Leitfaden

zum Unterrichte in der

ebenen Trigonometrie

von

Dr. Carl Hechel.

Reval, 1879.
Verlag von Franz Kluge.

Leitfaden

zum Unterrichte in der

ebenen Trigonometrie

für den Gebrauch in Schulen bearbeitet

von

Dr. Carl Hechel.

Zweite Auflage.

Reval, 1879.

Verlag von Franz Kluge.

Von der Censur gestatttt. — Dorpat, den 21. März 1879.

Lehrbücher desselben Verfassers:

Compendium der Planimetrie nach Legendre. 3te Aufl. Reval F. Kluge 1873.

Compendium der Stereometrie nach Legendre. 3te Aufl. Reval F. Kluge 1877.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie nebst zahlreichen Uebungsaufgaben aus der Geometrie, Geodäsie, Physik und Astronomie, für den Schulgebrauch und Selbstunterricht. Leipzig, Fr. Volckmar. 1861

Auflösungeu der Aufgaben in dem Lehrbuche der ebenen Trigonometrie. Vierte Auflage. 1866.

Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie mit zahlreichen Anwendungen auf reine und practische Geometrie, mathematische Geographie, Geodäsie und Astronomie. Für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterrichte. 2te Aufl. Reval, F. Kluge. 1879.

Ebene analytische Geometrie (mit Einschluß der Kegelschnitte) nebst zahlreichen Uebungsaufgaben für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. 3te Aufl. Reval, F. Kluge. 1879.

Stereometrische Aufgaben (1200 Nummern) nebst ihren Auflösungen für den Gebrauch in höheren Lehranstalten. 2 Hefte. F. Kluge. Reval. 1866.

Lehrbuch der Arithmetik, nach wissenschaftlichen Grundsätzen für den Schulgebrauch und Selbstunterricht bearbeitet. Riga. Häcker. 1870.

Arithmetische Aufgaben für Gymnasien, Realschulen und ähnliche Lehranstalten. Reval. F. Kluge. 1871.

Auflösungen der arithmetischen Aufgaben.

Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra für Gymnasien und Realschulen sowie zum Selbstunterricht. F. Kluge. Reval. 1869.

Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra für den Gebrauch in Gymnasien und Realschulen. Reval. 1873.

Auflösungen der Aufgaben aus der Buchstabenrechnnng und Algebra. Reval. F. Kluge. 1874.

Leitfadeu für den Unterricht in der Buchstabenrechnung und Algebra im Anschluß an die Sammlung alg. Aufgaben. F. Kluge. 1874.

Die Lehrbücher der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie sind auch in russischen Uebersetzungen von W. Schichow erschienen. Riga Schnackenburg. 1870.

Vorwort.

Der Verfasser des Lehrbuchs der ebenen Trigonometrie (Dorpat 1861) hat sich durch mehrfache an ihn ergangene Aufforderungen dazu veranlaßt gesehen, eine Bearbeitung dieses Theils der Mathematik in wesentlich verkürzter und zum Theil neuer Gestalt zu veröffentlichen, obschon jenes Lehrbuch sich einer günstigen Aufnahme zu erfreuen hat, indem es nicht blos in den meisten unserer höheren Lehranstalten eingeführt, sondern auch in Deutschland vielfach verbreitet ist. Der vorliegende Leitfaden, welcher mit Uebergehung aller, dem gewöhn- Gymnasialcursus nicht angehörigen Partieen nur dasjenige enthält, was von den oberen Klassen unserer Gymnasien und Realschulen in der ebenen Trigonometrie beansprucht wird, soll in der Hand des Schülers zur Vorbereitung auf die Lehrstunden und zur Wiederholung des Vorgetragenen, zugleich aber auch dem Selbstlernenden als ein bequemes Hilfsmittel bei dem Studium der Trigonometrie dienen. Für das System und die Behandlung des Stoffes im Einzelnen sind dieselben wissenschaftlichen und methodischen Grundsätze maßgebend gewesen wie in dem Lehrbuche, daher in dieser Beziehung nur auf die Vorrede des letztern zu verweisen ist. Ein näheres Anschließen an jenes Werk erschien nöthig, einerseits um bei dem Unterrichte den etwa gewünschten Uebergang von dem einen Buche auf das andere zu erleichtern, andererseits aber auch, weil nach den bisherigen, an dem Lehrbuche gemachten Erfahrungen und nach allen Recensionen über dasselbe zu urtheilen, größere Aenderungen der Darstellung eben keine Verbesserungen gewesen wären. Indessen sind nicht wenige Sätze und Entwickelungen vereinfacht und nur solche Beispiele, welche zur Anwendung und Einübung der leichtern, hier zu einem vollständigen System verbundenen Sätze dienen, aufgenommen worden, um dem Ganzen einen mehr elementaren Charakter im Gegensatze zu dem Lehrbuche zu verleihen, das für umfassendere Studien bestimmt ist. Die vorliegende zweite Auflage hat einige Berichtigungen in den trigonometrischen Berechnungen und ihren Auflösungen erfahren.

Dorpat, im Juni 1879.

Inhalt.

Einleitung.

§ 1. Wenn so viele Stücke eines ebenen Dreiecks, als zu dessen Bestimmung hinreichen, gegeben sind, so lassen sich die gesuchten Stücke desselben nach zwei verschiedenen Methoden finden, entweder durch Construction oder durch Rechnung. Sind nämlich die Bestimmungsstücke des Dreiecks in einer Zeichnung vorgelegt, also unmittelbar als Raumgrößen gegeben, so kann das Dreieck construirt, d. h. jedes der gesuchten Stücke und das Dreieck selbst in einer Zeichnung dargestellt werden. Dieses Verfahren lehrt die Geometrie. Wenn aber die Seiten und Winkel, welche das Dreieck bestimmen, nicht in einer Zeichnung gegeben, sondern die ersteren durch ihre, auf eine bestimmte Längeneinheit bezogenen Maßzahlen und die letzteren durch Grade, Minuten und Secunden ausgedrückt sind, so können die gesuchten Stücke berechnet, also ebenfalls in Zahlen angegeben werden.

Die Wissenschaft, welche aus den in Zahlen gegebenen Bestimmungsstücken eines ebenen Dreiecks die übrigen Stücke desselben durch Rechnung finden lehrt, wird die ebene Trigonometrie genannt.

Da unter den gegebenen und gesuchten Stücken eines Dreiecks sowol Seiten als Winkel vorkommen, diese aber als ungleichartige Größen, welchen verschiedene Maßeinheiten zu Grunde liegen, keine unmittelbare Berechnung der einen aus den anderen gestatten, so hat man in die Trigonometrie statt der Winkel Verhältnisse gewisser Linien zu einander eingeführt, welche in einer solchen Abhängigkeit von den Winkeln stehen, daß ein bestimmter Winkel auch ein bestimmtes Verhältniß jener Linien bedingt, also die Größe des einen sich unmittelbar aus der Größe des andern folgern läßt.

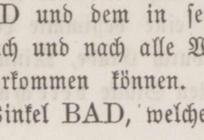
Diese Hilfsgrößen, welche die Ausmessung der Winkel durch gerade Linien möglich machen und überall in der Rechnung an die Stelle der Winkel gesetzt werden, heißen **trigonometrische** oder **goniometrische Functionen**.

Ein besonderer Abschnitt, welcher sich mit der Erklärung der trigonometrischen Functionen, mit der Entwickelung ihres Zusammenhanges unter einander und mit der Berechnung ihrer Zahlenwerthe beschäftigt, geht unter dem Namen der **Goniometrie** der eigentlichen Trigonometrie voran, unter welcher im engern Sinne blos die Berechnung oder Auflösung der Dreiecke verstanden wird.

I. Erklärung der trigonometrischen Functionen.

§ 2. Wenn man mit einem beliebigen Radius AD einen Halbkreis beschreibt und sich vorstellt, daß der Radius von seiner ursprünglichen Lage AD ausgehend denselben vollständig durchläuft, wie dieses bei der Beschreibung des Halbkreises wirklich der Fall ist, so werden an dem Mittelpunkte A von dem Radius in seiner anfänglichen Lage AD und dem in seiner jedesmaligen neuen Lage befindlichen Radius nach und nach alle Winkel gebildet, welche überhaupt in einem Dreiecke vorkommen können. Betrachten wir zuerst einen beliebigen **spitzen** Winkel BAD, welchen wir kurz durch A bezeichnen wollen.

Fället man von B auf AD die Senkrechte BC und bezeichnet die Maßzahlen der Seiten des dadurch erzeugten Dreiecks durch a, b, c, so wird das Verhältniß $\frac{a}{c}$ der Sinus des Winkels A genannt und geschrieben



$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

Das Verhältniß $\frac{b}{c}$ nennt man den Cosinus des Winkels A und bezeichnet es durch

$$\cos A = \frac{b}{c}.$$

Ferner nennt man das Verhältniß $\frac{\sin A}{\cos A}$, also den Quotienten $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$, die Tangente des Winkels A und bezeichnet dasselbe durch

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{b}.$$

Endlich wird das Verhältniß $\frac{\cos A}{\sin A}$, also der Quotient $\frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{a}$ die Cotangente des Winkels A genannt und bezeichnet

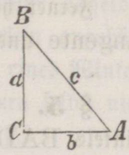
$$\operatorname{cotg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b}{a}.$$

Diese vier Verhältnisse, welche als Quotienten aus den Maßzahlen zweier Linien unbenannte Zahlen sind, heißen die trigonometrischen Functionen des Winkels A oder des ihm zugehörigen Bogens BD, welcher mit dem Winkel dieselbe Anzahl Grade enthält.

In dem besondern Falle, wenn der Radius $c = 1$ ist, fällt der Zahlenwerth a der Senkrechten BC oder der Sinuslinie mit dem Werthe von $\sin A$ zusammen, nämlich $a = \sin A$, und ebenso ist dann die Cosinuslinie $b = \cos A$.

§ **3.** Aus der Erklärung der trigon. Functionen ergiebt sich für das rechtwinklige Dreieck unmittelbar Folgendes:

1) Der Sinus eines spitzen Winkels ist die gegenüberliegende Kathete, dividirt durch die Hypotenuse.



$$\sin A = \frac{a}{c} \text{ und } \sin B = \frac{b}{c}.$$

2) Der Cosinus eines spitzen Winkels ist die anliegende Kathete, dividirt durch die Hypotenuse.

$$\cos A = \frac{b}{c} \text{ und } \cos B = \frac{a}{c}.$$

3) Die Tangente eines spitzen Winkels ist die gegenüberliegende Kathete, dividirt durch die anliegende.

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} \text{ und } \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}.$$

4) Die Cotangente eines spitzen Winkels ist die anliegende Kathete, dividirt durch die gegenüberliegende.

$$\operatorname{cotg} A = \frac{b}{a} \text{ und } \operatorname{cotg} B = \frac{a}{b}.$$

§ **4.** Da im rechtwinkligen Dreieck jeder der beiden spitzen Winkel A und B das Complement des andern ist, d. h. jeder von ihnen den andern zu 90^0 ergänzt, so kann man $B = 90^0 - A$ setzen. Nun ist (§ 3)

$$\sin A = \frac{a}{c} \text{ und } \cos B = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c} \text{ und } \sin B = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} \text{ und } \operatorname{cotg} B = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{cotg} A = \frac{b}{a} \text{ und } \operatorname{tg} B = \frac{b}{a},$$

folglich

$$\mathbf{\sin A = \cos (90^0 - A)}$$
$$\mathbf{\cos A = \sin (90^0 - A)}$$
$$\mathbf{\operatorname{tang} A = \operatorname{cotg} (90^0 - A)}$$
$$\mathbf{\operatorname{cotg} A = \operatorname{tang} (90^0 - A)}$$

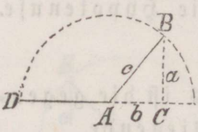
Es ist also der Sinus, der Cosinus, die Tangente, die Cotangente eines spitzen Winkels entsprechend der Cosinus, der Sinus, die Cotangente, die Tangente von dessen Complement.

Hieraus erklären sich die Benennungen Cosinus und Cotangente, nämlich complementi sinus und complementi tangens.

Der Sinus und die Tangente werden Hauptfunctionen, dagegen Cosinus und Cotangente die Nebenfunctionen oder Cofunctionen genannt.

Ferner heißen Sinus und Cosinus unter einander, und ebenso Tangente und Cotangente sinnverwandte Functionen.

§ **5.** Wir betrachten jetzt die Functionen eines stumpfen Winkels BAD = A.



Fället man hier ebenfalls von dem Endpunkte B des rotirenden Radius eine Senkrechte auf den Radius in seiner ursprünglichen Lage AD, so trifft die Senkrechte die rückwärts gehende Verlängerung desselben, so daß jetzt der Abschnitt AC die entgegengesetzte Lage von jener hat, wo der Winkel BAD spitz war. Um diesen Umstand zu bezeichnen, giebt man dem Zahlenwerthe b des Abschnittes AC das negative Vorzeichen. Nun ist ebenso wie bei einem spitzen Winkel

$$\sin A = \frac{a}{c}, \text{ dagegen } \cos A = \frac{-b}{c} = -\frac{b}{c}.$$

Für den spitzen Winkel BAC hat man dem Früheren zufolge

$$\sin BAC = \frac{a}{c}, \quad \cos BAC = \frac{b}{c}, \text{ also ist}$$
$$\sin A = \sin BAC, \quad \cos A = -\cos BAC.$$

Da die beiden Winkel BAD = A und BAC von einander Supplemente sind, d. h. jeder den andern zu 180° ergänzt, so kann man BAC = 180° — A setzen, folglich ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{\sin A} &= \mathbf{\sin (180^0 - A)}\\
\mathbf{\cos A} &= \mathbf{-\cos (180^0 - A)}\\
\mathbf{tang\, A} &= \mathbf{-tang\, (180^0 - A)}\\
\mathbf{cotg\, A} &= \mathbf{-cotg\, (180^0 - A)}
\end{aligned}$$

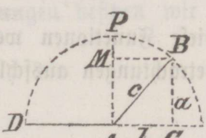
Die beiden letzten Gleichungen folgen unmittelbar aus den beiden ersten, indem die Tangente eines Winkels dem Quotienten aus dem Sinus durch den Cosinus jenes Winkels, die Cotangente aber dem umgekehrten Werthe dieses Quotienten gleich ist.

Die Functionen eines stumpfen Winkels sind also der absoluten Größe nach gleich den gleichnamigen Functionen von dessen (spitzem) Nebenwinkel, aber mit Ausnahme des Sinus sämmtlich negativ.

Während daher z. B. die Cosinusse zweier Nebenwinkel sich von einander durch ihre Vorzeichen unterscheiden, sind die Sinusse derselben einander vollkommen gleich. Da jeder Sinus zweien Winkeln angehört, die von einander Nebenwinkel sind, so ist die Bestimmung eines Winkels durch seinen Sinus zweideutig, insofern sich an dem letztern selbst nicht erkennen läßt, ob der spitze oder stumpfe Winkel gemeint ist.

§ 6. Die Functionen eines stumpfen Winkels können noch auf eine andere Art auf die Functionen eines spitzen Winkels zurückgeführt und durch dieselben ausgedrückt werden.

Zieht man in dem Halbkreise, in welchem der stumpfe Winkel BAD = A liegt, die Sinuslinie BC und den Radius AP senkrecht auf den Durchmesser, endlich aus B die Linie BM senkrecht auf AP, so ist in dem Rechteck ACBM die Linie AM = a und BM = b.



