TARTU ÜLIKOOL
1632
UNIVERSITAS TARTUENSIS

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ И АСТРОНОМИИ
АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР

Я. ЭЙНАСТО

СТРУКТУРА И ЭВОЛЮЦИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ГАЛАКТИК

01.030 астрономия и небесная механика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

II ТОМ

ТАРТУ 1971

СОДЕРЖАНИЕ

I Т О М

Введение I - 4

Часть I. Пространственно-кинематическая структура Галактики

А. Кинематика подсистем Галактики

I. Кинематическая структура главной последовательности I.I - 3I

2. Определение дисперсий скоростей звезд по радиальным, тангенциальным и пространственным скоростям 2.I - 22

3. Об асимметрическом смещении центроидов звезд 3.I - I4

4. Кинематические характеристики и возраст подсистем Галактики 4.I - I6

Б. Модель Галактики и система галактических параметров

5. Модель Галактики и система галактических параметров. Первое приближение 5.I - 2I

6. Система галактических параметров 6.I - 56

7. Модель Галактики 7.I - 27

II Т О М

Часть II. Методы определения пространственно-кинематической структуры регулярных звездных систем

А. Основы теории построения эмпирических моделей звездных систем

8. Классификация моделей. Требования физической корректности 8.I - I4

9. Функции и параметры описания 9.I - I9

I0. Построение пространственной модели I0.I - 25

II. Построение гидродинамической модели II.I - I7

I2. Применение теоремы о вириале к определению массы звездных систем I2.I - I0

Б. Специальные модели звездных систем

I3. Некоторые семейства специальных моделей I3.I - II

I4. Полиномиальная модель I4.I - I5

I5. Биномиальная модель I5.I - 24

I6. Гидродинамические модели на базе модифицированной экспоненциальной функции I6.I - 20

ЧастьIII. Пространственно-кинематическая структура галактики Андромеды

I7. Модель распределения массы I7.I - 25

I8. Гидродинамическая модель I8.I - I5

I9. Спиральная структура I9.I - I0

20. Структура составляющих 20.I - 26

Часть IУ. Эволюция галактик

21. Реконструкция динамической эволюции Галактики 21.I - I3

22. Физическая эволюция звездных систем 22.I - 36

23. Функция звездообразования и галактические подсистемы 23.I - 24

Приложение

24. Дальнейшие задачи исследования регулярных галактик 24.I - 3

Заключение I - 4

ЧАСТЬ II. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-КИНЕМАТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ РЕГУЛЯРНЫХ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ

А. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОСТРОЕНИЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ*

ГЛАВА 6

КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ. ТРЕБОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ КОРРЕКТНОСТИ

При статистическом описании галактик и звездных скоплений используется широко распространенный в естествознании метод моделирования объекта. К настоящему времени построено значительное число различных моделей звездных систем. Полный и обстоятельный обзор моделей распределения масс в сплюснутых звездных системах дает работа Л.Лереса [1], охватывающая период до 1961 г. Но хотя автор проводит разделение моделей на две обширных группы, он не ставит вопроса о классификации моделей. В настоящей статье делается попытка разработать основные принципы классификации моделей звездных систем, которые оказываются тесно связанными с задачами построения моделей. Авторы надеются, что постановка вопроса будет способствовать упорядочению процесса построения моделей звездных систем. Во избежание недоразумений сразу же отметим, что классификация моделей носит методологический характер и не предназначается взамен классификации моделируемых объектов, скажем, классификации галактик по Вокулеру [2].

---

*Опубликована в Публикациях Тартуской АО, 36, 341 - 356, 1967 под названием "О построении моделей звездных систем. I. К классификации моделей". Соавтор С.А.Кутузов.

I. Принципы классификации моделей звездных систем

Под моделью звездной системы мы будем подразумевать ее мысленную схему, которая определяется согласованной совокупностью функций и параметров описания и в основу которой положено предположение, предписывающее поведение отдельных функций или связи между ними. Модели звездных систем обладают целым рядом свойств, по которым их можно классифицировать. Прежде всего, следует различать статистический и динамический аспекты.

Статистическое описание звездной системы использует функции плотности распределения объектов (звезд, газа, пыли) по их геометрическим (координаты), кинематическим и физическим признакам. Введение этих функций связано с вопросом о сглаживании дискретной по своей природе структуры звездных систем. В настоящем цикле мы будем рассматривать только сглаженные модели. В моделях обычно применяются плотности распределения физических признаков (массы, светимости) по координатам и скоростям.

Динамическое описание имеет своим предметом гравитационное поле, соответствующее пространственно-кинематическому распределению масс в системе.

А. С точки зрения статистики, существенна степень подробности осуществляемого в модели описания. В соответствии с разделением звездной динамики, которое проводится Г.Г.Кузминым [3], можно выделить следующие типы моделей:

а) фазовые,
б) пространственно-кинематические,
в) пространственные,
г) гросс-модели.

Это подразделение характеризует распределение только по координатам и скоростям. Заметим также, что гидродинамическому описанию, определенному Г.Г.Кузминым, у нас соответствует два типа моделей, *б* и *в* .

Тип модели определяется функцией с наибольшей степенью подробности описания, фигурирующей в модели. Так, применение

функции плотности масс в фазовом пространстве либо ее проекций (термин Г.Г.Кузмина), которые описывают распределение масс в шести-, пяти- или четырехмерном пространстве координат и скоростей, означает фазовую модель. Для сферических звездных систем фазовые модели строятся, начиная с работ Джинса [4] и Эддингтона [5]. Из недавних работ упомянем фазовые модели Б.-И.Вельтманна [6]. Фазовых моделей для сплюснутых систем значительно меньше. Назовем здесь работы Фрике [7], Г.Г.Кузмина и С.А.Кутузова [8] и Линдена-Белла [9].

В пространственно-кинематической (собственно гидродинамической) модели распределение масс в пространстве координат трех, двух или одного измерений описывается функцией плотности масс либо ее проекциями. Одновременно дается кинематическое описание посредством таких функций места, как скорость центроида, тензор дисперсии скоростей и т.п. В локальном пространстве скоростей модель может быть представлена точкой, изображающей скорость центроида, и эллипсоидом скоростей, соответствующим тензору дисперсии скоростей. Построенные до сих пор пространственно-кинематические модели относятся главным образом к сферическим звездным системам, например [10].

В пространственных моделях описывается распределение масс (светимости) в звездной системе лишь в пространстве координат трех, двух или одного измерений. Здесь и дальше под термином "распределение масс" будем подразумевать именно такое распределение. Моделей распределения масс в звездных системах построено много (библиография в [1, 3]). Одну из первых моделей Галактики предложил Оорт [11]. Из более поздних работ упомянем модели П.П.Паренаго [12], Г.Г.Кузмина [13, 14, 15], М.Шмидта [16], Л.Перека [17], Г.М.Идлиса [18] и Я.Эйнасто [19]. Названные модели являются гидродинамическими лишь постольку, поскольку распределение масс в них связано со скоростью вращения плоских подсистем Галактики.

Гросс-модели описываются только интегральными характеристиками (гросс-параметрами), какими являются, например, масса, энергия, вириал, радиус системы и т.п. В фазовом пространстве модель представляет собой точку, изображающую положение и движение центра масс системы. Если же в гросс-описании используются еще тензоры моментов инерции и диспер-

ции скоростей, то в пространствах координат и скоростей ей будет соответствовать эллипсоиды. Гросс-модели фигурируют, например, в работах Бербидей [20] и Поведа [21]. Здесь, как и вообще в менее подробной модели, более подробное пространственно-кинематическое строение остается неопределенным, хотя для вывода соотношений между искомыми и известными функциями и параметрами оно может как-то грубо моделироваться. Модели с более подробным описанием содержат в себе менее подробные модели, так как функции и параметры последних моделей могут быть найдены на основе функций первых.

В каждом из четырех описаний наибольшая полнота достигается тогда, когда учитывается зависимость функций описания от времени. Привлекая понятие пространства-времени, можем говорить об описании системы в одном временном измерении (г) и т.д. до семи измерений фазового пространства-времени (а).

Б. Перечисленные свойства моделей характеризуют степень подробности пространственно-кинематического и временного описания. Увеличение степени подробности может быть достигнуто при дополнительном учете физической неоднородности населения звездных систем. Формально это может означать добавление абсолютной звездной величины и спектра к числу аргументов плотностей распределения [22].

Как известно, физические признаки объектов тесно коррелируют с их пространственно-кинематическими характеристиками. Это позволяет в звездно-динамическом моделировании (где абстрагируются от физического состояния гравитирующего вещества) отображать физическую неоднородность галактик путем введения составных частей моделей (субмоделей), каждая из которых описывает определенную составляющую системы. По степени учета физической структуры звездных систем модели можно разделить на два класса:

а) простые и
б) составные модели.

Большинство моделей являются простыми. Простые модели могут состоять из одного тела ("монодели") или не могут быть представлены (исключительно ради математического удобства) в виде суперпозиции "элементарных тел" (термин Л.Перека)

– суперпозиционные модели. Пример – модель М.Шварцвильда [23].

В зависимости от характера изменения функций описания при переходе от одного компонента модели к другому составные модели делятся на два подкласса: дискретно- и непрерывно-составные. Составные модели в принятом здесь смысле (субмодели соответствуют составляющим) начали строить недавно. Упомянем модели М.Шмидта [16], Л.Перека [17], Г.М.Идлиса [18] и Я.Эйнасто [19] – все дискретно-составные. Недавно Г.Г.Кузмин предложил непрерывно-составную модель [15].

В. По мере степени подробности, модель характеризуется степенью конкретности описания звездной системы. В соответствии с этим свойством модели можно разделить на три группы:

а) абстрактные,
б) специальные и
в) конкретные модели.

К абстрактным моделям следует отнести описание звездной системы с помощью сглаженных функций с теми или иными общего характера ограничениями, накладываемыми на них. Ограничениями (идеализирующими реальные свойства звездных систем) могут быть, например, предположения о плоскостной и осевой симметрии, самогравитируемости, стационарности и т.п. При этом вид функций описания остается свободным. Абстрактные модели являются предметом исследования теоретической звездной динамики: они не являются собственно моделями.

Специальные модели связаны с большими ограничениями. Здесь специальные предположения могут быть двух родов. Во-первых, могут быть заданы аналитические выражения для изоповерхностей функций описания или уравнения связи между функциями. При этом по-прежнему аналитический вид функций не фиксируется. Во-вторых, для самих функций описания могут быть заданы аналитические выражения со свободными параметрами. Первым предположением определяется вид моделей, а вторым – семейство. Очевидно, что выбору семейства должен предшествовать выбор вида модели. В качестве видов моделей можно назвать сферические модели распределения масс [14] и фазовые модели с эллипсоидальным распределением скоростей

[24]. Примером семейств моделей являются модели с принятым аналитическим выражением потенциала [I2, I3], плотности масс [6] и т.п.

В конкретных моделях функции описания задаются численно либо посредством оценивания параметров в аналитических выражениях специальных моделей [I3], либо с помощью таблиц и графиков [I4].

Г. Перейдем теперь к динамическому аспекту. В динамических моделях в зависимости от степени их подробности используют уравнения фазовой, гидро- или гросс- динамики. Как при выводе самих уравнений, так и дополнительно для построения модели делаются различные предположения. В зависимости от степени и характера обоснованности предположения, положенного в основу специальной модели, можно различать три рода моделей:

а) теоретические,
б) эмпирические и
в) априорные модели.

Заметим, что динамический аспект отсутствует в модели, если при ее построении используются только чисто статистические уравнения (например, при определении строения Галактики по звездным подсчетам). Приведенное разделение в некоторой степени годится и для таких моделей.

В эмпирических моделях предположения о свойствах функций описания делаются непосредственно и имеют специальный характер. Эти предположения, как правило, базируются на том же наблюдательном материале, который используется при конкретизации модели. В теоретических же моделях свойства описания выводятся математически, исходя из более абстрактных предположений, которые относятся, как правило, к описанию более подробного (фазового) типа. Тем самым разделение моделей на теоретические эмпирические условно постольку, поскольку связано с типом описания. Так, модель теоретическая в гидродинамическом описании может быть эмпирической в фазовом описании или наоборот. По существу разница между теоретическими и эмпирическими моделями та же, что и между дедуктивной и индуктивной трактовками явления.

Наряду с эмпирическими предположениями могут выступать априорные, т.е. не вытекающие ни из теории, ни из наблюдений (например, предположение о постоянном отношении - масса/светимость [23]). Если такие предположения являются для модели определяющими, имеет смысл назвать модель априорной вместо эмпирической.

К числу теоретических можно отнести модели гравитационного поля П.П.Паренаго [12] и Г.Г.Кузмина [13] (первая вне плоскости симметрии является уже эмпирической). В обеих моделях предположения относятся к фазовому описанию: модель П.П.Паренаго следует из принятия эллипсоидального распределения скоростей, а модель Г.Г.Кузмина - из допущения существования третьего интеграла движения звезд в квадратичной относительно скоростей форме. Эти предположения основаны на наблюдательных фактах приблизительной эллипсоидальности и трехосности распределения остаточных скоростей звезд. Второе допущение носит более абстрактный характер, т.е. модель Г.Г.Кузмина является более общей.

Эмпирическими можно назвать модели М.Шмидта [16] и Я.Эйнасто [19]. В них вид функции распределения массы выведен эмпирически.

Заметим, что в принципе возможны модели, более общие, чем названные выше теоретическими. Это - специальные модели, выведенные с помощью нескольких общего характера постулатов на основе физических законов. Такой модели - ее можно было бы назвать аксиоматической - пока нет. К тому же это была бы не модель в собственном смысле (отсутствует специальное предположение), а теория - аксиоматическая теория динамики звездных систем, о необходимости которой говорит Ф.А.Цицин [25].

Перечисленные четыре свойства моделей - А) степень подробности описания, Б) степень учета неоднородности населения, В) степень конкретности описания, Г) характер основного предположения - являются наиболее простыми, сравнительно легко поддающимися функции характеристиками моделей. Приводимая таблица иллюстрирует данную классификацию на примере избранных типичных моделей, цитированных выше.

Модель (авторы)	По подробности описания	По учету неоднородности населения	По конкретности описания	По характеру предположений
Г.Г.Кузмин и С.А.Кутузов [8]	фазовая	простая	конкретная	теоретическая
Г.Г.Кузмин [13]	"	"	"	"
Г.Г.Кузмин [14]	пространственная	"	"	эмпирическая
Г.Г.Кузмин [15]	"	непрерывно-составная	специальная	априорная
Г.М.Идлис [18]	"	составная	конкретная	теоретическая
М.Шмидт [16]	"	"	"	эмпирическая
Л.Перек [17]	"	"	"	"
Я.Эйнасто [19]	"	"	"	"

Здесь учтены лишь наиболее существенные черты моделей.

Предполагаемая классификация многомерна. Что касается деления моделей Л.Перека [1], то он приводит его в основном по одному признаку, а именно по виду предположения: модели, основанные на распределении скоростей, и модели, основанные на законе изменения плотности масс. Однако в рамках второй группы моделей вводится дополнительное подразделение на простые и составные модели. Кроме того, дается указания на теоретический и эмпирический характер моделей. Все это только подтверждает необходимость многомерной классификации. Что касается одномерной классификации, то она тем более оправдана, чем теснее зависимость разных свойств рассматриваемых моделей друг от друга.

В отношении работы Л.Перека [1] заметим еще, что в ней модель Г.Г.Кузмина [13] ошибочно считается основанной на эллипсоидальности распределения скоростей. В действительности, как уже говорилось, она вытекает из допущения существования третьего квадратичного относительно скоростей интеграла движения звезд. Хотя при эллипсоидальном трехосном распределении

скоростей потенциал и получается в виде, допускающем существование третьего интеграла [24], но для самогравитирующей звездной системы принятие такого потенциала несовместимо в общем случае с эллипсоидальностью распределения скоростей [7].

2. Об астрономическом оценивании моделей

В число классифицируемых наши не включены такие свойства моделей, которые сводятся к критериям физической корректности модели или не плохо поддаются оценке и не образуют последовательности, допускающей градацию.

Рассмотрим эти свойства, начав с критериев физической корректности. Некоторые критерии приводятся Г.И.Идлисом [26] как физические основы моделей галактик. С точки зрения статистического описания звездной системы существенны следующие основные ограничения:

1) функции плотности распределения должны быть неотрицательными;

2) функции описания не должны иметь изломов и скачков;

3) функции описания должны быть однозначными;

4) некоторые моменты плотностей распределения должны быть конечными.

Несмотря на очевидность первого ограничения, оно не всегда выполняется. Так например, в модели П.П.Паренаго [12], в которой принятый закон круговой скорости считается имеющим место до бесконечности, плотность масс на периферии отрицательна [27]. Названный недостаток исправлен в модели Г.И.Идлиса [18].

Второе ограничение нарушается в моделях, включающих в себя однородные элементарные тела (сфероиды, диски и т.п.), у которых плотность на границе скачком обращается в ноль. Такие модели имеют резкие скачки в градиенте плотности; это приводит при большой сплюснутости к тому, что круговая скорость убывает быстрее, чем обратно пропорциональную кубу расстояния от центра. Как известно [28, § 63], в таком случае круговое движение перестает быть устойчивым. На этом основании

в свое время делались далеко идущие выводы о происхождении спиральной структуры галактик [28, § 64]. Нетрудно убедиться в том, что эти выводы отпадают, если брать модель с более параболоподобным ходом плотности на периферии.

Третье ограничение сводится к требованию о непересечении изоповерхностей функций описания. Это требование нарушено в отношении плотности масс плоской составляющей в модели Г.М.Идлиса [18], на что было указано в свое время [29].

Что касается четвертого ограничения, то в реальной звездной системе все неотрицательного порядка моменты плотностей распределения конечны. Это обусловлено, с одной стороны, тем, что плотность масс (или светимости) повсюду конечна. С другой стороны, вследствие существования внешних звездных систем конечны и размеры системы. Но требование конечности всех таких моментов плотностей распределения слишком сузило бы класс моделей, пригодных для описания звездных систем. Поэтому мы допускаем, что только некоторые моменты, в том числе моменты, определяющие массу и эффективный радиус модели, должны быть конечными.

Это ограничение не исключает возможности наличия некоторых особенностей в поведении функций описания. Например, функция плотности распределения может приобретать (но не скачком) в отдельных точках или даже на поверхностях бесконечные значения или бесконечные по модулю градиенты. Примером может служить плотность масс в модели М.Шмидта [16], обращающаяся в бесконечность в центре. Бесконечная центральная плотность допустима как идеализация очень большой плотности, которая наблюдается в ядрах некоторых галактик. Далее, модель может обладать бесконечным радиусом, подобно модели Г.Г.Кузмина [13]. Такой радиус можно рассматривать опять-таки как идеализацию наличия у некоторых звездных систем весьма протяженной короны.

Для динамической модели следует назвать еще один критерий физической корректности, вытекающий из сущности модели, а именно:

5) в самогравитирующей модели должен удовлетворяться ньютоновский закон тяготения.

Другими словами, потенциал и плотность масс должны удовлетворять уравнению Пуассона. Данное требование не выполнено, например, в составной модели Г.М.Идлиса, на что указывает сам автор [18, § 21].

Перейдем теперь к упомянутым в начале параграфа более сложным свойствам моделей. Задача моделирования состоит в представлении известных наблюдательных данных и выявлении на их основе новых, недоступных наблюдениям характеристик звездных систем. Поэтому важным свойством модели является степень охвата и мера согласия с современным наблюдательным материалом [30]. Последнюю можно было бы выражать, скажем, суммой взвешенных квадратов отклонений значений избранных галактических параметров модели от наблюденных. Не менее важным свойством представляется область применимости модели. Так, модель в виде плоского диска [31] не применима для описания трехмерного пространственного строения системы; аналогично обстоит дело с моделью с двухосным распределением скоростей [8].

Оба последних свойства можно объединить в такой характеристике модели, которую уместно назвать репрезентативностью. Выявление репрезентативности модели с учетом ее физической корректности и места в предлагаемой классификации может составить астрономическое оценивание модели.

Если с этой точки зрения рассмотреть имеющиеся модели звездных систем, в частности модели нашей Галактики, то следует признать, что наблюдательные возможности далеко еще не исчерпаны. Трудно, например, согласиться с мнением М.Шмидта [16], что его модель ". . . представляет практически все, что мы знаем о Галактике!" Эта модель противоречит данным о радиальном градиенте плотности, что признано позднее и самим автором [32]. Как модель Шмидта, так и модели Г.Г.Кузмина [14], Л.Перека [1], Г.М.Идлиса [18] и Я.Эйнасто [19] несколько устарели в своей наблюдательной основе. Таким образом, существует потребность в построении на современном уровне более репрезентативных моделей как нашей Галактики, так и ряда других галактик.

3. О задачах моделирования звездных систем

Одной из центральных проблем современной звездной динамики несомненно является построение фазовой эволюционной модели звездных систем. Эта проблема, однако, очень сложна и вряд ли может быть решена, если стационарные модели звездных систем не разработаны достаточно подробно. Последнюю задачу целесообразно, по-видимому, решать по этапам, переходя от простейших типов моделей ко все более сложным (см. пункт А классификации).

В качестве исходного этапа естественно рассматривать построение стационарных эмпирических моделей распределения масс и светимостей в звездных системах на основе современного наблюдательного материала с привлечением усовершенствованной методики построения теории. На первый взгляд может показаться, что для достижения большей общности было бы предпочтительнее выбрать род модели, исходя из теоретических соображений. Однако практика показывает, что имеющиеся теоретические модели гораздо хуже аппроксимируют действительность, чем эмпирические. Это связано, по-видимому, прежде всего с тем, что исходные предпосылки, на которых основаны теоретические модели, недостаточно точно соответствуют реальности. Для достижения максимальной репрезентативности мы будем рассматривать эмпирические и составные модели.

Построение эмпирической модели, в свою очередь, может быть подразделено так:

а) уточнение методики построения моделей, включая выбор уравнений, связывающих различные функции описания, выбор аналитического вида исходной функции описания, а также выбор способов определения моментов модели;

б) обработка соответствующего наблюдательного материала, включая предварительную обработку и сам процесс построения модели;

в) сравнение и анализ полученных моделей.

Настоящая серия работ посвящена решению задач первого из этих подэтапов. Прежде всего мы рассмотрим различные функции и параметры описания звездных систем и связи между ними. Далее, мы займемся некоторыми специальными

моделями, представляющими практический интерес, в том числе степенно-полиномиальной и биномиальной. Наконец, будет проанализирована методика построения эмпирической модели.

Июль 1966 г.

Литература

I. L.Perek, Advances ib Astronomy and Astrophysics, 1, Academic Press, New-York and London, 1962.
2. G. de Vaucouleurs, Handbuch der Physik (S.Flügge, ed.), Vol. 53, p. 275, Springer, Berlin, 1959.
3. Г.Г.Куэмин, Труды Астрофиз. инст. АН Каз ССР, 5, II, 1965 (Тарту сообщ. № I5).
4. J.H.Jeans, M.N., 76, 567, 1916.
5. A.S.Eddington, M.N., 76, 572, 1916.
6. Э.-М.Зелтынш, Тарту публ., 34, I0I, 1964.
7. W.Fricke, A.N., 280, 193, 1952.
8. Г.Г.Куэмин и С.А.Кутузов, Бюлл. Абастуманской астрофиз. обс., 27, 82, 1962; Тарту сообщ., № 6, I0, 1963.
9. D.Lynden-Bell, M.N., 123, 447, 1962.
I0. Т.А.Агекян, И.В.Петровская, Уч. зап. ЛГУ, сер. мат. наук, № 307, вып. 36, I87, 1962.
II. J.H.Oort, B.A.N., 4, 269, 1928.
I2. П.П.Паренаго, АЖ 27, 329, I950; 29, 245, I952.
I3. Г.Г.Куэмин, АЖ, 33, 27, I956 (Тартус сообщ., № 2).
I4. Г.Г.Куэмин, Изв. АН ЭССР, 5, 9I, I956 (Тарту сообщ., № 3).
I5. Г.Г.Куэмин, Тарту публ., 35, 285, I966.
I6. M.Schmidt, B.A.N., 13, 15, 1956.
I7. L.Perek, B.A.C., 10, 15, 1959.
I8. Г.М.Идлис, Труды Астрофиз. инст. АН Каз ССР, I, I96I.
I9. Я.Эйнасто, Труды Астрофиз. инст. АН Каз ССР, 5, 87, I965 (Тарту сообщ., № I7).
20. E.M.Burbidge and G.R.Burbidge, Ap.J., 132, 30, 1960.
2I. A.Poveda, Bol. Obs. Tonanzintla y Tacubaya, 17, 3, 1958.
22. R.J.Trumpler and H.W.Weaver, Statistical Astronomy, Univ. of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1963.
23. M.Schwarzschild, A.J., 59, 273, 1954.

24. И.Л.Генкин, Сообщ. ГАИШ, № 124, 1962; № 129, 1963.
25. Ф.А.Гинин, Труды Астрофиз. инст. АН Каз ССР; 5, 105, 1965.
26. Г.М.Идлис, Труды Астрофиз. инст. АН Каз ССР, 5, 105, 1965.
27. Г.Г.Кузмин, Изв. АН ЭССР, 2, 368, 1963 (Тарту сообщ. № 1).
28. П.П.Паренаго, Курс звездной астрономии, 2-е изд., ГИТТЛ, М.-Л., 1946.
29. С.А.Кутузов, Труды Астрофиз. инст. АН Каз ССР, 5, 78, 1965 (Тарту сообщ. № 16).
30. Х.Ээлсалу, Тарту сообщ., № 8, 17, 1963.
31. A.B.Wyse and N.U.Mayall, Ap.J., 95, 24, 1942.
32. M.Schmidt, P.A.S.P., 73, 103, 1961; I.A.U. Trans., 11B, 414, 1962.

ГЛАВА 9

ФУНКЦИИ И ПАРАМЕТРЫ ОПИСАНИЯ

Проблема построения эмпирической модели некоторой конкретной звездной системы сводится к определению функций и параметров описания. Целью настоящей работы является рассмотрение функций и параметров описания звездных систем и их моделей. При этом мы допускаем, что звездные системы или их составляющие построены по эфероидальной гомотетической модели, т.е. что поверхности равных пространственных плотностей являются соосными подобными эллипсоидами вращения.

1. Функции описания. Применяем для основных функций описания следующие обозначения:

ρ – пространственная плотность массы,
μ – "функция массы" (определение см. ниже),
p – плотность массы, спроектированная на картинную плоскость,
ℓ – пространственная плотность светимости,
h – "функция светимости" (определение см. ниже),
L – плотность светимости, спроектированная на картинную плоскость,
ν – "функция скорости" (определение см. ниже).

Пусть x , y , z – галактоцентрические прямоугольные координаты с осью , направленной в полюс системы, и X , Y , Z – галактоцентрические прямоугольные коорди-

---

Опубликовано в Публикациях Тартуской АО, 36, 357 – 378, 1967 под названием" О построении моделей звездных систем. II. Функции и параметры описания".

наты с осью Z, направленной от наблюдателя, и осями X и Y, направленными соответственно вдоль большой и малой осей видимой конфигурации галактики.

Пространственные плотности массы и светимости являются в общем случае функциями x, y, z. Они связаны между собой соотношением

$$\varrho(x,y,z)=f(x,y,z)\ell(x,y,z), \qquad (I.1)$$

причем $f(x,y,z)$ – отношение масса/светимость, для которого имеем выражение

$$f^{-1}(x,y,z)=c_0\int_0^\infty I(x,y,z,\nu)\varphi(\nu)d\nu. \qquad (I.2)$$

Здесь c_0 – коэффициент пропорциональности, зависящий от единиц ℓ и ϱ, I – функция спектрального распределения интенсивности излучения, отнесенная к единице массы, φ – функция спектральной чувствительности в применяемой фотометрической системе и ν – частота излучения.

Допустим, что звездная система может быть разделена на некоторое число физически однородных составляющих, построенных по сфероидальной гомотетической модели. Под физически однородными составляющими мы подразумеваем подсистемы объектов с одинаковыми или близкими физическими характеристиками, в том числе и функцией спектрального распределения интенсивности излучения. Согласно этому определению для данной составляющей $I(x,y,z,\nu) = I(\nu)$ и

$$f^{-1}=c_0\int_0^\infty I(\nu)\varphi(\nu)d\nu=const. \qquad (I.3)$$

Под сфероидальной гомотетической моделью подразумевается модель с концентрическими и соосными поверхностями равной пространственной плотности в виде подобных эллипсоидов вращения. Большая полуось эллипсоидов выражается формулой

$$a^2=x^2+y^2+\varepsilon^{-2}z^2, \qquad (I.4)$$

где $\varepsilon = b/a$ – отношение малой полуоси эллипсоида к

большой.*

Для сфероидальной гомотетической модели $\rho(x,y,z) = \rho(a)$ и $\ell(x,y,z) = \ell(a)$. Далее, в этом случае "функция массы" определяется формулой [I]

$$\mu(a) = 4\pi\varepsilon a^2 \rho(a); \qquad (I.4)$$

аналогично можно определить и "функцию светимости"

$$h(a) = 4\pi\varepsilon a^2 \ell(a). \qquad (I.5)$$

Выражая ρ через аргументы X, Y, Z и интегрируя по Z, получим формулу связи между функциями P, ρ и μ для гомотетической модели

$$P(A) = \frac{2\varepsilon}{E}\int_A^{A^0}\frac{\rho(a)a\,da}{\sqrt{a^2-A^2}} = \frac{1}{2\pi E}\int_A^{A^0}\frac{\mu(a)da}{a\sqrt{a^2-A^2}}, \qquad (I.6)$$

где A – большая полуось эллипса равных спроектированных плотностей

$$A^2 = X^2 + E^{-2}Y^2, \qquad (I.7)$$

причем $E = B/A$ – отношение полуосей эллипса, характеризующее видимую сплюснутость системы. Связь между ε и E выражается формулой

$$E^2 = \cos^2 i + \varepsilon^2 \sin^2 i, \qquad (I.8)$$

где i – угол между осью системы и лучем зрения. Величина $a^0 = A^0$ в формуле (I.6) является большой полуосью граничного эллипсоида (в проекции грани чисто эллипса) системы. Мы допускаем, что

$$\rho(a) = \mu(a) = P(A) \equiv 0 \qquad \text{при } a = A \geq A^0. \qquad (I.9)$$

У неограниченной модели $a^0 = A^0 = \infty$.

Для спроектированной плотности светимости получим вполне аналогично

---

* Часто в литературе употребляется обозначение $\varepsilon = 1 - b/a$, которое, однако, менее удобно.

$$L(A) = \frac{2\varepsilon}{E}\int_{A}^{A^\circ}\frac{\ell(a)\,a\,da}{\sqrt{a^2-A^2}} = \frac{1}{2\pi E}\int_{A}^{A^\circ}\frac{h(a)\,da}{a\sqrt{a^2-A^2}}. \qquad (I.10)$$

Вследствие независимости отношения массы к светимости от положения у однородной системы (подсистемы)

$$\frac{\rho(a)}{\ell(a)} = \frac{\mu(a)}{h(a)} = \frac{P(A)}{L(A)} = f. \qquad (I.11)$$

Нормированную функцию скорости $\nu^0(R)$ определяем, следуя Пареку ([2], стр. 259, обозначение ρ), формулой

$$\nu^0(R) = \frac{R}{GM}V^2(R), \qquad (I.12)$$

где V – круговая скорость, M – масса системы, G – гравитационная постоянная и R – расстояние от оси, т.е.

$$R^2 = x^2 + y^2. \qquad (I.13)$$

Поскольку круговая скорость V_c объекта, вращающегося вокруг материальной точки с массой M, выражается формулой

$$V_c^2(R) = \frac{GM}{R}, \qquad (I.14)$$

то нормированная функция скорости $\nu^0(R)$ представляет собой отношение квадратов круговых скоростей, соответствующих рассматриваемой модели и точечной модели с такой же массой.

Функция $\nu^0(R)$ не может быть непосредственно определена из наблюдений, так как масса системы M не известна заранее. Поэтому на практике целесообразно использовать ненормированную функцию скорости

$$\nu(R) = \frac{RV^2(R)}{G} = M\,\nu^0(R). \qquad (I.15)$$

Для сфероидальной гомотетической модели эта функция связана с функцией массы соотношением (см. [I, 2])

$$\nu(R) = \int\frac{\mu(a)\,da}{\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon a}{R}\right)^2}}, \qquad (I.16)$$

причем $\varepsilon^2 = I - \varepsilon^2$.

Так как способы вычисления изображения функции скорости не рассматривались ранее в литературе по звездной динамике, то целесообразно несколько подробнее остановиться на этих вопросах.

При построении модели звездной системы удобно задать функцию массы $\mu(a)$, а функцию скорости $v(R)$ определить по формуле (I.I6). В большинстве практических приложений интеграл не выражается известными функциями, так что приходится пользоваться численным интегрированием. При этом полезно выполнить замену переменных $\sin\varphi = eaR^{-1}$ (см. 3 , что приводит интеграл к виду

$$v(R) = \frac{R}{e}\int_0^{\varphi_0} \mu\left(\frac{R}{e}\sin\varphi\right) d\varphi , \qquad (I.I7)$$

где

$$\varphi_0 = \begin{cases} \arcsin e , & R \le a^0 \\ \arcsin \dfrac{ea^0}{R} , & R \ge a^0 . \end{cases} \qquad (I.I8)$$

Иногда вместо численного интегрирования лучше пользоваться разложением в ряд. Допустим, что функцию массы можно представить в виде $\mu(a) = a^2 g(a)$, причем функция $g(a)$ имеет разложение

$$g(a) = \sum_{i=0}^{\infty} g^{(i)}(0)\frac{a^{i\nu}}{i!} , \qquad (I.I9)$$

где ν - некоторый параметр и

$$g^{(i)}(0) = \left.\frac{d^i g(a)}{(da^\nu)^i}\right|_{a=0} . \qquad (I.20)$$

Разложение функции скорости получается в виде

$$v(R) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{g^{(i)}(0)}{i!} B_{e^2}\left(\frac{3+i\nu}{2},\frac{1}{2}\right)\left(\frac{R}{e}\right)^{3+i\nu} \qquad (I.2I)$$

где $B_x(p,q)$ - неполная бета-функция.

При больших R притяжение звездной системы не зависит от ее формы, а зависит только от массы. Следовательно, $v(R) \to M$ и $v_0(R) \to 1$ при $R \to \infty$. Нетрудно по (I.16) получить асимптотический ряд

$$v(R) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(i+1)} m_{2i}\{\mu(a)\}\left(\frac{e}{R}\right)^{2i}, \qquad (I.22)$$

где Γ – полная гамма-функция, $m_{2i}\{\mu(a)\}$ – моменты порядка $2i$ функции $\mu(a)$, причем $m_0\{\mu(a)\} = M$. Разложение действительно за пределами звездной системы, т.е. при $R \gg a^o$. При $R < a^o$ следует брать "неполные моменты".

При описании характера изменения функции скорости целесообразно применить ее логарифмический градиент $G\{v(R)\} = d\ln v(R)/d\ln R$. Нетрудно видеть, что в центре звездной системы указанный градиент равен трем (если плотность массы в центре конечная и больше нуля), на бесконечности он стремится к нулю.

По логарифмическому градиенту функции скорости легко определить место, где круговая скорость достигает максимального значения и где круговое движение становится неустойчивым. Действительно, по (I.15) находим, что при $R = R_m$ (R_m соответствует максимуму круговой скорости) $G\{v(R_m)\} = 1$. Условие устойчивости кругового движения имеет вид $G\{v(R)\} > -1$.

Гравитационный потенциал в плоскости симметрии звездной системы выражается согласно [1] формулой

$$\Phi_{z=0}(R) = G \int \mu(a)\chi\left(\frac{a}{R}\right)\frac{da}{a}, \qquad (I.23)$$

где

$$\chi\left(\frac{a}{R}\right) = \begin{cases} \frac{1}{e}\arcsin\frac{ae}{R}, & a \le R, \\ \frac{1}{e}\arcsin e, & a \ge R. \end{cases} \qquad (I.24)$$

Аналогично нормированной функции скорости целесообразно

использовать и нормированную безразмерную функцию потенциала

$$\varphi^0(r) = \frac{a_0 \Phi_{z=0}(r)}{GM}, \qquad (I.25)$$

причем $r = R/a_0$ – безразмерное расстояние. Как $\Phi_{z=0}(R)$, так и $\varphi^0(r)$ могут быть вычислены по функции скорости. Имеем

$$\Phi_{z=0}(R) = G\int_R^\infty \frac{\nu(R')}{R'^2}\,dR' = \Phi(0) - G\int_0^R \frac{\nu(R')}{R'^2}\,dR' \qquad (I.26)$$

и

$$\varphi^0(r) = \int_r^\infty \frac{\nu^0(r')}{r'^2}\,dr' = \varphi^0(0) - \int_0^r \frac{\nu^0(r')}{r'^2}\,dr', \qquad (I.27)$$

причем

$$\Phi(0) = \frac{\arcsin e}{e} G\mathcal{M}_{-1}\{\mu(a)\} \qquad (I.28)$$

и

$$\varphi^0(0) = \frac{\arcsin e}{e}, \qquad (I.29)$$

так как $\mathcal{M}_1\{\mu^0(a)\} = 1$ по определению. Отметим, что $\varphi^0(r) \to r^{-1}$ при $r \to \infty$.

2. Моменты функции описания. Как мы увидим ниже, гросс-параметры описания звездной системы целесообразно определить через моменты функции масы

$$\mathcal{M}_i\{\mu(a)\} = \int_0^{a^0} \mu(a)\,a^i\,da, \qquad (2.1)$$

причем $i = -2, -1, \ldots, 2$.

Моменты функций $\mu(a)$ и $h(a)$ не могут быть непосредственно найдены на основе наблюдений. С другой стороны, по наблюдениям могут быть вычислены моменты функций спроектированной светимости и функции скорости. Поэтому нужно вывести соотношения между моментами разных функций описания.

Вместо обычных моментов целесообразно использовать квазимоменты наблюденных функций описания. Квазимоменты двумерной функции $f(x,y)$ порядка $\varkappa$ и λ определяются согласно Г.Г.Кузмину, формулой

$$m_{\varkappa\lambda}\{f(x,y)\} = \frac{1}{\Gamma(\varkappa)\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty\int f(x,y)\, x^{\varkappa-1}\, y^{\lambda-1}\, dx\,dy, \qquad (2.2)$$

Чтобы квазимоменты имели определенные конечные значения и при отрицательных $\varkappa$ и λ, нужно придать степенным функциям определенные сингулярные свойства. Используя сингулярные степенные функции, и интегрируя по частям, формулу (2.2) можно привести к виду [4]

$$m_{\varkappa\lambda}\{f(x,y)\} =$$

$$= \frac{(-1)^{k+\ell}}{\Gamma(k+\varkappa)\Gamma(\ell+\lambda)} \int_0^\infty\int \frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial x^k \partial y^\ell}\, x^{k+\varkappa-1}\, y^{\ell+\lambda-1}\, dx\,dy, \qquad (2.3)$$

где k, ℓ – целые числа, причем $k+\varkappa > 0$, $\ell+\lambda > 0$. В этой формуле можно уже использовать обычные степенные функции, так как интеграл сходится (если, конечно, поведение производной f не влияет расходимости интеграла). При $\varkappa = -k$ и $\lambda = -\ell$

$$m_{-k,-\ell}\{f(x,y)\} = (-1)^{k+\ell} \left.\frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial x^k \partial y^\ell}\right|_{x,y=0}, \qquad (2.4)$$

в частности,

$$m_{00}\{f(x,y)\} = f(0,0). \qquad (2.5)$$

Если $\lambda = 0$, а $\varkappa \geqslant 0$, то

$$m_{\varkappa 0}\{f(x,y)\} = \frac{1}{\Gamma(\varkappa)} \int_0^\infty f(x,0)\, x^{\varkappa-1}\, dx. \qquad (2.6)$$

Применим формулу (2.2) к функции спроектированной светимости. Будем считать, $\varkappa$, $\lambda \geqslant 0$, а в качестве аргументов возьмем $x = X^2$ и $y = Y^2$. Подставив в (2.2) выражение (I.I0) и изменив порядок интегрирования, нетрудно заметить, что интегралы по X и Y могут быть приведены к стандартному интегральному представлению бета-функций, а

остающийся интеграл по a сводится к обычному моменту функции $h(a)$. После упрощений будем иметь

$$m_{\varkappa\lambda}\{L(X^2, Y^2)\} = \beta_{\varkappa\lambda}(E)\,\mathfrak{M}_{2(\varkappa+\lambda-1)}\{h(a)\}, \qquad (2.7)$$

причем

$$\beta_{\varkappa\lambda}(E) = \frac{E^{2\lambda-1}}{2\pi\Gamma\left(\varkappa+\lambda+\frac{1}{2}\right)}. \qquad (2.8)$$

Подставляя в формулу (2.2) выражение (I.I6), принимая $x = R^{-2}$ и изменяя порядок интегрирования, получим после интегрирования

$$m_{\varkappa}\{v(R^{-2})\} = \gamma_{\varkappa}(\varepsilon)\,\mathfrak{M}_{-2\varkappa}\{\mu(a)\}, \qquad (2.9)$$

причем

$$\gamma_{\varkappa}(\varepsilon) = e^{-2\varkappa}\,\frac{B_e\left(\varkappa, \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\varkappa)}, \qquad (2.10)$$

где по-прежнему $e = 1 - \varepsilon^2$.

Если пользоваться сингулярными степенными функциями, то формулы (2.9) и (2.I0) получаются и для отрицательного $\varkappa$. При отрицательном $\varkappa$ бета-функция может быть определена по обычным рекуррентным формулам. Если ограничиваться целыми $-2\varkappa$, то можно пользоваться следующими формулами:

$$\frac{B_x\left(-k, \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(-k)} = (-1)^k\,\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}, \qquad (2.11)$$

$$\frac{B_x\left(-k-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= (-1)^k\,\frac{\Gamma(k+1)}{\pi}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\sum_{i=0}^{k}\frac{\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(i+1)}\,x^{-i}, \qquad (2.12)$$

где k – целое неотрицательное число. Найденные по

(2.10) - (2.12) выражения $g_\varkappa(\varepsilon)$ для ряда $\varkappa$ приведены в табл. I.

Все формулы в этом разделе написаны для случая простой модели. Практическое применение формул для построения как простой, так и составной модели звездной системы будет рассмотрено в работе VI данной серии.

Таблица I

$\varkappa$	$-2\varkappa$	$g_\varkappa(\varepsilon)$
I	-2	$2e^{-2}(1-\varepsilon)$
$\frac{I}{2}$	-I	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\arcsin e}{e}$
0	0	I
$-\frac{I}{2}$	I	$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$
-I	2	$-\frac{1}{2}e^2$

9. Модель-параметры. Аналитические выражения функций описания моделей звездных систем содержат различные параметры. По своей природе эти параметры разделяются на три вида - на масштабные параметры, параметры концентрации и параметры сплюснутости.

Масштабных параметров два. Один из них определяет масштаб модели в пространстве координат - обозначим его через a_0. Другой параметр определяет масштаб модели по плотности или по функции массы - обозначим его через g_0.

Остальные параметры - параметры концентрации и сплюснутости - определяют структуру модели и могут быть названы вместе структурными. Параметры концентрации определяют структуру модели по радиусу модели (или, что то же самое, концентрацию массы к оси или к центру системы). Параметры сплюснутости определяют форму изоповерхностей плотности.

Количество структурных параметров в модели зависит от желаемой точности описания звездных систем. В наиболее простых случаях структурные параметры могут даже не фигурировать в выражениях функций описания, тогда структура модели по существу фиксирована. Но в общем случае модели звездных систем должны содержать по меньшей мере два параметра концентрации, один из них определяет внутреннюю структуру модели, а другой – граничный радиус или внешнюю структуру модели. Параметр эллиптичности в сфероидальном голотетическом случае один, это – отношение полуосей эллипсоидов равных плотностей ε.

Таким образом, исходная функция описания может быть написана следующим образом:

$$g(a) = g(a \mid a_0, g_0, \chi_1 \dots, \chi_n, \varepsilon). \qquad (3.1)$$

где a – аргумент (большая полуось сфероида равных плотностей) и χ_i – параметры концентрации. В зависимости от числа параметров концентрации n имеем семейства специальных моделей, которые можно назвать одно-, дву- и т.д. параметрическими семействами.

Модель-параметры тесно связаны со специальными аналитическими видом функций описания. Параметры концентрации могут иметь в различных классах моделей даже различный физический смысл. Это обстоятельство делает невозможным использование указанных параметров в качестве универсальных параметров описания звездных систем. Роль последних должны играть гросс-параметры, определение которых не зависит от частного вида функции описания. Гросс-параметры будем определять по моментам плотности массы и светимости.

4. Масштабные гросс-параметры. В качестве масштабного интегрального параметра Вокулер [5] использовал большую полуось видимого эллипса, внутри которого заключается половина интегральной светимости звездной системы. То, что берется именно половина интегральной светимости, не существенно. Можно брать, например, 33,3 и 90 % интегральной светимости, как было принято соответственно Валленквистом [6] и Кроном и Мейоллом [7].

Нетрудно, однако, заметить, что такое определение не позволяет удобно перейти от интегрального параметра, основанного на распределении спроектированной плотности, к параметру, определенному по распределению пространственной плотности - формула перехода зависит от аналитического вида функции описания. Неудобен и переход от параметров модели к интегральным параметрам.

Свободными от этих недостатков являются интегральные параметры, основанные на моментах распределения плотности. Как мы видели выше, формулы перехода моментов пространственной плотности не зависят от аналитического вида функции описания. Имеется, кроме того, возможность включить в число интегральных или гросс-параметров такие существенные для описания звездных систем величины, как масса M и эффективный радиус R_μ.

Только что упомянутые величины являются гравитационными масштабами гросс-параметрами описания. По моментам функции массы они вычисляются по формулам

$$M = \mathfrak{M}^{r}_{0}\{\mu(a)\} \qquad (4.1)$$

и

$$R_\mu = \frac{\mathfrak{M}^{r}_{1}\{\mu(a)\}}{\mathfrak{M}^{r}_{0}\{\mu(a)\}}. \qquad (4.2)$$

Кроме гравитационных представляют интерес и фотометрические масштабные гросс-параметры - интегральная светимость системы

$$\mathcal{L} = \mathfrak{M}^{r}_{0}\{h(a)\} \qquad (4.3)$$

и фотометрический эффективный радиус

$$R_h = \frac{\mathfrak{M}^{r}_{1}\{h(a)\}}{\mathfrak{M}^{r}_{0}\{h(a)\}}, \qquad (4.4)$$

который в случае простой сферической модели совпадает с гравитационным эффективным радиусом.

Если система имеет составную структуру, то в формулах (4.1) - (4.4) под $\mathfrak{M}^{r}_{i}\{\mu(a)\}$ и $\mathfrak{M}^{r}_{i}\{h(a)\}$ нужно подразумевать

соответствующие суммы по всем составляющим (m – число составляющих):

$$\mathfrak{M}_i\{\mu(a)\} = \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{M}_i\{\mu_k(a)\}, \qquad (4.5)$$

$$\mathfrak{M}_i\{h(a)\} = \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{M}_i\{h_k(a)\}. \qquad (4.6)$$

Кроме масштабных гросс-параметров, моменты низших порядков функций μ и h позволяют еще определить такие важные для описания систем величины, как потенциал в центре системы

$$\Phi(0) = \frac{\arcsin e}{e} G\mathfrak{M}_{-1}\{\mu(a)\} \qquad (4.7)$$

и характеристики сплюснутости и концентрации.

5. Гросс-параметры концентрации. Для количественного описания степени концентрации звездных систем ранее предлагалось использовать те или иные модель-параметры концентрации. Например, Валленквист [6] принял параметр β выражения (обозначения наши)

$$g(a) \sim \left(1 - \frac{a}{a_0}\right)^{\beta},$$

причем $g(a)$ отождествлялась с функциями $\rho(a)$ или $P(A)$. По причинам, отмеченным выше, подобные предположения не могут быть, однако, приняты.

Как и масштабные гросс-параметры, гросс-параметры концентрации будем определять через моменты функций $\mu(a)$ и $h(a)$. Чтобы иметь безразмерные величины, независимые от масштаба звездной системы, мы выбрали следующее определение:

$$K_i = \frac{\mathfrak{M}_i^2\{\mu(a)\}}{\mathfrak{M}_{i-1}\{\mu(a)\}\,\mathfrak{M}_{i+1}\{\mu(a)\}}, \qquad (5.1)$$

причем $i = -1, 0, +1$. Аналогичное выражение имеют и фотометрические гросс-параметры концентрации $K_{h,i}$, где только вместо $\mathfrak{M}_i\{\mu(a)\}$ фигурируют $\mathfrak{M}_i\{h(a)\}$. Интересно отметить, что величина $K_{h,i}$ была раньше применена для описания концентрации масс звездных скоплений Лоланисом [8] посредством

$$\mathcal{E} = \frac{2}{\pi} K_{h,-1}^{-1} .$$

Интегральная структура звездной системы может быть графически изображена в пространстве с прямоугольными координатами K_{-1}, K_0 и K_{+1}. Назовем это пространством концентраций или К-пространством. Каждая конкретная звездная система, а также специальная модель звездной системы с фиксированными параметрами концентрации χ_i изображается в К-пространстве одной точкой. Однопараметрическому семейству специальных моделей соответствует некоторая кривая, двупараметрическому - поверхность, а семейству с тремя или с большим числом параметров концентрации - некоторая трехмерная область.

Нетрудно показать (учитывая неотрицательность $\mu(a)$, что

$$0 \leq K_i \leq 1. \qquad (5.2)$$

Неравенство (5.2) выполняется, если $\ln K_i \leq 0$. Логарифмируя (5.1), имеем

$$\ln K_i = -(\ln m_{i+1} - 2\ln m_i + \ln m_{i-1}) = -\left.\frac{\Delta^2 \ln m_i}{\Delta i^2}\right|_{\Delta i=1} \qquad (5.3)$$

Отсюда вытекает, что достаточное условие для выполнения (5.2) следующее:

$$\frac{d^2 \ln m_i}{di^2} \geq 0 , \qquad (5.4)$$

Выполнив дифференцирование, для второй производной получим выражение

$$\frac{d^2 \ln m_i}{di^2} = [\overline{(\ln a)^2} - \overline{\ln a^2}]_i = \sigma_i^2\{\ln a\}, \qquad (5.5)$$

причем усреднение происходит с весом $\mu(a)a^i da$. Так как дисперсия $\ln a$ не может быть отрицательной, то утверждение (5.2) доказано.

Равенство $K_i = 1$ имеет место тогда, когда $\sigma_i\{\ln a\} = 0$, что соответствует модели в виде тонкого сферического слоя.

т.е. дельта-образной функции $\mu(a)$. Случай $K_i = 0$ имеет место тогда, когда $m_{i-1} \to \infty$ или $m_{i+1} \to \infty$. При $i \geq -1$ это имеет место, если плотность в центре модели бесконечна или если в неограниченной модели при плотность убывает слишком медленно. Так как в реальных звездных системах как плотность, так и размеры системы конечны, то для реальных систем $K_i > 0$.

Легко усмотреть, что модель в виде однородного эллипсоида имеет следующие значения гросс-параметров концентрации:

$$K_i = 1 - (i+3)^{-2} \qquad (5.6)$$

Так как структура увеличивает дисперсию $\ln a$, то, следовательно, она уменьшает гросс-параметры K_i.

6. Гросс-параметры сплюснутости. При заданном радиальном распределении массы вертикальное распределение в случае простой гомотетической модели полностью задано одним параметром - отношением полуосей эллипсоидов равных плотности ε. При составной гомотетической модели вертикальное распределение массы задано набором значений ε_k своих составляющих. Средняя сплюснутость системы зависит от расстояния от центра. Чтобы характеризовать среднюю сплюснутость, целесообразно применить гросс-параметры, в которые различные системы войдут с различным весом. Исходя из этого, мы определяем гравитационные гросс-параметры сплюснутости как

$$F_i = \frac{\sum_{k=1}^{m} m_i\{\mu_k(a)\}}{\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k^{-1} m_i\{\mu_k(a)\}}, \qquad (6.1)$$

причем $i \geq -2$.

Определение гросс-параметров сплюснутости выбрано с таким расчетом, чтобы отдельные F_i имели простой физический смысл. Нетрудно видеть, что F_{-2} равен отношению масс вертикального и горизонтального столбов единичного сечения, проходящих через центр системы, F_{-1} - отношению масс вертикального и горизонтального слоев единичной тол-

ция, а F_0 - отношение массы системы M к ее сферической массе M_s. Последняя вычисляется в допущении, что при том же радиальном распределении массы $\mu(a)$ система имеет сферическую симметрию ($\varepsilon = 1$). Так как в величину F_0 все области системы входят с равными весами, целесообразно принять ее в качестве характеристики средней сплюснутости системы.

Фотометрические гросс-параметры видимой сплюснутости определяются формулой

$$F_{h,i} = \frac{\sum_{k=1}^{m} m_i\{h_k(a)\}}{\sum_{k=1}^{m} E_k^{-1} m_i\{h_k(a)\}}, \qquad (6.2)$$

причем $i \geq -2$.

Параметр $F_{h,-1}$ равен отношению линейных спроектированных светимостей вдоль малой и большой полуосей системы, а $F_{h,0}$ - отношению интегральной светимости $\mathcal{L}$ к сферической светимости $\mathcal{L}_s$, вычисленной в допущении, что распределение светимости системы во всех направлениях равно распределению $L(x,0)$.

Очевидно, что при простой гомотетической модели $F_i = \varepsilon$ и $F_{h,i} = E$.

7. Локальные галактические параметры. Построение модели нашей Галактики отличается от построения моделей других галактик тем, что исходный наблюдательный материал относится, в основном, не к системе в целом, а к локальной околосолнечной области. В этой области из наблюдений можно определить локальные значения всех функций описания, во многих случаях удается определить также их градиенты. И только лишь некоторые функции могут быть определены по наблюдениям в области пространства, сравнимой с размерами всей системы в целом.

Мы предлагаем назвать околосолнечные значения функций описания, их градиенты и комбинации локальными галактическими параметрами. В работах С.А.Кутузова [9, 10] применялся термин "околосолнечные галактические параметры", что, однако, менее удобно. Учитывая наблюдательные возможности, а также

исторические традиции, будем использовать следующие галактические параметры (см. [11 - 13]).

M_0 – нуль-пункт соотношения светимость–период–цвет классических цефеид, определяющий масштаб расстояний,

R_0 – расстояние Солнца от центра Галактики,

A, B – динамические постоянные Оорта,

C – динамическая постоянная Кузмина,

ω, V – угловая и линейная круговая скорость Галактики,

W – кинематическая постоянная, определяемая по радиоастрономическим наблюдениям подобно тому, как постоянная A определяется по оптическим наблюдениям [11],

k_θ, k_z – отношения дисперсий скоростей в цилиндрической галактической системе координат,

ϱ_0 – околосолнечная плотность вещества в Галактике.

Кроме этих параметров, характеризующих локальное строение Галактики в целом, целесообразно рассмотреть и величины, характеризующие пространственно-кинематическое строение отдельных подсистем и составляющих Галактики (скорости центроидов, дисперсии скоростей, плотность и их радиальный и вертикальный градиенты).

8. Пример вычисления параметров описания звездной системы. Для иллюстрации приводится пример параметров описания трехкомпонентной составной модели Галактики, построенной нами в работе [11].

В табл. 2 даны исходные параметры модели для трех составляющих Галактики, данные заимствованы непосредственно из работы [11] или вычислены по приведенным в этой работе данным. При описании была использована обобщенная экспоненциальная модель. В табл. 3 даны гросс-параметры для Галактики в целом, а также и для ее отдельных составляющих. Величины h и k являются нормирующими постоянными модели (см. [14]). Вместо центрального потенциала дана критическая скорость $\sqrt{2\Phi(0)}$ в центре системы. В табл. 4 приведены локальные галактические параметры.

Таблица 2

Величина	Единица	Составляющая		
		Плоская	Промежуточная	Сферическая
ν	-	2	I	I/3
ε	-	0.022	0.I30	0.600
μ_0	$I0^6 M_\odot пс^{-1}$	0.688	I5.657	I7.684
a_0	пс	6948	5I5I	I770

Таблица 3

Величина	Единица	Составляющая			
		Плоская	Промежуточная	Сферическая	Система в целом
h	-	2.000	0.5000	0.05556	-
k	-	I.I284	0.5000	0.002976	-
M	$I0^9 M_\odot$	4.8	80.7	3I.3	II6.8
R_μ	R_0	I.050	0.9I0	0.62I	0.835
$\sqrt{2\Phi I0}$	км/сек	96	442	422	6I8
K_{-1}	-	0.637	0.500	0.I79	0.I60
K_0	-	0.786	0.667	0.339	0.483
K_1	-	0.849	0.750	0.453	0.673
F_{-2}	-	0.022	0.I30	0.600	0.423
F_{-1}	-	"	"	"	0.I88
F_0	-	"	"	"	0.I3I
F_1	-	"	"	"	0.II8
F_2	-	"	"	"	0.I20

Таблица 4

Величина	Единица	Значение
R_0	кпс	8.5
A	км сек$^{-1}$ кпс$^{-1}$	I7.3
B	"	-I2.2
C	"	68.I
V	км сек$^{-1}$	24I
W	"	I42
k_θ	-	0.4I
k_z	-	0.29
ρ_0	$M_\odot$ пс$^{-3}$	0.0802

Июль I966 г.,
исправлено в апреле I967 г.

Литература

I. Г.Г.Кузмин, Изв. АН ЭССР, сер. техн. и физ-мат. наук, 5, № 2, 9I, I956 (
2. L.Perek, Advances in Astronomy and Astrophysics, Academic Press, New York and London, 1, 165, 1962.
3. B.Takase, Publ. Astr. Soc., Japan, 7, 201, 1955.
4. Г.Г.Кузмин, Тарту публ., 35, 285, I966.
5. G. de Vausouleurs, M.N., 113, 134, 1953.
6. A.Wallenquist, Uppsala Astr. Obs., Ann, 4, No. 6, 1959.
7. G.E.Kron, N.U.Mayall. A.J., 65, 581, 1960 (Lick Obs. Bull. N. 569).
8. W.Lohmann, Z.f.Ap., 60, 43, 1964.
9. С.А.Кутузов, Труды Астрофиз. инст. АН Каз ССР, 5, 78, I965 (
I0. С.А.Кутузов , Tartu Teated, No. 9, 1964.
II. Я.Эйнасто, Труды Астрофиз. инст. АН Каз ССР, 5, 87, I965 (Tartu Teated No. 17).
I2. Я.Эйнасто, С.А.Кутузов, Tartu Teated, No. 10, 1, 1964.
I3. Я.Эйнасто, С.А.Кутузов, Tartu Teated, No. 11,11, 1964.
I4. Я.Эйнасто, Тарту публ., 36, 396, I968.

ГЛАВА IO

ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДЕЛИ*

I.Введение. В предыдущих работах данной серии были рассмотрены вопросы классификации моделей звездных систем, функции и параметры описания моделей, а также вид формул связи между функциями описания. Данная статья посвящается методике построения моделей. При этом под моделью звездной системы подразумевается модель распределения массы или светимости, построенная для конкретной звездной системы и заданная в числовом виде. Допускаем, что звездная система имеет осевую и плоскостную симметрию и что она состоит из конечного числа физически однородных сфероидальных геометрических составляющих.

При этих допущениях основные формулы связи между функциями описания следующие (см. [I]):

$$L(X,Y) = \sum_{k=1}^{m} L_k(A_k), \qquad (I.I)$$

$$\nu(R) = \sum_{k=1}^{m} \nu_k(R), \qquad (I.2)$$

причем

$$L_k(A_k) = \frac{1}{2\pi E_k} \int_{A_k}^{\infty} \frac{h_k(a)\,da}{a\sqrt{a^2 - A_k^2}} \qquad (I.3)$$

---

*Опубликовано в Публикациях Тартуской АО, 36, 442 - 462, 1967 под названием "О построении моделей звездных систем. VI. К методике построения моделей".

$$\nu_k(R) = \int_0^R \frac{\mu_k(a)\,da}{\sqrt{1-\left(\frac{e_k a}{R}\right)^2}} \qquad (I.4)$$

$$\mu_k(a) = f_k h_k(a) = 4\pi\varepsilon_k a^2 \rho_k(a). \qquad (I.5)$$

В этих формулах m – число составляющих,

$$A_k^2 = X^2 + E_k^{-2} Y^2, \qquad (I.6)$$

$$E_k^2 = \cos^2 i + \varepsilon_k^2 \sin^2 i, \qquad (I.7)$$

$$\varepsilon_k^2 = 1 - e_k^2, \qquad (I.8)$$

обозначения функций описания и их аргументов такие же, как и в работе [I].

Задача моделирования звездной системы состоит в том, чтобы по имеющимся наблюдательным данным вычислить все необходимые функции и параметры описания звездной системы. Способы моделирования могут быть весьма различны в зависимости от наличия наблюдательного материала, от способа решения основных интегральных уравнений (I.3) и (I.4) и от вытекающей отсюда формы представления модели. Весьма различными являются и способы экстраполяции и интерполяции наблюденных функций описания. Все эти аспекты позволят внести дальнейшую конкретизацию и уточнение с методической стороны в предложенную в работе [2] классификацию моделей звездных систем.

Рассмотрим теперь несколько более подробно перечисленные аспекты моделирования звездных систем.

А. Как известно, в случае звездных систем, видимых извне, из наблюдений могут быть определены :

I) функция распределения спроектированной светимости $L_s(X,Y)$ в фотометрической системе s (предполагается, что $L_s(X,Y)$ исправлена за влияние поглощения света);

2) скорость вращения нефранных подсистем V_θ, по которой при известных допущениях может быть вычислена функция скорости $\nu(R)$;

3) дисперсия скоростей входящих в систему звезд;

4) интегральный спектр системы, по которому при известных допущениях может быть определен звездный состав системы и отношение массы к светимости f .

Наиболее полную модель можно построить, если известны все указанные сведения; в этом случае можно говорить о **синтетической модели** звездной системы. Если из наблюдений известна лишь функция спроектированной плотности, то можно построить **фотометрическую модель** системы. Если заданы только спектральные данные (пункты 2- 4), то можно построить **динамическую модель**.

Особое место в задаче моделирования звездных систем занимает построение модели нашей Галактики, так как ни функция $L(A)$, ни функция $\nu(R)$ не могут быть непосредственно найдены из наблюдений. Функция скорости может быть вычислена косвенно на основании дифференциальной скорости вращения подсистем $U(x)$ с использованием формулы

$$V(x) = U(x) + xV_0 , \qquad (1.9)$$

где $V(x)$ - круговая скорость, $x = R/R_0$, а V_0 - круговая скорость в окрестностях Солнца и R_0 - расстояние Солнца от центра Галактики. О поведении функции $L(A)$ можно судить только по аналогии с другими галактиками. С другой стороны, имеется возможность определить для околосолнечной области Галактики значения целого ряда других функций описания.

Б. Следующий аспект в моделировании звездных систем связан с видом представления модели - модель может быть найдена в виде:

1) таблиц или графиков функций описания,
2) набора модель-параметров описания,
3) набора гросс-параметров описания.

В первом случае все функции описания заданы только численно и мы можем говорить о **чисто численной модели**. Во втором случае задан аналитический вид функций описания и набор значений всех модель-параметров; в том

случае мы можем говорить о п а р а м е т р и ч е с к о й м о д е л и . Наконец, в третьем случае заданы только гросс-параметры, и мы имеем дело с г р о с с - м о д е л ь ю звездной системы (вид функций описания остается неопределенным).

Этим трем формам задания конкретной модели соответствуют и три способа построения модели.

Формулы связи (I.I) - (I.4) по отношению к основным функциям описания $h_k(a)$ и $\mu_k(a)$ являются интегральными уравнениями. Интегральные уравнения могут быть решены численно, в результате получим и функции описания в численном виде, т.е. численную модель.

Интегральные уравнения могут быть решены также параметрическим способом. Задавая аналитический вид одной функции описания, можем определить все другие функции описания. Параметры модели могут быть найдены путем аппроксимации наблюдений соответствующими функциями описания.

Интегральные уравнения (I.I) - (I.4) могут быть заменены и соотношениями между моментами входящих в соответствующие уравнения функций описания (см. [I]). Эти соотношения позволяют вычислять по моментам известных функций описания моменты неизвестных функций, а также и гросс-параметры модели. Указанный способ построения модели может быть назван способом моментов.

В. Построение модели имеет еще другие существенные аспекты. Как известно, функции $L(X,Y)$ и $\nu(R)$ не могут быть определены из наблюдений до внешней границы системы - периферийные области системы так слабы, что теряются на общем фоне неба. При построении модели всей звездной системы функции описания поэтому экстраполируются.

Нужно учесть и то обстоятельство, что наблюдения дают не значение спроектированной плотности светимости в какой-нибудь точке (X,Y), а усредненную по некоторой области интегральную светимость. В области быстрого изменения плотности наблюденный ход светимости может поэтому заметно отличаться от истинного ее хода. Эффект размывания особенно

опущены в центральной области системы.

Ниже будут рассмотрены все основные аспекты моделирования звездных систем.

2. Аналитическое решение интегрального уравнения распределения светимости. Как известно, интегральное уравнение распределения светимости (I.3) принадлежит к типу Абеля. Его решение может быть написано в виде (см. [3]):

$$h(a) = -4a^2 E \int_a^{A^0} \frac{d\ell(A)}{dA} \frac{dA}{\sqrt{A^2 - a^2}} \qquad (2.1)$$

причем для упрощения письма индекс k опущен. Применение этой формулы удобно тогда, когда наблюденная яркость дана в виде двумерного распределения $L(A) = L(X,Y)$.

Часто наблюдения задаются в другом виде. Применяется интегральная яркость системы в кольце между эллипсами с большими полуосями A и $A+dA$

$$L_A(A) = 2\pi E A L(A) . \qquad (2.2)$$

В этом случае, очевидно, имеем

$$h(a) = -\frac{2}{\pi} \int_a^{A^0} \frac{d}{da} \left(\frac{L_A(A)}{A} \right) \frac{dA}{\sqrt{A^2 - a^2}} . \qquad (2.3)$$

Наблюдения могут быть получены и в форме линейных плотностей параллельно малой и большой осям системы. Интегрируя (I.3) по Y при фиксированном X и, наоборот, имеем

$$L_x(X) = \frac{1}{2} \int_X^{A^0} h(a) \frac{da}{a} \qquad (2.4)$$

и

$$L_Y(Y) = \frac{1}{2E} \int_Y^{A^0} h(a) \frac{da}{a} \qquad (2.5)$$

Интегральные уравнения решаются простым дифференцированием

$$h(a) = -2a\left|\frac{dL_x(X)}{dX}\right|_{X=a} = -2aE\left|\frac{dL_y(Y)}{dY}\right|_{Y=a} . \qquad (2.6)$$

Иногда наблюдается и интегральная яркость в эллиптической области до некоторого A

$$\mathcal{L}(A) = \int_0^A L_A(A)\,dA . \qquad (2.7)$$

Функция $L_A(A)$ вычисляется дифференцированием (2.7)

$$L_A(A) = \frac{d\mathcal{L}(A)}{dA} , \qquad (2.8)$$

функция $h(a)$ определяется, далее, по формуле (2.3).

Итак, во всех вариантах интегральное уравнение распределения светимости имеет простое решение. Вариант (2.I) был использован фон Нейпелем [4] в сферическом случае E = I, общий эллипсоидальный случай был рассмотрен тем Бругенгате [3]. Вариант (2.6) в случае E = I был рассмотрен Пламмером [5], в эллипсоидальном случае Кинле [6] и П.П.Холопова [7]. Вариант (2.8) был использован в работах [8, 9].

3. Аналитическое решение интегрального уравнения распределения масс. Интегральное уравнение (I.4) существенно зависит от параметра ε (опускаем опять-таки ради простоты индекс k). Следовательно, решение уравнения может быть написано [I0] в виде

$$\mu(a) = \mu(a, \varepsilon) . \qquad (3.I)$$

В случае модели плоского диска ($\varepsilon = 0$ и $e = I$) интегральное уравнение (I.4) сводится к типу Абеля с решением вида

$$\mu(a, 0) = \frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{d\nu(R)}{dR}\,\frac{RdR}{a\sqrt{a^2 - R^2}} . \qquad (3.2)$$

В сферическом случае ($\varepsilon = I$, $e = 0$) уравнение имеет решение

$$\mu(a,1) = \left(\frac{d\nu(R)}{dR}\right)_{R=a} . \qquad (3.3)$$

Решение уравнения (1.4) в общем случае $0 \leq \varepsilon \leq 1$ было рассмотрено Г.Г.Кузминым [11 – 13], а также Г.Г.Кузминым совместно с С.А.Кутузовым [10]. Всего разработано три способа решения уравнения.

В первом способе применяется разложение функции массы по степеням ε и $1-\varepsilon$

$$\mu(a,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(a,0)\varepsilon^n \qquad (3.4)$$

и

$$\mu(a,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(a,1)(1-\varepsilon)^n , \qquad (3.5)$$

причем

$$\mu_n(a,\varepsilon) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n \mu(a,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^n} \qquad (3.6)$$

Функции $\mu_n(a,\varepsilon)$ вычисляются на основе $\nu(R)$. За подробностями мы отсылаем читателя к оригинальной работе [10].

Во втором способе решение записывается в виде

$$\mu(a,\varepsilon) = \int_0^a \mu(R,1) L\left(\frac{R}{a},\varepsilon\right)\frac{dR}{a} + \varepsilon\mu(a,1) \qquad (3.7)$$

причем $L(x,\varepsilon)$ – вспомогательная "решающая" функция или резольвента. Для последней имеет место такое интегральное уравнение, решение которого найдено и табулировано в работе [10].

Наконец, можно использовать и интерполяционные формулы, из которых наиболее точная [10]

$$\mu(a,\varepsilon) = \frac{2(1-\varepsilon)^2}{2+\varepsilon}\mu(a,0) +$$

$$+ \frac{6\varepsilon(1-\varepsilon)}{2+\varepsilon}\mu(R,1)\frac{R^2 dR}{a^3} + \varepsilon\mu(a,1) . \qquad (3.8)$$

Вычисление функции массы по этой формуле проще, чем по формулам (3.4) или (3.5).

4. О построении численной модели. При построении численной модели решение интегральных уравнений (1.3) и (1.4) применяется для вычисления основных функций описания в численном виде.

Как видно из формул, приведенных в пп. 2 и 3 настоящей работы, решение интегрального уравнения выражается через производную известной функции. В случае (2.7), (2.8) при вычислении "функции светимости" $h(a)$ операция дифференцирования применяется даже дважды. Это ставит довольно высокие требования к точности наблюдений.

Весьма часто точность наблюдений недостаточна для непосредственного численного дифференцирования. В этом случае наблюдения предварительно сглаживаются, что содержит, конечно, долю субъективности и должно быть выполнено весьма осторожно.

Для увеличения точности исходного наблюдательного материала П.Н.Холопов [14] предлагает варьировать концентрические зоны по A (см. (2.2)), меняя как ширину зон ΔA, так и их границы. Очевидно, что увеличение точности наблюденной кривой кажущееся, так как вариация группирования сглаживает случайные флуктуации в числе звезд, создавая впечатление наличия реальных волн в кривой.

Процедуры численного сглаживания и дифференцирования можно избежать, если заменить интегральное уравнение системой линейных уравнений. Случайные флуктуации наблюденной функции описания в полной мере войдут и в искомые функции описания.

В численном способе невозможно учитывать составную структуру звездных систем. Поэтому численные модели являются простыми. При построении численной модели делаются предположения, касающиеся формы поверхностей плотности и связи между функциями описания, но вид функции описания заранее не фиксирован. В этом смысле численные модели являются более общими, чем параметрические. Метод имеет однако и недостатки. Выше уже указывалось, на невозможность учета составной струк-

туры и затруднения, связанные со сглаживанием наблюденной функции описания. Основной недостаток численного способа заключается в том, что модель дается в недостаточно компактном и обозримом виде - посредством таблиц или графиков функций описания. Конечно, по функциям описания могут быть вычислены и гросс-параметры модели, которые представляют модель в гораздо более компактном виде. Это требует, однако, дополнительной работы. В гросс-моделях эти параметры получаются непосредственно.

Численный способ до сих пор был использован в основном при построении фотометрических моделей парных звездных скоплений (см. [8, 9, I4, I5]). Во многих работах для вычисления $h(a)$ применялась система линейных уравнений, заменяющая интегральное уравнение (I.3) [I4, I5] . При построении динамической модели Галактики численный способ был использован Г.Г.Кузминым [II, I2].

5. О построении параметрической модели. В этом случае задается не только форма изоповерхностей плотности и формулы связи между функциями описания, но и аналитический вид функций. Выражение функции описания содержит ряд параметров. В общем случае составной модели оно может быть написано (см. [I])

$$g(a) = \sum_{k=1}^{m} g_k(a | a_{ok}, g_{ok}, \chi_{1k}, \dots \chi_{nk}, \varepsilon_k), \qquad (5.I)$$

причем m -число составляющих модели, a_o и g_o - масштабные параметры радиуса и массы, χ_i - параметры концентрации и ε - отношение полуосей эллипсоидов изоповерхностей плотности. Если задана одна из трех основных функций описания - $L(X,Y)$, $\nu(R)$ или $\mu(a)$, а также отношение массы к светимости f (оно считается постоянным для данной составляющей), то по формулам (I.I) - (I.8) могут быть вычислены и все остальные функции описания. Так как функция $g(a)$ полностью задана модель-параметрами, то можно сказать, что построение параметрической модели сводится к определению набора ее модель-параметров.

Общее количество параметров может быть достаточно

большим. Если фотометрические наблюдения выполнены в s разных цветах, то общее число параметров модели N равно

$$N = m(3 + n + s). \qquad (5.2)$$

Все эти параметры должны быть найдены путем сравнения наблюденной кривой $g(a)$ с теоретической. Если наблюденная кривая охватывает достаточно широкий интервал a и наблюдения достаточно точны, то в принципе можно определить весьма большое число параметров. На практике следует учесть наличие как наблюдательных ошибок, так и других мешающих факторов. Поэтому число параметров стараются свести к минимуму. Обычно рассматривается простая модель ($m = 1$), фотометрические наблюдения выполняются в одном цвете ($s = 1$), а структура модели считается дельтой ($n = 0$) или зависящей только от одного параметра концентрации ($n = 1$). Параметр ε определяется из других данных или считается заданным (см. ниже), так что общее число параметров модели сводится к двум масштабным параметрам и не более, чем к одному структурному параметру.

Параметры модели могут быть найдены по всей наблюденной кривой $g(a)$ способом наименьших квадратов. Может быть применен и графический способ. В этом способе (см. [16]) как наблюденная, так и теоретическая кривая представляются в логарифмической шкале (например $\ell g L$, как функция от $\ell g A$). Масштабные параметры L_0 и A_0 находятся путем вертикального и горизонтального смещения теоретической кривой до совпадения с наблюденной, структурные параметры определяются сравнением формы теоретической кривой с наблюденной.

Наконец, могут быть использованы и те или иные частные свойства функций описания - параметры модели часто просто выражаются через положение и высоту максимума функции описания, ее производную при $a = 0$ и т.п.

Одним из таких упрощенных способов является способ Ломана [17] определения массы системы M. Последняя вычисляется по формуле (наши обозначения)

$$M = 1{,}5\, v(R_m), \qquad (5.3)$$

где $v(R_m)$ - значение функции скорости на расстоянии R_m, при котором круговая скорость достигает максимум $(dV/dR)_{R=R_m} = 0$. Численное значение множителя 1,5 соответствует применяемому Ломаном закону Боттлингера. Обобщая способ Ломана на модель с произвольной структурой, имеем

$$M = M^0 v(R_m), \tag{5.4}$$

причем, согласно формуле (1.15) работы [1],

$$M^0 = \frac{1}{v^0(R_m)}, \tag{5.5}$$

где $v^0(R_m)$ - значение нормированной функции скорости при R_m. Значение коэффициента M^0 для некоторых моделей приведено в таблице. Он зависит от всех структурных параметров модели.

Большинство построенных до сих пор моделей галактик, в частности моделей нашей Галактики, параметрические. Модели с фиксированной структурой были использованы Паренаго и Идлисом [18, 19], Г.Г.Кузминым [20], Шмидтом [21] и др.

Модель		M^0	
		$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$
Степенно-полиномиальная ($\chi_j = 0$; $j \geq 1$)	$\nu = 3$	0.58	1.04
	$\nu = 2$	0.66	1.07
	$\nu = 1$	0.82	1.18
Экспоненциальная	$N = 0.5$	0.85	1.26
	$N = 1$	1.11	1.52
	$N = 2$	1.63	2.11
	$N = 3$	2.28	2.86
	$N = 4$	3.09	3.82
Паренаго - Идлис		1.01	1.40
Кузмин		1.84	2.42

Однопараметрические семейства специальных моделей использованы Ломаном [22], Переком [23], Валленквистом [15] и др. Примером использования многопараметрических функций описания являются работы Уайза и Мейолла [24], а также Бербиджей и соавторов. [25].

Параметрический способ построения модели отличается простотой и компактностью формы представления. Использование параметрической модели для дальнейших звездно-астрономических работ (исследование орбит звезд и др.) особенно просто. Из недостатков метода отметим его малую общность, если число параметров концентрации мало. Это делает модель недостаточно гибкой для представления звездных систем различной структуры.

6. О построении гросс-модели. Гросс-модель задается не в виде функции описания, а в виде гросс-параметров описания. Так как последние выражаются через моменты функций описания, то и построение модели целесообразно выполнить методом моментов. При этом методе уравнения (1.3) и (1.4) заменяются их интегральными представлениями через моменты $\mathfrak{M}$ и квазимоменты $\mathfrak{M}$ функции описания. Используя обозначения работы [1], имеем в случае составной модели

$$m_{\varkappa\lambda}\{L(X^2,Y^2)\} = \sum_{k=1}^{m} \beta_{\varkappa\lambda}(E_k)\,\mathfrak{M}_{2(\varkappa+\lambda-1)}\{h_k(a)\}. \qquad (6.1)$$

и

$$m_{\varkappa}\{v(R^{-2})\} = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{\varkappa}(\varepsilon_k)\,\mathfrak{M}_{-2\varkappa}\{\mu_k(a)\} \qquad (6.2)$$

причем $h_k(a)$ и $\mu_k(a)$ связаны между собой соотношением (1.5), а E_k и ε_k – соотношением (1.7). В качестве наблюденных функций описания $L(X^2,Y^2)$ и $v(R^{-2})$ берутся соответствующие суммарные функции

$$L(X^2,Y^2) = \sum_{k=1}^{m} L_k(X^2,Y^2) \qquad (6.3)$$

и

$$v(R^{-2}) = \sum_{k=1}^{m} v_k(R^{-2}). \qquad (6.4)$$

Фотометрические функции L и h, а также параметр f определяются в некоторой фотометрической системе s. Если наблюдения выполнены в нескольких фотометрических системах, то количество фотометрических функций и параметров соответственно увеличивается.

Фотометрические наблюдения, выполненные в разных системах, могут быть приведены к одной основной системе, например, к визуальной системе V. По определению, отношение массы к светимости f постоянно для физически однородной составляющей. По формуле (I.II) работы [I] имеем для некоторой составляющей

$$h_s(a) = \frac{f_V}{f_s} h_V(a) = \frac{f_V}{f_s} f_V^{-1} \mu(a). \qquad (6.5)$$

Из определения f очевидно, что $-2{,}5 \lg f_V/f_s$ равно показателю цвета составляющей в фотометрической системе ($V-s$). Следовательно, f_V/f_s является показателем цвета, выраженным в интенсивностях. Вместо (6.I) имеем

$$m_{\varkappa\lambda}\{L_s(X^2, Y^2)\} = \sum_{k=1}^{m} \beta_{\varkappa\lambda}(E_k) \left(\frac{f_V}{f_s}\right) f_{Vk}^{-1} \mathfrak{M}_{2(\varkappa+\lambda-1)}\{\mu_k(a)\} \qquad (6.6)$$

Итак, мы имеем систему (6.2) и (6.6) с неизвестными $\mathfrak{M}_i\{\mu_k(a)\}$, E_k, $(f_V/f_s)_k$, f_{Vk}. Если число гроссо-параметров концентрации равно n, то общее число неизвестных равно N (5.2). Эти параметры вычисляются по $m_{\varkappa\lambda}\{L_s(X^2, Y^2)\}$ и $m_{\varkappa}\{r(R^{-2})\}$. Общее число уравнений (6.6) с $-2 \le 2(\varkappa+\lambda-1) \le n-1$ и (6.2) с $-2 \le -2\varkappa \le n-1$, и тем самым и известных моментов, равно

$$N^0 = \frac{1}{2}(n+2)[s(n+3)+2]. \qquad (6.7)$$

Система неизвестных может быть определена, если $N < N^0$, т.е. если

$$m < \frac{s(n+2)(n+3)}{2(2+n+s)}. \qquad (6.8)$$

Когда мы имеем дело только с фотометрическими данными, то отпадают уравнения (6.2), а также неизвестные f_v . В этом случае вместо (6.8) имеем

$$m < \frac{s(n+2)(n+3)}{2(2+n+s)} . \qquad (6.9)$$

С другой стороны, если материал ограничен только данными о вращении системы, то отпадают уравнения (6.6) и неизвестные f_s . Чтобы решить систему уравнений однозначно, нужно ε определить из других соображений. Тогда число известных и неизвестных равно $N = N^o = 2 + n$, другими словами, можно построить простую модель звездной системы.

При наличии фотометрического наблюдательного материала система уравнений является нелинейной. Ее решение может быть найдено последовательными приближениями способом наименьших квадратов. Если рассматривать осесимметричную модель и брать $n = 3$, то число неизвестных, а также и уравнений достаточно велико, что, разумеется, сказывается и на объеме вычислительных работ.

При построении гросс-модели, также как и при построении численной модели не делается предположений относительно вида функций описания. Однако метод моментов, в отличие от численного метода, позволяет построить осесимметричную модель звездной системы.

Учитывая как положительные как и отрицательные стороны описанных способов построения моделей можно предложить следующую схему: сначала методом моментов определяется гросс-модель звездной системы, затем, приравнивания соответствующих гросс-параметров вычисляются и модель-параметры модели из выбранного семейства специальных моделей. Этим совмещается общность способа построения модели и удобство представления модели в аналитическом виде.

Метод моментов до сих пор почти не применялся при построении моделей звездных систем. Можно указать лишь на работу Лоулана [22], где метод был использован для нахождения

параметрической модели звездных скоплений. Рассматривались шаровые системы ($\varepsilon = E = I$), использовались фотометрические наблюдения, выполненные в одном цвете ($s = I$), модель брались простой ($m = I$) и определялся только один параметр концентрации ($n = I$). Число неизвестных, таким образом, было сведено к минимуму ($N = 3$).

7. Экстраполяция функций описания может быть выполнена численно или аналитически.

При численной экстраполяции обычно стараются достичь плавного хода как плотности, так и ее градиента, как это сделано Г.Г.Кузминым [II, I2]. Но имеются и работы, где это обстоятельство не учитывается или где наличие периферийных областей (вне наблюдаемой области) просто игнорируется [25].

Аналитическая экстраполяция связана с моделированием строения внешних областей звездной системы тем или иным законом. Если при построении модели звездной системы применяется определенное аналитическое выражение, то естественно использовать это выражение и при экстраполяции. Если же аналитический вид функции описания в целом не задан, то приходится выбирать специально для экстраполяции тот или иной аналитический закон.

Для экстраполяции пространственной плотности Шмидт предлагает [26] использовать степенной закон

$$\rho(a) = \rho_0 \left(\frac{1}{a}\right)^m , \qquad (7.1)$$

где ρ_0 – масштабный параметр и

$$m = -\partial \ln \rho(a) / \partial \ln a > 0 \qquad (7.2)$$

– параметр концентрации.

Степенной закон может быть усечен, следуя идеям Кинга [I6] (см. также [27])

$$\rho(a) = \rho_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^0}\right)^m , \qquad (7.3)$$

где a^0 - внешняя граница системы. Усеченный степенный закон (7.3) имеет три параметра и обладает по сравнению с простым законом (7.1) большими возможностями.

По (7.3) можно найти и выражение спроектированной плотности яркости в периферии системы. Имеем

$$L(A) = L_0 \left| \frac{1}{A} - \frac{1}{A^0} \right|^{m+\frac{1}{2}} . \qquad (7.4)$$

Способ Кинга в оригинальном виде был использован как раз для спроектированной плотности с показателем степени 2, т.е. с $m = 1.5$.

Г.Г.Кузминым было показано* , что закон вида (7.3) вытекает из теоретических соображений при наличии диссипации звездной системы в результате совместного действия внутренних и внешних сил. Но Г.Г.Кузмин нашел $m = 3$.

Кинг сравнил [16] выражение (7.4) ($m = 1.5$) с наблюденной спроектированной плотностью шаровых звездных скоплений и нашел, что оно в весьма широком интервале A хорошо представляет наблюдения.

На рис. 1 дано такое же сравнение для эллиптической галактики NGC 4461. По горизонтальной оси нанесено

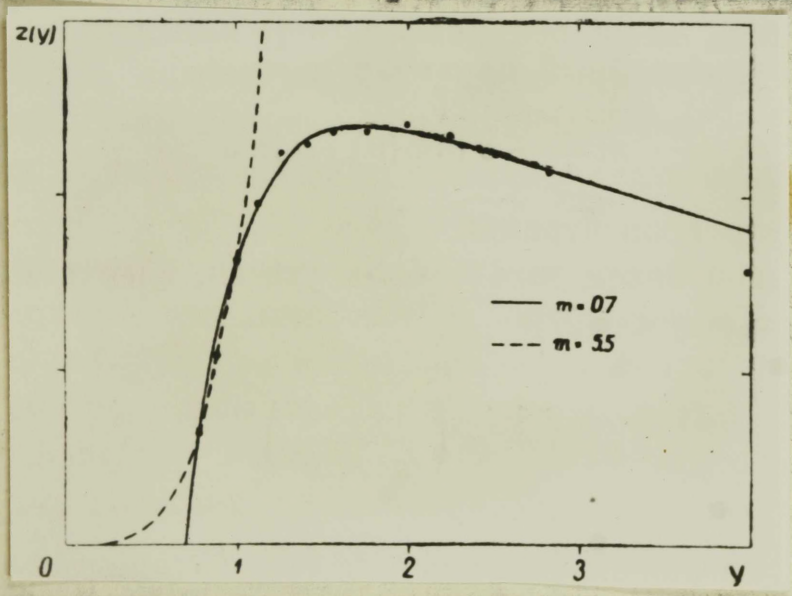


Рис. 1. Распределение яркости в галактике NGC 4461.

*Доклад на семинаре Тартуской обсерватории в январе 1967 г.

$y = x^{-1}$ (единица $\times$ 100"), по вертикальной оси (в произвольной шкале) $z(y) = L(x,0)y^{-2}$. Точками отмечены наблюдения согласно данным [28], непрерывной линией нанесена зависимость (7.4), прерывистой - зависимость (7.1). Параметр m был найден путем проб так, чтобы в возможно более широком диапазоне y аппроксимировать наблюдения, остальные параметры найдены способом наименьших квадратов. Чертеж показывает, что усеченный степенной закон представляет наблюдения значительно лучше, чем простой.

