

Tartu Ülikool  
Loodus- ja täppisteaduste valdkond  
Matemaatika ja statistika instituut

Keelia Hallap

## **Poolrühmade Cayley graafid**

Matemaatika eriala  
Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja Valdis Laan, PhD

Tartu 2018

## Poolrühmade Cayley graafid

Bakalaureusetöö

Keelia Hallap

**Lühikokkuvõte.** Bakalaureusetöös vaadeldakse poolrühmade Cayley graafe. Peamine eesmärk on kirjeldada tingimusi, mille korral poolrühma Cayley graaf on mittedirigeeritud. Põhitulemustes vaadeldakse neid nõudeid eraldi perioodiliste ja lõplike poolrühmade korral. Teema ilmetamiseks on lisatud terve rida näiteid, sealhulgas ka mitteperioodiliste poolrühmade kohta, ning esitatakse võrdluseks suunatud Cayley graafe. Töö baseerub A.V. Kelarevi teadusartiklil *On undirected Cayley graphs* (Australasian Journal of Combinatorics 25, 2002, 73–78).

**CERCS teaduseriala:** P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, rühmateooria, algebra.

**Märksõnad:** Poolrühm, täielikult lihtne poolrühm, Cayley graaf, mittedirigeeritud graaf.

## Cayley graphs of semigroups

Bachelor's thesis

Keelia Hallap

**Abstract.** In this bachelor's thesis, Cayley graphs of semigroups are considered. The main purpose is to describe conditions under which a Cayley graph of a semigroup is undirected. In the main results such conditions are given separately for periodic semigroups and finite semigroups. To illustrate the subject several examples have been added, including non-periodic semigroups, and also some directed Cayley graphs have been presented for comparison. The thesis is based on the article *On undirected Cayley graphs* (Australasian Journal of Combinatorics 25, 2002, 73–78) by A.V. Kelarev.

**CERCS research specialisation:** P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, group theory, algebra.

**Keywords:** Semigroup, completely simple semigroup, Cayley graph, undirected graph.

# Sisukord

Sissejuhatus . . . . .	4
1 Peamised mõisted . . . . .	5
2 Põhitulemused . . . . .	10
3 Mõningaid näiteid . . . . .	22
Kirjandus . . . . .	30

## Sissejuhatus

Matemaatika sisaldab endas palju alamharusid, millele võib omakorda läheneda mitmest eri vaatevinklist. Üheks neist osadest on algebra, mis tegeleb erinevate algebraliste struktuuride (rühmad, ringid, poolrühmad jne.) kirjeldamisega. Lisaks on olemas diskreetse matemaatika alamharu nimega graafiteooria, millel võib täheldada teatavaid seoseid poolrühmateooriaga.

Selles töös uurime lähemalt struktuuri nimega poolrühm ning seda algebralise graafiteooria vaatevinklist. Täpsemini, vaatleme teatud omadustega graafe – Cayley graafe, ning seda poolrühmade korral. Uurimise all on eelkõige perioodilised ja lõplikud poolrühmad ning neile vastavad mittesuunatud Cayley graafid. Töös kirjeldatakse põgusalt aga ka teisi poolrühmi ning suunatud Cayley graafe.

Ajendiks selle töö koostamisel oli see, et antud teemat ei ole teadaolevalt varasemalt eestikeelses kirjanduses käsitletud. Küll aga on Cayley graafe eesti keeles kirjeldatud varasemalt teise algebralise struktuuri – rühma korral. Sellest võib lähemalt lugeda näiteks bakalaureusetööst „Cayley graafid“ [JT].

See poolrühmi käsitlev töö on enamjaolt referatiivne ning baseerub teadusartiklil „*On undirected Cayley graphs*“ [AVK]. Artikkel on tõlgitud eesti keelde ning oluliselt täiendatud, andes põhjalikke seletusi ning põhjendusi, mis originaalis otseselt ei kajastu, kuid aitavad võimalikku lugejat.

Autor on kogunud kokku vajaminevad mõisted ning aksioomid mitmest eri allikast, et luua piisavad eeldused originaalartikli mõistmiseks. Enamuse neist leiab töö esimesest peatükist. Lemma 5 ning selle töö kahe põhitulemuse, teoreemi 6 ja teoreemi 8, tõestused pärinevad originaalartiklist, kuid on oluliselt täiendatud ning osaliselt muudetud, tehes kõigi eelduste kohaselt tõestuste jälgimise lihtsamaks. Lisatud on lemma 4 ja lemma 7 koos tõestustega ning kogu peatüki „Mõningaid näiteid“ sisu.

# 1 Peamised mõisted

Et mõista, mida kujutavad endast poolrühmad ja nende Cayley graafid, on kõigepealt tarvis tutvuda seda teemat käsitlevate põhimõistetega. Vajaminev informatsioon on kokku kogutud antud peatükis, luues ühtlasi ka baasi töö järgmistele osadele. Poolrühmi ja nende omadusi puudutavad mõisted pärinevad raamatutest [MK1], [MK2] ja [JMH]. Graafide kohta käivad mõisted põhinevad allikatel [AVK] ja [AB].

*Algebraalse struktuuri* all mõistame hulka, millel on defineeritud üks või mitu algebraalist tehet.

**Definitsioon 1.** Olgu  $A$  mittetühi hulk. Kujutust

$$\omega: A^2 \rightarrow A$$

nimetatakse *kahekohaliseks algebraiseks tehteks* hulgal  $A$ . Tihti kirjutatakse  $\omega(a, a')$  asemel lihtsalt  $aa'$ . Sellist tehet nimetatakse *assotsiatiivseks*, kui iga  $a, b, c \in A$  korral  $(ab)c = a(bc)$ .

**Definitsioon 2.** *Poolrühmaks* nimetatakse hulka  $G \neq \emptyset$ , millel on defineeritud assotsiatiivne kahekohaline algebraalne tehe  $G^2 \rightarrow G, (a, a') \mapsto aa'$ .

**Definitsioon 3.** Poolrühma  $G$  mittetühja alamhulka  $G'$  nimetatakse selle poolrühma *alampoolrühmaks*, kui iga  $a, b \in G'$  korral  $ab \in G'$ .

Kui  $S$  ja  $T$  on poolrühma  $G$  mingid alamhulgad, siis tähistame

$$ST = \{st \mid s \in S, t \in T\} \subseteq G.$$

Muuhulgas  $S\{g\}$  asemel kirjutame lihtsalt  $Sg$ .

**Definitsioon 4.** Poolrühma  $G$  nimetatakse *perioodiliseks*, kui iga  $g \in G$  korral leiduvad positiivsed täisarvud  $m, n$  nii, et  $g^m = g^{m+n}$ .

**Märkus 5.** Iga lõplik poolrühm on perioodiline.

**Definitsioon 6.** Öeldakse, et poolrühm  $R$  on *parempoolse korrutamisega*, kui  $xy = y$  iga  $x, y \in R$  korral.

**Definitsioon 7.** Poolrühma  $G$  elementi  $e$  nimetatakse selle poolrühma *ühikelemendiks*, kui  $ex = xe = x$  iga elemendi  $x \in G$  korral.

**Definitsioon 8.** Kui poolrühmas  $G$  leidub ühikelement, siis elemendi  $g \in G$  *pöördelemendiks* nimetatakse niisugust elementi  $h \in G$ , mille korral  $gh = hg = e$ , kus  $e$  on ühikelement.

Nii ühikelement kui elemendi  $g$  pöördelement (kui nad leiduvad) on üheselt määratud. Elemendi  $g$  pöördelementi tähistatakse sümboliga  $g^{-1}$  ning ühikelementi tähistatakse harilikult sümboliga 1.

**Definitsioon 9.** *Rühmaks* nimetatakse poolrühma, milles leidub ühikelement ning mille igal elemendil on olemas pöördelement.

