Auhinnatöö

I

A 833.

Põder, Valter

1. dets. 1932 tunnustatud
esimese auhinna vääriliseks.
Autor: stud. math.
Reinhold Valter
Põder

Rektor
ülik-sekr

Kerakujuliste täheparvede ehitus.

Homo sapiens.

Sisukord.

I. Sissejuhatus.

Käesoleva töö teem on väga laia-ulatuslikune, nong tema täielik ja põhjalik käsitlus mõnel kümnel leheküljel polegi õieti hästi võimalik. Et aga siiski saada pilti kerakujuliste täheparvede ehitisest, siis vaatlen probleemi kitsamates piirides.

Kuid ka vaatamata vaadeldava ala suurusele, ei või siinkohal mainimata jätta, et meie praegused teadmised täheparvede kohta ei ole kuigi täielikud, ja et kõik, mis me selle kohta arvame teadvat, on ainult hüpoteesid, mis omavad suurema või vähema tõenäosuse.

Kirjanduses on olemas, nii palju, kui mõnul teada, kõigest kaks suuremat tööd, mis on pühendatud täielikult täheparvedele, andes konspektiivse ülevaate meie teadmistest selles alal. Need tööd on:

H. Shapley, Star Clusters, kus vaadeldakse peamiselt tulemusi, mis saadud otseselt vaatlusandmetest, ja P. ten Bruggencate, Sternhaufen, kus täpsemat käsitlust leiab teoreetiline külg. ten Bruggencate vaatleb siinjuures probleemi eriti kahest sisukohast: tiheduse- ja massidejaotuse küsimused.

Oma töö aluseks olen võtnud just viimase teose. – Ma olen ära jätnud puht-teoreetilise ettevalmistava osa ühes põhivalemite (näit. polütroopia differentsiaalvõrrandi) tuletamisega, jättes sellega rohkem ruumi peaosa käsitamisele, mida olen võtnud enam kirjeldavast sisukohast.

Esimeses peatükis, „sissejuhatus", olen toonud mõned tähtsamad üldandmed, mis on tarvilikud probleemi arusaamise jaoks.

Töö lõpul leidub ülevaade kirjandusest, mida olen käesoleval puhul läbi vaadanud.

§1. Täheparvede liigitus.

Üldiselt defineeritakse täheparved järgmiselt: nad on füüsiliselt seotud tähtede koondised, mis taeval oma kontsentratsiooni tõttu eralduvad tagapõhja tähtedest.

Püüdes klassifitseerida täheparvi võime mõõduandvaks lugeda lihtsalt nende taevasfäärile projitseeritud kuju. See võib olla väga korrapärane, nii et tähtede paigutus on isegi kirjeldatav matemaatiliste avaldiste abil, või jällegi kuju võib olla ~~väga~~ korrapäratu.

Teatud meetodite abil on uuemal ajal avastatud omaliikumised. Tähtede rühmi, mis omavad ühise omaliikumise, nimetame eelpool antud definitsiooni põhjal ka täheparvedeks; nad on n. n. „Moving clusters" ehk „Sternschwärme".

Melotte, Bailey ja Shapley poolt on ettepandud järgmine täheparvede liigitus: 1) Kerakujulised täheparved

(näit.: M 13). 2.) lahtised täheparved ×
(näit.: M 37), 3.) tähtede voolud (näit.: Tauruse vool). Viimase liigi uurimistöö on sootu teissugune kui kahe esimese oma.

Kerakujulised ja lahtised täheparved eraldab Shapley selle järele, kas on olemas keskkoha poole tugevasti kontsentreeritud nõrkade tähtede tagapõhi, või ei ole seda. Tegelikult aga, uurides seost parvetähtede heleduse ja värvi vahel, jõuame ikka enam veendumusele, et kerakujuliste ja lahtiste täheparvede vahel on olemas põhimõtteline vahe.

Kontsentratsiooni järele – täheparve tsentri suhtes – jaotab Shapley kerakujulised parved veel kaheteistkümnesse klassi. On võimalik, et selle jaotusega on tabatud ükskord arenemisjärgud, parvede iga.

Olgu siin veel mainitud, et tähtede arv kerasparvedes on enamjaolt väga suur. Suures, üldtuntud Herkulise kerasparves (M 13) on loetud üle 50 000 tähte

ja see on kuni 21. tähesuuruseni. Tegelik arv on aga kindlasti veel väga palju suurem.

Teaduse eriala täheparvedest ei ole kuigi vana. Kõik meie tänapäevased tõekspidamised kerakujuliste täheparvede loomuse, suuruse ja tähtsuse kohta ei ole vanemad kui vast kõigest viisteist aastat.

§2. Kerakujuliste täheparvede jaotus taevasfääril.

Stellaarstatistiliste uurimuste põhjal teame meie praegusel ajal, et Päike asub peaaegu n. n. kitsama tähtede süsteemi keskkohas. Selle, ka klassiliseks nimetatud tähtede süsteemi põhjendajaks on olnud Kapteyn ja Seeliger.

Kitsama tähtede süsteemi jaoks on Linnutee sümmeetriatasapinnaks. Ka kerakujuliste tähteparvede jaoks, mis näivalt moodustavad erisüsteemi, on Linnutee sümmeetria tasapinnaks, mida leiame, uurides nende jaotust galaktilistes laiustes, — kuid ta ei ole seda sel määral kui lahtiste tähteparvede jaoks.

On arvestatud selle erisüsteemi tõenäolik pooluse asukoht, ja see on (galaktilistes koordinaatides) 296° l., −8° p. Sellega oleks süsteemi keskpunkt: 327° l. 0° p. (= RA $17^h 28^m$, δ −29°) Ekvatoriaalses Linnutee piirkonnas, kus lahtiste parvede esinemine on eriti suur, puuduvad keraparved aga täiesti. Shapley arvab, et on olemas „complementary distribution on galactic latitude of globular and open clusters".

Galaktilises piirkonnas on silma torkav keraparvede suur puudumine 2·35°–5° vahel, kus juures maksimum on 325° juures.

Kui oletada, et Shapley parallakside mõõtmised on õiged, siis osutub, et ka nimelt asuvad kerakujulised ja lahtised tähteparved ühed teistest on lahus.

Keraparvede arvu kohta olgu täiendatud mõni sõna. Vaatamata sellele, et viimaste aastakümnete jooksul on meie instrumentaalsed abinõud taevaobjektide uurimiseks kasvanud võimsasti, ei ole, meile juba tuntud keraparvede arv saanud sugugi suuremaks, vastandiks näit. suurele hulgale järjest avastatavaid udukogusid. Olgu siiski siin kohal juhitud tähelepanu hiljuti ilmunud märkusele „Astronomische Nachrichten'is" (K 62)*, kus teatakse, et objekt N.G.C. 5694, mis seni on arvatud udukogude hulka, on arvatavasti väga kauge kerakujuline tähteparv. Ka teatab E. Hubble, et suure Andromeda spiraaludu (M 31)

* (K 62) Täiendav: vaata kirjanduse nimestikku (töö lõpul) nr. 62.

ümbruses meile tuntud udulised objektid on tõenäoliselt kerasparved.

§3. Keraspaarvede spektri küsimusi

Tähtede füüsiliste olude määramiseks rajame kahe parameetrile. Nad on heledus ja spektri tüüp (=temperatuur) resp. värv. Tähemassi selle kahe suuruse funktsioon. Statistilist jaotust nimetatud kahe parameetri järele kujutab n. n. Russell-Diagramm. On vaga tähtis, et võimalus oleks meile iga tähepaarve kohta teada.

Tüübiliste keraspaarvede juures on spektriliigi leidmine eriti seotud raskustega, mis näit. tulevad vaga suurest valguse nõrkusest ja tähtede suurest kontsentratsioonist paarve tsentris.

Sageli meil on aga võimalik saada keraspaarve kohta pinna üldspektri (integrated spectrum, Flächenspektrum), kuid see annab meile paraku aga ainult üldist ülevaadet. – Fathi (K. 29) poolt leitud spektrid näitavad suurt sarnadust Päikese spektriga. Iseäranis selgesti kujunevad resonantsjooned ja kaltsiumi ribad.

Spektri asemel aga võime tuletada color indexi, mis see annab meile juba peaaegu sama väärtusliku andmed. Nimelt näeb, et color index'i ja spektri-tüübi vahel on olemas seos, mis esimeses lähenduses on lineaarne. Kuid täpsemad uurimused (Bottlinger, Hertzsprung, Lindblad, Seares) on näidanud, et seos on siiski palju keerulisem. Kõrge pealt on ta hiid tähtede kohta teissugune kui kääbuste kohta. Shapley on oma uurimuste juures teinud, tuselt võtnud, värviklassid, mis peavad mängima hüpoteetiliste spektriklasside osa. Siiski ei või neid täiesti samastada spektri-klassidega, kuigi

analoogsus on suur, kuna kerasparve-
des uuritavad tähed arvatavasti on suures
enamuses hiiglased.

Kerasparvedes esinevad kõik spektri-
klassid B-st – M-ni ja vähemalt on
vaadeldud normaalsed spektrid A-st – G-ni.
Üksikute klasside suhteline sagedus
arvatavasti ei ole sama igas kerasparves.
Toome jaotuse kohta näite.

Pease on uurinud kerasparves M 13
39 tähe spektrid ja leidnud järgmise jaotuse

Klass	arv.
A_0	3
A_5	11
F_0	11
F_5	11
G_0	3

Üldiselt võib ütelda, et keskmine värv on seda punasem, mida suurem on visuaalne heledus, s.t. keskmine värv muutub heleduse kahanemisega pidevalt punasest siniseks.

Eriti torkab silma suure heledusega
(high luminosity) punaste tähtede
 sagedus, mis on sarnased Antaresele

ja Betelgeusele, ning on arvatavasti
suure massiga. Nähtavasti universaal-
ne punaste ja kollaste ülihiiglaste
esinemine kerasparvedes räägib äärmiselt
aeglase arenemise ja järelikult juba too-
mesete stellaarse energia allikate kasuks.
Ühe ainsa Antarese sarnase ülihiiglase
esinemist keras parves võiks teoreetilises
töös jätta tähelepanemata, võiks teda
käsitleda kui erandit. Aga me leiame
peaaegu igas suures tähtede kogus puna-
said madala tihedusega objektisid, mille-
de kontraktsioon võiks toimuda juba
mõne väheste tuhande aasta jooksul,
aga selle peale vaatamata nad näivad
olla puutumatud ajast.

N.B.!

Väga tähtis on teada, kuidas ole-
neb tähtede värv tähtede asupaigast
parvedes. Kuid see on ülitlasi raske
ülesanne, kuna on kindel, et n.n.
Eberhardi effekt teostab kühjutud
 tsentraalsetes osades seatud punenemise

Sellegi peale vaatamata on selle küsimuse lahendamise juure asutud ja on leitud (Shapley), et praeguste andmete järele kiirtähtede värv tähe-parvedes ei olevat[x] nende radiaalsest kaugusest parve tsentrist.

Selles § käsitletud ainestikku olen, ühenduses ühe teise küsimusega, veel puudutanud § 15-s.

II. Kerakujuliste tähteparvede tiheduse üldküsimusi.

§ 4. Tähtede jaotus projektsioonis.

On loomulik, et, soovides uurida tiheduse jaotust kerasparvedes, me pöörame kõige pealt oma tähelepanu andmetele, mis meile annab fotograafiline ülesvõte, s.o. ruumilise tähekogu projektsioon. Bailey (K 7,4), Pickeringi (K 82) ja Plummeri (K 85) põhjalikud tööd, mis käsitlevad tähtede jaotust parvede projektsioonis, moodustavad esimesi katseid tungida sügavamale nende taeva objektide loomusesse.

Eriti on rikkamad kerasparved (ω Centauri, 47 Tucanae, M 3, 5, 13) mitmel korral põhjalikult uuritud. Tavaliselt (v. Zeipeli meetod) toimitakse sealjuures sarnaselt, et jaotatakse parve projektsioon kontsentrilistesse[x] rõngastesse ja leitakse lihtne olenevus tähtede tiheduse projektsioonis kauguseni tsentrist.

See meetod moodustab ka kõige kindlama vahendi hinnata parve ulatuse, s.o. suuruse, mis kogu järgnevale uurimisele on põhjaks pandud. Meetodi arendajaks on olnud m.s. ka Trumpler (K 117)

Teiseks võib tasapinnalise tiheduse leida, K_4 jättes projektsioonipilt peene niitide rõngaga. Sealjuures loetakse tähtede arv igas üksikus vööndis. Või jällegi võib projektsiooni jaotada paralleelseteks ribadeks ja tähtede lugemisel toimida analoogselt (Trumpler).

Võttes abstsissiks kauguse tsentrist (r) ja ordinaadiks tähtede tiheduse projektsioonis, saame kõvera, millel on omadus, et kasvava r-ga ta muutub ikka paralleelsemaks abstsissteljega. Selle täpiga, milles algab paralleelsus, on määratud parve piir. Ühtlasi annab mainitud täpi ordinaat tagapõhja eesplaani tähtede tiheduse. Kõige selle juures on aga rõngasümmeetria eeldusena.

Pickering leidis, et heledate ja nõrkade tähtede jaotus parves on ühtlane. Täna me aga teame, et see väide ei ole õige. Hulk vaatlustulemusi tõid näitavad, kuidas erisuguste tähtede jaotusest saab isegi võrdlemisi suure täpsusega määrata näit. massid olud jne.

§5. Tiheduse jaotus ruumis. v. Zeipeli valem.

Pickeringi katse, kujutada vaadeldud projektsiooni tiheduse põhjal ruumilise tiheduse kujul $(1-r^2)$ või $(1-r)^n$ ei annud tagajärgi. Vastava seose leidmine aga õnnestus H. v. Zeipelil (K126, 127). Täiendame, et tema valemi rakendamisel on tavaliselt eeldusena parve kerakuju.

(R = tähe parve raadius; $F(r)$ = projektsiooni tihedus kaugusel r kesk-punktist; $f(\varrho)$ = ruumiline tihedus kaugusel ρ tsentrist; z = täpi ρ koordinaat vaatesuunas)

$F(r)$ ja $f(\rho)$ vahel on olemas ([illegible] järele) seos:

$$F(r) = 2\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} f(\rho)\,dz \qquad (1)$$

Siinjuures on ρ z-i funktsioon ja antud järgmiselt:

$$z^2 = \rho^2 - r^2 \qquad (2)$$

Võttes integreerimise muutujaks z-i asemel ρ, saame:

$$F(r) = 2\int_r^R f(\rho)\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2}} \qquad (3)$$

Kuna siin $F(r)$ on tuntud ja $f(\rho)$ ~~tuntud~~ tundmatu suurus, siis peame võrrandi lahendama $f(\rho)$ suhtes. v. Zeipelil on see õnnestunud Abeli teoreemi abil, andes võrrandile pisut teistsuguse kuju oletuse abil, et $\frac{dF}{dr} = 0$ $r = R$ puhul

$$f(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_\rho^R \sqrt{r^2-\rho^2}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right)dr \qquad (4)$$

Ja see ongi v. Zeipeli integraalvõrrand.

