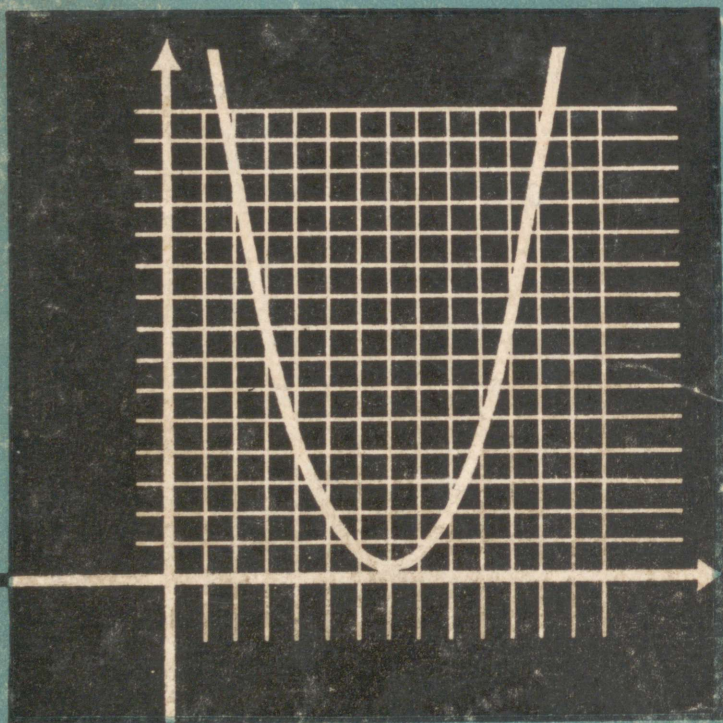


0

E.ETVERK A.VIHMAN

M

atemaatika



VIII

A-24520

E. ETVERK, A. VIHMAN

MATEMAATIKA

VIII KLASSILE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1962

Kaane-kujundus S. Lii-berg

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt

TARTU ÜLIKÜLL
RAAMATUKOGU

ALGEBRA

1. KORDAMISEKS.

1. Teosta järgmised tehted.

a) $\left(4\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 0,9 - 0,3 : \frac{3}{7}\right) \cdot 3\frac{3}{4}$

b) $\frac{7}{8} : \left[\left(2,25 - 1\frac{3}{8}\right) \cdot \left(5 - \frac{2}{3} \cdot 6,375\right)\right]$

c) $\left(6 : 2\frac{1}{4} - \frac{5}{12}\right) \cdot \left(\frac{2}{7} + 0,2\right) : \frac{9}{70}$

d) $(0,78 : 2,6 + \frac{2}{3} \cdot 4,59) : \left(3 - 1 : \frac{7}{9}\right)$

e) $120 \cdot 0,01 + \frac{36}{55} \cdot \left(\frac{7}{48} - \frac{7}{45} : 2,24\right)$

2. Väljenda protsentides järgmised suhted.

a) $\left(5,8 - 3 : 1\frac{2}{3}\right) : \left(5,8 + 3 : 1\frac{2}{3}\right)$

b) $\frac{13,4 - 4,8 \cdot \frac{11}{12}}{7,2 + 4,4 : \frac{11}{12}}$

3. a) Leia 35% avaldise $14,7 + 6,3 : 2\frac{1}{3}$ väärtusest.

b) Leia 72% avaldise $180,75 - 12,6 \cdot \left(7\frac{2}{3} - 4\frac{3}{4}\right)$ väärtusest.

4. a) Leia arv, millest 48% võrdub avaldise

$$48,6 + 14,4 \cdot \left(24\frac{5}{6} - 18\frac{7}{8}\right)$$

väärtusega.

b) Leia arv, millest 1,5% võrdub avaldise

$$\frac{3}{4} \cdot 2,5 - \frac{5}{8} \cdot 1,2$$

väärtusega.

5. Lihtsusta järgmised avaldised.

a) $\frac{3}{3a+4} + \frac{4}{4-3a} + \frac{3a+29}{9a^2-16}$

b) $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{5x}{x^2-1} - \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{3}{x^2-1}$

c) $\frac{(2x+5y)^2 - (2x+5y)(2x-5y)}{10y}$

d) $\frac{(3a-2b)^2 - (3a+2b)^2}{2a}$

e) $\frac{12}{x^2-4} \cdot \left(\frac{x^2+4}{4x} - 1\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)$

f) $\frac{(x+y)^2}{2x-2y} : \frac{3x+3y}{x-y} - \frac{x^2-y^2}{16} \cdot \frac{12}{x+y}$

6. Osteti võid ja juustu, kokku 1 kg 2,78 rbl. eest. Kilogramm võid maksis 2,70 rbl. ja kilogramm juustu 2,90 rbl. Kui palju osteti võid ja kui palju juustu?

7. Ristkülikukujulise põllu pikkus ja laius suhtuvad nagu 5 : 3. Põllu ümbermõõt on 1088 m. Leia põllu pindala.

8. Ristkülikukujulise aiamaa ümbermõõt on 234 m. Kui aiamaa oleks 12 m lühem, siis tema laius oleks pool pikkusest. Leia aiamaa pikkus ja laius.

9. Puksiiril kulus praami vedades ühest sadamast teise sõitmiseks 5 tundi rohkem aega kui sealt tagasi sõitmiseks. Praami vedades liikus puksiir kiirusega 4 km tunnis ja tagasi sõites kiirusega 9 km tunnis. Kui suur on nende sadamate vaheline kaugus?

10. Aurikul kulus pärioolu mööda jõge ühest sadamast teise sõitmiseks 2 tundi rohkem aega kui sama tee sõitmiseks vastuvoolu. Auriku kiirus pärioolu oli 15 km tunnis ja vastuvoolu 9 km tunnis. Kui suur on nende sadamate vaheline kaugus?

11. Arvuta tõkked, millede vahel asetseb suuruse täpne väärtus, kui suuruse ligikaudne väärtus on

$$0,98 (\pm 0,08); 307 (\pm 18); 0,023; 1,01; 1650.$$

12. Leia ligikaudsete arvude 0,7048 ja 0,27 korrutis ja jagatis
a) juhtumil, kui see on vahepealne tulemus, b) juhtumil, kui see on lõpptulemus.

13. Ristküliku mõõtmed on ligikaudu 8,7 cm ja 14,2 cm. Mis-suguste tükete vahel asetseb ristküliku pindala väärtus? Anna pindala sobivalt ümardatuna.

14. Arvuta trapetsi pindala, kui tema alused on ligikaudu 24,7 m ja 13,5 m ning kõrgus on 12,8 m.

15. Teosta ligikaudsete arvudega järgmised tehted.

a) $2,7 \cdot 0,38 + 1,9 \cdot 7,3 - 2,9 \cdot 1,8$

b) $1,49 : 0,23 - 3,808 : 0,61$

c) $3,02^3 : 2,01^2$

16. a) Avalda suurus b valemist $h = \frac{a-2b}{3}$.

b) „ „ y „ $x = 2u + \frac{y}{5}$.

c) „ „ x „ $ax = 1 + 2x$.

d) „ „ z „ $az + b = bz + a$.

17. Arvuta rombi pindala, kui tema diagonaalid on 18 cm ja 12 cm.

18. Arvuta risttahuka täispindala, kui tema mõõtmed on 6,4 dm, 4,5 dm ja 2,8 dm.

19. Kraavi sügavus on 0,8 m, laius põhjast 0,2 m ja pealt 1,2 m. Mitu kuupmeetrit mulda on kraavi kaevamisel välja võetud, kui kraavi pikkus on 0,42 km?

20. Lahuta järgnevad hulkliikmed tegureiks.

a) $ax^2 + x - a - a^2x$

b) $ab + 2c - ac - 2b$

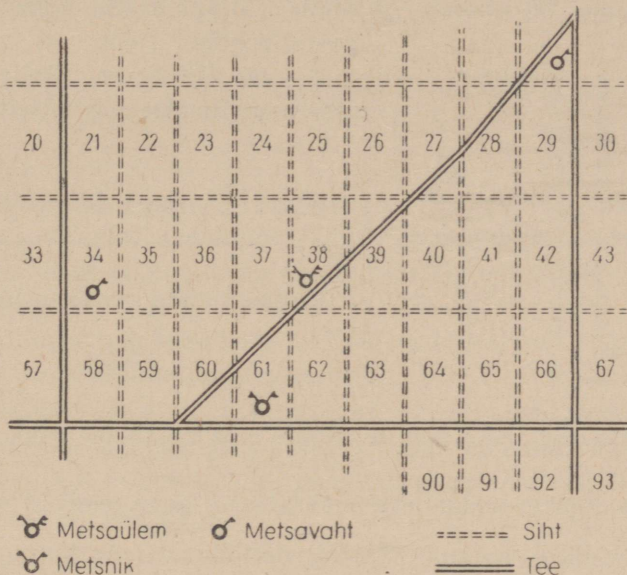
c) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

d) $a^2x^4 - 100$

e) $27a^6z^3 - 8y^3$

f) $x^4 + 0,8x^2y + 0,16y^2$

Leia metsaplaani (joon. 2) järgi, kus asub metskonna kantselei (metsaülem), kuidas sealt minna raielangile, mis asub kvartalil 33, ja kuidas sealt pääseb metsniku juurest läbi minnes tai-meaeda, mis asub kvartalil 63?



Joon. 2.

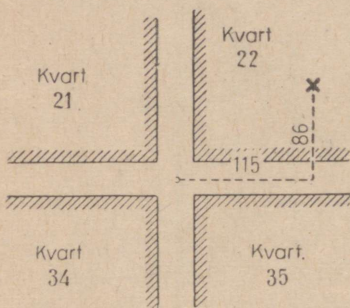
b) Metsasihtide igasse ristumiskohta paigutatakse kvartali-post, mis kannab seal kokkupuutuva nelja kvartali numbreid (joon. 3).



Joon. 3.

Leia jooniselt 2, kus asub kvartalipost, millel leiduvad kvartalinumbrid 36 ja 59; 42 ja 65; 64 ja 91.

c) Lapsed leidsid metsast rebaseuru, mis asus kvartalil 22. Selle asukoha määramiseks mõõtsid nad sammudega uru kauguse sihist, saades 86 sammu, ja sihile väljajõudmise koha kauguse kvartalipostist (joon. 4). Viimane kaugus oli 115 sammu. Rebase «aadress» märgiti üles järgmiselt:



Kv. 22, kv-post 22/34, 115/86

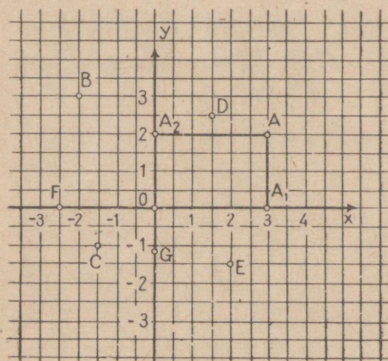
Kuidas nende andmete järgi leida üles rebaseurgu?

Joon. 4.

24. a) Too näiteid, kus tegelikus elus vajatakse asukoha määramist.

b) Missuguste andmetega määratakse laeva asukoht merel?

TASAPINNA PUNKTI KOORDINAADID.



Jooni. 5.

25. Joonis 5 kujutab kaht teineteisega ristuvat arotelge x ja y , millel on ühine nullpunkt O ja võrdsed ühikud. Neid telgi kasutatakse punkti asukoha määramiseks tasapinnal. Selleks et määrata mingi punkti A asukohta, tõmmatakse punktist A telgedele ristlõigud AA_1 ja AA_2 ning loetakse telgedelt nende ristlõikude aluspunktide A_1 ja A_2 kaugused nullpunktist O . Neid kaugusi (koos vastava märgiga $+$ või $-$) nimetatakse punkti A koordi-

naatideks ja tähistatakse tähtedega x ja y . Punkti esimene koordinaat $x = OA_1$ ja teda nimetatakse punkti abstsissiks; punkti

teine koordinaat $y = OA_2$ ja teda nimetatakse punkti ordinaadiks. Joonisel 5 punkti A abstsiss on 3 ja ordinaat on 2.

Tasapinna igal punktil on kaks koordinaati: abstsiss ja ordinaat.

Leia jooniselt 5 punktide B, C, D, E, F, G, A_1 ja A_2 abstsiss ja ordinaat. Tulemused kirjuta tabelisse:

Punkt	Punkti	
	abstsiss	ordinaat
A	3	2

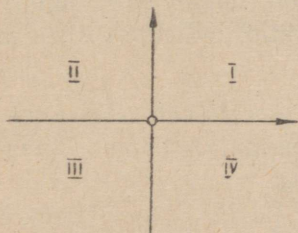
26. Kaht teineteisega ristuvat sirget x ja y , mille suhtes määratakse punkti asukohta tasapinnal, nimetatakse koordinaattelgedeks; neist esimene telg on abstsissstelg ehk x -telg ja teine on ordinaattelg ehk y -telg. Abstsiss- ja ordinaattelg koos moodustavad koordinaatteljestiku ehk lihtsalt xy -teljestiku. Telgede lõikepunkt O on koordinaatide nullpunkt.

27. Lõigud A_2A ja A_1A jooniselt 5 näitavad punkti A kaugust vastavalt x -teljest ja y -teljest. Seejuures punkti kaugus ordinaatteljest $A_2A = OA_1 = x$, ja punkti kaugus abstsisssteljest $A_1A = OA_2 = y$. Nii näeme, et

punkti abstsiss näitab punkti kaugust ordinaatteljest ja punkti ordinaat näitab punkti kaugust abstsisssteljest.

Kus peab asetsema punkt, et tema abstsiss oleks null; et tema ordinaat oleks null?

Mis on abstsisssteljel asetseva punkti ordinaadiks? Mis on ordinaatteljel asetseva punkti abstsissiks?



Joon. 6.

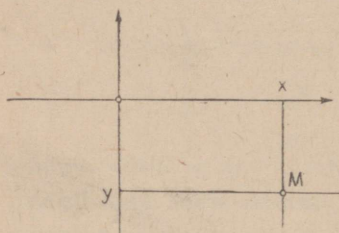
28. Koordinaatteljed jaotavad tasapinna neljaks veerandiks. Veerandid nummerdame jooniselt 6 näidatud järjekorras.

Tee kindlaks, missuguse märgiga on punkti abstsiss ja missuguse märgiga ordinaat, kui punkt asetseb tasapinna I veerandis, II veerandis, III veerandis, IV veerandis. Missugustes veerandites on punkti abstsiss negatiivne, missugustes ordinaat negatiivne?

29. Punkti, mille abstsiss on 2 ja ordinaat on -3 , märgitakse sümboliga $(2; -3)$. Lauset «punkti M abstsiss on 2 ja ordinaat on -3 » ehk «punkti M koordinaadid on 2 ja -3 » kirjutatakse lühidalt kujul

$$M(2; -3).$$

Kirjuta sel kujul üles kõik joonisel 5 antud punktid.



Joon. 7.

30. Punkti leidmiseks tema koordinaatide x ja y järgi joonestame abstsissitelje punktist x ordinaatteljega paralleelse sirge ja ordinaattelje punktist y abstsissiteljega paralleelse sirge (joon. 7). Nende kahe sirge lõikepunkt M ongi otsitav punkt, sest tema koordinaatideks on antud arvud x ja y . Niisuguseid punkte on ainult üks, sest kaks sirget saavad lõikuda ainult ühes punktis.

31. Joonesta teljestik ja kujuta selles järgmised punktid:

$A(-2; 1)$	$B(1; -2)$	$C(-1; 2,5)$	$D(0; 3)$
$E(-3; 0)$	$F(1,5; -3)$	$G(0,8; 2,2)$	$H(2,5; 0)$

ÜLESANDEID KOORDINAATIDE KASUTAMISE KOHTA

32. Joonesta teljestik ja selles sirge, mis läbib punkte $(-3; -1)$ ja $(2; 4)$. Missugustes punktides lõikab see sirge koordinaattelgi?

33. Joonesta teljestik ja selles sirge, mis lõikab telgi punktides $(3; 0)$ ja $(0; 1)$. Leia sellel sirgel punktid, millede abstsissid on $6; -1,5; -3$.

34. Joonesta teljestik ja selles sirge, mis lõikab telgi punktides $(-1; 0)$ ja $(0; 2)$. Leia sellel sirgel punktid, millede ordinaadid on $-1; 4; 6$.

35. a) Leia punktidele

$P(2; 4)$	$Q(-5; 1)$	$R(-1,5; -3)$
-----------	------------	---------------

x -telje suhtes sümmeetrilised punktid P_1, Q_1, R_1 .

b) Leia punktidele

$S(1; 5)$

$T(-3; 4)$

$U(-1; -2)$

y -telje suhtes sümmeetrilised punktid S_1 , T_1 , U_1 .

36. a) Korrapärase kuusnurga keskpunkt asetseb koordinaatide alguspunktis ja üks tipp punktis $(0; 4)$. Joonesta see kuusnurk ja leia jooniselt tema teiste tippude koordinaadid.

b) Lahenda eelmine ülesanne eeldusel, et kuusnurga keskpunkt on punktis $(3; -2)$ ja üks tipp punktis $(3; 2)$.

37. a) Joonesta teljestikus ruut, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis ja üks tipp on punktis $(0; -4)$. Leia teiste tippude koordinaadid ja arvuta ruudu pindala.

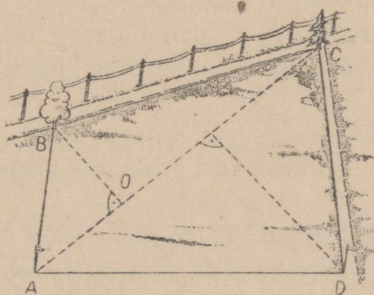
b) Lahenda eelmine ülesanne eeldusel, et ruudu keskpunktiks on punkt $(1; 3)$ ja üheks tipuks on punkt $(-3; -1)$.

38. a) Joonesta teljestikus kolmnurk, mille tippudeks on punktid $(1; 3)$, $(-3; -2)$ ja $(0; 4)$. Leia kolmnurga pindala, mõõtes pindala arvutamiseks vajalikkude lõikude pikkused jooniselt.

b) Joonesta teljestikus romb, mille diagonaalide lõikepunkt asetseb koordinaatide alguses, üks tipp punktis $(0; 3)$ ja teine tipp punktis $(-5; 0)$. Leia rombi pindala.

39. Nelinurkse maatüki $ABCD$ plaanistamiseks ja pindala määramiseks võeti diagonaalsirge AC abstsissteljeks ja sellega ristuv sirge läbi tipu B ordinaatteljeks (joon. 8). Koordinaatide määramisel (meetrites) saadi: $A(-198; 0)$, $B(0; 250)$, $C(602; 0)$, $D(202; -246)$.

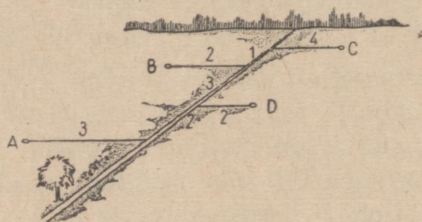
a) Valmista maatüki plaan, kujutades 100 m lõiguna 1 cm. Vajaduse korral ümarda määramise tulemusi.



Joon. 8.

b) Arvuta maatüki pindala, vaadeldes seda kahe kolmnurga pindalade summana.

40. a) Joonis 9 kujutab sirget maanteed, millega ristuvad küladesse *A*, *B*, *C* ja *D* viivad haruteed. Joonesta koordinaatteljetikus külade asetusplaan, võttes abstsissiteljeks maantee ja ordinaatteljeks küla *A* harutee. Joonestamiseks vajalikud kaugused on joonisel antud (kilomeetrites).



Joon. 9.

b) Anna külade asukohad koordinaatide abil.

c) Kui suur on külade *C* ja *D* vaheline kaugus otsejoones ja kui pikk on neid ühendav tee?

3. FUNKTSIONAALNE SÕLTUVUS.

FUNKTSIOON JA ARGUMENT.

41. Kui ühe suuruse iga antud väärtuse järgi (lubatud väärtuste hulgast) on võimalik leida teise suuruse vastavat väärtust, siis öeldakse, et teine suurus on **sõltuv** esimesest ehk teine suurus on esimese **funktsioon**. Näiteks ruudu pindala on ruudu külje pikkuse funktsioon, sest külje pikkuse järgi on alati võimalik leida ruudu pindala.

Nimeta suurus, mille funktsiooniks on

- a) ruudu ümbermõõt;
- b) võrdkülgse kolmnurga pindala;
- c) raudtee sõidupileti hind;
- d) n kaustiku ostusumma, kui kaustiku hind on 14 kop.;
- e) ristküliku pindala, kui tema alus on 8 cm.

42. Suurust, mille väärtuste järgi leitakse teise, esimesest sõltuva suuruse väärtusi, nimetatakse **vabalt muutuvaks** suuruseks ehk **argumendiks**. Näiteks ruudu pindala leidmisel külje pikkuse järgi on argumendiks külje pikkus ja funktsiooniks pindala. Kui aga, ümberpöördult, pindala järgi leitakse külje pikkus, siis on argumendiks pindala ja funktsiooniks külje pikkus.

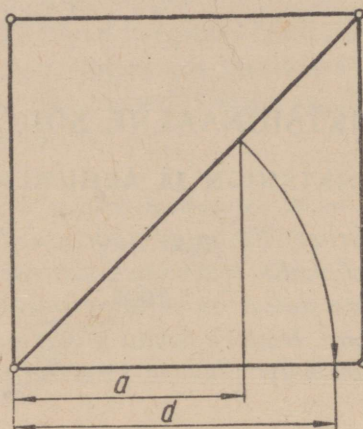
Mis on argumendiks ja mis funktsiooniks ülesande 41 näidetes?

43. Funktsiooni väärtuste leidmine argumendi väärtuste põhjal võib toimuda mitmeti: arvutamise, jooniselt mõõtmise, sellekohasest tabelist leidmise või vajaliku katse korraldamise (näiteks kaalumise) teel.

a) Koosta ruudu külje pikkuse ja ruudu pindala vastavate väärtuste tabel, andes külje pikkusele täisarvulised väärtused 1-st kuni 10-ni.

b) Koosta ruudu külje pikkuse ja diagonaali pikkuse vastavate väärtuste tabel, andes külje pikkusele täisarvulised väärtused 1-st kuni 10-ni. Ruudu külje pikkusele a vastav diagonaali pikkus d leia

graafiliselt, kasutades selleks millimeeterpaberil joonestatud ruutu küljega 10 cm (joon. 10).



Joon. 10.

44. On suurusi, mis võivad aga sõltuda ka mitmest suurusest ehk, teisiti, on mitme argumendi funktsioonid. Nii näiteks on kolmnurga pindala kahe suuruse, nimelt tema aluse ja kõrguse funktsioon.

Mitme suuruse ja missuguste suuruste funktsiooniks on a) risttahuka ruumala? b) ostetud kauba (üht ja sama liiki) koguhind? c) kuubikujulise eseme kaal?

45. Mitmest suurusest sõltuva suuruse uurimisel antakse kõikidele argumentidele peale ühe kindlad väärtused ja lastakse muutada ainult seda üht argumenti. Rakendades seda võtet kordamööda iga argumendi suhtes, saame mitmest suurusest sõltuva suuruse uurimise taandada ühest suurusest sõltuva suuruse uurimisele. Nii näiteks võime kolmnurga pindala uurimisel võtta algul aluse võrdseks 10 cm, siis tema pindala on ainult kõrguse funktsioon, sest kõrguse igale väärtusele vastab üks pindala väärtus. Võttes seejärel kõrguse näiteks võrdseks 10 cm, saame kolmnurga pindala ainult aluse funktsioonina.

Mille funktsiooniks on:

a) ristküliku pindala, kui tema alus on 5 cm? kui tema kõrgus on 5 cm?

b) ruudukujulise põhjaga risttahuka ruumala, kui tema kõrgus on antud? põhiserv on antud?

c) Tallinnast Rakveresse sõitmiseks kuluv aeg?

46. Avalda valemi abil:

a) kuubi pindala S serva pikkuse a funktsioonina;

b) korrapärase kaheksanurga übermõõt u kaheksanurga külje pikkuse a funktsioonina;

c) võrdhaarse kolmnurga alusnurk β tipunurga α funktsioonina;

d) eseme ruumala tema kaalu funktsioonina, kui eseme aine erikaal on 2,5.

SUURUSTE SÕLTUVUSE GRAAFILINE KUJUTAMINE.

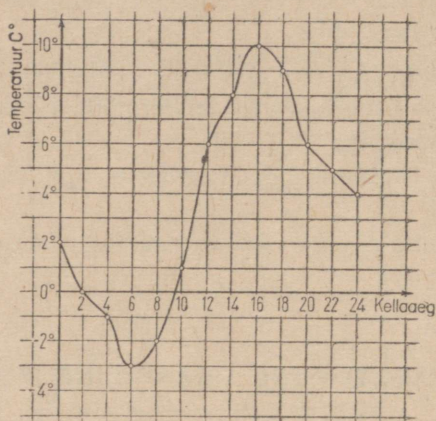
47. Õhutemperatuuri muutumise jälgimiseks mõõdeti seda ühe ööpäeva vältel iga kahe tunni tagant. Mõõtmise tulemused olid järgmised:

Kellaaeg	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temp. C°	2	0	—1	—3	—2	1	6	8	10	9	6	5	4

Saadud tabel kujutab vaatluspäeva õhutemperatuuri sõltuvust kellaajast. Selle sõltuvuse kujutamiseks joonise abil võtame kaks teineteisega ristuvat arvtelge (joon. 11) ja kujutame rõhtteljel kellaaega ning püstteljel temperatuuri. Ühikud nende suuruste kujutamiseks valime kummagi telje jaoks eraldi ja nimelt nii, et aega saaks kujutada 0 tunnist kuni 24 tunnini ja temperatuuri —3°-st kuni 10°-ni. Selles teljestikus saame tabeli iga arvupaari kujutiseks ühe punkti, mille abstsissiks on kellaaeg ja ordinaadiks temperatuur. Seega iga saadud punkti kaugus temperatuuriteljest näitab temperatuuri mõõtmise kellaaega ja kaugus ajateljest näitab sellele kellaaajale vastavat temperatuuri.

Ülevaate saamiseks temperatuuri muutumise käigust ühendame saadud punktid sujuva kõverjoonega, mis läbib kõiki neid punkte. Selle kõverjoone tõusmine ja langemine näitab tempera-

tuuri tõusmist ja langemist. Saadud joonist nimetatakse temperatuuri graafikuks.



Joon. 11.

48. a) Kirjelda saadud graafiku põhjal õhutemperatuuri ööpäevast muutumist, jaotades ööpäeva vahemikkudeks, milledes temperatuur ainult langes või ainult tõusis. Alusta nii:

1) Kella 0-st kuni kella 6-ni temperatuur langes ...°-st kuni ...°-ni.

2) Kella 6-st kuni kella...

b) Lahenda sama graafiku abil veel järgmised küsimused.

1. Kui kõrge võis olla temperatuur vaatluspäeval kell 1, kell 3, kell 11, kell 15?

2. Millal võis vaatluspäeval temperatuur olla 0°, 3°, 8°, 10°?

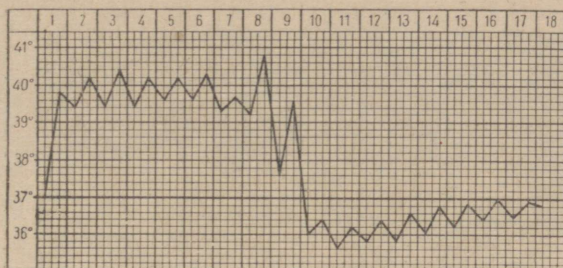
3. Missugune oli sel päeval maksimaalne temperatuur ja mis kellaajal? Missugune oli sel päeval minimaalne temperatuur ja mis kellaajal?

4. Millal oli sel päeval temperatuur üle nulli, millal alla nulli?

5. Millal oli sel päeval temperatuur üle 6°?

49. Haige kehatemperatuuri graafikus (joon. 12) ühendatakse temperatuuri kujutavad punktid murdjoone abil, kuna sujuva kõvera joonestamine on tülikas.

Joonis 12 kujutab haige temperatuuri muutumise käiku sõltuvalt haiguspäevadest. Vasta selle põhjal järgmistele küsimustele.



Joon. 12.

1. Mitu korda ööpäevas ja millal mõõdeti haige temperatuuri?
2. Mitu päeva kestis palavik?
3. Millal oli kõrgeim temperatuur ja kui kõrge see oli?
4. Kas haigel esines alatemperatuuri (alla 36°)? Millal?
5. Millal haige temperatuur muutus normaalseks, s. t. jäi püsima 36° ja 37° vahele?

50. a) Valmista joonise 12 eeskujul haige temperatuuri graafik järgmise tabeli andmeil, võttes temperatuuriteljel alguspunktiks 35° ja kujutamiseühikuks kummaldi teijel 1 cm.

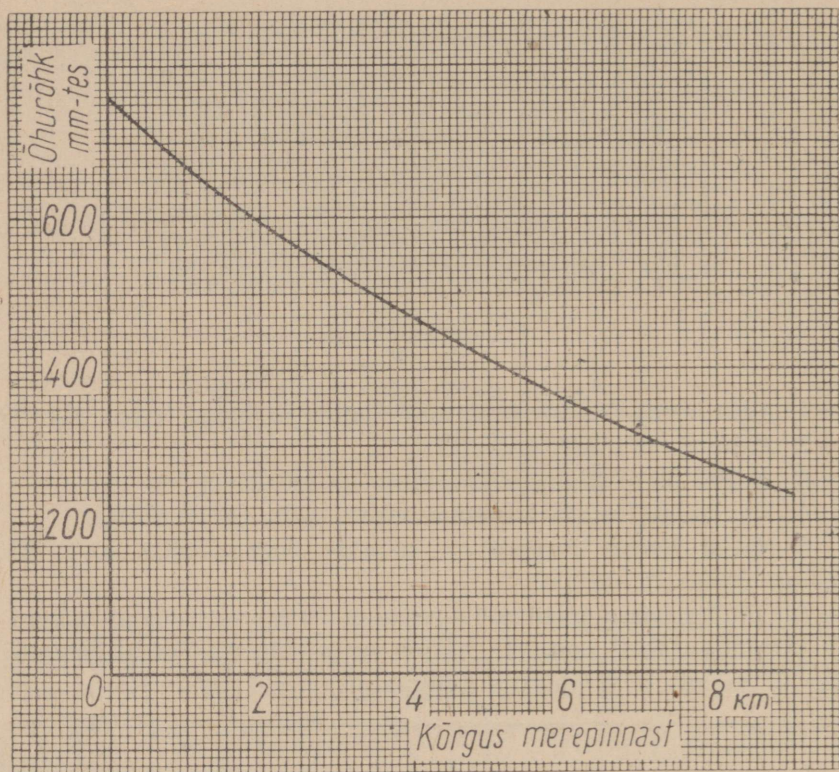
Haiguspäevad		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Temperatuur C°	kell 6	38,3	38,8	38,9	38,7	38,0	37,6	37,4	37,2
	kell 18	38,9	39,4	39,7	39,5	38,4	38,1	37,7	37,5

b) Joonesta järgmise tabeli andmeil temperatuuri graafik ja kirjelda selle põhjal temperatuuri muutumist antud ajavahemikus.

Kellaaeg	0	3	6	9	12	15	18	21	24
Temper. C°	3	2	-2	-1	4	6	5	5	4

51. Joonis 13 kujutab õhurõhu muutumist sõltuvuses kõrgusega merepinnast (eeldusel, et õhurõhk merepinnal on normaalne). Vasta selle joonise põhjal järgmistele küsimustele.

1. Kui suur on väline õhurõhk lennukil, mille kõrgus merepinnast on 1 km, 2,5 km, 4 km, 7,5 km?



Joon. 13.

2. Kui kõrgel merepinnast on lennuk, mille pardal baromeeter näitab välist õhurõhku 700 mm, 630 mm, 400 mm, 250 mm?

3. Kui suur on õhurõhk järgmiste mägede tipus (sulgudes on antud mäe kõrgus meetrites): Elbrus (5633), Etna (3263), Kili-
mandžaaro (5895)?

4. Kui kõrgele tuleks tõusta, et õhurõhk väheneks pooleni normaalsest suurusest?

52. Eelmistes ülesannetes vaatlesime kolme graafikut: õhu-temperatuuri graafikut (joon. 11), haige kehatemperatuuri graafikut (joon. 12) ja õhurõhu graafikut (joon. 13). Igaüks neist näitab ühe suuruse (temperatuuri, õhurõhu) muutumist teise suuruse (aja, merepinnast arvatud kõrguse) muutumisel ehk ühe suuruse sõltuvust teisest suurusest. Iga graafik koosneb kahest olulisest

osast: teljestikust ja vaadeldava suuruse muutumiskäiku kujutavast joonest. Et viimane on graafiku iseloomustav osa, siis sageli mõistame graafiku all nimelt seda suuruse muutumiskäiku kujutavat joont. Nii ütleme, et joonisel 11 on temperatuuri graafikuks murdjoon, kuna joonisel 10 on selleks kõverjoon.

Leia joonisel 11 ja 12 graafiku kõrgeim punkt ning sellega antud kellaaeg ja temperatuur.

53. a) Keha liigub ühtlaselt kiirusega 1,5 m sekundis. Anna valem, mis näitab liikumisel läbitud tee pikkuse s sõltuvust liikumise ajast t ja kujuta see sõltuvus graafiliselt, andes suurusele t täisarvulised väärtused 0-st kuni 10-ni.

b) Kilovatt-tund (kWh) elektrienergiat maksab 0,04 rbl. Koosta tabel, mis näitab, kui palju maksab 5, 10, 15, 20, 25, 30 kWh elektrienergiat ja kujuta see muutumine graafiliselt.

VÕRDELINE SÕLTUVUS.

54. a) Kaks suurust võivad sõltuda teineteisest väga mitmel viisil. Lihtsaim sõltuvus on selline, kus suuruste vastavate väärtuste suhe ei muutu ehk, teisiti, nende suuruste suhe on jääv. Nii suguse omadusega on näiteks võrdkülgse kolmnurga übermõõt ja külje pikkus: nende suhe on alati võrdne 3-ga.

Kaht suurust, mille vastavate väärtuste suhe on jääv, nimetatakse võrdelisteks suurusteks. Seda jäävat suhet nimetatakse nende suuruste võrdeteguriks.

Näiteks ühtlasel liikumisel käidud tee pikkus on võrdeline liikumisajaga, sest tee pikkuse ja aja suhe on võrdne liikumise kiirusega, mis ühtlase liikumise korral on jääv.

b) Tuletame valemi, mis seob kaht võrdelist suurust. Oletame, et suurus y on võrdeline suurusega x ja nende võrdetegur on a . Siis võrdeliste suuruste definitsiooni järgi $\frac{y}{x} = a$. Avaldades siit sõltuva suuruse y , saame

$$y = ax.$$

Saadud valem ütleb, et kui suurused on võrdelised, siis funktsiooni väärtus võrdub argumendi väärtuse ja ühe jääva teguri (võrdeteguri) korrutisega.

Umberpöördult, kui suurus y sõltub teisest suurusest x valemiga $y = ax$, kus a on jääv, siis suuruste y ja x suhe on jääv, s. t. suurused y ja x on võrdelised.

Näiteks valemiga $s = 1,5t$ seotud suurused on võrdelised; võrdetegur on 1,5. Ka valemiga $u = -\frac{v}{3}$ seotud suurused on võrdelised, sest selle valemiga saame kirjutada kujul $u = -\frac{1}{3}v$; nüüd on näha, et võrdetegur on $-\frac{1}{3}$.

Võrdeliste suuruste vahelist sõltuvust nimetatakse võrdeliseks sõltuvuseks.

Võrdelise sõltuvuse valem on $y = ax$, kus a on antud arv.

55. Otsusta, missugused järgmistest valemitest väljendavad võrdelist sõltuvust ja mis on selles sõltuvuses võrdeteguriks. Vajaduse korral lahenda valem ühe temas esineva suuruse suhtes.

1) $u = 6a$

6) $xy = 1$

11) $\alpha + \beta = 90^\circ$

2) $c = \pi d$

7) $2u + 3v = 0$

12) $\alpha : \beta = 0,5$

3) $s = \frac{u}{2}$

8) $3x - 2y = 1$

13) $a = \frac{3x}{4}$

4) $y = 2 : x$

9) $2S : 3T = 1$

14) $5a = -3t$

5) $a : b = 0,8$

10) $S = \pi r^2$

15) $u : 2v = 0,6$

Näide. Kui $3x : 5a = 0,2$,
 siis $3x = 0,2 \cdot 5a$
 ehk $3x = a$
 ja $x = \frac{1}{3} a$,

seega sõltuvus on võrdeline; võrdetegur on $\frac{1}{3}$.

56. Väljenda iga kahe järgmise suuruse vaheline sõltuvus valemiga ja otsusta iga suurusepaari puhul, kas tegemist on võrdelise sõltuvusega või mitte:

1) täisnurkse kolmnurga teravnurkade suurused α ja β ;

2) riide koguhind H ja meetrite arv x , kui meetri hind on 14 rbl.;

3) riide meetrite arv x ja riide meetri hind h , kui riide koguhind on 150 rbl.;

4) kuubi pindala S ja serva pikkus a ;

5) kolmnurga pindala S ja alus a , kui kolmnurga kõrgus on 8 ühikut;

6) püramiidi ruumala V ja kõrgus h , kui püramiidi põhja pindala on 12 cm^2 ;

7) korrapärase nelinurkse prisma külgpindala P ja külgserva pikkus s , kui prisma põhiserv on $1,5 \text{ m}$;

8) keha kaal P ja ruumala V , kui erikaal on jääv;

9) korrapärase kuusnurga apoteem m ja kül a ;

10) ööpäeva algusest möödunud ajavahemik x ja ööpäeva lõpuni ülejäänud ajavahemik y .

VÖRDELISE SÖLTUVUSE GRAAFIK.

57. Näide. Kujuta graafiliselt sõltuvus $y=1,5x$.

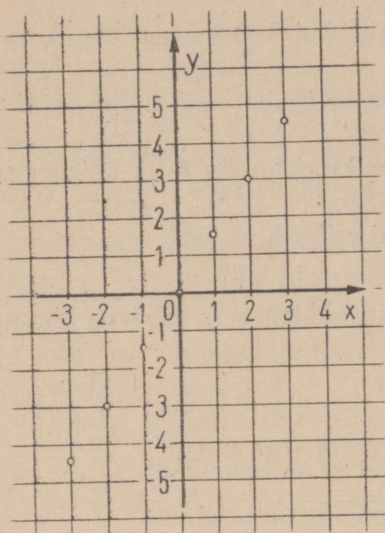
Lahendus. Anname suurusele x vabalt rea väärtusi, näiteks täisarvulised väärtused -3 -st kuni $+3$ -ni, ja arvutame neile vastavad y väärtused. Nii saame järgmise x ja y vastavate väärtuste tabeli:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$-4,5$	$-3,0$	$-1,5$	0	$1,5$	3	$4,5$

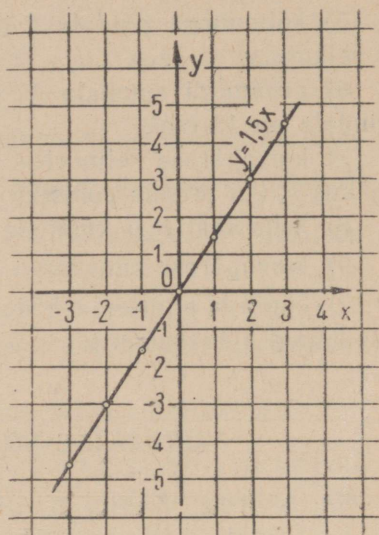
Võtame nüüd teljestiku ja kujutame selles punktid, mille koordinaatideks on saadud tabeli arvupaarid (joon. 14). Joonlauaga proovides selgub, et kõik saadud punktid asetsevad ühel ja samal sirgel. Kui kontrolliks anda x -le veel mingi vahepealne, tabelis mitteleiduv väärtus, näiteks väärtus $1,4$, ja arvutada sellele vastav y väärtus $2,1$, siis näeme, et ka uus punkt $(1,4; 2,1)$ asetseb endiste punktidega ühel ja samal sirgel. Tee see kontroll! Joonestades selle sirge, saame sõltuvuse $y=1,5x$ graafiku (joon. 15).

Saab tõestada, et kõik punktid, millele ordinaat $y=ax$, asetsevad tõepoolest ühel ja samal sirgel.

58. Saadud graafiku abil saab lahendada kaht liiki ülesandeid, nimelt 1) leida y , kui x on antud, ja 2) leida x , kui y on antud.



Joon. 14.



Joon. 15.

Kuidas lahendada ühe, kuidas teise ülesande?

Nimetatud ülesandeid saab sõnastada veel teisiti, kui võtta arvesse, et neis y tähendab korrutist $1,5x$. Nii saame järgmised ülesanded:

- 1) leia korrutis $1,5x$, kui x on antud, näiteks leia korrutis $1,5 \cdot 2$;
- 2) leia x , kui korrutis $1,5x$ ehk y on antud, näiteks leia x , kui $1,5x = 3$.

Et viimasest võrdusest $x = 3 : 1,5$, siis seda teist ülesannet saab sõnastada ka veel nii: leida jagatis $y : 1,5$, kui y on antud.

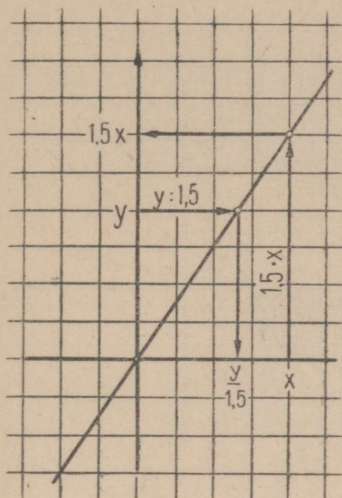
Seega saadud joonis võimaldab:

- 1) korrutada arve graafiliselt $1,5$ -ga;
- 2) jagada arve graafiliselt $1,5$ -ga.

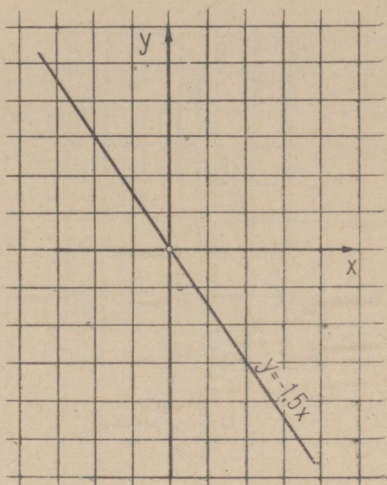
Selgita joonise 16 abil, kuidas toimub üks, kuidas teine tehe.

59. Valmista joonis 16 kaks korda suuremas mõõtkavas ja lahenda selle abil järgnevad küsimused.

- 1) Kui palju on $1,5x$, kui $x = 2$; -1 ; $-0,5$; -3 ?
- 2) Kui palju on $1,5 \cdot 3$; $1,5 \cdot 0,5$; $1,5 \cdot (-2,4)$; $1,5 \cdot (-3,4)$?
- 3) Kui suur on x võrduses $y = 1,5x$, kui $y = 3$; -3 ; $1,2$; $-1,2$?
- 4) Kui palju on $1,8 : 1,5$; $3,5 : 1,5$; $-4 : 1,5$; $-2,5 : 1,5$?



Joon. 16.



Joon. 17.

60. Kujuta graafiliselt sõltuvus $y = -1,5x$ (joon. 17). Mis-suguseid korrutamisi ja missuguseid jagamisi saab teostada selle graafiku abil?

61. Kujuta ühes ja samas teljestikus sõltuvused $y = 0,5x$ ja $y = -0,5x$. Lahenda graafiliselt järgmised ülesanded.

- 1) Leia $0,5x$, kui $x = 2,6$; $-1,8$; $-2,5$.
- 2) Leia $-0,5 \cdot 3$; $-0,5 \cdot (-2,8)$; $-0,5 \cdot (-4)$.
- 3) Leia x võrdusest $y = -0,5x$, kui $y = 1,2$; $-1,7$; 3 .
- 4) Leia $2 : 0,5$; $-1,4 : 0,5$; $0,8 : (-0,5)$.

62. a) Eelmistest ülesannetest selgus, et

võrdelise sõltuvuse $y = ax$ graafik on sirgjoon.

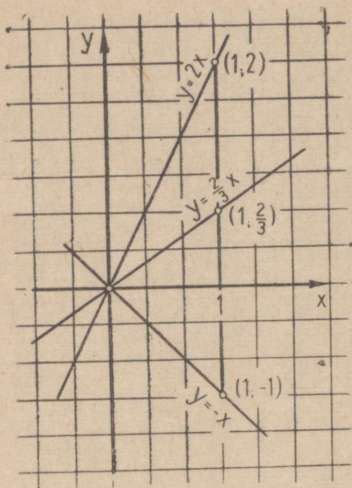
b) Anname valemis $y = ax$ suurusele x väärtused 0 ja 1:

kui $x = 0$, siis $y = 0$; kui $x = 1$, siis $y = a$.

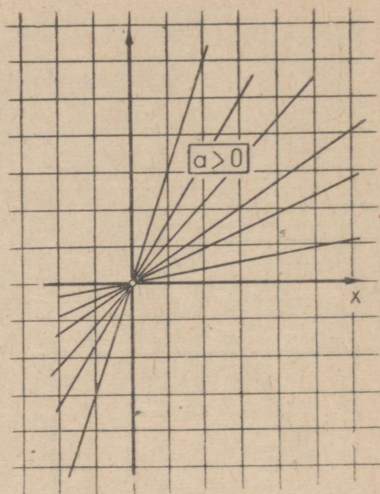
Tulemus näitab, et (joon. 18)

võrdelist sõltuvust $y = ax$ kujutav sirge läbib koordinaatide alguspunkti ja punkti $(1; a)$.

● Oletame, et valemis $y = ax$ võrdetegur a on positiivne arv, s. o. $a > 0$. Kui x -le anda positiivne väärtus, siis ka korrutis ax



Joon. 18.



Joon. 19.

ehk y on positiivne, ja kui x -le anda negatiivne väärtus, siis ka ax ehk y on negatiivne. See näitab, et (joon. 19)

kui võrdetegur on positiivne arv, siis võrdelist sõltuvust kujutav sirge on tasapinna esimeses ja kolmandas veerandis.

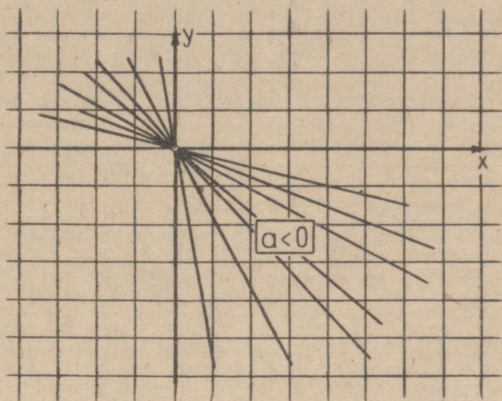
d) Oletame, et valemis $y=ax$ võrdetegur a on negatiivne arv, s. o. $a < 0$. Kui anda x -le positiivne väärtus, siis korrutis ax ehk y on negatiivne, ja kui anda x -le negatiivne väärtus, siis ax ehk y on positiivne. See näitab, et (joon. 20)

kui võrdetegur on negatiivne arv, siis võrdelist sõltuvust kujutav sirge on tasapinna teises ja neljandas veerandis.

63. Otsusta, missugustes tasapinna veerandites asetseb iga järgmise sõltuvuse graafik ja leia üks punkt (peale alguspunkti), mida ta läbib.

- | | | |
|--------------|--------------|----------------------|
| 1) $y=3,6x$ | 2) $y=-0,8x$ | 3) $y=-7x$ |
| 4) $y=-0,4x$ | 5) $y=-25x$ | 6) $y=6\frac{1}{3}x$ |

64. a) Et võrdelise sõltuvuse graafik on sirge, mis läbib koordinaatide alguspunkti, siis tema joonestamiseks on vaja



Joon. 20.

teada veel ainult üht punkti. Selleks punktiks võib võtta punkti $(1; a)$, kuid kui see punkt tuleb nullpunktile liiga lähedale, siis ta ei sobi sirge joonestamiseks. Miks? Sel korral teise punkti abstsiss valitakse vabalt, kuid nii, et saadav punkt ei oleks alguspunktile liiga lähedal ega läheks ka joonise piirkonnast välja.

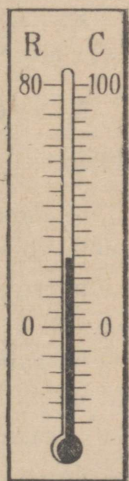
b) Joonesta kahe punkti abil iga järgmise sõltuvuse graafik.

- | | | |
|---------------|---------------|----------------|
| 1) $y = 2x$ | 2) $s = -3t$ | 3) $u = v$ |
| 4) $y = -x$ | 5) $s = 1,2t$ | 6) $u = -v$ |
| 7) $y = 1,8x$ | 8) $s = -t$ | 9) $u = -2,4v$ |

65. Temperatuuri mõõdeti varem ka Réaumur'i (loe: reomüüri) kraadides (R°). Teades, et $80^\circ R = 100^\circ C$ ja $0^\circ R = 0^\circ C$ (joon. 21), näita, et temperatuur Réaumur'i kraadides y ja Celsius'e kraadides x on seotud valemiga $y = 0,8x$. Kujuta see sõltuvus millimeetripaberil graafiliselt, võttes 10° kujutamiseks lõigu 1 cm, ja lahenda saadud joonise abil järgmised küsimused.

1) Mitu kraadi Réaumur'i järgi on 20° , 50° , 80° , 45° , $72^\circ C$ järgi?

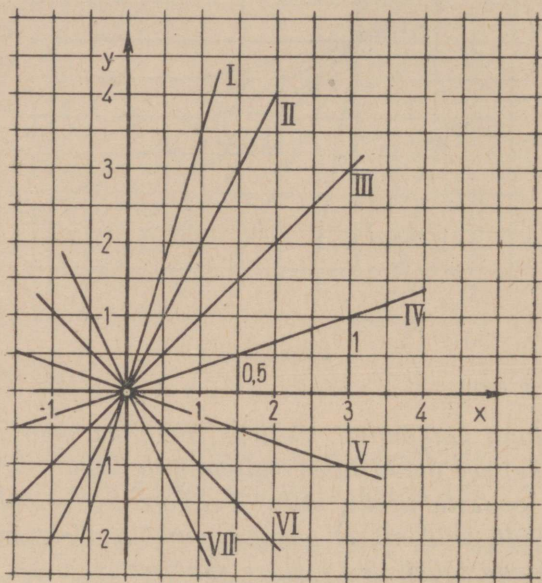
2) Mitu kraadi Celsius'e järgi on 60° , 20° , 45° , 15° , $61^\circ R$ järgi?



Joon. 21.

3) Kui palju on $0,8 \cdot 20$; $0,8 \cdot 32$; $0,8 \cdot 45$; $0,8 \cdot 75$?

4) Kui palju on $20 : 0,8$; $60 : 0,8$; $36 : 0,8$; $52 : 0,8$?



Joon. 22.

66. Joonisel 22 on antud seitse võrdelise sõltuvuse graafikut. Leia iga sõltuvuse puhul võrdetegur ja kirjuta sõltuvus valemina.

Näide. Sõltuvuse IV puhul võrdetegur $a = 1 : 3 = \frac{1}{3}$ ehk, teisiti, $a = 0,5 : 1,5 = \frac{1}{3}$ ja valem on $y = \frac{1}{3} x$.

67. Joonis 23 kujutab ruudu diagonaali pikkuse sõltuvust ruudu külje pikkusest. Leia selle graafiku järgi

a) ruudu diagonaali pikkus, kui külje pikkus on 2 cm; 4,5 cm; 5,6 cm;

b) ruudu külje pikkus, kui diagonaali pikkus on 2 cm; 4,5 cm; 7,1 cm;

c) valem, mille järgi ruudu diagonaal sõltub külje pikkusest.

68. Teades, et võrdkülgse kolmnurga kõrguse h ja külje a suhe on ligikaudu 0,87, kirjuta valem, mille järgi kõrgus sõltub

küljest, ja kujuta see sõltuvus graafiliselt. Sõnasta ülesanded, mille lahendamine on võimalik selle graafiku abil.

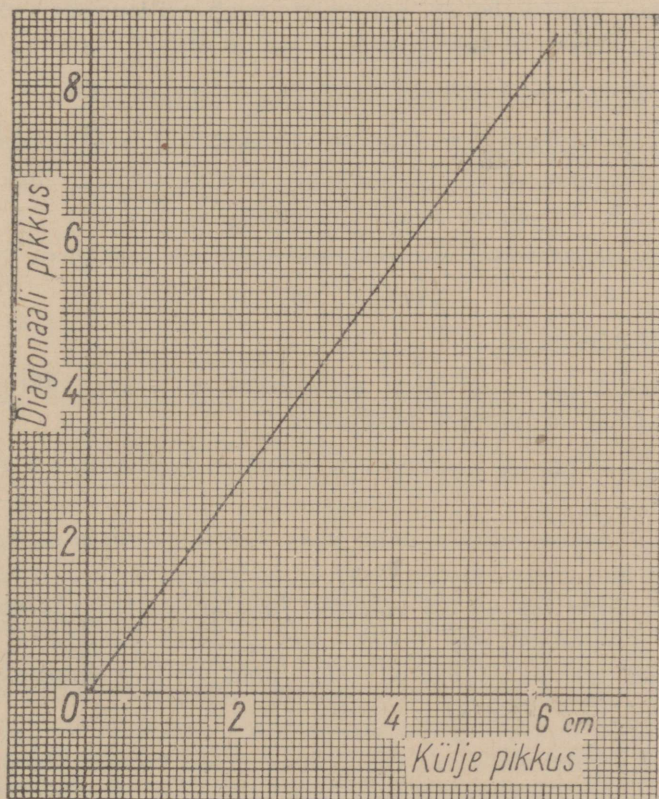
LINEAARNE SÕLTUVUS.

69. Anna valemi kujul vastus järgmistele küsimustele.

1) Kui suur on maisitaimede kõrgus k , mille ta saavutab p päeva pärast, kui taime praegune kõrgus on 35 cm ja ta kasvab ööpäevas 2 cm?

2) Kui suur on võrdhaarse kolmnurga tipunurk β , kui alusnurk on α ?

3) Missugune on küünla pikkus p pärast t tundi põlemist, kui küünla esialgne pikkus on 27 cm ja igas tunnis põleb ära 4 cm pikkune osa?



Joon. 23.

70. a) Kõigil eelmises ülesandes saadud valemitel on üks ja sama kuju $y = ax + b$, kus y ja x on kaks teineteisest sõltuvat suurust ning a ja b on kaks antud arvu. Näiteks 1. küsimuse vastamisel saadud valemis $k = 2p + 35$ on suuruse y kohal maisitaime kõrgus k , suuruse x kohal päevade arv p , kuna arvuks a on 2 ja arvuks b on 35.

Mis esineb y , x , a ja b asemel küsimuste 2 ja 3 puhul saadud valemites?

b) Et avaldis $ax + b$ on x suhtes lineaarne (x on avaldises esimeses astmes), siis suurust $y = ax + b$ nimetatakse x lineaarseks funktsiooniks ja y sõltuvust x -st lineaarseks sõltuvuseks.

Seega

suurust y nimetatakse suuruse x lineaarseks funktsiooniks, kui nendevahelist sõltuvust saab väljendada valemiga $y = ax + b$, kus a ja b on antud arvud.

Lineaarseid sõltuvusi väljendavad näiteks valemid

$$y = 3x + 2, y = -x + 4, s = 1,6t + 3, T = 240 + 2P.$$

71. Lineaarse sõltuvuse valemis $y = ax + b$ on kaks antud arvu: a ja b . Selgitame nende tähendust.

a) Kui argumendile x anda väärtus 0, siis saame, et

$$y = a \cdot 0 + b = b.$$

Sellest näeme, et

arv b on funktsiooni algväärtus, s. t. see väärtus, mis vastab argumenti väärtusele 0.

Näiteks sõltuvuse $s = 2,5t - 3$ puhul on funktsiooni s algväärtuseks -3 .

b) Kui argumendile x anda kaks väärtust, milledest teine on esimesest ühe võrra suurem, näiteks väärtused 4 ja 5, ning arvutada, kui palju kasvab sel juhtumil funktsioon, siis saame vastuseks a . Tõepoolest, kui $x = 4$, siis $y = a \cdot 4 + b = 4a + b$; kui $x = 5$, siis $y = a \cdot 5 + b = 5a + b$; funktsiooni y juurdekasv on $(5a + b) - (4a + b) = 5a + b - 4a - b = a$.

Sellest näeme, et

arv a näitab, mille võrra muutub funktsioon, kui argument suureneb ühe võrra.

Näiteks sõltuvuse $y = -2,5x + 4$ puhul funktsioon y muutub $-2,5$ võrra, kui argument x suureneb ühe võrra, s. t. x suurenedes 1 võrra y väheneb $2,5$ võrra.

72. Ütle iga valemi puhul, kuidas muutub funktsioon, kui argument suureneb 1 võrra.

1) $y = x + 2$

2) $s = 4,5t$

3) $u = 3 - 2v$

4) $S = 2T + 10$

5) $\beta = 90^\circ - \alpha$

6) $s = n \cdot 180^\circ - 360^\circ$

73. Kui lineaarse sõltuvuse valemis $y = ax + b$ võtta funktsiooni y algväärtuseks 0, s. t. kui $b = 0$, siis saame võrdelise sõltuvuse valemi $y = ax$. See tähendab, et

võrdeline sõltuvus on lineaarse sõltuvuse erijuhtum.

LINEAARSE FUNKTSIOONI GRAAFIK.

74. Näide. Kujuta graafiliselt funktsioon $y = 0,5x + 2$.

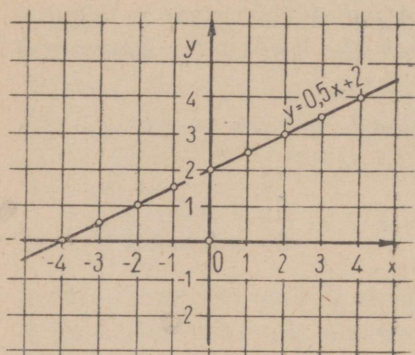
Lahendus I. Andes argumentidele x täisarvulised väärtused -4 -st kuni $+4$ -ni ja arvutades funktsiooni y vastavad väärtused, saame

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4

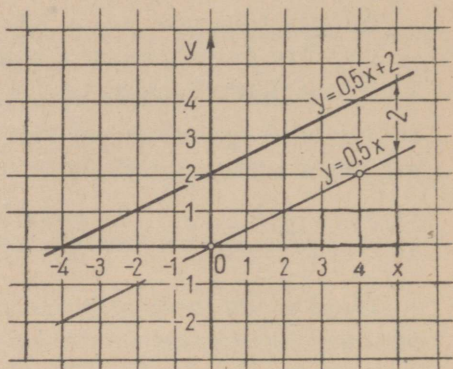
Kujutame nüüd koordinaatteljestikus punktid, millede koordinaatideks on saadud tabeli arvupaarid. Saadud üheksa punkti asetsevad kõik ühel ja samal sirgel, mis ongi antud funktsiooni graafikuks (joon. 24).

Lahendus II. Joonestame esmalt võrdelise sõltuvuse $y = 0,5x$ graafiku. Selleks on sirge, mis läbib punkte $(0; 0)$ ja $(4; 2)$. Et graafiku $y = 0,5x + 2$ iga punkti ordinaat on 2 võrra suurem graafiku $y = 0,5x$ vastava punkti ordinaadist, siis nihutame saadud sirget paralleelselt tema algasendiga 2 ühiku võrra kõrgemale (joon. 25), saades seega sõltuvuse $y = 0,5x + 2$ graafiku.

Kumb lahendusviis on lihtsam?



Joon. 24.



Joon. 25.

75. a) Kujuta graafiliselt ühes ja samas teljestikus funktsioonid $y=2x$, $y=2x+1$ ja $y=2x-1$.

b) Kujuta graafiliselt ühes ja samas teljestikus funktsioonid $y=-x$, $y=-x+3$ ja $y=-x-3$.

c) Kujuta graafiliselt ühes ja samas teljestikus funktsioonid $y=-\frac{3}{4}x$, $y=-\frac{3}{4}x+2,5$ ja $y=-\frac{3}{4}x-2,5$.

Võrdle iga sõltuvuse puhul funktsiooni algväärtust (vabaliiget) selle punkti ordinaadiga, kus graafik lõikab y -telge.

76. Eelmistest ülesannetest selgus, et

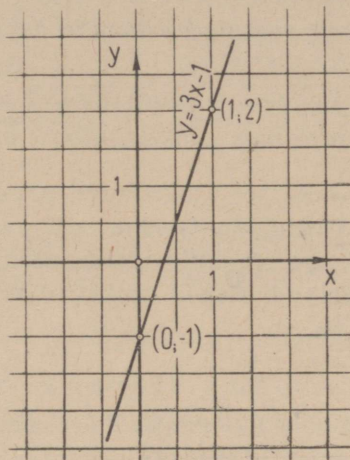
lineaarse funktsiooni $y=ax+b$ graafikuks on sirge, mis on paralleelne sõltuvust $y=ax$ kujutava sirgega ja lõikab y -telge punktis, mille ordinaat on b .

See asjaolu võimaldab kergesti joonestada lineaarse funktsiooni graafikut.

Teda saab aga joonestada ka ilma abisirget $y=ax$ joonestamata. Selleks paneme tähele, et see sirge on määratud oma kahe mistahes punktiga, näiteks punktidega $(0; b)$ ja $(1; a+b)$. Joonestame sel teel funktsiooni

$$y=3x-1$$

graafiku (joon. 26). Üheks punktiks võtame graafiku lõikepunkti y -teljega, s. o. punkti $(0; -1)$ ja teiseks punktiks punkti, mille



Joon. 26.

abstsiss on 1, s. o. punkti (1; 2). Otsitavaks graafikuks on neid punkte läbiv sirge (joon. 26). Niisiis

lineaarse funktsiooni $y = ax + b$ graafikuks on sirge, mis lõikab y -telge punktis ordinaadiga b ja läbib punkti (1; $a + b$).

Kui nimetatud punktid asetsevad lähestikku, siis joonis ei tule küllalt täpne. Sel juhtumil võetakse teine punkt kaugemal, näiteks abstsissiga 5.

77. Joonesta kahe punkti järgi järgmiste sõltuvuste graafikud.

1) $y = x + 1$

2) $y = 2x - 3$

3) $y = -x + 2,5$

4) $y = -2x + 4$

5) $y = 0,4x - 2$

6) $y = 1,2x - 3$

7) $y = -0,8x + 4$

8) $y = -0,6x - 1$

9) $y = \frac{3}{4}x - 2\frac{1}{4}$

10) $y = -\frac{2}{3}x + 3\frac{1}{3}$

78. Selgita, kuidas asetsevad teineteise suhtes järgmiste funktsioonide graafikud:

a) $y = 4x + 5$ ja $y = 4x + 2$;

b) $y = 2x - 3$ ja $y = 5x - 3$;

c) $y = -3x + 1$ ja $y = -3x - 1$.

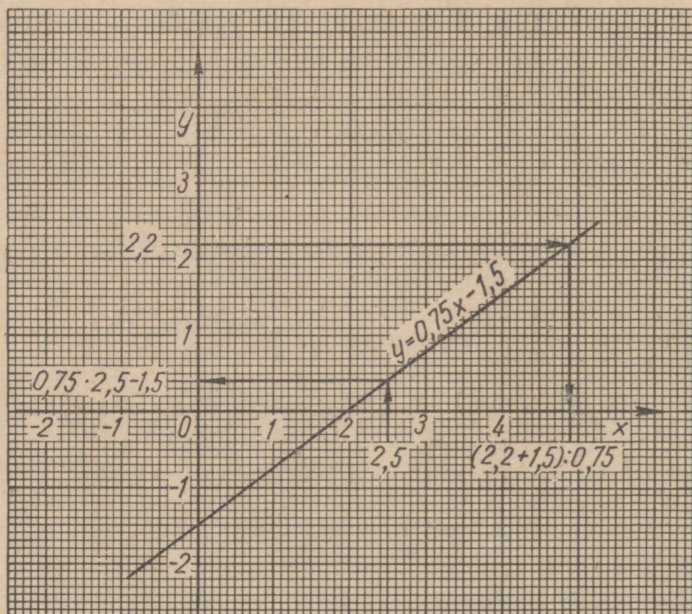
Näited. 1) Funktsioone $y=8x+3$ ja $y=8x-7$ kujutavad sirged on paralleelsed, sest nad mõlemad on paralleelsed sirgega $y=8x$.

2) Funktsioone $y=2x-5$ ja $y=6x-5$ kujutavad sirged lõikavad y -telge ühes ja samas punktis, nimelt punktis -5 .

Kui kahel lineaarsel funktsioonil argumenti kordajad on võrdsed, siis neid funktsioone kujutavad sirged on paralleelsed; kui aga vabaliikmed on võrdsed, siis neid funktsioone kujutavad sirged lõikavad ordinaattelge ühes ja samas punktis.

79. Funktsiooni $y=0,75x-1,5$ graafik võimaldab ilma arvutamiseta leida kahe tehte tulemust, nimelt tulemust, mille saame, kui mistahes arvu x korrutame arvuga $0,75$ ja sellest korrutisest lahutame $1,5$ (joon. 27). Näiteks loeme jooniselt 27, võttes x väärtuseks $2,5$ ja leides sellele vastava y väärtuse, et

$$0,75 \cdot 2,5 - 1,5 = 0,4.$$



Joon. 27.

Leia samal viisil:

1) $0,75 \cdot 4 - 1,5$

2) $0,75 \cdot 3,3 - 1,5$

3) $0,75 \cdot 2 - 1,5$

4) $0,75 \cdot (-0,7) - 1,5$

80. Kasutades funktsiooni $y = 0,75x - 1,5$ graafikut (joon. 27), lahenda võrrandid:

1) $0,75x - 1,5 = 2,2$

2) $0,75x - 1,5 = -2$

3) $0,75x - 1,5 = 1$

4) $0,75x - 1,5 = 2$

5) $0,75x - 1,5 = -1,5$

6) $0,75x - 1,5 = -1$

Nä p u n ä i d e. On antud suuruse y väärtus ja leida tuleb sellele vastav x väärtus.

81. a) Olgu võrduses $y = 0,75x - 1,5$ suurus y antud ja x tundmatu. Lahendades antud võrduse x suhtes, saame

$$0,75x = y + 1,5$$

ehk

$$x = (y + 1,5) : 0,75.$$

Selle x väärtuse saame antud y järgi leida jooniselt 27. Seega vaadeldav graafik võimaldab ilma arvutamiseta leida tulemust, mille saame, kui mingi arvuga y liidame 1,5 ja selle summa jagame arvuga 0,75. Arv y tuleb võtta y -teljelt ja tulemus lugeda x -teljelt. Nii leiame jooniselt 27, et

$$(2,2 + 1,5) : 0,75 = 4,9.$$

b) Leia samal viisil:

1) $(-2 + 1,5) : 0,75$

2) $(-1 + 1,5) : 0,75$

3) $(2,5 + 1,5) : 0,75$

4) $(-0,5 + 1,5) : 0,75$

82. Kujuta graafiliselt funktsioon $y = -0,6x + 2$ vahemikus $-5 \leq x \leq 5$ ja lahenda selle graafiku abil järgmised ülesanded.

a) Leia y väärtus, kui $x = 2$; $-2,5$; $0,7$.

b) Leia x väärtus, kui $y = 1$; $-0,7$; $4,2$.

c) Leia järgmiste avaldiste väärtused: 1) $-0,6 \cdot 2 + 2$;
2) $-0,6 \cdot (-2,7) + 2$; 3) $-0,6 \cdot (-3,3) + 2$.

d) Lahenda järgmised võrrandid:

1) $-0,6x + 2 = 0$; 2) $-0,6x + 2 = 3$; 3) $-0,6x + 2 = -0,5$.

83. Kujuta graafiliselt funktsioon $y = 1,8x - 2,4$ vahemikus $-3 \leq x \leq 3$ ja lahenda selle graafiku abil järgmised ülesanded.

a) Leia y väärtus, kui $x = -1$; $-2,5$; $2,2$.

b) Leia x väärtus, kui $y = 2$; 0 ; $-5,5$.

c) Lahenda võrrand $1,8x - 2,4 = 1$; $1,8x - 2,4 = -3,2$;
 $1,8x - 2,4 = -1$.

d) Leia avaldiste $1,8 \cdot 1,7 - 2,4$; $1,8 \cdot 2,4 - 2,4$; $1,8 \cdot (-2,3) - 2,4$ väärtused.

84. Joonesta sobiv graafik ja lahenda selle abil järgmised võrrandid.

a) $-1,4x + 2 = 1$

b) $-1,4x + 2 = -1,5$

c) $-1,4x + 2 = 0$

d) $-1,4x + 2 = 4$

PÖÖRDVÕRDELINE SÕLTUVUS.

85. a) Leidub teineteisest sõltuvaid suurusi, mille vastavate väärtuste korrutis on jääv. Niisugusteks suurusteks on näiteks ühe ja sama tee läbimiseks kuluv aeg ja liikumise kiirus, sest nende korrutis võrdub tee pikkusega, mis antud juhtumil on jääv.

Suurusi, mille vastavate väärtuste korrutis on jääv, nimetatakse pöördvõrdelisteks suurusteks.

Seega ühe ja sama tee läbimiseks kuluv aeg on pöördvõrdeline liikumise kiirusega. Samuti on ühe ja sama pindalaga ristküliku alus pöördvõrdeline kõrgusega.

b) Tuletame valemi, mis seob kaht teineteisega pöördvõrdelist suurust x ja y . Nende korrutis peab olema jääv. Tähistame selle korrutise tähega a . Siis

$$xy = a$$

ehk

$$y = \frac{a}{x}.$$

Kui kaks suurust on pöördvõrdelised, siis nendevaheline seos väljendub valemiga $y = \frac{a}{x}$, kus a on antud arv.

c) Ümberpöördult: kui kaks suurust x ja y on seotud valemiga

$y = \frac{a}{x}$, kus a on antud arv, siis korrutis xy on jääv, tähendab suurused x ja y on pöördvõrdelised.

Näiteks valemiga $s = 3 : t$ seotud suurused on pöördvõrdelised. Niisamuti on pöördvõrdelised ka valemiga $u = -2 : 3v$ seotud suurused, sest selle valemi saame kirjutada kujul $u = -\frac{2}{3v}$, millest on näha, et jääv suurus $a = -\frac{2}{3}$.

Pöördvõrdeliste suuruste vahelist sõltuvust nimetatakse pöördvõrdeliseks sõltuvuseks.

86. Otsusta, missugused järgmistest valemitest väljendavad võrdelist, missugused pöördvõrdelist ja missugused lineaarset sõltuvust.

Küsimuse otsustamiseks lahenda valem ühe temas esineva suuruse suhtes (kui ta pole sel kujul juba antud) ja vaata, kas valemile saab anda ühe kujudest

$$y = ax, \quad y = ax + b, \quad y = \frac{a}{x}.$$

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|-----------------------|
| 1) $y = \frac{6x+4}{2}$ | 2) $r = \frac{c}{6,28}$ | 3) $h = 24 : a$ |
| 4) $z = 12 : 5x$ | 5) $u = 7 - v$ | 6) $S = \frac{5a}{2}$ |
| 7) $vt = 12$ | 8) $V = \frac{3x+1}{2}$ | 9) $y = 1 : x^2$ |

Missugused antud valemitest ei väljenda ühtki ülalnimetatud sõltuvust?

87. Väljenda iga kahe järgmise suuruse vaheline sõltuvus valemina ja otsusta iga suurusepaari puhul, kas tegemist on mõne sulle tuntud sõltuvuseliigiga või mitte:

1) antud rahasumma s (näit. 10 rbl.) eest saadav maiustuste kaal k (kg) ja maiustuste kilogrammi hind h (rbl.);

2) kuubi pindala S ja serva pikkus a ;

3) korrapärase kuusnurga übermõõt u ja kuusnurga külje pikkus a ;

4) päevade arv v , mis kolhoosil kulub vilja koristamiseks, ja hektarite arv h , millelt päevas koristatakse, kui vilja on üldse 186 ha;

- 5) trapetsi pindala S ja kõrgus h , kui trapetsi alused on 6 cm ja 10 cm;
- 6) ristküliku alus a ja kõrgus b , kui pindala S on jääv;
- 7) ristküliku pindala S ja kõrgus b , kui alus a on jääv;
- 8) ristküliku alus a ja kõrgus b , kui ümbermõõt $ü$ on jääv;
- 9) käesoleva kuu eelolevate päevade arv y ja möödunud päevade arv x .

PÖÖRDVÕRDELISE SÕLTUVUSE GRAAFIK.

88. Kujuta graafiliselt sõltuvus $y = \frac{4}{x}$, andes x -le täisarvulised väärtused -8 -st kuni $+8$ -ni. Missugust täisarvulist väärtust sellest vahemikust x -le anda ei saa? Kas kujutataval graafikul leidub punkt, mille abstsiss on 0? Niisuguse punkti puudumise tõttu öeldakse, et graafik katkeb kohas $x=0$ (joon. 28). Graafiku käigu selgitamiseks katkemiskoha ümbruses anna x -le veel väärtused $-0,5$, $-0,25$, $0,25$ ja $0,5$. Kõikide saadud punktide ühendamisel sujuva kõverjoonega saad joonisel 28 kujutatud graafiku.

Joonesta endale see graafik kaks korda suuremas mõõtkavas, paigutades telgede lõikepunkti jooniselehe keskele. Kirjelda y muutumist x kasvamisel -8 -st kuni $-0,25$ -ni ja x kasvamisel $0,25$ -st kuni 8 -ni.

89. Kujuta graafiliselt sõltuvus $y = \frac{1}{x}$. Anna x -le ainult positiivsed väärtused $0,25$, $0,5$, 1 , 2 , 3 ja 4 . Kujutamiseühikuks võta 2 cm.

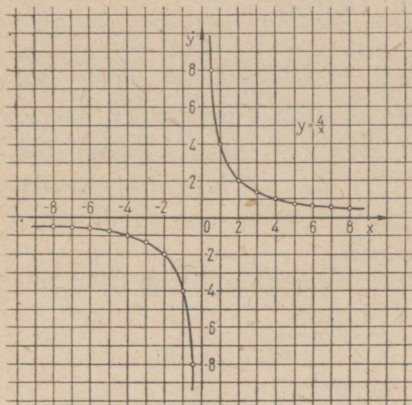
Missugust arvutamisesärrandit saab lahendada saadud joonise abil? Lahenda selle abil järgmised küsimused.

1) Kui suur on ristküliku kõrgus, kui tema pindala on 1 m^2 ja alus on 2 m; 0,5 m; 1,5 m; 2,5 m; 75 cm?

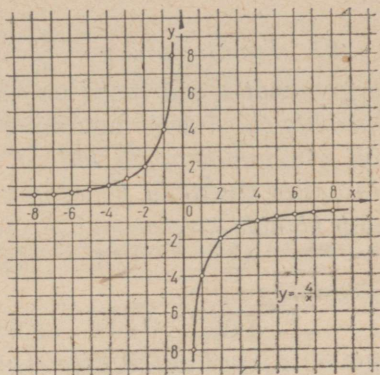
2) Kui suured on järgmiste arvude pöördarvud: 4; 0,75; 2,5; 2,25?

