

217.13  
**Oskar Pärli**

H. Treffneri gümnaasiumi õpetaja

---

# Ruumi algõpetus

I anne



**NOOR-EESTI KIRJASTUS TARTUS**



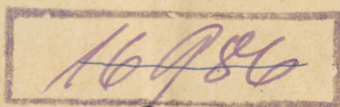
OSKAR PÄRLI

H. TREFFNERI GÜMNAASIUMI ÕPETAJA

# RUUMI ALGÕPETUS

I ANNE

KOLMAS TRÜKK



1930

NOOR-EESTI KIRJASTUS TARTUS



A-7215

## Saateks.

Ruumi algõpetuse I-se ande kolmas trükk erineb teisest trükist järgmistes osades:

- 1) Jälle on sisse toodud, nagu oli esimeses trükis, sirglõikude ja nurkade võrdlemine, liitmine, lahutamine, korrutamine ja mõõtmine.
- 2) Paralleeljoonte teooria on põhjendatud rööplükkel ja mitte sümmeerial.
- 3) Hr. dir. J. Sütt on paigutanud raamatusse 20 praktilist ülesannet lahendamiseks vabas looduses. Samuti on mõõtmisriistade pildid hr. dir. J. Süti poolt.

Ütlen kõige soojemat tänu hr. dir. J. Sütile selle värskema materjali sissetoomise eest.

Tartus, 4. mail 1930.

O. Pärl.



## Sissejuhatus.

1. Võtame ruudu, mille külg on 8 pikkuse ühikut ja jagame ta ruutühikuteks; siis saame  $8 \times 8$  ruutühikut. Lõikame selle ruudu 4-ks osaks, nagu näitab joonis 1. ja seame temast kokku ristküliku, nagu näitab joonis 2. Selle ristküliku pikkus on  $8 + 5 = 13$  pikkuse ühikut ja laius 5 pikkuse ühikut; sellega tema pind on  $5 \times 13 = 65$  ruutühikut.

Nii tuleb välja, et  $8 \times 8 = 65$ . Meie teame, et see ei ole õige. Milles seisab viga? Viga seisab selles, et sirge nurkjoone asemel peab olema õige kitsas parallelogramm.

Sellest näitest selgub, et kujude geometriliste omaduste leidmiseks on meie

silmanägemine puudulik abiriist, mida meie ei või mitte alati küllalt usaldada, vaid meie peame teravamalt, täpsamat abiriista tarvitama.

Meie kõige teravamaks ja täpsamaks abiriistaks on meie mõistus.

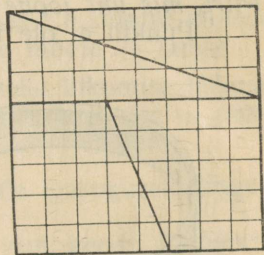
Oma mõistusega loogiliselt mõeldes, tehes ühe või

mitme juba tunnustatud tõe põhjal uusi järeldusi, ehitame **põhimõistete, definitsioonide ja aksiomide** peale terve ruumkujundite omaduste süsteemi.

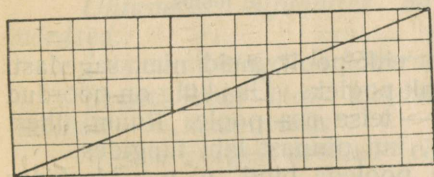
Oma mõtlemise tulemusi väljendame **teoreemidena** ehk lausetena.

2. Meie arusaamise järele on **ruum** ilmotsatu: ei ole tal algust, ei lõppu, „ei äärt kuski, ja keskkohat igal pool“. Nii-suguse arusaamise ruumist andis Itaalia mõttetark Giordano Bruno (surnud tuleriidal 17. veebr. 1600).

Ruum ulatub kolmes peasis: 1) üles- ja allapoole, 2) paremale ja vasakule poole, 3) ette- ja tahapoole. *Ruumil on 3 mõõdet.*



1. joonis.



2. joonis.

Ilmotsatut ruumi meie vaadelda ei jaksa, vaid meie vaatleme ainult ruumi osi.

*Ruumi igalt poolt piiratud osa nim. geomeetriliseks kehaks.*

Kehal on 3 mõõdet — pikkus, laius ja kõrgus; igaüht neist võib tarviduse järele nimetada ka sügavuseks või paksuseks.

*Piiri, mis üht ruumi osa teisest lahutab, nim. pinnaks.*

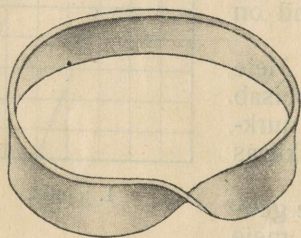
Kui pinnast kõneldakse, siis võetakse arvesse ainult 2 mõõdet.

*Piiri, mis üht pinna osa teisest lahutab, nim. jooneks.*

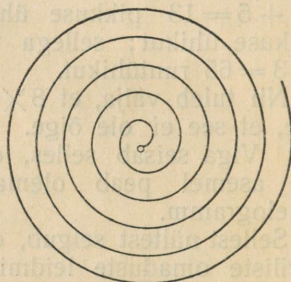
Kui joonest kõneldakse, siis võetakse arvesse ainult 1 mõõde — pikkus.

*Piiri, mis üht joone osa teisest lahutab, nim. punktiks.*

Punktil ei ole ühtegi mõõdet.



3. joonis.



4. joonis.

3. Pinnal on kaks külge ehk poolt, neid nim. sagedasti paremaks ja pahemaks küljeks ehk pooleks. Üks külg on pöördud ruumi ühe osa poole, teine külg — teise osa poole. Ruumi ühest osast ei pääse teise mitte teisiti, kui pinnast läbi tungides.

Siiski on olemas ka ühe poolega pind, n. n. „*Moebiuuse pael*“. Võtame pabeririba ja kleebime tema otsad nii kokku, et ühe otsa alumine tipp ühte langeb teise otsa ülemise tipuga ja esimese otsa ülemine tipp — teise otsa alumise tipuga, siis saame pinna, n. n. „*Moebiuuse paela*“, millel eelpool nimetatud omadusi ei ole.

Pinna peal ei pääse meie harilikult ka ühest pinnaosast teise mitte teisiti, kui joonest üle minnes, joont lõigates. On aga ka jooni olemas, mis pinda nii ei lahuta, näit. *spiraal*. Ka on olemas ruumisjooni. Nii siis, mitte iga pind ei ole piir kahe ruumi-osa vahel ja mitte iga joon ei ole piir kahe pinna-osa vahel. Pind ja joon on iseseisvad mõisted ja suurused.

**Keha, pind, joon ja punkt on geomeetrilised põhimõisted, põhikujundid.**

4. Geomeetrilisi põhimõisteid võib vaadelda ka ümberpööratud järjekorras:

- 1) *Punktil*, nagu öeldud, ei ole ühtegi mõõdet; tal on olemas asend ehk koht.
- 2) Kui punkt liigub, siis tekib selle liikumise jäljena *joon*. See liikumine annab joonele ühe mõõte — pikkuse.

Märkus. Kui 3 punkti A, B ja C asuvad mõne joone peal nii, et A poolt C poole liikudes me enne kohtame B-d ja siis alles C-d, siis kõneldakse:

„Punkt B on A ja C vahel, punkt C on AB pikenduse peal, punkt A on CB pikenduse peal.“

- 3) Kui joon lapiti edasi liigub, siis tekib selle liikumise jäljena *pind*. See liikumine annab pinnale teise mõõte — laiuse.
- 4) Kui pind lapiti edasi liigub, siis tekib selle liikumise jäljena *keha*. See liikumine annab kehale kolmanda mõõte — pakuse (kõrguse, sügavuse).

5. Punkte, jooni, pindu, kehi ja nende igasuguseid kogusid nim. ühise nimega *kujunditeks*.

Keha ja igalt poolt piiratud pinna osa nim. geom. „*kujuks*“.

Ühtuvateks nim. kaht kujundit ehk *kuju*, mis pealepaigutamisel või sissemahutamisel ühte langevad.

Ühtelangevaid punkte, jooni, nurki nim. *vastavateks*.

Ühtuvates kujundites on vastavad jooned ja nurgad võrdsed.

Jooned on *sirged* ja *kõverad*; pinnad on *tasased* ja *kõverad*.

Sirget joont nim. lühidalt — „*sirgeks*“, ja tasast pinda lühidalt — „*tasapinnaks*“.

Mõiste „sirgest joonest“ ehk „sirgest“ on põhimõiste.

Õpetus ruumist — ehk geomeetria — jagub planimeetriaks ja stereomeetriaks. Planimeetriaks nim. seda geomeetria osa, mis vaatleb tasapinnalisi kujundeid; stereomeetriaks nim. seda osa, mis vaatleb ruumkujundeid.

6. **Definitsioon** ehk mõiste piiritlemine sünnib sel teel, et nimetatakse sellele mõistele lähema üldmõiste nimi ja temale lisatakse juurde defiinitava mõiste liiki iseloomustav omadus.

**Aksioom** on tõde, mis teiste tõdede peal ei põhjene. Ta on nii lihtne, et ta ühelt poolt iseenesest arusaadav on ja et teda teiselt poolt teiste tõdede abil seletada ei saa, sest et temast lihtsamaid ei ole.

Tuleb ka ette, et aksioomidena tarvitatakse niisuguseid tõdesid, mis rahuldavad ainult ühte ülalnimetatud tingimust.

Aksioomidena tarvitame edaspidi järgmisi tõdesid, kuigi mõnda neist on võimalik tõestada:

- 1) Ühe suuruse asemele võidakse panna temaga võrdne suurus.
- 2) Kui kahest suurusest on kumbki eraldi võrdne kolmandaga, siis on nad võrdsed ka isekeskis.
- 3) Tervik on suurem kui ükski tema osa.
- 4) Tervik on kõigi oma osade summa.
- 5) Kui võrdsed suurused liita võrdsete suurustega, siis saame võrdsed suurused.
- 6) Kui võrdsetest suurustest lahutada võrdsed suurused, siis jäävad järele võrdsed suurused.
- 7) Kui võrdsed suurused liita võrratute suurustega, siis saame võrratud suurused; nimelt see summa on suurem, milles üks liidetav on suurem.
- 8) Kui võrratutest suurustest lahutada võrdsed suurused, siis on jäägid võrratud; nimelt, kus enam oli, seal jääb ka enam järele.
- 9) Kui võrdsetest suurustest lahutada võrratud suurused, siis on jäägid võrratud: seal jääb enam järele, kust vähem ära võeti.

**7. Teoreem** ehk lause on tõde, mis põhjeneb teistel tõdedel.

Rida arutlusi, mille abil teoreemi maksvus ära näidatakse, on teoreemi **tõestus**.

**Järeldus** on teoreem, mille maksvus järgneb otsekohe eelminevast tõest.

Sisuliselt koosneb teoreem *eeldusest* ja *väitest*. Väide sisaldab tõestatavat tõde, tõde, mille maksvust kindlaks teha „väidatakse“; eeldus sisaldab neid tingimusi, mis täidetud peavad olema, et väide õige oleks.

Näide. *Eeldus*: „Kui arvu ristsumma on 3-ga jagatav“,

*Väide*: „siis on ka arv ise 3-ga jagatav.“

Kui me teatavas teoreemis teeme väite *eelduseks* ja *eelduse* väiteks, siis saame n. n. *ümberpööratud teoreemi*; esialgset teoreemi nimetame niisugusel korral *otseteoreemiks*.

Et teoreemi eeldusel kui ka väitel võib olla mitu osa, siis tuleb ümberpööratud teoreemi saamiseks ära vahetada ühepalju eelduse ja väite osi.

Kui me teatavas teoreemis tema eeldust ja väidet eitame, siis saame selle teoreemi *vastasteoreemi*. Näide:

*I. Otseteoreem*: „Kui arvu ristsumma on 3-ga jagatav, siis on ka arv ise 3-ga jagatav.“

II. *Ümberpööratud teoreem*: „Kui arv on 3-ga jagatav, siis on tema ristsumma 3-ga jagatav.“

III. *Otseteoreemi vastasteoreem*: „Kui arvu ristsumma ei ole 3-ga jagatav, siis ei ole ka arv ise 3-ga jagatav.“

IV. *Ümberpööratud teoreemi vastasteoreem*: „Kui arv ei ole 3-ga jagatav, siis ei ole ka tema ristsumma 3-ga jagatav.“

Neist 4-st teoreemist on IV-as I-se järelendus (kuidas nii?) ja III-as II-se järelendus (kuidas nii?); seepärast on nendest tarvis tõestada ainult 2, kas I ja II, või I ja III.

# Planimeetria.

## I-ne peatükk: Sirge ja nurgad.

### a) Sirge.

8. **Aksioom:** Läbi kahe punkti on mõeldav üksainus sirgejoon. Sellest järgneb:

1) Kui kahel sirgel on kaks ühist punkti, siis langevad nad ühte tervel omal ulatusel.

2) Kaks punkti määravad sirge asendi ruumis.

Ülesanne. 1) Antud on 3, 4, 5, ..... n punkti, millest ükski punktide kolmik ei asu ühel sirgel. Nendest sirged läbi tõmmata! Mitu sirget saab?

9. Sirget joont võime mõelda mõlemale poole otsatult pikendatuks.

Sel korral nimetatakse sirget joont *otsatuks sirgeks* ehk lihtsalt *sirgeks*.

On sirge ühelt poolt piiratud, siis nim. teda *kiireks*.

Mõlemalt poolt piiratud sirget nim. *sirglõiguks*.

Sirget tähistame kahe suure ladinakeelse tähega, millest kumbki tähistab mingisugust punkti sellel sirgel; kiirel on üks ja sirglõigul mõlemad tähed otsapunktidel.

10. *Kahe punkti kaugust teineteisest* arvatakse neist punktidest läbiminevat sirget mööda ja selleks kauguseks loetakse nende punktide vahel olevat sirglõiku. Sel põhjal väljendatakse eelmist *aksioomi* sagedasti ka järgmisel kujul:

**Sirglõik on kõige lühem tee kahe punkti vahel.**

11. **Sirglõikude võrdlemine.** Et võrrelda sirglõiku CD-d sirglõiguga AB, asetame sirglõigu CD sirglõigu AB peale nii, et punkt C langeb punkti A peale ja et sirge CD läheb sirge AB suunas.

1) Kui siis punkt D langeb punktide A ja B vahele, siis kõneleme, et sirglõik CD on *lühem* kui sirglõik AB, ja kirjutame:  $CD < AB$ .

2) Kui siis punkt D langeb just punkti B peale, siis kõneleme, et sirglõik CD on *võrdne* sirglõiguga AB, ja kirjutame:  $CD = AB$ .

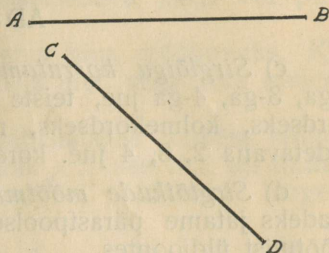
3) Kui siis punkt D langeb AB pikenduse peale, siis kõneleme, et sirglõik CD on *pikem* kui sirglõik AB, ja kirjutame:  $CD > AB$ .

Ümberpöörduvalt:

1) Kui me ette teame, et sirglõik CD on lühem kui sirglõik AB, ja kui me siis asetame sirglõigu CD sirglõigu AB peale nii, et punkt C ühtub punktiga A ja et CD läheb AB suunas, siis võime ette ütelda, et punkt D langeb punktide A ja B vahele.

2) Kui me ette teame, et sirglõik CD on võrdne sirglõiguga AB, ja kui me siis asetame sirglõigu CD sirglõigu AB peale eelpool kirjeldatud viisil, siis võime ette ütelda, et punkt D langeb just punkti B peale.

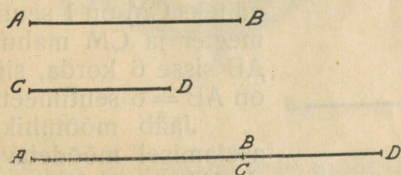
3) Kui me ette teame, et sirglõik CD on pikem kui sirglõik AB, ja kui me siis asetame sirglõigu CD sirglõigu AB peale eelpool kirjeldatud viisil, siis võime ette ütelda, et punkt D langeb sirglõigu AB pikenduse peale.



5. joonis.

## 12. a) Sirglõikude liitmine.

Et liita sirglõiguga AB sirglõik CD, pikendame sirglõiku AB-d näiteks AB suunas. Võtame sirkliga sirglõigu CD, asetame tema algpunkti C esimese sirglõigu lõpp-punkti B ja juhime sirglõigu CD sirglõigu AB pikendust mööda. Koha, kuhu langeb sirglõigu CD lõpp-punkt D, märgime

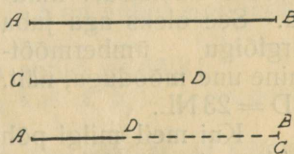


6. joonis.

sirkli kirjutaja otsa abil kriipsuga. Nii tekib sirglõik AD, mis on sirglõikude AB ja CD summa:

$$AD = AB + CD.$$

b) Sirglõikude lahutamine. Et lahutada sirglõigust AB sirglõik CD, võtame sirkliga sirglõigu CD, asetame tema algpunkti C esimese sirglõigu lõpp-punkti B ja juhime sirglõigu CD sirglõiku AB-d mööda BA suunas. Koha, kuhu langeb sirglõigu CD lõpp-punkt D, märgime sirkli kirjutaja otsa abil kriipsuga. Nii tekib sirglõik AD,



7. joonis.

mis on sirglõikude AB ja CD vahe, ehk sirglõigu AB jääk pärast CD lahutamist AB-st:

$$AD = AB - CD.$$

c) *Sirglõigu korrutamise arvuga.* Et sirglõiku korrutada 2-ga, 3-ga, 4-ga jne, teiste sõnadega — et sirglõiku teha kahekordseks, kolmekordseks, neljakordseks jne., tuleb teda võtta liidetavana 2, 3, 4 jne. korda.

d) *Sirglõikude mõõtmine.* Sirglõigu jaotamise võrdseteks osadeks jätame pärastpoolseks; siinkohal vaatleme sirglõikude mõõtmist üldjoontes.

Sirglõigu mõõtmiseks valitakse kõige esiti mõõtühik, millega mõõta kavatsetakse. Mõõtühikutena tarvitatakse lühemate sirglõikude, vähemate kauguste mõõtmisel sentimeetrit, millimeetrit jne., pikemate sirglõikude, suuremate kauguste mõõtmisel (looduses) meetrit ja kilomeetrit. Mõõtmine seisab selles, et meie teada saame, mitu mõõtühikut või mitu ja missugust mõõtühiku jagu on mõõdetavas sirglõigus. Selleks asetame mõõtühiku mõõdetava sirglõigu peale nii mitu korda, kui see võimalik on.

Asetub mõõtühik mõõdetava sirglõigu peale täisarvuliselt, siis ilmub mõõtmise tulemusena täisarv. Kui näiteks CM on 1 sentimeeter ja CM mahub AB sisse 6 korda, siis on  $AB = 6$  sentimeetrit.

Jääb mõõtühiku asetamisel mõõdetava sirglõigu peale üks

C ——— M

A ——— M ——— B

8. joonis.

osa järele, mis mõõtühikust vähem on, siis mõõdame kas kogu sirglõiku või ainult jääki ühiku jagudega ja mõõtmise tulemusena ilmub murdarv, näit.  $ED = 23 \cdot \frac{CM}{4} = 23 \frac{3}{4} CM = 23 \frac{3}{4} \text{ cm} = 5 \frac{3}{4} \text{ cm}$ .

Kui joone mitmendikule iseseisev nimi antakse, siis võib mõõtmise tulemusena ka täisarv ilmuda. See oleks aga juba sirglõigu ümbermõõtmine uue mõõduga, näit.  $ED = 23 NL$ .

C ——— M N ——— L

E ——— D

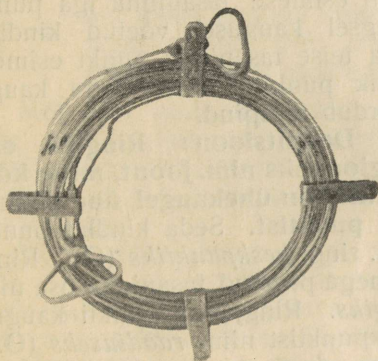
9. joonis.

Kui meil milgi põhjusel korda ei lähe ühiku niisugust jagu leida, mis mõõdetava sirglõigu sisse täpsalt mahuks, siis peame leppima ligikaudse mõõtmisega, nagu me seda teeme igapäe-

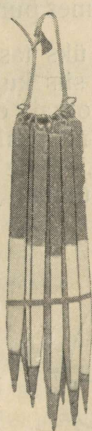
vases elus. Ligikaudse mõõtmise otstarbel mahutame ühiku soovitava jao mõõdetava sirglõigu sisse nii mitu korda, kui see on võimalik, ja jätame seejuures ilmsikstuleva jäägi või puuduse tähele panemata.

Mõõtmise tulemusena ilmunud arvu nim. mõõtarvuks. Kui mõõtarvu kaasas on mõõdu nimetus, siis nim. seda arvu nimega arvuks.

Mõõdetuks loetavat sirglõiku tähistatakse väikese ladina-keelse tähega, näit. sirglõik  $a$ , sirglõik  $x$ ; see täht on ühtlasi sirglõigu mõõtarvuks, kui ka nimetuseks. Mõõtmist kergen-



10. joonis.



11. joonis.

datakse ja toimetatakse mõõtriistade abil. Mõõtriistana tarvita-  
takse maamõõtmise juures metallist mõõtrihma ja tähispulki —  
10. joonis, sirkliit või mõõtlatti. Mõõtrihma harilik pikkus on 20 m,  
sirkli harilik samm on 2 m, mõõtlatti harilik pikkus — 4 m.

Sirge joone märkimiseks looduses tarvitatakse sihitikke —  
11. joonis.

#### Ülesandeid.

- (2) Antud sirglõik asetada valitud sirge peale valitud punktist alates!
- (3) Joonestada sirglõik  $x = a + b$ , kus  $a$  ja  $b$  on antud sirglõigud!
- (4) " "  $y = a - b$ , " " " " " "
- (5) " "  $z = 5c$ , kus  $c$  on antud sirglõik!
- (6) " "  $x = 3a + b - 2c$ , kus  $a$ ,  $b$  ja  $c$  on antud sirglõigud.
- (7) Sirglõigu AB keskkohkt on M. Tuleb ära näidata, et CM on kauguste CA ja CB poolvahe, kui C on võetud AB peal, ja

et  $CM$  on kauguste  $CA$  ja  $CB$  poolsumma, kui  $C$  on võetud  $AB$  pikenduse peal.

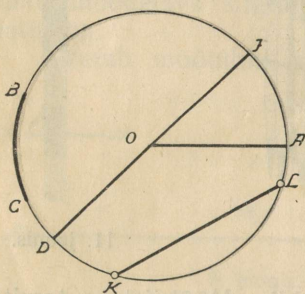
**13. Kahe sirge vastastikune asend.** 1) Kui kahel sirgel on 2 ühist punkti, siis on neil kõik punktid ühised ja nad langevad ühte tervel omal ulatusel [8,1].

2) Kui kahel sirgel on 1 ühine punkt, siis *lõikuvad* nad; ühine punkt on nende *lõikepunkt* ehk ühe sirge *alus* teise peal.

3) Kui kahel sirgel ei ole ühtegi ühist punkti, kui kaugetele me neid ka ei pikendaks, ja on mõlemad ühel tasapinnal, siis on nad *paralleelsed* ehk *rööbikud*.

② Ülesanne 8) Mitmes punktis võivad lõikuda 8 sirget?  $n$  sirget?

**14. Ring.** Kui üks tasapind pöörduv teise tasapinna peal teatud punkti ümber, siis kujutab esimese tasapinna iga punkt, hoides ennast ikka omal esialgsel kaugusel võetud kindlast punktist, teise tasapinna peal (ja teise tasapinna punkt esimese tasapinna peal) joone, mille kõik punktid on ühevõrra kaugel sellest punktist, mille ümber pöörduv tasapind.



12. joonis.

**Definitsioon:** Ringiks ehk ringjooneks nim. joont, mille kõik punktid on ühekaugel ühest kindlast punktist. Seda kindlat punkti nim. ringi *keskpunktiks* ( $O$ ). Ringjoonega piiratud tasapinna osa nim. *ringiks*. Ringjoone punkti kaugust keskpunktist nim. *raadiuseks* ( $OA$ ). Sama ringi raadiused on ühepikkused. Ringjoone osa nim. *kaareks* ( $BC$ ). Seda sirglõiku, mis ühendab kaht ringjoone punkti, nim. *kõõlusk* ( $KL$ ). Keskpunktist läbiminevat kõõlu nim. *diameetriks* ehk *läbi-*

*mõõduks* ( $DJ$ ). Läbimõõt seisab koos kahest raadiusest. Kõik sama ringi läbimõõdud on ühepikkused. Selge on, et:

Ringi sees oleva punkti kaugus keskpunktist on vähem kui raadius;  
 " peal " " " " " " " võrdne raadiusega;  
 ringist väljaspool oleva p. " " " " " " " suurem kui raadius — ja ümberpöörduv.

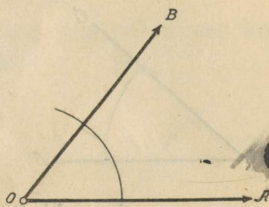
## b) Nurgad.

**15. Nurga mõiste.** Kui kaks sirget lõikuvad ja meie ühe sirge sihi valime algsihiks, siis määrab teise sirge sihi kindlaks nende sirgete vahel olev *nurk*.

Kui meie kiirt pöörame tema otsapunkti ümber ühes suunas kuni ta oma algasendisse tagasi tuleb, siis ütleme, et kiir tegi *täie pöörde*. Meie arusaamise järele on kõik täispöörded ühesuurused.

Seepärast on võimalik ühe kiire asendit või suuna teise kiire suhtes määrata näit. täispöörde jagude abil.

**Definitsioon.** Kui kaks kiirt lähtuvad ühest punktist, siis nimetatakse nendest kiirtest moodustatud nurgaks seda pöörde suurust, mille abil võib üht kiirt viia teise kiire asendisse.



13. joonis.

Märkus: On olemas vaateid, mille järele „nurk on kahe lõikuva sirge ja nende lõikepunkti moodustatud kujund“ ehk „nurk on kahe lõikuva sirge vahel olev tasapinna määramatu osa“.

Mõlemad nurka-moodustavad kiired on nurga *haarad* ja nende ühine otsapunkt on nurga *tipp*. Seda tasapinna osa, millest kiir omal pöördumisel üle libiseb, nim. nurga *sisemiseks vallaks*, teist osa — *välimiseks*. Sisemine vald märgitakse hari-likult kaarega.

Nurka tähistatakse mitut viisi: 1) kolme suure ladina-keelse tähega, millest tiputäht peab kirjutatama ja loetama teiste tähtede vahel; 2) tipu juures asuva suure ladinakeelse tähega; 3) nurga sees kirjutatava väikese kreekakeelse tähega jne.

Nurga tähiseks on märk „ $\wedge$ “, mis kirjutatakse nurga nime-tuse kohta katusena, näiteks  $\widehat{ABC}$ ;  $\hat{D}$ ;  $\hat{z}$ ;  $\hat{a}$ . Kreekakeelse tähis-tuse juures jäetakse see tähis ära.

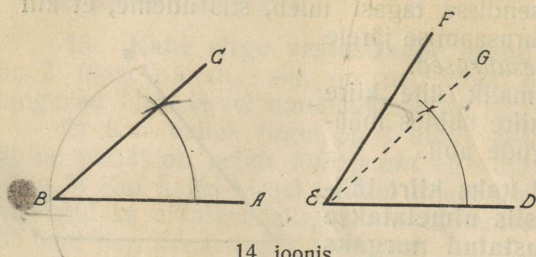
Et kreekakeelseid tähti matemaatikas kaunis sagedasti tarvita-takse, siis toome siinkohal kreekakeelse tähestiku:

A $\alpha$ alfa	H $\eta$ eeta	N $\nu$ nü	T $\tau$ tau
B $\beta$ beeta	$\Theta$ $\theta$ $\vartheta$ theeta	$\Xi$ $\xi$ ksi	$\Upsilon$ $\upsilon$ üpsilon
$\Gamma$ $\gamma$ gamma	I $\iota$ joota	O $\omicron$ omikron	$\Phi$ $\varphi$ fi
$\Delta$ $\delta$ delta	K $\kappa$ kappa	$\Pi$ $\pi$ pi	X $\chi$ chi
E $\epsilon$ epsilon	$\Lambda$ $\lambda$ lambda	P $\rho$ rho	$\Psi$ $\psi$ psi
Z $\zeta$ dzeeta	M $\mu$ mü	$\Sigma$ $\sigma$ $\varsigma$ sigma	$\Omega$ $\omega$ oomega

**16. Nurkade võrdlemine.** Et võrrelda nurka ABC-d nur-gaga DEF, asetame nurga ABC nurga DEF peale nii,

- 1) et tipp B ühtub tipuga E,
- 2) et haar BA läheb haara ED-d mööda ja

3) et nurga ABC sisemine vald läheb nurga DEF sisemist valda mööda.

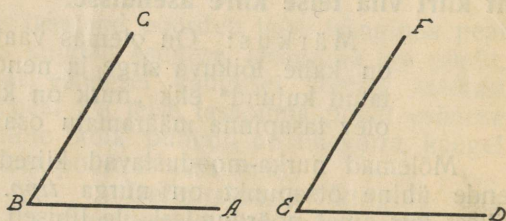


14. joonis.

Kui siis 1) haar BC läheb nurga DEF sisemist valda mööda, näit. EG suunas, siis ütleme, et nurk ABC on *vähem* kui nurk DEF, ja kirjutame:

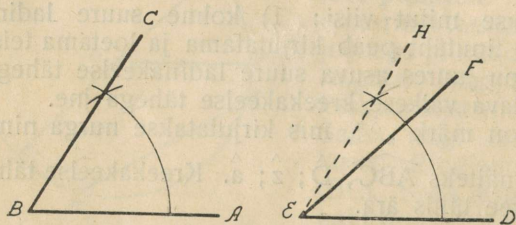
$$\widehat{ABC} < \widehat{DEF}.$$

Või kui 2) haar BC läheb haara EF mööda, siis ütleme, et nurk ABC on sama suur kui nurk DEF, ehk nurk ABC on *võrdne* nurgaga DEF, ja kirjutame:



15. joonis.

$$\widehat{ABC} = \widehat{DEF}.$$



16. joonis.

Või kui siis 3) haar BC läheb nurga DEF välist valda mööda, näit. EH suunas, siis ütleme, et nurk ABC on *suurem* kui nurk DEF, ja kirjutame:

$$\widehat{ABC} > \widehat{DEF}.$$

Ümberpöörduvalt:

1) Kui meie ette teame, et  $\widehat{ABC} < \widehat{DEF}$  ja kui meie siis asetame nurga ABC nurga DEF peale nii, et tipp B ühtub tipuga E, et haar BA läheb haara CD-d mööda ja et nurga ABC sisemine vald läheb nurga DEF sisemist valda mööda, siis võime ette ütelda, et haar BC läheb nurga DEF sisemist valda mööda.

2) Kui meie ette teame, et  $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ , ja kui meie siis asetame nurga ABC nurga DEF peale eelpool kirjeldatud viisil, siis võime ette ütelda, et haar BC läheb haara EF mööda.

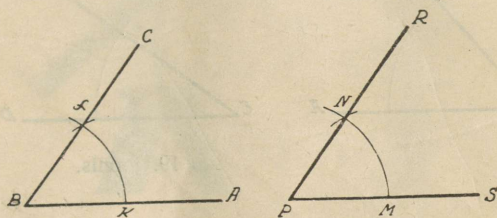
3) Kui meie ette teame, et  $\widehat{ABC} > \widehat{DEF}$  ja kui meie siis asetame nurga ABC nurga DEF peale eelpool kirjeldatud viisil,

siis võime ette ütelda, et haar BC läheb nurga DEF välimist valda mööda.

