s.t. kui $c_A \supset c$. Konservatiivset maatriksit A nimetatakse
1) τ-*multiplikatiivseks*, kui leidub $\tau \in \mathbb{K}$, et $\lim_A x = \tau \lim x$,
2) *regulaarseks*, kui $\lim_A x = \lim x$
iga $x \in c$ korral. Seega on A-summeeruvus hariliku koondu-

2

vuse üldistus parajasti siis, kui A on regulaarne.

Me nimetame maatriksit A *rida-jada-konservatiivseks* (lühidalt *RJ-konservatiivseks*), kui $c_A \supset cs$, s.t. kui A summeerib kõik koonduvad read. Kehtib sealjuures võrdus $\lim_A x = \sum_k x_k$ $(x \in cs)$, siis ütleme, et maatriks A on *RJ-regulaarne*.

Mainitud probleemid on vaatluse all paragrahvis 2.

2. Maatriksite sisalduvus ja kooskõlalisus. Kahe maatriksi A ja B korral tekib küsimus nende poolt määratud koonduvuseeskirjade vahekorrast. Juhul $c_B \supset c_A$ öeldakse, et *maatriks* B *on tugevam maatriksist* A. Kui $c_B = c_A$, öeldakse, et A ja B on *ekvivalentsed*. Maatriksite võrdlemisega seotud teoreeme nimetatakse *võrdlus-* ehk *sisalduvusteoreemideks*.

Ütleme, et maatriksid A ja B on *kooskõlas*, kui $\lim_A x = \lim_B x$ iga $x \in c_A \cap c_B$ korral. Kehtib viimane võrdus vaid mingil alamhulgal $M \subset c_A \cap c_B$, siis kõneldakse *kooskõlalisusest hulgal* M. Vastavalt toodud definitsioonile on A ühikmaatriksist I tugevam parajasti siis, kui ta on konservatiivne. Seejuures tähendab A regulaarsus maatriksite A ja I kooskõlalisust.

Maatriksite sisalduvust ja kooskõlalisust käsitleme paragrahvis 11.

3. Maatriksite asendatavus. Kui antud konservatiivse maatriksi A jaoks leidub temaga ekvivalentne regulaarne maatriks B, siis räägitakse maatriksi A *asendatavusest*. Asendatavuse avaram definitsioon, mille anname paragrahvis 8, määrab mõnevõrra üldisema mõiste.

4. Tõkestatud jadade summeerimine. Konservatiivsuse ning regulaarsuse kõrval on üks tähtsamaid küsimus tingimustest, mil maatriks A summeerib kõik tõkestatud jadad, s.t. mil kehtib sisalduvus $c_A \supset m$, kus

$$m := \{x \in \omega \mid \sup_k |x_k| < \infty\}$$

(*kõigi tõkestatud arvjadade hulk*)

Teine probleem on, kuidas iseloomustada maatrikseid A omadusega $m \cap c_A = c$? Neile kahele küsimusele anname vastuse paragrahvis 10, kus uurime ka tõkestatud jadade paiknemist summeeruvusväljas c_A.

5. Summeeruvustegurid. Olgu A ja B maatriksid ning

$\varepsilon := (\varepsilon_k)$ arvjada. Arve ε_k nimetatakse (A,B)-*summeeruvusteguriteks*, kui iga $x \in c_A$ korral read $\sum_k b_{nk}\varepsilon_k x_k$ $(n \in \mathbb{N})$ koonduvad ning eksisteerib piirväärtus $\lim_n \sum_k b_{nk}\varepsilon_k x_k$, s.t. kui kehtib implikatsioon

$$x \in c_A \Rightarrow \varepsilon \cdot x := (\varepsilon_k x_k) \in c_B.$$

(A,Σ)-summeeruvustegureid nimetatakse A-*koonduvusteguriteks*. Summeeruvustegurite probleemile on pühendatud paragrahv 15.

6. **Limiteerivad teoreemid.** Kui antud maatriksi A puhul leidub jada $\lambda := (\lambda_k)$, kus $\lambda_k > 0$ $(k \in \mathbb{N})$, et

$$x_k = o(\lambda_k) \quad \text{või} \quad x_k = O(\lambda_k)$$

iga $x \in c_A$ korral, siis nimetatakse neid tingimusi *limiteerivateks* A jaoks. Vastavasisulisi teoreeme nimetataksegi limiteerivateks teoreemideks. Seda probleemi käsitleme paragrahvis 13.

7. **Merceri teoreemid.** Ühikmaatriksiga I ekvivalentset maatriksit nimetatakse *Merceri maatriksiks*. Teoreeme, mis fikseerivad tingimused selleks, et vaadeldav maatriks oleks niisuguse omadusega, nimetatakse Merceri teoreemideks. Mõningad seda tüüpi teoreemid tõestatakse paragrahvis 18.

Ülaltoodud ning teiste probleemide lahendamiseks rakendatakse kahte tüüpi uurimismeetodeid: *klassikalisi*, mis põhinevad matemaatilisel analüüsil ning funktsiooniteoorial, ja *funktsionaalanalüütilisi*. Käesolevas raamatus, nagu enamasti kaasaegses summeeruvusteoorias üldse, kasutatakse neid meetodeid kombineeritult. Siiski on enam rõhku pandud funktsionaalanalüüsi meetoditele. Nende eelis on see, et nad võimaldavad paljusid probleeme lahendada väga üldisel tasemel ning väldivad seejuures "tehnilist" tööd, mis on iseloomulik klassikalistele meetoditele. Teiselt poolt osutub aga funktsionaalanalüüs tihtipeale liiga kohmakaks instrumendiks sügavamate probleemide lahendamiseks, sel juhul tuleb paratamatult appi võtta klassikalised meetodid.

Funktsionaalanalüüsi rakendamine summeeruvusteoorias on võimalik sedavõrd, kuivõrd me tunneme summeeruvusvälja lineaar-topoloogilist struktuuri. Selle tundmaõppimine moodustab olulise osa käesoleva raamatu sisust.

Enne konkreetsete probleemide lahendamisele asumist lepime kokku mõnede kasutatavate tähistuste suhtes.

Keerulisemate maatriksteisendusi sisaldavate avaldiste üleskirjutamiseks võtame appi maatriksarvutuse tähistused ja sümbolid. Jadade x ja y korral märgime

$$xy := \sum_k x_k y_k, \qquad x \cdot y := (x_k y_k),$$

maatriksi A ning jada x puhul aga

$$Ax := (\sum_k a_{nk} x_k)_n, \qquad A \cdot x := (a_{nk} x_k)_{n,k},$$

$$xA := (\sum_n x_n a_{nk})_k.$$

Maatriksite A ja C korrutiseks nimetatakse maatriksit

$$AC := (\sum_i a_{ni} c_{ik})_{n,k}.$$

Mõistagi omavad xy, Ax, xA ja AC mõtet vaid sel juhul, kui vastavad read on koonduvad. Maatriksit C nimetatakse A *parempoolseks* (*vasakpoolseks*) *pöördmaatriksiks*, kui AC = I (CA = I). Juhul AC = CA = I ütleme, et A on *pööratav* ning C on tema *pöördmaatriks*.

Seoses lõpmatute maatriksite korrutamisega märgime mõnda olulist fakti.

1° Kui korrutised AC ja BC eksisteerivad, siis eksisteerib ka (A + B)C ning (A + B)C = AC + BC. Analoogiliselt kehtib A(B + C) = AB + AC, kui AB ja AC eksisteerivad.

2° Erinevalt lõplike maatriksite korrutamisest ei ole lõpmatute maatriksite korral korrutamine üldjuhul assotsiatiivne.

Näide 7. Olgu

$$a_{nk} := \begin{cases} -1, & \text{kui } k = n, \\ 2, & \text{kui } k = n-1, \\ 0, & \text{kui } k < n-1 \text{ või } k > n. \end{cases}$$

Vaatleme jadasid $t := (2^{-n})_n$ ning $x := (1 - 2^{k+1})_k$ vastavalt ühereaalise ja üheveerulise maatriksina. Siis $tA = 0 :=$ (0.0,...) ning seega (tA)x = 0. Samal ajal Ax = (1,1...) ja $t(Ax) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$.

Niisiis, üldjuhul ei kehti (tA)x = t(Ax), isegi kui võrduse mõlemad pooled eksisteerivad. Seetõttu ei ole maatriksite korrutamine üldiselt assotsiatiivne.

3° Kui $x \in \omega_A$ ning jadas t on nullist erinevaid koordinaate vaid lõplik arv, siis nii $t(Ax)$ kui $(tA)x$ eksisteerivad ja on võrdsed. Sellest järeldub, et lõplike ridadega maatriksi C ja jada $x \in \omega_A$ korral $C(Ax) = (CA)x$.

Iga maatriks A määrab lineaarse operaatori

$$A : \omega_A \to \omega, \quad x \to Ax := (\sum_k a_{nk} x_k)_n .$$

Kahe maatriksi A ja C korrutise CA kõrval on seega põhjust rääkida ka nende maatriksitega määratud *operaatorite korrutisest* ehk kompositsioonist $C \circ A$. See operaator on määratud jadaruumil $A^{-1}[\omega_C]$ ning ei pruugi olla antud mingi maatriksteisendusega.

Normeeritud ruumide (aga ka üldiselt topoloogiliste vektorruumide) X ja Y korral märgime sümboliga $L(X,Y)$ kõigi pidevate lineaarsete operaatorite $T : X \to Y$ hulka. Ruumi X (topoloogilist) kaasruumi tähistatakse X', s.t. $X' = L(X,\mathbb{K})$. Funktsionaali $f \in X'$ *tuuma* märgime kern f, seega kern $f = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$. Alamhulka $M \subset X$ nimetame ruumi X *põhihulgaks*, kui tema lineaarne kate

$$\text{lin } M := \{ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k \mid x_k \in M,\ \alpha_k \in \mathbb{K},\ k = 0,\dots,n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

on ruumis X tihe. Alamruumi $X_0 \subset X$ ning elemendi $u \in X$ puhul tähistame

$$\langle u \rangle := \{\alpha u \mid \alpha \in \mathbb{K}\},$$

$$X_0 \oplus \langle u \rangle := \{x = z + \alpha u \mid z \in X_0,\ \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Jadaruumid ω, m, c ja cs tõime sisse eespool. Lisaks neile defineerime veel

$$bv := \{x \in \omega \mid \|x\|_{bv} := |x_0| + \sum_k |\Delta x_k| < \infty \},$$

kus $\Delta x_k := x_k - x_{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$,

$$c_0 := \{x \in c \mid \lim x = 0\},$$

$$bv_0 := bv \cap c_0,$$

$$bs := \{x \in \omega \mid \|x\|_{bs} := \sup_m |\sum_{k=0}^{m} x_k| < \infty\},$$

$$l := \{x \in c \mid \|x\|_1 := \sum_k |x_k| < \infty \},$$

$$\varphi := \{x \in \omega \mid \exists K \in \mathbb{N} : x_k = 0 \text{ iga } k > K \text{ korral}\}.$$

Teatavasti on m Banachi ruum normiga

$$\|x\|_\infty := \sup_k |x_k| \quad (x \in m),$$

ning c ja c_0 on tema kinnised alamruumid. Seejuures $c = c_0 \oplus \langle e \rangle$ ning jadad

$$e := (1,1,\dots), \quad e^k := (\delta_{ki})_i \quad (k \in \mathbb{N})$$

moodustavad ruumis c Schauderi baasi. Iga element $x \in c$ on üheselt esitatav kujul

$$x = (\lim x)e + \sum_k (x_k - \lim x)e^k \tag{1.2}$$

ja funktsionaali $f \in c'$ üldkuju antakse valemiga

$$f(x) = \mu \lim x + tx \quad (x \in c), \tag{1.3}$$

kus $t \in l$. Seejuures $\|f\|_{c'} = |\mu| + \|t\|_1$.

Jadaruumid bv ja bs on Banachi ruumid vastavalt normidega $\|\ \|_{bv}$ ja $\|\ \|_{bs}$, bv_0 ja cs aga kinnised alamruumid vastavalt ruumis bv ja bs.

Märgime veel kahte olulist fakti, mille tõestus kuulub funktsionaalanalüüsi põhikursuse harjutusvarasse.

LEMMA 1.1. *(a) Rida* $\sum_k t_k x_k$ *koondub iga* $x \in c$ *korral parajasti siis, kui* $t \in l$. *Sel juhul on summa* $f(x) := tx$ *pidev lineaarne funktsionaal ruumis* c *ning* $\|f\|_{c'} = \|t\|_1$.
(b) Rida $\sum_k t_k x_k$ *koondub iga* $x \in cs$ *korral parajasti siis, kui* $t \in bv$.

Täiendused ja märkused.

Esimese, sissejuhatava paragrahvi selles osas teeme mõned märkused nende mõistete ning probleemide kohta, mida selles raamatus ei käsitleta. Tegemist on ulatusliku osaga summeeruvusteooriast, eeskätt selliste peatükkidega, kus funktsionaalanalüüsi meetodeid kasutatakse vähem. Muuhulgas jääb väljaspoole meie käsitlust kogu klassikaliste summeerimismenetluste teooria, konkreetsed menetlused tulevad vaatluse alla mõningate probleemide puhul vaid illustreerivate näidetena. Lugeja leiab klassikaliste menetluste käsitluse näiteks Baroni raamatus [284], ülevaate vastavast kirjandusest Zelleri ja Beekmanni raamatust [279] ning Kangro artiklist [297]. Kahest viimati mainitud tööst saab infot ka teisi siin loetletavaid küsimusi käsitletavate publikatsioonide kohta. Funktsionaalanalüütiliste probleemide puhul soovitame Wilansky [259] ja Boosi [52] monograafiaid.

1. Summeeruvuse liikidest ja menetluste tüüpidest. Ülaltoodud summeerimismenetluse mõiste (vrd. [52],1.2) on sedavõrd avar, et ta hõlmab enamuse olulisematest summeeruvuse liikidest. Märkigem neist mõningaid.

Olgu A maatriks. Arvjada x või -rida $\sum_k x_k$ nimetatakse *absoluutselt A-summeeruvaks* arvuks η, kui $\sum_n |y_n| < \infty$ ja $\sum_n y_n = \eta$, kus y_n on määratud teisendusega (1.1). Absoluutse summeeruvuse kohta vt. Knopp ja Lorentz [138], Peyerimhoff [194]. Edasi, öeldakse, et jada x on *tugevalt A-summeeruv* arvuks ξ, kui

$$\sum_k a_{nk}|x_k - \xi| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

(vt. Lorentz ja Zeller [149], Maddox [158], Balser, Jurkat ja Peyerimhoff [9]).

Olgu $\mathcal{A} := (A^{(n)})$ lõpmatute maatriksite $A^{(n)} := (a^{(n)}_{mk})$ jada. Arvjada x nimetatakse *$\mathcal{A}$-summeeruvaks* arvuks η, kui
$\lim_m \sum_k a^{(n)}_{mk} x_k = \eta$ ühtlaselt $n \in \mathbb{N}$ suhtes.
Erijuhul, kui

$$a^{(n)}_{mk} = \begin{cases} \frac{1}{m+1}, & \text{kui } n \le k \le n+m, \\ 0 & \text{ülejäänud juhtudel,} \end{cases}$$

nimetatakse $\mathcal{A}$-summeeruvat jada *peaaegu koonduvaks*, kõigi peaaegu koondavate jadade hulka tähistatakse sümboliga f. Seda probleemideringi käsitlevast rohkearvulisest kirjandusest nimetame mõningaid: Lorentz [147], Petersen [190], Stieglitz [230],[231], Boos [47], Bennett ja Kalton [40], Loone [318], Soomer [330],[331], [332].

Ühte summeeruvuse liiki - antud kiirusega ehk λ-summeeruvust - uurime põhjalikumalt käesoleva raamatu teises osas.

Jadade ning ridade summeerimisel rakendatakse maatriksmenetluste kõrval ka *poolpidevaid menetlusi*, mis on määratud teisendusega

$$y(t) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)x_k \quad (t \in T,\ t \to t_0),$$

kus t_0 on piirkonna $T \subset \mathbb{K}$ kuhjumispunkt. Lihtsaim ja tuntuim nende hulgas on *Abeli menetlus* $\mathcal{A}_0$. Rida $\sum_k x_k$ nimetatakse $\mathcal{A}_0$-summeeruvaks, kui astmerida $\sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k$ koondub vahemikus (-1,1) ja eksisteerib piirväärtus $\lim_{t\to 1} \sum_{k=0}^{\infty} x_k t^k$. Siinkohal on sobiv meenutada eelpool mainitud Euleri arutlust rea 1-1+1-1+... koonduvusest. Näeme, et Euler mõistis selle rea koonduvuse all tegelikult tema $\mathcal{A}_0$-summeeruvust. Abeli menetluse kohta vt. Zeller [277]. Jakimovski, Meyer-König ja Zeller [120], [121] defineerisid PTR-*tüüpi* astmeridadega määratud menetlused Q (nimetus tuleb sõnadest *Power series, Totally monotone, Regular*). Olgu (q_m) selline jada, et $\sum_m q_m = \infty$ ning

$$q_m = \int_0^1 \tau^m \, d\alpha(\tau) \quad (m \in \mathbb{N}),$$

kus α on lõigus [0,1] monotoonselt kasvav tõkestatud funktsioon. Tähistame $q(t) := \sum_{m=0}^{\infty} q_m t^m \quad (t \in [0,1))$. Rida $\sum_k x_k$ nimetatakse Q-summeeruvaks, kui eksisteerivad

$$y(t) := \sum_k \frac{1}{q(t)} \sum_{m=k}^{\infty} q_m t^m x_k \quad (t \in [0,1))$$

ja

$\lim_{t\to 1-} y(t)$.

Erijuhul, kui $\alpha(t) = 0$ iga $t \in [0,1)$ korral ning $\alpha(1) = 1$, on $q_m = 1$ $(m \in \mathbb{N})$, s.t. $Q = \aleph_0$-PTR-tüüpi menetlustel on mõningaid tähelepanuväärseid omadusi, mis võimaldavad nende uurimisel rakendada funktsionaalanalüüsi vahendeid. Sellepoolest on nad meeldivaks erandiks üldiste poolpidevate menetluste hulgas. Viimaste kohta vt. Wlodarski [267],[268], [269].

Arvjadade kõrval on teiseks summeeruvusteooria tähtsaks rakendusvallaks funktsionaaljadad ja -read. Nende puhul tuleb tegemist mitmete erinevate summeeruvuse liikidega, mis vastavad funktsionaaljadade erinevatele koonduvustele (ühtlane, keskmine, mõõdu järgi jne.). Sellised koonduvused on enamasti mingite ruumide topoloogilised koonduvused. Seega on erinevaid summeeruvuse liike võimalik käsitleda ühtselt, üldisemalt seisukohalt, kui uurida *summeeruvust topoloogilistes vektorruumides*. Olgu X ja Y topoloogilised vektorruumid ning $A_{nk}:X \to Y$ pidevad lineaarsed operaatorid $(n,k \in \mathbb{N})$. Maatriksteisendus

$$y_n := \sum_k A_{nk}x_k \quad (n \in \mathbb{N}),$$

kus $x_k \in X$ $(k \in \mathbb{N})$, defineerib teatava operaatori A, mille määramispiirkond paikneb kõigi ruumi X jadade hulgas $\omega(X)$ ning muutumispiirkond hulgas $\omega(Y)$. Võttes summeerimismenetluse definitsioonis $M := \omega(X)$, $N := \omega(X)$, $Z := c(Y)$ (kõigi ruumi Y koonduvate jadade hulk) ning $f := \lim$ (s.t. $f(y) := \lim_n y_n$ $(y \in c(Y))$, saame menetluse $(A, c(Y)_A, \lim_A)$. Nendega seotud probleemidele on pühendatud Maddoxi monograafia [159], vt. veel Jürimäe [353],[354], Baric [11], Leiger [306],[307],[308], Boos ja Leiger [58].

Funktsioonide ning integraalide summeerimisel rakendatakse harilikult *integraalseid menetlusi*, mis on antud teisendusega

$$y(t) := \int_T a(t,\tau)x(\tau)d\tau \quad (t \in T)$$

(vt. Hardy [351], art.3.5, Beekmann [14],[15]).

Integraalsetest, poolpidevatest ja maatriksmenetlustest üldisemaid menetlusi on uurinud Reimers (kontinuaalsed menetlused) [324], [325], [326], Jaite [117], Revenko [323], Flachsmayer ja Terpe [98],[342] jt.

2. Veel summeeruvusteooria probleemidest. Lisaks ülaltoodud seitsmele põhiprobleemile märgime veel mõningaid meie käsitluse raamidest väljapoole jäävaid summeeruvusteooria valdkondi.

Tauberi teoreemid. Olgu A ja B summeerimismenetlused ning T tingimus, mis määrab mingi alamhulga $U \subset \omega$. Kui $c_A \cap U \subset c_B$, siis öeldakse, et T on Tauberi tingimus menetluste A ja B jaoks. Juhul $B = I$ või $B = \Sigma$ kõneldakse maatriksi A *Tauberi tingimusest*. Vastavasisulisi teoreeme nimetatakse *Tauberi teoreemideks*. Nimetus tuleneb järgmisest Tauberi [237] poolt tõestatud väitest.

TEOREEM. *Kui rea $\sum_k x_k$ osasummad on C_1-summeeruvad ja*

$kx_k = o(1)$, *siis see rida koondub.*

Tauberi teoreemide kohta ilmunud väga ulatuslikust kirjandusest märgime siinkohal vaid mõningaid töid, mis on mingis mõttes lähedased meie käsitluslaadile : Kangro [293], Meyer-König ja Tietz [169], Tietz [238],[240], Sõrmus [333] (Tauberi tingimuste parandamine), Jakimovski, Meyer-König ja Zeller [121], Tietz [239],[241],[242], Tietz ja Trautner [243] (astmeridadega määratud menetluste Tauberi teoreemid). Ülevaateks kogu valdkonnast soovitame juba eelpool mainitud raamatut [279] ning artiklit [297].

Kumerusteoreemid. Olgu $(A^{(\alpha)})$ selline menetluste pere, et tingimuse $\alpha < \beta$ korral $A^{(\alpha)}x \in m \to A^{(\beta)}x \in m$ ning $A^{(\alpha)}x \in c \to A^{(\beta)}x \in c$. Kui tingimusest $\alpha < \gamma < \beta$ järeldub implikatsioon

$$A^{(\alpha)}x \in m,\ A^{(\beta)}x \in c \to A^{(\gamma)}x \in c,$$

siis öeldakse, et pere $(A^{(\alpha)})$ on *kumer*. Vastavate uurimuste lähtekohaks on Hardy ja Littlewoodi [110] poolt tõestatud teoreem Cesaro menetluste (vt. §2) pere kumerusest. Märgime Boosi ja Neuseri artiklit [60] ning Tali töid [334], [335], [234].

Tuumateoreemid. *Regulaarset* maatriksit A nimetatakse *täielikult regulaarseks*, kui kehtib implikatsioon

$$x_k \to \infty \to \lim_A x = \infty$$

(vt.Hurwitz [115]). Maatriksite *täieliku sisalduvuse* kohta vt. Beekmann [16]. Täieliku regulaarsuse mõiste üldistamisel jõuti *tuumaprobleemini*. Tõkestatud jada x tuumaks K(x) nimetatakse tema osapiirväärtuste hulga kinnist absoluutselt kumerat katet (Knopp [136]), tõkestamata jada korral on $K(x) := \bigcap \{R_n | n \in \mathbb{N}\}$, kus R_n on punktide $x_n, x_{n+1}, \ldots$ kumer kate. Probleem seisneb selles, et antud maatriksi A puhul leida tingimused, mil $K(Ax) \subset K(x)$ iga $x \in E$ korral, kus E on mingi jadade hulk, näiteks $E = m$. Täpsema ülevaate nende mõistetega seotud probleemidest ning tulemustest saab lugeja Cooke'i raamatust [305] (6.pt.). Märgime Loone töid [314], [315],[316], milles autor defineeris tuuma mõiste lokaalselt kumera ruumi elementide jaoks, uuris selle omadusi ning rakendas saadud tulemusi α-menetluste tuumaprobleemide uurimisel (vt. [317]).

Osajadade, ümberjärjestuste ning venitiste summeerimine. Sellesuunaliste uurimuste lähtekohaks on järgmine

TEOREEM (Buck [68]). *Kui jada* x *iga osajada* (x_{n_k}) *on mingi regulaarse maatriksiga summeeruv, siis* x *on koonduv jada.*

Fridy [100] ja Dawson [89] tõestasid analoogilised väited ka jada ümberjärjestuste ning venitiste kohta. Seejuures nimetatakse jada $y := (y_k)$ jada x *venitiseks*, kui leidub selline indeksite jada (m_i), et

$$y_k = x_i \quad (m_i \le k < m_{i+1},\ i \in \mathbb{N}).$$

Edasiste uurimuste kohta vt. Sledd [220], Dawson [90], [91], Keagy [133], [134]. Samu probleeme lokaalselt kumerates ruumides on uurinud Kolk [301], [302], [303].

3. **Summeeruvusteooria rakendustest** peatume siinkohal väga lühidalt vaid mõningatel. Kõige enam on summeeruvusteooria meetodid leidnud kasutamist funktsiooniteoorias, eriti just Fourier' ridadega seotud probleemide uurimisel. Lähtepunktiks on järgmine

TEOREEM (Fejér [97]). *Funktsiooni* $f \in C_{2\pi}$ *Fourier' rea*

$$a_0/2 + \sum_k a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

osasummade $s_n(f,t)$ *aritmeetilised keskmised koonduvad ühtlaselt* $t \in \mathbb{R}$ *suhtes funktsiooniks* f.

Selle klassikalise tulemuse ühe üldistamissuuna demonstreerimiseks seome maatriksiga $A := (a_{nk})$, mille puhul on täidetud tingimused

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)|a_{nk}| < \infty, \quad \sum_n a_{nk} = 1 \ (n \in \mathbb{N}),$$

tema Lebesgue'i konstantide jada (L_n^A). Nimelt kehtib iga $f \in C_{2\pi}$ korral võrdus

$$s_n(f,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)D_n(t-\tau)d\tau \ (n \in \mathbb{N}),$$

kus avaldist

$$D_n(u) := \frac{\sin(n+1/2)u}{\sin(u/2)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

nimetatakse Dirichlet' tuumaks. Osutub, et

$$\sigma_n^A(f,t) := \sum_k a_{nk}s_k(f,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)K_n^A(t-\tau)d\tau \ (n \in \mathbb{N}),$$

kus

$$K_n^A(u) := \sum_k a_{nk}D_k(u) \ (n \in \mathbb{N}).$$

Maatriksi A Lebesgue'i konstandid

$$L_n^A := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_n^A(u)|du \ (n \in \mathbb{N})$$

on operaatorite

$$A_n^t : C_{2\pi} \to \mathbb{R}, \ f \to \sigma_n^A(f,t)$$

normid, s.t. $\|A_n^t\| = L_n^A$ $(n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R})$.

Kehtib järgmine väide, millest erijuhul $A = C_1$ saadakse Fejéri teoreem.

TEOREEM (vt. [52], teoreem 4.4.14). *Kui maatriksi A Lebesgue'i konstantide jada on tõkestatud ning iga* $\delta \in (0,\pi)$ *korral*

$$\int_{\delta}^{\pi} |K_n^A(u)|du \to 0 \ (n \to \infty),$$

siis $\sigma_n^A(f,t) \to f(t)$ *ühtlaselt* $t \in \mathbb{R}$ *suhtes*.

Sissejuhatuse Fourier' ridade summeerimisse leiab lugeja Boosi raamatust [52] (art.4.4) ja Volkovi ning Uljanovi ülevaateartiklist [287], samuti Bugrovi tööst [69]. Ulatuslikult on uuritud üldiste ortogonaalridade ning veel üldisemate ridade $\sum_k a_k \varphi_k$ summeeruvust, kus (φ_k) on mingi koonduvussüsteem, vt. näiteks Moritcz ja Tandori [183], Türnpu [345], [346], [347]. Viimatinimetatud ridade erijuhuks on astmeread $\sum_k x_k z^k$, mille summeeruvus on tihedalt seotud *funktsioonide analüütilise jätkamisega*.

Kui funktsioon f on nullpunktis arendatav positiivse koonduvusraadiusega astmeritta $\sum_k x_k z^k$, siis väljaspool koonduvusringi asuvas punktis z see rida hajub, kuid ta võib selles punktis olla summeeruv mingi (sobivalt valitud) regulaarse menetlusega A. Sealjuures osutub astmerea osasummade A-piirväärtus

$$A - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k := \lim_A ((\sum_{k=0}^{n} a_k z^k)_n)$$

tihtipeale funktsiooni f analüütilise jätku väärtuseks punktis z. Näiteks kehtib Boreli maatriksmenetluse $\mathcal{B}_0^* := (e^{-n} n^k / k!)_{n,k}$ korral

TEOREEM (Borel [61]). *Iga* z *korral piirkonnast* Re z < 1 *on*

$$\mathcal{B}_0^* - \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Loomulikult ei piirdu rakendusvõimalused analüütilise jätkamise uurimisel vaid Boreli menetlusega (vt. näiteks Agnew [3], Vermes [246]). Hoopiski keerulisem on kirjeldada menetluste üldisi omadusi, mis iseloomustavad nende sobivust astmerea analüütilise jätku konstrueerimiseks. Esimene sellelaadne tähelepanuväärne tulemus kuulub Okadale [186] (vt. ka Boos [52], art.4.2). Uuematest töödest märgime Luh artikleid [151], [152].

Tähtsaimaks näiteks summeeruvusteooria rakendustest *funktsionaalanalüüsis* on *summeeruvusbaasi* mõiste (Kozlov [299], Gelbaum [104]). Olgu T RJ-regulaarne maatriks. Jada (z_r) lokaalselt kumeras ruumis X nimetatakse selle ruumi T-baasiks, kui iga element $x \in X$ on üheselt esitatav kujul

$$x = \lim_n \sum_k t_{nk} \alpha_k(x) z_k,$$

kus $\alpha_k \in X'$ $(k \in \mathbb{N})$. Selle teemaga seotud töödest vt. veel Gapoškin ja Kadets [288], Meyers [176], Täht [348], Buntinas [70], [72]. Teistest rakendustest märkigem Banachi ruumi refleksiivsuse kirjeldamist summeeruvusteooria vahenditega (Nishiura ja Waterman [185], Singer [218], Kolk [300]).

Lõpuks mainime veel *iteratsiooniprotsesside summeeruvusega* seotud probleeme. Olgu E mingi lokaalselt kumera ruumi kinnine kumer alamhulk ning A regulaarne maatriks. Iteratsiooniprotsess operaatori $f : E \to E$ püsipunkti leidmiseks konstrueeritakse järgmiselt. Suvalise $x_0 \in E$ korral võtame

$$x_1 := f(x_0), \quad v_1 := a_{10}x_0 + a_{11}x_1,$$

üldiselt

$$x_n := f(v_{n-1}), \quad v_n := \sum_{k=0}^{n} a_{nk}x_k \quad (n = 2,3,\dots).$$

Uurimuste lähtepunktiks on järgmine

TEOREEM (Mann [162]). *Kui pideval funktsioonil* $f : [a,b] \to [a,b]$ *on üks püsipunkt, siis jadade* (x_n) *ja* (v_n) *aritmeetilised keskmised koonduvad selleks püsipunktiks.*

Üldisematest tulemustest vt. Rhoades [195], Dotzon [95], Makarov ja Melentsov [320].

§2. KONSERVATIIVSED MAATRIKSID

Maatriksite konservatiivsus ja regulaarsus on sellised probleemid, mida saab kirjeldada ning uurida üsna üldiste funktsionaalanalüüsi vahenditega : nad taanduvad teatava funktsionaalide jada punktiviisi koonduvusele Banachi ruumis $(c, \|\ \|_\infty)$. Seepärast valisimegi alustuseks need küsimused.

TEOREEM 2.1. *(a) Maatriks* A *on konservatiivne parajasti siis, kui on täidetud järgmised tingimused:*

eksisteerib $\lim_n a_{nk} =: a_k \quad (k \in \mathbb{N})$, (2.1)

eksisteerib $\lim_n \sum_k a_{nk}$, (2.2)

$\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty.$ (2.3)

Sel juhul

$$\lim_A x = \chi(A)\lim x + ax \quad (x \in c), \tag{2.4}$$

kus $a := (a_k) \in l$ *ning*

$$\chi(A) := \lim_n \sum_k a_{nk} - \sum_k a_k .$$

(b) Maatriks A *on* τ*-multiplikatiivne parajasti siis, kui kehtivad tingimused* (2.1) - (2.3), *kusjuures* $a_k = 0 \quad (k \in \mathbb{N})$ *ning* $\lim_n \sum_k a_{nk} = \tau$.

(c) Maatriks A on regulaarne parajasti siis, kui kehtivad tingimused (2.1) - (2.3), *kusjuures* $a_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ *ning* $\lim_n \sum_k a_{nk} = 1$.

Tõestus. (a) Kõigepealt paneme tähele, et ridade $\sum_k a_{nk} x_k$ $(n \in \mathbb{N})$ koonduvus iga $x \in c$ korral on konservatiivse maatriksi A puhul tarvilik, teiselt poolt järeldub see vastavalt lemmale 1.1 (a) tingimusest (2.3). Seega võime lähtuda eeldusest, et eksisteerivad

$$A_n(x) := \sum_k a_{nk} x_k \quad (x \in c,\ n \in \mathbb{N}),$$

lemmast 1.1 (a) järeldub seejuures

$$A_n \in c', \quad \|A_n\| = \sum_k |a_{nk}| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Maatriksi A konservatiivsus tähendab funktsionaalide jada (A_n) punktiviisi koonduvust Banachi ruumis $(c, \|\ \|_\infty)$, tingimused selleks leiame Banach-Steinhausi teoreemi abil. Pidades silmas, et $\{e, e^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ on ruumi c põhihulk, saamegi tarvilikud ja piisavad tingimused A konservatiivsuseks:

$$\|A_n\| = O(1), \text{ s.t. } \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty,$$

$$\exists \lim_n A_n(e), \text{ s.t. } \exists \lim_A e = \lim_n \sum_k a_{nk},$$

$$\exists \lim_n A_n(e^k), \text{ s.t. } \exists \lim_A e^k = \lim_n a_{nk} = a_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Võrduse (2.4) tõestuseks märgime kõigepealt, et tingimustest (2.1) ja (2.3) järeldub $a \in l$, mistõttu rida $\sum_k a_k x_k$ koondub iga $x \in c$ korral. Kuna $\lim_A \in c'$, siis esitusest (1.2) saame

$$\begin{aligned}\lim_A x &= (\lim x)\lim_A e + \sum_k \lim_A e^k (x_k - \lim x) \\ &= (\lim x)\lim_n \sum_k a_{nk} + \sum_k a_k (x_k - \lim x) \\ &= \chi(A)\lim x + ax \quad (x \in c).\end{aligned}$$

(b) Kui A on τ-multiplikatiivne, siis on ta konservatiivne, mistõttu kehtivad (2.1) - (2.3). Et seejuures $\lim_A x = \tau \lim x$ iga $x \in c$ puhul, saamegi

$$a_k = \lim_A e^k = \tau \lim e^k = \tau \cdot 0 = 0 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

$$\lim_n \sum_k a_{nk} = \lim_A e = \tau \lim e = \tau 1 = \tau.$$

Vastupidi, kui tingimused (2.1) - (2.3) on täidetud ning $a_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ ja $\lim_n \sum_k a_{nk} = \tau$, siis võrdusest (2.4) tuleneb $\lim_A x = \tau \lim x$ $(x \in c)$.

Väide (c) järeldub vahetult väitest (b).

Allpool näeme, et konservatiivse maatriksi A omadused sõltuvad suurel määral arvu $\chi(A)$ väärtusest, täpsemalt sellest, kas $\chi(A)$ võrdub nulliga või ei. Konservatiivset maatriksit A, mille korral $\chi(A) \neq 0$, nimetatakse *koregulaarseks*, vastasel juhul aga *konullmaatriksiks*. Teoreemi 2.1 (c) kohaselt on kõik regulaarsed maatriksid koregulaarsed, oma omadustelt ongi koregulaarsed maatriksid lähedasemad regulaarsetele. Nende probleemide juurde tuleme tagasi paragrahvis 7.

Siinkohal sõnastame veel kaks väidet, milledest esimese võib lugeja hõlpsasti tõestada teoreemi 2.1 (a) eeskujul. Tuleb vaid silmas pidada, et Banachi ruumis c_0 moodustavad Schauderi baasi jadad e^k $(k \in \mathbb{N})$. Teine on vahetu järeldus ühtlase tõkestatuse printsiibist.

TEOREEM 2.2. *(a) Maatriks* A *summeerib kõik nulljadad (s.t. kehtib sisalduvus* $c_0 \subset c_A$*) parajasti siis, kui on täidetud tingimused* (2.1) *ja* (2.3). *Sel juhul*

$$\lim_A x = ax \quad (x \in c_0). \tag{2.5}$$

(b) Maatriksi A *korral kehtib sisalduvus*

$$m \subset m_A := \{ x \in \omega_A \mid Ax \in m \}$$

parajasti siis, kui on täidetud tingimus (2.3).

Lihtne on veenduda, et eelmises paragrahvis vaadeldud näidetest on maatriksid I, $Z^*_{1/2}$ ja C_1 regulaarsed, ∇ ja $\Sigma(\alpha)$ aga konullmaatriksid, ∇ on seejuures 0-multiplikatiivne. Täiendame oma näidetepagasit mõnede lihtsamate klassikaliste summeerimismenetlustega.

<u>Näide 1.</u> *Rieszi kaalutud keskmiste menetlus* M_p on määratud maatriksiga $M := (m_{nk})$, kus

$$m_{nk} = \begin{cases} p_k/P_n, & \text{kui } k \le n, \\ 0, & \text{kui } k > n \end{cases}$$

ja $p := (p_k)$ on mingi selline jada, et $P_n := \sum_{k=0}^{n} p_k \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Lihtne on veenduda, et maatriks M on parajasti siis konservatiivne, kui

eksisteerib $\lim_n P_n \neq 0$ (lõplik või lõpmatu)

ja

$$\sum_{k=0}^{n} |p_k| = O(P_n), \tag{2.6}$$

ning regulaarne, kui on täidetud tingimus (2.6) ja

$\lim_n |P_n| = \infty$.

Näide 2. *Nörlundi menetlus* N_p on määratud maatriksiga $N = (n_{nk})$, kus

$$n_{nk} := \begin{cases} p_{n-k}/P_n, & \text{kui } k \le n, \\ 0, & \text{kui } k > n \end{cases}$$

ning p_k ja P_n on samad, mis eelmises näites. Maatriks N on parajasti siis konservatiivne, kui

eksisteerib $\lim_n p_n/P_n =: \nu$

ja kehtib (2.6). Konservatiivne maatriks N on regulaarne parajasti siis, kui $\nu = 0$.

Näide 3. *Cesàro menetlus* C_α ($\alpha > -1$) on Nörlundi menetluse erijuht, kus $p_k = \binom{n+\alpha-1}{n}$ (binoomkordajad). Seega on C_α määratud maatriksiga $C_\alpha = (c^\alpha_{nk})$, kus

$$c^\alpha_{nk} := \begin{cases} \binom{n-k+\alpha-1}{n-k}/\binom{n+\alpha}{n}, & \text{kui } k \le n, \\ 0, \text{ kui } k > n. \end{cases} \tag{2.7}$$

Kui $\alpha \ge 0$, siis on C^α regulaarne. Juhul $\alpha = 1$ saame eelpoolvaadeldud aritmeetiliste keskmiste menetluse.

Abeli teisenduse

$$\sum_{k=0}^{m} t_k x_k = \sum_{k=0}^{m-1} \Delta t_k \sum_{i=0}^{k} x_i + t_m \sum_{i=0}^{m} x_i \quad (m \in \mathbb{N})$$

ja teoreemi 2.1 abil leiame nüüd tingimused maatriksi ridajada-konservatiivsuseks ning -regulaarsuseks.

TEOREEM 2.3. *(a) Maatriks* A *on RJ-konservatiivne parajasti siis, kui on täidetud tingimused* (2.1) *ning*

$$\sum_k |\Delta a_{nk}| = O(1), \tag{2.8}$$

kus $\Delta a_{nk} := a_{nk} - a_{n,k+1}$ (n,k $\in \mathbb{N}$). *Sel juhul*

$$\lim_A x = (a_0 - \sum_k \Delta a_k)\sum x_k + \sum_k (\Delta a_k) \sum_{i=0}^{k} x_i \quad (x \in cs). \tag{2.9}$$

(b) Maatriks A *on RJ-regulaarne parajasti siis, kui on täidetud tingimused* (2.1) *ja* (2.8), *kusjuures* $a_k = 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

Tõestus. (a) Kõigepealt märgime, et tingimus (2.1) on tarvilik maatriksi A RJ-konservatiivsuseks, sest $e^k \in cs$

$(k \in \mathbb{N})$. Analoogiliselt teoreemi 2.1 (a) tõestusega võime lähtuda eeldusest, et read $\sum_k a_{nk}x_k$ koonduvad iga $x \in cs$ ja $n \in \mathbb{N}$ korral. Kasutades Abeli teisendust ning tähistades $x \in cs$ korral

$$S_k := \sum_{i=0}^{k} x_i \quad (k \in \mathbb{N}), \quad S := \sum_i x_i,$$

võime lemma 1.1(b) põhjal kirjutada

$$\begin{aligned}\sum_k a_{nk}x_k &= \lim_m \Big(\sum_{k=0}^{m-1} (\Delta a_{nk})S_k + a_{nm}S_m \Big) \\ &= \sum_k (\Delta a_{nk})S_k + S\lim_m a_{nm} \\ &= \sum_k (\Delta a_{nk})(S_k - S) + \lim_m \Big(\sum_{k=0}^{m-1} \Delta a_{nk} + a_{nm} \Big) S \\ &= \sum_k (\Delta a_{nk})(S_k - S) + a_{n0}S.\end{aligned}$$

Seega

$$y_n - a_{n0}S = \sum_k (\Delta a_{nk})(S_k - S) \quad (n \in \mathbb{N})$$

ja $\lim_n (y_n - a_{n0}S)$ eksisteerib parajasti siis, kui maatriks (Δa_{nk}) summeerib iga nulljada. Teoreemi 2.2 (a) kohaselt on selleks tarvilik ja piisav, et oleks täidetud tingimus (2.8) ning eksisteeriks $\lim_n \Delta a_{nk}$ $(k \in \mathbb{N})$. Viimane tingimus järeldub ilmselt tingimusest (2.1), kusjuures $\lim_n \Delta a_{nk} = \Delta a_k$ $(k \in \mathbb{N})$ ja $\sum_k |\Delta a_k| < \infty$. Seega (vrd. (2.5))

$$\lim_n (y_n - a_{n0})S = \sum_k (\Delta a_{nk})(S_k - S)$$

ehk

$$\lim_A x = a_0 S + \sum a_k (S_k - S) = (a_0 - \sum a_k)S + \sum_k \Delta a_k S_k$$

iga $x \in cs$ korral.

(b) Kui A on RJ-regulaarne, siis väite (a) kohaselt kehtivad (2.1) ja (2.8). Võttes RJ-regulaarsuse tingimuses

$$\lim_A x = \sum_k x_k \quad (x \in cs) \tag{2.10}$$

$x := e^k$, saamegi $a_k = 1$ $(k \in \mathbb{N})$. Vastupidi, kui kehtivad (2.1) ja (2.8) ning $a_k = 1$ $(k \in \mathbb{N})$, siis $\sum_k \Delta a_k = 0$ ja valemist (2.9) saame võrduse (2.10).

Täiendused ja märkused

Eespool toodud väidete tõestused on pärit käesoleva sajandi algusest. Esimesena neist tõestati 1911.a. Toeplitzi

[244] poolt (lõplike ridadega maatriksite jaoks) teoreem 2.1 (c), mida kirjanduses nimetataksegi *Toeplitzi teoreemiks*. Teoreemi 2.1 (a) tõestas kolmnurksete maatriksite korral Kojima [139], üldjuhul Schur [210], seetõttu kannab see tulemus *Kojima-Schuri teoreemi* nime. Teoreemi 2.3 tõestus kuulub Carmichaelile [75]. Märgime, et analoogilised väited kehtivad ka poolpidevate ja integraalsete summeerimismenetluste puhul (vt. näiteks Hardy [351], III pt., teoreemid 5 ja 6).

Konservatiivsete kõrval uurib summeeruvusteooria *üldisi maatriksteisendusi jadaruumides*. Öeldakse, et maatriks A teisendab jadaruumi X jadaruumi Y, kui iga $x \in X$ korral jada $(\sum_k a_{nk} x_k)_n$ eksisteerib ning kuulub ruumi Y. Vastavate tingimuste leidmiseks on olemas mitmeid erinevaid meetodeid. Klassikaline meetod seisneb selles, et tingimuste piisavust kontrollitakse standardsete võrratuste abil, tarvilikkustaga vastuväiteliselt (tihtipeale nn. "libiseva küüru" meetodil). Teine võimalus on see, mida kasutasime eespool teoreemi 2.1 tõestamisel, ta põhineb ühtlase tõkestatuse printsiibil. Kolmas meetod tugineb teoreemile kinnisest graafikust, selle idee kuulub Zellerile [275], meetod ise on täiuslikult välja arendatud Wilansky raamatu [259] 8. peatükis. Juhime tähelepanu veel Jakimovski, Livne, Russelli ja Tsimbalario töödes käsitletud funktsionaalanalüüsile tuginevale meetodile (vt. [119], [122], [124]). Põhjaliku tulemuste loetelu koos viidetega originaalartiklitele maatriksteisenduste kohta annavad Stieglitz ja Tietz [232]. Analüütiliste jadaruumidega

$$h(r) := \{x \in \omega \mid \sum_n x_n z^n \text{ koondub ringis } |z| < r\}$$

ja

$$h[r] := \{x \in \omega \mid \sum_n x_n z^n \text{ koondub ringis } |z| \le r\}$$

seotud maatriksteisendustest ning vastavast kirjandusest annab ülevaate Grosse-Erdmann [107]. Sargent [206] ja Sember [212] uurisid tingimusi, mil maatriksteisendus on kompaktne operaator.

Tulles tagasi konservatiivsete maatriksite juurde, märgime, et nad moodustavad Banachi ruumi m kõigi endomorfismide Banachi algebras L(m,m) kinnise alamalgebra Γ. Idee, klassifitseerida konservatiivsed maatriksid konullilisteks ja koregulaarseteks, kuulub Wilanskyle [249]. Tähelepanuväärne on sealjuures, et kõigi konullmaatriksite hulk on ideaal algebras Γ (vt. Wilansky ja Zeller [264], Wilansky [254]). Sellesuunalistest uurimustest vt. veel Brown, Kerr, Stratton [66] ja Abel [281].

§3. REVERSIIVSE MAATRIKSI SUMMEERUVUSVÄLI.

See, kui hõlpsasti õnnestus meil eelmises paragrahvis funktsionaalanalüüsi kõige üldisematest tulemustest lähtudes leida vastused seal esitatud küsimustele, võib anda põhjust ülemääraseks optimismiks. Konservatiivsuse ja regulaarsuse puhul on tegemist siiski vaid soodsate eranditega summeeruvusteooria probleemide seas, ülejäänute uurimiseks vajame keerulisemat aparatuuri. Selline aparatuur tugineb summeeruvusvälja sobivalt valitud topoloogiale. Iga maatriksi A summeeruvusväli c_A on vektorruum, täpsemalt, vektorruumi ω alamruum. Paraku ei ole ta üldjuhul Banachi ruum. Triviaalseks näiteks selle kohta on nullmaatriks 0, mille summeeruvusväli on ω, aga viimane ei ole teatavasti Banachi ruum.

Teiselt poolt on paljude maatriksite A korral c_A tõepoolest võimalik varustada normiga nii, et saame Banachi ruumi. Ühte niisugust maatriksite klassi me selles paragrahvis enne üldise juhu juurde asumist vaatlemegi.

Maatriksit A nimetatakse *reversiivseks*, kui tema poolt määratud operaator $A : c_A \to c$ on pööratav, s.t. kui iga $y \in c$ korral leidub parajasti üks jada $x \in c_A$, et $Ax = y$. Kuna operaator A on lineaarne, siis võime öelda, et reversiivne maatriks korraldab vektorruumide c_A ja c vahel lineaarse isomorfismi.

LAUSE 3.1. *Reversiivse maatriksi A korral kehtivad järgmised väited.*

(a) *Summeeruvusväli c_A on Banachi ruum normiga*

$$\|x\|_A := \|Ax\|_\infty \quad (x \in c_A).$$

(b) *Funktsionaal f on Banachi ruumis $(c_A, \|\ \|_A)$ pidev ja lineaarne parajasti siis, kui ta on esitatav seosega*

$$f(x) = \mu \lim_A x + t(Ax) \quad (x \in c_A), \tag{3.1}$$

kus $\mu \in \mathbb{K}$ ning $t \in l$. Seejuures

$$\|f\| = |\mu| + \|t\|_1. \tag{3.2}$$

Tõestus. (a) Ilmselt on $A : (c_A, \|\ \|_A) \to (c, \|\ \|_\infty)$ isomeetriline isomorfism ning kuna $(c, \|\ \|_\infty)$ on Banachi ruum, siis on seda ka $(c_A, \|\ \|_A)$.

(b) Lihtne on veenduda, et $f \in c_A'$ parajasti siis, kui f on esitatav kujul

$$f = g \circ A, \text{ kus } g \in c'. \tag{3.3}$$

Tõepoolest, $f = (f \circ A^{-1}) \circ A$, ning kui $f \in c_A'$, siis $g := f \circ A^{-1} \in c'$, sest $A^{-1} \in L(c, c_A)$. Vastupidi, kui kehtib (3.3), siis on selge, et $f \in c_A'$. Valemi (3.1) ning võrduse (3.2) saame seosest (3.3), pidades silmas pideva lineaarse funktsionaali üldkuju (1.3) Banachi ruumis $(c, \|\ \|_\infty)$.

Reversiivse maatriksi definitsioon ei ütle midagi maatriksi pööratavuse kohta. Nende kahe mõiste vahekorra suhtes annavad mõningast selgust järgmised kaks näidet.

Näide 1. Maatriks

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

on reversiivne. Selles veendumiseks paneme tähele, et kui $Ax = 0$, siis $0 = \sum_k x_k = \sum_k x_k - x_1 = \sum_k x_k - x_1 - x_2 = \dots$, s.t. $x = 0$. Järelikult on operaator $A : c_A \to c$ üksühene. Antud $y \in c$ korral moodustame jada x, kus $x_0 := \lim y$, $x_k := y_{k-1} - y_k$ $(k = 1,2,\dots)$, siis $y = Ax$. Niisiis, $A[c_A] = c$ ning kokkuvõttes on maatriks A reversiivne. Samal ajal ei ole ta pööratav. Tõepoolest, kui C oleks A vasakpoolne pöördmaatriks, siis peaks tema esimene rida (c_{0k}) rahuldama tingimusi $\sum_k c_{0k} = 1$ ja $0 = c_{00} = c_{00} + c_{01} + c_{02} = \dots$, kuid need kaks tingimust on omavahel vastuolus.

Näide 2. Regulaarne maatriks

$$A := \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

on pööratav, tema pöördmaatriks on

$$A^{-1} := \begin{bmatrix} 3/2 & -3/4 & 3/8 & -3/16 & \dots \\ 0 & 3/2 & -3/4 & 3/8 & \dots \\ 0 & 0 & 3/2 & -3/4 & \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

Sealjuures ei ole ta reversiivne: jada $0 \in c_A$ kõrval rahuldab võrrandit $Ax = 0$ ka jada $((-2)^n)$.

Toodud näidete põhjal saame teha järelduse, et reversiivne maatriks ei pruugi olla pööratav ning pööratav maatriks ei pea olema reversiivne. Lihtsam on olukord normaalsete maatriksite puhul. Meenutame (vt. §1), et nii nimetatakse maatriksit A, mille korral $a_{nn} \neq 0$ ja $a_{nk} = 0$, kui $k > n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Kõigepealt veendume, et normaalne maatriks A on pööratav. Lähtume võrrandist AC = I, s.t. tingimustest

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ni}c_{ik} = \delta_{nk} \quad (n,k \in \mathbb{N}). \tag{3.4}$$

Juhul n = 0 on võrrand (3.4) kujul $a_{oo}c_{ok} = \delta_{ok}$, millest $c_{oo} = 1/a_{oo}$ ja $c_{ok} = 0$ (k = 1,2,...). Kui n = 1, saame võrrandist (3.4) seosed

$$a_{1o}c_{oo} + a_{11}c_{1o} = 0,$$

$$a_{1o}c_{o1} + a_{11}c_{11} = 1,$$

$$a_{1o}c_{ok} + a_{11}c_{1k} = 0 \quad (k = 2,3,...),$$

kust

$$c_{1o} = -\frac{a_{1o}c_{oo}}{a_{11}} = -\frac{a_{1o}}{a_{oo}a_{11}},$$

$$c_{11} = \frac{1}{a_{11}}(1 - a_{1o}c_{o1}) = \frac{1}{a_{11}},$$

$$c_{1k} = -\frac{1}{a_{11}}a_{1o}c_{ok} = 0 \quad (k = 2,3,...).$$

Nii jätkates saame üheselt määratud võrrandit AC = I rahuldava normaalse maatriksi C, kus

$$c_{ik} = \frac{1}{a_{ii}}(\delta_{ik} - \sum_{j=o}^{i-1} a_{ij}c_{jk}) \quad (i,k \in \mathbb{N}).$$

Näitame, et maatriks C rahuldab tingimust CA = I. Kuna A ja C on normaalsed, siis korrutised CA ja A(CA) eksisteerivad ning, pidades silmas paragrahvis 1 tehtud märkusi lõpmatute maatriksite korrutamise kohta, saame A(CA) = (AC)A = IA = A, mistõttu A(CA - I) = 0. Arvutame A(C + (CA - I)) = AC + A(CA - I) = I + 0 = I, seega C + (CA - I) on A parempoolne pöördmaatriks. Et aga C oli A üheselt määratud parempoolne pöördmaatriks, siis CA = I.

Kokkuvõttes oleme näidanud, et normaalne maatriks A on pööratav. Tema pöördmaatriksit tähistame edaspidi $A^{-1} := (\alpha_{kl})$, see on samuti normaalne, kusjuures $\alpha_{nn} = 1/a_{nn}$ ($n \in \mathbb{N}$).

LAUSE 3.2. *Normaalne maatriks* A *on reversiivne ja pöördoperaator* $A^{-1} : c \to c_A$ *on määratud maatriksi* A *pöördmaatriksiga* A^{-1}.

Tõestus. Väite tõestamiseks tähistame operaatori, mis on antud maatrikste isendusega $x = A^{-1}y$, tähega C, ning näitame, et

$$A \circ C = C \circ A = I.$$

Kõigepealt arvutame $y \in c$ korral

$$(A \circ C)y = A(Cy) = \Big(\sum_{k=0}^{n} a_{nk} \sum_{i=0}^{k} \alpha_{ki} y_i\Big)_n$$

$$= \Big(\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_{nk}\alpha_{ki} y_i\Big)_n = \Big(\sum_{i=0}^{n} \delta_{ni} y_i\Big)_n = y,$$

s.t. $A \circ C = I$. Edasi, kui $x \in c_A$, siis

$$(C \circ A)x = C(Ax) = \Big(\sum_{i=0}^{k} \alpha_{ki} \sum_{j=0}^{i} a_{ij}x_j\Big)_k$$

$$= \Big(\sum_{j=0}^{k} \Big(\sum_{i=j}^{k} \alpha_{ki}\, a_{ij}\Big)x_j\Big)_k = \Big(\sum_{j=0}^{k} \delta_{kj}x_j\Big)_k = x,$$

s.t. $C \circ A = I$.

Suurem enamus klassikalistest summeerimismenetlustest on normaalsed. Eelmises paragrahvis defineeritud Cesàro menetluse C_α $(\alpha > -1)$ pöördmaatriks (γ^{α}_{nk}) esitub kujul

$$\gamma^{\alpha}_{nk} = \begin{cases} \binom{k+\alpha}{k}\binom{n-k-1}{n-k}, & \text{kui } k \le n, \\ 0, & \text{kui } k > n. \end{cases} \tag{3.5}$$

Rieszi kaalutud keskmiste menetlus M_p ning Nörlundi menetlus N_p on normaalsed parajasti siis, kui $p_k \neq 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Menetluse M_p pöördmaatriks (μ_{nk}) on kujul

$$\mu_{nk} = \begin{cases} P_n/p_n, & \text{kui } k = n, \\ -P_{n-1}/p_n, & \text{kui } k = n-1, \\ 0, & \text{kui } k < n-1 \text{ või } k > n. \end{cases} \tag{3.6}$$

Erijuhul $p_k = 1$ $(k \in \mathbb{N})$ saame aritmeetiliste keskmiste menetluse C_1 pöördmaatriksi

$$C_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 2 & & & 0 \\ & -2 & 3 & & \\ & & -3 & 4 & \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Täiendused ja märkused

Summeeruvusväljade topoloogilise struktuuri uurimine sai alguse Poola funktsionaalanalüütikute töödes. 1927. a. andis Lvovi Ülikool oma auhinna Mazurile summeerimismenetluste kooskõlaprobleemi lahendamise eest (vt. §11). Selles auhinnatöös (vt. [164]) rakendas autor tollal alles kujunemisjärgus olevat normeeritud ruumide teooriat. Mitmed summeeruvusteooria probleemid said lahenduse Banachi kuulsas monograafias [10]. Näiteks leitakse seal reversiivse maatriksi A puhul iga A-summeeruva jada x jaoks järgmine esitus (vrd. §11):

$$x_k = \alpha_k \lim_A x + \sum_i c_{ki}(Ax)_i \qquad (\sum_i |c_{ki}| < \infty,\ k \in \mathbb{N}).$$

Kui A on normaalne, siis $(\alpha_k) = 0$ ja $C = A^{-1}$. Mittenormaalse A korral on C küll parempoolne, kuid mitte tingimata vasakpoolne pöördmaatriks. Seejuures võib (α_k) olla isegi tõkestamata jada (vt. Macphail ja Wilansky [157]). Ülaltoodud näited kuuluvad Wilanskyle ja Zellerile (vt. [260], [253], 12.4).

Märgime, et maatriksi reversiivsus ei ole tarvilik tingimus selleks, et tema summeeruvusväli oleks Banachi ruum. Allpool (vt. §7) tõestame, et kui A ei sisalda nullveerge ja iga $x \in c_A$ korral $\|x\|^* := \sup_{n,m} |\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k| < \infty$, siis $(c_A, \|\ \|^*)$ on Banachi ruum.

Banachi ruumide teooria meetodite rakendamise kohta summeeruvusteoorias vt. Wilansky [249], reversiivsete maatriksite üldise käsitluse kohta vt. Wilansky ja Zeller [260], [263].

§4. F-RUUMID

Kui reversiivse maatriksi summeeruvusväli on Banachi ruum, siis üldiste maatriksite korral vajame summeeruvusvälja struktuuri kirjeldamiseks üldisemat tüüpi ruume. Selleks defineerime käesolevas paragrahvis F-ruumid ja tutvume nende põhiliste omadustega. Me ei sea endale eesmärgiks esitada F-ruumide süstemaatilist teooriat, piirdume vaid üldise skeemiga ning nende faktidega, mida me allpool vajame summeeruvusväljade uurimiseks. Seejuures rõhutame analoogiat normeeritud ruumidega, F-ruumide geomeetrilised ehk topoloogilised omadused jäävad siinkohal tahaplaanile.

Olgu X vektorruum. Funktsionaali $p : X \to \mathbb{R}$ nimetatakse *poolnormiks*, kui ta rahuldab tingimusi

$$p(x) \geq 0,$$
$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x),$$
$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad (x,y \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}).$$

Selle definitsiooni järgi on iga norm poolnorm, täpsemalt, selline poolnorm, et

$$p(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Lihtne on veenduda, et poolnormi p korral kehtib võrratus

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x-y) \quad (x,y \in X).$$

Vektorruumi X koos temal määratud lõpliku või loenduva poolnormide süsteemiga $\mathcal{P}$, mis *eraldab punktid ruumis* X, s.t. rahuldab tingimust

$$\forall x \in X \setminus \{0\}\ \exists p \in \mathcal{P} : p(x) \neq 0, \tag{4.1}$$

nimetame *loenduvnormeeritud ruumiks* ja tähistame $(X,\mathcal{P})$ või lihtsalt X, kui see ei tekita arusaamatusi. On ilmne, et lõpliku süsteemi $\mathcal{P} = \{p_0, \ldots, p_m\}$ korral on X normeeritud ruum normiga $\|x\| := \sum_{i=0}^{m} p_i(x)$ $(x \in X)$. Teisalt on iga normeeritud ruum $(X, \|\ \|)$ vaadeldav loenduvnormeeritud ruumina, kus $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ja $p_i = \|\ \|$ iga $i \in \mathbb{N}$ korral. Niisiis, meil on tegemist normeeritud ruumi üldistusega.

Osutub, et loenduvnormeeritud ruum $(X,\mathcal{P})$ on meetriline ruum, kui kaugus punktide x ja y vahel defineerida seosega

$$d(x,y) := \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \frac{p_i(x-y)}{1 + p_i(x-y)}.$$

Jätame lugejale kontrollida, et d(x,y) rahuldab vektorruumis X meetrika aksioome. Märgime vaid, et kolmnurgaaksioomi kontrollimisel kasutatakse funktsiooni $t/(1 + t)$ $(t \geq 0)$ monotoonsust ning võrratust

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \quad (a,b \geq 0).$$

Vahetu kontroll näitab veel, et antud meetrika on nihke suhtes invariantne, s.t.

$$d(x + z,\ y + z) = d(x,y) \quad (x,y,z \in X).$$

Elemendi x kaugust ruumi X nullpunktist tähistame $!x!$, niisiis,

$$!x! := d(x,0).$$

Funktsionaali $!\ ! : X \to \mathbb{R}$ nimetatakse *paranormiks* vektorruumis X.

Kuivõrd $(X,\mathcal{P})$ on meetriline ruum, siis on temas defineeritud jada koonduvus. Nagu harilikult, märgime jada $x^{(n)}$ koonduvust elemendiks x kas $x^{(n)} \to x$ (vajaduse korral ka

$x^{(n)} \to x((X,\mathcal{P}))$ või $\lim_n x^{(n)} = x$. Koonduvuse definitsiooni kohaselt

$$x^{(n)} \to x \Leftrightarrow \lim_n \|x^{(n)} - x\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_n \sum_i 2^{-i} \frac{p_i(x^{(n)} - x)}{1 + p_i(x^{(n)} - x)} = 0.$$

Kasutades rea ühtlase koonduvuse Weierstrassi tunnust, saab näidata, et viimases tingimuses vasakul pool olev rida koondub ühtlaselt $n \in \mathbb{N}$ suhtes, mistõttu

$$\lim_n \sum_i 2^{-i} \frac{p_i(x^{(n)} - x)}{1 + p_i(x^{(n)} - x)} = \sum_i 2^{-i} \lim_n \frac{p_i(x^{(n)} - x)}{1 + p_i(x^{(n)} - x)}.$$

Kokkuvõttes saame

LAUSE 4.1. *Jada* $(x^{(n)})$ *koondub elemendiks* x *ruumis* $(X,\mathcal{P})$ *parajasti siis, kui*

$$p_i(x^{(n)} - x) \to 0 \quad (i \in \mathbb{N},\ n \to \infty).$$

Analoogiliselt näidatakse, et jada $(x^{(n)})$ on Cauchy jada ruumis $(X,\mathcal{P})$ parajasti siis, kui

$$p_i(x^{(n)} - x^{(l)}) \to 0 \quad (i \in \mathbb{N},\ n,l \to \infty),$$

s.t.kui

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \exists N_i \in \mathbb{N} : n,l > N_i \Rightarrow p_i(x^{(n)} - x^{(l)}) < \varepsilon.$$

Alamhulka $D \subset X$ nimetatakse *tõkestatuks*, kui $\sup_{x \in D} p(x) < \infty$ $(p \in \mathcal{P})$, s.t. kui iga poolnorm $p \in \mathcal{P}$ on hulgal D tõkestatud.

Enne, kui püstitada probleemi lineaarsete operaatorite ning funktsionaalide pidevusest loenduvnormeeritud ruumides, leiame tingimuse poolnormi pidevuseks.

LAUSE 4.2. *Olgu* q *poolnorm ruumis* $(X,\mathcal{P})$. *Järgmised tingimused on samaväärsed:*

(a) q *on pidev*,

(b) q *on pidev punktis* 0,

(c) *leiduvad* $m \in \mathbb{N}$ *ja* $M > 0$, *et*

$$q(x) \le M \sum_{i=0}^{m} p_i(x) \quad (x \in X).$$

Tõestus. On selge, et (a) $\Rightarrow$ (b). Implikatsiooni (b) $\Rightarrow$ (c) tõestamiseks oletame, et tingimus (c) ei kehti, siis leiduvad elemendid $x^{(n)} \in X$ ja arvud $K_n > 0$, et

$\lim_n K_n = \infty$ ning

$$q(x^{(n)}) \geq K_n \sum_{i=0}^{n} p_i(x^{(n)}) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Valime arvud $c_n > 0$ selliselt, et $c_n \sum_{i=0}^{n} p_i(x^{(n)}) \to 0$, aga $K_n c_n \sum_{i=0}^{n} p_i((x^{(n)}) \to \infty$ $(n \to \infty)$. Siis iga $j \leq n$ korral

$$p_j(c_n x^{(n)}) \leq \sum_{i=0}^{n} p_i(c_n x^{(n)}) \to 0,$$

s.t. $c_n x^{(n)} \to 0$ $(n \to \infty)$. Teiselt poolt, $q(c_n x^{(n)}) \to \infty$, mistõttu q ei ole punktis 0 pidev.

Lõpuks näitame, et (c) $\Rightarrow$ (a). Tõepoolest, kui $x \in X$ ja $x^{(n)} \to x$, siis tingimusest (c) saame

$$|q(x^{(n)}) - q(x)| \leq q(x^{(n)} - x) \leq M \sum_{i=0}^{m} p_i(x^{(n)} - x) \to 0 \ (n \to \infty),$$

s.t. q on pidev punktis x.

Tõestatud väitest selgub muuseas, et ruumis $(X,\mathcal{P})$ on kõik poolnormid $p \in \mathcal{P}$ pidevad.

Asudes nüüd uurima lineaarsete operaatorite pidevust, lepime kõigepealt kokku tähistuste suhtes. Olgu $(X,\mathcal{P})$ ja $(Y,\mathcal{Q})$ loenduvnormeeritud ruumid. Kõigi pidevate lineaarsete operaatorite $T : X \to Y$ vektorruumi tähistame $L(X,Y)$. Erijuhul, kui $Y = \mathbb{K}$, nimetatakse vektorruumi $L(X,\mathbb{K})$ ruumi $(X,\mathcal{P})$ *kaasruumiks*, ning tähistatakse X' või täpsemalt $(X,\mathcal{P})'$.

Mäletatavasti on normeeritud ruumide korral lineaarse operaatori pidevus samaväärne tema tõkestatusega, viimast on aga enamasti hõlpsam kontrollida. Me anname järgnevalt pidevusega samaväärse lihtsamini kontrollitava tingimuse lineaarsete operaatorite jaoks ka loenduvnormeeritud ruumides.

LAUSE 4.3. *Olgu* $(X,\mathcal{P})$ *ja* $(Y,\mathcal{Q})$ *loenduvnormeeritud ruumid ning* $T : X \to Y$ *lineaarne operaator. Järgmised tingimused on samaväärsed:*

(a) T *on pidev,*

(b) T *on pidev punktis* 0,

(c) *iga* $q \in \mathcal{Q}$ *korral on* $q \circ T$ *pidev,*

(d) *iga* $q \in \mathcal{Q}$ *korral leiduvad* $m \in \mathbb{N}$ *ja* $M > 0$, *et*

$$q(T(x)) \leq M \sum_{i=0}^{m} p_i(x) \quad (x \in X).$$

Tõestus. Operaatori T lineaarsusest saame, et (a) $\Leftrightarrow$ (b), ilmselt kehtib (b) $\Rightarrow$ (c). Lausest 4.2 järeldub (c) $\Rightarrow$ (d). Jääb tõestada implikatsioon (d) $\Rightarrow$ (b). Kui $x^{(n)} \to 0$ $((X,\mathcal{P}))$, siis $p_i(x^{(n)}) \to 0$ $(i \in \mathbb{N})$ ning iga $q \in Q$ korral saame tingimusest (d), et $q(T(x^{(n)})) \to 0$. Seega on operaator T punktis 0 pidev.

JÄRELDUS 4.4. *Lineaarne funktsionaal f on ruumis* $(X,\mathcal{P})$ *pidev parajasti siis, kui leiduvad* $m \in \mathbb{N}$ *ja* $M > 0$, *et*

$$|f(x)| \le M \sum_{i=0}^{m} p_i(x) \quad (x \in X). \tag{4.2}$$

Jätame lugejale iseseisvalt veenduda, et lause 4.3 tingimus (d) tähendab tegelikult operaatori T *tõkestatust*, s.t., et T teisendab iga tõkestatud hulga tõkestatuks parajasti siis, kui ta rahuldab tingimust (d). Niisiis, ka loenduvnormeeritud ruumide puhul on lineaarne operaator pidev parajasti siis, kui ta on tõkestatud.

Me ütleme, et loenduvnormeeritud ruumid $(X,\mathcal{P})$ ja (Y,Q) on *isomorfsed*, kui leidub niisugune pööratav pidev lineaarne operaator $T : X \to Y$, mille pöördoperaator $T^{-1} : Y \to X$ on samuti pidev. Tegemist on lineaarse ja topoloogilise isomorfismiga ruumide X ja Y vahel. Kui loenduvnormeeritud ruumide $(X,\mathcal{P})$ ning (X,Q) vahel korraldab ühikoperaator $I : (X,\mathcal{P}) \to (X,Q)$ isomorfismi, siis ütleme, et poolnormide süsteemid $\mathcal{P}$ ja Q on *ekvivalentsed*.

LAUSE 4.5. *Kui loenduvad poolnormide süsteemid* $\mathcal{P}$ *ja* Q *eraldavad punktid vektorruumis* X, *siis järgmised tingimused on samaväärsed:*

(a) $\mathcal{P}$ *ja* Q *on ekvivalentsed,*

(b) *iga* $q \in Q$ *on pidev ruumis* $(X,\mathcal{P})$ *ja iga* $p \in \mathcal{P}$ *on pidev ruumis* (X,Q),

(c) $x_n \to 0$ $((X,\mathcal{P})) \Leftrightarrow x_n \to 0$ $((X,Q))$.

Selle väite jätame lugejale kontrollida. Märgime veel, et kui $(X,\mathcal{P})$ on loenduvnormeeritud ruum, siis süsteem $\tilde{\mathcal{P}} := \{\tilde{p}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, kus $\tilde{p}_i(x) := \sum_{k=0}^{i} p_k(x)$ $(x \in X)$ on esialgse süsteemiga ekvivalentne. Niisiis, me võime iga loenduvnormeeritud ruumi $(X,\mathcal{P})$ korral eeldada, et süsteem $\mathcal{P}$ rahuldab tingimust

$$p_0(x) \le p_1(x) \le \ldots \le p_i(x) \le \ldots \quad (x \in X).$$

Sel juhul öeldakse, et $\mathcal{P}$ on *suunatud* süsteem.

Normeeritud ruumi omaduste uurimisel mängivad pidevad lineaarsed funktsionaalid väga olulist osa, kusjuures enamus vastavasisulisi tulemusi tugineb *Hahn-Banachi teoreemile*. Me formuleerime selle teoreemi siin tema üldisel kujul. Kuna tõestus ei erine põhimõtteliselt sellest funktsionaali jätkamise printsiibi tõestusest, mis harilikult esitatakse funktsionaalanalüüsi põhikursuses, siis jätame ta vahele ja soovitame lugejale vajaduse korral õpikuid [319] (lk. 135-138) ja [132] (lk. 478-482).

TEOREEM 4.6. *Olgu* q *poolnorm vektorruumis* X *ning* g *selline lineaarne funktsionaal alamruumis* $L \subset X$, *et* $|g(x)| \le q(x)$ *iga* $x \in L$ *korral. Siis leidub lineaarne funktsionaal* f *vektorruumis* X, *mis rahuldab tingimusi*

$$f(x) = g(x) \quad (x \in L), \tag{4.3}$$

$$|f(x)| \le q(x) \quad (x \in X). \tag{4.4}$$

Kui L on loenduvnormeeritud ruumi $(X,\mathcal{P})$ alamruum, siis on $(L, \mathcal{P}|_L)$ samuti loenduvnormeeritud ruum, kus

$$\mathcal{P}|_L := \{p|_L \mid p \in \mathcal{P}\}.$$

Iga $g \in L'$ korral leiduvad $m \in \mathbb{N}$ ja $M > 0$, et (vrd. (4.2))

$$|g(x)| \le M \sum_{i=0}^{m} p_i(x) =: q(x) \quad (x \in L).$$

Rakendades funktsionaalile g ja poolnormile q teoreemi 4.6, saame $f \in X'$, mis rahuldab tingimusi (4.3) ja (4.4). Niisiis kehtib järgmine *funktsionaali jätkamise printsiip loenduvnormeeritud ruumis*.