Рассмотрим теперь экстраполяцию функции скорости $v(R)$.

Функция скорости может быть определена по наблюдениям лишь для вращающихся звездных систем. Такие системы вследствие своего вращения сплюснуты. Кроме того, реальные звездные системы всегда конечны. На основании разложения (I.22) работы [I] можем утверждать, что функция скорости ограниченной несферической звездной системы имеет максимум на некотором расстоянии от центра системы, затем она монотонно убывает, стремясь к определенному пределу, который зависит от массы системы. Экстраполяция функции скорости заключается практически в определении хода убывающей части функции.

В работах [27, 29] были приведены графики функции $v^0(R)$ для ряда моделей звездных систем. Из чертежей видно, что для надежной экстраполяции должен быть известен достаточно длинный кусок убывающей ветви функции скорости. Расчеты показывают, что максимум функции скорости достигается на расстоянии от центра системы, которое соответствует большой полуоси эллипсоида, заключающего в себе около 90 % массы всей системы. При этом результат мало зависит от структуры модели. С другой стороны, по данным Крона и Мейалла [30] можно заключить, что наблюдения позволяют регистрировать свет звездных скоплений до изофоты, которая содержит в себе также примерно 90 % всей светимости системы. Распределение светимости приблизительно соответствует распределению массы. Кривая лучевых скоростей вряд ли может быть определена в области системы, не доступной прямой регистрации. Отсюда следует, что наблюдения позволяют определить лишь восходящую ветвь функции скорости.

Полученный результат подтверждается и непосредственной обработкой наблюдательных данных. На рис. 2 изображена функция $v(R)$ для галактики М 31 по оптическим [31, 32] и радионаблюдениям [33]. Кривые лучевых скоростей, полученные разными авторами, были сдвинуты так, чтобы исключить систематическую разность между ними. Затем были найдены сводные "нормальные"точки. Чертеж показывает, что наблюдения, действительно, описывают только восходящую ветвь.

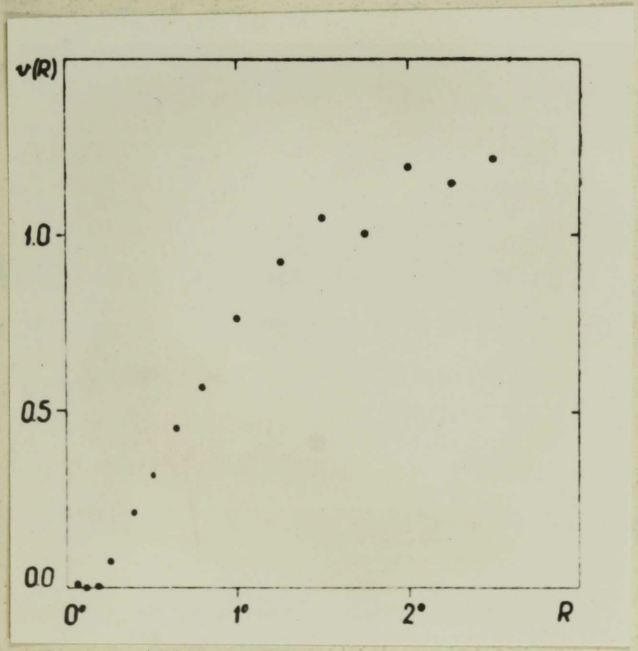


Рис. 2. Функция скорости галактики М31.

Из вышеизложенного можно заключить, что непосредственная экстраполяция функции скорости весьма неудачна и может привести к неправильному ходу плотности на периферии системы. Примером неудачной аналитической экстраполяции функции скорости является модель П.Н.Паренаго [18], которая даже противоречит критериям физической корректности моделей [2].

Экстраполяция функции скорости должна быть заменена экстраполяцией функции массы. Вся процедура состоит из трех шагов: 1) определении функции массы по доступной наблюдениям части функции скорости; 2) экстраполяция функции массы, например формулой (7.3); 3) вычисление функции скорости по экстраполируемой части функции массы. Впервые эта процедура была проведена Г.Г.Кузминым в работе [12].

6. Интегральная функция светимости. Наблюдения показывают, что в центральной области многих звездных систем эпроектированная плотность светимости очень быстро меняется с A. Реальные приемники света не могут регистрировать точечное значение яркости, они дают интегральную яркость области конечных размеров. Если центр указанной области совпадает с видимым центром звездной системы, а контуры совпадают с изофотами яркости, тогда регистрируется значение функции $\mathcal{L}(A)$, (2.7). Эту функцию можно аппроксимировать законом

$$\mathcal{L}(A) = \frac{1}{2}\lambda A^2 \exp(-\alpha A^\nu), \qquad (6.1)$$

чему с точностью до членов третьей степени αA^ν соответствует (см. (2.2) и (2.7))

$$L(A) = \frac{\lambda}{2\pi E}\exp\left[-\left(1+\frac{\nu}{2}\right)\alpha A^\nu - \frac{\nu}{4}(\alpha A^\nu)^2\right]. \qquad (6.2)$$

В упрощенном виде $\alpha = 0$ закон (6.1) был ранее применен Хенионом [9].

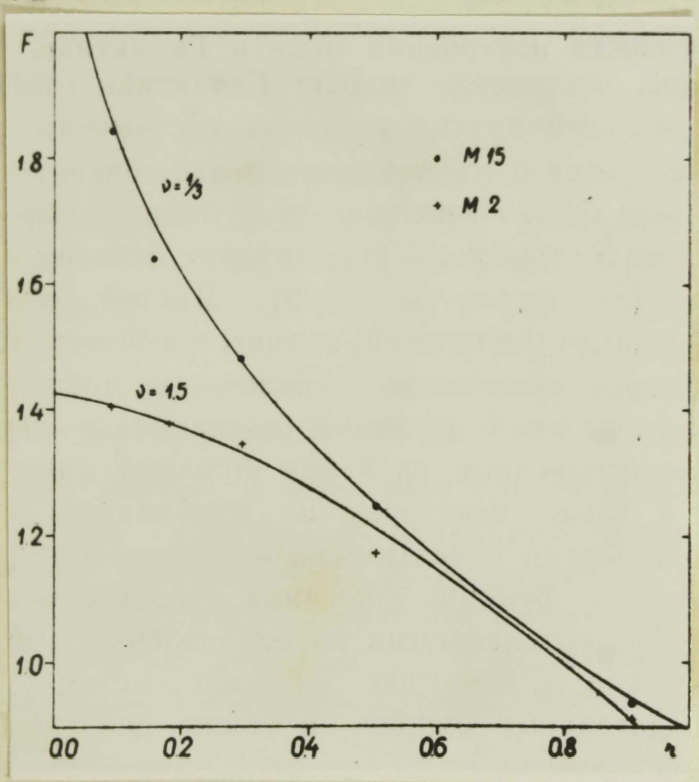


Рис. 3. Распределение яркости в системах М2 и М15.

Параметр ν выражения (6.1) может быть найден путем проб по графику с координатами $t = A^\nu$, $F = \lg 2\mathcal{L}A^{-2}$, ν

должен быть выбран так, чтобы получилась прямая зависимость между t и F. Параметры λ и α могут быть затем найдены способом наименьших квадратов. На рис. 3 изображен ход функции F для центральных областей паровых скоплений M2 и M5 по фотоэлектрическим наблюдениям Кинга [34]. Наблюдения аппроксимировались выражением (8.1), параметр ν был найден описанным выше способом. Как видно, аппроксимация весьма хорошая.

Интерполяция функции скорости $v(R)$ может быть произведена по формуле (см. (I.21) работы [II])

$$v(R) = v_0 R^3 (1 - v_1 R^\nu), \qquad (8.3)$$

причем v_0, v_1 и ν – параметры, которые могут быть найдены так же, как и параметры λ, α и ν выражения (8.1).

9. Особенности построения модели Галактики. Как было сказано выше, построение модели Галактики отличается от построения моделей других звездных систем тем, что функция $L(A)$ не может быть найдена по наблюдениям, функция же $v(R)$ может быть вычислена по функции дифференциального вращения Галактики $U(x)$, которая связана с круговой скоростью $V(x)$ формулой (I.9). Другой особенностью построения модели Галактики является обстоятельство, что имеется большое количество добавочного наблюдательного материала о поведении функций описания в окрестностях Солнца. Околосолнечные значения функций описания и их градиенты, а также некоторые их комбинации могут быть названы локальными галактическими параметрами [I, 2].

Как известно, функции описания связаны между собой соотношениями, вытекающими из определения этих функций или вводимыми в динамике звездных систем [35]. Вследствие наблюдательных ошибок, а также реальных отклонений звездной системы от сглаженной структуры, принимаемой в модели, галактические параметры не удовлетворяют в точности указанным теоретическим соотношениям. Для построения модели Галактики галактические параметры должны быть взаимно согласованы. Различные методы построения модели Галактики отличаются друг

от друга прежде всего способами получения согласованной системы галактических параметров.

Допустим, что рассматриваются n галактических параметров, связанных между собой l уравнениями [36], причем $n > l$. Если $n-l$ параметров известны или заданы, то остальные параметры могут быть найдены по l уравнениям. В качестве основных галактических параметров обычно принимают расстояние Солнца от центра Галактики R_0 и параметры Оорта-Кузмина A, B, C.

Блаау в своей известной работе [21] принимает основные галактические параметры такими, как они непосредственно получаются из наблюдений, не учитывая их связь с другими параметрами. Позднее Блаау [26] устранил этот недостаток, однако, согласованная система параметров была найдена "на глаз", причем для основных параметров были выбраны некоторые округленные значения.

Эйнасто и Кутузов предложили [36, 37] использовать для получения согласованной системы галактических параметров способ наименьших квадратов, что позволяет учитывать среднеквадратичные ошибки параметров. Предварительная система параметров была найдена в работе [38], затем система уточнилась по новым данным [36]. В первой из указанных работ определение системы галактических параметров сопровождалось разработкой модели Галактики.

Отсутствие данных о поведении спроектированной плотности подсистем Галактики в достаточно большом диапазоне R делает невозможным непосредственное определение их структурных параметров. Выходом из положения является сравнение нашей системы с другими аналогичными галактиками, структурные параметры которых могут быть найдены из наблюдений.

10. Об определении истинной эллиптичности. Определение видимой эллиптичности внешних звездных систем или их составляющих не представляет труда. В случае простой звездной системы эллиптичность определяется по видимым изофотам яркости, в случае составной системы параметры эллиптичности E_k могут быть найдены изложенным в п. 6 способом.

Параметры истинной эллиптичности ε_k могут быть вычис-

лены по формуле (I.7), если известен наклон оси системы к лучу зрения i. Последний может быть легко найден, если система содержит объекты плоской составляющей. Толщина плоской составляющей обычно так мала, что без особой погрешности можно принять $\varepsilon_{плоск} = 0$, откуда по (I.7)

$$E_{плоск} = \cos i, \qquad (10.1)$$

Если система не содержит плоской составляющей, тогда определение наклона невозможно. Может быть получено лишь статистическое распределение ε, если допустить, что направления осей звездных систем распределяются по какому-либо закону, например, равномерно.

Для Галактики ε может быть определено по (I.5), где $\mu(a_\odot)$ вычисляется по ходу функции скорости (I.4), а $\rho(a_\odot)$ по непосредственным определениям или по параметру C (см. 39). Таким путем определил ε Шмидт [21, 26]. Однако этот способ не принимает во внимание наличие дополнительного наблюдательного материала о градиенте плотности в R и z направлениях. Указанные градиенты позволят определить параметры сплюснутости отдельных составляющих Галактики (см.[38]). Комбинируя эти данные с абсолютными значениями плотности можно определить среднюю сплюснутость ε. Использование дополнительного материала имеет большое значение, поскольку как $\mu(a_\odot)$, так и $\rho(a_\odot)$ могут иметь систематические ошибки, вызванные ошибками основных галактических параметров. Неучет градиентов плотности - как раз наиболее существенный недостаток моделей Шмидта.

II. Влияние расстояния до системы. В работах по построению моделей расстояния R обычно выражаются в парсеках, масса M и светимости L в единицах Солнца. Применение этих единиц при вычислениях может привести, однако, к систематической ошибке, если расстояние до системы определено неправильно. Поэтому при выполнении расчетов лучше пользоваться угловыми расстояниями, вводя расстояние до системы только в конечные результаты работы.

Итак, будем выражать все расстояния в угловой мере, для конкретности в угловых секундах. Обозначая угловые расстояния

через R^* и a^*, а расстояния в парсеках через R и a, имеем

$$R = d^* R^*, \qquad (II.1)$$

причем

$$d^* = d/\rho'', \qquad (II.2)$$

где d – расстояние до системы (в парсеках) и ρ'' – число секунд в радиане.

Спроектированная плотность светимости в солнечных единицах на квадратный парсек выражается формулой

$$L = L^* = 10^{0,4(m_0 - m'')}, \qquad (II.3)$$

где m'' – яркость, выраженная в звездных величинах на квадратную дуговую секунду (и исправленная за поглощение света), а

$$m_0 = M_\odot - 5 + 5\lg\rho'', \qquad (II.4)$$

причем $M_\odot$ – абсолютная звездная величина Солнца, выраженная в той же фотометрической системе, что и m''.

Если при вычислении функции скорости по формуле (I.15) работы [I] расстояние выражать в секундах дуги, круговую скорость в км/сек и гравитационную постоянную в единицах $(\text{км/сек})^2 \cdot \text{пс}/M_\odot$, то имеем функцию скорости в единицах $M_\odot$ сек/пс – соответствующее обозначение v^*. Очевидно

$$v = d^* v^*. \qquad (II.5)$$

Заменяя во всех формулах, связывающих между собой функции описания, a, R и v через a^*, R^* и v^* соответственно, получаем вместо функции светимости функцию h^*, причем

$$h = d^* h^*; \qquad (II.6)$$

функция массы при такой замене не меняется, т.е. $\mu = \mu^*$.

Интегрируя μ^* и h^* по всем a^*, получаем массу системы M^* и полную светимость $\mathcal{L}^*$, причем

$$\mathcal{M} = d^* \mathcal{M}^* \tag{11.7}$$

и

$$\mathcal{L} = d^{*2} \mathcal{L}^* . \tag{11.8}$$

Далее имеем

$$f = f^* / d^* , \tag{11.9}$$

причем

$$f^* = \mathcal{M}^* / \mathcal{L}^* = \mu^* / h^* . \tag{11.10}$$

По приведенным формулам нетрудно найти и выражения для моментов функции μ^* , а также для всех гросс-параметров системы. Как видим, систематическая ошибка в расстоянии системы по-разному влияет на гросс-параметры модели. Структурные параметры не зависят от указанной ошибки совсем. В массу, эффективный радиус и отношение масса к светимости ошибка входит в первой степени, в полную светимость – во второй степени.

Апрель 1967 г.,
исправлено в сентябре 1967

Литература

1. Я.Эйнасто, Тарту публ., 36, 357, 1968.
2. С.А.Кутузов, Я.Эйнасто, Тарту публ., 36, 341, 1968.
3. P. ten Bruggencate, Sternhaufen, Berlin, 1927.
4. H.v.Zeipel, Paris Ann., 25, 1908.
5. H.C.Plummer, M.N., 71, 460, 1911.
6. H.Kienle, A.N., 232, 427, 1928.
7. П.Н.Холопов, АЖ, 30, 50, 1953.
8. S.C.Gascoigne, E.J.Burr, M.N., 116, 570, 1956.
9. W.Lohmann, Z.f. Ap., 53, 247, 1961.
10. Г.Г.Кузмин, С.А.Кутузов, Тарту публ., 35, 316, 1967
11. Г.Г.Кузмин, Тарту публ., 32, 211, 1952.

I2. Г.Г.Кузмин, Изв. АН Эст. ССР 5, 9I, I956 (Тарту сообщ., № 3).
I3. Г.Г.Кузмин, Тарту публ., 35, 285, I966.
I4. П.Н.Холопов, АЖ, 30, 426, I953.
I5. A.Wallenquist, Uppsala Astr. Obs. Ann., 4, No.6, 1959.
I6. I.King, A.J., 6, 471, 1962.
I7. W.Lohmann, Z.f.Ap., 35, 159, 1954.
I8. П.П.Паренаго, АЖ, 27, 329, I950.
I9. Г.М.Идлис, АЖ, 33, 20, I956.
20. Г.Г.Кузмин, АЖ, 33, 27, I956.
2I. M.Schmidt, B.A.N., 13, 15, 1956.
22. W.Lohmann, Z.f.Ap., 60, 43, 1964.
23. L.Perek, B.A.C., 2, 75, 1950.
24. A.B.Wyse, N.U.Mayall, Ap.J., 95, 24, 1942.
25. E.M.Burbidge, G.R.Burbidge, K.H.Prendergast, Ap.J., 130, 739, 1959.
26. M.Schmidt, Stars and Stellar Systems 5, 513, Univ. of Chicago Press, 1965.
27. Я.Эйнасто, Тарту публ., 36, 4I4, I968.
28. M.H.Liller, Ap.J., 132, 306, 1960.
29. Я.Эйнасто, Тарту публ., 36, 396, I968.
30. G.E.Kron, N.U.Mayall, A.J., 65, 581, 1960 (Lick Bull., No. 569).
3I. H.W.Babcock, Lick Bull., No. 498, 1939.
32. N.U.Mayall, Michigan Publ., 10, 19, 1950.
33. H.C. van de Hulst, E.Raimond, H.van Woerden, B.A.N., 14, 1, 1957.
34. I.King, A.J., 71, 276, 1966.
35. С.А.Кутузов, Tartu Teated, No. 9, 1, 1964.
36. Я.Эйнасто, С.А.Кутузов, Tartu Teated, No. 11, 11, 1964.
37. С.А.Кутузов, Труды Астрофизического института АН Каз ССР, 5, 78, I965 (Tartu Teated No. 16).
38. Я.Эйнасто , Труды Астрофизического института АН Каз ССР, 5, 87, I965 (Tartu Teated, No. 17).
39. Г.Г.Кузмин, Тарту публ., 33, 3, I955.

ГЛАВА II

ПОСТРОЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ*

1. Уравнения для определения кинематических функций

Как известно [1, 2], по распределению массы можно вычислить соответствующее гравитационное ускорение. Компоненты гравитационного ускорения в радиальном и вертикальном направлении $K_R = -\partial\Phi/\partial R$ и $K_z = -\partial\Phi/\partial Z$ (Φ – гравитационный потенциал) связаны с кинематическими функциями посредством гидродинамических уравнений [3, 4]

$$\frac{1}{R}(\sigma_R^2 - \sigma_\theta^2) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial R}(\rho\sigma_R^2) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial Z}[\rho\gamma(\sigma_R^2 - \sigma_z^2)] - \frac{V_\theta^2}{R} = -K_R, \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{R}\gamma(\sigma_R^2 - \sigma_z^2) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial R}[\rho\gamma(\sigma_R^2 - \sigma_z^2)] + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial Z}(\rho\sigma_z^2) = -K_z. \quad (1.2)$$

В этих формулах σ_R , σ_θ , σ_z – дисперсии скоростей в цилиндрической системе координат R , θ , Z ; V_θ – скорость центроида; ρ – плотность вещества и

$$\gamma = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha, \quad (1.3)$$

причем α – угол наклона большой оси эллипсоида скоростей к плоскости симметрии галактики. Допускается, что большая ось эллипсоида скоростей находится в меридиональной плоскости галактики и что компоненты скорости центроида $V_R = V_z = 0$.

Вычислив необходимые производные, уравнения (1.1) и (1.2) можно написать в виде

---

*Опубликовано в Астрофизике 6, 81 – 91, 1970 под названием "Галактика Андромеды M31. II. Гидродинамическая модель. Теория".

$$V_\theta^2 - p\sigma_R^2 = RK_R , \qquad (I.4)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\sigma_z^2)}{\partial z} + q\frac{\sigma_z^2}{R} = -K_z , \qquad (I.5)$$

где

$$p = (1-K_\theta) + G_R\{\rho\} + G_R\{\sigma_R\} + \frac{R}{Z}\gamma(1-K_z)[G_z\{\rho\} + G_z\{\gamma\} + G_z\{\sigma_R^2 - \sigma_z^2\}], \qquad (I.6)$$

$$q = \gamma\left(\frac{1}{K_z} - 1\right)[1 + G_R\{\rho\} + G_R\{\gamma\} + G_R\{\sigma_R^2 - \sigma_z^2\}], \qquad (I.7)$$

В этих формулах

$$k_\theta = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_R^2} , \quad k_z = \frac{\sigma_z^2}{\sigma_R^2} , \qquad (I.8)$$

а

$$G_R\{\rho\} = \frac{\partial \ln\rho}{\partial \ln R} \quad \text{и т.д.} \qquad (I.9)$$

Уравнения (I.4) и (I.5) содержат пять неизвестных кинематических функций ρ - σ_z , V_θ , k_z , k_θ , γ . Для определения этих функций имеем пока только два уравнения, следовательно, система гидродинамических уравнений не замкнута. Чтобы решить задачу, нужно иметь еще три независимых соотношения между искомыми функциями. Дополнительные уравнения удобно дать для величин k_z , k_θ , γ , определяющих форму и ориентацию эллипсоида скоростей. Тогда уравнение (I.5) позволяет вычислить дисперсию σ_z , чем определяется размер эллипсоида скоростей, а уравнение (I.4) - скорость центроида V_θ , т.е. смещение эллипсоида скоростей относительно точки покоя.

Проблема определения гидродинамической модели галактики сводится, таким образом, к нахождению уравнений для вспомогательных кинематических функций k_z , k_θ , γ . В литературе по звездной динамике этот вопрос не обсуждался до сих пор достаточно полно. Поэтому рассмотрим различные возможности решения этой задачи.

2. Способ замыкания системы гидродинамических уравнений

А. Способ Джинса - Оорта. Из классической звездной динамики для величин k_z и k_θ вытекают следующие выражения

$$k_z = 1, \tag{2.1}$$

$$k_\theta = \frac{-B}{A-B}, \tag{2.2}$$

причем A и B - кинематические параметры Оорта. Выражая A и B через скорость центроида V_θ и ее радиальный градиент, имеем

$$k_\theta = \frac{1}{2}\left[1 + G_R\{V_\theta\}\right]. \tag{2.3}$$

Таким образом, формулы (I.6) и (I.7) приобретают вид

$$p = (1 - k_\theta) + G_R\{\varrho\} + G_R\{\sigma_R^2\}, \tag{2.4}$$

$$q = 0, \tag{2.5}$$

а величина γ выпадает из системы искомых функций. Первое гидродинамическое уравнение решается последовательными приближениями (V_θ фигурирует и в p), причем в нулевом приближении считается $p = 0$. Второе уравнение имеет простое решение

$$\sigma_z^2 = \varrho^{-1} \int_z^\infty K_z \varrho \, dz, \tag{2.6}$$

которое уместно называть джинсовским. Этот способ был применен, например, в работах [5, 6].

Б. Способ Иннанена и Келлета. В сферических звездных системах (напр. в шаровых скоплениях) большая ось эллипсоида скоростей направлена на центр системы [7, 8]; тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{z}{R}. \tag{2.7}$$

В эллиптических и спиральных галактиках эллипсоид скоростей также наклонен к плоскости симметрии, но угол наклона другой. Следуя Оорту [9], Иннанен и Келлет [10] приняли

$$\gamma = \frac{z}{R} . \qquad (2.8)$$

Наблюдения показывают, что $\sigma_z \neq \sigma_R$ и, поэтому, формула (2.I) не имеет места. Вместо нее Иманен и Келлетт приняли

$$k_z = \mu^{-2} , \qquad (2.9)$$

где μ - некоторая постоянная. Задавая для μ ряд значений, авторы последовательными приближениями вычисляли дисперсию σ_z, интегрируя уравнение (I.5). В нулевом приближении дисперсия вычислялась по (2.6). Применяя этот способ к трехкомпонентной модели нашей Галактики, авторы нашли, что процесс последовательных приближений для плоской и промежуточной составляющей сходится при $\mu < 3$. Для гало же процесс лишь при $\mu < 1{,}2$.

Так как выбор параметра μ остался открытым и скорость центроида не вычислялась, то Иманен и Келлетт фактически не решили задачу до конца. Кроме того, формулу (2.8) можно принять только в первом весьма грубом приближении (см. ниже).

В. С п о с о б, о с н о в а н н ы й н а т е о р и и К у з м и н а. Проблема решения гидродинамических уравнений изучалась и Г.Г.Кузминым. Правда, он рассматривал только плоскую задачу. Как мы увидим ниже, его способ можно обобщить также на пространственный случай.

При $z = 0$ эллипсоид скоростей не имеет наклона к плоскости галактики, и $\gamma = 0$, но $\partial\gamma / \partial z \neq 0$. Поэтому выражение для параметра p (I.6) приобретает вид

$$p = (1 - k_\theta) + n_R (1 - k_z) + G_R\{\rho\} + G\{\sigma_R^2\} , \qquad (2.10)$$

где

$$n_R = R \left(\frac{\partial \gamma}{\partial z} \right)_{z=0} . \qquad (2.11)$$

Основываясь на теории третьего интеграла движения звезд как квазиинтеграла, Г.Г.Кузмин показал [II], что

$$n_R = -\frac{1}{4} G_R \{C_c^2\} \left[1 + \frac{B_c(A_c - B_c)}{C_c^2}\right]^{-1}, \quad (2.12)$$

где A_c , B_c , C_c - динамические параметры Оорта-Кузмина; т.е.

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)_{z=0} = -C_c^2 , \quad (2.13)$$

а A_c и B_c соответствуют круговой скорости. С градиентами потенциала они связаны формулами

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}\right)_{z=0} = (A_c - B_c)(3A_c - B_c) , \quad (2.14)$$

$$\left(\frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_{z=0} = -(A_c - B_c)^2 .$$

Используя уравнение Пуассона, которое при $z = 0$ в обозначениях A_c , B_c , C_c имеет вид

$$4\pi G \rho_t = C_c^2 - 2(A_c^2 - B_c^2) , \quad (2.15)$$

(ρ_t - тотальная плотность вещества) и учитывая, что A_c , $B_c << C_c$, Г.Г.Кузмин получил [11] приближенное выражение

$$n_R = -\frac{1}{4} G_R \{\rho_t\} . \quad (2.16)$$

Отношение дисперсий K_z не может быть вычислено с помощью классической звездной динамики , так как форма эллипсоида скоростей в z - направлении определяется действием иррегулярных сил, не учитываемых в классической теории. Теория действия иррегулярных сил приводит к следующему соотношению между дисперсиями скоростей [12, 13]

$$K_z^{-1} = 1 + K_\theta^{-1} . \quad (2.17)$$

Формула выведена для плоских подсистем, ее применимость в других случаях пока не выяснена. Она позволяет вычислить K_z по K_θ , последняя же величина может быть найдена в плоском случае по формуле Линдблада (2.3).

3. Решение гидродинамических уравнений при $z = 0$

Рассмотрим теперь несколько более подробно вопросы, связанные с решением гидродинамических уравнений в плоскости галактики.

Все три вспомогательные кинематические функции K_z, K_θ и n_R могут быть вычислены по модели распределения массы, причем при вычислении K_θ в первом приближении берем $V_\theta \sim V_c$.

Первое гидродинамическое уравнение позволяет вычислить без особого труда скорость центроида составляющих . Градиент плотности $G_R\{\rho\}$ задан моделью распределения массы, дисперсии скоростей и их градиенты можно вычислить путем решения второго гидродинамического уравнения для , считая вспомогательные функции K_z, K_θ, n_R известными. Итак, задача сводится к решению второго гидродинамического уравнения.

В плоскости галактики второе гидродинамическое уравнение (I.2) превращается в тождество вида $0 \equiv 0$. Поэтому продифференцируем это уравнение по z, взяв затем $z = 0$. Тогда получим

$$Q\sigma_z^2 = R^2 C_c^2, \tag{3.1}$$

где

$$Q = -\left(q' + R^2 \frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial z^2} + R^2 \frac{\partial^2 \ln \sigma_z^2}{\partial z^2}\right), \tag{3.2}$$

причем

$$q' = n_R \left(\frac{1}{K_z} - 1\right)\left[G_R\{\rho\} + G_R\{n_R\} + G_R\{\sigma_R^2 - \sigma_z^2\}\right]. \tag{3.3}$$

Формулы, сходные с (3.1) – (3.3), были найдены С.А.Кутузовым [14]. Однако они не применялись на практике, так как не было известно, как определить $\partial^2 \ln \sigma_z^2 / \partial z^2$.

При эллипсоидальном распределении плотности имеет место соотношение

$$R^2 \frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial z^2} = \varepsilon_\rho^{-2} G_R\{\rho\}, \qquad (3.4)$$

причем ε_ρ - отношение полуосей изоповерхностей плотности ρ.

Делая аналогичное допущение в отношении σ_z^2, найдем

$$R^2 \frac{\partial^2 \ln \sigma_z^2}{\partial z^2} = \varepsilon_\sigma^{-2} G_R\{\sigma_z^2\}, \qquad (3.5)$$

где ε_σ - отношение полуосей изоповерхностей дисперсии σ_z^2. Градиент $G_R\{\sigma_z^2\}$ получается из решения уравнения (3.1). Отношение ε_σ может быть вычислено, если известно распределение дисперсии σ_z^2 и на оси системы $R = 0$.

При сферических подсистемах все три слагаемых параметра имеют одинаковый порядок. Для промежуточных и плоских подсистем преобладает второй член, причем в последнем случае остальные члены настолько малы, что ими можно пренебречь. (см. [15]). Таким образом, для плоских подсистем имеем

$$C = C_c, \qquad (3.6)$$

где

$$C = \sigma_z / \zeta \qquad (3.7)$$

- кинематический параметр Кузмина, причем

$$\zeta^{-2} = \partial^2 \ln \rho / \partial z^2 \qquad (3.8)$$

Второе гидродинамическое уравнение позволяет также вычислить среднюю дисперсию скоростей в плоскости симметрии галактики.

По определению

$$K_z = -\int_0^z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} dz. \qquad (3.9)$$

Используя уравнение Пуассона и пренебрегая зависимостью $\partial\Phi/\partial R$ и $\partial^2\Phi/\partial R^2$ от z, находим

$$K_z = 4\pi G \int_0^z \rho_t \, dz + 2(A_c^2 - B_c^2) z \,. \qquad (3.10)$$

Дисперсию скоростей вычислим в линзовском приближении, т.е. пренебрегая наличием наклона эллипсоида скоростей вне плоскости галактики. Подставляя (3.10) в (2.6), получим

$$(\rho_t \overline{\sigma_z^2})_0 = \frac{\pi G P^2}{2} \left(1 + \frac{A_c^2 - B_c^2}{\pi G \rho_t} \frac{\bar{z}}{z_e} \right), \qquad (3.11)$$

где P - полная спроектированная плотность вещества, $z_e = P/2\rho_t$ - эффективная полутолщина галактики и

$$\bar{z} = \frac{\int_0^\infty \rho_t z \, dz}{\int_0^\infty \rho_t \, dz} \,. \qquad (3.12)$$

Формула (3.11) не применима в центральных областях галактики, где пренебречь зависимостью $\partial\Phi/\partial R$ и $\partial^2\Phi/\partial R^2$ от z нельзя. Формула (3.11) была выведена Г.Г.Кузминым [16], причем поправочный член найден для одной частной модели галактики.

Первое гидродинамическое уравнение было использовано ранее нами для оценки разности скорости центроида подсистемы и круговой скорости [17]. Второе же гидродинамическое уравнение было применено только в простейшем виде (3.6) для оценки динамического параметра C_c [15, 18], а также в виде (3.11) для определения средней дисперсии скоростей звезд [16]. В полном объеме описанный способ решения гидродинамических уравнений в плоскости галактики здесь применяется впервые.

4. Решение гидродинамических уравнений при $z \neq 0$; случай квадратичного третьего интеграла и эллипсоидального распределения скоростей. Выше мы видели, что до сих пор не предложено удовлетворительного способа решения гидродинамических уравнений в случае $z \neq 0$. В настоящем параграфе рассматриваются возможности решения этой задачи, исходя из теории квадратичного третьего интеграла движения звезд и эллипсоидального распределения их скоростей.

В каждой точке пространства (R, z) направления осей эллипсоида скоростей определяют ортогональную систему координат. Двигаясь вдоль осей эллипсоида скоростей, получаем при осевой и плоскостной симметрии галактики три орто-

гональных семейства поверхностей, которые согласно Эддингтону [19] называются основными скоростными поверхностями. Если допустить существование третьего квадратичного интеграла движения звезд, то эти поверхности являются меридиональными плоскостями и конфокальными эллипсоидами и гиперболоидами. Этот результат был получен Г.Г.Кузминым [20], тогда как Эддингтон [19] вывел его при менее общем допущении, а именно в допущении шварцшильдовского распределения скоростей. Обозначая соответствующие криволинейные координаты через x_i, имеем следующую формулу связи между x_i и цилиндрическими координатами R, θ, z [20]

$$\frac{R^2}{x^2 - z_0^2} + \frac{z^2}{x^2} = 1, \quad x_3 = \theta, \tag{4.1}$$

причем

$$x^2 = \begin{cases} x_1^2 \geqslant z_0^2 \\ x_2^2 \leqslant z_0^2 \end{cases}. \tag{4.2}$$

В этих формулах z_0 - постоянная, определяющая положение общих для эллипсоидов и гиперболоидов фокусов. Последние лежат на оси галактики на расстоянии $z = \pm z_0$ от центра.

Из вышеизложенного следует, что одна ось эллипсоида скоростей совпадает с осью v_θ в цилиндрической системе координат, угол же наклона других осей к плоскости выражается формулой [20]

$$\gamma = \frac{R_z}{R^2 + z_0^2 - z^2}. \tag{4.3}$$

Рассмотрим теперь, какие выражения вытекают из теории третьего квадратичного интеграла для отношения дисперсий скоростей.

Из теоремы Лиувилля следует, что фазовая плотность зависит от скоростей и координат посредством интегралов движения звезд [20]

$$I_1 = v_1^2 + v_2^2 + v_\theta^2 - 2\Phi, \tag{4.4}$$

$$I_2 = R v_\theta,$$

$$I_3 = \left(\frac{x_2}{z_0}\right)^2 v_1^2 + \left(\frac{x_1}{z_0}\right)^2 v_2^2 + \left(\frac{x_1 x_2}{z_0^2}\right) v_\theta^2 - 2\Phi^*,$$

причем v_i - компоненты скоростей вдоль главных осей эллипсоида скоростей и Φ^* - функция, связанная с гравитационным потенциалом Φ. Допускаем, что распределение скоростей эллипсоидально относительно всех v_i. Для этого нужно, чтобы фазовая плотность зависела от I_1 и I_3 посредством линейного выражения, а от I_2 - посредством квадратичного выражения

$$s = a_1 I_1 + a_2 I_3 - 2\frac{b_1}{z_0} I_2 + \frac{b_2}{z_0^2} I_2^2 . \qquad (4.5)$$

Тогда фазовая плотность зависит от компонентов скоростей посредством квадратичного выражения ($x_1 x_2 = \pm z z_0$)

$$s = \left[a_1 + a_2\left(\frac{x_2}{z_0}\right)^2\right] v_1^2 + \left[a_1 + a_2\left(\frac{x_1}{z_0}\right)^2\right] v_2^2 + \left[a_1 + a_2\left(\frac{z}{z_0}\right)^2 + b_2\left(\frac{R}{z_0}\right)^2\right] \cdot \left[v_\theta - \bar{v}_\theta\right]^2 , \qquad (4.6)$$

где

$$\bar{v}_\theta = V_\theta = \frac{z_0 \ell_1 R}{a_1 z_0^2 + a_2 z^2 + \ell R^2} . \qquad (4.7)$$

Таким образом, для отношения осей эллипсоида скоростей получаем

$$K_{12} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{a_1 z_0^2 + a_2 x_2^2}{a_1 z_0^2 + a_2 x_1^2} \qquad (4.8)$$

$$K_{13} = \frac{\sigma_3^2}{\sigma_1^2} = \frac{a_1 z_0^2 + a_2 x_2^2}{a_1 z_0^2 + a_2 z^2 + \ell_2 R^2} . \qquad (4.9)$$

Дисперсии скоростей в цилиндрической системе координат следующие:

$$\begin{aligned} \sigma_R^2 &= \sigma_1^2 \cos^2\alpha + \sigma_2^2 \sin^2\alpha , \\ \sigma_z^2 &= \sigma_1^2 \sin^2\alpha + \sigma_2^2 \cos^2\alpha , \\ \sigma_\theta^2 &= \sigma_3^2 , \end{aligned} \qquad (4.10)$$

где α - по-прежнему угол наклона большой оси эллипсоида скоростей к плоскости $z = 0$. Из (4.10) получим

$$K_z = \frac{\sin^2\alpha + K_{12}\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + K_{12}\sin^2\alpha} . \qquad (4.11)$$

$$K_\theta = \frac{K_{13}}{\cos^2\alpha + K_{12}\sin^2\alpha}\,. \qquad (4.12)$$

В частности, в плоскости галактики

$$x_1^2 = R^2 + z_0^2\,,\quad K_{12} = K_z\,,$$
$$x_2^2 = 0\,,\quad K_{13} = K_\theta\,, \qquad (4.13)$$

откуда по (4.8) и (4.9)

$$K_z(R,0) = \frac{a_1 z_0^2}{(a_1+a_2)z_0^2 + a_2 R^2}\,, \qquad (4.14)$$

$$K_\theta(R,0) = \frac{a_1 z_0^2}{a_1 z_0^2 + b_2 R}\,. \qquad (4.15)$$

Применяя формулу Кузмина (2.17), видим, что $a_1 = a_2 = b_2 = a$. Следовательно ($b = b_1/a$),

$$V_\theta = \frac{z_0 bR}{z_0^2 + z^2 + R^2}\,, \qquad (4.16)$$

$$K_{12} = \frac{z_0^2 + x_2^2}{z_0^2 + x_1^2}\,, \qquad (4.17)$$

$$K_{13} = \frac{z_0^2 + x_2^2}{z_0^2 + z^2 + R^2}\,. \qquad (4.18)$$

Формулы (4.7) - (4.9) были получены еще Эддингтоном [19], а формулы (4.14) - (4.18) Г.М.Идлисом [21], правда, в несколько ином виде и исходя из инвариальдового распределения скоростей.

5. Решение гидродинамических уравнений при $z \neq 0$; общий случай. Еще Эддингтон показал ([19], стр. 47), что допущение наличия инвариальдового распределения скоростей приводит к внутреннему противоречию - невозможно найти конфигурацию распределения массы, одновременно удовлетворяющую уравнению Пуассона и уравнению, вытекающему из определения фазовой плотности. Нетрудно видеть, что к такому же противоречию мы приходим, исходя из допущения строгого выполнения условия наличия третьего квадратичного интеграла движения звезд и эллипсоидального распределения скоростей. В

настоящем параграфе рассматривается определение вспомогательных кинематических функций, причем мы исходим из теории третьего интеграла как квазиинтеграла и приблизительно эллипсоидального распределения скоростей.

Допущение симметричности распределения скоростей в направлении v_θ явно противоречит наблюдениям. Поэтому при выводе отношения дисперсий K_θ мы не будем использовать выражения, вытекающие из эллипсоидального распределения скоростей. Вместо этого применим уравнение макродвижения (теорема Г.Г.Кузмина 4), откуда следует

$$2K_\theta = 1 + G_R\{V_\theta\} + \gamma(1-K_z)\frac{R}{z}\{V_\theta\} + \frac{R}{\rho\sigma_R^2 V_\theta}\frac{\partial(\rho\overline{v_R^2 v_\theta})}{\partial R} +$$

$$+ \frac{2V_R^2 V_\theta - V_\theta^3}{\sigma_R^2 V_\theta} + \frac{R}{\rho\sigma_R^2 V_\theta}\cdot\frac{\partial(\rho V_R V_z V_\theta)}{\partial Z}. \qquad (5.1)$$

Вблизи плоскости $z = 0$ преобладают первые два члена правой части (5.1) и мы получаем обычную формулу Линдблада (2.3). Применение формулы в общем случае требует специального исследования вертикального градиента V_θ, а также моментов компонентов скорости третьего порядка, которое выходит за рамки настоящей работы.

Относительно v_1 и v_2 осей распределение скоростей в первом приближении можно считать эллипсоидальным. При выводе отношения дисперсии K_z в § 4 слабым местом следует считать допущение, что третий интеграл является точным интегралом движения. Если ограничиваться третьим интегралом как квазиинтегралом, то в его разложении нужно брать и более высокие члены. В таком случае в выражении (4.6) множители перед v_1^2 и v_2^2 уже не являются линейными относительно x_1^2 и x_2^2 соответственно, а имеют более общий вид. Мы предполагаем, что первый множитель все же зависит только от x_2^2, а второй - от x_1^2, как некоторая функция $f(x^2)$. Отношение дисперсий K_{12} выражается тогда формулой

$$K_{12} = \frac{f(x_2^2)}{f(x_1^2)}. \qquad (5.2)$$

Теория интегралов движения звезд не может однозначно фиксировать функцию $f(x^2)$, так как форма эллипсоида скоростей определяется действием иррегулярных сил, не учитываемых в теории интегралов движения. Действие же иррегулярных сил исследовано до сих пор лишь для очень плоских подсистем, оно приводит к формуле Кузмина (2.I7), которую мы и будем использовать для вычисления $f(x^2)$.

При $z = 0$ K_z конечно и отлично от нуля. Поэтому без ограничения общности можно положить $f(0) = I$ и, учитывая (4.I3),

$$K_z(R,0) = 1/f(R^2 + Z_0^2). \qquad (5.3)$$

Эта формула позволяет вычислять $f(x^2)$ по K_z и K_θ, а K_θ, в свою очередь, может быть найдено по формуле Линдблада (2.3).

Формула (5.3) определяет функцию $f(x^2)$ лишь для $x^2 \geq z_0^2$. В области $0 < x^2 < z_0^2$ ее приходится интерполировать, учитывая, что по определению $f(0) = I$.

Необходимо указать на один недостаток определения функции $f(x^2)$ по (5.3) с использованием (2.3) и (2.I7). По последним формулам $K_z(0,0) = 0.5$ и, следовательно, $f(z_0^2) = 2$ независимо от z_0. С другой стороны, распределение скоростей в центре сферических систем сферически симметрично, поэтому для них $z_0 = 0$ и $f(z_0^2) = I$, в согласии с определением этой функции. Таким образом, получается, что функция $f(x^2)$ должна иметь разрыв в начальной точке. Нам кажется, что при переходе к более сферичным звездным системам $f(z_0^2)$ приближается к единице не скачком, а плавно. Другими словами, формула (2.I7) в центральных областях звездных систем в общем случае не действительна.

Наконец, рассмотрим еще обобщение формулы для определения величины γ.

В теории квадратичного третьего интеграла для γ получается формула (4.3); численное значение γ при данном (R,z) фиксируется параметром z_0. Ориентация эллипсоида скоростей определена гравитационным потенциалом системы в целом и величина γ может быть найдена и непосредственно по потенциалу. Для этой цели используем дифференциальное

уравнение, получаемое в теории третьего интеграла движения звезд [I9, 20]

$$3\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial R}-\frac{1}{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial^2\Phi}{\partial R\partial z}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial R^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0, \qquad (5.4)$$

Эту формулу, строго говоря, можно применять лишь при наличии квадратичного третьего интеграла. Однако, дифференцируя (5.4) по z, выражая производные потенциала через динамические параметры Кузмина-Оорта (2.I3), (2.I4) и вычисляя n_R, приходим к результату (2.I2), который был получен из теории третьего интеграла как квазиинтеграла. Таким образом, при $z \to 0$ формула (5.4) справедлива и тогда, когда мы имеем дело с третьим интегралом как квазиинтегралом. Поэтому предположим, что мы не очень ошибаемся, если используем формулу (5.4) при любых z.

Чтобы использовать (5.4) для определения кинематической функции γ, нужно вычислить производные потенциала для всех интересующих нас точек (R,z). Если при вычислении γ не требуется очень большая точность, то эту работу можно облегчить, заменив потенциал модели суммой потенциалов плоских моделей Кузмина.

Г.Г.Кузмин показал [I6], что допущение наличия квадратичного третьего интеграла с учетом естественных требований о конечности массы и неотрицательности плотности приводит к значительному ограничению возможных выражений для потенциала галактики. В предельном случае $\varepsilon_\varsigma \to 0$ это выражение имеет вполне определенный вид

$$\Phi(R,z)=\frac{G\mathfrak{M}}{r}, \qquad (5.5)$$

где $\mathfrak{M}$ – масса галактики и

$$r^2=R^2+(Z\pm Z_0)^2, \qquad (5.6)$$

причем $sign\, z_0 = sign\, z$. Для плотности вещества получается выражение

$$\rho(R,0)=\rho_0\left(1+\frac{R^2}{z_0^2}\right)^{-2} \qquad (5.7)$$

Исходя из полученных формул для плотности и потенциа-

ла, Г.Г.Кузмин построил соответствующую модель Галактики [16]. Сравнение его модели с эмпирическими указывает на существенные расхождения. В частности, в модели Кузмина практически отсутствует ядро, с другой стороны падение плотности на периферии не достаточно быстрое.

Наличие сильно выраженного ядра и довольно четкая внешняя граница являются, повидимому, общими свойствами почти всех галактик. Поэтому простая модель Кузмина может быть применена лишь в первом, весьма грубом приближении. Составная же модель Кузмина дает для нашей цели вполне удовлетворительные результаты. Тогда

$$\Phi(R,z) = G\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i} \qquad (5.8)$$

где m_i - масса компоненты, $r_i^2 = R^2 + (z \pm z_{0i})^2$, z_{0i} - масштабный параметр компоненты и n - их число. В данном случае разделение галактики на компоненты носит чисто математический характер и отдельным компонентам не должны соответствовать реальные подсистемы галактики.

Подставляя (5.8) в (5.4), получим с учетом (4.3) следующее правило для вычисления среднего значения параметра z_0^2.

$$\overline{z_0^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i z_{0i}^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}, \qquad (5.9)$$

где

$$f_i = \frac{m_i (z + z_{0i})}{r_i^5}. \qquad (5.10)$$

Параметр $\overline{z_0^2}$ определен так, чтобы вычислить γ по (4.3), заменив в ней z_0^2 на $\overline{z_0^2}$. Итак, формула для γ сохранила свою прежнюю форму.

Усредненный параметр $\overline{z_0^2}$ не является постоянной величиной, а функцией положения $\overline{z_0^2}(R,z)$. Выше мы видели, что z_0 определяет положение фокусов конфокальных эллипсоидов и гиперболоидов; кроме того в фокусах эллипсоиды скоростей превращаются в сферы. В данном случае главные скоростные поверхности уже не являются эллипсоидами и гиперболоидами,

а имеет более сложный вид. Эллипсоиды скоростей превращаются в сферы на оси системы в точках $z = \pm z_{0e}$, причем z_{0e} - точки, где $z_0^2(0,z) = z^2$. Эти точки можно называть эффективными фокусами составной модели.

Найденные формулы решают поставленную задачу. Они позволяют получить, по нашему мнению, более достоверную гидродинамическую модель галактики, чем это делалось раньше. Но и наша методика носит предварительный характер. Дальнейшее уточнение гидродинамических моделей звездных систем трудно без развития теории третьего интеграла как квазиинтеграла и разработки теории действия иррегулярных сил в эллиптических галактиках. Заканчивая статью, хотелось бы обратить внимание на первоочередную важность решения этих вопросов.

Март 1969

Литература

I. M.Schmidt, Bull. Astron. Inst. Netherl. 13, 15, 1956.
2. L.Perek, Advance in Astronomy and Astrophysics 1, 165, Acad. Press New York-London, 1962.
3. J.Einasto, Astr. Nachr, 291, 99, 1969.
4. Г.Г.Кузмин, Труды астрофиз. инст. АН КазССР 5, 70, 1965. (Tartu Astr. Obs, Teated No. 15[a]).
5. J.H.Oort, Ap.J. 91, 273, 1940.
6. K.A.Innanen, D.R.Fox, Z.Ap. 66, 308, 1967.
7. R.W.Hichie, Ap.J. 133, 781, 1961.
8. Т.А.Агекян, А.С.Баранов, Астрофизика, 5, 305, 1969.
9. J.H.Oort, Stars and Stellar Systems 6 (Ed. A.Blaauw, M.Schmidt) 455, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1965.
I0. K.A.Innanen, D.I.Kellett, Z.Ap., 68, 226, 1968.
II. Г.Г.Кузмин, Бюлл. Абастуманской астрофиз. обс., 27, 89, 1962.
I2. Г.Г.Кузмин, Публ. Тартуской астр. обс. 33, 351, 1961.
I3. Г.Г.Кузмин, Tartu Astr. Obs. Teated No. 6, 19, 1963.
I4. С.А.Кутузов, Tartu Astr. Obs. Teated No. 9, 1, 1964.
I5. Г.Г.Кузмин, Публ. Тартуской астрон. обс. 32, 5, 1952.

I6. Г.Г.Кузмин, Астр. ж. 33, 27, I956 (Tartu Astr. Obs. Teated No. 2).
I7. Я.Эйнасто, Публ. Тартуск. астрон. обс. 33, 371, I96I.
I8. Г.Г.Кузмин, Публ. Тартской астр. обс. 33, 3, I955.
I9. A.S.Eddington, Monthly Not. R.A.S., 76, 37, 1916.
20. Г.Г.Кузмин, Публ. Тартской астр. обс. 32, 332, I953.
2I. Г.М.Идлис, Труды Астрофиз. инст. АН Каз ССР, I2, I7, I969.

ГЛАВА I2

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ВИРИАЛЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ МАССЫ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ

I. Введение. При определении массы звездных систем по дисперсии скоростей звезд, а также при решении ряда других задач используется теорема о вириале, которая в общем случае самогравитирующей системы имеет вид

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 2T + \Omega , \qquad (I.I)$$

где I – полный момент инерции системы, а T и Ω – ее полная кинетическая и потенциальная энергия. При стационарности момент инерции не зависит от времени и мы имеем теорему о вириале в узком смысле

$$2T + \Omega = 0. \qquad (I.2)$$

Кинетическая энергия системы может быть выражена через среднюю дисперсию скоростей $\overline{\sigma^2}$ и массы $\mathcal{M}$ системы

$$T = \frac{1}{2}\mathcal{M}\,\overline{\sigma^2}, \qquad (I.3)$$

При сферической симметрии

$$\overline{\sigma^2} = 3\,\overline{\sigma_r^2}, \qquad (I.4)$$

где $\overline{\sigma_r^2}$ – средняя дисперсия лучевых скоростей, которая может быть найдена по наблюдениям. Для потенциальной энергии имеем выражение

$$\Omega = -G\mathcal{M}^2 R^{-1} H, \qquad (I.5)$$

где G – гравитационная постоянная, R – эффективный радиус системы и H – безразмерная величина, которая зависит от структуры системы. Итак, для определения массы системы получим выражение

$$\overline{\sigma_r^2} = \frac{1}{3}\frac{6m}{R}H . \qquad (I.6)$$

Кроме сферичности и стационарности при определении массы по формуле (I.6) допускается еще, что найденная по наблюдениям средняя дисперсия лучевых скоростей соответствует средней дисперсии скоростей всей системы. Эти предположения хорошо выполняются в шаровых звездных скоплениях. В галактиках и скоплениях галактик эти предположения не выполняются, так как они, как правило, являются несферическими и состоят из нескольких подсистем с различной кинематикой.

Чтобы применить теорему о вириале и в несферическом случае, целесообразно использовать ее в тензорном виде [I - 7]. Далее нужно учесть составную структуру звездных систем и вычислить коэффициенты H для различных моделей звездных систем. Для некоторого частного случая это сделано Лимбером [5, 6]. Ниже этот вопрос рассматривается в более общем случае и результаты применяются к моделям, имеющим большее сходство с реальными галактиками.

2. Теорема о вириале в тензорном виде. Рассмотрим звездную систему, которую представим как непрерывную среду с функцией плотности ρ. Пусть $\underline{r}$ - вектор положения пробного тела относительно центра тяжести системы, а $\underline{v}$ и $\underline{g}$ - векторы его скорости и ускорения. Образуем диадное произведение $\underline{r}\,\underline{r}$ и вычисляем его вторую производную по времени

$$\frac{\partial^2 \underline{r}\,\underline{r}}{\partial t^2} = 2(\underline{v}\,\underline{v} + \underline{r}\,\underline{g}). \qquad (2.I)$$

Умножаем теперь (2.I) на ρ и интегрируем результат по всему объему системы V. Получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \underline{I}}{\partial t^2} = 2\underline{T} + \underline{\Omega}, \qquad (2.2)$$

где

$$\underline{I} = \int \rho\, \underline{r}\,\underline{r}\, dV, \qquad (2.3)$$

$$\underline{T} = \frac{1}{2}\int \rho \underline{v}\,\underline{v}\, dV \qquad (2.4)$$

и

$$\underline{\Omega} = \int \rho \underline{r}\,\underline{g}\, dV \qquad (2.5)$$

- тензоры момента инерции, кинетической энергии и вириал-тензор системы. В стационарном случае

$$2\underline{T} + \underline{\Omega} = 0, \qquad (2.6)$$

что и выражает теорему о вириале в тензорном виде.

Чтобы найти выражение теоремы о вириале для подсистемы, целесообразно вывести теорему из гидродинамических уравнений звездной динамики. При стационарности эти уравнения могут быть написаны в виде

$$\nabla(\rho \underline{v}\,\underline{v}) = \rho \underline{g}\,. \qquad (2.7)$$

Умножаем это выражение на $\underline{r}\,dV$ и интегрируем по всему объему системы. В правой части уравнения имеем выражение (2.5). Для вычисления левой части уравнения рассмотрим элемент тензора

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \int \frac{\partial f}{\partial r_k} r_i v_k v_j\, dW, \qquad (2.8)$$

причем f - фазовая плотность, dW - элемент фазового объема. Интегрируем сначала по r_k. Видим, что при $k=i$

$$\int \frac{\partial f}{\partial r_k} r_k\, dr_k = \int r_k\, df = -\int f\, dr_k\,,$$

а при $k \neq i$

$$\int \frac{\partial f}{\partial r_k} r_i\, dr_k = r_i \int df = 0.$$

Следовательно,

$$a_{ij} = -\int f v_i v_j\, dW = -\int \rho v_i v_j\, dV = -2T_{ij}, \qquad (2.9)$$

где T_{ij} - элемент тензора $\underline{T}$. Мы опять пришли к выраже-

нию (2.6).

Как известно, недиагональные члены гидродинамических уравнений учитывают наклон эллипсоида скоростей к плоскости симметрии системы. Выпадение этих членов при вычислении тензора кинетической энергии означает, что усредненные по всей системе значения соответствующих членов равны нулю. Другими словами, вычисляя дисперсии скоростей в джинсовском приближении, где указанный наклон считается равным нулю, получим правильное среднее значение дисперсии скоростей. Этот результат был получен Г.Г.Кузминым [8].

3. Определение вириал-тензора для подсистемы. Рассмотрим теперь звездную систему, состоящую из n подсистем. Движение объектов некоторой "пробной" подсистемы, которую обозначим индексом ~~ноль~~ i, происходит под влиянием гравитационного ускорения всей системы, и мы имеем для этой подсистемы гидродинамические уравнения в виде

$$\nabla(\rho_i \underline{v}_i \underline{v}_i) = \rho_i \sum_{j=0}^{n-1} \underline{g}_j . \qquad (3.1)$$

Производя необходимые выкладки, находим для тензора кинетической энергии пробной подсистемы

$$\underline{T}_i = \frac{1}{2} m_i \underline{D}_i , \qquad (3.2)$$

где m_i – масса подсистемы и $\underline{D}_i$ – тензор средних дисперсий скоростей подсистемы.

Чтобы получить выражение и для правой части уравнения (3.1), находим сперва формулу для ускорения g_j, обусловленного подсистемой j. Предположим, что поверхности равных плотностей всех подсистем являются соосными концентрическими эллипсоидами вращения с отношением полуосей ε_j, которое считаем постоянным для данной подсистемы. Образуем систему прямоугольных координат x_1, x_2, x_3 и ориентируем ее так, чтобы ось x_3 совпадала с осью системы. Тогда

$$\rho_j(x_1, x_2, x_3) = \rho_j(\alpha_j) , \qquad (3.3)$$

где

$$a_j = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \varepsilon_j^{-2} r_3^2} \qquad (3.4)$$

– большая полуось эллипсоида $g_j = const$. При таких допущениях в компонентной записи

$$g_k = -r_k G F_k(a), \qquad (3.5)$$

где [9]

$$F_1(a) = F_2(a) = \int_0^1 \frac{\mu(a) u^2 d u}{a^2 [1-(\varepsilon u)^2]^{1/2}} . \qquad (3.6)$$

и

$$F_3(a) = \int_0^1 \frac{\mu(a) u^2 d u}{a^2 [1-(\varepsilon u)^2]^{3/2}} . \qquad (3.7)$$

В последних формулах $\varepsilon^2 = I - \varepsilon^2$ и

$$\mu(a) = 4\pi \varepsilon \rho(a) a^2 \qquad (3.8)$$

– функция массы, а переменная интегрирования связана с большой полуосью a формулой

$$a^2 = u^2 [r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 / (1 - \varepsilon^2 u^2)] . \qquad (3.9)$$

Для упрощения записи в формулах (3.5) – (3.9) индекс j опущен.

Как известно [7], притяжение на поверхности эллипсоида зависит не от распределения массы внутри его, а только от его общей массы и сплюснутости. Это обстоятельство позволяет при вычислении интегралов (3.6) и (3.7) заменить $\mu(a) a^{-2}$ некоторой не зависящей от u величиной $A(a)$, которая вычисляется так, чтобы внутренняя масса

$$M(a) = \int_0^a \mu(a') d a' \qquad (3.10)$$

осталось неизменной.

После интегрирования по u , с учетом

$$A = \mu(a) a^{-2} = 3 M(a) a^{-3} \qquad (3.11)$$

шаем

$$q_k = -3\varkappa_k \beta_k' G M(a) a^{-3}, \qquad (3.12)$$

где

$$\beta_1' = \beta_2' = \int_0^1 \frac{u^2 du}{[1-(eu)^2]^{1/2}} \qquad (3.13)$$

и

$$\beta_3' = \int_0^1 \frac{u^2 du}{[1-(eu)^2]^{3/2}} \qquad (3.14)$$

Здесь индекс j опять упущен.

Выполним теперь интегрирование по объему звездной системы. Вследствие симметрии недиагональные элементы вириал-тензора равны нулю. Для вычисления диагональных элементов переходим к цилиндрической системе координат

$$x_1 = R\cos\lambda,$$
$$x_2 = R\sin\lambda,$$
$$x_3 = \varepsilon Z,$$

и интегрируем по λ. Далее вводим безразмерную функцию массы μ° ~~нулевой~~ составляющей i

$$\mu_i(a) = \mathcal{M}_i a_{oi}^{-1} \mu_i^\circ(a), \qquad (3.15)$$

где a_{oi} – эффективный радиус составляющей, определяемый формулой

$$a_{oi}^{-1} = \int_0^\infty \mu_i(a) a^{-1} da \Big/ \int_0^\infty \mu_i(a) da. \qquad (3.16)$$

Наконец, вводим безразмерную интегральную функцию массы составляющей $m_j(a_j)$

$$M_j(a_j) = \mathcal{M}_j m_j(a_j), \qquad (3.17)$$

где $\mathcal{M}$ – масса составляющей j. Для диагональных элементов вириал-тензора ~~нулевой~~ подсистемы получим

$$(\Omega_{kk})_i = -G\mathcal{M}_i \beta_k a_{oi}^{-1} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{M}_j H_{kij} \qquad (3.18)$$

где

$$\beta_R = \beta_1' = \beta_2' = \frac{1}{2e^2}\left[\frac{\arcsin e}{e} - \varepsilon\right], \tag{3.19}$$

$$\beta_z = \varepsilon^2 \beta_3' = \frac{\varepsilon^2}{e^2}\left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\arcsin e}{e}\right], \tag{3.20}$$

$$H_{Rij} = \frac{3}{2}\int_0^\infty\int\int \mu_i^0(a)\, m_j(a_j)\, a_j^{-3} a^{-2} R^3\, dR\, dz, \tag{3.21}$$

$$H_{zij} = 3\int_0^\infty\int\int \mu_i^0(a)\, m_j(a_j)\, a_j^{-3} a^{-2} R z^2\, dR\, dz. \tag{3.22}$$

Если все составляющие имеют одинаковую сплюснутость $\varepsilon_j = \varepsilon$, тогда $a_j = a$ и после перехода к сферическим координатам и интегрирования по углам находим

$$H_{ij} = H_{Rij} = H_{zij} = \int_0^\infty \mu_i^0(a)\, m_j(a)\, a^{-1}\, da. \tag{3.23}$$

Следует отметить, что в формулах (3.21) – (3.23) единицей измерения расстояний является эффективный радиус составляющей i a_{oi}.

4. О применении теоремы о вириале. По теореме о вириале для составляющей мы имеем

$$(\overline{\sigma_R^2})_i = \beta_R a_{oi}^{-1} G \sum_{j=0}^{n-1} m_j H_{Rij}, \tag{4.1}$$

$$(\overline{\sigma_z^2})_i = \beta_z a_{oi}^{-1} G \sum_{j=0}^{n-1} m_j H_{zij}, \tag{4.2}$$

причем при вычислении средних значений дисперсий остаточные скорости отсчитываются не от локального центроида, как обычно, а от центроида всей системы. Если плоскость симметрии системы образует с лучом зрения угол γ, имеем для наблюдаемой средней дисперсии скоростей

$$\overline{\sigma_r^2} = \overline{\sigma_R^2}\cos^2\gamma + \overline{\sigma_z^2}\sin^2\gamma. \tag{4.3}$$

Подчеркнем, что и наблюдения дают среднюю дисперсию скоростей относительно центроида всей системы.

Для некоторых приложений полезно иметь и формулу, содержащую среднее значение дисперсии по отношению к

локальному центроиду. Предположим, что мы имеем дело с систематическими движениями только типа вращения. Тогда по z – координате движение локального центроида совпадает с движением общего центроида, в плоскости же системы локальный центроид вращается вокруг центра системы с угловой скоростью $\omega(R)$. Вычисляем проекцию этой скорости на луч зрения и усредняем по всей системе. Имеем

$$\overline{\sigma_R^2} = (\overline{\sigma_R^2})_{loc} + \frac{1}{3}\overline{\omega^2} a_0^2 M_2\{\mu^\circ\}, \qquad (4.4)$$

где

$$M_2\{\mu^\circ\} = \int_0^\infty \mu^\circ(\alpha)\,\alpha^2 d\alpha, \qquad (4.5)$$

$\alpha = a/a_0$. При вычислении $\overline{\omega^2}$ мы допустили, что поверхности постоянной ω совпадают с поверхностями постоянной плотности ρ.

По найденным формулам нетрудно определить и полную потенциальную энергию системы. Допустим, что система имеет постоянное отношение полуосей эллипсоидов равной плотности. Потенциальная энергия системы равна следу вириал-тензора

$$\Omega = Sp\,\underline{\Omega} = \sum_{i=1}^{3} \Omega_{ii} = -G M^2 a_0^{-1} H_0 \beta, \qquad (4.6)$$

где

$$\beta = 2\beta_R + \beta_z = \frac{\arcsin e}{e}, \qquad (4.7)$$

M – масса и a_0 – эффективный радиус всей системы, а

$$H_0 = \int_0^\infty \mu^\circ(\alpha)\, m_0(\alpha)\, \alpha^{-1} d\alpha, \qquad (4.8)$$

причем μ° и m_0 – безразмерные функции массы и интегральной функции массы всей системы. Гравитационный потенциал в центре системы выражается так:

$$\phi(0) = G M a_0^{-1} \beta. \qquad (4.9)$$

Запишем еще выражения для диагональных элементов тензора момента инерции

Таблица I

ε	β_R	β_z	β	κ_z
0.00	0.7854	0.0000	I,5708	0.0000
.05	0.7382	0.0463	I.5227	0.0627
.I0	0.6960	0.086I	I.4780	0.I237
.I5	0.6580	0.I204	I.4365	0.I830
.20	0,6238	0.I50I	I.3977	0.2406
0.25	0.5927	0.I759	I.36I3	0.2968
.30	0.5644	0.I984	I.3272	0.35I5
.35	0.5385	0.2I8I	I.295I	0.4049
.40	0.5I48	0.2353	I.2649	0.4570
.45	0.4930	0.2504	I.2363	0.5078
0.50	0.4728	0.2636	I.2092	0.5575
.55	0.454I	0.2752	I.I835	0.606I
.60	0.4368	0.2855	I.I59I	0.6536
.65	0.4207	0.2945	I.I359	0.700I
.70	0.4057	0.3025	I.II38	0.7456
0.75	0.39I6	0.3094	I.0927	0.790I
.80	0.3785	0.3I56	I.0725	0.8338
.85	0.366I	0.3209	I.0532	0.8765
.90	0.3545	0.3256	I.0347	0.9I85
.95	0.3436	0.3298	I.0I70	0.9596
I.00	0.3333	0.3333	I.0000	I.0000

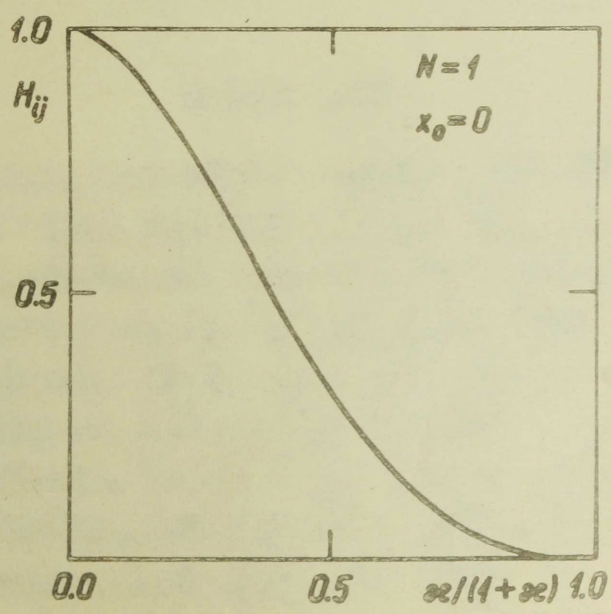


Рис. I

$$I_R = \frac{1}{3}\mathcal{M} a_0^2 M_2\{\mu^0\}, \qquad (4.10)$$

$$I_z = \frac{\varepsilon^2}{3}\mathcal{M} a_0^2 M_2\{\mu^0\} \qquad (4.11)$$

и полного момента инерции

$$I = \frac{2+\varepsilon^2}{3}\mathcal{M} a_0^2 M_2\{\mu^0\}. \qquad (4.12)$$

Значения параметров β_2, β_z и β, а также отношения дисперсий $\varkappa_z = \beta_z/\beta_R$ приведены в таблице I. Параметры H_0 и $M_0\{\mu^0\}$ вычислены для семейства моделей распределения массы и приведены в гл. I6. На рис. I дан ход величины H_{ij} в зависимости от отношения эффективных радиусов $\varkappa = a_j/a_i$. Разумеется при $i = I$ $H_{ij} = H_0$, а при $\varkappa \ll I$ $m_j(a) = I$ практически во всем диапазоне a, откуда по определению функции $\mu^0(a)$ (гл. 9) $H_{ij} = I$. При $\varkappa \gg I$ H_{ij} быстро уменьшается, она пропорциональна $\varkappa^{-3}$.

Найденные результаты показывают, что теорема о вириале позволяет вычислить массу системы лишь тогда, когда система имеет простое строение и наблюденная дисперсия скоростей характеризует среднюю дисперсию скоростей всей системы. Большинство же галактик имеют составную структуру, а наблюдения позволяют определить дисперсию скоростей лишь для центральной области. В таких условиях теорема о вириале позволяет вычислить лишь массу ядра галактики.

Май I97I

Литература

I. Rayleigh, Scientific Papers, Cambridge, 4, 491, 1903.
2. U.van Wijk, Ann. d'Astroph. 12, 81, 1949.
3. S.Chandrasekhar, J.Math. Anal. Appl. 11, 240, 1960.
4. N.R.Lebovitz, Ap.J. 134, 500, 1961.
5. D.N.Limber, Ap.J. 134, 537, 1961.
6. D.N.Limber, A.J.66, 572, 1961.
7. Г.Г.Кузмин, Тарту публ. 34, I0, I964.
8. Г.Г.Кузмин, Диссертация, Тарту, I970.
9. J.Einasto, A.N. 291, 97, 1969.

Б. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ

ГЛАВА I3

НЕКОТОРЫЕ СЕМЕЙСТВА СПЕЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ*

I. Введение. Модели конкретных звездных систем могут быть заданы численно с помощью таблиц или аналитически с помощью оценивания параметров в аналитических выражениях специальных моделей. Второй способ гораздо удобен в математической трактовке и применяется почти всеми авторами. Репрезентативность модели в этом случае в значительной степени зависит от удачности выбора аналитического вида основной функции описания.

Как мы видели выше, все функции описания связаны между собой формулами связи, конкретный вид которых зависит от принятой формы поверхностей постоянной плотности. По этому признаку модели могут быть разделены на несфероидальные и сфероидальные с постоянной и переменной сплюснутостью.

Несфероидальные модели весьма неудобны для практического применения, так как формулы связи между функциями описания весьма громоздки. Этим же недостатком страдают сфероидальные модели с переменной сплюснутостью, изученные Л.Пероном [I], Г.Г.Кузминым [2], С.А.Кутузовым [3] и В.С. Сизиковым [4]. Мы рассмотрим сфероидальные модели с постоянной сплюснутостью, частным случаем которых являются и плоские и сферические модели. Поверхности равных плотностей реальных галактик, конечно, не является эллипсоидами постоянной сплюснутости, но галактики могут быть разделены на подсистемы, в которых это условие выполняется. Как показывает практика, разделение галактик на подсистемы по такому признаку носит не формальный математический харак-

---

*Основные результаты этой главы были опубликованы в статье "On Galactic Descriptive Functions", A.N. 291, 97 - 109, 1969.

тер, а связано с физическими признаками подсистем.

Разными авторами предложено большое количество различных аналитических выражений для тех или иных функций описания. Выбор наиболее подходящего выражения для построения моделей галактик производится на основе критериев физической корректности модели, рассмотренных нами в работах [5, 6]. Ниже они даются в несколько дополненном и модифицированном виде. Затем рассматриваются разные семейства специальных моделей и обсуждается вопрос об их пригодности для описания галактик.

2. Критерии физической корректности моделей могут быть разделены на основные, которые должны быть выполнены во всех моделях, и на дополнительные, которые выполняются лишь в моделях регулярных стационарных галактик.

К числу основных критериев могут быть отнесены следующие:

I) плотности массы ϱ и светимости ℓ должны быть неотрицательными и конечными

$$0 \leq \varrho < \infty, \qquad (2.1)$$

$$0 \leq \ell < \infty; \qquad (2.2)$$

2) функции описания не должны иметь изломов и скачков;

3) функции описания должны быть однозначными;

4) моменты функции массы должны быть конечными, начиная с порядка $i = -2$

$$M_i\{\mu\} = \int_0^\infty \mu(a) a^i da < \infty, \quad i \geq -2; \qquad (2.3)$$

5) функции описания должны образовать согласованную систему;

К числу дополнительных могут быть причислены следующие критерий:

6) плотность, угловая скорость вращения и дисперсия скоростей убывают при удалении от оси u (или) плоскости системы

$$G_a\{\beta\} \leq 0, \tag{2.4}$$

$$G_a\{\omega\} \leq 0, \tag{2.5}$$

$$G_a\{\sigma^2\} \leq 0; \tag{2.6}$$

7) модель допускает устойчивое круговое движение

$$G_a\{V_c\} > -1; \tag{2.7}$$

8) модель является устойчивой конфигурацией, т.е. ее колебания имеют конечную амплитуду.

В последних формулах использовано обозначение

$$G_a\{y\} = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln a}. \tag{2.8}$$

Вместо большой полуоси a в этих формулах может фигурировать расстояние от оси галактики R или квадрат расстояния от плоскости z^2.

Критерии I -3 были обсуждены уже раньше ([5], гл.8). Критерий 4 дан здесь в более жестком виде (ранее мы допускали, что лишь некоторые моменты должны быть конечными). Это условие в реальных галактиках всегда выполняется, так как их плотность и размеры конечны. Естественно требовать этого и от моделей галактик.

Критерий 5 был ранее использован нами при моделировании нашей Галактики путем введения понятия о согласованной системе галактических параметров. Он естественно распространяется и на другие галактики, хотя конкретное содержание несколько иное, чем в нашей Галактике. Критерий сводится к тому, что система функций описания должна быть свободна от внутренних противоречий и что она должна быть в согласии со всеми наблюдательными данными, принятыми за основу при построении модели.

Критерии 6 (формулы (2.4) и (2.5)) и 7 были введены в работе [6]. Они не выполняются в пекулярных (скажем, кольцеобразных) и нестационарных галактиках. Что же касается условия (2.6), то необходимость его ввода диктуется

как данными наблюдений [7], так и теоретическими соображениями (в процессе релаксации дисперсия скоростей в центре галактики возрастает).

Критерий 8 имеет большое значение в теории формирования галактик, их скоплений, а также звезд и их скоплений. Он применяется в виде критерия устойчивости Джинса или устойчивости вириальных колебаний [8].

Конечно, приведенный выше список критериев физической корректности не претендует на полноту. С развитием физики галактик он может дополняться и изменяться.

3. Некоторые семейства специальных моделей. При выбранной форме поверхностей постоянной плотности галактик или их составляющих все функции описания однозначно связаны между собой. Если одна функция задана (будем называть ее исходной функцией описания), то все остальные могут быть найдены при помощи формул связи, рассмотренных нами ранее. Выбор исходной функции описания, которая задается в виде некоторого простого аналитического выражения, обусловлен либо наличием того или иного наблюдательного материала, либо характером исследуемой проблемы.

Так, например, авторы, изучающие распределение яркости в звездных системах [9, I0], в качестве исходной брали функцию распределения спроектированной плотности. Для исследования орбит звезд [II] целесообразно выбрать исходной функцией потенциал. Ниже мы предлагаем некоторые семейства аналитических выражений, которые могут быть отождествлены с разными функциями описания. Как мы видим, большинство использованных ранее моделей звездных систем основаны на частных случаях этих выражений. Это позволет рассотреть их с общей точки зрения.

Весьма общее семейство функций описания может быть получено при помощи выражения

$$g(a) = g_0 g^*(\xi), \qquad (3.1)$$

где $\xi = a/a_0$, g_0 и a_0 – масштабные параметры и

Ниже (гл. 20) мы убедились в том, что условие (2.6) в центральных областях галактик не выполняется.

$$g^*(\xi) = \begin{cases} \xi^{\alpha} \prod_{i=0} (1+\chi_i \beta_i^{-1} \xi^{\nu_i})^{\beta_i}, & \xi \leq \xi^0, \\ 0, & \xi \geq \xi^0. \end{cases} \qquad (3.2)$$

В последней формуле ξ^0 – минимальный положительный корень уравнения

$$g^*(\xi) = 0 \qquad (3.3)$$

а α, χ_i, β_i, ν_i – структурные параметры.

Выражение $g(a)$ можно отождествить с разными функциями описания: функцией массы (случай А), спроектированной плотности (Б), радиального ускорения (В), скорости вращения (Г), потенциала (Д) или дисперсии скоростей (Е). Формула (3.2) содержит, однако, слишком много параметров и неудобна для практических приложений. Поэтому рассмотрим три семейства частных случаев этого выражения:

а) полиномиальную модель (случаи А и Б)

$$g^*(\xi) = \xi^{\alpha} \prod_{i=0}^{n} (1-\chi_i \xi); \qquad (3.4)$$

б) биномиальную модель (случаи А и Б)

$$g^*(\xi) = \xi^{\alpha} (1+\beta^{-1} \xi^{\nu})^{-\beta}; \qquad (3.5)$$

в) обобщенную модель Боттлингера (случай В)

$$K_R(\xi) = \xi^{\alpha} (1+\beta^{-1} \xi^{\nu})^{-\beta}. \qquad (3.6)$$

В случаях Г, Д и Е также может быть применен биномиальный закон (3.5).

4. Усеченные модели. Реальные звездные системы имеют ограниченные размеры [9]. Некоторые рассмотренные выше функции описания имеют свои естественные границы у $a^0 = a_0 \xi^0$. Другие же функции описания, например, биномиальная модель с $\beta > 0$, не имеют положительных корней уравнения (3.3) и соответствующие модели имеют бесконечный внешний радиус.

Для получения лучшего согласия с наблюдениями модели с бесконечными внешними радиусами могут быть усечены путем умножения функции описания $g^*(\xi)$ на функцию усечения $Q(\xi|\xi^0)$

$$\tilde{g}^*(\xi) = g^*(\xi) Q(\xi|\xi^0). \tag{4.1}$$

Функция $Q(\xi|\xi^0)$ должна удовлетворять некоторым естественным требованиям

$$Q(\xi|\xi^0) = \begin{cases} >0, & \xi < \xi^0, \\ 0, & \xi \geq \xi^0; \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\lim_{\xi \to 0} Q(\xi|\xi^0) = \lim_{\xi^0 \to \infty} Q(\xi|\xi^0) = 1. \tag{4.3}$$

Наиболее простым способом усечения модели является ее обрывание на расстоянии ξ^0

$$Q(\xi|\xi^0) = \begin{cases} 1, & \xi < \xi^0, \\ 0, & \xi \geq \xi^0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Этот метод был использован в работе [12]. В работе [13] для усечения экспоненциальной модели

$$g^*(\xi) = e^{-\psi(\xi)} \tag{4.5}$$

была использована функция

$$Q(\xi|\xi^0) = \frac{erf\sqrt{\psi(\xi^0) - \psi(\xi)}}{erf\sqrt{\psi(\xi^0)}}. \tag{4.6}$$

С той же целью в [14] использована функция

$$Q(\xi|\xi^0) = \frac{1 - exp[\psi(\xi) - \psi(\xi^0)]}{1 - exp[-\psi(\xi^0)]}. \tag{4.7}$$

Для усечения биномиальной модели $\beta = 1, \nu = 2$ (случай Б) Кинг [9] использовал выражение

$$Q(\xi|\xi^0) = \left[1 - \left(\frac{1+\xi^{0\,2}}{1+\xi^2}\right)^{-1/2}\right]^2, \tag{4.8}$$

которое является частным случаем выражения [15]

$$Q(\xi|\xi^0) = \left[\frac{1-\left[\frac{g^*(\xi^0)}{g^*(\xi)}\right]^{1/\xi}}{1-[g^*(\xi^0)]^{1/\xi}}\right]^{\xi}. \qquad (4.9)$$

Эта функция при ξ = I/2 соответствует приблизительно случаю (4.6), при ξ = I случаю (4.7) и ξ = 2 случаю (4.8).

Для производной усеченной функции описания на границе модели имеем

$$\left.\frac{\partial \tilde{g}^*(\xi)}{\partial \xi}\right|_{\xi=\xi^0} = \begin{cases} -\infty, & \xi < 1, \\ -const, & \xi = 1, \\ 0, & \xi > 1. \end{cases} \qquad (4.10)$$

Мы видим, что второй критерий физической корректности выполнено только в случае $\xi > 1$.

Устойчивость кругового движения зависит от градиента плотности на периферийной области системы. Выбор параметра ξ может, поэтому, влиять и на седьмой критерий физической корректности. Чтобы исследовать этот вопрос, мы использовали полиномиальную модель (3.4), которую можно рассматривать как степенную функцию, усеченную полиномом

$$Q(\xi|\xi^0) = (1-\xi/\xi^0)^n \qquad (4.11)$$

Эта функция с достаточной точностью имитирует более сложную функцию (4.9) и позволяет проверить степень выполнения седьмого критерия. Ход градиента функции скорости $G_a\{v\} = 1+2G_a\{V_c\}$ дан на рис. 7 гл. I4 для n = I, 2, 3 и модели плоского диска. Видим, что при n = I, соответствующем случаю ξ = I, $G_a\{v\}$, а также $G_a\{V_c\}$ меньше -I. При n = 2, соответствующем случаю ξ = 2, минимальное значение несколько больше -I, т.е. круговое движение устойчиво.

Этот анализ показывает, что из использованных ранее способов усечения моделей лишь способ Кинга удовлетворяет критериям физической корректности.

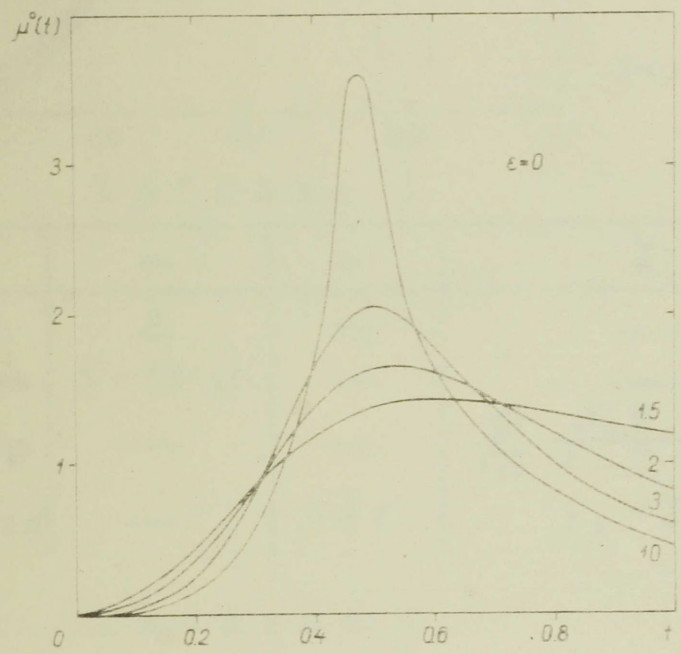


Рис. I

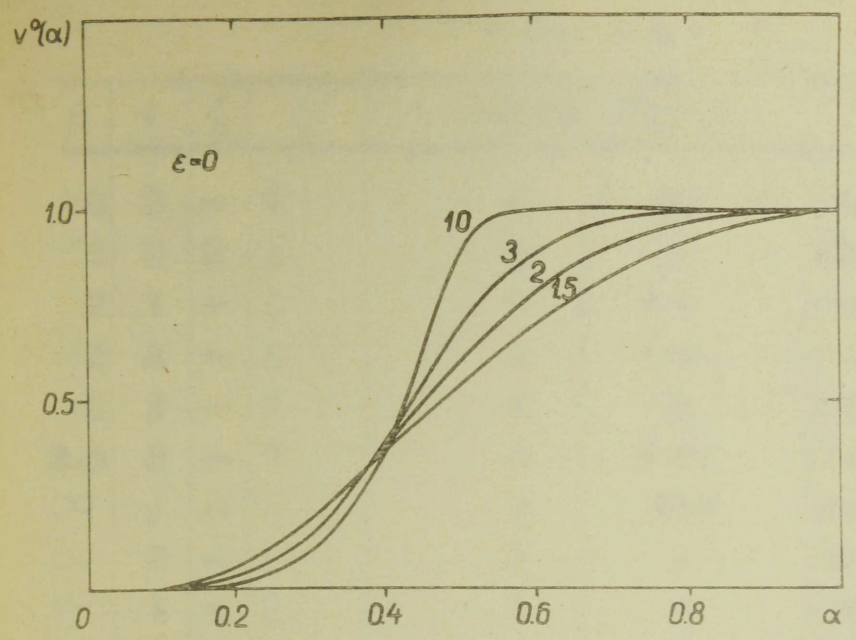


Рис. 2

Таблица I

Критерий	α	n	χ_i
$0 < \varrho(0) < \infty$	2	—	—
$m_i\{\mu(\alpha)\} < \infty$	$> -(1+i)$	—	—
$G\{\varrho(\alpha)\} \leq 0$	—	—	$\sum_{i=0}^{n} \frac{\chi_i \xi}{1-\chi_i \xi} \leq 0$
$\frac{\partial \varrho}{\partial \alpha}$ непрерывн. в α^0	—	$n \geq 1$	$\chi_0 = \chi_1 = 1$

Таблица 2

Критерий	α			β			ν	ξ
	A	B	C	A	B	C		
$0 < \varrho(0) < \infty$	2	0	3	—	—	—	—	—
$m_i\{\mu(\alpha)\} < \infty$	—	—	—	$\frac{1}{\beta} < \frac{\nu}{i+3}$	$\frac{1}{\beta} < \frac{\nu}{i+2}$	$\frac{1}{\beta} = \frac{\nu}{3}$	—	—
$G\{\varrho\} \leq 0 \; ; G\{\omega\} \leq 0$	—	—	—	—	—	—	$\nu > 0$	—
$\frac{\partial \varrho}{\partial \alpha}$ непрерывн. в α^0	—	—	—	$-1 < \frac{1}{\beta}$	$-1 < \frac{1}{\beta}$	—	—	$\xi > 1$

Таблица 3

α	n	ε	Случай	Примеч.	Модель
0; I	I	ε	A	I,2,4,6,7	Schmidt [16]
2	I	0	B	2, 7	Schwarzschild [17]
2	2	ε	A	2, 7	Perek [1]
2	n	0	B	+	Wyse, Mayall [18]
2	n	ε	A	+	Burbidge et al. [12]

Таблица 4

β	ν	ζ	ε	Случай	Примеч.	Модель	
>0	2	-	1	A	$\beta>2.5$ (6)	Gen. Schuster	19
1	2	2	ε	B	+	King	9
2	1	-	ε	B	α 4	Hubble	20
2	2	-	ε	A	α 4	Kuzmin	21
2	3	-	1	A	α 4	Bottlinger	22
2.5	2	-	1	A	α 4	Schuster	19
∞	ν	-	ε	A	(6)	Gen. exp.	23
∞	2	-	ε	A	+	Gauss	
∞	1	-	ε	A	+	Exp.	
∞	1/4	-	ε	B	6	de Vaucouleurs	10
<0	1	-	1	A, B	$\beta<-1$	Wallenquist	24
<0	2	-	ε	A	$\beta<-1$ 2,7	Perek	1
-1	ν	-	1	A	2, 7	van Wijk	25
-0	∞	-	ε	A	2, 7	Homogen.	25

Таблица 5

α	β	ν	Примеч.	Модель	
3	3/2	ν	α 4	Gen, Bottlinger	26 6
3	2	2	a, α 1, 4	Parenago	27
3	3/2	2	α 4	Kuzmin	28
3	1	3	α 4	Bottlinger	22
3	-1	2	c, k 2, 7	Perek	1
2	-1	1	1,2,4,6,7	Schmidt	16
0	-1	3	1,2,4,6,7	Oort	29

5. Анализ моделей. В таблице I даны ограничения на параметры полиномиальной модели, налагаемые критериями физической корректности, в таблице 2 даны также ограничения на параметры биномиальной модели и модели Боттлингера. В таблицах 3 - 5 дан обзор использованных ранее моделей из семейства полиномиальных, биномиальных и обобщенных моделей Боттлингера. В столбце "Примечания" указан номер условия физической корректности, которое в данной модели не удовлетворяется, знак + указывает, что выполняются все

условия корректности.

Таблицы указывают, что большинство использованных ранее моделей не согласуется с критериями физической корректности. Во всех случаях величина α должна иметь фиксированное значение и не может рассматриваться как структурный параметр вопреки распространенной практике. Чтобы удовлетворить условию непрерывности плотности и ее производной на границе системы, нужно брать $\xi = -2$, если модель усечена, $\beta^{-1} > -1$ в биномиальной модели и $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ в полиномиальной.