Märkus: Nurkade võrdlemine tuleb teostada ise-  
värvi paberist lõigatud nurkade abil.

6 Ülesanne. 9) Antud sirgel valitud punkti juures konstruuda (ehitada) antud nurga suurune nurk.

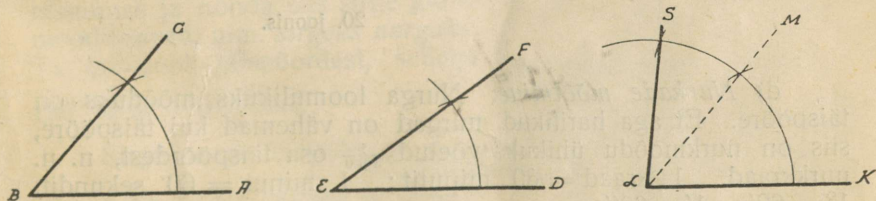
Konstruktsioon: Tippu B-d keskpunktiks võttes tõmbame meelevaldse raadiusega kaare haarast BA haarani BC või veel vähe kaugemale. See kaar on jälg, mille jätab kiire BA pöörmisel



17. joonis.

otsapunkti B ümber selle kiire peal asuv meelevaldne punkt K. Antud sirgel valitud punkti P keskpunktiks võttes tõmbame sama raadiusega kaare, alates kiire PS peal asuvast punktist M. See kaar on ka jälg, mille jätab punkt M kiire PS pöördumisel punkti P ümber. Ta peab ulatuma vähemalt sama kaugemale, kui kiirte BA ja BC vaheline kaar. Nüüd võtame sirkli avausega nurga ABC suuruse ehk kiire BA pöörde suuruse, asetades sirkli otsad kaare lõikepunktidesse haaradega, ja kanname selle pöörde suuruse üle punktist M lähtuvalle kaarele. Läbi tekkinud kaarte lõikepunkti N ja punkti P tõmbame kiire PR. Nurk SPR on otsitav.

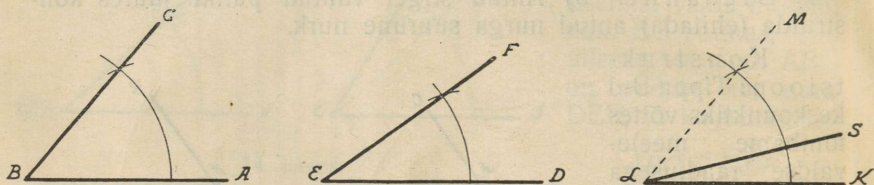
17. a) Nurkade liitmine. Et leida kahe antud nurga sum-



18. joonis.

ma, konstruime meelevaldsel sirgel valitud punkti L juures  $\widehat{KLM} = \widehat{ABC}$ ; siis konstruime kiire LM peal punkti L juures  $\widehat{MLS} = \widehat{DEF}$  nii, et selle nurga MLS sisemine vald läheb nurga KLM välimist valda mööda. Tekkinud  $\widehat{KLS} = \widehat{ABC} + \widehat{DEF}$ .

b) *Nurkade lahutamine.* Et leida kahe antud nurga vahe, konstruime meelevaldsel sirgel valitud punkti L juures  $\widehat{KLM} = \widehat{ABC}$ ; siis konstruime kiire LM peal punkti S juures  $\widehat{MLS} = \widehat{DEF}$  nii,



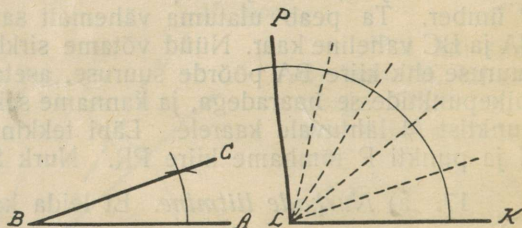
19. joonis.

et selle nurga MLS sisemine veld läheb nurga KLM sisemist valda mööda. Tekkinud  $\widehat{KLS} = \widehat{ABC} - \widehat{DEF}$ .

• Märkus: Konstruies nurka MLS pöörasime kiirt LM tagasi kiire LK poole nurga DEF võrra.

c) *Nurga korrutamise arvuga.* Et korrutada nurka ABC-d 5-ga, võtame tema liidetavana 5 korda; saame

$$\widehat{KLP} = 5 \cdot \widehat{ABC}.$$



20. joonis.

d) *Nurkade mõõtmine.* Nurga loomulikuks mõõduks on täispööre. Et aga harilikud nurgad on vähemad kui täispööre, siis on nurkmõõdu ühikuks võetud  $\frac{1}{360}$  osa täispöördest, n. n. nurkkraad. 1 kraad = 60 minutit; 1 minut = 60 sekundit.  $1^\circ = 60'$ ;  $1' = 60''$ .

Peale selle tarvitatakse nurkmõõduna täispöörde poolt ehk sirget nurka ja täispöörde veerandit ehk n. n. täisnurka.

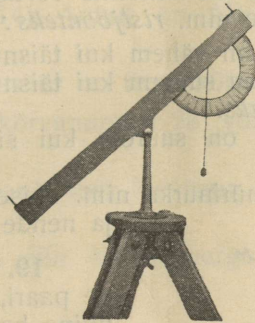
Joonistes mõõdetakse nurki malliga, maamõõtmisel aga tarvitatakse erilisi riistu, nagu astrolaab, goniomeeter, teodoliit jne.

Suurimat tarvitamist leiab praegusel ajal rõhtnurkade mõõtmisel goniomeeter (joonis 21), mis käsitamises lihtne ning võimaldab küllaldase täpsuse. Püstnurkade mõõtmisel tarvitatakse

harilikult eklimeetrit (joonis 22), täpsamateks mõõtmisteks aga teodoliiti või püstastrolaabi. Ekkerit (joonis 23) tarvitatakse rist-sihtide ajamisel.



Joonis 21.



Joonis 22.



Joonis 23.

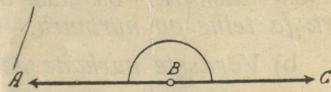
⑦ Ülesandeid: 10) Kahe nurga summa on  $137^\circ$ ; üks nurk on teisest  $25^\circ$  võrra suurem. Kui suur on kumbki nurk?

④ 11) Kahe nurga summa on  $148^\circ$ ; üks nurk on kolm korda nii suur kui teine. Kui suur on kumbki?

⑤ 12) Kolme nurga summa on  $180^\circ$ . Kaks nendest on ühesuurused ja kumbki nendest on kaks korda nii suur kui kolmas nurk. Kui suur on iga nurk?

④ 13) Kolme nurga summa on  $180^\circ$ . Kahe esimese nurga summa on kolm korda nii suur kui kolmas nurk ja nende vahe on just nii suur kui kolmas nurk. Kui suur on iga nurk?

~~18. Nurkade liigid.~~ 1) Nurka, mille haarad lähevad vastassuunas ja nõnda siis sirge joone moodustavad, nim. *sirgeks nurgaks*. Ta on pool täispöördest, sellega  $180^\circ$  suur, näit.  $\widehat{ABC}$ .

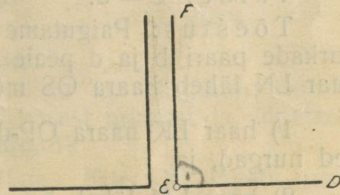


24. joonis.

Sirge nurga tähiseks on  $\pi$ .

Kõik sirged nurgad on isekes-  
kis võrdsed.

2) Täispöörde neljandikku ehk sirge nurga poolt nim. *õigeks nurgaks* ehk *täisnurgaks*, näit.  $\widehat{DEF}$ . Ta on  $90^\circ$  suur. Täisnurga tähiseks



25. joonis.

on  $\frac{\pi}{2}$ .

Joonisel märgitakse täisnurk kaarega, mille sisse on pandud punkt.

Kõik täisnurgad on isekeskis võrdsed.

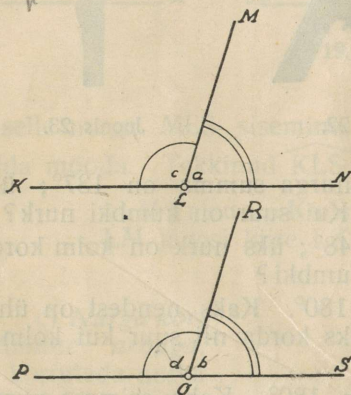
Täisnurga haare nim. ristjoonteks:  $EF \perp ED$ .

3) Nurka, mis on vähem kui täisnurk, nim. teravnurgaks.

4) Nurka, mis on suurem kui täisnurk ja vähem kui sirge nurk, nim. nürinurgaks.

5) Nurka, mis on suurem kui sirge nurk, nim. ülinürinurgaks.

Teravnurka ja nürinurka nim. ühise nimega kaldnurkadeks ja nende haare — kaldjoonteks.



26. joonis.

**19. Kõrvunurgad.** Nurka-de paari, millel on ühine tipp ja ühine haar, ja mille teised haarad moodustavad sirge joone, nim. kõrvunurkadeks, näit.  $\widehat{KLM}$  ja  $\widehat{NLM}$ . Joonisest on näha, et kõrvunurkade summa on sirge nurk:

$$\widehat{KLM} + \widehat{MLN} = \widehat{KLN}.$$

Ümberpöörduvalt: Kui kahel nurgal on ühine tipp ja ühine haar ja nende summa on sirge nurk, siis moodustavad teised haarad sirge joone.

Järeldused: a) On kõrvunurgad võrdsed, siis on kumbki nendest täisnurk; on nad võrratud, siis on üks nendest teravnurk ja teine on nürinurk.

b) Võrdsete nurkade kõrvunurgad on isekeskis võrdsed.

Eeldus:  $\hat{a}$  ja  $\hat{c}$  on kõrvunurgad;  $\hat{b}$  ja  $\hat{d}$  on kõrvunurgad,  $\hat{a} = \hat{b}$ .

Väide:  $\hat{c} = \hat{d}$ .

Tõestus: Paigutame kõrvunurkade paari a ja c kõrvunurkade paari b ja d peale nii, et tipp L ühtub tipuga O ja et haar LN läheb haara OS mööda; siis läheb

1) haar LK haara OP-d mööda, sest  $\widehat{NLK} = \widehat{SOP}$  kui sirged nurgad, ja

2) haar LM läheb haara OR-d mööda, sest  $\hat{a} = \hat{b}$  eelduse järele. Niiviisi ühtub nurga c tipp ja haarad nurga d tipuga ja

haaradega. Järelikult katavad need nurgad teineteist täiesti ja on sellega isekeskis võrdsed.

⑥ Ülesandeid. 14) Antud on  $\widehat{ABC}$ ; joonestada tema kõrvunurk.

③ 15)  $\hat{a} = 47^\circ$ ; kui suur on tema kõrvunurk?

④ 16)  $\hat{b}$  on omast kõrvunurgast  $28^\circ$  võrra suurem. Kui suur on kumbki?

④ 17)  $\hat{c}$  on 4 korda nii suur kui tema kõrvunurk. Kui suur on kumbki?

④ 18)  $\hat{a}$  on niisama suur kui  $\hat{b}$ ; nurga  $b$  kõrvunurk on  $75^\circ$ ; kui suur on  $\hat{a}$ ?

④ 19)  $\hat{b} = \hat{c}$ ; nurga  $c$  kõrvunurk on  $127^\circ$ ; kui suur on nurga  $b$  kõrvunurk?

④ 20) Sirge  $OP$  jagab  $\widehat{AOB} = 82^\circ$  pooleks; sirge  $OR$  jagab  $\widehat{AOB}$  kõrvunurga pooleks; kui suur on  $\widehat{ROP}$ ?

④ 21) Sirge  $AV$  poolitab  $\widehat{BAC} = a^\circ$ ; sirge  $AT$  poolitab tema kõrvunurga; kui suur on  $\widehat{VAT}$ ?

④ 22) Kui suure nurga moodustavad kõrvunurkade poolitajad isekeskis?

① 23) Tõestada teoreem: Kõrvunurkade poolitajad on teineteisega risti.

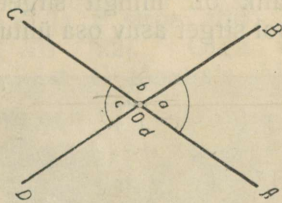
**20. Tippnurgad.** Kahest sirgest moodustatud nurkade paari, mille ühiseks tipuks on nende sirgete lõikepunkt ja millel ühist haara ei ole, nim. *tippnurkadeks*,

näit.  $\hat{a}$  ja  $\hat{c}$ . *Tippnurgad on ühesuurused*,  $\hat{a} = \hat{c}$ , sest seesama pööre, mis  $OB$  viib kiire  $OA$  asendisse, viib ka  $OD$  kiire  $OC$  asendisse.

② Ülesandeid. 24) Kui suure nurga moodustavad tippnurkade poolitajad?

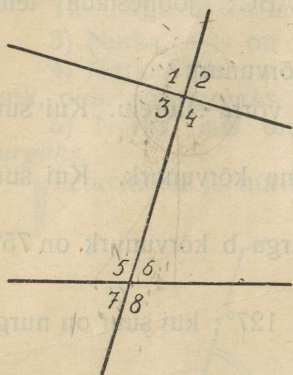
④ 25) Punktist  $O$  lähtuvad 8 kiirt moodustavad niisugused nurgad, millest iga järgmine on  $10^\circ$  võrra suurem kui eelmine — alates teisest nurgast ja lõpetades viimasega. Kui suured on need nurgad?

② 26)  $OM$  on nurga  $EOB$  poolitaja. Kiir  $OP$  läheb nurga  $EOB$  tippnurga välimist valda mööda. Näidata, et  $\widehat{MOP}$  võrdub nurkade  $EOP$  ja  $BOP$  poolsummaga või poolvahega. (V. ül. 8).



27. joonis.

21. Kui kaks sirget läbi lõigata kolmandaga, siis tekivad 8 nurka. Me rühmitame neid 12-ks paariks ja nimetame:



28. joonis.

1) vastavateks nurkadeks:

$$\begin{array}{ll} \hat{1} \text{ ja } \hat{5}, & \hat{3} \text{ ja } \hat{7}, \\ \hat{2} \text{ ja } \hat{6}, & \hat{4} \text{ ja } \hat{8}. \end{array}$$

2) põiknurkadeks:

$$\begin{array}{ll} \hat{1} \text{ ja } \hat{8}, & \hat{3} \text{ ja } \hat{6}, \\ \hat{2} \text{ ja } \hat{7}, & \hat{4} \text{ ja } \hat{5}. \end{array}$$

3) rindnurkadeks:

$$\begin{array}{ll} \hat{1} \text{ ja } \hat{7}, & \hat{3} \text{ ja } \hat{5}, \\ \hat{2} \text{ ja } \hat{8}, & \hat{4} \text{ ja } \hat{6}. \end{array}$$

③ Ülesandeid: 27)  $\hat{1} = 68^\circ$  ja  $\hat{6} = \hat{2}$ . Kui suur on iga teine nurk?

③ 28)  $\hat{2} = 109^\circ$  ja  $\hat{6} = \hat{3}$ . Kui suured on teised nurgad?

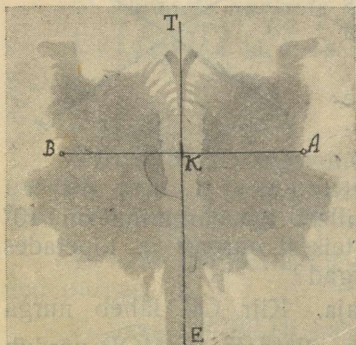
③ 29)  $\hat{2} + \hat{8} = 180^\circ$  ja  $\hat{3} = 122^\circ$ . Kui suured on teised nurgad?

③ 30)  $\hat{3} + \hat{5} = 180^\circ$  ja  $\hat{4} = 78^\circ$ . Kui suured on teised nurgad?

Sia

### c) Kujundite sümmeetria.

21. Teljeline sümmeetria. Kui tasapinnalist kuju võimalik on mingit sirget mööda kahekorra murda nii, et ühel pool sirget asuv osa ühtub teisel pool sirget asuva osaga, siis öeldakse, et kujund on selle sirge suhtes sümmeetriline ehk kujundil on teljeline sümmeetria.



29. joonis.

Seda sirget nim. sümmeetria teljeks. Kahekorra murdmisel ühtuvaid punkte, jooni, nurki nim. sümmeetrilisteks. Igal punktil on antud telje kohta oma sümmeetriline punkt, ja nimelt üksainus, sest tasapinna kahekorramurdmisel telge mööda langeb see punkt ikka ühte mõne teisel pool telge oleva punktiga ja ei saa ühtlasi ka teiste punktidega ühtuda.

**22. Teoreem:** Sümmeetria telg poolitab sümmeetrilisi punkte ühendava sirglõigu ja on temaga risti (29. joonis).

Eeldus: A ja B on sümmeetrilised TE suhtes.

Väide:  $KA = KB$ ;  $TE \perp AB$ .

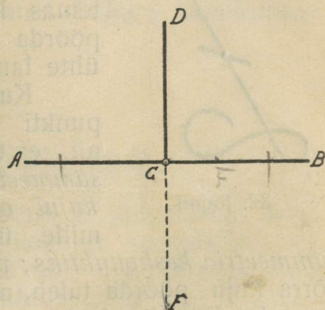
Tõestus: Kahekorra murdmisel TE-d mööda ühtub punkt A punkti B-ga, sest nad on sümmeetrilised TE suhtes; järelkult ühtub ka sirge KA sirgega KB ja  $\widehat{TKA}$  ühtub nurgaga  $\widehat{TKB}$ . S. t. et  $KA = KB$  ja sirge nurk  $\widehat{AKB}$  on jagatud kaheks täisnurgaks TKA ja TKB. Seepärast on ka  $TE \perp AB$ . M. o. t. t.\*)

**23. Teoreem:** Antud punktist võib antud sirgele üheainsa ristjoone tõmmata.

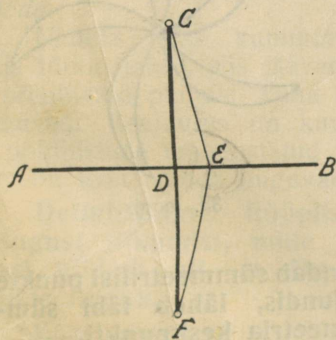
1- ne juht: punkt C on antud sirge AB peal.

Tõestus: Kui läbi C minev sirge AB jagab C ümber oleva täispöörde pooleks, siis on olemas üksainus sirge DCF, mis selle täispöörde jaotab neljaks täisnurgaks, s. t. läbi C on AB-le olemas üksainus ristjoon.

2- ne juht: punkt C on antud väljaspool sirget AB.



30. joonis.



31. joonis.

Tõestus: Leiame C-le AB suhtes sümmeetrilise punkti F ja ühendame C ja F sirge abil; siis on  $CF \perp AB$  [22]. Olgu võimalik punktist C tõmmata AB-le veel üks ristjoon CE. Siis on  $\widehat{CEB}$  täisnurk. Ühendame E F-ga.  $\widehat{FEB}$  on sümmeetriline nurgaga  $\widehat{CEB}$  ja sellepärast ka täisnurk. Järel. on nurk CEF sirgenurk ja joon CEF on sirge joon [19]. Läbi C ja F on juba üks sirge CDF olemas ja

teist sirget olla ei või [8]. Seepärast ei saa punktist C teist ristjoont AB peale olla. M. o. t. t.

Järeldus: Punkti kaugust sirgest arvatakse ristjoont mööda.

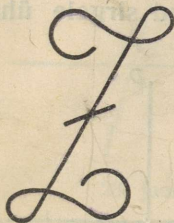
\*) Mis oligi tarvis tõestada.

7) Ülesandeid: 31) Ajada looduses ekkeri abil ristsiht antud sihile läbi valitud punkti, kui a) punkt asub antud sihil, b) punkt asub antud sihist kõrval.

4) 32) Ühel pool sirget MN on kaks punkti A ja B. Leida kõige lühem tee A-st B-sse MN kaudu.

9) 33) Kujutada tasasel maal sihitikkude abil hulknurk ning moodustada temale sümmeetriline kujund mingisuguse vabalt valitud sihi suhtes.

24. **Kesksümmeetria.** Vaadeldes kõrvalseisvat 32. joonist

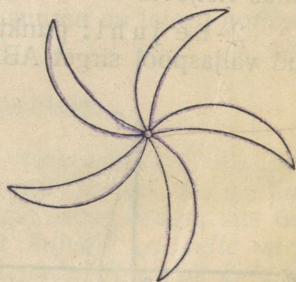


32. joonis.

leia me temas ka midagi ühetaolist, sümmeetrilist, aga kahekorra teda murda ei saa nii, et üks pool ühtuks teisega. Selle asemel võime temas leida punkti, mille ümber teda võib pöörda sirge nurga võrra nii, et ta iseendaga ühte langeb.

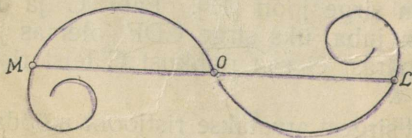
Kui tasapinnalist kuju on võimalik mingi punkti ümber pöörda teatava nurga võrra nii, et ta ühtub iseendaga, siis on see kuju sümmeetriline selle punkti suhtes, ehk sellel kujul on olemas kesksümmeetria. Punkti, mille ümber kuju pööratakse, nimetatakse

sümmeetria keskpunktiks; nurka, mille võrra kuju pöörda tuleb, nim. pöördnurgaks. Pöördnurkade arvu täispöördes nim. sümmeetria järguks. 32. joonisel — tähel Z — on teise järgu ehk kahekordne kesksümmeetria, 33. joonisel on viienda järgu ehk viiekordne kesksümmeetria. Pöörmisel ühtuvaid punkte, jooni, nurki nim. sümmeetrilisteks antud punkti suhtes. Selge on, et sümmeetrilised punktid on keskpunktist sama-kaugel.



33. joonis.

25. **Teoreem: Sirglõik, mis ühendab sümmeetrilisi punkte kahekordse kesksümmeetriaga kujundis, läheb läbi sümmeetria keskpunkti.**



34. joonis.

Tõestus: Olgu punktidel M ja L kahekordne kesksümmeetria punkti O suhtes. Ühendame punkti M keskpunktiga O ja punkti L keskpunktiga O. Siis

on  $\widehat{MOL}$  sirge nurk ja järelikult [19] moodustavad tema haarad OM ja OL sirge joone. Seepärast langeb sirge ML ühte sirgega MOL ja sellega läheb ta läbi keskpunkti O. M. o. t. t.

④ Ülesandeid. 34) Kahekordse kesksümmeetriaga joonises leida antud punktile sümmeetriline punkt.

/// Lahendus: Niisugune punkt on olemas, sest kui me terve kuju pöörame sümmeetria keskpunkti ümber sirge nurga võrra, siis ühtub antud punkt ikkagi mingi punktiga. Et seda punkti leida, tõmbame läbi antud punkti ja sümmeetria keskpunkti sirge ja asetame teisele poole sümmeetria keskpunkti antud punkti kauguse sümmeetria keskpunktist.

⑤ 35) Konstruuda kuju, millel on antud kujuga kahekordne kesksümmeetria antud punkti suhtes.

## d) Paralleeljooned (Rööpjooned).

26. Rööplüke. Olgu meil tasapind L paigutatud tasapinna P peale. Kui tasapind P jääb liikumata paigale ja kui tasapind L liugub tasapinda P-d mööda nii, et tema peal asuv kindlaksmääratud sirge BC kogu aeg ühtub tasapinnal P liikumatult paigal oleva sirgega AD, siis kõneldakse, et tasapinna L liikumine on rööplüke ja sünnib rööbiti AD-ga ehk AD-d mööda.

Näiteks: Kui kummuti laegast või kirjutuslaua laegast välja tõmmatakse, siis jäävad kummuti ja kirjutuslaua külglauad ja põhiliistud paigale, kuna laeka külglauad ja põhi neid mööda liuguvad. Seejuures on kummuti või kirjutuslaua külglaudade ja põhiliistude moodustatud serv paigalejäävaks sirgeks ja laeka serv on teda mööda liuguvaks sirgeks.

**Definitsioon:** Rööplükkeks ehk paralleellükkeks nim. niisugust liikumist, mille juures tasapind iseennast mööda edasi nihkub nii, et üks tasapinnal asuv sirge iseennast mööda liugub.

Kõneldakse, et rööplüke sünnib rööbiti selle sirgega ehk seda sirget mööda. Seda sirget nim. liugumissirgeks.)

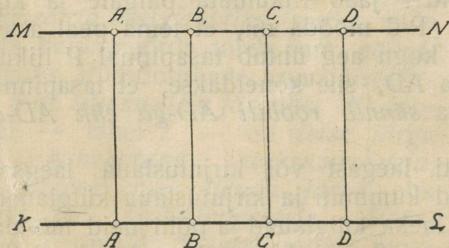
Toome veel mõne näite. Kui veskis viljakotte üles vinnatakse, siis liiguvad viljakotid rööbiti veski seintega, s. o. vertikaalse sihiga. Kui kuivatusrehes viljakotte kaldpinda mööda alla lastakse, siis on kottide liikumine rööplüke. Tarvitades tõstetooli pääsevad inimesed maja ühelt korralt teisele korrale — rööplükke abil.

Joonestamise juures tarvitatakse paralleeljoonte ja ristjoonte tõmbamiseks peasjalikult rööplüket. Joonestuslauale kinnitatakse paberileht ja selle peal hoitakse liineal liikumata kinni. Paberilehte mööda liugub kolmnurk nii, et üks tema serv liineali serva mööda liigub. Paberi pind on paigalejäävaks pinnaks  $P$ , kolmnurga alumine külg on liikuvaks tasapinnaks  $L$ ; liineali serv on paigalolevaks sirgeks  $AD$ , liugumissirgeks, ja tema külge surutud kolmnurga serv on liikuvaks sirgeks  $BC$ .

Rööplükke silmapaistvamad ja kergesti arusaadavad omadused on:

- 1) Rööplükkel nihkuvad kõik liikuva tasapinna punktid samapikkuse lõigu võrra edasi.
- 2) Piisav on kujundi ühtainust punkti kinni pidada, ja rööplüke saab võimatuks. See tähendab teiste sõnadega, et kui meil teada on teatava kujundi üheainsa punkti koht, siis on ka kõigi teiste punktide kohad meil teada.

**27. Paralleelsuse mõiste.** Võtame sirge joone  $KL$  ja tema peal punktid  $A, B, C, D$  jne. Igast punktist tõmbame sellele sirgele ristjoone ja iga ristjoone peale tema alusest alates asetame sama sirglõigu  $a$ ; saame punktid  $A_1, B_1, C_1, D_1$  jne. Et haarata korraka kõiki sirge joone  $AB$  punkte ja neid sirgest  $AB$  eemale viia sirglõigu  $a$  võrra, lükame sirget  $AB$  üht ristjoont mööda sirglõigu  $a$  võrra edasi. Siis asub sirge  $KL$  uude asendisse  $MN$ .



35. joonis.

Sellest sirgest  $MN$  kõneleme, et tema on paralleelne (ehk rööbik)  $AB$ -ga.

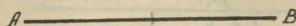
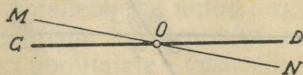
**Definitsioon:** Kaht sirget nim. paralleelseteks, kui nad on igal kohal ühekaugel teineteisest.

Sellesama definitsiooni teine väljendis:

**Kaht sirget nim. paralleelseteks, kui neid saab rööplükke abil ühtumisele viia.**

**Järeldus:** Sellest definitsioonist järgneb otsekohe, et kahe! paralleelsirgel ei ole ühtegi ühist punkti.

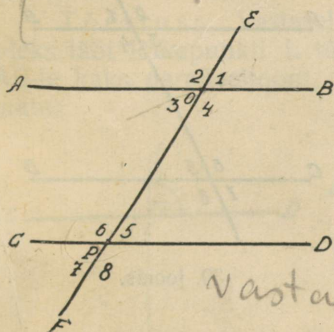
28. Paralleeljoonte aksioom: Väljaspool sirget asuva punkti läbi on võimalik tõmmata üksainus paralleeljoon sellele kindlissirgele. Näiteks, kui läbi O minev sirge CD on paralleelne AB-ga, siis ei saa läbi sama punkti O minev sirge MN mitte olla paralleelne AB-ga. Paralleelsuse sümboliks on  $\parallel$ ; näit.  $CD \parallel AB$ .



36. joonis.

29. Teoreem: Kahe paralleeljoone lõikumisel kolmanda sirgega tekkinud

- 1) vastavad nurgad on isekeskis võrdsed;
- 2) põiknurgad on isekeskis võrdsed;
- 3) rindnurkade summa on sirge nurk.



37. joonis.

Eeldus:  $AB \parallel CD$ .

Tõestus: Lükame sirget CD FE-d mööda AB poole nii, et ta paralleelseks jääb iseendaga, kuni punkt P langeb punkti O peale; siis ühtub sirge CD sirgega AB, sest  $CD \parallel AB$ . Seejuures:

- 1)  $\hat{5}$  ühtub nurgaga  $\hat{1}$ ; järel.  $\hat{1} = \hat{5}$ ;  
 $\hat{6}$  " "  $\hat{2}$ ; "  $\hat{2} = \hat{6}$ ;  
 $\hat{7}$  " "  $\hat{3}$ ; "  $\hat{3} = \hat{7}$ ;  
 $\hat{8}$  " "  $\hat{4}$ ; "  $\hat{4} = \hat{8}$ ;

- 2)  $\hat{7}$  saab nurga  $\hat{1}$  tippnurgaks; järel.  $\hat{1} = \hat{7}$ ;

$$\hat{8} \text{ " " } \hat{2} \text{ " " } \hat{2} = \hat{8};$$

$$\hat{5} \text{ " " } \hat{3} \text{ " " } \hat{3} = \hat{5};$$

$$\hat{6} \text{ " " } \hat{4} \text{ " " } \hat{4} = \hat{6};$$

- 3)  $\hat{8}$  saab nurga  $\hat{1}$  kõrvunurgaks; järel.  $\hat{1} + \hat{8} = \pi$ ;

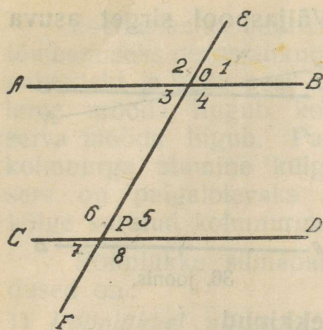
$$\hat{7} \text{ " " } \hat{2} \text{ " " } \hat{2} + \hat{7} = \pi;$$

$$\hat{6} \text{ " " } \hat{3} \text{ " " } \hat{3} + \hat{6} = \pi;$$

$$\hat{5} \text{ " " } \hat{4} \text{ " " } \hat{4} + \hat{5} = \pi;$$

M. o. t. t.

30. Teoreem: Kui kahe sirge lõikumisel kolmanda sirgega tekkinud vastavad nurgad on isekeskis võrdsed, siis on läbilõigatud sirged paralleelsed.



38. joonis.

Eeldus:  $\hat{5} = \hat{1}$ .Väide:  $CD \parallel AB$ .

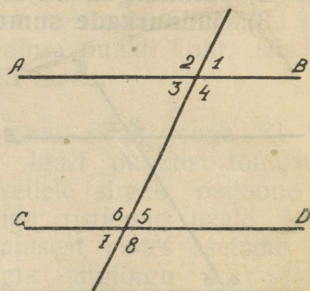
Tõestus: Lükame CD-d FE-d mööda AB poole nii, et ta paralleelseks jääb iseendaga, kuni punkt P ühtub punktiga O. Siis ühtub ka kiir

PD kiirega OB, sest  $\hat{5} = \hat{1}$ . Järelikult ühtub ka terve sirge CD terve sirgega AB. Niiviisi on sirge CD rööplükke abil ühtumisele viidud sirgega AB. Järel.  $CD \parallel AB$ . M. o. t. t.

