

Т. Э. Меле

**КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ
НА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Diss. Tart.

425 700

На правах рукописи

Меле Тынэ Эвальдович

**КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ
НА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Диссертация написана на русском языке

**01. 01. 01 Теория функций и функциональный
анализ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена на кафедре математической статистики и программирования Тартуского государственного университета.

Научный руководитель — кандидат физико-математических наук, доцент Э.А.ТИЙТ.

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук, проф. Г.Ф.Кангро
(Тартуский УУ, кафедра математического анализа, специальность 01.01.01),

Кандидат физико-математических наук Т. Тобиас
(Институт кибернетики АН ЭССР, специальность 01.01.05).

Ведущее предприятие: Таллинский политехнический институт (кафедра математики)

Автореферат разослан "26." *ноября*1973 г.

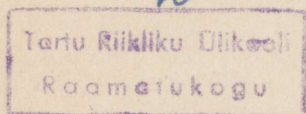
Защита состоится "26." *декабря*1973 г.

в часов на заседании Совета математического факультета Тартуского государственного университета.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Тартуского государственного университета.

Ученый секретарь Совета ТГУ

(И. Маароос)



415230

В теории вероятностей немало примеров успешного применения методов функционального анализа. Общеизвестны эффективность гармонического анализа при доказательстве предельных теорем, гибкость методов гильбертова пространства в теории случайных процессов и др. В настоящей диссертации сделана попытка извлечь из функционального подхода пользу для одной малоизученной области теории вероятностей — области, которая занимается изучением и описанием вероятностной зависимости случайных элементов (см./6/, стр.146–147, или /7/, стр.232 – 241). Исследованием некоторых сторон этой области занимаются, между прочим, такие теории как регрессионный и корреляционный анализ, теория информации и др. (см./6/, /7/). Мы сосредоточим внимание на т.н. корреляционные коэффициенты.

Различные корреляционные коэффициенты и показатели статистической зависимости известны уже давно и они нашли много различных применений. В теории вероятностей ими можно, например, характеризовать совместное распределение двух случайных величин во множестве двумерных распределений (см. /7/, стр.191). В математической статистике можно на основе корреляционных коэффициентов строить различные критерии проверки статистических гипотез о независимости и случайности. Есть и определенный круг проблем в нематематических научных дисциплинах, — биологии, социологии, психологии и т.д., где широко применяют различные показатели зависимости или их оценки.

К настоящему времени предложено большое количество самых разнообразных коэффициентов и показателей зависимости. Настало время найти общие подходы, позволяющие сравнить и систематизировать разнообразие всех показателей, как известных, так и вообще теоретически мыслимых. Мы сделали попытку определить и первоначально исследовать один достаточно широкий класс показателей, называемых в диссертации корреляционными функционалами, на множестве пар случайных элементов большой общности. Эти функционалы описывают, грубо говоря, отклонение 2-меры от произведения своих 1-мер. Хотя они и могут представлять определенный самостоятельный инте-

рес, их введение и специфика продиктованы в основном потребностями теории вероятностей и математической статистики.

Наши корреляционные функционалы рассчитаны для введения шкалы зависимости между случайными элементами на произвольном топологическом пространстве (в бэровском случае) или же на хаусдорфовом пространстве со счетной базой топологии (в борелевском случае). Однако исследование класса корреляционных функционалов проведено для специальных пространств, среди которых наиболее общими являются сепарабельные метризуемые пространства.

Для выработки достаточно общего подхода нам пришлось пересмотреть ряд основных понятий теории вероятностей и придать им более общий или более функциональный вид. Понятия случайного элемента, случайного вектора и их распределений, $\mathcal{P}$ -складимость последовательности случайных элементов и векторов и др. являются примерами таких ревизованных понятий.

В диссертации, кроме введения, две главы. В главе I разработан нужный общий функциональный подход к некоторым понятиям, имеющим непосредственное применение в наших построениях. Глава II посвящена определению и исследованию корреляционных функционалов.

В § I (16 страниц) определены случайные элементы, кортежи и векторы на топологическом пространстве (M, τ) , где τ — топология. Метод определения содержит на нас взгляд некоторую новизну и заключается в следующем. Сначала обычным путем определены вещественные случайные величины как (Σ, Σ_R) — измеримые отображения $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ вероятностного пространства $(\Omega, \Sigma, \mathcal{P})$ в вещественную прямую $(\mathbb{R}, \Sigma_R)$, где Σ_R есть борелевская σ' -алгебра на прямой. Далее фиксирован некоторый класс $\mathcal{F}$ ограниченных вещественных функций на (M, τ) или на его топологической степени $(M, \tau)^n$. Отображение $x: \Omega \rightarrow M$ или $x: \Omega \rightarrow M^n$ называется случайным элементом (СЭ), случайным кортежом (СК) или случайным вектором (СВ) (в зависимости от выбора класса $\mathcal{F}$), если при $f \in \mathcal{F}$ композиция $f \circ x$ является случайной величиной. Более точно, мы получим понятие (а) бэровского СЭ, (б) борелевского СЭ, (в) бэровского СК, (г) борелевского СК, (д) бэ-