**Definitsioon 10.** Olgu  $A$  ja  $B$  sama tüüpi algebralised struktuurid (nt. poolrühmad). Kui kujutus hulgast  $A$  hulka  $B$  on bijektiivne ning kooskõlas nende struktuuride tehetega, siis seda kujutust nimetatakse nende struktuuride *isomorfismiks*.

Muuhulgas isomorfsete poolrühmade  $A$  ja  $B$  vahel on bijektiivne kujutus  $f: A \rightarrow B$ , mis rahuldab tingimust

$$f(aa') = f(a)f(a')$$

iga  $a, a' \in A$  korral.

**Definitsioon 11.** Olgu  $A$  ja  $B$  poolrühmad. Kui leidub mingi isomorfism  $f: A \rightarrow B$ , siis öeldakse, et poolrühmad  $A$  ja  $B$  on *isomorfsed*.

Olgu  $G$  poolrühm ja  $S \subseteq G$ . Tähistame

$$\langle S \rangle = \{s_1 \dots s_n \mid n \in \mathbb{N}, s_1, \dots, s_n \in S\}.$$

Saab näidata, et  $\langle S \rangle$  on poolrühma  $G$  alamrühm.

**Definitsioon 12.** Poolrühma  $G$  alamrühma  $\langle S \rangle$  nimetatakse alamhulga  $S$  poolt tekitatud alamrühmaks.

**Definitsioon 13.** Ütleme, et hulk  $S \subseteq G$  tekitab poolrühma  $G$ , kui  $G = \langle S \rangle$ , s.t.

$$\forall g \in G \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists s_1, \dots, s_n \in S \quad g = s_1 \dots s_n.$$

Kui hulk  $S$  tekitab poolrühma  $G$ , siis öeldakse, et  $S$  on  $G$  tekitajate hulk.

**Definitsioon 14.** Mittetühja alamhulka  $I \subseteq G$  nimetatakse poolrühma  $G$  ideaaliks, kui iga  $i \in I$  ja  $x \in G$  korral  $xi \in I$  ja  $ix \in I$ .

**Definitsioon 15.** Poolrühma  $G$  ideaali  $I$  nimetatakse poolrühma  $G$  pärisideaaliks, kui  $I \subset G$ .

Elemendi  $g \in G$  korral tähistame

$$G^1gG^1 = GgG \cup gG \cup Gg \cup \{g\}.$$

Lihtne on veenduda, et  $G^1gG^1$  on poolrühma  $G$  ideaal.

**Definitsioon 16.** Ideaali  $G^1gG^1$  nimetatakse poolrühma  $G$  elemendi  $g$  poolt tekitatud peaideaaliks.

**Definitsioon 17.** Elementi  $e \in G$  nimetatakse poolrühma  $G$  idempotendiks, kui  $e^2 = e$ . Poolrühma  $G$  kõigi idempotentide hulka tähistatakse järgmiselt:

$$E(G) = \{e \in G \mid e^2 = e\}.$$

**Definitsioon 18.** Defineerime seose  $\leq$  hulgal  $E(G)$  järgmiselt:

$$e \leq f \Leftrightarrow ef = fe = e$$

mistahes  $e, f \in E(G)$  korral. Seda seost nimetatakse idempotentide *loomulikuks järjestusseoseks*.

Saab näidata, et eelpool kirjeldatud seos on järjestusseos.

**Definitsioon 19.** Idempotenti  $e$  poolrühmast  $G$  nimetatakse *primitiivseks*, kui

$$f \leq e \Rightarrow f = e$$

mistahes idempotendi  $f \in G$  korral.

**Definitsioon 20.** Öeldakse, et poolrühm  $G$  on *lihtne*, kui ta ei sisalda pärisideaale.

**Definitsioon 21.** Öeldakse, et poolrühm  $G$  on *täielikult lihtne*, kui:

1.  $G$  on lihtne,
2.  $\exists e \in E(G) \quad \forall f \in E(G) \quad ef = fe = f \Rightarrow e = f$  (teisisõnu:  $G$  sisaldab primitiivset idempotenti).

**Definitsioon 22.** Olgu  $H$  rühm ning olgu  $\Lambda$  ja  $I$  mittetühjad hulgad. Olgu  $P = (p_{\lambda i})$   $(\Lambda \times I)$ -maatriks elementidega  $p_{\lambda i} \in H$ , kus  $\lambda \in \Lambda, i \in I$ . *Reesi maatrikspoolrühmaks* (üle  $H$  koos nn. sändvitšmaatriksiga  $P$ ) nimetatakse sellist hulka, mis koosneb kõigist kolmikutest  $(i; h; \lambda)$ , kus  $i \in I, \lambda \in \Lambda, h \in H$  ning kus iga  $h_1, h_2 \in H, i_1, i_2 \in I$  ja  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$  korral on korrutamine defineeritud järgmise võrdusega:

$$(i_1; h_1; \lambda_1)(i_2; h_2; \lambda_2) = (i_1; h_1 p_{\lambda_1 i_2} h_2; \lambda_2).$$

**Märkus 23.** Reesi maatrikspoolrühma tähistame kui  $\mathcal{M}(H; I, \Lambda; P)$ . Eelnevalt kirjeldatud sändvitšmaatriksit  $P$  võib vaadelda kujutusena  $P: \Lambda \times I \rightarrow H, (\lambda, i) \mapsto p_{\lambda i} \in H$ .

**Definitsioon 24.** *Graafiks* nimetatakse järjestatud paari  $\Gamma = (V, E)$  mittetühjast hulgast  $V$  ja selle hulga elementide järjestatud paaride hulgast  $E$ . Hulga  $V$  elemente nimetatakse graafi *tippudeks* ja hulga  $E$  elemente graafi *servadeks*.

**Definitsioon 25.** Graafi  $\Gamma = (V, E)$  *alamgraafiks* nimetatakse graafi  $\Gamma' = (V', E')$ , kui  $V' \subseteq V$  ja  $E' \subseteq E$ .

Järgnev definitsioon on antud töö seisukohalt kõige olulisem.

**Definitsioon 26.** Poolrühma  $G$  *Cayley graafiks* alamhulga  $S \subseteq G$  suhtes nimetatakse sellist graafi, mille tipud on hulga  $G$  elemendid ja servadeks on sellised järjestatud paarid  $(x, y) \in G^2$ , mille jaoks leidub element  $s \in S$  nii, et  $sx = y$ . Sellist Cayley graafi tähistame kui  $Cay(G, S)$ .

**Märkus 27.** Teiste sõnadega öeldes on graafi  $Cay(G, S)$  servade hulgaks

$$E = \{(x, sx) \mid x \in G, s \in S\}.$$

**Definitsioon 28.** Öeldakse, et graaf  $\Gamma = (V, E)$  on *mittesuunatud*, kui graafi iga serva  $(u, v) \in E$  korral ka  $(v, u) \in E$ .

Näiteid nii suunatud kui suunamata Cayley graafide kohta toome selle töö kolmandas peatükis.

## 2 Põhitulemused

Võttes teadmiseks eelmises peatükis kirjeldatud mõisted ning märkused, võime sõnastada ning mõnel juhul ka tõestada mitmeid tulemusi. Enne põhiteoreemideni jõudmist läheb meil kõigepealt vaja kolme järgnevat tulemust. Need põhinevad allikal [JMH], kust leiab ka vastavad tõestused. Siinkohal võtame antud tulemused lihtsalt teadmiseks.

**Lemma 1.** *Poolrühm  $G$  on lihtne parajasti siis, kui iga  $g \in G$  korral  $G = G^1 g G^1$ .*

**Teoreem 2 (Reesi teoreem).** *Iga täielikult lihtne poolrühm on isomorfne mingi Reesi maatrikspoolrühmaga  $\mathcal{M}(H; I, \Lambda; P)$  üle mingi rühma  $H$ . Vastupidiselt, iga poolrühm  $\mathcal{M}(H; I, \Lambda; P)$  on täielikult lihtne.*

**Teoreem 3.** *Kõik perioodilised lihtsad poolrühmad on täielikult lihtsad.*

Järgnevalt sõnastame ning seejärel ka tõestame kaks lemmat mittesuunatud Cayley graafide ja poolrühmade kohta, mida läheb vaja esimese põhitulemuse (teoreemi 6) tõestamisel.