Da $\sin A = \frac{a}{c}$ und $\cos BAM = \frac{AM}{c} = \frac{a}{c}$,

$\cos A = -\frac{b}{c}$ und $\sin BAM = \frac{BM}{c} = \frac{b}{c}$,

so ist, wenn Winkel $BAM = A - 90^0$ gesetzt wird,

$$\mathbf{\sin A = \cos (A - 90^0)}$$
$$\mathbf{\cos A = - \sin (A - 90^0)}$$
$$\mathbf{tang\, A = - cotg\, (A - 90^0)}$$
$$\mathbf{cotg\, A = - tang\, (A - 90^0)}$$

Es ist also der Sinus eines stumpfen Winkels gleich dem Cosinus eines um 90^0 kleineren Winkels, der Cosinus eines stumpfeu Winkels gleich dem negativ genommenen Sinus eines um 90^0 kleineren Winkels u. s. w., oder allgemein:

Die Functionen eines stumpfen Winkels sind der absoluten Größe nach gleich den sinnverwandten Functionen eines um 90^0 kleineren (spitzen) Winkels, aber mit Ausnahme des Sinus sämmtlich negativ.

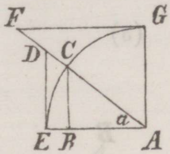
§ 7. Ganz allgemein läßt sich der Sinus und der Cosinus folgendermaßen erklären. Der Sinus eines Winkels oder Bogens ist die Senkrechte von dem Endpunkte des Bogens auf den Durchmesser durch den Anfangspunkt des Bogens, dividirt durch den Halbmesser; der Cosinus dagegen dasjenige Stück des durch den Anfangspunkt des Bogens gehenden Durchmessers, welches zwischen dem Mittelpunkte des Bogens und dem Fußpunkte jener Senkrechten liegt, dividirt durch den Halbmesser.

Unter den trigonometrischen Functionen werden zuweilen auch die Secante und Cosecante, d. h. die umgekehrten Werthe des Cosinus und des Sinus aufgeführt, nämlich

$$\sec a = \frac{1}{\cos a}, \quad \operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}.$$

Diese Functionen werden wir aber als ganz entbehrliche aus unseren Betrachtungen ausschließen.

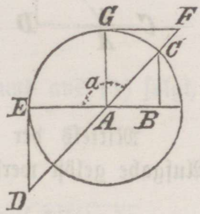
§ 8. Die trigonometrischen Functionen lassen sich geometrisch auf folgende Weise darstellen.



Beschreibt man aus dem Scheitel eines spitzen Winkels a mit einem als Einheit angenommenen Radius AE einen Viertelkreis, zieht an dessen Endpunkten E und G Tangenten bis zu den Durchschnittspunkten mit dem verlängerten Schenkel AC des Winkels a, und fället aus dem Endpunkte C des Radius die Senkrechte CB auf AE, so wird sin a durch die Linie CB und cos a durch die Linie AB dargestellt. Weil ferner

$$\text{tg a} = \frac{CB}{AB} = \frac{DE}{AE}, \quad \text{cotg a} = \frac{AB}{CB} = \frac{FG}{AG},$$

$AE = AG = 1$, so ist $\text{tg a} = DE$, $\text{cotg a} = FG$.



Wenn der Winkel CAE = a **stumpf** ist, so beschreibe man ebenfalls aus A mit der Einheit als Radius einen Kreis, errichte AG senkrecht auf AE, ziehe aus G und E Tangenten bis zu den Durchschnitten F und D mit der Verlängerung des Radius AC und fälle die Senkrechte CB. Alsdann ist wie vorhin sin a = CB, cos a = AB, tg a = DE, cotg a = FG. Daß die drei letzten Functionen negativ sind, zeigen die Linien selbst durch ihre der frühern Richtung beim spitzen Winkel entgegengesetzte Lage an.

II. Ableitung trigonometrischer Formeln.

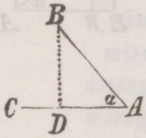
§ 9. Wenn eine der vier trigon. Functionen gegeben ist, so können die drei übrigen berechnet werden, sobald es drei von einander unabhängige Gleichungen giebt, welche den Zusammenhang zwischen den vier Functionen ausdrücken. Zwei solcher Gleichungen besitzen wir in den Ausdrücken (§ 2)

$$(1) \qquad \mathbf{tang\,a} = \frac{\mathbf{sin\,a}}{\mathbf{cos\,a}}$$

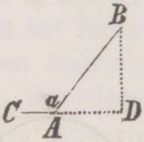
$$(2) \qquad \mathbf{cotg\,a} = \frac{\mathbf{cos\,a}}{\mathbf{sin\,a}}$$

Hierzu kommt jetzt die dritte Gleichung

(3) $$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$



Wenn man nämlich aus einem Punkte B des eines Schenkels eines beliebigen spitzen oder stumpfen Winkels $BAC = a$ auf den andern Schenkel oder dessen Verlängerung eine Senkrechte BD zieht, so ist $BD^2 + AD^2 = AB^2$. Dividirt man alle Glieder dieser Gleichung durch AB^2, so erhält man



$\frac{BD^2}{AB^2} + \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2}$, also $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

Es ist hier zu bemerken, daß obschon der Cosinus des stumpfen Winkels gleich $-\frac{AD}{AB}$ ist, das Quadrat desselben doch ebenso wie bei dem spitzen Winkel positiv wird.

Mittels der obigen drei Grundgleichungen kann die folgende Aufgabe gelöst werden.

§ 10. Wenn eine Function eines Winkels gegeben ist, durch dieselbe alle übrigen Functionen dieses Winkels auszudrücken.

I. Gegeben **sin a.**

Aus Gleichung (3) folgt

(4) $$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a}$$

Setzt man diesen Ausdruck für cos a in Gl. (1) und (2), so ist

(5) $$\text{tang}\, a = \frac{\sin a}{\sqrt{1 - \sin^2 a}}$$

(6) $$\text{cotg}\, a = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 a}}{\sin a}$$

II. Gegeben **cos a.**

Aus Gleichung (3) folgt

(7) $$\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a}$$

Dieser Ausdruck für sin a in Gl. (1) und (2) gesetzt giebt

(8) $$\mathbf{tg\,a} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a}}{\cos a}$$

(9) $$\mathbf{cotg\,a} = \frac{\cos a}{\sqrt{1 - \cos^2 a}}$$

III. Gegeben **tg a.**

Aus (1) folgt $\cos^2 a = \frac{\sin^2 a}{tg^2 a}$. Setzt man diesen Ausdruck für $\cos^2 a$ in Gleichung (3), so erhält man

$$\sin^2 a + \frac{\sin^2 a}{tg^2 a} = 1 \text{ oder } \sin^2 a\,(1 + tg^2 a) = tg^2 a, \text{ also}$$

(10) $$\mathbf{sin\,a} = \frac{tg\,a}{\sqrt{1 + tg^2 a}}$$

Da hieraus folgt, daß $\frac{\sin a}{tg\,a} = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 a}}$ und aus (1) folgt, daß $\cos a = \frac{\sin a}{tg\,a}$, so ist

(11) $$\mathbf{cos\,a} = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 a}} \text{ oder } \frac{1}{\cos a} = \sqrt{1 + tg^2 a}$$

Da $tg\,a \,.\, cotg\,a = \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\cos a}{\sin a} = 1$, so folgt

(12) $$\mathbf{cotg\,a} = \frac{1}{tg\,a}$$

IV. Gegeben **cotg a.**

Aus (12) folgt

(13) $$\mathbf{tg\,a} = \frac{1}{cotg\,a}$$

Dividirt man Gl. (3) durch $\sin^2 a$, so ist

$$1 + cotg^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}, \text{ folglich}$$

(14) $$\mathbf{sin\,a} = \frac{1}{\sqrt{1 + cotg^2 a}}$$

Die Multiplication beider Seiten dieser Gleichung mit cotg a giebt

$$\sin a \,.\, cotg\,a = \frac{cotg\,a}{\sqrt{1 + cotg^2 a}}$$

und weil aus (2) folgt, daß $\sin a \,.\, \mathrm{cotg}\, a = \cos a$, so ist

$$(15) \qquad \mathbf{\cos a = \frac{cotg\, a}{\sqrt{1 + cotg^2 a}}}.$$

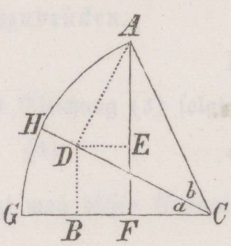
In Bezug auf das Vorzeichen der gefundenen Ausdrücke ist Folgendes zu bemerken:

In den Gl. (4), (5), (6), (11) ist entweder das positive oder das negative Zeichen zu nehmen, je nachdem der Winkel a spitz oder stumpf ist. In den Gl. (7) und (14) für den Sinus, welcher für alle Winkel bis 180^0 positiv ist, sind die Wurzelgrößen nur positiv zu nehmen.

Da in der Gl. (10) tg a sowol positiv als negativ sein kann, je nachdem der Winkel a spitz oder stumpf ist, der ganze Ausdruck aber für den Sinus in beiden Fällen positiv sein muß, so ist das Vorzeichen des Nenners so zu wählen, daß jederzeit sin a positiv wird.

In den Gl. (8), (9), (15) gilt nur das positive Vorzeichen der Wurzelgrößen, da tg a, cotg a, cos a immer gleichzeitig entweder positiv oder negativ sind.

§ **11.** Den Sinus und Cosinus der Summe oder Differenz zweier Winkel durch den Sinus und Cosinus der einzelnen Winkel auszudrücken.



Es seien die beiden neben einander abgetragenen Winkel a und b zusammen kleiner als 90^0. Beschreibt man mit einem beliebigen als Einheit angenommenen Radius aus dem gemeinsamen Scheitel C einen Bogen, zieht aus A die $AD \perp CH$ und $AF \perp CG$, ferner aus D die $DB \perp CG$ und $DE \perp AF$, so ist $\triangle AED \sim CBD$, also Winkel DAE $= BCD = a$. Nun ist

$$AF = DB + AE \quad \text{oder}$$
$$\sin(a+b) = CD \,.\, \sin a + AD \,.\, \cos a, \text{ d. h.}$$

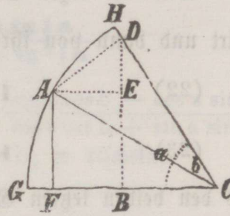
$$(16) \quad \mathbf{\sin(a+b) = \sin a \,.\, \cos b + \cos a \,.\, \sin b.}$$

Ferner ist

$$CF = CB - DE \quad \text{oder}$$
$$\cos(a+b) = CD \,.\, \cos a - AD \,.\, \sin a, \text{ d. h.}$$

$$(17) \quad \mathbf{\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \sin a \,.\, \sin b.}$$

Es sei der Winkel GCH = a kleiner als 90°, und ein Theil von ihm ACH = b, also ACG = a — b. Beschreibt man mit einem beliebigen, als Einheit angenommenen Radius aus C einen Bogen, zieht aus A die AF $\perp$ CG und AD $\perp$ CH, ferner DB $\perp$ CG und AE $\perp$ DB, so ist $\triangle$ ADE $\sim$ DCB, also Winkel ADE = DCB = a. Nun ist



$$AF = DB - DE \quad \text{oder}$$
$$\sin(a - b) = CD . \sin a - AD . \cos a, \text{ d. h.}$$

$$(18) \quad \mathbf{\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.}$$

Ferner ist
$$CF = CB + AE \quad \text{oder}$$
$$\cos(a - b) = CD . \cos a + AD . \sin a, \text{ d. h.}$$

$$(19) \quad \mathbf{\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.}$$

Die Formeln (16) bis (19) sind unter der Voraussetzung, daß $a + b < 90^0$ und $a < 90^0$ ist, gefunden, gelten aber auch für den Fall, wo a + b und a stumpfe Winkel sind. Denn ändert man die Figur in entsprechender Weise ab und wiederholt die Construction ganz ebenso wie vorhin, so ergeben sich dieselben Formeln als Endresultate. Die Allgemeingiltigkeit der Formeln läßt sich übrigens auch sehr leicht auf analytischem Wege durch Benutzung der Formeln in § 4 und § 5 nachweisen.

§ **12.** Wenn man in (16) setzt a = b, so ist

$$(20) \begin{cases} \mathbf{\sin 2a = 2 \sin a \cos a} & \text{oder} \\ \mathbf{\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}} \end{cases}$$

In der zweiten Form der Gl. stehen die Winkel a und $\frac{1}{2}$a in demselben Verhältnisse, wie in der ersten die Winkel 2a und a.

Wird in (17) a = b gesetzt, so ist

$$(21) \begin{cases} \mathbf{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a} & \text{oder} \\ \mathbf{\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}} \end{cases}$$

Wird die letzte Gl. zu der Gl. (3) $1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}$ erst addirt und dann von ihr abgezogen, so entstehen die beiden Gleichungen

(22) $$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

(23) $$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

Aus den beiden letzten Gl. ergeben sich die beiden Formeln:

(24) $$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} \quad \text{oder} \quad \cos a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$$

(25) $$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \quad \text{oder} \quad \sin a = \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$$

Die Addition und Subtraction der Gl. (16) und (18) giebt:

(26) $$\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cos b$$

(27) $$\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cos a \sin b$$

Die Addition und Subtraction der Gl. (17) und (19) giebt:

(28) $$\cos(a - b) + \cos(a + b) = 2 \cos a \cos b$$

(29) $$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \sin b$$

Setzt man in den vier letzten Gleichungen $a + b = A$ und $a - b = B$, also $a = \frac{1}{2}(A + B)$ und $b = \frac{1}{2}(A - B)$, so ist

(30) $$\sin A + \sin B = 2 \sin \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A - B)$$

(31) $$\sin A - \sin B = 2 \cos \tfrac{1}{2}(A + B) \sin \tfrac{1}{2}(A - B)$$

(32) $$\cos B + \cos A = 2 \cos \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A - B)$$

(33) $$\cos B - \cos A = 2 \cos \tfrac{1}{2}(A + B) \sin \tfrac{1}{2}(A - B)$$

§ 13.