ровского СВ и (е) борелевского СВ (все на (M, τ)), если функции, образующие класс $\check{F}$, соответственно (а) непрерывны на (M, τ) ($\check{F} = C(M, \tau)$), (б) борелевски измеримы на (M, τ) ($\check{F} = \Phi(M, \tau)$), (в) непрерывны на $(M, \tau)^n$ ($\check{F} = C(M^n, \tau^n)$), (г) борелевски измеримы на $(M, \tau)^n$ ($\check{F} = \Phi(M^n, \tau^n)$), (д) непрерывны на $(M, \tau)^n$ и имеют представление

$$(I) \quad f(a_1, \dots, a_n) = h(g_{n_1} a_1, \dots, g_{n_k} a_1, g_{21} a_2, \dots, g_{n_k} a_n),$$

где h — непрерывная ограниченная функция на $\mathbb{R}^k$ (т.е. $h \in C(\mathbb{R}^k)$), $k = k_1 + \dots + k_n$, $g_{ij} \in C(M, \tau)$ ($\check{F} = C^+(M^n, \tau^n)$) и (е) борелевски измеримы на $(M, \tau)^n$ и имеют представление (I), где, только, $g_{ij} \in \Phi(M, \tau)$. Удобство этих определений опирается на то, что пространство $\check{F}$ является всегда рисовским, что позволяет легко определить распределения СЭ, СК и СВ при помощи схемы Даниэля.

В борелевском случае предполагаем, что пространство (M, τ) — хаусдорфово и имеет счетную базу топологии, в силу чего понятия борелевских СК и СВ совпадают (I.2.2)¹⁾. В бэровском случае аналогичного совпадения доказать не удалось. Бэровский СВ есть (как и борелевский СВ) произвольный набор бэровских СЭ (I.2.5), однако нам не удалось выяснить, при каких условиях такой набор задает бэровский СК.

В бэровском случае на пространство (M, τ) не налагаем ограничений, однако для любого пространства (M, τ) существует (I.1.4) такое вполне регулярное пространство (M_0, τ_0) , что пространства бэровских СЭ на (M, τ) и на (M_0, τ_0) эквивалентны во всех теоретико-вероятностных отношениях. Это дает повод ограничиться в бэровском случае вполне регулярными пространствами. В работе указана реализация пространства (M_0, τ_0) в виде $\mathbb{R}^{C(M, \tau)}$ (I.1.5).

В § I введены еще понятия равенства (=) и эквивалентности ($\sim$) СЭ, СК и СВ и указаны некоторые равносильные определения.

В § 2 (43 страницы) введены понятия распределений ве-

¹⁾ В скобках номера соответствующих лемм в диссертации.

роятностей бэровских и борелевских СЭ, СК и СВ и исследованы их основные свойства. Следуя идеям /3/, /1/ и /2/ определим распределения как линейные функционалы на пространстве $\check{\Phi}$ (см. выше). Все эти определения основываются на следующей теореме, которая установлена и доказана по идеям /5/. Называем линейный функционал P непрерывным, если при поточечной сходимости $f_n \uparrow f$ любой неубывающей последовательности $\{f_n \mid n = 0, 1, \dots\}$ функций из области определения P имеем $Pf_n \uparrow Pf$.

Теорема 2.1. Если при любом $i = 1, 2$, $\check{\Phi}_i$ есть пространство Рисса, состоящее из ограниченных вещественных функций на множестве M_i , причем $1_{M_i} \in \check{\Phi}_i$, и если Σ_i есть минимальная σ -алгебра подмножеств множества M_i , относительно которой измеримы все функции класса $\check{\Phi}_i$, и если P_1 есть линейный непрерывный неотрицательный нормированный функционал на $\check{\Phi}_1$, то из условия $\Sigma_2 \subset \Sigma_1$ следует, что P_1 имеет единственное продолжение на $\check{\Phi}_2$.

Как следствие этой теоремы получим лемму 2.1.1, устанавливающую взаимно однозначное соответствие между линейными непрерывными неотрицательными нормированными функционалами на некотором пространстве Рисса $\check{\Phi}$ и σ -аддитивными неотрицательными нормированными функциями множеств на минимальной σ -алгебре, относительно которой измеримы функции класса $\check{\Phi}$.

Линейные непрерывные неотрицательные нормированные функционалы на $C^+(M^n, \tau^n)$ и $\Phi(M^n, \tau^n)$ называем соответственно бэровскими и борелевскими n -мерами на (M, τ) . Функционалом математического ожидания называем линейный непрерывный неотрицательный нормированный функционал E на пространстве всех ограниченных случайных величин, являющийся продолжением такого же функционала, определенного на пространстве Рисса всех ступенчатых случайных величин формулой $E\alpha = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{P}\{\alpha = c_i\}$, где α есть ступенчатая случайная величина со значениями $c_1, \dots, c_n$ и $\mathbb{P}$ есть вероятность.

