193

A. Wildbrett

Analüütiline geomeetria
ja
differentsiaalarvamise põhijooned

Eestistanud

E. Krahn

Kirjastus A.-S. „Varrak", Tallinnas
1922

A. Wildbrett

Analüütiline geomeetria
ja
differentsiaalarvamise põhijooned

Eestistanud

E. Krahn

Kirjastus A.-S. „Varrak“, Tallinnas

1922

Trükikoda Ed. Bergmann, Tartu

Sisukord:

I jagu.

Analüütiline geomeetria.

Sissejuhatus.

A. Sirgjoon.

B. Ringjoon.

C. Koonuslõiked.

II jagu.

Differentsiaalarvamise elemendid.

I jagu.

Analüütiline geomeetria.

Sissejuhatus.

§ 1. Analüütilise geomeetria ülesande selgitamine.

1) Endisest algebra kursusest, funktsioonide graafilisest kujutamisest, on koordinaatide süsteemi tarvitamine juba tuttav.

Näitused:

1. *a)* Temperatuuri ja vedeliku ruumala rippuvuse graafiline kujutamine;
b) Mariotti seaduse graafiline kujutamine;
c) palaviku kõverjoone kujutamine;
d) funktsioonide

$$y = x^2 \qquad y = \sqrt{x} \qquad y = \sin x$$
$$y = x^3 \qquad y = \sqrt[3]{x} \qquad y = tg\, x$$
$$y = x^4 \qquad y = \frac{1}{x} \qquad y = {}^{10}\log x$$

graafiline kujutamine.

2. Barograafi ja termograafi üleskirjutused.
3. Graafiline sõiduplaan.

2) Planimeetrias ühendati algebralis-geomeetriliste ülesannete lahendamisel algebraline arvamine geomeetriaga; näituseks:

Ülesanne 1. Võrdkülgse kolmnurga sisse, mille küljepikkus on a, joonistada täisnurkne nelinurk, mille pind kolm korda vähem oleks kui kolmnurga pind.

Algebralis-geomeetriline lahendamine on puhtplanimeetrilisest selle poolest kasulikum, et ta kohe ka vastuste arvu ja võimalikkuse ära määrab.

3) Geomeetriliste kohtade leidmine elementaariste planimeetriliste abinõudega ei õnnestu, hoolimata lihtsaist tingimustest, küsitaval punktil (vaata § 15!)

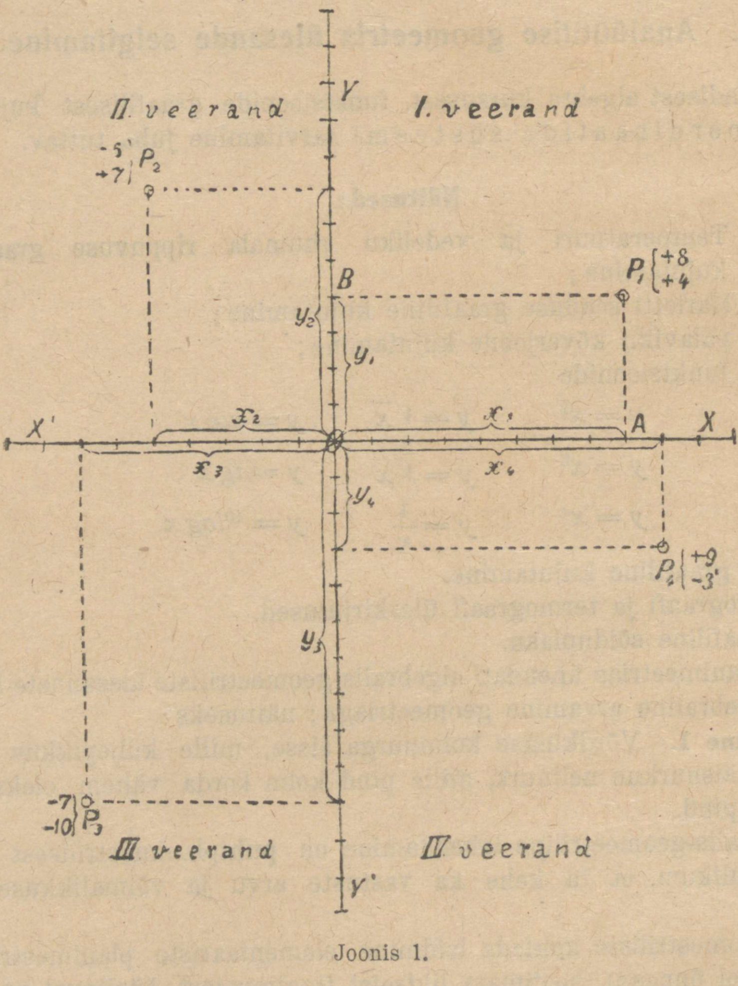
Analüütilise geomeetria ülesanne on: väljaarvamise teel leida geomeetrilised kohad, siis geomeetriliste kujude, iseäranis kõverjoonte, oma dused ja lahendada sellesisulised ülesanded. Selleks otstarbeks peavad geomeetrilised kujud üles tähendatama „võrrandite“ abil.

Et võib iga joone kui muutuva punkti geomeetrilise koha peale vaadata, siis on tarvis esiteks kindlaks teha, missugusel viisil punkti geomeetriline asukoht tuleb määrata.

§ 2. Punkti koordinaadid.

Õigenurksed koordinaadid.

Punkti P asukoht tasapinnal määratakse ta kauguste abil kahest kindlast ristjoonest, **koordinaatide telgedest**.



Joonis 1.

XX' on **abstsisside telg** ehk lühidalt **X-telg,**

YY' on **ordinaatide telg** ehk lühidalt **Y-telg,**

O on **koordinaatide algpunkt** ehk **koordinaadistiku nullpunkt.**

Perpendikulaarjoonte PB ja PA (joonis 1) pikkused nimetakse **punkti P koordinaatideks,** ja nimelt on

$$x = PB = OA = \textbf{abstsiss}$$
$$y = PA = OB = \textbf{ordinaat.}$$

P_1 koordinaadid on $\begin{cases} x_1 = 8 \\ y_1 = 4 \end{cases}$

Tähendus. Soovitav on matemaatika ja füüsika jaoks, eriti aga analüütilise geomeetria jaoks tarvitada hefte halli kvadraadilise lineatuuriga (5 mm. kaugusega). Koordinaadi üksusena valitakse siis 1 cm. või 5 mm.

Tasapind jagatakse mõlemate koordinaatide telgedega neljaks osaks, mida nimetakse **kvadrantideks** ehk **veeranditeks**. Et võimalik oleks ära tunda, missuguses veerandis üks punkt asub, määratakse kõik

abstsissid teljel OX positiivseteks
abstsissid teljel OX' negatiivseteks
ordinaadid teljel OY positiivseteks
ordinaadid teljel OY' negatiivseteks.

Punktidel P_1, P_2, P_3 ja P_4 joonisel 1 on koordinaadid:

$$P_1 \begin{cases} x_1 = +8 \\ y_1 = +4 \end{cases} \qquad P_2 \begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = +7 \end{cases}$$

$$P_3 \begin{cases} x_3 = -7 \\ y_3 = -10 \end{cases} \qquad P_4 \begin{cases} x_4 = +9 \\ y_4 = -3 \end{cases}$$

I veerandis on x positiivne, y positiivne;
II „ „ x negatiivne, y positiivne;
III „ „ x negatiivne, y negatiivne;
IV „ „ x positiivne, y negatiivne.

Igal punktil $+X$-teljel on x positiivne, $y = 0$;
„ „ $-X$-teljel on x negatiivne, $y = 0$;
„ „ $+Y$-teljel on $x = 0$, y positiivne;
„ „ $-Y$-teljel on $x = 0$, y negatiivne.

Koordinaatide algpunktis on $x = 0$, $y = 0$.

Ümberpöördult on mõlema koordinaadi abil vastavate eesmärkidega ikka ainult üks teatud punkt tasapinnal määratud (ta konstruktsioon!). Nii on siis sel viisil punkti asukoht üheselt määratud.

Ülesanne 2. Jooneta kolmnurk (nelinurk), mille tippudel on järgmised koordinaadid:

α) kolmnurk: $A \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 7 \end{cases}$ $B \begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = -2 \end{cases}$ $C \begin{cases} x_3 = 6 \\ y_3 = -8 \end{cases}$

β) nelinurk: $A \begin{cases} x_1 = -5 \\ y_1 = 9 \end{cases}$ $B \begin{cases} x_2 = -8 \\ y_2 = -4 \end{cases}$ $C \begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = -10 \end{cases}$ $D \begin{cases} x_4 = 9 \\ y_4 = 3 \end{cases}$

Ülesanne 3. Missugused on korrapärase kuusnurga tippude koordinaadid, mille külje pikkus on s, kui ta keskpunkt nullpunktis asub ja üks diagonaal X-teljega ühte langeb?

Ajaloolised teated.

Greeklaste geomeetria õitseaeg langeb kolmandasse aastasatta enne Kr. Euklides Aleksandriast kirjutas umbes 300 a. e. Kr. oma kuulsad „Elemendid“. Kõige suurema vana aja matemaatiku Archimedes'i (Sürakuusist) sulest ilmusid 250 a. ümber e. Kr. kirjatööd, milledes ta ringi, ellipsi ja paraaboli pinna, ning kera ja mitmete teiste pöörkehade mahud välja arvas. Suure geomeetri Apolloniuse (pärit Pergast, töötas 250 ja 200 a. vahel e. Kr. ka Aleksandrias) peatöö käsitab koonuslõigete omadusi. Järgnevasse ajajärku kuuluvad tähtsamaist matemaatikuist Heron (umbes 100 a. e. Kr.), praktilise tehnilise geomeetria esitaja ja goniomeetria asutaja, siis Menelaus (98 a. ümber p. Kr.) ja Ptolomäus (140 a. ümber p. Kr.), kellede teened peaasjalikult trigonomeetria valda kuuluvad, ja viimati Pappus (arvatavasti 300 a. ümber p. Kr.), kes juba uurimusi sel alal toime pani, mida tänapäev „uuemaks geomeetriaks“ nimetakse. Viimastena nimetet neli matemaatikut elasid kõik Aleksandrias.

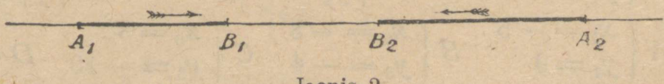
Selle järele läks rohkem kui 1000 aastat mööda, ilma et geomeetria oleks oluliselt edenenud. Alles 17-ndal aastasajal tegi geomeetria suure sammu edasi, kui kahe suurema prantsuse matemaatiku René Descartes'i (loe: renee dekárt) ehk Cartesius'e (1596—1650) ja Fermat (loe: fermaa) (1601—1665) poolt analüütiline geomeetria loodi. Küll olid juba vanal ajal mõned üksikud, nagu näituseks Hipparch (150 a. e. Kr.) koordinaate tarvitanud punkti asukoha määramiseks, aga alles ühenduse läbi algebraga loodi see matemaatiline teadus, mis geomeetriliste kohtade leidmise võimaldas ja kõrgemale kõverjoonte õpetusele nii kasulik oli. Analüütilise geomeetria ja lõpmatu-väikeste suuruste analüüsi ühendus kroonis selle vägeva arenemise, mis matemaatikale 17-dal aastasajal osaks sai.

A. Sirgjoon.

§ 3. Sihitud sirgjoon; joonlõigu suurus ja siht; kahe punkti kaugus.

1) Kui lõpmatu sirgjoone kulgemine sünnib ühes teatud sihis, siis nimetakse see sirgjoon „**sihitud sirgjooneks**“. Kulgemise siht märgitakse sirgjoonel noolega.

Kahe punkti A ja B abil piiratud sirgjoone osa nimetakse **joonlõiguks.** Ka joonlõigul võetakse arvesse peale ta **suuruse** (pikkuse) veel ta **kulgemise siht**. Joonisel 2 näituseks ei erine joonlõigud A_1B_1 ja A_2B_2 mitte ainult suuruse poolest, vaid nendel on ka kahesugune kulgemise siht.



Joonis 2.

Vahet joonlõikude sihi vahel tehakse **märkidega** $+$ ja $-$. Kui me joonlõigul AB liigume punktist A punktini B ja selle sihi positiivseks nimetame, siis nimetame vastupidises sihis kuletud joonlõiku BA negatiivseks*), nii et

$$BA = -AB$$

$$\text{ehk } AB + BA = 0.$$

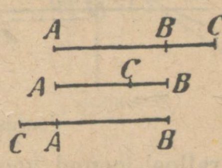
Joonisel 2 on joonlõikudel A_1B_1 ja A_2B_2 vastupidine siht.

Kolme punkti A, B, C (joonis 3) kohta, mis ühel sirgjoonel asuvad, on ikka maksvad võrdused

$$AB + BC = AC$$

$$\text{ehk } AB + BC + CA = 0$$

selle peale vaatamata, missuguses järjekorras need punktid sirgjoonel asuvad.



Joonis 3.

Järeldused:

1. Kui $AB = AC$, siis peavad punktid B ja C ühte langema.

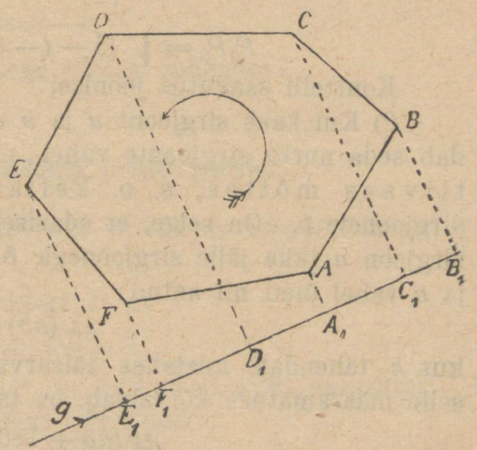
2. Kui teada on, et $AB + AC = 0$ ehk $AB = -AC$, siis peab A joonlõigu BC keskpunkt olema.

3. Kui me kinnise hulknurga, näituseks $ABCDEFA$, teatud sihis kulgeme ja teda sihitud sirgjoonele g (joonis 4) projektime, siis on

$$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1F_1 + F_1A_1 = 0.$$

Siit me saame tähtsa **projektsioonlause:**

Kinnise hulknurga külgede projektsioonide summa mõnele sihitud sirgjoonele võrdub nulliga.



Joonis 4.

Kui kaks punkti P_1 ja P_2 X-teljel asuvad ja nende abstsissid on x_1 ja x_2, siis on ikka

$$P_1P_2 = x_2 - x_1$$

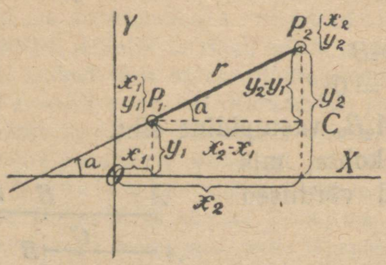
ükskõik kuidas need punktid on asetet; sest kui üks punkt negatiivsel X-teljel asub, siis peab ta abstsissi negatiivselt võetama.

Selle kohta peab õpilane selgusele jõudma nii valemisse asemelepanemise teel kui ka kujutuse teel järgmiste **näituste** põhjal, mis kõiki võimalikke juhtumusi illustrivad:

P_1	x_1	$+2$	-4	-10	-3	$+4$	$+8$
P_2	x_2	$+8$	$+6$	-2	-9	-6	$+3$

*) Selleks et näidata, et joonlõik kulgeb sihis punktist A punktini B, kirjutakse joonlõigu algpunkt A esimesel kohal ja lõpppunkt B teisel kohal.

Analoogselt on kahe punkti kaugus Y-teljel



Joonis 5.

$$P_1P_2 = y_2 - y_1$$

kusjuures jälle ükskõik on, kuidas punktid asuvad.

Kui punktid $P_1 \begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases}$ ja $P_2 \begin{cases} x_2 \\ y_2 \end{cases}$ mistahes viisil tasapinnal asuvad, siis leiame nende kauguse r täisnurksest $\triangle\ P_1P_2C$ (joon. 5), mille saame, kui läbi P_1 ja P_2 tõmbame paralleel-jooned koordinaatide telgedele.

$$r = \sqrt{\overline{P_1C}^2 + \overline{P_2C}^2}$$

Nüüd on, vaatamata selle peale, missuguses veerandis punktid P_1 ja P_2 asuvad, ikka

$$P_1C = x_2 - x_1$$
$$P_2C = y_2 - y_1$$

ja seepärast **kahe punkti kaugus**

$$\mathbf{r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Näitus. $\qquad P_1 \begin{cases} -3 \\ +4 \end{cases}$ ja $P_2 \begin{cases} +5 \\ -2 \end{cases}$

$$P_1P_2 = \sqrt{[5-(-3)]^2 + [-2-4]^2} = 10.$$

Kontrolli saavutus joonisel!

2) Kui kaks sirgjoont a ja b teineteist lõikavad, siis $\measuredangle\ (ab)$ tähendab seda nurka sirgjoonte vahel, mille võrra peame a pöörama positiivses mõttes, s. o. kellanäitaja vastu, et teda üle viia sirgjoonele b. On selge, et edasisel pöörmisel 180^0 kordse nurga võrra sirgjoon a ikka jälle sirgjoonega b ühte langeb. Seepärast on nurk a ja b vahel õieti nii antud:

$$\measuredangle\ (ab) + 180^0 . k,$$

kus k tähendab mistahes täisarvu. Trigonomeetriline funktsioon, mis selle määramatuse kõrvaldab, on tangens, sest

$$tg\,(ab + 180^0 . \mathrm{k}) = tg\,(ab).$$

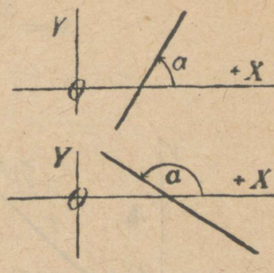
Seepärast on kasulik kahe sirgjoone vaheline nurk määrata tg-funktsiooniga. Kõige väiksem neist nurkadest, s. o. $\measuredangle\ (ab)$, on 0^0 kuni 180^0 suur, s. t. ta võib terav, nüri või 90^0 olla.

Analüütilises geomeetrias on tähtis **nurk, mille sirgjoon X-teljega moodustab.** Abstsisside telg võetakse ikka nullpunktist $+X$-telje sihis ja märgiga $\measuredangle\ \alpha$ tähendakse see nurk antud sirgjoone ja X-telje vahel, mille võrra peame sihitud X-telje pöörama kellanäitajale vastupidises sihis, et teda kõige lühemal teel lasta ühte langeda antud sirgjoonega (joonis 6). See nurk võib terav või nüri olla.

Kolmnurgast P_1P_2C (joon. 5) saame ikka õige märgiga

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

millest joonlõigu P_1P_2 ja $+$ X-telje vahelist nurka saab välja arvata.



Joonis 6.

Eelmises arvulises näituses on

$$tg\alpha = \frac{-2-4}{+5-(-3)} = \frac{-6}{8} = -0{,}75$$

$$log\ tg\hat{\alpha} = 9{,}87506 - 10$$

$$\text{teravnurk } \hat{\alpha} = 36^0\,52'\,12''$$

$$\alpha = 180^0 - \hat{\alpha} = 143^0\,7'\,48''$$

Ülesanne 4. Kui pikad on $\triangle$ ABC küljed ülesandes 2 α), ja missugused nurgad moodustavad nad $+$ X-teljega?

Ülesanne 5. Kui pikad on nelinurga diagonaalid ja küljed ülesandes 2 β), ja missugused nurgad moodustavad nad $+$ X-teljega?

Ülesanne 6. Määra selle punkti P koordinaadid, mis kolmest punktist

$$A \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases} \qquad B \begin{cases} -2 \\ +2 \end{cases} \qquad C \begin{cases} 2 \\ -6 \end{cases}$$

ühekaugel asub!

Kui pikk on AP, BP ja CP?

Missugune ülesanne on sellega ühtlasi lahendet?

§ 4. Joonlõigu jaotuspunkt.

Kui tarvis on joonlõiku AB, mis antud on lõpppunktide $A \begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases}$ ja $B \begin{cases} x_2 \\ y_2 \end{cases}$ abil, nii jaotada ühe punktiga P, et

$$PA : PB = \lambda,$$

siis leiame jaotuspunkti P koordinaadid sarnastest kolmnurkadest PAC ja PBD (joonis 7-a) järgmiselt:

$$CA : PD = PC : DB = PA : PB = \lambda$$

$$\text{ehk } (x - x_1) : (x_2 - x) = \lambda \text{ ja } (y - y_1) : (y_2 - y) = \lambda$$

$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x$	$y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y$
$x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$	$y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$

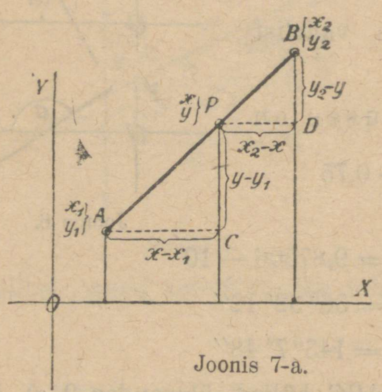
P oli suhtes λ jaotet joonlõigu AB **sisemine jaotuspunkt.**

Välimise jaotuspunkti P' (joonis 7-b) kohta on maksev:

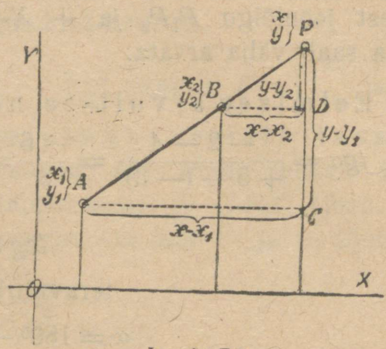
$$P'A : P'B = \lambda$$

Näita joonise 7-b abil, et punkti P' koordinaadid on

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \quad \text{ja} \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}!$$



Joonis 7-a.



Joonis 7-b.

Saadus:

Punktil P, mis joonlõigu AB suhtes $AP : BP = \lambda$ jaotab, on koordinaadid:

$$\mathbf{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad \text{ja} \quad \mathbf{y} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Seejuures peame λ positiivse võtma, kui P joonlõigul AB asub, ja negatiivse, kui P väljaspool AB asub.

Erijuhtumus: Mõne joonlõigu AB keskpunktis M on $\lambda = 1$, ja seepärast on

keskpunkti koordinaadid $\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$

Ülesanded:

Ülesanne 7. Antud on 2 punkti $A\begin{cases} -5 \\ -2 \end{cases}$ ja $B\begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$. Otsitakse nende punktide koordinaadid, mis jaotavad AB seespoolt suhtes $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, väljaspoolt suhtes $\frac{5}{2}$, $\frac{2}{5}$.

Ülesanne 8. Joonlõiku AB peab viieks v õ r d s e k s osaks jaotama. Missugused on jaotuspunktide koordinaadid?

$$A\begin{cases} -11 \\ 3 \end{cases} \qquad B\begin{cases} 4 \\ -7 \end{cases}$$

Ülesanne 9. Punktide A ja B ühendusjoont peab üle B joonlõigu AB võrra pikendama ja üle A niipalju, et pikenduse ja antud joone suhe oleks 3 : 2. Missugused on lõpppunktide P ja Q ja joonlõigu PQ keskpunkti koordinaadid?

$$A\begin{cases}1\\-11\end{cases}\qquad B\begin{cases}-5\\-3\end{cases}$$

Ülesanne 10. Antud on kolm punkti

$$P_1\begin{cases}5\\-4\end{cases}\qquad P_2\begin{cases}-2\\-7\end{cases}\qquad P_3\begin{cases}-6\\3\end{cases}$$

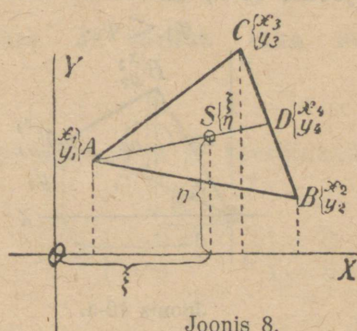
Mitmel viisil võib $\triangle P_1P_2P_3$ parallelogrammiks täiendada ja missugused on iga kord neljanda tipu koordinaadid?

Ülesanne 11. Antud on kaks parallelogrammi tippu $A\begin{cases}5\\12\end{cases}$ ja $B\begin{cases}3\\-2\end{cases}$ ning diagonaalide lõikepunkt $M\begin{cases}-2\\4\end{cases}$. Missugused on kahe teise tipu koordinaadid?

Kolmnurga raskuskeskpunkt.

Kolmnurga raskuskeskpunkti saame kahe küljepoolitaja lõikepunktina — või nii, et jaotame ühe küljepoolitaja, näituseks AD (joonis 8) suhtes $SD : SA = 1 : 2$.

Külje CB keskpunkti koordinaadid on $x_4 = \frac{x_2 + x_3}{2}$ ja $y_4 = \frac{y_2 + y_3}{2}$; edasi on $\frac{AS}{DS} = \lambda = 2$, nõnda et **raskuskeskpunkti S koordinaadid** on



Joonis 8.

$$\xi = \frac{x_1 + 2x_4}{1+2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\eta = \frac{y_1 + 2y_4}{1+2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

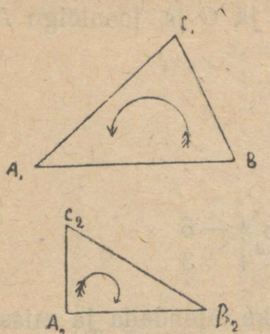
Ülesanne 12. $\triangle ABC$ tippude koordinaadid on

$$A\begin{cases}-5\\4\end{cases}\qquad B\begin{cases}-13\\-6\end{cases}\qquad C\begin{cases}3\\-10\end{cases}$$

Missugused on raskuskeskpunkti koordinaadid? Kui pikad on küljepoolitajad?

§ 5. Kolmnurga pinnasuurus.

1. Kaks ühel tasapinnal asuvat kolmnurka $A_1B_1C_1$ ja $A_2B_2C_2$ (joonis 9) võivad erineda



Joonis 9.

1) **suuruse** (pinnasuuruse) poolest,

2) **kulgemise sihi** poolest, kui me punktist A üle B liigume punktisse C.

Vahet kulgemise sihtide vahel tehakse **märkidega** $+$ ja $-$. Positiivseks nimetakse sihti, mis kellanäitaja vastu käib. Kellanäitaja sihis sündiv kulgemine on siis negatiivne. Joonisel 9 on $\triangle$-al $A_1B_1C_1$ positiivne, $\triangle$-al $A_2B_2C_2$ negatiivne kulgemise siht.

Kui kaks võrdist kolmnurka $A_1B_1C_1$ ja $A_2B_2C_2$ ainult kulgemise sihi poolest erinevad, siis on

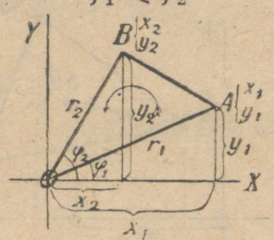
$$\triangle A_1B_1C_1 = - \triangle A_2B_2C_2.$$

2. Kolmnurk tipuga algpunktis.

Tippudel A ja B olgu õigenurksed koordinaadid x_1, y_1 ja x_2, y_2. Edasi olgu $OA = r_1$, $OB = r_2$, ja nende joonlõikude nurgad positiivse X-teljega φ_1 ja φ_2.

Kolmnurgal OAB positiivse kulgemise sihiga (joonis 10-a) on

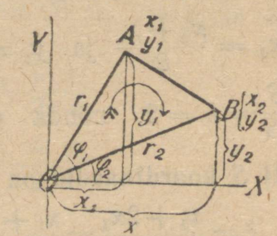
$$\varphi_1 < \varphi_2.$$



Joonis 10-a.

Kolmnurgal OAB negatiivse kulgemise sihiga (joonis 10-b) on

$$\varphi_1 > \varphi_2.$$



Joonis 10-b.

Kolmnurga OAB pinnasuurus on siis

$$J = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) =$$
$$= \frac{1}{2} r_1 r_2 (\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 -$$
$$- \sin\varphi_1 \cos\varphi_2).$$

$$J = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) =$$
$$= \frac{1}{2} r_1 r_2 (\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 -$$
$$- \sin\varphi_2 \cos\varphi_1).$$

Nüüd on
$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi_1 &= \frac{y_1}{r_1} \\ \cos\varphi_1 &= \frac{x_1}{r_1} \end{aligned}\right\} \quad \text{ja} \quad \left\{\begin{aligned} \sin\varphi_2 &= \frac{y_2}{r_2} \\ \cos\varphi_2 &= \frac{x_2}{r_2}. \end{aligned}\right.$$

Asemelepanemise teel leiame

$$J = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) \qquad \Big| \qquad J = \frac{1}{2}(x_2y_1 - x_1y_2).$$

Nii saame siis, kui me punktist O liigume kellanäitajale vastupidises sihis mööda kolmnurga ümbermõõtu:

kolmnurga pinnasuurus $= \frac{1}{2}$ korda (esimese punkti abstsiss korda teise punkti ordinaat miinus teise punkti abstsiss korda esimese punkti ordinaat).

Kui punktide A ja B seisu joonisest teame ja kolmnurga pinnasuuruse tahame positiivsena saada, siis peame liikuma mööda kolmnurka kellanäitajale vastupidises sihis. Kui meil punktide A ja B vastastikune seis aga mitte teada ei ole, siis moodustame avalduse

$$\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1),$$

mis võib olla positiivne, negatiivne või null. Kui ta on positiivne, siis teame, et punktid O,A,B üksteisele järgnevad kellanäitajale vastupidises sihis, nagu joonisel 10-a. Kui avaldus on negatiivne, siis see tähendab, et punktid O,A,B kellanäitaja sihis üksteisele järgnevad, nagu joonisel 10-b. Kui aga $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$, siis on kolmnurga OAB pinnasuurus null, see tähendab, ta kõduneb kolmeks ühel sirgel asuvaks joonlõiguks ja AB läheb punktist O läbi.

Kolmnurga pinnasuuruse mõõtarv J võrdub ikka avalduse $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$ absoluutse suurusega.

Ülesanne 13. Kujuta järgmised punktid A ja B koordinaadistikus ja arva välja $\triangle\, OAB$ pinnasuurus!

$$\alpha)\ A\begin{cases}-10\\-3\end{cases} \quad B\begin{cases}-4\\+7\end{cases} \qquad \beta)\ A\begin{cases}+6\\-5\end{cases} \quad B\begin{cases}-5\\-8\end{cases}$$

Ülesanne 14. Arva välja kolmnurga OAB pind ilma joonetuseta ja tähenda, missuguses sihis kuletakse kolmnurk, kui me liigume punktist O üle A punktisse B!

$$\alpha)\ A\begin{cases}3\\6\end{cases} \quad \beta)\ A\begin{cases}-2\\4\end{cases} \quad \gamma)\ A\begin{cases}7\\3\end{cases} \quad \delta)\ A\begin{cases}-11\\-7\end{cases}$$

$$B\begin{cases}-7\\5\end{cases} \quad B\begin{cases}9\\-2\end{cases} \quad B\begin{cases}-2\\-10\end{cases} \quad B\begin{cases}-2\\-4\end{cases}$$

$$\varepsilon)\ A\begin{cases}3\\4\end{cases} \qquad \zeta)\ A\begin{cases}12\\-6\end{cases}$$

$$B\begin{cases}-6\\-8\end{cases} \qquad B\begin{cases}5\\-2\frac{1}{2}\end{cases}$$

3. Kolmnurk mistahes seisus.

Vaatamata selle peale, kas algpunkt O asub seespool või väljaspool kolmnurka ABC, on ikka, kui aga kulgemise sihti tähele paneme (joonis 11-a ja -b) maksev võrdus:

$$\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$$

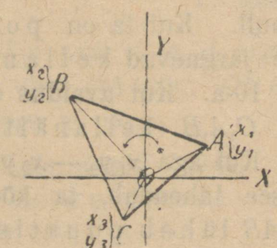
Nii et saame

$$J = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) + \frac{1}{2}(x_2 y_3 - x_3 y_2) + \frac{1}{2}(x_3 y_1 - x_1 y_3)$$

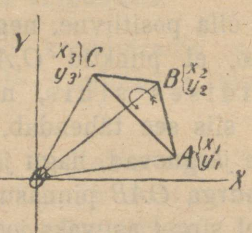
$$J = \frac{1}{2}\left[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\right]$$

Seejuures $\triangle ABC$ kuleti k e l l a n ä i t a j a l e v a s t u p i d i s e s s i h i s.

Kui kolmnurk k e l l a n ä i t a j a s i h i s kuletaks, siis leiaksime J n e g a t i i v s e suurusena.



Joonis 11-a.



Joonis 11-b.

Nii siis, et kolmnurga pinnasuurust välja arvata, moodustakse avaldus

$$\frac{1}{2}\left[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\right],$$

mis positiivne, negatiivne või nulliga võrdne olla võib. Kui ta on positiivne, siis sündis kolmnurga kulgemine kellanäitaja liikumisele vastupidises sihis, kui ta aga on negatiivne, siis kellanäitaja liikumise sihis. Kui avaldus nulliga võrdub, siis moodustavad 3 punkti A, B ja C kolmnurga, mille pinnasuurus on null, s. t. nad asuvad kõik ühel sirgel.

Ülesanne 15. Kui suur on pind

α) $\triangle ABC$ ülesandes 2 α)?

β) $\triangle ABC$ ülesandes 12?

Ülesanne 16. Kolmnurgas ABC jaotab punkt D külje AB seespoolt ja punkt E külje BC seespoolt nii, et

$$AD : BD = 4 : 3 \text{ ja } BE : CE = 5 : 4,$$

kuna punkt F külje AC poolitab.

Kui suur on $\triangle DEF$ pind?

$$A\begin{cases} -2 \\ 11 \end{cases} \qquad B\begin{cases} 19 \\ 4 \end{cases} \qquad C\begin{cases} -8 \\ -5 \end{cases}$$

Ülesanne 17. Arva $\triangle ABC$ pinnasuurus välja, i l m a e t s a e n n e t ı k u j u j o o n e t a d! Missuguses sihis kuletakse $\triangle ABC$?

$\alpha)\ A\begin{cases}-7\\-6\end{cases}\quad B\begin{cases}-12\\2\end{cases}\quad C\begin{cases}5\\-3\end{cases}$

$\beta)\ A\begin{cases}2\\-1\end{cases}\quad B\begin{cases}-2\\-8\end{cases}\quad C\begin{cases}7\\-2\end{cases}$

$\gamma)\ A\begin{cases}3\\2\end{cases}\quad B\begin{cases}6\\8\end{cases}\quad C\begin{cases}-4\\-12\end{cases}$

Mis järgneb γ) saadusest? Asuta γ) arvamisse punkti C koordinaatide asemele muutuvad koordinaadid x ja y! Mis ütleb siis saadud võrrand?

§ 6. Joone võrrand.

Planimeetriast on teada, et punkt, mis mõne tingimuse rahuldab, peab asuma teatud sirgel või kõveral joonel. Kui võimalik on seda tingimust võrrandi näol antud punktide koordinaatide ja otsitava punkti muutuvate koordinaatide $\begin{cases}x\\y\end{cases}$ vahel kirjutada, siis asuvad kõik punktid, mille koordinaadid (x, y) selle võrrandi rahuldavad, tähendatud joonel. Seda võrrandit nimetakse **joone ehk muutuva punkti geomeetrilise koha võrrandiks.**

Näitused.

1) Kui antud on punkt $M\begin{cases}x_0\\y_0\end{cases}$ ja me küsime nende punktide geomeetrilise koha järele, milledel punktist M on kaugus r, siis teame, et see on ringjoon K raadiusega r ümber punkti M. See tingimus on punkti P kohta, millel muutuvad koordinaadid (x, y), järgmine:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r.$$

Iga punkt, mille koordinaadid x ja y selle võrrandi rahuldavad, asub ringjoonel K; seepärast öeldakse, et tähendet võrrand on r i n g i v õ r r a n d, mil keskpunkt $M\begin{cases}x_0\\y_0\end{cases}$ ja raadius r.

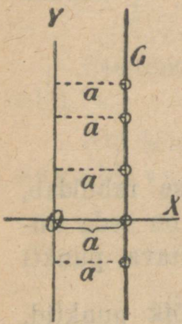
2) Kõik punktid, millede kaugused kahest jäädavast punktist $P_1\begin{cases}x_1\\y_1\end{cases}$ $P_2\begin{cases}x_2\\y_2\end{cases}$ on võrdsed, asuvad joonlõigu P_1P_2 keskpunktist läbitõmmatud ristjoonel N. Kui P on niisugune punkt muutuvate koordinaatidega (x, y), siis avaldub tingimus nii:

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}.$$

Kõik punktid, millede koordinaadid selle võrrandi rahuldavad, asuvad ristjoonel N, nõnda et see võrrand on joonlõigu P_1P_2 keskpunktist läbitõmmatud ristjoone võrrand.

