

Tartu Ülikool
Matemaatika- Informaatikateaduskond
Matemaatika instituut

Artur Lenbaum

Elastse tala staatika ja dünaamika

Magistritöö (30EAP)

Juhendaja: prof. Jaan Lellep

Tartu 2015

Elastse tala staatika ja dünaamika

Magistritöö

Artur Lenbaum

Lühikokkuvõte

Töö esimeses peatükis defineeritakse siirde ja deformatsiooni mõisted ning tuuakse sisse üldistatud jõud. Samas tuletatakse ka diferentsiaalvõrrandid, mida peavad rahuldama üldistatud jõud.

Teises peatükis vaadeldakse tala erinevate kinnituste korral läbipaindeid jaotatud ja ühtlase koormuse mõjul.

Kolmandas peatükis vaadeldakse talade vabavõnkumist. Sealjuures defineeritakse omavõnkesagedused üldisel juhul ning leitakse konkreetsed väärtused vabalt toetatud tala näitel.

Neljandas peatükis vaadeldakse astmelist tala ja selle põhivõrrandeid. Erijuhuna uuritakse ühtlaselt koormatud konsooltala käitumist olukorras, kus talas esineb mitteläbiv pragu.

Viiendas peatükis vaadeldakse konsooltala ja vabalt toetatud astmelist tala ning lahendatakse läbipainet kitsendava lisatingimusega optimeerimisülesanded.

Märksõnad

Siire, deformatsioon, läbipaine, tala, konsooltala, astmeline tala, võnkumine, pragu, optimeerimine.

Statics and Dynamics of an Elastic Beam

Master's thesis

Artur Lenbaum

Summary

In the first chapter of master's thesis definitions of displacements, deformations and generalized forces are introduced. Also the equilibrium equations are derived, which must be satisfied by the generalized forces.

In the second chapter beams subjected to distributed loads are studied. General equations are derived for simply supported, clamped and cantilever beams.

The third chapter is dedicated to free vibrations of beams. Here the general meaning of the natural frequency vibrations is defined and specific values of it for simply supported beams are found.

In the fourth chapter equations for stepped beams are given. As a special case a stepped cantilever is examined where there is a part-through crack in the beam.

In the fifth chapter the cantilever and the simply supported stepped beam are examined. Optimization problems with restrictions are solved.

Key words

Displacement, deformation, deflection, beam, cantilever, stepped beam, vibration, crack, optimization

Sisukord

Sissejuhatus	5
I. Tala põhivõrrandid.....	6
§1. Siirded.....	6
§2. Deformatsiooni põhikomponendid	7
§3. Tala tasakaaluvõrrandid.....	9
II. Tala paindeülesanded	11
§1. Hooke'i seadus ja läbipaine	11
§2. Vaba toetus	11
§3. Jäik kinnitus.....	14
§4. Ühest otsast vaba toetus ja teisest otsast jäik kinnitus.....	16
§5. Konsooltala.....	18
III. Tala võnkumine.....	20
§1. Sissejuhatus	20
§2. Põhivõrrandid	20
§3. Vabalt toetatud tala omavõnkumine	22
IV. Astmeline tala	26
§1. Põhivõrrandid	26
§2. Astmeline konsooltala praoga	26
V. Muutuva kõrgusega tala optimeerimine	30
§1. Homogeense ristlõikega tala optimeerimine.....	30
§2. Vabalt toetatud astmeline tala.....	33
§3. Vabalt toetava astmelise tala optimeerimine	36
§4. Optimeerimisülesanne.....	38
Kasutatud kirjandus.....	40

Sissejuhatus

Elastsete kehade pinge-deformatsiooniseisundi uurimine on teema, millel on suur praktiline tähtsus inseneriteaduses. Käesolevas töös tutvutakse pinge ja deformatsiooni mõistetega ning uuritakse pingeseisundit talas, millele mõjub ristkoormus.

Töö esimeses peatükis defineeritakse siirde ja deformatsiooni mõisted ning tuuakse sisse üldistatud jõud tala jaoks (need on membraanjõud, lõikejõud ja paindemoment). Samas tuletatakse ka diferentsiaalvõrrandid, mida peavad rahuldama üldistatud jõud.

Teises peatükis vaadeldakse läbipaindeülesandeid, kus ühel juhul mõjub jaotatud koormus vabalt toetatud ja teisel juhul jäigalt kinnitatud talale. Lisaks vaadeldakse ühtlase koormuse mõju segakinnitusega tala ja konsooltala korral.

Kolmandas peatükis vaadeldakse talade vabavõnkumist. Sealjuures defineeritakse omavõnkesagedused üldisel juhul ning leitakse konkreetsed väärtused vabalt toetatud tala näitel.

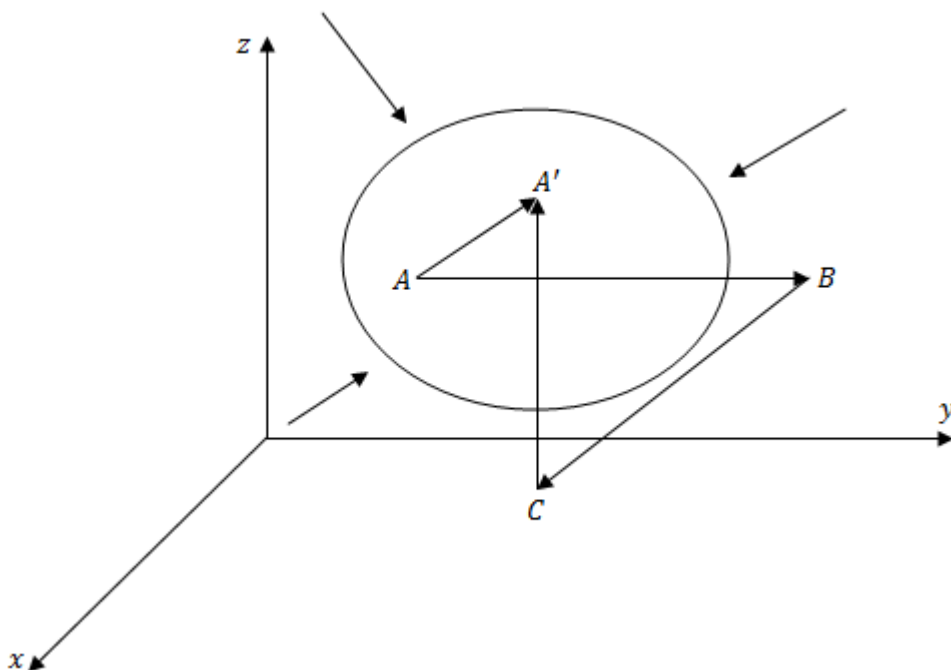
Neljandas peatükis vaadeldakse astmelist tala ja selle põhivõrrandeid. Erijuhuna uuritakse ühtlaselt koormatud konsooltala käitumist olukorras, kus talas esineb mitteläbiv pragu.

Töö viimases peatükis vaadeldakse konsooltala ja vabalt toetatud astmelist tala ning lahendatakse läbipainet kitsendava lisatingimusega optimeerimisülesanded.

I. Tala põhivõrrandid

§1. Siirded

Olgu meil keha, mis asub xyz -teljestikus. Vaatleme selle keha sisepunkti A . Mõjugu antud kehale välisjõud. On selge, et välisjõu mõjul antud keha deformeerub ning punkt A nihkub xyz -teljestikus. Tähistame selle punkti uue asukoha punktiga A' . Vektorit $AA' = (u, v, w)$ nimetatakse siirdevektoriks, kus u, v, w on vastavad koordinaadid (Joonis 1.1).