31. Teoreem: Kui kahe sirge lõikumisel kolmanda sirgega tekkinud põiknurgad on isekeskis võrdsed, siis on läbilõigatud sirged paralleelsed.

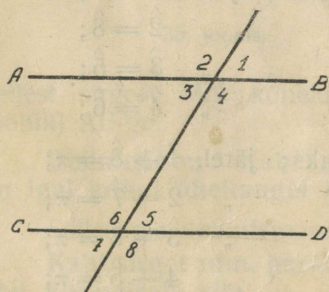
Eeldus:  $\hat{6} = \hat{4}$ .Väide:  $CD \parallel AB$ .Tõestus: Et  $\hat{6} = \hat{4}$ ,

siis on ka  $\hat{5} = \hat{1}$  kui võrdsete nurkade kõrvunurgad. Järel.  $CD \parallel AB$ .



39. joonis.

32. Teoreem: Kui kahe sirge lõikumisel kolmanda sirgega tekkinud rindnurkade summa on sirge nurk, siis on läbilõigatud sirged paralleelsed.



40. joonis.

Eeldus:  $\hat{4} + \hat{5} = \pi$ .Väide:  $CD \parallel AB$ .Tõestus: Antud on, et  $\hat{4} + \hat{5} = \pi$ ;joonisest näeme, et  $\hat{1} + \hat{4} = \pi$ ;

$$\hat{4} + \hat{5} = \hat{1} + \hat{4};$$

$$\hat{5} = \hat{1}$$

 $CD \parallel AB$ .

M. o. t. t.

Järeldus: Kui kahest sirgest kumbki on risti kolmandaga, siis on nad isekeskis paralleelsed.

6

Ülesandeid: 36) Rööplükke abil tõmmata antud sirgele paralleeljoon läbi valitud punkti.

37) Läbi valitud punkti tõmmata paralleeljoon antud sirgele võrdsete vastavate või võrdsete põiknurkade konstruimise teel.

38) Missugune on põiknurkade poolitajate vastastikune asend?

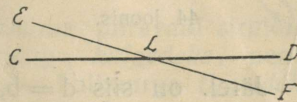
39) Kuidas seisavad rindnurkade poolitajad vastastikku?

40) Valida tasasel maal mingisugune siht ja üks punkt väljaspool seda sihti ning ajada läbi selle punkti paralleelsiht nurkriista abil.

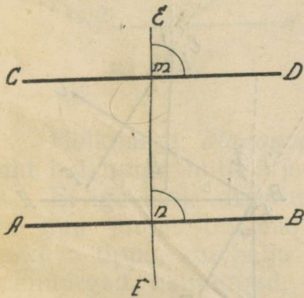
41) Ajada ekkeri abil paralleelsiht antud sihile  $a$  meetri kaugusel.

33. Teoreem: Kui sirge lõikab üht paralleeljoont, siis lõikab ta ka teist.

Tõestus: Vastasel korral oleks läbi lõikepunkti  $L$  tõmmatud  $AB$ -le kaks paralleeljoont, mis võimatu.



41. joonis.



42. joonis.

34. Teoreem: Kui sirge on risti ühe paralleeljoonega, siis on ta risti ka teisega.

Tõestus: Et  $AB \parallel CD$ , siis on

$\hat{n} = \hat{m}$  kui vast. nurgad;

et  $EF \perp CD$ , siis  $\hat{m} = 90^\circ$ .

$\hat{n} = 90^\circ$ ;

s. t.  $EF \perp AB$ . M. o. t. t.

35. Teoreem: Kui sirge on paralleelne ühe paralleeljoonega, siis on ta paralleelne ka teisega.

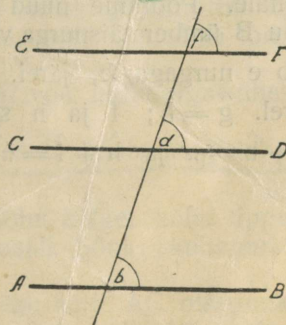
Tõestus: Lõikame kõik kolm joont läbi neljandaga.

Et  $AB \parallel CD$ , siis on  $\hat{b} = \hat{d}$ , kui vast. nurgad;

et  $EF \parallel CD$ , „ „  $\hat{f} = \hat{d}$ , „ „ „

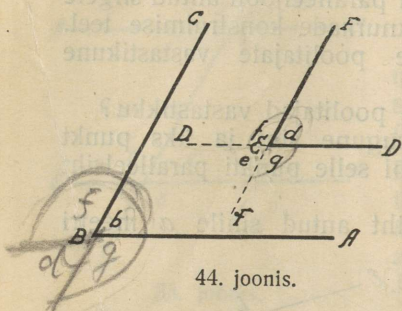
$\hat{b} = \hat{f}$  [6,2],

$EF \parallel AB$  [30.] M. o. t. t.



43. joonis.

36. Teoreem: Paralleelsete haaradega nurgad on kas isekeskis võrdsed või nende summa on sirge nurk.



44. joonis.

Eeldus:  $ED \parallel BA$ ,  $EF \parallel BC$ .

Väide:  $\hat{d} = \hat{b}$ .

Tõestus: Lükkame lõikuvaid sirgeid ED ja EF läbi tippude E ja B minevat sirget mööda edasi nii, et nad paralleelseiks jäävad iseendaga, kuni tipp E langeb tippu B; siis ühtub  $\hat{d}$   $\hat{b}$ -ga,  $\hat{e}$  saab nurga b tippnurgaks ja  $\hat{f}$  ning  $\hat{g}$  saavad nurga b kõrvunurkadeks.

Järel. on siis  $\hat{d} = \hat{b}$ ,  $\hat{e} = \hat{b}$ ,  $\hat{f} + \hat{b} = \pi$ ,  $\hat{g} + \hat{b} = \pi$ .

M. o. t. t.

37. Teoreem: Vastastikku risthaaradega nurgad on kas isekeskis võrdsed või nende summa on sirge nurk.

Eeldus:  $ED \perp BA$ ,  $EF \perp BC$

Väide:  $\hat{e} = \hat{b}$ ,  $\hat{g} = \hat{b}$ ;

$\hat{f} + \hat{b} = \pi$ ,  $\hat{h} + \hat{b} = \pi$ .

Tõestus: Võtame läbi tippude E ja B mineva sirge EB liugumis-sirgeks ja lükkame lõikuvaid sirgeid ED ja EF liugumissirget EB-d mööda edasi nii, et nad paralleelseiks jäävad iseendaga, kuni tipp E langeb tippu B. Siis jääb  $ED \perp BA$  ja EF jääb

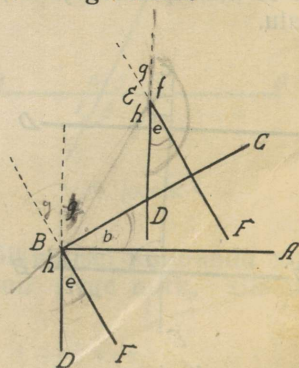
$\perp BC$  ning  $\widehat{DEF}$  aseneb nurga DBF kohale. Pöörame nüüd nurka DBF tippu B ümber täisnurga võrra, siis üh-

tub  $\hat{e}$  nurgaga b, järel.  $\hat{e} = \hat{b}$ ;  $\hat{g}$  saab nurga b tippnurgaks,

järel.  $\hat{g} = \hat{b}$ ;  $\hat{f}$  ja  $\hat{h}$  saavad nurga b kõrvunurkadeks, järel.

$\hat{f} + \hat{b} = \pi$  ja  $\hat{h} + \hat{b} = \pi$ .

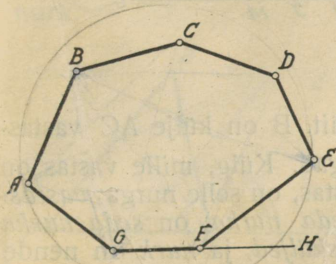
M. o. t. t.



45. joonis.

## II-ne peatükk: Kolmnurk.

38. Seletused. *Hulknurgaks* nim. sirglõikudest piiratud tasapinna osa. Missuguses punktis üks sirglõik lõpeb, sellest algab järgmine ja viimane sirglõik lõpeb selles punktis, millest esimene algab.



46. joonis

Hulknurka piiravaid sirglõike nim. hulknurga *külgedeks*; nende otsapunkte — hulknurga *tippudeks*. Hulknurga külgede summat nim. *ümbermõõduks* ehk *perimeetriks*; hulknurka piiravat murdjoont nim. tema *piirdeks*. Hulknurga tipu juures olevat nurka, mille avaus on pöördud hulknurga sisemise valla poole, nim. hulknurga *sisenurgaks*, näit.  $\widehat{EFG}$ . Sisenurga kõrvunurka nim. *välisnurgaks*, näit.  $\widehat{EFH}$ .

Hulknurga *diagonaaliks* nim. seda sirglõiku, mis ühendab kaht hulknurga mittejärjesolevat tippu, näit. AC, AD, AF.

Et iga külje otsapunkt on järgneva külje alguspunkt ja et iga tipu juures on üks sisnurk, siis on hulknurgal niipalju nurki ja tippe, kui palju külgi. Külgede arvu järele on olemas kolmnurgad, nelinurgad, viisnurgad jne. Harilikus kõnes kolmnurki ja nelinurki hulknurkadeks ei nimetata.

Hulknurka nim. kumeraks, kui tal ei ole ühtegi ülinürinurka. Me vaatleme ainult kumeraid hulknurki, mille küljed ei lõiku üksteisega.

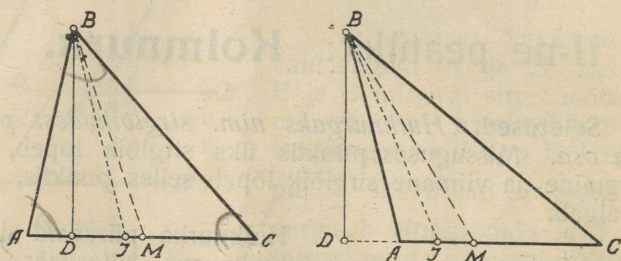
Ülesandeid: 42) Mitu diagonaali võib hulknurgas ühest tipust tõmmata?

43) Mitu diagonaali võib hulknurgas tõmmata kõigist tippudest ühtekokku?

39. Kolmnurk. Kolmnurgal on kolm külge, kolm tippu, kolm nurka, aga tal ei ole ühtegi diagonaali. Sõna „kolmnurk“ kirjutatakse lühendatult märgiga  $\triangle$ .

Kaks kolmnurga tippu A ja C on ühe külje AC otsapunktid ja kolmas tipp B on selle külje *vastas*, on külje AC *vastas-*

tipp, kuna külge AC on selle tipu B vastaskülge. Nurk B, mille tipp on antud külje vastas, on ise ka antud külje AC vastas, on külje AC vastasnurk, teised kaks nurka on selle külje juures



47. joonis.

ja neid nim. tema lähisnurkadeks, näit.  $\hat{B}$  on külje AC vastasnurk ja  $\hat{A}$  ja  $\hat{C}$  on külje AC lähisnurgad. Külge, mille vastas on antud nurk, on ise ka selle nurga vastas, on selle nurga vastaskülge; teised kaks külge piiravad seda nurka, on seda nurka piiravad küljed ehk selle nurga lähisküljed, ja nurk on nende kahe külje vahel, on nende vahelnurk.

$\triangle$ -rga iga külge võidakse  $\triangle$ -rga aluseks võtta; siis on tema vastastipp —  $\triangle$ -rga tipp. Näit. kui me AC aluseks võtame, siis on B  $\triangle$ -ga tipp.

Tipust aluse või tema pikenduse peale tõmmatud ristjoon on  $\triangle$ -rga kõrgus, näit. BD.

Sirglõik, mis ühendab  $\triangle$ -rga tippu vastaskülje keskkohaga, on selle külje poolitaja ehk mediaan, näit. BM. Kui nurgapoolitajast ehk bissektorist kõneldakse  $\triangle$ -rgas, siis mõeldakse seda nurgapoolitaja lõiku, mis ulatub nurgatipust kuni vastasküljeni, näit. BJ. Et iga külge võidakse võtta  $\triangle$ -rga aluseks, siis on  $\triangle$ -rgal 3 kõrgust, 3 küljepoolitajat ehk mediaani ja 3 nurgapoolitajat ehk bissektorit.

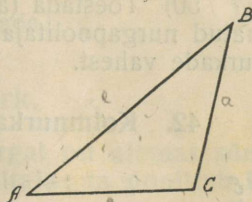
$\triangle$ -rga tippe tähistame suurte tähtedega; iga tipu juures olevat nurka vastava kreeka keelse väikese tähega; vastaskülge — vastava ladinakeelse tähega; kõrgust tähega  $h$ , mediaani — tähega  $m$ , juurde lisades indeksina selle külje tähistuse, mille peale kõrgus või mediaan tõmmatud; nurgapoolitajat tähistame  $n$ -ga, tarvitades indeksina selle nurga tähistust, mida ta poolitab. Külge  $c$  peale tõmmatud kõrgus  $h_c$  jagab selle külje lõikudeks  $f$  ja  $g$ , kus  $f$  on külje  $a$  lähislõik ja  $g$  on külje  $b$  lähislõik.

40. Teoreem: Kolmnurgas on kahe külje summa suurem kui kolmas külge ja kahe külje vahe on väiksem kui kolmas külge.

Tõestus:  $AC + CB > AB$ , sest sirgloik on kõige lühem tee kahe punkti vahel [10].

Kui selles võrratuses mõlemalt poolt lahutada  $CB$ , siis saame tuntud aksioomi [6,s] põhjal:  $AC > AB - CB$  ehk

$$AB - CB < AC. \quad \text{M. o. t. t.}$$



48. joonis.

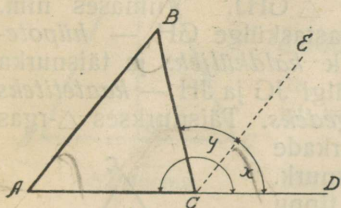
41. Teoreem: Kolmnurga sisenurkade summa on sirge nurk.

Tõestus: Pikendame külge  $AC$  ja tõmbame  $CE \parallel AB$ . Siis on:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{x} \\ \hat{B} = \hat{y} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array} \right\} \hat{A} + \hat{B} = \hat{x} + \hat{y} = \widehat{BCD}.$$

---


$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{C} = \text{sirge nurk } ACD. \quad \text{M. o. t. t.}$$



49. joonis.

1-ne järeldus:  $\triangle$ -rgas võib olla ainult 1 täisnurk või 1 nürinurk.

2-ne järeldus: Kui  $\triangle$ -rgas on 2 nurka teada, siis on ka kolmas teada.

3-as järeldus: Kui 2  $\triangle$ -rka ühte sünnivad kahe nurga poolest, siis sünnivad nad ühte ka kolmandate nurkade poolest.

Et  $\hat{A} + \hat{B} = \widehat{BCD}$ , siis saame teoreemi:  $\triangle$ -rga välisnurk on temaga mitte-kõrvoolevate sisenurkade summa.

Sellest teoreemist saame järelduse:  $\triangle$ -rga välisnurk on suurem, kui ükski temaga mitte-kõrvoolev sisenurk.

3) Ülesandeid. 44)  $\triangle$ -rgas on  $\hat{A} = 48^\circ$ ,  $\hat{B} = 79^\circ$ . Kui suur on kolmas?

6) 45)  $\triangle$ -rgas on antud 2 nurka; joonestamise teel leida kolmas.

3) 46)  $\triangle$ -rga nurgad suhtuvad nagu 1:2:3. Kui suur on iga nurk?

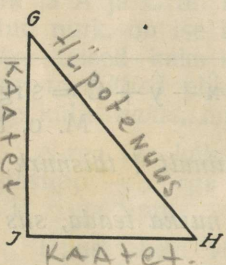
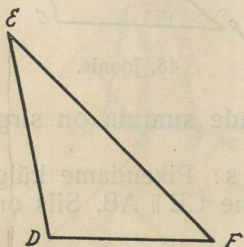
3) 47)  $\triangle$ -rga nurk  $108^\circ$ ; teised on isekeskis võrdsed. Kui suur on kumbki?

6) 48)  $\triangle$ -rga üks nurk on antud; teised on isekeskis võrdsed. Leida need nurgad joonestamise teel.

② 49) Kui suured nurgad tekivad  $\triangle$ -rga kõrguste lõikumisel paari kaupa, kui  $\triangle$ -rga nurgad on  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$ ?

① 50) Tõestada (arvutamise teel), et tipust aluse peale tõmmatud nurgapoolitaja ja kõrguse vahel olev nurk on pool alusnurkade vahest.

## 42. Kolmnurkade liigid. A. Nurkade järele nim. $\triangle$ -rka

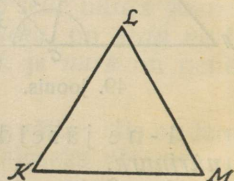


50. joonis.

1) *teravnurkseks*, kui kõik 3 nurka on teravad, näit.  $\triangle RST$ :

2) *nürinurkseks*, kui 1 nurk on nüri, näit.  $\triangle DEF$ ; ühise nimega nim. neid *kaldnurkseteks*.

3) *täisnurkseks*, kui üks nurk on täisnurk, näit.  $\triangle GHJ$ . Viimases nim. täisnurga vastaskülge GH — *hüpoteenusiks* ehk *kaldküljeks* ja täisnurka piiravaid külgi JG ja JH — *kaatetiteks* ehk *ristkülgedeks*. Täisnurkses  $\triangle$ -rgas on teravnurkade summa täisnurk. Täisnurga tippu tähistame C-ga ja hüpoteenuusi c-ga.



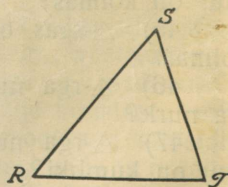
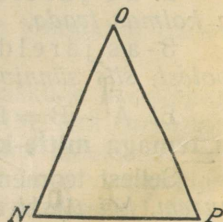
B. Külgede järele nim.  $\triangle$ -rka:

1) *võrdkülgsesks*, kui kõik kolm külge on ühepikkused, näit.  $\triangle KLM$ ;

2) *võrdhaarseks*, kui 2 külge on ühepikkused, kolmas külge aga ei ole nende pikkune, näit.  $\triangle NOP$ ;

3) *isekülgsesks*, kui igal küljel on isesugune pikkus, näit.  $\triangle RST$ .

Võrdhaarses  $\triangle$ -rgas nim. *aluseks* seda külge, mis teistega ühepikkune ei ole; tema vastastipp on  $\triangle$ -rga *tipp*; mõlemaid võrdseid külgi nim. *haaradeks*. Võrdhaarses  $\triangle$ -rgas tähistame tippu B-ga, aluse b-ga, tipunurga  $\beta$ -ga; haar on a ja alusnurk on  $\alpha$ .



51. joonis.

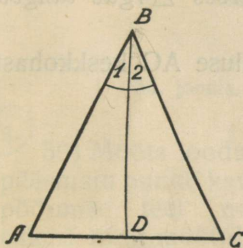
Ülesanne. 51) Täisnurkses  $\triangle$ -rgas on antud

$$\hat{B} = 57^\circ 17' 45''.$$

Leida teised nurgad! Arvutada ja joonestada!

### Võrdhaarne kolmnurk.

43. Teoreem: Võrdhaarsel kolmnurgal on olemas sümmeetria telg; selleks on tipunurga poolitaja; ta poolitab ka aluse ja on alusega risti.



52. joonis.

Eeldus:  $BC = BA$ ,  $\hat{1} = \hat{2}$ .

Väide: 1)  $BD$  on sümmeetria telg;  
2)  $AD = DC$ ; 3)  $BD \perp AC$ .

Tõestus: Murrame  $\triangle ABC$   $BD$ -d mööda kahekorra; siis läheb  $BC$   $BA$ -d mööda, sest  $\hat{2} = \hat{1}$ ;  $C$  ühtub  $A$ -ga, sest et  $BC = BA$  ja  $D$  jääb paigale.

Seepärast ühtub  $DC$   $DA$ -ga,  $\hat{C}$  ühtub nurgaga  $A$  ja  $\triangle DBC$  ühtub  $\triangle$ -rgaga  $DBA$ .

Järel. nurgapoolitaja  $BD$  on  $\triangle$ -rga  $ABC$  sümmeetria telg ja  $A$  ning  $C$  on  $BD$  suhtes sümmeetrilised punktid. Sellest järgneb [22]:  $AD = DC$  ja  $BD \perp AC$ . M. o. t. t.

Et  $\hat{C}$  ühtus  $\hat{A}$ , siis saame teoreemi: võrdhaarse  $\triangle$ -rga alusnurgad on ühesuurused ja teravad, ehk teiste sõnadega: kolmnurgas on võrdsete külgede vastas võrdsed nurgad.

Ülesandeid: 52) Kui suured on võrdkülgse  $\triangle$ -rga nurgad?

53) Võrdhaarse  $\triangle$ -rga alusnurk on: a)  $40^\circ$ ; b)  $45^\circ$ ; c)  $60^\circ$ ; d)  $72^\circ$ ; e)  $36^\circ$ ; f)  $68^\circ$ ; g)  $108^\circ 12'$ . Kui suured on teised nurgad?

54) Võrdhaarse  $\triangle$ -rga tipunurk on: a)  $90^\circ$ ; b)  $120^\circ$ ; c)  $30^\circ$ ; d)  $60^\circ$ ; e)  $80^\circ$ ; f)  $75^\circ$ ; g)  $97^\circ 6' 28''$ . Kui suured on teised nurgad?

55) Võrdhaarse  $\triangle$ -rga alusnurk on antud; leida joonestamise teel teised nurgad!

56) Võrdhaarse  $\triangle$ -rga tipunurk on antud; leida joonestamise teel teised nurgad!

44. I-ne ümberpööratud teoreem: Võrdhaarses  $\triangle$ -rgas langeb aluse mediaan ühte sümmeetria teljega.

Tõestus: Läbi  $\triangle$ -rga  $ABC$  tipu  $B$  (52. joonis) ja aluse keskkoha  $D$  on üksainus sirge võimalik, ja niisugusena esineb

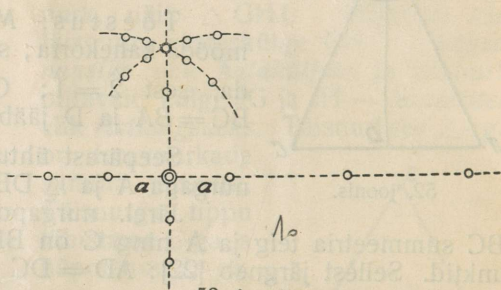
juba sümmeetria telg. Seepärast — kui me veel teise, mediaani, tõmbame, siis langeb see ühte sümmeetria teljega.

*II-ne ümberpööratud teoreem: Võrdhaarses  $\triangle$ -rgas langeb kõrgus ühte sümmeetria teljega.*

Tõestus:  $\triangle$ -rga ABC tipust B (52. joonis) alusele AC on üksainus ristjoon võimalik, ja niisugusena esineb juba sümmeetria telg. Seepärast — kui me veel teise ristjoone, kõrguse tõmbame, siis langeb see ühte sümmeetria teljega.

*III-as ümberpööratud teoreem: Võrdhaarses  $\triangle$ -rgas langeb aluse keskristjoon ühte sümmeetria teljega.*

Tõestus:  $\triangle$ -rga ABC (52. joonis) aluse AC keskkohast D on alusele AC üksainus ristjoon võimalik, ja niisugusena esineb juba sümmeetria telg BD. Seepärast — kui me alusele veel ühe ristjoone tõmbame tema koskkohast D, siis langeb see ühte sümmeetria teljega.

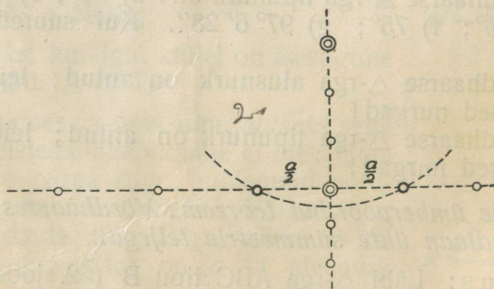


53. joonis.

Ülesandeid: 57) Ajada valitud sihile üle antud punkti ristsiht mõõtnööri abil, kui

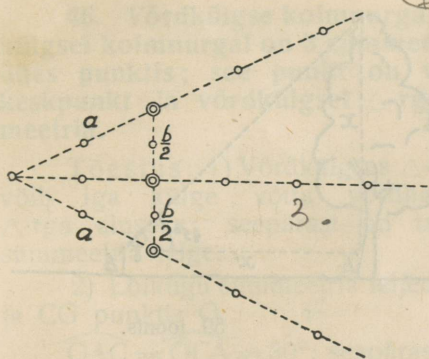
- punkt asub antud sihil (53. joonis);
- punkt asub väljaspool antud sihti (54. joonis).

Märkus: Punkti kaugus olgu vähem kui mõõtnööri pikkus.



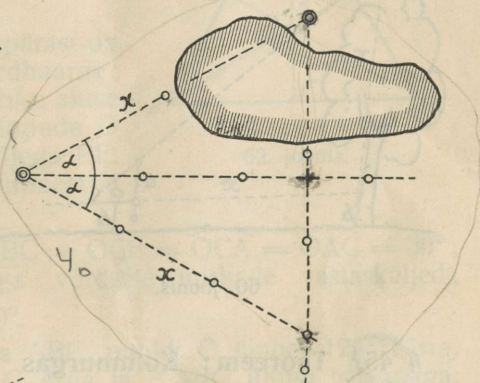
54. joonis.

58) Looduses sihitikkude abil valitud nurk jagada pooleks mõõtnööri abil (55. joonis).

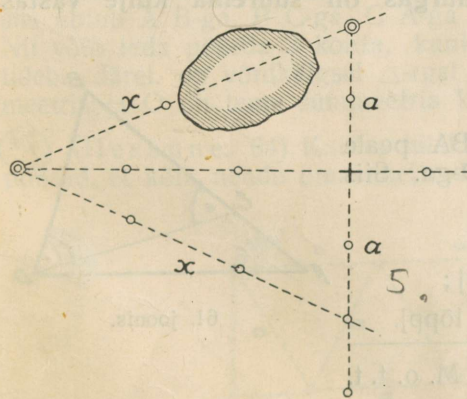


55. joonis.

59) Mõõta looduses ligipääsmatu punkti kaugus sihi pöörmise teel nurkriista, ekkeri ning mõõtrihma abil (56. joonis).



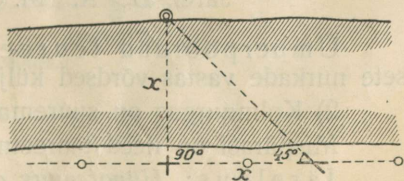
56. joonis.



57. joonis.

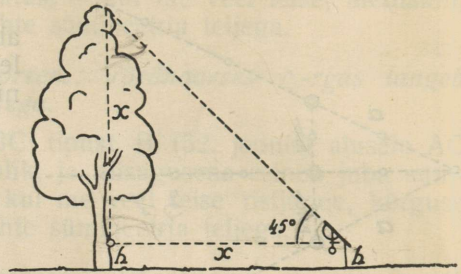
60) Mõõta looduses kaugus üle takistuse sihi pöörmise teel ekkeri abil (57. joonis).

61) Mõõta jõe laius sihi pöörmise teel  $90^\circ$  võrra (58. joonis).

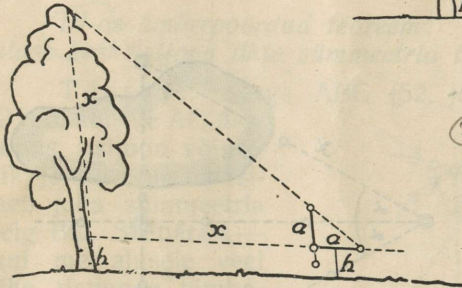


58. joonis.

62) Mõõta rõhtsal maal puu või hoone kõrgus, pöördes püstihi rööbikuks maapinnaga eklimeetri abil.



59. joonis.



60. joonis.

63) Mõõta puu või hoone kõrgus kaldsel maal, pöördes püstihi rööbikuks maapinnaga loodsirkli abil.

45) Teoreem: Kolmnurgas on suurema külje vastas suurem nurk.

Eeldus:  $AB > BD$ .

Väide:  $\hat{D} > \hat{A}$ .

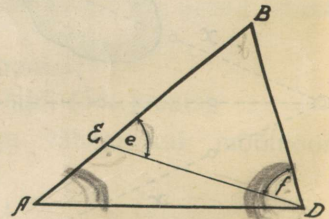
Tõestus: Asetame BA peale  $BE = BD$  ja ühendame E D-ga. Siis leiame:

$$\hat{D} > \hat{f} \text{ [6,3];}$$

$$\hat{f} = \hat{e} \text{ [43, lõpp];}$$

$$\hat{e} > \hat{A} \text{ [41, lõpp].}$$

Järel.  $\hat{D} > \hat{A}$ . M. o. t. t.



61. joonis.

Ümberpööratud teoreemid: 1) Kolmnurgas on võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed.

2) Kolmnurgas on suurema nurga vastas pikem külg.

Mispärast on need teoreemid õiged?

Järeldus: Hüpotenuus on kõige pikem külg täisnurkses kolmnurgas.

46. Võrdkülgse kolmnurga sümmeetria. Teoreem: Võrdkülgtsel kolmnurgal on 3 sümmeetria telge; nad lõikuvad kõik ühes punktis; see punkt on võrdkülgse  $\triangle$ -rga sümmeetria keskpunkt ja võrdkülgtsel  $\triangle$ -rgal on kolmekordne kesksümmeetria.

Tõestus: 1) Võrdkülgses  $\triangle$ -rgas võib iga külge võtta võrdhaarse  $\triangle$ -rga aluseks: seepärast on tal 3 sümmeetria telge.

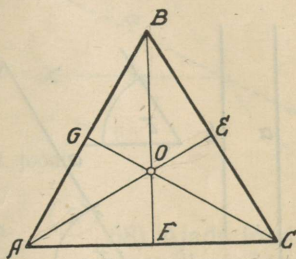
2) Lõikugu sümmeetria teljed AE ja CG punktis O.

$\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = 30^\circ$ ; seepärast on  $OA = OC$  ja  $\triangle AOC$  on võrdhaarne; niisama ka  $\triangle ABC$ . Nende ühise aluse AC keskkristjoon läheb läbi tippude O ja B ja ühtub sümmeetria teljega BF. Niiviisi lõikuvad kõik 3 sümmeetria telge ühes punktis O.

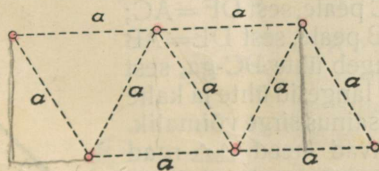
3)  $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \widehat{OCA} = \widehat{OAC} = 30^\circ$ ;  $OA = OB = OC$ , kui  $\triangle$ -rga võrdsete nurkade vastasküljed;  $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^\circ$ .

Kui nüüd pöörda  $\triangle$ -rka ABC punkti O ümber  $120^\circ$  võrra, siis ühtub A B-ga, B C-ga, C A-ga ja  $\triangle ABC$  ühtub iseendaga. Nii võib teda pöörda 3 korda, kuni ta oma algasendisse tagasi tuleb. Järeel. on võrdkülgtsel  $\triangle$ -rgal ABC kolmekordne kesksümmeetria ja O on tema sümmeetria keskpunkt. M. o. t. t.

⊗ Ülesanne. 64) Kuidas tuleks istutada aias viljapuud või põõsad, et kõik nende omavahelised kaugused oleksid võrdsed?