§ 7. Sirgjoone vôrrand.

Sirgjoone võimalikud seisud koordinaatide telgede suhtes on järgmised:



Joonis 12.

I. Sirgjoon on ühe teljega paralleelne.
II. Sirgjoon läheb algpunktist läbi.
III. Sirgjoon lõikab mõlemaid telgi kahes punktis.

1) Esimene võimalus. Kõigil punktidel, mis asuvad sirgjoonel $G \parallel Y$-teljega (joonis 12), võrdub abstsiss a. Ümberpöördult asuvad kõik punktid, milledel $x = a$, sirgjoonel G. Seepärast öeldakse, et

$$x = a$$

on **sirgjoone G $\parallel$ Y-teljega võrrand.** a võib positiivne või negatiivne olla; seejärele saame paralleeljooned paremal või pahemal pool Y-telge.

Analoogselt on

$$y = b$$

sirgjoone L $\parallel$ X-teljega vôrrand (b võib jälle positiivne või negatiivne olla).

Erijuhtumused.

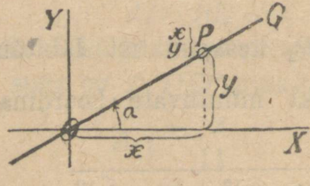
$x = 0$ on **Y-telje võrrand,**
$y = 0$ on **X-telje võrrand.**

Ülesanne 18. Jooneta sirgjooned, mis on antud järgmiste võrrandite abil:

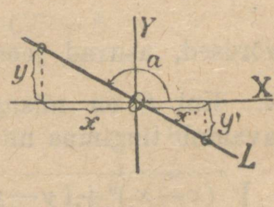
I. $x - 3 = 0$ III. $4y - 19 = 0$
II. $2x + 15 = 0$ IV. $y + 8 = 0$.

2) Teine võimalus. Kui mõni punkt P asub algpunktist läbimineval sirgjoonel G (joonis 13), siis on

$$\frac{y}{x} = tg\, a = m.$$



Joonis 13.



Joonis 14.

Sel ordinaadi ja abstsissi suhtel on iga punkti P jaoks sama suurus m; seepärast asub ümberpöördult iga punkt, mille koordinaadid $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$ võrrandi $\frac{y}{x} = m$ rahuldavad, sirgjoonel G. Seepärast on

$$\frac{y}{x} = m \text{ ehk } y = m \,.\, x$$

sirgjoone võrrand, mis algpunktist läbi läheb.

$m = tg\,\alpha$ on selle nurga tangens, mille sirgjoon $+X$-teljega moodustab. $m = \text{tg}\,\alpha$ nimetakse sirgjoone **sihi koeffitsiendiks** ehk **sihiteguriks.**

Sirgjoon G joonisel 13 läheb läbi esimesest ja kolmandast veerandist; seepärast on x ja y ühesuguse märgiga, $m = tg\,\alpha$ positiivne ja α teravnurk.

Kui aga sirgjoon L (joonis 14) läbi läheb teisest ja neljandast veerandist, siis on selle sirgjoone punktide koordinaatidel vastupidised märgid; $m = tg\,\alpha$ on negatiivne ja α nürinurk.

Võrrandi $y = m \,.\, x$ uurimine.

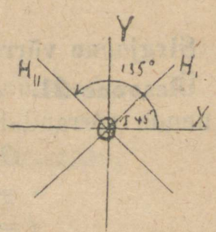
$m = 1$ annab $y = x$ ehk $y - x = 0$, see on **nurgapoolitaja** H_1 **võrrand** (joonis 15).

$m < 1$ vastab O-st läbiminevale sirgjoonele, mis x-teljega vähema kui 45^0 nurga moodustab.

$m > 1$ määrab läbi O mineva sirgjoone, mille kallakus suurem on kui 45^0.

$m = 0$ annab võrrandi $y = 0$; see vastab X-teljele.

Et võimalik oleks määrata $m = \infty$, peame enne sirgjoone võrrandi kujul $x = \frac{y}{m}$ kirjutama; siis annab võrrand $x = 0$, mis Y-teljele vastab.



Joonis 15.

Kui m nullist kuni ∞ kasvab, pöördub sirgjoon X-teljest Y-teljeni. Seepärast võib m-i ka sirgjoone **tõusuks** nimetada.

$m = -1$ annab $y = -x$ ehk $y + x = 0$, see on **nurgapoolitaja** $\mathbf{H_{II}}$ **vôrrand** (joonis 15).

Kui m on negatiivne ja ta absoluutne suurus $|m| > 1$, siis saame sirgjoone Y-telje ja H_{II} vahel.

Kui aga on $|m| < 1$, siis saame sirgjoone H_{II} ja X-telje vahel.

Kui nüüd $|m|$ suuremaks saab kui iga antud arv, s. t. kui m saab $-\infty$, siis tuleme ses piirjuhtumuses jälle Y-teljele.

Kui me m-le kõik väärtused anname $-\infty$ ja $+\infty$ vahel, siis saame avalduses

$$y = m \,.\, x$$

kõigi punktist O läbiminevate kiirte võrrandid.

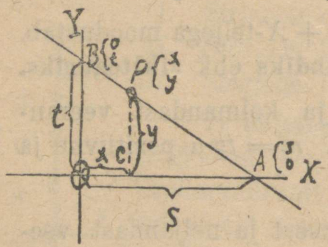
Ülesanne 19. Jooneta sirgjooned võrrandite järele:

I. $y = 3x$ III. $5x - 7y = 0$

II. $y = -\frac{1}{2}x$ IV. $10x + 3y = 0$!

Ülesanne 20. Missugune on algpunktist läbimineva sirgjoone võrrand, mis X-teljega 60^0 või 150^0 nurga moodustab?

3) III võimalus. Mistahes sirgjoon (joonis 16) lõikab koordinaatide telgi kahes punktis A ja B, mille kaugused algpunktist on s ja t.



Joonis 16.

Mistahes punkt $P\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ joonel AB määrab koos punktidega A ja B kolmnurga PAB, mille pinnasuurus $= 0$. Seepärast peab olema

$$(x \,.\, 0 - y \,.\, s) + (s \,.\, t - 0 \,.\, 0) + (0 \,.\, y - t \,.\, x) = 0$$

$$\text{ehk } xt + ys = st. \qquad (1)$$

Iga punkt, mille koordinaadid selle võrrandi rahuldavad, asub sirgel AB, nii et see on sirgjoone AB võrrand.

Teine tuletis: Et $\triangle\ OAB \sim \triangle\ CAP$, siis on iga AB-l asuva punkti P kohta maksev proportsioon

$$y : t = (s - x) : s,$$

mis jälle viib võrrandile (1). Selle kirjutame paremini

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = 1.$$

Sirgjoone võrrand telglõigetega s (X-teljel) ja t (Y-teljel).

Ülesanne 21. Jooneta järgmised sirgjooned telglõigetega s ja t ja säe nende võrrandid!

G_1	G_2	G_3	G_4
$s = 9$	7	-3	-6
$t = 4$	-5	-8	$+5$

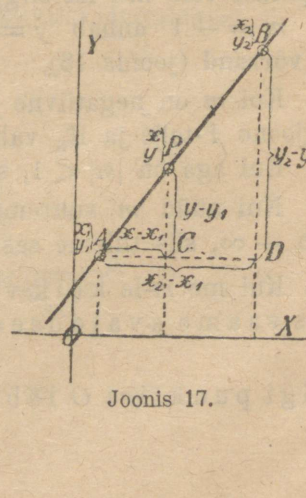
4) Kui on antud mitte lõikepunktid koordinaatide telgedega, vaid kaks mistahes punkti $A\left\{\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\right.$ ja $B\left\{\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}\right.$ sirgjoonel (joonis 17), siis saame tingimuse, et punkt $P\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ sirgjoonel AB asub järgmiselt:

Pinnasuurus $\triangle\ PBA = 0$, järelikult

$$(xy_2 - yx_2) + (x_2y_1 - y_2x_1) + (x_1y - xy_1) = 0$$

ehk

$$x\,(y_2 - y_1) + y\,(x_1 - x_2) - x_1y_2 + x_2y_1 = 0 \quad (2)$$



Joonis 17.

2 tuletis. Punktil P, mis joonlõiku AB suhtes λ jaotab, on koordinaadid

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \text{ ja } y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Kui λ-le anname kõiksugused väärtused $-\infty$-sest $+\infty$-ni, siis on x ja y ikka niisuguse punkti koordinaadid, mis asub sirgjoonel AB. Kui kaotame λ mõlemaist võrdustest, siis saame x-i ja y-i olenevuse, s. t. selle sirgjoone võrrandi, mida P kulgeb. Mõlemaist üleval antud võrranditest leiame

$$\lambda = \frac{x_1 - x}{x - x_2} \text{ ja } \lambda = \frac{y_1 - y}{y - y_2}.$$

Võrreldes mõlemaid avaldusi saame otsitud võrrandi

$$\frac{x_1 - x}{x - x_2} = \frac{y_1 - y}{y - y_2}. \qquad (3)$$

3. tuletus. Ikka on joonises 17 $\triangle ACP \sim \triangle ADB$; seega

$$PC : AC = BD : AD \text{ ehk}$$

$$(y - y_1) : (x - x_1) = (y_2 - y_1) : (x_2 - x_1) \qquad (4)$$

Näita, et võrrandi kujud (2), (3) ja (4) kõik ühele ja samale võrrandile viivad! Seda peavad iga AB-l asuva punkti koordinaadid rahuldama. Ümberpöördult võib ütelda: kui mingi punkti koordinaadid $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$ selle võrrandi rahuldavad, siis see punkt asub sirgjoonel AB. Seepärast on

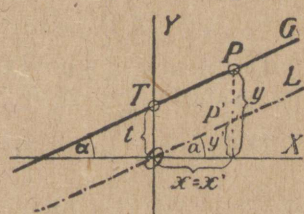
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

kahe punkti A $\begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases}$ ja B $\begin{cases} x_2 \\ y_2 \end{cases}$ läbi määratud sirgjoone võrrand.

Ülesanne 22. Säe kolmnurga ABC kolme külje võrrandid!

$$A \begin{cases} 5 \\ 9 \end{cases} \qquad B \begin{cases} -5 \\ 3 \end{cases} \qquad C \begin{cases} 15 \\ -3 \end{cases}$$

5) Võime ka üldises seisus koordinaadistikus oleva sirgjoone juure niiviisi jõuda, et me võrrandi $y = mx$ abil antud sirgjoone L paralleelselt edasi viime (joonis 18).



Joon. 18.

Tõmbame $G \parallel L$ nii, et G-l Y-teljel oleks telglõik t. Mõni Y-teljega paralleelne joon lõikab G siis punktis $P \begin{cases} x \\ y \end{cases}$ ja L punktis $P' \begin{cases} x' \\ y' \end{cases}$; seejuures on

$$x' = x \quad \text{ja} \quad y' = y - t.$$

Punkti P' koordinaadid x' ja y' rahuldavad aga võrrandi

$$y' = mx'.$$

Kui me ülevaltähendet väärtused siia asemele paneme, siis saame võrrandi

$$y - t = mx,$$

mida rahuldavad sirgjoone G iga punkti koordinaadid; seepärast on

$$y = m . x + t \qquad \text{ehk} \qquad y = x . \operatorname{tg} \alpha + t$$

niisuguse **sirgjoone võrrand, mis + X-teljega nurga α moodustab** (ehk mil on sihikoeffitsient m) **ja Y-teljel telglõike t annab.**

Kui t-le anname kõik väärtused $-\infty$-st kuni $+\infty$, siis saame avalduses $y = mx + t$ kõigi paralleeljoonte võrrandid, mis $+ X$-teljega moodustavad nurga α (kui $tg\,\alpha = m$).

Kui nüüd veel m suuruse muudame $-\infty$-st kuni $+\infty$-ni, siis pöördub sirgjoon L algpunkti O ümber ja me jõuame paralleelse ülekviimise abil kõigi tasapinna sirgjoonteni.

Võrrandi kuju

$$y = mx + t$$

sisaldab seepärast (kui m ja t muutuvad on) **kõigi** tasapinna **sirgjoonte** võrrandid.

Me oleme nüüd säädnud sirgjoonte võrrandid, mis asusid igas võimalikus seisus koordinaadistikus. Võrdlus näitab, et ikka ühe esimese astme võrrandi muutuvatega x ja y saame, mille üldine kuju on

$$ax + by + c = 0,$$

kus koeffitsiendid võivad olla positiivsed, negatiivsed või nulliga võrdsed. Ümberpöördult võib ütelda:

Iga esimese astme võrrand muutuvatega x ja y kujutab sirgjoone.

Sest kui me sellest võrrandist y välja arvame

$$y = -\frac{a}{b} x - \frac{c}{b}$$

siis ta saab

$$y = mx + t$$

kujuliseks.

$$-\frac{a}{b} = m \text{ on sihitegur}$$

$$-\frac{c}{b} = t \text{ on telglõik } Y\text{-teljel.}$$

Lause: y-i järele lahendet sirgjoone võrrandis on kordaja x-i juures sihitegur ja jäädav liige telglõik Y-teljel.

Näitus.

$$16x - 12y - 9 = 0$$

annab y järele lahendatult

$$y = \frac{4}{3} x - \frac{3}{4},$$

nõnda on $\frac{4}{3} = m = tg\,\alpha$ selle sirgjoone sihitegur ja $-\frac{3}{4} = t$ telglõik Y-teljel.

6) **Et mõni punkt koordinaatidega x_0 ja y_0 sirgjoonel asuks, peavad selle punkti koordinaadid sirgjoone võrrandi rahuldama, s. t. kui**

me x ja y asemele x_0 ja y_0 võrrandisse asetame, peab see samasuguseks saama.

Ülesanne 23. Kas punktid

$A\begin{cases}10\\9\end{cases}$ $B\begin{cases}2\\-3\end{cases}$ $C\begin{cases}-4\\-12\end{cases}$ $D\begin{cases}0\\-6\end{cases}$ $E\begin{cases}5\\8\end{cases}$ $F\begin{cases}-3\\-7\end{cases}$

asuvad sirgjoonel $3x-2y-12=0$?

Ülesanne 24. Leia järgmistele punktidele puuduv koordinaat, nii et punktid sirgjoonel $3x+7y+21=0$ asuksid!

$A\begin{cases}-10\frac{1}{2}\\?\end{cases}$ $B\begin{cases}?\\4\end{cases}$ $C\begin{cases}14\\?\end{cases}$ $D\begin{cases}?\\-4\frac{1}{2}\end{cases}$ $E\begin{cases}0\\?\end{cases}$ $F\begin{cases}?\\0\end{cases}$

Kui tahame leida sirgjoone

$$ax+by+c=0$$

lõikepunktid koordinaatide telgedega, siis paneme

$y=0$ ja saame $x=-\dfrac{c}{a}=s$ **telglõikena X-teljel,**

$x=0$ ja saame $y=-\dfrac{c}{b}=t$ **telglõikena Y-teljel.**

Ülesanne 25. Missugused on kolmnurga külgede telglõiked ülesandes 22?

T e l g l õ i g e t e a b i l v õ i m e k e r g e s t i i g a s i r g j o o n e, m i l l e v õ r r a n d a n t u d, k o o r d i n a a d i s t i k k u j o o n e t a d a; näituseks

$$5x-2y+30=0$$

$\left.\begin{array}{l} y=0 \text{ annab } s=-6 \\ x=0 \text{ annab } t=\ \ 15 \end{array}\right\}$ jooneta see sirgjoon!

Ülesanne 26. Jooneta nelinurk, mille külgedel I, II, III ja IV on järgmised võrrandid!

I. $3x+4y+24=0$ III. $8x+3y-48=0$

II. $3x-4y+36=0$ IV. $2x-9y-36=0$

Määra külgede sihitegurid! Missugused iseärasused on külgedel I ja II?

§ 8. Niisuguste sirgjoonte võrrandid, mis on seotud tingimustega.

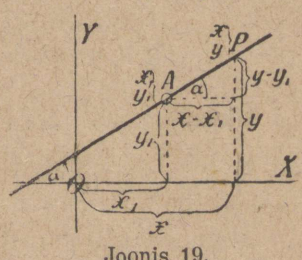
Allpool on siiamaani harutet sirgjoonte võrrandite kujud veel üks kord üles säetud.

1) Algpunktist läbimineva sirgjoone L võrrand, mis + X-teljega nurga α moodustab:

I. $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ehk $y = mx$

2) Sirgjoone võrrand, mis + X-teljega nurga α moodustab ja Y-teljel telglõike t annab:

II. $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha + t$ ehk $y = mx + t$.



Joonis 19.

3) Et sirgjoon punktist $A\begin{cases}x_1\\y_1\end{cases}$ läbi läheks ja $+X$-teljega $\measuredangle\ \alpha$ moodustaks, peab iga punkti $P\begin{cases}x\\y\end{cases}$ (joonis 19) kohta sel sirgjoonel maksev olema võrrand:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=tg\ \alpha;\quad \text{seepärast on}$$

sirgjoone võrrand, mis $+$ X-teljega nurga α moodustab ja punktist $A\begin{cases}x_1\\y_1\end{cases}$ läbi läheb:

$$\text{III.}\quad y-y_1=(x-x_1)\,.\,tg\ \alpha.$$

4) Sirgjoone võrrand telglõigetega s $(X$-teljel$)$ **ja** t $(Y$-teljel$)$:

$$\text{IV.}\quad \frac{x}{s}+\frac{y}{t}=1$$

5) Läbi kahe punkti $P_1\begin{cases}x_1\\y_1\end{cases}$ ja $P_2\begin{cases}x_2\\y_2\end{cases}$ mineva sirgjoone võrrand:

$$\text{V.}\quad \frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

N. B! Pandagu tähele sirgjoone võrrandi viis kuju!

Ulesanne 27. Antud on kolmnurga ABC tippude koordinaadid

$$A\begin{cases}5\\7\end{cases}\qquad B\begin{cases}4\\-3\end{cases}\qquad C\begin{cases}-3\\-1\end{cases}$$

Otsitakse kolme küljepoolitaja võrrandid ja raskuskeskpunkti koordinaadid.

Tõenda, et raskuskeskpunkt igaühel küljepoolitajal asub!

Ülesanne 28. Nelinurga $ABCD$ tippude koordinaadid on

$$A\begin{cases}4\\3\end{cases}\qquad B\begin{cases}-5\\2\end{cases}\qquad C\begin{cases}-3\\-5\end{cases}\qquad D\begin{cases}3\\-3\end{cases}$$

Missugused on külgede ja diagonaalide võrrandid? Kui suured nurgad moodustavad need sirged $+$ X-teljega?

Ülesanne 29. Sirgjoonest on antud nurk α $+$ X-teljega ja üks telglõik. Otsitav on sirgjoone võrrand.

a) $\alpha_1=150^0;\ s_1=4$ c) $\alpha_3=30^0;\ t_3=-3$
b) $\alpha_2=45^0;\ s_2=-5$ d) $\alpha_4=135^0;\ t_4=1.$

Ülesanne 30. Antud on punktid $A\begin{cases}12\\-9\end{cases}$ ja $B\begin{cases}-3\\1\end{cases}$. Tõmba punkt C-st läbi, mis joonlõigu AB suhtes $AC:BC=7:3$ jagab, sirgjoone, mis Y-teljega 30^0 nurga moodustab!

Mitu võimalust on siin? Säe iga võimaluse kohaselt sirgjoone võrrand.

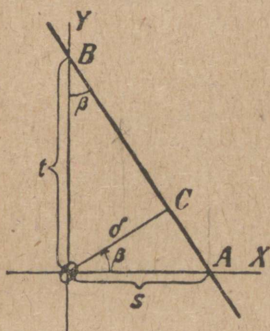
§ 9. Sirgjoone vôrrandi normaalkuju.

Sirgjoon olgu määratud kauguse δ abil algpunktist ja nurga β abil, mida see joonlõik positiivse X-teljega moodustab.

Kui s ja t on telglõiked, siis on sirgjoone võrrand

$$\frac{x}{s}+\frac{y}{t}=1.$$

Täisnurkses $\triangle\, OAC$ (joonis 20) on $s=\frac{\delta}{\cos\beta}$.



Joonis 20.

Täisnurkses $\triangle\, OBC$ on $t=\frac{\delta}{\sin\beta}$; seega on sirgjoone võrrand

$$\frac{x\,.\cos\beta}{\delta}+\frac{y\,.\sin\beta}{\delta}=1 \text{ ehk}$$

$$\mathbf{x\,.\cos\beta+y\,.\sin\beta-\delta=0.}$$

Joonetet juhusel on β teravnurk.

Kui β suurem kui 180^0 oleks (joonis 21), siis peaksime panema

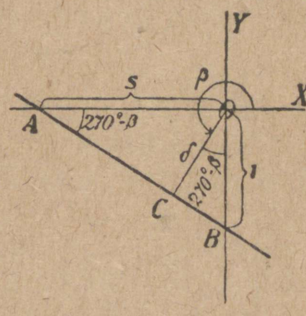
$$s=-OA=-\frac{\delta}{\sin(270^0-\beta)}=-\frac{\delta}{-\cos\beta}=\frac{\delta}{\cos\beta}$$

$$t=-OB=-\frac{\delta}{\cos(270^0-\beta)}=-\frac{\delta}{-\sin\beta}=\frac{\delta}{\sin\beta}.$$

Nõnda on sirgjoone võrrand

$$\frac{x\,.\cos\beta}{\delta}+\frac{y\,.\sin\beta}{\delta}=1$$

ehk $x\,.\cos\beta+y\,.\sin\beta-\delta=0$



Joonis 21.

Ülesanne. Leia analoogselt sirgjoone võrrand, kui β on nürinurk ja kui $270^0<\beta<360^0$!

Iga sirgjoone seisu juures saame sama võrrandi

$$\mathbf{x\,.\cos\beta+y\,.\sin\beta-\delta=0,}$$

mida **sirgjoone vôrrandi normaalkujuks** nimetakse.*)

$\delta=$ ristjoone pikkus, s. t. sirgjoone kaugus algpunktist·
$\beta=$ ristjoone nurk positiivse X-teljega, mil kõik väärtused 0^0 kuni 360^0 võivad olla.

NB! Iga tuletuse juures jäi võrrandi jäädaval liikmel märk miinus. See ei ole siis mitte juhuslik, vaid on oluline miinus!

---

*) Selle normaalkuju andis matemaatik Otto Ludvig Hesse (1811—1874; Halle, Heidelberg, München).

Märkus. Teisiti võib Hesse normaalkuju tuletada lhk. 5 antud projektsioonlause abil.

Ristjoon OC sihitakse punktist O punkti C poole, siis näitab ristjoone nool selle tasapinna poole peale, kus algpunkt O ei asu. Kui me sirgjoone G mõnest punktist P ristjoone PQ X-teljele laseme, siis saame nelinurga $OQPCO$, mida selles kulgemise sihis ristjoonele OC projektitakse. Kui U tähendab punkti Q projektsiooni, siis on projektsioonlause järele

$$OU + UC + CO = 0.$$

Kui me need suurused avaldame punkti P koordinaatide x ja y ning β ja δ abil, siis saame

$$x \,.\, \cos\beta + y \,.\, \sin\beta - \delta = 0.$$

Ülesanne 31. Säädke korrapärase kuusnurga kuue külje võrrandid, kui antud on, et külje pikkus on a ja hulknurga keskpunkt asub algpunktis. (Kuidas valime koordinaatide teljed kõige otstarbekohasemalt?)

Ülesanne 32. Ringi ümber, mille raadius $r = 1$ ja mille keskpunkt asub algpunktis, on korrapärane kaheksanurk joonetet. Missugused on kaheksa külje võrrandid?

Kuidas tuleb ülesanne lahendada, kui raadiuse r asemel antud on külg a?

Sirgjoone võrrandi teisendamine normaalkujuks.

$$\text{I.}\quad ax + by + c = 0$$

peab muudetama normaalkujuks

$$\text{II.}\quad x.\cos\beta + y \,.\, \sin\beta - \delta = 0.$$

Sin β, *cos* β ja δ peab siis a, b ja c abil avaldama.

Kui mõlemad võrrandid sama sirgjoont kujutavad, siis peavad telglõiked samad olema.

$$\text{I.}\ \begin{cases} s = -\dfrac{c}{a} \\ t = -\dfrac{c}{b} \end{cases} \qquad \text{II.}\ \begin{cases} s' = \dfrac{\delta}{\cos\beta} \\ t' = \dfrac{\delta}{\sin\beta} \end{cases}$$

(Et need avaldused iga $\measuredangle\ \beta$ juures õiged on, näidati lk. 21!)

Nüüd peab $s' = s$ ja $t' = t$ olema, nii siis

$$\frac{\delta}{\cos\beta} = -\frac{c}{a} \text{ ja } \frac{\delta}{\sin\beta} = -\frac{c}{b}.$$

Sellest saame

$$\sin\beta = -\frac{\delta \,.\, b}{c}$$

$$\cos\beta = -\frac{\delta \,.\, a}{c}; \text{ siit}$$

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 = \frac{\delta^2}{c^2}(a^2+b^2)$$

$$\delta = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

δ peab absoluutse pikkusena tingimata positiivne olema. Seepärast peame, kui c on positiivne, ülemise märgi, ja kui c negatiivne, alumise märgi võtma.

$$\sin\beta = \mp\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ ja } \cos\beta = \mp\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Kui paneme need avaldused võrrandisse II, siis saame

$$\frac{a}{\mp\sqrt{a^2+b^2}}.x + \frac{b}{\mp\sqrt{a^2+b^2}}.y - \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

ehk
$$\frac{ax+by+c}{\mp\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$$

Me näeme, et ruutjuure märk peab ikka olema c märgi vastupidine, et jäädav liige negatiivne oleks.

Kõige lihtsamalt toimetakse järgmise reegli järele:

Et sirgjoone võrrandit normaalkujuks teisendada, viime kõik liikmed ühele poole niiviisi, et jäädav liige negatiivne oleks; sellejärele jagame terve võrrandi ruutjuurega x-i ja y-i koeffitsientide ruutude summast.

Näitus. Olgu $3x = 4y - 2$ antud sirgjoone võrrand. Selle kirjutame
$$-3x + 4y - 2 = 0.$$

Siit on sirgjoone võrrandi normaalkuju

$$\frac{-3x+4y-2}{\sqrt{9+16}} = 0 \text{ ehk } -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{2}{5} = 0.$$

Sirgjoone kaugus algpunktist on

$$\delta = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Ristjoone nurga $+$ X-teljega leiame nii

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{4}{5} = 0{,}8 \\ \cos\beta &= -\frac{3}{5} = -0{,}6 \end{aligned}\right\} \beta \text{ asub II veerandis.}$$

Terav $\measuredangle\ \hat{\beta} = 53^0\,7'\,49''$ ja

$$\beta = 180^0 - \hat{\beta} = 126^0\,52'\,11''$$

Ülesanne 33. Teisenda järgmised sirgjoone võrrandid normaalkujuliseks. Kui suur on igas juhtumuses δ ja β?

1) $12x + 5y + 26 = 0$
2) $40x + 9y = 164$
3) $21y + 58 = 20x$
4) $24x - 7y + 200 = 0$
5) $8x + 170 = -15y$
6) $-15x - 112y + 113 = 0$
7) $72x - 65y = 485$
8) $55y - 219 = 48x$

Ülesanne 34. Punktist $P\begin{cases}-1\\ \;\;7\end{cases}$ läbi peab sirgjoone tõmbama, mille kaugus algpunktist on 5. Missugune on ta võrrand?

Ülesanne 35. Säe sirgjoone võrrand, mis $+X$-teljega 30^0-lise nurga moodustab ja mille kaugus algpunktist on 4!

Ülesanne 36. Missugune on sirgjoone võrrand, mille kaugus algpunktist on 6 ja mille telglõigete suhe on $s:t = 8:15$?

§ 10. Punkti kaugus sirgjoonest.

Sirgjoone G võrrand olgu normaalkujul

$$x \,.\, cos\, \beta + y \,.\, sin\, \beta - \delta = 0 \text{ antud.}$$

Kui punktist $P(x_0, y_0)$ läbi sirgjoonele G tõmbame paralleeljoone G_1, siis on G_1-le tõmmatud ristjoone pikkus δ_1, ja see ristjoon moodustab $+X$-teljega sama $\measuredangle\, \beta$ kui ristjoon δ. Nii on sirgjoone G_1 võrrand:

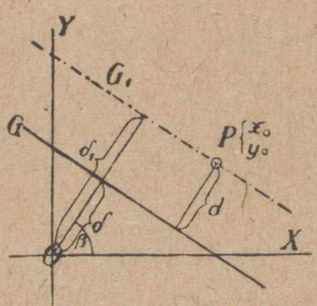
$$x \,.\, cos\, \beta + y \,.\, sin\, \beta - \delta_1 = 0.$$

Et punkt P sirgel G_1 asub, siis peavad ta koordinaadid x_0 ja y_0 sirgjoone G_1 võrrandi rahuldama, nõnda et

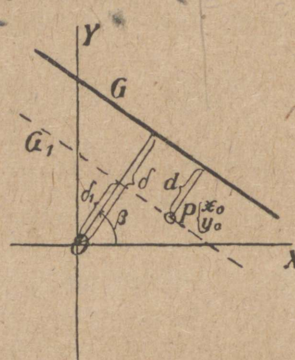
$$x_0\, cos\, \beta + y_0\, sin\, \beta - \delta_1 = 0;$$

sellest leiame

$$\delta_1 = x_0\, cos\, \beta + y_0\, sin\, \beta.$$



Joonis 22.



Joonis 23.

Kui punkt P ja algpunkt O seisavad üks ühel ja teine teisel pool sirgjoont G (joonis 22), siis on punkti P ja sirgjoone G otsitud kaugus d

$$\mathbf{d} = \delta_1 - \delta = \mathbf{x}_0\, \mathbf{cos}\, \beta + \mathbf{y}_0\, \mathbf{sin}\, \beta - \delta.$$

Kui aga punkt P ja algpunkt O asuvad ühel pool sirgjoont G (joonis 23), siis on

$$\mathbf{d} = \delta - \delta_1 = -(\mathbf{x}_0\, \mathbf{cos}\, \beta + \mathbf{y}_0\, \mathbf{sin}\, \beta - \delta).$$

$x_0\, cos\, \beta + y_0\, sin\, \beta - \delta$ on see suurus, milleks sirgjoone normaalkujulise võrrandi pahem pool saab, kui x ja y asemele paneme punkti P koordinaadid.

Kui sirgjoone võrrand on üldiselt antud, siis peame ta enne normaalkujuks muutma.

Reegel: Et punkti kaugust sirgjoonest leida, muudame sirgjoone võrrandi enne normaalkujuliseks. Asetades siis punkti koordinaadid pahemasse võrrandi poole, leiame kauguse saadud avalduse absoluutse väärtusena.

Avalduse märk näitab punkti ja sirgjoone vastastikust seisu.

Kui ta positiivne on, siis punkt ja algpunkt asuvad üks ühel ja teine teisel pool sirgjoont. Kui ta negatiivne on, siis see tähendab, et punkt ja algpunkt asuvad ühel pool sirgjoont.

Kui avalduse suurus on 0, siis asub punkt sirgjoonel.

Märkus. Ka siin võib tuletus projektsioonlause abil sündida. Laseme punktist P ristjoone PQ X-teljele, ristjoone PS sirgjoonele G ja tähendame tähega C punktist O sirgjoonele G lastud perpendikulaari aluspunkti. Saadud viisnurga projektime sihitud ristjoonele OC. Antud sirgjoon jaotab terve tasapinna kaheks osaks. Sellejärele kas P samas tasapinna osas asub kui O, või teises — saame projektsioonlause põhjal

$$d = \mp (x_0 \cos \beta + y_0 \sin \beta - \delta).$$

Näitus 1. Olgu antud sirgjoone G võrrand

$$4x - 3y + 15 = 0$$

ja punktid $P\begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$ $S\begin{cases} -3 \\ 6 \end{cases}$ ja $Q\begin{cases} -6 \\ -3. \end{cases}$

Kui sirgjoone G ja antud punktid P, S ja Q joonetame koordinaadistikku, siis näeme, et P ja algpunkt O seisavad ühel pool G, S ja O üks ühel, teine teisel pool G ja punkt Q sirgel G. Sirgjoone võrrand normaalkujul on

$$\frac{-4x + 3y - 15}{5} = 0.$$

Kui nüüd võrrandi pahemasse poolesse asetame punkti P või S koordinaadid, siis saame juhtumuses P — negatiivse, juhtumuses S — positiivse suuruse. Viimasel korral määrab saadud avaldus kauguse d', kuna me juhtumuses S peame asetama saadud avalduse ette veel märgi —, et kaugust d saada. Seepärast on punkti P kaugus sirgest G

$$d = -\frac{-4 \,.\, 2 + 3 \,.\, 1 - 15}{5} = 4,$$

punkti S kaugus sirgest G

$$d' = \frac{-4 \,.\, (-3) + 3 \,.\, 6 - 15}{5} = 3,$$

punkti Q kaugus sirgest G

$$d'' = \frac{-4 \,.\, (-6) + 3 \,.\, (-3) - 15}{5} = 0\,;$$

niiviisi asub Q tõesti sirgel G.

Kui aga antud punkt, näituseks $V\begin{cases}-1\\-4,\end{cases}$ mitte enne koordinaadistikus kujutet ei ole, siis ei ole teada, kas ta punktiga O ühel pool sirget G asub või mitte. Kui ta koordinaadid asetame võrrandi pahemasse poolesse, siis saame

$$\frac{-4.(-1)+3.(-4)-15}{5}=-\frac{23}{5},$$

negatiivse suuruse, s. t. V ja O seisavad ühel pool G, ja punkti V kaugus sirgjoonest G on $d'''=4\frac{3}{5}$.

Ülesanne. Leia sarnasel teel, ilma et joonetad punktid

$$W\begin{cases}-10\\-2,\end{cases}\quad Z\begin{cases}8\\5\end{cases}\quad \text{ja}\quad U\begin{cases}6\\13\end{cases}$$

missugune nende seis antud sirgjoone vastu on!

Erajuhtumus.

Sirgjoon G läheb läbi algpunktist O. Sel korral on $\delta=0$, ja sirgjoone G võrrandi normaalkuju

$$x\cos\beta+y\sin\beta=0.$$

Kui punkti P koordinaadid x_0 ja y_0 asetame võrrandi pahemasse poolesse, siis saab avaldus

$$x_0\cos\beta+y_0\sin\beta$$

ka positiivseks või negatiivseks, selle järele, kas punkt P ühel või teisel pool sirgjoont asub.

Ristjoone sihi võime siin vabalt ühele või teisele poole määrata. Sihi valikuga on ühtlaselt ka $\sphericalangle\,\beta$ määratud. Ümberpöördult on nurgaga β ristjoone positiivne siht määratud. See tasapinna pool, milles positiivselt sihitud ristjoon on, olgu positiivne, teine pool — negatiivne. Nende punktide kauguste suurused, mis esimese tasapinna poolel seisavad, avalduvad arvamises märgiga „+“, teisel tasapinna poolel seisvate punktide kauguste suurused — märgiga „—“. Tõendavaks selgituseks olgu

Näitus 2. Olgu antud sirgjoon G võrrandiga $y=-\frac{3}{4}x$ ja punktid

$$M\begin{cases}-10\\2\end{cases}\quad N\begin{cases}8\\4\end{cases}\quad \text{ja}\quad P\begin{cases}12\\-9\end{cases}$$

Sirgjoone G võrrandi normaalkuju on

$$\frac{3x+4y}{\pm 5}=0.$$

Valides normaalkujuna $\frac{3x+4y}{5}=0$ saame, pahemasse võrrandi poolesse antud punktide koordinaadid asetades, $-4\frac{2}{5}$, 8 ja 0.

Joonetades sirgjoone G ja punktid M, N ja P koordinaadistikku, näeme, et võrrandi pahema poole positiivsele väärtusele vastab terve parem ülempoolne tasapinna osa, sirgjoonest G arvates (osa positiivselt sihitud normaaliga); negatiivsele väärtusele vastab osa, mis on sirgjoonest G pahemal pool allpool.