Теперь определим распределение случайного объекта α как функционал P_α , однозначно заданный правилом $P_\alpha f = E\{f\alpha$,

где $f \in \check{\Phi}$ и $\check{\Phi}$ есть $C(M, \tau)$, $\Phi(M, \tau)$, $C(M^n, \tau^n)$, $\Phi(M^n, \tau^n)$ или $C^+(M^n, \tau^n)$ в зависимости от того, является ли x бэрзовским СЭ, борелевским СЭ, бэрзовским СК, борелевским СК (или СВ), или бэрзовским СВ. Из свойств E следует, что распределение (бэрзовского или борелевского) СВ с n компонентами есть (соответственно бэрзовская или борелевская) n -мера на (M, τ) . Она называется и совместным распределением этих СЭ.

Остальная часть параграфа занимается в основном бэрзовскими n -мерами (затронутые здесь вопросы понадобятся нам в главе II в такой ситуации, где бэрзовские и борелевские понятия совпадают). На множестве бэрзовских n -мер рассматриваем т.н. слабую топологию, которую можно определить (2.1.5) сходимостью $P_\nu \xrightarrow{w} P \iff \forall f \in C^+(M^n, \tau^n) (P_\nu f \rightarrow P f)$. В лемме 2.1.6 показано, опираясь на теорему Стоуна-Вейерштрасса, что при компактности пространства (M, τ) пространство бэрзовских n -мер на (M, τ) и пространство бэрзовских 1 -мер на $(M, \tau)^n$ гомеоморфны в слабых топологиях. Опираясь на некоторые известные теоремы (см. /2/), доказаны еще несколько простых но нужных ниже лемм относительно слабой топологии.

Носитель $s(P)$ бэрзовской n -меры P определен как множество $\{a \mid \forall f \in C^+(M^n, \tau^n) (f > 0 \wedge f a > 0 \implies P f > 0)\}$. Это понятие представляет интерес в связи с характеристикой бэрзовских n -мер, имеющих некоторое вырождение (также n -меры играют определенную роль в главе II). Называем бэрзовскую n -меру P двузначной, если $\forall f \in C^+(M^n, \tau^n) (P f^2 = (P f)^2)$ или, что равносильно (2.2.2), если для любого множества B из произведения $\sum_{\tau}^n$ бэрзовских σ -алгебр Σ_{τ} в (M, τ) верно условие $P 1_B = 1 \vee P 1_B = 0$. Доказано (2.2.3), что носитель двузначной бэрзовской n -меры или пуст или состоит из единственной точки; но на линделефовом пространстве он никогда не пуст (2.2.4). Называем бэрзовскую n -меру P вырожденной, если при некотором $a \in M$ для всех $f \in C^+(M^n, \tau^n)$ имеем $P f = f a$. Из вырожденности P следует тривиально ее двузначность. Если (M, τ) метризуемо и сепарабельно, то верно и обратное (2.2.6).

Бэрзовский СВ называется вырожденным, если его распре-

деление двузначное. Множество всех невырожденных бэрзовских СВ на (M, τ) обозначаем через $\mathcal{U}(M, \tau)$ или просто через $\mathcal{U}$. Невырожденность бэрзовского СВ не испортится при его $(\sum_{j=1}^n, \sum_{j=1}^n)$ -измеримом инъективном преобразовании (2.2.8).

Если $\check{F}(M_1, \tau_1)$ и $\check{F}(M_2, \tau_2)$ — риссовские пространства ограниченных функций с единицей, то отображение $\xi: (M_1, \tau_1) \rightarrow (M_2, \tau_2)$ называется допустимым относительно этих пространств, если при $f \in \check{F}(M_2, \tau_2)$ всегда $f \circ \xi \in \check{F}(M_1, \tau_1)$. Если P есть функционал на $\check{F}(M_1, \tau_1)$ и отображение ξ допустимо относительно пространств $\check{F}(M_1, \tau_1)$ и $\check{F}(M_2, \tau_2)$, то через $\text{marg}_{\xi} P$ обозначим функционал на $\check{F}(M_2, \tau_2)$, заданный правилом $\text{marg}_{\xi} P f = P f \circ \xi$, где $f \in \check{F}(M_2, \tau_2)$. Если $\xi: (M, \tau)^n \rightarrow (M, \tau)^m$, где $\xi \langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle a_{i_1}, \dots, a_{i_m} \rangle$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$), то marg_{ξ} обозначим еще через $\text{marg}_{i_1, \dots, i_m}$. Оператор marg_{ξ} линеен и непрерывен и обладает следующими свойствами: $\text{marg}_{\xi} P_x = P_{\xi x}$, где x есть борелевский СВ (2.3.4); $\text{marg}_{\xi} P_{x_1, \dots, x_n} = P_{g_1 x_{i_1}, \dots, g_m x_{i_m}}$, где $\xi: (M, \tau)^n \rightarrow (M, \tau)^m$, $\xi \langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle g_1 a_{i_1}, \dots, g_m a_{i_m} \rangle$ и $g_i \in C(M, \tau)$ (2.3.3); $\xi s(P) \subset s(\text{marg}_{\xi} P) \subset \overline{\xi(M_1^n)}$, где P есть бэрзовская n -мера на (M_1, τ_1) , а отображение $\xi: (M_1, \tau_1)^n \rightarrow (M_2, \tau_2)^m$ непрерывно и допустимо относительно $C^+(M_1^n, \tau_1^n)$ и $C^+(M_2^m, \tau_2^m)$ (2.3.7) и др.