90. Joonesta ülesande 88 eeskujul sõltuvuse $y = \frac{-4}{x}$ ehk $y = -\frac{4}{x}$ graafik. Missugustes veerandites asetseb saadud kõverjoon nüüd (joon. 29)?

91. Pöördvõrdelise sõltuvuse graafikuks on kõverjoon, mida nimetatakse hüperbooliks. Hüperbool koosneb kahest eraldi asetsevast harust. Kui pöördvõrdelise sõltuvuse valemis $y = a : x$ arv a



Joon. 28.



Joon. 29.

on positiivne, siis hüperbooli üks haru on esimeses veerandis ja teine kolmandas veerandis, kui aga a on negatiivne, siis hüperbooli üks haru on teises veerandis ja teine neljandas veerandis.

92. Kujuta graafiliselt ühes ja samas teljestikus sõltuvused

$$y = 2 : x, \quad y = 4 : x \quad \text{ja} \quad y = 8 : x,$$

andes x -le ainult positiivseid väärtusi.

93. Joonesta koordinaattasapinna esimeses veerandis rida riskülikuid, mille pindala on 12 cm^2 , paigutades riskülikud nii, et nende üks külg asetseks x -teljel ja teine külg y -teljel. Missugusel joonel asetsevad nende riskülikute need tipud, mis on väljaspool koordinaattelgi? Joonesta see joon.

94. Kujuta ühes ja samas teljestikus sõltuvused $y = 2 : x$ ja $y = -2 : x$, andes x -le ainult positiivseid väärtusi. Kuidas need graafikud asetsevad x -telje suhtes?

95. Valmista graafik, mis näitab 6 kilomeetri läbimiseks ühtlasel liikumisel kuluva aja muutumist, kui liikumise kiirus kasvab 2 kilomeetrist tunnis kuni 12 kilomeetrit tunnis.

96. Valmista graafik, mis näitab 4-ruutsentimeetrise pindalaga kolmnurga kõrguse muutumist kolmnurga aluse kasvamisel 2 sentimeetrist kuni 8 sentimeetrit.

PÖÖRDARVUDE TABEL.

97. Funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ väärtuste arvutamine on lihtne, kui argumendi x väärtused on näiteks ühekohalised arvud. Kui argumendile tuleb anda aga näiteks väärtused 3,51, 3,52, ..., 3,60, siis on arvutamine juba küllalt tülikas. Niisugusel juhtumil on otsustarbikas kasutada pöördarvude tabelit (vt. lisa). See tabel sisaldab kõikide kolmekohalise tüvega arvude

1,00, 1,01, 1,02, ..., 9,98, 9,99

pöördarve

1,00, 0,990, 0,9980, ..., 0,100, 0,100,

mis on samuti antud kolmekohaliste tüvedega.

Tabel algab järgmiselt:

x	0	1	2	3	<u>4</u>	5	6	7	8	9
1,0	1,000	990	980	971	962	952	943	935	926	917
1,1	0,909	901	893	885	877	870	862	855	847	840
<u>1,2</u>	0,833	826	820	813	<u>806</u>	800	794	787	781	775

Näiteks tuleb arvu 1,24 pöördarvu saamiseks leida selle arvu esimese kahe kohaga märgitud rea 1,2 ja kolmanda kohaga märgitud veeru 4 ristumiskoht. Seal seisev arv 806 on otsitava pöördarvu murdosa, kuna täisosa on 0. Nii saame, et

$$\frac{1}{1,24} = 0,806.$$

Analoogiliselt leiame, et

$$\frac{1}{9,78} = 0,102.$$

a) Leia arvude 3,51, 3,52, ..., 3,60 pöördarvud.

b) Leia järgmiste arvude pöördarvud: 7, 4,8, 9,4, 6,0, 6,34, 8,39, 6,53, 2,07, 9,38.

98. Kui arvu tüves on enam kui kolm numbrit, siis tema pöördarvu leidmiseks tabeli abil ümardame arvu nii, et tema tüvi jääks kolmekohaliseks. Näiteks

$$\frac{1}{6,7385} = \frac{1}{6,74} = 0,148.$$

Leia järgmiste arvude pöördarvud:

8, 473, 1,937, 3,3896, 9,745, 6,283719, 2,2738, 4,007, 6,005.

99. Kui antud arv on 1-st väiksem, siis korrutame ta 10-ga või 100-ga jne. nii, et saame arvu, mis on 1 ja 10 vahel. Saadud arvule leiame tabelist pöördarvu ja korrutame ka selle 10-ga või 100-ga jne., sest arvu korrutamisel 10-ga või 100-ga jne. pöördarv vähenes 10 või 100 jne. korda. Soovides leida näiteks arvu 0,78 pöördarvu, võtame 7,8 pöördarvu ja korrutame selle 10-ga:

$$\frac{1}{0,78} = 10 \cdot \frac{1}{7,8} = 10 \cdot 0,128 = 1,28.$$

Kui antud arv on 10-st suurem, siis korrutame ta 0,1-ga või 0,01-ga jne. nii, et saame arvu, mis on 1 ja 10 vahel. Edasi toimime analoogiliselt eelnevaga. Näiteks

$$\frac{1}{78,0} = 0,1 \cdot \frac{1}{7,80} = 0,1 \cdot 0,128 = 0,0128.$$

Leia järgmiste arvude pöördarvud.

- a) 0,342, 0,796, 0,2786, 0,0387, 0,0497, 0,083, 0,0074.
- b) 0,873, 0,495, 0,7837, 0,0973, 0,0372, 0,00719, 0,003.
- c) 18, 234, 74,5, 62,8, 380, 2120, 9020, 78,46, 486,9.
- d) 73, 537, 76,8, 49,7, 790, 8130, 9037, 38,77, 428,9.

100. a) Ristküliku pindala on 1 m². Leia ristküliku kõrgus, kui alus on

1,8 m, 0,34 m, 0,87 m, 67 cm, 118 cm.

b) Ristküliku pindala on 1 ha. Leia ristküliku alus, kui kõrgus on

78 m, 148 m, 367 m, 694 m, 1 km.

101. Kasutades pöördarvude tabelit, arvuta järgmised jagatised.

- a) 3,7 : 4,79, 7,9 : 5,83, 28 : 8,94, 48 : 375, 4,1 : 0,873.
- b) 8,9 : 4,97, 3,7 : 89,6, 38 : 4,73, 73 : 973, 5,8 : 0,637.

Näide. $3 : 5,78 = 3 \cdot \frac{1}{5,78} = 3 \cdot 0,173 = 0,519.$

102. Kasutades pöördarvude tabelit, arvuta

$$a) \frac{100}{3,8 \cdot 6,74}, \quad b) \frac{32}{8,74 \cdot 6,98}, \quad c) \frac{5,7}{1,87 \cdot 4,38}.$$

103. Kolmnurga pindala on $4,85 \text{ m}^2$ ja alus on $2,18 \text{ m}$. Arvuta kolmnurga kõrgus.

104. Keha ruumala on $87,6 \text{ cm}^3$ ja kaal on 638 g . Arvuta erikaal.

105. Punkt liikus $3 \text{ min. } 47 \text{ sek.}$ vältel $4 \text{ m } 36 \text{ cm}$. Arvuta punkti liikumise kiirus.

106. Kujuta graafiliselt sõltuvus $y = \frac{5}{x}$ vahemikus $x = 6,5$ kuni $x = 7,0$, andes x -le väärtused vahedega $0,1$ ja võttes kujutamisühikuks 10 cm (x -telje nullpunkt ei esine joonisel). Kas saadud graafik erineb märgatavalt sirgjoonest?

4. KAHE TUNDMATUGA LINEAARSED VÖRRANDISÜSTEEMID.

KAHE TUNDMATUGA VÖRRANDI LAHENDI MÕISTE.

107. Näide. Matemaatikaringil on 8 liiget. Mitu poissi ja mitu tüdrukut on matemaatikaringis?

Lahendus. Tähistame poiste arvu tähega x ja tüdrukute arvu tähega y , siis saame võrrandi

$$x + y = 8.$$

See on kahe tundmatuga esimese astme võrrand ehk kahe tundmatuga lineaarne võrrand.

Lahendame selle võrrandi proovimise teel. Kui matemaatikaringi liikmed on kõik poisid, siis $x = 8$ ja $y = 0$.

Aroupaar

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 0 \end{cases}$$

on antud kahe tundmatuga võrrandi lahend, sest asetades antud võrrandisse x asemele 8 ja y asemele 0, näeme, et võrrand on rahuldatud.

Kui matemaatikaringis on 7 poissi, siis tüdrukuid on 1, s. t. aroupaar

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$$

on samuti võrrandi $x + y = 8$ lahend.

Nimeta veel võrrandi

$$x + y = 8$$

lahendeid.

Täida järgnev tabel nii, et iga ülestikku asetsevate arvude paar oleks võrrandi $x + y = 8$ lahendiks.

x	0	1	2		4			7	8
y				5		3	2	1	0

Mitu lahendit on võrrandil $x + y = 8$, mis vastavad antud ülesande tingimusele?

108. Näide. Reinul ja Jüril on kahe peale kokku 15 rubla raha. Kui palju raha on Reinul ja kui palju Jüril?

Lahendus: Tähistame rahasummad nii:

Reinul x rubla,

Jüril y rubla.

Nüüd võime kirjutada võrrandi

$$x + y = 15.$$

On võimalik, et Reinul ei olegi raha, siis

$$x = 0 \text{ ja } y = 15.$$

Arvupaar

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 15 \end{cases}$$

on võrrandi $x + y = 15$ lahend.

Kui Reinul on 1 kopikas ehk 0,01 rbl., siis Jüril on 14,99 rbl.

Arvupaar

$$\begin{cases} x = 0,01 \\ y = 14,99 \end{cases}$$

on võrrandi $x + y = 15$ teine lahend.

Nimeta veel selle võrrandi mõni lahend.

Mitu lahendit on võrrandil $x + y = 15$, mis vastavad antud ülesande tingimustele?

109. Näide. Ristküliku ümbermõõt on 23 cm.

Missugused võivad olla selle ristküliku mõõtmed?

Lahendus. Olgu ristküliku pikkus x cm ja laius y cm. Siis ümbermõõt on $(2x + 2y)$ cm. Saame võrrandi

$$2x + 2y = 23.$$

Jagades selle võrrandi mõlemad pooled 2-ga, saame

$$x + y = 11,5.$$

Leia alljärgnevas tabelis tundmatu puuduv väärtus nõnda, et x ja y vastavate väärtuste paar oleks võrrandi $x + y = 11,5$ lahendiks.

x	0,02		1,5	10	11,4
y		11			

Kas saab öelda, mitu lahendit on võrrandil $x + y = 11,5$?

110. Võrrandit kujul $ax + by = c$, kus a ja b tähendavad mistahes nullist erinevaid arve ja c mistahes arvu, nimetatakse kahe tundmatuga lineaarseks võrrandiks.

Tähed x ja y tähendavad tundmatuid. Arvud a ja b on tundmatute kordajad, c on vabaliige. Kahe tundmatuga lineaarse võrrandi lahendiks on arvupaar, mis seda võrrandit rahuldab. Kahe tundmatuga lineaarsel võrrandil võib olla lõpmata palju lahendeid.

111. Missugused allpool antud arvupaarid on võrrandi

$$7x - 2y = 14.$$

lahenditeks, missugused mitte?

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = -8 \\ y = -35 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 28 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 6 \\ y = 15 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ y = -8\frac{3}{4} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2,5 \\ y = 1,75 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -8 \end{array} \right. \end{array}$$

112. Asenda võrrandis

$$7x - 2y = 14$$

x arvuga 4 ja arvuta saadud võrrandist y .

Kontrolli, kas vaadeldav x ja y väärtuste paar on võrrandi $7x - 2y = 14$ lahendiks.

113. Asenda võrrandis

$$5x - 6y = 7$$

y arvuga 8 ja arvuta saadud võrrandist x .

Kontrolli, kas vaadeldav x ja y väärtuste paar rahuldab võrrandit $5x - 6y = 7$.

114. On antud kolm kahe tundmatuga võrrandit ja kolm arvupaari nii, et iga arvupaar on ühe antud võrrandi lahend.

Tee iga arvupaari kohta kindlaks, missuguse võrrandi lahendiks ta on.

1) $2x - 3y = 18$;

2) $x - 5y = 20$;

3) $4x + y = 8$.

a) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 6 \\ y = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 30 \\ y = 2 \end{cases}$

115. a) Kui kahe tundmatuga võrrandi lahendi üks arv on antud, siis teise arvu leidmiseks asendame võrrandis vastava tundmatu antud arvuga, mistõttu saame ühe tundmatuga võrrandi. Lahendades saadud võrrandi, saamegi antud kahe tundmatuga võrrandi lahendi teise arvu.

b) Leia võrrandi

$$3x - 2y = 10$$

lahend, mille üks arv on antud.

$$\begin{cases} x = -6 \\ y = \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \\ y = 7 \end{cases}$$

116. Leia võrrandist

$$3x - 2y = 7$$

x väärtus, kui $y = 4$; 10; $14\frac{1}{2}$; 16.

117. On antud võrrand

$$x + y = 20.$$

Mida võib öelda x väärtuste kohta, kui

$$y > 10?$$

118. On antud võrrand

$$x + y = 0.$$

Mida võid öelda x väärtuste kohta, kui

$$y > 0?$$

119. On antud võrrand

$$x - y = 8.$$

Mida võid öelda y väärtuse kohta, kui

$$x < 8?$$

120. Kui kahe tundmatuga võrrandi lahendi leidmisel pole kummagi tundmatu ühtki väärtust antud, siis ühe tundmatu väärtus võetakse meelevaldselt, teise tundmatu väärtus leitakse nii, nagu juhatatud ülesandes 115.

Leia võrrandi

$$5x - 3y = 12$$

lahendite hulgast neli lahendit nii, et igas lahendis oleks $0 < x < 10$.

121. Leia võrrandi

$$2x - 5y = 10$$

lahendite hulgast kolm lahendit nii, et igas lahendis oleks

$$-8 < y < 0.$$

KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÖRRANDI GRAAFIK.

122. Kui võrrandist

$$2x - y = 3$$

avaldatakse tundmatu y , siis saame:

$$-y = -2x + 3;$$

$$y = 2x - 3.$$

Saadud võrdusest võime järeldada, et

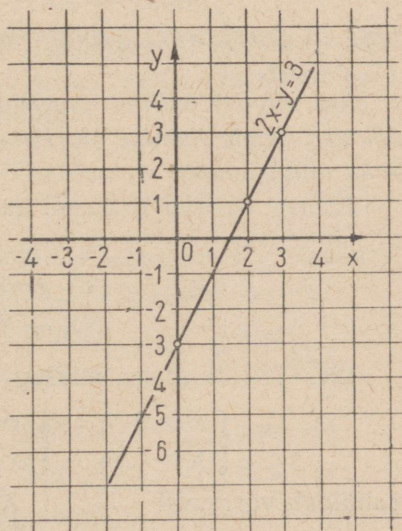
y väärtus sõltub x väärtusest.

Mis liiki on see sõltuvus?

123. Joonesta sõltuvuse $y = 2x - 3$ graafik.

Võrdle oma joonist joonisega 30.

Joont, mille said, nimetatakse ka võrrandi $2x - y = 3$ graafikuks.



Joon. 30.

124. *Ülesandeist 122 ja 123 järeldub, et*

iga kahe tundmatuga lineaarne võrrand väljendab tundmatutevahelist lineaarset sõltuvust. Selle sõltuvuse graafikut nimetatakse kahe tundmatuga lineaarse võrrandi graafikuks.

Sellest järeldub, et

kahe tundmatuga lineaarse võrrandi graafik on sirge.

Mitme punkti koordinaate on tarvis teada kahe tundmatuga lineaarse võrrandi graafiku joonestamiseks?

125. *Kahe tundmatuga lineaarse võrrandi graafiku joonestamiseks vajalikud punktid võib kõige kergemini saada nii, et ühe punkti võtame abstsissiga $x=0$ ja teise punkti ordinaadiga $y=0$. Näiteks võrrandi*

$$3x + 4y = 12$$

graafiku joonestamiseks kasutame punkte (0; 3) ja (4; 0) (joon. 31).

Kui antud võrrandis y kordaja on 1 või -1 , siis selle võrrandi saab kergesti kirjutada kujus

$$y = ax + b,$$

ning ta graafiliseks kujutamiseks võib kasutada punkte (0; b) ja (1; $a + b$).

Kui niiviisi valitud punktid tulevad joonisel liiga lähestikku või väljapoole joonise piirkonda, siis kasutame sirge joonestamiseks muid punkte.

Joonesta antud võrrandi graafik.

a) $5x + 4y = 20$;

b) $y = 2x - 3$;

c) $2x + y = 3$.

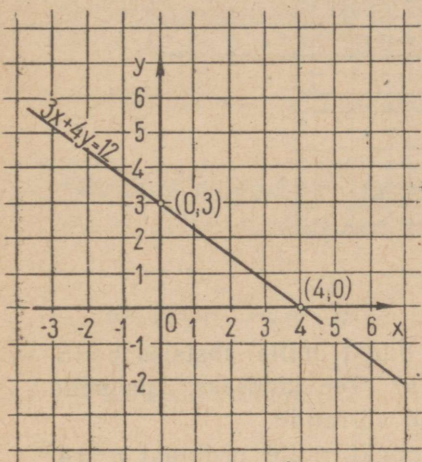
126. Tee kindlaks, missugune arvupaar

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1,5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=-1,5 \end{cases}$$

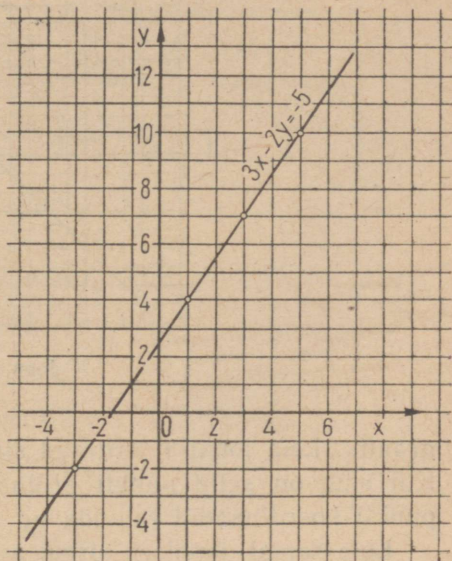
rahuldab võrrandit

$$3x + 4y = 12,$$

missugune mitte.



Joon. 31.



Joon. 32.

Kasutades joonist 31, millel on kujutatud võrrandi $3x + 4y = 12$ graafik, selgita, kus asuvad võrrandi graafiku suhtes need punktid, mille koordinaadid rahuldavad antud võrrandit.

Kui arvupaar rahuldab kahe tundmatuga lineaarset võrrandit, siis arvupaariga määratud punkt asetseb sirgel, mis on selle võrrandi graafikuks.

127. Joonisel 32 on esitatud võrrandi

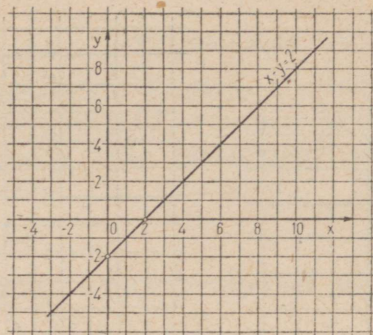
$$3x - 2y = -5$$

graafik. Tee selle graafiku abil kindlaks, missugused arvupaarid on võrrandi $3x - 2y = -5$ lahenditeks, missugused mitte.

$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases}$	$\begin{cases} x=0 \\ y=2,5 \end{cases}$
$\begin{cases} x=7 \\ y=13 \end{cases}$	$\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}$	$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

128. Joonisel 33 on kujutatud võrrandi

$$x - y = 2$$



Joon. 33.

graafik. Leia joonisel esitatud sirgel punkt, mille abstsiss $x=5$. Kui suur on selle punkti ordinaat y ? Tee kindlaks, kas selle punkti koordinaadid rahuldavad antud võrrandit.

Leia samal joonisel sirgel asuv punkt, mille ordinaat $y=4$. Kui suur on selle punkti abstsiss x ? Selgita, kas selle punkti koordinaadid on võrrandi $x - y = 2$ lahendiks.

Kui punkt asetseb antud võrrandi graafikul, siis selle punkti koordinaadid on antud võrrandi lahendiks.

129. Leia joonisel 33 kujutatud võrrandi

$$x - y = 2$$

graafiku abil selle võrrandi lahendid, kui üks arv on antud.

$\begin{cases} x = -3 \\ y = \end{cases}$	$\begin{cases} x = \\ y = -3 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 \\ y = \end{cases}$	$\begin{cases} x = \\ y = 4\frac{1}{2} \end{cases}$
$\begin{cases} x = 8 \\ y = \end{cases}$	$\begin{cases} x = 9 \\ y = \end{cases}$	$\begin{cases} x = \\ y = 9 \end{cases}$	$\begin{cases} x = \\ y = 8 \end{cases}$

Kontrolli, kas graafiku abil leitud lahendid rahuldavad võrrandit.

130. Joonesta võrrandi

$$2y - x = 4$$

graafik ja täida saadud graafiku abil alljärgnev tabel nii, et iga ülestikku asetsevate arvude paar oleks antud võrrandi lahendiks.

x	-3		1	1,5		3	3,5	
y		1			3			4

131. 1) Leia graafiliselt võrrandi

$$2x - y = 4$$

lahendite hulgast viis lahendit:

a) võttes x väärtused vahemikust

$$-1 \leq x \leq 5;$$

b) võttes y väärtused vahemikust

$$-4 \leq y \leq 5.$$

2) Leia võrrandi

$$3x + y = 12$$

lahendite hulgast kolm lahendit;

a) võttes x väärtuse vabalt;

b) võttes y väärtuse vabalt.

KAHE TUNDMATUGA LINEAARNE VÖRRANDISÜSTEEM.

132. Arvuta allpool antud kahe võrrandi lahendid, milledest üks arv on teada, ja kirjuta tulemus tabeli vastavasse laht-risse:

$$x - y = -1$$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y								

$$x - 2y = -5$$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y								

Kui tabelid on täidetud, siis leia arvupaar, mis esineb mõlemas tabelis. See arvupaar on mõlema võrrandi lahendiks ehk, teisiti öeldes, see arvupaar on võrrandite

$$x - y = -1 \text{ ja } x - 2y = -5$$

ühine lahend.

133. Leia eelmise ülesande eeskujul võrrandite

$$x + y = 7 \text{ ja } 3x - 2y = -4$$

ühine lahend.

134. Tee kindlaks, kas kolme arvupaari

$$\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$$

hulgas leidub võrrandite

$$3x - 5y = -15 \text{ ja } x - y = -1$$

ühine lahend.

135. Võrrandid, millele otsitakse ühiseid lahendeid, moodustavad võrrandisüsteemi.

Näiteks ülesandes 134 antud võrrandid

$$3x - 5y = -15 \text{ ja } x - y = -1$$

moodustavad võrrandisüsteemi, mida kirjutatakse nii:

$$\begin{cases} 3x - 5y = -15 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Võrrandisüsteemi võrrandite ühist lahendit nimetatakse selle süsteemi lahendiks.

Näiteks süsteemi

$$\begin{cases} 3x - 5y = -15 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

lahend on

$$\begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$$

Otsusta ülesande 132 lahenduse põhjal, missugune on võrrandi-

süsteemi

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$$

lahend.

$$+y = 4 \quad x = 3$$

Võrrandisüsteemi lahendi leidmist nimetatakse selle süsteemi lahendamiseks.

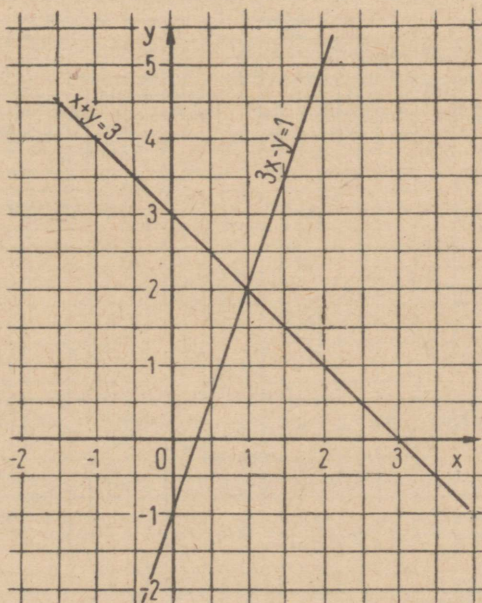
KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÕRRANDISÜSTEEMI GRAAFILINE LAHENDAMINE.

136. Joonisel 34 on esitatud võrrandite $x + y = 3$ ja $3x - y = 1$ graafikud. Otsusta joonise põhjal, kumba võrrandit rahuldavad järgmiste punktide koordinaadid: $(-2; 5)$; $(0; 3)$; $(3; 0)$; $(2; 5)$; $(0; -1)$; $(1,5; 3,5)$.

Leia jooniselt võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

lahend.



Joon. 34.

137. Joonesta ühes ja samas teljestikus võrrandite $x - y = 5$ ja $2x + y = 1$ graafikud. Leia saadud joonise abil süsteemi

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

lahend.

138. Joonisel 35 on kujutatud võrrandite

$$105x - 260y = -624$$

$$260y = 624 + 105x$$

$$y = \frac{21}{52}x + 2\frac{24}{65}$$

ja

$$175x + 260y = -104$$

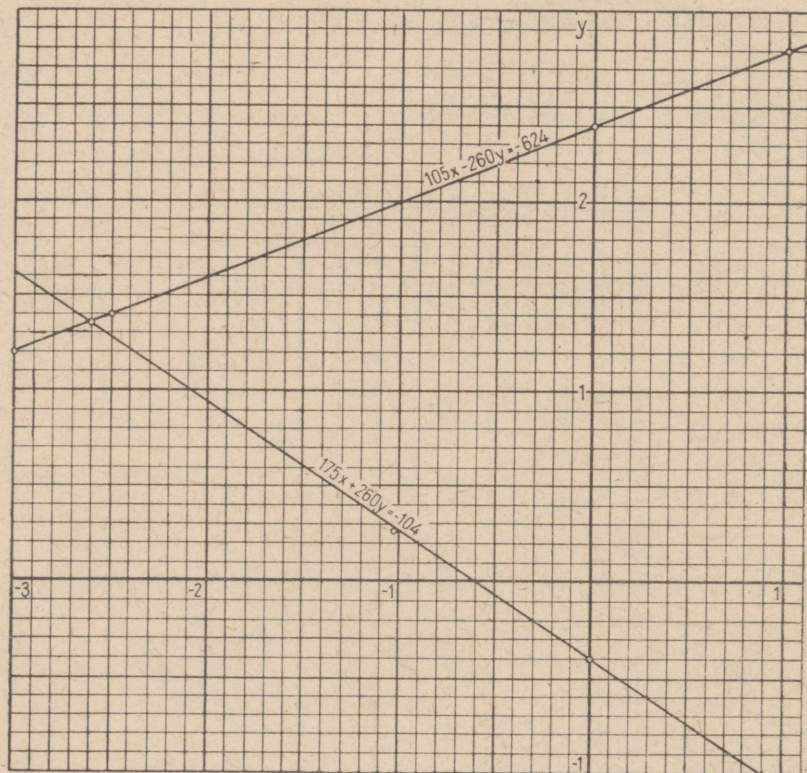
graafikud.

$$260y = -175x - 104$$

$$y = -\frac{35}{52}x - \frac{26}{65}$$

a) Leia selle joonise abil võrrandi

$$105x - 260y = -624$$



Joon. 35.

lahendid, mille üks arv on antud:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = \end{cases} \quad \begin{cases} x = \\ y = 2,6 \end{cases}$$

b) Leia graafiku abil võrrandi

$$175x + 260y = -104$$

lahendis puuduv arv:

$$\begin{cases} x = \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0,5 \\ y = \end{cases}$$

Kontrolli arvutamise teel, kui suure vea sa tegid puuduva arvu leidmisel graafiku abil.

139. Leia jooniselt 35 võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 105x - 260y = -624 \\ 175x + 260y = -104 \end{cases}$$

lahend nii täpselt, kui suudad. Kontrolli leitud lahendit.

Kahe tundmatuga võrrandisüsteemi graafiliseks lahendamiseks kujutame süsteemi võrrandid graafiliselt. Kui saadud jooned lõikuvad, siis lõikepunkti koordinaadid on antud süsteemi lahendiks.

140. Lahenda graafiliselt võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 11. \end{cases}$$

Kontrolli, kas leitud arvupaar rahuldab mõlemat võrrandit.

141. Lahenda graafiliselt järgmised võrrandisüsteemid:

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x - 3y = -18 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x - y = 16 \end{cases}$

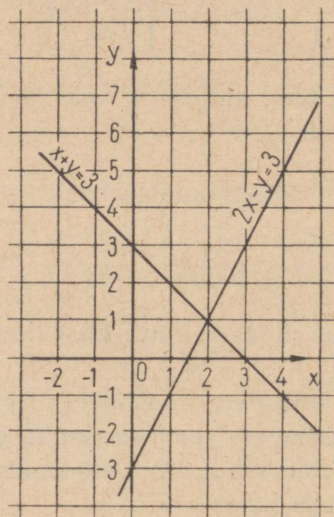
d) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$

KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÕRRANDISÜSTEEMI LAHENDITE ARV.

142. Ülesannete 136—141 lahendamisel nägime, et kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi lahendiks on antud võrrandeid kujutavate sirgete ühise punkti koordinaadid.

Mitu ühist punkti on kahel lõikuval sirgel? Mitu lahendit on kahe tundmatuga lineaarsel võrrandisüsteemil, kui selle süsteemi võrrandite graafikud lõikuvad?



Joon. 36.

Otsusta joonise 36 abil, mitu lahendit on süsteemil

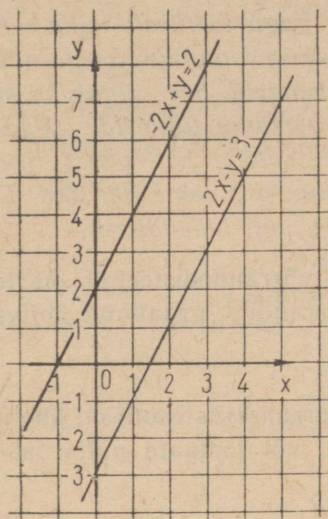
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Kahe tundmatuga lineaarsel võrrandisüsteemil on üks lahend, kui võrrandeid kujutavad sirged lõikuvad.

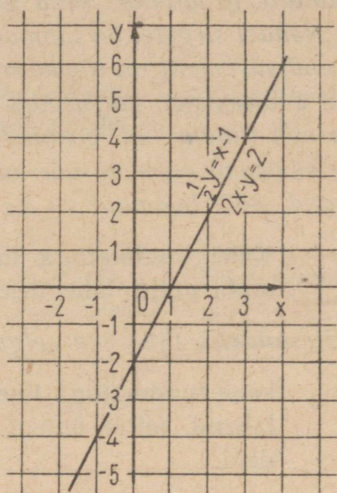
143. Otsusta joonise 37 abil, kas süsteemil

$$\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

on lahend või mitte.



Joon. 37.



Joon. 38.

Jooniselt on näha, et võrrandeid kujutavad sirged on paralleelsed. Seega puudub neil sirgetel lõikepunkt. Vaadeldes antud süsteemi, näeme, et sel süsteemil puudub lahend, sest muutes esimese võrrandi liikmete ees olevad märgid vastupidiseks, saame antud süsteemi teisendada süsteemiks

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Viimase süsteemi võrrandite nõuded on aga vasturääkivad: esimene võrrand nõuab, et ühe tundmatu kahekordse ja teise tundmatu vahe peab võrduma -2 -ga, teine võrrand nõuab aga, et sama vahe peab võrduma 3 -ga. Niisugust võrrandisüsteemi nimetatakse vastuoluliseks.

Kahe tundmatuga lineaarsel võrrandisüsteemil puudub lahend, kui võrrandeid kujutavad sirged on paralleelsed.

144. Joonisel 38 on kujutatud võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{1}{2} y = x - 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

võrrandite graafikud. Need graafikud, nagu jooniselt näha, ühtivad. Nendel sirgetel on lõpmata palju ühiseid punkte. Seega antud võrrandisüsteemil on lõpmata palju lahendeid. See selgub ka süsteemi vaatlemisel: korrutades esimese võrrandi liikmeid -2 -ga ja viies siis tundmatud vasakule poolele, saame $2x - y = 2$. Seega selle süsteemi esimene võrrand on sama, mis teine võrrand. Ühe võrrandi kõik lahendid on ka teise võrrandi lahenditeks.

Kahe tundmatuga lineaarsel võrrandisüsteemil on lõpmata palju lahendeid, kui võrrandite graafikud ühtivad.

Ülesandeist 142—144 selgub, et

kahe tundmatuga lineaarsel võrrandisüsteemil on kas üks lahend, mitte ühtegi lahendit, või lõpmata palju lahendeid.

Lahenda graafiliselt võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

Antud võrrandite graafiliseks kujutamiseks esita võrrandid kujus $y = ax + b$, ning rakenda ülesandes 76 antud graafilise kujutamise juhust.

Mitu lahendit on sel süsteemil?

KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÕRRANDISÜSTEEMI LAHENDAMINE VÕRDLEMISVÕTTEGA.

145. Võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

graafilisel lahendamisel on sobiv antud võrrandite graafikute joonistamiseks need võrrandid esitada kujus

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = 2x - 1. \end{cases}$$

Süsteemi lahendis on mõlemas võrrandis esineva tundmatu y väärtus üks ja seesama. Teisiti öeldes, viimases süsteemis on mõ-

lema võrrandi vasakud pooled võrdsed ja seega ka paremad pooled

$$-x + 5 = 2x - 1.$$

Nii oleme saanud võrrandi, milles esineb ainult tundmatu x , tundmatu y on kõrvaldatud ehk elimineeritud.

Lahendades selle võrrandi, saame

$$3x = 6, \text{ millest } x = 2.$$

Asendades antud süsteemi ühes võrrandis, näiteks esimeses, tähe x leitud väärtusega 2, saame y väärtuse

$$y = -2 + 5 = 3.$$

Leitud arvude õigsust saab kontrollida peast.

Antud süsteemi lahend on

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Võrrandisüsteemi eespool rakendatud lahendamiseviisi nimetatakse võrdlemisvõtteks.

Lahenda võrdlemisvõtte abil võrrandisüsteemid:

$$\text{a) } \begin{cases} y = x + 4 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y - x = 7 \\ y + 3x = 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x = y + 8 \\ x = 3y - 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + y = -12 \\ x + y = -7 \end{cases}$$

KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÕRRANDISÜSTEEMI LAHENDAMINE LIITMISVÕTTEGA.

146. Kui antud võrrandisüsteemil on üksainus lahend, siis selle süsteemi võrrandites tähendab kumbki tundmatu ühtainust arvu ja seega ka võrrandite pooled tähendavad kindlaid arve.

Näiteks süsteemi

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$$

esimese võrrandi vasak pool tähendab arvu 12.

Missugust arvu tähendab selle süsteemi teise võrrandi vasak pool?

Antud süsteemi lahendamiseks liidame esimese võrrandi pooltega teise võrrandi vastavad pooled, saame

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 12 \\ x - 3y = -3 \\ \hline 3x = 9, \end{array}$$

siit

$$x = 3.$$

y väärtuse leidmiseks asendame antud süsteemi ühes võrrandis, näiteks teises, tähe x leitud väärtusega 3, saame

$$\begin{array}{r} 3 - 3y = -3; \\ -3y = -6 \\ y = 2. \end{array}$$

Kontrollimiseks arvutame süsteemi võrrandite vasakud pooled, asendades neis x ja y leitud väärtustega. Saame

$$\begin{array}{r|l} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 6 + 6 = 12; & 3 - 3 \cdot 2 = 3 - 6 = -3; \\ V_1 = P_1. & V_2 = P_2. \end{array}$$

Seega antud süsteemi lahend on

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$$

Nagu näeme, on antud süsteemi esimeses võrrandis y kordajaks $+3$, teises võrrandis aga -3 . Need kordajad on vastandarvud ja seetõttu võrrandite vasakute poolte liitmisel kaob liige tundmatuga y . Nii õnnestus kõrvaldada ehk elimineerida tundmatu y .

Võrrandisüsteemi eespool kirjeldatud lahendamisviisi nimetatakse liitmisvõtteks.

Lahenda peast võrrandisüsteemid:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 5x - 2y = -22 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 7y = 7 \\ -4x + y = -31 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$

$$e) \begin{cases} x - 4y = 21 \\ 2x + 4y = 51 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 2x + 2y = 11 \\ 5x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + y = 19 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x - 3y = 4 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} x + 2y = 2 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

147. Näide. Lahendame liitmisvõttega võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 6x - y = 13 \end{cases}$$

Lahendus. Kui siin teise võrrandi liikmed korrutame 3-ga, siis saame

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 18x - 3y = 39 \end{cases}$$

Liites nüüd võrrandite vastavad pooled, saame

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 21 \\ 18x - 3y = 39 \\ \hline 20x \quad \quad = 60 \end{array}$$

siit

$$x = 3.$$

Asendades antud süsteemi ühes võrrandis, näiteks esimeses, tähe x leitud väärtusega 3, saame leida tundmatu y .

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 3y &= 21; \\ 3y &= 21 - 6; \\ 3y &= 15; \\ y &= 5. \end{aligned}$$

Eespool toodud arvutused kirjutame lühemalt nõnda:

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 21 \\ 6x - y = 13 \end{array} \right. \cdot 3 \quad \left| \begin{array}{l} 2x + 3y = 21; \\ 18x - 3y = 39; \end{array} \right. \\ \hline 20x \quad \quad = 60, \\ \quad \quad \quad x = 3. \end{array}$$

$$\begin{aligned} 6 + 3y &= 21; \\ 3y &= 15; \quad y = 5. \end{aligned}$$

Kontroll.

$$\begin{array}{l|l} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 6 + 15 = 21 & 6 \cdot 3 - 5 = 18 - 5 = 13; \\ V_1 = P_1. & V_2 = P_2. \end{array}$$

Vastus.

$$\begin{cases} x=3 \\ y=5. \end{cases}$$

148. Lahenda võrrandisüsteemid.

a) $\begin{cases} 3x - 4y = -20 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x - 3y = 1 \\ 5x - 2y = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 15x + 23y = -10 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}$

149. Võrrandisüsteemi lahendamisel liitmisvõttega tuleb aga enamasti korrutada mõlema võrrandi pooli selliste arvudega, et ühe tundmatu kordajad tuleksid vastandarvud.

Näide.

$$\begin{array}{l|l} \begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5x + 6y = 17 \end{cases} & \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot (-3) \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} 15x + 20y = 55; \\ -15x - 18y = -51; \\ \hline 2y = 4; \\ y = 2. \end{array}$$

$$3x + 4 \cdot 2 = 11;$$

$$3x = 3;$$

$$x = 1.$$

Kontroll.

$$\begin{array}{l|l} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 3 + 8 = 11; & 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 5 + 12 = 17; \\ V_1 = P_1. & V_2 = P_2. \end{array}$$

Vastus.

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2. \end{cases}$$

150. Lahenda süsteemid:

a) $\begin{cases} 6x + 7y = -8 \\ 8x + 9y = -10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = -10 \\ 4x - 5y = 2 \end{cases}$

$$\checkmark c) \begin{cases} 7x + 4y = 78 \\ 5x + 7y = 64 \end{cases}$$

$$\checkmark d) \begin{cases} 3x + 14y = 47 \\ 2x - 21y = 1 \end{cases}$$

151. Võrrandisüsteeme, mille võrrandites tundmatuga liikmed on vasakul poolel ja vabaliikmed paremal poolel, nimetatakse normaalkujulisteks.

Teisenda võrrandisüsteemid normaalkujulisteks ja lahenda need.

$$a) \begin{cases} 6x = 18 - 5y \\ 4x = y - 1 \end{cases}$$

$$\checkmark b) \begin{cases} 7x = 127 - 3y \\ 3y = 97 - 4x \end{cases}$$

$$\checkmark c) \begin{cases} 20 + y = 3x \\ 7x - 100 + 3y = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2 - y = -3x \\ 3y = 10 - 12x \end{cases}$$

KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÖRRANDISÜSTEEMI LAHENDAMINE ASENDUSVÕTTEGA.

152. Ühe tundmatu saame võrrandisüsteemist elimineerida ka sel teel, kui lahendame süsteemi ühe võrrandi ükskõik kumma tundmatu suhtes ning asetame siis saadud avaldise süsteemi teise võrrandisse vastava tundmatu asemele.

Näide.

$$\begin{cases} 7x - 3y = 29 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$$

Lahendus. Avaldame teisest võrrandist tundmatu y .

$$y = 12 - 2x.$$

Asendame nüüd esimeses võrrandis tundmatu y avaldisega $12 - 2x$, saame

$$7x - 3(12 - 2x) = 29.$$

Asendamise tulemusena saame ühe tundmatuga võrrandi, milles y enam ei esine. Lahendame selle võrrandi:

$$\begin{aligned} 7x - 36 + 6x &= 29; \\ 13x &= 65; \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Võrduse

$$y = 12 - 2x$$

abil leiame nüüd y väärtuse:

$$y = 12 - 2 \cdot 5 = 12 - 10 = 2.$$

Kontroll.

$$7 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 35 - 6 = 29;$$

$$V_1 = P_1.$$

$$2 \cdot 5 + 2 = 10 + 2 = 12;$$

$$V_2 = P_2.$$

Vastus.

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2. \end{cases}$$

Asendusvõtte rakendamisel on tarvis silmas pidada, et kui me lahendasime ühe võrrandi mingi tundmatu suhtes, siis asendamise peab toimuma teises võrrandis. Tundmatu avaldamist ja asendamist ei saa teostada ühe ja sama võrrandi abil, sest siis saame samasuse, millest sarnaste liikmete koondamisel tundmatu kaob.

Kontrolli seda võrrandiga

$$2x + y = 12,$$

lahendades selle y suhtes ja asendades nüüd tundmatu y samas võrrandis saadud avaldisega.

Asendusvõtte kasutamine on eriti sobiv siis, kui ühe tundmatu kordajaks on arv 1 või -1 , sest siis on selle otsitava suhtes võrrandi lahendamine eriti hõlpus.

153. Lahenda asendusvõtte abil järgmised võrrandisüsteemid:

$$1) \begin{cases} 5x + 8y = 91 \\ 11x + y = 18 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 13x + y = 27 \\ 12x + 3y = 27 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 6x + y = 17 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 9x - y = 81 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 14x - y = 38 \\ 7x + 2y = 29 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x - 5y = 5 \\ 3x - 2y = 54 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x + 17y = 49 \\ 3x - y = 43 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 16x - 5y = -3 \\ x + 4y = 30 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 3x = 37 - y \\ 3y + 6 = 4x \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x = 5y - 13 \\ 7y - 25 = 2x \end{cases}$$

154. Lahenda võrrandisüsteemid.

$$1) \begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 7x + 2y = 47 \\ -7x + 3y = -17 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + 5y = 110 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 9x - 2y = 6 \\ 7x + y = 20 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 5x + 2y = 23 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 5x + 6y = 39 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 8x - 3y = 17 \\ 9x - 2y = 26 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 3x + y = 25 \\ 5x - y = 23 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x + 4y = 16 \\ 3x - 4y = 16 \end{cases}$$

155. Võrrandisüsteemide lahendamiseks tuleb kõigepealt lihtsustada süsteemi kuuluvad võrrandid, lihtsustades algul ühe, siis teise võrrandi.

Näide.

$$\begin{cases} \frac{x+y}{8} + \frac{x-y}{6} = 5 \\ 3(x+y) - 4(x-y) = 120 \end{cases}$$

Lahendus.

$$1) \frac{\overset{3}{x+y}}{8} + \frac{\overset{4}{x-y}}{6} = \overset{24}{5};$$

$$3(x+y) + 4(x-y) = 120;$$

$$3x + 3y + 4x - 4y = 120;$$

$$7x - y = 120;$$

$$2) 3(x+y) - 4(x-y) = 120;$$

$$3x + 3y - 4x + 4y = 120;$$

$$-x + 7y = 120;$$

$$3) \begin{cases} 7x - y = 120 \\ -x + 7y = 120 \end{cases} \quad \cdot 7 \quad \begin{cases} 49x - 7y = 840; \\ -x + 7y = 120; \end{cases}$$

$$48x = 960;$$

$$x = 20.$$

$$7 \cdot 20 - y = 120;$$

$$y = 140 - 120;$$

$$y = 20.$$

Kontroll.

$$\frac{20+20}{8} + \frac{20-20}{6} = \frac{40}{8} = 5;$$

$$V_1 = P_1.$$

$$3(20+20) - 4(20-20) = 3 \cdot 40 - 4 \cdot 0 = 120;$$

$$V_2 = P_2.$$

Vastus.

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 20. \end{cases}$$

156. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid:

$$1) \begin{cases} 2(7x + 3y) - 4(6x - 5y) = 280 \\ 5(11x + 7y) - 2(15x + 9y) = 1760 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2(3x - 5y) - 3(x - 5) = 56 - 4(6 + 2y) \\ 2(4x - 3) - 33 = 5(x - 2y) + 2(3y - 5) \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (x - 4)(y + 7) = (x - 3)(y + 4) \\ (x + 5)(y - 2) = (x + 2)(y - 1) \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} (x + 4)(y + 5) = (x + 1)(y + 8) \\ (2x - 3)(5y + 7) = 2(5x - 6)(y + 1) \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} (3x + 4)^2 + (3y - 8)^2 - 18xy = 9(x - y)^2 \\ (x + y)^2 - (x + 3)^2 + 2x(9 - y) = (y + 7)^2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} (2x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4(x + 1)^2 + (y + 1)^2 \\ 9x^2 + 4y^2 = (3x + 1)^2 + (2y - 1)^2 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} (8x + y)(8x - y) + 26 = x(64x + 1) - y(y - 1) \\ (x + y)^3 - (x - y) + 8 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) + 3xy(x + y) \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} (x - y)^3 + 12 = (x - y)(x^2 + xy - y^2) - 3xy(x - y) + x + y \\ (x + 2y)(x - 2y) + 8 = x(x + 1) - y(4y + 1) \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 8\{x + 2[y - 2(x + 3)]\} = 29 \\ 2\{2y - 2[y - 2(x + 1)]\} = 9 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 2\{x + 3[y - 2(x - 1)]\} = 5 \\ 5\left\{6\left[\frac{1}{2}(x + 1) - y\right] - x\right\} = 6 \end{cases}$$

157. Lahenda võrrandisüsteemid:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 2 \\ \frac{2x+1}{3} - \frac{3y+1}{5} = \frac{47}{15} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 8 \\ \frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{4} = 11 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{x-y}{2} + 3 = \frac{2x+y}{5} \\ 8 - \frac{x-2y}{4} = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{2}{3}y + 2 = 3x - 2,5y \\ 10 - \frac{1}{4}(2x - y) = \frac{4}{7}x + \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{3x+4y}{5} - \frac{14x-3y}{15} = \frac{7y-x}{10} + \frac{y-x}{2} \\ \frac{4x+3y-3}{7} + \frac{5x-2y+7}{14} = \frac{9y-5x}{21} + \frac{3y}{4} \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \frac{8x-y}{9} - \frac{7x+y}{12} = \frac{13x-3y}{16} - \frac{5x+8}{18} - \frac{1}{72} \\ \frac{11x-4y}{15} + \frac{11x-4y}{20} = \frac{17x+2y}{30} - \frac{7y-5x}{12} \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{5} \\ \frac{x+4}{y+4} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \frac{5}{y-1} = \frac{4}{x-1} \\ \frac{1}{2y-1} = \frac{1}{2x+1} \end{cases}$$

158. Lahenda võrrandisüsteemid:

$$1) \begin{cases} x - 2 = \frac{xy+13}{y+6} \\ y - 2 = \frac{xy-13}{x+4} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{1-9x}{1-y} = -4 \\ \frac{x}{2x-10} - \frac{5y}{6x-30} = \frac{1}{20-4x} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{y-6}{x-4} + \frac{10}{x^2-16} = \frac{y+6}{x+4} \\ \frac{5}{x^2-3x} - \frac{3}{xy-3y} = \frac{10}{xy} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + y = m \\ x - y = n \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} y + 3(y + 3,5) = 6(y - 1) + x \\ \frac{y+6}{y-4} = \frac{x+3}{x-5} - \frac{49}{xy-5y-4x+20} \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x = py + q \\ y = ax + b \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \frac{2x-1}{2x+1} + \frac{8x^3+3y}{8x^3+1} = 1 \\ \frac{18}{x^3+2x^2+x} - \frac{1}{xy-x^2} = \frac{x}{x^3-(y-2)x^2-(2y-1)x-y} \end{cases}$$

ÜLESANNETE LAHENDAMINE VÖRRANDISÜSTEEMIDE ABIL.

159. Ülesande lahendamisel kahe tundmatu abil tuleb koostada kahest võrrandist koosnev süsteem. Lahendame näitena võrrandisüsteemi abil järgmise ülesande.

Ülesanne. Töökoda sai tähtajalise tellimuse valmistada suveniirmärke. Kui töökoda valmistaks iga päev 180 märki, siis jääks tähtpäevaks 600 märki puudu. Kui aga töökoda valmistaks iga päev 210 märki, siis võiks tähtpäevaks valmistada 300 märki rohkem kui tellitud. Mitu märki telliti ja mitmepäevane oli tähtaeg?

Lahendus. Telliti x märki. Tähtaeg oli y päeva. Valmistades 180 märki päevas, saaks tähtajaks valmis $180y$ märki, mis on 600 võrra vähem kui tellitud märkide arv, seega 600 võrra vähem kui x ehk $x - 600$.

Saame võrrandi

$$x - 600 = 180y.$$

Valmistades aga 210 märki päevas, saaks tähtajaks valmis $210y$ märki, mis on andmete põhjal 300 võrra suurem kui x , seega

$$x + 300 = 210y.$$

Nii oleme saanud võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x - 600 = 180y \\ x + 300 = 210y. \end{cases}$$

Lahendame selle võrrandisüsteemi, teisendades ta esmalt normaalkujuliseks:

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} x - 180y = 600 \\ x - 210y = -300 \end{cases} & \left| \cdot (-1) \right| & \begin{array}{l} x - 180y = 600; \\ -x + 210y = 300; \\ \hline 30y = 900; \\ y = 30 \text{ (päeva).} \end{array} \end{array}$$

$$x - 180 \cdot 30 = 600;$$

$$x - 5400 = 600;$$

$$x = 6000 \text{ (märki).}$$

Kontroll. Kui töökoda valmistaks päevas 180 märki, siis 30 päevaga valmiks $30 \cdot 180 = 5400$ märki. Vajalikust märkide arvust 6000 jääks seega puudu $6000 - 5400 = 600$ märki.

Kui töökoda valmistaks päevas aga 210 märki, siis 30 päevaga valmiks $30 \cdot 210 = 6300$ märki, mis on $6300 - 6000 = 300$ märgi võrra rohkem kui vajati. Ülesanne on lahendatud õigesti.

Vastus. Töökojalt telliti 6000 suveniirmärki tähtajaga 30 päeva.

✓ 160. Sookurg lendas pärituult kiirusega 63 km tunnis, vastu-
tuult aga kiirusega 37 km tunnis. Leia sookure lennukiirus tuule-
vaikse ilmaga ja tuule kiirus.

✓ 161. Aerutaja liikus jõel pärivoolu kiirusega 15 km tunnis ja
vastuvoolu kiirusega 10 km tunnis. Arvuta aerutaja liikumise
kiirus seisvas vees ja jõe voolu kiirus.

✓ 162. Klassis on 32 õpilase jaoks 25 pinki. Osa neist on kahe-
istmelised, osa üheistmelised. Vabu kohti pole. Kui palju on kahe-
istmelisi ja kui palju üheistmelisi pinke?

163. Rahakotis on 16 metallraha, 20- ja 5-kopikalised, kokku
185 kopikat. Mitu 20- ja mitu 5-kopikalist on rahakotis?

• 164. Õe ja venna vanus on kokku 50 aastat. 10 aastat tagasi
oli vend 2 korda nii vana kui õde. Kui vanad on nad praegu?

165. Isa ja ema vanus on kokku 67 aastat. 16 aasta eest oli
isa 1,5 korda vanem kui ema. Arvuta isa ja ema vanus.

166. Kahekohalise arvu ristsumma on 11. Kui numbrite järje-
korda muuta, tekib arv, mis on eelmisest 63 võrra väiksem. Mis
arv see on?

• 167. Kahekohalise arvu ristsumma on 12. Kui selle arvu
numbrite kohad vahetada, siis saame arvu, mis on eelmisest 18
võrra suurem. Leia see arv.

168. Postkaardid margistatakse 3-kopikase ja kirjad 4-kopi-
kase postmargiga. Asutus saatis välja kokku 15 postkaarti ja
kirja, millele tuli postmarke panna 57 kopika eest. Mitu post-
kaarti ja mitu kirja asutus saatis?

169. Sulepea on 1 kop. kallim kui pliiats. 14 kopika eest saab
osta 5 sulepead ja 4 pliiatsit. Kui kallis on sulepea ja kui kallis
on pliiats?

• 170. 3 hõõglambi ja 8 meetri juhtmetraadi eest maksti 1,15
rubla, 5 hõõglambi ja 12 meetri juhtmetraadi eest maksti aga
1,85 rubla. Leia hõõglambi ja juhtmetraadi meetri hind.

171. Kolme aasta pärast on ema 3 korda vanem tütrest, seitsme aasta eest oli ema aga 7 korda vanem tütrest. Kui vana on ema ja kui vana on tütar?

172. 2 kg peensuhkrut ja 4 kg tükksuhkrut maksab 5,4 rubla, kuid 4 kg peensuhkrut ja 2 kg tükksuhkrut maksab 5,1 rubla. Arvuta peensuhkru ja tükksuhkru kilogrammi hind.

173. 1 kg riisi ja 2 kg jahu maksab 1,25 rbl. Kui aga osta 2 kg riisi ja 3 kg jahu, siis tuleb maksta 2,23 rbl. Arvuta riisi ja jahu kilogrammi hind.

174. 1 kg makarone ja 3 kg odratangu maksab 0,86 rbl. Ema ostis 2 kg makarone ja 8 kg odratangu ja maksis 2,02 rbl. Kui palju maksis kilogramm makarone ja kui palju kilogramm odratangu?

175. Kilogramm juustu maksab 0,12 rbl. rohkem kui kilogramm võid. Kilogramm juustu ja kilogramm võid maksab kokku 5,68 rbl. Arvuta juustu ja või kilogrammi hind.

176. Kui ristkülikukujulise aia pikkust vähendada 10 m võrra ja laiust suurendada 5 m võrra, siis aia pindala väheneb 350 m^2 võrra. Kui aga laius jätta muutmata ja pikkust suurendada 10 m võrra, siis aia pindala suureneb 800 m^2 võrra. Leia aia pikkus ja laius.

177. Elamu põhiplaani on ristküliku kuju. Kui maja pikkust vähendada 1 m võrra ja laiust suurendada 1 m võrra, siis elamu põhipindala suureneb 24 m^2 võrra. Kui pikkust suurendada aga 1 m võrra ja laiust niisama palju, siis see pindala suureneb 56 m^2 võrra. Arvuta plaanis ette nähtud elamu pikkus ja laius.

178. Poisil on 2 korda rohkem õdesid kui vendi, igal õel aga on niisama palju vendi kui õdesid. Mitu last on perekonnas?

179. Kolmnurgas ABC tipu C juures olev välisnurk on 111° . Nurk A on nurgast B 10° võrra suurem. Arvuta kolmnurga ABC nurgad.

180. Trapetsi kesklõigu pikkus on 8 cm, üks alus on teisest 2 cm võrra pikem. Leia trapetsi alused.

181. Meres ujuvast jääpangast ulatub välja 2000-kuupmeetri osa. Jää erikaal on 0,9 ja merevee erikaal 1,03. Leia jäätüki ruumala ja kaal.

182. Kivi külge seoti nii suur korgitükk, et nad vees üheskoos ei vaju põhja ega kerki ka pinnale. Kivi erikaal on 3 ja korgi erikaal 0,24. Kui palju kaalub kivi ja kui palju kaalub kork, kui kokku kaaluvad nad 11,5 kg?

183. Kui otsitavat arvu jagada 7-ga, siis jääk on 6. Kui otsitavat arvu jagada 11-ga, siis jääk on 1, kuid jagatis on eelmisest jagatisest 5 võrra väiksem. Leia see arv.

184. Kui murru lugejat suurendada 1 võrra ja nimetajat vähendada 1 võrra, siis murd saab võrdseks 1-ga. Kui lugejat vähendada 1 võrra ja nimetajat suurendada 1 võrra, siis murd saab võrdseks $\frac{1}{2}$ -ga. Mis murd see on?

185. Tükk hõbedat ja tina sulamit kaalub 10 g. Selle sulami erikaal on 9. Hõbedat erikaal on 10,2 ja tina erikaal 7,3. Kui palju hõbedat ja kui palju tina on selles sulamis?

186. Ühel riilil oli 7 korda rohkem raamatuid kui teisel. Esimeselt riililt võeti 12 raamatut ära ja teisele riilile pandi 8 raamatut juurde, mistõttu nüüd esimesel riilil on 3 korda rohkem raamatuid kui teisel. Mitu raamatut oli enne kummalgi riilil?

187. Kahest sadamast, millede vahemaa on 660 km, väljusid samaaegselt teineteisele vastu kaks aurikut. 8 tunni pärast oli aurikute vahemaa 396 km. Leia kummagi auriku liikumise kiirus, teades, et üks aurik liikus tunnis 3 km rohkem kui teine.

188. Tallinnast väljus kaubarong Tartu poole, samaaegselt väljus reisirong Tartust Tallinna poole. Need rongid kohtusid 2 tunni pärast. Leia kummagi rongi keskmine kiirus, teades, et Tallinnast Tartusse on raudteed mööda 200 km ja et reisirong läbis tunnis 40 km võrra rohkem kui kaubarong.

189. Lahenda alljärgnevad ülesanded kahel viisil: kahe tundmatu abil ja ühe tundmatu abil.

a) Kahe arvu summa on 183, nende arvude vahe on 9. Leia need arvud.

b) Leia kaks niisugust arvu, mille summa on 63 ja vahe 11.

c) Kahe arvu summa on 44. Kahekordse suurema arvu ja kolmekordse väiksema arvu summa on 109. Leia need arvud.

d) Kahe arvu summa on 45. Kui suurendaksime ühte neist 2 korda ja teist 5 korda, siis oleks nende summa 165. Mis arvud need on?

190. Tugitool ja diivan maksavad kokku 208,1 rbl. Diivan on tugitoolist 4 korda kallim. Kui palju maksab diivan ja kui palju tugitool?

191. Uhes klassis müüdi teatrietendusele 20 kallimat ja 16 odavamamat piletit, kokku 23 rubla eest. Teises klassis müüdi aga 18 kallimat ja 24 odavamamat piletit, kokku 25,5 rubla eest. Arvuta piletite hinnad.

192. On olemas 90-protsendilist ja 70-protsendilist hapet. Kui palju tuleb võtta ühte ja kui palju teist, et saada 1 kg a) 75-protsendilist hapet? b) 80-protsendilist hapet?

193. Taheti osta 3 vaipa ja 2 põrandariiet, mis maksid kõik kokku 117 rubla. Kuid vaiba hinda alandati 10% ja põrandariide hinda 15% ning sama ostu eest tuli maksta 104,7 rbl. Kui palju maksis vaip ja kui palju põrandariie enne hinnaalandamist? Kui palju maksid need esemed pärast hinnaalandamist?

194. On hõbedat prooviga 850 ja prooviga 720. Kui palju tuleb võtta hõbedat kummastki liigist, et saada 1 kg 40 g hõbedat prooviga 800?

195. Keldrist pumbatakse vett välja kahe pumbaga. Kui üks pump oli töötanud 2 tundi ja teine 3 tundi, siis oli vee hulk keldris vähenenud 1 020 m³ võrra. Pärast seda kui esimene pump oli töötanud veel 1 tund ja teine $2\frac{1}{2}$ tundi, oli vee hulk keldris vähenenud veel 690 m³ võrra. Mitu kuupmeetrit vett pumpab välja kumbki pump tunnis?

196. Gaasiarve järgi tuli ühel kuul maksta 173 m³ gaasi eest koos mõõtja üüriga kokku 3,56 rbl., teisel kuul aga 121 m³ gaasi eest koos mõõtja üüriga 2,52 rbl. Arvuta ühe kuupmeetri gaasi hind ja mõõtja ühe kuu üür.

197. a) Arvuta x ja y , teades, et

$$(x + y) : (x + 1) : (9 - y) = 3 : 2 : 1.$$

Näpunäide. Võrrete reast

$$a : b : c = k : m : n$$

saab kirjutada välja võrded, nagu

$$a : b = k : m \text{ ja } b : c = m : n.$$

b) Leia x ja y väärtused, kui

$$(3x - 7) : (y + 7) : (x - y) = 5 : 3 : 1.$$

198. Üks traktorist künnab vahetuses 2 hektarit rohkem kui teine. Töötades koos 5 vahetust, kündsid nad 80 hektarit. Mitu hektarit kündis kumbki traktorist ühes vahetuses?

199. Noortepargi basseini täidetakse veega kahe kraani kaudu. Ühest kraanist voolab tunnis 4 m^3 vett rohkem kui teisest. Kui mõlemad kraanid avada 4-ks tunniks, siis voolab basseini 400 m^3 vett. Mitu kuupmeetrit vett voolab kummastki kraanist ühes tunnis?

200. Leia õpiku lisas (lk. 15) esitatud joonise abil

a) 5 m^3 betooni kaal tonnides;

b) 8 tihumeetri kuivade kuuselaudade raskus;

c) mitu tihumeetrit kuivi tammelaudu on autokoormas, mis kaalub 3,5 tonni?

d) mitu kuupmeetrit märga liiva on autokoormas, mis kaalub 5 tonni?

5. RUUTFUNKTSIOON JA RUUTVÖRRAND.

FUNKTSIOON $y = x^2$.

201. Korrutustabeli kõige otstarbekohasem kuju on järgmine:

	1	2	3	4	5	6	...
1	1	2	3	4	5	6	...
2	2	4	6	8	10	12	...
3	3	6	9	12	15	18	...
4	4	8	12	16	20	24	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...

«Väikeses» korrutustabelis on esimeses reas ja esimeses veerus tegurid 1 kuni 10, «suures» korrutustabelis aga 1 kuni 20.

Valmista endale niisugune «suur» korrutustabel.

Mitu korrutist on «väikeses» korrutustabelis ja mitu «suures»?

Mitu korda on korrutisi «suures» tabelis rohkem kui «väikeses»?

202. Raamatu leheküljel on n rida, igas reas n tähte. Mitu tähte on raamatu leheküljel?

203. Kolhoosi aiandis on x rida õunapuud, igas reas x õunapuud. Mitu õunapuud on kolhoosi aiandis?

204. Millega võrdub ruudu pindala y , kui ruudu külg on x ?

Mitu korda suureneb ruudu pindala, kui külje pikkust suurendada 2 korda? 3 korda? 4 korda?

205. Koosta x ja x^2 vastavate väärtuste tabel:

x	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
x^2													

Selgita tabeli andmete põhjal, mitu korda suureneb x^2 , kui arvu x suurendada 2 korda, 3 korda, 4 korda, 10 korda, 100 korda.

Mitu korda x^2 väheneb, kui arvu x vähendada 2 korda, 3 korda, 10 korda?

206. Leia arvutamise teel, mitu korda on

- a) 30^2 suurem kui 3^2
- b) 40^2 „ „ 4^2
- c) 200^2 „ „ 2^2
- d) 600^2 „ „ 6^2

207. Leia, mitu korda on

- a) $0,8^2$ väiksem kui 8^2
- b) $1,5^2$ „ „ 15^2
- c) $0,86^2$ „ „ 86^2
- d) $0,92^2$ „ „ 92^2

208. Tõestame, et

kui arvu suurendada k korda, siis arvu ruut suureneb k^2 korda.

Tõestus. Olgu antud sõltuvus

$$y = x^2.$$

Anname argumendile x mingi väärtuse x_1 , siis vastavalt $y_1 = x_1^2$, kui aga $x = kx_1$, siis $y_2 = (kx_1)^2 = k^2 x_1^2$. Siit näeme, et funktsiooni y teine väärtus y_2 on k^2 korda suurem kui esimene väärtus y_1 . Seda oligi tarvis tõestada.

209. Eelmisest ülesandest järeldub, et

kui suurendame arvu 10, 100, ... korda, siis arvu ruut suureneb 100, 10 000, ... korda;

kui vähendame arvu 10, 100, ... korda, siis arvu ruut väheneb 100, 10 000, ... korda.

210. a) Valmista funktsiooni $y=x^2$ graafik, täites eelnevalt alljärgneva tabeli.

x	-3	-2	-1,5	-1	-0,8	-0,4	0	0,4	0,8	1	1,5	2	3
x^2													

Konstrueerides punktid, mis kujutavad tabelis antud väärtusi, ning tõmmates läbi nende punktide sujuva kõvera, saame funktsiooni graafiku.

Graafiku joonestamiseks võib kasutada kõverjoonlaudu ehk lekaale.

Funktsiooni $y=x^2$ graafikut nimetatakse **parabooliks**. Jooniselt 39 näed, et parabool, mis on funktsiooni $y=x^2$ graafikuks, on y -telje suhtes sümmeetriline. Sümmeetrilisus järeldeb ka sellest, et abstsissidele x ja $-x$ vastavad ordinaadid on võrdsed, sest $x^2 = (-x)^2$.

Parabooli sümmeetriatelge nimetatakse lühidalt **parabooli teljeks**. Parabooli ja tema telje ühist punkti nimetatakse **parabooli haripunktiks**.

Nimeta joonisel 39 esitatud parabooli haripunkti koordinaadid.

Kuidas saab funktsiooni $y=x^2$ graafiku järgi joonestada funktsiooni $y=-x^2$ graafikut?

Pane tähele, et iga nullist erineva x väärtuse korral on x^2 positiivne ja $-x^2$ negatiivne, kuid nende absoluutväärtused on võrdsed.

Leia funktsiooni $y=x^2$ graafiku abil ruudu pindala, kui ruudu külje pikkus on 2,7 cm.

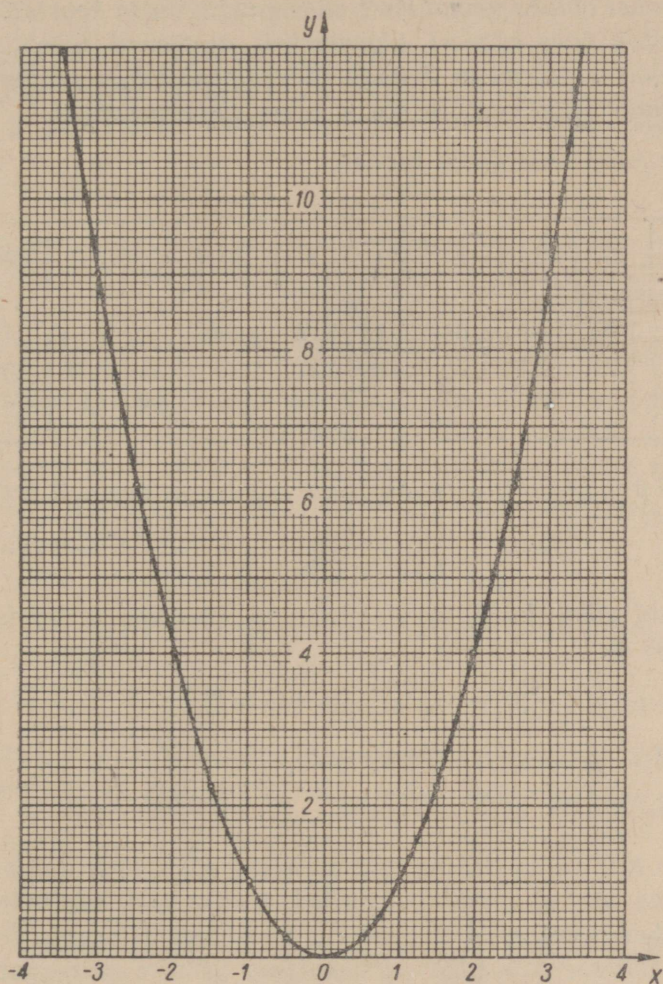
Leia funktsiooni $y=x^2$ graafiku abil ruudu külje pikkus, kui ruudu pindala on 7 cm².

211. Leia $y=x^2$ graafiku abil ruudu pindala, kui ruudu külje pikkus on

- a) 1,4 cm; 1,8 cm; 2,4 cm; 2,8 cm; 2,9 cm;
- b) 0,6 cm; 0,9 cm; 1,5 cm; 2,4 cm; 2,5 cm.

212. Leia funktsiooni $y=x^2$ graafiku abil järgmiste arvude ruudud:

- a) 1,3; 1,5; 2,2; 2,6; 2,4;
- b) 0,7; 0,8; 1,6; 2,1; 2,3.



Joon. 39.

RUUTUDE TABEL.

213. Ruutude tabel võimaldab leida arvude ruutusid suurema täpsusega, kui seda võimaldab graafik. Selle raamatu lisa on toodud ruutude tabel pealkirjaga «Ruudud». Sellest tabelist saab leida kolme tüvenumbriga arvu ruudu, milles on samuti kolm tüvenumbrit.

Et tabel võtaks võimalikult vähe ruumi, on ta koostatud nii, et antud arvu kaks esimest tüvenumbrit asetsevad tabeli esimeses vasakpoolses veerus ja kolmas tüvenumber tabeli esimeses reas. Arvu ruudu leiad vastava rea ja veeru ristumiskohast.

Siin näed selle tabeli algust:

	0	1	2	<u>3</u>	4	5	6	7	8	9
1,0	1,00	1,02	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,14	1,17	1,19
<u>1,1</u>	1,21	1,23	1,25	<u>1,28</u>	1,30	1,32	1,35	1,37	1,39	1,42
1,2	1,44	1,46	1,49	1,51	1,54	1,56	1,59	1,61	1,64	1,66

Näide. Arvu 1,13 ruudu leiad rea 1,1 ja veeru 3 ristumiskohast.

$$1,13^2 = 1,28.$$

Samal viisil leiad tabelist ruudud kõikidele arvudele 1,00-st kuni 9,99-ni.

Leia tabelist järgmiste arvude ruudud:

- a) 3,30; 4,52; 5,27; 6,69; 8,41;
- b) 2,70; 3,88; 4,62; 7,15; 9,48.

214. Kui antud arv on 1-st väiksem või 9,99-st suurem, s. o. kui antud arv ei kuulu vahemikku 1 kuni 9,99, siis suurendame (või vähendame) teda 10, 100, ... korda, nii et saame arvu, mis kuulub sellesse vahemikku. Leiame siis tabelist suurendatud (või vähendatud) arvu ruudu ja vähendame (või suurendame) seda vastavalt 100, 10 000, ... korda.

Kui antud arv on rohkem kui kolm tüvenumbrit, siis ümar-dame ta eelnevalt kolme tüvenumbriga arvuks.

Näited. 1) $0,752^2 = (0,1 \cdot 7,52)^2 = 0,01 \cdot 7,52^2 = 0,01 \cdot 56,6 = 0,566.$

2) $(27,3)^2 = (10 \cdot 2,73)^2 = 100 \cdot 2,73^2 = 100 \cdot 7,45 = 745.$

3) $34,56^2 \approx 34,6^2 = (10 \cdot 3,46)^2 = 100 \cdot 3,46^2 = 100 \cdot 12,0 = 1200.$

215. 1) Leia tabelist järgmiste arvude ruudud:

a) 0,851; 0,7521; 0,06383; 52,2; 78,41;

b) 0,322; 0,546; 0,07548; 67,52; 84,511.

2) Kasutades pöördarvude ja ruutude tabelit, leia

a) $\frac{1}{3,87^2}$; $\frac{10}{8,47^2}$; $\frac{100}{38,1^2}$; $\frac{5}{0,764^2}$; $\frac{4}{0,034^2}$;

b) $\frac{1}{0,982^2}$; $\frac{10}{5,46^2}$; $\frac{100}{24,8^2}$; $\frac{1000}{72,1^2}$; $\frac{0,01}{0,17^2}$.

ARVU RUUTJUUR.

216. Leia joonise 39 abil niisugune negatiivne arv, mille ruut on 9. Leia niisugune positiivne arv, mille ruut on 9.

Positiivset arvu, mille ruut on 9, nimetatakse arvu 9 ruutjuureks ja märgitakse sümboliga $\sqrt{9}$ (loe «ruutjuur üheksast»).

Seega $\sqrt{9}=3$. Niisamuti $\sqrt{64}=8$, sest $8^2=64$;

$\sqrt{0,01}=0,1$, sest $0,1^2=0,01$.

217. Leia joonise 39 abil järgmiste arvude ruutjuured:

a) 6,25; 7; 8,5; 8,7; 8,9;

b) 2,25; 4,5; 6,8; 7,2; 8,3.

Antud positiivse arvu ruutjuureks nimetatakse niisugust positiivset arvu, mille ruut võrdub antud arvuga.

Missuguse arvu ruut on null?

Nulli ruutjuur võrdub nulliga.

Ruutjuurt negatiivsest arvust pole olemas, sest pole niisugust arvu, mille ruut on negatiivne.

Ruutjuure definitsioonist järeldub, et kui $a \geq 0$, siis $(\sqrt{a})^2=a$ ja $\sqrt{a^2}=a$. Näiteks $(\sqrt{3})^2=3$ ja $\sqrt{3^2}=3$.

Ruutjuure definitsioonist järeldub ka, et $\sqrt{(-7)^2}=\sqrt{49}=7$.

Leia arvud

$(\sqrt{5})^2$; $(-\sqrt{3})^2$; $(-\sqrt{12})^2$; $-(\sqrt{2})^2$; $\sqrt{(-5)^2}$; $[\sqrt{(-2)^2}]^2$.

Kirjuta ruutudena järgmised arvud:

2; 7; 11; 20; 34; 76.

218. Teisenda järgmised vahed korrutisteks:

a) $x^2 - 9$

b) $x^2 - 16$

$x^2 - 7$

$x^2 - 8$

$x^2 - b^2$

$x^2 - n^2$

$x^2 - a$

$x^2 - b$

✓ 219. Täida alljärgnev tabel, kus $a > 0$.

a	24	21	23	41	80	29	30	76	27	78
a^2	576	441	529	1681	6400	841	900	5776	729	

✓ 220. Mõnikord on võimalik arvu ruutjuurt leida proovimise teel täpselt.

Leia proovimise teel järgmised ruutjuured:

a) $\sqrt{121} =$

b) $\sqrt{196} = 14$

c) $\sqrt{289} = 17$

$\sqrt{144} =$

$\sqrt{225} = 15$

$\sqrt{324} = 18$

$\sqrt{169} = 13$

$\sqrt{256} = 16$

$\sqrt{361} = 19$

221. Leia proovimise teel järgmiste arvude ruutjuured:

a) 400; 441; 625; 12,25; 900; 0,04;

b) $\frac{4}{9}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{16}{25}$; $\frac{1}{36}$; $\frac{25}{36}$; $\frac{49}{81}$.