Kui oleksime normaalkujuna valinud $\frac{3x+4y}{-5}=0$, siis peaks „paremal-pool üleval-pool" ja „pahemal-pool all-pool" üksteisega ära vahetama.

Antud punktidel M, N, P on siis kaugused (absoluutsed):

$$d=4\tfrac{2}{5},\quad d'=8,\quad d''=0.$$

Ülesanne. Määra ilma joonetuse tarvitamiseta, missugune on punktide

$$Q\begin{cases}-7\\ \;\;9\end{cases}\quad R\begin{cases}-6\\ \;\;4\frac{1}{2}\end{cases}\quad \text{ja}\quad S\begin{cases}-1\\ -6\end{cases}$$

seis sirgjoone G (näitusest 2) vastu ja kui suur on nende kaugus sellest sirgjoonest!

Ülesanne 37. Kolmnurga ABC tippude koordinaadid on

$$A\begin{cases}7\\ 5\end{cases}\quad B\begin{cases}\;\;3\\ -2\end{cases}\quad C\begin{cases}-3\\ \;\;7.\end{cases}$$

Kui pikad on kõrgused? Arva kolmnurga pinnasuurus mitmel viisil välja!

Ülesanne 38. Täienda $\triangle ABC$ parallelogrammini $ABCD$ ja määra diagonaalide lõikepunkti kaugus neljast küljest!

$$A\begin{cases}-4\\ \;\;4\end{cases}\quad B\begin{cases}16\\ 19\end{cases}\quad C\begin{cases}-4\\ \;\;34\end{cases}$$

Ülesanne 39. Missugune on selle sirgjoone võrrand, mis punktist $P\begin{cases}-1\\ \;\;3\end{cases}$ läbi läheb ja mille kaugus punktist $Q\begin{cases}-2\\ \;\;1\end{cases}$ on 4?

Ülesanne 40. Punktist $P\begin{cases}2\\ 3\end{cases}$ läbi sirgjoon tõmmata, millest punktid $A\begin{cases}-3\\ -1\end{cases}$ ja $B\begin{cases}\;\;5\\ -5\end{cases}$ ühel kaugusel asuksid.

(Lahenda see ülesanne puht-planimeetrilisel teel ja võrdle, kas mõlemad lahendusviisid kokkukõlas on!)

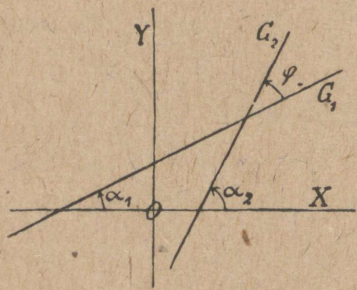
Kahe sirgjoone nurk. 231.

§ 11. Kahe sirgjoone nurk.

Kaks lõikavat sirgjoont G_1 ja G_2 moodustavad ühes koos X-teljega ühe kolmnurga, millest välisnurga lauset tarvitades leiame otsitava $\sphericalangle (G_1 G_2)=\varphi$ ja nurkade α_1 ja α_2 olenevuse. α_1 ja α_2 on nurgad, mida G_1 ja G_2 X-teljega moodustavad. Leitud võrrandis võtame siis mõlemil pool tg-funktsiooni, nii et $tg\,\varphi$ saame avaldada mõlemate sirgjoonte sihitegurite abil.

Joonisel 24 on $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, seepärast $tg\,\varphi = tg\,(\alpha_2 - \alpha_1)$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_2 - \mathrm{tg}\,\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha_2 \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha_1}$$



Joonis 24.

Seejuures on φ see nurk, mille võrra me sirgjoone G_1 positiivses sihis peame pöörma kuni ta sirgega G_2 ühte langeb.

1) Kui võrrandid on sel kujul antud:

$G_1 \ldots\ldots y = m_1 x + t_1$

$G_2 \ldots\ldots y = m_2 x + t_2$,

siis on $tg\,\alpha_1 = m_1$ ja $tg\,\alpha_2 = m_2$; seega

$$tg\,\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \,.\, m_1}.$$

2) Kui sirgjoonte võrrandid on

*) $G_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

$G_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$,

siis on $tg\,\alpha_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ ja $tg\,\alpha_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ ja

$$tg\,\varphi = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2}$$

3) Kuidas leiame nurga φ, kui sirgjoonte võrrandid on antud normaalkujul $x \cos\beta + y \sin\beta - \delta = 0$?

Ülesanne 41. Leia nurk sirgjoonte G_1 ja G_2 vahel!

a) $G_1 \equiv 12x + 9y - 39 = 0$

$G_2 \equiv 6x - 15y + 42 = 0$

b) $G_1 \equiv x \cos 210^0 + y \sin 210^0 - 8 = 0$

$G_2 \equiv x \cos 315^0 + y \sin 315^0 - 10 = 0$.

Ülesanne 42. Missuguse nurga all lõikavad nelinurga $ABCD$ diagonaalid?

$$A\begin{cases}4\\4\end{cases} \quad B\begin{cases}-2\\3\end{cases} \quad C\begin{cases}-4\\-1\end{cases} \quad D\begin{cases}3\\-2\end{cases}$$

Ülesanne 43. Kolm sirgjoont G_1, G_2 ja G_3 olgu nende telglõigete abil antud

$$G_1\begin{cases}s_1 = 5\\t_1 = 2\end{cases} \quad G_2\begin{cases}s_2 = -2\\t_2 = -6\end{cases} \quad G_3\begin{cases}s_3 = 10\\t_3 = -2\end{cases}$$

Missugused on nende kolme sirgjoonte abil kujutet kolmnurga nurgad?

Ülesanne 44. Antud on $\triangle$-ga ABC tippude koordinaadid

$$A\begin{cases}7\\5\end{cases} \quad B\begin{cases}-3\\-1\end{cases} \quad C\begin{cases}3\\-3\end{cases}$$

Kui suured on kolmnurga nurgad?

---

*) Edaspidi olgu see sümboolne kirjutusviis tarvitet lühendet tähendusena sirgjoone ja ta võrrandi pahema poole asemel.

Ülesanne 45. Missuguse nurga moodustavad ühendusjooned PM ja PN, kui M on sisemine ja N väline jaotuspunkt suhtes 5 : 3 jaotet joonlõigul AB?

$$A\begin{cases}-10\\ 2\end{cases}\qquad B\begin{cases}-2\\ -6\end{cases}\qquad P\begin{cases}2\\ 7\end{cases}$$

Ülesanne 46. Antud on sirgjoon $G \equiv 4x - 9y + 36 = 0$ ja punkt $P\begin{cases}4\\ -12\end{cases}$. P läbi tuleb kaks sirgjoont L_1 ja L_2 tõmmata, mis sirgjoonega G moodustaksid võrdkülgse kolmnurga. Missugused on sirgete L_1 ja L_2 võrrandid?

§ 12. Paralleeljooned.

Paralleelsed sirgjooned moodustavad $+X$-teljega ühesuurused nurgad α, seepärast on ka $tg\,\alpha$ mõlemail ühesuurune.

Et kaks sirgjoont paralleelsed oleksid, peavad nende sihitegurid vôrdsed olema.

Seepärast on, kui

$$y = mx + t$$

sirgjoone G võrrand on, temaga paralleelse sirgjoone G_1 võrrand:

$$y = mx + t_1 \quad \text{ja}$$

punktist $P\begin{cases}x_1\\ y_1\end{cases}$ läbimineva ja sirgega G paralleelse joone võrrand

$$y - y_1 = m\,(x - x_1).$$

Kontroll. § 11. 1) järel võib kahe sirgjoone G_1 ja G_2 vahelist nurka φ leida avaldusest:

$$tg\,\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

Et sirgjooned paralleelsed oleksid, peab $\varphi = 0$ ja $tg\,\varphi = 0$ olema. See on võimalik, kui murru lugeja nulliks saab:

$$m_2 - m_1 = 0$$

$$\text{ehk}\quad m_1 = m_2.$$

Ülesanne 47. Küsimused. 1. Missuguseid tingimusi peavad võrrandite $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ ja $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ koeffitsiendid a_1, a_2; b_1 ja b_2 täitma, et nende võrrandite abil antud sirgjooned paralleelsed oleksid?

2. Mispärast on kõik sirgjooned, millede võrrandid ainult jäädava liikme poolest erinevad, paralleelsed?

3. Mispärast on $G = d$ ja $G = -d$ nende sirgjoonte võrrandid, mis kaugusel d sirgjoonest $G = 0$ on tõmmatud, kui viimane võrrand normaalkujul on antud?

Ülesanne 48. Kolmnurga ABC tippudest läbi on paralleeljooned vastasküljgedele tõmmatud. Missugused on nende võrrandid?

$$A\begin{cases}-5\\ 5\end{cases} \quad B\begin{cases}4\\ -1\end{cases} \quad C\begin{cases}-2\\ -3\end{cases}$$

Ülesanne 49. Mispärast on sirged $3y-2x=6$ ja $10x-15y=24$ paralleelsed ja kui suur on nende kaugus?

Ülesanne 50. Tõmba sirgjoonele $G\equiv 5x+12y+26=0$ kaugusel 4 paralleeljooned. Missugused on nende võrrandid?

§ 13. Perpendikulaarsed sirgjooned.

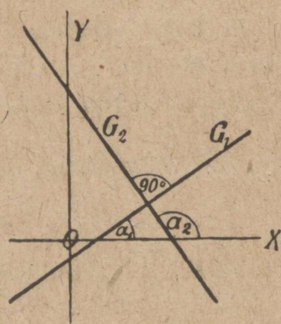
Olgu α_1 ja α_2 kahe perpendikulaarse sirgjoone nurgad $+$ X-teljega (joonis 25), siis on

$$\alpha_2=90^0+\alpha_1.$$

$$tg\,\alpha_2=tg\,(90^0+\alpha_1)=-\,cotg\,\alpha_1=-\frac{1}{tg\,\alpha_1}$$

Teine tuletus. Valemist § 11 järgneb, kui me $\varphi=90^0$ paneme:

$$tg\,90^0=\infty=\frac{tg\,\alpha_2-tg\,\alpha_1}{1+tg\,\alpha_2\,.\,tg\,\alpha_1}.$$



Joonis 25.

See võrdus saab rahuldet, kui nimetaja nulliks saab:

$$1+tg\,\alpha_1\,.\,tg\,\alpha_2=0,$$

kust saame

$$\mathrm{tg}\,\alpha_2=-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha_1}$$

s. t. **antud sirgega perpendikulaarse sirgjoone sihitegur võrdub antud sirgjoone negatiivse vastupidise sihiteguriga.**

Kui antud sirgjoone G võrrand on

$$y=m\,x+t,$$

siis on perpendikulaarse sirgjoone G_1 võrrand

$$y=-\frac{1}{m}x+t_1$$

ja punktist $P\begin{cases}x_1\\ y_1\end{cases}$ läbimineva perpendikulaarse sirgjoone võrrand

$$y-y_1=-\frac{1}{m}(x-x_1).$$

Ülesanne 51. Missuguseid tingimusi peavad rahuldama võrrandite

$$a_1\,x+b_1\,y+c_1=0 \text{ ja } a_2\,x+b_2\,y+c_2=0$$

koeffitsiendid a_1, b_1, a_2 ja b_2, et nende võrranditega määratud sirgjooned perpendikulaarsed oleksid?

Ülesanne 52. Missugused on $\triangle\,ABC$ kõrguste võrrandid?

$$A\begin{cases}9\\ 3\end{cases} \quad B\begin{cases}-2\\ 5\end{cases} \quad C\begin{cases}-10\\ -6\end{cases}$$

Ülesanne 53. Missugused on nende sirgjoonte võrrandid, mis joonlõiguga AB perpendikulaarsed olles teda suhtes 5:3 jagavad? Missugune on algpunktist AB-le lastud ristjoone võrrand?

$$A\begin{cases}-6\\3\end{cases}\quad B\begin{cases}2\\7\end{cases}$$

Ülesanne 54. Sirgjoone $G \equiv 3x + 2y + 18 = 0$ lõikepunktest koordinaatide telgedega peab ristjooned sirgjoonele G tõmbama. Missugused on nende võrrandid?

§ 14. Kahe sirgjoone lõikepunkti koordinaadid.

Kui tarvis on leida kahe sirgjoone

(1) $$\begin{cases}G_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \text{ ja}\\ G_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0\end{cases}$$

lõikepunkti P koordinaadid $\begin{cases}x_0\\y_0\end{cases}$, siis arvame järgmiselt:

Et P ühel ajal asub sirgjoontel G_1 ja G_2, siis peavad ta koordinaadid nii esimese kui ka teise võrrandi rahuldama; nii et

$$a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = 0 \text{ ja}$$
$$a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 = 0.$$

Nende mõlemate võrrandite lahendus x_0 ja y_0 järele annab lõikepunkti koordinaatidena

(2) $$x_0 = \frac{b_1 c_2 - c_1 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \text{ ja } y_0 = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Samade avalduste juure jõuame, kui kohe ülemal antud G_1-se ja G_2-se võrrandid lahendame x-i ja y-i järele. Siit saame järgmise **reegli**:

Et kahe joone lôikepunkti koordinaadid leida, lahendakse mõlemate joonte vôrrandid x-i ja y-i järele.

NB. See reegel ei ole mitte ainult sirgjoonte kohta maksev, vaid üldiselt!

Järeldus. Mõlemad avaldused x_0 ja y_0 saavad lõpmatu suureks, s. t. nende lõikepunkt langeb lõpmatusse, kui nimetaja $a_1 b_2 - a_2 b_1$ saab nulliks, see on, kui

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2,$$

s. t. kui mõlemate sirgjoonte G_1 ja G_2 sihitegurid võrdsed on, teiste sõnadega, kui sirged on paralleelsed. (Võrdle § 12!)

Ülesanne 55. Mispärast kujutavad neli sirgjoont

I. $2x - 5y + 20 = 0$ III. $2x - 5y - 18 = 0$
II. $3x + 2y + 11 = 0$ IV. $3x + 2y - 27 = 0$

parallelogrammi?

Missugused on tippude koordinaadid ja diagonaalide lõikepunkti M koordinaadid?

(Määra kontrolliks punkt M üks kord diagonaali keskpunktina ja siis mõlemate diagonaalide lõikepunktina!)

Ülesanne 56. Olgu antud kaks punkti $A\begin{cases}-16\\ 11\end{cases}$ ja $B\begin{cases}5\\ -17\end{cases}$ ning sirgjoon $G \equiv 17x - 6y + 38 = 0$.

G-l asuvast punktist P, mille abstsiss on $+2$, peab sirgjoonele AB ristjoon L tõmmatama. Missugused on selle ristjoone aluspunkti koordinaadid?

Ülesanne 57. Kolme kolmnurga külje võrrandid on

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad 5x - 6y - 77 = 0 \\ &\text{II.} \quad 10x + 17y - 96 = 0 \\ &\text{III.} \quad 4x + y + 8 = 0 \end{aligned}$$

Määra

a) kolme külje pikkused,

b) kolme kolmnurga kõrguse võrrandid,

c) kahe kõrguse lõikepunkti koordinaadid, ja näita, et ka kolmas kõrgus seilest lõikepunktist läbi läheb!

Ülesanne 58. $\triangle ABC$ tipud on: $A\begin{cases}3\\ 3\end{cases}$ $B\begin{cases}-1\\ -7\end{cases}$ $C\begin{cases}4\\ -5\end{cases}$.

Säe kolme küljepoolitaja võrrandid, määra kahe küljepoolitaja lõikepunkti koordinaadid ja näita, et ka kolmas küljepoolitaja sellest punktist läbi läheb!

Ülesanne 59. Kolme $\triangle$-ga ABC külje võrrandid on

$$AB \equiv 5x - y - 37 = 0 \qquad AC \equiv x - y - 5 = 0$$
$$BC \equiv 2x - 3y - 20 = 0.$$

Näita, et kolm külgede keskpunktidest läbitõmmatud ristjoont ühes punktis lõiguvad! Missugused on kolmnurga ümber joonetet ringjoone keskpunkti koordinaadid, ja kui suur on selle raadius?

Märkus. Ühendus võrrandite õpetusega.

Et avaldused (2) võrrandite (1) otsused on, kui viimastes vaatame x-i ja y-i peale kui **otsitavate** peale (NB. Mitte ära segada nende tähtede kui **muutuvate** tähendusega), siis olgu siinkohal ühendus võrrandite õpetusega meele tuletet.

Kaks esimese astme võrrandit otsitavatega x ja y võime graafilisel teel nii lahendada, et me mõlemate võrrandite abil kujutet sirgjooned koordinaadistikku joonetame; siis on nende lõikepunkti koordinaatide arvulised suurused mõlemate võrrandite otsused.

Ülesanne 60. Lahenda järgmised võrrandid graafilisel teel.

α) $4x + 3y = 24$	γ) $2x - y = -6$
$3x - 7y = -21$	$10x - 18y = 45$
β) $2x + 5y = 20$	δ) $6x + 14y = -21$
$7x + 2y = -14$	$3x - 5y = 15.$

§ 15. Geomeetrilised kohad.

Küsimused. 1. Missugused geomeetrilised kohad on õpilasele planimeetriast tuntud?

2. Missugune on nende punktide geomeetriline koht, millede kauguste suhe

a) kahest antud sirgjoonest G ja L,

b) kahest antud punktist A ja B

jäädav on ja võrdne $m:n$?

Saame ligikaudse ettekujutuse otsitavast geomeetrilisest kohast, kui joonetame mõned punktid, mis antud tingimusele vastavad, ja nad joonlõikudega ühendame. Eelmistes näitustes saime veel joont kui geomeetrilist kohta seletada elementaariste planimeetriliste abinõudega. Mõlemais järgmisis ülesandeis saame aga, hoolimata lihtsaist tingimusist, geomeetrilise koha kuju leida esialgu ainult üksikute punktide konstruktimise abil.

Ülesanne 61. Antud on punkt F ja sirgjoon G. Jooneta punktikaupa kõigi nende punktide geomeetriline koht, millede kauguste suhe punktist F ja sirgest G jäädav on ja võrdne $m:n$!

$$\alpha)\ m:n = 2:3$$
$$\beta)\ m:n = 3:2$$
$$\gamma)\ m:n = 1:1.$$

(Joonetamisel võta F 25 mm. sirgest G.)

Ülesanne 62. Antud on kolmnurga alus $BC = a$. Olgu ikka nurk aluse ühes otsas kaks korda nii suur kui nurk aluse teises otsas. Jooneta see joon, mida mööda kolmnurga tipp A seejuures liigub!

Kõige kindlama metoodi geomeetrilise koha, kuju ja omaduste leidmiseks annab analüütiline geomeetria, kus katsutakse sääda otsitava joone võrrand. Selgitame need metoodid, mis sellele eesmärgile viivad, mõne näitusega.

1. näitus. Antud on kaks punkti A ja B, millede kaugus $2c$. Missugune on nende punktide geomeetriline koht, millede kauguste ruutude vahe antud punktidest on a^2?

Kõige enne peame koordinaadistiku õieti valima. Me valime siin otstarbekohaselt joone AB X-teljeks ja ristjoone läbi joonlõigu AB keskpunkti O Y-teljeks. Siis peab olema

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = a^2.$$

Otsitava geomeetrilise koha mistahes punkti P koordinaadid olgu ξ ja η, siis peab olema

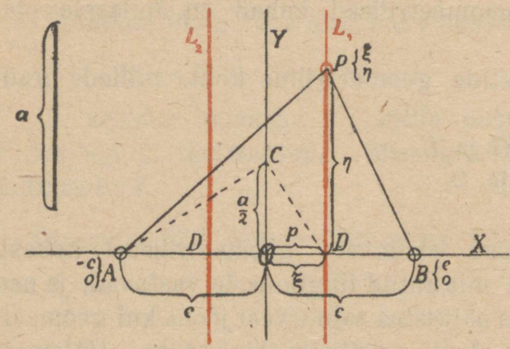
$$(\sqrt{(\xi + c)^2 + \eta^2})^2 - (\sqrt{(\xi - c)^2 + \eta^2})^2 = a^2.$$

Iga punkt, mille koordinaadid ξ ja η selle võrrandi rahuldavad, asub otsitaval geomeetrilisel kohal; seepärast on see geomeetrilise koha võrrand. Lihtsustades saame

$$4\xi c = a^2.$$

Kui nüüd muutuvad tähendame ξ ja η asemel harilikult tarvitusel olevate tähtedega x ja y, siis on geomeetrilise koha võrrand

$$x = \frac{a^2}{4c}.$$



Joonis 26.

See on X-teljega perpendikulaarse, kaugusel $p = \frac{a^2}{4c}$ algpunktist asuva, sirgjoone võrrand.

Seda kaugust $p = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{c}$ võime kergesti kolmanda proportsionaalsena $\frac{a}{2}$ ja c juure konstruida, kui võtame $OC = \frac{a}{2}$ ja tõmbame $CD \perp AC$ (joonis 26). Ristjoon X-teljele punktist D on siis geomeetriline koht L_1.

Oleksime võinud samuti nõuda, et

$$\overline{PB}^2 - \overline{PA}^2 = a^2$$

ja oleksime siis saanud võrrandi

$$-4\xi c = a^2$$

ehk x abil kirjutades

$$x = -\frac{a^2}{4c},$$

mis sirgele L_2 vastab.

Otsitava geomeetrilise koha kuju on niiviisi kaks Y-teljega paralleelist sirgjoont L_1 ja L_2, millede kaugus Y-teljest on $\frac{a^2}{4c}$.

Esialgselt antud geomeetrilise koha tingimuse saime selles ülesandes võrrandi näol kirjutada. Sarnaste ülesannete lahendamiseks tarvitakse

I metoodi:

Kui geomeetrilise koha kohta käivat tingimust võib avaldada võrrandi näol (näituseks küsitava punkti ja antud punktide või sirgjoonte kauguste vahel), **siis avaldakse selles võrrandis ettetulevad suurused küsitava punkti koordinaatide ξ, η ja antud suuruste abil. Sel teel saadud võrrand ongi geomeetrilise koha võrrand.**

Ülesanne 63. Antud on joonlõik $AB = 2c = 14$. Selle joonlõigu peal on tarvis kolmnurgad ABC nii ehitada, et

$$\cot g\, \alpha - \frac{5}{9} \cot g\, \beta = \frac{14}{27}.$$

Missugune on tipu C geomeetriline koht?

2. näitus. Kolmnurga OBC alus $OB = c$ asub X-teljel, nii et ta ots O algpunktis asub. Tipp C liigub sirgjoonel G, mille võrrand $y = mx + t$. Missugune on kolmnurga raskuspunkti S geomeetriline koht?

Selles ülesandes me ei saa koordinaadistikku enam vabalt valida, sest ta seis on juba määratud.

Küsitava punkti S asukoht oleneb siis punkti C asukohast, mis kulgeb antud sirgjoone G, mille võrrand

$$y = mx + t.$$

Punkti C koordinaadid $\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ rahuldavad seepärast võrrandi.

Et otsitava geomeetrilise koha võrrand peab esinema olenevusena küsitava punkti S koordinaatide $\left\{\begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix}\right.$ ja antud suuruste vahel, siis avaldame koordinaadid x ja y koordinaatide ξ ja η abil.

Et $ES : EC = 1 : 3$ (joonis 27), siis järgneb

$$y = 3\eta \text{ ja } x - \frac{c}{2} = 3\left(\xi - \frac{c}{2}\right).$$

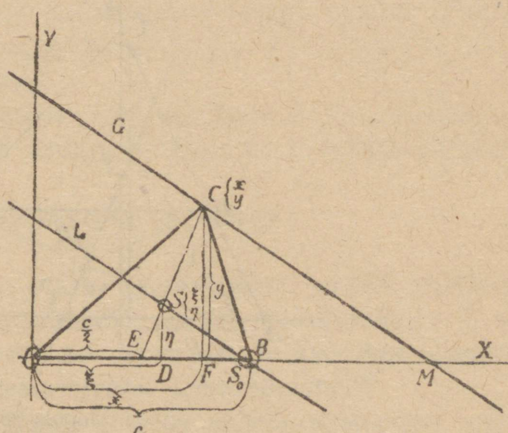
Sellest järgneb

$$x = 3\xi - c \qquad y = 3\eta.$$

Need koordinaadid peavad sirgjoone G võrrandi rahuldama. Kui need avaldused asemele paneme, siis saame võrrandi

$$3\eta = m(3\xi - c) + t,$$

mille ξ ja η peavad rahuldama. Seepärast on see punkti S geomeetrilise koha võrrand. Kirjutades x, y tähtede ξ ja η asemel ja korraldades leiame



Joonis 27.

$$3mx - 3y = mc - t.$$

See on ühe sirgjoone $L \parallel G$ võrrand, sest mõlematel on samane sihitegur m.

Piirjuhtumus: Kui C sirgjoonel G selle joone ja X-telje lõikepunktisse M jõuab, siis kõduneb $\triangle OBC$ joonlõiguks OM. S langeb siis punktisse S_0, mis joonlõigu EM suhtes $1:2$ jaotab, nii et $ES_0 = \frac{1}{3} EM$.

Geomeetriline koht on niiviisi sirgjoonega G paralleelne joon L läbi punkti S_0.

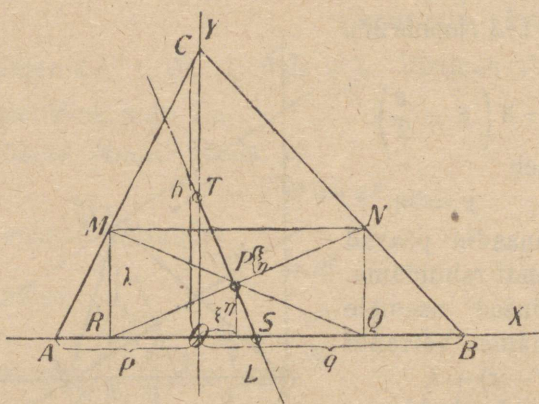
Sarnased ülesanded lahendakse

II metoodi järele: **Kui küsitava punkti P seis ripub mõne punkti C seisust, kus C kulgeb joone f (x, y) = 0, siis avaldakse punkti C koordinaadid x ja y küsitava punkti P koordinaatide ξ, η ja antud pikkuste abil ja asetakse x-i ja y-i väärtused võrrandisse f (x, y) = 0, misläbi saame geomeetrilise koha võrrandi leitud võrrandi näol.**

Ülesanne 64. Punktist $A \begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}$ olgu kiired sirgjooneni $G \equiv ax + by + c = 0$ tõmmatud ja iga kiir olgu jaotet suhtes $m:n$. Missugune on jaotuspunktide geomeetriline koht?

3. näitus. Kolmnurgas ABC on antud küljele AB lastud kõrgus h ja selle kõrguse läbi AB-l kujutet osad $OA = p$ ja $OB = q$. $\triangle ABC$ sisse joonetakse täisnurksed nelinurgad nii, et üks nelinurga külg alati AB-l asub. Missugune on nende nelinurkade diagonaalide lõikepunkti geomeetriline koht?

Selles ülesandes valime otstarbekohaselt külje AB X-teljeks ja kolmnurga kõrguse Y-teljeks (joonis 28). Et diagonaalide lõikepunkti P seisu juure tulla, peame enne ehitama täisnurkse nelinurga. Selle muutuva nelinurga seis ja sellega punkti P seis oleneb ühe muutuva suuruse,



Joonis 28.

näituseks nelinurga kõrguse λ, valikust. Niipea kui oleme λ valinud, leiame küsitavaist nelinurkadest ühe ja ka ühe kindla punkti P. Muutuv suurus λ kutsutakse **parameetriks**.

Meie eesmärk on punkti P koordinaatide ξ, η ja antud suuruste vahel võrrand säädа. Seepärast säeme olenevused ξ, η ja parameetri λ vahel.

1) $\eta = \frac{\lambda}{2}$

2) $\xi + p = AR + \frac{1}{2} MN$

3) $AR : p = \lambda : h$

4) $MN : (p + q) = (h - \lambda) : h$

Sellest saame

1) $\eta = \frac{\lambda}{2}$

2) $\xi + p = \frac{p}{h} \cdot \lambda + \frac{(p + q) \cdot (h - \lambda)}{2h}$.

Nende mõlemate võrranditega on nüüd olenevused ξ, η ja λ vahel antud. Kui mõlemaist kaotame parameetri λ, siis saame võrrandi, milles ainult veel ξ ja η esinevad ja mille iga küsitava punkti P koordinaadid peavad rahuldama; see on aga siis geomeetrilise koha võrrand. Me saame

$$2h\xi + 2\eta(q - p) = h(q - p)$$

ehk tähtedega x ja y kirjutades

$$\frac{x}{\frac{1}{2}(q - p)} + \frac{y}{\frac{1}{2}h} = 1.$$

See on sirgjoone L võrrand telglõigetega $s = \frac{1}{2}(q - p)$ ja $t = \frac{1}{2}h$.

Piirjuhtumused: Kui $\lambda = 0$, siis kõduneb nelinurk joonlõiguks AB, nii et P asub AB keskpunktis S.

Kui $\lambda = h$, kõduneb nelinurk kõrguseks $OC = h$, nii et P asub OC keskpunktis T.

Et $\triangle ABC$ sisse joonetet nelinurgal λ suurus piiride O ja h vahel võib muutuda, siis võib sirgjoonest L ainult osa ST geomeetrilise kohana tarvitada.

Küsimus. Kuidas peaks laiendama „kolmnurga sisse joonetet täisnurkse nelinurga“ mõistet, et saaksime sirgjoont L terves ulatuses otsusena tarvitada?

Sellesarnaste ülesannete lahendamiseks tarvitakse

III metoodi:

Võetakse tarvitusele muutuv suurus (parameeter), millest küsitava punkti seis oleneb. Siis säetakse küsitava punkti koordinaatide ξ, η, parameetri ja antud suuruste vahel kaks võrrandit ja kaotakse nendest parameeter. Leitud võrrand on geomeetrilise koha võrrand.*)

Ülesanne 65. Jooneta antud nurga külgede vahele täisnurkne nelinurk antud ümbermõõduga u nõnda, et kaks ta tippu asuksid ühel nurga küljel ja kolmas — teisel nurga küljel. Missugune on neljanda tipu geomeetriline koht?

Ülesanne 66. Antud on punktid $A\begin{cases}3\\6\end{cases}$ ja $B\begin{cases}-7\\-4.\end{cases}$ Missugune on nende punktide geomeetrilise koha võrrand, mis punktidest A ja B ühel kaugusel asuvad?

Ülesanne 67. Joonlõigule MN kui alusele on kolmnurgad MNP ühesuguse kõrgusega $h = 6$ ehitet. Missugusel joonel asuvad kõik tipud P?**)

$$M\begin{cases}-7\\-7\end{cases} \qquad N\begin{cases}-5\\-2\end{cases}$$

Ülesanne 68. Sirgjoon G olgu telglõigetega $s = -1\frac{3}{4}$ ja $t = -6$ antud. Kus asuvad kõik punktid, mil sirgjoonest G on kaugus 4?**)

*) Harilikult katsume ülesanded I ehk II metoodi järele lahendada. Kui see ei õnnestu, siis tarvitame III metoodi.

**) Näita saadud geomeetrilise koha võrrandi kallal selle koha planimeetriast tuttavad omadused analüütilis-geomeetrilisel teel.

Ülesanne 69. Missugune on nende punktide geomeetriline koht, mis sirgjoontest $G_1 \equiv 16x + 63y + 221 = 0$ ja $G_2 \equiv 12x + 5y + 39 = 0$ ühel kaugusel asuvad?*)

Ülesanne 70. Leia nende punktide geomeetriline koht, millede kauguste suhe sirgjoontest $G_1 \equiv 15x - 8y - 20 = 0$ ja $G_2 \equiv 13x + 84y - 472 = 0$ on $10:7$.*)

Ülesanne 71. Muutuvas kolmnurgas ABC olgu külg c kindel ja tipust B tõmmatud küljepoolitaja kujutagu küljega c jäädava nurga ε. Missugusel joonel liigub tipp C?

Ülesanne 72. Täisnurga külgede vahel on antud sirgjoonele paralleeljooned tõmmatud ja saadud joonlõigud suhtes λ jaotet. Kus asuvad jaotuspunktid?

Ülesanne 73. Antud on kaks sirgjoont G ja G_1, mis nurga α all lõiguvad. Missugune on punkti P geomeetriline koht, mis niiviisi liigub, et ta kauguste summa sirgjoontest G ja G_1 on jäädav $= s$?

Ülesanne 74. Kolmnurga ABC tippude koordinaadid olgu

$$A\begin{cases}0\\0\end{cases} \qquad B\begin{cases}8\\0\end{cases} \qquad C\begin{cases}3\\5.\end{cases}$$

Küljel AB ja selle pikendustel liigub punkt D punktist A edasi ja E punktist B edasi vastupidistes sihtides. Ikka kui $AD = BE$ on, lastakse punktist D AC-le ja punktist E BC-le ristjooned. Missugune on nende ristjoonte lõikepunktide geomeetriline koht?

Ülesanne 75. $\triangle\, ABC$ tippudega

$$A\begin{cases}-2\\0\end{cases} \qquad B\begin{cases}4\\0\end{cases} \qquad C\begin{cases}0\\6\end{cases}$$

lõigatakse sirgjoontega, mis AB-ga paralleelsed on. Lõikepunktidest mõlemate teiste kolmnurga külgedega tõmmatakse viimastele perpendikulaarid. Missugust geomeetrilist kohta kujutab vastavate ristjoonte lõikepunkt?

Ülesanne 76. Antud on sarikkolmnurk ABC alusega $2a$ ja kõrgusega h. Kõrgusel ja selle pikendusel liiguvad kaks punkti D ja E punktist A eemale vastupidistes sihtides nii, et $AD : AE = 4:3$. Punktist B tõmmatakse ristjoon CD-le ja punktist C — EB-le. Missugune on mõlemate ristjoonte lõikepunkti geomeetriline koht?

Ülesanne 77. Muutuvas $\triangle\, ABC$ olgu nurk $BAC = 30^0$ ja ta kõrval olevate külgede summa $s = 10$ jäädav. Missugune on selle punkti P geomeetriline koht, mis kolmanda külje alati jaotab suhtes $BP : CP = 2:3$?

---

*) Näita saadud geomeetrilise koha võrrandi kallal selle koha planimeetriast tuttavad omadused analüütilis-geomeetrilisel teel.

B. Ringjoon.

§ 16. Ringjoone võrrand.

A. Keskpunkt alguses.

Igal punktil P koordinaatidega x ja y (joonis 29) on, kui ta ringjoonel peab asuma,

$$\overline{OP} = r = \text{raadius; nõnda on}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ringjoone võrrand keskpunktiga alguses.

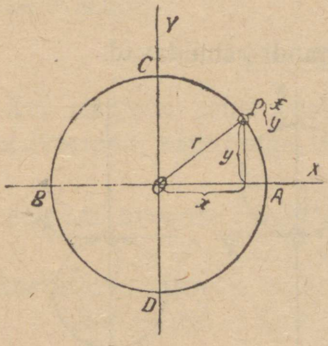
Võrrandi uurimine.

$$x = \pm\sqrt{r^2 - y^2},$$

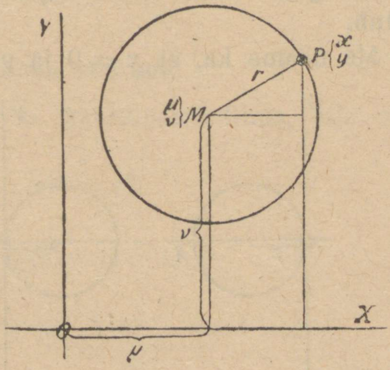
s. t. igale väärtusele $y < r$ vastab kaks ühesuurust x väärtust, mis ainult märgi poolest erinevad; kõverjoon on seepärast Y-telje suhtes sümmeetriline.

$y = 0$ annab $x = \pm r$, s. t. punktid A ja B;

$y = \pm r$ annab $x = 0$, s. t. punktid C ja D.



Joonis 29.



Joonis 30.

Absoluutsele väärtusele $|y| > r$ vastab imaginaarne x; s. t. reaalsed kõverjoone punktid vastavad ainult ordinaatidele, mis C ja D vahel asuvad.

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

näitab analoogselt, et kõverjoon ka X-telje suhtes sümmeetriline on ja et ainult A ja B vahel asuvate abstsisside juures saame reaalsed kõverjoone punktid.

B. Keskpunkt mistahes koordinaatidega $\begin{cases}\mu \\ \nu\end{cases}$.

Ka siin (joonis 30) on iga punkti $P\begin{cases}x \\ y\end{cases}$ kohta

$PM = r$, järelikult

$$(x - \mu)^2 + (y - \nu)^2 = r^2$$

ringjoone normaalvõrrand.