Tehtud oletus on aga ainult siis õige, kui võib eeldada, et $f(R) = 0$, ning nimelt valjult matemaatilises tähenduses. Kuna aga kerasparvedel ei ole teravat piirjoont, ja need, nagu pärast poole üksikasjalisemalt näeme, võib võrrelda gaaskeradega lõpmatu raadiusega, R aga on alati lõplik, siis ei ole oletus $f(R)=0$ kunagi täidetud matemaatiliselt täpselt.

Lihtsamalt võib leida ruumilise tiheduse $f(r)$ projektsiooni tihedusest, jaotades pinna projektsiooni paralleelseteks ribadeks (K 84). S.o. Plummeri meetod, muuta pinnatiheduse n.n. ühedimensionaalseks tiheduseks, et sellest siis lihtsa diferentsiaalse–

võtte abil lahendada ruumilise tiheduse

Olgu $F(r)$ tähtede arv projektsioonis tasapinnale perpendikulaarses tasapinnas kaugusel r tsentrist. Siis leiame:

$$F(r) = \int_r^R 2\pi \varrho f(\varrho)\, d\varrho \qquad (5)$$

ja differentseerides r suhtes saame:

$$f(r) = -\frac{1}{2\pi r} F'(r) \qquad (6)$$

See arvutamise viis on v. Zeipeli omast lihtsam ja on vaba oletusest $\frac{dF}{dr} = 0$ $r = R$ puhul.

§6. Keraparvede kujust.

Täpne sfääri kuju, mis varemalt anti tavaobjektidele, on osutunud illusiooniks. On väga tõenäoline, et arvatav rotatsioon omab väärtuse nii,

nagu rotatsioon juba tähendab kerakuju lõppu.

Ellipsoidsuse mõistet võime tarvitada kahes tähenduses, mis praktiliselt on ekvivalentsed.

1. Fotograafiliselt üles võetel näib mitme keraparve kuju sümmeetriliselt venitud piklemaks – pildid on ovaalsed või elliptilised.

2. Tähtede arvu täpsate lugemiste järel osutus, et erisugustel kaugustel tsentrist tähtede hulk projektsioonis on ühe telje pool süstemaatiliselt suurem kui iga teise telje pool.

Sellest võime järeldada, et ruumiline gi tihedus ei ole igas suunas samasugune. Ta on tavaliselt sümmeetriline ühe polaarse telje ja ühe ekvatoriaalse tasapinna ümber.

Lamenduse põhjuseks (K 108) võib olla rotatsioon või Jeansi (K 47-49) teoreetiliselt tööle vastavalt parve kokkupõrge mõne teise stellaarse süsteemiga. Mõne parve juures, mis näitas korrapäratut elongatsiooni, võivad deformatsiooni põhjusteks olla mõlemad eelpoolmainitud moodused.

Esimene töö", milles uuritakse tähtede arvu olenevust radiaalsest kaugusest, ilmus a. 1917 Pease'i ja Shapley (K 76) poolt, avaldades üksikasjalisi tähelugemisi 12 kerasparve kohta. Peatagajärjena võib märkida, et kerasparvede projektsioon üldiselt ei näita kerakujulist, vaid pigemini elliptilist tähtede paigutust, mis seda enam päässeb mõjule, mida rohkem nõrku tähti tsitaldas arvatus. Et see jaotus projektsioonis võiks vastata tähtede elliptilisele paigutusele ruumis. Mõeldavad oleksid muidugi ka veel teised parvede kujundid, nagu näit. läätsakujulised tasapõnnad jne — Masi-

misväärt on siin kohal Kirule (K 53, 54) ja Heckmann ja Siedentopfi (K 36) tööd.

Kera järel oleks järgmine lea lähendus tõeoludele pöördellipsoid. Arvutustele aga paneb see juba suuri raskusi, mis tänapäevani veel pole lahendatud.

Täpsad ja üksikasjalised tähtede lugemised kerasparvedes on elliptisuse probleemi lahendamisel suure tähtsusega. Selles vaatekohast võib vaadelda H. Shapley ja M. B. Shapley ühist tööd (K 111), mis haarab enesesse 41 kerasparve. Nad leidsid, et 30 parve projektsioonid on vastuvaidlemata elliptilised, kümne parve projektsioon peaaegu ringikujuliselt, kuna ühe 3 projektsioon on asümmeetriline. 30 elliptilise projektsiooniga parve jaoks on töös antud projektsioonellipsi suure telje positsiooni nurk.

See tagajärg annab Shapley'le

põhjuse statistilise kaalutlusteks
nende parvede sümmeetriatasapinna või-
maliku paralleelsuse kohta linnu-
teetasapinnaga.

Suure telje ja galaktilise ringi
vaheliseks paralleelsuseks on loomu-
likult tarvilik, kuid mitte piisav tin-
gimus parve sümmeetriatasapinna ja
linnutee tasapinna vaheline paralleelsus.
Kuna Shapley'l aga ei ole teist kri-
teeriumi, siis vaatab ta järele, kas kalde-
nurga[x] ja parvede kauguse vahel linnu-
tee tasapinnast on olemas korrelatsioon.

Järgnevas tabelis on antud tema
selle kohased tulemused.

Kauguse intervall (1=100 pars)	parvede arv	Keskm. kaugus	Keskmine kalle
0 kuni ±20	5	17	23°
±20 " ±40	8	31	41
±40 " ±60	5	46	64
±60 " ±80	5	67	36
> ±80	7	136	42

Keskm. 47°

Selle resultaadi põhjal oletab Shapley,
et parvede sümmeetriatasapind on seda enam
paralleelne linnutee tasapinnaga, mida
lähemal viimasest asuvad parved. Linnu-
tee tasapind mängiks seega parvede ehi-
tises tähtsat osa.

P. ten Bruggencate on Shapley uuri-
must teoreetiliselt kontrollinud ja leid-
nud, et peab oletama täiesti juhuslikku
galaktiliste tasapindade jaotust,
kuna ei ole olemas paralleelsust Shapley
mõttes (K 17). Põhjendus siis on järgnev.

Pöördellipsoidi eeldusel parve vä-
lise kuju jaoks,[x] jääb arvutustes tund-
matu suurusena sümmeetriatelje kalle
vaatesuuna suhtes, ja tiheduse jaotuse
saame vaid selle kalde funktsioonina.

ten Bruggencate'i järele saaksi-
me projektsiooni tihedusest sel puhul
arvutada ruumilise tiheduse vaid kahe
erijuhu jaoks. 1.) kui täheparv läh-
eneb ketta kujule ja 2.) kui pöördtelg

seisab perpendikulaarselt vaate suunaga. Esimesel juhul viiame lahenduse numbrilis-graafilise meetodi abil, teisel juhul ~~viiame~~ aga võime ülesande taandada v. Zeipeli integraalvõrrandile.

Siiski arvab O. Heckmann (K.35), et ten Bruggencate on vaadelnud seda probleemi liig üldistatud kujul. Nõrs nimelt, et jätkub oletusest, et võrdse ruumilise tiheduse tasapinnad on sarnased ja kontsentrilised pöördellipsoidid. Tihedus ripub seda puhku koordinaatidest ära ainult kujul $\varrho = \varrho(x^2+y^2+c^2z^2)$. Lugedes tähti ribades paralleelselt projektsioonellipsi mõlema teljega, võib siis määrata niihästi pöördtelje kalde vaatesuuna suhtes, kui ka lapikuse, s.t. konstandi c. Siin esinevate integraalvõrrandite lahendamisel aga tuleb küll tegemist analüütiliste raskustega.

Ühenduses kerasparvede kujuga ja tiheduse jaotuse probleemiga ellipsoidikujulistes parvedes olgu veel mainitud katse, hinnata heledate ja nõrkade tähtede erinevustest paigutustest kerasparvedes nende masssid. Freundlichi ja Heckmanni (K.31) poolt esitatud kaalutlused põhjenevad Shapley poolt toodud väitel, et täheparvedes on vaid väike arv nimelt heledamaid tähti, paigutatud kerasümmeetriliselt, kuna nõrgad tähed on paigutatud ellipsoidikujuliselt. Et leida vähemalt alumisegi masside suhte mainitud kahe tähtede grupi vahel on meil vaja vaid püstitada tingimuse et ekvipotentsiaal tasapinnad täheparve tsentris erinevad kerakujust nii vähe et seda ~~peab~~ ei või teha kindlaks. Masside suhe peab olema siis nii määratud, et nõrkade tähtede ellipsoidikujuline paigutus ei segaks heledate tähtede kerasümmee-heledate tähtede paigutust. – Kuna aga põhiolemas heledate tähtede kera-sümmeetria kohta ei asutu õigeks, siis ei pane Freundlich ja Herskamm ka oma umbkaudsetele kaalutlustele, mis heledatele B-tähtedele annavad 500-kordsed päikesemassid, suurt rõhku.

Pöördtelje kalde vaatesuuna suhtes võiks aga eelneva põhjal umbkaudu siiski hinnata. Kalle peaks nimelt ×(niisugune) sarnane olema, et me saaksime muudele kogumustele vastava massi suhte.

III. Keraparved kui gaaskerad. Tiheduse probleemid.

§7. Üldised märkused.

Esimesed uurimused tiheduse seaduse alal piirdusid tähtede tiheduse languse empiiriliste valemite tuletamisega, kusjuures eriti Prekeovj töö põhjal selgus enam-vähem ühesuguse tiheduse-seaduse olemasolu kõikide täheparvede juures. – Õige suuna nimetatud uurimustele andis Lord Kelvin (K52), esitades mõtte keraparvede samadusest tasakaalus olevate gaaskeradega, kuna m.s. viimaste tasakaalu asetus on juba kerakujuline. – Tõsisemalt aga käsitas Lord Kelvini ideed H. Poincaré (K86,87).

Lähtudes sellest mõttest on püütud täheparve tähtede jaotust viia vastavusse n.n. polütroopse gaaskeraga.

Viimane on valitud sellepärast, et ta
1) on näiliselt kõige enam tõenäone
ja 2.) isoaldab enesis kõik tavalisemad termodünaamilised seosed erijuhtudena. (Isoterm, isobaar, adiabaat jne.)

On väidetud, et iga konstantse energiaga hulgaga autonoomse gaasi koguentroopia läheneb maksimumile. Termodünaamikas näidatakse, et gaasi entroopia on maksimaalne siis, kui temas valitseb isotermne olukord. Seega oleks iga termodünaamilise protsessi lõpptulemuseks temperatuuri ühtlustamine.

Esimene, kes Poincaré hüpoteesi tegelikult kontrollima asus, oli v. Zeipel uurides ω Centauri ja M 3 tiheduse seadusi, ta leidis, et kuna isotermse gaaskera mass on lõpmatu suur, ja see kerasparve kohta ei pea paika, siis on isotermne olukord arvatavasti vähemalt ainult täheparve tsentraal- sees osades

ja Plummer (K 85) leidis, et ω Centauri tihedus on hästi kujutatav polütroopse gaaskera $n=5$ tiheduse seadusega. M 3 kohta selle vastu aga ei annud see kujutus viis häid tagajärgi. Kuid ka v. Zeipel, kes, lähtudes üldisest polütroopse gaaskera differentsiaalvõrrandist

$$u^n = \delta_j \frac{d^2 u}{d r^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} + \alpha^2 u^n \qquad (7)$$

$$\alpha^2 = \frac{4\pi G m}{(n+1) R \Theta}, \qquad (8)$$

(kus n on polütroopia klass, R gaasikonstant, Θ polütroopne temperatuur, m ühe gaasiosakese mass, δ tihedus), on uurinud täheparve tiheduse seadusi, on tulemusena leidnud, et täheparvede tiheduse jaotus on väga laias lähenduses võrreldav polütroopse gaaskeraga $n=5$

On kaks teed rakendada gaaskerade seadusi täheparvede kohta. Kõige peale võib lähtuda projektsiooni tiheduseseadustest ($F(r)$) ja numbrilise tihenduse-seaduse ($f(\rho)$) arvutada v. Zeipeli valemist (4). Siis tuleks funktsioon ($f(\rho)$) võrrelda mitmesuguste polütroopsete klasside gaaskerade tihenduseseadustega, nagu nad on arvutud Emdeni poolt (K 27)

Teine tee oleks võtta gaaskerade teooriast mitmesugused numbrilised tihenduseseadused ja arvutada valemist (3) neile vastavad punkt teoreetilised funktsioonid $F(r)$. Praktilise arvutuse seisukohast tuleb eelistada teist teed (K 115), kuigi sellel on muuks puuduseks see asjaolu, et ta on on vaid analüütiliste raskustega läbi viidav vaid kahel erijuhul. Nimelt juhtudel, kus polütroopsete gaaskerade differentsiaalvõrrand on integreeritav kinnisel kujul, s.t. kus teooria annab $f(\rho)$ jaoks kinnise avaldise ja see on, Schusteri ($n=5$) ja Ritteri ($n=1$) seaduste puhul. Ebameeldivalt mõjub ka asjaolu, et arvutustesse tuleb sisse tagapõhja tähte-

de tiheduse ebakindlus, mis esimese tee juures ei leia aset, kuna seal esineb mõtte $F(r)$ vaid ainult $\frac{dF}{dr}$

Võttes vastu parvede analoogia gaaskeradega, vaatleme selle siin korra tööolude kõige enam vastavad juhud. Need oleksid käesoleval juhul isotermne ja polütroopia $n=5$, kuna $n=1$ vaevalt tuleb arvesse võtta.

§8. Isotermsed gaaskerad.

Meil on seatud ülesandeks, määrata kindlaks, mis ulatuses parve tsentrist tiheduse langus vastab isotermse gaaskera tingimustele. Esmesena viis selle uurimuse läbi v. Zeipel, tarvitades siin juures meetodi, mille abil võib rahuldavalt eraldada tsentraalseid kerasid täiesti meelevaldse raadiusega, nii uurida igas ühes tähtede jaotust oma ette. Ta leidis tingimused.

Isotermse tiheduse languse jaoks määratakse ~~kindlaks~~ numbriliselt mehaaniliste kvadratuuride abil teoreetiliselt tuntud ruumilisest tihedusest mitme r ja R väärtuste jaoks funktsioonid

$$F(r,R) = 2\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} f(\sqrt{z^2+r^2})\,dz \qquad (9)$$

Funktsioonid $F(r,R)$ annavad isotermse tasakaalu korral parve projektsiooni tasapinna tiheduse mitmesuguste jaoks (projektsiooni tsentrist arvatud) r väärtused, ja tsentraalkerade jaoks mitmesuguse raadiusega R.