Setzt man zufolge der Formeln (1), (16), (17)

$$\mathrm{tg}(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

und dividirt Zähler und Nenner durch $\cos a \cos b$, so erscheint

$$\mathrm{tg}(a + b) = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b}} \quad \text{d. h.}$$

(34) $$\mathrm{tg}(a + b) = \frac{\mathrm{tg}\, a + \mathrm{tg}\, b}{1 - \mathrm{tg}\, a \,.\, \mathrm{tg}\, b}$$

Setzt man hierin a = b, so ist

$$(35)\qquad \mathrm{tg}\,2a = \frac{2\,\mathrm{tg}\,a}{1-\mathrm{tg}^2 a} \text{ oder } \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}a}{1-\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}a}$$

Setzt man $\mathrm{tg}\,(a-b) = \frac{\sin\,(a-b)}{\cos\,(a-b)} = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos a \cos b + \sin a \sin b}$

und dividirt Zähler und Nenner durch $\cos a \cos b$, so erscheint

$$(36)\qquad \mathrm{tg}\,(a-b) = \frac{\mathrm{tg}\,a - \mathrm{tg}\,b}{1+\mathrm{tg}\,a\,.\,\mathrm{tg}\,b}$$

Ebenso findet man

$$(37)\qquad \mathrm{cotg}\,(a+b) = \frac{\mathrm{cotg}\,a\,\mathrm{cotg}\,b - 1}{\mathrm{cotg}\,a + \mathrm{cotg}\,b}$$

$$(38)\qquad \mathrm{cotg}\,2a = \frac{\mathrm{cotg}^2 a - 1}{2\,\mathrm{cotg}\,a}$$

$$(39)\qquad \mathrm{cotg}\,(a-b) = \frac{\mathrm{cotg}\,a\,\mathrm{cotg}\,b + 1}{\mathrm{cotg}\,b - \mathrm{cotg}\,a}$$

In § 16, 1 wird gezeigt werden, daß $\mathrm{tg}\,45^0 = \mathrm{cotg}\,45^0 = 1$ ist. Setzt man nun in den Gl. (34), (36), (37), (39) $a = 45^0$, so verwandeln sie sich in folgende:

$$(40)\qquad \mathrm{tg}\,(45^0 + b) = \frac{1+\mathrm{tg}\,b}{1-\mathrm{tg}\,b}$$

$$(41)\qquad \mathrm{tg}\,(45^0 - b) = \frac{1-\mathrm{tg}\,b}{1+\mathrm{tg}\,b}$$

$$(42)\qquad \mathrm{cotg}\,(45^0 + b) = \frac{\mathrm{cotg}\,b - 1}{\mathrm{cotg}\,b + 1}$$

$$(43)\qquad \mathrm{cotg}\,(45^0 - b) = \frac{\mathrm{cotg}\,b + 1}{\mathrm{cotg}\,b - 1}$$

Die Division der Gl. (16) und (18) durch $\cos a \cos b$ und durch $\sin a \sin b$ giebt die vier Formeln:

$$(44)\qquad \mathrm{tg}\,a + \mathrm{tg}\,b = \frac{\sin\,(a+b)}{\cos a \cos b}$$

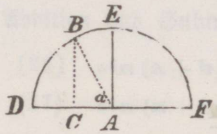
$$(45)\qquad \mathrm{tg}\,a - \mathrm{tg}\,b = \frac{\sin\,(a-b)}{\cos a \cos b}$$

$$(46)\qquad \mathrm{cotg}\,b + \mathrm{cotg}\,a = \frac{\sin\,(a+b)}{\sin a \sin b}$$

$$(47)\qquad \mathrm{cotg}\,b - \mathrm{cotg}\,a = \frac{\sin\,(a-b)}{\sin a \sin b}$$

III. Berechnung der trigonometrischen Functionen.

§ **14.** Bevor wir die Werthe der trigon. Functionen berechnen, haben wir über Wachsthum und Abnahme der Functionen bei Aenderung des Winkels und über die Gränzen der Werthe, welche dieselben annehmen können, eine Betrachtung anzustellen.



1) Man denke sich in dem mit der Einheit als Radius beschriebenen Halbkreise den einen Schenkel AD des Winkels a als unverrückbar fest liegend, während der andere Schenkel AB den ganzen Halbkreis durchläuft. Ist nun $a = 0$, so liegt B in D und dann ist die Senkrechte BC gleich 0, d. h. $\sin 0^0 = 0$. Mit der Zunahme des Winkels a wird BC immer größer, bis B bei 90^0 in E zu liegen kommt; alsdann ist $\sin 90^0 = 1$. Bei fortgesetzter Vergrößerung des Winkels a nimmt der Sinus im zweiten Quadranten ab, bis endlich $\sin 180^0 = 0$ wird.

Alle möglichen Werthe des Sinus liegen also zwischen den beiden Gränzen 0 und 1, und der größere von zwei spitzen Winkeln hat den größeren Sinus.

2) Wenn der bewegliche Radius AB mit AD zusammenfällt, so liegt C in D und es wird AC gleich AD, d. h. $\cos 0^0 = 1$. Mit der Zunahme des Winkels a bis 90^0 wird der Cosinus AC immer kleiner, bis endlich $\cos 90^0 = 0$ ist. Für Winkel über 90^0 ist der Cosinus negativ und nimmt mit der Zunahme des Winkels seinem absoluten Werthe nach wieder zu, so daß zuletzt $\cos 180^0 = -1$ wird.

Der Cosinus liegt also immer zwischen den beiden Gränzen 1 und -1, und der größere von zwei spitzen Winkeln hat den kleinern Cosinus.

3) Da bei der Zunahme eines Winkels von 0^0 bis 90^0 der Sinus von 0 bis 1 wächst, während der Cosinus von 1 bis 0 abnimmt, und ein Bruch desto größer wird, je mehr sein Zähler wächst, sein Nenner

hingegen abnimmt, dabei aber immer positiv bleibt, wenn seine beiden Glieder positiv sind, so folgt aus dem Ausdrucke $\text{tg}\, g = \frac{\sin a}{\cos a}$, daß mit der Zunahme des Winkels bis 90^0 die Zahlenwerthe der Tangente wachsen und positiv sind. Es ist

$$\text{tg}\, 0^0 = \frac{\sin 0^0}{\cos 0^0} = \frac{0}{1} = 0, \ \text{tg}\, 90^0 = \frac{\sin 90^0}{\cos 90^0} = \frac{1}{0} = \infty,$$

wo das Zeichen ∞ anzeigt, daß die Tangente eine über alle Gränzen hinausgehende Größe erreicht. Da man aber 90^0 nicht blos als das Ende einer von 0^0 bis 90^0 gehenden Drehung des Radius, sondern zugleich als den Anfang einer neuen mit 90^0 beginnenden Drehung betrachten kann, bei dieser letztern aber die Tangente negativ ist, so kommen auch der Gränze 90^0 zwei verschiedene Tangenten zu, so daß nämlich in der ersten Bedeutung $\text{tg}\, 90^0 = \infty$ und in der andern $\text{tg}\, 90^0 = -\infty$ ist. Weil ferner der Bruch $\frac{\sin a}{\cos a}$ desto kleiner wird, je mehr der Zähler abnimmt, sein Nenner hingegen sich vergrößert, so werden mit der Zunahme des stumpfen Winkels die absoluten Zahlenwerthe der Tangente immer kleiner, so daß man endlich hat

$$\text{tg}\, 180^0 = \frac{\sin 180^0}{\cos 180^0} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Die Tangente kann also alle möglichen positiven und negativen Zahlenwerthe von 0 bis ∞ annehmen, und dem größern von zwei spitzen Winkeln gehört die größere Tangente an.

4) Durch dieselben Schlüsse wie vorhin findet man, daß es in Bezug auf die Zunahme und Abnahme der Cotangente bei der Aenderung des Winkels sich gerade umgekehrt verhält, wie bei der Tangente. Es ist

$$\text{cotg}\, 0^0 = \frac{\cos 0^0}{\sin 0^0} = \frac{1}{0} = \infty, \ \text{cotg}\, 90^0 = \frac{\cos 90^0}{\sin 90^0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{cotg}\, 180^0 = \frac{\cos 180^0}{\sin 180^0} = \frac{-1}{0} = -\infty.$$

Die Cotangente nimmt also alle möglichen positiven und negativen Zahlenwerthe von 0 bis ∞ an, und dem größern von zwei Winkeln entspricht die kleinere Cotangente.

Die gefundenen Resultate für die Tangente und Cotangente bestätigen sich auch durch die geometrische Construction dieser Functionen.

Die Betrachtung der ersten Figur in § 8 zeigt, daß für $a = 90^0$ die durch E gehende Tangente ED mit der Linie AF parallel ist, und daher beide Linien einander gar nicht treffen. Da aber bei der Zunahme des spitzen Winkels a der Durchschnittspunkt D sich immer weiter von E entfernt, so kann man für den Fall, wo $a = 90^0$ ist, sich den Punkt D unendlich weit vorstellen, d. h. die Tangente als unendlich groß bezeichnen. Ebenso läßt sich die völlige Uebereinstimmung der geom. Construction mit den übrigen auf analytischem Wege gefundenen Resultaten für die Tangente, sowie für die Cotangente leicht darthun.

§ **15.** Um die Zahlenwerthe der Functionen aller Winkel von 0^0 bis 180^0 zu kennen, genügt es die Werthe der Functionen für alle Winkel bis 45^0 zu berechnen.

Zufolge § 5 ist nämlich der Sinus eines stumpfen Winkels zugleich der Sinus seines spitzen Nebenwinkels, und Cosinus, Tangente und Cotangente eines stumpfen Winkels erhält man, wenn man diese Functionen von dessen spitzem Nebenwinkel negativ nimmt. Z. B.

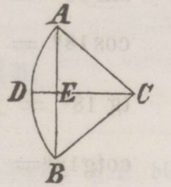
$$\sin 107^0 = \sin(180^0 - 107^0) = \sin 73^0$$
$$\cos 99^0 = -\cos(180^0 - 99^0) = -\cos 81^0.$$

Da ferner jeder Winkel, welcher größer als 45^0 und kleiner als 90^0 ist, einen Winkel kleiner als 45^0 zu seinem Complemente hat, und die Function eines spitzen Winkels gleich ist der sinnverwandten Function seines Complements (§ 4), so sind die Werthe der Functionen aller Winkel bis 90^0 bekannt, wenn man die Functionen aller Winkel unter 45^0 kennt. Z. B.

$$\sin 75^0 = \cos(90^0 - 75^0) = \cos 15^0$$
$$\operatorname{tg} 60^0 = \operatorname{cotg}(90^0 - 60^0) = \operatorname{cotg} 30^0.$$

Hieraus folgt, daß wenn man die Werthe der Functionen aller Winkel bis 45^0 berechnet hat, zugleich auch die Werthe der Functionen aller Winkel bis 180^0 ohne Weiteres bekannt sind. Außerdem ist es auch nicht einmal nöthig, alle vier Functionen der Winkel bis 45^0 zu berechnen, da man aus einer einzigen Function alle übrigen nach § 10 finden kann.

§ 16. Beschreibt man mit einem als Einheit angenommenen Radius einen Bogen und halbirt einen Mittelpunktswinkel ACB desselben und damit zugleich dessen Sehne AB durch CD, so sieht man, daß der Sinus des Winkels ACD gleich ist der halben Sehne des doppelten Winkels ACB.



Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich die Functionen für die halben Mittelpunktswinkel der regelm. Vielecke von 4, 6, 10 Seiten, also für die Winkel von 45^0, 30^0, 18^0 berechnen. Wird der Radius gleich 1 gesetzt, so ist die halbe Vielecksseite der Sinus des halben Mittelpunktswinkels.

1) Stellt in der Figur AB die Seite des regelm. Vierecks vor, so ist $ACB = 90^0$, also $ACD = 45^0$, folglich auch $CAE = 45^0$ und daher $AE = CE$, ferner $AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, also $AE = CE = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, d. h.

$$\sin 45^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071067 = \cos 45^0$$

$$\operatorname{tg} 45^0 = \frac{AE}{CE} = 1 = \operatorname{cotg} 45^0$$

2) Bedeutet AB jetzt die Seite des regelm. Sechsecks, so ist $AB = AC = 1$ und $ACB = 60^0$, folglich $ACD = 30^0$. Da nun $AE = \frac{1}{2}$, mithin $CE = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, so ist

$$\sin 30^0 = \tfrac{1}{2} = 0{,}5 = \cos 60^0 \ (\S\ 4)$$

$$\cos 30^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}8660254 = \sin 60^0$$

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{AE}{CE} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5773502 = \operatorname{cotg} 60^0$$

$$\operatorname{cotg} 30^0 = \frac{CE}{AE} = \sqrt{3} = 1{,}7320508 = \operatorname{tg} 60^0$$

3) Stellt AB die Seite des regelm. Zehnecks vor, so ist $ACB = 36^0$, also $ACD = 18^0$. Da AB das größere Stück des nach stetiger Proportion getheilten Radius bildet, so ist

$1 : AB = AB : 1 - AB$ oder $AB^2 + AB = 1$, also $AB = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$,

daher $AE = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ und $CE = \sqrt{1 - \frac{1}{16}(\sqrt{5} - 1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$, d. h.

$$\sin 18^0 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = 0{,}3090169 = \cos 72^0$$

$$\cos 18^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = 0{,}9510565 = \sin 72^0$$

$$\operatorname{tg} 18^0 = \frac{AE}{CE} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} = 0{,}3249196 = \operatorname{cotg} 72^0$$

$$\operatorname{cotg} 18^0 = \frac{CE}{AE} = \sqrt{5+2\sqrt{5}} = 3{,}0776835 = \operatorname{tg} 72^0$$

§ **17.** Aus den bereits berechneten Functionen lassen sich die Functionen von unendlich vielen anderen Winkeln finden. Mittels der Formeln (16) bis (19) kann man aus den Functionen zweier Winkel die Functionen der Summe oder Differenz jener Winkel ableiten, z. B.

$$\sin 12^0 = \sin(30^0 - 18^0) = \sin 30^0 \cos 18^0 - \cos 30^0 \sin 18^0$$
$$= 0{,}2079117 = \cos 78^0.$$

Aus den Functionen eines Winkels kann man ferner mittels der Formeln (20) und (21) die Functionen des 2, 4, 8 . . . fachen Winkels und mittels der Formeln (24) und (25) die Functionen des halben Winkels ableiten, z. B. aus $\cos 18^0$ findet man nach einander

$$\sin 9^0 = \sqrt{\frac{1-\cos 18^0}{2}} = 0{,}1564345$$

$$\cos 9^0 = \sqrt{\frac{1+\cos 18^0}{2}} = 0{,}9876883$$

$$\sin 4^0 30' = \sqrt{\frac{1-\cos 9^0}{2}} = 0{,}0784591 \quad \text{u. s. w.}$$

Wenn man auf diese Weise zu sehr kleinen Winkeln gelangt ist, z. B. nach einander gefunden hat $\sin 45'$, $\sin \frac{45'}{2}$, $\sin \frac{45'}{4}$, $\sin \frac{45'}{8}$, $\sin \frac{45,}{16}$, $\sin \frac{45'}{32} = 0{,}00040905$, $\sin \frac{45'}{64} = 0{,}00020452$, so zeigt es sich, daß je kleiner die Winkel werden, auf desto mehr Decimalstellen die Sinusse sich wie die Winkel verhalten. Man kann daher $\sin 1'$ durch die Proportion finden:

$$\sin \frac{45'}{64} : \sin 1' = \frac{45'}{64} : 1', \text{ also } \sin 1' = 0{,}00029088.$$

Aus $\sin 1'$ läßt sich $\cos 1'$ (§ 10,4), dann $\sin 2'$ (§ 12, 20), hierauf (§ 11, 16) $\sin 3'$, $\sin 4'$ u. s. w. berechnen, so daß die Winkel von Minute zu Minute fortschreiten. Man ersieht hieraus die Möglichkeit einer ganz elementaren Berechnung der Functionen. Kürzere Methoden lehrt die höhere Mathematik.

VI. Vom Gebrauche der trigonometrischen Tafeln.

§ 18. In den logarithmisch-trigonometrischen Tafeln sind die Logarithmen der Functionen aller Winkel von 0^0 bis 90^0 zusammengestellt, so daß man daraus für jeden gegebenen Winkel die Logarithmen seiner Functionen und, umgekehrt, zu jeder gegebenen Function den zugehörigen Winkel entnehmen kann. Unseren Betrachtungen werden wir immer die von Bremiker bearbeiteten Vega'schen Tafeln zu Grunde legen, und weil diese selbst eine Beschreibung ihrer Einrichtung und ihres Gebrauchs enthalten, nur einige wenige Punkte hier näher erläutern.

1) Da die Sinusse und Cosinusse aller Winkel, ferner die Tangenten von 0^0 bis 45^0 und die Cotangenten von 45^0 bis 90^0 kleiner als 1 oder ächte Brüche sind, so haben ihre Logarithmen negative Kennziffern, während nur die Tangenten von 45^0 bis 90^0 und die Cotangenten von 0^0 bis 45^0, weil sie größer als 1 sind, durch positive Logarithmen ausgedrückt werden. Zur Vermeidung dieser Ungleichförmigkeit sind in der Tafel die Logarithmen aller Functionen, welche kleiner als 1 sind, um 10 größer als ihr wirklicher Zahlenwerth ist, angesetzt worden, so daß mithin alle Logarithmen unter einer positiven Form erscheinen. So ist z. B.