**Lemma 4.** *Olgu  $G$  poolrühm ja  $S \subseteq G$ . Siis Cayley graaf  $Cay(G, S)$  on mittesuunatud parajasti siis, kui*

$$\forall g \in G \quad \forall s \in S \quad \exists u \in S \quad g = usg. \quad (1)$$

**TÕESTUS.** **TARVILIKKUS.** Eeldame, et Cayley graaf  $Cay(G, S)$  on mittesuunatud. Võtame suvalised elemendid  $s \in S, g \in G$ . Cayley graafi definitsiooni põhjal on järjestatud paar  $(g, sg)$  graafi  $Cay(G, S)$  servaks. Kuna graaf on mittesuunatud, siis ka  $(sg, g)$  on serv. Järelikult leidub selline  $u \in S$ , mille korral  $g = usg$ .

**PIISAVUS.** Eeldame, et kehtib väide (1). Vaatleme Cayley graafi serva  $(g, sg)$ . Siis leidub  $u \in S$  nii, et  $g = usg$ . Järelikult ka  $(sg, g)$  on  $Cay(G, S)$  serv. See tähendab, et  $Cay(G, S)$  on mittesuunatud.  $\square$

**Lemma 5.** *Olgu  $G$  poolrühm ning  $S$  selle alamhulk, mis tekitab perioodilise alampoolrühma  $\langle S \rangle$ . Siis järgmised väited on samaväärsed.*

(i) *Cayley graaf  $Cay(G, S)$  on mittesuunatud.*

(ii)  *$SG = G$ , leidub Reesi maatrikpoolrühm  $\mathcal{M}(H; I, \Lambda; P)$  ja poolrühmade isomorfism  $\varphi: \langle S \rangle \rightarrow \mathcal{M}(H; I, \Lambda; P)$  nii, et iga  $(i; h; \lambda) \in \varphi(S)$ ,  $j \in I$  korral eksisteerib  $\mu \in \Lambda$  nii, et  $(j; p_{\lambda j}^{-1} h^{-1} p_{\mu i}^{-1}; \mu) \in \varphi(S)$ .*

*TÕESTUS.* (i)  $\Rightarrow$  (ii).

Olgu  $G$  poolrühm ning olgu  $S \subseteq G$  selle alamhulk, mis tekitab perioodilise alampoolrühma  $\langle S \rangle$ . On selge, et  $SG \subseteq G$ . Näitame, et kehtib ka sisalduvus  $G \subseteq SG$ . Selleks võtame suvalise  $g \in G$  ja suvalise  $s \in S$ . Siis lemma 4 tõttu leidub  $u \in S$  nii, et  $g = usg$ , kusjuures  $sg \in G$ . Seega  $g = u(sg) \in SG$ . Sellega oleme tõestanud, et  $SG = G$ .

Vaatame nüüd graafi  $Cay(G, S)$  alamgraafi  $Cay(\langle S \rangle, S)$ , mille tippude hulgaks on  $\langle S \rangle$ . Alamgraafi definitsiooni põhjal teame, et kui  $Cay(G, S)$  on mittesuunatud, siis on seda ka  $Cay(\langle S \rangle, S)$ .

Näitame, et poolrühm  $\langle S \rangle$  on lihtne. Võtame suvalised elemendid (s.o. graafi tipud)  $x, y \in \langle S \rangle$  ja veendume, et  $y \in \langle S \rangle^1 x \langle S \rangle^1$ . Poolrühma  $\langle S \rangle$  definitsiooni põhjal leiduvad  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in S$  nii, et  $x = x_1 x_2 \dots x_m$  ja  $y = y_1 y_2 \dots y_n$ , kus  $m, n \in \mathbb{N}$ . Tingimuse (1) põhjal leidub iga  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  jaoks  $t_i \in S$  nii, et  $t_i x_i x_{i+1} = x_{i+1}$  ja analoogselt leidub  $t_m \in S$  nii, et  $t_m x_m y_1 = y_1$ .

Saame, et

$$\begin{aligned}
(t_m t_{m-1} \dots t_2 t_1)xy &= (t_m t_{m-1} \dots t_2 t_1)(x_1 x_2 \dots x_{m-1} x_m)y \\
&= (t_m t_{m-1} \dots t_2 \underbrace{t_1 x_1 x_2}_{x_2} x_3 \dots x_{m-1} x_m)y \\
&= (t_m t_{m-1} \dots t_3 \underbrace{t_2 x_2 x_3}_{x_3} x_4 \dots x_{m-1} x_m)y \\
&= (t_m t_{m-1} \dots t_4 \underbrace{t_3 x_3 x_4}_{x_4} x_5 \dots x_{m-1} x_m)y \\
&\dots \\
&= (t_m t_{m-1} \underbrace{t_{m-2} x_{m-2} x_{m-1}}_{x_{m-1}} x_m)y \\
&= (t_m \underbrace{t_{m-1} x_{m-1} x_m}_{x_m})y \\
&= (t_m x_m)(y_1 y_2 \dots y_n) \\
&= \underbrace{t_m x_m}_{y_1} y_2 \dots y_n \\
&= y_1 \dots y_n \\
&= y
\end{aligned}$$

Definitsiooni 14 põhjal kuulub element  $y$  poolrühma  $\langle S \rangle$  peaideaali  $\langle S \rangle^1 x \langle S \rangle^1$ . Kuna  $y$  oli suvaline, siis  $\langle S \rangle \subseteq \langle S \rangle^1 x \langle S \rangle^1$  ning seega  $\langle S \rangle = \langle S \rangle^1 x \langle S \rangle^1$ . Et ka  $x$  oli suvaline, siis poolrühm  $\langle S \rangle$  on lihtne lemma 1 põhjal. Veelgi enam, kuna  $\langle S \rangle$  on perioodiline ja lihtne, siis teoreemi 3 põhjal  $\langle S \rangle$  on täielikult lihtne ja seega teoreemi 2 tõttu leidub isomorfism  $\varphi: \langle S \rangle \rightarrow \mathcal{M}(H; I, \Lambda; P)$ , kus  $\mathcal{M}(H; I, \Lambda; P)$  on Reesi maatrikspoolrühm üle mingi rühma  $H$ .

Tähistame  $\bar{S} := \varphi(S) = \{\varphi(s) \mid s \in S\} \subseteq \mathcal{M}(H; I, \Lambda; P)$ . Kuna  $\varphi$  on isomorfism, siis tingimusest (1) järeldeb kergesti järgmine tingimus:

$$\forall x \in \mathcal{M}(H; I, \Lambda; P) \quad \forall \bar{s} \in \bar{S} \quad \exists \bar{u} \in \bar{S} \quad x = \bar{u} \bar{s} x. \quad (2)$$

Vaatleme suvalist elementi  $\bar{s} = (i; h; \lambda) \in \bar{S}$  ja indeksit  $j \in I$ . Tähistame  $x = (j; 1; \lambda)$ , kus 1 on rühma  $H$  ühikelement. Tingimuse (2) põhjal  $x = \bar{u}\bar{s}x$  mingi  $\bar{u} \in \bar{S}$  korral. Olgu see  $\bar{u} = (l; h'; \mu)$ , kus  $l \in I, h' \in H, \mu \in \Lambda$ . Järelikult, kasutades Reesi maatriks-poolrühma korrutamise definitsiooni, saame

$$\begin{aligned}
(j; 1; \lambda) &= (l; h'; \mu)(i; h; \lambda)(j; 1; \lambda) \\
&= ((l; h'; \mu)(i; h; \lambda))(j; 1; \lambda) \\
&= (l; h'p_{\mu i}h; \lambda)(j; 1; \lambda) \\
&= (l; h'p_{\mu i}hp_{\lambda j}1; \lambda) \\
&= (l; h'p_{\mu i}hp_{\lambda j}; \lambda).
\end{aligned}$$