$\left.\begin{matrix}\mu \\ \nu\end{matrix}\right\}$ on keskpunkti koordinaadid, r ringi raadius.

Ülesanne 78. Missugune on ringjoone võrrand, mil keskpunkti koordinaatideks $\begin{cases}\mu \\ \nu\end{cases}$ ja raadiuseks r on järgmised arvulised suurused?

	α	β-	γ	δ
μ	3	-4	$-5\frac{1}{2}$	2
ν	2	7	$-3\frac{1}{3}$	-6
r	5	3	$9\frac{1}{4}$	4

Erijuhtumused.

1) Ringjoon läbi algpunktist.

Sel juhtumusel on $\mu^2 + \nu^2 = r^2$

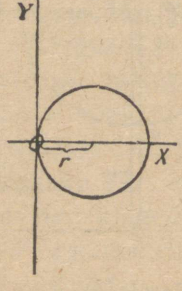
$$(x - \mu)^2 + (y - \nu)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2\mu x - 2\nu y + \underbrace{\mu^2 + \nu^2}_{r^2} = r^2$$

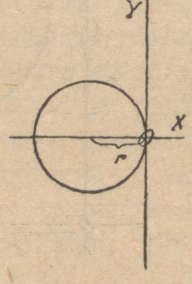
$$x^2 + y^2 - 2\mu x - 2\nu y = 0.$$

Ringjoon läheb läbi algpunktist, kui ta võrrandis jäädav liige puudub.

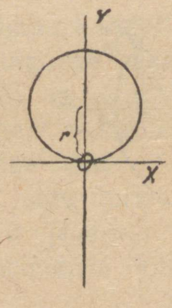
Me näeme ka, et $x = 0$ ja $y = 0$ võrrandi rahuldavad.



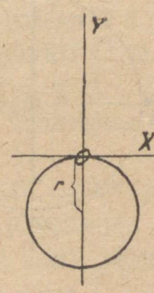
Joonis 31a.



Joonis 31b.



Joonis 31c.



Joonis 31d.

2) Ringjoon läbi algpunktist, mis Y-telge puutub.

$\mu = r$; $\nu = 0$ (joonis 31a)

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0$$

(NB. Jäädav liige puudub.)

Selle võrrandi võime veel järgmisel kujul kirjutada:

$$y^2 = x\,(2r - x).$$

Ülesanne 79. Säe analoogselt joonistel 31 b, c, d kujutet ringjoonte võrrandid!

$$3)\quad (x - \mu)^2 + (y - \nu)^2 = 0$$

kujutab ringjoont raadiusega 0, s. t. punkti koordinaatidega $\begin{cases}\mu \\ \nu\end{cases}$.

Ülesanne 80. Missugune on ringjoone võrrand

α) mis läbi läheb algpunktist ja mille keskpunkt on $M\begin{cases}12 \\ 5\end{cases}$;

β) läbi punktist $P\begin{cases}-11 \\ -1\end{cases}$ keskpunktiga $M\begin{cases}-7 \\ 2\end{cases}$;

γ) läbi punktidest $P\begin{cases}7 \\ 3\end{cases}$ ja $Q\begin{cases}-2 \\ -12\end{cases}$ ja raadiusega $r = \sqrt{85}$?

Ülesanne 81. Määra ringjoone võrrand,

α) mis läbi läheb punktist $P\begin{cases}-8 \\ -11\end{cases}$ ja Y-telge punktis $Q\begin{cases}0 \\ -7\end{cases}$ puutub;

β) mis läbi läheb punktist $P\begin{cases}1 \\ 2\end{cases}$ ja mõlemaid koordinaatide telgi puutub!

Ülesanne 82. Missugune on ringjoone võrrand, mis läbi läheb punktidest $A\begin{cases}1 \\ 4\end{cases}$ ja $B\begin{cases}-1 \\ +2\end{cases}$ ja X-telge puutub?

Ülesanne 83. Missugune on ringjoone võrrand, mis läbi läheb punktidest $A\begin{cases}2 \\ -3\end{cases}$ ja $B\begin{cases}-10 \\ 3\end{cases}$ ja mille keskpunkt sirgel $G \equiv x - 2y + 10 = 0$ asub?

C. Üldine ringjoone võrrand.

Kui ringjoon asub mistahes seisus koordinaadistikus, siis on ta normaalvõrrand, nagu enne leitud,

$$(x - \mu)^2 + (y - \nu)^2 = r^2.$$

Sulgude avamise järele saame

$$x^2 - 2\mu x + \mu^2 + y^2 - 2\nu y + \nu^2 = r^2$$

ehk kasvatades jäädava teguriga

$$Ax^2 + Ay^2 - 2\mu Ax - 2\nu Ay + \underbrace{(\mu^2 + \nu^2 - r^2)\,A}_{D} = 0.$$

Negatiivsed märgid liikmeil x ja y-iga ei ole olulised, sest kui μ ja ν on negatiivsed, saavad kordajad $-2\mu A = B$ ja $-2\nu A = C$ positiivseks. Ringjoone võrrandi kuju on nõnda

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0.$$

See on II astme võrrand.

Üldisem II astme võrrand kahe muutuvaga x ja y on

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$$

Võrdlemise teel leiame, et

II astme võrrand kujutab ringjoont, kui

1) kordajad liigetel, mis x^2 ja y^2 sisaldavad, võrdsed on ja kui

2) xy sisaldav liige puudub.

Üldine ringjoone võrrand on siis järgmine:

$$\mathbf{Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0.}$$

D. Üldise ringjoone võrrandi muutmine normaalkujuliseks.

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$$

peab muudetama võrrandiks

$$(x - \mu)^2 + (y - \nu)^2 = r^2.$$

Esiteks jagame kordajaga A:

$$\underbrace{x^2 + \frac{B}{A}x} + \underbrace{y^2 + \frac{C}{A}y} = -\frac{D}{A}.$$

Siis täiendame kaks korda teise astmeni:

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 = \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C^2}{4A^2} - \frac{D}{A} = \frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2}.$$

Nii on keskpunkti koordinaadid

$$\mu = -\frac{B}{2A} \text{ ja } \nu = -\frac{C}{2A}$$

ja raadius $r = \frac{\sqrt{B^2 + C^2 - 4AD}}{2A}$.

Järeldus. Keskpunkti koordinaadid olenevad ainult kordajaist A, B ja C, mitte aga kordajast D, s. t. kui kahe ringjoone võrrandid erinevad ainult jäädava liikme poolest, siis on mõlemad ringid ühiskeskesed.

Näitus: $9x^2 + 9y^2 + 90x - 54y + 137 = 0$

$$(x^2 + 10x) + (y^2 - 6y) = \frac{-137}{9}$$

$$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = \frac{-137}{9} + 25 + 9 = \frac{169}{9}$$

$$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = \left(\frac{13}{3}\right)^2.$$

See on ringjoone võrrand, mille keskpunkti koordinaadid on $\begin{cases} \mu = -5 \\ \nu = 3 \end{cases}$ ja raadius $r = 4\frac{1}{3}$.

Nüüd saame ringjoone õiges seisus koordinaadistikku joonetada.

Ülesanne 84. Määra järgnevate võrrandite abil antud joonte kuju ja seis!

α) $4x^2 + 48y + 16x + 4y^2 + 135 = 0$

β) $x^2 + y^2 + 14y = 8 + 16x$

γ) $(x - 9)(x + 5) + (y + 7)(y - 3) = 0$

δ) $(3x - 5) : (4 - y) = (6y + 11) : 2x.$

Ülesanne 85. Missugune on ringide K_1 ja K_2 keskjoone võrrand ja kui kaugel asub see sirge algpunktist?

$K_1 \equiv x^2 - 12x + y^2 - 10y + 52 = 0$

$K_2 \equiv x^2 + x + y^2 + 20y + 60 = 0.$

E. Ringjoon läbi kolmest punktist.

Antud on kolm punkti $P_1 \begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases}$, $P_2 \begin{cases} x_2 \\ y_2 \end{cases}$, $P_3 \begin{cases} x_3 \\ y_3 \end{cases}$; otsitakse selle ringjoone võrrandit, mis läbi läheb neist kolmest punktist.

I metood. Et otsitav ringjoon ühtlasi on $\triangle\, P_1 P_2 P_3$ ümber joonetet ringjoon, siis võiksime, nagu ülesandes 59 § 14, keskpunkti M kahe kolmnurga külgede keskelt tõmmatud ristjoonte lõikepunktina määrata ja siis raadiuse r kaugusena MP_1 leida.

II metood. Ringjoone võrrand on

$$(x - \mu)^2 + (y - \nu)^2 = r^2.$$

Selles on kolm tundmatut μ, ν ja r; seepärast on ring antud tingimustega määratud.

Et ringjoon peab P_1, P_2 ja P_3 läbi minema, siis peavad nende punktide koordinaadid ringjoone võrrandi rahuldama; nii peab olema

$$1)\ (x_1 - \mu)^2 + (y_1 - \nu)^2 = r^2$$
$$2)\ (x_2 - \mu)^2 + (y_2 - \nu)^2 = r^2$$
$$3)\ (x_3 - \mu)^2 + (y_3 - \nu)^2 = r^2$$

Nendest kolmest võrrandist võime tundmatud μ, ν ja r välja arvata.

Märkus. Selle asemel, et normaalvõrrandist välja minna, oleksime võinud ka ringjoone võrrandi üldise kuju

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

aluseks võtta ja selles A, B ja C leida.

Ülesanne 86. Lahenda selle ülesande järgmiste arvuliste andmetega!

$\alpha)$ $P_1 \begin{cases} 5 \\ 4 \end{cases}$ $P_2 \begin{cases} -7 \\ 6 \end{cases}$ $P_3 \begin{cases} -7 \\ -8 \end{cases}$

$\beta)$ $P_1 \begin{cases} -10 \\ 6 \end{cases}$ $P_2 \begin{cases} 4 \\ -8 \end{cases}$ $P_3 \begin{cases} 2 \\ -10 \end{cases}$

$\gamma)$ $P_1 \begin{cases} 8 \\ 10 \end{cases}$ $P_2 \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$ $P_3 \begin{cases} -2 \\ 6 \end{cases}$

$\delta)$ Missugune on $\triangle$-ga ABC üles. 59 ümber joonetet ringjoone võrrand?

§ 17. Ringjoon ja sirgjoon.

Et sirgjoonel

$$\text{I.}\quad ax + by + c = 0$$

ja ringjoonel

$$\text{II.}\quad x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

oleks ühine punkt, peavad selle koordinaadid mõlemaid võrrandid I ja II rahuldama. Seepärast leiame lõikepunkti koordinaadid, kui võrranditest

I ja II x ja y välja arvame. Kaotades y, saame x kohta teise astme võrrandi, millest näeme, et kaks lõikepunkti on olemas. Seepärast lõikab sirgjoon ringjoont kõige rohkem kahes punktis ja öeldakse, et

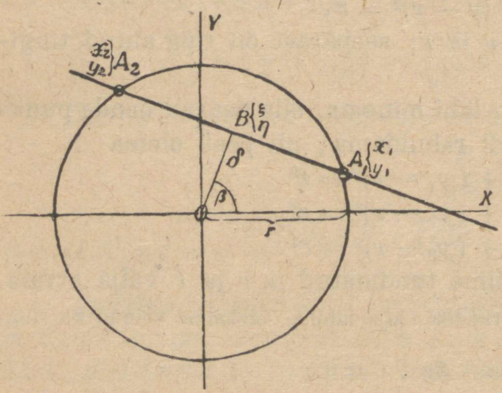
ringjoon on teise järgu kôverjoon.

Ülesanne 87. Missugustes punktides lõikab sirgjoon

$$G \equiv x - 7y + 36 = 0 \text{ ringjoont}$$
$$K \equiv x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0\,?$$

Kui pikk on G-l asuv sidejoon? Kui kaugel on viimane keskpunktist? Kui suur on talle vastav tsentrinurk? Missugustes punktides lõikab ringjoon koordinaatide telgi?

Kõigi võimalikkude sirgjoone ja ringjoone vastastikuste seisude uurimiseks minnakse välja (joonis 32) ringjoone keskpunktvõrrandist



Joonis 32.

$$\text{I.} \quad x^2 + y^2 = r^2$$

ja võetakse sirgjoone G võrrand normaalkujul

$$\text{II.} \quad x \cos\beta + y \sin\beta - \delta = 0.$$

Kui võrrandist II leitud väärtuse

$$y = \frac{\delta - x\cos\beta}{\sin\beta}$$

asemele paneme võrrandisse I, siis saame

$$\text{III.} \quad x^2 - 2\delta\, x \cos\beta = r^2 \sin^2\beta - \delta^2$$

ja sellest

$$x = \delta\cos\beta \pm \sin\beta\sqrt{r^2 - \delta^2}$$

Kui sirgjoone G kaugus ringi keskpunktist on

1) $\delta < r$, siis mõlemad lõikepunktid A_1 ja A_2 on reaalsed,
2) $\delta = r$, siis mõlemad lõikepunktid A_1 ja A_2 langevad ühte,
3) $\delta > r$, siis mõlemad lõikepunktid A_1 ja A_2 on imaginaarsed.

1. juhtumuses on G ringi lõikaja,
2. juhtumuses on G ringi puutuja,
3. juhtumuses läheb G väljaspool ringi sellest mööda.

Ülesanne 88. Leia sirgjoone G lõikepunktid ringjoonega K ja leia, kuidas sirgjoone G kaugus d ringi keskpunktist suhtub ringi raadiusega.

α) $G \equiv 7x - 17y + 169 = 0$
$\quad K \equiv x^2 + y^2 - 169 = 0$

β) $G \equiv 5x - 6y - 30 = 0$
$\quad K \equiv 4x^2 + 4y^2 - 49 = 0$

γ) $G \equiv 3x + 4y + 35 = 0$
$\quad K \equiv x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$

Ülesanne 89. Pane läbi punkti P ringi K sidejoon, mille P poolitab. Määra selle sidejoone võrrand ja ta otspunktide koordinaadid!

a) $P\begin{cases} -10\frac{1}{2} \\ -10\frac{1}{2} \end{cases}$ $K \equiv x^2 + y^2 - 225 = 0$

b) $P\begin{cases} -3 \\ 4 \end{cases}$ $K \equiv x^2 + y^2 - 144 = 0$

c) $P\begin{cases} 1 \\ 8 \end{cases}$ $K \equiv x^2 + y^2 + 6x - 10y - 66 = 0$

Märkus. Ühendus võrrandõpetusega. Eelmisest on selge, et kaks niisugust võrrandit:

I. $ax + by + c = 0$

II. $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

graafilisel teel nii võib lahendada, et I võrrandi näol antud sirgjoone ja II võrrandi näol antud ringi koordinaadistikku joonetame, mõlemate joonte lõikepunktid üles otsime ja nende koordinaadid mõõdame. Viimaste arvulised suurused on siis antud võrrandite otsused.

Ülesanne 90. Lahenda järgmised võrrandid graafilisel teel:

α) $x^2 + y^2 = 36$
$x - 3y + 12 = 0$

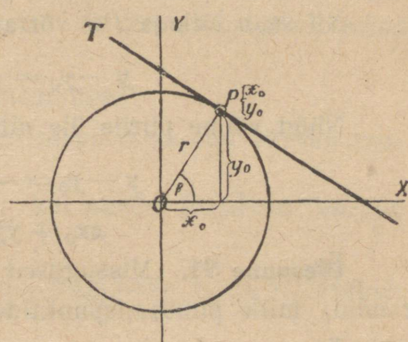
β) $x^2 + y^2 = 49$
$5x + 3y = 15$

γ) $x^2 + y^2 - 4y - 6x = 3$
$4x - 3y = 2$

δ) $x^2 + y^2 - 14x - 4y = 5$
$3x - 2y = 12.$

§ 18. Ringjoone puutuja.

Sirgjoon on ringi puutuja, kui ta kaugus keskpunktist ringi raadiusega võrdub.



Joonis 33.

Puutuja võrrand.

Ringjoone võrrand olgu $x^2 + y^2 = r^2$; puutumispunkti P koordinaadid (joonis 33) olgu x_0 ja y_0.

I metood. Et puutuja kaugus algpunktist peab r olema, siis on ta võrrand

$$x \cos\beta + y \sin\beta - r = 0.$$

Nüüd on

$$\cos\beta = \frac{x_0}{r} \qquad \sin\beta = \frac{y_0}{r};$$

nende suuruste asemelepanemise teel leiame puutuja võrrandi järgmisel kujul.

$$\frac{xx_0}{r} + \frac{yy_0}{r} - r = 0 \quad \text{ehk}$$

$$xx_0 + yy_0 = r^2$$

puutuja võrrand puutumispunktiga $\begin{cases} x_0 \\ y_0. \end{cases}$

II metood. Puutumispunktist $P\begin{cases}x_0\\y_0\end{cases}$ läbi tõmmatakse lõikaja PQ, mis kõverjoont veel punktis $Q\begin{cases}x_1\\y_1\end{cases}$ lõikab. Lõikjoone PQ võrrand on

$$\text{I.}\quad \frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

Selle lõikaja pöörame ümber punkti P. Seejuures liigub Q ikka rohkem P poole, nii et lõikaja saab puutujaks punktis P, kui Q punktiga P ühte langeb. Piirile üleminekut, mille juures $x_1=x_0$ ja $y_1=y_0$ pannakse, ei saa me mitte otsekohe ette võtta, sest esiteks saaks võrrandi I parem pool määramatu kuju $\frac{0}{0}$, teiseks ei ole veel tingimus, et P ja Q ringjoone punktid on, ära tarvitet. Peame seepärast murru $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ asemel saama niisuguse avalduse, milles saame ette võtta ülemineku piirile.

Punktide P ja Q koordinaadid peavad ringjoone võrrandi rahuldama, järelikult on

$$x_0^2+y_0^2=r^2$$
$$x_1^2+y_1^2=r^2$$

Mahaarvamise järele leiame

$$(x_0-x_1)(x_0+x_1)+(y_0-y_1)(y_0+y_1)=0$$

ehk

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=-\frac{x_0+x_1}{y_0+y_1}.$$

Nii saab lõikaja PQ võrrand järgmise kuju

$$y-y_0=-(x-x_0)\cdot\frac{x_0+x_1}{y_0+y_1}.$$

Nüüd võime piirile üle minna ja saame puutuja võrrandi

$$y-y_0=-(x-x_0)\cdot\frac{2x_0}{2y_0}\ \text{ehk}$$

$$xx_0+yy_0=x_0^2+y_0^2=r^2$$

Ülesanne 91. Missugused on ringjoone $x^2+y^2=16$ puutujate võrrandid, mille puutumispunktidel on abstsiss $x=2\frac{2}{5}$?

Ülesanne 92. Ringjoonele $4x^2+4y^2=225$ on kõiges neljas punktis, millede kaugus X-teljest on $4\frac{1}{2}$, puutujad tõmmatud. Missugused on nende võrrandid? Tõenda, et need puutujad rombi kujutavad!

Ülesanne 93. Punktist P peab puutujad ringjoonele K tõmmatama. Missugused on nende võrrandid ja kui suure nurga moodustavad need puutujad?

a) $K\equiv x^2+y^2-169=0$; $P\begin{cases}7\\-17\end{cases}$

b) $K\equiv x^2+y^2-100=0$; $P\begin{cases}-14\\-2\end{cases}$

(Puutuja võrrandi säädmisel pannakse tähele selle § algusel seisev lause.)

Ülesanne 94. Ringjoonele K peab puutujad paralleelselt sirgjoonega G tõmmatama. Leia nende võrrandid!

$$K \equiv x^2 + y^2 - 64 = 0\,; \quad G \equiv 3x + 4y - 28 = 0.$$

Ülesanne 95. Tõmba ringjoonele K puutujad, mis sirgega L perpendikulaarsed, ja leia nende võrrandid!

$$K \equiv x^2 + y^2 - 16 = 0\,; \quad L \equiv 8x + 15y - 30 = 0.$$

Ülesanne 96. Antud on ringjoon $x^2 + y^2 = 25$ ja sirgjoon $G \equiv 7x + y - 42 = 0$.

Otsitakse

a) selle joone T võrrandit, mis ringjoont niisuguses punktis puutub, mis teises veerandis asub ja mille ordinaat on 3,

b) sirgjoonega G paralleeliste puutujate võrrandit,

c) nurka, mille T nende paralleeliste puutujatega moodustab.

§ 19. Kahe ringi vastastikune seis.

Ülesanne 97. Kaks ringjoont K_1 ja K_2 keskpunktidega M_1 ja M_2 ja raadiustega r_1 ja r_2 asugu nii, et nende keskjoon on $M_1 M_2 > r_1 + r_2$. Hoiame ühe ringi paigal ja lükkame teise esimesele ikka lähemale. Missugused seisud on siin võimalikud ja kui suur on keskjoon igas üksikus juhtumuses?

Me saame teiste hulgas järgmised juhtumused:

Kaks ringjoont puutuvad väliselt, kui nende keskjoon võrdub raadiuste summaga.

Kaks ringjoont puutuvad seesmiselt, kui nende keskjoon võrdub raadiuste vahega.

Ülesanne 98. Missugune on järgnevate ringjoonte K_1 ja K_2 vastastikune seis?

1) $K_1 \equiv x^2 + y^2 - 12x - 4y - 9 = 0$
$K_2 \equiv x^2 + y^2 + 14x + 10y + 58 = 0$

2) $K_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 3y - 50 = 0$
$K_2 \equiv x^2 + y^2 - 24x - 18y + 125 = 0$

3) $K_1 \equiv x^2 + y^2 + 12x - 2y + 12 = 0$
$K_2 \equiv x^2 + y^2 - 8x + 13y + 2 = 0$

4) $K_1 \equiv 2x^2 + 2y^2 - 13x + 28y + 83 = 0$
$K_2 \equiv x^2 + y^2 + 16x + 2y - 224 = 0$

5) $K_1 \equiv 2x^2 + 2y^2 + 2x + 6y - 27 = 0$
$K_2 \equiv 25x^2 + 25y^2 - 30x + 30y - 82 = 0$

Missugused punktid on mõlemail ringjoontel igas üksikus juhtumuses ühised?

§ 20. Ringjoonekujulised geomeetrilised kohad.

Järgmised ülesanded tuleb § 16 I, II ja III metoodi järele lahendada.

Ülesanne 99. Antud on kaks punkti A ja B kaugusega $AB = a$. Missugune on nende punktide P geomeetriline koht, millede kauguste suhe $PA : PB = \lambda$ on jäädav?

Ülesanne 100. Antud on ringjoon $y^2 = 2rx - x^2$. Algpunktist on sidejooned ringis tõmmatud ja igaüks nendest punktiga P suhtes λ (seesmiselt ja väliselt) jagatud. Kus asuvad punktid P?

Erijuhtumus $\lambda = 2$.

Ülesanne 101. Muutuvas $\triangle$-as ABC on külje $BC = a$ seis jäädav, kuna külg $BA = c$ punkti B ümber pöördub. Missugust joont mööda liigub siis kolmanda külje AC keskpunkt?

Ülesanne 102. Kolmnurgas ABC alusega $BC = a$ olgu teiste külgede ruutude summa võrdne s^2. Missugune on tipu A geomeetriline koht?

Ülesanne 103. $BC = a$ peale on kolmnurgad ehitet, millede raskuskeskpunktid asuvad tipust B jäädaval kaugusel d. Missugune on kolmnurga ABC tipu A geomeetriline koht?

Ülesanne 104. Muutuvas kolmnurgas ABC muutmatu alusega $BC = 10$ olgu alati $\sin\beta : \sin\gamma = 3 : 2$. Leida tipu A geomeetriline koht.

Ülesanne 105. Antud on ringjoon $x^2 + y^2 = r^2$. Igal ta raadiusel on keskpunktist arvates mõõdetud raadiuse lõpppunkti

α) abstsiss

β) ordinaat.

Missugusel joonel asuvad leitud punktid?

Ülesanne 106. Missugune on nende punktide geomeetriline koht, milledest joonlõik a nurga α all paistab?

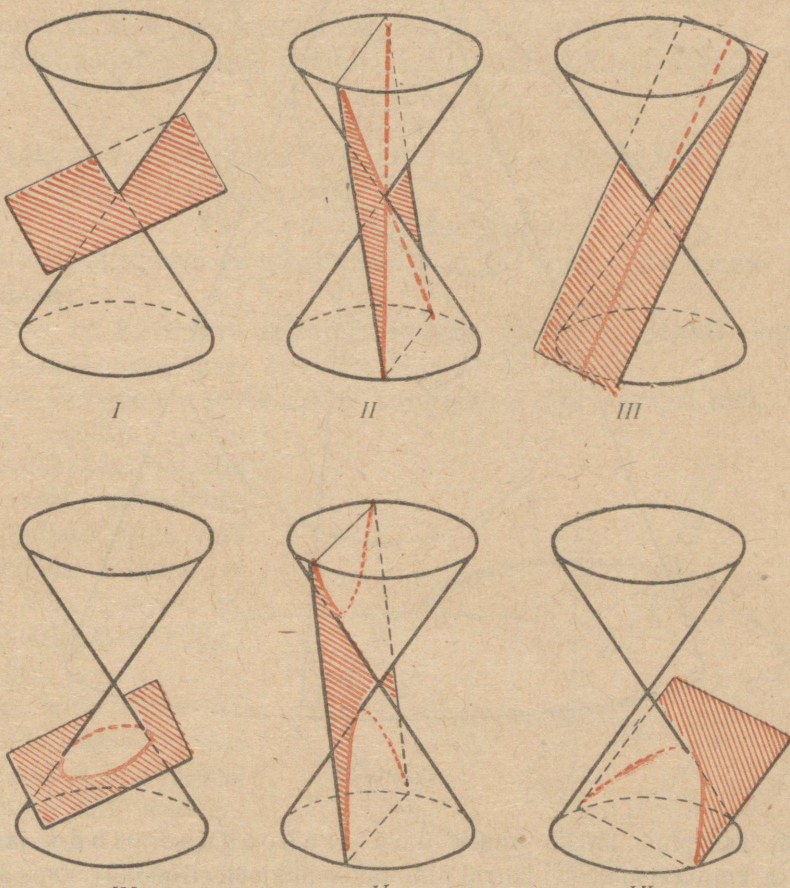
Ülesanne 107. Missugune on selle joonlõigu c keskpunkti geomeetriline koht, mille otspunktid kahel ristjoonel liiguvad?

Ülesanne 108. Antud on punkt $A\begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$, sirgjoon $G = 12x + 5y - 9 = 0$ ja joonlõik $s = 13$. Missugune on selle punkti P geomeetriline koht, mille kaugus punktist A on keskmine proportsionaalne punkti P kauguse sirgest G ja joonlõigu s vahel?

C. Koonuslôiked.

§ 21. Tasapinna ja koonuse vôimalikud vastastikused seisud.

Püstkoonuse külgpind pikendatagu üle tipu S nii, et kahekordne koonus saadakse. Siis võivad tasapinnal ja koonusel järgmised vastastikused seisud olla:



Joonis 34.

A. Ta läheb läbi tipust S ja tal on

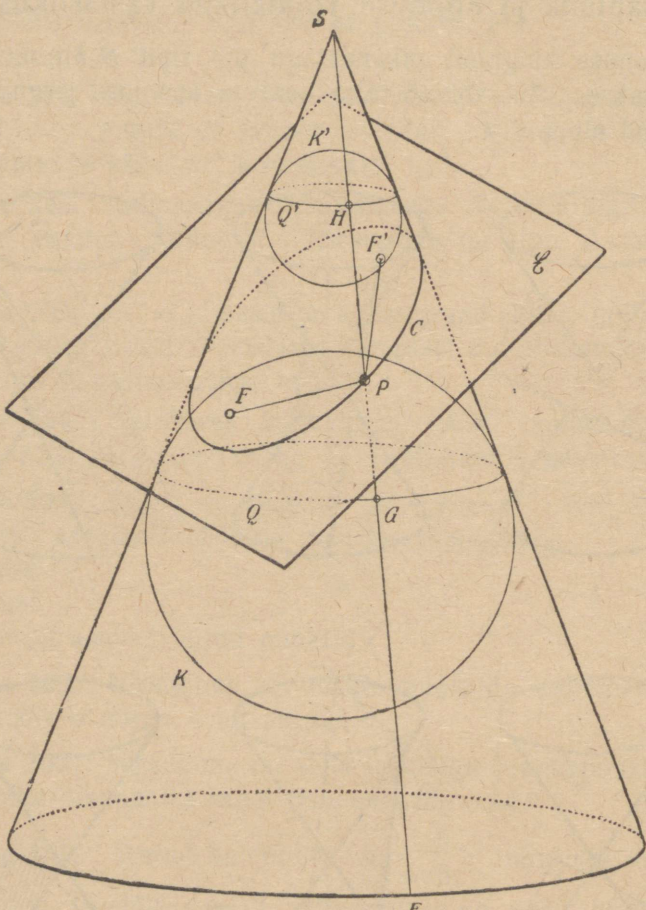
1. ainult see punkt koonusega ühine (joonis 34. I).

2. Koonuspinnaga k a k s ühist kujutavjoont; siis tal on koonusega need mõlemad sirged ühised (joonis 34. II).

3. Tal on koonuspinnaga ainult üks ühine kujutavjoon; siis ta puutub koonust seda joont mööda (joonis 34. III).

Kui praegu kirjeldet kolmes juhtumuses tasapinna paralleelselt üle viime, siis ta

B. ei lähe enam läbi koonuse tipust, ja me saame kolmes järgnevas juhtumuses lõikes kõverjooned:



Joonis 35.

4) Tasapind lõikab ainult ühe osakoonuse pinda ja nimelt kõiki ta kujutavjooni; sel korral nimetakse lõikjoon **ellipsiks** (joonis 34. IV)*).

5) Tasapind lõikab mõlemate osakoonuste pindu; sel korral nimetakse lõikjoon **hüperboliks** (joonis 34. V).

---

*) See lõikjoon võib mõnikord ka ringjoon olla (millal?).

6) Tasapind on ainult ühe kujutavjoonega paralleelne ja lõikab seepärast ka ainult ühe osakoonuse pinda; siis nimetakse lõikjoon **paraaboliks** (joonis 34. VI).

Et lõikjooni viimases kolmes juhtumuses uurida, ehitatakse Dandelin'i *) järele kerad K, mis koonust ringjoont mööda ja lõikaja tasapinda ühes punktis F puutuvad.

§ 22. Ellips lõikjoonena.

Juhtumuses IV (joonis 34) on olemas kaks Dandelin'i kera K ja K', mis koonust puutuvad mööda ringjooni Q ja Q' ja lõikavad tasapinda $\mathfrak{E}$ punktides F ja F' (joonis 35).

Mistahes kujutavjoon SE puutub kera K punktis G ja kera K' punktis H, kuna kõverjoone punkti P ühendusjooned punktidega F ja F' vastavalt kerade K ja K' puutujadjooned on. Lause põhjal, et:

„Ühest punktist kerale tõmmatud puutujad on ühepikkused", leiame

$$PF = PG$$

$$PF' = PH;$$

pärast kokkuarvamist saame $PF + PF' = PG + PH = GH$.

Igas kõverjoone punktis on

$$\mathbf{PF + PF' =} \textbf{ jäädav suurus}$$

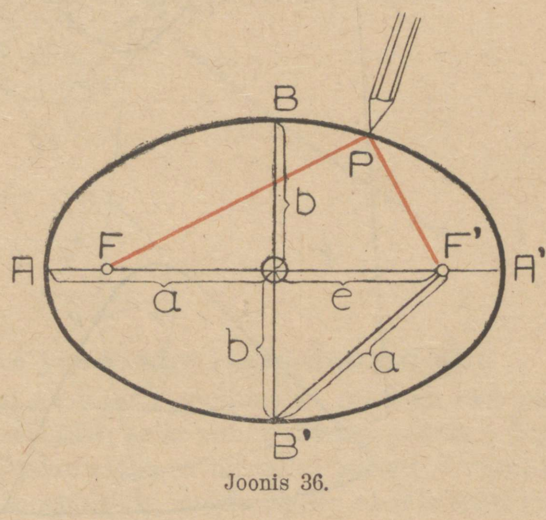
ja võrdub kujutavjoone osaga ringide Q ja Q' vahel. Siit saame **ellipsi definitsiooni:**

Ellips on kõverjoon selle omadusega, et iga ta punkti kauguste summa kahest muutumata punktist F ja F′ on jäädav.

Selle kõverjoone mehaaniline kujutamine ellipsograafi abil.

Kui nööri (niidi) kahes äratähendet punktis F ja F' (nõelte abil) kinnitame ja pliiatsi tippu P nii nööri mööda veame, et viimane ikka pingul on, siis kujutab P ellipsi (joonis 36).

Kui nöör sihis FF' sirgeks tõmmata, siis saame punktid A ja A' sirgel FF'; kui $\triangle PFF'$ saab sarikkolmnurgaks, siis punktid B ja B' asuvad FF' keskpunktist läbitõmmatud ristjoonel.



Joonis 36.

*) Matemaatik Dandelin (1794—1847) elas Lüttichis ja Namur'is, viimati Belgia inseneer-ohvitserina.

4 punkti A ja A'; B ja B' nimetakse **tippudeks**,
punktid F ja F' **tulipunktideks**,
$AA' = 2a$ on **suur telg**,
$BB' = 2b$ on **väike telg**,
mõlema telje lõikepunkti O nimetakse **keskpunktiks**,
$OF = OF' = e$ nimetakse ellipsi **ekstsentrisuseks**.

Kui $\triangle$-ga PFF' (joonis 36) ümber paneme mööda AA' ehk BB', siis on P ikka jälle kõverjoone punkt, s. t.

ellips on iga telje suhtes sümmeetriline.

$$\underbrace{AF + AF'}_{AF + FF'} = \underbrace{A'F' + A'F}_{A'F' + FF'},$$

sellest saame $2AF + FF' = 2A'F' + FF'$

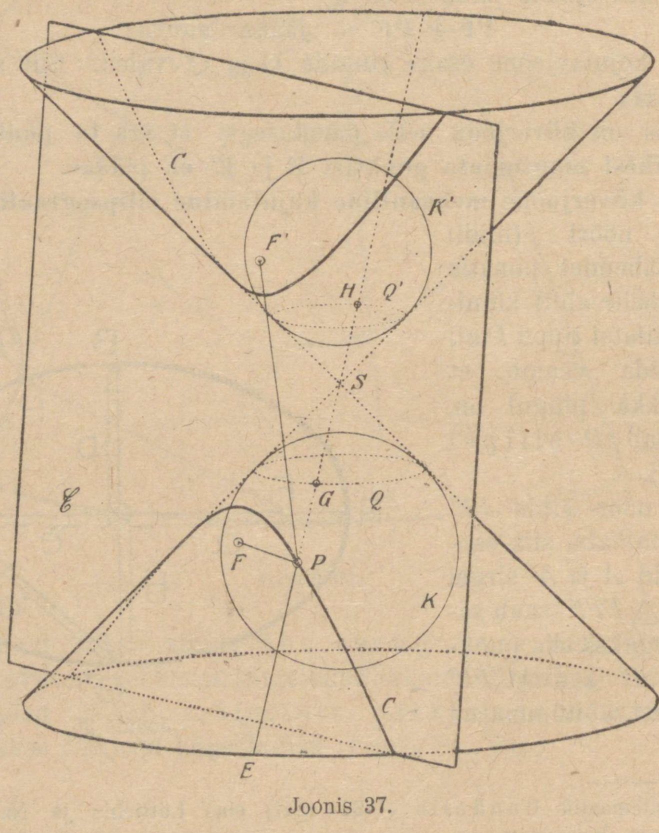
ja siit $AF = A'F'$,

nii et $PF + PF' = AF + AF' = AF + FF' + F'A' = AA' = 2a$, s. t.

ellipsis on punkti kauguste summa tulipunktidest võrdne suure teljega

Et $BF = BF' = B'F = B'F' = a$ on, siis saame täisnurksest $\triangle OB'F'$ ellipsi ekstsentrisuse

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$



Joonis 37.

Ülesanne 109. Ehita

α) väikse telje tipud, kui on antud tulipunktid ja suur telg;

β) tulipunktid, kui on antud mõlemad teljed;

γ) ellips punkti kaupa üleval antud definitsiooni järele, kui mõlemad teljed on antud!

§ 23. Hüperbol lôikjoonena.