В разрешенном диапазоне выбор структурных параметров свободен и выполняется так, чтобы получить по возможности хорошее согласие с наблюдениями. На первый взгляд кажется, что полиномиальная модель, содержащая больше параметров, может лучше описывать структуру звездных систем, чем биномиальная модель и модель Боттлингера. Анализ, проведенный в гл. 14 и 15, показывает, однако, обратное. При помощи полиномиальной модели трудно, например, представить эллиптические галактики с острым пиком плотности в центре и протяженным гало. Если число членов полиномов n большое, последние получаются громоздкими и знакочередующимися, что усложняет вычисления. При малом же n модель получается грубой.

Гораздо более гибкой является биномиальная модель, которая позволяет представить при небольшом числе структурных параметров весьма разные звездные системы.

Что касается обобщенной модели Боттлингера, то она не согласуется с критериями физической корректности. Основной недостаток этой модели заключается в том, что она дает слишком медленное падение плотности на периферии. Для иллюстрации этого на рис. I дана зависимость нормированной функции массы от расстояния, причем в качестве аргумента взята величина $t = a/(a+1)$, где a - нормированная большая полуось эллипсоида равной плотности. Причина медленного падения плотности заключается в том, что функция скорости $F_R^0(R) \equiv v(R)$ (см. гл. 9 (I.I5)) приближается к пределу

$$\lim_{R \to \infty} v(R) = 1 \qquad (5.I)$$

снизу (рис. 2), тогда как в реальных несферических системах она должна приближаться к этому пределу сверху (см. гл. I4 и I5). Приближение функции скорости сплюснутой системы к предельному значению снизу возможно только тогда, когда большие массы находятся в периферийной области системы.

Мы заключаем, что закон Боттлингера не может быть принят при модели ядрии галактик и что большие массы, найденные на основе этой модели для ряда галактик (см. гл. I7), вероятно, преувеличены.

Более детальное рассмотрение полиномиальной и биномиальной модели дается в гл. I4 и I5. В гл. I6 даны гидродинамические функции описания для модифицированной экспоненциальной модели.

Май 1968
Дополнено в мае 1971

Литература

I. L.Perek, Advances in Astronomy and Astrophysics, 1, Academic Press, New-York, 1962.
2. Г.Г.Кузмин, Тарту публ. 35, 285, 1966.
3. С.А.Кутузов, Тарту публ. 36, 379, 1968.
4. В.С.Сизиков, Астрофизика, 3, 267, 1967.
5. С.А.Кутузов, Я.Эйнасто, Тарту публ. 36, 341, 1968.
6. J.Einasto, A.N. 291, 97, 1969.
7. J.Einasto, U.Kümmel, The Spiral Structure of Our Galaxy, Ed. G.Contopoulos, W.Becker, p.51, Reidel, 1970.
8. Su-Shu Huang, A.J. 59, 137, 1954.
9. I.King, A.J. 67, 471, 1962.
I0. G.de Vaucouleurs, M.N. 113, 134, 1953.
II. Г.Г.Кузмин, Г.А.Маласидзе, Тарту публ. 38, 181, 1971.
12. E.M.Burbidege, G.R.Burbidge, K.H.Prendergast, Ap.J. 130, 739, 1959.

I3. R.v.d.Woolley, R.J.Dickens, Roy. Obs. Bull., No. 42, 1961.
I4. R.W.Michie, M.N. 125, 127, 1963.
I5. Я.Эйнасто, Тарту публ. 36, 414, I968.
I6. M.Schmidt, B.A.N. 13, 15, 1956.
I7. M.Schwarzschild, A.J. 59, 273, 1954.
I8. A.B.Wyse, N.U.Mayall, Ap.J. 95, 24, 1942.
I9. W.Lohmann, Z.f.Ap. 60, 43, 1964.
20. E.Hubble, Ap.J. 71, 231, 1930.
2I. Г.Г.Кузмин, А.Ж. 33, 27, I956.
22. K.F.Bottlinger, Veröff. Berlin-Babelsberg 10, 2,1933.
23. Я.Эйнасто, Труди Инст. Астрофиз. АН Каз ССР, 5, 87, I965.
24. A.Wallenquist, Uppsala Astr. Obs. Ann. 4, No. 6, 1959.
25. U.van Wijk, Ann. d'Ap 12, 81, 1949.
26. I.C.Brandt, L.S.Scheer, A.J. 70, 471, 1965.
27. П.П.Паренаго, А.Ж. 27, 329, I950.
28. Г.Г.Кузмин, Тарту астр. обс. сообщ. № 3, I956.
29. J.H.Oort, B.A.N. 4, 79, 1927.

ГЛАВА 14

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ*

В первой статье настоящей серии [1] мы назвали специальными моделями звездных систем такие, на функции описания которых накладываются ограничения, определяющие, во-первых, форму изоповерхностей плотности модели и вид формулы связи между функциями описания и, во-вторых, аналитический вид самих этих функций. В предыдущей работе [2] был рассмотрен первый аспект специализации модели. Настоящая и следующая статьи затрагивают второй аспект специализации – выбор аналитического закона изменения плотности и других функций описания. При этом принят наиболее простой вариант уравнений связи между функциями описания, соответствующей сфероидальной гомотетической модели.

При описании строения звездных систем до сих пор использовалось большое количество различных аналитических выражений в качестве исходной функции описания. Оказывается, что почти все они могут быть объединены в два семейства специальных моделей – в степенно-полиномиальную модель и в биномиальную модель. Данная статья посвящается первой из них.

1. Функции массы и пространственной плотности массы

При заданной форме изоповерхностей плотности формулы связи между различными функциями описания имеют вполне определенный вид. Вся система функций описания определена пол-

---

*Опубликована в Публикациях Тартуской АО, 36, 396 – 413, 1967 под названием "О построении моделей звездных систем. IV. Степенно-полиномиальная модель".

ностью, если задана одна из них. Так как во всех формулах связи, а также в выражениях для определения гросс-параметров звездной системы фигурирует функция массы, целесообразно ее выбрать в качестве исходной функции описания. Однако часто с этой целью употребляются и функции распределения пространственной и спроектированной плотностей.

Для более удобного сравнения моделей функции описания полезно привести к нормированному виду. Обозначая нормированные функции индексом нуль сверху, имеем для функции массы как исходной функции описания

$$\mu(a) = \mu_0 \mu^0(\alpha), \qquad (I.I)$$

где $\alpha = a/a_0$, а μ_0 и a_0 – масштабные параметры массы и радиуса модели, имеющие размерность "масса/длина" и "длина" соответственно. Функцию $\mu^0(\alpha)$ нормируем так, чтобы некоторые ее моменты равнялись единице. Исходя из соображений простоты формул для вычисления нормирующих параметров мы приняли, что

$$\mathcal{M}_{-1}\{\mu^0(\alpha)\} = \mathcal{M}_0\{\mu^0(\alpha)\} = 1. \qquad (I.2)$$

Функции описания задаются первоначально в ненормированном, возможно более простом, виде. Аргумент a зависит некоторой подходящим образом выбранной безразмерной величиной ξ. Переход от заданной функции описания (обозначим ее звездочкой) к нормированной осуществляется по формуле

$$\mu^0(\alpha) = h\mu^*(\xi), \qquad (I.3)$$

где $\xi = \alpha/k$, а h и k – безразмерные нормирующие параметры. Численные значения последних зависят от аналитического вида μ^* и определяются из условия (I.2).

Степенно-полиномиальную модель определяем выражением

$$\mu^*(\xi) = \xi^\nu \sum_{j=0}^{n} \varkappa_j \xi^j, \qquad (I.4)$$

где $\varkappa_0 = I$.

Формулу (I.4) можно записать и в другом виде, используя корни полинома. Тогда будем иметь

$$\mu^*(\xi) = \xi^{\nu} \prod_{j=0}^{n-1} (1 - \chi_j \xi). \qquad (I.5)$$

Величины ν и χ_j можно рассматривать как параметры концентрации модели.

Будем располагать реальные χ_j в порядке их убывания, предполагая, что по меньшей мере один из них χ_0 существует и положителен. Изменением масштаба легко придать χ_0 любое положительное значение, мы примем

$$\chi_0 = I. \qquad (I.6)$$

Отсюда вытекает, что χ_0 не является параметром концентрации; число независимых параметров концентрации (вместе с параметром ν) равно n .

Очевидно $\xi^0 = \chi_0^{-1} = I$ соответствует внешней границе модели и следует принять

$$\mu^*(\xi) \equiv 0 \qquad \text{при} \qquad \xi \geqslant I \qquad (I.7)$$

В шкалах α и a расстояние внешней границы равно $\alpha^0 = k$ и $a^0 = a_0 k$ соответственно. Поведение функции массы на периферии модели зависит от кратности корня ξ^0 . Если корень однократен, то производная $d\mu^*(\xi)/d\xi$ имеет на границе точку разрыва. При m -кратном корне m первых коэффициентов χ_ℓ равны между собой. В этом случае не только сама функция $\mu^*(\xi)$, но и первые $m - I$ ее производных плавно стремятся к нулю при приближении ξ к ξ^0 .

По $\mu^*(\xi)$ нетрудно написать выражение для соответствующей функции пространственной плотности массы $\rho^*(\xi)$, используя известное соотношение между μ и ρ в гомотетическом случае

$$\mu(a) = 4\pi\varepsilon a^2 \rho(a). \qquad (I.8)$$

Здесь ε -отношение полуосей эллипсоидов равных плотностей.

При частных значениях параметров концентрации имеем

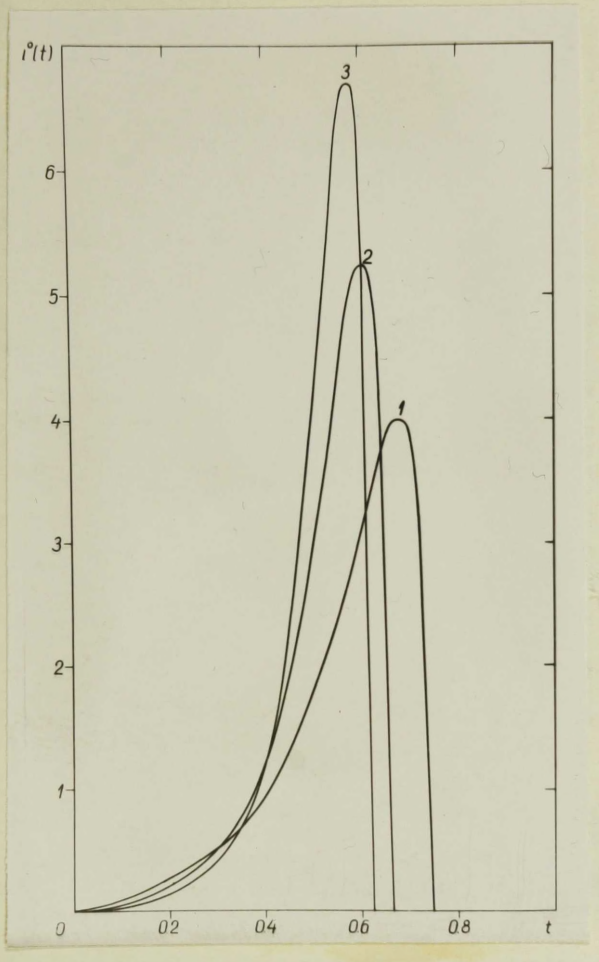


Рис. I. Функции массы $\mu^0(t)$. Значения параметра ν указаны на рисунке; $n = I$.

ряд использованных ранее моделей, обзор которых дается в гл. I3. Поведение функции массы иллюстрируется на рис. I и 2 при различных значениях параметров ν и χi. В качестве аргумента вместо α взято $t = \alpha/(1+\alpha)$ и принято

$$\mu^0(t) = \mu^0(\alpha)\,d\alpha/dt = \mu^0(\alpha)(1+\alpha)^2 .$$

Видим, что поведение модели на периферии заметно зависит от кратности корня n. Структура центральных областей модели зависит от ν; при $\nu = 2$ центральная плотность конечна, при $\nu < 2$ она стремится к бесконечности, а при $\nu > 2$ падает до нуля.

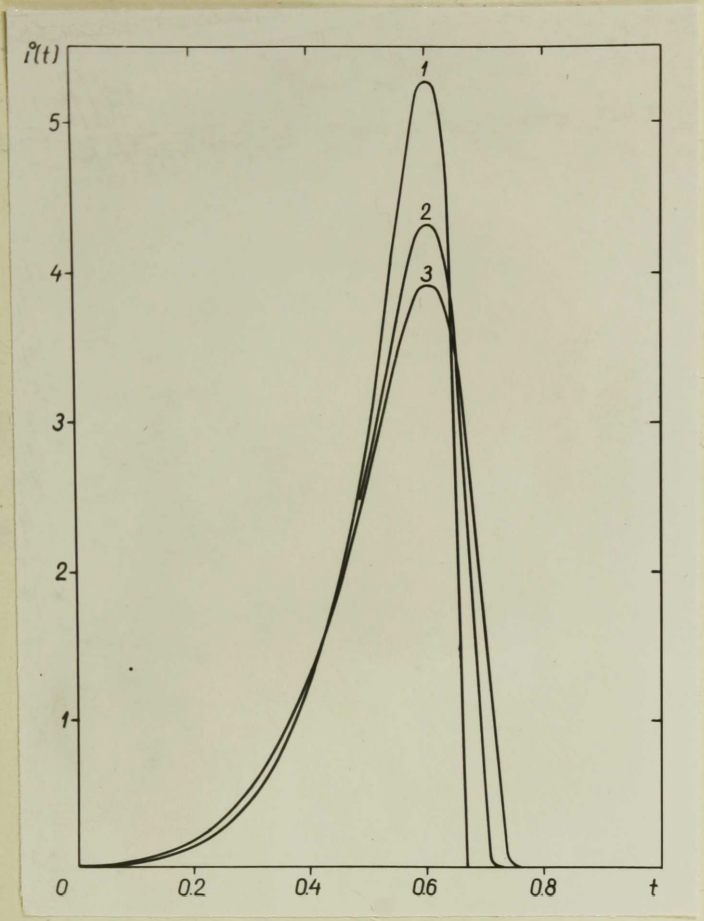


Рис. 2. Функция масси $\mu^0(t)$. $\nu = 2$; $\chi_i = 1$; $i = 1, \ldots, n$; значение n указаны на рисунке.

2. Спроектированная плотность вычисляется по формуле (см. [8] (I.6))

$$P(A) = \frac{1}{2\pi E} \int_A^{A^0} \frac{\mu(a)\,da}{a\sqrt{a^2 - A^2}}, \qquad (2.1)$$

где A – большая полуось эллиптических изофиний P, E – отношение малой полуоси к большой, характеризующее видимую сплюснутость и, $A^0 = a^0$ – большая полуось граничного эллипса. Заменив $\mu(a)$ на $\mu^*(\xi)$ и подставляя (I.4) в (2.I), найдем после некоторых выкладок

$$P(A) = \frac{\mu_0 h}{a_0 k} \frac{\Xi^{\nu-1}}{2\pi E} \sum_{i=0}^{n} \varkappa_i \varphi_i(\Xi) \Xi^i, \qquad (2.2)$$

где $\Xi = A/a_0 k = A/a^0$ и

$$\varphi_j(\Xi) = \frac{1}{2} B_x\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu+j-1}{2}\right). \qquad (2.3)$$

Здесь B_x - неполная бета-функция, причем

$$x = 1 - \Xi^2. \qquad (2.4)$$

Формула (2.2) справедлива при $0 < A \leq A^\circ$. Если $A \geq A^\circ$, то $P(A) \equiv 0$. В центре системы спроектированная плотность вычисляется по формуле

$$P(0) = \frac{\mu_0 h}{a_0 k} \frac{1}{2\pi E} \sum_{j=0}^{n} \varkappa_j \varphi_j^0, \qquad (2.5)$$

где

$$\varphi_j^0 = \frac{1}{2} B\left(1, \frac{\nu+j-1}{2}\right) = (\nu+j-1)^{-1}. \qquad (2.6)$$

Здесь B - полная бета-функция.

3. Градиент логарифма пространственной плотности вычисляется по формуле

$$m(a) = -\frac{\partial \lg \rho(a)}{\partial a} = -\frac{Mod}{a} G\{\rho(a)\}. \qquad (3.1)$$

Учитывая, что $G\{\rho(a)\} = G\{\rho^*(\xi)\}$ и выражая $\rho^*(\xi)$ через $\mu^*(\xi)$ в виде (I.5), будем иметь

$$G\{\rho^*(\xi)\} = \nu - 2 - \sum_{j=0}^{n} \frac{\chi_j \xi}{1 - \chi_j \xi}. \qquad (3.2)$$

В частном случае модели Шидта ($\chi_j = 0$, кроме χ_0, $\nu = I$).

$$G\{\rho^*(\xi)\} = -\frac{1}{1-\xi}. \qquad (3.3)$$

Ход градиента $G\{\rho^\circ(a)\}$ дан на рис. 3. На границе модели градиент логарифма плотности стремится к бесконечности. Поведение градиента в центре модели зависит от параметра ν.

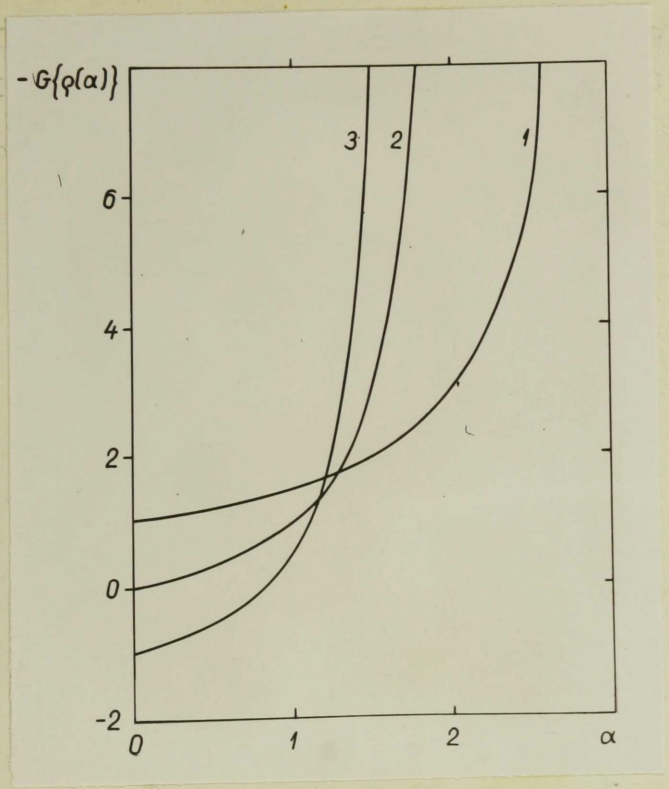


Рис. 3. Градиент логарифма плотности $G\{\rho(\alpha)\}$. Параметры те же, что на рис. I.

4. Функция круговой скорости и потенциала. Формула для квадрата круговой скорости может быть написана следующим образом:

$$V^2(r) = G\mu_0 \frac{v^0(r)}{r}, \tag{4.1}$$

где $r = R/a_0$ и ($e^2 = 1 - \varepsilon^2$),

$$v^0(r) = \frac{\mu^0(\alpha)d\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{e\alpha}{r}\right)^2}} \tag{4.2}$$

- нормированная функция скорости [8]. Выражение функции $v^0(r)$ в случае степенно-полиномиальной модели находим, подставляя (I.4) в (4.2). После ряда преобразований получается

$$v^0(r) = hk \sum_{j=0}^{n} a_j \partial_j(r) \left(\frac{r}{ek}\right)^{\nu+j+1}, \qquad (4.3)$$

где

$$\partial_j(r) = \frac{1}{2} B_x\left(\frac{\nu+j+1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad (4.4)$$

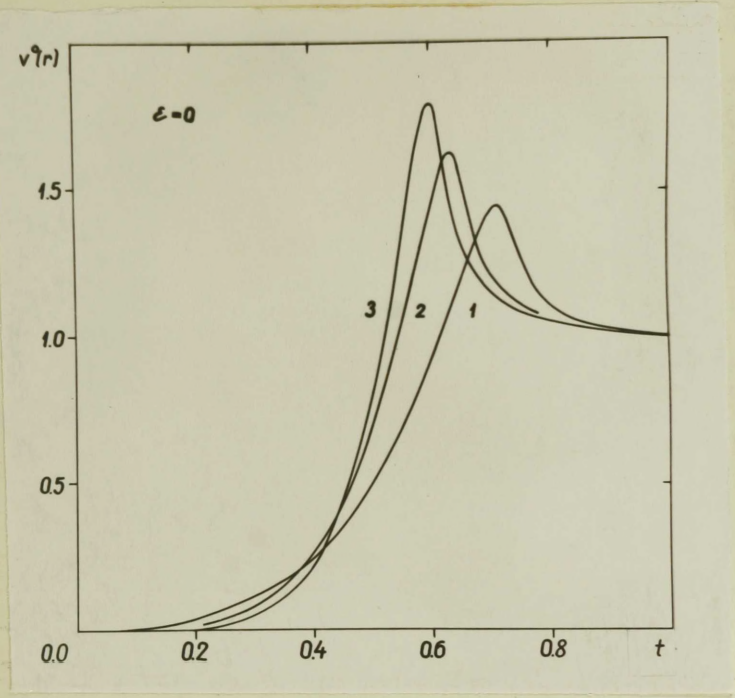


Рис. 4.а. Функция скорости $v^0(r)$. Параметры те же, что на рис. I; $\varepsilon = 0$.

причем

$$\chi = \begin{cases} e^2, & r \le \alpha^2 \\ \left(\frac{e\alpha^0}{r}\right)^2, & r \ge \alpha^0 \end{cases}, \qquad (4.5)$$

Отметим, что выражение квадрата круговой скорости было найдено в работе [7] для $\nu = 2$ и произвольного ε. Коэффициенты $\partial_j(r)$ не выражались, однако, через бета-функции в явном виде. Это сделано в работе [9].

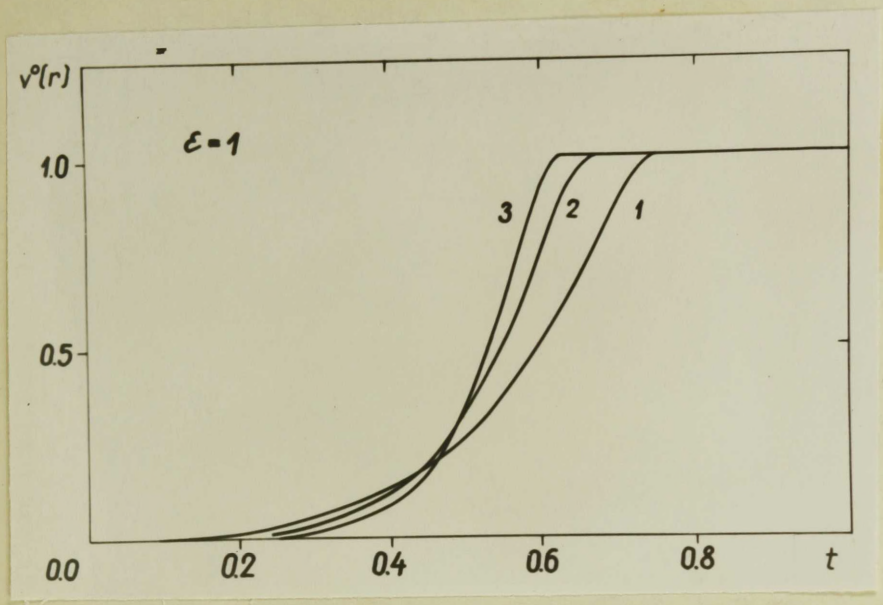


Рис. 4.б. См. рис. 4.а; $\varepsilon = I$.

Если $r \gg \alpha^\circ$, имеем

$$\partial_j(r) \to \partial_j^\circ \left(\frac{e\alpha^\circ}{r}\right)^{\nu+j+1}, \qquad (4.6)$$

где

$$v^\circ(r) \to hk \sum_{j=0}^{n} \frac{x_j}{\nu+j+1} = m_0 \{\mu^\circ(\alpha)\} = 1. \qquad (4.8)$$

Следовательно, в этом случае, как и должно быть,

$$\partial_j^\circ = \frac{1}{2} B\left(1, \frac{\nu+j+1}{2}\right) = (\nu+j+1)^{-1} \qquad (4.7)$$

График функции $v^\circ(r)$ в случае модели плоского диска ($\varepsilon = 0$) и в сферическом случае ($\varepsilon = I$) дан для некоторых целых значений параметра концентрации ν на рис. 4 и 5. На рис. 6 и 7 для тех же случаев изображен ход логарифмического градиента функции скорости. Видно, что на периферии плоской модели в ряде случаев круговое движение неустойчиво (логарифмический градиент меньше - I). Это связано с большим радиальным градиентом плотности на периферии модели.

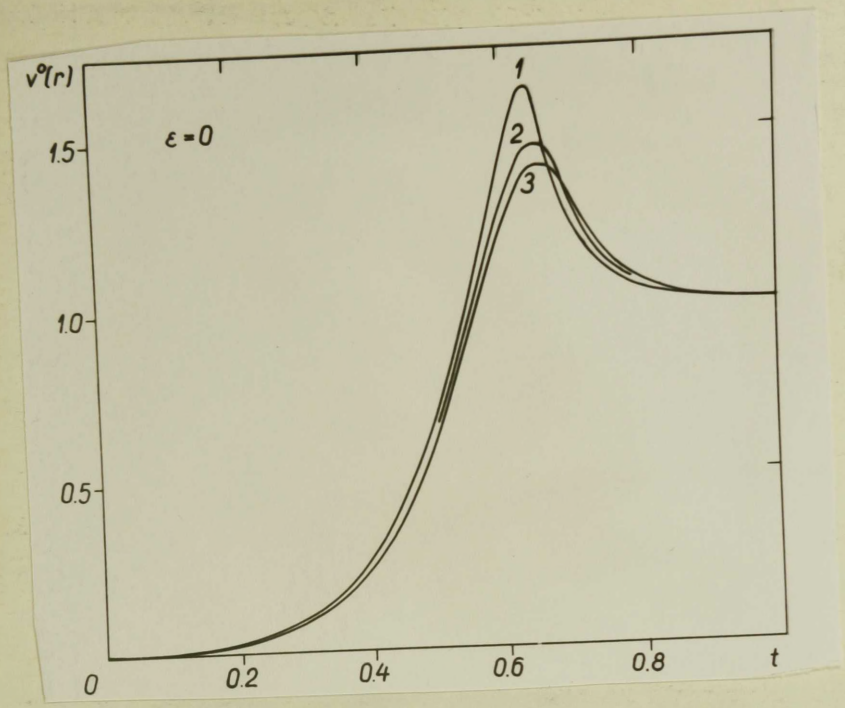


Рис. 5. Функция скорости $v^0(r)$. Параметры те же, что на рис. 2; $\varepsilon = 0$.

Зная выражение круговой скорости, можно вычислить потенциал системы в плоскости симметрии, пользуясь формулой [8]

$$\Phi_{z=0}(r) = \Phi(0) - G \int \frac{v^0(r')dr'}{r'^2} . \qquad (4.9)$$

Подставив в (4.9) $v^0(r)$ согласно (4.3), найдем после некоторых выкладок для области

$$\Phi_{z=0}(R) = \Phi(0) - \frac{G\mu_0 h}{e} \sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha_j}{\nu + j} \partial_j(r) \left(\frac{r}{ek} \right)^{\nu+j} . \qquad (4.10)$$

Формулы (4.3) и (4.10), разумеется, не применимы в сферическом случае ($e = 0$). Вместо них имеем

$$v^0(r) = hk \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \partial_j^0 \left(\frac{r}{k} \right)^{\nu+j+1} \qquad (4.11)$$

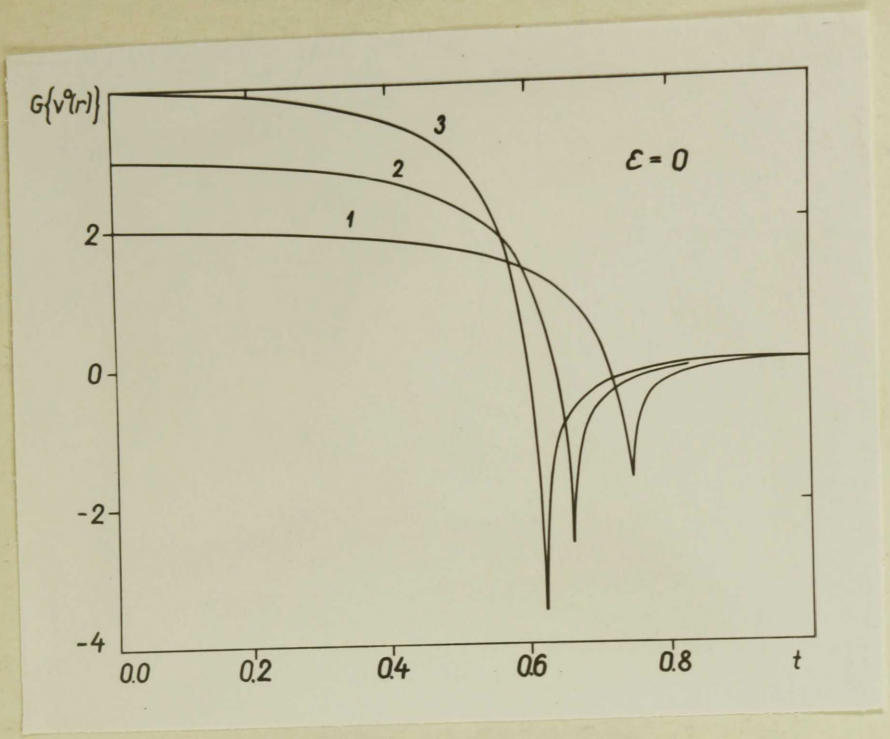


Рис. 6.а. Логарифмический градиент функции скорости. Параметры те же, что на рис. I; $\varepsilon = 0$.

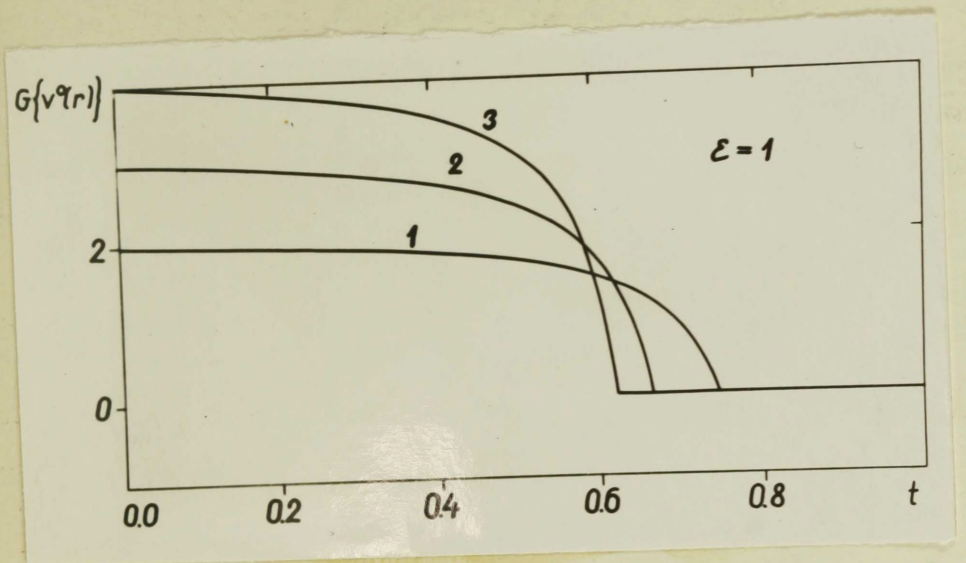


Рис. 6.б. См. рис. 6.а; $\varepsilon = I$.

$$\Phi_{z=0}(R) = \Phi(0) - G\mu_0 h \sum_{j=0}^{n} \frac{\varkappa_j}{\nu + j} \partial_j^0 \left(\frac{r}{k}\right)^{\nu+j}. \qquad (4.12)$$

Обе формулы относятся к области $r \leq \alpha^0$. Если же $r \gg \alpha^0$, то $v^0(r) = I$.

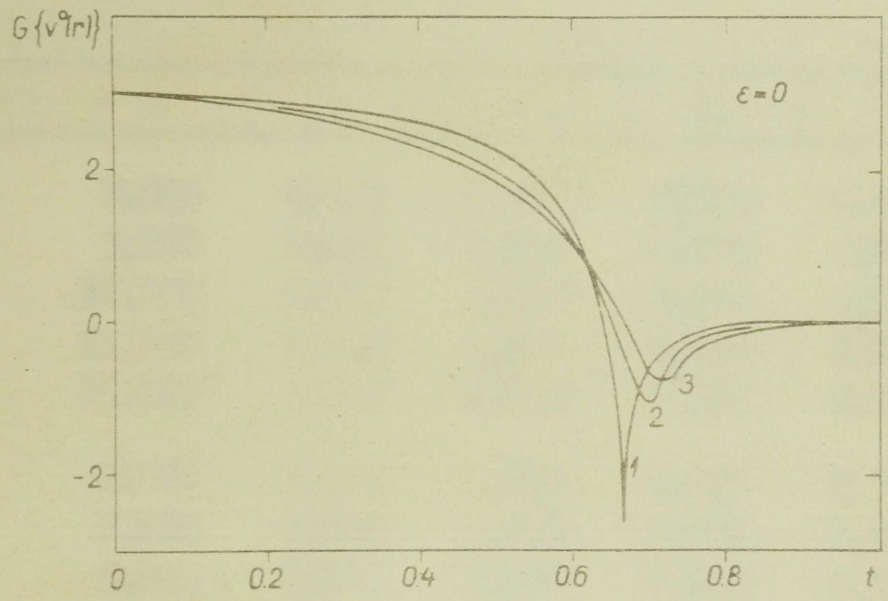


Рис. 7.

5. Моменты функции меры вычисляются по формуле

$$m_i\{\mu(\alpha)\} = \mu_0 a_0^{i+1} m_i\{\mu^0(\alpha)\}, \qquad (5.1)$$

причем

$$m_i\{\mu^0(\alpha)\} = hk^{i+1} m_i\{\mu^*(\xi)\}. \qquad (5.2)$$

Таблица I.

χ_1	ν	h	k	K_{-1}	K_0	K_1
I	I.0	3.000	4.000	0.000	0.625	0.800
	I.5	3.562	3.000	0.429	0.734	0.844
	2.0	I2.000	2.500	0.625	0.800	0.875
	2.5	I9.688	2.200	0.734	0.844	0.897
	3.0	30.000	2.000	0.800	0.875	0.9I4
0	I.0	2.000	3.000	0.000	0.667	0.833
	I.5	3.750	2.333	0.467	0.772	0.873
	2.0	6.000	2.000	0.667	0.833	0.900
	2.5	8.750	I.800	0.772	0.873	0.9I9
	3.0	I2.000	I.667	0.833	0.900	0.934
I	I.0	I.500	2.667	0.000	0.703	0.853
	I.5	2.625	2.I43	0.5I0	0.799	0.888
	2.0	4.000	I.875	0.703	0.853	0.9I2
	2.5	5.625	I.7II	0.799	0.888	0.929
	3.0	7.500	I.600	0.853	0.9I2	0.94I
I0	I.0	0.462	2.I67	0.000	0.792	0.887
	I.5	0.709	I.88I	0.663	0.852	0.9I2
	2.0	I.000	I.7I4	0.792	0.887	0.928
	2.5	I.335	I.603	0.852	0.9I2	0.937
	3.0	I.7I4	I.522	0.887	0.928	0.950

Для $m_i\{\mu^*(\xi)\}$ в случае степенно-полиномиальной модели получим

$$m_i\{\mu^*(\xi)\} = \sum_{j=0}^{n} \frac{x_j^i}{\nu+j+i+1}, \qquad (5.3)$$

Моменты конечны при $\nu + i + 1 > 0$. Для вывода гросс-параметров концентрации [8] нужны моменты от $i = -2$ до $i = 2$. Так как гросс-параметры концентрации должны иметь конечные значения, то получаем условие

$$\nu > 1. \tag{5.4}$$

Численные значения нормирующих постоянных h и k вычисляются из условия (1.2), которое дает

$$h^{-1} = \mathfrak{M}_{-1}\{\mu^*(\xi)\} \tag{5.5}$$

и

$$k = \frac{\mathfrak{M}_{-1}\{\mu^*(\xi)\}}{\mathfrak{M}_0\{\mu^*(\xi)\}}. \tag{5.6}$$

Пользуясь выведенными формулами нетрудно вычислить все гросс-параметры степенно-полиномиальной модели в зависимости от ее модель-параметров. Мы проделали эти вычисления для ряда значений параметров концентрации модели. Результаты приведены в табл. 1. Они использовались при построении изолиний модели в К-пространстве (рис. 8).

6. Анализ модели. Просто степенная функция описания предложенная Валленквистом [10], имеет бесконечные значения моментов и не может быть применена к реальным звездным системам. Во избежание этого недостатка мы и умножили степенную функцию на полином, в результате чего получилась степенно-полиномиальная модель с конечными размерами. Однако, несмотря на, казалось бы, большие возможности применения полинома, модель не оказывается достаточно гибкой для описания существенных особенностей звездных систем.

Рис. 8 показывает, что основным параметром концентрации модели является показатель степени ν. Если ν уменьшается, то все K_i уменьшаются. Остальные параметры концентрации в меньшей степени влияют на гросс-параметры концентрации, хотя функции описания при их изменении могут претерпеть заметные вариации. Если не прибегать к очень большому числу членов полинома, то степенно-полиномиальные модели заполняют в К-пространстве весьма узкую область.

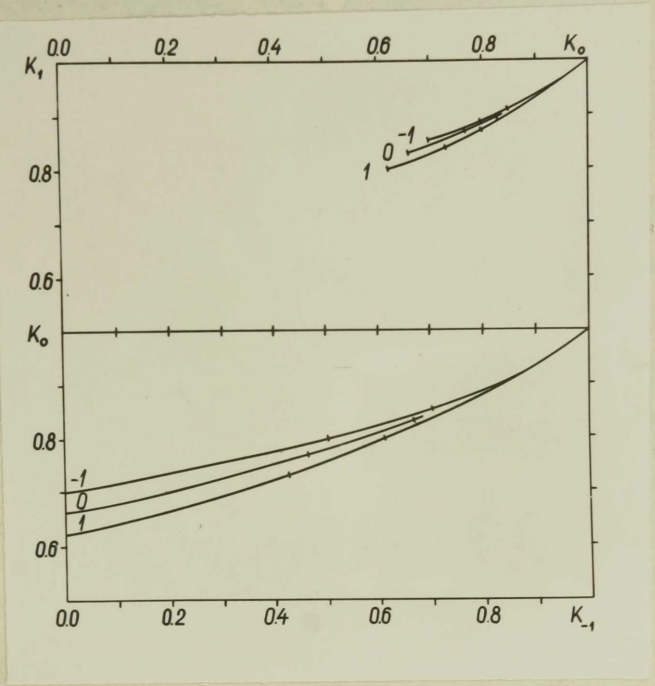


Рис. 8. Изолинии χ_1 в К-пространстве. Значения χ_1 указаны, штрихи ν нанесены через интервал 0.5, начиная с $\nu = I$ (крайне левые штрихи).

При $\nu \to \infty$ модель стремится к модели сферического слоя, для которого $K_i = I$.

Для получения достаточно хорошего представления наблюденного распределения плотности или круговой скорости необходимо брать степень полинома n достаточно высокой. Например, Уайз и Мейолл [6] брали $n = 6$, а Вербунт [7] даже $n = 8$. При этом коэффициенты k_j получаются очень большими и знакочередующимися. Как отмечает Бинт [II], это является существенным недостатком модели.

Для расширения возможностей модели Бинт [II] предлагает использовать в выражении плотности не только член с a^{-1} ($\nu = I$), но и член a^{-2} , т.е. брать пара-

метр ν равным нулю. В этом случае $K_{-1} = K_0 = 0$; в центре модели круговая скорость и сила притяжения не равны нулю. Вследствие этих особенностей модель $\nu = 0$ не может быть принята.

Все это показывает, что степенно-полиномиальная модель годится для описания звездных систем, имеющих малое гало, но различную степень центральной концентрации массы, начиная с модели Шмидта [3] с мощным ядром ($\nu = 1$) и кончая моделями с дыркой в центре ($\nu > 2$). По сравнению с биномиальной моделью, которая будет рассмотрена в следующей статье [12] , возможности степенно-полиномиальной модели гораздо меньше. Поэтому при описании строения звездных систем целесообразно предпочитать биномиальную модель.

Июль 1966 г.,
исправлено в апреле 1967 г.

Литература

1. С.А.Кутузов, Я.Эйнасто, Тарту публ. 36, 341, 1968.
2. С.А.Кутузов, Тарту публ. 36, 379, 1968.
3. M.Schmidt, B.A.N., 13, 15, 1956.
4. M.Schwarzschild, A.J., 59, 273, 1954.
5. L.Perek, Contr. Astr. Inst. Masaryk Univ. 1, no.6, 1948.
6. A.B.Wyse, N.U.Mayall, Ap.J., 95, 24, 1942.
7. E.M.Burbidge, G.R.Burbidge, K.H.Prendergast, Ap.J., 130, 739, 1959.
8. Я.Эйнасто, Тарту публ. 36, 357, 1968.
9. Г.Г.Кузмин, С.А.Кутузов, Тарту публ. 35, 316, 1966.
10. A.Wallenquist, Uppsala Astr. Obs. Ann., 4, No.6, 1959.
11. M.Schmidt, Stars and Stellar Systems, 5, 513, 1965.
12. Я.Эйнасто, Тарту публ. 36, 414, 1968.

ГЛАВА I5

БИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ*

I. Исходная функция описания. Биномиальную модель звездной системы определим функцией

$$g^*(\xi) = \left(1 + \frac{1}{\beta}\xi^{\nu}\right)^{-\beta}, \qquad (I.I)$$

где β и ν – параметры. Эта исходная функция описания может быть отождествлена:

А) с функцией пространственной плотности $g^*(\xi)$.
Б) с функцией спроектированной плотности $P^*(\Xi)$.

причем ξ и Ξ – безразмерные радиусы изоповерхности и изолинии плотности соответственно.

Считая случай А основным мы будем пользоваться для функции массы соотношением

$$\mu^*(\xi) = \xi^2 g^*(\xi). \qquad (I.2)$$

По $\mu^*(\xi)$ можно найти нормированную функцию массы (см. I)

$$\mu^0(\alpha) = h\mu^*(\xi), \qquad (I.3)$$

где $\alpha = k\xi$, а h и k – нормирующие безразмерные параметры, а также функцию массы в обычном слое

---

*Опубликовано в Публикациях Тартуской АО 36, 4I4 – 44I, 1967 под названием "О построении моделей звездных систем. У. Биномиальная модель".

$$\mu(a) = \mu_0 \mu^0(\alpha), \qquad (I.4)$$

где $a = a_0 \alpha$ – большая полуось эллипсоида равных пространственных плотностей, а μ_0 и a_0 – масштабные параметры массы и радиуса.

Функция вида (I.I) соответствует неограниченной звездной системе, т.е. имеющей бесконечный внешний радиус. Но фактически звездные системы ограничены. Чтобы учесть это обстоятельство, требуется какой-то способ "усечения" функции описания. Обобщая способ Кинга [2] можно произвести усечение по формуле *

$$\tilde{g}^*(\xi) = \left[g^*(\xi)^{1/5} - g^*(\xi^0)^{1/5} \right]^5, \qquad (I.5)$$

где ξ^0 – безразмерный внешний радиус усеченной модели, причем очевидно $\tilde{g}^* \to g^*$ при $\xi^0 \to \infty$. Другой параметр усечения ζ характеризует поведение функции описания на периферии модели. Если $\zeta < I$, то $d\tilde{g}^*/d\xi \to \infty$ при $\xi \to \xi^0$, т.е. модель имеет очень резкую границу. Поэтому естественно положить $\zeta \geq I$. Вследствие простоты формул особое значение имеет случай $\zeta = I$, который и был принят при проведении всех основных расчетов настоящей работы.

При усечении в формуле (I.2) неусеченные функции заменяются на усеченные

$$\tilde{\mu}^*(\xi) = \xi^2 \tilde{g}^*(\xi). \qquad (I.6)$$

Наиболее существенно строение модели зависит от параметра β. Как мы увидим ниже, в случае неусеченной модели обратное значение этого параметра, $B = \beta^{-1}$ должно быть меньше некоторого критического положительного значения. В усеченной модели B не ограничено сверху.

В случае $B = 0$ выражение $g^*(\xi)$ приобретает вид

---

*Это обобщение предложил Г.Г.Кузмин.

$$g^*(\xi) = e^{-\xi^\nu}, \qquad (I.7)$$

как это вытекает из перехода в (I.I) к пределу $B \to 0$.

Модели с отрицательными значениями B имеют свою естественную внешнюю границу ξ_e, при которой выражение в скобках формулы (I.I) становится равным нулю. Имеем

$$\xi_e = (-B)^N, \qquad (I.8)$$

причем $N = \nu^{-1}$. Разумеется усеченная модель с $B < 0$ должна иметь внешнюю границу $\xi^0 \le \xi_e$.

Параметр ν может иметь лишь положительные значения - в противном случае моменты исходной функции описания становятся бесконечно большими (см. ниже). Этот параметр больше всего влияет на внутреннюю структуру модели. Разлагая (I.I) в ряд степеней ξ^ν, имеем

$$g^*(\xi) = 1 - \xi^\nu + \frac{1-B}{2}(\xi^\nu)^2 - \dots \qquad (I.9)$$

и

$$\ln g^*(\xi) = -\xi^\nu\left(1 - \frac{B}{2}\xi^\nu + \frac{B}{3}(\xi)^2 - \dots\right). \qquad (I.I0)$$

Таким образом, если ξ мало, то $g^*(\xi) \approx I - \xi^\nu$ и $-\ln g^*(\xi) \approx \xi^\nu$.

При частных значениях параметров концентрации имеем различные привлекавшиеся ранее специальные модели или семейства моделей, перечисленные в гл. I3. Используемое обозначение

$$T = \frac{1}{\xi^{0\nu}} - \frac{1}{\xi_e^\nu} \qquad (I.II)$$

а ε - отношение полуосей эллипсоидов равных плотностей.

2. Функции масс, пространственной и спроектированной плотности связаны в случае сферической гомотетической модели соотношениями (I,6) статьи [I6]. Пусть модель усечена указанным выше способом. Тогда при $\zeta = I$ для спроек-

тировнной плотности массы шара

$$P(A)=\frac{1}{2\pi E}\left[\int_{A}^{A_0}\frac{\mu(a)da}{a\sqrt{a^2-A^2}}-\frac{\mu(a^0)}{a^{02}}\sqrt{a^{02}-A^2}\right], \qquad (2.I)$$

причем $A = a_0 k \Xi$ - большая полуось эллипса равной спроектированной плотности, E - отношение его полуосей и $A^0 = a^0 = a_0 k \xi^0$ - граничный радиус модели в шкале a .

В случае A биномиальной модели спроектированная плотность как правило, не выражается в элементарных функциях и приходится пользоваться численным интегрированием. Простые выражения для $P(A)$ получаются лишь при $\nu = 2$. В этом случае для первого члена выражения (2.I) имеем

$$P(A)=\frac{1}{2\pi E}\frac{\mu_0 k}{a_0 k}\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{\beta}B_x\left(\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\Xi^2\right)^{-\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}; & B>0,\\ \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{1}{2},u\right)e^{-\Xi}; & B=0,\\ \frac{1}{2}\sqrt{-\beta}B_x\left(\frac{1}{2},-\beta+1\right)\left(1+\frac{1}{2}\Xi^2\right)^{-\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}; & B<0,\end{cases}$$

(2.2)

причем B_x и γ - неполные бета- и гамма-функции, а x и u имеют соответственно значения ($\Xi^0 = A^0/a_0 k = \xi^0$),

$$\begin{aligned} x&=\frac{\Xi^{02}-\Xi}{\beta+\Xi^{02}}; \quad B>0;\\ u&=\Xi^{02}-\Xi^2; \quad B=0,\\ x&=\frac{\Xi^{02}-\Xi^2}{-\beta-\Xi^2}; \quad B<0. \end{aligned} \qquad (2.3)$$

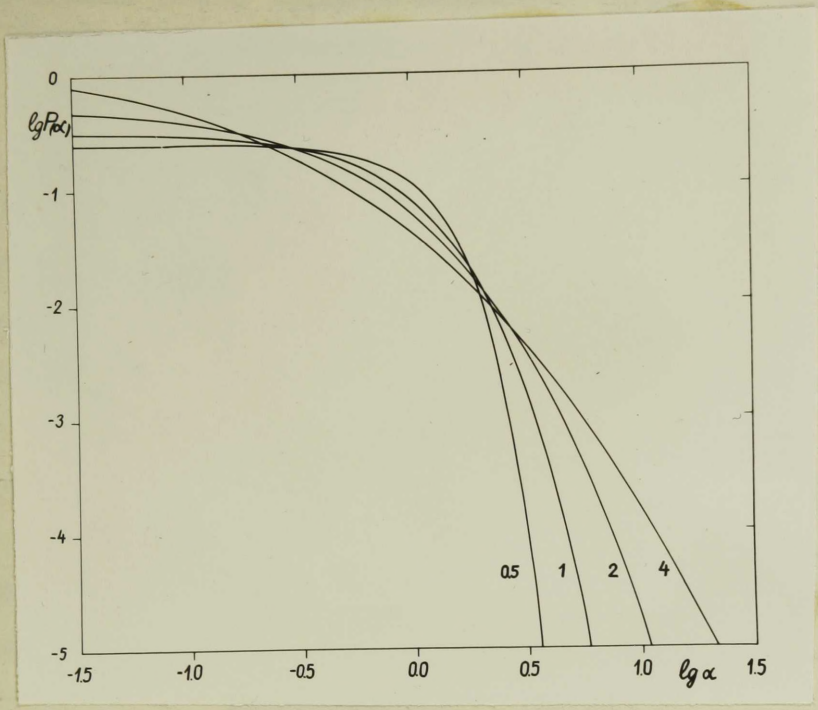


Рис. I. Распределение спроектированной плотности $P(\alpha)$. Значения параметров: B = 0; T = 0; значения N указаны у кривых.

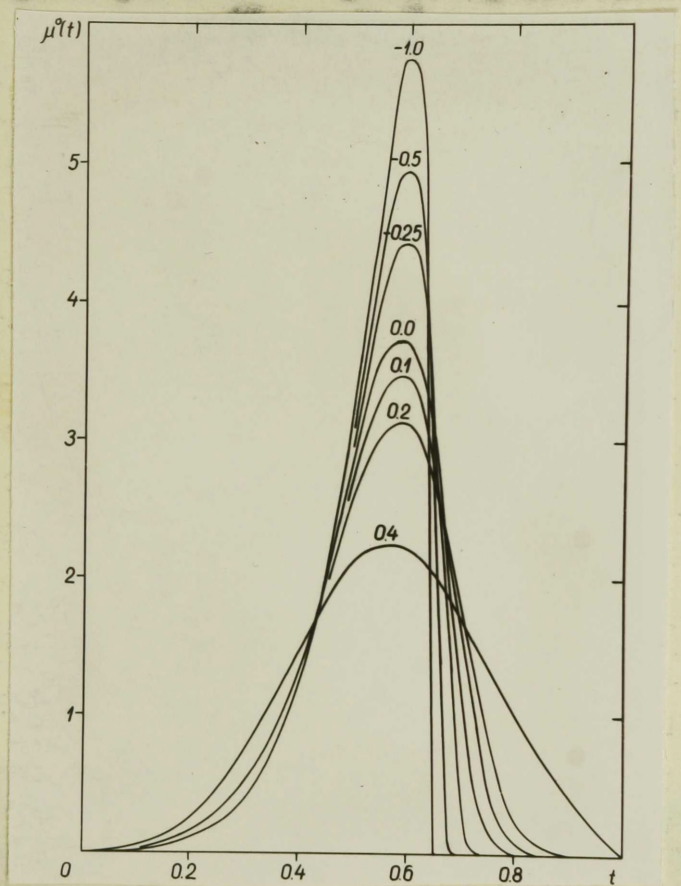


Рис. 2. Функция массы $\mu^{\circ}(t)$. Значение параметра B указаны у кривых; $N = 0.5$, $x = 1$.

В случае неусеченных моделей имеем $x = I$ и $u = \infty$, а в выражениях (2.2) вместо неполных бета и гамма функций нужно брать соответствующие полные функции.

Из видно, что при $\nu = 2$ как функция проэкранированной, так и функция спроектированной плотности принадлежит к семейству бигауссовой функции описания.

График функции спроектированной на плоскость симметрии системы плотности $P(\alpha)$ для ряда значений N приводится на рис. I. Как уже было сказано, параметр ζ был в вычислениях принят равным единице.

Вычисление функции $\rho^0(\alpha)$ не представляет труда, поэтому она не приведена на рисунках. Но интересно проследить за поведением функции массы. С этой целью удобно вместо α использовать в качестве переменной $t = \alpha/(1+\alpha)$. Учитывая, что $d\alpha = (1+\alpha)^2 dt$ будем иметь $\mu^0(t) = \mu^0(\alpha)(1+\alpha)^2$. Соответствующие графики для ряда значений параметров концентрации даны на рис. 2 - 5 (x по п. 5).

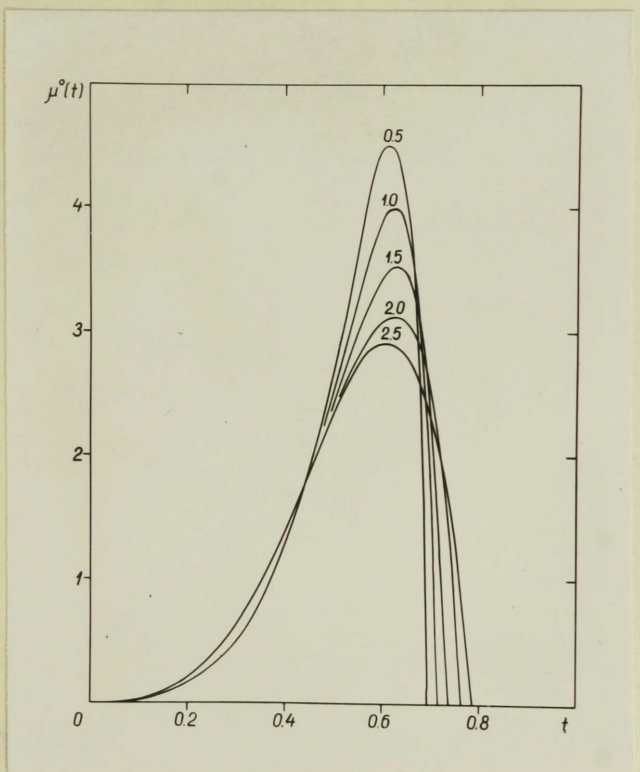


Рис. 3. Функции $\mu^0(t)$. Значения параметра отмечены у кривых: $N = 0.5$, $x = 0.9$.

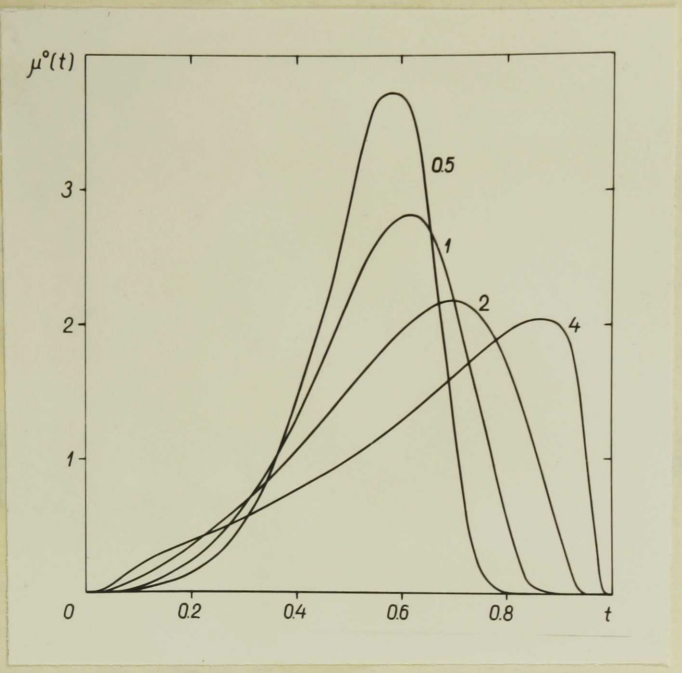


Рис. 4. Функция $\mu^{\circ}(t)$. Значения параметра N отмечены у кривых; $B = 0$; $x = 1$.

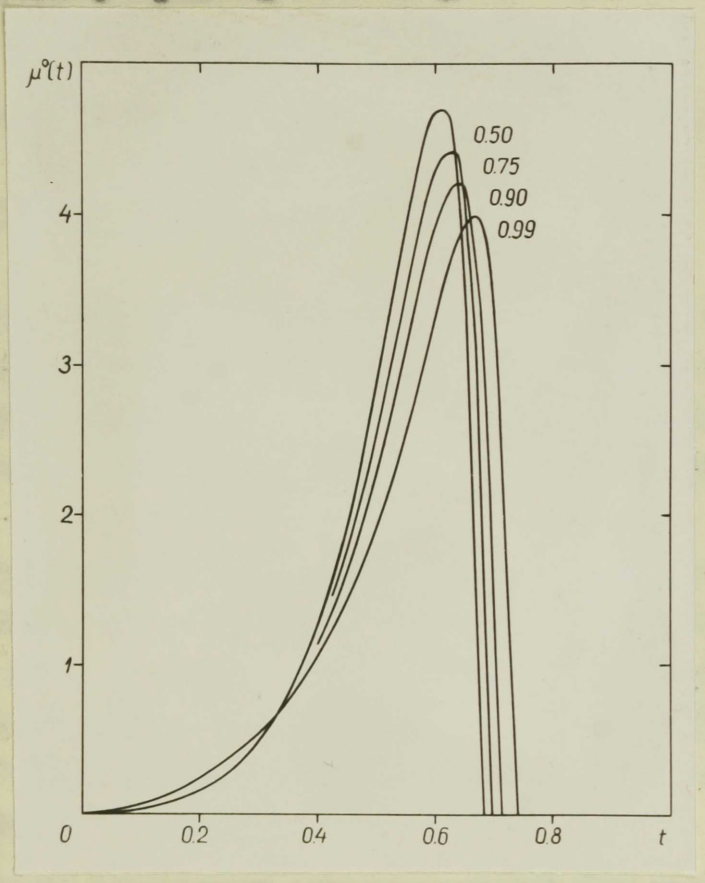


Рис. 5. Функция $\mu^{\circ}(t)$. Значения параметра даны у кривых; $N = 1$; $B = 1$.

Неусеченная модель с $B > -1$ имеет на границе системы $d\mu/dt = 0$. В случае усеченной модели с $\xi = 1$ и неусеченной при $B \leqslant -1$ упомянутая производная на границе модели больше нуля и имеет, следовательно, в этой точке разрыв. Функция $\mu^0(t)$ обладает тем более высоким максимумом, чем меньше гало (корона) модели.

3. Градиент логарифма пространственной плотности вычисляется в случае А по формуле:

$$m(a) = -\frac{\partial \lg \rho(a)}{\partial a} = -\frac{\mu a d}{a} G\{\rho^*(\xi)\}, \qquad (3.1)$$

причем для градиента $G\{\rho^*(\xi)\}$ имеем выражение

$$G\{\rho^*(\xi)\} = -\frac{\nu \xi^\nu}{1+B\xi^\nu}\left[1-\left(\frac{1+B\xi^{0\nu}}{1+B\xi^\nu}\right)^{\beta/\xi}\right]^{-1}. \qquad (3.2)$$

Если $B = 0$, то выражение градиента $G\{\rho^*(\xi)\}$ принимает вид

$$G\{\rho^*(\xi)\} = -\nu\xi^\nu\left\{1-\exp\left[\frac{1}{\xi}(\xi^\nu - \xi^{0\nu})\right]\right\}^{-1}. \qquad (3.3)$$

Графическое изображение функции $G\{\rho^0(\alpha)\}$ для ряда значений параметров концентрации приводится на рис. 6 – 9. Видим, что биномиальная модель представляет весьма широкие возможности для выбора подходящего хода градиента плотности.

4. Функции скорости и потенциала определяются формулами, приведенными в работе [I6]. В общем случае соответствующие интегралы не выражаются известными элементарными или специальными функциями, так что приходится пользоваться численным интегрированием. Лишь при некоторых частных интегрирование в аналитическом виде.

Приведем выражения нормированной функции скорости и потенциала для модели Кузмина ($\beta = \nu = 2$, $T = 0$) и однородной модели ($\nu = \infty$ или $\beta = 0$). Для модели Кузмина имеем

$$v^0(\xi) = \frac{2}{\pi}\frac{\xi^3}{(\xi+e^2)^{3/2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\xi^2+e^2}{1-e^2} - \varepsilon\frac{\xi^2+e^2}{1+\xi^2}\right) \qquad (4.1)$$

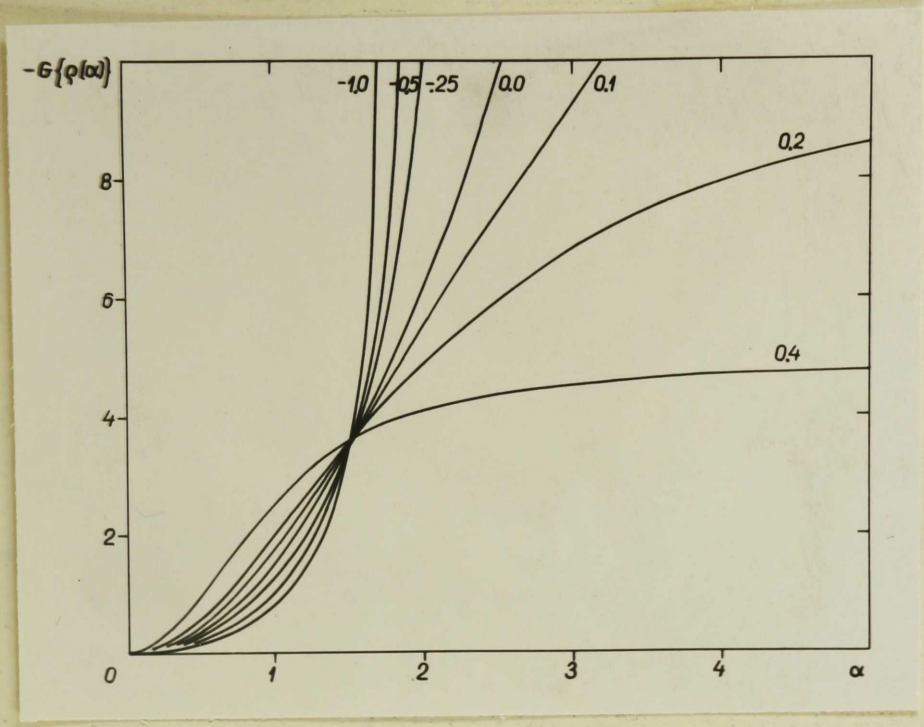


Рис. 6. Градиент логарифма плотности $G\{\rho(\alpha)\}$. Параметры

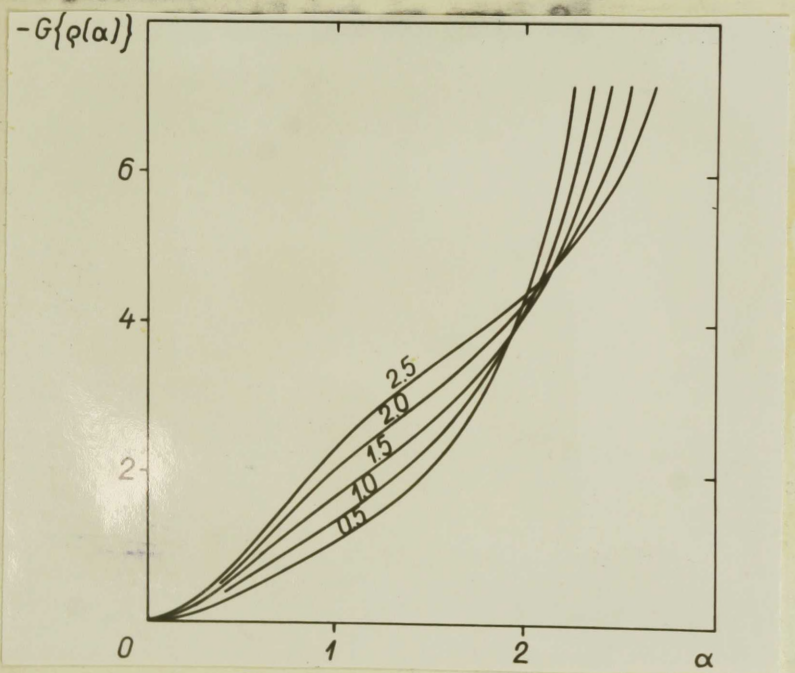


Рис. 7. Функция $G\{\rho(\alpha)\}$. Параметры те же, что на рис. 3.

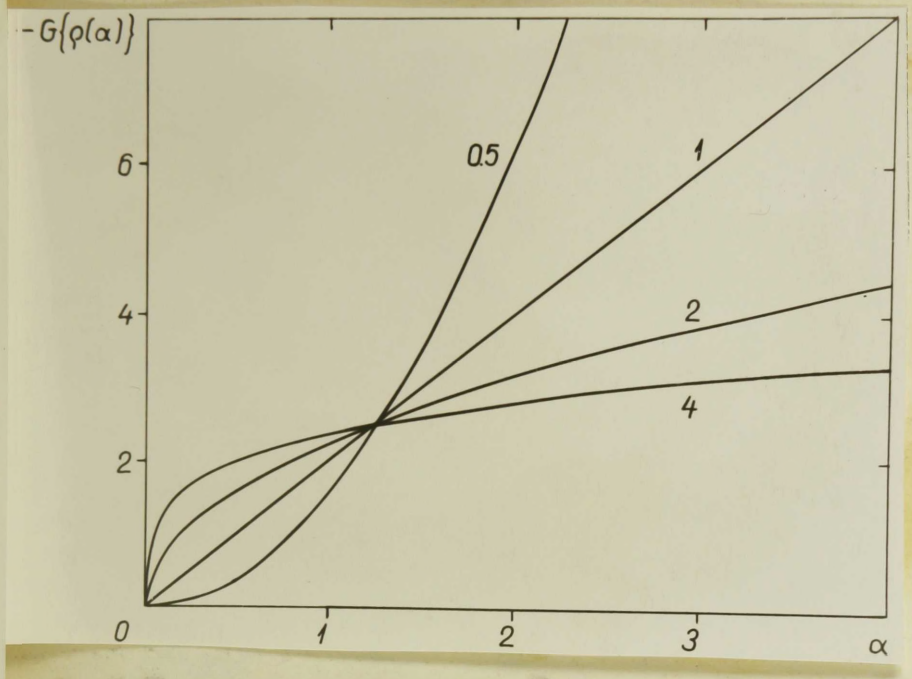


Рис.8. Функция $G\{\rho(\alpha)\}$. Параметры те же, что на рис. 4.

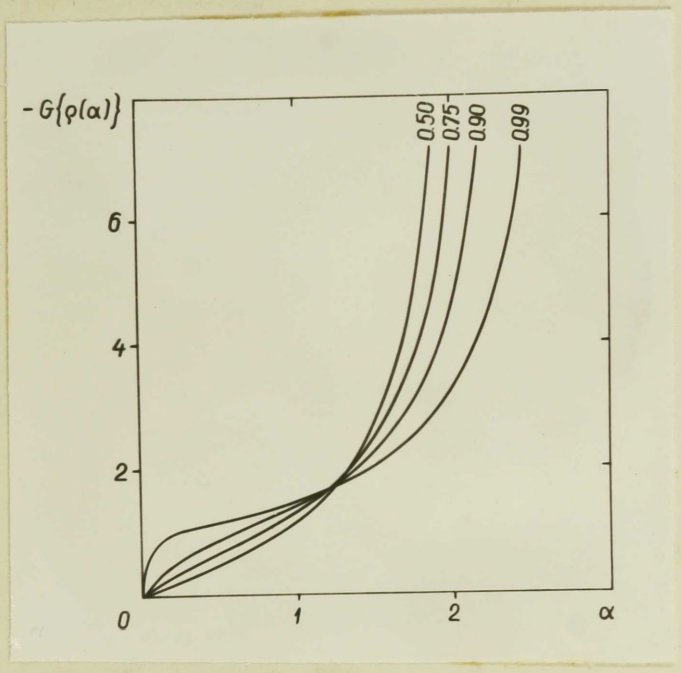


Рис. 9. Функция $G\{\rho(\alpha)\}$. Параметры те же, что на рис. 5.

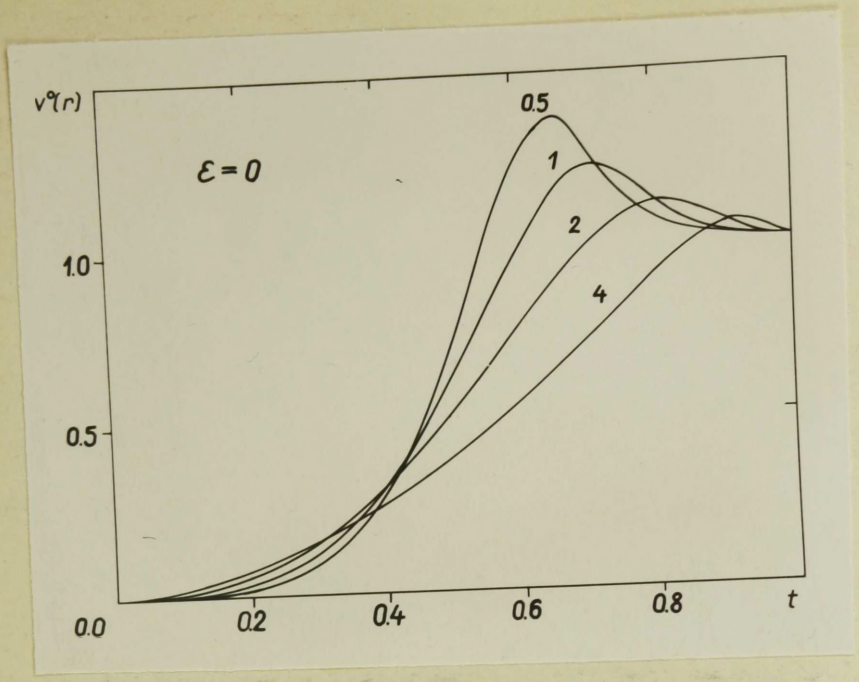


Рис. I0.а. Функция скорости $v^0(r)$. Параметры те же, что на рис. I; $\varepsilon = 0$.

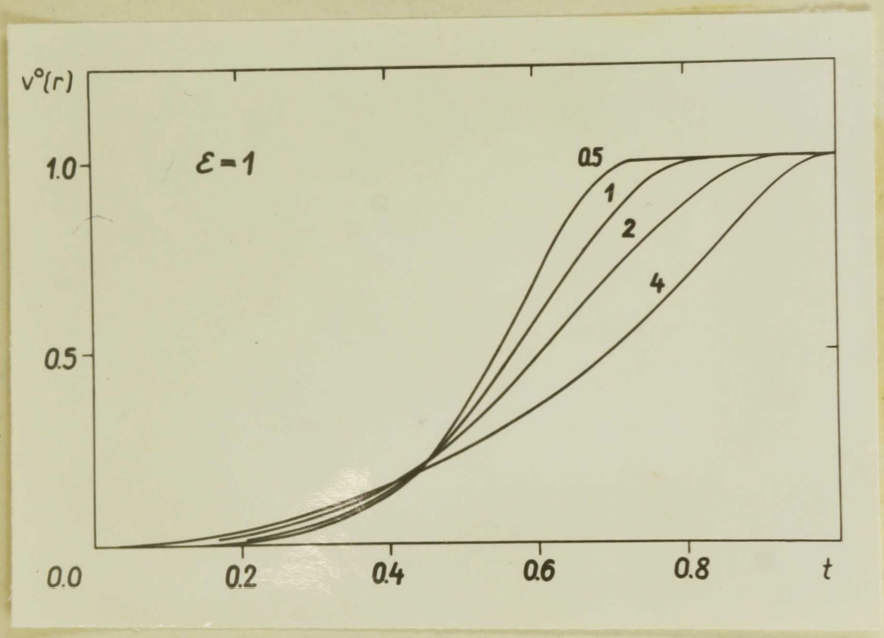


Рис. I0.б. См. рис. I0.а; $\varepsilon = I$.

$$\varphi^0(\xi) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\xi^2+e^2}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\xi^2+e^2}{1-e^2}} \qquad (4.2)$$

а для однородной модели

$$v^0(\xi) = \frac{3}{2}\frac{\xi^3}{e^3}B_x\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) \qquad (4.3)$$

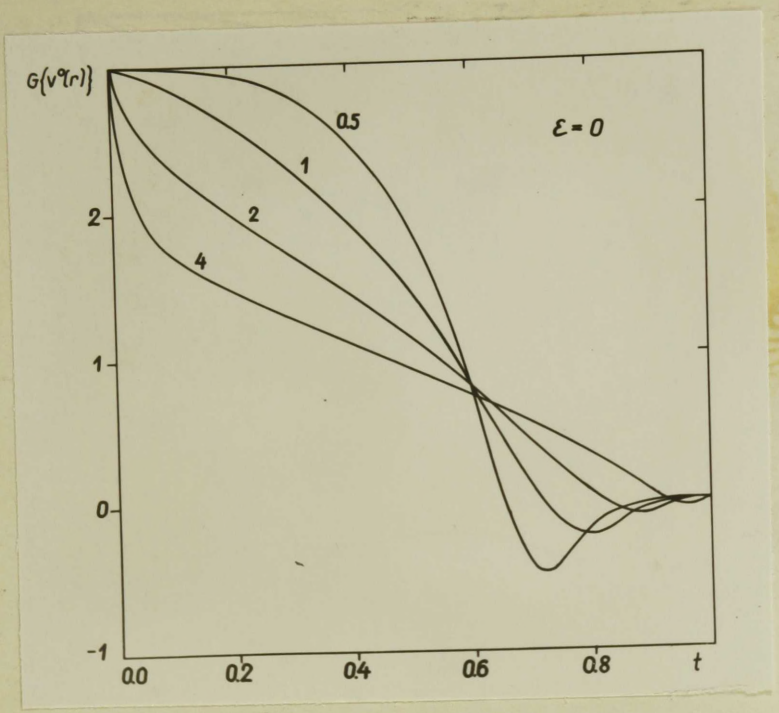


Рис. I1.a. Градиент функции скорости $G\{v^0(r)\}$. Параметры те же, что на рис. I; $\varepsilon = 0$.

и

$$\varphi^0(\xi)=\begin{cases} \dfrac{3}{4e^2}\left[(2e^2-\xi^2)\dfrac{\arcsin e}{e}+\varepsilon\xi^2\right], & \xi\le 1, \\ \dfrac{3}{4e^2}\left[(2e^2-\xi^2)\dfrac{\arcsin\frac{e}{\xi}}{e}+\sqrt{\xi^2-e^2}\right], & \xi\ge 1. \end{cases} \qquad (4.4)$$

В формуле (4.3)

$$\begin{matrix} e^2, & \xi\le 1 \\ \left(\dfrac{e}{\xi}\right)^2, & \xi\ge 1, \end{matrix} \qquad (4.5)$$

а $\xi = r/\alpha^0$, причем α^0 – внешний радиус модели.

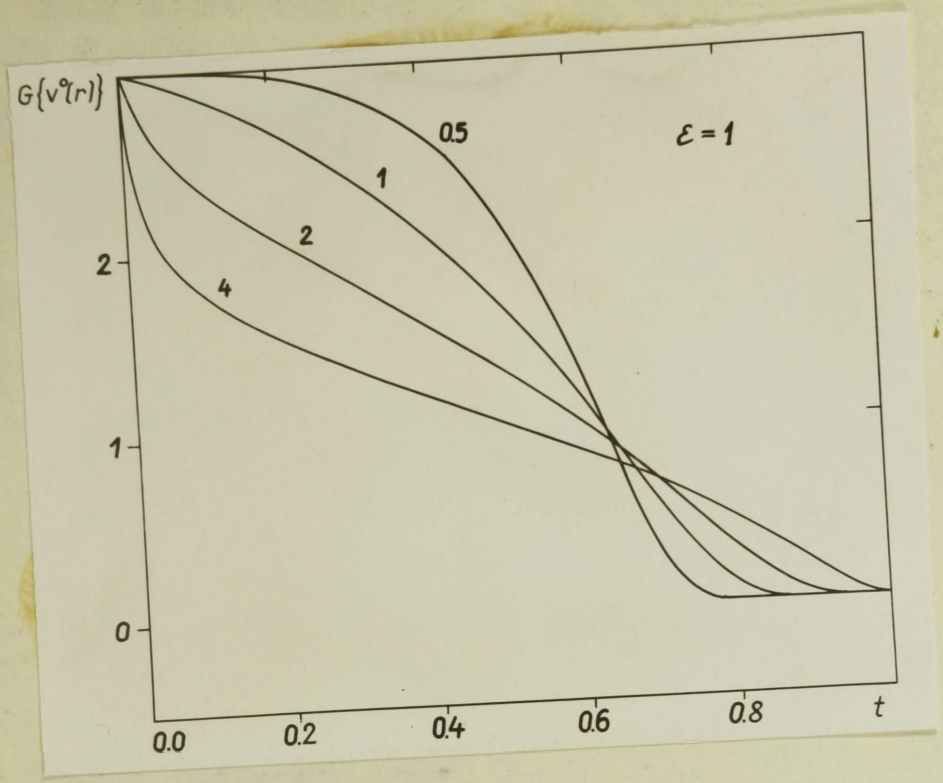


Рис. 11.б. См. рис. 11.а; $\varepsilon = 1$.

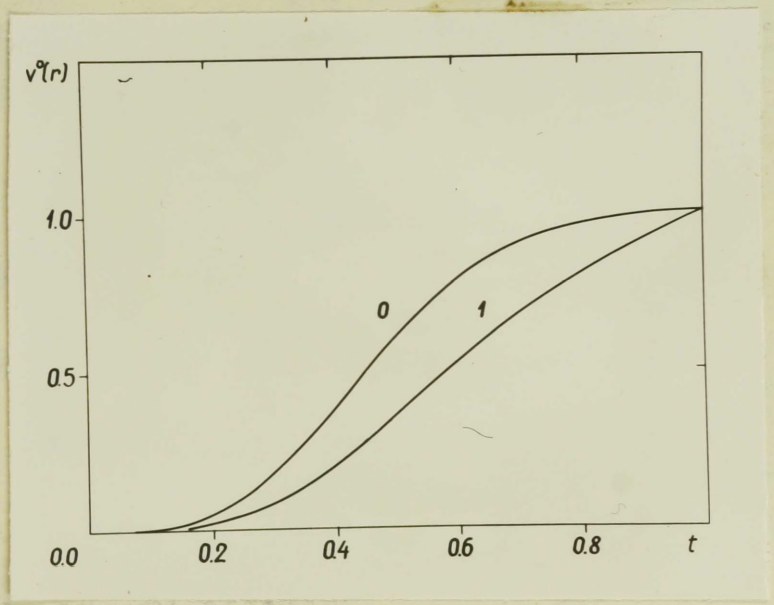


Рис. 12. Функция скорости $v^0(r)$ для модели Кузмина; значения ε даны у кривых.

Если ограничиться плоской моделью ($\varepsilon = 0$) и принять $\nu = 2$, $T = 0$и $\beta = n + I$ ($n = I, 2, \ldots$), то для функции скорости имеем (см. [I7])

$$w^0(r) = c_n r^3 \left\{ -\frac{\partial}{\partial a_n^2} \right\}^{n-1} \left[(a_n^2)^{-1/2} (a_n^2 + r^2)^{-3/2} \right], \qquad (4.6)$$

причем

$$c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)} a_n^{2n-1} \qquad (4.7)$$

и

$$a_n = \sqrt{n+1}\, k a_0 . \qquad (4.8)$$

Кривые нормированной функции скорости и ее логарифмические градиенты для некоторых моделей приведены на рис. I0 – I2.

5. Моменты исходной функции описания вычисляются в общем случае по формуле (см. [I])

$$\mathfrak{M}_i\{\tilde{g}(a)\} = \mu_0 h (a_0 k)^{i+1} \mathfrak{M}_i\{\tilde{g}^*(\xi)\}. \qquad (5.I)$$

При целом ζ

$$\mathfrak{M}_i\{\tilde{g}^*(\xi)\} = \sum_{j=0}^{\xi} (-1)^j \binom{\xi}{j} [g^*(\xi_0)]^{j/\xi} M_{ij}\{g^*(\xi)\}, \qquad (5.2)$$

причем

$$M_{ij}\{g^*(\xi)\} = \int_0^{\xi^0} [g^*(\xi)] \frac{\xi - j}{\xi} \xi^i d\xi . \qquad (5.3)$$

В частном случае $\zeta = I$

$$\mathfrak{M}_i\{\tilde{g}^*(\xi)\} = M_{i0}\{g^*(\xi)\} - \frac{(\xi^0)^{i+1}}{i+1} g^*(\xi_0), \qquad (5.4)$$

причем

$$M_{i0}\{g^*(\xi)\} = \mathfrak{M}_i\{g^*(\xi)\} = \int_0^{\xi^0} g^*(\xi) \xi_i d\xi . \qquad (5.5)$$

Приведем теперь выражения для $\mathcal{M}_i\{g^*(\xi)\}$, которые представляют наибольший практический интерес. Путем соответствующих подстановок нетрудно привести интегралы (5.5) к стандартному виду неполных бета- и гамма-функций (см., например, [I8]). При $B > 0$ имеем

$$\mathcal{M}_i\{g^*(\xi)\} = N\beta^p B_x(p, \beta - p), \tag{5.6}$$

где $p = N(i+1)$ и

$$x = \frac{B\xi^{0v}}{1 + B\xi^{0v}} = (1 + \beta T)^{-1}; \tag{5.7}$$

при $B = 0$

$$\mathcal{M}_i\{g^*(\xi)\} = N\gamma^p(p, u), \tag{5.8}$$

где $u = \xi^{0v}$, при $B < 0$

$$\mathcal{M}_i\{g^*(\xi)\} = N(-\beta)^p B_x(p, -\beta + 1), \tag{5.9}$$

причем в этом случае

$$x = \left(\frac{\xi^0}{\xi_e}\right)^{\beta} = (1 - \beta T)^{-1} \tag{5.I0}$$

В неусечённых моделях $x = I$ и $u = \infty$; в формулах (5.6), (5.8) и (5.9) вместо неполных бета- и гамма-функций нужно брать соответствующие полные функции

$$\mathcal{M}_i\{g^*(\xi)\} = \begin{cases} N\beta^p B(p, \beta - p); & B > 0, \\ N\Gamma(p); & B = 0, \\ N(-\beta)^p B(p, -\beta + 1); & B < 0. \end{cases} \tag{5.II}$$

Моменты (5.6), (5.8) и (5.9) всегда конечны, моменты (5.II) конечны при $B \leq 0$; при $B > 0$ они конечны, если $\beta > p$. При вычислении моментов удобно пользоваться соответствующими таблицами [I8, I9]. Неполная бета-функция $B_x(p, q)$ табулирована в [I8] лишь для $q > 0$. Нетрудно, однако, показать, что для отрицательных q могут быть использованы обычные рекуррентные формулы.

6. Моменты функции масс и нормирующие параметры

Вычисление моментов функции масс по моментам исходной функции описания не представляет труда. В случае А будем иметь

$$m_i\{\mu^*(\xi)\} = m_{i+2}\{\tilde{g}^*(\xi)\}, \qquad (6.1)$$

а в случае Б –

$$m_i\{\mu^*(\xi)\} = \frac{2E}{\beta_{i+1}} m_{i+1}\{\tilde{g}^*(\xi)\}, \qquad (6.2)$$

где

$$\beta_i = \frac{1}{2\pi} B\left(\frac{1}{2}, \frac{i+1}{2}\right). \qquad (6.3)$$

Формула (6.2) применима для $i > -2$. При критическом значении $i = -2$ имеем

$$m_{-2}\{\mu^*(\xi)\} = 2\pi E P^*(0) = 2\pi E \tilde{g}^*(0). \qquad (6.4)$$

Нормирующие параметры и найдем из условия

$$m_{-1}\{\mu^0(\alpha)\} = m_0\{\mu^0(\alpha)\} = 1. \qquad (6.5)$$

Так как

$$m_i\{\mu^0(\alpha)\} = hk^{i+1} m_i\{\mu^*(\xi)\}, \qquad (6.6)$$

имеем в случае А

$$h^{-1} = m_1\ \tilde{g}^*(\xi) \qquad (6.7)$$

и

$$k = \frac{m_1\{\tilde{g}^*(\xi)\}}{m_2\{\tilde{g}^*(\xi)\}}. \qquad (6.8)$$

Вполне аналогично получены и выражения h и k в случае Б. Кроме моментов функции $\tilde{g}^*(\xi)$ соответствующие формулы содержат еще коэффициенты β_0, β_1 и E.

7. Гросс-параметры концентрации определены, согласно [I6], формулой

$$K_i = \frac{m_i^2\{\mu\}}{m_{i-1}\{\mu\}\, m_{i+1}\{\mu\}}. \qquad (7.1)$$

Результат не зависит от того, будем ли мы в качестве функции массы принимать $\mu(\alpha)$, $\mu^0(\alpha)$ или $\mu^*(\xi)$. В случае А имеем

$$K_i = \frac{m_{i+2}^2\{\tilde{g}\}}{m_{i+1}\{\tilde{g}\}\, m_{i+3}\{\tilde{g}\}}. \qquad (7.2)$$

В случае Б выражение K_i содержит еще коэффициенты β_i.

Учитывая (6.5), будем иметь следующие формулы, связывающие гросс-параметры концентрации с моментами нормированной функции массы:

$$K_{-1} = m_{-2}^{-1}\{\mu^0(\alpha)\},$$
$$K_0 = m_1^{-1}\{\mu^0(\alpha)\},$$
$$K_1 = \frac{m_1^2\{\mu^0(\alpha)\}}{m_2\{\mu^0(\alpha)\}}. \qquad (7.3)$$

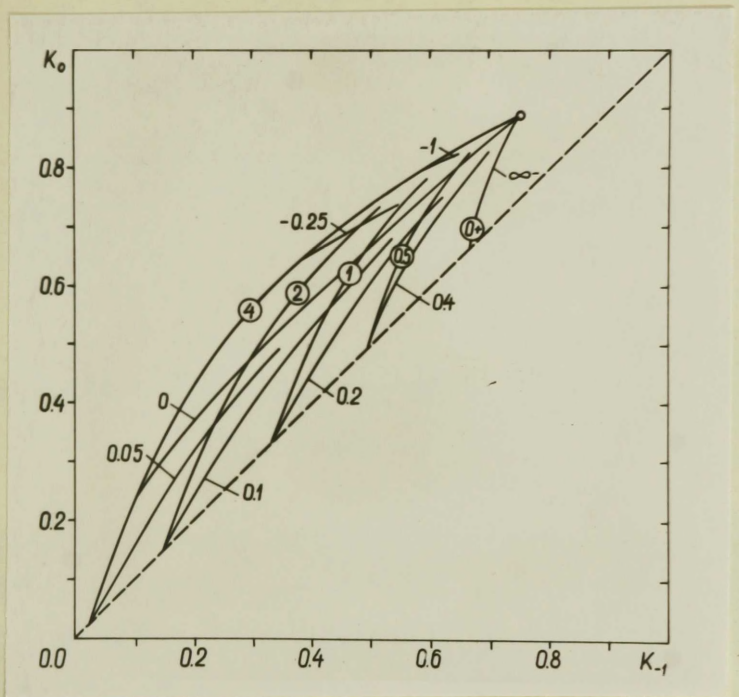


Рис. 15.а. Диаграмма гросс-параметров концентрации. Изолинии B и N (значение N дано в кружке) для неусеченной модели, T = 0.