Произведение $P_1 \otimes \dots \otimes P_n$ бэрзовских I -мер P_i определим сначала для того случая, где P_i есть бэрзовская I -мера на $\mathbb{R}^{K_i}$ ($i=1, \dots, n$), продолжая соответствующий естественно определенный функционал с пространства линейных комбинаций тензорных произведений ступенчатых функций на пространство $C(\mathbb{R}^{K_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{K_n})$. В лемме 2.4.I показано, что результатом такого продолжения будет функционал, значение которого от функции можно вычислить "последовательным интегрированием" этой функции (аналог теоремы Фубини).

Для общего определения произведения бэрзовских I -мер поступаем следующим образом. Пусть P — бэрзовская n -мера на (M, τ) . Для любой функции f класса $C^+(M^n, \tau^n)$ имеем, согласно формуле (I), представление $f = h \xi$, изображенное диаграммой

$$(2) \quad \left. \begin{array}{l} (M, \tau) \begin{cases} g_{i1} \rightarrow R \\ g_{i k_1} \rightarrow R \\ \dots \end{cases} \\ \dots \dots \dots \\ (M, \tau) \begin{cases} g_{n1} \rightarrow R \\ \dots \\ g_{n k_n} \rightarrow R \end{cases} \end{array} \right\} - h \rightarrow R,$$

где $\xi = \langle g_{i1}, \dots, g_{i k_1}, \dots, g_{n k_n} \rangle$, $g_{ij} \in C(M, \tau)$ и $k = k_1 + \dots + k_n$. Так как любое такое отображение ξ допустимо относительно пространств $C^+(M^n, \tau^n)$ и $C(R^k)$, то каждая бэровская n -мера P на (M, τ) порождает семейство $\{ \langle \xi, \text{marg}_{\xi} P \rangle \mid \xi \in \Xi_n \}$, где через Ξ_n обозначен класс отображений ξ вышеописанного вида (n - фиксирован, k_i - переменные параметры). В лемме 2.3.8 доказано обратное: если дано некоторое семейство $\{ \langle \xi, P_{\xi} \rangle \mid \xi \in \Xi_n \}$, где P_{ξ} есть бэровская 1-мера на области R^k значений функции ξ , то условия (3) и (4) равносильны:

(3) существует (очевидно - только одна) бэровская n -мера P на (M, τ) , такая что $\forall \xi \in \Xi_n (\text{marg}_{\xi} P = P_{\xi})$,

(4) семейство $\{ \langle \xi, P_{\xi} \rangle \mid \xi \in \Xi_n \}$ удовлетворяет условиям $S(P_{\xi}) \subset \overline{\xi(M^n)}$ и : если $f: \uparrow f$ в $C^+(M^n, \tau^n)$, $f_i = h_i \xi_i$, $f = h \xi$ (ξ_i , $\xi \in \Xi_n$), то $P_{\xi_i} h_i \uparrow P_{\xi} h$.

Далее, в лемме 2.4.3 доказано, что если $P_1, \dots, P_n$ - бэровские 1-меры на (M, τ) , то семейство

$$(5) \quad \{ \langle \xi, \text{marg}_{\xi_1} P_1 \otimes \dots \otimes \text{marg}_{\xi_n} P_n \rangle \mid \xi \in \Xi_n \},$$

где $\xi_i = \langle g_{i1}, \dots, g_{i k_i} \rangle$ (см. (2)) и произведение $\text{marg}_{\xi_1} P_1 \otimes \dots \otimes \text{marg}_{\xi_n} P_n$ бэровских 1-мер на пространствах $R^{k_1}, \dots, R^{k_n}$ определено выше, удовлетворяет условию (4). Теперь определим произведение бэровских 1-мер $P_1, \dots, P_n$ как бэровскую n -меру на (M, τ) , заданную в силу леммы 2.3.8 семейством (5) однозначно. Произведение бэровских 1-мер зависит слабо непрерывно от совокупности сомножителей (2.4.4). Для него выполняется и аналог теоремы Фубини (2.4.6).

Через $P^{\otimes}$ обозначим рандомизацию бэровской n -меры P , т.е. бэровскую n -меру $\text{marg}_1 P \otimes \dots \otimes \text{marg}_n P$. Операция образования рандомизации слабо непрерывна (2.4.5). Бэровские $S_{\Sigma} x_1, \dots, x_n$ называются независимыми, если $P_{x_1, \dots, x_n} = P_{x_1, \dots, x_n}^{\otimes}$.

