A. Kisseljov

GEOMEETRIA

STEREOMEETRIA

XI
KLASSILE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

A. KISSELJOV

GEOMEETRIA

STEREOMEETRIA

KESKKOOLI XI KLASSILE

Prof. N. Glagolevi toimetusel ja lisaga

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1957

Originaali tiitel: А. П. Киселёв. Геометрия. Часть вторая. Стереометрия. Учебник для 9—10 классов средней школы.

Утверждён Министерством просвещения РСФСР.
Учпедгиз 1955.

Tõlge kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt.

Stereomeetria.

Eelmärkusi.

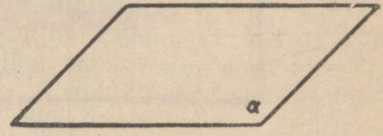
1. Stereomeetrias käsitletakse geomeetrilisi kehasid ja ruumilisi kujundeid, mille kõik punktid ei asetse ühel tasapinnal. Ruumilisi kujundeid kujutatakse joonisel nii, et nad kutsuvad silmas esile umbes samasuguse mulje nagu kujundid ise. Need joonised valmistatakse kindlate reeglite järgi, mis põhinevad kujundite geomeetrilistel omadustel. Ühte ruumiliste kujundite kujutamise võtet tasapinnal käsitleme edaspidi (§§ 54—66).

ESIMENE PEATÜKK.

SIRGED JA TASAPINNAD.

I. Tasapinna asendi määramine.

2. **Tasapinna kujutamine.** Paljudel igapäevases elus tarvitatavatel esemetel, mille pind meenutab tasapinda, on ristküliku kuju, näiteks: raamatu köide, aknaklaas, kirjutuslaua plaat jne. Seejuures, vaadeldes neid esemeid kõrvalt ja suurest kaugusest, näib neil olevat rööpküliku kuju. Seepärast on saanud kombeks kujutada tasapinda joonisel rööpkülikuna[1]. Tasapinda tähistatakse tavaliselt ühe kreeka tähega, näiteks «tasapind α» (joon. 1).



Joon. 1.

3. **Tasapinna põhiomadused.** Mainime järgmisi tasapinna omadusi, mida tunnustatakse tõestuseta, s. t. kasutatakse aksioomidena.

[1] Tasapinda võib kujutada ka nii, nagu seda on tehtud joonistel 15—17 jm. (*Toim.*)

1) *Kui sirgjoone kaks punkti asetsevad mingil tasapinnal, siis asetsevad sellel tasapinnal ka selle sirge kõik teised punktid.*

2) *Kui kahel tasapinnal on üks ühine punkt, siis need tasapinnad lõikuvad mööda sirget, mis läbib seda punkti.*

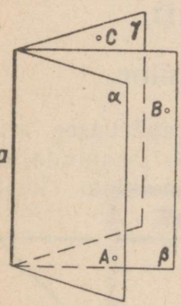
3) *Läbi kolme punkti, mis ei asetse ühel sirgel, saab panna tasapinna ja ainult ühe.*

4. Järeldused. Viimasest lausest saab teha järgmised järeldused:

1) *Läbi sirge ja sellest väljaspool asetseva punkti saab panna tasapinna* (*ja ainult ühe*). Tõepoolest, väljaspool sirget asetsev punkt koos mingi kahe punktiga, mis on võetud sellel sirgel, moodustavad kolm niisugust punkti, milledest läbi saab panna tasapinna (ja ainult ühe).

2) *Läbi kahe lõikuva sirge saab panna tasapinna* (*ja ainult ühe*). Tõepoolest, võttes sirgete lõikepunkti ja veel ühe punkti kummalgi sirgel, saame kolm niisugust punkti, milledest läbi saab panna tasapinna (ja ainult ühe).

3) *Läbi kahe paralleelse sirge saab panna ainult ühe tasapinna.* Tõepoolest, paralleelsete sirgete definitsiooni järgi kaks paralleelset sirget asetsevad ühel ja samal tasapinnal; seejuures on neid tasapindu ainult üks, sest läbi ühe sirge ja läbi punkti, mis on võetud teisel sirgel, saab panna ainult ühe tasapinna.



Joon. 2.

5. Tasapinna pöörlemine ümber sirge. ***Läbi iga sirge ruumis saab asetada lõpmatu hulga tasapindu.*** Tõepoolest, olgu antud mingi sirge a (joon. 2); võtame väljaspool seda sirget mingi punkti A. Punkti A ja sirget a läbib ainult üks tasapind (§ 4). Nimetame seda tasapinnaks α. Võtame uue punkti B väljaspool tasapinda α. Punkti B ja sirget a läbib uus tasapind. Nimetame seda tasapinnaks β. See tasapind ei või ühtida tasapinnaga α, sest temal asetseb punkt B, mis ei kuulu tasapinnale α. Meie võime võtta ruumis väljaspool tasapindu α ja β jälle uue punkti C. Punkti C ja sirget a läbib jällegi uus tasapind. Nimetame seda tasapinnaks γ. Ta ei saa ühtida ei tasapinnaga α ega ka tasapinnaga β, sest temal asetseb punkt C, mis ei kuulu tasapinnale α ega ka tasapinnale β. Jätkates järjest uute punktide võtmist ruumis, saame järjest uusi tasapindu, mis läbivad sirget *a*. Niisuguste tasapindade hulk on lõpmatu. Kõiki neid tasapindu võime aga käsitleda ka kui ühe ja sama tasapinna eri asendeid selle tasapinna pöörlemisel ümber sirge *a*.

Järelikult võime väljendada veel ühe tasapinna omaduse: tasapind võib pöörelda iga sellel tasapinnal asetseva sirge ümber.

6. Konstruktsioonülesannetest ruumis. Kõiki konstruktsioone, millega tegeldakse planimeetrias, on võimalik teostada ühelainsal tasapinnal, kasutades selleks joonestamisvahendeid. Ruumilisteks konstruktsioonideks aga joonestamisvahendeid ei saa kasutada, sest on võimatu joonestada kujundeid ruumis. Peale selle esineb ruumilistes konstruktsioonides uus element — tasapind, mille ehitamist ei saa teostada samasuguste lihtsate vahenditega nagu sirgjoone ehitamist tasapinnal.

Seepärast on tarvilik täpselt kindlaks määrata, mida mõista nõude all teostada üks või teine ruumiline konstruktsioon, eriti aga, mida mõista nõude all ehitada tasapind ruumis. Kõigi ruumiliste konstruktsioonülesannete kohta eeldame järgmist:

1) et konstrueerida tasapind, tuleb leida tema asendit ruumis määravad elemendid (§ 3 ja § 4), see tähendab, et tasapinna ehitamise ülesande loeme lahendatuks, kui on leitud kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti, või sirge ja punkt väljaspool seda sirget, või kaks lõikuvat või paralleelset sirget, mida läbib otsitav tasapind;

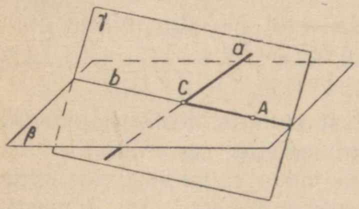
2) kui on antud kaks lõikuvat tasapinda, siis on antud ka nende lõikesirge, see tähendab, et sirge ehitamise ülesande loeme lahendatuks, kui on leitud need kaks tasapinda, mille lõikejooneks on otsitav sirge;

3) kui ruumis on antud tasapind, siis sellel tasapinnal on teostatavad kõik need tasapinnalised konstruktsioonid, mis on teostatavad planimeetrias.

Teostada mingi ruumiline konstruktsioon tähendab taandada see ülesanne lõplikuks arvuks mainitud põhikonstruktsioonideks.

Nende eelduste ja kokkulepete põhjal lahendataksegi stereomeetrilisi konstruktsioonülesandeid.

7. **Ruumilise konstruktsioonülesande näide.** Ü l e s a n n e. *Leida antud sirge a* (joon. 3) *ja antud tasapinna β lõikepunkt.* Võtame tasapinnal β mingi punkti *A*. Läbi punkti *A* ja sirge *a* paigutame tasapinna γ. See tasapind lõikab tasapinda β mööda mingit sirget *b*. Leiame tasapinnal γ sirgete *a* ja *b* lõikepunkti. See punkt ongi otsitav punkt. Kui sirged *a* ja *b* osutuvad paralleelseteks, siis ülesandel lahendit ei ole.

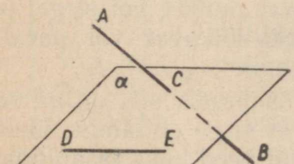


Joon. 3.

II. Paralleelsed sirged ja tasapinnad.

Paralleelsed sirged.

8. **Eelmärkus.** Kaks sirget võivad ruumis asetseda nii, et läbi nende ei saa panna tasapinda. Võtame näiteks (joon. 4) kaks niisugust sirget *AB* ja *DE*, millest üks lõikab mingit tasapinda α, teine aga asetseb sellel tasapinnal, kuid ei läbi esimese sirge ja tasapinna α lõikepunkti (*C*). Läbi kahe niisuguse sirge ei ole võimalik panna tasapinda, sest vastasel korral läbiks sirget *DE* ja punkti *C* kaks eri tasapinda: tasapind α, mis lõikub sirgega *AB*, ja mingi teine tasapind, millel asetseb sirge *AB*, — kuid see on võimatu (§ 3).



Joon. 4.

Kaks sirget, mis ei asetse ühel tasapinnal, ei saa muidugi lõikuda; siiski neid ei nimetata paralleelseteks, sest see nimetus säilitatakse sirgetele, mis teineteisega ei lõiku, kuid a s e t s e v a d s e e j u u r e s ü h e l j a s a m a l t a s a p i n n a l.

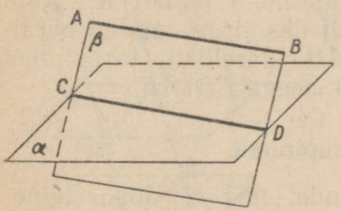
Kaht sirget, mis ei asetse ühel tasapinnal, nimetatakse k i i v s i r g e t e k s.

Sirge ja tasapinna paralleelsus.

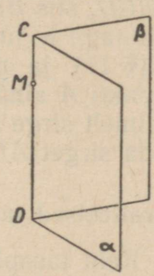
9. Definitsioon. Tasapinda ja väljaspool seda tasapinda asetsevat sirget nimetatakse p a r a l l e e l s e t e k s, kui nad teineteisega ei lõiku, ükskõik kui palju neid ka pikendada.

10. T e o r e e m. ***Kui sirge*** (AB, joon. 5) ***on paralleelne mingi sirgega*** (CD), ***mis asetseb tasapinnal*** (α), ***siis on ta paralleelne ka selle tasapinnaga.***

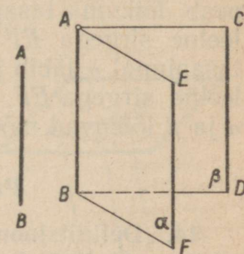
Läbi sirgete AB ja CD paneme tasapinna β ja oletame, et sirge AB lõikab kusagil tasapinda α. Siis oletatav lõikepunkt, asetsedes sirgel AB, peab kuuluma ka tasapinnale β, millel asetseb sirge AB; samal ajal lõikepunkt peab muidugi kuuluma ka tasapinnale α. Tähendab, oletatav lõikepunkt, asetsedes samaaegselt nii tasapinnal α kui ka tasapinnal β, peab asetsema nende lõikesirgel CD. Järelikult



Joon. 5.



Joon. 6.



Joon. 7.

sirge AB lõikub sirgega CD. Kuid see on võimatu, kuna eelduse järgi $AB \| CD$. Seega on võimatu, et sirge AB lõikaks tasapinda α, ja seepärast $AB \| \alpha$.

11. T e o r e e m. ***Kui ühel tasapinnal*** (β, joon. 5) ***asetsev sirge*** (AB) ***on paralleelne teise tasapinnaga*** (α) ***ja need tasapinnad lõikuvad, siis see sirge*** (AB) ***on paralleelne nende tasapindade lõikesirgega*** (CD).

Tõepoolest, esiteks, sirge CD asetseb sirgega AB ühel ja samal tasapinnal β; teiseks, sirge CD ei saa lõikuda sirgega AB, sest vastasel korral sirge AB lõikuks tasapinnaga α, mis on aga võimatu.

12. J ä r e l d u s 1. *Kui sirge* (AB, joon. 6) *on paralleelne kummagagi kahest lõikuvast tasapinnast* (α *ja* β), *siis on ta paralleelne ka nende tasapindade lõikesirgega* (CD).

Paneme läbi sirge AB ja läbi sirge CD mingi punkti M tasapinna. See tasapind peab lõikuma tasapindadega α ja β mööda sirgeid, mis on paralleelsed sirgega AB ja läbivad punkti M. Kuid punkti M läbib ainult üks sirge, mis on paralleelne sirgega AB; see tähendab, et abitasapinna ning tasapindade α ja β kaks oletatavat lõikesirget peavad ühtima. See sirge, asetsedes samaaegselt tasapinnal α ja tasapinnal β, peab ühtima nende tasapindade lõikesirgega CD; seega $CD \| AB$.

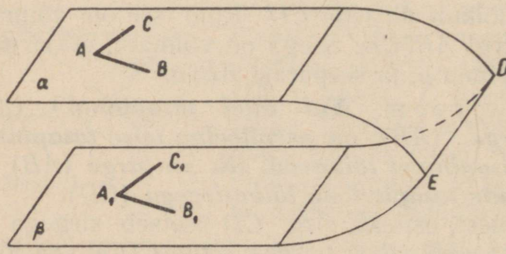
13. Järeldus 2. *Kui kaks sirget* (AB ja CD, joon. 7) *on paralleelsed kolmanda sirgega* (EF), *siis nad on paralleelsed ka teineteisega.*

Paneme tasapinna α läbi paralleelsete sirgete AB ja EF. Et $CD \| EF$, siis $CD \| \alpha$ (§ 10).

Paneme läbi sirge CD ja läbi sirge AB mingi punkti A tasapinna β. Et $EF \| CD$, siis $EF \| \beta$. Järelikult tasapind β peab lõikuma tasapinnaga α mööda sirget, mis on paralleelne sirgega EF (§ 11) ja mis läbib punkti A. Kuid tasapinnal α läbib punkti A ainult üks sirge, mis on paralleelne sirgega EF, nimelt sirge AB. Järelikult tasapinnad α ja β lõikuvad mööda sirget AB, seega $CD \| AB$.

Paralleelsed tasapinnad.

14. Definitsioon. Kaht tasapinda, mis ei lõiku teineteisega, ükskõik kui palju neid ka pikendada, nimetatakse paralleelseteks.



Joon. 8.

15. Teoreem. ***Kui ühe tasapinna*** (α, joon. 8) ***kaks lõikuvat sirget*** (AB ja AC) ***on vastavalt paralleelsed teise tasapinna*** (β) ***kahe lõikuva sirgega*** (A_1B_1 ja A_1C_1), ***siis need tasapinnad on paralleelsed.***

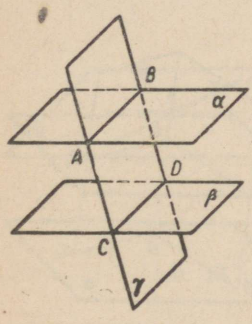
Sirged AB ja AC on paralleelsed tasapinnaga β (§ 10).

Oletame, et tasapinnad α ja β lõikuvad mööda mingit sirget DE (joon. 8). Niisugusel juhul $AB \| DE$ ja $AC \| DE$ (§ 11). Seega läbib punkti A tasapinnal α kaks sirget AB ja AC, mis on paralleelsed sirgega DE, mis on aga võimatu. Järelikult tasapinnad α ja β ei lõiku.

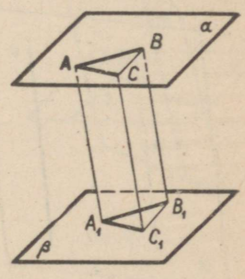
16. Teoreem. ***Kui kahte paralleelset tasapinda*** (α ja β, joon. 9) ***lõigatakse kolmanda tasapinnaga*** (γ), ***siis lõikesirged*** (AB ja CD) ***on paralleelsed.***

Tõepoolest, esiteks, sirged asetsevad ühel tasapinnal (γ), teiseks, nad ei saa lõikuda, sest vastasel korral lõikuksid tasapinnad α ja β, mis on aga vastuolus eeldusega.

17. Teoreem. ***Paralleelsete tasapindade*** (α ja β, joon. 9) ***vahelised paralleelsete sirgete lõigud*** (AC ja BD) ***on võrdsed.***



Joon. 9.



Joon. 10.

Paneme läbi paralleelsete sirgete AC ja BD tasapinna γ; see tasapind lõikab tasapindu α ja β mööda paralleelseid sirgeid AB ja CD. Järelikult nelinurk $ABDC$ on rööpkülik ja seepärast $AC = BD$.

18. Teoreem. ***Vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega kaks nurka*** (BAC ja $B_1A_1C_1$, joon. 10) ***on võrdsed ja asetsevad paralleelsetel tasapindadel*** (α ja β).

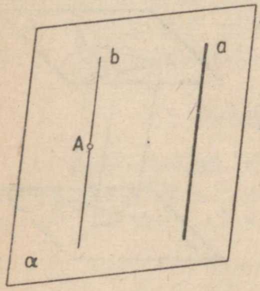
Et tasapinnad α ja β on paralleelsed, oli juba eespool tõestatud (§ 15); jääb tõestada, et nurgad A ja A_1 on võrdsed.

Võtame nurkade haaradel vabalt valitud, kuid vastavalt võrdsed lõigud $AB = A_1B_1$ ja $AC = A_1C_1$ ning tõmbame sirglõigud AA_1, BB_1, CC_1, BC ja B_1C_1. Et lõigud AB ja A_1B_1 on võrdsed ja paralleelsed, siis nelinurk ABB_1A_1 on rööpkülik; seetõttu on paralleelsed ja võrdsed ka lõigud AA_1 ja BB_1. Samal põhjusel on võrdsed ja paralleelsed ka lõigud AA_1 ja CC_1; järelikult $BB_1 \parallel CC_1$ ja $BB_1 = CC_1$. Seepärast $BC = B_1C_1$ ja $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (kolme külje järgi); järelikult $\angle A = \angle A_1$.

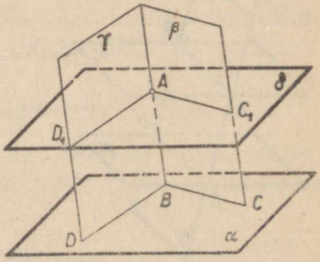
Konstruktsioonülesandeid.

19. *Ehitada ruumis läbi väljaspool antud sirget* (a, joon. 11) *asetseva punkti* (A) *sirge, mis oleks paralleelne antud sirgega* (a).

L a h e n d u s. Paneme läbi sirge a ja punkti A tasapinna α. Sellel tasapinnal tõmbame läbi punkti A sirge b paralleelselt sirgega a.



Joon. 11.



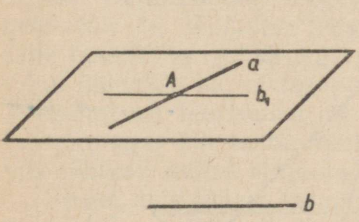
Joon. 12.

Ülesandel on ainult üks lahend. Tõepoolest, otsitav sirge peab asetsema sirgega a ühel ja samal tasapinnal. Samal tasapinnal peab asetsema ka punkt A, mida peab läbima otsitav sirge. Tähendab, see tasapind peab ühtima tasapinnaga α. Kuid läbi punkti A tasapinnal α saab tõmmata ainult ühe sirge, mis on paralleelne sirgega a.

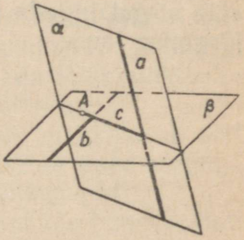
20. *Läbi antud punkti* (A, joon. 12) *ehitada tasapind, mis oleks paralleelne antud tasapinnaga* (α), *mis ei läbi antud punkti* (A).

L a h e n d u s. Tõmbame läbi mingi punkti B tasapinnal α mingid kaks sirget BC ja BD. Kujundame kaks abitasapinda: läbi punkti A ja sirge BC — tasapinna β ning läbi punkti A ja sirge BD — tasapinna γ. Otsitav, tasapinnaga α paralleelne tasapind peab lõikama tasapinda β mööda sirget, mis on paralleelne sirgega BC, ja tasapinda γ mööda sirget, mis on paralleelne sirgega BD (§ 16). Sellest järeldub niisugune konstruktsioon: tõmbame läbi punkti A tasapinnal β sirge $AC_1 \parallel BC$ ja tasapinnal γ sirge $AD_1 \parallel BD$. Läbi sirgete AC_1 ja AD_1 paneme tasapinna δ. See tasapind ongi nõutav tasapind. Tõepoolest, tasapinnal δ asetseva nurga D_1AC_1 haarad on paralleelsed tasapinnal α asetseva nurga DBC haaradega. Järelikult $\delta \parallel \alpha$.

Et tasapinnal β on läbi punkti A võimalik tõmmata ainult üks sirgega BC paralleelne sirge, siis ülesandel on ainult üks lahend. Järelikult on läbi väljaspool tasapinda asetseva punkti võimalik panna ainult üks antud tasapinnaga paralleelne tasapind.



Joon. 13.



Joon. 14.

21. *Läbi antud sirge* (a, joon. 13) *ehitada teise antud sirgega* (b) *paralleelne tasapind.*

L a h e n d u s. 1. j u h t u m: sirged a ja b ei ole paralleelsed. Läbi sirge a mingi punkti A ehitame sirgega b paralleelse sirge b_1; läbi sirgete a ja b_1 paneme tasapinna. See tasapind ongi nõutav tasapind (§ 10). Ülesandel on sel juhul ainult üks lahend.

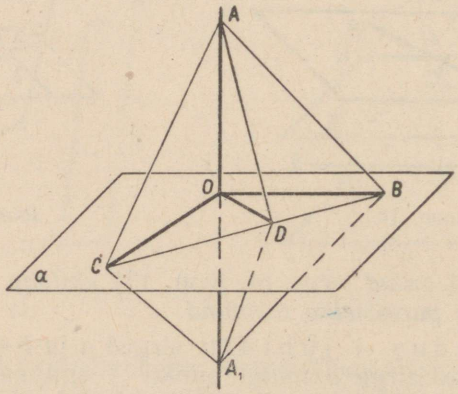
2. j u h t u m: sirged a ja b on paralleelsed. Sel juhtumil ülesanne on määramatu, sest iga tasapind, mis läbib sirget a, on paralleelne sirgega b.