Joonis 1.1. Siirdevektorid

Joonise 1.1 põhjal võime tähistada siirdevektori AA' koordinaadid järgmiselt:

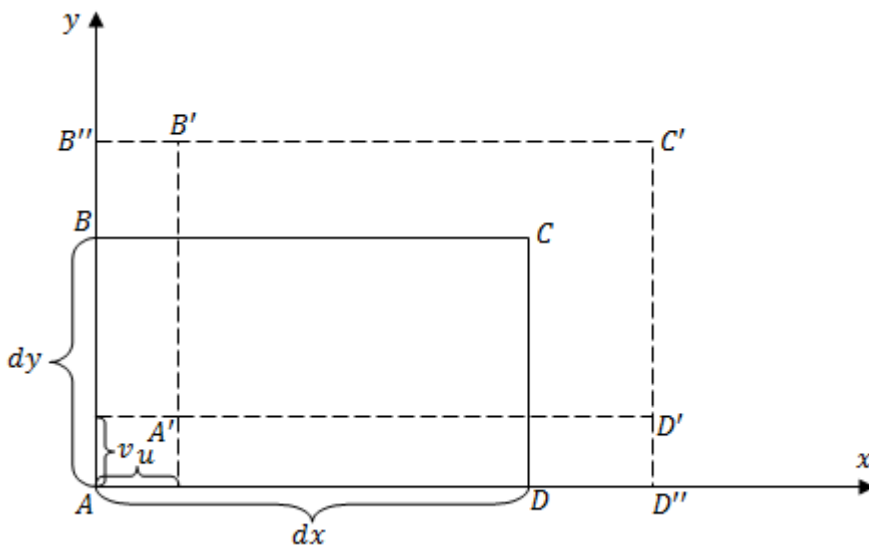
$$BC = u,$$

$$AB = v,$$

$$CA' = w.$$

§2. Deformatsiooni põhikomponendid

Järgnevalt uurime elastse keha lõpmatult väikest ristkülikukujulist elementi, mille külgede pikkused on dx ja dy (Joon. 1.2). Teame, et kui kehale mõjuvad välisjõud, siis elemendi sisepunktid nihkuvad, mille tulemusel element deformeerub. Vaatleme käesoleval juhul niisugust deformatsiooni, mille korral ristküliku küljed pikenevad, aga nurgad külgede vahel jäävad täisnurkadeks.



Joonis 1.2. Keha elemendi deformatsioonid

Joonise 1.2 põhjal võime kirja panna punkti A' koordinaadid

$$A' = (u, v). \quad (2.1)$$

Punktis B' on toimunud siire x - telje sihis u võrra ning y - telje sihis $v + \Delta_y v$ võrra. Seega

$$B' = \left(u, v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right). \quad (2.2)$$

Analoogiliselt leiame

$$C' = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \quad (2.3)$$

ja

$$D' = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, v\right). \quad (2.4)$$

Elemendi suhteline pikenemine y - telje sihis on defineeritud kujul [3, 4, 14, 16]

$$\varepsilon_y = \frac{A'B' - AB}{AB}. \quad (2.5)$$

Võrduste (2.1) ja (2.2) põhjal saame, et

$$\frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.6)$$

Analoogiliselt (2.1) ja (2.4) põhjal

$$\frac{A'D' - AD}{AD} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.7)$$

Võrduste (2.5) ja (2.6), (2.7) abil leiame

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.8)$$

ja

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.9)$$

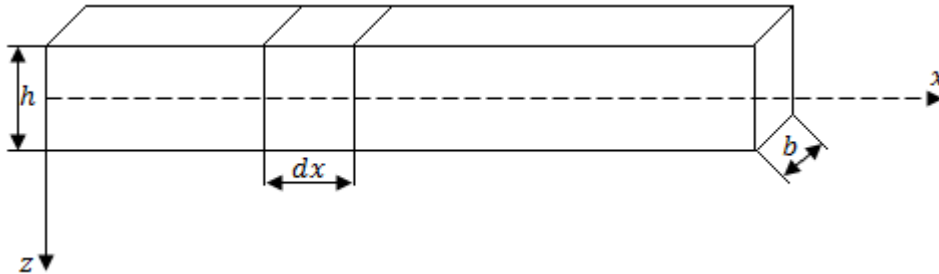
On ilmne, et sarnaselt võrdustele (2.8) ja (2.9) kehtib ka

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.10)$$

Suurusi ε_x , ε_y , ε_z nimetatakse lineaarseteks deformatsioonikomponentideks.

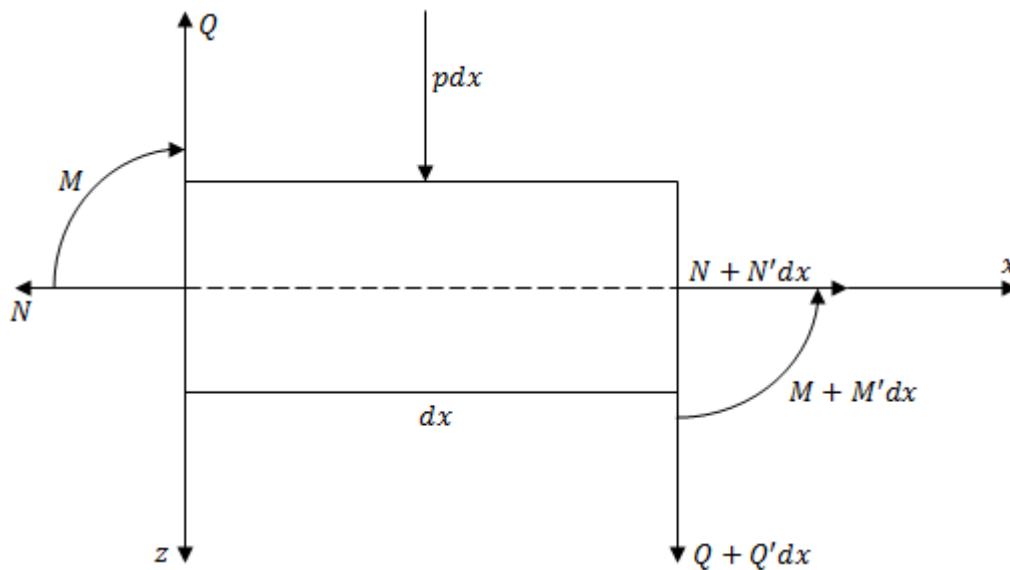
§3. Tala tasakaaluvõrrandid

Uurime konstantse paksusega elastset tala. Olgu tala laius b ning kõrgus h . Vaatleme tala lõpmatult väikest elementi pikkusega dx , millele mõjub ristkoormus pdx (Joon 1.3).



Joonis 1.3. Tala läbilõige

Mehaanikast teame, et elemendile pikkusega dx mõjuvad lõikejõud Q , membraanjõud N ning paindemoment M . Neid suursi nimetatakse üldistatud pingeteks. Elemendile mõjuvad jõud on toodud joonisel 1.4.



Joonis 1.4. Tala elemendile mõjuvad jõud

Tasakaaluvõrrandite tuletamiseks vaatleme jõudude projektsioone x - ja z -teljel ning momentide summat elemendi keskpunkti suhtes. Mehaanikas näidatakse [3, 4, 8], et jõudude \vec{F}_i süsteem on tasakaalus parajasti siis, kui

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

ja

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0,$$

kus \vec{M}_i on jõu \vec{F}_i moment punkti 0 suhtes.

Sellest saame võrrandid

$$N' = 0,$$

$$Q' = -p$$

ja

$$M' = Q.$$

Ilmselt $N = \text{const}$ korral on võimalik esitada toodud süsteem kujul

$$M'' = -p.$$

Niisugusel kujul esitatud tasakaaluvõrrandit võib leida ka kirjandusest [7, 10, 16, 17].

II. Tala paindeülesanded

§1. Hooke'i seadus ja läbipaine

Eelmises peatükis nägime, et tala tasakaaluvõrrandid on esitatavad kujul

$$M'' = -p. \quad (1.1)$$

Hooke'i seaduse põhjal

$$M = -EIw'',$$

kus

$$I = \frac{bh^3}{12}.$$

Siin on E - Youngi moodul ning I - inertsimoment.

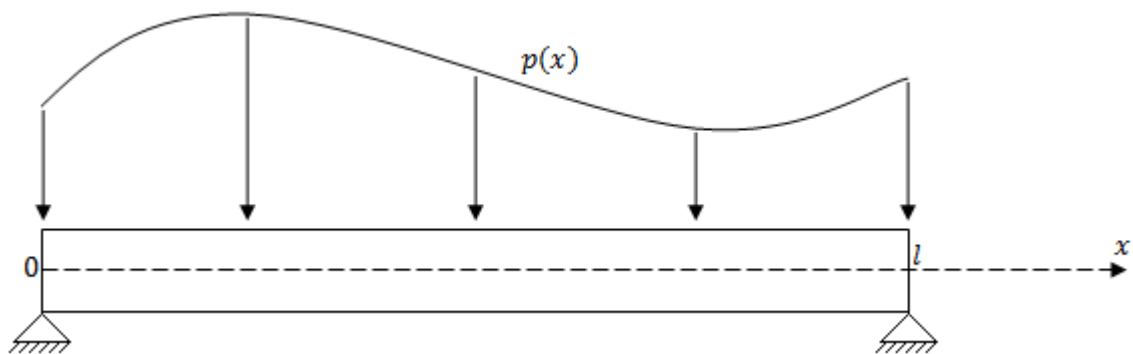
Asendades Hooke'i seaduse tasakaaluvõrrandisse, saame neljandat järku võrrandi

$$EIw^{IV} = p(x).$$

Seda integreerides, võime leida läbipainde $w = w(x)$.