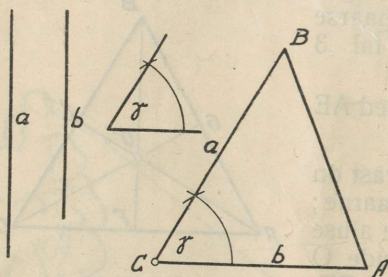
62. joonis.



63. joonis.

## Kolmnurkade ühtuvuse teoreemid.

47. Ülesanne. 65) Konstruuda  $\triangle$  kahest küljest ja nende vahelnurgast.



64. joonis.

Konstruksioon: Meelevaldsel sirgel vabalt võetud punkti C juures konstruime  $\hat{C} = \gamma$ ; selle nurga ühe haara peale asetame  $CB = a$  ja teise haara peale  $CA = b$ . Punktid B ja A ühendame sirglõigu abil.  $\triangle ABC$  on otsitav.

Ükskõik missuguses järjekorras meie  $\triangle$ -rga konstruime, ikka saame kuju ja suuruse poolest samasuguse  $\triangle$ -rga. Seda tõestab esimene ühtuvuse teoreem:

Kaks kolmnurka on ühtuvad, kui nad ühte sünnivad kahe külje ja nende vahelnurga poolest.

Eeldus:  $DF = AC$ ,  $DE = AB$ ,  
 $\hat{D} = \hat{A}$ .

Väide:  $\triangle DEF \equiv \triangle ABC$ .

Tõestus: Paigutame  $\triangle DEF$   $\triangle$ -rga ABC peale nii, et 1) D langeb A peale ja 2) DF läheb AC-d mööda.

Siis 1) läheb DE AB-d mööda, sest  $\hat{D} = \hat{A}$ ;

2) F langeb C peale, sest  $DF = AC$ ;

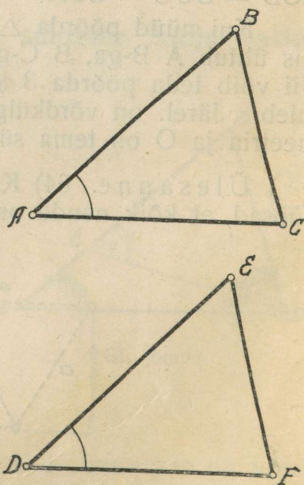
3) E langeb B peale, sest  $DE = AB$

ja 4) EF langeb ühte BC-ga, sest nende otsapunktid langesid ühte ja kahe punkti vahel on üksainus sirge võimalik.

Niiviisi katavad need  $\triangle$ -rgad teineteist täiesti ja on seepärast ühtuvad. M. o. t. t.

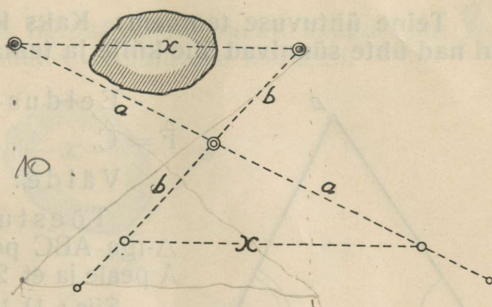
Järeldus:  $\triangle$ -rga määravad kaks külge ja nende vahelnurk.

Ülesandeid. 66) Konstruuda võrdhaarne  $\triangle$  haarast ja tipunurgast.

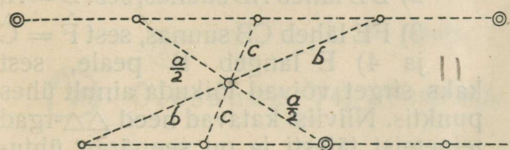


65. joonis.

⑦  
67) Mõõta looduses kahe punkti vaheline kaugus, kui punktide vahel asub mõni takistus.

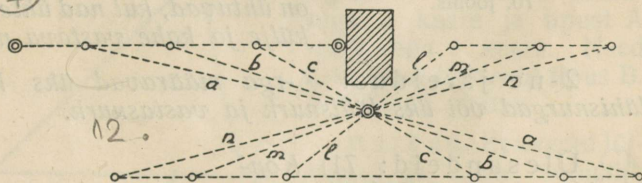


66. joonis.



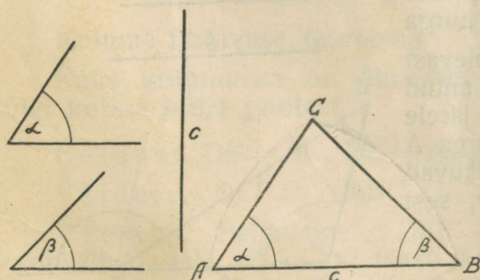
67. joonis.

69) Ajada looduses üle takistuse, kui sihitikud teisel pool takistust jäävad nägematuks.



68. joonis.

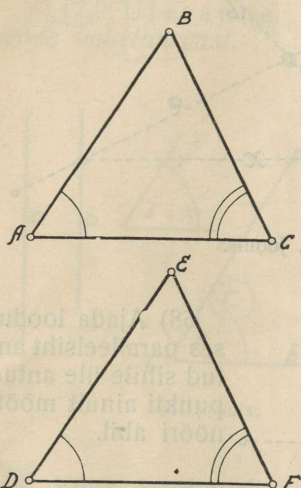
⑥  
48. Ülesanne. 70) Konstruuda  $\triangle$  küljest ja tema lähisnurkadest.



69. joonis.

Konstruktioon:  
Meelevaldse sirge peale asetame antud külje  $AB = c$ ; tipu A juures konstruime  $\hat{A} = \alpha$  ja tipu B juures  $\hat{B} = \beta$ . Nende nurkade üheks haaraks on AB ja teised haarad lõikuvad tipus C.  $\triangle ABC$  on otsitav.

6 Teine ühtuvuse teoreem: Kaks kolmnurka on ühtuvad, kui nad ühte sünnivad ühe külje ja tema lähisnurkade poolest.



70. joonis.

Eeldus:  $DF = AC$ ,  $\hat{D} = \hat{A}$ ,  
 $\hat{F} = \hat{C}$ .

Väide:  $\triangle DEF \equiv \triangle ABC$ .

Tõestus: Paigutame  $\triangle DEF$   $\triangle$ -rga  $ABC$  peale nii, et 1)  $D$  langeb  $A$  peale ja et 2)  $DF$  läheb  $AC$ -d mööda.

Siis: 1) langeb  $F$   $C$  peale, sest et  $DF = AC$ ;

2)  $DE$  läheb  $AB$  suunas, sest  $\hat{D} = \hat{A}$ ;

3)  $FE$  läheb  $CB$  suunas, sest  $\hat{F} = \hat{C}$  ja 4)  $E$  langeb  $B$  peale, sest kaks sirget võivad lõikuda ainult ühes punktis. Niiviisi katavad need  $\triangle$ -rgad teineteist täiesti ja on seepärast ühtuvad. M. o. t. t.

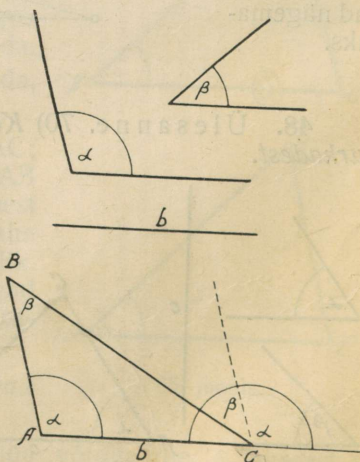
1-ne järeldus: Kaks  $\triangle$ -rka on ühtuvad, kui nad ühte sünnivad ühe külje ja kahe vastava nurga poolest.

2-ne järeldus:  $\triangle$ -rga määravad üks külj ja tema lähisnurgad või üks lähisnurk ja vastasnurk.

Ülesandeid: 71) Konstruuda  $\triangle$  ühest küljest, tema lähisnurgast ja vastasnurgast.

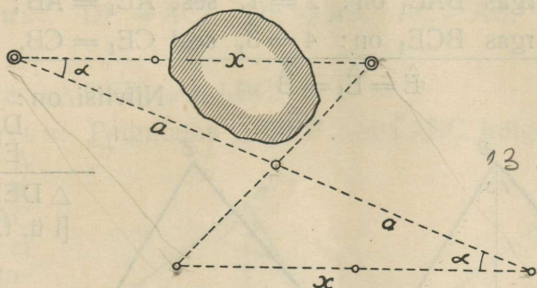
Konstruksioon: Meevaldse sirge peale asetame antud külje  $AC = b$ ; tipu  $A$  juures konstruime antud lähisnurga  $\hat{A} = \alpha$ ; tipu  $C$  juures olevast sirgest nurgast lahutame antud nurgad  $\alpha$  ja  $\beta$ , siis jääb järele teine lähisnurk  $ACB$ . Nurga  $A$  ja nurga  $ACB$  haarad lõikuvad tipus  $B$ .  $\triangle ABC$  on otsitav, sest  $\hat{B} = \beta$ .

72) Konstruuda võrdhaarne  $\triangle$  alusest ja tema lähisnurgast.



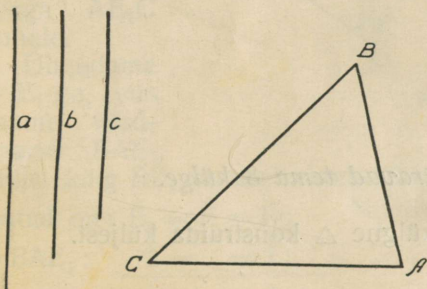
71. joonis.

7) (73) Mõõta looduses ligipääsematu punkti kaugus sihi kõrvaleasetamise teel, rakendades II ühtuvuse teoreemi.



72. joonis.

8) (49) Ülesanne. 74) Konstruuda  $\triangle$  kolmest küljest.



73. joonis.

Konstruksioon:

Meelevaldse sirge peale asetame ühe antud külje  $AC=b$ . Tipust  $C$  tõmbame raadiusega  $a$  kaare ja tipust  $A$  raadiusega  $c$  kaare. Need kaks kaart lõikuvad tipus  $B$ .  $\triangle ABC$  on otsitav.

Märkus. Et kaared lõikuksid ja oleks võimalik  $\triangle$ -rka konstruuda, peavad küljed olema valitud nii, et kahe külje summa on suurem ja nende vahe on väiksem kui kolmas külg:

$$a + c > b \text{ ja } a - c < b.$$

Kolmas ühtuvuse teoreem:

Kaks kolmnurka on ühtuvad, kui nad ühte sünnivad kõigi kolme külje poolest. // X

Eeldus:  $DF=AC$ ,  $DE=AB$ ,  $EF=BC$ .

Väide:  $\triangle DEF \equiv \triangle ABC$ .

Tõestus: Paigutame  $\triangle DEF$   $\triangle$ -rga  $ABC$  külge nii, 1) et  $D$  langeb  $A$  peale, 2) et  $DF$  läheb  $AC$  suunas ja 3) et  $\triangle DEF$  langeb allapoole  $AC$ -d. Siis langeb  $F$   $C$  peale, sest  $DF=AC$ , ja  $\triangle DEF$  aseneb  $\triangle$ -rga  $AE_1C$  kohale.

Ühendame nüüd B E<sub>1</sub>-ga, siis saame kaks võrdhaarset  $\triangle$ -nurka.

$\triangle$ -rgas BAE<sub>1</sub> on:  $\hat{2} = \hat{1}$ , sest AE<sub>1</sub> = AB;

$\triangle$ -rgas BCE<sub>1</sub> on:  $\hat{4} = \hat{3}$ , sest CE<sub>1</sub> = CB.

$$\hat{E} = \hat{E}_1 = \hat{B}$$

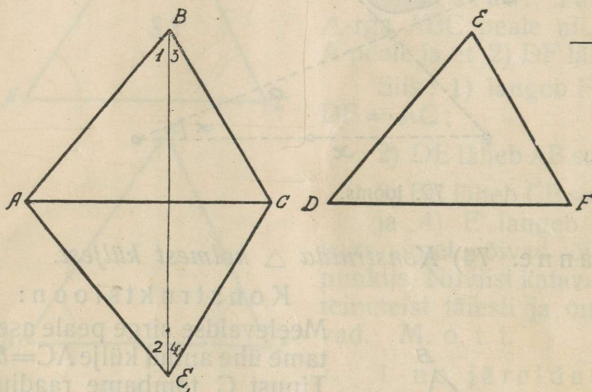
Niiviisi on:  $\hat{E} = \hat{B}$

$$DE = AB$$

$$EF = BC$$

$$\triangle DEF \equiv \triangle ABC$$

[I ü. t.] M. o. t. t.



74. joonis.

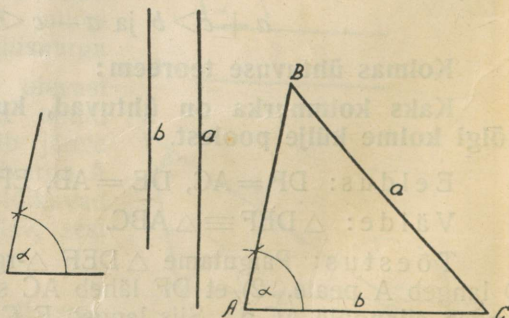
Järeldus:  $\triangle$ -rga määravad tema 3 külge.

Ülesanne. 75) Võrdkülgne  $\triangle$  konstruuda küljest.

\* 50) Ülesanne. 76) Konstruuda  $\triangle$  kahest küljest ja suurema külje vastanurgast.

Konstruksioon:

Konstruime  $\hat{A} = \alpha$ ;  
ühe haara peale ase-  
tame vähema külje  
 $AC = b$ . Tipust C  
raadiusega a tõmba-  
me kaare, mis lõikab  
teist haara punktis B.  
Ühendame B ja C.  
 $\triangle ABC$  on otsitav.



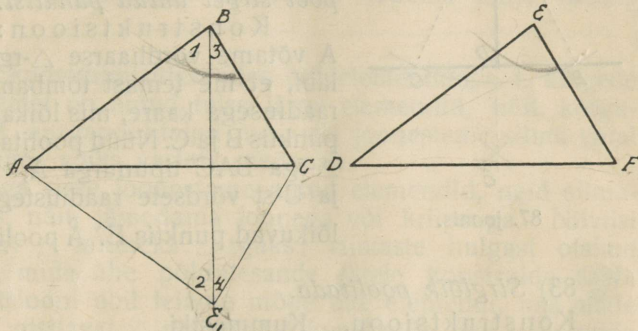
75. joonis.

**Neljas ühtuvuse teoreem:** Kaks kolmnurka on ühtuvad, kui nad ühte sünnivad kahe külje ja suurema külje vastasnurka poolest.

Eeldus:  $DF = AC$ ,  $DE = AB$ ,  $AC > AB$ ,  $DF > DE$ ,  $\hat{E} = \hat{B}$ .

Väide:  $\triangle DEF \equiv \triangle ABC$ .

Tõestus: Paigutame  $\triangle DEF$   $\triangle$ -rga  $ABC$  külge nii, 1) et  $D$  langeb  $A$  peale, 2) et  $DF$  läheb  $AC$  suunas ja 3) et  $\triangle DEF$  langeb allapoole  $AC$ -d. Siis langeb  $F$   $C$  peale, sest  $DF = AC$ ,  $\triangle DEF$  aseneb  $\triangle$ -rga  $AE_1C$  kohale.



76. joonis.

Ühendame  $B$   $E_1$ -ga, siis saame võrdhaarse  $\triangle BAE_1$ , millel külg  $BE_1$  ei saa minna läbi  $C$ , sest on ju  $AC > AB$ .

Antud on:  $\hat{E}_1 = \hat{E} = \hat{B}$ ; Niiviisi on:  $DE = AB$

$\triangle BAE_1$ :  $\hat{2} = \hat{1}$ ;  
 $EF = BC$

$\triangle BCE_1$ :  $\hat{4} = \hat{3}$ ;  
 $FD = CA$  [ehk  $\hat{E} = \hat{B}$ .]

$BC = CE_1 = EF$ .

$\triangle DEF \equiv \triangle ABC$ .

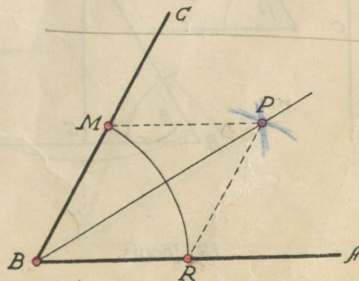
M. o. t. t.

Järeldus:  $\triangle$ -rga määravad kaks külge ja suurema külje vastasnurk.

### 51. Konstruimisülesandeid.

77) Antud nurk poolitada.

Konstruksioon: Nurga haarade peal märgime võrdsed lõigud  $BR = BM$ . Meelevaldse raadiusega tõmbame punktidest  $R$  ja  $M$  kaared, mis lõikuvad punktis  $P$ . Sirge  $BP$  poolitab nurga  $ABC$ .



77. joonis.

on paigutatud  
konstruktsiooni  
üks-üks  
üks-üks

Tõestus:  $\triangle RBP \equiv \triangle MBP$  [49]; jär.  $\widehat{RBP} = \widehat{MBP}$  ehk  $\widehat{ABP} = \widehat{CBP}$ .

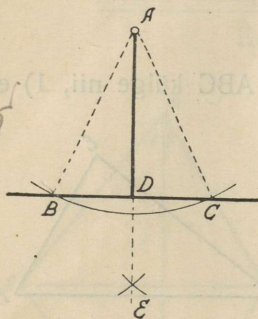
78) Sirge nurk pooleks jagada.

79) Konstruuda täisnurk antud sirgel valitud punkti juures.

80) Sirgele tõmmata ristjoon selle sirge peal antud punktist.

81) Võrdhaarse  $\triangle$ -rga tipunurk poolitada.

82) Sirgele tõmmata ristjoon väljaspool sirget antud punktist.



87. joonis.

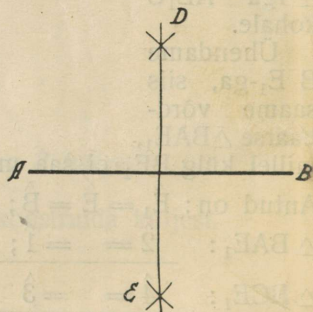
Konstruksioon: Antud punkti A võtame võrdhaarse  $\triangle$ -rga tipuks seeläbi, et me temast tõmbame meelevaldse raadiusega kaare, mis lõikab antud sirget punktis B ja C. Nüüd poolitame võrdhaarse  $\triangle$ -rga BAC tipunurga A, tõmmates B-st ja C-st võrdsete raadiustega kaared, mis lõikuvad punktis E.  $\hat{A}$  poolitaja  $AD \perp BC$ .

83) Sirglõik poolitada.

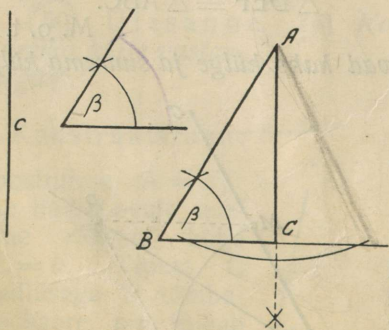
Konstruksioon. Kummastki otsapunktist A ja B tõmbame võrdsete raadiustega kaared, mis lõikuvad punktides D ja E. Sirge DE poolitab AB.

Tõestus.  $\triangle ADB$  on võrdhaarne ja DE tema tipunurga poolitaja.

84) Sirglõigule tema keskkohast ristjoon tõmmata. [V. ül. 83.]



79. joonis.



80. joonis.

85) Konstruuda täisnurkne  $\triangle$  hüpotenuusist ja teravnurgast.

Konstruksioon: Konstruime antud nurga suuruse  $\hat{B} = \beta$ ; selle ühe haara peale asetame antud hüpotenuusi  $BA = c$ ; leitud tipust A tõmbame ristjoone  $\hat{B}$  teise haara peale:  $AC \perp BC$ .  $\triangle BAC$  on otsitav.

Kuidas võiks seda  $\triangle$  veel konstruuda?

peale konstr. on aland ka tõmmata

- 86) Konstruuda võrdhaarne  $\triangle$  haarast ja alusnurgast.  
 87) " "  $\triangle$  alusest ja tipunurgast.  
 88) Konstruuda täisnurkne  $\triangle$  kaatetest.  
 89) " "  $\triangle$  kaatetest ja tema teravast lähisnurgast.  
 90) " "  $\triangle$  kaatetest ja tema vastasnurgast.  
 91) " "  $\triangle$  hüpotenuusist ja kaatetest.  
 92) " " võrdhaarne  $\triangle$  hüpotenuusist.  
 93) Täisnurk kolmeks võrdseks jaoks jagada.  
 94) Konstruuda  $\triangle$  kahest küljest ja vähema külje vastasnurgast.

52. Kui konstruimisülesandes põhielementide, s. t. külgede ja nurkade asemel on antud teise järgu elemendid, näit. kõrgused, mediaanid, nurgapoolitajad jne., siis joonestame silma varal  $\triangle$ -rga, mis umbes võiks vastata otsitavale.

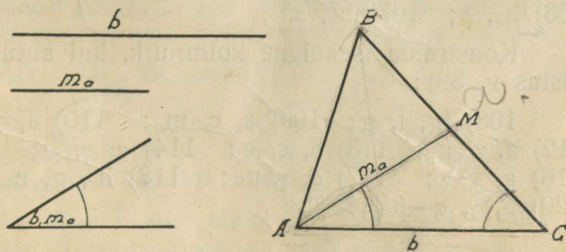
Selle  $\triangle$ -rga sisse joonestame antud elemendid, neid silmapaistvaks tehes, näit. jämedama joonega või kriipsuga. Niiviisi jagatakse otsitav  $\triangle$  mitmeks  $\triangle$ -rgaks; viimaste hulgast otsime niisuguse üles, mida ühe põhiülesande järele konstruuda saab. Selle konstruktsiooni abil leiame mõne uue elemendi, mis meile võimaldab kas otsitavat  $\triangle$ -rka ennast konstruuda, või konstruuda mõnda teist  $\triangle$ -rka, mis meid lähendab põhielementide leidmisele ja sellega otsitava  $\triangle$ -rga konstruimisele.

Mõnikord tuleb konstruitava  $\triangle$ -rga saamiseks antud ja otsitavaid elemente sündsäl kombel rühmitada, mitte-ühendatud punkte ühendada, paralleeljoon või mõni teine abijoon tõmmata, iseäranis siis, kui lihtelementide asemel on antud külgede summad või vahed või mõni teine joon.

Ülesande lahendamiseviisi ülesotsimist nim. ülesande *analüüsiks*.

On konstruimise viis leitud, siis konstruime otsitava kuju andmetest. See on ülesande *konstruktsioon*.

Pärast konstruimist tuleb meil teda veel kontrollida, kas kõik andmed on nõutud kohal. Selleks vaatame uuesti läbi kõik osakonstruktsioonid. See on konstruktsiooni *tõestus*.



81. joonis.

Näide: Konstruuda  $\triangle$  küljest  $b$ , külje  $a$  poolitajast  $m_a$  ja nende vahelnurgast nurk  $(b, m_a)$ .

Analüüs: Joonises 81 on näha kolm  $\triangle$ -rka:  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ABM$  ja  $\triangle AMC$ . Nendest saame konstruuda  $\triangle AMC$  kahest küljest  $b$  ja  $m_a$  ja nende vahelnurgast  $(b, m_a)$ . Seeläbi leiame otsitava  $\triangle$ -rga  $ABC$  nurga  $C$  ja poole teisest küljest  $MC = \frac{1}{2}a$ . Sellega on ka külge  $a = CB$  leitud ja me võime konstruuda  $\triangle ABC$  kahest küljest ja nende vahelnurgast.

Konstruksioon: 1) Meelevaldsel sirgel võtame punkti  $A$ ;

2) selle punkti  $A$  juures konstruime antud nurgaga võrdse nurga:  $\widehat{CAM} = (b, m_a)$ ;

3) konstruitud nurga ühele haarale asetame külje  $b$ :  $AC = b$ , saame tipu  $C$ ; ja

4) teisele haarale asetame mediaani  $m_a$ :  $AM = m_a$ , leiame punkti  $M$ ;

5) ühendame tipu  $C$  ja punkti  $M$  ja pikendame  $CM$ ;

6)  $CM$  pikenduse pikenduse peale asetame temaga võrdse lõigu  $MB = MC$ ; nii on leitud ka  $\triangle$ -rga kolmas tipp.

7) Ühendame  $B$   $A$ -ga.  $\triangle ABC$  on otsitav.

Tõestus: Konstruksiooni uuesti läbi vaadates leiame, et kõik andmed on omal kohal, nimelt  $\widehat{CAM} = (b, m_a)$ ;  $AC = b$  ja  $AM = m_a$ . Sellega konstruitud  $\triangle ABC$  vastab nõuetele.

Ülesandeid: 95) Konstruuda täisnurkne kolmnurk, kui antud on (andmete tähistus v. 39, 42):

96)  $b, h$ ; 97)  $a, f$ ; 98)  $h, f$ ; 99)  $f, \beta$ ; 100)  $h, \beta$ .

Konstruuda võrdhaarne kolmnurk, kui antud on:

101)  $b, h_b$ ; 102)  $a, h_b$ ; 103)  $h_b, \alpha$ ; 104)  $b, h_a$ ; 105)  $h_b, \beta$ ;  
106)  $h_a, \beta$ ; 107)  $h_a, \alpha$ .

Konstruuda isekülgne kolmnurk, kui antud on (andmete tähistus v. 39):

108)  $h_c, f, g$ ; 109)  $a, c, m_c$ ; 110)  $a, b, h_c$ ; 111)  $a, b, f$ ;  
112)  $a, \gamma, n_\gamma$ ; 113)  $b, c, g$ ; 114)  $a, \gamma, g$ ; 115)  $a, n_\beta, \alpha + \gamma$ ;  
116)  $a, f, \alpha$ ; 117)  $a, \gamma, n_a$ ; 118)  $h_c, g, n_a$ ; 119)  $n_\gamma, h_c, \gamma$ ;  
120)  $b, \gamma, \alpha - \beta$  [ $\alpha > \beta$ ].

53. Kolmnurkade ühtumatuse teoreem: Kui kaks kolmnurka ühte sünnivad kahe külje poolest, nende vahelnurkade poolest aga ühte ei sünni, siis on suurema nurga vastas suurem külg.

Eeldus:

$$AB = DE,$$

$$BC = EF,$$

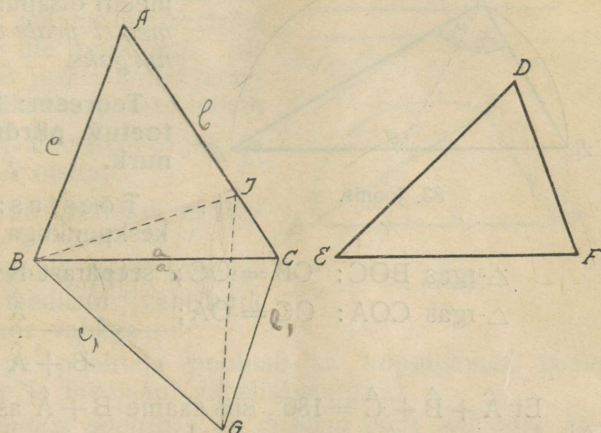
$$\hat{B} > \hat{E}.$$

Väide:

$$AC > DF.$$

Tõestus:

Paigutame  $\triangle$ -rga DEF  $\triangle$ -rga ABC külge nii, et EF ühtub BC-ga, mis võimalik, sest  $EF = BC$ , ja et  $\triangle DEF$  aseneb  $\triangle AGC$  kohale.



82. joonis.

Poolitame nurga ABG.

Et  $\widehat{ABC} > \widehat{CBG}$  (ehk  $\widehat{DEF}$ ), siis läheb nurga ABG poolitaja nurga ABC sisemist valda mööda ja lõikab AC-d punktis J. Ühendame G ja J.

$$1) \quad GB = AB (= DE)$$

$$BJ = BJ$$

$$\widehat{GBJ} = \widehat{ABJ} \text{ (jagatud)}$$

$$\triangle GBJ \equiv \triangle ABJ$$

$$GJ = AJ.$$

$$2) \quad \triangle\text{-rgas GJC on } GJ + JC > CG$$

$$\text{aga } GJ = AJ \text{ ja } CG = DF$$

$$AJ + JC > DF$$

$$\text{ehk } AC > DF. \quad \text{M. o. t. t.}$$

Ümberpööratud teoreem: Kui kaks kolmnurka ühte sünnivad kahe külje poolest, aga kolmandate külgede poolest ühte ei sünni, siis on suurema külje vastas suurem nurk.

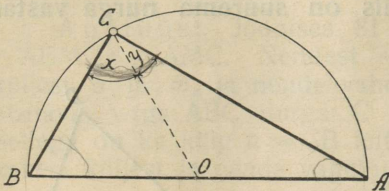
Eeldus:  $AB = DE$ ,  $BC = EF$ ,  $CA > FD$ .

Väide:  $\hat{B} > \hat{E}$ .

Tõestus (vastuväiteline): 1) Kui oleks  $\hat{B} < \hat{E}$ , siis oleks ka  $CA < FD$ . See ei ole aga nii eeldatud.

2) Kui oleks  $\hat{B} = \hat{E}$ , siis oleks ka  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  ja  $CA = FD$ ; see käib ka eelduse vastu. Jääb ainuke võimalus, et  $\hat{B} > \hat{E}$ . M. o. t. t.

54. Diameetri peale toetuv piirde-  
nurk. Nurka, mille tipp on ringi peal ja mille haardad lähevad läbi sama diameetri otsapunktide, nim. diameetri peale toetuvaks piirde-  
nurgaks.



83. joonis.

$$\begin{array}{l} \triangle\text{-rgas } BOC: OB = OC; \text{ seepärast } \hat{B} = \hat{x} \\ \triangle\text{-rgas } COA: OC = OA; \text{ „ „ } \hat{A} = \hat{y} \end{array} \Bigg\} +$$

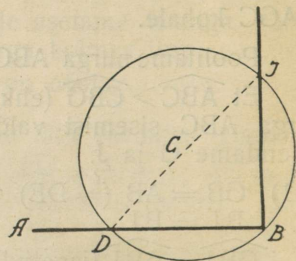
$$\hat{B} + \hat{A} = \hat{C}.$$

Et  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ , siis saame  $\hat{B} + \hat{A}$  asemele pannes  $\hat{C}$ :  
 $2\hat{C} = 180^\circ$ , ehk  $\hat{C} = 90^\circ$ .

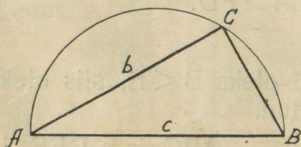
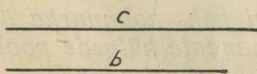
M. o. t. t.

6 Ülesanne 121. Sirglõigule tema otsapunktis ristjoon tõmmata.

Konstruksioon: Keskpunktiks võttes mingit punkti C väljaspool AB tõmbame ringi, mis läheb läbi B ja lõikab AB punktis D; läbi D ja C tõmbame diameetri DJ ja läbi B ja J sirge BJ:  $BJ \perp AB$ , sest  $\widehat{DBJ}$  on diameetri peale toetuv piirde-  
nurk.



84. joonis.



85. joonis.

6 Ülesanne 122. Täisnurkne  $\triangle$  konstruuda hüpotenuusist ja kaatetist.

Konstruksioon: Antud hüpotenuusi  $c$  võtame diameetrikaks ja tõmbame tema üle poolringi. Selle poolringi sisse asetame kõõluna diameetri otsapunktist A alates antud kaateti  $AC = b$ .  $\widehat{ACB} = 90^\circ$ , kui diameetri peale toetuv piirde-  
nurk.  $\triangle ABC$  on otsitav.

Ülesanne 123. Täisnurkne  $\triangle$  konstruuda hüpotenuusist ja teravnurgast.

Konstruktsioon: Antud hüpotenuusi  $AB = c$  võtame diameetriks ja tõmbame tema üle poolringi.  $AB$  peal konstruime  $B$  juures antud teravnurga  $B = \beta$ , mille teine haar lõikab poolringi punktis  $C$ .  $\widehat{BCA} = 90^\circ$  ja sellega on  $\triangle BCA$  otsitav.