Olgu nüüd $F_1(r)$ kaugusel r parve tsentrist tegelikult vaadeldud tasapinna tihedus, mis tegeliku ruumilise tihedusega $f_1(\rho)$ on seoses võrrandi

$$F_1(r) = 2\int_0^{\infty} f_1(\sqrt{z^2+r^2})\,dz \qquad (10)$$

kaudu, kui meie parve raadiusele anname

väärtuse $= \infty$. Projektsiooni tasapinna tihedus väljaspool tsentraalsest kerast raadiusega R on antud võrrandiga

$$F_1(r,R) = F_1(r) - 2\int_{\sqrt{R^2-r^2}}^{\infty} f_1(\sqrt{z^2+r^2})\,dz \qquad (11)$$

Võrreldes funktsioonid $F(r,R)$ funktsioonidega $F_1(r,R)$, saame selle R väärtuse, mis määrab ära tsentraalse kera, millest väljas valitseb isotermne tasakaal. — Et leida F_1, saame

$$F_1(r,R) = F_1(r) + J(r,R), \qquad (12)$$

kus

$$J(r,R) = -2\int_{\sqrt{R^2-r^2}}^{\infty} f_1(\sqrt{z^2+r^2})\,dz =$$

$$= -2\int_R^{\infty} f_1(\rho)\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2}} \qquad (13)$$

Nüüd on aga võrrandi (4) järele

$$f_1(\rho) = -\frac{1}{\pi}\int_{\rho}^{\infty}\frac{F_1'(u)\,du}{\sqrt{u^2-\rho^2}} \qquad (14)$$

Asetades selle väärtuse integraalisse saame:

$$I(r,R) = \frac{2}{\pi}\int_R^\infty \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2}} \int_\rho^\infty \frac{F_1'(u)\,du}{\sqrt{u^2-\rho^2}} \qquad (15)$$

Integreerimis muutuja u väärtused käivad ρ-st kuni ∞-ni. Toome tema asemel sisse uue muutuja η asetuse läbi

$$u = \frac{\sqrt{\rho^2 - r^2\sin^2\eta}}{\cos\eta}, \qquad (16)$$

millega võrrand saab järgmise kuju:

$$I(r,R) = \frac{2}{\pi}\int_R^\infty\int_0^{\pi/2} \frac{F_1'\left(\frac{\sqrt{\rho^2-r^2\sin^2\eta}}{\cos\eta}\right)}{\cos\eta\sqrt{\rho^2-r^2\sin^2\eta}}\,\rho\,d\rho\,d\eta \qquad (17)$$

Siin juures tähendab F_1 aktsent, et funktsioon on differentseeritud oma argumendi suhtes. Nüüd on kergesti näha, et

$$F_1'\left(\frac{\sqrt{\rho^2-r^2\sin^2\eta}}{\cos\eta}\right)\cdot\frac{\rho}{\cos\eta\sqrt{\rho^2-r^2\sin^2\eta}} = \frac{\partial F_1}{\partial\rho}; \qquad (18)$$

järelikult meil on:

$$I(r,R) = \frac{2}{\pi}\int_R^\infty\int_0^{\pi/2}\frac{\partial F_1}{\partial\rho}\,d\rho\,d\eta \qquad (19)$$

ehk

$$I(r,R) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} F_1\left(\frac{\sqrt{R^2-r^2\sin^2\eta}}{\cos\eta}\right)d\eta \qquad (20)$$

Lõpptulemusena saame, kui asetame võrrandisse (20) väärtuse (12)-st:

$$F_1(r,R) = F_1(r) - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} F_1\left(\frac{\sqrt{R^2-r^2\sin^2\eta}}{\cos\eta}\right)d\eta \qquad (21)$$

Selle võrrandi parem pool on meile tuntud, kuna esmalt said $F_1(r)$. Seega võime leida $F_1(r,R)$ väärtuse iga R puhul.

v. Zeipel on selle meetodi abil uurinud parved ω Centauri ja M 3, ja leidnud hea kooskõla teooria ja vaatluse vahel: esimese juures kauguseni 9' tsentrist, s.o umbes 2/5 tervest raadiusest; teise juures kauguseni 3' tsentrist, s.o umbes 1/3 tervest raadiusest. Parvede äärtel aga annab teooria tiheduse jaoks lõpmatud väärtused. See on ka arusaadav, kuna soojuse tasakaalu juhul ei või teist olukorda oodatagi.

§ 9. Küsimusi soojuse tasakaalu kohta.

Kui asume statistilise mehaanika seisukohale, siis on tähtede kogumiku jaoks, täpsemalt tema tsentraalsete osade jaoks, võimalik ainult üks lõpp seisukord (statsionaarne seisukord), nimelt see, mille annab soojuse tasakaal, kujutatud Maxwelli kiiruste jaotuse seadusega, s.o. seisukord, mille kohta statistilises mehaanikas näidatakse, et tema entroopia on maksimum (v. lk 32)

Kõik katsed, kujutada üldse tähtede jaotust parvede tsentraalsetes osades soojuse tasakaaluga ei ole aga annud kuigi häid tagajärgi. Näit. on Freundlich ja Heskanen (K31) läbi viinud uurimu-

se katse ja ten Bruggencate tõestab oma raamatus „Sternhaufen" (K17) selle negatiivse tulemuse.

Suure osa uurimuste puuduseks on eeldus, et kõigile tähtedele antakse võrdsed massid. Seda puudust on aga võimalik kõrvaldada täielikult vaid siis, kui meil on küllaldaselt suure tähtede arvu jaoks määratud täpsed heledused ja color indexid. Praegu igatahes ei ole teadus veel nii kaugele jõudnud.

Kerasparvedes me ei või oletada ainsast gaasiliigist koosneva gaasikera kehtivaid tiheduse seadusi.

Freundlich ja Heskanen (K31) on jaotanud parvedes M 3 ja M 13 paiknevad tähed color indexite järele kahte klassi a–f ja g–m (v. § 16. lk. 85.). Iga klassi jaoks on siis oma eriti olemas log-lineaarne käik kaugusega r tsentrist, nii et iga grupi tiheduse seaduseks osutub järgmine kuju:

$$\rho = \frac{a^2}{4\pi} e^{-\beta^2 r} \qquad (22)$$

a^2 ja β^2 on vaatlusest määratavad konstandid. — Samasti tiheduse seadust aga ei saa tõlgitseda isotermse gaaskerale, nagu seda on teinud Freundlich ja Heskanen tsiteeritud töös. Isotermne tiheduse seadus omab kuju: $\rho \sim e^{\Phi(r)}$, kus $\Phi(r)$ on potentsiaal kaugusel r tsentrist. Sel juhul meil oleks

$$\Phi \sim r \qquad (23)$$

Siis aga ei ole differentsiaalvõrrand

$$\Delta \Phi = -4\pi\rho \qquad (24)$$

gaaskera seesmuse jaoks rahuldatud, s.t. oletus ei ole täismaline. Freundlich ja Heskaneni poolt leitud tiheduse jaotus ei vasta isotermsele gaaskerale.

Seaduspärasused, mis leidsid Freundlich ja Heskanen, tõendavad siiski, et ka võrdsete massidega täht ei ole isotermses tasakaalus. Seni meile teada olevate vaatlusandmete põhjal võime ütelda, et

kerasparved oma seesmise ehituse poolest ei vasta isotermsele gaasikerale, milles esines kõigest üks molekulaarkaal, ega ka gaaskerale, mis koosneb erinevate molekulaarkaaluga kahe gaasi segust.

Vaatame, mida meile ütleb Freundlich ja Heskaneni poolt empiiriliselt tuletatud, niimõneski suhtes vastuvõetav, tiheduse seadus (22).

Leiame, et gaaskera, milles valitseb tiheduse seadus (22) omab lõpmatu raadiuse, aga lõpliku massi. Kera raadiuse R leiame nimelt tingimusest $\rho = 0$ $r = R$ puhul. See annab aga käesoleval juhul $R = \infty$. Leiame, et mass kera sees raadiusega R on võrdne:

$$M_R = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr = a^2 \int_0^R r^2 e^{-\beta^2 r} dr \qquad (25)$$

Integreerides ositi leiame

$$M_R = \frac{2a^2}{\beta^6}\left[1 - e^{-\beta^2 R}\left(1 + \beta^2 R + \frac{1}{2}\beta^4 R^2\right)\right] \qquad (26)$$

Kui $R = \infty$ (s.t. $\rho = 0$), siis saame lõpliku väärtuse

$$M_\infty = M = \frac{2a^2}{\beta^6} \qquad (27)$$

$R = \infty$ pärast kuulub käesolev seadus nende seaduste hulka, mille puhul tähe kiirus, mis on tarvilik, et täht jõuaks parve piirini, saab võrdseks tähe väljumiskiirusega parvest (v. §13). Muidu on sellel tiheduse seadusel olemas veel teatud sugulus Schusteri seadusega. (Lõpm. raadius ja lõpl. mass)

§10. Schusteri seaduse järele ülesehitatud gaaskerad.

H. C. Plummer (K. 85) on leidnud, et ω Centauri tähtede tihedus ennast laseb hästi kujutada seosega:

$$f(r) \sim \left(\sqrt{\frac{1}{1+r^2}}\right)^5, \qquad (28)$$

s.t. polütroopsete gaaskerade ($n=5$) tiheduse seadusega [Märkus: P. ten Bruggencate (K17) nimetab sel puhul H.C. Plummeri ja ekvivalentse valemi $f(r) = N(1+r^2)^{-5/2}$]. Selle vastu ei sünda Ritteri seadus ($n=1$); $f(r) = \frac{\sin r}{r}$ vaatlusandmeid mingil viisil kujutada.

Öeldu käib ka 47 Tucanae ja M 13 kohta. Keraparve M 3 juures lõpuks õnnestus H. C. Plummeril näidata, et väljaspool tsentraalset kera raadiusega $R = 1'$ vaatlusandmed on Schusteri seadusega kujutatud väga rahuldavalt. Selle tsentraalse piirkonna sees on parv tihedam kui gaaskera, mis on ülesehitatud polütroopi $n=5$ järele. Parvel M 5 on, mis puutub tiheduse jaotusesse, suur sarnadus M 3-ga. Ka siin on parve välimiste osade jaoks Schusteri seadus väga hästi vastuvõetav, mitte aga enam tsentri jaoks (K 115). Kümne teise keraparve uurimise tagajärjeks on järgmised tähelepanekud: Kuue parve juures on litud ülearu^selt^ suur kontsentratsioon tsentris. (Kõige suurem M 15-es). Nelja parve juures on lahkuminek teooria ja vaatluse vahel väiksem. Kahe esimesest nimetust keraparve juures (N.G.C. 362, 5272) äärtel on olemas süstemaatilise iseloomuga lahkuminekud arvutuse ja vaatluse vahel. Arvutus annab nende kahe parve jaoks ligikaudu liig väikesiid tihedusi.

Nendest resultaatidest lähtub, et Schusteri seadus kaugeltki ei mängi kõigis keraparvedes nii fundamentaalset osa, nagu on sagedasti väidetud.

Vaatleme mainitud lahkuminekuid teooria ja vaatluse vahel parvede äärtel. Jeans (K 51) on püüdnud ääreosade jaoks anda tiheduse seaduse kuju cr^{-3}, mis põhjeneb teoreetilistel kaalutlustel. Gaaskera $n = 5$ üheks tähtsamaks omaduseks on tema lõpliku mass lõpmatu raadiuse juures. Võib-

aga nimetada veel palju teisi tihedusseadusi, mis on üldisemad ning sama omadustega. Üldiselt sarnane tiheduse seadus annab suurtel kaugustel r tsentrist nagu Jeans on näidanud, suhte $\frac{1}{r^4}$; jäävõrdseli projektsiooni tiheduse suhtes kui integraal ruumilise tiheduse üle nagu $\frac{1}{r^3}$. Teiselt poolt leiame, et tiheduse languse cr^{-3} puhul teooria ja vaatlus langevad palju paremini ühte kui H. C. Plummeril.

Kõikide täheparvede tiheduse olude kohta käivate uurimuste kuritavamaks ja tähtsamaks tulemuseks ei ole ^mitte^ see, et polütroopia klass $n=5$-kuulus gaaskera nähtavasti mängib nii eelistatud osa, mis juba oma seisukohast on raevaest arusaadav, vaid see on tähtis, et tähtede jaotuse tähtparvedes võime kõige paremini sobitada tiheduse seadustega, mis alati viivad lõplikule massile süsteemi lõpmatu raadiuse juures.

Vaatleme nüüd olukorda parvede
tsentris. Me nägime, et tsentraalsetes
osades esineb suur kontsentratsioon.
Peaksime siis järeldama, nagu see on
ka korduvalt tehtud, et Schusteri seaduse mas-
ras lõppeb ühe tsentraalse kera tasa-
pinnal. Sel järeldusel ei ole aga mingit
füüsikalist mõtet. H. C. Plummeri uuri-
mused näitavad ka, et tähe parvede ehi-
tus ei ole korjeldatav nii lihtsa tiheduse
seadusega.

Soovides selgust, et parve kera-
kohta tihedus on lõplik, katsub v. Zeipel
(K124) „kõva tuumaga" gaaskerade
teooria formaalselt üle kanda tähe-
parvedele, tasandades sealjuures lahendus
kõvera parvest välja lõigatud tsentraal-
se kera kondeatele tasapinna tingi-
mustele. Selle tsentraalse kera kohta
ei ole midagi öeldud. Selle põhjal v. Zeipel
leidis järgmiste kerasparvede jaoks
vastavad polütroopia klassid.

M 2 : $n = 5.148 \pm 0.346$
M 3 : $n = 5.051 \pm 0.283$
M 13 : $n = 4.923 \pm 0.261$
M 15 : $n = 5.079 \pm 0.612$,

s.t. väikesed lahkuminekud väärtusest
$n=5$, mis täiesti püsivad kirjeldamiste
vigade piirides.

Eelnev arutlus andis meile tulemuse,
mida võime järgmiselt formuleerida:

Kerasparvede välimust võime
võrrelda polütroopia $n=5$ seaduse jä-
rele üles ehitatud atmosfääriga, mis
asub ühe tuuma ümber. Siinjuures on
tuuma mass suurem kui sama
ruumalaga tsentraalse kera mass,
mis, koos nende gaasiga, oleks üles ehi-
tatud täiesti Schusteri seaduse järele.

§ 11. Teisi võimalusi tähepaare tiheduse määramiseks.

Võrrandiga

$$K = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{ehk} \quad n = \frac{1}{K-1}$$

võime ära määrata n-ist rippuvad uued suurused. Võrrandis (7) on $K = 2$ ($n=1$) u-il väärtus $\frac{\sin x}{x}$ ja $K = 1.2$ juhul[x] ($n=5$) $u = \left(\frac{3}{3+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. — Kui vaatleme polütroopse ehitise asemel adiabaatse (teatavasti rahuldavad mõlemad sama differentsiaalvõrrandit (7)), siis on K-l erisoojuste suhte tähendus $K = \frac{c_p}{c_v}$ (c_p = erisoojus konstantse rõhumise juures — isobaariline erisoojus; c_v = erisoojus konstantse ruumala juures — isokooriline erisoojus). Adiabaatse ehitise juures tuleks siis tähepaared võrrelda gaasiga, millele vastab erisoojuste suhe $K = 1.2$.

Üheaatomiliste gaaside jaoks on $K = 1.67$, kaheaatomiliste on $K = 1.4$ ja kolmeaatomiliste jaoks $K = 1.33$

väärtus $K = 1.2$ on seletatav ainult siis, kui tähepaarides eeldada väga palju kaksiktähti (v. § 20 lk. 101), suurt tihedust ja samuti üksikute tähtede suurt tihedust. — Nüüd näeb aga, et ei ole kuigi kohane rakendada gaasiteooria tähepaaridele nii sõna-sõnalt, kuna lõppude-lõpuks tähepaarides ju valitsevad sootu teised tingimused kui gaasides. Mõtleme siin juures vaid elastsetele kokkupõrgetele, mis gaaside juures oletatakse, ja seega eeldatakse ka K väärtuse hindamisel. On vist sellepärast loomulikum vaadelda K-d lihtsalt kui matemaatilist konstanti, mis esineb ühenduses tiheduse[x] seadusega.