222. Kui antud arvust täpset ruutjuurt pole võimalik leida, siis piirdume ruutjuure ligikaudse väärtusega kas täpsusega 0,1; 0,01 või 0,001, nii kuidas on nõutud.

Olgu näiteks tarvis leida $\sqrt{40}$ täpsusega 0,1.

Proovides leiame, et $6^2 < 40$, kuid $7^2 > 40$, seega

$$6 < \sqrt{40} < 7.$$

On näha, et $\sqrt{40}$ on 6-le lähemal kui 7-le, seepärast

$$\sqrt{40} \approx 6, \text{ täpsusega } 1.$$

Proovides edasi, näeme, et $6,3^2 = 39,69$, kuid $6,4^2 = 40,96$.
Võime kirjutada:

$$6,3 < \sqrt{40} < 6,4,$$

kusjuures 6,3 erineb $\sqrt{40}$ väärtusest vähem kui 6,4, sest
 $40 - 39,69 = 0,31$, aga $40,96 - 40 = 0,96$.

Seetõttu

$$\sqrt{40} \approx 6,3, \text{ täpsusega } 0,1.$$

Arvuta $\sqrt{40}$ ligikaudne väärtus täpsusega 0,01, kasutades ruutude tabelit.

223. Leia ruutude tabeli abil:

- 1) $\sqrt{30}$, täpsusega 0,01;
- 2) $\sqrt{65}$, täpsusega 0,01.

RUUTJUURTE TABEL.

224. Selle raamatu lisan olevas ruutjuurte tabelis on antud kolmekohaliste tüvedega ruutjuured arvudest 1,00 kuni 99,9.

Tabeli ehitus ja kasutamine on samasugune nagu pöördarvude tabeli puhulgi.

Selgituseks toome siin selle tabeli alguse.

	0	1	2	3	4	<u>5</u>	6	7	8	9
1,0	1,00	00	01	01	02	02	03	03	04	04
1,1	1,05	05	06	06	07	07	08	08	09	09
<u>1,2</u>	<u>1,10</u>	10	10	11	11	<u>12</u>	12	13	13	14

Näiteid. 1) $\sqrt{1,25} = 1,12$.

2) $\sqrt{16} = \sqrt{16,0} = 4,00$.

3) $\sqrt{17,8} = 4,22$.

225. Leia tabelist järgmiste arvude ruutjuured:

- 1) 1,96; 2,56; 3,24; 4,41; 5,29.
- 2) 1,69; 1,21; 0,64; 0,49; 6,76.

226. Leia tabelist järgmiste arvude ruutjuured:

1) 12; 15; 19; 37; 44.

2) 47; 54; 59; 73; 87.

227. Leia tabeli abil järgmiste arvude ruutjuured:

1) 5,2; 8,4; 9,5; 12,5; 22,4.

2) 36,8; 42,5; 56,7; 84,2; 95,5.

✓ 228. Arvuta ruudu külje pikkus, kui ruudu pindala on

1) 5,4 cm²; 8,6 cm²; 9,8 cm²; 14,5 cm²; 16,8 cm²;

2) 20,5 cm²; 48,5 cm²; 59,6 cm²; 62,4 cm²; 84,8 cm².

229. Ülesanne. Võrdkülgse kolmnurga pindala on 22,5 cm².
Kui suur on selle kolmnurga külg?

Lahendus. Kasutame võrdkülgse kolmnurga pindala valemit

$$S = 0,433 a^2.$$

$$0,433a^2 = 22,5;$$

$$a^2 = 22,5 : 0,433 \approx 52,0;$$

$$a = \sqrt{52,0} = 7,21$$

Vastus. Kolmnurga külg on 7,21 cm.

✓ 230. Kolmnurga alus on 4,2 cm ja kõrgus on 6 cm. Kui pikk on selle kolmnurgaga pindvõrdse ruudu külg?

✓ 231. Rööpküliku alus on 12 cm ja kõrgus on 5,8 cm. Kui suur külg on ruudul, mille pindala on võrdne selle rööpküliku pindalaga?

232. Trapetsi alused on $a = 8,4$ cm, $b = 5,8$ cm ja kõrgus $h = 6$ cm. Arvuta selle trapetsiga pindvõrdse ruudu übermõõt.

233. a) Arvuta avaldise $\sqrt{4 \cdot 9}$ ja $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$ väärtused ja võrdle tulemusi.

b) Arvuta avaldiste $\sqrt{5 \cdot 7,2}$ ja $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7,2}$ väärtused. Ümarda viimane tulemus kolme tüvenumbriga arvuks ja võrdle seda eelmise tulemusega.

c) Tõestame, et kui a ja b on positiivsed arvud, siis

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Tõestuseks võrdleme avaldiste $\sqrt{a \cdot b}$ ja $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ruutusi:

$$(\sqrt{a \cdot b})^2 = a \cdot b,$$

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b.$$

Kui positiivsete arvude ruudud on võrdsed, siis on ka need arvud võrdsed.

Seega tõesti

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Korrutise ruutjuur võrdub tegurite ruutjuurte korrutisega.

d) Arvuta

$$\sqrt{25 \cdot 64}; \sqrt{100 \cdot 49}; \sqrt{0,01 \cdot 0,25}; \sqrt{16a^2}; \sqrt{4a}.$$

234. a) Arvuta avaldise

$$\sqrt[7,2]{\frac{2}{5}}$$

väärtus, teostades esmalt jagamise ja leides siis ruutjuure saadud jagatisest. Seejärel arvuta avaldise

$$\frac{\sqrt[7,2]{2}}{\sqrt[7,2]{5}}$$

väärtus kolme tüvenumbriga. Võrdle tulemusi.

b) Tõestame, et kui a ja b on positiivsed arvud, siis

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Tõestuseks võrdleme avaldiste

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{ja} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

ruutusi.

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b};$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.}$$

Jagatise ruutjuur võrdub jagatava ja jagaja ruutjuurte jagatiseaga.

c) Arvuta.

$$\sqrt{\frac{36}{100}}; \quad \sqrt{\frac{49}{0,01}}; \quad \sqrt{\frac{a^2}{4}}; \quad \sqrt{\frac{m}{16}}.$$

235. Arvutades ruutjuured proovimise teel, leia, mitu korda on

- | | | |
|----------------------|------------|---------------|
| 1) $\sqrt{400}$ | suurem kui | $\sqrt{4}$; |
| 2) $\sqrt{900}$ | „ „ | $\sqrt{9}$; |
| 3) $\sqrt{2500}$ | „ „ | $\sqrt{25}$; |
| 4) $\sqrt{640\,000}$ | „ „ | $\sqrt{64}$; |
| 5) $\sqrt{490\,000}$ | „ „ | $\sqrt{49}$. |

Mis selgub siin?

236. Arvutades ruutjuured proovimise teel, leia, mitu korda on

- | | | |
|------------------|-------------|--------------------|
| 1) $\sqrt{16}$ | väiksem kui | $\sqrt{1600}$; |
| 2) $\sqrt{9}$ | „ „ | $\sqrt{900}$; |
| 3) $\sqrt{0,04}$ | „ „ | $\sqrt{4}$; |
| 4) $\sqrt{0,09}$ | „ „ | $\sqrt{900}$; |
| 5) $\sqrt{1}$ | „ „ | $\sqrt{10\,000}$. |

Kahe viimase ülesande lahendamisel näeme, et

kui suurendame arvu 100, 10 000, ... korda, siis selle arvu ruutjuur suureneb vastavalt 10, 100, ... korda;

kui vähendame arvu 100, 10 000, ... korda, siis tema ruutjuur väheneb 10, 100, ... korda.

Tõestame, et

kui suurendame arvu k^2 korda, siis arvu ruutjuur suureneb k korda.

Tõestus. Olgu antud positiivne arv a . Selle ruutjuur on $\sqrt{a}$. Suurendades antud arvu k^2 korda, saame uueks arvuks k^2a , ruutjuur sellest on $\sqrt{k^2a} = \sqrt{k^2} \cdot \sqrt{a} = k\sqrt{a}$. Seda aga oligi tarvis tõestada.

237. Raamatu lisas on antud ruutjuured arvudest 1,00 kuni 99,9.

Et leida ühest väiksemate või sajast suuremate arvude ruutjuuri, tuleb rakendada eelmises ülesandes tähele pandud arvu ruutjuure omadust.

Seega, kui antud arv ei kuulu vahemikku 1,00 kuni 99,9, siis ruutjuure leidmiseks suurendame (või vähendame) seda arvu 100, 10 000, ... korda, nii et ta kuuluks sellesse vahemikku, leiame siis suurendatud (või vähendatud) arvust ruutjuure ja vähendame (või suurendame) leitud arvu vastavalt 10, 100, ... korda. Nii saame ruutjuure antud arvust.

Näiteid.

$$1) \sqrt{0,0169} = \sqrt{\frac{1,69}{100}} = \frac{\sqrt{1,69}}{\sqrt{100}} = \frac{1,3}{10} = 0,13.$$

$$2) \sqrt{0,00072} = \sqrt{\frac{7,2}{10\,000}} = \frac{\sqrt{7,2}}{\sqrt{10\,000}} = \frac{2,68}{100} = 0,0268.$$

$$3) \sqrt{841} = \sqrt{100 \cdot 8,41} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{8,41} = 10 \cdot 2,90 = 29.$$

238. Leia tabeli abil järgmiste arvude ruutjuured:

1) 0,441	2) 0,676	3) 0,256
0,841	0,324	0,289
0,0081	0,0121	0,0144
0,0196	0,0049	0,0036
0,0042	0,0007	0,0006

239. Leia tabeli abil järgmiste arvude ruutjuured:

1) 62 500	2) 78 400	3) 123 000
3 600	2 500	4 900
16 900	72 900	18 500
336 000	24 000	12 000
725 000	186 000	491 000

240. Kui juuritavas arvus on rohkem kui kolm tüvenumbrit, siis ümardame ta kolme tüvenumbriga arvuks ja leiame saadud arvu ruutjuure.

Näiteid.

$$1) \sqrt{7056} \approx \sqrt{7060} = \sqrt{100 \cdot 70,6} = 10 \cdot 8,4 = 84.$$

$$2) \sqrt{0,2704} = \sqrt{\frac{27,04}{100}} = \frac{5,2}{10} = 0,52$$

241.

$$1) \begin{array}{r} 7385 \\ 4234 \\ \hline 12,46 \\ 576,9 \\ \hline 0,5842 \end{array}$$

$$2) \begin{array}{r} 6212 \\ 560 \\ \hline 4,896 \\ 0,2859 \\ \hline 43,66 \end{array}$$

$$3) \begin{array}{r} 50,41 \\ 38,24 \\ \hline 0,9612 \\ 4876 \\ \hline 9,428 \end{array}$$

242. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga pindala on 120 cm². Kui pikk on selle kolmnurga kaatet?

243. Täida järgmine tabel, kus $a > 0$.

a			17			24		96		
a^2	1600			7056			9025		7744	
$\sqrt{a}$		8			2					3

244. 1) Leia joonise 40 abil järgmiste arvude ruudud:

$$1) \begin{array}{ccccc} 3,7; & 4,6; & 5,5; & 6,5; & 9,2; \end{array}$$

$$2) \begin{array}{ccccc} 4,2; & 4,4; & 5,1; & 6,3; & 9,7. \end{array}$$

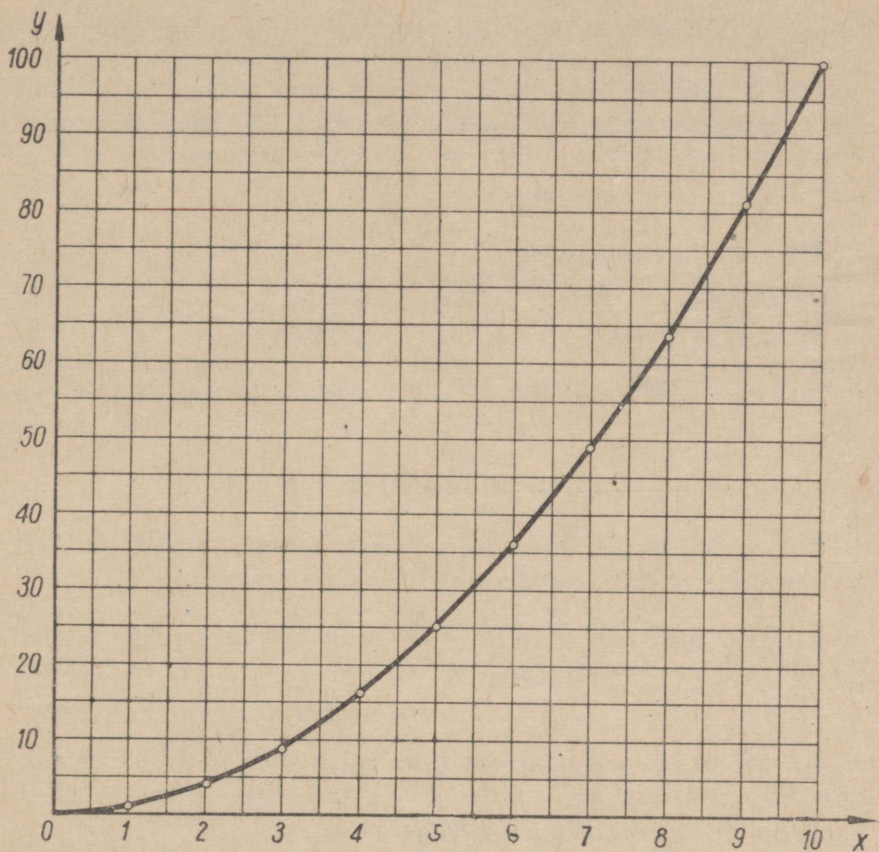
2) Joonise 40 abil saab leida ka 1-st väiksemate ja 10-st suuremate arvude ruutused.

Näiteid. 1) $0,35^2 = 0,01 \cdot 3,5^2 = 0,01 \cdot 12 = 0,12$;

$$2) 0,065^2 = 0,0001 \cdot 6,5^2 = 0,0001 \cdot 42 = 0,0042$$

$$3) 57^2 = 100 \cdot 5,7^2 = 100 \cdot 32 = 3200$$

$$4) 920^2 = 10\,000 \cdot 9,2^2 = 10\,000 \cdot 85 = 850\,000.$$



Joon. 40.

Leia graafiku abil järgmiste arvude ruudud:

a) 0,45; 0,82; 0,042; 0,036; 0,055;

b) 52; 65; 94; 460; 710.

245. Leia joonise 40 abil arv, mille ruut on

a) 15; 20; 30; 35; 50;

b) 5; 13; 60; 70; 90.

246. Leia joonise 40 abil järgmised ruutjuured:

a) $\sqrt{20}$; $\sqrt{30}$; $\sqrt{45}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{62}$;

b) $\sqrt{90}$; $\sqrt{85}$; $\sqrt{79}$; $\sqrt{68}$; $\sqrt{10}$.

247. Lahenda graafiku abil (joon. 40) järgmised ülesanded.

Ruudu pindala on

a) 18 cm^2 ; 22 cm^2 ; 50 cm^2 ; 72 cm^2 ; 92 cm^2 ;

b) 98 cm^2 ; 82 cm^2 ; 60 cm^2 ; 55 cm^2 ; 32 cm^2 .

Kui pikk on ruudu külg?

248. Leia joonise 40 abil järgmised ruutjuured:

a) $\sqrt{5600}$; $\sqrt{7800}$; $\sqrt{8200}$; $\sqrt{9500}$;

b) $\sqrt{4500}$; $\sqrt{4750}$; $\sqrt{7000}$; $\sqrt{7750}$.

Näide. $\sqrt{8500} = \sqrt{100 \cdot 85} = 10 \cdot \sqrt{85} = 10 \cdot 9,2 = 92$.

RUUTVÖRRAND $x^2 = b$.

249. Ülesanne. Arvu ja ta vastandaru korrutis on -9 .
Leia see arv ja ta vastandaru.

Lahendus. Tähistame otsitava arvu tähega x , siis vastandaru on $-x$ ja nende korrutis on $x \cdot (-x) = -x^2$. Saame võrrandi
 $-x^2 = -9$ ehk $x^2 = 9$.

Leiame otsitava x väärtuse graafikust joonisel 41. Näeme, et selliseid x väärtusi, mille puhul $y = 9$, on kaks: -3 ja 3 .

Seega on sellel võrrandil kaks lahendit:

$$x_1 = -3;$$

$$x_2 = 3.$$

Vastus. Otsitav arv on -3 ja vastandaru 3 või otsitav arv on 3 ja vastandaru -3 .

Võrrandis $x^2 = 9$ esineb tundmatu teises astmes.

Võrrandit, milles tundmatu kõrgeimaks astmeks on kaks, nimetatakse teise astme võrrandiks ehk ruutvõrrandiks.

Arvutamise teel saab ruutvõrrandi $x^2 = 9$ lahendada järgmiselt:

$$x^2 = 9;$$

$$x^2 - 9 = 0;$$

$$x^2 - 3^2 = 0;$$

$$(x + 3)(x - 3) = 0.$$

Korrutis võrdub aga nulliga ainult siis, kui vähemalt üks tegur on null. Seepärast võime öelda, et meie võrrand on rahuldatud, kui ta vasaku poole esimene tegur on null või kui vasaku poole teine tegur on null. Seega meie võrrand on rahuldatud, kui

$$x + 3 = 0, \text{ millest } x_1 = -3,$$

ja kui

$$x - 3 = 0, \text{ millest } x_2 = 3.$$

Seega taandus meie ruutvõrrandi lahendamine kahe lineaarse võrrandi lahendamiseks.

Lahenda esmalt graafiku (joon. 40) abil ja siis arvutamise teel ruutvõrrandid

$$1) x^2 = 12,25;$$

$$2) x^2 = 6,25.$$

250. Ülesanne. Lahenda ruutvõrrand

$$x^2 = m, \text{ kus } m > 0.$$

Lahendus. Viime vabaliikme vasakule poolele:

$$x^2 - m = 0.$$

Kirjutame arvu m ruudu kujul:

$$m = (\sqrt{m})^2.$$

Saame

$$x^2 - (\sqrt{m})^2 = 0.$$

Siit

$$(x + \sqrt{m})(x - \sqrt{m}) = 0.$$

Viimane võrrand on rahuldatud, kui vasaku poole esimene tegur on null või kui teine tegur on null. Seega saame

$$x + \sqrt{m} = 0,$$

$$x - \sqrt{m} = 0.$$

Neist võrrandeist saame

$$x_1 = -\sqrt{m},$$

$$x_2 = \sqrt{m}.$$

Sageli kirjutatakse need kaks lahendit ühe võrduse abil nõnda:

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{m}.$$

Nagu näeme, taandub võrrandi

$$x^2 = m \text{ (kus } m > 0)$$

lahendamine kahe lineaarse võrrandi lahendamiseks, mistõttu saame kaks lahendit.

Näide. Lahenda võrrand

$$x^2 = 0,578.$$

Lahendus.

$$x = \pm \sqrt{0,578}.$$

Tabelist leiame, et

$$\sqrt{0,578} = 0,760.$$

Vastus. $x_1 = -0,760$; $x_2 = 0,760$.

251. a) Lahenda võrrandid:

$$1) x^2 = 5,29$$

$$x^2 = 3,43$$

$$x^2 = 363$$

$$2) x^2 = 0,64$$

$$x^2 = 0,0275$$

$$x^2 = 0,8464$$

b) Lahenda võrrandi abil järgmised ülesanded.

1) Ristküliku alus on 5 korda pikem kui kõrgus. Arvuta ristküliku mõõtmed, teades, et ristküliku pindala on 320 cm.

2) Kolmnurga kõrgus on $\frac{1}{3}$ alusest. Kolmnurga pindala on 24 cm. Kui pikk on kolmnurga alus?

3) Ristküliku küljed suhtuvad nagu 3 : 5. Ristküliku pindala on 240 cm. Arvuta ristküliku küljed.

4) Rombi üks diagonaal on teisest 2 korda pikem. Rombi pindala on 18 cm. Arvuta rombi diagonaalide pikkused.

5) Ruudukujulist õhukest kummitükki venitati nii, et ta ühtpidi pikenes 3 cm võrra ja teistpidi kitsenes 3 cm võrra. Venitatud kummitüki pindala oli 112 cm². Kui pikk oli kummitüki serv enne venitamist?

FUNKTSIOON $y = ax^2$.

252. Millega võrdub täisnurkse võrdhaarse kolmnurga pindala y , kui kolmnurga kaateti pikkus on x ?

Mitu korda suureneb selle kolmnurga pindala, kui kaateti suurendada 3 korda?

253. Ruudu diagonaali pikkus on $2x$ cm. Kui suur on selle ruudu pindala y ? Mitu korda suureneb ruudu pindala, kui ta diagonaali suurendada 5 korda?

Lahendus. Diagonaalid jaotavad ruudu 4 võrdseks täisnurkseks võrdhaarseks kolmnurgaks kaateti pikkusega x cm. Ühe kolmnurga pindala on $\frac{1}{2}x^2$ cm² ja ruudu pindala $4 \cdot \frac{1}{2}x^2 = 2x^2$ cm², s. t.

$$y = 2x^2.$$

Kuna diagonaali esialgne pikkus on $2x$ cm, siis 5 korda pikem diagonaal on $10x$ cm. Kolmnurga kaateti pikkus on siis $5x$ cm ja kolmnurga pindala $12,5x^2$ cm². Ruudu pindala on sel korral $4 \cdot 12,5x^2 = 50x^2$ cm².

$$50x^2 : 2x^2 = 25.$$

Vastus. Kui ruudu diagonaali suurendada 5 korda, siis ruudu pindala suureneb 25 korda.

Mitu korda suureneb ruudu pindala, kui diagonaali suurendada 6 korda? 7 korda? 10 korda?

254. Võrdkülgse kolmnurga pindala valem on

$$S = 0,433a^2,$$

kus a tähendab kolmnurga külje pikkust.

Mitu korda suureneb võrdkülgse kolmnurga pindala, kui tema külje pikkust suurendada 2 korda? 3 korda? 4 korda?

255. Avalda kuubi täispindala S kuubi serva pikkuse a kaudu. Mitu korda suureneb kuubi täispindala, kui kuubi serva pikkust suurendada 2, 3, 4, 5, 6, 20 korda?

256. Ülesannetes 252—255 esinevate sõltuvuste üldkuju on

$$y = ax^2.$$

Selle sõltuvuse iseloomustavaks omaduseks on, et

kui argument x kasvab k korda, siis funktsioon ax^2 kasvab k^2 korda.

Tõestame seda.

Olgu esmalt $x = x_1$, siis $y_1 = ax_1^2$; kui argument x kasvab k

kordseks, siis $x = kx_1$ ja $y_2 = a(kx_1)^2 = ak^2x_1^2$, millest näemegi, et funktsioon on kasvanud k^2 kordseks.

Funktsioon $y = ax^2$ on ruutfunktsioon.

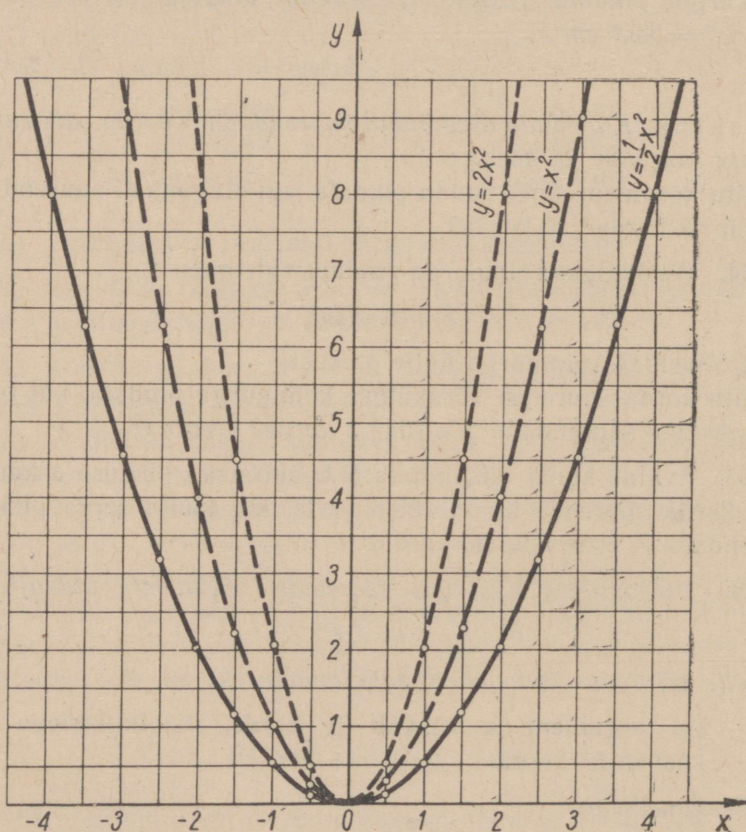
257. Joonesta ühes ja samas teljestikus funktsioonide

$$y = x^2, y = 2x^2 \text{ ja } y = \frac{1}{2}x^2$$

graafikud.

Kui funktsiooni $y = x^2$ graafik on joonestatud, siis funktsiooni $y = 2x^2$ graafiku saad nii, et eelmise kõvera iga punkti ordinaadi korrutad 2-ga.

Kuidas on funktsiooni $y = x^2$ graafiku järgi võimalik saada funktsiooni $y = \frac{1}{2}x^2$ graafikut?



Joon. 41.

Võrdle oma joonist joonisega 41.

Kõik kolm kõverjoont joonisel 41 on paraboolid.

Mis on joonisel 41 kujutatud iga parabooli teljeks ja kus asub iga parabooli haripunkt?

Kuidas asub funktsiooni $y=ax^2$ graafik x -telje suhtes, kui $a > 0$?

Leia jooniselt 41,

a) millega võrdub $2x^2$, x^2 ja $\frac{1}{2}x^2$, kui $x = -2,5$; $1,2$; $2,8$;

b) missuguste x väärtuste korral

$$2x^2 = 7; x^2 = 8; \frac{1}{2}x^2 = 4,5.$$

258. Joonesta funktsioonide $y=2x^2$ ja $y=\frac{1}{2}x^2$ graafikute järgi funktsioonide $y=-2x^2$ ja $y=-\frac{1}{2}x^2$ graafikud.

Kuidas asuvad x -telje suhtes funktsioonide

a) $y=2x^2$ ja $y=-2x^2$ graafikud?

b) $y=\frac{1}{2}x^2$ ja $y=-\frac{1}{2}x^2$ graafikud?

Kui $a \neq 0$, siis funktsioonide $y=ax^2$ ja $y=-ax^2$ graafikud on x -telje suhtes sümmeetrilised, seega on ka teise funktsiooni graafik parabool. Niisiis, iga nullist erineva a korral

funktsiooni $y=ax^2$ graafik on parabool.

Mille poolest erinevad funktsioonide

$$y=ax^2 \text{ ja } y=-ax^2$$

graafikud?

Vaadeldes funktsioone

$$y=x^2 \text{ ja } y=ax^2$$

näeme, et teise funktsiooni graafiku ordinaadid saadakse esimese funktsiooni graafiku ordinaatidest, korrutades neid ühe ja sama teguriga a . Sellepärast nimetame funktsiooni $y=x^2$ graafikut **põhiparabooliks**. Põhiparabooli sageda esinemise tõttu on kasulik tema joonestamiseks valmistada papist šabloon.

RUUTVÖRRAND $ax^2=b$.

259. a) Pool otsitava arvu ruudust võrdub 7-ga. Kui suur on otsitav arv?

Lahendus. Kui otsitava arvu tähistame tähega x , siis pool otsitava arvu ruudust on $\frac{1}{2} x^2$. Ülesande tingimuse kohaselt võrdub see avaldis 7-ga. Saame ruutvõrrandi

$$\frac{1}{2} x^2 = 7.$$

Saadud ruutvõrrandi lahendamiseks võime kasutada graafikut joonisel 41. Graafikust näeme, et $\frac{1}{2} x^2$ on võrdne 7-ga siis, kui $x_1 = -3,75$ või kui $x_2 = 3,75$. Antud võrrandil on seega kaks lahendit. Kontrollides neid lähendeid ruutude tabeli abil, näeme, et mõlemad leitud arvud rahuldavad ülesande tingimust. Seega on otsitav arv ligikaudu kas $-3,75$ või $3,75$.

Võrrandi $\frac{1}{2} x^2 = 7$ võime lahendada ka arvutamise teel, kasutades ruutjuurte tabelit. Jagades selle võrrandi mõlemad pooled tundmatu ruudu kordajaga, s. o. arvuga $\frac{1}{2}$, saame

$$x^2 = 14;$$

$$x = \pm \sqrt{14} = \pm 3,74;$$

$$x_1 = -3,74; \quad x_2 = 3,74.$$

Ruutvõrrandi lahendid, mis on leitud tabeli abil, on täpsemad kui graafikust leitud arvud.

b) Leia graafiku abil järgmiste ruutvõrrandite lahendid ja kontrolli neid arvutamise teel.

$$\frac{1}{2} x^2 = 1\frac{1}{2}; \quad 0,5x^2 = 3,5; \quad 0,5x^2 = 9.$$

260. a) Kuubi täispindala on 27 dm^2 . Kui pikk on kuubi serv?

Lahendus. Olgu kuubi serva pikkus $x \text{ dm}$. Kuubi täispindala on siis $6x^2 \text{ dm}^2$. Saame võrrandi

$$6x^2 = 27$$

ehk

$$2x^2 = 9.$$

Graafikust (joon. 41) leiame selle võrrandi lahendid:

$$x_1 = -2,1; \quad x_2 = 2,1.$$

Et otsitav kuubi serva pikkus on positiivne, siis $x_1 = -2,1$ ei ole antud ülesande lahendiks.

Vastus. Kuubi serva pikkus on 2,1 dm.

b) Lahendades võrrandi $2x^2 = 9$ arvutamise teel, jagame esiteks ta mõlemad pooled 2-ga:

$$x^2 = 4,5.$$

Siit saame

$$x = \pm \sqrt{4,5} = \pm 2,12.$$

Üldiselt, kui a ja b on ühe ja sama märgiga arvud, siis ruutvõrrandi

$$ax^2 = b$$

lahendamisel saame

$$x^2 = \frac{b}{a};$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Kui a ja b on erimärgilised, siis võrrandil lahendit ei ole.

c) Lahenda graafiliselt järgmised ruutvõrrandid ja kontrolli saadud lahendeid arvutamise teel.

$$2x^2 = 9,5; \quad 2x^2 = 5; \quad 2x^2 = 4,3.$$

261. Lahenda ruutvõrrandid.

a) $3x^2 = 363$	b) $0,5x^2 = 40,5$	c) $5x^2 = 0,0716$
$5x^2 = 720$	$1,2x^2 = 172,8$	$6x^2 = 25,1$
$6x^2 = 294$	$0,07x^2 = 51,03$	$1,3x^2 = 2,873$
$2x^2 = 1568$	$1,02x^2 = 294,78$	$0,16x^2 = 0,261$
$4x^2 = 1444$	$0,17x^2 = 33,32$	$0,75x^2 = 0,111$

262. Kui pikk tuleb võtta võrdhaarse täisnurkse kolmnurga kaatet, et kolmnurga pindala oleks 100 cm^2 ?

263. Kui pikk peab olema võrdkülgse kolmnurga külge, et kolmnurga pindala oleks 50 cm^2 ?

FUNKTSIOON $y = ax^2 + bx$.

264. a) Tasapinnal on x sirget, milledest ükski paar ei ole paralleelsed. Kui suur on nende sirgete lõikepunktide arv y ?

Vastuse sellele küsimusele saame järgmise arutluse teel. Üks neist sirgetest lõikub iga ülejäänud sirgega, s. t. $x - 1$ sirgega $x - 1$ punktis, teine jälle $x - 1$ punktis jne., seega saaksime $x(x - 1)$ lõikepunkti. Kuid nüüd on iga lõikepunkt kaks korda arvesse võetud. Tõeline lõikepunktide arv $y = \frac{1}{2} x(x - 1) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x$.

Niisiis

$$y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x.$$

Kontrolli valemi õigsust 3 sirge puhul, 4 sirge puhul, 5 sirge puhul.

b) Klassis on x õpilast. Tulnud sügisel kooli, tahavad nad kõik üksteist kättpidi teretada. Leida teretuste arv y .

265. a) Kujuta graafiliselt funktsioon

$$y = 0,5x^2 - 1,2x,$$

võttes x väärtusteks täisarvud -2 -st kuni 4 -ni. Võrdle saadud graafikut joonisega 42.

Ka funktsiooni $y = 0,5x^2 - 1,2x$ graafik on parabool, mille telg on paralleelne y -teljega. Leia see telg ja parabooli haripunkt.

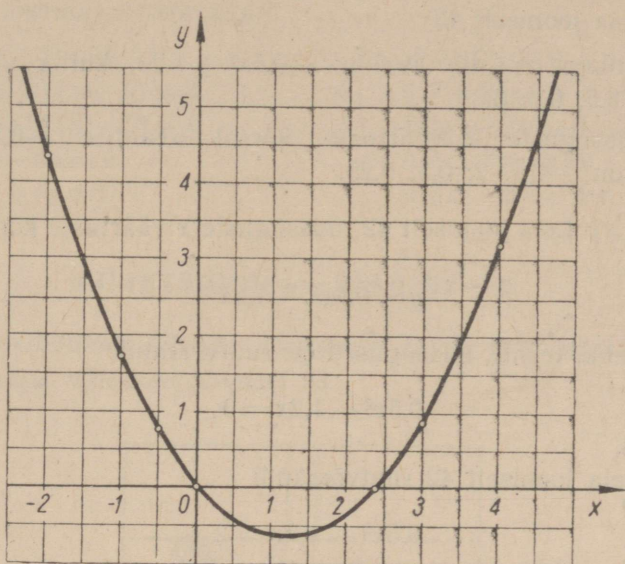
Kui argument x suureneb k korda, siis antud funktsiooni avaldise esimene liige $0,5x^2$ kasvab k^2 korda, kuid teine liige $-1,2x$ on võrdeline x -ga, seega vahe $0,5x^2 - 1,2x$ ei kasva k^2 korda.

Et selle funktsiooni avaldises argumenti kõrgeim aste on teine aste, siis ka seda funktsiooni nimetatakse **ruutfunktsiooniks**.

b) Leia jooniselt 42, millega võrdub avaldis $0,5x^2 - 1,2x$, kui x väärtus on $-1,5$; $-0,5$; $1,5$; $3,6$.

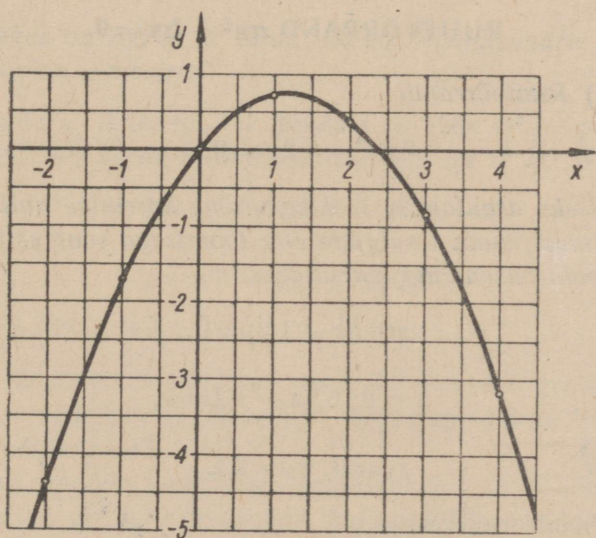
c) Leia jooniselt 42, missuguste x väärtuste korral avaldise $0,5x^2 - 1,2x$ väärtus on $4,5$; 3 ; 2 ; 1 .

266. a) Kuidas saab funktsiooni $y = 0,5x^2 - 1,2x$ graafiku järgi hõlpsasti joonestada funktsiooni $y = -0,5x^2 + 1,2x$ graafi-



Joon. 42.

kut. Valmista see graafik (joon. 43). Leia saadud parabooli telg ja haripunkt.



Joon. 43.

b) Leia jooniselt 43

1) millega võrdub avaldis $-0,5x^2 + 1,2x$, kui x väärtus on $-1,2$; $-0,5$; $0,6$; $3,3$;

2) missuguste x väärtuste korral avaldise $-0,5x^2 + 1,2x$ väärtus on -4 ; -2 ; $0,5$; $0,25$.

267. a) Leia jooniselt 42, missuguste x väärtuste korral funktsioon

$$y = 0,5x^2 - 1,2x$$

on null ehk, teisiti, missugused on ruutvõrrandi

$$0,5x^2 - 1,2x = 0$$

lahendid.

b) Leia jooniselt 42 ruutvõrrandi

$$0,5x^2 - 1,2x = 2$$

lahendid.

c) Leia jooniselt 43 ruutvõrrandi

$$-0,5x^2 + 1,2x = 0,5$$

lahendid.

RUUTVÕRRAND $ax^2 + bx = 0$.

268. a) Ruutvõrrandi

$$0,5x^2 - 1,2x = 0$$

lahendamiseks arvutamise teel kasutame korrutise nulliga võrdumise tingimust, kuna x sulgude ette toomisega saab selle võrrandi vasaku poole teisendada korrutiseks:

$$x(0,5x - 1,2) = 0.$$

Siit

$$x = 0; 0,5x - 1,2 = 0,$$

millest

$$x_1 = 0; x_2 = 2,4.$$

b) Lahenda ruutvõrrand

$$ax^2 + bx = 0.$$

269. Lahenda ruutvõrrandid

a) $x(x+2)=0$

$$(x-4)(x+5)=0$$

$$(x-3)(x-7)=0$$

$$7x^2-8x=0$$

$$5x^2+5x=0$$

b) $x^2-13x=0$

$$6x^2+8x=0$$

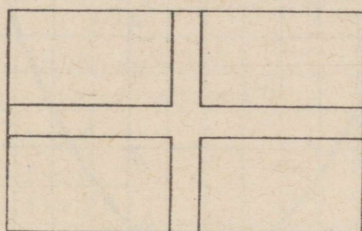
$$1,2x^2-3x=0$$

$$ax^2+3bx=bx$$

$$ax(x-b)=2cx$$

FUNKTSIOON $y=ax^2+bx+c$.

270. Ristkülikukujulisele kooliõuele rajati 2 võrdse laiustega teed nii, nagu näidatud joonisel 44.



Joon. 44.

Õue pikkus on 200 m ja laius 150 m. Avalda muru pindala y , kui tee laius on x meetrit.

Lahendus. Lühema tee pindala on $150x \text{ m}^2$ ja pikema tee pindala $200x \text{ m}^2$. Teede ristumisala pindala on $x^2 \text{ m}^2$. Seega

$$y = 200 \cdot 150 - 150x - 200x + x^2$$

ehk

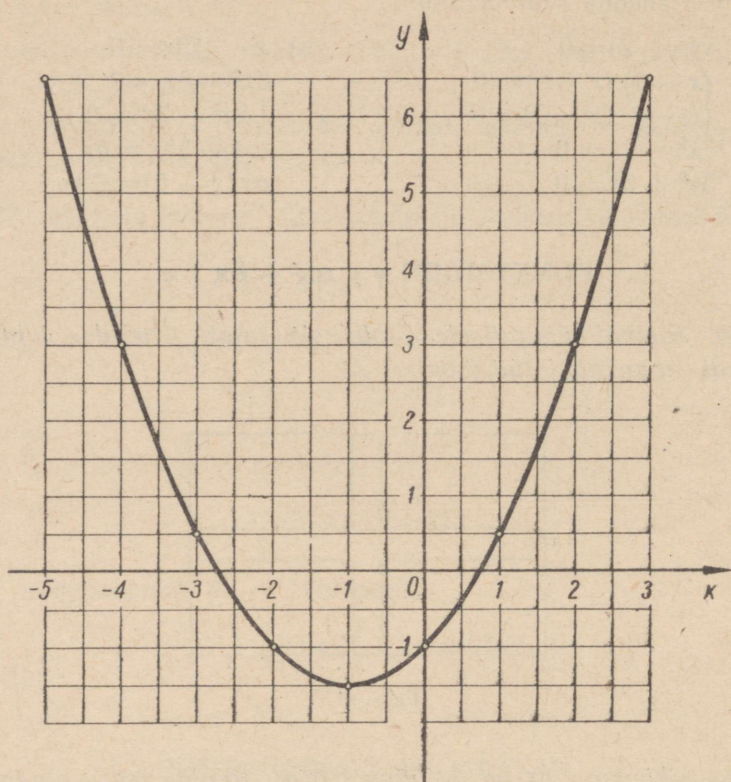
$$y = x^2 - 350x + 30\,000.$$

Arvuta y , kui $x=3$.

271. a) Joonesta funktsiooni $y=0,5x^2+x-1$ graafik, võttes argumenti x väärtusteks täisarvud -5 -st kuni $+3$ -ni. Võrdle oma graafikut joonisega 45.

Mis joon on selle funktsiooni graafikuks?

Missugused on selle parabooli haripunkti koordinaadid? Kus kohal parabooli telg lõikab x -telge?



Joon. 45.

b) Leia saadud graafiku abil:

1) avaldise $0,5x^2 + x - 1$ väärtus, kui x väärtus on $-4,5$; $-3,5$; $-2,5$; 0 ; $1,5$;

2) missuguste x väärtuste korral on avaldise $0,5x^2 + x - 1$ väärtus $4,5$; $3,5$; 2 ; 1 ; $-0,5$;

c) Sõltuvus $y = 0,5x^2 + x - 1$ on ruutfunktsioon. Ruutfunktsiooni üldine kuju on $y = ax^2 + bx + c$.

Suurust y nimetatakse suuruse x ruutfunktsiooniks, kui nendevahelist sõltuvust saab väljendada valemiga $y = ax^2 + bx + c$, kus a , b ja c on antud arvud.

Kui $c = 0$, siis ruutfunktsioonil on kuju $y = ax^2 + bx$.

Kui $b = 0$ ja $c = 0$, siis ruutfunktsioonil on kuju $y = ax^2$.

Kui $a=1$, $b=0$ ja $c=0$, siis ruutfunktsioonil on kuju $y=x^2$.
Seega funktsioonid $y=x^2$, $y=ax^2$ ja $y=ax^2+bx$ on ruutfunktsiooni erijuhtumid.

Iga ruutfunktsiooni graafikuks on parabool.

$$\text{RUUTVÖRRAND } ax^2 + bx + c = 0.$$

272. Jooniselt 45 näed, et avaldis

$$0,5x^2 + x - 1$$

võrdub nulliga siis, kui

$$x = -2,75 \text{ ja } x = 0,75.$$

Seega ruutvõrrandi

$$0,5x^2 + x - 1 = 0$$

lahendid on $x_1 = -2,75$; $x_2 = 0,75$.

Leia samalt jooniselt ruutvõrrandite

a) $0,5x^2 + x - 1 = 6$

b) $0,5x^2 + x - 1 = 4$

c) $0,5x^2 + x - 1 = 2,5$

d) $0,5x^2 + x - 1 = 1,5$

lahendid.

273. Võrrandit

$$0,5x^2 + x - 1 = 0$$

saab graafilisel teel mugavamalt lahendada, kui toimime järgmiselt:

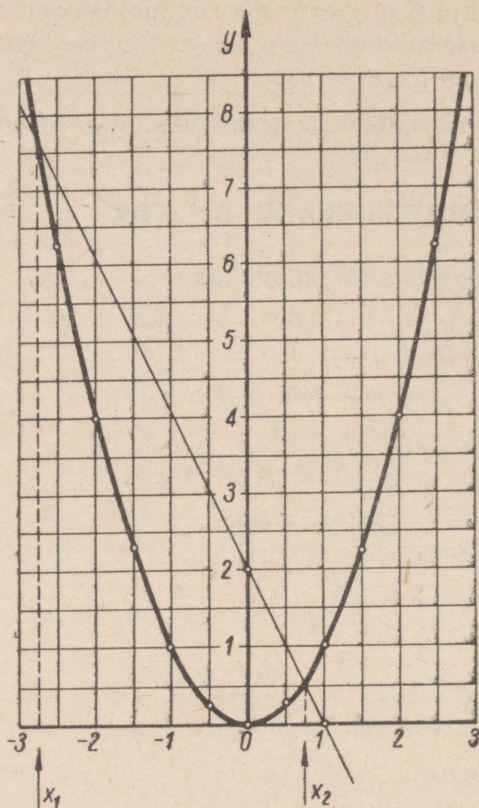
1) taandame võrrandit ruutliikme kordajaga, s. o. jagame kõik tema liikmed 0,5-ga, saame

$$x^2 + 2x - 2 = 0;$$

2) viime liikmed, mis ei sisalda tundmatu ruutu, paremale poolele, saame

$$x^2 = -2x + 2.$$

Nüüd on antud võrrandi lahendamine taandunud niisuguste x väärtuste leidmisele, millede korral funktsioonide x^2 ja $-2x + 2$ väärtused on võrdsed. Esimese funktsiooni graafikuks on põhiparabool, mille joonestamine on kerge (eriti veel siis, kui selleks on valmistatud šabloon); teine on lineaarne funktsioon, mille graa-



Joon. 46.

fikuks on sirge. Joonestades mõlemad graafikud ühises teljestikus (joon. 46), leiame, missugustel x väärtustel funktsioonide väärtused on võrdsed, s. t. leiame nende graafikute lõikepunktide abstsissid.

Lõikepunktide abstsissid on

$$x_1 = -2,75; x_2 = 0,75.$$

Need ongi võrrandi lahendid.

Ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ graafilisel lahendamisel:

1) taandame võrrandi ruutliikme kordajaga a , saades taandatud ruutvõrrandi:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

2) viime lineaarse liikme ja vabaliikme paremale poolele:

$$x^2 = -\frac{b}{a}x + \frac{c}{a},$$

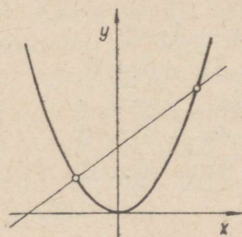
3) leiame funktsioonide $y = x^2$ ja $y = -\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ graafikute lõikepunktide abstsissid, mis ongi antud võrrandi lahendid.

Kui sirge puudutab parabooli, siis on tegemist kokkulangenud lõikepunktidega. Sel korral

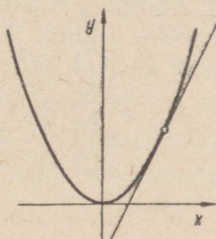
$$x_1 = x_2,$$

s. t. antud ruutvõrrandi lahendid on võrdsed.

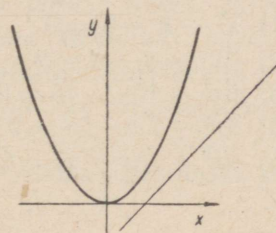
Kui sirge ja parabool ei lõiku, siis antud ruutvõrrandil lahendid puuduvad.



Kaks erinevat lahendit



Kaks võrdset lahendit



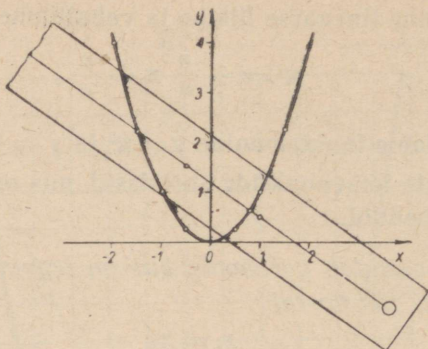
Lahendid puuduvad

Joon, 47.

274. Ruutvõrrandi graafilisel lahendamisel põhiparabooli ja sirge abil ei ole tarvis iga võrrandi jaoks uut parabooli joonestada, vaid võib kasutada üht ja sama korralikult joonestatud parabooli. Sirge joonestamise asemel võib kasutada tselluloidist, pleksiklaasist või klaasist joonlauda, mille ühele küljele on tõmmatud peenike kriips. See kriips tuleb paigutada paraboolile iga võrrandi puhul nõnda, nagu sirge tuleks joonestada. Joonisel 48 on näidatud ruutvõrrandi $10x^2 + 7x - 12 = 0$ graafiline lahendamine. Parabooli $y = x^2$ ja sirge $y = -0,7x + 1,2$ lõikepunktide abstsissid, mis on antud võrrandi lahenditeks, on

$$x_1 = -1,5 \text{ ja } x_2 = +0,8.$$

Kontrolli, kas need arvud rahuldavad antud võrrandit.



Joon. 48.

275. Leia põhiparabooli ja sirge abil järgmiste võrrandite lahendid.

1) $x^2 - x - 3 = 0$

6) $x^2 + x - 4 = 0$

2) $2x^2 - x - 4 = 0$

7) $2x^2 + 3x - 6 = 0$

3) $6x^2 - 10x - 15 = 0$

8) $x^2 - 2x + 1 = 0$

4) $8x^2 - 7x - 28 = 0$

9) $5x^2 + 4x - 10 = 0$

5) $9x^2 + 10x - 27 = 0$

10) $8x^2 + 9x - 36 = 0$

TÄIELIK JA MITTETÄIELIK RUUTVÖRRAND.

276. Seni oleme arvutamise teel õppinud lahendama ruutvõrrandeid kujul

$$x^2 = m,$$

$$ax^2 = b,$$

$$ax^2 + bx = 0.$$

Graafiku abil oskame lahendada neidsamu võrrandeid ja veel võrrandit kujul

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Viimasel võrrandil on kolm liiget: liige, mis sisaldab tundmatu ruutu (ax^2), liige, mis sisaldab tundmatu esimest astet, ehk lineaarne liige (bx) ja vabaliige (c), mis ei sisalda tundmatut. Muid liikmeid ruutvõrrandis ei saagi esineda.

Sellepärast võrrandit kujul

$$ax^2 + bx + c = 0$$

nimetatakse täielikuks ruutvõrrandiks.

Kui $b=0$, siis täielikust võrrandist saame võrrandi

$$ax^2 + c = 0;$$

kui aga $c=0$, siis saame

$$ax^2 + bx = 0.$$

Kaks viimast võrrandit on **mittetäielikud ruutvõrrandid**.

Missuguse mittetäieliku võrrandi saad, kui $b=c=0$?

Missugused on võrrandi $ax^2=0$ lahendid?

277. a) Pärast sulgude avamist ja sarnaste liikmete koondamist saab iga ruutvõrrandi kirjutada kujul

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ kus } a > 0.$$

Kordaja a ei või olla null, sest siis ei oleks võrrand ruutvõrrand. Kui a peaks tulema negatiivne, siis pärast kõikide liikmete korrutamist arvuga -1 saame ruutliikme kordajaks positiivse arvu. Võrrand $ax^2 + bx + c = 0$ on üldkujuline ruutvõrrand.

Ruutvõrrandit, milles esikohal on kirjutatud positiivse kordajaga ruutliige, teisel kohal lineaarne liige, kolmandal kohal vaba liige ja paremal poolel null, nimetatakse **normaalkujuliseks ruutvõrrandiks**.

b) Teisenda võrrand

$$x^2 = 3(x+2)(x-1)$$

normaalkujuliseks ja leia ta lahendid graafilisel teel.

278. Üldkujulise ruutvõrrandi

$$ax^2 + bx + c = 0$$

liikmete jagamisel ruutliikme kordajaga a , s. o. võrrandi taandamisel a -ga, saame võrrandi

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

ehk, tähistades arvud $\frac{b}{a}$ ja $\frac{c}{a}$ vastavalt tähtedega p ja q ,

$$x^2 + px + q = 0,$$

mida nimetame **taandatud ruutvõrrandiks**.

Kui suur on taandatud ruutvõrrandi ruutliikme kordaja?

Normaalkujulist ruutvõrrandit, mille ruutliikme kordaja ei ole 1, nimetame **taandamata ruutvõrrandiks**.

TAANDATUD RUUTVÖRRANDI LAHENDAMINE.

279. a) Ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendamiseks teisedame võrrandi vasaku poole täisruuduks, s. t. anname võrrandile kuju $(x + b)^2 = m$, leiame siit $x + b$ ja lõpuks x .

Näide. $x^2 + 6x + 8 = 0$;
 $x^2 + 6x = -8$;
 $x^2 + 6x + 9 = -8 + 9$;
 $(x + 3)^2 = 1$;
 $x + 3 = \pm 1$;
 $x = -3 \pm 1$;
 $x_1 = -2$; $x_2 = -4$.

Kirjelda lahenduskäiku. Kontrolli lahendeid.

b) Lahenda võrrandid:

1) $(x - 2)^2 = 16$	2) $(x - 1,4)^2 = 33,6$
$(x + 5)^2 = 9$	$(x + 0,2)^2 = 0,444$
$(x - 9)^2 = 529$	$\left(x - \frac{6}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}$
$(x - 0,3)^2 = 1,41$	$\left(x - 8\frac{1}{2}\right)^2 = 56\frac{1}{4}$
$(x - 1,2)^2 = 1,44$	$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = 30\frac{1}{4}$

280. Kirjuta iga ruutvõrrandi vasak pool kaksliikme ruuduna ning leia seejärel ta lahendid.

1) $x^2 + 14x + 49 = 25$	6) $x^2 + 8x + 16 = 169$
2) $x^2 - 12x + 36 = 144$	7) $x^2 - 18x + 81 = 225$
3) $x^2 - 100x + 2500 = 1$	8) $x^2 - 80x + 1600 = 4$
4) $x^2 - 0,8x + 0,16 = 0,04$	9) $x^2 + 1,4x + 0,49 = 0,81$
5) $x^2 - 5x + 6,25 = 12,25$	10) $x^2 + x + 0,25 = 2,25$

281. Liida antud ruutvõrrandi mõlema poolega niisugune arv, et võrrandi vasak pool oleks kaksliikme ruut ja lahenda siis saadud võrrand.

1) $x^2 - 4x = 21$	6) $x^2 - 4x = 45$
2) $x^2 + 6x = -5$	7) $x^2 + 10x = -9$
3) $x^2 - 2x = 1,25$	8) $x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{8}{9}$
4) $x^2 - 3x = 10$	9) $x^2 + 3x = 4$
5) $x^2 - 5x = 14$	10) $x^2 - 7x = 18$

282. Vii antud ruutvõrrandis vabaliige paremale poolele, seejärel liida võrrandi mõlema poolega niisugune arv, et vasak pool oleks täisruut, s. o. täienda vasak pool täisruuduks, ning lahenda saadud võrrand.

1) $x^2 - 4x - 12 = 0$

6) $x^2 - 4x - 60 = 0$

2) $x^2 + 6x + 5 = 0$

7) $x^2 + 8x + 15 = 0$

3) $x^2 - 2x - 3 = 0$

8) $x^2 + 4x - 5 = 0$

4) $x^2 - 10x - 11 = 0$

9) $x^2 + 3x - 18 = 0$

5) $x^2 - 7x + 10 = 0$

10) $x^2 - x - 12 = 0$

283. a) *Taandatud ruutvõrrandi*

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendite leidmiseks saame tuletada valemi. Selleks

1) *viime vabaliikme q vastupidise märgiga paremale poolele:*

$$x^2 + px = -q \text{ ehk } x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x = -q;$$

2) *täiendame vasaku poole täisruuduks, liites võrrandi mõlema poolega $\left(\frac{p}{2}\right)^2$:*

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q;$$

3) *kirjutame vasaku poole ruudu kujul:*

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q;$$

4) *viimane võrrand on kujuga (vt. üles. 279)*

$$(x + b)^2 = m, \text{ kus } m = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q,$$

siit saame kaks lineaarset võrrandit:

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q};$$

5) *avaldades x , saame valemi*

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Kirjutades lahendid eraldi välja, saame:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}; \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Taandatud ruutvõrrandi lahendivalemi võib sõnastada nii:

taandatud ruutvõrrandi lahendeiks on pool lineaarliikme kordaja vastand arvust $\pm$ ruutjuur selle poole kordaja ruudu ja vabaliikme vahest.

b) Näide. Lahenda võrrand $x^2 - x - 20 = 0$.

Lahendus.

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-20)};$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20};$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}.$$

Seega

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5 \text{ ja } x_2 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4.$$

Kontrollides võime veenduda, et need arvud on tõesti antud võrrandi lahendid.

c) Lahenda võrrandid.

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$

6) $x^2 - 7x + 12 = 0$

2) $x^2 - 2x - 3 = 0$

7) $x^2 + 3x - 4 = 0$

3) $x^2 - x - 6 = 0$

8) $x^2 - 3x - 10 = 0$

4) $x^2 + 5x + 6 = 0$

9) $x^2 + 8x + 7 = 0$

5) $x^2 + 8x + 15 = 0$

10) $x^2 + 15x + 56 = 0$

284. a) Kui taandatud ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendite

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

arvutamisel ilmneb, et

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0,$$

siis sellel ruutvõrrandil lahendid puuduvad. Miks?

Kui

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0,$$

siis $x_1 = -\frac{p}{2}$ ja $x_2 = -\frac{p}{2}$, mis ütleb, et lahendid on teineteisega võrdsed.

Kui aga

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0,$$

siis võrrandil on kaks erinevat lahendit.

b) Otsusta võrrandeid lahendamata, missugusel ruutvõrrandil lahendid puuduvad, missugusel on lahendid võrdsed ja missugusel erinevad.

1) $x^2 - 4x - 12 = 0$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

2) $x^2 - 4x - 60 = 0$

$$x^2 + 8x + 17 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

285. Lahenda järgmised ruutvõrrandid, leides lahendid täpsusega 0,1.

1) $x^2 - 6x + 4 = 0$

2) $x^2 + 8x + 13 = 0$

3) $x^2 - 5x + 3 = 0$

4) $x^2 - x - 50 = 0$

5) $x^2 + 7x - 5 = 0$

6) $x^2 + 5x + 4 = 0$

7) $x^2 - 9x - 1 = 0$

8) $x^2 + 2x + 0,7 = 0$

9) $x^2 + 0,8x - 1 = 0$

10) $x^2 + 5x + 5 = 0$

286. Lahenda järgmised ruutvõrrandid. Kui lahendeid pole võimalik täpselt leida, arvuta nad kolme tüvenumbriga.

1) $x^2 - 9x - 36 = 0$

2) $x^2 + 7x - 7 = 0$

3) $x^2 - x - 20 = 0$

4) $x^2 + 2x - 2 = 0$

5) $x^2 - 20x + 91 = 0$

6) $x^2 + 3x - 19 = 0$

7) $x^2 - 11x + 10 = 0$

8) $y^2 + 4y + 6 = 0$

9) $y^2 + 9y + 12 = 0$

10) $z^2 - 7z - 8 = 0$

$$11) x^2 - 8x + 9 = 0$$

$$12) x^2 + 5x - 66 = 0$$

$$13) x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$14) x^2 + 7x - 120 = 0$$

$$15) x^2 - 3x - 5\frac{2}{5} = 0$$

$$16) u^2 - 6u + 4 = 0$$

$$17) u^2 + 13u - 14 = 0$$

$$18) v^2 - v + 42 = 0$$

$$19) v^2 - 9v + 7 = 0$$

$$20) w^2 + 15w - 1 = 0$$

287. Kahe järjestikuse täisarvu korrutis on 156. Mis arvud need on?

288. Kahe teineteisele järgneva täisarvu ruutude summa on 85. Mis arvud need on?

289. Kahe järjestikuse paarisarvu korrutis on 288. Mis arvud need on?

290. Jaotada arv 19 kahte niisugusesse ossa, et nende osade ruutude summa oleks 181.

291. Jaotada lõik, mille pikkus on 30 cm, kahte ossa nii, et suurema osa jagatis kogu lõiguga oleks sama, mis väiksema osa jagatis suurema osaga.

292. Kahe arvu vahe on 6. Nende arvude ruutude summa on 260. Leia need arvud.

293. Kahe järjestikuse paarisarvu korrutis on 6 888. Missugused arvud need on?

TAANDAMATA RUUTVÕRRANDI LAHENDAMINE.

294. a) Normaalkujulise taandamata ruutvõrrandi lahendamisel võib toimida nii, nagu taandatud ruutvõrrandi lahendamiselgi, täiendades võrrandi vasaku poole täisruuduks.

Lahendame täisruuduks täiendamise võttega võrrandi

$$2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Viime esiteks vabaliikme paremale poolele, saame

$$2x^2 - 5x = -2.$$

Et vasaku poole täisruuduks täiendamisel vältida murdarve, selleks korrutame kõik liikmed ruutliikme kordaja neljakordsega, antud juhul arvuga 8, saame

$$16x^2 - 40x = -16$$

ehk

$$(4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 5 = -16.$$

Nüüd liidame võrrandi mõlema poolega 25, saame

$$(4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 5 + 25 = 9.$$

Võrrandi vasák pool ongi nüüd täisruut. Ta on nimelt võrdne avaldisega $(4x - 5)^2$. Seepärast võime võrrandi kirjutada kujul

$$(4x - 5)^2 = 9.$$

Siit saame kaks lineaarset võrrandit

$$4x - 5 = \pm 3.$$

Lahendades need lineaarsed võrrandid, saame

$$4x = 5 \pm 3,$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{4}$$

ehk

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2; \quad x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Kontrollides võime veenduda, et need arvud on tõesti selle võrrandi lahenditeks.

b) Lahenda eelmise näite eeskujul võrrandid

$$1) 3x^2 - 10x + 3 = 0;$$

$$2) 2x^2 - 3x - 20 = 0;$$

$$3) 4x^2 + 17x + 4 = 0.$$

295. a) Taandamata ruutvõrrandi lahendamisel võime toimida aga ka nii, et taandame ta esmalt ruutliikme kordajaga, sest siis saame taandatud ruutvõrrandi, mida saab lahendada juba valemi abil.

Näide. Lahendame niiviisi ruutvõrrandi

$$4x^2 + 7x - 2 = 0.$$

Lahendus. Taandades antud võrrandit ruutliikme kordajaga 4, saame taandatud ruutvõrrandi

$$x^2 + 1,75x - 0,5 = 0.$$

Lahendades selle valemi abil, saame

$$\begin{aligned}x &= -0,875 \pm \sqrt{0,766 - (-0,5)} = -0,875 \pm \sqrt{0,766 + 0,5} = \\&= -0,875 \pm \sqrt{1,266}\end{aligned}$$

ehk, ümardades kolme tüvenumbrini:

$$x = -0,875 \pm \sqrt{1,27} = -0,875 \pm 1,13;$$

$$x_1 = -0,875 + 1,13 = 0,255;$$

$$x_2 = -0,875 - 1,13 = -2,005.$$

b) Lahenda taandamata ruutvõrrand taandatud ruutvõrrandi lahendivalemi abil.

$$1) 9x^2 - 54x + 32 = 0$$

$$2) 5x^2 + 18x - 8 = 0$$

$$3) 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$4) 2x^2 - 7x - 4 = 0$$

296. Taandamata ruutvõrrandi

$$ax^2 + bx + c = 0$$

lahendamiseks saame tuletada valemi järgmiselt.

Taandame võrrandit ruutliikme kordajaga a . Saame

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Nüüd rakendame taandatud ruutvõrrandi lahendivalemit

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}.$$

Teisendame lahendi teist liiget

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Seega

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ehk

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

See on ruutvõrrandi üldine lahendivalem. Selle võib sõnastada järgmiselt:

ruutvõrrandi lahend võrdub murruga, mille nimetajaks on ruutliikme kordaja kahekordne ja lugejaks on lineaarliikme kordaja vastand arv $\pm$ ruutjuur vahest, mille saame, kui lineaarliikme kordaja ruudust lahutame ruutliikme kordaja ja vabaliikme neljakordse korrutise.

b) Näide. Lahenda valemi abil võrrand

$$5x^2 + 13x - 6 = 0.$$

Lahendus.

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-6)}}{10}$$

ehk

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 120}}{10} = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{10} = \frac{-13 \pm 17}{10}.$$

Seega

$$x_1 = \frac{-13 + 17}{10} = 0,4 \text{ ja } x_2 = \frac{-13 - 17}{10} = -3.$$

Kontrollimine näitab, et leitud arvud on antud võrrandi lahendid.

c) Lahenda valemi abil võrrandid

1) $3x^2 - 2x - 8 = 0$

6) $13x^2 - 11x - 2 = 0$

2) $2x^2 + 9x + 10 = 0$

7) $9x^2 + 12x - 5 = 0$

3) $4x^2 + 7x - 2 = 0$

8) $4x^2 - 4x - 3 = 0$

4) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

9) $8 + 11x - 10x^2 = 0$

5) $3x^2 - 8x - 3 = 0$

10) $2 + 3x - 2x^2 = 0$

297. a) Kui ilmneb, et ruutvõrrandi

$$ax^2 + bx + c = 0$$

lahendamisel juuritav avaldis

$$b^2 - 4ac < 0,$$

siis võrrandil lahendid puuduvad. Miks?

Kui aga

$$b^2 - 4ac = 0,$$

siis

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a},$$

siit

$$x_1 = -\frac{b}{2a} \text{ ja } x_2 = -\frac{b}{2a},$$

s. t. lahendid on võrdsed.

Juhul kui

$$b^2 - 4ac > 0,$$

on võrrandil kaks erinevat lahendit. Miks?

b) Juuritavat avaldist ruutvõrrandi lahendis nimetatakse võrrandi diskriminandiks ja seda tähistatakse tähega D .

Seega on taandatud ruutvõrrandi diskriminant

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

ja taandamata ruutvõrrandi diskriminant

$$D = b^2 - 4ac.$$

Kokkuvõttes võime ruutvõrrandi lahendite kohta ütelda:

ruutvõrrandil on kaks erinevat lahendit, kui ta diskriminant on positiivne arv; lahendid on võrdsed, kui diskriminant võrdub nulliga, ja lahendid puuduvad, kui diskriminant on negatiivne arv.

c) Otsusta võrrandit lahendamata, kas tal on lahendeid või mitte. Kui on, siis kas lahendid on erinevad või võrdsed?

1) $6x^2 + 7x - 3 = 0$ 2

2) $5x^2 - 4x + 7 = 0$ *puudub*

3) $x^2 + 8x + 18 = 0$ *puudub*

4) $x^2 - 12x + 35 = 0$ *kaks*

5) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ *üks*

6) $x^2 - 4x + 4 = 0$ *üks*

298. a) Ruutvõrrandi üldine lahendivalem on rakendatav ka kõigi erikujuliste ruutvõrrandite lahendamisel. Näiteks, kui $a=1$, siis võrrand osutub taandatud ruutvõrrandiks $x^2 + bx + c = 0$.

Oldise lahendivalemi järgi saame lahenditeks

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Rakendades aga taandatud ruutvõrrandi lahendivalemit, saame

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Teisendades lahendi teist liiget, saame

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Seega

$$x = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Näeme, et mõlemad lahendivalemid annavad ühe ja sama tulemuse.

Näiteks võrrandi $x^2 - 2x - 35 = 0$ lahendamisel taandatud ruutvõrrandi lahendivalemi abil saame

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + 35} = 1 \pm \sqrt{36} = 1 \pm 6;$$

$$x_1 = 1 + 6 = 7; \quad x_2 = 1 - 6 = -5.$$

Ruutvõrrandi üldine lahendivalem annab

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \frac{2 \pm 12}{2};$$

$$x_1 = \frac{2 + 12}{2} = 7; \quad x_2 = \frac{2 - 12}{2} = -5.$$

Nagu näeme, tulemused on samad.

Kui antud taandatud ruutvõrrandis lineaarliikme kordaja p on paaritu arv, siis on seda võrrandit lihtsam lahendada taandamata ruutvõrrandi lahendivalemi abil, kuna sellega väldime arvu-
tusi murdarvudega.

b) Lahenda võrrand kahel viisil.

$$1) x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$2) x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$3) 7x^2 + x = 0$$

$$4) 3x^2 - 2x = 0$$

$$5) 2x^2 - 9 = 0$$

$$6) 4x^2 - 81 = 0$$

299. Lahenda ruutvõrrandid.

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $x^2 + 9x - 5 = 0$ | 2) $5a^2 - 11a + 3 = 0$ |
| $2y^2 + y - 7 = 0$ | $3b^2 + 12b - 17 = 0$ |
| $3z^2 - 8z + 4 = 0$ | $6c^2 - 13c - 15 = 0$ |
| $2u^2 + 3u - 1 = 0$ | $d^2 - 14d + 4 = 0$ |
| $3v^2 - 10v + 10 = 0$ | $e^2 - 16e + 11 = 0$ |
| 3) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ | 4) $4m^2 + 45m - 36 = 0$ |
| $2u^2 + 5u + 2 = 0$ | $10n^2 + 21n - 10 = 0$ |
| $s + 6 = 2s^2$ | $9q^2 + 30q - 24 = 0$ |
| ✓ $6a^2 - 17a - 14 = 0$ | ✓ $1,4z^2 + 5z = 2,4$ |
| ✓ $10p - 21 = 6p^2 - 13p$ | ✓ $w^2 - 1,6w + 0,3 = 0$ |
| 5) $2x^2 - 7x + 5 = 0$ | 6) $7x^2 - 42x + 36 = 0$ |
| $x^2 + 23x - 10 = 0$ | $69x^2 - x - 55 = 0$ |
| $6x^2 + 4x - 3 = 0$ | $9x^2 + 50x - 121 = 0$ |
| $3x^2 + 18x - 8 = 0$ | $1,2x^2 + 8,3x - 23,6 = 0$ |
| $4x^2 - 13x - 17 = 0$ | $3,4x^2 - 2,5x - 6 = 0$ |

300. Teisenda võrrand normaalkujuliseks ja lahenda see.

- | | |
|---|----------------------------|
| 1) $x(x + 2) = 35$ | 6) $(x + 7)^2 = 28x$ |
| 2) $x^2 = 3(2x - 3)$ | 7) $4 = (x - 5)^2$ |
| 3) $2(x^2 - 9) = 5(x - 4)$ | 8) $(x - 5)(7 - x) = 1$ |
| 4) $(x - 1)^2 = x + 1$ | 9) $x^2 = 2(x + 8)(x - 6)$ |
| 5) $(1 + 2x)(1 - 2x) = 3x$ | 10) $(2x - 7)(x - 3) = 4x$ |
| 11) $9x(x + 1) = 2(6x + 1)$ | |
| 12) $(1 + x)^2 = (1 - 2x)^2$ | |
| 13) $(3x - 2)(2x - 1) = x$ | |
| 14) $(3 - x)^2 = (1 + 3x)(9 - x)$ | |
| 15) $(2x + 3)^2 = (3x - 2)(x + 8)$ | |
| 16) $(3x - 1)(x - 2) = (x + 2)(x - 1)$ | |
| 17) $(4x - 1)^2 = (4x + 1)(8x - 5)$ | |
| 18) $(5x + 7)^2 - (2x + 1)^2 = 0$ | |
| 19) $2(x - 1)(2x + 1) = (4x - 1)(2x - 3)$ | |
| 20) $(8x + 3)(4x + 1) = 2(x + 1)(4x + 3)$ | |
| 21) $ax^2 + (a - b)x = b$ | |
| 22) $ax^2 + (a + 1)x = -1$ | |

MURDVÖRRANDITE LAHENDAMINE.

301. Võrrandit, mis sisaldab tundmatut murru nimetajas, nime-
tatakse murdvõrrandiks.

Näiteks võrrand

$$\frac{15x}{2(x-3)} - \frac{x}{2(x+3)} + \frac{9}{x^2-9} = 0$$

on murdvõrrand.

Selle võrrandi lahendiks ei saa olla arvud 3 ja -3 . Miks?
Lahendame selle võrrandi.

Võrrandis esinevate murdude ühine nimetaja on $2(x^2 - 9)$,
seega vastavad laiendajad on $x + 3$, $x - 3$ ja 2.

Niisiis

$$\frac{\frac{x+3}{15x}}{2(x-3)} - \frac{\frac{x-3}{x}}{2(x+3)} + \frac{\frac{2}{9}}{x^2-9} = 0;$$

$$15x(x+3) - x(x-3) + 18 = 0;$$

$$15x^2 + 45x - x^2 + 3x + 18 = 0;$$

$$14x^2 + 48x + 18 = 0;$$

$$7x^2 + 24x + 9 = 0;$$

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 252}}{14} = \frac{-24 \pm \sqrt{324}}{14} = \frac{-24 \pm 18}{14};$$

$$x_1 = \frac{-24 + 18}{14} = -\frac{3}{7}; \quad x_2 = \frac{-24 - 18}{14} = -3.$$

Et -3 ei saa olla antud võrrandi lahendiks, siis on tarvis ainult
seda kontrollida, kas $-\frac{3}{7}$ on lahend.

Kontroll. Asetame esimese leitud lahendi algvõrrandi vasa-
kuse poolde x asemele, siis saame

$$\begin{aligned} \frac{15 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)}{2 \cdot \left(-\frac{3}{7} - 3\right)} - \frac{-\frac{3}{7}}{2 \cdot \left(-\frac{3}{7} + 3\right)} + \frac{9}{\frac{9}{49} - 9} &= \frac{-\frac{45}{7}}{-\frac{48}{7}} + \frac{\frac{3}{7}}{\frac{36}{7}} + \frac{9}{\frac{9-441}{49}} = \\ &= \frac{45}{48} + \frac{3}{36} + \frac{9 \cdot 49}{-432} = \frac{15}{16} + \frac{1}{12} - \frac{49}{48} = \frac{45+4-49}{48} = 0. \end{aligned}$$

Näeme, et arv $-\frac{3}{7}$ on antud võrrandi lahend.

Antud murdvõrrandi teisendamisel saadud ruutvõrrandil on küll kaks lahendit, kuid antud võrrandil on ainult üks lahend.

Et on murdvõrrandeid, mille teisendamisel saadud võrrandi kõik lahendid ei ole algvõrrandi lahenditeks, siis tuleb murdvõrrandi lahendeid alati kontrollida.

302. Lahenda võrrandid:

$$1) \frac{19x}{x+1} + \frac{11x}{x-1} = \frac{6}{x^2-1}$$

$$2) \frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x(1-x)} = \frac{x-2}{x(x+1)}$$

$$3) \frac{1}{12-5x} + \frac{1}{5x-12} = 1 - \frac{120}{(12-5x)^2}$$

$$4) 3(2x-3) - \frac{22}{x} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot 5$$

$$5) \frac{9-x}{2} + \frac{4}{x-2} = \frac{3(x-1)}{2}$$

$$6) 11x^2 + 7x - \frac{3}{7} = 4x(x+1) + 1$$

$$7) \frac{x-3}{x+4} + \frac{x-4}{2(x-1)} = \frac{1}{2}$$

$$8) \frac{3x+2}{2x-1} + \frac{7-x}{2x+1} = \frac{7x-1}{4x^2-1} + 5$$

$$9) \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 0$$

$$10) \frac{3}{5(x^2-1)} + \frac{1}{10(x+1)} = \frac{23}{238}$$

$$11) \frac{8}{3x-5} + \frac{9}{5x-8} = \frac{20}{7x-25}$$

$$12) \frac{2x+1}{7-x} + \frac{4x+1}{7+x} = \frac{45}{49-x^2} + 1$$

$$13) \frac{2(x+7)}{x+1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+11}{x^2-1} + 4$$

$$14) 7 + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$$

$$15) \frac{x}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)^2}$$

$$16) \frac{4x^2-1}{4x+2} = \frac{9(2x+1)}{22} + \frac{8x^2-2}{2x+1}$$

$$17) \frac{x-2}{x^2+2x+1} + \frac{4x-8}{x+2x^2+x^3} = \frac{5x-10}{2x+2x^2}$$

$$18) \frac{3x^2+2}{x^2-1} + \frac{2(x-2)}{x+2} = \frac{5(x^2-x-1)}{x^2-1}$$

$$19) \frac{4x-1}{x+2} + 2 = 4x - \frac{(4x+1)(2x-1)}{x^2+4x+4}$$

$$20) \frac{x^2+x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{2x^2+2x} = \frac{3(x^2+2x-1)}{2x^2-2x}$$

$$21) \frac{7x+14}{x^2-1} + \frac{8x+16}{x^2-2x+1} = \frac{74+19x-9x^2}{x^3-x^2-x+1}$$

$$22) \frac{x+1}{x^3+x^2+x+1} + \frac{2x}{x^3-x^2+x-1} = \frac{15}{x^4-1}$$

RUUTVÖRRANDI ABIL LAHENDUVAID ÜLESANDEID.