22. Keerulisema konstruktsioonülesande näide. *On antud kaks kiivsirget* (a ja b, joon. 14) *ja punkt A, mis ei asetse kummalgi nendest sirgetest. Ehitada läbi punkti A sirge, mis lõikab mõlemat antud sirget.*

Lahendus. Et antud sirge peab läbima punkti A ja lõikama sirget a, siis peab ta asetsema punkti A ja sirget a läbival tasapinnal (sest kaks tema punkti, A ja lõikepunkt sirgega a, asetsevad sellel tasapinnal). Just samuti veendume, et otsitav sirge peab asetsema tasapinnal, mis läbib punkti A ja sirget b. Järelikult see sirge peab olema nende tasapindade lõikesirge. Siit järeldub järgmine konstruktsioon. Asetame läbi punkti A ja sirge a tasapinna α; läbi punkti A ja sirge b asetame tasapinna β. Võtame tasapindade α ja β lõikesirge c. Kui sirge c ei ole paralleelne kummagagi antud sirgetest, siis ta lõikab mõlemat (sest ta asetseb kummagagi neist ühel tasapinnal: a ja c asetsevad tasapinnal α, b ja c — tasapinnal β). Sel juhul sirge c ongi otsitav sirge. Kui aga $a \parallel c$ või $b \parallel c$, siis ülesandel pole lahendit. Sirged a ja c on paralleelsed sel juhtumil, kui punkti A ja sirget b läbiv tasapind on paralleelne sirgega a. Analoogiliselt: $b \parallel c$, kui $\alpha \parallel b$.

III. Tasapinna rist- ja kaldsirged.

Seame endale ülesandeks määrata, missugusel juhul võib sirget lugeda ristuvaks tasapinnaga. Tõestame esmalt järgmise lause.



Joon. 15.

23. Teoreem. ***Kui tasapinnaga lõikuv sirge*** (AA_1, joon. 15) ***on risti selle tasapinna mingi kahe sirgega*** (OB ja OC), ***mis läbivad antud sirge ja tasapinna lõikepunkti*** (O), ***siis antud sirge on risti ka selle tasapinna iga kolmanda sirgega*** (OD), ***mis läbib sedasama lõikepunkti*** (O).

Võtame sirgel AA_1 vabalt valitud pikkusega, kuid võrdsed lõigud OA ja OA_1, ja tõmbame tasapinnal mingi sirge, mis lõikab punkti O läbivat kolme sirget mingites punktides C, D ja B. Ühendame need punktid punktidega A ja A_1. Siis saame rea kolmnurki. Vaatleme neid järgemööda.

Esmalt vaatleme kolmnurki ACB ja A_1CB; need on kongruentsed, sest neil on ühine külg CB, $AC = A_1C$ kui kaldlõigud AA_1 suhtes, millede aluspunktid on võrdsel kaugusel ristlõigu OC aluspunktist O, $AB = A_1B$ samal põhjusel. Nende kolmnurkade ühtivusest järeldub, et $\angle ABC = \angle A_1BC$.

Seejärel siirdume kolmnurkade ADB ja A_1DB vaatlemisele: need on kongruentsed, sest neil on ühine külg DB, $AB = A_1B$ ja $\angle ABD = \angle A_1BD$. Nende kolmnurkade ühtivusest järeldame, et $AD = A_1D$.

Nüüd võtame kolmnurgad AOD ja A_1OD; need on kongruentsed, sest nende vastavad küljed on võrdsed. Nende kolmnurkade ühtivusest järeldame, et $\angle AOD = \angle A_1OD$; et need nurgad on aga kõrvunurgad, siis $AA_1 \perp OD$.

24. Definitsioon. Sirget nimetatakse **tasapinna ristsirgeks**, kui ta lõikudes tasapinnaga moodustab täisnurga selle tasapinna iga sirgega, mis läbib seda lõikepunkti. Sel juhul öeldakse ka, et tasapind on risti sirgega.

Eelmisest teoreemist (§ 23) järeldub, et sirge on risti tasapinnaga, kui ta on risti selle tasapinna kahe sirgega, mis läbivad antud sirge ja tasapinna lõikepunkti.

Sirget, mis lõikub tasapinnaga, kuid ei ole temaga risti, nimetatakse selle tasapinna **kaldsirgeks.** Sirge ja tasapinna lõikepunkti nimetatakse ristsirge või kaldsirge **aluspunktiks.**

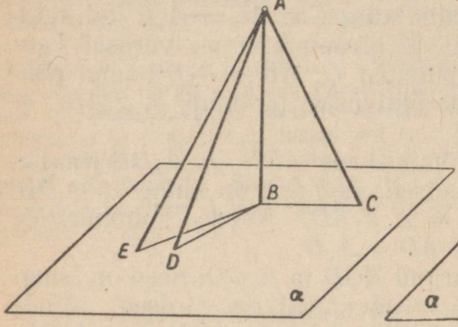
25. Ristlõigu ja kaldlõigu pikkuste võrdlemine. [1] Kui ühest punktist A (joon. 16) on tasapinnale ehitatud ristlõik AB ja kaldlõik AC, siis nimetame kaldlõigu p r o j e k t s i o o n i k s tasapinnal α lõiku BC, mis ühendab ristlõigu ja kaldlõigu aluspunkte. Niiviisi lõik BC on kaldlõigu AC projektsioon, lõik BD on kaldlõigu AD projektsioon jne.

26. T e o r e e m. ***Kui ühest ja samast väljaspool tasapinda*** (α, joon. 16) ***asetsevast punktist*** (A) ***on sellele tasapinnale ehitatud ristlõik*** (AB) ***ja kaldlõigud*** (AC, AD, $AE, \ldots$), ***siis:***

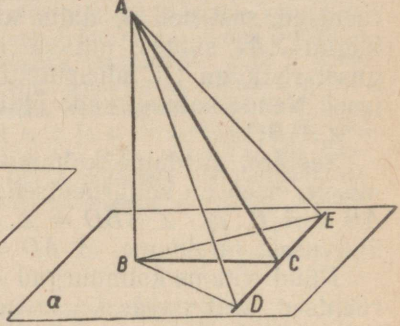
---

[1] «Tasapinnani ehitatud ristlõigu» ja «tasapinnani ehitatud kaldlõigu» all mõtleme ristsirge lõiku antud punktist kuni ristsirge aluspunktini ja kaldsirge lõiku antud punktist kuni kaldsirge aluspunktini.

1) ***võrdsete projektsioonidega kaldlõigud on võrdsed;***
2) ***kahest kaldlõigust on suurem see, mille projektsioon on suurem.***



Joon. 16.



Joon. 17.

Pöörates täisnurkseid kolmnurki ABC ja ABD kaateti AB ümber, võime nende tasapinnad viia ühtivusse kolmnurga ABE tasapinnaga. Siis ristlõik ja kõik kaldlõigud asetsevad ühes ja samas tasapinnas ning nende projektsioonid asetsevad ühel ja samal sirgel. Seega on tõestatav teoreem taandatud analoogilistele teoreemidele planimeetriast.

Märkus. Et ristlõik AB on täisnurkse kolmnurga kaatetiks ja iga kaldlõik: AC, AD, AE, ... on hüpotenuusiks, **siis ristlõik on väiksem igast kaldlõigust,** tähendab, punktist tasapinnale ehitatud ristlõik on lühim kõigist lõikudest, mis seda punkti ühendavad selle tasapinna mistahes punktidega, ja seepärast ristlõiku loetakse punkti A kauguseks tasapinnast α.

27. Pöördteoreemid. ***Kui ühest ja samast väljaspool tasapinda asetsevast punktist on tasapinnale ehitatud ristlõik ja kaldlõigud, siis: 1) võrdsetel kaldlõikudel on võrdsed projektsioonid, 2) kahest projektsioonist on suurem see, mis vastab suuremale kaldlõigule.***

Jätame õpilastele endile tõestada need teoreemid (vastuväiteliselt).

Vaatame veel järgmist teoreemi ristlõikudest, mida vajame edaspidi.

28. Teoreem. ***Tasapinnal*** (α, joon. 17) ***asetsev sirge*** (DE), ***mis läbib kaldsirge*** (AC) ***aluspunkti ja on***

risti kaldsirge projektsiooniga (BC), ***on risti ka kaldsirge endaga.***

Võtame tasapinnal meelevaldsed, kuid võrdsed lõigud CD ja CE ning ühendame sirglõikude abil punktid A ja B punktidega D ja E. Siis saame, et $BD=BE$ kui kaldlõigud sirgele DE, mille aluspunktid D ja E asetsevad võrdsel kaugusel ristlõigu BC aluspunktist C, ning et $AD=AE$ kui võrdsete projektsioonidega BD ja BE kaldlõigud tasapinnale α. Seetõttu $\triangle ADE$ on võrdhaarne kolmnurk ja seega tema mediaan AC on risti alusega DE.

Seda teoreemi nimetatakse kolme ristsirge teoreemiks. Tõepoolest, see teoreem käsitleb kolme järgmise ristsirge vahelist seost: 1) ristsirge AB tasapinnale α, 2) ristsirge BC sirgele DE ja 3) ristsirge AC samale sirgele DE.

29. Pöördteoreem. ***Tasapinnal*** (α, joon. 17) ***asetsev sirge*** (DE), ***mis läbib kaldsirge*** (AC) ***aluspunkti ja on risti kaldsirgega, on risti ka tema projektsiooniga*** (BC).

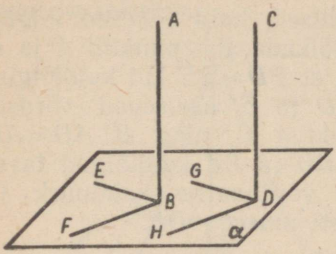
Teeme sama konstruktsiooni, mis otsesegi teoreemi tõestamiseks. Võtame meelevaldsed, kuid võrdsed lõigud CD ja CE ning ühendame sirglõikude abil punktid A ja B punktidega D ja E. Siis saame, et $AD = AE$ kui kaldlõigud sirgele DE, mille aluspunktid D ja E asetsevad võrdsel kaugusel ristlõigu AC aluspunktist C, ning et $BD = BE$ kui võrdsete kaldlõikude AD ja AE projektsioonid. Seetõttu $\triangle BDE$ on võrdhaarne kolmnurk ja seega tema mediaan BC on risti alusega DE.

IV. Sirgete ja tasapindade paralleelsuse ja ristseisu vaheline seos.

30. Eelmärkus. Sirgete ja tasapindade paralleelsuse ning nende ristseisu vahel valitseb mõnesugune seos. Nimelt ühtede elementide paralleelsus tingib teiste elementide ristseisu, ja ümberpöördult, ühtede elementide ristseisust on võimalik järeldada teiste elementide paralleelsust. See sirgete ja tasapindade paralleelsuse ja ristseisu vaheline seos väljendub järgmistes teoreemides.

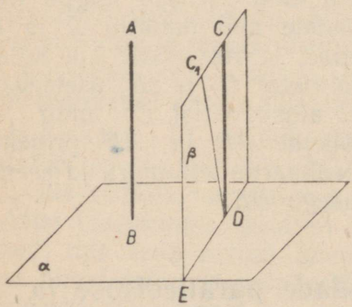
31. Teoreem. ***Kui tasapind*** (α, joon. 18) ***on risti ühega paralleelsetest sirgetest*** (AB), ***siis on ta risti ka teisega*** (CD).

Võtame tasapinnal α kaks punktist B väljuvat kiirt BE ja BF ning punktist D tõmbame kiired DG ja DH, mis on vastavalt paralleelsed kiirtega BE ja BF. Siis saame, et $\angle ABE = \angle CDG$ ja $\angle ABF = \angle CDH$ kui vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad. Kuid $\angle ABE$ ja $\angle ABF$ on täisnurgad, sest $AB \perp \alpha$. Järelikult on $\angle CDG$ ja $\angle CDH$ samuti täisnurgad (§ 18). Seega $CD \perp \alpha$ (§ 24).

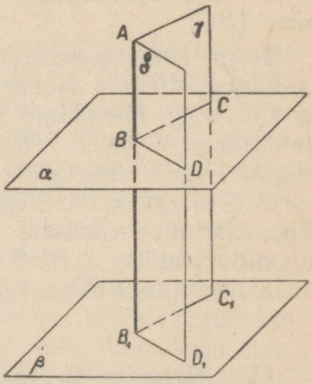


Joon. 18.

32. Pöördteoreem. ***Kui kaks sirget*** (AB ja CD, joon. 19) ***on risti ühe ja sama tasapinnaga, siis nad on paralleelsed.***



Joon. 19.



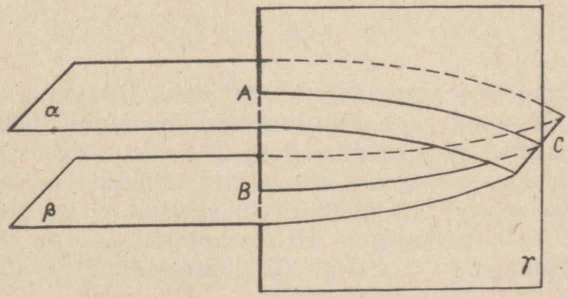
Joon. 20.

Oletame vastupidist, s. o. et AB ja CD ei ole paralleelsed. Võtame siis läbi punkti D sirge, mis on paralleelne sirgega AB. Tehtud oletusel on see mingi sirge DC_1, mis ei ühti sirgega DC. Otsese teoreemi järgi sirge DC_1 on risti tasapinnaga α. Läbi sirgete CD ja C_1D paneme tasapinna β ning võtame tasapindade α ja β lõikesirge DE. Et (eelmise teoreemi järgi) $C_1D \perp \alpha$, siis $\angle C_1DE$ on täisnurk, kuid et teoreemi eelduse kohaselt $CD \perp \alpha$, siis $\angle CDE$ on samuti täisnurk. Niiviisi selgub, et tasapinnal β on sirgele DE ühest ja samast punktist D ehitatud kaks ristsirget DC ja DC_1. Et see on võimatu, siis on ka võimatu, et sirged AB ja CD ei ole paralleelsed.

33. Teoreem. ***Kui sirge*** (BB_1, joon. 20) ***on risti ühega paralleelsetest tasapindadest*** (α), ***siis on ta risti ka teisega*** (β).

Asetame läbi sirge BB_1 mingid kaks tasapinda γ ja δ, milledest kumbki lõikub tasapindadega α ja β mööda paralleelseid sirgeid: üks mööda sirgeid BC ja B_1C_1 ning teine mööda sirgeid BD ja B_1D_1. Eelduse kohaselt sirge BB_1 on risti sirgetega BC ja BD, järelikult ta on risti ka nendega paralleelsete sirgetega B_1C_1 ja B_1D_1 ning seepärast ta on risti ka tasapinnaga β, millel asetsevad sirged B_1C_1 ja B_1D_1.

34. Pöördteoreem. ***Kui kaks tasapinda*** (α ja β, joon. 21) ***on risti ühe ja sama sirgega*** (AB), ***siis nad on paralleelsed.***

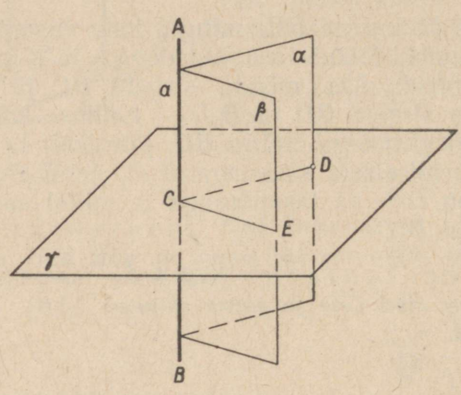


Joon. 21.

Oletame vastupidist, s. o. et tasapinnad α ja β lõikuvad. Võtame nende lõikesirgel mingi punkti C ning paneme tasapinna γ läbi punkti C ja sirge AB. Tasapind γ lõikab tasapindu α ja β vastavalt mööda sirgeid AC ja BC. Et $AB \perp \alpha$, siis $AB \perp AC$, ja et $AB \perp \beta$, siis $AB \perp BC$. Sel viisil saame tasapinnal γ sirgele AB kaks ristsirget AC ja BC, mis läbivad ühte ja sama punkti C. Et see on võimatu, siis oletus, et tasapinnad α ja β lõikuvad, oli vale. Järelikult tasapinnad on paralleelsed.

35. *Läbi antud punkti ehitada tasapind, mis on risti antud sirgega AB* (joon. 22).

Lahendus. 1. juhtum. Antud punkt *C* asetseb sirgel *AB*.



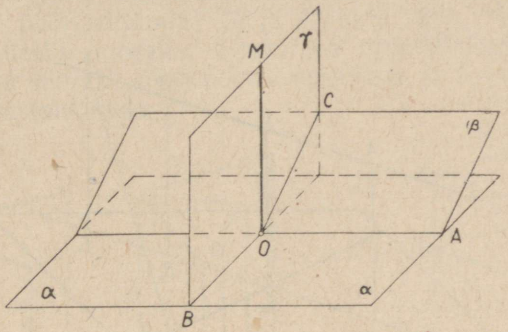
Joon. 22.

Paneme läbi sirge *AB* mingid kaks tasapinda α ja β. Otsitav tasapind peab lõikama neid tasapindu mööda sirgeid, mis on risti sirgega *AB* (§ 24). Siit saame järgmise konstruktsiooni. Paneme läbi sirge *AB* kaks meelevaldset tasapinda α ja β. Kummalgi tasapinnal tõmbame läbi punkti *C* ristsirged sirgele *AB* (tasapinnal α — ristsirge *CD* ja tasapinnal β — ristsirge *CE*). Sirgeid *CD* ja *CE* läbiv tasapind ongi nõutud tasapind γ.

2. juhtum. Antud punkt *D* asetseb väljaspool sirget *AB* (joon. 22). Paneme läbi punkti *D* ja sirge *AB* tasapinna α ning tõmbame sellel tasapinnal sirge *DC* risti sirgega *AB*. Läbi sirge *AB* paneme veel meelevaldse tasapinna β ning sellel tasapinnal tõmbame sirge *CE* risti sirgega *AB*. Otsitav tasapind peab lõikama tasapindu α ja β mööda sirgeid, mis on risti sirgega *AB*. Siit saame järgmise konstruktsiooni. Tõmbame tasapinnal α läbi punkti *D* sirge *DC* risti sirgega *AB*. Sirge *DC* lõikab sirget *AB* mingis punktis *C*. Tasapinnal β tõmbame läbi punkti *C* sirge *CE* risti sirgega *AB*. Sirgeid *CD* ja *CE* läbiv tasapind ongi nõutud tasapind γ.

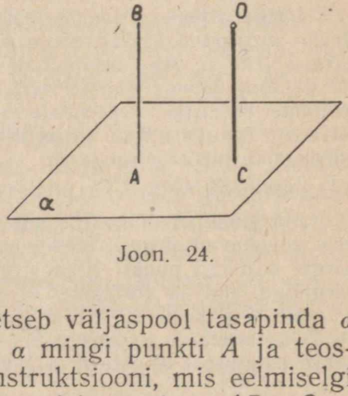
Et kummalgi tasapinnal α ja β on läbi antud punkti võimalik tõmmata ainult üks sirge, mis on risti antud sirgega, siis mõlemal juhul on ülesandel ainult üks lahend, s. o. läbi iga ruumipunkti on võimalik panna ainult üks tasapind, mis on risti antud sirgega.

36. *Läbi antud punkti O ehitada sirge, mis on risti antud tasapinnaga* α.



Joon. 23.

1. juhtum. Punkt O asetseb tasapinnal α (joon. 23). Tõmbame tasapinnal α läbi punkti O mingid kaks teineteisega ristuvat sirget OA ja OB. Läbi sirge OA paneme veel mingi tasapinna β ja tasapinnal β tõmbame sirge OC risti sirgega OA. Läbi sirgete OB ja OC asetame uue tasapinna γ ja sellel tasapinnal tõmbame sirge OM risti sirgega OB. Sirge OM ongi nõutud ristsirge tasapinnale α. Kuna $OA \perp OB$ ja $OA \perp OC$, siis sirge OA on risti tasapinnaga γ ja järelikult $OA \perp OM$. Nii näeme, et $OM \perp OA$ ja $OM \perp OB$, järelikult sirge OM on risti tasapinnaga α.

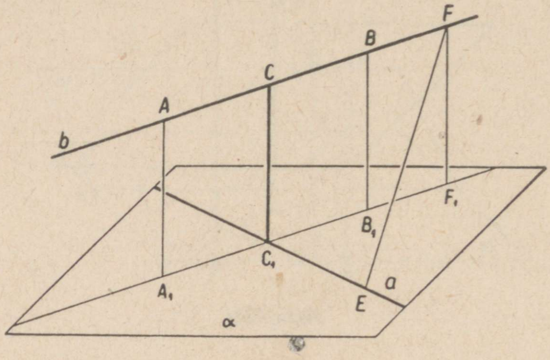


Joon. 24.

2. juhtum. Punkt O asetseb väljaspool tasapinda α (joon. 24). Võtame tasapinnal α mingi punkti A ja teostame sellest lähtudes sama konstruktsiooni, mis eelmiselgi juhul. Siis saame tasapinnaga α ristuva sirge AB. See-

järel ehitame läbi punkti O sirge paralleelselt sirgega AB. See sirge ongi nõutud ristsirge.

Ülesandel on mõlemal juhul ainult üks lahend. Tõepoolest, kuna kaks sirget, mis on risti ühe ja sama tasapinnaga, on paralleelsed, siis punktist O ei ole võimalik ehitada tasapinnale α kahte ristsirget. Järelikult, läbi iga ruumipunkti on võimalik ehitada ainult üks sirge, mis on risti antud tasapinnaga.



Joon. 25.

37. Keerulisema ülesande näide. *On antud kaks kiivsirget* (a *ja* b, joon. 25). *Ehitada sirge, mis lõikab mõlemat antud sirget ja on mõlemaga risti.*

Lahendus. Paneme läbi sirge a tasapinna α, mis on paralleelne sirgega b (§ 21). Sirge b mingist kahest punktist ehitame ristsirged AA_1 ja BB_1 tasapinnale α. Ühendame sirge abil punktid A_1 ja B_1 ning leiame sirgete A_1B_1 ja a lõikepunkti C_1. Läbi punkti C_1 ehitame ristsirge tasapinnale α. Jätame õpilasile endile tõestada, et see sirge 1) lõikab sirget b mingis punktis C ja 2) on risti nii sirgega a kui ka sirgega b.

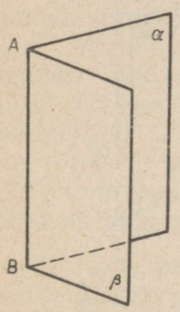
Järelikult sirge CC_1 ongi nõutud sirge.

Märgime, et lõik CC_1 on väiksem kõikidest teistest lõikudest, mis ühendavad sirge a punkte sirge b punktidega. Tõepoolest, võtnud sirgel a mingi punkti E ja sirgel b mingi punkti F, ühendame nad sirglõigu abil ja tõestame, et $EF > CC_1$. Ehitame punktist F tasapinnale α ristsirge FF_1. Siis saame, et $EF > FF_1$ (§ 26). Kuid $FF_1 =$ $= CC_1$, järelikult $EF > CC_1$. Sel põhjusel nimetatakse lõiku CC_1 lühimaks kauguseks sirgete a ja b vahel.

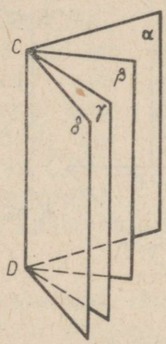
V. Kahetahulised nurgad, sirge ja tasapinna vaheline nurk, kiivsirgete vaheline nurk, mitmetahulised nurgad.

Kahetahulised nurgad.