$\sin 30^0 = 0{,}5$, also $\log \sin 30^0 = \log 0{,}5 = 0{,}6989700 - 1$, während die Tafel angiebt $\log \sin 30^0 = 9{,}6989700$.

Man muß daher von jedem aus der Tafel entnommenen Logarithmus, welcher einer Function kleiner als 1 entspricht, 10 subtrahiren, um den wahren Werth desselben zu erhalten. Diese Subtraction wird immer blos durch Anhängen von $- 10$ an den Logarithmus angedeutet, z. B.

$$\log \sin 12^0 = 9{,}3178789 - 10 = 0{,}3178789 - 1.$$

Bestimmt man mittels der gewöhnlichen Logarithmen-Tafel den Numerus dieses Logarithmen, so findet man $\sin 12^0 = 0{,}2079117$.

Wenn umgekehrt zu einer gegebenen Function, z. B. $\operatorname{tg} x = 0{,}3249196$ der Winkel x bestimmt werden soll, so nimmt man erst den Logarithmus jener Zahl, nämlich 0,5117760 — 1, addirt zu dem Logarithmus, wenn derselbe wie hier eine negative Kennziffer hat, 10 hinzu, was 9,5117760 giebt, und findet jetzt in der Tafel für diesen log tg den Winkel 18^0 angegeben.

2) Obschon in der Tafel die Winkel nur von 10 zu 10 Secunden fortschreiten, so kann man doch auch die Functionen der Winkel von Secunde zu Secunde und Theilen der Secunde mittels der mit d und dc (differentia communis) überschriebenen Spalten leicht berechnen in welchen angegeben ist, um wie viel sich die Logarithmen der Functionen ändern, wenn sich die Winkel um 10 Secunden ändern. Diese Rechnung (Interpolation) gründet sich auf den Satz, daß die Differenzen wenig verschiedener Winkel sich wie die Differenzen der Logarithmen ihrer gleichnamigen Functionen verhalten, und zwar desto genauer, je weniger die Winkel von einander verschieden sind. Man hat dabei stets darauf zu achten, daß bei der Zunahme eines spitzen Winkels der Sinus und die Tangente ebenfalls zunehmen, der Cosinus und die Cotangente dagegen abnehmen (§ 14).

Der Gebrauch der Tafel kommt immer auf die Auflösung einer der beiden Aufgaben zurück: Zu einem gegebenen Winkel den Logarithmus einer Function, und umgekehrt, zu einer gegebenen Function den Winkel zu finden. Wir setzen für jeden einzelnen Fall ein ausgerechnetes Beispiel hierher, welches als Schema für andere Fälle gelten kann.

Bestimmung einer Function zu einem gegebenen Winkel.

§ 19. 1) Gesucht log sin $37^0\ 15'\ 26'',3$.

Aufl.

$$\begin{array}{rcl} \log\sin 37^0\ 15'\ 20'' & = & 9{,}7820217 \\ 27{,}7 \times 6{,}3 & = & +\ 174{,}51 \\ \hline \log\sin 37^0\ 15'\ 26'',3 & = & 0{,}7820392 - 1 \end{array}$$

Man schließt hier: Auf 10″, um welche der Winkel wächst, vergrößern sich die letzten Stellen des log sin $37^0\ 15'\ 20''$ um 277, also auf 1″ um den zehnten Theil 27,7, folglich auf 6″,3, um welche der Winkel wächst, um $27{,}7 \times 6{,}3 = 174{,}51$, wofür man abkürzend setzt 175. Von dem erhaltenen Logarithmus zieht man schließlich 10 ab.

Verlangt man den sin $37^0\ 15'\ 26'',3$ selbst, nicht seinen Logarithmus, so schlägt man in der Logarithmen-Tafel den Numerus von $0{,}7820392 - 1$ auf, und findet $\sin 37^0\ 15'\ 26'',3 = 0{,}6053955$.

2) Gesucht $\log\cos 45^0\ 41'\ 44'',25$.

Aufl.
$$\begin{array}{rcl} \log\cos 45^0\ 41'\ 40'' & = & 9{,}8441569 \\ 21{,}6 \times 4{,}25 & = & -91{,}8 \\ \hline \log\cos 45^0\ 41'\ 44'',25 & = & 0{,}8441477 - 1 \end{array}$$

Auf 10'', um welche der Winkel wächst, vermindern sich die untersten Stellen seines log cos um 216, also auf 1'' um 21,6 und daher auf 4'',25 um 91,8 wofür man 92 nimmt.

3) Gesucht $\log \operatorname{tg} 56^0\ 22'\ 3'',89$.

Aufl.
$$\begin{array}{rcl} \log\operatorname{tg} 56^0\ 22' & = & 0{,}1770234 \\ 45{,}7 \times 3{,}89 & = & +\ 177{,}773 \\ \hline \log\operatorname{tg} 56^0\ 22'3'',89 & = & 0{,}1770412 \end{array}$$

4) Gesucht $\log\operatorname{cotg} 14^0\ 55'\ 18'',02$.

Aufl.
$$\begin{array}{rcl} \log\operatorname{cotg} 14^0\ 55'\ 10'' & = & 0{,}5743959 \\ 84{,}6 \times 8{,}02 & = & -\ 678{,}482 \\ \hline \log\operatorname{cotg} 14^0\ 55'\ 18'',02 & = & 0{,}5743281. \end{array}$$

§ 20. Die Functionen stumpfer Winkel lassen sich zufolge der Formeln in § 5 und § 6 auf zwei verschiedene Arten bestimmen: Entweder zieht man den stumpfen Winkel von 180^0 ab und sucht für den nachbleibenden spitzen Winkel die verlangte Function, oder man zieht 90^0 von dem stumpfen Winkel ab und sucht für den nachbleibenden spitzen Winkel die sinnverwandte Function.

1) Gesucht $\log\sin 98^0\ 3'\ 2''$

Aufl. Bezeichnet man $98^0\ 3'\ 2''$ der Kürze wegen mit a, so ist

$$\sin a = \sin(180^0 - a) = \sin 81^0\ 56'\ 58''$$

$$\begin{array}{rcl} \log\sin 81^0\ 56'\ 50'' & = & 9{,}9956964 \\ 2{,}9 \times 8 & = & +\ 23{,}2 \\ \hline \log\sin 98^0\ 3'\ 2'' & = & 0{,}9956987 - 1 \end{array}$$

oder $\sin a = \cos (a - 90^0) = \cos 8^0\,3'\,2''$

$$\log \cos 8^0\,3' = 9{,}9956993$$
$$2{,}9 \times 2 = \quad -5{,}8$$
$$\log \sin 98^0\,3'\,2'' = 0{,}9956987 - 1.$$

2) Obschon es für Cosinus, Tangente und Cotangente eines stumpfen Winkels, weil es negative Zahlen sind, keine Logarithmen giebt, so haben doch ihre absoluten Zahlenwerthe Logarithmen. Diesen letzteren hängt man aber immer ein (n) an, um anzuzeigen, daß jene absoluten Zahlenwerthe ursprünglich mit dem negativen Zeichen behaftet waren. Z. B.

Gesucht $\log \cos 144^0\,4'\,51'',3$.

Aufl. Setzt man der Kürze wegen $144^0\,4'\,51'',3 = a$, so ist

$$\cos a = -\cos(180^0 - a) = -\cos 35^0\,55'\,8'',7$$
$$\log \cos 35^0\,55' = 9{,}9084159$$
$$15{,}3 \times 8{,}7 = \quad -133{,}11$$
$$\log \cos 144^0\,4'\,51'',3 = 0{,}9084026 - 1\ (n)$$

oder $\cos a = -\sin (a - 90^0) = -\sin 54^0\,4'\,51'',3$

$$\log \sin 54^0\,4'\,50'' = 9{,}9084006$$
$$15{,}3 \times 1{,}3 = \quad +19{,}89$$
$$\log \cos 144^0\,4'\,51'',3 = 0{,}9084026 - 1\ (n)$$

Um den Cosinus selbst zu erhalten, schlägt man den Numerus von $0{,}9084026 - 1$ auf und nimmt ihn negativ, nämlich

$$\cos 144^0\,4'\,51'',3 = -0{,}8098463.$$

3) Auf dieselbe Weise findet man

$$\log \mathrm{tg}\, 125^0\,24'\,31'' = 0{,}1481980\ (n)$$
$$\mathrm{tg}\, 125^0\,24'\,31'' = -1{,}4066886$$
$$\log \mathrm{cotg}\, 109^0\,2'\,28'' = 0{,}5379832 - 1\ (n)$$
$$\mathrm{cotg}\, 109^0\,2'\,28'' = -0{,}3451304.$$

Bestimmung des Winkels zu einer gegebenen Function.

§ **21.** Gegeben $\log \sin x = 0{,}6389576 - 1$

Aufl. Man addirt erst 10 zum Logarithmus, dann ist

$$\log \sin x = 9{,}6389576$$
$$\log \sin 25^0\, 48'\, 50'' = 9{,}6389376$$
$$+\,4{,}59 = \frac{200}{43{,}6}$$
$$x = 25^0\, 48'\, 54'',59.$$

Man schließt hier so: Bei der Differenz 436 wächst der Winkel $25^0\, 48'\, 50''$ um $10''$, und daher bei dem zehnten Theil 43,6 um $1''$; wie oft daher 43,6 in der Differenz 200 enthalten ist, um so viel Secunden muß der Winkel wachsen.

Da der Sinus eines spitzen Winkels zugleich der Sinus von dessen stumpfem Nebenwinkel ist (§ 5), so ist ebenfalls

$$x = 180^0 - 25^0\, 48'\, 54'',59 = 154^0\, 11'\, 5'',41.$$

2) Während die Bestimmung eines Winkels durch seinen Sinus zweideutig ist, wird derselbe durch Cosinus, Tangente und Cotangente immer ganz unzweideutig bestimmt, da diese Functionen durch ihr Vorzeichen zu erkennen geben, ob sie einem spitzen oder einem stumpfen Winkel angehören. Z. B. aus $\cos x = 0{,}5$ folgt $x = 60^0$, dagegen aus $\cos x = -0{,}5$, daß $x = 180^0 - 60^0 = 120^0$ ist. Wird die Function durch ihren Logarithmus ausgedrückt, so schreibt man im ersten Falle, wo sie positiv ist, $\log \cos x = 0{,}6989700 - 1$, dagegen im andern Falle, wo sie negativ ist, $\log \cos x = 0{,}6989700 - 1$ (n) oder $\log(-\cos x) = 0{,}6989700 - 1$.

3) Gegeben $\log \cos x = 0{,}7390193 - 1$.

Aufl.
$$\log \cos x = 9{,}7390193$$
$$\log \cos 56^0\, 45' = 9{,}7390129$$
$$-\,1'',99 = \frac{64}{32{,}1}$$
$$x = 56^0\, 44'\, 58'',01$$

Ebenso findet man, daß

aus $\log \operatorname{tg} x = 0{,}0328564$ folgt $x = 47^0\, 9'\, 55'',01$

aus $\log \operatorname{cotg} x = 0{,}4771213$ folgt $x = 18^0\, 26'\, 5'',82$

§ **22.** Die stumpfen Winkel können (zufolge § 5 und § 6) aus ihren Functionen auf zwei Arten bestimmt werden: Man bestimmt den spitzen Winkel, welchen die Tafel neben dem

Logarithmus der Function enthält, und zieht ihn von 180^0 ab, oder man betrachtet den Logarthmus der Function als den Logarithmus der sinnverwandten Function, bestimmt den zugehörigen spitzen Winkel und addirt zu demselben 90^0. Z. B.

1) Gegeben $\log\cos x = 0{,}9084026 - 1$ (n)

Aufl. $\log\cos(180^0 - x) = 9{,}9084026$

$$\frac{\log\cos 35^0\,55'10'' = 9{,}9084006}{-1'',3 = \frac{20}{15{,}3}}$$

$$180^0 - x = 35^0\,55'\,8'',7, \text{ also } x = 180^0 - 35^0\,55'\,8'',7$$
$$= 144^0\,4'\,51'',3.$$

oder $\log\sin(x - 90^0) = 9{,}9084026$

$$\frac{\log\sin 54^0\,4'\,50'' = 9{,}9084006}{+1'',3 = \frac{20}{15{,}3}}$$

$$x - 90^0 = 54^0\,4'\,51'',3, \text{ also } x = 54^0\,4'\,51'',3 + 90^0$$
$$= 144^0\,4'\,51'',3.$$

2) Ist gegeben $\operatorname{tg} x = -2$, so nimmt man zuerst $\log 2$, nämlich $\log\operatorname{tg} x = 0{,}3010300$ (n), und findet alsdann hieraus $x = 116^0\,33'\,54'',18$.

3) Aus $\log(-\operatorname{cotg} x) = 0{,}5346294$ findet man
$$x = 163^0\,43'\,21'',46.$$

§ **23.** Bei der Bestimmung von Winkeln nahe bei 0^0 und bei 90^0 aus ihren Functionen oder dieser letzteren aus den Winkeln ist Folgendes zu bemerken.

Wenn der Sinus oder Cosinus nahe gleich 1 ist, so ändern sich diese Functionen mit dem Wachsen oder Abnehmen des Winkels sehr wenig, d. h. die Aenderung des Sinus ist sehr gering nahe bei 90^0 und die des Cosinus nahe bei 0^0. Wo sich aber der Sinus und Cosinus ihrem kleinsten Werthe 0 nähern, ändern sie sich am stärksten, wenn sich der Winkel ändert, also der Sinus nahe bei 0^0 und der Cosinus nahe bei 90^0. So unterscheidet sich z. B. der $\log\cos 3'$ oder

oder $\log \sin 89^0\,57'$ von dem $\log \cos 4'$ oder $\log \sin 89^0\,56'$ erst in der 7ten Decimalstelle, während $\log \sin 3'$ oder $\log \cos 89^0\,57'$ schon in der Kennziffer von $\log \sin 4'$ oder $\log \cos 89^0\,56'$ abweicht. Je stärker sich aber eine Function mit der Aenderung des Winkels ändert, desto weniger kann man sich in der genauen Bestimmung des Winkels irren. Wenn man also die Wahl hat, so bediene man sich des Sinus, um sehr kleine Winkel, dagegen des Cosinus, um Winkel nahe bei 90^0 zu bestimmen, oder in beiden Fällen der Tangente und Cotangente, indem diese Functionen überhaupt zuverlässigere Resultate geben als die ersteren.

§ **24.** Der Rest, den man erhält, wenn man eine Zahl von ihrer nächst höhern dekadischen Einheit, also von 10, 100 u. s. w. abzieht, heißt die dekadische Ergänzung oder das Complementum decadicum jener Zahl und wird durch CD bezeichnet. Z. B.

$$CD.\log 4 = 10 - 0{,}6020600 = 9{,}3979400.$$

Für einen Logarithmus mit negativer Kennziffer, z. B.

$$\log 0{,}03 = 0{,}4771213 - 2$$

erhält man die Ergänzung, wenn man die Mantisse von 10 subtrahirt und zu dem Reste die positiv genommene Kennziffer addirt, nämlich

$$CD.\log 0{,}03 = 10 - (0{,}4771213 - 2) = 10 - 0{,}4771213 + 2 = 11{,}5228787.$$

Da $a - b = a + (10 - b) - 10 = a + (100 - b) - 100$, so folgt, daß die Subtraction zweier Zahlen von einander gleichbedeutend ist mit der Addition der dek. Ergänzung des Subtrahenden zum Minuenden, wenn man von der erhaltenen Summe zuletzt wieder 10 oder 100 abzieht, je nachdem der Subtrahend von 10 oder 100 abgezogen worden ist.