Как и в работе [I] будем описывать структуру модели графическим изображением изолиний параметров концентрации в K-пространстве, т.е. в пространстве с прямоугольными координатами K_i . При вычислениях мы приняли случай A, рассматривалась неусеченная модель. Результаты вычислений изображены на рис. I3.

Линии постоянных B и N (при данном T в случае усеченной модели) представляют собой семейства взаимно перо-

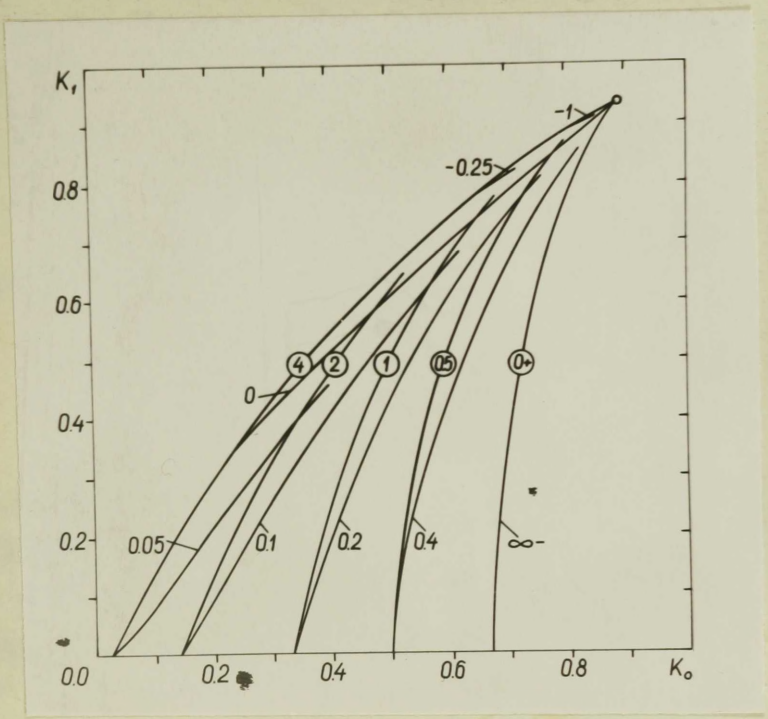


Рис. I3.б. Диаграмма гроссо-параметров концентрации.
См. рис. I3.а.

секающихся линий, лежащих на поверхности, которую будем назвать K-поверхностью. Рассмотрим в первую очередь K-поверхность, соответствующую неусеченной модели (рис. I3). В этом случае выражения гроссо-параметров концентрации можно привести к виду

$$K_i = \varkappa_i K_i^0 , \qquad (7.4)$$

причем K_i^0 - значение K_i при B = 0, а множитель принимает значения

$$\varkappa_i = \begin{cases} \dfrac{\Gamma^2(\beta-p_i)}{\Gamma(\beta-p_{i-1})\Gamma(\beta-p_{i+1})}; & B>0, \\ \dfrac{\Gamma(1-\beta+p_{i-1})\Gamma(1-\beta+p_{i+1})}{\Gamma^2(1-\beta+p_i)}; & B<0. \end{cases}$$

Выражения множителей $\varkappa_i$ при положительных и отрицательных значениях B различны. Следовательно, K-поверхность может на линии $B = 0$ претерпевать разрыв или излом. Для выяснения этого вопроса находим разложение множителя для малых B. Учитывая, что при $\beta \to \infty$ и фиксированном Δ имеет место асимптотическое разложение

$$\frac{\Gamma(\beta+\Delta)}{\Gamma(\beta)} = \beta^{\Delta}\left(1 + \frac{\Delta(\Delta-1)}{2}\beta^{-1} + \dots\right), \qquad (7.6)$$

будем после ряда выкладок иметь как для $B \geqslant 0$, так и для $B \leq 0$

$$\varkappa_i = 1 - N^2 B + \dots; \qquad (7.7)$$

формула действительна при любом i. Из нее вытекает, что K-поверхность неусеченной биномиальной модели не имеет на линии $B = 0$ ни разрыва, ни излома. Можно думать, что этим не свойством обладают и усеченные модели с постоянным значением T.

Рассмотрим другое свойство K-поверхности неусеченной биномиальной модели. Как отмечалось выше, при $B > 0$ моменты конечны, если $\beta > p$. При больших значениях B это неравенство не выполняется, и соответствующие моменты бесконечны, а гросс-параметры концентрации K_i равны нулю. При увеличении B сначала становятся равными нулю параметр K_i, затем K_0 и, наконец, K_{-1}. В случае A параметр $K_1 = 0$ при $\beta = 5N$. Взяв это значение β, будем иметь

$$K_{-1} = K_0 = \frac{\Gamma(2N)\Gamma(3N)}{\Gamma(N)\Gamma(4N)}. \qquad (7.8)$$

Следовательно, K-поверхность неусеченной биномиальной модели пересекает плоскость $K_1 = 0$ при $K_{-1} = K_0$ (пересе-

чение отмечено на рис. I3.а прерывистой линией).

К-поверхности усеченной биномиальной модели имеют при фиксированных K_{-1} и K_0 тем большие значения K_1, чем больше T. При постоянном увеличении T заполняется весьма большая трехлепестная область в К-пространстве.

Анализ графиков показывает, что различные параметры модели по-разному влияют на гросс-параметры концентрации. Расстояние внешней границы модели ξ^0 больше влияет на моменты высокого порядка, поэтому оно прежде всего сказывается и в параметре K_1. Параметр B регулирует, в основном, величину гало модели: чем больше B, тем больше и гало. Гало средней величины имеет экспоненциальная модель с B = 0. При дальнейшем уменьшении B гало быстро уменьшается и модель приближается к однородной. Однородная модель изображена на рис. I3 кружками.

Зависимость K_i от параметра N - более или менее линейна. При этом, чем больше B, тем больше зависимость от N. Как было указано раньше, параметр N определяет плотное строение ядра модели. Наличие плотного ядра в модели возможно только при больших значениях N.

Подытоживая анализ биномиальной модели можем заключить, что модель позволяет представить весьма широкий класс звездных систем различной структуры. По сравнению со степенно-полиномиальной моделью, имеющей такое же количество параметров концентрации. Поэтому эту модель можно рекомендовать для построения эмпирических моделей звездных систем.

Прежде чем закончить настоящую работу, остановимся кратко еще на модели Парсинго - Идлиса [20 - 22]. Эта модель, весьма часто использовавшая в советских работах по практической звездной динамике, имеет некоторое сходство с биномиальной моделью.

8. Модель Парсинго-Идлиса представляет собой улучшение модели Парсинго [20] и была использована Идлисом [2I] в случае плоского диска в виде (наши обозначения)

$$\mu^*(\xi) = \xi^2 (1+\xi^2)^{-2} g_1(\xi), \qquad (8.1)$$

где

$$g_1(\xi)=\frac{1}{4}\left(3+\frac{1-2\xi^2}{\sqrt{1+\xi^2}}\frac{\operatorname{Arsh}\xi}{\xi}\right). \qquad (8.2)$$

Вид функции $\mu^*(\xi)$ был выбран с таким расчетом, чтобы получить для круговой скорости известный закон Паренаго [20]. Модель конечна, так как $g_1(\xi)=0$ при $\xi=\xi^0=2.697$. Для $\xi>\xi^0$ Идлис принимает $\mu^*(\xi)=0$.

Идлис принял закон Паренаго и для любого ε. Вместо этого за исходную функцию описания можно взять выражение (8.I). Тогда при $\varepsilon>0$ имеем для круговой скорости выражение, отличное от закона Паренаго. Формула для нормированной функции скорости $v^0(\xi)$ имеет тогда вид

$$v^0(\xi)=\frac{2\xi^{02}-1}{2\xi^0}\frac{\xi^3}{(e^2+\xi^2)^2}\omega(\xi), \qquad (8.3)$$

причем

$$\omega(\xi)=\begin{cases} e\arcsin e+\dfrac{\varepsilon}{2}\left[\dfrac{\xi^2(2\xi^2+1)-e}{(1+\xi^2)^{3/2}}\dfrac{\operatorname{Arsh}\xi}{\xi}-\dfrac{e^2+\xi^2}{1+\xi^2}\right]; & \xi\le\xi^0, \\ e\arcsin\dfrac{e\xi^0}{\xi}+\dfrac{\xi^0}{\xi}\sqrt{1-\left(\dfrac{e\xi^0}{\xi}\right)^2}\;\dfrac{2\xi^2-e^2}{2\xi^{02}-1}; & \xi\ge\xi^0. \end{cases} \qquad (8.4)$$

Ход этой функции для $\varepsilon=0$ и $\varepsilon=1$ дан на рис. I4. Указана и функция скорости для оригинальной модели Паренаго. Для нормированной функции потенциала имеем

$$\varphi^0(\xi)=\frac{2\xi^{02}-1}{3\xi^0}\psi(\xi), \qquad (8.5)$$

где

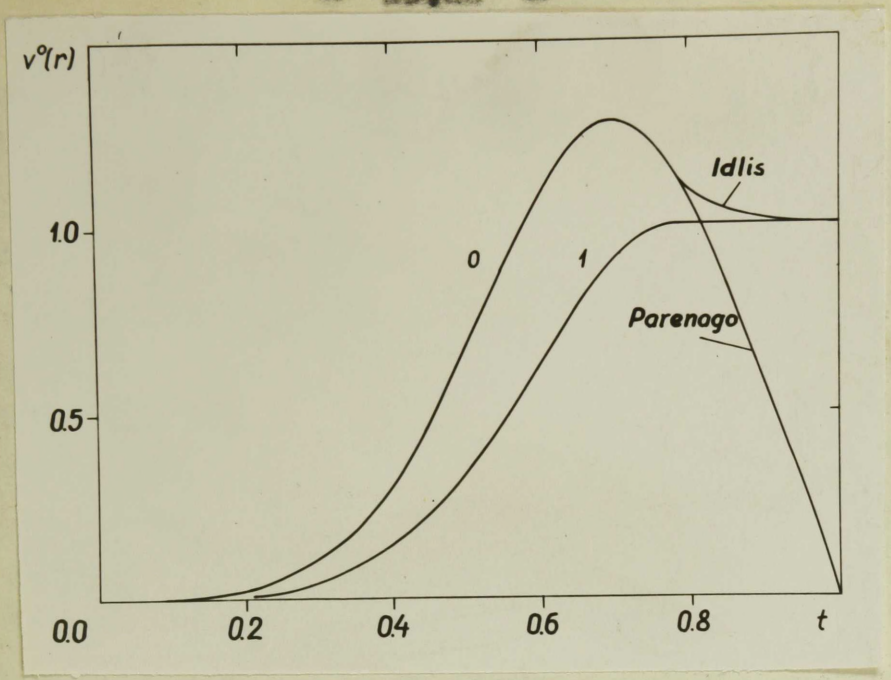


Рис. I4. Функция скорости для модели Паренаго - Идлиса, указано значение ε .

$$\psi(\xi)=\begin{cases}\left(\dfrac{e^2}{e^2+\xi^2}+\dfrac{1}{2\xi^{02}-1}\right)\dfrac{\arcsin e}{e}+\\ \qquad+\varepsilon\dfrac{\xi^2}{\sqrt{1+\xi^2}\,(e^2+\xi^2)}\dfrac{\operatorname{Arsh}\xi}{\xi};\ \xi\le\xi^0,\\ \left(\dfrac{e^2}{e^2+\xi^2}+\dfrac{1}{2\xi^{02}-1}\right)\dfrac{1}{e}\arcsin\dfrac{e\xi^0}{\xi}+\\ +\dfrac{3\xi^0\sqrt{\xi^2-e^2\xi^{02}}}{(2\xi^{02}-1)(e^2+\xi^2)};\ \xi\ge\xi^0.\end{cases}$$

(8.6)

Для модели Паренаго - Идлиса мы вычислили гросс-параметры концентрации; они оказались следующими:

$$\begin{aligned}K_{-1}&=0.584,\\ K_0&=0.732,\\ K_{+1}&=0.807\end{aligned}\qquad(8.7)$$

Модель Паренаго - Идлиса весьма близка по своему строению к биномиальной модели с $\beta=\nu=2$ и $\xi^0\approx2.7$. Следовательно, модель Паренаго -Идлиса может быть рассмотрена как частный случай биномиальной модели $\beta=\nu=2$,

причем конечность модели достигнута не ее усечением рассмотренным выше способом, а умножением основной исходной функции описания $g^*(\xi)$ на вспомогательную функцию $g_1(\xi)$, имеющую корень при $\xi = \xi^0$.

Следует, однако, иметь в виду, что функция $g_1(\xi)$ весьма сложна, поэтому и формулы для функций описания получаются громоздкими и неудобными для практических приложений. Как мы видели выше, усеченная биномиальная модель при определенных значениях параметров, имея практически такое же строение, является гораздо более простой по выражениям своих функций описания. Поэтому нет необходимости прибегать к более сложной модели Пирсона - Индлея.

Июль 1966 г.,
исправлено в сентябре 1967 г.

Литература

I. Я.Эйнасто, Тарту публ., 36, 396, 1968.
2. I.King, A.J., 67, 471, 1962.
3. A.Wallenquist, Bosscha Ann., 4, No 5, 1933.
4. W.Lohmann, Z.f.Ap., 60, 43, 1964.
5. Ю.-И.Вейманн, Тарту публ., 34, 101, 1964.
6. E.Hubble, Ap.J., 71, 231, 1930.
7. Г.Г.Кузмин, Tartu Teated, No. 1, 1954; АЖ, 33, 27, 1956 (Tartu Teated No. 2).
8. K.F.Bottlinger, Veröff. Berlin-Babelsberg, 10, No. 2, 1933.
9. П.Эйнасто, Tartu Teated, No. 17, 1965.
10. G.de Vaucouleurs, Ann. d'Ap., 11, 247, 1948.
11. L.Perek, Advances in Astronomy and Astrophysics, 1, 165, 1962.
12. A.Wallenquist, Uppsala Astr. Obs. Ann., 4, No. 6, 1959.
13. L.Perek, B.A.C., 2, 75, 1950.
14. U. Van Wijk, Ann. d'Ap., 12, 81, 1949.
15. E.F.Freundlich, Publ. Univ. Obs. Istanbul., 5, 1936.

I6. Я.Эйнасто, Тарту публ., 36, 357, I968.
I7. A.Toomre, Ap.J., 138, 385, 1963.
I8. K.Pearson, Tables of the Incomplete Beta-Function, London, 1934.
I9. Е.Е.Слуцкий, Таблицы для вычисления неполной Γ -функции и функции вероятности χ^2 , М.-Л., I950.
20. П.Л.Паренаго, АЖ, 27, 329, I950.
2I. Г.М.Идлис, АЖ, 33, 20, I956.
22. Г.Г.Кузьмин, Tartu Teated, No. 3, 1956.

ГЛАВА I6

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НА БАЗЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

I. Введение. Проведенный анализ показал, что из большого количесвта предложенных ранее моделей лишь немногие отвечают требованиям физической корректности. Из физически разумных моделей не все являются достаточно гибкими для представления звездных систем разной структуры. В этом отношении наиболее перспективными являются некоторые семейства моделей с биномиальной функцией описания, а именно модель Кинга и обобщенная экспоненциальная модель.

В моделировании звездных систем существенно не только описание пространственной структуры, но и кинематический аспект - тензор дисперсий скоростей и вектор дифференциального вращения. Этот аспект рассматривается в гидродинамических моделях звездных систем. Чтобы выяснить пригодность отобранных семейств моделей для описания структуры звездных систем, мы вычислили для них все основные гидродинамические функции описания. В этом отношении наша работа отличается от более ранних аналогичных работ [I - 3], где кинематические функции не вычислялись.

Целесообразно провести вычисления для нормированных, или, как мы будем их называть в дальнейшем, стандартных функций описания. При этом существен выбор единиц массы и радиуса. Разные авторы поступают здесь по-разному. Например, Кинг [I] использует в качестве единицы расстояния "радиус ядра" модели, де Вокулер [4] - большую полуось эллипсоида, внутри которого находится половина интегральной светимости объекта, в работе [5] (гл. 9) мы предлагали использовать с этой целью величину

$$R_e = \int_0^\infty \mu(a)\, a\, da \Big/ \int_0^\infty \mu(a)\, da, \qquad (I.I)$$

где $\mu(a)$ - функция массы.

Опыт моделирования галактик привел к убеждению, что лучше всего использовать в качестве единиц массу системы $\mathcal{M}$ и ее гармонический радиус

$$a_0^{-1} = \overline{a^{-1}} = \int_0^\infty \mu(a) a^{-1} da \Big/ \int_0^\infty \mu(a) da . \qquad (I.2)$$

При этом выборе формулы, связывающие обычные и стандартные функции описания, а также определяющие разные интегральные характеристики звездных систем, имеют наиболее простой вид. Эти формулы даны в следующем пункте. Далее приведены некоторые результаты обширных вычислений по определению функций описания. Наконец, даны некоторые указания для применения этих результатов при определении гидродинамических моделей звездных систем.

2. Связь между обычными и стандартными функциями описания. В качестве исходной функции описания мы будем брать функцию массы $\mu(a)da$, т.е. массу элементарного слоя, заключенного между эллипсоидами равной плотности $\rho(a)$ и $\rho(a+da)$. Все остальные функции описания вычисляются по функции массы по формулам, приведенным в гл. 9 - II. Стандартные функции описания определяем по стандартной функции массы по формулам, имеющим тот же вид, но в которых все обычные функции описания заменены на стандартные. Последние обозначаем индексом ноль сверху. Формулы связи между обычными и стандартными функциями следующие ($\alpha = a/a_0$, $\eta = R/a_0$, $\zeta = z/a_0$):

функция массы

$$\mu(a) = \frac{\mathcal{M}}{a_0} \mu^\circ(\alpha); \qquad (2.I)$$

спроектированная на плоскость симметрии плотность

$$P|A = \frac{\mathcal{M}}{a_0^2} P^\circ(\alpha); \qquad (2.2)$$

спроектированная на плоскость, нормальную к лучу зрения, светимость

$$L(A) = \frac{\mathcal{M}}{a_0^2 \beta E} P^\circ(\alpha), \qquad (2.3)$$

где $\mathcal{M}$ - отношение массы к светимости и E - видимое отношение полуосей эллипсов равной спроектированной яркости; пространственная плотность

$$\rho(a) = \frac{\mathcal{M}}{a_0^3}\,\rho^\circ(\alpha); \tag{2.4}$$

гравитационный потенциал

$$\Phi(R,Z) = \frac{G\mathcal{M}}{a_0}\,\Phi^\circ(\eta,\zeta); \tag{2.5}$$

дисперсия скоростей

$$\sigma^2(R,Z) = S(R,Z) = \frac{G\mathcal{M}}{a_0}\,S^\circ(\eta,\zeta); \tag{2.6}$$

ускорение

$$K(R,z) = \frac{G\mathcal{M}}{a_0^2}\,K^\circ(\eta,\zeta); \tag{2.7}$$

квадрат угловой скорости

$$\omega^2(R,z) = U(R,z) = \frac{G\mathcal{M}}{a_0^3}\,U^\circ(\eta,\zeta). \tag{2.8}$$

Стандартные функции массы и плотности определены с помощью функции $q^\circ(\alpha)$

$$\nu^\circ(\alpha) \equiv 4\pi\varepsilon\,\alpha^2\rho^\circ(\alpha) = q^\circ(\alpha)\,\alpha^2; \tag{2.9}$$

или (случай Б)

$$P^\circ(\alpha) \equiv q^\circ(\alpha); \tag{2.10}$$

где ε - отношение полуосей эллипсоидов равных плотностей.

Стандартные функции описания имеют следующие интегральные, локальные и асимптотические свойства:

$$\int_0^\infty \nu^\circ(\alpha)\,d\alpha = 1; \tag{2.11}$$

$$\int_0^\infty \nu^\circ(\alpha)\,\alpha^{-1}\,d\alpha = 1; \tag{2.12}$$

$$2\pi\int_0^\infty P^\circ(\alpha)\,\alpha\,d\alpha = 1; \tag{2.13}$$

$$\int_0^\infty K_R^\circ(\eta,\zeta)\,d\eta = \int_0^\infty K_z^\circ(\eta,\zeta)\,d\zeta = \beta, \tag{2.14}$$

где $\beta = \arcsin e$ (см. гл. 12);

$$\rho^\circ(0) = \frac{h}{4\pi\varepsilon}, \tag{2.I5}$$

где $h = g^\circ(0)$;

$$P^\circ(0) = \bar{E} L^\circ(0) = \frac{M_{-2}\{\mu^\circ\}}{2\pi}, \tag{2.I6}$$

где

$$M_{-2}\{\mu^\circ\} = \int_0^\infty \mu^\circ(\alpha)\,\alpha^{-2}\,d\alpha; \tag{2.I7}$$

$$\Phi^\circ(0,0) = \beta; \tag{2.I8}$$

$$U^\circ(0,0) = \lim_{\zeta \to 0} K_R^\circ \zeta^{-1} = h\beta_R, \tag{2.I9}$$

где параметр β_R дан формулой (3.I9) гл. I2:

$$\lim_{\alpha\to\infty} K_R^\circ \alpha^3 \nu^{-1} = \lim_{\alpha\to\infty} K_2^\circ \alpha^3 \xi^{-1} = 1. \tag{2.20}$$

Динамические параметры Оорт–Кузмина в центре звездной системы имеют значения

$$A_c^2(0) = 0; \quad B_c^2(0) = \frac{G\mathcal{M}}{a_0^3} h\beta_R, \tag{2.2I}$$

$$C_c^2(0) = \frac{G\mathcal{M}}{a_0^3} \frac{h\beta_2}{\varepsilon^2} \tag{2.22}$$

где β_2 определен формулой (3.20) гл. I2.

Формулы (2.II) – (2.22) могут быть использованы для проверки вычислений.

<u>3.Модифицированная экспоненциальная модель.</u> Несколько лет тому назад мы начали вычисления стандартных функций описания для модели Кинга и экспоненциальной модели с исходными функциями

$$g^\circ(\alpha) = h'\left[(1+\xi^2)^{-1/2} - (1+\xi^\circ)^{-1/2}\right]^2 \tag{3.I}$$

и

$$g^\circ(\alpha) = h \exp\left[-\xi^\circ\right], \tag{3.2}$$

причем $\xi = \alpha / \kappa$. В модели Кинга роль структурного параметра играет внешний радиус модели ξ^0 , в экспоненциальной модели - показатель ν . Нормирующие безразмерные параметры h , h' и κ введены для того, чтобы выполнялись интегральные свойства нормированной функции массы κ^0 (2.II) и (2.I2). Вычислялись все основные функции описания для целого семейства значений структурных параметров ξ^0 и ν , а также сплюснутости ε . В частности, вычислялась и дисперсия скоростей на оси системы в джинсовском приближении.

Результаты показали, однако, что выбор исходных функций описания нельзя считать вполне удачным. Уже раньше было известно, что при некоторых значениях структурных параметров модели имеют в центре слишком острый пик плотности, не соответствующий наблюдениям. Однако мы не обратили на эту деталь особого внимания, считая ее второстепенным дефектом модели. Теперь мы обнаружили, что в результате слишком быстрого роста плотности к центру дисперсия скоростей имеет иногда глубокий минимум в центре модели, что находится в противоречии с принятым нами критерием физической корректности (2.6) гл. I3 (рис. 1, 2 и 3 в конце главы).

Для исправления этого недостатка мы модифицировали модели, выбрав для исходных функций описания выражения

$$g^0(\alpha) = h' \left\{ \left[x_0 + \left(1 + \xi^2\right) \right]^{-\beta} - \left[x_0 + \left(1 + \xi^0\right) \right]^{-\beta} \right\}^{1/2} \qquad (3.3)$$

и

$$g^0(\alpha) = h \exp \left[x_0 - \left(x_0^{2N} + \xi^2 \right)^{1/2} \right] , \qquad (3.4)$$

где x_0 - новый структурный параметр, а $N = \nu^{-1}$.

Ниже приводятся некоторые результаты, полученные для модифицированной экспоненциальной модели (3.4). Эта модель лучше подходит для описания структуры галактик.

Вычислялись основные функции описания для следующих значений структурных параметров: $N = 0.5$; I; I.5; ..., 6; $x_0 = (N - 0.5)\, q$, причем для q выбирались значения: 0 (обычная экспоненциальная модель), I; 2; 3;, $\varepsilon = 0$;

0.I; 0.3; 0.6; I. Общий объем полученной информации оказался очень большим, что позволило весьма детально изучить свойства модели.

Есть возможность представить здесь только малую долю полученных результатов. Приводим таблицу основных параметров моделей и некоторые графики. В таблице даны гросс-параметры концентрации K_{-1}, K_0, K_I (гл. 9), нормирующие параметры h и k (в записи, применяемой на ЭВМ: 4000 + I= = 0.4000 I0^{I}), моменты стандартной функции массы (напомним, что, по определению, $\mathcal{M}_{-1}\{\rho^\circ\} = \mathcal{M}_0\{\rho\} = I$), параметр H_0, фигурирующий в теореме о вириале, $\alpha_{0,50}$ и $\alpha_{0,98}$ – большие полуоси изофот (в единицах гармонического радиуса модели), внутри которых содержится соответственно 0.50 и 0.98 полной светимости модели.

Рис. 4 и 5 иллюстрируют зависимость $\log P^\circ$ модели от параметров N и x_0. В качестве аргумента на рис. 4 взята величина $x = \alpha/\alpha_{0,5}$, а на рис. 5 величина $x^{1/4}$, причем $\alpha_{0,5}$ – значение большой полуоси, содержащее половину интегральной светимости модели. Прямая линия изображает модель де Вокулера [4]. ~~а точки – наблюденные значения спроектированной яркости для типичной эллиптической галактики M32 согласно [4].~~ На рис. 6 дан ход дисперсии скоростей $S_z^\circ(0,7)$, причем в качестве аргумента выбрана величина $t = \xi/(1+\xi)$. Рис. 7 и 8 изображают зависимость $\log P^\circ(\alpha)$ и $\log \mathcal{L}^\circ(\alpha)$ от $\log\alpha$, причем

$$\mathcal{L}^\circ(\alpha) = 2\pi \int_0^\alpha P^\circ(\alpha')\,\alpha'\,d\alpha' \qquad (3.5)$$

Эти графики имеют большое прикладное значение, позволяя по наблюдениям определить как структурные, так и масштабные параметры модели (см. ниже). Рис. 9 дает зависимость логарифмического градиента плотности

$$\sigma_\alpha\{\rho\} = \frac{d\ln\rho^\circ(\alpha)}{d\ln\alpha} \qquad (3.6)$$

от $t = \alpha/1+\alpha$.

4. О построении гидродинамической модели. В главах IO и II была описана общая методика построения пространственной и гидродинамической моделей, там же были приведены все основные формулы. В данном пункте мы покажем, как можно использовать вычисленные стандартные функции и их графики при практическом построении модели.

Параметры гидродинамической модели могут быть найдены методом моментов или проб и ошибок. В первом случае в принципе можно сразу получить искомые величины модель-параметров. Результаты, однако, существенно зависят от поведения функций описания в центральной и периферийной области исследуемого объекта, где точность наблюдений мала или где они совсем отсутствуют, так что функции описания приходится экстраполировать. Наши попытки применить метод моментов для определения параметров составной модели галактики Андромеды не дали удовлетворительных результатов. По-видимому, этот метод может быть применен только к простым звездным системам, но не исключительно, что метод проб и ошибок и здесь дает лучшие результаты.

Блок-схема построения гидродинамической модели составной галактики дана на рис. IO. Для сравнения приведены блок-схемы классического метода определения простой модели эллиптической и спиральной галактики.

Сущность классического способа определения модели эллиптической галактики заключается в следующем. По наблюденному распределению светимости, считая сплюснутость ε и отношение массы к светимости β постоянным, определяются функции светимости $h(a)$, массы $\mu(a)$, а затем и пространственная плотность $\rho(a)$ и радиальное ускорение $K_R(R)$ (или связанная с ним функция $F_R(R)$ [6]). Последняя функция может быть найдена непосредственно по кинематическим данным (вращение $V_0(R)$ и дисперсии скоростей в центре системы $\sigma_R^2(0)$), что позволяет осуществить обратную связь и проверить правильность исходных допущений.

В классическом способе определения модели спиральной галактики не делается допущения о постоянстве ε и β. Радиальное ускорение и функцию массы определяют по скорости вращения, считая ее равной круговой скорости, функция

светимости $h(a)$ определяется по спроектированной светимости $L(A)$; сравнение функций $\mu(a)$ и $h(a)$ дает отношение массы к светимости $\beta(a)$ как функцию a.

Определение гидродинамической модели звездной системы методом проб и ошибок происходит следующим образом. Сначала по фотометрическим данным (путем сравнения наблюденного распределения светимости со стандартными распределениями) определяются приближенные значения всех параметров модели. Затем по таблицам стандартных функций (если модель однокомпонентная) или с помощью специальных программ определяются все необходимые функции описания, которые сравниваются с наблюденными (светимость, цвет, отношение полуосей, скорость вращения и дисперсия скоростей). По разности между вычислениями и наблюденными функциями определяются поправки к исходным значениям параметров и процесс повторяется. Наиболее трудное место в методе - определение поправок к параметрам. В принципе это можно сделать автоматически с помощью соответствующей программы, но пока это делается без использования ЭВМ.

Наконец, рассмотрим, как определить параметры модели с помощью стандартных функций. Допустим, что в нашем распоряжении имеется фотометрический материал в виде логарифма спроектированной яркости, выраженной в звездных величинах на квадратную угловую секунду. Выразим эту яркость как функцию логарифма большой полуоси A'' (в угловых секундах) эллипса равной яркости (изофоты) и нарисуем эту зависимость в том же масштабе, в каком имеются наши стандартные кривые $\log P^0(\log\alpha)$. На рис. II это сделано для эллиптической галактики М32. Как известно, форма кривой $\log P(\log A)$ не зависит от масштабных параметров $\mathcal{M}$ и a_0. Совмещая наблюденную кривую поочередно с разными стандартными кривыми, выбираем ту из них, которая лучше всего согласуется с наблюдениями. Таким образом найдем структурные параметры модели N и $\varkappa_0$. Масштабные параметры модели найдем по положению начала координат стандартной кривой в наблюдаемой координатной системе, которое на рис.II указано крестом. Обозначим соответствующее значение ординаты через m_0 и абсциссы - через $\log a_0''$. Нетрудно убедиться в том, что $\log a_0''$ и есть логарифм гармонического радиуса модели, выра-

женного в угловых секундах, а по m_0 можно найти интегральную видимую звездную величину галактики

$$m = m_0 - 5\log a_0'' - 2.5\log E, \qquad (4.I)$$

где E - отношение полуосей изофот. Зная величину поглощения света в направлении галактики и ее расстояние, легко определить a_0 и полную светимость L в абсолютных единицах.

Эта же методика может быть использована, если определена интегральная светимость в круге с переменным радиусом A'', что дает функцию $\mathcal{L}(A'')$.

Май I97I

Литература

I. I.King, A.J. 67, 471, 1962.
2. A.Poveda, R.Itirriaga, I.Orozco, Bol. Tonanzintla y Tacubaya No. 20, 3, 1960.
3. J.C.Brandt, L.S.Scheer, A.J.70, 471, 1965.
4. G. de Vaucouleurs, M.N. 113, 134, 1953.
5. Я.Эйнасто, Тарту публ. 36, 357, I968.
6. J.Einasto, A.N. 291, 97, 1969.

N	x_0	K_{-1}	K_0	K_1	h	k	M_{-2}	M_1	M_2	H_0		
0.0	0	0.7500	0.88889	0.93750	88889+0	15000+1	1.3333	1.1250	1.3500	0.4000	0.9123	1.4437
0.5	0	0.63662	0.78540	0.84883	15708+1	11284+1	1.5708	1.2732	1.9099	0.3536	0.9015	2.1027
1.0	0	0.50000	0.66667	0.75000	40000+1	50000+0	2.0000	1.5000	3.0000	0.3125	0.9730	3.0395
1.5	0	0.38806	0.56374	0.66158	11275+2	17194+0	2.5769	1.7739	4.7562	0.2804	1.0600	4.1811
2.0	0	0.30000	0.47619	0.58333	33333+2	55556-1	3.3333	2.1000	7.5600	0.2539	1.1587	5.5529
2.5	0	0.23155	0.40206	0.51424	10132+3	12826-1	4.3187	2.4872	12.0295	0.2314	1.2688	7.2030
3.0	0	0.17857	0.33939	0.45330	31360+3	29762-2	5.6000	2.9464	19.152	0.2120	1.3905	9.1774
3.5	0	0.13764	0.28646	0.39955	98312+3	63534-3	7.2652	3.4909	30.500	0.1949	1.5248	11.4945
4.0	0	0.10606	0.24176	0.35217	31114+4	12626-3	9.4286	4.1364	48.582	0.1796	1.6723	14.2087
4.5	0	0.08171	0.20402	0.31042	99196+4	23572-4	12.2387	4.9014	77.390	0.1660	1.8345	17.320
5.0	0	0.06294	0.17127	0.27372	31810+5	41625-5	15.889	5.8081	123.240	0.1537	2.0125	20.870
5.5	0	0.04847	0.14530	0.24176	10249+6	69919-6	20.630	6.8825	195.932	0.1426	2.2078	24.626
6.0	0	0.03733	0.12263	0.21464	3315306	11222-6	26.788	8.1543	309.791	0.1325	2.4218	28.948
1.0	0.5	0.52857	0.67997	0.75565	28710+1	48188+0	1.8915	1.4706	2.8622	0.3175	0.9580	2.9678
1.5	1.0	0.44030	0.58322	0.68824	49923+1	16342+0	2.2712	1.7146	4.3996	0.2882	1.0297	3.9967
2.0	1.5	0.36226	0.49510	0.58816	88064+1	47537-1	2.7604	2.0198	6.9360	0.2622	1.1190	5.2990
2.5	2.0	0.29460	0.41765	0.51713	15839+2	12261-1	3.3944	2.3943	11.0858	0.2390	1.2249	6.9030
3.0	2.5	0.23722	0.35123	0.45485	29007+2	28645-2	4.2154	2.8472	17.822	0.2183	1.3461	8.8563
3.5	3.0	0.18949	0.29503	0.40034	53954+2	61553-3	5.2774	3.3895	28.698	0.2000	1.4821	11.1566
4.0	3.5	0.15038	0.24780	0.35255	10166+3	12304-3	6.6499	4.0356	46.193	0.1837	1.6327	13.8839
4.5	4.0	0.11872	0.20821	0.31056	19359+3	23083-4	8.4228	4.8028	74.270	0.1692	1.7985	17.013
5.0	4.5	0.09355	0.17505	0.27368	37188+3	40927-5	10.712	5.7127	119.25	0.1562	1.9802	20.582
5.5	5.0	0.07315	0.14725	0.24122	71949+3	68974-6	13.670	6.7910	191.18	0.1444	2.1790	24.379
6.0	5.5	0.05718	0.12394	0.21274	14003+4	11100-6	17.490	8.0684	306.01	0.1339	2.3962	28.722

1.0	1	0.55239	0.69745	0.76590	24411+1	45258+0	1.8103	1.4338	2.6841	0.3236	0.9422	2.8389
1.5	2	0.49666	0.62464	0.69130	32981+1	14217+0	2.0135	1.6009	3.7074	0.3028	0.9814	3.6287
2.0	3	0.45015	0.55766	0.61930	42947+1	38634−1	2.2215	1.7932	5.1922	0.2849	1.0250	4.5285
2.5	4	0.40948	0.49532	0.55098	54882+1	94048−2	2.4421	2.0189	7.3975	0.2688	1.0744	5.5979
3.0	5	0.37320	0.43758	0.48755	69936+1	20934−2	2.6795	2.2853	10,7118	0.2540	1.1305	6.8828
3.5	6	0.34049	0.38453	0.42973	86931+1	43200−3	2.9369	2.6002	15.7334	0.2402	1.1939	8.3772
4.0	7	0.31082	0.33640	0.37779	10841+2	83480−4	3.2173	2.9726	23.390	0.2273	1.2653	10.1442
4.5	8	0.28381	0.29300	0.33159	13466+2	15222−4	3.5234	3.4130	35.128	0.2152	1.3453	12.1730
5.0	9	0.25917	0.25432	0.29080	16679+2	26348−5	3.8585	3.9334	53.205	0.2037	1.4347	14.499
5.5	10	0.23665	0.21985	0.25494	20613+2	43506−6	4.2256	4.5485	81.153	0.1929	1.5344	17.168
6.0	11	0.21605	0.18956	0.22350	25431+2	6880297	4.6284	5.2753	124.510	0.1827	1.6450	20.248
1.0	1.5	0.56812	0.71160	0.77585	22202+1	42446+0	1.7602	1.4053	2.5453	0.3284	0.9319	2.7440
1.5	3.0	0.53206	0.65978	0.71767	26620+1	12138+0	1.8795	1.5157	3.2009	0.3140	0.9527	3.2890
2.0	4.5	0.50524	0.61591	0.66353	30508+1	29774−1	1.9792	1.6236	3.9728	0.3030	0.9712	3.8674
2.5	6.0	0.48357	0.57683	0.61201	34120+1	65173−2	2.0680	1.7336	4.9108	0.2938	0.9885	4.4356
3.0	7.5	0.46529	0.54121	0.56279	37559+1	13016−2	2.1492	1.8477	6.0663	0.2859	1.0052	5.0742
3.5	9.0	0.44946	0.50835	0.51590	40878+1	24070−3	2.2249	1.9671	7.5008	0.2789	1.0215	5.7205
4.0	10.5	0.43590	0.47782	0.47143	44107+1	41651−4	2.2962	2.0928	9.2907	0.2726	1.0376	6.4213
4.5	12.0	0.42300	0.44931	0.42951	47268+1	67980−5	2.3641	2.2256	11.5327	0.2669	1.0534	7.1568
5.0	13.5	0.41171	0.42261	0.39020	50373+1	10531−5	2.4289	2.3662	14.3493	0.2617	1.0692	7.9353
5.5	15.0	0.40142	0.39755	0.35355	53434+1	15561−6	2.4912	2.5154	17.8966	0.2568	1.0848	8.7531
6.0	16.5	0.39197	0.37398	0.31956	56458+1	22023−7	2.5512	2.6739	22.3737	0.2520	1.1004	9.6061

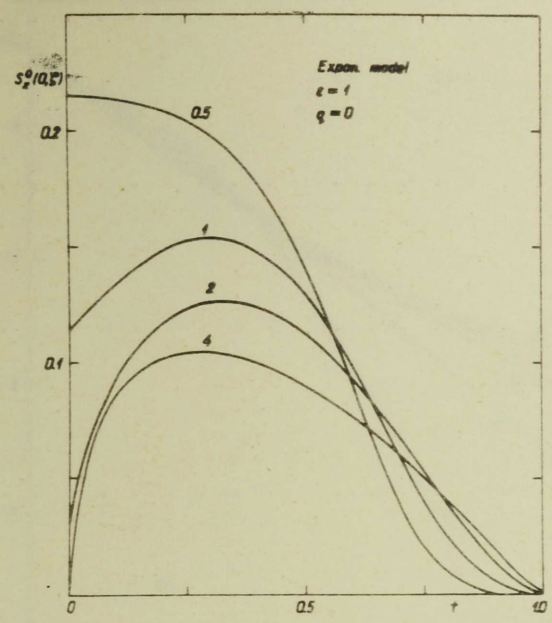


Рис. I. Нормированная дисперсия вертикальных скоростей $S_z^0(0,\xi)$ на оси сферической экспоненциальной модели для различных значений параметра N .

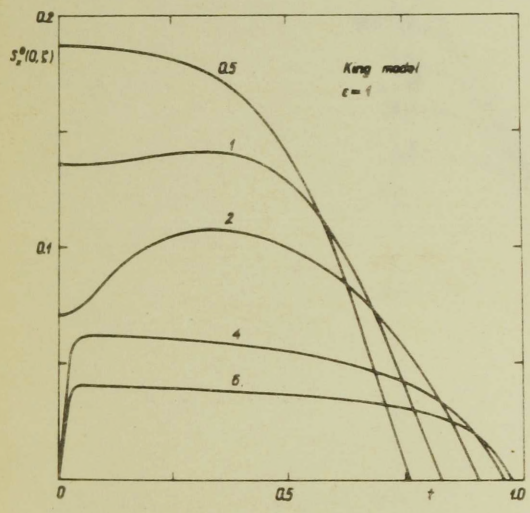


Рис. 2. Функция $S_z^0(0,\xi)$ сферической модели Кинга для различных $\log \xi^0$.

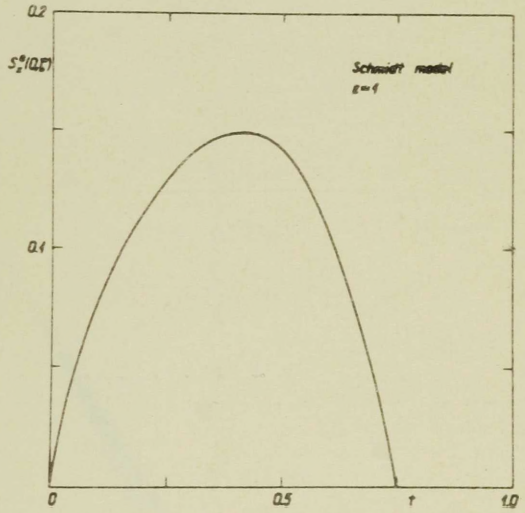


Рис. 3. Функция $S_z^0(0,\xi)$ модели Шмидта.

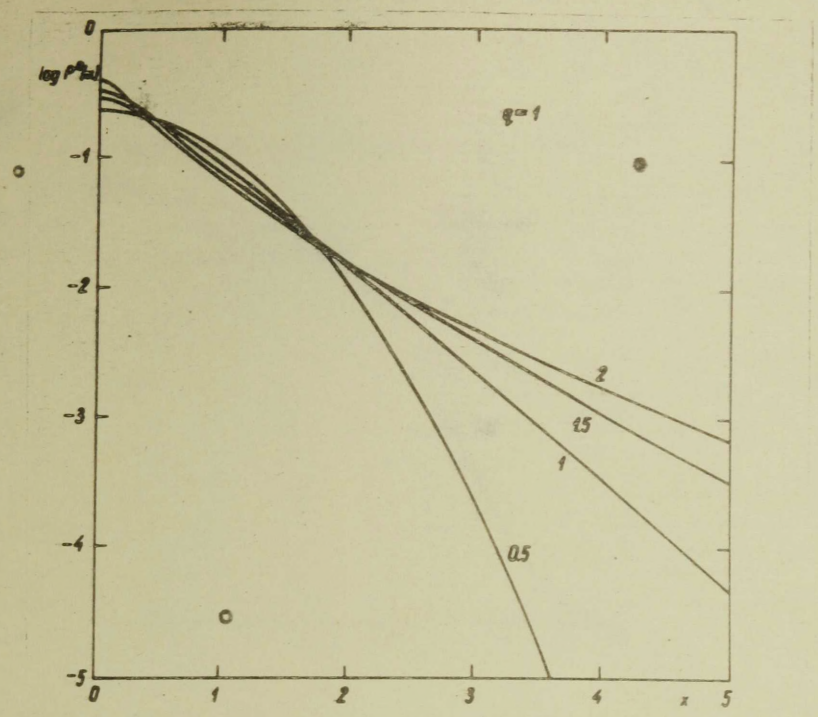


Рис. 4. Зависимость логарифма спроектированной плотности $\log P^0(\alpha)$ от $x = \alpha/\alpha_{0,5}$ модифицированной экспоненциальной модели.

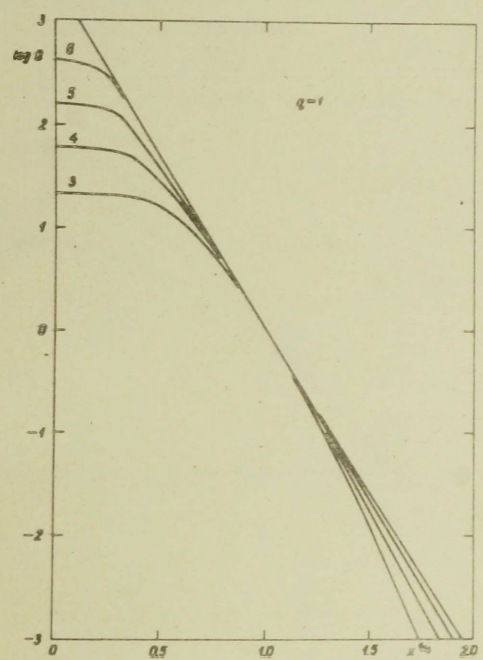
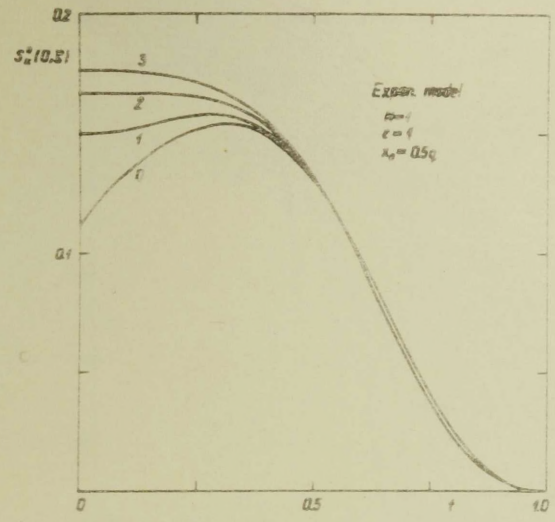


Рис. 5. Зависимость логарифма спроектированной плотности от $x^{1/4}$ модифицированной экспоненциальной модели при $N = 3, 4, 5, 6$. Прямая линия соответствует модели де Вокулера. Плотность выражена в единицах плотности при $x = 1$.

a)



b)

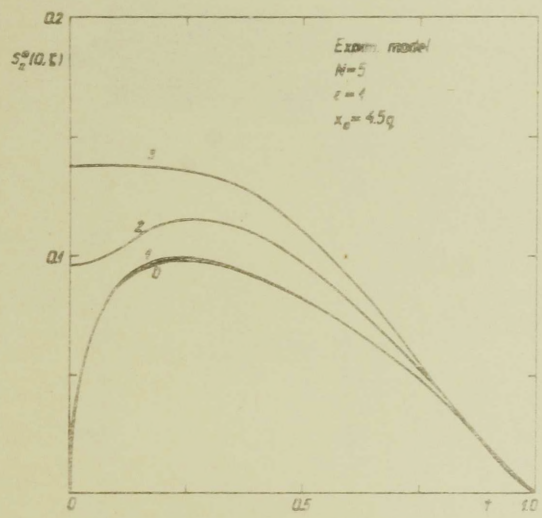
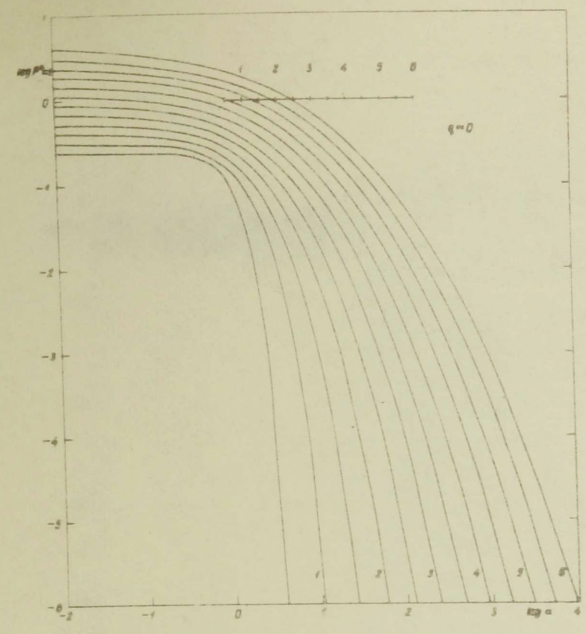


Рис. 6. Нормированная дисперсия скоростей на оси модифицированной экспоненциальной модели для различных q.

a)



b)

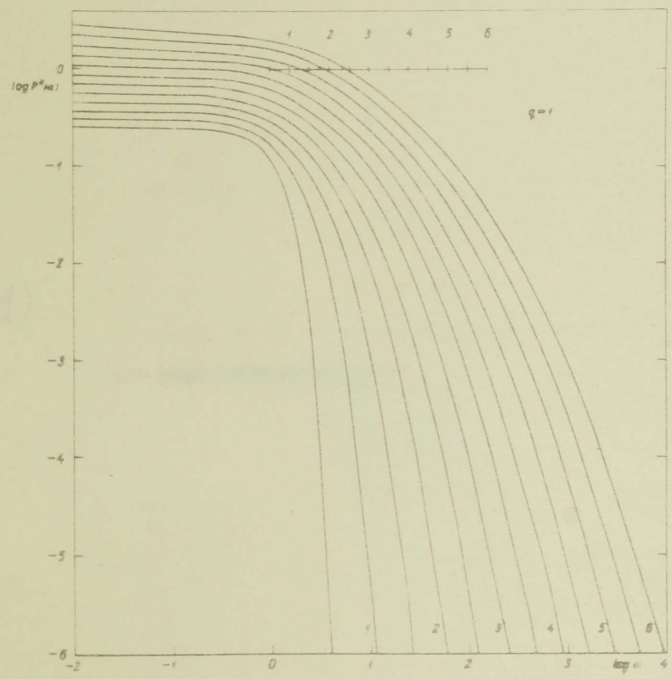
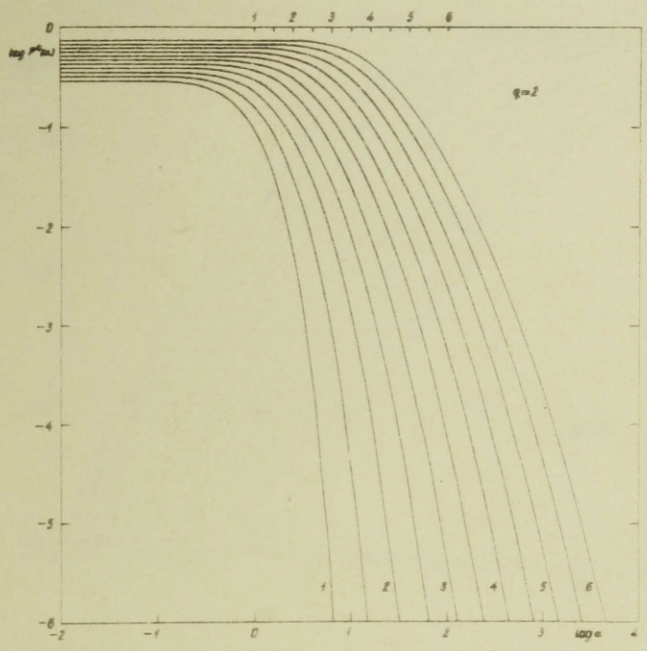
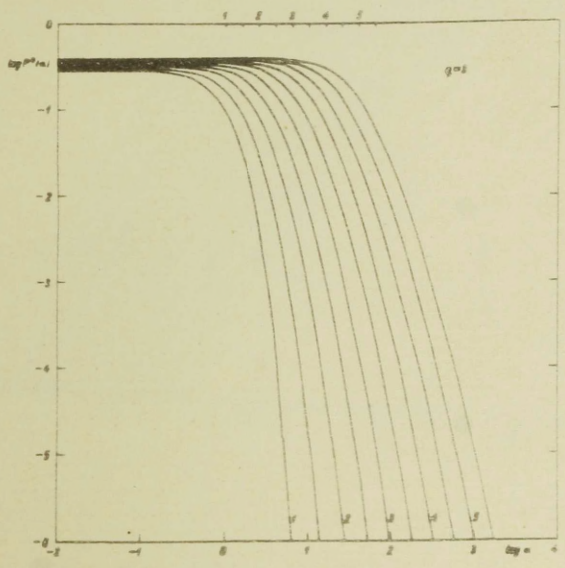


Рис. 7. Зависимость $\log P^0(\alpha)$ от $\log \alpha$ для различных N. Кривые смещены по абсциссе, нульпункт шкалы $\log \alpha$ - сверху, а шкала $\log \alpha$ для первой кривой - снизу.

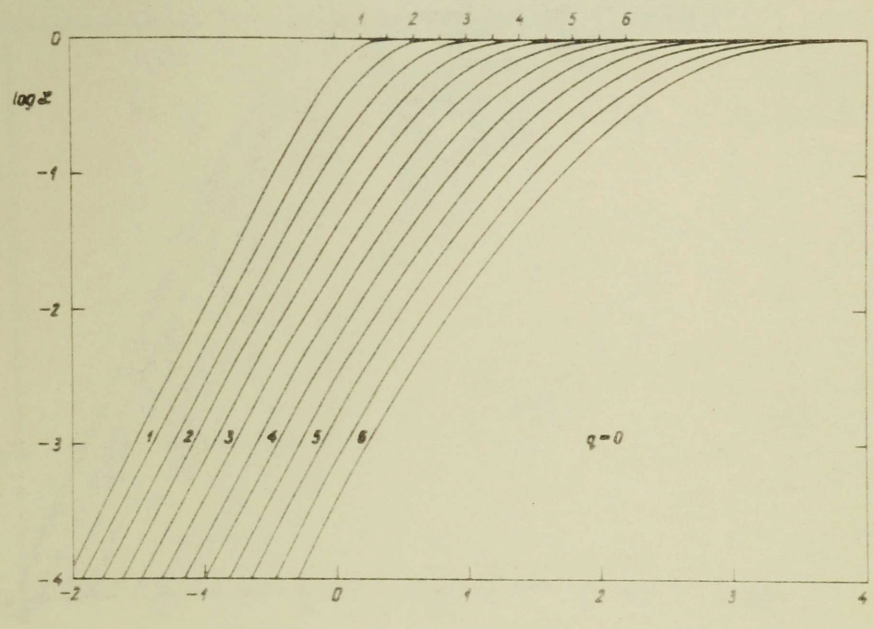
c)



d)



a)



b)

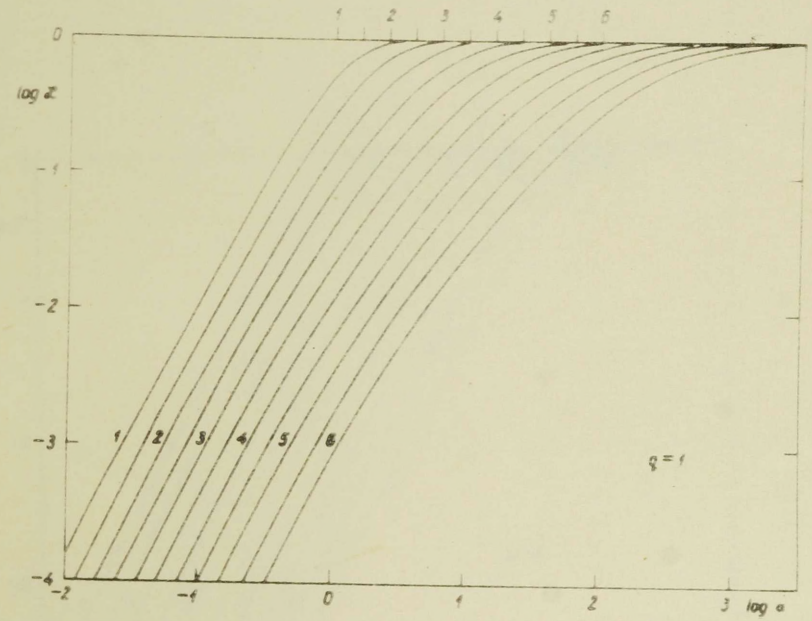
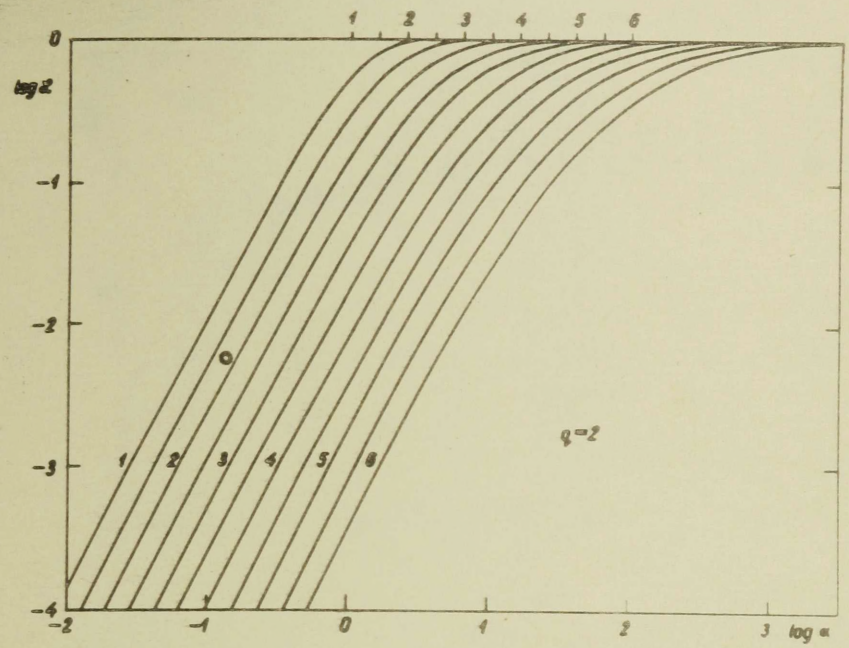
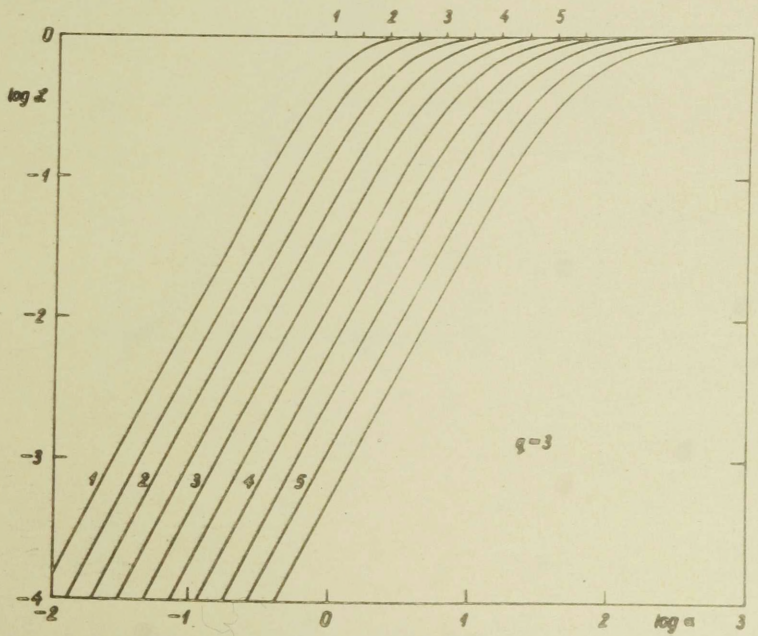


Рис. 8. Зависимость $\log L^0(\alpha)$ от $\log \alpha$.

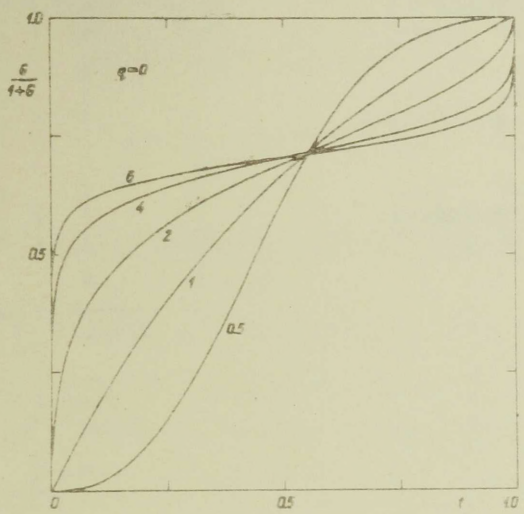
c)


1 2 3 4 5 6
0
log z
-1
-2
-3
-4
0
1 2 3 4 5 6
q=2
-2 -1 0 1 2 3 log α

d)


1 2 3 4 5
0
log z
-1
-2
-3
-4
1 2 3 4 5
q=3
-2 -1 0 1 2 log α 3

a)



b)

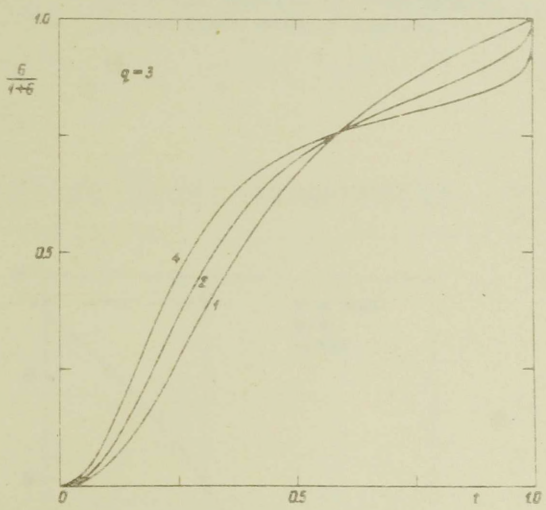


Рис. 9. Зависимость логарифмического градиента плотности от α для различных N .

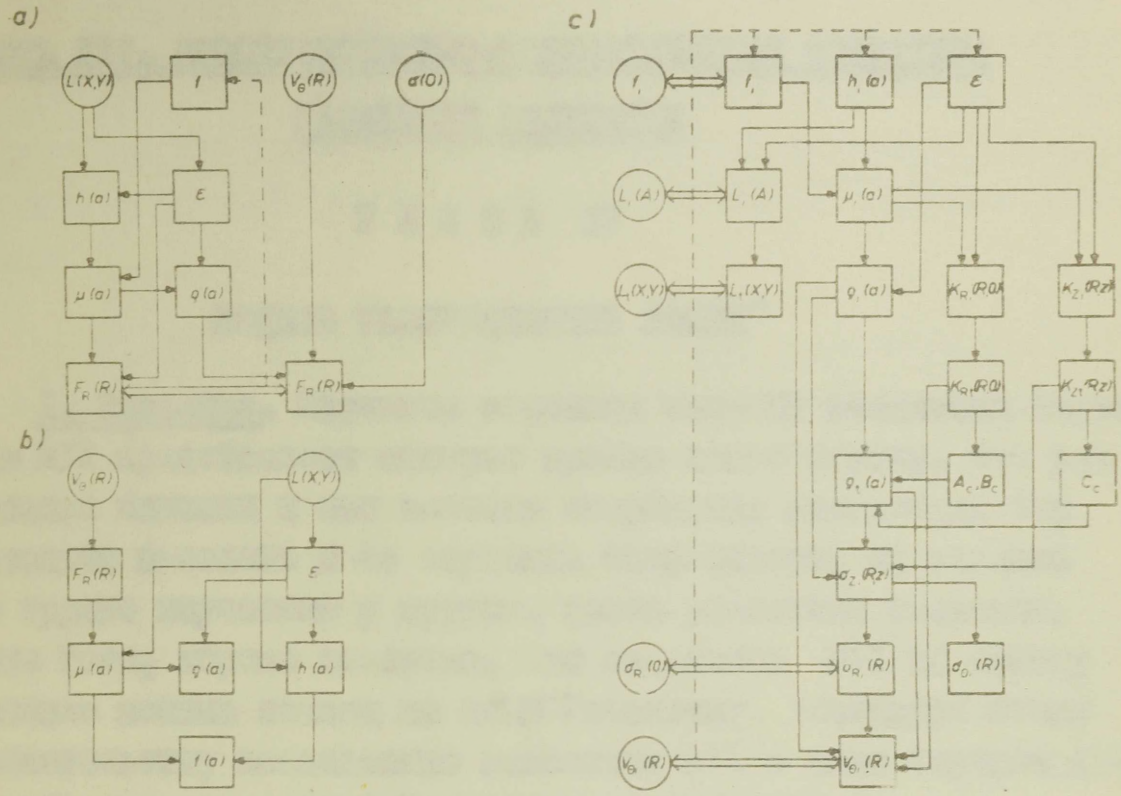


Fig. 9. Block diagram of the determination of
a) a simple model of an elliptical galaxy,
b) a simple model of an oblate galaxy,
c) a composed model of a galaxy

Рис. I0. Блок-схема построения моделей галактик.

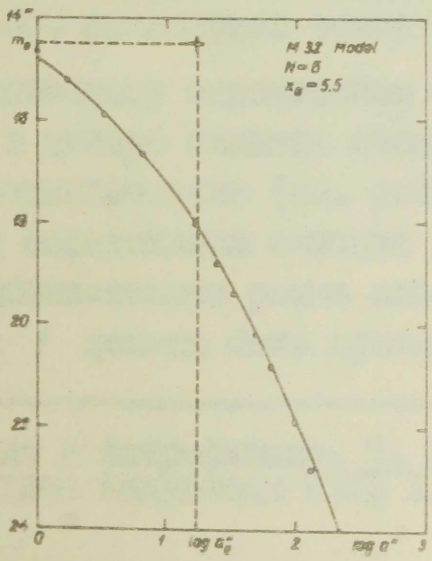


Рис. II. Фотометрическая модель галактики М32. Точки – наблюдения по де Вокулеру [4], кривая – модифицированная экспоненциальная модель.

ЧАСТЬ III. ПРОСТРАНСТВЕННО-КИНЕМАТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ГАЛАКТИКИ АНДРОМЕДЫ

Г Л А В А I7

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАССЫ*

I. Введение. Изучение строения большой галактики Андромеды М3I представляет интерес прежде всего потому, что она наиболее близкая к нам внешняя спиральная галактика. Это позволяет выяснить в ее строении подробности, не видимые или трудно изучаемые у других, более удаленных галактик. Кроме того, хорошо известно, что галактика М3I по своему строению весьма похожа на нашу Галактику. Благодаря этому обстоятельству исследование галактики М3I в ряде случаев дополняет изучение нашей Галактики и наоборот.

Среди результатов, полученных при исследовании общей структуры галактики М3I, можно отметить следующие два противоречивых вывода.

I. Оценки массы системы, несмотря на весьма точно определенную кривую вращения, получаются очень различными, колеблясь от 200 до 600 миллиардов солнечных масс (см. табл. 3).

2. По динамическому определению отношение массы к светимости f в центре системы очень мало, а на периферии приближается к бесконечности (см. рис. 9). С другой стороны, по спектральному определению состава ядра М3I центральное значение f приблизительно равно его среднему значению, то есть величина f должна быть приблизительно постоянной.

---

*Опубликовано в Астрофизике, 5, I37 - I59, I969 под названием "Галактика Андромеды М3I, I. Предварительная модель".

В настоящей серии статей будет построена новая модель галактики М31 и сделана попытка выяснить причины указанных противоречий. Допускается, что галактика М31 состоит из четырех основных составляющих: ядрышка, ядра с гало, диска и плоской составляющей. В ходе работы оказалось, что модель целесообразно построить последовательными приближениями. Поэтому в первой статье серии описывается предварительная модель системы. В дальнейшем модель будет уточняться и детализироваться.

2. Функции описания и уравнения связи между ними. Из наблюдений можно определить следующие функции или их частные значения: спроектированную плотность светимости $L_s(X,Y)$ в фотометрической системе s (X и Y - прямоугольные видимые координаты, выраженные в угловых единицах, причем ось X направлена вдоль видимой большой оси галактики, а Y - вдоль малой оси); скорость вращения некоторых подсистем V_θ ; дисперсию скоростей звезд σ и звездный состав (для ядра галактики). Кроме того можно изучить распределение и физические свойства отдельных ярких звезд.

Для моделирования галактики необходимо ввести упрощающие предположения. В данном цикле работ допускается, что галактика М31 может быть разделена на конечное число физически однородных составляющих, поверхности равных пространственных плотностей которых являются подобными соосными эллипсоидами вращения. Отношение полуосей эллипсоидов разных составляющих ε может быть разным, плотность изменяется плавно.

Так как основные функции описания являются аддитивными (кроме V_θ и σ), то для упрощения будем писать их уравнения связи не для суммарных величин, а для отдельных составляющих.

Пусть $\rho(x,y,z)$ - пространственная плотность массы составляющей и $l_s(x,y,z)$ - пространственная плотность светимости в фотометрической системе s (x, y и z - прямоугольные галактоцентрические координаты, ось z направлена вдоль оси системы). При указанных выше допущениях

$$\rho(x,y,z) = \rho(a) = f_s\, l_s(a), \qquad (2.1)$$

где

$$a^2 = x^2 + y^2 + \varepsilon^{-2} z^2 \qquad (2.2)$$

и f_s - отношение массы к светимости данной составляющей. Функции плотности связаны с функциями массы $\mu(a)$ и светимости $h_s(a)$ формулами [I]

$$\mu(a) = 4\pi\varepsilon a^2 \rho(a) \qquad (2.3)$$

и

$$h_s(a) = 4\pi\varepsilon a^2 \ell_s(a). \qquad (2.4)$$

Спроектированная плотность светимости выражается в нашем случае формулой [I]

$$L_s(A) = \frac{1}{2\pi E} \int_A^\infty \frac{h_s(a)\,da}{a\sqrt{a^2 - A^2}}, \qquad (2.5)$$

где

$$A^2 = X^2 + E^{-2} Y^2 \qquad (2.6)$$

$$E^2 = \cos^2 i + \varepsilon^2 \sin^2 i, \qquad (2.7)$$

причем i - угол между осями и лучом зрения.

Скорость вращения составляющей V_θ и круговая скорость V, обусловленная системой в целом, связаны между собой формулой [2]

$$V_\theta^2 + q\sigma_R^2 = V^2, \qquad (2.8)$$

где σ_R -дисперсия скоростей звезд составляющей в радиальном направлении ($R^2 = x^2 + y^2$), а параметр q выражается так

$$-q = \left(1 - \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_R^2}\right) + R\left(1 - \frac{\sigma_z^2}{\sigma_R^2}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial z} + G\{\rho(R)\} + G\{\sigma_R^2(R)\}. \qquad (2.9)$$

В последней формуле для логарифмического градиента использовано обозначение

$$R\frac{\partial \alpha}{\partial z} = -\frac{1}{4} G\{\rho_t(R)\} \qquad (2.I1)$$

α - угол наклона вертекса к плоскости симметрии системы (вне плоскости $\alpha \neq 0$).

Выражение для q в виде (2.9) неудобно для практических применений, так как ни отношения дисперсии скоростей, ни градиент угла α не могут быть непосредственно найдены из наблюдений. При преобразовании выражения q будем пользоваться найденными Г.Г.Куэминым [2, 3] соотношениями

$$G\{f(R)\} = \frac{\partial \ln f(R)}{\partial \ln R}, \qquad (2.10)$$

($\rho_t(R)$ - тотальная плотность галактики) и

$$\frac{1}{\sigma_z^2} = \frac{1}{\sigma_\theta^2} + \frac{1}{\sigma_R^2}, \qquad (2.12)$$

а также формулой Линдблада

$$\frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_R^2} = \frac{-B}{A-B}. \qquad (2.13)$$

Формулы (2.11) - (2.13) выведены для плоских подсистем. Однако вычисления показывают, что в окрестностях Солнца эти формулы могут быть применены и для менее сплюснутых подсистем. Поэтому можно допустить, что использование этих формул при построении модели галактики ИЗИ не связано с большими погрешностями.

В формуле Линдблада для плоских подсистем оортовские параметры A и B могут быть выражены через круговую скорость $\omega(R) = V_\theta / R$ и логарифмический градиент функции скорости $G\{\nu(R)\}$, причем функция скорости определяется формулой [I]

$$\nu(R) = \frac{V^2 R}{G}, \qquad (2.14)$$

где G - гравитационная постоянная. Имеем

$$A(R) = \omega(R) = \frac{3 - G\{\nu(R)\}}{4} \qquad (2.15)$$

и

$$B(R) = -\omega(R)\,\frac{1 + G\{\nu(R)\}}{4}, \qquad (2.16)$$

откуда вместо (2.I3) и (2.I2) получим

$$k_\theta = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_R^2} = \frac{1+G\{\nu(R)\}}{4} \qquad (2.17)$$

$$k_z = \frac{\sigma_z^2}{\sigma_R^2} = \frac{1+G\{\nu(R)\}}{5+G\{\nu(R)\}} . \qquad (2.18)$$

Итак, для q после этих преобразований имеем

$$-q = \frac{3-G\{\nu\}}{4} - \frac{G\{\rho_+\}}{5+G\{\nu\}} + G\{\rho\} + G\{\sigma_R^2\} . \qquad (2.19)$$

Это же выражение годится и для сферических подсистем, если считать $V_\theta \sim V$. При строгом рассмотрении в выражении q круговую скорость надо заменить скоростью вращения подсистемы V_θ .

Функция скорости $\nu(R)$ связана с функцией массы уравнением [I]

$$\nu(R) = \int_0^R \frac{\mu(a)\,da}{\sqrt{1-\left(\frac{ea}{R}\right)^2}} , \qquad (2.20)$$

где $e^2 = I - \varepsilon^2$.

Наконец, используем еще уравнение Пуассона [4]

$$4\pi G \rho_t = C^2 - 2(A^2 - B^2) , \qquad (2.21)$$

причем C – параметр Кузмина. Последний выражается в случае плоских подсистем формулой

$$C = \sigma_z / \zeta , \qquad (2.22)$$

где σ_z и ζ – дисперсии z -скоростей и z -координат звезд.

3. Выбор формы основной функции описания. Модель распределения массы и светимости галактики полностью определена, если известно распределение светимости ее подсистем, а также отношение массы к светимости подсистем. Тогда по формулам (2.I), (2.4) и (2.5) может быть найдено распределение массы системы, а по формулам (2.3) и (2.20) – ход круговой скорости. Ввиду пропорциональности ρ и ℓ_s в этом разделе

будем писать формулы только для одной из них - ρ .

Для построения гидродинамической модели, кроме функции распределения массы и связанных с ней функций, должен быть известен еще ход скорости вращения или дисперсии скоростей подсистем. Тогда по формулам (2.8), (2.I2) и (2.I3) могут быть вычислены другие интересующие нас гидродинамические функции. Уравнение Пуассона (2.2I) позволяет проверить полученные результаты.

Итак, гидродинамическая модель полностью определена заданием функций $\rho(a)$, $V_\theta(R)$ и параметров ε и f всех составляющих галактики.

Репрезентативность модели существенно зависит от выбора вида указанных основных функций описания. Естественно требовать, чтобы эти функции описания не имели резких скачков и изломов, чтобы $\rho(a) \geqslant 0$ и $\sigma_R^2(R) \geqslant 0$. Так как реальные звездные системы имеют конечные размеры (вследствие возмущающего действия соседних систем), то желательно выбрать для $\rho(a)$ выражение, достаточно быстро убывающее с увеличением a . С другой стороны, $\rho(a)$ не должно убывать слишком быстро, так как в таком случае круговое движение неустойчиво.

Учитывая все эти соображения, мы выбрали для $\rho(a)$ обобщенное экспоненциальное выражение [5, 6]

$$\rho(a) = \rho_0 \exp\left[-\left(\frac{a}{a_0 k}\right)^\nu\right], \qquad (3.1)$$

где ρ_0 и a_0 - масштабные параметры центральной плотности и радиуса, k - безразмерный нормирующий параметр (см. [6]), и ν - структурный параметр модели, определяющий концентрацию массы к центру. В число структурных параметров модели через a входит и ε , определяющее толщину модели.

В случае плоской составляющей простая эллипсоидальная модель плохо представляет распределение плотности. Известно, что в центральных областях галактик нет представителей плоских подсистем - эмиссионных туманностей и звездных ассоциаций [7, 8]. Чтобы учесть это обстоятельство в нашей модели, мы использовали искусственный прием: плотность со-

ставляющей была вычтена как разность двух эллипсоидальных моделей

$$\rho(a) = \rho_+ (a | a_0, \rho_0, \nu, \varepsilon) - \rho_- \left(a \middle| \frac{a_0}{\varkappa}, \rho_0, \nu, \varkappa\varepsilon\right), \qquad (3.2)$$

где $\varkappa > 1$. При таком $\rho(a)$ автоматически $\rho_{R=0}(z) = 0$. При подходящем выборе $\rho(a)$ соблюдаются еще условия $\rho(a) \geqslant 0$ и $\partial\rho/\partial z^2 < 0$ при $z \neq 0$.

В рамках предварительной модели галактики M3I достаточно задать гидродинамические функции только для сферической составляющей - ядра. В этом случае скорость вращения сферической составляющей может быть представлена формулой [9]

$$V_\theta = V_0 \frac{R}{\left[1 + \left(\frac{R}{R_0}\right)^n\right]^{3/2n}}. \qquad (3.3)$$

4. Наблюдательный материал. а) Фотометрические данные о распределении яркости вдоль большой и малой осей галактики M3I были собраны из всех доступных источников. Были использованы только данные, которые можно было привести к системе *UBV* (см. [I0, II]). Для построения составной модели было бы желательно иметь фотометрические данные в разных цветах. Достаточно широкий интервал яркости охватывают, однако, лишь данные в синих лучах, поэтому пришлось ограничиться одной фотометрической системой B. Из фотометрических наблюдений использованы результаты Редмана и Пирли [I2], Фринсе [I3], Джонсона [I4], Рихтера и Хегнера [I5], из фотоэлектрических наблюдений - данные Тиссена [I6] и Вокулера [I0].

Для образования сводной кривой распределения яркости галактики M3I данные по *NE* и *SW* половинам большой оси, а также по *NW* и *SE* половинам малой оси были объединены и соответствующие яркости усреднены. Согласие между *NE* и *SW* полуосями повсюду хорошее. Согласие же между *NW* и *SE* полуосями менее хорошее, особенно в области сильного поглощения *NW* полуоси на расстоянии 4'.5 до I7' от центра. В рамках предварительной модели M3I указанная область была исключена. Не было учтено и общее равномерное поглощение

ни в нашей Галактике, ни в галактике М31.

Выведенные сводные значения спроектированной светимости по большой оси указаны на рис. 1 точками. На рис. 2 приведено изменение отношения полуосей изофот E. В качестве аргумента фигурирует $R^{1/3}$, причем угловое расстояние от центра системы по большой оси выражено в минутах дуги.

б) **Скорость вращения** была определена по оптическим [17 – 20] и радиоданным [21 – 25]. В области ядра ($R \leq 10'$) были использованы только оптические данные, так как скорость быстро изменяется и радионаблюдения имеют слишком малое разрешение. В диапазоне $10' < R \leq 50'$ были использованы как оптические, так и радиоданные, в области $R > 50'$ – только радиоданные как более точные. Взаимная согласованность радиоданных, полученных разными авторами, очень хорошая. Для скорости центроида галактики в целом было выбрано значение – 300 км/сек. При таком выборе лучше всего согласуются области максимальной скорости по обеим сторонам от центра.

Найденные сводные скорости вращения изображены на рис. 3 и 4 точками.

в) **Расстояние** галактики М31 было принято $d = 692$ кпс, в соответствии с истинным модулем расстояния $(m-M)_0 = 24.2$ [26].

г) **Наклон** галактики был определен по ходу видимого отношения полуосей изофот E и по видимому распределению эмиссионных туманностей [7]. Найденное значение $i = 77^\circ.2$ хорошо согласуется с оценкой Бааде $i = 77^\circ.3$ (см. [27]) и недавними результатами Арпа $74^0 \leq i \leq 79^0$ [7].

д) **Дополнительные данные** могут быть получены для центральных, наиболее ярких областей системы. Дисперсия скоростей звезд ядра по Минковскому равна $\sigma_R = 225$ км/сек [28], а отношение массы к светимости по Спинраду получается равным $f = 16.7$ [29].

5. Построение модели при фиксированном аналитическом виде основных функций описания сводится к определению модель-параметров этих функций. В данном случае для всех четырех составляющих модели нужно найти следующие параметры:

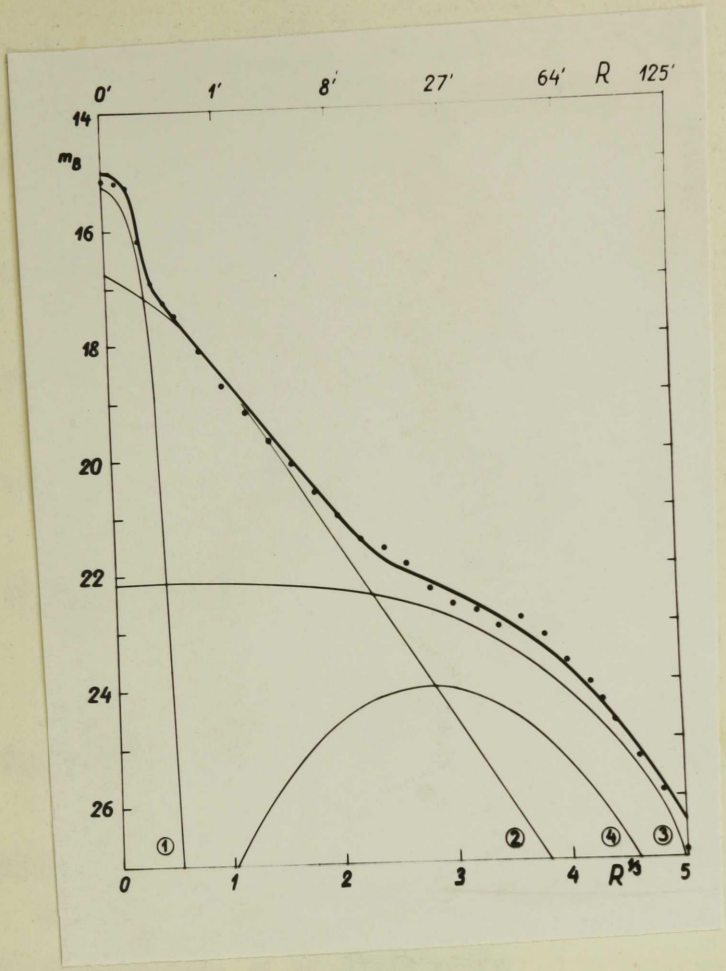


Рис. I. Распределение яркости по большой оси M3I. Составляющие обозначены: I - нуклеус, 2 - ядро, 3 - диск, 4 - плоская составляющая.

а) масштабные параметры ℓ_0 и a_0 ; б) структурные параметры ν и ε ; в) динамический параметр f .

Для сферической составляющей (ядра) кроме того нужно знать еще параметры закона вращения (3.3).

Анализ наблюдательного материала показал, что как масштабные, так и структурные параметры составляющих не могут быть достаточно уверенно найдены по скорости вращения. На скорость вращения, кроме распределения масс, влияют еще относительные движения звезд. Работа Бокулера [I0] показывает, что параметры модели вполне успешно могут быть найдены по фотометрическим данным.

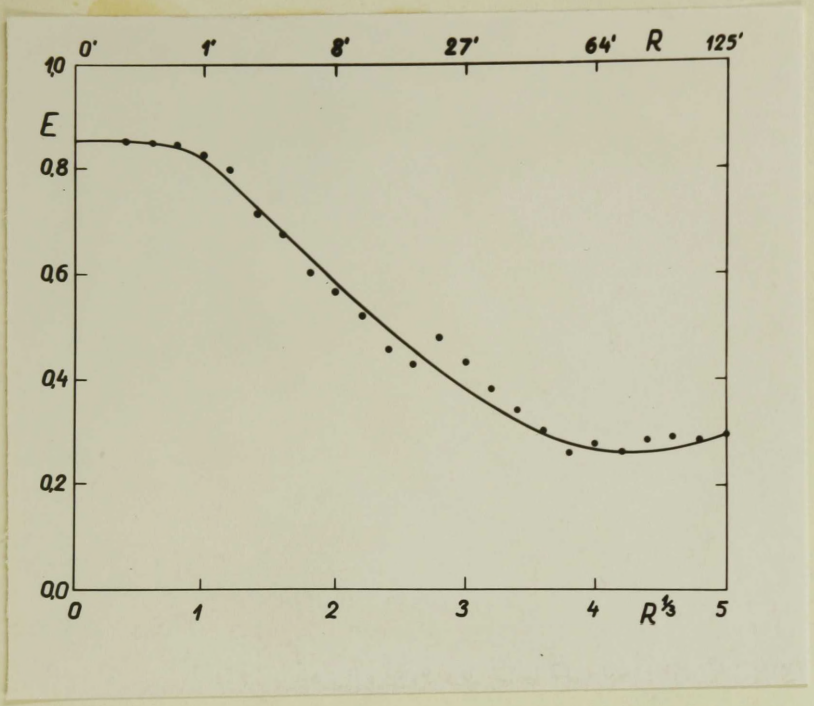


Рис. 2. Распределение отношения полуосей изофот.

Учитывая вышеизложенное, мы определили параметры l_0, a_0, ν_0 и ε по фотометрическому материалу. Практическая процедура сводилась к следующему.

На электронном вычислителе для ряда значений параметра ν были найдены нормированные функции спроектированной плотности $L^0(\alpha)$ и функции скорости $v^0(\alpha)$, причем α – безразмерное нормированное расстояние (большая полуось). Нормирование было выполнено так, чтобы моменты порядка – I и 0 функции массы $\mu^0(\alpha)$ были равны единице (см. [5]).

Найденные функции $L^0(\alpha)$ были нанесены на график в логарифмической шкале $\lg L^0(\lg\alpha)$. Аналогичные графики были составлены и для спроектированной светимости МЗГ по большой и малой осям.