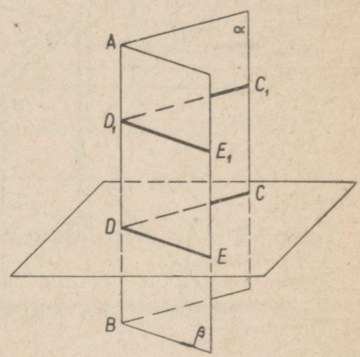
38. Definitsioonid. Tasapinna osa, mis asetseb ühel pool selle tasapinna mingit si get, nimetatakse **pooltasapinnaks.** Kujundit, mille moodustavad kaks ühest sirgest (AB) väljuvat pooltasapinda (α ja β, joon. 26), nimetatakse **kahetahuliseks nurgaks.** Sirget AB nimetatakse kahetahulise nurga **servaks** ning pooltasapindu α ja β — kahetahulise nurga **tahkudeks.**



Joon. 26.



Joon. 27.



Joon. 28.

Kahetahulist nurka tähistatakse tavaliselt tema serva juurde kirjutatud kahe tähega (kahetahuline nurk AB). Kui aga ühe serva juures on mitu kahetahulist nurka, siis igaühte neist tähistatakse tema tahkude tähistega (näiteks kahetahuline nurk $\gamma\delta$) (joon. 27).

Kui serva AB mingist punktist D tõmmata kummalgi tahul ristsirged servale (joon. 28), siis nendevahelist nurka CDE nimetatakse kahetahulise nurga **joonnurgaks.**

Joonnurga suurus ei olene tema tipu asukohast serval. Nii on joonnurgad CDE ja $C_1D_1E_1$ võrdsed, sest nende haarad on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised.

Joonnurga tasapind on servaga risti, sest temal asetseb kaks servaga ristuvat sirget. Seepärast joonnurga leidmiseks piisab, kui lõigata kahetahulist nurka tasapinnaga, mis on servaga risti.

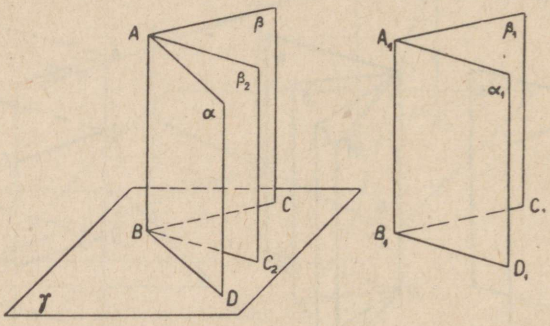
39. **Kahetahuliste nurkade võrdsus ja mittevõrdsus.** Kaht kahetahulist nurka loetakse **võrdseiks,** kui nad teineteise sisse paigutamisel ühtivad; vastasel korral loetakse väiksemaks see nurk, mis moodustab osa teisest nurgast.

Analoogiliselt nurkadega planimeetrias võivad ka kahetahulised nurgad olla **kõrvunurgad, tippnurgad** jt.

Kui kaks kahetahulist kõrvunurka on võrdsed, siis kumbagi neist nimetatakse **kahetahuliseks täisnurgaks.**

Teoreem. 1) ***Võrdsete kahetahuliste nurkade joonnurgad on võrdsed.***

2) ***Suuremal kahetahulisel nurgal on suurem joonnurk.***



Joon. 29.

Olgu $\alpha\beta$ ja $\alpha_1\beta_1$ (joon. 29) kaks kahetahulist nurka. Paigutame nurga $\alpha_1\beta_1$ nurga $\alpha\beta$ sisse nii, et serv A_1B_1 ühtib servaga AB ja tahk α_1 ühtib tahuga α. Kui need kahetahulised nurgad on võrdsed, siis tahk β_1 ühtib tahuga β. Kui aga nurk $\alpha_1\beta_1$ on väiksem kui nurk $\alpha\beta$, siis tahk β_1 satub mingisse asendisse β_2 kahetahulise nurga $\alpha\beta$ sees.

Seda tähele pannud, võtame ühisel serval mingi punkti B ja paneme sellest läbi tasapinna γ risti servaga AB. Selle tasapinna lõikumisel kahetahuliste nurkade tahkudega tekivad nende nurkade joonnurgad. On selge, et kui kahetahulised nurgad ühtivad, siis neil on üks ja sama joonnurk; kui nad aga ei ühti, s. o. kui näiteks tahk β_1 satub asendisse β_2, siis on suuremal kahetahulisel nurgal ka suurem joonnurk (nimelt $\angle CBD > \angle C_2BD$).

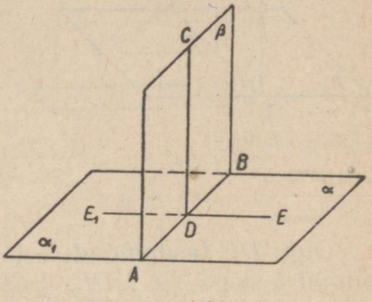
40. Pöördteoreemid. 1) ***Võrdsetele joonnurkadele vastavad võrdsed kahetahulised nurgad.***

2) ***Suuremale joonnurgale vastab suurem kahetahuline nurk.***

Neid teoreeme on kerge tõestada vastuväiteliselt.

41. Järeldused. 1) *Kahetahulise täisnurga joonnurk on täisnurk ja ümberpöördult.*

Olgu $\alpha\beta$ (joon. 30) kahetahuline täisnurk. See tähendab, et ta on võrdne oma kõrvunurgaga $\beta\alpha_1$. Kuid niisugusel korral on joonnurgad CDE ja CDE_1 samuti võrdsed; et nad on aga kõrvunurgad, siis kumbki peab olema täisnurk. Ümberpöördult: kui joonnurgad CDE ja CDE_1 on võrdsed kõrvunurgad, siis on võrdsed ka kahetahulised kõrvunurgad, s. o. kumbki neist on täisnurk.



Joon. 30.

2) *Kõik kahetahulised täisnurgad on võrdsed,* sest nende joonnurgad on võrdsed.

Samal viisil on kerge tõestada, et:

3) *Kahetahulised tippnurgad on võrdsed.*

4) *Paralleelsete ja samasuunaliste* (või vastassuunaliste) *tahkudega kahetahulised nurgad on võrdsed.*

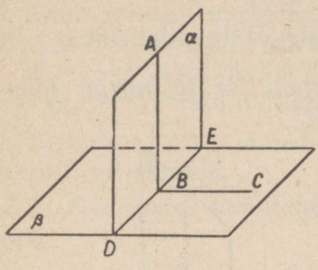
5) Kui kahetahulise nurga mõõtühikuks võtame niisuguse kahetahulise nurga, mis vastab joonnurga mõõtühikule, siis võib öelda, et:

kahetahulist nurka mõõdab tema joonnurk.

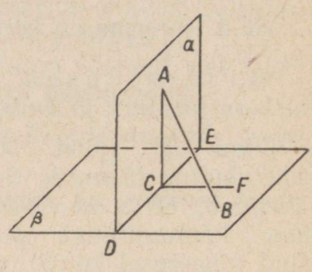
Risttasapinnad.

42. **Definitsioon.** Kahte tasapinda nimetatakse **teineteise risttasapindadeks,** kui nad moodustavad teineteisega lõikudes kahetahulise täisnurga.

43. Teoreem (kahe tasapinna ristseisu tunnus). ***Kui tasapind*** (α, joon. 31) ***läbib teise tasapinna*** (β) ***ristsirge*** (AB), ***siis on ta risti selle tasapinnaga.***



Joon. 31.



Joon. 32.

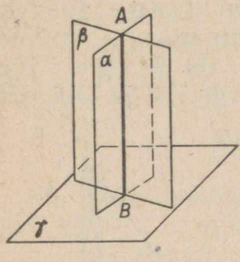
Olgu DE tasapindade α ja β lõikejoon. Tõmbame tasapinnal β sirge $BC \perp DE$. Siis nurk ABC on kahetahulise nurga $\alpha\beta$ joonnurk. Et sirge AB on eelduse põhjal risti tasapinnaga β, siis $AB \perp BC$, tähendab nurk ABC on täisnurk ja seega ka kahetahuline nurk on täisnurk, s. o. tasapind α on risti tasapinnaga β.

44. Teoreem. ***Kui kaks tasapinda*** (α ja β, joon. 31) ***on teineteisega risti ja ühele neist*** (β) ***on ehitatud ristsirge*** (AB), ***millel on ühine punkt*** (A) ***teise tasapinnaga*** (α), ***siis see ristsirge asetseb täielikult teisel tasapinnal*** (α).

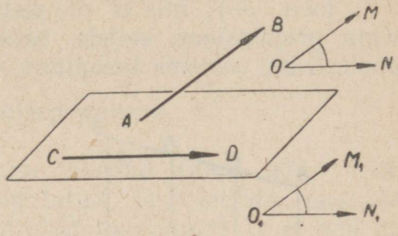
Oletame, et ristsirge AB ei asetse tasapinnal α (nagu joonisel 32). Olgu DE tasapindade α ja β lõikejoon. Tõmbame tasapinnal α sirge $AC \perp DE$ ja võtame tasapinnal β sirge $CF \perp DE$. Siis nurk ACF on täisnurk kui kahetahulise täisnurga joonnurk. Seepärast sirge AC, moodustades sirgetega DE ja CF täisnurgad, on risti tasapinnaga β. Meil on siis ühest ja samast punktist A tasapinnale β ehitatud kaks ristsirget — AB ja AC. Et see on võimatu (§ 36), siis oletus on vale, tähendab ristsirge AB asetseb tasapinnal α (§ 36).

45. Järeldus. *Kui kaks lõikuvat tasapinda* (α ja β, joon. 33) *on risti kolmanda tasapinnaga* (γ), *siis ka nende lõikejoon on risti kolmanda tasapinnaga.*

Tõepoolest, kui tasapindade α ja β lõikejoone mingist punktist A ehitada ristsirge tasapinnale γ, siis see ristsirge asetseb eelmise teoreemi põhjal tasapinnal α ja ka tasapinnal β, tähendab ta ühtib sirgega AB.



Joon. 33.



Joon. 34.

Kahe kiivsirge vaheline nurk.

46. Definitsioon. Kahe **kiivsirge** (AB ja CD, joon. 34) vaheliseks nurgaks, kui kiivsirgete asendid ja suunad on antud, nimetatakse niisugust nurka (MON), millise saame, kui ruumis vabalt võetud punktist (O) ehitame antud kiivsirgetega (AB ja CD) vastavalt paralleelsed ja samasuunalised kiired (OM ja ON).

Selle nurga suurus ei olene punkti O asukohast, sest kui näidatud viisil ehitame nurga $M_1O_1N_1$ tipuga mingis punktis O_1, siis $\angle MON = \angle M_1O_1N_1$, sest neil nurkadel on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised haarad.

Nurk sirge ja tasapinna vahel.

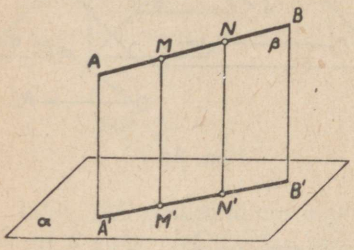
47. Punkti ja sirgjoone projektsioon tasapinnal. Varem ütlesime (§ 25), et kui ühest punktist on tasapinnale ehitatud ristlõik ja kaldlõik, siis selle kaldlõigu projektsiooniks tasapinnal nimetatakse lõiku, mis ühendab ristlõigu ja kaldlõigu aluspunkte. Nüüd anname projektsiooni jaoks üldisema definitsiooni.

1) *Mingi punkti normaalprojektsiooniks* (ehk ristprojektsiooniks) *antud tasapinnal* (näiteks punkti M pro-

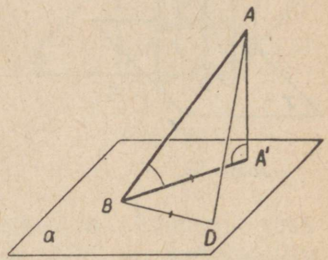
jektsiooniks tasapinnal α, joon. 35) *nimetatakse punktist tasapinnani ehitatud ristlõigu aluspunkti* (M').

2) *Mingi joone normaalprojektsiooniks tasapinnal nimetatakse selle joone punktide projektsioonidest koosnevat joont.*

Erijuhul, kui projekteeritav joon on s i r g e (näiteks AB, joon. 35), mis ei ole risti tasapinnaga (α), siis ka tema projektsioon sellele tasapinnale on s i r g e. Tõepoolest, kui paneme tasapinna β läbi sirge AB ja läbi rist-



Joon. 35.



Joon. 36.

sirge MM', mis on tõmmatud projektsioonitasapinnale sirge AB mingist punktist M, siis see tasapind peab olema risti tasapinnaga α; seepärast sirge AB mistahes punktist (näiteks punktist N) tasapinnale α ehitatud ristsirge peab asetsema tasapinnal β (§ 44), järelikult sirge AB iga punkti projektsioon peab asetsema sirgjoonel $A'B'$, mida mööda lõikuvad tasapinnad α ja β. Ümberpöördult: sirge $A'B'$ iga punkt on sirge AB mingi punkti projektsiooniks, sest sirge $A'B'$ mistahes punktist ehitatud ristsirge asetseb tasapinnal β ja lõikub järelikult sirgega AB. Seega sirge $A'B'$ on antud sirge AB punktide projektsioonidest koosnev joon, järelikult tema projektsioon.

Lühiduse pärast ütleme «normaalprojektsiooni» asemel lihtsalt «projektsioon».

48. Sirge ja tasapinna vaheline nurk. Juhul, kui sirge on tasapinnaga kaldu, siis *sirge* (AB, joon. 36) *ja tasapinna* (α) *vaheliseks nurgaks nimetatakse teravnurka* (ABA') *selle sirge ja tema projektsiooni vahel.*

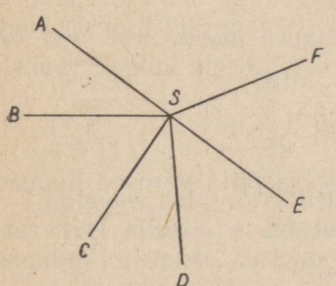
Sellel nurgal on see omadus, et ta on väikseim kõikidest nurkadest, mis kaldsirge moodustab tasapinnal α

asetsevate ja kaldsirge aluspunkti läbivate sirgetega. Tõestame näiteks, et nurk ABA' on väiksem kui nurk ABD.

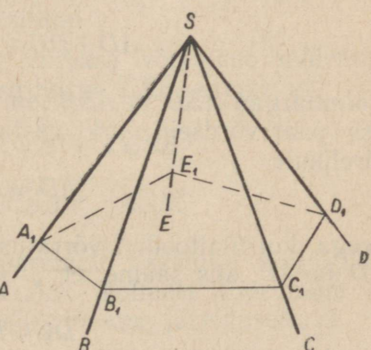
Selleks võtame lõigu $BD = BA'$ ja ühendame punkti D punktiga A. Kolmnurga ABA' kaks külge on kolmnurga ABD kahe küljega vastavalt võrdsed, kuid kolmandad küljed ei ole võrdsed, nimelt $AD>AA'$ (§ 26). Seetõttu nurk ABD on nurgast ABA' suurem.

Mitmetahulised nurgad.

49. Definitsioonid. Võtame nurgad (joon. 37): ASB, BSC, CSD, ..., mis on paigutatud järgemööda üksteise külge nii, et nad asetsevad ühel tasapinnal ja et neil on ühine tipp S. Pöörame nurga ASB tasapinda ümber haara SB nii, et see tasapind moodustaks tasapinnaga BSC mingi kahetahulise nurga. Seejärel, muutmata saadud kahetahulist nurka, pöörame viimast ümber sirge SC nii, et tasapind BSC moodustaks tasapinnaga CSD mingi kahetahulise nurga. Jätkame säärast järkjärgulist pööramist iga ühise haara ümber. Kui seejuures viimane haar SF ühtib esimese haaraga SA, siis tekib kujund (joon. 38), mida nimetatakse **mitmetahuliseks nurgaks.** Nurki ASB, BSC, ... nimetatakse mitmetahulise nurga **tasanurkadeks** ehk **tahkudeks,** haarasid SA, SB, ... nimetatakse **servadeks** ning ühist tippu S nimetatakse mitmetahulise nurga **tipuks.** Mitmetahulise nurga iga serv on ühtlasi ühe kahe-



Joon. 37.



Joon. 38.

tahulise nurga servaks, seepärast on mitmetahulisel nurgal niimitu kahetahulist nurka ja niimitu tasanurka, kuimitu serva tal on. Mitmetahulise nurga väikseim tahkude arv on kolm; niisugust nurka nimetatakse **kolmetahuliseks** nurgaks. Mitmetahulised nurgad võivad olla neljatahulised, viietahulised jne.

Mitmetahulist nurka tähistatakse kas tipu juures oleva ühe tähega S või tähtede reaga $SABCDE$, milledest esimene tähistab tippu ning teised — järjestikku asetsevate servade punkte.

Mitmetahulist nurka nimetatakse **kumeraks**, kui ta asetseb tervenisti ühel pool iga tahu tasapinda. Selline on näiteks nurk, mis on kujutatud joonisel 38. Kuid mitmetahulist nurka, mis on kujutatud joonisel 39, ei või nimetada kumeraks, sest ta asetseb kahel pool tahu ASB tasapinda ja kahel pool tahu BSC tasapinda. Kui tasapinnaga lõigata mitmetahulise nurga kõiki tahke, siis tekib hulknurk $(A_1B_1C_1D_1E_1)$. Kumeral mitmetahulisel nu gal on see hulknurk kumer.

Meie käsitleme ainult kumeraid mitmetahulisi nurki.

50. T e o r e e m. ***Kolmetahulise nurga iga tasanurk on väiksem kui teiste tasanurkade summa.***

Olgu kolmetahulise nurga $SABC$ (joon. 40) tasanurkadest suurim nurk ASC. Paigutame sellele nurgale nurga ASD, mis on võrdne nurgaga ASB, ja võtame mingi sirge AC, mis lõikab sirget SD mingis punktis D. Võtame lõigu $SB = SD$. Ühendades punkti B punktidega A ja C, saame kolmnurga ABC, milles

$$AD+DC<AB+BC.$$

Kolmnurgad ASD ja ASB on kongruentsed, sest neil on üks paar võrdseid nurki vastavalt võrdsete külgede vahel; järelikult

$$AD = AB.$$

Seega, kui ülaltoodud võrratuses ära jätta võrdsed liikmed AD ja AB, siis saame, et

$$DC<BC.$$

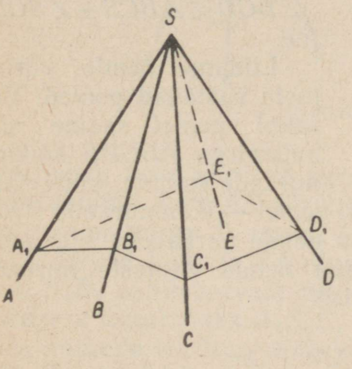
Nüüd näeme, et kolmnurga SCD kaks külge on võrdsed kolmnurga SCB kahe küljega, kuid kolmandad küljed ei ole võrdsed; säärasel juhul suurema külje vastas asetseb suurem nurk, tähendab

$$\angle CSD < \angle CSB.$$

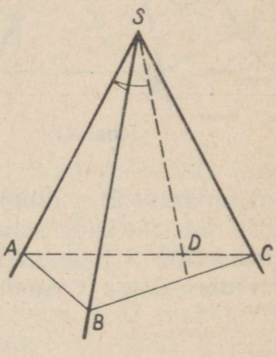
Lisades selle võrratuse vasakule poolele nurga ASD ja paremale poolele temaga võrdse nurga ASB, saame võrratuse

$$\angle ASC < \angle CSB + \angle ASB,$$

mida pidimegi tõestama.



Joon. 39.



Joon. 40.

Meie tõestame, et isegi **suurim** tasanurk on väiksem kui teiste tasanurkade summa.

Tähendab teoreem on tõestatud.

Järeldus. Lahutades viimase võrratuse mõlemast poolest kord nurga ASB, kord nurga CSB, saame, et

$$\angle ASC - \angle ASB < \angle CSB$$

ja

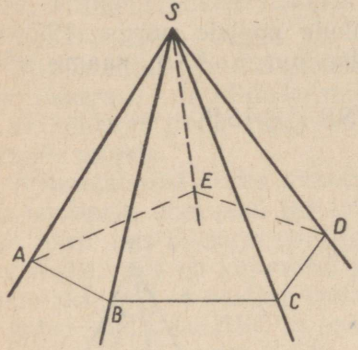
$$\angle ASC - \angle CSB < \angle ASB.$$

Lugedes neid võrratusi paremalt vasakule ning pidades veel silmas, et ka nurk ASC kolmest suurimana on suurem kui teiste nurkade vahe, jõuame järeldusele, et

kolmetahulise nurga iga tasanurk on suurem kui teiste tasanurkade vahe.

51. Teoreem. ***Kumera mitmetahulise nurga tasanurkade summa on väiksem kui 2π.***

Lõikame kumera mitmetahulise nurga $SABCDE$ (joon. 41) tahke mingi tasapinnaga; lõikeks saame kumera hulknurga $ABCDE$.



Joon. 41.

Rakendades eelmise paragrahvi teoreemi igale kolmetahulisele nurgale, mille tipud asetsevad punktides A, B, C, D ja E, saame, et

$$\angle ABC < \angle ABS + \angle SBC;$$
$$\angle BCD < \angle BCS + \angle SCD;$$

jne.

Liidame nende võrratuste vastavad pooled. Vasakul poolel saame siis hulknurga $ABCDE$ kõikide nurkade summa, mille suurus on $(n-2)\pi$, ning paremal poolel — kolmnurkade ABS, SBC jne. nurkade summa ilma nende nurkadeta, mis asetsevad tipu S juures. Tähistanud nende viimaste nurkade summa tähega x, saame liitmisel:

$$(n-2)\pi < n\pi - x.$$

Et vahedel $n\pi - 2\pi$ ja $n\pi - x$ vähendatavad on võrdsed, siis selleks, et esimene vahe oleks teisest väiksem, peab lahutatav 2π olema lahutatavast x suurem, tähendab

$$2\pi > x,$$

s. o.

$$x < 2\pi.$$

Kolmetahuliste nurkade võrdsuse lihtsaimad juhud.

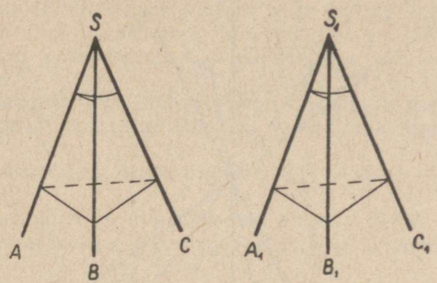
52. Teoreemid. ***Kolmetahulised nurgad on võrdsed, kui neil on***

1) ***üks paar võrdseid kahetahulisi nurki vastavalt võrdsete ja ühteviisi asetsevate tasanurkade vahel*** või

2) ***üks paar võrdseid tasanurki vastavalt võrdsete ja ühteviisi asetsevate kahetahuliste nurkade vahel.***

1) Olgu S ja S_1 kaks kolmetahulist nurka (joon. 42), milledel

$$\angle ASB = \angle A_1S_1B_1,$$
$$\angle ASC = \angle A_1S_1C_1$$



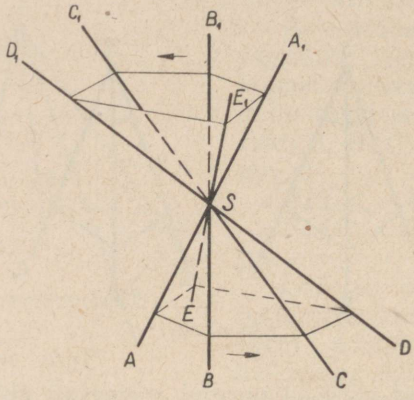
Joon. 42.