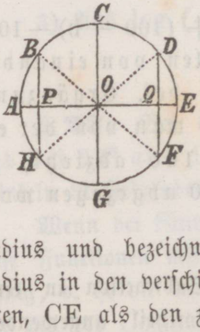
Die dek. Ergänzung, durch welche jede Subtraction in eine Addition verwandelt werden kann, wird mit Vortheil angewendet, wenn man von einer Zahl mehrere andere Zahlen, oder von der Summe mehrerer Zahlen eine oder mehrere Zahlen zu subtrahiren hat.

Es sei gegeben $x = \frac{\sin 39^0 15' \times \operatorname{tg} 117^0 14'}{\operatorname{tg} 95^0 \times \operatorname{cotg} 93^0 30'}$.

Ob dieser Ausdruck ein positives oder negatives Resultat giebt, hängt davon ab, ob die Anzahl der negativen Factoren im Zähler und Nenner gerade oder ungerade ist. Betrachtet man die negativen Factoren vorläufig als positiv und bezeichnet ihre Logarithmen mit (n), so hat man nur in dem Falle, wenn die Anzahl der Zeichen (n) ungerade ist, ein solches Zeichen ebenfalls dem Logarithmus des Endresultates beizufügen und letzteres selbst alsdann negativ zu nehmen. Nun ist

$$\begin{array}{lcl} \log \sin 39^0\ 15' & = & 0{,}8012015 - 1 \\ \log \operatorname{tg}\ 117^0\ 14' & = & 0{,}2884746 \quad (n) \\ \text{CD}.\log \operatorname{tg} 95^0 & = & 8{,}9419518 - 10\ (n) \\ \text{CD}.\log \operatorname{cotg} 93^0 30' & = & 11{,}2135139 - 10\ (n) \\ \hline \log x & = & 0{,}2451418\ (n) \\ x & = - & 1{,}7584976. \end{array}$$

V. Functionen überstumpfer und negativer Winkel.



§ **25.** Um die trigon. Functionen auch auf Winkel über 180⁰ anzuwenden, beschreibe man mit einem beliebigen, als Einheit angenommenen Radius einen Kreis und theile ihn durch zwei auf einander senkrechte Durchmesser in seine vier Quadraten AC, CE, EG, GA. Betrachtet man AO als den festliegenden Radius und bezeichnen B, D, F, H beliebige Lagen des rotirenden Radius in den verschiedenen Quadranten, von welchen wir AC als den ersten, CE als den zweiten u. s. w. annehmen, so ist sin AB = BP, cos AB = OP, sin ACD = DQ, cos ACD = OQ, ferner für die Winkel oder Bogen über 180^0 sin ACF = FQ und cos ACF = OQ, endlich sin ACEH = HP und cos ACEH = OP.

Da der Sinus im ersten und zweiten Quadranten positiv ist und die Linien FQ und HP in Bezug auf den festliegenden Durchmesser AE eine entgegengesetzte Lage zu den Linien DQ und BP haben, so ist der Sinus eines Winkels, welcher sich bis in den dritten und vierten Quadranten hinein erstreckt, negativ. Weil ferner die Linien OP und OQ in Bezug auf den Mittelpunkt O einander entgegengesetzt liegen, und der Cosinus im ersten Quadranten positiv ist, so ist der Cosinus auch im vierten Quadranten positiv, dagegen im zweiten und dritten negativ. Aus dem Vorzeichen des Sinus und Cosinus folgt, daß die Tangenten und Cotangenten im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweiten und vierten negativ sind.

Durch dieselben Betrachtungen wie in § 14 ergeben sich für alle Winkel bis 360^0 folgende Gränzwerthe der Functionen:

	0^0	90^0	180	270^0	360^0
Sinus	0	1	0	-1	0
Cosinus	1	0	-1	0	1
Tangente	0	$+\infty-$	0	$+\infty-$	0
Cotangente	$+\infty$	0	$-\infty+$	0	$-\infty$

§ **26.** Die Functionen überstumpfer Winkel lassen sich immer auf die Functionen spitzer Winkel zurückführen und daher ebenfalls durch die Tafeln bestimmen.

Wir betrachten nur den Sinus und Cosinus, da die Ausdrücke für die Tangente und Cotangente in allen Fällen durch die Division jener beiden anderen Functionen erhalten werden. Es sei in der obigen Figur der spitze Winkel AOB = DOE = EOF = AOH = a; alsdann ist BP = DQ = FQ = HP, ferner OP = OQ und der vom Bogen ACF gemessene Winkel des dritten Quadranten gleich $a + 180^0$. Unter Berücksichtigung der Vorzeichen der Functionen ergeben sich aus der Figur unmittelbar die Formeln:

1) $\mathbf{sin (a + 180^0) = - sin\, a}$ und $\mathbf{cos (a + 180^0 = - cos\, a}$.

Bezeichnet man den Winkel $a + 180^0$ mit A^{III}, so ist $a = A^{III} - 180^0$, folglich

$$2) \left\{ \begin{aligned} \mathbf{sin\, A^{III}} &= \mathbf{- sin\, (A^{III} - 180^0)} \\ \mathbf{cos\, A^{III}} &= \mathbf{- cos\, (A^{III} - 180^0)} \end{aligned} \right.$$

Es ist z. B. $\sin 196^0 = -\sin\ (196^0 - 180^0) = -\sin 16^0$. Da $\log\sin 16^0 = 0{,}4403381 - 1$, also $\log\sin 196^0 = 0{,}4403381 - 1(n)$, so ist $\sin 196^0 = -0{,}2756374$. Ferner ist $\cos 228^0 = -\cos 48^0$, $\mathrm{tg}\ 234^0 = \mathrm{tg}\ 54^0$, $\mathrm{cotg}\ 216^0 = \mathrm{cotg}\ 36^0$.

Vergleicht man die Functionen des vom Bogen ACEH gemessenen Winkels, welcher gleich $360^0 - a$ ist, mit den Functionen des Winkels $AOB = a$, so findet man, daß

3) $\mathbf{\sin(360^0 - a) = -\sin a}$ und $\mathbf{\cos(360^0 - a) = \cos a}$.

Diese Formeln kann man noch anders ausdrücken. Setzt man an die Stelle des Winkels a dessen Complement $90^0 - a$, so ist

$$\sin[360^0 - (90^0 - a)] = -\sin(90^0 - a),$$

also $\sin(270^0 + a) = -\cos a$,

und ebenso $\cos(270^0 + a) = \sin a$.

Bezeichnet man nun den Winkel $270^0 + a$ des vierten Quadranten mit A^{IV}, so ist $a = A^{IV} - 270^0$, folglich

$$4)\quad \begin{cases} \mathbf{\sin A^{IV} = -\cos(A^{VI} - 270^0)} \\ \mathbf{\cos A^{IV} = \sin(A^{IV} - 270^0).} \end{cases}$$

Hiernach ist $\sin 340^0 = -\cos(340^0 - 270^0) = -\cos 70^0$. $\cos 293^0 = \sin 23^0$, $\mathrm{tg}\ 308^0 = -\mathrm{cotg}\ 38^0$, $\mathrm{cotg}\ 301^0, = -\mathrm{tg}\ 31^0$

§ **27.** Ein **negativer Winkel** entsteht dadurch, daß der bewegliche Radius von der ursprünglichen Lage aus nach der entgegengesetzten Richtung von jener Seite sich bewegt, nach welcher hin die als positiv betrachteten Winkel liegen. Beschreibt man also (Fig. § 25) durch entgegengesetzte Drehungen des Radius AO vom Anfangspunkte A aus die beiden gleichen Winkel $AOB = +a$ und $AOH = -a$, so ergiebt sich sogleich, daß

$$\mathbf{\sin(-a) = -\sin a,\quad \cos(-a) = \cos a} \text{ also}$$
$$\mathbf{\mathrm{tg}\ (-a) = -\mathrm{tg}\ a,\quad \mathrm{cotg}(-a) = -\mathrm{cotg}\ a.}$$

§ **28.** Wird bei der Beschreibung der positiven Winkel die Drehung des beweglichen Radius über 360^0 hinaus fortgesetzt, so nimmt derselbe alle Lagen wieder an, welche er beim ersten Durchlaufen des Kreises eingenommen hat, und daher kommen für die Winkel

$a + 360^0$, $a + 2.360^0$ u. s. w. dieselben Functionen zum Vorschein, wie für den Winkel a, welcher kleiner als 360^0 ist. Ebenso bleiben die Functionen des Winkels a unverändert, wenn man diesen um eine beliebige Anzahl von 360^0 vermindert. Man hat daher, wenn n eine beliebige ganze Zahl bedeutet,

$$\sin(a \pm n.360^0) = \sin a, \quad \cos(a \pm n.360^0) = \cos a$$
$$\mathrm{tg}(a \pm n.360^0) = \mathrm{tg}\, a, \quad \mathrm{cotg}(a \pm n.360^0) = \mathrm{cotg}\, a$$

Da bei allen überstumpfen Winkeln der Sinus und Cosinus ebenfalls die Katheten eines rechtw. Dreiecks ausdrücken, so müssen die aus der Formel (§ 9) $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ in Verbindung mit den Ausdrücken $\mathrm{tg}\, a = \frac{\sin a}{\cos a}$ und $\mathrm{cotg}\, a = \frac{\cos a}{\sin a}$ abgeleiteten Formeln in § 10 für alle denkbaren Winkel Giltigkeit haben. Daß ferner die Formeln in § 11 und somit auch alle folgenden aus ihnen abgeleiteten (§ 12 und § 13) für überstumpfe und negative Winkel wahr bleiben, läßt sich auf dieselbe Weise zeigen, wie die Giltigkeit der Formeln in § 11 in Bezug auf stumpfe Winkel nachgewiesen werden kann.

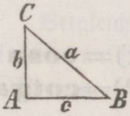
VI. Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke.

§ **29.** Wenn von einem rechtwinkligen Dreieck, in welchem der rechte Winkel immer schon an sich bekannt ist, zwei Stücke gegeben sind, und unter diesen wenigstens eine Seite sich befindet, so können die übrigen Stücke berechnet werden. Es kommen hier vier Auflösungsfälle vor, indem gegeben sein kann: 1) die Hypotenuse und ein spitzer Winkel, 2) eine Kathete und ein spitzer Winkel, 3) die Hypotenuse und eine Kathete, 4) die beiden Katheten.

Den rechten Winkel werden wir immer durch A und die Hypotenuse durch a, die spitzen Winkel durch B und C, die gegenüberliegenden Katheten durch b und c, den Flächeninhalt durch F bezeichnen.

Erster Auflösungsfall.

§ 30. Gegeben die Hypotenuse a und ein spitzer Winkel B; gesucht C, b, c, F.



Aufl. 1) $\mathbf{C = 90^0 - B}$ 2) $\mathbf{b = a \sin B}$

3) $\mathbf{c = a \cos B}$ 4) $F = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} a^2 \sin B \cos B.$

Da (§ 12, 20) $\sin B \cos B = \frac{1}{2} \sin 2B$,

so ist $\mathbf{F = \frac{1}{4} a^2 \sin 2B.}$

Beispiel. Aus $a = 987{,}31$ Fuß, $B = 46^0\, 28'35'',2$ findet man

1) $C = 43^0\, 31'24'',8$

2) $\log a = 2{,}9944535$	3) $\log a = 2{,}9944535$
$\log \sin B = 9{,}8603927 - 10$	$\log \cos B = 9{,}8380003 - 10$
$\log b = 2{,}8548462$	$\log c = 2{,}8324538$
$b = 715{,}8898$ Fuß	$c = 679{,}9137$ Fuß

4) $\log b = 2{,}8548462$

$\log c = 2{,}8324538$

$\log 2F = 5{,}6873000$

$2F = 486743{,}33$

$F = 243371{,}665$ □ Fuß

Wenn B nahe 90^0 ist und daher $b = a \sin B$ nicht genau geunden werden kann (§ 23), so berechne man zuerst $c = a \cos B$ und hierauf b durch die Formel $b = \sqrt{(a+c)\,(a-c)}$. Ist dagegen B nahe 0^0, so berechne man erst $b = a \sin B$ und alsdann c mittels der Formel $c = \sqrt{(a+b)\,(a-b)}$. In den gewöhnlichen Fällen können diese Formeln zur Prüfung der ganzen Rechnung dienen.

Zweiter Auflösungsfall.

§ 31. 1) Gegeben eine Kathete c und der anliegende spitze Winkel B; gesucht C, b, a, F.

Aufl. 1) $\mathbf{C = 90^0 - B}$ 2) $\mathbf{b = c\, tg\, B}$

3) $\frac{c}{a} = \cos B$, also $\mathbf{a = \frac{c}{\cos B}}$ 4) $\mathbf{F = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} c^2\, tg\, B}$

Aus $c = 1378{,}14$ Fuß, $B = 3^0\, 37'49''$ findet man $C = 86^0\, 22'11''$

$b = 87{,}4364$ Fuß, $a = 1380{,}911$ Fuß, $F = 60249{,}805$ □ Fuß.

2) Gegeben eine Kathete c und der gegenüberliegende spitze Winkel C; gesucht B, b, a, F.

Aufl. 1) $\mathbf{B = 90^0 - C}$ 2) $\frac{c}{b} = \operatorname{tg} C$, also $\mathbf{b = \frac{c}{tg\, C}}$

3) $\frac{c}{b} = \sin C$, also $\mathbf{a = \frac{c}{\sin C}}$ 4) $\mathbf{F = \frac{1}{2}\, b c = \frac{c^2}{2\, tg\, C}}$

Diese zweite Aufgabe ist im Grunde die nämliche wie die erste, da man auch den Winkel B als gegeben betrachten kann.

Wenn B nahe 0^0, folglich C nahe 90^0 ist, so wird a weder durch $\frac{c}{\cos B}$ noch durch $\frac{c}{\sin C}$ genau bestimmt. Alsdann berechne man a durch die aus $\frac{b}{a} = \sin B$ hervorgehende Gl. $a = \frac{b}{\sin B}$, welche in den gewöhnlichen Fällen zur Prüfung der Rechnung neben den übrigen Formeln für a gebraucht werden kann.

Dritter Auflösungsfall.

§ **32.** Gegeben die Hypotenuse a und eine Kathete b; gesucht B, C, c, F.

Aufl. 1) $\mathbf{\sin B = \frac{b}{a}}$ 2) $\mathbf{\cos C = \frac{b}{a}}$ oder $\mathbf{C = 90^0 - B}$

3) $\mathbf{c = a \cos B}$ oder $\mathbf{c = \sqrt{(a+b)\,(a-b)}}$

4) $\mathbf{F = \frac{1}{2}\, b c = \frac{b}{2} \sqrt{(a+b)\,(a-b)}}$

Aus $a = 246,7$ Fuß, $b = 135,9$ Fuß findet man $B = 33^0\, 25'\, 36'',6$. $C = 56^0\, 34'\, 23'',4$, $c = 205,893$ Fuß, $F = 13990,45$ □Fuß.