§2. Vaba toetus

Vaatleme otstest vabalt toetatud tala deformeerumist jaotatud ristkoormuse mõjul, kui $p = p(x)$. Olgu tala pikkus l . Valime koordinaatide alguseks tala vasaku otspunkti (Joon. 2.1).



Joonis 2.1. Vabalt toetatud tala

Rajatingimused võime esitada kujul

$$\begin{cases} M(0) = 0 \\ M(l) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

ning

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ w(l) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Momendi avaldise leidmiseks integreerime võrrandit (1.1) x suhtes. See annab

$$M' = - \int_0^x p(\xi) d\xi + c_1. \quad (2.3)$$

Teist korda integreerides saame

$$M = - \int_0^x \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta + c_1 x + c_2, \quad (2.4)$$

kus c_1 ja c_2 on suvalised integreerimiskonstandid.

Rajatingimuste (2.1) põhjal

$$c_2 = 0$$

ja

$$c_1 = \frac{1}{l} \cdot \int_0^l \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta.$$

Seega momendi avaldiseks saame

$$M = - \int_0^x \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta + \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta. \quad (2.5)$$

Kui näiteks, $p(x) = \text{const}$, siis (2.5) põhjal

$$M = \frac{px}{2} (l - x).$$

Läbipainde avaldise leidmiseks avaldame Hooke'i seadusest w'' :

$$w'' = -\frac{M}{EI}. \quad (2.6)$$

Asendades avaldisse ülal leitud momendi M , saame

$$w'' = -\frac{1}{EI} \left(- \int_0^x \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta + \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta \right).$$

Integreerides leiame

$$w' = -\frac{1}{EI} \left(- \int_0^x \int_0^y \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta dy + \frac{x^2}{2l} \int_0^l \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta + c_3 \right)$$

ja

$$w = -\frac{1}{EI} \left(- \int_0^x \int_0^z \int_0^y \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta dy dz + \frac{x^3}{6l} \int_0^l \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta + c_3 x + c_4 \right),$$

kus c_3 ja c_4 on suvalised integreerimiskonstandid.

Rajatingimuste (2.2) põhjal

$$c_4 = 0$$

ja

$$c_3 = \frac{1}{l} \int_0^l \int_0^z \int_0^y \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta dy dz - \frac{l}{6} \int_0^l \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta.$$

Asendame c_3 ja c_4 ülal toodud läbipainde avaldisse, saame

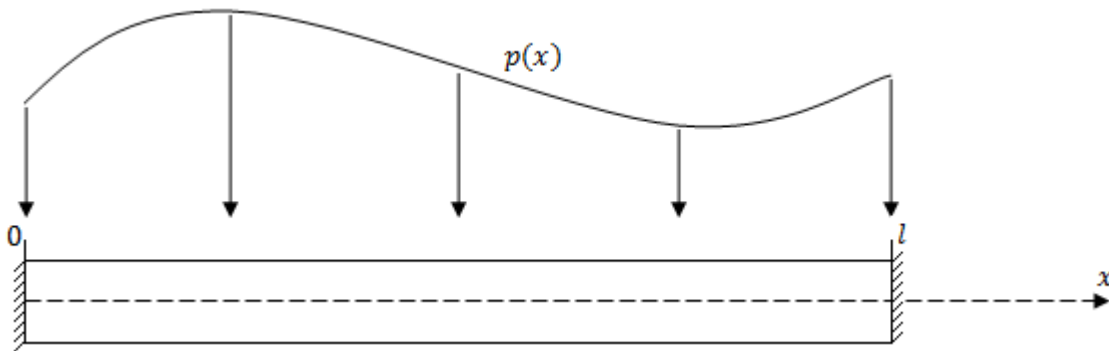
$$w = \frac{1}{EI} \left(\int_0^x \int_0^z \int_0^y \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta dy dz + \left(\frac{x^3}{6l} - \frac{xl}{6} \right) \int_0^l \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta + \frac{x}{l} \int_0^l \int_0^z \int_0^y \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta dy dz \right).$$

Paneme tähele, kui $p(x) = \text{const}$, siis saame läbipainde avaldise lõplikuks kujuks

$$w = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{p}{24} x^4 + \frac{pl}{12} x^3 - \frac{pl^3}{24} x \right).$$

§3. Jäik kinnitus

Vaatleme järgnevalt mõlemast otsast jäigalt kinnitatud tala. Olgu tala pikkus l ja koordinaatide algus asugu nii nagu eelmises paragrahvis tala vasakus otsas (Joon. 2.2).



Joonis 2.2. Jäigalt kinnitatud tala

Rajatingimused on nüüd

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ w(l) = 0 \\ w'(l) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Momendi leidmiseks kasutame võrdust (2.4).

Konstantide c_1 ja c_2 määramiseks antud juhul rajatingimusi ei ole. Seetõttu peame Hooke'i seaduse kirjutama kujul

$$w'' = -\frac{1}{EI} \left(-\int_0^x \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta + c_1 x + c_2 \right), \quad (3.2)$$

kus c_1 ja c_2 on suvalised konstandid.

Integreerides x suhtes saame

$$w' = -\frac{1}{EI} \left(-\int_0^x \int_0^y \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta dy + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \right) \quad (3.3)$$

ning

$$w = -\frac{1}{EI} \left(-\int_0^x \int_0^z \int_0^y \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta dy dz + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 \right). \quad (3.4)$$

Kuna rajatingimuse (3.1) põhjal $w'(0) = 0$, siis võrdusest (3.3) järeldub, et

$$c_3 = 0.$$

Tingimus $w(0) = 0$ koos võrdusega (3.4) annab, et

$$c_4 = 0.$$

Kasutades rajatingimusi $w(l) = 0$ ja $w'(l) = 0$ leiame (3.3) ja (3.4) abil

$$c_1 = \frac{12}{l^3} \left(\frac{l}{2} \int_0^l \int_0^y \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta dy - \int_0^l \int_0^z \int_0^y \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta dy dz \right)$$

ja

$$c_2 = \frac{6}{l^2} \left(-\frac{l}{3} \int_0^l \int_0^y \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta dy + \int_0^l \int_0^z \int_0^y \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta dy dz \right).$$

Asendades konstandid, leiame läbipainde kujul

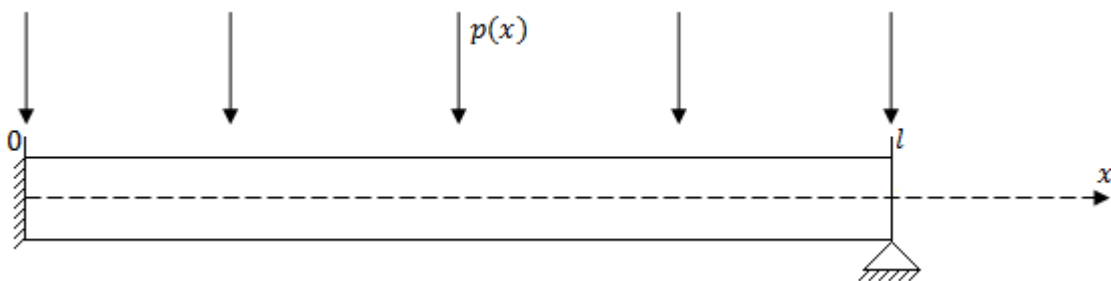
$$w = -\frac{1}{EI} \left(-\int_0^x \int_0^z \int_0^y \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta dy dz \right. \\ \left. + \int_0^l \int_0^z \int_0^y \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta dy dz \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right) \right. \\ \left. + \int_0^l \int_0^y \int_0^\eta p(\xi) d\xi d\eta dy \left(\frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \right) \right).$$

Juhul, kui $p = \text{const}$, siis saame läbipainde avaldise lõplikuks kujuks

$$w = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{p}{24} x^4 + \frac{pl}{12} x^3 - \frac{pl^2}{24} x^2 \right).$$

§4. Ühest otsast vaba toetus ja teisest otsast jäik kinnitus

Uurime järgnevalt tala, mis on vasakult otsast jäigalt kinnitatud ning paremast otsast vabalt toetuv. Olgu tala pikkus l ja koordinaatide alguspunkt tala vasakus otspunktis (Joon. 2.3). Mõjugu talale ühtlaselt jaotatud ristkoormus $p(x)$.