TEOREEM 4.7. *Olgu* L *ruumi* $(X,\mathcal{P})$ *alamruum ja* $g \in (L, \mathcal{P}|_L)'$. *Siis leiduvad* $f \in X'$, $m \in \mathbb{N}$ *ja* $M > 0$, *et*

$$f(x) = g(x) \quad (x \in L),$$

$$|f(x)| \le M \sum_{i=0}^{m} p_i(x) \quad (x \in X).$$

Edasi tõestame mõned kasulikud järeldused Hahn-Banachi teoreemist.

LAUSE 4.8. *Kui funktsionaal* $f \in (X,\mathcal{P})'$ *rahuldab võrratust* (4.2), *siis leiduvad sellised funktsionaalid* $f_0,\dots,f_m \in (X,\mathcal{P})'$, *et*

$$f = f_0 + \dots + f_m, \quad |f_i(x)| \le Mp_i(x) \quad (x \in X,\ i = 0,\dots,m).$$

Tõestuse esitame juhul $M = m = 1$, s.t. eeldusel

$$|f(x)| \le p(x) + q(x) \qquad (x \in X),$$

kus $p,q \in \mathcal{P}$. Üldisel juhul on tõestus analoogiline. Tähistame $h((x,y)) := p(x) + q(y)$ $(x,y \in X)$, lihtne on veenduda, et h on poolnorm vektorruumis $X \times X$. Märkides $g((x,x)) := f(x)$ $(x \in X)$, saame alamruumis $H := \{(x,x) \mid x \in X\}$ lineaarse funktsionaali g. Kuna $|g((x,x))| \le h((x,x))$ $((x,x) \in H)$, siis saab g Hahn-Banachi teoreemi abil jätkata kogu ruumile $X \times X$ lineaarseks funktsionaaliks G nii, et $|G((x,y))| \le h((x,y)) = p(x) + q(y)$ $((x,y) \in X \times X)$. Nüüd defineerime funktsionaalid f_0 ja f_1 ruumis X seostega $f_0(x) := G((x,0))$ ja $f_1(x) := G((0,x))$, siis

$$f = f_0 + f_1, \quad |f_0(x)| \le p(x), \ |f_1(x)| \le q(x) \ (x \in X).$$

Viimastest võrratustest järeldub, et $f_0, f_1 \in X'$. Väide on tõestatud.

Järgmine väide vastab normeeritud ruumide teooriast tuntud *teoreemile piisavast arvust funktsionaalidest*.

LAUSE 4.9. *Kui* q *on pidev poolnorm ruumis* $(X,\mathcal{P})$ *ning* $z \in X$, *siis leidub* $f \in X'$, *et*

$$f(z) = q(z), \quad |f(x)| \le q(x) \quad (x \in X).$$

Tõestus. Tähistame $L := \langle z \rangle := \{\lambda z \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ ning moodustame funktsionaali

$$g : L \to \mathbb{K}, \quad \lambda z \to \lambda q(z).$$

Et $g(z) = q(z)$ ja

$$|g(\lambda z)| = |\lambda g(z)| = |\lambda| q(z) = q(\lambda z) \quad (\lambda \in \mathbb{K}),$$

siis Hahn-Banachi teoreemi kohaselt leidub lineaarne funktsionaal $f\colon X \to \mathbb{K}$, mis rahuldab tingimusi (4.3) ja (4.4). Tingimusest (4.4) järeldub ka funktsionaali f pidevus, seega on tal kõik nõutud omadused.

JÄRELDUS 4.10. *Loenduvnormeeritud ruumi* X *kaasruum* X' *eraldab punktid vektorruumis* X.

Tõestus. Kui $z \in X$ ja $z \neq 0$, siis tingimuse (4.1) tõttu leidub $p \in \mathcal{P}$, et $p(z) \neq 0$. Lause 4.9 põhjal saame leida sellise $f \in X'$, mis rahuldab tingimust $f(z) = p(z)$, seega $f(z) \neq 0$.

LAUSE 4.11. *Loenduvnormeeritud ruumi* $(X,\mathcal{P})$ *alamruumi* L *korral kehtivad järgmised väited.*

(a) Kui $z \in X \setminus \bar{L}$, *siis leidub* $f \in X'$, *et* $\ker f \supset L$ *ja* $f(z) = 1$.

(b) Kui L *on kinnine ja* $z \in X$, *siis ka* $L \oplus \langle z\rangle$ *on kinnine.*

(c) Iga $z \in X$ *korral* $\overline{L \oplus \langle z\rangle} = \bar{L} \oplus \langle z\rangle$.

Tõestus. (a) Kõigepealt märgime, et kuna $z \notin \bar{L}$, siis leiduvad $\varepsilon > 0$ ja $m \in \mathbb{N}$, et

$$\sum_{i=0}^{m} p_i(x - z) \geq \varepsilon \qquad (x \in L). \tag{4.5}$$

Tõepoolest, vastasel korral saaksime valida niisuguse elementide jada $(x^{(n)})$ alamruumis L, et $\sum_{i=0}^{n} p_i(x^{(n)} - z) \to 0$ $(n \to \infty)$. Sellest aga järelduks $x^{(n)} \to z$, mis on vastuolus eeldusega $z \notin \bar{L}$.

Defineerime funktsionaali

$$g\colon L \oplus \langle z\rangle \to \mathbb{K}, \qquad y := x + \lambda z \to \lambda,$$

siis g on lineaarne, $\ker g \supset L$ ning $g(z) = 1$. Näitame, et g on pidev alamruumis $L \oplus \langle z\rangle$. Kui $x + \lambda z \in L \oplus \langle z\rangle$ ja $\lambda \neq 0$, siis $-(x/\lambda) \in L$ ning võrratuse (4.5) tõttu $\sum_{i=0}^{m} p_i(-(x/\lambda) - z) \geq \varepsilon$. Seepärast

$$|g(y)| = |\lambda| \leq \frac{|\lambda|}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{m} p_i(-\frac{x}{\lambda} - z) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{m} p_i(y)$$

iga $y \in L \oplus \langle z\rangle$ puhul, millest järelduse 4.4 põhjal saame, et $g \in (L \oplus \langle z\rangle)'$. Rakendades teoreemi 4.7, jätkame g kogu ruumis pidevaks funktsionaaliks f, millel on nõutavad omadused.

(b) Olgu $L = \bar{L}$, võtame alamruumis $L \oplus \langle z\rangle$ elementide $y^{(n)} := x^{(n)} + \lambda_n z$ jada, mis koondub ruumis X mingiks punktiks y. Kuna eelpool defineeritud funktsionaal f on pidev, siis $\lim_n \lambda_n = f(y)$. Seega $x^{(n)} = y^{(n)} - \lambda_n z \to y - f(y)z =: x$. Tänu alamruumi L kinnisusele kehtib $x \in L$ ning $y = x + f(y)z \in L \oplus \langle z\rangle$. Kokkuvõttes tõestasime, et $L \oplus \langle z\rangle$ on kinnine.

(c) Kuna $L \subset L \oplus \langle z \rangle$, siis $\bar{L} \subset \overline{L \oplus \langle z \rangle}$ ning $\bar{L} \oplus \langle z \rangle \subset \overline{L \oplus \langle z \rangle}$. Vastupidi, sisalduvusest $L \oplus \langle z \rangle \subset \bar{L} \oplus \langle z \rangle$ järeldub väite (b) tõttu, et $\overline{L \oplus \langle z \rangle} \subset \overline{\bar{L} \oplus \langle z \rangle} = \bar{L} \oplus \langle z \rangle$.

JÄRELDUS 4.12. *Olgu* L *loenduvnormeeritud ruumi* $(X,\mathcal{P})$ *kõikjal tihe alamruum. Kui funktsionaalide* $f, g \in X'$ *korral* $f|_L = g|_L$, *siis* $f = g$.

Ütleme, et jada $(x^{(n)})$ *koondub nõrgalt* elemendiks x loenduvnormeeritud ruumis $(X,\mathcal{P})$ ja tähistame $x^{(n)} \dashrightarrow x$ (vajaduse korral ka $x^{(n)} \dashrightarrow x((X,\mathcal{P}))$, kui

$$f(x^{(n)}) \to f(x) \quad \text{iga } f \in X' \text{ korral.}$$

Märgime nõrga koonduvuse mõningaid omadusi, mis normeeritud ruumide korral on meile teada funktsionaalanalüüsi kursusest.

LAUSE 4.13. *Kui* $x^{(n)} \to x$ *ruumis* $(X,\mathcal{P})$, *siis* $x^{(n)} \dashrightarrow x$.

Tõestus. Kehtigu $x^{(n)} \to x$, siis $p_i(x^{(n)} - x) \to 0$ $(i \in \mathbb{N})$. Seepärast iga $f \in X'$ korral (vrd. järeldus 4.4)

$$|f(x^{(n)}) - f(x)| = |f(x^{(n)} - x)| \le M \sum_{i=0}^{m} p_i(x^{(n)} - x) \to 0,$$

tähendab, $f(x^{(n)}) \to f(x)$. Järelikult $x^{(n)} \dashrightarrow x$.

LAUSE 4.14. *Kui* $x^{(n)} \dashrightarrow x$ *ruumis* $(X,\mathcal{P})$, *siis*
(a) piirväärtus x *on üheselt määratud,*
(b) leidub elementide $x^{(n)}$ *lineaarsete kombinatsioonide jada* $(z^{(n)})$, *et* $z^{(n)} \to x((X,\mathcal{P}))$.

Tõestus. Väite (a) jätame lugejale kontrollida. Väite (b) tõestamiseks tähistame $L := \text{lin}\,\{x^{(n)} | n \in \mathbb{N}\}$ ja oletame vastuväiteliselt, et $x \notin \bar{L}$. Rakendades lauset 4.11 (a), saab leida funktsionaali $f \in X'$ tingimustega $f(x) = 1$ ja $f(x^{(n)}) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, mis on vastuolus eeldusega $x^{(n)} \dashrightarrow x$.

Me võiksime analoogiliselt nõrga koonduvusega defineerida ka jada nõrga tõkestatuse, kuid järgmine lause näitab, et see omadus ei erine jada tõkestatusest.

LAUSE 4.15. *(a) Loenduvnormeeritud ruumi $(X,\mathcal{P})$ elementide jada $(x^{(n)})$ on tõkestatud parajasti siis, kui*

$$\sup_n |f(x^{(n)})| < \infty \quad \textit{iga } f \in X' \textit{ korral.} \qquad (4.6)$$

(b) Iga nõrgalt koonduv jada loenduvnormeeritud ruumis on tõkestatud.

Tõestus. (a) Tarvilikkus. Olgu $f \in X'$. Kui jada $(x^{(n)})$ on tõkestatud, siis arvjadad $(p_i(x^{(n)}))_n$ on iga $i \in \mathbb{N}$ korral tõkestatud. Tingimuse (4.6) saame vahetult järeldusest 4.4.

Piisavus. Eeldame, et tingimus (4.6) on täidetud ning tähistame suvalise $p \in \mathcal{P}$ korral

$$X'_p := \{f \in X' \mid \exists M > 0 : |f(x)| \le Mp(x) \quad (x \in X)\}.$$

Nagu näitab vahetu kontroll, on X_p normeeritud ruum normiga

$$\|f\|_p := \inf\{ M > 0 \mid |f(x)| \le Mp(x) \ (x \in X)\}$$
$$= \sup\{|f(x)| \mid p(x) \le 1\}.$$

Veelgi enam, täpselt samuti, nagu tõestatakse normeeritud ruumi kaasruumi täielikkus, veendutakse, et $(X'_p, \|\ \|_p)$ on Banachi ruum. Defineerime funktsionaalid

$$F_n : X'_p \to \mathbb{K}, \qquad f \to f(x^{(n)}) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ilmselt on need lineaarsed, kuid ka tõkestatud:

$$|F_n(f)| = |f(x^{(n)})| \le \|f\|_p\, p(x^{(n)}) \quad (f \in X'_p,\ n \in \mathbb{N}).$$

Seega $F_n \in (X'_p)'$ ja $\|F_n\| \le p(x^{(n)})$ $(n \in \mathbb{N})$. Teiselt poolt saab lause 4.9 põhjal iga $n \in \mathbb{N}$ korral leida $f^{(n)} \in X'$ omadustega $\|f^{(n)}\|_p \le 1$ ja $f^{(n)}(x^{(n)}) = p(x^{(n)})$. Seetõttu $\|F_n\| = \sup\{|f(x^{(n)})| \mid \|f\|_p \le 1\} \ge p(x^{(n)})$, järelikult kehtib võrdus $\|F_n\| = p(x^{(n)})$ $(n \in \mathbb{N})$. Kuna $(f(x^{(n)}))$ on tõkestatud arvjada iga $f \in X'$ puhul, siis on funktsionaalide jada (F_n) punktiviisi tõkestatud Banachi ruumis X'_p. Ühtlase tõkestatuse printsiibi põhjal moodustavad normid $\|F_n\|$ tõkestatud arvjada. Seega oleme näidanud, et $\sup_n p(x^{(n)}) < \infty$ iga $p \in \mathcal{P}$ korral, niisiis on jada $(x^{(n)})$ tõkestatud ruumis $(X,\mathcal{P})$.

Väide (b) järeldub vahetult väitest (a).

Täielikku loenduvnormeeritud ruumi nimetatakse Frechet' ehk F-*ruumiks*. Iga Banachi ruum on F-ruum, kuid Banachi ruumid ei ammenda kogu F-ruumide klassi. Lihtsaimaks ja tuntuimaks F-ruumiks, mis ei ole normeeruv, on kõigi arvjadade vektorruum ω poolnormidega $r_i(x) := |x_i|$ $(i \in \mathbb{N})$ (vt. §5).

Loomulikult on iga F-ruum kui meetriline ruum ka topoloogiline ruum, seepärast räägime me allpool mõnikord ka

F-*topoloogiast*.

Teatavasti tugineb lineaarsete operaatorite teooria Banachi ruumides kolmele *põhiprintsiibile*, need on funktsionaali jätkamise, lahtise kujutuse ning ühtlase tõkestatuse printsiip. Analoogilised väited moodustavad ka F-ruumide korral selle aluse, millele rajaneb pidevate lineaarsete operaatorite uurimine. Ühte neist kolmest, nimelt funktsionaali jätkamise printsiipi, me juba tunneme (vt. teoreem 4.7).

TEOREEM 4.16 (lahtise kujutuse printsiip). *Olgu* $(X,\mathcal{P})$ *ja* (Y,Q) F-*ruumid. Kui operaator* $T \in L(X,Y)$ *on sürjektiivne, siis on ta lahtine, s.t. teisendab iga lahtise hulga lahtiseks hulgaks.*

Tõestus ei erine põhimõtteliselt ega ka detailides sellest tõestusest, mis on toodud näiteks Kangro õpikus [132] (lk. 469-472) Banachi ruumide korral. Tuleb vaid norm $\| \ \|$ asendada paranormiga $! \ !$ ning kasutada järgmist F-ruumide omadust.

LAUSE 4.17. *Kui* $\sum_k x_k$ *on selline elementide rida* F-*ruumis* X, *et* $\sum_k !x_k! < \infty$, *siis see rida koondub.*

Tõestus. Kuna $\sum_k !x_k! < \infty$, siis $m \geq n$ korral

$$!\sum_{k=0}^{m} x_k - \sum_{k=0}^{n} x_k ! = ! \sum_{k=n+1}^{m} x_k ! \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} !x_k! \to 0 \ (n \to \infty),$$

s.t. rea $\sum_k x_k$ osasummad moodustavad Cauchy jada. Et X on täielik ruum, siis rida $\sum_k x_k$ koondub.

Lahtise kujutuse printsiibist järeldub

TEOREEM 4.18 (teoreem pöördoperaatorist). *Olgu* $(X,\mathcal{P})$ *ja* (Y,Q) F-*ruumid. Kui operaator* $T \in L(X,Y)$ *on pööratav, siis* $T^{-1} \in L(Y,X)$.

Tõestus. Teatavasti on pööratava lineaarse operaatori pöördoperaator lineaarne, niisiis jääb näidata vaid operaatori T^{-1} pidevus. Olgu $G \subset X$ lahtine hulk, siis $(T^{-1})^{-1}(G) = T(G)$ on teoreemi 4.16 järgi lahtine. Seega on operaatori T^{-1} suhtes lahtiste hulkade originaalid lahtised, mis tähendabki tema pidevust.

Meenutame, et vektorruumide X ja Y otsekorrutis

$$X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

on vektorruum, milles lineaarsed tehted on defineeritud koordinaaditi:

$$(x,y) + (x',y') := (x+x',y+y'),\ \lambda(x,y) := (\lambda x,\lambda y)\ (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Kui $(X,\mathcal{P})$ ja $(Y,\mathcal{Q})$ on loenduvnormeeritud ruumid, siis tähistame

$$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{r_{ij} \mid i,j \in \mathbb{N}\},$$

kus

$$r_{ij}((x,y)) := p_i(x) + q_j(y) \quad (x \in X,\ y \in Y,\ i,j \in \mathbb{N}).$$

Jätame lugejale kontrollida järgmised väited.

1° Funktsionaalid $r_{ij} : X \times Y \to \mathbb{R}$ $(i,j \in \mathbb{N})$ on poolnormid ning süsteem $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ rahuldab vektorruumil $X \times Y$ tingimust (4.1), s.t. $(X \times Y, \mathcal{P} \times \mathcal{Q})$ on loenduvnormeeritud ruum.

2° Jada $((x^{(n)},y^{(n)}))$ koondub elemendiks (x,y) ruumis $(X \times Y,\mathcal{P} \times \mathcal{Q})$ parajasti siis, kui $x^{(n)} \to x((X,\mathcal{P}))$ ja $y^{(n)} \to y((Y,\mathcal{Q}))$.

3° Kui $(X,\mathcal{P})$ ja $(Y,\mathcal{Q})$ on F-ruumid, siis ka $(X \times Y,\mathcal{P} \times \mathcal{Q})$ on F-ruum.

Olgu $(X,\mathcal{P})$ ja $(Y,\mathcal{Q})$ loenduvnormeeritud ruumid. Öeldakse, et operaator $T : X \to Y$ on *kinnine*, kui tema graafik

$$\operatorname{gr} T := \{(x,T(x)) \mid x \in X\}$$

on kinnine alamhulk ruumis $(X \times Y,\mathcal{P} \times \mathcal{Q})$. Nii nagu normeeritud ruumide korral, on ka siin operaatori T kinnisus samaväärne implikatsiooniga

$$x^{(n)} \to x,\ T(x^{(n)}) \to y \ \Rightarrow\ T(x) = y,$$

millest muuhulgas järeldub, et iga pidev operaator on kinnine.

TEOREEM 4.19 (teoreem kinnisest graafikust). *Kui* $(X,\mathcal{P})$ *ja* $(Y,\mathcal{Q})$ *on F-ruumid ning* $T : X \to Y$ *on kinnine lineaarne operaator, siis* $T \in L(X,Y)$.

Tõestus. Kõigepealt märgime, et gr T on F-ruumi $(X \times Y, \mathcal{P} \times \mathcal{Q})$ alamruum, mis eelduse kohaselt on kinnine, seega samuti F-ruum. Defineerime operaatorid

$$S_X : \operatorname{gr} T \to X,\quad (x,\ T(x)) \mapsto x,$$

$$S_Y\colon \operatorname{gr} T \to Y, \quad (x, T(x)) \to T(x).$$

Ilmselt on S_X bijektiivne lineaarne operaator ning seejuures ka pidev, kuna iga $i \in \mathbb{N}$ korral kehtib võrratus

$$p_i(S_X((x,y))) = p_i(x) \le r_{ij}((x,y)) \quad (x \in X,\ y \in Y,\ j \in \mathbb{N})$$

(vrd. lause 4.5). Teoreemi 4.18 järgi on $S_X^{-1}\colon X \to \operatorname{gr} T$ pidev. Kuna operaator S_Y on pidev ning $T = S_Y \circ S_X^{-1}$, siis on $T\colon X \to Y$ pidev operaator.

Järgmine teoreem on *ühtlase tõkestatuse printsiibi* analoog.

TEOREEM 4.20. *Olgu* $(X,\mathcal{P})$ *ja* (Y,Q) *F-ruumid ning* $T_n \in L(X,Y)$ $(n \in \mathbb{N})$. *Kui* $(T_n(x))$ *on iga* $x \in X$ *korral tõkestatud ruumis* Y *(s.t. kui* (T_n) *on punktiviisi tõkestatud), siis iga* $q \in Q$ *jaoks leiduvad* $m \in \mathbb{N}$ *ning* $M > 0$, *et*

$$\sup_n q(T_n(x)) \le M \sum_{i=0}^{m} p_i(x) \quad (x \in X). \tag{4.7}$$

Enne kui asume seda väidet tõestama, märgime järgmist. Alamhulka $H \subset L(X,Y)$ nimetatakse *võrdpidevaks*, kui F-ruumi (Y,Q) iga nulliümbruse V jaoks leidub F-ruumi $(X,\mathcal{P})$ selline nulliümbrus U, et $T[U] \subset V$ kõikide $T \in H$ korral. Osutub, et H on parajasti siis võrdpidev, kui iga $q \in Q$ puhul leiduvad $m \in \mathbb{N}$ ja $M > 0$, et

$$q(T(x)) \le M \sum_{i=0}^{m} p_i(x) \quad (x \in X)$$

iga $T \in H$ korral. Niisiis võiks teoreemi 4.19 sõnastada järgmiselt: *punktiviisi tõkestatud pidevate lineaarsete operaatorite jada ühest F-ruumist teise on võrdpidev.*

Tõestus. Tähistame

$$m(Y) := \{y = (y_k) \mid \forall\, q \in Q : \hat{q}(y) := \sup_k q(y_k) < \infty\}$$

s.t. $m(Y)$ on ruumi (Y,Q) kõigi tõkestatud jadade hulk. Defineerides selles hulgas koordinaaditi liitmise ja skalaariga korrutamise, saame vektorruumi. Seejuures on $(m(Y),\hat{Q})$, kus $\hat{Q} := \{\hat{q} \mid q \in Q\}$, loenduvnormeeritud ruum, veelgi enam, ta on F-ruum. See fakt tõestatakse samamoodi, kui erijuhul $Y := \mathbb{K}$. Märgime veel ruumi $(m(Y),Q)$ ühe olulise omaduse:

$$y^{(n)} \to y\ ((m(Y),\hat{Q})) \Rightarrow y_k^{(n)} \to y_k((Y,Q)),\ (k \in \mathbb{K}), \tag{4.8}$$

kus $y^{(n)} := (y_k^{(n)})$ $(n \in \mathbb{N})$ ja $y := (y_k)$. Tõepoolest, kui $y^{(n)} \to y$, siis $\hat{q}(y^{(n)} - y) = \sup_k q(y_k^{(n)} - y_k) \to 0$ $(q \in Q)$, millest järeldub $y_k^{(n)} \to y((Y,Q))$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral.

Kuna jada (T_n) on punktiviisi tõkestatud, siis $(T_n(x)) \in m(Y)$ iga $x \in X$ korral. Defineerime operaatori

$$S\colon X \to m(Y), \quad x \to (T_n(x)),$$

mis tänu operaatorite T_n lineaarsusele on lineaarne. Näitame, et ta on kinnine. Kui eeldame, et $x^{(l)} \to x$ ja $S(x^{(l)}) \to y$, siis omadusest (4.8) ning operaatorite T_n pidevusest saame

$$y = \lim_l S(x^{(l)}) = \lim_l (T_n(x^{(l)})) = (\lim_l T_n(x^{(l)}))$$

$$= (T_n(\lim_l x^{(l)})) = (T_n(x)) = S(x).$$

Niisiis on operaator S tõepoolest kinnine ning teoreemi 4.19 järgi pidev. Seetõttu (vrd. lause 4.3) leiduvad iga $q \in Q$ jaoks $m \in \mathbb{N}$ ja $M > 0$, et

$$\sup_n q(T_n(x)) = \hat{q}(S(x)) \leq M \sum_{i=0}^{m} p_i(x) \quad (x \in X).$$

■

JÄRELDUS 4.21 (teoreem piiroperaatori pidevusest). *Olgu* $(X,\mathcal{P})$ *ja* (Y,Q) *F-ruumid ning* $T_n \in L(X,Y)$ $(n \in \mathbb{N})$. *Kui operaatorite jada* (T_n) *on punktiviisi koonduv, siis seosega*

$$T(x) := \lim_n T_n(x) \quad (x \in X)$$

määratud operaator T *on pidev ja lineaarne, s.t.* $T \in L(X,Y)$.

Tõestus. Operaator T on ilmselt lineaarne. Kuna jada (T_n) on punktiviisi tõkestatud, siis saab iga $q \in Q$ jaoks vastavalt teoreemile 4.20 leida sellised $m \in \mathbb{N}$ ja $M > 0$, et kehtib võrratus (4.7). Viimasest saame tänu poolnormi q pidevusele

$$q(T(x)) = \lim_n q(T_n(x)) \leq \sup_n q(T(x)) \leq M \sum_{i=0}^{m} p_i(x) \quad (x \in X).$$

Lause 4.3 kohaselt on T pidev operaator.

■

JÄRELDUS 4.22. *Olgu* $T_n \in L(X,Y)$ $(n \in \mathbb{N})$, *kus* $(X,\mathcal{P})$ *ja* (Y,Q) *on F-ruumid. Kui operaatorite jada* (T_n) *on punktiviisi tõkestatud, siis*

$$L := \{x \in X \mid \exists \lim_n T_n(x)\}$$

ja

$$L_0 := \{x \in X \mid \lim_n T_n(x) = 0\}$$

on kinnised alamruumid F-ruumis X.

Tõestus. Lihtne on veenduda, et L ja L_0 on vektorruumi X alamruumid. Olgu $q \in Q$ suvaline ning m ja M valitud vastavalt tingimusele (4.7). Olgu $(x^{(l)})$ selline jada alamruumis L, mis koondub ruumis X mingiks elemendiks x, s.t. $p_i(x - x^{(l)}) \to o$ iga $i \in \mathbb{N}$ korral protsessis $l \to \infty$. Seega saame suvalise $\varepsilon > 0$ puhul leida $l_o \in \mathbb{N}$, et (vrd. (4.7))

$$\sup_n q(T_n(x - x^{(l_o)})) \le M \sum_{i=0}^{n} p_i(x - x^{(l_o)}) < \varepsilon/3.$$

Edasi, kuna $x^{(l_o)} \in L$, siis on $(T_n x^{(l_o)})_n$ Cauchy jada, mistõttu leidub niisugune n_o, et kui $n,m > n_o$, siis

$$q(T_n(x^{(l_o)}) - T_m(x^{(l_o)})) < \varepsilon/3.$$

Seega kehtib juhul $n,m > n_o$

$$q(T_n(x) - T_m(x)) \le q(T_n(x - x^{(l_o)}))$$
$$+ q(T_n(x^{(l_o)}) - T_m(x^{(l_o)})) + q(T_m(x^{(l_o)} - x))$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,$$

s.t. $(T_n(x))$ on Cauchy jada F-ruumis (Y,Q) ning järelikult koonduv. Niisiis, $x \in L$, mis tähendabki alamruumi L kinnisust. Alamruumi L_o kinnisus tõestatakse analoogiliselt.

§5. FK-RUUMID

Olles varustatud eelmises paragrahvis tõestatud tulemustega F-ruumide kohta, asume uurima *jadaruume*. Nii nimetatakse vektorruume, mille elementideks on jadad ning kus lineaarsed tehted on defineeritud koordinaaditi. Teiste sõnadega, jadaruumid on vektorruumi ω alamruumid. Märgime nende olulisemad spetsiifilised mõisted.

Jadad e^k $(k \in \mathbb{N})$ olid vaatluse all juba eespool (vt. §1). Iga jada $x := (x_n) \in \omega$ jaoks defineeritakse tema *lõiked*

$$x^{[m]} := (x_0, x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots) = \sum_{k=0}^{m} x_k e^k \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Need on jadaruumi φ elemendid, seega on määratud lineaarsed operaatorid

$$S_m : \omega \to \varphi \quad , \ x \to x^{[m]} \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Antud jadaruumi X korral tähistatakse

$$X^{\alpha} := \{\varepsilon \in \omega \mid \forall x \in X : \varepsilon \cdot x \in l\},$$

$$X^\beta := \{\varepsilon \in \omega \mid \forall x \in X : \varepsilon \cdot x \in cs\},$$

$$X^\gamma := \{\varepsilon \in \omega \mid \forall x \in X : \varepsilon \cdot x \in bs\},$$

kus $\varepsilon \cdot x := (\varepsilon_k x_k)$. Lihtne on veenduda, et X^α, X^β ja X^γ on jadaruumid, neid nimetatakse vastavalt jadaruumi X α-, β- ja γ-*kaasruumiks*. Märgime näiteks (vrd., lemma 1.1), et

$$m^\alpha = m^\beta = m^\gamma = c^\alpha = c^\beta = c^\gamma = c_0^\alpha = c_0^\beta = c_0^\gamma = l,$$

$$l^\alpha = l^\beta = l^\gamma = m.$$

Defineerime veel *koordinaatfunktsionaalid*

$$\pi_k \to \mathbb{K}, \quad x := (x_k) \to x_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

ning korrutised

$$x \cdot E := \{x \cdot z \mid z \in E\}, \ E \cdot F := \{x \cdot z \mid x \in E, \ z \in F\},$$

kus $x \in \omega$ ning E ja F on ruumi ω alamhulgad.

Varustame jadaruumi X sellise loenduva poolnormide süsteemiga $\mathcal{P}$, mis eraldab punktid ruumis X. Kui $(X, \mathcal{R})$ on F-ruum ning on täidetud tingimus

(K) $\quad \pi_k \in X' \quad (k \in \mathbb{N})$,

siis nimetatakse teda FK-*ruumiks*. Normeeritud FK-ruumi korral kõneleme BK-*ruumist*. Omadus (K) on ilmselt samaväärne implikatsiooniga

$$x^{(n)} \to x((X,\mathcal{P})) \Rightarrow x_k^{(n)} \to x_k \quad (k \in \mathbb{N}, \ n \to \infty), \tag{5.1}$$

kus $x^{(n)} := (x_k^{(n)})$ $(n \in \mathbb{N})$.

<u>Näide 1.</u> Nagu me juba eelmises paragrahvis märkisime, on $(\omega, \mathcal{R})$ F-ruum, kus $\mathcal{R} := \{r_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ja

$$r_i(x) := |x_i| \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Pole kahtlust, et tingimus (5.1) on selles ruumis rahuldatud, seega on $(\omega, \mathcal{R})$ FK-ruum. Veelgi enam, tingimuses (5.1) kehtib ka vastupidine implikatsioon, mis tähendab, et ruumis $(\omega, \mathcal{R})$ on koonduvus samaväärne koordinaaditi koonduvusega.

BK-ruumid on

1) m, c ja c_0 normiga $\| \ \|_\infty$,
2) bv ja bv_0 normiga $\| \ \|_{bv}$,
3) bs ja cs normiga $\| \ \|_{bs}$,
4) l normiga $\| \ \|_1$.

FK-ruumide teooria on summeeruvusteooriaga väga tihedalt seotud, õieti on ta selleks vahelüliks, mis võimaldab summeeruvusteoorias rakendada funktsionaalanalüüsi meetodeid. Kuid vale oleks arvata, et FK-ruumide tähtsus sellega piirdubki. Tegemist on suhteliselt iseseisva peatükiga topoloogiliste jadaruumide teoorias, millel on mitmeid erinevaid rakendusi. Meie piirdume oma käsitluses siiski vaid FK-ruumide kohta käivate kõige üldisemate tulemustega, mida me vajame summeeruvusteooria probleemide lahendamiseks.

Lineaarsetest operaatoritest jadaruumides pakuvad meile huvi eeskätt sellised, mis on määratud maatriksteisendustega. Teatavasti on lõplikumõõtmeliste ruumide korral iga lineaarne operaator pidev ning esitatav maatriksteisendusega. FK-ruumide puhul ei ole täidetud kumbki neist tingimustest. Küll aga, nagu me peagi veendume, on iga maatriksteisendus ühest FK-ruumist teise pidev.

LEMMA 5.1. *Olgu* X *F-ruum ja* Y *FK-ruum. Lineaarne operaator* $T: X \to Y$ *on pidev parajasti siis, kui lineaarsed funktsionaalid*

$$T_n: X \to \mathbb{K}, \quad x \to (T(x))_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

on pidevad.

Tõestus. Kuna $T_n = \pi_n \circ T$ ning $\pi_n \in Y'$, siis pideva operaatori T korral $T_n \in X'$ $(n \in \mathbb{N})$. Vastupidi, kui funktsionaalid T_n on pidevad, siis, korrates sõna-sõnalt teoreemi 4.20 tõestuse seda osa, kus näidatakse, et S on kinnine operaator, saame operaatori T kinnisuse. Vastavalt teoreemile kinnisest graafikust on T sel juhul pidev operaator.

LAUSE 5.2. *Kui maatriksteisendusega*

$$y_n = \sum_k a_{nk} x_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

määratud operaator A *teisendab* FK*-ruumi* X FK*-ruumi* Y, *siis* $A \in L(X,Y)$.

Tõestus. Operaator $A: X \to Y$ on muidugi lineaarne. Lemma 5.1 kohaselt piisab näidata, et funktsionaalid

$$A_n: X \to \mathbb{K}, \quad x := (x_k) \to y_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

on pidevad. Tähistame $n \in \mathbb{N}$ korral

$$A_{nm}: X \to \mathbb{K}, \quad x := (x_k) \to \sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Kuna ruumis X kehtib tingimus (K), siis $A_{nm} = \sum_{k=0}^{m} a_{nk}\pi_k \in X'$

$(n,m \in \mathbb{N})$. Seejuures $A_n(x) = \lim_m A_{nm}(x)$ iga $x \in X$ ja $n \in \mathbb{N}$ korral, järelduse 4.21 kohaselt $A_n \in X'$ $(n \in \mathbb{N})$.

JÄRELDUS 5.3. (a) *Kui* X *ja* Y *on sellised* FK-*ruumid, et* $X \subset Y$, *siis sisestus*

$$i: X \to Y, \quad x \to x$$

on pidev ning $f|_X \in X'$ *iga* $f \in Y'$ *korral.*
(b) *Kui* $(X,\mathcal{P})$ ja (X,Q) *on* FK-*ruumid, siis* $\mathcal{P}$ *ja* Q *on ekvivalentsed.*

Tõestus. (a) Kuna $i_n := \pi_n \circ i = \pi_n$ on pidev ruumis X iga $n \in \mathbb{N}$ korral, siis lemma 5.1 põhjal on $i: X \to Y$ pidev. Sel juhul $f|_X = f \circ i \in X'$ suvalise $f \in Y'$ puhul.

Väide (b) järeldub väitest (a).

Järeldus 5.3 (b) sõnastatakse harilikult nii: FK-*ruumi topoloogia on üheselt määratud.*

FK-ruumide arvukatest konstruktsioonidest vaatleme siinkohal vaid nende ühisosa.

LAUSE 5.4. *Kui* $(X_n,\mathcal{P}_n)$ *on iga* $n \in \mathbb{N}$ *korral* FK-*ruum, siis ühisosa* $X := \bigcap_n X_n$ *on* FK-*ruum poolnormide süsteemiga* $\mathcal{P} := \bigcup_n \mathcal{P}_n$.

Tõestus. Et iga süsteem $\mathcal{P}_n$ on kas loenduv või lõplik, siis ka süsteem $\mathcal{P}$ on ülimalt loenduv, kusjuures iga $x \in X \setminus \{0\}$ korral leidub kindlasti $p \in \mathcal{P}$, et $p(x) \neq 0$. Seega on $(X,\mathcal{P})$ loenduvnormeeritud ruum. Näitame, et ta on täielik. Olgu $(x^{(m)})$ Cauchy jada ruumis $(X,\mathcal{P})$, s.t. $p(x^{(m)} - x^{(l)}) \to 0$ $(m,l \to \infty)$ iga $p \in \mathcal{P}$ puhul. Et $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$, siis $(x^{(m)})$ on Cauchy jada FK-ruumis $(X_n,\mathcal{P}_n)$ iga fikseeritud $n \in \mathbb{N}$ korral. Ruumis $(X_n,\mathcal{P}_n)$ täielikkuse tõttu on jada $(x^{(m)})$ koonduv: leidub selline $x \in X_n$, et $x^{(m)} \to x$ $((X_n,\mathcal{P}_n))$. Sealjuures kehtib tänu tingimusele (5.1) $x_k^{(m)} \to x_k$ $(k \in \mathbb{N})$, seepärast ei sõltu piirväärtus x indeksist $n \in \mathbb{N}$. Niisiis, $x \in X$ ja $p(x^{(m)} - x) \to 0$ iga $p \in \mathcal{P}$ korral, ehk $x^{(m)} \to x((X,\mathcal{P}))$, kusjuures $x_k^{(m)} \to x_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Seega on $(X,\mathcal{P})$ FK-ruum.

Olgu $(X,\mathcal{P})$ selline FK-ruum, mis sisaldab alamruumi φ, siis sisaldab X kõigi oma elementide lõiked. Lihtne on veenduda, et sel juhul on lõikeoperaatorid $S_m: X \to X$ pidevad. Tõepoolest, kui $x^{[n]} \to x((X,\mathcal{P}))$, siis tingimusest (5.1) järeldub

$$\lim_n S_m x^{[n]} = \lim_n \sum_{k=0}^{m} x_k^{[n]} e^k = \sum_{k=0}^{m} x_k e^k = S_m x \quad (m \in \mathbb{N})$$

ruumis X. Edasi, kui $x^{[m]} \to x((X,\mathcal{P}))$, s.t.

$$x = \sum_k x_k e^k,$$

siis öeldakse, et *punktis* $x \in X$ *leiab aset lõikekoonduvus*. Tingimus $x^{[m]} \dashrightarrow x((X,\mathcal{P}))$ on samaväärne tingimusega

$$f(x) = \sum_k x_k f(e^k) \quad \text{iga } f \in X' \text{ korral}, \tag{5.2}$$

sel juhul öeldakse, et *punktis* $x \in X$ *leiab aset nõrk lõikekoonduvus*. Kui rida

$$\sum_k x_k f(e^k) \text{ koondub iga } f \in X' \text{ korral}, \tag{5.3}$$

siis kõneldakse *funktsionaalsest lõikekoonduvusest punktis* $x \in X$. Öeldakse, et *punktis* $x \in X$ *leiab aset lõiketõkestatus*, kui alamhulk $\{x^{[m]} \mid m \in \mathbb{N}\}$ on tõkestatud ruumis X. Lause 4.15 (a) kohaselt on see tingimus täidetud parajasti siis, kui $(f(x^{[m]}))_{m \in \mathbb{N}}$ on tõkestatud jada iga $f \in X'$ korral, s.t. kui

$$\sup_m \left| \sum_{k=0}^{m} x_k f(e^k) \right| < \infty \quad (f \in X'). \tag{5.4}$$

Edasi tähistame

$B_X := \{x \in X \mid \{x^{[m]} \mid m \in \mathbb{N}\}$ on tõkestatud ruumis X $\}$,

$E_X := \{x \in X \mid \sum_k x_k f(e^k)$ koondub iga $f \in X'$ korral $\}$,

$W_X := \{x \in X \mid x^{[m]} \dashrightarrow x((X,\mathcal{P}))\}$,

$S_X := \{x \in X \mid x^{[m]} \to x((X,\mathcal{P}))\}$.

Lihtne on veenduda, et kõik neli hulka on ruumi X alamruumid. Näiteks, $S_m = S_c = S_{c_0} = W_m = W_c = c_0$, $F_m = B_m = m$.

LAUSE 5.5. (a) *Kui* FK-*ruum* X *sisaldab alamruumi* φ, *siis*

$$\varphi \subset S_X \subset W_X \subset F_X \subset B_X, \quad W_X \subset \bar{\varphi}.$$

(b) *Kui* X *ja* Y *on sellised* FK-*ruumid, et* $\varphi \subset X \subset Y$, *siis*

$$S_X \subset S_Y,\ W_X \subset W_Y,\ F_X \subset F_Y,\ B_X \subset B_Y,\ \bar{\varphi}^X \subset \bar{\varphi}^Y,$$

kus $\bar{\varphi}^X$ *ja* $\bar{\varphi}^Y$ *märgivad alamruumi* φ *sulundit vastavalt ruumis* X *ja* Y.

Tõestus. (a) Sisalduvuse $\varphi \subset S_X$ kehtivus on ilmne, $S_X \subset W_X$ järeldub lausest 4.13. See, et $W_X \subset F_X \subset B_X$, saab selgeks, kui võrrelda tingimusi (5.2), (5.3) ja (5.4). Sisalduvus $W_X \subset \bar{\varphi}$ järeldub lausest 4.14 (b): kui $x^{[m]} \dashrightarrow x$ $((X,\mathcal{P}))$, siis leiduvad $z^{(n)} \in \varphi$, et $z^{(n)} \to x$ $((X,\mathcal{P}))$, see tähendabki, et $x \in \bar{\varphi}$.

(b) Kasutades sisestuse $i\colon X \to Y$ pidevust (vrd. järeldus 5.3 (a)), saame $X \subset Y$ korral $S_X \subset S_Y$ ja $\bar{\varphi}^X \subset \bar{\varphi}^Y$. Ülejäänud sisalduvused järelduvad asjaolust, et $f|_X \in X'$ iga $f \in Y'$ korral.

FK-ruumi X, mis sisaldab alamruumi φ, nimetatakse

1) AB-*ruumiks*, kui $B_X = X$,

2) FAK-*ruumiks*, kui $F_X = X$,

3) SAK-*ruumiks*, kui $W_X = X$,

4) AK-*ruumiks*, kui $S_X = X$,

5) AD-*ruumiks*, kui $\bar{\varphi} = X$.

Nende mõistete vahekorda selgitab

LAUSE 5.6. *FK-ruumi X korral, mis sisaldab alamruumi φ, on järgmised tingimused samaväärsed:*

(a) *X on AK-ruum,*

(b) *X on SAK-ruum,*

(c) *X on AD- ja FAK-ruum,*

(d) *X on AD- ja AB-ruum.*

Tõestus. Implikatsioon (a) $\Rightarrow$ (b) järeldub sisalduvusest $S_X \subset W_X$, (b) $\Rightarrow$ (c) aga sisalduvustest $W_X \subset F_X$ ja $W_X \subset \bar{\varphi}$. Kuna $F_X \subset B_X$, siis kehtib (c) $\Rightarrow$ (d). Jääb näidata, et (d) $\Rightarrow$ (a).

Defineerime operaatorid $V_n := I - S_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Kuna nii ühikoperaator I kui ka lõikeoperaatorid S_n on ruumis X pidevad, siis on seda ka operaatorid V_n. Kui eeldada, et X on AB-ruum, siis iga $x \in X$ korral on jada $(V_n(x))$ ruumis Y tõkestatud. Seejuures kehtib võrdus

$$S_X = \{x \in X \mid \lim V_n(x) = 0\},$$

mistõttu $S_X = \bar{S}_X$ järelduse 4.22 põhjal. Kui X on sealjuures veel AD-ruum, siis $X = \bar{\varphi} \subset \bar{S}_X = S_X$, s.t. $X = S_X$.

FK-ruumi X kaasruum X' ei ole üldjuhul esitatav jadaruumina. Kui $X \supset \varphi$, saab defineerida tema *duaalse jadaruumi*

$$X^f := \{(f(e^k)) \mid f \in X'\}.$$

Lihtne on veenduda, et

$$X^f = (\bar{\varphi})^f, \tag{5.5}$$

kus sulund on võetud ruumis X. Tõepoolest, sisalduvusest $\bar{\varphi} \subset X$ järeldub, et $X^f \subset (\bar{\varphi})^f$. Teiselt poolt, olgu $\varepsilon := (\varepsilon_k) \in (\bar{\varphi})^f$, siis leidub $g \in (\bar{\varphi})'$, et $\varepsilon_k = g(e^k)$ $(k \in \mathbb{N})$. Funktsionaali jätkamise printsiibi põhjal saab leida sellise $f \in X'$, et $f|_{\bar{\varphi}} = g$. Seega $\varepsilon_k = f(e^k)$ ja $\varepsilon \in X^f$. Kokkuvõttes kehtib võrdus (5.5).

Vaatleme operaatorit

$$V : (\bar{\varphi})' \to (\bar{\varphi})^f, \quad f \to (f(e^k)).$$

Selle lineaarse operaatori sürjektiivsus tuleneb otseselt duaalse jadaruumi definitsioonist, injektiivsus aga sellest, et φ on tihe oma sulundis: kui g ja f on sellised pidevad lineaarsed funktsionaalid alamruumis $\bar{\varphi}$, et $g(e^k) = f(e^k)$ $(n \in \mathbb{N})$, siis $g|_\varphi = f|_\varphi$ ning järelduse 4.12 kohaselt $g = f$. Niisiis korraldab operaator V vektorruumide $(\bar{\varphi})'$ ja $(\varphi)^f$ vahel lineaarse isomorfismi.

LAUSE 5.7. *FK-ruum X, mis sisaldab alamruumi φ, on AD-ruum parajasti siis, kui operaator*

$$V: X' \to X^f, \quad f \to (f(e^k))$$

on lineaarne isomorfism.

Tõestus. Tarvilikkus järeldub vahetult ülaltoodud arutlusest. Piisavuse tõestamiseks oletame, et $\bar{\varphi}$ on ruumi X pärisalamruum. Kuna ta on kinnine, siis lause 4.11 põhjal saab leida $f \in X'$, et kern $f \supset \varphi$ ja $f \neq 0$, niisiis ei ole V injektiivne.

Juhime lugeja tähelepanu sellele, et kõik lõigete koonduvuse ning tõkestatusega seotud mõisted ja duaalse jadaruumi mõiste on topoloogilised: nad on defineeritud antud FK-ruumi topoloogia abil. Seevastu käesoleva paragrahvi algul esitatud α-, β- ja γ-kaasruumid ei ole seotud ühegi topoloogiaga. Seda üllatavam on nende erineva päritoluga mõistete vahel valitsev range seos, mis tuleb esile järgnevates väidetes.

LAUSE 5.8. *Olgu* X *selline FK-ruum, et* $X \supset \varphi$.
(a) *Kui* $\varepsilon \in X^{\beta}$, *siis summa*

$$f(x) := \varepsilon x \quad (x \in X)$$

määrab pideva lineaarse funktsionaali, s.t. $f \in X'$.
(a) *Kui* X *on AD-ruum, siis* $X^{\gamma} = X^{\beta}$.
(c) $X^{\gamma} \subset X^{f}$.
(d) X *on AB-ruum parajasti siis, kui* $X^{f} = X^{\gamma}$.
(e) X *on FAK-ruum parajasti siis, kui* $X^{f} = X^{\beta}$.
(f) X *on AK-ruum parajasti siis, kui operaator*

$$U\colon X' \to X^{\beta}, \quad f \to (f(e^{k}))$$

on lineaarne isomorfism.

Tõestus. (a) Tähistame $\varepsilon \in X^{\beta}$ puhul

$$f_{n}(x) := \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_{k} x_{k} \qquad (x \in X,\ n \in \mathbb{N}), \tag{5.6}$$

siis $f_{n} = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_{k}\pi_{k} \in X'$. Et $f(x) = \lim_{n} f_{n}(x)$ $(x \in X)$, siis järelduse 4.21 kohaselt $f \in X'$.

(b) Olgu X AD-ruum ning $\varepsilon \in X^{\gamma}$. Defineerides funktsionaalid $f_{n} \in X'$ seosega (5.6), saame ruumis X punktiviisi tõkestatud jada (f_{n}). Järelduse 4.22 põhjal on alamruum

$$L := \{\, x \in X \mid \exists \lim_{n} f_{n}(x)\} = \{x \in X \mid \sum_{k} \varepsilon_{k} x_{k} \text{ koondub}\}$$

kinnine FK-ruumis X. Kuna $\varphi \subset L$ ning $\bar{\varphi} = X$, siis kehtib $X = L$, s.t. $\varepsilon \in X^{\beta}$. Seega $X^{\gamma} \subset X^{\beta}$, millest saame võrduse $X^{\gamma} = X^{\beta}$.

(c) Märgime kõigepealt, et $X^{\beta} \subset X^{f}$: kui $\varepsilon \in X^{\beta}$, siis $\varepsilon_{k} = f(e^{k})$ $(k \in \mathbb{N})$, kus $f(x) = \varepsilon x$ $(x \in X)$, ning kuna $f \in X'$ (vrd. väide (a)), siis $\varepsilon \in X^{f}$. Rakendades väidet (b) ning võrdust (5.5), saame $X^{\gamma} \subset (\bar{\varphi})^{\gamma} = (\bar{\varphi})^{\beta} \subset (\bar{\varphi})^{f} = X^{f}$.

(d) Olgu $\varepsilon \in X^{f}$ ning $f \in X'$, et $f(e^{k}) = \varepsilon_{k}$ $(k \in \mathbb{N})$, siis iga $m \in \mathbb{N}$ korral

$$\sum_{k=0}^{m} \varepsilon_{k} x_{k} = \sum_{k=0}^{m} f(e^{k}) x_{k} = f(x^{[m]}) \quad (x \in X). \tag{5.7}$$

Siit järeldubki, et

$$X = B_{X} \iff X^{f} \subset X^{\gamma} \iff X^{f} = X^{\gamma}.$$

7*

Analoogiliselt saame seosest (5.7), et

$$X = F_X \Leftrightarrow X^f \subset X^\beta \Leftrightarrow X^f = X^\beta,$$

s.t. kehtib väide (e).

(f) Kui X on AK-ruum, siis on ta lause 5.6 (c) kohaselt FAK- ning AD-ruum. Väitest (e) ja lausest 5.7 saamegi, et U on lineaarne isomorfism. Vastupidi, kui U on lineaarne isomorfism, siis $f(x) = \sum_k x_k f(e^k)$ iga $f \in X'$ ning $x \in X$ korral, s.t $X = W_X$. Lause 5.6 põhjal on X AK-ruum.

Täiendused ja märkused

FK-ruumi mõiste defineeris ning nende ruumide teooria alused esitas Zeller [270], [271]. Ta lähtus eeskätt summeeruvusteooria vajadustest, kuid näitas ka selle mõiste rakendusvõimalusi funktsiooniteoorias ([273]; vt. ka Snyder [223]).

Lihtne on veenduda, et tingimus (K) FK-ruumi definitsioonis tähendab selle ruumi pidevat sisestatust FK-ruumi $(\omega, \mathfrak{R})$. See asjaolu sai lähtekohaks järgmisele üldistusele. F-ruumi, mis on pidevalt sisestatud antud Hausdorffi ruumi H, nimetatakse *FH-ruumiks* (vt. Wilansky ja Zeller [265]). FH-topoloogiad on omadustelt paljuski sarnased FK-topoloogiatega, näiteks kehtib ka nende puhul ühesuse omadus: alamruumis $X \subset H$ on võimalik määrata ülimalt üks FH-topoloogia. FH-ruumide kohta vt. Wilansky [256], pt.4.

Teiselt poolt on (K) loomulik kooskõlatingimus jadaruumi struktuuri ning topoloogia vahel. Tema tähtsus ilmneb juba *K-ruumides*, nii nimetatakse lokaalselt kumeraid jadaruume omadusega (K). Nimetagem vaid fakti, et iga maatriksteisendus ühest K-ruumist teise on kinnine operaator (vrd. lause 5.2). Kõik selles paragrahvis käsitletud probleemid on püstitatavad üldistes K-ruumides (vt. näiteks Garling [102], [103]).

α- ja β-kaasruumid defineerisid Köthe ja Toeplitz [144]. Duaalse jadaruumi mõisteni jõudsid sisuliselt juba Zeller [272] ning Peyerimhoff [193] faktorjadade ja summeeruvustegurite käsitlemisel. Tema omadusi ning seoseid teiste kaasruumidega on uurinud Snyder ja Wilansky [225], Ruckle [198], [199] jt. Üldiselt ei ole need kaasruumid FK-ruumid, näiteks $\omega^\alpha = \omega^\beta = \omega^\gamma = (\omega, \mathfrak{R})' = \varphi$. Kui aga X on BK-ruum, siis on BK-ruumid ka X^β ja X^γ normiga $\|\varepsilon\| := \sup_{\|x\|_X \le 1} \sup_n |\sum_{k=0}^n \varepsilon_k x_k|$ ning X^f normiga $\|\varepsilon\| := \inf\{\|f\|_{X'} \mid \varepsilon_k = f(e^k)\ (k \in \mathbb{N})\}$. On X lisaks veel AB-ruum, siis on X^β kaasruumi X' kinnine alamruum (vt. Sargent [206]).

Lõikekoonduvuse ja -tõkestatuse juurde märgime, et saksakeelsed lühendid AK = Abschnittskonvergenz, SAK = schwache AK, FAK = funktionale AK, AB = Abschnittsbeschränktheit, AD = Abschnittsdichte võttis kasutusele Zeller [271]. Tähistused S_X, W_X, F_X ja B_X kuuluvad Wilanskyle [252]. Ülaltoodud kriteeriumitele AK- ja AB-omaduste kohta lisame veel ühe.

TEOREEM (Garling [103]). FK-*ruum* X *omadusega* $X \supset \varphi$ *on*
1) AB-*ruum parajasti siis, kui* $bv \cdot X \subset X$,
2) AK-*ruum parajasti siis, kui* $bv_0 \cdot X \subset X$.

Siinkohal juhime tähelepanu multiplikaatorite probleemile. Jadaruumide X ja Y *multiplikaatoriteks* nimetatakse jadaruumi

$$M(X,Y) := \{\varepsilon \in \omega \mid \forall x \in X : \varepsilon \cdot x \in Y\}$$

elemente. Tegemist on mitmete tuntud mõistete üldistusega (α- β- ja γ- kaasruumid, summeeruvustegurid jne.). Multiplikaatorite ja nende rakenduste kohta Fourier' kordajate ruumidele vt. Goes [105], [106], McGivney ja Ruckle [167], Ruckle [200], Tõnnov [343], [344], Täht [348], [349], [350], Buntinas ja Goes [74], Lepasson [313].

K-ruumi X omadused sõltuvad eeldusel, et $X \supset \varphi$, oluliselt jada (e^k) topoloogilistest omadustest. Kõigepealt märgime, et X on AK-ruum parajasti siis, kui (e^k) on tema Schauderi baas. Dubinsky ja Retherford [96] uurisid jada (e^k) baasiliste omaduste seoseid kaasruumidega X^α ja X^β. Sember [214] nimetas K-ruumi X UAK-*ruumiks*, kui (e^k) on tingimatu Schauderi baas. Tähistame $\mathscr{X}(x) := \{h \cdot x \mid h \in \varphi, h_k = 0$ või $1 (k \in \mathbb{N})\}$. Kui $\mathscr{X}(x)$ on iga $x \in X$ korral tõkestatud alamhulk ruumis X, siis öeldakse, et X on UAB-*ruum*. Analoogiliselt defineeritakse UFAK- ning USAK- omadused. Osutub, et kui X on *soliidne* FK-ruum (s.t. kui $m \cdot X \subset X$), siis on ta UFAK-ruum. Võrdluseks eelpool toodud Garlingi teoreemile formuleerime järgmise väite.

TEOREEM (Sember [214]). FK-*ruum* X *omadusega* $X \supset \varphi$ *on* UAB-*ruum parajasti siis, kui* $c \cdot X \subset X$.

Märgime veel ruumi UAB-omaduse tihedat seost tema α-kaasruumiga (vt. Sember ja Raphael [215]).

Olgu $T := (t_{nk})$ lõplike ridadega RJ-regulaarne maatriks. Kui (e^k) on K-ruumis X T-baas (s.t. summeeruvusbaas maatriksi T suhtes, vt. §1, täiendused ja märkused), siis öeldakse, et X on T-lõikesummeeruvusega ehk T-AK-*ruum*. Kui $(\sum_k t_{nk} x_k e^k)_n$ on iga $x \in X$ korral tõkestatud, siis nimetatakse ruumi X T-AB-*ruumiks*. Analoogiliselt defineeritakse T-FAK- ja T-SAK-*ruumid*, aga ka vastava tingimusega jadade alamruumid. FK-ruumide puhul on lõikesummeeruvuse ning -koonduvusega seotud vastavad omadused paljuski sarnased. Näiteks on iga AD-FK- ruum, mis on T-AB-ruum, ka T-AK-ruum (Balser [8]; vrd. lause 5.6). Tähistame

$$X^{\beta(T)} := \{\varepsilon \in \omega \mid \forall x \in X : \exists \lim_m \sum_k \varepsilon_k (T_m x)_k\},$$

kus $T_m x := \sum_k t_{mk} \sum_{i=0}^k x_i e^i$ $(m \in \mathbb{N})$. Meyersile [176] kuulub järgmine (vrd. lause 5.8 (f))

TEOREEM. *Kui* X *on* T-AK-FK-*ruum, siis*

$$V : X' \to X^{\beta(T)}, \; f \to (f(e^k))$$

on lineaarne isomorfism.

Lõikesummeeruvusega seotud probleemide kohta vt. veel Lorentz ja Zeller [150], Buntinas [70], [71], [72], [73], Meyers [175], Goes [106].

Jada (e^k) omadused on aluseks jadaruumide järgmisele klassifikatsioonile. K-ruumi X nimetatakse

1) *poolkonservatiivseks*, kui $(\sum_{k=0}^{n} e^k)_n$ on nõrk Cauchy jada,

2) *kiilruumiks*, kui $e^k \to 0$,

3) *nõrgaks kiilruumiks*, kui $e^k \dashrightarrow 0$

ruumis X. Poolkonservatiivsete ruumide ja maatriksite omadusi uurisid Snyder ja Wilansky [225]. Kiilruumi mõiste kuulub Bennettile [35]. Osutub, et FK-ruum X on (nõrk) kiilruum parajasti siis, kui l on (nõrgalt) kompaktselt sisestatud ruumi X. Seda tüüpi ruumide kohta vt. veel Schaffer ja Snyder [209].

Jada (e^k) abil saab anda üllatavalt lihtsaid tingimusi FK-ruumide sisalduvuseks.

TEOREEM (Snyder ja Wilansky [225], Bennett [34], vt. ka Ruckle [201]). *FK-ruum* X *sisaldab alamruumi* l (bv_0) *parajasti siis, kui jada* (e^k) *(vastavalt* $(\sum_{k=0}^{n} e^k)_n$*) on tõkestatud.*

Sisalduvusteoreemid moodustavad üldse ühe sisukama peatüki jadaruumide teoorias. Märkigem kahte nende teoreemide tõestusmeetodit. Ühe neist, mis oli aluseks ka eelneva teoreemi tõestamisel, esitasid Snyder ja Wilansky [225], see põhineb järgmisel tulemusel.

TEOREEM. *Olgu* X AD-FK-*ruum ning* Y FK-*ruum omadusega* $Y \supset \varphi$.

(a) *Kui iga ruumis* X *tõkestatud alamhulk* $D \subset \varphi$ *on ka ruumis* Y *tõkestatud, siis* $X \subset Y$.

(b) *Kui* $Y^f \subset X^f$, *siis* $X \subset Y$.

Teine meetod kuulub Bennettile ja Kaltonile [39], selle aluseks on järgmine

TEOREEM. *Kui* X_0 *on* FK-*ruumi* X *kõikjal tihe alamruum, siis järgmised väited on samaväärsed.*

(a) X_0 *on tünniruum.*

(b) *Kui* Y *on selline* FK-*ruum, et* $Y \supset X_0$, *siis* $Y \supset X$.

Selle tulemuse ning Kaltoni [128] teoreemi abil kinnisest graafikust tõestasid autorid järgmiste väidete ekvivalentsuse jadaruumi X korral.

(a) $(X^\beta, \sigma(X^\beta, X))$ on jadaliselt täielik.

(b) Kui Y on separaabel FK-ruum, siis maatriksteisendus $A : (X, \tau(X, X^\beta)) \to Y$ on pidev.

(c) Kui Y on selline separaabel FK-ruum, et $X \subset Y$, siis $X \subset W_Y$.

Boos ja Leiger [59] täpsustasid viimast tulemust ning näitasid, et see on õige ka juhul, kui Y on L_φ-*ruum*. Nii nimetavad autorid K-ruumi Z järgmise omadusega : kui $L \subset Z'$ on $\sigma(Z',Z)$-jadaliselt kinnine alamruum ja $L \supset \varphi$, siis $L = Z'$. Osutub, et iga separaabel FK-ruum (seega ka iga summeeruvusväli c_A) on L_φ-ruum. Saadud tulemustele tuginevad *Mazur-Orliczi tüüpi* teoreemide tõestused.

TEOREEM. *Kui* M *on soliidne jadaruum, siis iga* FK-*ruumi* X *ning* L_φ-*ruumi* Y *korral kehtib implikatsioon*

$$M \cap W_X \subset Y \Rightarrow M \cap W_X \subset W_Y.$$

Sellest teoreemist, mis eelpoolnimetatud töös [59] (vt. ka [55], [56], [57]) on tõestatud M suhtes üldisematel eeldustel, saadakse erijuhul Mazur-Orliczi kooskõlateoreem (vt. §11).

Bennett [36] kõneleb FK-ruumi X puhul *Wilansky omadusest*, kui selle iga alamruum X_o, mis rahuldab tingimust $X_o^\beta = X^\beta$, on tünniruum. Osutub, et BK-ruumid c, c_o, cs ja l^p $(1<p<\infty)$ on mainitud omadusega. Stadler [228] tõestas, et kui X ja X' on AK-BK-ruumid, siis X on Wilansky omadusega. Sealjuures täpsustas ta ühte Swetitsi [233] tulemust. β-kaasruumiga seotud topoloogiliste probleemide kohta vt. veel Schaefer [208] ja Magee [160].

FK-ruumide konstruktsioonidest nimetame lisaks ülalvaadeldud ühisosale veel FK-summat (Goes [106]), -korrutist (Buntinas ja Goes [74]) ning IFK-ruume, s.o. FK-ruumide induktiivseid piire (Boos [49]). Ülevaate FK-ruumide teooriast leiab lugeja Boosi [52] ja Wilansky [259] raamatutest.

Lõpuks märgime mõned olulisemad tööd üldiste topoloogiliste jadaruumide kohta. Seda, et $\langle X, X^\alpha \rangle$ ja $\langle X, X^\beta \rangle$ on duaalsed paarid bilineaarvormiga

$$\langle x,a \rangle := \sum_k a_k x_k \quad (x \in X), \tag{*}$$

kus $a \in X^\alpha$ või $a \in X^\beta$, kasutasid esimestena Köthe ja Toeplitz [144], eriti juhul $X = X^{\alpha\alpha}$. Kasutatud ideid arendas Köthe edasi artiklis [143]. Üldisemaid duaalseid paare $\langle X,Y \rangle$, kus $Y \subset X^\gamma$, käsitles Garling [102]. Ruckle [200] püüdis igale jadaruumile leida tema "loomuliku" topoloogia. Ta kasutas kahte meetodit jadaruumi X topologiseerimiseks. Esimene neist põhineb asjaolul, et $\langle X,\varphi \rangle$ on duaalne paar bilineaarvormiga (*), see võimaldab defineerida ühtlase koonduvuse topoloogia mingil $\sigma(\varphi,X)$-tõkestatud hulkade süsteemil. Selgus, et nende hulgas leidub ülimalt üks tünniline K-topoloogia, nimelt ühtlase koonduvuse topoloogia kõigil $\sigma(\varphi,X)$-tõkestatud alamhulkadel. Teine meetod seisneb idees leida selline jadaruum Z, mille puhul $\langle X, M(X,Z) \rangle$ oleks duaalne paar. Vt. veel [197], [202].

Omaette peatükid jadaruumide teoorias moodustavad Orliczi ja Lorentzi ruumid. Nendest ja üldse jadaruumidest leiab lugeja ülevaate Kampthani ja Gupta raamatus [131].

§6. SUMMEERUVUSVÄLI KUI FK-RUUM

Summeeruvusvälja lineaar-topoloogilise struktuuri käsitlemisega tegime algust paragrahvis 3, kus me veendusime, et reversiivse maatriksi puhul on tegemist Banachi ruumiga. Samas sai selgeks, et mittereversiivsete maatriksite korral vajame summeeruvusvälja topoloogia kirjeldamiseks üldisemat tüüpi ruume. Nüüd, olles varustatud FK-ruumi mõistega, tuleme nende probleemide juurde tagasi. Me seame endale selles paragrahvis kaks eesmärki: esiteks, näitame, et iga maatriksi A korral saame vektorruumi c_A varustada sellise poolnormide süsteemiga, mis muudab ta FK-ruumiks, ja teiseks, kirjeldame c_A kaasruumi, s.t. leiame pideva lineaarse funktsionaali üldkuju FK-ruumis c_A.

Et mitte kohe takerduda detailidesse, alustame järgmiste üsna üldiste väidete tõestusega.

LAUSE 6.1. *Olgu* $(X,\mathcal{P})$ *ja* (Y,Q) *FK-ruumid ning* $T:X\to(\omega,\mathcal{R})$ *pidev lineaarne operaator. Kehtivad järgmised väited.*

(a) *Jadaruum*

$$Y_T := \{\, x \in X \mid T(x) \in Y \,\}$$

on FK-ruum poolnormidega

$$\mathcal{P}^* := \mathcal{P} \cup \{q \circ T \mid q \in Q\}$$

ning operaator

$$\bar{T} : Y_T \to Y, \quad x \to T(x)$$

on lineaarne ja pidev.

(b) *Iga* $f \in (Y_T,\mathcal{P}^*)'$ *korral leiduvad sellised funktsionaalid* $g \in X'$ *ning* $h \in Y'$, *et*

$$f(x) = g(x) + h(\bar{T}(x)) \quad (x \in Y_T).$$

Tõestus. (a) Lihtne on veenduda, et $(Y_T,\mathcal{P}^*)$ on loenduvnormeeritud ruum: $\mathcal{P}^*$ on loenduv süsteem ja sisalduvuse $\mathcal{P}^* \supset \mathcal{P}$ tõttu eraldab $\mathcal{P}^*$ punktid vektorruumis Y_T. Olgu $(x^{(n)})$ Cauchy jada ruumis $(Y_T,\mathcal{P}^*)$, s.t.

$$p(x^{(n)} - x^{(m)}) \to 0 \quad (n,m \to \infty) \text{ iga } p \in \mathcal{P} \text{ korral,}$$

$$q(T(x^{(n)}) - T(x^{(m)})) \to 0 \quad (n,m \to \infty) \text{ iga } q \in Q \text{ korral.}$$

Seega on $(x^{(n)})$ ja $(T(x^{(n)}))$ Cauchy jadad, esimene ruumis $(X,\mathcal{P})$, teine ruumis (Y,Q). Kuna mõlemad need ruumid on täielikud, siis leiduvad $x \in X$ ja $y \in Y$, et

$$x^{(n)} \to x((X,\mathcal{P})) \text{ ja } T(x^{(n)}) \to y((Y,Q)).$$

Eelduse kohaselt on (Y,Q) FK-ruum, seetõttu $(T(x^{(n)}))_k \to y_k$ $(k \in \mathbb{N},\ n \to \infty)$. Teiselt poolt saame operaatori $T\colon X \to \omega$ pidevusest, et $T(x^{(n)}) \to T(x)$ $((\omega,\mathcal{R}))$, s.t. $(T(x^{(n)}))_k \to (T(x))_k$ $(k \in \mathbb{N},\ n \to \infty)$. Niisiis, $y = T(x)$, järelikult $x \in Y_T$ ja $x^{(n)} \to x((Y_T,\mathcal{P}^*))$. Me tõestasime, et $(Y_T,\mathcal{P}^*)$ on F-ruum. Kuna $(X,\mathcal{P})$ on FK-ruum ja $\mathcal{P}^* \supset \mathcal{P}$, siis kehtib ruumis $(Y_T,\mathcal{P}^*)$ tingimus (K) (vrd. (5.1)):

$x^{(n)} \to x((Y_T,\mathcal{P}^*)) \Rightarrow x^{(n)} \to x((X,\mathcal{P})) \Rightarrow x_k^{(n)} \to x_k$ $(k \in \mathbb{N}, n \to \infty)$.

Kokkuvõttes on $(Y_T,\mathcal{P}^*)$ FK-ruum.

Operaator $\hat{T}$ on ilmselt lineaarne. Et $q \circ \hat{T} = q \circ T|_{Y_T}$, siis on $q \circ \hat{T}$ pidev poolnorm ruumis $(Y_T,\mathcal{P}^*)$, millest järeldubki operaatori $\hat{T}$ pidevus (vrd. lause 4.3).

(b) Olgu $f \in Y_T'$, siis (vrd. (a) ning järeldus 4.4) leiduvad $p_0, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$, $q_0, \ldots, q_m \in Q$ ja $M > 0$, et

$$|f(x)| \le M \sum_{i=0}^{n} p_i(x) + \sum_{i=0}^{m} q_i(T(x)) \quad (x \in Y_T).$$

Vastavalt lausele 4.8 määrame $\tilde{g}$, $\tilde{h} \in Y_T'$ nii, et $f = \tilde{g} + \tilde{h}$,

$$|\tilde{g}(x)| \le M \sum_{i=0}^{n} p_i(x)$$

ja

$$|\tilde{h}(x)| \le M \sum_{i=0}^{m} q_i(T(x)) \quad (x \in Y_T).$$

Funktsionaali jätkamise printsiibi abil (vt. lause 4.7) jätkame $\tilde{g}$ alamruumilt Y_T kogu ruumil X pidevaks funktsionaaliks g. Et leida funktsionaali $h \in Y'$, defineerime kõigepealt

$$\hat{h} : T[Y_T] \to \mathbb{K}, \qquad y \to \tilde{h}(x),$$

kus $y = T(x)$. Paneme tähele, et lineaarne funktsionaal $\hat{h}$ on korrektselt defineeritud: juhul $T(x) = T(z)$ $(x,z \in Y_T)$ on

$$|\tilde{h}(x) - \tilde{h}(z)| = |\tilde{h}(x-z)| \le M \sum_{i=0}^{m} q_i(T(x-z)) = M \sum_{i=0}^{m} q_i(0) = 0,$$

s.t. $\tilde{h}(x) = \tilde{h}(z)$. Edasi, $y = T(x)$ korral

$$|\hat{h}(y)| = |\tilde{h}(x)| \le M \sum_{i=0}^{m} q_i(T(x)) = M \sum_{i=0}^{m} q_i(y),$$

mistõttu saab Hahn-Banachi teoreemi rakendades jätkata $\hat{h}$ alamruumilt $T[Y_T]$ kogu ruumile Y lineaarseks funktsionaaliks h nii, et

$$|h(y)| \le M \sum_{i=0}^{m} q_i(y) \quad (y \in Y).$$

Seega (vrd. järeldus 4.4) $h \in Y'$ ning

$$\check{h}(x) = \hat{h}(T(x)) = h \circ \hat{T}(x) \qquad (x \in Y_T).$$

Kokkuvõttes oleme leidnud $g \in X'$ ja $h \in Y'$, et $f = g + h \circ \hat{T}$.

Tulles nüüd maatriksteisenduste juurde, lepime kõigepealt kokku mõningate tähistuste suhtes, mis jäävad kehtima raamatu lõpuni. Nagu eespoolgi, märgime $\mathcal{R} := \{r_n | n \in \mathbb{N}\}$, kus $r_n(x) := |x_n|$, ja antud maatriksi A puhul $\|x\|_A := \|Ax\|_\infty$ $(x \in c_A)$. Neile lisaks fikseerime siit alates

$$p_n(x) := |x_n| + \sup_m |\sum_{k=0}^m a_{nk}x_k| \qquad (x \in \omega_A,\ n \in \mathbb{N}) \qquad (6.1)$$

ja $\mathcal{P} := \{p_n | n \in \mathbb{N}\}$. FK-ruumi E korral tähistame

$$E_A := \{x \in \omega_A \mid Ax \in E\}.$$

LAUSE 6.2. *Kui A on lõplike ridadega maatriks, siis $(c_A, \{\| \ \|_A\} \cup \mathcal{P})$ on FK-ruum.*

Tõestus. Kuna maatriks A on lõplike ridadega, siis $\omega_A = \omega$ ja on määratud lineaarne operaator

$$A: \omega \to \omega, \qquad x \to Ax.$$

Seejuures on A pidev (vt. lause 5.2). Kui võtame lauses 6.1(a) $(X,\mathcal{P}) := (\omega,\mathcal{R})$ ja $(Y,\mathcal{Q}) := (c,\| \ \|_\infty)$, siis saamegi väite.

Nüüd sõnastame selle paragrahvi ühe põhitulemuse.