Der Winkel B kann in einem rechtw. Dreieck nur spitz genommen werden, obschon $\sin B$ zugleich einen stumpfen Winkel für B giebt. — Wenn der Quotient $\frac{b}{a}$ nahe 1 ist, so berechne man zuvor $c = \sqrt{(a+b)\,(a-b)}$, und alsdann B und C mittels der Gleichung $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = \operatorname{cotg} C$, worauf als Prüfungsgleichung $B + C = 90^0$ dienen kann. Kommt $\frac{b}{a}$ nahe 0, so bestimme man c entweder aus $c = \sqrt{(a+b)\,(a-b)}$ oder aus $c = b \operatorname{cotg} B = b \operatorname{tg} C$.

Vierter Auflösungsfall.

§ **33.** Gegeben die beiden Katheten b, c; gesucht B, C, a, F.

Aufl. 1) $\mathbf{tg\,B = \frac{b}{c}}$ 2) $\mathbf{cotg\,C = \frac{b}{c}}$ oder $\mathbf{C = 90^0 - B}$

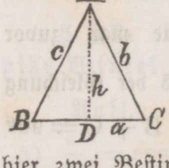
3) $\frac{b}{a} = \sin B$, also $\mathbf{a = \frac{b}{\sin B}}$ oder $\mathbf{a = \sqrt{b^2 + c^2}}$

4) $\mathbf{F = \frac{1}{2}\,b\,c.}$

Aus $b = 563{,}3$ Fuß, $c = 378{,}2$ Fuß findet man $B = 56^0\,7'21'',23$ $C = 33^0\,52'38'',77$, $a = 678{,}4856$ Fuß, $F = 106520{,}03$ □ Fuß.

§ **34.** Ein Dreieck kann nicht blos durch einfache Seiten und Winkel bestimmt werden, sondern auch durch gewisse Verbindungen der einzelnen Stücke mit einander, z. B. wenn gegeben ist der Inhalt und ein spitzer Winkel, der Inhalt und eine Kathete oder die Hypotenuse, die Hypotenuse und das auf dieselbe gefällte Höhenperpendikel, die Summe zweier Seiten und die dritte Seite oder ein spitzer Winkel u. s. w. Die Lösung solcher Aufgaben kommt jedesmal auf einen der vier behandelten Hauptfälle zurück und wird sich immer ausführen lassen, sobald es eben so viele von einander unabhängige Gleichungen giebt als unbekannte Stücke gesucht werden.

VII. Auflösung der gleichschenkligen Dreiecke.



§ **35.** Wir werden im gleichschenkligen Dreieck die ungleiche Seite, d. h. die Grundlinie, immer durch a, und den gegenüberliegenden Winkel, d. h. den Winkel an der Spitze mit A bezeichnen. Wegen der Gleichheit zweier Seiten b = c und zweier Winkel B = C reichen hier zwei Bestimmungsstücke aus und diese können sein 1) die Grundlinie und irgend ein Winkel, 2) der Schenkel und irgend ein Winkel, 3) die Grundlinie und der Schenkel.

Zieht man das Höhenperpendikel $AD = h$, so ist der Winkel $BAD = \frac{1}{2}A$, ferner $BD = \frac{1}{2}a$ und der Inhalt $F = \frac{1}{2}ah$. Da $B = C$, so ist $A + 2B = 180^0$.

§ 36. Gegeben die Grundlinie a und B oder A.

Aufl. 1) $A = 180^0 - 2B$ oder $B = 90^0 = \frac{1}{2}A$.

2) Aus $\frac{1}{2}a = c \cos B$ folgt $c = \frac{a}{2 \cos B} = \frac{a}{2 \sin \frac{1}{2} A}$

3) Da $h = \frac{1}{2}a \operatorname{tg} B = \frac{1}{2}a \operatorname{cotg} \frac{1}{2}A$, so ist
$F = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{4}a^2 \operatorname{tg} B = \frac{1}{4}a^2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}A$.

§ 37. Gegeben der Schenkel c und B oder A.

Aufl. 1) $A = 180^0 - 2B$ oder $B = 90^0 - \frac{1}{2}A$.

2) $a = 2c \cos B = 2c \sin \frac{1}{2}A$.

3) $F = \frac{1}{2}ah$, oder da $a = 2c \cos B$, $h = c \sin B$, so ist
$F = c^2 \cos B \sin B = c^2 \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}c^2 \sin A$
(§ 12, 20).

§ 38. Gegeben die Grundlinie a und der Schenkel c.

Aufl. 1) $\cos B = \frac{a}{2c}$. 2) $A = 180^0 - 2B$.

3) $F = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \sqrt{\left(c + \frac{a}{2}\right)\left(c - \frac{a}{2}\right)}$

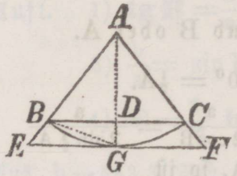
Beispiel. $a = 6$ Fuß, $b = c = 5$ Fuß, $A = 73^0\, 44'\, 23'', 24$, $B = C = 53^0\, 7'\, 48'', 38$, $F = 12 \square$ Fuß.

§ 39. Die Auflösung der gleichschenkligen Dreiecke findet Anwendung bei der Berechnung der regelmäßigen, dem Kreise eingeschriebenen und umgeschriebenen Vielecke, z. B.

Aus der Seite s eines regelm. n=ecks die Radien r und R der ein= und umgeschriebenen Kreise und den Inhalt F des Vielecks zu finden.

Aufl. Sei BAC eines von den n congruenten gleichschenkligen Dreiecken, in welche das n=eck durch die aus seinem Mittelpunkte A nach allen Ecken gezogenen Linien zerlegt wird, so ist die Senkrechte

AD = r, AB = R, BC = s, also BD = $\frac{1}{2}$s, Centriwinkel BAC $= \frac{360^0}{n}$, also BAD $= \frac{180^0}{n}$.



Da AD = r = BD . cotg BAD, und $\frac{BD}{AB} = \sin BAD$, also $AB = R = \frac{BD}{\sin BAD}$, so ist

1) $r = \frac{1}{2}s \cdot \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n}$

2) $R = \dfrac{s}{2 \sin \frac{180^0}{n}}$

3) $F = \frac{s\,r}{2} \cdot n = \frac{1}{4}s^2 n \cdot \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n}$.

Beispiel. Aus s = 64 Fuß, n = 9 findet man r = 87,91928 Fuß, R = 93,56174 Fuß, F = 25320,75 □Fuß.

§ **40.** Aus dem Radius r eines Kreises die Seite, den Umfang und den Inhalt des ein= und umgeschriebenen regelm. n=ecks zu finden. (Fig. § 39).

Aufl. Sind BC und EF die Seiten der ein= und umgeschriebenen n=ecke, so ist AB = AG = r, Winkel BAG $= \frac{180^0}{n}$, BC = 2 BD, BD $= r \sin \frac{180^0}{n}$, AD $= r \cos \frac{180^0}{n}$, also ist für das eingeschriebene n=eck:

1) Seite BC $= 2\,r \sin \frac{180^0}{n}$ 2) Umfang $= 2\,n\,r \sin \frac{180^0}{n}$

3) Inhalt $= \frac{1}{2}$ Umfang . AD $= n r^2 \sin \frac{180^0}{n} \cos \frac{180^0}{n} = \frac{1}{2} n r^2 \sin \frac{360^0}{n}$ (§ 12, 20.)

Ferner ist EF = 2 EG, EG = AG tg $\frac{180^0}{n} = r \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}$, also für das umgeschriebene n=eck:

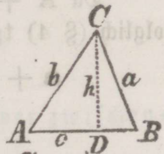
4) Seite EF $= 2\,r \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}$ 5) Umfang $= 2\,n\,r \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}$

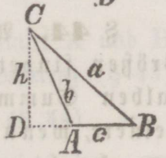
6) Inhalt $= \frac{r}{2} \times$ Umfang $= n\,r^2 \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}$

Beispiel. Aus r = $\frac{1}{2}$ und n = 21600, also $\frac{180^0}{n} = 30''$ findet man sowol für das eingeschriebene wie für das umgeschriebene Vieleck den Umfang = 3,1415926. Hieraus folgt, daß auch die zwischen beiden Umfängen enthaltene Peripherie des Kreises durch diese Zahl ausgedrückt werden muß, welche die **Verhältnißzahl** π ist. Ebenso stimmen die Inhalte der beiden Vielecke noch in sieben Decimalstellen überein, nämlich 0,7853982.

VIII. Auflösung der schiefwinkligen Dreiecke.

§ **41.** Wir betrachten zunächst eine Reihe von **Lehrsätzen**, auf welchen die Auflösung der schiefw. Dreiecke beruht.





Zieht man im spitzwinkligen oder stumpfwinkligen Dreieck ABC aus C die Senkrechte h auf die Seite AB oder deren Verlängerung, so ist in beiden Fällen $h = b \sin A$ und $h = a \sin B$, folglich $b \sin A = a \sin B$ oder

$$\mathbf{a : b = \sin A : \sin B}, \text{ ebenso}$$
$$\mathbf{a : c = \sin A : \sin C}$$
$$\mathbf{b : c = \sin B : \sin C}$$

Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinusse der gegenüberstehenden Winkel.

§ **42.** (Fig. § 41.) Nach einem Satze der Planimetrie ist

in der ersten Figur $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \, . \, AD$

in der zweiten Figur $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \, . \, AD$

Da in der ersten $AD = b \cos A$, in der zweiten $AD = - b \cos A$, so erhält man in beiden Fällen durch Substitution

$$1) \ \mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A}, \text{ also } \mathbf{\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

$$\text{Ebenso } 2) \ \mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B}, \text{ also } \mathbf{\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}$$

$$3) \ \mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C}, \text{ also } \mathbf{\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$$

In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe des Quadrat der beiden anderen Seiten, ver-

mindert um das doppelte Produkt aus eben diesen Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

§ **43.** Es ist $a : b = \sin A : \sin B$, also auch

$a + b : a - b = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B$ oder (§ 12, 30, 31; § 10, 12.)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}{2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}$$ oder

$$\mathbf{a + b : a - b = tg\, \tfrac{1}{2}(A + B) : tg\, \tfrac{1}{2}(A - B)}$$

Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks verhält sich zum Unterschiede derselben, wie die Tangente der halben Summe der gegenüberliegenden Winkel zur Tangente des halben Unterschiedes derselben Winkel.

Da $A + B = 180^0 - C$, also $\frac{1}{2}(A + B) = 90^0 - \frac{1}{2} C$, folglich (§ 4) $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B) = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C$, so kann man auch setzen:

$$\mathbf{a + b : a - b = cotg \tfrac{1}{2} C : tg\, \tfrac{1}{2}(A - B)}$$

§ **44.** Aus der Summe und der Differenz zweier Größen findet man die größere derselben, wenn man zur halben Summe die halbe Differenz addirt, dagegen die kleinere, wenn man von der halben Summe die halbe Differenz abzieht.

Denn es sei x die größere, y die kleinere Größe, die Summe beider gleich s und ihre Differenz gleich d, also $x + y = s$ und $x - y = d$, so erhält man durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{2}(s + d) \quad \text{und} \quad y = \tfrac{1}{2}(s - d).$$

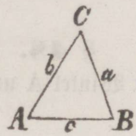
§ **45.** Der Flächeninhalt (F) eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus zwei Seiten und dem Sinus des Zwischenwinkels.

In der Figur § 41 ist nämlich $h = a \sin B$ und $F = \frac{1}{2} ch = \frac{1}{2} ac \sin B$. Ebenso ist $F = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ab \sin C$.

Erster Auflösungsfall.

§ **46.** Gegeben eine Seite a und zwei Winkel; gesucht b, c, F.

Aufl. Sind zwei Winkel eines Dreiecks bekannt, so ist es auch der dritte. Nun ist (§ 41 und § 45)



1) $\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{a \sin B}}{\mathbf{\sin A}}$ 2) $\mathbf{c} = \dfrac{\mathbf{a \sin C}}{\mathbf{\sin A}}$

3) $\mathbf{F} = \dfrac{\mathbf{ab \sin C}}{\mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{a^2 \sin B \sin C}}{\mathbf{2 \sin A}}$.

Aus $a = 487,5$ Fuß, $A = 103^0\,48'$, $B = 42^0\,25'$ folgt $C = 33^0\,47'$, $b = 338,601$ Fuß, $c = 279,13367$ Fuß, $F = 45893,35$ □ Fuß.

Zweiter Auflösungsfall.

§ **47.** Gegeben zwei Seiten a, b und der zwischenliegende Winkel C; gesucht A, B, c, F.

Aufl. Man berechnet die halbe Summe der Winkel A und B, nämlich $\frac{1}{2}(A + B) = 90^0 - \frac{1}{2}C$, und ihre halbe Differenz (§ 43), $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) = \dfrac{a - b}{a + b} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C$; alsdann findet man (§ 44)

1) $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{B})$ 2) $\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{B})$

3) $\mathbf{c} = \dfrac{\mathbf{a \sin C}}{\mathbf{\sin A}} = \dfrac{\mathbf{b \sin C}}{\mathbf{\sin B}}$ 4) $\mathbf{F} = \frac{1}{2}\mathbf{ab \sin C}$

Um negative Differenzen zu vermeiden, bezeichne man mit a die größere und mit b die kleinere der beiden gegebenen Seiten.

Aus $a = 1295,4$ Fuß, $b = 835,7$ Fuß, $C = 74^0\,25'\,30'',4$ folgt

$\frac{1}{2} C = 37^0\,12'\,45'',2$	$\log(a - b) = 2,6624745$
$\dfrac{(A + B)}{2} = 52^0\,47'\,14'',8$	$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C = 0,1195370$
$a + b = 2131,1$	$\mathrm{CD}\log(a+b) = 6,6713962 - 10$
$a - b = 459,7$	$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) = 9,4534077$
	$\frac{1}{2}(A - B) = 15^0\,51'\,27'',51$

1)	$A = 68^0\,38'\,42'',31$	2)	$B = 36^0\,55'\,47'',29$
3) $\log$	$a = 3{,}1124039$	4) $\log a$	$= 3{,}1124039$
$\log\sin C$	$= 9{,}9837527 - 10$	$\log b$	$= 2{,}9220504$
CD $\log\sin A$	$= 0{,}0308905$	$\log\sin C$	$= 9{,}9837527 - 10$
$\log$	$c = 3{,}1270471$	$\log 2F$	$= 6{,}0182070$
	$c = 1339{,}822$ Fuß.		$F = 521407{,}2$ □ Fuß.

§ **48.** Die Seite c kann auch ohne vorhergegangene Berechnung der Winkel A und B unmittelbar aus a, b, C gefunden werden (§ 42, 3)

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}.$$

Alsdann hat man (§ 41) $\sin A = \frac{a \sin C}{c}$ und $\sin B = \frac{b \sin C}{c}$.

Dritter Auflösungsfall.

§ **49.** Gegeben die drei Seiten a, b, c; gesucht A, B, C, F.
Aufl. Man hat § 42 die Gleichungen

$$1)\ \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad 2)\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$3)\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Um andere Formeln zu erhalten, welche die logarithmische Berechnung gestatten, substituire man $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ für cos A in die beiden Gleichungen § 12, 24 und 25

$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$ und $\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$, dann ist

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{4bc}} \qquad \sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{4bc}}$$

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(b + c)^2 - a^2}{4bc}} \qquad \sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc}}$$

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4bc}} \qquad \sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a + b - c)(a - b + c)}{4bc}}$$

Setzt man $\mathbf{a + b + c = 2s}$, also $b + c - a = 2(s - a)$, $a + b - c = 2(s - c)$ und $a - b + c = 2(s - b)$, so ist

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s(s - a)}{bc}} \quad \text{und} \quad \sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{bc}}$$

Die Division der ersten Gl. in die zweite giebt

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

oder wenn man Zähler und Nenner der Wurzelgröße mit $s-a$ multiplicirt.