Joonis 2.3. Vasakult jäigalt kinnitatud ja paremalt vabalt toetatud tala

Rajatingimused on esitatavad kujul

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ w(l) = 0 \\ M(l) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Momendi avaldise (2.4) ja Hooke'i seaduse (2.6) põhjal saame

$$w'' = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{p}{2}x^2 + c_1x + c_2 \right).$$

Integreerides x suhtes saame, et

$$w' = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{px^3}{6} + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3 \right)$$

ja

$$w = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{px^4}{24} + \frac{c_1x^3}{6} + \frac{c_2x^2}{2} + c_3x + c_4 \right), \quad (4.2)$$

kus c_1, c_2, c_3 ja c_4 on suvalised integreerimiskonstandid.

Kasutades rajatingimusi (4.1) näeme, et

$$c_3 = 0$$

ja

$$c_4 = 0.$$

Kasutades võrdust (2.4) ja rajatingimust (4.1) saame integreerimiskonstandi c_2 avaldada kujul

$$c_2 = \frac{pl^2}{2} - c_1l.$$

Asendades c_2 võrdusesse (4.2) saame

$$w = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{px^4}{24} + \frac{c_1x^3}{6} + \left(\frac{pl^2}{2} - c_1l \right) \frac{x^2}{2} \right). \quad (4.3)$$

Kasutades rajatingimust (4.1) ja võrdusest (4.3) saame, et

$$c_1 = \frac{5}{8}pl$$

ja

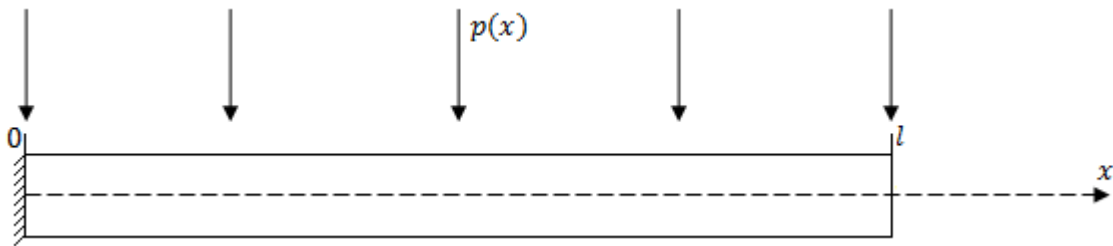
$$c_2 = -\frac{pl^2}{8}.$$

Seega saame läbipainde avaldise lõplikuks kujuks:

$$w = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{p}{24}x^4 + \frac{5pl}{48}x^3 - \frac{pl^2}{16}x^2 \right).$$

§5. Konsooltala

Vaatleme konsooltala, mille vasak ots on jäigalt kinnitatud ja parem ots on vaba (Joon. 2.4). Olgu tala pikkus l ning mõjugu talale ühtlaselt jaotatud ristkoormus. Asugu koordinaatide alguspunkt tala vasakus otspunktis.



Joonis 2.4. Konsooltala

Rajatingimused on meie näite puhul

$$\begin{cases} M(l) = 0 \\ M'(l) = 0 \\ w(0) = 0 \\ w'(0) = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Momendi avaldise (2.4) ja Hooke'i seaduse (2.6) põhjal saame

$$w'' = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{p}{2}x^2 + c_1x + c_2 \right), \quad (5.2)$$

kus c_1 ja c_2 on suvalised integreerimiskonstandid.

Kasutades võrdust (2.3) ja rajatingimust (5.1) saame, et

$$c_1 = pl.$$

Asendades c_1 võrdusesse (2.4) ning kasutades rajatingimust (5.1) leiame c_2 :

$$c_2 = -\frac{pl^2}{2}.$$

Asendades c_1 ja c_2 võrdusesse (5.2) võtab nüüd võrdus kuju

$$w'' = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{px^2}{2} + plx - \frac{pl^2}{2} \right).$$

Integreerides seda x suhtes, saame

$$w' = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{px^3}{6} + \frac{plx^2}{2} - \frac{pl^2x}{2} + c_3 \right)$$

ja

$$w = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{px^4}{24} + \frac{plx^3}{6} - \frac{pl^2x^2}{4} + c_4 \right),$$

kus c_3 ja c_4 on suvalised integreerimiskonstandid.

Kasutades rajatingimust (5.1) on selge, et

$$c_3 = 0$$

ja

$$c_4 = 0.$$

Seega saame läbipainde avaldise lõplikuks kujuks:

$$w = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{px^4}{24} + \frac{plx^3}{6} - \frac{pl^2x^2}{4} \right).$$

III. Tala võnkumine

§1. Sissejuhatus

Selles peatükis tutvume põgusalt tala võnkumist kirjeldavate põhivõrranditega. Lineaarsete võnkumiste korral eristatakse vabavõnkumist ja sunnitud võnkumist. Selles töös piirdume esimesega.

Vabavõnkumine tekib, kui elastne keha viiakse tasakaaluasendist välja ning seejärel välisjõud eemaldatakse. Sellest tulenev võnkumine on igale elastsele kehale iseloomulik nähtus, mis sõltub üksnes keha geomeetriast ja materjalist. Vabavõnkumise sagedust nimetatakse omavõnkesageduseks.

§2. Põhivõrrandid

Meenutame, et asendades Hooke'i seaduse tala tasakaaluvõrrandisse, saame võrduse (siin eeldame, et $EI = \text{const}$)

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = p(x). \quad (2.1)$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus tala viiakse tasakaaluasendist välja ning eemaldatakse seejärel välisjõud. Ilmselt hakkab tala võnkuma ümber oma tasakaaluasendi. Seda võnkumist võib vaadelda kui ajaliselt muutuvat tala painet, kus koormuse q mingil ajahetkel võime d'Alembert'i printsiibi põhjal defineerida kui

$$q = -m\ddot{w},$$

kus

$$\ddot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

ja m on tala mass pikkusühiku kohta (massi intensiivsus).

Samuti saame ajast sõltuvana defineerida ka jõufunktsiooni $p = p(x, t)$. Seega, võttes eelnevat arvesse, saame võrduse (2.1) esitada kujul

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = p(x, t) - m \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.2)$$

Võttes nüüd vabavõnkumise tõttu $p(x, t) = 0$ saame võrrandist (2.2), et

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (2.3)$$

Kirjanduses eeldatakse sageli (vt., näiteks, [3]), et $w(x, t) = f(x) \cdot \varphi(t)$, kus esimene tegur sõltub ainult koordinaadist ja teine ainult ajast t . Sellisel juhul

$$w' = f'(x)\varphi(t)$$

ja

$$w'' = f''(x)\varphi(t),$$

$$w''' = f'''(x)\varphi(t),$$

$$w^{IV} = f^{IV}(x)\varphi(t).$$

Analoogiliselt leiame

$$\dot{w} = f(x)\dot{\varphi}(t)$$

ja

$$\ddot{w} = f(x)\ddot{\varphi}(t).$$

Eraldades niimoodi muutujad võrrandis (2.3) saame

$$EI \cdot f^{IV}(x)\varphi(t) + m \cdot f(x) \cdot \ddot{\varphi}(t) = 0. \quad (2.4)$$

Jagades võrrandi (2.4) läbi avaldisega $m \cdot f(x) \cdot \varphi(t)$ saame eraldada muutujad nii, et võrduse ühel pool sõltuvad funktsioonid ainult koordinaadist x ja teisel pool ainult ajast. Peale läbi jagamist võtab võrdus (2.4) kuju

$$\frac{EI \cdot f^{IV}(x)}{m \cdot f(x)} = -\frac{\ddot{\varphi}(t)}{\varphi(t)}. \quad (2.5)$$

Kuna võrduse (2.5) mõlemad pooled peavad võrduma suvaliste x ja t korral, peavad mõlemad pooled kujutama endast konstantset suurust. Seda konstanti tähistatakse ω^2 . Suurust ω nimetatakse omavõnkesageduseks.