TEOREEM 6.3. *FK-ruumi $(E,\mathcal{Q})$ ja maatriksi A korral kehtivad järgmised väited.*

(a) $(\omega_A,\mathcal{P})$ *on AK-FK-ruum.*

(b) $(E_A, \{q \circ A \mid q \in \mathcal{Q}\} \cup \mathcal{P})$ *on FK-ruum.*

(c) $(c_A, \{\| \ \|_A\} \cup \mathcal{P})$ *on FK-ruum.*

Tõestus. (a) Tähistame fikseeritud $n \in \mathbb{N}$ korral

$$c_{A_n} := \{ x \in \omega \mid \sum_k a_{nk}x_k \text{ koondub}\},$$

lause 6.2 kohaselt on $(c_{A_n}, \{p_n^*\} \cup \mathcal{R})$ FK-ruum, kus

$$p_n^*(x) := \sup_m |\sum_{k=0}^m a_{nk}x_k| \qquad (x \in c_{A_n}).$$

Ilmselt on $\omega_A = \bigcap_{n=0}^\infty c_{A_n}$, lause 5.4 põhjal on $(\omega_A, \{p_n^* \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \mathcal{R})$ FK-ruum. Pole raske veenduda, et poolnormide süsteemid $\{p_n^* \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \mathcal{R}$ ja $\mathcal{P}$ on vektorruumil ω_A

ekvivalentsed (vrd. lause 4.5).

Fikiseeritud $n \in \mathbb{N}$ puhul järeldub rea $\sum_k a_{nk} x_k$ koonduvusest, et

$$p_n(x - \sum_{k=0}^{m} x_k e^k) = \sup_{l \geq m+1} |\sum_{k=m+1}^{l} a_{nk} x_k| \to 0 \ (m \to \infty),$$

seega $x^{[m]} \to x((\omega_A, \mathcal{P}))$ iga $x \in \omega_A$ korral. Niisiis on $(\omega_A, \mathcal{P})$ AK-ruum.

Väide (b) järeldub lausest 6.1 (a), kui selles $X := (\omega_A, \mathcal{P})$, $Y := (E, Q)$ ning maatriks A määrab operaatori $T : \omega_A \to \omega$, mis väite (a) ja lause 5.2 põhjal on pidev.

Väide (c) on vahetu järeldus väitest (b), kui selles $E := (c, \| \|_\infty)$.

Reversiivse maatriksi A puhul on poolnormide süsteem $\{\| \|_A\} \cup \mathcal{P}$ ekvivalentne normiga $\| \|_A$ ning $(c_A, \| \|_A)$ on BK-ruum (vrd. lause 3.1 (a)).

Erinevalt rakendusväljast ω_A, ei ole summeeruvusväli c_A üldjuhul ei AK- ega ka AB-ruum. Kui $(c_A, \{\| \|_A\} \cup \mathcal{P})$ on AB-ruum, siis öeldakse, et A on AB-*maatriks*. Edasi, teoreemi 6.3 (b) kohaselt on ka *nullsummeeruvusväli*

$$c_{o_A} := \{x \in \omega_A \mid Ax \in c_o\} = \{x \in c_A \mid \lim_A x = 0\}$$

poolnormide süsteemiga $\{\| \|_A\} \cup \mathcal{P}$ FK-ruum, seega c_A kinnine alamruum. Öeldakse, et A on AK-*maatriks*, kui $(c_{o_A}, \{\| \|_A\} \cup \mathcal{P})$ on AK-ruum. Nende mõistetega seotud probleemide juurde tuleme tagasi järgmises paragrahvis.

Lõpuks leiame vaadeldud FK-ruumide kaasruumid.

TEOREEM 6.4. *Maatriksi* A *korral kehtivad järgmised väited.*

(a) *Pideva lineaarse funktsionaali üldkuju FK-ruumis* ω_A *on*

$$f(x) = \alpha x \quad (x \in \omega_A),$$

kus $\alpha \in \omega_A^{\beta}$.

(b) FK-*ruumi* E *puhul antakse pideva lineaarse funktsionaali üldkuju* FK-*ruumis* E_A *valemiga*

$$f(x) = h(Ax) + \alpha x \quad (x \in E_A), \tag{6.2}$$

kus $h \in E'$ *ja* $\alpha \in \omega_A^{\beta}$.

(c) *Pideva lineaarse funktsionaali üldkuju FK-ruumis* c_A *on*

$$f(x) = \mu \lim_A x + t(Ax) + \alpha x \quad (x \in c_A),$$

kus $\mu \in \mathbb{K}$, $t \in l$ *ja* $\alpha \in \omega_A^{\beta}$.

(d) *Kui* A *on lõplike ridadega maatriks, siis võib väidetes* (a), (b) *ja* (c) *vaadeldud funktsionaalide jaoks leida* *sellised sealtoodud esitused, kus $\alpha \in \varphi$.*

(e) *Väited* (b) *ja* (c) *jäävad kehtima, kui neis tingimus $\alpha \in \omega_A^{\beta}$ asendada vastavalt tingimusega $\alpha \in E_A^{\beta}$ ja c_A^{β}.*

Tõestus. Väide (a) järeldub lausest 5.8 (f) ning teoreemist 6.3 (a).

(b) Kui võtta lauses 6.1 (b) $X := \omega_A$, $Y := E$ ning $T := A$, siis saame $f \in E_A'$ jaoks esituse (6.2), kus $h \in E'$ ja $\alpha \in \omega_A^{\beta} \subset E_A^{\beta}$. Teiselt poolt, kuna $A \in L(E_A, E)$ (vrd. lause 5.2), siis $h \circ A \in E_A'$ iga $h \in E'$ korral, samuti on seosega $g(x) = \alpha x$ $(x \in E_A)$ määratud funktsionaal lause 5.8 (a) kohaselt iga $\alpha \in E_A^{\beta}$, ammugi siis iga $\alpha \in \omega_A^{\beta}$ korral ruumis E_A pidev ja lineaarne. Kokkuvõttes oleme tõestanud nii väite (b) kui ka väite (e) selles osas, mis puudutab väidet (b).

Väite (c) saame väitest (b), kui võtame $E := c$, samuti kehtib (e) väite (c) osas.

Väite (d) põhjendamiseks märgime, et lõplike ridadega maatriksi A korral on $\omega_A^{\beta} = \omega^{\beta} = \varphi$.

Täiendused ja märkused

Seda, et maatriksi summeeruvusväli ei ole üldjuhul Banachi ruum, märkisid juba Banach, Mazur, Orlicz jt. 30. aastatel. Summeeruvusteooria vajadused mõjutasid oluliselt topoloogiliste vektorruumide teooria arengut (vt. Orlicz [187]). 1933.a. esitasid Mazur ja Orlicz [165] rea väiteid summeeruvusteooria valdkonnast, mis tuginesid F-ruumidele (ehk B_0- ruumidele, nagu nimetasid neid Poola matemaatikud), kuid nende väidete tõestused publitseeriti alles 1954.a. (vt.[166]). Vahepeal ilmus nüüdseks juba klassikaliseks saanud Zelleri töö [270], milles autor esitas süstemaatiliselt kaasaegse summeeruvusteooria funktsionaalanalüütilised alused. Kõik käesolevas paragrahvis tõestatud tulemused on pärit sellest artiklist.

Summeeruvusvälja struktuuri uurimine seisab meil järgnevates paragrahvides veel ees. Siinkohal märgime, et FK-ruum c_A on separaabel. Veelgi enam, E_A on separaabel iga separaabli FK-ruumi E korral. Selle fakti tõestuseks korraldas Bennett [32] (vrd. ka Kalton [129]) injektsiooni

$$E_A \to \omega \times \prod_{i=0}^{\infty} (c)_i \times E, \quad x \to (x, (\sum_{k=0}^{n} a_{0k} x_k)_n, (\sum_{k=0}^{n} a_{1k} x_k)_n, \dots, Ax)$$

ja näitas, et see on topoloogiline isomorfism E_A ja korrutise $\omega \times \prod_i (c)_i \times E$ mingi alamruumi vahel. Kuna vaadeldav korrutisruum on separaabel, siis on seda ka E_A. Bennett tõestas samas veel, et kui A on lõplike ridadega maatriks ning E on refleksiivne, Monteli või tuumaruum või kui ruumis E langevad tugev ja nõrk koonduvus kokku, siis sama omadusega on ka FK-ruum E_A (vt. ka Grosse-Erdmann [108]).

Kuigi poolpideva menetluse summeeruvusvälja ei saa üldjuhul FK-ruumina esitada, on see paljudel erijuhtudel siiski võimalik. Wlodarski [267], [268] defineeris järgmise poolpidevate menetluste Λ klassi.

Olgu poollõigus $[0,T)$, kus T võib olla ka $+\infty$, antud pidevate funktsioonide jada (Λ_n). Öeldakse, et arvjada x on Λ-summeeruv arvuks $\lim_\Lambda x$, kui

1) iga $t \in [0,T)$ korral eksisteerib

$$\Lambda(x,t) := \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k(t)x_k,$$

kusjuures igas lõigus $[0,S]$ $(0 < S < T)$ koondub vaadeldav rida ühtlaselt,

2) eksisteerib $\lim_{t\to T-} \Lambda(x,t) =: \lim_\Lambda x$.

Osutub, et sellise menetluse summeeruvusväli c_Λ on FK-ruum poolnormidega $p(x) := \{|\Lambda(x,t)| \mid 0 \le t < T\}$ ja $p_i(x) := |x_i| + \sup_m |\sum_{k=0}^{m} \Lambda_k(\tau_i)x_k|$ $(i \in \mathbb{N})$, kus (τ_i) on selline jada, et $0 \le \tau_i < T$ $(i \in \mathbb{N})$, $\tau_0 = 0$ ja $\tau_i \to T$ $(i \to \infty)$. Pideva lineaarse funktsionaali üldkuju FK-ruumis c_Λ on

$$f(x) = \int_0^T \Lambda(x,t)dh(t) + \sum_k \alpha_k x_k,$$

kus h on lõigus $[0,T]$ tõkestatud muuduga funktsioon ja arvud α_k on $0 \le k \le k_0$ korral suvalised,

$$\alpha_k := \sum_{i=0}^{i_0} d_{ik} \Lambda_k(\tau_i) \quad (k > k_0)$$

ning $\sum_k |d_{ik} - d_{i,k+1}| < \infty$ $(i = 0, \ldots, i_0)$.

Ka iga PTR-tüüpi menetluse, sealhulgas ka Abeli menetluse summeeruvusväli on FK-ruum (vt. Jakimovski, Meyer-König ja Zeller [120]).

Beekmann [14] näitas, et integraalse menetluse summeeruvusväli on üldjuhul FH-ruum, kus H on kõigi poolteljel $[0,\infty)$ mõõtuvate funktsioonide vektorruum meetrikaga

$$d(u,v) := \int_0^{\infty} 2^{-t} \frac{|u(t) - v(t)|}{1 + |u(t) - v(t)|} dt \quad (u,v \in H).$$

Näiteid maatriksite summeeruvusväljadest, mis ei ole BK-ruumid, leiab lugeja Meyer-Königi ja Zelleri [171] ning Tietzi [239] artiklitest. Zeller [277] tõestas, et Abeli menetluse $\mathcal{A}_0$ summeeruvusväli on mittenormeeruv FK-ruum, kusjuures ta ei sisaldu ühegi lõplike ridadega regulaarse maatriksi summeeruvusväljas ning ei lange kokku ühegi maatriksi summeeeruvusväljaga. Siit jõuame summeeruvusteooria ühe aktuaalse probleemi juurde : millised separaablid FK-ruumid võivad olla mingi maatriksi summeeruvusväljaks? Brown ja Stratton [67] uurisid FK-ruume $X := c_B \oplus \langle e\rangle$, kus B

on selline maatriks, et $c_B \supset c_0$ ja $e \in c_B$, ning näitasid, et sel juhul leidub maatriks A omadusega $A : m \to m$ ning $c_A = c_{0B} \oplus \langle e \rangle$. Zeller [274] tõestas, et iga tõkestamata arvjada d korral saab leida sellise maatriksi A, et $c_A = c \oplus \langle d \rangle$. Vt. ka Meyers [175].

§7. SUMMEERUVUSVÄLJA TÄHTSAD ALAMRUUMID JA SUMMEERUVUSINVARIANDID

Kõigepealt teeme ühe olulise kokkuleppe, mis kehtib selle raamatu lõpuni. Kui vaadeldava maatriksi A korral ei ole väidetud vastupidist, siis eeldame, et $c_A \supset \varphi$, s.t. **eksisteerivad piirväärtused** $\lim_n a_{nk} =: a_k$ $(n \in \mathbb{N})$. Sel juhul on FK-ruumis $(c_A, \{\| \ \|_A\} \cup \mathcal{P})$ defineeritud alamruumid (vrd. §5)

$$B_A := B_{c_A},\ F_A := F_{c_A},\ W_A := W_{c_A},\ S_A := S_{c_A}.$$

Edasi, iga $x \in c_A$ ning poolnormi p_n (vt.(6.1)) korral

$$\sup_m p_n(x^{[m]}) < \infty,\quad p_n(x - x^{[m]}) \to 0 \quad (m \to \infty),$$

seetõttu on tingimused

$$\| x^{[m]} \|_A = O(1) \text{ ja } \| x - x^{[m]} \| \to 0 \quad (m \to \infty)$$

tarvilikud ning piisavad vastavalt lõiketõkestatuseks ja -koonduvuseks punktis $x \in c_A$. Niisiis kehtivad võrdused

$$B_A = \{x \in c_A \mid \sup_{n,m} |\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k| < \infty \},$$

$$S_A = \{x \in c_A \mid \sup_n |\sum_{k=m}^{\infty} a_{nk} x_k| \to 0 \quad (m \to \infty)\}.$$

Lisaks mainitud alamruumidele defineerime

$$L_A := \{x \in c_A \mid \forall t \in l \ \exists (tA)x\},$$

$$I_A := \{x \in c_A \mid \sum_k a_k x_k \text{ koondub } \},$$

$$\Lambda_A^{\perp} := \{x \in I_A \mid \Lambda_A(x) = 0\},$$

kus

$$\Lambda_A(x) := \lim_A x - ax \quad (x \in I_A).$$

Neid seitset (ja veel mõningaid) nimetatakse summeeruvusvälja *tähtsateks alamruumideks*. Tähtsate alamruumidega seonduv on olnud viimased paarkümmend aastat summeeruvusvälja struktuuri uurivate autorite tähelepanu keskpunktis. See on mõistetav, kuivõrd nende alamruumide omadused ja omavahelised seosed määravad paljuski vaadeldava maatriksi summeeruvusteoreetilised omadused.

Juhime lugeja tähelepanu järgmisele asjaolule. Kui maatriksite A ja B korral $c_A = c_B$, siis FK-topoloogia ühesuse tõttu langevad c_A ja c_B kokku ka kui FK-ruumid. Seetõttu kehtivad võrdused

$$B_A = B_B,\ F_A = F_B,\ W_A = W_B,\ S_A = S_B.$$

Teiste sõnadega, alamruumid B_A, F_A, W_A ja S_A ei sõltu konkreetsest maatriksist A, vaid FK-ruumist c_A. Kas sedasama võib väita ka alamruumide L_A, I_A ja $\Lambda_A^{\perp}$ kohta, ei ole a priori selge, kuna nad on defineeritud vahetult maatriksist A, mitte aga c_A topoloogiast lähtudes. Siit jõuamegi paragrahvi pealkirjas toodud teise mõiste juurde. Maatriksiga A seotud omadust või hulka nimetatakse *(summeeruvus)invariandiks*, kui see ei muutu maatriksi A asendamisel ükskõik millise temaga ekvivalentse maatriksiga B. Niisiis, B_A, F_A, W_A ja S_A on invariantsed. Järgmisest lausest selgub muuhulgas, et invariant on ka alamruum L_A.

LAUSE 7.1. (a) *Elemendi* $x \in \omega_A$ *jaoks on järgmised tingimused samaväärsed:*

1° $\exists M > 0 : |\sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k| \le M \quad (n,m \in \mathbb{N})$,

2° $\forall t \in l : (tA)x$ *eksisteerib.*

Sealjuures eksisteerib ka $t(Ax)$ *ning kehtib võrdus*

$$(tA)x = t(Ax) \quad (t \in l).$$

(b) $B_A = L_A$.

Tõestus. (a) Kõigepealt paneme tähele, et kui $x \in \omega_A$ rahuldab tingimust 1°, siis, fikseerides selles $n \in \mathbb{N}$, saame protsessis $m \to \infty$ võrratuse $|\sum_k a_{nk}x_k| \le M \quad (n \in \mathbb{N})$, s.t. $x \in m_A$. Tähistame

$$u_{nm} := \sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k \quad (n,m \in \mathbb{N}).$$

Kuna $\sup_{n,m}|u_{nm}| < \infty$, siis rida $\sum_n t_n u_{nm}$ koondub $m \in \mathbb{N}$ suhtes ühtlaselt iga $t \in l$ puhul. Teisalt eksisteerib tänu tingimusele $Ax \in m$ summa $t(Ax)$, seepärast saame

$$t(Ax) = \sum_n t_n \lim_m u_{nm} = \lim_m \sum_n t_n u_{nm}$$

$$= \lim_m \sum_{k=0} \sum_n t_n a_{nk} x_k = (tA)x.$$

Niisiis, me tõestasime, et tingimusest 1° järeldub 2°, aga ka võrdus $(tA)x = t(Ax)$ iga $t \in l$ korral.

Näitame, et 2° → 1°, siis on väide (a) tervenisti tõestatud. Määrame fikseeritud $x \in \omega_A$ korral, mis rahuldab tingimust 2°, funktsionaalid

$$f_m : l \to \mathbb{K}, \quad t \to \sum_{k=0}^{m} x_k \sum_n t_n a_{nk} \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Märgime, et need lineaarsed funktsionaalid on korrektselt defineeritud, sest kuna $(a_{nk})_n \in c$, siis rida $\sum_n t_n a_{nk}$ koondub iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Lausest 5.8 (a) järeldub, et $f_m \in (l, \|\ \|_1)'$ iga $m \in \mathbb{N}$ puhul, sest $f_m(x) = \sum_n t_n u_{nm}$ ja $(u_{nm})_n \in m = l^{\beta}$. Seejuures

$$\|f_m\|_{l'} = \|(u_{nm})_n\|_\infty = \sup_n |u_{nm}| \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Vastavalt tingimusele 2° kehtib $f_m(t) \to (tA)x$ ($t \in l$, $m \to \infty$), seega on (f_m) punktiviisi tõkestatud pidevate lineaarsete funktsionaalide jada Banachi ruumis $(l, \|\ \|_1)$. Ühtlase tõkestatuse printsiibi kohaselt

$$\sup_{n,m} |u_{nm}| = \sup_m \|f_m\| < \infty,$$

s.t. kehtib 1°.

Väide (b) järeldub vahetult väitest (a).

Lause 5.5 (a) ning lause 7.1 (b) põhjal võime kirjutada

$$S_A \subset W_A \subset F_A \subset B_A = L_A.$$

Nende alamruumide ning I_A ja $\Lambda_A^{\perp}$ vaheliste seosete täpsustamisel lähtume funktsionaali $f \in c_A'$ üldkujust (vt. lause 6.4 (c))

$$f(x) = \mu \lim_A x + t(Ax) + \alpha x \quad (x \in c_A),$$

kus $\mu \in \mathbb{K}$, $t \in l$ ja $\alpha \in c_A^{\beta}$. Eeldatavasti $c_A \supset \varphi$, seega eksisteerib $f(e^k) = \mu a_k + (tA)_k + \alpha_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Avaldame viimasest seosest α_k ning asendame need f ülaltoodud esitusse. Saame seose

$$f(x) = \mu \lim_A x + t(Ax) + \sum_k (f(e^k) - \mu a_k - (tA)_k) x_k \quad (x \in c_A), \tag{7.1}$$

mille abil tõestame

LAUSE 7.2. (a) $F_A = B_A \cap I_A = L_A \cap l_A$.

(b) *Kui* $f \in c_A'$, *siis* $f(x) = \mu \Lambda_A(x) + \sum_k x_k f(e^k)$ *iga* $x \in F_A$

korral.

(c) $W_A = B_A \cap \Lambda_A^{\perp} = L_A \cap \Lambda_A^{\perp} = F_A \cap \Lambda_A^{\perp}$.

(d) $F_A = W_A \oplus \langle u\rangle$, *kus* $u = 0$ *või* $u \in F_A \setminus W_A = I_A \setminus \Lambda_A^{\perp}$.

Tõestus. (a) Et $\lim_A \in c_A'$, siis iga $x \in F_A$ puhul on rida $\sum_k a_k x_k = \sum_k x_k \lim_A e^k$ koonduv, s.t. $F_A \subset B_A \cap I_A$. Vastupidise sisalduvuse näitamiseks fikseerime $z \in L_A \cap I_A$ ning paneme tähele, et read $\sum_k a_k z_k$, $\sum_k (tA)_k z_k$ ja $\sum_k \alpha_k z_k$ koonduvad kõikide $t \in l$ ning $\alpha \in c_A^{\beta}$ korral. Seosest (7.1) tuleneb seetõttu ka rea $\sum_k z_k f(e^k)$ koonduvus suvalise $f \in c_A'$ puhul. Saame, et $F_A \supset L_A \cap I_A = B_A \cap I_A$.

(b) Kui $x \in F_A$, siis lause 7.1(a) põhjal $(tA)x = t(Ax)$ iga $t \in l$ korral ning väide järeldub seosest (7.1).

(c) Kuna $\lim_A \in c_A'$, siis iga $x \in W_A$ korral $\lim_A x = \sum_k x_k \lim_A e^k = \sum_k a_k x_k$, s.t. $W_A \subset B_A \cap \Lambda_A^{\perp} = B_A \cap I_A \cap \Lambda_A^{\perp} = F_A \cap \Lambda_A^{\perp}$ (vrd. väide (a)). Vastupidi, kui $x \in B_A \cap \Lambda_A^{\perp}$, siis $x \in F_A$ ning väite (b) kohaselt $f(x) = \sum_k x_k f(e^k)$ iga $f \in c_A'$ korral. Tähendab, $B_A \cap \Lambda_A^{\perp} = L_A \cap \Lambda_A^{\perp} = F_A \cap \Lambda_A^{\perp} \subset W_A$.

(d) Kuna Λ_A on lineaarne funktsionaal määramispiirkonnaga I_A, siis codim $\Lambda_A^{\perp} \leq 1$ alamruumis I_A. Seetõttu (vrd. (c)) codim W_A = codim $(\Lambda_A|_{F_A})^{\perp} \leq 1$, millest järeldubki väide.

Kokkuvõttes oleme saanud järgmised seosed:

$$\begin{aligned} \varphi \subset S_A \subset W_A &= L_A \cap \Lambda_A^{\perp} \subset W_A \oplus \langle u\rangle = F_A \\ &= L_A \cap I_A \subset L_A = B_A , \end{aligned} \tag{7.2}$$

kus $u = 0$ või $u \in F_A \setminus W_A$.

Teeme mõned märkused konservatiivsete maatriksite kohta. Esiteks järeldub lausest 5.5 (b), et kui $c \subset c_A$, siis $c_0 = S_c \subset S_A$. Edasi, kuna, $a := (a_k) \in l$ (vrd. teoreem 2.1 (a)), siis rida $\sum_k a_k x_k$ koondub iga $x \in m \cap c_A$ korral, s.t. $m \cap c_A \subset I_A$. Teisalt kehtib konservatiivse A puhul tingimus (2.3), seega

$$\sup_{n,m} \Big|\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k\Big| \leq \sup_n \sum_k |a_{nk}| \, \|x\|_\infty < \infty \quad (x \in m \cap c_A).$$

Niisiis, $m \cap c_A \subset B_A$. Kokkuvõttes oleme tõestanud

LAUSE 7.3. *Konservatiivse maatriksi A korral kehtib sisalduvus* $m \cap c_A \subset F_A$.

Saadud sisalduvuse kohaselt $e \in F_A$, s.t. rida $\sum_n f(e^k)$

koondub iga $f \in c_A'$ korral. Defineerime

$$\chi(f) := f(e) - \sum_k f(e^k) \quad (f \in c_A')$$

ning paneme tähele, et $\chi(\lim_A) = \chi(A)$. Üldiselt saame aga lausest 7.2 (b)

$$\chi(f) = \mu^\wedge_A(e) = \mu\chi(A). \tag{7.3}$$

Meenutame (vt. §2), et konservatiivset maatriksit A nimetatakse konullmaatriksiks, kui $\chi(A) = 0$, ja koregulaarseks, kui $\chi(A) \neq 0$. Neid mõisteid saab kirjeldada summeeruvusvälja c_A FK-topoloogia abil.

TEOREEM 7.4. *Konservatiivne maatriks A on koregulaarne parajasti siis, kui $e \notin W_A$.*

Tõestus. Kui $\chi(A) \neq 0$, siis

$$\lim_A e \neq \sum_k a_k = \sum_k \lim_A e^k,$$

seega, pidades silmas, et $\lim_A \in c_A'$, saame $e \notin W_A$. Vastupidi, kui $e \notin W_A$, siis leidub selline $f \in c_A'$, et $\chi(f) \neq 0$, millest seose (7.3) põhjal järeldub $\chi(A) \neq 0$.

JÄRELDUS 7.5. (a) *Koregulaarse maatriksi A korral kehtib seos $F_A = W_A \oplus \langle e \rangle$.*
(b) *Kui A on konullmaatriks ning $c_B \supset c_A$, siis ka B on konullmaatriks.*
(c) *Maatriksite konullilisus ning koregulaarsus on invariantsed omadused.*

Tõestus. Teoreemist 7.4 järeldub lause 7.2 (d) põhjal väide (a), lause 5.5 (b) põhjal aga väide (b). Väide (c) on vahetu järeldus eelmisest teoreemist.

Erilist huvi pakuvad sellised maatriksid, mille summeeruvusväli langeb kokku oma ühe või teise tähtsa alamruumiga. Järgmine teoreem näitab, et selline maatriksite klassifikatsioon on üpris vaene.

TEOREEM 7.6. *Maatriksi A korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
(a) $c_A = B_A$, *s.t. A on AB-maatriks*,
(b) $c_A = L_A$,
(c) $c_A = F_A$,
(d) $c_A = W_A$ *või* $c_A = W_A \oplus \langle u \rangle$, *kus* $u \in F_A \setminus W_A$.

(e) $c_A = S_A$ *või* $c_A = S_A \oplus \langle u\rangle$, *kus* $u \in F_A \setminus S_A$.
Kui kehtib üks väidetest (a) - (e), *siis* $c_A = I_A$.

Tõestus. Lausest 7.1 järeldub (a) $\Leftrightarrow$ (b). Eeldame, et $c_A = B_A$ ja vaatleme algul juhtu, kus c_A on AD-ruum, s.t. $\bar{\varphi} = c_A$. Siis lause 5.6 kohaselt $c_A = S_A$ ning seoste (7.2) põhjal kehtib võrdus $c_A = F_A$. Kui $\bar{\varphi} \neq c_A = L_A$, siis leidub selline $f \in c_A'$, et $f \neq 0$, kuid kern $f \supset \varphi$, valemi (7.1) kohaselt $f(x) = \mu\Lambda_A(x)$ $(x \in c_A)$. Tingimuse $f \neq 0$ tõttu $\mu \neq 0$, seepärast peab rida $\sum_k a_k x_k$ iga $x \in c_A$ korral koonduma, teiste sõnadega $c_A = I_A$. Lause 7.2 (a) põhjal $c_A = F_A$. Me tõestasime, et (b) $\Rightarrow$ (c).

Implikatsioon (c) $\Rightarrow$ (d) järeldub vahetult lausest 7.2 (d). Kui $c_A = W_A$, siis lausest 5.6 saame, et $c_A = S_A$. Juhul $c_A = W_A \oplus \langle u\rangle$, kus $u \in F_A \setminus W_A$, kehtib $c_A = B_A$ ning järelduse 4.22 põhjal on S_A kinnine alamruum. Seega $S_A = W_A = \bar{\varphi}$ ja $c_A = S_A \oplus \langle u\rangle$. Niisiis, (d) $\Rightarrow$ (e). Implikatsioon (e) $\Rightarrow$ (a) järeldub lausest 5.6. Lõpuks on selge, et juhul $c_A = F_A$ kehtib $c_A = I_A$.

Kahjuks on teoreemis 7.6 loetletud meeldivate omadustega maatriksite (s.t. AB-maatriksite) klass suhteliselt väike. Siiski on mitmed klassikalised summeerimismenetlused AB-omadusega.

Näide 1. Olgu M_p regulaarne Rieszi kaalutud keskmiste menetlus. Siis iga $x \in c_{M_p}$ ja $m \le n$ korral

$$\Big|\sum_{k=0}^{m} m_{nk}x_k\Big| = \Big|\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{m} m_{nk}x_k\Big| = \Big|\frac{P_m}{P_n}\sum_{k=0}^{m}\frac{p_k}{P_m}x_k\Big|$$

$$= \Big|\frac{P_m}{P_n}\Big|\,\Big|\sum_{k=0}^{m} m_{nk}x_k\Big| \le \Big|\frac{P_m}{P_n}\Big|\,\|x\|_{M_p} = O(1).$$

Et $|P_n| \to \infty$ (vrd. §2), siis $P_m/P_n = O(1)$ $(m \le n,\ n \to \infty)$, mistõttu $x \in B_{M_p}$. Niisiis, $c_{M_p} = B_{M_p}$, s.t. M_p on AB-menetlus.

LAUSE 7.7. (a) *Kui* A *on selline* AB-*maatriks, mis ei sisalda nullveerge, siis* c_A *on* BK-*ruum normiga*

$$\|x\|^* := \sup_{n,m}\Big|\sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k\Big| \quad (x \in c_A).$$

(b) *Reversiivne maatriks* A *on* AB-*omadusega parajasti siis,* *kui leidub konstant* M > 0, *et*

$$\sup_{n,m} \left| \sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k \right| \le M \, \|x\|_A \qquad (x \in c_A). \tag{7.4}$$

(c) *Kui* A *on normaalne* AB-*maatriks, siis leidub konstant* M > 0, *et*

$$|a_{nk}| \le M \, |a_{nn}| \qquad (k = 0,\dots,n,\ n \in \mathbb{N}).$$

(d) *Kui* A *on selline* AB-*maatriks, et* $\varphi \subset c_{o_A}$ (s.t. $a_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$), *siis* A *on* AK-*maatriks*.

Tõestus. (a) Lihtne on veenduda, et antud eeldustel on $\| \ \|^*$ tõepoolest norm, näitame, et ta on ekvivalentne poolnormide süsteemiga $\{\| \ \|_A\} \cup \mathcal{P}$. Tähistame

$$f_{nm}(x) := \sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k \qquad (x \in c_A),$$

siis $f_{nm} \in (c_A, \{\| \ \|_A\} \cup \mathcal{P})'$ $(n,m \in \mathbb{N})$. Kuna A on AB-maatriks, siis on jada (f_{nm}) punktiviisi tõkestatud, mistõttu (vrd. teoreem 4.20) leiduvad $K_1, K_2 > 0$ ning $l \in \mathbb{N}$, et

$$\|x\|^* = \sup_{n,m} |f_{nm}(x)| \le K_1 \|x\|_A + K_2 \sum_{i=0}^{l} p_i(x) \qquad (x \in c_A).$$

Seega (vrd. lause 4.2) on $\| \ \|^*$ pidev norm FK-ruumis $(c_A, \{\| \ \|_A\} \cup \mathcal{P})$. Vastupidi, kui A on AB-maatriks, siis kehtivad võrratused

$$\|x\|_A \le \|x\|^*, \quad \sup_m \left| \sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k \right| \le \|x\|^* \quad (x \in c_A,\ n \in \mathbb{N}). \tag{7.5}$$

Eeldusel, et A ei sisalda nullveerge, saame võrratusest

$$|a_{nm} x_m| = \left| \sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k - \sum_{k=0}^{m-1} a_{nk} x_k \right| \le 2\|x\|^*$$

tingimuse

$$|x_m| \le \frac{2}{\sup_n |a_{nm}|} \|x\|^* \qquad (x \in c_A,\ m \in \mathbb{N}). \tag{7.6}$$

Seostest (7.5) ja (7.6) järeldub lause 4.2 põhjal, et poolnormid $\| \ \|_A$ ja p_n on normi $\| \ \|^*$ suhtes vektorruumis c_A pidevad. Lause 4.5 kohaselt on $\{\| \ \|_A\} \cup \mathcal{P}$ ekvivalentne normiga $\| \ \|^*$. Et $(c_A, \{\| \ \|_A\} \cup \mathcal{P})$ on FK-ruum, siis on ka $(c_A, \| \ \|^*)$ FK-ruum, seega BK-ruum.

(b) Väite (a) põhjal on normid $\| \ \|^*$ ja $\| \ \|_A$ reversiivse AB-maatriksi A puhul ekvivalentsed, niisiis kehtib (7.4). Vastupidi, võrratusest (7.4) järeldub vahetult lõiketõkestatus iga $x \in c_A$ korral.

(c) Kui A on normaalne AB-maatriks, siis väite (b) järgi kehtib võrratus (7.4), millest $x := e^n$ korral saamegi, et $|a_{nk}| \leq M\,|a_{nn}|$ $(k = 0,\ldots,n,\ n \in \mathbb{N})$.

(d) Kui $c_A = B_A$ ja $a_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$, siis $W_A = A_A^{\perp} = c_{o_A}$ ning lause 5.6 kohaselt $c_{o_A} = S_A$, s.t. A on AK-maatriks.

Täiendused ja märkused

Summeeruvusvälja tähtsate alamruumide uurimine sai alguse 1952. a. Wilansky [251] ja Zelleri [272] töödes. Terminid "tähtsad alamruumid" (distinguished subspaces, ausgezeichnete Teilräume) ja "summeeruvusinvariant" võttis Wilansky kasutusele 1964. a. ilmunud artiklis [252]. Selles töös on tõestatud enamik käesolevas paragrahvis esitatud väidetest (tõsi küll, eeldusel, et A on konservatiivne). Mõned detailid olid tõestatud juba varemnimetatud kahes artiklis ning Coomese ja Cowlingi töös [80]. Lauses 7.7 toodud väited AB-maatriksite kohta on pärit varasematest töödest. Vanemas terminoloogias öeldi, et normaalsel maatriksil A, mis rahuldab tingimust (7.5), on *keskväärtuse-omadus* ning lause 7.7 (b) tüüpi väiteid nimetati *keskväärtusteoreemideks*. Selle omaduse topoloogiline sisu on selgelt fikseeritud Zelleri artiklis [271] ning eriti Wilansky ja Zelleri töös [262], kus on esitatud ka lause 7.7 väited (a), (c) ja (d). Konkreetsete menetluste M_p, C_α $(0 \leq \alpha \leq 1)$ jt. AB-omadusi kasutasid paljud autorid juba varem (vt. näiteks Riesz [196], Bosanquet [62] jt.)

Tähtsate alamruumidega seotud uurimuste suuna ning probleemideringi kujunemisel mängisid olulist osa mainitud Wilansky töö [252] ja Bennetti artikkel [31]. Neist väljakasvanud uurimissuunad on vaatluse all paragrahvides 6 ja 9. Summeeruvusinvariantsuse idee aluseks sai 1959.a. Jürimäe [353] poolt antud konullilisuse ja koregulaarsuse topoloogiline iseloomustus, mille erijuhuks on eelpool tõestatud teoreem 7.4. Mõnevõrra hiljem jõudis sama tulemuseni Snyder [221], temalt pärineb ka idee klassifitseerida konservatiivsed FK-ruumid (s.o. FK-ruumid, mis sisaldavad alamruumi c) E konullilisteks ja koregulaarseteks vastavalt sellele, kas tingimus $e \in W_E$ kehtib või ei. Snyder toob egile konullruumide kolm põhilist omadust (vt.[222]).

1° Kui E on konullruum ja FK-ruum F sisaldab E, siis ka F on konullruum (vrd. järeldus 7.5(b)).

2° Konullruumi kinnine konservatiivne alamruum on konullruum.

3° Loenduva arvu konullruumide ühisosa on konullruum.

Omaduse 1° juurde märgime, et kui E on konullruum ja $c_A \supset m \cap E$, siis A on konullmaatriks. Väide ei kehti aga, kui c_A asendada FK-ruumiga F, näiteks on $(m, \|\ \|_\infty)$ koregulaarne BK-ruum ja $m \supset m \cap \omega$, kuigi $(\omega, \mathcal{R})$ on konullruum.

Siinkohal viitame Wilansky "FK-programmile" ([259], art. 4.7), mille idee seisneb selles, et summeeruvusega seotud mõisted püütakse defineerida FK-ruumide "keeles", s.t. laiendada neid summeeruvusväljadelt suvalistele FK-ruumidele. Samuti püütakse summeeruvusteooria teoreeme üle kanda FK-ruumidele. FK-programmi lähtepunktiks on eelpoolmainitud Jürimäe teoreem konullilisusest ja koregulaarsusest. On selge, et see programm ei saa sajaprotsendiliselt realiseeruda, sellele viitab ka eelnev märkus omaduse 1° kohta.

Snyder [222] iseloomustas konullilisuse omadusi Saksi e. kahenormiruumide ja võnkumisruumide abil.

Kui loenduvnormeeritud ruumis (X,Q) (või üldisemalt, lokaalselt kumeras ruumis (X,τ)) on defineeritud selline norm p, et ühikkera $\{x \in X \mid p(x) \le 1\}$ on ruumis (X,Q) tõkestatud ja kinnine, siis nimetatakse ruumi (X,Q,p) kahenormi- e. Saksi ruumiks (vt. Cooper [81]). Näiteks konservatiivse FK-ruumi (E,Q) korral on $(c,Q,\|\ \|_{\infty})$ Saksi ruum. Kui jada $(x^{(n)})$ rahuldab tingimusi $x^{(n)} \to x((X,Q))$ ja $\sup_n p(x^{(n)}) < \infty$, siis öeldakse, et ta on γ-koonduv elemendiks x Saksi ruumis (X,Q,p) ja tähistatakse $x^{(n)} \to x(\gamma)$. Alamhulga $U \subset X$ puhul tähistame $\overline{U}^{\gamma} := \{x \in X \mid \exists x^{(n)} \in U\ (n \in \mathbb{N}):\ x^{(n)} \to x(\gamma)\}$.

Olgu $r := (r_n)$ indeksite jada, kus $r_0=1$. Jada $x := (x_k)$ korral märgime $O_n(x) := \max\{|x_k - x_l| \mid r_n \le k < l \le r_{n+1}\}$ ning moodustame nn. *võnkumisruumi* $\Omega(r) := \{x \in \omega \mid O_n(x) \to 0\ (n \to \infty)\}$. Osutub, et $\Omega(r)$ on konservatiivne BK-ruum normiga $\|x\| := \sup_n O_n(x) + |x_0|$, seejuures on ta konullruum.

TEOREEM (Snyder [222]). *Konservatiivse FK-ruumi* (E,Q) *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*
(a) E *on konullruum.*
(b) $e \in \overline{\varphi}^{\gamma}$ *Saksi ruumis* $(c,Q,\|\ \|_{\infty})$.
(c) *leidub selline* $r := (r_n)$, *et* $E \supset \Omega(r)$.

Snyderi ideid on mitmed autorid erinevates suundades edasi arendanud. Tema enda ja Wilansky artiklis [225] käsitletakse eelpool vaadeldud probleeme poolkonservatiivsetes FK- ruumides (vt. §5, täiendused ja märkused).

TEOREEM ([225]). *Poolkonservatiivne FK-ruum* (E,Q) *on konullruum (s.t.* $e \in W_E$*) parajasti siis, kui* $e \in E$ *ja*

$$e \in \overline{\varphi}^{\gamma} \text{ Saksi ruumis } (bv,Q,\|\ \|_{bv}). \qquad (*)$$

Samas leiavad autorid tarvilikud ja piisavad tingimused c_A poolkonservatiivsuseks: (a) $\sup_{n,m} |\sum_{k=0}^{m} a_{nk}| < \infty$, (b) $\sum_k a_{nk}$ koondub $(n \in \mathbb{N})$, (c) eksisteerib $\lim_n a_{nk} =: a_k$ $(k \in \mathbb{N})$, (d) $\sum_k a_k$ koondub. Kui seejuures $e \in c_A$, siis $e \in W_A$ parajasti siis, kui $\chi(A) = 0$.

Sember [211], [213] käsitleb *variatsionaalseid* ruume, s.o. FK-ruume E omadusega $E \supset bv$. Kandes sellistesse ruumidesse üle Snyderi konullilisuse ja koregulaarsuse definitsiooni, näitab autor, et konullilistes variatsionaalsetes ruumides kehtib väide (*) ning leiab rea tingimusi, mis koos tingimusega (*) garanteerivad konullilisuse. Üldisemat tüüpi variatsionaalseid ja võnkumisruume ning nende konullilisust uuris Censor [76], [77].

Lõpuks märgime Bennetti, Semberi ja Wilansky artiklit [41], milles autorid käsitlevad FK-ruumi E_A (vt. §6) tähtsaid alamruume. Muuhulgas näitavad nad, et AK-FK-ruumi E puhul kehtivad võrdused

$$F_{E_A} = \{x \in E_A \mid \forall t \in E^\beta \ \exists \ (tA)x\}.$$
$$W_{E_A} = \{x \in E_A \mid \forall t \in E^\beta: (tA)x = t(Ax)\}.$$

Tähelepanuväärne on selles töös esitatud DeVosi tulemus: kui E on selline AK-FK-ruum, et E^β on AD-FK-ruum, siis $W_{E_A} = F_{E_A}$.

FK-ruumi E_A tähtsate alamruumide ulatuslikuma käsitluse leiab lugeja Wilansky raamatus [259] (12. pt.). Eraldi märgime absoluutse summeeruvusvälja l_A struktuuri ja alamruume käsitlevaid töid : Macphail [153], Brown ja Cowling [65], Brown [64], Macphail ja Orhan [156].

§8. MAATRIKSITE μ-ÜHESUS JA ASENDATAVUS

Teoreemis 6.4 (c) toodud funktsionaali $f \in c_A'$ esitus

$$f(x) = \mu \lim_A x + t(Ax) + \alpha x \quad (x \in c_A) \qquad (8.1)$$

ei ole üheselt määratud. Kui (8.1) on f mingi konkreetne esitus, kus $\mu \in \mathbb{K}$, $t \in l$ ja $\alpha \in c_A^{\beta}$, ning $s \in \varphi$, siis tänu võrdusele $s(Ax) = (sA)x$ $(x \in c_A)$ saame teise esituse

$$f(x) = \mu \lim_A x + (t + s)Ax + (\alpha - sA)x \quad (x \in c_A),$$

mis $s \neq 0$ korral erineb esialgsest. Näeme, et t ja α ei ole ühelgi juhul funktsionaaliga f üheselt määratud. Kordaja μ puhul on asi keerulisem. Kindlasti ei ole ka tema alati üheselt määratud. Näiteks maatriksi Σ (vt. §1, näide 2) korral on funktsionaali $\lim_\Sigma \in c_\Sigma'$ jaoks võimalikud esitused (8.1), kus $\mu = 1$ ja $t = \alpha = 0$ või $\mu = 0$, $t = 0$, $\alpha = e$. Siiski on olemas suur klass selliseid maatrikse A, mille puhul kordaja μ ei sõltu ühegi funktsionaali $f \in c_A'$ korral tema konkreetsetest esitustest (8.1). Neid maatrikse nimetatakse *μ-ühesteks.*

Olgu funktsionaali $f \in c_A'$ puhul

$$\begin{aligned} f(x) &= \mu \lim_A x + t(Ax) + \alpha x \\ &= \mu' \lim_A x + t'(Ax) + \alpha' x \quad (x \in c_A), \end{aligned}$$

kus $\mu, \mu' \in \mathbb{K}$, $t, t' \in l$ ja $\alpha, \alpha' \in c_A^\beta$. Siis

$$(\mu - \mu')\lim_A x + (t - t')(Ax) + (\alpha - \alpha')x = 0 \quad (x \in c_A)$$

ja on selge, et A *on μ-ühene parajasti siis, kui kordaja μ on võrdne nulliga nullfunktsionaali* $0 \in c_A'$ *igas esituses.* Sellest on lihtne järeldada, et *kui A ei ole μ-ühene, siis* *võib kordaja* μ *iga* $f \in c_A'$ *esituses* (8.1) *omada mistahes skalaarset väärtust, sealhulgas ka väärtust* 0. Seda silmas pidades defineerime funktsionaali $f \in c_A'$ jaoks

$$\mu(f) := \begin{cases} \mu, & \text{kui } A \text{ on } \mu\text{-ühene}, \\ 0, & \text{kui } A \text{ ei ole } \mu\text{-ühene}, \end{cases}$$

kus μ on kordaja f esitus (8.1).

LAUSE 8.1.(a) *Kui maatriksi* A *korral* $L_A \neq W_A$, *siis on ta* μ-*ühene*.
(b) *Iga koregulaarne maatriks on* μ-*ühene*.

Tõestus. (a) Kui A ei ole μ-ühene, siis leidub null-funktsionaalil 0 esitus, kus $\mu = 1$. Valemist (7.1) saame

$$0 = \mu \lim_A x + t(Ax) - ax - (tA)x \quad (x \in L_A),$$

seega

$$\lim_A x = ax \quad (x \in L_A)$$

ehk $L_A \subset A_A^{\perp}$. Kokkuvõttes (vrd. lause 7.2) $L_A = W_A$.
Väite (b) saame väitest (a) ja järeldusest 7.5 (a).

Edasi püüame leida vastuse küsimusele μ-ühesuse invariantsusest. *Kui* A *on* μ-*ühene maatriks ja* $c_B = c_A$, *kas* B *on* μ-*ühene*? Selle probleemi lahendamisel osutub vajalikuks järgmine *faktoriseerimisteoreem*.

TEOREEM 8.2. *Olgu* A μ-*ühene ja* B *selline maatriks, et* $c_A \subset c_B$. *Siis* B *on esitatav kujul*

$$B = CA + D,$$

kus maatriksid C *ja* D *rahuldavad järgmisi tingimusi*:
(a) $\sup_n \sum_k |c_{nk}| < \infty$,
(b) $t(Dx) = (tD)x$ *iga* $t \in l$ *ja* $x \in \omega_A$ *korral*,
(c) $(CA)x$ *eksisteerib ja* $C(Ax) = (CA)x$ *iga* $x \in c_A$ *korral*,
(d) $t((CA)x) = (tC)(Ax)$ *iga* $t \in l$ *ja* $x \in c_A$ *korral*.

Tõestus. Vaatleme lineaarseid funktsionaale

$$f_n : c_A \to \mathbb{K}, \qquad x \to \sum_k b_{nk} x_k \quad (n \in \mathbb{N}),$$

sisalduvuse $c_A \subset c_B$ tõttu on nad pidevad (vrd. lause 5.8 (a)). Veelgi enam, nad moodustavad EK-ruumis $(c_A, \{\|\ \|_A\} \cup \mathcal{P})$ punktiviisi koonduva jada. Teoreemi 4.20 põhjal leiduvad vad L, K > 0 ja $m \in \mathbb{N}$, et

$$\sup_n |f_n(x)| \le L\|x\|_A + K\sum_{k=0}^{m} p_k(x) \quad (x \in c_A).$$

Edasi, lause 4.8 kohaselt saame leida sellised funktsionaalid $h_n \in c'$ ja $g_n \in \omega_A'$, et

$$f_n = h_n \circ A + g_n,$$

kusjuures

$$|h_n(y)| \le L\|y\|_\infty, \ |g_n(x)| \le K\sum_{k=0}^{m} p_k(x) \ (y\in c, \ x\in\omega_A, \ n\in\mathbb{N}).$$

Kuna $(\omega_A, \mathcal{P})$ on AK-ruum (vt. teoreem 6.3 (a)), siis

$$g_n(x) = \sum_k x_k g_n(e^k) =: (Dx)_n,$$

seega on maatriks $D := (d_{nk})$ defineeritud seosega

$$d_{nk} := g_n(e^k) \quad (n,k \in \mathbb{N}).$$

Pidades silmas funktsionaali $f \in c'$ üldkuju (1.3), saame iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$h_n(y) = \mu_n \lim y + \sum_k t_k^{(n)} y_k \quad (y \in c),$$

järelikult

$$h_n(Ax) = \mu_n \lim_A x + t^{(n)}(Ax) \quad (x \in c_A),$$

kus $\mu_n \in \mathbb{K}$ ja $t^{(n)} \in l$. Niisiis, ühelt poolt

$$f_n(x) = \mu_n \lim_A x + t^{(n)}(Ax) + (g_n(e^k))_k x,$$

teiselt poolt

$$f_n(x) = (b_{nk})_k x \quad (x \in c_A).$$

Maatriksi A μ-ühesusest järeldub, et $\mu_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Defineerides $C := (c_{nk}) := (t_k^{(n)})$, saame

$$Bx = (f_n(x)) = C(Ax) + Dx \quad (x \in c_A), \qquad (8.2)$$

millest $x := e^k$ korral tulenebki

$$b_{nk} = \sum_i c_{ni} a_{ik} + d_{nk} \quad (n,k \in \mathbb{N})$$

ehk $B = CA + D$. Jääb näidata, et tingimused (a)-(c) on rahuldatud.

Kuna $\mu_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, siis

$$\sup_n \sum_k |c_{nk}| = \sup_n \sum_k |t_k^{(n)}| = \sup_n \|h_n\| \le L,$$

s.t. väide (a) kehtib. Edasi, et iga $t \in l$ korral

$$\sum_n |t_n (Dx)_n| = \sum_n |t_n g_n(x)| \le K \sum_{k=0}^{m} p_k(x)\|t\|_1 < \infty \ (x \in \omega_A),$$

siis lineaarsed funktsionaalid

$$f_t : \omega_A \to \mathbb{K}, \qquad x \to t(Dx)$$

on pidevad. Ruumi ω_A AK-omaduse tõttu

$$t(Dx) = f_t(x) = \sum_k x_k f_t(e^k) = (tD)x \quad (x \in \omega_A)$$

iga $t \in l$ puhul, niisiis kehtib väide (b).

Seosest (8.2) saame $x \in \omega_A$ ja $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\sum_k b_{nk}x_k = \sum_i c_{ni}\sum_k a_{ik}x_k + \sum_k d_{nk}x_k,$$
teiselt poolt kehtib sisalduvuse $c_A \subset \omega_D$ ning seose $B = CA + D$ tõttu võrdus
$$\sum_k b_{nk}x_k = \sum_k (\sum_i c_{ni}a_{ik})x_k + \sum_k d_{nk}x_k.$$
Niisiis, $(CA)x$ eksisteerib ja
$$C(Ax) = Bx - Dx = (CA)x \quad (x \in c_A).$$
Saime tingimuse (c). Viimast seost kasutame väite (d) tõestamiseks:
$$t((CA)x) = t(Bx) - t(Dx)$$
eksisteerib kõikide $x \in c_A$ ja $t \in l$ korral sisalduvuse $c_A \subset c_B$ ning omaduse (b) põhjal. Kuna
$$\sum_n \sum_k |t_n c_{nk}(Ax)_k| = \sum_n |t_n| \sum_k |c_{nk}||(Ax)_k|$$
$$\le \|x\|_A \sup_n \sum_k |c_{nk}| \, \|t\|_1 < \infty,$$
siis võib vahetada rea $\sum_n t_n \sum_k c_{nk} \sum_i a_{ki} x_i$ summeerimisjärjekorda, millest saamegi võrduse
$$t((CA)x) = (tC)(Ax) \quad (t \in l, \ x \in c_A).$$
Teoreem on tõestatud.

Olgu A ja B sellised maatriksid, et $c_A \subset c_B$. Iga $f \in c_B'$ on esitatav kujul
$$f(x) = \mu \lim_B x + t(Bx) + \alpha x \quad (x \in c_B),$$
kus $\mu \in \mathbb{K}$, $t \in l$ ja $\alpha \in c_B^{\beta}$. Kuna $f|_{c_A} \in c_A'$ (vrd. järeldus 5.3 (a)), siis leiduvad $\mu_A(f|_{c_A}) \in \mathbb{K}$, $\tilde{t} \in l$ ja $\tilde{\alpha} \in c_A^{\beta}$, et
$$f(x) = \mu_A(f|_{c_A})\lim_A x + \tilde{t}(Ax) + \tilde{\alpha}x \quad (x \in c_A). \qquad (8.3)$$
See on nii ka juhul $f := \lim_B$: leiduvad $\mu_A(B) := \mu_A(\lim_B|_{c_A}) \in \mathbb{K}$, $s \in l$ ja $\gamma \in c_A^{\beta}$, et
$$\lim_B x = \mu_A(B)\lim_A x + s(Ax) + \gamma x \quad (x \in c_A).$$
Asendades viimasest seosest $\lim_B x$ funktsionaali f esialgsesse avaldisse, saame $f|_{c_A}$ esituse
$$f(x) = \mu\mu_A(B)\lim_A x + \mu s(Ax)$$
$$+ (\mu\gamma + \alpha)x + t(Bx) \quad (x \in c_A). \qquad (8.4)$$
Eeldame nüüd, et A on μ-ühene maatriks, siis $B = CA + D$, kus maatriksid C ja D rahuldavad teoreemi 8.2 tingimusi (a)-(d), mistõttu
$$t(Bx) = t(C(Ax)) + t(Dx) = (tC)(Ax) + (tD)x \quad (x \in c_A).$$
See võimaldab $f|_{c_A}$ esitusele (8.4) anda kuju

$$f(x) = \mu\mu_A(B)\lim_A x + (\mu s + tC)Ax + (\mu\gamma + \alpha + tD)x \quad (x \in c_A), \qquad (8.5)$$

kusjuures $\mu s + tC \in l$ ja $\mu\gamma + \alpha + tD \in c_A^{\beta}$. Niisiis oleme saanud funktsionaali $f|_{c_A}$ esitused (8.3) ja (8.5). Maatriksi A μ-ühesuse tõttu $\mu_A(f|_{c_A}) = \mu\mu_A(B)$.

Kui A ei ole μ-ühene, siis $\mu(f|_{c_A}) = \mu_A(B) = 0$. Kokkuvõttes oleme tõestanud järgmise

LAUSE 8.3. *Kui A ja B on sellised maatriksid, et $c_A \subset c_B$, siis iga $f \in c_B'$ korral kehtib võrdus*

$$\mu_A(f|_{c_A}) = \mu\mu_A(B).$$

Nüüd saame anda vastuse eelpool esitatud küsimusele.

TEOREEM 8.4. *Maatriksite μ-ühesus on invariant.*

Tõestus. Eeldame, et A on μ-ühene ning B temaga ekvivalentne maatriks, s.t. $c_A = c_B$. Lause 8.3 põhjal piisab maatriksi B μ-ühesuse tõestamiseks näidata, et $\mu_A(B) \neq 0$, sel juhul võime suvalise $f \in c_B'$ korral avaldada $\mu = \mu_A(f|_{c_A})/\mu_A(B)$. Võtame lauses 8.3 $f := \lim_A \in c_B'$, siis saame

$$\mu_A(A) := \mu_A(\lim_A) = \mu\mu_A(B),$$

kus μ on kordaja $\lim_A \in c_B'$ esituses. Kuna maatriksi A μ-ühesuse tõttu $\mu_A(A) = 1$, siis $\mu_A(B) \neq 0$.

Tulles maatriksite asendatavuse küsimuste juurde, meenutame (vt. §1), et algselt oli seatud probleem konservatiivse maatriksi asendatavusest temaga ekvivalentse regulaarse maatriksiga. Hiljem sai see termin avarama sisu. Maatriksit A nimetame *asendatavaks*, kui leidub maatriks B omadustega $c_B = c_A$ ja $c_{0B} \supset \varphi$.

Asendatavuse, nagu ka mitmete teiste probleemide uurimisel, on vajalikuks abivahendiks

LAUSE 8.5. *Olgu A maatriks.*

(a) *Iga $f \in c_A'$ korral leidub selline maatriks B, et*

$$c_A \subset c_B \text{ ja } \lim_B|_{c_A} = f.$$

(b) *Funktsionaali $f \in c_A'$ korral leidub selline maatriks B, et*

$$c_A = c_B \text{ ja } \lim_B = f.$$
parajasti siis, kui f *mingis esituses* $\mu \neq 0$.

Tõestus. (a) Olgu $f \in c_A'$ antud kujul (8.1). Defineerime maatriksi $D = (d_{in})$ seosega

$$d_{in} := \begin{cases} \mu, & \text{kui } n = i, \\ t_n, & \text{kui } n < i, \\ 0, & \text{kui } n > i. \end{cases}$$

Kuna $t \in l$, siis on D konservatiivne maatriks ning (vrd. teoreem 2.1 (a))

$$\lim_D y = \mu \lim y + ty \quad (y \in c).$$

Edasi moodustame maatriksi $C := DA$, seega

$$(Cx)_i := \sum_k c_{ik} x_k = \sum_k \sum_{n=0}^{i} d_{in} a_{nk} x_k$$

$$= \sum_{n=0}^{i} d_{in} \sum_k a_{nk} x_k \quad (x \in \omega_A),$$

niisiis,

$$\lim_C x = \lim_D Ax = \mu \lim_A x + t(Ax) \quad (x \in c_A).$$

Võtame nüüd

$$b_{nk} := \begin{cases} \alpha_k, & \text{kui } n = 0, \\ \alpha_k + c_{n-1,k}, & \text{kui } n > 0 \end{cases} \quad (n, k \in \mathbb{N})$$

ja veendume, et maatriksil $B := (b_{nk})$ on nõutud omadused. Kuna $\alpha \in c_A^{\beta}$ ja $c_A \subset c_C$, siis $c_A \subset \omega_B$. Seejuures

$$(Bx)_0 = \alpha x, \quad (Bx)_n = \alpha x + (Cx)_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

järelikult $c_A \subset c_B$ ja

$$\lim_B x = \lim_C x + \alpha x = f(x) \quad (x \in c_A).$$

(b) Tarvilikkus. Olgu $c_B = c_A$ ja $f = \lim_B$ antud $f \in c_A'$ korral, siis $f \in c_B'$ esituses on $\mu = 1$, $t = \alpha = 0$. Lause 8.3 põhjal $\mu = \mu_A(f) = \mu_A(B) \neq 0$.

Piisavus. Olgu $f \in c_A'$ antud sellise esitusega (8.1), kus $\mu \neq 0$. Moodustame maatriksid D, C ja B nagu väite (a) tõestuses. Kuna $\mu \neq 0$, siis D on normaalne, seega on tal normaalne pöördmaatriks D^{-1}. Järgnevast lemmast 8.6 järeldub, et D^{-1} on konservatiivne maatriks. Kuna $C = DA$ ja $c_A \subset c_C$, siis $A = D^{-1}C$, kust D^{-1} konservatiivsuse tõttu saame $c_A \supset c_C$. Kokkuvõttes $c_C = c_A$. Edasi, kui $x \in c_B$, siis eksisteerivad $\alpha x = (Bx)_0$ ja $(Cx)_{n-1} = (Bx)_n - \alpha x$ $(n \in \mathbb{N})$ ning viimasest seosest tuleneb $x \in c_C$. Tähendab, $c_B \subset c_C = c_A$, kokkuvõttes (vrd. (a)) $c_B = c_A$.

Niisiis, lause 8.5 (b) tõestuse saime järgmise lemma rakendamisel.

LEMMA 8.6. *Kui* $t \in l$, $\mu_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *ja* $\mu_n \to \mu \neq 0$, *siis maatriksi*

$$D := \begin{bmatrix} \mu_0 & & & \\ t_0 & \mu_1 & & 0 \\ t_0 & t_1 & \mu_2 & \\ t_0 & t_1 & t_2 & \mu_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \tag{8.6}$$

pöördmaatriks D^{-1} *on konservatiivne*.

Tõestus. Näitame kõigepealt, et $y \notin m \to Dy \notin c$ ehk

$$Dy \in c \;\to\; y \in m.$$

Kui $y := (y_n) \notin m$, siis võtame indeksi N, et

$$|y_N| > \frac{1}{|\mu|}, \qquad \sum_{n=N}^{\infty} |t_n| < \frac{|\mu|}{7}, \qquad |\delta_n| < \frac{|\mu|}{2} \;(n \geq N)$$

kus $\delta_n := \mu_n - \mu$ $(n \in \mathbb{N})$. Edasi valime indeksi p nii, et

$$|y_{N+n}| \leq 7|y_N| \;(n = 0,\ldots,p-1), \quad |y_{N+p}| > 7|y_N|.$$

Sel juhul

$$|(Dy)_{N+p} - (Dy)_N| = |\mu_{N+p}y_{N+p} - \mu_N y_N + \sum_{n=N}^{N+p-1} t_n y_n|$$

$$= |(\mu + \delta_{N+p})y_{N+p} - (\mu + \delta_N)y_N + \sum_{n=N}^{N+p-1} t_n y_n|$$

$$\geq |\mu + \delta_{N+p}|\,|y_{N+p}| - |\mu + \delta_N|\,|y_N| - |\delta_N|\,|y_N| - \sum_{n=N}^{N+p-1} |t_n y_n|$$

$$\geq \frac{|\mu|}{2} 7|y_N| - |\mu|\,|y_N| - \frac{|\mu|}{2}|y_N| - 7|y_N|\frac{|\mu|}{7} = |\mu|\,|y_N| > 1,$$

mistõttu $Dy \notin c$.

Nüüd tõestame, et $Dy \in c \to y \in c$, see on samaväärne implikatsiooniga $x \in c \to D^{-1}x \in c$, s.t. maatriksi D^{-1} konservatiivsusega. Olgu $y \in \omega$ selline jada, et $Dy \in c$, siis eelneva põhjal $y \in m$, mistõttu rida $\sum_n t_n y_n$ koondub. Et

$$(Dy)_i = \mu_i y_i + \sum_{n=0}^{i-1} t_n y_n \qquad (i \in \mathbb{N}),$$

siis tingimuste $Dy \in c$ ja $\mu_i \to \mu \neq 0$ tõttu kehtib $y \in c$. Lemma, ning koos sellega ka lause 8.5 (b), on tõestatud.

Teatavasti (vt. järeldus 7.5 (c)) on maatriksite koregulaarsus invariantne omadus. Seepärast on arusaadav, et regulaarse maatriksiga saab asendada vaid koregulaarseid maatrikse. Kuid mitte kõiki, nagu selgub alljärgnevast teoreemist. Ühe osa selle tõestusest esitab

LEMMA 8.7. *Kui* A *on koregulaarne maatriks ning* $f \in c_A'$ *on selline funktsionaal, et* kern $f \supset \varphi$, *siis tema esituses* (8.1) *on* $\mu = 0$ *parajasti siis, kui* $f(e) = 0$.

Tõestus. Kõigepealt märgime, et kuna A on koregulaarne, siis on ta μ-ühene (vrd. lause 8.1 (b)). Võrduse (7.3) põhjal on $f(e) = \chi(f) = \mu\chi(A)$, millest järeldubki väide.

TEOREEM 8.8. *Olgu* A *konservatiivne maatriks. Temaga ekvivalentne regulaarne maatriks* B *leidub parajasti siis, kui* $e \notin \bar{\varphi}$ *FK-ruumis* c_A.

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu B regulaarne maatriks omadusega $c_B = c_A$, siis $\lim_B z = 0$ iga $z \in \varphi$ korral. Kui oletada, et $e \in \bar{\varphi}$ FK-ruumis c_A, siis leidub ruumi φ elementide jada $(z^{(n)})$, mis koondub punktiks e ruumis c_A. Kuna $\lim_B \in c_A'$, siis saamegi vastuolu:

$$1 = \lim_B e = \lim_B(\lim_n z^{(n)}) = \lim_n \lim_B z^{(n)} = \lim_n 0 = 0.$$

Piisavus. Eeldame, et $e \notin \bar{\varphi}$ konservatiivse maatriksi A summeeruvusväljas c_A. Et $W_A \subset \bar{\varphi}$ (vrd. lause 5.5 (a)), siis $e \notin W_A$, s.t. A on koregulaarne. Lause 4.11(a) põhjal leidub $f \in c_A'$ omadustega kern $f \supset \varphi$ ja $f(e) = 1$, lemma 8.7 järgi on f kordaja μ nullist erinev. Rakendades lauset 8.5 (b), leiame maatriksi B, mis rahuldab tingimusi $c_B = c_A$ ning $\lim_B = f$. Sealjuures $c_B \supset c$, $\lim_B e = f(e) = 1$ ning $b_k = f(e^k) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$, niisiis on B regulaarne.

<u>Näide 1.</u> Olgu $(a_k) \in l$ selline jada, et $a_{2k} = 0$ ning $a_{2k+1} \neq 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Moodustame maatriksi

$$A := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 1 & a_1 & & & 0 & & \\ 0 & a_1 & 1 & & & & \\ 0 & a_1 & 1 & a_3 & & & \\ 0 & a_1 & 0 & a_3 & 1 & & \\ 0 & a_1 & 0 & a_3 & 1 & a_5 & \\ \cdots & & & & & & \end{pmatrix}$$

Lihtne on veenduda, et A on konservatiivne ning $\chi(A) = 1$. Seejuures kehtib $c_A = \bar{\varphi}$. Selle võrduse tõestamiseks võtame suvalise $f \in c_A'$ omadusega $\ker f \supset \varphi$ ning näitame, et $f = 0$ (vrd. lause 4.11(a)).

Kuna A on normaalne, siis (vrd. lause 3.2 (b))

$$f(x) = \mu \lim_A x + t(Ax) \qquad (x \in c_A),$$

kus $\mu \in \mathbb{K}$ ja $t \in l$. Eelduse $\ker f \supset \varphi$ tõttu

$$0 = f(e^k) = \mu a_k + \sum_n t_n a_{nk}$$

$$= \begin{cases} t_k + t_{k+1}, & \text{kui } k = 2i, \\ \mu a_k + a_k \sum_{n=k}^{\infty} t_n, & \text{kui } k = 2i + 1, \end{cases}$$

millest paaritute arvude k korral

$$0 = \frac{1}{a_k} f(e^k) - \frac{1}{a_{k+2}} f(e^{k+2})$$

$$= \mu + \sum_{n=k}^{\infty} t_n - \mu - \sum_{n=k+2}^{\infty} t_n = t_k + t_{k+1}.$$

Niisiis rahuldab $t \in l$ tingimust $t_k = -t_{k+1}$ iga $k \in \mathbb{N}$ puhul, järelikult $t = 0$. Seetõttu

$$0 = \frac{1}{a_1} f(e^1) = \mu - \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \mu,$$

kokkuvõttes saamegi $f = 0$.

Vastavalt teoreemile 8.8 ei ole maatriks A asendatav.

Mitteregulaarse asendatava koregulaarse maatriksi näiteks on lemmas 8.5 vaadeldud maatriks D, kus $t \neq 0$ ja $\mu_i = \mu \neq 0$ $(i \in \mathbb{N})$.

Siinkohal, olles lahendanud asendatavuse probleemi koregulaarsete maatriksite jaoks, näeme, et erinevalt konservatiivsusest, koregulaarsusest ja konullilisusest, *ei ole maatriksite regulaarsus invariantne omadus*. Teiseks saame anda vastuse küsimusele alamruumi I_A invariantsuse kohta. Järgnevast näitest selgub, et see vastus on eitav.

<u>Näide 2.</u> Olgu $\alpha_k := 2^{-k}$ $(k \in \mathbb{N})$. Moodustame maatriksi

$$C := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & & & & & & & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_0 & 1/2 & 1/2 & & & & & \\ \alpha_0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_1 & 1/2 & 1/2 & & & \\ \alpha_0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 & 1/2 & 1/2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \end{pmatrix}$$

ning paneme tähele, et $C = DA$, kus D on antud seosega (8.6), milles $\mu_k = 1$ ($k \in \mathbb{N}$) ja $t_k = 2^{-k+1}$, ning

$$A := \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & & & & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ \cdots & & & & & \end{bmatrix}.$$

Seejuures $c_C = c_A$ (vrd. lause 8.5 (b) tõestus), niisiis on C asendatav maatriks. Osutub, et $I_C \neq I_A = c_A$. Näiteks jada $z := (1,-1,2,-2,4,-4,\ldots,2^k,-2^k,\ldots)$ on A summeeruv, kuid ei kuulu hulka I_C: rida $\sum_k t_k z_k = 1-1+1-1+1-1+\ldots$ ei koondu.

Tulles nüüd asendatavuse juurde selle termini üldisemas tähenduses, märgime kõigepealt mõnda lihtsamat fakti.

LAUSE 8.9. (a) *Kui* A *on asendatav maatriks, siis* $L_A = F_A$.
(b) *Kui* $I_A = c_A$, *siis* A *on asendatav maatriks.*
(c) *Iga AB-maatriks on asendatav.*

Tõestus. (a) Kui B on selline maatriks, et $c_B = c_A$ ja $c_{oB} \supset \varphi$, siis $I_B = c_B$. Kuna L_A ja F_A on invariandid, siis (vrd. lause 7.2 (a))

$$F_A = F_B = L_B \cap I_B = L_B = L_A.$$

(b) Juhul $I_A = c_A$ on $\lambda_A : c_A \to \mathbb{K}$ pidev lineaarne funktsionaal FK-ruumis c_A, s.t. $\lambda_A \in c_A'$. Tema esituses $\lambda_A(x) = \lim_A x - ax$ on $\mu = 1$. Rakendades lauset 8.5 (b), saame leida sellise maatriksi B, et $c_B = c_A$ ja $\lim_B x = \lambda_A(x)$ ($x \in c_A$), mistõttu $b_k = \lim_B e^k = a_k - a_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}$). Seega on A asendatav maatriks.

Väide (c) järeldub väitest (b) ja teoreemist 7.6.

Lõpuks tõestame teoreemi, mis selgitab asendatavuse ja μ-ühesuse vahekorra.

TEOREEM 8.10. (a) *Kui maatriks* A *ei ole* μ*-ühene, siis on ta asendatav.*
(b) μ*-ühene maatriks* A *on asendatav parajasti siis, kui leidub selline funktsionaal* $f \in c_A'$, *et* $\mu(f) \neq 0$ *ja* $\ker f \supset \varphi$.

Tõestus. Väide (a) ning väite (b) piisavus järelduvad lausest 8.5 (b): mõlemal juhul on olemas selline $f \in c_A'$, et kern $f \supset \varphi$ ning $\mu \neq 0$ tema mingis esituses (8.1), mistõttu saab leida maatriksi omadusega $c_B = c_A$ ja $\varphi \subset c_{0B}$. Väite (b) tarvilikkuse tõestamiseks eeldame, et leidub maatriks B nende kahe omadusega. Võtame $f := \lim_B \in c_A'$, sel juhul $\mu(f) = 1$, mistõttu lause 8.3 põhjal $\mu_A(f) = \mu_B(A) \neq 0$ (vt. teoreemi 8.4 tõestus). Sealjuures $\varphi \subset c_{0B} =$ kern f, tähendab, otsitav $f \in c_A'$ on leitud.

Täiendused ja märkused

Koregulaarsete maatriksite asendatavuse küsimus kerkis üles Zelleri töös [270], sealt on pärit lause 8.5 (ilma väite (b) tarvilikkuseta), teoreem 8.8 ja lemma 8.6 juhul $\mu_k = \mu$ $(k \in \mathbb{N})$ (siintoodud kujul tõestas selle Jürimäe [358]). Zellerile kuulub ka kirjanduses paljutsiteeritud näide 1 mitteasendatavast koregulaarsest maatriksist. Wilansky [252] püstitas probleemi üldisemalt konservatiivsete maatriksite asendatavusest τ-multiplikatiivsetega. Tema küsimus, kas iga konullmaatriks on asendatav, sai eitava vastuse koos kontranäitega Changi, Macphaili, Snyderi ning ta enda ühises artiklis [79]. Nagu näitas DeVos [93], on mitteasendatavaid maatrikse "palju" selles mõttes, et kõigi konservatiivsete maatriksite Banachi algebras Γ moodustavad nad tiheda hulga alamruumis θ, mis koosneb kõigist tõkestatud hajuvaid jadasid summeeruvatest maatriksitest.

Alamruumi I_A mitteinvariantsuse juurde (vt. näide 2) lisame Wilansky [252] poolt tõestatud seose $\bigcap\{I_B \mid c_B = c_A\} = F_A$. Beekmann ja Chang [21] näitasid, et I_A on invariantne parajasti siis, kui seda on $\Lambda_A^{\perp}$. Artiklites [20] ja [22] uurisid nad maatriksi A järgmisi omadusi (vt. ka Macphail [155]).

(E) $I_B = \Lambda_B^{\perp}$ iga maatriksiga A ekvivalentse maatriksi B korral.

(E′) Iga $t \in l$ ning sellise $x \in c_A$ korral, et $(tA)x$ eksisteerib, kehtib võrdus $(tA)x = t(Ax)$.

Osutub, et omadus (E′) on invariantne ning mitte-μ-ühese A korral on need väited samaväärsed.

Maatriksite μ-ühesuse uurimine sai alguse Wilansky artiklis [252], kus on tõestatud lause 8.1. Tema ja Macphail [157] püüdsid kirjeldada μ-üheste konullmaatriksite klassi, nad tõid esile ka μ-ühesuse seose asendatavusega ning püstitasid mitmed põhimõttelised küsimused μ-ühesuse invariantsuse kohta. Need küsimused said vastused Beekmanni artiklis [17], kuigi Wilansky oli vastustele väga lähedale jõudnud avaldamata töös [257], mille tulemusi, eriti faktoriseerimisteoreemi 8.2 (vt. ka Wilansky [258]), Beekmann oluliselt ära kasutas.