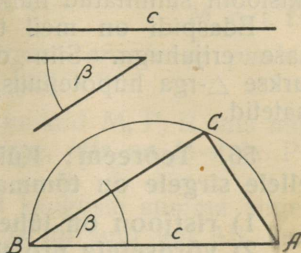
Ülesandeid. Näidata, et täisnurkses  $\triangle$ -rgas

124) hüpotenuusi peale tõmmatud kõrguse ja mediaani vahelnurk võrdub teravnurkade vahega;

125) täisnurga poolitaja poolitab ka hüpotenuusi peale tõmmatud kõrguse ja mediaani vahelise nurga;

126) hüpotenuusi poolitaja on niisama pikk kui pool hüpotenuusi;

127) Täisnurkset  $\triangle$ -rka on võimalik jagada 2-ks võrdhaarseks  $\triangle$ -rgaks.

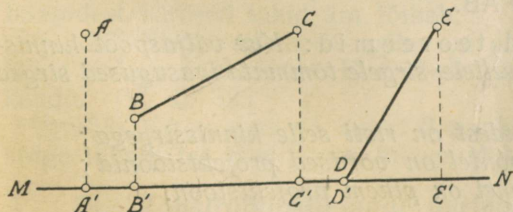


86. joonis.

### Ristjoon ja kaldjooned.

55. Projektsiooni mõiste. Definiitsioon: Punkti  $A$  projektsiooniks sirge  $MN$  peale nim.  $A$ -st  $MN$  peale tõmmatud ristjoone alust  $A'$ .

Kui punkt ise, näit.  $D$ , on selle sirge peal, mille peale teda projektitakse, siis langeb projektsioon projektitava punktiga ühte.



87. joonis.

Sirglõigu  $BC$  projektsiooniks sirge  $MN$  peale nim. selle sirglõigu kõigi punktide projektsioonide kogu. Selleks on sirge  $MN$  lõik  $B'C'$ , mis otsapunktide projektsioonide vahel on.

Kui projektitava sirglõigu üks ots  $D$  on sirge  $MN$  peal, siis on lõigu  $DE$  projektsiooniks sirge  $MN$  peale lõik  $DE'$ , mille üheks otsapunktiks on  $D$  ise ja teiseks —  $E$  pro-

jektsoon E' MN peale. Sirglõiku DE-d ennast nim. *projektitava*, ristjoont EE'-d — *projektiivaks* ja projektitava ning projektsiooni sünnitatud nurka EDE' — *kaldenurgaks*.

Edaspidi on meil tegemist peaausjalikult projektsiooni viimase erijuhuga. Siin on selge, et projektitav DE on täisnurkse  $\triangle$ -rga hüpotenuus, projektiiv EE' ja projektsioon DE' on kaatedid.

56. Teoreem: Kui väljaspool sirget asuvast punktist sellele sirgele on tõmmatud ristjoon ja kaldjooned, siis:

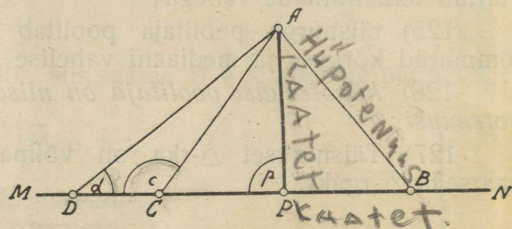
- 1) ristjoon on lühem kui ükski kaldjoon;
- 2) võrdsetele projektsioonidele vastavad võrdsed kaldjooned;
- 3) pikemale projektsioonile vastab pikem kaldjoon.

Eeldus:

- $AP \perp MN$
- $PC = PB$
- $PD > PB$

Väide:

- $AP < AB$
- $AC = AB$
- $AD > AB$



88. joonis.

Tõestus:

- 1) Täisnurkses  $\triangle$ -rgas APB on kaatet  $AP <$  hüpotenuus  $AB$  [45];
- 2)  $\triangle APC \equiv \triangle APB$ , sest  $AP = AP$ ,  $PC = PB$ ,  $\widehat{APC} = \widehat{APB}$ ; järel.  $AC = AB$ .
- 3) Et  $AP \perp MN$ , siis on  $\hat{p} = 90^\circ$  ja  $\hat{c} > 90^\circ$  kui  $\triangle APC$  välisnurk. Et  $\triangle$ -rgas  $ACD$   $\hat{c} > 90^\circ$ , siis on  $\hat{d} < 90^\circ$  ja  $\hat{c} > \hat{d}$ ; järel.  $AD > AC$  [45] ehk  $AD > AB$ .

Ümberpööratud teoreemid: Kui väljaspool kinnis-sirget asuvast punktist sellele sirgele tõmmata igasugused sirged jooned, siis:

- 1) kõige lühem nendest on risti selle kinnissirgega;
- 2) võrdsetel kaldjoontel on võrdsed projektsioonid;
- 3) pikemal kaldjoonel on pikem projektsioon.

Tõestus: 1) Kui ei oleks see kõige lühem joon  $AP \perp MN$ , vaid mingi teine joon oleks  $\perp MN$ , siis peaks viimane lühem olema kui kõige lühem joon  $AP$ , mis on ometi võimatu.

2) Kui  $AC = AB$  ja  $AP \perp CB$ , siis on  $\triangle CAB$  võrdhaarne ja  $PC = PB$  [44, II].

3) Kui  $AD > AB$ , siis ei või olla ei  $PD < PB$ , sest muidu oleks  $AD < AB$ , ega  $PD = PB$ , sest muidu oleks  $AD = AB$ .  
 Jääb ainuke võimalus:  $PD > PB$ . M. o. t. t.

Järeldus: *Punkti kaugust sirgest arvatakse punktist sirge peale tõmmatud ristjoont mööda* [23].

⑥ Ülesandeid. 128) Antud on punktid M, P, R, mis mitte ühel sirgel ei asu. Läbi R tõmmata sirge, mis on M-st ja P-st võrdkaugel.

① 129) Näidata, et punktide A ja B kauguste summa sirgest, mis sirglõiku AB-d ei lõika, on 2 korda nii suur kui AB keskkohta K kaugust samast sirgest.

① 130) Tõestada, et võrdhaarsete  $\triangle$ -rgas on aluse iga punkti kauguste summa haaradest niisama pikk kui haara peale tõmmatud kõrgus.

### 57. Ülesandeid. I. Tõestada teoreemid:

① 131) Kui  $\triangle$ -rga sisemine punkt ühendada tippudega, siis on ühendusjoonte summa vähem kui  $\triangle$ -rga ümbermõõt ja suurem kui pool ümbermõõtu.

① 132) Kumera nelinurga diagonaalide lõikepunkt on tasapinna niisugune punkt, mille kauguste summa tippudest on kõige väiksem.

① 133) Kui  $\triangle$ -rga ABC sees olev punkt P ühendada tippudega A ja B, siis on  $\widehat{APB} > \widehat{ACB}$ .

① 134) Võrdhaarsete  $\triangle$ -rga tipu juures oleva välisnurga poolitaja on alusega paralleelne.

① 135) Nurga poolitajaga ristlik sirge lõikab ära nurga haaradest ühepikkused tükid.

### II. Konstruimisülesandeid:

⑥ 136) Läbi antud punkti tõmmata sirge nii, et ta nurga haaradest võrdsed tükid ära lõikab.

⑥ 137) Nurga sisemises vallas on antud kaks punkti E ja F. Leida kõige lühem tee E-st F-sse, mis läheb mõlema haara kaudu. [V. ül. 32.]

⑥ 138)  $\triangle$ -rga sees on antud 2 punkti E ja F. Kuidas läheb kõige lühem tee E-st F-sse, mis puutub  $\triangle$ -rga iga külge?

### 58. Konstruimisülesande uurimine.

Iga kuju leidmine konstruimise teel taandub punktide leidmiseks, näit.  $\triangle$ -rga leidmine taandub tema 3 tipu leidmiseks.

Punktid tekivad meil aga joonte lõikumisel. Kaks sirget võivad lõikuda ainult ühes punktis, sirge ja ring — kahes, ja kaks ringi ka ainult kahes punktis [13, 88, 100, 101].

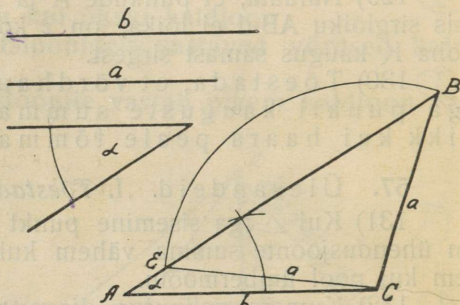
Seepärast peame niihästi konstruimisel kui ka konstruktsiooni kontrollimisel seda järele vaatama, mitmes punktis meie jooned lõikuvad; lõikepunktide arvust oleneb ka lahenduste arv.

Nende tingimuste määramine, missugustele vastama peavad andmete vahekorrad, et ülesanne oleks võimalik, et ta annaks 1 lahenduse, et ta annaks 2 lahendust, nim. ülesande uuri-miseks.

ruude  
[ül. 139]

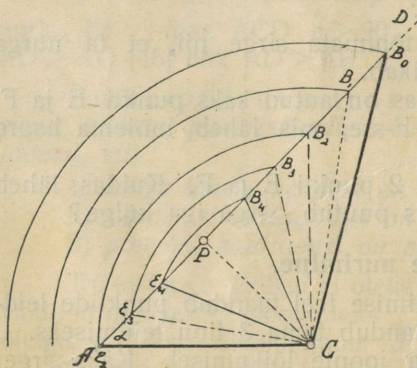
Näide: [ül. 139]. Konstruuda  $\triangle$  kahest küljest ja ühe külje vastasnurgast.

Konstruktsioon:  
Nagu ül. 76 konstruime  $\hat{A} = \alpha$ ; ühe haara peale asetame ühe külje  $AC = b$  ja saadud tipust C tõmbame raadiusega  $a$  kaare. Kui  $a < b$ , siis lõikab see kaar teist haara kahes punktis B ja E. Ühendanud kummaagi C-ga, saame lahendusena 2  $\triangle$ -rka,  $\triangle ABC$  ja  $\triangle AEC$ , mis mõlemad nõuetele vastavad.



89. joonis.

Uurimine: I. Kui  $a > b$ , siis läheb C-st raadiusega  $a$  tõmmatud kaar tipu A tagant mööda ja lõikab haara AB-d ühes punktis  $B_0$ , sest võetud raadius on pikem kui tipu C kaugus haarast AB:  $a > h_c = CP$  [89, järeld.]. Lahendusena esineb üks kolmnurk —  $\triangle ACB_0$ .



90. joonis.

$a$  peab iseenesest pikem olema kui  $b$ , kui  $a$  on nüri- või täisnurk. Kui me  $a$ -d vähendame, siis hakkab lõikepunkt B lähenema tipule A; me saame ikkagi 1 lahenduse, — 1  $\triangle$ -rga, näit.  $ACB_1$ , nii kaua kui  $a > b$ , nagu ül. 76.

II. Kui  $a$  saab sama pikaks kui  $b$ ,  $a = b$ , siis ilmub ka teine lõikepunkt, nimelt kaar läheb tipust A läbi: lahendusena esineb aga ikkagi veel 1  $\triangle$ , nimelt võrdhaarne  $\triangle ACB_2$ .

III. Kui me edasi vähendame  $a$ -d, nii et  $a < b$ , siis hakkab B, liikudes AD-d mööda, lähenema A-le ja teine lõikepunkt E — kaugenema A-st, sellega teineteisele ja punktile P lähenedes. Selle juures on olemas 3 võimalust:

- 1)  $b > a > h_c$ ;
- 2)  $b > a = h_c$ ;
- 3)  $b > a$  ja  $a < h_c$  ehk  $b > h_c > a$ .

Niikaua kui  $a > h_c$ , saame lahendusena 2  $\triangle$ -rka:

$\triangle ACB_3$  ja  $\triangle ACE_3$ , nii et

$$\begin{aligned} AC &= AC & \hat{A} &= \hat{A} (= \alpha) \\ CE_3 &= CB_3 & \widehat{AE_3C} &= 180^\circ - \widehat{AB_3C}, \text{ sest } \widehat{B_3E_3C} = \widehat{CB_3E_3} \\ AE_3 &= AB_3 - E_3B_3 & \widehat{ACE_3} &= \widehat{ACB_3} - \hat{E}_3 CB_3. \end{aligned}$$

2) Kui  $a$  väheneb niipalju, et saab  $a = h_c (= CP)$ , siis on punktid B ja E teineteisele niikaugele lähenenud, et nad ühte langevad punktis P; kaar, mis keskpunktist C tõmmatakse raadiusega  $a$ , ei lõika enam AD-d, vaid puutub teda ainult [89], ja lahendusena saame ühe täisnurkse  $\triangle$ -rga ACP.

3) Kui  $a$ -d edasi vähendada, siis kaob nurga haaral AD-l ja kaarel ühine punkt ära, kaar ei ulatugi haarani AD ja me ei saagi  $\triangle$ -rka — ülesanne on võimatu.

### Kokkuvõtte.

A. Kui  $a > 90^\circ$ , siis on  $a > b$  ja ülesandel on 1 lahendus, nürinurkne  $\triangle$ .

B. Kui  $a = 90^\circ$ , siis on  $a > b$  ja ülesandel on 1 lahendus, täisnurkne  $\triangle$ .

C. Kui  $a < 90^\circ$  ja I.  $a > b$ , siis on ülesandel 1 lahendus.

II.  $a = b$ , siis on ülesandel 1 lahendus, võrdhaarne  $\triangle$ .

III.  $a < b$ , seejuures aga:

- 1)  $a > h_c$ , siis — 2 lahendust, millest 1 nürinurkne;
- 2)  $a = h_c$ , „ — 1 „  $\triangle$  on täisnurkne;
- 3)  $a < h_c$ , „ — 0 „ ülesanne võimatu.

Ülesandeid. Konstruida kolmnurk andmetest:

- |                                 |                         |                       |
|---------------------------------|-------------------------|-----------------------|
| 140) $c, \beta, m_a$ ;          | 141) $b, \gamma, h_c$ ; | 142) $a, \alpha, g$ ; |
| 143) $\gamma, n_\gamma, h_c$ ;  | 144) $a, h_a, h_b$ ;    | 145) $c, h_c, m_c$ ;  |
| 146) $b, \alpha + \beta, m_b$ , | 147) $h_c, f, m_a$ .    |                       |

59. Suuruste muutumine. I. Konstruimisülesande uurimisel, näide 139, nägime, et külge  $b$  ja nurk  $\alpha$  jäid meil muutmata, kuna me külge  $a$  pikkust muutsime. Ühes külge  $a$  muutumisega muutusid ka külge  $c$  [ $c = AB, c = AE$ ], nurk C ja nurk B.

✕ **Definitsioonid.** *Suurust, mis ülesande lahendamisel või küsimuse uurimisel omal ühe ja sellesama väärtuse alles hoiab, nim. konstantseks ehk muutumatuks; suurust, mis ülesande lahendamisel või küsimuse uurimisel mitu väärtust omandab, nim. muutujaks.*

II. Külje  $a$  väärtusi muutsime meie ise oma tahtmise ja heaksarvamise järele, kuna nurgad  $B$  ja  $C$  ja külj  $c$  muutusid iseenesest, külje  $a$  muutumise tagajärjena.

✕ *Niisugust suurust, mille muutumine ei olene ühestki teisest suurusest, mille väärtusi meie ise oma heaksarvamise järele valime, nim. olenematuks muutujaks. Niisugust suurust, mille väärtuste muutumine on mingi teise suuruse muutumise tagajärg, mis oleneb mingi teise suuruse muutumisest, nim. olenevaks muutujaks ehk olenematu muutuja funktsiooniks.*

III. Võetud näites, ül. 139, võime külje  $a$  võtta nii pika, kui meie iganes soovime; meie võime teda suurendada kui palju tahame; ei ole nii pikka sirglõiku olemas, millest pikemaks meie  $a$ -d valjda ei võiks ja ülesanne ei kaota ikkagi oma mõtet, oma lahendust. Niisugusel korral on  $a$  n. n. lõpmata suurenev suurus.

✕ *Suurust, mis teatava seaduse järele muutudes saab suuremaks kui ükski ette kindlaks määratud suurus, olgu see kui suur tahes, ja sama seaduse järele edasi muutudes selleks ka jääb, nim. lõpmata suurenevaks suuruseks.*

Kirjeldatud  $a$  muutumisel muutub ka  $\hat{B}$ ; ta saab aga ikka vähemaks ja vähemaks, ja ei ole nii väikest nurka olemas, millest  $\hat{B}$  väiksemaks ei võiks saada, kui me  $a$ -d küllalt suurendame.

✕ *Suurust, mis teatava seaduse järele muutudes saab väiksemaks kui ükski ette kindlaks määratud suurus, olgu see kui väike tahes, ja sama seaduse järele edasi muutudes selleks ka jääb, nim. lõpmata vähenevaks suuruseks.*

Külje  $a$  muutmisel võib  $\hat{C}$  omandada ka 2 väärtust korraga. Kõneldakse: niikaua kui  $a > b$ , muutub  $\hat{C}$  „üheselt“, ta muutumine on „ühene“, s. t. ühele  $a$  väärtusele vastab üksainus  $\hat{C}$  väärtus: niikaua kui  $a < b$  ja  $a > h_c$ , muutub  $\hat{C}$  „kaheselt“, ta muutumine on „kahene“, s. t. ühele  $a$  väärtusele vastavad kaks  $\hat{C}$  väärtust. Vaatleme ainult  $\widehat{ACB}$  ja mitte  $\widehat{ACE}$ .

Kui  $a$  suureneb piiramatult, suureneb ka  $\widehat{ACB}$ , aga mitte piiramatult;  $\widehat{ACB}$  ei või suuremaks saada kui  $180^\circ - a$ .

Kui  $a$  väheneb, väheneb ka  $\widehat{ACB}$ ; niikaua kui veel lahen-  
 dus olemas on, ei või  $\widehat{ACB}$  vähemaks saada kui  $90^\circ - a$ .

*A* Suurust, mis teatud seaduse järele muutudes muutub kindlates piirides, s. t. nii, et ta ei või omandada väärtusi, mis on ühest konstantsest väärtusest suuremad ja teisest konstantsest väärtusest vähemad, nim. lõplikuks.

IV. Olgu  $a = h_c$ . Võtame kiire, mis lähtub C-st P suunas; ta lõikub AD-ga punktis P, nii et  $a = CP$  ja lõpppunkt B langeb ühte P-ga. Et  $a$ -d suurendada, pöörame kiirt C ümber päripäeva. Selle juures jookseb lõikepunkt AD-d mööda D suunas ja CB-d mööda B suunas, ilma et ta ühtegi punkti vahele jätaks;  $a$  on omandanud kõik väärtused CP-st kuni CB-ni.

Kõneldakse:  $a$  on kulgenud kõik väärtused CP-st kuni CB-ni ja  $a$  on muutunud nendes piirides pidevalt. Suurus muutub pidevalt piirides  $a$ -st kuni  $b$ -ni, kui ta  $a$ -st  $b$  peale üle minnes kulgeb kõik  $a$  ja  $b$  vahel olevad väärtused ja ühe väärtuse järele teise, esimesele otsekohe järgneva väärtuse omandab, ennast lõpmata väheneva suuruse võrra muutes. Suurus võib muutuda ka hüpetega — omandades mitu väärtust, aga nende vahelolevaid väärtusi mitte omandades, näit. õpilaste arv klassis võib muutuda ainult hüpetega, omandades ainult täisarvulised ja vahele jättes murrulised väärtused. Peale selle võib suurus oma muutumisel katkeda.

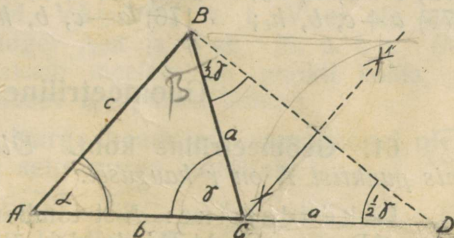
② Ülesanne. 148) Jälgida ül. 139 külje  $c$  muutumist. Mis sugune on tema muutumise põhjus, ulatus ja iseloom?

60. Konstruimisülesannete lahendamine, kui antud on külgede summa või vahe.

N. 3. 1-ne näide: [ül. 149.] Konstruuda  $\triangle$ , kui antud on  $a + b, c, a$ .

Analüüs:  $\triangle$ -rgas ABC asetame  $AC = b$  pikenduse peale  $CB = a$  nii, et  $AD = b + a$  (ehk  $a + b$ ).

Ühendame D B-ga; siis saame  $\triangle ABD$ , milles teada on  $AD = b + a$ ,  $AB = c$ ,  $\hat{A} = a$  ja mida me saame konstruuda



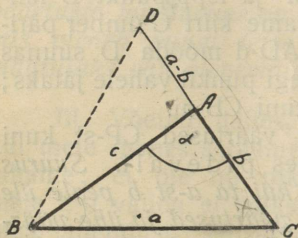
91. joonis.

kahest küljest ja nende vahelnurgast. Selle läbi leiame võrdhaarse  $\triangle$ -rga BCD aluse BD ja tema lähisnurka D ( $=\frac{1}{2}\gamma$ ). Tipu C leidmiseks tõmbame BD-le keskristjoone.

Uurimine. Et kõik osakonstruktsioonid on üheselt lahendatavad, siis on ülesandel 1 lahendus, kui vaid võetud on  $a + b > c$ .

2.4. 2-ne näide: [ül. 150]. *Konstruida  $\triangle$ , kui antud on  $a - b, c, \alpha$ .*

Analüüs: Asetades lühemat külge  $b$  pikema  $a$  peale näeme, et meil praegusel juhul korda ei lähe konstruitavat  $\triangle$ -rka saada. Asetame aga pikema külje  $BC = a$  lühema külje  $AC = b$  peale, saame nende „negatiivse“ vahe  $AD = a - b$  väljaspool  $\triangle$ -rka ABC. Ühendanud D B-ga, saame  $\triangle$  ADB, milles meil teada on  $AD = a - b$ ,  $AB = c$ ,  $\widehat{DAB} = 180^\circ - \alpha$ . Selle  $\triangle$ -rga ADB konstruimise läbi leiame võrdhaarse  $\triangle$ -rga BCD aluse BD ja tema lähisnurka. Tema tipu C leidmiseks tõmbame BD-le keskristjoone.



92. joonis.

Märkus: Mõnikord tuleb tarvitada positiivset, mõnikord negatiivset vahet.

Konstruida  $\triangle$ , kui antud on:

- |  |                              |                                      |
|--|------------------------------|--------------------------------------|
| 151) $b + c, a, \gamma$ ;                | 152) $b - c, a, \gamma$ ;    | 153) $b + c, a, \alpha$ ;            |
| 154) $b - c, a, \alpha$ ;                | 155) $b + c, a, \beta$ ;     | 156) $b - c, a, \beta$ ;             |
| 157) $a + b, a, \beta$ ;                 | 158) $a - b, a, \beta$ ;     | 159) $a, b + c, \alpha = 90^\circ$ ; |
| 160) $a - b, \beta, \alpha = 90^\circ$ ; | 161) $a + b + c, a, \beta$ ; | 162) $a + b + c, h_a, \gamma$ ;      |
| 163) $b + c, h_c, \alpha$ ;              | 164) $b - c, h_c, \alpha$ ;  | 165) $b + c, a, \beta$ ;             |
| 166) $b - c, a, \beta$ ;                 | 167) $a + b, h_a, \beta$ ;   | 168) $a - b, h_a, \beta$ ;           |
| 169) $a + c, b, \alpha$ ;                | 170) $a - c, b, \alpha$ ;    | 171) $b + c, a, h_b$ ;               |
| 172) $b - c, a, h_b$ ;                   | 173) $b + c, a, h_c$ ;       | 174) $b - c, a, h_c$ ;               |
| 175) $a + c, b, h_c$ ;                   | 176) $a - c, b, h_c$ .       |                                      |

## Geomeetriline koht.

61. Geomeetriline koht. Ülesanne 177. Leida punkt, mis punktist A on  $r$  kaugusel.

Lahendamine: A-st tõmbame kiire ja selle peale asetame  $AB = r$ . Punkt B rahuldab ülesande nõuet. Kiire võime tõmmata mõnes teises suunas, siis saame teise punkti, mis ka

vastab ülesande nõudele. Neid punkte saame palju, saame terve joone täie; kõik punktid, mis on A-st raadiusega  $r$  tõmmatud ringi peal, on A-st  $r$  kaugusel; ringi sees olevad punktid on A-le lähemal kui  $r$  ja väljaspool ringi olevad punktid on A-st kaugemal kui  $r$ . Ring on see koht — geomeetiline koht — kus asuvad kõik niisugused punktid ja asuvad ainult nemad.

**Definitsioon:** Punkti geomeetriliseks kohaks nim. joont, mille peal olevad punktid kõik alluvad ühele ja samale seadusele ja millest väljaspool olevad punktid sellele seadusele ei allu.

Seepärast, et tõestada, et leitud joon on teatud punkti geomeetriliseks kohaks, tuleb näidata, 1) et kõik selle joone punktid alluvad mainitud seadusele ja 2) et punktid väljaspool seda joont ei allu mainitud seadusele.

**I-ne geom. koht:** Antud punktist A antud kaugusel  $r$  oleva punkti geomeetriliseks kohaks (g. k.) on ring, mis tõmmatakse antud punktist A antud raadiusega  $r$ .

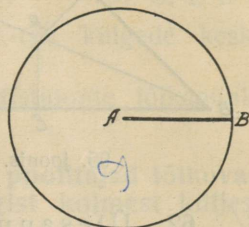
**II-ne geom. koht:** Kahest punktist samakaugel oleva punkti geom. kohaks on neid punkte ühendava sirglõigu keskristjoon.

**Tõestus:** Olgu A ja B antud punktid, KR — sirglõigu AB keskristjoon, P meelevaldne punkt KR peal ja V — meelevaldne punkt väljaspool KR. Siis on: 1)  $PA = PB$ , sest et  $KA = KB$  ja võrdsetele projektsioonidele vastavad võrdsed kaldjooned; s. t. P on samakaugel A-st ja B-st.

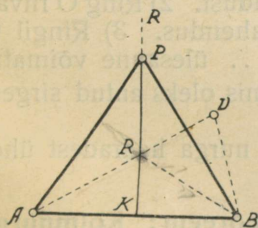
2)  $VA = VR + RA = VR + RB > VB$ ; järel.  $VA > VB$ ; s. t. V ei ole sama kaugel A-st ja B-st. M. o. t. t. (Mis maksab meelevaldse punkti kohta, on maksev iga punkti kohta.)

**III-as geom. koht:** Nurga haaradest samakaugel oleva punkti geom. kohaks on selle nurga poolitaja.

**Tõestus:** 1) Olgu  $\widehat{RBA} = \widehat{RBC}$  ja  $RE \perp BA$ ,  $RJ \perp BC$ . Siis on  $\triangle EBR \cong \triangle JBR$  [48,1]; järel.  $RE = RJ$ ; s. t. nurgapoolitaja peal olevad punktid on samakaugel haaradest.



93. joonis.



94. joonis.

*geomeetiline koht (g. k.)*



ristjoonte lõikepunkt on siis kõigist kolmest tipust ühekaugel:  
 $OB = OA = OC$ .

Et  $OB = OC$ , siis on  $\triangle BOC$  võrdhaarne,  $BC$  tema alus ja  $O$  tema tipp. Seepärast läheb ka külje  $BC$  keskristjoon läbi teiste külgede keskristjoonte lõikepunktist  $O$ . M. o. t. t.

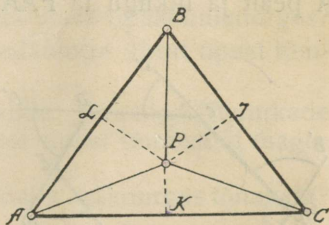
⑥ Ülesandeid: 181) Nürinurkse  $\triangle$ -rga külgede keskristjoonte lõikepunkt leida!

⑥ 182) Täisnurkse  $\triangle$ -rga külgede keskristjoonte lõikepunkt leida!

**64. Teoreem:** Kolmnurga nurkade poolitajad lõikuvad kõik ühes punktis; see punkt on kõigist kolmest küljest ühekaugel.

Tõestus: Nurga  $A$  poolitaja  $AP$  punktid on  $AB$ -st ja  $AC$ -st ühekaugel; nurga  $B$  poolitaja  $BP$  punktid on  $BA$ -st ja  $BC$ -st ühekaugel. Nende nurgapoolitajate lõikepunkt  $P$  on siis kõigist kolmest küljest ühekaugel: kui  $PL \perp AB$ ,  $PK \perp AC$ ,  $PJ \perp BC$ , siis on  $PK = PL = PJ$ .

$PK = PJ$  tähendab, et punkt  $P$  on nurga  $C$  haaradest ühekaugel; järelikult asub ta nurga  $C$  poolitaja peal. S. t.  $CP$  on nurga  $C$  poolitaja ja ta läheb ka teiste nurkade poolitajate lõikepunktist läbi. M. o. t. t.

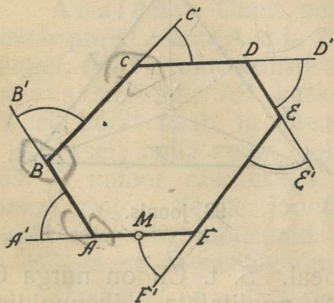


98. joonis.

### III-as peatükk: Nelinurk.

65. Teoreem: Huknurga välisnurkade summa on täispööre.

Tõestus: Huknurga piire on kinnine murtud joon. Olgu ta punkti liikumise jälg. Alaku punkt  $M$  oma liikumist külje  $FA$  pealt ja liikugu ta  $FAA'$  suunas. Jõudnud tippu  $A$ , muudab punkt  $M$  järsku oma suuna  $AA'$  pealt  $ABB'$  peale, pöördudes esimese välisnurga  $A'AB$  võrra. Jõudnud tippu  $B$ , muudab punkt  $M$  jälle järsku oma liikumise suuna  $BB'$  pealt  $BCC'$  peale, pöördudes teise välisnurga  $B'BC$  võrra. Nii käib liikuv punkt  $M$  kogu piirde läbi, igas tipus muutes järsku oma suunda ja pöördudes seal tolle tipu juures oleva välisnurga võrra. Kui punkt jõuab tippu  $F$ , siis muudab ta jälle järsku oma suuna  $FF'$  pealt  $FAA'$  peale, pöördudes viimase välisnurga  $F'FA$  võrra. Sellega on



99. joonis.

liikumise suund ennast pöörnud esialgse suunaga võrreldes huknurga kõigi välisnurkade summa võrra ja ühtlasi tuli ta oma esialgse suuna juurde tagasi. See tähendab — tegi täispöörde. Järeel huknurga välisnurkade summa on täispööre ehk 2 sirget nurka:  $2\pi = 360^\circ$ .

② Ülesandeid. 183) Missuguste suuruste liiki kuulub huknurga välisnurkade summa?

② 184) Viisnurgas on kõik välisnurgad ühesuurused. Kui suur on iga välisnurk? iga sisenurk?

66. Teoreem: Huknurga sisenurkade summa on nii mitu sirget nurka, mitu tippu on huknurgal ilma 2-ta:

$$(n-2) \cdot 180^\circ \text{ ehk } (n-2) \cdot \pi.$$

Tõestus: (Joon. 99). Iga sisenurk ühes sama tipu juures asuva välisnurgaga annavad ühe sirge nurga. Niisuguseid kõrvu-

nurkade paare on niimitu, kuimitu tippu on; s. t. me saame niimitu sirget nurka, mitu tippu on:  $n \cdot 180^\circ$ . Sellest summast lahutame välisnurkade summa  $360^\circ$ , saame:  $n \cdot 180^\circ - 360^\circ = (n - 2) \cdot 180^\circ$ , s. t.  $(n - 2)$  sirget nurka ehk  $(n - 2) \cdot \pi$ .