(seejuures need võrdsed nurgad asetsevad ühteviisi) ning kahetahuline nurk AS võrdub kahetahulise nurgaga A_1S_1. Paigutame nurga S_1 nurga S sisse nii, et ühtiksid tipud S_1 ja S, servad S_1A_1 ja SA ning tahud $A_1S_1B_1$ ja ASB. Siis serv S_1B_1 satub servale SB (tasanurkade $A_1S_1B_1$ ja ASB võrdsuse tõttu), tahk $A_1S_1C_1$ ühtib tahuga ASC (kahetahuliste nurkade võrdsuse tõttu) ning serv S_1C_1 ühtib servaga SC (tasanurkade $A_1S_1C_1$ ja ASC võrdsuse tõttu). Seega need kolmetahulised nurgad ühtivad kõigis servades, s. t. nad on võrdsed.

2) Teine tunnus tõestatakse nagu esimenegi sissepaigutamise teel.

53. Sümmeetrilised mitmetahulised nurgad. Nagu teada, tippnurgad on võrdsed, kui neid nurki moodustavad sirged või tasapinnad. Vaatame, kas see väide on õige ka mitmetahuliste nurkade kohta.

Pikendame mitmetahulise nurga $SABCDE$ kõiki servi tipust S (joon. 43), siis saame teise mitmetahulise nurga $SA_1B_1C_1D_1E_1$, mida esimese suhtes võib nimetada **tippnurgaks.** Ei ole raske näha, et nende nurkade tasanurgad on vastavalt võrdsed ja et ka kahetahulised nurgad on vastavalt võrdsed, kuid nii need kui ka teised asetsevad v a s t u p i d i s e s j ä r j e s t u s e s. Tõepoolest, kui kujutleme vaatlejat, kes väljaspool kahetahulist nurka vaatab tema tippu, siis servad SA, SB, SC, SD, SE on järjestatud kellaosuti liikumisele vastupidises suunas, kuid vaadates nurka $SA_1B_1C_1D_1E_1$ nähakse servi SA_1, SB_1 ... järjestatult kellaosuti liikumise suunas.



Joon. 43.

Vastupidi järjestatud vastavalt võrdsete tasanurkadega ja vastavalt võrdsete kahetahuliste nurkadega mitmetahulised nurgad ei saa üldse ühtida sissepaigutamise teel. Sääraseid nurki nimetatakse **sümmeetrilisteks** (punkti S suhtes). Kujundite sümmeetriast ruumis kõneleme üksikasjalisemalt edaspidi.

Harjutusi.

Tõestada teoreemid:

1. Kaks tasapinda, mis on paralleelsed kolmanda tasapinnaga, on omavahel paralleelsed.

2. Kõik ühte punkti läbivad antud tasapinnaga paralleelsed sirged asetsevad ühes tasapinnas, mis on paralleelne antud tasapinnaga.

3. Kui tasapind α on paralleelne sirgega a, siis sirge a kõik punktid asetsevad võrdsetel kaugustel sellest tasapinnast.

4. Ühe paralleeltasapinna punktid asetsevad võrdsetel kaugustel teisest paralleeltasapinnast.

5. Kui kahest lõikuvast tasapinnast kumbki läbib ühte kahest paralleelsest sirgest, siis nende tasapindade lõikesirge on paralleelne nende sirgetega.

6. Kui sirge a on paralleelne tasapinnal α asetseva sirgega b, siis iga tasapind, mis lõikub tasapinnaga α ja läbib sirget a, lõikub tasapinnaga α sirgega b paralleelset sirget mööda või mööda sirget b.

7. Kui sirge a on paralleelne tasapinnaga α, siis iga sirge, mis läbib tasapinnal α asetsevat punkti ja on paralleelne sirgega a, asetseb tasapinnal α.

8. Kui on antud kaks kiivsirget a ja b ning läbi esimese sirge on pandud tasapind paralleelselt teise sirgega ja läbi teise sirge on pandud tasapind paralleelselt esimese sirgega, siis need tasapinnad on paralleelsed.

9. Kõik sirged, mis läbivad sirge a ühte ja sama punkti ning on risti sirgega a, asetsevad ühel ja samal tasapinnal, mis on risti sirgega a.

10. Kui tasapind ja sirge on risti ühe ja sama sirgega, siis nad on paralleelsed.

11. Kui tasapinnaga α paralleelne sirge a lõikub sirgega b, mis on risti selle tasapinnaga, siis sirged a ja b on omavahel risti.

Konstruktsioonülesandeid.

12. Läbi antud punkti ehitada kahe antud sirgega a ja b paralleelne tasapind.

13. Läbi antud punkti ehitada antud tasapinnaga paralleelne sirge, mis lõikub antud sirgega.

14. Ehitada sirge, mis lõikub kahe antud sirgega ja on paralleelne kolmanda antud sirgega.

15. Ehitada mingi sirge, mis lõikab kahte antud sirget ja on paralleelne antud tasapinnaga (määramatu ülesanne).

16. Ehitada mingi sirge, mis lõikab kolme antud sirget (määramatu ülesanne).

17. Läbi antud punkti ehitada sirge, mis on risti kahe antud kiivsirgega.

18. Läbi antud sirge ehitada tasapind, mis on risti antud tasapinnaga.

19. Antud on: tasapind α ja sirge $a \| \alpha$. Ehitada läbi sirge a tasapind, mis lõikub tasapinnaga α ja moodustab temaga antud nurga.

20. Antud on tasapind α ning ühel pool seda tasapinda punktid A ja B. Leida tasapinnal α punkt C nii, et summa $AC + CB$ oleks vähim.

TEINE PEATÜKK.

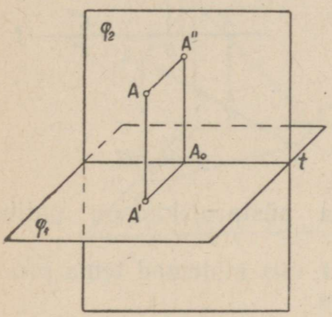
PUNKTI, LÕIGU JA KUJUNDI RISTPROJEKTSIOONID.

54. Punkti kujutamine kahel tasapinnal tema projektsioonide abil. Kujutleme kahte projektsioonitasapinda, horisontaalset ehk põhitasapinda φ_1 ja vertikaalset ehk püsttasapinda φ_2, mis lõikuvad täisnurgi mööda sirget t, mida nimetame projektsiooniteljeks (joon. 44). Need tasapinnad moodustavad neli kahetahulist nurka, milledest vaatleme lihtsuse pärast ainult ühte, nimelt eesmist ülal. Oletame, et selle nurga sisepiirkonnas asetseb mingi punkt A. Tõmbame sellest punktist ristlõigud tasapindadele φ_1 ja φ_2. Siis saame nendel tasapindadel punkti A projektsioonid: A' on **põhiprojektsioon,** A'' — **püstprojektsioon** (neid nimetatakse **normaal-** ehk **ristprojektsioonideks,** ka ortogonaalprojektsioonideks, sest nad tekivad ristsirgete abil).

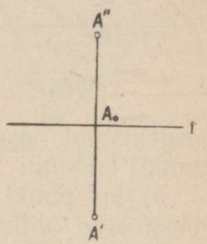
Projektsioone tähistatakse harilikult sama tähega, millega on tähistatud projekteeritav punkt, lisades tähele märgikesed $'$ (prim) ja $''$ (sekund) vastavalt esimese ja teise projektsiooni puhul. Ristlõike, mille abil saadakse punkti projektsioonid, nimetatakse **projekteerijateks:** AA' on ülalt-projekteerija ning AA'' on eest-projekteerija.

Projekteerijaid läbiv tasapind on risti nii tasapinnaga φ_1 kui ka tasapinnaga φ_2 (§ 43), järelikult ka risti teljega t (§ 45) ja seepärast on lõigud $A'A_0$ ja $A''A_0$, mida mööda see tasapind lõikub tasapindadega φ_1 ja φ_2, risti teljega t; seega nad moodustavad tasapindade φ_1 ja φ_2 vahelise kahetahulise nurga joonnurga, ning et kahetahuline nurk on täisnurk, siis ka tema joonnurk on täisnurk. Nii on nelinurk $AA'A_0A''$ ristkülik, mille tasapind on risti teljega t.

Seda silmas pidades pöörame horisontaalset pooltasapinda φ_1 telje t ümber $90°$ võrra allapoole; siis ühtib ta alumise vertikaalse pooltasapinnaga, moodustades ülemisega ühise vertikaalse tasapinna. Seejuures punktid A_0 ja A'' jäävad paigale, kuid punkt A' saab asukoha allpool telge t ning tuleb ristlõigu $A''A_0$ pikendusel kaugusele A_0A', mis on võrdne lõiguga AA''. Saame tasapinnale laotatud joonise (joon. 45), mida edaspidi nimetame **epüüriks**;



Joon. 44.



Joon. 45.

see joonis koosneb sirgest t, mis kujutab projektsioonitelge, ja kahest punktist, mis asetsevad telje t ristjoonel; alumine punkt on punkti A põhiprojektsioon ja ülemine on püstprojektsioon.

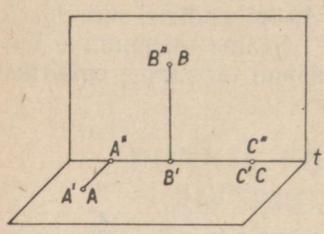
Igale kahetahulise nurga (joon. 44) sisepiirkonnas võetud punktile A vastab joonisel muidugi kaks üheselt määratud punkti A' ja A'', mis asetsevad telje t ristsirgel. Ümberpöördult, epüüri igale kahele punktile A' ja A'', mis asetsevad telje t ristsirgel (punkt A' allpool ja punkt A'' ülalpool telge t), vastab üks määratud punkt A kahetahulise nurga sisepiirkonnas.

Et saada seda punkti, peame kujutlema, et joonise alumine pool on pööratud telje t ümber $90°$ võrra ülespoole, s. o. tagasi oma endisesse asendisse, ning et seejärel on punktidest A' ja A'' võetud kahetahulist nurka moodustavate tasapindade ristsirged; nende sirgete lõikepunkt ongi punkt A.

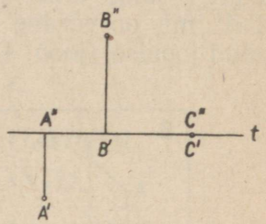
55. Erijuhud: Joonistest 46 ja 47 selgub, et

1) kui punkt A asetseb põhitasapinnal, siis tema püstprojektsioon A'' asetseb teljel t ja põhiprojektsioon ühtib punkti endaga;

2) kui punkt B asetseb püsttasapinnal, siis tema põhi-



Joon. 46.

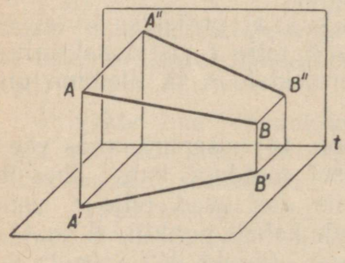


Joon. 47.

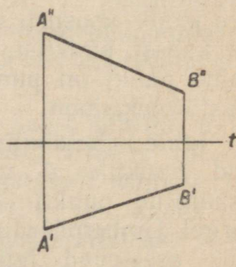
projektsioon asetseb teljel t ja püstprojektsioon ühtib punkti endaga;

3) kui punkt C asetseb teljel t, siis mõlemad tema projektsioonid ühtivad punkti endaga.

56. Sirglõigu kujutamine. Meie nägime juba (§ 47), et kui projekteeritav joon on s i r g e, siis ka tema projektsioon on s i r g e.



Joon. 48.



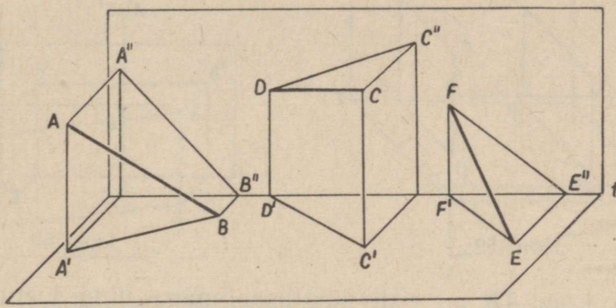
Joon. 49.

Tähendab sirglõiku, mis ühendab punkte A ja B (joon. 48), kujutavad epüüril (joon. 49) lõigud $A'B'$ ja $A''B''$, milledest esimene on lõigu AB põhiprojektsioon ja teine on püstprojektsioon.

Et saada sirgjoone projektsiooni mingil tasapinnal, selleks on vaja leida tema kahe punkti projektsioonid sellel tasapinnal ning läbi nende projektsioonide joonestada sirgjoon.

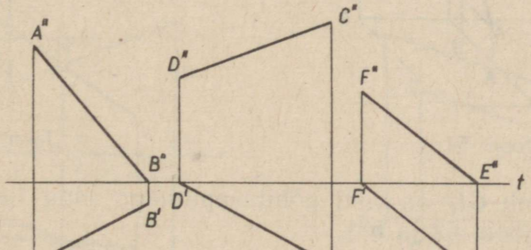
Sirgjoone projektsiooni võib saada ka teisiti: nimelt võime läbi selle sirge panna kaks tasapinda — ühe risti põhitasapinnaga, teise risti püsttasapinnaga. Neid tasapindu nimetame **projekteerivateks tasapindadeks.**

Nende tasapindade lõikumine projektsioonitasapindadega annab lõigu AB projektsioonid $A'B'$ ja $A''B''$.



Joon. 50.

Märgime siinjuures, et kui sirglõik on tähistatud tähtedega AB, siis tähistatakse tema projektsioone tähtedega $A'B'$ (põhiprojektsioon) ja $A''B''$ (püstprojektsioon); kui



Joon. 51.

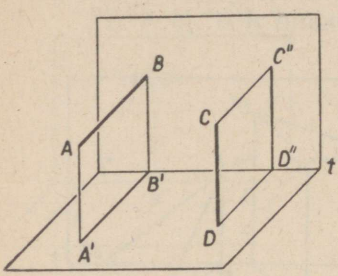
sirge on tähistatud ühe tähega, näiteks tähega k, siis tema projektsioone tähistatakse ka ühe tähega: k' (põhiprojektsioon) ja k'' (püstprojektsioon).

57. Erijuhud. 1) Lõigu AB üks otspunkt asetseb põhitasapinnal.

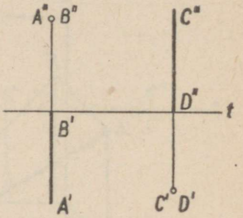
2) Lõigu CD üks otspunkt asetseb püsttasapinnal.

3) Lõik *EF* toetub oma otspunktidega projektsioonitasapindadele.

Need kolm juhtu on kujutatud näitlikult joonisel 50 ning projektsioonidena epüüril joonisel 51.

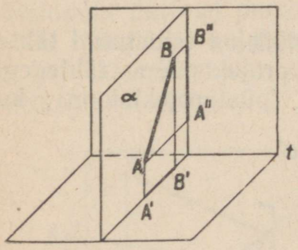


Joon. 52.

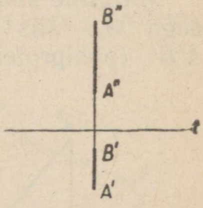


Joon. 53.

4) Lõik *AB* on risti püsttasapinnaga ning toetub viimasele (joon. 52 ja 53).

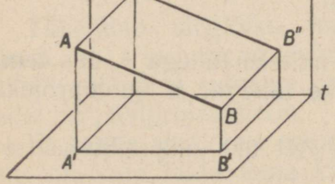


Joon. 54.

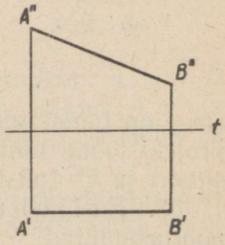


Joon. 55.

5) Lõik *CD* on risti põhitasapinnaga ning toetub viimasele (joon. 52 ja 53).



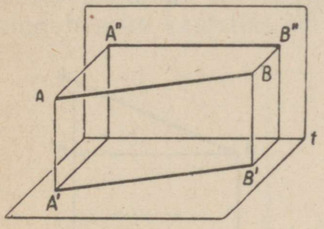
Joon. 56.



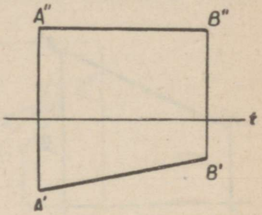
Joon. 57.

6) Lõik AB asetseb mingil tasapinnal α, mis on risti teljega t. Siis mõlemad projekteerivad tasapinnad ühtivad tasapinnaga α ja seetõttu lõigud $A'B'$ ja $A''B''$ asetsevad epüüril telje t ühel ja samal ristsirgel (joon. 54 ja 55).

7) Lõik AB on paralleelne püsttasapinnaga. Siis tema põhiprojektsioon on paralleelne teljega t (joon. 56 ja 57) ja püstprojektsioon on võrdne ning paralleelne lõiguga AB.

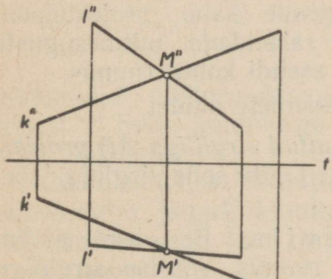


Joon. 58.

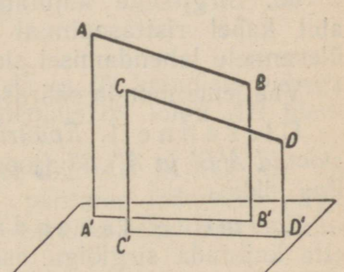


Joon. 59.

8) Lõik AB on paralleelne põhitasapinnaga (joon. 58 ja 59); tema püstprojektsioon on siis paralleelne teljega t ja põhiprojektsioon on võrdne ning paralleelne lõigu AB endaga.



Joon. 60.

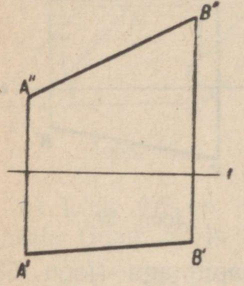


Joon. 61.

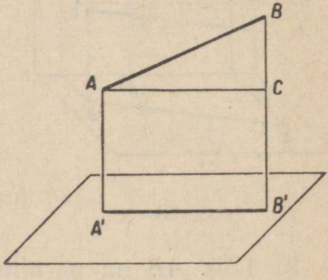
58. **Lõikuvate sirgete projektsioonid.** On ilmne, et kui kaks sirget (k ja l) lõikuvad, siis lõikuvad ka nende ühenimelised projektsioonid (joon. 60), kusjuures lõikepunktid M' ja M'' asetsevad telje t ühel ja samal ristsirgel. Ümberpöördult, kui kahe sirge ühenimelised projektsioonid lõikuvad, kusjuures lõikepunktid asetsevad telje t ühel ja samal

ristsirgel, siis lõikuvad ka need sirged ise, sest projektsioonide lõikepunktidega määratud punkt (M', M'') kuulub mõlemale sirgele.

59. Paralleelsete sirgete projektsioonid on paralleelsed. Tõepoolest, kui $AB \| CD$ (joon. 61), siis on nurkade BAA' ja DCC' haarad paralleelsed ja seega on ka projekteerivad tasapinnad paralleelsed (§ 15), kuid paralleelsed tasapinnad lõikuvad kolmanda tasapinnaga (φ) mööda paralleelseid sirgeid ($A'B'$ ja $C'D'$) (§ 16).



Joon. 62.



Joon. 63.

60. Sirgjoonte kujutamist nende kahe projektsiooni abil kahel risttasapinnal võib rakendada mitmesuguste ülesannete lahendamisel sirgete asendi kohta ruumis.

Vaatleme mõnda sääraste ülesannete näidet.

Ü l e s a n n e 1. *Epüüril on antud sirglõigu AB projektsioonid $A'B'$ ja A'' B''* (joon. 62). Leida selle sirglõigu tõeline pikkus.

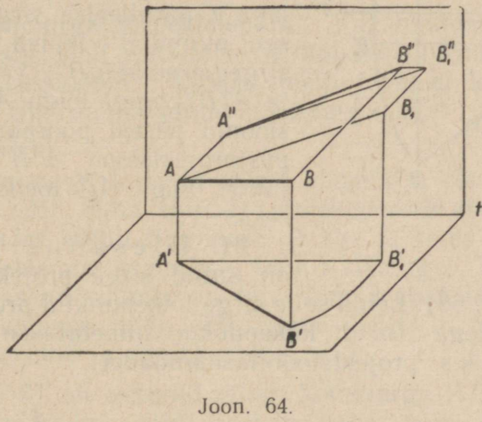
E s i m e n e l a h e n d a m i s v i i s. Et oleks parem ette kujutada sirglõigu asendit ruumis, võtame sirglõigu AB ja tema põhiprojektsiooni $A'B'$ näitliku kujutise (joon. 63), s. o. niisuguse kujutise, mida kasutasime esimeses peatükis.

Nelinurk $ABB'A'$ on täisnurkne trapets täisnurkadega punktide A' ja B' juures. Võttes selles trapetsis küljega $A'B'$ paralleelse lõigu AC, saame täisnurkse kolmnurga ABC.

Lõik AB on selles kolmnurgas hüpotenuusiks, kaatet AC, nagu näha, on võrdne lõigu AB põhiprojektsiooniga

$A'B'$. See projektsioon on joonisel antud. Kaatet BC *on* võrdne lõikude BB' ja AA' vahega.

Lõigud BB' ja AA' on samuti joonisel antud; nad on nimelt võrdsed punktide B'' ja A'' kaugustega teljest t, seega võib nende vahe joonisel leida. Lõikude BB' ja AA' vahe võrdub seega punktide B'' ja A'' ning telje t vaheliste kauguste vahega. Siit järeldub, et lõigu AB tõelise pikkuse leidmiseks tuleb ehitada täisnurkne kolmnurk, mille üheks kaatetiks on otsitava lõigu põhiprojektsioon $A'B'$ ning teiseks kaatetiks on lõik, mis võrdub otsitava lõigu



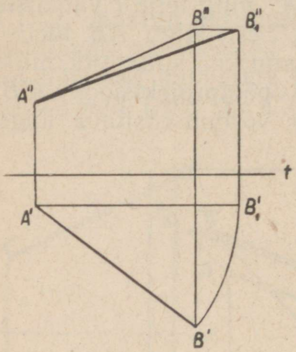
Joon. 64.

otspunktide püstprojektsioonide A'' ja B'' kauguste vahega teljest t. Selle kolmnurga hüpotenuus on lõigu AB tõeliseks pikkuseks.