Vahemärkusena mainime, et summeerimismenetluste faktoriseerimise idee kuulub Coppingule [82] ja Baumannile [12]. Teoreemi 6.2 tõestuse idee on pärit Beekmannilt, Boosilt ja Zellerilt [19]. Boos [48], [50], [54] on rakendanud faktoriseerimisteoreeme sisalduvus-, kooskõla- ning kumerusteoreemide tõestamisel (vt. veel Boos ja Neuser [60], Tali [234], Seydel [216]).

Tulles tagasi Beekmanni artikli [17] juurde, märgime, et lisaks maatriksi μ-ühesuse invariantsusele tõestas autor ka c_A' alamruumide

$$\mu_A^{\perp} := \{f \in c_A' \mid \text{leidub esitus (8.1), kus } \mu = 0\},$$

$$\mu_A^{\#} := \{f \in c_A' \mid \text{leidub esitus (8.1), kus } \mu \neq 0\}$$

invariantsuse. Ta täpsustas eelpoolmainitud Zelleri teoreemi, nimelt tõestas ta lause 8.5 (b) tarvilikkuse. Samast on pärit ka teoreem 8.10: autor tõestas, et A on asendatav parajasti siis, kui $\mu_A^{\perp} \cap \varphi^{\perp} \neq \emptyset$, kus $\varphi^{\perp} := \{f \in c_A' \mid \ker f \supset \varphi\}$.

Nimetatud artiklis jõudis Beekmann uue probleemini, mille formuleeris täpsemalt Wilansky [258]. Ta vaatles funktsionaali

$$\mu : c_A' \to \mathbb{K}, \qquad f \to \mu(f)$$

ja püstitas *μ-pidevuse* hüpoteesi: funktsionaal μ on iga A korral pidev tugevas topoloogias $\beta(c_A', c_A)$. On selge, et probleem tekib vaid μ-üheste maatriksite puhul. Hüpoteesi kehtivuse tõestas Ruckle (vt. Wilansky [259], 14.2.4) juhul, kui c_A on BK-ruum, ning Boos [51], kui $L_A \neq W_A$ või A on AB-maatriks. Magee ja Ruckle [161] esitasid tõestuse eeldusel $c_A \supset \varphi$, Grosse-Erdmann [108] leidis nende tõestuses vea ning tõestas Wilansky hüpoteesi suvalise A puhul. Tähelepanuväärne on, et Grosse-Erdmanni tõestus tugineb c_A' tugevale separaablusele.

Seoses μ-pidevusega vaadeldakse kaasruumi c_A' alamruume c_A^{β} ja $G := \{f \in c_A' \mid \exists t \in l: f(x) = t(Ax) \quad (x \in c_A)\}$. Vastavalt valemile (8.1) on c_A' esitatav summana $c_A' = \langle \lim_A \rangle + G + c_A^{\beta}$. Funktsionaali $\lim_A$ paiknemisest G ja c_A^{β} suhtes, samuti nende alamruumide vahekorrast sõltuvad suurel määral A omadused. Kehtivad järgmised väited (vt. Wilansky [258]).

1° $\overline{c_A^{\beta}}^{\beta(c_A', c_A)} \supset G$.

2° A on μ-ühene $\Leftrightarrow \lim_A \notin G + c_A^{\beta} \Leftrightarrow \overline{c_A^{\beta}}^{\beta(c_A', c_A)} \neq c_A'$.

3° A on AB-maatriks $\Leftrightarrow G \subset c_A^{\beta}$.

4° $\lim_A \in G \Leftrightarrow \chi \notin \overline{A[c_A]}^{\sigma(c'', c')}$, kus $\chi(g) := g(e) - \sum_k g(e^k)$

$(g \in c')$.

5° $\lim_A \notin c_A^{\beta} \Leftrightarrow c_A = \lambda_A^{\perp}$.

Beekmann ja Chang [24] andsid μ-ühesuse mõistele järgmise üldistuse. Maatriksit A nimetatakse *μ-üheseks alamhulgal* $M \subset c_A$, kui

$$\operatorname{kern} f \supset M \Rightarrow f \notin \mu_A^{\#}. \tag{*}$$

Selle definitsiooni kohaselt on A mitteasendatav parajasti siis, kui A on μ-ühene alamruumil φ (vrd. teoreem 8.10). Autorid tõestasid, et (*) on samaväärne tingimusega $\chi \in \overline{B[M]}^{\sigma(c'',c')}$ iga maatriksiga A ekvivalentse maatriksi B korral. Vt. veel Chang [78], Beekmann ja Chang [25].

Asendatavuse ja μ-ühesuse probleeme käsitleme ka järgmises paragrahvis seoses alamruumiga P_A. Vt. ka Boos [46], Kuan [141]. Maatriksite asendatavust absoluutse summeeruvuse mõttes uurisid Brown [64] ning Macphail ja Orhan [156].

Vastavalt FK-programmile (vt. §7, täiendused ja märkused) on maatriksite μ-omadusi püütud üldistada FK-ruumidele. Wilansky [258] lähtekohaks oli eelpool toodud omadus 2°. Ta nimetab FK-ruumi E *μ-ruumiks*, kui E^{β} ei ole $\beta(E',E)$-tihe kaasruumis E'. Osutub, et 1) iga koregulaarne FK-ruum on μ-ruum, 2) FK-ruum, mis sisaldab kinnise μ-alamruumi, on μ-ruum, 3) FK-ruum E omadusega $B_E \not\supset \bar{\varphi}$ on μ-ruum, 4) AK-FK-ruum ei ole μ-ruum.

Teine üldistus kuulub Beekmannile ja Changile [26]. FK-ruumi E omadusega $E \supset \varphi$ nimetatakse *μ-üheseks*, kui leidub selline funktsionaal $f \in E'$ ning μ-ühene maatriks B, et $\varphi \subset c_B \subset E$ ja $\mu_B(f|_{c_B}) \neq 0$. Autorid tõestasid, et FK-ruum E on μ-ühene parajasti siis, kui

$$\mu_E^{\perp} := \bigcap_{\varphi \subset c_B \subset E} \{f \in E' \mid f|_{c_B} \in \mu_B^{\perp}\}$$

on $\beta(E',E)$-kinnine, ning uurisid FK-ruumi tähtsate alamruumide seoseid μ-ühesusega.

Maatriksite μ-ühesus oli lähtekohaks konullilisuse mõiste üldistamisel. Olgu A μ-ühene ning B selline maatriks, et $c_B \supset c_A$. Wilansky (vt. [259], 15.4.1) nimetas maatriksit B *konulliliseks A suhtes*, kui $\mu_A(B) = 0$. Lihtne on veenduda, et B on I suhtes konulliline parajasti siis, kui ta on konullmaatriks. Wilansky definitsioonile anti kaks üldistust FK-ruumidele E ja F, kus $E \subset F$. Eeldusel $W_E \neq B_E$ nimetas DeVos [94] ruumi F *konulliliseks E suhtes*, kui $B_E \subset W_F$. Beekmann ja Chang [26] nimetasid (ilma eelduseta $W_E \neq B_E$) ruumi F konulliliseks E suhtes, kui

$$g|_E \in \mu_E^{\perp} := \{f \in E' \mid \exists B,\ g \in \mu_B^{\perp} : c_B \supset E,\ g|_E = f\}$$

iga $g \in F'$ korral ja näitasid, et sel juhul kehtib tingimus $B_E \subset W_F$.

§9. ALAMRUUM P_A. PERFEKTSED MAATRIKSID

Nendele summeeruvusvälja tähtsatele alamruumidele, mida me uurisime eelmises kahes paragrahvis, lisandub veel üks, mis on oluliselt seotud maatriksi A perfektsuse mõistega.

Konservatiivset maatriksit A nimetatakse *perfektseks*, kui elemendid e ja e^k ($k \in \mathbb{N}$) moodustavad põhihulga FK-ruumis c_A. Kuna $\{e, e^k | k \in \mathbb{N}\}$ on põhihulk BK-ruumis $(c, \|\ \|_\infty)$, siis FK-topoloogiate monotoonsuse tõttu

$$\bar{c} = \overline{\operatorname{lin}\{e, e^k | k \in \mathbb{N}\}} = \bar{\varphi} \oplus \langle e\rangle$$

FK-ruumis c_A. Niisiis, konservatiivne maatriks A on perfektne parajasti siis, kui $c_A = \bar{c}$. Üldiselt nimetatakse aga alamruumi $\bar{c}$ konservatiivse maatriksi A summeeruvusväljas c_A *perfektsushulgaks*.

Perfektsusega seotud probleemide uurimiseks vajame sobivat funktsionaalanalüütilist instrumenti. Selleks defineerime *testfunktsioonid*. Nii nimetatakse funktsionaale $f \in c_A'$, kui

1) kern $f \supset \varphi$,

2) leidub f selline esitus (8.1), kus $\mu = 0$.

Tingimus 2) omab mõtet ilmselt vaid μ-üheste maatriksite puhul. Näiteks koregulaarse A ning tingimust 1) rahuldava $f \in c_A'$ korral on tingimus 2) samaväärne tingimusega $f(e) = 0$ (vt. lemma 8.7). Üldisemalt kehtib

LAUSE 9.1. *Kui maatriks A rahuldab tingimust* $W_A \neq L_A$ ja $f \in c_A'$ *on selline funktsionaal, et* kern $f \supset L_A$, *siis* f *on testfunktsioon.*

Tõestus. Kui kern $f \supset L_A$, kuid $f \in c_A'$ ei ole testfunktsioon, siis $\mu(f) \neq 0$. Iga $x \in L_A$ korral $0 = f(x) = \mu \lim_A x + t(Ax) + \alpha x = \mu \lim_A x + \gamma x$, kus $\gamma := tA + \alpha$. Sisalduvustest $\varphi \subset L_A \subset$ kern f järeldub $0 = f(e^k) = \mu a_k + \gamma_k$ ($k \in \mathbb{N}$), mistõttu $\lim_A x = -(1/\mu)\gamma x = \sum_k a_k x_k$ ($x \in L_A$). Seega $L_A \subset \Lambda_A^\perp$ ning lause 7.2 (c) põhjal kehtib $L_A = W_A$. Väide on tõestatud.

Tähistame maatriksi A korral

$$T_A := \{t \in l \mid \forall x \in c_A\ \exists (tA)x\}$$

ja defineerime lineaarsed funktsionaalid

$$f_t : c_A \to \mathbb{K},\ x \to t(Ax) - (tA)x \quad (t \in T_A). \tag{9.1}$$
Kuna $x \to t(Ax)$ ja $x \to (tA)x$ on tingimuste $t \in l$ ja $tA \in c_A^{\beta}$ tõttu ruumis c_A pidevad, siis $f_t \in c_A'$. Ilmselt kehtivad seosed kern $f_t \supset \varphi$ ning $\mu(f_t) = 0$, niisiis on f_t iga $t \in T_A$ korral testfunktsioon.

Vastupidi, iga testfunktsiooni $f \in c_A'$ puhul leiduvad $t \in l$ ja $\alpha \in c_A^{\beta}$, et $f(x) = t(Ax) + \alpha x$ $(x \in c_A)$, kusjuures $0 = f(e^k) = (tA)_k + \alpha_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Seega $tA = -\alpha \in c_A^{\beta}$, mistõttu $t \in T_A$ ja f on esitatav kujul (9.1). Kokkuvõttes kehtib

LAUSE 9.2. *Funktsionaal* $f \in c_A'$ *on testfunktsioon parajasti siis, kui ta on esitatav kujul* $f(x) = t(Ax) - (tA)x$ $(x \in c_A)$, *kus* $t \in T_A$.

Defineerime summeeruvusväljas alamruumi
$$P_A := \{x \in c_A \mid \forall t \in T_A : t(Ax) = (tA)x\},$$
siis lause 9.2 kohaselt
$$P_A = \{x \in c_A \mid f(x) = 0 \text{ iga testfunktsiooni } f \text{ korral}\}$$
$$= \bigcap \{\text{kern } f \mid f \text{ on testfunktsioon}\}. \tag{9.2}$$
Et kern f on iga $f \in c_A'$ puhul kinnine alamruum, siis $P_A = \overline{P}_A$. Niisiis, erinevalt paragrahvis 7 defineeritud tähtsatest alamruumidest, on P_A alati kinnine. Ta on vaadeldud alamruumidest ka suurim, lihtne on veenduda, et $P_A \supset L_A$. Tõepoolest, iga testfunktsiooni f korral kehtib lause 9.1 kohaselt sisalduvus kern $f \supset L_A$, millest seose (9.2) abil saamegi, et $P_A \supset L_A$.

Alamruumi P_A täpsem asend summeeruvusväljas c_A selgub järgmisest lausest.

LAUSE 9.3. (a) *Kui* A *on selline maatriks, et* $W_A \neq L_A$ *siis* $P_A = \overline{L}_A$.
(b) *Iga maatriksi* A *korral on* $P_A = \varphi$ *või* $P_A = \varphi \oplus \langle u \rangle$, *kus* $u \in P_A \setminus \overline{\varphi}$.
(c) *Koregulaarse maatriksi* A *korral on* $P_A = \overline{c} = \overline{\varphi} \oplus \langle e \rangle$.

Tõestus. (a) Kui $f \in c_A'$ on selline, et kern $f \supset L_A$, siis lause 9.1 kohaselt on ta testfunktsioon, seega $P_A \subset$ kern f. Lause 4.11 (a) põhjal võime öelda, et $P_A \subset \overline{L}_A$. Teisalt kehtib P_A kinnisuse ja sisalduvuse $L_A \subset P_A$ tõttu $P_A = \overline{P}_A \supset \overline{L}_A$, niisiis kokkuvõttes $\overline{P}_A = L_A$.

(b) Kuna $\varphi \subset P_A = \overline{P}_A$, siis $\overline{\varphi} \subset P_A$. Oletame, et $\varphi \neq P_A$.

Võtame $u \in P_A \setminus \bar{\varphi}$ ja näitame, et $P_A = \bar{\varphi} \oplus \langle u \rangle$. Valime funktsionaali $f \in c_A'$ vastavalt lausele 4.11 (a) nii, et $\ker f \supset \varphi$ ja $f(u) = 1$. Tema esituses

$$f(x) = \mu \lim_A x + t(Ax) + \alpha x \quad (x \in c_A),$$

kus $t \in l$ ja $\alpha \in c_A^\beta$ (vrd. lause 6.4 (c)), on $\mu \neq 0$, vastasel juhul oleks f testfunktsioon ning kehtiks võrdus $f(u) = 0$. Oletame nüüd vastusväiteliselt, et $\bar{\varphi} \oplus \langle u \rangle \neq P_A$, siis leidub $v \in P_A \setminus (\bar{\varphi} \oplus \langle u \rangle)$ ja me saame valida $g \in c_A'$, mis rahuldab tingimusi $\ker g \supset \bar{\varphi} \oplus \langle u \rangle$ ja $g(v) = 1$. Ka funktsionaali g esituses

$$g(x) = \tilde{\mu} \lim_A x + \tilde{t}(Ax) + \tilde{\alpha} x \quad (x \in c_A),$$

kus $\tilde{t} \in l$ ja $\tilde{\alpha} \in c_A^\beta$, kehtib $\tilde{\mu} \neq 0$. Moodustame funktsionaali

$$h := \tilde{\mu} f - \mu g \in c_A',$$

s.t.

$$\begin{aligned} h(x) &= (\tilde{\mu}\mu - \mu\tilde{\mu}) \lim_A x + (\tilde{\mu} t - \mu \tilde{t})(Ax) + (\tilde{\mu}\alpha - \mu\tilde{\alpha})x \\ &= (\tilde{\mu} t - \mu \tilde{t})(Ax) + (\tilde{\mu}\alpha - \mu\tilde{\alpha})x \quad (x \in c_A). \end{aligned}$$

Ilmselt on h testfunktsioon. Kuid samal ajal

$$h(u) = \tilde{\mu} f(u) - \mu g(u) = \tilde{\mu} f(u) = \tilde{\mu} \neq 0,$$

mis on vastuolus tingimusega $u \in P_A$. Järelikult, kui $P_A \neq \bar{\varphi}$, siis $P_A = \bar{\varphi} \oplus \langle u \rangle$.

(c) Kui A on koregulaarne, siis $W_A \neq L_A$ ning väite (a) kohaselt $P_A = \bar{L}_A$. Teisalt kehtib tänu A konservatiivsusele $\varphi \oplus \langle e \rangle \subset L_A$ ja seega ka $\bar{c} = \bar{\varphi} \oplus \langle e \rangle \subset \bar{L}_A = P_A$. Vastupidine sisalduvus järeldub väitest (b).

Järgmine lause selgitab alamruumi P_A seoseid maatriksi A asendatavuse ning μ-ühesusega.

LAUSE 9.4. *Kui* $P_A \neq \bar{\varphi}$, *siis* A *on asendatav* μ-*ühene maatriks.*

Tõestus. Kui $P_A \neq \bar{\varphi}$, siis leidub $u \in P_A \setminus \bar{\varphi}$ ja $f \in c_A'$, et $\ker f \supset \varphi$ ning $f(u) = 1$. Seejuures f ei ole testfunktsioon, mistõttu $\mu(f) \neq 0$. Teoreemi 8.10 (b) kohaselt on A asendatav maatriks.

Kui eeldada, et A ei ole μ-ühene, siis iga $f \in c_A'$ omadusega $\ker f \supset \varphi$ on testfunktsioon ning seetõttu $\ker f \supset P_A$. Lausest 4.11 (a) järeldub $P_A \subset \bar{\varphi}$, millest lause 9.3 (b) põhjal saame $P_A = \bar{\varphi}$. Väide on tõestatud.

Olgu A ja B sellised maatriksid, et $\varphi \subset c_A \subset c_B$ ning olgu $f \in c_B'$ maatriksi B testfunktsioon. Siis $g := f|_{c_A} \in c_A'$

ning kern $g \supset \varphi$. Kuna $\mu(f) = 0$, siis lause 8.3 kohaselt $\mu(g) = 0$, s.t. g on maatriksi A testfunktsioon. Seetõttu

$$P_B = \bigcap \{\text{kern } f \mid f \text{ on } B \text{ testfunktsioon}\}$$
$$\supset \bigcap \{\text{kern } g \mid g \text{ on } A \text{ testfunktsioon}\} = P_A.$$

Niisiis,

$$c_A \subset c_B \Rightarrow P_A \subset P_B,$$

millest järeldub

LAUSE 9.5. P_A *on summeeruvusinvariant.*

Eelneva arutelu kohaselt on ka maatriksi kõigi testfunktsioonide hulk invariant.

Tulleks lõpuks tagasi perfektsete maatriksite juurde märgime, et nende kõige tähtsama omaduse tõestame me allpool paragrahvis 11. Siinkohal toome mõned klassikalised tulemused reversiivsete maatriksite perfektsuse kohta.

Maatriksit A, mis rahuldab implikatsiooni

$$t \in l, \ tA = 0 \ \Rightarrow \ t = 0, \tag{9.3}$$

nimetatakse *M-tüüpi* maatriksiks. Lihtne on veenduda, et tingimus (9.3) on täidetud parajasti siis, kui võrrandisüsteemil

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n a_{nk} = 0 \quad (k \in \mathbb{N})$$

on ruumis l ainult null-lahend.

LAUSE 9.6. (a) *Reversiivne koregulaarne maatriks* A *on perfektne parajasti siis, kui ta on M-tüüpi.*
(b) *Kui normaalse koregulaarse maatriksi* A *pöördmaatriksi* $A^{-1} := (\alpha_{ki})$ *veerud* (α_{ki}) $(i \in \mathbb{N})$ *on tõkestatud jadad, siis* A *on perfektne.*

Tõestus. (a) Reversiivse maatriksi A korral on $f \in c_A'$ esitatav kujul (vrd. lause 3.1 (b))

$$f(x) = \mu \lim_A x + t(Ax) \quad (x \in c_A),$$

kus $\mu \in \mathbb{K}$ ja $t \in l$. Seetõttu on $f \in c_A'$ testfunktsioon parajasti siis, kui $f(x) = t(Ax)$ $(x \in c_A)$ ja kern $f \supset \varphi$, s.t. kui

$$0 = (tA)_k = \sum_{n=0}^{\infty} t_n a_{nk} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Teisalt tähendab koregulaarse maatriksi A perfektsus võrdust $P_A = c_A$, mis on võimalik vaid sel juhul, kui ainukeseks testfunktsiooniks on nullfunktsionaal, s.t. kui kehtib (9.3).

(b) Kõigepealt märgime, et pöördmaatriksi veerud on A-summeeruvad, sest

$$\sum_{k=i}^{n} a_{nk}\alpha_{ki} = \delta_{ni}\ , \text{ s.t. } A((\alpha_{ki})_k) = e^i \quad (n,i \in \mathbb{N}).$$

Kui nad on tõkestatud jadad ja A on konservatiivne, siis

$$(\alpha_{ki})_k \in m \cap c_A \subset L_A \quad (i \in \mathbb{N}, \text{ vrd. lause 7.3}),$$

mistõttu $t \in l$ korral

$$t_i = \sum_{n=i}^{\infty} \Big(\sum_{k=i}^{n} a_{nk}\alpha_{ki}\Big)t_n = \sum_{k=i}^{\infty} a_{ki} \sum_{n=k}^{\infty} t_n a_{nk} \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Siit saame, et $tA = 0$ korral $t = 0$, s.t. A on M-tüüpi maatriks ning väite (a) põhjal perfektne.

Näide 1. Rieszi kaalutud keskmiste menetluse M_p pöördmaatriksi igas veerus on nullist erinevad vaid kaks koordinaati. Seega on need veerud tõkestatud jadad, mistõttu konservatiivne menetlus M_p on perfektne.

Näide 2. Cesàro menetlus C_α on iga $\alpha \geq 0$ korral perfektne, kuna pöördmaatriksi veerud $(\binom{i+\alpha}{k}\binom{k-i-1}{k-i})_k$ on iga $i \in \mathbb{N}$ puhul tõkestatud (juhul $\alpha \in \mathbb{N}$ kuuluvad nad ruumi φ).

Näide 3. Lihtne on veenduda, et *τ-multiplikatiivne AK-maatriks on $\tau \neq 0$ korral perfektne*. Teatavasti on regulaarne menetlus M_p AB-omadusega (vt. §7, näide 1), seega on ta lause 7.7 (d) kohaselt AK-menetlus ja järelikult ka perfektne. Sama kehtib ka menetluste C_α $(0 \leq \alpha \leq 1)$ kohta.

Täiendused ja märkused

Alamruumi P_A mõiste kuulub Wilanskyle [252], idee on pärit Coomesi ja Cowlingu artiklist [80]. Selle mõiste sisu avasid täielikult aga Beekmann, Boos ja Zeller [19], kes näitasid, et 1) konservatiivse A korral kehtib kas $P_A = c_0$ või $P_A = c_0 \oplus \langle u \rangle$, kus $u \in P_A \setminus c_0$, ja 2) P_A on summeeruvusinvariant. Selleks tõestasid nad kõigepealt faktoriseerimisteoreemi, millele Wilansky [257], [258] andis hiljem elegantsema vormi (vt. teoreem 8.2). Probleem P_A invariantsusest ootas kaua lahendust ning tulemus oli ehk mõnevõrra üllatavgi, eriti kui pidada silmas, et hulk T_A ei ole invariantne (vt. Macphail ja Wilansky [157]). Otsustavaks saab asjaolu, et kõigi testfunktsioonide hulk on invariant.

Implikatsiooni (vt. lause 9.4)

$$P_A \neq \bar{\varphi} \Rightarrow A \text{ on asendatav ja } \mu\text{-ühene}$$

tõestasid Macphail ja Wilansky [252], [157], Beekmann ja Chang [23] näitasid, et see ei ole üldjuhul pööratav. Nad konstrueerisid reversiivse asendatava μ-ühese maatriksi A, mille korral $P_A = \bar{\varphi}$. Samas tõestasid autorid, et kui codim $\varphi < \infty$ ruumis c_A, siis on õige ka vastupidine implikatsioon. Reversiivse A puhul garanteerib selle tingimus dim $\{t \in 1 \mid {}_{-}tA = 0\} < \infty$. Artiklis [24] näitasid autorid, et $P_A = \bar{\varphi} \oplus \langle u\rangle$ $(u \in c_A \setminus \varphi)$ parajasti siis, kui A on μ-ühene alamhulgal $\varphi \cup \{u\}$ (vrd. §8, täiendused ja märkused), kuid ei ole μ-ühene hulgal φ.

Samad autorid [26] üldistasid P_A mõiste summeeruvusväljast c_A suvalisse FK-ruumi X, nad defineerisid

$$P_X := \bigcap \{\operatorname{kern} f \mid f \in \varphi^{\perp} \cap \mu^{\perp}{}_X\}$$

(vt. §8, täiendused ja märkused). Sel juhul $P_X \supset \bar{\varphi}$ ning kui X ei ole μ-ühene FK-ruum, siis $P_X = \bar{\varphi}$. Üldjuhul ei kehti aga P_X jaoks lause 9.3 (b), näiteks, kui $X := c_0 \oplus \langle e\rangle \oplus \langle(1,-1,1,-1,\ldots)\rangle$, siis $P_X = X$ ja codim $\bar{\varphi} = 2$.

Märgime veel Zelleri artiklit [276], milles autor tõestas, et iga regulaarse maatriksi A jaoks leidub regulaarne maatriks B omadusega $c_B = P_A$. Jürimäe [357] üldistas selle väite koregulaarse A juhule: leidub selline maatriks B, et $c_B = P_A$ ja alamruumil P_A on maatriksid kooskõlas. Samas uuris autor ka konullmaatriksi perfektsushulka.

Mõned märkused perfektsete maatriksite kohta teeme ka paragrahvis 11.

§10. TÕKESTATUD JADAD SUMMEERUVUSVÄLJAS

Selle kohta, kuidas paiknevad tõkestatud jadad maatriksi summeeruvusväljas, teame me vaid, et (vt. lause 7.3)

$$c \subset c_A \Rightarrow m \cap c_A \subset F_A. \tag{10.1}$$

Siit järeldub lause 9.3 (a) ja (c) põhjal

LAUSE 10.1. *Kui A on koregulaarne maatriks, siis* $m \cap c_A \subset \bar{c}$.

Nagu selgub järgnevast näitest, ei kehti see väide kõigi konservatiivsete maatriksite puhul.

Näide 1. Olgu $B := (b_{nk})$ selline maatriks, et

$$b_{nk} := \begin{cases} (-1)^k, \text{ kui } k = n - 1 \text{ või } k = n, \\ 0, \text{ kui } k < n - 1 \text{ või } k > n. \end{cases}$$

B on konullmaatriks, sest $\lim_B x = \lim_n (-1)^n (x_n - x_{n-1}) = 0$ iga $x \in c$ korral. Tõkestatud jada $z := ((-1)^k)$ on B-summeeruv ning $\lim_B z = 2$. Teisalt, kuna $\lim_B \in c_B'$ ja $c \subset \operatorname{kern} \lim_B = c_{oB}$, kuid $z \notin c_{oB}$, siis $z \notin \bar{c}$. Niisiis, $m \cap c_B \not\subset \bar{c}$.

See on informatsioon, millest lähtudes me asume otsima vastust kolmele küsimusele.

1. Millistel tingimustel summeerib maatriks kõik tõkestatud jadad?
2. Millistel tingimustel summeerib konservatiivne maatriks ainult tõkestatud jadasid?
3. Millistel tingimustel ei summeeri konservatiivne maatriks ühtki tõkestatud hajuvat jada?

Järgmine teoreem, mis annab vastuse esimesele küsimusele, on käesolevas raamatus teatavas mõttes erandiks: tema tõestuses ei kasuta me funktsionaalanalüüsi meetodeid. See on näide nende meetodite võimaluste piiratusest: seni pole teada selle väite ühtki funktsionaalanalüüsile tuginevat tõestust.

TEOREEM 10.2. *Maatriks A summeerib kõik tõkestatud jadad parajasti siis, kui on täidetud järgmised tingimused:*
eksisteerib $\lim_n a_{nk} =: a_k \quad (k \in \mathbb{N})$, (10.2)
$\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$, (10.3)
$\lim_n \sum_k |a_{nk} - a_k| = 0$. (10.4)
Sel juhul

$$\lim_A x = \sum_k a_k x_k \quad (x \in m). \qquad (10.5)$$

Tõestus. Piisavus. Kuna $m^{\beta} = l$ (vrd. §5), siis tingimusest (10.3) järeldub $m \subset \omega_A$, tingimusest (10.2) ja (10.3) aga $(a_k) \in l$. Seega eksisteerib

$$\sum_k |a_{nk} - a_k| =: \delta_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

ning tingimuse (10.4) tõttu kehtib iga $x \in m$ korral

$$|\sum_k a_{nk}x_k - \sum_k a_k x_k| = |\sum_k (a_{nk} - a_k)x_k|$$

$$\le \sum_k |a_{nk} - a_k|\ |x_k| \le \delta_n \|x\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Niisiis, kui A rahuldab tingimusi (10.2) - (10.4), siis summeerib ta kõik tõkestatud jadad ning kehtib võrdus (10.5).

Tarvilikkus. Eeldame, et $m \subset c_A$, siis A on konservatiivne maatriks, mistõttu tingimused (10.2) ja (10.3) on tarvilikud (vrd. teoreem 2.1 (a)). Seejuures $(a_k) \in l$ ning $\delta_n = O(1)$.

Oletame vastuväiteliselt, et (10.4) ei kehti. Bolzano-Weierstrassi teoreemi põhjal leidub jada (δ_n) niisugune koonduv osajada (δ_{n_ι}), et $\lim_\iota \delta_{n_\iota} =: \delta \ne 0$. Moodustame indeksite jadad (k_j) ja (m_j) järgmiselt. Võtame $k_0 := 0$ ning valime $m_0 \in \{n_\iota \mid \iota \in \mathbb{N}\}$ selliselt, et

$$|a_{n_0 k_0} - a_{k_0}| < 1.$$

Olgu $k_0,\dots,k_j$ ning $m_0,\dots,m_{j-1}$ fikseeritud, valime $m_j > m_{j-1}$ hulgast $\{n_\iota \mid \iota \in \mathbb{N}\}$ nii, et kehtiks võrratus

$$\sum_{k=0}^{k_j} |a_{m_j k} - a_k| < 2^{-j}. \tag{10.6}$$

Kuna $\sum_k |a_{m_j k} - a_k| < \infty$, siis saab leida $k_{j+1} > k_j$, mis rahuldab tingimust

$$\sum_{k=k_{j+1}+1}^{\infty} |a_{m_j k} - a_k| < 2^{-j}. \tag{10.7}$$

Nii jätkates moodustamegi jadad (k_j) ja (m_j), kusjuures (m_j) on jada (n_ι) osajada. Sellise konstruktsiooni tulemusena saame seostest (10.6) ja (10.7), et

$$\lim_j \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} |a_{m_j k} - a_k| = \lim_j \sum_{k=0}^{\infty} |a_{m_j k} - a_k| - \lim_j \sum_{k=0}^{k_j} |a_{m_j k} - a_k|$$

$$- \lim_j \sum_{k=k_{j+1}+1}^{\infty} |a_{m_j k} - a_k| = \delta. \tag{10.8}$$

Edasi moodustame jada $z := (z_k)$, kus

$$z_k := \begin{cases} 0, \text{ kus } k = 0, \\ (-1)^j \operatorname{sgn}(a_{m_j k} - a_k), \text{ kui } k_j < k \le k_{j+1} \ (j \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

On selge, et $z \in m$ ning $\|z\|_\infty = 1$, seejuures võrratuste

(10.6) ja (10.7) tõttu

$$\sum_{k=0}^{k_j} |(a_{m_j k} - a_k)z_k| < 2^{-j}$$

ja

$$\sum_{k=k_{j+1}+1}^{\infty} |(a_{m_j k} - a_k)z_k| < 2^{-j} \quad (j \in \mathbb{N}),$$

järelikult

$$\lim_j \sum_{k=0}^{k_j} (a_{m_j k} - a_k)z_k = \lim_j \sum_{k=k_{j+1}+1}^{\infty} (a_{m_j k} - a_k)z_k = 0. \qquad (10.9)$$

Võrdusest

$$\sum_k a_{m_j k} z_k - \sum_k a_k z_k = \sum_k (a_{m_j k} - a_k)z_k$$

$$= \sum_{k=0}^{k_j} (a_{m_j k} - a_k)z_k + (-1)^j \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} |a_{m_j k} - a_k|$$

$$+ \sum_{k=k_{j+1}+1}^{\infty} (a_{m_j k} - a_k)z_k$$

ning tingimustest (10.8) ja (10.9) saame protsessis $j \to \infty$

$$\sum_k a_{m_j k} z_k = \sum_k a_k z_k + \delta(-1)^j + o(1),$$

millest järeldub, et $Az \notin c$. Seega ei summeeri A kõiki tõkestatud jadasid. Teoreem on tõestatud.

Tingimus (10.5) tähendab, et kui $m \subset c_A$, siis $m = m \cap c_A \subset A_A^{\perp}$. Lausest 7.2 (c) ning seosest (10.1) järeldub $m \subset F_A \cap A_A^{\perp} = W_A$, mistõttu $e \in W_A$. Niisiis kehtib (vrd. teoreem 7.4)

JÄRELDUS 10.3. *Maatriks, mis summeerib kõik tõkestatud jadad, on konullmaatriks.*

Erinevalt esimesest, osutub teine eelpool püstitatud probleem puhttopoloogiliseks. Selle lahendus taandub FK-topoloogiate monotoonsuse omadusele: kui $x^{(n)} \to x$ FK-ruumis E ning FK-ruum F sisaldab E, siis $x^{(n)} \to x$ ka ruumis F. Muuhulgas järeldub sellest, et iga alamhulk $D \subset E$, mis on ruumis F kinnine, on kinnine ka ruumis E. Neile asjaoludele tuginedes tõestame kõigepealt

LAUSE 10.4. (a) *Kui c on summeeruvusväljas c_A kinnine alamruum, siis A on koregulaarne.*

(b) *Iga konullmaatriks summeerib tõkestamata jada.*

Tõestus. (a) Kui $c = \bar{c}$ FK-ruumis $(c_A, \{\| \ \|_A\} \cup \mathcal{P})$ (vrd. teoreem 6.3 (c)), siis FK-topoloogiate ühesuse tõttu on poolnormide süsteem $\{\| \ \|_A\} \cup \mathcal{P}$ alamruumis c ekvivalentne normiga $\| \ \|_\infty$. See toob endaga kaasa võrduse $(c_A, \{\| \ \|_A\} \cup \mathcal{P})' = (c, \| \ \|_\infty)'$, ning kuna $e^{[m]} - \not\to e((c, \| \ \|_\infty))$, siis $e^{[m]} - \not\to e((c_A, \{\| \ \|_A\} \cup \mathcal{P}))$. Teoreemi 7.4 järgi on A koregulaarne.

(b) Kui $c \subset c_A \subset m$, siis eelnenud märkuse kohaselt on c kinnine FK-ruumis $(c_A, \{\| \ \|_A\} \cup \mathcal{P})$. Väite (a) põhjal järeldub sellest A koregulaarsus.

Vastuse küsimusele 2 annab

TEOREEM 10.5. *Kui konservatiivne maatriks summeerib ainult tõkestatud jadasid, siis summeerib ta vaid koonduvad jadad.*

Tõestus. Juhul $c \subset c_A \subset m$ on A lause 10.4 (b) põhjal koregulaarne. Seetõttu saame lausest 10.1, et

$$c_A = m \cap c_A \subset \bar{c}.$$

Kuna c on lausele 10.4 eelnenud märkuse kohaselt kinnine alamruum FK-ruumis c_A, siis $c_A = c$.

Viimane kolmest püstitatud probleemist on kõige raskem, kuid ka kõige huvitavam. Selle lahenduse raskuspunkt langeb järgmisele üldisemat laadi väitele, mis on tähelepanuväärne fakt ka omaette võetuna.

LAUSE 10.6. *Kui* (E,Q) *on selline FK-ruum, et alamruum* $c_0 \cap E$ *ei ole temas kinnine, siis sisaldab* E *tõkestatud hajuva jada.*

Tõestus. Vastavalt lausele 4.5 järgnevale märkusele võime eeldada, et poolnormide süsteem Q on suunatud. Veelgi enam, poolnormide r_j pidevus FK-ruumis (E,Q) (vt. §5) lubab üldisust kitsendamata teha eelduse

$$|x_j| \le q_j(x) \le q_{j+1}(x) \qquad (x \in E,\ j \in \mathbb{N}). \tag{10.10}$$

Näitame kõigepealt, et kui $c_0 \cap E$ ei ole kinnine ruumis E, siis kehtib väide

$(*) \qquad \forall\varepsilon > 0 \ \ \forall j \in \mathbb{N} \quad \exists x \in c_0 \cap E, \ \|x\|_\infty = 1 : q_j(x) < \varepsilon.$

Oletame vastuväiteliselt, et (*) ei ole õige, siis leiduvad sellised $\varepsilon > 0$ ja $j \in \mathbb{N}$, mille korral

$$\forall x \in c_0 \cap E, \ \|x\|_\infty = 1 : q_j(x) \geq \varepsilon,$$

s.t.

$$\forall x \in c_0 \cap E, \ x \neq 0 : q_j\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geq \varepsilon.$$

Niisiis kehtib võrratus

$$\|x\|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon}q_j(x) \qquad (x \in c_0 \cap E),$$

mis tähendab (vrd. lause 4.2), et norm $\|\ \|_\infty$ on alamruumis $(c_0 \cap E, Q)$ pidev. Seetõttu on poolnormide süsteemid Q ja $(Q \cup \{\|\ \|_\infty\})$ alamruumis $c_0 \cap E$ ekvivalentsed (vrd. lause 4.5). Kuna $(c_0 \cap E, Q \cup \{\|\ \|_\infty\})$ on lause 5.4 kohaselt FK-ruum, siis on seda ka $(c_0 \cap E, Q)$, mis on vastuolus eeldusega, et $c_0 \cap E$ ei ole kinnine ruumis (E, Q). Väide (*) on tõestatud.

Toetudes väidele (*), konstrueerime alamruumi $c_0 \cap E$ elementide niisuguse jada $(x^{(i)})$, et rida $\sum_i x^{(i)}$ koondub ruumis E ja $x := \sum_i x^{(i)} \in (m \cap E) \setminus c$. Jada $(x^{(i)})$ ning koos temaga indeksite jada (j_i) moodustame induktsioonimeetodil. Võtame $j_0 := 0$ ning valime vastavalt tingimusele (*) elemendi $x^{(0)} \in c_0 \cap E$, et

$$\|x^{(0)}\|_\infty = 1, \quad q_{j_0}(x) < 1.$$

Olgu $j_0, \ldots, j_{i-1}$ ning $x^{(0)}, \ldots, x^{(i-1)}$ mingi $i \in \mathbb{N}$ korral määratud. Kuna $x^{(l)} \in c_0$ $(0 \leq l < i)$, siis on võimalik valida $j_i > j_{i-1}$ nii, mille korral

$$|x_k^{(l)}| < 2^{-i} \quad (k \geq j_i, \ 0 \leq l < i). \tag{10.11}$$

Rakendades väidet (*), leiame $x^{(i)} \in c_0 \cap E$ omadusega

$$\|x^{(i)}\|_\infty = 1, \quad q_{j_i}(x^{(i)}) < 2^{-i}. \tag{10.12}$$

Sellise konstruktsiooni tulemusena saamegi indeksite jada (j_i) ning elementide jada $(x^{(i)})$, mis rahuldab tingimusi (vrd. (10.11))

$$|x_k^{(i)}| < 2^{-i} \quad (k \geq j_{i+1})$$

ja (vrd. (10.10) ning (10.12))

$$|x_k^{(i)}| \leq q_k(x^{(i)}) \leq q_{j_i}(x^{(i)}) < 2^{-i} (k \leq j_i), \tag{10.13}$$

seejuures iga $i \in \mathbb{N}$ korral

$$\exists\, k \in \mathbb{N} : j_i < k < j_{i+1}, \quad |x_k^{(i)}| = 1. \tag{10.14}$$

Tähistame $y^{(n)} := \sum_{i=0}^{n} x^{(i)}$ ja paneme tähele, et fikseeritud $j \in \mathbb{N}$ ning $m > n > j$ korral (vrd. (10.11))

$$q_j(y^{(m)} - y^{(n)}) = q_j\left(\sum_{i=n+1}^{m} x^{(i)}\right) \le \sum_{i=n+1}^{m} q_{j_i}(x^{(i)})$$

$$< \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} \to 0$$

protsessis $n \to \infty$. Seega on $(y^{(n)})$ Cauchy jada FK-ruumis E, mistõttu eksisteerib piirväärtus

$$x := \lim_n y^{(n)} = \sum_i x^{(i)} \in E.$$

Tingimuse (K) kohaselt (vt. §5)

$$x_k = \sum_i x_k^{(i)} \quad (k \in \mathbb{N}). \qquad (10.15)$$

Näitame, et $x \in m$. Vastavalt jadade (j_i) ning $(x^{(i)})$ konstruktsioonile leidub iga fikseeritud $k \in \mathbb{N}$ korral indeks $i \in \mathbb{N}$, et $j_i \le k \le j_{i+1}$ ja

$$|x_k^{(l)}| \le \begin{cases} 2^{-i}, & \text{kui } l \le i - 1, \\ 1, & \text{kui } l = i, \\ 2^{-l}, & \text{kui } l > i \end{cases}$$

(vrd. (10.11)-(10.13)). Võrdusest (10.14) saame

$$|x_k| \le \sum_{l=0}^{i-1} |x_k^{(l)}| + |x_k^{(i)}| + \sum_{l=i+1}^{\infty} |x_k^{(l)}|$$

$$< \sum_{l=0}^{i-1} 2^{-i} + 1 + \sum_{l=i+1}^{\infty} 2^{-l}$$

$$= i\, 2^{-i} + 1 + 2^{-i}$$

$$= (i + 1)2^{-i} \le 2 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

seega $x \in m$.

Jääb näidata veel, et $x \notin c$. Vastavalt seosele (10.15) kehtib jada x osajada (x_{j_i}) puhul

$$|x_{j_i}| \le \sum_{l=0}^{i-1} |x_{j_i}^{(l)}| + |x_{j_i}^{(i)}| + \sum_{l=i+1}^{\infty} |x_{j_i}^{(l)}|$$

$$\le i\, 2^{-i} + 2^{-i} + 2^{-i}$$

$$\le (i + 2)\, 2^{-i} \to 0 \qquad (i \to \infty),$$

niisiis, (x_{j_i}) koondub nulliks. Valime teise osajada (x_{k_i}) nii, et (vrd. (10.14))

$$j_i < k_i < j_{i+1}, \qquad |x_{k_i}^{(i)}| = 1 \qquad (i \in \mathbb{N}),$$

sel juhul

$$|x_{k_i}| \geq |x_{k_i}^{(i)}| - \sum_{l=0}^{i-1} |x_{k_i}^{(l)}| - \sum_{l=i+1}^{\infty} |x_{k_i}^{(l)}|$$

$$\geq 1 - i\,2^{-i} - 2^{-i} \to 1 \quad (i \to \infty),$$

s.t. (x_{k_i}) ei koondu nulliks. Sellise kahe osajada olemasolu koonduva jada korral ei ole võimalik. Lause on tõestatud.

TEOREEM 10.7. *Konservatiivse maatriksi* A *korral on järgmised tingimused samaväärsed:*

(a) $m \cap c_A = c$,

(b) c_0 *on kinnine alamruum* FK-*ruumis* c_A,

(c) c *on kinnine alamruum* FK-*ruumis* c_A.

Tõestus. Implikatsioon (a) $\Rightarrow$ (b) järeldub vahetult lausest 10.6, kui võtame selles $E := c_A$. Edasi, kui $\bar{c}_0 = c_0$ FK-ruumis c_A, siis (vrd. lause 4.11 (c))

$$\bar{c} = \overline{c_0 \oplus \langle e\rangle} = \bar{c}_0 \oplus \langle e\rangle = c_0 \oplus \langle e\rangle = c,$$

seega kehtib (b) $\Rightarrow$ (c). Lõpuks näitame, et (c) $\Rightarrow$ (a). Olgu c kinnine FK-ruumis c_A, lause 10.4 (a) põhjal on A sel juhul koregulaarne. Seetõttu (vrd. lause 10.1) $c \subset m \cap c_A \subset \bar{c} = c$, niisiis $m \cap c_A = c$.

JÄRELDUS 10.8 (a) *Iga konullmaatriks summeerib tõkestatud hajuvaid jadasid.*

(b) *Kui* A *ja* B *on konullmaatriksid, siis* $c_A \cap c_B$ *sisaldab tõkestatud hajuvaid jadasid.*

Tõestus. Väide (a) järeldub vahetult teoreemist 10.7 ning lausest 10.4 (a).

(b) Algul tõestame väite eeldusel, et $a_k = b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ ning $\lim_n \sum_k a_{nk} = \lim_n \sum_k b_{nk} = 0$. Moodustame uue maatriksi C nii, et võtame vaheldumisi A ja B read, s.t.

$$c_{nk} = \begin{cases} a_{n/2,k}, & \text{kui } n = 2i, \\ b_{\frac{n-1}{2},k}, & \text{kui } n = 2i+1 \end{cases} \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Sel juhul on C ilmselt konullmaatriks, mistõttu väite (a) põhjal leidub tõkestatud hajuv jada $z \in c_C = c_A \cap c_B$.

Üldjuhul, kui A ja B on suvalised konullmaatriksid, moodustame maatriksid $A^* := (a_{nk} - a_k)_{nk}$ ning $B^* := (b_{nk}$

$- b_k)_{nk}$. Kuna $(a_k), (b_k) \in l$ (vt. teoreemi 2.1 (a) tõestus), siis

$$\lim_n (a_{nk} - a_k) = \lim_n (b_{nk} - b_k) = 0 \ (k \in \mathbb{N}),$$

$$\lim_n \sum_k (a_{nk} - a_k) = \lim_n \sum_k a_{nk} - \sum_n a_k = \chi(A) = 0,$$

$$\lim_n \sum_k (b_{nk} - b_k) = \lim_n \sum_k b_{nk} - \sum_n b_k = \chi(B) = 0$$

ning selle tõestuse esimese osa põhjal leidub $z \in (m \cap c_A^* \cap c_B^*)\backslash c$. Seejuures koonduvad read $\sum_k a_k x_k$ ja $\sum_k b_k x_k$ kõikide $x \in m$ korral, järelikult $c_A \cap m = c_A^* \cap m$, $c_B \cap m = c_B^* \cap m$ ning $z \in (m \cap c_A \cap c_B)\backslash c$.

Viimati tõestatud väide lubab meil täpsustada üht eelpool saadud tulemust, nimelt järeldust 7.5 (b)

LAUSE 10.9. *Kui A ja B on sellised konservatiivsed maatriksid, et A on konullmaatriks ja* $m \cap c_A \subset c_B$, *siis B on konullmaatriks.*

Tõestus. Moodustame maatriksi $D := B - \chi(B)I$. Ilmselt on D konservatiivne, seejuures

$$\chi(D) = \lim_D e - \sum_k \lim_n d_{nk} = \lim_B e - \chi(B) - \sum_k b_k = 0.$$

Vastavalt järeldusele 10.8 (b) valime tõkestatud hajuva jada $z \in (c_A \cap c_D)\backslash c$. Kuna

$$\chi(B)z = (\chi(B)I)z = (B - D)z = Bz - Dz \in c,$$

kuid $z \notin c$, siis peab kehtima võrdus $\chi(B) = 0$, s.t. B on konullmaatriks.

Täiendused ja märkused

Tõkestatud jadade summeeruvust puudutavad küsimused on püsivalt olnud aktuaalsed, aga nad on ka ühed keerulisematest. Põhjuseks on asjaolu, et $(m, \|\ \|_\infty)$ on funktsionaalanalüüsi vaatekohalt üpris ebamugav ruum: kuna ta ei ole separaabel, siis on tal keerulise struktuuriga kaasruum, see teeb raskeks tema uurimisel funktsionaalanalüüsi vahendeid kasutada. Nagu märgitud, ei ole teoreemile 10.2 leitud ühtki funktsionaalanalüüsile tuginevat tõestust. Meie poolt esitatud tõestus kasutab n.n. "libiseva küüru" meetodit ja kuulub Schurile [210] 1920. aastast. Kuid juba 1913.a. märkas Steinhaus [229], et kõiki tõkestatud jadasid ei summeeri ükski regulaarne maatriks. Ezrohi [352] tõestas Schuri ja Steinhausi teoreemidega analoogilised väited poolpidevate menetluste jaoks. Seoses teoreemiga 10.2 märgime veel Bennetti ja Kaltoni tööd [38], milles autorid uurivad alamruumi m sisaldavaid FK-ruume. Kuid ei neil ega teistel ole õnnestunud saada tulemusi, millest järelduks Schuri teoreem.

Samade raskustega, millest oli juttu ruumi m puhul, puutume me kokku ka *tõkestatud summeeruvusvälja* $m \cap c_A$ uurimisel. Neist jagusaamiseks on paljud autorid püüdnud kasutada Saksi ruumide (vt. §7, täiendused ja märkused) teooriat. Selle teooria meetodite rakendusvõimaluste kogu ulatuse summeeruvus- ja FK-ruumide teoorias avasid tegelikult Bennett ja Kalton [37]. Nende väga üldises käsitluses olid vaatluse all alamruumi c_o sisaldavad FK-ruumid (E, Q), kusjuures põhiosa mängib Saksi ruum $(m \cap W_E, Q, \| \ \|_\infty)$.

Teoreemi 10.5 publitseerisid Mazur ja Orlicz [165] 1933.a. ilma tõestuseta. Reversiivsete maatriksite korral tõestas selle väite Wilansky [248], üldjuhul Zeller [270]. Vt. ka Mazur ja Orlicz [166].

Teoreem 10.7 kuulub Wilanskyle ja Zellerile [261]. Analoogilise väite absoluutse summeeruvuse jaoks tõestas Jürimäe [355] (talle kuulub ka eelpooltoodud näide 1 konullmaatriksist B omadusega $m \cap c_B \not\subset c$). Lause 10.6, millele sisulielt toetub teoreem 10.7, tõestasid Meyer-König ja Zeller [170], [172] (vt. ka Kolodziej [140]). Bennett [33] näitas, et kui $c \cap E$ ei ole kinnine FK-ruumis E, siis $(m \cap E, \| \ \|_\infty)$ ei ole separaabel ja sisaldab lisaks hajuvatele tõkestatud jadadele veel teisigi tähelepanuväärsete omadustega jadasid, muuhulgas kehtivad seosed $(c_o \cap E) \setminus bv \neq \emptyset$ ja $(c_o \cap E) \setminus \bigcup_{p \geq 1} l^p \neq \emptyset$. Samuti tõestas autor, et kui $bv' \cap E$ ($l^p \cap E (p \geq 1)$) ei ole kinnine, siis $(cs \cap E) \setminus bv \neq \emptyset$ (vastavalt $(cs \cap E) \setminus l^p \neq \emptyset$). Teoreemi 10.7 arvukate modifikatsioonide kohta vt. Cross [86], Wilansky [254], [255] ja Berg [42]. Tähelepanuväärne on Whitley [247] poolt tõestatud

TEOREEM. *Selleks, et konservatiivne maatriks A ei summeeriks ühtegi tõkestatud hajuvat jada, on tarvilik ja piisav, et kehtiksid tingimused*

1° $\dim \{x \in c_A \mid Ax = 0\} < \infty$,

2° $\overline{A[c]} = A[c]$.

DeVos [92] uuris operaatoreid omadustega 1° ja 2° ühest FK-ruumist teise, ta nimetas neid θ-kujutusteks.

Neuser [184] näitas, et teoreem 10.7 ei jää kehtima, kui selles tõkestatud summeeruvusväli $m \cap c_A$ asendada ruumiga $f \cap c_A$, kus f on kõigi peaaegu koonduvate jadade hulk (vt. §1, täiendused ja märkused). Osutub, et võrdusest $f \cap c_A = c$ ei järeldu üldjuhul maatriksi A koregulaarsus.

Täienduseks lausele 10.9 märgime, et Snyder [224] nimetas hulka $V \subset \omega$ *pseudokonulliliseks*, kui sisalduvusest $c_B \supset V$ järeldub, et B on konullmaatriks. Niisiis, konullmaatriksi A puhul on $m \cap c_A$ pseudokonulliline hulk. Osutub, et pseudokonulliline on isegi $m \cap W_A$, veelgi enam, ka hulk $m \cap W_E$, kus E on konulliline FK-ruum (vt. §7, täiendused ja märkused).

Lõpuks märgime Peterseni arvukaid töid tõkestatud summeeruvusvälja kohta. Nende sisust leiab lugeja kokkuvõtte raamatu [192] 4.peatükis, selle lõpus antakse ka viited kirjandusele.

§11. MAATRIKSITE SISALDUVUS JA KOOSKÕLALISUS

Küsimus tingimustest, mil maatriks B on tugevam maatriksist A, s.t. mil kehtib sisalduvus $c_A \subset c_B$, on lihtsalt lahendatav, kui A on normaalne ning B on lõplike ridadega. Sel juhul moodustame maatriksi $T := BA^{-1}$ ja kuna

$$Bx = B(A^{-1}Ax) = (BA^{-1})(Ax) = Ty \quad (y := Ax,\ x \in c_A)$$

ning A korraldab c_A ja c vahel üksühese vastavuse, siis

$$c_A \subset c_B \Leftrightarrow T[c] \subset c.$$

<u>Näide 1.</u> Olgu M_p niisugune Rieszi kaalutud keskmiste menetlus, et $p_k \neq 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Sel juhul leidub pöördmaatriks $M^{-1} := (\mu_{nk})$, milles (vt. (3.6)) on vaid kaks nullist erinevat diagonaali. Kui B on selline kolmnurkne maatriks, et eksisteerivad piirväärtused $\lim_n b_{nk} =: b_k$ $(k \in \mathbb{N})$ ja $\lim_n \sum_k b_{nk}$, siis maatriks $T := BM^{-1}$ on kujul

$$t_{ni} := \begin{cases} P_i \Delta \dfrac{b_{ni}}{P_i}, & \text{kui } i \le n, \\ 0, & \text{kui } i > n \quad (n, i \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

ja

$$\sum_{i=0}^{n} t_{ni} = \sum_{i=0}^{n} P_i \Delta \frac{b_{ni}}{P_i} = \sum_{i=0}^{n} \left(\Delta \frac{b_{ni}}{P_i}\right) \sum_{k=0}^{i} p_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} p_k \sum_{i=k}^{n} \Delta \frac{b_{ni}}{P_i} = \sum_{k=0}^{n} b_{nk} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Seega eksisteerivad $\lim_n t_{ni} = P_i \Delta (b_i / P_i)$ $(i \in \mathbb{N})$ ja $\lim_n \sum_i t_{ni} = \lim_n \sum_k b_{nk}$. Teoreemi 2.1 (a) kohaselt on maatriks T konservatiivne parajasti siis, kui

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| P_k \Delta \frac{b_{nk}}{P_k} \right| + \left| \frac{P_n}{p_n} b_{nn} \right| = O(1).$$

See ongi tarvilik ja piisav tingimus selleks, et maatriks B oleks tugevam, kui menetlus M_p.

Vaadeldud näites garanteeris eeldus, et B on kolmnurkne, maatriksite M^{-1} ja B korrutamisel assotsiatiivsuse. Raskused, millega me maatriksite sisalduvuse uurimisel kokku põrkame, tulenevadki eeskätt lõpmatute maatriksite korrutamise mitteassotsiatiivsusest. Allpool vaadeldav sisalduvuse uurimise meetod rajaneb implikatsioonile (vt. lause 7.1 (a))

$$x \in L_A,\ t \in l \ \Rightarrow\ t(Ax) = (tA)x.$$

Kõigepealt lisame mõned märkused teoreemile 3.1 reversiivse maatriksi A omaduste kohta. Kuna $(c_A, \|\ \|_A)$ on BK-ruum, siis $\pi_k \in c_A'$ $(k \in \mathbb{N})$. Seetõttu (vrd. teoreem 3.1 (b))

$$x_k = \pi_k(x) = \alpha_k \lim_A x + \sum_i \alpha_{ki} y_i \qquad (x \in c), \tag{11.1}$$

kus $y := Ax$, $\alpha_k \in \mathbb{K}$ ning $\sum_i |\alpha_{ki}| < \infty$ $(k \in \mathbb{N})$. Osutub, et $A' := (\alpha_{ki})$ on maatriksi A parempoolne pöördmaatriks. Tõepoolest, võtame $y := e^i$, siis seosest (11.1) saame $x := A^{-1}e^i = (\alpha_{ki})_k$ ning

$$\delta_{ni} = \sum_k a_{nk} x_k = \sum_k a_{nk}\alpha_{ki} \qquad (n, i \in \mathbb{N}).$$

Edasi, kui $\sum_k a_{nk} \sum_i \alpha_{ki} = \sum_i \sum_k a_{nk}\alpha_{ki}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, siis $\alpha := (\alpha_k) = 0$. Et selles veenduda, võtame $y := e$, seose (11.1) kohaselt

$$x := A^{-1}e = \alpha + (\sum_i \alpha_{ki})_k$$

ning

$$1 = \sum_k a_{nk} x_k = \sum_k a_{nk}\alpha_k + \sum_k a_{nk} \sum_i \alpha_{ki}$$

$$= \sum_k a_{nk}\alpha_k + \sum_i \sum_k a_{nk}\alpha_{ki}$$

$$= \sum_k a_{nk}\alpha_k + 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Seega $A\alpha = 0$, kust A reversiivsuse tõttu saamegi $\alpha = 0$.

Ühte meile kasulikku maatriksi A' omadust märgime siinkohal veel (vrd. lause 9.6 (b)).

LEMMA 11.1. *Kui A on selline reversiivne maatriks, et A' veerud $(\alpha_{ki})_k$ kuuluvad hulka L_A, siis A on M-tüüpi maatriks.*

Tõestus. Olgu $t \in l$ niisugune jada, et $tA = 0$, siis $(\alpha_{ki})_k \in L_A$ tõttu

$$t_i = \sum_n t_n \delta_{ni} = \sum_n t_n \sum_k a_{nk}\alpha_{ki} = \sum_k \alpha_{ki} \sum_n t_n a_{nk}$$

$$= \sum_k \alpha_{ki} 0 = 0 \qquad (i \in \mathbb{N}),$$

s.t. $t = 0$. Seega on A M-tüüpi maatriks.

Tulles tagasi maatriksite sisalduvuse juurde, fikseerime kõigepealt mõned tarvilikud tingimused.

LAUSE 11.2. *Olgu A reversiivne maatriks.*

(a) *Kui* $c_A \subset c_B$, *siis*

$$Bx = u\lim_A x + T(Ax) \qquad (x \in c_A), \tag{11.2}$$

kus $u := (u_n) \in \omega$ *ja maatriks* T *rahuldab tingimusi*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists \lim_n t_{nk} =: t_k \text{ ja } \sup_n \sum_k |t_{nk}| < \infty. \tag{11.3}$$

(b) *Kui* $c_A \subset c_B$ *ning*

$$e \in L_A, \quad (a_k) \in cs, \quad \chi(A) \neq 0, \tag{11.4}$$

siis B = TA, *kus maatriks* T *rahuldab tingimusi* (11.3).

Tõestus. (a) Eeldusel $c_A \subset c_B$ eksisteerib

$$B_n(x) := \sum_k b_{nk}x_k \quad (x \in c_A, \ n \in \mathbb{N})$$

ning lause 5.8 (a) kohaselt $B_n \in c_A'$. Seega on B_n esitatav kujul (vrd. teoreem 3.1 (b))

$$B_n(x) = u_n \lim_A x + \sum_i t_{ni} \sum_k a_{ik}x_k \qquad (x \in c_A),$$

kus $u := (u_n) \in \omega$ ja $(t_{ni})_i \in l$ $(n \in \mathbb{N})$. Jääb näidata, et $T := (t_{ni})$ rahuldab tingimusi (11.3). Kuna $c_{oA} \subset c_B$ ja seosest (11.2) järeldub

$$Bx = T(Ax) \quad (x \in c_{oA}),$$

siis A reversiivsuse tõttu peab T summeerima kõik nulljadad, milleks teoreemi 2.2 põhjal on tarvilikud (ja piisavad) tingimused (11.3).

(b) Võtame seoses (11.2) $x := e^k$, saame

$$b_{nk} = B_n(e^k) = u_n a_k + \sum_i t_{ni}a_{ik} \qquad (n,k \in \mathbb{N}).$$

Kui eeldame, et $(a_k) \in cs$ ja $e \in L_A$, siis eksisteerib

$$\sum_k b_{nk} = u_n \sum_k a_k + \sum_k \sum_i t_{ni}a_{ik} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Teiselt poolt,

$$\sum_k b_{nk} = B_n(e) = u_n \lim_i \sum_k a_{ik} + \sum_i t_{ni} \sum_k a_{ik} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ja arvestades, et $\sum_k\sum_i t_{ni}a_{ik} = \sum_i t_{ni}\sum_k a_{ik}$, saame

$$0 = u_n(\lim_i \sum_k a_{ik} - \sum_k a_k) = u_n\chi(A) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

kust järeldub u = 0. Seega kehtivad tehtud eeldustel seosed

$$Bx = T(Ax) \qquad (x \in c_A)$$

ja

$$b_{nk} = \sum_i t_{ni}a_{ik} \qquad (n,k \in \mathbb{N})$$

ehk

$$B = TA.$$

Jääb veenduda, et maatriks T on konservatiivne. Kuna T rahuldab väite (a) kohaselt tingimusi (11.3), siis tuleb kontrollida veel piirväärtuse $\lim_n \sum_k t_{nk}$ olemasolu (vrd. teoreem 2.1 (a)), mis on samaväärne tingimusega $e \in c_T$. A reversiivsuse tõttu leidub $v \in c_A$, et $Av = e$. Kuna $v \in c_B$, siis $e \in c_T$.

Et lauses 11.2 leitud tarvilikud tingimused oleksid ka piisavad sisalduvuseks $c_A \subset c_B$, on vaja eeldust, mis garanteeriks võrduse $T(Ax) = (TA)x$ iga $x \in c_A$ korral. Üheks niisuguseks eelduseks on $B_A = c_A$.

TEOREEM 11.3. *Olgu* A *selline reversiivne* AB-*maatriks, et* $\chi(A)$ *eksisteerib ning ei võrdu nulliga.*

(a) *Sisalduvus* $c_A \subset c_B$ *kehtib parajasti siis, kui*

eksisteerib $\chi(B)$ (11.5)

ja

eksisteerib $T := (t_{ni})$, *et* $B = TA$ *ning*

$$\sup_n \sum_i |t_{ni}| < \infty. \tag{11.6}$$

Sel juhul on maatriks T *konservatiivne.*

(b) *Selleks, et kehtiks sisalduvus* $c_A \subset c_B$ *ning maatriksid* A *ja* B *oleksid kooskõlas, on tarvilikud ning piisavad tingimused* (11.5), (11.6) *ja*

$$a_k = b_k \quad (k \in \mathbb{N}), \qquad \lim_n \sum_k a_{nk} = \lim_n \sum_k b_{nk}. \tag{11.7}$$

Sel juhul on maatriks T *regulaarne.*

Tõestus. (a) Tarvilikkus. Tingimuste (11.6) tarvilikkus koos maatriksi T konservatiivsusega järeldub otseselt lausest 11.2 (b). Kuna eksisteerib $\chi(A)$, siis $e \in c_A$ ning seetõttu $e \in c_B$. Tingimuse (11.5) tarvilikkuse näitamiseks on seega vaja veenduda, et $(b_k) \in cs$. Seosest (2.4) saame tänu maatriksi T konservatiivsusele

$$b_k = \lim_B e^k = \lim_n \sum_i t_{ni} a_{ik} = \lim_T (a_{ik})_i$$

$$= \chi(T) a_k + \sum_i t_i a_{ik},$$

kus $t_i := \lim_n t_{ni}$ $(i \in \mathbb{N})$. Rea

$$\sum_k b_k = \chi(T) \sum_k a_k + \sum_k \sum_i t_i a_{ik}$$

koonduvus järeldub eeldustest $(a_k) \in cs$ ja $e \in c_A = L_A$.

Piisavus. Näitame, et tingimustest (11.5) ja (11.6) järeldub maatriksi T konservatiivsus, sel juhul eksisteerib iga $x \in c_A$ korral

$$\lim_n \sum_k b_{nk} x_k = \lim_n \sum_k \sum_i t_{ni} a_{ik} x_k$$

$$= \lim_r \sum_i t_{ri} \sum_k a_{ik} x_k, \qquad (11.8)$$

s.t. $c_A \subset c_B$. Niisiis tuleb meil veenduda piirväärtuste $\lim_r t_{ri}$ $(i \in \mathbb{N})$ ja $\lim_r \sum_i t_{ri}$ olemasolus. Kuna $\sum_i |t_{ri}| = O(1)$, siis saab maatriksist T ridade väljajätmise teel moodustada konservatiivse osamaatriksi. Olgu $T' := (t'_{ri})$ ja $T'' := (t''_{ri})$ kaks sellist konservatiivset osamaatriksit ning $B' := T'A$ ja $B'' := T''A$. Seejuures (vrd. teoreem 2.1 (a))

$$\lim_{B'} e = \lim_{T'}((\sum_k a_{ik})_i) = \chi(T')\lim_A e + \sum_i t'_i \sum_k a_{ik},$$

$$\lim_{B'} e^k = \lim_{T'}((a_{ik})_i) = \chi(T')a_k + \sum_i t'_i a_{ik} \quad (k \in \mathbb{N})$$

ja

$$\chi(B') = \chi(T')\chi(A) + \sum_i t'_i \sum_k a_{ik} - \sum_k \sum_i t'_i a_{ik}$$
$$= \chi(T')\chi(A).$$

Samuti kehtib võrdus $\chi(B'') = \chi(T'')\chi(A)$. Tingimuse (11.5) kohaselt $\chi(B'') = \chi(B') = \chi(B)$ ja kuna $\chi(A) \neq 0$, siis

$$\chi(T') = \chi(T'') = \chi(B)\chi(A)^{-1} =: \chi(T).$$

Niisiis,

$$b_k = b'_k = \chi(T)a_k + \sum_i t'_i a_{ik}$$
$$= b''_k = \chi(T)a_k + \sum_i t''_i a_{ik},$$

kust järeldub

$$\sum_i (t'_i - t''_i)a_{ik} = 0 \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Rakendades lemmat 11.1, saame $t'_i = t''_i$ $(i \in \mathbb{N})$ ning seega ka $\lim_{T'} e = \lim_{T''} e$. Me tõestasime, et tõkestatud jada $(\sum_i t_{ri})_r$ kaks suvalist koonduvat osajada koonduvad üheks ja samaks piirväärtuseks, s.t. eksisteerib $\lim_r \sum_i t_{ri}$. Täpselt samamoodi saame võrdusest $t'_i = t''_i$, et veerud $(t_{ri})_r$ $(i \in \mathbb{N})$ on koonduvad jadad. Sellega on maatriksi konservatiivsus tõestatud.

(b) Tarvilikkus. Tingimuste (11.7) tarvilikkus maatriksite A ja B kooskõlalisuseks on ilmne: kuna $e^k, e \in c_A \subset c_B$ $(k \in \mathbb{N})$, siis

$$a_k = \lim_A e^k = \lim_B e^k = b_k,$$

$$\lim \sum_k a_{ik} = \lim_A e = \lim_B e = \lim \sum_k b_{ik}.$$

Piisavus. Kui kehtivad (11.5)-(11.7), siis on T konservatiivne ja $\chi(T) = \chi(B)\chi(A)^{-1} = 1$. Vastavalt seosele (2.4) saame

$$b_k = T(Ae^k) = \chi(T)a_k + \sum_i t_i a_{ik} = a_k + \sum_i t_i a_{ik}$$

ja

$$0 = b_k - a_k = \sum_i t_i a_{ik} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Pidades silmas, et T konservatiivsuse tõttu $t := (t_i) \in l$ ning rakendades lemmat 11.1, saame $t = 0$ ja seetõttu $\lim_n \sum_i t_{ni} = \chi(T) = 1$. Niisiis on T regulaarne maatriks. Seosest (11.8) järeldub sisalduvus $c_A \subset c_B$ ning ka maatriksite A ja B kooskõlalisus.

On selge, et regulaarsed maatriksid A ja B on alamruumil $c \subset c_A \cap c_B$ kooskõlas. Me püüame järgnevas kindlaks teha, kui kaugele see kooskõla hulgalt c laieneb. Enne sellekohase väite formuleerimist meenutame (vt. lause 9.3 (b)) alamruumi P_A üht omadust: $P_A = \bar{\varphi} \oplus \langle u \rangle$, kus $u = 0$ või $u \in P_A \setminus \bar{\varphi}$.

LAUSE 11.4. *Olgu A ja B sellised maatriksid, et* $P_A = \bar{\varphi} \oplus \langle u \rangle \subset c_B$. *Kui nad on kooskõlas hulgal* $\varphi \oplus \langle u \rangle$, *siis on nad ka kooskõlas alamruumil* P_A.

Tõestus. Tähistame $f(x) := \lim_A x - \lim_B x \ (x \in P_A)$, siis $\ker f \supset \varphi \oplus \langle u \rangle$. Seosest $P_A = \bar{\varphi} \oplus \langle u \rangle = \overline{\varphi \oplus \langle u \rangle}$ ja funktsionaali f pidevusest ruumis P_A järeldub $\ker f \supset P_A$, s.t. $\lim_A x = \lim_B x$ iga $x \in P_A$ korral.

TEOREEM 11.5.(a) *Konservatiivse maatriksi* A *korral on järgmised väited samaväärsed.*

1° A *on kooskõlas iga temast tugevama maatriksiga* B, *millega ta on hulgal* $\{e, e^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ *kooskõlas.*

2° A *on perfektne.*

(b) *Regulaarne maatriks on perfektne parajasti siis, kui ta on kooskõlas iga endast tugevama regulaarse maatriksiga.*

Tõestus. (a) Kehtigu väide 1° ning olgu $f \in c_A'$ omadusega $f(e) = f(e^k) = 0 \ (k \in \mathbb{N})$. Rakendame lauset 8.5 (a) ning leiame maatriksi D, et $c_A \subset c_D$ ja $\lim_D x = f(x) \ (x \in c_A)$. Tähistame $B := D + A$, siis $c_B \supset c_A$ ja $\lim_B x = \lim_A x$, kui $x \in \{e, e^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Eelduse 1° kohaselt kehtib see võrdus siis kogu summeeruvusväljas c_A, mistõttu $f(x) = \lim_B x - \lim_A x = 0$ $(x \in c_A)$ ehk $\ker f \supset c_A$. Niisiis,

$$\ker f \supset \{e, e^k \mid k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \ker f \supset c_A,$$

järelikult (vt. lause 4.11(a)) $c_A = \overline{\mathrm{lin}\{e, e^k \mid k \in \mathbb{N}\}} = \overline{\varphi \oplus \langle e \rangle} = \bar{\varphi} \oplus \langle e \rangle$, mis tähendab, et A on perfektne. Seega $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$.

maatriks, et $c_A \subset c_B$ ning $\lim_B x = \lim_A x$, kui $x = e$ või $x = e^k$ $(k \in \mathbb{N})$. Tähistame $f(x) := \lim_A x - \lim_B x$ $(x \in c_A)$, siis $f \in c_A'$ ja kern $f \supset \varphi \oplus \langle e \rangle$. Et $c_A = \overline{\varphi \oplus \langle e \rangle}$, siis kern $f \supset c_A$, s.t. $\lim_B x = \lim_A x$ iga $x \in c_A$ korral.

Väide (b) järeldub vahetult väitest (a).

Niisiis, üldjuhul ei ole regulaarsed menetlused kooskõlas. Seda tähelepanuväärsem on

TEOREEM 11.6. *Kui regulaarsete maatriksite* A *ja* B *puhul* $m \cap c_A \subset c_B$, *siis on* A *ja* B *hulgal* $m \cap c_A$ *kooskõlas, s.t.* $\lim_A x = \lim_B x$ *iga* $x \in m \cap c_A$ *korral.*

See klassikaline teoreem osutub lihtsaks järelduseks järgmisest üldisemast väitest, mis on märkimisväärne tulemus ka omaette võetuna.

TEOREEM 11.7. *Kui* A *ja* B *on konservatiivsed maatriksid, siis*

$$m \cap c_A \subset c_B \Rightarrow m \cap W_A \subset W_B.$$

Tõestus. Olgu A konservatiivne maatriks ning $x \in m \cap c_A$ moodustame maatriksi $D := (a_{nk}x_k')$. Ei ole raske näha, et ka D on konservatiivne. Tõepoolest, kui $z \in c_0$, siis $x \cdot z := (x_k z_k) \in c_0 \subset c_A$, samuti $x \cdot e = x \in c_A$. Pidades silmas seost $c = c_0 \oplus \langle e \rangle$, saamegi, et iga $v \in c$ korral eksisteerib $\lim_D v = \lim_n \sum_k a_{nk} x_k v_k$. Seejuures tuleneb seosest $\chi(D) = \lim_A x - \sum_k a_k x_k = \Lambda_A(x)$ ning võrdusest $m \cap \Lambda_A^{\perp} = m \cap W_A$ (vrd. laused 7.3 ja 7.2 (c)) väide

$$\text{D on konullmaatriks} \Leftrightarrow x \in m \cap W_A. \tag{11.9}$$

Olgu $x \in m \cap W_A$ ja kehtigu sisalduvus $m \cap c_A \subset c_B$, siis $m \cap c_D \subset c_G$, kus $G := (b_{nk}x_k)$. Lause 10.9 põhjal on G konullmaatriks ja väite (11.9) kohaselt $x \in W_B$. Niisiis $m \cap W_A \subset W_B$.