Siit  $l = j$  ja  $1 = h'p_{\mu i}hp_{\lambda j}$ . Seega

$$\begin{aligned}
1 &= h'p_{\mu i}hp_{\lambda j} \Rightarrow \\
1p_{\lambda j}^{-1} &= h'p_{\mu i}hp_{\lambda j}p_{\lambda j}^{-1} \Rightarrow \\
p_{\lambda j}^{-1} &= h'p_{\mu i}h \Rightarrow \\
p_{\lambda j}^{-1}h^{-1} &= h'p_{\mu i}hh^{-1} \Rightarrow \\
p_{\lambda j}^{-1}h^{-1} &= h'p_{\mu i} \Rightarrow \\
p_{\lambda j}^{-1}h^{-1}p_{\mu i}^{-1} &= h'p_{\mu i}p_{\mu i}^{-1} \Rightarrow \\
p_{\lambda j}^{-1}h^{-1}p_{\mu i}^{-1} &= h'.
\end{aligned}$$

Saime võrduse  $h' = p_{\lambda j}^{-1}h^{-1}p_{\mu i}^{-1}$ . Seega leidub  $\bar{u}$  poolt määratud element  $\mu \in \Lambda$  nii, et

$$\bar{u} = (l; h'; \mu) = (j; p_{\lambda j}^{-1}h^{-1}p_{\mu i}^{-1}; \mu) \in \bar{S}.$$

Oleme näidanud, et tingimus (ii) kehtib.

Näitame, et (ii)  $\Rightarrow$  (i). Kehtigu tingimus (ii) ja tähistame  $\bar{S} := \varphi(S)$ . Võtame graafi  $Cay(G, S)$  suvalise serva  $(w, sw)$ , kus  $s \in S, w \in G$ . Kuna tingimuse (ii) põhjal

$SG = G$ , siis leiduvad  $s' \in S, v \in G$  nii, et  $s'v = w$ . Kuna  $\varphi$  on sürjektiivne, siis  $\varphi(s) = (i; h; \lambda)$  ja  $\varphi(s') = (j; h'; \xi)$  mingite  $h, h' \in H, i, j \in I, \lambda, \xi \in \Lambda$  korral.

Tingimuse (ii) põhjal leidub  $\mu \in \Lambda$  nii, et  $(j; p_{\lambda j}^{-1} h^{-1} p_{\mu i}^{-1}; \mu) \in \bar{S}$ . Kuna  $\varphi$  on sürjektiivne, siis leidub selline  $s'' \in S$ , et

$$\varphi(s'') = (j; p_{\lambda j}^{-1} h^{-1} p_{\mu i}^{-1}; \mu).$$

Seega isomorfismi definitsiooni, Reesi maatrikspoolrühma korrutamise definitsiooni ning pöördlemendi definitsiooni põhjal

$$\begin{aligned} \varphi(s''ss') &= \varphi(s'')\varphi(s)\varphi(s') \\ &= (j; p_{\lambda j}^{-1} h^{-1} p_{\mu i}^{-1}; \mu)(i; h; \lambda)(j; h'; \xi) \\ &= ((j; p_{\lambda j}^{-1} h^{-1} p_{\mu i}^{-1}; \mu)(i; h; \lambda))(j; h'; \xi) \\ &= (j; p_{\lambda j}^{-1} h^{-1} p_{\mu i}^{-1} p_{\mu i} h; \lambda)(j; h'; \xi) \\ &= (j; p_{\lambda j}^{-1}; \lambda)(j; h'; \xi) \\ &= (j; p_{\lambda j}^{-1} p_{\lambda j} h'; \xi) \\ &= (j; h'; \xi) \\ &= \varphi(s'). \end{aligned}$$

Kuna  $\varphi$  on injektiivne, siis  $s''ss' = s'$ . Seega  $s''sw = s''ss'v = s'v = w$ , mistõttu ka  $(sw, w)$  on graafi  $Cay(G, S)$  serv. Definitsiooni põhjal on  $Cay(G, S)$  suunamata.

□

Järgnevalt sõnastame ning seejärel ka tõestame selle bakalaureusetöö esimese põhitulemuse.

**Teoreem 6.** *Perioodilise poolrühma  $G$  korral on järgmised väited samaväärsed.*

(i) *Leidub alamhulk  $S \subseteq G$  nii, et Cayley graaf  $Cay(G, S)$  on mittesuunatud.*

(ii) *Poolrühmal  $G$  leidub täielikult lihtne alampoolrühm  $C$  nii, et  $CG = G$ .*

*TÕESTUS.* Kõigepealt näitame, et (i)  $\Rightarrow$  (ii). Eeldame, et leidub alamhulk  $S \subseteq G$  nii, et  $Cay(G, S)$  on mittesuunatud. Kuna  $G$  on perioodiline, siis ka alampoolrühm  $\langle S \rangle$  on perioodiline. Lemmast 5 tuleneb, et  $SG = G$  ja et poolrühm  $\langle S \rangle$  on täielikult lihtne. Kuna  $SG \subseteq \langle S \rangle G \subseteq G = SG$ , siis ka  $\langle S \rangle G = G$ .

Nüüd näitame, et (ii)  $\Rightarrow$  (i). Olgu  $C$  poolrühma  $G$  täielikult lihtne alampoolrühm, mille korral  $CG = G$ . Kuna  $C$  on alampoolrühm, siis  $\langle C \rangle = C$ . Teoreemi 2 põhjal leidub Reesi maatrikspoolrühm  $\mathcal{M}(H; I, \Lambda; P)$  ja isomorfism  $\varphi: C \rightarrow \mathcal{M}(H; I, \Lambda; P)$ . Võtame suvalise elemendi  $(i; h; \lambda) \in \mathcal{M}(H; I, \Lambda; P) = \varphi(C)$  ja suvalise indeksi  $j \in I$ . Siis iga  $\mu \in \Lambda$  korral  $(j; p_{\lambda j}^{-1} h^{-1} p_{\mu i}^{-1}; \mu) \in \mathcal{M}(H; I, \Lambda; P)$ . Seega lemma 5 tingimus (ii) kehtib. Seetõttu graaf  $Cay(G, C)$  on mittesuunatud.  $\square$

**Definitsioon 29.** [JMH]. Olgu  $H$  ja  $R$  poolrühmad. Poolrühmade  $H$  ja  $R$  otsekorrutiseks nimetatakse poolrühma  $H \times R$ , millel on korrutamine defineeritud järgmiselt:

$$(h, r)(h', r') = (hh', rr'),$$

kusjuures  $h, h' \in H, r, r' \in R$ .

Sõnastame nüüd lemma rühma ja parempoolse korrutamise poolrühma otsekorrutise ning Reesi maatrikspoolrühma vahelise isomorfismi kohta. Peale sõnastust järgneb ka vastav tõestus.

**Lemma 7.** *Reesi maatrikspoolrühm  $\mathcal{M}(H; \{i\}, \Lambda; P)$  on isomorfne otsekorrutisega  $H \times R$ , kus  $R = \Lambda$  on parempoolse korrutamise poolrühm, s.t.*

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda \quad \lambda\mu = \mu.$$

*TÕESTUS.* Defineerime kujutuse  $\varphi: \mathcal{M}(H; \{i\}, \Lambda; P) \rightarrow H \times R$  võrdusega

$$\varphi(i; h; \lambda) = (hp_{\lambda i}^{-1}, \lambda).$$

Kontrollimaks isomorfsuse definitsiooni kehtimist, näitame kõigepealt, et  $\varphi$  on injektiivne. Olgu  $(i; h; \lambda), (i; h'; \mu) \in \mathcal{M}(H; \{i\}, \Lambda; P)$  sellised, et  $\varphi(i; h; \lambda) = \varphi(i; h'; \mu)$ . Siis  $(hp_{\lambda i}^{-1}, \lambda) = (h'p_{\mu i}^{-1}, \mu)$ . Järelikult  $hp_{\lambda i}^{-1} = h'p_{\mu i}^{-1}$  ja  $\lambda = \mu$ . Korrutades võrdust  $hp_{\lambda i}^{-1} = h'p_{\mu i}^{-1}$  paremalt poolt elemendiga  $p_{\lambda i}$ , saame  $h = h'$ . Seega  $(i; h; \lambda) = (i; h; \mu)$  ja  $\varphi$  on injektiivne.