Seega

$$\frac{EI \cdot f^{IV}(x)}{m \cdot f(x)} = \omega^2$$

ning

$$-\frac{\ddot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} = \omega^2.$$

§3. Vabalt toetatud tala omavõnkumine

Vaatleme vabalt toetatud tala, mille massi intensiivsus m ja inertsimoment I on konstantsed.

Võrrandi (2.5) põhjal saame

$$f^{IV}(x) - \frac{m\omega^2}{EI} f(x) = 0. \quad (3.1)$$

Tähistame

$$\frac{m\omega^2}{EI} = \left(\frac{\eta}{l}\right)^4, \quad (3.2)$$

mis võimaldab anda võrrandile (3.1) uue kuju

$$f^{IV}(x) - \left(\frac{\eta}{l}\right)^4 f(x) = 0. \quad (3.3)$$

See on konstantsete kordajatega lineaarne neljandat järku harilik diferentsiaalvõrrand. Selle lahendamiseks koostame karakteristliku võrrandi

$$\lambda^4 - \left(\frac{\eta}{l}\right)^4 = 0.$$

Siit leiame

$$\lambda^2 = \pm \left(\frac{\eta}{l}\right)^2,$$

millest saame, et

$$\lambda = \pm \frac{\eta}{l},$$

kui $\lambda^2 > 0$ ning

$$\lambda = \pm i \frac{\eta}{l},$$

kui $\lambda^2 < 0$.

Seega karakteristliku võrrandi juured on

$$\lambda_{1,2} = \pm i \frac{\eta}{l}$$

ja

$$\lambda_{3,4} = \pm \frac{\eta}{l}.$$

Ilmselt imaginaarsetele juurtele vastavad diferentsiaalvõrrandi (3.3) erilahendid

$$f_1 = \sin \frac{\eta}{l} x, f_2 = \cos \frac{\eta}{l} x$$

ja reaalsele juurtele

$$f_3 = \operatorname{sh} \frac{\eta}{l} x, f_4 = \operatorname{ch} \frac{\eta}{l} x.$$

Teatavasti lineaarse võrrandi üldlahend on esitatav sõltumatute erilahendite lineaarse kombinatsioonina [10.]

Seega võrrandi (3.3) üldlahendi saab välja kirjutada kujul

$$f(x) = B_1 \sin \frac{\eta x}{l} + B_2 \cos \frac{\eta x}{l} + B_3 \operatorname{sh} \frac{\eta x}{l} + B_4 \operatorname{ch} \frac{\eta x}{l}, \quad (3.4)$$

kus B_1, B_2, B_3, B_4 on suvalised konstandid.

Vabalt toetatud tala rajatingimuste ja võrrandi (3.4) põhjal saame järgmised neli võrrandit:

$$\begin{aligned} B_2 + B_4 &= 0, \\ -B_2 + B_4 &= 0, \\ B_1 \sin \eta + B_2 \cos \eta + B_3 \operatorname{sh} \eta + B_4 \operatorname{ch} \eta &= 0, \\ -B_1 \sin \eta - B_2 \cos \eta + B_3 \operatorname{sh} \eta + B_4 \operatorname{ch} \eta &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Võrranditesüsteemi (3.5) esimesest kahest võrrandist näeme, et $B_2 = B_4 = 0$. Kuna kahe viimase võrrandi kordajatest moodustatud determinant peab võrduma nulliga, siis saame

$$2 \cdot \sin \eta \cdot \operatorname{sh} \eta = 0. \quad (3.6)$$

Võrrandi (3.6) lahendi $\eta = 0$ korral võnkumised puuduvad, mistõttu see meile hetkel huvi ei paku. Kui aga $\eta \neq 0$, siis ilmselt ka $\operatorname{sh} \eta \neq 0$. Seega saame võrrandi (3.6) kehtimiseks tingimuse

$$\sin \eta = 0, \quad (3.7)$$

millest selgub, et

$$\eta = \pi, 2\pi, \dots, n\pi. \quad (3.8)$$

Võrranditest (3.2) ja (3.8) saame seega omavõnkesageduste kujuks

$$\omega_j = \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}},$$

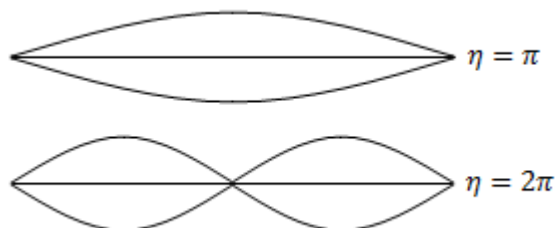
kus $j = 1, \dots, n$.

Kuna omavõnkumistele vastavate η väärtuste korral $\sin \eta = 0$, siis võrranditesüsteemi (3.5) ja tingimuse $\operatorname{sh} \eta \neq 0$ põhjal järeldub, et $B_3 = 0$.

Seega saame võrrandist (3.4), et j -ndale omavõnkesagedusele vastava võnkumise kuju on sinusoid

$$f_j = \sin \frac{j\pi x}{l}. \quad (3.9)$$

Kahele esimesele omavõnkesagedusele vastavad peavõngete kujud on toodud joonisel 3.1.



Joonis 3.1. Vabalt toetatud tala omavõnked

IV. Astmeline tala

§1. Põhivõrrandid

Eelmistes peatükkides uurisime ühtlase paksusega tala läbipainde võrrandeid. Parktikas võib aga materjali kokkuhoiu mõttes olla otsetarbekam kasutada tala, mille mõõtmed eri piirkonadades on erinevad. Üheks selliseks juhuks on astmeline tala.

Hooke'i seadusest teame, et

$$w'' = -\frac{M}{EI'} \quad (1.1)$$

kus tala mõõtmetest sõltuvaks teguriks on inertsimoment I .

Lihtsuse mõttes fikseerime tala laiuse b ning vaatleme muutuva kõrgusega astmelist tala.

On selge, et nüüd võtab võrdus (1.1) kuju

$$w'' = -\frac{M}{EI_j},$$

kus $j = 0 \dots n - 1$ ja n on astmete arv ning

$$I_j = \frac{bh_j^3}{12}.$$

§2. Astmeline konsooltala praoga

Vaatleme vasakult jäigalt kinnitatud praoga astmega konsooltala pikkusega l . Olgu koordinaatide alguspunkt tala vasakus otsas ning mõjugu talale ühtlane ristkoormus p . Paiknegu aste punktis a (Joon. 4.1) ning asugu selles ristlõikes mitteläbiv pragu pikkusega c . Prao mõju tala käitumisele modelleerime nii, nagu on soovitanud Anifantis ja Dimarogonas [1, 2]. Sama meetodit on kasutatud ka töödes [5, 6, 9, 15].

Vastavalt sellele meetodikale eeldatakse, et iga $x \in [0, l]$ korral on pidevad $M(x), Q(x) = M'(x)$ ja $w(x)$, aga w' omab lõpliku hüppe selles ristlõikes, kus asub praegu. Seejuures

$$\theta = -K \cdot M(a),$$

kus K on mingi konstant ning

$$\theta = w'(a+) - w'(a-).$$

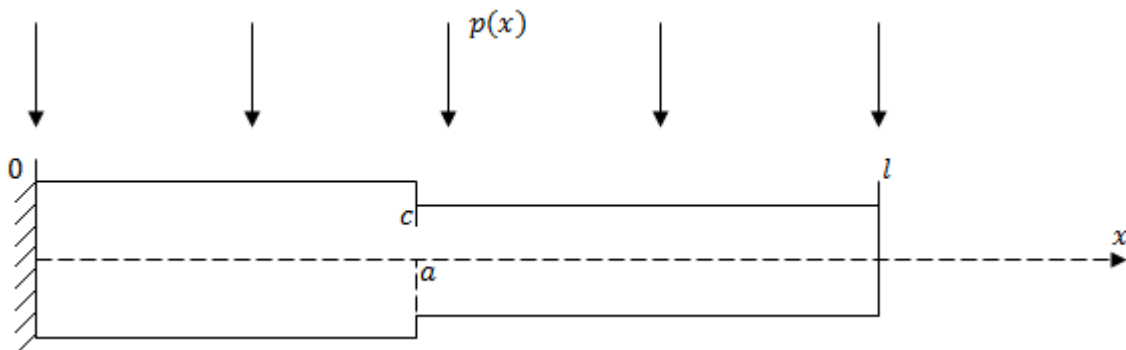
Dimarogonas [2] sidus konstandi K pinge intensiivsuse koefitsiendiga praog tipu juures ja

$$K = \frac{1}{C},$$

kus C on tala järelleandlikkus [12, 13].