Teoreemi 11.6 tõestus. Kui A ja B on regulaarsed, siis $a_k = b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ ning

$\Lambda_A(x) = \lim_A x$ $(x \in c_A)$, $\Lambda_B(x) = \lim_B x$ $(x \in c_B)$.

Niisiis, $\Lambda_A^{\perp} = c_{0A}$ ja $\Lambda_B^{\perp} = c_{0B}$. Iga elemendi $x \in c_A$ saab esitada kujul

$$x = (x - (\lim_A x)e) + (\lim_A x)e =: z + (\lim_A x)e,$$

kusjuures

$$\Lambda_A(z) = \lim_A x - (\lim_A x)\lim_A e = 0,$$

s.t. $z := x - (\lim_A x)e \in c_{oA}$. Kui $x \in m \cap c_A$, siis $z \in m \cap \Lambda_A^{\perp} = m \cap W_A$. Rakendades teoreemi 11.7, saame, et $z \in m \cap W_B = m \cap \Lambda_B^{\perp} \subset c_{oB}$. Niisiis, $\lim_B x = \lim_B z + (\lim_A x)\lim_B e = \lim_A x$ iga $x \in m \cap c_A$ korral.

Täiendused ja märkused

Normaalsete maatriksite A ja B korral leidis sisalduvuse $c_A \subset c_B$ jaoks tarvilikud ja piisavad tingimused Toeplitz [244] 1911. a. Tema tulemust üldistasid Mazur [163] ja Hill [113]. Viimane tõestas järgmise väite, mida kirjanduses nimetatakse *Mazur-Hilli teoreemiks*.

TEOREEM. *Olgu* A *reversiivse ning* B *suvaline maatriks. Sisalduvuseks* $c_A \subset c_B$ *on tarvilikud ja piisavad järgmised tingimused:*

(a) *jadad* (α_k) ja $(\alpha_{ik})_i$ ($k \in \mathbb{N}$; *vt. seos* (11.1)) *on* B-*summeeruvad*,

(b) $\sup_m \sum_k \left| \sum_{i=0}^{m} b_{ni}\alpha_{ik} \right| < \infty \quad (n \in \mathbb{N})$,

(c) $\sup_n \sum_k \left| \sum_i b_{ni}\alpha_{ik} \right| < \infty$.

Jurkat ja Peyerimhoff [126] kasutasid sisalduvuse $c_A \subset c_B$ uurimisel esimestena maatriksi A lõiketõkestatust, konkreetsete menetluste puhul olid seda teinud paljud autorid ka varem. Funktsionaalanalüüsi meetodid võtsid kasutusele Russell [204] ja Cowling [85]. Russelli hilisemast tööst [205] on pärit lause 11.2 ja teoreem 11.3, viimase tõestamisel on rakendatud Coppingu [82] poolt varem esitatud meetodit.

Märgime veel maatriksite faktoriseerimise meetodit sisalduvuse uurimisel (vt. teoreem 8.2, Boos [50], [54]).

Teoreem 11.5 illustreerib hästi maatriksi kooskõlaomaduste seost tema perfektsusega. Esialgselt oligi perfektne summeerimismenetlus defineeritud kui regulaarne menetlus, mis on iga temast tugevama regulaarse menetlusega kooskõlas. Selle omaduse funktsionaalanalüütilise sisu avamise eest sai Mazur 1927. a. Lvovi Ülikooli auhinna (vt. [164], [163]).

Teoreemi 11.6, mis ingliskeelses kirjanduses kannab nime "bounded consistency theorem", formuleerisid ja publitseerisid ilma tõestuseta 1933. a. Mazur ja Orlicz [165], esimese tõestuse esitas Brudno [285] (vt. Mazur ja Orlicz [166]). Hiljem on sellele väitele leitud mitmeid erinevaid tõestusi. Petersen [189] kasutas selleks sobivalt valitud faktorjadasid, Orlicz [188] Saksi ruumide teooriat. Bennett ja Kalton [37] rakendasid teoreemi 11.6 tõestamisel kaasaegset lokaalselt kumerate ruumide teooriat. Eelpool esitatud tõestus, mis tugineb teoreemile 11.7 ning lausele 10.9, kuulub Snyderile ja Wilanskyle [226]. Vt. ka Ruckle [208], Altmann [232].

Erinevad tõestusmeetodid viitavad enamasti vaadeldava teoreemi erinevatele üldistamissuundadele, milledest üheks olulisemaks on püüd asendada teoreemi 11.6 sõnastuses ruum m mingi teise jadaruumiga Z. Juhul $Z := |A| := \{x \in \omega \mid \sup_r \sum_k |a_{rk} x_k| < \infty\}$ tõestasid seda tüüpi teoreemid Volkov [236] ja Boos [45]. Teine idee üldistamiseks lähtub teoreemist 11.8, kus summeeruvusväljad c_A ja c_B asendatakse topoloogiliste jadaruumidega E ja F. Boos ja Leiger [59] vaatlesid sel eesmärgil L_φ-ruume F (vt. §5, täiendused ja märkused) ning teatavat jadaruumide klassi $\mathfrak{Z}$, mis muuhulgas sisaldab kõik soliidsed jadaruumid, aga ka näiteks kõigi peaaegu nulliks koonduvate jadade ruumi f_0. Selle klassi täpse kirjelduse leiab lugeja töös [57] (vt. ka [56]). Kehtib järgmine väide, millest erijuhul saadakse teoreem 11.7, samuti Bennetti ja Kaltoni [40] kooskõlateoreemid peaaegu koonduvuse jaoks.

TEOREEM. *Kui* $Z \in \mathfrak{Z}$, *siis*

$$Z \cap W_E \subset F \;\Rightarrow\; Z \cap W_E \subset W_F$$

iga FK-*ruumi* E *ning* L_φ-*ruumi* F *korral.*

Kuna $m_\mu := \{x \in \omega \mid (x_k/\mu_k) \in m\} = \mu \cdot m$ on juhul $0 < \mu_k \uparrow \infty$ soliidne jadaruum, siis kuulub ta klassi $\mathfrak{Z}$ ning eelneva teoreemi kohaselt kehtib maatriksite A ja B korral implikatsioon

$$m_\mu \cap W_A \subset c_B \;\Rightarrow\; m_\mu \cap W_A \subset W_B$$

(vrd. teoreem 11.7), kuid vastav kooskõlateoreem, mille tõestasid Petersen [191] ja Copping [83], erineb mõnevõrra teoreemist 11.6.

TEOREEM. *Kui regulaarsete maatriksite* A *ja* B *puhul* $m_\mu \cap c_A \subset c_B$, *siis eksisteerib selline jada* $\rho := (\rho_k)$, *et* $0 < \rho_k \uparrow \infty$, $\rho_k \le \mu_k$ $(k \in \mathbb{N})$ *ning* A *ja* B *on kooskõlas alamruumil* $m_\rho \cap c_A$.

Boos [50] tõestas viimase väite Baumanni [12] faktoriseerimisteoreemi abil. Tulles tagasi maatriksite kooskõlalisuse probleemide juurde tõkestatud jadade puhul, vaatleme olukorda, kus on antud regulaarsed maatriksid $A^{(1)}, \ldots, A^{(N)}$. Tekib küsimus, millistel tingimustel on olemas selline regulaarne maatriks B, et kehtiks sisalduvus

$$c_B \supset \sum_{j=1}^{N} (m \cap c_{A^{(j)}}). \qquad (*)$$

Sel juhul on teoreemi 11.7 põhjal B kooskõlas maatriksiga $A^{(j)}$ iga $j = 1, \ldots, N$ korral. Veelgi enam, kehtib implikatsioon

$$\forall x^{(j)} \in m \cap c_{A^{(j)}} \; (j=1,\ldots,N): \sum_{j=1}^{N} x^{(j)} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{N} \lim_{A^{(j)}} x^{(j)} = 0.$$

Viimast omadust nimetatakse maatriksite $A^{(1)}, \ldots, A^{(N)}$ *üheaegseks b-kooskõlalisuseks*. Selle või mõne teise kooskõla-omaduse puudumist põhjustavaid omadusi tähistatakse kui maatriksite hulga $A^{(1)},\dots,A^{(N)}$ *singulaarsusi*. Öeldakse, et neil on *singulaarsus* S_1 (tähistatakse $(A^{(j)}) \in S_1$), kui

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x^{(j)} \in m \cap c_{A^{(j)}} \quad (j = 1,\dots,N):$$

$$\| e - \sum_{j=1}^{N} x^{(j)} \|_{\infty} < \varepsilon, \quad \sum_{j=1}^{N} |\lim_{A^{(j)}} x^{(j)}| < \varepsilon,$$

ja *singulaarsus* S_2 (lühidalt: $(A^{(j)}) \in S_2$), kui

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x^{(1)},\dots,x^{(N)} \in m:$$

$$\| e - \sum_{j=1}^{N} x^{(j)} \|_{\infty} < \varepsilon, \quad \sum_{j=1}^{N} \overline{\lim_{n}} |\sum_{k} a_{nk}^{(j)} x_k| < \varepsilon.$$

Definitsioonidest järeldub vahetult $(A^{(j)}) \in S_1 \rightarrow (A^{(j)}) \in S_2$. Copping [83] näitas, et viimane implikatsioon ei ole pööratav. Edasi, $A^{(1)},\dots,A^{(N)}$ on üheaegselt b-kooskõlas, kui $(A^{(j)}) \notin S_1$. Vastupidine väide on üldjuhul väär, nagu näitasid Lorentz ja Zeller [148]. Selleks, et leiduks regulaarne maatriks B omadusega (*), on tarvilik ja piisav, et iga $j = 1,\dots,N$ korral eksisteeriks regulaarne maatriks $B^{(j)}$ omadusega $m \cap c_{A^{(j)}} = m \cap c_{B^{(j)}}$ ning kehtiks tingimus $(B^{(j)}) \in S_2$.

Singulaarsusprobleemide uurimisele panid aluse 1958. a. Lorentz ja Zeller eelpool nimetatud tööga [148]. Edasine areng on seotud Bakeri ja Peterseni nimedega, lugeja saab nende tulemustest ülevaate Peterseni monograafia [192] 4. ja 5. peatükis. Analoogilisi probleeme on regulaarsete maatriksite jada $(A^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ korral uurinud Boos [53] ning Baker ja Petersen [7]. Lihtsa sissejuhatuse singulaarsuste teooriasse leiab lugeja Boosi raamatu [52] 7. peatükis.

§12. LIMITEERIVAD JA MERCERI TÜÜPI TEOREEMID

Maatriksteisenduse $y = Ax$ kohta käivad väited võib tinglikult jagada kahte klassi. Ühed, nn. *otsesed teoreemid* on sellised, kus jadade x teatavatest omadustest saadakse jadade y omadused. Seda tüüpi on näiteks maatriksite konservatiivsust, regulaarsust, sisalduvust, kooskõlalisust ja summeeruvustegureid käsitlevad teoreemid. Teiste, nn. *pöördteoreemide* puhul tehakse jadade y omadustest teatavaid järeIdusi jadade x omaduste kohta. Pöördteoreemide arvukaima ja tähtsaima osa moodustavad Tauberi tüüpi teoreemid. See on omaette valdkond summeeruvusteoorias, mis meie raamatu raamidest välja jääb (vt. §1, täiendused ja märkused). Käesolevas paragrahvis vaatleme pealkirjas mainitud kahte liiki pöördteoreeme.

Limiteerivad teoreemid annavad vastuse küsimusele, kui kiiresti kasvavaid jadasid vaadeldav maatriks summeerida võib. Selle probleemi põhimõtteline lahendus on olemas küllalt suure maatriksite klassi jaoks.

Olgu E mingi jadaruum. Kui leidub selline jada $\lambda := (\lambda_k)$, $\lambda_k \geq 0$ $(k \in \mathbb{N})$, et

$$x_k = O(\lambda_k) \text{ või } x_k = o(\lambda_k) \quad (x \in E), \tag{12.1}$$

s.t. $E \subset \lambda \cdot m$ või $E \subset \lambda \cdot c_0$, siis tingimusi (12.1) nimetatakse ruumi E jaoks *limiteerivateks*. Kui seejuures iga tõkestamata jada $\mu := (\mu_k)$ korral leidub $x \in E$, et

$$x_k \neq O(\lambda_k/\mu_k),$$

siis nimetatakse limiteerivaid tingimusi (12.1) *täpseteks*. Juhul $E = c_A$ on limiteeriv tingimus $x_k = O(\lambda_k)$ tarvilik jada x A-summeeruvuseks.

LAUSE 12.1. *Iga* BK-*ruumi* E *korral kehtib täpne limiteeriv tingimus*

$$x_k = O(\|\pi_k\|_{E'}) \quad (x \in E), \tag{12.2}$$

kus π_k *on koordinaatfunktsionaalid* $(k \in \mathbb{N})$.

Tõestus. Kõigepealt märgime, et kuna E on BK-ruum, siis $\pi_k \in E'$, seega eksisteerib $\|\pi_k\| \neq 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Iga $x \in E$ ja $k \in \mathbb{N}$ korral

$$|x_k| = |\pi_k(x)| \leq \|\pi_k\| \, \|x\|,$$

kust

$$\frac{1}{\|\pi_k\|} |x_k| \leq \|x\|$$

ehk

$$x_k = O(\|\pi_k\|).$$

Selle hinnangu täpsuses veendumiseks võtame suvalise tõkestamata jada μ ja oletame vastuväiteliselt, et $F_k(x) := \mu_k\|\pi_k\|^{-1}x_k = O(1)$ $(x \in E)$, s.t. funktsionaalide $F_k \in E'$ jada on BK-ruumis E punktiviisi tõkestatud. Ühelt poolt kehtib ühtlase tõkestatuse printsiibi kohaselt $\|F_k\| = O(1)$, kuid teisalt $\|F_k\| = |\mu_k| \neq O(1)$. Niisiis on tingimus (12.2) täpne.

Olgu A reversiivne maatriks, siis c_A on BK-ruum normiga $\| \ \|_A$ (vt. teoreem 3.1 (a)), kusjuures koordinaatfunktsionaalid π_k on kujul (vrd. (11.1))

$$\pi_k(x) = \alpha_k \lim_A x + \sum_i \alpha_{ki} y_i \qquad (y := Ax \in c)$$

ning (vrd. teoreem 3.1 (b)) $\|\pi_k\| = |\alpha_k| + \sum_i |\alpha_{ki}| < \infty$ $(k \in \mathbb{N})$. Kui A on normaalne maatriks, siis

$$x_k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_{ki} y_i \qquad (y := Ax \in c),$$

kus $A^{-1} := (\alpha_{ki})$ on A pöördmaatriks, seejuures

$$\|\pi_k\| = \sum_{i=0}^{k} |\alpha_{ki}| \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Seega saame lausest 12.1 järeldusena

LAUSE 12.2. *Reversiivse maatriksi A korral kehtib täpne limiteeriv tingimus*

$$x_k = O(|\alpha_k| + \sum_i |\alpha_{ki}|) \qquad (x \in c_A).$$

Kui A on normaalne siis selles tingimuses $\alpha_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$.

Näide 1. Aritmeetiliste keskmiste menetluse C_1 pöördmaatriks (γ^1_{ki}) on kujul (3.7), seega $\sum_{i=0}^{k} |\gamma^1_{ki}| = |-k| + |k + 1| = 2k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$, kust menetluse C_1 limiteerivaks tingimuseks saame $x_k = O(2k + 1)$ ehk

$$x_k = O(k) \qquad (x \in c_{C_1}).$$

Niisiis, igal reversiivsel maatriksil on olemas limiteeriv tingimus. Normaalse maatriksi korral saame selle leida, kui teame tema pöördmaatriksit. Praktiliselt on aga summade $\sum_i |\alpha_{ki}|$ leidmine üpris raske ülesanne, mis õnnestub lahendada vaid vähestel juhtudel. Oluliselt lihtsam on limiteerivaid tingimusi määrata AB-maatriksite korral.

LAUSE 12.3 (a) AB-BK-*ruumi* E *korral kehtivad täpsed limiteerivad tingimused*

$$x_k = O(\lambda_k) \quad (x \in E) \quad ja \quad x_k = o(\lambda_k) \quad (x \in S_E),$$

kus

$$\lambda_k := \|e^k\|^{-1} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

(b) *Kui* AB-*maatriks* A *ei sisalda nullveerge, siis kehtivad* *täpsed limiteerivad tingimused*

$x_k = O(1/\sup_n|a_{nk}|)$ $(x \in c_A)$ *ja* $x_k = o(1/\sup_n|a_{nk}|)$ $(x \in c_{oA})$.

(c) *Normaalse* AB-*maatriksi* A *korral kehtivad täpsed limiteerivad tingimused*

$x_k = O(1/|a_{kk}|)$ $(x \in c_A)$ *ja* $x_k = o(1/|a_{kk}|)$ $(x \in c_{oA})$.

Väidetes (b) ja (c) eeldame o-tingimuste puhul, et $c_{o_A} \neq \varphi$.

Tõestus. (a) Kuna E on AB-ruum, siis iga $x \in E$ jaoks leidub $M_x > 0$, et $\|\sum_{k=0}^{m} x_k e^k\| \le M_x$ $(m \in \mathbb{N})$. Seetõttu

$$(1/\lambda_m)|x_m| = \|x_m e^m\| = \|\sum_{k=0}^{m} x_k e^k - \sum_{k=0}^{m-1} x_k e^k\| \le 2M_x \quad (m \in \mathbb{N}),$$

niisiis $x_k = O(\lambda_k)$. Analoogiliselt järeldub $x \in S_E$ puhul AK-tingimusest $\|\sum_{k=m}^{n} x_k e^k\| \to 0$ $(m \le n,\ n,m \to \infty)$, et $\lambda_m^{-1}|x_m| \to 0$, s.t. $x_k = o(\lambda_k)$. Veendumaks nende tingimuste täpsuses, paneme tähele, et $S_E \supset \{x \in \omega \mid \sum_k \lambda_k^{-1}|x_k| < \infty\} = \lambda \cdot l$. Teisest poolest, iga $x \in \lambda \cdot l$ korral $\sum_k \|x_k e^k\| = \sum_k \lambda_k^{-1}|x_k| < \infty$, kust järeldub rea $\sum_k x_k e^k$ koonduvus BK-ruumis E. Seega kehtivad sisalduvused $\lambda \cdot l \subset S_E \subset E \subset \lambda \cdot m$.

Iga tõkestamata jada μ korral leidub $x \in l$, et $\mu \cdot x \notin l$, seega $\lambda \cdot x \in \lambda \cdot l \subset E$, kuid $\mu \cdot (\lambda \cdot x) \notin \lambda \cdot m$. Niisiis, $\mu \cdot E \not\subset \lambda \cdot m$ iga $\mu \notin m$ puhul.

Väide (b) järeldub vahetult väidest (a) ning lausest 7.7 (a). Omakorda tuleneb väitest (b) ning lausest 7.7 (c) väide (c).

<u>Näide 2.</u> Teatavasti (vt. §7, näide 1) on regulaarne Rieszi kaalutud keskmiste menetlus M_p AB-menetlus. Eeldame, et $p_k > 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Siis $\sup_n|a_{nk}| = \sup_{n \ge k} p_k P_n^{-1} = p_k \sup_n P_n^{-1} = p_k P_k^{-1}$ $(k \in \mathbb{N})$, mistõttu M_p-summeeruvate jadade jaoks kehtib täpne limiteeriv tingimus

$$x_k = O(p_k P_k^{-1}).$$

Limiteerivate tingimuste abil tõestatakse mitmed Merceri tüüpi teoreemid. Meenutame (vt. §1), et nii nimetatakse väiteid, mis fikseerivad maatriksi A korral tingimused võrduseks $c_A = c$. Nagu näitab lemma 8.6, ei ole sellised maatriksid sugugi haruldased.

Ühe Merceri tüüpi teoreemi oleme me eespool juba tõestanud, seejuures väga olulise, kuivõrd talle tuginevad, kõigi selles paragrahvis järgnevalt esitatavate teoreemide tõestused. See on teoreem 10.5, mille kohaselt kehtib implikatsioon

$$c \subset c_A \subset m \;\rightarrow\; c_A = c.$$

LAUSE 12.4. (a) *Normaalse konservatiivse maatriksi A korral kehtib võrdus* $c_A = c$ *parajasti siis, kui*

$$\sum_{i=0}^{k} |\alpha_{ki}| = O(1),$$

kus $A^{-1} := (\alpha_{ki})$ *on A pöördmaatriks.*
(b) *Konservatiivse AB-maatriksi A korral, mis ei sisalda nullveerge, kehtib võrdus* $c_A = c$ *parajasti siis, kui*

$$\varliminf_{k} \sup_{n} |a_{nk}| > 0.$$

(c) *Konservatiivse normaalse AB-maatriksi A puhul kehtib võrdus* $c_A = c$ *parajasti siis, kui* $(1 / a_{kk}) \in m$.

Tõestus. Sisalduvus $c_A \subset m$ tuleneb väite (a) puhul lausest 12.2, väidete (b) ja (c) puhul aga lausest 12.3 (b) ning (c). Võrdus $c_A = c$ järeldub kõigil juhtudel teoreemist 10.5.

<u>Näide 3.</u> Normaalse menetluse M_p korral on lauses 12.4 (a) vaadeldavad summad $\sum_i |\alpha_{ki}|$ hõlpsasti arvutatavad (vrd. (3.6)):

$$\sum_{i=0}^{k} |\mu_{ki}| = \frac{|P_k|}{|p_k|} + \frac{|P_{k-1}|}{|p_k|} = \frac{|P_k|}{|p_k|} + \frac{|P_k - p_k|}{|p_k|}$$

Niisiis, kui M_p on pööratav regulaarne menetlus, mis rahuldab tingimust $P_k = O(p_k)$, siis lause 12.4 (a) kohaselt on $c_{M_p} = c$.

LAUSE 12.5. *Kui konservatiivne kolmnurkne maatriks rahuldab tingimust*

$$\varliminf_{n} \Big(|a_{nn}| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_{nk}|\Big) > 0, \tag{12.3}$$

siis $c_A = c$.

Tõestus. Vastavalt teoreemile 10.5 piisab näidata, et mainitud omadustega maatriks A ei summeeri ühtki tõkestamata jada. Olgu $x \in \omega \setminus m$ ja $M > 0$ suvalised, siis leidub selline $j \in \mathbb{N}$, et $|x_j| \geq M$ ja $|x_k| < M$ $(k = 0, \ldots, j-1)$. Tähistades

$$y_j := (Ax)_j = a_{jj}x_j + \sum_{k=0}^{j-1} a_{jk}x_k ,$$

saame hinnangu

$$|y_j| \geq |a_{jj}|\ |x_j| - \sum_{k=0}^{j-1} |a_{jk}|\ |x_k| \geq M(|a_{jj}| - \sum_{k=0}^{j-1} |a_{jk}|).$$

Kui $M \to \infty$, siis ka $j \to \infty$ ning eelduse (12.3) kohaselt $y \notin m$. Seega $x \notin c_A$.

LAUSE 12.6. *Olgu* A *regulaarne normaalne maatriks, mille pöördmaatriks* $A^{-1} := (\alpha_{ki})$ *rahuldab tingimust*

$$\alpha_{ki} \leq 0 \quad (k > i), \quad \alpha_{kk} > 0 \quad (k,i \in \mathbb{N}). \tag{12.4}$$

Siis eeldusel $\operatorname{Re} \alpha > -1$ *kehtib võrdus* $c_{I+\alpha A} = c$.

Tõestus. Vahetu kontroll näitab, et maatriks A on mittenegatiivne, täpsemalt

$$a_{nk} \geq 0 \quad (n > k), \quad a_{nn} > 0 \quad (n,k \in \mathbb{N}).$$

Seega on ridade summad $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_{nk}$ $(n \in \mathbb{N})$ rangelt positiivsed, $\lim_n s_n = 1$ (vrd. teoreem 2.1 (c)) ning

$$\sum_{n=0}^{i} \alpha_{in}s_n = \sum_{n=0}^{i} \alpha_{in} \sum_{k=0}^{n} a_{nk} = \sum_{k=0}^{i} \sum_{n=k}^{i} \alpha_{in}a_{nk} = 1 \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Väite tõestamiseks piisab näidata, et kui jada x on $(I + \alpha A)$-summeeruv, siis $y := Ax$ on tõkestatud, sest sel juhul on ka jada $x = (I + \alpha A)x - \alpha Ax$ tõkestatud ning väide järeldub teoreemist 10.5.

Tähistame $z := (I + \alpha A)x = (A^{-1} + \alpha I)y$. Kuna $x \in c_{I+\alpha A}$, siis z on koonduv jada. Oletame, et $y \notin m$, siis on ka jada $(|y_n|s_n^{-1})$ tõkestamata, mistõttu leidub indeksite jada (n_j) omadusega

$$|y_{n_j}|/s_{n_j} \geq |y_k|/s_k \quad (k = 0,\dots,n_j,\ j \in \mathbb{N}).$$

Viimase võrratuse ja eelduse (12.4) põhjal saame $n = n_j$ korral hinnangu

$$\begin{aligned}
|z_n| &= |(\alpha_{nn} + \alpha)y_n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk}y_k| \\
&\geq |\alpha_{nn} + \alpha|\,|y_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_{nk}|\,|y_k| \\
&\geq \operatorname{Re}(\alpha_{nn} + \alpha)|y_n| - |y_n|s_n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_{nk}|s_k \\
&\geq \operatorname{Re}\alpha|y_n| + |y_n|s_n^{-1} \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk}s_k \\
&= (s_n \operatorname{Re}\alpha + 1)s_n^{-1}|y_n|.
\end{aligned}$$

Et $\lim_n (s_n \operatorname{Re} \alpha + 1) = \operatorname{Re} \alpha + 1 > 0$, siis $|z_{n_j}| \to \infty$, mis on vastuolus eeldusega $x \in c_{I+\alpha A}$.

<u>Näide 4.</u> Aritmeetiliste keskmiste menetluse C_1 pöördmaatriks rahuldab ilmselt tingimust (12.4) seega, $c_{I+\alpha C_1} = c$, kui $\operatorname{Re} \alpha > -1$.

Täiendused ja märkused

Limiteerivaid tingimusi on leitud paljude konkreetsete summeerimismenetluste jaoks, hoopis vähem on saadud sellesuunalisi üldisemaid tulemusi. Jurkat ja Peyerimhoff [125] tõestasid esimestena limiteerivad teoreemid üldiste AB-maatriksite jaoks. Tatchell [236] arendas edasi ideed anda limiteerivaid tingimusi pöördmaatriksi abil. Nagu näitasid Mazur ja Orlicz [166], leidub lõplike ridadega konservatiivse maatriksi A korral jada λ omadusega $c_A \subset \lambda \cdot m$ parajasti siis, kui $\dim \{x \in c_A \mid Ax = 0\} < \infty$. Skerry ja Wilansky [219] tõestasid sama väite ilma konservatiivsuse eelduseta. Lõpmatute ridadega maatriksite puhul on olukord mõnevõrra keerulisem. Mõnikord (näiteks Abeli menetluse $\mathcal{A}_0$ korral, vt. Wilson [266]) õnnestub anda limiteeriv tingimus kujul $x_k = O(\lambda_k^{(n)})$ $(n \in \mathbb{N})$. Märgime ka Jakimovski ning Russelli [123] väga üldisi tulemusi. Limiteerivate tingimuste kohta vt. veel Knopp [137], Zeller ja Beekmann [279], art.42.

Merceri teoreemid said oma nime Merceri poolt erijuhul $A = C_1$ (vt. näide 4) tõestatud lause 12.6 järgi. Lause 12.4 väite (a) tõestus kuulub Wilanskyle [248], väite (b) tõestus aga Meyer-Königile ja Zellerile [170]. Lause 12.5 tõestas Agnew [2], lause 12.6 Beekmann [13].

Merceri tüüpi teoreemidele omaseid tõestusmeetodeid rakendasid Meyer-König ja Zeller [170] Tauberi tüüpi teoreemide puhul. Fridy [99] tõestas eelpool toodud lausete 12.4 (b) ja 12.5 analoogid, aga ka mõned teised samalaadsed väited absoluutse summeeruvuse korral. Lause 12.6 oli lähtepunktiks Kuttnerile ja Lawrence'ile [142], kes defineerisid maatriksi A *Merceri hulga*

$$S(A) := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid c_{\alpha I+(1-\alpha)A} = c\}$$

ja tõestasid järgmise väite.

TEOREEM. *Olgu* Q *lahtine hulk kompleksitasandil, mis sisaldab punkti* $\alpha = 1$. *Siis leidub selline regulaarne normaalne maatriks* A, *et* $S(A) = Q$.

Lause 8.5 (b) tõestamisel veendusime, et maatriksid D omadusega $c_D = c$ mängivat tähtsat osa maatriksite ekvivalentsuse uurimisel. Veelgi üldisema probleemiasetuse korral püütakse leida tingimusi, mil $c_A = G$, kus G on mingi etteantud jadaruum. Selle kohta vt. Hill [114], Beekmann [13], Zeller [274]. Teisalt on näidatud, et paljud jadaruumid ei saa olla ühegi maatriksi summeeruvusväljaks. Teoreemist 10.5 järeldub näiteks, et $c_A \neq m$, Lorentz [147] tõestas, et $c_A \neq f$. Kuna c_A on tugevas topoloogias separaabel (vt. Bennett [32]), siis ei ole ka võrdus $c_A = l$ ühegi maatriksi A puhul võimalik. Selliste nn. mitteekvivalentsusteoreemide kohta vt. veel Tietz [239], Zeller [277].

§13. SUMMEERUVUSTEGURID

Summeeruvustegurite teooria lähtepunktiks on lemma 1.1 (b), mille võib lühidalt üles märkida võrdusena $cs^{\beta} = bv$. Üldiselt nimetatakse *jadaruumi* E *koonduvusteguriteks* arve ε_k ($k \in \mathbb{N}$), kui $\varepsilon := (\varepsilon_k) \in E^{\beta}$. Juhul $E = c_A$ kõneldakse *maatriksi* A *koonduvusteguritest*. (A,B)-summeeruvustegurite puhul nõutakse rea $\sum_k \varepsilon_k x_k$ koonduvuse asemel tema summeeruvust maatriksiga B. Selle definitsiooni (vt. §1) kohaselt on A-koonduvustegurid (A,Σ)-summeeruvustegurid (vrd. §1, näide 2).

Lepime kokku, et **käesolevas paragrahvis on B kõikjal RJ-regulaarne maatriks.**

Lihtne on näha summeeruvustegurite probleemi vahetut seost maatriksite sisalduvusega. Tähistame $D := (b_{nk}\varepsilon_k)_{n,k}$ ja paneme tähele, et arvud ε_k on (A,B)-summeeruvustegurid parajasti siis, kui $c_A \subset c_D$. Olgu A normaalne ja B lõplike ridadega maatriks, sel juhul on maatriksi $T := DA^{-1}$ konservatiivsus tarvilik ja piisav tingimus selleks, et arvud ε_k oleksid (A,B)-summeeruvustegurid (vt. §11 algus). Seda *pöördteisenduse meetodit* summeeruvustegurite leidmiseks on võimalik rakendada, kui pöördmaatriks A^{-1} on teada ja omab lihtsa kuju.

Näide 1. Leiame Rieszi kaalutud keskmiste menetluse M_p koonduvustegurid, kusjuures eeldame, et $p_k \neq 0$ ($k \in \mathbb{N}$). Kuna $e \in c_{M_p}$, siis peavad kõik M_p-koonduvustegurid ε_k rahuldama tingimust $\varepsilon \in cs$. Sellise jada ε korral rakendame näidet 1 paragrahvist 11, võttes seal $B := \Sigma\cdot\varepsilon = (\sigma_{nk}\varepsilon_k)_{n,k}$. Saame tarvilikud ja piisavad tingimused

1) $\sum_k |P_k \Delta \frac{\varepsilon_k}{P_k}| < \infty$,

2) eksisteerib $\lim_k P_k \frac{\varepsilon_k}{P_k}$

sisalduvuseks $c_M \subset c_B$, s.t. selleks, et arvud ε_k oleksid M_p-koonduvustegurid. Seejuures järeldub toodud tingimustest võrduse

$$\sum_{i=0}^{k-1} P_i \Delta \frac{\varepsilon_i}{P_i} = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i - P_k \frac{\varepsilon_k}{P_k} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

tõttu omakorda rea $\sum_k \varepsilon_k$ koonduvus.

Teine, nn. *funktsionaalanalüütiline meetod* summeeruvustegurite leidmiseks tugineb kahele lauses 5.8 formuleeritud faktile.
1° Iga FK-ruumi E korral kehtib $E^\beta \subset E^f$.
2° Kui E on FAK-FK-ruum, siis $E^\beta = E^f$.
Vaadeldava meetodi põhisisu moodustavad kaks alljärgnevat teoreemi.

TEOREEM 13.1. (a) *Olgu* A *regulaarne* AB-*maatriks. Arvud* ε_k *on* (A,B)-*summeeruvustegurid parajasti siis, kui* $\varepsilon_k := (\varepsilon_k) \in c_A^f$.
(b) *Olgu* A *regulaarne reversiivne* AB-*maatriks. Arvud* ε_k *on* (A,B)-*summeeruvustegurid parajasti siis, kui*

$$\varepsilon_k = \sum_{n=0}^{\infty} t_n a_{nk} \qquad (t \in l,\ k \in \mathbb{N}).$$

Tõestus. (a) Tarvilikkus. Tähistame (A,B)-summeeruvustegurite ε_k korral

$$f(x) := \lim_n \sum_k b_{nk}\varepsilon_k x_k \qquad (x \in c_A), \tag{13.1}$$

siis lause 5.8 (a) ja järelduse 4.21 kohaselt $f \in c_A'$. Kuna A on regulaarne maatriks, siis $e^k \in c_{0A}$, maatriksi B RJ-regulaarsuse tõttu

$$\varepsilon_k = \lim_n b_{nk}\varepsilon_k = f(e^k) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Seega $\varepsilon \in c_A^f$.

Piisavus. Olgu $\varepsilon \in c_A^f$, näitame, et rida $\sum_k \varepsilon_k x_k$ koondub iga $x \in c_A$ korral, tema B-summeeruvus järeldub sel juhul maatriksi B RJ-regulaarsusest. Maatriksi A regulaarsuse tõttu on iga $x \in c_A$ esitatav kujul

$$x = z + (\lim_A x)e,$$

kus $z := x - (\lim_A x)e \in c_{0A}$. Kuna A on AB-maatriks, siis lause 7.7 (d) kohaselt on c_{0A} AK-ruum, mistõttu (vrd. lause 5.8 (f)) $c_{0A}^{\beta} = c_{0A}^{f} = c_A^{f}$. Tähendab, kuna $c_0 \subset c_A$, siis $c_A^{f} \subset c_0^{f}$, millest tänu BK-ruumi $(c_0, \|\ \|_\infty)$ AK-omadusele järeldub $l = c_0^{\beta} = c_0^{f} \supset c_A^{f}$. Niisiis koondub rida $\sum_k \varepsilon_k$ ja kokkuvõttes ka rida

$$\sum_k \varepsilon_k x_k = \sum_k \varepsilon_k z_k + \lim_A x \sum_k \varepsilon_k$$

iga $x \in c_A$ ja $\varepsilon \in c_A^{f}$ korral.

Väide (b) järeldub vahetult väitest (a) ja seosest (3.1).

Teoreemist 13.1 selgub tähelepanuväärne fakt: regulaarse AB-maatriksi A puhul ei sõltu (A,B)-summeeruvustegurid üldsegi maatriksist B. Seetõttu saame kõigi RJ-regulaarsete maatriksite B korral samad (A,B)-summeeruvustegurid, nimelt A-koonduvustegurid, kuivõrd ka Σ on RJ-regulaarne maatriks.

Moodustame regulaarse normaalse maatriksi A korral maatriksi $\bar{A} := (\bar{a}_{nk})$, kus

$$\bar{a}_{nk} := \sum_{i=k}^{n} a_{ni} \qquad (n,k \in \mathbb{N}).$$

Ilmselt on $\bar{A}$ normaalne. Edasi, $u := (u_k)$ puhul

$$\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_{nk} u_k = \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{i=k}^{n} a_{ni} \Big) u_k = \sum_{i=0}^{n} a_{ni} \sum_{k=0}^{i} u_k$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_{ni} x_i \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

s.t.

$$x := \Big(\sum_{k=0}^{n} u_k \Big)_n \in c_A \iff u \in c_{\bar{A}},$$

$$x \in c_{0A} \iff u \in c_{0\bar{A}}.$$

Järelikult on $\bar{A}$ RJ-regulaarne. Kui $u \in c_{\bar{A}}$, siis

$$\lim_{\bar{A}}(u - (\lim_{\bar{A}} u)e^0) = \lim_{\bar{A}} u - (\lim_{\bar{A}} u)\lim_A e^0 = 0.$$

Niisiis saab iga $u \in c_{\bar{A}}$ esitada kujul

$$u = v + (\lim_{\bar{A}} u)e^0,$$

kus $v \in c_{0\bar{A}}$. Jada ε korral

$$\varepsilon \cdot u = \varepsilon \cdot v + \varepsilon_0 (\lim_{\bar{A}} u)e^0,$$

seega arvud ε_k on $(\bar{A},B)$-summeeruvustegurid parajasti siis, kui

$$\varepsilon\cdot v \in c_B \text{ iga } v \in c_{0\bar{A}} \text{ korral.}$$

TEOREEM 13.2. *Olgu A regulaarne normaalne AB-maatriks.* (a) *Arvud* ε_k *on* $(\bar{A},B)$*-summeeruvustegurid parajasti siis, kui*

$$\varepsilon_k = \mu + \sum_{n=k}^{\infty} t_n \bar{a}_{nk} \quad (t \in l,\ \mu \in \mathbb{K},\ k \in \mathbb{N}) \tag{13.2}$$

ja

$$\varepsilon\cdot x \in c_{B^*} \quad \textit{iga } x \in c_{0_{\bar{A}}} \textit{ korral,} \tag{13.3}$$

kus $B^* := (\Delta b_{nk})_{n,k}$ *ning B on kolmnurkne maatriks.*
(b) *Arvud* ε_k *on A-koonduvustegurid parajasti siis, kui kehtivad tingimused* (13.2) *ja*

$$\varepsilon_k = O(a_{kk}). \tag{13.4}$$

Tõestus. (a) Kui ε_k on $(\bar{A},B)$-summeeruvustegurid, siis $\varepsilon_k = f(e^k)$ $(k \in \mathbb{N})$, kus $f \in c_A'$ on määratud seosega (13.1). Kasutades maatriksi $\bar{A}$ RJ-regulaarsust, saame seosest (3.1) võrduse (13.2), seega on viimane tarvilik. Seejuures arvud

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_k &= \sum_{n=k}^{\infty} t_n \bar{a}_{nk} - \sum_{n=k+1}^{\infty} t_n \bar{a}_{n,k+1} \\ &= t_k \bar{a}_{kk} - \sum_{n=k+1}^{\infty} t_n (a_{nk} - a_{n,k+1}) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} t_n a_{nk} \qquad (k \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

on teoreemi 13.1 (b) kohaselt A-koonduvustegurid. Rea $\sum_k \varepsilon_k u_k$ osasummade jaoks saame Abeli teisenduse abil võrduse

$$\sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k u_k = \sum_{k=0}^{m-1} (\Delta\varepsilon_k) x_k + \varepsilon_m x_m,$$

millest omakorda

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} b_{nk}\varepsilon_k u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} b_{nk}(\Delta\varepsilon_k) x_k + \sum_{k=0}^{n} b_{nk}\bar{\Delta}(\varepsilon_k x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} b_{nk}(\Delta\varepsilon_k) x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta b_{nk}\varepsilon_k x_k + b_{nn}\varepsilon_n x_n,\end{aligned}$$

kus $\bar{\Delta}(\varepsilon_k x_k) := \varepsilon_k x_k - \varepsilon_{k-1} x_{k-1}$ ja $\varepsilon_{-1} x_{-1} = 0$. Nagu märkisime, on $\Delta\varepsilon_k$ A-koonduvustegurid, seega iga $x \in c_{0A}$ korral eksisteerib piirväärtus $\lim_n \sum_{k=0}^{n-1} b_{nk}(\Delta\varepsilon_k) x_k$. Niisiis on arvud ε_k $(\bar{A},B)$-summeeruvustegurid parajasti siis, kui jada $\varepsilon\cdot x$ on B^*-summeeruv iga $x \in c_A$ korral. See tingimus on vastavalt käesolevale teoreemile eelnevale märkusele samaväärne tingimusega (13.3).

(b) Kõigepealt märgime, et tingimus (13.4) on tarvilik selleks, et arvud ε_k oleksid $\bar{A}$-koonduvustegurid. Tõepoolest, sel juhul on maatriks $T := DA^{-1}$, kus $D := (\sigma_{nk}\varepsilon_k)$, konservatiivne, mistõttu peadiagonaal $(\varepsilon_k/a_{kk}) = (\varepsilon_k/a_{kk})$ on tõkestatud. Jääb näidata, et tingimusest (13.4) järeldub juhul $B = \Sigma$ tingimus (13.3). Vastavalt lausele 12.3 (c) kehtib iga $x \in c_{0A}$ jaoks hinnang $x_k = o(1/a_{kk})$, seetõttu saame tingimusest (13.4), et $\varepsilon_k x_k \to 0$. Väide on tõestatud.

\

<u>Näide 2.</u> Kui eeldame, et Rieszi kaalutud keskmiste menetlus M_p on normaalne (s.t. $p_k \neq 0$ $(k \in \mathbb{N})$) ja regulaarne, siis on ta AB-menetlus (vt. §7, näide 1) ning teoreemist 13.1 (b) saame (M_p,B)-summeeruvustegurite jaoks tarviliku ja piisava tingimuse

$$\varepsilon_k := p_k \sum_{n=k}^{\infty} t_n P_n^{-1} \qquad (t \in l,\ k \in \mathbb{N}),$$

mis on ilmselt samaväärne näites 1 saadud tingimusega 1). Teoreemi 13.2 (b) abil kirjeldame $\bar{M}_p$-koonduvustegureid. Tingimuse (13.2) saab esitada kujul (vrd. teoreemi 13.2 (a) tõestus)

$$\Delta\varepsilon_k := p_k \sum_{n=k}^{\infty} t_n P_n^{-1} \qquad (t \in l,\ k \in \mathbb{N})$$

ehk

$$\sum_k \left|P_k \Delta \frac{\Delta\varepsilon_k}{p_k}\right| < \infty.$$

Viimane ning seos

$$\varepsilon_k = O(p_k/P_k)$$

ongi tarvilikud ja piisavad tingimused $\bar{M}_p$-koonduvustegurite jaoks.

Täiendused ja märkused

Summeeruvustegurite teooria sai alguse Hardy [109] ja Bohri [43] töödest, milles nad üldistasid Dedekindi-Hadamard'i teoreemi (vt. lemma 1.1 (b)) C_α-summeeruvatele ridadele juhul $\alpha \in \mathbb{N}$. Seetõttu kõneldakse ka Hardy-Bohri tüüpi summeeruvusteguritest. Nende uurimisel on olnud valdavaks paragrahvi algul käsitletud pöördteisenduse meetod, mida rakendati edukalt paljude konkreetsete normaalsete summeerimismenetluste A korral. Selle meetodi elegantse käsitluse reversiivsete maatriksite A jaoks andis 1955. a. Mazur-Hilli teoreemile (vt. §11, täiendused ja märkused) toetudes Kangro [289], seejuures lähtus ta tolle aja summeeruvusteooria uusimatest tulemustest. Pöördteisenduse meetodi üks modifikatsioon, mida saab edukalt kasutada Nörlundi menetluse koonduvustegurite leidmiseks, kannab *Moore'i-Kangro meetodi* nime. Ta on rakendatav üldiselt selliste normaalsete maatriksite A korral, mis rahuldavad tingimust

$$\sum_n n\sup_k |a_{k+n,k+n} - a_{k+n,k}| < \infty$$

(vt. Moore [181], Kangro [290]).

Käesoleva paragrahvi põhisisu moodustava funktsionaalanalüütilise meetodi idee on pärit Zelleri tööst [271], milles ta esimesena tõestas eelpoolmainitud faktid 1° ja 2°. Seda ideed rakendas Peyerimhoff [193] edukalt regulaarsete AB-maatriksite koonduvus- ja summeeruvustegurite leidmisel. Talle kuuluvad väited 13.1 (a), (b) ning 13.2 (a). Väite 13.2 (b) tõestus on Jurkati ja Peyerimhoffi töös [125]. Samas on näidatud, et normaalse regulaarse AB-maatriksi puhul on arvud ε_k ($k \in \mathbb{N}$) $(\bar{A},\bar{A})$-summeeruvustegurid parajasti siis, kui nad on kujul (13.2).

Funktsionaalanalüütilise meetodi rakenduspiirkonda saab laiendada niisugustele regulaarsetele maatriksitele A, mille nullsummeeruvusväljas c_{0A} kehtib B-lõikesummeeruvus, s.t.

$$\lim_n \sum_k b_{nk} x_k e^{(k)} = x \quad \text{FK-ruumis } c_{0A}. \qquad (*)$$

See on samaväärne tingimusega, et jadad e^k ($k \in \mathbb{N}$) moodustavad ruumis c_{0A} B-summeeruvusbaasi (vt. §1 ja §5, täiendused ja märkused). Kuna sel juhul $f(x) = \lim_n \sum_k b_{nk} x_k f(e^k)$ ($x \in c_{0A}$) iga $f \in c_{0A}'$ korral, siis jäävad väited 13.1 (a), (b) ja 13.2 (a) kehtima ka eeldusel (*). Viimane on nõrgem kui AB-omadus ja võimaldab muuhulgas leida $(C_\alpha,\bar{C}_\gamma)$- ning $(\bar{C}_\alpha,C_{\gamma+1})$-summeeruvustegurid juhul $\alpha > 1$ ja $\gamma \geq \alpha + 1$. Kui $0 \leq \alpha \leq 1$, saab (C_α,B)- ja $(\bar{C}_\alpha,B)$-summeeruvustegurid määrata teoreemide 13.1 ja 13.2 järgi. Summeeruvusbaaside ja -tegurite vaheliste seoste kohta vt. Buntinas [72], Täht [348], [349]. Need seosed on olulised multiplikaatorite teoorias ja leiavad rakendamist trigonomeetrilistele ridadele, vt. Tõnnov [343], [344], Goes [105].

Märgime veel, et summeeruvustegurite leidmise meetodeid on Aasma [280], [1] kasutanud maatriksteisenduste $M : c_A \to c_B$ uurimiseks. Soomer [331] rakendas neid peaaegu koonduvuse tegurite puhul.

Summeeruvustegurite teooria moodustab ridade teooria suhteliselt iseseisva ja küllalt mahuka peatüki. Hea ülevaate selle teooria meetoditest, tulemustest ja võimalustest saab lugeja Baroni raamatust [284] (IV pt.).

§14. LOIKEPOSITIIVSED MAATRIKSID

Me oleme siiani ekspluateerinud funktsionaalanalüüsi traditsioonilisi meetodeid, mis on pärit lineaarsest algebrast ja topoloogiast. Kuna peaaegu kõigis praktikas tähtsust omavates topoloogilistes vektorruumides on olemas mingi loomulik järjestus, siis kasutab kaasaegne funktsionaalanalüüs üha enam ka järjestusteoreetilisi, täpsemalt, *järjestatud vektorruumide teooria* meetodeid. Summeeruvusteoorias mängivad viimased seni üsna tagasihoidlikku osa. Kuigi iga jadaruum on loomulikul viisil, s.o. koordinaaditi järjestatud vektorruum, on see järjestusstruktuur summeeruvusväljas praktilisteks rakendusteks üldiselt vähepakkuv. Ometi rajanevad mitmete teoreemide tõestused maatriksite positiivsus- või monotoonsusomadustele. Suurepärane näide selle kohta on lause 12.6 tõestus.

Käesolevas paragrahvis püüame mõningaid summeeruvusteooria probleeme järjestatud vektorruumide teooria seisukohalt mõtestada ja selle meetodite abil lahendada. Selleks defineerime maatriksi summeeruvusväljas uue, esialgsest soodsama järjestuse.

Kõigepealt meenutame mõningaid põhimõisteid. Olgu vektorruumis X defineeritud refleksiivne, antisümmeetriline ja transitiivne järjestussuhe $\leq$, mis rahuldab tingimusi

$$\begin{aligned} x \leq y \ &\Rightarrow\ x + z \leq y + z, \\ x \leq y \ &\Rightarrow\ \lambda x \leq \lambda y \quad (x,y,z \in X,\ \lambda \geq 0). \end{aligned} \tag{14.1}$$

Sel juhul ütleme, et X on *järjestatud vektorruum*. *Positiivsed elemendid* $x \geq 0$ moodustavad *positiivse koonuse* X^+. Kui $X = X^+ - X^+$, s.t. kui iga $x \in X$ on esitatav kujul

$$x = x^+ - x^- \quad (x^+, x^- \in X^+),$$

siis nimetatakse koonust X^+ *genereerivaks*. Ütleme, et alamhulk $D \subset X$ on *o-tõkestatud*, kui leiduvad sellised elemendid $a,b \in X$, et

$$D \subset [a,b] := \{x \in X \mid a \leq x \leq b\}.$$

Kui ruumis X kehtib implikatsioon

$$(\forall\lambda > 0 : x \in [-\lambda a, \lambda a]) \Rightarrow x = 0,$$

kus $a \in X$, siis nimetatakse järjestatud vektorruumi X *peaaegu arhimeediliseks*. Elementi $u \in X^+$ nimetatakse *järjestusühikuks*, kui iga $x \in X$ jaoks leidub selline $\alpha > 0$, et $x \leq \alpha u$. Peaaegu arhimeedilises järjestatud vektorruumis X määrab järjestusühik u normi p_u seosega

$$p_u(x) := \inf \{\mu > 0 \mid x \in \mu[-u,u]\},$$
sealjuures langevad normi p_u järgi tõkestatus ning o-tõkestatus kokku.

Kõigi jadade ruum ω loomuliku järjestusega
$$x \le y \quad :\Leftrightarrow \quad x_k \le y_k \quad (k \in \mathbb{N})$$
on järjestatud vektorruum, järelikult on seda ka tema alamruum c. Iga element $x \in c$ on esitatav kujul $x = x^+ - x^-$, kus
$$(x^+)_k := \begin{cases} x_k, & \text{kui Re } x_k \ge 0 \text{ ja Im } x_k \ge 0, \\ \text{Re } x_k, & \text{kui Re } x_k \ge 0 \text{ ja Im } x_k \le 0, \\ \text{Im } x_k, & \text{kui Re } x_k \le 0 \text{ ja Im } x_k \ge 0, \\ 0, & \text{kui Re } x_k \le 0 \text{ ja Im } x_k \le 0, \end{cases}$$
$$(x^-)_k := \begin{cases} -x_k, & \text{kui Re } x_k \le 0 \text{ ja Im } x_k \le 0, \\ -\text{Re } x_k, & \text{kui Re } x_k \le 0 \text{ ja Im } x_k \ge 0, \\ -\text{Im } x_k, & \text{kui Re } x_k \ge 0 \text{ ja Im } x_k \le 0, \\ 0, & \text{kui Re } x_k \ge 0 \text{ ja Im } x_k \ge 0. \end{cases}$$
Lihtne on veenduda, et x^+ ja x^- on koonduvad jadad. Niisiis on c^+ genereeriv koonus. Vahetu kontroll näitab, et c on peaaegu arhimeediline ning e on tema järjestusühik, seejuures
$$p_e(x) = \|x\|_\infty \quad (x \in c).$$
Maatriksit A, mille korral $a_{nk} \ge 0$ $(n,k \in \mathbb{N})$, nimetatakse *positiivseks*. Ilmselt on tema poolt määratud operaator $A : \omega_A \to \omega$ (vrd. §1) samuti positiivne, s.t. $A[\omega_A^+] \subset \omega^+$, kus $\omega_A^+ := \omega_A \cap \omega^+$. Positiivse maatriksi puhul on tingimused tema konservatiivsuseks või regulaarsuseks oluliselt lihtsamad kui üldjuhul. Vastavalt teoreemile 2.1 (c) on selline A regulaarne parajasti siis, kui
$$\lim_A e = 1 \quad \text{ja} \quad a_k := \lim_A e^k = 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$
Nagu selgub järgnevast lausest, saab positiivsete maatriksite regulaarsust testida isegi ruumi c kaheelemendilisel hulgal.

LAUSE 14.1. *Positiivne maatriks* A *on regulaarne parajasti siis, kui* $\lim_A e = 1$ *ning* $\lim_A w = 0$ *mingi* $w \in c_0$ *korral, mis rahuldab tingimust* $w_k > 0$ $(k \in \mathbb{N})$.

Tõestus. Ilmselt on toodud tingimused tarvilikud A regulaarsuseks. Nende piisavuse tõestuseks on vaja näidata, et neist järeldub $a_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Kuna iga $k \in \mathbb{N}$ korral kehtib
$$0 \le e^k \le M_k w \;,$$

kus M_k on mingi positiivne arv, siis tänu maatriksi A positiivsusele

$$0 = A0 \leq Ae^k \leq M_k Aw.$$

Eeldusest $\lim_A w = 0$ järeldub seega $a_k = \lim_A e^k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$.

Normaalset maatriksit A nimetatakse *diapositiivseks*, kui

$$a_{nn} > 0, \quad a_{nk} \leq 0 \quad (k < n, \ n \in \mathbb{N}).$$

Märgime nende maatriksite üht omadust, mille tõestuseks viitame lause 12.5 tõestusele.

LAUSE 14.2. *Kui diapositiivse maatriksi* A *korral eksisteerib* $\lim_A e > 0$, *siis* $c_A \subset m$. *On* A *sealjuures konservatiivne, siis* $c_A = c$.

Tähelepanuväärse klassi moodustavad sellised maatriksid, mille *pöördmaatriks on diapositiivne* (vrd. lause 12.6). Nende uurimisele ongi pühendatud ülejäänud osa käesolevast paragrahvist.

Kuni selle paragrahvi lõpuni eeldame, et A on normaalne maatriks. Defineerime vektorruumis ω uue järjestuse $\leq_A$ seosega

$$x \leq_A z \quad :\Leftrightarrow \quad Ax \leq Az, \tag{14.2}$$

s.t.

$$x \leq_A z \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} a_{nk} x_k \leq \sum_{k=0}^{n} a_{nk} z_k \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Lihtne on veenduda, et $\leq_A$ on tõepoolest järjestus, mis rahuldab tingimusi (14.1). Märgime, et A normaalsus garanteerib seose $\leq_A$ antisümmeetrilisuse : kui $x \leq_A z$ ja $z \leq_A x$, siis $Ax = Az$, millest operaatori $A : \omega \to \omega$ üksühesuse tõttu järeldub $x = z$. Operaator A korraldab BK-ruumide $(c_A, \|\ \|_A)$ ja $(c, \|\ \|_\infty)$ vahel isomeetrilise isomorfismi (vrd. §3), mis definitsiooni (14.2) kohaselt säilitab ka järjestuse. Niisiis, c_A *ja* c *kui normeeritud järjestatud vektorruumid on isomorfsed*. Muuhulgas järeldub sellest, et positiivne koonus

$$c_A^+ := \{x \in c_A \mid x \geq_A 0\}$$

on genereeriv ning

$$v := A^{-1} e = \Big(\sum_{l=0}^{k} \alpha_{kl}\Big)_k ,$$

kus $A^{-1} := (\alpha_{jl})$ on A pöördmaatriks, on järjestusühik ruumis c_A. Seejuures $p_v(x) = \|x\|_A$ $(x \in c_A)$ ja tõkestatus ning o-tõkestatus langevad kokku.

Normaalset maatriksit A nimetatakse *lõikepositiivseks* ehk AP-*maatriksiks*, kui

$$x \geq_A 0 \Rightarrow x^{[m]} \geq_A 0 \quad (m \in \mathbb{N})$$

s.t. kui

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk} x_k \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k \geq 0 \quad (n,m \in \mathbb{N}).$$

Nagu selgub, on maatriksi AP-omadus määratud märkide jaotusega temas endas ning ta pöördmaatriksis.

LAUSE 14.3. *Järgmised tingimused on samaväärsed :*
(a) A *on lõikepositiivne,*
(b) $(A^{-1}e^{i})^{[m]} \geq_A 0 \quad (m,i \in \mathbb{N})$,
(c) $t_i(n,m) := \sum_{k=i}^{m} a_{nk}\alpha_{ki} \geq 0 \quad (i \leq m \leq n,\ i,m,n \in \mathbb{N})$,
(d) 1° $a_{nm}\alpha_{mn} \geq 0 \quad (n,m \in \mathbb{N})$,

2° $a_{nn}\alpha_{nk} \leq 0 \quad (k < n,\ k\ n \in \mathbb{N})$.

Kui A *on positiivne maatriks, siis on tingimused* (a)-(c) *samaväärsed väitega*
(e) A^{-1} *on diapositiivne.*

Tõestus. (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) Olgu A lõikepositiivne, siis tingimuse $A^{-1}e^{i} \geq_A 0$ $(i \in \mathbb{N})$ tõttu kehtib (b). Edasi, seosest

$$\sum_{k=i}^{m} a_{nk}\alpha_{ki} = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}((A^{-1}e^{i})^{[m]})_k \geq 0 \quad (i,m,n \in \mathbb{N})$$

järeldub implikatsioon (b) $\Rightarrow$ (c). Kui on täidetud tingimus (c) ja $x \geq_A 0$, siis seose $y := Ax \geq 0$ tõttu

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k = \sum_{k=0}^{m} a_{nk} \sum_{i=0}^{k} \alpha_{ki}y_i = \sum_{i=0}^{m} t_i(n,m)y_i \geq 0 \quad (n.m \in \mathbb{N}),$$

s.t. $x^{[m]} \geq_A 0$ iga $m \in \mathbb{N}$ korral.

(c) $\Leftrightarrow$ (d) Kui A rahuldab tingimust (c), siis juhul $m = i$ saame otsekohe tingimuse 1°, aga 2° tuleneb võrdusest

$$t_i(n,m) = -\sum_{k=m+1}^{n} a_{nk}\alpha_{ki} \quad (m < n,\ i,n,m \in \mathbb{N}), \tag{14.3}$$

kui võtame selles $n := m + 1$. Vastupidi, tingimustest 1° ja 2° ning seosest (14.3) saame $t_i(n,m) \geq 0$ juhul $m < n$. Kui

$n = m$, siis $t_i(n,m) = \delta_{ni} \geq 0$ $(i, n \in \mathbb{N})$.

Positiivse maatriksi A puhul kehtib ilmselt (d) $\Leftrightarrow$ (e).

Näide 1. Positiivse kaalutud keskmiste menetluse M_p korral on pöördmaatriks M_p^{-1} diapositiivne (vrd. (3.6)), seega on M_p lõikepositiivne menetlus. Erijuhul, kui $p_k = 1$ $(k \in \mathbb{N})$, saame, et aritmeetiliste keskmiste menetlus C_1 on AP-omadusega.

Normaalse maatriksi lõikepositiivsuse testimiseks lause 14.3 (d) või (e) abil peame eelnevalt leidma tema pöördmaatriksi, mis paljudel juhtudel on tehniliselt võimatu. Järgmine tunnus võimaldab mõnikord lõikepositiivsuse kindlaks teha maatriksi enda kujust lähtudes.

LAUSE 14.4. *Maatriks A on lõikepositiivne, kui tema ridade vahel kehtib seos*

$$a_{n+1,k} = d_{nk} a_{nk}, \quad d_{n0} \geq d_{n1} \geq \ldots \geq d_{nn} \geq 0 \qquad (14.4)$$
$$(k = 0, \ldots, n, \; n \in \mathbb{N}).$$

Tõestus. Näitame, et $t_i(n,m) \geq 0$ $(i \leq m \leq n)$, selleks kasutame induktsioonimeetodit n järgi. Väide kehtib juhul $n = 0$, sest $t_0(0,0) = a_{00}\alpha_{00} = 1$. Eeldame, et ta kehtib n korral ja veendume, et siis $t_i(n+1,m) \geq 0$ $(i \leq m \leq n+1)$. Juhul $n = m+1$ saame

$$t_i(n+1,n+1) = \sum_{k=i}^{n+1} a_{n+1,k}\alpha_{ki} = \delta_{n+1,i} \geq 0.$$

Kui $i \leq m \leq n$, siis

$$t_i(n+1,m) = \sum_{k=i}^{m} a_{n+1,k}\alpha_{ki} = \sum_{k=i}^{m} d_{nk}a_{nk}\alpha_{ki} =$$
$$= \sum_{k=i}^{m-1} \Delta d_{nk} \sum_{j=i}^{k} a_{nj}\alpha_{ji} + d_{nm}\sum_{j=i}^{m} a_{nj}\alpha_{ji} =$$
$$= \sum_{k=i}^{m-1} \Delta d_{nk} t_i(n,k) + d_{nm} t_i(n,m) \geq 0.$$

Näide 2. Veendume lause 14.4 abil, et Cesàro menetlus C_α on lõikepositiivne, kui $0 < \alpha < 1$. Tähistame $d_{nk} := c^{\alpha}_{n+1,k}/c^{\alpha}_{nk}$ $(k = 0,\ldots,n, \; n \in \mathbb{N})$, siis vastavalt seosele (2.7)

$$\frac{d_{nk}}{d_{n,k+1}} = \frac{\binom{n-k+\alpha}{n-k+1}\binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\alpha+1}{n+1}\binom{n-k+\alpha-2}{n-k-1}}{\binom{n+\alpha+1}{n+1}\binom{n-k+\alpha-1}{n-k}\binom{n-k+\alpha-1}{n-k}\binom{n+\alpha}{n}}$$

$$= \frac{\binom{n-k+\alpha}{n-k+1}\binom{n-k+\alpha-2}{n-k-1}}{\binom{n-k+\alpha-1}{n-k}^2}.$$

Kasutades valemit $\binom{n+\alpha}{n} = (n+\alpha)\cdots(\alpha+1)/n!$ $(n > 0)$, saame, et

$$\frac{d_{nk}}{d_{n,k+1}} = \frac{n-k+\alpha}{n-k+1}\cdot\frac{n-k}{n-k+\alpha-1}\cdot\frac{\binom{n-k+\alpha-1}{n-k}\binom{n-k+\alpha-2}{n-k-1}}{\binom{n-k+\alpha-2}{n-k-1}\binom{n-k+\alpha-1}{n-k}}$$

$$= \frac{1-\dfrac{1-\alpha}{n-k+1}}{1-\dfrac{1-\alpha}{n-k}} > 1 \quad (k = 0,\ldots,n-1,\ n \in \mathbb{N}),$$

s.t. $d_{n0} \ge d_{n1} \ge \ldots \ge d_{nn}$ $(n \in \mathbb{N})$. Kuna seejuures

$$d_{nn} = \frac{c^{\alpha}_{n+1,n}}{c^{\alpha}_{nn}} = \frac{\binom{\alpha}{1}\binom{n+\alpha}{n}}{\binom{\alpha-1}{0}\binom{n+\alpha+1}{n+1}} = \frac{(\alpha+1)(n+1)}{n+\alpha+1} > 0,$$

siis on tingimus (14.4) täidetud, seega on C_α $(0 < \alpha < 1)$ lõikepositiivne menetlus. Sama kehtib ka $C_0 = I$ ja C_1 (vt. näide 1) kohta.

Teatavasti (vt. §11) taandub normaalsete maatriksite A ja B korral sisalduvuse $c_A \subset c_B$ uurimine maatriksi $T := BA^{-1}$ konservatiivsuse kontrollimisele. Viimane on eriti lihtne juhul kui T on positiivne.

LAUSE 14.5. *Olgu* A *lõikepositiivne ja* B *selline normaalne maatriks, kus* $b_{nk} = d_{nk}a_{nk}$ $(k = 0,\ldots,n,\ n \in \mathbb{N})$. *Kui* $d_{n0} \ge d_{n1} \ge \ldots \ge d_{nn} \ge 0$ $(n \in \mathbb{N})$, *siis maatriks* $T := BA^{-1}$ *on positiivne.*

Tõestus. Tõepoolest, tehtud eeldustel

$$t_{ni} = \sum_{k=i}^{n} b_{nk}\tilde{a}_{ki} = \sum_{k=i}^{n} d_{nk}a_{nk}\tilde{a}_{ki}$$

$$= \sum_{k=i}^{n-1} \Delta d_{nk} \sum_{j=i}^{k} t_i(n,k) + d_{nn}\delta_{ni}$$

$$\geq 0 \quad (i = 0,\dots,n,\ n \in \mathbb{N}).$$

Lõikepositiivsus on tingimus, mis väljendab teatavat seost summeeruvusvälja kahe struktuuri - jadaruumi ja järjestusstruktuuri - vahel. Osutub aga, et ta määrab olulisel määral ära ka summeeruvusvälja topoloogilised omadused. Eeskätt on lõikepositiivsus väga tugevalt seotud lõiketõkestatusega. Nagu selgub järgmisest teoreemist, saab AP-maatriksi lõiketõkestatust testida summeeruvusvälja ühes punktis.

TEOREEM 14.6. *Lõikepositiivne maatriks* A *on AB-omadusega, kui on täidetud üks järgmistest tingimustest:*

(a) $v := A^{-1}e \in B_A$,

(b) $e \in B_A$ *ja*

$$0 < \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \to \tau \neq 0 \quad (n \to \infty), \tag{14.5}$$

(c) A *on positiivne ja regulaarne.*

Tõestus. (a) Eeldame, et $v \in B_A$, siis v lõiked on o-tõkestatud ruumis c_A. Järelikult eksisteerib $z \in c_A$ omadusega $0 \leq_A v^{[m]} \leq_A z$ $(m \in \mathbb{N})$. Fikseerime suvalise $x \in c_A^+$. Kuna v on ruumis c_A järjestusühik, siis leidub positiivne arv α, et $0 \leq_A x \leq_A \alpha v$. Siit saame maatriksi A AP-omaduse tõttu seosed

$$0 \leq_A x^{[m]} \leq_A \alpha v^{[m]} \leq_A \alpha z \qquad (m \in \mathbb{N}),$$

s.t., et jada x lõiked on o-tõkestatud ning seega ka tõkestatud. Järelikult $c_A^+ \subset B_A$. Kasutades koonuse c_A^+ genereerivust, saamegi

$$c_A = c_A^+ - c_A^+ \subset B_A + B_A = B_A.$$

(b) Tähistame $t_n := \sum_{k=0}^{n} a_{nk}$ ning moodustame maatriksi $A_1 := (t_n^{-1} a_{nk})_{n,k}$. Kuna $t_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, siis eksisteerib pöördmaatriks $A_1^{-1} = (\alpha_{ki} t_i)_{k,i}$. Pidades silmas, et A on AP-maatriks, saame

$$a_{nk}^1 \alpha_{kk}^1 = t_n^{-1} a_{nk} \alpha_{kk} t_k \geq 0 \quad (n,k \in \mathbb{N}),$$

$$a_{nn}^1 \alpha_{nk}^1 = t_n^{-1} a_{nn} \alpha_{nk} t_k \leq 0 \quad (k < n,\ n,k \in \mathbb{N}),$$

s.t. A_1 lõikepositiivsuse (vrd. lause 14.3). Vahetu kontroll näitab, et $c_{A_1} = c_A$, millest tänu alamruumi B_A invariantsusele järeldub $B_{A_1} = B_A$. Kuna $A_1 e = e \in B_A = B_{A_1}$, siis väite (a) põhjal kehtib $c_A = B_{A_1}$, s.t. $B_A = c_A$.

Väide (c) on vahetu järeldus väitest (b).

Märgime, et näite 2 ning teoreemi 14.6 (c) põhjal *on* C_α *juhul* $0 \leq \alpha \leq 1$ *AB-menetlus* (vrd. §7, näide 1).

Olgu $\varepsilon \in \omega$. Arve ε_k nimetame *positiivseteks (lõikepositiivseteks) A-koonduvusteguriteks*, kui iga $x \in c_A^+$ puhul rida $\sum_k \varepsilon_k x_k$ koondub ja kehtib võrratus $\sum_k \varepsilon_k x_k \geq 0$ (vastavalt $\sum_{k=0}^m \varepsilon_k x_k \geq 0$ $(m \in \mathbb{N})$). Märgime, et kui $c_A = c_A^+ - c_A^+$, siis järeldub rea $\sum_k \varepsilon_k x_k$ koonduvusest koonuses c_A^+ tema koonduvus ruumis c_A.

Mõlemat tüüpi koonduvustegurite uurimisel vajame *positiivseid* pidevaid lineaarseid funktsionaale järjestatud BK-ruumis c_A. Nende hulga tähistame $(c_A')^+$, niisiis,

$$(c_A')^+ := \{ f \in c_A' \mid \forall x \in c_A^+ : f(x) \geq 0 \}.$$

Leiame selliste funktsionaalide üldkuju.

LAUSE 14.7. *Funktsionaal* $f \in c_A'$ *on positiivne parajasti siis, kui ta on esitatav kujul (vrd. teoreem 3.1 (b))*

$$f(x) = \mu \lim_A x + t(Ax) \quad (x \in c_A), \tag{14.6}$$

kus $t \in l$ *ja* μ, $t_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

Tõestus. On selge, et iga funktsionaal f kujul (14.7), kus μ ja t_n on mittenegatiivsed, kuulub hulka $(c_A')^+$. Teisalt, kuna $A^{-1}e^n \geq_A 0$, siis $t_n = f(A^{-1}e^n) \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ iga $f \in (c_A')^+$ puhul. Seosest $A^{-1}(e - e^{[m]}) \geq_A 0$ järeldub $\mu + \sum_{n=m+1}^\infty t_n = f(A^{-1}(e - e^{[m]})) \geq 0$ $(m \in \mathbb{N})$, seega $\mu = \lim(\mu + \sum_{n=m+1}^\infty t_n) \geq 0$.

TEOREEM 14.8. (a) *Kui* $\varphi \subset c_{0A}$ *ja arvud* ε_k *on maatriksi A positiivsed koonduvustegurid, siis iga* $k \in \mathbb{N}$ *korral*

$$\varepsilon_k = \sum_{n=k}^\infty t_n a_{nk} \quad (t \in l,\ t_n \geq 0). \tag{14.7}$$

(b) *Arvud* ε_k *on positiivse regulaarse AP-maatriksi lõikepositiivsed koonduvustegurid parajasti siis, kui nad on esitatavad kujul* (14.7).

Tõestus. (a) Kui arvud ε_k on positiivsed A-koonduvustegurid, siis seosega $f(x) := \sum_k \varepsilon_k x_k$ $(x \in c_A)$ määratud positiivne funktsionaal f on lause 5.3 (a) põhjal BK-ruumis c_A

pidev ja lineaarne. Lause 14.7 järgi on ta esitatav kujul (14.6), kus $\mu, t_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Niisiis, $\varepsilon_k = f(e^k) = \sum_{n=k}^{\infty} t_n a_{nk}$ $(k \in \mathbb{N})$.

(b) Tingimuse (14.7) tarvilikkus järeldub vahetult väitest (a). Piisavuse tõestuseks märgime, et teoreemi 14.6 (c) kohaselt on A AB-maatriks. Seega, kui arvud ε_k on antud kujul (14.7), kus $t \in l$, siis teoreemi 13.1 (b) põhjal on meil tegemist A-koonduvusteguritega. Jääb veenduda, et $\sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k x_k \geq 0$ $(m \in \mathbb{N})$, kui $x \in c_A^+$. Tõepoolest, sel juhul $y := Ax \geq 0$ ja

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k x_k &= \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k \sum_{i=0}^{k} \alpha_{ki} y_i = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=i}^{m} \varepsilon_k \alpha_{ki} y_i \\ &= \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=i}^{m} \sum_{n=k}^{\infty} t_n a_{nk} \alpha_{ki} y_i \\ &= \sum_{i=0}^{m} \sum_{n=i}^{\infty} t_n \sum_{k=i}^{\min(n,m)} a_{nk} \alpha_{ki} y_i \\ &= \sum_{i=0}^{m} \sum_{n=i}^{\infty} t_n t_i(n,m) y_i \geq 0 \quad (m \in \mathbb{N}),\end{aligned}$$

kuivõrd A lõikepositiivsuse tõttu $t_i(n,m) \geq 0$ $(i \leq m \leq n)$ (vrd. teoreem 14.3).