4) $$\mathbf{tg\,\tfrac{1}{2}A = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}}$$, ebenso

5) $$\mathbf{tg\,\tfrac{1}{2}B = \frac{1}{s-b}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}}$$

6) $$\mathbf{tg\,\tfrac{1}{2}C = \frac{1}{s-c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}}$$

Die Wurzel in diesen Formeln muß immer positiv genommen werden, da jeder halbe Dreieckwinkel spitz ist. Zur Prüfung der Rechnung dient die Gleichung $A + B + C = 180^0$.

Für den Flächeninhalt hat man (§ 45 und § 12, 20)

$$F = \frac{bc\,.\,\sin A}{2} = \frac{bc\,.\,2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A}{2} = bc\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$, also

7) $$\mathbf{F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

Aus $\tfrac{1}{2}bc\sin A = F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ folgt

8) $\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Ferner ist (Fig. § 41)

9) $$h = b\sin A = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Mittels der letzten Formel, in welcher h die auf die Seite c gefällte Höhe vorstellt, läßt sich aus den drei Seiten eines Dreiecks dessen Höhe finden.

Beispiel. $a = 97{,}5$, $b = 84{,}5$ und $c = 91$ Fuß. Hier ist

$\log s = 2{,}1351327$	$\log(s-b) = 1{,}7160033$
$\log(s-a) = 1{,}5910646$	$\log(s-c) = 1{,}6580114$

$$\log\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = 1{,}4149733$$

$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = 9{,}8239087$	$A = 67^0\,22'\,48'',46$
$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = 9{,}6989700$	$B = 53^0\;7'\,48'',36$
$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = 9{,}7569619$	$C = 59^0\,29'\,23'',12$
$\log F = 3{,}5501060$	$F = 3549$ □Fuß.

Vierter Auflösungsfall.

§ **50.** Gegeben zwei Seiten a, b und ein Gegenwinkel A; gesucht B, C, c, F.

Aufl. 1) $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ 2) $C = 180^0 - (A + B)$

3) $c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{b \sin C}{\sin B}$ 4) $F = \frac{1}{2} ab \sin C.$

Die Werthe für C, c, F sind abhängig von dem Werthe des Winkels B, welcher, durch seinen Sinus bestimmt, im Allgemeinen sowol spitz als stumpf sein kann.

Wenn nun $a \geqq b$, also auch $A \geqq B$ ist, so kann B nur spitz genommen werden. Aus a = 154,31 F., b = 123,84 F., $A = 43^0\, 17'\, 12'',3$ folgt $B = 33^0\, 23'\, 5'',89$, $C = 103^0\, 19'\, 41'',81$, c = 218,9947 F., F = 9297,517 □ F.

Wenn aber $a < b$, also auch $A < B$ ist, so kann B sowol spitz als stumpf sein; dann nehmen C, c, F zwei verschiedene Werthe an, und es giebt zwei verschiedene Dreiecke, von denen das eine sowol wie das andere die gegebenen Stücke enthält. Aus a = 308 Fuß, b = 375 Fuß, $A = 37^0\, 45'$ findet man

$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}5740313 \\ \log \sin A &= 9{,}7869056 - 10 \\ \mathrm{CD} \log a &= 7{,}5114493 - 10 \\ \hline \log \sin B &= 9{,}8723862 - 10, \text{ folglich} \end{aligned}$$

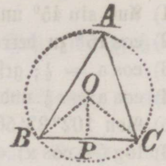
	oder	
1) $B = 48^0\, 11'\, 34'',78$		1) $B = 131^0\, 48'\, 25'',22$
2) $C = 94^0\, 3'\, 25'',22$		2) $C = 10^0\, 26'\, 34'',78$
3) $\log \sin C = 6{,}9989103 - 10$		3) $\log \sin C = 9{,}2582951 - 10$
$\log a = 2{,}4885507$		$\log a = 2{,}4885507$
$\mathrm{CD} \log \sin A = 0{,}2130944$		$\mathrm{CD} \log \sin A = 0{,}2130944$
$\log c = 2{,}7005554$		$\log c = 1{,}9599403$
c = 501,8286 Fuß		c = 91,18854 Fuß.
4) F = 57605,28 □ Fuß		4) F = 10467,6 □ Fuß.

In dem besondern Falle, wo $a < b$ und zugleich $a = b \sin A$, ist $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = 1$, also $B = 90^0$, und es giebt dann nur **ein** Dreieck, welches rechtwinklig ist. Wenn dagegen $a < b$, und zugleich $a < b \sin A$, also $\sin B > 1$ wäre, so kann es gar kein Dreieck mit den gegebenen Stücken geben.

§ **51.** Wegen ihrer häufigen Anwendung mag noch folgende Aufgabe hier gelöst werden.

Aus den Seiten a, b, c eines Dreiecks ABC die Radien R und r des um- und eingeschriebenen Kreises zu finden.

Aufl. 1) Beschreibt man um ABC einen Kreis und zieht aus dem Mittelpunkte O die OP $\perp$ BC, ferner OB und OC, so ist



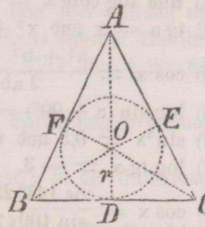
$$BC = 2\,BO \sin \tfrac{1}{2} BOC = 2\,R \sin A, \text{ also}$$

$$R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{a}{2 \sin A}.$$

Da (§ 49, 8) $\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$, wo $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, so ist (§ 49, 7)

$$R = \frac{a\,b\,c}{4\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}} = \frac{abc}{4F}$$

2) Zieht man aus dem Mittelpunkte nach den Winkelspitzen gerade Linien und auf die Seiten a, b, c die Senkrechten OD, OE, OF, so ist



$$F = \tfrac{1}{2}ar + \tfrac{1}{2}br + \tfrac{1}{2}cr = \frac{r}{2}(a+b+c), \text{ also}$$

$$r = \frac{2F}{a+b+c} = \frac{2\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}{a+b+c}$$

IX. Aufgaben.

§ **52.** Goniometrie (§ 2 — § 28).

1) Durch Functionen von Winkeln unter 45^0 auszudrücken a) $\sin 74^0\,41'\,50''$ b) $\sin 124^0\,40'$ c) $\sin 156^0\,30'$ d) $\cos 75^0\,5''$ e) $\cos 125^0$ f) $\cos 170^0\,3'\,35''$ g) $\operatorname{tg} 57^0\,46'$ h) $\operatorname{tg} 95^0\,55'\,6''$ i) $\operatorname{tg} 178^0\,33''$ k) $\operatorname{cotg} 52^0\,48'$ l) $\operatorname{cotg} 134^0$ m) $\operatorname{cotg} 136^0\,5'$.
2) Aus $\sin a = 0{,}6$ zu finden $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$.
3) Aus $\cos a = -0{,}7071$ zu berechnen $\sin a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$.
4) $\operatorname{tg} a = 0{,}0174551$; gesucht $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{cotg} a$.
5) $\operatorname{cotg} a = -0{,}602$; gesucht $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$.
6) $\operatorname{tg} a = 3{,}1246$; gesucht $\operatorname{tg}(a + 45^0)$.

7) $\sin a = 0{,}2$; gesucht $\sin\frac{a}{2}$ und $\cos\frac{a}{2}$.

8) Aus $\cos a = 25 : 144$ zu finden $\cos\frac{a}{2}$.

9) Aus Sinus und Cosinus von 45^0 und 30^0 zu berechnen $\cos 75^0$.

10) $\sin 60^0$ zu berechnen nach § 12, 20.

11) Aus $\sin 45^0$ und $\cos 45^0$ zu finden $\sin 90^0$ und $\cos 90^0$.

12) $\cos 15^0$ zu berechnen (§ 11, 19 und § 12, 24).

13) $\cos a = \frac{1}{2}$; gesucht $\cos 2a$ und $\operatorname{tg} 2a$.

14) $\cos a = \frac{1}{3}$ und $\cos b = \frac{1}{5}$; gesucht $\sin(a+b)$ und $\cos(a-b)$.

15) Von $102^0\,22'\,56'',8$ zu bestimmen $\log\sin$, $\log\cos$, $\log\operatorname{tg}$, $\log\operatorname{cotg}$.

16) $\log(-\cos x) = 0{,}9201496 - 1$, $\log(-\operatorname{tg} y) = 0{,}3176782$.

17) $\sin a = 0{,}433397$; gesucht $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$.

18) $\cos a = -0{,}9781475$; gesucht $\sin a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$.

19) $\operatorname{tg} a = \pm 0{,}371571$; gesucht $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{cotg} a$.

20) $\operatorname{cotg}(45^0 - a) = \sqrt{3}$; gesucht $\log\operatorname{tg}(45^0 + a)$.

21) Die Winkel eines Dreiecks sind a, b, c und $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+c) = 1{,}3168521$; wie groß ist a?

22) Aus $\log\operatorname{cotg} x = 1{,}0031187$ (n) zu finden x und $\log\cos x$.

23) $\operatorname{tg} a = x$ und $x^2 + 3x = -2$; gesucht Winkel a.

24) $\cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, wo $a = \pm 10$, $b = -7$, $c = 13$.

25) $\log\sin(a + 90^0) = 0{,}9904041 - 1$; gesucht $\cos a$.

26) $\sin^2 x = 0{,}5$ und $\operatorname{tg}^2 y = 0{,}2955551$.

27) $\log\operatorname{tg} x = -3$.

28) $\cos x = \frac{\cos 143^0\,28'\,59''}{\sin 109^0\,2'\,28''}$.

29) $\log\operatorname{tg} 2a = 0{,}4771213$; gesucht $\operatorname{tg} a$.

30) $\operatorname{tg} x = 3$; gesucht $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$.

31) $x = \frac{\sin 35^0\,13'\cos 145^0\,50'}{3\operatorname{tg} 140^0\operatorname{cotg} 92^0\,22'\cos 125^0}$.

32) $\cos x = \frac{0{,}5\cos 34^0\,10'}{\operatorname{tg} 73\sin 150^0}$; $y = \frac{345\operatorname{tg} 13^0\,15'\,50''}{\sin^2 15^0}$.

33) Die Länge eines Bogens von 20^0 in Theilen des Radius zu berechnen.

34) Den Winkel zu berechnen, dessen Bogen = 3 in Theilen des Radius.

35) Den Bogen im Gradmaße zu bestimmen, der dem Radius gleich ist.

36) Zu bestimmen $\log\sin 302^0\,54'$, $\log\cos 254^0\,47'$, $\operatorname{tg} 206^0\,34'$, $\operatorname{cotg} 323^0\,53'$, $\cos 346^0$, $\sin 400^0$, $\log\cos 785^0$, $\log\sin 1029^0$, $\sin(-1029^0)$, $\cos(-300^0)$.

§ 53. Rechtwinklige Dreiecke (§ 29 — § 33).

Die Buchstaben A, B, C, a, b, c, F werden hier immer in der n § 29 erklärten Bedeutung genommen werden.

37) Die Seiten des Rechtecks zu bestimmen, dessen Diagonale gleich 325 Fuß ist und mit einer Seite einen Winkel von $25^0\,42'$ bildet.

38) Gegeben a : b : c = 5 : 4 : 3; gesucht B und C.

39) In einem Kreise vom Radius = 3 Fuß den Abstand der Sehne des Bogens von $17^0 20'$ vom Mittelpunkte zu finden.

40) Den kleinsten Winkel des Dreiecks zu bestimmen, dessen Katheten sich wie 5 : 12 verhalten.

41) Aus den Seiten 4937 Fuß und 3874 Fuß eines Rechtecks ihre Winkel mit der Diagonale zu bestimmen.

42) Die Schattenlänge einer Säule von 21,2 Fuß beträgt 34,8 Fuß; wie groß ist die Sonnenhöhe?

43) Der Schatten einer verticalen Stange ist um $\frac{1}{5}$ kürzer als die Stange; welche Höhe hat die Sonne?

44) Die entgegengesetzten Seitenlinien eines geraden 4 Fuß hohen Kegels bilden einen Winkel gleich $73^0 44' 23''$, 24; wie groß ist der Durchmesser der Grundfläche?

45) In einem geraden Kegelstumpfe sind die Radien gleich 4 Fuß und 11,5 F. und der Winkel an der Spitze $73^0 44' 23''$, 28; wie groß ist die krumme Oberfläche?

46) Aus der Diagonale = 17 F. des Axenschnittes eines geraden Cylinders und ihrer Neigung = $61^0 55' 39''$, 04 zur Grundfläche den Inhalt des Cylinders zu finden.

47) Um die Breite eines Flusses zu messen, nimmt man dem Ufer entlang eine Standlinie AB = 159 F. Wenn die in A auf AB senkrecht stehende Visirlinie das jenseitige Ufer in C trifft, und der Winkel ABC = $53^0 7' 48''$, 4 ist; wie breit ist der Fluß?

48) Den Sehwinkel einer Signalstange zu bestimmen, deren Entfernung ihre Länge 5000 Mal übertrifft.

49) Wie groß erscheint ein $5\frac{1}{2}$ Fuß hoher Mensch einem andern in der Entfernung von 138 Fuß?

50) Von der Spitze eines 200 Fuß hohen Thurmes wird der Depressionswinkel zu der Spitze einer auf derselben Horizontalebene mit dem Thurme befindlichen Säule gleich 30^0, und zu dem Fuße derselben gleich 60^0 gefunden. Wie hoch ist die Säule?

51) Unter welchem Sehwinkel erscheint ein 372 Fuß hoher Thurm in der Entfernung von 1712 Fuß, wenn das Auge des Beobachters sich in einer Höhe von 11 F. über dem Boden befindet?

52) Ein Luftballon, dessen Durchmesser = 40 Fuß ist, erhebt sich im Orte A in senkrechter Richtung und erscheint nach einiger Zeit einem Beobachter, welcher sich 4000 Fuß von A befindet, unter einem Sehwinkel von $30'$, also etwa in der Größe des Mondes; wie hoch ist der Ballon gestiegen?

53) Die centrische Entfernung der Sonne von der Erde ist gleich 24063,33 Erdhalbmessern; wie groß ist der scheinbare Sonnenhalbmesser an der Erdoberfläche, wenn derselbe am Mittelpunkte der Erde $16' 0''$, 44 beträgt?

54) Aus dem Flächeninhalte F = 1014 □ Fuß und einem spitzen Winkel B = $53^0 7' 48''$, 39 das Dreieck aufzulösen.

55) Aus dem Flächeninhalte F = 139,9045 □ Fuß und einer Kathele c = 20,5893 Fuß das Dreieck aufzulösen.

56) Aus dem Inhalte $F = 275$ □ Fuß und der Hypotenuse $a = 62$ Fuß das Dreieck zu berechnen.

57) Aus der Hypotenuse $a = 5$ Fuß und dem auf dieselbe gefällten Höhenperpendikel $h = 2,4$ Fuß das Dreieck zu berechnen.

58) Aus der Summe der Hypotenuse und einer Kathete $a + c = s = 8$ Fuß und aus der andern Kathete $b = 4$ Fuß das Dreieck zu berechnen.

59) Aus der Summe der beiden Katheten $b + c = s = 14$ Fuß und einem spitzen Winkel $B = 36^0\,52'\,11'',62$ das Dreieck zu berechnen.

60) Aus der Summe der Hypotenuse und der einen Kathete gleich 18 Fuß und der Summe der Hypotenuse und der andern Kathete gleich 16 Fuß das Dreieck aufzulösen.

61) Aus dem Inhalte $F = 60$ □ Fuß und der Summe der beiden Katheten gleich 32 Fuß das Dreieck zu berechnen.