В конце параграфа определены для последующих приложе-

ний ряд специальных множеств бэровских n -мер и указаны их важнейшие свойства. Отметим некоторые из них. Если отображения $g_i: M \rightarrow M$ ($i=1, \dots, n$) биективны и $g = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$, то множество $\{ \langle g, a, \dots, g_n a \rangle | a \in M \}$ называется g -диагональю $D_n(g)$ в M^n . Бэровская n -мера P называется g -диагональной ($P \in \Delta_n(g)$), если $\forall f \in C^+(M^n, \mathcal{T}^n)$ ($f D_n(g) = \{0\} \Rightarrow P f = 0$). Если $(M, \mathcal{T})$ - сепарабельно и метризуемо, то $P \in \Delta_n(g) \Leftrightarrow s(P) \subset D_n(g)$ (2.5.4). Если $P \in \Delta_n(g)$, то $\text{rang}_g P$ задает P однозначно (2.5.5) и $P(f \otimes \dots \otimes f) = \text{rang}_g P f^n$ (2.5.6). Если $P_{x_1, \dots, x_n} \in \Delta_n(g)$, то бэровские СЭ $g_i^1 x_i$ и $g_j^1 x_j$ эквивалентны ($i, j = 1, \dots, n$) (2.5.7). Если $P \in \Delta_n(g)$ и $P = P^{\otimes}$, то P есть двузначная n -мера (2.5.9).

§ 3 (22 страницы) посвящен расширению понятия сходимости по мере (= по вероятности, = $\mathcal{P}$ -сходимости) с пространства СЭ на сепарабельном метрическом пространстве на пространства произвольных борелевских и бэровских СЭ, СК и СВ. Называем борелевски (бэровски) правильной оградой в $(M, \mathcal{T})$ любое семейство $\{S_a | a \in M\}$, если $a \in S_a \subset M$ и множество $\{\omega | \gamma_\omega \in S_{x_\omega}, \omega \in \Omega\}$ входит в σ -алгебру Σ событий при любом выборе вероятностного пространства $(\Omega, \Sigma, \mathcal{P})$ и борелевских (бэровских) СЭ x и y . Ограду $\{S_a | a \in M\}$ называем открытой, если $S_a \in \mathcal{T}$ при $a \in M$. Борелевски и бэровски правильной открытой оградой является, например, ограда

$$(6) \quad S f^\varepsilon = \{S_a^{f^\varepsilon} | S_a^{f^\varepsilon} = \{b | |f a - f b| < \varepsilon\}, a \in M\},$$

где $f \in C(M, \mathcal{T})$ и $\varepsilon > 0$, а если $(M, \mathcal{T})$ - сепарабельно и метризуемо, то и ограда

$$(7) \quad S^\varepsilon = \{S_a^\varepsilon | S_a^\varepsilon = \{b | d(a, b) < \varepsilon\}, a \in M\},$$

где d есть метрика на $(M, \mathcal{T})$ и $\varepsilon > 0$.

Подмножество $\{S | S = \{S_a | a \in M\}, S \in \mathcal{N}\}$ некоторого множества борелевски (бэровски) правильных оград называется базой этого множества оград, если при любой последовательности $\{x_n | n=0, 1, \dots\}$ СЭ, ограды S из этого множества оград и $\varepsilon > 0$ существует такой $S \in \mathcal{N}$, что $\mathcal{P} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x_n \in S^c \cup S_{x_n}^c\} > 1 - \varepsilon$, где c означает дополнение множества. В сепарабельном метрическом пространстве базой множества всех борелевски правильных открытых оград является семейство $\{S^\varepsilon | \varepsilon = 1^{-1}, 2^{-1}, \dots\}$ (3.1.2).

Будем говорить, что ограда S в (M, τ) есть счетного (конечного) типа, если для некоторого счетного (конечного) разложения пространства M на непересекающиеся множества E_i выполняется равенство $\bigcup_{a \in M} (\{a\} \times S_a) = \bigcup (E_i \times S_{a_i})$. В лемме 3.1.3 построена счетная база из оград счетного типа для множества всех борелевски правильных открытых оград. Для компактных пространств аналогичная база построена из оград конечного типа (3.1.4).

Будем говорить, что последовательность $\{x_n | n = 0, 1, \dots\}$ борелевских (бэровских) СЭ $\tau^{\mathcal{P}}$ -сходится к борелевскому (бэровскому) СЭ x_0 и писать $x_n \xrightarrow{\tau^{\mathcal{P}}} x_0$, если для любой борелевски правильной открытой ограды S (для любой ограды S вида (6)) при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$(8) \quad \mathcal{P}\{x_n \in S_{x_0}\} \rightarrow 1.$$

$\tau^{\mathcal{P}}$ -сходимость последовательности (борелевских или бэровских) СК на (M, τ) определим как $\tau^{\mathcal{P}}$ -сходимость соответствующих СЭ на $(M, \tau)^n$, а последовательность бэровских СВ объявим $\tau^{\mathcal{P}}$ -сходящейся тогда, когда $\tau^{\mathcal{P}}$ -сходятся последовательности их соответствующих компонентов. Пределы $\tau^{\mathcal{P}}$ -сходящейся последовательности (борелевских или бэровских) СЭ всегда эквивалентны (3.2.4 и 3.3.2).

В борелевском случае показано (3.2.1), что $x_n \xrightarrow{\tau^{\mathcal{P}}} x_0$ тогда и только тогда, когда условие (8) выполнено для всех оград S из некоторой базы множества всех борелевски правильных открытых оград. Применяя эту лемму к базе, построенной в лемме 3.1.3, докажем (3.2.2), что условие $x_n \xrightarrow{\tau^{\mathcal{P}}} x_0$ равносильно в борелевском случае условиям $\forall \sigma \in \tau (\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}\{x_n \in \sigma\} \Rightarrow \Rightarrow x_n \in \sigma) = 1$ и $\forall \sigma \in \{\sigma_i | i = 0, 1, \dots\} (\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}\{x_n \in \sigma\} \Rightarrow x_n \in \sigma) = 1$, где $\{\sigma_i | i = 0, 1, \dots\}$ есть счетная база топологии τ .