<u>Näide 3.</u> Vastavalt näitele 2 on positiivne regulaarne menetlus C_α iga $\alpha \in [0,1]$ korral lõikepositiivne, mistõttu saame tema puhul rakendada teoreemi 14.8 (b). Niisiis on ε_k $(k \in \mathbb{N})$ (lõike)positiivsed C_α-koonduvustegurid $(0 \leq \alpha \leq 1)$ parajasti siis, kui

$$\varepsilon_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} \frac{t_n}{\binom{n+\alpha}{n}} \quad (t \in l, \ t_n \geq 0).$$

Täiendused ja märkused

Konkreetsete summeerimismenetluste positiisvus- ja monotoonsusomadusi, eriti märkide jaotust maatriksis või pöördmaatriksis, on erinevate probleemide lahendamisel kasutanud paljud autorid. Juba 1911. a. tõestas Riesz [196] väite 14.6 (c) ning juhtis tähelepanu selliste maatriksite headele omadustele, mille pöördmaatriks on diapositiivne. Neid omadusi kasutas Beekmann [13], [16] maatriksite täieliku sisalduvuse (vt. §1, täiendused ja märkused) uurimisel ning Merceri tüüpi teoreemide tõestamisel (vt. lause 12.6). Bosanquet [63] näitas, et kui maatriks rahuldab tingimust (14.4), siis on ta lõiketõkestatud (vt. veel Zeller [273], Wilansky ja Zeller [262]). Esimestena püüdsid neid ja teisi tulemusi järjestusteoreetiliselt mõtestada Beekmann ja Zeller [28], kellele kuulub ka maatriksi lõikepositiivsuse mõiste (AP = Abschnittspositivität). Nad juhtisid tähelepanu sellele, et positiivsete maatriksite korral piisab nende regulaarsuse testimiseks kahest punktist ruumis c (vt. lause

14.1). Sama tulemuseni jõudis ka Kershaw [135]

Beekmann ja Zeller [28], [29] (vt. ka Leiger [145]) andsid AP-omadusele järgmise olulise üldistuse. Olgu B lõplike ridadega maatriks. Normaalset maatriksit A nimetatakse *B-lõikepositiivseks* ehk *B-AP-maatriksiks*, kui

$$x \geq_A 0 \quad \Rightarrow \quad v^{(B,m)} := \sum_k b_{mk} x_k e^k \geq_A 0 \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Viimane implikatsioon on samaväärne tingimusega

$$t_i^B(n,m) := \sum_{k=i}^{p} a_{nk} b_{mk} \alpha_{ki} \geq 0,$$

kus $i,m,n \in \mathbb{N}$, $p := \min\{n, m_n\}$ ja $b_{n,m} = 0$ iga $k > m_n$ korral. Varem olid Lorentz ja Zeller [150] näidanud, et Cesaro menetlus C_α on $\alpha \geq 0$ korral $C_{\alpha+1}$-AP- ning $\bar{C}_\alpha$ on $\bar{C}_\alpha$-AP-menetlus. Jakimovski, Meyer-König ning Zeller [120] tõestasid PTR-menetluse Q (vt. §1, täiendused ja märkused) Q-lõikepositiivsuse. Analoogiliselt väitega 14.6 (a) tõestatakse (vt. Leiger [145])

TEOREEM. *Olgu* E *jadaruum järjestusühikuga* u *ning* A *selline* B-AP-*maatriks, et* $E_A \supset \varphi$. *Kui jada* $v := A^{-1}u$ B-*lõiked* $v^{(B,m)}$ $(m \in \mathbb{N})$ *on tõkestatud normeeritud ruumis* (E_A, p_v), *siis* (E_A, p_v) *on* B-AB-*ruum*.

Erijuhul saadakse järgmine tulemus.

TEOREEM. (vrd. Balser [8]). *Olgu* A *selline* B-AP-*maatriks, et* $c_A \supset \varphi$ *ja kehtib* (14.5). *Kui jada* e B-*lõiked* $e^{(B,m)}$ *on* BK-*ruumis* $(c_A, \|\ \|_A)$ *tõkestatud, siis* A *on* B-AB-*maatriks*.

Artiklis [145] on vaadeldud *positiivseid* (A,B)-*summeeruvustegureid* ning on tõestatud teoreemi 14.8 analoog juhul, kui A on B-AP-maatriks.

Teine üldistussuund (vt. Leiger [310]) on loobumine maatriksi A reversiivsusest. Sel juhul puudub järjestusel $\leq_A$ antisümmeetria omadus. Sisukamaid tulemusi saadakse eeldusel, et

$$A[c_A] \cap \{x \in c \setminus c_0 \mid x_k > 0 \quad (k \in \mathbb{N})\} \neq \emptyset.$$

Seda eeldust rahuldavad kõik reversiivsed maatriksid, samuti maatriksid omadusega (14.5), seega ka kõik positiivsed regulaarsed maatriksid. Samas töös on uuritud sisalduvust $c_A \subset c_B$, kui maatriksite A ja B poolt määratud järjestused on võrreldavad. Kasutades üht Krasnoselski, Klimovi ja Lifšitsi [304] poolt tõestatud Korovkini tüüpi teoreemi, saadakse tulemus, mille erijuhuks on

TEOREEM. *Olgu* A *normaalne positiivne regulaarne maatriks omadusega* $\sum_k a_{nk} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$. *Kui regulaarse lõplike ridadega maatriksi* B *korral* $c_A^+ \subset c_B^+$, *siis kehtib sisalduvus* $c_A \subset c_B$ *ning* A *ja* B *on kooskõlas*.

Maatriksite positiivsus- ning monotoonsusomaduste rakendamise kohta vt. veel Beekmann ja Zeller [27], [30], Meyer-König ja Zeller [174], Jakimovski, Meyer-König ja Zeller [121].

II OSA

§15. ANTUD KIIRUSEGA KOONDUVAD JADAD JA READ

Koonduva protsessi koonduvuskiiruse hindamiseks võrreldakse teda mingi teise tuntud koonduvusprotsessiga. Sellekohaseks heaks näiteks on funktsionaalanalüüsi kursusest tuntud Banachi püsipunktiprintsiip: surveoperaatori $f\colon X \to X$ korral koondub iteratsioonide $x_n := f(x_{n-1})$ $(n=1,2,\ldots)$ jada täielikus meetrilises ruumis X vähemalt geomeetrilise progressiooni kiirusega. Kiirusehinnangud on aktuaalsed arvutusmeetodite puhul, samuti funktsioonide lähendusteoorias jm.

See üldine idee on lähtekohaks järgmisele definitsioonile. Olgu $\lambda := (\lambda_k)$ positiivsete liikmetega monotoonselt kasvav arvjada. Jada $x \in c$ nimetame *tõkestatuks kiirusega* λ ehk lühidalt *λ-tõkestatuks*, kui seosega

$$b_k := \lambda_k(x_k - \lim x) \quad (k \in \mathbb{N})$$

defineeritud jada $b := (b_k)$ on tõkestatud, s.t. kui $b \in m$. Juhul $b \in c$ ütleme, et jada $x \in c$ on *λ-koonduv* ehk *koonduv kiirusega* λ. Niisiis, jada x on λ-koonduv parajasti siis, kui eksisteerivad piirväärtused

$$\xi := \lim_k x_k, \qquad \beta := \beta(x) := \lim_k \lambda_k(x_k - \xi).$$

Tähistame

$m^\lambda := \{x \in c \mid b \in m\}$ (*kõigi λ-tõkestatud jadade hulk*),

$c^\lambda := \{x \in c \mid b \in c\}$ (*kõigi λ-tõkestatud jadade hulk*),

$c_0^\lambda := \{x \in c \mid b \in c_0\}$,

$m_0^\lambda := \{x \in c_0 \mid b \in m\} = \{x \in m^\lambda \mid \xi = 0\}$,

$z^\lambda := \{x \in c_0 \mid b \in c\} = \{x \in c^\lambda \mid \xi = 0\}$,

$n^\lambda := \{x \in c_0 \mid b \in c_0\} = \{x \in c^\lambda \mid \xi = \beta = 0\}$.

Vahetu kontroll näitab, et kõik need kuus hulka on jadaruumid, s.t. vektorruumi ω alamruumid. Kui $\lambda \in m$, siis $m^\lambda = c^\lambda = c_0^\lambda = c$ ning $m_0^\lambda = z^\lambda = n^\lambda = c_0$. Seepärast eeldame edaspidi, kui ei ole spetsiaalselt väidetud vastupidist, et $\lambda_k \uparrow \infty$. Sel juhul kehtivad ranged sisalduvused

$$n^\lambda \subset z^\lambda \subset c^\lambda \subset m^\lambda \subset c, \quad n^\lambda \subset c_0^\lambda, \quad n^\lambda \subset m_0^\lambda \subset m^\lambda.$$

Paneme tähele, et jadad e^k $(k \in \mathbb{N})$, e ja

$$\lambda^{-1} := (1/\lambda_k)$$

kuuluvad ruumi c^λ, seejuures

$$e^k \in n^\lambda \ (k \in \mathbb{N}), \ \lambda^{-1} \in z^\lambda \backslash n^\lambda, \ e \in c^\lambda \backslash z^\lambda.$$

LAUSE 15.1. (a) m^λ *on BK-ruum normiga*

$$\|x\|_\lambda := \sup_k \{|b_k|, |\xi|\}.$$

(b) c^λ *on ruumi* m^λ *kinnine alamruum.*

(c) *Iga element* $x \in c^\lambda$ *on esitatav kujul*

$$x = \xi e + \beta\lambda^{-1} + \sum_k \frac{b_k - \beta}{\lambda_k} e^k. \tag{15.1}$$

(d) *Pideva lineaarse funktsionaali üldkuju BK-ruumis* c^λ *antakse valemiga*

$$f(x) = \sigma \lim x + \mu\beta(x) + tb \quad (x \in c^\lambda), \tag{15.2}$$

kus $\sigma, \mu \in \mathbb{K}$ *ja* $t \in 1$.

(e) m_0^λ, c_0^λ, z^λ *ja* n^λ *on ruumi* m^λ *kinnised alamruumid ning kehtivad seosed* .

$$m^\lambda = m_0^\lambda \oplus \langle e\rangle, \ c_0^\lambda = n^\lambda \oplus \langle e\rangle, \ z^\lambda = n^\lambda \oplus \langle\lambda^{-1}\rangle,$$

$$c^\lambda = n^\lambda \oplus \langle e^\lambda\rangle \oplus \langle e\rangle.$$

Tõestus. (a) Me jätame lugejale kontrollida, et $\| \ \|_\lambda$ on tõepoolest norm vektorruumis m^λ, ning näitame, et normeeritud ruum $(m^\lambda, \| \ \|_\lambda)$ on täielik. Olgu $(x^{(n)})$ selles mingi Cauchy jada, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral eksisteerivad $\xi^{(n)} := \lim_k x_k^{(n)}$,

$$b_k^{(n)} := \lambda_k (x_k^{(n)} - \xi^{(n)}) \quad (k \in \mathbb{N}), \tag{15.3}$$

kusjuures $b^{(n)} := (b_k^{(n)}) \in m$, ning kehtib tingimus $\lim_{n,m} \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_\lambda = 0$. Viimane on samaväärne seostega

$$\lim_{n,m} \|b^{(n)} - b^{(m)}\|_\infty = 0, \ \lim_{n,m} |\xi^{(n)} - \xi^{(m)}| = 0,$$

s.t. $(b^{(n)})$ ja $(\xi^{(n)})$ on Cauchy jadad vastavalt Banachi ruumides m ja $\mathbb{K}$. Niisiis eksisteerivad piirväärtused

$$\lim_n b^{(n)} =: b \in m, \quad \lim_n \xi^{(n)} =: \xi \in \mathbb{K}, \tag{15.4}$$

seejuures kehtib tänu ruumi m BK-omadusele võrdus $b_k = \lim_n b_k^{(n)}$, mistõttu (vrd. (15.3))

$$x_k^{(n)} = \frac{1}{\lambda_k}(b_k^{(n)} + \xi^{(n)}) \to \frac{1}{\lambda_k}(b_k + \xi) =: x_k \quad (n \to \infty, k \in \mathbb{N}).$$

Tähistades $x := (x_k)$, saame tingimustest $b \in m$ ja $1/\lambda_k \to 0$ $(k \to \infty)$ kõigepealt $x \in c$. Seejuures $\xi = \lim_k x_k$ ja $b_k = \lambda_k(x_k - \xi)$, niisiis $x \in m^\lambda$ ning tingimustest (15.4) järeldub $\|x^{(n)} - x\|_\lambda \to 0$, s.t. $x^{(n)} \to x$ ruumis m^λ $(n \to \infty)$. Me tõestasime, et m^λ on Banachi ruum.

Võrratustest

$$|\lim x| \le \|x\|_\lambda,$$

$$|b_k| \le \|x\|_\lambda \quad (x \in c^\lambda)$$

järeldub lineaarsete funktsionaalide $\lim$ ning $x \to b_k$ $(k \in \mathbb{N})$ pidevus ruumis m^λ, sellest ja võrdusest $x_k = (1/\lambda_k)b_k + \lim x$ saame koordinaatfunktsionaalide π_k pidevuse iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Seega on m^λ BK-ruum.

(b) Olgu $x^{(n)}$ alamruumi c^λ elementide jada, mis koondub BK-ruumis m^λ punktiks x. Säilitades väite (a) tõestuse tähistused, saame jada $(x^{(n)})$ jaoks tingimused $b^{(n)} \in c$ $(n \in \mathbb{N})$, $b \in m$ ja $\|b^{(n)} - b\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$. Alamruumi c kinnisusest BK-ruumis m järeldub $b \in c$, seega $x \in c^\lambda$. Niisiis on c^λ kinnine alamruum.

(c) Tähistame $x \in c^\lambda$ puhul

$$x^{(n)} := \xi e + \beta\lambda^{-1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k - \beta}{\lambda_k} e^k \quad (n \in \mathbb{N}),$$

siis

$$\|x - x^{(n)}\|_\lambda = \sup_{k>n} |b_k - \beta| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

s.t. kehtib (15.1).

(d) Rakendades funktsionaali $f \in (c^\lambda)'$ võrduse (15.1) mõlemale poolele ning tähistades $\sigma := f(e)$, $\sigma' := f(\lambda^{-1})$ ja $t_k := f(e^k)/\lambda_k$ $(k \in \mathbb{N})$, esitame f kujul

$$f(x) = \sigma \lim x + \sigma' \beta(x) + \sum_k t_k(b_k - \beta) \quad (x \in c^\lambda).$$

Näitame, et $t \in l$, sel juhul saamegi viimasest võrdusest valemi (15.2), kus $\mu := \sigma' - \sum_k t_k$. Võtame elemendid $x^{(n)}$, kus

$$x_k^{(n)} := \begin{cases} \operatorname{sgn} t_k/\lambda_k, \text{ kui } k \le n, \\ 0, \text{ kui } k > n \end{cases}$$

ning paneme tähele, et $\lim_k x_k^{(n)} = 0$,

$$b_k^{(n)} := \begin{cases} \operatorname{sgn} t_k, & \text{kui } k \le n, \\ 0, & \text{kui } k > n, \end{cases}$$

$\beta(x^{(n)}) = 0$ ja $\|x^{(n)}\|_\lambda \le 1$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Seetõttu

$$\|f\| \ge \sup_n |f(x^{(n)})| = \sup_n \sum_{k=0}^{n} |t_k| = \sum_k |t_k|.$$

Me tõestasime, et iga $f \in (c^\lambda)'$ on esitatav kujul (15.2), kus $t \in l$. Lihtne on veenduda, et iga niisuguse esitusega funktsionaal f on ruumis c^λ pidev ja lineaarne.

(e) Kuna $\lim \in (m^\lambda)'$, siis on m_0^λ = kern lim ja $z^\lambda = c^\lambda \cap m_0^\lambda$ kinnised ruumis m^λ. Funktsionaal $\beta : c^\lambda \to \mathbb{K}$ kui pidevate lineaarsete funktsionaalide piirväärtus punktiviisi koonduvuse mõttes on samuti pidev ja lineaarne, seega on c_0^λ = kern β ja $n^\lambda = c_0^\lambda \cap z^\lambda$ kinnised ruumis c^λ. Lihtne on veenduda, et kehtib ka väite (e) teine osa.

Vaadeldavate BK-ruumide topoloogiliste omaduste kohta märgime veel, et ruumis c^λ moodustavad jadad e, λ^{-1} ja e^k ($k \in \mathbb{N}$) Schauderi baasi. Alamruumides c_0^λ, z^λ ja n^λ on baasiks vastavalt $\{e, e^k \mid k \in \mathbb{N}\}$, $\{\lambda^{-1}, e^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ning $\{e^k \mid k \in \mathbb{N}\}$, seega on n^λ AK-ruum. AB-omadusega on ruum z^λ, seevastu c_0^λ, c^λ ja m^λ ei ole $\lambda \notin m$ korral AB-ruumid. Näiteks, jada e lõiked ei ole neis ruumides tõkestatud:

$$\|e^{[m]}\|_\lambda = \sup_{k \le m} \lambda_k \to \infty \quad (m \to \infty).$$

Arvrida $\sum_k x_k$ nimetame λ-koonduvaks, kui tema osasummad koonduvad kiirusega λ, s.t. kui eksisteerib piirväärtus $\lim_n \lambda_n \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$. Tähistame

$$cs^\lambda := \{x \in cs \mid \exists \lim_n \lambda_n \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k\} = \Sigma^{-1}[c^\lambda],$$

$$zs^\lambda := \{x \in cs \mid \exists \lim_n \lambda_n \sum_{k=0}^{n} x_k\}$$

$$= \{x \in cs \mid (\sum_{k=0}^{n} x_k)_n \in c_0^\lambda\} = \Sigma^{-1}[z^\lambda],$$

$$ns^\lambda := \{x \in cs \mid \lim_n \lambda_n \sum_{k=0}^{n} x_k = 0\}$$

$$= \{x \in cs \mid (\sum_{k=0}^{n} x_k)_n \in n^\lambda\} = \Sigma^{-1}[n^\lambda].$$

Me jätame lugejale kontrollida, et

$$zs^\lambda = ns^\lambda \oplus \langle \bar{\Delta}\lambda^{-1} \rangle,$$

kus $\bar{\Delta}\lambda^{-1} := (1/\lambda_k - 1/\lambda_{k-1})$, $1/\lambda_{-1} := 0$, ja

$$cs^\lambda = ns^\lambda \oplus \langle \Delta\lambda^{-1} \rangle \oplus \langle e^o \rangle .$$

Kuna maatriks Σ (vt. §1, näide 2) korraldab ruumide cs^λ ja c^λ vahel lineaarse isomorfismi, siis on cs^λ BK-ruum normiga

$$\| x \|_{cs^\lambda} := \sup_n \{\lambda_n | \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k |, |\sum_k x_k| \}.$$

Seejuures on ruumid cs^λ ja c^λ isomeetriliselt isomorfsed, sama kehtib ka alamruumide zs^λ ja z^λ ning ns^λ ja n^λ kohta.

Olgu A mingi maatriks. Jada $x \in \omega_A$ nimetatakse *A-summeeruvaks kiirusega* λ ehk lühidalt *A^λ-summeeruvaks*, kui $Ax \in c^\lambda$. Juhul $Ax \in m^\lambda$ ütleme, et jada x on *A^λ-tõkestatud*. Kõigi A^λ-summeeruvate jadade hulka nimetatakse maatriksi A *λ-summeeruvusväljaks* ning tähistatakse c_A^λ. Märgime, et iga A^λ-summeeruv jada x on eelkõige A-summeeruv, seetõttu eksisteerib (vrd. (1.1))

$$\eta := \lim_A x := \lim_n y_n .$$

Lisaks sellele eksisteerib ka piirväärtus

$$\gamma^A := \gamma^A(x) := \lim d_n ,$$

kus

$$d_n := d_n^A(x) := \lambda_n (y_n - \eta) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Niisiis,

$$c_A^\lambda = \{x \in c_A \mid d := (d_n) \in c\} = A^{-1}[c^\lambda],$$

analoogiliselt defineerime

$$m_A^\lambda := \{x \in c_A \mid d \in m\} = A^{-1}[m^\lambda],$$

$$z_A^\lambda := \{x \in c_{oA} \mid d \in c\} = \{x \in c_A^\lambda \mid \lim_A x = 0\} = A^{-1}[c_o^\lambda],$$

$$n_A^\lambda := \{x \in c_{oA} \mid d \in c_o\} = \{x \in c_A^\lambda \mid \lim_A x = \gamma^A(x) = 0\} = A^{-1}[n^\lambda].$$

Seejuures $c_A^\lambda = z_A^\lambda \oplus \langle v \rangle$, kus $v = 0$ või $v \in c_A^\lambda \setminus z_A^\lambda$, ja $z_A^\lambda = n_A^\lambda \oplus \langle u \rangle$, kus $u = 0$ või $u \in z_A^\lambda \setminus n_A^\lambda$.

Teoreemidest 6.3 (b), 6.4 (b) ja (e) ning lausest 15.1 (b) ja (d) järeldub vahetult

TEOREEM 15.2. (a) *Maatriksi A λ-summeeruvusväli c_A^λ on FK-ruum poolnormide süsteemiga $\{\| \ \|_{A^\lambda}\} \cup \mathcal{P}$, kus poolnormide süsteem $\mathcal{P}$ on fikseeritud paragrahvis* 6 *ja*

$$\| x \|_{A^\lambda} := \| Ax \|_\lambda = \sup_n \{|d_n|, |\eta|\}.$$

(b) *Pideva lineaarse funktsionaali üldkuju FK-ruumis c_A^λ antakse valemiga*

$$f(x) = \sigma \lim_A x + \mu\gamma^A(x) + td + \alpha x \quad (x \in c_A^\lambda), \qquad (15.5)$$

kus $\sigma, \mu \in \mathbb{K}$, $t \in 1$ *ja* $\alpha \in (c_A^\lambda)^\beta$.

Öeldakse, et maatriks A on *λ-reversiivne*, kui iga $y \in c^\lambda$ korral leidub parajasti üks jada $x \in c_A^\lambda$, et $Ax = y$. Sel juhul on c_A^λ BK-ruum normiga $\| \ \|_{A^\lambda}$ ning $f \in (c_A^\lambda)'$ korral leidub selline esitus (15.5), kus $\alpha = 0$ (vrd. lause 3.1).

Täiendused ja märkused

Arvjadade koonduvus- ja summeeruvuskiirusega seotud probleeme on eelpool toodud definitsioonist sõltumatult käsitlenud mitmed autorid. Näiteks Dawson [87] ja Miller [178] uurisid selliseid konservatiivseid maatrikseid A, mille puhul x ja Ax koonduvad ühesuguse kiirusega iga $x \in c$ korral. Vt. veel Dawson [88], Bajrakterevic [6], Miller [177], [179], Fröhlich [101]. Selles paragrahvis defineeritud λ-koonduvuse mõiste kuulub Kangrole ning oli esmakordselt esitatud artiklis [291] 1967.a. Aasta hiljem valmis tema juhendamisel Soomeri diplomitöö [227], milles vaadeldakse jadade ja ridade kiirusega summeeruvuse probleeme, põhitähelepanu oli pööratud maatriksite λ-perfektsusele (vrd. §18). Kangro järgmistes artiklites [292], [294] uuritakse kiirusega summeeruvuse tegureid, osutub, et just need mängivad olulist rolli uue teooria rakendustes. Selle teooria funktsionaalanalüütilised alused esitas Kangro töös [295], sealt on pärit ka lause 15.1 ja teoreemi 15.2 tulemused.

Nagu paragrahvi alguses rõhutatud, on jada koonduvuskiiruse hindamine tema võrdlemise teel teiste koonduvate jadadega tavaline võte paljudes matemaatika valdkondades. Me toome siinkohal kaks näidet probleemidest, mille puhul kiirusega summeeruvuse teooria rakendamine osutus eriti efektiivseks. Need on ortogonaalridade summeeruvus ning jääkliikmega Tauberi teoreemid. Nii ühel kui ka teisel juhul oli konkreetsete menetluste korral saadud rida tulemusi, mida Kangrol õnnestus üldistada kas suvalistele regulaarsetele maatriksitele või olulisemalt laiemale menetluste klassile. Seejuures vabanes ta, lähtudes λ-summeeruvuse definitsioonist, mitmetest tõestusmeetodist sõltuvatest tingimustest, mis varasemates töödes vaadeldavatele kiirustele olid esitatud.

Ortogonaalridade teooria uurib ridade

$$\sum_k c_k \varphi_k(t) \qquad (*)$$

koonduvust ning summeeruvust, kus $\{\varphi_k\}$ on lõigus $[a,b]$ määratud funktsioonide ortogonaalne süsteem. Öeldakse, et jada $w := (w_k)$, kus $0 < w_k \uparrow$, on rea $(*)$ A-summeeruvuse *Weyli tegur* RF-regulaarse menetluse A puhul, kui tingimusest $\sum_k c_k^2 w_k < \infty$ järeldub rea $(*)$ A-summeeruvus peaaegu kõikjal lõigus $[a,b]$. Summeeruvuse kõrval on oluline ka selle kiirus. Mitmete konkreetsete menetluste, eeskätt C_1 ja M_p korral olid teatavate fikseeritud kiiruste Weyli tegureid leidnud Tandori [235], Alexits ja Kralik [4], Leindler [146], Andrijenko [283] jt. Nende tulemused võtab kokku järgmine

TEOREEM (Kangro [292], [291]). *Kui rida* (*) *koondub ruumis* $L^2_{[a,b]}$ *ning* w *on tema A-summeeruvuse Weyli tegur, siis tõkestamata kiiruse* λ *korral, mis rahuldab tingimust*

$$x \in c_A \rightarrow (x_k/\lambda_k) \in c_A^{\lambda},$$

on jada $(w_k\lambda_k^2)$ *rea* (*) A^{λ}*-summeeruvuse Weyli tegur.*

Jääkliikmega Tauberi teoreemid. Mäletatavasti (vt. §1, täiendused ja märkused) fikseerivad Tauberi teoreemid menetluse A jaoks tingimusi T, mil jada $x \in U_T$ või rea $\sum_k x_k \in U_T$ A-summeeruvusest järeldub selle koonduvus, kus U_T on kõigi tingimust T rahuldavate jadade või ridade hulk. 1928. a. tõestas Mordell [182] sellise Tauberi teoreemi menetluse C_1 jaoks, kus rea $\sum_k x_k$ summeeruvuse kiiruse põhjal tehakse teatavaid hinnanguid selle rea koonduvuskiiruse kohta. Kuivõrd seda tüüpi teoreemide puhul hinnatakse rea $\sum_k x_k$ jääkliikme nulliks koonduvuse kiirust, siis hakatigi neid nimetama jääkliikmega Tauberi teoreemideks (Tauberian remainder theorems). Käesolevas paragrahvis defineeritud mõisted ja toodud tähistused võimaldavad selle probleemi selgelt püstitada: otsitakse tingimusi T, mil kehtib sisalduvus $c_A^{\lambda} \cap U_T \subset c^{\mu}$ või $m_A^{\lambda} \cap U_T \subset m^{\mu}$, kus λ ja μ on mingid kiirused.

Higaki [112] ning Minakshisundaram ja Rajagopal [180] üldistasid Mordelli teoreemi menetlusele M_p, seejuures olid vaatluse all konkreetsed kiirused, mis sobisid kasutatavale tõestusmeetodile. Kangrol [296], õnnestus asendada kiirustele esitatavad tingimused summeeruvusteooria seisukohalt loomuliku tingimusega $M_p[c^{\lambda}] \subset c^{\lambda}$ (λ-konservatiivsus) või $M_p[m^{\lambda}] \subset m^{\lambda}$

TEOREEM (vt. [296]). *Olgu* M_p *regulaarne menetlus, kus* $p_k > 0$ $(k \in \mathbb{N})$ *ja* $P_n = O(P_{n-1})$. *Kui kehtib* $M_p[c^{\lambda}] \subset c^{\lambda}$, *siis rea* $\sum_k x_k$ M_p^{λ}*-summeeruvusest ning Tauberi tingimusest* $\tau_k P_k x_k = O(p_k)$ *järeldub selle rea* μ*-koonduvus, kus* $\mu_k := (\lambda_k \tau_k)^{1/2}$.

Tammeraid [336], [337] tõestas analoogilised teoreemid Cesàro menetluste C_α $(\alpha > 1)$ ja teiste menetluste korral, vt. ka [338], [339], [340], [341].

Antud kiirusega summeeruvuse rakendustel funktsiooniteoorias peatume veel paragrahvi 20 täiendustes ja märkustes. Siinkohal nimetame Oja, Klaari ning Rinne tõid [321], [322], samuti Heinsaare [111] ja Hängi [116] diplomitöid ridade korrutiste ning jadade konvolutsioonide koonduvuskiiruse kohta, vt. ka Bojanic ja Lee [44].

§16. ANTUD KIIRUSEGA KOONDUVATE JADADE MAATRIKSTEISENDUSED. λ-KONSERVATIIVSED MAATRIKSID

Kiirusega summeeruvuse mõiste rakenduste puhul on kõige olulisem küsimus antud maatriksi ning fikseeritud kiiruste kokkusobivus uuritava probleemi lahendamiseks. Harilikult otsitakse vaadeldavate kiiruste λ ja ν korral tingimusi maatriksi A jaoks, mil ta teisendab kõik λ-koonduvad või -tõkestatud jadad ν-koonduvateks või -tõkestatud jadadeks. Paljudel juhtudel on aga fikseeritud summeerimismenetlus ning otsitakse neid kiirusi λ, mida see menetlus säilitab.

Järgnevas teoreemis on vaatluse all ka juhud, kus üks kiirustest λ või ν on tõkestatud.

TEOREEM 16.1. (a) *Selleks, et maatriks* A *teisendaks iga* λ*-koonduva jada* ν*-koonduvaks (s.t., et kehtiks sisalduvus* $A[c^\lambda] \subset c^\nu$*), on tarvilikud ja piisavad tingimused*

$$Ae^k \in c^\nu \quad (k \in \mathbb{N}), \tag{16.1}$$

$$A\lambda^{-1} \in c^\nu, \tag{16.2}$$

$$Ae \in c^\nu, \tag{16.3}$$

$$\sum_k \frac{|a_{nk}|}{\lambda_k} = O(1), \tag{16.4}$$

$$\nu_n \sum_k \frac{|a_{nk} - a_k|}{\lambda_k} = O(1), \text{ kus } a_k = \lim_n a_{nk} \ (k \in \mathbb{N}). \tag{16.5}$$

(b) *Selleks, et maatriks* A *teisendaks iga* λ*-tõkestatud jada* ν*-tõkestatud jadaks (s.t., et kehtiks sisalduvus* $A[m^\lambda] \subset m^\nu$*), on tarvilikud ja piisavad tingimused*

$$Ae^k \in c \quad (k \in \mathbb{N}), \qquad Ae \in m^\nu, \tag{16.6}$$

(16.4) ja (16.5). *Juhul, kui* $\nu_k = O(1)$ *ning* $\lambda_k \neq O(1)$, *tuleb tingimuses* (16.5) $O(1)$ *asendada sümboliga* $o(1)$.

(c) *Maatriks* A *teisendab iga* λ*-koonduva jada* ν*-tõkestatud jadaks parajasti siis, kui* $A[m^\lambda] \subset m^\nu$, *kusjuures juhul* $\nu_k = O(1)$ *tuleb* m^ν *asendada ruumiga* m.

Tõestus. (a) Vastavalt lauses 15.1 (e) tõestatud seosele $c^\lambda = n^\lambda \oplus \langle\lambda^{-1}\rangle \oplus \langle e\rangle$ leiab sisalduvus $A[c^\lambda] \subset c^\nu$ aset parajasti siis, kui kehtivad tingimused (16.2), (16.3) ja $A[n^\lambda] \subset c^\nu$. Niisiis on vaja veenduda, et viimane sisalduvus on samaväärne tingimustega (16.1), (16.4) ning (16.5).

Kuna $e^k \in n^\lambda$ $(k \in \mathbb{N})$, siis on (16.1), mis tähendab piirväärtuste

$$\lim_n a_{nk} =: a_k,\ \lim_n \nu_n(a_{nk} - a_k) \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{16.7}$$

olemasolu, tarvilik tingimus. Kui $x \in n^\lambda$, siis $x_k = b_k/\lambda_k$ $(k \in \mathbb{N})$, kus $b \in c_0$. Seega

$$y_n = \sum_k a_{nk}x_k = \sum_k \frac{a_{nk}}{\lambda_k} b_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

ja sisalduvus $A[n^\lambda] \subset c$ leiab aset parajasti siis (vrd. teoreem 2.2 (a)), kui eksisteerib piirväärtus $\lim_n a_{nk}/\lambda_k = a_k/\lambda_k$ $(k \in \mathbb{N})$ (vrd. (16.7)) ja kehtib (16.4). Sel juhul

$$\eta := \lim_n y_n = \sum_k \frac{a_k}{\lambda_k} b_k \quad (x \in n^\lambda).$$

Edasi moodustame

$$\nu_n(y_n - \eta) = \nu_n \sum_k \frac{a_{nk}-a_k}{\lambda_k} b_k \quad (x \in n^\lambda,\ n \in \mathbb{N})$$

ning paneme tähele, et sisalduvus $A[n^\lambda] \subset c^\lambda$ kehtib parajasti siis, kui maatriks $(\nu_n(a_{nk} - a_k)/\lambda_k)_{n,k}$ summeerib kõik nulljadad, s.t. kui eksisteerib piirväärtus $\lim_n \nu_n(a_{nk}-a_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ (vrd. (16.7)) ja on täidetud (16.5). Väide on tõestatud.

(b) Kõigepealt märgime, et kuna $e^k \in m^\lambda$ $(k \in \mathbb{N})$ ja $e \in m^\lambda$, siis on tingimused (16.6) tarvilikud. Neist järeldub rea $\sum_k a_{nk}$ koonduvus iga $n \in \mathbb{N}$ korral, mistõttu seosest $x_k - \xi = b_k/\lambda_k$ $(k \in \mathbb{N})$ saame iga $x \in m^\lambda$ puhul

$$y_n = \sum_k a_{nk}x_k = \sum_k \frac{a_{nk}}{\lambda_k} b_k + \xi \sum_k a_{nk} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Vaatleme algul juhtu $\lambda_n \neq O(1)$. Tingimuste (16.6) kohaselt eksisteerib $\lim_n \sum_k a_{nk}$, seega kehtib sisalduvus $A[m^\lambda] \subset c$ parajasti siis, kui maatriks $(a_{nk}/\lambda_k)_{n,k}$ teisendab kõik tõkestatud jadad koonduvateks. Teoreemi 10.2 põhjal on selleks tarvilikud ja piisavad tingimused $Ae^k \in c$, (16.4) ning

$$\lim_n \sum_k \frac{|a_{nk}-a_k|}{\lambda_k} = 0, \tag{16.8}$$

seejuures

$$\eta := \lim_n y_n = \sum_k \frac{a_k}{\lambda_k} b_k + \xi \lim_n \sum_k a_{nk}.$$

Moodustame

$$\nu_n(y_n - y) = \nu_n \sum_k \frac{a_{nk}-a_k}{\lambda_k} b_k + \xi\nu_n(\sum_k a_{nk} - \lim_n \sum_k a_{nk})$$

$(n \in \mathbb{N})$ ning paneme tähele, et tingimuse (16.3) tõttu

$\nu_n(\sum_k a_{nk} - \lim_n \sum_k a_{nk}) = O(1)$. Seega leiab sisalduvus $A[m^\lambda] \subset m^\lambda$ aset parajasti siis, kui maatriks $(\nu_n(a_{nk}-a_k)/\lambda_k)_{n,k}$ teisendab kõik tõkestatud jadad tõkestatuks, s.t. kui kehtib tingimus (16.5) (vrd. teoreem 2.2 (b)). Seejuures tuleb viimases juhul $\nu_n = O(1)$ seose (16.8) tõttu $O(1)$ asendada sümboliga $o(1)$.

Juhul $\lambda_n = O(1)$ kehtib iga $x \in m^\lambda$ korral $b \in c_0$, seega leiab sisalduvus $A[m^\lambda] \subset c$ aset parajasti siis, kui maatriks $(a_{nk}/\lambda_k)_{n,k}$ summeerib kõik nulljadad, s.t. kui on rahuldatud tingimused $Ae^k \in c$ ja (16.4). Ülejäänud osas jääb tõestus samaks, mis juhul $\lambda_n \neq O(1)$.

Väide (c) jääb lugejale iseseisvalt kontrollida.

Maatriksit A omadusega $A[c^\lambda] \subset c^\lambda$ nimetatakse λ-*konservatiivseks*. Juhul, kui $\lambda_n = O(1)$, langevad konservatiivsuse ja λ-konservatiivsuse mõisted kokku, seetõttu eeldame λ-konservatiivsusest kõneldes, et $\lambda_n \neq O(1)$. Antud maatriksi A, mis rahuldab tingimust $c_A \supset \varphi$, ning kiiruse λ puhul defineerime maatriksi $\mathfrak{A} := (\alpha_{nk})$ seosega

$$\alpha_{nk} := \lambda_n(a_{nk} - a_k) \qquad (n,k \in \mathbb{N}).$$

Osutub, et A λ-konservatiivsust saab kirjeldada maatriksi $\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1} := (\alpha_{nk}/\lambda_k)_{n,k} = (\lambda_n(a_{nk} - a_k)/\lambda_k)_{n,k}$ abil.

LAUSE 16.2. *Maatriks A on λ-konservatiivne parajasti siis, kui kehtivad tingimused* (16.4) *ja $Ae \in c^\lambda$ ning maatriks $\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1}$ eksisteerib ja on konservatiivne.*

Tõestus. Võrdleme teoreeme 2.1 (a) ning 16.1 (a), kus $\nu = \lambda$. Ilmselt piisab väite tõestuseks näidata, et kui kehtivad (16.1), (16.3)-(16.5), siis tingimus (16.2) on samaväärne piirväärtuse

$$\lim_n \lambda_n \sum_k \frac{a_{nk}-a_k}{\lambda_k} =: \tau \qquad (16.9)$$

olemasoluga. Paneme tähele, et tänu tingimustele (16.1) ja (16.4) kehtib $\sum_k |a_k|/\lambda_k < \infty$. Seega on rida $\sum_k a_k/\lambda_k$ koonduv ja seose (16.5) ning eelduse $\lambda_n \neq O(1)$ tõttu

$$\left| \sum_k \frac{a_{nk}}{\lambda_k} - \sum_k \frac{a_k}{\lambda_k} \right| \le \sum_k \frac{|a_{nk}-a_k|}{\lambda_k} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

niisiis

$$\lim_n \sum_k \frac{a_{nk}}{\lambda_k} = \sum_k \frac{a_k}{\lambda_k}.$$

Nüüd on selge, et (16.2) tähendab just piirväärtuse (16.9) eksisteerimist.

Maatriksi $\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1}$ konservatiivsuse puhul eksisteerivad piirväärtused

$$\lim_n \alpha_{nk} =: \alpha_k \quad (k \in \mathbb{N}),$$

$$\lim_n \sum_k \alpha_{nk} \Lambda_k = \tau,$$

(vrd. (16.9)), seega ka

$$\chi(\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1}) = \tau - \sum_k \frac{\alpha_k}{\lambda_k}.$$

Seejuures nimetatakse λ-konservatiivset maatriksit A λ-*koregulaarseks*, kui $\chi(\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1}) \neq 0$, vastasel juhul ütleme, et A on λ-*konullmaatriks*. Nende mõistete topoloogilise iseloomustuse anname paragrahvis 17.

Järgmise mõiste - λ-regulaarsuse - defineerimisel lähtume regulaarse (täpsemalt, τ-multiplikatiivse ($\tau \neq 0$)) maatriksi D omadusest $c_D = c_{oD} \oplus \langle e\rangle$. Me nimetame λ-konservatiivset maatriksit A λ-*regulaarseks*, kui

$$c_{oA}^{\lambda} \cap c^{\lambda} = c_o^{\lambda} \text{ ja } z_A^{\lambda} \cap c^{\lambda} = z^{\lambda}.$$

Sel juhul $n_A^{\lambda} \cap c^{\lambda} = n^{\lambda}$ ning kuna codim $n_A^{\lambda} \leq 1$ ruumis z_A^{λ} ja codim $z_A^{\lambda} \leq 1$ ruumis c_A^{λ} (vt. §15), siis tänu seosele $c^{\lambda} = n^{\lambda} \oplus \langle\lambda^{-1}\rangle \oplus \langle e\rangle$ kehtib

$$c_A^{\lambda} = n_A^{\lambda} \oplus \langle\lambda^{-1}\rangle \oplus \langle e\rangle.$$

Viimane tingimus on juhul $c_A^{\lambda} \supset c^{\lambda}$ ilmselt ka piisav maatriksi A λ-regulaarsuseks.

LAUSE 16.3. *Maatriksi A λ-regulaarsuseks on tarvilikud ja piisavad järgmised tingimused:*

$\lim_n a_{nk} = 0 \quad (k \in \mathbb{N})$,

$Ae \in c^{\lambda} \setminus z^{\lambda}$,

maatriks $\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1}$ eksisteerib ja on τ-multiplikatiivne ($\tau \neq 0$), *kus τ on antud seosega* (16.9).

Tõestus. Tarvilikkus. Kui A on λ-regulaarne, siis on ta ka λ-konservatiivne, mistõttu $\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1}$ on konservatiivne maatriks. Edasi, kuna $A[n^{\lambda}] \subset n^{\lambda}$, siis $Ae^k \in n^{\lambda}$, s.t. $a_k = \alpha_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Tingimusest $A\lambda^{-1} \in z^{\lambda} \setminus n^{\lambda}$ järeldub $\tau = \lim_n \lambda_n \sum_k a_{nk} \Lambda_k \neq 0$, seega on $\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1}$ τ-multiplikatiivne. Tingimuse $Ae \in c^{\lambda} \setminus z^{\lambda}$ tarvilikkus tuleneb vahetult λ-regulaarsuse definitsioonist.

Piisavuse tõestuseks näitame, et kui $\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1}$ on τ-multiplikatiivne, $\tau \neq 0$ ja $a_k = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, siis $A\lambda^{-1} \in z^{\lambda}\setminus n^{\lambda}$ ning $A[n^{\lambda}] \subset n^{\lambda}$. Tõepoolest, sel juhul $\lim_A \lambda^{-1} = 0$ (vrd. lause 16.2 tõestus) ning $\gamma^{A}(\lambda^{-1}) = \tau \neq 0$, mis tähendabki, et $\lambda^{-1} \in z_A^{\lambda}\setminus n_A^{\lambda}$. Kui $x \in n^{\lambda}$, siis $\lambda\cdot x := (\lambda_k x_k) \in c_0$ ja

$$\gamma^{A}(x) = \lim_n \lambda_n \sum_k a_{nk} x_k = \lim_n \lambda_n \sum_k \frac{a_{nk}}{\lambda_k} \lambda_k x_k$$
$$= \lim_{\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1}} \lambda\cdot x = 0,$$

s.t. $Ax \in n^{\lambda}$ iga $x \in n^{\lambda}$ korral.

Tõestatud lausest järeldub vahetult, et λ-regulaarne maatriks on λ-koregulaarne.

<u>Näide 1.</u> Olgu M_p selline Rieszi kaalutud keskmiste menetlus, et $p_k > 0$ $(k \in \mathbb{N})$ ja $P_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ (vrd. §2. näide 1). Lause 16.3 esimesed kaks tingimust on sel juhul täidetud, kuna $a_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ ja $Ae = e \in c^{\lambda}\setminus z^{\lambda}$. Niisiis on M_p λ-konservatiivne parajasti siis, kui maatriks $\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1} = (\lambda_n p_k/P_n\lambda_k)_{n,k}$ on konservatiivne, s.t. kui on olemas piirväärtused $\lim_n \lambda_n/P_n$ ja

$$\lim_n \frac{\lambda_n}{P_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{\lambda_k} = \tau. \tag{16.10}$$

Tegelikult on just piirväärtuse (16.10) olemasolu tarvilik ja piisav M_p λ-konservatiivsuseks. Nimelt järeldub selle olemasolust ilmselt $\lambda_n/P_n = O(1)$, seega leidub niisugune konstant $M > 0$, et $p_n/\lambda_n \geq Mp_n/P_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Et rida $\sum_n p_n/P_n$ hajub eelduse $P_n \to \infty$ tõttu, siis hajub ka rida $\sum_n p_n/\lambda_n$, millest järeldub $\lim_n \lambda_n/P_n = 0$.

Seega on M_p λ-konservatiivne parajasti siis, kui eksisteerib piirväärtus (16.10), ning λ-regulaarne, kui see piirväärtus ei võrdu nulliga.

<u>Näide 2.</u> Erijuhul, kui $p_k = 1$ $(k \in \mathbb{N})$, saame tingimuse kiiruste λ jaoks, mille suhtes aritmeetiliste keskmiste menetlus C_1 on λ-regulaarne:

eksisteerib $\lim_n \frac{\lambda_n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda_k} \neq 0.$

Seda tingimust rahuldavad näiteks kõik kiirused $\lambda := (k^{\varepsilon})$, kus $0 < \varepsilon < 1$.

Täiendused ja märkused

Käesoleva paragrahvi põhitulemused - teoreem 16.1 (a) ja (b) ning lause 16.2 - kuuluvad Kangrole [292], [294], kes defineeris ka λ-konull- ning λ-koregulaarsed maatriksid (vt. [295]). λ-regulaarsuse mõiste on antud Leigeri ja Maasiku artiklis [312].

Sikk [217] vaatles kahte tüüpi kiirusega seotud jadaruume. Antud jadaruumi E ning kiiruse λ puhul tähistas ta

$$E(\lambda) := \{x \in \omega \mid \lambda \cdot x := (\lambda_k x_k) \in E\},$$

$$E_c(\lambda) := \{x \in c \mid b \in E\}$$

ning uuris selliste ruumide maatriksteisendusi. Muuhulgas on tõestatud järgmine

TEOREEM. *Olgu* E *ja* F *jadaruumid,* λ *ja* ν *mingid kiirused ning* A *selline maatriks, et* $\varphi \subset c_A$ *ja* $(\nu_n \sum_k (a_{nk} - a_k))_n \in F$. *Maatriks* A *teisendab ruumi* $E_c(\lambda)$ *ruumi* $F_c(\nu)$ *parajasti siis, kui maatriks* $(\nu_n (a_{nk} - a_k))_{n,k}$ *teisendab ruumi* E *ruumi* c *ja maatriks* $(\nu_n (a_{nk} - a_k)/\lambda_k)_{n,k}$ *ruumi* E *ruumi* F.

Märgime, et ruume $E_c(\lambda)$ ning nende lineaar-topoloogilisi omadusi käsitles Soomer [227] juhul E = l ja E = bv. Ta leidis ka tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et $A[l_c(\lambda)] \subset l_c(\lambda)$.

Antud kiirusega koonduvate ridade maatriksteisendusi on uuritud Kameniku diplomitöös [130], kus muuhulgas on leitud tarvilikud ja piisavad tingimused sisalduvusteks $A[cs^\lambda] \subset c^\nu$ ja $A[cs^\lambda] \subset cs^\lambda$.

§17. λ-SUMMEERUVUSVÄLJA STRUKTUUR

Kiirusega summeeruvuse puhul tuleb lahendada samad probleemid, mis hariliku summeeruvuse korral, need on eeskätt konservatiivsus, sisalduvus, kooskõlalisus, asendatavus ning summeeruvustegurid. Raamatu esimeses osas saadud kogemused lubavad arvata, et edu nende probleemide uurimisel sõltub suurel määral sellest, kui hästi me tunneme λ-summeeruvusvälja struktuuri. Järgides eelpool väljakujunenud uurimisskeemi, keskendame me käesolevas paragrahvis oma tähelepanu λ-*summeeruvusvälja tähtsatele alamruumidele*.

Kõigepealt lepime kokku, et kõik selles ja järgnevates paragrahvides vaadeldavad maatriksid A rahuldavad tingimust $\wp \subset c_A^\lambda$, s.t., et eksisteerivad piirväärtused

$\lim_n a_{nk} =: a_k$, $\lim_n \alpha_{nk} = \lim_n \lambda_n(a_{nk} - a_k) =: \alpha_k$ $(k \in N)$.

Sel juhul on FK-ruumis c_A^λ defineeritud alamruumid (vrd. §5)

$$B_A^\lambda := B_{c_A^\lambda},\ F_A^\lambda := F_{c_A^\lambda},\ W_A^\lambda := W_{c_A^\lambda},\ S_A^\lambda := S_{c_A^\lambda}.$$

Lõiketõkestatuse FK-ruumis $(c_A^\lambda, \{\|\ \|_{A^\lambda}\} \cup \wp)$ määrab ära poolnorm $\|\ \|_{A^\lambda}$, kuna $\sup_m p(x^{[m]}) < \infty$ iga $x \in \omega_A$ ning $p \in \wp$ korral. Seega kuulub jada $x \in c_A^\lambda$ alamruumi B_A^λ parajasti siis, kui

$$\|x^{[m]}\|_{A^\lambda} = \sup_n \{|\sum_{k=0}^m \alpha_{nk}x_k|, |\sum_{k=0}^m a_k x_k|\} = O(1). \qquad (17.1)$$

Selle tingimuse täpsustamiseks tõestame algul

LEMMA 17.1. *Maatriksi A puhul kehtivad järgmised väited.*
(a) *Iga jada* $x \in c_A^\lambda \cap \Lambda_A^\perp$ *on* $\mathfrak{A}$-*summeeruv ning* $\lim_{\mathfrak{A}} x = \gamma^A(x)$.
(b) *Kui jada* $x \in c_A^\lambda$ *korral*

$$\sup_{n,m} |\sum_{k=0}^m \alpha_{nk}x_k| < \infty, \qquad (17.2)$$

siis rida $\sum_k a_k x_k$ *koondub ning kehtivad võrdused* $\lim_A x = ax$ *ja* $\gamma^A(x) = \lim_{\mathfrak{A}} x$.

Tõestus. (a) Kui $x \in c_A^\lambda \cap \Lambda_A^\perp$, siis
$\gamma^A(x) = \lim_n \lambda_n(\sum_k a_{nk}x_k - \lim_A x) = \lim_n \lambda_n \sum_k (a_{nk} - a_k)x_k = \lim_{\mathfrak{A}} x$.

(b) Rahuldagu jada $x \in c_A^\lambda$ tingimust (17.2), siis eelduse $\lambda_n \neq O(1)$ tõttu $\lim_n \sup_m |\sum_{k=0}^m (a_{nk} - a_k)x_k| = 0$. Suvalise $\varepsilon > 0$ korral leidub seepärast selline $n_0 \in \mathbb{N}$, et $|\sum_{k=0}^m (a_{n_0k} - a_k)x_k| < \varepsilon/4$ $(m \in \mathbb{N})$. Niisiis kehtib iga indeksite paari l ja m puhul, kus $l \le m$, võrratus $|\sum_{k=l}^m (a_{n_0k} - a_k)x_k| < \varepsilon/2$. Edasi, kuna rida $\sum_k a_{n_0k}x_k$ koondub, siis saab valida niisuguse $m_0 \in \mathbb{N}$, et kui $m_0 \le l \le m$, siis $|\sum_{k=l}^m a_{n_0k}x_k| < \varepsilon/2$. Seetõttu

$$|\sum_{k=l}^m a_k x_k| \le |\sum_{k=l}^m (a_{n_0k} - a_k)x_k| + |\sum_{k=l}^m a_{n_0k}x_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

kõikide m ja l puhul, mis rahuldavad tingimust $m_0 \le l \le m$. Järelikult on rida $\sum_k a_k x_k$ koonduv ning $x \in \omega_{\mathfrak{A}}$. Tingimusest (17.2) tuleneb $x \in m_{\mathfrak{A}}$, sellest ning eeldusest $\lambda_n \neq O(1)$

saame, et $\lim_n \sum_k a_{nk} x_k - \sum_k a_k x_k = \lim_n \sum_k (a_{nk} - a_k) x_k = 0$. Võrdus $\gamma^A(x) = \lim_{\mathfrak{A}} x$ järeldub vahetult väitest (a).

Lemma 17.1 (b) põhjal on tingimused (17.1) ja (17.2) samaväärsed, seetõttu (vrd. lause 7.1 (b))

$$B_A^\lambda = \{x \in c_A^\lambda \mid \sup_{n,m} |\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k| < \infty\} \subset B_{\mathfrak{A}} = L_{\mathfrak{A}}.$$

Niisiis eksisteerivad iga $x \in B_A^\lambda$ ja $t \in l$ korral summad $(t\mathfrak{A})x$ ja $t(\mathfrak{A}x)$, mis langevad kokku omavahel (vrd. lause 7.1 (a)) ja summaga $\sum_n t_n d_n(x)$. Kokkuvõtteks sõnastame

LAUSE 17.2. *Maatriksi A puhul*

$$B_A^\lambda = B_{\mathfrak{A}} \cap c_A^\lambda = L_{\mathfrak{A}} \cap c_A^\lambda$$

ning iga $x \in B_A^\lambda$ *korral kehtivad võrdused* $\lim_A x = \sum_k a_k x_k$, $\gamma^A(x) = \lim_{\mathfrak{A}} x$ *ja* $(t\mathfrak{A})x = t(\mathfrak{A}x) = \sum_n t_n d_n(x)$ $(t \in l)$.

Alamruumide F_A^λ ja W_A^λ uurimisel lähtume funktsionaali $f \in (c_A^\lambda)'$ üldkujust (vt. teoreem 15.2 (b))

$$f(x) = \sigma \lim_A x + \mu\gamma^A(x) + td + \alpha x \quad (x \in c_A^\lambda),$$

kus $\sigma, \mu \in \mathbb{K}$, $t \in l$, $\alpha \in (c_A^\lambda)^\beta$ ning $d := (d_n) = (\lambda_n (\sum_k a_{nk} x_k - \lim_A x))_n$. Kõigepealt märgime, et alamruumil B_A^λ on funktsionaalil f hoopis lihtsam kuju: lause 17.2 kohaselt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sigma \sum_k a_k x_k + \mu \lim_{\mathfrak{A}} x + (t\mathfrak{A})x + \alpha x \\ &= \mu \lim_{\mathfrak{A}} x + \rho x \quad (x \in B_A^\lambda), \end{aligned} \tag{17.3}$$

kus $\rho_k := \sigma a_k + \sum_n t_n a_{nk} + \alpha_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Seejuures $\rho \in (B_A^\lambda)^\beta$ ning $f(e^k) = \mu a_k + \rho_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Kui avaldame viimasest võrdusest ρ_k ning asendame seosesse (17.3), siis saame f jaoks esituse

$$f(x) = \mu \lim_{\mathfrak{A}} x + \sum_k (f(e^k) - \mu a_k) x_k \quad (x \in B_A^\lambda), \tag{17.4}$$

mille abil tõestame

LAUSE 17.3. *Maatriksi A korral kehtivad järgmised väited.*

(a) $F_A^\lambda = B_A^\lambda \cap L_{\mathfrak{A}} = F_{\mathfrak{A}} \cap c_A^\lambda$.

(b) *Kui* $f \in (c_A^\lambda)'$, *siis* $f(x) = \mu\Lambda_{\mathfrak{A}}(x) + \sum_k x_k f(e^k)$ *iga* $x \in F_A^\lambda$ *korral.*

(c) $W_A^\lambda = B_A^\lambda \cap \Lambda_{\mathfrak{A}}^\perp = F_A^\lambda \cap \Lambda_{\mathfrak{A}}^\perp = W_{\mathfrak{A}} \cap c_A^\lambda$.

(d) $F_A^\lambda = W_A^\lambda \oplus \langle u \rangle$, *kus* $u = 0$ *või* $u \in F_A^\lambda \setminus W_A^\lambda$.

Tõestus. (a) Lause 5.5 (a) kohaselt kehtib $F_A^\lambda \subset B_A^\lambda$. Sisalduvuse $F_A^\lambda \subset I_{\mathfrak{A}}$ tõestuseks märgime, et kuna $\gamma^A \in (c_A^\lambda)'$, siis rida

$$\sum_k a_k x_k = \sum_k x_k \gamma^A(e^k) \qquad (17.5)$$

koondub tõepoolest iga $x \in F_A^\lambda$ korral. Niisiis (vrd. laused 17.2 ja 7.1) $F_A^\lambda \subset B_A^\lambda \cap I_{\mathfrak{A}} = B_{\mathfrak{A}} \cap I_{\mathfrak{A}} \cap c_A^\lambda = F_{\mathfrak{A}} \cap c_A^\lambda$. Vastupidi, kui $x \in B_A^\lambda \cap I_{\mathfrak{A}}$, siis eksisteerib $\sum_k a_k x_k$ ja seose (17.4) põhjal peab rida $\sum_k x_k f(e^k)$ koonduma. Seega $B_A^\lambda \cap I_{\mathfrak{A}} \subset F_A^\lambda$ ning kokkuvõttes on väide tõestatud.

(b) järeldub vahetult seosest (17.4).

(c) Kuna $\gamma^A \in (c_A^\lambda)'$, siis lausest 17.2 ning seosest (17.5) järeldub $\lim_{\mathfrak{A}} x = \gamma^A(x) = \sum_k a_k x_k$ iga $x \in W_A^\lambda$ puhul, tähendab, $W_A^\lambda \subset \Lambda_{\mathfrak{A}}^\perp$. Lausest 5.5 (a) tuleneb sisalduvus $W_A^\lambda \subset B_A^\lambda$ ning seega saame väitest (a) $W_A^\lambda \subset B_A^\lambda \cap \Lambda_{\mathfrak{A}}^\perp = F_A^\lambda \cap \Lambda_{\mathfrak{A}}^\perp$. Teiselt poolt, kui $x \in B_A^\lambda \cap \Lambda_{\mathfrak{A}}^\perp$, siis väite (b) kohaselt $f(x) = \sum_k x_k f(e^k)$ iga $f \in (c_A^\lambda)'$ korral, s.t. $B_A^\lambda \cap \Lambda_{\mathfrak{A}}^\perp \subset W_A^\lambda$.

(d) järeldub väidetest (a) ja (c) : kuna codim $W_{\mathfrak{A}} \leq 1$ alamruumis $F_{\mathfrak{A}}$ (vrd. lause 7.2 (d)), siis codim $W_A^\lambda \leq 1$ alamruumis F_A^λ.

Kokkuvõttes tõestasime me järgmised seosed (vrd. lause 5.5 (a)):

$$\varphi \subset S_A^\lambda \subset W_A^\lambda = B_A^\lambda \cap \Lambda_{\mathfrak{A}}^\perp \subset F_A^\lambda = B_A^\lambda \cap I_{\mathfrak{A}} \subset B_A^\lambda \subset B_{\mathfrak{A}} \cap \Lambda_A^\perp,$$
$$B_A^\lambda \subset B_A \cap \Lambda_A^\perp = W_A. \qquad (17.6)$$

Nagu me paragrahvis 15 märkisime, ei ole c^λ AB-ruum: lõiketõkestatus leiab aset alamruumis z^λ, kuid jada e lõiked on tõkestamata. Sellest asjaolust lähtudes nimetame me λ-AB-*maatriksiks* sellist maatriksit A, mille puhul kehtib sisalduvus $z_A^\lambda \subset B_A^\lambda$. Kui $\varphi \subset n_A^\lambda \subset S_A^\lambda$, ütleme, et A on λ-AK-*maatriks*.

<u>Näide 1.</u> Olgu M_p regulaarne λ-konservatiivne Rieszi kaalutud keskmiste menetlus. Sel juhul $\varphi \subset z_{M_p}^\lambda$ ja on täidetud tingimus (vrd. teoreem 16.1 (a))

$$\frac{\lambda_n}{|P_n|} \sum_{k=0}^{n} \frac{|p_k|}{\lambda_k} = O(1).$$

19T

millest võrratuste

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|p_k|}{\lambda_k} \ge \sum_{k=0}^{m} \frac{|p_k|}{\lambda_k} \ge \frac{1}{\lambda_m} \sum_{k=0}^{m} |p_k| \ge \frac{|P_m|}{\lambda_m} \quad (m \le n)$$

põhjal järeldub, et

$$\frac{\lambda_n P_m}{\lambda_m P_n} = O(1) \quad (m \le n).$$

Seetõttu

$$\lambda_n \Big| \sum_{k=0}^{m} m_{nk} x_k \Big| = \frac{\lambda_n}{|P_n|} \Big| \sum_{k=0}^{m} p_k x_k \Big| = \left| \frac{\lambda_n}{P_n} \cdot \frac{P_m}{\lambda_m} \right| \lambda_m \Big| \sum_{k=0}^{m} m_{mk} x_k \Big|$$

$$= \left| \frac{\lambda_n}{P_n} \cdot \frac{P_m}{\lambda_m} \right| \| M_p x \|_\lambda = O(1) \quad (x \in z_{M_p}^{\lambda},\ m \le n),$$

niisiis $z_{M_p}^{\lambda} \subset B_{M_p}^{\lambda}$, s.t. M_p on λ-AB-menetlus. Seejuures ei kehti lõiketõkestatus kogu summeeruvusväljas $c_{M_p}^{\lambda}$, näiteks jada e lõiked ei ole tõkestatud. Kui $\varphi \subset n_{M_p}^{\lambda}$, siis M_p on λ-AK-maatriks.

Märgime, et λ-AB-maatriksi A puhul langeb B_A^{λ} kokku kas kogu λ-summeeruvusväljaga c_A^{λ} või selle maksimaalse alamruumiga z_A^{λ}. Tõepoolest, kui $z_A^{\lambda} \subset B_A^{\lambda} \neq c_A^{\lambda}$, siis leidub selline element $v \in c_A^{\lambda} \setminus z_A^{\lambda}$, et $c_A^{\lambda} = z_A^{\lambda} \oplus \langle v \rangle$, mistõttu $z_A^{\lambda} = B_A^{\lambda}$ (vastasel juhul oleksid jada v lõiked tõkestatud ning seega kehtiks võrdus $B_A^{\lambda} = c_A^{\lambda}$). Kui $B_A^{\lambda} = c_A^{\lambda}$, siis $c_A^{\lambda} = c_{\mathfrak{A}} = B_{\mathfrak{A}}$ (vrd. lause 17.2). Juhul $B_A^{\lambda} = z_A^{\lambda}$ on $a_k = 0$ ning $\alpha_{nk} = \lambda_n a_{nk}$ $(n, k \in \mathbb{N})$, niisiis $z_A^{\lambda} = c_{\mathfrak{A}} = B_{\mathfrak{A}}$. Seetõttu järeldub lausest 7.7 vahetult

LAUSE 17.4. (a) *Kui A on selline maatriks, milles ei ole nullveerge ning $z_A^{\lambda} = B_A^{\lambda}$, siis z_A^{λ} on BK-ruum normiga*

$$\|x\| := \sup_{n,m} \Big| \sum_{k=0}^{m} \alpha_{nk} x_k \Big| \quad (x \in z_A^{\lambda}).$$

(b) *λ-reversiivne maatriks A omadusega $\varphi \subset z_A^{\lambda}$ on λ-AB-maatriks parajasti siis, kui leidub selline $M > 0$, et*

$$\sup_{n,m} \Big| \sum_{k=0}^{m} \alpha_{nk} x_k \Big| \le M \|x\|_{A^{\lambda}} \quad (x \in z_A^{\lambda}).$$

Väited (a) *ja* (b) *jäävad kehtima, kui neis z_A^{λ} asemel kirjutada c_A^{λ}.*

(c) *Kui A on normaalne λ-AB-maatriks, siis leidub selline $M > 0$, et*

19*

$$|a_{nk}| \le M|a_{kk}| \quad (k,n \in \mathbb{N}).$$

(d) *Kui* A *on selline* λ-AB-*maatriks, et* $\varphi \subset n_A^\lambda$, *siis* A *on* λ-AK-*maatriks*.

Edasi märgime, et kui $\varphi \subset z_A^\lambda$, siis $B_A^\lambda = B_{\mathfrak{A}}$, $F_A^\lambda = F_{\mathfrak{A}}$ ja $W_A^\lambda = W_{\mathfrak{A}}$. see järeldub võrduse $z_A^\lambda = c_{\mathfrak{A}}$ tõttu lausetest 7.2 ning 7.3 (a) ja (c). Teoreemist 7.6 saame vahetult

LAUSE 17.5. *Kui maatriksi* A *korral kehtib sisalduvus* $\varphi \subset z_A^\lambda$, *siis järgmised tingimused on samaväärsed:*

(a) $z_A^\lambda = B_A^\lambda$,

(b) $z_A^\lambda = F_A^\lambda$,

(c) $z_A^\lambda = W_A^\lambda$ *või* $z_A^\lambda = W_A^\lambda \oplus \langle u\rangle$, *kus* $u \in F_A^\lambda \setminus W_A^\lambda$,

(d) $z_A^\lambda = S_A^\lambda$ *või* $z_A^\lambda = S_A^\lambda \oplus \langle u\rangle$, *kus* $u \in F_A^\lambda \setminus S_A^\lambda$.

Kui kehtib üks tingimustest (a)-(d), *siis* $z_A^\lambda = I_{\mathfrak{A}}$.

Väide jääb kehtima, kui temas z_A^λ *asemel kõikjal kirjutada* c_A^λ.

Lugeja saab hõlpsasti kontrollida, et tegelikkuses realiseeruvad nii juhud $c_A^\lambda = W_A^\lambda$ ja $c_A^\lambda = W_A^\lambda \oplus \langle u\rangle$ kui ka $z_A^\lambda = W_A^\lambda$ ja $z_A^\lambda = W_A^\lambda \oplus \langle u\rangle$ $(u \in F_A^\lambda \setminus W_A^\lambda)$.

Teeme nüüd mõned märkused λ-konservatiivsete maatriksite A kohta. Sel juhul on $\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1}$ konservatiivne, mistõttu (vrd. teoreem 2.1 (a)) $\sum_k |a_k|/\lambda_k < \infty$. Kui $x \in m_0^\lambda \cap c_A^\lambda$, siis $b = (\lambda_k x_k) \in m$, mistõttu ühelt poolt rida $\sum_k a_k x_k = \sum_k a_k b_k/\lambda_k$ koondub, s.t. $x \in I_{\mathfrak{A}}$. Teiselt poolt,

$$\sup_{n,m}\Big|\sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k\Big| \le \sup_{n,m}\sum_{k=0}^{m}\frac{|a_{nk}|}{\lambda_k}b_k \le \sup_n \sum_k \frac{|a_{nk}|}{\lambda_k}\|b\|_\infty < \infty,$$

niisiis $x \in B_A^\lambda$. Kokkuvõttes oleme tõestanud (vrd. lause 17.3 (a))

LAUSE 17.6. *Kui* A *on* λ-*konservatiivne maatriks, siis* $m_0^\lambda \cap c_A^\lambda \subset F_A^\lambda$.

Selles väites ei saa ruumi m_0^λ asendada ruumiga m^λ või

c^λ. näiteks ühikmaatriksi I korral $e \in c^\lambda = c^\lambda \cap c_I^\lambda \subset m^\lambda \cap c_I^\lambda$, kuid $e \notin F_I^\lambda = z^\lambda$.

Seevastu jada λ^{-1} kuulub λ-konservatiivse maatriksi A korral alamruumi $m_0^\lambda \cap c_A^\lambda \subset F_A^\lambda$, mistõttu iga $f \in (c_A^\lambda)'$ korral eksisteerib (vrd. lause 17.3 (b))

$$\chi_\lambda(f) := f(\lambda^{-1}) - \sum_k \frac{f(e^k)}{\lambda_k} = \mu\Lambda_{\mathfrak{A}}(\lambda^{-1}) = \mu\chi(\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1}). \qquad (17.7)$$

Saadud seose abil on lihtne tõestada järgmist teoreemi.

TEOREEM 17.7. *λ-konservatiivne maatriks A on λ-koregulaarne parajasti siis, kui $\lambda^{-1} \notin W_A^\lambda$.*

Tõestus. Olgu A λ-koregulaarne, s.t. $\chi(\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1}) \neq 0$ (vrd. §16). Pidades silmas, et $\gamma^A \in (c_A^\lambda)'$, saame seose

$$\gamma^A(\lambda^{-1}) = \lim_{\mathfrak{A}} \lambda^{-1} \neq \sum_k \frac{a_k}{\lambda_k} = \sum_k \frac{\gamma^k(e^k)}{\lambda_k}$$

tõttu $\lambda^{-1} \notin W_A^\lambda$. Vastupidi, kui $\lambda^{-1} \notin W_A^\lambda$, siis leidub selline $f \in (c_A^\lambda)'$, et $\chi_\lambda(f) \neq 0$, millest võrduse (17.7) kohaselt järeldub $\chi(\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1}) \neq 0$.

JÄRELDUS 17.8. (a) *λ-koregulaarse maatriksi A korral kehtib võrdus $F_A^\lambda = W_A^\lambda \oplus \langle\lambda^{-1}\rangle$.*
(b) *Kui A on λ-konullmaatriks ning $c_B^\lambda \supset c_A^\lambda$, siis ka B on λ-konullmaatriks.*

Tõestus. Teoreemist 17.7 järeldub lause 17.2 (c) põhjal väide (a) ning lause 5.5 (b) põhjal väide (b).

Täiendused ja märkused

Maatriksi λ-summeeruvusvälja struktuuri uurimine sai alguse Kangro artiklist [295], samast on pärit ka idee ruumi c_A^λ omadusi kirjeldada maatriksite $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1}$ abil. Selles töös defineeris autor λ-koregulaarsed ja λ-konullmaatriksid ning, tõestades teoreemi 17.7, andis neile mõistetele topoloogilise sisu. Samas on leitud tarvilikud ja piisavad tingimused jada $x \in c_A^\lambda$ lõigete nõrgaks koonduvuseks (vrd. lause 17.3 (c)) ja selleks, et A oleks λ-AK-maatriks (vrd. lause 17.4 (d)). Muuhulgas tõi autor ka näiteid λ-koregulaarsete klassikaliste summeerimismenetluste kohta.

Ruumi c_A^{λ} tähtsaid alamruume käsitleb Leigeri artikkel [311], kust on pärit suur osa käesoleva paragrahvi tulemustest. λ-AB-maatriksi mõiste oli defineeritud Leigeri ja Maasiku töös [312].

Beekmann [18] tõestas, et **A** on λ-konullmaatriks parajasti siis, kui c_A^{λ} on konulliline alamruumi c^{λ} suhtes (Beekmanni ja Changi mõttes, vt. §8, täiendused ja märkused). Ta näitas, et antud kiiruse λ korral saab valida maatriksi D, mis rahuldab tingimusi $c_D = c^{\lambda}$ ja $\lim_D x = \beta(x)$. Veelgi enam, Beekmann ja Chang tõestasid, et iga kiiruse λ ja maatriksi **A** puhul leidub selline maatriks B, et $c_B = c_A^{\lambda}$.

§18. MAATRIKSITE λ-ASENDATAVUS. ALAMRUUM P_A^{λ}

Samuti, kui funktsionaali $f \in c_A'$ puhul, kerkib ka $f \in (c_A^{\lambda})'$ korral üles küsimus kordaja μ ühesusest selle funktsionaali erinevates esitustes

$$f(x) = \sigma \lim_A x + \mu\gamma^A(x) + td + \alpha x \qquad (x \in c_A^{\lambda}), \tag{18.1}$$

kus $\sigma, \mu \in \mathbb{K}$, $t \in l$ ja $\alpha \in (c_A^{\lambda})^{\beta}$ (vt. teoreem 15.2 (b)). Arutledes samamoodi nagu §8 alguses, jõuame kahe lihtsa, kuid olulise faktini: 1) kui kordaja μ on üheselt määratud nullfunktsionaali $0 \in (c_A^{\lambda})'$ korral (s.t. kui $\mu = 0$ funktsionaali 0 igas esituses), siis on ta seda kõikide $f \in (c_A^{\lambda})'$ puhul ning sel juhul nimetame maatriksit **A** *λ-μ-üheseks*, 2) kui **A** ei ole λ-μ-ühene, saab iga $\rho \in \mathbb{K}$ jaoks leida iga $f \in (c_A^{\lambda})'$ niisuguse esituse (18.1), kus $\mu = \rho$.

LAUSE 18.1 (a) *Kui maatriksi* **A** *korral* $B_A^{\lambda} \neq W_A^{\lambda}$, *siis* **A** *on λ-μ-ühene.*

(b) *Iga λ-koregulaarne maatriks on λ-μ-ühene.*

Tõestus. (a) Oletame, et **A** ei ole λ-μ-ühene. Eelneva märkuse 2) põhjal on nullfunktsionaalil $0 \in (c_A^{\lambda})'$ selline esitus (18.1), kus $\mu = 1$. Valemist (17.4) saame seose

$$\lim_{\mathfrak{A}} x = \sum_k a_k x_k \qquad (x \in B_A^{\lambda}),$$

mistõttu $B_A^\lambda = W_A^\lambda$ (vrd. lause 17.3 (c)).

Väide (b) tuleneb vahetult väitest (a) ning järeldusest 17.8 (a).

Tulles maatriksite asendatavuse juurde λ-summeeruvuse mõttes, tõestame me enne selle mõiste defineerimist lausega 8.5 analoogilise väite, millele suuresti tugineb asendatavuse uurimine. Selleks vajame me järgmist funktsionaalanalüüsi kursusest tuntud Hahni teoreemi.

LEMMA 18.2. *Sisalduvuse* $l \subset c_T$ *kehtivuseks on maatriksi* $T := (t_{nk})$ *korral tarvilikud ja piisavad tingimused*

eksisteerib $\lim\limits_n t_{nk} =: t_k \quad (k \in \mathbb{N})$,

$\sup\limits_{n,k} |t_{nk}| < \infty$.