Eelnevast järeldub, et

$$w'(a+0) = w'(a-0) + KEI_1 w''(a+0). \quad (2.1)$$



Joonis 4.1. Praoga astmeline konsooltala

Varasemast (IIpt. §5) teame, et rajatingimused avalduvad kujul

$$\begin{cases} M(l) = 0 \\ M'(l) = 0 \\ w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

ja momendi avaldiseks saame

$$M = -\frac{p}{2}(x-l)^2. \quad (2.3)$$

Hooke'i seaduse põhjal saame läbipainde jaoks võrduse

$$w'' = \begin{cases} -\frac{M}{EI_0}, & x \in (0, a) \\ -\frac{M}{EI_1}, & x \in (a, l). \end{cases} \quad (2.4)$$

Seega peame läbipainde avaldise leidmiseks vaatama kahte eraldi piirkonda.

Piirkonnas $x \in [0, a]$ saame (2.4) põhjal, et

$$w'' = -\frac{p}{EI_0} \left(-\frac{x^2}{2} + lx - \frac{l^2}{2} \right). \quad (2.5)$$

Integreerides võrdust x järgi leiame

$$w' = -\frac{p}{EI_0} \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{lx^2}{2} - \frac{l^2}{2}x \right) + B_1 \quad (2.6)$$

ning läbipainde avaldiseks saame seega

$$w = -\frac{p}{EI_0} \left(-\frac{x^4}{24} + \frac{lx^3}{6} - \frac{l^2}{4}x^2 \right) + B_1x + B_2, \quad (2.7)$$

kus B_1 ja B_2 on suvalised integreerimiskonstandid.

Rajatingimuste (2.2) põhjal on lihtne näha, et

$$B_1 = 0$$

ja

$$B_2 = 0.$$

Analoogiliselt võrdustele (2.6) ja (2.7) saame piirkonnas $x \in [a, l]$, et

$$w' = -\frac{p}{EI_1} \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{lx^2}{2} - \frac{l^2}{2}x \right) + B_3 \quad (2.8)$$

ja

$$w = -\frac{p}{EI_1} \left(-\frac{x^4}{24} + \frac{lx^3}{6} - \frac{l^2}{4}x^2 \right) + B_3x + B_4, \quad (2.9)$$

kus B_3 ja B_4 on suvalised integreerimiskonstandid.

Läbipainde pidevuse ja selle esimest järku tuletise hüppe (2.1) tõttu punktis a saame (2.4), (2.6) ja (2.8) põhjal, et

$$-\frac{p}{EI_0} \left(-\frac{a^3}{6} + \frac{l}{2}a^2 - \frac{l^2}{2}a \right) = -\frac{p}{EI_1} \left(-\frac{a^3}{6} + \frac{l}{2}a^2 - \frac{l^2}{2}a \right) + B_3 - K \cdot \frac{p}{2} \cdot (a-l)^2 \quad (2.10)$$

ning (2.7) ja (2.9) põhjal

$$-\frac{p}{EI_0} \left(-\frac{a^4}{24} + \frac{l}{6}a^3 - \frac{l^2}{4}a^2 \right) = -\frac{p}{EI_1} \left(-\frac{a^4}{24} + \frac{l}{6}a^3 - \frac{l^2}{4}a^2 \right) + B_3a + B_4. \quad (2.11)$$

Võrduse (2.10) põhjal saame, et

$$B_3 = \frac{p}{E} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_0} \right) \left(-\frac{a^3}{6} + \frac{l}{2}a^2 - \frac{l^2}{2}a \right) + K \cdot \frac{p}{2} \cdot (a-l)^2. \quad (2.12)$$

Nüüd võrduste (2.11) ja (2.12) põhjal leiame B_4 :

$$B_4 = \frac{p}{E} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_0} \right) \left(\frac{1}{8}a^4 - \frac{l}{3}a^3 + \frac{l^2}{4}a^2 \right) - K \cdot \frac{p}{2} \cdot a \cdot (a-l)^2. \quad (2.13)$$

Seega saame võrduste (2.9) ja (2.12), (2.13) põhjal läbipainde avaldise kirjutada kujul

$$w = -\frac{p}{EI_1} \left(-\frac{x^4}{24} + \frac{lx^3}{6} - \frac{l^2x^2}{4} \right) + \frac{p}{E} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_0} \right) \cdot \left[x \left(-\frac{a^3}{6} + \frac{la^2}{2} - \frac{l^2a}{2} \right) + \frac{a^4}{8} - \frac{la^3}{3} + \frac{l^2a^2}{4} \right].$$

V. Muutuva kõrgusega tala optimeerimine

Eelmistes peatükkides vaatlesime peaausjalikult talade läbipaindeid sõltuvalt nende kinnitusviisidest. Lihtne on näha, et leitud võrrandite läbivate tegurite hulgas mängivad olulist rolli ka tala mõõtmed. Praktikas on aga kõiksugu konstruktsioonide puhul materjali kulu minimeerimine tihtilugu üks põhilisi eesmäärke. Ilmselt osutub seejuures oluliseks kitsenduseks ka tolereeritav tala läbipaine. Leidmaks konkreetse eesmärgi jaoks tala optimaalsed mõõtmed kasutatakse optimeerimismeetodeid.

§1. Homogeense ristlõikega tala optimeerimine

Püüame leida optimaalset materjali jaotust konsooltalas, kui koormuseks on üksikjõud P tala vabal otsal. Antud juhul avaldub paindemoment kujul [7]

$$M = P(x - l).$$

Hooke'i seadus annab

$$EI \cdot (-w'') = P(x - l).$$

Tuues sisse faasimuutujad y_1, y_2 seostega $y_1 = w$; $y_2 = w'$, saame põhivõrrandid kujul

$$y'_1 = y_2, \tag{1.1}$$

$$y'_2 = \frac{-12P}{Ebh^3}(x - l).$$

Eesmärgiks on minimeerida materjali kulu. Seega minimeeritav funktsionaal on

$$J = \int_0^l bh(x)dx. \tag{1.2}$$

Andes ette läbipainde vabal otsal, võime rajatingimused esitada kujul

$$y_1(0) = y_2(0) = 0; y_1(l) = w_0. \quad (1.3)$$

Siin on juhtimiseks muutuja $h(x)$ ja faasikoordinaadid on y_1, y_2 . Koostame laiendatud funktsionaali (vt. [7])

$$J_* = \int_0^l \left\{ bh + \psi_1(y'_1 - y_2) + \psi_2 \left(y'_2 + \frac{12P}{Ebh^3}(x-l) \right) \right\} dx.$$

Varieerides laiendatud funktsionaali, leiame

$$\begin{aligned} \delta J_* = \int_0^l \left\{ b\delta h - \psi'_1 \delta y_1 - \psi_1 \delta y_2 - \psi'_2 \delta y_2 - \frac{3\psi_2 12P}{Ebh^4}(x-l)\delta h \right\} dx \\ + (\psi_1 \delta y_1 + \psi_2 \delta y_2) \Big|_0^l. \end{aligned}$$

Võrdsustades selle nulliga ning arvestades (1.3) näeme, et $\delta y_1(0) = \delta y_2(0) = \delta y_1(l) = 0$, mistõttu

$$\psi_2(l) = 0. \quad (1.4)$$

Siit saame kaasmuutujad

$$\psi_1 = \psi = const, \quad (1.5)$$

$$\psi_2 = A(x-l)$$

ning optimaalsuse tingimuse

$$b - \frac{36\psi_2 P}{Ebh^4}(x-l) = 0.$$

Viimase võrduse põhjal

$$h = \left(\frac{36AP}{Eb^2} \right)^{1/4} \cdot \sqrt{l-x}. \quad (1.6)$$

Asendades paksuse (1.6) tagasi põhisüsteemi, saame

$$y'_1 = y_2, \quad (1.7)$$

$$y'_2 = \frac{12P}{Eb} \left(\frac{Eb^2}{36AP} \right)^{3/4} \cdot (l-x)^{-1/2}.$$