В бэровском случае условие $\tau^{\mathcal{P}}$ -сходимости последовательности $\{x_k | k = 0, 1, \dots\}$ СК к СК x_0 равносильно условию $\forall f \in C(M^n, \tau^n) (fx_k \xrightarrow{\mathcal{P}} fx_0)$, а условие $\tau^{\mathcal{P}}$ -сходимости последовательности СВ к СВ x_0 равносильно условию $\forall f \in C^+(M^n, \tau^n) (fx_k \xrightarrow{\mathcal{P}} fx_0)$ (3.3.1).

В сепарабельном метрическом пространстве сходимость по вероятности и $\tau^{\mathcal{P}}$ -сходимость последовательности борелевских

СЭ совпадают (3.2.3). Этот важный результат покажет, что понятие $\mathcal{T}\mathcal{B}$ -сходимости борелевских СЭ расширяет область применимости понятия сходимости по вероятности.

Множества $\{y \mid \exists \{y \in S_x\} \forall \varepsilon, y - \text{борелевский СЭ}\}$, где S - борелевски правильная открытая ограда конечного типа, x - борелевский СЭ и $\varepsilon > 0$, образуют базу $\mathcal{T}\mathcal{B}$ -топологии на множестве всех борелевских СЭ (3.2.5). Последовательность борелевских СЭ сходится в $\mathcal{T}\mathcal{B}$ -топологии точно тогда, когда она $\mathcal{T}\mathcal{B}$ -сходится (3.2.6), а метризуема $\mathcal{T}\mathcal{B}$ -топология точно тогда, когда пространство (M, τ) метризуемо (3.2.7). Для бэровского случая тоже введена $\mathcal{T}\mathcal{B}$ -топология. Она связана со слабой топологией соотношением $x_i \xrightarrow{\mathcal{T}\mathcal{B}} x_o \iff P_{x_i, x_o, y_1, \dots, y_n} \xrightarrow{w} P_{x_o, x_o, y_1, \dots, y_n} \implies \implies P_{x_i, y_1, \dots, y_n} \xrightarrow{w} P_{x_o, y_1, \dots, y_n}$ (3.3.6).

§ 4 (20 страниц) посвящен определению корреляционных функционалов. Здесь все понятия или одновременно борелевские, или же все они - бэровские.

Множество $\mathcal{X}$ СЭ на (M, τ) называем областью определения корреляционного функционала (ОКФ), если оно удовлетворяет следующим условиям (9) - (II):

- (9) $\mathcal{X}$ содержит только невырожденные СЭ;
- (IO) если $x, y \in \mathcal{X}$ и $0 \leq t \leq 1$, то в $\mathcal{X}$ найдется элемент z с распределением $P_x = tP_x + (1-t)P_y$;
- (II) если P есть 2-мера на (M, τ) и $\text{marg}_1 P$ и $\text{marg}_2 P$ суть распределения элементов $\mathcal{X}$, то P есть распределение некоторой пары $\langle u, v \rangle$ элементов $\mathcal{X}$.

В теореме 4.1, опирающейся на некоторые вспомогательные леммы, доказано, что любое выпуклое множество A_1 недвухзначных 1-мер на (M, τ) определяет ОКФ, имеющую A_1 в качестве множества распределений своих элементов. В частности, множество всех невырожденных случайных величин, имеющих конечный второй момент, является ОКФ (4.1.2 и 4.1.3).

Наше основное определение следующее. Пусть $\mathcal{X}$ есть ОКФ и G - такая группа биективных гомеоморфизмов $g: (M, \tau) \rightarrow (M, \tau)$, что $\forall g \in G \forall x (x \in \mathcal{X} \iff g(x) \in \mathcal{X})$. Отображение $k: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ называем корреляционным функционалом (КФ) с характерной группой G на ОКФ $\mathcal{X}$, если оно удовлетворяет аксиомам

КФ1 - КФ8:

$$\text{КФ1 } \kappa(x, y) = 1 \iff \exists g \in G(x \sim g y);$$

$$\text{КФ2 } P_{x, y} = P_{u, v} \implies \kappa(x, y) = \kappa(u, v)^{1)};$$

$$\text{КФ3 } \kappa(x, y) = \kappa(y, x);$$

$$\text{КФ4 } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in Z (\kappa(x, z) > 1 - \delta \implies |\kappa(x, y) - \kappa(z, y)| < \varepsilon);$$

$$\text{КФ5 } P_{x, y} = P_{x, y}^{\otimes} \implies \kappa(x, y) = 0;$$

$$\text{КФ6 } \kappa(x_n, x_0) \rightarrow 1 \implies \exists \{g_n | n = 1, 2, \dots\} \in G(g_n x_n \xrightarrow{\beta} x_0);$$

$$\text{КФ7 } \forall t \in [0, 1] (P_{x, z} = P_{x, z}^{\otimes} \implies \kappa(P_{x, y}, t P_{x, y} + (1-t) P_{x, z}))^{2)};$$

$$\text{КФ8 } P_{x, z} = P_{x, z}^{\otimes} \implies \lim_{t \rightarrow 1} \kappa(t P_{x, y} + (1-t) P_{x, z}) = \kappa(P_{x, y})^{2)}.$$

где $x, x_n, y, z, u, v \in Z$.