Так как масштабные преобразования (смещения на логарифмической шкале) не изменяют форму кривой $\lg L(\lg a)$, то параметр ν может быть просто найден по совпадению формы вычисленной кривой из общего их семейства с наблюденной. Масштабные параметры l_0 и a_0 получаются подбором вертикального и горизонтального смещения вычисленной кривой для получения ее совпадения с наблюденной. Параметр видимой сплюснутости E определяется по сравнению распределения

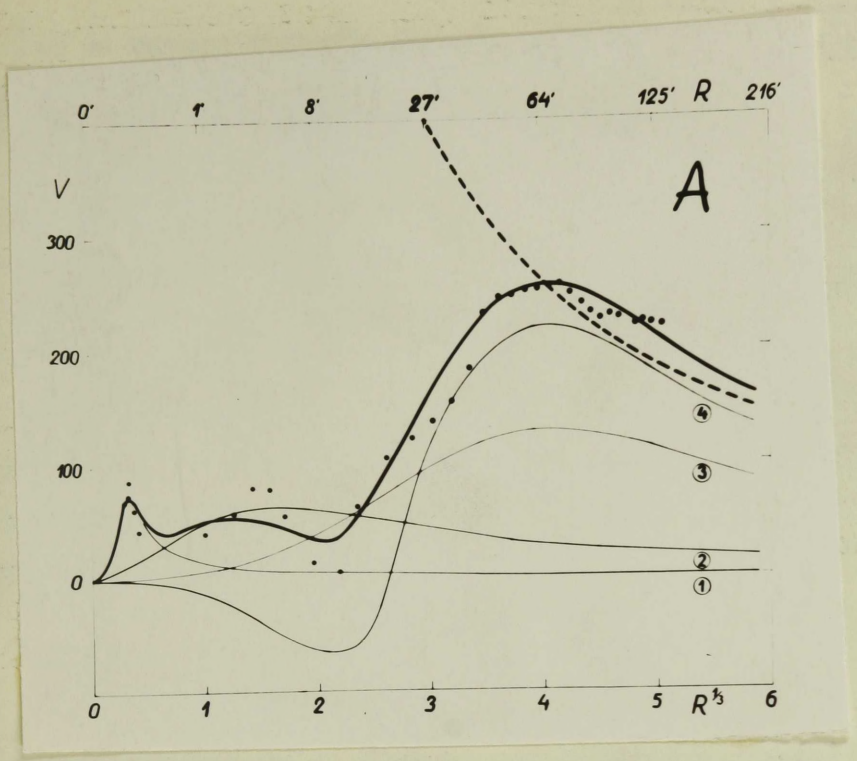


Рис. 3. Распределение круговой скорости. Массы составляющих приняты по варианту А (см. табл. I). При вычислении функции скорости по (2.20) принята модель плоского диска ($e = 1$). Скорости даются в км/сек.

светимости малой оси с распределением на большой оси. Истинное отношение полуосей ε вычисляется по формуле (2.7).

Единственная практическая трудность при таком способе определения параметров заключается в том, что одновременно нужно найти параметры для всех четырех составляющих систем. Однако распределение плотности компонент весьма различно – на это указывает ход общей яркости (см. рис. I). Уже после некоторых проб удалось найти удовлетворительные значения параметров.

Указанный путь не применим для нахождения параметра плоской составляющей. В этом случае ε был подобран так, чтобы получить разумный ход эффективной полутолщины составляющей

$$z_e = \frac{1}{2}\frac{P(R)}{\rho(R)}, \qquad (5.I)$$

где $P(R)$ – спроектированная на плоскость симметрии системы плотность массы.

Полученные значения параметров даны в табл. I. Найденная модель изображена графически на рис. I и 2. На первом из них тонкой линией указан вклад отдельных составляющих в общую светимость (по большой оси), а жирной линией дан суммарный вычисленный ход светимости. Видим, что согласие модели с наблюдениями (точки) весьма хорошее. Различия вызваны тем, что наша модель плоской составляющей не описывает индивидуальные спиральные ветви, а только общую структуру составляющей.

Таблица I

Величина	Нуклеус	Ядро	Диск	Плоская +	сост. –	Σ
ν	I	0.25	I	I	I	
k	0.5	$1.263\ 10^{-4}$	0.5	0.5	0.5	
ε	0.84	0.57	0.09	0.0I	0.02	
a_o	0.025	5	50	40	20	
l_o	$8.7\ 10^{-3}$	$2.10\ 10^{-3}$	$2.I7\ 10^{-2}$	0.I40	0.I40	
L	0.003	4.95	6.46	2.29	0.57	I3.I3
m A	0.009	2.4	58	I88	47	20I
m B	0.05	85.5	III.5	5.73	I.43	20I
f A	2.5	0.5	9	82	82	I5.3
f B	I7.3	I7.3	I7.3	2.5	2.5	I5.3

Единицы измерения $L_\odot/pc^3$

$10^9 L_\odot$

$10^9 m_\odot$

Отношение массы к светимости может быть определено двумя способами: А) по скорости вращения; В) по спектральным наблюдениям и другим независимым источникам.

При первом способе обычно считается, что скорость вращения равна круговой скорости $V_\theta = V$. Практически метод состоит в выборке путем проб таких значений f, которые приводят (при фиксированных параметрах a_0), вычисленные кривые скорости в согласие с наблюденной кривой вращения. Найденные значения f приведены в табл. I (вариант А), соответствующие кривые вращения изображены на рис. 3. Как и на рис. I, тонкие линии указывают вклад отдельных составляющих, жирная линия - общую вычисленную кривую вращения, а точки - наблюдения. Прерывистой линией дана кеплеровская кривая вращения, соответствующая точечному источнику с массой, равной массе нашей модели. Видим, что теоретическая кривая весьма хорошо представляет наблюдения.

Следует сказать, что модель плоской составляющей имеет тороидообразный вид. Внутри тороида вектор притяжения направлен не к центру системы, а к ближайшей стороне тороида. Поэтому в этой области функция скорости отрицательна и круговое движение невозможно (если нет других составляющих, компенсирующих отрицательную область функции скорости). На рис. 3 и 4 эта область вклада составляющей на кривую вращения показана прерывистой линией.

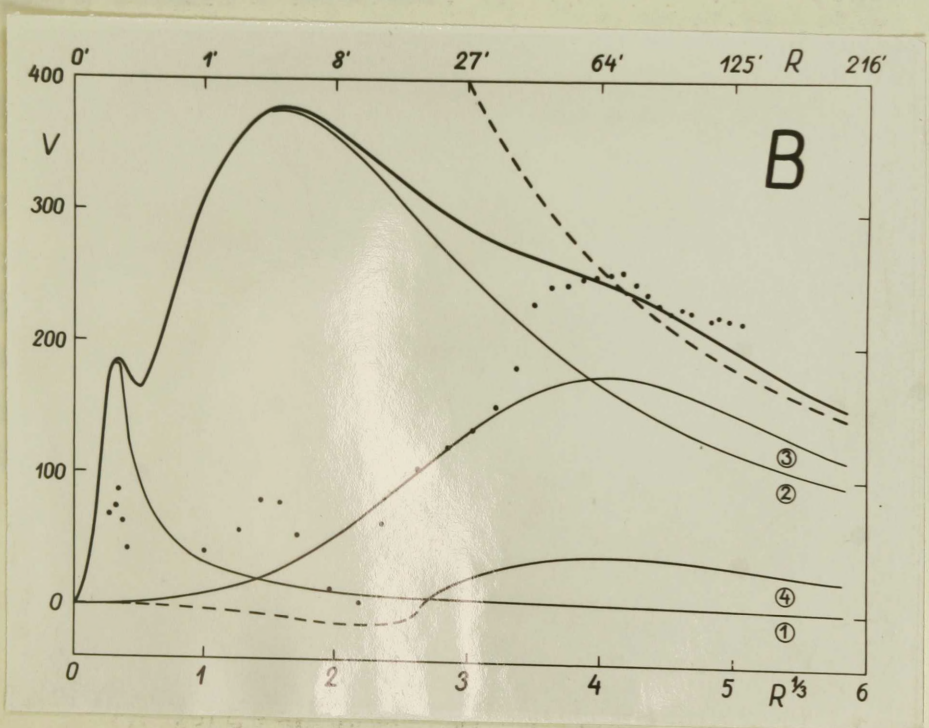


Рис. 4. Распределение круговой скорости; вариант В.

Во втором варианте параметры были найдены следующим образом. Для ядра галактики M3I f был получен Спинрадом по спектральным наблюдениям [29] $f = 16.\mathrm{V}$. Плоская составляющая состоит в основном из водорода, масса которого по [2I, 23 - 25] может быть принята равной $\mathcal{M} = 3.7\ 10^9 \mathcal{M}_\odot$. Масса звезд плоской составляющей может быть оценена по интегральной светимости составляющей и начальной функции светимости и массы [30, 3I]. В итоге мы получили для массы составляющей $\mathcal{M} = 4.3\ 10^9 \mathcal{M}_\odot$. Так как $L = I.72\ 10^9 L_\odot$, то $f = 2.5$. Зная светимость всех составляющих и f ядра и плоской составляющей, нетрудно вычислить f диска. Результат почти точно совпадает с найденным Спинрадом значением f для ядра. Поэтому мы приняли, что все составляющие, кроме плоской имеют одинаковое отноше ие массы к светимости (вариант В в табл. I). Соответствующие кривые вращения даны на рис. 4.

В этом варианте в области $R < 50'$ круговая скорость заметно больше скорости вращения и достигает при $R = 4'$ максимального значения $V = 380$ км/сек. Наблюденная скорость вращения при $R = 4'$ составляет всего $V_\theta = 80$ км/сек. Возникает вопрос, может ли смещение центроида скорости достигать такого большого значения $\Delta V = V - V_\theta = 300$ км/сек?

Вычисления по формулам (2.8) и (2.I9) показали, что в пределах точности исходных данных найденное смещение действительно может быть объяснено. На рис. 5 изображен один возможный вариант хода скорости вращений V_θ и дисперсии скоростей σ_R эфрической составляющей M3I. Для V_0 принималася закон (3.3), σ_R определялась по формуле (2.8). При вычислениях мы учитывали, что наблюденные V_θ и σ_R меньше действительных максимальных их значений. Это вызвано тем, что мы наблюдаем некоторое среднее значение дисперсии и скорости [32]

$$V_\theta(R) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} V_\theta(R,Z)\,\ell(R,Z)\,dZ}{\int_{-\infty}^{+\infty} \ell(R,Z)\,dZ}, \qquad (5.2)$$

где Z - координата вдоль луча зрения. В области $R < I0'$ кроме того необходимо было немного изменить ход градиента

плотности, что в пределах точности имеющихся данных также вполне допустимо.

Мы пришли к выводу, что в варианте В динамическое определение f согласуется со спектральным.

Вычисленные значения функции описания приведены в табл. 2. Буквой V_k обозначена критическая скорость, вычисленная по функции скорости $v(R)$, с использованием формулы [5]

$$V_k^2(R) = 2\int_R^\infty \frac{v(X)dX}{X^2} . \qquad (5.3)$$

В таблице приводятся также логарифмические градиенты плотности составляющих $G\{\rho(R)\}$. Обычно используемые в исследованиях нашей Галактики градиенты $m(R) = -\partial \lg \rho(R)/\partial R$ могут быть легко получены по формуле

$$m(R) = -\frac{Mod}{R} G\{\rho(R)\} . \qquad (5.4)$$

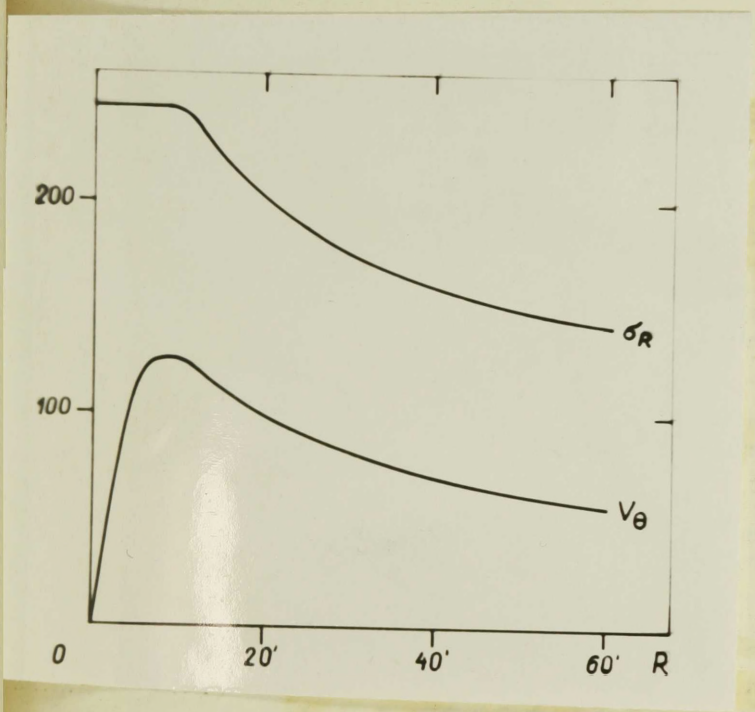


Рис. 5. Вычисленная скорость вращения V_θ и дисперсии скоростей σ_R звезд сферической составляющей.

Таблица 2

R		G(ρ)			ρ	P	V	V_k	A	B	C	k_y	k_z
'	кпс	2	3	4	$\mathfrak{M}_\odot/пс^3$	$\mathfrak{M}_\odot/пс^2$	км/сек		км/сек/кпс				
0	0	0.0	0.0	0.0	$1.9\cdot10^5$	$7.6\cdot10^5$	0	1041	0	55700	64500	1.000	0.500
5	1	2.4	0.2	0.1	3.29	3880	377	720	194	181	433	0.483	0.326
10	2	2.8	0.4	0.1	0.82	1350	351	613	102	73	234	0.418	0.295
15	3	3.1	0.6	0.0	0.44	720	326	579	65	43	169	0.397	0.284
20	4	3.3	0.8	0.2	0.31	473	308	540	46	30	138	0.398	0.284
25	5	3.5	1.0	0.4	0.237	345	297	502	35	24	119	0.406	0.289
30	6	3.7	1.2	0.7	0.188	269	284	475	28	20	104	0.415	0.293
35	7	3.8	1.4	1.0	0.151	216	278	453	23	17	93	0.420	0.296
40	8	4.0	1.6	1.3	0.122	176	272	432	20	14	83	0.423	0.297
45	9	4.1	1.8	1.6	0.098	145	267	414	17	12	75	0.425	0.298
50	10	4.2	2.0	1.9	0.079	120	262	399	15.1	11.0	67	0.420	0.296
55	11	4.3	2.2	2.3	0.064	99	258	383	13.7	9.6	60	0.410	0.291
60	12	4.4	2.4	2.6	0.051	79	254	370	12.7	8.5	54	0.401	0.286
65	13	4.5	2.6	2.9	0.042	69	251	359	11.8	7.4	49	0.385	0.278
70	14	4.6	2.8	3.2	0.034	58	245	348	11.0	6.5	44	0.373	0.272
75	15	4.6	3.0	3.5	0.028	48	241	334	10.3	5.7	40	0.359	0.264
80	16	4.7	3.2	3.8	0.022	40	237	323	9.6	5.2	36	0.350	0.259
85	17	4.8	3.4	4.1	0.018	33	233	315	9.0	4.6	33	0.335	0.251
90	18	4.8	3.6	4.4	0.014	28	228	307	8.6	4.0	30	0.321	0.243
95	19	4.9	3.8	4.6	0.012	23	224	299	8.1	3.6	27	0.311	0.237
100	20	5.0	4.0	4.9	0.0093	19.4	220	291	7.64	3.26	24.5	0.299	0.230
110	22	5.1	4.4	5.4	0.0060	13.4	211	278	6.93	2.61	20.2	0.274	0.215
120	24	5.2	4.8	6.0	0.0040	9.3	202	264	6.22	2.15	16.8	0.257	0.204
130	26	5.3	5.2	6.5	0.0026	6.5	195	255	5.62	1.84	14.1	0.246	0.198
140	28	5.4	5.6	7.0	0.0017	4.5	187	245	5.10	1.55	11.9	0.233	0.189
150	30	5.5	6.0	7.5	0.0011	3.1	180	237	4.64	1.33	10.1	0.222	0.182
160	32	5.6	6.4	8.0	0.0008	2.0	174	228	4.24	1.18	8.6	0.218	0.179
170	34	5.7	6.8	8.5	0.0005	1.7	168	222	3.87	1.05	7.4	0.214	0.176
180	36	5.8	7.2	9.0	0.0003	1.2	162	216	3.53	0.94	6.4	0.211	0.175
190	38	5.9	7.6	9.5	0.0002	0.7	158	210	3.27	0.87	5.7	0.210	0.174

17.16

Из таблицы видны, что значения функций описания галактики Андромеды на расстоянии 10 кпс от центра очень хорошо согласуются с системой локальных околосолнечных параметров в нашей Галактике [33].

б) Анализ модели. Прежде чем приступить к анализу полученных результатов, приводим основные результаты некоторых разработанных ранее моделей.

а) Сравнение с результатами других авторов. Вычисленные по моделям [9, 24, 25, 27, 34 - 38], а также по настоящей модели (вариант В) массы галактики МЗГ приведены в табл. 3; для некоторых из этих моделей на рис. 6 дано изменение круговой скорости с расстоянием. Точки обозначают принятые нами значения скорости вращения.

Таблица 3

Автор	n*	d(kpc)	m^{**} $10^9 m_\odot$	$m(d=690 kpc)$ $[10^9 m_\odot]$
Lohmann [34]	3/2	460	330	500
Schwarzschild [35]	-	460	140	210
Schmidt [27]	-	630	338	370
Takase [36]	-	540	200	260
Poveda [37]	-	500	200	280
Brandt [38]	3/2	600	370	430
Brandt, Scheer [9]	3/2, 3, 10	630	580	640
Gottesman et al. [24]	3/2	630	480	530
Roberts [25]	3/2	690	220	220
	3	690	220	220
Einasto et al.	-	690	200	200

* n - структурный параметр обобщенного закона Боттлингера (3.3).

** В работах [34 - 37] дополнительной причиной разброса оценок массы являются большие различия в кривых вращения, полученных по оптическим данным.

На рис. 7 и 8 приведены соответствующие функции массы

$$\mu_t(t) = (1+a)^2 \mu(a) = (1+a)^2 \sum_{k=1}^{n} \mu_k(a) \qquad (6.1)$$

и спроектированная на плоскость симметрии системы плотность массы

$$\rho_t(t) = 2\pi a (1+a^2)^2 P(a) = 2\pi a (1+a)^2 \sum_{k=1}^{n} \rho_k(a), \qquad (6.2)$$

В этих формулах n – число составляющих данной модели и

$$t = \frac{a}{1+a}, \qquad (6.3)$$

причем a выражено в градусах. Замена координат проведена с целью более наглядного представления распределения плотности на периферии модели.

Сравнение моделей показывает, что в распределении массы имеют место различия как внутри модели, так и в периферийных областях ее. Различия первого вида изменяют ход параметра f; общая масса системы $\mathcal{M}$ от них мало зависит. Различия второго вида влияют как на ход f, так и на массу системы $\mathcal{M}$. На подобные различия мы указали уже во введении. Так как эти различия вызваны разными причинами, рассмотрим их отдельно.

б) **Структура внутренних областей модели** определяется в значительной степени способом обработки – будет ли смещение скорости центроида учтено или нет. В большинстве цитированных выше работ, как и в нашем варианте А, наличие смещения игнорировалось. Такой способ обработки вызывает следующие возражения.

1) Во внутренних областях галактики преобладает второе население, звезды которого имеют большую дисперсию скоростей. Это подтверждается и непосредственными определениями дисперсии. Поэтому в уравнении (2.8) второй член слева больше первого и пренебрежение им не оправдано.

2) Допущение $V_\theta = V$ приводит к тому, что в центральных областях галактики отношение массы к светимости f мало (см. [27], а также табл. I и рис. 9, вариант А).

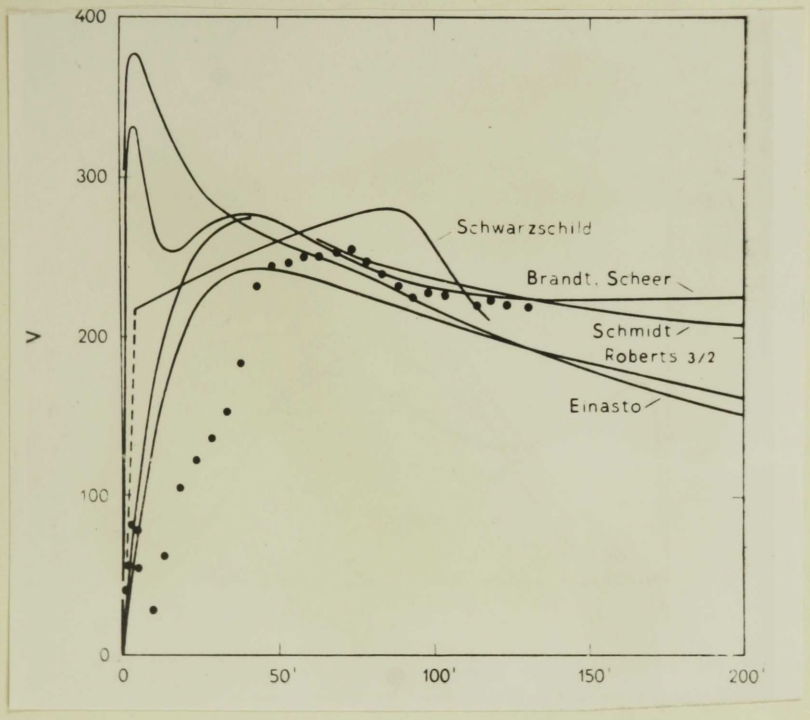


Рис. 6. Круговая скорость моделей Шварцшильда [35], Брандта и Шера [9], Шмидта [27], Робертса [25] ($n = 3/2$) и настоящей модели (вариант В).

Исследование эллиптических галактик показывает, что отношение массы к светимости звезд второго населения имеет достаточно большое значение ($f > 10$). Это подтверждается и непосредственными спектральными наблюдениями [29]. Следовательно, допущение $V_\theta = V$ приводит в центральных областях галактик к неприемлемым значениям отношения массы к светимости.

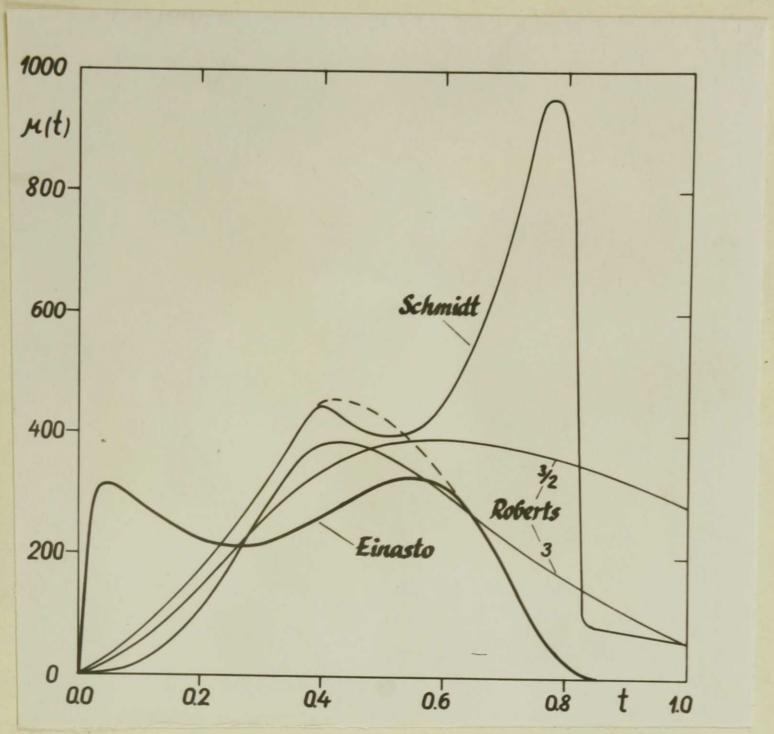


Рис. 7. Распределение функции массы модели Шмидта [27], Робертса [25] ($n = 3/2$) и настоящей модели (вариант В). Функция массы выражена в $10^9\ m_\odot$. Если функцию массы модели Шмидта экстраполировать по прерывистой линии, то ее масса не отличается от массы настоящей модели.

Мы приходим к заключению, что вариант А не может быть принят. Вариант же В приводит, как мы видели выше, к распределению массы, которое приемлемо как с динамической, так и с физической точки зрения. Отсюда следует, что концентрация массы к центру МЗГ значительно большая, чем считалось ранее.

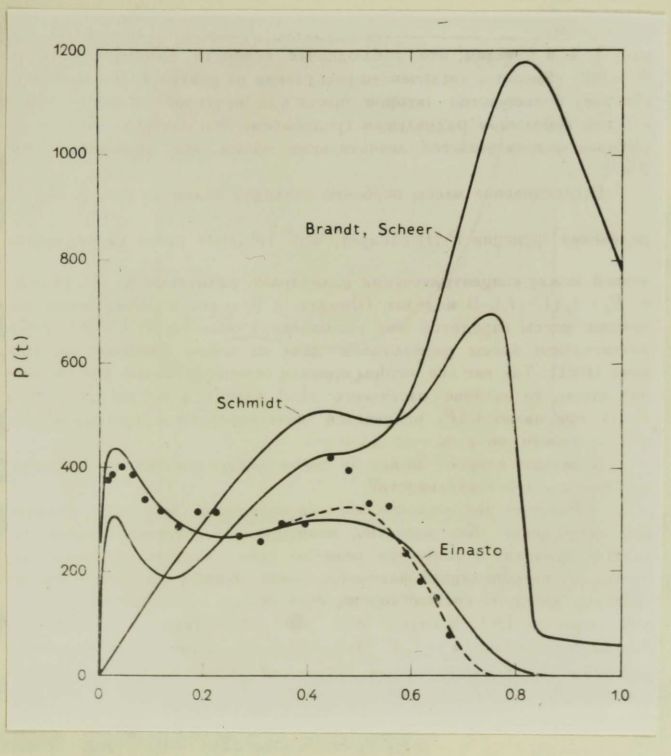


Рис. 8. Распределение спроектированной плотности моделей Брандта и Шера [9], Шмидта [27] и настоящей модели (единица $10^9 \mathcal{M}_\odot$).

в) Структура внешних областей модели определяется в основном законом экстраполяции функции скорости. Экстраполяция может быть произведена двумя способами – по функции скорости или по функции массы (вычисляя функцию скорости уже по известному распределению массы).

В работах по исследованию структуры галактик обычно применяется первый из указанных способов. При этом экстраполяция выполняется тем или иным законом хода круговой скорости, параметры которого подбираются по доступному набло-

денным диапазону R . На рис. 3, 4, и 6 видно, что наблюденная скорость НЗГ при $R > 100'$ убывает с увеличением расстояния от центра очень медленно. Поэтому большинство авторов брали ход круговой скорости такие с очень небольшим радиальным градиентом. Это означает, что на периферии модели имеются значительные массы, как показывает рис. 7 и 8.

Распределение массы особенно наглядно видно на рис. 8. По определении функции $P_t(t)$ следует, что $\int_{t_1}^{t_2} P_t(t)dt$ равен массе, заключенной между концентрическими цилиндрами радиусами $R_1 = t_1(1-t_1)$ и $R_2 = t_2(1-t_2)$. В моделях Шмидта Брандта и Шер более половины массы находится вне наблюденной области $R > 2^0$ ($t > 0.67$), значительные массы распределены далее на очень больших расстояниях ($t \approx 1$). Так как все авторы принимали эллипсоидальные распределения масс, то наличие массивного гало влияет и на распределение $P_t(t)$ при малых t (P_t получается интегрированием пространственной плотности по z от $-\infty$ до $+\infty$).

Возникает вопрос, может ли такое распределение массы соответствовать действительности?

Наличие значительных масс на периферии встречает следующее возражение. Как известно, возмущающее действие соседних галактик приводит к тому, что размеры всех галактик конечны. Полученные экстраполяцией фотометрических данных радиусы (внешние границы) звездных систем хорошо согласуются с динамической оценкой радиусов [39]. В случае НЗГ фотометрический радиус системы получается порядка $R = 150'$. Маловероятно, чтобы галактики имели "невидимое" массивное гало за пределами фотометрической границы системы. В противном случае мы получили бы на периферии галактик фантастически большие значения отношения массы к светимости f , как видно на рис. 9 в случае модели Шмита. Допущение значительного увеличения f на периферии модели требует для своего объяснения наличия активного механизма "рассортировки" звезд по массам, что представляется маловероятным.

Если принимать распределение массы согласно нашей модели, то вычисленный радиальный градиент круговой скорости при $R > 100'$ больше наблюдаемого градиента скорости вращения.

Нам кажется, что в данном случае имеет место локальное отклонение движения объектов плоской составляющей от кругового движения. Отклонения порядка 5 - 10 км/сек от кругового движения имеют место и в нашей Галактике. Подобными отклонениями можно объяснить и отмеченную многими авторами асимметрию кривой скорости [24, 25].

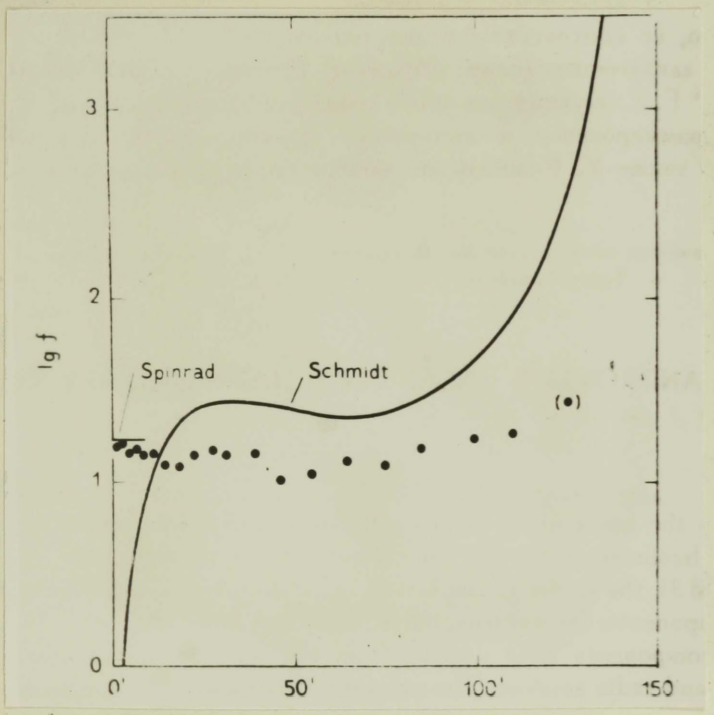


Рис. 9. Зависимость от расстояния логарифма отношения массы к светимости модели Шмидта [27] и настоящей модели.

Вычисленные по фотометрическому материалу плотности $P_t(t)$ в допущении постоянного отношения массы к светимости $f = 15.3$ показаны на рис. 8 точками. Сравнение нашей модели с фотометрическими данными показывает, что даже наша модель имеет слишком большое гало. Это можно было ожидать, так как мы приняли неограниченный экспоненциальный закон для плотности. Предполагаемый действительный ход спроектированной плотности показан прерывистой линией.

Различия между нашей моделью и точками на рис. 8 очевидно вызваны тем, что параметр f не постоянен, а имеет локальные

отклонения, в частности, в спиральных ветвях. Совмещая точки с вычисленной кривой $P_t(t)$ можем получить "наблюденные" значения f. Они показаны в логарифмической шкале на рис. 9 (точки). Видим, что допущение о постоянстве среднего f неплохо выполняется. Области минимумов f соответствуют основным спиральным ветвям галактики.

Итак, мы приходим к заключению, что увеличение на периферии, а также приведенные рядом авторов большие массы галактики М31, вероятно, не соответствуют действительности.

Май 1968.

Литература

1. Я.Эйнасто, Публ. Тарт. АО, 36, 357, 1968.
2. Г.Г.Кузмин, Бюлл. Абастуманской астрофиз. обс., 27, 89, 1962.
3. Г.Г.Кузмин, Публ. Тарт. АО, 33, 351, 1961.
4. Г.Г.Кузмин, Публ. Тарт. АО, 32, 5, 1952.
5. Я.Эйнасто, Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР, 5, 87, 1965.
6. Я.Эйнасто, Публ. Тарт. АО, 36, 414, 1968.
7. H.Arp, Ap.J., 139, 1045, 1964.
8. S. van den Bergh, Ap.J., Suppl. Ser. 9, 65, 1964.
9. J.C.Brandt, L.S.Schemr, A.J., 70, 471, 1965.
10. G. de Vaucouleurs, Ap.J., 128, 465, 1958.
11. T.D.Kinman, Ap.J., 142, 1376, 1965.
12. R.O.Redman, E.G.Shirley, M.N., 97, 416, 1937.
13. W.Fricke, Z.Astrophys., 34, 137, 1954.
14. H.M.Johnson, Ap.J., 133, 309, 1961.
15. N.Richter, W.Högner, Astr. Nachr., 287, 261, 1963.
16. G.Thiessen, Mem. Liege, 15, 411, 1955.
17. H.W.Babcock, Lick Obs. Bull., No. 498, 1939.
18. A.B.Wyse, N.U.Mayall, Ap.J., 95, 24, 1942.
19. N.U.Mayall, Publ. Obs. Univ. Michigan, 10, 19, 1951.
20. A.Lallemand, M.Duchesne, M.Walker, P.A.S.P., 72, 78, 1960.
21. H.C. van de Hulst, E.Raimond, H.van Woerder, BAN, 14, No. 480, 1, 1957.

22. B.F.Burke, K.C.Turker, M.A.Tuve, A.J., 68, 274, 1963.
23. E.Argyle, Ap.J., 141, 750, 1965.
24. S.T.Cottesmann, R.D.Davies, V.C.Reddish, M.N., 133, 359, 1966.
25. M.S.Roberts, Ap.J., 144, 639, 1966.
26. W.Baade, H.H.Swope, A.J., 68, 435, 1963.
27. M.Schmidt, BAN, 14, No.480, 17, 1957.
28. R.L.Minkovski, Ann.Rept.Mt.Wilson-Palomar Obs., 26, 1954.
29. H.Spinrad, P.A.S.P., 78, 367, 1966.
30. E.E.Salpeter, Ap.J., 121, 161, 1955.
31. A.Sandage, Ap.J., 125, 422, 1957.
32. C.J. van Houten, BAN, 16, No. 509, 1961.
33. B.J.Bok, Internat. Astr. Union Draft Reports, 677, 1967.
34. W.Lohmann, Z.Astrophys., 35, 159, 1954.
35. M.Schwarzschild, A.J., 59, 273, 1954.
36. B.Takase, Publ. astr. Soc. Japan, 9, 16, 1957.
37. A.Poveda, Bol. Obs. Tonanzintla Tacubaya, 17, 3, 1958.
38. J.C.Brandt, Ap.J., 131, 293, 1960.
39. I.King, A.J., 67, 471, 1962.

ГЛАВА II

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ *

I. Введение. В предыдущей работе серии [I] был изложен способ построения гидродинамической модели галактики по заданному распределению массы. В этом способе учитывается теорема третьего интеграла движения звезд и теория иррегулярных гравитационных сил. Способ пригоден для вычисления кинематических функций описания как на плоскости галактики, так и вне ее.

Целью настоящей работы является определение кинематических функций для галактики Андромеды. У нас нет пока полной уверенности в том, пригодны ли использованные в первой работе серии [2] выражения для плотности составляющих во всем диапазоне расстояний. Поэтому в данной работе мы введем лишь предварительные значения кинематических функций галактики М3I и выясним необходимость исправления исходной модели распределения массы.

Для решения поставленной задачи мы будем использовать описанную в работе [I] методику. При этом нет необходимости вычислять кинематические функции во всем объеме пространства, достаточно определить их для плоскости и оси галактики, что сильно упрощает задачу. Дисперсия на плоскости может быть найдена по дифференциальной формуле (2.3.I)**, минуя интегрирования по z и вычисления вертикального ускорения для всего диапазона z. На оси галактики задача также упро-

*Опубликовано в Астрофизике, 6, 241 - 259, 1970 под названием "Галактика Андромеды М3I. III. Гидродинамическая модель. Результаты". (Соавтор У.Риммель).

**Первая цифра указывает на номер предыдущей статьи данной серии (гл. II).

цается, так как нет необходимости вычислять скорость составляющей, равную здесь нулю.

2. Определение вспомогательных функций.

А. Функция γ вычислялась по формуле (2.4.3), причем усредненные значения $\overline{z_0^2}$ определялись по (2.5.9), с использованием составной плоской модели Кузмина. Параметры этой модели приведены в таблице I. Они найдены так, чтобы масса составной модели Кузмина равнялась массе нашей модели, а значения потенциала в плоскости $z = 0$ по возможности точнее совпадали. Изолинии $\overline{z_0^2}$ и γ изображены на рис. I сплошными линиями. Прерывистыми линиями нанесены соответствующие изолинии при постоянном z_0. В этом случае в качестве эффективного z_0 бралось 0.5 кпс, что соответствует точке $\overline{z_0^2}(0,z) = z^2$ на оси $R = 0$.

Дальнейшие вычисления мы сделали в двух вариантах - для постоянного z_0, приняв $z_0 = 0.5$ кпс и $\overline{z_0^2} = \overline{z_0^2}(R,z)$ согласно результатам, полученным по составной модели Кузмина.

На больших расстояниях от центра функция $z_0^2(R,z)$ становится отрицательной. Это вызвано тем, что на периферии галактики плотность убывает быстрее, чем в модели Кузмина.

Из формулы (2.4.3) следует, что

$$n_R = R\left(\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{R^2}{R^2 + z_0^2}. \qquad (2.1)$$

С другой стороны, для модели Кузмина

$$G_R\{\rho\} = -4\frac{R^2}{R^2+z_0^2}. \qquad (2.2)$$

Сравнивая (2.1) и (2.2) с (2.2.16), видим, что последняя формула, которая в общем случае приближенная, является для плоской модели Кузмина точной. Если $G_R\{\rho_+\} < -4$ (на периферии галактики это всегда имеет место), то $n_R > 1$ и $z_0^2 < 0$.

Б. Функции k_θ и k_z были вычислены в нескольких вариантах.

Табл. I

i	z_{oi} кпс	$G m_i$ $(км/сек)^2$ кпс	$\Phi_i(0,0)$ $(км/сек)^2$
I	0.05	0.05×10^4	1×10^4
2	0.5	I7.5	35
3	2	20	I0
4	8	72	9
5	30	-23	-0.8

Табл. 2

z_0 кпс	$f(z_0)$	n	x_0 кпс
0	I.0	-	-
0.5	I.5	I.5	3.66
0.5	2.0	I	4.38

В плоскости галактики для плоской и промежуточной составляющей было принято $V_\theta \sim V_c$, а для сферической составляющей V_θ вычислялась по формуле (I.3.3). Функции k_θ и k_z были найдены в первом случае по (2.2.3) и (2.2.17), во втором случае - по (2.2.3) в предположении, что $k_z = k_\theta$.

На оси галактики $k_\theta = I$, а k_z вычислялось по (2.5.3), причем функция $f(x)$ принималась в трех вариантах. Параметры этой функции даны в табл. 2. В одном варианте мы приняли $z_0 = 0$, в остальных вариантах $z_0 = 0{,}5$ кпс. При малых x была использована интерполяционная формула

$$f(x) = \frac{1 + a(x/x_0)^n}{[1 + (x/x_0)^n]^2}, \qquad (2.3)$$

параметры которой даны в табл. 2.

3. Выражение для дисперсии скоростей на периферии модели. Определение дисперсии скоростей на периферии модели непосредственным численным интегрированием второго гидродинамического уравнения неудобно. Характер зависимости дисперсии скоростей от расстояния может быть установлен более простым образом.

На периферии модели вертикальное притяжение меняется вдоль оси галактики приближенно по закону

$$K_z = \frac{G\mathfrak{M}}{z^2}, \qquad (3.1)$$

где G - гравитационная постоянная и $\mathfrak{M}$ - полная масса галактики. Рассмотрим несколько законов плотности

$$\rho(z) = \rho_0 z^{-m},$$

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-(z/z_0)^2},$$

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 (z_1 - z)^m, & z \le z_1, \\ 0, & z \ge z_1. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Дисперсия скоростей в джинсовском приближении вычисляется по формуле

$$(\sigma_z^2)_0 = \rho^{-1} \int_z^\infty K_z \rho dz . \qquad (3.3)$$

После интегрирования массы в первом варианте (индекс нуль при дисперсии опускаем)

$$\sigma_z^2 = \frac{G\mathfrak{M}}{1+m} \frac{1}{z}, \qquad (3.4)$$

во втором варианте (см. формулы (3.351.4) и (8.215) в [4])

$$\sigma_z^2 = \frac{NG\mathfrak{M}}{z}\left(\frac{z_0}{z}\right)^\nu \left[1-(1+N)\left(\frac{z_0}{z}\right)^\nu + (1+N)(2+N)\left(\frac{z_0}{z}\right)^{2\nu} - \dots\right], \qquad (3.5)$$

причем $N = \nu^{-1}$, и в третьем варианте

$$\sigma_z^2 = \frac{G\mathfrak{M}}{z_1}\left[\frac{1}{1+m}\frac{z_1-z}{z_1} + \frac{2}{2+m}\left(\frac{z_1-z}{z_1}\right)^2 + \dots\right]. \qquad (3.6)$$

Найденные формулы показывают, что характер изменения дисперсии скоростей существенно зависит от закона плотности, а при данном законе плотности – от его структурных параметров.

4. Дисперсия скоростей на оси галактики определялась по формуле (2.1.5). На оси системы $G_R\{\rho\} = G_R\{1-K_z\} = 0$ и $G_R\{\gamma\} = 1$; следовательно, коэффициент q формулы (2.1.5) на оси выражается так:

$$q^* = \left(\frac{q}{R}\right)_{R=0} = \frac{2z}{z_0^2 - z^2}\left(\frac{1}{K_z} - 1\right). \qquad (4.1)$$

Уравнение (2.1.5) решается последовательными приближениями. Нулевое (джинсовское) приближение получаем, приняв $q^* = 0$ (3.3). Следующие приближения вычисляются по формуле

$$(\sigma_z^2)_j = (\sigma_z^2)_0 + \rho^{-1} q^* \rho (\sigma_z^2)_{j-1} dz . \qquad (4.3)$$

Процесс последовательных приближений сходится весьма медленно. Для ускорения сходимости целесообразно применить следующий способ. Вычисления показали, что $\Delta_j = (\sigma_z^2)_j - (\sigma_z^2)_{j-1}$

является с достаточной высокой точностью линейной функцией $(\sigma_z^2)_j$. Это позволяет найти исправленное значение дисперсии $(\sigma_z^2)_k$ как место, где разность Δ_j равна нулю. Следовательно для $(\sigma_z^2)_k$ имеем

$$(\sigma_z^2)_k = (\sigma_z^2)_j + \frac{\Delta_j^2}{\Delta_{j-1} - \Delta_j} . \qquad (4.4)$$

Проверка показала, что для всех составляющих галактики уже при $j = 2$ можно получить хорошую оценку дисперсии (относительная ошибка не превышает 0,I %).

Дисперсия определялась для трех составляющих галактики (плоская составляющая на оси $R = 0$ отсутствует). Была найдена также средняя дисперсия

$$\sigma_z^2 = \frac{\Sigma \rho_i (\sigma_z^2)_i}{\Sigma \rho_i} . \qquad (4.5)$$

Результаты приводятся на рисунке 2. Чтобы лучше проследить за изменением дисперсии при малых z, вместо z в качестве аргумента выбрано $z^{1/3}$. При больших z ($z \gg 25$ пс) дисперсия экстраполировалась по формуле (3.5).

На рис. 3 изображена зависимость средней дисперсии $\overline{\sigma_z^2}$ от выбора функции $f(x)$. Видно, что варианты $= 2$ и $f(z_0) = 1{,}5$ мало отличаются друг от друга, вариант же $f(z_0) = 1$ резко отличается от остальных. В качестве основного мы приняли вариант $f(z_0) = 2$.

<u>5. Дисперсия скоростей и скорость центроида в плоскости симметрии галактики.</u> Дисперсия скоростей в плоскости галактики была вычислена из второго гидродинамического уравнения в дифференциальном виде (2.3.I), а скорость центроида – из первого гидродинамического уравнения (2.I.4). Вспомогательные функции k_θ, k_z, n_R были найдены по (2.I), (2.2.3), (2.2.I7) и (2.5.9). Отметим, что градиент плотности экспоненциальной модели выражается формулой (см. 5)

$$G_R\{\rho\} = -\nu k^{-\nu} \left| \frac{R}{a_0} \right|^{\nu} , \qquad (5.I)$$

где k, ν и a_0 – соответственно нормирующий, структурный и масштабный параметр модели. Функции, определяющие

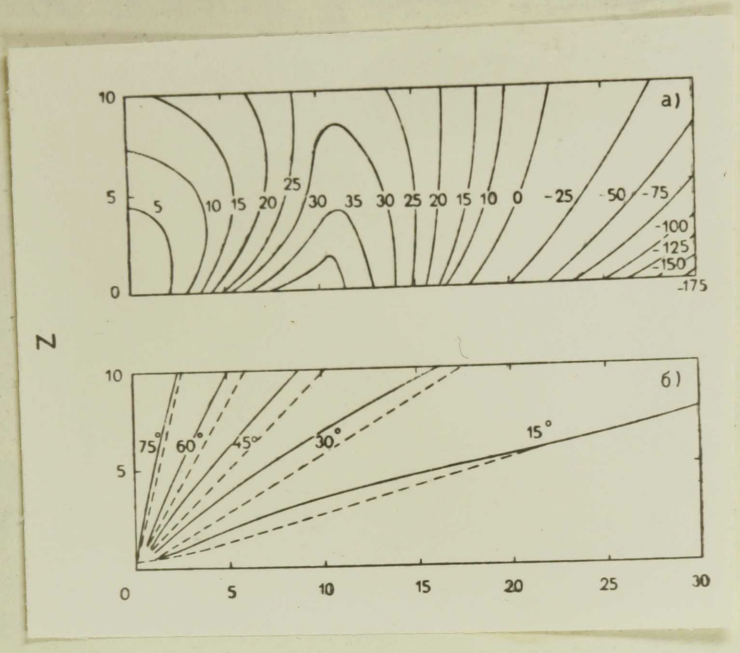


Рис. 1а. Изолинии $\overline{z_0^2}$. б. Изолинии α при $\overline{z_0^2} = \overline{z_0^2}(R, z)$ (сплошные линии) и при $z_0 = 0.5$ кпс (прерывистые линии).

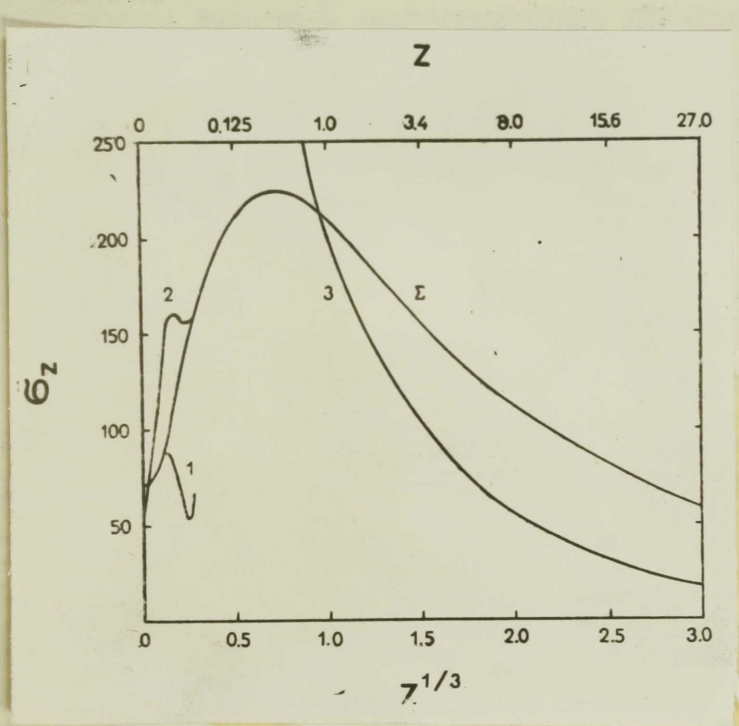


Рис. 2. Вертикальная дисперсия скоростей составляющих МЗГ на оси галактики: I – нуклеус, 2 – ядро и гало, 3 – диск, Σ – галактика в целом.

форму и расположение эллипсоида скоростей, вычислялись, как было указано в § 2, в других вариантах, в предположении, что $z_0 = 0.5$ кпс и $z_0^2 = \overline{z_0^2}(R,z)$.

Дисперсию скоростей нужно искать последовательными приближениями, так как коэффициент Q формулы (2.3.2) зависит от градиента $G_R(\sigma_z^2)$. В нулевом приближении этот градиент был принят равным нулю, в следующих приближениях вычислен согласно результатам предыдущего приближения; отношение изоповерхностей дисперсии ε_σ определялось из сравнения дисперсий на оси и плоскости галактики, при допущении (согласно [6]), что эти поверхности являются в первом приближении эллипсоидами вращения. Вычисления проводились для плоской, промежуточной (диск) и сферической (ядро с гало) составляющей галактики.

Ход дисперсии определяется при заданном гравитационном поле функцией Q (2.3.2). Для плоской и промежуточной составляющей преобладает второй член Q, в первом случае - настолько, что остальными членами можно пренебречь. Фактически дисперсия плоской составляющей определяется формулой (2.3.6). Так как первый и третий член Q малы, то нет необходимости вычислять их с большой точностью. Принятие постоянного z_0 и общего для этих составляющих k_θ и k_z, найденных при допущении $V_\theta \sim V_c$, вполне определяет себя.

Иначе обстоит дело для сферической составляющей. Все члены Q имеют одинаковый порядок. Результат для дисперсии существенно зависит от того, какие значения приняты для функций k_θ, k_z, γ и параметров ε_ϱ, ε_σ (см. 2.3.4) и (2.3.5). В первом варианте вычислений мы приняли $z_0 = 0.5$ кпс, $V_\theta \sim V_c$, $\varepsilon_\varrho = 0.97$ и $\varepsilon_\sigma > 1$ (ε_σ вычислялась на основании сравнения дисперсий на оси и в плоскости). Результаты оказались неудовлетворительными. Как в вертикальном, так и в радиальном направлении дисперсия получилась слишком большой.

Правильность вертикальной дисперсии можно проверить по формуле (2.3.11). В этой формуле фигурирует средняя дисперсия скоростей [см. (4.5)] в линзовском приближении. Дисперсии скоростей звезд плоской и промежуточной составляющей установлены достаточно надежно, так что несовпадение

результатов можно отнести в основном за счет точности дисперсии сферической составляющей.

Радиальная дисперсия скоростей входит в первое гидродинамическое уравнение (2.I.4). По результатам первого варианта получается при $R > 4 - p\sigma_R^2 > V_c^2$, что физически не возможно в стационарных системах.

Более реальные значения гидродинамических функций для сферической составляющей могут быть выведены следующим образом.

Скорость вращения сферической составляющей может быть задана некоторой интерполяционной формулой, например вида (I.3.3). Параметры этой формулы можно подобрать так, чтобы получить максимум V_θ в области максимальных значений круговой скорости V_c , а на расстоянии $R = I0$ кпс от центра иметь V_θ , сходное с тем, что наблюдается в нашей Галактике в окрестности Солнца. Мы остановились на следующих значениях параметров: $n = 0.5$; $R_0 = 0.2$ кпс, $V_0 = 5260$ км/сек/кпс.

Кинематические функции k_z и n_R вычислялись по (2.2.3) и (2.I). Параметр $\overline{z_c^2}$ считался переменной величиной (см. § 2), а функция k_z - равной функции k_θ . Дисперсии вычислялись по (2.I.4). Затем по σ_R и k_z вычислялись дисперсии σ_z и вспомогательная функция Q .

Полученные значения Q в среднем в два раза больше найденных в первом варианте. Расхождение можно объяснить следующим образом. Реальная галактика состоит не из трех, а из большого количества подсистем. Рассматриваемая нами сферическая составляющая представляет целую совокупность подсистем старых звезд. Вблизи плоскости галактики преобладают более сплюснутые подсистемы, вследствие чего изолинии объемной плотности составляющей имеют около плоскости $z = 0$ несколько большую кривизну, т.е. меньшее эффективное значение ε_ρ , что и вызывает увеличение Q .

Результаты вычислений даны на рис. 4 - 6.

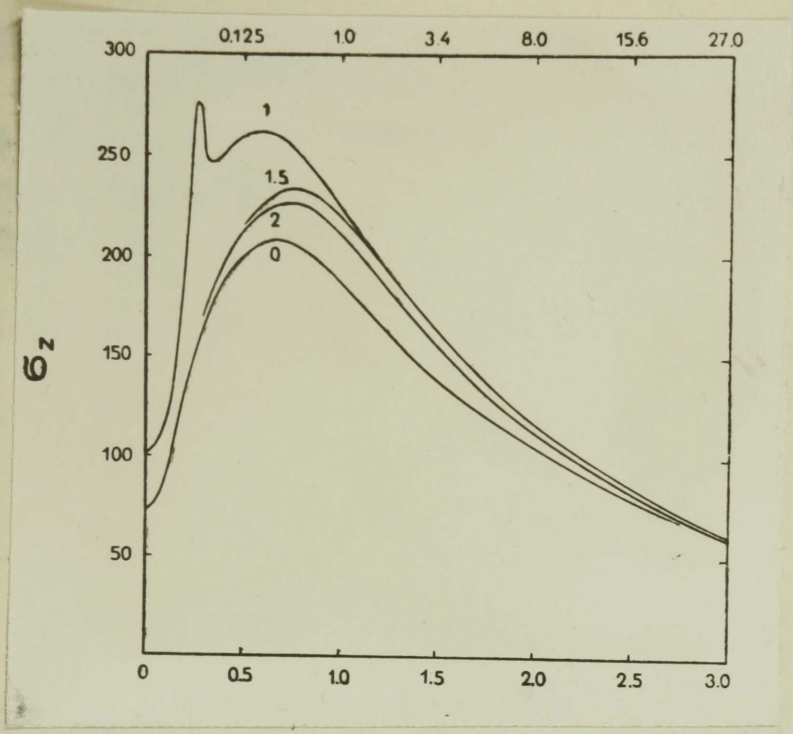


Рис. 3. Вертикальная средняя дисперсия скоростей на оси галактики: 0 - джинсовское приближение, I, I,5, 2 - значения $f(z_0)$.

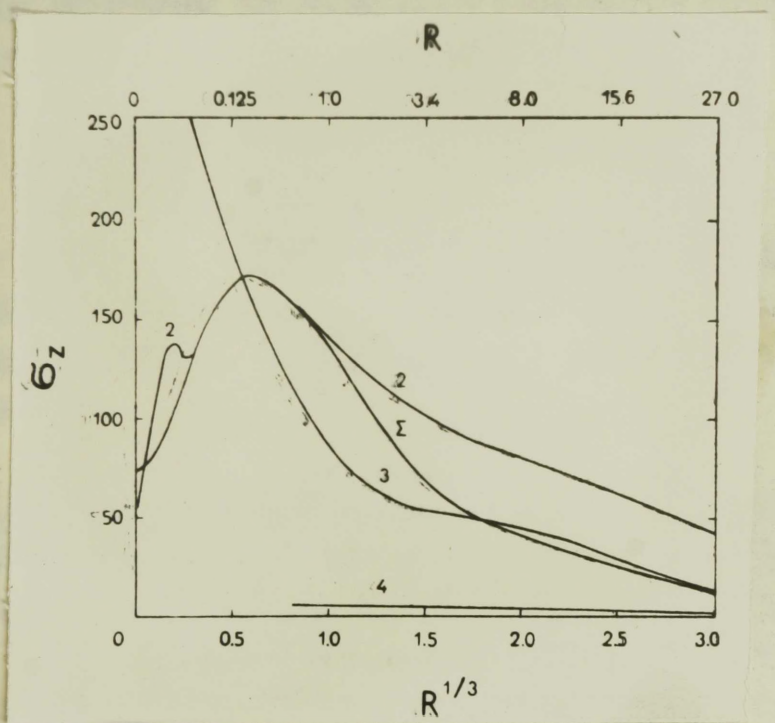


Рис. 4. Вертикальная дисперсия скоростей составляющих и ЗI на плоскости галактики: 2 - ядро и гало, 3 - диск, 4 - плоская составляющая, Σ - галактика в целом.

6. Кинетическая энергия и угловой момент составляющих. Допустим, членуя [9 – 11], что как дисперсия скоростей, так и скорость вращения не зависит от z. В таком предположении кинетическая энергия и угловой момент могут быть вычислены по формулам

$$E(R) = \frac{1}{2} P_R(R) \left(\sigma_R^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_z^2 + V_\theta^2\right), \qquad (6.1)$$

$$H(R) = R P_R(R) V_\theta(R), \qquad (6.2)$$

где

$$P_R(R) = 2\pi R P(R) \qquad (6.3)$$

– масса цилиндрического слоя единичной толщины и $P(R)$ – спроектированная на плоскость галактики плотность.

На рис. 7 и 8 изображено распределение удельной кинетической энергии $E/\mathcal{M}$ и удельного углового момента $H/\mathcal{M}$ для трех основных составляющих галактики М31. В качестве аргумента использована величина

$$t = \frac{R/R_0}{1 + R/R_0}, \qquad (6.4)$$

причем взято $R_0 = 10$ кпс. Кривые дают кинетическую энергию и угловой момент на единичный интервал аргумента t. Интегрированные по t полные кинетические энергии и угловые моменты даны в табл. 3.

7. Анализ результатов. Найденные кинематические функции соответствуют в пределах точности использованной методики обработки предложенной в работе [2] модели распределения масс. Чтобы выяснить, какие исходные параметры модели требуют уточнения, нужно сравнить полученные кинематические характеристики с прямыми или косвенными данными о кинематической структуре М31.

а) Дисперсии скоростей всех составляющих соответствуют в общих чертах тому, что можно было ожидать по аналогии с кинематической структурой нашей Галактики. Исключением является лишь центральная область галактики М31, где дисперсия неожиданно имеет глубокий

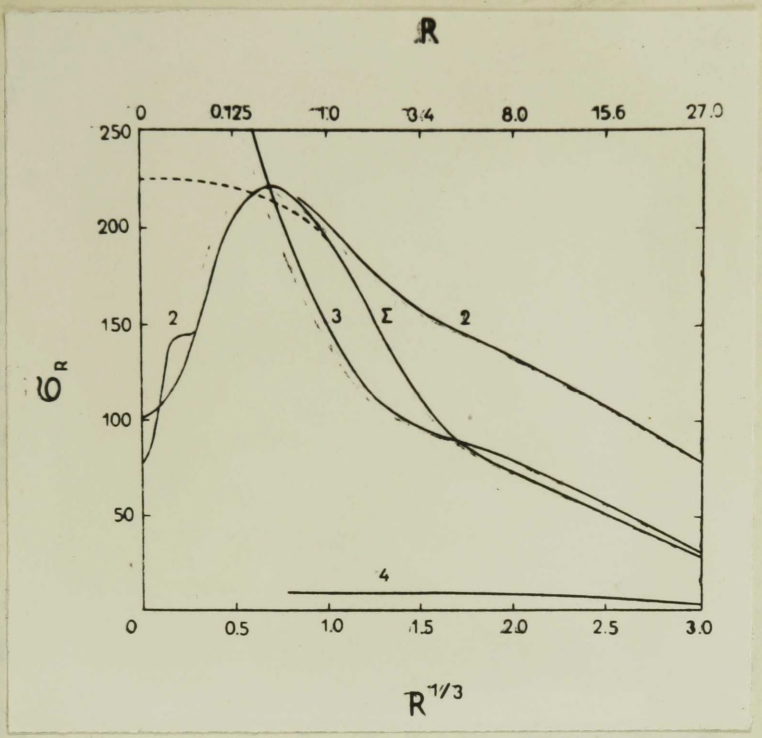


Рис. 5. Радиальная дисперсия скоростей составляющих галактики М31. Обозначения составляющих те же, что на рис. 4. Прерывистая линия – предполагаемая средняя дисперсия при малых R.

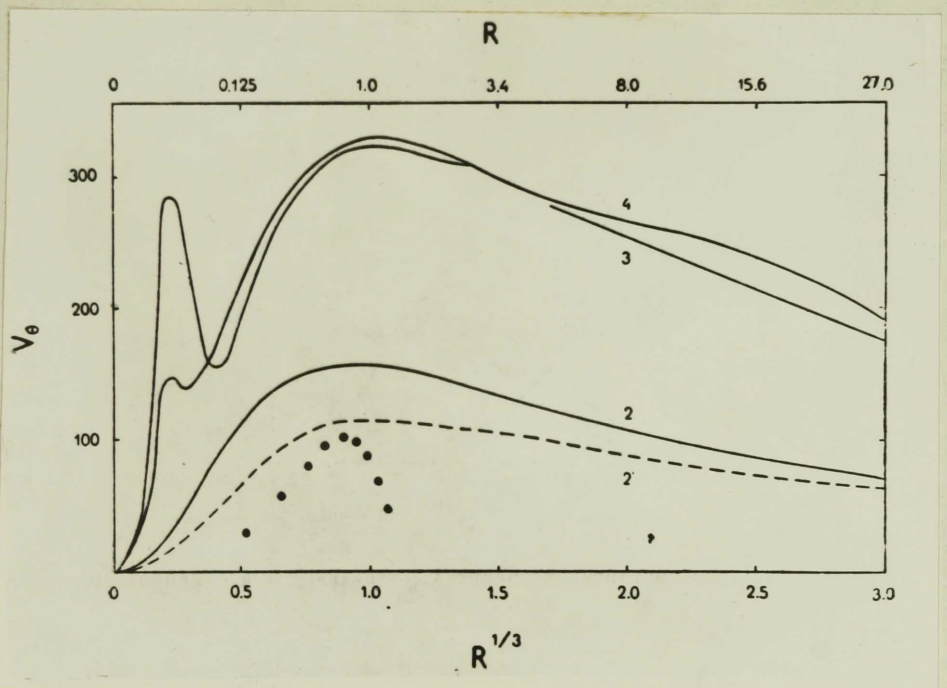


Рис. 6. Скорость центроида составляющих. Усредненная по лучу зрения скорость вращения второй составляющей изображена пунктиром, точки – наблюдения.

Таблица 3

Величина	Единица	Ядро	Диск	Плоская	Галактика в целом
m	$10^9\ m_\odot$	85.5	111.5	4.3	201.3
E	10^{59} эрг	0.705	0.760	0.028	1.493
E/m	10^4 (км/сек)^2	4.14	3.43	3.29	3.73
H	10^{13}(км/сек)кпс	3.20	28.2	1.14	32.5
H/m	10^2(км/сек)кпс$/m_\odot$	3.74	25.3	26.5	16.2

минимум, а также внешняя область системы, где уменьшение с увеличением расстояния от центра гораздо медленнее ожидаемого.

Чрезмерно медленное уменьшение дисперсии на периферии объясняется тем, что исходная модель имеет бесконечный внешний радиус. Этот недостаток может быть устранен отрезанием внешней части модели.

Дисперсии лучевых скоростей в центре М31 определяются из наблюдений и равна по [7] $\sigma_R(0,0) = 225$ км/сек. В нашей модели средняя дисперсия в центре получается только около 100 км/сек. Это расхождение может быть объяснено неправильным выбором градиента плотности и отношения массы к светимости в центральной области модели.

Время релаксации звездно-звездных сближений в центральной области галактики имеет порядок 10^9 лет. Это время достаточно короткое для того, чтобы в центральной области образовалось почти изотермическое ядро. Поэтому можно предположить, что дисперсия при уменьшении монотонно приближается к центральному значению $\sigma_R(0,0) = 225$ км/сек. Предполагаемый ход средней дисперсии указан на рис. 5 прерывистой кривой.

Отметим, что волны на ходе дисперсии (и скорости центроида) при малых z вызваны почти скачкообразным изменением градиента функций K_R и K_z при $a = 0.02$ кпс. Эти волны исчезают, если выбрать функции K_R и K_z более гладкими.

б) Скорость центроида может быть получена из наблюдений для сферической составляющей в области $R < 3$ кпс, а для плоской составляющей - в области

$R > 4$ кпс.

Сравнение модели с радио-данными о вращении НЗГ (плоская составляющая), выполненное в работе [2], показало хорошее согласие между ними.

Найденное по модели асимметричное смещение скорости центроида $\Delta V = V_c - V_\theta$ около $R = 10$ кпс хорошо согласуется с аналогичными данными в нашей Галактике. Это относится как к промежуточной, так и к сферической составляющей.

Сравнение модели с наблюдениями для сферической составляющей проведено на рис. 6. Непрерывной линией дан принятый в модели ход скорости вращения, прерывистой линией – усредненная по лучу зрения радиальная составляющая скорости, точками – оптические наблюдения [8]. Видно, что скорости по модели систематически больше наблюденных значений. Это расхождение было бы нетрудно устранить изменением соответствующего масштабного параметра V_0 закона скорости. В таком случае, однако, в области $R = 10$ кпс смещение центроида ΔV получается неправдоподобно большим (около 190 км/сек). На 40 % уменьшается и без того малый удельный угловой момент сферической составляющей (см. § 6). Поэтому вопрос о выборе параметров закона вращения сферической составляющей нельзя считать окончательно решенным.

Весьма странно ведет себя скорость вращения промежуточной составляющей при $R \leq 0.05$ кпс, где $V_\theta > V_c$. Странным представляется такое сильное увеличение дисперсии скоростей этой составляющей в центральной области галактики. Динамически это можно объяснить тем, что большинство звезд составляющей находится около ядра галактики лишь временно, будучи вблизи перигалактия своих орбит. Такое объяснение, хотя динамически возможное, маловероятно с космогонической точки зрения. Видимо, здесь мы опять встречаемся с недостатком модели – при другом выборе параметра ν закона плотности можно было бы избежать такого результата.

в) **Кинетическая энергия и угловой момент** получились в общих чертах такими, какие можно было ожидать по имеющимся кинематическим данным.

Следует обратить внимание на то, что удельный угловой

момент сферической составляющей в 4,5 раза меньше среднего удельного углового момента Галактики в целом.

Как известно, угловой момент в течение эволюции галактики внутренними силами не меняется, а внешние силы вряд ли могли так сильно повлиять на кинематику системы. Можно допустить, что при конденсации звезд из газа передается и соответствующий момент. Большая разница в моменте объясняется, по-видимому, тем, что образование звезд началось в первой фазе развития галактики лишь в центральной части ее, где момент был меньше среднего. Другое возможное объяснение - потеря внешних областей сферической составляющей вследствие возмущений со стороны других галактик.

Март 1969

Литература

I. Я.Эйнасто, Астрофизика 6, 81, I970.
2. Я.Эйнасто, Астрофизика 5, I37, I969.
3. Г.Г.Кузмин, Астр. ж. 33, 27, I956.
4. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, Москва, I962.
5. Я.Эйнасто, Публ. Тартуской астр. обс. 36 , 4I4, I968.
6. K.A.Innanen, D.R.Fox, z.f.Ap. 66, 308, 1967.
7. R.Minkovski. Problems of Extra-galactic Research. IAU Symp. No. 15, 112, Ed.G.C.McVittie, MacMillan Co, New York, 1962.
8. H.Babcock, Lick Bull. No. 498, 1939.
9. L.Mestal, Monthly Not. R.A.S. 126, 553, 1963.
10. D.J.Crampin, F.Hoyle. Astroph. J. 140, 99, 1964.
11. K.A.Innanen, Astroph. J. 143, 150, 1966.

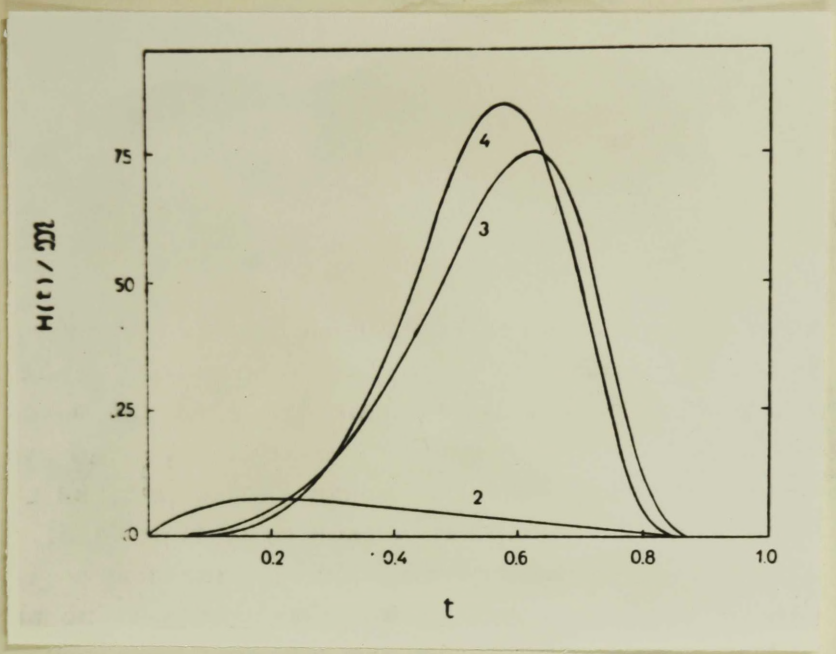


Рис. 7. Удельный угловой момент составляющих в единицах 10^2 (км/сек)кпс.

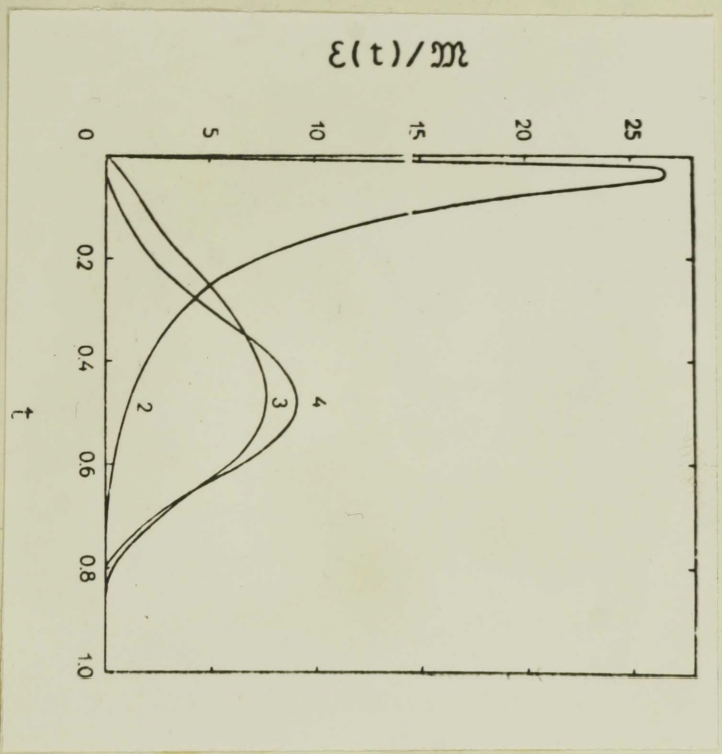


Рис. 8. Удельная кинетическая энергия составляющих в единицах 10^4 (км/сек)^2.

Г Л А В А I9

СПИРАЛЬНАЯ СТРУКТУРА*

I. Введение. В настоящей работе рассматривается распределение плотности и поле лучевых скоростей нейтрального водорода в галактике Андромеды М31. Работа базируется на 21-см радио-наблюдениях обсерваторий Джодрел Бэнк и Грин Бэнк, любезно высланных нам д-рами Дэйвис и Роберте. Были использованы также оптические данные о распределении и кинематике ионизированного водорода.

При исследовании распределения и кинематики водорода во внешних галактиках нужно учесть угловое разрешение радиотелескопами. Готтесман с соавторами [I] нашел, что коррекция для учета углового разрешения 250-футового радиотелескопа обсерватории Джодрел Бэнк не превышает I0 % как в плотности, так и в скорости. Наши вычисления, однако, показали, что в некоторых областях галактики М31 поправки имеют значительно большие значения. Это означает, что в [I] использована слишком упрощенная схема редукции. В [2] данные Грин Бэнк не были совсем редуцированы за счет эффекта размазывания антенной. Поэтому имеющиеся радионаблюдения обрабатывались заново. В настоящей главе даются предварительные результаты обработки.

2. Интегральные уравнения для плотности и средней лучевой скорости. Пусть x, y - прямоугольные галактические координаты, измеренные в минутах дуги, причем ось y направлена вдоль половины NE большой оси галактики: V - истинная лучевая скорость: $\mathcal{D}(x, y)$ - истинная спроектиро-

---

*Опубликовано под названием "Density Distribution and the Radial Velocity Field in the Spiral Arms of M31", The Spiral Structure of our Galaxy, Ed. W. Becker and G. Contopoulos, p. 42 - 50, Reidel, Dordrecht, 1970 (coauthor U. Rummel).

ванная плотность нейтрального водорода; $E(V-\bar{V})$ – функция распределения остаточных лучевых скоростей в направлении X, Y; $\bar{V} = \bar{V}(X, Y)$ – средняя лучевая скорость в этом направлении.

Радиотелескоп, направленный в точку X_p, Y_p и настроенный на частоту, соответствующую лучевой скорости, принимает поток излучения

$$T(X_p, Y_p, V_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}(XY)\, F(X-X_p, Y-Y_p)$$

$$\times E[V-\bar{V}(X,Y)]\, G(V-V_k)\, dX\, dY\, dV, \qquad (2.1)$$

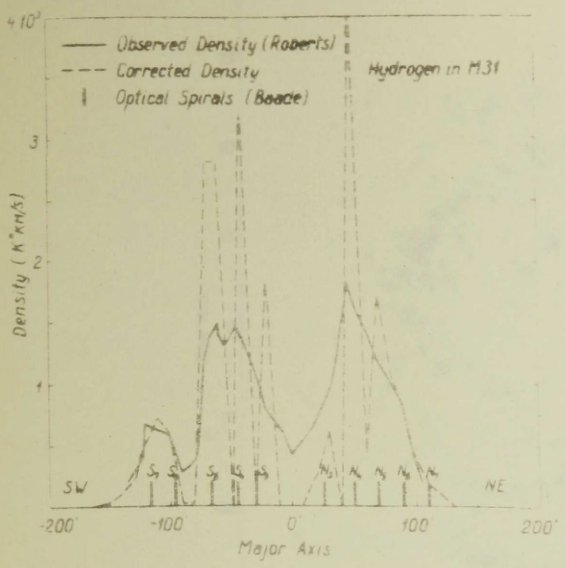
где $F(X-X_p, Y-Y_p)$ – функция угловой чувствительности радиотелескопа и $G(V-V_k)$ – соответствующая функция частотной чувствительности.

Интегрируя уравнение (2.1) по всем скоростям V_k, мы получим наблюденную плотность водорода $\bar{\mathcal{D}}(X_p, Y_p)$, которая связана с истинной плотностью $\mathcal{D}(X, Y)$ уравнением

$$\bar{\mathcal{D}}(X_p, Y_p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}(X, Y)\, F(X-X_p, Y-Y_p)\, dX\, dY. \qquad (2.2)$$

Последнее уравнение является двухразмерным однородным интегральным уравнением Фредгольма первого рода для определения истинной плотности $\mathcal{D}(X, Y)$. Если плотность известна, тогда уравнение (2.1) можно рассматривать как нелинейное интегральное уравнение для определения средней лучевой скорости $\bar{V}(X, Y)$.

Наблюдения точечных радиоисточников указывает, что функция F с достаточной точностью может быть аппроксимирована двухразмерной функцией Гаусса с шириной у половинной интенсивности 15′ и 10′ в случае радиотелескопов Джодрел Бэнк и Грин Бэнк соответственно [3, 4]. Функция G на телескопе Джодрел Бэнка также имеет форму гауссианы с шириной у половинной интенсивности 200 кГц, которая соответствует дисперсии скоростей 17 км/сек.



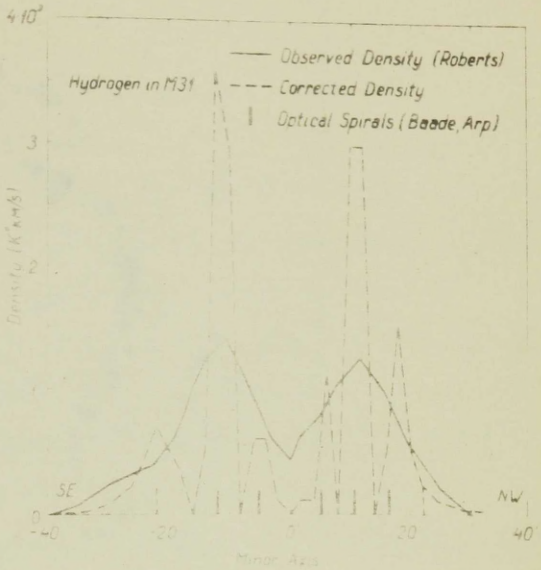


Рис.I (слева). Наблюденные [7] и исправленные спроектированные плотности нейтрального водорода вдоль большой оси M3I. Указано также положение оптических спиральные ветвей по Бааде [5].

Рис. 2 (справа). Наблюденные [7] и исправленные спроектированные плотности нейтрального водорода вдоль малой оси M3I.

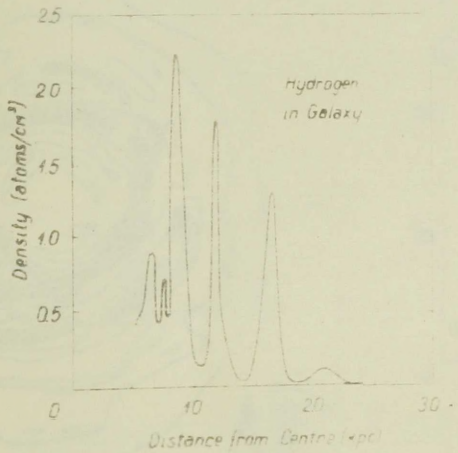


Рис. 3. Пространственная плотность нейтрального водорода в плоскости Галактики.

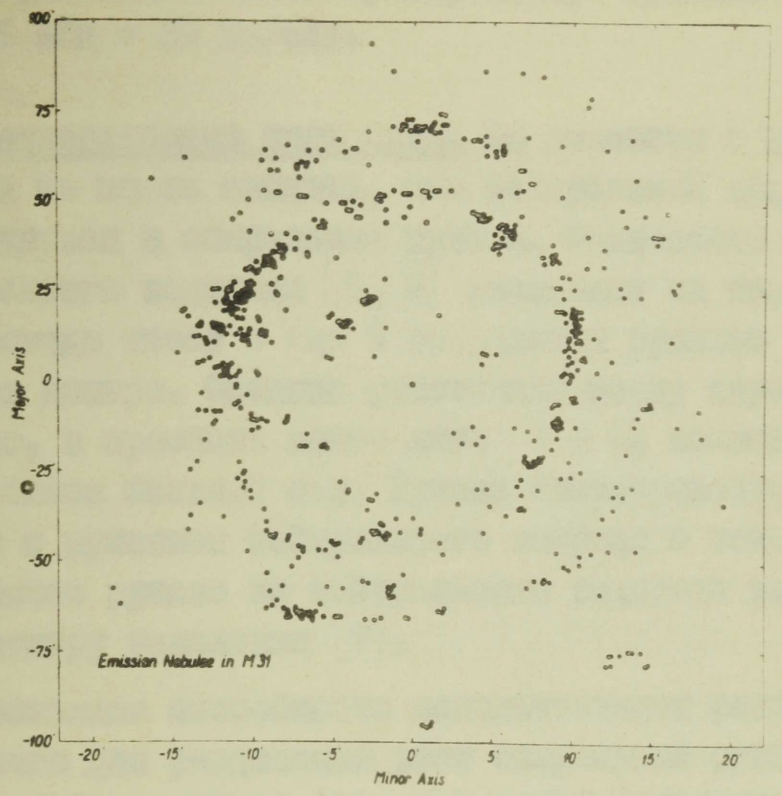
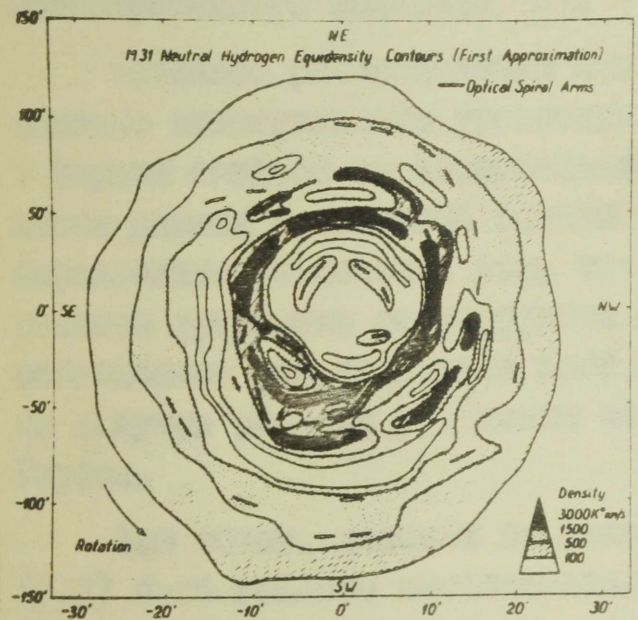


Рис. 4. Распределение облаков ионизированного водорода в M3I по Бааде и Арпу [8]. масштаб по X (малая ось) увеличен в 4.5 раза, что соответствует наклону M3I, равному I2°.8.



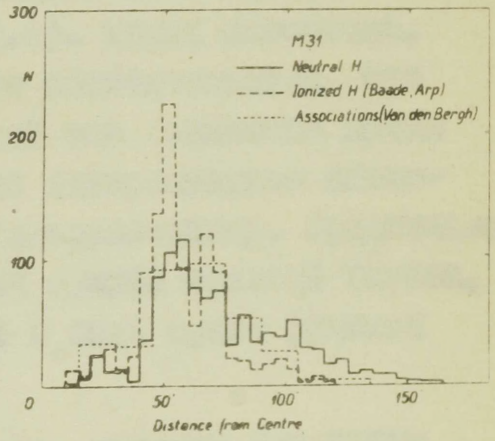


Рис.5(слева). Предварительные эквиденситы нейтрального водорода в M3I. Основные оптические спиральные ветви указаны жирными линиями.

Рис.6(справа). Распределение нейтрального водорода, облаков ионизированного водорода по [8] и звездных ассоциации по [II] в M3I.

Телескоп Грин Бэнка имеет прямоугольную функцию G с шириной 95 кГц = 20 км/сек.

3. Распределение плотности. По аналогии с нашей Галактикой мы можем ожидать, что нейтральный водород в М31 сконцентрирован в спиральные рукава. Оптические наблюдения ионизированного водорода [5, 6] указывает на то, что галактика Андромеды имеет 4 или 5 спиральных рукавов по обе стороны от центра. Среднее расстояние между двумя рукавами $20' = 4$ кпс, в проекции всего лишь $4' - 8'$, исключая только область вблизи большой оси. Рукава ионизированного водорода совпадают с рукавами нейтрального водорода с точностью до $5'$, причем рукава из нейтрального водорода располагаются ближе к центру галактики [7].

Разрешающая способность использованных радиотелескопов недостаточна для разделения всех спиральных рукав М31; только самые плотные рукава $N4$, $S4$ и $S5$ (обозначения Бааде [5]) "видны" радиотелескопом индивидуально [7]. Чтобы локализировать остальные рукава нейтрального водорода, можно использовать оптические данные о распределении ионизированного водорода [8].

Истинное распределение плотности было найдено с помощью интегрального уравнения (2.2). двумя способами. В первом способе мы использовали то обстоятельство, что линии равных плотностей вблизи малой оси галактики почти параллельны ее большой оси, так что двухразмерное интегральное уравнение редуцируется к одноразмерному. Представляя наблюденное распределение плотности суммой функций Гаусса, мы получим решение уравнения также в виде суммы функций Гаусса.

Для точек, далеких от малой оси, решение уравнения (2.2) было найдено последовательными приближениями. Положение рукав мы нашли, комбинируя оптические и радиоданные, а исправленные плотности методом проб и ошибок. Плотности вычислены для сети точек, расположенных по X и Y с интервалом $2'$ и $10'$ соответственно.

Наблюденные (Грин Бэнк) и исправленные в первом приближении профили вдоль большой и малой оси М31 показаны на

рис. I и 2. Картина напоминает профили нейтрального водорода для нашей Галактики, один пример таких профилей по данным [9, I0] приведен на рис. 3.

Распределение ионизированного водорода по x, y на основании данных Бааде и Арпа [8] дано на рис. 4. Сеть эквиденсит нейтрального водорода представлена рис. 5. Радиальное распределение нейтрального водорода, проинтегрированное по всем позиционным углам, изображено на рис. 6. Там же дано и R -распределение ионизированного водорода, а также распределение звездных ассоциаций по ван ден Бергу [II]. Оригинальные распределения были редуцированы к общей сумме объектов N = I000.

Рассмотрение полученных данных позволяет сделать следующие заключения:

а) пространственное распределение нейтрального водорода в общем похоже на распределение ионизированного водорода и звездных ассоциаций; на больших расстояниях от центра относительная плотность нейтрального водорода больше, чем плотность ионизированного водорода;

б) внутренние уплотнения водорода образуют два прерывистых кольцевых образования со средними радиусами 30′ (рукава $N3$, $S3$ по Бааде) и 50′ (рукава $N4$, $S4$);

в) внешние уплотнения водорода могут быть достаточно хорошо представлены как фрагменты двух раскручивающихся спиральных рукав $S5 - N6$ и $N5 - S6$.

4. Поле лучевых скоростей. Функция распределения плотности $\mathcal{D}$, а также функция угловой чувствительности F независимы от скорости V, поэтому мы можем в уравнении (2.I) сначала интегрировать по скорости

$$T(X_p, Y_p, V_k) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}(X,Y)\, F(X - X_p, Y - Y_p) \times H\left[V_k - \bar{V}(X,Y)\right] dX\, dY, \qquad (4.I)$$

где

$$H[V_k - \bar{V}(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G(V - V_R) E[V - \bar{V}(X,Y)]\, dV. \quad (4.2)$$

Если дисперсия скоростей не зависит от положения $X\ Y$, тогда формуле (4.I) можно придать вид, более подходящий для численных расчетов. Введем вместо X, Y новые переменные $S, \bar{V}$, причем S – длина вдоль линии $\bar{V}(X,Y) = const$. Тогда

$$T(X_p, Y_p, V_k) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(V_k - \bar{V}) \left[\int_S \mathcal{D}(X,Y)\, F(X - X_p, Y - Y_p)\, J\left(\frac{X,Y}{S,\bar{V}}\right) dS \right] d\bar{V}. \quad (4.3)$$

Допустим, что функции G и E являются гауссовыми с дисперсиями σ_G и σ_E соответственно. Тогда функция H тоже имеет гауссову форму с дисперсией

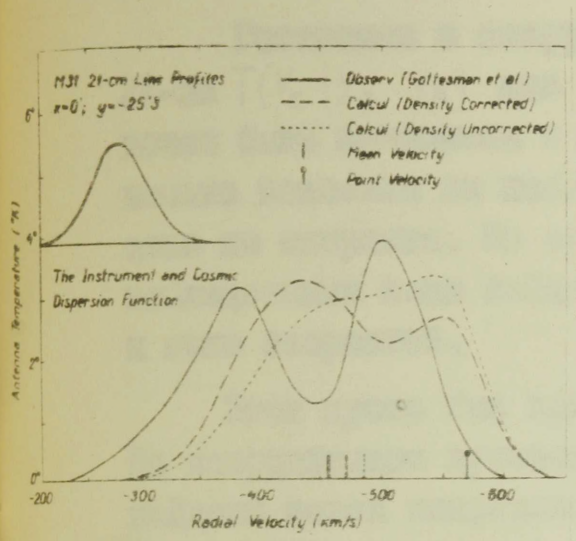
$$\sigma_H^2 = \sigma_G^2 + \sigma_E^2 \quad (4.4)$$

Интерферометрические наблюдения [I2] показывают, что дисперсия лучевых скоростей по всей галактике имеет практически постоянное значение σ_E = I7 км/сек (вследствие эффекта проектирования дисперсия σ_E H больше истинной дисперсии лучевых скоростей в малом элементе объема галактики).