Olgu  $(h, \lambda) \in H \times R$ . Siis  $\varphi(i; hp_{\lambda i}; \lambda) = (hp_{\lambda i}p_{\lambda i}^{-1}, \lambda) = (h, \lambda)$ . Seega  $\varphi$  on ka sürjektiivne.

Nüüd jääb näidata, et  $\varphi((i; h; \lambda)(i; h'; \mu)) = \varphi(i; h; \lambda)\varphi(i; h'; \mu)$ . Tõepoolest,

$$\varphi((i; h; \lambda)(i; h'; \mu)) = \varphi(i; hp_{\lambda i}h'; \mu) = (hp_{\lambda i}h'p_{\mu i}^{-1}, \mu)$$

ja

$$\varphi(i; h; \lambda)\varphi(i; h'; \mu) = (hp_{\lambda i}^{-1}, \lambda)(h'p_{\mu i}^{-1}, \mu) = (hp_{\lambda i}^{-1}h'p_{\mu i}^{-1}, \lambda\mu) = (hp_{\lambda i}^{-1}h'p_{\mu i}^{-1}, \mu).$$

Järelikult  $\varphi$  on isomorfism ning poolrühm  $\mathcal{M}(H; \{i\}, \Lambda; P)$  ja otsekorrutis  $H \times R$  on isomorfsed. □

**Definitsioon 30.** [JMH]. Poolrühma nimetatakse *parempoolseks poolrühmaks*, kui ta on isomorfne poolrühmaga  $H \times R$ , kus  $H$  on rühm ja  $R$  on parempoolse korrutamise poolrühm.

Järgnevalt sõnastame selle töö teise põhitulemuse, mis kirjeldab teatud tingimusi lõplike poolrühmade ja nendele vastavate mittesuunatud Cayley graafide olemasolu vahel.

**Teoreem 8.** Olgu  $G$  lõplik poolrühm ja  $S \subseteq G$ . Siis järgmised väited on samaväärsed.

(i) Leidub üksühene kujutus  $S \rightarrow S$ ,  $s \mapsto s'$  nii, et

$$\forall s \in S \quad \forall g \in G \quad s'sg = g.$$

(Siis lemma 4 tõttu  $\text{Cay}(G, S)$  on mittesuunatud.)

(ii)  $SG = G$ , leidub isomorfism  $\varphi: \langle S \rangle \rightarrow H \times R$ , kus  $H$  on mingi rühm ja  $R$  on mingi parempoolse korrutamise poolrühm ning iga  $h \in H$  korral

$$|\{r \in R \mid (h, r) \in \varphi(S)\}| = |\{r \in R \mid (h^{-1}, r) \in \varphi(S)\}|.$$

*TÕESTUS.* (ii)  $\Rightarrow$  (i).

Kehtigu tingimus (ii). Olgu  $SG = G$  ja olgu  $\varphi: \langle S \rangle \rightarrow H \times R$  isomorfism, kus  $H$  on rühm ja  $R$  on parempoolse korrutamise poolrühm. Tähistame iga  $h \in H$  korral

$$A_h := \{r \in R \mid (h, r) \in \varphi(S)\}.$$

Tingimuse (ii) tõttu  $|A_h| = |A_{h^{-1}}|$  ning seega leidub bijektiivne kujutus

$$\varepsilon_h: A_h \longrightarrow A_{h^{-1}}, \quad r \mapsto \bar{r}.$$

Meil on vaja defineerida kujutus  $\tau: S \rightarrow S$  nii, et  $\tau(s)sg = g$  iga  $s \in S$  ja  $g \in G$  korral.

Olgu  $s \in S$  suvaline ja olgu  $\varphi(s) = (h_s, r_s)$ . Kuna  $r_s \in A_{h_s}$ , siis  $\varepsilon_{h_s}(r_s) \in A_{h_s^{-1}}$  s.t.  $(h_s^{-1}, \varepsilon_{h_s}(r_s)) \in \varphi(S)$ . Me loeme, et

$$\tau(s) := \varphi^{-1}(h_s^{-1}, \varepsilon_{h_s}(r_s)) \in S.$$

Näitame, et niiviisi defineeritud kujutus  $\tau: S \rightarrow S$  on üksühene. Selleks valime sellised

elemendid  $s, t \in S$ , et  $\tau(s) = \tau(t)$ . Siis

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(h_s^{-1}, \varepsilon_{h_s}(r_s)) &= \varphi^{-1}(h_t^{-1}, \varepsilon_{h_t}(r_t)) \Rightarrow \\ (h_s^{-1}, \varepsilon_{h_s}(r_s)) &= (h_t^{-1}, \varepsilon_{h_t}(r_t)) \Rightarrow \\ h_s^{-1} &= h_t^{-1} \text{ ja } \varepsilon_{h_s}(r_s) = \varepsilon_{h_t}(r_t) \Rightarrow \\ h_s &= h_t \text{ ja } \varepsilon_{h_s}(r_s) = \varepsilon_{h_s}(r_t) \Rightarrow \\ h_s &= h_t \text{ ja } r_s = r_t.\end{aligned}$$

Seega  $\varphi(s) = (h_s, r_s) = (h_t, r_t) = \varphi(t)$ , millest järeldub, et  $s = t$ . Järelikult  $\tau$  on üksühene.

Näitame, et iga  $s \in S$  ja iga  $g \in G$  korral  $\tau(s)sg = g$ . Kuna  $SG = G$ , siis leiduvad  $s_1 \in S$  ja  $g_1 \in G$  nii, et  $g = s_1g_1$ . Olgu  $\varphi(s) = (h_s, r_s)$  ja  $\varphi(s_1) = (h, v)$ . Siis

$$\begin{aligned}\varphi(\tau(s)ss_1) &= \varphi(\tau(s))\varphi(s)\varphi(s_1) \\ &= (h_s^{-1}, \varepsilon_{h_s}(r_s))(h_s, r_s)(h, v) \\ &= (h_s^{-1}h_s h, \varepsilon_{h_s}(r_s)r_s v) \\ &= (1h, v) \\ &= (h, v) \\ &= \varphi(s_1),\end{aligned}$$

kust  $\varphi$  injektiivsuse tõttu  $\tau(s)sg = g$ . Seega  $\tau(s)sg = \tau(s)ss_1g_1 = s_1g_1 = g$  ja väide (i) kehtib.

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Kehtigu tingimus (i). Leidugu üksühene kujutus  $\tau: S \rightarrow S$ ,  $s \mapsto s'$  nii, et iga  $s \in S$  ja  $g \in G$  korral  $\tau(s)sg = g$ . Eelpool tõestatud lemma 5 põhjal leidub isomorfism  $\psi: \langle S \rangle \rightarrow \mathcal{M}(H; I, \Lambda; P)$  nii, et iga  $(i; h; \lambda) \in \psi(S)$ ,  $j \in I$  korral leidub  $\mu \in \Lambda$  nii, et  $(j; p_{\lambda j}^{-1}h^{-1}p_{\mu i}^{-1}; \mu) \in \psi(S)$ . Lisaks sellele  $SG = G$ .