Peame rahulduma sellega, et tähepaaride tiheduseseadused on Schusteri seadusega $n = 5$ formaalselt kooskõlas.

Peame siin kohal veel mainima Hertzsprungi (K39) katsesmää-

vata täheparve tiheduse languse inte-
gritud heleduse langusest, arvates kera-
kohast ääre poole. Tegelikult saa-
vutas ta seda ekstrafokaalsetest
ülesvõtetest. Siinjuures leidis ta ke-
raparve M3 jaoks, et heledate ja nõr-
kade tähtede jaotus on ühtlane. Tähe-
parve vanadus peaks siis olema nii suur
et aset on leidnud juba kõrvaldi tähtede
täielik segunemine. Selle järele
peaksime ka järeldama, et parvel
ei või tervikuna olla tugevat rotatsi-
ooni, kuna sel puhul ei oleks norma-
line korrastatud olukord.

v. Zeipel on, nagu eelpool (v. § 8, K 39) nägime, M3-es leidnud kuni 3' kauguse-
ni tsentrist isotermse tiheduse jaotuse.
Isotermne jaotus tähendab aga täie-
likku segunemist, nii et tulemus üht-
lasi tõendas Hertzsprungi tulemuse
kuna pealegi viimase poolt uuritud
projektsiooni ala vastas vaid 1/9 ko-

gu tasapinnast.

Hertzsprungi ja v. Zeipeli meetod
funktsiooni $f(\rho)$ määramiseks täien-
davad teineteist. Tsentris, kus suure
tähtede hulga tõttu tähtede lugemised lõppe-
vad, ei ole v. Zeipeli meetod enam hästi
rakendatav, kuna selle vastu Hertzsprun-
gi meetod siin omab suure täpsuse. Tei-
selt poolt ei anna äärtepiirkonnis
integritud heleduse mõõtmine taga-
järgi, tähtede lugemisi aga võib siin
läbi viia eksaktselt.

Hertzsprungi meetodile sarnaselt
tuletavad heleduse jaotusest ruumilise
tiheduse veel Barabascheff (K 8), Hogg
(K 40) ja Schilt (K 95). Barabascheff
tarvitas siinjuures fotomeetrilist kiili.

Huvitava meetodi ruumilise tiheduse
arvutamiseks arendab A. Kipper (K 55, 56)
rakendades mõõdetud seesmisi liiku-
misi. Kuna muidu ruumilise ti-
heduse määramisel on oluline

leada parve kaugust, siis käesoleval juhul seda ei ole tarvis.

Kipper, lähtudes polütroopse tasakaalu teooriast, differentsiaalvõrrandist (7), (8), ja rakendades selle lahendust erijuhul $n=5$, saab

$$\frac{u}{u_0}=\sqrt{\frac{3}{3+\alpha^2 u_0^4 r^2}}\,, \qquad (25)$$

kus asetuse

$$\alpha^2 u_0^4 = A^2 \qquad (26)$$

läbi saab

$$A=\frac{\sqrt{3}}{r}\sqrt{\left(\frac{u_0}{u}\right)^2-1}\,, \qquad (27)$$

leiab keskpunkti jaoks valemi

$$\delta_0 = k A^2 \bar{v}_0^2;\ k=\frac{1}{2\pi G} \qquad (28)$$

(δ = tihedus, $\bar{v}$ = keskmine seesmine liikumine antud kohal) võttes ühikuteks Päikese massi, aasta ja parseki; leiab ta numbrilise väärtuse

$$k = 3{,}2\cdot 10^{13}$$

$$\delta_0 = 3.2\cdot 10^{13}\cdot A^2 \bar{v} \qquad (29)$$

Võrreldes üles võetud, mis tehtud suu-

remate ajavahetega (~25 a.), on jõutud leida parvedes seesmisi liikumisi, kuid tagajärjed on praegu igatahes veel väga ebakindlad. Eriti van Rhijni, van Maaneni, Subbotini uurimustest järgneb, et aasta kohta seesmised liikumised ei ületa 1/50000 raadiuse suurusest. Valemist (29) leiame selle tõttu $\delta_0 = 10^4 A^2$. Kuna A^2 on keskmiselt väärtus 1 kuni 2 (parve raadius = 1), siis leiame tiheduse:

$$\delta_0 \approx 10^4\left(\frac{\text{Päikesemass}}{\text{parsek}^3}\right) \qquad (30)$$

Kui sarnast keskpunkti tihedust mitte pidada tõeks, siis tuleb oletada, et mõõdetud seesmised liikumised ei ole reaalsed, vaid olenevad vaatlusvigadest. Kui aga teiselt poolt tõenäolisemalt oletada, et

$$\delta_0 = 600\left(\frac{\text{Päikesemass}}{\text{parsek}^3}\right), \qquad (31)$$

siis on valemist (29) järeldus

$V_0 = 4,5 \cdot 10^{-6}$, (32)

s.o. umbes 0".003 (raadius = 10' = 600")

Sellest näeme, et tavalise vaatluse täpsus peaks olema ± 0".001 (tänapäevani saavutatud on ± 0".005)

Kui parvede mõõdetud liikumised on reaalsed, siis peame tõena võtma parvede väga suure tiheduse, kui seda oletust aga mitte teha, siis ei ole mõõdetud omaliikumised reaalsed.

§12. Teoreetilisi kaalutlusi Schusteri seaduse kohta.

Peame teoreetiliselt põhjendama empirilise tulemuse, et kerasparvede on tiheduse jaotus formaalselt kirjeldatav polütroopse gaaskeraga n=5 Eddington (K24) (ka Jeans (K50) ja tu Bruggencate (K17)) on leidnud huvi-

tavad gaaskera n=5 omadusi, mis teda asetab teiste polütroopsete gaaskerade seas erilisele kohale. See aga ei tunda, vist, nagu Eddington ise ka tähendas, tõendada, et see just Schusteri seadus olema peab, mille järele tähed on paigutatud tähtparvedes.

Kõik edaspidised statistilis-mehaanilised uurimused tähtede jaotuse kohta tähtparvedes põhjenevad ühel Jeans'i teoreemil, mis tunduvalt kergendab kaalutlusi kiiruste jaotusseaduste kohta, mis lähevad lahku Maxwelli seaduse kujust. Oma teoreemi jaoks on Jeans annud kaks tõestust (K50, 46). Jätame nad siinkohal toomata, mainime vaid, et ta on näidanud nende põhjal järgmist.

Kosmilised masside kogumused, mis on vabad välistest mõjutustest, võivad olla statsionaarses seisukorras vaid kahel erijuhul. Esimesel neist, kus meil on tegemist tähtede voolusega, ei ole kiiruste jaotus tavalise selle tasakaalutüübi kohta annab näite Saturni rõngas. Teisel juhul ei ole tähtede voolu ja, näit. täheparv, on tavaliselt kerakujuline; näide: kerakujulised täheparved. See kõik tähendab aga ühtlasi, et tähtede grupid oma mingisuguse sümmeetriata ei ole statsionaarsete süsteemidena mõeldavad. Jeansi teoreem ütleb nüüd, et kerakujulises tähtede süsteemis, mis on statsionaarne ja millele ei mõju välised jõud, on tähtede jaotusseadusel × nende ruumiliste ja kiiruste koordinaatide suhtes järgmine kuju:

$$f(W) = f\left(\Phi - \tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\right), \qquad (33)$$

kus W on negatiivne süsteemi koguenergia.

Kui üks täht peab jäädavalt kuuluma parve juure, siis peab tema koguenergia, mis ta liikumisel jääb konstantseks, olema negatiivne, kuna me eeldame, et kokkupõrkeid ei tule ette.

Olgu Φ gravitatsiooni potentsiaal x, y, z kohal ja olgu u, v, w

ühe tähe kiiruse komponendid x, y, z kohal.

$$\left.\begin{aligned} W &= \Phi - \tfrac{1}{2}c^2, \\ \text{kus } c^2 &= u^2+v^2+w^2 \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

peab, tähendab, olema positiivne. Permanentse parve puhul peab W olema iga ükskõik parve tähe jaoks positiivne. See tingimus laseb järeldada väljumiskiiruse (Austrittsgeschwindigkeit) olemasolu. Täheparve liikmetena jäävad jäädavalt nagu näha ainult need tähed, mille puhul on täidetud tingimus

$$c < \sqrt{2\Phi} \qquad (35)$$

Nimetame kiiruse

$$c_1 = \sqrt{2\Phi}, \qquad (36)$$

× mis on tarvilik, et täht pääseks välja täheparve külgetõmbejõu piirkonnast, väljumiskiiruseks.

Polütroopse tee võrrandid omavad kuju

$$\rho = c \cdot r^n \qquad (37)$$

c on proportsionaalsuse konstant, ja V üldselt erineb c/ρ-st vaid ühe liitkonstandi võrra; kuna ρ ja V peavad ühel ajal kaduma, nimelt pinna juures. c/ρ peab aga definitsiooni põhjal lõpmatuses saama võrdseks nulliga. Meil on, tähendab,

$$c/\rho = V + a_n^2 \qquad (38)$$

ja seega

$$W = V + a_n^2 - \frac{1}{2}c^2 = konst. \qquad (39)$$

suurus, mis jääb konstantseks tähe liikumisel. Täht, mis jõuab pinna juurest lõppkiirusega null, omab üldenergia

$$-W = -a_n^2 \qquad (40)$$

Teiste tähtede gravitatsiooni mõjul aga ei jää ta rahule, vaid liigub edasi, sääl juures jääb tal üldenergia $-a_n^2$, s.t niisuguse tähe teel igas punktis on

$$c_2 = \sqrt{2V} \qquad (41)$$

Seda kiirust nimetame piirkiiruseks. Kõikide polütroopsete tiheduse seaduste juures $n < 5$ ($n > 5$ ei tule lõpmatu massi pärast arvesse) on, nagu lähtub (36), (41) ja (38)-st,

$$c_1 > c_2 \qquad (42)$$

Ainult Schusteri seaduse $n = 5$ puhul on $c_1 = c_2$. Sel seadusel on siis, tähendab, see eriline omadus, et piirkiirus on võrdne väljumiskiirusega.

Gaaskera $n = 5$ ühe teise huvitava omaduse on leidnud Eddington. Ta näitas, et juhul kui $n = 5$ keras pinna ühe meelevaldselt valitud ruumalalt kineetilise energia poolest on igakord võrdne ühe neljandikuga potentsiaalsest energiast, mis tekkis üle jäänud ruumala osa külgetõmbe jõust.

Edasi on Eddington uurinud, kas juhul $n = 5$ entroopia võib saada maksimumi mõttes.

On kahtlane, kas me tohime sama pikima julgusega rakendada Boltzmanni H-teoreemi süsteemidele, kus molekulide jaoks ei ole tõenäolisema kiirus, vaid kus on olemas väljumiskiirus c, mis on rängem kui lõpmatu. Seaduste jaoks $\rho = CV^n$ lisas Eddington siis H kahanemist, kui n kasvab. $n=5$ puhul ei ole aga H-l maksimumi $\frac{\partial H}{\partial n}$ jääb negatiivseks. Arvesse selle peaaegu, et kõik seadused, kus $n>5$, ei tule arvesse, näib, et seadus $n=5$ on kõige tõenäolisem polütroopsete seaduste hulgas.

Tähepara, mis on ülesehitatud Schusteri seaduse järele, ei või statistilise mehaanika mõttes saada vaadeldud kui parve normaalkoondist.

§13. Teooria üldisemad juhud.

Asudes teooria üldistamisele, lähtume omadusest, et ühe tähe „pikkus" peab võrdne olema tema „väljumiskiirusega," ühes polütroopse gaaskera erilisest omadusest. Sellest õnnestus tuletada väga tähtsa tiheduse seaduste listi. Siia kuulub ka see tiheduse seadus, mille Freundlich ja Heskanen leidsid kerasparvedes M 3 ja M 13 võrdse massiga tähtede jaoks (v. § 9, lk 43).

Eddington ja Jeans on näidanud, kuidas statsionaarsete täheparvede (s.t. kus ei ole tähtede voolu) jaoks võib tuletada jaotusfunktsiooni $f(\varphi - \frac{1}{2}c^2)$ üldist kuju, juhul, kui potentsiaal φ või tihedus ρ on antud koordinaatide funktsioonina. Tiheduse ρ mingil täheparve kohal ja jaotusfunktsiooni $f(W)$ vahel on Jeansi teoreemi põhjal olemas seos.

$$\rho = 4\pi \int_0^{\sqrt{2\varphi}} f(\varphi - \tfrac{1}{2}c^2)\, c^2\, dc \qquad (43)$$

ϱ on, tähendab, ainult potentsiaali Φ funktsioon. Täheparve seesmuse kohta peab peale selle olema maksev differentsiaalvõrrand

$$\Delta\Phi = -4\pi\varrho \qquad (44)$$

Ülesanne seisab nüüd selles, leida funktsioon $f(z)$, mis iga z-i ~~puhul~~ positiivse väärtuse puhul jääb positiivseks ja lõplikuks, iga $z=0$ jaoks kaob, ja võrrandit (43) rahuldab. Eddington lahendab ülesande integraal võrrandi ümberpööramisega (Umkehrung) f suhtes; Jeans ridade abil.

Eddingtoni lahendus on järgmine

$$f(z) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^z \frac{\varrho'' d(2\Phi)}{(z-2\Phi)^{1/2}}, \qquad (45)$$

kus ϱ'' tähendab teise järgu ϱ tuletise Φ suhtes. Kui ϱ'' on positiivne ja lõplik terves integreerimisintervallis, siis on $f(z)$ kindlasti positiivne kõikide z-i positiivsete väärtuste

jaoks. See tingimus on piisav, aga mitte tarvilik. Teda täidab juba tuntud tiheduse seadus, millel on omadus, et iga tähe piirkiirus saab võrdseks tema väljumiskiirusega. Sest võrrand (45) annab rahuldava vastava jaotus-funktsiooni $f(z)$, mis $z=0$ puhul.

Ten Bruggencate (K 17) leiab polütroopse gaaskera $n=5$ kiiruste jaotus-funktsiooni jaoks kuju

$$f(\Phi - \tfrac{1}{2}c^2) = A(\Phi - \tfrac{1}{2}c^2)^{7/2} \qquad (46)$$

Tähed, millede kiirus $\geq \sqrt{2\Phi}$, ei kuulu seega süsteemi juure jäädavate liikmetena, kuna nende kiiruste puhul saab $f(\Phi - \frac{1}{2}c^2) = 0$ või imaginaarseks.