M. o. t. t.

② Ülesandeid. 185) Kui suur on 7-nurga, 11-nurga, 12-nurga sisenurkade summa?

② 186) 8-nurgas, 9-nurgas, 10-nurgas, 15-nurgas on kõik sisenurgad ühesuurused. Kui suur on iga sisenurk? iga välisnurk?

② 187) Missuguste suuruste hulka kuulub hulknurga sisenurkade summa?

② 188) Missugune on hulknurga sisenurkade summa muutumise põhjus, ulatus ja iseloom?

② 189) Mitu diagonaali saab tõmmata ühest tipust hulknurgas?

② 190) Mitmeks  $\Delta$ -rgaks jagavad hulknurga ühest tipust tõmmatud diagonaalid?

② 191) Kui suur on ühtekokku nende  $\Delta$ -rkade sisenurkade summa, milleks jagavad hulknurga ühest tipust tõmmatud diagonaalid?

② 192) Mitu diagonaali üldse on võimalik hulknurgas tõmmata?

Tõestada laused:

① 193) Kumera nelinurga ümbermõõt on suurem kui diagonaalide summa ja väiksem kui nende kahekordne summa.

① 194) Kumeras nelinurgas lõikuvad ühe külje lähisnurkade poolitajad niisuure nurga all, kuisuur on teiste nurkade poolsumma ja vastasnurkade poolitajad — niisuure nurga all, kuisuur on teiste nurkade poolvahe.

Konstruuda nelinurk:

⑥ 195) kahest lähisküljest, diagonaalidest ja nende vahelnurgast.

⑥ 196) küljest, tema lähisnurkadest, diagonaalidest ja nende vahelnurgast.

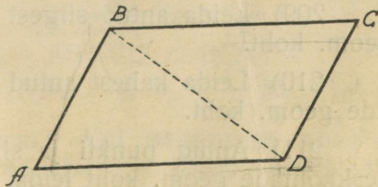
## Parallelogrammid.

67. Definitsioon: Parallelogramm on nelinurk, mille vastasküljed on paralleelsed.

Parallelogrammi sümboliks on märk #.

Definitsioonist järgneb:

I-ne teoreem: Parallelogrammi vastasküljed on võrdsed —



100. joonis.

sest rööplükkel nihkuvad kõik liikuva tasapinna punktid samapikkuse lõigu võrra edasi (26).

**II-ne teoreem: Diagonaal jagab parallelogrammi kaheks ühtuvaks kolmnurgaks, nimelt  $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$  II. ü. t. põhjal, sest  $BD = BD$ ,  $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$  ja  $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$ . M. o. t. t.**

Märkus I. Viimasest teoreemist võib iseseisvalt järeldada, et #-i vastasküljed on võrdsed ja ||-jooned on igal kohal teineteisest ühekaugel.

Märkus II. Üks #-i külj võetakse aluseks; siis on #-i kõrguseks mingist vastaskülje punktist selle aluse või tema pikenduse peale tõmmatud ristjoon.

② Ülesandeid. 197) Kui suured on #-i vastasnurgad teineteisega võrreldes?

2 198) Kui suur on #-is ühe külje lähisnurkade summa?

2 199) Parallelogrammis on üks nurk  $90^\circ$ . Kui suured on teised nurgad?

Konstruida #:

6 200) lähiskülgedest ja nurgast;

6 201) lähiskülgedest ja kõrgusest;

202) lähiskülgedest ja diagonaalist;

203) küljest, diagonaalist ja nurgast;

6 204) küljest, kõrgusest ja diagonaalist;

205) küljest ja kahest kõrgusest;

206) ühest diagonaalist ja kahest kõrgusest.

207) Antud nurga haarade vahele mahutada antud sirglõik antud suunas.

1. 208) Olgu ABC võrdkülgne  $\triangle$ , BD ja CD nurkade B ja C poolitajad. Tõestada, et sirged, mis lähevad läbi D, üks || AB-ga ja teine || AC-ga, jagavad BC kolmeks võrdseks osaks.

6 209) Leida antud sirgest antud kaugusel olevate punktide geom. koht.

6 210) Leida kahest antud sirgest samakaugel olevate punktide geom. koht.

6 211) Antud punkti ja sirge vahel mõeldavate sirglõikude keskohtade geom. koht leida.

11 6 212) Konstruida  $\triangle$  andmetest  $a, h_a, m_b$ .

geom. koht.

68. Teoreem: Parallelogrammi diagonaalid poolitavad teineteist.

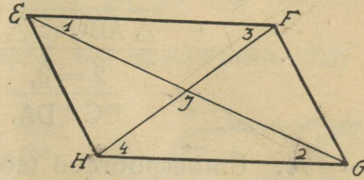
Tõestus:

$EF = GH$ ,  $\hat{1} = \hat{2}$ ,  $\hat{3} = \hat{4}$  (põikn.);

järel.  $\triangle EGF \equiv \triangle GHE$ .

Järel.  $EJ = JG$ ,  $FJ = JH$ .

M. o. t. t.



101. joonis.

Ülesandeid.

Konstruida #:

- 213) diagonaalidest ja nende vahelnurgast;
- 214) diagonaalidest ja küljest;
- 215) diagonaalidest ja kõrgusest;
- 216) küljest, kõrgusest, diagonaalist;
- 217) küljest, diagonaalist ja diagonaalide vahelnurgast.
- 218) Konstruida  $\triangle$  kahest küljest ja kolmanda külje poolitajast.

219) Nurga sees antud punkti läbi tõmmata sirge nii, et see punkt poolitaks sirglõigu, mis on nurga haarade vahel.

220) Missugune sümmeetria on #-il ja kus asuvad piirde sümmeetrilised punktid?

221) Tõestada, et kui ühe #-mi tipud teise #-mi külgedel asuvad, siis on neil ühine sümmeetria keskpunkt.

222) Moodustada looduses parallelogramm

- a) ainult mõõtnööri abil;
- b) mõõtnööri ja nurkriista abil.

69. Ümberpööratud teoreem: Kui nelinurga vastasküljed on paarikaupa võrdsed, siis on nad ka paralleelsed.

Tõestus: Antud on, et  $AB = CD$ ,  
ja et  $BC = DA$ ;

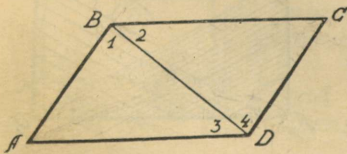
iseenesest on  $AC = AC$ .

$$\triangle ABC \equiv \triangle CDA \text{ [III. ü. t.]}$$

$$\hat{1} = \hat{4} \text{ ja } \hat{2} = \hat{3}.$$

$$AB \parallel CD \quad BC \parallel DA$$

s. t. ABCD on #. M. o. t. t.



102. joonis.

70. Ümberpööratud teoreem: Kui nelinurgas on üks paar vastaskülgi isekeels paralleelsed ja võrdsed, siis on ka teine paar vastaskülgi isekeels paralleelsed ja võrdsed (vt. joonis 102).

Tõestus: Kui  $AB = CD$  ja  $AB \parallel CD$ ,  
siis on  $AB = CD$ ,  $\hat{1} = \hat{4}$  (põikn.),  $AC = AC$ ;

$$\triangle ABC \equiv \triangle CDA \text{ [I. ü. t.]}$$

$$\hat{2} = \hat{3}, \quad BC = DA.$$

$$BC \parallel DA.$$

M. o. t. t.

✱ 71. Ümberpööratud teoreem: Nelinurk, mille diagonaalid teineteist poolitavad, on parallelogramm.

Eeldus:  $NO = OR$ ,  $MO = OP$ .

Väide:  $NP \parallel RM$ ,  $MN \parallel PR$ .

Tõestus:  $ON = OR$   
 $OP = OM$

$$\hat{3} = \hat{1}$$

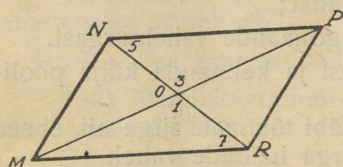
$$\triangle NOP \equiv \triangle ROM$$

$$\hat{5} = \hat{7}; \quad NP = RM;$$

$$NP \parallel RM$$

$$MN \parallel PR; \quad MN = RP \text{ [70].}$$

$$MNPR \text{ on } \# \quad \text{M. o. t. t.}$$



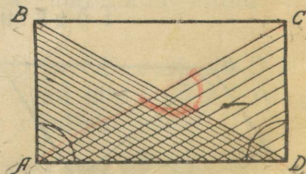
103. joonis.

### Erilised parallelogrammid.

✱ 72. Definitsioon: Ristkülik on nelinurk, mille nurgad kõik on täisnurgad.

Teoreem: Ristküliku diagonaalid on isekeskis võrdsed.

Tõestus: Et  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$ , siis on  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel DA$ ; s. t. ABCD on #. Seepärast on  $AB = CD$ ;  $AD = DA$ ;  $\hat{A} = \hat{D}$ ; järel.  $\triangle ABD \equiv \triangle DCA$ . Järel.  $BD = CA$ .  
M. o. t. t.



104. joonis.

Ⓞ Ülesandeid. 223) Konstruuda ristkülik küljest ja diagonaalide vahelnurgast.

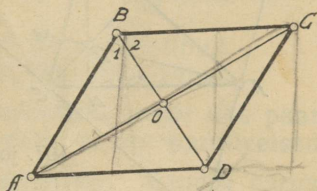
Ⓞ 224) Konstruuda ristkülik diagonaalist ja diagonaalide vahelnurgast.

Ⓞ 225) Missugune sümmeetria on ristkülikul ja kuidas on asendatud piirde sümmeetrilised punktid?

73. **Definitsioon:** Romb on nelinurk, mille küljed kõik on ühepikkused ja nurgad on kaldnurgad. Romb on #, sest tema vastasküljed on paari kaupa võrdsed (69).

**Teoreem:** Rombi diagonaalid on vastastikku risti ja poolitavad tema nurki.

Tõestus: Et  $AB = BC$ , siis on  $\triangle ABC$  võrdhaarne ja  $AC$  on tema alus. Et romb on #, siis on  $AO = OC$  ja  $BO$  on võrdhaarse  $\triangle$ -rga  $ABC$  aluse mediaan. Seepärast on  $BO \perp AC$ , ehk  $BD \perp AC$  ja  $\hat{1} = \hat{2}$  [44,1]. M. o. t. t.



105. joonis.

Järeldus: Rombi diagonaalid on tema sümmeetria teljed.

7) Ülesandeid. 226) Moodustada looduses romb

- ainult mõõtnööri abil;
- mõõtnööri ja nurkriista abil.

6) Konstruuda romb: 227) küljest ja kõrgusest;

228) küljest ja diagonaalist;

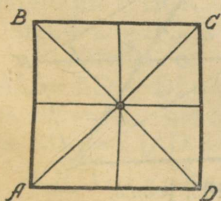
229) diagonaalist ja kõrgusest;

230) diagonaalidest.

231) Ristküliku keskkochti järjekorras ühendavad sirged on rombi küljed.

74. **Definitsioon:** Ruut on nelinurk, mille nurgad kõik on täisnurgad ja mille küljed on kõik ühepikkused.

S. t. ruudul on ühtlasi kõik ristküliku ja rombi omadused:



106. joonis.

1) Ruudu diagonaalid on ühepikkused, on teineteisega risti ja poolitavad ruudu nurki.

2) Vastaskülgede keskkochtadest läbiminevad sirged ja diagonaalid on ruudu sümmeetria teljed.

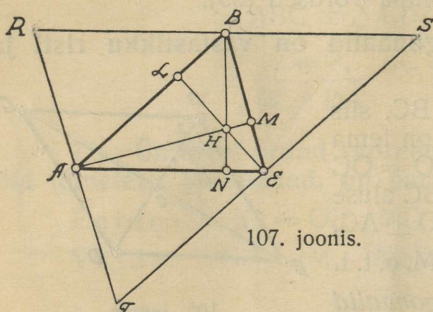
3) Ruudu 4 sümmeetria telge lõikuvad ühes punktis, mis on ruudu neljakordse sümmeetria keskpunktiks.

Ülesandeid. Tõestada laused:

1) 232) Kui ruudu tippudest alates iga külje peale asetada samas suunas ühepikkused lõigud ja saadud punktid järjekorras ühendada, siis tekib uus ruut.

2) 233) Ristküliku nurkade poolitajad moodustavad ruudu; parallelogrammi nurkade poolitajad moodustavad ristküliku.

75. Teoreem: Kolmnurga kõrgused lõikuvad kõik ühes punktis.



107. joonis.

Eeldus:  $BN \perp AE$ ,  
 $AM \perp BE$ ,  $EL \perp AB$ .

Väide:  $BN, AM, EL$   
lõikuvad ühes punktis.

Tõestus: Tõmbame  
iga tipu läbi  $\parallel$ -jooned  
vastasküljele. Need lõiku-  
vad ja moodustavad uue  
 $\triangle RST$ .

Et  $BR \parallel EA, RA \parallel BE; AT \parallel BE, TE \parallel AB; ES \parallel AB, SB \parallel EA$ .

[67]  $BR=EA, RA=BE; AT=BE, TE=AB; ES=AB, SB=EA=BR$ .

$$RA = AT$$

$$TE = ES$$

$$SB = BR.$$

Järel. on antud  $\triangle$ -rga ABE tipud uue  $\triangle$ -rga RST külgede keskkohad, ja antud  $\triangle$ -rga kõrgused on uue  $\triangle$ -rga külgede keskristjooned; niisugustena lõikuvad nad ühes punktis [63]. Seda punkti nim. ortotsentriks.

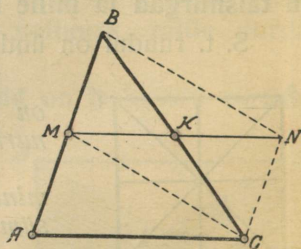
### Trapets.

76. Teoreem: Kolmnurgas on kahe külje keskkohiti ühendav sirg-lõik pool osa kolmandast küljest ja temaga paralleelne.

Eeldus:  $AM = MB, CK = KB$ .

Väide:  $MK \parallel AC, MK = \frac{1}{2}AC$ .

Tõestus: Asetame MK pikenduse peale  $KN = MK$ ; ühendame N B-ga ja C-ga ja C M-ga.



108. joonis.

Et  $BK = KC$  ja  $MK = KN$ , siis on  $MBNC \#$  [71].  
See tähendab:  $NC \parallel BM$  ja  $NC = BM$ .

Et  $MA$  on  $BM$  pikendus ja  $MA = BM$ ,  
siis on ka  $NC \parallel MA$  ja  $NC = MA$ .

Järel. [70]  $MN \parallel AC$  ja  $MN = AC$ .

Aga  $MK = \frac{1}{2}MN$ . Seepärast:  $MK \parallel AC$  ja  $MK = \frac{1}{2}AC$ .

M. o. t. t.

Ülesandeid. 234)  $\triangle$ -rga küljed on 13 cm., 14 cm., 15 cm. Kui pikad on nende külgede keskkohati ühendavad sirglõigud? Tehke joonis!

4 Tõestada laused: 235) Nelinurga külgede keskkohad on niisuguse  $\#$ -i tipud, mille küljed on pool diagonaalidest ja diagonaalidega paralleelsed.

236) Ristküliku külgede keskkohad on rombi tipud.

237) Rombi külgede keskkohad on ristküliku tipud.

**77. Definitsioon:** Trapets on nelinurk, mille üks paar vastaskülge on paralleelsed ja teine paar ei ole paralleelsed

Paralleelseid külgi nim. trapetsi *alusteks*; trapetsi *kõrguseks* nim. aluste kaugust teineteisest. Mitteparalleelsete külgede keskkohati ühendavat sirglõiku nim. *keskjooneks*.

Kui trapetsi mitteparalleelsed küljed on ühepikkused, siis nim. seda trapetsit *võrdhaarseks* ja neid külgi *haaradeks*.

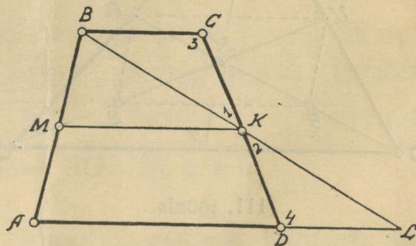
**Teoreem:** Trapetsi keskjoon on alustega paralleelne ja võrdub aluste poolsummaga.

Eeldus:  $BC \parallel AD$ ,  
 $AM = MB$ ,  $CK = KD$ .

Väide:  $MK \parallel AD \parallel BC$ ,

$$MK = \frac{1}{2} (AD + BC).$$

Tõestus: Tõmbame läbi B ja K sirge, mis AD pikendust L-is lõikab. Siis on:  $CK = KD$ ,  $\hat{1} = \hat{2}$ ,  $\hat{3} = \hat{4}$ ; järelikult  $\triangle BCK \equiv \triangle LDK$ . Järel.  $DL = BC$  ja  $BK = KL$ .

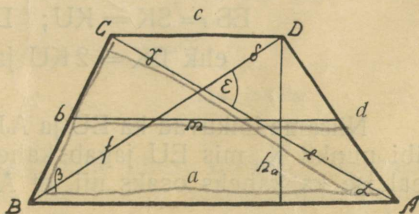


109. joonis.

Niiviisi on  $\triangle$ -gas ABL punkt K külje BL keskkohati ja  $AL = AD + DL = AD + BC$ . Et aga  $\triangle$ -gas ABL on  $AM = MB$  ja  $BK = KL$ , siis on  $MK \parallel AL$  ja  $MK = \frac{1}{2} AL$  [76], ehk  $MK \parallel AD \parallel BC$  ja  $MK = \frac{1}{2} (AD + BC)$ . M. o. t. t.

Ülesandeid. 238) Moodustada looduses trapets. Konstruuda trapets andmetest:

- 239) a, b, c, d;  
240) a, b, m, e;  
241) a, f,  $\alpha$ ,  $\epsilon$ ;  
242) a, c, h, f;  
243) b, h, f, e;  
244) b, d,  $\delta$ , f;  
245) c, d, a, m;  
246) d, f, m,  $\delta$ .

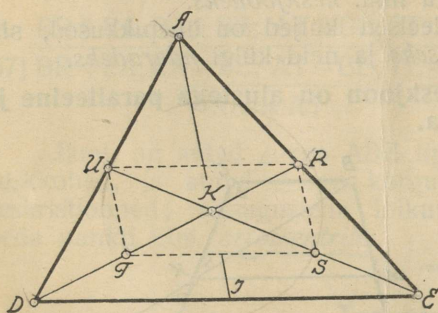


110. joonis.

① 247) Tõestada, et võrdhaarses trapetsis on aluse lähisnurgad ühesuurused, diagonaalid ühepikkused ja aluste keskohti ühendav sirge on sümmeetria telg.

① 248) Tõestada, et võrdhaarses trapetsis on diagonaali projektsioon aluse peale niisama pikk kui keskjoon.

78. Teoreem: Kolmnurga mediaanid lõikuvad ühes punktis ja jaguvad seal kaheks nii, et tipupoolne osa on 2 korda nii pikk kui küljepoolne osa.



111. joonis.

Eeldus:  $EJ = JD$ ,  
 $DU = UA$ ,  $AR = RE$ .

Väide:  $EU$ ,  $DR$ ,  $AJ$   
lõikuvad ühes punktis;  
 $EK = 2 KU$ ,  $DK = 2 KR$ ,  
 $AK = 2 KJ$ .

Tõestus: Mediaanid  
 $EU$  ja  $DR$  lõikuvad punktis  
 $K$ . Poolitame  $EK$  punktis  $S$   
ja  $DK$  punktis  $T$  ja ühen-  
dame järjekorras  $R, S, T, U, R$ .

$\triangle$ -rgas  $EDK$  on:  $ES = SK$ ,  
 $DT = TK$ .

$\triangle$ -rgas  $EDA$  on:  $ER = RA$ ,  
 $DU = UA$ .

$ST \parallel ED$ ,  $ST = \frac{1}{2}ED$  [76];

$RU \parallel ED$ ;  $RU = \frac{1}{2}ED$  [76].

$ST \parallel RU$ ;  $ST = RU$ , s. t.  $RSTU$  on #.

$ES = SK = KU$ ;  $DT = TK = KR$ ;  
ehk  $EK = 2 KU$  ja  $DK = 2 KR$ .

Niisama lõikuvad ka  $EU$  ja  $AJ$ . See tähendab, et ka  $AJ$  läheb läbi punkti  $K$ , mis  $EU$  jagab kaheks nii, et  $EK = 2 KU$  ja jagub seal ise ka kaheks osaks nii, et  $AK = 2 KJ$ .

Seda punkti  $K$  nim.  $\triangle$ -rga raskuspunktiks.

79. Teoreem: Kui paralleeljoonte parv lõikab ühe sirge võrdseteks lõikudeks, siis lõikab ta ka teise sirge isekeskis võrdseteks lõikudeks.

Eeldus:

$$AJ \parallel BK \parallel CL \parallel DM \parallel EN \parallel HO$$

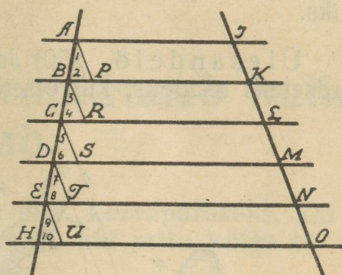
$$AB = BC = CD = DE = EH.$$

Väide:

$$JK = KL = LM = MN = NO.$$

Tõestus:

Läbi lõikepunktide A, B, C, D, E tõmbame JO-le paralleeljooned; siis on



112. joonis.

$$\hat{1} = \hat{3} = \hat{5} = \hat{7} = \hat{9} \quad \text{kui vastavad n.}$$

$$\hat{2} = \hat{4} = \hat{6} = \hat{8} = \hat{10} \quad \text{„ „ „}$$

AB = BC = CD = DE = EH eelduse järele.

$$\triangle ABP \equiv \triangle BCR \equiv \triangle CDS \equiv \triangle DET \equiv \triangle EHU. [\text{II. ü. t.}]$$

$$AP = BR = CS = DT = EU$$

$$AP = JK$$

$$BR = KL$$

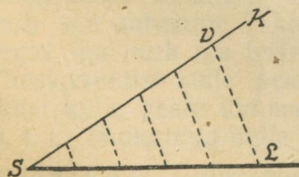
$$CS = LM$$

$$DT = MN$$

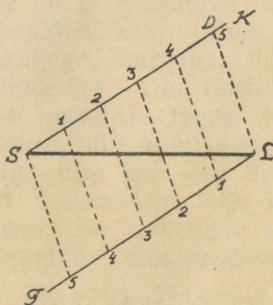
$$EU = NO$$

$$JK = KL = LM = MN = NO. \quad \text{M. o. t. t.}$$

80. Ülesanne 249. Antud sirglõik n võrdseks jaoks jagada.



113. joonis.

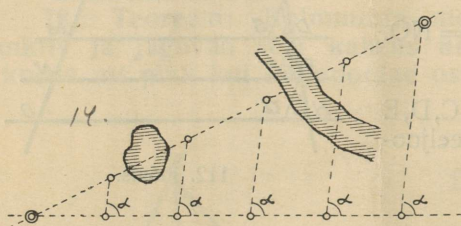


114. joonis.

Konstruksioon: Sirglõigu ühest otsast S tõmbame mistahes kiire SK; selle peale asetame n meelevaldset võrdset lõiku; viimase jaotuspunkti V ühendame teise otsapunktiga L

ja läbi jaotuspunktide tõmbame VL-le  $\parallel$ -jooned. Ehk: Mõlematest otsadest tõmbame paralleelsed kiired SK  $\parallel$  LT, kummagi peale asetame, otsapunktidest alates, n võrdset lõiku: Sirged, mis vastavaid jaotuspunkte ühendavad, jagavad SL n võrdseks jaoks.

7. Ülesandeid. 250) Jagada looduses mõnesugune kaugus võrdseteks osadeks, kui otseteel leiduvad takistused (115. joonis).

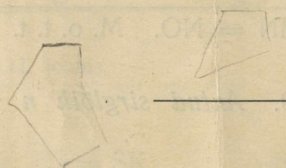


115. joonis.

mille lähisküljed on paari kaupa võrdsed. Leida antiparallelogrammi diagonaalide omadus ja sümmeetria.

① 251) Tõestada: Kui R ja S on parallelogrammi ABCD külgedel AB ja CD keskkohad, siis jagavad DR ja BS diagonaali AC kolmeks.

② 252) Antiparallelogrammiks ehk deltoiidiks nim. nelinurka,

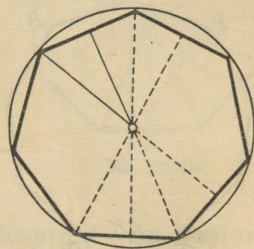


## IV-jas peatükk: Korrapärased hulknurgad.

81. **Definitsioon:** Hulknurka nim. korrapäraseks, kui tal on nii mitmekordne kesksümmeetria, kui mitu külge tal on. Sümmeetria keskpunkti nim. *hulknurga keskpunktiks*. Näit. võrdkülgne kolmnurk on korrapärane; ruut on korrapärane nelinurk.

**Teoreem:** Korrapärases hulknurgas on:

- 1) kõik küljed ühepikkused;
- 2) kõik nurgad ühesuurused;
- 3) kõik tipud keskpunktist ühekaugelel;
- 4) kõik küljed keskpunktist ühekaugelel.

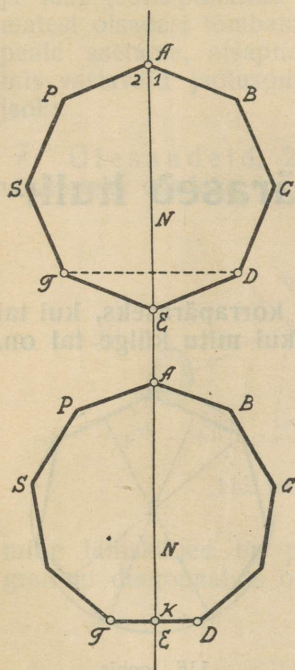


116. joonis.

**Tõestus:** Olgu meie hulknurgal 7 külge, sellega 7-kordne kesksümmeetria. Pöörame hulknurka keskpunkti ümber  $\frac{1}{7}$  täispöörde võrra, siis langeb ta iseendaga ühte. Seejuures ühtub iga külge, iga nurk, iga tipp, iga keskpunktist külje peale tõmmatud ristjoon teise järjekorras oleva küljega, nurgaga, tipuga, keskpunktist külje peale tõmmatud ristjoonega. Ühe täispöörde jooksul, kuna hulknurk oma esimesse asendisse tagasi tuleb, sünnib see ühtumine 7 korda, nii et iga külge ühtub iga teise küljega, iga nurk iga teise nurgaga, iga tipp iga teise tipuga, iga keskpunktist külje peale tõmmatud ristjoon iga teise keskpunktist külje peale tõmmatud ristjoonega. See tähendab seda, m. o. t. t. Hulknurga külje kaugust keskpunktist nim. *apoteemiks*.

**Märkus:** Üldistamise otstarbeks võib võtta „7“ asemel „n“.

82. **Teoreem:** Nurgapoolitaja on korrapärase hulknurga sümmeetria teljeks; ta läheb veel ühe nurga tipust läbi, seda nurka poolitades, kui hulknurgal on paarisarv külge, või läheb ühe külje keskkohast läbi risti selle küljega, kui hulknurgal on paaritu arv külge.



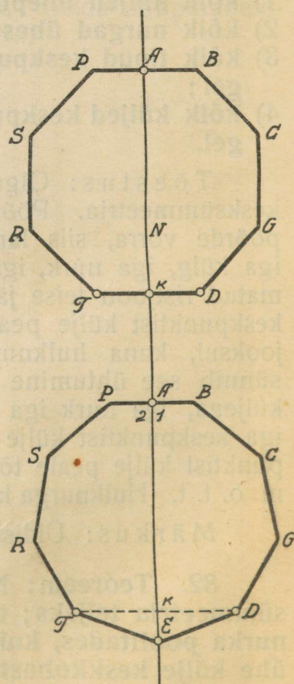
117. joonis.

**83. Teoreem:** Külje keskristjoon on korrapärase hulknurga sümmeetriateljeks; ta läheb veel ühe külje keskkohest läbi, risti selle küljega, kui hulknurgal on paarisarv külgi, või ta läheb ühe nurga tipust läbi seda nurka poolitades, kui hulknurgal on paaritu arv külgi.

Tõestus: Olgu  $AN \perp BP$  ja  $AB = AP$ . Murrame hulknurga AN mööda kahekorra. Siis läheb AB AP suunas, sest  $\hat{1} = \hat{2} = 90^\circ$ ; B langeb P peale, sest  $AB = AP$ ; BC läheb PS suunas, sest  $\hat{B} = \hat{P}$ ; C langeb S peale, sest  $BC = BS$  jne., kuni viimaks D langeb T peale. Et D ja T on sümmeetrilised AN suhtes, siis

Tõestus: Murrame hulknurga nurgapoolitajat AN mööda kahekorra; siis läheb AB AP suunas, sest  $\hat{1} = \hat{2}$ ; B langeb P peale, sest  $AB = AP$ ; BC läheb PS suunas, sest  $\hat{B} = \hat{P}$ ; C langeb S peale, sest  $BC = PS$  jne. kuni viimaks D langeb T peale. Et D ja T sümmeetrilised on AN suhtes, siis on  $AN \perp DT$  ja AN jagab DT pooleks. On hulknurgal paarisarv külgi ja tippe, siis on peale D ja T olemas veel üks tipp E, mis paaris on A-ga ja mis D-ga ja T-ga sünnitavad võrdhaarse  $\triangle$ -ga, mille aluseks on DT ja tipuks E. Et  $AN \perp DT$  ja jagab DT pooleks, siis läheb AN ka tipust E läbi ja poolitab  $\hat{E}$ .

On hulknurgal paaritu arv külgi, siis on D ja T viimased tipud ja DT viimane külg; seejärel on lihtsalt  $AN \perp DT$  ja AN jagab DT pooleks.



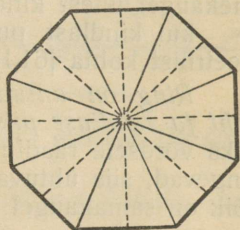
118. joonis.

on  $AN \perp DT$  ja  $DK = KT$ . Kui hulknurgal on paarisarv külgi ja tippe, siis on D ja T viimased tipud,  $DT$  — viimane külge ja teoreem on tõestatud.

On hulknurgal paaritu arv külgi ja tippe, siis on olemas veel üks üksik tipp E ja veel üks paar külge  $DE = ET$ , nii et  $\triangle EDT$  on võrdhaarne ja AN tema aluse keskristjoon. Seepärast läheb AN tipust E läbi ja poolitab  $\hat{E}$ . M. o. t. t.

**84. Teoreem: Kõik sümmeeria teljed lõikuvad ühes punktis, nimelt sümmeeria keskpunktis.**

Tõestus: Läheks sümmeeria telg sümmeeria keskpunktist mööda, siis oleks sümmeeria keskpunktile telje suhtes sümmeetriline punkt ka sümmeeria keskpunkt; aga meie tunnustame aksioomina õigeks, et igal kujul võib olla ainult üks sümmeeria keskpunkt. Seepärast lähevad kõik sümmeeria teljed sümmeeria keskpunktist läbi ja seal nad lõikuvadki. M. o. t. t.



119. joonis.

**85. Teoreem: Korrapärasel hulknurgal on niimitu sümmeeria telge, kuimitmekordne on tema kesksümmeeria.**

Tõestus: Kui hulknurgal on  $n$  külge ja sellega  $n$ -kordne kesksümmeeria, siis on tal  $n$  nurgapoolitajat ja  $n$  küljakeskristjoont.