Tähistame  $\bar{S} := \psi(S)$  ning võtame suvalise elemendi  $\psi(s) = \bar{s} \in \bar{S}$ . Olgu selleks  $\bar{s} = (i; h; \lambda)$ , kus  $i \in I, h \in H, \lambda \in \Lambda$ . Leiduvad ka  $i' \in I, h' \in H, \lambda' \in \Lambda$  nii, et  $\psi(s') = \bar{s}' = (i'; h'; \lambda')$ . Näitame, et  $|I| = 1$ . Oletame vastuväiteliselt, et  $|I| > 1$ . Vaatleme kahte juhtu:

- 1) Esiteks oletame, et  $i' = i$ . Sel juhul saame valida  $j \in I \setminus \{i\}$  ja valida  $h^* \in H$  ning tähistada  $x = (j; h^*; \lambda)$ . Kuna  $\psi$  on isomorfism, siis väitest (i) järeldub, et  $\bar{s}'\bar{s}x = x$ . Seega Reesi maatrikspoolrühma korrutamise definitsiooni põhjal

$$\begin{aligned} (j; h^*; \lambda) &= (i'; h'; \lambda')(i; h; \lambda)(j; h^*; \lambda) \\ &= ((i'; h'; \lambda')(i; h; \lambda))(j; h^*; \lambda) \\ &= (i'; h'p_{\lambda'i}h; \lambda)(j; h^*; \lambda) \\ &= (i'; h'p_{\lambda'i}hp_{\lambda j}h^*; \lambda). \end{aligned}$$

Seega  $j = i' = i$ , mis on vastuolus eeldusega.

- 2) Teiseks oletame, et  $i' \neq i$ . Valime suvalise  $h^* \in H$  ja tähistame  $x = (i; h^*; \lambda)$ . Väite (i) põhjal  $\bar{s}'\bar{s}x = x$ . Seega, analoogselt eelmisele juhule, saame

$$\begin{aligned} (i; h^*; \lambda) &= (i'; h'; \lambda')(i; h; \lambda)(i; h^*; \lambda) \\ &= ((i'; h'; \lambda')(i; h; \lambda))(i; h^*; \lambda) \\ &= (i'; h'p_{\lambda'i}h; \lambda)(i; h^*; \lambda) \\ &= (i'; h'p_{\lambda'i}hp_{\lambda i}h^*; \lambda). \end{aligned}$$

Järelikult  $i = i'$ , mis on taas vastuolus eeldusega.

Eelneva kahe vastuolu põhjal  $|I| = 1$ .

Definierime hulgal  $\Lambda$  korrutamise võrdusega  $\lambda\mu = \mu$ . Nii tekib parempoolse korrutamise poolrühm  $R$ . Lemma 7 põhjal on Reesi maatrikspoolrühm  $\mathcal{M}(H; \{i\}, \Lambda; P)$  isomorfne otsekorrutisega  $H \times R$ , kus iga  $h^* \in H, \lambda \in \Lambda = R$  korral isomorfism  $\varphi': \mathcal{M}(H; \{i\}, \Lambda; P) \rightarrow H \times R$  on defineeritud järgmiselt:

$$\varphi'(i; h^*, \lambda) = (h^* p_{\lambda i}^{-1}, \lambda).$$

Järelikult ka kujutus  $\varphi := \varphi'\psi: \langle S \rangle \rightarrow H \times R$  on poolrühmade isomorfism. Olgu  $h \in H$  suvaline ja tähistame

$$A_h := \{r \in R \mid (h, r) \in \varphi(S)\}.$$

Definierime kujutuse  $\varepsilon: A_h \rightarrow A_h^{-1}$ . Olgu  $r \in A_h$ . Siis  $(h, r) \in \varphi(S)$  ja leidub üheselt määratud  $s \in S$  nii, et  $(h, r) = \varphi(s)$ . Olgu  $\varphi(\tau(s)) = (h', r')$  ja definierime

$$\varepsilon(r) := r'.$$

Näitame, et  $r' \in A_h^{-1}$ . Selleks fikseerime suvalise elemendi  $(h_0, r_0) \in H \times R$ . Siis leidub  $x \in \langle S \rangle$  nii, et  $\varphi(x) = (h_0, r_0)$ . Eelduse põhjal  $\tau(s)sx = x$ . Järelikult

$$\begin{aligned} (h_0, r_0) &= \varphi(x) = \varphi(\tau(s))\varphi(s)\varphi(x) \\ &= (h', r')(h, r)(h_0, r_0) \\ &= (h'h h_0, r'r r_0) \\ &= (h'h h_0, r_0), \end{aligned}$$

kust  $h_0 = h'h h_0$ . Korrutades võrduse mõlemat poolt elemendiga  $h_0^{-1}$ , saame  $1 = h'h$ , kust  $h' = h^{-1}$ . Järelikult  $(h^{-1}, r') = \varphi(\tau(s)) \in \varphi(S)$  ja  $r' \in A_{h^{-1}}$ .

Näitame, et  $\varepsilon$  on injektiivne. Oletame, et  $\varepsilon(r) = \varepsilon(q)$ , kus  $\varepsilon(r) = r', \varepsilon(q) = q'$ ,  $(h, r) = \varphi(s), (h, q) = \varphi(t), \varphi(\tau(s)) = (h', r')$  ja  $\varphi(\tau(t)) = (h'', q')$ . Siis  $r' = q'$  ja, nagu eelpool näitasime,  $h' = h^{-1} = h''$ . Järelikult

$$\varphi(\tau(s)) = (h', r') = (h'', q') = \varphi(\tau(t)).$$

Kasutades kujutuste  $\varphi$  ja  $\tau$  injektiivsust saame võrduse  $s = t$ . Järelikult

$$(h, r) = \varphi(s) = \varphi(t) = (h, q),$$

kust  $r = q$ , mida oligi tarvis.

Kuna  $\varepsilon: A_h \rightarrow A_{h-1}$  on injektiivne kujutus, siis  $|A_h| \leq |A_{h-1}|$ . Analoogselt saame konstrueerida injektiivse kujutuse  $\varepsilon': A_h^{-1} \rightarrow A_h$  ja seega  $|A_{h-1}| \leq |A_h|$ . Kokkuvõttes  $|A_h| = |A_{h-1}|$ . Seega väide (ii) kehtib.

□

### 3 Mõningaid näiteid

Kirjeldamiseks lähemalt, millistena võib teatud tüüpi poolrühmade Cayley graafe kujutada, on selles peatükis väljatoodud mitu näidet. Mõned neist sisaldavad ka täiendavat joonist, mis visualiseerib vastavate graafide olemust. Samas tuleb tähele panna, et sama informatsiooni kujutamiseks on ka teisi mooduseid, mistõttu on antud kirjutises olevad joonised vaid üks mitmest võimalikust tõlgendusest.

Näidetes vaatleme, mil määral erinevad Cayley graafid üksteisest erinevate poolrühmade ning varieeruvate vastavate poolrühmade alamhulkade korral. Mõned kirjeldatud graafid on suunatud ning teised mitte.

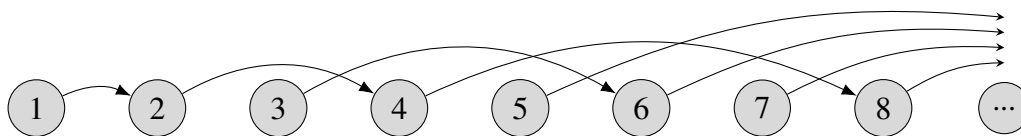
Olgu järgnevatel näidetes  $G$  poolrühm ja olgu  $S \subseteq G$  selle alamhulk. Olgu vastav Cayley graaf  $Cay(G, S)$ , kusjuures tähega  $E$  tähistame  $Cay(G, S)$  servade hulka.

Joonistel on kujutatud ringidena Cayley graafi  $Cay(G, S)$  tippe, kus juurdemärgitud number viitab vaadeldavale poolrühma  $G$  elemendile. Graafi tippe ühendavad nooled sümboliseerivad vastavaid graafi tippe ühendavaid servi.