Sel juhul

$\lim_T x = \sum\limits_k t_k x_k \quad (x \in l)$.

Toodud väite tõestus kuulub funktsionaalanalüüsi harjutusvarasse. Selleks võib kasutada kas Banach-Steinhausi teoreemi või teoreemi kinnisest graafikust.

LAUSE 18.3. *Olgu* A *maatriks*.

(a) *Iga* $f \in (c_A^\lambda)'$ *korral leidub selline maatriks* B, *et* $c_B^\lambda \supset c_A^\lambda$, $z_B^\lambda \supset z_A^\lambda$ *ning* $\gamma^B(x) = f(x)$ $(x \in c_A^\lambda)$.

(b) *Kui funktsionaali* $f \in (c_A^\lambda)'$ *mingis esituses* (18.1) $\mu \neq 0$, *siis leidub niisugune maatriks* B, *et*

$$c_B^\lambda = c_A^\lambda,\ z_B^\lambda = z_A^\lambda,\ \gamma^B(x) = f(x) \quad (x \in c_A^\lambda).$$

Tõestus. (a) Lähtume funktsionaali $f \in (c_A^\lambda)'$ esitusest (18.1) ning defineerime maatriksi D seosega

$$d_{nk} := \begin{cases} t_k \dfrac{\lambda_k}{\lambda_n}, \text{ kui } k < n, \\ \mu + \dfrac{\sigma}{\lambda_n} - \dfrac{1}{\lambda_n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} t_i \lambda_i, \text{ kui } k = n, \\ 0, \text{ kui } k > n. \end{cases}$$

Edasi moodustame maatriksid $C := DA$, $R := (r_{nk})$, kus

$$r_{nk} := \begin{cases} \alpha_k / \lambda_n, \text{ kui } k \leq n, \\ 0, \text{ kui } k > n, \end{cases}$$

ja B seosega

$$b_{nk} := \begin{cases} \alpha_k, & \text{kui } n = 0, \\ c_{nk} + r_{nk}, & \text{kui } n \geq 1. \end{cases}$$

Kuna

$$c_{nk} = \sum_i d_{ni} a_{ik} = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=0}^{n-1} t_i \lambda_i a_{ik} + d_{nn} a_{nk},$$

siis iga $x \in c_A^\lambda$ ja $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\sum_k b_{nk} x_k = \sum_k \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=0}^{n-1} t_i \lambda_i a_{ik} x_k + \sum_k d_{nn} a_{nk} x_k + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k$$

$$= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=0}^{n-1} t_i \lambda_i y_i + \Big(\mu + \frac{\sigma}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=0}^{n-1} t_i x_i\Big) y_n,$$

kus $y := Ax$ ja millest protsessis $n \to \infty$ saame

$$\lim_B x = \mu \lim_A x. \tag{18.2}$$

Viimase võrduse tõestuseks märgime kõigepealt, et tänu eeldusele $\lambda_n \uparrow \infty$ on $\lim_n (\sigma/\lambda_n) \sum_k a_{nk} x_k = 0$ ja $\lim_n (1/\lambda_n) \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k = 0$. Jääb näidata veel, et

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=0}^{n-1} t_i \lambda_i y_i = 0 \tag{18.3}$$

ja

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=0}^{n-1} t_i \lambda_i y_n = 0. \tag{18.4}$$

Esimese tingimuse kontrollimiseks tähistame fikseeritud $x \in c_A^\lambda$ korral

$$t_{ni} := \begin{cases} (\lambda_i/\lambda_n) y_i, & \text{kui } i < n, \\ 0, & \text{kui } i \geq n, \end{cases}$$

siis

$$|t_{ni}| \leq |y_i| \leq \|x\|_A \quad (n, i \in \mathbb{N})$$

ja

$$\lim_n t_{ni} = 0 \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Kuna $t \in l$, siis lemmast 18.2 saamegi võrduse (18.3). Seos (18.4) tõestatakse analoogiliselt. Sellega on võrdus (18.2) tõestatud.

Edasi,

$$d_n^B(x) = \lambda_n \Big(\sum_k b_{nk} x_k - \lim_B x\Big)$$

$$= \lambda_n \Big(\frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=0}^{n-1} t_i \lambda_i y_i + \mu y_n + \frac{\sigma}{\lambda_n} y_n$$

$$- \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=0}^{n-1} t_i \lambda_i y_n + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k - \mu \lim_A x\Big)$$

$$= \sigma y_n + \mu\lambda_n(y_n - \lim_A x) + \sum_{i=0}^{n-1} t_i\lambda_i(y_i - y_n) + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k$$

ning protsessis $n \to \infty$ saame

$$\gamma^B(x) = \lim_n d_n^B(x) = \sigma \lim_A x + \mu\gamma^A(x) + \sum_n t_n d_n^A(x) + \alpha x$$
$$= f(x)$$

iga $x \in c_A^\lambda$ korral. Seejuures on problemaatiline vaid võrdus

$$\lim_n \sum_{i=0}^{n-1} t_i\lambda_i(y_i - y_n) = \sum_n t_n d_n^A(x). \qquad (18.5)$$

Selle tõestuseks tähistame fikseeritud $x \in c_A^\lambda$ puhul

$$q_{ni} := \begin{cases} \lambda_i(y_i - y_n), & \text{kui } i < n, \\ 0, & \text{kui } i \geq n \end{cases}$$

ja hindame

$$|q_{ni}| = \lambda_i|y_i - y_n| = \lambda_i|(y_i - \lim_A x) + (\lim_A x - y_n)|$$
$$\leq |d_i^A(x)| + \lambda_i|\lim_A x - y_n|$$
$$\leq |d_i^A(x)| + |d_n^A(x)| \leq 2\sup_n|d_n^A(x)|$$
$$\leq 2\|x\|_A^\lambda \qquad (i < n).$$

Kuna $\lim_n q_{ni} = d_i^A(x)$ ja $t \in 1$, siis lemma 18.2 kohaselt $\lim_Q x = \sum_i t_i d_i^A(x)$, s.t. kehtib (18.5). Kokkuvõttes on väide tõestatud (märgime, et sisalduvus $z_B^\lambda \supset z_A^\lambda$ tuleneb sisalduvusest $c_B^\lambda \supset c_A^\lambda$ ja seosest (18.2)).

(b) Kuivõrd $\lim_n \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k$ ja $\lim_n \sum_k a_{nk} x_k$ on olemas iga $x \in c_A^\lambda$ korral, siis $d_n^B(x)$ avaldisest väite (a) tõestuses näeme, et $\lim_n d_n^B(x)$ eksisteerib parajasti sel juhul, kui eksisteerib

$$\lim_n\Big(\sum_{i=0}^{n-1} t_i\lambda_i(y_i - y_n) + \mu d_n^A(x)\Big)$$

$$= \lim_n\Big(\sum_{i=0}^{n-1} t_i\lambda_i(y_i - \lim_A x) + \mu d_n^A(x) - \frac{1}{\lambda_n}\sum_{i=0}^{n-1} t_i\lambda_i\lambda_n(y_n - \lim_A x)\Big)$$

$$= \lim_n\Big(\sum_{i=0}^{n-1} t_i d_i^A(x) + \Big(\mu - \frac{1}{\lambda_n}\sum_{i=0}^{n-1} t_i\lambda_i\Big)d_n^A(x)\Big)$$

$$= \lim_n\Big(\sum_{i=0}^{n-1} t_i d_i^A(x) + \rho_n d_n^A(x)\Big),$$

kus

$$\rho_n := \mu - \frac{1}{\lambda_n}\sum_{i=0}^{n-1} t_i\lambda_i \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Seejuures saame lemmast 18.2 tänu tingimustele $t \in 1$ ja $\lambda_n \uparrow \infty$, et $\lim_n (1/\lambda_n)\sum_{i=0}^{n-1} t_i\lambda_i = 0$, s.t. $\rho_n \to \mu$ $(n \to \infty)$. Rakendades lemmat 8.6, jõuamegi soovitud tulemuseni: juhul

$\mu \neq 0$ eksisteerib $\lim_n d_n^B(x)$ parajasti siis, kui eksisteerib $\lim_n d_n^A(x)$, s.t. kui $x \in c_A^\lambda$. Kokkuvõttes oleme saanud võrduse $c_B^\lambda = c_A^\lambda$, millest tänu seosele (18.2) tuleneb $z_B^\lambda = z_A^\lambda$.

Maatriksit A nimetatakse λ-*asendatavaks*, kui leidub selline maatriks B, et $c_B^\lambda = c_A^\lambda$ ja kern $\gamma^B \supset \varphi$. Nagu hariliku summeeruvuse puhul, on ka siin asendatavuse uurimisel esiplaanil tema seos vastava summeeruvusvälja struktuuriprobleemidega.

LAUSE 18.4. (a) *Maatriks* A *on* λ-*asendatav, kui leidub niisugune funktsionaal* $f \in (c_A^\lambda)'$, *et* kern $f \supset \varphi$ *ja* $\mu \neq 0$ *tema mingis esituses* (18.1).
(b) *Iga maatriks, mis ei ole* λ-μ-*ühene, on* λ-*asendatav.*
(c) *Kui* A *on* λ-*asendatav, siis* $B_A^\lambda = F_A^\lambda$.
(d) *Kui* $c_A^\lambda = I_{\mathfrak{A}}$, *siis* A *on* λ-*asendatav.*
(e) *Kui* $c_A^\lambda = B_A^\lambda$, *siis* A *on* λ-*asendatav.*

Tõestus. (a) Antud tingimustel saab vastavalt lausele 18.3 (b) valida maatriksi B omadustega $c_B^\lambda = c_A^\lambda$ ning $\gamma^B(x) = f(x) = 0$ iga $x \in \varphi$ korral. Seega on A λ-asendatav maatriks.

Väide (b) järeldub vahetult väitest (a).

(c) Kui B on selline maatriks, et $c_B^\lambda = c_A^\lambda$ ja kern $\gamma^B \supset \varphi$, siis $I_{\mathfrak{B}} \supset B_B^\lambda$, kus $\mathfrak{B} := (\lambda_n(b_{nk} - b_k))_{n,k}$ ning $F_A^\lambda = F_B^\lambda = B_B^\lambda \cap I_{\mathfrak{B}} = B_B^\lambda = B_A^\lambda$.

(d) Juhul $I_{\mathfrak{A}} \supset c_A^\lambda$ on funktsionaal

$$x \to \gamma^A(x) - \sum_k a_k x_k$$

pidev ja lineaarne FK-ruumis c_A^λ. Kuna tema selles esituses $\mu = 1$, siis väite (a) kohaselt saab valida maatriksi B niimoodi, et $c_B^\lambda = c_A^\lambda$ ja $\gamma^B(x) = \gamma^A(x) - \sum_k a_k x_k$ $(x \in c_A^\lambda)$. Seejuures $\gamma^B(e^k) = a_k - a_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$, s.t. kern $\gamma^B \supset \varphi$.

Väide (e) järeldub lausest 17.5 ning väitest (d).

TEOREEM 18.5. (a) *Selleks, et* λ-*koregulaarne maatriks* A *oleks* λ-*asendatav, on tarvilik ja piisav tingimus*

$$\lambda^{-1} \notin \bar{\varphi} \quad \text{FK-ruumis } c_A^\lambda. \tag{18.6}$$

(b) *Olgu* A *selline* λ-*konservatiivne maatriks, et* $z_A^\lambda \supset \varphi$ *ja* $e \notin z_A^\lambda$. *Tingimus* (18.6) *on tarvilik ja piisav selleks, et leiduks* λ-*regulaarne maatriks* B *omadusega* $c_B^\lambda = c_A^\lambda$.

Tõestus. (a) Tarvilikkus. Rahuldagu maatriks B tingimusi $c_B^\lambda = c_A^\lambda$ ja kern $\gamma^B \supset \varphi$, kus A on λ-koregulaarne. Oletame vastuväiteliselt, et $\lambda^{-1} \in \bar{\varphi}$. Sel juhul leidub alamruumi φ elementide jada $(x^{(n)})$, mis koondub FK-ruumis c_A^λ punktiks λ^{-1}. Tänu funktsionaali γ^B pidevusele ruumis c_A^λ kehtib $\gamma^B(\lambda^{-1}) = \lim_n \gamma^B(x^{(n)}) = 0$, mistõttu $\gamma^B(\lambda^{-1}) - \sum_k \gamma^B(e^k)/\lambda_k = 0$, s.t. B on λ-konullmaatriks. Järelduse 17.8 (b) põhjal on see vastuolus eeldusega, et A on λ-koregulaarne. Niisiis, $\lambda^{-1} \notin \bar{\varphi}$.

Piisavus. Kui λ-koregulaarne maatriks A rahuldab tingimust (18.6), siis lause 4.11 (a) kohaselt leidub $f \in (c_A^\lambda)'$ nii, et kern $f \supset \varphi$ ja $f(\lambda^{-1}) \ne 0$. Seejuures (vrd. (17.7))

$$0 \ne f(\lambda^{-1}) = \chi_\lambda(f) = \mu\chi(\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1}),$$

mistõttu $\mu \ne 0$. Valime vastavalt lausele 18.3 (b) niisuguse maatriksi B, et $c_B^\lambda = c_A^\lambda$ ja $\gamma^B(x) = f(x)$ iga $x \in c_A^\lambda$ korral. Siis kern $\gamma^B \supset \varphi$, seega on A λ-asendatav.

Väide (b) on järeldus väitest (a). Tuleb vaid silmas pidada, et viimase piisavuse tõestamisel konstrueeritud maatriks B rahuldab lause 18.3 (b) kohaselt ka tingimust $z_B^\lambda = z_A^\lambda$. seega $z_B^\lambda \supset \varphi$ ja $e \in c_B^\lambda \setminus z_B^\lambda$. Kuna B on λ-koregulaarne (vrd. järeldus 17.8 (b)), siis maatriks $\mathfrak{B} = (\lambda_n b_{nk}/\lambda_k)_{nk}$ on τ-multiplikatiivne, kus $\tau := \lim_n \lambda_n \sum_k b_{nk}/\lambda_k \ne 0$. Lause 16.3 põhjal on B λ-regulaarne.

Teoreem on tõestatud.

Siinkohal märgime üht asjaolu, mida lugeja eelmises ja käesolevas paragrahvis on kindlasti juba tähele pannud. FK-ruumide c_A ja c_A^λ struktuuriprobleemid taanduvad nii või teisiti jadade lõigete, s.o. alamruumi φ omadustele. Seejuures on λ-konservatiivse A korral FK-topoloogia ruumis c_A^λ sedavõrd tugev, et jada e ei kuulu φ sulundisse ega ka alamruumi B_A^λ. Rolli, mida e mängib konservatiivse maatriksi summeeruvusväljas, võtab FK-ruumis c_A^λ enda kanda jada λ^{-1}. Sõltuvalt sellest, kas λ^{-1} kuulub alamruumi W_A^λ või mitte, jagunevad λ-konservatiivsed maatriksid A λ-konullilisteks ja λ-koregulaarseteks. Viimased omakorda jagunevad kahte klassi vastavalt sellele, kas λ^{-1} on φ puutepunkt või ei, niisiis mitte-λ-asendatavateks ja λ-asendatavateks maatriksiteks.

Muidugi saab konstrueerida λ-konservatiivseid maatrikse (sealjuures väga lihtsaid), mille korral $e \in \bar{\varphi}$ või koguni $e \in S_A^\lambda$, kuid nende roll piirdub enamasti kontranäidetega.

Öeldut silmas pidades võib arvata, et ka alamruum P_A^λ, mille me järgnevalt P_A eeskujul (vt. §9) λ-summeeruvusväljas c_A^λ defineerime, ei ulatu λ-koregulaarse A korral punktini e.

Funktsionaali $f \in (c_A^\lambda)'$ nimetame maatriksi A *λ-testfunktsiooniks*, kui $\ker f \supset \varphi$ ja $\mu = 0$ tema mingis esituses (18.1). Edasi defineerime

$P_A^\lambda := \{x \in c_A^\lambda \mid f(x) = 0$ iga λ-testfunktsiooni f korral$\}$,

s.t. $P_A^\lambda = \bigcap\{\ker f \mid f$ on λ-testfunktsioon$\}$. Viimasest seosest tuleneb võrdus $P_A^\lambda = \overline{P_A^\lambda}$. Lihtne on näha, et $P_A^\lambda \supset B_A^\lambda$: kui f on λ-testfunktsioon, siis $f(x) = \rho x$ iga $x \in B_A^\lambda$ korral (vrd. (17.3)), kusjuures $\rho_k = f(e^k) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$, s.t. $\ker f \supset B_A^\lambda$.

LAUSE 18.6. *Olgu A selline maatriks, et $B_A^\lambda \neq W_A^\lambda$.*

(a) *Kui $\ker f \supset B_A^\lambda$, siis $f \in (c_A^\lambda)'$ on maatriksi A λ-testfunktsioon.*

(b) $P_A^\lambda = \overline{B_A^\lambda}$.

(c) *Kui A on λ-koregulaarne, siis $P_A^\lambda = \overline{z^\lambda}$.*

Tõestus. (a) Olgu $f \in (c_A^\lambda)'$ niisugune funktsionaal, et $\ker f \supset B_A^\lambda$, kuid $\mu \neq 0$ tema esituses (18.1) (peame silmas, et eelduse $B_A^\lambda \neq W_A^\lambda$ tõttu on A λ-μ-ühene maatriks (vrd. lause 18.1 (a))). Kuna (vrd. (17.3))

$$f(x) = \mu\gamma^A(x) + \rho x \qquad (x \in B_A^\lambda),$$

kus $\rho \in (B_A^\lambda)^\beta$, siis

$$0 = f(e^k) = \mu\alpha_k + \rho_k \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

mistõttu

$$0 = f(x) = \mu(\gamma^A(x) - \sum_k \alpha_k x_k) \qquad (x \in B_A^\lambda).$$

Seega $B_A^\lambda \subset \Lambda_{\mathrm{u}}^\perp$ ning lause 17.3 (c) põhjal $B_A^\lambda = W_A^\lambda$.

(b) Olgu $f \in (c_A^\lambda)'$ suvaline selline funktsionaal, mis rahuldab tingimust $\ker f \supset B_A^\lambda$. Väite (a) kohaselt on f maatriksi A λ-testfunktsioon, seetõttu $\ker f \supset P_A^\lambda$. Lause 4.11 (a) põhjal $P_A^\lambda \subset \overline{B_A^\lambda}$, millest sisalduvuse $B_A^\lambda \subset P_A^\lambda$ ja P_A^λ kinnisuse tõttu järeldub seos $P_A^\lambda = \overline{B_A^\lambda}$.

(c) Kui A on λ-koregulaarne, siis $z^\lambda \subset F_A^\lambda \subset P_A^\lambda$ (vrd. lause 17.6), seega $\overline{z^\lambda} \subset \overline{P_A^\lambda} = P_A^\lambda$. Vastupidise sisalduvuse näitamiseks võtame funktsionaali $f \in (c_A^\lambda)'$ omadusega $\ker f \supset z^\lambda$ ning veendume, et tema (üheselt määratud) kordaja μ

võrdub nulliga. Sel juhul on f λ-testfunktsioon, niisiis kehtib kern f $\supset P_A^{\lambda}$ ja lause 4.11 (a) annab sisalduvuse $P_A^{\lambda} \subset \overline{z_A^{\lambda}}$.

Tingimuse kern f $\supset z^{\lambda}$ tõttu

$$0 = f(\lambda^{-1}) = \sigma \lim_A \lambda^{-1} + \mu\gamma^A(\lambda^{-1}) + \sum_r t_r d_r^A(\lambda^{-1}) + \omega\lambda^{-1}$$

ja

$$0 = \sum_k \frac{f(e^k)}{\lambda_k} = \sigma\sum_k \frac{a_k}{\lambda_k} + \mu\sum_k \frac{a_k}{\lambda_k} + \sum_k \sum_r t_r \lambda_r \frac{a_{rk} - a_k}{\lambda_k} + \omega\lambda^{-1},$$

millest tingimuse $\lambda^{-1} \in B_A^{\lambda}$ (vrd. lause 17.6) ja lause 17.2 põhjal saame

$$0 = \mu(\gamma^A(\lambda^{-1}) - \sum_k \frac{a_k}{\lambda_k}) = \mu\chi(\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1}).$$

Et $\chi(\mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1}) \neq 0$, siis $\mu = 0$.

Järgmised kaks väidet jätame lugejale lausete 9.3 (b) ja 9.4 eeskujul iseseisvalt tõestada.

LAUSE 18.7. (a) *Iga maatriksi A korral on* $P_A^{\lambda} = \bar{\varphi}$ *või* $P_A^{\lambda} = \bar{\varphi} \oplus \langle u \rangle$, *kus* $u \in P_A^{\lambda}\setminus\bar{\varphi}$.

(b) *Kui* $P_A^{\lambda} \neq \bar{\varphi}$, *siis A on λ-μ-ühene ning λ-asendatav maatriks.*

Nüüd teeme mõned märkused selliste maatriksite kohta, mis rahuldavad tingimust $z_A^{\lambda} \supset \varphi$. Kuna sel juhul $a_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}$), siis $A_A^{\perp} = c_{oA}$ ning $S_A^{\lambda} \subset W_A^{\lambda} \subset F_A^{\lambda} \subset B_A^{\lambda} \subset z_A^{\lambda}$ (vrd. (17.6)). Vahetu kontroll näitab, et

$$z_A^{\lambda} = c_{\mathfrak{A}} = \lambda^{-1}\cdot c_R$$

ja

$$f \in (z_A^{\lambda})' \iff f \circ \lambda^{-1} \in c_R', \tag{18.7}$$

kus $R := (\lambda_r a_{rk}/\lambda_k)_{r,k} = \mathfrak{A}\cdot\lambda^{-1}$ ja $f \circ \lambda^{-1}(w) := f(\lambda^{-1}\cdot w)$ iga $w \in c_R$ korral. Seejuures

$$W_A^{\lambda} = W_{\mathfrak{A}} = \lambda^{-1}\cdot W_R. \tag{18.8}$$

Esimene võrdus on ilmne, teise kontrollimiseks võtame suvalised $w \in W_R$ ja $f \in c_{\mathfrak{A}}'$ siis $f \circ \lambda^{-1} \in c_R'$ ning

$$f(\lambda^{-1}\cdot w) = (f \circ \lambda^{-1})(w) = \sum_k (f \circ \lambda^{-1})(e^k) w_k$$

$$= \sum_k f(e^k)\frac{w_k}{\lambda_k},$$

s.t. $\lambda^{-1}\cdot W_R \subset W_{\mathfrak{A}}$. Vastupidine sisalduvus tõestatakse samamoodi.

Lihtne on veenduda, et võrdustega (18.8) analoogilised seosed kehtivad ka teiste eelmises paragrahvis vaadeldud tähtsate alamruumide puhul, siinkohal vaatleme sama probleemi P_A^λ korral. Kõigepealt paneme tähele, et kui funktsionaal $f \in (c_A^\lambda)'$ kujul

$$f(x) = \sigma \lim_A x + \sum_n t_n d_n^A(x) + \alpha x \quad (x \in c_A^\lambda), \tag{18.9}$$

kus $\sigma \in \mathbb{K}$, $t \in 1$ ja $\alpha \in (c_A^\lambda)^\beta$, on λ-testfunktsioon, siis on seda ka kõik funktsionaalid $g \in (c_A^\lambda)'$, mis erinevad valemiga (18.9) määratud funktsionaalist f ainult kordaja σ poolest. See järeldub vahetult seostest $g(e^k) = f(e^k) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$.

/**LAUSE** 18.8. *Kui A on maatriks omadusega $z_A^\lambda \supset \varphi$, siis*
(a) $P_A^\lambda \subset z_A^\lambda$,
(b) $P_A^\lambda = P_{\mathfrak{A}} = \lambda \cdot P_R$.

Tõestus. (a) On selge, et juhul $P_A^\lambda = \bar{\varphi}$ väide kehtib. Samuti on väite kehtivus ilmne, kui $B_A^\lambda \neq W_A^\lambda$, sest lause 18.6 (b) põhjal on siis $P_A^\lambda = \overline{B_A^\lambda} \subset \overline{z_A^\lambda} = z_A^\lambda$ (vrd. lause 17.2). Vastavalt lausele 18.7 (a) jääb üle vaadelda veel seda juhtu, kui $B_A^\lambda = W_A^\lambda$ ja $P_A^\lambda = \bar{\varphi} \oplus \langle u \rangle$ ning $u \notin \bar{\varphi}$. Olgu f mingi λ-testfunktsioon kujul (18.9). Võttes $x := u$, saame võrduse

$$0 = \sigma \lim_A u + \sum_n t_n d_n^A(u) + \alpha u.$$

Kui oletada, et $\lim_A u \neq 0$, võime fikseeritud t ja α korral kordaja σ üheselt määrata, see on vastuolus käesolevale lausele eelnenud tähelepanekuga. Niisiis, $P_A^\lambda \subset z_A^\lambda$.

(b) Kuna $P_A^\lambda \subset z_A^\lambda = c_{\mathfrak{A}}$, siis P_A^λ määravad λ-testfunktsioonide ahendid alamruumile z_A^λ, need on aga parajasti maatriksi $\mathfrak{A}$ testfunktsioonid. Seega $P_A^\lambda = P_{\mathfrak{A}}$. Samal põhjusel võime öelda, et $f \in (z_A^\lambda)'$ on maatriksi A λ-testfunktsioon parajasti siis, kui $f \circ \lambda^{-1}$ on maatriksi R testfunktsioon (vrd. (18.7)), järelikult $P_A^\lambda = \lambda \cdot P_R$.

Tulles λ-konservatiivsete maatriksite juurde, seame endale eesmärgiks välja selgitada, kuidas paiknevad λ-tõkestatud jadad sellise maatriksi λ-summeeruvusväljas.

LAUSE 18.9.(a) *Kui A on λ-koregulaarne maatriks, siis* $m^\lambda \cap c_A^\lambda \subset \overline{c^\lambda}$.

(b) *Kui maatriks* A *on* λ-*konservatiivne ning* c^λ *on FK-ruumi* c_A^λ *kinnine alamruum, siis* A *on* λ-*koregulaarne.*
(c) *Iga* λ-*konullmaatriksi* A *korral* $c_A^\lambda \not\subset m^\lambda$.
(d) *Kui* λ-*konservatiivse maatriksi* A *korral* $c_A^\lambda \subset m^\lambda$, *siis* $c_A^\lambda = c^\lambda$.

Tõestus. (a) Lausete 17.6 ja 18.6 (c) põhjal $m_0^\lambda \cap c_A^\lambda \subset F_A^\lambda \subset F_A^\lambda \subset \overline{z^\lambda}$, millest lause 4.11 (c) kohaselt saame

$$m^\lambda \cap c_A^\lambda = (m_0^\lambda \oplus \langle e\rangle) \cap c_A^\lambda = (m_0^\lambda \cap c_A^\lambda) \oplus \langle e\rangle$$

$$\subset \overline{z^\lambda} \oplus \langle e\rangle = \overline{z^\lambda \oplus \langle e\rangle} = \overline{c^\lambda}.$$

(b) Kui $c^\lambda = \overline{c^\lambda}$ FK-ruumis c_A^λ, siis FK-topoloogia ühesuse tõttu on poolnormide süsteem $\{\|\ \|_{A^\lambda}\} \cup \mathcal{P}$ alamruumil c^λ ekvivalentne normiga $\|\ \|_\lambda$. Kuna $\lambda^{-1} \notin n^\lambda = W_{c^\lambda}$, siis $\lambda^{-1} \notin W_A^\lambda$, s.t. A on λ-koregulaarne.

(c) Eeldusel $c^\lambda \subset c_A^\lambda \subset m^\lambda$ on c^λ kinnine FK-ruumis c_A^λ (vt. lausele 10.4 eelnenud märkus). Väite (b) kohaselt on A sel juhul λ-koregulaarne.

(d) Kui $c^\lambda \subset c_A^\lambda \subset m^\lambda$, siis väite (c) põhjal on A λ-koregulaarne maatriks, mistõttu väite (a) kohaselt $c_A^\lambda = m^\lambda \cap c_A^\lambda \subset \bar{c}$. Seejuures on $c^\lambda = \overline{c^\lambda}$, järelikult kehtib $c_A^\lambda = c^\lambda$.

TEOREEM 18.10. *Järgmised tingimused on* λ-*konservatiivse maatriksi* A *korral samaväärsed:*
(a) $m^\lambda \cap c_A^\lambda = c^\lambda$,
(b) $m_0^\lambda \cap c_A^\lambda = z^\lambda$,
(c) z^λ *on FK-ruumi* c_A^λ *kinnine alamruum,*
(d) c^λ *on FK-ruumi* c_A^λ *kinnine alamruum.*

Tõestus. (a) $\rightarrow$ (b) Kuna $m^\lambda \cap c_A^\lambda = (m_0^\lambda \cap c_A^\lambda) \oplus \langle e\rangle$ ja $c^\lambda = z^\lambda \oplus \langle e\rangle$ ning jada e ei kuulu alamruumidesse m_0^λ ja z^λ, siis väitest (a) järeldub väide (b).

(b) $\rightarrow$ (c) Seosest (b) järeldub, et

$$c = \lambda\cdot z^\lambda = \lambda\cdot(m_0^\lambda \cap c_A^\lambda) = (\lambda\cdot m_0^\lambda) \cap (\lambda\cdot c_A^\lambda) = m \cap (\lambda\cdot c_A^\lambda),$$

seejuures on $\lambda\cdot c_A^\lambda$ FK-ruum. Nimelt võib teda vaadelda ruumina E_V (vrd. teoreem 6.3 (b)), kus $E := c_A^\lambda$ ja V on maatriks, mille peadiagonaaliks on jada λ^{-1} ning ülejäänud koordinaadid on võrdsed nulliga. Selline maatriks korraldab FK-ruumide $\lambda \cdot c_A^\lambda$ ja c_A^λ vahel topoloogilise isomorfismi. Kuna $\lambda \cdot c_A^\lambda$ ei sisalda ühtki tõkestatud hajuvat jada, siis lause 10.6 kohaselt on $c_0 \cap (\lambda \cdot c_A^\lambda)$ tema kinnine alamruum. Järelikult on

$$V[c_0 \cap \lambda \cdot c_A^\lambda] = \lambda^{-1} \cdot (c_0 \cap \lambda \cdot c_A^\lambda) = z^\lambda \cap c_A^\lambda = z^\lambda$$

kinnine alamruum FK-ruumis c_A^λ.

(c) $\rightarrow$ (d) Kui FK-ruumis c_A^λ kehtib $z^\lambda = \overline{z^\lambda}$, siis (vrd. lause 4.11 (c))

$$c^\lambda = z^\lambda \oplus \langle e \rangle = \overline{z^\lambda} \oplus \langle e \rangle = \overline{z^\lambda \oplus \langle e \rangle} = \overline{c^\lambda}.$$

(d) $\rightarrow$ (a) Kui $c^\lambda = \overline{c^\lambda}$ FK-ruumis c_A^λ, siis lause 18.9 (b) põhjal on A λ-koregulaarne maatriks ning lausest 18.9 (a) järeldub $m^\lambda \cap c_A^\lambda = c^\lambda$.

Lõpuks vaatleme põgusalt λ-*perfektseid* maatrikse, nii nimetatakse λ-konservatiivseid maatrikse A, mille λ-summeeruvusväljas c_A^λ jadad e^k $(k \in \mathbb{N})$, λ^{-1} ja e moodustavad põhihulga. Viimane tingimus on samaväärne seosega $c_A^\lambda = \overline{c^\lambda}$ (vrd. §9 algus). Lause 18.6 (c) põhjal on λ-koregulaarne maatriks parajasti siis λ-perfektne, kui $c_A^\lambda = P_A^\lambda \oplus \langle e \rangle$.

LAUSE 18.11. *Olgu A niisugune λ-reversiivne λ-koregulaarne maatriks, et $\sum_k a_{nk} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$.*
(a) *A on λ-perfektne parajasti siis, kui* $R := (\lambda_n a_{nk} / \lambda_k)_{nk}$ *on M-tüüpi maatriks.*
(b) *Kui A on normaalne ning* $\lambda_k \alpha_{ki} = O_k(1)$ $(i \in \mathbb{N})$, *kus* $A^{-1} := (\alpha_{ki})$ *on A pöördmaatriks, siis A on λ-perfektne.*

Tõestus. (a) Antud eeldustel kehtib $\varphi \subset z^\lambda \subset z_A^\lambda$, täpsemalt

$$c_A^\lambda = z_A^\lambda \oplus \langle e \rangle. \tag{18.10}$$

Tänu viimasele seosele järeldub A λ-konservatiivsusest, et operaator $A : z_A^\lambda \rightarrow z^\lambda$ on pööratav, millest omakorda tuleneb maatriksi R reversiivsus. Tõepoolest, iga $y \in c$ korral kehtib $v := (y_n / \lambda_n) \in z^\lambda$, mistõttu võrrand $\sum_k r_{nk} w_k = y_n$ $(n \in \mathbb{N})$ on üheselt lahenduv parajasti siis, kui võrrandil $\sum_k a_{nk} x_k = v_n$ $(n \in \mathbb{N})$ on ühene lahend $x := \lambda^{-1} \cdot w$ iga $v \in z^\lambda$ puhul. Kokkuvõttes on R reversiivne koregulaarne maatriks ning $\lambda^{-1} \cdot c_R = z_A^\lambda$. Lause 9.6 (a) põhjal on R parajasti siis M-tüüpi, kui ta on perfektne, s.t. kui $P_R = c_R$ ehk (vt.

lause 18.8 (b))

$$P_A^\lambda = \lambda^{-1}\cdot P_R = \lambda^{-1}\cdot c_R = z_A^\lambda .$$

Viimane seos on lause 18.6 (c) ja võrduse (18.10) põhjal samaväärne maatriksi A λ-perfektsusega.

(b) Lihtne on veenduda, et kui A on normaalne, siis maatriksi R pöördmaatriks $R^{-1} := (\rho_{ki})$ on kujul

$$\rho_{ki} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_k \alpha_{ki}}{\lambda_i}, & \text{kui } i \le k, \\ 0, & \text{kui } i > k. \end{cases}$$

Seega on R juhul $\lambda_k \alpha_{ki} = O_k(1)$ $(i \in \mathbb{N})$ lause 9.6 (b) põhjal perfektne, millest väite (a) kohaselt järeldubki maatriksi A λ-perfektsus.

<u>Näide 1.</u> Vaatleme λ-regulaarset Rieszi kaalutud keskmiste menetlust M_p. Kuna tema pöördmaatriksi veerud sisaldavad vaid kaks nullist erinevat koordinaati (vt.(3.6)), siis on lauses 18.9 (b) toodud tingimus täidetud ning M_p on λ-perfektne menetlus.

Täiendused ja märkused

Käesoleva paragrahvi põhitulemused - lause 18.3 ning teoreemid 18.5 ja 18.10 - kuuluvad Jürimäele [358], [359], [127], kes esimesena püstitas ka probleemi maatriksite λ-asendatavusest. Siin defineeritud mõiste kõrval pakuvad huvi mitmed teised asendamisprintsiibid (vt. Jürimäe [359], Beekmann [18]; vrd. §17, täiendused ja märkused). Alamruum P_A^λ on defineeritud Leigeri artiklis [311], seal on tõestatud ka laused 18.1 (b), 18.6 (c) ja 18.7 (a). Kangro [295] tõi sisse λ-perfektse maatriksi mõiste ja uuris nende omadusi ja rakendusvõimalusi sisalduvuse ning summeeruvustegurite puhul. Samuti leidis ta tingimused mitmete klassikaliste summeerimismenetluste λ-perfektsuseks.

Juhime lugeja tähelepanu mõnedele probleemidele. Kui võrrelda selle ning paragrahvide 8 ja 9 tulemusi, siis märkame, et λ-summeeruvuse korral jääb lahendamata küsimus μ-ühesuse ja alamruumi P_A^λ invariantsusest.

PROBLEEM 1. Olgu A λ-μ-ühene maatriks. Kas iga maatriks B, mis rahuldab tingimust $c_B^\lambda = c_A^\lambda$, on λ-μ-ühene?

PROBLEEM 2. Kas kehtib implikatsioon

$$c_A^\lambda \subset c_B^\lambda \;\Rightarrow\; P_A^\lambda \subset P_B^\lambda \;?$$

Viimase küsimuse kohta märgime, et juhul $B_A^\lambda \ne W_A^\lambda$ või $P_A^\lambda = \bar{\varphi}$ on vastus ilmselt jaatav.

Teatavasti lahendatakse mõlemad esitatud probleemid juhul $\lambda_n = 1$ ($n \in \mathbb{N}$) faktoriseerimisteoreemi 8.2 abil. Seetõttu ning mitmetel muudel põhjustel pakub huvi küsimus analoogilisest faktoriseerimisest sisalduvuse $c_B^\lambda \subset c_A^\lambda$ korral. Probleem on selliste maatriksite C ja D olemasolus, et

$$d_n^B(x) = \sum_k c_{nk} d_k^A(x) + \sum_k d_{nk} x_k \qquad (x \in c_A^\lambda,\ n \in \mathbb{N})$$

ja oleksid rahuldatud teoreemi 8.2 seostega (a) - (d) analoogilised tingimused.

Kerkib üles rida λ-summeeruvusele spetsiifilisi küsimusi, mis siin jäävad vastuseta. Formuleerime neist mõningad.

PROBLEEM 3. Kas kordaja σ võib funktsionaali $f \in (c_A^\lambda)'$ esituses (18.1) olla üheselt määratud? Lihtne on tuua näiteid, kus see nii ei ole. Kui σ ei ole üheselt määratud, siis võib ta omandada mistahes väärtusi, kaasa arvatud $\sigma = 0$. See võimaldab alamruumi P_A^λ uurimisel piirduda selliste λ-testfunktsioonidega, kus $\sigma = 0$.

PROBLEEM 4. Olgu A λ-μ-ühene maatriks. Kas kordaja μ on üheselt määratud ka funktsionaalide $f \in (z_A^\lambda)'$ esituste korral? Teisi sõnu: kas kehtib implikatsioon

$$f(x) = 0 \quad (x \in z_A^\lambda) \Rightarrow \mu = 0$$

esituses

$$f(x) = \mu \lim_S x + t(Sx) + \alpha x \quad (x \in z_A^\lambda),$$

kus $\mu \in \mathbb{K}$, $t \in l$, $\alpha \in (z_A^\lambda)^\beta$ ning $S := (\lambda_n a_{nk})_{nk}$?

PROBLEEM 5. Kas $P_A^\lambda \subset A_A^\perp$? Teatavasti (vt. lause 18.8 (a)) on see nii juhul $z_A^\lambda \supset \varphi$.

§19. MAATRIKSITE SISALDUVUS JA KOOSKÕLALISUS KIIRUSEGA KOONDUVUSE MÕTTES

Maatriksite A ja B ning kiiruste λ ja ν korral kerkib loomulik küsimus : millistel tingimustel kehtib $c_A^\lambda \subset c_B^\nu$? Kui $\nu = \lambda$ ja lisaks vaadeldavale sisalduvusele leiavad aset veel võrdused

$$z_A^\lambda = c_A^\lambda \cap z_B^\lambda, \qquad c_{0A}^\lambda = c_A^\lambda \cap c_{0B}^\lambda,$$

siis ütleme, et maatriksid A ja B on λ-*kooskõlas*. Üldisemalt nimetame maatrikseid A ja B λ-*kooskõlalisteks hulgal* $M \subset c_A^\lambda \cap c_B^\lambda$, kui

$$M \cap z_A^{\lambda} = M \cap z_B^{\lambda}, \; M \cap c_{oA}^{\lambda} = M \cap c_{oB}^{\lambda},$$

teiste sõnadega, kui hulga M elementide x puhul

$$\lim_A x = 0 \Leftrightarrow \lim_B x = 0, \quad \gamma^A(x) = 0 \Leftrightarrow \gamma^B(x) = 0.$$

Selline λ-kooskõlalisuse definitsioon vastab eelpool defineeritud λ-regulaarsuse mõistele. See selgub järgmisest lausest.

LAUSE 19.1. (a) *Maatriks A on λ-regulaarne parajasti siis, kui ta on λ-konservatiivne ning λ-kooskõlas ühikmaatriksiga* I.

(b) *Kõik λ-regulaarsed maatriksid on omavahel λ-kooskõlas hulgal c^{λ}.*

(c) *Selleks, et λ-regulaarsed maatriksid A ja B rahuldaksid tingimust $c_A^{\lambda} \subset c_B^{\lambda}$, on tarvilik ja piisav sisalduvus $n_A^{\lambda} \subset n_B^{\lambda}$. Sel juhul on A ja B λ-kooskõlas.*

Tõestus. Väite (a) kontrollimiseks piisab võrrelda kahe mõiste - λ-regulaarsuse ja λ-kooskõlalisuse - definitsioone.

(b) Kui A ja B on λ-regulaarsed ning $x \in c^{\lambda}$, siis

$$\lim_A x = 0 \Leftrightarrow \lim x = 0 \Leftrightarrow \lim_B x = 0,$$

$$\gamma^A(x) = 0 \Leftrightarrow \beta(x) = 0 \Leftrightarrow \gamma^B(x) = 0.$$

Seega on A ja B hulgal c^{λ} λ-kooskõlas.

(c) Olgu A ja B λ-regulaarsed maatriksid. Seoste

$$c_A^{\lambda} = n_A^{\lambda} \oplus \langle \lambda^{-1} \rangle \oplus \langle e \rangle, \quad c_B^{\lambda} = n_B^{\lambda} \oplus \langle \lambda^{-1} \rangle \oplus \langle e \rangle,$$

$$e \in (c_{oA}^{\lambda} \setminus z_A^{\lambda}) \cap (c_{oB}^{\lambda} \setminus z_B^{\lambda})$$

ning

$$\lambda^{-1} \in (z_A^{\lambda} \setminus c_{oA}^{\lambda}) \cap (z_B^{\lambda} \setminus c_{oB}^{\lambda})$$

tõttu kehtib sisalduvus $c_A^{\lambda} \subset c_B^{\lambda}$ parajasti siis, kui $n_A^{\lambda} \subset n_B^{\lambda}$. Sel juhul $c_A^{\lambda} \cap n_B^{\lambda} = n_A^{\lambda}$, mistõttu $c_A^{\lambda} \cap z_B^{\lambda} = n_A^{\lambda} \oplus \langle \lambda^{-1} \rangle = z_A^{\lambda}$ ja $c_A^{\lambda} \cap c_{oB}^{\lambda} = n_A^{\lambda} \oplus \langle e \rangle = c_{oA}^{\lambda}$. Niisiis on A ja B λ-kooskõlas.

Sisalduvuse $c_A^{\lambda} \subset c_B^{\nu}$ lähemat uurimist alustame kõige lihtsama juhuga.

LAUSE 19.2. *Olgu A normaalne ning B lõplike ridadega maatriks.*

(a) *Sisalduvus $c_A^{\lambda} \subset c_B^{\nu}$ leiab aset parajasti siis, kui maatriks $T := BA^{-1}$ rahuldab tingimust $T[c^{\lambda}] \subset c^{\nu}$.*

(b) *Selleks, et kehtiks sisalduvus* $c_A^\lambda \subset c_B^\lambda$ *ning* A *ja* B *oleksid* λ*-kooskõlas, on tarvilik ja piisav maatriksi* T λ*-regulaarsus.*

Tõestus. (a) Tehtud eeldustel

$$Bx = B(A^{-1}Ax) = (BA^{-1})(Ax) = Ty \quad (y := Ax,\ x \in c_A^\lambda) \qquad (19.1)$$

ning A korraldab c_A^λ ja c^λ vahel üksühese vastavuse. Seetõttu

$$B[c_A^\lambda] \subset c^\nu \ \Leftrightarrow\ T[c^\lambda] \subset c^\nu.$$

(b) Väite (a) põhjal on maatriksi T λ-konservatiivsus tarvilik ja piisav tingimus sisalduvuseks $c_A^\lambda \subset c_B^\lambda$. Pidades silmas seost (19.1) ning arvestades asjaolu, et A korraldab üksühese vastavuse nii z_A^λ ja z^λ kui ka c_{oA}^λ ja c_o^λ vahel, saame

$$z_A^\lambda \subset z_B^\lambda \ \Leftrightarrow\ T\,[z^\lambda] \subset z^\lambda,$$

$$c_A^\lambda \setminus z_A^\lambda \subset c_B^\lambda \setminus z_B^\lambda \ \Leftrightarrow\ T\,[c^\lambda \setminus z^\lambda] \subset c^\lambda \setminus z^\lambda,$$

$$c_{oA}^\lambda \subset c_{oB}^\lambda \ \Leftrightarrow\ T\,[c_o^\lambda] \subset c_o^\lambda,$$

$$c_A^\lambda \setminus c_{oA}^\lambda \subset c_B^\lambda \setminus c_{oB}^\lambda \ \Leftrightarrow\ T\,[c^\lambda \setminus c_o^\lambda] \subset c^\lambda \setminus c_o^\lambda.$$

Seega on A ja B λ-kooskõlalisus samaväärne maatriksi T λ-regulaarsusega.

Näide 1. Olgu M_p Rieszi kaalutud keskmiste menetlus, kus $p_k \neq 0$ $(k \in \mathbb{N})$, ja olgu B kolmnurkne maatriks omadusega $z_B^\lambda \supset \varphi$ ning $\sum_{k=0}^{n} b_{nk} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ (märgime, et viimaseid tingimusi rahuldab enamus klassikalisi summeerimismenetlusi). Maatriks $T := BM^{-1}$ on kujul

$$t_{ni} = \begin{cases} P_i \Delta \dfrac{b_{ni}}{p_i}, & \text{kui } i \le n, \\ 0, & \text{kui } i > n, \end{cases}$$

kusjuures $\sum_{i=0}^{n} t_{ni} = \sum_{k=0}^{n} b_{nk} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ ja $\lim_n t_{ni} = 0$ $(i \in \mathbb{N})$ (vt. §11, näide 1). Maatriks $R := (r_{ni}) := (\lambda_n t_{ni}/\lambda_i)_{ni}$ on konservatiivne parajasti siis, kui eksisteerivad piirväärtused

$$\lim_n \lambda_n b_{nk} =: b_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

ja

$$\lim_n \lambda_n \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k}{\lambda_k} \Delta \frac{b_{nk}}{p_k} =: r$$

ning kehtib

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda_k} \left| P_k \Delta \frac{b_{nk}}{p_k} \right| = O(1)$$

(vt. teoreem 2.1 (a)). Pidades silmas lauseid 19.2 (a) ja 16.2, on selge, et viimased kolm tingimust on tarvilikud ja piisavad sisalduvuseks $c^{\lambda}_{M_p} \subset c^{\lambda}_{B}$. Seejuures on M_p ja B λ-kooskõlas parajasti siis, kui $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ ning $\tau \neq 0$, see tuleneb lausetest 19.2 (b) ja 16.3.

Raskused sisalduvuse $c^{\lambda}_{A} \subset c^{\mu}_{B}$ uurimisel on põhimõtteliselt needsamad, millega me puutusime kokku paragrahvis 11 sisalduvuse $c_A \subset c_B$ puhul : asi takerdub lõpmatute maatriksite korrutamise mitteassotsiatiivsuse taha. Ühte võimalust selle raskuse ületamiseks kasutasime me eelmises lauses ja näites 1, teine võimalus on eeldada maatriksi A λ-summeeruvusväljas lõiketõkestatuse olemasolu. Nimelt kehtib

LAUSE 19.3. (a) *Kui maatriks* B *on määratud seosega*

$$b_{nk} := \frac{1}{\nu_n} \sum_i t_{ni} a_{ik} \quad (n,k \in \mathbb{N}), \tag{19.2}$$

kus T *on konservatiivne maatriks, siis* $B^{\lambda}_{A} \subset z^{\mu}_{B}$.

(b) *Kui* $z^{\lambda}_{A} \supset \varphi$, *ning*

$$b_{nk} = \frac{1}{\lambda_n} \sum_i t_{ni} \lambda_i a_{ik} \quad (n,k \in \mathbb{N}), \tag{19.3}$$

kus T *on* τ*-multiplikatiivne maatriks* ($\tau \neq 0$), *siis maatriksid* A *ja* B *on hulgal* B^{λ}_{A} λ*-kooskõlas*.

Tõestus. (a) Maatriksi T konservatiivsuse tõttu kuuluvad tema read $(t_{ni})_i$ $(n \in \mathbb{N})$ jadaruumi l (vrd. teoreem 2.1 (a)), seetõttu on lause 17.2 kohaselt iga $x \in B^{\lambda}_{A}$ puhul

$$(Bx)_n = \frac{1}{\nu_n} \sum_k (\sum_i t_{ni} a_{ik}) x_k = \frac{1}{\nu_n} \sum_i t_{ni} d^A_i(x) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Kuna $d := (d^A_i(x)) \in c$ ja $T[c] \subset c$, siis tingimuse $\nu_n \uparrow \infty$ tõttu $\lim_n x = \lim_n (Bx)_n = 0$. Järelikult

$$\gamma^B(x) = \lim_n \nu_n (Bx)_n = \lim_n \sum_i t_{ni} d^A_i(x) \quad (x \in B^{\lambda}_{A}). \tag{19.4}$$

(b) Väite (a) tõestuse põhjal võime öelda, et kui maatriks T on seoses (19.3) τ-multiplikatiivne ning $\tau \neq 0$, siis iga $x \in B^{\lambda}_{A}$ korral (vrd. (19.4))

$$\gamma^A(x) = 0 \Leftrightarrow \gamma^B(x) = 0$$

ehk

$$B^{\lambda}_{A} \cap c^{\lambda}_{oA} = B^{\lambda}_{A} \cap c^{\lambda}_{oB}.$$

Sellega ongi maatriksite A ja B λ-kooskõlalisus hulgal B_A^λ kindlaks tehtud, sest $B_A^\lambda \subset z_A^\lambda \cap z_B^\lambda$ (vrd. väide (a) ja lause 17.2).

Märgime lause 19.3 (a) juurde, et see väide jääb kehtima ka siis, kui üks vaadeldavatest kiirustest λ ja ν on tõkestatud. Juhul $\lambda_n = O(1)$ võtame $\lambda_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, siis $c_A^\lambda = c_A$, $B_A^\lambda = B_A$ ja seoses (19.2) tuleb a_{ik} asemel võtta a_{ik} $(i,k \in \mathbb{N})$. Juhul $\nu_n = O(1)$ võtame valemis (19.2) $\nu_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ ja saame sisalduvuse $B_A^\lambda \subset c_B$.

On selge, et lause 19.3 (a) annab meile piisavad tingimused sisalduvuseks $c_A^\lambda \subset c_B^\nu$ juhul $c_A^\lambda = B_A^\lambda$. Kuid nagu juba varem märgitud, on viimane tingimus täidetud vaid suhteliselt väheoluliste maatriksite korral, seetõttu ei rahulda saadud tulemus meid. Järgnevalt leiame tarvilikud tingimused vaadeldavaks sisalduvuseks eeldusel, et A on λ-reversiivne maatriks. Sel juhul on üldisega võrreldes kaks olulist eelist. Kõigepealt on λ-reversiivse A korral operaator

$$V : c_A^\lambda \to c, \quad x \to d^A(x) \tag{19.5}$$

sürjektiivne. Veelgi enam, kui operaatorid $A : z_A^\lambda \to z^\lambda$ ja $A : n_A^\lambda \to n^\lambda$ on pööratavad (näiteks, kui maatriks A on normaalne), siis korraldavad V ahendid üksühese vastavuse z_A^λ ja c ning n_A^λ ja c_0 vahel. Selles on lihtne veenduda, kui pidada silmas, et $V = U \circ A$, kus

$$U : c^\lambda \to c, \qquad x \to b := (\lambda_k(x_k - \lim x))_k$$

on sürjektiivne, aga tema ahendid $U|_{z^\lambda} : z^\lambda \to c$ ja $U|_{n^\lambda} : n^\lambda \to c_0$ on pööratavad.

Teine asjaolu, mida me λ-reversiivse maatriksi A korral rõhutame, seisneb selles, et iga $f \in (c_A^\lambda)'$ on esitatav kujul

$$f(x) = \sigma \lim\nolimits_A x + \mu\gamma^A(x) + td \quad (x \in c_A^\lambda), \tag{19.6}$$

kus $\sigma, \mu \in \mathbb{K}$ ja $t \in l$. See tuleneb lausest 15.1 (d), sest A korraldab BK-ruumide $(c_A^\lambda, \|\ \|_{A^\lambda})$ ja $(c^\lambda, \|\ \|_\lambda)$ vahel isomeetrilise isomorfismi.

LAUSE 19.4. *Olgu* A *reversiivne maatriks omadusega* $\lambda^{-1} \in F_A^\lambda \setminus W_A^\lambda$. *Sisalduvuse* $c_A^\lambda \subset c_B^\nu$ *korral leiduvad maatriksid* T *ja* S *nii, et maatriks* $\mathfrak{B} := (b_{nk}) := (\nu_n(b_{nk} - b_k))_{nk}$ *on esitatav kujul*

$$\mathfrak{B} = T\mathfrak{A} + S,$$

kusjuures T *on konservatiivne. Juhul* $z_A^\lambda \supset \varphi$ *on* $S = 0$.

Tõestus. Kuna $d_n^B \in (c_B^\nu)'$ ja $c_A^\lambda \subset c_B^\nu$, siis $d_n^B|_{c_A^\lambda} \in (c_A^\lambda)'$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral (vrd. järeldus 5.3 (a)). Seepärast leiduvad vastavalt valemile (19.6) $\sigma_n, \mu_n \in \mathbb{K}$ ja $t^{(n)} := (t_{ni})_i \in l$, et

$$d_n^B(x) := \nu_n(\sum_k b_{nk}x_k - \lim_B x)$$
$$= \sigma_n \lim_A x + \mu_n \gamma^A(x) + \sum_i t_{ni} d_i^A(x) \quad (x \in c_A^\lambda),$$

millest

$$\mathfrak{b}_{nk} = d_n^B(e^k) = \sigma_n a_k + \mu_n \alpha_k + \sum_i t_{ni}\alpha_{ik} \quad (n,k \in \mathbb{N}).$$

Eelduse $\lambda^{-1} \in F_A^\lambda$ tõttu eksisteerib

$$\sum_k \frac{\mathfrak{b}_{nk}}{\lambda_k} = \sigma_n \sum_k \frac{a_k}{\lambda_k} + \mu_n \sum_k \frac{\alpha_k}{\lambda_k} + \sum_k \sum_i \frac{t_{ni}\alpha_{ik}}{\lambda_k} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

teiselt poolt saame tänu seostele $\lambda^{-1} \in F_A^\lambda \subset F_B^\nu \subset \Lambda_B^\perp$ (vrd. laused 5.5 (b), 17.2 ja 17.3 (a)), et

$$\sum_k \frac{\mathfrak{b}_{nk}}{\lambda_k} = \nu_n \sum_k \frac{b_{nk}-b_k}{\lambda_k} = \nu_n(\sum_k \frac{b_{nk}}{\lambda_k} - \lim_B \lambda^{-1}) = d_n^B(\lambda^{-1})$$
$$= \sigma_n \lim_A \lambda^{-1} + \mu_n \gamma^A(\lambda^{-1}) + \sum_i t_{ni} d_i^A(\lambda^{-1}).$$

Võrreldes summa $\sum_k \mathfrak{b}_{nk}/\lambda_k$ toodud kahte esitust ja pidades silmas, et $\lambda^{-1} \in F_A^\lambda \subset B_A^\lambda \subset \Lambda_A^\perp$, saame

$$\mu_n(\gamma^A(\lambda^{-1}) - \sum_k \frac{\alpha_k}{\lambda_k}) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

millest $\lambda^{-1} \notin W_A^\lambda$ tõttu järeldub $\mu_n = 0$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Niisiis,

$$d_n^B(x) = \sigma_n \lim_A x + \sum_i t_{ni} d_i^A(x) \quad (x \in c_A^\lambda)$$

ja

$$\mathfrak{b}_{nk} = \sum_i t_{ni}\alpha_{ik} + s_{nk},$$

kus $s_{nk} = \sigma_n a_k$ $(n,k \in \mathbb{N})$. Jääb veel veenduda, et T on konservatiivne.

Tähistame $u := A^{-1}e$, siis $d_i^A(u) = 0$ ning $d_n^B(u) = \sigma_n$ $(i,n \in \mathbb{N})$. Kuna $u \in c_A^\lambda \subset c_B^\lambda$, siis eksisteerib $\lim \sigma_n$. Järelikult

$$\gamma^B(x) = \lim_n d_n^B(x) = \lim_n \sigma_n \lim_A x + \lim_n \sum_i t_{ni} d_i^A(x)$$

iga $x \in c_A^\lambda$ korral. Et seosega (19.5) defineeritud operaator V on sürjektiivne, siis peab maatriks T olema konservatiivne.

Lähtudes lausest 19.3 ja 19.4, fikseerime nüüd (küllalt rangetel eeldustel) tarvilikud ja piisavad tingimused sisalduvuseks $c_A^\lambda \subset c_B^\nu$ ning maatriksite A ja B λ-kooskõlaks.

TEOREEM 19.5. *Olgu* A *selline* λ-*reversiivne* λ-AB-*maatriks, et* $z_A^\lambda \supset \varphi$, $\lambda^{-1} \in F_A^\lambda \setminus W_A^\lambda$ *ja* $e \in c_A^\lambda \setminus z_A^\lambda$.

(a) *Sisalduvus* $c_A^\lambda \subset c_B^\nu$ *leiab tingimust* $z_B^\nu \supset \varphi$ *rahuldava maatriksi* B *korral aset parajasti siis, kui*

$$Be \in c^\nu \tag{19.7}$$

ja

$$b_{nk} = \frac{1}{\nu_n} \sum_i t_{ni}\lambda_i a_{ik} \quad (n,k \in \mathbb{N}), \tag{19.8}$$

kus T *on konservatiivne maatriks*.

(b) *Kui* A *on normaalne ja* $e \in c_{oA}^\lambda \setminus z_A^\lambda$, *siis selleks, et tingimust* $z_B^\lambda \supset \varphi$ *rahuldava maatriksi* B *korral kehtiks sisalduvus* $c_A^\lambda \subset c_B^\lambda$ *ning* A *ja* B *oleksid* λ-*kooskõlas, on tarvilikud ja piisavad tingimused*

$$Be \in c_o^\lambda \setminus z^\lambda \tag{19.9}$$

ja (19.3), *kus* T *on* τ-*multiplikatiivne maatriks ja* $\tau \neq 0$.

Tõestus. (a) Tingimuse (19.7) tarvilikkus on ilmne, seose (19.8) puhul järeldub see vahetult lausest 19.4, vaja on vaid silmas pidada, et $a_k = b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Toodud tingimuste piisavus tuleneb lausest 19.3 (a) ja seosest $c_A^\lambda = z_A^\lambda \oplus \langle e\rangle = B_A^\lambda \oplus \langle e\rangle$.

(b) Tingimuse (19.9) tarvilikkus tuleneb λ-kooskõlalisuse definitsioonist ja eeldusest $e \in c_{oA}^\lambda \setminus z_A^\lambda$. Väitest (a) järeldub tingimuse (19.3) tarvilikkus, kui T on konservatiivne, aga ka mõlema vaadeldava tingimuse piisavus sisalduvuseks $c_A^\lambda \subset c_B^\lambda$. Kuna $c_B^\lambda = z_B^\lambda \oplus \langle e\rangle$ ja punktis e on A ja B λ-kooskõlas (s.t. $\lim_A e \neq 0$, $\lim_B e \neq 0$ ning $\gamma^A(e) = \gamma^B(e) = 0$), siis $z_A^\lambda \subset z_B^\lambda$ ning vaadeldavad maatriksid on λ-kooskõlas parajasti sel juhul, kui $n_A^\lambda = z_A^\lambda \cap n_B^\lambda$.

Seosest

$$d_n^B(x) = \lambda_n \sum_k b_{nk}x_k = \sum_k \sum_i t_{ni}\lambda_i a_{ik} x_k$$

$$= \sum_i t_{ni} d_i^A(x) \quad (x \in z_A^\lambda, \; n \in \mathbb{N})$$

saame maatriksi A normaalsuse tõttu (vt. lausele 19.4 eelnenud märkus), et

$$n_A^\lambda \subset n_B^\lambda \iff T\,[c_o] \subset c_o,$$

$$z_A^\lambda \setminus n_A^\lambda \subset z_B^\lambda \setminus n_B^\lambda \iff T\,[c \setminus c_o] \subset c \setminus c_o.$$

Seega on A ja B λ-kooskõlas parajasti siis, kui T on τ-multiplikatiivne ning $\tau \neq 0$.

Juhime veel kord lugeja tähelepanu eelpool tõestatud lausele 19.1 (c). Kui regulaarsete maatriksite A ja B korral ei garanteerinud sisalduvus $c_A \subset c_B$ sugugi nende maatriksite kooskõla (selleks pidi A olema perfektne, vt. teoreem 11.6), siis sisalduvus $c_A^\lambda \subset c_B^\lambda$ toob λ-regulaarsete A ja B puhul alati kaasa nende λ-kooskõlalisuse. See tuleneb λ-regulaarsuse suhteliselt avarast mõistest. Seos λ-perfektsusega selgub järgmisest väitest.

LAUSE 19.6. *Selleks, et λ-konservatiivne maatriks A oleks λ-perfektne, on tarvilik ja piisav, et iga maatriksi B korral, mis rahuldab tingimust*

$$c_B^\lambda \supset c_A^\lambda\,,\ \gamma^B|_{c^\lambda} = \gamma^A|_{c^\lambda}, \tag{19.10}$$

kehtiks $\gamma^B(x) = \gamma^A(x) \quad (x \in c_A^\lambda)$.

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu A λ-perfektne maatriks ja rahuldagu maatriks B tingimusi (19.10). Tähistame

$$f(x) = \gamma^A(x) - \gamma^B(x) \quad (x \in c_A^\lambda),$$

siis $f \in (c_A^\lambda)'$ ja kern $f \supset c^\lambda$, millest A λ-perfektsuse tõttu kern $f \supset \overline{c^\lambda} = c_A^\lambda$, s.t. $\gamma^B(x) = \gamma^A(x)$ iga $x \in c_A^\lambda$ korral.

Piisavus. Eeldame, et iga maatriksi B korral, mis rahuldab tingimust (19.10), on $\gamma^B|_{c_A^\lambda} = \gamma^A$, kusjuures A on λ-konservatiivne maatriks. Olgu $f \in (c_A^\lambda)'$ niisugune funktsionaal, et kern $f \supset c^\lambda$, ja leiame vastavalt lausele 18.3 (a) maatriksi D omadusega $c_D^\lambda \supset c_A^\lambda$ ja $\gamma^D(x) = f(x)$ $(x \in c_A^\lambda)$. Tähistame $B := D + A$, siis $\gamma^B(x) = f(x) + \gamma^A(x)$, seejuures kehtib $\gamma^B(u) = \gamma^A(u)$ iga $u \in c^\lambda$ puhul. Vastavalt eeldusele järeldub sellest

$$f(x) = \gamma^A(x) - \gamma^B(x) = 0 \quad (x \in c_A^\lambda),$$

s.t. $f = 0$. Lause 4.11 (a) kohaselt on $c_A^\lambda = \overline{c^\lambda}$.

Erinevalt teoreemist 11.6 jääb teine regulaarsete maatriksite klassikaline kooskõlateoreem - teoreem 11.7 - kehtima ka λ-regulaarsete maatriksite puhul.

TEOREEM 19.7. *Kui A ja B on λ-regulaarsed maatriksid ning $m^\lambda \cap c_A^\lambda \subset c_B^\lambda$, siis on A ja B hulgal $m^\lambda \cap c_A^\lambda$ λ-kooskõlas.*

Tõestus. Maatriksite A ja B λ-regulaarsuse ning võrduse $m^\lambda = m_o^\lambda \oplus \langle e\rangle$ tõttu kehtivad seosed

$$a_k = b_k = \alpha_k = \beta_k = 0 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

$$\gamma^A(\lambda^{-1}) \neq 0,\ \gamma^B(\lambda^{-1}) \neq 0,$$

$$\lim_A e \neq 0,\ \lim_B e \neq 0,\ \gamma^A(e) = \gamma^B(e) = 0$$

ja

$$m^\lambda \cap c_A^\lambda = (m_o^\lambda \cap z_A^\lambda) \oplus \langle e\rangle. \qquad (19.11)$$

Väite tõestuseks piisab ilmselt kontrollida A ja B λ-kooskõlalisust hulgal $m_o^\lambda \cap z_A^\lambda$. Teiste sõnadega, vaja on veenduda, et jadade $x \in m_o^\lambda \cap z_A^\lambda$ korral

$$\gamma^A(x) = 0 \Leftrightarrow \gamma^B(x) = 0. \qquad (19.12)$$

Vastavalt seostele (19.11) ja $e \in c_{oB}^\lambda \setminus z_B^\lambda$ saame eeldusest $m^\lambda \cap c_A^\lambda \subset c_B^\lambda$ sisalduvuse $m_o^\lambda \cap z_A^\lambda \subset z_B^\lambda$, millest omakorda järeldub $m \cap c_R \subset c_Q$, kus $R := (\lambda_n a_{nk}/\lambda_k)_{nk}$ ja $Q := (\lambda_n b_{nk}/\lambda_k)_{nk}$ (vt. märkus pärast lauset 18.7). Kuna maatriksid R ja Q on lause 16.2 kohaselt konservatiivsed, siis teoreemi 11.8 põhjal kehtib sisalduvus $m \cap W_R \subset W_Q$. Sellest saame võrdust (18.8) rakendades tingimuse

$$m_o^\lambda \cap W_A^\lambda \subset W_B^\lambda. \qquad (19.13)$$

Esitame suvalise fikseeritud elemendi $x \in m_o^\lambda \cap z_A^\lambda$ kujul $x = (x - k_x\lambda^{-1}) + k_x\lambda^{-1} = u + k_x\lambda^{-1}$, kus $u := x - k_x\lambda^{-1}$ ja $k_x := \gamma^A(x)/\gamma^A(\lambda^{-1})$. Seejuures $\gamma^A(u) = \gamma^A(x) - k_x\gamma^A(\lambda^{-1}) = 0$, niisiis, $u \in m_o^\lambda \cap \operatorname{kern}\gamma^A = m_o^\lambda \cap \Lambda_{\mathfrak{A}}^\perp \subset B_A^\lambda \cap \Lambda_{\mathfrak{A}}^\perp = W_A^\lambda$, millest seose (19.13) kohaselt $u \in W_B^\lambda \subset \Lambda_{\mathfrak{B}}^\perp = \operatorname{kern}\gamma^B$. Saame

$$\gamma^B(x) = k_x\gamma^B(\lambda^{-1}) = \frac{\gamma^B(\lambda^{-1})}{\gamma^A(\lambda^{-1})}\gamma^A(x) \quad (x \in m_o^\lambda \cap z_A^\lambda),$$

siit järeldubki (19.12).

Täiendused ja märkused

Sisalduvuse $c_A^\lambda \subset c_B^\lambda$ uurimisele on pühendatud Leigeri ja Maasiku artikkel [312], kus on tõestatud lausetega 19.3 (a), 19.4 ja teoreemiga 19.5 sarnased, aga ka mõned neist tulenevad väited juhul $\mu = \lambda$. Siintoodud tulemused λ-kooskõlalisuse kohta ei ole varem trükis ilmunud.

Teoreemi 19.7 juurde märgime, et Boosi ja Leigeri [57] poolt antud teoreemi abil, mille me formuleerisime §11 täienduste ja märkuste osas, saab tõestada üldisemaid, nn. Mazur-Orliczi tüüpi teoreeme λ-summeeruvuse kohta. Näiteks kehtib

TEOREEM. *Olgu* Z *soliidne jadaruum ning* A *ja* B *sellised maatriksid, et* $\varphi \subset Z \cap F_A^\lambda \subset c_B^\lambda$. *Kui* $Z \cap F_A^\lambda = (Z \cap W_A^\lambda) \oplus \langle v\rangle$ *ning* $v \in I_{\mathfrak{B}}$, *siis*

$$\gamma^B(x) = \varkappa(\gamma^A(x) - \sum_k a_k x_k) + \sum_k b_k x_k \quad (x \in Z \cap F_A^\lambda),$$

kus $\varkappa = 0$ *juhul* $v = 0$ *ja* $\varkappa = \Lambda_{\mathfrak{B}}(v)/\Lambda_{\mathfrak{A}}(v)$ *juhul* $v \neq 0$.

§20. SUMMEERUVUSTEGURID KIIRUSEGA SUMMEERUVUSE KORRAL

Maatriksite A ja B ning kiiruste λ ja ν puhul, millest üks võib olla ka tõkestatud, nimetatakse arve ε_k $(k \in \mathbb{N})$

1) (A_0^λ, B_0^ν)-*summeeruvusteguriteks*, kui iga A^λ-tõkestatud jada x korral on jada $\varepsilon\cdot x := (\varepsilon_k x_k)$ B^ν-tõkestatud,
2) (A^λ, B^ν)-*summeeruvusteguriteks*, kui iga A^λ-summeeruva jada x korral on jada $\varepsilon\cdot x$ B^ν-summeeruv,
3) (A^λ, B_0^ν)-*summeerususteguriteks*, kui iga A^λ-summeeruva jada x korral on jada $\varepsilon\cdot x$ B^ν-tõkestatud.

Definitsioonist on pikemata selge, et nii (A^λ, B^ν)- kui ka (A_0^λ, B_0^ν)-summeeruvustegurid on (A^λ, B_0^ν)-summeeruvustegurid. Täpsemalt selgitab nende mõistete vahekorda

LAUSE 20.1. (a) *Olgu* A λ-*perfektne ning* B *suvaline maatriks omadusega* $c_B \supset \varphi$. *Arvud* ε_k *on* (A^λ, B^ν)-*summeeruvustegurid parajasti siis, kui*

1° ε_k *on* (A^λ, B_0^ν)-*summeeruvustegurid ja*
2° $B(\varepsilon\cdot e^k)$, $B(\varepsilon\cdot\lambda^{-1})$, $B\varepsilon \in c^\nu$ $(k \in \mathbb{N})$.

(b) *Kui* A *on normaalne ja* B *on lõplike ridadega maatriks, siis võib väites* (a) *tingimuse* 1° *asendada tingimusega*
$1^{\circ\circ}$ ε_k *on* (A_0^λ, B_0^ν)-*summeeruvustegurid*,

kusjuures juhul $\nu_n = O(1)$ *tuleb* m^{ν} *asemel võtta* m.

Tõestus. (a) Arvud ε_k on (A^{λ},B^{ν})-summeeruvustegurid parajasti siis, kui maatriksi $D := (b_{nk}\varepsilon_k)$ korral kehtib sisalduvus $c_A^{\lambda} \subset c_D^{\nu}$. Näitame, et see on samaväärne tingimustega

$$c_A^{\lambda} \subset m_D^{\nu} \quad \text{ja} \quad De^k,\ D\lambda^{-1},\ De \in c^{\nu} \quad (k \in \mathbb{N}), \tag{20.1}$$

mis ilmselt langevad kokku tingimustega 1° ja 2°. Ühelt poolt järeldub seosest $c_A^{\lambda} \subset c_D^{\nu}$ sisalduvus $c_A^{\lambda} \subset m_D^{\nu}$ ja tänu maatriksi A λ-perfektsusele ka e^k, λ^{-1}, $e \in c_D^{\nu}$ $(k \in \mathbb{N})$. Vastupidi, väite (20.1) kehtivuse korral vaatleme FK-ruumis c_A^{λ} funktsionaale

$$f_n(x) := \nu_n(\sum_k d_{nk}x_k - \lim_D x) \quad (x \in c_A^{\lambda},\ n \in \mathbb{N}),$$

mis tänu eeldusele $c_A^{\lambda} \subset m_D^{\nu}$ on määratud. Veelgi enam, nad on pidevad ja lineaarsed ning moodustavad punktiviisi tõkestatud jada. Järelduse 4.22 kohaselt on hulk $L := \{x \in c_A^{\lambda} \mid \exists \lim_n f_n(x)\}$ ruumis c_A^{λ} kinnine. Seejuures järeldub tingimustest (20.1), et $\operatorname{lin}\{e^k, \lambda^{-1}, e \mid k \in \mathbb{N}\} \subset L$, mistõttu A λ-perfektsusest saame

$$c_A^{\lambda} = \overline{\operatorname{lin}\{e^k, \lambda^{-1}, e \mid k \in \mathbb{N}\}} \subset \bar{L} = L \subset c_D^{\nu}.$$

(b) Normaalse A ning lõplike ridadega maatriksi B korral

$$c_A^{\lambda} \subset m_D^{\nu} \Leftrightarrow m_T^{\nu} \supset c^{\lambda},$$
$$m_A^{\lambda} \subset m_D^{\nu} \Leftrightarrow m_T^{\nu} \supset m^{\lambda},$$

kus $T := DA^{-1}$. Väide järeldub teoreemist 16.1 (c).