Формула (4.3) была использована для вычисления теоретических профилей линий 2I-см. Была использована эффективная дисперсия лучевых скоростей σ_H = 24 км/сек, найденное выше поле исправленных плотностей водорода и модель поля лучевых скоростей. Последнюю мы вычислили, допуская чистое вращение в плоскости галактики с круговой скоростью $V(R)$. Была использована очевидная формула

$$\bar{V}(X,Y) = V_0 + V(R)\frac{Y}{X}\cos i, \quad (4.5)$$

где R – расстояние от центра галактики, V_0 – средняя



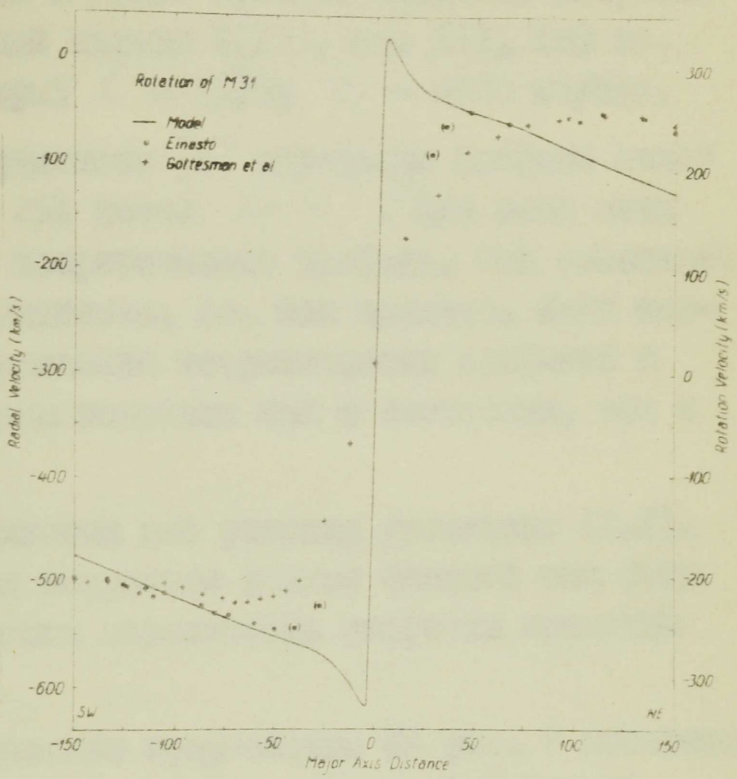


Рис. 7 (слева). Профиль линии 21-см для одной точки на большой оси М31. Приведена также функция распределения инструментальных и космических "ошибок".

Рис. 8 (справа). Круговая скорость по модели [13] и скорость вращения по Готтесману [1] и по нашим данным.

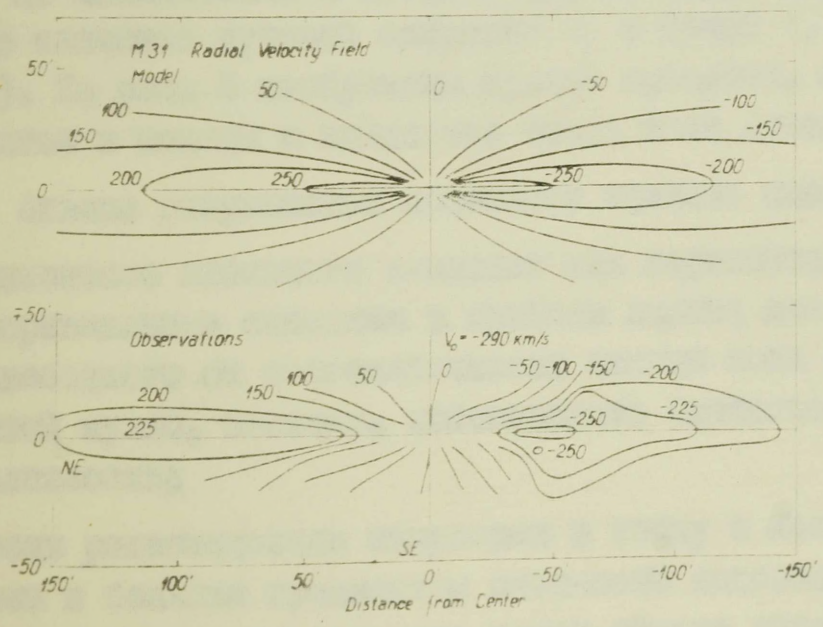


Рис. 9. Поле лучевых скоростей в М31 по модели и наблюдениям.

лучевая скорость всей галактики и i - угол между плоскостью симметрии галактики и лучом зрения. Круговая скорость $V(R)$ была взята из нашей модели ([13], гл. 17), так же, как и остальные параметры: $i = 12^{\circ}.8$; $V_0 = -300$ км/сек.

Готтесман с сотрудниками [1] определили профили линии 21-см $T(V_k | X_p, Y_p)$ для 231 точек X_p, Y_p. Для всех этих точек были вычислены и теоретические профили. Они оказались весьма похожими на наблюденные, но, как правило, были смещены по скорости. Из сравнения теоретических профилей с наблюденными были найдены поправки как к плотности, так и к полю скоростей.

Этот пусть был применен для решения уравнения (2.1). По исправленным лучевым скоростям вблизи большой оси была найдена новая исправленная зависимость скорости вращения от расстояния.

Результаты представлены графически. На рис. 7 показаны теоретические и наблюденные профили для одной точки на большой оси галактики. Теоретические профили были вычислены дважды с использованием как исправленных, так и неисправленных плотностей; поле скоростей было в обоих случаях идентично. На рисунке указаны и средние значения лучевых скоростей по наблюдениям и обоим теоретическим профилям, а также значение лучевой скорости V_p в точке X_p, Y_p (по модели). На рис. 8 изображены кривые вращения, а на рис. 9 принятое в модели и найденное новое поле лучевых скоростей.

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы:

а) изменение плотности вызывает как горизонтальные, так и вертикальные смещения в профиле линии; для получения свободного от систематических ошибок поля лучевых скоростей нужно, поэтому, использовать тщательно исправленные плотности;

б) если радиотелескоп направлен в точку с малой плотностью или с большим градиентом плотности водорода, тогда средняя лучевая скорость может сильно отличаться от лучевой скорости в этой точке, в экстремальных случаях разность между ними может превышать 100 км/сек. Этот эффект вызывал большие систематические ошибки в прож-

них работах [I, 2, I4];

в) исправленное поле лучевых скоростей имеет большие отклонения от принятого в исходной модели плавного поля.

Июль I969.

Литература

1. S.T.Gottesman, R.D.Davies, V.C.Reddish, M.N. 133, 359, 1966.
2. M.S.Roberts, Ap.J. 144, 639, 1966.
3. R.D.Davies, 1969 (personal communication).
4. M.S.Roberts, 1969 (personal communication).
5. W.Baade, Evolution of Stars and Galaxies, Harvard Univ. Press, Cambridge, 1963.
6. H.Arp, Ap.J., 139, 1045, 1964.
7. M.S.Roberts, IAU Symposium No. 31, p. 189, 1967.
8. W.Baade, H.Arp, Ap.J. 139, 1027, 1964.
9. G.Westerhout, B.A.N. 13, 201, 1957.
10. M.Schmidt, B.A.N. 13, 247, 1957.
11. S.van den Bergh, Ap.J.Suppl. 9, 65, 1964.
12. J.M.Deharveng, A.Pellet, Astron. Astrophys. 1, 208, 1969.
13. Я.Эйнасто, У.Риммель, Астрофизика, 6, 241, 1970.
14. E.Argyle, Ap.J. 141, 750, 1965.

ГЛАВА 20

СТРУКТУРА СОСТАВЛЯЮЩИХ*

I. Введение. Для построения физической теории структуры и эволюции галактик необходимы достоверные данные о параметрах и функциях, описывающих пространственную, кинематическую и морфологическую структуру галактик и их подсистем разного возраста. В качестве параметров пространственной структуры галактик и их подсистем можно использовать массу m, эффективный (гармонический) радиус a_0, отношение полуосей эллипсоидов постоянной плотности ε (считается постоянным для данной подсистемы), а также структурные параметры, определяющие степень концентрации массы к центру системы. В качестве морфологических параметров можно использовать цвет и отношение массы к светимости подсистем. Как функции описания можно использовать пространственную плотность ρ, спроектированную яркость L, круговую скорость V, скорость вращения V_θ, дисперсии скоростей σ_R, σ_θ, σ_z и др.

В серии работ [I - 4] (главы I7 - I9) мы исследовали структуру галактики Андромеды и ее подсистем и нашли предварительные значения параметров и функции описания. Недавно появились новые наблюдательные данные о структуре ряда подсистем этой галактики. Была выполнена и реконструкция физической эволюции галактик на основе теории эволюции звезд (глава 22), что позволило вычислить морфологические

---

*Предварительные результаты этой главы были опубликованы в статье "Structural and Kinematic Properties of the Andromeda Galaxy" in External Galaxies and Quasi Stellar Objects, ed. D.S.Evans, Dordrecht, p. 37 - 45, 1971.

параметры подсистем галактики М31. Все это создало предпосылки для уточнения сртруктуры подсистем этой галактики и определения новой ее модели.

2. Покраснение и ослабление света М31. В нашей первой работе по структуре М31 [1] мы не учитывали влияние покраснения и ослабления света, а в работе [5] брали величину покраснения согласно Арпу [6], которая, как мы теперь убедились, не согласуется с другими значениями. Так как учет этого фактора имеет существенное значение, приводим в табл. I сводку последних определений избытка цвета $E(B-V)$ объектов в М31 и ее окрестности.

Оценки, отмеченные в табл. буквой Е, получены нами следующим образом. По [12 - 15] видимые колор-индексы нуклеуса М31 равны $B-V = 1.04$ и $U-B = 0.78$, а средние значения этих индексов для галактик типа Sb [12] - $B-V = 0.97$ и $U-B = 0.59$, откуда $E(B-V) = 0.07$ и $E(B-V) = 0.19$. Избыток цвета $E(U-B$ может быть приведен к $E(B-V)$ с помощью стационарного соотношения $E(U-B)/E(B-V) = 0.72$, что даст $E(B-V) = 0.26$. Беря непосредственно определение $E(B-V)$ с двойным весом, получим среднее $E(B-V) = 0.13$.

По [12] для галактики М31 в целом $B-V = 0.91$ и $U-B = 0.50$, а в среднем для Sb галактик $B-V = 0.81$ и $U-B = 0.27$, что дает значение $E(B-V) = 0.17$.

Несколько большее значение получается другим путем. В [9] использованы при определении $E(B-V)$ только наиболее голубые скопления, которые не претерпели покраснения света в самой М31, причем это относится и к $E(B-V)$ для шаровых скоплений гало [7] и звезд поля [8]. Используя эти три оценки, находим для покраснения света в нашей Галактики в направлении М31 $E(B-V) = 0.10 \pm 0.02$. С другой стороны, согласно А.С.Шарову [16] среднее поглощение по лучу зрения внутри М31 $A_V = 1$. Если допустить, что поглощающее вещество образует тонкий слой в плоскости симметрии галактики, то последняя может быть разделена этой плоскостью на две половины: на близкую, свет от которой не претерпевает поглощения внутри галактики, и на дальнюю, свет от которой

ослаблен на I^m. В среднем $A_V = 0.39$ и $E(B-V) = 0.13$. Но нужно учесть, что межзвездная пыль сосредоточена в спиральных ветвях, следовательно, свет внешних областей галактики меньше искажен влиянием поглощения. Поэтому в качестве среднего мы будем брать несколько меньшее значение $E(B-V) = 0.10$, что вместе с покраснением в нашей Галактики дает $E(B-V) = 0.20$.

Итак, наша сводка показывает, что свет разных подсистем по-разному искажен влиянием поглощения. В качетсве среднего покраснения будем ипользовать $E(B-V) = 0.15$. (вдвое меньше, чем в [5]). При видимом модуле расстояния (по цефеидам) [II] $(m-M) = 24.65$ и $R = A_V/E(B-V) = 3$ мы получим общепринятый в последнее время истинный модуль расстояния $(m-M)_0 = 24.2$. Возможная ошибка избытка цвета вряд ли превышает 0.05.

3. Новая модель M31. Найденный ранее [I] фотометрический профиль в системе B был заново обработан с учетом ослабления света и ряда дополнительных данных с целью определения параметров новой модели M31. Параметры новой модели даны в табл. 2, фотометрический профиль - на рис. I, ход видимого отношения полуосей изофот - на рис. 2.

Структура отдельных подсистем будет рассмотрена ниже. Сейчас остановимся на том, как были найдены основные параметры модели.

Помимо фотометрических и кинематических данных, использованных нами ранее [I, 4], при построении модели были применены следующие новые данные: спектрофотометрические и фотометрические данные о звездном составе [7, I5, I7 - 2I], кинематические данные о движении шаровых скоплений [7] и межзвездного водорода [3, 22, 23], а также результаты наших вычислений изменения физических параметров галактик с временем (гл. 22).

Основной недостаток наших предварительных моделей (помимо неточного учета влияния покраснения и ослабления света) заключается в неуверенности в определении массы и светимости для отдельных подсистем. Новые данные позволяют существенно уточнить этот аспект модели.

В гл. 22 мы рассмотрели три различные варианты функции звездообразования с S = 0, I, и 2. Чтобы использовать полученные в гл. 22 результаты для исследования структуры М3I нужно сделать выбор между этими вариантами.

Массу нейтрального водорода в М3I можно брать при d = 690 кпс равной $\mathcal{M}_{H_I}$ = $3.7\times10^9\,\mathcal{M}_\odot$ [24 - 26]. Масса ионизированного водорода на несколько порядков ниже, а полная масса межзвездного вещества $\mathcal{M}_Б$ = $5.3\times10^9\,\mathcal{M}_\odot$, если принять для него нормальный химический состав с X = 0.70. Если принять полную массу галактики $\mathcal{M}$ = $218\times10^9\,\mathcal{M}_\odot$ согласно [5], тогда $\mathcal{M}_Б$ = 0.024 $\mathcal{M}$. Если пренебречь газом, выброшенным звездами в ходе их эволюции, избрать возраст галактики М3I $T_Б$ равным 10^{10} лет, тогда при экспоненциальном уменьшении массы газа (S = I) найденный выше процент газа соответствует характеристическому времени функции звездообразования K = 2.7×10^9 лет, а при законе S = 2 - характеристическому времени K = 0.25×10^9 лет.

В нашей модели плоская подсистема имеет отношение полуосей ε = 0.02, а диск - ε = 0.08. Естественно считать плоскую подсистему представительницей всех подсистем с $\varepsilon < 0.04$, чему по [27] соответствует максимальный возраст 1.7×10^9 лет. Учитывая, что в течение последних миллиардов лет темп звездообразования в галактике можно считать почти постоянным, по данным гл. 22 получим тогда $f_Б$ = 0.43. Полная масса звезд, образовавшихся в течение последних 1.7×10^9 лет, при S = I, K = 2.7×10^9 лет и $\mathcal{M}$ = $218\ 10^9\,\mathcal{M}_\odot$ получается равной $\mathcal{M}_S$ = $4.7\times10^9\,\mathcal{M}_\odot$, а их светимость - L_S = $10.9\times10^9\,\mathcal{M}_\odot$. При S = 2 и K = 0.25×10^9 лет имеем соответственно $\mathcal{M}_S$ = $1.06\times10^9\,\mathcal{M}_\odot$ и L_S = $2.46\times10^9\,L_\odot$. Согласно [I] светимость звезд плоской составляющей составляет (при $E(B-V)$ = 0.15) L_B = $3.0\times10^9\,L_\odot$. Итак, мы видим, что модель S = 2 гораздо лучше согласуется с наблюдениями.

По данным гл. 22 находим, что при нормальном (солнечном) химическом составе с Z = 0.02 и S = 2, $T_Б$ = 10×10^9 лет и K = $0.25\ 10^9$ лет отношение массы к светимости всей галактики f_B = 9.5. По наблюдениям, принимая $E(B-V)$ = 0.15, имеем f_B = 11.08, что соответствует

слетка большему содержанию тяжелых элементов. Такого результата можно было и ожидать, так как по данным [28] среднее содержание металлов в Галактике несколько больше солнечного, а по [7] содержание металлов в М31 несколько выше чем в Галактике.

Вычисления показывают, [29], что обогащение межзвездного газа тяжелыми элементами происходило очень интенсивно в начальный период развития Галактики и что с тех пор средний химический состав газа почти не меняется. Поэтому мы можем считать, что химический состав диска и плоской составляющей не меняется с временем и что он репрезентативен для галактики М31 в среднем. Тогда мы можем полагать, что диск и плоская составляющая, вместе взятые, имеют то же значение f_B, что и галактика в целом. Беря для массы межзвездного вещества и массы и светимости молодых звезд вышеприведенные значения, получим для массы плоской составляющей $\mathcal{M}_F = 6.36 \times 10^9 \mathcal{M}_\odot$, а для ее светимости - $L_F = 2.4 \times 10^9 L_\odot$. Светимость диска получается по фотометрическому профилю и равна $L_D = 7.57\ 10^9 L_\odot$, а суммарная светимость диска и плоской составляющей - $L_{FD} = 10.03 \times 10^9 L_\odot$, откуда с $f_B = 11.08$ имеем для массы этих составляющих значение $112.2 \times 10^9 \mathcal{M}$.

Что касается звезд сферической составляющей, то новые данные указывают на наличие существенных локальных аномалий в ее химическом составе. Поэтому сферическую составляющую нельзя рассматривать как единое целое. Мы убедились в том, что имеющиеся наблюдательные данные могут быть хорошо описаны моделью, сферическая составляющая которой состоит из трех подсистем. Внутренняя подсистема имеет тот же химический состав и отношение массы к светимости f_B, что и нуклеус [19], для средней мы берем нормальный химический состав и f_B, а внешняя имеет [7] характеристики, близкие к шаровым скоплениям гало. После ряда попыток мы остановились на значениях массы и отношения массы к светимости, приведенных в табл. 2.

Цвета нуклеуса и внутренних компонент сферической составляющей были найдены по фотометрическим наблюдениям [12 - 15]. Для других подсистем наблюдательные оценки цветов отсутствуют и они были определены по результатам гл.

22 с учетом наблюденных интегральных цветов всей галактики [12].

Светимости отдельных подсистем, их эффективные радиусы и отношения полуосей определены в основном по фотометрическим данным. Радиус богатой металлами внутренней подсистемы сферической составляющей (подсистема 2) был определен по спектрофотометрическим данным [19]. Для получения требуемой наблюдениями глубины минимума функции отношения полуосей изофот (рис. 2) пришлось уменьшить отношение полуосей гало до $\varepsilon = 0.30$ и диска до $\varepsilon = 0.08$, а также уменьшить принятое значение угла между лучем зрения и плоскостью системы $i = 12.7$ до $i = 12.5$.

С использованием теоремы о вириале для всех подсистем вычислены средние дисперсии скоростей σ_R, σ_z и σ_{RL}. Результаты этих вычислений даны в табл. 3 вместе с коэффициетами H_{ij} (см. гл. 12). Для получения согласия с наблюденной дисперсией скоростей нуклеуса $\sigma_n = 225$ км/сек [30] допущено наличие в центре точечного тела с массой $7 \times 10^7 \mathcal{M}_\odot$.

4. Нуклеус. На симпозиуме МАС в Базеле по спиральной структуре Галактики мы показали, [4], что разные методы дают разные значения массы нуклеуса М31. На базе фотометрического профиля центральной области М31 и имеющихся тогда спектрофотометрических данных об отношении массы к светимости [17] $f_v = \mathcal{M}/L_v = 16$ мы нашли ([1]; гл. 17) для массы нуклеуса $\mathcal{M} = 5 \times 10^7 \mathcal{M}_\odot$. С другой стороны по известным значениям дисперсии скоростей звезд нуклеуса $\sigma_n = 225$ км/сек [30], среднего радиуса его $a_0 = 5$ pc, найденного по фотометрическому профилю, и отношения полуосей $\varepsilon = 0.80$ по теореме о вириале мы получили $\mathcal{M} = 5 \times 10^8 \mathcal{M}_\odot$ [4].

Расхождения в массе можно избежать, если допустить наличие в центре галактики массивного точечного тела типа умершего квазара ("черной дырки"), или ему подобного, как полагает Линден-Белл [31]. В таком случае теорема о вириале имеет другой вид (гл. 12).

(4.1)

$$\sigma_R^2 = \frac{\beta_R G}{a_0}\left[\mathcal{M}_c + H_0 \mathcal{M}_0\right], \qquad (4.1)$$

причем $\mathcal{M}_c$ и $\mathcal{M}_0$ – массы центрального точечного тела и звездной составляющей нуклеуса соответственно, обозначения остальных параметров такие же, как в гл. I2. При $\varepsilon = 0.8$ и $i = 12.8$, $\beta_R = 0.375$; если аппроксимировать пространственную плотность нуклеуса экспоненциальной моделью, $H_0 = 0.312$. Принимая средний радиус a_0 и массу звездной составляющей согласно вышеприведенным данным, мы получили для массы центрального тела $\mathcal{M}_c = 1.4 \times 10^8 \mathcal{M}_\odot$.

После Базельского симпозиума я просил Спинрада определить максимальное значение отношения массы к светимости, согласующееся с спектральными наблюдениями. Весной 1970 г. был получен ответ [18]. Согласно новой модели звездного состава отношение массы к светимости получается равным $f_V = 42 \pm 7$. Увеличение этого отношения по сравнению с старой оценкой $f_V = 16$ [17] вызвано необходимостью прибавить в большом количестве красные карлики. Верхняя граница числа красных карликов определена инфракрасными наблюдениями [15], которые дают $f_V \leq 65$.

Пересмотр использованных ранее фотометрических данных с учетом поглощения света привел нас [5] к массе звездной составляющей нуклеуса по спектрофотометрическим данным $\mathcal{M}_0 = 6.4 \pm 2.1 \times 10^8 \mathcal{M}_\odot$ (при этом было принято $E(B-V) = 0.3$). С другой стороны, по теореме о вириале, приняв $\mathcal{M}_c = 0$, было получено $\mathcal{M}_0 = 5.7 \pm 1.9 \times 10^8 \mathcal{M}_\odot$.

Основываясь на хорошем согласии этих двух независимых оценок масс мы пришли к выводу, что нет основания предполагать наличие в центре M31 точечного тела большой массы. Учитывая возможные ошибки в исходных данных, мы нашли верхний предел массы точечного тела $0.5 \times 10^8 \mathcal{M}_\odot$.

Выше (§2) мы видели, что принятое в [5] значение $E(B-V)$ преувеличено. Поэтому в новой модели M31 светимость, а следовательно и масса, меньше, чем в модели [5]. Для получения согласия с наблюденной дисперсией скоростей опять-таки требуется наличие точечного центрального тела, масса которого теперь получается в два раза меньше, чем

в [4]. Как видим, результат существенно зависит от принятого значения поглощения. Но результат зависит и от принятого значения f_V. Если вместо $f_V = 42$ принять максимальное допустимое значение $f_V = 65$, тогда имеем для массы нуклеуса $0.5 \times 10^9 \mathcal{M}_\odot$, чего уже достаточно для удовлетворения теоремы о вириале без наличия центрального тела. Таким образом, существующие данные не позволяют окончательно решить вопрос о наличии точечного тела в центре M31, хотя косвенные данные (недавний взрыв галактики M82) указывают на большую вероятность наличия такого тела в центре галактики типа Sb.

В связи с резким различием в среднем химического состава звезд на разных расстояниях до центра галактики возникает вопрос – может ли такое различие долго сохраняться и не будет ли оно сглажено путем орбитального перемешивания звезд. Если большинство орбит звезд в центральной области M31 радиально вытянуто, тогда звезды из разных областей перемешиваются. Вычисления показали, однако, что этого нет и что как нуклеус, так и внутренняя подсистема сферической составляющей, динамически почти изолированы. В табл. 4 даны апогалактические расстояния звезд, движущихся через центр M31 с разными скоростями. Большинство звезд нуклеуса движутся со скоростью несколько сот км/сек и не удаляются далеко от центра галактики. Лишь звезды с очень большими скоростями, превышающими скорость освобождения по отношению к нуклеусу (1080 км/сек), могут удаляться дальше, но такие звезды, если вообще существуют, очень немногочисленны.

Плотность вещества в центре M31 согласно новой модели составляет $2 \times 10^6 \mathcal{M}_\odot/\text{пс}^3$, угловая скорость кругового движения $\omega_0 = 186$ км/сек/пс. Средняя наблюденная угловая скорость всего 12 км/сек/пс [14]. Применяя теорему о вириале в тензорном виде и допуская твердотельное вращение нуклеуса находим, что ротационная энергия составляет всего 7.5 % общей кинематической энергии нуклеуса. Далее находим, что энергия связи нуклеуса (общая отрицательная потенциальная энергия на единицу массы) равна 7.5×10^4 (км/сек)^2.

5. Основное тело. Под основным телом (bulge) мы понимаем наиболее яркую и плотную часть сферической составляющей спиральных галактик, в М31 она имеет радиус порядка I кпс. По чисто фотометрическим данным основное тело галактики можно рассматривать как однородную подсистему. Спектральные данные указывают, что это не так - внутри основного тела имеет место заметное изменение химического состава [15 , 18, 19]. Но химический состав связан с отношением массы к светимости. По [19] для внутренней части основоного тела (на расстоянии I' от центра М31). $f_v = 45$, а по [32] даже $f_v = 9.2$. Если приписать всему основному телу постоянное отношение массы к светимости порядка 40 - 50, тогда получим для его массы значение порядка массы всей галактики М31, что явно абсурдно. Но, с другой стороны, нет оснований сомневаться и в высоком значений f_v для центральной части основного тела. Остается разделить последнее на две подсистемы, что и сделано в нашей модели.

При выборе значения f_v для внутренней части основного тела мы остановились на умеренном значении $f_v = 42$. Если принять по [32] $f_v = 92$, тогда средняя дисперсия лучевых скоростей этой подсистемы получается очень большой, порядка 450 км/сек, что маловероятно.

В свое время мы считали, (гл. 8), что дисперсия скоростей не может иметь минимума в центре звездной системы. Последующие вычисления (гл. I6) показали, что это возможно лишь при весьма умеренном росте плотности в направлении центра. Функция спроектированной светимости имеет в центре М31, такие как и в других спиральных и эллиптических галактик, достаточно высокий максимум. Поэтому минимума в ходе дисперсии скоростей можно избежать только при допущении, что отношение массы к светимости в центральной области галактики заметно меньше, чем в галактике в среднем. Как мы убедились, фактически имеет место обратное, таким образом, наличие минимума дисперсии скоростей в центре галактики неизбежно. Правда, минимум не такой глубокий, какой получился в нашей первой модели М31 (гл. I7, I8).

Радиус внутренней части основного тела был определен по данным об измерении параметров, характеризующих химический состав галактики [15, 19]. На рис. 3 дана зависи-

мость трех параметров, цвет $U-B$ [15], индексов Na и CN [19] по модели (кривая) и по наблюдениям (точки).

Что касается внешней части основного тела, то непосредственные данные об ее химическом составе и отношении массы к светимости отсутствуют. Как было сказано выше, мы брали для этой подсистемы нормальный химический состав, а цвета и параметры f_B , f_V - согласно данным гл. 22. Принятые значения морфологических параметров в некоторой степени контролируются параметрами других подсистем и галактики в целом, а также теоремой о вириале. Такая проверка показывает, что принятые значения f_B и f_V не могут быть сильно ошибочны.

6. Гало. Под гало мы подразумеваем внешнюю часть сферической составляющей. Эффективный радиус, полная светимость и отношение полуосей гало были найдены по фотометрическим данным, а цвет и отношение массы к светимости - на основании данных о шаровых скоплений и по аналогии с другими галактиками.

Звезды гало в нашей Галактике имеют те же физические характеристики, как и звезды шаровых скоплений, а пространственно-кинематические характеристики подсистемы звезд гало очень близки к соответствующим характеристикам подсистемы шаровых скоплений. Основной чертой звезд гало является очень малое содержание тяжелых элементов. Это вытекает из непосредственных спектральных определений, а также из индекса металличности $Q = (U-B) - 0.72(B-V)$ [7]. Отношение массы к светимости шаровых скоплений имеет порядок единицы [33]. Наши вычисления показывают, что эта оценка занижена. Причиной может быть уход звезд малой массы вследствие действия иррегулярных сил из шаровых скоплений, что приводит к уменьшению отношения массы к светимости. Произведенные в гл. 22 расчеты показывают, что при содержании тяжелых элементов $Z = 0.001$, и экспоненциальным законе функции звездообразования $S = 1$ с характеристическим временем $K = 0.5 \times 10^9$ лет отношение массы к светимости $f_B \approx f_V \approx 3$, если минимальную массу звезд брать равной 0.1 солнечных масс. Этот результат вполне приемлем (см. гл. 23). Если же содержанию тяжелых элементов больше,

скажем $Z = 0.005$, тогда при $K = 0.5 \times 10^9$ лет и $\varphi_{13} \approx 3$ $m_o \times 0.3\,\odot$, а при $m_o \approx 0.10$ $\varphi_{13} \times 5$. Истинное значение отношения масс к светимости, вероятно, заключается между этими значениями.

В галактике Андромеды имеется возможность исследовать структуру подсистемы шаровых скоплений и непосредственно.

Мы составили коллектив шаровых скоплений M31 для последующей статистической обработки на базе каталога Ветешника [34]. Фотометрические данные о скоплениях были собраны по различным источникам (см. [35]). Вероятные рассеянные скопления были исключены, они лежат на диаграмме V, $B-V$ левее линии покраснения $A_V / E(B-V) = 2.5$?, которая проходит через точку $V = 18.0$, $B-V = 1.00$. Из списка были исключены и области H_α [36], скопления без фотометрических данных и очень слабые скопления ($B > 19.0$). Оставшийся список содержит 101 ярких ($B \leq 17.5$) и 92 слабых ($17.5 < B \leq 19.0$) скоплений.

На базе опубликованных Ветешником измеренных x, y - координат были вычислены галактические координаты W, U вдоль большой и малой оси галактики, а также с проектированное расстояние от центра галактики $A = \sqrt{W^2 + E^{-2} U^2}$, где E - видимое отношение полуосей изофот. Мы нашли $E = 0.57$, что соответствует истинному отношению полуосей эллипсоида равных плотностей $\varepsilon = 0.54$.

Распределение скоплений по A несколько различно в разных группах, что, вероятно, объясняется наличием наблюдательной селекции: относительное число слабых скоплений в центральной, а также на периферийной области несколько меньше. После небольшой поправки за счет этого эффекта обе группы были объединены. Общее распределение дано на рис. 4. Оно достаточно хорошо аппроксимируется модифицированной экспоненциальной моделью с параметрами $a_o = 4.5$ кпс, $N = 4$, $x_o = 10.5$ и $\varepsilon = 0.54$.

Наши попытки построить фотометрическую модель M31, используя для гало эти параметры, не дали удовлетворительных результатов. Не помогло и изменение параметров диска и уменьшение угла наклона i, градиент плотности на периферии галактики оказался слишком малым, а минимум функции

отношения полуосей изофот E недостаточно глубоким. Согласие получилось лишь после изменения параметров гало.

Полученный результат может быть объяснен двумя причинами. Во первых, подсистема шаровых скоплений, по всей вероятности, представляет собой смесь объектов гало и основного тела галактики . На это указывает зависимость металличности скоплений от положения. Связь между Q и A для M3I изображена на рис. 5; а среднее значение параметра металличности Q для различных зон в M3I, а также общее среднее значение Q для скоплений M3I, нашей Галактики и карликовой галактики Fornax даны согласно [7] в табл. 5. Другим фактором может быть влияние наблюдательной селекции, что затрудняет обнаружению скоплений на фоне яркого основного тела галактики. Селекция уменьшает число объектов в центральной части галактики и тем самым увеличивает эффективный радиус подсистемы.

Наличие наблюдательной селекции вытекает и из кинематических данных. Ван ден Берг [7] определил лучевые скорости 44 ярких шаровых скоплений в M3I. Беря для скорости центроида галактики M3I – 300 км/сек [7, 22], мы нашли среднюю галактоцентрическую дисперсию лучевых скоростей, которая с учетом эффекта случайных наблюдательных ошибок получилась равной $\sigma_к$ = I22 км/сек. С другой стороны, по теореме о вириале дисперсия получается равной $\sigma_к$ = 232 км/сек. Это расхождение не может быть объяснено неуверенностью в знании массы отдельных подсистем галактики – результат зависит в основном от полной массы галактики и лишь немного от того, как эта масса распределена по подсистемам. Кажется, единственное объяснение расхождения в дисперсии – сильно заниженное число скоплений в центральной области M3I, где дисперсия скоростей максимальная.

Что касается сплюснутости, то несовпадение ε для системы шаровых скоплений с ε для гало может быть истолковано как неоднородность гало. Шаровые скопления представляют собой подсистему с более менее или постоянным отношением полуосей ε , в то время как гало в нашей модели представляет собой смесь подсистем с отношением полуосей в диапазоне от 0.I5 до 0.60 со средним значением $\bar{\varepsilon}$ = 0.30.

7. Диск и плоская составляющая. Под диском галактики мы подразумеваем совокупность подсистем с истинным отношением полуосей в диапазоне $0.04 < \varepsilon \leq 0.15$, плоская же составляющая объединяет подсистемы с $\varepsilon \leq 0.04$. Данные для нашей Галактики показывают, что в плоскую составляющую входят кроме подсистемы межзвездного вещества еще и подсистемы молодых звезд до максимального возраста 1.7×10^9 лет. Наиболее старые звезды диска лишь немного моложе самой Галактики. Это показывает, что образование диска началось вскоре после образования всей Галактики. Несмотря на большой разброс возрастов звезд диска и плоской составляющей средний химический состав по имеющимся данным весьма постоянен, что и позволило нам определить цвета и отношения массы к светимости этих составляющих.

Рассмотрим теперь, каковы возможные ошибки принятых параметров, особенно отношения массы к светимости.

По фотометрическим данным светимость диска и плоской составляющей вместе взятых, составляет 51 % светимости всей галактики М31. Если для этих двух составляющих такое же среднее значение ψ, как и для галактики в целом, тогда их масса также составит 51 % массы всей галактики. На первый взгляд эта цифра представляется заниженной: массу сферической составляющей нашей Галактики до сих пор брали порядка 30 % массы всей Галактики. Однако при таком выборе значения для массы сферической составляющей, имеем для нее $\psi_B = 7$, тогда как для диска и плоской составляющей $\psi_B = 15$. Первая цифра явно мала и этот вариант не может быть принят. С другой стороны, де Вокулер [37] находит, что масса сферической составляющей около 70 % массы всей галактики М31. В таком случае для отношения массы к светимости всего основного тела получается $\psi_B = 30$, а для диска и плоской составляющей $\psi_B = 6$. Принятие этого варианта означало бы, что внешние части основного тела по химическому составу практически не отличаются от внутренних частей, и что в диске и плоской составляющей имеет место заметный дефицит металлов по отношению к солнечному. Оба вывода противоречат наблюденным.

Итак мы заключаем, что принятые в модели значения массы диска и плоской составляющей не могут быть сильно

ошибочными. Разумная оценка их ошибок порядка I0%, не считая возможных систематических ошибок в шкале расстояний и поглощения.

Полная масса галактики М3I была определена по движению объектов плоской составляющей, в основном межзвездного водорода. Помимо данных, использованных в нашей предварительной модели, мы применили еще обработанные нами ранее результаты радиоастрономических наблюдений [3], а также оптические измерения Рубин и Форда лучевых скоростей облаков ионизированного водорода [22].

На рис. 6 изображены скорости по табл. I работы [22]. Если в одной звездной ассоциации были определены скорости для нескольких объектов, то мы использовали взвешенное среднее расстояние от центра галактики R и лучевую скорость. Облака, далекие от большой оси, не были использованы. На рисунок нанесены и скорости нейтрального водорода согласно результатам нашей обработки, а также принятая Рубин и Фордом ротационная кривая (модель 5 в табл. III работы [22]) и вычисленная по нашей модели [5] круговая скорость.

Новые наблюдения подтверждают результат Бебкока [38], что скорость вращения имеет максимум на расстоянии 0.5 кпс от центра и глубокий минимум около R = 2 кпс. Если отождествить скорость вращения с круговой скоростью, как это делают Рубин и Форд, тогда соответствующая модель имеет отрицательные пространственные и спроектированные плотности около R = 2 кпс от центра.

Такая модель, конечно, не может быть принята. Во-первых, отрицательные плотности невозможны, во вторых, нельзя отождествить и скорость вращения с круговой, так как дисперсия скоростей в центральной области очень большая и соответствующим членом гидродинамического уравнения нельзя пренебречь.

Минимум скорости вращения может быть объяснен соответствующим максимумом дисперсии скоростей, необходимым, чтобы удовлетворить гидродинамические уравнения. Но такая аномалия в кинематических характеристиках должна выявиться и в плотности, что не подтверждается фотометрическими на-

блюдениями. Далее, аномалия в кинематике вряд ли может долго существовать - орбитальное перемешивание скоро стирает ее. Поэтому мы склонны думать, что аномалия связана только с газом, движение которого может быть обусловлено не только гравитационными силами. Одно возможное объяснение этой аномалии дано Оортом (см. [22]). Он предлагает гипотезу, что рассматриваемый газ был когда-то выброшен из ядра галактики M3I, и малая скорость вращения объясняется тогда тем, что выброшенный из ядра газ не мог иметь большого углового момента.

8. Функции описания. Используя приведенные выше значения параметров, мы вычислили все основные гидродинамические функции описания галактики M3I. Некоторые из них даны в табл. 5 и рис. 7 - II.

Август 1971

Литература

I. Я.Эйнасто, Астрофизика, 5, I37, I969.
2. Я.Эйнасто, У.Рюммель, Астрофизика 6, 24I, I970.
3. J.Einasto, U.Rümmel, in W.Becker and G.Contopoulos (eds.) "The Spiral Structure of our Galaxy", Dordrecht, p. 42, 1970.
4. J.Einasto, U.Rümmel, in Becker and G.Contopoulos (eds.), "The Spiral Structure of our Galaxy", Dordrecht, p. 51. 1970.
5. J.Einasto, in D.S.Evans (ed.) "External Galaxies and Quasi Stellar Objects", Dordrecht, p. 37, 1971.
6. H.Arp, Ap.J. 141, 43, 1965.
7. S.van den Bergh, Ap.J. Suppl. No. 171, 1970.
8. R.D.McClure, R.Racine 1969 (cited in 7).
9. Th. Schmidt-Kaler, A.J. 72, 526, 1967.
10. W.Baade, H.Swope, A.J. 68, 435, 1963.
11. S.van den Bergh, David Dunlap Comm. No. 195, 1968.
12. G.de Vaucouleurs, Ap.J. Suppl. No. 48, 1961.
13. T.D.Kinman, Ap.J. 142, 1376, 1965.
14. A.Lallemand, M.Duchesne, M.F.Walker, P.A.S.P. 72, 76, 1960.
15. AR.Sandage, E.E.Becklin, G.Neugebauer, Ap.J. 152, 55, 1969.

16. A.C.Mapoв, A.Ж. 45, 980, 1968
17. H.Spinrad, P.A.S.P. 78, 367, 1966.
18. H.Spinrad, B.J.Tauler, Ap.J. Suppl. (in press).
19. H.Spinrad, J.E.Gunn, B.J.Taylor, R.D.McClure, J.W.Young, Ap.J. 164, 11, 1971.
20. R.D.McClure, S.van den Bergh, A.J. 73, 313, 1968.
21. G. de Vaucouleurs, Astroph. Lett. 4, 17, 1969.
22. V.C.Rubin, W.K.Fŏrd, Ap.J. 159, 379, 1970.
23. J.M.Deharveng, A.Pellet, Astron. Astroph. 1, 208, 1969.
24. E.Argyle, Ap.J. 141, 750, 1965.
25. S.T.Gottesman, R.D.Davies, V.V.Reddish, M.N. 133, 359, 1966.
26. M.S.Roberts, Ap.J. 144, 639, 1966.
27. J.Eipasto, Tartu Teated No. 26, 1, 1970.
28. H.Spinrad, B.J.Taylor, Ap.J. 157, 1279, 1969.
29. A.G.W.Cameron, J.W.Truran, R.A.S. Can Journ. 65, 1, 1970.
30. R.L.Minkovski, Ann. Rept. Mt. Wilson-Palomar Obs. 26, 1954.
31. D.Lynden-Bell, Nature, 223, 690, 1969.
32. B.M.Tiensly, H.Spinrad, Ap.J. (in press).
33. M.Schwarzschild, S.Bernstein, Ap.J. 112, 200, 1955.
34. M.Vetesnik, Bull. Astr. Inst. Czech. 13, 180, 1962.
35. A.C.Mapoв, A.Ж.45, I46, I968.
36. G.Haro, A.J. 55, 66, 1950.
37. G. de Vaucouleurs, Ap.J. 128, 465, 1958.
38. H.W.Babcock, Lick Obs Bull. No. 498, 1939.

Табл. I

Объекты	E_{B-V}		Ист.
Halo clusters	0.08	± 0.02	7
Field stars	0.11	0.02	8
Blue open clusters	0.12	0.04	9
Nucleus	0.13		E
Nucleus	0.20		6
Cepheids	0.16	0.03	10
Cepheids	0.15		11
M31 in mean	0.17-0.20		E

Табл. 2

Величина	Един.	Нуклеус	Внутр. осн.телосн.	Внешн. т.	Гало	Диск	Плоск. сост.	Σ
i		1	2	3	4	5	6	
ε		0.80	0.80	0.80	0.30	0.08	0.02	
N		2	4	4	4	1	0.5	
x_0		3	7	7	7	1	0	
a_0	kpc	0.005	0.15	0.8	3	9.2	8	
L_B	10^9	0.0057	0.501	2.94	6.18	7.57	2.46	19.65
L_V	"	0.0073	0.642	3.63	6.34	9.08	1.88	21.57
$\varkappa$	"	0.306	27.0	58.4	19.8	105.8	6.36	217.7
f_B		53.8	53.8	19.88	3.20	13.98	2.59	11.08
f_V		42.0	42.0	16.09	11.66	3.39	3.39	10.09
U - B		0.67	0.65	0.47	0.16	0.43	-0.17	
B - V		0.89	0.89	0.85	0.65	0.82	0.33	0.72

Табл. 3

	1	2	3	4	5	6	σ_R	σ_z	σ_π
1	0.2849	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	226	206	225
2	0.9762	0.2273	0.0310	0.0029	0.0001	0.0001	302	275	300
3	0.9997	0.6450	0.2273	0.0516	0.0052	0.0060	258	235	257
4	0.9998	0.8976	0.5539	0.2273	0.0625	0.0762	235	140	231
5	1.0000	0.9960	0.9034	0.6080	0.3264	0.4057	208	66	203
6	1.0000	0.9976	0.9085	0.5917	0.2738	0.3535	225	36	220

Табл. 4

(km/cek)	R_{apogal} (pc)
225	1.8
450	8
1080	85

Табл. 5

			n	Q
Andromeda				
50°	A		5	-0.45
30°	A	50°	11	-0.35
20°	A	30°	16	-0.28
	A	20°	12	-0.25
mean			44	-0.31
Galaxy			68	-0.35
Fornax			4	-0.43

Табл. 6

R	A	-B	C	ω	V	V_k	k_θ	k_z
0.000	00	131360	149933	131360	0	1548	1	0.500
0.125	1494	2748	3941	4242	530.3	1416	0.648	0.393
0.250	1249	951	2635	2200	550	1243	0.432	0.302
0.375	780	660	1577	1440	540	1143	0.458	0.314
0.500	588	461	1149	1050	525	1069	0.440	0.305
0.750	386.8	272.8	731.2	659.3	494.5	965.1	0.413	0.292
1.000	282.6	185.5	529.7	468.1	468.1	893.3	0.396	0.284
1.5	177.5	106.9	340.2	284.4	4.26.6	787.1	0.376	0.273
2.0	125.5	72.5	254.6	198.0	396.0	733.4	0.366	0.268
2.5	94.9	54.2	208.2	149.1	372.7	687.1	0.363	0.267
3.0	75.0	43.2	179.9	118.2	354.7	652.2	0.366	0.268
3.5	61.2	36.1	160,9	97.3	340.5	621.9	0.371	0.271
4.0	51.1	31.2	147.0	82.3	329.3	597.4	0.379	0.275
4.5	43.6	27.6	136.2	71.2	320.4	576.2	0.388	0.280
5.0	37.8	24.9	127.2	62.6	313.2	557.6	0.397	0.284
5.5	33.2	22.7	119.5	55.9	307.4	540.8	0.405	0.288
6.0	29.6	20.8	112.6	50.4	302.6	525.7	0.412	0.292
6.5	26.7	19.2	106.4	45.9	298.5	511.7	0.418	0.295
7.0	24.4	17.8	100.6	42.1	294.9	498.8	0.422	0.297
7.5	22.4	16.5	95.18	38.9	291.9	486.8	0.424	0.298
8.0	20.8	15.4	90.1	36.1	289.1	475.5	0.425	0.298
8.5	19.4	14.3	85.2	33.7	286.4	464.8	0.424	0.298
9.0	18.2	13.3	80.7	31.6	283.9	454.7	0.422	0.297
9.5	17.2	12.4	76.3	29.6	281.5	445.1	0.419	0.295
10.0	16.4	11.6	72.1	27.9	279.1	435.9	0.414	0.293
11	14.9	10.0	64.4	24.9	274.3	418.8	0.403	0.287
12	13.7	8.72	57.4	22.4	269.4	403.2	0.389	0.280
13	12.8	7.58	51.0	20.3	264.3	388.8	0.373	0.272
14	11.9	6.60	45.4	18.5	259.0	375.5	0.357	0.262
15	11.2	5.76	40.3	16.9	259.7	363.2	0.341	0.254
16	10.5	5.04	35.8	15.5	248.3	351.8	0.325	0.245
17	9.85	4.43	31.8	14.3	242.8	341.3	0.310	0.237
18	9.21	3.98	28.3	13.2	237.5	331.5	0.302	0.232
19	8.80	3.42	25.4	12.2	232.1	322.4	0.280	0.219
20	8.24	3.11	22.7	11.4	226.9	313.9	0.274	0.215
21	7.78	2.78	20.3	10.6	221.9	305.9	0.264	0.209
22	7.34	2.52	18.3	9.86	216.9	298.5	0.256	0.204
23	6.94	2.29	16.5	9.23	212.2	291.6	0.248	0.199
24	6.47	2.19	14.8	8.65	207.7	285.1	0.253	0.202
25	6.32	1.82	13.7	8.14	203.5	278.9	0.223	0.182
26	5.87	1.79	12.4	7.66	199.1	273.2	0.234	0.190
27	5.57	1.65	11.3	7.23	195.1	267.8	0.229	0.186
28	5.29	1.54	10.4	6.83	191.3	262.7	0.226	0.184
29	5.02	1.44	9.50	6.47	187.59	257.9	0.223	0.183
30	4.78	1.36	8.76	6.14	184.1	253.3	0.222	0.182

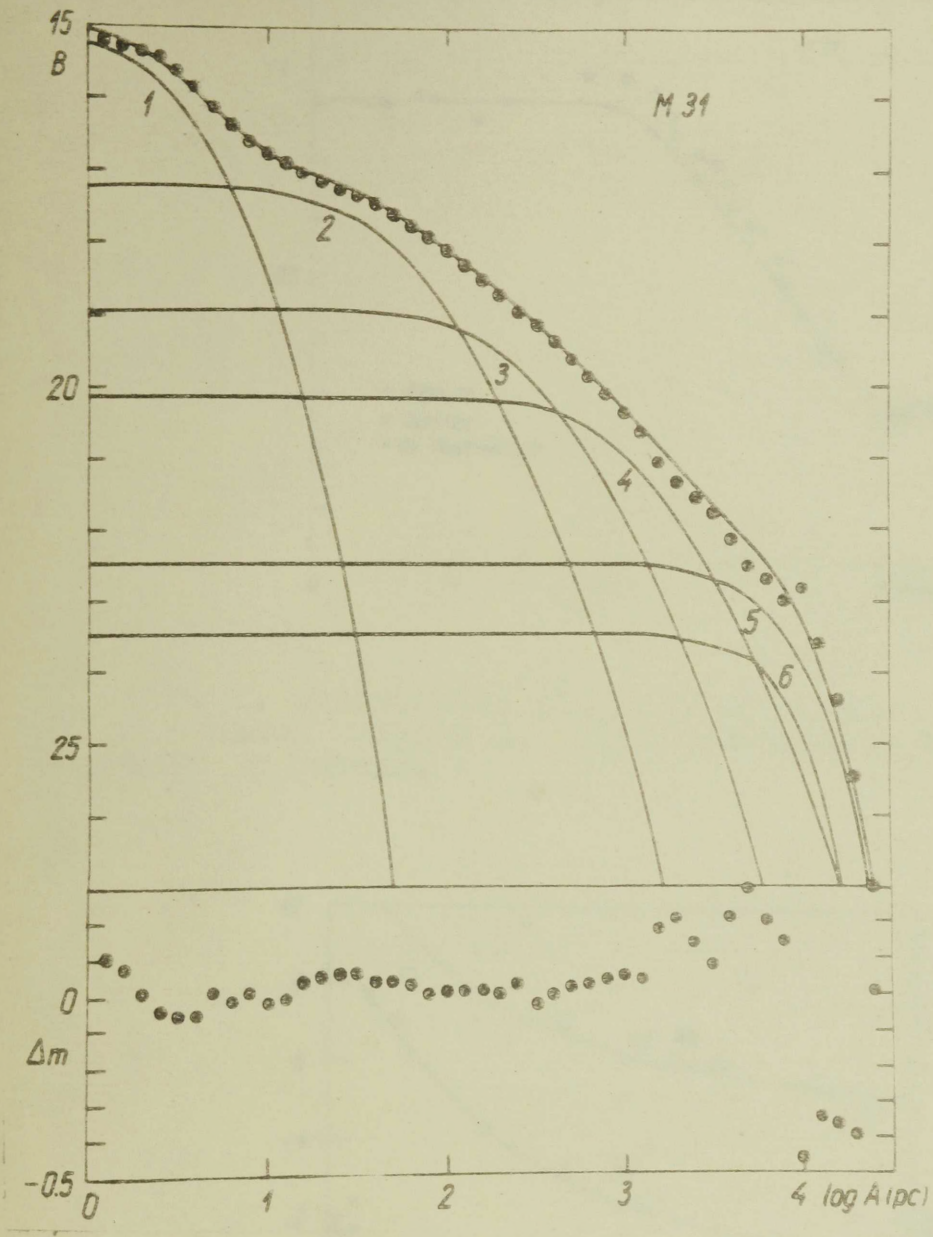


Рис. I. Фотометрический профиль М31 в системе В и его разложение на компоненты. Точки - наблюдения согласно нашей сводке, кривые - модель. Внизу дана разность $\Delta m = B_{Obs} - B_{Mod}$

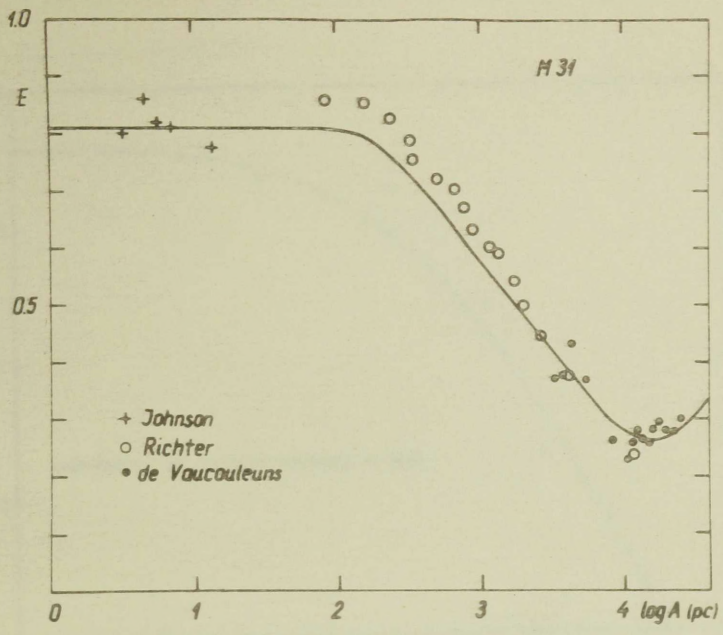


Рис. 2. Зависимость видимого отношения полуосей изофот от большой полуоси A. Кривая изображает зависимость, найденную по модели.

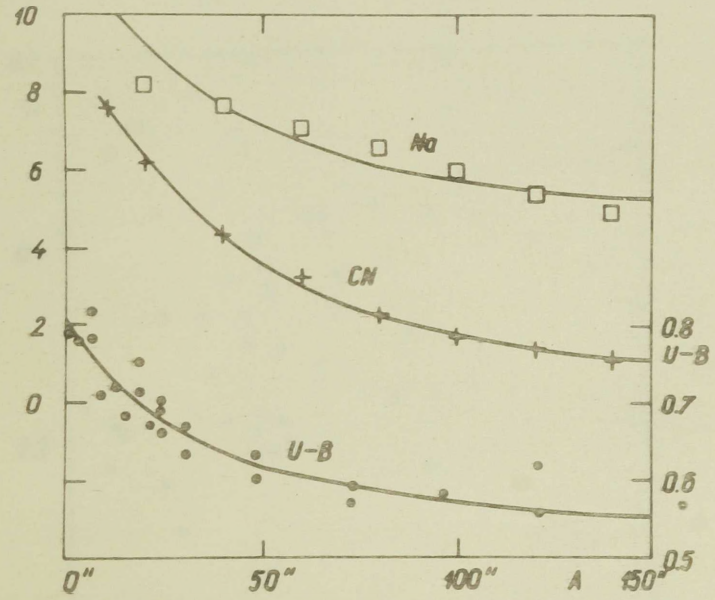


Рис. 3. Изменение цвета *U-B* и интенсивности спектральных индексов *Na* и *CN* в центральной области M3I. Кривые вычислены при допущении, что компоненты I и 2 модели (нуклеус и внутренняя часть основного тела) богаты тяжелыми элементами, а внешняя часть основного тела имеет нормальный химический состав.

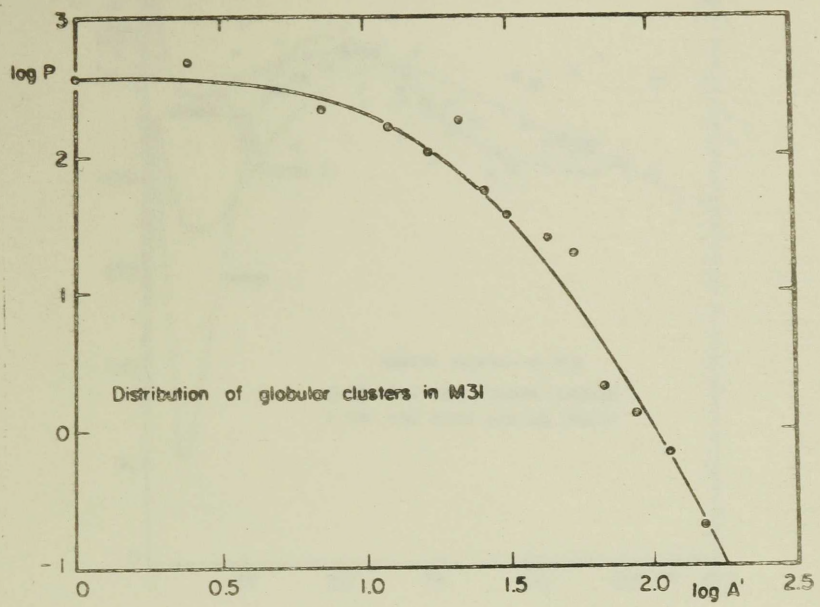


Рис. 4. Распределение шаровых скоплений в М31.

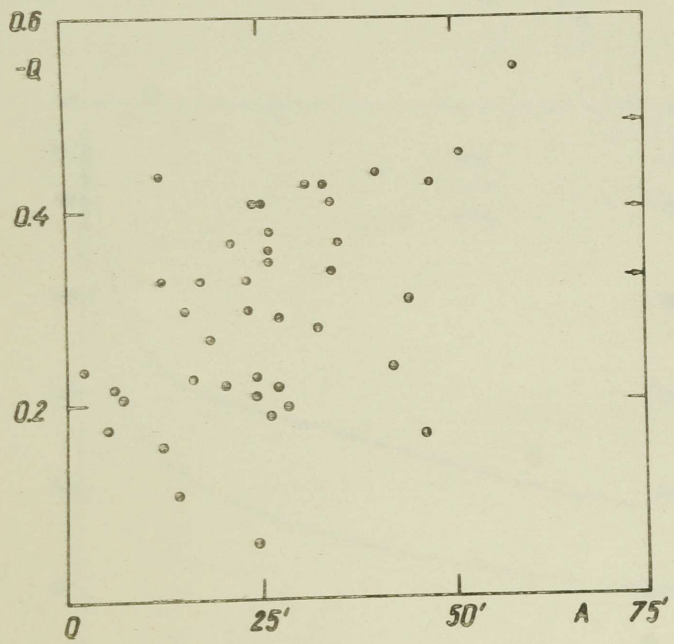


Рис. 5. Зависимость параметра металличности Q шаровых скоплений М31 от А.

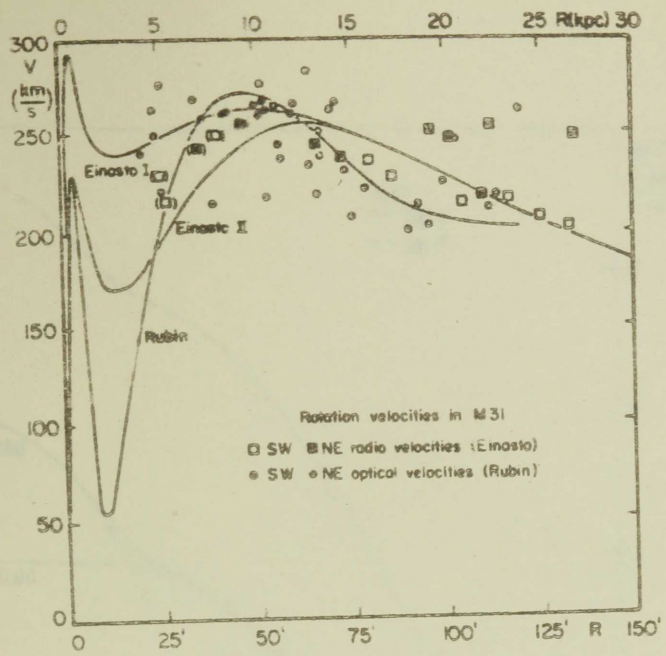


Рис. 6. Вращение М31. Наблюденные скорости вращения даны по радио- и оптическим измерениям [22]. Ход круговой скорости по Рубин [22] и на основе наших предварительных моделей [5] указан сплошными линиями.

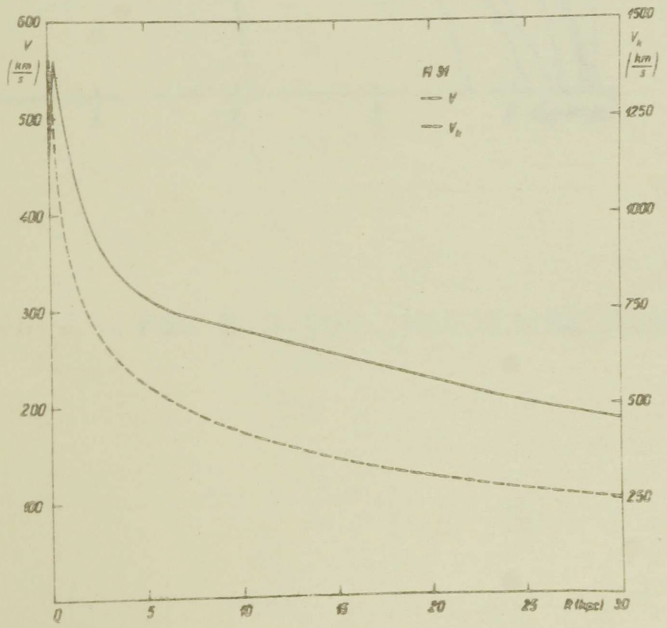


Рис.7. Круговая скорость и скорость освобождения в плоскости симметрии М31 согласно новой модели.

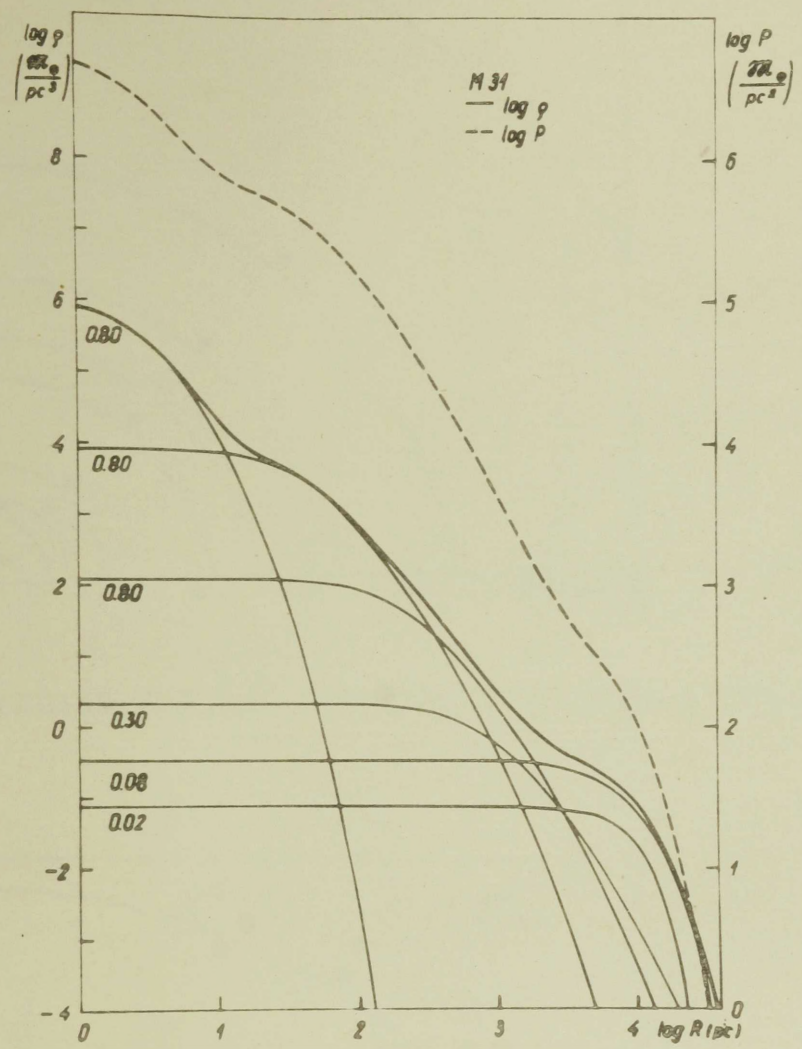


Рис.8. Пространственная и спроектированная плотность М31.

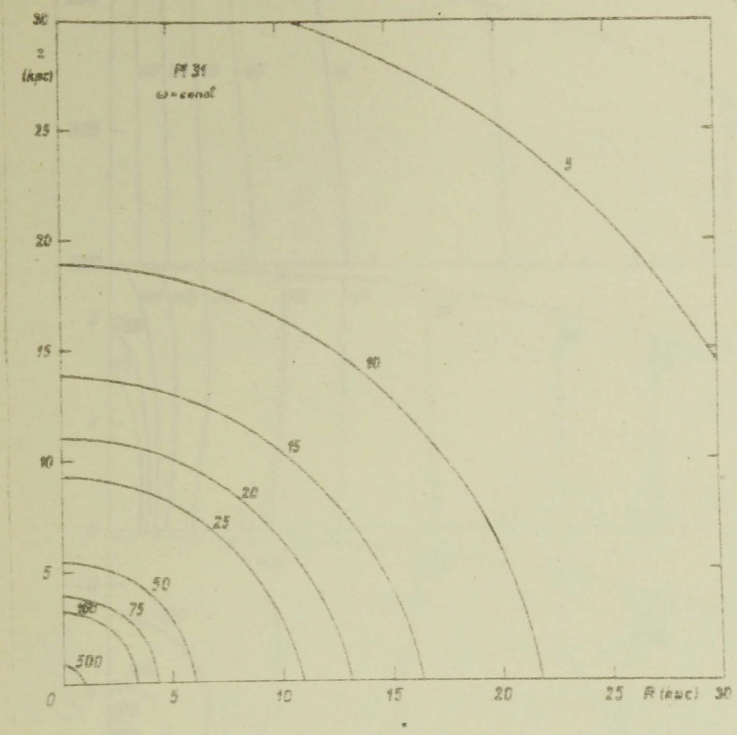


Рис. 9. Изолинии угловой скорости кругового движения ω_o.

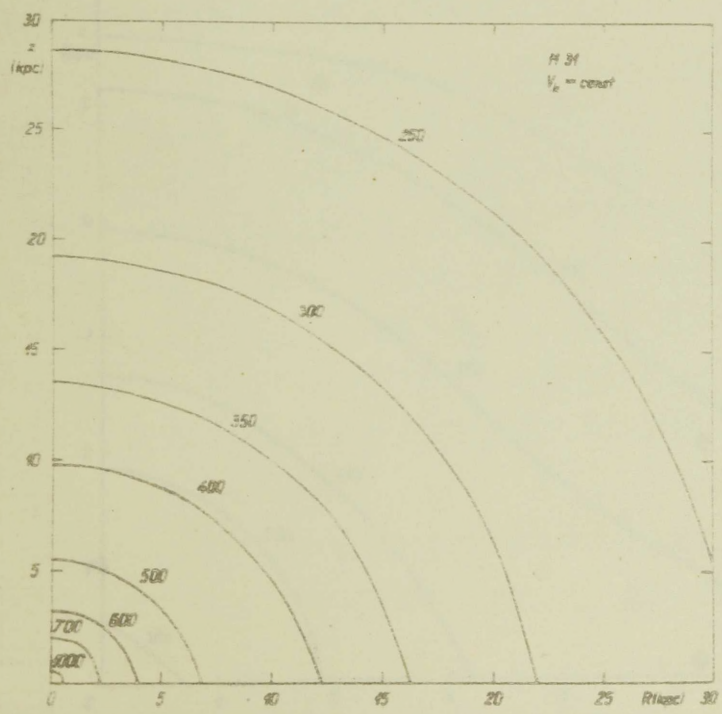
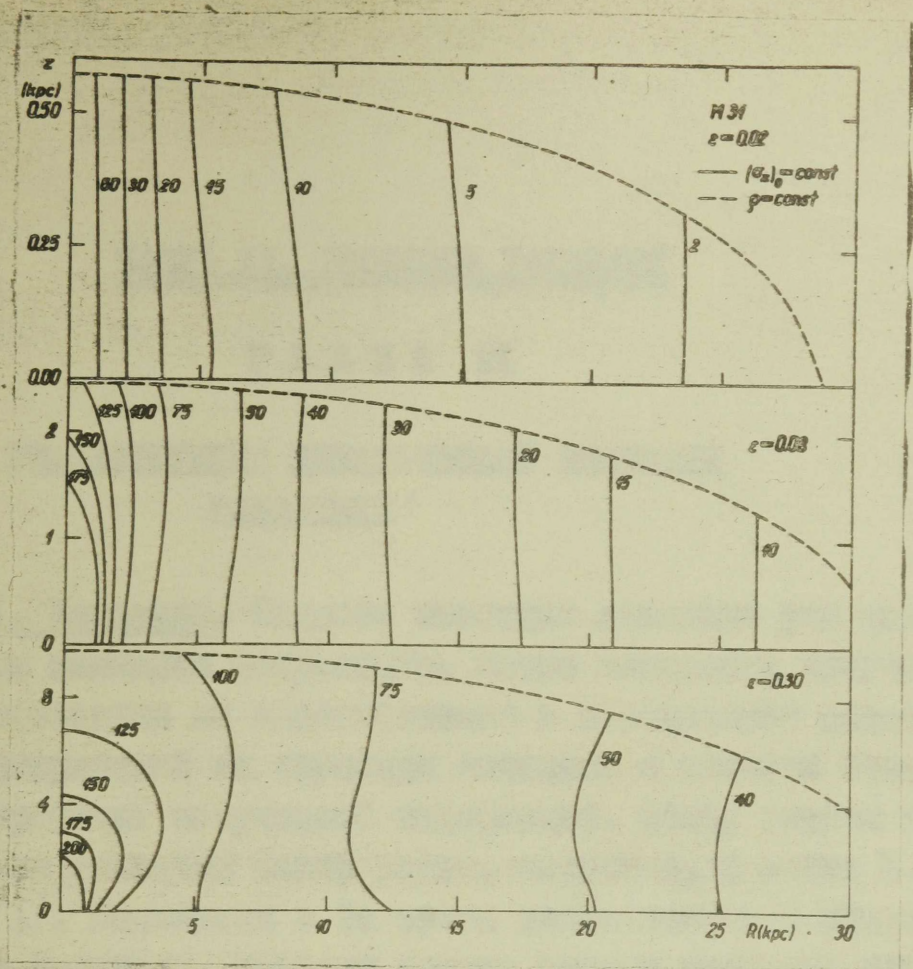


Рис.10. Изолинии скорости освобождения V_k.

a)



b)

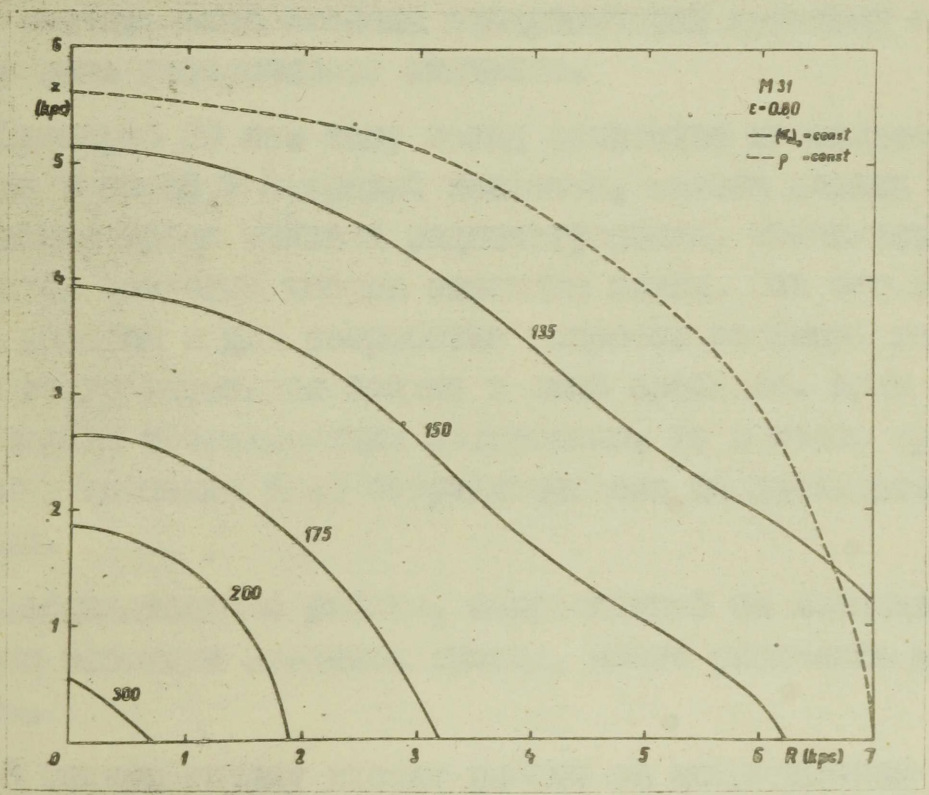


Рис.II. Изолинии дисперсии скоростей σ_z . Дисперсия вычислена в джинсовском приближении.

ЧАСТЬ IV. ЭВОЛЮЦИЯ ГАЛАКТИК

Г Л А В А 21

РЕКОНСТРУКЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ ГАЛАКТИКИ *

1. Введение. Вопросы эволюции галактик уже давно привлекали внимание астрономов. После выявления природы галактик, появления их классификации и определения некоторых закономерностей их строения начались и попытки эволюционной интерпретации полученной информации. Обзор ранних теорий эволюции галактик можно найти, например, в книге М.С.Эйгенсона [1]. Имеющиеся в то время наблюдательные данные были весьма скудными, поэтому ранние теории эволюции галактик носят значительной степени спекулятивный характер и имеют сейчас лишь историческое значение.

Примерно 20 лет тому назад положение изменилось. Вступил в строй 5-метровый телескоп, начала давать первые результаты новая техника радиоастрономии. Значительных результатов достигла теория эволюции звезд. Все это создало новые условия и для разработки вопросов эволюции галактик. Прежде всего изменился подход к этой проблеме. Если раньше преобладали теоретические построения, то с этого времени основное внимание ~~было~~ сосредоточилось на наблюдательных работах.

Наблюдательные работы, направленные на выяснение вопроса эволюции звездных систем, можно разделить на четыре группы.

В первую группу входят работы по исследованию структуры и эволюции звездных скоплений и ассоциаций. Здесь можно

---

* Основные результаты этой главы опубликованы в статье "On the Structure and Evolution of the Galaxy", Tartu Teated No. 26, p. 1 – 22, 1970.

отметить цикл работ В.А.Амбарцумяна [2] и П.П.Паренаго [3] о звездных ассоциациях, и работы Эггена [4], Сэндиджа [5] и других по фотометрии звездных скоплений, связанные с теоретическими работами Эпика [6], Шенберга и Чандрасекара [7], Шварцшильда и Хойла [8] об эволюции звезд. В результате этих исследований выявились основные черты эволюции звездных скоплений и индивидуальных звезд.

Второе эмпирическое направление в космогонии галактик - исследование пекулярных галактик и пекулярных областей галактик. Здесь можно отметить работы В.А.Амбарцумяна о ядрах галактик [2] Линдса и Сэндиджа [9] о взрывающихся галактиках, Б.А.Воронцова-Вельяминова [10] и Арпа [11] по составлению каталогов взаимодействующих галактик и многие другие. Основным результатом этого рода работ является установление факта активности ядер галактик и исследование ее природы.

Третье направление - статистика галактик. Здесь пытаются накопить возможно большой статистический материал в надежде обнаружить эволюционные последовательности галактик. Наиболее полным исследованием этого рода является, повидимому, работа Холмберга [12].

Наконец, имеется возможность реконструировать и эволюцию данной индивидуальной галактики путем анализа пространственно-кинематических характеристик звезд разного возраста. Этот метод был применен фон Хэрнером [13] и Эггеном, Линден-Беллом и Сэндиджем [14] для нашей Галактики.

При создании картины эволюции галактик существенное значение имеют и теоретические исследования. В последнее время в таких работах рассматриваются отдельные эволюционные процессы. Примером могут служить исследование Спицера, Шварцшильда [15], Л.Э.Гуревича [16] и Г.Г.Кузмина [17] о влиянии действия иррегулярных сил и Линден-Белла [18] о процессе интенсивного перемешивания в ходе сжатия галактики.

В настоящей главе мы рассмотрим, какие эволюционные выводы можно получить на основе наблюдательных данных и надежно установленных теоретических результатов.

2. Эволюционные выводы из кинематики объектов плоской составляющей. Данные гл. 4 показывают, что зависимость кинематических характеристик от времени имеет три существенно различные области, занимаемые соответственно объектами плоской составляющей, диска и гало. В первой и третьей областях кинематические характеристики быстро меняются с изменением возраста, в то время как в средней области они меняются сравнительно медленно.

Зависимость между дисперсией скоростей и скоростью вращения подсистемы вокруг центра Галактики была установлена еще Стрембергом [19]. Она состоит в том, что дисперсия скоростей звезд подсистемы тем больше, чем меньше галактоцентрическая скорость ее вращения V_θ. Но от этой монотонной зависимости имеется существенное отклонение: звезды с очень малой дисперсией и межзвездный газ имеют несколько меньшую скорость галактического вращения, чем звезды с дисперсией скоростей порядка 15 км/сек. Эта особенность хорошо видна на рис. 1 гл. 4. Она была известна уже давно [20]. Эдмондсон [21] пытался объяснить этот эффект неполным учетом дифференциального галактического вращения. Приведенные в его работе данные n показывают, однако, что влияние неполного учета вращения на порядок меньше, чем наблюдаемое отклонение.

Оорт [22] обратил внимание на то, что указанное явление может быть связано с тем, что газ вращается в Галактике со скоростью, меньшей круговой и что звезды после образования "падают" в направлении центра Галактики. Впоследствии Диксон детально исследовал этот вопрос и нашел убедительные доводы в пользу гипотезы Оорта [23 - 25]. По статистике звезд, возраст которых был определен по фотометрии Стремберна, он показал, что звезды образуются вблизи апогалактия своих орбит. Далее он показал, что молодые звезды заселяют в пространстве скоростей эллиптическую зону вокруг точки, соответствующей круговой скорости. По размерам этого эллипса Диксон заключил, что газ отстает от круговой скорости на $\Delta V_\theta \approx 14$ км/сек. Причина такого эффекта может заключиться в том, что газ помимо гравитационных сил поддерживается еще электромагнитными силами.

Аналогичный процесс имеет место и в вертикальном направлении. Радионаблюдения показывают [26], что слой межзвездного водорода не совпадает точно с плоскостью галактики, а имеет волновую форму. В окрестности Солнца эти волны имеют амплитуду ок. 50 пс. После образования звезды освобождаются от влияния электромагнитных сил и "падают" в направлении галактической плоскости. Очень молодые звезды еще находятся вблизи точки образования [23]. Так как частота вертикального колебания звезд C не зависит от амплитуды колебания, если последняя мала, то молодые звезды одинакового возраста должны синхронно колебаться по отношении к плоскости галактики. Колебание молодых подсистем звезд по было действительно обнаружено М.Йыэвээром [27]. При прохождении звезд через плоскость галактики их скорости достигают максимального значения. Первый раз это происходит тогда, когда возраст звезд t_s достигает четверть полного периода. Приняв C = 70 км/сек/кпс находим $t_s = 22 \times 10^6$ лет. Подсистема с таким возрастом должна иметь резко повышенное значение отношения дисперсии z-скоростей σ_z к дисперсии z-положений ζ. По данным о звездной эволюции мы можем заключить, что такой средний возраст имеют звезды главной последовательности спектрального типа B3. Как раз эта группа и имеет наибольшее значение σ_z/ζ [27].

Итак, после образования звезды синхронно падают в направлении центра и плоскости Галактики. Через несколько оборотов вокруг оси Галактики синхронность теряется частично вследствие фактического перемешивания звезд [28], частично потому, что мы не можем выяснить с достаточной точностью различий в возрасте звезд. Звезды заполняют всю область, определенной начальными скоростями и положениями их образования. Дисперсии скоростей σ_R и σ_Θ увеличиваются до значений, определяемых размерами эпициклической орбиты вокруг точки кругового движения: они получаются равными 14 и 9 км/сек соответственно ($\sigma_\Theta = \frac{2}{\pi}\Delta V_\Theta$, $\sigma_R = \frac{1}{\sqrt{\kappa_\Theta}}\sigma_\Theta$). Дисперсия σ_z увеличивается от начальной дисперсии скоростей облаков газа $(\sigma_z)_0$ за счет начальной дисперсии z-положений z_0 до $\sigma_z = 6$ км/сек ($\sigma_z^2 + C^2\zeta^2 = (\sigma_z)_0 + C^2 z_0^2$). Процесс перемешивания (фактического или кажущегося, вызванного дисперсией возрастов звезд подсистем), и приближение подсистемы к стационарному состоянию длится 2 – 4 оборота

частиц вокруг центра системы, т.е. в нашем случае 0.5 - I миллиарда лет. Вместе с тем, за это время скорость вращения подсистемы вокруг центра Галактики приобретает стационарное значение, согласующееся с гидродинамическими уравнениями. Рис. 3 гла 4 показывает, что фактическое увеличение дисперсии скоростей за это время больше. Это можно объяснить действием иррегулярных сил. Под влиянием иррегулярных сил заполняется и "дырка" в пространстве скоростей вокруг точки кругового движения. Такая дырка наблюдается только у молодых подсистем.

Как известно, кривая вращения водорода на южной стороны от центра Галактики примерно на I0 км/сек смещена по отношению к кривой на северной стороны [29]. Аналогичная картина имеет место и в других галактиках [30, 3I]. Все это указывает на то, что скорость вращения межзвездного водорода не может быть использована как индикатор детального хода круговой скорости и функции распределения массы. В частности наблюдаемый в некоторых галактиках, например в М3I, очень пологий спад скорости вращения водорода с увеличением расстояния от центра галактики вряд ли может быть связан с таким же пологим спадом круговой скорости. В противном случае отношение массы к светимости на периферии галактики получилось бы очень большим ($f > 1000$) , тогда как можно ожидать по физическим данным (гл. 20) обратное.

3. Эволюционные выводы из кинематики объектов диска и гало. Во введении мы уже указали на исследования фон Хэрнера [I3] и Эггена, Линден-Белла и Сэндиджа [I4], в которых сделана попытка реконструировать по кинематическим данным динамическую эволюцию Галактики.

Аргументация фон Хэрнера и Линден-Белла с соавторами опирается на следующие предпосылки.

а) Подсистемы вновь образующихся звезд приобретают те же пространственные и кинематические характеристики, что имели облака межзвездного вещества при формировании звезд.

б) Характеристики пространственно-кинематической структуры подсистем звезд не меняются или меняются мало с тече-

нием времени. В частности кинетический момент звезд и эксцентрицитет их орбит не меняются даже при существенном изменении гравитационного поля Галактики.

в) Масса и полный кинетический момент всей Галактики постоянны.

Следует сказать, что эти предположения не выполняются вполне строго. Как мы видели в предыдущем параграфе, газ поддерживается помимо гравитации еще электромагнитными силами. Вновь образующиеся звезды освобождаются от влияния негравитационных сил и для приобретения стабильного состояния соответствующая подсистема несколько сжимается как в радиальном, так и в вертикальном направлении. Вследствие действия иррегулярных сил пространственно-кинематическая структура подсистем звезд продолжает медленно меняться и в дальнейшем. Но все эти изменения малы, так что подсистемы звезд достаточно хорошо "помнят" условия их образования.

Фон Хэрнер и Линден-Белл с соавторами определяли возраст исследуемых групп звезд. Фон Хэрнер делал это количественно по данным о теории эволюции звезд, а Эгген, Линден-Белл и Сэндидж применили качественную оценку относительного возраста звезд по ультрафиолетовому избытку. Располагая вертикальные скорости, скорость галактического вращения и удельный кинетический момент звезд в окрестности Солнца по их возрасту, эти авторы пришли к выводу, что в начальной стадии развития Галактика сильно сжималась. Линден-Белл и др. нашли, что Галактика сжималась радиально в 10 раз, а вертикального в 25 раз. Звезды гало образуются в течение фазы сжатия до того как облака газа, достигнув перигалактия своих орбит, теряют вследствие столкновений свою избыточную кинетическую энергию. Фаза сжатия весьма короткая, по оценке Линден-Белла и др. она длится всего несколько сот миллионов лет.

Рассмотрим теперь, какие заключения по эволюции Галактики можно делать на основе материала, собранного в настоящем цикле работ.

Кроме использованных фон Хэрнером и Линден-Беллом и др. предположений допустим еще, что

г) отношение скорости вращения подсистемы $V_{\theta i}(R)$ к круговой скорости $V_c(R)$, а также соответствующее отношение кинетических моментов $h_i(R)/h_c(R)$ не зависит от R, т.е. $V_{\theta i}(R) = \beta V(R)$, где β постоянная.

Имея модель распределения массы можем вычислить для всей Галактики функцию $V_c(R)$, а по околосолнечным данным о кинематике подсистем можем определить параметр β для подсистем разного возраста. Таким образом, у нас есть возможность вычислить скорость вращения и удельный кинетический момент

$$h_i(R) = R V_{\theta i}(R) \qquad (3.1)$$

для всех интересующих нас подсистем. Результаты таких вычислений приведены на рис. I для семи тест-популяций, параметры которых даны в гл. 7 табл. 4.

Каждая кривая на рис. I соответствует подсистеме определенного возраста. Согласно нашему предположению подсистемы звезд являются индикаторами положения межзвездного газа в соответствующие моменты времени. Таким образом, рис. I показывает, на каком расстоянии от центра Галактики облака газа определенного удельного кинетического момента h были в разные моменты времени t. По данным рис. I можно найти зависимость R_3 от времени t для облаков с данным кинетическим моментом h. Зависимость, полученная для шести значений h, изображена на рис. 2.

Этот метод позволяет реконструировать эволюцию газовой составляющей лишь начиная с момента образования первых звезд с соответствующим удельным кинетическим моментом. Более раннюю стадию эволюции газа можно получить путем экстраполяции, исходя из некоторой модели первоначального состояния и закона изменения R с течением времени. Этот вопрос рассматривается в следующем параграфе. На рис. 2 экстраполированные части зависимости изображены прерывистыми линиями.

Полученная картина подтверждает и уточняет выводы фон Хэрнера [13] и Линден-Белла и др. [14]. В начальной фазе развития Галактики сжатие происходило очень быстро, затем скорость сжатия существенно уменьшилась и к настоящему

времени сжатие практически прекратилось. Степень сжатия т.е. отношение начального радиуса R_0 к современному R, очень велика для ядра Галактики и весьма мала для ее периферийной области.

Имеющиеся данные можно использовать и для реконструкции эволюции газа в вертикальном направлении.

В качестве характеристики вертикальной протяженности подсистем будем использовать отношение полуосей ε эллипсоидов равной плотности. На рис. 3 на оси ординат отложено ε, а на оси абсцисс - возраст Галактики; современный возраст Галактики принят равным 10 миллиардам лет (гл. 23). Если предположить, что динамические характеристики подсистем звезд, в том числе и отношение полуосей ε, не меняются с временем, то эволюционные треки подсистем звезд на рис. 3 являются горизонтальными отрезками прямых, длина которых соответствует их возрасту. Жирная линия, проходящая через левые концы горизонтальных линий (точки образования подсистем), изображает эволюционный трек газа. Мы приходим к заключению, что в вертикальном направлении газ также сжимался, причем в начальной фазе развития Галактики сжатие было быстрым. Начиная с отношения полуосей $\varepsilon = 0.2$ скорость сжатия газа уменьшалась (прерывистая кривая).

Подчеркнем, что полученная картина соответствует предположению о неизменности динамических параметров подсистем звезд. Как мы видим, в этом случае сжатие газа после короткой начальной фазы происходит очень медленно. Ряд авторов, в том числе и Линден-Белл [14], подчеркивают, что сжатие газа должно быть быстрым и что он после первой фазы приобретает сразу равновесное состояние, близкое к современному. Если принять это предположение, тогда приходится продолжить эволюционный трек газа от точки с $\varepsilon = 0.2$ вниз до $\varepsilon = 0.016$, эта часть трека изображена на рис. 3 непрерывной жирной линией. Соответствующие эволюционные треки подсистем звезд изображены тонкими непрерывными линиями. Видим, что в этом предположении динамические параметры подсистем звезд диска существенно меняются с временем.

Предварительные результаты этого исследования были опубликованы в [32]. Тогда мы использовали несколько иную калибровку возраста подсистем звезд. Различие между двумя крайними возможными путями эволюции газа было больше, чем получается теперь.

Действительный эволюционный путь газа по всей вероятности находится между рассматриваемыми крайними возможностями. Так как некоторая динамическая эволюция подсистем звезд диска несомненно имеет место, то нижняя кривая эволюции газа, повидимому, более правильная. Но мы не знаем, приобрел ли газ сразу окончательную толщину. Этот вопрос обсуждается в [33] и в гл. 23.