**Näide 1.** Olgu  $G$  naturaalarvude hulk korrutamise suhtes ning olgu  $S = \{2\}$ . Siis

$$E = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots\} = \{(k, 2k) \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Cayley graaf  $Cay(G, S)$  on suunatud. See poolrühm ei ole perioodiline.



Joonis 1: Cayley graaf  $Cay(G, S)$ , kus  $G = (\mathbb{N}, \cdot)$ ,  $S = \{2\}$ .

**Näide 2.** Olgu  $G$  naturaalarvude hulk liitmise suhtes ning olgu  $S = \{1\}$ . Siis

$$E = \{(k, k + 1) \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Cayley graaf  $\text{Cay}(G, S)$  on suunatud, sest näiteks  $(2, 3) \in E$ , aga  $(3, 2) \notin E$ .



Joonis 2: Cayley graaf  $\text{Cay}(G, S)$ , kus  $G = (\mathbb{N}, +)$ ,  $S = \{1\}$ .

**Näide 3.** Olgu  $G$  reaalarvude hulk korrutamise suhtes ning olgu  $S = \mathbb{R}$ . Siis

$$E = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Cayley graaf  $\text{Cay}(G, S)$  on suunatud, sest näiteks  $(1, 0) \in E$ , aga  $(0, 1) \notin E$ .

**Näide 4.** Olgu  $G$  reaalarvude hulk korrutamise suhtes ning olgu  $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Siis

$$E = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

Cayley graaf  $\text{Cay}(G, S)$  on mittesuunatud.

**Näide 5.** Olgu  $G$  parempoolse korrutamisega poolrühm ning olgu  $S \subseteq G$  suvaline alamhulk. Siis

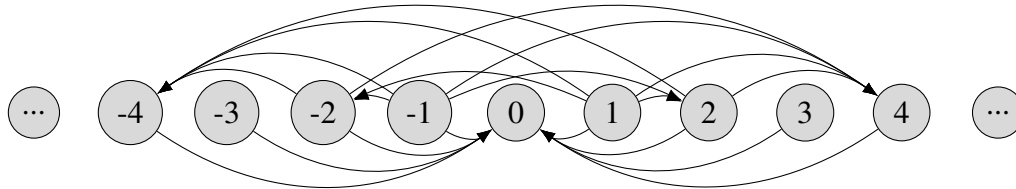
$$E = \{(k, k) \mid k \in G\}.$$

Cayley graaf  $\text{Cay}(G, S)$  on mittesuunatud.

**Näide 6.** Olgu  $G$  täisarvude hulk korrutamise suhtes ning olgu  $S = 2\mathbb{Z}$  s.t. alamhulk  $S$  koosneb paarisarvulistest täisarvudest. Siis

$$E = \{(s, t) \mid s \in \mathbb{Z}, t \in 2\mathbb{Z}\}.$$

Cayley graaf  $Cay(G, S)$  on suunatud, sest näiteks leidub täisarvuline paarisarv  $s$ , mille korral  $s \cdot 4 = 8$ , kuid ei leidu ühtki paarisarvu  $s'$ , mille korral  $s' \cdot 8 = 4$ . Seega  $(4, 8) \in E$ , aga  $(8, 4) \notin E$ .



Joonis 3: Väljavõte Cayley graafist  $Cay(G, S)$ , kus  $G = (\mathbb{Z}, \cdot)$ ,  $S = 2\mathbb{Z}$ .

Joonisel 3 on lihtsuse mõttes kujutatud vaid servi, mis on  $G$  elementide  $-4, -3, \dots, 3, 4$  vahel. Ülejäänud osa Cayley graafist  $Cay(G, S)$  võib kujutada analoogselt.

**Näide 7.** Olgu  $G$  täisarvude hulk liitmise suhtes ning olgu  $S = 2\mathbb{Z}$  s.t. alamhulk  $S$  koosneb paarisarvulistest täisarvudest. Siis

$$E = \{(s, t) \mid s, t \in \mathbb{Z}, s - t \in 2\mathbb{Z}\}.$$

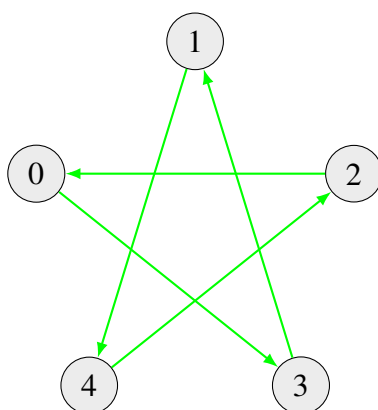
Cayley graaf  $Cay(G, S)$  on mittesuunatud, sest  $s - t$  on paarisarv parajasti siis, kui  $t - s$  on paarisarv.

Järgmiste näidete tarvis võtame kasutusele jäägiklassiringi mõiste (vt. [MK1]).

**Näide 8.** Olgu  $G = (\mathbb{Z}_5, +)$  jäägiklassiringi  $\mathbb{Z}_5$  aditiivne rühm (vt. [MK1]). Lihtsuse mõttes tähistame  $\mathbb{Z}_5$  elemente sümboolitega  $0, 1, 2, 3, 4$ . Olgu  $S = \{3\}$ . Siis

$$E = \{(0, 3), (1, 4), (2, 0), (3, 1), (4, 2)\}.$$

Cayley graaf  $Cay(G, S)$  on suunatud (vt. Joonis 4).



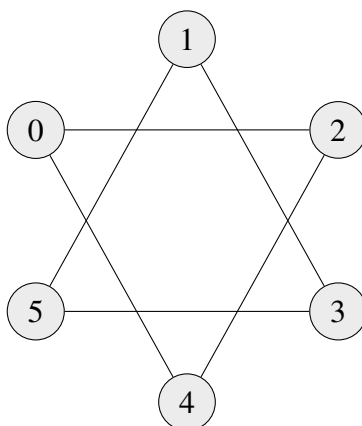
Joonis 4: Cayley graaf  $Cay(G, S)$ , kus  $G = (\mathbb{Z}_5, +)$ ,  $S = \{3\}$ .

**Näide 9.** Olgu  $G = (\mathbb{Z}_6, +)$  jäägiklassiringi  $\mathbb{Z}_6$  aditiivne rühm. Olgu  $S = \{2, 4\}$ . Siis

$$E = \{(0, 2), (0, 4), (1, 3), (1, 5), (2, 0), (2, 4),$$

$$(3, 1), (3, 5), (4, 0), (4, 2), (5, 1), (5, 3)\}.$$

Cayley graaf  $Cay(G, S)$  on mittesuunatud. Kuna  $Cay(G, S)$  on mittesuunatud, siis võime graafi servi tähistada lihtsalt noolteta joontena graafi kahe vastava tipu vahel.



Joonis 5: Cayley graaf  $Cay(G, S)$ , kus  $G = (\mathbb{Z}_6, +)$ ,  $S = \{2, 4\}$ .

**Näide 10.** Olgu  $G = (\mathbb{Z}_7, +)$  jäägiklassiringi  $\mathbb{Z}_7$  aditiivne rühm. Olgu  $S = \{1, 2, 3\}$ .

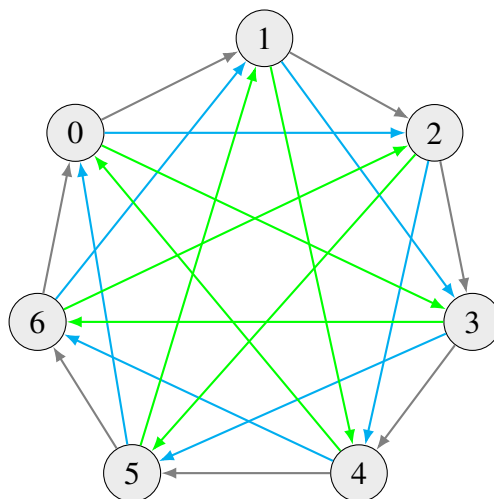
Siis

$$E = \underbrace{\{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 0)\}}_{\text{tekitatud elemendi } 1 \in S \text{ poolt}}$$

$$\underbrace{\{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 0), (6, 1)\}}_{\text{tekitatud elemendi } 2 \in S \text{ poolt}}$$

$$\underbrace{\{(0, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 0), (5, 1), (6, 2)\}}_{\text{tekitatud elemendi } 3 \in S \text{ poolt}}.$$

See Cayley graaf on suunatud, sest näiteks  $(0, 1) \in E$ , aga  $(1, 0) \notin E$ .