62) Aus dem Inhalte $F = 4$ □ Fuß und dem Umfange $a + b + c = s = 20$ Fuß das Dreieck zu berechnen.

63) Aus der Hypotenuse $a = 56$ Fuß und der Summe der beiden Katheten $b + c = s = 64$ Fuß das Dreieck zu berechnen.

64) Aus dem Umfange $a + b + c = 90$ Fuß und dem auf die Hypotenuse gefällten Höhenperpendikel $h = 8,7804878$ Fuß das Dreieck zu berechnen.

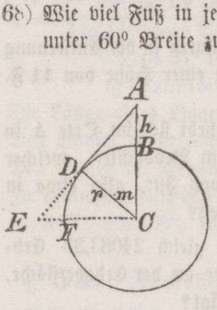
65) Aus einer Kathete $c = 77$ Fuß und einem Winkel $B = 25^0\,3'\,27'',42$ den Radius r des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises zu finden.

In den folgenden Aufgaben ist zu setzen der Durchmesser der Erde gleich 1719 Meilen, der Umfang der Erde gleich 5400 Meilen, ein Grad der Erde gleich 15 Meilen, eine geographische Meile gleich 24303 russ. Fuß.

66) Aus dem Umfange der Erde und der geographischen Breite $50^0\,57'$ eines Ortes den Umfaug seines Parallelkreises zu berechnen.

67) Unter welcher geographischen Breite beträgt der Umfang des Parallelkreises 3208,49 Meilen?

68) Wie viel Fuß in jeder Secunde legt bei der Axendrehung der Erde St. Petersburg unter 60^0 Breite zurück?



69) Wie hoch muß wenigstens ein Berg sein, um ihn in einer Entfernung von 20 Meilen noch sehen zu können?

70) Wie weit erstreckt sich auf der Oberfläche der Erde in einer ebenen Gegend die Fernsicht für einen 5 Fuß großen Menschen?

71) Auf dem Meere sieht man von einem Schiffe aus, wenn das Auge 30 Fuß über der Meeresfläche erhaben ist, in einer Entfernung von 3,33 Meileu den Gipfel des Pico von Teneriffa; man soll die Höhe des Berges finden.

72) Wie weit höchstens können sich zwei Männer, deren jeder 6 Fuß groß ist, von einander entfernen, so daß sie bei der Krümmung der Erde einander noch sichtbar bleibeu?

73) Wie hoch muß der Punkt über der Meeresfläche liegen, von welchem man den

Gipfel des Dhawalagiri, dessen Höhe 27343 Fuß beträgt, in einer Entfernung von 50,35 Meilen sehen kann.

74) Auf dem Chimborazo mißt der Winkel, den die Horizontallinie mit der nach dem Horizonte gehenden Linie macht, $2^0 49' 50'', 39$. Welches ist die Höhe des Berges?

75) Wie weit müßte man sich von der Erde entfernen, um ein solches Stück derselben, wie etwa die kalte Zone = 384977 □ Meilen übersehen zu können?

§ 54. Gleichschenklige Dreiecke und regelmäßige Vielecke (§ 35 — § 40).

76) In einer regelm. vierseitigen Pyramide ist der Kantenwinkel an der Spitze gleich $45^0 35'$ und die Grundkante gleich 120 Fuß; wie groß ist die ganze Oberfläche der Pyramide?

77) Die Seitenlinie eines geraden Kegels beträgt 35 Fuß und hat gegen die Grundlinie eine Neigung von $27^0 19'$; wie groß ist die Höhe h des Kegels und der Durchmesser d der Grundfläche?

78) Das Quadrat der Länge eines Rechtecks ist gleich dem doppelten Quadrate der Breite; unter welchem Winkel durchschneiden sich die Diagonalen?

79) In einem gleichschenkligen Dreieck verhält sich das Quadrat des Schenkels zum Quadrate der Grundlinie wie 3 : 4. Wie groß ist der Winkel an der Spitze?

80) Wie groß ist der Radius desjenigen Kreises, in welchem der Peripheriewinkel $14^0 16' 10''$ auf einer Sehne = 367,375 Fuß steht?

81) Von zwei Feldmessern ist jeder 850 Fuß, und zwar in verschiedener Richtung von einem Signal entfernt. Der eine hat den Winkel der Gesichtslinien zum Signal und zum Standpunkt des andern Feldmessers gleich $36^0 52' 11'', 62$ gefunden. Wie weit sind die Feldmesser von einander entfernt?

82) In einem regelm. 15-eck ist der Radius des umgeschr. Kreises R = 9,201 Fuß; man soll den Radius r des eingesch. Kreises, die Seite s und den Inhalt F des Polygons finden.

83) Ein regelm. 37-eck enthält 24127,94 □ Fuß; man sucht seine Seite s und den Radius r des eingeschr. Kreises.

84) Wie lang ist der Bogen, dessen Sehne 36 Fuß und dessen Radius 18,7 Fuß beträgt?

85) Wenn man aus einem Punkte der Peripherie eines gegebenen Kreises mit dessen Radius einen zweiten Kreis beschreibt, so ist die Hälfte der den beiden Kreisen gemeinschaftlichen Sehne annähernd die Seite des eingeschr. regelm 7-ecks. Um wie viel ist der Mittelpunktswinkel, welcher der so gefundenen Seite entspricht, kleiner als der wahre Mittelpunktswinkel des regelm. 7-ecks?

86) Der Kubikinhalt eines Prismas beträgt 50 Kub.-Fuß, und die Höhe ist das Doppelte von dem Durchmesser des um die Basis beschriebenen Kreises, welche ein regelm. Achteck bildet; wie groß ist die Seite der Basis?

87) Aus dem Inhalte F = 79,15 □ Fuß und dem Schenkel b = 30,4 Fuß das Dreieck aufzulösen.

88) Aus der Höhe $h = 72$ Fuß und der Summe der Grundlinie und des Schenkels $a + b = s = 210$ Fuß das Dreieck zu berechnen.

89) Aus dem Umfange 4 Fuß und der Höhe 1 Fuß das gleichschenklige Dreieck zu berechnen.

90) Aus den Umfängen der einem beliebigen Kreise ein- und umgeschriebenen regelm. 24000-ecke die Zahl π zu berechnen.

91) Aus dem Radius $r = 23{,}4$ Fuß eines Kreises und einem Bogen $a = 17^0\,13'\,24''$ die entsprechende Sehne und den Kreisabschnitt zu berechnen.

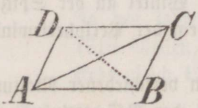
§ 55. Schiefwinklige Dreiecke (§ 41 — § 51).

92) Die Winkel eines Dreiecks aus den Verhältnissen der drei Seiten $a : b : c = 8 : 15 : 17$ zu berechnen.

93) Aus den Seiten $a = 56$, $b = 52$, $c = 60$ Fuß eines Dreiecks ABC die Gerade zu berechnen, welche von A nach der Mitte von a gezogen ist.

94) Aus den Seiten $a = 106{,}4177$, $b = 115{,}47$, $c = 94{,}1321$ Fuß eines Dreiecks dessen drei Höhen zu berechnen.

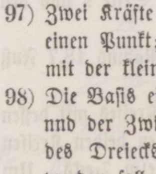
95) Von einem Punkte aus bewegen sich zwei Körper in geraden Linien, indem in jeder Secunde der eine 83,4 Fuß, der andere 70,5 Fuß zurückgelegt, und die Richtungen beider Körper mit einander einen Winkel von $98^0\,43'$ bilden. Wie groß ist der Abstand der Körper von einander nach 5 Secunden?



96) Wenn zwei Kräfte, deren Richtungen und verhältnißmäßige Größe wir durch die Linien AB und AD darstellen, unter einem beliebigen Winkel auf einen Punkt A wirken, so stellt, wie die Mechanik lehrt, die Diagonale AC des über diesen Kräften construirten Parallelogramms die Größe und Richtung der Gesammtwirkung beider Kräfte, oder die so genannte Mittelkraft dar, welche allein das Nämliche bewirkt, als die beiden gegebenen Kräfte (Seitenkräfte) zusammen. Gesetzt nun, man kenne eine Seitenkraft $= 684{,}56756$ Fuß und die von derselben mit der andern Seitenkraft, sowie mit der Mittelkraft gebildeten Winkel $90^0\,50'\,40''$ und $44^0\,44'\,41''$; wie groß ist die andere Seitenkraft x und die Mittelkraft y?

97) Zwei Kräfte von 200 ℔ und 500 ℔ wirken unter einem Winkel von 70^0 auf einen Punkt; welches ist die Mittelkraft x, und wie groß ist der von derselben mit der kleinern Seitenkraft gebildete Winkel y?

98) Die Basis eines Dreiecks beträgt $a = 93$ Fuß, eine zweite Seite $b = 141$ Fuß und der Zwischenwinkel $C = 42^0\,31'\,10''$. Wenn nun durch eine aus der Spitze A des Dreiecks gezogene Gerade von demselben der dritte Theil abgeschnitten werden soll, in welche beiden Theile muß der Winkel A zerlegt werden?



99) Um die Höhe eines Thurmes AB, der auf dem Abhange eines Berges steht, zu messen, ist von dem Fußpunkte des Thurmes den Berg hinab eine Standlinie $BD = 428$ Fuß gezogen. Die Visirlinien nach der Spitze des Thurmes bilden mit der Standlinie am Ende D und in der Mitte C derselben die Winkel $35^0\,24'\,42'',97$ und $53^0\,33'\,52'',07$. Wie hoch ist der Thurm?

100) Um die Breite CD eines Flusses zu messen (Fig. 99) hat man an die Verlängerung von CD unter dem Winkel $B = 116^\circ 10'$ eine Standlinie $BA = 200$ Fuß angelegt, welche mit den Visirlinien nach beiden Ufern die Winkel $BAC = 37^\circ 20'$ und $BAD = 45^\circ 5'$ bildet. Wie breit ist der Fluß?

101) Das Dreieck ABD (Fig. 99) aufzulösen, in welchem der Winkel $D = 53^\circ 7' 48'',2$ ist und die Seite $BD = 56$ Fuß von der Transversalen $AC = 48{,}66209$ Fuß halbirt wird.

102) Es sei in einem Dreieck die Basis $a = 702$ Fuß, die Höhe $h = 537$ Fuß und die Seite $b = 638$ Fuß; wie groß ist die Seite c und der Winkel A an der Spitze?

103) Aus den Seiten $a = 975$ Fuß, $b = 845$ Fuß und dem Winkel $A = 67^\circ 22' 48'',48$ die drei Höhen des Dreiecks zu berechnen.

104) Der Durchmesser eines Kegels beträgt 16 Fuß, seine größte Seitenlinie 192 Fuß und seine kleinste 180 Fuß; wie groß ist der Kubikinhalt des Kegels?

105) Die Spitze eines Thurmes wird von einem gewissen Standpunkte unter dem Elevationswinkel von $35^\circ 9' 28'',97$ gesehen. Man geht 76 Fuß dem Thurme näher und findet jetzt den Elevationswinkel gleich $56^\circ 35'$. Wie weit (x) ist man noch von dem Thurme entfernt und wie hoch (y) ist derselbe?

106) Den Inhalt einer geraden Pyramide, deren Basis ein Quadrat ist, aus der Grundkante $a = 4{,}2126907$ Fuß und einer Seitenkante $s = 5$ Fuß zu berechnen.

107) Im Parallelogramm ABCD (Fig. 96) ist $AB = 380$ Fuß, $AD = 241$ Fuß, $AC = 527$ Fuß; wie groß ist der Winkel A und die Diagonale BD?

108) Man construirt in einem gegebenen Kreise näherungsweise ein regelm. Siebeneck, wenn man als dessen Seite die halbe Seite des eingeschriebenen regelm. Dreiecks nimmt. Um wieviel weicht der Mittelpunktswinkel des so beschriebenen Siebenecks von dem des vollkommen richtigen regelm. Siebenecks ab?

109) Das Dreieck aus einer Seite $c = 2346$ Fuß, dem Gegenwinkel $C = 92^\circ 18'$ und dem Verhältniß der beiden anderen $a : b = 11 : 8$ zu berechnen.

110) Das Dreieck aus dem Inhalte $F = 120$ □ Fuß und den Winkeln $A = 14^\circ 15' 0'',116$ und $B = 22^\circ 37' 11'',5$ zu berechnen.

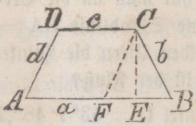
111) Das Dreieck aus dem Inhalte $F = 341{,}06$ □ Fuß und zwei Seiten $a = 139{,}3$ und $b = 27{,}2$ Fuß zu berechnen.

112) Das Dreieck aus der Grundlinie $a = 98{,}57041$ Fuß, der Höhe $h = 43{,}8$ Fuß und dem Winkel an der Spitze $A = 95^\circ 39' 20''$ zu berechnen.

113) Das Dreieck aus den Abschnitten 36 Fuß und 8 Fuß, in welche das Höhenperpendikel die Grundlinie theilt, und aus dem Winkel $95^\circ 27' 9'',437$ an der Spitze zu berechnen.

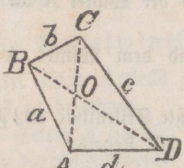
114) Aus zwei Seiten $b = 445{,}81$ Fuß, $c = 443{,}6$ Fuß und einem Gegenwinkel $B = 33^\circ 21' 16''$ eines Dreiecks die Radien R und r des um- und eingeschriebenen Kreises zu berechnen.

115) Die drei aus den Spitzen A, B, C eines Dreiecks gezogenen Höhen sind $a = 728$ Fuß, $b = 840$ Fuß, $c = 780$ Fuß, man soll das Dreieck auflösen.



116) In einem Trapeze ABCD sind gegeben die Parallelseiten a = 13 Fuß, c = 5 Fuß, und die anderen Seiten d = 15 Fuß, b = 17 Fuß; man soll die Winkel und den Inhalt F des Trapezes finden.

117) Von einem Trapeze kennt man die Höhe CE = 7,56 Fuß und die Basis a = 33 Fuß nebst den anliegenden Winkeln A = 30° 14′ 16″ und B = 40° 40′ 38″; man soll die der Basis parallele Seite c finden.



118) In dem Viereck ABCD seien die beiden Diagonalen einander gleich, und zwar AC = BD = 28,745788 Fuß und der von ihnen gebildete Winkel AOD = 75° 30′ wie groß ist der Inhalt F des Vierecks?

119) Man soll die Länge der unzugänglichen Linie BC (Fig. 118) dadurch bestimmen; daß man eine Standlinie annimmt, an deren Endpunkten sowol B als C, sichtbar ist, nämlich AD = 45501,62 Fuß, ferner die Winkel mißt BAD = 106° 22′ 45″, 5, CAD = 67° 13′ 57″, 4, ADC = 62° 42′ 48″, 8, ADB = 44° 12′ 39″, 6.

120) Im Viereck ABCD (Fig. 118) sind die Seiten a = 24 Fuß, b = 20 Fuß, c = 18 Fuß, d = 16 Fuß und der Winkel A = 85° 30′ gegeben; man sucht die Wink,l B, C, D, die Diagonale AC und den Inhalt F des Vierecks.

121) Man will in einem Walde eine vierseitige Fläche ABCD (Fig. 118) von 400 □ Faden abstecken, und läßt zu diesem Zwecke von den beiden Standpunkten A und B aus zwei schmale Gänge AC und BD durchhauen, die sich unter einem Winkel von 75° 30′ schneiden. Wie lang muß jeder der beiden Gänge genommen werden, wenn dieselben einander gleich sein sollen?

Druck von H. Laakmann in Dorpat.

Druck von H. Laakmann in Dorpat.