303. a) Ülesanne. Ristkülikukujulise spordiväljaku pindala on 88 aari. Kui üht tema külge vähendada 2 m võrra, teist aga suurendada 10 m võrra, siis saame ruudukujulise väljaku. Kui suur on selle ruudu külg?

Lahendus. Olgu ruudu külg x meetrit. Siis ristküliku küljed on $x+2$ ja $x-10$ meetrit. Seega ristküliku pindala on ruutmeetrites

$$(x+2)(x-10)$$

ehk

$$x^2 - 8x - 20.$$

Teiselt poolt on see pindala 88 aari ehk 8800 ruutmeetrit. Järelikult

$$x^2 - 8x - 20 = 8800$$

ehk

$$x^2 - 8x - 8820 = 0.$$

Võrrandi lahendusvalem annab:

$$x = 4 \pm \sqrt{8836}$$

ehk

$$x = 4 \pm 94;$$

seega

$$x_1 = 4 + 94 = 98 \quad \text{jä} \quad x_2 = 4 - 94 = -90.$$

Et ruudu külg on positiivne suurus, siis x_2 meie ülesande lahendina ei tule arvesse. Ainsaks lahendiks jääb arv 98; see tähendab, et otsitav ruudu külg on 98 m.

Kontroll. Väljaku küljed on meetrites $98 + 2 = 100$ ja $98 - 10 = 88$; seega väljaku pindala on $100 \cdot 88$ ehk 8800 ruutmeetrit ehk 88 aari, nagu peab olema.

b) Ülesanne. Linnade A ja B vaheline kaugus on 349 km. Linnast A lahkub sõiduk linna B suunas. Üks tund hiljem lahkub linnast B teine sõiduk linna A suunas. Teise sõiduki kiirus on 8 km võrra tunnis väiksem kui esimese kiirus. Sõidukid kohtuvad 216 km kaugusel linnast A. Kui suure kiirusega liigub kumbki sõiduk?

Lahendus. Olgu esimese sõiduki kiirus v kilomeetrit tunnis; siis on teise kiirus $v - 8$ kilomeetrit tunnis. Kuni kohtumiseni tuli esimesel sõidukil katta 216 km, teisel $349 - 216$ ehk 133 km. Kohtumiseni sõiduks kulus esimesel

$$\frac{216}{v} \text{ tundi,}$$

teisel

$$\frac{133}{v-8} \text{ tundi.}$$

Esimese aeg on teisest ühe tunni võrra pikem, seega

$$\frac{216}{v} - \frac{133}{v-8} = 1.$$

Selle võrrandi lahenditeks ei või olla 0 ja 8. Kuidas see nähtub ülesande tekstist?

Saadud võrrandi lahendamiseks vabaneme murdudest:

$$216(v-8) - 133v = v(v-8);$$

avame sulud:

$$216v - 1728 - 133v = v^2 - 8v;$$

viime liikmed vasakule poolele, koondame ja korrutame -1 -ga:

$$v^2 - 91v + 1728 = 0.$$

Võrrandi diskriminant on

$$91^2 - 4 \cdot 1728 = 1369;$$

et see diskriminant on positiivne, siis on võrrandil 2 erinevat lahendit. Lahendivalem annab:

$$v = \frac{91 \pm \sqrt{1369}}{2} \quad \text{ehk} \quad v = \frac{91 \pm 37}{2};$$

seega

$$v_1 = 64 \text{ ja } v_2 = 27.$$

Niisiis on esimese sõiduki kiirus kas 64 või 27 km tunnis ning teise sõiduki kiirus sellele vastavalt kas 56 või 19 km tunnis.

Kontrollime tulemusi ülesande teksti varal.

Esimese lahendipaari puhul esimene sõiduk tarvitab kohtumiseni aega $\frac{216}{64}$ ehk $3\frac{3}{8}$ tundi, teine seevastu $\frac{133}{56}$ ehk $2\frac{3}{8}$ tundi, aegade vahe on $3\frac{3}{8} - 2\frac{3}{8}$ ehk 1 tund, nagu peab olema.

Teise lahendipaari puhul esimene sõiduk tarvitab kohtumiseni aega $\frac{216}{27}$ ehk 8 tundi, teine seevastu $\frac{133}{19}$ ehk 7 tundi; aegade vahe on $8 - 7$ ehk 1 tund, nagu peab olema. Mõlemad lahendipaarid rahuldavad ülesande tingimusi.

c) Lahenda võrrandi abil ülesanne.

Ruudukujulise plastikaaditüki ühes sihis venitamisel see pike-nes 3 cm võrra ja kitsenes 1 cm võrra. Venitatud tüki pindala oli 60 cm². Kui pikk oli plastikaaditüki serv enne venitamist?

304. Nõukogude skreeperite D-213 ja D-188 kaevamislaiused meetrites on vastavalt võrdsed ruutvõrrandi

$$400x^2 - 2400x + 3591 = 0$$

lahenditega. Arvuta nende skreeperite kaevamislaiused.

305. Arvu ja tema ruudu summa on 30. Mis arv see on?

306. Arvu ruudu ja arvu enda vahe on 650. Leia see arv.

307. Kahe järjestikuse täisarvu ruutude summa on 545. Mis arvud need on?

✓ 308. Kahe järjestikuse paarisarvu ruutude summa on 100. Mis arvud need on?

309. Kahe arvu vahe on 7. Samade arvude korrutis on 368. Leia need arvud.

6.03 ✓ 310. Kahest arvust üks on teisest 8 võrra suurem. Nende arvude korrutis on 425. Leia need arvud.

311. Kas on olemas kolm niisugust järjestikust täisarvu, et kahe väiksema ruutude summa võrdub suurema ruuduga?

✓ 312. Leia kolm niisugust järjestikust paarisarvu, et kahe väiksema ruutude summa oleks võrdne kolmanda ruuduga.

313. Leia 5 järjestikust naturaalarvu nõnda, et esimese kolme arvu ruutude summa võrdub järgneva kahe arvu ruutude summa.

314. Leia 7 järjestikust naturaalarvu, milledest esimese nelja arvu ruutude summa võrdub järgneva kolme arvu ruutude summa.

315. Ristküliku pikkus ületab laiuse ühe meetri võrra. Ristküliku pindala on 56 ruutmeetrit. Leia ristküliku mõõtmed.

316. Ristküliku ümbermõõt on 68 cm ja pindala on 204 cm². Leia ristküliku pikkus ja laius.

317. Kui ruudu üht külge suurendada 3 korda ja teist vähendada 2 m võrra, siis ruudu pindala suureneb 2 korda. Kui pikk on ruudu külg?

318. Ristkülikukujulise mänguväljaku mõõtmed on 8 m ja 4 m. Mänguväljaku pindala tehakse kaks korda suuremaks, suurendades võrdselt nii pikkust kui ka laiust. Kui palju tuleb pikendada kumbagi külge?

319. Kiht pingpongi-palle katab karbi ruudukujulise põhja. Pärast ühe pallirea väljavõtmist jääb karpi veel 20 palli. Mitu palli on reas?

320. Kiht kanamune asetseb ruudukujulises sõrestikus. Pärast kahe munarea väljavõtmist jääb sõrestikku veel 48 muna. Mitu muna on reas?

321. Ruudukujulisest papitükist valmistatakse karp mahuga 80 cm³. Selleks lõigatakse nurkadest välja ruudud küljepikkusega 5 cm. Missuguse küljepikkusega on papitükk?

322. Ristkülikukujulisel papitükil, mille pikkus on 1,5 korda suurem laiusest, lõigatakse nurkadest ära ruudud küljega 3 cm. Murdes ülejääva osa sobivalt kokku, saadakse karp ruumalaga 216 cm³. Kui suured on papitüki mõõtmed?

323. Klubiruumi põrandat, millel on ristküliku kuju ja mille mõõtmed on 4,8 ja 5,5 m, tahetakse katta vaibaga nõnda, et vaiba ümber jääks igast küljest ühelaiune riba põrandat vabaks, vaipa aga kataks parajasti $\frac{1}{2}$ põrandat pindalast. Kui suur peab vaip olema?

324. Aia suurus on 160 korda 240 ruutmeetrit. Pikuti ja risti minevate teede alla (vt. joon. 44) tahetakse võtta 2% kogu aia maa-alast. Kui suur tuleb valida tee laius?

325. Raamatukappi võib mahutada 640 ühesuurust raamatut, igale riiulile ühepalju raamatuid. Kui igale riiulile panna 8 raamatut rohkem, kui esialgu määratud, siis jääb 4 riiulit tühjaks. Mitu riiulit on raamatukapil?

326. Albumisse kavatseti kleepida 240 pilti, igale albumilehele ühepalju pilte. Kui igale lehele mahutada 2 pilti rohkem, kui esialgu otsustatud, siis jääb 6 lehte tühjaks. Mitu lehte on albumis?

327. Kaks autobussi sõidavad ühest linnast teise, millede vahemaa on 72 km. Et esimene autobuss sõidab tunnis 4 km rohkem kui teine, siis läbib ta nimetatud vahemaa 15 minuti võrra lühema ajaga. Kui suure kiirusega liiguvad autobussid?

328. Kahe aleviku vaheline kaugus on sillutatud maantee kaudu 26 km, halva külatee kaudu 18 km. Autobuss ja hobusõiduk asuvad ühel ja samal ajal teele: esimene valib pikema, kuid parema tee, teine lühema, kuid halvema. Et autobuss läbib tunnis 15 km võrra rohkem kui hobusõiduk, siis jõuab ta sihtkohta viimasest 55 minutit varem. Kui suure kiirusega liigub autobuss?

329. Aiand vajab 378 õuna pakkimiseks kaste. Kui igasse kasti panna 9 õuna rohkem kui kavatsetud, siis vajatakse üks kast vähem. Mitu kasti on vaja?

330. Turist kavatses matkata 252 km. Et ta matkas iga päev 3 km rohkem kui kavatsetud, siis kestis matk 2 päeva vähem. Mitu päeva kestis matk?

331. Raudteejaama veetorni paak täitub peapumba abil 2,5 tunni võrra kiiremini kui tagavarapumba abil. Kui töötavad mõlemad pumbad, siis täitub paak 3 tunni jooksul. Leida aeg, mis on tarvilik paagi täitmiseks peapumba abil.

332. Kahe erineva jõudlusega traktori koos töötamisel künti kolhoosi põld üles 8 päevaga. Esimene neist jõuaks selle põllu üles künda 12 päeva lühema ajaga kui teine, kui nad töötavad üksi. Kui palju aega kulub kummalgi selle maatüki üleskündmiseks?

✓ 333. Kaks töolist lõpetavad töö koos töötades $6\frac{2}{3}$ tunniga. Mitme tunniga lõpetaks esimene tööline selle töö üksi töötades, kui selle töö tegemiseks kulub tal teisest 3 tundi vähem?

334. Ujula basseini täitmiseks kulub ühe toru kaudu 20 minutit vähem aega kui teise kaudu. Kui mõlemad torud avada üheaegselt, siis täitub basseini 24 minutiga. Mitme minutiga täituks basseini, kui avada ainult esimene toru?

335. Hoone ehitamisel oli tarvis kindlaks tähtajaks välja kaevata 8000 m^3 mulda. Töö lõpetati 8 päeva enne tähtaega, sest muldatööliste brigaad ületas plaani iga päev 50 m^3 võrra. Arvuta, mitme päevane oli mullatööde tähtaeg?

336. Tee remontimisel oli tööks kaks brigaadi. Kumbki brigaad parandas teed 10 km ulatuses, kusjuures teine brigaad töötas üks päev vähem kui esimene. Mitu kilomeetrit teed parandas kumbki brigaad päevas, kui mõlemad brigaadid kokku parandasid päevas 4,5 km teed?

337. Paberitükist, mille mõõtmed on 24 ja 18 cm, lõigatakse igast neljast küljest ära võrdse laiussega ribad. Ülejäänud ristkülikukujuline paber on pindalalt just pool paberitüki algpindalast. Kui laiad on äralõigatud ribad?

○ 338. Pilt, mille nähtava osa mõõtmed on 20 ja 16 cm, on raamis, mille esipindala on 352 cm^2 . Kui lai on pildi raam?

✓ 339. Mootorpaat sõitis jõel 28 km päriveru ning pöördus siis kohe tagasi, kulutades edasi-tagasi teekonnaks 7 tundi. Leia mootorpaadi kiirus seisvas vees, teades, et vee voolu kiirus jões on 3 km tunnis.

○ 340. Kahe linna vaheline kaugus mööda jõge on 80 km. Aurikul kulub edasi-tagasi sõiduks 8 tundi 20 minutit. Arvuta auriku kiirus seisvas vees, kui jõe voolu kiirus on 4 km tunnis.

341. Õmblusvabrik pidi tähtajaks õmblema 810 ülikonda. Teine vabrik pidi samaks tähtajaks õmblema 900 ülikonda. Esimene täitis tellimise 3 päeva, teine 6 päeva enne tähtaega. Mitu ülikonda õmmeldi kummaski vabrikus päevas, kui teises õmmeldi päevas 4 ülikonda rohkem kui esimeses?

✓ 342. Rong läbiks 180 km pikkuse vahemaa $\frac{2}{3}$ tunni võrra lühema ajaga, kui ta kiirus oleks 9 km võrra tunnis suurem. Mitu tundi sõidab rong seda vahemaad?

○ 343. Kui jalgrattur sõidaks tunnis 2 km rohkem, siis kuluks tal 72 km läbimiseks $\frac{1}{2}$ tundi vähem aega. Kui suure kiirusega sõitis jalgrattur?

344. Kui kuubi serva pikendada n cm võrra, siis ruumala suureneb v cm³ võrra.

Arvuta kuubi serva pikkus järgmistel andmetel:

○ a) $n=2$; $v=98$;

b) $n=1,4$; $v=46,424$.

○ 345. Risttahuka põhja pikkus on laiupest 2 cm võrra suurem. Risttahuka kõrgus on 5 cm ja ta kaalub 882 g. Arvuta põhja mõõtmed, kui risttahukas on klaasist, mille erikaal on 2,8.

346. Leia korrapärase nelinurkse püstprisma põhiserva pikkus, kui täispindala on S cm² ja prisma kõrgus on h cm.

Arvuta, kui:

a) $S=170$; $h=10$;

b) $S=58,32$; $h=7,2$.

347. Õõnsa kuubi seina paksus on 1 cm ja ta kaalub 189,7 g. Leia välimise serva pikkus, kui kuup on tehtud ainest, mille erikaal on 0,7.

348. Kaks hoiust, milledest üks on 300 rbl. võrra suurem kui teine, olid hoiul 2%-ga. Mõlemad hoiused tõid 120 rbl. intresse, sest väiksem hoius oli 1 aasta kauem hoiul. Mitu aastat oli hoiul suurem hoius?

349. Kahest metallist valmistatakse sulamit. Esimese metalli erikaal on teise omast 1,5 võrra suurem. Kui esimest metalli võetakse 20 g ja teist 40 g, siis sulami erikaal tuleb 9,4. Arvuta mõlema metalli erikaalud.

TAANDATUD RUUTVÖRRANDI LAHENDITE OMADUSED.

350. Lahenda alljärgnevas tabelis antud võrrandid. Arvuta iga võrrandi puhul lahendite summa ja lahendite korrutis, ümardades ligikaudsed tulemused kolme tüvenumbrini, ning täida tabel.

$x^2 + px + q = 0$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	p	$x_1 \cdot x_2$	q
$x^2 - 8x + 15 = 0$						
$x^2 + 4x - 21 = 0$						
$x^2 + 10x + 24 = 0$						
$x^2 + 10x + 20 = 0$						
$x^2 - 10x + 18 = 0$						

Võrdle lahendite summat võrrandi lineaarliikme kordajaga p ja lahendite korrutist vabaliikmega q . Mida paned tähele?

351. Tõestame teoreemi:

taandatud ruutvõrrandi lahendite summa võrdub tundmatu esimese astme kordaja vastand arvuga ja lahendite korrutis võrdub vabaliikmega.

Tõestus. Taandatud ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendid on

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

ja

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Leiame esiteks lahendite summa. Et liitmisel juured koonduvad, siis saame:

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \left(-\frac{p}{2}\right) = -p.$$

Leiame nüüd lahendite korrutise:

$$x_1 \cdot x_2 = \left[-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right] \cdot \left[-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right].$$

Rakendades summa ja vahe korrutise valemit, leiame:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q.$$

Niisiis

$$x_1 + x_2 = -p$$

ja

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

See ruutvõrrandi kordajate ja lahendite vaheline seos kannab Viëta (vietaa)* teoreemi nime.

352. Otsusta iga võrrandi puhul:

- 1) millega võrdub lahendite summa;
- 2) millega võrdub lahendite korrutis;
- 3) kas lahendid on positiivsed või negatiivsed või on üks lahend positiivne ja teine negatiivne;
- 4) kui üks lahend on positiivne ja teine negatiivne, siis kumb on suurema absoluutväärtusega.

a) $x^2 - 11x + 28 = 0$

b) $x^2 - 12x - 61 = 0$

$$x^2 + 4x - 227 = 0$$

$$x^2 + 14x + 48 = 0$$

$$x^2 + 13x + 59 = 0$$

$$x^2 - 16x + 63 = 0$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$x^2 - 17x - 38 = 0$$

$$x^2 + 8x - 105 = 0$$

$$x^2 - 19x - 92 = 0$$

353. a) Missugused on taandamata ruutvõrrandi

$$ax^2 + bx + c = 0$$

lahendite ja kordajate vahelised seosed?

b) Otsusta iga alljärgneva võrrandi puhul:

- 1) millega võrdub lahendite summa;
- 2) millega võrdub lahendite korrutis;
- 3) missugused on lahendite märgid.

$$2x^2 - x - 4 = 0$$

$$8x^2 - 7x - 28 = 0$$

$$3x^2 + 10x + 6 = 0$$

$$2x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$5x^2 + 7x - 17,5 = 0$$

$$4x^2 - 3x - 12 = 0$$

RUUTVÕRRANDI KOOSTAMINE TEMA LAHENDITE JÄRGI.

354. a) Ülesanne. Koosta ruutvõrrand, mille lahendid on x_1 ja x_2 .

* Prantsuse matemaatik 1540—1603.

Lahendus. Viëta teoreemi järgi

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

ehk teisiti

$$p = -(x_1 + x_2) \text{ ja } q = x_1 \cdot x_2.$$

Seega nõutud ruutvõrrand on

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

b) Koostame ruutvõrrandi, mille lahendid on 10 ja -8 .

Lahendite summa on $10 + (-8) = 2$. Lahendite korrutis on $10 \cdot (-8) = -80$.

Seega $p = -2$ ja $q = -80$ ning otsitav ruutvõrrand on

$$x^2 - 2x - 80 = 0.$$

c) Koostame ruutvõrrandi, mille lahendid on $-\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{6}$.

Antud lahendite summa on

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{-3+1}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3};$$

lahendite korrutis $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}$.

Järelikult $p = \frac{1}{3}$ ja $q = -\frac{1}{12}$ ning seega otsitav ruutvõrrand on

$$x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{12} = 0.$$

Korrutades saadud võrrandi kumbagi poolt 12-ga, saame samade lahenditega taandamata ruutvõrrandi

$$12x^2 + 4x - 1 = 0.$$

Kirjuta ruutvõrrandid, mille lahenditeks on:

a) 3 ja 4

-5 ja 10

-2 ja -6

-9 ja 7

2 ja -2

b) $\frac{1}{2}$ ja 0

$\frac{5}{8}$ ja $-\frac{2}{3}$

$2,3$ ja $-1,1$

$4,5$ ja $-0,9$

3 ja $-\frac{1}{3}$

c) $-2,1$ ja $-0,1$

$0,3$ ja $0,2$

$-0,8$ ja $0,5$

$\frac{5}{6}$ ja $-\frac{2}{3}$

$0,4$ ja $-\frac{1}{5}$

355. Koosta ruutvõrrand, mille lahenditeks on:

a) $1 + \sqrt{2}$ ja $1 - \sqrt{2}$

b) $2 + \sqrt{3}$ ja $2 - \sqrt{3}$

356. Leia kaks niisugust arvu, millede

a) summa on 14 ja korrutis on 45;

b) „ „ -15 „ „ „ 56;

c) „ „ $4\frac{1}{2}$ „ „ „ 2;

d) „ „ $\frac{1}{3}$ „ „ „ $-\frac{5}{12}$;

e) „ „ 0,5 „ „ „ -0,14.

Näide. Kahe arvu summa on $\frac{1}{3}$ ja nende korrutis $-\frac{5}{12}$.
Missugused arvud need on?

Lahendus. Otsitavad arvud on niisuguse taandatud ruutvõrrandi lahenditeks, milles lineaarse liikme kordaja on $-\frac{1}{3}$ ja vabaliige on $-\frac{5}{12}$, on seega lahenditeks ruutvõrrandile

$$x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{12} = 0 \text{ ehk } 12x^2 - 4x - 5 = 0.$$

Lahendades selle ruutvõrrandi, saame

$$x_1 = \frac{5}{6} \text{ ja } x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Otsitavad arvud on $\frac{5}{6}$ ja $-\frac{1}{2}$.

TEISE ASTME KOLMLIIKME LAHUTAMINE

LINEAARSEIKS TEGUREIKS.

357. a) Korruta lineaarsed kaksliikmed ja koonda tulemus.

1) $(x + 3)(x + 9)$

3) $(3n + 4)(n - 7)$

2) $(m + 5)(m - 4)$

4) $(5y - 2)(y - 8)$

b) Avaldisi nagu $x^2 + 12x + 27$, $3m^2 + 10m - 8$ jne. nimetatase teise astme kolmliikmeteks ehk ruutkolmliikmeteks. Esimene

neist on tähe x ruutkolmliige, teine tähe m ruutkolmliige. Teise astme kolmliikme üldkuju on $ax^2 + bx + c$, kus a , b ja c on antud arvud ja x on kolmliikme argument.

c) Mis on ruutkolmliikme graafiliseks kujutiseks? Kujuta graafiliselt ruutkolmliige $x^2 - x - 2$.

358. Eelmises ülesandes nägime, et kahe lineaarse kaksliikme korrutamisel tekib ruutkolmliige. Küsime nüüd, kas, ümberpöörduvalt, iga ruutkolmliiget saab esitada kahe lineaarse kaksliikme korrutisena, ehk teisiti öeldes, kas iga antud ruutkolmliiget saab lahutada lineaarseiks tegureiks.

Lahendame küsimuse esmalt taandatud ruutkolmliikme

$$x^2 + px + q$$

kohta. Oletame, et leidub kaks lineaarset kaksliiget $x - m$ ja $x - n$, millede korrutis võrdub antud ruutkolmliikmega, s. t.

$$(x - m)(x - n) = x^2 + px + q.$$

Arvutades võrduse vasakul poolel seisva korrutise, saame

$$x^2 - (m + n)x + mn = x^2 + px + q.$$

Siit näeme, et otsitavate kaksliikmete $x - m$ ja $x - n$ vabaliikmed m ja n peavad olema niisugused arvud, millede korrutis võrdub antud ruutkolmliikme vabaliikmega ja summa võrdub antud ruutkolmliikme lineaarliikme kordaja vastandarvuga:

$$mn = q \text{ ja } m + n = -p.$$

Kuid niisuguste omadustega arve juba tunneme: need on ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendid x_1 ja x_2 . Tähendab

taandatud ruutkolmliige $x^2 + bx + q$ lahutub teguriteks kujul $(x - x_1)(x - x_2)$, kus x_1 ja x_2 on ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid.

Kui võrrandil $x^2 + px + q = 0$ lahendid puuduvad, siis see tähendab, et ei leidu kaht niisugust arvu m ja n , millede korrutis oleks q ja summa $-p$; järelikult sel korral antud ruutkolmliige ei ole esitatav kahe lineaarse kaksliikme korrutisena.

Näiteid. 1) Lahuta tegureiks ruutkolmliige

$$x^2 - 7x + 6.$$

Lahendus. Võrrandi $x^2 - 7x + 6 = 0$ lahendamisel saame:

$$x = 3,5 \pm \sqrt{12,25 - 6} = 3,5 \pm \sqrt{6,25} = 3,5 \pm 2,5;$$

$$x_1 = 3,5 + 2,5 = 6;$$

$$x_2 = 3,5 - 2,5 = 1.$$

Seega

$$x^2 - 7x + 6 = (x - 6)(x - 1).$$

Tulemuse kontrollimiseks korruta saadud tegurid.

2) Lahuta tegureiks ruutkolmliige

$$u^2 + 4u + 5.$$

Lahendus. Võrrandi $u^2 + 4u + 5 = 0$ lahendamisel saame:

$$u = -2 \pm \sqrt{4 - 5} = -2 \pm \sqrt{-1}.$$

Et negatiivsest arvust ei saa leida ruutjuurt, siis võrrandil lahendid puuduvad ja seega antud ruutkolmliiget ei saa lahutada lineaarseiks tegureiks.

359. Lahuta järgmised ruutkolmliikmed tegureiks.

1) $x^2 - x - 30$

6) $p^2 + 5p - 66$

2) $y^2 - 3y - 40$

7) $q^2 - 8q - 20$

3) $z^2 - 10z - 24$

8) $r^2 + 8r - 9$

4) $u^2 - 5u - 24$

9) $n^2 - n - 72$

5) $v^2 - 17v + 70$

10) $m^2 - m - 12$

360. a) Üldkujulise ruutkolmliikme $ax^2 + bx + c$ lahutamiseks lineaarseiks tegureiks viime esmalt arvu a sulgude ette:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right).$$

Sulgudes oleva taandatud ruutkolmliikme teguriteks lahutamiseks tuleks lahendada ruutvõrrand

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Sel võrrandil on aga samad lahendid, mis on võrrandil

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Leides selle võrrandi lahendid x_1 ja x_2 , saame antud ruutkolmliikme lahutada tegureiks järgmiselt:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Seega

ruutkolmliige $ax^2 + bx + c$ lahutub teguriteks kujul $a(x - x_1)(x - x_2)$, kus x_1 ja x_2 on ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid.

Kui võrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid puuduvad, siis ruutkolmliiget $ax^2 + bx + c$ ei saa lahutada lineaarseiks tegureiks.

Näide. Lahuta tegureiks ruutkolmliige

$$5u^2 + u - 4.$$

Lahendus. Võrrandi

$$5u^2 + u - 4 = 0$$

lahendamise annab:

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{10} = \frac{-1 \pm 9}{10};$$

seega

$$u_1 = \frac{-1+9}{10} = \frac{4}{5} \quad \text{ja} \quad u_2 = \frac{-1-9}{10} = -1.$$

Järelikult

$$5u^2 + u - 4 = 5\left(u - \frac{4}{5}\right)(u + 1)$$

ehk

$$5u^2 + u - 4 = (5u - 4)(u + 1).$$

b) Lahuta järgmised ruutkolmliikmed tegureiks.

1) $a^2 - 20a + 36$

6) $k^2 + k - 132$

2) $c^2 + 14c + 48$

7) $m^2 + 11m - 42$

3) $2f^2 - 7f - 4$

8) $12n^2 + 5n - 3$

4) $3h^2 + 5h - 2$

9) $4p^2 - 16p + 15$

5) $5l^2 - 14l + 8$

10) $6r^2 + 5r - 1$

361. Taanda murrud.

$$1) \frac{6x^2-6}{6x^2-5x-1}$$

$$2) \frac{a^2-49}{a^2-5a-14}$$

$$3) \frac{a^2+3a-4}{a^2-3a+2}$$

$$4) \frac{a^3-8}{a^2+a-6}$$

362. Lihtsusta avaldisi.

$$1) \frac{3a^2+7a-6}{3a^2-7a-6} \cdot \frac{3a^2-11a+6}{3a^2+11a+6}$$

$$2) \frac{a^2-3a-28}{a^2-25} : \frac{a^2+3a-4}{a^2+2a-35}$$

$$3) \frac{a^2-a-2}{a^2+6a-27} : \frac{3a-6}{2a-6}$$

$$4) \frac{3a+1}{3a-1} : \frac{3a^2-11a-4}{3a^2+5a-2}$$

$$5) \frac{3x-1}{3x^2+8x-3} \cdot \frac{3x^2-20x-7}{3x+1}$$

RUUTVÖRRANDISÜSTEEM.

363. a) Täisnurkse kolmnurga kaatetite summa on 17 cm ja hüpotenuus on 13 cm. Leia kaatetite pikkused.

Lahendus. Olgu ühe kaateti pikkus x cm, teise pikkus y cm.

Ulesande tingimuste ja Pütagorase teoreemi põhjal saame süsteemi

$$\begin{cases} x+y=17 \\ x^2+y^2=169, \end{cases}$$

milles üks võrrand on lineaarne, teine ruutvõrrand. Niisuguse süsteemi lahendamiseks avaldame lineaarvõrrandist ühe tundmatu

$$y=17-x$$

ja asetame leitud avaldise ruutvõrrandisse selle tundmatu asemele; saame ühe tundmatuga ruutvõrrandi:

$$\begin{aligned} x^2 + (17-x)^2 &= 169, \\ x^2 - 17x + 60 &= 0. \end{aligned}$$

$$x_1 = 12; \quad x_2 = 5.$$

Arvestades võrdust $y = 17 - x$, saame $y_1 = 5$; $y_2 = 12$.
Süsteemi lahendid on seega

$$\begin{cases} x_1 = 12 \\ y_1 = 5 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 12. \end{cases}$$

Otsitavad kaatetid on 12 cm ja 5 cm. Lahendatud süsteemil on küll kaks lahendit, kuid meie ülesandele saime ühe lahendi.

b) Ristkülikukujulise akna ava ümbermõõt on 26 dm ja pindala 40 dm². Leia akna ava mõõtmed.

Lahendus. Olgu akna laius x dm ja kõrgus y dm.

Ülesande tingimuste põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x + 2y = 26 \\ xy = 40 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 40. \end{cases}$$

Avaldades esimesest võrrandist tundmatu y , saame

$$y = 13 - x.$$

Asetades avaldise $13 - x$ teise võrrandisse y asemele, saame

$$x(13 - x) = 40$$

ehk

$$x^2 - 13x + 40 = 0.$$

Siit

$$x_1 = 8, \quad x_2 = 5.$$

Arvestades leitud võrdust $y = 13 - x$, saame

$$y_1 = 5 \quad \text{ja} \quad y_2 = 8.$$

Süsteemil on kaks lahendit

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ y_1 = 5 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 8 \end{cases}$$

Akna mõõtmed on seega järgmised:

laius 8 dm ja kõrgus 5 dm või laius 5 dm ja kõrgus 8 dm.

Sel ülesandel on kaks lahendit.

- c) Kui kahe tundmatuga võrrandisüsteemis üks võrrandeist on ruutvõrrand, teine aga kas ruutvõrrand või lineaarvõrrand, siis nimetame süsteemi ruutvõrrandisüsteemiks.

Näiteks on süsteemid

$$\begin{cases} x^2 - 2xy = 32 \\ 3x + y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

ruutvõrrandisüsteemid.

Süsteemi nimetame ka siis ruutvõrrandisüsteemiks, kui tema võrrandis ei esine kummagi tundmatu ruuduga liiget, küll aga liige tundmatute korrutisega. Näiteks on süsteem

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 5 \end{cases}$$

ruutvõrrandisüsteem.

d) Ruutvõrrandisüsteemi, milles üks võrrandeist on lineaarne, saab alati nii lahendada, et lineaarsest võrrandist avaldame ühe tundmatu ja paneme saadud avaldise ruutvõrrandisse selle tundmatu asemele. Sel teel saame ühe tundmatuga ruutvõrrandi. Kui saadud ruutvõrrandil on lahendid olemas, siis leiame need. Kui leitud tundmatu väärtused, enne ühe, siis teise, paneme lineaarvõrrandisse selle tundmatu asemele, siis saame vastavalt teise tundmatu kaks väärtust.

Mõne ruutvõrrandisüsteemi lahendamisel saab rakendada ka liitmisvõtet.

Näide. Lahendame süsteemi

$$\begin{aligned} x^2 + 2y &= 37 \\ 6x - 2y &= 18. \end{aligned}$$

Näeme, et kui võrrandite pooled liidame, siis kaob otsitav y ; saame

$$\begin{aligned} x^2 + 2y &= 37; \\ 6x - 2y &= 18; \\ \hline x^2 + 6x &= 55; \end{aligned}$$

siit

$$x^2 + 6x - 55 = 0,$$

millest

$$x_1 = 5 \quad \text{ja} \quad x_2 = -11.$$

Asendades x teises võrrandis esiteks väärtusega 5 ja pärast väärtusega -11 , saame:

$$y_1 = 6 \quad \text{ja} \quad y_2 = -42.$$

Meie süsteemi lahendid on:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 6 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = -11 \\ y_2 = -42. \end{cases}$$

364. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid:

$$1) \begin{cases} x^2 = y \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y^2 + 7x = 11 \\ 7x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 + 2x = 7y + 50 \\ 6x = 7y + 5 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 5x^2 + 2y = 12 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x^2 = y + 26 \\ 2x = y + 2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x^2 + 13 = 21y \\ 2x - 1 = 3y \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 5y^2 = 8x \\ 5y - 2 = 5x \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x^2 = 4y \\ x + 3 = 2y \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 3x = 2y^2 \\ 2x = 4y + 9 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} y^2 = 14x + 79 \\ 5y = 7x + 4 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y - x = 1 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ y + x = 2 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} x^2 - y^2 = 63 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} x^2 - y^2 = 96 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - 4x + y = 176 \\ 2y - x = 2 \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} 4x^2 - 3xy - 3y^2 + 4y = 136 \\ 2x + y = 26 \end{cases}$$

365. a) Kahe tundmatuga süsteemi, mille ühe võrrandiga on antud tundmatute summa, teisega korrutis, saab lahendada taandatud ruutvõrrandi lahendite omaduste rakendamisega.

Näide. Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = 56. \end{cases}$$

Lahendus. Koostame ruutvõrrandi tema lahendite summa ja korrutise põhjal:

$$z^2 - 18z + 56 = 0.$$

Selle ruutvõrrandi lahendamisel saame:

$$z_1 = 14 \quad \text{ja} \quad z_2 = 4.$$

Kui $z_1 = x$, siis $z_2 = y$, kui aga $z_2 = x$, siis $z_1 = y$:

$$\begin{cases} x_1 = 14 \\ y_1 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 14. \end{cases}$$

b) Lahenda võrrandisüsteemid:

$$1) \begin{cases} x + y = 15 \\ xy = 36 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 35 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + y = 9 \\ xy = -36 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x + xy + y = 11 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x - xy + y = 1\frac{5}{6} \\ 3xy = 7 \end{cases}$$

366. a) Lahenda võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \frac{y+3}{(3x-y)(3y-x)} = 0,5 \\ \frac{x-y}{x+y} = 0,4. \end{cases}$$

Lahendus. Lihtsustame esimest võrrandit. Korrutame esmalt kummagi poole 2-ga, et vabaneda murrust, saame

$$\frac{2y+6}{(3x-y)(3y-x)} = 1.$$

Siit

$$2y + 6 = (3x - y)(3y - x),$$

millest

$$3x^2 + 3y^2 - 10xy + 2y = -6.$$

Lihtsustame nüüd teise võrrandi.

Korrutame 5-ga:

$$\frac{5x - 5y}{x + y} = 2.$$

Siit

$$5x - 5y = 2x + 2y$$

ehk

$$3x - 7y = 0.$$

Nüüd lahendame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 10xy + 2y = -6 \\ 3x - 7y = 0. \end{cases}$$

Rakendame asendusvõtet. Teisest võrrandist saame

$$3x = 7y,$$

siit

$$x = \frac{7y}{3}.$$

Asendame esimeses võrrandis x avaldisega $\frac{7y}{3}$, saame

$$3 \cdot \left(\frac{7y}{3}\right)^2 + 3y^2 - 10 \cdot \frac{7y}{3} \cdot y + 2y = -6;$$

$$3 \cdot \frac{49y^2}{9} + 3y^2 - \frac{70y^2}{3} + 2y = -6;$$

$$\frac{49y^2}{3} + 3y^2 - \frac{70y^2}{3} + 2y = -6;$$

$$49y^2 + 9y^2 - 70y^2 + 6y = -18;$$

$$-12y^2 + 6y = -18;$$

$$2y^2 - y - 3 = 0.$$

Siit

$$y_1 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad y_2 = -1.$$

$$x_1 = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2} \text{ ja } x_2 = \frac{7}{3} \cdot (-1) = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3},$$

$$\begin{cases} x_1 = 3\frac{1}{2} \\ y_1 = 1\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2\frac{1}{3} \\ y_2 = -1. \end{cases}$$

b) Lahenda võrrandisüsteemid:

$$1) \begin{cases} xy = 32 \\ \frac{x}{y} = 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{1}{xy} = 5 \\ \frac{x}{y} = 20 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} xy = 32 \\ \frac{x+y}{x-y} = 3 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} xy = 30 \\ \frac{x+y}{x} = \frac{11}{5} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x^2 + y^2 = 68 \\ \frac{11x-3y}{x-1} = -2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x^2 - y^2 = 48 \\ \frac{x-2y}{y+1} = 2\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} (x-2)(y-3) = 1 \\ \frac{x-2}{y-3} = 1 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \frac{(x+y+1)(x+y-1)}{xy+57} = 3 \\ \frac{1}{2x} - \frac{1}{2y} = -\frac{1}{xy} \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x-y = 2b \\ \frac{x}{a-b} = \frac{a+b}{y} \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \frac{x-y}{a+1} = a \\ x-y^2 = 0 \end{cases}$$

367. Täisnurkse kolmnurga ümbermõõt on 70 cm ja hüpoteenus 29 cm. Leia kaatetite pikkused.

368. Arvuta kaatetite pikkused täisnurkses kolmnurgas, mille hüpoteenus on 37 cm ja kaatetite summa on 47 cm.

369. Leia ristküliku küljed, kui ta ümbermõõt on 20,6 dm ja diagonaali pikkus on 7,3 dm.

370. Ristküliku ümbermõõt on 20 cm ja pindala on 20,6 cm². Arvuta ristküliku külgede pikkused.

371. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 50 cm ja ta alusele tõmmatud kõrgus on haarast 2 cm võrra lühem. Arvuta kolmnurga küljed.

372. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 14,4 dm ning ta haarale ja alusele tõmmatud kõrguste vahe on 2,5 dm. Leia kolmnurga külgede pikkused.

373. Arvuta rombi diagonaalide pikkused, teades, et nende vahe on 14 cm ja rombi külje pikkus on 17 cm.

374. Leia rombi diagonaalide pikkused, teades, et nende summa on 98 cm ja rombi külje pikkus on 35 cm.

375. Kaks töolist koos töötades ehitasid silohoidla valmis 12 tunniga. Mitu tundi oleks kulunud silohoidla ehitamiseks kummalgi töölisel üksi, kui üks neist oleks võinud selle töö teha 10 tundi lühema ajaga kui teine?

376. Ajakirjanduses tehti ettepanek Tallinna linna toidujäätmete ärakasutamiseks ehitada linna lähedale suurte sulgudega sigade nuumamise farm, kuhu mahuks 8000 nuumikut. Kui kavatsatud sulgude arvu suurendada 10 võrra, siis võiks igasse sulgu paigutada 40 nuumikut vähem. Mitu sulgu on kavatsatud ehitada selles farmis ja mitu nuumikut on mõeldud paigutada ühte sulgu?

377. Kui mehhaniseeritud suures seafarmis, milles on 8000 siga, ühe inimese talitamisel oleks 400 siga rohkem, siis talitajate arv väheneks 1 võrra. Mitu talitajat töötab farmis ja mitu siga on talitada igal töotajal?

378. Rajoonidevahelises sotsialistlikus võistluses sai 1960. aastal esimese preemia Paide rajoon, teise preemia Märjamaa rajoon. Teravilja keskmine hektarisaak oli Paide rajoonis 1,8 tsentneri võrra suurem kui Märjamaa rajoonis. Arvuta need hektarisaagid, teades, et maa-ala, millelt Märjamaa rajoon sai saagi 1 ts, on 0,00825 ha võrra suurem kui maa-ala, millelt Paide rajoon sai 1 ts.

379. Paide rajoonis valmistati 1960. aastal iga lehma kohta 0,7 tonni silo rohkem kui Märjamaa rajoonis. Kui silo anda lehmadele 100 päeva jooksul, siis peab Märjamaa rajoonis 1 tonnist

silost jätkuma lehmale 1 päeva võrra pikemaks ajaks kui Paide rajoonis. Mitu tonni silo valmistati lehma kohta kummaski rajoonis? Tulemused anna täpsusega 0,1 tonni.

380. 100 kilomeetrise vahemaa sõitmisel kulutab 4,5-tonnise kandejõuga veoauto ZIL-151 bensiini 16 liitrit rohkem kui 2-tonnise kandejõuga GAZ-63. Mitu liitrit bensiini kulutab kumbki veoauto 100 kilomeetri sõitmiseks, kui veoauto GAZ-63 sõidab ühe liitri bensiiniga 1,16 km rohkem kui ZIL-151?

381. Laeva lastimisel töötasid algul 2 tundi 4 ühesuguse võimsusega kraanat, seejärel liitusid neile veel 2 väiksema võimsusega kraanat. Kui kõik kraanad olid koos töötanud 3 tundi, oli laev lastitud. Kui kõik kraanad oleks algusest peale koos töötanud, siis oleks lastimine lõpetatud 4,5 tunniga. Mitme tunniga oleks lastimise lõpetanud üks suurema võimsusega kraana ja mitme tunniga üks väiksema võimsusega kraana?

KORDAMISEKS.

382. Joonesta teljestikus kolmnurk, mille tipud on $A(-7; -1)$, $B(8; 2)$ ja $C(2; 8)$. Konstrueeri selle kolmnurga mediaanid ja leia jooniselt kolmnurga raskuskeskme koordinaadid.

383. Joonesta teljestikus rõõpkülik, mille kolm tippu on antud: $A(-4; -4)$; $B(11; 3)$; $C(8; 6)$. Leia jooniselt selle rõõpküliku diagonaalide lõikepunkti koordinaadid.

384. Lahenda graafiliselt võrrandisüsteem.

$$a) \begin{cases} x + 2y = 8 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - 2y = -4 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} xy = 6 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} xy = 4 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

385. Lahenda graafiliselt ruutvõrrand.

$$a) 3x^2 + 10x + 6 = 0$$

$$b) 2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$c) 3x^2 + 2x - 6 = 0$$

$$d) 4x^2 - 3x - 12 = 0$$

386. Avalda x võrdest.

$$a) \frac{a+b}{a-b} : \frac{a^2-b^2}{ab} = x : \frac{(a-b)^2}{ab}$$

$$b) \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} : x = \frac{a-b}{a^2-2ab+b^2} : \frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$$

387. Liida murrud.

$$a) \frac{1}{a^2+3a+2} + \frac{2a}{a^2+4a+3} + \frac{1}{a^2+5a+6}$$

$$b) \frac{a+b}{a^2+4a-5} + \frac{a+5}{a^2-7a+6} - \frac{2(a+1)}{a^2-a-30}$$

388. Arvuta avaldise väärtus tähe antud väärtuse korral.

$$a) \frac{a^2-2a+4}{a^2+2a+4} \cdot \frac{a^3-8}{a^3+8}, \text{ kui } a=98.$$

$$b) \frac{x^2-7x+12}{x+4} : \frac{x^2-9}{x^2-16}, \text{ kui } x=7.$$

389. Lahenda võrrand täpsusega 0,01.

$$a) \frac{x}{2x+4} - \frac{3}{x} + \frac{x+1,7}{x^2+2x} + \frac{2}{x+2} = 0.$$

$$b) \frac{x+2}{2x} + \frac{7x}{2x-4} - \frac{4x^2-3,5x+3}{x^2-2x} = 0.$$

390. Lihtsusta avaldist.

$$a) \frac{2n}{n^2-1} - \frac{n^3+3n^2+3n+1}{8n^2-8n} \cdot \left[1 - \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \right] + 1 : \frac{n+1}{n}$$

$$b) \frac{4a^2-1}{a^3-a^2-a+1} : \left(\frac{a}{a^2-2a+1} - \frac{1}{1-a} \cdot \frac{a}{a+1} - \frac{2}{a+1} \right)$$

391. Lahenda võrrandisüsteem.

$$a) \begin{cases} \frac{y+3}{(3x-y)(3y-x)} = 0,5 \\ \frac{x-y}{x+y} = 0,4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x-3y-1}{6x-11y-3} = \frac{1}{2} \\ 3xy - (x^2 + y^2) = 11 \end{cases}$$

392. Kaks rajooni olid 1960. aastal sotsialistlikus võistluses. Ühes neist oli kartulisaak hektarilt 1,07 korda suurem kui teises, kusjuures ühes rajoonis saadi hektarilt 8,8 tsentnerit kartuleid rohkem kui teises. Arvuta kartulisaagid hektarilt kummaski rajoonis.

393. Kaks hoiust, milledest üks on 375 rbl. võrra suurem kui teine, tõid $2\frac{1}{2}$ %-ga ühepalju tulu, kumbki 125 rbl., sest väiksem hoius oli 3 aastat kauem hoiul. Mitu aastat oli kumbki hoius hoiukassas?

394. Kaks müürseppa, kelledest teine alustab tööd $1\frac{1}{2}$ päeva hiljem kui esimene, jõuavad müüri valmis laduda 7 päevaga. Kui see töö oleks antud teha kummalegi eraldi, siis oleks selle müüri ehitamiseks vajanud esimene 3 päeva rohkem kui teine. Mitme päevaga oleks kumbki müürsepp ehitanud müüri valmis üksi töötades?

395. Kaks autot väljusid ühest punktist ühes ja samas suunas, üks kiirusega $50 \frac{\text{km}}{\text{t}}$, teine kiirusega $40 \frac{\text{km}}{\text{t}}$. Pool tundi hiljem väljus samast punktist kolmas auto eelmistele järele, möödudes esimesest poolteist tundi hiljem kui teisest. Leia kolmanda auto liikumise kiirus.

396. Kaks töolist koos töötades lõpetasid töö 12 tunniga. Kui esimene neist oleks alguses teinud pool sellest tööst üksi ja seejärel teine ülejäänud osa, siis oleks töö algusest lõpuni kulunud 25 tundi. Mitme tunniga oleks kumbki tööline jõudnud selle töö teha üksi töötades?

397. Foto-negatiivide pesemiseks kasutatakse risttahukakujulist vanni, mille seesmised mõõtmed on 20 cm, 90 cm ja 25 cm. Vee pideva voolavuse saavutamiseks voolab vesi ühe kraani kaudu sisse, teise kaudu välja. Selleks et täis vann tühjendada teise kraani kaudu, mil esimene on suletud, kulub 5 minutit vähem aega kui selleks, et tühi vann täita esimese kraani kaudu, mil teine on suletud. Kui aga mõlemad kraanid on avatud, siis täis vann tühjeneb 1 tunniga. Arvuta vee hulk, mille kumbki kraan laseb läbi 1 minutis.

398. Karusloomafarmis kasvatatakse hõberebaseid. Praegu on seal loomi nii palju, et kui igasse sulgu paigutada 2 looma rohkem, siis jääks 50 sulgu tühjaks. Kui aga igasse sulgu paigutada 1 loom vähem, siis tuleks viiskümmend sulgu puudu. Mitu hõberebast ja mitu sulgu on farmis?

399. Rong pidi sõiduplaanis ettenähtud ajaga läbima 840 km. Poolel teel peatati ta semafori juures $\frac{1}{2}$ tundi. Selleks et ette-

nähtud kellaajaks pärale jõuda, suurendati kiirust 2 km võrra tunnis. Kui kaua oli rong teel?

400. Kui kuubi serva pikkust suurendada 5,6 cm võrra, siis ta ruumala suureneb 915 cm^3 võrra. Arvuta kuubi serva pikkus.

401. Vaskpleki tükil on ristküliku kuju, mille pikkus ületab laius 5 cm võrra. Pleki paksus on 2 mm ja ta kaalub 264 g. Arvuta plekitüki mõõtmed, teades, et vase erikaal on 8,8.

402. Arvuta ruudukujulise põhjaga risttahuka põhja serva pikkus, teades, et risttahuka täispindala on 170 cm^2 ja kõrgus 7,2 cm.

403. Tinast valmistatud õõnsa kuubi seina paksus on 2 cm ja ta kaalub 1107,4 g. Leia kuubi välimise serva pikkus, teades, et tina erikaal on 11,3.

404. Kahest metallist, mille erikaalud erinevad teineteisest 9 võrra, kavatsetakse valmistada sulam. Kui esimest metalli võtta 120 g ja teist 300 g, siis sulami erikaal tuleb 11,56. Arvuta mõlema metalli erikaalud.

405. Joonesta millimeetripaberil funktsiooni

$$y = 1,3x + 0,8$$

graafik.

a) Leia selle graafiku abil y väärtus, kui $x = 4; -3,5; -2,5; -2; -1; 1,5; 3; 3,5; 4$.

b) Leia x väärtus, kui $y = 5; 4,2; 1,4; 0,7; -1$.

c) Lahenda selle graafiku abil võrrandid:

1) $1,3x + 0,8 = 2,5;$

2) $1,3x + 0,8 = -0,75.$

406. Joonesta millimeetripaberil funktsiooni

$$y = 2,1x - 1,4$$

graafik.

a) Leia selle graafiku abil y väärtus, kui $x = -1,2; -1; -0,5; 0,7; 1,8; 2,6; 3; 3,6$.

b) Leia x väärtus, kui $y = -4; -0,5; 1; 1,5; 2,3; 4; 4,5$.

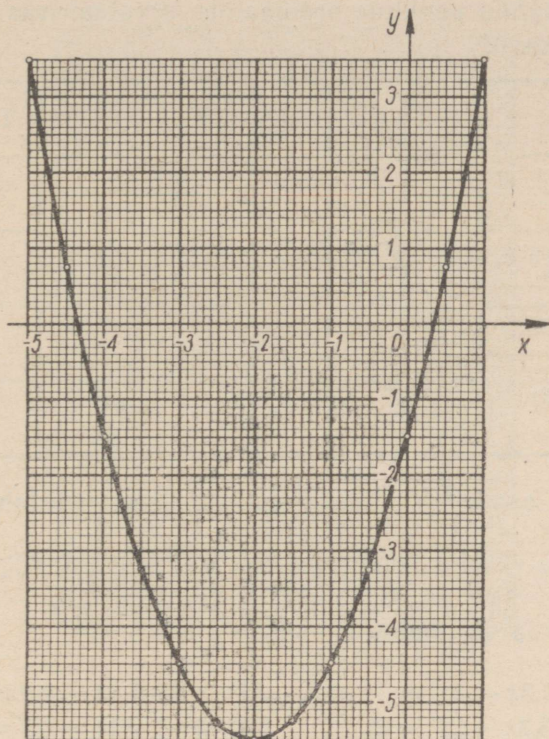
c) Lahenda graafiliselt võrrandid:

1) $2,1x - 1,4 = -2,5;$

2) $2,1x - 1,4 = 3,8.$

407. Joonisel 49 on esitatud funktsiooni

$$y = x^2 + 4x - 1,5$$



Joon. 49.

graafik. Kasutades seda graafikut, lahenda järgmised ülesanded.

- Leia y väärtus, kui $x = -5; -4; -3,5; -2; -1; 0; 0,5; 1$.
- Leia x väärtus, kui $y = 3; 2; 1,5; -1; -3; -4,8$.
- Lahenda võrrandid:

- $x^2 + 4x - 1,5 = 2,5$;
- $x^2 + 4x - 1,5 = 1$;
- $x^2 + 4x - 1,5 = -2$;
- $x^2 + 4x - 1,5 = 0$.

408. Joonesta millimeetripaberil funktsiooni

$$y = x^2 + 0,3x - 2,7$$

graafik. Graafiku punktide ordinaatide arvutamiseks kasuta alljärgnevat skeemi:

x	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0	1	2	2,5
x^2									
$0,3x$									
$x^2 + 0,3x$									
$y = x^2 + 0,3x - 2,7$									

Rakenda saadud graafikut järgmiste ülesannete lahendamiseks.

- Leia y väärtus, kui $x = -2,5; -1,2; -0,8; 0,2; 2,1$.
- Leia x väärtus, kui $y = 5; 4; 2; 1,5; -1,5; -1,8$.
- Lahenda võrrandid:

- $x^2 + 0,3x - 2,7 = 1;$
- $x^2 + 0,3x - 2,7 = -1;$
- $x^2 + 0,3x - 2,7 = 0;$
- $x^2 + 0,3x - 0,7 = 0.$

409. Joonisel 50 on esitatud funktsiooni

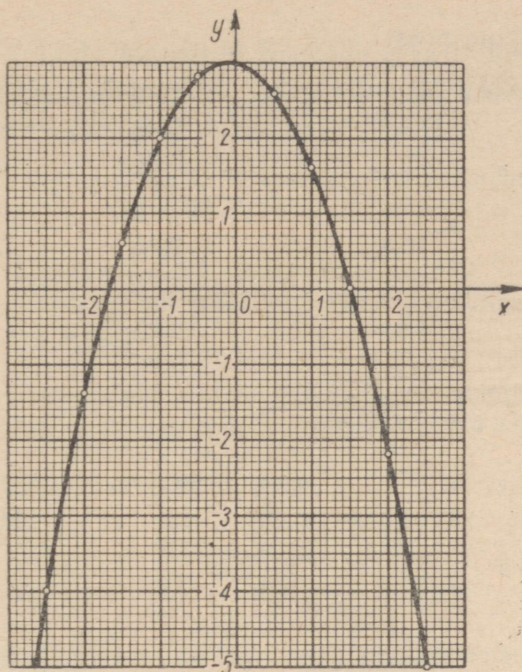
$$y = -1,2x^2 - 0,2x + 3$$

graafik. Lahenda selle graafiku abil järgmised ülesanded.

- Missuguste x väärtuste korral y väärtused on positiivsed? negatiivsed?
- Leia y väärtus, kui $x = -2; -1; 0; 1; 2; 2,2$.
- Lahenda võrrandid:

- $-1,2x^2 - 0,2x + 3 = -2$
- $-1,2x^2 - 0,2x + 3 = 1$
- $-1,2x^2 - 0,2x + 3 = 2$
- $-1,2x^2 - 0,2x + 3 = 0.$

Kontrolli joonise abil saadud võrrandite lahendeid valemi abil arvutamise teel.



Joon. 50.

410. a) Näita, et $p\%$ arvust a on niisama palju kui $a\%$ arvust p .

b) Arvuta peast

- | | | | | | |
|--------|-------|--------|-------|--------|-------|
| 1) 50% | 88-st | 2) 25% | 80-st | 3) 75% | 24-st |
| 44% | 50-st | 72% | 25-st | 48% | 75-st |

411. Väljenda alljärgnevad protsentide arvud harilike murdena.

Prot-sendid	5%	10%	15%	20%	25%	30%	$33\frac{1}{3}\%$	40%	50%	60%	$66\frac{2}{3}\%$	70%	75%	80%
Harilik murd														

412. Arvuta peast

5% arvust 240;	40% arvust 26;
10% „ 370;	50% „ 17,8;
15% „ 32;	60% „ 50;
20% „ 55;	$66\frac{2}{3}\%$ „ 33;
25% „ 16,8;	70% „ 150;
30% „ 42;	75% „ 36;
$33\frac{1}{3}\%$ „ 63;	80% „ 15;
33,3% „ 72;	90% „ 12.

413. Leia arv, millest

2% on 36	0,5% on 2,4	52% on 1040
4% „ 28	1,5% „ 1,8	38% „ 7600
15% „ 27	3,6% „ 2,4	5,5% „ 110
12% „ 3,6	1,8% „ 7,2	3,4% „ 680

414. Meeter ülikonnariiet maksis varemalt 9,80 rbl. Nüüd müüakse seda riiet 9,25 rbl. meeter. Mitu protsenti on selle riide hind alanenud?

415. Kast kaubaga kaalub 55 kg (brutokaal), kusjuures tühja kasti kaal on 7 kg (taara kaal). Mitu protsenti moodustab netokaal (kauba kaal ilma taarata) brutokaalust?

416. Õunte kuivatamisel saadi 9 kg tooreist õuntest 1 kg kuivatatud õunu. Mitu protsenti kahanes õunte kaal kuivatamisel?

417. Meeter riiet müüdi väljamüügi puhul 20%-lise hinnaalandusega 9,60 rbl. eest. Arvuta selle riide hind enne hinnaalandamist.

418. Kaup müüdi 15%-lise juurdehindlusega 3,45 rbl. eest. Leia kauba omahind.

419. Lahenda graafiliselt võrrandisüsteemid.

$$1) \begin{cases} y = x^2 \\ 2y - x = 2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} xy = 4 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} xy = 1 \\ y = x^2 - 2x - 8 \end{cases}$$

420. a) NSV Liidu Ministrite Nõukogu otsusel tõsteti 1. jaanuarist 1961 rubla kullasisaldus puhta kulla 0,987412 grammini. Mitu rubla maksab selle järgi 1 kg puhast kulda?

b) Üks dollar maksab 90 kopikat. Kui palju puhast kulda sisaldab dollar?

421. Maa tehiskaaslase tiirlemisperiood oli 89,8 minutit ja ta orbiidi keskmine raadius oli 6650 km. Kui suure kiirusega liikus tehiskaaslane oma orbiidil?

422. Mitu päeva kuluks linnul lendamiseks ümber maakera, s. o. 40 000 km, kui ta lendab 3 m sekundis?

423. Taanda peast murrud:

$$1) \frac{9m^2+6m+1}{3m+1}$$

$$5) \frac{2a+3b}{4a^2-9b^2}$$

$$2) \frac{4x^2+4xy+y^2}{2x+y}$$

$$6) \frac{x^2-16a^2}{x-4a}$$

$$3) \frac{a^2+10ab+25b^2}{a+5b}$$

$$7) \frac{4a^2-9b^2}{2a+3b}$$

$$4) \frac{a-4}{a^2-8a+16}$$

$$8) \frac{5x-1}{25x^2-1}$$

424. Taanda peast murrud:

$$1) \frac{16x^2-12xy+9y^2}{64x^3+27y^3}$$

$$6) \frac{a^2+2ab+b^2}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

$$2) \frac{4a^2+6ab+9b^2}{8a^3-27b^3}$$

$$7) \frac{(2a+3b)^2}{8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3}$$

$$3) \frac{9a^2-24ab+16b^2}{(3a-4b)^3}$$

$$8) \frac{x^2-2xy+y^2}{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}$$

$$4) \frac{8x^3-27y^3}{2x-3y}$$

$$9) \frac{x^3-8}{x^2-4}$$

$$5) \frac{a^3+64b^3}{a+4b}$$

$$10) \frac{a^3-1}{a^2+a+1}$$

425. Taanda murrud:

$$1) \frac{a^2-5a+6}{a^2-3a+2}$$

$$2) \frac{2a^2-5a-3}{2a^2-3a-2}$$

$$3) \frac{a^2+4a+4}{a^2-a-6}$$

$$4) \frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+1}$$

426. Arvuta peast avaldise väärtus tähe antud väärtusel.

1) $\frac{x^2-8x+16}{x-4}$, kui $x=2$.

2) $\frac{3a-1}{9a^2-6a+1}$, kui $a=\frac{1}{2}$.

427. Arvuta avaldise väärtus tähtede antud väärtustel.

1) $\frac{a^2-4}{ac+2c-a-2}$, kui $a=2$ ja $c=1$.

2) $\frac{5a^2-10ax}{a^3-2a^2x+ax-2x^2}$, kui $a=7$ ja $x=3$.

3) $\frac{6x^2-11x-10}{8x^2+6x-9} \cdot \frac{12x^2-x-6}{4x^2-4x-15}$, kui $x=-2$.

✓ 4) $\frac{6x^2+7x-20}{20x^2-7x-6} \cdot \frac{12x^2-25x+12}{10x^2+29x+10}$, kui $x=2$.

5) $\frac{x^2-2x-15}{x^2-16} : \frac{x^2-x-12}{x^2+9x+20}$, kui $x=5$.

6) $\frac{x^2-6x-7}{x^2-25} : \frac{x^2-12x+35}{x^2+4x-5}$, kui $x=10$.

428. Lahenda võrrandisüsteemid:

✓ 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 6y = 25 \\ x + 2y = 15 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 6y - 66 = 0 \\ x - 2y + 9 = 0 \end{cases}$

30.05 3) $\begin{cases} 2y^2 = 9x \\ 3x - 5y + 9 = 0 \end{cases}$

29.05 4) $\begin{cases} x^2 - 10x - 6y + 15 = 0 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases}$

429. Rombi diagonaalide pikkused on 14 cm ja 48 cm. Arvuta rombi kõrgus.

430. Ühest ja samast punktist on ringile joonestatud kaks puutajat. Puutuja pikkus on 156 mm ja puutepunktide vaheline kaugus on 120 mm. Arvuta ringi raadius.

431. Lihtsusta avaldist

$$a) \left[\frac{a-2}{a^3+1} + \frac{1}{a^3-a^2+a} \right] \cdot \frac{a^3-a}{a^2+1} + \frac{2}{a^3+a^2+a+1}$$

$$b) \left[\frac{a^2-2+1}{a^3+2a^2+a} + \frac{1}{a+1} - \frac{a^2-a-2}{(a+1)^3} \right] \cdot \frac{a}{a-1} - \frac{2a}{a^2-1}$$

$$c) \left[\frac{1}{a+1} - \frac{a}{a^2-2a+1} + \frac{2a}{(a^2-1)(a-1)} \right] \cdot \frac{a^2-1}{a+2} - \frac{2}{a^2+2a}$$

$$d) \frac{(a+b)^2}{a-b} \cdot \frac{a(a-b)+b^2}{a^2-b^2} : \frac{a^3+b^3}{(a-b)^3}$$

432. Lahuta hulkliige tegureiks.

$$1) a^8 + a^5 - a^4 - a$$

$$6) x^6 - x^4 + 27x^3 - 27x$$

$$2) x^6 - x^4 + 4x^2 - 4$$

$$7) a^5 - 4a^3 - 8a^2 + 32$$

$$3) 16y^4 + 8y^3 - 2y - 1$$

$$8) n^4 - 2n^3 - 8n + 16$$

$$4) a^8 - a^6 - a^2 + 1$$

$$9) a^3 - 25a + a^6 - 25a^4$$

$$5) a^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1$$

$$10) x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

433. Arvuta.

$$1) 2 : \frac{3}{5} + \frac{3}{5} : 2 + 1\frac{1}{2} : 6 + 6 : 1\frac{1}{2}$$

$$2) 6\frac{1}{4} \cdot 8 - 3\frac{2}{3} \cdot 5\frac{1}{2} + 2\frac{2}{5} \cdot 4\frac{7}{12}$$

$$3) 13\frac{1}{2} : 1\frac{1}{3} + 16\frac{1}{2} \cdot 1\frac{5}{11} + 19\frac{1}{4} : \frac{4}{25}$$

$$4) \left(\frac{5}{7} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} - 1 \right) : \left(1 - \frac{7}{8} \cdot 1\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{14} \right)$$

$$5) \left[7\frac{1}{2} - \left(8\frac{5}{24} - 4\frac{17}{18} \right) : \frac{47}{72} \right] \cdot \left(5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$6) 66,6 : \left(5 + 3,2 : \frac{0,8 - \frac{2}{15}}{0,5} \right) - 7,15$$

$$7) \frac{3\frac{4}{15}}{\left(4\frac{1}{2} + 2 \cdot 2,75 \right) : 21\frac{3}{7}} - 1,375$$

- 8) $\left(7\frac{14}{45} : 7 - \frac{39}{40}\right) \cdot 7,2 + 0,8 : (2 : 0,25 - 3,125 \cdot 2,4)$
 9) $\left(\frac{13}{44} - \frac{2}{11} - \frac{5}{66} : 2\frac{1}{2}\right) \cdot 1\frac{1}{5} + 0,05 : (0,1 : 0,125 - 5,73 : 19,1)$
 10) $\left[8,9 : 1,78 - 4,8 \cdot \left(1\frac{1}{17} + \frac{5}{68} - \frac{7}{51} : 0,25\right)\right] : 4,4$

434. Lahenda võrrandisüsteem:

$$1) \begin{cases} x - \frac{7,5x+2y}{3y-x} = \frac{5x^2+4y^2+105}{5x-6y^2+2xy-15y} + \frac{2xy}{2y+5} \\ \frac{1,4x+0,4y}{x} - \frac{5y+9}{3x} = -2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{11,4+10x}{12x^2-3y-6x+6xy} - \frac{1}{2x-1} = \frac{x-y}{y-4x^2+2x-2xy} \\ \frac{y}{7-4x} = 2 \end{cases}$$

435. Kahel automaatmasinal valmistati teatav arv detaile, kusjuures teine automaat alustas tööd 3 tundi hiljem kui esimene. Pärast seda, kui teine automaat oli töötanud 6 tundi, oli töö lõpetatud, kusjuures teine automaat valmistas 25% kõigist detailidest. Leia, mitu detaili valmistas kumbki automaat, teades, et teine valmistas minutis 5 detaili vähem kui esimene.

436. Kolhoosi üks brigaad, töötades käsitsi, koristas oma kartulipõllu 16 tunniga; teine brigaad, kes kasutas kartulivõtmismasinaid, koristas 5 korda suurema põllu 12 tunniga. Arvuta, mitu hektarit oli kummagi brigaadi kartulipõld, teades, et teine brigaad koristas tunnis 0,85 ha võrra rohkem kui esimene brigaad.

437. Leia õpiku lisas (lk. 15) esitatud jooniselt järgmiste ehitusmaterjalide erikaalud:

- | | |
|--------------------|--------------|
| 1) kuiv kuusk | 6) kuiv liiv |
| 2) kuiv tamm | 7) märg liiv |
| 3) bituumen | 8) betoon |
| 4) kustutatud lubi | 9) kips |
| 5) tsement | 10) marmor |

438. Kuivast kuusepuust servatud laua paksus on 5 cm, laius 20 cm ja pikkus 5,8 m. Arvuta selle laua ruumala ja leia õpiku lisas olevalt jooniselt laua kaal.

439. Risttahukakujulise marmorplaadi mõõtmed on 50 cm, 70 cm ja 4 cm. Arvuta plaadi ruumala ja leia õpiku lisas antud jooniselt plaadi kaal.

440. Autokoorem kuiva liiva kaalub 4 tonni. Leia õpiku lisas olevalt jooniselt selle liiva ruumala.

441. Leia õpiku lisas olevalt jooniselt 6 tonni kustutatud lubja ruumala.

442. Lahenda x suhtes võrrandid:

$$1) \frac{x}{m-n} + \frac{x}{m+n} = \frac{2mn}{m^2-n^2}$$

$$2) \frac{m^2-x}{n} = \frac{n^2-x}{m}$$

$$3) \frac{n+x}{m} + \frac{m-x}{n} = 2$$

$$4) \frac{a+b}{a+2b} + \frac{x}{b} = 1 + \frac{b(b-x)}{a^2+2ab}$$

$$5) \frac{a}{ax-b} = \frac{bx-a}{b}$$

$$6) abx^2 - b^2x = a^2x - ab$$

$$7) (a-1)x^2 - x = a$$

$$8) 2nx - \frac{a}{x} = 2nb - \frac{a}{b}$$

443. Lahenda x ja y suhtes võrrandisüsteemid:

$$1) \begin{cases} ax + y = a^2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} ax + by = c \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} a^2x + y = a^3 \\ (a+1)x + 1 = y \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} nx + my = 0 \\ x + y = m - n \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{x+y}{y} = a \\ 1 + \frac{xy}{a+1} = a^2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x - y = \frac{2a}{a^2-1} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{2}{a} \end{cases}$$

444. Marmoritüki kaal on k tonni ja ruumala V m³. Avalda k ja V vaheline seos valemina, kasutades õpiku lisas antud joonist.

445. Kuivast tammepuust laud kaalub k kg ja ta ruumala on V dm³. Avalda k ja V vaheline seos valemina, kasutades õpiku lisas antud joonist.

GEOMEETRIA

1. RINGJOON. SILINDER. KOONUS. KERA.

GEOMEETRILISED KOHAD.

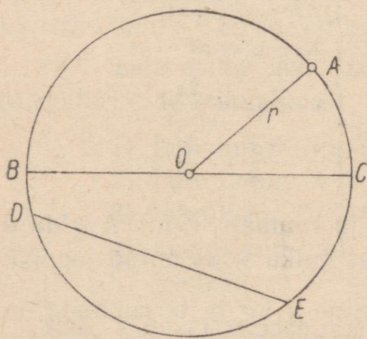
1. Kui pliiatsi teravik liigub mööda paberit, siis sinna tekib joon. Vaadeldes pliiatsi teravikku liikuva punktina ja saadud joont punkti liikumise tee kujutisena, võime öelda, et liikuv punkt kujundab joone.

Too veel näiteid, kus liikuv punkt kujundab joone.

Punkti liikumisel kujundatud joont nimetatakse ka liikuva punkti **geomeetriliseks kohaks**. Vastavalt sellele, millist tingimust täidab liikuv punkt ehk, teisiti, millise seaduse järgi ta liigub, saame mitmesuguseid geomeetrilisi kohti.

Vaatleme tähtsamaid geomeetrilisi kohti tasapinnal.

2. Olgu antud mingi punkt O ja mingi pikkus r . Kui punkt A liigub tasapinnal nii, et ta jääb antud punktist O kaugusele r , siis ta kujundab ringjoone, mille keskpunktiks on O ja raadiuseks r (joon. 51). Seega



Joon. 51.

antud punktist antud kaugusel asetseva punkti geomeetriliseks kohaks tasapinnal on ringjoon, mille keskpunktiks on antud punkt ja mille raadius võrdub antud kaugusega.

Tingimuseks, mida liikuv punkt peab siin täitma, on see, et ta jääks punktist O kaugusele r . Seda tingimust täidavad tasapinnal ringjoone kõik punktid ja

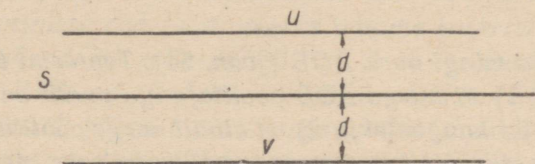
ainult need. Teisiti öeldes: liikuv punkt läbib ringjoone kõiki punkte ja ainult neid.

Mida nimetatakse ringjoone kõõluks (DE joonisel 51), mida diameetriks (BC joonisel 51)?

3. Olgu tasapinnal antud mingi sirge s ja mingi pikkus d . Laseme punkti tasapinnal liikuda nii, et ta jääb sirgest s kaugusele d . On selge, et liikuv punkt kujundab antud sirgega paralleelse sirge u või sirge v , mis asetsevad teine teisel pool sirget s kaugusel d (joon. 52). Et saada liikuva punkti kõik võimalikud asukohad, ütleme, et

antud sirgest antud kaugusel asetseva punkti geomeetriliseks kohaks tasapinnal on kaks sirget, mis on paralleelsed antud sirgega ja asetsevad temast antud kaugusel.

Viimati nimetatud sirged sisaldavad tasapinna kõiki punkte, mis on antud sirgest antud kaugusel, ja ainult neid.



Joon. 52.

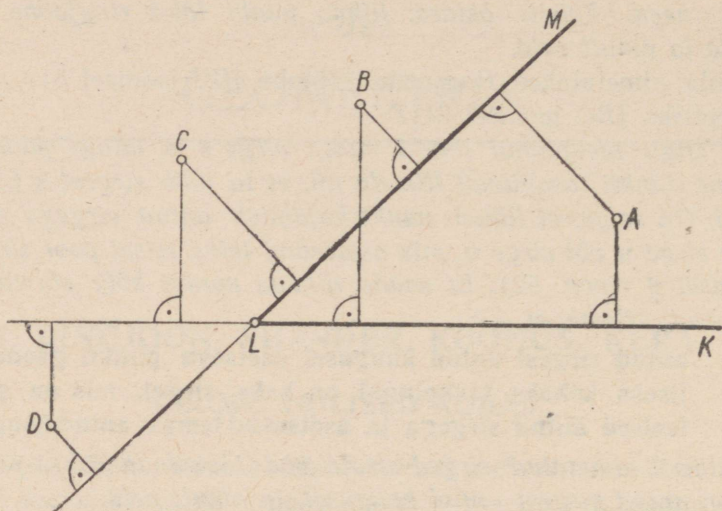
4. Vaatleme nurga haaradest võrdsetel kaugustel oleva punkti geomeetrilist kohta.

a) Punkti kauguse all nurga haarast mõistame punktist nurga haarani joonestatud ristlõigu pikkust. Mõistes nii seda kaugust, näeme, et tasapinnal leidub kolme liiki punkte (joon. 53): ühed, millel on olemas kaugus mõlema haarani (nagu A ja B joonisel 53), teised, millel on olemas kaugus ainult ühe haarani (nagu C joonisel 53) ja kolmandad, millel ei leidu kaugust ei ühe ega teise haarani (nagu D joonisel 53).

Joonesta mingi nurk, võta nurga tasapinnal neli punkti ja mõõda iga võetud punkti kaugused nurga haaradest (kui need kaugused on olemas).

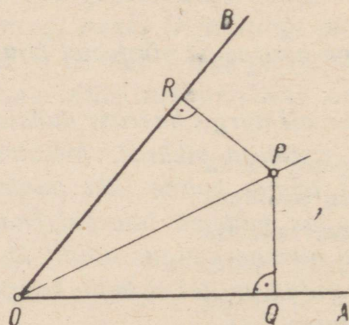
b) Tõestame, et

nurga haaradest võrdsetel kaugustel oleva punkti geomeetriliseks kohaks on nurga poolitaja.



Joon. 53.

Olgu antud mingi nurk AOB (joon. 54). Teoreemi tõestamiseks tuleb näidata, 1) et nurga AOB poolitaja iga punkt on nurga haaradest võrdsetel kaugustel ja 2) et ainult nurga poolitaja punktidel on selline omadus. Väite esimese osa tõestamiseks oletame, et OP on nurga AOB poolitaja ja P on selle mistahes punkt (joon. 54).



Joon. 54.

Joonestades punktist P ristlõigud PQ ja PR nurga haaradeni, saame kaks kolmnurka, OPQ ja OPR , mis tunnuse NKN järgi on võrdsed (põhjenda seda). Nimetatud kolmnurkade võrdsusest järeldub, et $PQ = PR$, millega väite esimene osa on tõestatud.