T e i n e v i i s. Kujutleme, et lõik AB ja lõik AA' on teineteisega jäigalt kinnitatud; pöörame lõiku AB sirge AA' ümber seni, kuni ta saab paralleelseks püsttasapinnaga (joon. 64).

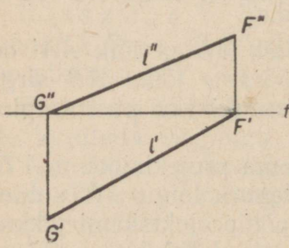
Säärasel lõigu AB pööramisel tema projektsioonid $A'B'$ ja $A''B''$ muutuvad, kuid tema kaldenurk lõigu AA' suhtes ei muutu, seega ei muutu ka tema põhiprojektsiooni pikkus (muutub ainult selle siht). Tähendab sellel lõigu pööramisel tema põhiprojektsioon muutub nii, et punkt A' jääb joonisel paigale ja punkt B' liigub ringjoone kaart mööda. Kui lõik AB saab paralleelseks püsttasapinnaga, siis tema põhiprojektsioon saab paralleelseks teljega t. Ka püstprojektsioon $A''B''$ muutub sellel pööramisel, kuid et punkti

B kaugus põhitasapinnast jääb endiseks, siis jääb endiseks ka punkti B'' kaugus teljest t. Siit selgub, et punkt B'' liigub mööda telje t paralleeli. Öeldust järeldub, et epüüril võib saada lõigu AB projektsioonid pärast pööramist püstsirge AA' ümber järgmise konstruktsiooni abil (joon. 65): joonestame raadiusega $A'B'$ ringjoone kaare keskpunktiga punktis A' ja leiame selle kaare lõikepunkti B'_1 telje t paralleelsirgega, mis läbib punkti A'; läbi B'' joonestame teljega t paralleelse sirge lõikumiseni punkti B'_1 läbiva telje t ristsirgega punktis B''_1. Lõigud $A'B'_1$ ja $A''B''_1$ ongi lõigu AB projektsioonid pärast pööramist. Tema püstprojektsioon $A''B''_1$ on seejuures lõigu AB tõeliseks pikkuseks.

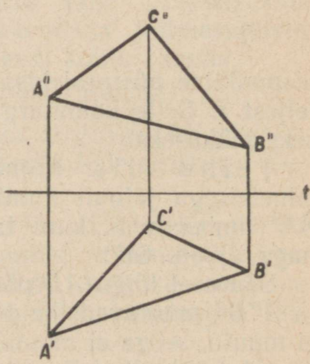


Joon. 65.

61. Ülesanne 2. Epüüril on antud sirge projektsioonid l' ja l'' (joon. 66). Leida selle sirge lõikepunktid projektsioonitasapindadega (neid lõikepunkte nimetatakse sirgjoone jälgedeks projektsioonitasapindadel).



Joon. 66.



Joon. 67.

Lahendus. Antud sirge ja püsttasapinna lõikepunkti põhiprojektsioon asetseb teljel t. Teiselt poolt selle punkti põhiprojektsioon peab asetsema sirgel l'. Seega sirge jälje saamiseks püsttasapinnal pikendame tema põhiprojektsiooni l' lõikumiseni teljega t punktis F'.

Punkt F' on otsitava jälje põhiprojektsioon. Et leida tema püstprojektsiooni, võtame punktist F' telje t ristsirge lõikumiseni sirgega l'' punktis F''. Punkt F'' ongi jälje püstprojektsiooniks, ilmselt ühtib ta jälje endaga. Samal teel leiame ka jälje põhitasapinnal: pikendame sirget l'' lõikumiseni teljega t punktis G'', punktist G'' võtame telje t ristsirge lõikumiseni sirgega l' punktis G'; punkt G' ongi nõutud jälg põhitasapinnal.

62. Kolmnurga projektsioonid. Kui ruumis on antud kolmnurk, siis võib ehitada tema tippude ja külgede põhi- ja püstprojektsioonid. Niiviisi tekib joonisel kaks kolmnurka, mis on ruumis antud kolmnurga põhi- ja püstprojektsioonideks.

Kui kolmnurga kuju ja asend ruumis ei ole ette määratud, siis võib tema tippude projektsioone anda vabalt, silmas pidades ainult tingimust, et ühe ja sama tipu põhi- ja püstprojektsioon asetseksid telje t ristsirgel. Tõepoolest, tasapinna asend ruumis on täiesti määratud tema kolme punkti asukohaga, mida võib ruumis võtta täiesti vabalt, ainult mitte ühel ja samal sirgel.

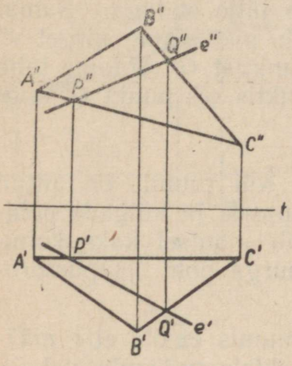
Joonisel 67 on esitatud mingi kolmnurga ABC projektsioonid. Kasutades neid projektsioone võib kolmnurga asendi kohta ruumis lahendada mitmesuguseid ülesandeid.

63. Ülesanne 1. *On antud kolmnurga projektsioonid* $A'B'C'$ ja $A''B''C''$ (joon. 68). *Ehitada epüüril niisuguse sirge püstprojektsioon, mis asetseb selle kolmnurga tasapinnas ja mille põhiprojektsioon on antud.*

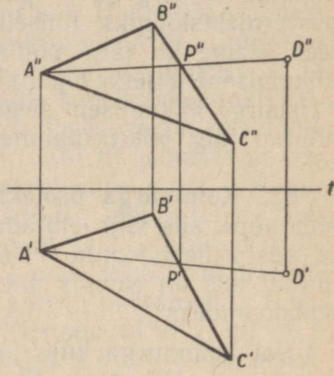
Lahendus. Olgu e' sirge põhiprojektsioon, ta lõikub sirgetega $A'C'$ ja $B'C'$ vastavalt punktides P' ja Q'.

Et see sirge asetseb kolmnurga ABC tasapinnas, siis lõikub ta külgedega AC ja BC nendes punktides, mille põhiprojektsioonideks on P' ja Q'. Nendesamade punktide püstprojektsioonide saamiseks tuleb punktidest P' ja Q' joonestada teljele t ristsirged lõikumiseni vastavalt sirgetega $A''C''$ ja $B''C''$ punktides P'' ja Q''. Sirge $P''Q''$ on kolmnurga ABC tasapinnas asetseva otsitava sirge püstprojektsioon.

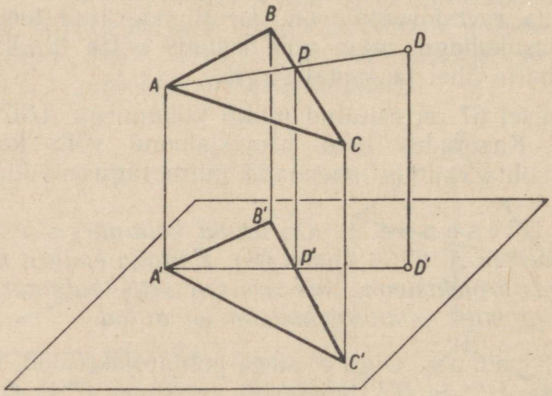
64. Ülesanne 2. *Epüüril on antud kolmnurga ABC projektsioonid A′B′C′* ja *A″B″C″* (joon. 69). *Peale selle on antud kolmnurga tasapinnas asetseva punkti D põhiprojektsioon D′. Ehitada selle punkti püstprojektsioon.*



Joon. 68.



Joon. 69.

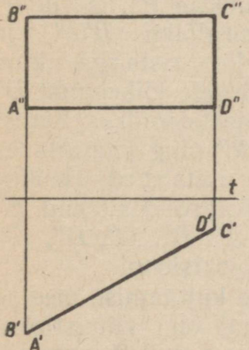


Joon. 70.

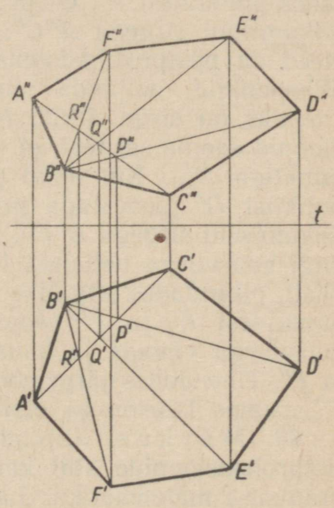
Lahendus. Ühendades omavahel punktid D' ja A', saame kolmnurga ABC tasapinnas asetseva ning punkte D ja A ühendava sirglõigu põhiprojektsiooni $A'D'$ (joon. 70). Punkt P', milles sirge $A'D'$ lõikub sirgega $B'C'$, on sirge AD ja külje BC lõikepunkti P põhiprojektsioon (joon. 70).

Joonestades punktist P' teljele ristsirge, leiame sirgel $B''C''$ selle punkti püstprojektsiooni P''. Siis joonestame sirge $A''P''$ ja sellel leiame endisel viisil otsitava punkti D püstprojektsiooni D'' (joon. 69).

65. Hulknurga projektsioonid. Hulknurga projektsioonide ehitamisel ei saa tippude projektsioone enam vabalt võtta. Kui hulknurga tippude põhiprojektsioonid võtta vabalt, siis nende püstprojektsioonidest võib võtta vabalt (muidugi ühel ja samal ristjoonel vastava põhiprojektsiooniga) ainult kolm. Tõepoolest, need kolm püstprojektsiooni koos põhiprojektsioonidega määravad täielikult selle tasapinna, milles asetseb hulknurk.



Joon. 71.



Joon. 72.

Seepärast tuleb teiste tippude püstprojektsioonid võtta nii, et nad oleksid selles tasapinnas asetsevate punktide projektsioonideks. Joonisel 71 on antud epüür põhitasapinna risttasapinnas olevast ristkülikust, mille kaks külge on risti põhitasapinnaga. Joonisel 72 on näidatud kuusnurga projektsioonide ehitamine, kusjuures tema tippude põhiprojektsioonid A', B', C', D', E', F' on võetud vabalt.

Püstprojektsioonid A'', B'', C'' on võetud projektsioonitelje ristsirgetel, mis läbivad punkte A', B', C'. Seejuures punkti A'' võib punkti A' läbival telje ristsirgel võtta kus tahes, punkti B'' võib punkti B' läbival telje ristsirgel võtta kus tahes ning punkti C'' võib võtta punkti C' läbival telje ristsirgel kus tahes. Teiste tippude püstprojektsioone võib ehitada § 64 näidatud võtte abil. Ühendades üksteisega punktid A', B' ja C', saame kuusnurga kahe külje põhiprojektsioonid ($A'B'$ ja $B'C'$) ning ühe diagonaali põhiprojektsiooni ($A'C'$). Ühendades üksteisega punktid A'', B'' ja C'', saame nendesamade külgede ja sama diagonaali püstprojektsioonid ($A''B''$, $B''C''$ ja $A''C''$). Seejärel ühendame punkti B' teiste tippude põhiprojektsioonidega D', E' ja F'. Sirgete $B'D'$, $B'E'$ ja $B'F'$ lõikepunktid sirgega $A'C'$ tähistame vastavalt tähtedega P', Q' ja R'. Joonestades punktidest P', Q' ja R' projektsiooniteljele ristsirged lõikumiseni sirgega $A''C''$, saame punktid P'', Q'' ja R''. Need on püstprojektsioonis kuusnurga kolme diagonaali lõikepunktid neljanda diagonaaliga, mille püstprojektsiooniks on sirge $A''C''$. Nende diagonaalide püstprojektsioonid saame sel teel, et ühendame punktid P'', Q'' ja R'' punktiga B''. Kui nüüd pikendada sirglõiku $B''P''$ ja punktist D' joonestada projektsioonitelje ristsirge kuni lõikumiseni sirgega $B''P''$, siis nende sirgete lõikepunkt D'' ongi kuusnurga neljanda tipu püstprojektsiooniks. Samal viisil, pikendades sirglõike $B''Q''$ ja $B''R''$ ning joonestades punktidest E' ja F' projektsioonitelje ristsirged, leiame kuusnurga viienda ja kuuenda tipu püstprojektsioonid E'' ja F''. Ühendades järgemööda punktid A'', B'', C'', D'', E'', F'', saame kuusnurga otsitava püstprojektsiooni.

66. Märkus. Kujundite ja kehade kujutamise meetod ristprojektsioonide abil kahel tasapinnal on viimistletud prantsuse matemaatiku Gaspard Monge'i [l.: *gaspa'r mon(g)ž*] (1746—1818) poolt. Gaspard Monge oli XVIII sajandi lõpu ja XIX sajandi alguse suurim prantsuse matemaatik. Prantsuse revolutsiooni ajal oli tema konvendi poolt loodud kuulsa École polytechnique'i asutajaid. Monge'i meetod on käesoleval ajal üks põhilisemaid selles geomeetria osas, mis käsitleb geomeetriliste kehade kujutamisviise tasapinnal ja mida nimetatakse **kujutavaks geomeetriaks.** Monge'i meetodit rakendatakse laialdaselt tehnikas ehituste projektide, hoonete plaanide, masinate osade ja detailide joonestamisel jne.

Selle meetodiga teostatakse joonisel konstruktsioone mõnikord keeruliste reeglite järgi, mida võib kasutada ainult hästi omandades stereomeetria tõdesid ja lauseid. Seepärast kasutatakse geomeetria õpikutes, nagu ka käesolevas raamatus, geomeetriliste kujundite ja kehade kujutamisel lihtsustatud jooniseid.

Need joonised on uuritavate kujundite projektsioonid, kuid mitte kahel, vaid ühel tasapinnal, nimelt joonise tasapinnal.

Nagu kõigest eelnenust järeldub, ei määra üks säärane projektsioon veel ei kujundi asendit ruumis ega ka tema täpseid mõõtmeid, kuid ta annab selge ülevaate uuritava kujundi kujust. Sellest ülevaatest piisab, et, tuginedes stereomeetria üldistele teoreemidele, tundma õppida geomeetriliste kujundite ja kehade omadusi.

KOLMAS PEATÜKK.

HULKTAHUKAD.

I. Rööptahukas ja püramiid.

67. Hulktahukas. Hulktahukaks nimetatakse tasaste hulknurkadega piiratud keha. Nende hulknurkade külgi nimetatakse **hulktahuka servadeks.** Hulktahukat piiravaid hulknurki nimetatakse tema **tahkudeks.** Ühte punkti koonduvad hulktahuka tahud moodustavad mitmetahulise nurga; sääraste mitmetahuliste nurkade tippe nimetatakse **hulktahuka tippudeks.** Sirglõike, mis ühendavad mitte ühel tahul asetsevaid tippe, nimetatakse **hulktahuka diagonaalideks.**

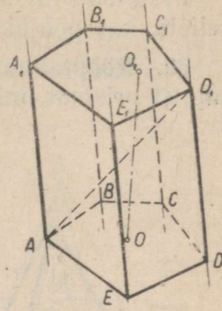
Meie käsitleme ainult kumeraid hulktahukaid, s. o. sääraseid, mis tervenisti asetsevad ühel pool iga tema tahu tasapinda.

Hulktahuka väikseim tahkude arv on neli; niisugune hulktahukas tekib kolmetahulise nurga lõikamisel mingi tasapinnaga.

68. Prisma. Prismaks nimetatakse niisugust hulktahukat, mille kaks tahku on võrdsete ja vastavalt paralleelsete külgedega hulknurgad ing kõik teised tahud on rööpkülikud.

Selleks et näidata, et niisugune hulktahukas on võimalik, võtame mingi hulknurga $ABCDE$ (joon. 73) ja ehitame tema tippudest läbi rea väljaspool tema tasapinda asetsevaid paralleelseid sirgeid.

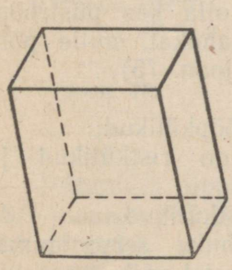
Võtnud seejärel ühel paralleelsel sirgel vabalt punkti A_1, paneme läbi selle punkti tasapinnaga $ABCDE$ paralleelse tasapinna: läbi iga kõrvuti asetsevate paralleelsete sirgete paari paigutame samuti tasapinnad. Kõik need tasapinnad määravad lõikumisel hulktahuka $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, mis vastab prisma definitsioonile. Tõepoolest, paralleelsed tasapinnad $ABCDE$ ja $A_1B_1C_1D_1E_1$ lõikuvad külgtasapindadega mööda paralleelseid sirgeid (§ 16); seepärast nelinurgad AA_1E_1E, EE_1D_1D jne. on rööpkülikud. Teiselt poolt on hulknurkade $ABCDE$ ja $A_1B_1C_1D_1E_1$ küljed vastavalt võrdsed (kui rööpkülikute vastasküljed) ja nende nurgad on vastavalt võrdsed (kui paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad); seega need hulknurgad on kongruentsed.

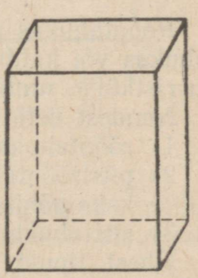


Joon. 73.

Paralleelsetes tasapindades asetsevaid hulknurki $ABCDE$ ja $A_1B_1C_1D_1E_1$ nimetatakse prisma **põhjadeks**, ühe põhja mingist punktist teisele põhjale ehitatud ristlõiku OO_1 nimetatakse prisma **kõrguseks**. Rööpkülikuid AA_1B_1B, BB_1C_1C jne. nimetatakse prisma **külgtahkudeks** ja nende külgi AA_1, BB_1 jne., mis ühendavad põhjade vastavaid tippe, nimetatakse **külgservadeks**. Prisma kõik külgservad on võrdsed kui paralleelsete sirgete lõigud paralleelsete tasapindade vahel.

Mitte ühel tahul asetsevat kahte tippu ühendavat sirglõiku nimetatakse prisma **diagonaaliks**. Säärane on näiteks sirglõik AD_1 (joon. 73).


Joon. 74.


Joon. 75.

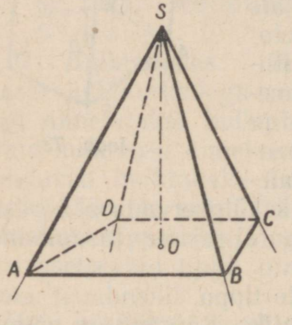
Kahte mitte ühele tahule kuuluvat külgserva (näiteks servi AA_1 ja CC_1, joon. 73) läbivat tasapinda nimetatakse **diagonaaltasapinnaks.**

Prismat nimetatakse kas **püstprismaks** või **kaldprismaks** vastavalt sellele, kas tema külgservad on põhjadega risti või kaldu. Püstprisma külgtahud on ristkülikud. Püstprisma kõrguseks võib lugeda tema külgserva.

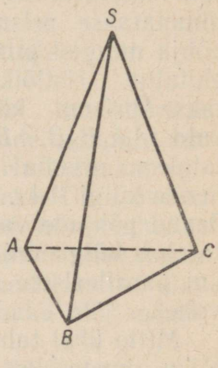
Püstprismat nimetatakse **korrapäraseks,** kui tema põhjad on korrapärased hulknurgad. Säärase prisma külgtahud on kõik kongruentsed ristkülikud.

Prismad on: kolmnurksed, nelinurksed jne. vastavalt sellele, kas põhjaks on kolmnurk, nelinurk jne.

69. Rööptahukas. Rööptahukaks nimetatakse niisugust prismat, mille põhjadeks on rööpkülikud (joon. 74).



Joon. 76.



Joon. 77.

Rööptahukas nagu iga prisma võib olla kas püströöptahukas või kaldrööptahukas. Püströöptahukat, mille põhi on ristkülik, nimetatakse **risttahukaks** (joon. 75).

Nendest definitsioonidest järeldub:

1) rööptahuka kõik kuus tahku on rööpkülikud;
2) püströöptahuka neli külgtahku on ristkülikud ja kaks põhitahku on rööpkülikud;
3) risttahuka kõik kuus tahku on ristkülikud.

Ühest tipust lähtuvat kolme risttahuka serva nimetatakse tema mõõtmeteks, ühte neist võib vaadelda pikkusena, teist — laiusena ja kolmandat — kõrgusena.

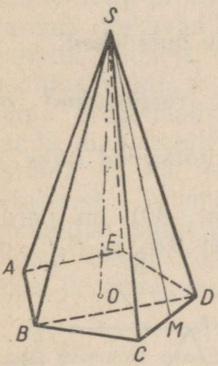
Võrdsete mõõtmetega risttahukat nimetatakse **kuubiks.** Kuubi kõik tahud on ruudud.

70. Püramiid. Püramiidiks nimetatakse niisugust hulktahukat, mille üks — põhjaks nimetatav — tahk on hulknurk ja kõik teised — külgtahkudeks nimetatavad — tahud on ühise tipuga kolmnurgad.

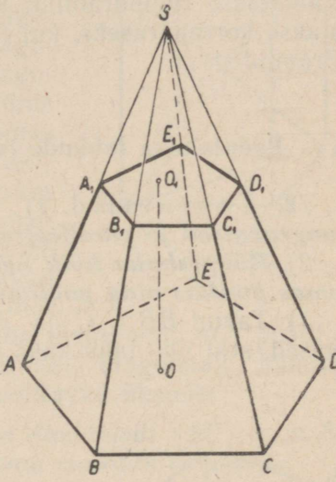
Püramiidi saamiseks võib mingi mitmetahuline nurk S läbi lõigata vabalt võetud tasapinnaga $ABCD$ (joon. 76) ja võtta äralõigatud osa $SABCD$.

Külgkolmnurkade ühist tippu S nimetatakse püramiidi **tipuks** ja tipust põhitasapinnale ehitatud ristlõiku nimetatakse tema **kõrguseks.**

Harilikult, püramiidi tähtedega tähistades, kirjutatakse esikohale see täht, mis on tipu tähiseks, näiteks $SABCD$ (joon. 76).



Joon. 78.



Joon. 79.

Püramiidi tippu ja põhja mingit diagonaali (näiteks BD joonisel 78) läbivat tasapinda nimetatakse **diagonaaltasapinnaks.**

Püramiidid on: kolmnurksed, nelinurksed jne. vastavalt sellele, mis on põhjaks, kas kolmnurk, nelinurk jne. Kolmnurkset püramiidi (joon. 77) nimetatakse **nelitahukaks** ehk **tetraeedriks;** tetraeedri kõik neli tahku on kolmnurgad.

Püramiidi nimetatakse **korrapäraseks** (joon. 78), kui tema põhjaks on korrapärane hulknurk ja tema kõrguse aluspunktiks on selle hulknurga keskpunkt. Korrapärase püramiidi külgservad on kõik võrdsed (kui võrdsete projektsioonidega kaldlõigud). Seepärast on korrapärase püramiidi kõik külgtahud kongruentsed võrdhaarsed kolmnurgad. Iga niisuguse kolmnurga kõrgust SM (joon. 78) nimetatakse püramiidi **apoteemiks.** Korrapärase püramiidi apoteemid on võrdsed.