On  $n$  paarisarv, siis on iga nurgapoolitaja veel ühe teise nurga poolitaja ja iga küljakeskristjoon on veel ühe teise külje keskristjoon; sellega on niisugusel korrapärasel hulknurgal  $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$  sümmeeria telge.

On  $n$  paaritu arv, siis on iga nurgapoolitaja ühtlasi ühe külje keskristjoon ja sellega on niisugusel hulknurgal  $n$  sümmeeria telge. M. o. t. t.

## V-es peatükk: Ring.

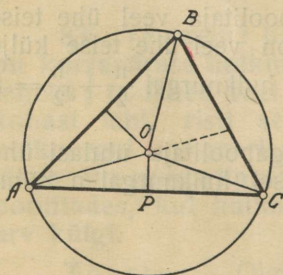
86. Ringi defiinisime varem kui joont, mille punktid on ühekaugel ühest kindlast punktist [14] ehk

kui kindlast punktist sama kaugel olevate punktide geometrilist kohta [61,I].

Ring on antud ehk määratud, kui antud on keskpunkti koht ja raadiuse pikkus, sest kui me teineteise peale paigutame kaks võrdsete raadiustega ringi nii, et nende keskpunktid ühte langevad, siis ühtuvad ka ringjooned seepärast, et nende punktid kõik on samakaugel keskpunktist. Selsamal põhjusel võib ütelda:

- 1) iga diameeter on ringi sümmeetria telg ja
- 2) ringil on kesksümmeetria ning sümmeetria järk lõpmatu suur, sest kui väikese või suure nurga võrra me ringi ka pöörame tema keskpunkti ümber, ta liugub ikka ainult iseennast mööda.

(87.) Teoreem: Läbi kolme punkti, mis mitte ühel sirgel ei asu, on võimalik tõmmata ring ja nimelt üksainus.



120. joonis.

Tõestus: Võtame A, B ja C  $\triangle$ -ga ABC tippudeks. Siis lõikuvad külgede keskristjooned kõik ühes punktis  $\odot$ , mis on samakaugel kõigist kolmest punktist A, B ja C:  $\odot A = \odot B = \odot C$  [63]. Niiviisi on meil üksainus keskpunkt ja üksainus raadius, sellega ka üksainus ring. Seepärast, kui  $\odot$  keskpunktiks võtta ja raadiusega  $\odot A = \odot B = \odot C$  tõmmata ring, siis läheb see ring läbi A, B ja C.

Järeldus: Kolm punkti, mis samal sirgel ei asu, määravad ringi.

★ Ülesandeid. 253) Märkida looduses 10-ne sihitiku abil ringjooksu tee.

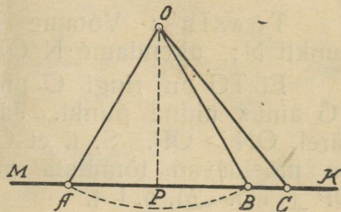
⑥ 254) On olemas ring; leida tema keskpunkt.

6.255) Konstruida ring, mille keskpunkt on antud ja mille kauguste vahe kahest antud punktist A ja B on antud.

6.256) Konstruida ring, mille keskpunkt on antud ja mille kauguste summa kahest antud punktist M ja K on antud.

88. Teoreem: Ringil ja sirgel ei või üle kahe ühise punkti olla.

Tõestus: Olgu O ringi keskpunkt ja  $OP \perp MK$ . Oleks ringil O sirgega MK 3 ühist punkti A, B ja C, siis oleks  $OA = OB = OC$  kui raadiused, ja  $PA = PB = PC$  kui nende projektsioonid [56]; aga silmnähtav on, et see õige olla ei saa, kui C ühte ei lange B-ga.



121. joonis.

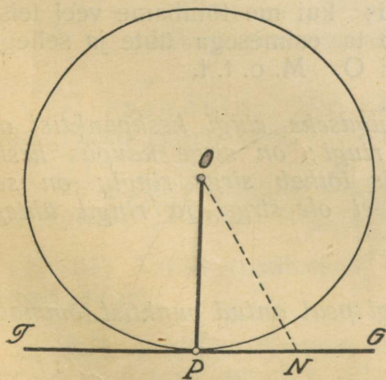
1-ne järeldus: Läbi 3-e punkti, mis asuvad ühe sirge peal, ei ole võimalik tõmmata ringi.

2-ne järeldus: Ükski ringi osa ei saa ühtuda sirge joonega.

**Definitsioonid.** Sirget, millel on ringiga 2 ühist punkti, nim. *lõikajaks*; sirget, millel on ringiga 1 ühine punkt, nim. *puutujaks* ja ühist punkti — *puutepunktiks*.

## Puutuja.

89. Teoreem: Sirge, mis on risti raadiusega tema otsapunktis, on ringi puutuja.



122. joonis.

Eeldus: OP on raadius, P tema otsapunkt;  $TG \perp OP$  punktis P.

Väide: TG on ringi O puutuja.

Tõestus: Võtame TG peal P-st erineva meelevaldse punkti N; ühendame N O-ga.

Et  $OP \perp TG$ , siis on ON kaldu TG-ga; järel.  $ON > OP$ .

Järel. punkt N on väljaspool ringi.

Järel. P on ringi ja TG ainus ühine punkt.

S. t. — TG on ringi O puutuja. M. o. t. t.

**I-ne ümberpööratud teoreem:** Puutepunkti tõmmatud raadius on risti puutujaga (122. joonis).

Eeldus: TG on ringi O puutuja; P on puutepunkt.

Väide:  $OP \perp TG$ .

Tõestus: Võtame TG peal P-st erineva meelevaldse punkti N; ühendame N O-ga.

Et TG on ringi O puutuja punktis P, siis on P ringi ja TG ainus ühine punkt. Järel. punkt N asub väljaspool ringi. Järel.  $ON > OP$ . S. t. et OP on lühim kõigist sirgetest, mis on mõeldavad tõmmata punktist O sirgele TG. Järel. [56]  $OP \perp TG$ . M. o. t. t.

**II-ne ümberpööratud teoreem:** Ringi keskpunktist puutujale tõmmatud ristjoon läheb puutepunkti.

Tõestus: Keskpunktist O puutujale TG on üksainus ristjoon võimalik [23], ja niisugusena esineb juba puutepunkti tõmmatud raadius OP; kui me tõmbame veel teise ristjoone punktist O, siis langeb ta esimesega ühte ja sellega läheb see ristjoon läbi puutepunkti P. M. o. t. t.

**III-as ümberpööratud teoreem:** Puutepunktist puutujale tõmmatud ristjoon läheb läbi ringi keskpunkti.

Tõestus: Puutepunktis P on puutujale TG üksainus ristjoon võimalik [23], ja niisugusena esineb juba puutepunkti tõmmatud raadius OP:  $OP \perp TG$ ; kui me tõmbame veel teise ristjoone punktist P, siis langeb ta esimesega ühte ja sellega läheb see ristjoon läbi keskpunkti O. M. o. t. t.

Järeldus: Kui sirge kauguseks ringi keskpunktist on raadius, siis puutub see sirge ringi; on sirge kaugus keskpunktist lühem kui raadius, siis lõikab sirge ringi; on see kaugus pikem kui raadius, siis ei ole sirgel ja ringil ühtegi ühist punkti.

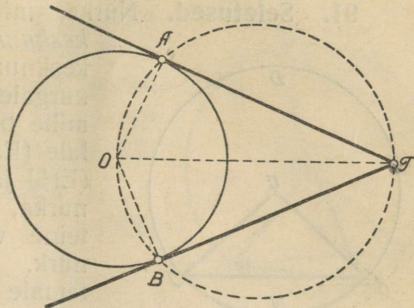
6) 90. Ülesanne. 257) Ringi peal antud punktist tõmmata ringile puutuja.

Konstruktsioon: Antud punkti tõmbame raadiuse ja sellele tema otsapunkti ristjoone.

konstruktsioon  
antud punktil  
raadius  
otsapunkti  
ristjoone

6) Ülesanne. 258) Väljaspool ringi antud punktist tõmmata ringile puutuja.

Konstruksioon:  
 Ühendame  $T$  keskpunktiga  $O$ ;  $OT$ -d diameetriks võttes tõmbame ringi, mis lõikab ringi  $O$  kahes punktis  $A$  ja  $B$ . Läbi  $T$  ja  $A$  ning  $T$  ja  $B$  tõmmatud sirged  $TA$  ja  $TB$  on otsitud puutujad, sest  $\widehat{OAT} = 90^\circ$  ja  $\widehat{OBT} = 90^\circ$ , kui diameetri peale toetuvad piirdenurgad.



123. joonis.

**Teoreem:** Ühest punktist ringile tõmmatud puutujad on võrdsed, ja sirge, mis seda punkti keskpunktiga ühendab, jagab puutujate-vahelise nurga pooleks.

Tõestus:

$\triangle OBT \equiv \triangle OAT$ , sest et  $OT = OT$ ,  $OB = OA$ ,  $\hat{B} = \hat{A} = 90^\circ$ .

---


$$TB = TA, \quad \widehat{OTB} = \widehat{OTA}.$$

Järeldus:  $TO$  on selle kujundi sümmeetria telg.

Märkus: Puutuja pikkust mõeldakse ikka lähtepunktist puutepunktini.

6) Ülesandeid: 259) Leida antud ringi võrdsete puutujate lähtepunkti geom. koht.

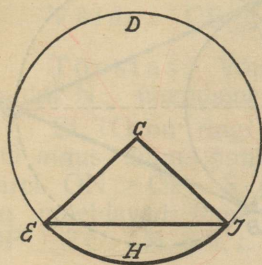
6) 260) Antud ringile tõmmata puutuja nii, et tema pikkus puutepunkti ja antud sirge vahel oleks  $a$ .

6) 261) Antud raadiusega tõmmata ring, mis puutub kaht antud sirget.

6) 262) Antud raadiusega tõmmata ring, mis läheb läbi antud punkti ja puutub antud sirget.

## Kaar, kõõl ja kesknurk.

91. Seletused. Nurka, mille tipp on keskpunktis, nim.



124. joonis.

*kesknurgaks*. Igale kaarele vastab üks kesknurk ja üks kõõl; igale kesknurgale vastab üks kõõl ja üks kaar, mille peale ta *toetub*; aga igale kõõlule (EJ) vastavad kaks erist kaart (EHJ ja EDJ) ja kaks erist kesknurka, millest üks on suurem ja teine vähem kui poolringi või sirge nurk. Kui kõneldakse kõõlust ja temale vastavast kaarest või kesknurgast, siis mõeldakse harilikult vähemat.

▷ *Sektor* on kahe raadiusega ja kaarega piiratud ringiosa, näit. EDJCE.

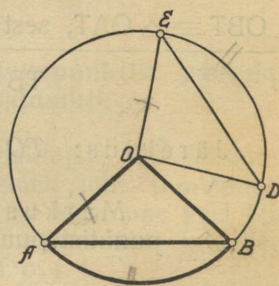
▷ *Segment* on kõõluga ja kaarega piiratud ringiosa, näit. EJHE.

92. Teoreem: Võrdsetele kaartele vastavad võrdsed kesknurgad ja võrdsed kõõlud.

Eeldus:  $\widehat{AB} = \widehat{DE}$ .

Väide:  $\widehat{AOB} = \widehat{DOE}$ ,  $AB = DE$ .

Tõestus: Pöörame sektori AOB keskpunkti O ümber nii, et OA läheb OD-d mööda. Siis langeb A D peale, sest  $OA = OD$ ;  $\widehat{AB}$  läheb  $\widehat{DE}$ -d mööda, sest ringi punktid on keskpunktist ühekaugel, ja B langeb E peale, sest  $\widehat{AB} = \widehat{DE}$ . Sellega langeb siis OB ühte OE-ga,  $\widehat{AOB}$  nurgaga DOE, ning kõõl AB kõõluga DE, sest nende otsapunktid langevad ühte. Järele.  $\widehat{AOB} = \widehat{DOE}$  ja  $AB = DE$ . M. o. t. t.



125. joonis.

93. Teoreem: Suuremale kaarele vastab suurem kesknurk ja suurem kõõl, kui kaared poolringist suuremad ei ole.

Eeldus:  $\widehat{AB} > \widehat{DE}$ .

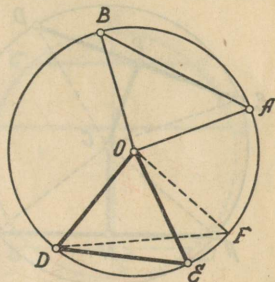
Väide:  $\widehat{AOB} > \widehat{DOE}$ ;  $AB > DE$ .

Tõestus: 1) Pöörame sektori  $AOB$   $O$  ümber nii, et  $OA$  läheb  $OD$ -d mööda. Siis langeb  $A$   $D$  peale, sest  $OA = OD$ ;  $\widehat{AB}$  läheb  $\widehat{DE}$  suunas, sest ringi punktid on kõik keskpunktist ühekaugel, ja  $B$  langeb  $\widehat{DE}$  pikenduse peale, näit. punkti  $F$ , sest  $\widehat{AB} > \widehat{DE}$ . Seepärast läheb  $OB$  nurga  $DOE$  välimist valda mööda  $OF$  suunas. Järel. on  $\widehat{AOB} > \widehat{DOE}$ .

2) Vaadeldes  $\triangle AOB$  ja  $\triangle DOE$  leiame:

$OA = OD$ ,  $OB = OE$   $\widehat{AOB} > \widehat{DOE}$ ;  
järel. [53] külj  $AB >$  külj  $DE$ .

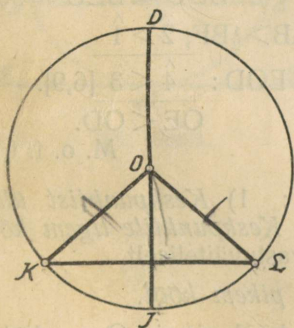
M. o. t. t.



126. joonis.

## Kõõlud.

94. Teoreem: Kõõlu ristraadius või ristdiameeter poolitab kõõlu, temale vastavad kesknurgad ja kaared.



127. joonis.

Tõestus:  $\triangle KOL$  on võrdhaarne ja et  $OJ \perp KL$ , siis on  $OJ$  ehk  $DJ$   $\triangle$ -rga  $KOL$  ja ühtlasi ka ringi  $O$  sümmeetriline telg ja  $K$  ja  $L$  on sümmeetrilised punktid. Seepärast: jagab  $DJ$  kõõlu  $KL$  pooleks;  $\widehat{KOJ} = \widehat{LOJ}$ ;  $\widehat{KOD} = \widehat{LOD}$ ;  $\widehat{KJ} = \widehat{LJ}$ ;  $\widehat{KD} = \widehat{LD}$ .

M. o. t. t.

Ülesanne. 263) Tõestada ümberpööratud teoreemid:

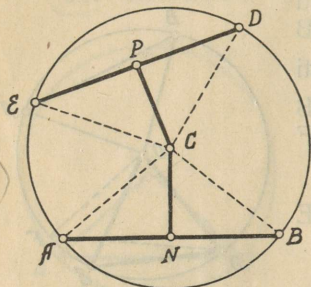
1) Kõõlu keskkristjoon läheb läbi keskpunkti.

2) Kaare ja temale vastava kõõlu keskkohast läbiminev sirge läheb läbi keskpunkti.

3) Kõõlu poolitaja raadius on kõõluga risti.

4) Kaare poolitaja ja 5) kesknurga poolitaja raadius poolitab ka vastava kõõlu ja on temaga risti.

95. Teoreem: Võrdsed kõõlud on keskpunktist ühekaugel.



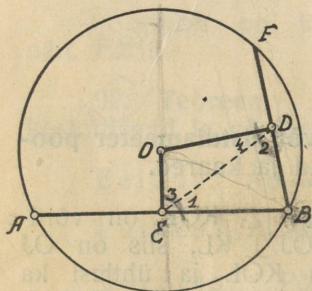
128. joonis.

Eeldus:  $AB = DE$ ,  $CN \perp AB$ ,  $CP \perp DE$ .

Väide:  $CN = CP$ .

Tõestus:  $\triangle ACB \equiv \triangle DCE$  [III.ü.t.]  
 $CN = CP$ .

[Ühtuvates  $\triangle$ -rkades on vastavad elemendid võrdsed.]



129. joonis.

96. Teoreem: Pikem kõõl on keskpunktile ligemal.

Eeldus:  $AB > BF$ ,  $OE \perp AB$ ,  $OD \perp BF$ .

Väide:  $OE < OD$ .

Tõestus: Ühendame E D-ga. Siis on  $\triangle$ -rgas EBD:

$$\widehat{BDO} = \widehat{BEO} = 90^\circ;$$

$$EB > BD, \text{ sest } \frac{1}{2}AB > \frac{1}{2}BF; \hat{2} > \hat{1}$$

$$\triangle\text{-rgas } EOD: \frac{\hat{4}}{\hat{3}} < \frac{\hat{2}}{\hat{1}} [6,9].$$

$$OE < OD.$$

M. o. t. t.

Ümberpöördud teoreemid: 1) Keskpunktist ühekaugel olevad kõõlud on võrdsed ja 2) Keskpunktile ligem kõõl on pikem. Võib tõestada otseteel või vastuväiteliselt.

Järeldus: Diameeter on kõige pikem kõõl.

2. Ülesandeid: 264) Missugune kõõl ringis O on kõige lühem neist, mis lähevad läbi antud punkti A?

6 265) Leida antud ringis antud pikkusega kõõlude keskohtade geom. koht!

6 266) Leida ringi peal antud punktist lähtuvate kõõlude keskohtade geom. koht!

6 267) Leida ringi sees antud punkti A läbi minevate kõõlude keskohtade geom. koht!

97. Teoreem: Paralleelsete kõõlude vahel olevad kaared on võrdsed.

Eeldus:  $CD \parallel AB$ .

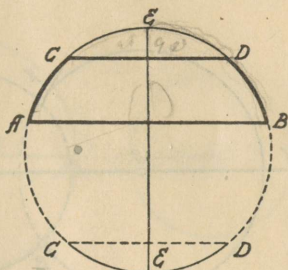
Väide:  $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ .

Tõestus: Tõmbame diameetri  $EE \perp AB$ .

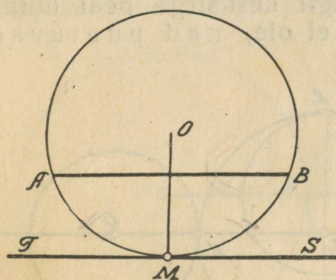
Siis on [94]  $\widehat{AE} = \widehat{BE}$  ja [34]  $EE \perp CD$ ;

järel.  $\widehat{CE} = \widehat{DE}$ .

$$\widehat{AC} = \widehat{BD}.$$



130. joonis.



131. joonis.

98. Teoreem: Kõõluga paralleelne puutuja jagab kõõlule vastava kaare pooleks.

Tõestus:  $TS \parallel AB$

$$\widehat{OM} \perp \widehat{TS}$$

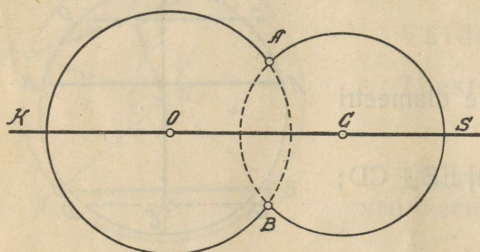
$$\widehat{OM} \perp \widehat{AB}$$

$$\widehat{AM} = \widehat{MB} \text{ [94].}$$

## Kaks ringi.

99. Seletused. Kui kahel ringil on ühine keskpunkt, siis nim. neid *kontsentrilisteks*; on igaühel oma keskpunkt, siis — *ekstsentrilisteks*. Kahe ekstsentrilise ringi keskpunktidest läbiminevat sirget nim. *kesksirgeks* ja keskpunktidega piiratud kesksirge lõiku nim. *keskpunktide kauguseks*. *Kesksirge on kahe ringi moodustatud kujundi sümmeeria telg*, sest tema peal asuvad diameetrid on kumbki oma ringi sümmeeria telg.

100. Teoreem: On kahel eksstsentrilisel ringil üks ühine punkt väljaspool kesksirget, siis on neil ka teine ühine punkt väljaspool kesksirget.



132. joonis.

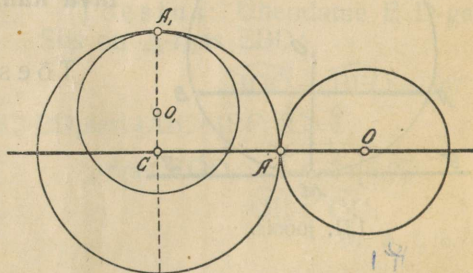
Nimelt esimesele punktile A kesksirge KS suhtes sümmeetriline punkt B asub nii ringi O kui ka ringi C peal; need ringid lõikuvad.

Järeldus: Kahe lõikuva ringi kesksirge poolitab nende ühise kõõlu ja on temaga risti [22].

101. Teoreem: On kahel ringil kesksirge peal ühine punkt, siis neil teist ühist punkti ei ole, nad puutuvad teineteist.

Tõestus: Oleks ringidel C ja O peale kesksirgel asuva punkti A veel üks ühine punkt väljaspool kesksirget, siis oleks neil ka veel teine niisugune ühine punkt [100], seega kokku 3 ühist punkti ja nad ühtuaksid.

Või asuks see teine ühine punkt kesksirge peal, siis oleks ta ühise diameetri teine otsapunkt, ja ringid ühtuaksid jällegi.



133. joonis.

Ümberpööratud teoreem: Kahe teineteist puutuja ringi puutepunkt asub kesksirge peal [100, 101].

(Ülesandeid. 268) Leida kõige lühem ja kõige pikem sirglõik, mida võimalik on tõmmata kahe ringi vahel.

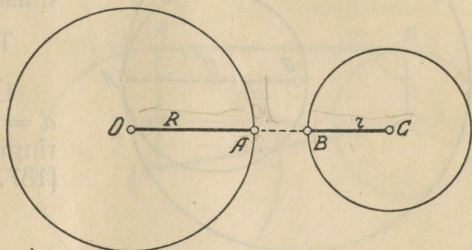
6. 269) Leida antud punktist kontsentrilistele ringidele tõmmatud puutujate puutepunktide geom. koht!

**102. Kahe ringi vastastikune asend.** Tähistame ühe ringi raadiuse  $R$ -ga, teise ringi raadiuse  $r$ -ga ja keskpunktide kauguse  $d$ -ga. Kaks ringi võivad teineteise suhtes järgmiselt asendatud olla:

I. Kumbki ring on väljaspool teist ringi: Siis on nende keskpunktide kauguse suurem kui raadiuste summa:  $d > R + r$ .

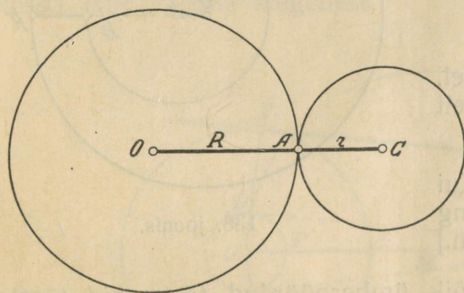
Tõepoolest:

$OC = OA + AB + BC$   
ja  $OC$  on suurem kui  $OA + BC$ , nimelt  $AB$  võrra.



134. joonis.

Ümberpöörduvalt: Kui  $d > R + r$ , siis on ringid väljaspool teineteist. [134. joon.]



135. joonis.

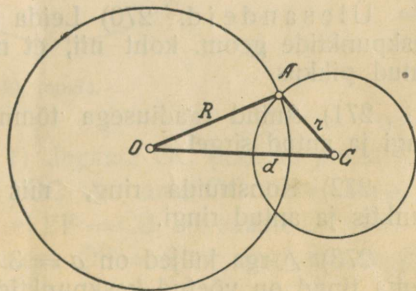
II. Ringid puutuvad teineteist väljaspoolt. Siis on nende keskpunktide kauguseks raadiuste summa:  $d = R + r$  ehk  $OC = OA + AC$ .

Ümberpöörduvalt: Kui  $d = R + r$ , siis puutuvad ringid teineteist väljaspoolt. [135. joon.]

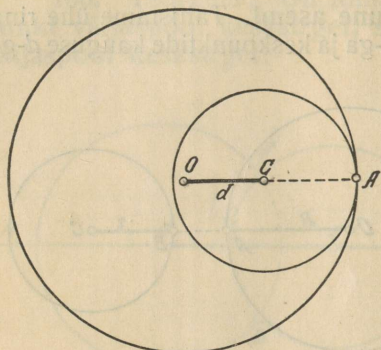
III. Kui ringid lõikuvad, siis on keskpunktide kaugus vähem kui raadiuste summa ja suurem kui raadiuste vahe:  $d < R + r$  ja  $d > R - r$  ehk  $R + r > d > R - r$ .

Tõepoolest:  $\triangle$ -rgas  $OAC$  on  $OC < OA + AC$  ja  $OC > OA - AC$ .

Ümberpöörduvalt: Kui  $R + r > d > R - r$ , siis lõikuvad ringid. [136. joon.]



136. joonis.



137. joonis.

IV. Kui ringid puutuvad teineteist seestpoolt, siis on keskpunktide kauguseks raadiuste vahe:  $d = R - r$ .

Tõepoolest:  $OC = OA - CA$ .

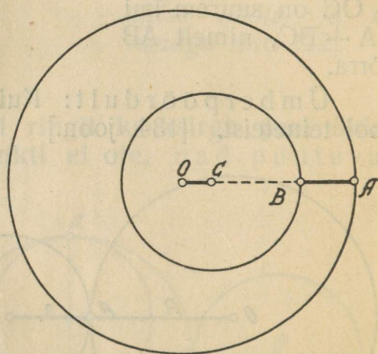
Ümberpöörduvalt: Kui  $d = R - r$ , siis puutuvad ringid seestpoolt teineteist. [137. joon.]

V. Kui üks ring on täiesti teise sees, siis on keskpunktide kauguse vähem kui raadiuste vahe:  $d < R - r$ .

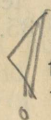
Tõepoolest:

$OA - CB = OC + BA$ ; järel on  $OC < OA - CB$ , nimelt BA võrra.

Ümberpöörduvalt: Kui  $d < R - r$ , siis on üks ring täielikult teise sees. [138. joon.]



138. joonis.



Märkus: Kõik ümberpöörduvad teoreemid tõestatakse vastuväiteliselt pärast otsekoheste teoreemide tõestamist.

6 Ülesandeid. 270) Leida antud ringi puutujate ringide keskpunktide geom. koht nii, et nende ringide raadiustel oleks antud pikkus.

6 271) Antud raadiusega tõmmata ring, mis puutub antud ringi ja antud sirget.

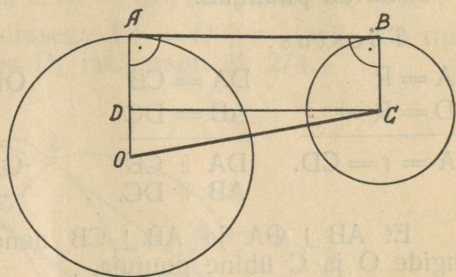
6 272) Konstruuda ring, mis puutub antud sirget antud punktis ja antud ringi.

2 273)  $\triangle$ -rga küljed on  $a = 3$  cm.,  $b = 5$  cm. ja  $c = 6$  cm. Tema tipud on võetud keskpunktideks ja on tõmmatud üksteist puutujad ringid. Kui pikad on nende ringide raadiused?

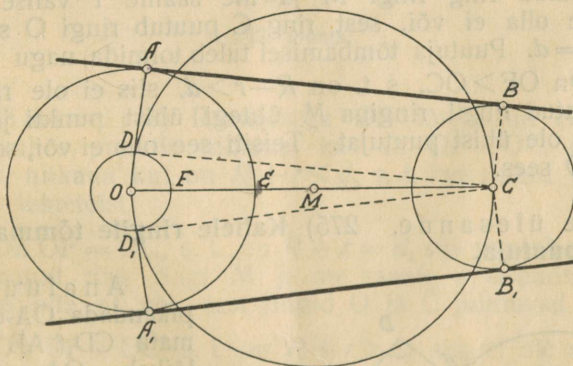
### 103. Kahe ringi ühine puutuja.

I-ne ülesanne. 274) Kahele ringile tõmmata ühine välimine puutuja.

Analüüs: Olgu AB otsitav puutuja. Puutepunktidesse tõmmatud raadiused on puutujaga risti:  $OA \perp AB$ ;  $CB \perp AB$ . Järeel.  $OA \parallel CB$ . Trapetsis OABC on teada nurgad  $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$  ja küljed  $OA = R$ ,  $CB = r$ ,  $OC = d$ . Kui tõmmata  $CD \parallel BA$ , siis on täisnurkses  $\triangle$ -rgas ODC teada hüpoteenus  $OC = d$  ja kaatet  $OD = R - r$ . Seepärast võime konstruuda enne  $\triangle ODC$  ja seeläbi leida  $DC = AB$ ; pärast konstruime ristküliku ABCD tema külgedest.



139. joonis.



140. joonis.

- Konstruktsioon:
- 1) Jagame OC pooleks punktis M.
  - 2) Raadiusega  $MO = MC = \frac{1}{2}OC$  tõmbame OC ümber ringi.
  - 3) Asetame EO peale CB nii, et  $EF = CB$ , siis saame  $OF = R - r$ .
  - 4) O ümber tõmbame raadiusega  $OF = R - r$  ringi, mis ringi M lõikab kahes punktis D ja  $D_1$ .
  - 5) Läbi D ja  $D_1$  tõmbame raadiused OA ja  $OA_1$ .

- 6) Punktidest A ja  $A_1$  tõmbame raadiusega  $DC = D_1C$  kaared, mis ringi C lõikavad punktides B ja  $B_1$ .
- 7) Läbi A ja B ning  $A_1$  ja  $B_1$  tõmmatud sirged AB ja  $A_1B_1$  on otsitavad puutujad.

Tõestus:

$OA = R$	$DA = CB$	$\widehat{ODC} = 90^\circ$	$OA \perp AB$
$OD = R - r$	$AB = DC$	$AB \parallel DC$	$CB \parallel OA$
$DA = r = CD.$	$DA \parallel CB$	$\widehat{OAB} = 90^\circ.$	$CB \perp AB.$
	$AB \parallel DC.$		

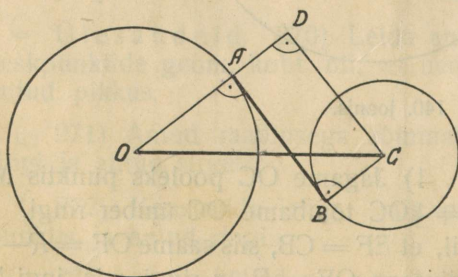
Et  $AB \perp OA$  ja  $AB \perp CB$  nende otsapunktides, siis on ta ringide O ja C ühine puutuja.

Uurimine. 1) Raadiusega OF tõmmatud ring lõikab ringi M kahes punktis niikaua, kui on  $OF < OC$  ehk, teistes tähistustes, niikaua kui on  $R - r < d$ . See tähendab: kui ringid O ja C on teine teisest väljaspool, või kui nad puutuvad teineteist väljastpoolt või lõikuvad, siis on neil 2 ühist välist puutujat.

2) On  $OF = OC$ , s. t. on  $R - r = d$ , siis puutub raadiusega OF tõmmatud ring ringi M ja me saame 1 välise puutuja. Teisiti see olla ei või, sest ring C puutub ringi O seestpoolt, kui  $R - r = d$ . Puutuja tõmbamisel tuleb toimida nagu ül. 257.

3) On  $OF > OC$ , s. t. on  $R - r > d$ , siis ei ole raadiusega OF tõmmatud ringil ringiga M ühtegi ühist punkti ja ringidel O ja C ei ole ühist puutujat. Teisiti see olla ei või, sest ring C on ringi O sees.