в ходе развития Галактики получен по материалу и методом, отличающихся от использованных в [13] и [14]. При этом полученные скорости сжатия газа на ранней фазе развития Галактики существенным образом зависят от калибровки возраста объектов гало. Абсолютные методы определения возраста имеют точность лишь около 10 %, тут сказывается неуверенность определения химического состава, что увеличивает ошибку возраста. Поэтому мы определили в гл. 4 возраст объектов гало по отношению к наиболее старым звездам Галактики, возраст которых был принят равным 10×10^9 лет. При выборе относительного возраста гало мы учитывали результаты теоретических расчетов, которые описаны в следующем параграфе.

4. Модель эволюции протогалактики. Прежде чем выбрать определенную модель протогалактики мы должны рассмотреть, какие исходные ~~параграфы~~ данные для такой модели дает космология.

Открытие реликтового излучения, химический состав первоначального вещества и ряд других обстоятельств весьма убедительно доказывают правильность теории образования Вселенной путем "большого взрыва". Согласно этой теории вещество было в начальной фазе развития Вселенной горячим и находилось в термодинамическом равновесии с излучением [34, 35], образуя почти однородную среду. При этом имелись небольшие флуктуации плотности, которые потом приобрели решающую роль при образовании звездных систем [36]. Природа этих флуктуаций пока не совсем ясна. Они могут иметь вихревую [37 - 40], адиабатическую [34, 41, 42] или энтропийную [35, 43] природу;

или энтропийную [35, 43] природу; обзор этой проблемы дан Л.М.Озерным [44]. Для нашей цели, однако, не существенны детали процесса фрагментации, а факт его наличия.

При космологическом расширении Вселенной плотность и температура падают. При некоторой температуре порядка 4×10^3 К^0 [44] начинается рекомбинация газа и освобождение ее от влияния радиации. Этот процесс длится долго и приведет к нарастанию флуктуации плотности. После полного освобождения вещества от влияния излучения при достаточно сильных флуктуаций плотности космологическое расширение уже не может удержать облака газа от уплотнения под влиянием собственной гравитации. Таким образом, плотность вещества, которому предстоит стать галактикой, сначала уменьшается под влиянием космологического расширения, а затем увеличивается под влиянием собственной гравитации.

Для выяснения возможной скорости и степени сжатия протогалактики мы рассмотрим соответствующую модель, начиная с момента максимальных ее размеров. Из космологических данных вытекает, что флуктуации плотности были вначале малыми, поэтому мы можем использовать, следуя [45 - 47], однородную модель, вращающуюся с постоянной угловой скоростью ω_0. Будем считать, что в момент достижения максимальных размеров протогалактик обмен веществом между ними прекратился, так что их массы и полные кинетические моменты приобрели постоянные значения.

Имеющиеся космологические данные не позволяют определить для каждой индивидуальной протогалактики ее начальный радиус R^0 и плотность ϱ_0. Но радиус может быть найден при некоторых предположениях по наблюдениям. Для определения R_0 могут быть использованы апогалактические расстояния быстролетящих звезд. Можем предположить, что эти расстояния мало изменились за время эволюции галактики, так как на них не могли существенным образом повлиять ни изменение регулярного гравитационного поля, ни сравнительно слабые иррегулярные силы. Выполненные в [14] вычисления показывают, что некоторые звезды имеют R_{apogal} порядка 50 - 100 кпс. Разумеется, эти значения не очень точны, они существенно зависят как от точности компонентов ско-

ростей звезд, а также и от выбранной модели Галактики.

Более точную оценку R^0 можно получить косвенно, исходя из модели протогалактики $\omega_0 = const.$. Вследствие сохранения кинетического момента

$$h = \omega R^2 = \omega_0 R_0^2 \qquad (4.I)$$

где ω и R - угловая скорость и расстояние от оси Галактики облаков с удельным кинетическим моментом h в настоящее время, а ω_0 и R_0 - то же самое в начальный момент. Значения R_0 могут быть найдены для различных h по рис. 2, результаты даны в табл. I. По R_0 нетрудно найти и ω_0.

Табл. I

h км/сек кпс	R_0 кпс	ω_0 км/сек/кпс
200	$>$ 5	$<$ 4
800	28	I.0
2000	45	I.0
3000	$\gtrsim$ 50	$\gtrsim$ I.2

Видим, что можно было бы принять ω_0 = I км/сек/кпс. Максимальное значение удельного кинетического момента несколько больше 4000 км/сек кпс, чему соответствует $R^0 \approx$ 65 кпс. Это значение хорошо согласуется с оценкой, полученной по апогалактическим расстояниям.

Используя указанное значение ω_0 мы вычислили для всех h начальные расстояния R_0 и произвели экстраполяцию кривых на рис. 2. По формуле (4.I) можно вычислить также степень сжатия газа

$$d = \frac{R_0}{R} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{1/2} \qquad (4.2)$$

Как начальные расстояния R_0, так и логарифмы степени сжатия $\log d$ приведены на рис. 4 для четырех тест-популяций. Аргументом служит современное расстояние R.

Модель протогалактики, вращающейся с постоянной скоростью, можно использовать и для уточнения вероятного времени сжатия протогалактики. Мы выбрали максимальную возможную скорость сжатия, соответствующей свободному падению. Этот случай реализуется тогда, когда характерное время охлаждения протогалактики много меньше времени свободного падения. Для простоты расчетов мы допустим, что при сжатии слои газа не перемешиваются, другими словами, что пробная частица падает вместе со прилегающими слоями, так что внутренняя масса m_{int} неизменна. Аргументы в пользу этого приведены в [6].

Время сжатия при свободном падении от начального R_0 (апогалактий) до некоторого r выражается следующим образом

$$t_{contr} = \sqrt{\frac{a^3}{G m_{int}}} \left(\arccos x + e\sqrt{1-x^2}\right), \qquad (4.3)$$

где a и e – большая полуось и эксцентрицитет кеплеровой орбиты частицы газа, а

$$x = \frac{r-a}{ae}. \qquad (4.4)$$

Выражая a через апогалактическое расстояние R_0, можем записать формулу (4.3) в виде

$$t_{contr} = \sqrt{\frac{R_0^3}{G m_{int}}}\, f(x), \qquad (4.5)$$

где

$$f(x) = \frac{1}{(1+e)^{3/2}} \left(\arccos x + e\sqrt{1-x^2}\right). \qquad (4.6)$$

Переменная x выражается через e и степень сжатия $d = R_0/R$ формулой

$$x = \frac{1+e-d}{ed}, \qquad (4.7)$$

а эксцентрицитет – формулой

$$1-e = \frac{h^2}{G m_{int} R_0}. \qquad (4.8)$$

Для внутренней массы m_{int} мы можем положить

$$G m_{int} = R^3 \omega_c^2, \qquad (4.9)$$

где ω_c – угловая скорость кругового движения. Выражая еще h по (4.I) через R_0 и ω_0, получим

$$1 - e = \frac{d^3}{d_0^4}, \qquad (4.10)$$

где d_0 – степень сжатия объектов плоской составляющей.

Так как $d_0 > d \gg 1$, то практически во всех интересующих нас случаях $e \approx 1$ и $x \approx -1$ и поэтому $f(x) \approx 1$. Таким образом, мы можем отбросить фактор $f(x)$ в выражении для времени сжатия. Используя (4.9) и выражая время в годах и угловую скорость в км/сек/кпс, можем записать формулу (4.5) в виде

$$t_{contr} = \frac{10^9}{\omega_c} d^{3/2} = \frac{10^9}{\omega_c} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{3/4}. \qquad (4.11)$$

Эта формула и была использована при расчете времени сжатия, причем $\omega(R)$ и $\omega_c(R)$ брались согласно нашей модели Галактики. Результаты вычислений для некоторых тест-популяций даны на рис. 5. Они показывают, что нуклеус Галактики конденсируется очень быстро, в течение около I0 миллионов лет. Затем на него последовательно слой за слоем падают все более далекие массы газа. В окрестности Солнца звездообразование начинается около 10^8 лет после конденсации ядра, образование гало длится около полу-миллиарда лет. Весь процесс сжатия длится несколько менее миллиарда лет.

Аналогичный расчет показывает, что сжатие газа в вертикальном направлении занимает примерно столько же времени.

Использованная модель, конечно, весьма груба. Действительное время сжатия может быть несколько больше найденного нами, если газ охлаждался медленно. Но время сжатия может быть и короче, если первоначальные размеры протогалактики были меньше, чем принято в нашей модели. При более детальном рассмотрении следует учесть обстоя-

тельство, что протогалактика вряд ли была вполне однородной; скорее она состояла из большого числа отдельных облаков, которые двигались друг относительно друга. Этот аспект учтен частично в недавной работе Броше [48]. Он рассмотрел, однако, сжатие всей галактики, так что для получения дифференциальной картины его результаты не могут быть использованы.

Время сжатия являлось объектом дискуссии между Сэндиджом [49] и Руудом и Айбеном [50]. Сэндидж утверждает, что время образования системы шаровых скоплений и других объектов гало состояло всего $\sim 2\times10^8$ лет, а Рууд и Айбен утверждают, что это время могло быть больше. Сравнение использованных этими авторами данных с нашими показывает, что в значительной степени спор является результатом недоразумения. Объекты внутренней части гало, изученные Сэндиджом [14, 49], действительно могут конденсироваться достаточно быстро, но весь процесс сжатия протогалактики длится гораздо долше.

Другой пункт спора касается образования звезд с большими эксцентрицитетами e орбит. В I4 показано, что при сжатии протогалактики e меняется мало. Следовательно, звезды гало должны уже при образовании иметь большие e, другими словами, и облака газа должны двигаться по вытянутым эллипсам, как получается при быстром сжатии протогалактики. Если же газ помимо гравитационных сил поддерживается вначале еще другими силами, то звезды с большими эксцентрицитетами могут образоваться и тогда, когда газ не сжимается [50]. Но поддержание газа негравитационными силами возможно только при условии, что газ достаточно горячий, а тогда звездообразование невозможно [49]. Таким образом, сжатие газа протекало, вероятно, все-таки довольно быстро. Окончательный ответ на этот вопрос может дать лишь количественная теория звездообразования, которая пока еще не разработана.

В связи с проблемой сжатия протогалактики делаем еще два замечания.

Недавно на высоких галактических широтах открыты быстродвижущиеся облака водорода [51, 52]. Их происхождение

пока не выяснено, но они могут быть остатками протогалактики, которые только теперь приближаются к плоскости Галактики. Если это так, то полное время сжатия протогалактики заметно больше, чем принято в нашей модели.

Некоторые авторы считают [16], что сферические подсистемы Галактики образуются путем выброса из ядра или диска, другими словами, процесс звездообразования начинается лишь после сжатия протогалактики. Как указывают Рууд и Уелч [53], эта гипотеза не может объяснить различие в химическом составе звезд. Звезды в ядре галактики богаты металлами, звезды же гало имеют большой дефицит металлов. В окрестности Солнца все звезды с дефицитом металлов очень стары и все они имеют большие z-скорости [54 - 56]. С другой стороны, минимальное содержание тяжелых элементов звезд диска около половины солнечного. Все эти факты убедительно показывают, что гало не могло образоваться путем выброса звезд из ядра или диска. Исключением является лишь бегуны (*runaway stars*).

5. Распределение кинетического момента в М31. Местель [45] и Крампин и Хойль [46] нашли, что распределение кинетического момента в спиральных галактиках хорошо соответствует его распределению в однородном эллипсоиде, вращающемся с постоянной угловой скоростью. Крампин и Хойль интерпретировали этот результат как доказательство того, что галактики образуются из однородных однородно вращающихся облаков и что при формировании галактик роль турбулентности, которая могла бы привести к перераспределению кинетического момента, не играет существенной роли.

С другой стороны Линден-Белл [56] обратили внимание на то, что все эллиптические галактики и ядра спиральных галактик очень похоже друг на друга, если не считать различия в сплюснутости. Если не прибегать к искусственной гипотезе, что условия образования эллиптических галактик и ядер спиральных галактик были почти идентичны, то сходство можно объяснить наличием процесса сильного перемешивания при формировании галактик, который стер все индивидуальные особенности протогалактик. Линден-Белл исследовал этот

вопрос теоретически [18] и нашел, что быстрое иррегулярное изменение гравитационного поля при сжатии протогалактики должно привести к ожидаемому эффекту. Проверка этой теории была осуществлена численными экспериментами [57 - 61]. Вычисления показали, что разработанная Линден-Беллом новая статистическая механика хорошо описывает наблюдаемое распределение энергии.

Из результатов Линден-Белла вытекает, что при формировании эллиптических галактик и ядер спиральных галактик турбуленция играет существенную роль. В аспекте спиральных галактик этот вывод противоречит тому, что получено Крампином и Хойлом [46]. Для выяснения этого вопроса мы можем использовать наши модели Галактики и М31 и вычислить по ним распределение момента импульса. При этом лучше использовать модель М31, в которой распределение массы в центральной области определено надежно.

Допустим для простоты, что поверхности $\omega = const.$ являются концентрическими цилиндрами [45 - 47]. Основная доля кинетического момента сконцентрирована в весьма плоском диске, где различие между действительными поверхностями $\omega = const.$ (см. гл. 7 и 20) и цилиндрами мало. Большая разница имеет место в центральном теле, где лучше было бы брать изолинии $\omega = const.$ совпадающими с линиями $\varrho = const.$ (см. гл. 7 и 20). Но данные об угловой скорости в центральном теле не очень точны, так что обусловленная этой неуверенностью ошибка больше ошибки, которую мы допускали, приняв поверхности равных угловых скоростей цилиндрическими.

При этих предположениях распределение массы по кинетическому моменту h выражается так [45, 46]

$$m(h) = \mathcal{P}[R(h)] \frac{dR}{dh}, \qquad (5.1)$$

где

$$\mathcal{P}(R) = 2\pi R P(R) \qquad (5.2)$$

- масса цилиндрического слоя единичной толщины, причем $P(R)$ - спроектированная плотность. Для производной $\frac{dR}{dh}$ имеем

$$\frac{dh}{dR} = R\left(\frac{V_\theta}{R} + \frac{dV_\theta}{dR}\right). \qquad (5.3)$$

Здесь можем приближенно положить

$$V_\theta = \beta V, \qquad (5.4)$$

где V – круговая скорость. Вводя динамические параметры Оорта A, B и используя формулу $\kappa_\theta = -B/(A - B)$, получаем

$$\frac{dR}{dh} = \frac{1}{2\kappa_\theta}\,\frac{R}{h}. \qquad (5.5)$$

Вычисленное по формулам (5.1), (5.5) распределение массы по моменту h изображено на рис. 6. Жирная линия соответствует полному распределению, а тонкие линии распределениям для первого и второго населения. В первое население включены диск и плоская составляющая, для них согласно результатам гл. 4 и 7 принято $\beta = 0.0$. Во второе население включены центральное тело (по данным гл. 20 мы брали $\beta = 0.4$) и гало, последнее разбито на две части равной массы, параметр β был взят равным соответственно $\beta = 0.3$ и $\beta = 0.6$). Видим, что распределение момента первого и второго населения резко отличается друг от друга.

Местель, Крампин и Хойль сравнивают распределение массы по кинетическому моменту галактик с аналогичным распределением для однородного сфероида, вращающегося с постоянной скоростью. Для этого распределения мы имеем

$$m(x) = \frac{3}{2}\,\mathfrak{M}\sqrt{1-x}, \qquad (5.6)$$

где $\mathfrak{M}$ – масса сфероида и

$$x = h/h^0 \qquad (5.7)$$

где h^0 – максимальный кинетический момент на периферии модели. Масса модели M31 известна, а для максимального момента по рис. 6 имеем $h^0 = 6000$ км/сек кпс. Соответствующая функция также показана на рис. 6.

Мы видим, что однородная модель лишь в самых общих

чертах описывает функцию $m(h)$. Имеется два существенные отклонения. На периферии галактики функция $m(h)$ приближается к нулю более медленно чем в однородной модели. Это указывает на то, что протогалактика не имела резкие границы, т.е. плотность на границе плавно убывала к нулю. Другое отклонение имеет место в центре системы, где наблюдается существенный избыток массы с малым кинетическим моментом. Эта особенность может быть вызвана тем, что протогалактика имела уже в начале более плотное ядро. Но более вероятно, что избыточная масса с малым моментом образовалась путем перемешивания масс и обмена моментом в фазе быстрого сжатия протогалактики. Во всяком случае распределение момента не противоречит гипотезе Линден-Белла и наличии стадии сильного перемешивания вещества протогалактики.

Но следует подчеркнуть, что процесс перемешивания существенен только в центральной области Галактики. Поэтому учет этого фактора не может заметно изменить рассмотренную нами выше картину эволюции протогалактики.

Июль I970 - сент. I97I

Литература

I. М.С.Эйгенсон, Внегалактическая астрономия, ГИФМЛ, М., I960.

2. В.А.Амбарцумян, Проблемы эволюции вселенной, Ереван, I968.

3. П.П.Паренаго, Труды ГАИШ 25, I954.

4. O.J.Eggen, Ap.J. 111, 65, 81, 414, 1950.

5. A.R.Sandage, Ap.J. 125, 437, 1957.

6. E.J.Öpik, Tartu Publ. 30, No.3, 4, 1938.

7. M.Schoenberg, S.Chandrasekhar, Ap.J. 96, 161, 1942.

8. F.Hoyle, M.Schwarzschild, Ap.J. Suppl. 2, 1, 1955.

9. C.R.Lynds, A.R.Sandage, Ap.J. 137, 1005, 1963.

10. Б.А.Воронцов-Вельяминов, Атлас взаимодействующих галактик, Москва, I959.

11. H.C.Arp, Atlas of Peculiar Galaxies, Ap.J. Suppl. 14, No. 123, 1966.
12. E.Holmberg, Uppsala Medd. No. 148, 1964.
13. S.von Hoerner, Mitt. Astr. Rechen-Inst. Heidelberg, Ser. A, No. 13, 1960.
14. O.J.Eggen, D.Lynden-Bell, A.Sandage, Ap.J. 136, 748, 1962.
15. L.Spitzer, Jr., M.Schwarzschild, Ap.J. 118, 106, 1952.
16. Л.Е.Гуревич, Вопросы космогонии, 2, 151, 1954.
17. Г.Г.Кузмин, Тарту публ. 33, 351, 1961.
18. D.Lynden-Bell, M.N. 136, 101, 1967.
19. G.Stromberg, Ap.J. 59, 228, 1924.
20. Т.Я.Роотсмяэ, Тарту публ. 33, 322, 1961.
21. F.K.Edmondson, A.J. 61, 175, 1956.
22. J.H.Oort, The Galaxy and the Magellanic Clouds, eds. F.J.Kerr, A.W.Rodgers, Canberra, p. 1, 1964.
23. M.E.Dixon, M.N. 137, 337, 1967.
24. M.E.Dixon, A.J. 72, 429, 1967.
25. M.N.Dixon, M.N. 140, 287, 1968.
26. G.Westerhout, B.A.N. 13, 201, 1957.
27. M.Jõeveer, Tartu Publ. 36, 84, 1968.
28. G.G.Kuzmin, Tartu Teated No. 6, 1962.
29. F.J.Kerr, The Galaxy and the Magellanic Clouds, eds. F.J.Kerr, A.W.Rodgers, Canberra, p. 81, 1964.
30. M.S.Roberts, Oral presentation to the IAU Commission 33 Meeting, Prague, 1967.
31. G.Garranza, G.Courtes, Y.Georgelin, G.Monnet, A.Pourcelot, N.Astier, Ann. d'Astroph. 31, 1, 1968.
32. J.Einasto, Tartu Teated No. 26, 1, 1970.
33. E.N.Parjer, Ap.J. 154, 49, 1968.
34. P.J.E.Peebles, Ap.J. 142, 1317, 1965.
35. А.Г.Дорошкевич, Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков, А.Ж. 44, 295, 1967.
36. Е.М.Лифшиц, ЖЭТФ 16, 587, 1946.
37. C.F.von Weizsäcker, Ap.J. 114, 165, 1951.
38. Л.М.Озерной, А.Д.Чернов, А.Ж. 44, 1131, 1967?
39. Л.М.Озерной, А.Д.Чернов, А.Ж. 45, 1137, 1968.
40. Л.М.Озерной, Г.В.Чибисов, А.Ж. 47, 769, 1970.
41. J.Silk, Ap.J. 151, 459, 1968.

42. P.J.E.Peebles, J.T.Yu, Ap.J. 162, 815, 1970.
43. P.J.E.Peebles, R.H.Dicke, Ap.J. 154, 891, 1968.
44. Л.М.Озерной, Ж.Э.Т.Ф. 102, 71, 1970.
45. L.Mestel, M.N. 126, 553, 1963.
46. D.J.Crampin, F.Hoyle, Ap.J. 140, 99, 1964.
47. K.A.Innanen, Ap.J. 143, 150, 1966.
48. P.Brosche, Astron. Astroph. 6, 240, 1970.
49. A.Sandage, Ap.J. 162, 841, 1970.
50. R.Rood, I.Iben Jr., Ap.J. 154 , 215, 1968.
51. J.H.Oort, Radio Astronomy and the Galactic System , ed. H.van Woerden, Acad. Press, London, p. 279, 1967.
52. N.Dieter, P.A.S.P. 81, 186, 1969.
53. H.J.Rood, G.A.Welch, Ap.J. 165, 225, 1971.
54. M.E.Dixon, M.N. 129, 51. 1965.
55. M.E.Dixon, M.N. 131, 325, 1966.
56. D.Lynden-Bell, Radio Astronomy and the Galactic System, ed. H.van Woerden, Acad. Press, London, p. 257, 1967.
57. M.Henon, Bull. astr. Paris, 3, 241, 1968.
58. S.Goldstein, S.Cuperman, M.Lecar, M.N. 143, 209, 1969.
59. S.Cuperman, S.Goldstein, M.Lecar, M.N. 146, 161, 1961.
60. M.Feix, F.Hohl, Bull. astr. Paris, 3, 289, 1968.
61. F.Hohl, J.W.Campbell, A.J. 73, 611, 1968.

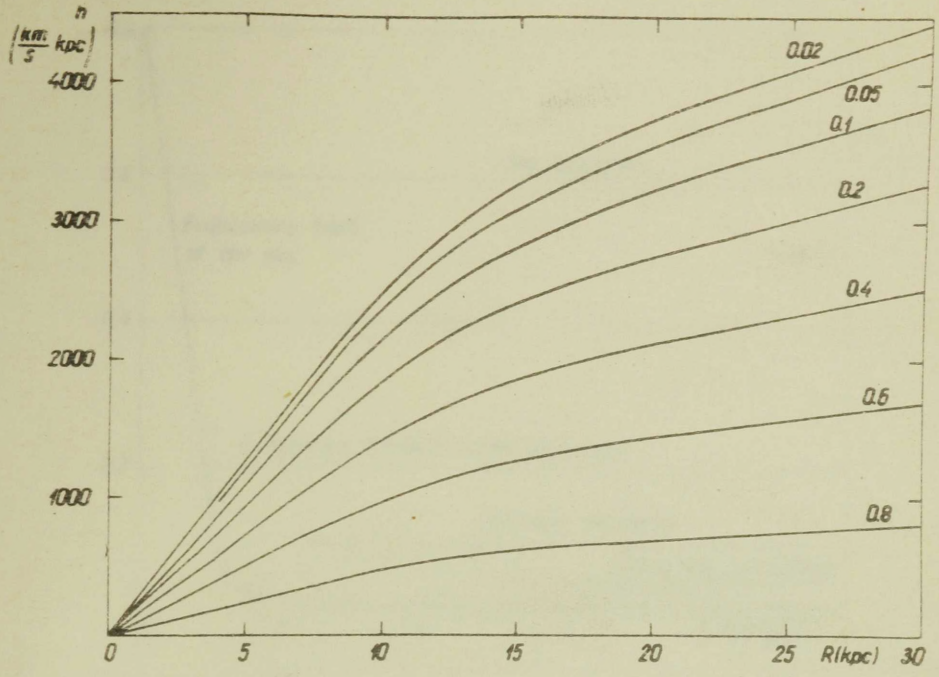


Рис. I. Зависимость удельного кинетического момента h подсистем разной сплюснутости (ε) от расстояния R.

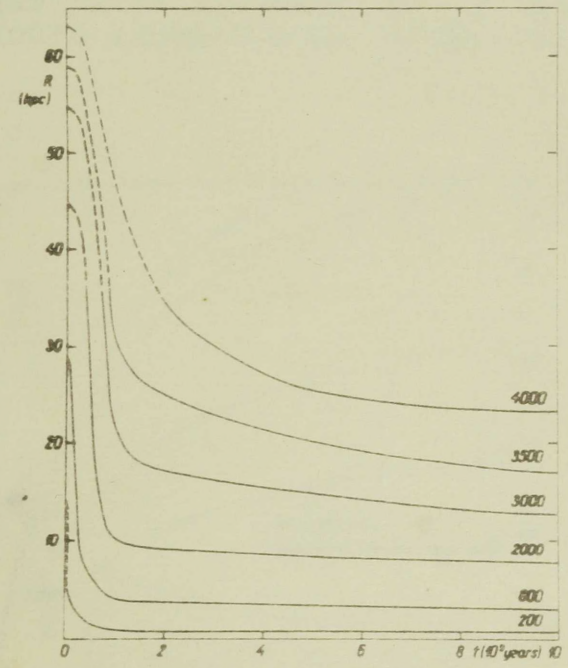


Рис. 2. Зависимость от времени расстояния R от галактической оси облаков газа с определенным кинетическим моментом h (время отчитывается от начала формирования Галактики).

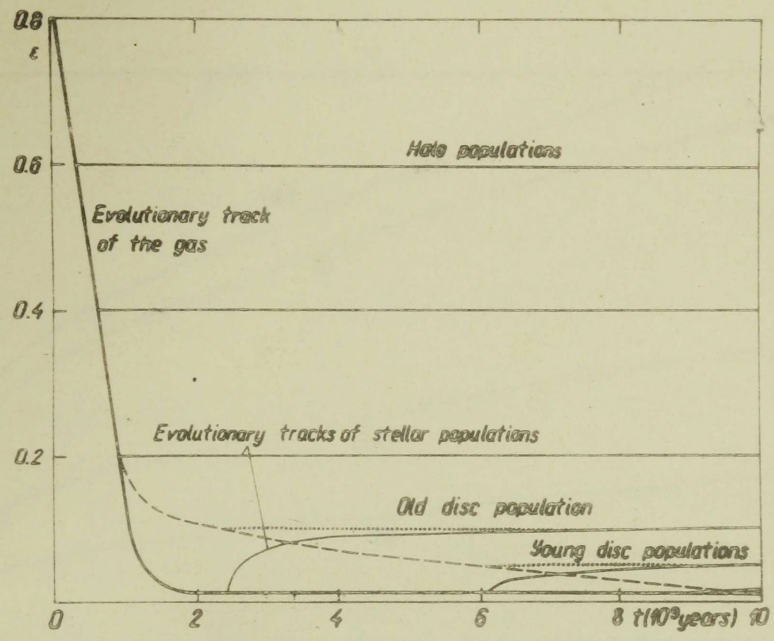


Рис. 3. Возможные эволюционные изменения отношения ε полуосей эллипсоидов равной плотности для подсистем звезд разного возраста и газа. Непрерывные линии соответствуют гипотезе, что газ после начального вертикального сжатия приобретает окончательное значение ε, прерывистые линии – гипотезе неизменности динамических параметров подсистем звезд.

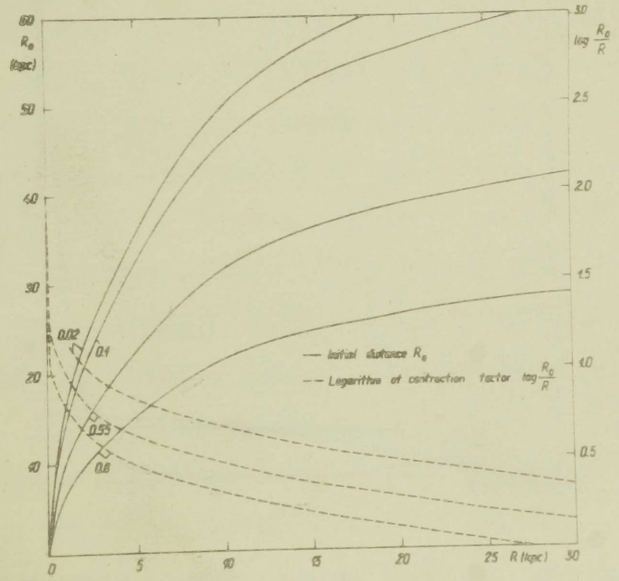


Рис. 4. Первоначальные расстояния R_0 и логарифм степени сжатия в зависимости от R для подсистем разной сплюснутости.

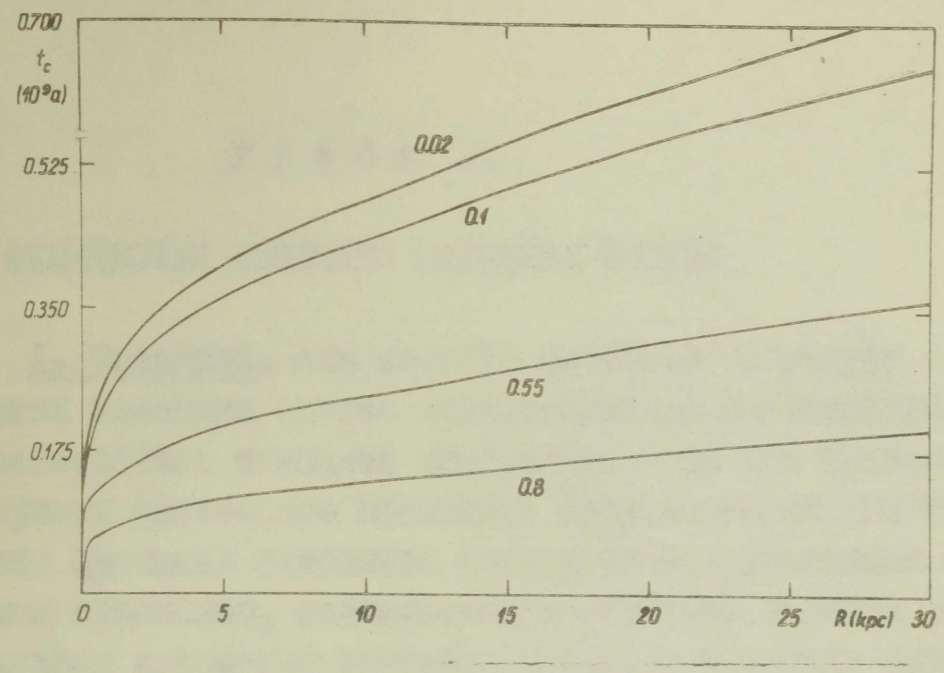


Рис. 5. Время сжатия в зависимости от R для подсистем разной сплюснутости(ε) при свободном падении.

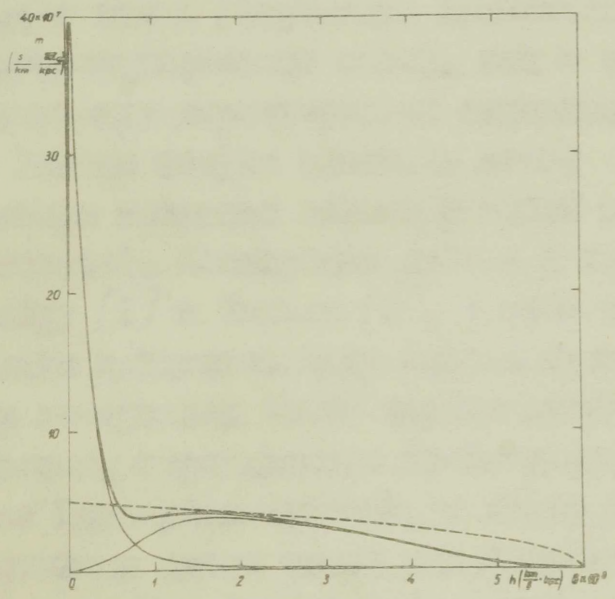


Рис. 6. Распределение массы M31 по удельному кинетическому моменту h (сплошные линии). Прерывистая линия - распределение массы по h для однородного тела такой же массы и максимального момента, вращающегося с постоянной угловой скоростью.

ГЛАВА 22

ФИЗИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ

1. Введение. Для полного описания структуры галактик и других звездных систем помимо функций пространственно-кинематического описания необходимо дать еще функции, характеризующие физическое состояние галактик и их подсистем. К таким функциям относятся распределение различных спектральных признаков, описывающих химический состав, возраст и звездное население галактик и другие подобные функции. Вследствие эволюции галактик эти функции изменяются с временем.

Изменение физических характеристик галактик с временем происходит как в результате динамической эволюции галактики (перераспределение масс), так и в результате изменения физических характеристик отдельных звезд в ходе их эволюции. Успехи теории эволюции звезд позволяют проследить физическую эволюцию галактик путем построения соответствующих моделей. Пионерские работы в этой области принадлежат Либеру [1] и Тинсли [2]. В этой главе мы представим результаты найденной нами модели физической эволюции галактик. Для построения такой модели нужно знать скорость звездообразования, эволюционные треки звезд на теоретической диаграмме Герцшпрунга-Рессела, а также болометрические поправки и истинные цвета звезд как функции эффективной температуры и болометрической светимости.

2. Начальная функция распределения масс звезд. Вопрос о начальном распределении звезд по массе и светимости и соотношении между гигантами и карликами был поставлен Э.Эпиком для проверки теории эволюции звезд уже в 1938 году [3]. По современным данным начальное распределение

звезд по массам изучил Солпетер [4]. Он нашел, что число звезд $F(m)$, образовавшихся в единичном интервале масс m, выражается простой формулой

$$F(m) = a m^{-n} \qquad (2.1)$$

где a и n – постоянные, причем для показателя степени он получил значение $n = 2.35$. Солпетер вывел свой закон из статистики звезд поля, допуская, что скорость звездообразования постоянна в течение последних 5×10^9 лет, и что звезды переходят с главной последовательности в область гигантов после сгорания 10 % водорода.

Этот результат был подтвержден Сэндиджем [5], ван ден Бергом [6] и другими авторами по подсчетам звезд в молодых скоплениях. Позднее было выяснено, что скорость звездообразования не является постоянной (см. ниже), но учет этого фактора не изменил вида зависимости (2.1). Сводка Редина [7] показывает, что закон (2.1) с показателем $n = 2.5$ применим практически во всем наблюдаемом интервале масс $m_0 \leqslant m \leqslant m_u$, причем в средней области масс лучше всего с наблюдениями согласуется показатель $n = 2.35$.

Полная масса звезд равна, очевидно,

$$\int_{m_0}^{m_u} F(m)\, m\, dm, \qquad (2.2)$$

где m_0 и m_u – минимальная и максимальная масса звезд соответственно.

В качестве минимальной массы нельзя принять $m_0 = 0$, так как в таком случае интеграл (2.2) расходится. По всей вероятности при $m \to 0$ $F(m)m$ плавно стремится к нулю. Однако, поскольку результаты вычислений не зависят от точной формы $F(m)$ при очень малых массах, то будем считать m_0 эффективным нижним пределом масс звезд, при котором функция $F(m)$ обрывается так, что $F(m) = 0$ при $m < m_0$. Согласно [7] в окрестности Солнца $m_0 = 0.03$ солнечных масс.

Наблюдения показывают также, что существует верхний предел масс [7] порядка $m_u = 60 \div 100\, m_\odot$. Аналогичный результат получается и из теории [8], согласно которой

звезды с массами выше 65 солнечных пульсационно нестабильны. Выполненные недавно расчеты [9] показывают, что звезды проходят зону нестабильности очень быстро и не успевают при этом заметно потерять свою массу. Поэтому в качестве верхнего предела массы мы брали не 65 $m_\odot$, а 100 $m_\odot$.

Параметр a формулы (2.1) мы выберем так, чтобы выражение (2.2) равнялось единице. Тогда имеем

$$a = (n-2)(m_0^{2-n} - m_u^{2-n})^{-1} \qquad (2.3)$$

Вопрос о постоянстве параметров m_0 , m_u , h имеет решающее значение при моделировании физической эволюции галактик. Раньше считалось, что эти параметры являются постоянными. На несостоятельность этого предположения первым указал Амбер [1]. Он показал, что в предположении ~~пространства~~ постоянства этих параметров нельзя объяснить различие отношения массы к светимости шаровых скоплений ($f_V = M/L_V \approx 1$), карликовых галактик ($f_V \approx 10$) и гигантских галактик ($f_V \approx 100$), которые все имеют приблизительно одинаковый возраст.

На непостоянство параметров функции звездообразования указывает и различие в химическом составе в старых населениях галактик. Так, ван ден Берг [10] указал на то, что в шаровых скоплениях и старых открытых скоплениях, которые все имеют приблизительно одинаковый возраст, содержание тяжелых элементов весьма различно. Тяжелые элементы синтезируются внутри звезд. Быстрое обогащение межзвездного газа тяжелыми элементами могут обеспечить лишь массивные звезды, которые за короткий срок завершают свой активный участок эволюции. Большое разнообразие содержания тяжелых элементов среди старого населения Галактики указывает на то, что в начальный период эволюции Галактики относительное число массивных звезд было в ней гораздо больше, чем теперь. К такому же заключению пришли и Шмидт [11], Труран [12,13] и ряд других авторов.

Эти эффекты можно объяснить, допустив, что минимальная масса m_0 зависит от времени, или, более точно, что она зависит от содержания тяжелых элементов в межзвездном веществе. Труран и Камерон предложили и механизм для

объяснения этой зависимости [12].

3. Быстрота звездообразования. В первых исследованиях [4] предполагалось, что быстрота звездообразования в Галактике была более или менее постоянна. Более точное исследование фон Хэрнера [14] показало, что в начальный период эволюции Галактики быстрота звездообразования была значительно больше нынешней. Так как плотность межзвездного вещества в начальный период развития Галактики была больше, то Шмидт [15] заключил, что быстрота звездообразования может зависеть от плотности межзвездного вещества.

Определим локальную быстроту звездообразования как производную по времени плотности звезд и, следуя Шмидту, допустим, что она пропорциональна плотности газа в некоторой степени s

$$R_1 = \frac{d\rho_s}{dt} = \gamma \rho_g^s \,, \tag{3.1}$$

где γ и s - постоянные. Допуская, что полная плотность вещества в рассматриваемом элементе объема $\rho = \rho_s + \rho_g$ не зависит от времени, из уравнения (3.1) после интегрирования находим

$$\rho_g = \rho[1 + (s-1)\tau]^{-\frac{1}{s-1}} \,, \tag{3.2}$$

где

$$\tau = t/K \,, \tag{3.3}$$

причем характерное время K выражается формулой

$$K = (\gamma \rho^{s-1})^{-1} \,. \tag{3.4}$$

В частном случае $s = 1$ имеем

$$\rho_g = \rho e^{-\tau} \tag{3.5}$$

и

$$K = \gamma^{-1}. \qquad (3.6)$$

Интегрируя (3.I) по всему объему звездной системы и допуская, что объем газа не зависит от времени, получим вполне аналогично для массы газа

$$\mathcal{M}_g = \mathcal{M}\left[1+(s-1)\tau\right]^{-\frac{1}{s-1}}, \qquad (3.7)$$

где $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_g$ – полная масса галактики, а для характерного времени

$$K = (\gamma \bar{\rho}^{s-1})^{-1}, \qquad (3.8)$$

причем

$$\bar{\rho} = \mathcal{M}/V^*, \qquad (3.9)$$

где V^* – средний объем газа, который вычисляется по формуле

$$V^{*-(s-1)} = \mathcal{M}_g^{-s} \int \rho_g^{s-1} d\mathcal{M}_g. \qquad (3.10)$$

В частном случае $s = I$ имеем

$$\mathcal{M}_g = \mathcal{M}\, e^{-\tau}. \qquad (3.11)$$

Основной параметр, описывающий процесс звездообразования галактики – это характерное время К. Приведенные формулы показывают, что при $S = 0$ процесс звездообразования протекает тем медленнее, чем больше плотность, при $S = I$ характерное время К – постоянная величина, а при $S = 2$ быстрота звездообразования тем больше, чем выше плотность вещества. Наблюдательные данные о плотности и массе звезд и газа в звездных системах согласуются лишь с случаем $S = 2$. К аналогичному выводу пришли и Шмидт [I5] и Сандулек [I6]. Тем не менее мы проводим вычисления для всех случаев $S = 0, I, 2$. Нетрудно видеть, что при $K \to \infty$ все варианты приближаются к случаю $S = 0$.

4. Эволюционные треки. Существует четыре однородные серии моделей звезд различной массы. Первая и наиболее часто использованная серия была разработана Айбеном [17 - 23]. В этой серии был принят начальный химический состав звезд $X = 0.71$, $Y = 0.27$ и $Z = 0.02$, модели найдены для масс 0.5, 1.0, 1.25, 1.5, 2.25, 3, 5, 9, 15 $m_\odot$. В следующей серии Айбен с сотрудниками нашел эволюционные модели для звезд второго населения с малым содержанием металлов [24 - 32]. Параметры X, Y, Z были варьированы, вычисления проводились для начальных масс порядка солнечной. Другая аналогичная серия разработана Демарком с сотрудниками [33 - 37]. Наконец, недавно появилась еще серия Пачинского [38 - 43], в которой берется $X = 0.70$, $Y = 0.27$ и $Z = 0.03$, а вычисления проведены для масс 0.8, 1.5, 3.5, 7, 10, 15 $m_\odot$.

Нас интересует в первую очередь эволюция галактик, состоящих из звезд нормального химического состава с Z порядка 0.02 - 0.03. Имеющиеся серии моделей Айбена и Пачинского несколько отличаются друг от друга. Пачинский рассмотрел эволюцию звезд до углеродной вспышки (или гелиевой вспышки в случае звезд малой массы), в то время как эволюционные треки Айбена заканчиваются раньше. С другой стороны, серия Айбена имеет больше моделей для звезд малой массы, а для исследования поздней стадии эволюции галактик именно звезды малой массы играют существенную роль. После взвешивания всех аргументов мы решили взять в качестве основной серию моделей Айбена, но модели Пачинского были также использованы при фиксировании эволюционных треков на поздней стадии развития звезд. Для массивных звезд (m = 30 и 60 $m_\odot$) использовались еще модели Стозера [44 - 48], а для звезд малой массы - модели, полученные разными авторами [49 - 56].

Эволюционные треки были найдены для следующих масс: 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.25, 1.5, 2.25, 3, 5, 9, 15, 30, 60 $m_\odot$. На всех треках задавалось 19 точек, причем каждая точка соответствует определенной стадии эволюции звезды, например 3-я точка - приход звезды на линию "нулевого возраста главной последовательности", 10-ая точка - начало горения гелия, 13-ая точка - максимальная температура на стадии горения гелия, 16-ая точка - вершина ветви

красных гигантов (углеродная вспышка в массивных звездах), 18-ая точка – начало области белых карликов, 10-ая – приход звезды в области красных застывших тел. Для большинства точек возраст звезды, ее болометрическую светимость и эффективную температуру можно было непосредственно найти из указанных выше источников. Но в ряде случаев пришлось комбинировать различные данные, поэтому мы дадим некоторые комментарии к найденным трекам, которые будут опубликованы в [57] и приведены в табл. I.

а. Гравитационное сжатие. Для звезд малой массы время гравитационного сжатия вычислялось по [49], для очень массивных звезд время сжатия было найдено экстраполяцией данных Айбена.

б. Горение водорода. Все данные взяты непосредственно из опубликованных источников или получены путем интерполяции опубликованных данных. Для массы 0.8 трек был найден путем графической интерполяции, с использованием треков Айбена для I и I.25 $m_\odot$ и трека Пачинского для 0.8 $m_\odot$. Время было найдено по формуле

$$\log t_{0,02} = \log t_{0,03} + \Delta \qquad (4.1)$$

причем $t_{0,03}$ – возраст соответствующей модели Пачинского, а $\Delta = 0.112$ – поправка, которая была найдена следующим образом.

Горение Δm солнечных масс водорода при светимости звезды L длится

$$\tau_H \sim \Delta m L^{-1} \qquad (4.2)$$

Большую часть этого времени звезда находится на главной последовательности. В интересующем нас диапазоне масс [58]

$$L \sim m^4 \qquad (4.3)$$

Если допустить, что во всех звездах сгорает одна и та же доля их массы, то

$$\tau_H = \alpha m^{-3} \qquad (4.4)$$

где a – некоторая постоянная. В действительности указанные предположения выполняются лишь приближенно, поэтому имеем

$$\tau_H m^3 = a(m) \qquad (4,5)$$

где $a(m)$ – медленно меняющая функция массы и химического состава. Мы нашли ход этой функции по данным Пачинского для $Z = 0.03$ в диапазоне $0.8 \leqslant m \leqslant 3$ и по Айбену для $Z = 0.02$ в диапазоне $1 \leqslant m \leqslant 3$. Поправка Δ получена экстраполяцией кривой $Z = 0.02$ в сторону малых масс.

в. Горение гелия. Начальная стадия горения гелия хорошо изучена. Конечная же стадия до недавнего времени была плохо исследована, она представлена в серии моделей Пачинского. Для продолжения эволюционных треков, найденных Айбеном, до начала углеродной вспышки нужно найти способ для перехода от треков Пачинского к трекам Айбена.

Вычисления Пачинского и других авторов показывают, что эволюционный трек на последней стадии горения гелия налагается на трек последней стадии горения водорода на ветви красных гигантов. Далее Пачинский и Уус [59] показали, что скорость повышения светимости в области гигантов не зависит от массы звезды. Наконец, гелиевая и углеродная вспышки происходят при постоянной светимости [39, 60], которые при данном химическом составе можно брать равными $\log L/L_\odot = 3.10$ и $\log L/L_\odot = 5.0$ соответственно. Используя эти данные, а также найденные Айбеном начальные участки ветви красных гигантов, было нетрудно продолжить их далее до вершины ветви красных гигантов.

Труднее было определение общей продолжительности горения гелия, так как треки Айбена заканчиваются на разных стадиях горения гелия. Больше всего продвинут трек для массы $15\, m_\odot$. Здесь нужно было прибавить лишь последний этап эволюции, продолжительность которого можно брать по данным Пачинского и Ууса (этап очень короткий, так что ошибка в времени не играет роли). Теперь можно было вычислить для этой массы общую продолжительность этапа горения гелия τ_{He} и сравнить ее с продолжительностью горения водорода τ_H. Оказалось, что при $m = 15\, m_\odot$

$$\left(\frac{\tau_H}{\tau_{He}}\right)_{0,02} = \left(\frac{\tau_H}{\tau_{He}}\right)_{0,03} \qquad (4.6)$$

Данные Пачинского показали, далее, что при $Z = 0.03$ и $m \geq 3\,m_\odot$ с высокой точностью

$$\log\frac{\tau_H}{\tau_{He}} = -0.174 + 0.633\log m + 0.182\,(\log m)^2 \qquad (4.7)$$

Время τ_{He} для $Z = 0.02$ и $m \geq 3\,m_\odot$ было найдено по формулам (4.6) и (4.7).

Если принимать эти формулы и для меньших масс, тогда τ_{He} оказывается чересчур большим. С другой стороны, Айбен и Рууд показали [30], что для масс порядка солнечной $\tau_{He} \approx 12\times10^7$ лет почти не зависит от химического состава. Для $m = 3\,m_\odot$ мы нашли $\tau_{He} = 1.71\times10^7$ лет. Так как $\tau_{He} \ll \tau_H$, то большая точность τ_{He} не играет существенной роли в наших вычислениях и мы брали для $m < 3m_\odot$ $\tau_{He} = 17.\times10^7$ лет.

Для звезд $m < 3\,m_\odot$ треки Айбена заканчиваются перед гелиевой вспышкой, так что пришлось задавать весь ход эволюции на стадии горения гелия. Голубой конец горизонтальной ветви для массы $0.8\,m_\odot$ был фиксирован в точке $\log L/L_\odot = 1.60$ и $\log T_e = 3.68$, для остальных масс положение найдено интерполяцией. При выборе этих значений мы исходили из имеющихся наблюдательных данных о диаграмме цвет–величина старых галактических скоплений [61 - 63].

г. К о н е ч н ы е с т а д и и э в о л ю ц и и з в е з д . Имеющиеся данные показывают, что все звезды заканчивают свою эволюцию в области холодных вырожденных тел. Однако, путь к этому состоянию весьма различен. Звезды очень малой массы (для нормального содержания металлов $m \leq 0.08\,m_\odot$) после гравитационного сжатия в начальной стадии эволюции сразу переходят на стадию вырождения. Радиус звезды при этом не меняется, он зависит от массы звезды, и звезда излучает за счет термической энергии. Согласно [64] продолжительность такой стадии эволюции (при массе застывшего тела m) от бесконечной светимости до L длится

$$\log \tau = b + \frac{5}{7} \log (m/L), \qquad (4.8)$$

причем b – постоянная, зависящая от химического состава, а m и L выражаются в солнечных единицах. Красные карлики имеют нормальный химический состав, по данным [64] мы нашли $b = 7.42$, если τ выразить в годах.

Звезды с массой выше $1.4\, m_\odot$ после образования углеродного ядра определенной массы вспыхивают как сверхновые, их ядра видимы после взрыва как пульсары. Звезды с меньшей массой после израсходования запасов ядерного горючего через стадию планетарных туманностей переходят в область белых карликов.

Вследствие потери массы в ходе эволюции граничное значение массы, где эволюционные пути расходятся, несколько выше $1.4\, m_\odot$. По данным Джонса [65] начальная масса белых карликов Гиад больше $1.8\, m_\odot$, граничная масса должна быть, следовательно, выше. По статистике сверхновых [66] Стозер [67] заключил, что граничная масса около $4\, m_\odot$. Найдем значение граничной массы по более новым данным.

Согласно Тамманну [68] средняя частота вспышек сверхновых для галактик типа Sb 0.09 за 100 лет на единицу массы $10^{10} m_\odot$. Статистика Тамманна опирается на значения масс Робертса [69], которые найдены по модели Брандта [70]. Нами было показано, [71], что эта модель дает преувеличенные значения массы. Поэтому мы будем брать для Галактики также несколько увеличенное значение массы $m = 15 \times 10^{10} m_\odot$, откуда для средней частоты вспышки сверхновых имеем 1 на 74 года. Этот результат хорошо согласуется с оценкой [72] (40 – 80 лет), основанной на радиоданных о числе остатков вспышек сверхновых в Галактике. Беря для функции звездообразования формы (2.1) и (2.3) с $n = 7/3$, $m_0 = 0.03\, m_\odot$ и $m_0 = 100\, m_\odot$, и для скорости звездообразования формулу (3.7) с $K = 0.25 \times 10^9$ лет (согласно данным гл. 20), найдем, что в Галактике в настоящее время в среднем рождается 3.3 звезды в год, а частоте 1 сверхновая за 74 года соответствует нижний

предел начальной массы сверхновой 2.6 $m_\odot$. Это значение мы и брали при дальнейших вычислениях.

Оптическая светимость остатков сверхновых - пульсаров - очень быстро уменьшается [73], так что практически все они невидимы в оптическом диапазоне. Их светимость не известна, и в наших вычислениях мы брали достаточно низкое значение $\log L/L_\odot = -9$.

Обратимся теперь к конечной стадии эволюции звезд умеренной массы.

Согласно Пачинскому [39] светимость звезды на пути к ядрам планетарных туманностей зависит только от массы ядра звезды m_c (будущего белого карлика)

$$L/L_\odot = 59\,250\,\frac{m_c}{m_\odot} - 30\,950 . \qquad (4.9)$$

По этим же данным масса ядра зависит от начальной массы звезды. Интерполируя данные [39], мы нашли для начальных масс 2.25, I.25 и I $m_\odot$ массы ядра I.0, 0.7 и 0.65 $m_\odot$ соответственно. Продолжительность этой стадии эволюции была взята из табл. 2 [39].

Эволюционные треки на стадии белых карликов вычислялись по данным Шварцшильда [64]. Радиус был найден из табл. 28 [64] согласно принятым значениям массы, а продолжительность эволюции вычислена по формуле (4.8), в которой для химического состава белых карликов $b = 7.05$. Эта формула, конечно, приближенная. В определенной стадии вещество белого карлика начинает кристаллизоваться [74], что сначала замедляет, а потом ускоряет процесс охлаждения звезды. Но этот эффект при вычислении интегральных характеристик галактик не играет никакой роли и мы не учитывали его. Как конечная точка на эволюционном треке была выбрана точка с $\log L/L_\odot = -4.6$. Полное время эволюции звезд любой массы к этой точке превышает 20 миллиардов лет, максимальный возраст галактик при наших вычислениях.

Принятые эволюционные треки даны в табл. I.

5. Болометрические поправки и истинные цвета. Для перехода от теоретической диаграммы $(\log T_e, \log L/L_\odot)$ к наблюдае-

мой ($B-V$, M_V), а также для вычисления отношения массы к светимости и распределения энергии в спектрах модель-галактик нужно знать болометрические поправки

$$B.C. = M_{bol} - M_V \qquad (5.1)$$

и истинные цвета

$$(S-V)_0 \qquad (5.2)$$

звезд самых разных типов. В последней формуле S – любая звездная величина в системе UBVRIJKL Джонсона [75].

Основным источником болометрических поправок, истинных цветов и эффективных температур служила сводка Джонсона [76]. Но использовались и более свежие данные, которые как в инфракрасной, так и в ультрафиолетовой области спектра существенно дополняют данные Джонсона.

Джонсон, как и большинство других авторов, публиковал $B.C.$, $(S-V)_0$ и T_e как функции спектрального типа и класса светимости. Для нашей цели $B.C.$ и $(S-V)_0$ должны быть выражены как функции $\log T_e$ и $\log L/L_\odot$. Необходимые преобразования были выполнены нами графически. Сначала была найдена зависимость $\log T_e$ от спектрального типа, отдельно для главной последовательности (класс светимости $\overline{V}$), гигантов (III) и сверхгигантов (I). Затем были составлены графики $B.C.$ и $(S-V)_0$ как функции $\log T_e$. Для удобства программирования вместо истинных цветов использованы болометрические поправки в системе S

$$B.C._S = M_{bol} - M_S = B.C._V - (S-V)_0 . \qquad (5.2)$$

Приведенные в табл. 2 результаты получены графической интерполяцией.

К данным табл. 2 следует сделать следующие комментарии.

И с т и н н ы е ц в е т а . Большинство истинных цветов брались по Джонсону [76]. Цвета $(U-V)_0$ и $(B-V)_0$ взяты из более новой сводки [77]. В случае красных звезд использовался каталог Мендозы [78] и данные Гринштейна [79]. Для A и F звезд главной последовательности взяты цвета

индивидуальных звезд этих типов, изученных Дэйвисом и Вебом [80], так как T_e и $B.C.$ также найдены только для конкретных звезд (см. ниже).

Болометрические поправки и эффективные температуры. Эффективная температура звезды определяется как температура абсолютно черного тела, которое излучает с единицы поверхности такое же количество энергии, как и звезда. Поэтому для вычисления эффективных температур звезд нужно знать их видимые угловые размеры и болометрическую светимость. Последняя может быть получена интегрированием по всем длинам волн функции распределения энергии в спектре (выраженной в абсолютных единицах). Угловые размеры могут быть найдены по интерферометрическим наблюдениям. В 1965 г., когда Джонсон писал свою сводку, такие данные имелись всего для 14 звезд (включая Солнце). Мендоза [78] использовал измеренные угловые размеры 27 звезд. Этих данных тем не менее, слишком мало для надежного определения шкалы эффективных температур, поэтому были использованы еще результаты теоретических расчетов моделей атмосфер звезд.

Шкала эффективных температур и болометрических поправок в интервале спектральных типов O5 – G 2 определена Мортоном и Адамсом [81]. Для звезд горячее типа $F2$ использованы только вычисленные по моделям эффективные температуры и болометрические поправки. Для звезд типов $F2$ – $G2$ болометрические поправки найдены по радиометрическим наблюдениям. Нульпункт для теоретических $B.C.$ выбран так, чтобы у спектральных типа $F2$ теоретическая $B.C.$ совпадала с эмпирической.

Недавно ван Ситтерт и Мортон [82] указали, что лучше $B.C.$ связать непосредственно с Солнцем, болометрическая поправка которого принимается $B.C._\odot = -0.07$. Поэтому для B0.5 – B6 звезд мы брали $B.C.$ из этой работы, для O5 – B0.5 звезд – из работы Мортона [83], а для звезд B8 – F – из определения Дэйвиса и Вебба [80], где использован тот же метод определения $B.C.$.

Что касается шкалы эффективных температур, то для B0.5 – B7 звезд можно сохранить шкалу Мортона-Адамса,

так как она согласуется со шкалой, определенной по звездам с известными угловыми размерами [82, 84]. Для самых горячих звезд (О5 – В0.5) Мортон [83] определил новую температурную шкалу из наблюдений туманностей, которая, по его мнению, предпочтительнее чисто теоретической шкалы. Однако недавно Петерсон и Волц [85] определили эффективные температуры шести О-звезд типов О5 – О9.5, которые существенно выше полученных Мортоном [83] для этих спектральных типов. Мы будем пользоваться температурной шкалой [85], а для определения $B.C.$ – соотношением между T_e и $B.C.$, найденным Мортоном [83].

Для поздних М карликов как T_e, так и $B.C.$ взяты из недавней работы Гринштейна и др [79].

Для красных гигантов типа М0 – М6 была использована новая шкала T_e и $B.C.$ по Лии [86]. Для гигантов типа М7 – М8 болометрические поправки были взяты по Смаку [87].

Наконец, для самых холодных гигантов температурная шкала определялась заново. При этом была использована та же процедура, как и в [76]. За основу взяты эффективные температуры звезд с измеренными угловыми диаметрами (табл. у [76] и 2 [78]) и температуры, вычисленные методом "black-body fit" (табл. УI и УII 76).

6. Изохроны. Собранная выше информация была использована для построения изохрон звезд на эмпирической диаграмме цвет-величина ($B-V$, M_V) и для исследования физической эволюции звездных систем. В этом параграфе рассмотрим найденные изохроны, которые изображены на рис. I.

Изохроны даны на рисунке для стадии основной фазы горения водорода. Было построено и продолжение изохрон через область горения гелия и белых карликов до конечной стадии "красного" белого карлика. На этих стадиях изохроны несколько раз перекрещиваются между собой и во избежание путаницы эти части не приведены на диаграмме.

Вблизи водородной главной последовательности эволюционные треки также перекрещиваются. Это явление было обнаружено Сэндиджем и Эггеном [89] сначала по теоертическим

изохронам, а затем и по наблюдениям. Около точки изгиба (*turn off point*) главной последовательности изохроны имеют зигзагообразную форму. Эта особенность также подтверждается наблюдениями [88, 90].

В области гигантов найденные изохроны хорошо согласуются с выведенными Шлезингером [91]. Однако, в более поздней работе Шлезингер [92] указал на то, что гелиевая последовательность по данным Айбена слишком длинный голубой хвост, не согласующийся с наблюдениями. После изменения программы для вычисления эволюции звезд Шлезингер нашел для голубого конца гелиевой последовательности ($m = 5\,m_\odot$) $\log T_e = 3.68$. [92], тогда как по Айбену получается $\log T_e = 3.92$ [19]. Необходимость исправить треки Айбена вытекает и из того, что вычисленные интегральные цвета модель-галактик оказались слишком голубыми.

Для $m = 5\,m_\odot$ $\log T_e$ голубого конца гелиевой последовательности был выбран в согласии с вышеприведенными данными [92]. Для звезд меньшей массы по наблюденным данным [93] горизонтальная последовательность, которая обычно отождествляется с стадией горения гелия, располагается непосредственно на ветви гигантов. Что касается массивных звезд, то определение голубого конца гелиевой последовательности здесь несколько затруднительно, так как не ясно, находятся ли голубые сверхгиганты на стадии горения водорода или гелия. Чтобы рассмотреть более крайний случай, мы будем идентифицировать гелиевую последвательность с красными и желтыми гигантами. Согласно [94] цвет этих звезд более красный чем $B-V = 1.00$, чему соответствует $\log T_e = 3.68$. Это значение мы и приняли для голубого конца гелиевой последовательности для всех $m \geq 5\,m_\odot$.

Цвет точки изгиба главной последовательности часто применяется в качестве критерии возраста скопления. Полученные изохроны были использованы для новой калибровки этой зависимости. Результат изображен на рис. 2. Для сравнения дана и зависимость по Сэндиджу [95] и Грэш [96].

7. Изменение физических характеристик модель-галактик с временем. Вычисления для изучения временной зависимости

физических характеристик модель-галактик производились с различными исходными данными.

а) Исходные данные. Основные вычисления проводились со следующими значениями параметров функции звездообразования: $n = 7/3$, $m_0 = 0.03\, m_\odot$, $m_u = 100\, m_\odot$, $S = 0$ ($K = 20$), $S = 1$ ($K = 0.5$ и 3), $S = 2$ ($K = 0.3$ - параметр K выражен в миллиардах лет). Для возраста модель-галактики выбраны значения 0.01, 0.03, 0.1, 0.3, 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 20 миллиардов лет.

Для выяснения чувствительности полученных результатов к изменению n при некоторых S и K, вычисления проводились и с $n = 2.05$. Часть вычислений была выполнена со смещенными голубыми концами гелиевой последовательности (см. § 6 вариант В).

Верхняя граница функции звездообразования m_u мало влияет на интегральные параметры галактики. Изменение нижнего предела m_0 в небольшом диапазоне не влияет на цвета и распределения энергии, но сказывается через нормирующий множитель a (2.3) на светимость и отношение массы к светимости. Если обозначить истинные значения этих величин через L и f, а значения при $m = 0.03\, m_\odot$ через L_0 и f_0, тогда

$$L = \frac{L_0}{\delta}, \quad f = \delta f_0 . \qquad (7.1)$$

коэффициент δ и $\Delta M = 2.5 \log \delta$ задан в табл. 3.

Отношение массы к светимости старых звездных систем колеблется в весьма широких пределах. Так, по [97] для шаровых звездных скоплений это отношение имеет порядок единицы, а для гигантских эллиптических галактик [98] доходит до 100. Тинсли пыталась объяснить большой разброс в f наличием в гигантских эллиптических галактиках звезд малой массы в очень больших количествах [2]. Нижний предел функции звездообразования m_0 получается тогда невероятно малым, в некоторых случаях порядка $10^{-6}\, m_\odot$. Если изменить m_0 в разумных пределах, как в табл. 3, тогда невозможно получить необходимый диапазон изменения отношения массы

к светимости. Не помогает и изменение параметра n функции звездообразования. Тинсли и Спинрад показали [99], что если этот параметр вообще может измениться, то в сравнительно узких пределах.

С другой стороны, известно, что эволюционные треки звезд разного химического состава заметно смещены друг относительно друга, что не может не влиять и на интегральные характеристики звездных систем. В настоящее время нет достаточно полных данных об эволюционных треках звезд экстремального химического состава. Для таких звезд нет и болометрических поправок и истинных цветов. Чтобы все-таки получить хотя-бы приближенное предствление о влиянии химического состава звезд на интегральные характеристики звездных систем, мы с той же программой и теми же болометрическими поправками, но со смещенными эволюционными треками осуществили часть вычислений.

Для получения треков звезд богатых металлами к трекам $Z = 0.02$ были прибавлены поправки

$$\begin{aligned} \Delta \log t &= -0.12, \\ \Delta \log T_e &= -0.10, \\ \Delta \log L &= -0.20, \end{aligned} \qquad (7.2)$$

в соответствии с данными Айбена [100], Пачинского [39] и Шлезингера [92]. Полученные треки мы приписывали звездам с $Z = 0.08$. Поскольку вычисленных треков с таким значением Z нет, то, конечно, наши треки могут соответствовать несколько иному значению Z.

Для получения треков звезд с дефицитом металлов к трекам $Z = 0.02$ были прибавлены поправки

$$\begin{aligned} \Delta \log t &= -0.22, \\ \Delta \log L &= 0.25, \end{aligned} \qquad (7.3)$$

а поправка в $\log T_e$ изменялась от 0.085 для точек нулевого возраста главной последовательности до 0.200 на вершине ветви гигантов. Кроме того, голубой конец горизонтальной ветви был фиксирован в точке $\log T_e = 4.25$, а по светимости на $\Delta \log L = -0.15$ ниже соответствующей точки для звезд нормального химического состава. Эти поправки были

найдены по трекам с $Z = 0.001$ Демарка [35] и фотометрическим наблюдениям Сэндиджа [I0I]. Результаты приписаны звездам с $Z = 0.001$.

б) Р е з у л ь т а т ы в ы ч и с л е н и й . Вычислялась функция светимости, общая светимость в солнечных единицах и в звездных величинах, вклад звезд разного блеска в общую светимость, отношение массы к светимости и цвета. Все эти функции и параметры найдены как в болометрических единицах, так и для всех цветов системы UBVRIJKL . Было найдено и распределение энергии в спектре модель-галактик с использованием абсолютной калибровки системы Джонсона (табл. IУ [76]). Логарифы светимости в эргах звезды нулевой величины в разных цветах дан в табл. 2, также как и истинные цвета Солнца (по [78]).

Общий объем вычислений и полученной информации весьма большой. Приведем в графическом виде лишь основные результаты (рис. 3 - 9).

Функция светимости, а также зависимость интегральных параметров (M, f , цвета) от времени оказались не вполне гладкими. Это вызвано тем, что при программировании мы приняли дискретную последовательность распределения звезд по массам. На рис. 3 - 8 результаты вычислений приведены в сглаженном виде.

Из найденных характеристик модель галактик особый интерес представляют показатели цвета и распределение энергии в спектре, которые непосредственно могут сравниваться с наблюдениями. Это сравнение выполнено в следующем параграфе, также как и анализ других результатов.

8. Анализ результатов. Рассмотрим основные функции и параметры и их зависимость от возраста модель-галактик.

а) Ф у н к ц и я с в е т и м о с т и. Существенной чертой является продолжение функции светимости в сторону слабых звезд до очень низких светимостей. Это показывает, что общепринятая функция светимости по ван Райну и Люйтену с резким уменьшением числа звезд слабее 16^m (см. [I02]) не является достаточно точной.

В очень молодых звездных системах хорошо представлены

звезды высокой светимости, имеется и небольшое число пульсаров - остатков массивных звезд. Звезды малой массы еще находятся на стадии гравитационного сжатия, их светимость достаточно большая. По мере увеличения возраста системы светимость карликов падает, увеличивается число пульсаров, образуются белые карлики. Все это постоянно увеличивает число звезд низкой светимости. За время существования нашей Галактики светимость некоторых типов звезд уменьшилась до $\sim 3^{m}8$.

б) Болометрическая светимость. В модели физической эволюции галактик, построенной Тинсли [2], рассматривается диапазон возрастов от I до I2 миллиардов лет. Мы рассмотрели гораздо более широкий интервал, что позволило проследить и фазу увеличения светимости галактик. Наши вычисления показывают, что эта фаза очень короткая. Следует оказать, что в наших расчетах принято постоянство общей плотности вещества во времени. В реальных галактиках на начальном этапе развития имеет место сжатие, т.е. плотность в момент образования галактики меньше нынешней. Так как сжатие центральной области галактики, которая дает львиную долю общей светимости, длится всего несколько сот миллиардов лет, то картина изменения светимости галактики с учетом изменения плотности вещества существенно не меняется.

Интересно отметить, что максимальная светимость галактики примерно в I00 раз превышает нынешнюю.

в) Отношение массы к светимости. Зависимость отношения массы к светимости от времени, химического состава и скорости звездообразования соответствует ожиданиям. Общий диапазон изменения f для старого населения оказывается вполне достаточным для объяснения особенностей шаровых скоплений и эллиптических галактик разной массы. Существенно отметить, что диктуемый наблюдениями диапазон f получается при изменении исходных параметров функции звездообразования и эволюционных треков в различных пределах.

г) Цвета модель-галактик и звездных скоплений. Зависимость модель-галактик от их возраста для различных параметров функции

звездообразования изображена на рис. 6 и 7, а двухцветные диаграммы - на рис. 8. Для сравнения полученных результатов с наблюдениями мы составили аналогичные диаграммы и для звездных скоплений. Звездные скопления являются однородными по своему химическому составу и возрасту и уже давно применяются для проверки теории эволюции звезд. С таким же успехом они могут быть использованы и для проверки теории эволюции звездных систем. Тогда придется вместо диаграммы цвет-величина отдельных звезд скопления рассматривать аналогичные диаграммы для интегральных параметров скопления.

Мы составили список звездных скоплений с известными истинными интегральными цветами $I(U-B)_0$ и $I(B-V)_0$, используя данные работ [96, 103 - 105]. Возраст скоплений был определен по точке изгиба главной последовательности по рис. 2. Использованы и другие источники. Для ряда скоплений удалось найти и определения содержания металлов, их список дан в табл. 4. В таблице приведена величина

$$[Fe/H] = (\log Fe/H)_{star} - (\log Fe/H)_{\odot} \qquad (8.1)$$

Принято, что содержание железа характеризует содержание всех тяжелых элементов. Для перехода к параметру Z может быть использована формула

$$\log \frac{Z}{Z_{\odot}} = [Fe/H] \qquad (8.2)$$

причем $Z_{\odot} = 0.02$ (см. 89).

Содержание тяжелых элементов в шаровых звездных скоплений колеблется в весьма широких пределах. Количественных данных о $[Fe/H]$, однако, слишком мало для установления надежной зависимости между $[Fe/H]$ и параметром Q. Гораздо больше качественных данных в виде типа металличности Моргана [124] и параметра Q [103]. Используя эти данные, мы нашли среднее значение Q для всех типов Моргана, результаты даны в табл. 5. Приведены и исправленные за счет покраснения интегральные цвета, найденные по Q

по формулам (8) и (9) [103].

Собранные данные нанесены на рис. II и I2. Как видим, согласие теоретических зависимостей с наблюдениями весьма хорошее.

д) Распределение энергии в системе модель-галактик в абсолютных единицах изображено на рис. 9. Результат сходен с тем, который ранее был получен Тинсли [2]. На следующем рисунке дано относительное распределение энергии (в единицах излучения в системе V) в зависимости от возраста, химического состава и скорости звездообразования. [Для сравнения на этом же рисунке дано и распределение энергии в центре эллиптических галактик согласно [I25, I26].]

е) Общие выводы можно суммировать следующим образом.

Путем изменения исходных параметров функции звездообразования в разумных пределах можно вывести интегральные характеристики модель-галактик, которые хорошо согласуются с данными о звездных скоплениях. Интегральные параметры, в том числе цвета и распределение энергии в спектрах звездных систем зависят не только от возраста, но и от химического состава и скорости звездообразования. Например, одному и тому же цвету могут соответствовать объекты, возраст которых отличается на целый порядок (см. рис. 6, 7). Поэтому наши результаты подтверждают вывод Сэндиджа [95] о том, что голубой цвет звездных систем не всегда является признаком их молодости. Но трудно согласиться и с другой крайней точкой зрения [2], что все галактики имеют одинаковый возраст. Этот результат Тинсли основывается в модели эволюции галактики, исходные параметры которых могут не соответствовать действительности.

Август I97I

Литература

1. D.N.Limber, Ap.J. 131, 168, 1960.
2. B.M.Tiensly, Ap.J. 151, 547, 1968.
3. E.Öpik, Tartu Publ. 30 No.3, 1938.
4. E.E.Salpeter, Ap.J. 121, 161, 1955.
5. A.Sandage, Ap.J. 125, 422, 1957.
6. S.van den Bergh, Ap.J. 125, 445, 1957.
7. V.C.Reddish, Vistas in Astronomy 7, 173, 1965.
8. R.Stothers, N.S.Simon, Ap.J. 152, 233, 1968.
9. R.J.Talbot, Jr. Ap.J. 163, 17, 1968.
10. S.van den Bergh, P.A.S.P. 73, 135, 1961.
11. M.Schmidt, Ap.J. 137, 758, 1963.
12. J.W.Truran, A.G.W.Cameron, Nature 225, 710, 1970.
13. A.G.W.Cameron, J.W.Truran, R.A.S. Can. Journ. 65, 1, 1971.
14. S.von Hörner, Heidelberg Mitt. Ser. A No. 15, 1960.
15. M.Schmidt, Ap.J. 129, 243, 1959.
16. H.Sanduleak, A.J. 74, 47, 1969.
17. I.Iben, Jr. Ap.J. 141, 993, 1965.
18. I.Iben Jr. Ap.J. 142, 1447, 1965.
19. I.Iben Jr. Ap.J. 143, 483, 1966.
20. I.Iben Jr. Ap.J. 143, 505, 1966.
21. I.Iben Jr. Ap.J. 143, 516, 1966.
22. I.Iben Jr. Ap.J. 147, 624, 1967.
23. I.Iben Jr. Ap.J. 147, 650, 1967.
24. J.Faulkner, I.Iben Jr. Ap.J. 144, 995, 1966.
25. I.Iben Jr., J.Faulkner, Ap.J. 153, 101, 1968.
26. R.Rood, I.Iben, Jr., Ap.J. 154, 215, 1968.
27. I.Iben Jr. Ap.J. 154, 581, 1968.
28. I.Iben Jr., R.T.Rood, Ap.J. 159, 605, 1970.
29. R.T.Rood, Ap.J. 161, 145, 1970.
30. I.Iben Jr., R.T.Rood, Ap.J. 161, 587, 1970.
31. M.Simoda, I.Iben Jr. Ap.J. Suppl. No. 183, 1970.
32. I.Iben Jr., Ap.J. 166, 131, 1971.
33. P.Demarque, Ap.J. 149, 117, 1967.
34. P.Damarque, F.D.A.Hartwick, M.D.T.Hayber, Ap.J. 154, 1143, 1968.
35. P.Demarque, J.G.Mengel, M.L.Aizenman, Ap.J. 163, 37, 1971.

36. P.Demarque, J.G.Mengel, Ap.J. 164, 317, 1971.
37. P.Demarque, J.G.Mengel, Ap.J. 164, 469, 1971.
38. B.Paczynski, J.Ziolkowski, Acta Astr. 18, 171, 1968.
39. B.Paczynski, Acta Astr. 20, 47, 1970.
40. B.Paczynski, Acta Astr. 20, 195, 1970.
41. B.Paczinsky, Acta Astr. 20, 287, 1970.
42. B.Paczinsky, Acta Astr. 21, 1, 1971.
43. B.Paczynski, 1970 (private communication).
44. R.Stothers, Ap.J. 138, 1074, 1963.
45. R.Stothers, Ap.J. 140, 510, 1964.
46. R.Stothers, Ap.J. 143, 91, 1966.
47. R.Stothers, C.Chiu, Ap.J.152, 225, 1968.
48. R.Stothers, C.Chiu, Ap.J. 158, 1039, 1969.
49. S.S.kumar, Ap.J. 137, 1121, 1963.
50. S.S.Kumar, Ap.J. 137, 1126, 1963.
51. C.Hayashi, T.Nakano, Progr. Theor. Phys. 30, 460, 1963.
52. W.K.Rose, R.L.Smith, Ap.J. 159, 903, 1970.
53. A.S.Grossman, Ap.J. 161, 619, 1970.
54. D.T.Hoxie, Ap.J. 161, 1083, 1970.
55. A.S.Grossman, J.P.Mutschlecher, T.A.Pauls, Ap.J. 162, 613, 1970.
56. A.S.Grossman, H.C.Graboske, Ap.J. 164, 975, 1971.
57. J.Einasto, Tartu Teated 1971 (in press).
58. H.H.Voigt, Landolt-Börnstein, Astronomy and Astrophysics, Springer Verl., Berlin, 1965.
59. Ү.Үйс, Научные информации № 17, 3, 1970.
60. C.Hayashi, R.Hoshi, D.Sugimoto, Progr. Theor. Phys. Suppl. No. 22, 1962.
61. A.Sandage, Ap.J. 135, 333, 1962.
62. O.J.Eggen, A.R.Sandage, Ap.J. 140, 130, 1964.
63. O.J.Eggen, A.Sandage, Ap.J. 158, 669, 1969.
64. М.Шварцшильд, Строение и эволюция звезд, Иниздат, Москва, 1961.
65. E.M.Jones, Ap.J. 159, 101, 1970.
66. C.Payne-Gaposhkin, The Galactic Novae, Interscience Publ. N.Y., 1957.
67. R.Stothers, Ap.J. 138, 1085, 1963.
68. G.A.Tammann, Astr. Astroph. 8, 458, 1970.
69. M.S.Roberts, A.J. 74, 859, 1969.

70. J.C.Brandt, Ap.J. 131, 213, 1960.
71. J.Einasto, Astr. Nachr. 291, 97, 1969.
72. J.L.Gacwell. Astr. Astroph. 7, 59, 1970.
73. F.Pacini, Ap.J. (Lett.) 163, L 17, 1971.
74. H.M.Van Horn, Ap.J. 151, 227, 1968.
75. H.L.Johnson, Bol. Obs. Tonanzintla Tacubaya 3, 305, 1964.
76. H.L.Johnson, Ann. Rev. Astr. Astroph. 4, 193, 1966.
77. M.Pim-FitzGerald, Astr. Astroph. 4, 234, 1970.
78. E.E.Mendoza, V, Publ. Astr. Dep. Univ. Chile No.7, 106 , 1968.
79. J.L.Greenstein, G.Neugebauer, E.E.Becklin, Ap.J. 161, 519, 1970.
80. J.Davis, R.J.Webb, Ap.J. 159, 551, 1970.
81. D.C.Morton, T.F.Adams, Ap.J. 151, 611, 1968.
82. G.W.Van Citters, D.C.Morton, Ap.J. 161, 695, 1970.
83. D.C.Morton, Ap.J. 1589 629, 1969.
84. H.R.Brown, J.Davis, L.R.Allen, J.M.Rome, M.N. 137, 393, 1967.
85. D.M.Peterson, M.Scholz, Ap.J. 163, 51, 1971.
86. T.A.Lee, Ap.J. 162, 217, 1970.
87. J.Smak, Acta Astr. 16, 1, 1966.
88. E.P.J.van den Heuvel, P.A.S.P. 81, 815, 1969.
89. A.Sandage, O.J.Eggen, Ap.J. 158, 685, 1969.
90. I.Iben Jr., Ann. Rev. Astr. Astroph. 5, 571, 1967.
91. B.M.Schlesinger, Ap.J. 157, 533, 1969.
92. B.M.Schlesinger, Ap.J. 158, 1059, 1969.
93. R.D.Cannon, M.N. 150, 111, 1970.
94. R.L.Wildey, Ap.J. Suppl. 8, 439, 1964.
95. A.Sandage, Ap.J. 138, 863, 1963.
96. D.F.Gray, A.J. 70, 362, 1965.
97. M.Schwarzschild, S.Bernstein, Ap.J. 112, 200, 1955.
98. T.Page, Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 111 p. 31, 1967.
99. B.M.Tinsley, H.Spinrad, Ap.J. 1971 (in pess).
100. I.Iben Jr. Ann. Rev. Astr. Astrophys. 5, 571, 1967.
101. A.Sandage, Ap.J. 162, 841, 1970.

102. П.П.Паренаго, Курс звездной астрономии, Гостехиздат., М.1954.
103. S.van den Bergh, A.J. 72, 70, 1967.
104. W.Buscombe, in "The Galaxy and the Magellanic Clouds", eds. F.J.Kerr, A.W.Rodgers, Canberra, p. 24, 1964.
105. H.C.Arp, in "The Galaxy and the Magellanic Clouds", eds. F.J.Kerr, A.W.Rodgers, Canberra, p.219, 1964.
106. S.E.Strom, K.M.Strom, Ap.J. 159, 195, 1970.
107. A.Sandage, Ap.J. 152, 515, 1969.
108. H.L.Helfer, G.Wallerstein, J.L.Greenstein, Ap.J. 129, 700, 1959.
109. O.J.Eggen, Ap.J. 161, 159, 1970.
110. J.E.Gunn, R.P.Kraft, Ap.J. 137, 301, 1963.
111. G.Wallerstein, P.Conti, Ap.J. 140, 858, 1964.
112. A.G.D.Philip, A.J. 75, 246, 1970.
113. P.E.Nissen, Astr. Astroph. 8, 476, 1970.
114. P.S.Conti, S.E.Strom, Ap.J. 152, 483, 1968.
115. P.E.Nissen, Astr. Astroph. 6, 138, 1970.
116. J.B.Alexander, M.N. 137, 41, 1967.
117. P.Demarque, B.M.Schlesinger, Ap.J. 155, 965, 1969.
118. M.L.Aizenman, P.Demargue, R.H.Miller, Ap.J. 152, 973, 1969.
119. O.Eggen, Ap.J. 152, 83, 1968.
120. P.Demargue, R.H.Miller, Ap.J. 1589 1037, 1969.
121. H.Spinrad, J.L.Greenstein, B.J.Taylor, I.R.King, Ap.J. 162, 891, 1970.
122. O.J.Eggen, Ap.J. 155, 439, 1969.
123. H.Spinrad, B.J.Taylor, Ap.J. 163, 303, 1971.
124. W.W.Morgan, A.J. 64, 432, 1959.
125. A.R.Sandage, E.E.Becklin, G.Neugebauer, Ap.J. 157, 55, 1969.
126. H.L.Johnson, Ap.J. 143, 187, 1966.