Ka V juhtumuses (joonis 34) on kaks Dandelin'i kera K ja K' olemas. Samuti kui § 22 leiame lõikjoone C (joonis 37) iga punkti P kohta, et

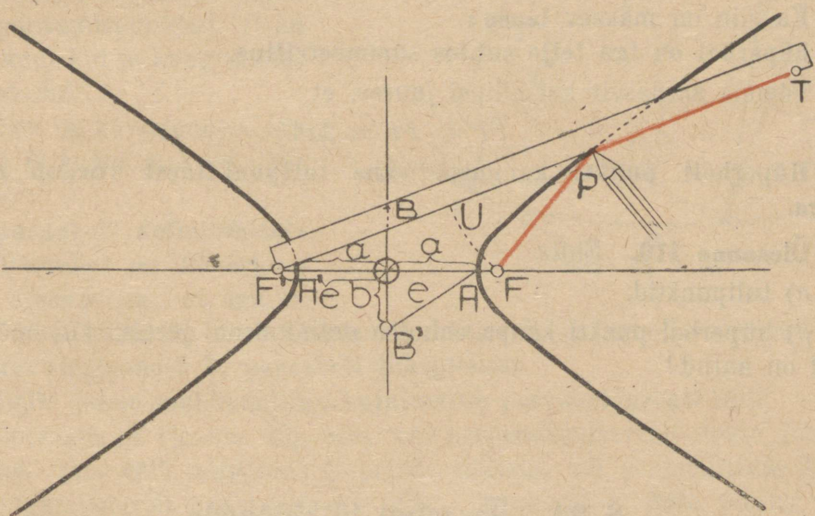
$$PF' = PH$$
$$PF = PG.$$

Pärast mahaarvamist leiame $PF' - PF = PH - PG = GH =$ **jäädav** suurus.

Sellest saame

hüperboli definitsiooni:

hüperbol on kõverjoon selle omadusega, et iga ta punkti kauguste vahe kahest kindlast punktist F ja F′ on jäädav.



Joonis 38.

Selle joone mehhaaniline joonetamine hüperbolograafi abil.

Joonlaud (kitsas papiriba) on ühes otspunktis F' (nõelaga ehk naelakesega) nõnda kinnitet, et teda saab selle punkti ümber pöörda. Niidi üks ots on antud punktis F ja teine joonlaua mistahes punkti T kinnitet. Kui nüüd pliiatsi tipp P nõnda joonlauda mööda liigub, et niit alati pingul on, siis kujutab P hüperbolit (joonis 38).

Seejuures on

$$PF' - PF = PF' - PU = UF' =$$

$=$ joonlaua TF' pikkus — niidi TU pikkus.

Kui joonlaua otspunktiks F võtame, siis saame kõverjoone teise (pahempoolse) haru. Kui joonlaud sihi FF' saab, siis saame hüperboli **tipud** A ja A'. Joonlõigu FF' keskpunktist läbitõmmatud ristjoonel ei leidu kõverjoone punkte.

F ja F' nimetakse **tulipunktideks,**

$AA' = 2a$ on p e a t e l g ehk **reaalne telg,**

AA' keskpunkt O on **hüperboli keskpunkt,**

$OF = OF' = e$ on **ekstsentrisus.**

Ellipsil (joonis 36) oli AA' keskpunktist läbitõmmatud ristjoonel kaks punkti B ja B', mille kaugus punktist O oli b, nii et $b^2 = a^2 - e^2$ oli. Hüperbolil vastab nendele AA' keskpunktist läbitõmmatud ristjoonel kaks niisugust punkti B ja B', et

$$b^2 = e^2 - a^2.$$

Me leiame nad seepärast AA' keskpunktist läbitõmmatud ristjoone ja raadiusega $OF = e$ punkti A ümber tõmmatud ringjoone lõikepunktidena.

$BB^1 = 2b$ on hüperboli **kõrvaline** ehk **imaginaarne telg.**

Ka siin on maksev **lause:**

hüperbol on iga telje suhtes sümmeetriline.

Tõenda sarnaselt kui ellipsi juures, et

$$PF' - PF = 2a\,!$$

Hüperboli punkti kauguste vahe tulipunktidest võrdub reaalse teljega.

Ülesanne 110. Ehita

α) tulipunktid,

β) hüperbol punkti kaupa eelmise definitsiooni järele, kui mõlemad teljed on antud!

§ 24. Paraabol lõikjoonena.

Et VI juhtumust (joonis 34) saada, peame lõikava tasapinna $\mathfrak{E}$ paralleelselt mõne koonuse puutuja-tasapinnaga asetama. Puutuja-tasapind punktis U (joonis 39) on määratud kujutavjoone US ja selle puutuja-joone T läbi, mis alusringi G punktis U puutub. See puutuja-tasapind on perpendikulaarne telglõikega $SUO = \mathfrak{E}''$. (Mispärast?) Siin on meil ainult ü h e D a n d e l i n ' i k e r a g a K tegemist, mis tasapinda $\mathfrak{E}$ punktis F ja koonust mööda ringjoont Q puutub, mille tasapind $\mathfrak{E}'$ ka on perpendikulaarne tasapinnaga $\mathfrak{E}''$ (Mispärast?) ja tasapinda $\mathfrak{E}$ sirgjoont MN mööda lõikab. Seepärast on MN perpendikulaarne tasapinnaga $\mathfrak{E}''$ ja seepärast ka joonega IL, mida mööda $\mathfrak{E}$ ja $\mathfrak{E}''$ lõiguvad.

Kui mõnest kõverjoone punktist P (mistahes kujutavjoone SE ja tasapinna $\mathfrak{E}$ lõikepunktist) perpendikulaari PB joonele MN laseme, siis on

$$PB \,||\, IL,$$
$$US \,||\, IL \text{ (Mispärast?)}$$
$$\text{järelikult } PB \,||\, US.$$

Kui läbi P tasapinnaga $\mathfrak{E}'$ paralleelse tasapinna kujutame, mis koonusel ringjoone G' välja lõikab, siis peavad nende paralleeliste tasapindade vahel asuvate paralleeljoonte PB ja US osad võrdsed olema:

1) $PB = VW$.

Punktist P on kaks puutujat kerale K tõmmatud. Et nad mõlemad võrdsed on, siis on

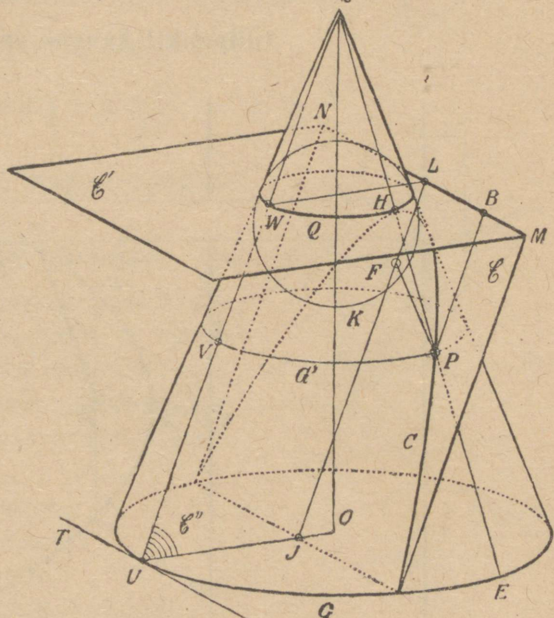
2) $PF = PH = VW$.

Võrdustest 1) ja 2) saame

$$\mathbf{PF = PB},$$

s. t. kõverjoone punkti P kaugus puutumispunktist F on sama suur kui ta kaugus lõikjoonest MN.

See on kõverjoone C iga punkti P kohta maksev; siit saame



Joonis 39.

paraaboli definitsiooni:

Paraabol on kõverjoon selle omadusega, et iga ta punkt ühel kaugusel asub kindlast punktist F, paraaboli tulipunktist, ja kindlast sirgjoonest D, paraaboli juhtjoonest.

Selle joone mehhaaniline kujutamine paraabolograafi abil.

Joonlaua X (joonis 40) otsa on perpendikulaarselt teine joonlaud kinnitet, mis võib sirgjoont G mööda liikuda, nii et joonlauda X võib ainult paralleelselt iseenesele üle viia. Joonlaua X ühte punkti T ja punkti F on nöör kinnitet. Kui pliiatsi tipp P joonlauda mööda nii liigub, et nöör alati pingul on, siis joonetab P paraaboli.

Kui mõõdame nööri pikkuse $TP + PF$ joonlaual punktist T, siis saame punti V. Joonlaua liikumisel kujutab V sirgjoont $D \,||\, G$.

Seejuures on

$$PF = PV,$$

nii et D on juhtjoon ja saadud kõverjoon tõesti paraabol.

Kui joonlaud läbi läheb punktist F, siis saame tipu A;

$$AR = AF, \text{ s. t.}$$

paraaboli tipp lõikab pooleks joonlõigu tulipunkti ja juhtjoone vahel.

Läbi F juhtjoonele tõmmatud ristjoon on **paraaboli telg**. Tema suhtes on kõverjoon sümmeetriline.

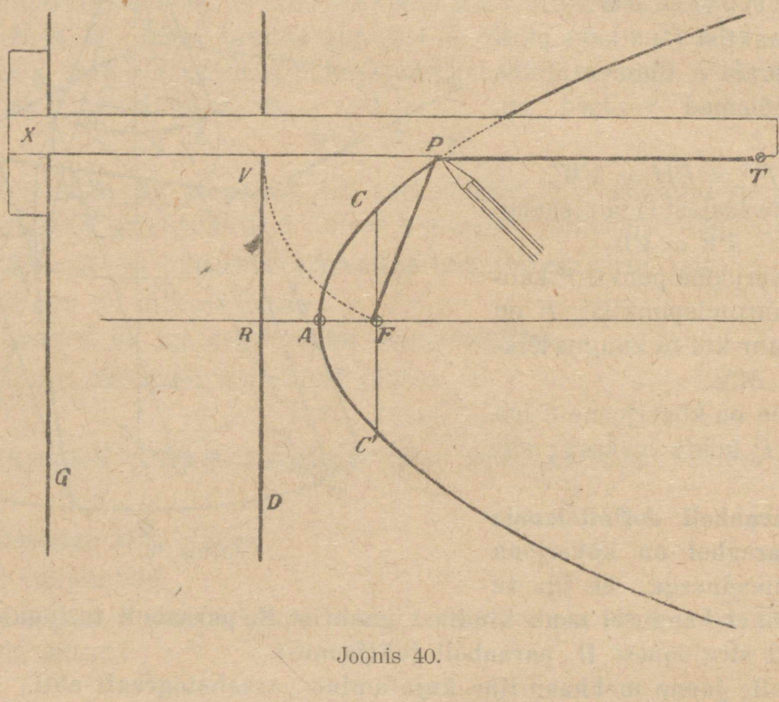
Ülesanne 111. Ehita punkti kaupa paraabol, mille tulipunkt ja juhtjoon on antud!

Tulipunktist perpendikulaarselt teljega läbitõmmatud pool sidejoont CC' nimetakse **paraaboli parameetriks** ja tähendakse p. *)

Siis on

$$CC' = 2FC = 2FR = 4AF = 2\,p;$$

$$\textbf{tulipunkti kaugus on } AF = \frac{p}{2}.$$



Joonis 40.

Saavutuste kokkuvõte.

Ellipsi, hüperboli ja paraaboli saime püstkoonuse lõikena tasapinnaga; seepärast nimetakse neid **koonuslõigeteks**. [Ringjoon on ellipsi erajuhtumus (kui mõlemad teljed on võrdsed)].

Dandelin'i-Quetelet? (loe: ketelee) lause:

Iga tasapind, mis läbi ei lähe püstkoonuse tipust, lõikab seda koonuslõiget mööda, mille tulipunktid leiame lõikaja tasapinna puutumispunktidena nende keradega, mis nii koonuspinda kui ka lõikavat tasapinda puutuvad **).

---

*) Siin tähendab **„parameeter"** jäädavat suurust, kuna selle sõnaga enne geomeetriliste kohtade juures § § 15 ja 20 muutujat tähendati.

**) Ka kaldringkoonus lõigatakse tasapinnaga, mis ta tipust läbi ei lähe, ellipsi, hüperbolit või paraabolit mööda. Dandelin'i keri ei saa sel korral ehitada.

§ 25. Paraaboli tipp-vôrrand.

Valime paraaboli telje X-teljeks ja puutuja läbi paraaboli tipu Y-teljeks (joonis 41). Parameeter on p; siis tulipunkti F kui ka juhtjoone D kaugus Y-teljest on $\frac{p}{2}$.

Paraaboli definitsiooni järele (§ 24) on igas punktis $P \begin{cases} x \\ y \end{cases}$

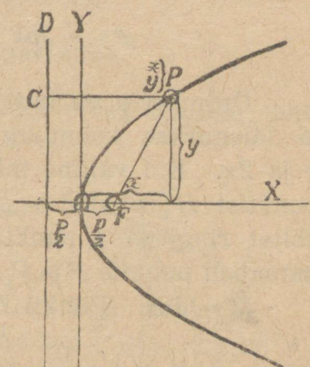
$$PF = PC,$$

teisiti $$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Sellest saame **paraaboli tipp-võrrandina**

$$y^2 = 2\,px.$$

Võrrandi $y = \pm \sqrt{2\,px}$ uurimine.



Joonis 41.

Igale positiivsele x väärtusele vastavad kaks y väärtust vastupidiste märkidega, s. t. kõverjoon on X-telje suhtes sümmeetriline.

Negatiivistele x väärtustele vastab imaginaarne y, s. t. kõverjoon asub täielikult paremal pool Y-telge.

$x = \infty$ annab $y = \infty$;

kõverjoon läheb lõpmatusse.

$x = 0$ annab $y = 0$;

kõverjoon läheb algpunktist läbi.

$x = \frac{p}{2}$ annab $y = \pm\, p$.

Ülesanne 112. Säe paraaboli võrrand, kui on antud

α) tulipunkti kaugus tipust $AF = \frac{3}{4}$;

β) kõverjoone ühe punkti P koordinaadid $\begin{cases} 9 \\ 6 \end{cases}$.

Missugused lahendused lubab igaüks neist ülesandeist, kui eeldakse ainult, et üks koordinaadi telg paraaboli telg ja algpunkt paraaboli tipp on?

Ülesanne 113. Missugused on järgmiste võrrandite läbi esitet paraabolite seisud? Missugused on tulipunkti koordinaadid ja missugune on juhtjoone võrrand?

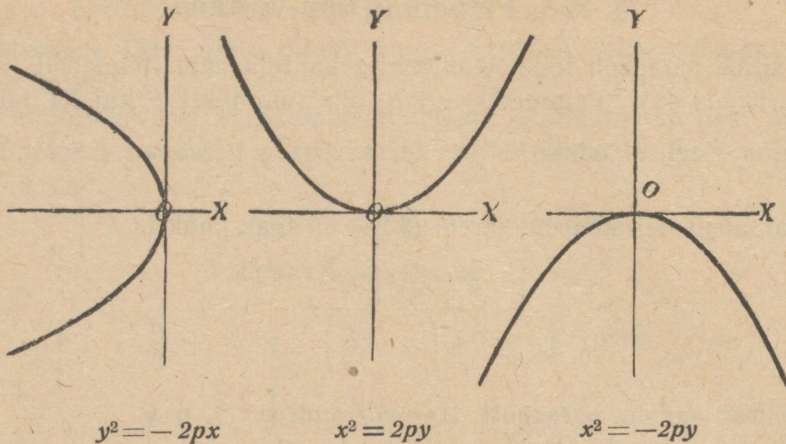
α) $y^2 = 7{,}6\,x$ $\qquad\qquad$ γ) $x^2 + 5\frac{1}{3}\,y = 0$

β) $y^2 = -\,12\,x$ $\qquad\qquad$ δ) $x^2 = 9\,y$.

Paraaboli ehitamine tipp-vôrrandi abil.

$$y^2 = 2px = p.\,2x.$$

Paraaboli erilised seisud.



Joonis 42.

Ordinaat y on keskmine proportsionaalne p ja $2x$ vahel ja me leiame ta täisnurkse kolmnurga kõrgusena, mis hüpotenuusi lõikab osadeks p ja $2x$. Kui valime mistahes abstsissi $AB = x$ (joonis 43) ja X-teljel punktist B mõõdame $BD = p$ ja $BE = 2x$, siis lõikab läbimõõdule ED ehitet ringjoon K punktist B X-teljele tõmmatud perpendikulaari kahes paraaboli punktis P ja P_1.

Järeldus. Punkti D abstsiss on $x_1 = x + p$,

„ E „ „ $x_2 = -x$;

nii on ringi K keskpunkti abstsiss

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p}{2},$$

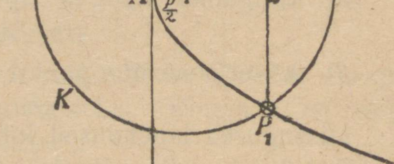
s. t. tulipunkt F on iga ehitusringi K keskpunkt; sellest leiame järgmise ehitusviisi:

1) jooneta tulipunkti F ümber ühiskesksed ringid;

2) mõõda ära iga läbimõõdu otspunktist D selle peal joonlõik $DB = p$ keskpunkti poole;

3) siis lõikab punktist B läbimõõdule (teljele) tõmmatud ristjoon iga ringjoont kahes paraaboli punktis P ja P_1.

Ehita paraabol selle ehitusviisi järele!



Joonis 43.

§ 26. Ellipsi keskpunkt-võrrand.

Kui ellipsi teljed valitakse koordinaatide telgedeks (joonis 44), siis on ellipsi keskpunkt algpunktis. Kõverjoone punkti $P\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ kohta peab definitsiooni (§ 22) järele maksev olema võrdus

$$PF + PF_1 = 2\,a;\ \text{ehk}$$

$$\sqrt{(e - x)^2 + y^2} + \sqrt{(e + x)^2 + y^2} = 2\,a.$$

Kui teise ruutjuure eraldame ja selle järele võtame võrrandi teise astmesse, siis saame

$$ex - a^2 = - a\sqrt{(e - x)^2 + y^2}$$

ja siit $a^2 - e^2 = \frac{a^2 - e^2}{a^2}\,x^2 + y^2.$

Tähele pannes, et $a^2 - e^2 = b^2$, leiame **ellipsi keskpunkt-võrrandina**

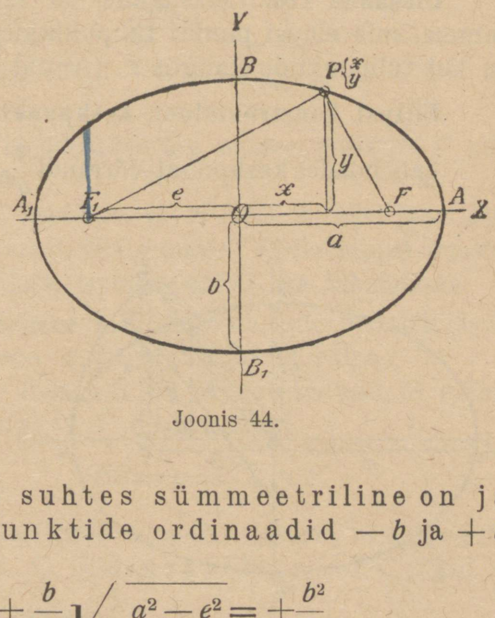
$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

kui ellipisi **poolteljed** on **a** (X-teljel) ja **b** (Y-teljel).

Võrrandi $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ **uurimine.**

Igale väärtusele $|x| < a$ vastab kaks väärtust y vastupidiste märkidega; seepärast on ellips X-telje suhtes sümmeetriline.

$x = 0$ annab $y = \pm b$, s. t. vähema telje lõpppunktid B ja B_1; $x = \pm a$ annab $y = 0$, s. t. suurema telje lõpppunktid A ja A_1; $|x| > a$ annab imaginaarsed väärtused y, s. t. kõverjoone reaaliste punktide abstsissid on kõik $-a$ ja $+a$ vahel.



Joonis 44.

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

näitab, et ellips ka Y-telje suhtes sümmeetriline on ja et kõverjoone reaaliste punktide ordinaadid $-b$ ja $+b$ vahel on.

Kui $x = e$, siis $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - e^2} = \pm \frac{b^2}{a}.$

Seepärast on sidejoone pikkus, mis tulipunktist läbi perpendikulaarselt X-teljega läheb, $2\frac{b^2}{a} = 2p$, kusjuures p (pool sidejoont) ka siin parameetriks nimetakse.

Erijuhtumus. Kui $a = b$, s. t. kui poolteljed on võrdsed, siis muutub keskpunkt-võrrand järgmiseks:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\text{ehk } \mathbf{x^2 + y^2 = a^2}.$$

See on **ringi võrrand raadiusega a.** Ringi peale võime seepärast kui ellipsi erijuhtumuse peale vaadata.

Ülesanne 114. Missugune on ellipsi keskpunkt-võrrand, kui antud on

α) suurem pooltelg $a = 17$ ja ekstsentrisus $e = 15$;

β) pooltelgede summa $a + b = 50$ ja $e = 40$;

γ) parameeter $p = 1\frac{12}{13}$ ja $e = 12$;

δ) kaks ellipsi punkti $P_1 \begin{cases} 3{,}6 \\ 4 \end{cases}$ ja $P_2 \begin{cases} -4{,}8 \\ 3 \end{cases}$?

Missugused on igas juhtumuses tulipunktide koordinaadid?

Ülesanne 115. Ellipsil $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ asuval punktil P on abstsiss 4 ja ordinaat positiivne.

α) Missugused on kiirte võrrandid, mis P tulipunktidega ühendavad?

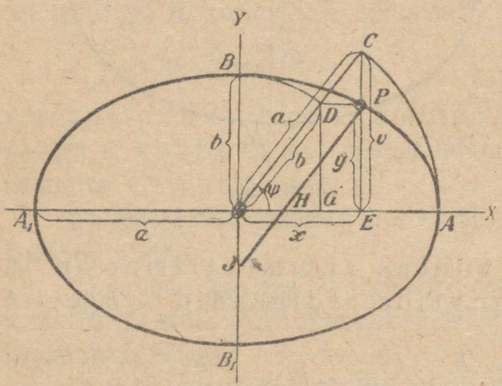
β) Kui pikk on igaüks neist kiirtest?

Ülesanne 116. Missugune on ellipsi võrrand, milles joonlõikude summa, mis ellipsi punkti tulipunktidega ühendavad, kolm korda nii suur on kui tulipunktide kaugus? (Antud olgu a või e.)

Ellipsi konstruktsioon keskpunkt-võrrandi abil.

Lahendades keskpunkt-võrrandi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ muutuja y suhtes saame

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_2}.$$



Joonis 45.

Pannes 1) $\sqrt{a^2 - x^2} = v$ leiame 2) $y : v = b : a$, nii et v võib täisnurkse $\triangle$ OCE (joonis 45) kaatetina CE leida; kolmnurga OCE üks kaatet on $OE = x$ ja hüpotenuus $OC = a$.

y leiame joonlõiguna DG, proportsionaaliste joonlõikude lause põhjal, kui $OD = b$ teeme ja $DG \parallel CE$ tõmbame. Läbi D X-teljele tõmmatud paralleeljoon lõikab CE ellipsi punktis P.

Otstarbekohasema ehitamise järjekorra annab järgmine viis (joonis 46):

1) Jooneta keskpunkti O ümber ringjooned K raadiusega a ja K' raadiusega b.

2) Mistahes kiir läbi O lõikab K punktis C ja K' punktis D.

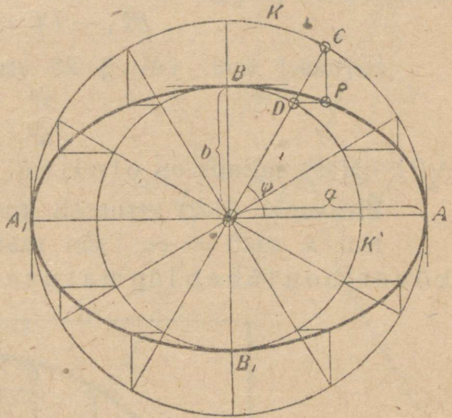
3) Punktist D poolteljele a tõmmatud paralleeljoon lõikab punktist C poolteljele b tõmmatud paralleeljoont ellipsi punktis P.

Järeldused.

1. Kui punktist P (joonis 45) tõmbame kiirega OC paralleelse joone, siis lõikab see X-telge punktis H ja Y-telge punktis J; seejuures on

$$PJ = OC = a \text{ (paralleelogrammis } PJOC)$$
$$PH = OD = b \text{ („ } PHOD);$$

pärast mahaarvamist saame **JH = = a — b = jäädav.**



Joonis 46.

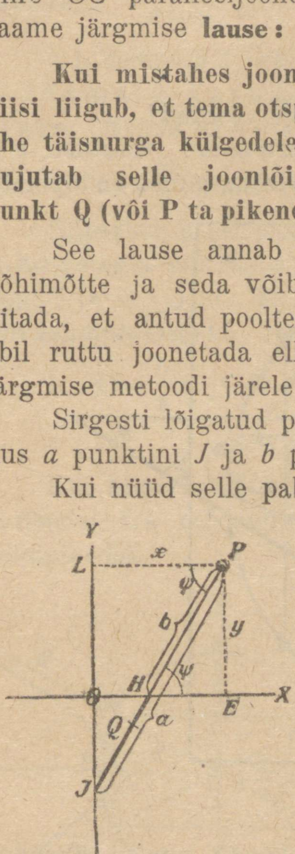
Et see maksev on mistahes kiire OC paralleeljoone kohta, siis saame järgmise **lause:**

Kui mistahes joonlõik HJ niiviisi liigub, et tema otspunktid ikka ühe täisnurga külgedele jäävad, siis kujutab selle joonlõigu mistahes punkt Q (või P ta pikendusel) ellipsi.

See lause annab **ellipsi sirkli** põhimõtte ja seda võib selleks tarvitada, et antud pooltelgede a ja b abil ruttu joonetada ellipsi punktid järgmise metoodi järele:

Sirgesti lõigatud paberiribal mõõdetakse ära mõnest punktist P pikkus a punktini J ja b punktini H.

Kui nüüd selle pabeririba nii asetame, et H ikka X-teljel ja J ikka Y-teljel asub, siis annab P meile ellipsi punkti, mille pliiatsi tipuga paberil ära tähendame.



Joonis 47.

Ülesanne 117. Jooneta selle metoodi järele pooltelgede a ja b abil antud ellips!

2. Joonisest 45 järgneb ka veel, et võime leida punkti P ordinaadi

$$EP = y = \frac{b}{a} \cdot v$$

samale abstsissile $x = OE$ vastava ringjoone punkti C ordinaadist $v = EC$, kui v jagame suhtes $\frac{b}{a}$.

Võime ellipsi seepärast ka niiviisi saada, et jagame kõik ringjoone ordinaadid samas suhtes; s. t. ellips on lühenduses või pikenduses joonetet ringjoon, vastavalt sellele, kas $\frac{b}{a} \lessgtr 1$ on.

Kujutame endale ette (joonis 48), et ellipsi tasapind on ringi K tasapinnast $\mathfrak{E}$ ümber sirgjoone AA_1 nurga α võrra pöördud, nii et ta seis $\mathfrak{E}'$ on. Kõik kolmnurgad CEP on seejuures sarnased ja sarnase seisuga, seepärast on ka kõik ühendusjooned CP paralleelsed ja ellips esineb kui **ringjoone K paralleelprojektsioon** tasapinnale $\mathfrak{E}'$.

§ 27. Hüperboli keskpunkt-võrrand.

Hüperboli reaalne telg $2a$ valitakse X-teljeks, imaginaarne telg $2b$ Y-teljeks. Mõne hüperboli punkti $P\begin{cases}x\\y\end{cases}$ (joonis 49) kohta saame § 23 definitsiooni põhjal

$$PF_1 - PF = 2a.$$

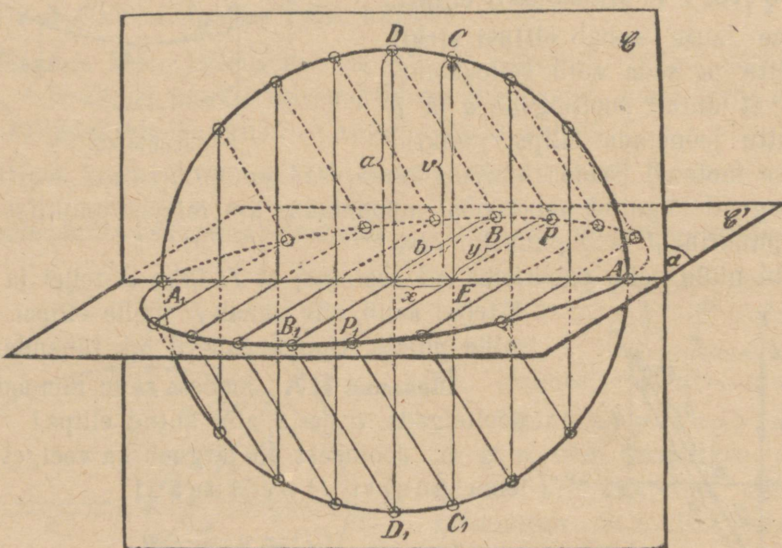
Sarnasel teel kui § 26 saame **hüperboli keskpunkt-võrrandina**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

NB! Märk miinus on o l u l i n e!

Ülesanne. Uuri sarnaselt kui § 26 hüperboli võrrand!

Kui x saab $= \infty$, siis saab ka y lõpmatu-suure väärtuse, s. t. k õ v e r j o o n l ä h e b l õ p m a t u s s e. Et seda sihti leida, milles on lõpmatu-



Joonis 48.

kauge punkt, määratakse algpunkti ja lõpmatu-kauge punkti ühendusjoone sihitegur. Kui kõverjoone punkti $P\begin{cases}x\\y\end{cases}$ ühendame punktiga O, siis on ühendusjoone võrrand

$$\frac{y}{x} = tg\,\alpha.$$

Kui suurendame x ja lõpuks lõpmatu suureks teeme ja seejuures leiame, et avaldusel $\lim\limits_{x=\infty} \frac{y}{x}$ *) on määratud väärtus, siis tähendab

*) $lim = limes$ (piir) tähendab selles kirjutusviisis, et tarvis on seda jao $\frac{y}{x}$ väärtust leida, mida ta ses p i i r j u h t u m u s e s saab, kui x lõpmatu suureks kasvab.

$$\lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = tg\, \alpha_0$$

lõpmatu-kauge hüperboli punktisse tõmmatud sirgjoone sihitegurit.

Hüperboli võrrandist saame

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

nii et

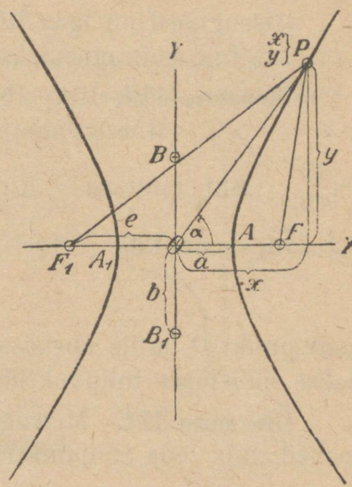
$$\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}},$$

järelikult

$$\lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a},$$

s. t. saame hüperbolil kaks sihti lõpmatu-kaugetesse punktidesse. Nende sihitegurid on

$$\mathrm{tg}\, \alpha_0 = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} \quad \text{ja} \quad \mathrm{tg}\, \alpha_0' = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}.$$



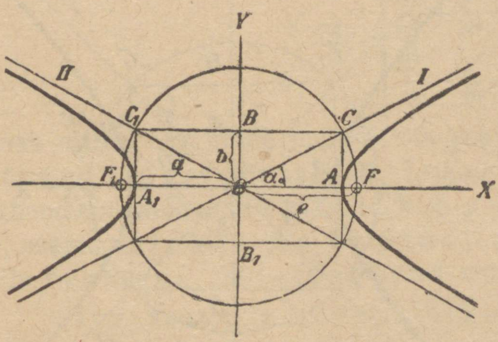
Joonis 49.

Hüperboli keskpunktist nende lõpmatu-kaugetesse punktidesse tõmmatud sirgjooni I ja II (joonis 50) nimetakse **hüperboli asümptootideks.** Nende võrrandid on

$$\mathbf{I.}\ \ \mathbf{y} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\mathbf{x} \ \text{ja}\ \mathbf{II.}\ \mathbf{y} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\mathbf{x}.$$

Asümptootide ehitamine.

Kui hüperboli tippudest A ja A_1 tõmbame reaalsele teljele ristjooned ja nendel ära mõõdame $AC = A_1C_1 = b$, siis on sirgjooned OC ja OC_1 asümptoodid.



Joonis 50.

Et $OC = OC_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = e$ on, siis lõikab O ümber joonetet ringjoon, mis tulipunktidest F ja F_1 läbi läheb, enne nimetet ristjooni punktides C ja C_1.

NB.! Kui tarvis on hüperbolit joonetada, ehitagu esiteks asümptoodid! *)

Kui reaalne telg $2\,a$ ühte langeb Y-teljega, siis on hüperboli võrrand

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Ülesanne 118. Missugune on hüperboli keskpunkt-võrrand, kui antud on

α) reaalne pooltelg $a = 1{,}5$ ja ekstsentrisus $e = 2{,}5$;

---

*) Soovitav on paraaboli, ellipsi ja hüperboli jaoks eeskujud kõvast paberist valmistada, kus ka teljed ja tulipunktid, hüperboli juures ka asümptoodid ja punktid C ja C_1 on ära tähendet.

β) parameeter $p = 2{,}25$ ja $e = 5$;

γ) pooltelgede summa $a + b = 4{,}2$ ja $e = 3$;

δ) hüperboli punktid $P_1 \begin{cases} -3\frac{1}{4} \\ \frac{5}{6} \end{cases}$ ja $P_2 \begin{cases} 5 \\ 2\frac{2}{3} \end{cases}$?

Missugused on igas juhtumuses tulipunktide koordinaadid? Säe iga asümptoodi võrrand!

Ülesanne 119. Hüperboli asümptootidel on võrrandid $y = 1{,}6\ x$ ja $y = -1{,}6\ x$. Missugune on hüperboli võrrand, kui ta peab punktist $P \begin{cases} 13 \\ 19{,}2 \end{cases}$ läbi minema? Kui suur on parameeter?

Ülesanne 120. Hüperbolil

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1$$

asuv punkt P, mille abstsiss on $x_1 = -20$ ja ordinaat negatiivne, ühendakse mõlemate tulipunktidega. Kui pikad on ühendusjooned?

Ülesanne 121. Missugusel hüperboli $24x^2 - y^2 = 150$ punktil on jooned, mis teda tulipunktidega ühendavad, perpendikulaarsed?

§ 28. Haruühtlane hüperbol.

Hüperbol, mille mõlemad pooltelgjed a ja b on võrdsed, nimetakse **haruühtlaseks hüperboliks.**

Ta võrrand on

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ ehk}$$

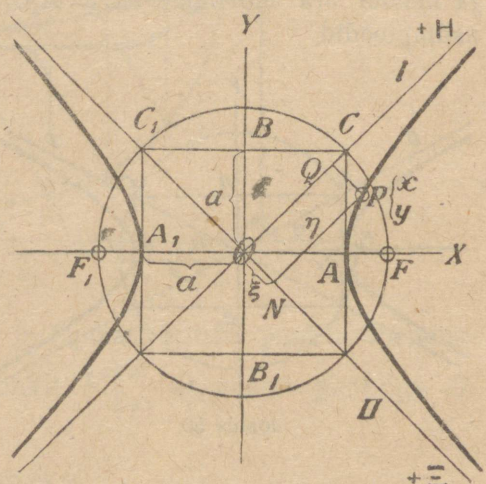
$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Ta asümptootide sihitegurid on

$$tg\ \alpha_0 = +1 \text{ ja } tg\ \alpha_0' = -1.$$

Seepärast on $\alpha_0 = 45^0$ ja $\alpha_0' = 135^0$.

Joonise 50 täisnurksed nelinurgad $OACB$ ja OA_1C_1B saavad ruutudeks (joonis 51).



Joonis 51.

Haruühtlase hüperboli asümptoodid on perpendikulaarsed.