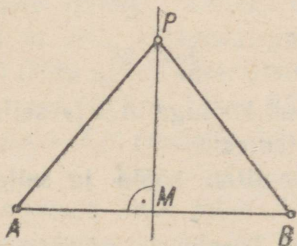
Väite teise osa tõestamiseks oletame, et punkt P on nurga haara-dest võrdsetel kaugustel, s. t. $PQ = PR$ ja $\angle Q = \angle R = 90^\circ$, ühen-dame selle punkti nurga tipuga O ja vaatleme kolmnurki OPQ ja OPR (tee selle kohta uus joonis). Saadud kolmnurgad OPQ ja OPR on tunnuse KkN järgi võrdsed (põhjenda seda). Nende kolmnurkade võrdsusest järeldub, et $\angle AOP = \angle BOP$, s. t. OP on nurga AOB poolitaja. Sellega on väide tervikuna tõestatud.

5. a) Mida nimetatakse lõigu keskristsirgeks? Mis on sirge PM lõigu AB suhtes, kui $PM \perp AB$ ja $AM = MB$ (joon. 55)?

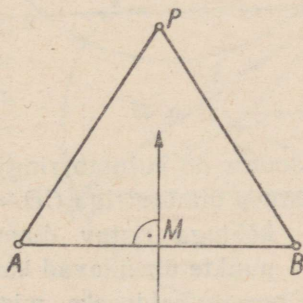
b) Tõestame, et

kahest antud punktist võrdsetel kaugustel asetseva punkti geomeetriliseks kohaks tasapinnal on nende punk-tide ühenduslõigu keskristsirge.

Olgu antud punktid A ja B (joon. 55). Tõestada tuleb, 1) et lõigu AB keskristsirge PM iga punkt on punktidest A ja B võrdsetel kaugustel, 2) muid sellise omadusega punkte tasapinnal ei leidu. Väite esimese osa tõestamiseks võtame keskristsirgel mingi punkti P ja ühendame selle punktidega A ja B . Saadud kolmnur-gad AMP ja BMP on võrdsed (miks?), mistõttu $AP = BP$. See omadus on ilmselt kõigil keskristsirge punktidel. Jääb tõestada, et see omadus on ainult keskristsirge punktidel. Selleks oletame, et mingi punkt P asetseb antud punktidest A ja B võrdsetel kaugus-tel ja vaatleme võrdhaarset kolmnurka PAB (joon. 55). Joones-tame selle aluse mediaani, s. t. ühendame aluse keskpunkti M tipuga P . Et võrdhaarse kolmnurga aluse mediaan MP on ühtlasi kolmnurga kõrgus, siis sirge MP mitte ainult ei poolita lõiku AB , vaid on sellega ka risti. Sellega on tõestatud, et kui punkt P on



Joon. 55.



Joon. 56.

punktidest A ja B võrdsetel kaugustel, siis ta asetseb lõigu AB keskristsirgel. Niisiis, teoreem on täielikult tõestatud.

6. a) Järelda eelmisest teoreemist, et võrdhaarse kolmnurga PAB (joon. 56) aluse AB keskristsirge läbib kolmnurga tippu.

b) Joonesta kaks paralleelset sirget ja leia mingi punkt, mis oleks neist sirgetest võrdsetel kaugustel. Missugust joont mööda võib punkt liikuda, ilma et see omadus muutuks? Mis on kahest paralleelsest sirgest ühel ja samal kaugusel asetseva punkti geomeetriliseks kohaks?

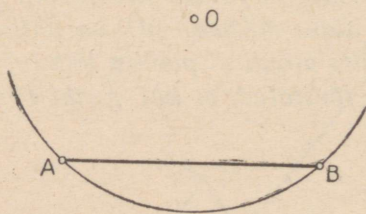
c) On antud kaks lõikuvat sirget a ja b . Leia sirgel b punktid, mis on sirgest a antud kaugusel d .

Näpunäide. Kasuta sirgest a kaugusel d asetseva punkti geomeetrilist kohta (vt. üles. 3).

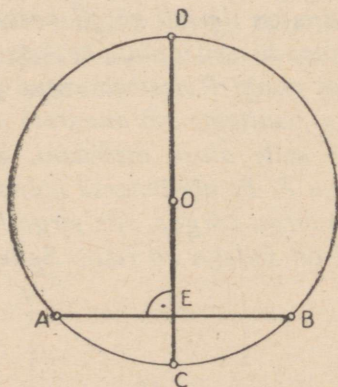
d) On antud kaks lõikuvat sirget a ja b . Leia tasapinna punktid, mis on nii sirgest a kui ka sirgest b antud kaugusel d .

7. Ringjoon läbib punkte A ja B (joon. 57). Mis on lõik AB selle ringjoone suhtes? Kuidas asetseb ringi keskpunkt O kõõlu otspunktide suhtes? Põhjenda väidet, et

kõõlu keskristsirge läbib ringjoone keskpunkti.



Joon. 57.



Joon. 58.

8. Joonis 58 kujutab ringjoont koos kõõluga AB ja selle kõõluga ristuva diameetriga CD . Tõesta teoreem:

kõõluga ristuv diameeter poolitab kõõlu ja selle otspunkte ühendavad kaared.

Mis on siin eelduseks, mis väiteks? Tõestuseks näita, mis juhtub joonise pooltega, kui joonis mööda sirget CD kokku murda.

9. Olgu antud, et diameeter DC joonisel 58 poolitab kõõlu AB . Kuidas nüüd tõestada, et diameeter DC on risti selle kõõluga? Kasuta tõsiasja, et kolmnurk OAB on võrdhaarne.

10. On antud lõik $AB = 4$ cm. Joonesta viis ringjoont, millele see lõik on ühiseks kõõluks ja mille raadiused on vastavalt 3 cm, 3 cm, 2,5 cm, 2,5 cm ja 2 cm.

11. Joonesta ringjoon, mis läbib kaht antud punkti ja mille keskpunkt asetseb antud sirgel. Millal sel ülesandel lahend puudub?

KOLMNURGA ÜMBERRINGJOON.

12. Joonesta mingi ringjoon, võta sellel kolm punkti ja ühenda need nii, et saaksid kolmnurga. Mis on selle kolmnurga küljed ringjoone suhtes?

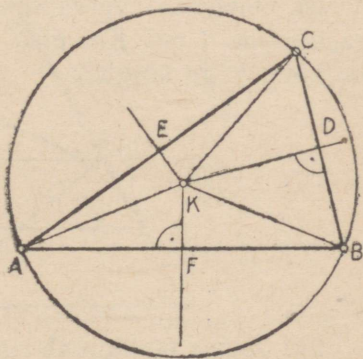
Kolmnurka, mille tipud asetsevad ringjoonel, nimetatakse kõõlkolmnurgaks. Ringjoont, mis läbib kolmnurga tippe, nimetatakse kolmnurga ümberringjooneks.

Kõõlkolmnurga kohta öeldakse, et ta on joonestatud ringjoone sisse. Kolmnurga ümberringjoone kohta öeldakse, et ta on joonestatud kolmnurga ümber.

13. Kuidas defineerida kõõlnelinurka? üldiselt kõõlhulknurka? Joonesta mingi kõõlviiisnurk.

14. Tõestame, et iga kolmnurga saab teha kõõlkolmnurgaks, s. t. tema ümber saab joonestada ringjoone. Selleks tõestame, et kolmnurga külgede keskristsirged lõikuvad kõik ühes ja samas punktis, mis on selle kolmnurga ümberringjoone keskpunktiks.

Joonestame kolmnurga ABC kahele küljele, näiteks külgedele AB ja BC , keskristsirged (joon. 59.) Olgu nende keskristsirgete lõikepunkt K . Siis $AK = BK$ (miks?) ja $BK = CK$ (miks?), järelikult ka $AK = CK$. See võrdus näitab, et kolmnurga kahe külje AB ja BC keskristsirgete FK ja DK lõikepunkt K asetseb ka kolmanda külje



Joon. 59.

AC keskristisirgel, sest ta on selle külje otspunktidest võrdsetel kaugustel. Seega kõik kolm keskristsirget lõikuvad ühes ja samas punktis K, mida oligi vaja tõestada. See punkt, asetsedes kolmnurga tippudest võrdsetel kaugustel, on neid tippe läbiva ringjoone keskpunktiks. Et kolmnurga külgede keskristsirged alati lõikuvad ja ainult ühes punktis, siis igal kolmnurgal leidub ümberringjoon.

15. Eelmisest teoreemist järeldub, et

läbi kolme punkti, mis ei asetse ühel ja samal sirgel, läheb üks ja ainult üks ringjoon.

Võta kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel, ja joonesta neid punkte läbiv ringjoon.

16. Joonisel on antud ringjoon, kuid ilma keskpunktita. Kuidas leida keskpunkt?

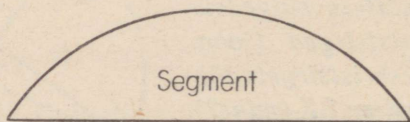
17. a) Joonesta ümberringjoon täisnurksele kolmnurgale, mille hüpotenuus on 5 cm ja üks kaatet on 4 cm. Kui pikk on selle ringjoone raadius?

b) Näita, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi keskpunkt on tema ümberringjoone keskpunktiks.

18. Joonesta nürinurkne kolmnurk koos ümberringjoonega. Kas selle ringjoone keskpunkt asetseb kolmnurga sees või väljaspool kolmnurka?

19. Ehita võrdhaarne kolmnurk, mille tipunurk on 120° ja haar 5 cm. Joonesta kolmnurga ümberringjoon. Kui pikk on selle ringjoone raadius?

20. Joonesta võrdkülgne kolmnurk, mille ümberringjoone raadius on 4 cm. Kui pikk on selle kolmnurga apoteem? Kui suur on kolmnurga kõrgus?



Joon. 60.

21. Joonis 60 kujutab ringi segmenti. Millega on piiratud segment? Kuidas joonestamise teel leida segmendi kaare raadiust?

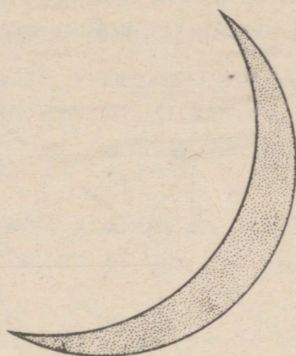
22. Ümmargusest esemest on säilinud joonisel 61 kujutatud tükike. Kuidas teha kindlaks eseme läbimõõtu?

23. a) Joonesta mingi «kuusirp» (joon. 62), mida piiravad võrdsete raadiustega kaared.

b) Joonesta mingi «kuusirp» (joon. 62), mida piiravad mitte-võrdsete raadiustega kaared.



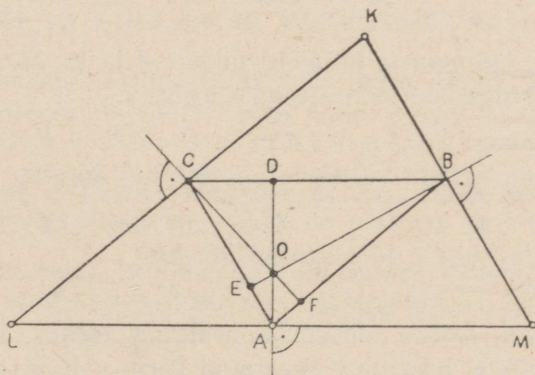
Joon. 61.



Joon. 62.

KOLMNURGA KÕRGUSTE LÕIKUMINE.

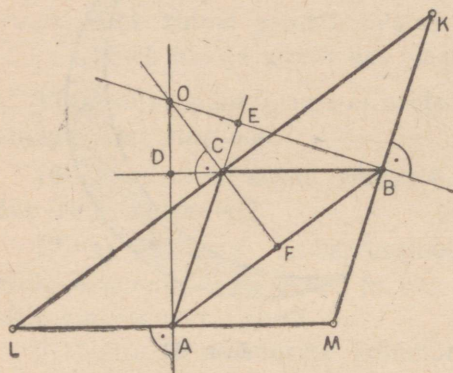
24. Joonesta mingi teravnurkne kolmnurk KLM ja selle külgede kolm keskristsirget. Mida tead kolmnurga külgede keskristsirgete lõikumise kohta? Tähistä nende lõikepunkt mingi tähega,



Joon. 63.

näiteks tähega O . Joonesta nüüd kolmnurk ABC , mille tippudeks on antud kolmnurga külgede keskpunktid (joon. 63). Mis on kolmnurga ABC küljed kolmnurga KLM suhtes? Näita, et kolmnurga KLM külgede keskristsirged on vastavalt risti kolmnurga ABC külgedega. Mis sellest jäeldub kolmnurga ABC kõrguste lõikumise kohta?

25. Lahenda eelmine ülesanne veel kord, võttes kolmnurgaks KLM nürinurkse kolmnurga (joon. 64).



Joon. 64.

26. Kuidas saab valmistada jooniseid 63 ja 64, alates kolmnurgast ABC ? Mis on kolmnurga ABC kõrgused AD , BE ja CF kolmnurga KLM külgede suhtes? Mis sellest jäeldub kolmnurga ABC kõrguste kohta?

Kolmnurga kõrgused või nende pikendused lõikuvad kõik ühes ja samas punktis.

27. Mis on kõrguste lõikepunktiks täisnurksel kolmnurgal?

28. Millega võrdub kolmnurga pindala? Põhjenda väidet, et igas kolmnurgas

$$ah_a = bh_b = ch_c,$$

kus a , b , c on kolmnurga külgede pikkused ja h_a , h_b , h_c on vastavalt nendele külgedele joonestatud kõrgused.

29. Kolmnurga külg $a = 4,8$ m ja $c = 6,2$ m. Kolmnurga kõrgus $h_c = 3,6$ m. Arvuta küljele a joonestatud kõrgus.

30. Kolmnurga pindala on 24,5 a ja üks külg on 35 m. Kui pikk on sellele küljele joonestatud kõrgus?

31. Võrdhaarse kolmnurga alus on 6 cm ja haar 5 cm. Joonesta kolmnurk, mõõda alusele joonestatud kõrgus, arvuta pindala ja selle põhjal haarale joonestatud kõrgus. Kontrolli tulemust otsese mõõtmisega.

PUNKTI JA RINGJOONE VASTASTIKUNE ASEND.

32. Tasapinnal on ringjoon keskpunktiga O ja raadiusega 3 cm. Otsusta, kas tasapinna punkt M asetseb seespool ringjoont, ringjoonel või väljaspool ringjoont, kui

$$OM = 5 \text{ cm}; \quad OM = 2,5 \text{ cm}; \quad OM = 3 \text{ cm}.$$

33. Tee joonis järgmise lause selgitamiseks.

Punkt asetseb seespool ringjoont, ringjoonel või väljaspool ringjoont vastavalt sellele, kas punkti kaugus ringjoone keskpunktist on väiksem kui raadius, võrdne raadiusega või suurem kui raadius.

34. a) Väljaspool ringjoont asetsevast punktist on ringjoone lähima punktini 5 cm ja kaugeima punktini 12 cm. Kui pikk on raadius?

b) Seespool ringjoont asetsevast punktist on ringjoone lähima punktini 3 cm ja kaugeima punktini 6 cm. Kui kaugel asetseb punkt ringjoone keskpunktist?

35. a) On antud ringjoon ja väljaspool seda punkt. Leia ringjoone punktid, mis asetsevad antud punktist niisama kaugel, nagu see punkt on ringjoone keskpunktist. Kas ülesandel leidub alati lahend?

b) Lahenda eelmine ülesanne juhul, kui antud punkt on seespool ringjoont.

SIRGE JA RINGJOONE VASTASTIKUNE ASEND.

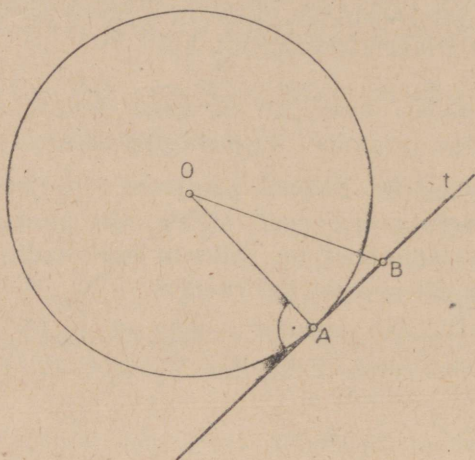
36. a) Joonesta ringjoon ja selle mingi kõõl. Pikenda seda kõõlu üle mõlema otspunkti. Mitu ühist punkti on saadud sirgel ringjoonega?

Sirget, millel on ringjoonega kaks ühist punkti, nimetatakse ringjoone lõikajaks.

b) Joonesta ringjoon ja selle mingi lõikaja. Leia lõikaja kaugus ringjoone keskpunktist ja võrdle seda raadiusega. Põhjenda ilma mõõtmiseta, et

ringjoone lõikaja kaugus ringjoone keskpunktist on väiksem kui raadius.

37. Joonesta ringjoon ja selle mingi raadius OA . Ehita raadiusele OA ringjoonel asetsevast otspunktist A ristsirge t (joon. 65). Tõesta, et sirgel t on ringjoonega ainult üks ühine



Joon. 65.

punkt, nimelt punkt A . Tõestuseks võta sirgel t mingi muu punkt (mitte A), näiteks punkt B , ühenda see punktiga O ja näita, et võetud punkti kaugus ringjoone keskpunktist on suurem kui raadius. Mis sellest järeldub punkti B asukoha kohta? Kus asetsevad siis sirge t kõik punktid, välja arvatud punkt A ?

Sirget, millel on ringjoonega ainult üks ühine punkt, nimetatakse ringjoone puutujaks. Seda ühist punkti nimetatakse puutepunktiks.

Eespool kasutatud puutuja t ehitusviis näitab, et

raadiusega ristuv sirge, mis läbib raadiuse otspunkti ringjoonel, on ringjoone puutuja.

Ümberpöörduvalt:

ringjoone puutuja on risti puutepunktist lähtuva raadiusega.

Tõepoolest, kui sirge t on ringjoone puutuja punktis A , siis tema iga muu punkt B on ringjoone keskpunktist O kaugemal kui A (joon. 65). Seega OA on kõige lühem lõik punktist O sirgeni t .

Kõige lühem lõik punktist sirgeni on aga ristlõik, tähendab, $OA \perp t$.

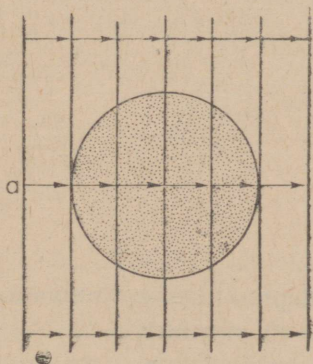
38. Kuidas leida sirge kaugust punktist? Kuidas leida puutuja kaugust ringjoone keskpunktist? Näita, et

puutuja kaugus ringi keskpunktist võrdub raadiusega.

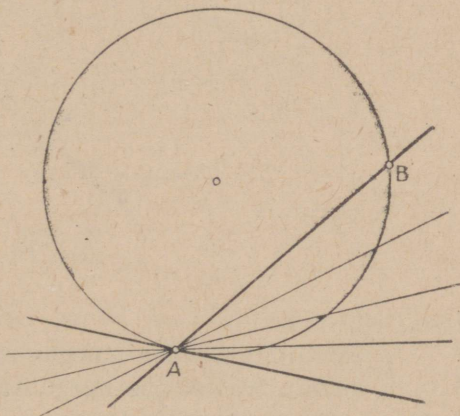
39. Mida võib öelda sirgest, kui on teada, et tema kaugus ringjoone keskpunktist a) on väiksem kui raadius, b) võrdub raadiusega, c) on suurem kui raadius?

40. Joonesta vabalt võetud raadiusega r ringjoon ja kolm üksteisega paralleelset sirget nii, et nende kaugused ringi keskpunktist on vastavalt $0,5r$, r ja $1,5r$. Näita, et äärmiste sirgete vaheline kaugus võib olla r , $2r$ või $2,5r$.

41. a) Mis saab väljaspool ringjoont asetsevast sirgest a joonisel 66, kui ta liigub nooltega näidatud sihis?



Joon. 66.



Joon. 67.

b) Mis saab lõikajast AB joonisel 67, kui seda lõikajat pöörata tema lõikepunkti A ümber, kuni teine lõikepunkt B ühtib lõikepunktiga A ?

42. Ehita antud raadiusega ringjoon, mis läbib antud punkti ja mille keskpunkt asetseb antud sirgel. Millal on sel ülesandel üks lahend, millal kaks lahendit, millal lahend puudub?

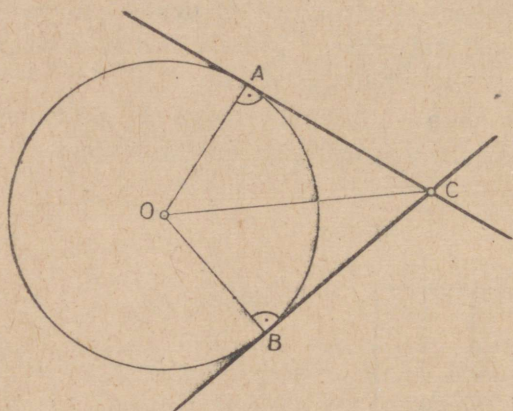
43. a) Joonesta antud keskpunktiga ringjoon, mis puudutab antud sirget.

b) Joonesta ringjoon, mis läbib antud punkti A ja puudutab antud sirget selle antud punktis B .

44. a) Joonesta puutuja, kui on antud ringjoone keskpunkt ja puutepunkt.

b) Joonesta antud ringjoonele puutujad tema ühe ja sama diameetri otspunktidest. Kuidas asetsevad need puutujad teineteise suhtes? Miks?

45. Ringjoonele on joonestatud kaks lõikuvat puutujat (joon. 68). Arvuta nende puutujate vahelise nurga suurus, kui puutepunktidesse tõmmatud raadiuste vaheline nurk on 112° .



Joon. 68.

Näita, et

puutujatevahelise nurga ja puutepunktidesse tõmmatud raadiuste vahelise nurga summa on sirg nurk.

46. a) Olgu ringjoonele joonestatud kaks lõikuvat puutujat AC ja BC (joon. 68).

Tõesta, et $AC=BC$, s. t.

puutujate lõigud nende lõikepunktist puutepunktideni on võrdsed.

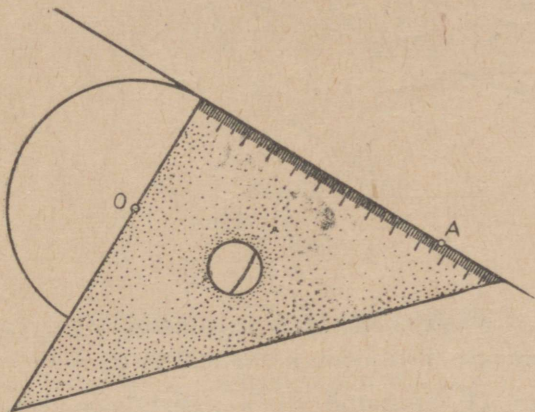
Näpunäide. Ühenda punktid O ja C ning vaatl kolmnurki AOC ja BOC (joon. 68).

b) Mis on kiir CO joonisel 68 nurga ACB suhtes? Põhjenda väidet, et

puutujatevahelise nurga poolitaja läbib ringjoone keskpunkti.

47. Joonesta antud ringjoonele puutujad läbi punkti, mis on väljaspool ringjoont.

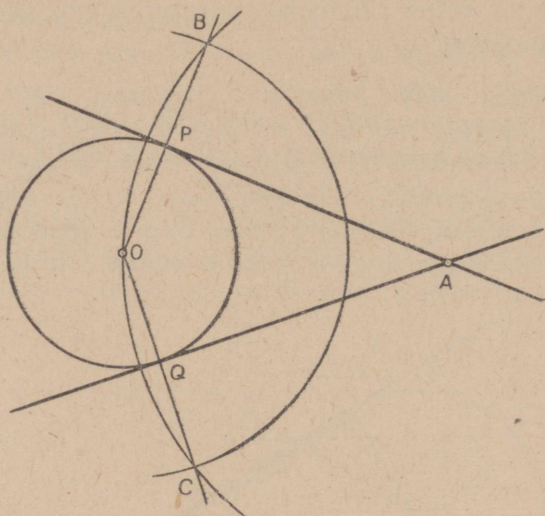
a) Ülesannet saab lahendada nurklaua abil proovimise teel. Selleks paiguta nurklaud nii, et täisnurga üks haar läbiks antud ringi keskpunkti O , teine haar läbiks antud punkti A ja täisnurga tipp asetseks antud ringjoonel (joon. 69). Nurklaua niisuguse asendi puhul täisnurga teine haar asetseb puutujal, sest ta on risti raadiusega ja läbib selle otspunkti ringjoonel.



Joon. 69.

b) Ülesande lahendamiseks sirkli ja joonlaua abil joonestatakse antud ringjoone keskpunkti O ümber uus ringjoon raadiusega, mis võrdub antud ringjoone diameetriga, ja antud punkti A ümber ringjoon, mis läbib punkti O . Olgu nende kahe uue ringjoone lõikepunktid B ja C (joon. 70). Joonesta nüüd lõigud OB ja OC ning leia punktid P ja Q , kus nad lõikavad antud ringjoont. Nii sirge PA kui ka sirge QA on puutuja läbi punkti A .

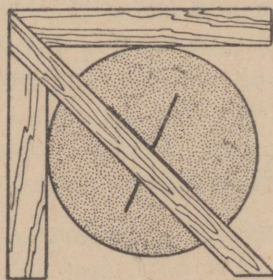
Põhjendus. Punkti A ühendamisel punktidega B ja O tekiks võrdhaarne kolmnurk ABO , sest $AB=AO$ kui ühe ja sama ringjoone raadiused. Konstruktsiooni järgi on punkt P selle kolmnurga aluse keskpunkt; et võrdhaarse kolmnurga tippu ja aluse keskpunkti ühenduslõik on kolmnurga kõrgus, siis $AP \perp BO$. Seega sirge AP on risti raadiusega PO , järelikult AP on puutuja. Niisamuti saab näidata, et sirge AQ on puutuja.



Joon. 70.

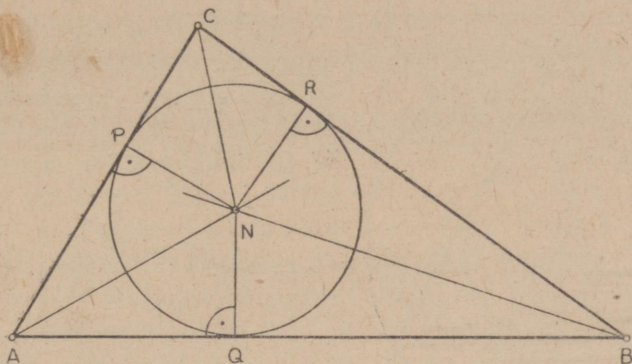
48. Joonesta ringjoonele, mille raadius on 3 cm, puutujad läbi punkti, mille kaugus ringjoone keskpunktist on 5 cm.

49. Joonisel 71 kujutatud riista nimetatakse keskpunkti otsijaks. Kirjelda, kuidas tema abil leida ümmarguste esemete keskpunkti ja missugusel puutujate omadusel põhineb see leidmine (vt. üles. 46).



Joon. 71.

50. On antud ringjoone kaks lõikuvat puutujat ja puutepunkt ühel neist. Joonesta ringjoon.



Joon. 72.

51. Tõesta, et kui punkti kaugus ringi keskpunktist võrdub diameetriga, siis sellest punktist tõmmatud puutujate vaheline nurk on 60° .

KOLMNURGA SISERINGJOON.

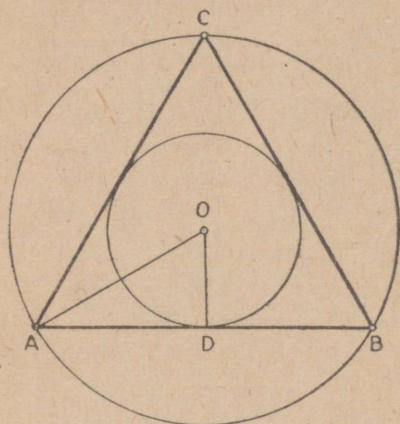
52. Joonesta mingi kolmnurga kolm nurgapoolitajat sirkli ja joonlaua abil. Mida paned tähele nurgapoolitajate kohta?

53. Tõestame teoreemi:

kolmnurga sisenurkade poolitajad lõikuvad kõik ühes punktis, mis on selle kolmnurga siseringjoone keskpunktiks.

Tõestus. Joonestame kolmnurga ABC mingi kahe sisenurga, näiteks nurkade A ja B poolitajad ja tõmbame nende lõikepunktist N ristlõigud NP , NQ ja NR kolmnurga külgedele (joon. 72). Siis $NP = NQ$, sest punkt N kui nurga A poolitaja punkt on külgedest AC ja AB võrdsetel kaugustel. Niisamuti saab näidata, et $NQ = NR$. Neist kahest võrdusest järeldub, et ka $NP = NR$, s. t. punkt N on külgedest CA ja CB võrdsetel kaugustel. Kuid siis CN on kolmnurga nurga C poolitaja. Seega kõik kolm nurgapoolitajat lõikuvad punktis N . Ringjoon, mille keskpunktiks on punkt N ja raadiuseks on NP , läbib ka punkte Q ja R ning puudutab kolmnurga kõiki külgi (miks?). Seda ringjoont nimetatakse kolmnurga siseringjooneks.

Et kolmnurga nurgapoolitajad lõikuvad ainult ühes punktis, siis iga kolmnurga sisse saab joonestada ainult ühe ringjoone.



Joon. 73.

54. Tõesta, et võrdkülgse kolmnurga siseringjoone keskpunkt ja ümberringjoone keskpunkt ühtivad.

55. Joonesta kolmnurk, mille küljed on 4,5 cm, 5 cm ja 8 cm, ühes tema siseringjoone ja ümberringjoonega. Mõõda kummagi ringjoone raadius.

56. Näita, toetudes joonisele 73, et võrdkülgse kolmnurga ABC siseringjoone raadius OD on pool ümberringjoone raadiusest OA .

57. Leia vabalt võetud kolmnurga ABC küljel BC punkt, mis on kahest ülejäänud küljest võrdsetel kaugustel.

58. Joonis 74 kujutab kaht raudteed ühes kahe külga A ja B . Kuidas leida 1) kolhoosi keskuse rajamiseks niisugune koht, mis asetseks võrdsetel kaugustel mõlemast raudteest ja võrdsetel kaugustel küladest A ja B ? 2) peatuskohad raudteel, mis oleksid rajatavale kolhoosikeskusele võimalikult lähedal?



Joon. 74.

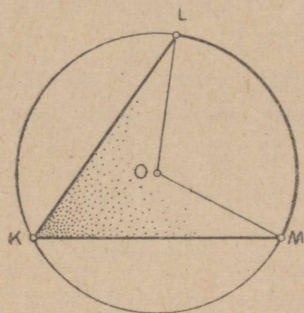
PIIRDENURK.

59. Joonesta ringjoone ühest ja samast punktist K kaks kõõlu KL ja KM (joon. 75). Nende kõõlude vahelist nurka LKM nimetatakse piirdenurgaks. Piirdenurga kohta öeldakse, et ta toetub

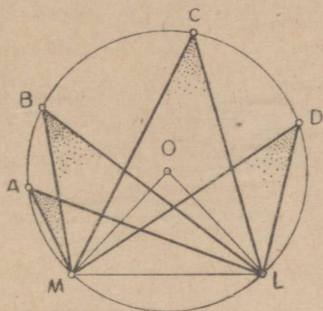
nurga sees olevale kaarele, näiteks piirdenurk LKM toetub kaarele LM. Samale kaarele toetub ka üks kesknurk, nimelt kesknurk LOM.

Missugusele kaarele toetuvad piirdenurgad A, B, C ja D joonisel 76?

Mitu piirdenurka toetub ühele ja samale kaarele? Mitu kesknurka toetub sellele kaarele?



Joon. 75.



Joon. 76.

60. Mõõda piirdenurk ja samale kaarele toetuv kesknurk. Kumb on suurem ja mitu korda?

61. Tõestame, et

piirdenurk võrdub poolega samale kaarele toetuvast kesknurgast.

Olgu $\angle ABC$ piirdenurk ja $\angle AOC$ kesknurk, mis toetuvad ühele ja samale kaarele. Tõestame siis, et $\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \angle AOC$.

Tõestamisel tuleb vaadelda kolme võimalikku juhtumit:

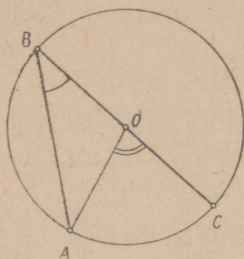
1. ringjoone keskpunkt asetseb piirdenurga ühel haaral (joon. 77);
2. ringjoone keskpunkt asetseb piirdenurga sees (joon. 78);
3. ringjoone keskpunkt asetseb väljaspool piirdenurka (joon. 79).

1. Kui ringjoone keskpunkt O asetseb piirdenurga haaral BC, siis kesknurk AOC on kolmnurga ABO välisnurk ja seetõttu

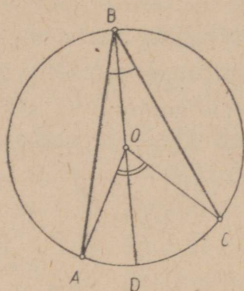
$$\angle AOC = \angle ABO + \angle OAB.$$

Et kolmnurk OAB on võrdhaarne (miks?), siis saadud võrduse paremal poolel on võrdsed liidetavad ja seega

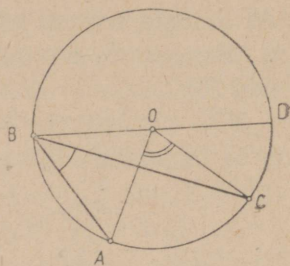
$$\angle AOC = 2 \cdot \angle ABO,$$



Joon. 77.



Joon. 78.



Joon. 79.

millest järeldubki, et

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \angle AOC.$$

2. Kui ringjoone keskpunkt asetseb piirdenurga sees (joon. 78), siis joonestame diameetri BD. See diameeter jaotab piirdenurga ja kesknurga kaheks osaks, mille kummagi kohta teoreem on eelmises punktis tõestatud:

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \cdot \angle AOD;$$

$$\angle DBC = \frac{1}{2} \cdot \angle DOC.$$

Liites esimese võrduse pooltega teise võrduse pooled ja tuues paremal ühise teguri $\frac{1}{2}$ sulgude ette, saame

$$\angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} (\angle AOD + \angle DOC)$$

ehk

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \angle AOC.$$

3. Kui ringjoone keskpunkt asetseb väljaspool piirdenurka (joon. 79), siis joonestades diameetri BD saame piirdenurga ABC esitada kahe niisuguse piirdenurga vahena, millede kohta teoreem on juba tõestatud:

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \cdot \angle AOD;$$

$$\angle CBD = \frac{1}{2} \cdot \angle COD.$$

Lahutades esimese võrduse pooltest teise võrduse pooled ja tuues paremal ühise teguri $\frac{1}{2}$ sulgude ette, saame

$$\angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2} (\angle AOD - \angle COD)$$

ehk

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \angle AOC.$$

Sellega on teoreem täielikult tõestatud.

62. Teoreemist piirdenurga kohta teeme järgmised järeldused.

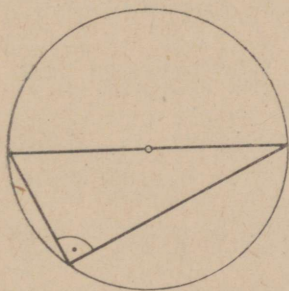
1. Ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad on võrdsed, sest igaüks neist võrdub poolega ühest ja samast kesknurgast. Nende piirdenurkade tipud asetsevad kaarel MCL (joon. 76), mille igast punktist $A, B, C, \dots$ paistab kaare otspunkte ühendav kõõl ML ühes ja samas vaatenurgas.

2. Võrdsetele kaartele toetuvad piirdenurgad on võrdsed (miks?).

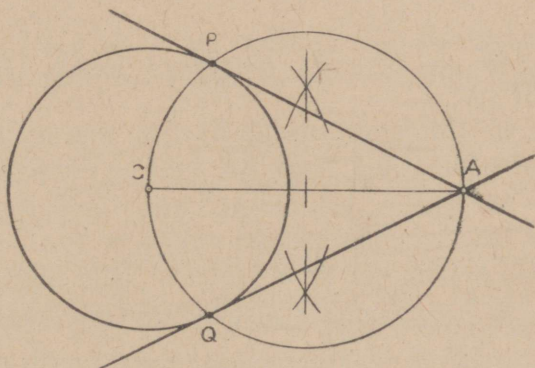
3. Diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk,

sest vastav kesknurk on kaks täisnurka (joon. 80). See järeldus näitab, et ringjoone igast punktist (peale kahe punkti) paistab diameeter täisnurgas.

Viimast järeldust nimetatakse Thalese* teoreemiks. Seda teoreemi saab kasutada täisnurkse kolmnurga ehitamiseks antud hüpotenuusi ja kaateti järgi. Selleks joonestame ringjoone.



Joon. 80.



Joon. 81.

* Thales, kreeka filosoof ja matemaatik, elas VI saj. I poolel e. m. a.

mille diameetriks on antud hüpoteenus, ja mõõdame diameetri ühest otspunktist kõõlu, mis võrdub antud kaatetiga. Selle kõõlu ja diameetri teiste otspunktide ühendamisel saame nõutud täisnurkse kolmnurga.

63. Thalese teoreem annab uue võimaluse ringjoone puutuja ehitamiseks punktist, mis asetseb väljaspool ringjoont. Selleks ühendame antud punkti A antud keskpunktiga C ja joonestame ringjoone, millele lõik AC on diameetriks (joon. 81). Siis leiame saadud ringjoone ja antud ringjoone ühised punktid P ja Q ning joonestame sirged AP ja AQ .

Teosta see konstruktsioon ja põhjenda, et AP ja AQ on puutujad.

64. Missugust joont mõõda tuleb paadiga sõita lahel, kui soovime mingi rannalõiku kogu aeg näha täisnurgas (joon. 82)?



Joon. 82.

65. a) Kui suur piirdenurk toetub kaarele 40° , 75° , $118^\circ 20'$, $131^\circ 48'$?

b) Piirdenurk toetub kaarele, mis on 76° võrra väiksem ringjoone ülejäänud osast. Kui suur on piirdenurk?

66. Ümber kolmnurga ABC , mille $\angle A = 58^\circ 40'$ ja $\angle B = 72^\circ 30'$ on joonestatud ringjoon. Kui suured on kaared, milledeks kolmnurga tipud jaotavad selle ringjoone?

67. Ringjoonel asetsevad järjestikku punktid A , B , C ja D nii, et $\cup AB$ on $\frac{1}{5}$ ringjoonest, $\cup BC$ on $\frac{1}{6}$ ringjoonest ja $\cup CD$ on $\frac{3}{10}$ ringjoonest. Kui suured on nelinurga $ABCD$ nurgad?

68. Kaks ringjoont lõikuvad punktides A ja B . Punktist A on

joonestatud mõlema ringjoone diameetrid AC ja AD . Tõesta, et punktid B , C ja D asetsevad ühel ja samal sirgel.

Näpunäide. Joonesta kõõl AB ja vaatle nurki ABC ja ABD .

69. a) Ringjoonel on märgitud järjestikku punktid A , B , C ja D nii, et kaared AB ja CD on võrdsed. Tõesta, et kõõlud AD ja BC on paralleelsed.

Näpunäide. Joonesta kõõl AC ja vaatle tekkinud piirde-
nurki.

b) Ringjoonel on märgitud järjestikku punktid A , B , C ja D nii, et kaared AB ja CD on võrdsed. Tõesta, et kõõlud AC ja BD on võrdsed.

Näpunäide. Võrdle kaari, milledele need kõõlud toetuvad.

70. Antud on lõik $AB = 4$ cm. Missugusel joonel asetsevad punktid, milledest lõik AB paistab täisnurgas.

71. Antud on võrdkülgne kolmnurk, mille üheks küljeks on lõik AB , ja sirge s , mis lõikab selle kolmnurga kaht ülejäänud külge. Leia sirgel s kaks punkti, milledest lõik AB on näha nurgas 60° .

72. a) Ringi sisse on joonestatud korrapärane kuusnurk. Missuguse osa ringjoonest moodustab kuusnurga nurgale (kui piirde-
nurgale) vastav kaar? Leia selle nurga suurus.

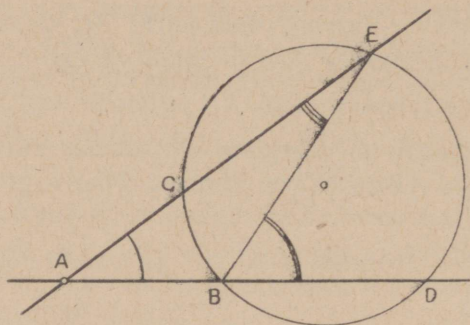
b) Ringi sisse on joonestatud korrapärane viisnurk. Kui suur on selle viisnurga nurk?

73. Tõesta, et korrapärase viisnurga ühest ja samast tipust tõmmatud diagonaalid jaotavad hulknurga nurga võrdseteks osadeks.

74. Väljenda kolmnurga sisenurk α teise sisenurga β ja kolmanda tipu juures oleva välisnurga γ_1 kaudu. Arvuta α , kui $\beta = 38^\circ$ ja $\gamma_1 = 117^\circ$.

75. a) Väljaspool ringjoont asetsevast punktist A on joonestatud ringjoonele kaks lõikajat ACE ja ABD (joon. 83), millede vahel on kaared BC ja DE . Kaar BC on 54° ja kaar DE on 132° . Kui suur on $\angle AEB$, $\angle EBD$, $\angle BAC$?

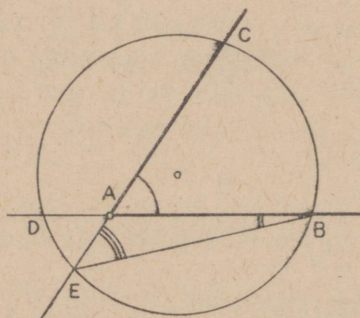
b) Arvuta eelmise ülesande eeskujul väljaspool ringjoont lõikuvate lõikajate vaheline nurk BAC , kui nurga haarade vahel olevad kaared on 34° ja 105° .



Joon. 83.

76. Arvuta nurk ringjoone lõikajate vahel, kui nurga sees olevad kaared on a) 78° ja 134° ; b) 55° ja 172° ; c) $165^\circ 17'$ ja $47^\circ 39'$.

77. a) Ringjoon on lõigatud kahe sirgega EC ja DB , mis lõikuvad seespool ringjoont punktis A (joon. 84). Lõikajatevahelise nurga BAC ja tema tippnurga EAD sees olevad kaared on 78° ja 25° . Kui suur on $\angle CEB$, $\angle EBD$, $\angle BAC$?



Joon. 84.

b) Arvuta eelmise ülesande eeskujul seespool ringjoont lõikuvate lõikajate vaheline nurk BAC , kui selle nurga ja tema tippnurga haarade vahel olevad kaared on 115° ja 34° .

78. Arvuta nurk ringjoone lõikajate vahel, kui selle nurga ja tema tippnurga sees olevad kaared on a) 51° ja 34° ; b) 68° ja $27^\circ 20'$; c) $115^\circ 14'$ ja $18^\circ 24'$.

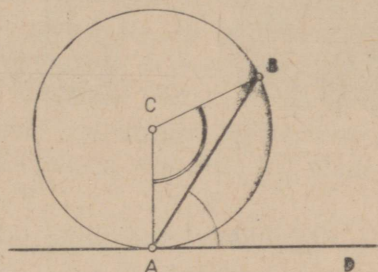
79. Kaks kõõlu lõikuvad nii, et nad jaotavad ringjoone osadeks, mis suhtuvad järjestikku nagu 1:3:5:6. Arvuta kõõlude vaheline teravnurk.

80. Ringjoonel järjestikku võetud punktid A , B , C ja D jaotavad ringjoone kaarteks, mis suhtuvad nagu 2:5:7:1. Kui suur on nurk sirgete AB ja DC vahel? sirgete AC ja BD vahel?

81. Ühest ja samast punktist P on ringjoonele joonestatud kaks puutujat PU ja PV . Puutepunktid U ja V jaotavad ringjoone kaheks kaareks, milledest väiksem on 134° . Joonesta kõõl UV ja leia, kui suur on $\angle PUV$, $\angle PVU$, $\angle UPV$.

82. Ühest ja samast punktist P on ringjoonele joonestatud kaks puutujat PU ja PV , millede vaheline nurk on 78° . Kui suured on kaared, milledeks puutepunktid U ja V jaotavad ringjoone?

83. Arvuta puutuja ja puutepunktist tõmmatud kõõlu vaheline nurk BAD (joon. 85), kui kõõlule toetuv kesknurk $\angle ACB = 110^\circ$.



Joon. 85.

84. Puutuja ja kõõlu vahelise nurga sees olev kaar moodustab 70% ringjoonest. Kui suur on see nurk?

85. Puutuja ja kõõlu vaheline nurk on $64^\circ 45'$. Kui suured on kaared, milledeks kõõl jaotab ringjoone?

86. Kui suur on korrapärase kõõlkolmnurga külje ja selle otspunktist tõmmatud puutuja vaheline nurk?

87. Kui suur on korrapärase kõõlkuusnurga külje ja selle otspunktist joonestatud puutuja vaheline nurk?

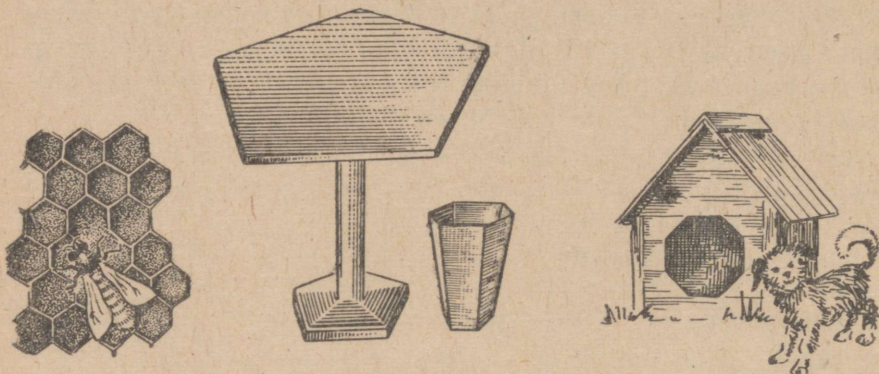
KORRAPÄRANE HULKNURK.

88. Missugust hulknurka nimetatakse korrapäraseks? Kuidas joonestada korrapärast kuusnurka, korrapärast kaheksanurka, üldiselt korrapärast n -nurka?

Korrapäraseks hulknurgaks nimetatakse hulknurka, millel kõik küljed ja nurgad on võrdsed.

89. Kus oled näinud korrapäraseid hulknurki? Nimeta joonisel 86 kujutatud esemete juures esinevaid korrapäraseid hulknurki.

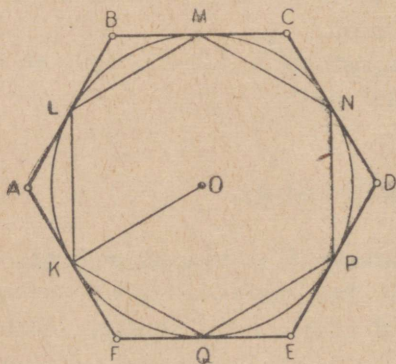
90. Varem õppisime tundma korrapäraseid hulknurki, mis tekivad, kui ringjoon jaotada võrdseteks osadeks ja saadud jaotuspunktid ühendada järjestikku kõõlude abil. Saadud hulknurki nimetatakse korrapärasteks kõõlhulknurkadeks.



Joon. 86.

Korrapärast hulknurka võib saada veel teisiti.

Kui ringjoon jaotada enam kui kaheks võrdseks osaks ja igast jaotuspunktist tõmmata puutuja kuni lõikumiseni naaberpunktidest tõmmatud puutujatega, siis tekib korrapärane hulknurk. Seda hulknurka nimetatakse korrapäraseks puutujahulknurgaks.



Joon. 87.

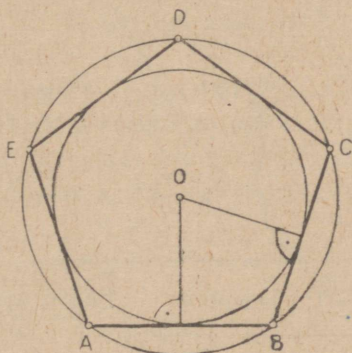
Olgu ringjoon, mille keskpunkt on O ja raadius on OK , jaotatud n võrdseks kaareks, näiteks kuueks võrdseks kaareks KL , LM , MN jne. (joon. 87). Joonestades puutujad punktidest K , L , M jne., saame hulknurga $ABCDEF$. Tõestame, et see on korrapärane. Selleks näitame esmalt, et saadud hulknurga nurgad on võrdsed. Et ühest ja samast punktist tõmmatud puutujate vaheline nurk

ja puutepunktidesse tõmmatud raadiuste vaheline nurk annavad liitmisel sirgnurga (üles. 45), siis hulknurga $ABCDEF$ iga nurk võrdub sirgnurga ja ühe kesknurga vahega. Nii saame, et $\angle A = 180^\circ - \angle KOL$, $\angle B = 180^\circ - \angle LOM$ jne. Kuid need kesknurgad on kõik võrdsed, sest nad toetuvad võrdsetele kaartele KL , LM jne. Seega on võrdsed ka puutujatevahelised nurgad:

$$\angle A = \angle B = \dots = \angle F.$$

Hulknurga $ABCDEF$ külgede võrdsuse tõestamiseks joonestame kõõlud KL , LM , MN jne. Nii saame kolmnurgad AKL , BLM jne., mis on võrdhaarsed, sest kaheks küljeks on neil ühest ja samast punktist tõmmatud puutujate lõigud (üles. 46). Need kolmnurgad on ka võrdsed, sest peale tipunurkade on neil veel alused võrdsed (põhjenda seda). Kuid siis $AB = BC = CD = \dots$, sest igaüks neist koosneb kahest ühe ja sama pikkusega lõigust. Sellega on tõestatud, et hulknurk $ABCDEF$ on korrapärane.

91. Mida nimetatakse korrapärase hulknurga apoteemiks? Millega võrdub korrapärase puutujahulknurga apoteem, kui ringi läbimõõt on 14 cm? 25 cm?



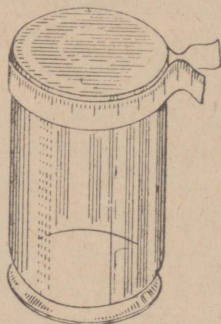
Joon. 88.

92. Joonesta korrapärane kõõlviisnurk $ABCDE$ (joon. 88). Tõesta, et tema küljed AB , BC jne. on hulknurga keskpunktist O võrdsetel kaugustel. Joonesta ringjoon, mis puudutab hulknurga kõiki külgi.

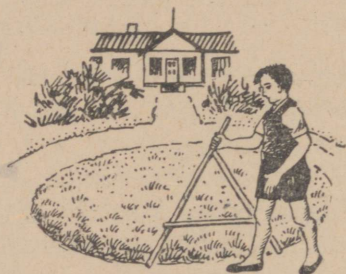
93. Joonesta ringjoon raadiusega $r = 3$ cm ja tema ümber ning sisse korrapärane kuusnurk.

RINGJOONE PIKKUS.

94. Ümmarguse palgi, lillepeenra, purgi jne. ümbermõõt on ringi ümbermõõt ehk ringjoone pikkus. Seda pikkust saab mõõta, kui kasutada painduvat mõõdulinti, nagu näidatud joonisel 89.



Joon. 89.



Joon. 90.

Too näiteid, kus veel saab ringjoone pikkust niiviisi mõõta.

95. Maapinnal leiduva ringjoone pikkuse mõõtmiseks on mõõdusirkel mõnikord sobivam kui mõõdulint (joon. 90). Selgita, miks.

Too näiteid, kus maapinnal esineb ringjooni. Selgita, milleks nende pikkust on vaja mõõta ja kuidas seda tehakse.

96. Mõõda mõne ümmarguse (ringikujulise) eseme ümbermõõt ja läbimõõt, arvuta nende suhe ja koosta mõõtmise tulemustest järgmine tabel.

Eseme nimetus	Ümbermõõt	Läbimõõt	Nende suhe

Arvuta leitud suhete aritmeetiline keskmine ja võrdle seda teiste õpilaste poolt saadud keskmistega. Mida paned tähele?

97. Täpsemad mõõtmised näitavad, et erinevate ringide ümbermõõtude ja läbimõõtude suhted ei erine üksteisest kuigi palju, olles kõik ligikaudu võrdsed arvuga 3,14. Seega ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe ei muutu ringi läbimõõdu muutu-

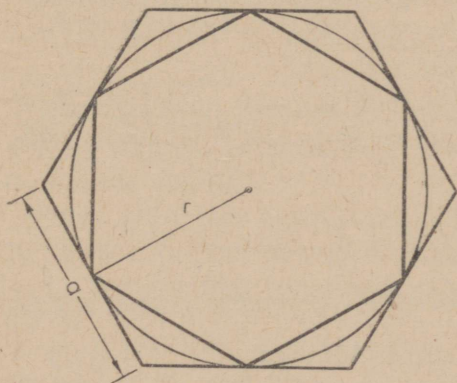
des ehk, teisiti öeldes, ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe on jääv suurus. Arvutused näitavad, et see suhe on tõepoolest jääv. Järgnevast neljast ülesandest selgub, kuidas seda jäävat suhet arvutada järjest suurema täpsusega.

98. Ringjoone raadius r on 5 cm. Arvuta korrapärase kõõlkuusnurga ja korrapärase puutujakuusnurga ümbermõõt (joon. 91).

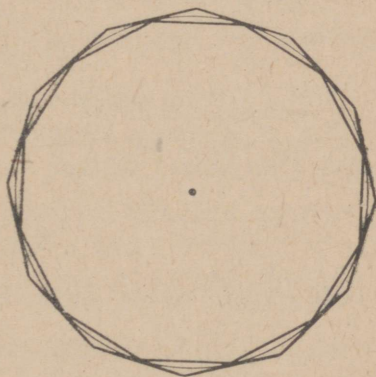
Puutujakuusnurga külje a arvutamiseks kasuta kuuendas klassis tundmaõpitud tõsiasja, et korrapärase kuusnurga apoteemi ja külje suhe on ligikaudu võrdne arvuga 0,866; seega $r : a = 0,866$ ehk $5 : a = 0,866$. Siit saad leida a .

Missugused kaks tõket saab antud ringi ümbermõõdule c , kui nendeks võtta kõõlkuusnurga ümbermõõt ja puutujakuusnurga ümbermõõt? Kummast neist ringi ümbermõõd on suurem, kummast väiksem? Kirjuta tulemus võrratuste abil:

$$\dots < c < \dots$$



Joon. 91.



Joon. 92.

99. Lahenda eelmine ülesanne üldkujul, avaldades korrapärase kõõlkuusnurga ümbermõõdu ja korrapärase puutujakuusnurga ümbermõõdu ringi läbimõõdu d abil (joon. 91).

Korrapärase kõõlkuusnurga külg võrdub ümberringjoone raadiusega $\frac{d}{2}$.

Korrapärase kõõlkuusnurga ümbermõõt võrdub $6 \cdot \frac{d}{2} = 3d$.

Korrapärase puutujakuusnurga apoteemi ja külje suhe on $r : a = 0,866$.

Sellest saame, et $a : r = 1 : 0,866 = 1,155$.

seega $a = 1,155r = 1,155 \cdot \frac{d}{2} = 0,578d$.

Korrapärase puutujakuusnurga übermõõt $6a = 6 \cdot 0,578d = 3,468d$.

Ringi übermõõdu c tõkked on $3d < c < 3,47d$.

Missugused tõkked saab siit ringi übermõõdu ja läbimõõdu suhtele $\frac{c}{d}$? Kui suur on nende tõkete vahe?

100. Arutades korrapärase kõõlkaksteistnurga* ja korrapärase puutujakaksteistnurga übermõõdu (joon. 92), saaksime ringi übermõõdu c jaoks järgmised tõkked:

$$3,10d < c < 3,22d.$$

Missugused tõkked saab siit ringi übermõõdu ja läbimõõdu suhtele $\frac{c}{d}$? Kui suur on nende tõkete vahe?

101. Kreeka matemaatik Arhimedes, kes elas aastal 287 kuni 212 e. m. a., leidis korrapärase 96-nurkade abil ringi übermõõdule c järgmised tõkked:

$$3\frac{10}{71}d < c < 3\frac{1}{7}d.$$

Väljendades tõketes esinevad kordajad kümnendmurdudes, saame

$$3,1408\dots d < c < 3,1428\dots d$$

ehk, kui alamtõke ümardada tuhandikeni puuduga ja ülemtõke liiaga:

$$3,140d < c < 3,143d.$$

Missugused tõkked saab siit ringi übermõõdu ja läbimõõdu suhtele $\frac{c}{d}$? Kui suur on nende tõkete vahe?

102. Vaadeldes eelmises ülesandes antud ringi übermõõdu c tõkkeid $3,140d$ ja $3,143d$, näeme, et neis on läbimõõdu d kordajail esimesed kolm kohta samad, s. t.

$$c \approx 3,14d \text{ ehk } c : d \approx 3,14.$$

Viimase suhte täpset väärtust tähistatakse kreeka tähega π (pii). Kasutades seda tähist, saame:

$$c : d = \pi \text{ ehk } c : 2r = \pi.$$

Avaldades siit jagatava c , saame ringi ümbermõõdu (ehk ringjoone pikkuse) valemid:

$$c = \pi d; \quad c = 2\pi r$$

Ringi ümbermõõt võrdub arvu π ja läbimõõdu korrutisega ehk arvu 2π ja raadiuse korrutisega.

Arvu π täpne väärtus avaldub lõpmatu mitteperioodilise kümnendmurruna, millest on arvutatud enam kui 700 kümnendkohta. Ringi ümbermõõdu arvutamisel saab kasutada neist muidugi ainult esimesi kohti. Arvu π ligikaudse väärtusena kasutatakse harilikult arvu 3,14, mõnikord ka arvu $3\frac{1}{7}$ ja suuremat täpsust nõudvate arvutuste puhul arvu 3,1416.

Arvu π esimesed 21 kohta on järgmised:

3,14159265358979323848

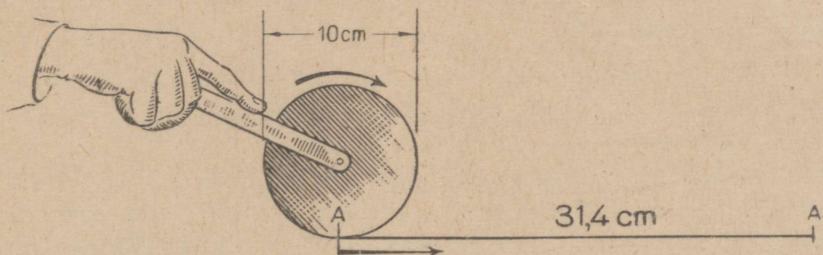
103. Ümmarguse vaagna ümbermõõdu mõõtmisel saadi tulemuseks 89,2 cm ja läbimõõdu mõõtmisel 28,4 cm. Arvuta arvu π ligikaudne väärtus.

104. a) Arvuta peast ringi ümbermõõt, kui läbimõõt on 1 m; 10 dm; 0,1 km; kui raadius on 5 cm; 0,5 dm; 1 m.

b) Arvuta ringi ümbermõõt c , kui läbimõõt $d = 16$ cm; 4,5 dm; 0,8 m.

c) Arvuta ringjoone pikkus c , kui raadius $r = 7$ cm; 3,8 dm; 12 m.

d) Mida kujutab joonis 93?



Joon. 93.

105. a) Arvuta Maa ekvaatori pikkus, kui ekvaatori raadius on 6378 km.

b) Kuu liigub ümber Maa peaaegu ringjoonelist teed mööda ja tema kaugus Maast on 380 000 km. Arvuta Kuu tee pikkus.

c) Maa liigub ümber Päikese peaaegu ringjoonelist teed mööda, tehes aasta vältel ühe täistiiru. Arvuta Maa aastase tee pikkus, kui Maa kaugus Päikesest on 150 000 000 km.

106. a) Ringjoone pikkuse kergemaks leidmiseks on koostatud mitmesuguseid tabeleid. Ühe sellise tabeli leiad õpiku lisast. Selles on antud ringi läbimõõdu kolmekohaliste tüvedega väärtustele

1,00, 1,01, 1,02, ..., 9,99, 10,0

vastavad übermõõdu väärtused (niisamuti kolmekohaliste tüvedega):

3,14, 3,17, 3,20, ..., 31,4, 31,4.

Mingile antud läbimõõdule, näiteks läbimõõdule 2,76 vastava übermõõdu leidmiseks võtad tabelist selle rea, mille algul (esimeses veerus) seisab antud läbimõõdu esimesest kahest numbrist koosnev arv 2,7, ja selle veeru, mille pealkirjaks (esimeses reas) on antud läbimõõdu viimane number 6. Võetud rea 2,7 ja veeru 6 lõikekohas leiad läbimõõdule 2,76 vastava übermõõdu 8,67. Tabeli kergemaks kasutamiseks lõika papist riba ja pane see selle rea alla, millest parajasti arvu otsid.

b) Kontrolli tabeli abil, et:

kui ringi läbimõõt on 1,74 dm, siis übermõõt on 5,47 dm;

kui ringi raadius on 3,54 m, siis übermõõt on 22,2 m;

kui ringi raadius on 4,5 km, siis übermõõt on 28,3 km.

c) Sama tabeli abil saab leida ka ringi läbimõõtu, kui tema übermõõt on antud.

Ringi läbimõõdu leidmisel übermõõdu järgi tuleb silmas pidada, et tabeli osas, mis algab übermõõdu väärtusega 10,1, iga übermõõtu esineb järjestikku 3 või 4 korda. Näiteks übermõõtu 10,1 on ringil läbimõõduga 3,20, 3,21, 3,22, 3,23, sest ümardatult kümnendikeni on nende ringide übermõõdud kõik 10,1. Seega võib übermõõdule 10,1 vastavaks läbimõõduks ühesuguse õigusega võtta 3,20, 3,21, 3,22 või 3,23. Vastuste erine-

vuse vältimiseks võtame võimalikest väärtustest suurima, mis lõpeb paarisnumbriga. Niisiis,

kui ringi ümbermõõt on 10,1 cm, siis läbimõõt on 3,22 cm;
 kui ringi ümbermõõt on 10,7 dm, siis läbimõõt on 3,42 dm;
 kui ringi ümbermõõt on 28,7 m, siis läbimõõt on 9,14 m.

107. Joonesta alljärgnev tabel vihikusse ja täida see, kasutades ringjoone pikkuste tabelit.

r (cm)				2,36	1,65	3,65			
d (cm)	1,90	5,78	9,24						
c (cm)							25,8	17,0	5,97

108. Tabel võimaldab leida ringjoone pikkust ka neil juhtumitel, kui antud läbimõõtu ei leidu tabelis. Selleks tuleb teada, et kui läbimõõt d suureneb (väheneb) 10, 100 jne. korda, siis ringjoone pikkus πd samuti suureneb (väheneb) 10, 100 jne. korda, sest ühe teguri (d) suurenemisel (vähendamisel) mingi arv korda suureneb (väheneb) korrutis (πd) sama arv korda. Lühemalt öeldes, ringjoone pikkus on võrdeline läbimõõduga.

Näiteid. 1. Et leida ringjoone pikkust, kui $d = 27$ cm, võtame tabelist läbimõõdule 2,7 vastava pikkuse 8,48 ja suurendame seda 10 korda. Nii saame, et kui $d = 27$ cm, siis $\pi d = 84,8$ cm.

2. Et leida ringjoone pikkust, kui $d = 0,0852$ m, võtame tabelist läbimõõdule 8,52 vastava pikkuse 26,8 ja vähendame seda 100 korda. Nii saame, et kui $d = 0,0852$ m, siis $\pi d = 0,268$ m.

109. Kasutades tabelit, leia ringjoone pikkus järgmistel andmetel:

a) läbimõõt on 15 cm, 92 m, 236 m, 928 km, 307 m, 57 dm, 1400 m.

b) läbimõõt on 0,163 cm, 0,47 km, 0,9 dm, 0,025 m, 0,06 dm, 0,007 m.

Töö vormista tabeli kujul:

d	15 cm	92 m	...
c			...

110. Kasutades tabelit, leia ringjoone pikkus järgmistel andmetel:

- a) raadius on 8 cm, 13,5 dm, 32,6 dm, 13 m, 245 m, 382 km;
b) raadius on 0,07 cm, 0,272 cm, 0,38 km, 0,415 m, 0,46 km.

Töö vormista tabeli kujul:

r	d	c
8 cm	16 cm	...
13,5 dm	...	...

111. Ringjoone pikkuste tabelis antud läbimõõdud on kolmekohaliste tüvedega arvud. Kui antud ringjoone läbimõõt on enam kui kolme tüvenumbriga, siis ringjoone pikkuse leidmisel tabeli järgi tuleb läbimõõd enne ümardada kolmekohalise tüvega arvuks.

Näide. Kui $d = 8,376$ m, siis ümardades saame, et $d \approx 8,38$ m ja sellele vastav ringjoone pikkus $c \approx 26,3$ m.

112. Leida ringjoone pikkus, kui

- a) läbimõõt on 1,082 m, 0,2747 dm, 5,718 m, 6223 m, 0,3065 km.
b) raadius on 0,1274 dm, 38,81 cm, 5296 m, 0,7652 km, 69,88 km.

Näide. Kui $r = 0,3284$ km, siis $d = 0,6568$ km $\approx 0,657$ km ja $c \approx 2,06$ km.

113. Tabelis antud ringjoone pikkused on kolmekohaliste tüvedega arvud, milledest väikseim on 3,14 ja suurim on 31,4. Kui antud ringjoone pikkus on tabelis mitteleiduv arv, mis on suurem kui 3,14, aga väiksem kui 31,4, siis leiame ringjoone pikkuste tabelist kaks järjestikust arvu, millede vahel ta asetseb, vaatame, kummast neist ta erineb vähem, ja võtame sellele vastava läbimõõdu. Näiteks ringjoone pikkus 3,97 asetseb tabelis leiduvate ringjoone pikkuste 3,96 ja 3,99 vahel ja seejuures erineb arvust 3,96 vähem kui arvust 3,99. Seeõttu võtame otsitavaks läbimõõduks ringjoone pikkusele 3,96 vastava läbimõõdu, s. o. 1,26. Nii siis, kui ringjoone pikkus on 3,97 ühikut, siis läbimõõt on 1,26 ühikut. See läbimõõdu väärtus on muidugi ligikaudne ja nimelt veaga alla 0,005.

Kui antud ringjoone pikkus erineb täpselt ühepalju kahest tabelis antud järjestikusest ringjoone pikkusest, siis on ükskõik, kummale vastav läbimõõt neist võtta. Raadiuse kergemaks arutamiseks on soovitatav võtta paarisnumbriga lõppev väärtus. Näiteks, kui ringjoone pikkus on 3,66 ühikut, siis läbimõõduks saame 1,16 ühikut.

114. Leia tabeli abil ringi läbimõõt, kui tema übermõõt on: 4 cm; 4,3 dm; 5,5 m; 12 m; 14,3 m; 18,7 m; 28,39 km; 30,46 km.

115. Kui antud ringjoone pikkuse mõõtaru ei kuulu tabelis antud äärmiste arvude, s. o. 3,14 ja 31,4 vahele, siis suurendame (või vähendame) seda mõõtarvu 10, 100, ... korda nii, et uus mõõtaru oleks suurem kui 3,14, kuid väiksem kui 31,4. Selle põhjal leitud läbimõõt tuleb muidugi sama arv korda vähendada (vastavalt suurendada).

Näited. 1. Olgu ringjoone pikkus $c = 1,66$ m; suurendades seda mõõtarvu 10 korda, saame 16,6, millele vastav läbimõõt tabeli järgi on 5,28; tähendab, otsitav läbimõõt $d = 0,528$ m.

2. Olgu ringi übermõõt $c = 386$ m; vähendades mõõtarvu 100 korda, saame 3,86, millele vastav läbimõõt tabeli järgi on 1,23; tähendab, otsitav läbimõõt $d = 123$ m.

116. Leia tabeli abil ringi läbimõõt, kui tema übermõõt on:

a) 52 mm, 138 mm, 75 cm, 204 cm, 0,87 dm, 2,56 m, 2,92 dm, 0,6 km.

b) 88 mm, 212 mm, 1,12 m, 2,75 m, 0,03 km, 2,42 km, 1920 m, 2,5 m.

117. Mitu meetrit on ümmarguse tiigi läbimõõt, kui übermõõt on 245 sammu ja sammu pikkus on 0,7 m?

118. a) Mitu äärekivi kulub ümmargusele lillepeenrale, mille läbimõõt on 2,6 m, kui kivi laius on 17 cm?

b) Mitu lilletaime kulub ümmarguse lillepeenra ääristamiseks, kui peenra läbimõõt on 3,7 m ja taimede vaheks jätta 20 cm?

119. Lapsed tegid jääle karusselli, pannes kelgu tiirlema 6,5 m pikkuse lati otsa. Kui pika sõidu sai Tõnu, kes tegi 15 tiiru?

120. a) Ratas tegi 19,6 m vahemaal 8 pööret. Mitu pööret teeb ratas 1 km pikkusel vahemaal? Kui suur on selle ratta raadius?

b) Mitu pööret teeb 1,5 m kõrgune veduriratas ühes tunnis, kui vedur läbib tunnis 75 km? Missuguse aja vältel teeb see ratas 1000 pööret?

KAARE PIKKUS.

121. Kaar on kahe punktiga — kaare otspunktidega — piiratud osa ringjoonest (joon. 94). Selle osa suurus on määratud

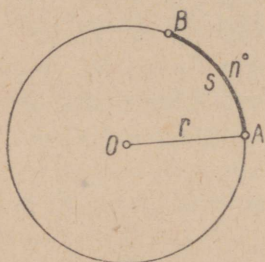
kaare kraadide arvuga: kui kaar sisaldab näiteks 120° , siis ta on $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$ ringjoonest. Üldiselt

n -kraadine kaar on $\frac{n}{360}$ ringjoonest.

Leiame kaare suuruse pikkusühikutes ehk kaare pikkuse. Et ringjoone pikkus on $2\pi r$ pikkusühikut ja n -kraadine kaar on $\frac{n}{360}$ ringjoonest, siis

n -kraadise kaare pikkus on $\frac{n}{360} \cdot 2\pi r = \frac{\pi r n}{180}$ pikkusühikut. Tähistades kaare pikkuse tähega s , saame valemi

$$s = \frac{\pi r n}{180}$$



Joon. 94.

Sellele valemile saab anda kuju $s = \frac{\pi r}{180} \cdot n$, millest nähtub, et kaare pikkus on võrdeline kaare kraadide arvuga; võrdeteguriks on $\frac{\pi r}{180} = \frac{\pi d}{360}$, s.o. ühekraadise kaare pikkus. Selle valemi võib

kirjutada aga ka kujul $s = \frac{\pi n}{180} \cdot r$, mis ütleb, et kaare pikkus on võrdeline raadiusega; võrdetegur on nüüd $\frac{\pi n}{180}$, mida nimetatakse kaare absoluutmõõduks.

122. Kaare pikkuse valem seob kolme muutuvat suurust: s , r ja n . Kui kaks neist on antud, siis kolmanda saab arvutada, nagu näeme järgmistest näidetest.

1) Kui kaare raadius $r = 15$ cm ja kaar sisaldab 40° , siis kaare pikkus

$$s = \frac{\pi \cdot 15 \cdot 40}{180} = \frac{10\pi}{3} = \frac{31,4}{3} = 10,5 \text{ cm.}$$

2) Kaare kraadide arvu leidmiseks kaare pikkuse ja raadiuse pikkuse järgi lahendame kaare pikkuse valemi esmalt suuruse n suhtes. Nii saame (kuidas?), et $n = \frac{180s}{\pi r}$. Kui on antud näiteks, et $r = 24$ cm ja $s = 10$ cm, siis tuletatud valemi järgi

$$n = \frac{180 \cdot 10}{24\pi} = \frac{75}{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot 75 = 0,318 \cdot 75 = 23,9^\circ.$$

3) Kui kaare pikkus $s = 6$ cm ja ta sisaldab 20° , siis avaldades kaare pikkuse valemist suuruse r ja asendades saame:

$$r = \frac{180 \cdot s}{\pi n} = \frac{180 \cdot 6}{20\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot 54 = 0,318 \cdot 54 = 17,2 \text{ cm.}$$

123. a) Kui pikk on 75° -ne kaar ringjoonel, mille raadius on 6 cm?

b) Mitu kraadi sisaldab 3 dm pikkune kaar ringjoonel, mille raadius on 2 dm?

c) Ringjoone 36° -se kaare pikkus on 5 dm. Kui pikk on raadius?

124. a) Kui pikk on 100° -ne kaar ringjoonel, mille läbimõõt on 1 m?

b) Kaare pikkus on 32 cm ja kaare raadiuse pikkus 25 cm. Mitu kraadi sisaldab see kaar?

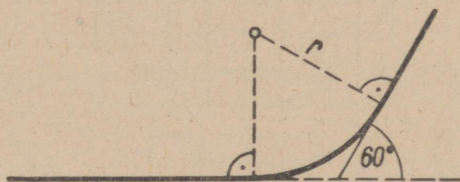
c) Joonesta ringjoon, mille 40° -se kaare pikkus on 4 cm.

125. Mitu kraadi sisaldab raadiusepikkune kaar?

126. Ringjoone raadius on 10 cm. Kui pikk on selle ringjoone

a) korrapärase kõõlviisnurga küljele vastava kaare pikkus?

b) korrapärase kõõlkaheksanurga küljele vastava kaare pikkus?



Joon. 95.

127. Kaks sirget raudteed, mille sihtide vaheline nurk on 60° , on sujuvalt ühendatud ringi kaarega (joon. 95), mille pikkus on 125 m. Arvuta selle kaare raadius.

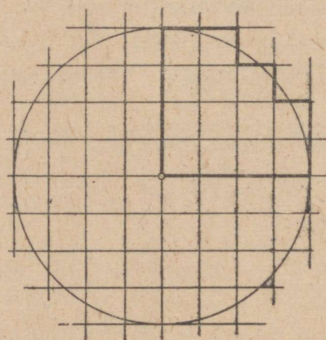
128. Ringi raadius on r cm. Kui palju ja mitme protsendi võrra on korrapärase kõõlkuusnurga küljele vastav kaar sellest küljest pikem?

129. Maa ekvaatori raadius on 6378 km. Arvuta meremiili pikkus, kui on teada, et see võrdub Maa ekvaatori 1'-se kaare pikkusega.

130. Kaks linna on ühel ja samal meridiaanil, kuid üks neist põhjalaiusel 51° ja teine põhjalaiusel 39° . Arvuta nende linnade vaheline kaugus, kui on teada, et meridiaani kaare raadius on 6370 km.

RINGI PINDALA.

131. Ruudulisele paberile joonestatud ringi pindala ligikaudsks leidmiseks loendame kõik ruudud, mida see ring katab, kusjuures pooliku ruudu loeme terve eest, kui üle poole temast näib olevat ringi sees, ja jätame arvesse võtmata, kui üle poole temast näib olevat väljaspool ringi. Töö kergendamiseks võib leida esmalt veerandringi pindala ja korrutada tulemus neljaga. Ruutude kergemaks loendamiseks piirame joonega kõik kaasaarvatavad ruudud (joon. 96).