Integreerides süsteemi (1.7), leiame

$$y_1 = \left(\frac{12Pb^2}{27A^3E} \right)^{1/4} \left[\frac{4}{3}(l-x)^{3/2} - \frac{4}{3}l^{3/2} + 2l^{1/2}x \right], \quad (1.8)$$

$$y_2 = \left(\frac{12Pb^2}{E27A^3} \right)^{1/4} [-2\sqrt{l-x} + 2\sqrt{l}].$$

Rajatingimuste $y_1(l) = w_0$ kohaselt

$$w_0 = \left(\frac{12b^2P}{E27A^3} \right)^{1/4} \cdot \frac{2}{3} l^{3/2}. \quad (1.9)$$

Siit tuleb

$$\left(\frac{12b^2P}{27A^3E} \right)^{1/4} = \frac{3w_0}{2l\sqrt{l}}. \quad (1.10)$$

Asendades teguri (1.10) y_1 avaldisse, leiame

$$y_1 = 2w_0 \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right)^{3/2} - 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{l} \right]. \quad (1.11)$$

Seejuures

$$\frac{3A}{b} = \left(\frac{12P}{Eb} \right)^{1/3} \cdot l^2 \cdot \left(\frac{2}{3w_0} \right)^{4/3}. \quad (1.12)$$

Avaldades siit A ja asendades seosesse (1.6), saame optimaalse paksuse kujul

$$h = \left(\frac{24l^3P}{3w_0Eb} \right)^{1/3} \sqrt{1 - \frac{x}{l}} = h_0 \cdot (1 - \xi)^{1/2},$$

kus

$$\xi = \frac{x}{l}, h_0 = \left(\frac{8Pl^3}{w_0Eb} \right)^{1/3}.$$

Integreerides leiame kogu ruumala

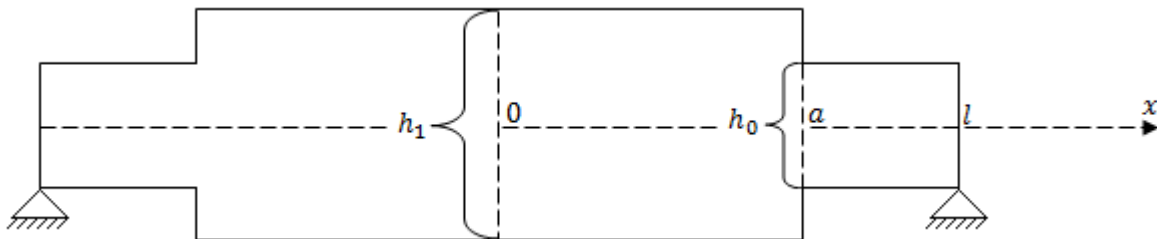
$$V = bl \int_0^1 h_0(1 - \xi)^{1/2} d\xi = bh_0l \cdot \frac{2}{3}.$$

Seega optimaalne ruumala on

$$V = \frac{2}{3}bl^2 \left(\frac{8P}{w_0Eb} \right)^{1/3}.$$

§2. Vabalt toetatud astmeline tala

Vaatleme sümmeetrilist astmega vabalt toetatud tala pikkusega $2l$. Olgu koordinaatide alguspunkt tala keskpunktis ning astme koht sümmeetriliselt punktides a ja $-a$ (Joon 5.1). Mõjugu talale ühtlane ristkoormus p .



Joonis 5.1. Astmega vabalt toetatud tala

Rajatingimused võime meie näite puhul kirja panna järgmiselt:

$$\begin{cases} M'(0) = 0 \\ M(l) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ w(l) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Teises peatükis näitasime, et

$$M' = -px + c_1$$

ja

$$M = -p \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2. \quad (2.2)$$

Rajatingimustest (2.1) on ilmne, et

$$c_1 = 0$$

ja

$$c_2 = p \frac{l^2}{2}.$$

Seega võtab momendi avaldis (2.2) kuju

$$M = -p \left(\frac{x^2}{2} - \frac{l^2}{2} \right)$$

ning Hooke'i seaduse põhjal

$$w'' = \begin{cases} -\frac{M}{EI_0}, & x \in (0, a) \\ -\frac{M}{EI_1}, & x \in (a, l). \end{cases} \quad (2.3)$$

Läbipainde avaldise leidmiseks peame seega vaatama kahte eraldi piirkonda.

Vaatleme esiteks piirkonda, kus $x \in (0, a)$.

Võrduse (2.3) saame nüüd esitada kujul

$$w'' = \frac{p}{EI_0} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{l^2}{2} \right).$$

Integreerides seda x järgi saame

$$w' = \frac{p}{EI_0} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{l^2}{2} x \right) + B_1$$

ja

$$w = \frac{p}{EI_0} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{l^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right) + B_1 x + B_2,$$

kus B_1 ja B_2 on suvalised integreerimiskonstandid.

Rajatingimusest (2.1) saame, et

$$B_1 = 0.$$

Piirkonnas $x \in (a, l)$ võtab võrdus (2.3) kuju

$$w'' = \frac{p}{EI_1} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{l^2}{2} \right).$$

Integreerides x järgi saame, et

$$w' = \frac{p}{EI_1} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{l^2}{2} x \right) + B_3$$

ja

$$w = \frac{p}{EI_1} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{l^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right) + B_3 x + B_4, \quad (2.4)$$

kus B_3 ja B_4 on suvalised integreerimiskonstandid.

Rajatingimustest (2.1) ja võrdusest (2.4) avaldame integreerimiskonstandi B_4 :

$$B_4 = -\frac{p}{EI_1} \left(\frac{l^4}{24} - \frac{l^4}{4} \right) - B_3 l. \quad (2.5)$$

Kuna tala läbipaine ja selle esimest järku tuletis peavad punktis a olema pidevad, saame võrdused:

$$\frac{p}{EI_0} \left(\frac{a^3}{6} - \frac{l^2}{2} a \right) = \frac{p}{EI_1} \left(\frac{a^3}{6} - \frac{l^2}{2} a \right) + B_3 \quad (2.6)$$

ja

$$\frac{p}{EI_0} \left(\frac{a^4}{24} - \frac{l^2 a^2}{4} \right) + B_2 = \frac{p}{EI_1} \left(\frac{a^4}{24} - \frac{l^2 a^2}{4} \right) + B_3 a + B_4. \quad (2.7)$$

Võrdusest (2.6) saame, et

$$B_3 = \frac{p}{E} \left(\frac{1}{I_0} - \frac{1}{I_1} \right) \cdot \left(\frac{a^3}{6} - \frac{l^2}{2} a \right). \quad (2.8)$$

Asendades B_3 avaldisse (2.5) leiame B_4 :

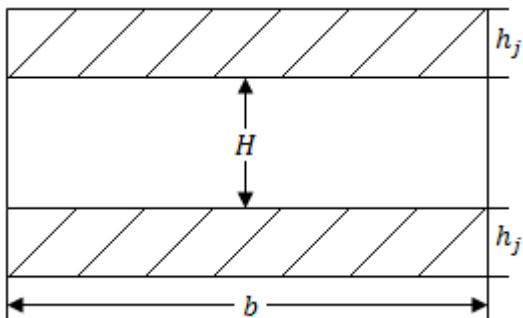
$$B_4 = \frac{p}{EI_1} \cdot \frac{5l^4}{24} - \frac{p}{E} \cdot l \left(\frac{a^3}{6} - \frac{l^2}{2} a \right) \cdot \left(\frac{1}{I_0} - \frac{1}{I_1} \right). \quad (2.9)$$

Võrduste (2.7) ja (2.8), (2.9) põhjal saame, et

$$B_2 = \frac{p}{EI_1} \cdot \frac{5l^4}{24} + \frac{p}{E} \cdot \left(\frac{1}{I_0} - \frac{1}{I_1} \right) \cdot \left(\frac{a^4}{8} - \frac{a^3 l}{6} - \frac{l^2 a^2}{4} + \frac{l^3 a}{2} \right).$$

§3. Vabalt toetuva astmelise tala optimeerimine

Vaatleme eelmises paragrahvis uuritud astmelist tala. Olgu antud juhul tegemist ideaalse kahekihilise talaga (Joon. 5.2).