Принципы выбора аксиом КФ подробно обсуждены в диссертации (стр. 93 - 95). Здесь отметим лишь, что они являются плодом не коротких исканий.

Каждый КФ κ определяет на своей области определения Z некоторую топологию, которая называется κ -топологией и может быть определено базой, состоящей из множеств $\{x | \kappa(x, y) > 1 - \varepsilon\}$, где $y \in Z$ и $\varepsilon \in (0, 1]$ (4.2.1). Фактормножество $Z/\mathcal{G}$ по отношению $x \sim y \iff \exists g \in G(x \sim g y)$ с фактортопологией, порожденной κ -топологией, является вполне регулярным T_1 -пространством с первой аксиомой счетности (4.2.2). Доказательство леммы 4.2.2 использует только аксиомы КФ1, КФ3 и КФ4, и если не учитывать остальных аксиом, то можно показать (4.2.3), что κ -топология не обязательно метризуема.

Приведены 3 примера на КФ. Первые два из них покажут, в какой степени удовлетворяет нашу аксиоматику один из прототипов КФ - обычный линейный коэффициент корреляции. Пусть

1) КФ2 позволяет написать вместо $\kappa(x, y)$ $\kappa(P_{x, y})$.

2) Обозначение $\kappa(t P_{x, y} + (1-t) P_{x, z})$ в КФ7 и КФ8 понимается следующим образом. Условие (I0) гарантирует существование в Z такого СЭ u , что $P_u = t P_y + (1-t) P_z$, а в силу (II) в Z есть пара $\langle v, w \rangle$ с распределением $P_{v, w} = t P_{x, y} + (1-t) P_{x, z}$, так что на основе КФ2 $\kappa(v, w) = \kappa(t P_{x, y} + (1-t) P_{x, z})$, что и есть смысл обозначения $\kappa(t P_{x, y} + (1-t) P_{x, z})$.

$(M, \tau) = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_1$ есть множество всех случайных величин с конечным вторым моментом и G_1 есть группа всех линейных невырожденных преобразований $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда формула $r(x, y) = P_{x,y}(f_x \otimes f_y)$, где $x, y \in \mathcal{Z}_1$, $f_x = (I - P_1)(P_x(I - P_1)^2)^{-\frac{1}{2}}$ и I есть тождественное преобразование $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (аналогично определяется f_y), задает на $\mathcal{Z}_1$, по определению, обычный коэффициент линейной корреляции. Функционал r обладает всеми свойствами КФ, кроме тех, которые следуют из включения $r \in [0, 1]$. Определяя $r_1 = |r|$, мы получим уже КФ с характерной группой G_1 на $\mathcal{Z}_1$ (4.3.1). Пусть, далее, G_2 является группой всех невырожденных линейных преобразований $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ без отражения. Тогда формула $r_2 = \max\{0, r\}$ определяет КФ с характерной группой G_2 на $\mathcal{Z}_1$ (4.3.2).

В третьем примере $M = \{a_1, \dots, a_n\}$. Определим $P(a_i, \dots, a_i, a_k) = P\langle a_i, \dots, a_i, a_k \rangle$ и $\rho(P_1, P_2) = \sqrt{\sum_j (P_1(a_i, a_j) - P_2(a_i, a_j))^2}$. Тогда функционал $r_3(x, y) = \rho(P_{x,y}, P_{x,y}^{\otimes}) / (\rho(\Delta_2, P_{x,y}) + \rho(P_{x,y}, P_{x,y}^{\otimes}))$ есть КФ с тривиальной характерной группой на множестве U всех невырожденных СЭ на M (4.3.3).

Для классификации КФ приняты следующие определения. Пусть k и k' — КФ соответственно с характерными группами G и G' на ООКФ $\mathcal{Z}$. Называем k и k' топологически эквивалентными, если для любой последовательности $\{x_n | n = 0, 1, \dots\} \subset \mathcal{Z}$, где $x_n \xrightarrow{\tau} x_0$, сходимость $k(x_n, x_0) \rightarrow 1$ равносильна сходимости $k'(x_n, x_0) \rightarrow 1$. Называем k и k' алгебраически эквивалентными, если $G = G'$ и эквивалентными, если они эквивалентны топологически и алгебраически. Будем называть k широким, если при $\{x_n | n = 0, 1, \dots\} \subset \mathcal{Z}$ и $x_n \xrightarrow{\tau} x_0$ имеет место сходимость $k(x_n, x_0) \rightarrow 1$, чувствительным, если при независимости x и y $k(x, y) > 0$, несуженным, если k определен на множестве $U(M, \tau)$ всех невырожденных СЭ. КФ r_1 и r_2 (см. выше) топологически эквивалентны но не эквивалентны. Они не являются ни чувствительными, ни несуженными, ни широкими (4.4.1). Широким чувствительным и несуженным является КФ r_3 (4.4.2).