Äärtepiirkondades on tiheduse kujutatud võrrandiga

$$\varrho = A_0 \Phi^4, \qquad (47)$$

ehk, kuna nendes osades potentsiaal Φ suhtub kui M/r, kus M on süsteemi kogumass, siis saab ϱ kuju

$$\varrho = A_0 \, cf^4 \sim \frac{1}{r^4}, \qquad (48)$$

s.t. projektsioonis on tiheduse äärtel pöördvõrdeline kauguse kolmandama astmega, seega tähtede tiheduse projektsioonis on integraal nummulise tiheduse peal (Jeans).

Ka nende üldsemate tihedusseaduste jaoks on Eddington määranud entroopia ja leidnud, et see ei või saada maksimumiks seaduste puhul, mis on Schusteri seadusega lähedases sugulusses. Keraparved, mis on üles-ehitatud siinkohal vaadeldud tiheduse-seaduste eeskujul järele, ja mis asu-vad polütroopsete gaaskera $n=5$ lähiduses, ei kujuta järelikult senn-ti statistilise mehaanika mõttes keraparvede normaalseisukorda.

§ 14. Väliste mõjude arvestamine.

Kõik meie teoreetilised kaalutlused olid seotud eeldusega, et tähtede liikumistele keraparvedes mõjuvad vaid sisemised ent mitte välised jõud. Meie jõuame tegelikule olukorrale palju lähemale, kui enam ei jäta arvestamata tähtede süsteemi ja universumi kogu muu matuuria gravitatsiooni välja.

Tekkib küsimus, kas me ka sel k puhul võime parvede aktuaalse statsionäärset seisukorda. Sellele küsimusele on üks oma tööga esimesena vastanud Jeans (K 49)

Meie praegustele vaadetele vastavalt on keraparved eraldatud tähtede rühmad, süsteemid oma ette, kuid, mis on väiksemad kui n.n. kohalik tähtede süsteem (v. § 2 lk 9); ühes vana ettekujutusega (Seeliger, Kapteyn) lõunasüsteemiga moodustab esi-

(Põhjendused: Lindblad, Oort)

meie, suurema galaktilise süsteemi, vastandades ekstragalaktilistele süsteemidele, mida esindavad spiraaludud. Nimetame esimesi lihtsalt tähtede süsteemideks.

Asetame läbi tähtede süsteemi raskuskeskkoha mingi koordinaaditeljestiku x, y, z ja läbi kerasparve raskuskeskkoha esimesele paralleelse koordinaaditeljestiku ξ, η, ζ. Ühe tähe koordinaadid kerasparves $\xi\, \eta\, \zeta$ on siis võrreldes koordinaatidega $x\, y\, z$, väiksed esimese järgu suurused.

Jõud, mis mõjuvad üksikule tähele parves võime jaotada kahte rühma

1.) Jõud, mis olenevad tähe parve teiste tähtede külgetõmbejõust; nimetame nad sisemisteks jõududeks

2.) Jõud, mis olenevad üle jäänud universumi mateeria külgetõmbejõust; nimetame nad välisteks jõududeks.

Kerasparve tähtede kogu suuremas piirkonnas laseb ennast väliste jõudude potentsiaal (Φ) kujutada järgmiselt:

$$\Phi = (\Phi)_0 + \xi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 + \eta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0 + \zeta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_0 + \frac{1}{2}\left[\xi^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_0 + 2\xi\eta\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)_0 + \ldots\right] + \ldots \quad (49)$$

Võrrandi paremal pool peame Φ-sse ning osatuletistesse x, y, z suhtes Φ-st asetame kerasparve kesktäpi koordinaadid, mis on ära tähendatud lihtsalt indeksi $_0$ abil.

Differentsides Φ $\xi\, \eta\, \zeta$ suhtes leiame välise jõu komponendid, mis mõjuvad ühele parvetähele kohas $\xi\, \eta\, \zeta$, saame

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_0 + 2\xi\eta\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)_0 + \ldots\right] + \ldots \quad (50)$$

ja vastavad avaldised $\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}$ ja $\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}$ jaoks. Kolme võrrandi esimesed osad

$(\frac{\partial \phi}{\partial x})_0$, $(\frac{\partial \phi}{\partial y})_0$, $(\frac{\partial \phi}{\partial z})_0$ määravad terve parve liikumist ruumis tervikuna. Edasi näeme, et ühe tähe liikumist parve keskmise suhtes, mis on mõjustatud väliste tähtede jõududest, võime tuletada ühest potentsiaalist, mis omab kuju

$$\frac{1}{2}\left[\xi^2\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_0 + 2\,\xi\eta\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\right)_0 + \dots\right] \quad (51)$$

Peale koordinaatide transformatsiooni omab see potentsiaal lihtsama kuju

$$\frac{1}{2}(\alpha\,\xi'^2 + \beta\,\eta'^2 + \gamma\,\zeta'^2) \quad (52)$$

siinjuures peab olema

$$\alpha+\beta+\gamma = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right)_0 = 0 \quad (53)$$

s.t. vähemalt üks koefitsientidest peab olema positiivne (näit. α)

Seesmiste jõudude komponentide leidmiseks võib Jeansi järele võtta tähe parve keskmise tiheduse. Arvutades komponendid ja jõudes selleni, et tihedus ρ omab maksimumi ρ_0 -tsentris, leiab ten Bruggencate

juhuks, kui

$$\alpha > \frac{4}{3}\pi\rho_0 \quad (54)$$

Teevõrrandi (Weggleichung) üldlahendus

$$\xi' = C_1 e^{\kappa t} + C_2 e^{-\kappa t} \quad (55)$$

s.t. ühe algperioodi järele, mis nii kaua kestab, et teine liige esimese suhtes kaob, laguneb parv ruumis ξ' eksponentsiaalselt ajaga. Hoopis teistsugune on olukord, kui ρ_0 on nii suur, et

$$\alpha < \frac{4}{3}\pi\rho_0 \quad (56)$$

Kuna ρ parve ääre poole kahaneb nullini, siis võib üldiselt alati leida kauguse r parve tsentrist, mille puhul

$$\alpha = \frac{4}{3}\pi\bar{\rho}_r \quad (57)$$

saab ($\bar{\rho}_r$ = keskmine tihedus), s.t. ainult need parve osad lagunevad, mis asuvad väljaspool kera, millel on ~~raadius~~ keskmine tihedus $\frac{3}{4}\frac{\alpha}{\pi}$. Üle võib jääda tuum, mille raadius on määratav tiheduse kriitilisest väärtusest

On edasi, näiteks ka β positiivne, siis võime η' suhtes rakendada sama järeldusi, s.t. vähemalt osaline lagunemine toimub ka η suunas. Meil on siis tegemist tasapinnaga, milles lagunemine areneb. Kuna aga, kui α ja β on positiivsed, γ igal juhul peab olema negatiivne, siis on suunas ζ' teatavasti üldlahendus

$$\zeta' = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt \qquad (58)$$

Perpendikulaarselt lagunemistasapinnale (Auflösungsfläche) omab täht tähendab siis ostsillatsiooni. On β ja γ mõlemad negatiivsed, siis on tähe liikumine η'- ja ζ'-suunas vaid ostsillatsioon ja lagunemine (Auflösung) toimub ainult ühes suunas.

Kõik mitmesugused parvede tiheduse seadused, mis viivad täielikule lagunemisele nimetatakse mittestatsionaarseteks seadusteks. Need seadused, mille-

de juhul ainult välised osad eralduvad parve kujust, nimetame osalt statsionaarseteks seadusteks. — Nüüd tekkis küsimus, missugusse rühma parve kuulub Schusteri seadus. See on meile eriti huvitav tema tähtsuse pärast täheparvede ehituse uurimisel.

P. ten Bruggencate (K17) on lahendanud seda probleemi ning leidnud võrrandi

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(J) = (4T - 2T_0) + \frac{3}{4}M\sum r^4, \qquad (59)$$

kus J tähendab parve kogu

ja T kogu kineetilise energia. Ta näitas, et $\frac{d^2}{dt^2}(J)$ kunagi ei või saada nulliks, vaid, et ta peab alati jääma positiivseks. Parv peab siis ikka enam lagunema, sest J kasvab t-ga piiramatult. Ei ole siis ka olemas ühtegi kindlat tasapinda, milles lagunemisprotsess jääks seisma.

Juhul, kui sarnane tasapind oleks olemas, siis oleks seespool seda seisukord esimesel lähendusel statsionaarne. Meil oleks siis

$$\frac{d^2}{dt^2}(J)=0 \quad \text{ja} \quad \underline{T}=\underline{T}_0 \qquad (60)$$

Sest statsionaarsuse puhul on, nagu Eddington (K 25) on näidanud, kineetiline energia võrdne kogu energia negatiivse väärtusega, mis aga on konstantne. Seega on ka $\underline{T}$ konstantne. Järelikult on

$$0=2\underline{T}+\frac{3}{4}M\sum r^4, \qquad (61)$$

mis aga ei ole võimalik, kuna $\underline{T}$ on positiivne, samuti ka teine liige. See tõendus on maksev kõigis valjuses ent mitte arvuliselt umbkaudselt. Mängi otsustab esimene liige.

Kerasparved, mis on üles ehitatud Schusteri tiheduse seaduse järele, ei või järelikult olla suuremate parvedest järele jäänud statsionaarsed tuumad, vaid peavad meie univer-

sumi gravitatsiooni mõjul veel varem edasi lagunema.

Seega kuulub Schusteri seadus „mitte statsionaarsete" seaduste hulka, kuna polütroopi $n=5$ järele üles-ehitatud parve tsentraalne tihedus ei ole nii suur, et ta võiks takistada parve lagunemist.

IV. Masside jaotus.

Eelnevas töö osas peamiselt oleme näidanud, kuidas kerasparvede olekut võib kujutada analoogia põhjal gaaskeradega. Sealjuures oli tarvis masside jaotuse funktsiooni tundmist. Lühidalt oleme seda küsimust puudutanud mitmes kohas. Järgnevas vaatleme selle küsimuse juures tekkivaid probleeme lähemalt (v. §9, lk. 41; §6, lk 29)

§15. **Erineva heleduse ja spektritüübiga tähtede jaotus kerasparvedes.**

Suurema osa käsitletud empiiriliste ja teoreetiliste kaalutluste põhieelduseks on olnud, et kõik tähed võeti keskmiselt võrdse massiga. Me teame aga, et täpsemate uurimuste puhul see kindlasti ei ole lubatav. Tähe mass

näitab olenevust heledusest ja spektritüübist. Tõrmudes eksaktselt peaksime eraldi vaatlema üksikute spektritüüpide hiiglaste ja kääbuste jaotust. Seega me ei või tähe parve võrrelda enam üksikuga gaasiga, vaid koguni gaasiseguga, nagu eelpool juba oli täheldatud.

Võimaluse masside lahutamiseks läbiviia andsid aluse Shapley fotomeetrilised tööd. — Tema poolt üksikasjaliselt uuritud kerasparvedes M3 ja M13 on vaadeldud vaid hiiglasi. Hiiglaste-kääbuste teooria põhjal ta uuemas kujus, kus arvestatakse masside kaotusega, mis tekkib kiirgamise teel arengu jooksul, peaksime ootama, et keskmine color index kahaneb eemaldumisega tsentrist, samuti ka keskmine näiv heledus. See käise massiga ei tohiks aga olla vaja arv, sest mitme spektritüüpi hiiglaste masside erinevus ei tohiks olla kuigi suur. Shapley vaatlustulemused on vähemalt tsentraalsete osade jaoks heas kooskõlas oodatavaga.

Keskmiste visuaalsete heleduste on käik vähem teravalt välja kujunenud. Ainult selle pärast on võimalik oletuse abil

$$\psi(M, \rho) = \varphi(M) f(\rho) \qquad (62)$$

oletus, tähtede jaotusest projektsioonis tuletada kooskõlas v. Zeipeli meetodi-ga funktsioon $f(\rho)$, kuna keraspar-ves me tajume ainult hiiglasi ja need on teatavasti ära jaotatud hele-duste võrdlemisi väikse intervalli üle. Keraspar-vede tiheduse üle käibus tähtede poolest võib olla mõtle-tungusid arvamusi.

Keraspar-vedes M13 on tähele pandud heledate punaste hiiglaste kuhjumist tsentri suunas. Näht-reaalsuse juures aga on palju

kaheldud. Shapley arvab, et siin on tegemist sügava Eberhardi-efekti-ga. Ta põhjendab oma arvamist ühe Peasi spektraaltöö tulemuste-ga (K75)

§ 16. Masside olud keras parvedes.

Teeme oletuse, et tähe parved ei ole mitte ainult saavutanud statsionaarse tasakaalu, vaid on jõudnud täie-malt tsentrilise asetuse sisukorrani. See on meile sealse töö hüpoteesiks, mis lubab leida esimesi lähendusi-kuid, nagu edaspidi näeme, ka mitte enam.

Just uuemad uurimused tõenda-vad, ja nagu me eel pool nägime, et keras parvedes meil on tegemist palju keerulisema struktuuriga. Teiste seas on seda omas põhjalikus töös näidanud ka Freundlich ja Heiskanen (K 31)

Kõik tulemused osutavad, et liikumised täheparvedes ei ole veel suutnud ühtlustuda, s.t. et tähtede kiirused ei ole ära jaotatud Maxwelli seaduse järele, millega aga oleks määratud potentsiaal ja seega statsionaarne seisukord.

Kuid igatahes võiksime rääkida isoleeritust tasakaalust parve tuuma kui teda vaadelda (K 128) piiratud ruumisse suletud tähtede rühmana, kuigi ka see ei ole vastuvaidlematu tõde. Konventsionaalses gaasiteoorias mõeldakse gaasi ümbritsetuna täielikult reflekteerivate seintega. Sama ei maksa ka gaasi üle osa kohta, millel aga siis peab olema suur ja konstantne tihedus. Ümbritsevad gaasimassid mõjuvad siis kui seinad. Tähtparvedes on aga see, mis puudub, just konstantne tihedus, ja selle pärast ei või me kuidagi vaadelda parve tuuma gaasiteooria täies rangis tähenduses kui autonoomset parve osa. Täheparve, kui tervikut, kuidagi ei ~~toh~~ või võrrelda isotermse gaasikeraga, nagu nimelt juba eelpool mainitud põhjustel (tõsm. mass)

Jaotades parve tähti massi järele mitmesse rühma, ja lugedes iga rühma jaoks maksvaks Maxwelli kiiruste-jaotusseaduse, eeldame siinjuures, et eri massidega tähed asuvad kogumikus olenematult üksteisest, s.t. me tõmmime siin nagu mitu gaasisegu. — Peame siinkohal veel kord rõhutama, et gaasiteooria rakendamine parvedele ei ole täiesti eksaktne, kuna me ei või täheparvedes arvestada elastsete kokkupõrgetega, nagu ei tohi arvestamata jätta üksikute tähtede vastastikku gravitatsiooni mõjud

Toome siin kohal v. Zeipeli meetodi, kuidas määrata tähtede massid nende jaotuse põhjal parvedes (K 125, 128), kuigi v. Zeipel ise järgnevat rakendas enam laialisemalt täheparvedele.