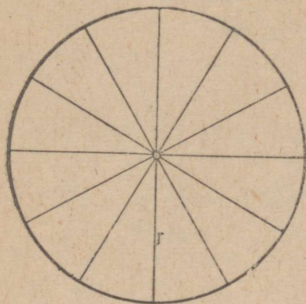
Joon. 96.

Leia joonisel 96 kujutatud ringi ligikaudne pindala, kui seal iga ruudu külg on 0,5 cm.

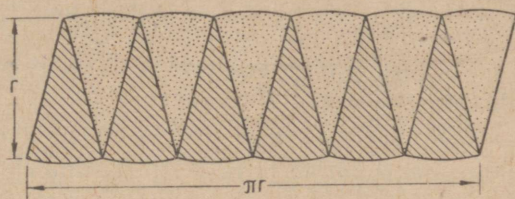
132. Joonesta ruudulisele paberile kolm ringi, mille raadiused on vastavalt 1 cm, 2,5 cm ja 3 cm. Leia eelmise ülesande eeskujul iga ringi ligikaudne pindala.

133. Joonesta paksemale paberile (kartongile) mingi ring, näiteks raadiusega 4 cm, jaota see raadiustega esiteks kuueks ja siis kaheteistkümneks võrdseks osaks ja lõika need osad korralli-

kult paberist välja (joon. 97). Iga niisugust osa nimetatakse ringi sektoriks. Kleebi need sektorid vihikusse üksteise kõrvale joonise 98 eeskujul ja värvi vaheldumisi kahe eri värviga. Missugust kujundit meenutab see kujund? Mille poolest ta erineb rööpkülükust? Millega võiks lugeda võrdseks selle «rööpkülüku» aluse, millega kõrguse? Mis siit järeldub ringi pindala kohta?



Joon. 97.



Joon. 98.

Ringi pindala võrdub poole ümbermõõdu ja raadiuse korrutisega.

Näide. Kui ringi raadius $r = 2$ cm, siis pool ümbermõõtu $\pi r = 3,14 \cdot 2 = 6,28$ cm ja pindala $S = 6,28 \cdot 2 = 12,56 \approx 13$ cm².

Arvuta sel viisil ringi pindala, kui ringi raadius on 5 cm; 4 dm; 8 m.

134. Tuleta eelmises ülesandes antud teoreemi põhjal ringi pindala valem.

$$S = \pi r^2$$

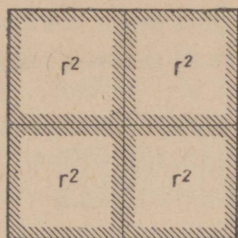
Ringi pindala võrdub raadiuse ruudu ja arvu π korrutisega.

Ringi pindala on seega võrdeline raadiuse ruuduga; võrdetegur on π .

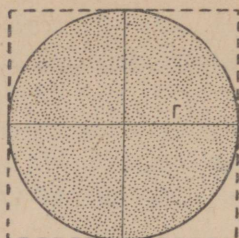
Võrdle ringi pindala puutujaruudu pindalaga (joon. 99).

135. a) Arvuta valemi järgi ringi pindala, kui raadius

$r = 3$ cm; 1,5 cm; 35 m; 0,8 km; 2,45 km.



$$4r^2$$



$$3,14r^2$$

Joon. 99.

b) Mitu protsenti moodustab ringi pindala tema puutujaruudu pindalast?

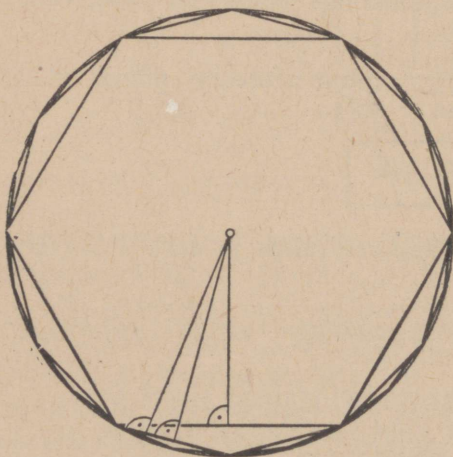
136. Asenda ringi pindala valemis raadius r tema avaldisega diameetri d kaudu ja tuleta järgmine ringi pindala valem:

$$S = \frac{1}{4} \pi d^2$$

Sõnasta see valem. Arvuta selle valemi järgi ringi pindala, kui läbimõõt

$d = 2 \text{ cm}; 4 \text{ dm}; 1 \text{ m}; 0,4 \text{ m}; 2,6 \text{ km}.$

Näide. Kui ringi läbimõõt $d = 3,2 \text{ dm}$, siis pindala $S = \frac{1}{4} \pi d^2 = \frac{1}{4} \cdot 3,14 \cdot 3,2^2 = \frac{1}{4} \cdot 3,14 \cdot 10,24 = 3,14 \cdot 2,56 = 8,0384 \approx 8,0 \text{ dm}^2.$



Joon. 100.

137. Tuleta ringi pindala arvutamise eeskiri korrapärase hulknurga pindala arvutamise eeskirjast. Selleks vaatle ringi sisse joonestatud korrapärase 6-nurga, korrapärase 12-nurga, korrapärase 24-nurga jne. pindalasid (joon. 100). Millega võrdub iga niisuguse hulknurga pindala? Mida siit võiks järeldada ringi pindala kohta?

138. a) Arvuta ümmarguse piimanõu põhja pindala, kui nõu läbimõõt on 16 cm.

b) Arvuta ümmarguse palgi ristlõike (otsa) pindala, kui palgi läbimõõt on 36 cm.

139. Ringi pindala kergemaks leidmiseks on koostatud tabelleid. Ühe sellise tabeli leiad õpiku lisast lk. 13. Selle ehitus ja kasutamise on analoogiline ringi ümbermõõtude tabeli ehituse ja kasutamise.

Näiteid.

a) Kui ringi läbimõõt on 2,4 m, siis pindala on $4,52 \text{ m}^2$.

b) Kui ringi raadius on 3,76 dm, siis pindala on $44,4 \text{ dm}^2$.

c) Kui ringi pindala on $29,9 \text{ m}^2$, siis läbimõõt on 6,17 m.

140. a) Leia tabeli abil ringi pindala, kui läbimõõt on 1,8 cm, 2,7 cm, 3,74 dm, 5 dm, 6,88 m, 7,25 m, 8 km, 10 km.

b) Leia tabeli abil ringi pindala, kui ringi raadius on 1,2 cm, 3,8 cm, 4,72 dm, 0,71 dm, 0,95 m, 2 m, 1,5 km, 4,87 km.

c) Leia tabeli abil ringi raadius, kui ringi pindala on $11,7 \text{ cm}^2$, $41,4 \text{ dm}^2$, $7,07 \text{ m}^2$, 11 m^2 , $18,2 \text{ km}^2$, 28 km^2 .

141. a) Selgita, kuidas muutub ringi pindala, kui tema raadius suureneb mingi arv korda.

Kui ringi raadius on r , siis pindala on πr^2 .

Kui ringi raadius on $10r$, siis pindala on $\pi(10r)^2 = \pi \cdot 100r^2 = 100\pi r^2$.

Kui ringi raadius on $100r$, siis pindala on $\pi(100r)^2 = \pi \cdot 10\,000r^2 = 10\,000\pi r^2$.

Mitu korda suurenes ringi pindala, kui tema raadius suurenes 10 korda? kui raadius suurenes 100 korda?

b) Näita samal viisil, et

kui ringi raadius suureneb n korda, siis pindala suureneb n^2 korda.

c) Kuidas muutub ringi pindala, kui tema raadius suureneb 3, 5, 7, 12, 20, 50 korda?

d) Kuidas muutub ringi pindala, kui tema raadius väheneb 2, 5, 8, 10, 25, 100 korda?

142. Kuidas muutub ringi raadius ja kuidas pindala, kui

a) läbimõõt suureneb 2 korda, 5 korda, 10 korda?

b) läbimõõt väheneb 3 korda, 8 korda, 100 korda?

143. Teades, kuidas muutub ringi pindala tema raadiuse (läbimõõdu) muutudes, leia tabeli abil ringi pindala järgmistel andmetel.

a) Läbimõõt on 12 cm, 43 cm, 92 m, 25 km, 0,4 dm, 0,75 m.

b) Raadius on 8 cm, 32 cm, 0,3 m, 15 m, 0,28 km, 0,39 km.

Näide. Kui ringi raadius $r=5,5$ m, siis läbimõõt $d=11$ m. Tabelist leiame, et 10 korda väiksema läbimõõduga ringi pindala on 0,95 m^2 . Suurendades seda 100 korda, saame 95 m^2 . Lühidalt:

kui $r=5,5$ m, siis $d=11$ m ja $S=100 \cdot 0,95 \text{ m}^2=95 \text{ m}^2$.

Analoogiliselt:

kui $r=0,07$ m, siis $d=0,14$ m ja $S=1,54 \text{ m}^2 : 100=0,0154 \text{ m}^2$.

144. Leia ringi pindala järgmistel andmetel:

a) läbimõõt on 1,07 dm, 0,326 dm, 7,87 m, 246 m, 0,508 km.

b) raadius on 0,124 dm, 31,9 cm, 671 m, 1128 m, 7,87 km.

145. Tabelis antud ringi pindala väärtused on arvud vahemikust 0,79 kuni 78,5. Kui antud ringi pindala väärtus on sellesse vahemikku kuuluv arv, mida ei ole tabelis, siis läbimõõdu leidmiseks leia tabelist antud pindala väärtusele lähim pindala väärtus ja võta sellele vastav läbimõõt. Näiteks pindala väärtusele 5,02 lähim tabelis leiduv väärtus on 5,03 ja sellele vastav läbimõõt 2,53. Tähendab, kui pindala $S=5,02$, siis läbimõõt $d=2,53$.

Kui antud ringi pindala väärtus ei kuulu vahemikku 0,79 kuni 78,5, siis läbimõõdu leidmiseks suurendame (või vähendame) seda väärtust 100 või 10 000 korda nii, et ta kuuluks sinna, leiame siis suurendatud (või vähendatud) pindala väärtusele vastava läbimõõdu ja vähendame (või suurendame) seda vastavalt 10 või 100 korda.

Näide. Olgu antud ringi pindala 0,235 m^2 . Suurendades seda 100 korda, saame 23,5 m^2 . Sellele vastav läbimõõt on 5,47 m. Vähendades seda 10 korda, saame 0,547 m. Tähendab, kui ringi pindala on 0,235 m^2 , siis läbimõõt on 0,547 m.

146. Leia tabeli abil ringi läbimõõt, kui tema pindala on

a) 2,4 dm^2 , 13 dm^2 , 53 cm^2 , 248 cm^2 , 4840 m^2 , 0,8 m^2 , 0,075 m^2 , 100 m^2 .

b) 4,7 dm^2 , 16 dm^2 , 855 m^2 , 322 mm^2 , 2100 m^2 , 0,6 m^2 , 0,024 km^2 , 500 km^2 .

147. Spordiplats kujutab endast ristkülikut, mille otstes on poolringid. Selle ristküliku mõõtmed on 120 m ja 80 m. Spordiplatsi äärel on jooksurajad, mis moodustavad 8 m laiuse riba (joon. 101).

- Kui suur on spordiplatsi kogupindala?
- Kui suur on jooksuradade all olev pindala?
- Kui suur on jooksuradade all oleva riba välimise ääre pikkus, kui suur on seesmise ääre pikkus ja kui suur nende vahe?



Joon. 101.

148. Hobusekõietamise keti pikkus on 8,4 m. Kui suur pindala on maatükil, millelt hobune saab süüa rohtu?

149. Ristkülikukujulise väljaku igasse nurka tahetakse rajada veerandringi-kujuline ja keskele ringikujuline iluaed. Esimesed neist on raadiusega 7 m ja viimane raadiusega 6 m. Aia allaminev pind tuleb katta mullaga nii, et igal ruutmeetril oleks seda 0,1 m³. Mitu autokoormat kulub selleks mulda, kui igas koormas on seda 3 m³?

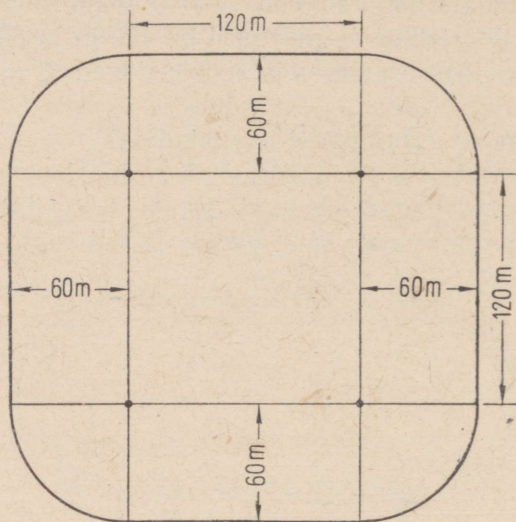
150. a) Mitu protsenti moodustab korrapärase kõõlnelinurga pindala ringi pindalast?

Näpunäide. Ringi raadius olgu r . Kõõlnelinurga pindala leidmiseks vaatle neid kaht kolmnurka, milledeks diagonaal jagab selle nelinurga.

b) Mitu protsenti moodustab korrapärase kõõlkuusnurga pindala ringi pindalast?

151. Ümmarguse tiigi ümbermõõt on 132 m. Kui suur on tiigi pindala?

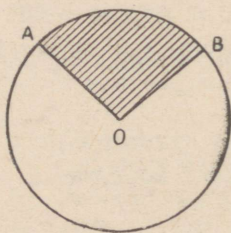
152. Arvuta joonisel 102 kujutatud väljaku pindala (hektarites) ja ümbermõõt.



Joon. 102.

SEKTORI PINDALA.

153. Kesknurga sees olevat ringi osa nimetatakse ringi sektoriks. Kesknurga AOB (joon. 103) sees on ringi sektor AOB . Seda kesknurka nimetatakse sektori nurgaks ja kesknurgale vastavat kaart sektori kaareks. Antud ringi (kaare) raadiust nimetatakse ka sektori raadiuseks.



Joon. 103.

- Joonesta sektor, mille raadius on 5 cm ja kaar on 45° .
- Joonesta sektor, mille raadius on 5 cm ja kaar on 275° .
- Joonesta ilma malli kasutamiset sektor, mille kesknurk on 60° .

d) Ringi raadius on 10 cm. Ring on jaotatud 10 võrdseks sektoriks. Arvuta iga sektori nurk ja kaare pikkus.

154. Olgu ringi pindala 240 mm². Arvuta selle ringi sektori pindala järgmistel juhtumitel:

- a) sektor on $\frac{3}{8}$ ringist;
- b) ring on jaotatud 36-ks võrdseks sektoriks;
- c) sektori nurk on 1°, 5°, 18°.

155. Tuletame sektori pindala valemi. Olgu sektori nurk n° ja raadius r cm. Selle sektori pindala leidmiseks märgime, et 360°-se sektori pindala on sama, mis ringi pindala, s. t. πr^2 ;

1°-se sektori pindala on ringi pindalast 360 korda väiksem, seega ta võrdub $\pi r^2 : 360 = \frac{\pi r^2}{360}$;

n° -se sektori pindala on 1°-se sektori pindalast n korda suurem ja võrdub seega $n \cdot \frac{\pi r^2}{360} = \frac{\pi r^2 n}{360}$.

Tähistades sektori pindala tähega S , saame valemi:

$$S = \frac{\pi r^2 n}{360},$$

millele saab anda kuju

$$S = \frac{\pi r n}{180} \cdot \frac{r}{2}.$$

Et saadud valemis esimene tegur $\frac{\pi r n}{180}$ väljendab sektori kaare pikkust s (vt. üles. 121), siis sektori pindala valemi saame kirjutada kujul

$$S = \frac{s \cdot r}{2}$$

Tähendab,

sektori pindala võrdub kaare pikkuse ja raadiuse poole korrutisega.

Nii näeme, et sektor on niisama suure pindalaga kui kolmnurk, mille alus on võrdne sektori kaare pikkusega ja kõrgus on võrdne sektori raadiusega.

156. Arvuta sektori pindala, kui sektori nurk on 144° ja raadius on 25 cm.

157. Arvuta 48° -se sektori pindala, kui sektori raadius on 0,5 m.

158. Ringi raadius on 1 m ja sektori pindala on 1 m^2 . Mitu kraadi on sektori kaar?

159. Mitu kraadi on sektori nurk, kui sektori raadius on 8 cm ja pindala on $12,56 \text{ cm}^2$?

160. Ringi 56° -se sektori pindala on 84 cm^2 . Leia ringi pindala ja ümbermõõt.

161. Ringi sektori pindala on 65% ringi pindalast. Kui suur on sektori nurk?

162. Mitu protsenti ringi pindalast on 81° -se sektori pindala?

SILINDER.

163. Joonisel 104 kujutatud ümmargune pliiats, kilukarp, liimipurk ja piimanõu on oma kujult silindrid.

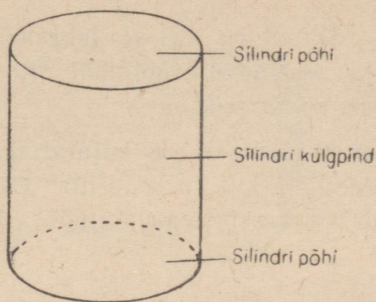


Joon. 104.

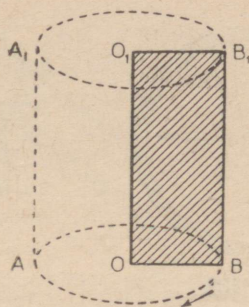
Silinder on piiratud kahe ringiga, mida nimetatakse silindri põhjadeks, ja silindri külgpinnaga (joon. 105). Silindri külgpind on piiratud silindri põhjade ringjoontega.

Nimeta veel silindrikujulisi kehi.

164. Silindrit nimetatakse pöördkehaks, sest ristküliku kiirel pöörlemisel ühe ta külje ümber näeme tekkivat silindrit. Külge



Joon. 105.



Joon. 106.

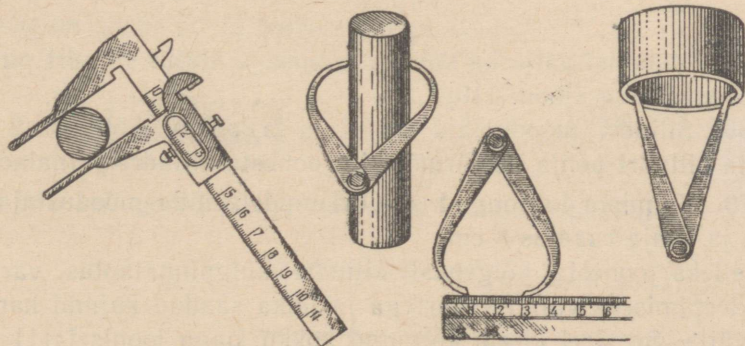
OO_1 (joon. 106), mille ümber ristkülik pöörleb, nimetatakse silindri teljeks. Silindri telg on ühtlasi ka silindri kõrguseks. Külge BB_1 , mis pöörlemisel tekitab silindri külgpinna, nimetatakse silindri moodustajaks.

Ristküliku küljed OB ja O_1B_1 tekitavad pöörlemisel silindri põhjad. Lõigud OB ja O_1B_1 on silindri põhjade raadiusteks.

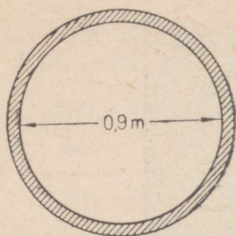
165. Ristkülik, mille pikkus on 3 cm ja laius 1 cm, pöörleb kord pikema, kord lühema külje ümber. Joonesta sel teel tekkinud silindrite kujutised.

166. Ümmarguste kehade läbimõõdu leidmiseks kasutatakse varbsirklit ja kobisirklit ehk tastrit (joon. 107).

Määra varbsirkli abil mõne silindrikujulise eseme läbimõõt.



Joon. 107.



Joon. 108.

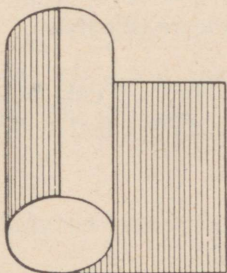
167. a) Raudtoru väline läbimõõt on 6,4 cm ja seesmine läbimõõt 4,8 cm. Arvuta toru seina paksus.

b) Arvuta joonisel 108 kujutatud toru väline läbimõõt, kui toru seina paksus moodustab 5% seesmisest läbimõõdust.

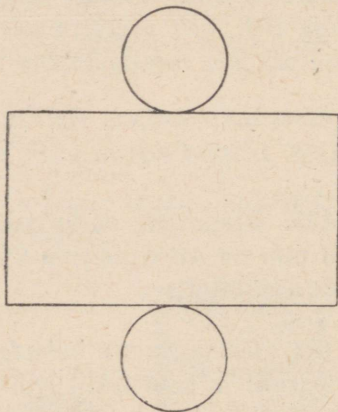
SILINDRI PINNALAOTUS JA PINDALA.

168. Kata silindri külgpind ühekordselt paberiga, lõika vabaks jäävad paberiääred ära ja laota see paberileht tasapinnale (joon. 109).

Milline kuju on silindri külgpinna laotusel? Mis on selle ristküliku aluseks, mis kõrguseks?



Joon. 109.



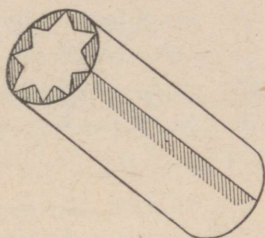
Joon. 110.

Lõika paberist välja ka silindri põhjad ja kleebi silindri pinnalaotus vihikusse (joon. 110).

169. Silindri moodustaja on 4 cm ja põhja läbimõõt 2 cm. Arvuta silindri põhja übermõõt ja joonest silindri pinnalaotus.

170. Valmista kartongist silindri mudel, mille moodustaja on 8 cm ja põhja raadius 3 cm.

Selleks joonest kõigepealt silindri külgpinnalaotus, varusta see kleepimiseks vajalike äärtega ja lõika saadud kujund kartongist välja. Seejärel kleebi külgpind kokku, nagu joonisel 111 näidatud, ja aseta kohale ka põhjad.



Joon. 111.

171. Silindrikujuliste esemete valmistamisel on materjali hulga arvestamiseks vaja osata arvutada silindri pindala ja ruumala.

Silindri pindala ehk täispindala T koosneb külgpindalast K ja kahe põhja pindalast $2P$.

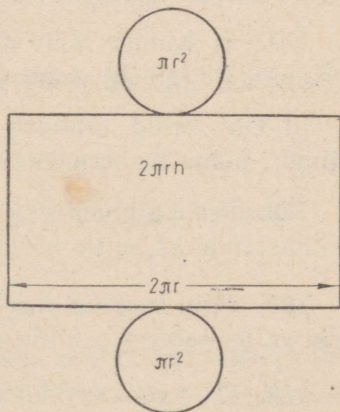
Avalda täispindala T külgpindala K ja põhjapindala P kaudu.

172. Silindri külgpindala leiame tema külgpinna laotusest. Et silindri külgpinna laotus on ristkülik, mille alus on võrdne silindri põhja ümbermõõduga ja kõrgus on võrdne silindri kõrgusega, siis

silindri külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega.

Kui silindri põhja raadius on r ja kõrgus on h , siis põhja ümbermõõt on $2\pi r$ ja silindri külgpindala valem on:

$$K = 2\pi r h$$



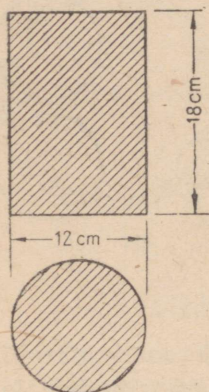
Joon. 112.

Liites sellega põhjade pindala $2\pi r^2$, saame täispindala

$$T = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

ehk

$$T = 2\pi r (h + r)$$



Joon. 113.

173. Arvuta silindri külgpindala, põhjade pindala ja täispindala, kui silindri põhja läbimõõt on 10 cm ja kõrgus 8 cm.

174. Silindri põhja raadius on 12 cm ja kõrgus 32 cm. Leia silindri külgpindala ja täispindala.

175. Kui palju plekki kulub silindrikujulise raudahju külginna katmiseks, kui ahju kõrgus on 2,4 m ja läbimõõt 1,2 m?

176. Joonisel 113 on antud silindri esivaade ja põhivaade. Arvuta silindri külgpindala.

177. Mitu ruutmeetrit plekki kulub vihma-veetoru valmistamiseks, kui toru pikkus on 8,5 m ja läbimõõt 12 cm ning valtsimiseks kulub 5% kogu materjalist?

178. Silindri kõrgus on a cm ja põhja läbimõõt b cm. Anna valem silindri külgpindala K ja täispindala T arvutamiseks.

179. a) Kuidas leida silindri kõrgust, kui on teada silindri külgpindala ja põhja ümbermõõt?

b) On antud silindri külgpindala ja kõrgus. Kuidas leida silindri põhja ümbermõõtu? läbimõõtu? raadiust?

180. Kui palju on vaja plekki silindrikujulise vabrikukorstna valmistamiseks, mille kõrgus on 12 m ja läbimõõt 6 dm?

181. Mitu ruutsentimeetrit plekki kulub silindrikujulise kaaneta nõu valmistamiseks, mille kõrgus on 5 cm ja põhja raadius 5 cm?

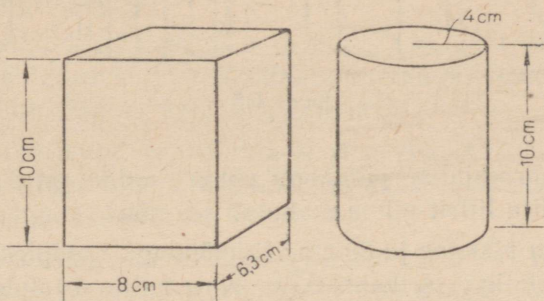
182. On vaja värvida 200 silindrikujulist posti. Iga posti kõrgus on 5 m ja läbimõõt 35 cm. Kui palju kulub selleks värnitsat, kui 1 m² värvimiseks kulub seda 0,2 kg?

183. Silindrikujulise konservipurgi põhja raadius on 6 cm ja kõrgus 15 cm. Kui palju plekki kulub selle purgi valmistamiseks?

184. Mitu tahvlit plekki mõõtmetega 142 cm $\times$ 71 cm on vaja 20 silindrikujulise veepange valmistamiseks, kui pange läbimõõt on 30 cm ja kõrgus 40 cm? Pange külge ja põhi valmistatakse terve plekitükist.

SILINDRI RUUMALA.

185. Kui võtta risttahukas ja silinder, mille põhjade pindalad on võrdsed ja kõrgused on võrdsed, täita üks neist liivaga ja valada see liiv teisesse, siis selgub, et nende kehade ruumalad on



Joon. 114.

võrdsed. Et risttahuka ruumala võrdub tema põhja pindala ja kõrguse korrutisega, siis ka

silindri ruumala võrdub tema põhja pindala ja kõrguse korrutisega:

$$V = P \cdot h.$$

Et silindri põhja pindala $P = \pi r^2$, siis asendamisel saame

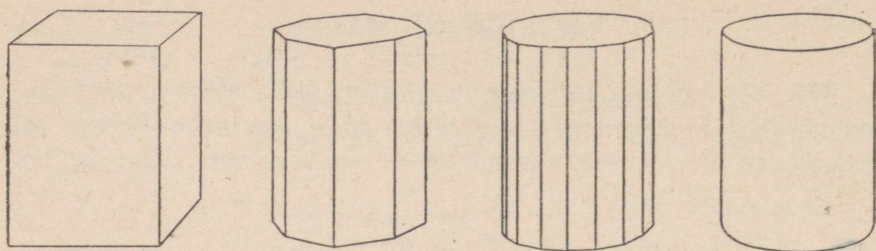
$$V = \pi r^2 h$$

186. Võta mingi silindrikujuline nõu, mõõda tema põhja läbimõõt ja kõrgus ning arvuta põhja pindala ja nõu ruumala. Kontrolli tulemust otsese mõõtmise teel, kasutades mõõtklaasi.

187. Silindri ruumala arvutamise eeskirja saame leida ka arutluse teel.

Kui korrapärase prisma külgtahkude arvu järjest suurendada (joon. 115), siis prisma erineb ikka vähem ja vähem silindrist. Kuidas leiame prisma ruumala? Mis sellest võib järeldada silindri ruumala kohta?

188. Mitu liitrit vett sisaldab silindrikujuline nõu, mille kõrgus on 9 dm ja sisemine läbimõõt 6 dm?



Joon. 115.

189. Silindrikujulise piimanõu põhja raadius on 8 cm ja kõrgus 30 cm. Mitu liitrit piima mahutab see nõu?

190. 90 cm pikkune ja 60 cm läbimõõduga raudplekist vaat on täidetud bensiiniga (erikaal 0,7). Kui palju kaalub see bensiin?

191. Silindrikujulise basseini läbimõõt on 9,1 m, vee sügavus basseinis on 70 cm. Mitu kuupmeetrit vett sisaldab see bassein?

192. Vasktraadi läbimõõt on 1 mm. Kui palju kaalub 50 m seda traati, kui vasktraadi erikaal on 8,9?

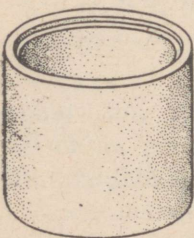
193. Kui palju kaalub 100 m vasktraati ($\varnothing 2$ mm, erikaal 8,9)?

194. Arvuta, kui palju kaalub silindrikujuline kuiv männipalk (erikaal 0,52), mille pikkus on 5 m ja läbimõõt 16 cm.

195. Klaaspurgi sisemine läbimõõt on 15 cm ja kõrgus 30 cm. Mitu liitrit keedist mahutab see purk?

196. Silindrikujulise kaevu läbimõõt on 12 dm. Mitu liitrit vett on selles kaevus, kui vee sügavus selles on 2,1 m?

197. Betoonest silindrikujulise kaevurakke (joon. 116) kõrgus on 8 dm, rakke sisemine läbimõõt 7,8 dm ja väline läbimõõt 9,2 dm. Kui palju kaalub see kaevurake? Betooni erikaal on 2,2.



198. Kui palju kaalub 4 m ümarrauda ($\varnothing 40$ mm)?

199. Kera terastraati (erikaal 7,85), läbimõõduga 5 mm, kaalub 77 kg. Mitu meetrit on selles kera traati?

200. Silindrikujuline veenõu sisaldab 180 l vett. Veenõu kõrgus on 1 m. Kui suur on selle veenõu põhja läbimõõt?

Joon. 116.

201. Silindrikujulise klaaspurgi sisemine läbimõõt on 18 cm. Kui kõrgel on veepind purgis, kui sinna valada 1 l vett?

202. 3 m pikkusest palgist, mille ristlõige on ruut küljepikkusega 40 cm, on vaja valmistada võimalikult suure läbimõõduga ümmargune völli. Kui suur on seejuures puidu kadu kuupdetsimeetrites ja protsentides?

203. Ristkülik külgedega a ja b ($a > b$) pöörleb kord ümber külje a , kord ümber külje b . Kuidas suhtuvad pöörlemisel tekkivate silindrite ruumalad ja kuidas külgpindalad?

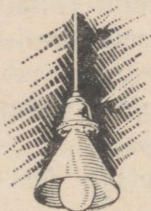
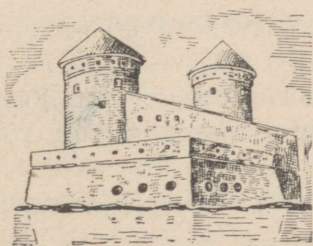
204. Silindrikujulise mõõtklaasi sisemine läbimõõt on 40 mm ja iga kriipsuvahe 5 cm³. Kui suur on kahe teineteisele järgneva kriipsu vaheline kaugus?

205. Silindrikujulise naftapaagi läbimõõt on 11 m. Nafta pind on paagis 4 m kõrgusel. Kui palju kaalub paagis olev nafta (erikaal 0,76)?

206. On vaja valmistada 1 liitri mahutavusega nõu, mille põhja läbimõõt on 8,6 cm. Kui kõrge peab olema see nõu?

207. Silindrikujuline teeklaas, mille sisemine läbimõõt on 5,6 cm, on pooleni täidetud veega. Pärast seda, kui klaasi lasti kivi, mis kaalus 128 g, tõusis vee pind 2 cm võrra. Arvuta kivi erikaal.

KOONUS.

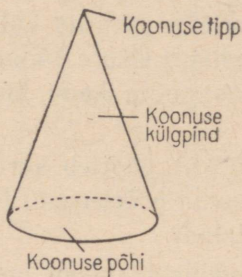


Joon. 117.

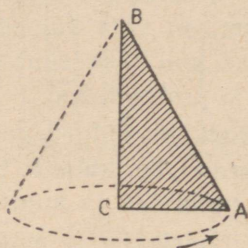
208. Vaatle joonisel 117 kujutatud tornide katuseid, lambivarju, telgi katust. Niisuguse kujuga kehi nimetatakse koonusteks.

Koonus on piiratud ühe ringiga, mida nimetatakse koonuse põhjaks, ja koonuse külgpinnaga. Külgpind on piiratud ühelt poolt

koonuse tipuga ja teiselt poolt koonuse põhja ringjoonega (joon. 118).



Joon. 118.



Joon. 119.

Nimeta veel koonusekujulisi kehi.

209. Koonust nimetatakse **pöördkehaks**, sest täisnurkse kolmnurga kiirel pöörlemisel ühe kaateti ümber näeme tekkivat koonust (joon. 119). Kaatetit, mille ümber toimub pöörlemine, nimetatakse koonuse teljeks, ühtlasi on ta ka koonuse kõrguseks; hüpoteenuusi, mis tekitab koonuse külgpinna, nimetatakse koonuse **moodustajaks**. Pöörleva kolmnurga teine kaatet tekitab koonuse põhja. See kaatet on koonuse **põhja raadiuseks**.

210. Nimeta joonise 119 põhjal a) millise külje ümber pöörleb kolmnurk ABC ja milleks on see külg koonusel? b) mille moodustab kaatet AC ja milleks on ta koonusel? c) mille moodustab hüpoteenus AB ja milleks on AB koonusel?

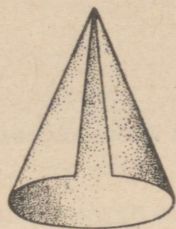
211. a) Miskujuline katus ehitatakse tavaliselt prismakujulisele tornile? silindrikujulisele tornile?

b) Kuiva liiva, viljateri, väiksemaid kive jne. ei saa panna prisma- või püramiidikujulisse hunnikusse. Missuguse kuju võtavad need hunnikud tavaliselt?

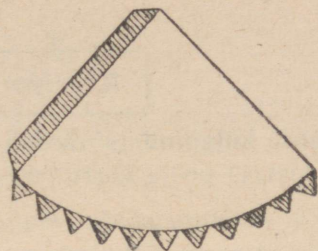
212. Arvuta koonuse põhja ümbermõõt, kui põhja raadius $r = 4$ cm; 1,5 dm.

KOONUSE PINNALAOTUS JA PINDALA.

213. Kata mingi koonuse külgpind ühekordselt paberiga, lõigates üleliigsed ääred ära, ja laota see paberileht tasapinnale (joon. 120). Nii saad koonuse külgpinna laotuse.



Joon. 120.



Joon. 121.

Missugune kuju on koonuse külginna laotusel? Mis on selle sektori raadiuseks ja millega võrdub sektori kaar?

Lõika välja ka koonuse põhi ja kleebi koonuse pinnalaotus vihikusse.

Koonuse külginna laotus on ringi sektor, mille raadius võrdub koonuse moodustajaga ja kaare pikkus võrdub koonuse põhja ümbermõõduga.

214. Koonuse külginna laotus on sektor, mille raadius on 10 cm ja nurk on 90° . Arvuta koonuse põhja raadius. Joonestatud külginna laotus, varusta see kleepimiseks vajalike ääretega, lõika paberist välja ning kleebi kokku koonuse mudel (joon. 121). Mõõda saadud koonuse põhja raadius ja võrdle tulemust arvutuse tulemusega.

215. Koonuse külginna laotus on ringi sektor, mille raadius on 8,4 cm ja nurk on 60° . Kui pikk on koonuse põhja raadius?

216. Koonuse põhja raadius on 5 cm ja moodustaja on 8 cm. Kui pikk on külginna laotuse kaar ja kui suur on selle nurk?

217. Koonuse põhja raadius on 1 dm ja moodustaja 2 dm. Kui suur on selle koonuse külginna laotuse pindala ja kui suur on koonuse külgpindala?

218. a) Tuletame valemi koonuse külgpindala K arvutamiseks. Olgu koonuse põhja raadius r ja moodustaja m . Siis külginna laotusena saadava sektori raadius on m ja kaare pikkus $s = 2\pi r$ (joon. 122). Et sektori pindala võrdub kaare pikkuse ja raadiuse poole korrutisega, siis koonuse külgpindala

$$K = \frac{2\pi r \cdot m}{2}$$

$$K = \pi r m$$

Koonuse külgpindala võrdub tema põhja ümbermõõdu ja moodustaja poole korrutisega.

Näide. Kui koonuse põhja raadius on 60 mm ja moodustaja on 100 mm, siis koonuse külgpindala

$$K = \pi \cdot 60 \cdot 100 = 18\,800 \text{ mm}^2 \approx 190 \text{ cm}^2.$$

b) Liites koonuse külgpindalaga $\pi r m$ tema põhja pindala πr^2 , saame koonuse täispindala:

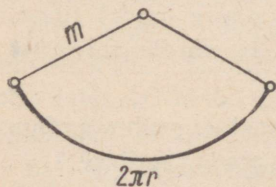
$$T = \pi r m + \pi r^2$$

ehk

$$T = \pi r (m + r)$$

Näide. Kui koonuse põhja raadius $r = 4 \text{ cm}$ ja moodustaja $m = 6 \text{ cm}$, siis koonuse täispindala

$$T = \pi \cdot 4 (6 + 4) = \pi \cdot 4 \cdot 10 = 40 \cdot 3,14 = 125,6 \approx 126 \text{ cm}^2$$



Joon. 122.

219. Kuidas arvutada korrapärase püramiidi külgpindala?

Avalda joonisel 123 kujutatud püramiidide külgpindala, kui püramiidi põhiserv on a ja apoteem on m .

Võrdle koonuse ja korrapärase püramiidi külgpindala arvutamise eeskirju.

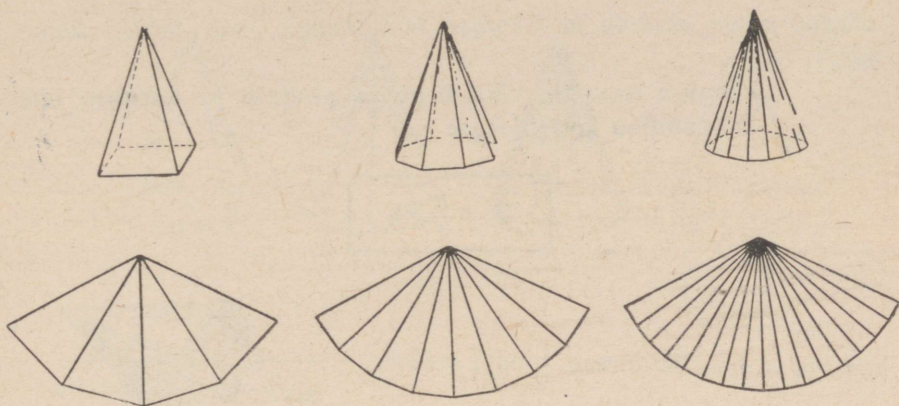
220. Arvuta külgpindala koonusel, mille põhja raadius on 4 cm ja moodustaja 6,5 cm.

221. Arvuta koonuse täispindala, kui koonuse põhja läbimõõt on 8 cm ja moodustaja 10 cm.

222. Arvuta täispindala koonusel, mille põhja raadius on 1,2 dm ja moodustaja 1,8 dm.

223. Mitu ruutmeetrit riiet kulub koonusekujulise telgi katmiseks, kui telgi kõrgus on 2,3 m ja põhja läbimõõt 3,4 m.

Näpunäide. Moodustaja leia vähendatud joonise abil (ruudulisel paberil).



Joon. 123.

224. Mitu ruutmeetrit plekki kulub torni koonusekujulise katuse katmiseks, kui katuse kõrgus on 3,8 m, torni läbimõõt 8,4 m ja kui valtsimiseks kulub 5% kogu materjalist?

225. Koonusekujulise katuse räästa pikkus on 15,7 m ja moodustaja 7,0 m. Kui suur on selle katuse pindala?

226. Koonuse põhja pindala on $28,26 \text{ dm}^2$ ja moodustaja 4,5 dm. Arvuta selle koonuse täispindala.

227. Koonuse külgpindala on $3,8 \text{ m}^2$ ja moodustaja 1,5 m. Kui suur on selle koonuse põhja raadius?

228. Täisnurkne kolmnurk, mille küljed on 3 m, 4 m ja 5 m, pöörleb pikema kaateti ümber. Kui suur on pöörlemisel tekkiva koonuse täispindala?

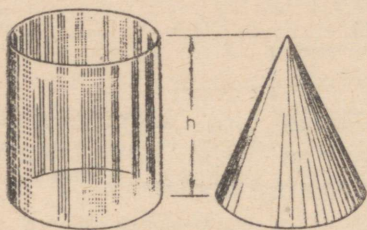
KOONUSE RUUMALA.

229. Koonuse ruumala arvutamise eeskirja leidmiseks kasutame võrdsete kõrgustega ja võrdsete põhjadega silindri ja koonuse õõnsaid mudeleid (joon. 124). Mõõtes, mitu koonusetäit liiva mahub sellesse silindrisse, selgub, et silindri ruumala on kolm korda suurem koonuse ruumalast (joon. 125). Et silindri ruumala

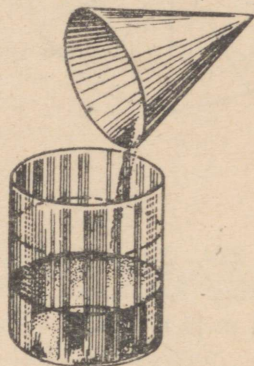
võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega, siis tehtud katse järgi

koonuse ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse ühe kolmandiku korrutisega:

$$V = \frac{1}{3} Ph$$



Joon. 124.



Joon. 125.

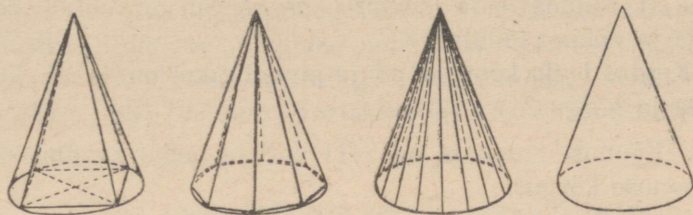
230. Tähistades koonuse põhja raadiuse tähega r ja kõrguse tähega h , koosta koonuse ruumala valem:

koonuse põhja pindala on ...,
põhja pindala ja kõrguse korrutis on ...,
koonuse ruumala

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

231. Koonuse ruumala arvutamise eeskirja saame leida ka arutluse teel.

Kujundame koonuse sisse võimalikult suure korrapärase nelinurkse püramiidi, siis korrapärase kaheksanurkse püramiidi, edasi korrapärase kuusteistnurkse püramiidi jne. (joon. 126). Mida suurem on nii saadud püramiidi külgtahkude arv, seda vähem tema ruumala erineb koonuse ruumalast. Missuguse eeskirja järgi saab arvutada püramiidi ruumala? Mis sellest võib järeldada koonuse ruumala kohta?



Joon. 126.

232. Kasutades ringi pindala tabelit, arvuta allpool antud andmeil koonuse ruumala.

r	1 cm	3 cm	3,2 dm	2,5 dm	1 m	3,5 m
h	3 cm	4 cm	5 dm	4,8 dm	2,5 m	5,2 m
πr^2						
$\pi r^2 h$						

233. Koonuse ruumala võib arvutada ka teisiti: kui r^2 või h on jaguv 3-ga, siis ei tarvitse korrutist $\pi r^2 \cdot h$ jagada 3-ga, vaid võib kas r^2 või h jagada 3-ga. Seega koonuse ruumala

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3} = \pi \frac{r^2}{3} \cdot h.$$

234. Koonusekujulise liivakuhja kõrgus on 1,2 m ja põhja raadius 0,8 m. Kui palju on selles kuhjas liiva?

235. Mitu 1,5-tonnise kandejõuga auto koormat liiva (erikaal 1,4) saab hunnikust, mille kõrgus on 1,5 m ja ümbermõõt 10,7 m?

236. Koonusekujulise kartulikuhja ümbermõõt on 11,9 m ja kõrgus 1,6 m. Mitu tonni kartuleid on selles kuhjas, kui 1 hl kartuleid kaalub 72 kg?

237. Koonuse kõrgus on 6,0 m ja põhja ümbermõõt 15,7 m. Leia selle koonuse ruumala.

238. a) Kuidas leida koonuse kõrgus, kui on antud koonuse ruumala ja põhja pindala?

b) Kuidas leida koonuse põhja pindala, kui on teada koonuse ruumala ja kõrgus?

239. Koonuse ruumala on 2411 cm^3 ja põhja raadius $8,0 \text{ cm}$. Leia koonuse kõrgus.

240. Koonuse põhja raadius on $4,5 \text{ cm}$ ja moodustaja $7,0 \text{ cm}$. Leia selle koonuse ruumala.

Näpunäide. *Koonuse kõrgus leia joonise abil.*

241. Rauast (erikaal $7,8$) koonuse põhja läbimõõt on $10,4 \text{ cm}$ ja kõrgus $1,7 \text{ dm}$. Kui palju kaalub see koonus?

242. Puust (erikaal $0,6$) koonuse põhja raadius on $4,8 \text{ cm}$ ja kõrgus $12,0 \text{ cm}$. Kui palju kaalub see koonus?

243. Metallist koonuse põhja raadius on $2,2 \text{ cm}$ ja kõrgus $4,5 \text{ cm}$. Kui palju jääb see koonus kergemaks, kui teda kaaluda nõõri otsas vette lastuna?

244. Kui palju kaalub vasest (erikaal $8,8$) koonus vees, kui koonuse põhja läbimõõt on $4,0 \text{ cm}$ ja kõrgus $5,0 \text{ cm}$?

245. Koonusekujulise kivisöehunniku ümbermõõt on $5,2 \text{ m}$ ja kõrgus $2,2 \text{ m}$. Kui palju kaalub see kivisüsi, kui 1 m^3 kaalub $1,3 \text{ t}$?

KERA.

246. *Jalgpall, gloobus, lambikuppel ja õhupall on kerakujulised kehad (joon. 127).*

Nimeta veel kerakujulisi kehi.



Joon. 127.

Kera on piiratud kõverpinnaga, mida nimetatakse **kerapinnaks** ehk **sfääriks**. Sfäär on niisugune pind, mille kõik punktid asetsevad ühest kindlast punktist ühel ja samal kaugusel. Seda punkti nimetatakse sfääri (ka kera) **keskpunktiks** (punkt O joonisel 128).

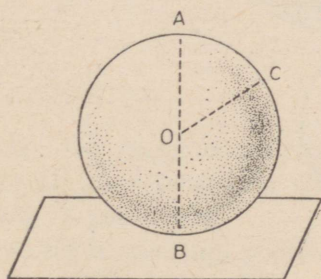
Seega võib öelda, et

sfäär on antud punktist antud kaugusel asetseva punkti geomeetriliseks kohaks ruumis.

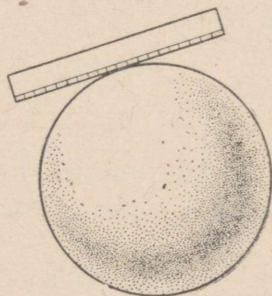
Sirglõik, mis ühendab kera pinna mingi punkti kera keskpunktiga, on kera **raadius** (OC joonisel 128). Ühe ja sama kera raadiused on võrdsed. Sirglõiku, mis ühendab kaht kera pinna punkti ja läbib kera keskpunkti, nimetatakse **kera läbimõõduks** ehk **dia-meetriks** (AB joonisel 128).

Kera läbimõõt on kera raadiusest kaks korda pikem: kui kera raadius on r cm, siis läbimõõt $d = 2r$ cm.

Kuidas mõõta kera läbimõõtu?



Joon. 128.



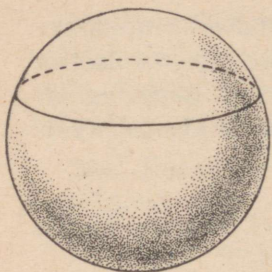
Joon. 129.

247. Kerapind on kõverpind, nagu silindri ja koonuse külgpindki. Viimastest erineb kerapind selle poolest, et kerapinnale ei saa üheski sihis joonestada sirgeid (joon. 129).

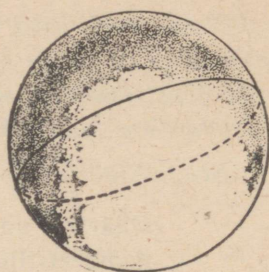
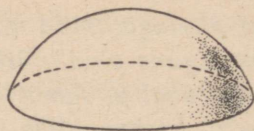
Mitmes sihis saab sirgeid joonestada silindri külgpinnal läbi selle pinna mingi punkti?

Lahenda sama küsimus koonuse külgpinna kohta.

248. Võta võimalikult kerakujuline kartul või õun. Lõika see noaga kaheks osaks (joon. 130). Miskujuline on saadud lõige? Tee veel samalaadilisi lõikeid. Miskujuline on iga lõige?



Joon. 130.

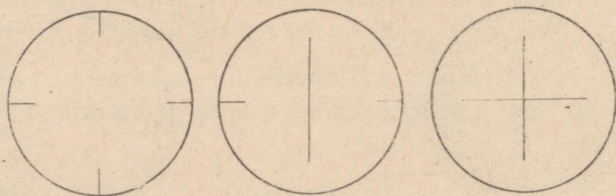


Joon. 131.

249. Kera lõiget, mis läbib kera keskpunkti, nimetatakse kera suurringiks (joon. 131).

Miks nimetatakse seda lõiget suurringiks? Mis on kera suurringi raadiuseks?

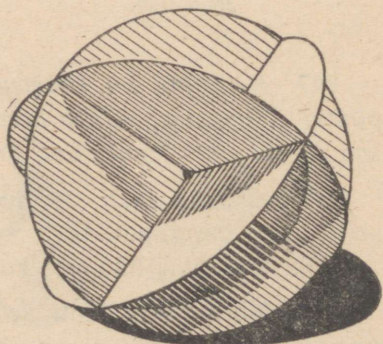
Kera suurringid on omavahel võrdsed, sest iga suurringi läbimõõt võrdub kera läbimõõduga. Suurring poolitab kera ja kera pinna.



Joon. 132.

250. Joonesta joonestuspaberile 3 võrdset ringi, lõika need välja ja tee neile sisselõiked, nagu on näidatud joonisel 132. Pane need ringid kokku joonisel 133 näidatud «tuulekeraks».

Mitmest ringist on koostatud «tuulekera» ja mis need ringid on «tuulekera» suhtes? Mis võib öelda nende kolme suurringi lõikejoonte kohta?



Joon. 133.

251. Maa kujutab endast suurt kera, mille raadius on 6371 km. Meridiaanid on selle kera suurringjooned, samuti on suurringjoon ka ekvaator.

Vaatle gloobust ja tee kindlaks, kas **paralleelid** on suurringjooned (joon. 134).

Kui suur on ekvaatori läbimõõt? meridiaani läbimõõt?

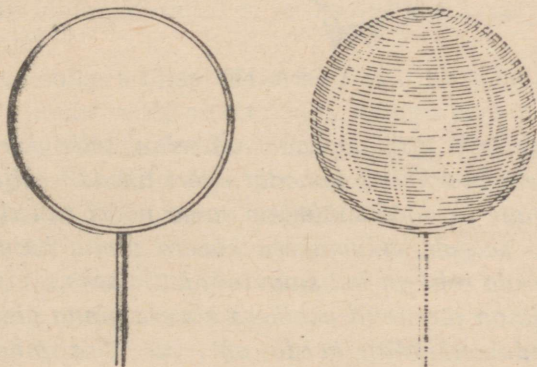
Kui suur on paralleelringide läbimõõdu ülemmäär?



Joon. 134.

252. Kui ringjoon pöörleb kiiresti oma diameetri ümber, siis näeme tekkivat kerapinda (joon. 135). Sfäär on seega pöördpind ja kera — pöördkeha.

Mis tekib poolringi pöörlemisel tema läbimõõdu ümber?



Joon. 135.

253. a) Kera läbimõõt on 12 cm, Kui suur on selle kera suur-
ringi pindala?

b) Kera raadius on 3,5 dm. Kui suur on selle kera suurringi
pindala?

KERA PINDALA.

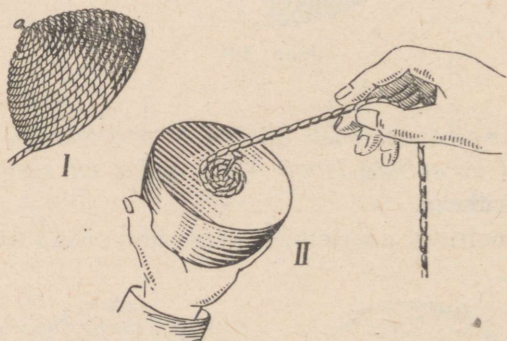
254. Varem tundmaõpitud pöördkehade (silindri ja koonuse)
külgpindala arvutamise eeskirja leidsime nende pinnalaotuse abil.

Selgita, kas ka kerapinda saab laotada tasapinnale. Selleks
katsu mõnda kerakujulist eset (näiteks kummipalli, gloobust)
paberilehega katta. Mis selgub?

Kui käepärast on poolik kummipall, siis proovi seda laotada
tasapinnale. Kas see on võimalik?

Kerapinda ei saa tasapinnale laotada.

255. Et kerapinda ei saa tasapinnale laotada, siis kasutame
kera pindala määramiseks teistsugust võtet. Alljärgnev joonis



Joon. 136.

näitab, kuidas kera pindala saab võrrelda selle kera suurringi
pindalaga. Selleks mähime jämedat nööri tihedalt esiteks poolkera
kõverale pinnale ja pärast mähime sama nööri suurringi pinnale.
Nööri mõõtes selgub, et poolkera kõvera pinna katmiseks kulub
nööri kaks korda rohkem kui suurringi katmiseks.

Mitu korda on järelikult poolkera kõvera pinna pindala suurem
suurringi pindalast? Mitu korda on terve kera pindala suurem
suurringi pindalast?

See katse näitab, et

kera pindala on neli korda suurem sama kera suurringi pindalast.

Kui kera raadius on r , siis suurringi pindala on πr^2 ja eelneva põhjal kera pindala

$$S = 4\pi r^2$$

256. Täida järgmise tabeli tühjad kohad.

Suurringi pindala	15 cm ²	3,5 m ²			0,35 dm ²	
Kera pindala			1 m ²	72 cm ²		3,48 dm ²

257. Kera raadius on 5 cm. Arvuta kera pindala.

258. Arvuta kera pindala, kui kera läbimõõt on 36 cm.

259. Võrkpalli läbimõõt on 21 cm. Kui palju nahka kulub palli kesta valmistamiseks, kui õmblusteks arvestada 15% palli pindalast?

260. a) Mõõda vajalikud suurused ja arvuta kooli gloobuse pindala.

b) Arvuta Maa pindala (vt. ülesanne 251).

261. Kera suurringi pindala on 19,6 dm². Kui suur on selle poolkera täispindala?

262. Mitu ruutmeetrit riidet kulub õhupalli kesta valmistamiseks, kui palli läbimõõt on 20 m ja õmblusteks arvestada 5% õhupalli pindalast?

263. Leia poolkera täispindala, kui kera läbimõõt on 5 dm.

264. Kera übermõõt on 24,5 dm. Arvuta kera pindala.

265. Kooli gloobuse übermõõt on 157 cm. Mitu ruutsentimeetrit on sellel gloobusel Euroopa pindala, kui Euroopa pindala moodustab ligikaudu 2% maakera pindalast?

266. Kui palju plekki on vaja poolkerakujulise kuppelkatuse katmiseks, kui katuse läbimõõt on 6,0 m?

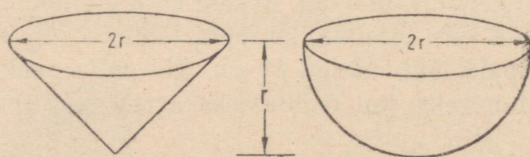
267. Kuupi, mille serva pikkus on 2,0 dm, on paigutatud kera, mis puudutab kuubi tahke. Kumba täispindala on suurem ja kui palju?

268. Täida järgmine tabel.

Kera raadius (dm)	4	5,9	8,7	0,6	120
Suuringi pindala (dm ²)					
Kera pindala (dm ²)					

KERA RUUMALA.

269. Kera ruumala arvutamise eeskirja leidmiseks kasutame joonisel 137 kujutatud koonuse ja poolkera õõnsaid mudeleid. Jooniselt näeme, et koonuse kõrgus ja põhja raadius peavad olema



Joon. 137.

võrdsed poolkera raadiusega. Mõõtes, mitu koonusetäit liiva mahub sellesse poolkerasse, näeme, et poolkera ruumala on koonuse ruumalast kaks korda suurem. Et kasutatud koonuse ruumala on

$$\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3} \pi r^3,$$

siis poolkera ruumala on

$$2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$$

ja kera ruumala

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Sellele valemile saab anda kuju

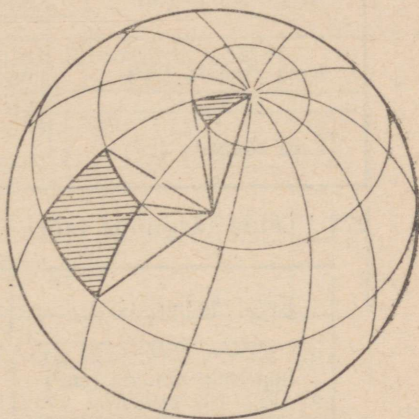
$$V = \frac{1}{3} \cdot 4\pi r^2 \cdot r,$$

millest nähtub, et

kera ruumala võrdub kera pindala ja raadiuse ühe kolmandiku korrutisega.

270. Eelmises ülesandes leitud seos kera ruumala, pindala ja raadiuse vahel saab arusaadavaks, kui kasutada järgmist mõttekäiku.

Meridiaanid ja paralleelid tükeldavad kera pinna osadeks, mis meenutavad trapetseid ja kolmnurki (joon. 138). Ühendame iga sellise osa tipud kera keskpunktiga ja vaatleme püramiiditaolisi kehi, mille põhjadeks on kerapinna tükeldamisel saadud kujundid ja ühiseks tipuks kera keskpunkt. Nende kehade ruumalade summa võrdub kera ruumalaga ja põhjade pindalade summa — kera pindalaga. Kui niisuguse keha põhi on küllalt väike, siis võib tema ruumala ligikaudseks arvutamiseks rakendada püramiidi ruumala valemit, võttes püramiidi kõrguseks kera raadiuse. Tähistades nende püramiiditaoliste kehade ruumalad tähtedega V_1, V_2, V_3 jne., vastavate põhjade pindalad aga tähtedega S_1, S_2, S_3 jne. ja kera raadiuse tähega r , saame:



Joon. 138.

$$V_1 \approx \frac{1}{3} S_1 r; V_2 \approx \frac{1}{3} S_2 r; V_3 \approx \frac{1}{3} S_3 r \text{ jne.}$$

Liites püramiiditaoliste kehade ruumalad V_1, V_2, V_3 jne., saame kera ruumala V . Seega

$$V \approx \frac{1}{3} S_1 r + \frac{1}{3} S_2 r + \frac{1}{3} S_3 r + \dots$$

Võttes võrduse paremal poolel ühised tegurid $\frac{1}{3}$ ja r sulgude ette, saame:

$$V \approx \frac{1}{3} r(S_1 + S_2 + S_3 + \dots).$$

Et sulgudes seisev avaldis kujutab kera pindala S , siis saame:

$$V \approx \frac{1}{3} rS.$$

Saab tõestada, et see võrdus ei ole ligikaudne, vaid täpne.

271. Täida järgmine tabel.

Kera raadius (m)	0,10	0,30	0,80	2,0	4,0	10,0
Kera pindala (m ²)	0,126	1,13	8,04	50,3	201	1256
Kera ruumala (m ³)						

272. Täida järgmine tabel.

Kera raadius (cm)	1,0	8,0	20	30	50
Suurringi pindala (cm ²)					
Kera pindala (cm ²)					
Kera ruumala (cm ³)					

273. Kera ruumala arvutamise lihtsustamiseks leiame teguri, millega tuleb korrutada raadiuse kuubi, et saada kera ruumala:

$$\frac{4}{3} \pi \approx 4,19.$$

Seda teades võime kirjutada

$$V \approx 4,19r^3$$

274. Arvuta eelmises ülesandes antud eeskirja järgi kera ruumala tabelis antud raadiuste põhjal.

r (cm)	2,0	5,0	7,0	10,1	$\frac{1}{2}$	1,2	2,5	$1\frac{1}{3}$
r^3 (cm ³)								
V (cm ³)								

275. Näita, et läbimõõdu d kaudu avaldub kera ruumala järgmiselt:

$$V = 0,52d^3$$

Arvuta kera ruumala tabelis antud läbimõõdu põhjal.

d (cm)	3,0	4,0	6,0	8,0	9,5	12	$\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$
d^3 (cm ³)								
V (cm ³)								

276. Arvuta kera ruumala, kui kera läbimõõt on 14 cm.

277. Arvuta kera ruumala, kui kera raadius on 3,00 m.

278. Kui palju kaalub rauast kera, kui kera raadius on 18 cm?

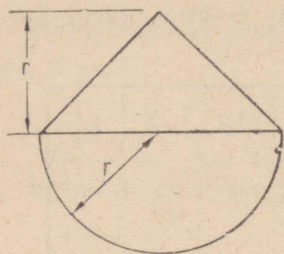
279. Puust kerakujulise kuuli läbimõõt on 6,5 cm. Kui palju kaalub see kera, kui puu erikaal on 0,6?

280. Kas sa jõuad üles tõsta korgist kera, mille läbimõõt on 1 m? Korgi erikaal on 0,24.

281. Kui palju kaaluvad 100 teraskuuli, kui ühe kuuli läbimõõt on 5 mm ja terase erikaal on 7,83?

282. Mitu protsenti materjali läheb kaotsi, kui kuubist treida võimalikult suur kera?

283. Kuidas suhtuvad kahe kera ruumalad, kui ühe kera raadius on teise kera raadiusest kaks korda suurem?



Joon. 139.

284. Kuidas suhtuvad kahe kera pindalad, kui ühe kera raadius on teise kera raadiusest kaks korda suurem?

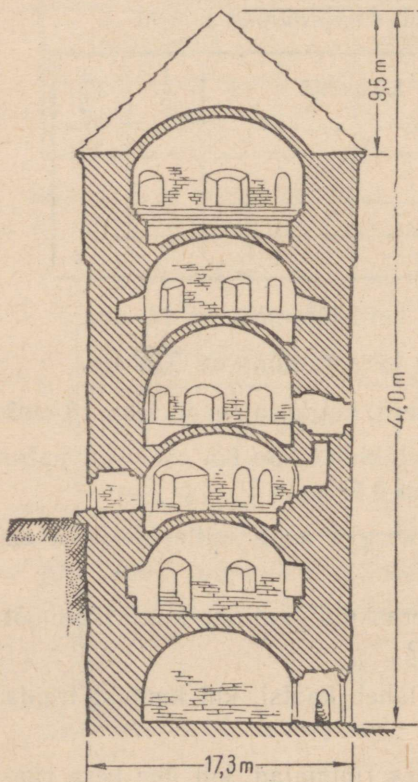
285. Poolkera suurringile, mille raadius on r , on paigutatud koonus raadiusega r ja kõrgusega r (joon. 139).

Kui suur on tekkinud keha ruumala?

286. Kui palju kaalub rauast vanaaegne kahurikuul läbimõõduga 10 cm? Raua erikaal on 7,8.

287. Mitu liitrit vett mahutab 40-sentimeetrise läbimõõduga poolkerakujuline pada?

288. Ühe ja sama hinnaga saaks osta kaks õuna läbimõõduga 6 cm või ühe õuna läbimõõduga 8 cm. Kumb ost on kasulikum?



Joon. 140

289. Joonis 140 kujutab Tallinna torni «Kiek in de Kōk» läbilõikes. Torni müüride paksus on 3,7 m. Arvuta järgmised suurused.

1) Torni katuse pindala. Puuduvate mõõtmete leidmiseks tee vähendatud joonis.

2) Torni välispindala (ilma katusest).

3) Torni iga korruse poolkerakujulise lae pindala.

4) Torni seinteks vajamineva pae kogus (akna- ja ukseavasid arvesse võtmata).

5) Torni seinte kaal, kui pae erikaal on 2,5.

2. SARNASED HULKNURGAD.

PÜTAGORASE TEOREEM.

290. Kui täisnurkse kolmnurga kaks külge on antud, siis kolmnurk on määratud. Joonestades antud külgede järgi kolmnurga, saame joonisest mõõtmise teel leida tema kolmanda külje ja nurgad. Sellist kolmnurga tundmatute elementide leidmise viisi nime-tame kolmnurga graafiliseks lahendamiseks.

Lahenda graafiliselt täisnurkne kolmnurk, mille

a) kaated on 7,2 cm ja 5,4 cm;

b) üks kaatet on 4,5 cm ja hüpoteenus 8 cm.

Arvuta joonestatud kolmnurga külgede pikkuste ruudud ja võrdle hüpoteenuusi pikkuse ruutu kaatetite pikkuste ruutude sum-maga.

291. Täisnurkse kolmnurga kahe külje põhjal on kolmandat külge võimalik leida ka arutuse teel. Selleks peab tundma seost täisnurkse kolmnurga külgede vahel, mida väljendab Pütagorase¹ teoreem:

Täisnurkse kolmnurga kaatetite ruutude summa võrdub hüpoteenuusi ruuduga.

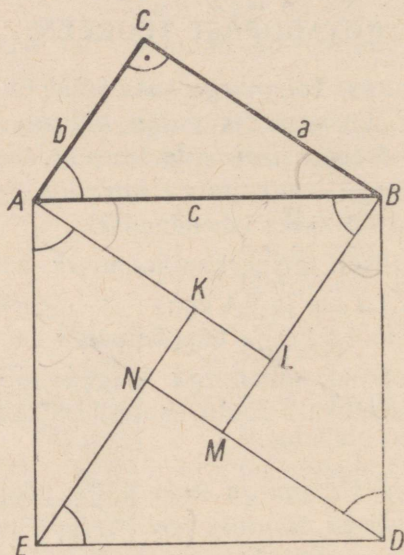
Olgu ühtedes ja samades ühikutes täisnurkse kolmnurga kaate-tite pikkused a ja b ning hüpoteenuusi pikkus c . Teoreemi sõnastu-ses esinevad «kaatetite ruudud» ja «hüpoteenuusi ruut» tähenda-vad siis nende külgede pikkuste ruute a^2 , b^2 ja c^2 . Teoreemi väide on seega:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Tõestuseks ehitame täisnurkse kolmnurga ABC hüpoteenuusile

¹ Pütagoras, kreeka matemaatik, elas u. 580—500 e. m. a.

$AB = c$ ruudu $ABDE$ (joon. 141). Selle ruudu pindala on siis c^2 pindalaühikut. Joonestame ruudu $ABDE$ tippudest A ja D sirged, mis on paralleelsed kaatetiga BC , ja tippudest B ja E sirged, mis on paralleelsed kaatetiga AC . Ruut $ABDE$ tükeldub sellega neljaks kolmnurgaks ABL , BDM , DEN ja EAK , ning ruuduks $KLMN$, mille külg võrdub vahega $a - b$ (miks?). Need kolmnurgad on kõik võrdsed antud kolmnurgaga ABC , sest igal neist on üks külg ja selle kaks lähisnurka vastavalt võrdsed kolmnurga ABC küljega AB ja selle kahe lähisnurgaga (põhjenda seda!).



Joon. 141.

Arvutame ruudu $ABDE$ tükeldamisel saadud kujundite pindalade summa. See on

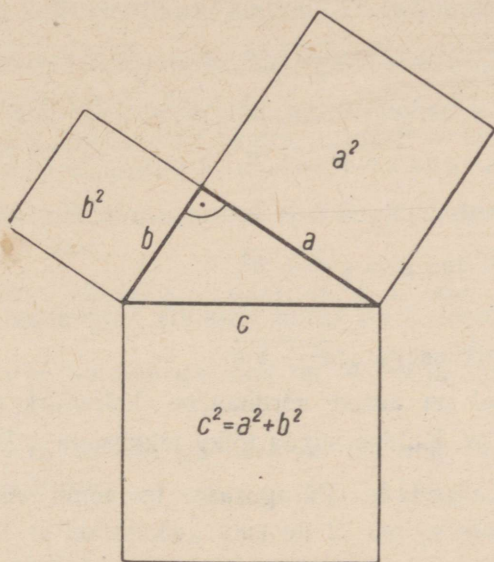
$$4 \cdot \frac{ab}{2} + (a - b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2.$$

Et tükeldatava ruudu pindala oli c^2 , siis

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

mida oligi tarvis tõestada.

292. Kui arvesse võtta, et kaateti ruut väljendab kaatetile ehitatud ruudu pindala ja hüpotenuusi ruut hüpotenuusile ehitatud ruudu pindala, siis Pütagorase teoreem ütleb, et täisnurkse kolmnurga kaatetitele ehitatud ruutude pindalade summa võrdub sama kolmnurga hüpotenuusile ehitatud ruudu pindalaga. Seega Pütagorase teoreem annab võimaluse ehitada ruutu, mille pindala võrdub kahe antud ruudu pindalade summaga (joon. 142). Selleks



Joon. 142.

joonestame täisnurkse kolmnurga, mille kaatetiteks on antud ruutude küljed. Otsitava ruudu küljeks on siis selle kolmnurga hüpotenuus. Kui antud ruutude küljed on a ja b , otsitava ruudu külg c , siis otsitava ruudu pindala

$$c^2 = a^2 + b^2$$

ja külg

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Pütagorase teoreem võimaldab ehitada ka ruutu, mille pindala võrdub kahe antud ruudu pindalade vahega. Olgu antud ruut küljega c ja ruut küljega $b < c$. Et saada ruutu, mille pindala võrdub

$c^2 - b^2$, joonestame täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuus on c ja üks kaatet b . Siis teise kaateti a ruut

$$a^2 = c^2 - b^2$$

ja kaatet

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}.$$

See ongi otsitava ruudu külge.

293. Võttes ühikuks 1 cm, leia graafiliselt lõik pikkusega

$$x = \sqrt{5^2 + 4^2}, \quad y = \sqrt{4,7^2 + 6,5^2}, \quad z = \sqrt{3,5^2 + 6,8^2}.$$

294. Võttes ühikuks 1 cm, leia graafiliselt lõik pikkusega

$$x = \sqrt{6^2 - 5^2}, \quad y = \sqrt{8,5^2 - 5,2^2}, \quad z = \sqrt{7,4^2 - 3,4^2}.$$

295. On antud lõigud a ja b , kus $a > b$. Konstrueeri lõik

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{ja} \quad y = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

296. a) Joonisel on antud ristkülik külgedega a ja b . Kuidas saada lõiku pikkusega $\sqrt{a^2 + b^2}$?

b) Joonisel on antud võrdhaarne kolmnurk, mille haar on b ja alus on $2a$. Kuidas saada lõiku pikkusega $\sqrt{b^2 - a^2}$?

297. a) Lahendada Pütagorase teoreemi väljendav valem $a^2 + b^2 = c^2$

1) hüpotenuusi c suhtes;

2) kaateti a suhtes;

3) kaateti b suhtes.

Arvuta peast c , kui $a = 3$ ja $b = 4$.

Arvuta peast a , kui $c = 10$ ja $b = 6$.

Arvuta peast b , kui $c = 13$ ja $a = 12$.

b) Täisnurkse kolmnurga külgede kirjalikul arvutamisel Pütagorase teoreemi põhjal kasuta (vajaduse korral) nii ruutude kui ka ruutjuurte tabelit.

Näide. Kui nõutakse leida kaatet b hüpotenuusi $c = 7,2$ m ja kaatet $a = 5,4$ m järgi, siis avaldades b , saame

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Asendades c ja b antud väärtustega ning kasutades ruutude tabelit, saame

$$b = \sqrt{7,3^2 - 5,4^2};$$

$$b = \sqrt{53,3 - 29,2};$$

$$b = \sqrt{24,1}.$$

Ruutjuurte tabelist saame nüüd, et

$$b = 4,91 \approx 4,9 \text{ m.}$$

298. Kui pikk on täisnurkse kolmnurga hüpotenuus, kui kaatet $a = 2,8$ cm ja kaatet $b = 4,5$ cm?

299. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 0,39$ m ja hüpotenuus $c = 0,89$ m. Kui pikk on kaatet b ?

300. Võrdhaarse kolmnurga alus on 8,6 cm ja kõrgus 7,2 cm. Arvuta kolmnurga haar.

301. Võrdhaarse kolmnurga haar on 1 m, alus 1,6 m. Leia kõrgus.

302. Võrdhaarse kolmnurga haar on 14 cm ja kõrgus 10 cm. Kui pikk on alus?

✓ 303. Võrdhaarse kolmnurga alus on 90 mm ja übermõõt 196 mm. Arvuta kõrgus.

304. Võrdhaarse kolmnurga alus on 12 cm ja haar 8 cm. Arvuta kolmnurga pindala.

○ 305. Võrdhaarse kolmnurga übermõõt on 196 m ja haar 65 m. Arvuta kolmnurga pindala.

306. Ristkülikukujulise maatüki üks külge on 70 m ja diagonaal 74 m. Mitu aari on maatüki pindala?

○ 307. Jalgteel läbi pargi lõikab sellest ära täisnurkse kolmnurga kujulise tüki, mille kaks lühemat külge on 68 m ja 117 m. Kui palju on jalgteel lühem teest ümber pargi nurga?

○ 308. Avaldada ruudu diagonaal d külje a funktsioonina.

○ 309. Avaldada võrdkülgse kolmnurga kõrgus h ja pindala S külje a funktsioonina.

○ 310. Ristküliku alus on 10 pikkusühikut. Avalda diagonaal d kõrguse x funktsioonina.

311. Rombi üks diagonaal on $4x$ pikkusühikut ja teine diagonaal $6x$ ühikut. Avalda rombi külge a ja pindala S suuruse x funktsioonina.