Табл. I

EVOLUTION TRACKS

MASS = 0.05																			
LG TT	6.670	7.022	8.542	9.840	0.300	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
LG TE	3.490	3.450	3.400	3.200	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000
LG L	-2.100	-3.000	-3.480	-4.500	-5.300	-6.000	-6.000	-6.000	-6.000	-6.000	-6.000	-6.000	-6.000	-6.000	-6.000	-6.000	-6.000	-6.000	-6.000
MASS = 0.10																			
LG TT	6.660	7.400	8.490	9.830	0.300	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
LG TE	3.519	3.514	3.490	3.491	3.492	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500
LG L	-1.500	-2.170	-2.920	-2.910	-2.900	-2.900	-2.900	-2.900	-2.900	-2.900	-2.900	-2.900	-2.900	-2.900	-2.900	-2.900	-2.900	-2.900	-2.900
MASS = 0.20																			
LG TT	6.650	7.356	8.216	9.820	0.300	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
LG TE	3.542	3.540	3.540	3.540	3.540	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500	3.500
LG L	-1.200	-1.700	-2.270	-2.260	-2.200	-2.200	-2.200	-2.200	-2.200	-2.200	-2.200	-2.200	-2.200	-2.200	-2.200	-2.200	-2.200	-2.200	-2.200
MASS = 0.40																			
LG TT	6.640	7.300	8.030	9.810	0.300	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
LG TE	3.573	3.570	3.600	3.610	3.610	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600
LG L	-0.800	-1.300	-1.380	-1.310	-1.240	-1.200	-1.200	-1.200	-1.200	-1.200	-1.200	-1.200	-1.200	-1.200	-1.200	-1.200	-1.200	-1.200	-1.200
MASS = 0.60																			
LG TT	6.620	7.290	7.920	9.800	0.300	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
LG TE	3.600	3.630	3.662	3.672	3.672	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600
LG L	-0.500	-0.800	-0.820	-0.670	-0.520	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500	-0.500
MASS = 0.80																			
LG TT	6.610	7.280	7.825	9.787	0.183	0.208	0.378	0.397	0.416	0.418	0.418	0.419	0.419	0.420	0.421	0.421	0.421	0.421	0.613
LG TE	3.612	3.660	3.705	3.714	3.720	3.720	3.700	3.646	3.580	3.440	3.596	3.640	3.680	3.590	3.440	3.300	4.700	4.960	3.460
LG L	-0.300	-0.500	-0.480	-0.360	-0.210	-0.100	0.020	0.210	1.480	3.100	1.700	1.650	1.600	1.750	3.100	3.680	3.680	1.000	-4.600
MASS = 1.00																			
LG TT	6.600	7.261	7.704	9.582	9.826	9.912	9.996	0.012	0.040	0.042	0.043	0.044	0.046	0.047	0.049	0.049	0.049	0.049	0.431
LG TE	3.623	3.720	3.760	3.775	3.780	3.782	3.762	3.660	3.590	3.488	3.610	3.660	3.687	3.590	3.468	3.305	4.800	4.970	3.570
LG L	-0.200	-0.096	-0.133	0.008	0.142	0.234	0.425	0.500	1.660	3.100	1.700	1.670	1.640	1.750	3.100	3.840	3.840	1.000	-4.600
MASS = 1.25																			
LG TT	6.597	7.063	7.470	9.153	9.452	9.479	9.593	9.627	9.663	9.667	9.669	9.672	9.676	9.679	9.682	9.683	9.683	9.683	0.342
LG TE	3.650	3.730	3.837	3.842	3.825	3.845	3.817	3.675	3.594	3.484	3.630	3.660	3.690	3.595	3.484	3.400	4.900	4.980	3.580
LG L	0.050	0.410	0.362	0.450	0.525	0.617	0.775	0.740	1.740	3.100	1.700	1.710	1.720	1.800	3.100	4.000	4.000	1.000	-4.600
MASS = 1.50																			
LG TT	6.386	6.984	7.260	9.012	9.196	9.218	9.294	9.323	9.365	9.373	9.378	9.382	9.390	9.396	9.403	9.403	9.404	9.404	0.332
LG TE	3.670	3.842	3.910	3.895	3.867	3.903	3.865	3.683	3.605	3.500	3.635	3.670	3.700	3.605	3.500	3.400	5.000	5.000	3.600
LG L	0.350	0.810	0.742	0.817	0.758	0.958	1.075	0.908	1.840	3.100	1.700	1.750	1.800	1.900	3.100	4.210	4.210	1.000	-4.600
MASS = 2.25																			
LG TT	5.782	6.401	6.760	8.447	8.684	8.700	8.731	8.742	8.753	8.773	8.791	8.808	8.837	8.856	8.881	8.883	8.883	8.883	0.332
LG TE	3.680	3.975	4.049	4.019	3.980	4.015	3.968	3.681	3.620	3.535	3.650	3.680	3.720	3.620	3.535	3.410	5.100	5.060	3.660
LG L	1.020	1.610	1.479	1.546	1.618	1.700	1.780	1.474	2.050	3.100	1.850	1.950	2.050	2.100	3.100	4.450	4.450	1.000	-4.600
MASS = 3.00																			
LG TT	5.320	6.057	6.391	8.143	8.350	8.369	8.388	8.394	8.396	8.403	8.445	8.487	8.504	8.514	8.627	8.628	8.628	8.880	0.330
LG TE	3.670	4.070	4.130	4.100	4.060	4.100	4.053	3.880	3.680	3.610	3.650	3.750	3.735	3.610	3.510	3.500	4.600	4.600	4.600
LG L	1.530	2.120	1.975	2.060	2.130	2.210	2.270	2.165	1.940	2.430	2.110	2.325	2.360	2.340	3.700	5.000	-9.000	-9.000	-9.000
MASS = 5.00																			
LG TT	5.045	5.462	6.190	7.604	7.820	7.834	7.843	7.846	7.847	7.850	7.879	7.904	7.931	8.000	8.004	8.006	8.006	8.800	0.330
LG TE	3.845	4.220	4.265	4.240	4.190	4.235	4.165	3.903	3.650	3.600	3.620	3.785	3.920	3.580	3.526	3.500	4.600	4.600	4.600
LG L	2.580	2.960	2.795	2.900	3.000	3.068	3.113	2.985	2.845	3.090	3.000	3.166	3.270	3.300	4.000	5.000	-9.000	-9.000	-9.000
MASS = 9.00																			
LG TT	4.253	4.864	5.365	7.157	7.328	7.340	7.342	7.344	7.345	7.346	7.356	7.364	7.409	7.419	7.443	7.445	7.445	8.000	0.330
LG TE	3.890	4.350	4.410	4.374	4.325	4.367	4.260	3.955	3.630	3.585	3.610	4.100	4.145	3.579	3.540	3.500	4.600	4.600	4.600
LG L	3.570	3.815	3.655	3.802	3.914	3.968	4.060	3.988	3.764	4.016	3.915	4.083	4.203	4.210	4.400	5.000	-9.000	-9.000	-9.000
MASS = 15.00																			
LG TT	3.669	4.360	5.140	6.821	7.010	7.020	7.021	7.022	7.022	7.023	7.047	7.077	7.082	7.083	7.083	7.084	7.084	8.000	0.330
LG TE	3.910	4.425	4.500	4.475	4.420	4.466	4.345	4.285	4.160	4.041	4.100	4.160	4.270	3.603	3.540	3.500	4.600	4.600	4.600
LG L	4.310	4.460	4.320	4.480	4.620	4.670	4.710	4.750	4.750	4.760	4.810	4.875	4.885	4.890	4.900	5.000	-9.000	-9.000	-9.000
MASS = 30.00																			
LG TT	3.200	3.700	4.401	6.593	6.783	6.791	6.791	6.791	6.792	6.793	6.793	6.821	6.830	6.836	6.837	6.838	6.838	8.000	0.330
LG TE	3.900	4.600	4.669	4.646	4.578	4.626	4.497	4.340	4.286	4.116	4.325	4.416	4.399	4.310	3.600	3.500	4.600	4.600	4.600
LG L	5.250	5.390	5.248	5.411	5.530	5.559	5.633	5.660	5.663	5.667	5.667	5.667	5.672	5.682	5.703	5.750	-9.000	-9.000	-9.000
MASS = 60.00																			
LG TT	2.460	2.960	3.660	6.170	6.553	6.561	6.561	6.562	6.562	6.563	6.563	6.591	6.600	6.602	6.607	6.608	6.608	8.000	0.330
LG TE	3.900	4.660	4.730	4.680	4.630	4.670	4.520	4.380	4.330	4.150	4.370	4.420	4.470	4.300	3.590	3.500	4.600	4.600	4.600
LG L	5.870	6.010	5.870	6.000	6.080	6.120	6.140	6.150	6.160	6.170	6.170	6.170	6.180	6.190	6.200	6.250	-9.000	-9.000	-9.000

Табл. 2

$\log T_e$	U	B	V	R	I	J	K	L
3.3	11.70	11.82	10.15	5.85	2.57	1.05	0.53	-1.05
3.4	7.84	7.33	5.75	2.73	0.28	-0.87	-2.27	-2.57
3.5	5.78	3.99	2.40	0.63	-0.95	-1.75	-2.85	-3.05
3.6	4.00	2.30	0.88	-0.19	-0.94	-1.50	-2.40	-2.57
3.7	1.73	1.15	0.25	-0.43	-0.90	-1.25	-1.83	-1.93
3.8	0.50	0.52	0.02	-0.34	-0.62	-0.82	-1.03	-1.23
3.9	0.34	0.22	0.02	-0.12	-0.23	-0.31	-0.41	-0.48
4.0	0.28	0.34	0.34	0.31	0.34	0.32	0.30	0.29
4.1	0.45	0.78	0.88	0.90	1.02	1.08	0.62	1.13
4.2	0.69	1.25	1.43	1.50	1.66	1.80	1.93	1.93
4.3	0.93	1.73	1.96	2.06	2.28	2.49	2.67	2.68
4.4	1.23	2.22	2.49	2.62	2.88	3.14	3.35	3.39
4.5	1.68	2.75	3.06	3.20	3.50	3.78	4.00	4.06
4.6	2.23	3.37	3.69	3.84	4.16	4.42	4.63	4.70
4.7	2.97	4.15	4.47	4.62	4.94	5.20	5.41	5.48
B-Bol	0.81	0.69	0.07	-0.45	-0.79	-1.03	-1.41	-1.51
$\log E_o$	-11.362	-11.143	-11.407	-11.755	-12.081	-12.468	-13.409	-14.090

Табл. 3

m_o	σ	ΔM
0.5	0.348	-1.145
0.3	0.426	-0.928
0.1	0.644	-0.478
0.03	1.000	0.000
0.01	1.473	0.420
0.003	2.234	0.873
0.001	3.256	1.283

Табл. 4

NGC	Name	log t	Fe/H	$I(U-B)_o$	$I(B-V)_o$	Ref.
Globular clusters						
104	47 Tuc	10	-1.0	+0.27	0.74	63, 101
5272	M3	10	-1.6	0.00	0.59	101, 106, 107
6205	M13	10	-1.4	-0.04	0.56	101, 108
6341	M92	10	-2.1	-0.02	0.57	101, 108
6712		10	-1.2	0.19	0.69	63
7078	M15	10	-2.1	-0.04	0.56	101
Metal-poor open clusters						
	Scu	7.48	-0.35			109
752		9.51	-0.25	0.24	0.63	110, 111, 112
2281		8.79	-0.66	0.30	0.56	111
2548		8.58	-0.51	0.12	0.26	111
6633		8.25	-0.29	-0.17	0.12	111
Normal open clusters						
	Coma	8.90	+0.16	0.12	0.19	113
	Pleiades	8.15	+0.1	-0.35	-0.13	114
2287	M41	7.79	0.0	-0.35	0616	108
2632	Praesepe	9.12	-0.10	0.18	0.39	111. 114
IC 4725	M25	7.79	-0.08	-0.40	0.09	111
Metal-rich open clusters						
	Hyades	8.90	+0.35	0.17	0.49	115, 116
188		9.90	+0.60	0.43	0.78	63, 117, 118, 105, 121
2360		9.2	+0.48			119, 120
2682	M67	9.6	+0.63	0.44	0.71	118, 121, 105
3680		9.3:	+0.5			120, 122
6791		9.8	+0.75			123

Табл. 5

Morgan type	Q	$I(U-B)_o$	$I(B-V)_o$
I	-0.44	-0.04	0.56
II, III	-0.40	0.03	0.60
IV	-0.36	0.10	0.64
V	-0.31	0.19	0.69
VI	-0.24	0.31	0.76
VII	-0.21	0.36	0.79
VIII	-0.11	0.53	0.89

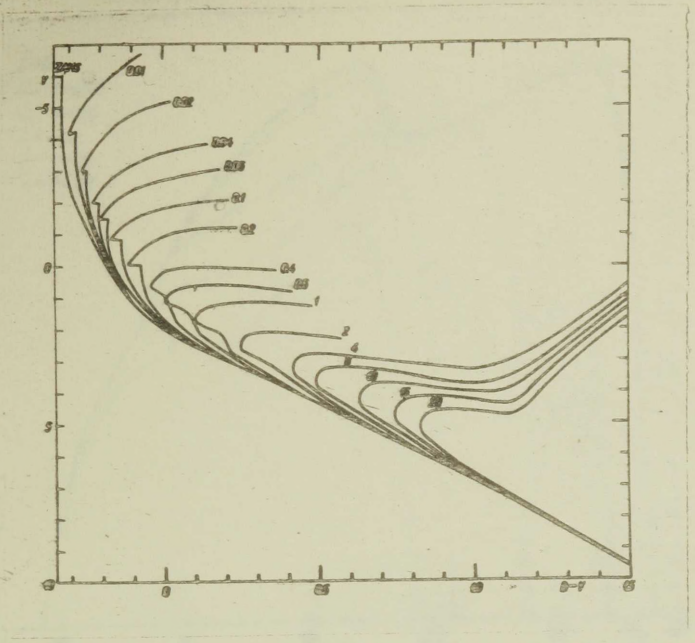


Рис. I. Изохроны звезд нормального химического состава $Z = 0.02$.

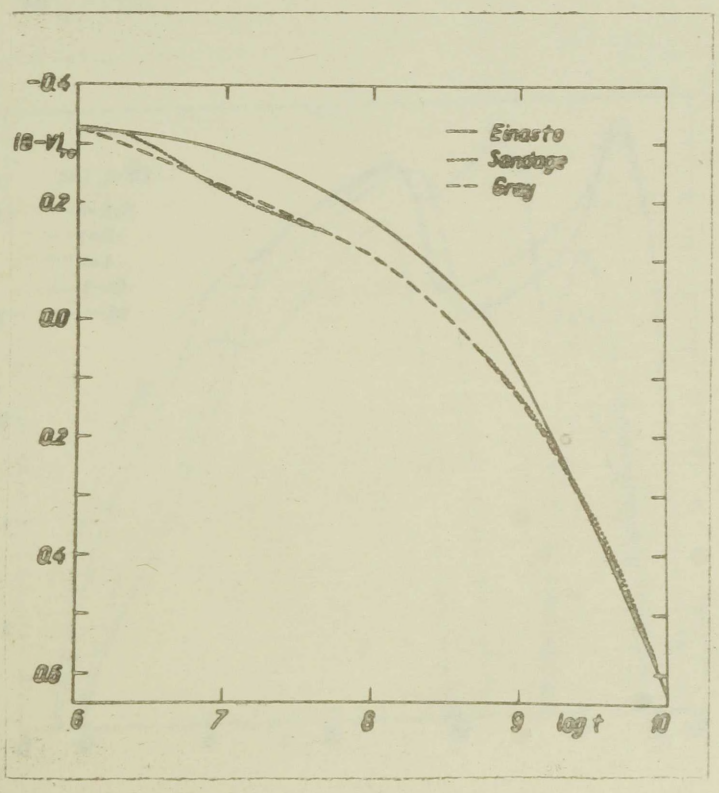


Рис. 2. Зависимость цвета точки поворота главной последовательности от возраста скопления по настоящей работе, Сэндиджу [95] и Грею [96].

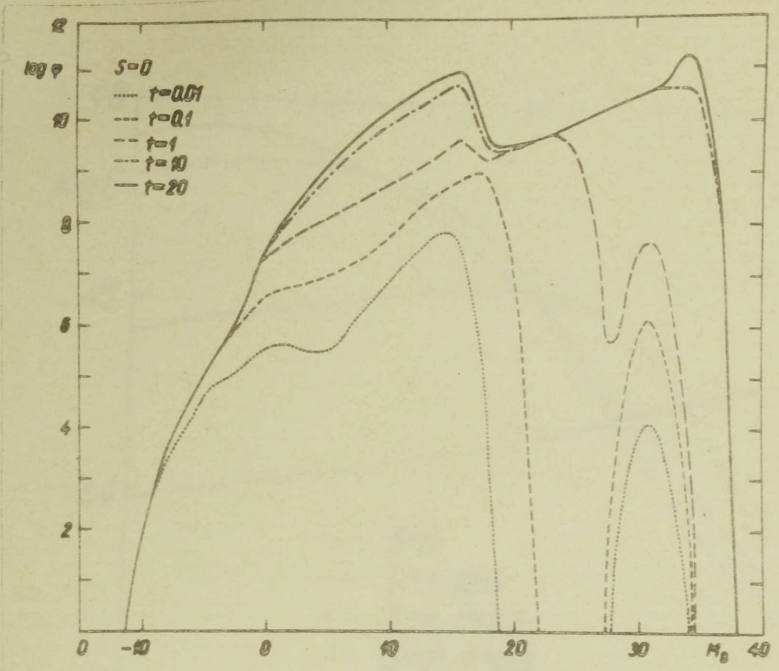


Рис. 3а. Функции светимости для абсолютных величин в системе B в зависимости от возраста галактики t (в миллиардах лет). Принято функция звездообразования с $S = 0$, $n = 2.33$, $m_0 = 0.03\, m_\odot$. Для быстроты звездообразования R принято 5 $m_\odot$/год.

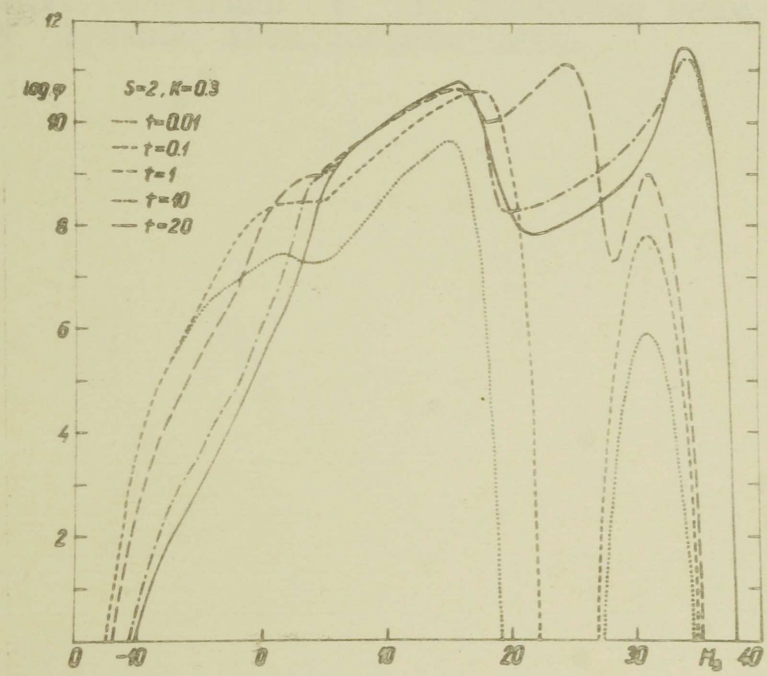


Рис. 3б. То же, что на рис. 3а, но при $S = 2$, $K = 0.3 \times 10^9$ лет (масса галактики $10^{11}\, m_\odot$).

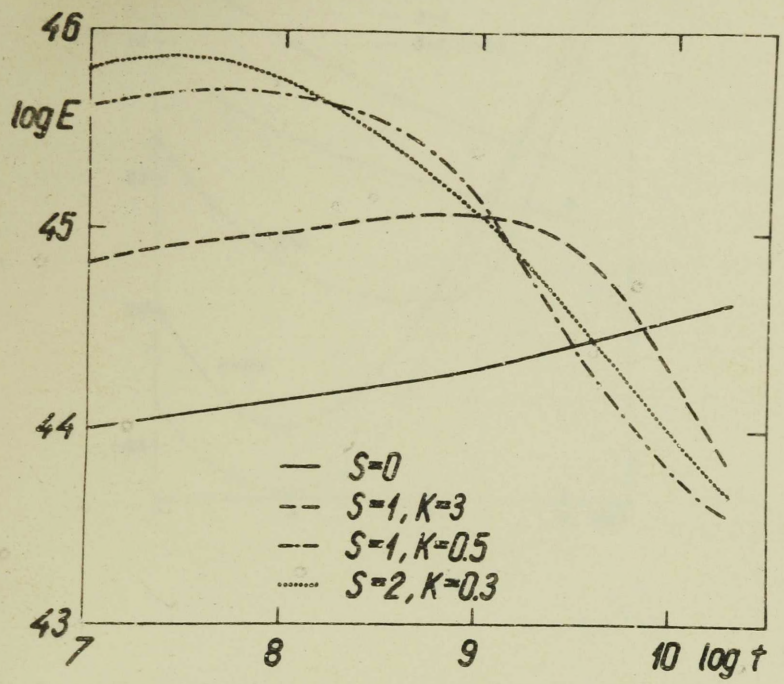


Рис. 4. Зависимость логарифма интегральной болометрической светимости галактики массой $10^{11}\ m_\odot$ в эрг/сек от возраста галактики t для различных значений параметров S и K функции звездообразования.

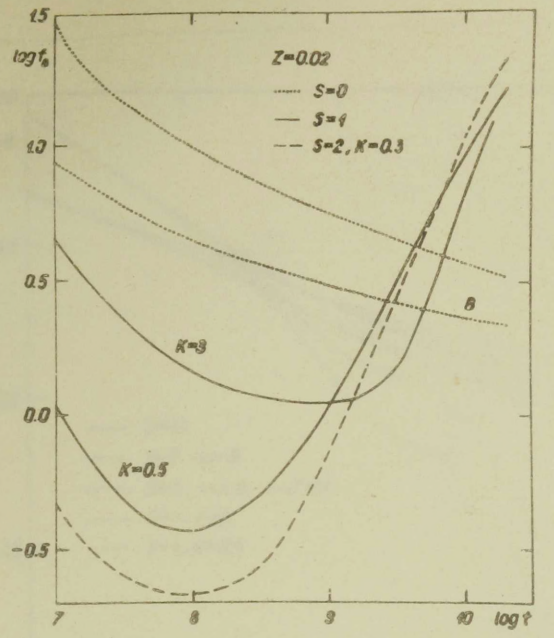


Рис. 5а. Зависимость логарифма отношения массы к светимости от возраста галактики для различных значений параметров функции звездообразования. Для $S = 0$ даны два варианта со стандартными эволюционными треками и треками, гелиевая последовательность которых ограничена с синей стороны (вариант В).

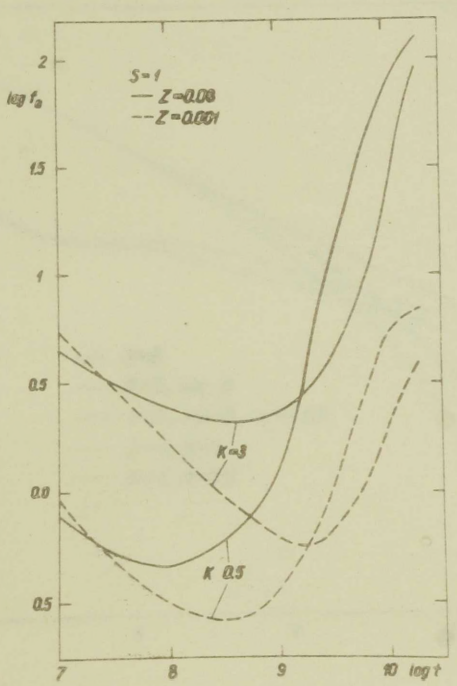


Рис. 5б. Зависимость логарифма отношения массы к светимости от возраста галактики для экстремальных значений химического состава.

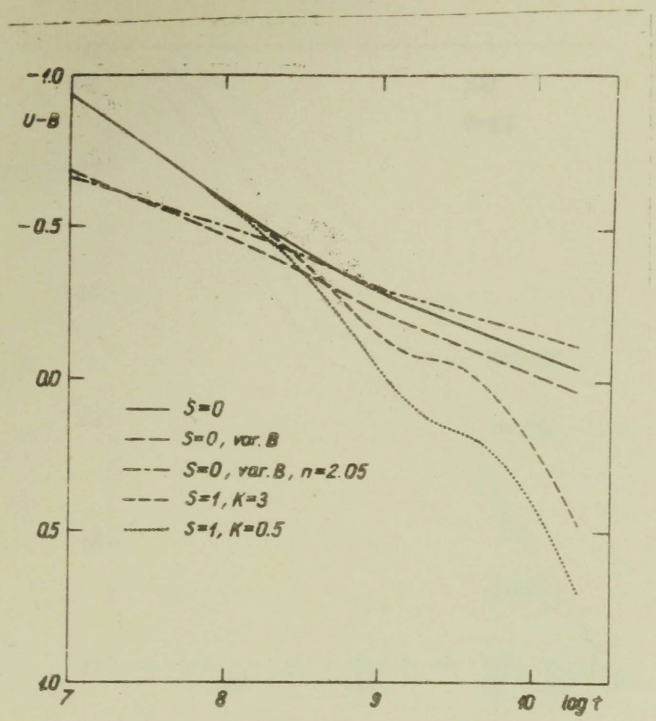


Рис.6. Изменение цвета $U-B$ модель-галактик с временем для различных значений параметров функции звездообразования.

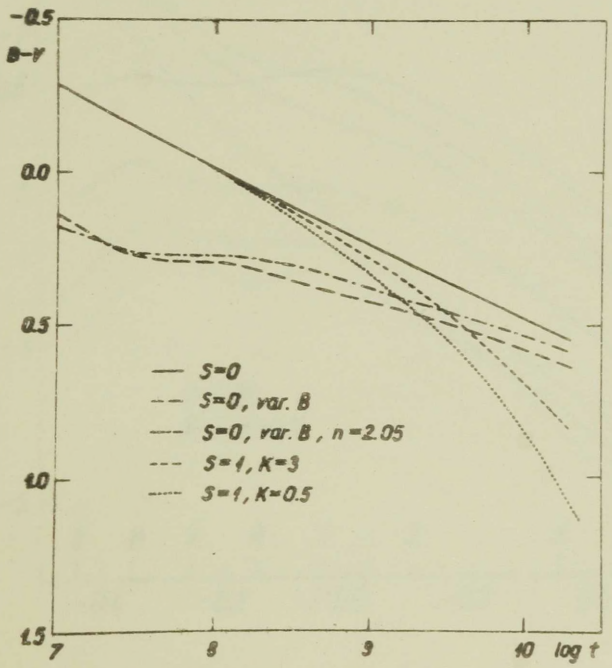


Рис.7. Изменение цвета $B-V$ модель-галактик с временем.

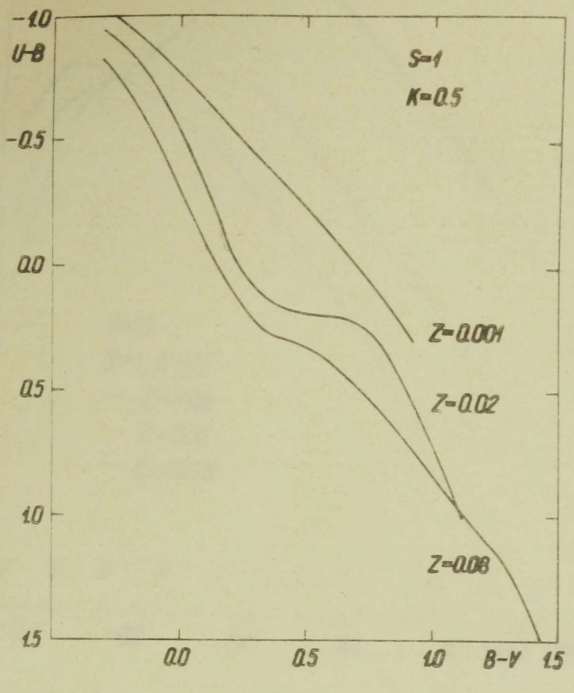


Рис. 8. Эволюционные треки модель-галактик разного химического состава на двухцветной диаграмме.

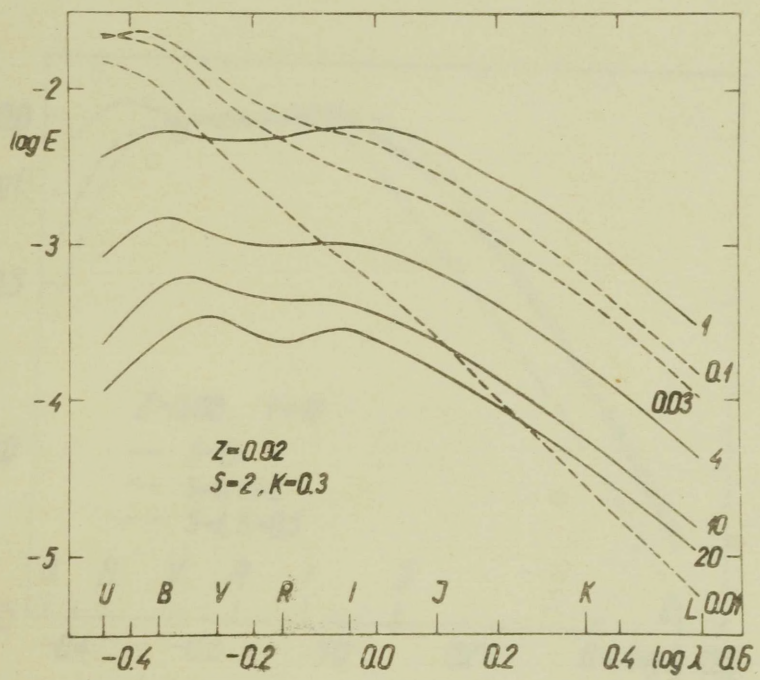


Рис. 9. Зависимость распределения энергии в спектре от возраста модель-галактики массы $10^{11}\,\mathfrak{M}_\odot$. Длина волны выражены в микронах и интенсивность в $W\,cm^{-2}\,\mu^{-1}$; указан возраст галактик в миллиардах лет.

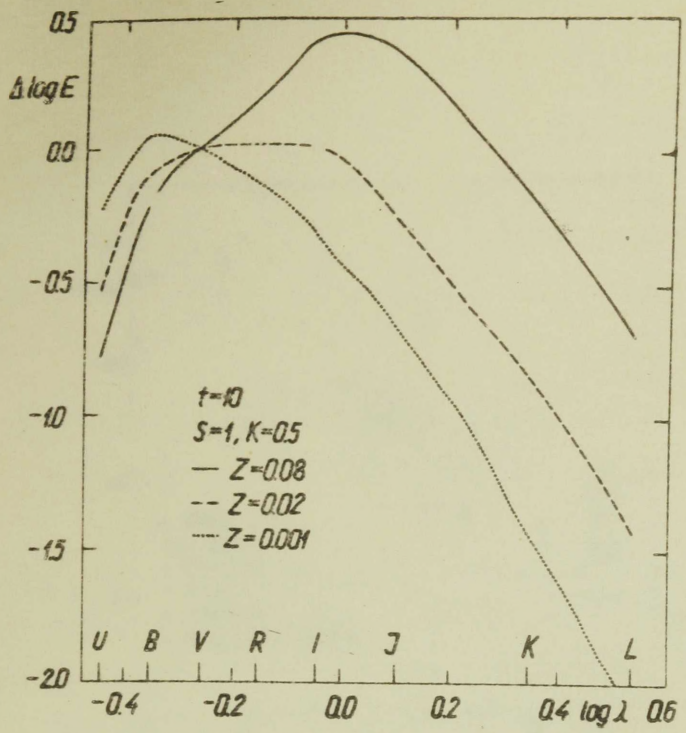


Рис. 10а. Относительное распределение энергии в спектре модель галактик одинакового возраста ($t = 10 \times 10^9$ лет), но разного химического состава.

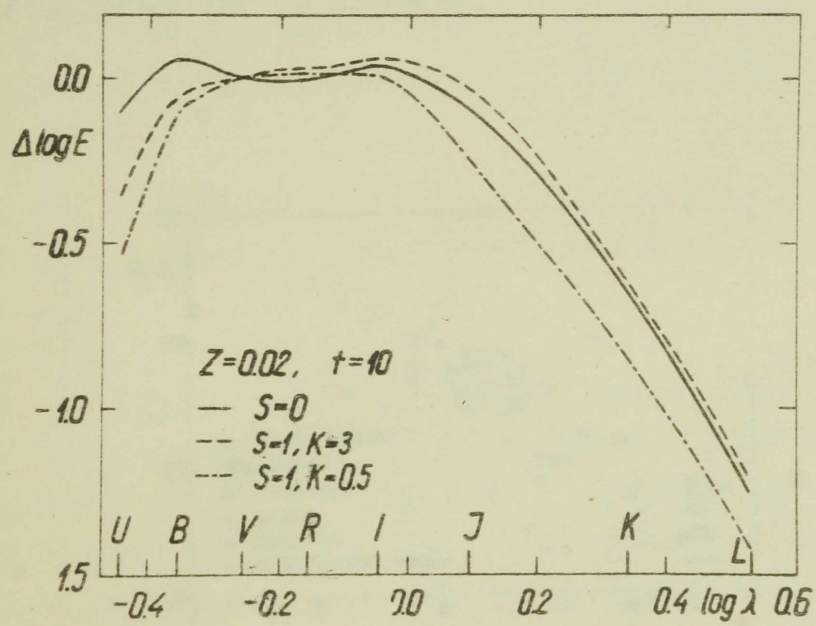


Рис. 10б. Относительное распределение энергии модель галактик одинакового возраста и химического состава, но с различными параметрами функции звездообразования.

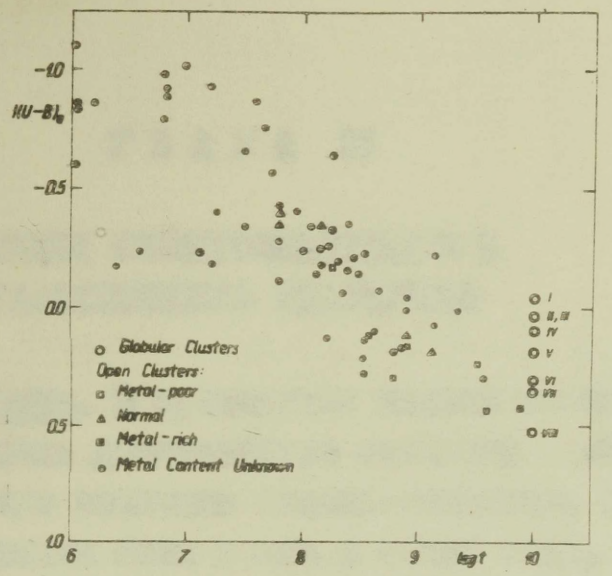


Рис. II. Зависимость интегрального цвета $I(U-B)_0$ от возраста для звездных скоплений разного химического состава. Шаровые скопления разделены по группам согласно типу металличности по Моргану.

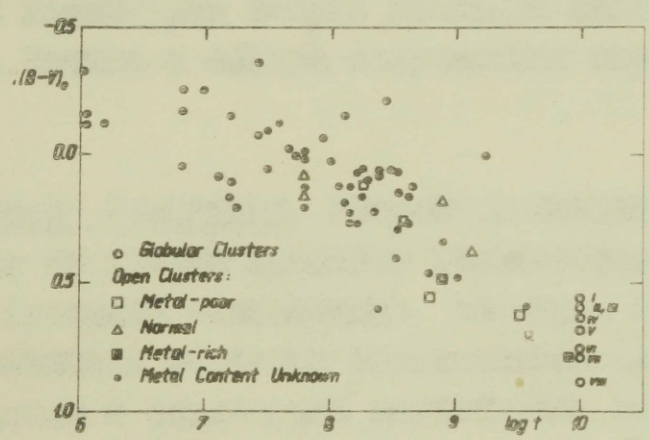


Рис. I2. Зависимость интегрального цвета $I(B-V)_0$ от возраста.

ГЛАВА 23

ФУНКЦИЯ ЗВЕЗДООБРАЗОВАНИЯ И ГАЛАКТИЧЕСКИЕ ПОДСИСТЕМЫ

1. Введение. В предыдущих главах мы сделали попытку реконструировать динамическую эволюцию Галактики и определить физическую эволюцию модель-галактик. При этом функция звездообразования была взята в общем виде, вычисления проводились для различных значений параметров этой функции.

В настоящей главе мы рассмотрим функцию звездообразования более подробно. Определим численные значения параметров этой функции и оценим их возможную зависимость от химического состава газа. Далее мы рассмотрим на основе функции звездообразования, как составная структура галактик могла возникнуть в ходе последовательного образования звезд разного возраста.

Важным параметром теории эволюции галактик является их возраст. Начнем с обзора современных определений возраста Галактики.

2. Возраст Галактики. Возраст галактик будем отсчитывать условно от начала процесса звездообразования в протогалактике. Согласно современным взглядам на эволюцию Вселенной большинство галактик образовалось одновременно, когда в расширяющемся и остывающем первобытном газе возникли флуктуации, которые потом стали ядрами возникающихся галактик.

В настоящее время имеется по крайней мере три независимых метода определения возраста галактик. Первый основывается на космологических соображениях: ясно, что возраст галактик должен быть несколько меньше возраста Вселенной, который с

учетом ускорения космологического расширения выражается так

$$T_U = \alpha H^{-1}, \qquad (2.1)$$

где H – постоянная Хаббла, и α множитель, зависящий от ускорения. Выражая H в км/сек/Мпс и T_U в годах, имеем

$$T_U = \alpha\, 978 \times 10^9 H^{-1}. \qquad (2.2)$$

В табл. I дана сводка последних определений параметра Хаббла. Приняв космологический член $\Lambda = 0$, а для параметра

Табл. I

H (км/сек/Мпс)	T_U (10^9 лет) $q_0 = 0$	$q_0 = 0.5$	$q_0 = 1.5$	Лит.
95	10.3	6.9	5.3	1
75	13.0	8.7	6.7	2
47	20.8	13.9	10.7	3

ускорения $q_0 = 0.5$ и 1.5 [4], получили для коэффициента значение $\alpha = 0.667$ и $\alpha = 0.513$ соответственно [5]. Вычисленные с этими значениями α значения времени T_U также даны в табл. I, для сравнения указано и "время Хаббла", соответствующее случаю $\alpha = 1$ ($q_0 = 0$).

Видим, что точность современных определений параметров H и q_0 недостаточна для вывода надежного значения T_U, неуверенность еще увеличивается, если учесть возможную ошибку при допущении $\Lambda = 0$. Обычно в последнее время принимается $H = 75$ км/сек/Мпс и $q_0 = 0.5$, что дает $T_U = 8.7 \pm 1.5 \times 10^9$ лет.

Другой метод оценки возраста галактик, в данном случае нашей Галактики, основан на абсолютных определениях возраста объектов гало. Единственные объекты, где этот метод может быть применен – шаровые скопления.

Ранее вычисления теоретических диаграмм Герцшпрунга-Рассела делались в допущении, что содержание гелия в объектах гало очень мало, что приводило к возрасту шаровых скоплений порядка $15 - 20 \times 10^9$ лет [6], т.е. много больше возраста Вселенной T_U. Недавно было показано, что содержание гелия в шаровых скоплениях такое же, как и в объектах первого населения [7, 8], другими словами, гелий имеет первичное происхождение. Эволюционные вычисления, выполненные с учетом этого фактора, приводят к возрастам, вполне согласующимся с космологическими данными о возрасте Вселенной. Сводка последних определений возраста шаровых скоплений дана в табл. 2. Видим, что различные эволюционные треки

Табл. 2

T (10^9 лет)	Модель	Лит.
8.5	7	7
11 - 13	9	9
9.6	11	10
11.6	12	10
10.0 ± 0.8		

дают несколько различные, но вполне приемлемые значения возраста. Сэндидж принимает в качестве вероятного возраста шаровых скоплений $T = 10 \times 10^9$ лет [10].

Наиболее точные результаты дает метод радиоактивных изотопов. Идея использования метеоритов для определения возраста солнечной системы и Галактики принадлежит Бэрбидж с соавторами [13]. Вначале использовался только один изотоп U^{235}, в итоге для возраста Галактики получилось $T = 6.6 \times 10^9$ лет, если допустить быстрое образование урана в насальной фазе развития Галактики, и $T = 11.5 - 18 \times 10^9$ лет при образовании урана с постоянной скоростью.

Обзор ранних определений возраста Галактики этим методом дан Дике [14]. Использование малого числа изотопов,

неточности химического анализа метеоритов и другие причины не позволяли получить достаточно уверенные результаты, поэтому мы не будем останавливаться на ранних работах.

Увеличение числа изотопов с разными временами полураспада и уточнение атомных постоянных позволило заметно улучшить результаты. Теория этого вопроса дана в [15]. Оказывается, что имеющиеся данные о метеоритах не позволяют получить единственного решения. Если допустить быстрое начальное образование большинства радиоактивных изотопов, то получается возраст Галактики порядка 9×10^9 лет. Если же допустить образование изотопов с постоянной скоростью, то возраст Галактики увеличивается в 1.5 раза. Другие данные исключают, однако, вторую возможность [16]. Поэтому мы принимаем первую альтернативу. Последние определения дают результаты, приведенные в табл. 3.

Среднее значение $T = 9.0 \pm 0.5\times10^9$ лет, полученное этим методом, относится не к Галактике в целом, а к диску Галактики, возраст которого согласно нашим расчетам скорости сжатия, должен быть ок. 0.5×10^9 лет меньше возраста всей Галактики. Учитывая возможную ошибку разности возрастов диска и всей Галактики, имеем для полного возраста $T = 9.5 \pm 0.7\times10^9$ лет. Взвешенное среднее всех трех определений дает $T = 9.6 \pm 0.5\times10^9$ лет. Вместо этого будем использовать округленное значение

$$T = 10\times10^9 \text{ лет} \qquad (2.3)$$

Если $q_0 = 0.5$ и $\Lambda = 0$, то этот возраст соответствует постоянной Хаббла $H = 65$ км/сек/Мпс.

3. Быстрота звездообразования. Локальная быстрота звездообразования при $S = 2$ определяется следующим образом

$$R_l = \frac{\alpha \rho_s}{\alpha t} = \gamma \rho_g^2, \qquad (3.1)$$

где ρ_s и ρ_g – плотность звезд и газа соответственно, γ – коэффициент пропорциональности с размерностью (плотность×время)$^{-1}$.

Так как $d\rho_г = -d\rho_з$, то (3.I) можем писать в виде

$$-\frac{d\rho_г}{\rho_г^2} = \gamma dt. \qquad (3.2)$$

Допустим, что полная плотность вещества ρ в данном элементе объема постоянна и что при $t = 0$ все вещество состоит из газа. После интегрирования имеем

$$\rho_г = \frac{\rho}{1+\tau}, \qquad (3.3)$$

где

$$\tau = \frac{t}{K} \qquad (3.4)$$

и

$$K = \frac{1}{\gamma\rho}. \qquad (3.5)$$

С учетом (3.3) формулу (3.I) можем писать в виде

$$\frac{d\rho_з}{dt} = \gamma\frac{\rho^2}{(1+\gamma\rho t)^2} = \frac{\rho}{K}\frac{1}{(1+\tau)^2}. \qquad (3.6)$$

Интегрируя (3.I) по лучу зрения получим вполне аналогично

$$P_г = \frac{P}{1+\tau} \qquad (3.7)$$

и

$$\frac{dP_з}{dt} = \varkappa\frac{P^2}{(1+\varkappa Pt)^2} = \frac{P}{K}\frac{1}{(1+\tau)^2}, \qquad (3.8)$$

где $P_г$ и $P_з$ – спроектированные плотности газа и звезд соответственно, $P = P_г + P_з$,

$$\varkappa = \frac{\gamma}{2S^*} \qquad (3.9)$$

и

$$K = \frac{1}{\gamma\bar{S}}. \qquad (3.10)$$

В последних формулах

$$\bar{\varsigma} = \frac{P}{2\varsigma^*} \qquad (3.11)$$

и

$$\varsigma^* = \frac{P_z}{2\bar{\varsigma}_z}, \qquad (3.12)$$

где

$$\bar{\varsigma}_z = \frac{\int \varsigma_z d P_z}{P_z}, \qquad (3.13)$$

причем интегрирование происходит по лучу зрения. При нормальном распределении ς_z

$$\varsigma^* = \sqrt{\pi}\,\varsigma, \qquad (3.14)$$

где ς – дисперсия положений частиц газа по лучу зрения. При модифицированном экспоненциальном законе плотности и в случае, когда мы видим галактику вдоль ее оси вращения, для дисперсии ς получим приближенно для больших R

$$\varsigma = \varepsilon\sqrt{N}\,R\left(\frac{k a_0}{R}\right)^{\nu/2}, \qquad (3.15)$$

а для $R = 0$

$$\varsigma = \varepsilon\sqrt{N}\,k a_0\, x_0^{\frac{N-1}{2}}. \qquad (3.15')$$

Интегрируя по всему объему системы получим

$$m_z = \frac{m}{1+\tau} \qquad (3.16)$$

и

$$R = \frac{d m_s}{d t} = \lambda \frac{m^2}{(1+\lambda m t)^2} = \frac{m}{K}\frac{1}{(1+\tau)^2}, \qquad (3.17)$$

где m_z и m_s – полные массы газа и звезд в галактике,

$$\lambda = \frac{\gamma}{V^*}, \qquad (3.18)$$

а K выражается в виде (3.10). Для средней плотности имеем теперь

$$\bar{\rho} = \frac{m}{V^*}, \qquad (3.19)$$

где

$$V^* = \frac{m_g}{\bar{\rho}_g}, \qquad (3.20)$$

причем

$$\bar{\rho}_g = \frac{\int \rho_g \, d m_g}{m_g}. \qquad (3.21)$$

Вводя нормированные функции плотности и массы получим для $\bar{\rho}$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{m}{a_0^3} \chi, \qquad (3.22)$$

где

$$\chi = \int_0^\infty \left(\frac{\mu^\circ}{\alpha}\right)^2 d\alpha, \qquad (3.23)$$

причем параметры ε, a_0 и нормированная функция массы μ° относятся к газовой составляющей, а только m – полная масса галактики. Если газ распределен по экспоненциальному закону, тогда для χ имеем в обозначениях гл. I6

$$\chi = \frac{N h^2 k^3}{2^{3N}} \Gamma(3N). \qquad (3.24)$$

Вычисленные значения χ для ряда N даны в табл. 4.

4. Определение параметра γ. Непосредственные наблюдения позволяют определить полную массу галактики m и массу m_g, а также среднюю плотность $\bar{\rho}$. В других галактиках можно найти и распределение спроектированной плотности газа и молодых звезд, а в нашей Галактике – распределение пространственной плотности газа и молодых звезд. Во всех выражениях, которые связывают упомянутые величины, фигурирует параметр γ быстроты звездообразования. Таким

образом, для определения γ имеются три независимых метода: первый из них - интегральный, остальные - дифференциальные.

Применим интегральный метод определения γ для галактики М31 и Малого Магелланового Облака (ММО), а дифференциальный для ММО.

Сначала используем интегральный метод. Основные величины, использованные при вычислениях, приведены в табл. 5.

Масса водорода М31 взята из нашей сводки [19] (гл.17). Для ММО эта величина бралась по [20]. При вычислении полной массы газа принят параметр, химического состава $X = 0.70$. Для полной массы М31 брались массы диска и плоской составляющей, распределение плотности которых похоже на соответствующее распределение газа. Масса ММО, а также эффективный радиус $a_{0.5}$ (в смысле де Вокулера) взяты из [21]. По $a_{0.5}$ с учетом данных гл. 16 был найден средний гармонический радиус a_0 (принята модель $N = 0.5$). Отношение полуосей эллипсоида газа М31 взято равным 0.016 по аналогии с нашей Галактикой.

Оценка ε газовой составляющей Галактики была получена по формуле (3.15), из которой при $\nu = 2$ имеем

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}\,\zeta}{k a_0}. \qquad (4.1)$$

Дисперсию z-координат ζ мы нашли по ходу плотности водорода [22] и получили $\zeta = 100$ пс. Эффективный радиус подсистемы a_0 был взят равным (гл. 7) $a_0 = 8$ кпс, параметр k - согласно гл. 16. В итоге мы нашли $\varepsilon = 0.0157$.

Из таблицы 5 видим, что определенные для этих весьма разных по типу галактик значения параметра γ хорошо согласуются между собой.

Найдем теперь параметр γ дифференциальным методом, применяя данные о числе молодых звезд и спроектированной плотности газа в ММО.

По (3.7) - (3.9) имеем

$$\frac{d P_s}{dt} = \frac{\gamma}{2\varepsilon^4} P_g^2. \qquad (4.2)$$

Табл. 3

T (10^9 лет)	Лит.
8.7 ± 0.7	I7
9.7 ± I.0	I8
9.0 ± 0.5	

Табл. 4

N	χ
0.5	0.5555
I	0.5000
2	0.7I46
3	0.6I24
4	0.7596
5	0.9708
6	I.2644

Табл. 5

Величина	Единица	M3I	MM0
m_H	10^9	3.7	0.48
m_g	"	5.3	9.68
m	"	II0	2.4
K	10^9	0.50	4
a_0	кpc	9	I.5
ε		0.0I6	0.5
$\bar{\varrho}$	$m_\odot/pc^3$	0.38	0.062
γ	$\left(\frac{m_\odot}{pc^3}\cdot 10^9 a\right)^{-1}$	5.3	4.0

Спроектированная плотность газа P_g была найдена по соответствующей плотности водорода P_H [20], приняв для параметра химического содержания X значение 0.70. Параметр ξ^*, характеризующий протяженность облаков газа по лучу зрения, был определен следующим образом. Приведенная в [20] на рис. 2 картина изофот показывает, что водород сконцентрирован в отдельные облака, которые имеют довольно круглую форму, что служит признаком их сферичности (галактика в целом сплюснута). Далее мы нашли, что распределение плотности нормальное ($N = 0.5$), что позволило определить с методикой гл. I6 эффективный радиус a_0 отдельных облаков; а по нему дисперсию ξ и параметр ξ^*. Значения, полу-

чаемые для отдельных облаков, колеблются между $2S^* = 1.0$ кпс и 2.0 кпс, для среднего мы получили $2S^* = 1.6$ кпс. При этом, согласно [20], мы приняли расстояние до ММО $d = 60$ кпс.

Остается определить спроектированную плотность звезд, образовавшихся в единице времени $R_p = d P_s / dt$.

Сандулек [23] нашел по спектральным наблюдениям распределение абсолютно ярких звезд ранних спектральных классов в ММО. Его список можно считать полным до $m_{pg} = 13.0$ или $B = 13.1$ [24], что при видимом модуле расстояния $(m-M)_{pg} = 19.0$ [25] соответствует полноте данных до $M_B = -6.0$.

Полное число ранних звезд ярче $M_B = -6.0$ согласно Сандулеку $P = 126$. Это число мы можем сравнить с вычисленной по теоретической функции светимости. Так как быстрота звездообразования в ММО вероятно была почти постоянна в течение последних миллиардов лет, то мы брали для сравнения функцию светимости $S = 0$, которая соответствует быстроте звездообразования $R^\circ = 5$ солнечных масс в год. Из функции светимости $\varphi(M_B)$ мы нашли, что полное число звезд ярче $M_B = -6$ равно $P^\circ = 25300$. Итак, интенсивность звездообразования в ММО на $P^\circ/P = 200$ раз меньше, чем в нашей модель-галактике, т.е. $R = 0.025\ \mathcal{M}_\odot$ в год.

Полученная интенсивность звездообразования в ММО может быть занижена, так как список Сандулека не охватывает все сверхгиганты. Для оценки величины этой селекции мы вычислили интенсивность звездообразования R и по формуле (3.17), используя для характерного времени звездообразования K найденную выше оценку (табл. 5). В результате мы нашли $R = 0.050\ \mathcal{M}_\odot$ в год. Другими словами, если последняя оценка R корректна, то найденные Сандулеком числа звезд следует в два раза повысить.

Сандулек [26] нашел распределение звезд ярче $m_{pg} = 13$ на единицу площади P_i. Ясно, что

$$\frac{Q P_i}{P^\circ} = \frac{R_p}{R^\circ}, \qquad (4.3)$$

где $Q \approx 2$ - фактор для учета упомянутой выше селекции. Эту формулу мы использовали совместно с (4.2) для определения параметра γ. Сандулек получил для показателя формулы быстроты звездообразования значение $S = 1.84 \pm 0.14$, что практически не отличается от принятого нами случая $S = 2$. Мы использовали приведенное в работе [26] распределение P_l по P_z. После калибровки единиц плотности газа и площади мы нашли с учетом селекции $\gamma = 2.9$ в единицах $(\mathcal{M}_\odot \text{ пс}^{-3} 10^9 \text{ лет})^{-1}$.

Согласие этой оценки параметра γ с приведенными в табл. 5 значениями хорошее. В качестве среднего мы можем взять

$$\gamma = 4 \left(\frac{\mathcal{M}_\odot}{\text{пс}^3} 10^9 \text{ лет}\right)^{-1}. \qquad (4.4)$$

Результат существенно зависит от принятого возраста ММО (мы брали $t = 10^{10}$ лет) и средней сплюснутости ε эллипсоида газа М31. Если брать для возраста ММО два раза меньшее, для ε два раза большее значение, тогда параметр γ увеличивается в два раза. Но при этом фактор селекции Q также увеличивается в два раза, что трудно приемлемо. С другой стороны, полученный результат может быть проверен и другим путем. В гл. 20 мы нашли, что общая светимость молодых звезд в М31 хорошо согласуется с вычисленной светимостью с параметрами $S = 2$ и $K = 0.25$. При этом мы использовали массу всей галактики. Если брать только массу диска, тогда согласие получается при $K = 0.5$. Светимость подсистемы молодых звезд зависит от современной интенсивности процесса звездообразования, которая, в свою очередь, зависит от современной средней плотности $\bar{\varrho}$. Исходя из наблюденных параметров подсистемы газа М31 мы нашли для параметра γ значение, близкое к принятому выше (4.4). Таким образом, мы пришли к выводу, что нет основания принимать для ММО возраст, меньший возраста других галактик, и для средней сплюснутости подсистемы газа значение, существенно отличное от современного.

Наконец отметим, что недавно Хартвик [27] нашел методом, аналогичным методу Сандулека [26], для параметра S в М31 значение $S = 3.5 \pm 0.12$. При этом он использовал

данные Робертса [29] о распределении нейтрального водорода и данные Бааде и Арпа [30] о распределении ионизированного водорода как индикатора числа молодых звезд. Теоретические основы этой работы были подвергнуты критике Талботом [28]. Но более существенно то обстоятельство, что Роберте не учел эффекта размазывания плотности водорода антенной приемника, вследствие чего кривая плотности получилась сильно сглаженной, без высоких пиков плотности в области спиральных ветвей (см. [31], гл. 19). Если учесть этот эффект, тогда параметр S получается вполне нормальным.

5. Зависимость параметров функции звездообразования от химического состава газа. Основы современных представлений о химической эволюции галактик заложены Э.Маргарет и Дж. Бербидж, Фаулером и Хойлом [13]. В цитированной работе показывается, что все элементы кроме водорода синтезируются в недрах звезд в результате различных ядерных процессов, причем часть вещества выбрасывается обратно в мировое пространство, где оно обогащает межзвездный газ элементами, тяжелее водорода. Впоследствии оказалось, что гелий, также как и водород, первичен, и что в звездах синтезируются элементы тяжелее гелия. Изучению отдельных реакции в звездах и их роли в химической эволюции галактик посвящена обширная литература, обзор ранних работ дан в [32].

Синтез элементов тяжелее гелия происходит во всех звездах, где гелий сгорает. Но основной вклад в обогащение межзвездного вещества тяжелыми элементами дают только массивные звезды, которые в конце всоей активной жизни вспыхивают как сверхновые. При этом выбрасывается большинство массы звезды и синтезируются элементы высокого атомного веса. Исследование химического состава и относительного количества звезд разного возраста дает, таким образом, информацию об активности синтеза тяжелых элементов и функции звездообразования в прошлом.

Одним из первых астрономов, который использовал этот метод для исследования возможной временной зависимости параметров функции звездообразования, был ван ден Берг. Он обратил внимание на то [33], что уже в конце фазы сжатия Галактики ее химический состав был близок к нормальному,

что указывает на высокую активность вспышек сверхновых на ранней стадии развития Галактики. К тому же выводу пришел Шмидт [34]. Химический состав звезд и газа в конце фазы сжатия был уточнен Диксоном [35, 36]. Камерон и Труран [37, 38] построили модель химической эволюции Галактики и пришли к выводу, что согласие модели с имеющимися данными получается, если допустить быстрое, почти мгновенное обогащение газа тяжелыми элементами в начальный момент развития Галактики.

Основное внимание астрономов до сих пор было направлено на уточнение химической стороны вопроса. Относительно плохо изучены возможные временные изменения параметров функции звездообразования, которые могли бы вызвать упомянутый эффект.

По [35 - 37] мы можем заключить, что содержание тяжелых элементов в конце фазы сжатия протогалактики было около 3 раз меньше солнечного. Для учета возможной ошибки этого числа рассмотрим два случая: А) содержание тяжелых элемент в конце сжатия $Z_h = 0.010$ (2 раза меньше солнечного) и Б) $Z_h = 0.005$. Масса гало М31 (гл. 20) составляет 10 % массы всей галактики. Примем это значение и для нашей Галактики (непосредственные данные менее точны). Все тяжелые элементы в газе (90 % массы всей Галактики) были продуцированы звездами гало (10 % массы всей Галактики). Если допустить, что тяжелые элементы не были израсходованы на объекты гало, тогда получим, что в случае А $\psi_h = 0.090$ всей начальной массы звезд гало было потом выброшено в виде тяжелых элементов, в случае Б отношение равно $\psi_h = 0.045$.

Среднее содержание тяжелых элементов в диске Галактике можно считать равным $Z = 0.02$ (в настоящее время среднее содержание тяжелых элементов молодых звезд несколько больше). Учитывая, что масса диска около 53 % массы всей Галактики, можем вычислить полную массу тяжелых элементов в диске, и, вычитая отсюда массу тяжелых элементов в начале образования диска, найти массу тяжелых элементов продуцированных объектами диска. Соответствующие вычисления показывают, что в случае А $\psi_d = 0.009$ всей массы звезд диска было выброшено в виде тяжелых элементов , а в случае Б $\psi_d = 0.014$. Итак, в первом случае эффективность син-

теза тяжелых элементов уменьшилась в 10 раз, а во втором в 3 раза.

Может ли такое уменьшение быть объяснено изменением параметров функции звездообразования?

По функции $F(m)$ (гл. 22) мы можем вычислить долю звезд большой массы. Принимаем для звезд диска Галактики минимальную массу $m_0 = 0.03\,\mathcal{M}_\odot$, максимальную массу $m_u = 100\,\mathcal{M}_\odot$, для показателя функции звездообразования $n = 2.333$ и минимальную массу звезды - будущей сверхновой - $m_{SN} = 2.6\,\mathcal{M}_\odot$. Общая масса звезд с массой $m \geq m_{SN}$ составляет при этих параметрах функции звездообразования $E_d = 0.17$ общей массы всех звезд. Все тяжелые элементы синтезированы звездами с $m \geq m_{SN}$, приняв для ψ_d вышеприведенные значения находим, что из начальной массы этих звезд 5 % (случай А) или 8 % (случай Б) выбрасывается обратно в виде тяжелых элементов.

Рассмотрим теперь как увеличить количество тяжелых элементов. Тут имеются две возможности - увеличение доли массивных звезд и увеличение эффективности каждой вспышки сверхновой.

Доля звезд с массой выше m_{SN} может быть увеличена путем увеличения m_0 и уменьшения n и m_{SN}. Если взять $m_0 = 0.3\,\mathcal{M}_\odot$ (таково максимально возможное значение по данным о шаровых скоплениях), $n = 2$ и $m_{SN} = 2\,\mathcal{M}_\odot$ (только более массивные звезды успеют в течение максимально возможного срока продолжительности фазы сжатия - 1 миллиарда лет - развиться до стадии вспышки сверхновой), то получим $E_d = 0.68$, что в 4 раза превышает соответствующее значение для диска. Этого более или достаточно для получения содержания тяжелых элементов в конце фазы сжатия для варианта Б, но мало для варианта А. Дальнейшее увеличение m_0 и уменьшение m_{SN} невозможно. Поэтому, если содержание по варианту А оказывается правильным, тогда нужно еще уменьшить n или увеличить эффективность вспышки сверхновой.

Требуемые для объяснения начальной повышенной продукции тяжелых элементов изменения параметров функции звездообразования не являются слишком большими. Поэтому нам кажется,

что нет необходимости допустить начальное почти мгновенное образование тяжелых элементов, как предлагают Камерон и Труран [37].

6. О формировании галактик и их подсистем. Формула Шмидта (3.1) и ее следствия [39] позволяют объяснить количественно как формирование галактик разных типов, так и формирование подсистем галактик.

Рассмотрим сначала формирование галактик разных типов: эллиптических, спиральных и иррегулярных. Эти три типа галактик отличаются друг от друга прежде всего своей средней плотностью. Основное тело как эллиптических, так и спиральных галактик, является довольно плотным образованием, например для галактики М31 мы нашли $\bar{\rho} = 6\,\mathfrak{M}_\odot\,пс^{-3}$. Средняя плотность диска спиральных галактик на порядок ниже, а средняя плотность иррегулярных галактик еще на порядок меньше. Используя эти средние плотности мы вычислили соответствующие значения характеристического времени K, а затем по формуле (3.16) нашли изменение относительного содержания газа в галактике и по формуле (3.17) изменение быстроты звездообразования R. Результаты приведены на рис. 1 и 2. На рис. 3 изображено изменение полной светимости галактики. Она оценивалась по формуле

$$\mathcal{L}_B(t) = \delta \int_{t_0}^{t} R\,dt', \quad t_0 = \begin{cases} 0, & t \le \Delta, \\ t-\Delta, & t \ge \Delta, \end{cases} \qquad (6.1)$$

причем как фактор пропорциональности δ, так и Δ были найдены путем сравнения полученного результата с вычисленным в гл. 22 для случая $K = 0.3$. Оказалось, что Δ нужно брать линейно зависящим от возраста

$$\Delta = 0.1 + 0.14\,t, \qquad (6.2)$$

где как Δ, так и t выражено в единицах 10^9 лет.

Полученные характеристики при возрасте модель-галактик $t = 10^{10}$ лет весьма хорошо воспроизводят наблюденные характеристики эллиптических, спиральных и иррегулярных галактик. Возникает вопрос, чем объяснить различия в средней плотности этих трех типов галактик.

В первую очередь следует подчеркнуть, что различия в средней плотности могли возникнуть только в газовой фазе развития галактик. Подсистемы звезд весьма консервативны в этом отношении, характеристики их пространственно-кинематической структуры лишь немного могут изменяться.

Одной причиной различия в средней плотности галактик может быть различие в начальном удельном кинетическом моменте. Протогалактики с малым удельным кинетическим моментом могли сильно сжиматься, из них возникли эллиптические галактики. Протогалактики с большим моментом не могли сильно сжиматься в радиальном направлении, поэтому после фазы сжатия газ образовал в них плоский диск, который вследствие гравитационной неустойчивости распался на спиральные ветви. Роль кинетического момента на развитие галактик обсудил теоретически Линден-Белл [40], наблюдательный аспект проблемы был исследован Сэндиджем, Фриманом и Стоксом [41].

Рассмотрим теперь образование подсистем галактик. Начнем с гало. Используя данные гл. 20 найдем для средней плотности гало галактики М31 значение $\bar{\varrho} = 0.13 M_\odot/пс^3$, что дает $K \approx 2\times10^9$ лет. В конце фазы образования гало масса газа составляла 90 % массы галактики, следовательно, $\tau = 0.1$. По τ и K можем найти время образования гало $t = \tau K = 0.2\times10^9$ лет. Полученное время хорошо согласуется с тем, что мы получили раньше (гл. 21) по времени сжатия. Конечно, различные области гало не образуются одновременно, сначала образуется центральная, более плотная часть его, затем последовательно более далекие и разреженные части, так что полученное время нужно рассматривать как некоторое среднее.

После фазы сжатия остающийся газ приобретает положение, более или менее совпадающее с современным положением. Поэтому мы не делаем большой ошибки, если мы считаем полную спроектированную плотность $P(A)$ независящей от времени. Что касается средней толщины слоя газа ε^*, то на основании приведенных выше аргументов мы можем считать, что эта величина также не зависит от времени. На основании формулы (3.8) можем писать для спроектированной плотности звезд $\Delta P_s(A)$, образовавшихся в интервале времени Δt и в средний момент t

$$\Delta P_s = \gamma \frac{P^2}{2\varepsilon^*}\left[1+\gamma\frac{P}{2\varepsilon^*}t\right]^{-2}\Delta t. \qquad (6.3)$$

Время в этой формуле следует отсчитывать не от начала образования всей галактики, а от начала образования звезд основного тела и диска.

Полученная формула позволяет количественно объяснить последовательное образование подсистем все большого размера *. Когда t мало, тогда $\tau = \gamma Pt/(2\xi^*) \ll 1$ и мы имеем

$$\Delta P_s = \gamma \frac{P^2}{2\xi^*}. \qquad (6.4)$$

Вследствие очень быстрого убывания $P(A)$ с увеличением A звездообразвование происходит только в центральной области галактики - так формируется нуклеус ее. Но в центральной части галактики плотность газа быстро уменьшается, поэтому в согласии с формулой (6.3) центральная плотность вновь формирующихся подсистем также уменьшается. Когда $\tau \gg 1$, тогда имеем для спроектированной плотности газа по (3.7)

$$P_g \approx \frac{2\xi^*}{\gamma t}. \qquad (6.5)$$

Распределение плотности вещества в галактиках описывается экспоненциальным законом с $\nu \leq 1$. Из формул (3.14) и (3.15) видим, что в этом случае при увеличении расстояния параметр ξ^* увеличивается. Таким образом, на поздней стадии развития галактики центральная плотность газа уменьшается настолько, что спроектированная плотность газа в центральной части становится меньшей, чем в промежуточной области. Как раз такая картина наблюдается в спиральных галактиках типа M31. Активный процесс звездообразования все больше удаляется от центральной области галактики, а средний радиус вновь образующихся подсистем постоянно увеличивается. На периферийной области спиральных галактик, где плотность газа очень мала, процесс звездообразования также малоинтенсивен, поэтому при увеличении расстояния доля газа в общей спроектированной плотности все увеличивается, см. (3.7). Для галактики M31 для расстояния 25 кпс от центра мы нашли $2\xi^* = 570$ пс, $P = 5\,\mathfrak{M}_\odot/\text{пс}^2$, что дает $P_g/P = 0.75$.

---

*Идей применения формулы (6.3) для этой цели мы обязаны Г.Г.Кузмину.

Функция звездообразования позволяет определить и распределение подсистем по массам.

Рассмотрим распределение подсистем диска нашей Галактики по массам. Интегрируем (3.17) по времени от $t = t_i - \Delta$ до $t = t_i$

$$m_{si} = \int_{t_i-\Delta}^{t_i} R\,dt = m_s(t_i) - m_s(t_i-\Delta), \qquad (6.6)$$

где m_{si} – масса подсистемы, а $m_s(t_i) = m - m_g(t_i)$ полная масса звезд Галактики в момент t_i, причем масса газа $m_g(t_i)$ вычисляется по формуле (3.16).

При вычислениях мы сделали следующие упрощающие предположения. Эффективный радиус всех подсистем диска был взят равным $a_0 = 6.45$ кпс согласно нашей модели (гл. 7), структурные параметры подсистем также были взяты равными: $N = 1$, $x_0 = 0$. Отношение полуосей эллипсоида газа было взято равным $\varepsilon = 0.0157$, согласно результату полученному выше. Характерное время звездообразования диска K было найдено из формулы (3.10), причем средняя плотность $\bar{\varrho}$ вычислялась по (3.22). Взяв для массы диска (гл. 7) $m = 108\times10^9\, m_\odot$, мы нашли $\bar{\varrho} = 1.0\ m_\odot/\text{пс}^3$ и $K = 0.25\times10^9$ лет. Полный возраст диска Галактики был взят равным 9×10^9 лет, длительность образования подсистем Δ была взята равной 10^9 лет. Результаты вычислений даны в табл. 6. Видим, что подавляющее большинство звезд диска образовалось в течение первого миллиарда лет после формирования диска.

В гл. 7 мы нашли соотношение между возрастом подсистем и отношением полуосей ε изоповерхностей ее плотности. Найденные по этому соотношению среднее значение ε_i для рассмотренных нами подсистем также приведены в табл. 6. Зная массу, радиус, отношение полуосей и структурные параметры подсистем можем вычислить и плотность, а затем суммируя по всем подсистемам, определить полную плотность вещества. Соответствующие вычисления проводились для окрестности Солнца. Прибавляя к полученному результату еще плотность звезд второго населения (гало), которая по Оорту [42] составляет $\varrho_{II} = 0.0015\ m_\odot/\text{пс}^3$, мы нашли

Табл. 6

t_i 10^9 а	ε_i	m_{si}/m K = 0.25	K = 0.60
8.5	0.120	0.8000	0.6250
7.5	0.098	0.0889	0.1442
6.5	0.083	0.0342	0.0641
5.5	0.070	0.0181	0.0362
4.5	0.057	0.0112	0.0233
3.5	0.045	0.0076	0.0162
2.5	0.035	0.0055	0.0120
1.5	0.025	0.0042	0.0092
0.5	0.018	0.0033	0.0073
0	0.016	0.0270	0.0625

$$\varrho_\odot = 0.065\ m_\odot/пс^3. \qquad (6.7)$$

Беря A = 15 км/сек/кпс и B = − 10 км/сек/кпс, мы нашли и соответствующее значение параметра Кузмина

$$C = 61\ км/сек/кпс. \qquad (6.8)$$

Полная масса межзвездного вещества получается равной

$$m_з = 2.9\times10^9\ m_\odot, \qquad (6.9)$$

а плотность этого вещества в окрестности Солнца $\varrho_з = 0.010\ m_\odot/пс^3$.

Сравнение полученных результатов с результатами непосредственных определений (гл. 6) показывает, что все величины занижены кроме полной массы газа, которая по [43] составляет $m_з = 1.4\times10^9\ m_\odot$.

Чтобы выяснить возможные причины этого расхождения мы повторили вычисления, исходя из найденной в гл. 6 плотности газа в окрестности Солнца $\varrho_з = 0.023\ m_\odot/пс^3$. В этом случае мы получили K = 0.6×10^9 лет. Найденные относительные массы подсистем также даны в табл. 6. Для полной плотности вещества в окрестности Солнца мы получили теперь значение $\varrho_\odot = 0.082\ m_\odot/пс^3$, для параметра Кузмина C = 68 км/сек/кпс.

а для полной массы газа в Галактике $\mathfrak{M}_g = 6.8 \times 10^9 \mathfrak{M}_\odot$.

Видим, что параметр Кузмина и полная плотность получаются вполне приемлемыми, но тогда для полной массы газа получается невероятно большое значение. Напомним, что полная масса газа в М31 (гл. 20) составляет всего $\mathfrak{M}_g = 5.3 \times 10^9 \mathfrak{M}_\odot$ Галактика Андромеды М31 примерно в полтора раза более массивна, чем наша Галактика. Если относительное содержание газа в этих галактиках было бы равно, тогда мы имели бы для массы газа нашей Галактики $\mathfrak{M}_g = 3.5 \times 10^9 \mathfrak{M}_\odot$. Но есть основание думать, что относительное содержание газа в Галактике меньше, чем в М31. Известно, что расстояние между соседними спиральными ветвями тем больше, чем больше относительное содержание газа в галактике. Линейные размеры М31 примерно на 15 % превышают размеры нашей Галактики, расстояние же между соседними спиральными ветвями в М31 приблизительно в два раза больше, чем в нашей Галактике (гл. 19 и [43]). Следовательно, оценку полной массы газа в нашей Галактике (6.9) можно считать вполне приемлемой (наблюдательная оценка по [43] явно занижена, так же как и принятая в этой работе полная масса Галактики согласно модели Шмидта).

Мы приходим к заключению, что первый вариант распределения массы подсистем должен лучше соответствовать действительности. Как же в таком случае объяснить найденные по функции звездообразования малые значения плотности газа и полной плотности в окрестности Солнца?

Недавно Вулли с соавторами [44] показал на основе статистики близких звезд, что относительное количество молодых звезд в окрестности Солнца больше, чем можно ожидать на основе предположения о постоянстве быстроты звездообразования. Другими словами, Солнце находится сейчас в области повышенной активности звездообразования. На это указывает и наличие пояса Гулда, а также оптические и радиоастрономические наблюдения, которые показывают, что Солнце находится внутри спиральной ветви Галактики [45]. Повидимому этим и можно объяснить расхождение между теоретическими оценками плотности сглаженной модели Галактики (6.7) и наблюденными.

Итак, мы приходим к выводу, что функция звездообразования позволяет удовлетворительным образом объяснить как

интегральные свойства галактик, так и формирование их подсистем. Общая картина эволюции галактик практически совпадает с той, которая обрисована Сэндиджем с соавторами [41]. Но функция звездообразования позволяет трактовать эволюцию галактик с количественной стороны.

Октябрь 1971

Литература

1. S. van den Bergh, Nature 225, 503, 1970.
2. A.Sandage, Ap.J. (Let.) 152, L149, 1968.
3. G.O.Abell, S.Eastmond, A.J. 73, S161, 1968.
4. I.V.Peach, Ap.J. 159, 753, 1970.
5. A.Sandage, Ap.J. 133, 355, 1961.
6. M.Schwarzschild, Structure and Evolution of the Stars, Princeton Univ. Press, 1958.
7. R.Rood, I.Iben Jr., Ap.J. 154, 215, 1968.
8. A.Sandage, Ap.J. 157, 515, 1969.
9. I.Iben Jr., R.T.Rood, Ap.J. 161, 587, 1970.
10. A.Sandage, Ap.J. 162, 841, 1970.
11. P.Demarque, J.G.Mengel, M.L.Aizenman, Ap.J. 163, 37, 1971.
12. I.Iben Jr., R.T.Rood, Ap.J. 159, 605, 1970.
13. E.M.Burbidge, G.R.Burbidge, W.A.Fowler, F.Hoyle, Rev. Mod. Phys. 29, 547, 1957.
14. R.H.Dicke, Ap.J. 155, 123, 1969.
15. D.N.Schramm, G.J.Wasserburg, Ap.J. 162, 57, 1970.
16. A.O.Unsöld, Science 163, 1015, 1969.
17. C.M.Hohenburg, Science, 166, 212, 1969.
18. G.J.Wasserburg, D.N.Schramm, J.C.Huneke, Ap.J. (Let.), 152, L91, 1969.
19. J.Einasto, Tartu Teated No. 22, 1969.
20. J.V.Hindman, Australian J.Phys. 20, 147, 1967.
21. G.de Vaucouleurs, Problems of Extra-Galactic Research, ed. G.C.McVittie, MacMillan, N.Y.p.3, 1962.
22. M.Schmidt, B.A.N. 13, 247, 1957.

23. N.Sanduleak, A.J. 73, 246, 1968.
24. Th.Schmidt-Kaler, Landolt-Börnstein, 6/1 Astronomy and Astrophysik, ed. H.H.Voigt, p.284, 1965.
25. S.van den Bergh, Landolt-Börnsyein, 6/1 Astronomy and Astrophysik, ed. H.H.Voight, p.664, 1965.
26. N.Sanduleak, A.J. 74, 47, 1969.
27. F.D.A.Hartwick, Ap.J. 163, 431, 1971.
28. R.J.Talbot, Jr., Astroph. Let. 8, 111, 1971.
29. M.S.Roberts, Ap.J. 144, 639, 1966.
30. W.Baade, H.Arp, Ap.J. 139, 1027, 1964.
31. J.Einasto, U.Rümmel, The Spiral Structure of Our Galaxy, eds. W.Becker, G.Contopoulos, Reidel, Dordrecht, p.42, 1970.
32. Х.К.Арп, Дж.Бербидж, Э.М.Бербидж, М.Шварцшильд, Происхождение и эволюция звезд, Иноиздат, М., 1962.
33. S.van den Bergh, P.A.S.P. 73, 135, 1961.
34. M.Schmidt, Ap.J. 137, 758, 1963.
35. M.E.Dixon, M.N. 129, 51, 1965.
36. M.E.Dixon, M.N. 131, 325, 1966.
37. A.G.W.Cameron, J.W.Truran, R.A.S.C. Journ. 65, 1, 1971.
38. I.W.Truran, A.G.W.Cameron, Nature, 225, 710, 1970.
39. M.Schmidt, Ap.J. 129, 243, 1959.
40. D.Lynden-Bell, Radio Astronomy and the Galactic System, ed. H.van Woerden, Academic Press, L.p. 257, 1967.
41. A.Sandage, K.U.Freeman, N.R.Stokes, Ap.J. 160, 831, 1970.
42. J.H.Oort, Ricerche Astr, Vatican 5, 415, 1958.
43. G.Westerhout, B.A.N. 13, 201, 1957.
44. Sir Richard Woolley, S.B.Pocock, E.A.Epps, R.Flinn, Royal Obs. Bull. No. 166, 1971.
45. W.Becker, G.Contopoulos (eds.), The Spiral Structure of Our Galaxy, Reidel, Publ. Co., Dordrecht, 1970.

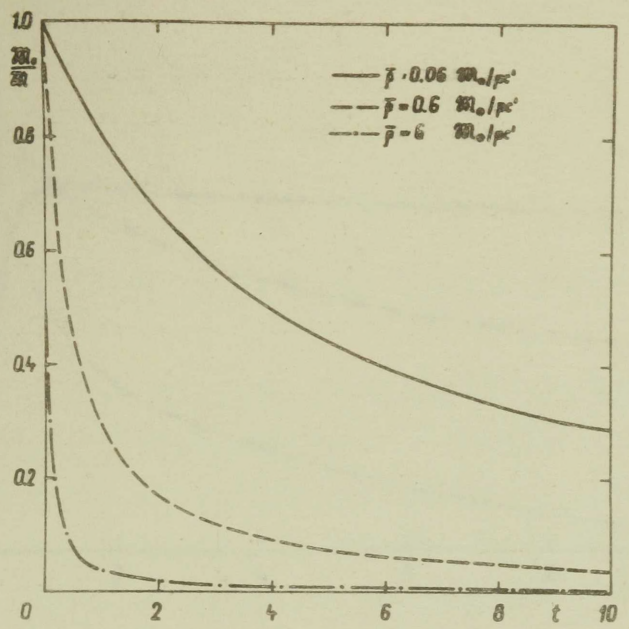


Рис. I. Изменение доли массы газа с временем для галактик разной средней плотности.

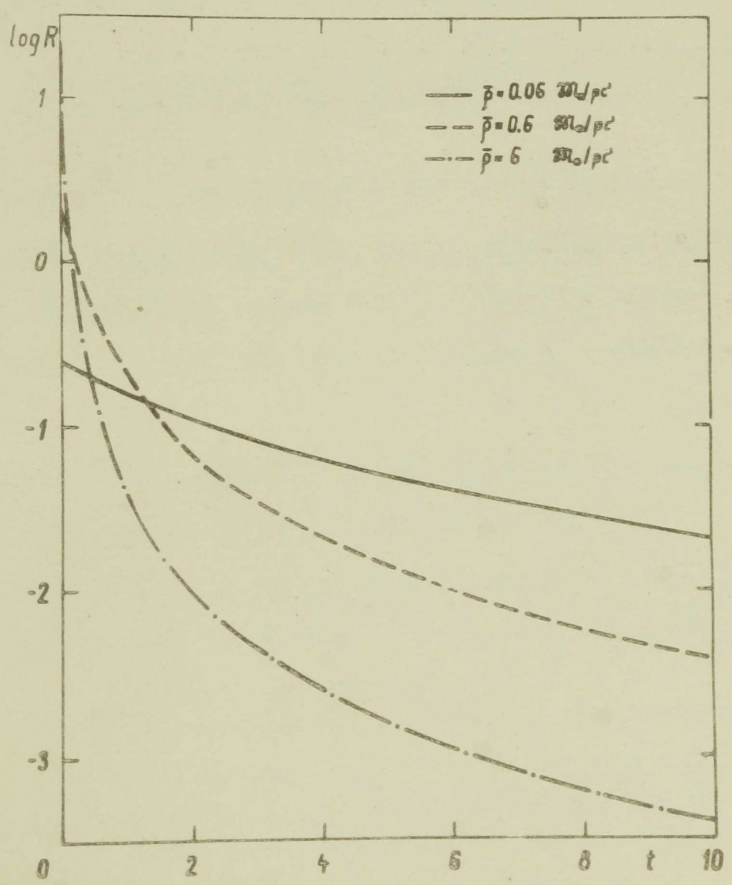


Рис. 2. Зависимость логарифма быстроты звездообразования R от возраста галактик разной средней плотности.

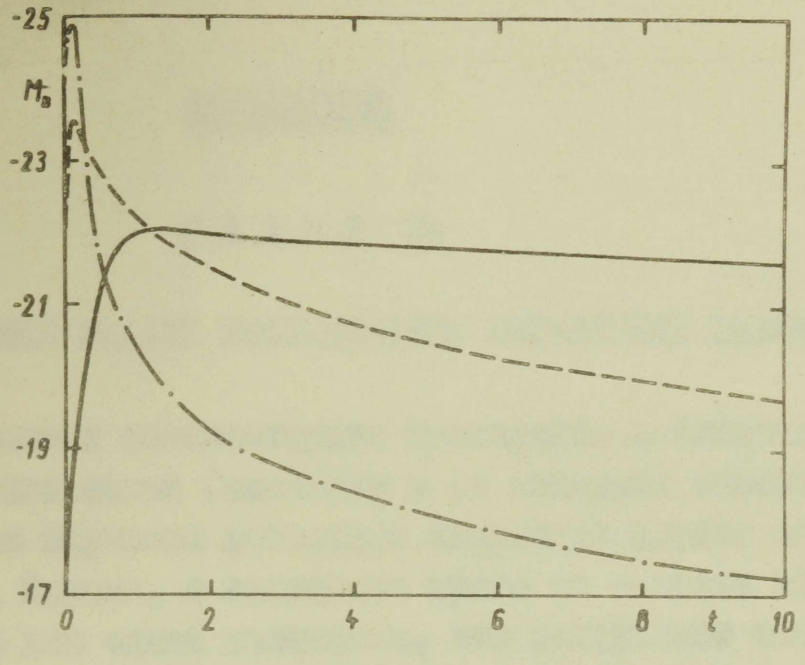


Рис. 5. Зависимость абсолютной светимости от возраста галактик различной средней плотности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Г Л А В А 24

ДАЛЬНЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ГАЛАКТИК*

Во многих обсерваториях проводятся наблюдения с целью исследования нашей Галактики в ее полярных областях, а также с целью изучения детальной структуры других близких галактик. Однако, в настоящее время не имеется комплексных данных ни для одной галактики, что затрудняет теоретическое моделирование галактик.

Ниже мы попытаемся сформулировать основные задачи дальнейшего комплексного исследования структуры и эволюции регулярных галактик.

I Наблюдательные задачи

А. Г а л а к т и к а: п р о г р а м м а z - с т о л б а

1. Определение вертикального градиента гравитационного ускорения (параметр Кузмина C) на базе лучевых скоростей и фотометрических данных звезд первого населения в области галактических полюсов.

2. Определение вертикального распределения плотности физически однородных групп звезд разного возраста.

3. Определение теоретически предсказанного наклона эллипсоида скоростей вне плоскости галактики на базе собственных движений и лучевых скоростей.

---

*Опубликовано в Tartu Astr. Obs. Teated No. 26, p. 36 - 38, 1970 "Proposals for the Complex Investigation of the Structure and the Evolution of the Galaxy and Nearby External Galaxies" (coauthor G.Kuzmin).

Б. Другие галактики

I. Определение общих и интегральных характеристик галактик:

а) фотометрия в возможно более широком интервале спектра (в системе UBVRIJKL), особенно в области ядра и гало,
б) спектрофотометрическое определение звездного состава в разных областях галактик,
в) дисперсии скоростей звезд в центральной части галактик,
г) скорости вращения галактик,
д) расстояния и средние скорости галактик.

2. Определение распределения, кинематики и фотометрических данных для индивидуальных ярких объектов (шаровые скопления, новые звезды, эмиссионные туманности и др.).

II Статистические и теоретические задачи

А. Прикладная теория статистика

I. Определение кинематических характеристик подсистем разного возраста в окрестности Солнца.

2. Определение эмпирической диаграммы Хесса для окрестности Солнца.

3. Определение на базе теории образования и ~~=~~ эволюции звезд теоретической диаграммы Хесса и отношений массы к светимости для подсистем разного возраста и химического состава.

4. Синтез различных наблюдательных данных и эмпирических ~~моделей~~ моделях галактик.

Б. Чистая теория

I. Дальнейшее развитие теории квазистационарных звездных систем с учетом их реальных свойств.

2. Исследование начальных стадии эволюции галактик.

3. Исследование роли иррегулярных сил в эволюции галактик.

III Комментарии

I. Имеющаяся теоретическая база достаточна для построения эмпирических моделей регулярных галактик (нормальные спиральные и эллиптические галактики). Такие модели можно исследовать для реконструкции прошлой эволюции галактик. Однако только репрезентативные и физически адекватные модели могут быть использованы для этой цели.

2. Невозможно получить всю необходимую наблюдательную информацию для всех галактик. Так, например, детальная кинематическая информация для всех подсистем звезд может быть получена только для нашей Гаалактики в окрестности Солнца. Общее распределение подсистем может быть изучено в других близких галактиках. Поэтому целесообразно провести параллельное исследование нашей Галактики и других близких галактик, чтобы выполнить пробелы в наблюдениях при помощи моделей, сравнивая данные о различных галактиках.

3. В нашей Галактике наиболее неуверенные данные, которые могут быть уточнены наблюдениями - плотность вещества в окрестности Солнца, распределение плотности в вертикальном направлении и доля (из общего числа звезд) подсистем разного возраста. Важное предсказание теории, пока не подтвержденное наблюдениями, наклон эллипсоида скоростей вне плоскости галактик.

4. Чтобы конструировать репрезентативные модели внешних галактик, нужно разного рода наблюдательные данные. Пока нет комплексных данных даже для наиболее тщательно изученных галактик, поэтому большинство моделей галактик основаны на одностороннем материале (либо фотометрия, либо данные о вращении и т.п.). Настоятельно нужно пополнить существующие данные новыми.

5. Необходимо составить список наиболее интересных близких галактик с ссылками на существующие данные и с рекомендациями для дальнейших наблюдений, чтобы организовать международную кооперацию при исследовании структуры и эволюции галактик.

Июль 1970 г.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертации могут быть суммированы в виде следующих пунктов.

А. Методы практической звездной динамики

1. На основе способа наименьших квадратов разработан метод уточнения параметров функции распределения, который применен для исследования функции распределения тангенциальных скоростей звезд (гл. I).

2. Разработан экономный метод определения дисперсии скоростей звезд по их лучевым, тангенциальным или пространственным скоростям с учетом влияния наблюдательных ошибок (гл. 2).

3. Обобщена теорема Клейбера о средних значений лучевых и тангенциальных скоростей звезд (гл. 2).

4. Разработана концепция согласованной системы локальных галактических параметров и предложен метод для ее определения (гл. 3, 5, 6).

5. Уточнен метод построения модели распределения массы в Галактики с учетом дополнительных данных о предельной скорости Оорта, радиального градиента плотности подсистем и данных о структуре других галактик (гл. 7).

6. Разработаны классификация и требования физической корректности моделей звездных систем (гл. 8, I3).

7. Уточнена система функций и параметров описания звездных систем, найдены интегральные соотношения между ними (гл. 9).

8. Разработана методика построения пространственно-кинематических моделей звездных систем (гл. I0, II).

9. Найдена модификация теоремы о вириале применительно к отдельным составляющим галактик (гл. I2).

I0. Найдено общее выражение исходной функции описания модели звездной системы (потенциал, пространственная или поверхностная плотность), которое в частных случаях дает большинство использованных до сих пор функций. Исследованы свойства некоторых семейств пространственных моделей (гл. I3 - I5).

II. Вычислены все основные функции и параметры описания для модифицированной экспоненциальной модели и модели Кинга (гл. I6).

I2. Уточнена методика обработки радионаблюдений для определения плотности и поля скоростей водорода во внешних галактиках (гл. I9).

I3. Разработан метод реконструкции динамической эволюции Галактики по данным о структуре и кинематике подсистем разного возраста (гл. 2I).

I4. Усовершенствован метод исследования физической эволюции звездных систем по данным об эволюции звезд и функции звездообразования (гл. 22).

I5. Разработан метод определения параметров функции звездообразования и ее применения для интерпретации и уточнения составной структуры галактик (гл. 23).

~~I6.~~ Б. Исследование структуры и эволюции галактик

I. Показано, что в связи с большой дисперсией возрастов звезды главной последовательности спектрального класса позднее К0 и гиганты образуют кинематически неоднородные группы (гл. I).

2. Из литературы собраны кинематические характеристики всех основных подсистем звезд. Уточнен эмпирический закон Стремберга и найдена зависимость кинематических характеристик от возраста звезд. Показано, что в окрестности Солнца все подсистемы со средней дисперсией скоростей и гелиоцентрической скоростью центроида больше 50 км/сек принадлежат к населению гало (гл. 3, 4).

3. Проанализированы имеющиеся определения околосолнечных галактических параметров и найдена их согласованная система (гл. 5, 6).

4. Критически пересмотрены существующие модели Галактики и разработана новая модель Галактики, которая использована для исследования пространственно-кинематической структуры подсистем Галактики (гл. 7).

5. По имеющимся данным исследована структура подсистем галактики Андромеды М31 и построена ее пространственно-кинематическая модель. Найдено, что концентрация массы к центру галактики значительно больше чем принималось раньше. Масса гало и центрального тела составляют соответственно 10 % и 40 % массы всей галактики. На нуклеус приходится 0.1 % массы, а его плотность достигает 10^6 солнечных масс на $пс^3$. В центре вероятно имеется квазиточечное тело с массой порядка 10^8 (гл. 17 - 20).

6. На основе собранного в гл. 4 материала о кинематических характеристиках подсистем разного возраста с использованием моделей нашей Галактики и галактики М31 сделана попытка реконструировать динамическую эволюцию регулярных галактик. Основные результаты этого анализа:

а) в начальной стадии развития Галактика быстро сжималась как в радиальном, так и в вертикальном направлении. В течение этой фазы последовательно образовались все подсистемы гало Галактики;

б) после сжатия облака газа сконцентрировались в плоскости Галактики, где они стали вращаться вокруг центра Галактики со скоростями, близкими к круговым. Подсистемы звезд диска, образовавшиеся после сжатия газа, изменили свои динамические характеристики: их толщина, а также соответствующие дисперсии скоростей заметно увеличивались;

в) с использованием модели протогалактики, вращающейся с постоянной угловой скоростью, вычислены времена сжатия для различных подсистем Галактики. Показана, что центральное ядро конденсировалось сравнительно быстро, в течение около 10 миллионов лет, а весь процесс сжатия протогалактики длится около миллиарда лет (гл. 21).

7. На основе теории эволюции звезд и вероятной формы функции звездообразования выполнены расчеты физической эволюции звездных систем. Рассчитано изменение функции светимости галактик, изменение полной светимости и распределение энергии в спектре галактик с течением времени. Светимость галактик типа нашей Галактики в начальной стадии их развития примерно в 100 раз превышала современную (гл. 22).

8. Уточнена форма функции звездообразования, определены численные значения ее параметров и оценена их возможная зависимость от времени. На основе функции звездообразования показано, как составная структура галактик возникла в ходе последовательного образования звезд различного возраста (гл. 23).

x x x

В заключение считаю своим приятным долгом выразить свою искреннюю признательность академику АН ЭССР А.Я.Кипперу за постоянное внимание к настоящей работе и члену-корреспонденту АН ЭССР Г.Г.Кузмину за обсуждение работы на всех ее стадиях и за многочисленные ценные советы.

Я с благодарностью вспоминаю свои беседы с покойными профессорами Т.Роотсмяэ и П.П.Паренаго, сыгравшие существенную роль при развитии основных идей этой диссертации. Большую роль имели также стимулирующие беседы с академиком В.А.Амбарцумяном, академиком АН ГССР Е.К.Харадзе, профессорами А.Г.Масевич, Б.А.Воронцовым-Вельяминовым, Б.В.Кукаркиным, К.Ф.Огородниковым, Т.А.Агекяном, Г.М.Идлисом, докторами физико-математических наук И.И.Копыловым и Л.М.Озерным, а также с кандидатами физико-математических наук А.С.Шаровым, А.Сапаром, С.А.Кутузовым, У.Лусом и аспирантом Э.Сааром.

Я очень признателен Л.Эйнасто, У.Рюмель, В.Д.Малюто, С.Реммелг, Л.Лус, Я.Веннику, П.Каламеэсу, П.Траату, З.Курику и другим сотрудникам Института физики и астрономии АН ЭССР, оказывавшим большую помощь при вычислениях и оформлении диссертации.