Parve momentaanne seisukord on täielikult kirjeldatud n.n. fundamentaal funktsiooniga $F(x,y,z,\xi,\eta,\zeta,\mu,t)$ kus x,y,z on tähe koordinaadid, ξ,η,ζ tema kiiruse komponendid, μ tema mass. — Korrutis

$$F(\ldots\ldots).\,dx\,dy\,dz\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\mu \qquad (63)$$

määrab ära ajamomendiks t tähtede arvu, millede massid on piiride μ ja $\mu+d\mu$ vahel, koordinaatide piiride x ja $x+dx$ jne. vahel ning kiiruse komponendid piiride ξ ja $d\xi$ jne. vahel. — Funktsiooni F kohta tehakse nüüd kaks fundamentaalset oletust: a) ta peab olema sõltumata ajast t, s.t. me vaatleme ainult statsionaarset seisukorda. b) Gibbsi meetodi

abil, mida ka statistilise mehaanika meetodikes nimetatakse, tuletatult, peab fundamentaal funktsioon omama kuju

$$F(\ldots\ldots) = \alpha(\mu)\,e^{-h\mu(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-2V(r))} \qquad (63)$$

Siin on $V(r)$ kerasparve potentsiaal kaugusel r tsentrist, h on konstant ja $\alpha(\mu)$ funktsioon, mis oleneb mitmesuguste masside relatiivsest sagedusest kerasparves. Oletuses b) peitub süsteemi tasakaalu hüpotees. Valem (63) kujutab Maxwelli jaotusseadust. Tähendagu nüüd $f(r,\mu)\,d\mu$ tähtede arvu massidega piirides μ ja $\mu+d\mu$ ruumala ühiku kohta kaugusel r tsentrist. Integreerides funktsiooni F, kujutame funktsiooni $f(r,\mu)$

$$f(r,\mu) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} F\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \beta(\mu)\,e^{2h\mu V(r)}, \qquad (64)$$

kus $\beta(\mu)$ on lihtsas seoses $\alpha(\mu)$-ga.

Korrutis $f(r,\mu).\,dx\,dy\,dz\,d\mu$ annab,

nagu näha, meelevaldse kiirusega täh-
tede arvu ruumala elemendis $dx\,dy\,dz$
kaugusel r tsentrist, millede massid on
piiride vahel μ ja $\mu + d\mu$ ~~vahel~~

$\mu = 1$ puhul saame:

$$f(r,1) = \beta(1) \cdot e^{2hV(r)}, \qquad (65)$$

tähendades, leiame ka

$$f(r,\mu) = \gamma(\mu) \cdot [f(r,1)]^{\mu}, \qquad (66)$$

kus $\gamma(\mu)$ on r-ist olenematu funktsi-
oon μ-st, mis nagu näha, samuti kui
$\alpha(\mu)$-gi ära ripub mitmesuguste masside relatiivsest sagedusest parves.

Logaritmides (66) leiame:

$$\log f(r,\mu) = \log \gamma(\mu) + \mu \log f(r,1) \qquad (67)$$

Mõlema tundmatu $\log \gamma(\mu)$ ja μ
suhtes saame nii palju võrrandeid (67),
kui palju väärtusi r meie numbriliselt
tunneme. Lahendus leitakse väikseimate ruutude meetodi abil.

v. Zeipeli tulemused laatlise parve
M 37 kohta tõendavad, et tehtud
 töö hüpoteesi põhjal võib mõne

parve kohta saada erisuguse heledusega ja spektritüüpi tähtede massidelt päris mõistlikud ülevaated.

Analoogse uurimuse kerasparvede
M 3 ja M 13 kohta on teostanud Freundlich ja Heskanen (K 31) lähtudes siin
juures isotermilise gaaskera tihedusseadusest (v. § 9 lk. 41):

$$\varrho_i = \varrho_0^{(i)} \cdot e^{-2hm_iV(r)} \qquad (68)$$

Siin on ϱ_i kera kujulise ehitusega
ja aatomkaaluga m_i gaasi ruumilise tihedus ühes kindlas täpis; $V(r)$
on potentsiaali väärtus selles täpis.
Tähed jaotatakse colorindexite
järele kahte rühma ja nimelt,
kus see on 1) $< +0^m.80$ ja 2) $> +0^m.80$
Võib piirduda tähtede liigitamisega
ainult nende värvide ent mitte
ka heleduste suhtes, kuna keras-
parvedes meil on, nagu tähendatud
tegemist ainult hiiglastega. Täp-
semal kondamisel tuleb aga ai-

vastada ka teise momendiga.

Olgu ϱ_A^v esimese rühma tähtede ruumilise tiheduse kaugusel r_v tsentrist. Analoogse tähendusega teise rühma kohta omab ϱ_K^u. m_A ja m_K tähendagu mõlema rühma massid. Logaritmides võttes tiheduse-seaduse valemi saame:

$$\frac{m_A}{m_K} = \frac{\log\varrho_A^v - \log\varrho_A^u}{\log\varrho_K^v - \log\varrho_K^u} \qquad (69)$$

Ruumilised tihedused ϱ on arvutatud v. Zeipeli valemi järele; seega leiame ka võrrandi vasakpoolse osa väärtuse.

Toome siin kohal Freundlichi ja Heiskaneni tulemused, andes keskmised väärtused:

M 13 : $m_K/m_A = 1{,}300 \pm 0{,}06$

M 3 : $m_K/m_A = 1{,}618 \pm 0{,}12$

On väga tähelepanuväärt asjaolu, et M 13-s on punastel hiiglastel väiksem mass, võrreldes

valgete hiiglastega, kui M 3-s. Ehk järeldame sellest, et M 13 on vanem parv.

Tahtes hinnata parve tähtede kogumassi, põrkame erilistele raskustele. Kõige kauem eksponeeritud ülesvõtetel on kujutatud ümmarguselt 10^5 tähte. Shapley järele on M 3-s keras raadiusega 10 parsekit tähtede kogumass võrdne umbes 160.000 Päikese massiga. Seega on tõenäoline, et kõikide parve tähtede kogumass väärtusega 10^6 päikest ei ole hinnatud liig kõrgele.

§17. Spiraalstruktuuri küsimus.

Suurematel fotograafilistel ülesvõtetel keraparvedest on vahel tähele pandud spiraalne struktuur. Soovides kontrollida seda nähtust, koondas Shapley (K 99) hiljuti M 13 Wilsoni reflektorite abil erisuguse ekspositsiooni ajaga rida ülesvõtteid põhjalemisfaasil asuvast kerasparvedest. Kui plaadile oli vaid mõni sada tähti, siis oli spiraalne struktuur kindlasti määratav, pikema ekspositsiooni puhul aga muutus nähe juba ebamääraseks ja mõnikord omasid sel puhul spiraalkaared isegi hoopis teissuguse tsentri ja kuju. Shapley jõudis otsusele, et fenomeen on illusoorne. Pealegi veel, et selged spiraalkaarde jäljed tähendaksid esiti tähelepanuväärset ja väga vähe tõenäolikku tähtede jaotust sarnastes süsteemides, mis meie teada alati on peaaegu kerakujulised.

Tõstes esile, et spiraalne struktuur või teised kindla loomulised korrapärasused kerasparvedes tõendavad, et süsteem veel ei ole täielikult tasakaalustunud on Ten Bruggencate (K17) esiti Freundlich ja Heiskaneni (K31) vaatlusandmete põhjal

kinnitanud spiraalse struktuuri tõenäosuse küsimuse.

Muuseas suure ulatuslikkuse Mt. Wilsoni vaatlusandmed on Heckmann ja Siedentopf hiljuti jõudnud otsusele, et mitmes neist paaris uuritud kerasparves ei ole olemas tegelikku spiraalstruktuuri (K36)

§18. Spiraalstruktuuri jälgi kerasparvedes.

Freundlich ja Heiskanen omapoolt kvalitatiivse töö põhjal arvasid, et kerasparves M 13 võivat olla spiraalstruktuuri jälgi. – Bonni katalooge järele nad kandsid millimeeterpaberile ära kerasparvede M 3 ja M 13 jaoks eraldi heledad ja nõrgad tähed. Nõrkade tähtede juures nad pandid tähele selge elliptilise ent mitte ümarkujulise paigutuse.

Vaatleme nüüd mainitud joonistel vaadeldavate tähtede jaotuse projektsioonis kaks iseäralikkust torkab meile silma. Nad näitavad üldiselt tugevat kontsentratsiooni tsentri poole, kuna kaugemal asuvate tähtede paigutus tuletab meile spiraalstruktuuri. Tähtsust on mainimisväärt ka see asjaolu, et mõlema üksteisele vastastikku asuva langemistäpi ühendusjoon näib ühte langevat mainitud ellipsi suure teljega. Võib ütelda, et see nähe on juhuslik. Igatahes ei oleks õige selles otsida seos parve ja kosmogoonilist sugulust spiraalududega.

Nimetame, et ka J.M. Schaeberle (K 91), uurides parve M 13, on leidnud, „unmistakable evidence of a spiral structure in this object."

v. Zeipel ja Lindgreni (K 128) töö" põhjal võime ütelda, et isegi lahtistes parvedes on märgatud spiraalstruktuuri jälgi. Igatahes osutavad ka need uurimused, nagu käesolevas töös on mõnes kohas juba esile tõstetud, et parved isegi oma tsentraalsetes osades ei ole veel jõudnud statsionaarse seisukorrani.

See praegu esitatud ten Bruggencate'i uurimuse tulemus ei ühti eelnevas § mainitud Heckmanni ja Siedentopfi arvamusega. Võiks [illegible]ta, et viimane, mis on ühtlasi uuem vaade, omab suurema tõenäosuse.

§19. Märkusi parve tähtede omaliikumiste kohta.

Olgu siinkohal paari sõnaga puudutatud ka tähendatud probleemi ülesanne, määrata iga üksiku tähe liikumise statsionaarsus-

teemis on niivõrd raske, et ta jääb ar-
vatavasti igaveseks ajaks lahendama-
tuks. n-keha probleemi ~~on~~ range
matemaatiline käsitlus pole, nagu
me teame, iseenesest juba võimalik
kui $n > 2$. Aga selle peale vaatama-
ta me võime siiski luua teatud üldi-
sed iseloomustavad momendid stellaarse
süsteemi kui terviku kohta.

Kõiki parvetähtede oma liikumi-
si võiksime jaotada radiaalseteks
ja transversaalseteks liikumisteks.
E. Strömgren on näidanud (K 114), et on
tõenäoline, et radiaalsed liikumised oma
maksimaalse kiiruse saavutavad
parve tsentris, kuna seevastu kõige
suuremad transversaalsed kiirused esi-
nevad kaugel tsentrist.

Liikumiste ~~tõ~~ probleemi lahenda-
miseks ei jätku juba enam tava-
lisest dünaamilise astronoomia
meetoditest; me peame appi võtma

matemaatilise statistika meetodid.
Siinjuures tähtsa teoreemi - suurte
arvude seaduse - defineerib Charlier
järgmiselt (K 19a)

Iga individuumide populatsiooni
areng toimub igal momendil sama-
selt, et toimub see sündmus, mis
~~olev~~ omab kõige suurema tõenäosuse.

See seadus muidugi ei ole maksev
iga üksikul juhul. Selle tähendus
on, et enamustatud populatsiooni
arengukäik toimub suhteliselt vaesa-
misega. Kui peame seda silmas, või-
me seadusele anda täpsema kuju:

Iga individuumide populatsioon
läheneb asümptootiliselt olukorrale
mis, nagu võib tõestada, omab kõige
suurema tõenäosuse.

Eelpool on korduvalt rõhutatud,
et populatsiooni kõige tõenäolisem
seisukord on staatiline, ja lõplise
seisukord, mille juure mõni süsteem

jõuab, peab järelikult ka olema staatiline.

Kõikide parvede dünaamilistel teooriatel on see ühine, et kõik vaatlevad parvesid statsionääriste kujunditena. Statsionäärsed seisukorrad paistavad juba selle poolest sobima, et nad on käsitatavad matemaatiliselt. Juba selle asjaolu pärast on otstarbekohane kinni pidada statsionäärsuse eelduse juures niikaua kuni see mingisugusel põhjusel osutub vastuvõetamatuks.

Heckmann ja Siedentopf räägivad (K37) vahelduvatest mõjudest (Wechselwirkungen) ja seavad selleks puhuks üles statsionäärsuse tingimuse.

Vaatleme kuue mõõdulises ruumis ruumala elemendi: $dx\, dz\, dy\, du\, dv\, dw$ ja küsime, kuidas toimub selles ruumala elemendis ajavahemiku dt jooksul tähtede arvu muutumine.

See muutumine koosneb kahest osast. Üht osa määravad ära piirvalt sisse, resp. välja voolavad tähed, teist osa tähed, mis, jõudes teistele parvetähtedele liig suuresse lähedusse, saavad enam või vähem täielikult sisse- või välja heidetud. Nõudmisega, et nii defineeritud ajaline muutumine saab nulleks, et, täiendavalt, pidev ja mittepidev effekt teine teisega tasuvad, saame funktsiooni $f(x,y,z,u,v,w)$ jaoks statsionäärsuse tingimuse.

Heckmann ja Siedentopf arvestavad relaksatsiooniaja, tahes näidata, et vahelduvatel mõjudel on suur tähtsus.

Kõige pealt vajame keskmiste parvetähtede kiiruste tundmist. Vahetutest vaatlustest ei tea me selle kohta midagi, kui mitte arvestada van Maaneni (K64) mõõtmistega X, mille põhjal võiksime järeldada, et kesamiste kiiruste väärtus ei tõuse tunduvalt üle 200 km/sek. See päris umbkaudne ülemise piir on aga väga tähtsaks. (v. ka §11 lk. 55 ff).

Vastuvaidlematu arvutuse kiiruste hindamise lubab Jakobi lause (seda lauset nimetatakse vahel ka Poincaré teoreemiks): Olgu T kogu kineetiline, $\mathcal{P}$ kogu potentsiaalne energia, J kogu süsteemi ..., siis on maksev

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 J}{dt^2} = 2T - \mathcal{P} \qquad (70)$$

Statsionaarsete süsteemide puhul kaob muidugi vasak pool ja saab võrrandist arvutada kineetilise energia potentsiaalsest. On M kogu mass, $M(r)$ mass kera sees, mille raadius on r, siis on

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{P} &= \varkappa\int_0^M \frac{M(r)}{r}\,dM(r); \quad \varkappa = \text{gravit. konst.}\\ &= 4\pi\varkappa\int_0^\infty M(r)\,\rho(r)\,r\,dr\end{aligned}\right\}\quad (71)$$

Schusteri seaduse puhul leiame

$$\mathcal{P} = \frac{3\pi}{32}\varkappa\frac{M^2}{a} \qquad (72)$$

parvetähtede keskmise kiiruse jaoks leiame

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{\mathcal{P}}{M}} \qquad (73)$$

Kahe möödaminemise (Vorübergänge) Δt vahelise aja ja keskmise vaba teepikkuse hindamisel võtame aluseks elementaarsed gaaskineetilised valemid

$$\Delta t = \frac{1}{\pi\bar{c}\rho\sigma^2} \qquad (74)$$

$$\Lambda = \frac{1}{\pi\rho\sigma^2} \qquad (75)$$

Charlier on proponeerinud möödaminekute jaoks järgmise geomeetrilise definitsiooni: Meie räägime möödaminekust, kui ühe tähe kaugus kuni lähima täheni saab väiksemaks kui pool keskmisest kaugusest. Kasutades meelevaldselt valitud tõenäolikud numbrilised andmed, otsustavad Heckmann ja Siedentopf, et möödamõnekud on sagedased nähtused. (umbes hinnatud andmed: $\Lambda = 16$ parsek, $\Delta t = 1,1 \cdot 10^6$ aastat.)