Joonis 5.2. Ideaalse kahekihilise tala ristlõige

Kirjandusest teame, et sel juhul avaldub inertsimoment I kujul

$$I_j = b \cdot \frac{h_j \cdot H^2}{2}, \quad (3.1)$$

kus $j = 0, 1$.

Meenutame, et läbipainde võrrandiks saime eelmise paragrahvi põhjal

$$w = \frac{p}{EI_0} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{l^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right) + B_2, \quad (3.2)$$

kus

$$B_2 = \frac{p}{EI_1} \cdot \frac{5l^4}{24} + \frac{p}{E} \cdot \left(\frac{1}{I_0} - \frac{1}{I_1} \right) \cdot \left(\frac{a^4}{8} - \frac{a^3l}{6} - \frac{l^2a^2}{4} + \frac{l^3a}{2} \right). \quad (3.3)$$

Ilmselt saavutab ühtlaselt koormatud tala maksimaalse läbipainde keskpunktis $x = 0$.

Võrdusest (3.2) saame, et

$$w(0) = \frac{p}{EI_1} \cdot \frac{5l^4}{24} + \frac{p}{E} \cdot \left(\frac{1}{I_0} - \frac{1}{I_1} \right) \cdot \left(\frac{a^4}{8} - \frac{a^3l}{6} - \frac{l^2a^2}{4} + \frac{l^3a}{2} \right). \quad (3.4)$$

Minimiseerimaks tala materjali kulu, peame optimaalse juhtimise teooria põhjal lahendama funktsionaali $J = V$ minimiseerimise ülesande lisatingimusel

$$w(0) = w_*, \quad (3.5)$$

kus w_* on konstant ja V tähistab tala ruumala.

Lihtsuse mõttes fikseerime tala laiuse selliselt, et $4b = 1$. Lisaks võime jätta arvestamata tala kihte ühendava osa. Sel juhul saame tala ruumala vaadelda kui kolme muutuja funktsiooni

$$V(a, h_0, h_1) = (ah_0 + h_1(l - a)). \quad (3.6)$$

Kasutame võrdust

$$J_* = J + \lambda \cdot (w(0) - w_*). \quad (3.7)$$

Diferentseerides a ja h_1 järgi leiame

$$h_0 - h_1 + \lambda \cdot \left(\frac{p}{2E} \cdot \left(\frac{1}{I_0} - \frac{1}{I_1} \right) \cdot (a^3 - a^2l - l^2a + l^3) \right) = 0 \quad (3.8)$$

ning

$$l - a + \lambda \cdot \left(\frac{p}{12EbH^2h_1^2} \cdot (a - l)^3 \cdot (3a + 5l) \right) = 0. \quad (3.9)$$

Jagades võrrandi (3.9) läbi avaldisega $(l - a)$, saame

$$1 - \frac{\lambda p}{12EbH^2h_1^2} \cdot (a - l)^2 \cdot (3a + 5l) = 0. \quad (3.10)$$

Avaldades siit λ saame

$$\lambda = \frac{12EbH^2h_1^2}{p \cdot (a - l)^2 \cdot (3a + 5l)}. \quad (3.11)$$

Leiame h_1

$$h_1 = \frac{(3a + 5l) \cdot h_0}{12 \cdot (a + l)}. \quad (3.12)$$

Seega saame võrduse (3.6) taandada kahe muutuja funktsiooniks

$$V(a, h_0) = (ah_0 + h_1(l - a)).$$

§4.Optimiseerimisülesanne

Vaatleme eelmises paragrahvis toodud astmega kahekihilist tala. Defineerime kitsendustega ülesande ja leiame optimaalse lahendi kasutades tarkvara *Mathcad Prime 3.1*. Fikseerime tala pikkuse $2l = 1$ meeter ja laiuse valime nii, et $4b = 0,1$ meetrit. Lisaks fikseerime tala kandvaid kihte ühendava materjali osa kõrguseks $H = 1$ cm. Leiame suvalised väärtused optimeeritavatele muutujatele a ja h_0 selliselt, et maksimaalne läbipaine oleks $w_* = 5$ cm.

Saame algandmed: astme kaugus tala keskpunktist $a = \pm 0,25$ m, $h_0 = 33,5$ mm, $h_1 = 12,1$ mm. Kandvate kihtide ruumala $V = 1,1399$ L.

Realiseerides ruumala minimiseeriva programmi saame, et optimaalse tulemuse korral: astme kaugus tala keskpunktist $a = \pm 0,319$ m, $h_0 = 29,2$ mm, $h_1 = 10,3$ mm. Kandvate kihtide ruumala $V=1,117$ L.

Defineerime suhted

$$\gamma = \frac{h_1}{h_0}, \alpha = \frac{a}{l}.$$

Varieerides tala pikkust on näha, et suhted γ ja α ei muutu. Näitlikustamiseks on optimaalsed tulemused toodud tabelis (Tabel 1).

Tabel 1. Kitsendustega ülesande optimaalsed lahendid.

$4b$	l	H	a	h_0	h_1	V
0,1	0,4	0,01	0,255	0,012	0,0042	0,366
0,1	0,45	0,01	0,287	0,019	0,0067	0,6596
0,1	0,5	0,01	0,319	0,0292	0,0103	1,117
0,1	0,55	0,01	0,35	0,0427	0,015	1,7989
0,1	0,6	0,01	0,383	0,0605	0,0213	2,7795

(kõik väärtused on toodud meetrites, v.a ruumala, mis on liitrites).

Kasutatud kirjandus

1. N. Anifantis, A. Dimorogonas, Post Buckling Behavior of Transverse Cracked Columns. *Computers and Structures*, 1984, 18, 2, 351-356.
2. A. Dimorogonas, Vibration of Cracked Structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 1996, 55, 831-857.
3. R. Eek, L. Poverus, Ehitusmehaanika. Valgus, Tallinn, 1967.
4. H. Eschenauer, N. Olhoff, W. Schnell, Applied Structural Mechanics, Springer, Berlin, 1997.
5. M. Krawczuk, A. Zak, W. Ostachowicz, Elastic Finite Element with a Transverse Elasto-Plastic Crack. *Finite Element Analysis and Design*, 2000, 34, 61-73.
6. S. Kukla, Free Vibrations and Stability of Stepped Columns with Cracks. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 319, 1301-1311.
7. J. Lellep, Süsteemide optimeerimine, TÜ Kirjastus, Tartu, 2013.
8. Ü. Lepik, L. Roots, Teoreetiline mehaanika, Valgus, Tallinn, 1971.
9. R. Liang, F.K. Choy, J. Hu, Detection of Cracks in Beam Structures Using Measurements of Natural Frequencies. *Journal of the Franklin Institute*, 1991, 328, 505-518.
10. A. Pedas, G. Vainikko, Harilikud diferentsiaavõrrandid, TÜ Kirjastus, Tartu, 2011.
11. J. N. Reddy, Mechanics of Laminated Composite Plates, CRC Press, Boca Raton, 1997.
12. E. Ventsel, Th. Krauthammer, Thin Plates and Shells. Theory, Analysis and Applications, Marcel Dekker, New York, 2001.
13. J. Vinson, Plate and Panel Structures of Isotropic, Composite and Piezoelectric Materials Including Sandwich Construction, Springer, Dordrecht, 2005.
14. C. M. Wang, J. N. Reddy, K. H. Lee, Shear Deformable Beams and Plates, Elsevier, Amsterdam, 2000.
15. L. Zhou, Y. Huang, Crack Effect on the Elastic Buckling Behavior of Axially and Eccentrically Loaded Columns. *Structural Engineering and Mechanics*, 2006, 22, 2, 169-184.
16. В. И. Самуль, Основы теории упругости и пластичности, Москва, 1982.
17. С. П. Тимошенко, Пластины и оболочки, Москва, 1967.

Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

1. Mina, Artur Lenbaum, (sünnikuupäev: 05.04.1987) annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Elastse tala staatika ja dünaamika”, mille juhendaja on prof. Jaan Lellep
 - 1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
 - 1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. Olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus 03.06.2015