Nende võrrandid on

I. $x = y$ ja II. $x = -y$

ehk normaalkujul

$$\text{I. } \frac{x - y}{\pm\sqrt{2}} = 0 \text{ ja II. } \frac{x + y}{\pm\sqrt{2}} = 0$$

Hüperboli mistahes punktil $P \begin{cases} x \\ y \end{cases}$ on seepärast järgmised kaugused asümptootidest:

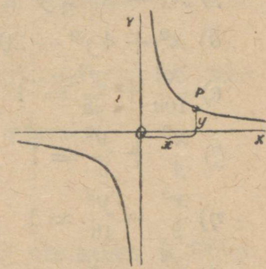
$$PQ = \xi = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \text{ (punkti } P \text{ kaugus asümptoodist I),}$$

$$PN = \eta = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \text{ (" " " " II).}$$

Pärast kasvatamist leiame

$$\xi \cdot \eta = \frac{x^2 - y^2}{2} = \frac{a^2}{2}\text{*)} \text{ s. t.}$$

Haruühtlasel hüperbolil on täisnurkse nelinurga pind, kus nelinurga külgedeks on hüperboli punkti kaugused mõlemaist asümptootidest, — jäädav ja võrdub reaalse pooltelje poole ruuduga.



Joonis 52.

Kui me haruühtlase hüperboli asümptoodid (joonis 52) võtame koordinaatide teljedeks, siis saab hüperboli võrrand lihtsa kuju

$$xy = \frac{a^2}{2}$$

ehk üldiselt

$$xy = C = \text{jäädav}.$$

Näitus: Ühe ja sama gaasimassi isotermid.

§ 29. Sirgjoonte ja koonuslõigete lõikepunktid.

Kui sirgjoonel

$$\text{I. } y = mx + t$$

ja ühel koonuslõikel

$$\text{II. } \begin{cases} y^2 = px \text{ (paraabol),} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (ellips) ehk} \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (hüperbol)} \end{cases}$$

peab olema üks ühine punkt, siis peavad selle koordinaadid rahuldama võrrandi I ja ühe võrrandi II. Leiame seepärast need koordinaadid, kui lahendame mõlemad võrrandid x ja y järele. Kaotades nendest näituseks y, saame teise astme võrrandi muutujaga x, mille juured võivad olla reaalsed, ühtelangevad või imaginaarsed.

Sirgjoonel ja koonuslõikel võivad seepärast ühised olla kas kaks reaalist või kaks ühtelangevat punkti või mitte ükski reaalne punkt. Esimeses juhtumuses on sirgjoon koonuslõike lõikaja, teises juhtumuses on ta puutuja ja kolmandas juhtumuses ei lõika ta koonuslõiget üldse.

*) Pahemal hüperboli harul asuva punkti P' jaoks peaks kauguse-valemites nimetajas märgiks võtma miinuse, nii et $\xi \cdot \eta$ jälle $\frac{a^2}{2}$ võrduks.

Sirgjoon lõikab nõnda koonuslõiget kõige rohkem kahes punktis, mispärast ka öeldakse, et:

Ellips, hüperbol ja paraabol on teise järgu kõverjooned.

Ülesanne 122. Missugune on järgmiste sirgjoonte ja koonuslõigete vastastikune seis?

α) $y^2 = 4x$	ja	$2x - y - 12 = 0$,
β) $x^2 = 21y$	„	$2x - 7y - 14 = 0$,
γ) $x^2 = -\frac{25}{3}y$	„	$6x + 5y - 15 = 0$,
δ) $x^2 + 4y^2 - 20 = 0$	„	$3x + 2y - 10 = 0$,
ε) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$	„	$3x + 8y + 50 = 0$,
ζ) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$	„	$\frac{x}{4} - \frac{y}{4} = 1$,
η) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$	„	$4x - 15y + 30 = 0$,
ϑ) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{20} = 1$	„	$x\sqrt{5} + 3y - 3(5 + 3\sqrt{5}) = 0$,
ι) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$	„	$3x - 4y - 9 = 0$,
$\varkappa$) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{64} = 1$	„	$3x - y - 36 = 0$,
λ) $4x^2 - 9y^2 = 324$	„	$2x - y - 6 = 0$.

Igas juhtumuses jooneta kõverjoon ja sirgjoon koordinaadistikku!

Märkus. Ühendus võrrand-õpetusega. Kui antud on esimese astme võrrand

$$\text{I.}\quad ax + by + c = 0$$

ja teise astme võrrand

$$\text{II.}\quad \begin{cases} Ax^2 \pm By^2 = 0 \\ \text{ehk}\ \ Ax + By^2 = 0 \end{cases}$$

siis võime nad graafilisel teel nii lahendada, et võrrand I-ga esitet sirgjoone ja II-ga esitet koonuslõike joonetame koordinaadistikku, mõlemate joonte lõikepunktid otsime ja nende koordinaadid mõõdame. Nende arvulised suurused on siis antud võrrandite otsused.

Ülesanne 123. Lahenda järgmised võrrandid graafilisel teel!

α) $9x^2 + 16y^2 = 144$	γ) $4x^2 - 4y^2 = 9$
$x - y = 1$	$4y - x = 8$
β) $9x^2 - 4y^2 = 36$	δ) $3y^2 - 4x = 0$
$6x - 3y + 8 = 0$	$3x + 2y = 12$.

Sarnasel teel võib ka kaks lihtsat teise astme võrrandit graafilisel teel lahendada.

Ülesanne 124. Lahenda graafilisel teel:

α) $4x^2 + 25y^2 = 100$	β) $25x^2 - 16y^2 = 400$
$x^2 + y^2 = 9$	$x^2 + y^2 = 81$
γ) $x^2 + 4y^2 = 36$	δ) $4x^2 - 9y^2 = 36$
$25x^2 + 16y^2 = 400$	$9x^2 + 25y^2 = 225$
ε) $9x^2 - 16y^2 = 144$	ζ) $25x^2 - 9y^2 = 225$
$9x^2 - 4y^2 = 324$	$y^2 - x^2 = 64$

§ 30. Koonuslõigete puutujad.

A. Ellips ja hüperbol.

Punktist $P\begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}$ kui puutumispunktist läbi on tarvis kõverjoonele puutuja tõmmata ja selle puutuja võrrand sääda. Antud on keskpunkt-võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Selles võrrandis ja kõiges järgnevas lahenduses vastab ülem märk ellipsile ja alumine hüperbolile.

Läbi P tõmmatakse lõikaja (joonis 53), mis kõverjoont mõnes teises punktis $Q\begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases}$ lõikab; siis on ühendusjoone PQ võrrand

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Lõikaja PQ pöördakse punkti P ümber, kuni Q punktiga P ühte langeb ja siis toimetakse samuti nagu ringjoone juures lhk. 46.

P ja Q koordinaadid peavad kõverjoone võrrandi rahuldama, seepärast peab olema

$$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} \pm \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Pärast mahaarvamist leiame

$$\frac{(x_1 - x_0)(x_1 + x_0)}{a^2} \pm \frac{(y_1 - y_0)(y_1 + y_0)}{b^2} = 0$$

$$\text{ehk} \quad \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \mp \frac{x_1 + x_0}{y_1 + y_0} \cdot \frac{b^2}{a^2}.$$

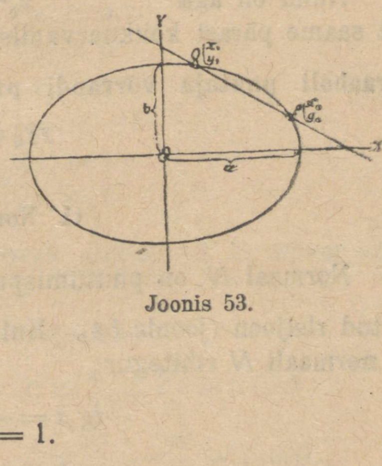
Nüüd muutub lõikaja võrrand järgmiseks:

$$y - y_0 = \mp \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_0}{y_1 + y_0} (x - x_0)$$

Kui lõikajat nii kaua P ümber pööörame, et Q ja P ühte langevad, nii et $x_1 = x_0$ ja $y = y_0$, siis saame puutuja võrrandi

$$y - y_0 = \mp \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{2x_0}{2y_0} (x - x_0) \text{ ehk}$$

$$\frac{x_0 (x - x_0)}{a^2} \pm \frac{y_0 (y - y_0)}{b^2} = 0.$$



Joonis 53.

Et P kõverjoonel asub, siis on

$$\frac{x_0 x_0}{a^2} \pm \frac{y_0 y_0}{b^2} = 1.$$

Kokkuarvamisel saame

$$\frac{xx_0}{a^2} \pm \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Nii on

puutuja võrrand puutumispunktis $P \begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}$

$$\text{ellipsil } \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

$$\text{hüperbolil } \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

B. Paraabol.

Lõikaja PQ võrrand on

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Et P ja Q on kõverjoone punktid, siis

$$y_1^2 = 2px_1$$
$$y_0^2 = 2px_0$$

Pärast mahaarvamist saame

$$(y_1 - y_0)(y_1 + y_0) = 2p(x_1 - x_0)$$

$$\text{ehk } \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{2p}{y_1 + y_0};$$

nii on PQ võrrand

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{2p}{y_1 + y_0}.$$

Kui Q ja P laseme ühte langeda, siis on $y_1 = y_0$; seepärast on punktis P puutuja-joone võrrand

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{2p}{2y_0}$$

$$\text{ehk } yy_0 - y_0^2 = p(x - x_0).$$

Nüüd on aga $y_0^2 = 2px_0$;

siit saame pärast kokkuarvamist

paraaboli puutuja võrrandi puutumispunktiga $\begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}$

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

C. Normaali võrrand.

Normaal N on puutumispunktist $P \begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}$ puutuja-joonele T tõmmatud ristjoon (joonis 54). Kui $tg\alpha = m$ puutuja T sihitegur on, siis on normaali N sihitegur

$$tg\beta = -\frac{1}{tg\alpha} = -\frac{1}{m}$$

ja selle järele puutumispunktist $P\begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}$ läbitõmmatud normaali võrrand

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0).$$

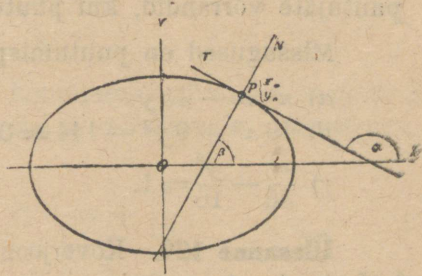
Ülesanne 125. Missugused on

α) ellipsi,

β) hüperboli ja

γ) paraaboli

normaalide võrrandid?



Joonis 54.

Ülesanne 126. Punktis P peab kõverjoonele C, mille võrrand on antud, puutuja ja normaal tõmmatama.

Missugused on nende sirgete võrrandid?

α) $C \equiv 16x^2 + 25y^2 - 400 = 0;$ $\quad P\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 > 0 \end{cases}$

β) $C \equiv 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0;$ $\quad P\begin{cases} x_1 > 0 \\ y_1 = 1\frac{1}{5} \end{cases}$

γ) $C \equiv 81x^2 + 25y^2 - 2025 = 0;$ $\quad P\begin{cases} x_1 = -4 \\ y_1 < 0 \end{cases}$

δ) $C \equiv 9x^2 - 4y^2 - 36 = 0;$ $\quad P\begin{cases} x_1 = -3\frac{1}{3} \\ y_1 > 0 \end{cases}$

ε) $C \equiv 16y^2 - 25x^2 - 400 = 0;$ $\quad P\begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 > 0 \end{cases}$

ζ) $C \equiv x^2 - y^2 - 16 = 0;$ $\quad P\begin{cases} x_1 < 0 \\ y_1 = -3 \end{cases}$

η) $C \equiv y^2 - 8x = 0;$ $\quad P\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 > 0 \end{cases}$

ϑ) $C \equiv x^2 + 18y = 0;$ $\quad P\begin{cases} x_1 < 0 \\ y_1 = -8 \end{cases}$

ι) $C \equiv 18y^2 + 5x = 0;$ $\quad P\begin{cases} x_1 = ? \\ y_1 = 1 \end{cases}$

Ülesanne 127. Mispärast on järgnevad sirgjooned G kõverjoonte C puutujad?

Missugused on puutumispunktide koordinaadid?

α) $G \equiv 8x - 15y + 50 = 0;$ $\quad C \equiv \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$

β) $G \equiv 5x + 2y + 25 = 0;$ $\quad C \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{100} - 1 = 0$

γ) $G \equiv 39x - 20y + 144 = 0;$ $\quad C \equiv \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} - 1 = 0$

δ) $G \equiv 9x - 4y - 72 = 0$; $\qquad C \equiv xy + 36 = 0$

ε) $G \equiv 2x - y - 4 = 0$; $\qquad C \equiv y^2 + 32x = 0$

ζ) $G \equiv 5x + 5y + 6 = 0$; $\qquad C \equiv 5x^2 - 24y = 0$.

Ülesanne 128. Missugused on järgnevaile koonuslõigetele tõmmatud puutujate võrrandid, kui puutujad $+X$-teljega 135^0 nurga moodustavad? Missugused on puutumispunktide koordinaadid?

α) $x^2 = -15y$

β) $16x^2 + 9y^2 - 144 = 0$

γ) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Ülesanne 129. Kõverjoontele C on tarvis tõmmata puutujad paralleelselt sirgetega G.

Missugused on puutujate võrrandid ja puutumispunktide koordinaadid?

α) $C \equiv \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} - 1 = 0$; $\qquad G \equiv 15x + 28y - 35 = 0$

β) $C \equiv \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} - 1 = 0$; $\qquad G \equiv 15x + 8y - 21 = 0$

γ) $C \equiv 5y^2 - 16x = 0$; $\qquad G \equiv 12x + 15y + 10 = 0$.

Ülesanne 130. Missugused on punktist P antud kõverjoonele tõmmatud puutujate võrrandid?

α) ellips $\quad \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; $\qquad P\begin{cases} 2\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{cases}$

β) hüperbol $\quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$; $\qquad P\begin{cases} -\frac{4}{5} \\ -5 \end{cases}$

γ) paraabol $\quad y^2 = 6x$; $\qquad P\begin{cases} -3 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$

Ülesanne 131. Näita, et punkt P antud kõverjoonel asub! Säe punktist P tulipunktidesse tõmmatud sirgete võrrandid ja nende sirgete vahel olevate nurkade poolitajate võrrandid! Näita, et üks neist poolitajaist on puutuja ja teine normaal kõverjoone punktis P!

α) ellips $\quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; $\qquad P\begin{cases} 3 \\ 2\frac{2}{5} \end{cases}$

β) hüperbol $\quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; $\qquad P\begin{cases} 6\frac{2}{3} \\ 4 \end{cases}$

γ) paraabol $\quad y^2 = 2px$; $\qquad P\begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}$

(Paraabolil on üks P-st läbitõmmatud tulipunkti-kiir paraaboli teljega paralleelne.)

§ 31. Koonuslõike-kujulised geomeetrilised kohad.

Ülesanne 132. Missugune on alusele $a = 4$ ehitet kolmnurkade tippude geomeetriline koht, kui aluse juures olevad nurgad tingimuse $\sin\gamma = tg\,\beta$ rahuldavad?

(Vali a keskpunkt algpunktiks!)

Ülesanne 133. Alusele $c = 6$ on kolmnurgad nii ehitet, et aluse juures olevad nurgad tingimuse $tg\,\alpha \,.\, tg\,\beta = k$ rahuldavad. Missugune on tipu C geomeetriline koht?

$\alpha)\ k = -\frac{9}{4}$ $\qquad\qquad$ $\beta)\ k = +\frac{9}{16}.$

(Vali c keskpunkt algpunktiks!)

Ülesanne 134. Kus asuvad alusjoonele c ehitet kolmnurkade tipud, kui nendes kolmnurkades $4\,t_c^2 + 5\,h_c^2 = c^2$, kus t_c küljepoolitajat ja h_c kõrgust läbi C tähendab?

(Joonetamiseks võta $c = 12\,cm.$)

Ülesanne 135. Antud joonlõigu $AB = 2a$ keskpunkt olgu C. Missugune on punkti P geomeetriline koht, mille kaugus punktist C on keskmine proportsionaalne ta kauguste vahel punktidest A ja B?

Ülesanne 136. Muutuvas kolmnurgas on alus c ja mõlema teise külje vahe d jäädav. Missugune on kolmnurga raskus-keskpunkti geomeetriline koht?

(Joonetamiseks võta $c = 15$ cm; $d = 9$ cm.)

Ülesanne 137. Muutuvas kolmnurgas on alus g ja ümbermõõt u jäädav. Missugune on ta raskus-keskpunkti geomeetriline koht?

(Joonetamiseks võta $g = 12$ cm, $u = 27$ cm.)

Ülesanne 138. Ringis K on paralleelsed sidejooned tõmmatud. Missugune on punkti P geomeetriline koht, mis jaotab need sidejooned suhtes $m : n$ (2 : 3)?

Ülesanne 139. Suurele ellipsi teljele on kolmnurgad ehitet, millede tipud ellipsil asuvad. Missugune on nende kolmnurkade kõrguste lõikepunkti geomeetriline koht?

Ülesanne 140. Ringis raadiusega r on tõmmatud läbimõõduga AB perpendikulaarne sidejoon, mis ringjoont punktides C ja D lõikab. Missugune on ühendusjoonte AD ja BC lõikepunkti P geomeetriline koht, kui sidejoon läbimõõtu mööda liigub?

Ülesanne 141. Ruudu $ABCD$, mille külg $2a$, diagonaalide lõikepunkt O on täisnurga tipp. Kui see täisnurk punkti O ümber pöördub, siis lõikavad ta küljed sirgjoont AB punktides E ja F. Missugune on CE ja DF lõikepunkti geomeetriline koht? (Vali O algpunktiks!)

Ülesanne 142. Sirgjoon liigub nii, et ta alati lõikab koordinaatide telgedest kolmnurka AOB jäädava pinnasuurusega a^2. Missugust joont mööda liigub sirgjoone AB punkt P, mis jaotab AB suhtes λ?

(Võta joonetamiseks $a = 5$ cm; $\lambda = \frac{1}{4}$.)

Ülesanne 143. Sarikkolmnurga OBA võrdistel külgedel on jäädav pikkus b. Alusjoon OB asub alati X-teljel otsaga O algpunktis, kuna punkt B liigub mööda X-telge. Missugune on AB-l asuva punkti P geomeetriline koht, kui P jagab AB suhtes λ?

(Joonetamisel olgu $b = 3{,}5$ cm.; $\lambda = \frac{3}{4}$.)

§ 32. Sega-ülesanded koonuslôigetest.

Ülesanne 144. Mispärast puutub sirgjoon G kõverjoont C? Määra sirgega G perpendikulaarse puutuja T võrrand ja puutumispunkt.

$\alpha)$ $C \equiv y^2 - 8x = 0$ $\qquad G \equiv x - 2y + 8 = 0$

$\beta)$ $C \equiv \frac{x^2}{90} + \frac{y^2}{64} - 1 = 0;$ $\qquad G \equiv x\sqrt{10} - 2y + 34 = 0$

$\gamma)$ $C \equiv \frac{x^2}{170} - \frac{y^2}{64} - 1 = 0;$ $\qquad G \equiv x\sqrt{1{,}7} - y + 15 = 0.$

Näita, et T ja G lõikepunkt asub juhtumuses

$\alpha)$ juhtjoonel,

$\beta)$ ringjoonel $x^2 + y^2 = 154$ peal,

$\gamma)$ ringjoonel $x^2 + y^2 = 106$ peal!

Ülesanne 145. Missugused paraaboli $y^2 + 20x = 0$ puutujad moodustavad nende puutumispunktide sidejoonega täisnurkse sarikkolmnurga? Määra kolmnurga tippude koordinaadid ja kolmnurga pinnasuurus!

Ülesanne 146. Määra paraaboli teljel see punkt Q, millest kõverjoonele tõmmatud puutujad puutumispunktidest läbimineva sidejoonega võrdkülgse kolmnurga moodustavad!

Ülesanne 147. Leia see paraaboli punkt, millest läbitõmmatud puutuja ja normaal moodustavad X-teljega sarikkolmnurga!

Ülesanne 148. Sirgjoone $2x - y - 6 = 0$ ja paraaboli $y^2 = 6x$ lõikepunktides on tõmmatud puutujad. Kui suur on kolme sirgega piiratud kolmnurga pind?

Ülesanne 149. Ellipsisse $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$ on tarvis joonetada võrdkülgne kolmnurk nõnda, et üks ta tipp asuks vähema telje otsas. Missugused on teiste tippude koordinaadid ja kui suur on kolmnurga pind?

Ülesanne 150. Hüperbolisse $256x^2 - 192y^2 = 25$ on tarvis joonetada võrdkülgne kolmnurk nõnda, et üks ta tipp oleks pahempoolsel hüperboli tipul. Missugused on kolmnurga teiste tippude koordinaadid ja kui suur on kolmnurga pind?

Ülesanne 151. Ellipsisse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ tuleb joonetada ruut. Missugused on ta külgede võrrandid ja kui suur on ta pind?

Ülesanne 152. Määra selle ruudu tipud, mida võib joonetada hüperbolisse $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{18} = 1$!

Ülesanne 153. Kõverjoone $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ negatiivsel X-teljel asuvast tulipunktist F' on läbi tõmmatud abstsisside teljega perpendikulaarne sidejoon CC'. Missugune on punktidest C ja C' läbimineva paraaboli võrrand, kui paraaboli tipp asub antud kõverjoone keskpunktis?

Määra punktides C ja C' antud kõverjoonele kui ka paraabolile tõmmatud puutujate võrrandid!

Ülesanne 154. Antud on ellips pooltelgedega 5 ja 4. Ta $+X$-teljel asuv tulipunkt on ühtlasi paraaboli tulipunkt, mille tipp asub ellipsi keskpunktis. Missugustes punktides lõiguvad mõlemad koonuslõiked ja missugused on lõikepunktidest läbitõmmatud puutujate võrrandid?

Ülesanne 155. Mingile abstsissile x_0 vastavad antud ellipsil punkt P ja ringjoonel, mis suure telje kui läbimõõdu peal joonetet, punkt P_1. Tõenda, et ellipsi punkti P puutuja T ja ringjoone punkti P_1 puutuja T_1 X-telje ühes punktis lõiguvad!

Ülesanne 156. Tõenda, α) et puutujad, mis paraaboli juhtjoone ühest punktist võib tõmmata sellele paraabolile, on perpendikulaarsed,

β) et niisuguste puutuja-joonte puutumispunktide ühendusjoon läheb tulipunktist läbi.

Ülesanne 157. α) Paraaboli tipust O lastakse mõnele puutujale ristjoon ON ja pikendakse see teise lõikepunktini P kõverjoonega. Kui suur on kasvatis $\overline{ON} \cdot \overline{OP}$?

β) Missugune on selle ülesande lahendus, kui paraaboli asemel võtame hüperboli keskpunktiga O?

Ülesanne 158. Kui suur on hüperboli tulipunkti kaugus asümptoodist? Tõenda, et hüperboli punkti P kauguste kasvatis asümptootidest on jäädav!

Ülesanne 159. Näita, et puutumispunkt pooleks jagab joonlõigu, mille mõlemad asümptoodid hüperboli puutujast välja lõikavad.

Ülesanne 160. Missugustest kõverjoone C punktidest näeme ta tulipunktide kauguse 90^0 nurga all?

α) $C \equiv \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} - 1 = 0$

β) $C \equiv \frac{x^2}{104} - \frac{y^2}{65} - 1 = 0.$

Ülesanne 161. Missugustes punktides lõikab ringjoon K koonuslõiget C?

α) $K \equiv 25x^2 + 25y^2 - 289 = 0$; $\quad C \equiv \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$

β) $K \equiv 144x^2 + 144y^2 - 2929 = 0$; $\quad C \equiv \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} - 1 = 0$

γ) $K \equiv x^2 + y^2 + 34y = 0$; $\quad C \equiv x^2 + 9y = 0$

Ülesanne 162. Missugune on paraaboli tipp-võrrand, mille sisse võime joonetada

α) sarikkolmnurga alusega 24 ja kõrgusega 18,

β) võrdkülgse kolmnurga küljega 8, nii et ta tipp asuks paraaboli tipus ja kõrgus teljega ühte langeks?

Ülesanne 163. Missugune on paraaboli tipp-võrrand, mille telg X-teljel ja tipp algpunktis asub ja mille puutujaks on sirgjoon $x - 4y + 8 = 0$?

Ülesanne 164. Missugune on ellipsi keskpunkt-võrrand, mille puutujaks on sirgjoon $x + 4y - 25 = 0$ ja mille tulipunktide kaugus on $20\sqrt{2}$?

Ülesanne 165. Leida hüperboli keskpunkt-võrrand, mida sirgjoon $25x - 12y = 45$ puutub punktis abstsissiga 5?

Ülesanne 166. α) Ellipsi, mille telgedeks on koordinaatide teljed, puutub punktis $P\begin{cases} 2 \\ \frac{2}{3}\sqrt{5} \end{cases}$ sirgjoonega $G \equiv 4x + 3y\sqrt{5} - 4 = 0$ paralleelne sirgjoon.

Missugune on ellipsi võrrand? Kui suur on p ja e?

β) Sama ülesanne lahendada hüperboli kohta, kui on $P\begin{cases} 8\frac{3}{4} \\ -3\frac{3}{4} \end{cases}$ ja $G \equiv 25x + 21y - 420 = 0$.

Leida asümptootide võrrandid.

Ülesanne 167. Paraabol X-teljel asuva teljega puutub Y-telge ja sirgjoont $G \equiv 5x - 2y + 2 = 0$. Missugune on α) paraaboli võrrand, β) juhtjoone võrrand, γ) normaalide võrrandid, mis on punktist läbi tõmmatud, kus G paraabolit puutub?

Ülesanne 168. Ellipsil, mille teljed koordinaatide telgedega ühte langevad, on $e : a = 0{,}6$; seda ellipsi puutub sirgjoon $G \equiv 6x + 10y + 25 = 0$. Missugune on ellipsi võrrand? Missugune peab c olema, et ka sirge $L \equiv 8x - cy - 25 = 0$ ellipsi puutuks? Kus asub ellipsi ja L puutumispunkt?

Geomeetrilised kohad.

Ülesanne 169. Missugune on nende punktide geomeetriline koht, millede kauguste suhe kindlast punktist F ja kindlast sirgest G on jäädav ja võrdne $m : n$?

$\alpha)\ F\begin{cases}-4\\0\end{cases}\quad G\equiv x-4=0\quad m:n=1:1$

$\beta)\ F\begin{cases}9\\0\end{cases}\quad G\equiv x-16=0\quad m:n=3:4$

$\gamma)\ F\begin{cases}0\\14\end{cases}\quad G\equiv 7y-50=0\quad m:n=7:5$

Ülesanne 170. Antud on punkt $B\begin{cases}o\\d\end{cases}$, milles muutuva sarikkolmnurga ABC (alus on BC) tipp B alati asub, kuna tipp A X-teljel nõnda liigub, et külg AC alati selle teljega perpendikulaarne on. Missugusel joonel liigub tipp C?

Ülesanne 171. Tõenda, et paraaboli tulipunktist ta puutujaile lastud perpendikulaaride aluspunktid paraaboli tipust läbitõmmatud puutujal asuvad.

Ülesanne 172. Parallelogramm $OABC$ on nõnda tehtud 4 pulgast pikkustega a ja b, et nad võivad tippudest pöörduda. Tipp O asub muutumatult algpunktis. Kui nüüd see nelinurk nõnda liigub, et X-telg alati parallelogrammi nurga AOC poolitab, siis kujutab neljas tipp B ellipsi pooltelgedega $a+b$ ja $a-b$. Tõenda see!

Ülesanne 173. Alusele $AB=c$ on ehitet kolmnurgad ABC, milledes kõrgusele h_c ehitet ruut on kaks korda nii suur kui täisnurkne nelinurk, mille külgedeks on kõrguse läbi jaotet alusjoone osad. Missugusel joonel asuvad nende kolmnurkade tipud C? (Algpunktiks vali c keskpunkt.)

Ülesanne 174. Alusjoonele $c=6$ on kolmnurgad ehitet, millede nurgad aluse juures rahuldavad tingimuse $tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta=k$. Missugune on tipu C geomeetriline koht?

1) $k=-\frac{9}{4}$ 2) $k=+\frac{9}{16}$.

(Algpunktiks vali c keskpunkt.)

Ülesanne 175. Antud on kolm sirgjoont $G_1\equiv 25y-96=0$; $G_2\equiv 3x+4y-12=0$ ja $G_3\equiv 3x-4y+12=0$. Kus asuvad kõik punktid, millede kauguste ruut sirgest G_1 võrdub kauguste ruutude summaga sirgetest G_2 ja G_3?

Ülesanne 176. Missugune on nende ringide keskpunktide geomeetriline koht, mis

$\alpha)$ sirgjoont $G\equiv x+a=0$ ja
ringjoont $K\equiv x^2+y^2-2x(a+r)+a^2+2ar=0$

väljastpoolt puutuvad,

$\beta)$ sirgjoont $G\equiv x+r+a=0$ ja
ringjoont $K\equiv(x-a)^2+y^2-r^2=0$

nii puutuvad, et ring K nende sisse jääb?

Ülesanne 177. Paraaboli $y^2 = 2px$ kulgevast punktist P lastakse juhtjoonele D ristjoon PV ja ühendakse punktid V, P ja F. Missugune on kolmnurga PVF raskus-keskpunkti geomeetriline koht?

Ülesanne 178. Ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kulgevast punktist P läbitõmmatud puutuja lõikab Y-telge punktis Q. Missugune on kolmnurga PQO (O on algpunkt) kõrguste lõikepunkti geomeetriline koht?

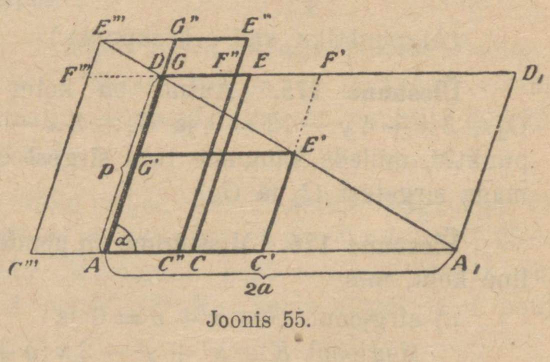
Ülesanne 179. Punkt P, mis kulgeb haruühtlase hüperboli $x^2 - y^2 = a^2$, ühendakse hüperboli tippudega A ja A'. Missugust joont kujutab siis $\triangle PAA'$ kõrguste lõikepunkt?

Ajaloolised teated.

Koonuslõigete leidjana mainitakse Menächmust (350 a. ümber e. Kr.), Plato (429—348 e. Kr.) õpilast. Ta lõikas püst-ringkoonust tasapinnaga perpendikulaarselt ühe kujutavjoonega ja sai, selle järele, kas nurk telje ja kujutavjoone vahel vähem, võrdne või suurem oli kui pool täisnurka, kolm erinevat joont, mida „teravnurkse, täisnurkse ja nürinurkse koonuse lõigeteks“ nimetati.

Matemaatika, mis alles Pythagorase (580—501 e. Kr.) läbi päris teaduseks sai, arenes suuresti ta kuulsast koolist tulnud õpilaste ajal. Pythagorase järeltulijate juures leiame teiste hulgas järgmised ülesanded:

Antud on parallelogramm AA_1D_1D külgedega $AD = p$; $AA_1 = 2a$ ja nurgaga α (joonis 55). Külje AD külge peab teine antud pinnasuurusega parallelogramm $ACEG$, nurgaga α, asetama. Olenedes AC pikkusest saab teine külg olema $AG = p$ ehk $AG' < p$ ehk $AG'' > p$; s. t., kui me parallelogrammi $AC'E'G'$ p külge paneme, siis jääb joonlõigust p osa $G'D$ üle, kuna aga parallelogrammi $AC''E''G''$ külg AG'' osa DG'' võrra üle p ulatab. Kui $AG = p$, siis langeb parallelogrammi $ACEG$ külg just küljega p ühte. Ses juhtumuses on säetud ülesandel ainult üks vastus. Kui aga $AG \lessgtr p$ on, siis saame lõpmatu palju lahendusi. Võime seepärast parallelogrammi kohta veel ühe tingimuse ette panna, mis Pythagorase järeltulijail on see, et „puuduv“ parallelogramm $G'E'F'D$ ja „üle ulatav“ parallelogramm $G''E''F''D$ sarnane peab olema antud parallelogrammiga AA_1D_1D. Selle tingimuse pärast peab tipp E' ja, kui parallelogrammi $AC''E''G''$ asetame teisel pool p kohale $C'''AG''E'''$, ka tipp E''' asuma diagonaalil DA_1 ehk tema pikendusel; siis on ainult üks neljas punkt E ja ainult üks ülesande lahendus olemas.



Joonis 55.

Kolm nimetet ülesannet on Pythagorase koolist pärit ja on Euklidese (300 a. ümber e. Kr. Aleksandrias) poolt ta „Elementides“ üles tähendet. Ta tarvitas seejuures sõnu ἐλλείπειν (elleipein), s. t. üle jätma, ὑπερβάλλειν (hüperballein), s. t. üle ulatama ja παραβάλλειν (paraballein), s. t. külge panema.

Kui valime $\alpha = 90^0$, nii et nelinurk AA_1D_1D täisnurkne on, ja need kolm ülesannet ümber pöörame, nii et me mitte pinnasuurust antuna ei võta, vaid $AC = x$ vabalt määrame, siis võib joonlõiku y ikka nõnda joonetada, et ta peale ehitet ruut võrdub antud täisnurkse nelinurgaga $ACEG$. Asetades leitud joonlõigu y punktist C küljele AC tõmmatud ristjoonele üles- ja allapoole, saame teatud kõverjoonte punktid. Nende kõverjoonte tekkimine ülemal antud ülesannete ümberpöörmisest on leitud alles pärast Euklidest. Nende samasuse koonuslõigetega leidis Apollonius Pergast (250 ja 200 a. vahel e. Kr. Aleksandrias, pärast Pergas). See „suur geomeeter" nimetas neid ühenduse pärast eelpoolnimetet ülesandega ellipsiks, hüperboliks ja paraaboliks. Ka näitas ta, et kõik need koonuslõiked võime saada samal püst- või kaldkoonusel. Ta kirjutas kõik, mis vanemate õpetlaste, nagu Menächmuse, Aristäuse, Euklidese ja teiste poolt oli leitud, 8 raamatusse „koonuslõigete" üle, milledest aga ainult 7 alles on jäänud.

II jagu.

Differentsiaalarvamise elemendid.

§ 33. Piiri mõiste.

1. Järgmistes arvuderidades

I. 1,9 1,99 1,999 1,9999; ....

II. 2,1 2,01 2,001 2,0001; ....

III. $2+1$; $2-\frac{1}{2}$; $2+\frac{1}{3}$; $2-\frac{1}{4}$; $2+\frac{1}{5}$; $2-\frac{1}{6}$; ....

võib moodustamisseadust kui tahes kaugele edasi viia. Jõuame ikka uute arvsuuruste juure, mis seda vähem erinevad ühest teatud suurusest (antud korral 2-est), mida kaugemale me läheme.

Näituses I on iga järgmine arv eelmisest suurem, näituses II vähem, kuna näituses III esimene suurem on kui 2, teine vähem kui 2, kolmas suurem kui 2 jne. Igas juhtumuses erineb iga järgmine suurus ikka vähem arvust 2 kui eelmine. Seepärast tuleme määratud arvule 2 ikka lähemale, jõuame ta juure aga alles siis, kui me rea moodustamisseadust lõpmatu palju kordi tarvitusele võtame. Seepärast öeldakse, et arv 2 on **piir (limes)**, millele muutuva arvu suurus ikka rohkem läheneb.

Kui üldisel kujul tähendame säärases arvureas teineteisele järgnevad suurused

$$u_1;\ u_2;\ u_3;\ \ldots\ldots;\ u_n;\ \ldots\ldots$$

ja piir-suuruse, millele need arvud edeneva arenemisega ikka rohkem lähenevad, tähega a, siis näeme, et küllalt kaugel rea algusest olev suurus u_n piir-suurusest a lahku läheb vähem kui kuitahes väikse arvu h võrra, s. t. et

$$u_n - a < h \text{ on.}$$

Siis kirjutakse

$$\lim_{n=\infty} u_n = a.$$

2. Mida suurema n võtame rea

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

summa moodustamisel, seda suuremaks saab S; näituseks kui

$n = 1$ siis saame $S_1 = \frac{1}{2}$ $= 0{,}5$

$n = 2$ „ „ $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$n=3$ siis saame $S_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$

$n=4$ „ „ $S_4 = \frac{7}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}9375$

$n=5$ „ „ $S_5 = \frac{15}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0{,}96875$ jne.