Parema ülevaate möödamõnekutest kui need umbkaudsed hindamised, pakub relaksatsiooniaeg. Rosselandi poolt on antud tähesparvede probleemi jaoks eriti kolme relaksatsiooniaja definitsioon: see on see aeg, mille kestel vajab, et korduvate möödamõnekutega transformeerida korraga nii palju energiat, kui vastab süsteemi ühe tähe keskmisele kineetilisele energia hulgale. – Heckmann ja Siedentopfi numbrilis te andmete abil leiame $\tau = 1,6 \cdot 10^{10}$ aastat.

Kokkuvõttes võime ütelda, et niihästi teoreetilised kaalutlused, kui ka numbrilised hindamised osutavad tarvidust vaadelda dünaamikat ühes vahelduvate mõjudega.

Kokkupõrgete kohta tähtede vahel arvab C. F. Lundahl järgmist (K 69)

Kokkupõrgete effekt tähtede vahel, mis saavad vaadeldud kui mitte elastsed kerad, on see, et lõppude lõpuks kõik tähed omavad suuruse ja sama poolest sama kiiruse. – See tulemus on kooskõlas seadusega energia võrdjaotusest (the law of equipartition of energy). Üldised kaalutlused selle effekti üle ütlevad meile peale selle veel, et kõik tähed parves peavad lõpuks kuhjuma üheks kompaktseks massiks.

§20. Veel mõningaid märkusi:

Kerasparvedel on olemas mitmed iseäralised tundemärgid. Tähendame ära, kuigi juba mainitud, veel mõned tähtsamad momendid. Kerasparvede uurimises mitmel korral konstateeritud väikesed muutused (Perrine, v. K 79), parve-ja seesuga m.t.e. Mitmel juhul on parvede seas tähele pandud silmatorkavad tähtedevaesed kohad (Steinheren) näit: M 5 M 13, (M 37). On avaldatud arvamusi, et meil ei ole siin tegemist tegeliku tähtede puudumisega, vaid absorbeeriva tumeda materjaliga (K 93)

Bailey on keraparvedes avastanud suure hulga lühikese perioodiga muutlikke, mis on nii omapärased, et nad moodustavad eriliigi, n.n. cluster-variables. Tähtsamaks tunnusmärgiks on nende periood, keskm. $0^{d}.5$. Seda püütakse seletada suure arvu kaksiktähtede olemasoluga keraparvedes. Sellekohaste kaalutluste põhjal leitakse et süsteemid ogatalis peavad olema õige kitsad ja massid umbes Päikese suuruse järgulised. Seda probleemi käsitlevaid tähtsamaid töid on ilmunud peamiselt Bailey'lt (K3). Võiks mainida ka Slavenuse (K98), Große (K33) j.t. nimimusi.

v. Zeipel on uurinud suhte $\frac{c_p}{c_v}$ omadusi, eeldades gaasimassi molekulid, mis väikemalt osalt koosnevad kaksiktaatomitest, mis liiguvad koonuselõigete & raskus täppide ümber Newtoni seaduse järele. Ta jõuab tulemuseni, et üksikute ja kaksiktaatomite arvu kohase valiku puhul on meil võimalik tuletada väärtuse $\frac{c_p}{c_v} \leq 1.2$ (v. § 11, lk. 52.) Selega on v. Zeipelil õnnestunud anda leitud jaotuseseaduse jaoks rahuldava seletuse.

Praegu kirjeldatud momentide interpretatsiooni püüavad anda E. Strömgren ja Drachmann (K 115), vaadeldes keraparve arengukäiku.

Kui parvede tekkimiseks peame õigeks Arrheniuse ja See hüpoteesi ing-udust (nebul), siis ütleks $n \geq 5$ niipalju kui, et uuritud parved veel seisavad praegu ühenduses välisilmaga, s.t., et nad tunduvas ulatuses püüavad kinni võõraid masse. Algutis, kui parv on veel väga tihe, sisaldas ta teatud hulga udumateeriat, mis tähtede liikumisele seab vastu takistuse. Vahete vahel juhtus, et kaks tähte tulevad üksteisele nii ligidale, et vastastikuse attraktsiooni tõttu nende orbiitid muutuvad täielikult. Võttes nüüd appi udumassi poolt tekitatud hõõrumis-takistuse, võib ka juhtuda, et kaks üksteisele väga ligidale tulnud tähte oma liikumises saavad samaselt pidurdatud, et vastastikune attraktsioon nii võimsaks saab, et need kaks tähte ühte sulavad kaksiktähesüsteemiks. Pikkade ajavahemike järel leidub siis parves teatud arv kaksiktähti. Kui udumateeriat on suuremal hulgal, siis tekib palju sarnaseid süsteeme. Juba olemas olevad süsteemid aga muutuvad hõõrumis-tagajärjel kas kitsamateks ja kitsamateks, kuni suurel arvul juhtub

et komponendid kokku sulavad ja moodustavad suuremaid tähti.

Kitsad kaksiktähed on nüüd Cluster-muutlikud; need ja endised kaksiktähed (oletusel, et nad veel ei ole ära jahtunud) kokku moodustavad sula-vastu nõrkade tähtede rühma.

Jätkuvad arengu tagajärjeks on järjest kasvav kontsentratsioon, nii et lõpuks moodustab parv süsteemi täiesti omaette (abgeschlossenes System). Sellele vastaks väärtus $n<5$. Asjaolu, et me tegelikult ei tea sarnast juhtu, ei ütle veel midagi, sest sarnane parv võib meile oma suure kauguse tõttu paista üksiku tähena. Kas on võimalus olemas, et keraparved, oma arenemise aja lühiduse tõttu, pole veel suutnud jõuda selle staadiumini.

Oma hüpoteesi põhjenduseks pööravad Strömgren ja Drachmann tähelepanu järgnevale:

1) Barley on kerasparves M 3 leidnud 132 muutlikku, mis kõik

kuuluvad 900 heledamate tähtede hulka (suhe 1:7 !). Ühenduses sellega on ta uurinud sama parve 2000 nõrka tähte, tulemusega, et ta ei suutnud avastada mitte ühtegi muutlikku.

2.) Hüpoteesi järele peab kaksiktähtede süsteemide tekkimine algama aegamööda hõredates parvedes, et pärast ühes üldise kontsentratsiooniga arenema kiiremas tempos (v. §1, lk 8). Selle tõestuseks on Strömgren kokku seadnud hõredamate parvede kohta järgmise huvitava statistika. Parvedes M 3, M 5, M 15 leidub ülalmainitud suhe 1:7, 1:11, 1:18. Selle vastu on see suhe:

h ja χ Persei-s	1: 1050
M 55	1: 220
N.G.C. 6397	1: 244
M 22	1: 97
M 28	1: 100

3.) Võib praegu võõrastav olla asjaolu et muutlikkude jaotus on ühtlaa-

protsentuaalne, (s.t. eridistantsides tsentrist tähtede arvuga lihtsalt proportsionaalne), (K6 lk. 207-208). Tegelikult aga on see päris loomulik, kosmiliselt teoorial põhinev järeldus. Tsiteeritud töös (K6) ütleb Bailey (lk 233-234) järgmist, mis on heas kooskõlas vaadeldud hüpoteesiga: „There is no reason to assume, that every dense cluster now presents conditions favorable for variability of any kind. Indeed it appears probable that in many cases variability simply marks a certain stage in the stars development, perhaps as far removed from the beginning as from the end."

On avaldatud arvamist, et keraparved on lahtistest kujunenud mis oma arengu jooksul lähenevad Linnuteepiirkonnale, kus massirikastes galaktilistes tähteparvedes teevad läbi lagunemis protsessi ja lõpuks üle lähevad mitmesuguste liikide lahtiste täheparvede tüsukorrale. Kui see oleks õige, siis peaksid lahtiste parvede üldkusis ilmutama samad statistilised tõngemused kui keras-parvedeski. See nõue ei ole aga tõendust. Nagu m.s. ka C. Vitz ära märgib, me ei saa vaadelda lahtisid parvesid kui keras parvede arenguliist jätku.

Kokkuvõte.

1. Täheparved liigitatakse järgmiselt 1.) kerakujulised täheparved, 2.) lahtised täheparved, 3.) tähtede vaolud. Shapley liigitab kerakujulised täheparved veel kaheteistkümnesse rühma, millega on arvatavasti tabatud üksikud arenemisjärgud.

2. Kerakujulised täheparved moodustavad oma ensüsteemi, mille pooluseks on 296° gal. l. ja −8° gal. p. Kerakujuliste täheparvede esinemise maksimum on 325° juures. Mille teada olev keras parvede arv on juba aastakümneid püsinud konstantsena.

3. Üksikute parvetähtede spektrite saamine, praktiliselt pole võimalik. Parma üldspekter näitab sugulust Päikese spektriga.

Heaks vahendiks on color-index'i määramine; Shapley tarvitab siinjuures „värviklassisid". Keraparved esinevad peaaegu kõik spektriklassid. Üksikute klasside suhteline sagedus aga arvatavasti ei ole sama igas keraparves. Tähelepanuväärt on „high luminosity" tähtede sagedus. Tähtede värv ei olene tähtede asupaigast parvedes.

4. Projektsiooni tiheduse võime leida kui jaotame projektsioon 1.) kontsentrilisteks ringideks, 2.) või ristiks ruutudeks või 3.) paralleelseteks ribadeks ja loeme ära tähtede arvud. Heledatel ja nõrkadel tähtedel on parvedes erisugune paigutus.

5. Ruumilise tiheduse jaotuse jaoks leiab v. Zeipel tähtsa valemi; ka Plummeril on õnnestunud tuletada analoogne valem.

6. Keraparved näitavad enam ellipsoidi kui kera kuju. Lameduse põhjuseks võib olla rotatsioon või kokkupõrge mõne teise stellaarse süsteemiga (Shapley). Ellipsoidide sümmeetria tasapinnad ei näita paralleelsust linnutee tasapinna suhtes. Freundlich ja Heiskanen viivad läbi umbkaudse masside määramise tähe-parves kui pöördellipsoidis.

7. Üldised märkused, millised näitavad, et keraparvesid võib lasta võrrelda gaaskeradega. Sel puhul on kõige tõenäolikumad juhud — isoterma ja polütroopia n=5.

8. v. Zeipel on uurinud mitmeid keraparved, tarvitades siinjuures meetodit, mis lubab eraldada tsentraal

keraste meile valdse raadiusega. Tema leiab isotermia puhul vaatlusandmete ja teooria vahel kooskõla vaid parvede tsentraalses osades.

9. Et tõeolukorrale jõuda võimalikult lähemale, peaksime täheparvesid töötlema gaasisfääridega. Freundlichi ja Heckmanni poolt tuletatud seadust ei saa tõlgitseda kui isotermset. Nimetatud seadus omab lõpmatu raadiuse ja lõpliku massi.

10. Leiame, et Schusteri seadus kujutab keraparvede välisosi hästi, kuna aga tsentraalsete osade jaoks annab see teooria liig suure kontsentratsiooni. Võime keraparvesid võrrelda tuumaga, mis on mähitud atmosfääri sse. Siinjuures on tuuma tihedus suurem

kui atmosfääri-oma, mida kujutab hästi seadus n=5. Tähtede jaotuse keraparvedes võime kõige paremini kirjeldada tiheduse seadustega, mis alati viivad lõplikule massile sisuliselt lõpmatu raadiuse juures.

11. Adiabaatse ehituse juures oleks ei soojuste sube, kuid kohasem on vaadelda k-d kui matemaatilist konstanti. Hertzsprungi, Barabaševi, Schilti ja Haggi katsed määrata ruumilist tihedust integreeritud tihedusest annavad hääd tagajärgi. Kipper arendab meetodi ruumilise tiheduse leidmiseks üksikute tähtede omaliikumistest, ilma, et seljuures oleks tarvis teada parve kaugust.

12. Ainult Schusteri seadusel on see omadus, et piirkiirus on võrdne

välja mis kiirusega. Eddingtoni näitas et juhul, kui $n=5$, siis kerasparve ühe meele valdselt valitud ruumala maht kineetilise energia poolest on igaüks võrdne ühe neljandikuga potentsiaalsest energiast, mis tekkib üle jäänud parve ruumala osa külgetõmbe jõust. Siiski ei kujuta Schusteri seadus statistilise mehaanika mõttes kerasparvede normaalsesse korda.

13. Teooria üldisemate juhtude puhul leiavad Eddingtoni ja Jeansi jaotusfunktsioonid. Ten Bruggencate leiab kiiruste jaotus funktsiooni.

14. Arvestades ka väliste jõududega, võime ütelda, et iga Schusteri seaduse puhul parved lagunevad väikesemateks osadeks. Protsessi suurus oleneb parvede tsentraalsest tihe-

dusest. Schusteri seaduse puhul ei ole tsentraalne tihedus nii suur, et ta võiks takistada parvede täielikku lagunemist.

15. Kerasparvede tähed ei ole kõik võrdse massiga. Oletuse $\psi(M,\rho) = \varphi(M) \cdot f(\rho)$ abil võime projektsiooni intensiteedi jaotusest tuletada kooskõlas v. Zeipeli meetodiga funktsioon $f(\rho)$, kuna kerasparvedes me tajume ainult hiiglasi.

16. Parve tuuma me kunagi ei või vaadelda kui parve autonoomset osa. v. Zeipel arendab meetodi, kuidas määrata tähtede massid nende jaotuse põhjal parves. Freundlich ja Heckmann on teostanud analoogse uurimuse. – Parve kogumassi võime hinnata 10^6 Päikese massile.

17. Mõned uurijad on leidnud keras-
parvedes spiraalstruktuuri jälgi;
kuid uuemad uurimused näitavad,
et nähe ei ole reaalne.

18. Ten Bruggencate uurib spiraalstruk-
tuuri olemasolu tõenäosust ja leiab,
et see on tõenäone. Uuemate vaadete
põhjal me ei või aga pooldada
seda vaadet.

19. n-keha probleemi lahendamine, kui
n > 2 ei ole võimalik. Katsume kuju-
tada n-lõist pilti. Strömgren näitas,
et radiaalsed kiirused on kõige suuri-
mad parvede tsentris, kuna trans-
versaalsed kiirused omavad maksi-
mumi kaugemal tsentrist. Charlier
näitas, et igal momendil alati sünnib
kõige tõenäolisem seisund. Her-
mann ja Siedentopf leiavad vahel-du-
vate mõjude puhul statsionaarse

[illegible]muse. Parema ülevaate pakkus
meile aga relaksatsiooniaeg. Lundmark
on tähtede kokkupõrgete kohta loo-
nud hüpoteesi.