Joonis 6: Cayley graaf  $Cay(G, S)$ , kus  $G = (\mathbb{Z}_7, +)$ ,  $S = \{1, 2, 3\}$ .

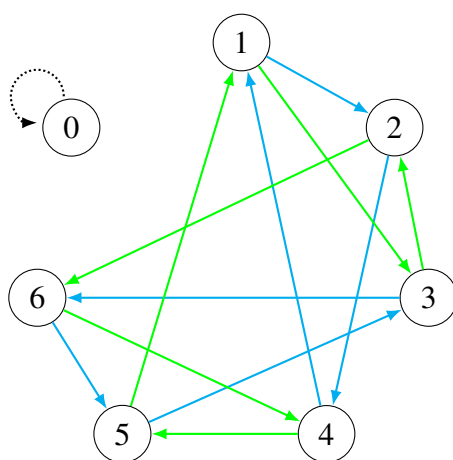
Kusjuures roheline noolega on joonisel 6 tähistatud elemendi  $3 \in S$ , sinise noolega elemendi  $2 \in S$  ning halli joonega elemendi  $1 \in S$  poolt tekitatud servad.

**Näide 11.** Olgu  $G = (\mathbb{Z}_7, \cdot)$  jäägiklassiringi  $\mathbb{Z}_7$  multiplikatiivne poolrühm (vt. [MK1]).

Olgu  $S = \{2, 3\}$ . Siis

$$E = \{(0, 0), \underbrace{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 1), (5, 3), (6, 5)}_{\text{tekitatud elemendi } 2 \in S \text{ poolt}}, \\ \underbrace{(1, 3), (2, 6), (3, 2), (4, 5), (5, 1), (6, 4)}_{\text{tekitatud elemendi } 3 \in S \text{ poolt}}\}.$$

See Cayley graaf  $\text{Cay}(G, S)$  on suunatud, sest näiteks  $(1, 2) \in E$ , aga  $(2, 1) \notin E$ .

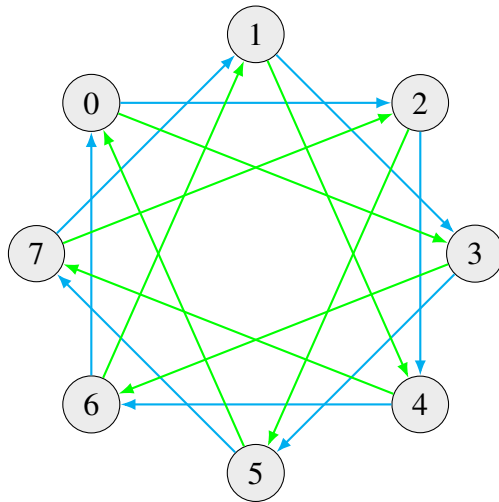


Joonis 7: Cayley graaf  $\text{Cay}(G, S)$ , kus  $G = (\mathbb{Z}_7, \cdot)$ ,  $S = \{2, 3\}$ .

**Näide 12.** Olgu  $G = (\mathbb{Z}_8, +)$  jäägiklassiringi  $\mathbb{Z}_8$  aditiivne rühm. Olgu  $S = \{2, 3\}$ . Siis

$$E = \{ \underbrace{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7), (6, 0), (7, 1)}_{\text{tekitatud elemendi } 2 \in S \text{ poolt}}, \\ \underbrace{(0, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 0), (6, 1), (7, 2)}_{\text{tekitatud elemendi } 3 \in S \text{ poolt}} \}.$$

See Cayley graaf on suunatud (vt. Joonis 8).



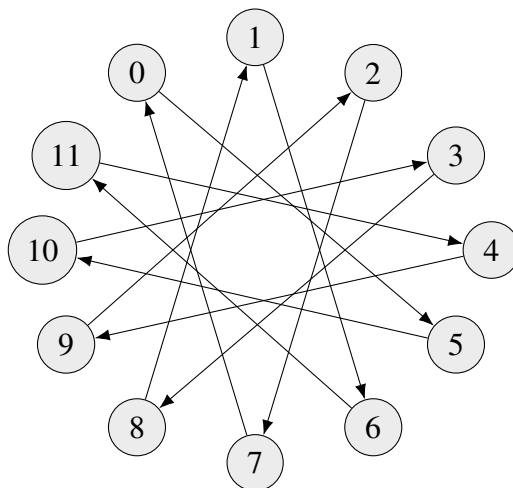
Joonis 8: Cayley graaf  $Cay(G, S)$ , kus  $G = (\mathbb{Z}_8, +)$ ,  $S = \{2, 3\}$ .

Kusjuures rohelse noolega on joonisel 8 tähistatud elemendi  $3 \in S$  ning sinise joonega elemendi  $2 \in S$  poolt tekitatud servad.

**Näide 13.** Olgu  $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$  jäägiklassiringi  $\mathbb{Z}_{12}$  aditiivne rühm. Olgu  $S = \{5\}$ . Siis

$$E = \{(m, m + 5), (m + 7, m) \mid m \in \mathbb{Z}_{12}\}.$$

Cayley graaf  $Cay(G, S)$  on suunatud.

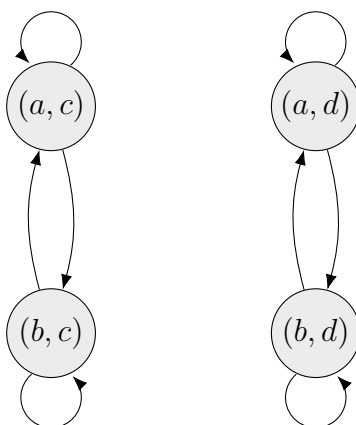


Joonis 9: Cayley graaf  $Cay(G, S)$ , kus  $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$ ,  $S = \{5\}$ .

**Näide 14.** Olgu  $A = \{a, b\}$ ,  $C = \{c, d\}$  ja vaatleme hulgal  $A \times C$  korrutamist, mis on defineeritud võrdusega

$$(x, y)(x', y') = (x, y').$$

Saab näidata, et nii tekib poolrühm. (Selliseid poolrühmi nimetatakse ristkülikpoolrühmadeks (vt. [JMH])). Võttes  $G = S = A \times C$ , saame Cayley graafi, mille tippudeks on elemendid  $(a, c)$ ,  $(a, d)$ ,  $(b, c)$  ja  $(b, d)$ . See graaf on mittersuunatud.



Joonis 10: Cayley graaf  $\text{Cay}(G, S)$ , kus  $G = S = A \times C$ .

## Kirjandus

- [JT] J. Tõnisson, *Cayley graafid*, Tartu Ülikool, bakalaureusetöö, 2014.
- [AVK] A.V. Kelarev, *On undirected Cayley graphs*, Australasian Journal of Combinatorics 25, 2002, 73-78.
- [MK1] M. Kilp, *Algebra I*, Eesti Matemaatika Selts, 2005.
- [MK2] M. Kilp, *Algebra II*, Tartu Ülikool, 1998.
- [JMH] J.M. Howie, *Fundamentals of Semigroup Theory*, Oxford University Press, 2003.
- [AB] A. Buldas, P. Laud, J. Villemson, *Graafid*, Tartu, 2003.

## **Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Keelia Hallap,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „**Poolrühmade Cayley graafid**“, mille juhendaja on Valdis Laan,
  - 1.1.reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
  - 1.2.üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **08.05.2018**