Iga järgmise summa suurus on ühe liikme võrra suurem. Et aga iga järgmine juurearvatav liige ikka väiksemaks ja väiksemaks jääb, siis muutub n suurenemisega summa ikka vähem. Kui n piiramatult kasvab, siis ei lähe summa mitte suuremaks kui iga antud arv, vaid läheneb ikka rohkem teatud väärtusele, millest ta kunagi ei suurene. Sellest annab näitliku ettekujutuse joonis 56. Joonlõik $AB = 1$ on poolitet, ülejääk jälle poolitet jne. Nõnda saame üleval antud rea liikmed $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots$ joonlõikudena, ja et need teineteise kõrval asuvad, siis on ka näha kõik teineteisele järgnevad summa suurused $S_1, S_2, S_3 \ldots$ Kujutame endale ette, et ülejäägi poolitamine lõpmatu kaua edasi kestab, siis näeme, et selle rea liikmete summa ei muutu mitte lõpmatu suureks, vaid läheneb arvule üks. Me tuleme punktile B ikka lähemale, jõuame aga päris selle punktini alles siis, kui mainitud tehet lõpmatu palju kordame.

Joonis 56.

Seepärast öeldakse, et arv 1 on tähendet rea summa **piir** lõpmatusuure n juures, ja kirjutakse seda nii:

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=1.$$

Sarnaselt nimetakse harilik murd $\frac{1}{3}$ lõpmatu kümnend-murru 0,333 .... piiriks. 0,333 ... võib avaldada rea näol:

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\ldots\ldots+\frac{3}{10^n}$$

[kus $n=\infty$]. Seda kirjutakse nõnda

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\ldots\ldots+\frac{3}{10^n}\right)=\frac{1}{3}.$$

Mõlemais näitustes esineb liikmete arvuga muutuv summa suurus liikmete arvu n funktsioonina. Tundemärk, et summa suurus kindlale piirsuurusele läheneb, seisab selles, et võimalik on leida niisugust arvu, et selle arvu ja iga muutuva summa suuruse vahe absoluutne suurus väiksemaks jääb kui mistahes väike positiivne arv.

3. Kui ringjoonele raadiusega r korrapärase n-nurga sisse või ümber joonetame, siis võib kasvava külgede arvuga n vahet sisse- või ümberjoonetet hulknurga ümbermõõdu ja ringjoone pikkuse vahel kui tahes väikseks teha. Me võime seepärast vaadata ringjoone pikkuse peale kui sisse- või ümberjoonetet n-nurga ümbermõõdu piiri peale, kui $n=\infty$ saab.

Sissejoonetet korrapärase n-nurkse külje pikkus on

$$s = 2r \,.\, sin\,\frac{180^0}{n}, \text{ ja ümbermõõt}$$

$$U = 2nr \,.\, sin\frac{180^0}{n}.$$

Selle piir on ringjoon

$$U = 2\pi r.$$

Võime seepärast arvu $\pi = 3{,}14159 \ldots$ peale kui piiri peale vaadata, millele läheneb kasvatis $n \,.\, sin\,\frac{180^0}{n}$, kui n lõpmatu suureks saab.

Sarnaselt võime silindri (koonuse) peale kui ta sisse- või ümberkujutet prisma (püramiidi) peale vaadata, kui viimase tahkude arv lõpmata kasvab.

4. Kui funktsioonis $y = \frac{a}{x}$, milles a on jäädav, laseme rippumata muutuja x kasvada ikka suuremaks ja suuremaks, siis jääb funktsiooni suurus y ikka väiksemaks ja väiksemaks ja lõpuks lõpmatu väikseks, kui x lõpmatu suureks on saanud.

Niisugune piiramatult vähenev suurus läheneb nullile. Seda näeme kõige lihtsamini funktsioonist

$$y = a - x,$$

mida graafiliselt võib sirgjoonena esitada, mis igal positiivsel koordinaadi teljel osa a ära lõikab. Kui $x = 0$, siis on $y = a$. Mida rohkem x arvule a läheneb, seda väiksemaks muutub y. Lõpuks jääb ordinaat y vähemaks kui iga määratav arv, teiste sõnadega: lõpmatu väikseks. Piirjuhtumuses, kui $x = a$, on $y = a - a$. See suurus on aga null. Seepärast on null niisuguse muutuva arv-suuruse piir, mis vähemaks jääb kui iga antud arv. Nüüd võime kirjutada

$$\lim_{x=\infty} \frac{a}{x} = 0.$$

Kui aga funktsioonis $y = \frac{a}{x}$ muutuja x alati väheneb, siis kasvab y ikka rohkem ja rohkem ja läheb lõpuks suuremaks kui iga antud arv, kui x muutub lõpmatu väikseks. Seepärast kirjutame

$$\lim_{x=0} \frac{a}{x} = \infty.$$

Sarnaselt võime ka saada

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{a}{a+b}\right)^n = 0.$$

Ülesanne 180. Leia järgmiste geomeetriliste ridade summade piirid, kui nende liikmete arv muutub lõpmatu suureks!

a) $$\lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right]$$

β) $\lim\limits_{n=\infty}\left[1-\frac{4}{5}+\frac{16}{25}-\frac{64}{125}+\ldots+\left(-\frac{4}{5}\right)^n\right]$

γ) $\lim\limits_{n=\infty}\left[a+aq+aq^2+\ldots+aq^n\right]$ kui $q<1$

δ) $0,\overline{27}\ldots=\lim\limits_{n=\infty}\left[\frac{27}{100}+\frac{27}{100^2}+\frac{27}{100^3}\ldots+\frac{27}{100^n}\right]$

ε) $0,\overline{6}\ldots$ ζ) $0,\overline{405}\ldots$ η) $0,\overline{428571}\ldots$

Ülesanne 181. Säe kokku tabelis avalduse $\frac{\sin z}{\widehat{z}}$ suurused, kui muutuja z saab väärtused, mis vastavad nurkadele 90°, 80°, 70° ..... 10°, 9°, 8°, 7° ..... 1°, 30′ ja on välja arvatud kaaremõõdus 6-e kümnendkoha peenuseni!

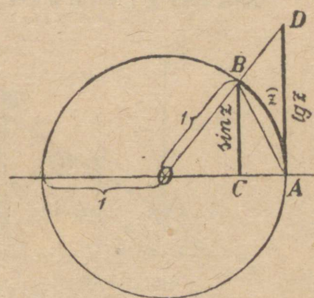
5. Sellest tabelist (ülesanne 181) näeme siis, kuidas väheneva muutujaga z avalduse $\frac{\sin z}{\widehat{z}}$ suurus ikka rohkem arvule 1 läheneb.

Kui selle avalduse otse $z=0$ asetame, siis ta saab määramatu kuju $\frac{0}{0}$. Piiriväärtuse

$$\lim_{z=0}\frac{\sin z}{z}$$

väljaarvamine võib järgmisel viisil sündida.

Kui ringi raadius joonisel 57 pikkuse üksuseks võtta, siis on $BC=\sin z$, $AD=\operatorname{tg} z$ ja kaar $AB=\widehat{z}$.



Joonis 57.

Nüüd on

$\triangle OAD >$ sektor $OAB > \triangle OAB$ ehk

$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \operatorname{tg} z > \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \widehat{z} > \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin z$

1) $\operatorname{tg} z > \widehat{z} > \sin z$

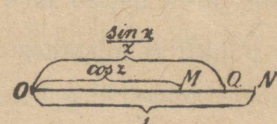
2) $\sin z = \sin z = \sin z.$

Jagades rea 2) reaga 1), saame

$$\cos z < \frac{\sin z}{\widehat{z}} < 1.$$

Suhe $\frac{\sin z}{z}$ on alati suuruste $\cos z$ ja 1 vahel. Kui joonisel 58 üksus on graafiliselt esitet joonlõiguga ON, $\cos z$ joonlõiguga OM ja suurus $\frac{\sin z}{z}$ joonlõiguga OQ, siis peab punkt Q alati M ja N vahel asuma.

Kui nüüd z ikka rohkem väheneb, siis kasvab $\cos z$, seejuures jääb aga $\frac{\sin z}{z}$ alati piiride $\cos z$ ja 1 vahele. $\cos z$ läheneb aga ikka rohkem ühele ja kui lõpuks $z=0$ saab, siis püüavad mõlemad piirid, millede vahel $\lim\limits_{z=0}\frac{\sin z}{z}$ peab asuma, üheks saada, nii et



Joonis 58.

$$\lim_{z=0} \frac{\sin z}{z} = \mathbf{1} \text{ on.}$$

Lisandus. Kui $z = 0$ saab, siis saab ka $az = 0$, kui a on jäädav tegur. Seepärast on ka

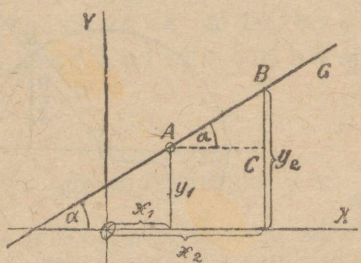
$$\lim_{z=0} \frac{\sin az}{az} = 1.$$

§ 34. Tuletise mõiste.

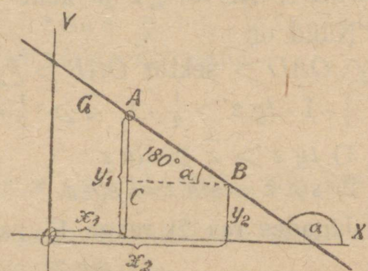
1. Kui kõiki siiamaani käsitet funktsioon-kõverjooni vaatleme ja võrdleme, siis näeme, et rippumatu muutuja x suurenemisega üldiselt ka funktsioon y suureneb või väheneb. Edasi näeme, et teatud x suuruste juures kõverjoon ühe kõige kõrgema või kõige madalama punktini võib jõuda, s. t. et vastavalt teatud x suurustele funktsioon võib saada maksimumiks või miinimumiks. Peale selle näeme, et kõverjoon võib olla ühel kohal rohkem, teisel vähem järsk, et ta üks kord oma kumera külje, teine kord nõgusa külje võib ülespoole pöörda. Ka erilised kõverjoone punktid võivad ette tulla, milledes kõverjoon oma kõverust muudab, kumerast kõverusest nõgusa juure pöördub või vastupidi.

Niisuguste vahekordade uurimiseks on esiteks tarvis määrata ka k õ v e r j o o n e koha jaoks **tõusu** mõiste, mida me sirgjoone juures (vaata § 7 lk. 15) juba tunneme.

Kui s i r g j o o n e l G, mis $+X$-teljega nurga α moodustab, mõned punk-



Joonis 59-a.



Joonis 59-b.

tid $A\begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases}$ ja $B\begin{cases} x_2 \\ y_2 \end{cases}$ valime, siis saame täisnurksest $\triangle ABC$ (joonis 59) alati

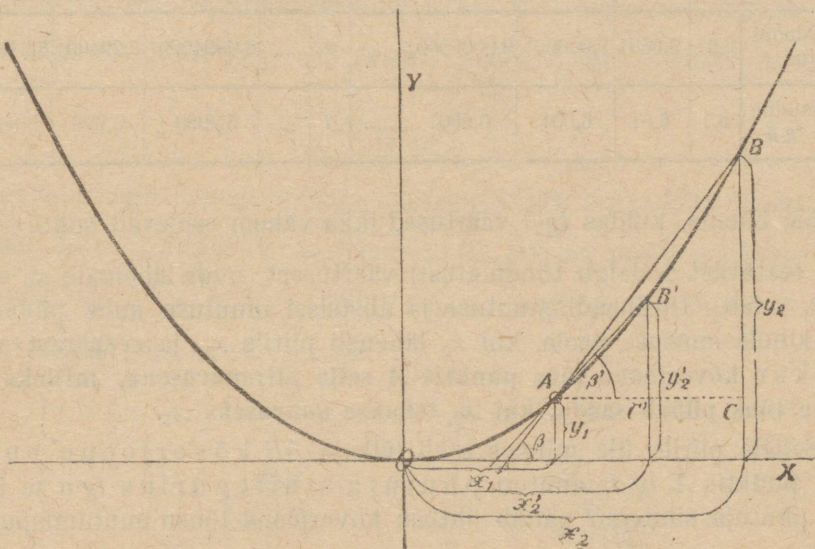
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg\,\alpha;$$

selle järele näitab suhe $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ s i r g j o o n e t õ u s u. Seejuures võib sirgel G punkti B mistahes viisil valida, ikka jääb suhtel sama suurus. Ka kui mõnest teisest sirgjoone G punktist A välja läheme ja $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ välja arvame, ikka saab tal sama suurus, nimelt $tg\,\alpha$.

S i r g j o o n e l o n i g a s p u n k t i s ü h e s u g u n e t õ u s.

Kui nüüd alati valime $x_2 > x_1$, see tähendab vahe $x_2 - x_1$ positiivse võtame, siis oleneb suhte $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ märk lugeja märgist. Kui, nagu joonisel 59-a, $y_2 > y_1$, siis on $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ja sellega ka $tg\,\alpha$ positiivne ja α teravnurk; s i r g j o o n t õ u s e b.

Kui aga, nagu joonisel 59-b, suureneva muutujaga x on $y_2 < y_1$, siis saab suhe $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ja sellega ka $tg\,\alpha$ negatiivseks; α on nürinurk ja s i r g j o o n l a n g e b.



Joonis 60.

Kui nüüd kõverjoonel $y = f(x)$ (joonis 60) valime punkti $A \begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases}$ ja selle ühendame sidejoone abil kõverjoone teise punktiga $B \begin{cases} x_2 \\ y_2 \end{cases}$, siis näitab meile suhe $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, mille leiame täisnurksest kolmnurgast ABC ja mis ühtlasi on sidejoone AB sihiteguriks $tg\,\beta$, s i d e j o o n e AB t õ u s u. Kui punktid A ja B ei asu liig kaugel üksteisest, siis võib öelda, et kõverjoonel on punktis A ligikaudselt sidejoone AB tõus.

Saame k õ v e r j o o n e l i g i k a u d s e t õ u s u jaoks parema suuruse, kui punkti B asemel valime punktile A lähema punkti $B' \begin{cases} x_2' \\ y_2' \end{cases}$, sest et uus sidejoon AB' kõverjoonest vähem erineb. Uus ligikaudne tõus oleks

$$\frac{y_2' - y_1}{x_2' - x_1} = tg\,\beta'.$$

Missugusel määral ligikaudse tõusu suurus ikka rohkem paraneb, mida rohkem punkt B punktile A läheneb, on selgesti järgmisest

arvulisest näitusest

näha, milles funktsioon-kõverjoone

$$y = x^2$$

jaoks ligikaudne tõus punkti $\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 9 \end{cases}$ ümbruses on välja arvatud, lähenedes kohale $x_1 = 3$ ühelt poolt punktist $x_2 = 3,1$, teiselt poolt $x_2 = 2,9$.

Rippumatu muutuja x	3,1	3,01	3,001	3,0001	....	3	....	2,9999	2,999	2,99	2,9
Funktsiooni väärtus y	9,61	9,0601	9,006001	9,00060001	....	9	....	8,99940001	8,994001	8,9401	8,41
Ligikaudne tõus $tg\,\beta$	6,1	6,01	6,001	6,0001	....	?	....	5,9999	5,999	5,99	5,9

Me näeme, kuidas $tg\,\beta$ väärtused ikka vähem erinevad suhte $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ühest teatavast (esialgu tundmatust) väärtusest, mida lähemale x_2 suurusele x_1 tuleb. Ordinaadi muutuse ja abstsissi muutuse suhe püüab ühe päris kindla suuruse poole, kui x_2 läheneb piirile x_1, ja seepärast määratakse **kôverjoone tôus punktis A selle piirsuurusena, milleks ligikaudne tôus püüab saada, kui x_2 tehakse suuruseks x_1.**

Sellele piirile üle minnes saab lõikaja AB kõverjoone puutujaks punktis A, $tg\,\beta$ muutub puutuja sihiteguriks $tg\,\alpha$ ja kõverjoone puutuja sihitegur näitab ühtlasi kõverjoone tõusu puutumispunktis.

Ülemal toodud näituses $y = x^2$ võime piirile ülemineku ette võtta suuruses $tg\,\beta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}$, kui me selle murru enne koondame teguriga $x_2 - x_1$. Siis saame

$$tg\,\beta = x_2 + x_1.$$

Nüüd on $tg\,\alpha = \lim\limits_{x_2 = x_1} (x_2 + x_1) = 2\,x_1$.

Punktis $x_1 = 3$ on seepärast kõverjoone tõus

$$tg\,\alpha = 2 \,.\, 3 = 6.$$

Selleks suuruseks püüavad saada ka tabelis antud $tg\,\beta$ suurused.

2. Ka ilma graafiliste kujutuste tarvitamiseta võib mistahes antud funktsiooni

$$y = f\,(x)$$

väärtuste ja rippumatu muutuja x väärtuste muutuste suhte moodustada kahe mistahes väärtuse x_1 ja x_2 ja nendele vastavate väärtuste

$$y_1 = f(x_1) \text{ ja } y_2 = f(x_2)$$

jaoks. Seda vahekorda

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{\text{rippuva muutuja vahe}}{\text{rippumatu muutuja vahe}}$$

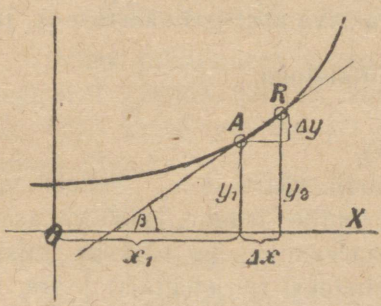
nimetakse funktsiooni $f(x)$ vahede suhteks *).

Kui $\begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases}$ on muutuseta ja kui teeme vahe $x_2 - x_1$ väga väikseks, siis kirjutakse see vahe lühemalt Δx ja nimetakse teda abstsissi x_1 juurekasvuks. Temale vastab siis ka väike ordinaatide muutus $y_2 - y_1 = \Delta y$ mis positiivne või negatiivne on selle järele, kas kõverjoon punktist $A \begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases}$ arvates tõuseb (joonis 61-a) või langeb (joonis 61-b). Vahede suhe saab siis kuju

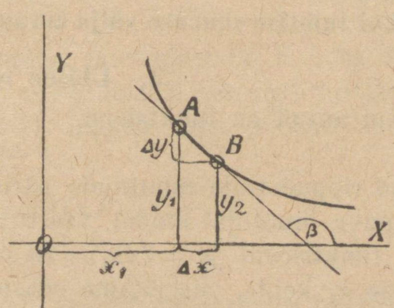
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta$$

ja tähendab, nagu ennegi, lõikaja sihitegurit ehk ligikaudist tõusu.

Kui Δy on positiivne (joonis 61-a), siis on positiivse juurekasvu Δx pärast ka $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\beta$ positiivne, s. t. nurk β, mis lõikaja $+X$-teljega moodustab, on teravnurk.



Joonis 61-a.



Joonis 61-b.

Kui aga Δy on negatiivne (joonis 61-b), siis on ka $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\beta$ negatiivne ja β nürinurk.

Vahede suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ annab nõnda iga kord lõikaja AB sihiteguri õige suuruse ja märgi.

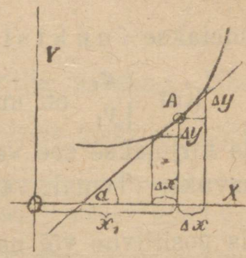
Kui me nüüd x_2 aegamööda laseme saada suuruseks x_1 või teiste sõnadega, kui me Δx lõpmatult vähendame, nii et viimati $\Delta x = x_2 - x_1 = 0$ saab, siis saab vahede suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (nagu seda nägime eelmises näituses)

*) Saksa keeles „*Differenzenquotient*" E. K.

kindla väärtuse, mida nimetame **funktsiooni $f'(x)$ tuletiseks** kohal x_1 ja mida tähendame sümboliga $\frac{dy}{dx}$ *).

Kirjutakse

$$\lim_{x_2=x_1} \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{dy}{dx} \text{ ehk } \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$



Joonis 62.

Joonisest 61 saab piirile üle minnes joonis 62 ja tuletis annab $tg\,\alpha$ suuruse, s. t. kõverjoone puutuja sihiteguri ehk kõverjoone tõusu punktis A. Pideva funktsiooni **) juures saame sama suuruse $\frac{dy}{dx}$, kas laseme Δx paremalt või pahemalt poolt lõpmata väheneda. Nii saame siis järgmise

funktsiooni tuletise definitsiooni:

Tuletise $\frac{dy}{dx}$ all mõistetakse seda suurust, milleks saab vahede suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ehk $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, kui rippumatu muutuja vahe Δx ehk x_2-x_1 nulliks muutub.

Tal on järgmine *geomeetriline tähendus*:

Me leiame kõverjoone punktis $\left\{\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\right.$ tema tõusu ehk puutuja sihiteguri, kui tuletise suuruse välja arvame vastava abstsissi väärtuse x_1 jaoks.

3. Üldine formulatsioon.

Kui antud on funktsioon

$$y = f(x),$$

anname rippumatule muutujale päris kindla väärtuse x_1. Sellele vastab ka rippuva muutuja kindel väärtus y_1, mille leiame, kui x_1 asetame antud funktsiooni $y_1 = f(x_1)$. Et väljaarvamine on maksev mistahes väärtuse x_1 kohta, siis jätame edaspidi indeksi (järjenäitaja) 1 ära, nii et rippumatu muutuja väärtusele x funktsiooni väärtus

(1) $$y = f(x)$$

vastab. Kui nüüd laseme k a s v a d a x väikse suuruse Δx võrra, siis muutub funktsiooni suurus väikse (positiivse või negatiivse) suuruse Δy võrra, nii et ta saab $y + \Delta y$. Viimase suuruse saame, kui x asemele asetame funktsiooni võrrandisse $x + \Delta x$, nii et

(2) $$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Pärast võrrandite (2) ja (1) mahaarvamist leiame rippuva muutuja juurekasvu $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

---

*) Õpilane hoidku vaatamast sümboli $\frac{dy}{dx}$ kui dy ja dx jao peale; see kirjutusviis on ainult matemaatilise tehte märk, nagu juuremärk või *log*, *sin*, *tg* jne.

) Kui funktsioonil $f(x)$ väärtuste $x_1 = a$ ja $x_2 = b$ piirkonnas rippumatu muutuja iga lõpmatu-väikse edaspidise või tagurpidise muutumisega ka funktsiooni väärtus lõpmatu vähe muutub, siis öeldakse, et funktsioon $f(x)$ on väärtuste $f(a)$ ja $f(b)$ vahel **pidev.

Jagades mõlemad võrrandi pooled suurusega Δx, saame

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Kui selles avalduses piirile üle läheme, muutes Δx nulliks, siis saame tuletise

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}.$$

Kui piirisuurus on leitud, siis peame endale muidugi ette kujutama, et x asemele on asetet kindel suurus x_1; siis saame sellele kindlale suurusele x_1 vastava tuletise ja selle arvsuurus on kõverjoone vastava punkti puutuja sihitegur.

4. Näitused.

I näitus. Sirgjoon.

Selle võrrand on $y = mx + t$.

Kui x kasvab väikse suuruse Δx võrra, siis on funktsiooni muutus

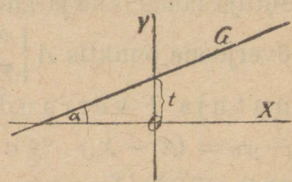
$$\Delta y = m(x + \Delta x) + t - [mx + t] = m \cdot \Delta x$$

ja vahede suhe

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

ja selle järele tuletis

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} m = m.$$



Joonis 63.

Selles juhtumuses ei ripu tuletis muutujast x, s. t. ta on jäädav. Sirgjoonel (joonis 63) on kõigis punktides ühesugune tõus (vaata lhk. 82); joone $y = mx + t$ puutuja langeb igas punktis selle joone endaga ühte.

II näitus. Apolloniuse paraabol.

Selle võrrand on $y = x^2$.

Kui x väikse Δx võrra kasvab, siis on funktsiooni muutus

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x . \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2,$$

vahede suhe

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x,$$

ja tuletis

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x. \text{ (Vaata § 34, 2.)}$$

Nüüd võime puutuja sihiteguri iga punkti x_0 jaoks kohe välja arvata. Kui $x = x_0$ on, siis

$$tg\,\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_0} = 2x_0;$$

näituseks $x = 1$ vastab $tg\,\alpha = 2$; $\alpha = 63^0\,26'\,6''$

„ $x = -\frac{1}{4}$ „ $tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$; $\alpha = 180^0 - 26^0\,33'\,54''$

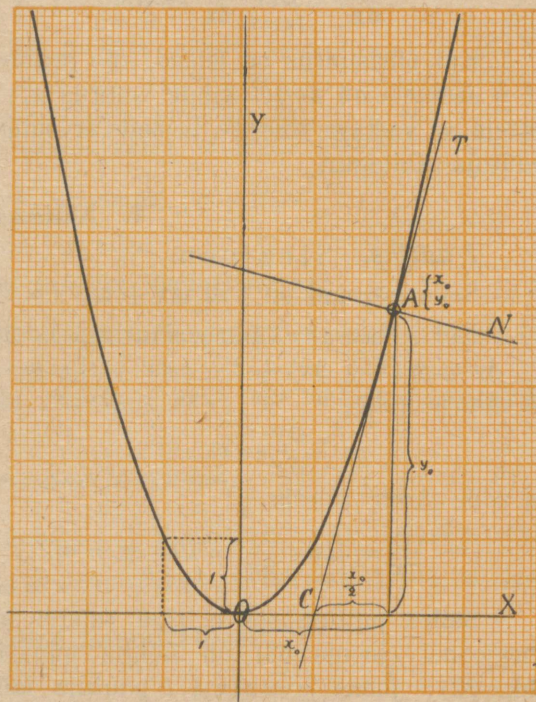
$= 153^0\,26'\,6''$.

Kui me võrduse $tg\,\alpha = 2\,x_0$ nii avaldame

$$tg\,\alpha = 2\,x_0 = \frac{x_0^2}{\frac{x_0}{2}} = \frac{y_0}{\frac{x_0}{2}}$$

siis võime selle abil kergesti puutuja ehitada.

Kui kõverjoone punktis A (joonis 64) tahame puutuja joonetada, siis leiame ta abstsissi keskpunkti C. Sirgjoon läbi A ja C ongi kõverjoone puutuja punktis A.



Joonis 64.

Sellest ehitusviisist kui ka valemist $tg\,\alpha = 2\,x_0$ järgneb, et kasvava absoluutse suurusega $|x_0|$ ka $|tg\,\alpha|$ alati kasvab ja seepärast ka α, s. t. puutuja läheb ikka järsumaks.

Kõverjoone punktis $A\begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}$ on puutuja T võrrand

$y - y_0 = (x - x_0)\,.\,tg\,\alpha$ ehk

$y - y_0 = 2\,x_0\,(x - x_0)$.

Normaali N (perpendikulaar puutuja-joonega puutumispunktis) sihitegur võrdub puutuja negatiivse vastupidise sihiteguriga; nii et normaali (punktis A) võrrand on

$$y - y_0 = \frac{1}{2x_0}\,(x_0 - x).$$

Näituseks punktis $x_0 = 2$ on $y_0 = 4$; $tg\,\alpha = 4$, siit puutuja võrrand on

$y - 4 = (x - 2)\,.\,4$ ehk $4\,x - y - 4 = 0$

ja normaali võrrand

$y - 4 = -\frac{1}{4}\,(x - 2)$ ehk $x + 4\,y - 18 = 0$.

Ka teised puutuja kohta käivad küsimused võivad nüüd vastust leida; näituseks:

a) missuguse kõverjoone punkti puutuja moodustab $+X$-teljega 45^0 nurga?

$$tg\,45^0 = 1 = 2\,x_0,$$

siit $x_0 = \frac{1}{2}$; sellele vastab $y_0 = \frac{1}{4}$;

b) missuguse punkti puutuja on X-teljega paralleelne?

$$\alpha = 0; \qquad tg\,0^0 = 0 = 2\,x_0$$
$$x_0 = 0 \text{ ja } y_0 = 0,$$

s. t. see on kõverjoone puutuja algpunktis.

Kui puutuja X-teljega paralleelne on, siis on kõverjoonel üldiselt kõige kõrgem või kõige madalam punkt.

Ülesanne 182. Leia järgmiste funktsioonide tuletised, leia see nurk, mille puutuja kõverjoone punktis P $+X$-teljega moodustab, säe punktis P puutuja ja normaali võrrandid ja leia ehitusviis puutuja jaoks punktis P!

Missuguses kõverjoone punktis a) on puutuja X-teljega paralleelne, b) moodustab puutuja X-teljega 45^0 nurga, c) 135^0 nurga?

Kõverjoont peab ka joonetama [abstsissi üksuseks juhtumuses α) olgu 1 cm, juhtumustes β) ja γ) 2 cm].

α) $y = \frac{1}{10}x^3$; $\qquad P\ (x_1 = -4)$; $\qquad P'\ (x_2 = +3)$

β) $y = x^4$; $\qquad P\ (x_1 = +1)$; $\qquad P'\ (x_2 = -\frac{3}{4})$

γ) $y = \dfrac{1}{x}$; $\qquad P\ (x_1 = +\frac{1}{2})$; $\qquad P'\ (x_2 = -1{,}5)$.

§ 35. Astme tuletis.

Antud on funktsioon $y = x^n$.

Suurusele $x = x_1$ vastab ta väärtus $y_1 = x_1{}^n$

„ $\quad x = x_2$ „ „ „ $y_2 = x_2{}^n$.

Vahede suhe on seepärast

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2{}^n - x_1{}^n}{x_2 - x_1} = x_2{}^{n-1} + x_2{}^{n-2} \cdot x_1 + x_2{}^{n-3} \cdot x_1{}^2 + x_2{}^{n-4} \cdot x_1{}^3 + \\ + \ldots\ldots + x_1{}^{n-1}.$$

Tuletis on

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x_2 = x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = x_1{}^{n-1} + x_1{}^{n-1} + x_1{}^{n-1} + x_1{}^{n-1} + \ldots\ldots + \\ + x_1{}^{n-1} = n \,.\, x_1{}^{n-1}.$$

Üldiselt on siis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^n)}{dx} = n \,.\, x^{n-1}.$$

Ülesanne. Haruta seda veel kord Δx ja Δy abil!

Valem on saadud oletuse põhjal, et n on positiivne täisarv.

Kui n asemele asetame negatiivse täisarvu $n = -m$, siis saame

$$y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$
$$y_1 = \frac{1}{x_1{}^m}$$
$$y_2 = \frac{1}{x_2{}^m}$$

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1}{x_2-x_1}\left[\frac{1}{x_2{}^m}-\frac{1}{x_1{}^m}\right]=\frac{-1}{x_1{}^m \cdot x_2{}^m}\cdot\frac{x_2{}^m-x_1{}^m}{x_2-x_1}=\frac{-1}{x_1{}^m \cdot x_2{}^m}\cdot$$
$$\cdot\left[x_2{}^{m-1}+x_2{}^{m-2}x_1+\ldots+x_1{}^{m-1}\right].$$

Tuletis on

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{x_2=x_1}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1}{x_1{}^{2m}}\left[x_1{}^{m-1}+x_1{}^{m-1}+\ldots+x_1{}^{m-1}\right]=$$
$$=\frac{-m\,.\,x_1{}^{m-1}}{x_1{}^{2m}}=-m\,x_1{}^{-m-1}$$

ehk üldse $\frac{dy}{dx}=-mx^{-m-1}$.

Kui jälle $-m=n$ asetame, siis on

$$\frac{dy}{dx}=n\,.\,x^{n-1}$$

s. t. valem, mille positiivse n jaoks leidsime, on ka negatiiviste täisarvuliste astmenäitajate juures õige.

Ülesanded.

Leia järgmiste funktsioonide tuletised!

183. $\alpha)$ $y=x^4$; $\beta)$ $y=x^{13}$; $\gamma)$ $y=x^{27}$; $\delta)$ $y=x^{100}$;

184. $\alpha)$ $y=x^a$; $\beta)$ $y=x^{3m}$; $\gamma)$ $y=x^{p+q}$; $\delta)$ $y=x^{n+1}$;

185. $\alpha)$ $y=\frac{1}{x^2}$; $\beta)$ $y=\frac{1}{x^9}$; $\gamma)$ $y=\frac{1}{x^{17}}$; $\delta)$ $y=\frac{1}{x^m}$;

186. $\alpha)$ $y=x^m\,.\,x^n$; $\beta)$ $y=\frac{x^a}{x^b}$; $\gamma)$ $y=\frac{x^m\,.\,x^n}{x^p\,.\,x^q}$; $\delta)$ $y=\frac{x^{m-n}}{x^{m+n}}$

§ 36. Siinuse tuletis.

$$y=\sin x.$$

Kui x väikse suuruse Δx võrra kasvab, siis on funktsiooni muutus

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Kui piirile üle läheme ja Δx nulliks muudame, siis saame

$$\lim_{\Delta x=0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}=\cos x.$$

§ 33,5 järele on $\lim_{\Delta x=0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1$, seepärast saame tuletise

$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos x\,.\,1$ ehk

$$\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x.$$

§ 37. Differentsimise abilaused.

I. Summa ja vahe.

Olgu antud I. $y = u + v - w$, milles

$$\left.\begin{array}{l} u = f(x) \\ v = \varphi(x) \\ w = \psi(x) \end{array}\right\} \text{ on mistahes funktsioonid.}$$

Kui x väikse suuruse Δx võrra kasvab, siis on vastav funktsiooni muutus

$$\Delta y = f(x + \Delta x) + \varphi(x + \Delta x) - \psi(x + \Delta x) - [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)];$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} - \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x}.$$

Et

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{du}{dx},$$

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{dv}{dx},$$

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} = \frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{dw}{dx} \text{ on,}$$

siis saame tuletise

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$$

Nii et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(u + v - w)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx},$$

s. t. **funktsioonide summa või vahe tuletis võrdub üksikute funktsioonide tuletiste summa või vahega.**

Ülesanne 187. Leia järgmiste funktsioonide tuletised!

α) $y = x^{10} - x^8 - x^7 + x^4 - x^3 + x^2 - x$

β) $y = x^6 - x^{-5} + x^{-3} - x^9 - x^{-1} + x^5$

γ) $y = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x}$

II. Jäädav kokkuarvatav.

(1) $$y = f(x) + C$$

Kui x väikse suuruse Δx võrra kasvab, siis on funktsiooni muutus

$$\Delta y = f(x + \Delta x) + C - [f(x) + C] = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Jagades suurusega Δx saame

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ja siit tuletise

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Viimane avaldus võrdub lhk. 87 järele $\frac{df(x)}{dx}$, seepärast

(2) $$\frac{d[f(x)+C]}{dx}=\frac{df(x)}{dx}.$$

Kui eelmise lause I summa $y=f(x)+C$ juures tarvitame, siis saame

(3) $$\frac{d[f(x)+C]}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{d(C)}{dx}.$$

Võrreldes (2) ja (3) leiame

$$\frac{d(C)}{dx}=0,$$

s. t. **jäädava suuruse tuletis võrdub nulliga.**

Muidugi mõista võib C ka negatiivne arv olla.

Samale otsusele jõuame ka tarvitades funktsiooni kõverjoont.

Võrrandi

$$\alpha)\ y=C$$

graafiline kujutus on X-teljega paralleelne joon. Iga ta punktis on sihitegur 0, nii et

$$\frac{dy}{dx}=0.$$

Võrrandi

$$\beta)\ y=f(x)+C$$

graafiline kujutus on kauguse C võrra paralleelselt Y-teljega edasi viidud kõverjoon $y=f(x)$. Selle paralleelse üleviimise juures jääb puutuja enesele paralleelseks, ja sellepärast on ühe ja sellesama abstsissi suurusele vastavate puutujate sihitegurid mõlemail kõverjoontel võrdsed.

Ülesanne 188. Missugused on järgmiste funktsioonide tuletised?

$\alpha)\ y=5+x^3-C-x^{-5}+\frac{1}{x^4}$

$\beta)\ y=a+\sin x-10-b$

$\gamma)\ y=1+x^2-x^{-3}+m-\sin x.$

III. Jäädav tegur.

$$y=a\,.\,f(x)$$

Kui x kasvab Δx võrra, siis muutub funktsiooni suurus

$$\Delta y=a\,.\,f(x+\Delta x)-a\,.\,f(x)=a\,.\,[f(x+\Delta x)-f(x)]$$

võrra. Vahede suhe on siis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a\,.\,\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\text{ ja tuletis}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\left[a\,.\,\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]=a\,.\,\frac{df(x)}{dx}\text{ ehk}$$

$$\frac{d[a\,.\,f(x)]}{dx}=a\,.\,\frac{df(x)}{dx},$$

s. t. **jäädava suuruse ja funktsiooni kasvatise tuletis võrdub jäädava suuruse ja funktsiooni tuletise kasvatisega.**

Sama saaduse leidmine graafilise kujutuse abil.