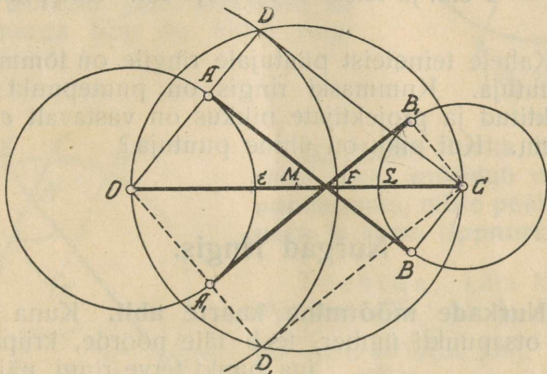
6) II-me ülesanne. 275) Kahele ringile tõmmata ühine sisemine puutuja.



141. joonis.

Analüüs: Kui pikendada OA-d ja tõmmata  $CD \parallel AB$  kuni ta lõikab OA pikendust punktis D, siis on täisnurkses  $\triangle$ -rgas ODC teada hüpotenuus  $OC = d$  ja kaatet  $OD = R + r$ . Seepärast võime konstruuda enne  $\triangle$  ODC ja seeläbi leida  $DC = AB$ . Pärast konstruime ristküliku ABCD tema külgedest.

- Konstruktsioon. 1) Jagame OC pooleks punktis M.  
 2) Raadiusega MO tõmbame OC ümber ringi.  
 3) Asetame OE peale CB nii, et  $EF = CB$ , siis saame  $OF = R + r$ .  
 4) O ümber tõmbame raadiusega  $OF = R + r$  ringi, mis ringi M lõikab punktides D ja  $D_1$  jne., nagu ül. 274.



142. joonis.

Uurimine. 1) Raadiusega  $OF$  tõmmatud ring lõikab ringi M kahes punktis niikaua, kui on  $OF < OC$ , ehk teistes tähistustes, niikaua kui on  $R + r < d$ , s. t. kui ringid O ja C on väljaspool teineteist.

2) On  $OF = OC$ , s. t. on  $R + r = d$ , siis puutub raadiusega  $OF$  tõmmatud ring ringi M ja me saame 1 sisemise puutuja. Teisiti see olla ei või, sest ringid O ja C puutuvad teineteist.

3) On  $OF > OC$ , s. t. on  $R + r > d$ , siis ei ole raadiusega  $OF$  tõmmatud ringil ringiga M ühtegi ühist punkti enam ja ringidel O ja C ei ole ühist sisemist puutuja. Teisiti see olla ei või, sest ringid O ja C lõikuvad.

## Kokkuvõte:

1) $R + r < d$	2 sisemist ja 2 välimist puutuja
2) $R + r = d$	1 sisemine ja 2 " "
3) $R + r > d > R - r$	0 " " 2 " "
4) $R + r > d = R - r$	0 " " 1 välimise puutuja
5) $d < R - r$	0 " " 0 " "

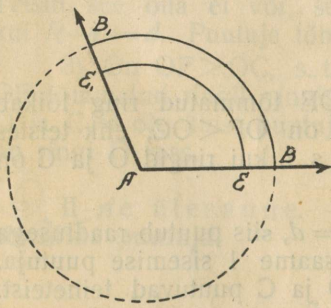
3. Ülesandeid. 276) Kahele teineteist puutujale ringile on tõmmatud ühine välimine ja ühine sisemine puutuja, mis lõikuvad. Ühise sisemise puutuja lõik lõikepunktist kuni puutepunktini on 4 cm. Kui pikk on ühine välimine puutuja puutepunktide vahel?

3. 277) Kahele teineteist puutujale ringile on tõmmatud ühised välimised puutujad. Puutepunkte ühendav kõõl ühes ringis on  $a = 3$  cm. ja teises —  $b = 1,4$  cm. Kui pikk on ühine puutuja?

3. 278) Kahele teineteist puutujale ringile on tõmmatud ühine välimine puutuja. Kummaski ringis on puutepunkt keskjoone peale projekteeritud ja projektijate pikkus on vastavalt  $e = 3,8$  cm. ja  $f = 6,2$  cm. Kui pikk on ühine puutuja?

## Nurgad ringis.

104. Nurkade mõõtmine kaarte abil. Kuna kiir, pöördues oma otsapunkti ümber, teeb täie pöörde, kriipsutab kiire iga punkt terve ringi, näit. punkt B,



143. joonis.

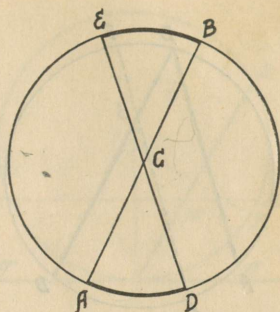
mille peal on sirkli kirjutaja ots. Kuna kiir teeb poolpöörde, kriipsutab kiire iga punkt poolringi; kuna kiir teeb veerandpöörde, kriipsutab kiire iga punkt veerandringi; kuna kiir teeb  $\frac{1}{360}$ -ku osa täispöördest, kriipsutab kiire iga punkt  $\frac{1}{360}$ -ku osa tervest ringist. Üldse, kuna kiir teeb mõne osa täispöördest, kriipsutab punkt sama suure osa tervest ringist — vastava kaare. Terve ring jagatakse samuti, nagu täispöördegi, 360-ks jaoks; iga 360-ndik on 1 kraad — kaare kraad.

Nii siis, mitu nurgakraadi on kesknurgas, nii mitu kaarekraadi on temale vastavas kaares, ja ümberpöörduvalt — mitu kaarekraadi on kaares, nii mitu nurgakraadi on vastavas kesknurgas, ehk: kesknurka mõõdab temale vastav kaar.

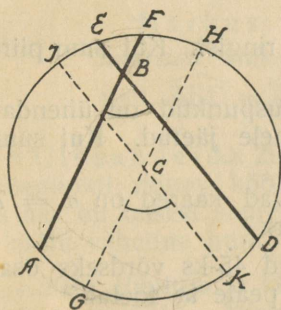
Tegelikult mõõdetaksegi nurki kaarte abil. Nurgamõõtja riist, näit. mall, asetatakse nii, et kaare keskpunkt asetub nurga tippu, ja siis loetakse haarade vahel oleva kaare kraadide arv malli pealt

105. Teoreemi „kesknurka mõõdab temale vastav kaar“ võib väljendada teisel kujul: „Kesknurka mõõdab nende kaarte poolsumma, mille peale toetub see nurk ja tema tippnurk.“ [144. joon.] Näiteks, nurka  $ACD$ -d mõõdab  $\widehat{AD} = \frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{EB})$ .

See teoreem jääb maksvaks ka siis, kui nurga tipp on üldse ringi sees.



144. joonis.



145. joonis.

**Teoreem:** Nurka, mille tipp on ringi sees, mõõdab nende kaarte poolsumma, mille peale toetub see nurk ja tema tippnurk [145. joon.].

Tõestus: Läbi keskpunkti  $C$  tõmbame  $GH \parallel AF$  ja  $JK \parallel ED$ . Siis on  $\widehat{ABD} = \widehat{GCK}$  [36]. Nurka  $GCK$ , järel. ka  $\widehat{ABD}$ , mõõdab  $\frac{1}{2}(\widehat{GK} + \widehat{JH}) = \frac{1}{2}(\widehat{GK} + \widehat{JE} + \widehat{EF} + \widehat{FH}) = \frac{1}{2}(\widehat{GK} + \widehat{KD} + \widehat{AG} + \widehat{EF}) = \frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{EF})$  [97]. M. o. t. t.

See teoreem jääb maksma ka siis, kui üks kaar muutub nulliks, nimelt kui tipp  $B$  nihkub ringi seest ringi peale.

3. Ülesanded. \*279) Ristküliku tipud on ringi peal. Tema diagonaalide vaheline nurk on  $115^\circ$ . Kui suured kaared vastavad selle nelinurga külgedele?

3 \*280) Lõikuvate kõõlude vahel on kaared  $\alpha = 57^\circ$  ja  $\beta = 113^\circ$ . Kui suure nurga all lõikuvad need kõõlud?

3 \*281) Kaarte  $\alpha = 76^\circ$  ja  $\beta = 144^\circ$  otsapunktid on ühendatud ringi sees lõikuvate kõõlude abil. Kui suur on nende kõõlude vaheline nurk?

106. Seletus. Piirdenurgaks nim. nurka, mille tipp on ringi peal ja mille haaradeks on kõõlud.

**Teoreem:** Piirdenurka mõõdab pool sellest kaarest, mille peale ta toetub.



146. joonis.

Tõestus: Tõmbame kõõlu  $EF \parallel AB$ . Siis on  $\widehat{ESD} = \widehat{ABD}$ . Nurka  $ESD$ , järel. ka nurka  $ABD$  mõõdab  $\frac{1}{2}(\widehat{ED} + \widehat{BF}) = \frac{1}{2}(\widehat{ED} + \widehat{AE}) = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AD} = \alpha$ .  
M. o. t. t.

1-ne järeldus: *Diameetri peale toetuv piirdenurk on täisnurk.*

2-ne järeldus: *Sama kaare peale toetuvad piirdenurgad on võrdsed.*

3. Ülesandeid. \*282) Kaar on  $\frac{4}{15}$  ringist. Kui suur piirde-  
nurk toetub tema peale?

3. \*283) Ring on jagatud 24-ks; jaotuspunktid on ühendatud järjekorras nii, et ikka 4 punkti on vahele jäetud. Kui suured on tekkinud piirdenurgad?

3. \*284) Piirdenurga haaradele vastavad kaared on  $\alpha = 75^\circ$  ja  $\beta = 98^\circ$ . Kui suur on see piirdenurk?

3. \*285)  $45^\circ$ -line piirdenurk on jagatud  $45$ -ks võrdseks osaks. Kui suurteks osadeks jagub kaar, mille peale ta toetub?

4. \*286) Punktid M, N, P jagavad ringi suhtes  $11:7:18$ . Kui suured nurgad tekivad, kui neid punkte üksteisega ühendada sirgete abil?

4. \*287) Piirdenurga üks haar jagab ringi pooleks ja teine — osadeks, millest üks on  $68^\circ$ . Kui suur on see piirdenurk?

3. \*288)  $\widehat{MNP}$  on  $178^\circ$  ja  $\widehat{NMP}$  on  $226^\circ$ . Kui suur on  $\widehat{MPN}$ ?

4. \*289) Ringis on tõmmatud kõõlud  $AB \perp CD$  ja  $DE \parallel AB$ . Tõestada, et CE on diameeter.

4. \*290) Täisnurkse  $\triangle$ -rga küljed on ringi O kõõludeks. Selle  $\triangle$ -rga üks teravnurk on teisest suurem  $\alpha = 12,5^\circ$  võrra. Kui suure nurga sees paistab keskpunkti O läbi täisnurga tipu hüpotenuusiga paralleelselt tõmmatud kõõl?

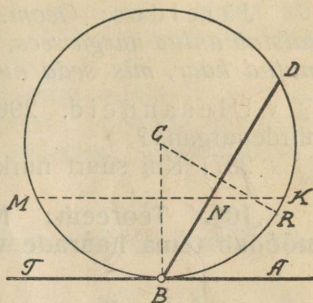
4. \*291) Ringi sisse joonestatud trapetsi diagonaal moodustab haaradega nurgad  $\alpha$  ja  $2\alpha$ . Kui suure kaare peale toetub selle diagonaali ja läbi tema otsapunkti tõmmatud diameetri vahe-  
line nurk?  $\alpha = 50^\circ$ .

4. \*292) Ringi sisse joonestatud trapetsis ABCD on  $AB = BC = CD$  ja teravnurk  $A = \alpha = 74^\circ$ . Kui suurteks osadeks jagab diameeter CE nurga ACD?

107. Teoreem: Nurka, mille tipp on ringi peal ja mille haaradeks on kõõl ja puutuja, mõõdab pool tema haarade vahel olevast kaarest.

Tõestus: Tõmbame  $MK \parallel TA$ ; siis on  $\widehat{ABD} = \widehat{KND}$ ; nurka  $KND$ , järelikult ka nurka  $ABD$  mõõdab  $\frac{1}{2}(\widehat{KD} + \widehat{MB}) = \frac{1}{2}(\widehat{KD} + \widehat{BK}) = \frac{1}{2}\widehat{BKD}$ .

M. o. t. t.



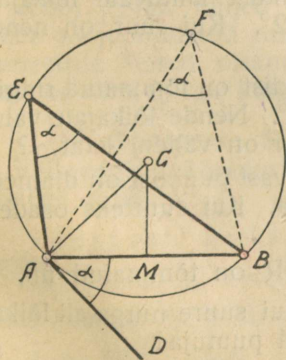
147. joonis.

Märkus: Kõõlu ja puutuja nurk on pool tema haarade vahelise kaare peale toetuvast kesknurgast, näit.  $\widehat{ABD} = \widehat{BCR}$ , kui risthaaradega nurgad.

4. Ülesandeid. 293) Ringile on tõmmatud puutuja ja läbi puutepunkti minev kõõl, mis jagab ringi kaheks osaks nii, et üks osa on teisest suurem  $65^\circ$  võrra. Kui suur on selle puutuja ja kõõlu vaheline nurk?

4. 294) Puutuja ja kõõlu vaheline nurk, mille tipp on puutepunktis, on  $67\frac{1}{2}^\circ$ . Missuguses suhtes jagab kõõl ringi?

108. Seletus. Kaart, mille peal leiduvad antud nurgaga võrdsete piirdenurkade tipud, nimet. antud nurka piirdenurgana mahutavaks kaareks.



148. joonis.

6. Ülesanne. 295) Antud kõõlu üle tõmmata kaar, mis mahutab antud nurka piirdenurgana.

Konstruksioon. Antud kõõlu  $AB$  külge ühe otsapunkti  $A$  juures asetame  $\widehat{DAB} = \alpha$ . Tõmbame  $AC \perp AD$  ja  $AB$  keskkohast  $MC \perp AB$ . Nende ristjoonte lõikepunktist  $C$  tõmbame raadiusega  $CA$  kaare  $AEFB$ .  $\widehat{AEFB}$  on otsitav.

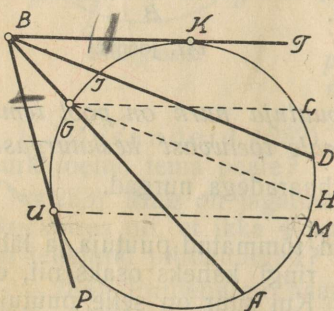
Märkus: Kaarele  $AEFB$  kõõlu  $AB$  suhtes sümmeetriline kaar rahuldab ka ülesande nõuet.

Järeldus: Geom. kohaks punktile, kust antud sirglõik paistab antud nurga sees, on antud sirglõigu kui kõõlu üle tõmmatud kaar, mis seda nurka mahutab piirdeurgana.

2 x Ülesandeid. 296) Kui suur kaar mahutab  $75^\circ$ -list nurka piirdeurgana?

2 x 297) Kui suurt nurka mahutab piirdeurgana  $\frac{2}{3}$  osa ringist?

109) Teoreem: Nurka, mille tipp väljaspool ringi, mõõdab tema haarade vaheliste kaarte poolvahe.



149. joonis.

Tõestus. I-ne juht: haaradeks on lõikajad BA ja BD. Tõmbame  $GH \parallel BD$ ; siis on  $\widehat{ABD} = \widehat{AGH}$ . Nurka AGH, järel. ka nurka ABD mõõdab:

$$\frac{1}{2} \widehat{AH} = \frac{1}{2} (\widehat{AD} - \widehat{HD}) = \frac{1}{2} (\widehat{AD} - \widehat{GJ}).$$

II-ne juht: üheks haaraks on lõikaja BA, teiseks haaraks puutuja BT. Tõmbame  $GL \parallel BT$ ; siis on  $\widehat{AGL} = \widehat{ABT}$ . Nurka AGL, järel. ka nurka ABT mõõdab:

$$\frac{1}{2} \widehat{AL} = \frac{1}{2} (\widehat{AK} - \widehat{LK}) = \frac{1}{2} (\widehat{AK} - \widehat{GK}).$$

III-as juht: haaradeks on puutujad BP ja BT. Tõmbame  $UM \parallel BT$ ; siis on  $\widehat{PUM} = \widehat{PBT}$ . Nurka PUM, järel. ka nurka PBT mõõdab:  $\frac{1}{2} \widehat{UAM} = \frac{1}{2} [\widehat{UAMK} - \widehat{MK}] = \frac{1}{2} (\widehat{UAMK} - \widehat{UGK})$  [98].

M. o. t. t.

3 x Ülesandeid: 298) Ühest punktist lähtuvate lõikajate vahelised kaared on  $\alpha = 68^\circ$  ja  $\beta = 192^\circ$ . Kui suur on nende lõikajate vaheline nurk?

3 x 299) Väljaspool ringi olevast punktist on tõmmatud ringile lõikajad, mis moodustavad nurga  $\alpha = 48^\circ$ . Nende lõikajate vaheline suurem kaar on  $\beta = 140^\circ$ . Kui suur on vähem kaar  $\gamma$ ?

3 x 300) Diameetri pikenduse peal olevast punktist on diameetriga nurga  $\delta = 43^\circ$  all tõmmatud puutuja. Kui suurteks osadeks jagab puutuja poolringi?

4 x 301) Diameeter DJ ja raadius OR on tõmmatud nii, et  $\widehat{DOR}$  on  $2\frac{1}{3}$  korda nii suur kui  $\widehat{ROJ}$ . Kui suure nurga all lõikab diameetri pikendust punktis R tõmmatud puutuja?

3 x 302) Punktist A lähtuvate puutujate vahel olevatest kaardest on üks  $\alpha = 86^\circ$ . Kui suur on puutujate vaheline nurk?

303) Kõõl jagab ringi suhtes 7:17. Kui suure nurga all lõikuvad sirged, mis ringi puutuvad selle kõõlu otsapunktides? Kui suured nurgad moodustavad nad kõõluga?

304) Punktid A, B, C ja D jagavad ringi suhtes 5:3:8:9. Kui suurte nurkade all lõikuvad läbi nende punktide minevad ringi puutujad? läbi kahe punkti-paari minevad sirged? (näit. AB ja CD, AC ja BD jne.).

## Ringi sisse ja ringi ümber joonestatud hulknurgad.

110. Seletused. *Hulknurk* on ringi *sisse joonestatud* ja *ring* on hulknurga *ümber joonestatud*, kui hulknurga küljed on ringi kõõlud. *Hulknurk* on ringi *ümber joonestatud* ja *ring* on hulknurga *sisse joonestatud*, kui hulknurga küljed on ringi puutujad. Sissejoonestatud hulknurka nimetame ka kõõl-hulknurgaks ja ümberjoonestatud hulknurka — puutuja-hulknurgaks.

**Teoreem:** Iga kolmnurga ümber on võimalik joonestada ring. \*

Tõestus: Kolmnurga külgede keskristjoonte lõikepunkt on ümberjoonestatud ringi keskpunkt ja selle punkti kaugus tipust on raadius. V. 63, 87.

**Teoreem:** Iga kolmnurga sisse on võimalik joonestada ring.

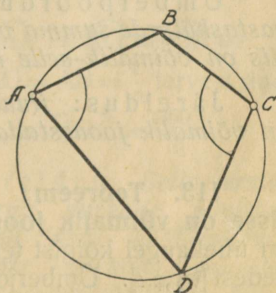
Tõestus: Nurkade poolitajate lõikepunkt on sissejoonestatud ringi keskpunkt ja selle punkti kaugus küljest on raadius. V. 64. Kui selle raadiusega ring tõmmata, siis puutub ta iga külge.

305) Võrdkülgse  $\triangle$ -rga sissejoonestatud ringi raadius on 2 cm. ( $a$  cm). Kui pikk on tema ümberjoonestatud ringi raadius?

306)  $\triangle$ -rga küljed on 5 cm., 6 cm., 7 cm. Selle  $\triangle$ -rga ümber on joonestatud ring ja tippudest on tõmmatud diameetrid. Diameetrite teised otsapunktid on ühendatud üksteisega. Kui pikad on uue  $\triangle$ -rga küljed?

111. **Teoreem:** Sissejoonestatud nelinurga vastasnurkade summa on sirge nurk.

Tõestus: Nurka A mõõdab  $\frac{1}{2} \widehat{BCD}$ ; nurka C mõõdab  $\frac{1}{2} \widehat{BAD}$ . Nende summat mõõdab  $\frac{1}{2}$  tervest ringist, s. o.  $180^\circ$ . Järel.  $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$  ehk  $\pi$ .  
M. o. t. t.



150. joonis.

Ümberpöördud teoreem: *Kui nelinurga vastasnurkade summa on sirge nurk, siis võib selle nelinurga ümber joonestada ringi.* (Tõestatakse vastuväiteliselt.)

Järeldus: *Ruudu, ristküliku, võrdhaarse trapetsi ja täisnurkse antiparallelogrammi ümber võib joonestada ringi.*

2. x Ülesandeid. 307) Nelinurga ABCD nurkade poolitajad lõikuvad punktides K, L, M, S. Kui suur on KLMS vastasnurkade summa?

ⓐ 308) Tõestada, et nelinurga nurkade poolitajad lõikuvad niisuguse nelinurga tippudes, mille ümber võib joonestada ringi.

**112. Teoreem:** *Ümberjoonestatud nelinurgas on ühe paari vastaskülgede summa niisama suur kui teise paari vastaskülgede summa.*

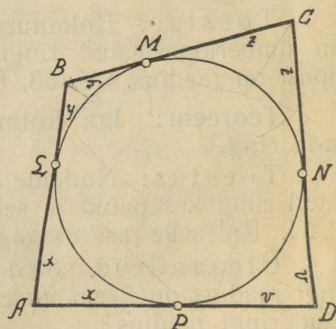
Tõestus: „Ühest punktist lähtuvad puutujad on võrdsed“ [90]; seepärast:

$$\begin{array}{l} AB \\ CD \end{array} \left\{ \begin{array}{l} AL = AP \\ BL = BM \\ CN = CM \\ DN = DP \end{array} \right\} \begin{array}{l} BC \\ AD \end{array}$$

---


$$AB + CD = AD + BC.$$

Ehk: Need summad koosnevad neljast vastavalt võrdsest liidetavast sirglõigust  $x + y + z + v$ .



151. joonis.

Ümberpöördud teoreem: *Kui nelinurgas ühe paari vastaskülgede summa võrdub teise paari vastaskülgede summaga, siis on võimalik selle nelinurga sisse joonestada ring.*

Järeldus: *Ruudu, rombi ja antiparallelogrammi sisse on võimalik joonestada ring.*

**113. Teoreem:** *Iga korrapärase hulknurga ümber ja sisse on võimalik joonestada ring — sest hulknurga keskpunkt on ühekaugel kõigist tema tippudest ja ühekaugel kõigist tema külgedest [81,3.4]. Ümberjoonestatud ringi raadiuseks on tipu kaugus keskpunktist ja sissejoonestatud ringi raadiuseks on apoteem.*

114. Teoreem: Kui ring jaotada mitmeks —  $n$  — võrdseks jaoks ja

I. jaotuspunktid ühendada kõõlude abil või

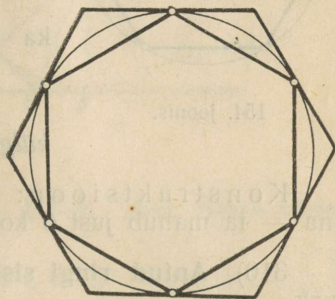
II. läbi jaotuspunktide tõmmata puutujad,

siis saame

I. korrapärase kõõl-hulknurga,

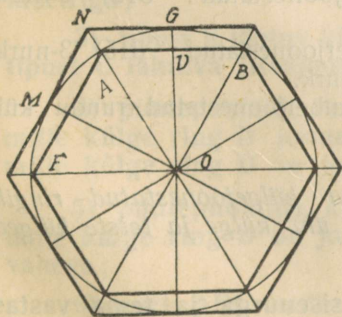
II. korrapärase puutuja-hulknurga.

Tõestus: Pöörame ringi tema keskpunkti ümber  $\frac{1}{n}$ -diku täispöörde võrra, siis libiseb ring iseennast mööda ja iga jaotuspunkt langeb ühte teise järjekorras oleva jaotuspunktiga, sest kõik nende vahel olevad kaared on isekeskis võrdsed. Järel ühivad ka neid ühendavad kõõlud, sest kõõlude otsapunktid langesid ühte, ja nende läbi tõmmatud puutujad, sest jaotuspunktidesse tõmmatud raadiustele on igäihele tema otsapunktis üksainus ristjoon võimalik.



152. joonis.

115. Teoreem: Kui me ringile tõmbame puutujad, mis on paralleelsed korrapärase kõõl-hulknurga külgedega, siis saame korrapärase puutuja-hulknurga.



153. joonis.

Tõestus: Kõõluga paralleelne puutuja jagab kõõlule vastava kaare pooleks [98], seepärast:

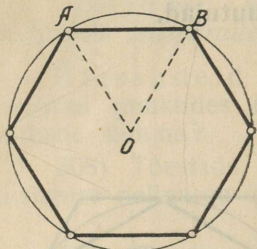
$$\widehat{FM} = \widehat{MA} = \widehat{AG} = \widehat{GB} = \dots$$

Järel  $\widehat{MG} = \widehat{AB} = \frac{1}{n}$  tervest ringist

$$\text{ja } \widehat{MOG} = \frac{360^\circ}{n}.$$

Järeldus: Selle puutuja-hulknurga nurkade poolitajad langevad ühte kõõl-hulknurga vastavate nurkade poolitajatega — näit. NO ja AO on kumbki nurga GOM poolitaja.

116. Ülesandeid. 309) Antud ringi sisse joonestada korrapärase kuusnurk.



154. joonis.

Analüüs: Olgu  $\widehat{AB}$  korrapärase 6-nurga külg; siis on  $\widehat{AB}$   $\frac{1}{6}$ -ndik tervest ringist ja  $\widehat{AOB} = 60^\circ$ .

Et  $OA = OB$ , siis on

$$\hat{A} = \hat{B} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Järel.  $\triangle AOB$  on võrdnurkne, sellega ka võrdkülgne:  $OA = AB = BO$  ehk  $a_6 = R$  (valem).

S. t. sissejoonestatud korrapärase 6-nurga külg on sama pikk kui raadius.

Konstruksioon: Asetame raadiuse ringi sisse kõõluna — ta mahub just 6 korda.

310) Antud ringi sisse joonestada korrapärase kolmnurk.

Konstruksioon: Jagame ringi kuueks [ül. 309] ja ühendame jaotuspunktid kõõlude abil ikka üht vahele jättes.

311) Antud ringi sisse joonestada ruut.

Konstruksioon: Kahe vastastikku risti oleva diameetriga jagame ringi neljaks ja jaotuspunktid ühendame kõõlude abil.

Konstruida korrapärase sissejoonestatud: 312) 8-nurk; 313) 16-nurk; 314) 12-nurk.

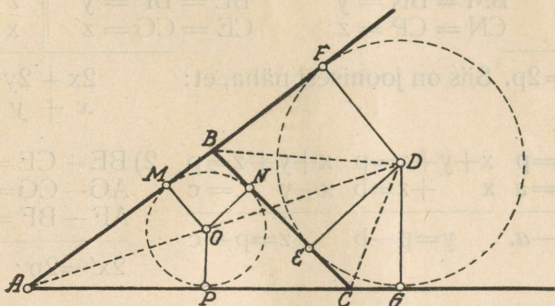
Konstruida korrapärase ümberjoonestatud: 315) 3-nurk; 316) 12-nurk; 317) 8-nurk; 318) 4-nurk.

319) Kui pikk on korrapärase ümberjoonestatud ruudu külg võrreldes raadiusega?

117. Seletus. Kolmnurga külgejoonestatud ringiks nim. ringi, mis puutub kolmnurga üht külge ja teiste külgede pikendusi.

Teoreem: Kolmnurga ühe sisenurga ja tema vastaskülje juures olevate välisnurkade poolitajad lõikuvad ühes punktis, nimelt selle vastaskülje külgejoonestatud ringi keskpunktis.

Tõestus: Nurga  $FBC$  ja nurga  $GCB$  poolitajad lõikuvad punktis  $D$ , mis on võrdkaugel  $BF$ -st,  $BC$ -st ja  $CG$ -st:  $DF = DE = DG$ .



155. joonis.

Sellega on  $D$  võrdkaugel  $AF$ -st ja  $AG$ -st; järel. läheb nurga  $A$  poolitaja  $D$ -st läbi. (61, III.)

Kui  $D$ -st raadiusesga  $DG = DE = DF$  tõmmata ring, siis puutub see ring  $BF$ -i,  $BC$ -d ja  $CG$ -d. M. o. t. t.

118. Teoreem. Kui kolmnurga  $ABC$  [155. joon.] sisse on joonestatud ring  $O$  ja tema külje  $BC$  külge on joonestatud ring  $D$ , siis:

1) tipust  $A$  lähtuv sissejoonestatud ringi puutuja on kolmnurga poolperimeetrist vastaskülje  $a$  võrra vähem, ja  
2) külgejoonestatud ringi puutuja võrdub poolperimeetriga;

3) tipust  $B$  lähtuv külgejoonestatud ringi puutuja võrdub tipust  $C$  lähtuva sissejoonestatud ringi puutujaga;

4) puutepunktide kaugus teineteisest selle külje peal, mille külge ring  $D$  joonestatud ei ole, võrdub küljega  $BC$ , mille külge ring  $D$  on joonestatud;

5) puutepunktide kaugus teineteisest selle külje peal, mille külge ring  $D$  on joonestatud, võrdub kahe teise külje vahega;

6) nurk  $ADC$ , mille sees paistab külgejoonestatud ringi keskpunkti kolmnurga külje  $AC$ , mille külge ring  $D$  joonestatud ei ole, on pool nii suur kui selle külje vastasnurk  $B$ .

Tõestus: Tähistame esinevad sirglõigud järgmiselt:

$$\begin{array}{lll} BC = a & AM = AP = x & AG = AF = x' \\ AC = b & BM = BN = y & BE = BF = y' \\ AB = c & CN = CP = z & CE = CG = z' \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} y + z = a \\ z + x = b \\ x + y = c \end{array} \right.$$

$$a + b + c = 2p. \text{ Siis on joonisest näha, et: } \quad \begin{array}{l} 2x + 2y + 2z = 2p; \\ x + y + z = p. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1) \begin{array}{l} x + y + z = p \\ y + z = a \\ \hline x = p - a. \end{array} \quad \begin{array}{l} x + y + z = p \\ x + z = b \\ \hline y = p - b \end{array} \quad \begin{array}{l} x + y + z = p \\ x + y = c \\ \hline z = p - c \end{array} \quad 2) \begin{array}{l} BE + CE = y' + z' = a \\ AG - CG = x' + z' = b \\ AF - BF = x' + y' = c. \\ \hline 2x' = 2p; \quad x' = p. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3) \begin{array}{l} x' - y' = c [x' = p] \\ p - y' = c \\ y' = p - c = z \\ y' = z \quad BE = CN. \\ \quad \quad BF = CP \end{array} \quad \begin{array}{l} x' - z' = b \\ p - z' = b \\ z' = p - b = y \\ z' = y \quad CE = BN \\ \quad \quad CG = BM \end{array} \quad 4) \begin{array}{l} PG = CP + CG \\ PG = z + z' \\ PG = z + y = a \\ PG = a = BC = MF \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5) NE = BE - BN; \\ NE = y' - y; \\ NE = [p - c] - [p - b]; \\ NE = b - c. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6) \widehat{ADC} = \widehat{DCG} - \widehat{DAG} \\ \widehat{ADC} = \frac{\hat{B} + \hat{A}}{2} - \frac{\hat{A}}{2} \\ \widehat{ADC} = \frac{\hat{B}}{2}. \end{array}$$

- 3) Ülesanne. 320) Kolmnurga küljed on 5 cm, 6 cm, 7 cm pikad. Selle  $\triangle$ -rga sisse ja külge on joonestatud ringid. Leida puutepunktide kohad külgedel ja nende pikendustel.