20. Eriti cluster muutlikkude esinemise
põhjal arendavad Strömgren ja
Drachmann parve arengu jaoks
hüpoteesi ning põhjendavad seda eri-
ti Baily uurimuste tulemustega.
On avaldatud veel teine arvamus, et
keras parved on labiilsed kujundid.
Kuid see vaade on, nagu Htz. tõen-
das, vähe tõenäone.

Kõik käesolevas töös esitatud
kaalutlused ja teooriad keraskuju-
liste tähteparvede ehituse ja nendes
valitsevate olude kohta on, nagu

töö algusest juba mainitud, taga kupo leetilised ja üldised. – Me ei või loota, et kõik senised uurimused tähelduse-seaduste kohta on ümberski õiged juba sel puhul, et meil ei ole summaarsed kataloögistud parvedest. Praegustes on tähendatud kesk mitult 1500 – 20.000 tähti, kuna kerasparvedes on ligi à ~~22~~ 100 000 tähti.

Suurte (vähemalt 20.000-ki tähti) katalögide loomine on seotud suurte raskustega, mis on nii rahalist kui ka instrumentaalset laadi. Me näime, et „me (esialgu) ei või midagi teada."

Vahest avame, et kui oleksime parvedele palju lähemal, siis oleks ka uurimustel rohkem tagajärgi. Selle kohta avab Eddington tähelepanu (K 23): „Were we transplanted onto the midst of the great Herculis cluster, our knowledge of

its constitution could scarcely be so precise as that which our shapes has discovered at a distance of 30.000 light years; and the labour would have been incomparably greater."

Kirjanduse ülevaade.

Bibliograafiaid tähepaarvede kohta leidub järgmistes töödes: Astronomisches Jahrbuch, Shapley (K.108), Barley (K.47), Strömgren & Drachmann (K.115) Shapley (K.106), Encyklop. Britannica. vol. 21. p. 335. j.t.

Käesoleva kirjanduse ülevaate, mis ei pretendeeri täielikkusele, olen koostanud autorite nimede leksikograafilises järjekorras. — Olen tarvitanud järgmisi lühendusi:

A. A. Astronomy and Astrophysics
A. J. Astronomical Journal
A. N. Astronomische Nachrichten.
Ap. J. Astrophysical Journal
C. R. Comptes Rendus des Séances de l'Academie des Sciences.
G. V. Veröffentlichungen der Sternwarte zu Göttingen.
H. A. Annales of the Harvard Observatory
H. C. Circulars of the Harvard Observatory

H. M. Mitteilungen der Sternwarte Bergedorf-Hamburg.
L. B. Bulletins of the Lick Observatory
M. N. Monthly Notices of the Royal Astron. Society - London.
Ob. The Observatory.
P. A. Popular Astronomy.
P. A. Po. Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam.
P. A. S. P. Publications of the Astronomical Society of the Pacific.
Ph. Z. Physikalische Zeitschrift.
V. J. S. Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Berlin.
Z. f. Ap. Zeitschrift für Astrophysik.
Z. f. Ph. Zeitschrift für Physik.

1. Baade, W. Der kugelförmige Sternhaufen N.G.C. 5466. H. M. 6, 27. 1928.
2. —— Der Sternhaufen 5053 H. M. 6, 29. 1928.

3. Bailey, S. J. Globular Clusters.
V. J. S. 48 418. 1913
4. ——— A. A. 12, 689
5. ——— Ap. J. 10, 261
6. ——— H. A. 38.
7. ——— Globular Clusters H. A. 76.
8. Barabascheff, N. Über die Helligkeits-verteilung im Sternhaufen M 13
A. N. 220, 299, 1923.
9. Barnard, E. E. Some abnormal stars in the Cluster M 13. Ap. J. 12, 176, 1900.
10. ——— On the Motion of the Stars in the Cluster M 92. A. N. 176, 17, 1907
11. ——— ...... second paper A. N. 176
21. 1907.
12. ——— On the Colors of some of the stars in the globular Cluster
M 13. Ap. J. 29, 72, 1908.
13. Becker, F. Die kugelförmigen Sternhaufen. Himmelswelt 32, 103, 1922
14. Belopolsky, A. Über die Veränderungen in einem Sternhaufen
N.G.C. 5272. A. N. 174, 203. 1907.

15. Bohlin, K. Der zweite Sternhaufen im
Herkules (M 92) A. N. 174. 203. 1907.
16. ten Bruggencate, P. Über die Reste einer Spiralstruktur in Sternhaufen. Z. f. Ph. 24.
48. 1923.
17. ——— Sternhaufen. Berlin 1927.
18. ——— Bemerkungen über ellipsoid-förmige Sternhaufen. A. N. 232. 417, 1928.
19. ——— Die Dichteverteilung in rotations-symmetrischen Sternhaufen. A. N. 232, 423
1928
~~20.~~ 19a. Charlier. P. A. S. P. 37, 125, 1925.
20. Chapman, S. Some Problems of Astronomy,
II. Globular clusters. Obs., 36, 112, 1913.
21. Eddington, A. S. The Dynamics of a Globular Stellar System. M. N. 74, 5, 1913, 75, 368. 1915
22. ——— The Nature 76, 37. 1915. of globular
Clusters, Obs. 39, 513, 1916.
23. ——— Researches on Globular Clusters, Obs. 40, 394, 1917.
24. ——— The distribution of
stars in globular clusters M. N. 76, 572,
1916.
25. ——— The Kinetic Energy of
Star Clusters. M. N. 76, 525. 1916.

26. Einstein, A. Eine einfache Anwendung des Newtonschen Gravitationsgesetzes auf die kugelförmigen Sternhaufen. Festschr. Kais. Wilh. Ges. p. 50, 1921.

27. Emden, R., Gaskugeln, Leipzig 1907.

28 ——— Thermodynamik der Himmelskörper

29. Fath P.A.S.P. 25, 240, L.B. V 71. Ap. J. 33, 58 / 37, 198

30. Freundlich, E. Zur Dynamik der kugelförmigen Sternhaufen. Ph. Z. 24, 221, 1923

31. ——— & Heckmann, O. Über die Verteilung der Sterne verschiedener Massen in den kugelförmigen Sternhaufen. Z. f. Ph. 14, 226, 1923.

32. Gore, J. E. Globular Star Clusters. Knowledge 17, 232, 255, 1894

33. Grosse, E. Untersuchungen über die Veränderlichen im Kugelsternhaufen M 53. A. N. 246, 377 (1932).

34. Guthnick. Kugelhaufen. Sitzber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. 24, 508, 1925

35. Heckmann, O. Referat von ten Bruggencate „Sternhaufen" V. J. S. 62, 180, 1927

36 ——— & Siedentopf, H. Über die Struktur der kugelförmigen Sternhaufen. G. V. 6, 1929. Z. f. Ph. 54 183, 1929.

37. ——— ——— Zur Dynamik der kugelförmigen Sternhaufen. G. V. 13, 1931.

38. Hertzsprung, E. The Nature of Globular Clusters, Obs. 40, 303, 1917.

39. ——— Photogr. Messung der Lichtverteilung (M3) A. N. 207, 89, 1918

40. Hogg, H. B. 870. 1929.

41. Hopmann, J. Die Sternhaufen. Naturw. 8, 740, 1920.

42. ——— Der kugelförm. Sternhaufen NGC. 5466 A. N. 217, 333, 1922

43. Hubble, E. Two New Globular Clusters M.W.C. 16, 233, 1920

44. ——— Nebulous Objects in M 31, provisionally identified as Globular Clusters Ap. J. 76, 1. (1932)

45. Innes, R. T. A. NGC. 5824 U. C. 66, 1925

46. Jeans, J. H. The Evolution of Star Clusters, Problems of Cosmog. and Stellar Dynamics, Ch. X p. 220. 1919.

47. ——— M. N. 74. 109. 1913.

48. ——— M. N. 76, 552, 1916

49. ——— M. N. 82. 132. 1922.

50. ——— On the Theory of Star Strea-

ming and the Structure of the Universe.
M.N. 76. 70. 1915.

51. —— On the law of distribution in Star Clusters. M.N. 76. 564. 1916.

52. Lord Kelvin. Phil. Mag. and Journ. of Sc. 3, 1902

53. Kienle, H. Die Gestalt der kugelförmig. Sternhaufen. Naturw. 15, 243, 1927. Ob. 24, 403. 1901.

54. —— Die Dichteverteilung in Ellipsoidförmigen Sternhaufen. A.N. 232. 427. 1928.

55. Kipper, A. Über eine Methode zur Berechnung der räumlichen Dichte eines Sternhaufens aus den gemessenen inneren Bewegungen. Z. f. Ap. 2, 214.

56. —— Tihedusest laktikes täht-parves M 67. Ühe meetodiga rõhmase arvutamiseks. Tartu Ülik. Tähetorni Raamatukogu Inv. nr. 6322 (1931)

57. Kopff, A. Üb. d. Häufigkeitsfunktion (M 13) A.N. 219, 311, 1923.

58. Kostitzin, V. Die Struktur kugelförmigen Sternhaufen. Moscow Obs. 1, 28, 1922.

-124- 59. Küstner, F. M 56. Bonn Veröff. 14 1920.

60. —— M 15 Bonn Veröff. 15, 1921.

61. —— M 3 Bonn Veröff. 17, 1922.

62. Lampland, C.O. & Tombaugh, C.W. Object N.G.C 5694. a distant Glob. Cluster. A.N. 244

63. Larink, J. Die Kugelf. Sternhaufen. Helstall 25, 18, 1925

64. Leusi, J. Stern bewegungen in ellipsoidförmigen gedichteten Sternhaufen. A.N. 204, 17, 1916.

65. Lindblad, B. On the Dynamics of the System of Globular Clusters Upsala Medd. 4 1926.

66. Ludendorff, H. M 13. P. Ap. Pd. 15, 50.1-56. 1905. A.N. 178. 369. 1908.

67. van Maanen The proper Motion of M 13 and its internal Motion Contr. Mt. Wilson. 284. 1925. M.W.C. 338. 1927.

68. Malmquist. K.G. Lunds Medd. Ser. II. 46. 1926

69. Martens, E. A Research on the Spherical Dynamical Equilibrium-distribution of Stars of Unequal Masses Göteborg 1928.

69. Lundahl, C.F. Lunds Medd. Ser II. 45 1926.

70. Matukuma. Tokyo, Proceedings Imp. Acad. 6, 133.

71. Moulton, F.R. Amer. Astr. Soc. 1, 329, 1909

72. Ohlsson, J. Lunds Medd. Ser. II 48

-125- 73. Oort, J.H. P.N.A.S. 10, 256. 1924.

74. Parvalesco, C. "Sur les amas globulaires." Bull. Astr. Série II, partie I. T. V, Fasc. I. 1925.
74a. Palmer, H. K. M13. Ap. J. 10, 246. 1899.
75. Pease, F. G. M13. Yearbook Carn. Inst. Washington 12. 219. 1913. P.A.S.P. 26. 204. 1914.
76. —— & Shapley, H. On the distribution of stars in 12 Glob. Clusters. Comm. M.W. 129. 1917.
77. —— —— M13. Amer. Astr. Soc. 3, 284, 1916.
78. —— —— Axes of Symmetry in Glob. Clusters. Comm. Mt. Wilson, 39, 1917.
79. Perrine, C. D. Discovery of many small Nebulae near some of the Glob. Clusters. P.A.S.P. 20, 237. 1908.
80. —— The Nature of Glob. Clusters. Obs. 40, 166, 1917.
81. —— L. B. 64. Ap. J. 20, 354, 1904.
82. Pickering, E. C. Distribution of Stars. H.A. 26. 213. 1897.
83. Plummer, H. C. Distribution of Stars. M.N. 76, 107, 1915.
84. —— —— . —— M.N. 71, 460, 1911.
85. —— W. E. M13. M.N. 65. 810. 1905.
86. Poincaré, H. L'Astronomie T. 25. 153, 1906.
87. —— Leçons sur les hypothèses cosmogoniques. Paris 2d Ed. 1913, ch. XII. p. 257.
88. Pogson, N. Remarkable Changes in M 80. M.N. 21. 32. 1860.
89. Rasmusson. Moving Clusters. Lund. Medd. Ser. II 26, 1921.
90. Schaeberle, J. M. M13. A.J. 23, 226, 1903.

-126-

90. Roberts, I. Photographs of Nebulae and Clusters.
92. Scheuer, W. Die Welt der kugelförm. Sternhaufen. Weltall 28, 89, 1929.
93. Shaw. Obs. 37, 98.
94. Scheiner, J. M13. Abh. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. Berlin 1892.
95. Schilt. A. J. 38, 899 (1928)
96. Schultz, H. Glob. Clusters, Motion. Upsala 1873
97. See, T. J. Dynamical Theory... Proc. Amer. Phil. Soc. 51 118. 1902.
98. Slavenas, Study Var. Stars in M3 A.N. 240
99. Shapley, H. Studies VIII. Comm. Mt.W. 54. 1918
100. —— Dimensions of a Glob. Cluster. P.A.S.P. 29 245. 1917.
101. —— P.A.S.P. 30, 42, 1918.
102. —— Distribution of Stars... Obs. 39, 452, 1916.
103. —— New Glob. Clusters H.B. 775. 1922.
104. —— —— . H.B. 776. 1922
105. —— Star Clusters and Skies... Proc. Amer. Phil. Soc. 58, 337, 1919.
106. —— Studies XIV. Contr. Mt.W. 161. 1919.
107. —— Star Clusters. Encycl. Brit. 1929.
108. —— Star Clusters. Harv. Obs. Monogr. No. 2.
109. —— Studies II. Contr. Mt.W. 116. 1916.
110. —— Relation of blue stars and variables to galactic planes. Comm. Mt.W. 45 1917.
111. —— & M. B. Shapley. Studies XIII. Comm. Mt.W.
112. Sprague, R. Star Clusters. Pop. Astr. 1, 407. 1896. 160. 1919.

113. Stepanoff, W. Steady spheric. Clusters. Russ. Astr. J. 5, 132, 1928

114. Strömgren, E. Bewegungsformen ... A.N. 203, 17, 1916.

115. — & Drachmann Verteil. der Sterne. Publ. København 16. 1914.

116. Sullivan, R. Star Clusters. P.A. 26, 432, 1918

117. Trumpler, R. — Publ. of the Allegheny Obs. 6, 4. 1922

118. Valier, M. Die Rätsel d. kugelförm. Sternhaufen. Astr. Zeit. 13, 62, 1919.

119. Wegner, U. Verteilungsfunktion Z. f. Ph. 49, 386, 1928

120. Winlock, A. Positions of Stars ... H.A. 38. 235, 1901

121. Wirtz, C. .... Astr. Schr. d. Bundes d. Sternfreunde 1, 192

122. — Statistik ... A.N. 220. 293.

123. v. Zeipel, H. Bestimmung der Massen A.N. Jubiläumsnr. 33, 1921.

124. — Recherches sur la constitution ... Kgl. Sv. vet. ak. handlingar 51, 5. 1915

125. — Catalogue de 1571 étoiles ... Ann. de l'obs de Paris Mém. 25, F 1908

126. (124) — C.R. 144, 361.

128. — & Lindgren. M 37. Kgl. Sv. vet. ak. handlingar 61, 15, 1921.

129. v. Zinkeisen, W. M 46. Veröff. Bonn 11, 1909.