Eeldame järgnevas, et A on normaalne ning B kolmnurkne maatriks. Nii nagu (A,B)-summeeruvustegurite korral, saab ka siin vaadeldavate leidmiseks kasutada *pöördteisenduse meetodit*. Me piirdume ainult $(A_0^{\lambda}, B_0^{\nu})$-summeeruvustegurite uurimisega, sest, esiteks, mängivad just need tähelepanuväärset osa rakendustes funktsiooniteoorias (vt. täiendused ja märkused) ja, teiseks, saab lause 20.1 kohaselt nende abil leida ka (A^{λ},B^{ν})-summeeruvustegurid.

Moodustame antud jada ε korral maatriksi $T := (t_{nk})$ seosega

$$t_{nk} := \sum_{i=k}^{n} b_{ni}\varepsilon_i\alpha_{ik} \quad (n,k \in \mathbb{N}), \tag{20.2}$$

kus $A^{-1} := (\alpha_{ik})$ on A pöördmaatriks. Kuna A korraldab BK-ruumide m_A^λ ja m^λ vahel üksühese vastavuse, siis võrdusest

$$\sum_{k=0}^{n} t_{nk} z_k = \sum_{i=0}^{n} b_{ni}\varepsilon_i x_i \qquad (x := A^{-1}z,\ z \in m^\lambda,\ n \in \mathbb{N})$$

tuleneb, et arvud ε_i on (A_0^λ, B_0^ν)-summeeruvustegurid parajasti siis, kui maatriks T teisendab iga λ-tõkestatud jada ν-tõkestatud jadaks. Selleks leiame tarvilikud ja piisavad tingimused teoreemist 16.1 (b). Kuna $t_k := \lim_n t_{nk}$ eksisteerib iga $k \in \mathbb{N}$ korral (vrd. (16.6)), siis tingimuse (16.4) võime ilmselt kirjutada kujul $\sum_k |t_k|/\lambda_k < \infty$. Tingimuse (16.5) puhul tuleb silmas pidada, et maatriksi T kolmnurksuse tõttu

$$\sum_k \frac{|t_{nk}-t_k|}{\lambda_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{|t_{nk}-t_k|}{\lambda_k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|t_k|}{\lambda_k} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Niisiis kehtib

TEOREEM 20.2. *Olgu A normaalne ja B kolmnurkne maatriks.*

(a) *Arvud ε_k on (A_0^λ, B_0^ν)-summeeruvustegurid parajasti siis, kui*

eksisteerib $\lim_n t_{nk} = t_k \quad (k \in \mathbb{N})$,

$$Te \in m^\nu, \tag{20.3}$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|t_k|}{\lambda_k} = O(1), \tag{20.4}$$

$$\nu_n \sum_{k=0}^{n} \frac{|t_{nk}-t_k|}{\lambda_k} = O(1). \tag{20.5}$$

Juhul $\nu \in m$, *tuleb* O(1) *asendada sümboliga* o(1).

(b) *Kui* $a_{n0} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ ning $Be^0 \in m^\nu$, *siis on tingimus* (20.3) *täidetud.*

Väite (b) põhjendamiseks paneme tähele, et kui $a_{n0} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, siis $A^{-1}e = e^0$ ehk $\sum_{k=0}^{i} \alpha_{ik} = \delta_{i0}$ $(i \in \mathbb{N})$. Seosest (20.2) saame vaadeldavatel eeldustel, et

$$Te = \Big(\sum_{i=0}^{n} b_{ni}\varepsilon_i\delta_{i0}\Big)_n = (b_{n0}\varepsilon_0)_n = \varepsilon_0 Be^0 \in m^\nu.$$

Märgime, et tingimus $a_{n0} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ on täidetud paljude RJ-regulaarsete menetluste korral.

Näide 1. Olgu A = B = Σ, siis teoreemi 20.2 (b) eeldused on täidetud ning

$$t_{nk} := \begin{cases} \Delta\varepsilon_k, & \text{kui } k < n, \\ \varepsilon_n, & \text{kui } k = n, \\ 0, & \text{kui } k > n \quad (n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Seejuures $t_k = \Delta\varepsilon_k$ $(k \in \mathbb{N})$ ning tingimused (20.4) ja (20.5) saavad vastavalt kuju

$$\nu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\Delta\varepsilon_k|}{\lambda_k} = O(1)$$

ja

$$\nu_n \varepsilon_{n+1} = O(\lambda_n).$$

Need ongi tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et arvud ε_k oleksid $(\Sigma_0^{\lambda}, \Sigma_0^{\nu})$-summeeruvustegurid.

Pöördteisenduse meetodit saab $(A_0^{\lambda}, B_0^{\nu})$- või (A^{λ}, B^{ν})-summeeruvustegurite leidmisel praktiliselt rakendada sobivalt valitud maatriksite A ja B korral. Oluline on, et maatriks T oleks seosega (20.2) piisavalt lihtsalt avaldatav. Teine, *funktsionaalanalüütiline meetod* on kasutatav sel juhul, kui maatriksi A λ-summeeruvusväli on lihtsa struktuuriga, enamasti eeldatakse, et A on λ-AB-maatriks.

Defineerime antud kiiruse ν ja alamruumi φ sisaldava FK-ruumi E puhul jadaruumi

$$E^{\beta}(\nu) := \{\varepsilon \in \omega \mid \forall x \in E : \varepsilon \cdot x \in cs^{\nu}\}$$

ja kaasruumi E′ alamruumi

$$E'(\nu) := \{f \in E' \mid \forall x \in E \ \exists \lim_n \nu_n (f(x) - f(x^{[n]}))\}.$$

Ilmselt sisaldab $E'(\nu)$ kõik koordinaatfunktsionaalid, seega ka jadaruumi φ. Täpsemalt, seosega

$$f_{\varepsilon}(x) := \sum_k \varepsilon_k x_k \quad (x \in E) \tag{20.6}$$

määratud funktsionaal kuulub hulka $E'(\nu)$ iga $\varepsilon \in \varphi$ korral. Lihtne on veenduda, et

$$\varepsilon \in E^{\beta}(\nu) \iff \exists f \in E'(\nu) : \varepsilon_k = f(e^k) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Tõepoolest, ühelt poolt rahuldab seosega (20.6) defineeritud funktsionaal f_{ε} iga $\varepsilon \in E^{\beta}(\nu)$ puhul tingimusi $f_{\varepsilon} \in E'(\nu)$ ja $\varepsilon_k = f_{\varepsilon}(e^k)$ $(k \in \mathbb{N})$. Teiselt poolt, kui $\varepsilon_k = f(e^k)$ $(k \in \mathbb{N})$ mingi $f \in E'(\nu)$ korral, siis $f(x) = \lim_n f(x^{[n]}) = \sum_k \varepsilon_k x_k$ ja eksisteerib $\lim_n \nu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_k x_k = \lim_n \nu_n (f(x) - f(x^{[n]}))$ iga $x \in E$ puhul, s.t. $\varepsilon \in E^{\beta}(\nu)$.

Me nimetame jadaruumi $E^{\beta}(\nu)$ elemente FK-ruumi E *ν-faktorjadadeks*. On selge, et *ruumi c_A^{λ} ν-faktorjadadeks on para-*

jasti kõik (A^λ, Σ^ν)-summeeruvustegurite jadad.

LAUSE 20.3. *Olgu* λ *mingi kiirus ning* A *selline normaalne maatriks, et* $c_{oA} \supset \varphi$ *ja* $S_A^\lambda = n_A^\lambda$. *Jada* ε *on* BK-*ruumi* n_A^λ ν-*faktorjada parajasti siis, kui*

$$\varepsilon_k = \sum_{m=k}^{\infty} t_m \lambda_m a_{mk} \qquad (k \in \mathbb{N}), \tag{20.7}$$

kus jada $t := (t_m)$ *rahuldab tingimust*

$$\exists\, M > 0: \quad \nu_n \sum_{m=n+1}^{\infty} |t_m| \le M \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{20.8}$$

Tõestus. Iga $f \in (n_A^\lambda)'$ puhul leidub $t \in l$, et

$$f(x) = \sum_m t_m \lambda_m \sum_{k=0}^{m} a_{mk} x_k \qquad (x \in n_A^\lambda)$$

(vt. teoreem 15.2 ja sellele järgnev märkus). Seejuures kuulub seosega (20.7) määratud jada $\varepsilon = (f(e^k))$ tänu ruumi n_A^λ AK-omadusele selle β-kaasruumi $(n_A^\lambda)^\beta$, sest

$$\sum_k \varepsilon_k x_k = \sum_k x_k f(e^k) = f(x) \qquad (x \in n_A^\lambda).$$

Väite tõestuseks on vaja näidata, et tingimused $f \in (n_A^\lambda)'(\nu)$ ja (20.8) on samaväärsed.

Tähistame

$$f_n(x) := \nu_n (f(x) - f(x^{[n]}))$$

$$= \nu_n \sum_{m=n+1}^{\infty} t_m \lambda_m \sum_{k=n+1}^{m} a_{mk} x_k \qquad (x \in n_A^\lambda,\ n \in \mathbb{N}).$$

Kui tingimus (20.8) on täidetud, siis

$$|f_n(x)| \le \nu_n \sum_{m=n+1}^{\infty} |t_m| \lambda_m \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{mk} x_k \Big|$$

$$\le \nu_n \sum_{m=n+1}^{\infty} |t_m| \sup_{m \ge n} \lambda_m \Big| \sum_{k=n+1}^{m} a_{mk} x_k \Big|$$

$$\le M \, \| x - x^{[n]} \|_{A^\lambda} \to 0$$

iga $x \in n_A^\lambda$ korral protsessis $n \to \infty$. Seega $f \in (n_A^\lambda)'(\nu)$.

Eeldame, et $\sup_n \nu_n \sum_{m=n+1}^{\infty} |t_m| = \infty$ ning moodustame indeksite n ja p korral jada

$$z^{(n,p)} := (0, \ldots, 0, \lambda_{n+1}^{-1} \operatorname{sgn} t_{n+1}, \ldots, \lambda_p^{-1} \operatorname{sgn} t_p, 0, \ldots),$$

kus $n > p$ ja arvule $\lambda_{n+1}^{-1} \operatorname{sgn} t_{n+1}$ eelneb $n+1$ nulli. Kuna $z^{(n,p)} \in \varphi \subset n^\lambda$, siis

$$x^{(n,p)} := A^{-1} z^{(n,p)} \in n_A^\lambda$$

ja

$$\| x^{(n,p)} \|_{A^\lambda} = \| z^{(n,p)} \|_\lambda \le 1.$$

Seepärast

$$\sup_n \|f_n\| \ge \sup_{n,p} |f_n(x^{(n,p)})|$$

$$= \sup_{n,p} \nu_n \Big| \sum_{m=n+1}^{\infty} t_m \lambda_m \sum_{k=n+1}^{\min(m,p)} a_{mk} x_k^{(n,p)} \Big|$$

$$= \sup_{n,p} \nu_n \Big| \sum_{m=n+1}^{p} t_m \lambda_m z_k^{(n,p)} \Big|$$

$$= \sup_{n,p} \nu_n \Big| \sum_{m=n+1}^{p} t_m \operatorname{sgn} t_m \Big|$$

$$= \sup_{n,p} \nu_n \sum_{m=n+1}^{\infty} |t_m| = \infty.$$

Ühtlase tõkestatuse printsiibi kohaselt ei ole funktsionaalide jada (f_n) BK-ruumis n_A^{λ} punktiviisi tõkestatud, niisiis $f \notin (n_A^{\lambda})'(\nu)$. Lause on tõestatud.

Erijuhul $A = I$ saame lausest 20.3

$$(n^{\lambda})^{\beta}(\nu) = \{\varepsilon \in \omega \mid \nu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\varepsilon_k|}{\lambda_k} = O(1)\}.$$

Selleks, et $\varepsilon \in (n^{\lambda})^{\beta}(\nu)$ oleks ruumi z^{λ} ν-faktorjada, on seose $z^{\lambda} = n^{\lambda} \oplus \langle\lambda^{-1}\rangle$ tõttu tarvilik ja piisav, et eksisteeriks

$$\lim_n \nu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{\lambda_k}.$$

Viimane tingimus on iga $\varepsilon \in (n^{\lambda})^{\beta}(\nu)$ korral täidetud, kui $\nu_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, üldjuhul aga mitte, nagu selgub järgnevast näitest.

<u>Näide 2.</u> Olgu $\lambda_n := \nu_n := 2^n$ ning $\varepsilon := (0,4,1,4,1,\ldots)$, siis

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{\lambda_k} = 0 + 2 + \frac{1}{4} + \frac{4}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2 + \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k} + 3 \sum_{k=3}^{\infty} 2^{-2k} = 3.$$

Vahetu arvutus näitab, et

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{\lambda_k} = \begin{cases} 3 \cdot 2^{-n}, \text{ kui } n = 2i, \\ 2^{-(n-1)}, \text{ kui } n = 2i + 1, \end{cases}$$

seega

$$\nu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{\lambda_k} = \begin{cases} 3, \text{ kui } n = 2i, \\ 2, \text{ kui } n = 2i + 1 \ (i \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Niisiis, $\varepsilon \in (n^{\lambda})^{\beta}(\nu)\setminus(z^{\lambda})^{\beta}(\nu)$.

Järgmine teoreem on otsene järeldus lausest 20.3, tuleb vaid silmas pidada, et λ-regulaarse maatriksi A korral kehtib seos $c_A^{\lambda} = n_A^{\lambda} \oplus \langle\lambda^{-1}\rangle \oplus \langle e\rangle$ (vt. §16 ja lause 17.4 (d)).

TEOREEM 20.4. *Olgu A normaalne λ-regulaarne λ-AB-maatriks. Arvud ε_k on $(A^{\lambda},\Sigma^{\nu})$-summeeruvustegurid parajasti siis, kui*

$$\varepsilon_k = \sum_{m=k}^{\infty} t_m \lambda_m a_{mk}, \quad \textit{kus } \nu_n \sum_{m=n+1}^{\infty} |t_m| = O(1)$$

ja

$$\varepsilon \in cs^{\nu} \cap \lambda\cdot cs^{\nu}. \tag{20.9}$$

Olgu A järgnevas normaalne λ-regulaarne maatriks ning $\bar{A} := (\sum_{i=k}^{n} a_{ni})_{nk}$ (vrd. §13). Kuna

$$\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_{nk} x_k = \sum_{i=0}^{n} a_{ni} \sum_{k=0}^{i} x_k \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

siis $c_{\bar{A}}^{\lambda} = \Sigma\,[c_A^{\lambda}]$ ja $n_{\bar{A}}^{\lambda} = \Sigma\,[n_A^{\lambda}]$. Seejuures

$$c_{\bar{A}}^{\lambda} = n_{\bar{A}}^{\lambda} \oplus \langle\bar{\Delta}\lambda^{-1}\rangle \oplus \langle e^{0}\rangle, \tag{20.10}$$

kus $\bar{\Delta}\lambda^{-1} = (\lambda_k^{-1} - \lambda_{k-1}^{-1})_k$ ja $\lambda_{-1}^{-1} = 0$.

Eeldame, et arvud ε_k on $(\bar{A}^{\lambda},\Sigma^{\nu})$-summeeruvustegurid mingi tõkestamata kiiruse ν korral. Moodustame maatriksi T seosega (20.2), milles $B := \Sigma$, siis $T\,[c^{\lambda}] \subset c^{\nu}$. Seega peab maatriks T rahuldama teoreemi 16.1 (a) tingimusi (16.1) - (16.5), kusjuures samuti, kui teoreemile 20.2 eelnevas arutelus, võib tingimused (16.4) ja (16.5) asendada tingimustega (20.4) ja (20.5). Seosest (20.4) saame, et

$$\nu_n \frac{|t_{n+1}|}{\lambda_{n+1}} = \frac{\nu_n}{\lambda_{n+1}} \Big| \sum_{i=n+1}^{\infty} \varepsilon_i \alpha_{i,n+1} \Big| = O(1),$$

millest järeldub $\nu_n \varepsilon_{n+1} \alpha_{n+1,n+1} = O(\lambda_{n+1})$ ehk

$$\varepsilon_k = O\left(\frac{\lambda_k a_{kk}}{\nu_{k-1}}\right). \tag{20.11}$$

See on tarvilik tingimus $(\bar{A}^{\lambda},\Sigma^{\nu})$-summeeruvustegurite ε_k jaoks. Täpsed tingimused annab järgmine

TEOREEM 20.5. *Olgu A normaalne λ-regulaarne λ-AB-maatriks ning ν selline tõkestamata kiirus, et $\nu_n = O(\nu_{n-1})$.*

Arvud ε_k on $(\bar{A}^\lambda, \Sigma^\nu)$-summeeruvustegurid parajasti siis, kui on täidetud tingimused (20.11),

$$\Delta\varepsilon_k = \sum_{m=k+1}^{\infty} t_m \lambda_m a_{mk}, \quad kus\ \nu_n \sum_{m=n+1}^{\infty} |t_m| = O(1), \tag{20.12}$$

ja

$$\varepsilon \cdot \bar{\Delta}\lambda^{-1} \in cs^\nu . \tag{20.13}$$

Tõestus. Lähtudes Abeli teisendusest

$$\sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k x_k = \sum_{k=0}^{m-1} (\Delta\varepsilon_k) z_k + \varepsilon_m z_m \qquad (m \in \mathbb{N}),$$

kus $z_k := \sum_{i=0}^{k} x_i$ $(k \in \mathbb{N})$, veendume kõigepealt, et tänu tarvilikule tingimusele (20.11) kehtib seos

$$\varepsilon_k \in (n_A^\lambda)^\beta(\nu) \Leftrightarrow \Delta\varepsilon := (\Delta\varepsilon_k) \in (n_A^\lambda)^\beta(\nu). \tag{20.14}$$

Olgu $x \in n_{\bar{A}}^\lambda$, siis punktis $z \in n_A^\lambda$ leiab aset lõikekoonduvus, s.t.

$$\sup_n \lambda_n \Big| \sum_{k=q}^{p} a_{nk} z_k \Big| = \| z^{[p]} - z^{[q]} \|_{A^\lambda} \to 0$$

protsessis $p,q \to \infty$, mistõttu $\lambda_n |a_{nn}| |z_n| \to 0$ $(n \to \infty)$. Siit ja tingimusest (20.11) saame, et $\varepsilon_n z_n = o(1/\nu_{n-1})$, seega koondub rida $\sum_k \varepsilon_k x_k$ parajasti siis, kui $\sum_k (\Delta\varepsilon_k) z_k$ koondub, ning sel juhul on nende kahe rea summad võrdsed. Edasi,

$$\nu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_k x_k = \nu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} (\Delta\varepsilon_k) z_k + \nu_n \varepsilon_n z_n$$

ja kuna eelduse $\nu_n = O(\nu_{n-1})$ tõttu

$$\lim_n \nu_n \varepsilon_n z_n = \lim_n \frac{\nu_n}{\nu_{n-1}} \nu_{n-1} \varepsilon_n z_n = 0,$$

siis on selge, et

$$\varepsilon \cdot x \in cs^\nu \Leftrightarrow \Delta\varepsilon \cdot z \in cs^\nu$$

iga $x \in n_A^\lambda$ korral. Väide (20.14) on tõestatud. Sellest ja lausest 20.3 tuleneb, et (20.12) on samaväärne väitega $\varepsilon \in (n_{\bar{A}}^\lambda)^\beta(\nu)$. Kuna $\varepsilon \cdot e^0 \in cs^\nu$, siis võrduse (20.10) tõttu on tingimused (20.11) - (20.13) tarvilikud ja piisavad $(\bar{A}, \Sigma^\nu)$-summeeruvustegurite ε_k jaoks.

<u>Näide 3.</u> Olgu M_p λ-regulaarne Rieszi kaalutud keskmiste menetlus, mis teatavasti (vt. §17, näide 1) on λ-AB-omadusega. Rakendades teoreemi 20.4 ning pidades silmas, et kui $\varepsilon_k = \sum_{n=k}^{\infty} t_n \lambda_n a_{nk} = p_k \sum_{n=k}^{\infty} t_n \lambda_n / P_n$, siis

$$t_k = \frac{P_k}{\lambda_k} \Delta \frac{\varepsilon_k}{p_k} \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

L 3 T

saame tarvilikud ja piisvad tingimused

$$\nu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{P_k}{\lambda_k} \Delta\frac{\varepsilon_k}{P_k}\right| = O(1) \qquad (20.15)$$

ning (20.9) $(\bar{M}_p^{\lambda}, \Sigma^{\nu})$-summeeruvustegurite ε_k jaoks. Analoogiliselt leiame teoreemist 20.5 tarvilikud ja piisavad tingimused

$$\nu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{P_k}{\lambda_k} \Delta\frac{\Delta\varepsilon_k}{P_k}\right| = O(1), \qquad (20.16)$$

$$\varepsilon_k = O\left(\frac{\lambda_k P_k}{\nu_{k-1} P_k}\right)$$

ja (20.13) selleks, et arvud ε_k oleksid $(\bar{M}_p^{\lambda}, \Sigma^{\nu})$-summeeruvustegurid.

Erijuhul, kui $p_k = 1$ $(k \in \mathbb{N})$, saavad seosed (20.15) ja (20.16) vastavalt kuju

$$\nu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k+1}{\lambda_k}|\Delta\varepsilon_k| = O(1)$$

ning

$$\nu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k+1}{\lambda_k}|\Delta^2\varepsilon_k| = O(1),$$

kus $\Delta^2\varepsilon_k = \Delta(\Delta\varepsilon_k)$ $(k \in \mathbb{N})$. See võimaldab meil hõlpsasti leida $(C_1^{\lambda}, \Sigma^{\nu})$- ja $(\bar{C}_1^{\lambda}, \Sigma^{\nu})$-summeeruvustegurid eeldusel, et menetlus C_1 on λ-regulaarne.

Täiendused ja märkused

Pöördteisenduse meetodit kasutas Kangro [292] (A, A^{ν})-summeeruvustegurite leidmiseks, sealjuures vaatles ta erijuhte $A := M_p$ ja $A := C_{\alpha}$ $(\alpha = 0, 1, \ldots)$. Artiklis [294] rakendas ta sama meetodit $(A_o^{\lambda}, B_o^{\lambda})$-summeeruvustegurite uurimiseks. Funktsionaalanalüütilist meetodit käsitlevad teoreemid 20.4 ja 20.5 olid tõestuseta esitatud Leigeri poolt (vt. [309]).

Summeeruvustegurite teooria *rakendused funktsiooniteoorias* (ülevaate sellest probleemideringist leiab lugeja Kangro artiklist [291]) olid üheks lähtekohaks süstemaatilistele uurimustele kiirusega summeeruvuse valdkonnas. 1963. a. leidis Aljančić [5] piisavad tingimused teatavat liiki $(\bar{Z}_o^{\lambda}, \bar{Z}_o^{\nu})$-summeeruvustegurite jaoks, kus $Z := Z_{\alpha}$ on menetlus M_p juhul $p_k := (k+1)^{\alpha} - k^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ (Zygmundi menetlus) ja λ selline tõkestamata kiirus, mille puhul k^a/λ_k kasvab monotoonselt mingi $a > 0$ korral. Üldistades Alexitsi ja Kraliku [4] tulemust, kes olid vaadelnud juhtu $\alpha = 1$ (s.t. $Z_\alpha = C_1$), tõestas ta, et arvud $\varepsilon_k := \lambda_k/\nu_k$ on $(\bar{Z}_o^\lambda, \bar{Z}_o^\nu)$-summeeruvustegurid, kui

1) $\varepsilon_k\downarrow$, $\Delta^2\varepsilon_k \geq 0$ ($k \in \mathbb{N}$) ja $k^b\varepsilon_k\uparrow$ mingi $b \in (0, \alpha-a)$ korral

või

2) $\alpha > a$, $\varepsilon_k\uparrow$, $\Delta^2\varepsilon_k \leq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) ja $k^c/\nu_k\downarrow$ mingi $c > 0$ korral.

Seejuures näitas Aljančič, et kui 2π-perioodilise funktsiooni f korral ruumist C või L^p ($p \geq 1$), mille Fourier' rida on

$$\frac{1}{2}a_o + \sum_k a_k\cos kt + b_k\sin kt,$$

on teada tema enda või ta tuletiste pidevus- või siledusmoodulite kahanemiskiirus, siis võimaldab saadud tulemus hinnata sellise funktsiooni f_ε vastavte moodulite kahanemiskiirust, mille Fourier' reaks on

$$\frac{1}{2}\varepsilon_o a_o + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(a_k\cos kt + b_k\sin kt).$$

Aljančiči töö, milles ei kasutatud summeeruvustegurite mõistet, ajendas Kangrot uurima üldisi (A_o^λ, B_o^ν)-summeeruvustegureid. Artiklis [294], kust on pärit teoreem 20.2, leidis ta tarvilikud ja piisavad tingimused $(\bar{M}_{p\sigma}^\lambda, B_o^\nu)$- ja $(\bar{C}_{-\alpha\sigma}^\lambda, B_o^\nu)$-summeeruvustegurite jaoks. Aljančiči tulemust üldistab ja täpsustab

TEOREEM ([294]). *Olgu M_p regulaarne menetlus, mis säilitab nii λ- kui ka ν-tõkestatuse (s.t. $M_p[m^\lambda] \subset m^\lambda$ ja $M_p[m^\nu] \subset m^\nu$), kus $\nu_n = O(\nu_{n-1})$. Arvud ε_k on $(\bar{M}_{po}^\lambda, \bar{M}_{po}^\nu)$-summeeruvustegurid parajasti siis, kui on täidetud tingimused* (20.15),

$$\nu_n P_n \Delta\varepsilon_{n+1} = O(\lambda_n p_{n+1}),$$

$$\nu_n \varepsilon_{n+1} = O(\lambda_n).$$

Juhul, kui $\nu \in m$, tuleb sümboli O *asemel kirjutada* o.

Kiirusega summeeruvuse tegurite teise rakendusena Fourier' ridade teoorias märgime Siku [327] poolt defineeritud T^λ-*konstruktiivseid funktsiooniruume*. Olgu T RJ-regulaarne kolmnurkne maatriks. Banachi funktsiooniruumi X ning kiiruse λ puhul tähistatakse

$$X_{T^\lambda} := \{f^o \mid s_n := \|\sigma_n f^o - f^o\|_X = o(1),\ \lambda_n s_n = O(1)\},$$

kus f^o on funktsiooni $f \in X$ Fourier' rida kujul

$$f^o := (a_k, b_k) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kt + b_k\sin kt$$

ning

$$\sigma_n f^o := \sum_{k=0}^{n} t_{nk}(a_k\cos kt + b_k\sin kt) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Kui trigonomeetrilised polünoomid moodustavad ruumis X tiheda hulga, siis X_{T^λ} on BK-ruum normiga

$$\|f^{\circ}\| := \|f\|_X + \sup_n s_n .$$

Artiklites [327], [328] ja [329] uuritud arvukate konkreetsete T^λ-konstruktiivsete ruumide hulgast märgime näiteks seost

$$W^{\alpha-1}\mathrm{Lip}(1,p) = L^p_{Z^\lambda_\alpha} \qquad (p \geq 1),$$

kus $\alpha \geq 0$ on paarisarv, $\lambda := (k^\alpha)$, Lip(1,p) on selliste funktsioonide f hulk, mille korral $\|f(t + h) - f(t)\|_{L^p} = O(h)$, ja W^iX tähistab kõigi selliste funktsioonide f hulka, mille i-ndat järku tuletis $f^{(i)}$ kuulub ruumi X.

Sikk näitas, et vaadeldavate ruumide X_{T^λ} multiplikaatorite probleei saab paljudel juhtudel taandada summeeruvusteguritele. Näiteks kehtib

TEOREEM ([328]). *Olgu* A *ja* B *sellised maatriksid, et* $a_{n0} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ ja $Be^{0} \in m^{\nu}$. *Iga jada* ε, *mille korral arvud* ε_k on $(A^\lambda_0, B^\lambda_0)$-*summeeruvustegurid on multiplikaator klassist* $M(X_{A^\lambda}, X_{B^\nu})$.

Kirjandus

1. Aasma,A. Characterization of matrix transformations of summability fields. Acta comment.Univ.Tartuensis,1991, 928,3-14.

2. Agnew,R.P. On equivalence of methods of evaluation of sequences. Tôhoku Math.J.,1932,35,244-252.

3. Agnew,R.P. Analytic extension by Hausdorff methods. Trans. Amer.Math.Soc.,1942,52,217-237.

4. Alexits,G., Kralik,D. Über Approximationen mit den arithmetischen Mitteln allgemeiner Orthogonalreihen. Acta math.Acad.sci.hung.,1960,11,387-399.

5. Aljančič,S. Über konvexe Multiplikatoren bei Fourier-Reihen. Math.Z.,1963,81,215-222.

6. Bajrakterevic,M. Sur quelques problems consermant la vitesse de convergence et la sommabilite des suites. Bull. sci.Cons.Acad.sci.et art.RSFYA,1973,A 18,225-226.

7. Baker,J.W., Petersen,G.M. Inclusion of sets of regular summability matrices. Proc.Combridge Phil.Soc.,1964,60, 705-712.

8. Balser,W. Über Abschnittslimitierbarkeit. J.reine angew. Math.,1976,28,211-218.

9. Balser,W., Jurkat,W.B., Peyerimhoff,A. On linear funktionals and summability factors for strong summability I, II. Canad.J.Math.,1978,30,983-996;1981,33,769-781.

10. Banach,S. Theorie des operations lineaires. Warszawa, 1932.

11. Baric,L.W. The chi function in generalized summability. Studia Math.,1971,39,155-180.

12. Baumann,H. Quotientensätze für Matrizen in der Limitierungstheorie. Math.Z.,1967,100,147-162.

13. Beekmann,W. Mercer-Sätze für abschnittsbeschränkte Matrixtransformationen. Math.Z.,1967,97,154-157.

14. Beekmann,W. Wirkfelder von Integralverfahren. Math.Z., 1967, 102,323-336.

15. Beekmann,W. Perfekte Integralverfahren. Math.Z.,1968, 104,99-105.

16. Beekmann,W. Total-Vergleich normaler Matrizen mit diagonalpositiver Inversen. Math.Z.,1972,125,361-371.

17. Beekmann,W. Über einige limitierungstheoretische Invarianten. Math.Z.,1976,150,195-199.

18. Beekmann,W. A note on λ-convergence and λ-conullity. Seminarberichte der Fernuniversität Hagen,1991,40,1-3.

19. Beekmann,W., Boos,J., Zeller,K. Der Teilraum P im Wirkfeld eines Limitierungsverfahrens ist invariant. Math.Z., 1973,130,287-290.

20. Beekmann,W. Chang,S.-C. Some summability invariants. Manuscripta Math.,1980,31,363-378.

21. Beekmann,W. Chang,S.-C. An invariance problem in summability. Analysis,1981,1,297-302.

22. Beekmann,W., Chang,S.-C. An example in summability. Periodica Math.Hung.,1983,14,133-137.

23. Beekmann,W., Chang,S.-C. On the structure of summability fields. Results Math.,1984,7,119-129.

24. Beekmann,W., Chang,S.-C. Replaceability and μ-uniqueness - A unified approach. C.R.Math.Rep.Acad.Sci Canada,1984, 6,113-116.

25. Beekmann,W., Chang,S.-C. Summability domains not containing φ. Analysis,1988,8,145-164.

26. Beekmann,W., Chang,S.-C. Some distinguished subsets of FK spaces containing φ. Results Math.,1989,16,190-198.

27. Beekmann,W., Zeller,K. Normvergleich bei abschnittsbeschränkten Limitierungsverfahren. Math.Z.,1972,126, 116-122.

28. Beekmann,W., Zeller,K. Positive Operatoren in der Limitierung. Linear operators and approximation.II.(Proc. Conf.,Oberwolfach Math.Res.Inst.,Oberwolfach,1974), 559-564.

29. Beekmann,W., Zeller,K. Positivity in summability. Intern. Ser.Numer.Math.,1984,71,111-117.

30. Beekmann,W., Zeller,K. Positivity in absolute summability. Intern.Ser.Numer.Math.,1987,80,205-215.

31. Bennett,G. Distinguished subsets and summability invariants. Studia Math.,1971,40,225-234.

32. Bennett,G. A representation theorem for summability domains. Proc.Amer.Math.Soc.,1972,24,193-203.

33. Bennett,G. The gliding humps technique for FK spaces. Trans.Amer.Math.Soc.,1972,166,285-292.

34. Bennett,G. Some inclusion theorems for sequence spaces. Pacific J.Math.,1973,46,17-30.

35. Bennett,G. A new class of sequence spaces with applications in summability. J.reine angew.Math.,1974,266,49-75.

36. Bennett,G. Sequence spaces with small β-duals. Math.Z., 1987,194,321-329.

37. Bennett,G., Kalton,N.J. FK-spaces containing c_o. Duke Math.J.,1972,39,561-582.

38. Bennett,G., Kalton,N.J. Addendum to "FK-spaces containing c_o." Duke Math.J.,1972,39,819-821.

39. Bennett,G., Kalton,N.J. Inclusion theorems for K-spaces. Canad.J.Math.,1973,25,511-524.

40. Bennett,G., Kalton,N.J. Consistency theorems for almost convergence. Trans.Amer.Math.Soc.,1974,198,23-43.

41. Bennett,G., Sember,J.J., Wilansky,A. Sections of sequences in matrix domains. Trans.N.Y.Acad.Sci.,1972,34,107-112.

42. Berg,I.D. A note on convergence fields. Canad.J.Math., 1966,18,635-638.

43. Bohr,H. Sur la serie de Dirichlet. C.R.Acad.Sci.Paris, 1909,148,75-80.

44. Bojanic,R., Lee,Y.H. An estimate for the rate of conver-

gence of convolution products of sequences. SIAM J.Math. Anal.,1974,5,452-462.

45. Boos,J. Verträglichkeit von konvergenztreuen Matrixverfahren. Math.Z.,1972,128,15-22.

46. Boos,J. Ersetzbarkeit von konvergenztreuen Matrixverfahren. Studia Math.,1974,51,71-79.

47. Boos,J. Summation von beschränkten Folgen bezüglich durch Matrizenfolgen definierte Konvergenzbegriffe. Math. Japon,1975,20,113-136.

48. Boos,J. Zwei-Normen-Konvergenz und Vergleich von beschränkten Wirkfeldern. Math.Z.,1976,148,285-294.

49. Boos,J. Der induktive Limes von abzählbar vielen FH-Räumen. Manuscripta Math.,1977,21,205-225.

50. Boos,J. Vergleich μ-beschränkter Wirkfelder mit Hilfe von Quotientendarstellungen. Math.Z.,1982,181,71-81.

51. Boos,J. Über die μ-Stetigkeit von Matrizen. Studia Math., 1982,70,197-202.

52. Boos,J. Limitierungstheorie. Fernuniversität-Gesamthochschule,Hagen,1984.

53. Boos,J. Singularitäten von Folgen permanenter Matrizen. Math.Japon,1984,5,753-783.

54. Boos,J. The comparison of bounded convergence domains of regular matrices. Math.Z.,1986,193,11-13.

55. Boos,J. Inclusion theorems for FK-spaces. Canad.J.Math., 1987,39,631-645.

56. Boos,J., Leiger,T. Sätze vom Mazur-Orlicz-Typ. Studia Math.,1985,81,197-211.

57. Boos,J., Leiger,T. General theorems of Mazur-Orlicz type. Studia Math.,1989,92,1-19.

58. Boos,J., Leiger.T. Some distinguished subspaces of domains of operator valued matrices. Results Math.,1989, 16,199-211.

59. Boos,J., Leiger,T. An inclusion theorem for K(X)-spaces. Seminarberichte der Fernuniversität Hagen,1991,41,1-17.

60. Boos,J. Neuser,R. Quotient representations and the convexity of Cesaro means. Arch.Math.,1988,51,532-538.

61. Borel,E. Memoire sur les series divergentes. Ann.de l'Ec. Norm.(3),1899,16,9-136.

62. Bosanquet,L.S. A mean value theorem. J.London Math.Soc., 1941,16,146-148.

63. Bosanquet,L.S. Note on convergence and summability factors.III. Proc.London Math.Soc.,1949,50,482-496.

64. Brown,H.I. The summability field of a perfact 1-1 method of summation. J.d'Analyse Math.,1967,20,281-287.

65. Brown,H.I., Cowling,V.F. On consistency of 1-1 methods of summation. Michigan Math.J.,1965,12,357-362.

66. Brown,H.I., Kerr,D.R., Stratton H.H. The structure on B[c] and extensions of the concept of conull matrices. Proc.Amer.Math.Soc.,1969,22,7-14.

67. Brown,H.I., Stratton,H.H. Some FK-spaces that are conservative summability fields. J.London Math.Soc.,1971,3,

363-370.

68. Buck,R.C. A note on subsequences. Bull.Amer.Math.Soc., 1943,49,898-899.

69. Bugrov,Ya.S. On linear summation methods of Fourier series. Analysis Math.,1979,5,119-133.

70. Buntinas,M. Convergent and bounded Cesaro sections in FK-spaces. Math.Z.,1970,121,191-200.

71. Buntinas,M. On sectionally dense summability fields. Math.Z.,1973,132,141-149.

72. Buntinas,M. On Toeplitz sections in sequence spaces. Math.Proc.Cambridge Phil.Soc.,1975,78,451-460.

73. Buntinas,M. Approximation by Abel means and Tauberian theorems in sequence spaces. Studia Math.,1982,74,124-136.

74. Buntinas,M., Goes,G. Products of sequence spaces and multipliers. Radovi mat.,1987,3,287-300.

75. Carmichael,R.D. General aspects of the theory of summable series. Bull.Math.Amer.Soc.,1918,25,97-131.

76. Censor,Y. General oscillation spaces and conullity of FK-spaces. J.London Math.Soc.,1975,10,105-112.

77. Censor,Y. General conservative FK-spaces and an extended notion of conullity. J.d'Analyse Math.,1978,33,105-120.

78. Chang,S.-C. Replaceability in matrix methods. C.R.Math. Acad.Sci.Canada,1986,8,23-28.

79. Chang,S.-C., MacPhail,M.S., Snyder,A.K., Wilansky,A. Consistency and replaceability for conull matrices. Math.Z.,1968,105,208-212.

80. Coomes,H.R., Cowling,V.F. Summability and associative infinite matrices. Michigan Math.J.,1961,8,65-70.

81. Cooper,J.B. Saks Spaces and Applications to Functional Analysis. North Holland,Amsterdam-New York-Oxford,1987.

82. Copping,J. Inclusion theorems for conservative summation methods. Nederl.Akad.Wet.,Proc.,Ser.A.,1958,61,485-499.

83. Copping,J. On the consistency and relative strength of regular summability methods. Proc.Cambridge Phil.Soc., 1966,62,421-428.

84. Cowling,V.F. Summability and analytic continuation. Proc. Amer.Math.Soc.,1950,1,536-542.

85. Cowling,V.F. Inclusion relations between matrices. Math. Z.,1967,98,192-195.

86. Cross,R.W. On the conditions for a T-matrix to evaluate no bounded divergent sequence. Bull.Soc.Math.Belgique, 1963,15,243-252.

87. Dawson,D.F. Some rate invariant sequence transformations. Proc.Amer.Math.Soc.,1964,15,710-714.

88. Dawson,D.F. Matrix summability over certain classes of sequences ordered with respect to rate of convergence. Pacific J.Math.,1968,24,51-56.

89. Dawson,D.F. Summability of subsequences and other regular transformations of a sequence. Boll.Un.Math.Ital.(4),

1973,8,449-455.

90. Dawson,D.F. Summability of subsequences and stretchings of sequences. Pacific J.Math.,1973,44,455-460.

91. Dawson,D.F. A Tauberian theorem for stretchings. J.London Math.Soc.,1976,13,27-33.

92. DeVos,R. θ Maps between FK-spaces and summability. Math.Z.,1972,129,287-298.

93. DeVos,R. Non-replaceable matrices. Math.Z., 1984, 186, 331-333.

94. DeVos,R. Combinations of distinguished subsets and conullity. Math.Z.,1986,192,447-451.

95. Dotzon,W. On the Mann iterative processes. Trans.Amer. Math.Soc.,1970,149,65-73.

96. Dubinsky,E.L., Retherford,J.R. Schauder bases and Köthe sequence spaces. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci.Math. Astronom Phys.,1966,14,497-501.

97. Fejér,L. Untersuchungen über Fouriersche Reihen. Math. Ann.,1904,58,51-69.

98. Flachsmeyer,J., Terpe,F. On summation on locally compact spaces. Math.Nachr.,1976,75,255-270.

99. Fridy,J.A. Mercerian-type theorems for absolute summability. Portugaliae Math.,1974,33,141-145.

100. Fridy,J.A. Summability of rearrangements of seguences. Math.Z.,1975,143,187-192.

101. Fröhlich,W. Einschliessungssätze für das Abelsche Limitierungsverfahren bezüglich Konvergenzgeschwindigkeit und absoluter Konvergenz. Mitt.Math.Sem.Giessen,1973, 97,505.

102. Garling,D,J.H. The β-and γ-duality of sequence spaces. Proc.Cambridge Phil.Soc.,1967,63,936-984.

103. Garling,D.J.H. On topological sequence spaces. Proc. Cambridge Phil.Soc.,1967,63,997-1019.

104. Gelbaum,B. Expansions in Banach spaces. Duke Math.J., 1950,17,187-196.

105. Goes,G. Komplementäre Fourierkoeffizientenräume und Multiplikatoren. Math.Ann.,1959,137,371-384.

106. Goes,G. Summen von FK-Räumen.Funktionale Abschnittskonvergenz und Umkehrsätze. Tôhoku Math.J.,1974,26,487-504.

107. Grosse-Erdmann,K.-G. Matrix transformations involving analytic sequence spaces (to appear).

108. Grosse-Erdmann,K.-G. The μ-continuity problem and the structure of matrix domains (to appear).

109. Hardy,G.H. Generalisation of a theorem in the theory of divergent series. Proc.London Math.Soc.,1908,6,255-264.

110. Hardy,G.H., Littlewood,J.E. Contributions of the arithmetic theory of series. Proc.London Math.Soc.,1972,11, 411-478.

111. Heinsaar,M. Cauchy korrutise summeeruvuskiirus Cesaro teoreemis. Diplomitöö.Tartu,1990.

112. Higaki,N. Some theorems on Riesz's method of summation. Tôhoku Math.J.,1935,41,70-79.

113. Hill,J.D. Some properties of summability. Duke Math.J., 1942,9,373-381.

114. Hill,J.D. Summability methods weaker than convergence. Amer.J.Math.,1950,72,621-624.

115. Hurwitz,W.A. Some properties of methods of evalution of divergent sequences. Proc.London.Math.Soc.,1927,26,231-248.

116. Häng,M. Cauchy korrutise koonduvusest ja tema koonduvuskiirusest. Diplomitöö.Tartu,1990.

117. Jaite,R. General theory of summability.I. Acta sci.math., 1965,26,107-116.

118. Jakimovski,A. Analytic continuation and summability of power series. Michigan Math.J.,1964,11,353-355.

119. Jakimovski,A., Livne,A. General Kojima-Toeplitz like theorems and consistency theorems. J.d'Analyse Math., 1971,24,323-368.

120. Jakimovski,A., Meyer-König,W., Zeller,K. Power series methods of summability, positivity and gap perfectness. Trans.Amer.Math.Soc.,1981,266,309-317.

121. Jakimovski,A., Meyer-König,W., Zeller,K. Two-norm convergence and Tauberian boundedness theorems. F -t. Approxim.,1987,17,21-29.

122. Jakimovski,A., Russell,D.C. Matrix mappings between spaces. Bull.London Math.Soc.,1972,4,345-353.

123. Jakimovski,A., Russell,D.C. Best order conditions 1 linear spaces with applications to limitation, inclu-on and high indices theorems for ordinary and absolute Riesz means. Studia Math.,1976,56,101-120.

124. Jakimovski,A., Russell,D.C., Tzimbalario,J. Inclusion theorems for matrix transformations. J.d'Analyse Math., 1973,26,391-404.

125. Jurkat,W., Peyerimhoff,A. Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math.Z.,1951,55,92-108.

126. Jurkat,W., Peyerimhoff,A. Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen. Math.Z.,1952,58, 152-178.

127. Jürimäe,E. Replaceability for λ-summability. Israel Math.Conf.Proc.,1991,4,157-162.

128. Kalton,N.J. Some forms of the closed graph theorem. Proc.Cambridge Phil.Soc.,1971,70,401-408.

129. Kalton,N.J. On summability domains. Proc.Cambridge Phil. Soc.,1973,73,327-338.

130. Kamenik,E. Maatriksteisendused koonduvuskiirustega määratud jadaruumides. Diplomitöö.Tartu,1990.

131. Kamthan,P.K., Gupta,M. Sequence Spaces and Series. M.Dekker,New York-Basel,1981.

132. Kangro,G. Matemaatiline analüüs.II. "Valgus",Tallinn, 1968.

133. Kaegy,T.A. Matrix transformations and absolute summability. Pacific J.Math.,1976,63,411-415.

134. Kaegy,T.A. Summability of subsequences and rearrange-

ments of sequences. Proc.Amer.Math.Soc.,1978,72,492-496.

135. Kershaw,D. Regular and convergent Korovkin sequences. Linear operators and approximation.II.(Proc.Conf.,Oberwolfach Math.Res.Inst.,Oberwolfach,1974),377-389.

136. Knopp,K. Zur Theorie der Limitierungsverfahren.I,II. Math.Z.,1929,31,97-127;276-305.

137. Knopp,K. Folgenräume und Limitierungsverfahren. Ein Bericht über Tübinger Ergebnisse. Univ.Roma.Ist.Naz. Alta Mat.Rend.Mat.e Appl.,1953,11,269-298.

138. Knopp,K.,Lorentz,G.G. Beiträge zur absoluten Limitierung. Arch.Math.,1949,2,10-16.

139. Kojima,T. On generalized Toeplitz's theorems on limit and their applications. Tôhoku Math.J.,1917,12,291-326.

140. Kolodziej,W. Über den Beweis eines Satzes aus der Limitierungstheorie. Colloq.Math.,1971,23,299-300.

141. Kuan,S.-Y. Some invariant properties on summability domains. Proc.Amer.Math.Soc.,1977,64,248-250.

142. Kuttner,B., Lawrence,L.H. On Mercerian sets. J.London Math.Soc.,1977,16,96-98.

143. Köthe,G. Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume. Math.Nachr.,1951,4,70-80.

144. Köthe,G., Toeplitz,O. Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen. J.reine angew.Math.,1934,1971,193-226.

145. Leiger,T. Abschnittspositive Matrizen und Positivitätsfaktoren in der Limitierungstheorie. Manuscripta Math., 1984,45,293-307.

146. Leindler,L. Über die Rieszschen Mittel allgemeiner Orthogonalreihen. Acta sci.math.,1963,24,129-139.

147. Lorentz,G.G. A contribution to the theory of divergent sequences. Acta Math.,1948,80,167-190.

148. Lorentz,G.G., Zeller,K. Über Paare von Limitierungsverfahren. Math.Z.,1958,68,428-438.

149. Lorentz,G.G., Zeller,K. Strong and ordinary summability. Tôhoku Math.J.,1963,15,315-321.

150. Lorentz,G.G., Zeller,K. Abschnittslimitierbarkeit und der Satz von Hardy-Bohr. Arch.Math.,1964,15,208-213.

151. Luh,W. Analytische Fortsetzung mit verallgemeinerten Hausdorffverfahren. Mitt. Math. Sem. Giessen, 1971,91, 82-104.

152. Luh,W. Über den Satz von Mergelyan. J.Approxim.Theory, 1976,16,194-198.

153. Macphail,M.S. Some theorems on absolute summability. Canad.J.Math.,1951,3,386-390.

154. Macphail,M.S. A remark on reversible matrices. Proc. Amer.Math.Soc.,1954,5,120-121.

155. Macphail,M.S. A summability problem. Canad.Math.Bull., 1980,23,421-424.

156. Macphail,M.S., Orhan,C. Some properties of absolute summability domains. Analysis,1989,9,317-322.

157. Macphail M.S., Wilansky,A. Linear functionals and summa-

bility invariants. Canad.Math.Bull.,1974,17,233-242.

158. Maddox,I.J. Spaces of strongly summable sequences. Quart.J.Math.,1967,18,345-355.

159. Maddox,I.J. Infinite Matrices of Operators. Lecture Notes Math.,786.Springer,1980.

160. Magee,J.C. The β-dual of FK-spaces. Analysis,1988,8, 25-32.

161. Magee,J.C., Ruckle,W.H. The strong topology on the dual space of a summability field and the mu-continuity problem. Math.Z.,1987,195,409-413.

162. Mann,W.R. Mean value methods in iteration. Proc.Amer. Math.Soc.,1953,4,506-510.

163. Mazur,S. Über lineare Limitierungsverfahren. Math.Z., 1928,28,599-611.

164. Mazur,S. Eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren.I. Studia Math.,1930,2,40-50.

165. Mazur,S., Orlicz,W. Sur les methodes lineaires de sommation. C.R.Acad.Sci.Paris,1933,196,32-34.

166. Mazur,S., Orlicz,W. On linear methods of summability. Studia Math.,1954,14,129-160.

167. McGivney,R.J., Ruckle,W. Multiplier-algebras of biorthogonal systems. Pacific J.Math.1969,29,375-388.

168. Mercer,J. On the limit of real variants. Proc.London Math.Soc.,1907,5,206-224.

169. Meyer-König,W., Tietz,H. Über die Limitierungsumkehrsätze vom Typ o. Studia Math.,1968,31,205-216.

170. Meyer-König,W., Zeller,K. Lückenumkehrsätze und Lückenperfektheit. Math.Z.,1956,66,203-224.

171. Meyer-König,W., Zeller,K. Funktionalanalytische Behandlung des Taylorschen Summierungsverfahrens. Centre Belge Rech.math.,Colloque sur la Theorie des Suites, Bruxelles,1957,32-53.

172. Meyer-König,W., Zeller,K. FK-Räume und Lückenperfektheit. Math.Z.,1962,78,143-148.

173. Meyer-König,W., Zeller,K. Summability fields with a Tauberian transition property. J.Approxim.Theory,1975, 13,294-304.

174. Meyer-König,W., Zeller,K. Tauber-Sätze und M-Perfektheit. Math.Z.,1981,177,257-266.

175. Meyers,G. On FK-spaces which are boundedness domains. Proc.Amer.Math.Soc.,1974,46,38-42.

176. Meyers,G. On Toeplitz sections in FK-spaces. Studia Math.,1974,51,23-33.

177. Miller,H.I. A class of non-rate invariant sequences transformations. Rad.Akad.nauka i umjetn.BiH.Od.prirod. i mat.nauka.1973,45,41-43.

178. Miller,H.I. Rates of convergence and summability. Rad. Akad.nauka i umjetn.BiH.Od.prirod.i mat.nauka.1973,45, 85-92.

179. Miller,H.I. Some results on rates of convergence of

sequences. Rad.Akad.nauka i umjetn.BiH.Od.prirod.i mat. nauka,1978,61,169-178.

180. Minakshisundaram,S., Rajagopal,C.T. An extension of a Tauberian theorem of L.J.Mordell. Proc.London.Math.Soc., 1948,50,242-255.

181. Moore,C.N. Summable Series and Convergence Factors. New York,1938.

182. Mordell,L.J. A summability convergence theorem. J.London Math.Soc.,1928,3,86-89.

183. Moritcz,F., Tandori,K. On the problem of summability of orthogonal series. Acta sci.math.,1968,29,331-350.

184. Neuser,R. Summation of almost convergent divergent sequences, topological methods. Manuscripta Math.,1982, 40,17-26.

185. Nishiura,T., Waterman,D. Reflexivity and summability. Studia Math.,1963,23,53-57.

186. Okada,Y. Über die Annäherung analytischer Funktionen. Math.Z.,1925,23,62-71.

187. Orlicz,H.W. Funktionalanalysis und allgemeine Theorie der linearen Transformationen. Centre Belge Rech.math., Colloque sur la Theorie des Suites,Bruxelles,1957, 121-147.

188. Orlicz,W. On the continuity of linear operations in Saks spaces with an application to the theory of summability. Studia Math.,1957,31,324-326.

189. Petersen,G.M. Summability methods and bounded sequences. J.London Math.Soc.,1956,31,324-326.

190. Petersen,G.M. Almost convergence and the Buck-Pollard property. Proc.Amer.Math.Soc.,1960,11,469-477.

191. Petersen,G.M. Consistency of summation matrices for unbounded sequences. Quart.J.Math.,1963,14,161-169.

192. Petersen,G.M. Regular Matrix Transformations. McGraw-Hill,London-New York-Toronto-Sidney,1966.

193. Peyerimhoff,A. Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math.Z.,1951,55,23-54.

194. Peyerimhoff,A. Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. Math.Z.,1953,57,265-290.

195. Rhoades,B.E. Fixed point iterations using infinite matrices. Trans.Amer.Math.Soc.,1974,196,161-176.

196. Riesz,M. Une methode de sommation equivalente a la methode des moyennes arithmetiques. C.R.Acad.Sci.Paris, 1911,152,1651-1654.

197. Ruckle,W. Lattices of sequence spaces. Duke Math.J., 1968,35,491-503.

198. Ruckle,W.H. An abstract concept of the sum of a numerical series. Canad.J.Math.,1970,22,863-874.

199. Ruckle,W.H. Representation and series summability of complete biorthogonal sequences. Pacific.J.Math.,1970, 34,511-528.

200. Ruckle,W.H. Topologies on sequence spaces. Pacific.J. Math.,1972,42,235-249.

201. Ruckle,W.H. FK-spaces in which the sequence of coordinate vector is bounded. Canad.J.Math.,1973,25,973-978.

202. Ruckle,W.H. A universal topology for sequence spaces. Math.Ann.,1978,236,43-48.

203. Ruckle,W.H. The bounded consistency theorem. Amer.Math. Monthly,1979,86,566-571.

204. Russell,D.C. Note on inclusion theorems for infinite matrices. J.London Math.Soc.,1958,33,50-62.

205. Russell,D.C. Inclusion theorems for section-bounded matrix transformations. Math.Z.,1970,113,255-265.

206. Sargent,W.L.C. On sectionally bounded BK-spaces. Math. Z.,1964,83,57-66.

207. Sargent,W.L.C. On compact matrix transformations between sectionally bounded BK-spaces. J.London Math.Soc., 1966,41,79-87.

208. Schaeffer,H.H. Sequence spaces with a given Köthe β-dual. Math.Ann.,1970,189,235-241.

209. Schaffer,M., Snyder,A.K. Properties of sequence spaces in which l_1 is weakly compactly embedded. Math.Z.,1986, 192,569-574.

210. Schur,I. Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J.reine angew.Math.,1921,151, 79-111.

211. Sember,J.J. A note on conull FK-spaces and variation matrices. Math.Z.,1968,108,1-6.

212. Sember.J.J. Summability matrices as compact-like operators. J.London.Math.Soc.,1970,2,530-534.

213. Sember,J.J. Variational FK-spaces and two norm convergence. Math.Z.,1971,119,153-159.

214. Sember,J.J. On unconditional section boundedness in sequence spaces. Rocky Mountain J.Math.,1977,7,699-706.

215. Sember,J.J., Raphael,M. The unrestricted section properties of sequences. Canad.J.Math.,1979,31,331-336.

216. Seydel,D. Quotienten- und Verträglichkeitssatze für Matrizen. Dissertation,Hagen,1990.

217. Sikk,J. Matrix mappings for rate-spaces and K-multipliers in the theory of summability. Tartu Ülik.Toimetised,1989,846,118-129.

218. Singer,I. A remark on reflexivity and summability. Studia Math.,1965,26,113-114.

219. Skerry,H., Wilansky,A. Inclusion relations between row-finite matrices and triangles. J.d'Analyse Math.,1973, 26,183-185.

220. Sledd,W.T. On summability of dilutions. J.London Math. Soc.,1969,1,371-374.

221. Snyder,A.K. On a definition for conull and coregular FK-spaces. Notices.Amer.Math.Soc.,1963,10,183.

222. Snyder,A.K. Conull and coregular FK-spaces. Math.Z., 1965,90,376-381.

223. Snyder.A.K. Sequence spaces and interpolation problems

for analytic functions. Studia Math.,1971,39.137-153.

224. Snyder,A.K. Consistency theory in semiconservative spaces. Studia Math.,1982,71,1-13.

225. Snyder,A.K., Wilansky,A. Inclusion theorem and semiconservative FK-spaces. Rocky Mountain J.Math.,1972,2, 595-603.

226. Snyder,A.K., Wilansky,A. The Mazur-Orlicz bounded consistency theorem. Proc.Amer.Math.Soc.,1980,80,374-376.

227. Soomer,V. Maatriksmenetluste perfektsusest antud summeeruvuskiiruse korral. Diplomitöö.Tartu,1968.

228. Stadler,W. Zu einer Frage von Wilansky. Arch.Math.,1987, 48,149-152.

229. Steinhaus,H. Quelques remarques sur la generalization de la notion de limite. Prace mat.fiz.,1913,22,121-134.

230. Stieglitz,M. Eine Verallgemeinerung des Begriffs der Fastkonvergenz. Math.Japon,1973,18,53-70.

231. Stieglitz,M. Durch Matrizenfolgen erklärte Konvergenzbegriffe und ihre Wirkfelder. Math.Japon,1973,18,235-249.

232. Stieglitz,M., Tietz,H. Matrixtransformationen von Folgenräumen.Eine Ergebnisübersicht. Math.Z.,1977,154,1-16.

233. Swetits,J. A characterization of a class of barrelled sequence spaces. Glasgow Math.J.,1978,19,27-31.

234. Tali,A. Convexity conditions for families of summability methods (to appear).

235. Tandori,K. Über die ortogonalen Funktionen.VII. (Approximationssätze.) Acta sci.math.,1959,20,19-24.

236. Tatchell,J.B. Limitation theorems for triangular matrix transformations. J.London Math.Soc.,1965,40,127-136.

237. Tauber,A. Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. Monatshefte Math.,1897,8,273-277.

238. Tietz,H. Negative Resultate über Tauber-Bedingungen. Monafshefte Math.,1971,75,69-78.

239. Tietz,H. Inäquivalenzsätze in der Limitierungstheorie. J.reine angew.Math.,1983,339,97-104.

240. Tietz,H. Über Umkehrbedingungen bei gewöhnlicher und absoluter Limitierung. Studia Math.,1984,80,47-52.

241. Tietz,H. Tauberian theorems of $J_p \to M_p$ -type. Math.J. Okayama Univ.,1989,31,221-225.

242. Tietz,H. Schmidtsche Umkchrbedingungen für Potenzreihenverfahren. Acta sci.math.,1990,54,355-365.

243. Tietz,H., Trautner,R. Tauber-Sätze für Potenzreihenverfahren. Arch.Math.,1988,50,164-174.

244. Toeplitz,O. Über allgemeine lineare Mittelbildungen. Prace mat.fiz.,1911,22,113-119.

245. Türnpu,H. Weyl factors for summability with speed of orthogonal series. Tartu Ülik.Toimetised,1990,928,103-112.

246. Vermes,P. Series to series transformations and analytic continuation by matrix methods. Amer.J.Math.,1949,71,

541-562.

247. Whitley,R. Conull and other matrices which sum a bounded divergent sequence. Amer.Math.Monthly, 1967,74,798-801.

248. Wilansky,A. A necessary and sufficient condition that a summability method be stronger than convergence. Bull. Amer.Math.Soc.,1949,55,914-915.

249. Wilansky,A. An application of Banach linear functionals to summability. Trans.Amer.Math.Soc.,1949,67,59-68.

250. Wilansky,A. Convergence fields of row-finite and row-infinite reversible matrices. Proc.Amer.Math.Soc.,1952, 3,389-391.

251. Wilansky,A. Summability : the inset, replaceable matrices, the basis in summability space. Duke Math.J.,1952, 19,647-660.

252. Wilansky,A. Distinguished subsets and summability invariants. J.d'Analyse Math.,1964,12,327-350.

253. Wilansky,A. Functional Analysis. Blaisdell,New York-Toronto-London,1964.

254. Wilansky,A. Topological divisors of zero and Tauberian theorems. Trans.Amer.Math.Soc.,1964,113,240-251.

255. Wilansky,A. On an article by R.W.Cross on the summability of bounded divergent sequences. Bull.Soc.Math.Belgique,1965,17,186-187.

256. Wilansky,A. Topics in Functional Analysis. Lecture Notes Math.,45,Springer,1967.

257. Wilansky,A. The invariance theorem of Beekmann, Boos and Zeller. Preprint,1974.

258. Wilansky,A. The μ property of FK spaces. Commentationes Math.,1978,21,371-380.

259. Wilansky,A. Summability trough Functional Analysis. North Holland,Amsterdam-New York-Oxford,1984.

260. Wilansky,A., Zeller,K. Inverses of matrices and matrix-transformations. Proc.Amer.Math.Soc.,1955,6,414-420.

261. Wilansky,A., Zeller,K. Summation of bounded divergent sequences, topological methods. Trans.Amer.Math.Soc., 1955,78,501-509.

262. Wilansky,A., Zeller.K. Abschnittsbeschränkte Matrix-transformationen; starke Limitierbarkeit. Math.Z.,1956, 64,258-269.

263. Wilansky,A., Zeller,K. The inverse matrix in summability : reversible matrices. J.London Math.Soc.,1957,32, 397-408.

264. Wilansky,A., Zeller,K. Banach algebra and summability. Illinois J.Math.,1958,2,378-385.

265. Wilansky,A., Zeller,K. FH-spaces and intersections of FK-spaces. Michigan Math.J.,1959,6,349-357.

266. Wilson,B.M. Note on the existence of Abel's limit. Messenger,1922,52,69-71.

267. Wlodarski,L. Sur les methode continues de limitation.I. Application de l'espace B_o de Mazur et Orlicz a l'etude

des methods continue. Studia Math., 1954, 14, 161-187.

268. Wlodarski, L. Sur les methode continues de limitation. II. Limitation des suites bornes. Studia Math., 1954, 14, 188-199.

269. Włodarski, L. On a new approach to continuous methods of summation. Colloq. math., 1963, 10, 61-71.

270. Zeller, K. Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z., 1951, 53, 463-487.

271. Zeller, K. Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z., 1951, 55, 55-70.

272. Zeller, K. Faktorfolgen bei Limitierungsverfahren. Math. Z., 1952, 56, 134-151.

273. Zeller, K. FK-Räume in der Funktionentheorie. I, II. Math. Z., 1953, 58, 288-305; 414-435.

274. Zeller, K. Merkwürdigkeiten bei Matrixverfahren; Einfolgenverfahren. Arch. Math., 1953, 4, 1-5.

275. Zeller, K. Matrixtransformationen von Folgenräumen. Rend. mat. e applic., 1954, 12, 340-346.

276. Zeller, K. Über der perfekten Teil von Wirkfeldern. Math. Z., 1956, 64, 123-130.

277. Zeller, K. Vergleich des Abelverfahrens mit gewöhnlichen Matrixverfahren. Math. Ann., 1956, 131, 253-257.

278. Zeller, K. Abschnittsabsätzungen bei Matrixtransformationen. Math. Z., 1963, 80, 355-357.

279. Zeller, K., Beekmann, W. Theorie der Limitierungsverfahren. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

280. Аасма А. Матричные преобразования полей суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987, 770, 38-50.

281. Абель М. Об одной топологической алгебре матриц, сохраняющих сходимость. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1984, 661, 3-14.

282. Альтман А. Обобщение одной теоремы Мазура-Орлича из теории суммируемости. Studia Math., 1953, 13, 233-243.

283. Андриенко Б. А. О скорости приближения функций (C, 1)-средними их ортогональных разложений. Изд. высш. учебн. заведений. Математика, 1967, 8, 3-15.

284. Барон С. А. Введение в теорию суммируемости рядов. Валгус, Таллинн, 1977.

285. Брудно А. Л. Суммирование ограниченных последовательностей матрицами. Мат. сб., 1945, 16, 191-247.

286. Волков И. И. О совместности двух методов суммирования. Мат. заметки, 1967, 1, 283-290.

287. Волков И. И., Ульянов П. Л. О некоторых новых результатах по общей теории суммирования рядов и последовательностей (обзорная статья). Приложение к книге: Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Гос. изд. физ.-матем. лит., Москва, 1960.

288. Гапощкин В. Ф., Кадец М. И. Операторные базисы в пространствах Банаха. Мат. сб., 1963, 61, 3-12.

289. Кангро Г. О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, 37, 191-229.

290. Кангро Г. Об обобщении одной теоремы Мура. Докл. АН СССР,

1958,121,967-969.

291. Кангро Г. О некоторых исследованиях по теории суммируемости. Изв. АН Эст. ССР. Физ., матем., 1967,16,255-266.

292. Кангро Г. О множителях суммируемости типа Бора-Харди для заданной скорости. I,II. Изв. АН Эст. ССР. Физ.,матем., 1969,18,137-146;387-395.

293. Кангро Г. Об ослаблении тауберовых условий. Изв. АН Эст. ССР. Физ., матем., 1970,19,24-33.

294. Кангро Г. Множители суммируемости для рядов, λ-ограниченных методами Риса и Чезаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971,277,136-154.

295. Кангро Г. О λ-совершенности методов суммирования и ее применениях. I,II. Изв. АН Эст. ССР. Физ., матем., 1971,20, 111-120;375-385.

296. Кангро Г. Тауберова теорема с остаточным членом для метода Риса. I,II. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 155-160; 1972,305,156-166.

297. Кангро Г. Теория суммируемости последовательностей и рядов. В сб. "Мат. анализ. Т. 12. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР". Москва, 1974,5-70.

298. Кангро Г. Сильная суммируемость ортогональных рядов со скоростью. Изв. АН Эст. ССР. Физ., матем., 1979, 28,1-8.

299. Козлов В.Я. Об одном обобщении понятия базиса. Докл. АН СССР, 1950, 73, 643-646.

300. Кольк Э. О рефлексивности и суммируемости в пространствах Фреше. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972,305,127-130.

301. Кольк Э. Теорема Бака в локально выпуклых пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975,374,128-140.

302. Кольк Э. О суммируемости подпоследовательностей и перестановок. I. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979,504,74-84.

303. Кольк Э. Суммирование растяжек последовательностей в локально выпуклом пространстве. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987,770,88-96.

304. Красносельский М.А., Климов В.С., Лифшиц Е.А. О сходимости положительных функционалов и операторов. Докл. АН СССР, 1965,162,258-261.

305. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Гос. изд. физ.-матем. лит., Москва, 1960.

306. Лейгер Т. Включение обобщенных методов суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979,504,17-34.

307. Лейгер Т. Множители суммируемости для обобщенных методов суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та,1979,504,58-73.

308. Лейгер Т. Суммируемость последовательностей в линейных топологических пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1982,596,32-42.

309. Лейгер Т. О множителях сходимости со скоростью. Тезисы докладов конференции "Теоретические и прикладные вопросы математики." Часть 1.Тарту, 1985,97-98.

310. Лейгер Т. О порядковой структуре поля суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987,770,51-60.

311. Лейгер Т. О структуре полей λ-суммируемости матриц. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1989,846,50-60.

312. Лейгер Т., Маазик М. О λ-включении матриц суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987, 770, 61-68.

313. Лепассон И. Об условии Чезаро-суммируемости и Чезаро-ограниченности по отрезкам для пространств двойных последовательностей и рядов Фурье. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1989, 846, 106-117.

314. Лооне Л. О ядрах элемента отделимого локально выпуклого пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 125-135.

315. Лооне Л. Об ограниченных по ядру элементах в локально выпуклом пространстве. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 281, 86-90.

316. Лооне Л. Ядро Кноппа и ядро почти сходимости в пространстве m. I, II. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, 305, 131-144; 355, 148-156.

317. Лооне Л. Ядро α-суммируемости Питерсена. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 448, 46-51.

318. Лооне Л. Последовательностный α-метод и система α-нулевых множеств. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987, 770, 133-139.

319. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. "Высшая школа", Москва, 1982.

320. Макаров А. В., Меленцов А. А. Об одном обобщении итерационного процесса. "Некоторые вопросы теории операторов." Свердловск, 1987, 54-59.

321. Оя Э., Клаар К. О скорости сходимости произведения Коши. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987, 770, 115-121.

322. Оя Э., Ринне М. О скорости сходимости свертки последовательностей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1984, 661, 36-41.

323. Ревенко А. В. Неэффективные линейные интегральные операторы. В сб. "Суммирование расходящихся рядов и диф. уравнения с малым параметром." Киев, КТПИ, 1985, 76-83.

324. Реймерс Э. Новые общие методы суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, 129, 119-154.

325. Реймерс Э. Континуальные методы суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, 206, 50-89.

326. Реймерс Э. Совместность s-сходимости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, 220, 131-135.

327. Сикк Я. О T^{λ}-дополнительных пространствах рядов Фурье. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 355, 222-235.

328. Сикк Я. О некоторых T^{λ}-конструктивных пространствах и мультипликаторах класса $(X_{T^{\lambda}}, X_{T^{\mu}})$. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 374, 163-179.

329. Сикк Я. Мультипликаторы, T^{λ}-дополнительные пространства и коэффициенты Фурье некоторых классов функций. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 374, 180-185.

330. Соомер В. О полях почти суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 342, 156-162.

331. Соомер В. Множители сходимости для почти сходящихся рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 342, 163-169.

332. Соомер В. Последовательностные методы сильного суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1984, 661, 42-48.

333. Сырмус Т. Один метод ослабления тауберовых о-условий в O-условия. Уч. зап. Тартуск. ун-та , 1982,596,75-89.

334. Тали А. Некоторые примеры выпуклых и нуль-выпуклых семейств методов суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та , 1982,596.90-104.

335. Тали А. Новое семейство обобщенных методов суммирования Нерлунда. Уч. зап. Тартуск. ун-та , 1989,846,87-98.

336. Таммерайд И. Тауберовы теоремы с остаточным членом для методов суммирования Чезаро и Гельдера. Уч. зап. Тартуск ун-та , 1971,277,161-170.

337. Таммерайд И. Тауберовы теоремы с остаточным членом для метода суммирования Эйлера-Кноппа. Уч. зап. Тартуск. ун-та . 1971.277,171-182.

338. Таммерайд И. Некоторые тауберовы теоремы с остаточным членом для лакунарных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та ,1978, 448,52-54.

339. Таммерайд И. Некоторые тауберовы теоремы с остатком. Уч. зап. Тартуск ун-та , 1979.504,90-94.

340. Таммерайд И. Тауберовы теоремы с остаточным членом типа Боаса-Кангро. Уч. зап. Тартуск ун-та , 1984,661,60-63.

341. Таммерайд И. О теореме Г Кангро для лакунарных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та . 1989,846,74-79.

342. Терпе Ф., Флаксмайер Ю. Об одном аспекте теории компактификаций и теории меры в вопросах суммирования. Докл. АН СССР , 1976,227,302-305.

343. Тыннов М. Множители суммируемости . коэффициенты Фурье и мультипликаторы. Уч. зап. Тартуск. ун-та , 1966, 192, 82-97.

344. Тыннов М. Некоторые теоремы о мультипликаторах. Уч. зап. Тартуск. ун-та , 1972,305,247-250.

345. Тюрнпу Х. О суммируемости функциональных рядов почти всюду. Уч. зап. Тартуск. ун-та , 1972,305,199-212.

346. Тюрнпу Х. О значении функций Лебега для сходимости и суммируемости функциональных рядов почти всюду. Ann. Univ.Sci.Budapest,Sect.Math.,1973,16,125-132.

347. Тюрнпу Х. Функции Лебега по смешанным ядрам. Теория функций и приближений. Труды 2-й Саратовской зимней школы , 1986,Ч. I.,141-146.

348. Тяхт Т. Мультипликаторы базисов суммирования и множители суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та , 1975,355,157-164.

349. Тяхт Т. Мультипликаторы и дополнительные пространства ВК-пространств. Уч. зап. Тартуск. ун-та , 1975.374,141-154.

350. Тяхт Т. Мультипликаторы ВК-пространств. Уч. зап. Тартуск. ун-та , 1977,430,29-43.

351. Харди Г. Х. Расходящиеся ряды. Изд. иностр. лит., Москва , 1951.

352. Эзрохи И. А. Приложение функционального анализа к некоторым вопросам обобщенного суммирования. Тр. общетеор. кафедр Укр. с.-х. акад., Киев , 1963,3-16.

353. Юримяэ Э. И. Некоторые вопросы обобщенных матричных методов суммирования. Корегулярные и конулевые методы. Изв.

АН Эст. ССР. Сер. техн. и физ. матем. наук , 1959,8,115-121.

354. Юримяэ Э.И. Об одном классе обобщенных матричных методов суммирования. Изв. АН Эст. ССР. Сер. техн. и физ. матем. наук , 1959,8,166-171.

355. Юримяэ Э.И. Некоторые вопросы включения и совместности методов абсолютного суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та , 1964,150,132-143.

356. Юримяэ Э.И. Топологические свойства конулевых методов суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та , 1965,177,43-61.

357. Юримяэ Э.И. Множества совершенства для методов , сохраняющих сходимость. Уч. зап. Тартуск. ун-та , 1971,277,115-123.

358. Юримяэ Э.И. Теорема Целлера для λ-суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та , 1989,846,160-165.

359. Юримяэ Э.И. Проблема заменимости для методов суммирования со скоростью. Тезисы докладов конференции "Методы алгебры и анализа." Тарту , 1988,130-132.

Aineregister

Tähistused

Sisukord