312. Täisnurkse trapetsi alused on 24 m ja 14 m, kõrgus 17 m. Arvuta trapetsi ümbermõõt.

313. Võrdhaarse trapetsi alused on 8 cm, ja 5,2 cm, kõrgus 4,8 cm. Kui suur on trapetsi ümbermõõt?

314. Võrdhaarse trapetsi alused on 1,80 m ja 1,30 m, haar on 0,78 m. Arvuta trapetsi pindala.

315. Ringi raadius on 78 cm. Kui kaugel keskpunktist asetseb kõõl, mille pikkus on 60 cm?

316. Kõõl, mille pikkus on 7 cm, asetseb ringi keskpunktist 8,4 cm kaugusel. Kui pikk on ringi raadius?

317. Ruudu diagonaali pikkus on 2,4 m. Arvuta ruudu ümbermõõt ja pindala.

318. Võrdkülgse kolmnurga kõrgus on 15 cm. Kui pikk on selle kolmnurga külge?

319. Korrapärase kuusnurga külge on 7,4 cm. Arvuta apoteem ja pindala.

320. Korrapärase kuusnurga apoteem on 4 cm. Arvuta külge ja pindala.

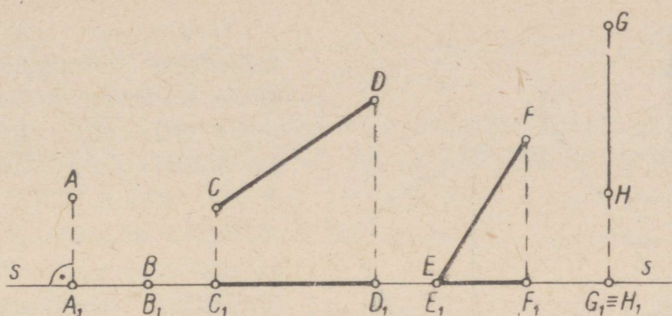
EUKLEIDESE TEOREEM.

321. Tutvume kõigepealt punkti ja lõigu projektsiooni mõistega.

Punkti projektsiooniks sirgel nimetatakse punktist sirgele tõmmatud ristlõigu aluspunkti.

Näiteks (joon. 143), kui punktist A on sirgele s tõmmatud ristlõik AA_1 , siis selle ristlõigu aluspunkt A_1 on punkti A projektsioon sirgel s . Kui punkt asetseb sirgel s , siis tema projektsioon sirgel s langeb ühte punkti endaga (nagu B ja B_1 joonisel 143).

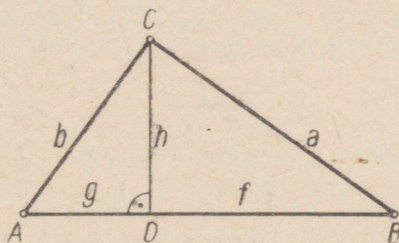
Lõigu projektsiooniks sirgel nimetatakse kujundit, mille moodustavad lõigu kõikide punktide projektsioonid sirgel.



Joon. 143.

Näiteks on joonisel 143 lõigu CD projektsiooniks sirgel s lõik C_1D_1 , lõigu EF projektsiooniks on lõik E_1F_1 , kuid lõigu GH projektsiooniks on üksainus punkt G_1 (ehk H_1). Jättes selle erandi kõrvale, võime öelda, et lõigu projektsiooniks on lõigu otspunktide projektsioonide vaheline lõik.

322. Joonestame täisnurkses kolmnurgas ABC hüpotenuusile $AB=c$ kõrguse $CD=h$ (joon. 144). Kõrgus jaotab hüpotenuusi



Joon. 144.

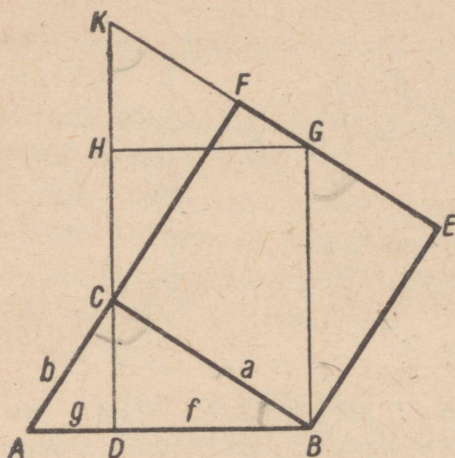
kaheks lõiguks $BD=f$ ja $AD=g$. Need lõigud on kaatetite projektsioonid hüpotenuusil: f on kaateti a projektsioon ja g on kaateti b projektsioon. On ilmne, et

$$f + g = c.$$

Tõestame, et kaatetit, tema projektsiooni ja hüpotenuusi seob järgmine nn. Eukleidese¹ teoreem:

täisnurkse kolmnurga kaateti ruut võrdub selle kaateti projektsiooni ja hüpotenuusi korrutisega.

¹ Eukleides, kreeka matemaatik, elas u. 315—255 e.m.a., andis esimesena geomeetria süstemaatilise ülesehituse.



Joon. 145.

Tõestuseks joonestame täisnurkse kolmnurga ABC ühele kaatetile, näiteks kaatetile BC ruudu BEFC ja teisendame selle ristkülikuks BGHD (joon. 145). Selleks tõmbame abisirge $BG \perp AB$ ja eraldame ruudust BEFC täisnurkse kolmnurga BEG, mis on võrdne antud kolmnurgaga BCA (põhjenda seda!). Sellest jäeldub, et $BG = BA$. Paigutades kolmnurga BEG asendisse CFK, saame ruudust BEFC rööpküliku BGKC. Eraldades sel-

lest sirgega $GH \parallel BD$ kolmnurga GHK ja viies selle asendisse BCD, saame ristküliku BGHD. Selle ristküliku üks külg $BD = f$ on kaateti a projektsioon ja teine külg $BG = AB = c$; tähendab, ristküliku BGHD pindala on fc . Et ruudu BEFC pindala on a^2 ja tema teisendamisel ristkülikuks pindala ei muutu, siis

$$a^2 = fc,$$

millega väide on kaateti a kohta tõestatud. Analoogiliselt saame selle tõestada teise kaateti kohta:

$$b^2 = gc.$$

323. Kui Eukleidese teoreemi väljendavad seosed

$$a^2 = cf \text{ ja } b^2 = cg$$

lahendada vastavalt a ja b suhtes, siis saame:

$$a = \sqrt{cf} \text{ ja } b = \sqrt{cg}.$$

Et ruutjuurt kahe arvu korrutisest nimetatakse nende arvude geomeetriliseks keskmiseks, siis võime Eukleidese teoreemi sõnastada ka nii:

täisnurkse kolmnurga kaatet on oma projektsiooni ja hüpotenuusi geomeetriline keskmine.

324. Leia peast järgmiste arvude geomeetriline keskmine: 4 ja 9; 16 ja 4; 25 ja 16; 0,5 ja 8; 0,9 ja 0,4.

325. Leia ruutjuurte tabeli abil järgmiste arvude geomeetriline keskmine: 12 ja 25; 27 ja 38; 2,4 ja 8,5; 0,14 ja 0,3; 0,52 ja 1,2.

326. Eukleidese teoreem seob kolme suurust: kaatetit, selle projektsiooni ja hüpotenuusi. Kui neist kaks suurust on antud, siis kolmanda saame arvutada.

Näiteid. 1. Kui $c=12$ ja $f=3$, siis valemi $a^2=cf$ järgi

$$a^2=12 \cdot 3=36 \text{ ja } a=\sqrt{36}=6.$$

2. Kui $b=8$ ja $c=12$, siis valemi $b^2=cg$ põhjal

$$g=b^2:c=8^2:12=64:12=5\frac{1}{3}.$$

3. Kui $a=6$ ja $f=3$, siis valemi $a^2=cf$ põhjal

$$c=a^2:f=6^2:3=36:3=12.$$

✓ 327. Täisnurkse kolmnurga kaatet $b=16$ m ja hüpotenuus $c=24$ m. Arvuta kaatetite projektsioonid.

328. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a=8$ cm ja hüpotenuus $c=15$ cm. Kui pikad on kaatetite projektsioonid?

✓ 329. Täisnurkse kolmnurga kaatetite projektsioonid on 4,8 dm ja 2,6 dm. Kui pikad on kaatetid?

330. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus $c=9,45$ m ja kaateti a projektsioon $f=4,2$ m. Kui pikk on kaatet a ?

✓ 331. Täisnurkse kolmnurga kaateti a projektsioon on 32 cm ja kaateti b projektsioon 40 cm. Kui pikad on kaatetid?

332. Arvuta täisnurkse kolmnurga kohta tabelis nõutud suurused.

Harj. nr.	Antud	Leida
1	$a=18; c=30$	$f; g; b$
2	$c=9,2; g=3,5$	$f; a; b$
3	$f=0,15; g=0,09$	$c; a; b$
4	$a=6,5; f=4,4$	$c; g; b$
5	$b=1,0; c=1,5$	$g; f; a$

333. Tõesta Eukleidese teoreemi põhjal Pütagorase teoreem.

Näpunäide. Liida Eukleidese teoreemi väljendavate võrduste vastavad pooled.

TEOREEM TÄISNURKSE KOLMNURGA KÕRGUSEST.

334. Tõestame, et

täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrgus on kaatetite projektsioonide geomeetriline keskmine.

Tõestuseks avaldame kolmnurgast BCD Pütagorase teoreemi põhjal kõrguse ruudu (joon. 144):

$$h^2 = a^2 - f^2.$$

Et Eukleidese teoreemi järgi $a^2 = cf$, siis asendades ja viies teguri f sulgude ette, saame:

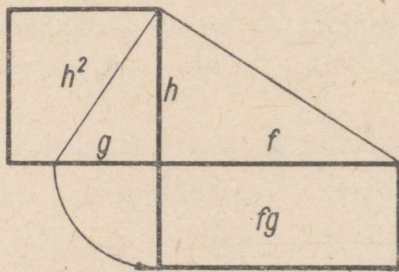
$$h^2 = cf - f^2 = f(c - f).$$

Sulgudes olev tegur võrdub kaateti b projektsiooniga g . Tähendab

$$h^2 = fg,$$

mis näitab, et väide on õige.

Teoreemi võib sõnastada ka nii: täisnurkse kolmnurga kõrgusele ehitatud ruut on pindvõrdne kaatetite projektsioonidele ehitatud ristkülikuga (joon. 146).



Joon. 146.

Missuguseid suurusi ja missugustel andmetel saab arvutada selle valemi põhjal?

335. Arvuta täisnurkse kolmnurga kõrgus, kui kaatetite projektsioonid on järgmised:

- a) 4 m ja 9 m; b) 3 m ja $8\frac{1}{3}$ m;
c) 12 cm ja 18 cm; d) 27 cm ja 48 cm.

336. Täisnurkse kolmnurga kõrgus on 18 cm ja ühe kaateti projektsioon 13,5 cm. Kui pikk on hüpotenuus?

337. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 15 cm ja hüpotenuus 25 cm. Arvuta hüpotenuusile joonestatud kõrgus.

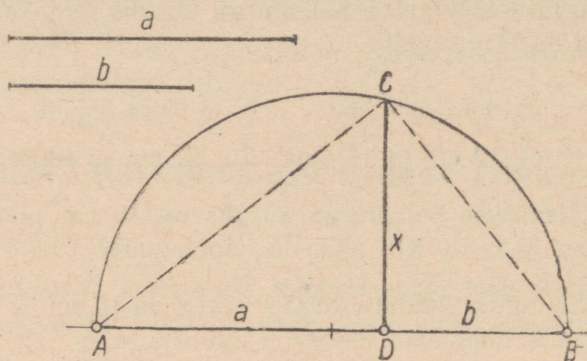
338. Ruutjuurt kahe arvu korrutisest nimetasime nende arvude geomeetriliseks keskmiseks (üles. 323). Olgu need arvud antud graafiliselt — lõikudena a ja b — ja olgu nõutud leida nende geomeetrilist keskmist niisamuti lõiguna. Ülesande lahendamiseks pole vaja neid lõike mõõta, otsitavat geomeetrilist keskmist arutada ja tulemust lõiguna kujutada, sest lõikude geomeetrilist keskmist saab konstruktsiooni teel leida otsekohe lõiguna, nagu nähtub järgmisest ülesandest.

Antud on lõigud a ja b . Konstrueeri nende lõikude geomeetiline keskmine $x = \sqrt{ab}$.

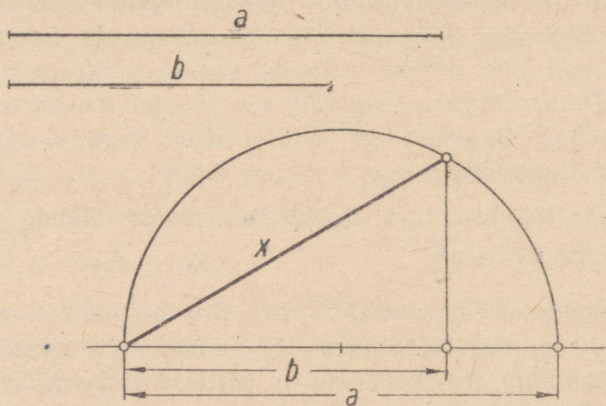
Lahendus. Kui $x = \sqrt{ab}$, siis $x^2 = ab$, millest nähtub, et lõik x on täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrguseks, kui kaatetite projektsioonid on võrdsed antud lõikudega a ja b . Sellise kolmnurga saamiseks joonestame lõigu $a + b$ (kolmnurga hüpotenuusi), poolitame selle ja joonestame poolringjoone, millele lõik $AB = a + b$ on diameetriks (joon. 147). Lõikude a ja b ühisest otspunktist D ringjooneni tõmmatud lõik $DC \perp AB$ ongi otsitav geomeetiline keskmine. Tõepoolest, kui punkt C ühendada punktidega A ja B , siis Thalese teoreemi järgi saame täisnurkse kolmnurga ABC , kusjuures kaatetite projektsioonid on võrdsed antud lõikudega a ja b .

339. Leia kahe vabalt võetud lõigu geomeetiline keskmine.

340. Joonis 148 näitab lõikude a ja b geomeetrilise keskmise leidmist Eukleidese teoreemi alusel. Kirjelda konstruktsiooni ja põhjenda väidet, et $x = \sqrt{ab}$.



Joon. 147.



Joon. 148.

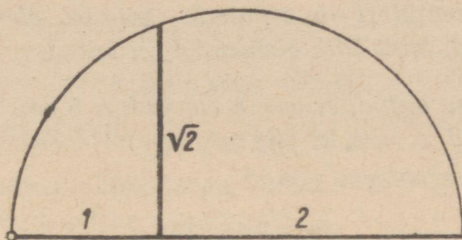
341. Võta kaks lõiku ja leia nende geomeetiline keskmine kahel viisil. Võrdle tulemusi.

342. Joonesta ristkülik. Konstrueeri selle ristkülikuga võrdpindse ruudu külge.

343. On antud võrdkülgne kolmnurk küljega a . Konstrueeri kolmnurga kõrguse ja poole külje geomeetiline keskmine. Võrdle kolmnurga pindala saadud lõigule ehitatud ruudu pindalaga.

344. Leia konstruktsiooni teel järgmised ruutjuured:

a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{5}$; c) $\sqrt{6}$; d) $\sqrt{8}$.



Joon. 149.

Näpunäide. $\sqrt{a}$ konstrueerimiseks, kus a on antud arv, kirjuta juuritav korrutisena $1 \cdot a$ (või $2 \cdot \frac{a}{2}$ jne.), võta vabalt ühiklõik ja ehita lõikude 1 ja a (2 ja $\frac{a}{2}$) geomeetriline keskmine (joon. 149).

SEOSSED TÄISNURKSE KOLMNURGA JOONELEMENTIDE VAHEL.

345. Täisnurkse kolmnurga joonelementideks nimetame kõiki selles kolmnurgas esinevaid lõike. Oleme vaadelnud kuut elementi: kolmnurga külgi a , b ja c , kaatetite projektsioone f ja g ning kõrgust h . Nende elementide vahel kehtivad järgmised seosed:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ a^2 &= cf; \quad b^2 = cg \\ h^2 &= fg \\ c &= f + g \\ ab &= ch \\ a^2 &= h^2 + f^2; \quad b^2 = h^2 + g^2 \end{aligned}$$

Sõnasta iga seos. Põhjenda viimase kolme võrduse õigsust.

346. a) Kui on antud täisnurkse kolmnurga kaks mingit joonelementi, siis ülejäänud elemente saab arvutada. Selleks tuleb lähtuda seosest, milles esinevad antud kaks elementi, arvutada sellest kolmas element, võtta siis mingi teine seos, milles esineb

üks antud elementidest ja arvutada kolmas element, ja nii viisi jätkata tööd, kuni kõik elemendid on leitud.

Näide. Olgu antud, et $a=8$ cm ja $h=5$ cm. Arvutame ülejäänud elemendid, s. o. b , c , f ja g .

1) Pütagorase teoreemi põhjal

$$f^2 = a^2 - h^2$$

ja seega

$$f = \sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39} = 6,24.$$

2) Eukleidese teoreemi järgi

$$a^2 = fc,$$

seega

$$c = a^2 : f = 64 : 6,24 = 0,160 \cdot 64 = 10,24.$$

3) Et $f + g = c$, siis

$$g = c - f = 10,24 - 6,24 = 4,0.$$

4) Pütagorase teoreemi järgi

$$b^2 = h^2 + g^2,$$

seega

$$b = \sqrt{h^2 + g^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41} = 6,4.$$

Vastus. $b=6,4$ cm, $c=10,2$ cm, $f=6,2$ cm, $g=4,0$ cm.

b) Mõnede andmete puhul ei leidu seost, milles esineksid kolmnurga mõlemad antud elemendid. Niisugusel juhtumil tuleb vajalik seos tuletada kahest valemist.

Näide. Olgu antud, et kaatet $b=8$ cm ja teise kaateti projektsioon $f=12$ cm. Leida hüpotenuus.

Eukleidese teoreemi järgi

$$b^2 = cg,$$

Selles valemis on kaks tundmatut: c ja g . Avaldame g valemist $f + g = c$ ja asetame valemisse $b^2 = cg$, saame

$$b^2 = c(c - f).$$

Oleme saanud ühe tundmatuga võrrandi:

$$c^2 - fc - b^2 = 0;$$

$$c^2 - 12c - 64 = 0;$$

$$c = 6 \pm \sqrt{36 + 64} = 6 \pm 10;$$

$$c = 16 \text{ (sest } c > 0 \text{)}.$$

Vastus. Otsitav hüpotenuus on 16 cm.

347. Täisnurkse kolmnurga kaatet $b = 15$ cm ja kõrgus $h = 12$ cm. Arvuta teised joonelemendid.

348. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus $c = 25$ cm ja kaateti projektsioon $f = 4$ cm. Arvuta teised joonelemendid.

349. Täisnurkse kolmnurga kaatetite projektsioonid on 2 m ja 3 m. Arvuta teised joonelemendid.

350. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 3 dm ja 4 dm. Arvuta teised joonelemendid.

351. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 20 m ja kõrgus 8 m. Arvuta teised joonelemendid.

352. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 12$ dm ja kaateti b projektsioon $g = 9$ dm. Arvuta teised joonelemendid.

353. Täisnurkse kolmnurga pindala on $26,46 \text{ m}^2$ ja üks kaatet on 6,3 m. Kui pikk on kolmnurga hüpotenuus?

354. Kolmnurga külgede pikkused on 5,3 cm, 9,0 cm ja 5,3 cm. Arvuta kolmnurga pindala.

355. Korrapärase nelinurga ümberringjoone raadius on 10 cm. Arvuta nelinurga kül, apoteem ja pindala.

356. Korrapärase kolmnurga ümberringjoone raadius on 12 cm. Arvuta kolmnurga kül, apoteem ja pindala.

357. Korrapärase kuusnurga ümberringjoone raadius on 8 cm. Arvuta kuusnurga kül, apoteem ja pindala.

358. Väljaspool ringjoont asetsevast punktist on ringjoonele tõmmatud puutuja. Arvuta selle punkti kaugus puutepunktist, kui on teada, et ringjoone raadius on 5 cm ja antud punkt on ringjoone keskpunktist 1 cm võrra kaugemal kui puutepunktist.

359. Ringjoonele, mille raadius võrdub 3 cm, on tõmmatud puutuja punktist, mis asetseb 8 cm kaugusel ringjoone keskpunktist. Arvuta puutepunkti kaugus sirgest, mis ühendab antud punkti ringjoone keskpunktiga.

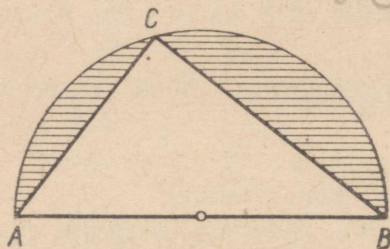
360. Joonesta kahe mittevõrdse lõigu aritmeetiline ja geometriline keskmine. Kumb neist on pikem?

361. Joonesta lõik pikkusega $\sqrt{8}$ cm Pütagorase teoreemi, Eukleidese teoreemi ja täisnurgse kolmnurga kõrguse kohta käiva teoreemi põhjal.

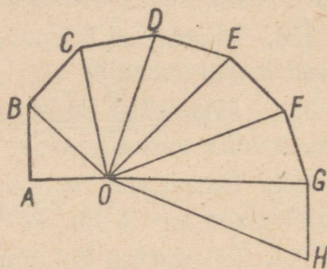
362. Joonesta lõik pikkusega $\sqrt{13}$ cm.

363. Joonesta lõik pikkusega $\sqrt{20}$ cm.

364. Poolringi, mille läbimõõt $AB=10$ cm, on joonestatud kolmnurk ABC (joon. 150). Arvuta joonisel viirutatud kujundi pindala, kui kolmnurga külg $AB=6$ cm.

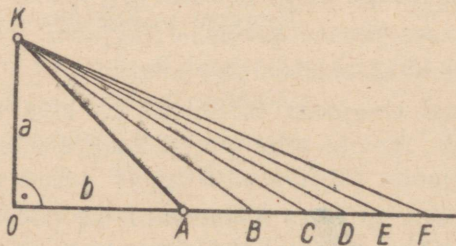


Joon. 150.



Joon. 151.

365. Joonis 151 on valmistatud nõnda, et $OA=AB=BC=CD=DE=EF=FG=GH=1$ ja nurgad OAB , OBC , OCD , $\dots$, OGH on täisnurgad. Arvuta OB , OC , OD , OE , OF , OG ja OH .



Joon. 152.

366. Joonis 152 on valmistatud nõnda, et $OA=OK=a$ ja $OK \perp OA$ ning $OB=AK$, $OC=BK$ jne. Avalda lõigud OB , OC jne. lõigu a kaudu.

VÖRDELISED LÕIGUD.

367. Täisnurkse kolmnurga joonelementide arvutamisel puutusime kokku valemitega, mis rakendasid lõikude korrutise ja lõigu ruudu mõistet. Edasi vaatleme küsimusi, mis rakendavad lõikude jagatise ehk suhte mõistet.

Kahe lõigu suhteks nimetatakse nende mõõtarmude suhet, kui lõigud on mõõdetud ühe ja sama ühikuga.

Näiteks lõikude $a=0,8\text{ m}$ ja $b=12\text{ dm}$ suhe

$$a : b = \frac{0,8\text{ m}}{12\text{ dm}} = \frac{8\text{ dm}}{12\text{ dm}} = \frac{2}{3}.$$

Mida näitab kahe lõigu suhe, kui see on suurem kui 1? kui see on väiksem kui 1? kui see on võrdne 1-ga?

368. Täisnurkse kolmnurga kaatetite projektsioonid hüpoteenuusil on $f=2\text{ cm}$ ja $g=8\text{ cm}$. Arvuta hüpoteenuusile joonestatud kõrgus h ja leia suhted $f:h$ ja $h:g$. Tõesta, et need suhted on alati võrdsed.

369. Missugune valem seob täisnurkse kolmnurga kaatetit a , selle projektsiooni f ja hüpoteenuusi c ? Järelda sellest, et $a:c = f:a$.

370. Põhjenda, et $ab=ch$, kus a ja b on täisnurkse kolmnurga kaatetid, c on hüpoteenus ja h on kõrgus. Tuleta siit võrre $a:c = h:b$.

371. Varem võtsime tarvitusele võrdeliste suuruste mõiste, nimetades kaht suurust võrdelisteks, kui nende vastavate väärtuste suhted on võrdsed. Laiendame seda mõistet nüüd kahele lõikude reale ✓

$$a, b, c, d, e, \dots$$

ja

$$a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, \dots$$

Ühe rea lõike nimetame võrdelisteks teise rea lõikudega, kui vastavate lõikude suhted on võrdsed.

Väikseim lõikude arv, mille kohta saab tarvitada mõistet «võrdelised», on neli: lõigud a ja b on võrdelised lõikudega a_1 ja b_1 kui

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1},$$

s. t. kui neist lõikudest saab koostada võrde. Vastavate lõikude jäävat suhet $k = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$... nimetatakse **võrdeteguriks**. Teades võrdetegurit ja ühe rea mingit lõiku, saab leida temale vastavat teise rea lõiku:

$$a = ka_1, b = kb_1, \dots$$

Ümberpöörduvalt,

$$a_1 = \frac{1}{k} a, b_1 = \frac{1}{k} b, \dots$$

Tähistades esimese rea mistahes lõigu tähega y ja teise rea vastava lõigu tähega x , saame ridade sõltuvuse kirjutada tuntud kujul

$$y = kx.$$

Millega on võrdelised täisnurkse kolmnurga kaatet ja hüpotenuusile tõmmatud kõrgus ülesandes 370 antud võrde põhjal?

372. Ühe kolmnurga küljed on 12,4 cm, 8,6 cm ja 14,8 cm, teise küljed aga 31 cm, 37 cm ja 21,6 cm. Lugedes vastavateks külgedeks kolmnurkade kõige pikemad küljed, keskmised küljed ja kõige lühemad küljed, selgita, kas nende kolmnurkade küljed on võrdelised.

373. Antud on lõigud pikkusega 2 cm, 5 cm, 7,5 cm ja 12,4 cm. Leia nendega võrdelised lõigud nii, et antud lõigu ja temale vastava lõigu suhe oleks 2,5.

374. Täida lüngad järgnevates ridades nii, et tekiks kaks rida võrdelisi pikkusi:

4 cm, 2,4 dm, ..., 5,4 m, ..., 18,5 km, ...

6 cm, ..., 9 dm, ..., 10,2 m, ..., 78 km.

NURGA HAARADE LÕIKAMINE PARALLEELSETE SIRGETEGA.

375. a) Antud lõikudega võrdelisi lõike on võimalik saada ka graafiliselt vastava konstruktsiooni teel. See konstruktsioon põhineb järgmisel teoreemil (I kiirteteoreem):

nurga haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega tekivad võrdeliste külgedega kolmnurgad.

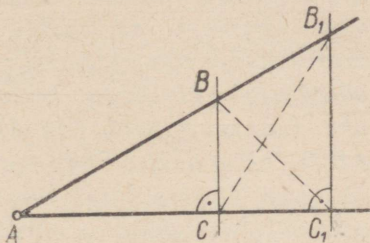
Teoreemi tõestame kahes osas: esmalt sel juhtumil, kui lõikajad on risti nurga ühe haaraga, ja teiseks sel juhtumil, kui nad ei ole risti nurga haaraga.

b) Olgu (joon. 153) $BC \parallel B_1C_1$ ja $BC \perp AC$, mistõttu ka $B_1C_1 \perp AC_1$.

Tõestada tuleb, et

$$\frac{AC}{AC_1} = \frac{CB}{C_1B_1} = \frac{AB}{AB_1}.$$

Tõestuseks ühendame punkti B punktiga C_1 ja punkti C punktiga B_1 ning vaatleme kolmnurki ACB_1 ja ABC_1 . Kumbki neist kolmnurkadest koosneb kahest osast: esimene kolmnurgast ACB ja kolmnurgast CBB_1 , teine samast kolmnurgast ACB ja kolmnurgast CBC_1 . Kolmnurgad CBB_1 ja CBC_1 on võrdsete pindaladega, sest kui neis aluseks võtta ühine külge CB , siis ka kõrgused on võrdsed (miks?). Sellest järeldub, et vaadeldavad kolmnurgad ACB_1 ja ABC_1 on võrdsete pindaladega. Avaldades need pindalad, saame



Joon. 153.

$$\frac{AC \cdot C_1B_1}{2} = \frac{AC_1 \cdot CB}{2},$$

millest järeldub, et

$$\frac{AC}{AC_1} = \frac{CB}{C_1B_1}.$$

Tähistame saadud võrdsete suhete väärtust tähega k . Siis $AC = k \cdot AC_1$ ja $CB = k \cdot C_1B_1$. Arvutame nüüd täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusi Pütagorase teoreemi põhjal:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = (k \cdot AC_1)^2 + (k \cdot C_1B_1)^2 = k^2 \cdot (AC_1^2 + C_1B_1^2).$$

Et sulgudes olev avaldis võrdub kolmnurga AC_1B_1 hüpotenuusi ruuduga, siis

$$AB^2 = k^2 \cdot AB_1^2$$

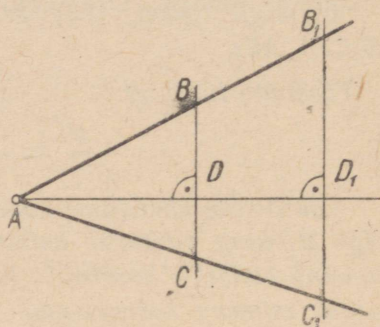
ja

$$AB = k \cdot AB_1.$$

Sellega on tõestatud, et kolmnurkade ABC ja AB_1C_1 kõik vastavate külgede suhted on võrdsed ühe ja sama arvuga k .

Tõestame teoreemi nüüd üldjuhtumil. Olgu (joon. 154) endiselt $BC \parallel B_1C_1$. Tõestada tuleb, et ka nüüd

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{AC_1}.$$



Joon. 154.

Tõestuseks joonestame antud nurga tipust A ristsirge ühele antud paralleelsetest sirgetest. Et see sirge on risti ka teisega nendest sirgetest, siis tekib tõestuse esimese osa järgi kaks paari võrdeliste külgedega kolmnurki: üks paar on kolmnurgad ABD ja AB_1D_1 , teine paar on ACD ja AC_1D_1 . Et neil kolmnurgapaaridel on üks paar ühiseid külgi, nimelt AD ja AD_1 , siis nende kõik vastavate külgede suhted on võrdsed:

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AD}{AD_1} = \frac{DC}{D_1C_1} = \frac{AC}{AC_1} = k.$$

Sellega on väitest tõestatud esimese ja viimase suhte võrdsus. Keskmise suhte väärtuse saamiseks avaldame saadud suhete reast BD ja DC ning liidame need: $BD = k \cdot B_1D_1$, $DC = k \cdot D_1C_1$, seega

$$BD + DC = k \cdot B_1D_1 + k \cdot D_1C_1 = k \cdot (B_1D_1 + D_1C_1)$$

ehk, et $BD + DC = BC$ ja $B_1D_1 + D_1C_1 = B_1C_1$,

$$BC = k \cdot B_1C_1.$$

Sellest nähtub, et ka kolmas väite esinev suhe $\frac{BC}{B_1C_1}$ on teistega võrdne, s. t. väide on täielikult tõestatud.

376. Oletame nüüd ümberpöördukt, et joonisel 154

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}.$$

ja tõestame, et siis $BC \parallel B_1C_1$.

Tõestame vastuväiteliselt, s. t. oletame, et BC ei ole paralleelne B_1C_1 -ga. Tõmmates siis punktist B_1 sirge B_1C_2 nii, et ta oleks

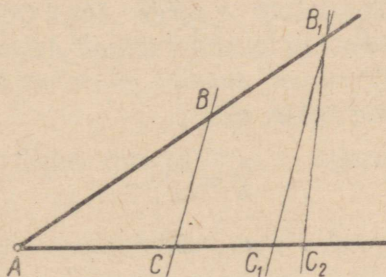
paralleelne sirgega BC , saaksime juba tõestatud teoreemi põhjal järgmise võrde (joon. 155):

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_2}.$$

Võrreldes seda võrret antud võrdega, näeme, et neis kolm liiget on samad. Sellest järeldub, et $AC_1 = AC_2$, millest nähtub, et C_1 ja C_2 langevad ühte. Kuid siis ka B_1C_1 on paralleelne BC -ga, nagu seda oli B_1C_2 . Nii oleme tõestanud järgmise teoreemi (II kiirteteoreem):

kui kaks sirget lõikavad nurga haarasid nii, et lõigud nurga tipust ühe lõikajani on võrdelised lõikudega nurga tipust teise lõikajani, siis need lõikajad on paralleelsed.

See teoreem annab antud sirgele paralleelse sirge joonestamiseks võtte, mis rakendab ainult lõikude mõõtmist.



Joon. 155.

377. Lõigates nurga haarasid mitme paralleeliga ja vaadeldes haarade lõike paralleelide vahel, võime tõestada järgmise teoreemi (III kiirteteoreem):

lõigud, milledeks paralleelid jaotavad nurga ühe haara, on võrdelised teise haara vastavate lõikudega.

Olgu nurga O haarad lõigatud paralleelidega $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel \dots$. Tähistame lõigud, milledeks need sirged jaotavad nurga haarad, vastavalt $a, b, c, \dots$ ja $a_1, b_1, c_1 \dots$ (joon. 156). Tõestada tuleb, et

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \dots$$

Tõestuseks kasutame tõsiasi, et nurga O haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega AA_1 ja BB_1 tekkisid võrdeliste külgedega kolmnurgad:

$$\frac{a_1 + b_1}{a_1} = \frac{a + b}{a}.$$

Kui kummagi murru lugeja jagada nimetajaga, siis saame

$$1 + \frac{b_1}{a_1} = 1 + \frac{b}{a},$$

millest

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b}{a}$$

ehk, vahetades võrde siseliikmed ja siis võrde pooled,

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}.$$

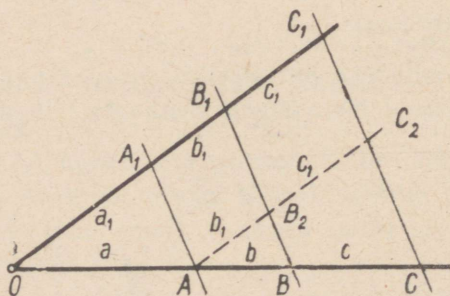
Joonestades nüüd läbi punkti A sirge $AC_2 \parallel OC_1$, saame nurga CAC_2 , mille ühel haaral on tekkinud lõigud $AB_2 = b_1$ ja $B_2C_2 = c_1$ (põhjenda seda!). Et viimati saadud võrre on kehtiv ka nurga CAC_2 haarade lõikude kohta, siis

$$\frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}.$$

Ühendades kaks viimast võrret, saame

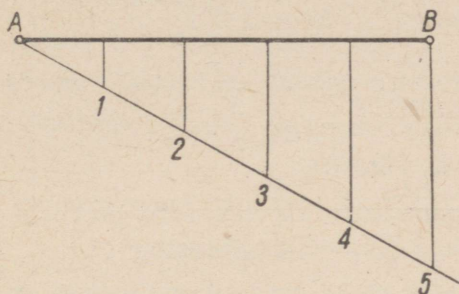
$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}.$$

Enam kui kolme paralleeli puhul saab tõestust analoogiliselt jätkata.

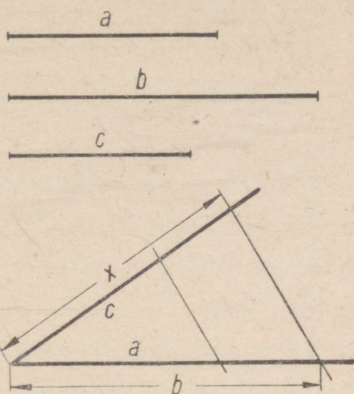


Joon. 156.

378. Nurga O haarad on lõigatud paralleelsete sirgetega nii, et ühel haaral (joon. 156) on tekkinud võrdsed lõigud: $a = b = c = \dots$. Mis võib öelda nurga teise haara lõikude kohta? Kuidas seda tõsiasja kasutada selleks, et antud lõiku AB jaotada näiteks viieks võrdseks osaks (joon. 157)?



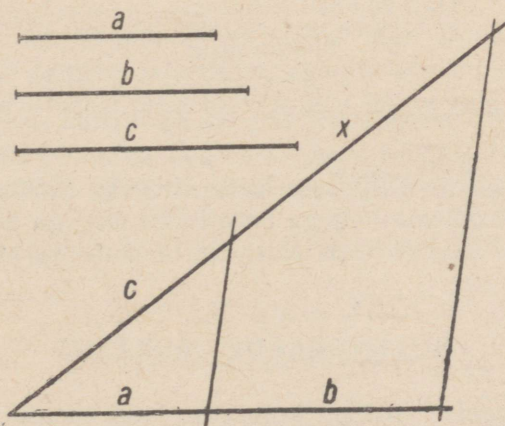
Joon. 157.



Joon. 158.

379. On antud kolm lõiku: a , b ja c . Konstrueeri neljas lõik x nii, et $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Otsitavat lõiku x nimetatakse antud kolme lõigu a , b ja c neljandaks võrdeliseks. Neljanda võrdelise leidmine võib toimuda



Joon. 159.

kahel viisil: kas ülesandes 375 antud teoreemi põhjal (joon. 158) või ülesandes 377 antud teoreemi põhjal (joon. 159).

Kirjelda kumbagi lahendusviisi.

380. Leia neljas võrdeline lõikudele $a = 3,2$ cm, $b = 4,8$ cm ja $c = 4,2$ cm nii arvutamise kui ka joonestamise teel.

381. On antud kolm lõiku: a , b ja c . Konstrueeri lõigud:

$$1) x = \frac{ab}{c}, \quad 2) y = \frac{bc}{a}, \quad 3) z = \frac{ac}{b}.$$

Näpunäide. Vajaliku konstruktsiooni leidmiseks koosta võrre. Kui näiteks $x = \frac{m \cdot n}{p}$, siis $px = mn$ ja $\frac{p}{m} = \frac{n}{x}$, tähendab, lõik x on lõikude p , m ja n neljas võrdeline.

382. Näita, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrgus on hüpotenuusi ja kaatetite neljas võrdeline.

383. Võrdhaarse trapetsi alused on 14 cm ja 9 cm, haarad on 7 cm. Kui palju tuleb haarasid pikendada, et nad lõikuksid?

384. Trapetsi alused on 6 cm ja 3,2 cm, haarad on 3 cm ja 2,5 cm. Kui palju tuleb kumbagi haara pikendada, et nad lõikuksid?

385. Kolmnurgas, mille küljed on 8 cm, 12 cm ja 16 cm, on joonestatud kõige lühema küljega paralleelne sirge nii, et tekkinud uue kolmnurga kõige pikem külg on 12 cm. Arvuta uue kolmnurga teiste külgede pikkused.

386. Kolmnurk, mille küljed on 32 mm, 48 mm ja 56 mm, on lõigatud kõige pikema küljega paralleelse sirgega nii, et tekkinud trapetsi teine alus on 35 mm. Arvuta selle trapetsi haarade pikkused.

387. Kolmnurga küljed on 12 m, 18 m ja 20 m. Kolmnurk on lõigatud kõige pikema küljega paralleelse sirgega nii, et tekkinud trapetsi lühem haar on 4 m. Kui pikk on selle trapetsi teine alus?

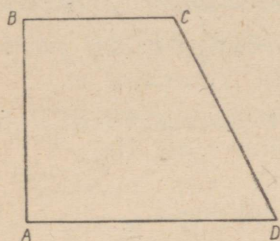
HULKNURKADE SARNASUS.

388. a) Joonisel 160 on kujutatud kaks nelinurka: $ABCD$ ja $EFGH$. Näita mõõtmise teel, et ühe nelinurga nurgad on vastavalt

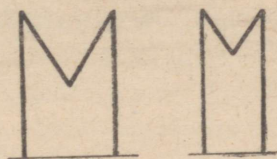
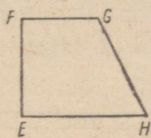
võrdsed teise nelinurga nurkadega ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised.

Näiteks. $\angle A = \angle E$ ja $\frac{AB}{EF} = \frac{AD}{EH} = 2$.

b) Näita, et joonisel 161 esitatud kujundite nurgad on vastavalt võrdsed, kuid nende nurkade lähisküljed ei ole võrdelised.



Joon. 160.



Joon. 161.

c) Näita, et joonisel 162 kujutatud ristküliku küljed on võrdelised rõõpküliku külgedega, kuid võrdeliste külgede vahelised nurgad ei ole võrdsed.



Joon. 162.

d) Kui ühe hulknurga nurgad on vastavalt võrdsed teise hulknurga nurkadega ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised, siis hulknurki nimetatakse sarnasteks.

Näiteks nelinurgad ABCD ja EFGH joonisel 160 on sarnased, sest

$$\begin{aligned}\angle A &= \angle E, \quad \angle B = \angle F, \\ \angle C &= \angle G, \quad \angle D = \angle H\end{aligned}$$

ja

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{AD}{EH}.$$

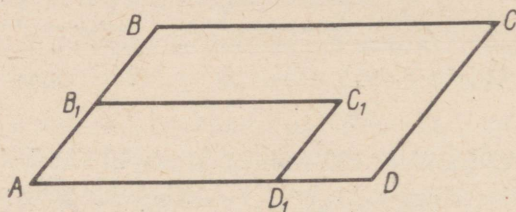
Kahe sarnase hulknurga külgi, millede jagatised on võrdsed, nimetatakse teineteisele vastavateks külgedeks.

Näiteks AB ja EF on sarnaste nelinurkade $ABCD$ ja $EFGH$ üks paar vastavaid külgi.

Kahe sarnase hulknurga vastavate külgede suhet nimetatakse nende hulknurkade sarnasusteguriks.

Näiteks hulknurkade $ABCD$ ja $EFGH$ sarnasustegur (joon. 160) on 2 ($ABCD$ sarnasustegur $EFGH$ suhtes) või $\frac{1}{2}$ ($EFGH$ sarnasustegur $ABCD$ suhtes).

e) Selgita, kas joonisel 163 kujutatud rööpkülikud $ABCD$ ja $AB_1C_1D_1$ on sarnased või mitte. Miks?



Joon. 163.

f) Põhjenda väidet, et kolmnurgad ABD ja AB_1D_1 joonisel 154 on sarnased. Nimeta sellelt jooniselt veel sarnaseid kolmnurki.

g) Põhjenda väidet, et kaks võrdset hulknurka on ka sarnased.

389. Kahe hulknurga $ABCD$ ja $EFGH$ sarnasust märgitakse kujul

$$ABCD \sim EFGH.$$

Sarnaste hulknurkade nimetused tuleb seejuures kirjutada nii, et vastavate tippude tähised on mõlema hulknurga nimetuses ühel ja samal kohal. Märkides nii hulknurkade sarnasust, saame valemist $ABCD \sim EFGH$ välja lugeda järgmist:

$$\begin{aligned} \angle A &= \angle E, \quad \angle B = \angle F, \\ \angle C &= \angle G, \quad \angle D = \angle H \end{aligned}$$

ja

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{AD}{EH}.$$

a) Mis saab järeldada valemist $\triangle ABC \sim \triangle KLM$?

b) Kahe kolmnurga ABC ja PQR kohta on teada, et

$$\angle A = \angle P, \angle B = \angle R, \angle C = \angle Q$$

ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised. Kirjuta need tõsi-
asjad üheainsa valemi abil.

c) On antud, et $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ja $\triangle DEF \sim \triangle KLM$. Mis
saab öelda kolmnurkade ABC ja KLM kohta?

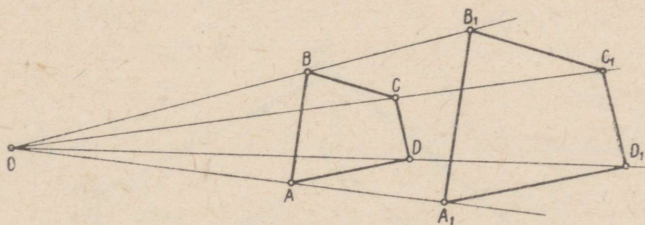
390. Antud hulknurgaga sarnase hulknurga joonestamine
põhineb järgmisel teoreemil:

kui ühe hulknurga küljed on vastavalt paralleelsed teise
hulknurga külgedega ja nende hulknurkade vastavaid
tippe ühendavad sirged lõikuvad ühes ja samas punktis,
siis need hulknurgad on sarnased.

Eeldus. $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CD \parallel C_1D_1$, $AD \parallel A_1D_1$; sirged AA_1 ,
 BB_1 , CC_1 ja DD_1 lõikuvad ühes ja samas punktis O (joon. 164).

Väide. $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$.

Tõestus. Väite tõestamiseks tuleb näidata, et nende hulknurkade nurgad on vastavalt võrdsed ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised. Kui vaadelda nende hulknurkade nurki, mis on tähistatud ühe ja sama tähega, siis näeme, et nende haarad on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised, järelikult iga kaks niisugust nurka on võrdsed. Näiteks $\angle A = \angle A_1$, sest eelduse järgi $AB \parallel A_1B_1$, $AD \parallel A_1D_1$ ja joonise järgi need haarad on samasuunalised.



Joon. 164.

Tõestame nüüd, et neis hulknurkades võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised. Eelduse järgi $AB \parallel A_1B_1$ ja $BC \parallel B_1C_1$. Sellest järeldub I kiirteteoreemi põhjal, et

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OB}{OB_1} \text{ ja } \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{OB}{OB_1}.$$

Et nende võrrete paremad pooled on võrdsed, siis on võrdsed ka vasakud pooled:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Sellega on väide nurga B ja B_1 haarade kohta tõestatud. Samal viisil tõestust jätkates saame:

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1}; \quad \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DA}{D_1A_1}$$

ehk kokkuvõetult

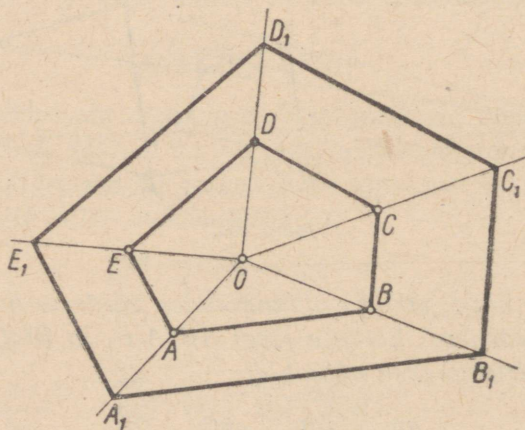
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DA}{D_1A_1}.$$

Niisiis, hulknurkade $ABCD$ ja $A_1B_1C_1D_1$ nurgad on vastavalt võrdsed ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised, s. t. hulknurgad on sarnased.

Punkti O , milles joonisel 164 lõikuvad sarnaste hulknurkade vastavaid tippe ühendavad sirged, nimetatakse nende hulknurkade sarnasuskeskpunktiks. See punkt võib asetseda ka hulknurga sees, teoreemi tõestus selle tõttu ei muutu (joon. 165).

391. Joonesta antud viisnurgaga $ABCDE$ sarnane viisnurk nii, et selle küljed on 1,5 korda pikemad antud viisnurga külgedest.

Ülesande lahendamiseks joonestame mingist punktist O (joon. 165) kiired läbi antud hulknurga tippude, võtame ühel kiirel, näiteks OA , punkti A_1 nii, et $OA_1 = 1,5 \cdot OA$, ja lähtudes punktist A_1



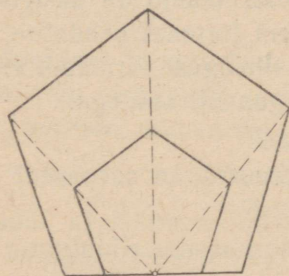
Joon. 165.

joonestame hulknurga $A_1B_1C_1D_1E_1$ nii, et selle küljed on vastavalt paralleelsed antud hulknurga külgedega. Eelmises ülesandes tõestatud teoreemi järgi on uus hulknurk endisega sarnane, kusjuures nende vastavate külgede suhe on 1,5, sest konstruktsiooni järgi $OA_1 : OA = 1,5$.

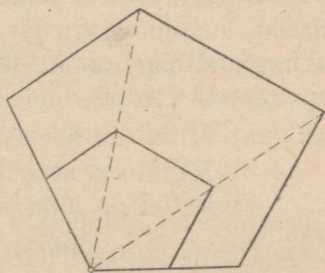
Märkus. Kui hulknurga $A_1B_1C_1D_1E_1$ neli külge on joonestatud paralleelselt nelinurga $ABCD$ vastavate külgedega, siis viimase külje saamiseks on vaja kaks tippu lihtsalt ühendada. Kiirteteoreemide alusel saab tõestada, et ka see külg on paralleelne antud hulknurga vastava küljega.

392. Antud hulknurga järgi temaga sarnase hulknurga joonestamist nimetatakse antud hulknurga sarnasusteisenduseks. Sarnasusteisendus on kas hulknurga suurendamine või vähendamine vastavalt sellele, kas uue hulknurga küljed on suuremad või väiksemad antud hulknurga külgedest. Sarnasusteisendus on määratud, kui on antud sarnasustegur, s. o. teisendatud hulknurga ja antud hulknurga vastavate külgede suhe k . Kui $k > 1$, siis öeldakse, et hulknurk on k korda suurendatud.

Hulknurga teisendamiseks kasutatakse sarnasuskeskpunkti või asetseta ka hulknurga küljel (joon. 166) või ühes tipus (joon. 167).



Joon. 166.



Joon. 167.

393. Filmilindi kaadri laius on ligikaudu 22 mm ja sellest saadud pildi laius 3,3 m. Mitu korda on pilti suurendatud?

394. a) Suurendada mingi viisnurk 2 korda.

b) Vähendada mingi kuusnurk 3 korda.

395. Joonesta riskülik mõõtmetega 6 cm ja 4 cm ning selle sisse teine riskülik nii, et nende külgede vahele jääks igale poole 1 cm laiune riba. Selgita, kas need riskülikud on sarnased.

396. Tabelis on antud kõrvuti kaks ristkülikut oma mõõtmetega. Otsusta, kas nad on sarnased.

Harj. nr.	I ristkülik	II ristkülik
1 <i>ja</i>	5 m ja 9 m	45 m ja 25 m
2 <i>ei</i>	0,6 m ja 0,8 m	0,18 m ja 0,32 m
3 <i>ja</i>	18 cm ja 20 cm	60 cm ja 54 cm
4 <i>ei</i>	8,1 cm ja 4,5 cm	15 cm ja 27 cm
5 <i>ei</i>	$6\frac{2}{5}$ dm ja $4\frac{1}{3}$ dm	$5\frac{1}{3}$ dm ja $3\frac{1}{4}$ dm

397. Risttahuka mõõtmed on 2 cm, 4 cm ja 8 cm. Missuguste mõõtmetega tahud on sellel risttahukal sarnased?

398. Ristkülik suurendati 2, 3, ..., k korda. Mitu korda suurenes ristküliku pindala? *4,9 k²*

399. Suurenda mingit viisnurka 3 korda, võttes sarnasuskeskpunktiks viisnurga ühe tipu.

400. Kirjutuspaberi lehtede standard-formaadid on üksteisega sarnased, kusjuures iga järgmine väiksem formaat saadakse eelmise formaadi poolitamise teel. Näita, et niisuguse formaadi mõõtmete suhe on võrdne ruudu külje ja diagonaali suhtega.

401. a) Millal on kaks ruutu sarnased?

b) Millal on kaks korrapärast kuusnurka sarnased?

c) Millal on kaks rombi sarnased?

402. Näita, et kujundite võrdsus on sarnasuse erijuhtum.

KOLMNURKADE SARNASUSE TUNNUSED.

403. a) *Hulknurka*de sarnasuse definitsiooni järgi

kaht kolmnurka nimetatakse sarnasteks, kui ühe kolmnurga nurgad on vastavalt võrdsed teise kolmnurga nurkadega ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised.

b) On antud, et $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Mis võib öelda nende kolmnurkade nurkadest ja külgedest?

c) Näita, et I kiirteteoreemi võib sõnastada nüüd nii:

nurga haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega tekivad sarnased kolmnurgad.

404. Kolmnurkade sarnasuse I tunnus:

kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga üks nurk on võrdne teise kolmnurga ühe nurgaga ja nende nurkade lähisküljed on võrdelised.

Eeldus. $\angle A = \angle D$; $AB : DE = AC : DF$ (joon. 168).

Väide. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Tõestus. Märgime $\triangle ABC$ küljel AB lõigu $AK = DE$ ja joonestame punktist K sirge $KL \parallel BC$. Siis I kiirteteoreemi põhjal

$$\triangle ABC \sim \triangle AKL$$

ja

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AL}.$$

Saadud võrde esimesed kolm liiget on vastavalt võrdsed eelduses antud võrde esimese kolme liikmega. Sellest järeldub, et ka nende neljandad liikmed on võrdsed:

$$AL = DF.$$

Toetudes kolmnurkade võrdsuse tunnusele KNK saame nüüd (põhjenda seda!), et $\triangle AKL = \triangle DEF$. Et $\triangle ABC$ oli esimesega neist sarnane, siis ta on sarnane ka teisega:

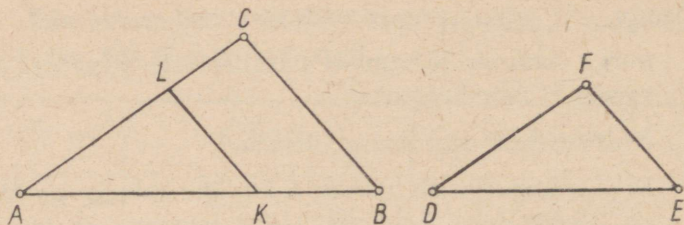
$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

405. a) Näita, et kaks täisnurkset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaatetid on võrdelised teise kolmnurga kaatetitega.

b) Näita, et kaks võrdhaarset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga tipunurk on võrdne teise kolmnurga tipunurgaga.

406. a) Ühe kolmnurga üks nurk on 70° ja selle lähisküljed on 16 cm ja 35 cm, teise kolmnurga kahe nurga summa on 110° ja nende nurkade vastasküljed on 2,1 m ja 0,96 m. Kas need kolmnurgad on sarnased?

b) Ühe kolmnurga üks nurk on 60° ja selle lähisküljed on 10 cm ja 15 cm, teise kolmnurga kaks nurka on 55° ja 65° , nende vastasküljed 15 cm ja 20 cm. Kas need kolmnurgad on sarnased?



Joon. 168.

407. Kolmnurkade sarnasuse II tunnus:

kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga.

Eeldus. $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle E$ (joon. 168).

Väide. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Tõestus. Märgime $\triangle ABC$ küljel AB lõigu $AK = DE$ ja joonestame punktist K sirge $KL \parallel BC$. Nii saadud kolmnurk AKL on sarnane kolmnurgaga ABC , sest nurga A haarad on lõigatud kahe paralleeliga. Ühtlasi tunnuse NKN järgi

$$\triangle AKL = \triangle DEF,$$

sest $\angle A = \angle D$, $AK = DE$ ja $\angle K = \angle B = \angle E$ (miks?). Et kolmnurk ABC oli sarnane kolmnurgaga AKL , siis on ta sarnane ka sellega võrdse kolmnurgaga DEF :

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

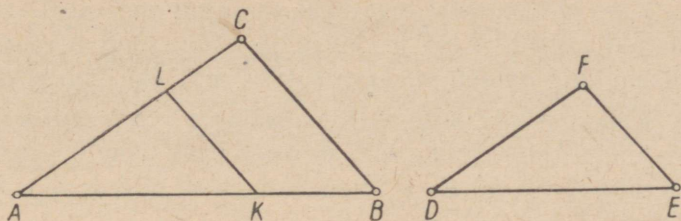
408. a) Näita, et kaks täisnurkset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga üks teravnurk on võrdne teise kolmnurga teravnurgaga.

b) Näita, et kaks võrdhaarset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga alusnurk on võrdne teise kolmnurga alusnurgaga.

409. Ühe kolmnurga kaks nurka on 50° ja 60° , teise kaks nurka aga 60° ja 70° . Kas need kolmnurgad on sarnased?

410. Tõesta, et täisnurkse kolmnurga kõrgus jaotab kolmnurga kaheks sarnaseks kolmnurgaks, ja tuleta sellest valem $h^2 = fg$.

411. Tõesta, et täisnurkse kolmnurga kõrgus jaotab antud kolmnurga kaheks kolmnurgaks, mis on sarnased antud kolmnurgaga. Järelda sellest Eukleidese teoreem.



Joon. 169.

412. Kolmnurkade sarnasuse III tunnus:

kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga küljed on võrdelised teise kolmnurga külgedega.

Eeldus. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (joon. 169).

Väide. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Tõestus. Märgime $\triangle ABC$ küljel AB lõigu $AK = DE$ ja joonestame selle lõpp-punktist K sirge $KL \parallel BC$. Siis I kiirteteoreemi põhjal

$$\triangle ABC \sim \triangle AKL,$$

nii et

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AL} = \frac{BC}{KL}.$$

Saadud võrdsete suhete esimesed liikmed on samad eelduses antud suhete esimeste liikmetega ja esimeste suhete teised liikmed AK ja DE on võrdsed. Sellest saab järeldada (kuidas?), et ka ülejäänud suhete teised liikmed on vastavalt võrdsed:

$$AL = DF \text{ ja } KL = EF.$$

Kolmnurkade võrdsuse tunnuse KKK põhjal saame nüüd, et $\triangle AKL = \triangle DEF$. Et esimene neist kolmnurkadest oli sarnane kolmnurgaga ABC , siis on ka viimane sarnane kolmnurgaga DEF :

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

413. a) Ühe kolmnurga külgede pikkused on 4 cm, 6 cm ja 8 cm, teise külgede pikkused aga 18 cm, 24 cm ja 12 cm. Kas need kolmnurgad on sarnased?

b) Ühe kolmnurga külgede pikkused on 0,3 m, 0,5 m ja 0,7 m, teise külgede pikkused aga 21 m, 15 m ja 10 m. Kas need kolmnurgad on sarnased?

414. Kaks kolmnurkset maatükki on kujult sarnased, kusjuures ühe maatüki küljed on 64 m, 80 m ja 46 m ning teise maatüki kõige pikem külge on 360 m. Arvuta teise maatüki ümbermõõt.

415. Kahe sarnase kolmnurkse karjakopli piiramiseks kahe traadise aiaga kulus kokku 600 m okastraati. Ühe kopli külgede pikkused olid 45 m, 60 m ja 75 m. Kui pikad olid teise kopli küljed?

416. *Kolmnurkade sarnasuse IV tunnus:*

kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks külge on võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ja nurk, mis ühes kolmnurgas asetseb nimetatud küljepaari suurema külje vastas, on võrdne vastava nurgaga teises kolmnurgas.

Eeldus. $AB : DE = AC : DF$; $AB > AC$; $\angle C = \angle F$ (joon. 169).

Väide. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Tõestus. Märgime $\triangle ABC$ küljel AB lõigu $AK = DE$ ja joonestame punktist K sirge $KL \parallel BC$. Siis I kiirteteoreemi põhjal

$$\triangle ABC \sim \triangle AKL$$

ja

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AL}.$$

Saadud võrde esimesed kolm liiget on vastavalt võrdsed eelduses antud võrde esimese kolme liikmega. Sellest järeldub, et ka nende neljandad liikmed on võrdsed:

$$AL = DF.$$

Rakendades kolmnurkade võrdsuse tunnust KkN , saame nüüd (põhjenda seda!), et $\triangle AKL = \triangle DEF$. Edasi järeldub kergesti (kuidas?), et

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

417. a) Põhjenda väidet, et kaks täisnurkset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga üks kaatet ja hüpotenuus on võrdelised teise kolmnurga vastavate külgedega.

b) Põhjenda väidet, et kaks võrdhaarset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga alus ja haar on võrdelised teise kolmnurga aluse ja haaraga.

418. Põhjenda väidet, et kolmnurga suurendamisel k korda tema kõrgus suureneb niisamuti k korda.

419. Kolmnurkade ABC ja DEF kohta on teada, et $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle E$, $AB = 10$ cm, $DF = 7,5$ cm ja $BC + EF = 8,4$ cm. Leida BC ja EF .

420. Kolmnurkade ABC ja DEF kohta on teada, et $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle D$, $AC = 11,4$ cm, $EF = 7,6$ cm ja $AB - DE = 2,4$ cm. Leida AB ja DE .

421. Võrdhaarses kolmnurgas, mille alus on 6 cm ja haar on 10 cm, on joonestatud alusega paralleelne lõik, mille pikkus on 4 cm. Kui pikk on tekkinud trapetsi haar?

422. Võrdhaarse trapetsi alused on 3 dm ja 8 dm, haar on 4 dm. Kui palju tuleb haarasid pikendada, et nad lõikuksid?

423. Kolmnurgas ABC külge $AB = 6$ cm ja külge $AC = 9$ cm. Küljel AB on võetud punkt D nii, et $AD = 4,5$ cm, ja küljel AC punkt E nii, et $AE = 3$ cm. Punktid D ja E on ühendatud. Tõesta, et $\angle ADE = \angle ACB$.

424. Nurga haarad on lõigatud kolme paralleelse sirgega nii, et ühel haaral on tekkinud lõigud pikkusega 4,2 cm, 5,7 cm ja 7,2 cm. Teise haara vastavatest lõikudest iga järgnev on eelnevast 1 cm võrra pikem. Kui pikad on teise haara lõigud?

425. Nurga haarad on lõigatud kahe paralleelse sirgega nii, et ühel haaral on tekkinud lõigud 7,8 cm ja 12,4 cm ning teise haara vastavate lõikude vahe on 8,05 cm. Leia teise haara lõikude pikkused.

426. Kolmnurga lõikamisel sirgega, mis on ühe küljega paralleelne, tekkis trapets, mille alused on 5,2 cm ja 8,4 cm ning haarad on 3,6 cm ja 2,8 cm. Kui pikad on antud kolmnurga küljed?

427. Trapetsi alused on 15 cm ja 9 cm. Kui üht haara pikendada 6 cm võrra, siis ta lõikub teise haara pikendusega. Leida esimese haara pikkus.

428. Trapetsi $ABCD$ alus $AB = 18$ cm, haar $AD = 12$ cm, diagonaal $BD = 15$ cm ja $\angle ADB = \angle BCD$. Leida BC ja CD .

429. Trapetsi alused on 16 cm ja 24 cm, haarad on 15 cm ja 11 cm. Kui palju tuleb pikendada üht ja kui palju teist haara, et nad lõikuksid?

430. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu arvud 4, 7 ja 5. Sellega sarnase kolmnurga ümbermõõt on 3,2 m. Arvuta viimase kolmnurga külgede pikkused.

431. Kolmnurga küljed on 34 m, 62 m ja 78 m. Sellega sarnase kolmnurga ümbermõõt on 261 m. Arvuta viimase kolmnurga külgede pikkused.

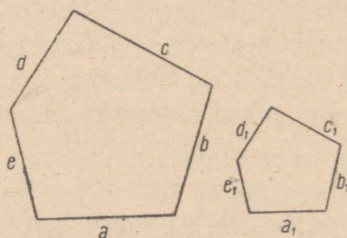
SARNASTE HULKNURKADE ÜMBERMÕÖTUDE SUHE JA PINDALADE SUHE.

432. Tõestame, et

kahe sarnase hulknurga ümbermõõtude suhe võrdub vastavate külgede suhetega.

Olgu ühe hulknurga külgede pikkused $a, b, \dots, e$ ja teise, esimesega sarnase hulknurga vastavate külgede pikkused $a_1, b_1, \dots, e_1$ (joon. 170).

Hulknurkade sarnasuse definitsiooni põhjal



Joon. 170.

$$a_1 = ka, b_1 = kb, \dots, e_1 = ke,$$

kus k on nende hulknurkade sarnasustegur. Avaldades teise hulknurga ümbermõõdu u_1 , saame

$$u_1 = a_1 + b_1 + \dots + e_1 = ka + kb + \dots + ke$$

ehk, viies liikmete ühise teguri k sulgude ette ja tähistades esimese hulknurga ümbermõõdu tähega u ,

$$u_1 = k(a + b + \dots + e) = ku.$$

Siit järeldubki, et $u_1 : u = k$, s. t. hulknurkade ümbermõõtude suhe võrdub vastavate külgede suhetega.

433. Kahe sarnase hulknurga üks paar vastavaid külgi on pikkusega 1,2 dm ja 1,5 dm. Arvuta teise hulknurga ümbermõõt, kui esimese hulknurga ümbermõõt on 7,8 dm.

434. Nelinurga küljed on 3,6 cm, 2,8 cm, 4,8 cm ja 3,2 cm. Leida sellega sarnase nelinurga küljed, kui viimase ümbermõõt on 21,6 cm.

435. Kahe hulknurga sarnasustegur on 1,25 ja nende ümbermõõtude vahe on 20,6 m. Arvuta kummagi hulknurga ümbermõõt.

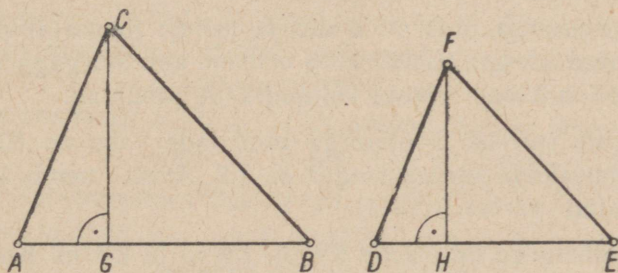
436. Kahe sarnase hulknurga ümbermõõtude summa on 7,8 m ja väikseim külg ühes hulknurgas on pikkusega 1,2 dm, teises pikkusega 1,4 dm. Leia hulknurkade ümbermõõdud.

437. Tõestame, et

kahe sarnase kolmnurga pindalade suhe võrdub vastavate külgede suhte ruuduga.

Eeldus. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (joon. 171).

Väide. $S_1 : S_2 = (AB : DE)^2$, kus S_1 on kolmnurga ABC pindala ja S_2 on kolmnurga DEF pindala.



Joon. 171.

Tõestus. Võtame kolmnurkades alusteks vastavad küljed AB ja DE , tõmbame neile kõrgused CG ja FH ning avaldame kolmnurkade pindalad:

$$S_1 = \frac{AB \cdot CG}{2} \quad \text{ja} \quad S_2 = \frac{DE \cdot FH}{2}.$$

Seega

$$S_1 : S_2 = \frac{AB \cdot CG}{2} : \frac{DE \cdot FH}{2} = \frac{AB \cdot CG}{DE \cdot FH} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{CG}{FH}.$$

Et II sarnasustunnuse järgi $\triangle ACG \sim \triangle DFH$ (põhjenda seda!), siis $\frac{CG}{FH} = \frac{AC}{DE}$. Kuid antud kolmnurkade sarnasuse tõttu viimane suhe on võrdne nende kolmnurkade aluste suhtega. Seega

$$\frac{CG}{FH} = \frac{AB}{DE},$$

mistõttu

$$S_1 : S_2 = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{AB}{DE} \text{ ehk } S_1 : S_2 = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2.$$

Kui kolmnurkade ABC ja DEF vastavate külgede suhe on k , siis nende pindalade suhe

$$S_1 : S_2 = k^2 \text{ ehk } S_1 = k^2 S_2.$$

Seega

kui kolmnurka suurendada k korda, siis tema pindala suureneb k^2 korda.

438. Kahe sarnase kolmnurga sarnasustegur on 2,5. Väiksema kolmnurga pindala on 18,4 dm². Arvuta suurema kolmnurga pindala.

439. Kolmnurga alus on 5 dm ja sellele joonestatud kõrgus 3,5 dm. Antud alusele vastav külge eelmise kolmnurgaga sarnases kolmnurgas on 3 dm. Arvuta kolmnurkade pindalad.

440. Kahe sarnase kolmnurga pindalade vahe on 60 cm² ja nende kolmnurkade sarnasustegur on 1,5. Arvuta nende kolmnurkade pindalad.

441. Kolmnurga küljed on 5,4 m, 7,2 m ja 8,6 m. Kui suured on selle kolmnurgaga sarnase 6,25 korda suurema kolmnurga küljed?

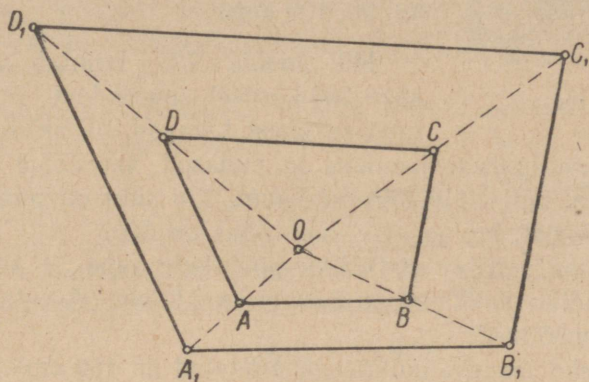
442. Kahe sarnase kolmnurga pindalad suhtuvad nagu 9 : 25. Väiksema kolmnurga ümbermõõt on 0,48 km. Arvuta suurema kolmnurga ümbermõõt.

443. Üldistame nüüd eelmist teoreemi, tõestades, et

kui hulknurka suurendada k korda, siis tema pindala suureneb k^2 korda.

Eeldus. Hulknurk $A_1B_1C_1D_1$ on hulknurga $ABCD$ k -kordne suurendus (joon. 172).

Väide. $S_1 = k^2 S$, kus S_1 on hulknurga $A_1 B_1 C_1 D_1$ pindala ja S on hulknurga $ABCD$ pindala.



Joon. 172.

Tõestus. Kasutame hulknurga $ABCD$ suurendamiseks tema sees asetsevat sarnasuskeskpunkti O (joon. 172). Siis kiired $OA, OB, \dots, OD$ jaotavad hulknurgad paarikaupa sarnasteks kolmnurkadeks, millede sarnasustegur on k . Tähistades esimese hulknurga jaotamisel saadud kolmnurkade pindalad tähtedega $P, Q, \dots, T$ ja teise hulknurga jaotamisel saadud kolmnurkade pindalad vastavalt $P_1, Q_1, \dots, T_1$, saame eelmise teoreemi põhjal:

$$P_1 = k^2 P, Q_1 = k^2 Q, \dots, T_1 = k^2 T.$$

Avaldades suurendatud hulknurga pindala saame

$$\begin{aligned} S_1 &= P_1 + Q_1 + \dots + T_1 = k^2 P + k^2 Q + \dots + k^2 T = \\ &= k^2 (P + Q + \dots + T). \end{aligned}$$

Et sulgudesse jäänud avaldis on hulknurga $ABCD$ pindala S , siis

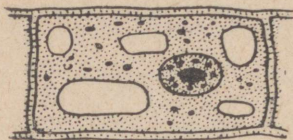
$$S_1 = k^2 S,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Lugedes ilma tõestuseta õigeks, et iga kaht sarnast hulknurka saab paigutada niisugusesse asendisse, et üks on teise k -kordne suurendus, saame tõestatud teoreemist järgmise järelduse:

kahe sarnase hulknurga pindalade suhe võrdub vastavate külgede suhte ruuduga.

444. Mitu korda suureneb hulknurga pindala, kui hulknurka suurendada 2, 3, 4, 5 korda?



Joon. 173.

445. Mitu korda tuleb suurendada hulknurka, et selle pindala suureneks 4, 10, 16, 50, 100 korda?

446. Joonis 173 kujutab taimeraku-kese 300-kordset suurendust. Mitu niisugust rakukest katavad 10 cm^2 -se pindaala?

447. Veretilgakese joonises on punased verelibled kujutatud ringikestena, mille läbimõõt on 4 mm. Kui suur on punaste verelibledel läbimõõt, kui joonise suurendus on 500?

448. Kahe sarnase ristküliku pindalade suhe on 13,69. Väiksema ristküliku mõõtmed on 2,9 cm ja 5,5 cm. Arvuta suurema ristküliku mõõtmed.

449. Kahe sarnase hulknurga pindalad on 180 cm^2 ja 80 cm^2 . Arvuta suurema hulknurga ümbermõõt, kui väiksema hulknurga ümbermõõt on 48 cm.

450. Kahe ruudu pindalade vahe on 1 m^2 ja pindalade suhe on 2. Kui pikad on nende ruutude küljed?

451. Plaanil on kujutatud hulknurgakujuline maatükk mõõdus 1 : 1000. Mitu korda on maatüki tõeline pindala suurem selle maatüki plaani pindalast? Kui suur on see tõeline pindala, kui maatüki pindala plaanil on 158 cm^2 ?

452. Ühe risttahuka mõõtmed on 4 korda suuremad teise risttahuka vastavatest mõõtmetest. Mitu korda on esimese risttahuka pindala suurem teise risttahuka pindalast?

453. Kaks nisupõldu on sarnased nelinurgad, millede sarnasustegur on 2,5. Mitu korda saab ühelt põllult vilja rohkem kui teiselt?

TEOREEM RINGJOONE LÕIKAJATEST.

454. Varem vaatlesime lõike, mis tekkisid nurga haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega ja tõestasime nende kohta kiirte-teoreemi. Vaatleme nüüd lõike, mis tekivad kahe lõikuva sirge lõikumisel ringjoonega, mis ei läbi sirgete lõikepunkti S (joon. 174), ja tõestame nende lõikude kohta järgmise teoreemi:

ringjoone lõikajate lõigud lõikajate ühise punkti ja ringjoone vahel on pöördvõrdelised.

s. t. ühe lõikaja lõikude korrutis on võrdne teise lõikaja lõikude korrutisega.

Lõikajate ühine punkt S võib asetseda kas seespool ringjoont (joon. 174, a) või väljaspool seda (joon. 174, b). Tõestus on kehtiv mõlemal juhtumil.

Olgu ringjoone ja ühe lõikaja ühised punktid A ja B , ringjoone ja teise lõikaja ühised punktid aga C ja D . Tõestada tuleb, et

$$SA \cdot SB = SC \cdot SD.$$

Väite tõestamiseks ühendame punktid A ja D , samuti ka C ja B . Saame kaks sarnast kolmnurka:

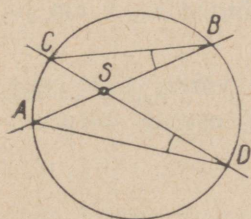
$$\triangle SAD \sim \triangle SCB,$$

sest ühe kolmnurga nurgad S ja D on vastavalt võrdsed teise kolmnurga nurkadega S ja B (nurgad D ja B on võrdsed, kui ühele ja samale kaarele AC toetuvad piirdenurgad). Et vaadeldavad kolmnurgad on sarnased, siis nende vastavate külgede suhted on võrdsed:

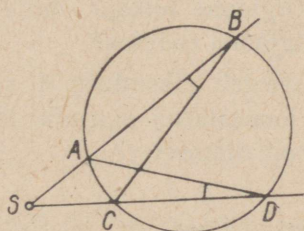
$$SA : SC = SD : SB.$$

Võrde põhiomaduse põhjal järeldub sellest, et

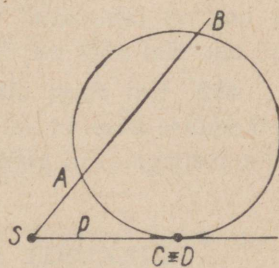
$$SA \cdot SB = SC \cdot SD.$$



a



b



c

Joon. 174.

Kui lõikajate ühine punkt asetseb väljaspool ringjoont ja üht lõikajat, näiteks SD pöörata lõikajate ühise punkti S ümber kuni sellest lõikajast saab puutuja (joon. 174, c), siis lõikaja lõikudest saab puutuja lõik: $SC = SD = p$. Et sellel pööramisel lõikaja lõi-

kude korrutis jääb võrdseks korrutisega $SA \cdot SB$, siis

$$SA \cdot SB = p^2.$$

Lõikaja lõikude korrutis võrdub puutuja lõigu ruuduga.