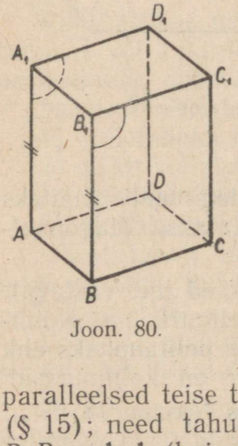
71. **Tüvipüramiid.** Põhja ($ABCDE$) ja põhjaga paralleelse lõiketasapinna ($A_1B_1C_1D_1E_1$) vahelist püramiidi osa nimetatakse **tüvipüramiidiks** (joon. 79). Paralleelseid tahke nimetatakse tüvipüramiidi **põhjadeks,** põhja $A_1B_1C_1D_1E_1$ mingist punktist O_1 teise põhjani ehitatud ristlõiku OO_1 nimetatakse tüvipüramiidi **kõrguseks.** Tüvipüramiidi nimetatakse **korrapäraseks,** kui ta moodustab osa korrapärasest püramiidist.

Rööptahuka tahkude ja diagonaalide omadused.

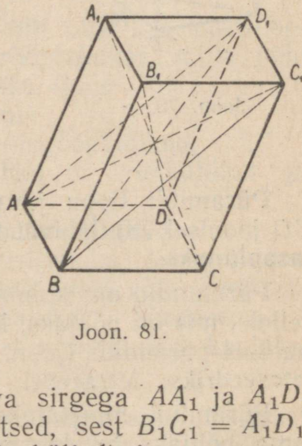
72. Teoreemid. 1) ***Rööptahuka vastastahud on kongruentsed ja paralleelsed.***

2) ***Rööptahuka kõik neli diagonaali lõikuvad ühes ja samas punktis ning poolitavad üksteist.***

1) Tahud BB_1C_1C ja AA_1D_1D (joon. 80) on paralleelsed, sest ühe tahu kaks lõikuvat sirget BB_1 ja B_1C_1 on



Joon. 80.

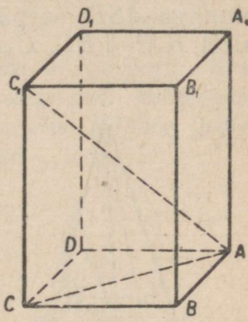


Joon. 81.

paralleelsed teise tahu kahe lõikuva sirgega AA_1 ja A_1D_1 (§ 15); need tahud on kongruentsed, sest $B_1C_1 = A_1D_1$, $B_1B = A_1A$ (kui rööpkülikute vastasküljed) ja

$$\angle BB_1C_1 = \angle AA_1D_1.$$

2) Võtame mingid kaks diagonaali (joon. 81), näiteks diagonaalid AC_1 ja BD_1, ning abisirged AD_1 ja BC_1. Et servad AB ja D_1C_1 on vastavalt paralleelsed ja võrdsed servaga DC, siis nad on paralleelsed ja võrdsed ka teineteisega; seega nelinurk AD_1C_1B on rööpkülik, milles lõigud C_1A ja BD_1 on diagonaalideks, rööpküliku diagonaalid aga poolitavad teineteist. Võtame nüüd ühe nendest diagonaalidest, näiteks diagonaali AC_1 koos kolmanda diagonaaliga, ütleme diagonaaliga B_1D. Täpselt samal viisil võime tõestada, et nad poolitavad teineteist lõikepunktis. Järelikult diagonaalid B_1D ja AC_1 ning diagonaalid AC_1 ja BD_1 (mis võtsime varem) lõikuvad ühes ja samas punktis, nimelt diagonaali AC_1 poolituspunktis. Võttes lõpuks sama diagonaali AC_1 koos neljanda diagonaaliga A_1C, tõestame samuti, et ka nemad poolitavad teineteist. Tähendab ka selle diagonaalide paari lõikepunktiks on diagonaali AC_1 poolituspunkt. Seega rööptahuka kõik neli diagonaali lõikuvad ühes ja samas punktis ning poolitavad üksteist.



Joon. 82.

73. T e o r e e m. ***Risttahuka diagonaali*** (AC_1, joon. 82) ***ruut võrdub tema kolme mõõtme ruutude summaga.***

Võttes põhja diagonaali AC, saame kaks kolmnurka: AC_1C ja ACB. Nad mõlemad on täisnurksed; esimene seepärast, et risttahukas on p ü s t p r i s m a, seega serv CC_1 on põhjaga risti; teine seepärast, et risttahuka põhi on r i s t k ü l i k. Nendest kolmnurkadest leiame, et

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 \text{ ja } AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Seega

$$AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$$

J ä r e l d u s. *Risttahuka diagonaalid on võrdsed.*

Püramiidi paralleelsete lõigete omadused.

74. T e o r e e m i d. ***Kui püramiid*** (joon. 83) ***on lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga, siis***

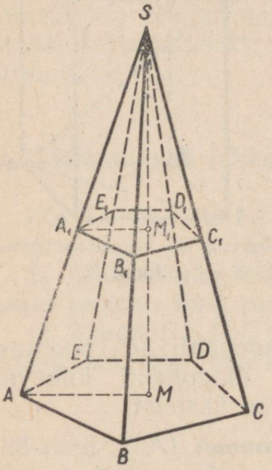
1) ***see tasapind jaotab külgservad ja kõrguse võrdelisteks osadeks;***

2) ***lõige on põhjaga sarnane hulknurk;***

3) ***lõike pindala ja põhja pindala suhtuvad nagu vastavate püramiidide kõrguste ruudud.***

1) Sirgeid A_1B_1 ja AB võib vaadelda kui paralleelsete tasapindade (põhja ja lõikaja) lõikejooni kolmanda tasapinnaga ASB; seepärast $A_1B_1 \| AB$ (§ 16). Selsamal põhjusel $B_1C_1 \| BC$, $C_1D_1 \| CD, \ldots$ ja $A_1M_1 \| AM$; seepärast

$$\frac{SA_1}{A_1A}=\frac{SB_1}{B_1B}=\frac{SC_1}{C_1C}=\cdots=\frac{SM_1}{M_1M}.$$



Joon. 83.

2) Kolmnurkade ASB ja A_1SB_1; kolmnurkade BSC ja B_1SC_1 jne. sarnasusest järeldame, et

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BS}{B_1S}; \quad \frac{BS}{B_1S}=\frac{BC}{B_1C_1},$$

millest saame, et

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}.$$

Samuti saame, et

$$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CS}{C_1S}; \quad \frac{CS}{C_1S}=\frac{CD}{C_1D_1},$$

millest järeldub, et

$$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}.$$

Samal viisil tõestame hulknurkade $ABCDE$ ja $A_1B_1C_1D_1E_1$ teiste külgede võrdelisuse. Et peale selle nende hulknurkade vastavad nurgad on võrdsed (sest nende haarad on paralleelsed ja samasuunalised), siis on nad sarnased.

3) Sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud; seepärast

$$\frac{\text{pindala } ABCDE}{\text{pindala } A_1B_1C_1D_1E_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1{}^2}=\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2.$$

Kuid

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AS}{A_1S}=\frac{MS}{M_1S}.$$

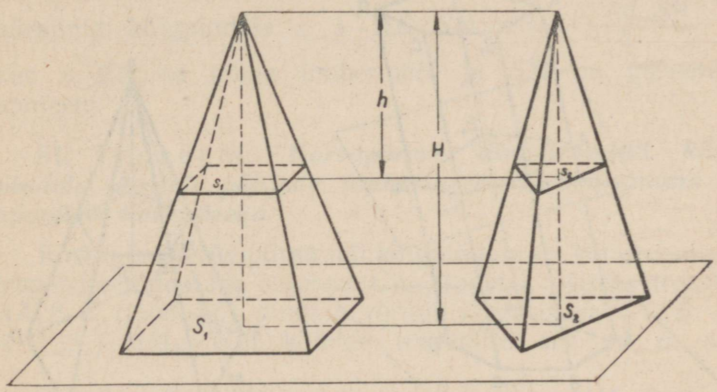
Tähendab

$$\frac{\text{pindala } ABCDE}{\text{pindala } A_1B_1C_1D_1E_1} = \left(\frac{MS}{M_1S}\right)^2 = \frac{MS^2}{M_1S^2}.$$

75. Järeldus. *Korrapärase tüvipüramiidi ülemine põhi on korrapärane hulknurk ning külgtahud on kongruentsed ja võrdhaarsed trapetsid* (joon. 83).

Iga säärase trapetsi kõrgust nimetatakse korrapärase tüvipüramiidi **apoteemiks.**

76. Teoreem. ***Kui kahte võrdsete kõrgustega püramiidi lõigata tippudest võrdsetel kaugustel asetsevate põhjadega paralleelsete tasapindadega, siis lõigete pindalad on võrdelised põhjade pindaladega.***



Joon. 84.

Olgu S_1 ja S_2 (joon. 84) kahe püramiidi põhjade pindalad, kummagi kõrgus olgu H; s_1 ja s_2 olgu tippudest ühel ja samal kaugusel h asetsevate põhjadega paralleelsete lõigete pindalad.

Eelmise teoreemi põhjal saame:

$$\frac{s_1}{S_1} = \frac{h^2}{H^2} \text{ ja } \frac{s_2}{S_2} = \frac{h^2}{H^2},$$

millest järeldub, et

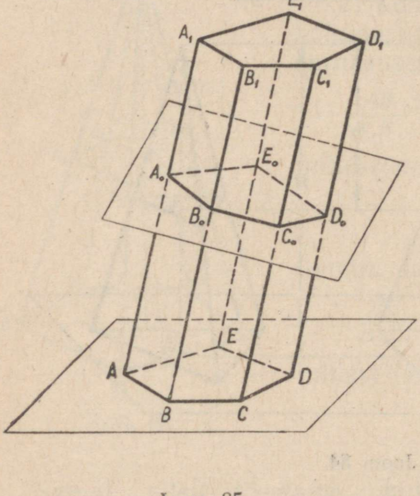
$$\frac{s_1}{S_1} = \frac{s_2}{S_2} \text{ ehk } \frac{s_1}{s_2} = \frac{S_1}{S_2}.$$

77. Järeldus. Kui $S_1 = S_2$, siis ka $s_1 = s_2$, s. o. *kui võrdsete kõrgustega püramiidide põhjad on pindvõrdsed, siis on pindvõrdsed ka nende tippudest võrdsetel kaugustel asetsevad põhjadega paralleelsed lõiked.*

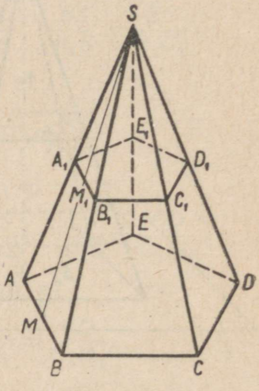
Prisma ja püramiidi külgpindala.

78. Teoreem. ***Prisma külgpindala võrdub tema ristlõike ümbermõõdu ja külgserva korrutisega.***

Ristlõikeks (joon. 85) nimetatakse hulknurka



Joon. 85.



Joon. 86.

$A_0B_0C_0D_0E_0$, mis tekib prisma lõikamisel külgservadega ristuva tasapinnaga. Selle hulknurga küljed on risti prisma külgservadega (§ 24).

Prisma külgpindala on rööpkülikute pindalade summa; iga rööpküliku aluseks võib võtta siin külgserva ning kõrguseks — ristlõike külje. Seega

$$\text{prisma külgpindala} = AA_1 \cdot A_0B_0 + BB_1 \cdot B_0C_0 + \\ + CC_1 \cdot C_0D_0 + DD_1 \cdot D_0E_0 + EE_1 \cdot E_0A_0 = (A_0B_0 + \\ + B_0C_0 + C_0D_0 + D_0E_0 + E_0A_0) \cdot AA_1.$$

79. Järeldus. *Püstprisma külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega,* sest püstprisma ristlõikeks võib võtta põhja enda ja tema külgserv on võrdne kõrgusega.

80. Teoreem. ***Korrapärase püramiidi külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja püramiidi apoteemi poole korrutisega.***

Olgu (joon. 86) $SABCDE$ korrapärane püramiid ning SM tema apoteem. Selle püramiidi külgpindala on kongruentsete võrdhaarsete kolmnurkade pindalade summa. Ühe kolmnurga, näiteks kolmnurga ASB pindala on võrdne korrutisega $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot SM$. Kui kõikide kolmnurkade arv on n, siis:

$$\text{püramiidi külgpindala} = \tfrac{1}{2} \cdot AB \cdot SM \cdot n = \frac{n \cdot AB \cdot SM}{2},$$

kus $n \cdot AB$ on põhja ümbermõõt ja SM on püramiidi apoteem.

81. Teoreem. ***Korrapärase tüvipüramiidi külgpindala võrdub põhjade ümbermõõtude poolsumma ja apoteemi korrutisega.***

Korrapärase tüvipüramiidi külgpindala on kongruentsete trapetsite pindalade summa. Ühe trapetsi, näiteks trapetsi AA_1B_1B (joon. 86) pindala võrdub korrutisega $\frac{1}{2}(AB + A_1B_1) \cdot MM_1$. Kui kõikide trapetsite arv on n, siis

$$\text{tüvipüramiidi külgpindala} = \frac{AB + A_1B_1}{2} \cdot MM_1 \cdot n =$$

$$= \frac{n \cdot AB + n \cdot A_1B_1}{2} \cdot MM_1,$$

kus $n \cdot AB$ ja $n \cdot A_1B_1$ on põhjade ümbermõõdud.

Harjutusi.

1. Korrapärase kolmnurkse püstprisma kõrgus on 12 m ja põhiserv on 3 m. Arvutada prisma täispindala.

2. Risttahuka täispindala on 1714 m² ning põhja lähisservade pikkused on 25 m ja 14 m. Arvutada külgpindala ja külgserv.

3. Ruudukujulise põhjaga risttahukas, mille kõrgus on h, on lõigatud tasapinnaga, mis läbib kahte vastaskülgserva. Avaldada risttahuka täispindala, teades, et lõike pindala on S.

4. Korrapärase kuusnurkse püramiidi põhiserv on a ja kõrgus h. Avaldada külgserv, apoteem, külgpindala ja täispindala.

5. Avaldada kolmnurkse püramiidi täispindala ja kõrgus, kui iga tema serv on a.

6. Korrapärane kuusnurkne püramiid, mille kõrgus on 25 cm ja põhiserv 5 cm, on lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga. Arvutada selle tasapinna kaugus püramiidi tipust, teades, et lõike pindala on $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ cm^2.

7. Ruudukujulise põhjaga tüvipüramiidi kõrgus on h, alumise põhja serv on a ja ülemise põhja serv on b. Avaldada tüvipüramiidi täispindala.

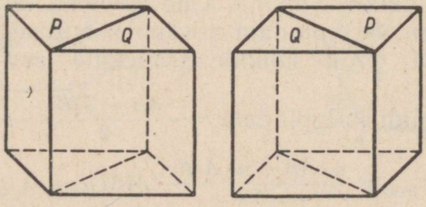
8. Tüvipüramiidi kõrgus on 6 ja põhjade pindalad on 18 ning 8. See tüvipüramiid on lõigatud põhjadega paralleelse tasapinnaga, mis poolitab kõrguse. Arvutada lõike pindala.

II. Prisma ja püramiidi ruumala.

82. **Põhilauseid ruumalade kohta.** Geomeetrilise keha pinnaga piiratud ruumiosa suurust nimetatakse selle keha **ruumalaks.**

Meie seame endale ülesande avaldada see suurus arvu abil, mis mõõdab seda suurust. Seejuures peame silmas järgmisi põhilauseid.

1) *Kongruentsete kehade ruumalad on võrdsed.*



Joon. 87.

2) *Osadest* (P ja Q) *koosneva keha ruumala* (näiteks kummagi joonisel 87 kujutatud rööptahuka ruumala) *võrdub nende osade ruumalade summaga.*

Võrdsete ruumaladega kehasid nimetatakse ruumvõrdseteks.

83. **Ruumalaühik.** Ruumalade mõõtmisel võetakse ühikuks niisuguse kuubi ruumala, mille iga serv võrdub pikkusühikuga. Nii on ruumalaühikutena tarvitusel kuupmeeter (m^3), kuupsentimeeter (cm^3) jne.

84. Teoreem. ***Risttahuka ruumala võrdub tema kolme mõõtme korrutisega.***

Selles lühikeses lauses väljendatud teoreemi tuleb mõista nii: risttahuka ruumala mõõtarv võrdub tema kolme mõõtme mõõtarvude korrutisega, kui risttahuka kolm lähisserva on mõõdetud pikkusühikuga, mis võrdub ruumalaühikuks võetud kuubi servaga. Nii et kui x on arv, mis väljendab risttahuka ruumala kuupsentimeetrites, ning a, b ja c on arvud, mis väljendavad tema kolme lähisserva pikkusi sentimeetrites, siis teoreem väidab, et $x = abc$.

Tõestamisel vaatleme eraldi kolme juhtu.

1) Mõõtmed väljenduvad täisarvudena.

Olgu mõõtmed näiteks järgmised (joon. 88): $AB = a$, $BC = b$ ja $BD = c$, kus a, b ja c on täisarvud (näiteks meie joonisel $a = 4$, $b = 2$ ja $c = 5$). Siis risttahuka põhi sisaldab ab niisugust ruutu, mis on vastavaks ruutühikuks. On ilmne, et igale ruudule võib paigutada ühe kuupühiku. Siis tekib kiht (nagu joonisel kujutatud), mis koosneb ab kuupühikust. Et selle kihi kõrgus võrdub ühe pikkusühikuga ja kogu risttahuka kõrgus on c pikkusühikut, siis risttahukasse võib paigutada c niisugust kihti. Seega selle risttahuka ruumala võrdub abc kuupühikuga.

2) Mõõtmed väljenduvad murdarvudena.

Olgu risttahuka mõõtmed järgmised:

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{p}{q}, \quad \frac{r}{s}$$

(mõned neist murdudest võivad olla täisarvud).

Teisendades murrud ühenimelisteks, saame:

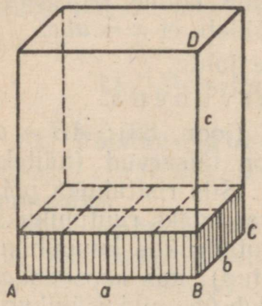
$$\frac{mqs}{nqs}, \quad \frac{pns}{nqs}, \quad \frac{rnq}{nqs}.$$

Võtame $\frac{1}{nqs}$ osa pikkusühikust uueks (abi-) pikkusühikuks. Selle uue ühikuga mõõdetud risttahuka servi väljendavad siis täisarvud, ja nimelt:

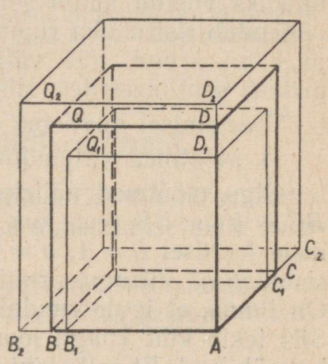
$$mqs, \ pns \text{ ja } rnq$$

ning seega, nagu tõestatud (juhtum 1), risttahuka ruumala võrdub korrutisega $(mqs)\cdot(pns)\cdot(rnq)$, kui seda ruumala mõõta uuele pikkusühikule vastava kuupühikuga. Endisele pikkusühikule vastav kuupühik sisaldab sääraseid uusi kuupühikuid $(nqs)^3$ tükki; tähendab uus kuupühik moodustab $\frac{1}{(nqs)^3}$ osa endisest. Seepärast endise kuupühikuga mõõdetud risttahuka ruumala on:

$$\frac{1}{(nqs)^3} \cdot (mqs)\ (pns)\ (rnq) = \frac{mqs}{nqs} \cdot \frac{pns}{nqs} \cdot \frac{rnq}{nqs} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}$$



Joon. 88.



Joon. 89.

3) Mõõtmed väljenduvad i r r a t s i o n a a l a r v u d e n a.

Olgu antud risttahukal (joon. 89), mida lühiduse pärast tähistame ühe tähega Q, järgmised mõõtmed:

$$AB = \alpha; \quad AC = \beta; \quad AD = \gamma,$$

kus arvud α, β ja γ või mõned neist on irratsionaalsed. Igaühte arvudest α, β ja γ võib väljendada lõpmatu kümnendmurru kujul. Võtame nende murdude ligikaudsed väärtused n kohaga murdosas esiteks puuduga, seejärel liiaga. Puuduga võetud väärtusi tähistame tähtedga $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ ja liiaga võetud väärtusi tähtedega $\alpha'_n, \beta'_n, \gamma'_n$. Paigutame servale AB punktist A kaks lõiku: $AB_1 = \alpha_n$ ja $AB_2 = \alpha'_n$. Servale AC paigutame samast punktist A lõigud: $AC_1 = \beta_n$ ja $AC_2 = \beta'_n$ ning servale AD samast punktist lõigud $AD_1 = \gamma_n$ ja $AD_2 = \gamma'_n$.

Seejuures on:

$$AB_1 < AB < AB_2; \quad AC_1 < AC < AC_2; \quad AD_1 < AD < AD_2.$$

Ehitame nüüd kaks abi-risttahukat: ühe mõõtmetega AB_1, AC_1 ja AD_1 (tähistame ta tähega Q_1) ning teise mõõtmetega AB_2, AC_2 ja

AD_2 (tähistame ta tähega Q_2). Risttahukas Q_1 on tervenisti risttahuka Q sees ning risttahukas Q_2 sisaldab endas risttahukat Q.

Tõestatu põhjal (juhtum 2) on:

$$\text{ruumala } Q_1 = \alpha_n \beta_n \gamma_n, \tag{1}$$

$$\text{ruumala } Q_2 = \alpha'_n \beta'_n \gamma'_n, \tag{2}$$

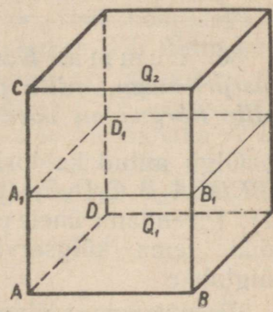
kusjuures ruumala $Q_1 <$ ruumala Q_2.

Hakkame nüüd suurendama arvu n. See tähendab, et võtame arvude α, β ja γ ligikaudsed väärtused järjest suurema täpsusega. Vaatame, kuidas muutuvad seejuures risttahukate Q_1 ja Q_2 ruumalad. Arvu n piiramatul kasvamisel ruumala Q_1 ilmselt suureneb ning võrduse (1) tõttu on tema piirväärtuseks korrutise $(\alpha_n \beta_n \gamma_n)$ piirväärtus. Ruumala Q_2 ilmselt kahaneb ning võrduse (2) tõttu tema piirväärtuseks on korrutise $(\alpha'_n \beta'_n \gamma'_n)$ piirväärtus. Kuid algebrast on teada, et arvu n piiramatul kasvamisel on korrutistel $\alpha_n \beta_n \gamma_n$ ja $\alpha'_n \beta'_n \gamma'_n$ ühine piirväärtus, mis on irratsionaalarvude α, β ja γ korrutiseks.