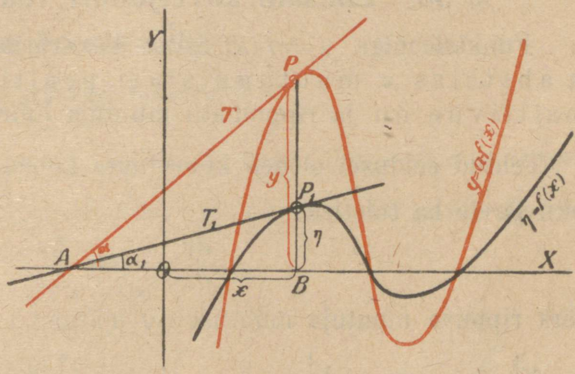
Kõverjoonel $\eta = f(x)$ (joonis 65) on punktis $P_1 \begin{cases} x \\ \eta \end{cases}$ puutuja T_1, mis X-telge punktis A lõikab ja mille sihitegur on

$$tg\,\alpha_1 = \frac{P_1B}{BA} = \frac{\eta}{BA} = \frac{d\,[f(x)]}{dx}.$$

Kõverjoon

$$y = a\,.\,f(x)$$

on a korda kõrgemini joonetet. Kõverjoon $\eta = f(x)$, s. t. kõik ordinaadid y on a korda nii suured kui vastavad ordinaadid η; seepärast on $PB = y = a.P_1B = a\,.\,\eta$.



Joonis 65.

Punktis P tõmmatud puutuja T läheb läbi sama X-telje punkti A (mispärast?), nii et T sihitegur on

$$tg\,\alpha = \frac{PB}{BA} = \frac{a\,.\,\eta}{BA} = a\,.\,\frac{\eta}{BA} = a\,.\,\frac{d\,[f(x)]}{dx}, \text{ nii et}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,[a\,.\,f(x)]}{dx} = a\,.\,\frac{d\,[f(x)]}{dx}.$$

Ülesanded.

Leia järgnevate funktsioonide tuletised!

189. α) $y = 4ax^5$ β) $y = \frac{4}{7}mx^8$ γ) $y = \frac{5c}{4x^8}$ δ) $y = \frac{7a}{9b}x^{-9}$

190. α) $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{5}{2}$ β) $y = x^3 + 4x^2 - 3x - 7$

γ) $y = x^3 + 2x^2 - 5x - 3$ δ) $y = 7x^5 - 8x^3 + 3x^2 - 9x + 15$

191. α) $y = -\frac{5x^3}{a} + \frac{c}{x^4} + b$ β) $y = \frac{7}{36x} - \frac{5}{8x^2} + \frac{11}{6x^3} - \frac{1}{18x^4}$

γ) $y = \frac{a}{x} - \frac{b}{2x^2} + \frac{c}{3x^3} - \frac{d}{4x^4} + \frac{e}{5x^5} - p\,.\,sin\,x$

Näitus. $y = (7 - 3x^3)\,(2x^4 - 8)$.

Kasvatades saame

$$y = -56 + 24x^3 + 14x^4 - 6x^7$$

ja siit

$$\frac{dy}{dx} = 72x^2 + 56x^3 - 42x^6.$$

Ülesanded.

Differentsi sarnaselt:

192. α) $y = (a - x)\,(a + x)$ β) $y = (7 - 3x)\,(9x + 5)$

193. α) $y = (x^3 + 3x^2)\,(6x^3 - 5x)$ β) $y = (8x - 7x^2)\,(3x^4 - 4x^3)$

194. α) $y = (4x - 3)\,(5x^2 - 7x + 2)$ β) $y = (x^2 - 5x + 9)\,(3x^3 + 7)$

195. α) $y = (ax + bx^2)^2$ β) $y = (9x^2 - 2x^3)^2$

196 α) $y = (1 - x)^3$ β) $y = (4x - 3x^2)^3$

197. α) $y = (mx^2 + nx^4)^3$ β) $y = (2ax - 3bx^3)^3$

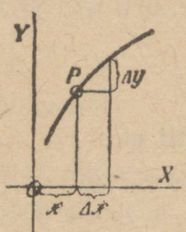
§ 38. Lihtsate kôverjoonte tôus ja langemine.

Funktsiooniga $y = f(x)$ esitet kõverjoonel olgu määratud punkt P. Ta abstsiss x muutugu alati positiivses sihis, nii et Δx positiivne on ja rippumatu muutuja juurekasvu tähendab.

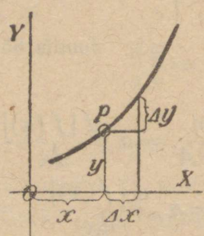
Tehtud eeldusel oleneb kônealuses kohas suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ja piirile ülemineku järele ka tuletise

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

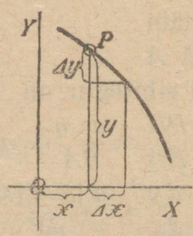
märk rippuva muutuja muutuse Δy märgist.



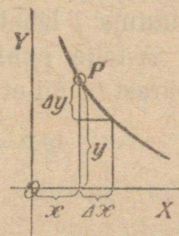
Joonis 66-a.



Joonis 66-b.



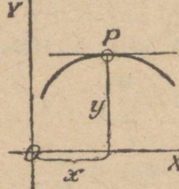
Joonis 67-a.



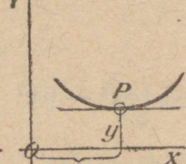
Joonis 67-b.

1) Kui Δy on positiivne, siis on $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ja seepärast ka $\frac{dy}{dx}$ positiivne. Ses juhtumuses (joonised 66-a ja -b) kasvavad funktsiooni suurused y, s. t. kõverjoon tõuseb.

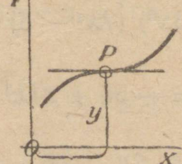
2) Kui Δy on negatiivne, siis on $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ negatiivne ja sellega ka $\frac{dy}{dx}$ negatiivne. Ses juhtumuses (joonised 67-a ja -b) vähenevad funktsiooni suurused y, s. t. kõverjoon langeb.



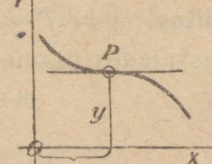
Joonis 68-a.



Joonis 68-b.



Joonis 68-c.



Joonis 68-d.

3) Kui piirjuhtumuses on $\Delta y = 0$, s. t. kui funktsiooni suurus ei muutu punkti P läheduses, siis on $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ ja ka $\frac{dy}{dx} = 0$. Punkt

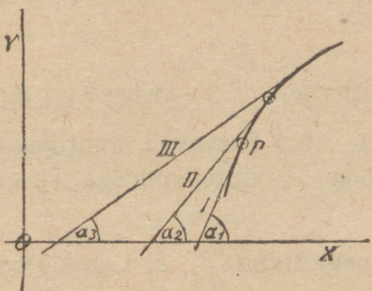
P on siis kõverjoone kõige kõrgem või kõige madalam punkt, milles kõverjoone tõus langemiseks muutub või ümberpöördult (joonis 68-a ja -b).

Funktsiooni suurus jääb ka siis muutumatuks, kui kõverjoonel punktis P (joonised 68-c ja -d) pöörpunkt on, kus kõverjoone puutuja X-teljega paralleelne on.

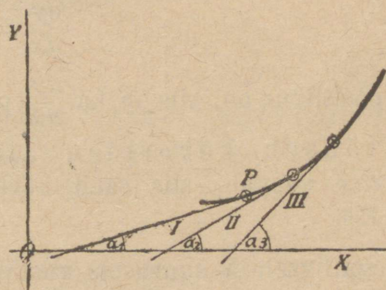
Teine harutamisviis.

$\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha =$ kõverjoone puutuja sihitegur.

1) Kui $\frac{dy}{dx}$ on positiivne, siis on $tg\,\alpha$ positiivne, s. t. α on teravnurk; see võib aga ainult siis olla, kui kõverjoon tõuseb (joonised 69-a ja -b).

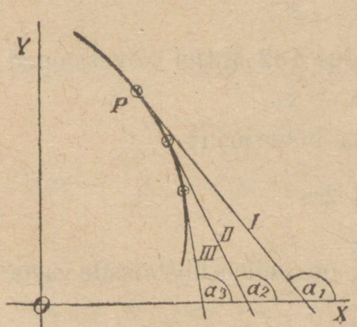


Joonis 69-a.

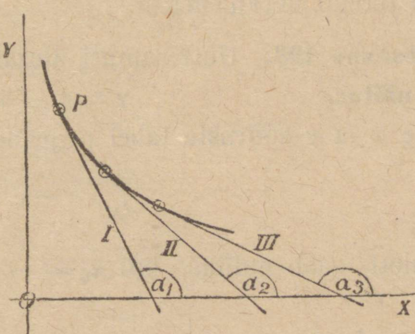


Joonis 69-b.

2) Kui $\frac{dy}{dx}$ on negatiivne, siis on $tg\,\alpha$ negatiivne, seepärast on α nürinurk, mis aga ainult siis võib olla, kui kõverjoon langeb (joonised 70-a ja -b).



Joonis 70-a.



Joonis 70-b.

3) Piirjuhtumuses, kui on $\frac{dy}{dx} = 0$, on $tg\,\alpha = 0$ ja selle järele ka $\alpha = 0$, s. t. puutuja punktis P on X-teljega paralleelne, mis aga ainult siis võib olla, kui kõverjoonel punktis P on maksimum või miinimum või pöörpunkt kaalus puutujaga (joonis 68).

Võime need saavutused järgnevas tabelis ülevaatlikult üles sääda:

Juhtumus	$\frac{dy}{dx}$	y	Kõverjoon	$tg\,\alpha$	α
1)	+	kasvab	tõuseb	+	terav
2)	—	kahaneb	langeb	—	nüri
3)	0	muutumata	püsib	0	0, puutuja $\parallel$ X-teljega
4)	∞			∞	90^0, puutuja $\perp$ X-teljega

Näitused ja ülesanded.

I näitus. $y = a\,x^2$.

Selle funktsiooni graafiline kujutus on mitmekordselt kõrgemalt või madalamalt joonetet kõverjoon joon. 64.

$$\frac{dy}{dx} = 2ax.$$

Kui x positiivne on, siis on ka $\frac{dy}{dx}$ positiivne, s. t. Y-teljest paremal pool tõuseb kõverjoon alati. Et kasvava muutujaga x ka $tg\,\alpha = 2ax$ kasvab, siis saab kõverjoon x suurenemisega ikka järsumaks.

Negatiivsele x suurusele vastab negatiivne $\frac{dy}{dx}$, s. t. et kõverjoon langeb pahemal pool Y-telge. Mida väiksemaks jääb absoluutne suurus $|x|$, seda väiksemaks muutub ka $|tg\,\alpha|$, nii et kõverjoone langemine on seda väiksem, mida lähemale me Y-teljele tuleme.

$tg\,\alpha$ saab nulliks, kui $2ax = 0$ on ehk $x = 0$, s. t. algpunktis (sest $x = 0$ vastab $y = 0$) on kõverjoone maksimum või miinimum; siin (joonise järele) miinimum.

Ülesanne 198. Uuri samuti ülesandes 182 antud kõverjooned!

II näitus. $y = 4 - 3\,x - x^2$.

Säe x ja y suuruste tabel ja jooneta kõverjoon!

$$\frac{dy}{dx} = -3 - 2x.$$

Tuletis saab nulliks, kui $x_0 = -\frac{3}{2}$ on; sellele abstsissile vastab ordinaat $y_0 = 6\frac{1}{4}$. Punktis $A\left\{\begin{matrix} -1\frac{1}{2} \\ 6\frac{1}{4} \end{matrix}\right.$ on siis puutuja paralleelne X-teljega; joonise järele otsustame, et A on kõige kõrgem kõverjoone punkt.

Kui tuletise kirjutame kujul $\frac{dy}{dx} = -2\left(x + \frac{3}{2}\right)$, siis näeme, et:

Kõigile suurustele $x < -\frac{3}{2}$ vastab positiivne $\frac{dy}{dx}$, sest et mõlemad kasvatise tegurid on siis negatiivsed. Kõverjoon t õ u s e b terves piirkonnas $x = -\infty$ ja $x = -\frac{3}{2}$ vahel.

Kõigile suurustele $x = -\frac{3}{2}$ ja $x = +\infty$ vahel vastab negatiivne $\frac{dy}{dx}$, s. t. kõverjoon l a n g e b selles piirkonnas.

Maksimumis A on üleminek tõusust langemisele.

Kõverjoon l õ i k a b X-telge punktides B ja C, millede abstsissid leiame võrrandi

$$4 - 3x - x^2 = 0$$

juurtena, ja nimelt on:

p u n k t i B abstsiss	p u n k t i C abstsiss
$x_1 = 1$	$x_2 = -4.$

Neis punktides on puutujate sihitegurid

$tg\,\alpha_1 = -5$	$tg\,\alpha_2 = 5$
$\alpha_1 = 101^0\,18'\,35''$	$\alpha_2 = 78^0\,71'\,25''.$

Nende nurkade all lõikab kõverjoon X-telge punktides B ja C.

Küsimus. Missugused on puutuja ja normaali võrrand

α) punktis D abstsissiga $x_0 = -2$,

β) punktis B või C?

III näitus. $$y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{5}{2}.$$

Joonisel 71 on selle funktsiooni graafiline kujutus.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3x - 6.$$

Siit näeme, et selle p u u t u j a s i h i t e g u r, mis kõverjoone punktis abstsissiga x_0 puutub, on

$$(1) \qquad tg\,\alpha = 3x_0^2 - 3x_0 - 6.$$

Punktis $\begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}$ p u u t u j a v õ r r a n d on

$$y - y_0 = (x - x_0)\,(3x_0^2 - 3x_0 - 6).$$

Punktis $\begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}$ n o r m a a l i v õ r r a n d on

$$y - y_0 = -\frac{x - x_0}{3x_0^2 - 3x_0 - 6}.$$

Punktis P (joonis 71) on $x_0 = -\frac{1}{2}$

$$y_0 = -\frac{1}{8} - \frac{3}{8} + 3 + \frac{5}{2} = 5$$

$$tg\,\alpha = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - 6 = -\frac{15}{4};$$

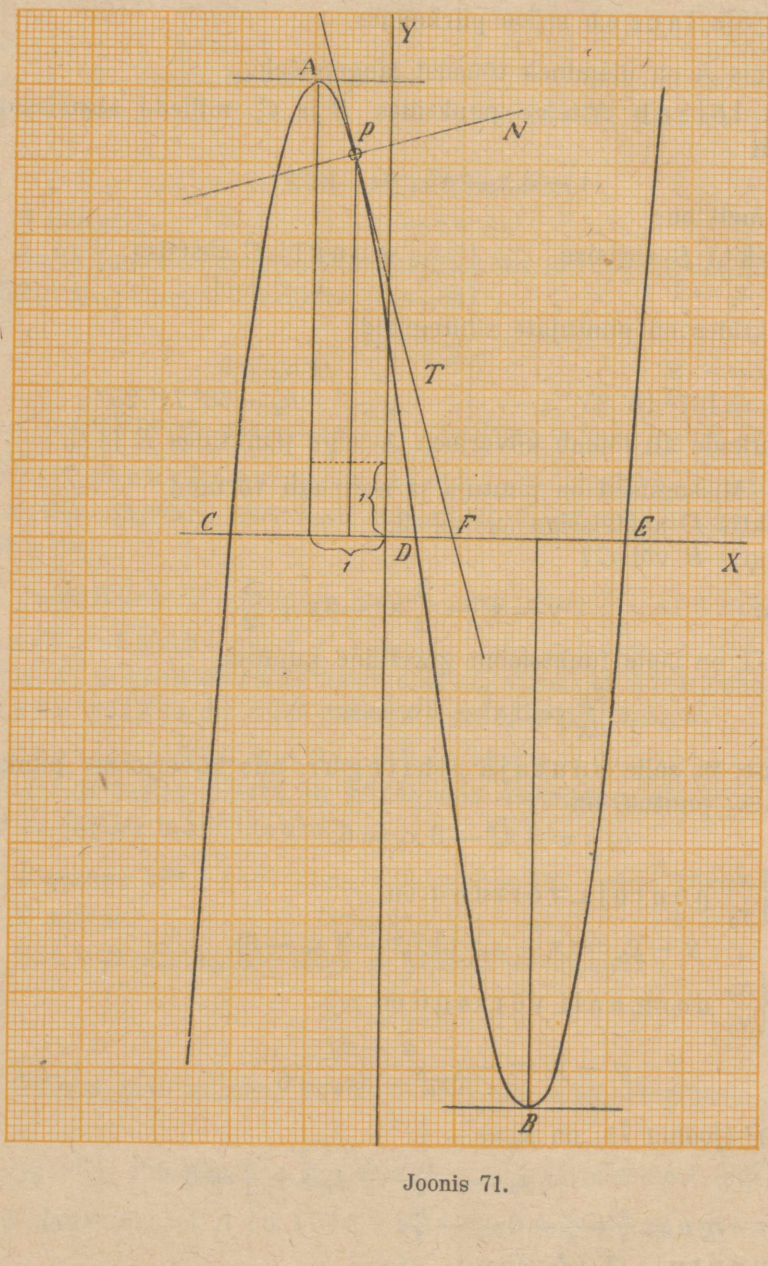
seepärast on p u u t u j a T v õ r r a n d

$$y - 5 = (x + \tfrac{1}{2}) \cdot (-\tfrac{15}{4}) \text{ ehk}$$

$$30x + 8y - 25 = 0$$

ja normaali N võrrand

$$y - 5 = (x + \tfrac{1}{2}) \cdot \tfrac{4}{15} \text{ ehk}$$
$$4x - 15y + 77 = 0.$$



Joonis 71.

Kõverjoonel on kõige kõrgem või kõige madalam punkt, kui
$3x^2 - 3x - 6 = 0$ on.

Leiame siit x

$$x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -7{,}5 \end{cases}$ vastab joonisel ühele kõige madalamale punktile B.	$\begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = +6 \end{cases}$ vastab joonisel ühele kõige kõrgemale punktile A.

Võime tuletise ka kasvatise näol nii kirjutada:

$$\frac{dy}{dx} = 3(x - 2)(x + 1).$$

Kui $x > +2$, siis on mõlemad tegurid, mis x sisaldavad, positiivsed, seepärast ka $\frac{dy}{dx}$ positiivne, s. t. punktist B paremal pool tõuseb kõverjoon.

Kui $x \begin{cases} < +2 \\ > -1 \end{cases}$ siis on esimene tegur negatiivne, teine positiivne ja seepärast $\frac{dy}{dx}$ negatiivne, s. t. punktide B ja A vahel langeb kõverjoon.

Kui x on < -1, siis on mõlemad tegurid negatiivsed ja seepärast $\frac{dy}{dx}$ positiivne, s. t. pahemal pool punkti A asuv kõverjoone osa tõuseb (kui x kasvab).

Punktides A ja B on üleminek tõusu ja langemise vahel.

Õpilane jälgigu veel kord kõverjoone käiku, lastes x kasvada $x = -\infty$ kuni $x = +\infty$!

Küsimus. Missuguste nurkade all lõikab kõverjoon X-telge?

Funktsiooni graafiliselt kujutuselt võime leida kõverjoone ja X-telje lõikepunktide C, D ja E abstsissid.

Me saame

punkt C	punkt D	punkt E
$x_3 = -2{,}04$	$x_4 = +0{,}39$	$x_5 = +3{,}15$.

Asetades need suurused võrrandisse (1) saame:

$tg\, \alpha_3 = 12{,}6048$	$tg\, \alpha_4 = -6{,}7137$	$tg\, \alpha_5 = 14{,}3175$
$\alpha_3 = 85^0 27' 50''$	$\alpha_4 = 98^0 28' 19''$	$\alpha_5 = 86^0 0' 17''$.

Nende nurkade all lõikab meie III astme kõverjoon X-telge punktides C, D ja E.

Ülesanne 199. Tarvis on joonetada järgmiste funktsioonidega esitet kõverjooned (abstsissi üksus = 1 cm). Siis on tarvis tuletis välja arvata ja punktis P puutuja-joone ja normaali võrrandid sääda.

Kus on kõverjoonel kõige kõrgem või kõige madalam punkt?

Missuguses piirkonnas tõuseb kõverjoon ja missuguses langeb ta?

Missuguste nurkade all lõikab ta X-telge?

$\alpha)\ y = x^2 + 2x - 1;\qquad P\ (x_1 = 1{,}5);\qquad P'\ (x_2 = -2).$

$\beta)\ y = \frac{1}{9}(-x^2 + 16x - 28);\quad P\ (x_1 = 11);\qquad P'\ (x_2 = 6\frac{1}{2}).$

$\gamma)\ y = 2x^3 - 6x^2 - 1;\qquad P\ (x_1 = 1);\qquad P'\ (x_2 = -\frac{1}{2}.$

$\delta)\ y = x^3 + 4x^2 - 3x - 7;\qquad P\ (x_1 = -2);\qquad P'\ (x_2 = 1).$

$\varepsilon)\ y = x^3 + 2x^2 - 5x - 3;\qquad P\ (x_1 = 0);\qquad P'\ (x_2 = -3).$

Ülesanne 200. Uuri tuletise abil **siinusjoone** tõusu ja langemist, kui ka maksima ja miinima!

§ 39. Mõned lihtsad maksima ja miinima ülesanded.

Küsitava suuruse, mis maksimaalse või minimaalse väärtuse peab saama, esitame ü h e rippumatu muutuja funktsioonina. Kui me selle funktsiooni tuletise võrdseks teeme nulliga, siis saame võrrandi, mille juured maksimumile või miinimumile vastavad.

I näitus. Antud ringi sisse, millel on raadius r, peab joonetatama täisnurkne nelinurk maksimaalse pinnasuurusega.

Kui täisnurkse nelinurga küljed märgime tähtedega x ja y, siis on ta pinnasuurus

$$1)\qquad J = xy.$$

J oleneb siin kahest muutujast x ja y; seepärast peame veel säädma teise võrrandi suurustega x ja y.

$$2)\qquad y^2 + x^2 = 4r^2.$$

Kaotades mõlemaist võrranditest y saame

$$J = x\sqrt{4r^2 - x^2}.$$

See avaldus saab kõige suurema väärtuse, kui $\frac{dJ}{dx} = 0$ saab.

Lihtsamaks aga saab väljaarvamine, kui nii ütleme: J saab maksimumiks, kui ka J^2, s. t. funktsioon

$$z = x^2(4r^2 - x^2) = 4r^2x^2 - x^4$$

kõige suurema väärtuse saab. See aga on siis, kui

$$\frac{dz}{dx} = 8xr^2 - 4x^3 = 0.$$

Siit leiame

$$x = 0 \text{ ja } x = \pm r\sqrt{2}.$$

$x = 0$ ei anna nelinurka, ja et nelinurga küljel absoluutne pikkus peab olema, siis ei kõlba ka märk miinus teisele väärtusele; nii et

$$x = r\sqrt{2}$$

on otsitav x suurus. Nelinurga teine külg on

$$y = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = r\sqrt{2} = x,$$

s. t. r i n g i s i s s e j o o n e t e t r u u d u l on k õ i g e s u u r e m p i n d

$$J_{max} = 2r^2.$$

2 näitus. Püst-koonuse sisse, mille raadius r ja kõrgus h, peab joonetama kõige suurema mahuga silindri.

Silindri raadius olgu y, ta kõrgus x (joonis 72); ta maht on siis

$$1)\quad V = \pi x y^2$$

$$2)\quad y : r = (h - x) : h.$$

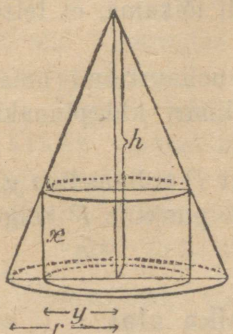
Sellest saame

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot x (h - x)^2.$$

V saab kõige suuremaks, kui funktsioon

$$z = x (h - x)^2 = x h^2 - 2 h x^2 + x^3$$

saab maksimumiks. See on aga siis, kui $\frac{dz}{dx} = h^2 - 4 hx + 3 x^2 = 0$ saab.



Joonis 72.

Selle võrrandi lahendamine x'i suhtes annab

$$x = h \quad \text{ja} \quad x = \frac{h}{3}.$$

Esimene neist suurustest ei kõlba (mispärast?); seepärast saab z ja sellega ka V kõige suuremaks kui $x = \frac{h}{3}$ on.

Maksimaalsel silindril on kõrgus $x = \frac{h}{3}$, raadius $y = \frac{2}{3} r$ ja maht $V_{max} = \frac{4}{27} \pi r^2 h = \frac{4}{9}$ koonuse mahust.

Ülesanded.

201. Lahutada arv 30 kaheks kokkuarvatavaks nõnda, et nende kasvatis oleks kõige suurem.

202. Missugusel täisnurksel nelinurgal ümbermõõduga U on kõige suurem pind?

203. Leia kõigist täisnurkseist nelinurkadest pinnasuurusega a^2 see, mil kõige väiksem ümbermõõt!

204. Antud kolmnurga sisse, mille alus g ja kõrgus h, joonetada kõige suurema pinnaga täisnurkne nelinurk.

205. Missugune peab olema ringi sektori raadius ja kesknurk, et tal antud ümbermõõdu U juures oleks kõige suurem pind!

206. Määrata kõige suurema pinnaga kolmnurk, kui antud on

α) külg a ja külg b;

β) kahe külje summa s ja nende vahel olev nurk γ.

207. Traadi tükk pikkusega L painutatagu täisnurkse nelinurga kujuliseks ja see nelinurk pöördugu ühe tema külje ümber. Missugustel tingimustel on saadud silindril

α) kõige suurem külgpind,

β) kõige suurem maht?

208. Kera sisse, mille raadius r, joonistatagu kõige suurema mahuga α) silinder, β) koonus.

209. Leida kõigist kerade segmentidest, milledel antud maht V, see segment, mille (keral asuv) pind on kõige väiksem.

210. Kujutada antud kera (raadiusega r) ümber tüvikoonus, mil on
α) kõige väiksem külgpind,
β) kõige väiksem maht.

211. Plekist peab valmistama silindrikujulised joogiriistad mahuga V. Missugused peavad nende mõõdud olema, et võimalikult vähe plekki nende tegemiseks ära kuluks?

212. Püramiid aluspinnaga G ja kõrgusega h lõigatakse paralleelselt alusega ja võetakse see lõikpind uue püramiidi aluseks, mille tipp on antud püramiidi alusel. Kust peab esimest püramiidi lõikama, et teise püramiidi maht oleks kõige suurem?

213. Joonestatagu ellipsisse niisugune täisnurkne nelinurk, mis määrab kõige suurema mahuga silindri, kui ta pind silindri külgpinnaks kokku pöördakse.

214. Hüperboli imaginaarsel teljel on antud punkt P ordinaadiga y_0. Määra nende hüperboli punktide koordinaadid, mis on punktile P kõige lähemad.

§ 40. Mõned praktilised käsitused füüsika alal.

Ülesanne 215. Olgu antud mistahes viisil liikuva punkti läbikäidud tee aja funktsioonina

$$s = f(t).$$

Näidatagu, et

kiirus $v = \dfrac{ds}{dt} =$ **tee tuletis aja järele on.**

Tarvitatagu seda valemit, kui on α) $s = \lambda \,.\, t$; β) $s = \lambda \,.\, t^2$, kus λ on jäädav tegur.

Erijuhtumus: vaba langemine. $s = \dfrac{g}{2} t^2$, kus $g = 9{,}81 \left(\dfrac{\text{m}}{\text{sek}^2}\right)$.

Ülesanne 216. Kahel punktis O lõikaval, perpendikulaarsel sirgel G_1 ja G_2 on antud punktid A_1 ja A_2 kaugustes d_1 ja d_2 punktist O. Punktidest A_1 ja A_2 liiguvad punkti O poole kaks keha jäädavate kiirustega c_1 ja c_2. Millal on nende kehade kaugus kõige väiksem; kui suur on see kaugus ja kus asub sel silmapilgul iga keha?

Eriti: $d_1 = 25$ m; $d_2 = 20$ m; $c_1 = 4 \dfrac{\text{m}}{\text{sek}}$; $c_2 = 3 \dfrac{\text{m}}{\text{sek}}$.

Ülesanne 217. Kuidas peab ühendama n ühesugust galvaanilist elementi, igaüks e-voldilise elektromotoorilise jõuga ja w_i oomilise sisemise vastupanekuga, et antud w_a oomilisel välisel vastupanekul saaks voolu jõud maksimumiks?

Eriti: α) $n = 12$; $e = 1{,}2$; $w_i = 0{,}25$; $w_a = \frac{1}{3}$.
β) $n = 196$; $e = 1{,}47$; $w_i = 0{,}49$; $w_a = 24{,}01$.

Füüsikalised ülesanded, milledes on tegemist väikeste muutumistega.

Näitus. Sekund-pendliga (mõeldud on matemaatiline pendel) kell, mis on meie geograafilise laiuse kohaselt $\left(g = 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sek}^2}\right)$ säetud, viiakse maale, kus raskuse kiirendus on $1 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sek}^2}$ võrra väiksem. Kui palju peab pendli läätsa edasi lükkama, et kell uuel kohal jälle õieti käiks?

Võnkumise aja valemist

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

leiame pendli pikkuse

$$l = \frac{gT^2}{\pi^2}.$$

Et siin võnkumise aeg $T = 1$ sek on jäädav, siis on selles võrrandis pikkus l avaldet muutuva raskuse-kiirenduse funktsioonina.

Pendli pikkuse muutus on aga *väga väike* ja on *väga väikse* raskuse-kiirenduse muutumise tagajärg. Niisugustel *väikestel muutumistel* võib seda ülesannet *differentsimise* teel rutemini kui mõnel muul teel lahendada.

Väike muutus Δg toob esile väikse pikkuse-muutuse Δl ja suhe $\frac{\Delta l}{\Delta g}$ erineb seda vähem tuletisest $\frac{dl}{dg}$, mida väiksemad on Δl ja Δg.

$$\frac{dl}{dg} = \frac{T^2}{\pi^2}.$$

Ligikaudselt võime seepärast võtta

$$\frac{\Delta l}{\Delta g} = \frac{T^2}{\pi^2}, \text{ millest}$$

$$\Delta = \frac{T^2}{\pi^2} \cdot \Delta g$$

leiame. Siia asetame arvud $T = 1$ sek; $\Delta g = -0{,}01 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sek}^2}$, sest et kiirendus väheneb, nii et

$$\Delta l = \frac{1^2 \cdot (-0{,}01)}{\pi^2} = -\frac{0{,}01}{\pi^2} = -0{,}00101 \text{ m}.$$

Märk miinus näitab, et peab pikkust 0,00101 m võrra vähendama, s. t. pendli läätsa peab 1,01 mm *võrra ülespoole* lükkama.

Ülesanded.

218. 500 l-lises gasomeetris on gaas 10 atmosfäärilise rõhumise all. Missuguse rõhumise saab gaas, kui ta võib paisuda 10 cm³ võrra?

219. Ühepikkuste õlgadega kaalul on õla-raskuspunkt 10 mm kaugusel pöörpunktist. 1 mg ülekaalu muudab õla seisu nurga $\alpha = 1^0 15'$ võrra. Kuidas muutub kaalu tundlikkus, kui raskuspunkti 0,5 mm võrra nihutada pöörpunkti poole ($tg\,\alpha$ asemel võime siin ligikaudselt $\widehat{\alpha}$ võtta!).

220. Kell ruttab 6-e päeva jooksul 4 minutit ette. Kui palju peab muutma (matemaatilise) sekund-pendli pikkust, et kell õigesti käiks?

221. Kui kõrgele peaks maa pinnast tõusma, et raskuse-kiirendus väheneks $2\frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}$ võrra gravitatsiooni vähenemise tõttu? (Maa raadius $r = 6366000$ m.)

222. 9,5 cm kaugusel olevat kaks magneet-poolust tõukavad üksteist tungiga 475 düüni. Kui suur on tõuke tung, kui mõlemad poolused üksteisele 9,2 cm võrra lähenevad?

223. 12-ampeeriline vool tõstab ühes traadi tükis temperatuuri 75^0 võrra. Mitme kraadi võrra muudab temperatuuri sama aja jooksul voolujõu muutmine 0,2 ampeeri võrra?

Ajaloost.

Differentsiaal- ja integraal-arvamine ehk ühe sõnaga infinitesimaal-arvamine (lõpmatu-väikeste suuruste arvamine) tekkis 17-da aastasaja esimesel poolel. Esimese ülesleidja üle on kaua ja tõsiselt vaieldud. Täna on kindel, et prantslased Blaise Pascal (loe: blääs paskàl; 1623—1662) ja Pierre de Fermat (loe: pjäär dö fermaa; 1601—1665) on esimestena käsitanud mõningaid integraal-arvamise ja siis ka differentsiaal-arvamise ülesandeid. Täielisele selgusele nende ülesannete sisemise ühenduse kohta jõudsid aga alles saksa kuulus filosoof ja riigimees Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716) ja kõige suurem inglise matemaatik Isaac Newton (loe: njuutön; 1642—1727). Need mõlemad avaldasid oma tööd iseseisvalt peaaegu ühel ajal, nii et neid mõlemaid nimetakse infinitesimaalarvamise leidjaiks.

Leibniz läks välja puutujate ülesandest ja jõudis „differentsiaalkalküülile," põhjenedes looduse pidevuse printsiibile („Loodus ei tee hüppeid"). Ta võttis tarvitusele sümbolid dx, dy. Oma leiduse avaldas ta a. 1684 pealkirjaga: „Eine neue Methode für die Maxima und Minima und weiter für die Tangenten usw". („Uus metood maksima ja miinima jaoks ja edasi puutujate jaoks jne."). Ka integraali märk on tema poolt tarvitusele võetud ja esines esimest korda ühes a. 1686 avaldet töös.

Newton jõudis kõverjoonega piiratud pinna kvadratuuri ülesandest infinitesimaal-arvamisele, mida ta „fluxion"-arvamiseks nimetas. Ta sõna „fluxio" (Leibniz'i „Differentialquotient," s. t. tuletis) esineb esimest korda 1687 a. töös: „Philosophiae naturalis principia mathematica." Newton läks välja liikumise õpetusest. Pidevalt muutuva ruumi nimi on *„fluens"* (jooksev); kiirusi, milledega üksikud „fluendid" (x, y . . .) muutuvad, nimetas Newton „fluksioonideks" ja tähendas neid $\dot{x}$, $\dot{y}$. . . Ühes 1671 kavatsetud, aga alles 1736 (peale surma) avaldet suuremas töös „fluxion"-metoodi üle arvas ta x-ist, y-ist... „fluksioonid," s. t. ta leidis pidevalt muutuvast teest kiiruse. Ta lahendas aga ka vastupidise ülesande; edasi käsitas ta maksima ja miinima probleemi, puutuja ehitust, kui ka joone kõveruse leidmist antud punktis.

Edaspidisesse matemaatika arenemisse on Leibnizi metood kõige suurema mõju avaldanud. Ta metoodi tarvitasid vennad Jakob (1654—1705) ja Johann Bernoulli (1667—1748) vanade ja hulga uute ülesannete lahendamisel. Esimese differentsiaal-arvamise õperaamatu andis välja 1696 a. prantslane Guillaume François Marquis de l'Hospital (loe: gijoom franssua markii dö lopitál; 1661—1704), Leibnizi teaduslik sõber. Täielikuma differentsiaal- ja integraal-arvamise õpetuse andis pärast Leonhard Euler (1707—1783) oma töödes: „Institutiones calculi differentialis" (1755) ja „Institutiones calculi integralis" (1768). Edaspidisel ülesehitamisel on tähtsat osa mänginud prantslased Joseph Louis Lagrange (loe: shoséf lui lagransh; 1736—1813), Pierre Simon Laplace (loe: laplass; 1749—1827) ja Andrien Marie Legendre (loe: andriän marii löshandr; 1752—1833). Praeguses mõttes täppis alus pandi infinitesimaal-arvamisele 19-dal aastasajal sakslase Karl Friedrich Gauss'i (1777—1855), norralase Niels Henrik Abel'i 1802—1829) ja iseäranis prantslase Augustin Cauchy (loe: ogüstän koschii; 1789—1857) poolt.