455. Olgu $ABCD$ kõõlnelinurk ja P selle diagonaalide lõikepunkt. Tõesta, et $AP \cdot CP = BP \cdot DP$.

456. Kahest lõikuvast kõõlust ühe pikkus on 28 cm ja teine on kõõlude ühise punkti poolt jaotatud lõikudeks pikkusega 12 cm ja 15 cm. Kui pikkadeks lõikudeks on jaotunud esimene kõõl?

457. Kahest lõikuvast kõõlust ühe pikkus on 32 cm ja teine on kõõlude ühise punktiga jaotatud lõikudeks pikkusega 12 cm ja 16 cm. Kui pikkadeks lõikudeks on jaotunud esimene kõõl?

458. Diameeter lõikub kõõluga 8 cm kaugusel ringjoone keskpunktist ja jaotab kõõlu lõikudeks pikkusega 4 cm ja 9 cm. Kui pikk on ringjoone raadius?

459. Diameeter, mille pikkus on 12 m, jaotab kõõlu lõikudeks, mille pikkused on 2 m ja 8 m. Kui kaugel on kõõlu ja diameetri lõikepunkt ringjoone keskpunktist?

460. Väljaspool ringjoont olevast punktist on ringjoonele tõmmatud keskpunkti läbiv lõikaja ja puutuja. Ringjoone raadius on 2,5 cm ja puutuja lõik 6 cm. Arvuta lõikaja lõikude pikkused.

461. Punktist, mille kaugus ringjoone lähimast punktist on 6 cm, on tõmmatud ringjoone lõikaja, mille lõigud on 9 cm ja 16 cm. Kui pikk on ringjoone raadius?

462. Kui ringi diameetrit pikendada 4 cm võrra, siis selle pikenduse otspunktist joonestatud puutuja lõik osutub võrdseks diameetriga. Kui pikk on diameeter?

PIKKUSTE KAUDNE MÕOTMINE SARNASTE KOLMNURKADE ABIL.

463. Kolmnurkade sarnasuse üheks rakendusala on kauguste ja kõrguste kaudne mõõtmine.

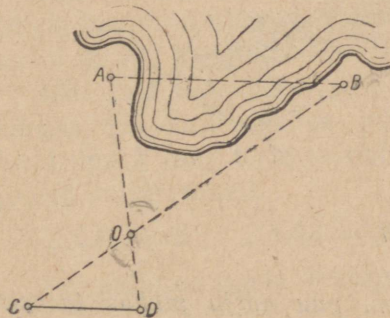
Punktid, millede vahelist kaugust mõõdetakse, võivad olla ligipääsetavad või üks neist on ligipääsematu või koguni mõlemad on ligipääsematud. Vaatleme iga nimetatud juhtumit eraldi.

1. Olgu A ja B kaks ligipääsetavat punkti, millede vahelise kauguse otsene mõõtmine on võimatu (joon. 175). Need punktid võivad näiteks olla järve kaldal. Valime kaldast veidi eemal punkti O nii, et saab mõõta selle kaugust punktidest A ja B . Olles mõõtnud lõigud AO ja BO , pikendame neid üle punkti O nii, et AO pikendus $OD = AO : n$ ja BO pikendus $OC = BO : n$, kus n on üks ja sama vabalt võetud täisarv. Mõõtes nüüd punktide C ja D vahelise kauguse ja korrutades tulemuse arvuga n , saamegi otsitava pikkuse AB .

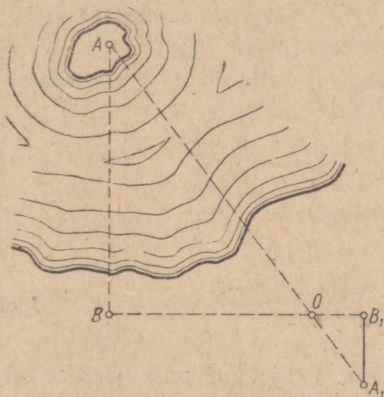
Tõepoolest, kolmnurkade sarnasuse I tunnuse järgi $\triangle AOB \sim \triangle COD$ (põhjenda seda!), millest järeldub, et

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{OD}.$$

Et $AO : OD = n$, siis ka $AB : CD = n$, millest järeldubki, et $AB = n \cdot CD$.



Joon. 175.



Joon. 176.

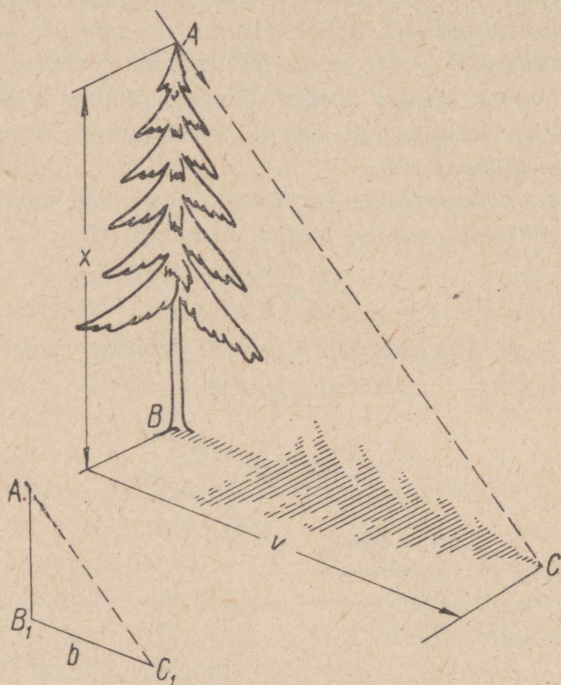
2. Vaatleme kauguse mõõtmist kahe punkti vahel juhtumil, kui üks neist punktidest on ligipääsematu.

Tähistagu punkt A saarel olevat tuletorni, mille kaugust tahetakse mõõta merekaldal olevast punktist B .

Selleks märgime maapinnal lõigu AB ristsirge ja valime sellel punkti O ja punkti B_1 nii, et lõik OB_1 on täisarv n korda väiksem lõigust OB . Lõigaku punktist B_1 tõmmatud ristsirge sirget AO punktis A_1 . Mõõdame kauguse punktide A_1 ja B_1 vahel. Selle kauguse n -kordne ongi punktide A ja B vaheline kaugus.

Põhjenda seda väidet kolmnurkade sarnasuse abil.

Ka kõrguse mõõtmisel on sageli üks punkt ligipääsematu. Vaatleme näitena puu kõrguse kaudset mõõtmist tema varju abil



Joon. 177.

(joon. 177): kui puu kõrgus on x m, puu varju pikkus tasasel maapinnal v m, kepi pikkus a m ja kepi varju pikkus b m, siis sarnastest kolmnurkadest ABC ja $A_1B_1C_1$ saab, et

$$x : a = v : b,$$

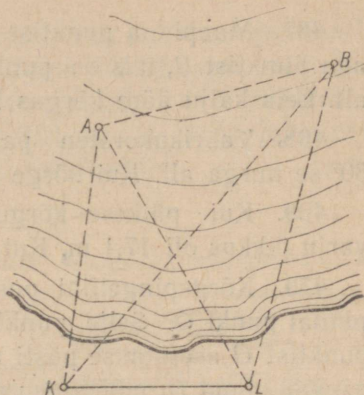
millest

$$x = \frac{av}{b}.$$

Miks kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ on sarnased?

3. Sarnaste kolmnurkade abil on võimalik mõõta kaugusi ja kõrgusi ka sel juhtumil, kui mõlemad punktid on ligipääsmatud. Näitena vaatleme kahe laeva vahelise kauguse mõõtmist merekaldal oleva vaatleja poolt.

Olgu A ja B kaks ankrus-
seisvat laeva (joon. 178). Nende
vahelise kauguse mõõtmiseks
märgime merekaldal kaks punkti
 K ja L , millede vahelise kaugu-
se mõõdame võimalikult täpselt.
Lõiku KL nimetame baasiks. Baa-
si otspunktidest on näha punktid
 A ja B . Mõõdame baasi otspunk-
tide juures olevad nurgad AKL ,
 BKL , ALK ja BLK ning joones-
tame vähendatud mõõdus neli-
nurga $ABLK$. Kui seejuures mõõ-
duks on $1:n$, siis tõeline kaugus
 AB on n korda suurem joonisel esinevast kaugusest AB .



Joon. 178.

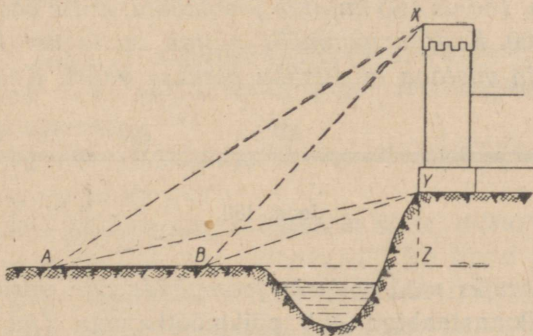
464. Telefoniposti varju pikkus on 4,9 m, samal ajal kui 1,7 m pikkuse kepi varju pikkus on 1,4 m. Kui kõrge on telefonipost?

465. Metallraha, mille läbimõõt on 2,5 cm ja mida hoitakse 50 cm kaugusel silmast, varjab parajasti õhupalli, mille läbimõõt on 16 m. Kui kaugel on õhupall vaatlejast?

466. Leia vähendatud joonise abil joonisel 179 kujutatud torni kõrgus, kui torni suunas mineva baasi AB pikkus on 60 m ja torni tipu X ning torni jalami Y kõrgusnurgad baasi otspunktide juures on järgmised:

$$\angle XAZ = 32^\circ; \angle YAZ = 10^\circ; \angle XBZ = 57^\circ; \angle YBZ = 23^\circ.$$

Kui palju on punkt Y kõrgemal rõhtsirgest AB ?



Joon. 179.

467. Maapinna punktist *A* paistab kalju äär 45°-se nurga all, aga punktist *B*, mis on punktist *A* 50 m kalju pool, 30°-se nurga all. Leia kalju ääre kõrgus kalju jalamilt.

468. Vabrikukorsten paistab 100 m kaugusel korstnajasest 30°-se nurga all. Kui kõrge on korsten?

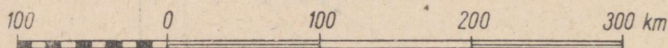
469. Kui päikese kõrgus silmapiirilt oli 35°, siis lipuvarde varju pikkus oli 17,1 m. Kui kõrge oli lipuvarras?

470. Kõrgepingeliini postist 20 m kaugusel märgitakse maapinnal punkt *O*. Selle punkti ja posti vahele 4 meetri kaugusele punktist *O* asetatakse püsti mõõdupuu, mille pikkus on 3 m. Nüüd asuvad punkt *O*, mõõdupuu ots ja posti tipp ühel sirgel. Leia posti kõrgus.

MAA-ALADE PLAANISTAMINE.

471. Hulknurkade sarnasuse rakenduselaks on ka maa-alade plaanistamine. Suuremate maa-alade (näiteks maailmajao) kaardistamisel tuleb arvestada maapinna kui kerapinna kõverust, kuid väiksemaid maa-alasid võib ilma suurema veata vaadelda kui tasapinnalisi kujundeid. Maa-ala plaanistada tähendab sel juhtumil maatükiga sarnase vähendatud kujundi joonestamist. Plaani sarnasustegurit kujutatava maatüki suhtes nimetatakse plaani (kaardi) arvumõõduks ja kirjutatakse tavaliselt kujul $1:n$ ehk $\frac{1}{n}$, kus n on täisarv, mis näitab, mitu korda pikkused plaani (kaardi) valmistamisel on vähendatud. Tavaliselt on plaanil mõõt 1 : 10 000 või suurem sellest, kaardil aga 1 : 10 000 või väiksem sellest.

Peale arvumõõdu on plaan või kaart harilikult varustatud veel joonmõõduga. Joonis 180 kujutab joonmõõtu, mille vastav arvumõõt on 1 : 5 000 000. Kaardi joonmõõd näitab vastavust kaardilt võetud pikkuse ja vastava loodusliku pikkuse vahel. Kaardilt võetud



Joon. 180.

pikkuse täpsemaks määramiseks joonmõõdu abil varustatakse see mõnikord põikmastaabiga ehk põikmõõtkavaga (joon. 181). Viimane koosneb mitmest kõrvuti asetsevast ruudust, mis on läbi

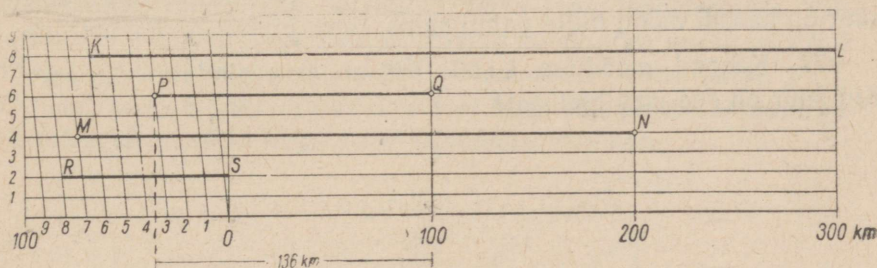
lõigatud üheksa võrdsele kaugusel asetseva paralleeliga. Peale selle on esimene ruut läbi lõigatud kümne kaldlõiguga, milledest igaüks lõikab varem nimetatud paralleele 1, 2, ..., 9 punktides, milledest iga järgnev on eelnevast 0,01 ruudu külje pikkusest vasakul. Seega näiteks kaldlõigu 3 ja paralleelide

1, 2, 3, ..., 9

lõikepunktid on ruudu paremast küljest kaugusel, mis moodustavad ruudu küljest vastavalt

0,31, 0,32, 0,33, ..., 0,39.

Et antud joonmõõdu puhul ruudu külj kujutab pikkust 100 km, siis näiteks lõik PQ kujutab pikkust 136 km.



Joon. 181.

Paigutades kaardilt sirkli abil võetud lõigu põikmastaabi sobivale paralleelile, saame leida mõõdetava pikkuse kolme tüvenumbri.

Määra pikkused, mida kujutavad lõigud KL, MN ja RS joonisel 181.

Tuntakse mitmeid plaanistamisvõtteid. Järgnevalt on toodud mõned näited neist mõõtmistest, mille teostamisel on võimalik plaani joonestamine.

1. Käies ümber plaanistatava maa-ala, mõõdetakse selle kui hulknurga küljed ja nurgad.

2. Asutakse plaanistatava maatüki sisse niisugusesse punkti, millest on näha maatüki kui hulknurga kõik tipud ja saab mõõta kaugust igasse tippu. On selline punkt leitud, siis mõõdetakse iga tipu kaugus sellest ja samuti ka valitud punktist maatüki tipudesse minevate sirgete vahelised nurgad (joon. 165).

3. Tähistatakse maatüki üks diagonaal ja ülejäänud tippudest sellele diagonaalile ehitatud ristlõigud ning mõõdetakse need ristlõigud ja diagonaali lõigud ristlõikude vahel (joon. 8).

472. Kaardil mõõduga 1 : 100 000 on järve pikkus 48 mm. Kui pikk on see järv tõeliselt?

473. Kaardil mõõduga 1 : 1 500 000 on kahe linna vahe 43 mm. Kui kaugel asetseb üks linn teisest?

474. Kaarti, mille mõõt oli 1 : 100 000, suurendati 4 korda. Kui suur on uue kaardi mõõt?

475. Musta mere pikkus kaardil mõõduga 1 : 18 000 000 on 6,7 cm. Kui pikk on sama meri kaardil mõõduga 1 : 3 000 000?

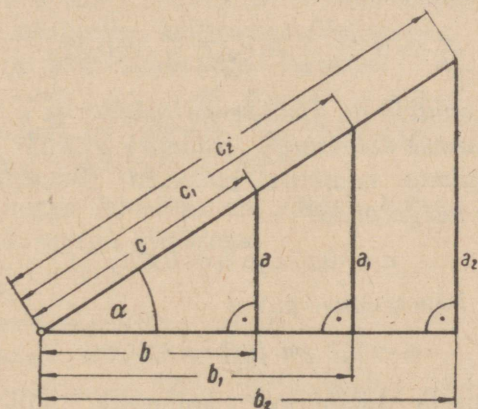
476. Järve pikkus kaardil mõõduga 1 : 100 000 on 2 cm. Kui suur on kaardi mõõt, mille puhul sama järve pikkus on 0,8 cm?

477. Kaardil mõõduga 1 : 500 000 on järve pindala 36,8 cm². Kui suur on see järv tõeliselt?

3. TERAVNURGA TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID.

TERAVNURGA SIINUS JA KOOSINUS.

478. Varem leidsime (üles. 346), kuidas täisnurkse kolmnurga kahe joonelemendi järgi arvutada tema teisi joonelemente. Kui samade elementide järgi soovisime leida kolmnurga nurka, siis tuli rakendada kolmnurga graafilise lahendamise võtet (üles. 290). Küsime nüüd, kuidas arutamise teel leida täisnurkse kolmnurga mistahes elementide järgi tema ülejäänud elemente.



Joon. 182.

Seatud ülesande lahendamiseks on vaja teada, kuidas täisnurkse kolmnurga küljed on seotud tema nurkadega. Nende seoste leidmiseks vaatleme täisnurkseid kolmnurki, millel on üks ja sama teravnurk α (joon. 182). Kerge on näha, et need kolmnurgad on sarnased (põhjenda seda!). Kolmnurkade sarnasuse tõttu iga kolmnurga küljed on võrdelised mistahes teise kolmnurga külge-

dega. Võttes näiteks kolmnurgad külgedega a, b, c ja a_1, b_1, c_1 , saame:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Kui see suhete rida kirjutada kolme võrdena (missugused need on?) ja neis võrdeis siseliikmed ümber paigutada, siis, saame järgmised võrded:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}; \quad \frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}; \quad \frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}.$$

Samal viisil võime saada, et $a : b = a_2 : b_2$ jne. Siit näeme, et kui täisnurksetel kolmnurkadel on üks ja sama teravnurk, siis ühe kolmnurga mistahes kahe külje suhe on võrdne teise kolmnurga vastavate külgede suhtega.

Näiteks, kui neil kolmnurkadel üks teravnurk $\alpha = 35^\circ$, siis, joonestades mingi sellise kolmnurga, mõõtes selle küljed ja arvutades nende suhted, saame:

$$\frac{a}{b} = 0,70; \quad \frac{a}{c} = 0,57; \quad \frac{b}{c} = 0,82.$$

Teades neid suhteid on nüüd kerge lahendada näiteks järgmist ülesannet: täisnurkse kolmnurga teravnurk $\alpha = 35^\circ$ ja hüpotenuus $c = 10$ cm; arvutada kaatetite pikkused. Eeltoodud võrdustest saame, et 35° -se nurga puhul

$$a = 0,57c \text{ ja } b = 0,82c,$$

tähendab antud hüpotenuusi puhul

$$a = 5,7 \text{ cm ja } b = 8,2 \text{ cm}.$$

479. a) Joonesta täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus $c = 10$ cm ja teravnurk $\alpha = 25^\circ$, mõõda jooniselt kaatetid ja arvuta

- 1) nurga α vastaskaateti ja hüpotenuusi suhe,
- 2) nurga α lähiskaateti ja hüpotenuusi suhe.

Kasutades saadud suhteid, arvuta täisnurkse kolmnurga kaatetite pikkused, kui üks teravnurk on 25° ja hüpotenuus on 3,5 m.

b) Lahenda eelmine ülesanne juhtumil, kui $\alpha = 70^\circ$ ja teise kolmnurga hüpotenuus on 240 m.

480. Täisnurkse kolmnurga külgede mõnele suhtele on antud erinimetused ja hakatud tähistama eritähisega. Tutvume praegu kahega neist:

nurga α vastaskaateti ja hüpotenuusi suhet nimetatakse nurga α siinuseks ja tähistatakse sümboliga $\sin \alpha$; nurga α lähiskaateti ja hüpotenuusi suhet nimetatakse nurga α koosinuseks ja tähistatakse sümboliga $\cos \alpha$.

Seega täisnurkses kolmnurgas (joon. 183)

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \text{ ja } \cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Näiteks ülesandest 478 leiame, et $\sin 35^\circ = 0,57$ ja $\cos 35^\circ = 0,82$.

Kui oled lahendanud ülesanded 479 a ja b, siis vaata järele, millega võrduvad $\sin 25^\circ$, $\cos 25^\circ$, $\sin 70^\circ$ ja $\cos 70^\circ$.

481. Olgu täisnurkse kolmnurga teine teravnurk β (joon. 183). Kirjuta üles, millega võrdub nurga β siinus, millega nurga β koosinus.

Võrdle neid nurga α siinuse ja koosinusega ja veendu, et täisnurkse kolmnurga ühe teravnurga siinus on teise teravnurga koosinus.

Et $\alpha + \beta = 90^\circ$, siis nurk $\beta = 90^\circ - \alpha$ on nurga α täiendusnurk (90° -ni). Seetõttu võime eelmist tulemust sõnastada ka nii:

teravnurga koosinus on võrdne tema täiendusnurga siinusega.

Sümbolites:

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \text{ ja}$$

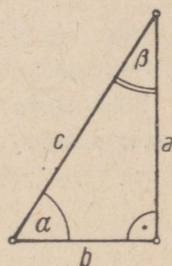
$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha).$$

Näiteks $\cos 20^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \sin 70^\circ$ ja $\sin 20^\circ = \cos(90^\circ - 20^\circ) = \cos 70^\circ$.

Nimetused koosinus tähendabki täiendusnurga siinust, sest ta on tuletatud ladinakeelsest väljendist «sinus complementi», mis tähendab täiendusnurga siinust ja mida lühendatult kirjutati kujul $\cos$.

482. a) Missuguse nurga koosinus on niisama suur kui $\sin 15^\circ$? $\sin 49^\circ$?

b) Missuguse nurga siinus on niisama suur kui $\cos 3^\circ$? $\cos 19^\circ$? $\cos 58^\circ$?



Joon. 183.

c) Missuguse nurga koosinus on niisama suur kui $\sin 7^\circ$? $\sin 28^\circ$? $\sin 45^\circ$?

d) Missuguse nurga siinus on niisama suur kui $\cos 30^\circ$? $\cos 69^\circ$? $\cos 88^\circ$?

483. a) Joonesta mingi täisnurkne kolmnurk, mille üks teravnurk on 40° , mõõda jooniselt tarvilikud lõigud ja arvuta $\sin 40^\circ$, $\cos 40^\circ$, $\sin 50^\circ$, $\cos 50^\circ$.

b) Joonesta mingi täisnurkne kolmnurk, mille üks teravnurk on 75° , mõõda jooniselt tarvilikud lõigud ja arvuta $\sin 75^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$.

484. a) Täisnurkse kolmnurga kaatet $a=5$ cm ja kaatet $b=12$ cm. Arvuta kummagi teravnurga siinus ja koosinus.

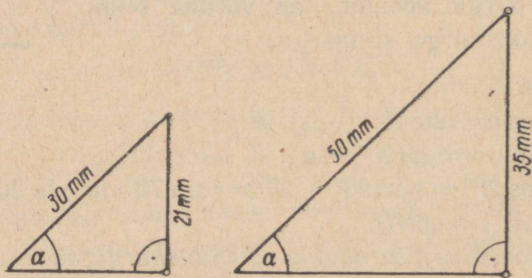
b) Täisnurkse kolmnurga kaatet $a=4$ cm ja hüpoteenus $c=5$ cm. Arvuta kummagi teravnurga siinus ja koosinus.

c) Täisnurkse kolmnurga kaatet $b=6$ cm ja hüpoteenus $c=9$ cm. Arvuta kummagi teravnurga siinus ja koosinus.

Näpunäide. Kolmnurga kolmas külg arvuta Pütagorase teoreemi põhjal.

485. Tõesta, et teravnurga siinuse (koosinuse) väärtusega on teravnurga suurus üheselt määratud.

Tõestuseks võta mingi siinuse väärtus, näiteks $\sin \alpha=0,7$, joonestaks kaks kolmnurka, mille ühe kaateti ja hüpoteenuusi suhe



Joon. 184.

oleks 0,7, ja näita, et selle kaateti vastas on neis kolmnurkades võrdsed nurgad (joon. 184). Kolmnurkade joonestamisel võta hüpoteenuusi pikkused vabalt, näiteks 30 mm ja 50 mm. Kuidas arvutada siis nurga α vastaskaateti pikkust?

Missuguse sarnasustunnuse põhjal need kolmnurgad on sarnased? Kuidas sellest järeldub, et neis leidub ühe ja sama suurusega nurk?

486. a) Joonesta nurk, mille siinus on 0,8. 53°
 b) Joonesta nurk, mille siinus on $\frac{2}{3}$. 41°
 c) Joonesta nurk, mille siinus on 0,36. 21° -
 d) Joonesta nurk, mille koosinus on 0,25. 76°
 e) Joonesta nurk, mille koosinus on $\frac{5}{7}$. 45°
 f) Joonesta nurk, mille koosinus on 0,5. 60° -

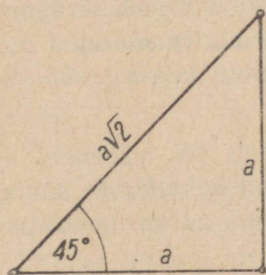
487. Miks teravnurga siinus (samuti ka koosinus) on alati väiksem kui 1?

MÕNEDE NURKADE SIINUSE JA KOOSINUSE ARVUTAMINE.

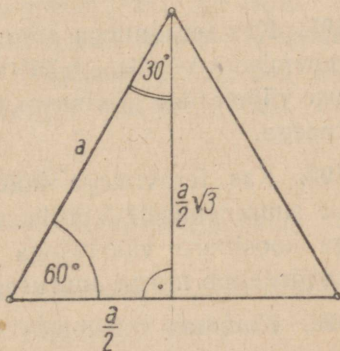
488. Nurga suuruse järgi tema siinuse või koosinuse arvutamine on üldiselt palju aega võttev ja küllaltki keerukas. Mõnede nurkade puhul on siinuse ja koosinuse leidmine siiski lihtne, näiteks nurkade puhul 45° , 30° ja 60° .

Et saada $\sin 45^\circ$, võtame äbiks võrdhaarse täisnurkse kolmnurga (joon. 185). Kui selle kaateti pikkus on a mm, siis hüpotenuusi pikkus samades ühikutes on

$$c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$



Joon. 185.



Joon. 186.

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707.$$

Niisama suur on ka $\cos 45^\circ$, sest $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$.

489. Nurkade 30° ja 60° siinuse ja koosinuse arvutamiseks võtame abiks võrdkülgse kolmnurga (joon. 186). Kõrgus poolitab selle kolmnurga kaheks täisnurkseks kolmnurgaks, mille teravnurgad on 30° ja 60° . Jooniselt näeme, et

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2}.$$

Niisamuti ka

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Et arutada $\sin 60^\circ$ ja $\cos 30^\circ$, avaldame kolmnurga kõrguse h kolmnurga külje kaudu:

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4} a^2} = \frac{a}{2} \sqrt{3}.$$

Joonise põhjal saame nüüd, et

$$\sin 60^\circ = \frac{a}{2} \sqrt{3} : a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 0,866.$$

Sellest järeldub, et ka

$$\cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 0,866.$$

490. Kuidas teoreemist 30° -se nurga vastaskaateti kohta saab tuletada $\sin 30^\circ$ väärtuse?

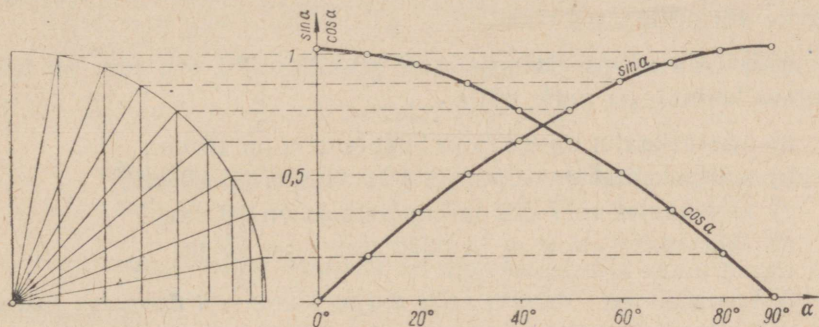
491. Kas teravnurga siinus suureneb või väheneb teravnurga suurenemisel? Võrdle $\sin 30^\circ$ väärtust kaks korda suurema nurga siinuse väärtusega ja otsusta, kas nurga siinus on võrdeline nurga suurusega.

492. Kas teravnurga koosinus suureneb või väheneb selle nurga suurenemisel? Võrdle $\cos 30^\circ$ väärtust kaks korda suurema nurga koosinuse väärtusega ja otsusta, kas nurga koosinus on pöördvõrdeline nurga suurusega.

493. Kummas vahemikus nurga siinus kasvab kiiremini, kas nurga kasvamisel 30° -st 45° -ni või 45° -st 60° -ni?

TERAVNURGA SIINUSE JA KOOSINUSE GRAAFIK.

494. Ülevaate saamiseks nurga siinuse ja koosinuse muutumisest nurga muutumisel joonest nende suuruste graafikud. Seda saab teha graafiliselt saadud andmeil. Selleks joonest millimeetripaberile 90° -ne kaar raadiusega 100 mm ja jaota see kaar üheksaks võrdseks osaks (joon. 187). Kaare jaotamist saab teha kas malliga või proovimise teel sirkliga. Saadud jaotuspunktide ühendamisel ringjoone keskpunktiga saad nurgad 10° , 20° , 30° , ..., 80° . Joonestades kaare jaotuspunktidest ristlõigud rõhtraadiusele, saadki lõigud, mis kujutavad $\sin 10^\circ$, $\sin 20^\circ$, ..., $\sin 80^\circ$ väärtusi,



Joon. 187.

kui ringjoone raadius võtta pikkusühikuks. Siinuse graafiku saamiseks võta rõhtraadiuse pikendus α -teljeks, kujuta sellel sobivas mõõdus nurgad 10° , 20° , ..., 80° , võttes 10° kujutiseks näiteks lõigu pikkusega 20 mm, ja kanna siinuse väärtusi kujutavad lõigud rööplükke abil õigesse kohta üle. Vaadeldes 10° -st väiksemaid nurki, näeme, et nurga suuruse lähenemisel 0° -le ka tema siinus läheneb 0-le. Analooiliselt saame, et nurga suuruse lähenemisel 90° -le tema siinus läheneb arvule 1. Seepärast täienda oma joonist veel kahe punktiga, nimelt punktidega, mis kujutavad siinuse väärtusi

$$\sin 0^\circ = 0 \text{ ja } \sin 90^\circ = 1.$$

Saadud punktide ühendamisel sujuva kõverjoonega saad siinuse graafiku vahemikus 0° kuni 90° .

Joonise täiendamiseks koosinuse graafikuga võta arvesse, et nurga koosinus on võrdne tema täiendusnurga siinusega: $\cos 0^\circ = \sin 90^\circ$, $\cos 10^\circ = \sin 80^\circ$ jne.

495. Vasta siinuse ja koosinuse graafiku abil järgmistele küsimustele.

- a) Kui suur on $\sin 5^\circ$, $\sin 55^\circ$, $\cos 28^\circ$, $\cos 65^\circ$?
 b) Missuguse nurga siinus on 0,3, 0,57, 0,9?
 c) Missuguse nurga koosinus on 0,95, 0,8, 0,24?
 d) Missuguste nurkade puhul

$$\sin \alpha < \cos \alpha, \sin \alpha = \cos \alpha, \sin \alpha > \cos \alpha?$$

e) Kas vahe $\cos 25^\circ - \sin 25^\circ$, $\cos 25^\circ - \sin 50^\circ$, $\sin 25^\circ - \cos 50^\circ$, $\sin 35^\circ - \cos 55^\circ$, $\sin 70^\circ - \cos 60^\circ$ on positiivne, negatiivne või null?

496. Leia siinuse ja koosinuse graafiku abil, kui suur on täisnurkse kolmnurga nurk, mille

- a) vastaskaatet on 8 cm ja hüpotenuus on 16 cm;
 b) vastaskaatet on 12 cm ja hüpotenuus on 20 cm;
 c) lähiskaatet on 7 dm ja hüpotenuus on 10 dm;
 d) lähiskaatet on 9 m ja hüpotenuus on 15 m.

Näpunäide. Arvuta selle nurga siinus või koosinus ja leia graafikult sellele siinuse või koosinuse väärtusele vastav nurk.

497. Mõõda ülesande 494 lahendamisel tehtud jooniselt tarvilikud lõigud ja arvuta järgnevas tabelis nõutud siinuse ja koosinuse väärtused.

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin \alpha$	0									1
$\cos \alpha$	1									0

Nurga kasvamisel 0° -st 90° -ni nurga siinus kasvab 0-st 1-ni ja koosinus kahaneb 1-st 0-ni.

TERAVNURGA TANGENS JA KOOTANGENS.

498. Täisnurkse kolmnurga külgede suhetest on erinimetused antud ka kaatetite suhetele:

nurga α vastaskaateti ja lähiskaateti suhet nimetatakse nurga α tangensiks ja tähistatakse sümboliga $\tan \alpha$; nurga α lähiskaateti ja vastaskaateti suhet nimetatakse nurga α kootangensiks ja tähistatakse sümboliga $\cot \alpha$.

Seega täisnurkses kolmnurgas (joon. 183)

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \text{ ja } \cot \alpha = \frac{b}{a}.$$

Näiteks, kui nurga α vastaskaatet on 6 cm ja lähiskaatet on 2 cm, siis $\tan \alpha = \frac{6}{2} = 3$ ja $\cot \alpha = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Nurga tangens ja kootangens on teineteise pöördväärtused,

s. t. kui mingi nurga tangens on näiteks $\frac{3}{7}$, siis sama nurga kootangens on $\frac{7}{3}$.

499. Olgu täisnurkse kolmnurga üks teravnurk α ja teine β . Avalda jooniselt 183 $\tan \beta$ ja $\cot \beta$ ning näita, et

$$\tan \beta = \cot \alpha \text{ ja } \cot \beta = \tan \alpha.$$

Kirjuta need valemid teisiti, asendades nurga β tema avaldisega nurga α kaudu.

Teravnurga kootangens on võrdne tema täiendusnurga tangensiga.

Näiteks $\cot 15^\circ = \tan 75^\circ$, $\cot 20^\circ = \tan 70^\circ$ jne.

Nimetuse kootangens tekkimine on analoogiline koosinuse nimetuse tekkimisega: ta tähendab täiendusnurga tangensit (tangens complementi).

500. a) Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 6$ dm ja hüpotenuus $c = 10$ dm. Arvuta kummagi teravnurga siinus, koosinus, tangens ja kootangens.

b) Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 15$ cm ja kaatet $b = 8$ cm. Arvuta kummagi teravnurga siinus, koosinus, tangens ja kootangens.

c) Ristküliku mõõtmed on 8 cm ja 5 cm. Arvuta pikema külje ja diagonaali vahelise nurga siinus ja tangens.

d) Võrdhaarse kolmnurga alus on 1,2 m ja kõrgus on 0,8 m. Arvuta kolmnurga alusnurga siinus ja tangens.

501. a) Joonesta nurk, mille tangens on 1,5. 56°

b) Joonesta nurk, mille tangens on 0,75. 37°

c) Joonesta nurk, mille kootangens on 3. 18°

d) Joonesta nurk, mille kootangens on 0,3. 43°

502. Leia $\tan 45^\circ$ ja $\cot 45^\circ$ väärtused (joon. 185).

503. Kasutades võrdkülgset kolmnurka (joon. 186) näita, et

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577$$

ja

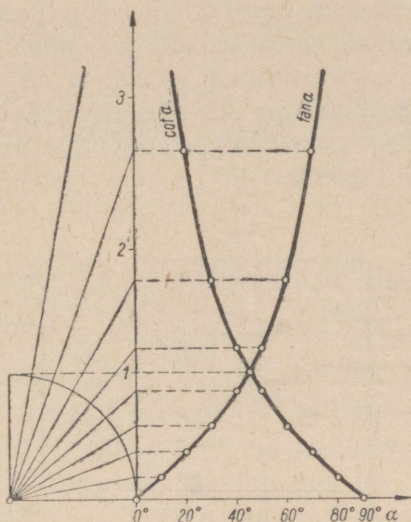
$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \approx 1,73.$$

Tuleta neist $\cot 30^\circ$ ja $\cot 60^\circ$ väärtused.

504. Kas leidub nurk, mille tangens on 10? tangens on 100? tangens on 1000? Kuidas neid nurki joonestada?

TERAVNURGA TANGENSI JA KOOTANGENSI GRAAFIK.

505. Teravnurga tangensi ja kootangensi graafiku saamiseks joonestatakse millimeetripaberile 90° -ne kaar raadiusega 50 mm ja jaotatakse see endisel viisil üheksaks võrdseks osaks. Saadud jaotuspunktid ühendatakse ringjoone keskpunktiga ja pikendada neid ühendussirgeid kuni ringjoone puutujani, mis on tõmmatud rõhtraadiuse otspunktist (joon. 188). Nii tekib rida täisnurkseid kolmnurki, millel ringjoone raadius on ühiseks kaatetiks ja millele teravnurgad ringjoone keskpunkti juures on vastavalt $10^\circ, 20^\circ, \dots, 80^\circ$. Kui ringjoone raadius võtta pikkusühikuks, siis nende nurkade vastaskaatetid puutujal kujutavadki nimetatud nurkade tangenseid valitud mõõdus. Tangensi graafiku saamiseks võta α -telg endisel viisil ja jätkata tööd nagu nurga siinuse graafiku joonestamisel. Nurga tangensi muutumist kujutab joon algab telgede nullpunktist, sest kui täisnurkse kolmnurga teravnurk läheneb 0° -le, siis vastaskaateti pikkus ja ühes sellega ka nurga tangens läheneb nullile. Seetõttu $\tan 0^\circ = 0$.



Joon. 188.

Et nurga kootangens on võrdne täiendusnurga tangensiga, siis kootangensi graafiku saab joonestada tangensi graafiku järgi.

506. Vasta tangensi ja kootangensi graafiku abil järgmistele küsimustele.

- a) Kui suur on $\tan 35^\circ$, $\tan 54^\circ$, $\cot 26^\circ$, $\cot 65^\circ$?
 b) Missuguse nurga tangens on 1, 2, 0,5, 1,2?
 c) Missuguse nurga kootangens on 2, 0,2, 1,4, 1,9?
 d) Missuguste nurkade puhul
 $\tan \alpha < 1$, $\tan \alpha > 1$, $\cot \alpha < 1$, $\cot \alpha > 1$?

507. Kuidas muutub nurga tangens, kuidas nurga kootangens, kui nurk kasvab 0° -st kuni 90° -ni?

NURGAFUNKTSIOONIDE TABELID.

508. Eespool selgus, et nurga α igale väärtusele 0° ja 90° vahelt vastab oma kindel $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ ja $\cot \alpha$ väärtus. Seetõttu neid suurusi nimetatakse **nurgafunktsioonideks** ehk ka nurga **trigonomeetrilisteks funktsioonideks**, kuna trigonomeetria on matemaatika haru, mis uurib nende funktsioonide omadusi ja kolmnurkade lahendamist nende abil. Nurgafunktsioonide kasutamiseks ülesannete lahendamisel on koostatud mitmesuguseid tabelleid. Ühe õige lihtsa tabeli leiad käesoleva raamatu lisan. Selles on antud

nurga siinuse, koosinuse, tangensi ja kootangensi kolmekohalised väärtused iga teravnurga jaoks, mis sisaldab täisarv kraade. Et nurkade $1^\circ, 2^\circ, \dots, 45^\circ$ siinused on vastavalt võrdsed nurkade $89^\circ, 88^\circ, \dots, 45^\circ$ koosinustega, siis siinuste tabel on ühtlasi ka koosinuste tabeliks. Tabeli teist tähendust näidatakse sel teel, et teise funktsiooni nimetus kirjutatakse tabeli alla ja kraadide arvud paremale:

α°	$\sin \alpha$	
0	0,000	90
1	017	89
2	035	88
.....		
28	469	62
.....		
45	707	45
	$\cos \alpha$	α°

Sellest tabelist leiame näiteks, et $\sin 28^\circ = 0,469 = \cos 62^\circ$.

Niisamuti on ka nurkade 1° kuni 45° koosinuste, tangensi ja kootangensi tabelil kahene tähendus; näiteks

$$\cos 28^\circ = 0,883 = \sin 62^\circ,$$

$$\tan 28^\circ = 0,532 = \cot 62^\circ,$$

$$\cot 28^\circ = 1,88 = \tan 62^\circ.$$

Nurgafunktsioonide tabel võimaldab lahendada kaht liiki ülesandeid:

a) leida antud nurga suuruse järgi selle nurga siinus, koosinus, tangens või kootangens;

b) leida antud siinuse, koosinuse, tangensi või kootangensi väärtuse järgi vastav nurk.

Esimese ülesande lahendamisel tuleb silmas pidada, et kui antud nurga suuruse leiame tabeli esimesest veerust, siis funktsiooni nimetust tuleb vaadata tabeli ülevalt äärelt; kui aga nurga suuruse leiame tabeli viimasest veerust, siis funktsiooni nimetust tuleb vaadata tabeli alt äärelt. Kui nurk sisaldab peale kraadide ka minuteid, siis ümardame selle kraadideks ja nimelt puuduga,

kui minuteid on vähem kui 30, ja liiaga, kui minuteid on 30 või üle selle.

Kui tabelis antud nurgafunktsiooni väärtust ei leidu, siis leiame sellele lähima tabelis leiduva selle funktsiooni väärtuse ja võtame viimasele vastava nurga. Näiteks, kui $\sin \alpha = 0,89$, siis $\alpha = 63^\circ$

509. Leia tabeli abil iga järgneva nurga kõik neli funktsiooni.

a) 27° ; 38° ; 47° ; 62° ; $18^\circ 34'$; $59^\circ 27'$; $48^\circ 30'$.

b) 17° ; $41^\circ 52'$; 51° ; $63^\circ 13'$; $79^\circ 48'$; $84^\circ 30'$; 46° .

Näide. $\cot 47^\circ 38' \approx \cot 48^\circ = 0,900$.

510. Leia nurgafunktsioonide tabeli abil antud funktsiooni väärtusele vastav nurk ja selle teised funktsioonid.

a) $\sin \alpha = 0,309$; $\cos \alpha = 0,766$; $\tan \alpha = 0,231$; $\cot \alpha = 3,73$.

b) $\sin \alpha = 0,423$; $\cos \alpha = 0,956$; $\tan \alpha = 1,88$; $\cot \alpha = 0,07$.

c) $\sin \alpha = 0,218$; $\cos \alpha = 0,64$; $\tan \alpha = 0,5$; $\cot \alpha = 7,5$.

d) $\sin \alpha = 0,917$; $\cos \alpha = 0,347$; $\tan \alpha = 1,39$; $\cot \alpha = 0,637$.

511. Leia nurgafunktsioonide tabeli abil nurga suurus, kui tema a) siinus on $\frac{5}{8}$; b) siinus on $\frac{27}{35}$; c) koosinus on $\frac{3}{4}$; d) koosinus on $\frac{36}{47}$; e) tangens on $1\frac{2}{7}$; f) tangens on $\frac{13}{15}$; g) kootangens on $17:4$; h) kootangens on $2:3$.

512. Leia täisnurkse kolmnurga nurga suurus, kui

1) nurga lähiskaatet on 24 cm ja vastaskaatet on 18 cm;

2) nurga lähiskaatet on 18 mm ja hüpotenuus on 24 mm;

3) nurga vastaskaatet on 0,67 m ja lähiskaatet on 1,6 m;

4) nurga vastaskaatet on 3,2 km ja hüpotenuus on 5,2 km.

513. Leia täisnurkse kolmnurga teravnurgad, kui

1) kaatetid on 5,8 dm ja 8,5 dm;

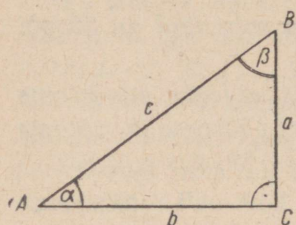
2) kaatetid on 0,82 m ja 1,45 m;

3) üks kaatet on 12 m ja hüpotenuus on 15,6 m;

4) üks kaatet on 0,3 m ja hüpotenuus on 0,75 m.

TÄISNURKSE KOLMNURGA LAHENDAMINE.

514. Täisnurkse kolmnurga elementide all mõistame praegu ainult tema külgi ja nurki. Kui muutuvatest elementidest, s. o. külgedest a , b , c ja teravnurkadest α , β (joon. 189) mingi kaks ele-



Joon. 189.

menti on antud (nende hulgas vähemalt üks külg), siis kolmnurk on määratud ja tema teisi elemente saab arvutada. Seega antud elementideks saavad olla

1. teravnurk ja hüpotenuus,
2. teravnurk ja kaatet,
3. kaks kaatetit,
4. kaatet ja hüpotenuus.

Missuguse kolmnurkade võrdsuse tunnuse põhjal saab öelda, et kaks täisnurkset kolmnurka on võrdsed, kui ühe kolmnurga ülalnimetatud elemendid on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega?

515. Lahendame täisnurkse kolmnurga, kui on antud teravnurk ja hüpotenuus, näiteks kui $\alpha = 27^\circ$ ja $c = 8,4$ cm.

Lahendus. 1) $\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$.

$$2) \frac{a}{c} = \sin \alpha;$$

$$a = c \cdot \sin \alpha = 8,4 \cdot \sin 27^\circ = 8,4 \cdot 0,454 \approx 3,8 \text{ (cm)}.$$

$$3) \frac{b}{c} = \cos \alpha;$$

$$b = c \cdot \cos \alpha = 8,4 \cdot \cos 27^\circ = 8,4 \cdot 0,891 \approx 7,5 \text{ (cm)}.$$

Kontroll. Arvutame hüpotenuusi Pütagorase teoreemi põhjal ja võrdleme tulemust antud hüpotenuusiga:

$$c = \sqrt{3,8^2 + 7,5^2} = \sqrt{14,4 + 56,2} = \sqrt{70,6} = 8,4,$$

nagu oli antud.

Vastus. $a = 3,8$ cm; $b = 7,5$ cm; $\beta = 63^\circ$.

516. Lahenda täisnurkne kolmnurk, kui on antud:

- 1) $\alpha = 39^\circ$ ja $c = 15$ cm;
- 2) $\alpha = 68^\circ$ ja $c = 0,58$ m;
- 3) $\beta = 14^\circ$ ja $c = 6,5$ dm;
- 4) $\beta = 53^\circ$ ja $c = 0,087$ km.

517. Lahendame täisnurkse kolmnurga, kui on antud teravnurk ja kaatet, näiteks, kui $\alpha = 61^\circ$ ja $a = 8,7$ cm.

Lahendus. 1) $\beta = 90^\circ - 61^\circ = 29^\circ$.

$$2) \frac{b}{a} = \cot \alpha;$$

$$b = a \cdot \cot \alpha = 8,7 \cdot \cot 61^\circ = 8,7 \cdot 0,554 \approx 4,8 \text{ (cm)}.$$

$$3) \sin \alpha = \frac{a}{c};$$

$$c \cdot \sin \alpha = a;$$

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{8,7}{\sin 61^\circ} = \frac{8,7}{0,875} = 8,7 \cdot 1,14 \approx 9,9 \text{ (cm)}.$$

Kontroll. Arvutame hüpotenuusi ka Pütagorase teoreemi põhjal ja võrdleme tulemusi:

$$c = \sqrt{8,7^2 + 4,8^2} = \sqrt{75,7 + 23,0} = \sqrt{98,7} = 9,93 \approx 9,9,$$

nii nagu varem saime.

Vastus. $b = 4,8$ cm; $c = 9,9$ cm; $\beta = 29^\circ$.

518. Lahenda täisnurkne kolmnurk, kui on antud:

$$1) \alpha = 25^\circ \text{ ja } a = 43 \text{ mm};$$

$$2) \alpha = 71^\circ \text{ ja } b = 10,5 \text{ cm};$$

$$3) \beta = 33^\circ \text{ ja } b = 180 \text{ m};$$

$$4) \beta = 59^\circ \text{ ja } a = 6,04 \text{ km}.$$

519. Telefoniposti tugi toetub postile 5,4 m kõrgusel maapinnast. Toe ja posti vaheline kaugus maapinnal on 3,7 m. Leia toe pikkus ja nurgad, mis ta moodustab maapinna ning postiga.

Lahendus. Täisnurksest kolmnurgast on antud (joon. 189) kaatetid $a = 5,4$ m ja $b = 3,7$ m. Leida tuleb hüpotenuus c ja nurgad α ning β .

$$1) c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5,4^2 + 3,7^2} = \sqrt{29,2 + 13,7} = \sqrt{42,9} = 6,55 \approx 6,6.$$

$$2) \tan \alpha = \frac{5,4}{3,7} = 1,46; \alpha = 56^\circ.$$

$$3) \beta = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ.$$

Kontroll. Arvutame leitud β ja c järgi kaateti b :

$$b = c \cdot \sin \beta = 6,6 \cdot \sin 34^\circ = 6,6 \cdot 0,559 \approx 3,7.$$

Vastus. Posti toe pikkus on 6,6 m ja ta moodustab maapinnaga nurga 56° ning postiga nurga 34° .

520. Lahenda täisnurkne kolmnurk, kui on antud:

- 1) $a = 15$ cm ja $b = 36$ cm;
- 2) $a = 0,8$ dm ja $b = 4,5$ dm;
- 3) $a = 320$ m ja $b = 180$ m;
- 4) $a = 4,7$ km ja $b = 1,7$ km.

521. Vaheloleva takistuse tõttu saab tuletõrjeredeli paigutada mitte lähemale kui 2,8 m maja seinast. Redeli pikkus on 9,2 m. Kui kõrgele ulatub redel ja kui suure nurga moodustab ta kõrgeimas asendis maapinna ning maja seinaga?

Lahendus. Täisnurksest kolmnurgast on antud kaatet $b = 2,8$ m ja hüpotenuus $c = 9,2$ m (joon. 189), leida tuleb kaatet a ja nurgad α ning β .

- 1) $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{9,2^2 - 2,8^2} = \sqrt{84,6 - 7,84} = \sqrt{76,76} = 8,76 \approx 8,8$.
- 2) $\sin \beta = \frac{2,8}{9,2} = 2,8 \cdot 0,109 = 0,305$; $\beta = 18^\circ$.
- 3) $\alpha = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$.

Kontroll. Arvutame kaateti a nurga α ja hüpotenuusi c järgi:

$$a = c \cdot \sin \alpha = 9,2 \cdot \sin 72^\circ = 9,2 \cdot 0,951 = 8,75.$$

Vastus. Redel ulatub 8,8 m kõrgusele ja ta moodustab siis maapinnaga nurga 72° ning maja seinaga nurga 18° .

522. Lahenda täisnurkne kolmnurk, kui on antud:

- 1) $a = 14$ cm ja $c = 24$ cm;
- näitena 2) $a = 0,9$ m ja $c = 1,2$ m;
- 3) $b = 7,8$ m ja $c = 8,0$ m;
- 4) $b = 0,004$ km ja $c = 0,08$ km.

523. Arvuta täisnurkse kolmnurga teised küljed ja nurgad, kui on antud:

- 1) $a = 5,2$ cm ja $c = 7,5$ cm; *üksin velli*
- 2) $a = 28$ m ja $b = 34$ m;
- 3) $b = 0,64$ m ja $\alpha = 51^\circ$;
- 4) $\beta = 72^\circ$ ja $c = 0,286$ dm.

524. Arvuta täisnurkse kolmnurga teised küljed ja nurgad, kui on antud:

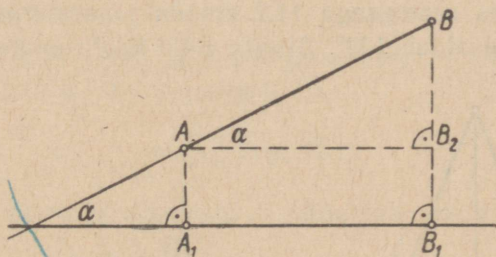
- 1) $c = 0,85$ m ja $\alpha = 38^\circ$;
- 2) $a = 0,70$ dm ja $b = 1,25$ dm;
- 3) $\alpha = 57^\circ$ ja $b = 0,64$ m;
- 4) $b = 0,65$ m ja $c = 0,95$ m.

NURGAFUNKTSIOONIDE RAKENDUSI.

525. Tuletorn, mille kõrgus on 19 m üle merepinna, paistab merel asetsevast paadist 7° kõrgusel. Kui kaugel on paat tuletornist?

526. Päikese kõrgus silmapiirilt on 32° . Kui kõrge on puu, mille varju pikkus rõhtsal maapinnal on sel momendil 22,4 m?

527. Kaldlõik AB moodustab sirgega nurga α (joon. 190). Avalda kaldlõigu AB projektsiooni A_1B_1 pikkus ja arvuta see, kui $AB = 6,4$ m ja $\alpha = 38^\circ$.



Joon. 190.

528. Sirge maantee tõuseb 70 m ulatuses mäkke ning moodustab rõhtsa maapinnaga nurga 16° . Mitu meetrit tõuseb maantee selles ulatuses?

529. Raadiosaatejaama mast paistab 180 m kauguselt 26° -se nurga all. Kui kõrge on see mast?

530. 2,5 m pikkuse teiba varju pikkus on 3,2 m. Kui kõrgel on päike silmapiirilt?

531. Ristküliku alus on 14,5 m, nurk aluse ja diagonaali vahel on 38° . Arvuta ristküliku pindala.

532. Rombi diagonaalide pikkused on 10,2 cm ja 6,8 cm. Kui suured on selle rombi nurgad?

533. Olgu võrdhaarse kolmnurga alus a , haar b ja kõrgus h . Avalda alusnurga β siinus, koosinus, tangens ja kootangens. Avalda poole tipunurga $\frac{\alpha}{2}$ siinus, koosinus, tangens ja kootangens (joon. 191).

534. Võrdhaarsest kolmnurgast on antud haar $b=8,0$ cm ja alusnurk $\beta=53^\circ$. Arvuta tipunurk α , kõrgus h , alus a ja pindala S .

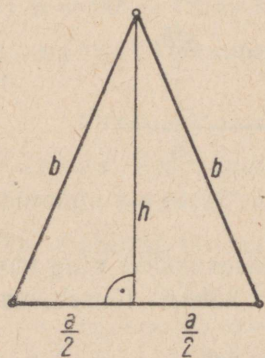
535. Arvuta võrdhaarse kolmnurga teised küljed ja nurgad, kui on antud:

- 1) alus $a=10$ cm ja haar $b=13$ cm;
- 2) alus $a=24$ m ja tipunurk $\alpha=126^\circ$;
- 3) haar $b=0,86$ m ja tipunurk $\alpha=46^\circ$;
- 4) haar $b=16,4$ cm ja alusnurk $\beta=51^\circ$.

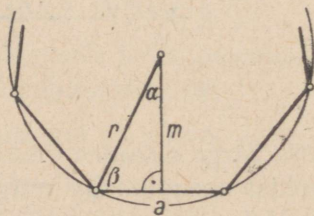
536. Kui suur kesknurk toetub 7 cm pikkusele kõõlule ringjoones, mille raadius $r=12$ cm?

537. Ringi kõõl, mille pikkus on 42 mm, toetub kaarele, mis sisaldab 70° . Kui pikk on ringi raadius?

538. Ringis raadiusega 11,2 cm on joonestatud kõõl, millele vastav kaar sisaldab 132° . Arvuta selle kõõlu pikkus.



Joon. 191.



Joon. 192.

539. Olgu korrapärase n -nurga külje pikkus a , apoteemi pikkus m ja ümberringjoone raadiuse pikkus r (joon. 192). Näita, et apoteemi ja raadiuse vaheline nurk

$$\alpha = \frac{180^\circ}{n}$$

ja külje ning raadiuse vaheline nurk

$$\beta = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}.$$

Tuleta külje a ja apoteemi m arvutamiseks valemid

$$a = 2r \cdot \sin \frac{180^\circ}{n} \text{ ja } m = r \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

540. Korrapärase viisnurga ümber joonestatud ringjoone raadius on 6,4 cm. Arvuta selle viisnurga külg, apoteem ja pindala.

541. Korrapärase üheksanurga ümber joonestatud ringjoone raadius on 12 cm. Arvuta üheksanurga külg, apoteem ja pindala.

542. Korrapärase kaksteistnurga ümber joonestatud ringjoone raadius on 6,8 m. Arvuta kaksteistnurga külg, apoteem ja pindala.

543. Korrapärase viisnurga külg on 1 m. Arvuta viisnurga apoteem ja pindala.

544. Korrapärase kümmenurga külg on 5,8 cm. Arvuta kümmenurga apoteem ja pindala.

545. Näita, et korrapärase n -nurga apoteem m avaldub külje a ja tippude arvu n kaudu järgmiselt:

$$m = \frac{a}{2} \cdot \cot \frac{180^\circ}{n}.$$

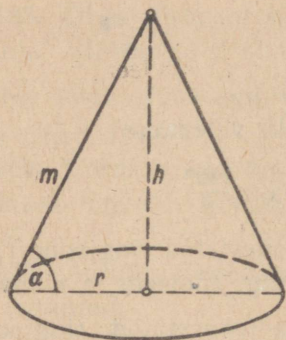
Avalda sellest valemist apoteemi ja külje suhe $m : a$ ja arvuta see suhe kui $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$.

546. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus $h = 18$ cm ja külgserv $b = 25$ cm (joon. 193). Kui suur on püramiidi külgserva kaldenurk põhja suhtes (nurk α joonisel 193)?

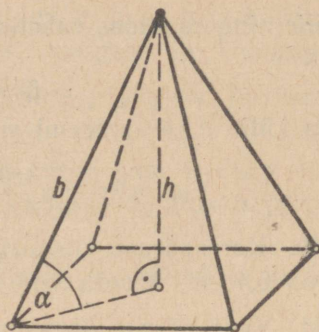
547. Arvuta korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus h , kui külgserv $b = 4,4$ dm ja külgserva kaldenurk põhja suhtes (nurk α joonisel 193) on 67° .

548. Koonuse moodustaja $m = 1,8$ m ja moodustaja kaldenurk koonuse põhja suhtes (nurk α joonisel 194) on 38° . Arvuta koonuse kõrgus ja põhja raadius.

549. Koonusekujulise liivahunniku kõrgus on 2 m ja läbimõõt 3 m. Kui suur on tipunurk sellel võrdhaarsel kolmnurgal, mis tekib, kui koonust lõigata mööda kõrgust?



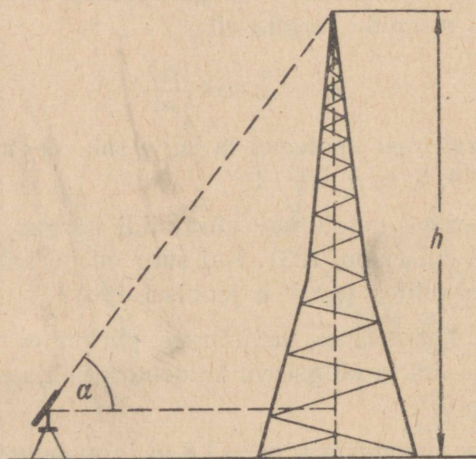
Joon. 193.



Joon. 194.

550. Arvuta koonuse ruumala, kui koonuse põhja raadius $r = 6,2$ dm ja nurk moodustaja ning kõrguse vahel $\beta = 33^\circ$.

551. Televisioonimasti kõrguse mõõtmiseks asetati nurgamõõtmise riist 68 m kaugusele masti aluse keskpunktist (joon. 195). Mõõtmisel saadi, et masti tipu kõrgusnurk $\alpha = 63^\circ 50'$. Arvuta masti kõrgus, kui nurgamõõtmise riist oli masti aluse tasemest 1,8 m kõrgemal.



Joon. 195.

28.84 552. Arvuta nurgamõõtmise riista kaugus masti aluse keskpunktist (joon. 195), kui masti kõrgus $h = 120$ m ja kõrgusnurk $\alpha = 48^\circ 10'$.

4. KORDAMISEKS.

553. Joonesta jõesängi ristlõige ja arvuta selle pindala järgmise tabeli andmeil.

Kaugus kaldast meetrites	0	1	2	3	4	5	6
Sügavus meetrites	0,4	1,2	2,3	2,9	2,1	0,7	0

554. Kevadisel lumesulamisel tõusis järve veepind nädalaga 34,5 cm. Kui palju suurenes järve veehulk keskmiselt päevas, kui järve pindala on 18,45 km²?

555. Ristkülikukujulise platsi katmiseks liivaga on veetud koonusekujuline hunnik liiva. Selle koonuse kõrgus on 1,8 m ja põhja läbimõõt 4 m. Kui paksu korraga saab sellest liivast katta platsi, kui viimase mõõtmed on 24 m ja 15 m?

556. Joonesta pinnalaotus ja arvuta pindala silindril, mille kõrgus on 4,6 cm ja põhja läbimõõt 3,9 cm.

557. Kraavi ristlõige on võrdhaarne trapets, mille alused on 1 m ja 2,5 m. Trapetsi haara kaldenurk aluste suhtes on 60°. Kraav on poole sügavuseni täidetud veega, mis voolab kiirusega 0,3 m sekundis. Kui palju vett voolab ööpäeva vältel läbi selle kraavi?

558. Merel seisab paat. Paadisilla kohal on nurk sirge rannajoone ja paadi suuna vahel täisnurk, kuid 50 m rannajoont mööda edasi on see nurk 38°. Kui kaugel on paat rannast?

559. Kahe sarnase kolmnurga pindalade suhe on 3,24 ja suurema kolmnurga küljed on 5,76 m, 4,50 m ja 8,28 m. Kui pikad on väiksema kolmnurga küljed?

560. Täisnurkse kolmnurga pindala on 2,7 m² ja üks kaatet on 3,6 m. Arvuta kolmnurga hüpotenuusi pikkus.

561. Kuuse varju pikkus oli 24 m. Arvuta kuuse kõrgus, kui 1,5 m pikkuse teiba vari oli samal ajal 2,1 m.

562. Euroopa kaardil mõõduga 1 : 25 000 000 on Moskva kujutatud ruudukesena, mille külg on 1,5 mm. Kui suurt pindala kujutab see ruut?

563. Mitu tonni kartuleid on koonusekujulises kuhjas, mille kõrgus on 2,2 m ja põhja läbimõõt on 5 m, kui 1 hl kartuleid kaalub 70 kg?

564. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on 6 cm ja ruumala on 72,8 cm³. Arvuta püramiidi kõrgus.

565. Kuubi pindala on 73,5 cm². Arvuta kuubi ruumala.

566. Koonuse põhja pindala on 50,3 cm² ja kõrgus on 5 cm. Joonesta ja arvuta moodustaja kaldenurk põhja suhtes.

567. Heinamaa on oma kujult kolmnurk, mille alus ja kõrgus on plaanil vastavalt 6,2 cm ja 5,5 cm. Mitu hektarit on kopli pindala, kui plaani mõõt on 1 : 2500?

568. Ristkülikukujulise maatüki pindala on 4,48 ha ja pikkus on 50% võrra laiusest suurem. Leia maatüki mõõtmed.

569. Ristküliku alus on 5,4 m. Arvuta ristküliku pindala, kui alus moodustab 36% kõrgusest.

570. Sovhoosi noored traktoristid otsustasid tänavu välja vedada 13 000 tonni orgaanilisi väetisi. Kui kõrge risttahukakujulise virna moodustaks see väetiste kogus, kui virna põhjaks võtta ristkülik mõõtmetega 20 m ja 50 m ning 1 m³ väetise kaaluks arvata 0,5 tonni?

571. Rajooni noored mehhanisaatorid lubasid tänavu valmistada vähemalt 20 000 t silo. Olgu see silo paigutatud virna, mille ristlõige on võrdhaarne trapets alustega 10 m ja 2 m ning kõrgusega 4 m. Arvuta selle virna pikkus, kui 1 m³ silo kaalub 600 kg.

572. Maja laius on 10 m. Kui pikad on maja katuse sarikad, kui nad ulatuvad 40 cm üle seina ja moodustavad laega nurga 45°?

573. Leia päikesekiirte kaldenurk maapinna suhtes, kui 1,8 m pikkuse teiba varju pikkus on 1,5 m.

574. Redel, mille pikkus on 2,5 m, on pandud seina najale nii, et redeli alumine ots on seinast 1,3 m kaugusel. Kui kõrgele ulatub redel ja kui suure nurga ta moodustab maapinnaga?

575. Mis on

a) antud punktist antud kaugusel asetseva punkti geomeetriliseks kohaks tasapinnal? ruumis?

b) antud sirgest antud kaugusel asetseva punkti geomeetriliseks kohaks tasapinnal? ruumis?

c) kahest antud punktist võrdsetel kaugustel asetseva punkti geomeetriliseks kohaks tasapinnal?

d) antud nurga haaradest võrdsetel kaugustel asetseva punkti geomeetriliseks kohaks tasapinnal?

576. a) On antud silindri kõrgus h ja põhja läbimõõt d . Avalda silindri külgpindala K , täispindala T ja ruumala V .

b) On antud koonuse kõrgus h ja põhja läbimõõt d . Avalda koonuse külgpindala K , täispindala T ja ruumala V .

c) On antud kera läbimõõt d . Avalda kera pindala S ja ruumala V .

577. Joonesta mingi isekülgne kolmnurk ja leia selle kõrguste lõikepunkt, mediaanide lõikepunkt ja nurgapoolitajate lõikepunkt.

578. On antud mingi lõik. Jaota see ilma mõõtmiseta osadeks, mis suhtuvad nagu 2 : 3. Kontrolli mõõtmise teel.

579. Ringi raadius on 18 cm. Kui suur pindala on selle ringi sektoril, mille nurk on 24° ?

580. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrgus $h=3$ ja kaateti a projektsioon hüpotenuusil $f=2$. Leida kolmnurga küljed ja nurgad.

581. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a=5$ dm ja selle projektsioon hüpotenuusil $f=3$ dm. Arvuta kolmnurga küljed ja nurgad.

582. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk $\alpha=50^\circ$ ja hüpotenuusile joonestatud kõrgus $h=6$ cm. Kui pikad on kolmnurga küljed?

✓ 583. Ringjoonele, mille raadius $r=18$ cm, on joonestatud punktist A kaks puutujat. Puutujatevaheline nurk on 74° . Kui kaugel on punkt A ringjoone keskpunktist?

584. Mitu korda on võrdkülgse kolmnurga ümber joonestatud ringi pindala suurem sama kolmnurga sisse joonestatud ringi pindalast?

585. Rööpküliku $ABCD$ külje CD punkt F on ühendatud vastaskülje AB otspunktidega. Leia kolmnurga ABF pindala, kui rööpküliku $ABCD$ pindala on m ruutühikut.

586. Trapetsi $ABCD$ haara BC keskpunkt E on ühendatud haara AD otspunktidega. Tõesta, et kolmnurga AED pindala on pool trapetsi pindalast.

587. a) Tõesta, et kolmnurga mediaan jaotab kolmnurga kaheks pindvõrdseks kolmnurgaks.

b) Tõesta, et kolmnurga kolm mediaani jaotavad kolmnurga kuueks pindvõrdseks osaks.

588. Arvuta täisnurkse kolmnurga pindala, kui selle külgede pikkused väljenduvad teineteisele järgnevate paarisarvudena.

589. Täisnurkse kolmnurga pindala on 720 m^2 ja kaatetid suhtuvad nagu $9:40$. Leia hüpotenuus.

590. Ehita ruut, mille pindala on võrdne kahe ruudu pindalade summaga, kui nende küljed on 12 cm ja 15 cm .

591. Täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on 12 cm ja 5 cm , pöörleb ümber hüpotenuusi. Arvuta saadud pöördkeha pindala ja ruumala.

592. Võrdhaarne kolmnurk, mille haar on 10 cm ja alus on 16 cm , pöörleb ümber aluse. Arvuta saadud pöördkeha pindala ja ruumala.

593. Ringjoonel on võetud punkt P , mis asetseb läbimõõdu otspunktidest A ja B vastavalt 7 cm ja 24 cm kaugusel. Kui suur on kaugus AP , kui punkti P liikudes mööda ringjoont kaugus BP saab võrdseks 20 cm -ga?

✓ 594. Leia veorihmaga ühendatud kahe pöörleva ratta läbimõõtude suhe, kui esimene ratas teeb minutis 1000 ja teine 375 pööret.

595. Raudplaadist lõigatakse kaks rida ümmargusi seibe nii, et iga teises reas olev lõikeringjoon puudutab kaht esimeses reas olevat ringjoont. Seibi raadiuseks on $8,5 \text{ mm}$. Kui kaugel teineteisest on mõlema seibirea keskkochti läbivad sirged?

596. a) Ümmargusest raudvardast tuleb freesida võimalikult suure ruudukujulise ristlõikega varras. Antud varda läbimõõt on $2,6 \text{ cm}$. Kui suur on uue varda ristlõike külg?

b) Ruudukujulise ristlõikega raudvardast tuleb treida võimalikult suure ristlõikega ümmargune varras. Mitu protsenti materjalist läheb kaotsi?

597. Ümmargusest raudvardast tuleb freesida varras, mille ristlõige on võimalikult suur korrapärane kuusnurk. Mitu protsenti materjali läheb kaotsi?

598. Mansardkorra viisnurkne aken on kujult pool korrapärast kaheksanurka. Leida akna pindala, kui akna raami alumise ääre pikkus on 2 m.

599. Kaevukoogu pikem õlg on 3,25 m ja lühem õlg on 1,5 m. Kui palju vajub koogu lühema õla ots, kui pikema õla ots tõuseb 2,5 m?

600. Kellapendli pikkus on 60 cm. Võnkumisel tasakaalu seisust äärmisesse seisu tõuseb pendli ots 15 cm võrra tasakaalu seisust kõrgemale. Kui kaugel on nüüd pendli ots vertikaalsirgest, mis läbib pendli kinnituspunkti?

601. Kasutades õpiku lisas antud joonist, lahenda järgmised ülesanded.

a) Kuiv liiv on koonusekujulises kuhjas, mille põhja läbimõõt on 4 m ja kõrgus on 1,5 m.

Mitu tonni on selles kuhjas liiva?

b) Kuivast kuusepuust silindri põhja läbimõõt on 12 cm ja kõrgus 15 cm. Kui palju kaalub see silinder?

c) Kuivast tammepuust kera kaalub 2,5 kg. Leia kera ruumala.

d) 2 tonni kustutatud lupja on silindrikujulises tünnis 1,2 m kõrguselt. Leia tünni seesmine läbimõõt.

SISUKORD

I OSA

ALGEBRA

1. KORDAMISEKS	3
2. KOORDINAATIDE MÖISTE	6
Asukoha määramise ülesandeid	6
Tasapinna punkti koordinaadid	8
Ülesandeid koordinaatide kasutamise kohta	10
3. FUNKTSIONAALNE SÖLTUVUS	13
Funktsioon ja argument	13
Suuruste sõltuvuse graafiline kujutamine	15
Võrdeline sõltuvus	19
Võrdelise sõltuvuse graafik	21
Lineaarne sõltuvus	27
Lineaarse funktsiooni graafik	29
Pöördvõrdeline sõltuvus	34
Pöördvõrdelise sõltuvuse graafik	36
Pöördarvude tabel	38
4. KAHE TUNDMATUGA LINEAARSED VÖRRANDISÜSTEEMID	41
Kahe tundmatuga võrrandi lahendi mõiste	41
Kahe tundmatuga lineaarse võrrandi graafik	45
Kahe tundmatuga lineaarne võrrandisüsteem	49
Kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi graafiline lahenda- mine	51
Kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi lahendite arv	54
Kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine võrdle- misvõttega	56
Kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine liitmis- võttega	57
Kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine asen- dusvõttega	61
Ülesannete lahendamine võrrandisüsteemide abil	66

5. RUUTFUNKTSIOON JA RUUTVÖRRAND	72
Funktsioon $y=x^2$	72
Ruutude tabel	75
Arvu ruutjuur	77
Ruutjuurte tabel	79
Ruutvõrrand $x^2=b$	86
Funktsioon $y=ax^2$	88
Ruutvõrrand $ax^2=b$	92
Funktsioon $y=ax^2+bx$	94
Ruutvõrrand $ax^2+bx=0$	96
Funktsioon $y=ax^2+bx+c$	97
Ruutvõrrand $ax^2+bx+c=0$	99
Täielik ja mittetäielik ruutvõrrand	102
Taandatud ruutvõrrandi lahendamine	104
Taandamata ruutvõrrandi lahendamine	108
Murdvõrrandite lahendamine	115
Ruutvõrrandi abil lahenduvaid ülesandeid	117
Taandatud ruutvõrrandi lahendite omadused	123
Ruutvõrrandi koostamine tema lahendite järgi	125
Teise astme kolmliikme lahutamine lineaarseiks tegureiks	127
Ruutvõrrandisüsteem	131
6. KORDAMISEKS	139

II OSA

GEOMEETRIA

1. RINGJOON. SILINDER. KOONUS. KERA	152
Geomeetrilised kohad	152
Kolmnurga ümberringjoon	157
Kolmnurga kõrguste lõikumine	159
Punkti ja ringjoone vastastikune asend	161
Sirge ja ringjoone vastastikune asend	161
Kolmnurga siseringjoon	167
Piirdenurk	168
Korrapärane hulknurk	175
Ringjoone pikkus	178
Kaare pikkus	185
Ringi pindala	188
Sektori pindala	194
Silinder	196
Silindri pinnalaotus ja pindala	198
Silindri ruumala	201
Koonus	203
Koonuse pinnalaotus ja pindala	204

Koonuse ruumala	207
Kera	210
Kera pindala	214
Kera ruumala	216
2. SARNASED HULKNURGAD	221
Pütagorase teoreem	221
Eukleidese teoreem	226
Teoreem täisnurkse kolmnurga kõrgusest	230
Seosed täisnurkse kolmnurga joonelementide vahel	233
Võrdelised lõigud	237
Nurga haarade lõikamine paralleelsete sirgetega	238
Hulknurkade sarnasus	244
Kolmnurkade sarnasuse tunnused	250
Sarnaste hulknurkade ümbermõõtude suhe ja pindalade suhe	256
Teoreem ringjoone lõikajatest	260
Pikkuste kaudne mõõtmine sarnaste kolmnurkade abil	262
Maa-alade plaanistamine	266
3. TERAVNURGA TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID	269
Teravnurga siinus ja koosinus	269
Mõnede nurkade siinuste ja koosinuste arvutamine	273
Teravnurga siinuse ja koosinuse graafik	275
Teravnurga tangens ja kootangens	277
Teravnurga tangensi ja kootangensi graafik	278
Nurgafunktsioonide tabelid	279
Täisnurkse kolmnurga lahendamine	281
Nurgafunktsioonide rakendusi	285
4. KORDAMISEKS	289
Lisa. Tabelid.	

Этверк Элмар Германович
Вихман Арнольд Юрьевич
МАТЕМАТИКА ДЛЯ VIII кл.

На эстонском языке.

Обложка С. Лийберг
Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja K. Kallaste
Kunstiline toimetaja H. Keigo
Tehniline toimetaja O. Laul
Korrektorid V. Põlde ja O. Kajando

Laduda antud 1. II 1962. Trükkida antud 13. III 1962. Paber 60×90, 1/16. Trükipoognaid 18,5+1 lisa. Arvutuspooznaid 14,77. Trükiarv 17 000. Tellimise nr. 1225. Hans Heidemanni nim. trükkikoda, Tartu, Olikooli 17/19. I.

Hind 27 kop.

27 kop.

A
24520

7156369

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00715636 9