Seda piirväärtust loemegi risttahuka Q ruumala mõõtarvuks; seega:

$$\text{ruumala } Q = \alpha\beta\gamma.$$

Võib tõestada, et säärasel viisil määratud ruumala rahuldab ruumalade kohta seatud nõudeid (§ 82). Tõepoolest, ruumala niisuguse definitsiooni puhul on võrdsetel risttahukatel ilmselt võrdsed ruumalad. Seega esimene tingimus (§ 82) on täidetud. Jaotame nüüd antud risttahuka Q põhjaga paralleelse tasapinnaga kaheks: Q_1 ja Q_2 (joon. 90). Siis:



Joon. 90.

$$\text{ruumala } Q = AB \cdot AC \cdot AD;$$
$$\text{ruumala } Q_1 = AB \cdot AA_1 \cdot AD;$$
$$\text{ruumala } Q_2 = A_1B_1 \cdot A_1C \cdot A_1D_1.$$

Liites liikmeti kaks viimast võrdust ning pidades silmas, et $A_1B_1 = AB$ ja $A_1D_1 = AD$, saame, et ruumala Q_1 + ruumala $Q_2 = AB \cdot AA_1 \cdot AD +$
$$+ AB \cdot A_1C \cdot AD = AB \cdot AD(AA_1 + A_1C) = AB \cdot AD \cdot AC;$$
siit saame, et:

$$\text{ruumala } Q_1 + \text{ruumala } Q_2 = \text{ruumala } Q.$$

Seega ka teine tingimus (§ 82) on täidetud, kui risttahukas koostada kahest osast, mis tekkisid tema lõikamisel ühe tahuga paralleelse tasapinnaga.

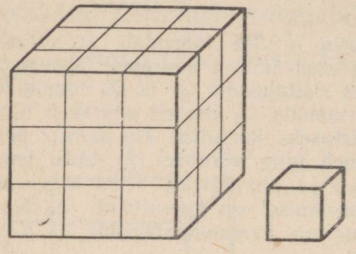
85. Järeldus. Olgu risttahuka põhiservade mõõtarvud a ja b ning olgu kolmanda mõõtme (kõrguse) mõõtarv c. Siis, tähistades tema vastava kuupühikuga mõõdetud ruumala tähega V, võime kirjutada:

$$V = abc.$$

Et korrutis ab väljendab põhja pindala, siis võib öelda, et

risttahuka ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

Märkus. Kahe eri nimega kuupühiku suhe võrdub nende ühikkuupide servadeks olevate pikkusühikute suhte kolmanda astmega. Nii on kuupmeetri suhe kuupdetsimeetriga võrdne 10^3, s. o. 1000.

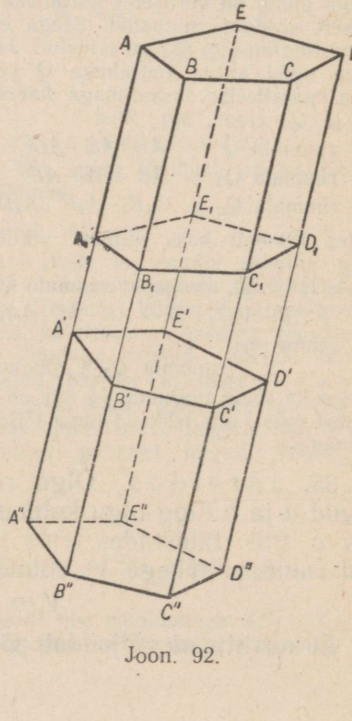


Joon. 91.

Seepärast, kui meil on näiteks kuup serva pikkusega a pikkusühikut ning teine kuup serva pikkusega $3a$ pikkusühikut, siis nende ruumalade suhe on 3^3, s. o. 27, mis on ilmsesti näha joonisel 91.

86. Lemma. ***Kaldprisma on ruumvõrdne niisuguse püstprismaga, mille põhjaks on kaldprisma ristlõige ja mille kõrgus on võrdne kaldprisma külgservaga.***

Olgu antud kaldprisma $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (joon. 92). Pikendame ühele poole kõiki tema külgservi ja külgtahke.



Joon. 92.

Võtame mingi ühe serva pikendusel vabalt punkti A' ning läbi selle punkti ristlõike $A'B'C'D'E'$. Seejärel, paigutanud sellele servale punktist A' lõigu $A'A'' = AA_1$, võtame läbi punkti A'' ristlõike $A''B''C''D''E''$. Et nende ristlõigete tasapinnad on paralleelsed, siis $B'B'' = C'C'' = D'D'' = E'E'' = A'A'' = AA_1$ (§ 17). Seetõttu hulktahukas $A''D'$, mille põhjadeks on need ristlõiked, on püstprisma, millest kõneldakse teoreemis.

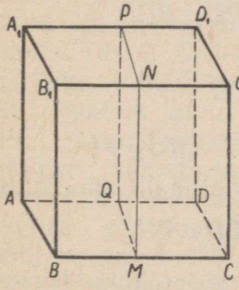
Tõestame, et antud kaldprisma on ruumvõrdne selle püstprismaga. Selleks veendume esmalt, et hulktahukad $A'D$ ja $A''D_1$ on kongruentsed. Nende põhjad $A'B'C'D'E'$ ja $A''B''C''D''E''$ on kongruentsed kui ühe ja sama prisma $A''D'$ põhjad; teiselt poolt, lisades võrduse $A_1A = A''A'$ kummalegi poolele ühe ja sama lõigu A_1A', saame, et

$$A'A = A''A_1;$$

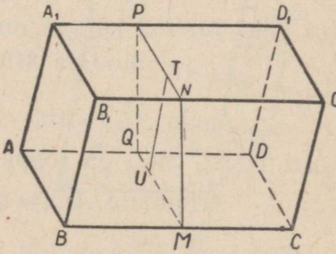
samal viisil saame, et

$$B'B = B''B_1,$$
$$C'C = C''C_1$$
jne.

Kujutleme nüüd, et hulktahukas $A'D$ on asetatud hulktahuka $A''D_1$ sisse nii, et nende põhjad ühtivad; siis ühtivad ka nende külgservad, sest nad on risti põhjadega ja on vastavalt võrdsed; seetõttu hulktahukas $A'D$ ühtib hulktahukaga $A''D_1$, tähendab, need kehad on kongruentsed. Nüüd paneme tähele, et kui püstprismale $A''D'$ lisame hulktahuka $A'D$ ja kaldprismale A_1D lisame hulktahuka $A''D_1$, mis on ruumvõrdne kehaga $A'D$, siis saame ühe ja sama hulktahuka $A''D$. Sellest järeldub, et prismad A_1D ja $A''D'$ on ruumvõrdsed.



Joon. 93.



Joon. 94.

87. T e o r e e m. ***Rööptahuka ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.***

Varem tõestasime selle teoreemi r i s t t a h u k a kohta, nüüd tõestame ka p ü s t r ö ö p t a h u k a kohta ja seejärel k a l d r ö ö p t a h u k a kohta.

1) Olgu AC_1 (joon. 93) püströöptahukas, s. o. niisugune rööptahukas, mille põhi $ABCD$ on rööpkülik ja kõik

külgtahud on ristkülikud. Võtame tema põhjaks külgtahu AA_1B_1B, siis saame k a l d r ö ö p t a h u k a. Vaadeldes teda kui k a l d p r i s m a erijuhtu, võime eelmise paragrahvi lemma põhjal kinnitada, et see rööptahukas on ruumvõrdne niisuguse püströöptahukaga, mille põhjaks on ristlõige $MNPQ$ ja kõrguseks on lõik BC. Nelinurk $MNPQ$ on ristkülik, sest kõik tema nurgad on kahetahuliste täisnurkade joonnurgad; seepärast püströöptahukas, mille põhjaks on ristkülik $MNPQ$, peab olema risttahukas ja seega tema ruumala võrdub tema kolme mõõtme korrutisega, milledeks võib võtta lõigud MN, MQ ja BC. Seega:

$$\text{ruumala } AC_1 = MN \cdot MQ \cdot BC = (MQ \cdot BC) \cdot MN.$$

Kuid korrutis $MQ \cdot BC$ väljendab rööpküliku $ABCD$ pindala, seepärast:

$$\text{ruumala } AC_1 = (\text{pindala } ABCD) \cdot MN = $$
$$= (\text{pindala } ABCD) \cdot BB_1.$$

2) Olgu AC_1 (joon. 94) kaldrööptahukas. Ta on ruumvõrdne niisuguse püströöptahukaga, mille põhjaks on ristlõige $MNPQ$ (s. o. servadega AD, BC, ... ristiolev lõige) ja kõrguseks on serv BC. Kuid varem tõestatu põhjal püströöptahuka ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega, tähendab:

$$\text{ruumala } AC_1 = (\text{pindala } MNPQ) \cdot BC.$$

Kui lõike $MNPQ$ kõrgus on TU, siis:

$$\text{pindala } MNPQ = MQ \cdot TU,$$

seega:

$$\text{ruumala } AC_1 = MQ \cdot TU \cdot BC = (BC \cdot MQ) \cdot TU.$$

Korrutis $BC \cdot MQ$ on rööpküliku $ABCD$ pindala, järelikult:

$$\text{ruumala } AC_1 = (\text{pindala } ABCD) \cdot TU.$$

Jääb veel tõestada, et lõik TU on rööptahuka kõrguseks. Tõepoolest, servadega BC, B_1C_1, ... ristuv lõige $MNPQ$ on risti ka neid servi läbivate tahkudega $ABCD$, BB_1C_1C, ... (§ 43). Seepärast, kui punktist U ehitada ristsirge tahule $ABCD$, siis see ristsirge peab asetsema tasapinnal $MNPQ$ (§ 44) ja järelikult peab ühtima sirgega UT, mis asetseb sellel tasapinnal ja on risti sirgega MQ. Tähendab lõik UT on rööptahuka kõrgus. Seega ka kaldrööptahuka ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

Järeldus. Kui V, S ja h on arvud, mis väljendavad vastavates ühikutes vastavalt rööptahuka ruumala, põhja pindala ja rööptahuka kõrgust, siis võib kirjutada:

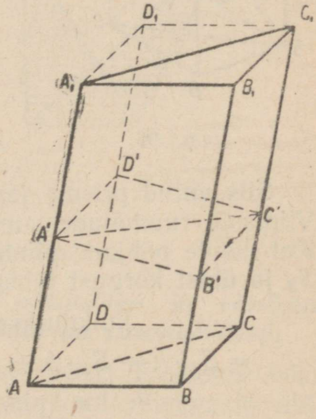
$$V = Sh.$$

Prisma ruumala.

88. Teoreem. ***Prisma ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.***

Esiteks tõestame selle teoreemi kolmnurkse prisma, siis hulknurkse prisma kohta.

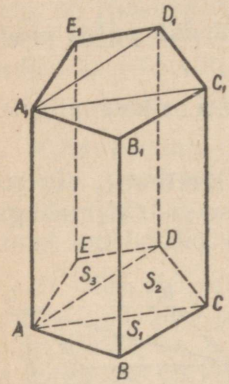
1) Võtame läbi prisma $ABCA_1B_1C_1$ serva AA_1 tahuga BB_1C_1C paralleelse tasapinna ja läbi serva CC_1 tahuga AA_1B_1B paralleelse tasapinna; seejärel pikendame kummagi põhja tasapinda lõikumiseni võetud tasapindadega. Siis saame rööptahuka BD_1, mille diagonaaltasapind AA_1C_1C jaotab kaheks kolmnurkseks prismaks (milledest üks on antud prisma). Tõestame, et need prismad on ruumvõrdsed. Selleks võtame ristlõike $A'B'C'D'$. See lõige on rööpkülik, mille diagonaal $A'C'$ jaotab kaheks kongruentseks kolmnurgaks. Antud prisma on ruumvõrdne niisuguse püstprismaga, mille põhjaks on $\triangle A'B'C'$ ja kõrguseks on serv AA_1 (§ 86). Teine kolmnurkne prisma on ruumvõrdne niisuguse püstprismaga, mille põhjaks on $\triangle A'D'C'$ ja kõrguseks serv AA_1. Kuid kaks kongruentsete põhjadega ja võrdsete kõrgustega püstprismat on kongruentsed (sest teineteise sisse paigutamisel nad ühtivad); tähendab prismad $ABCA_1B_1C_1$ ja $ADCA_1D_1C_1$ on ruumvõrdsed. Sellest järeldub, et antud prisma ruumala moodustab poole rööptahuka BD_1 ruumalast; tähistades prisma kõrguse tähega h, saame seega, et:



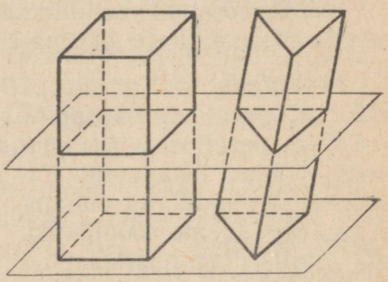
Joon. 95.

$$\text{kolmnurkse prisma ruumala} = \frac{\text{pindala } ABCD \cdot h}{2} = \frac{\text{pindala } ABCD}{2} \cdot h = (\text{pindala } ABC) \cdot h.$$

2) Võtame läbi hulknurkse prisma (joon. 96) serva AA_1 diagonaaltasapinnad AA_1C_1C ja AA_1D_1D.



Joon. 96.



Joon. 97.

Siis antud prisma jaguneb kolmnurkseteks prismadeks. Viimaste ruumalade summa moodustab otsitava ruumala. Kui nende põhjade pindalasid tähistada tähtedega S_1, S_2, S_3 ja ühist kõrgust tähega h, siis saame, et:

$$\text{hulknurkse prisma ruumala} = S_1 \cdot h + S_2 \cdot h + S_3 \cdot h = (S_1 + S_2 + S_3) \cdot h = (\text{pindala } ABCDE) \cdot h.$$

Järeldus. Kui V, S ja h on arvud, mis väljendavad vastavates ühikutes vastavalt prisma ruumala, põhja pindala ja prisma kõrgust, siis võib kirjutada:

$$V = S \cdot h.$$

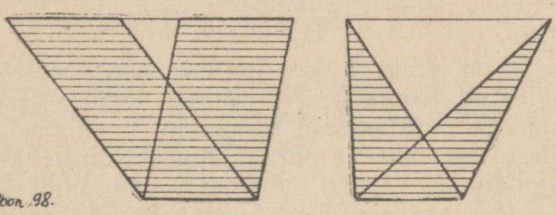
89. Cavalieri printsiip. Itaalia XVII sajandi matemaatik Cavalieri avaldas tõestuseta järgmise väite:
kui kahte keha (mida piiravad tasapinnad või kõverpinnad) *on võimalik asetada nii, et iga tasapind, mis on paralleelne mingi antud tasapinnaga ja lõikab mõlemat keha, annab lõikes nendega võrdpindsed kujundid, siis nende kehade ruumalad on võrdsed.*

Sellel lausel on olemas range tõestus, kuid see tõestus ei mahu elementaarmatemaatika piiridesse, seepärast piirdume tema kontrollimisega mõne näite varal.

Cavalieri printsiibi nõudeile vastavad näiteks kaks pindvõrdsete põhjadega ja võrdsete kõrgustega prismat (ükskõik, kas kolmnurksed või hulknurksed) (joon. 97). Niisugused prismad, nagu teame, on ruumvõrdsed. Kui need prismad asetada põhjadega mingile tasapinnale, siis iga põhjadega paralleelne tasapind, mis lõikab ühte prismat, lõikab ka teist, kusjuures lõiked on pindvõrdsed kujundid, sest need kujundid on kongruentsed põhjadega, põhjad aga on pindvõrdsed. Tähendab Cavalieri printsiip leiab kinnitust sellel erijuhul.

See printsiip leiab kinnitust ka planimeetrias tema rakendamisel pindalade võrdlemiseks, nimelt:

kui kahte kujundit võib asetada nii, et iga sirge, mis on paralleelne mingi antud sirgega ja lõikab mõlemat kujundit, annab lõikes nendega võrdsed lõigud, siis sellised kujundid on pindvõrdsed. Selle näiteks on kaks võrdsete alustega ja võrdsete kõrgustega rööpkülikut või kolmnurka (joon. 98).



Joon. 98. 1:2

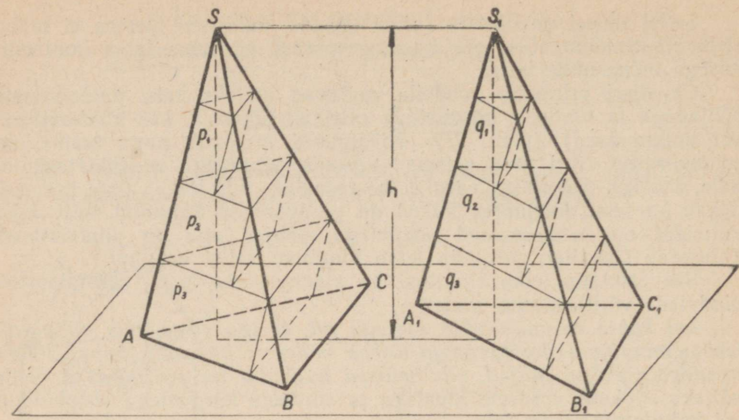
Joon. 98.

Püramiidi ruumala.

90. L e m m a. ***Pindvõrdsete põhjadega ja võrdsete kõrgustega kolmnurksed püramiidid on ruumvõrdsed.***

Meie tõestus koosneb kolmest osast. Esimeses osas tõestame mitte püramiidide eneste, vaid niisuguste abikehade ruumvõrdsuse, mis koosnevad üksteise peale paigutatud kolmnurksetest prismadest. Teises osas tõestame, et nende abikehade ruumalad neid moodustavate prismade arvu suurendamisel lähenevad püramiidide ruumaladele k u i t a h e s l i g i d a l e. Lõpuks kolmandas osas veendume, et püramiidid ise on ruumvõrdsed.

I. Kujutleme, et püramiidid on paigutatud põhjadega mingile tasapinnale (nagu kujutatud joonisel 99); siis nende tipud asetsevad põhjade tasapinnaga paralleelsel sirgel ning püramiidide kõrgust võib kujutada ühe ja sama sirglõiguga h. Jaotame selle kõrguse n-ks võrdseks osaks,



Joon. 99.

kusjuures n on mingi täisarv (näiteks 4-ks võrdseks osaks, nagu näidatud joonisel), ja asetame läbi jaotuspunktide rea põhjadega paralleelseid tasapindu.

Nende tasapindade ja püramiidide lõikumisel tekib rida kolmnurgakujulisi lõikeid, kusjuures püramiidi S lõiked on pindvõrdsed püramiidi S_1 vastavate lõigetega (§ 77). Ehitame kummagi püramiidi sisse rea prismasid nii, et nende ülemisteks põhjadeks on kolmnurksed lõiked ja külgservad on ühes püramiidis paralleelsed servaga SA, teises püramiidis servaga S_1A_1 ning iga prisma kõrgus on $\frac{h}{n}$. Sääraseid prismasid tekib kummaski püramiidis $n-1$; nad moodustavad mingisuguse astmelise keha, mille ruumala on ilmselt väiksem kui selle püramiidi ruumala, millesse prismad on ehitatud. Tähistame püramiidi S prismade ruumalad, alates tipust, järgemööda tähtedega p_1, p_2, $p_3, \ldots, p_{n-1}$ ja püramiidi S_1 prismade ruumalad, samuti alates tipust, järgemööda tähtedega q_1, q_2, $q_3, \ldots, q_{n-1}$; siis, pidades silmas, et iga vastavate prismade paari (p_1 ja q_1, p_2 ja $q_2, \ldots$) põhjad on pindvõrdsed ja kõrgused on võrdsed, võime kirjutada rea võrdusi:

$$p_1 = q_1;\ p_2 = q_2;\ p_3 = q_3;\ldots;\ p_{n-1} = q_{n-1}.$$

Liites liikmeti kõik võrdused, leiame, et

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1} = \\ = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_{n-1}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Seega oleme tõestanud, et meie poolt ehitatud astmeliste abikehade ruumalad on võrdsed (iga arvu n puhul, milleks jaotame kõrguse h).

II. Tähistanud püramiidide S ja S_1 ruumalad vastavalt tähtedega V ja V_1, oletame, et

$$V - (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1}) = x$$

ja

$$V_1 - (q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_{n-1}) = y;$$

siit saame, et

$$(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1}) = V - x$$

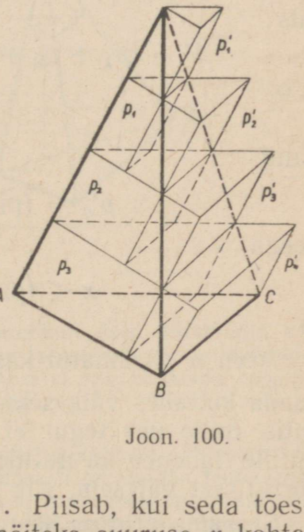
ja

$$(q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_{n-1}) = V_1 - y.$$

Siis võime võrduse (1) kirjutada nii:

$$V - x = V_1 - y. \qquad (2)$$

Kujutleme nüüd, et võrdsete osade arv n, milleks jaotame kõrguse h, kasvab piiramatult: kujutleme näiteks, et 4 osa asemel jaotame kõrguse 8-ks võrdseks osaks, siis 16-ks, siis 32-ks jne. ja et iga kord ehitame näidatud viisil kummaski püramiidis astmelise keha. Kuidas ka ei kasva astmelisi kehi moodustavate prismade arv, võrdus (1) ja seega ka võrdus (2) jäävad ikka kehtima. Seejuures ruumalad V ja V_1 muidugi ei muutu, kuna suurused x ja y, mis näitavad, mille võrra püramiidide ruumalad ületavad vastavate astmeliste kehade ruumalasid, ilmselt järjest vähenevad. Tõestame, et suurused x ja y võivad saada kuitahes väikesteks (teisiti öeldes, et nad l ä h e n e v a d n u l l i l e). Piisab, kui seda tõestame ühe suuruse kohta kahest, näiteks suuruse x kohta.



Joon. 100.

Selleks ehitame püramiidile S veel teise rea prismasid (joonis 100), mis moodustavad ka astmelise keha, kuid mille ruumala on püramiidi ruumalast suurem. Need prismad ehitame samal viisil, nagu ehitasime sisemised prismad, ainult selle vahega, et me kolmnurgakujulisi lõikeid ei võta nüüd mitte prismade ülemisteks, vaid alumisteks põhjadeks. Seetõttu saame nüüd rea prismasid, mis on osaliselt väljaspool püramiidi, ning seepärast nad moodustavad uue, püramiidi ruumalast suurema ruumalaga astmelise keha. Sääraste prismade arv ei ole nüüd mitte $n-1$, nagu varem, vaid n. Tähistame nende ruumalad, alates tipust, järgemööda tähtedega $p_1', p_2', p_3', \ldots, p_n'$. Vaadeldes joonist näeme, et:

$$p'_1=p_1,\ p'_2=p_2,\ p'_3=p_3, \ldots,\ p'_{n-1}=p_{n-1}.$$

Seepärast

$$(p'_1+p'_2+\ldots+p'_{n-1}+p'_n)-$$
$$-(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1})=p'_n.$$

Et

$$p'_1+p'_2+\ldots+p'_{n-1}+p'_n>V$$

ja

$$p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}<V,$$

siis

$$V-(p_1+p_2+p_3+\ldots+p_{n-1})<p'_n$$

s. o.

$$x<p'_n.$$

Kuid

$$p'_n=(\text{pindala } ABC)\cdot\frac{h}{n},$$

seega

$$x<(\text{pindala } ABC)\cdot\frac{h}{n}.$$

Arvu n piiramatul kasvamisel suurus $\frac{h}{n}$ võib ilmselt saada kuitahes väikeseks (läheneb nullile). Seepärast korrutis, mille üks tegur ei muutu, kuid teine tegur läheneb nullile, läheneb ka nullile, ja et positiivne arv x on sellest korrutisest väiksem, siis läheneb tema ammugi nullile.