Последние два параграфа посвящены дальнейшему исследованию класса КФ с указанных позиций классификации. В § 5 (16 страниц) дано описание до эквивалентности класса КФ в

случае, где M — конечное. В теореме 5.1 показано, что для любой группы G преобразований $M \rightarrow M$ существует чувствительный широкий несуженный КФ с характерной группой G . Доказательство теоремы разделено на следующие этапы. В лемме 4.3.3 была указана конструкция широкого чувствительного КФ с тривиальной характерной группой. В лемме 5.1.1 показано, что для любого такого КФ к формула $k'(x, y) = n^{-1} \sum_{g \in G} k(gx, gy)$, где G — произвольная группа преобразований $M \rightarrow M$, определяет эквивалентный с k КФ k' , причем $k'(x, y) = k'(gx, gy)$ для всех $g \in G$. Но тогда (5.1.2) функционал $k''(x, y) = \max_{g \in G} \{k'(gx, y)\}$ является чувствительным несуженным КФ с характерной группой G и эквивалентной (5.1.3) с k' .

Теорема 5.2 данного параграфа устанавливает топологическую эквивалентность (и, следовательно, широкость) всех КФ для СЭ на конечном множестве (она является кульминационным пунктом всей главы). Нетривиальное доказательство теоремы использует существенно все аксиомы КФ и вытекает из ряда лемм. В силу леммы 3.3.6 (см. выше) и аксиомы КФ6 достаточно было доказать включение $P_{y_i, y} \xrightarrow{w} P_{y, y} \Rightarrow k(y_i, y) \rightarrow 1$. Сначала это включение установлено для последовательности 2-мер $P_{y_i, y}$ из множества $\{P_{y_i, y} + (1-t)P_x \otimes P_y \mid 0 \leq t \leq 1, P_x - \text{недвухзначная } I\text{-мера}\}$ (5.2.1). Затем (5.2.2 — 5.2.4) общий случай сводится к этому специальному.

Мы считаем теоремы 5.1 и 5.2 оправданием выбора наших аксиом для КФ. Действительно, все аксиомы КФ в некоторой степени естественны или даже необходимы (этот вопрос более подробно рассмотрен в диссертации). В свете теорем 5.1 и 5.2 полученная система аксиом и достаточно сильная, по меньшей мере в случае конечного M .

В § 6 пространство (M, τ) предполагается сепарабельным и метризуемым (ограниченной) метрикой d . Доказано (теорема 6.1), что функционал $k(x, y) = 1 - \min\{V(x, y), V^\otimes(x, y)\} / V^\otimes(x, y)$, где $V(x, y) = P_{x, y}d$ и $V^\otimes(x, y) = P_{x, y}^\otimes d$, есть широкий несуженный КФ с тривиальной характерной группой (таким образом, во всяком сепарабельном метризуемом пространстве существует

широкий КФ). Доказательство теоремы разделено на леммы.

Подведем основные итоги диссертационной работы: (а) выработан общий и удобный функциональный подход к некоторым основным понятиям теории вероятностей, (б) обобщено понятие $\mathcal{P}$ -сходимости, (в) развит подход к достаточно широкому классу показателей вероятностной зависимости, причем показатели этого класса могут найти (в силу специального характера их определения) разнообразные применения (практические и теоретические).

Результаты диссертации доложены на общих заседаниях кафедр вычислительной математики и математической статистики и программирования при Тартуском государственном университете и на семинаре в Институте кибернетики АН ЭССР. По материалам диссертации имеются следующие публикации:

Мелс Т.Э., Обобщение сходимости по вероятности: $\mathcal{P}$ -сходимость, Труды ВЦ ТГУ, вып. 25, Тарту, 1972.

— " — Определение общих корреляционных коэффициентов (там же).

— " — Существование широкого общего корреляционного коэффициента для случайных элементов на компактном множестве (там же).

— " — Описание класса общих корреляционных коэффициентов для случайных элементов на конечном множестве (там же, вып. 26).

— " — Широкий обобщенный коэффициент корреляции с тривиальной группой для сепарабельного локально компактного метрического пространства (там же, вып. 27, 1973).

ЛИТЕРАТУРА

/1/ Бурбаки Н., Интегрирование. Меры, интегрирование мер, 1967.

/2/ Варадарайн В.С., Меры на топологических пространствах, Матем. сб., 55(97:1), 1961.

/3/ Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, МИР, 1965.

/4/ Лозв М., Теория вероятностей, ИЛ, 1962.

/5/ Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, МИР, 1969.

/6/ Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А., Теория вероятностей, ФМ, 1967.

/7/ Renyi A., Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin, 1962.

Т.Э. Мелс

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ
НА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Кликкооли, 18

Сдано в печать 21/XI 1973 г. Бумага печатная № 2, 30x45.1/4.

Печл. листов 1,25. Тираж 200 экз.

МВ 09756. Зак. № 1163.

Ротапринт ТГУ. ЭССР, г. Тарту, ул. Пялсони, 14

Бесплатно

Бесплатно

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00545401 4