Seesama arutlus kehtib ka suuruse y kohta.

Seega oleme tõestanud, et prismade arvu piiramatul kasvamisel astmeliste abikehade ruumalad lähenevad vastavate püramiidide ruumaladele k u i t a h e s l i g i d a l e.

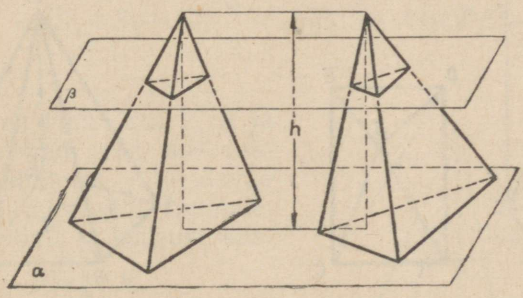
III. Seda silmas pidades võtame ülalkirjutatud võrduse (2) ja anname temale niisuguse kuju:

$$V - V_1 = x - y. \qquad (3)$$

Nüüd tõestame, et see võrdus on võimalik ainult siis, kui $V = V_1$ ja $x = y$. Tõepoolest, vahe $V - V_1$, nagu iga jäävate arvude vahe, peab olema jääv arv, kuid vahe $x - y$, nagu iga muutuvate, n u l l i l e l ä h e n e v a t e arvude vahe, peab olema kas muutuv (nullile lähenev) arv või null. Et jääv arv ei saa võrduda muutuva arvuga, siis jääb kahest võimalusest ainult üks: vahe $x - y = 0$; siis $V = V_1$ ja $x = y$.

Nii oleme tõestanud, et uuritavad püramiidid on ruumvõrdsed. [1]

Tõestatud lemma järeldub väga lihtsalt ka Cavalieri printsiibist. Tõepoolest, kujutleme, et kaks pindvõrdse põhjaga ja võrdse kõrgusega püramiidi on asetatud põhjadega mingile tasapinnale α (joon. 101), siis iga tasapinnaga α paralleelne tasapind β annab püramiide lõiga-



Joon. 101.

tes pindvõrdsed kolmnurgad (§ 77); järelikult need püramiidid vastavad Cavalieri printsiibi nõudeile ning seepärast nende ruumalad peavad olema võrdsed. Kuid seda tõestust ei saa nimetada rangeks, sest meie ei tõestanud Cavalieri printsiipi.

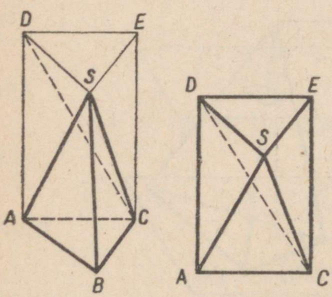
---

[1] Selle teoreemi nii keerulise tõestuse vajalikkust põhjustab fakt, et kahte ruumvõrdset keha ei saa nii hõlpsasti teisendada teineteiseks, nagu seda oli võimalik teha pindvõrdsete hulknurkadega tasapinnal. Nimelt kui on antud kaks ruumvõrdset hulktahukat, siis üldisel juhul osutub võimatuks ühte neist tükeldada niisugusteks osadeks (ka täienduste abil), milledest saaks koostada teise. Eriti on see võimatu kahe vabalt võetud pindvõrdse põhjaga ja võrdse kõrgusega kolmnurkse püramiidi puhul.

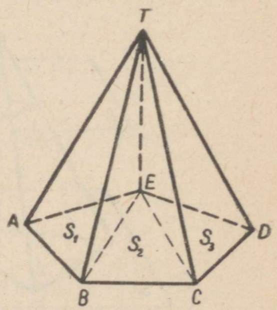
91. Teoreem. ***Püramiidi ruumala võrdub põhja pindala ja kolmandiku kõrguse korrutisega.***

Esiteks tõestame selle teoreemi kolmnurkse, siis hulknurkse püramiidi kohta.

1) Ehitame kolmnurkse püramiidi $SABC$ (joon. 102) põhjale niisuguse prisma $SABCDE$, mille kõrgus võrdub püramiidi kõrgusega ja mille üks külgserv ühtib servaga SB. Tõestame, et püramiidi ruumala moodustab ühe kolmandiku selle prisma ruumalast. Eraldame prismast antud püramiidi. Siis jääb järele nelinurkne püramiid $SADEC$ (mis selguse pärast on eraldi kujutatud). Lõikame seda püramiidi tippu S ja põhja diagonaali DC läbiva tasapinnaga. Sel teel tekkinud kahel kolmnurksel püramiidil on ühine tipp S ning võrdsed põhjad DEC ja DAC, mis asetsevad ühes tasapinnas; tähendab, vastavalt eespool tõestatud lemmale, need püramiidid on ruumvõrdsed. Võrd-



Joon. 102.



Joon. 103.

leme ühte neist, nimelt püramiidi $SDEC$, antud püramiidiga. Püramiidi $SDEC$ põhjaks võib võtta kolmnurga SDE; siis tema tipuks on punkt C ja kõrgus on võrdne antud püramiidi kõrgusega. Et $\triangle SDE = \triangle ABC$, siis vastavalt samale lemmale on püramiidid $CSDE$ ja $SABC$ ruumvõrdsed.

Meie tükeldasime prisma $SABCDE$ kolmeks ruumvõrdseks püramiidiks: $SABC$, $SDEC$ ja $SDAC$ (on ilmne, et nii on võimalik tükeldada iga kolmnurkset prismat — see on kolmnurkse prisma üks tähtsaid omadusi). Seega antud püramiidiga kolme ruumvõrdse püramiidi ruumalade summa moodustab prisma ruumala; järelikult:

$$\text{ruumala } SABC = \tfrac{1}{3} \text{ ruumalast } SDEABC =$$
$$= \frac{(\text{pindala } ABC) \cdot h}{3} = (\text{pindala } ABC) \cdot \frac{h}{3},$$

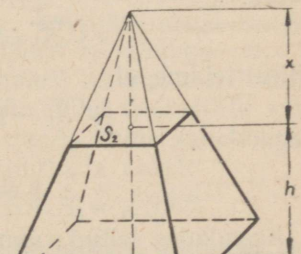
kus h tähistab püramiidi kõrgust.

2) Ehitame hulknurkse püramiidi $TABCDE$ (joon. 103) põhja mingist tipust E diagonaalid EB ja EC. Seejärel paneme lõiketasapinnad läbi iga diagonaali ja serva TE. Siis hulknurkne püramiid tükeldub kolmnurkseteks püramiidideks, milledel on antud püramiidiga ühine kõrgus. Tähistades kolmnurksete püramiidide põhjade pindalad tähtedega S_1, S_2, S_3 ja kõrguse tähega h, saame, et:

$$\text{ruumala } TABCDE = \tfrac{1}{3} S_1 \cdot h + \tfrac{1}{3} S_2 \cdot h + \tfrac{1}{3} S_3 \cdot h =$$
$$= (S_1 + S_2 + S_3) \cdot \frac{h}{3} = (\text{pindala } ABCDE) \cdot \frac{h}{3} \cdot$$

J ä r e l d u s. Kui V, S ja h tähendavad arve, mis vastavates ühikutes väljendavad mistahes püramiidi ruumala, põhja pindala ja kõrgust, siis:

$$V = \tfrac{1}{3} Sh.$$



Joon. 104.

92. T e o r e e m. ***Tüvipüramiidi ruumala võrdub kolme püramiidi ruumalade summaga, millede kõrgused on võrdsed antud tüvipüramiidi kõrgusega ja millede põhjadeks on: esimesel — tüvipüramiidi alumine põhi, teisel— ülemine põhi, kolmanda püramiidi põhja pindala võrdub aga ülemise ja alumise põhja pindala geomeetrilise keskmisega.***

Olgu tüvipüramiidi (joon. 104) põhjade pindalad S_1 ja S_2, kõrgus h ning ruumala V (tüvipüramiid võib olla ükskõik kas kolmnurkne või hulknurkne). Peame tõestama, et:

$$V = \tfrac{1}{3} S_1 h + \tfrac{1}{3} S_2 h + \tfrac{1}{3} h \sqrt{S_1 S_2} = \tfrac{1}{3} h (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}),$$

kus $\sqrt{S_1 S_2}$ on suuruste S_1 ja S_2 geomeetriline keskmine. Tõestuseks paigutame väiksemale põhjale väikese püramiidi, mis antud tüvipüramiidi täiendab täispüramiidiks. Siis võime tüvipüramiidi ruumala V vaadelda kui täispüramiidi ja täienduspüramiidi ruumalade vahet.

Tähistades täienduspüramiidi kõrguse tähega x, leiame, et:

$$V = \tfrac{1}{3} S_1 (h + x) - \tfrac{1}{3} S_2 x = \tfrac{1}{3} (S_1 h + S_1 x - S_2 x) =$$
$$= \tfrac{1}{3} [S_1 h + (S_1 - S_2) x].$$

Kõrguse x leidmiseks kasutame teoreemi § 74, millele vastavalt võime kirjutada võrrandi:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{(h + x)^2}{x^2}.$$

Selle võrrandi lihtsustamiseks võtame tema mõlemast poolest positiivse ruutjuure:

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} = \frac{h + x}{x}.$$

Sellest võrrandist (mida võime vaadelda kui võrret) saame:

$$x \sqrt{S_1} = h \sqrt{S_2} + x \sqrt{S_2},$$

millest leiame, et:

$$(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})\, x = h \sqrt{S_2},$$

seega:

$$x = \frac{h \sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}.$$

Asendades leitud ruumala valemis tähe x selle avaldisega, saame:

$$V = \tfrac{1}{3} \left[S_1 h + \frac{(S_1 - S_2) h \sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \right].$$

Et $S_1 - S_2 = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})$, siis pärast murru taandamist vahega $\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}$ saame:

$$V = \tfrac{1}{3} [S_1 h + (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}) h \sqrt{S_2}] =$$
$$= \tfrac{1}{3} (S_1 h + h \sqrt{S_1 S_2} + S_2 h) =$$
$$= \tfrac{1}{3} h (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}),$$

s. o. saame valemi, mida pidimegi tõestama.

III. Hulktahukate sarnasus.

93. Definitsioon. Kahte hulktahukat nimetatakse **sarnasteks**, kui neil on vastavalt kongruentsed mitmetahulised nurgad ja vastavalt sarnased tahud. Elemente, mis sarnastel hulktahukatel on nii vastamisi seotud, nimetatakse **vastavateks.**

Sellest definitsioonist järeldub, et sarnastel hulktahukatel

1) kahetahulised nurgad on vastavalt võrdsed ja asetsevad ühteviisi, sest mitmetahulised nurgad on kongruentsed;

2) vastavad servad on võrdelised, sest iga kahe sarnase tahu vastavate servade suhe on üks ja sama ning kummagi hulktahuka lähistahkudel on ühine serv.

Sarnaste hulktahukate olemasolu võimalust näitab järgmine teoreem.

94. Teoreem. ***Püramiidi*** (joon. 105) ***põhjaga paralleelne lõiketasapind*** ($A_1B_1C_1D_1E_1$) ***eraldab püramiidist temaga sarnase püramiidi*** ($SA_1B_1C_1D_1E_1$).

Et $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$ jne., siis nende kahe püramiidi külgtahud on sarnased (§ 74). Jääb veel tõestada mitmetahuliste nurkade kongruentsus. Mitmetahuline nurk S on mõlemal püramiidil ühine; kolmetahulised nurgad A_1, B_1, C_1, ... on vastavalt võrdsed nurkadega A, B, C, ..., sest igal nende nurkade paaril on ühine kahetahuline nurk vastavalt võrdsete ja ühteviisi asetsevate tasanurkade vahel; nii on nurkadel A ja A_1 ühine kahetahuline nurk (servaga AS) võrdsete tasanurkade vahel:

$$\angle SA_1E_1 = \angle SAE \text{ ja } \angle SA_1B_1 = \angle SAB.$$

95. Teoreem. ***Sarnaste hulktahukate pindalad suhtuvad nagu vastavate servade ruudud.***

Tähistagu tähed P_1, P_2, P_3, ..., P_n ühe hulktahuka üksikute tahkude pindalasid, tähed p_1, p_2, p_3, ..., p_n tähistagu teise, esimesega sarnase hulktahuka vastavate tahkude pindalasid; oletame veel, et lõigud L ja l on mingi kahe teineteisele vastava serva pikkused.

Siis vastavate tahkude sarnasuse ja vastavate servade võrdelisuse tõttu saame, et:

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{L^2}{l^2}, \quad \frac{P_2}{p_2} = \frac{L^2}{l^2}, \quad \frac{P_3}{p_3} = \frac{L^2}{l^2}, \ldots, \frac{P_n}{p_n} = \frac{L^2}{l^2},$$

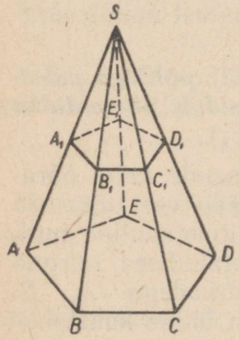
millest võrdsete suhete omaduse põhjal leiame, et:

$$\frac{P_1+P_2+P_3+\ldots+P_n}{p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n}=\frac{L^2}{l^2}.$$

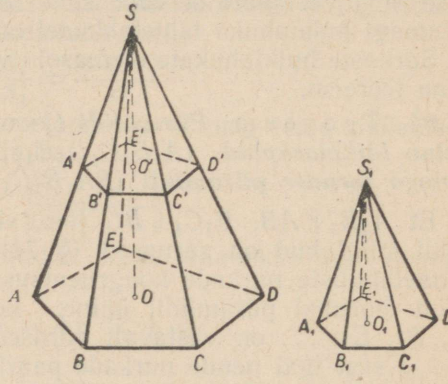
96. Teoreem. ***Sarnaste hulktahukate ruumalad suhtuvad nagu vastavate servade kuubid.***

Piirdume selle teoreemi tõestamisega ainult sarnaste püramiidide kohta. Olgu (joon. 106) püramiidid $SABCDE$ ja $S_1A_1B_1C_1D_1E_1$ sarnased. Paigutame teise püramiidi esimese sisse nii, et nende mitmetahulised nurgad S ja S_1 ühtivad.

Siis põhi $A_1B_1C_1D_1E_1$ satub asendisse $A'B'C'D'E'$, kusjuures küljed $A'B'$, $B'C'$, ... on vastavalt paralleelsed



Joon. 105.



Joon. 106.

külgedega AB, BC, ... (selle tõttu, et kolmetahuliste nurkade A ja A_1, B ja B_1 jne. vastavad tasanurgad on võrdsed). Seepärast tasapind $A'B'C'D'E'$ on paralleelne tasapinnaga $ABCDE$. Olgu SO ja SO' püramiidide kõrgused.

Siis:

$$\text{ruumala } SABCDE=\frac{(\text{pindala } ABCDE)\cdot SO}{3};$$

$$\text{ruumala } SA'B'C'D'E'=\frac{(\text{pindala } A'B'C'D'E')\cdot SO'}{3}.$$

Seega:

$$\frac{\text{ruumala } SABCDE}{\text{ruumala } SA'B'C'D'E'}=\frac{\text{pindala } ABCDE}{\text{pindala } A'B'C'D'E'}\cdot\frac{SO}{SO'};$$

kuid:

$$\frac{\text{pindala } ABCDE}{\text{pindala } A'B'C'D'E'} = \frac{SO^2}{SO'^2},$$

seega:

$$\frac{\text{ruumala } SABCDE}{\text{ruumala } SA'B'C'D'E'} = \frac{SO^3}{SO'^3} = \frac{SA^3}{SA'^3}.$$

Järelikult ka:

$$\frac{\text{ruumala } SABCDE}{\text{ruumala } S_1A_1B_1C_1D_1E_1} = \frac{SA^3}{S_1A_1{}^3}.$$

IV. Korrapärased hulktahukad.

Hulktahukat nimetatakse **korrapäraseks,** kui kõik tema tahud on võrdsed korrapärased hulknurgad ja kõik mitmetahulised nurgad on kongruentsed (säärane on näiteks kuup). Sellest definitsioonist järeldub, et korrapärastel hulktahukatel on võrdsed kõik tasanurgad, kõik kahetahulised nurgad ja kõik servad.

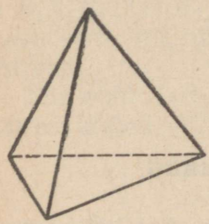
97. Korrapäraste hulktahukate loetelu. Peame silmas, et mitmetahulise nurga väikseim tahkude arv on kolm ja et kumera mitmetahulise nurga tasanurkade summa on väiksem kui 2π ehk 360° (§ 51). Korrapärase kolmnurga iga nurk on 60°. Kui võtame 60° liidetavana 3, 4 ja 5 korda, siis saame summad, mis on väiksemad kui 360°; kui aga võtame 60° liidetavana 6 või rohkem korda, siis saame summa, mis on 360° või suurem kui 360°. Seepärast võib võrdsetest tasanurkadest, mis on võrdsed korrapärase kolmnurga nurkadega, moodustada ainult kolme liiki mitmetahulisi nurki: kolmetahulisi, neljatahulisi ja viietahulisi. Järelikult, kui korrapärase hulktahuka tahkudeks on korrapärased kolmnurgad, siis hulktahuka tipust võib lähtuda kas 3 või 4 või 5 serva. Sellele vastavalt on kolm liiki kolmnurksete tahkudega korrapäraseid kehasid.

1) Korrapärane nelitahukas ehk korrapärane **tetraeeder,** mille pind koosneb neljast korrapärasest kolmnurgast (joon. 107). Tal on 4 tahku, 4 tippu ja 6 serva.

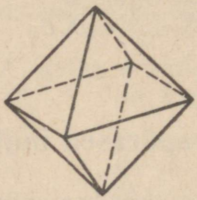
2) Korrapärane kaheksatahukas ehk korrapärane **oktaeeder,** mille pind koosneb kaheksast korrapärasest kolmnurgast (joon. 108). Tal on 8 tahku, 6 tippu ja 12 serva.

3) Korrapärane kakskümmendtahukas ehk korrapärane **ikosaeeder,** mille moodustavad kakskümmend korrapärast kolmnurka (joon. 109). Tal on 20 tahku, 12 tippu ja 30 serva.

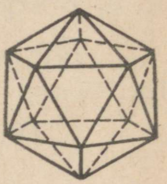
Ruudu nurk on 90° ja korrapärase viisnurga nurk on 108°; võttes neid nurki liidetavana 3 korda, saame



Joon. 107.



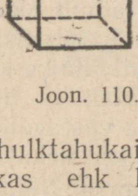
Joon. 108.



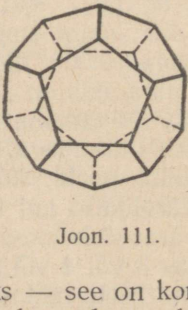
Joon. 109.

360°-st väiksemad summad, võttes aga 4 või enam korda, saame summas 360° või rohkem. Seepärast võib säärastest tasanurkadest, mis on võrdsed ruudu või korrapärase viisnurga nurkadega, moodustada ainult kolmetahulisi nurki.

Ja seepärast, kui hulktahuka tahkudeks on ruudud, siis igast tipust võib lähtuda ainult 3 serva. Seda liiki korra-



Joon. 110.



Joon. 111.

päraseid hulktahukaid on ainult üks — see on korrapärane kuustahukas ehk korrapärane **heksaeeder** ehk kuup (joon. 110), tal on 6 tahku, 8 tippu ja 12 serva.

Kui korrapärase hulktahuka tahkudeks on korrapärased viisnurgad, siis igast tipust võib lähtuda ainult 3 serva.

Seda liiki korrapäraseid hulktahukaid on ainult üks — korrapärane kaksteisttahukas ehk korrapärane **dodekaeeder.** Tal on 12 tahku, 20 tippu ja 30 serva (joon. 111).

Korrapärase kuusnurga nurk on 120°; seega säärastest nurkadest ei saa moodustada isegi kolmetahulist nurka. Kui korrapärase hulknurga külgede arv on suurem kuuest, siis tema nurkadest ei saa ammugi moodustada mingit kumerat mitmetahulist nurka.

Siit järeldub, et korrapärase hulktahuka tahkudeks võivad olla ainult korrapärased kolmnurgad, ruudud ja korrapärased viisnurgad.

Seega on võimalikud ainult viis liiki korrapäraseid hulktahukaid.

98. Korrapäraste hulktahukate konstruktsioon. Eespool toodud arutlused korrapäraste hulktahukate võimalikkude liikide kohta näitavad, et korrapäraseid hulktahukaid ei või olla rohkem kui viis liiki.

Kuid sellest ei saa järeldada, et kõik need viis liiki korrapäraseid hulktahukaid ka tõeliselt on olemas, s. o. et tasapindade asetamiste abil ruumis võib teostada kõige viie liigi korrapäraste hulktahukate konstruktsioone. Et veenduda kõikide korrapäraste hulktahukate olemasolus, selleks piisab, kui näitame iga keha ehitamise viisi. Kuubi ehitamise viis on eriti lihtne. Võtame vabalt tasapinna α ja sellel mingi ruudu; läbi selle külgede paneme risttasapinnad tasapinnale α. Sääraseid tasapindu on neli. Edasi võtame tasapinnaga α paralleelse tasapinna β, mis asetseb viimasest ruudu külje pikkusega võrdsel kaugusel.

Need kuus tasapinda moodustavad kuubi tahud; kaksteist sirget, mida mööda lõikuvad lõikuvate tasapindade paarid, on kuubi servadeks ja kaheksa punkti, milles lõikuvad lõikuvate tasapindade kolmikud, on kuubi tippudeks. Selles on kerge veenduda, vaadeldes vahetult tekkinud punktide, sirgete ja tasapindade kogu.

Kui oskame ehitada kuubi, siis on kerge leida ka kõikide teiste korrapäraste hulktahukate ehitamise viise.

Korrapärase tetraeedri konstruktsioon.

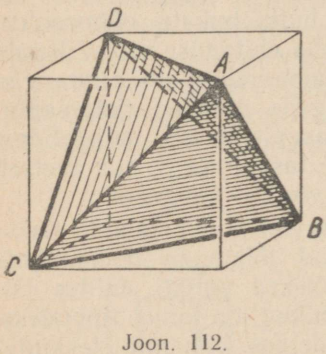
Olgu antud kuup (joon. 112). Võtame mingi tema tipu, näiteks tipu A. Selles lõikuvad kuubi kolm ruudukujulist tahku. Võtame igal ruudul tipu A vastastipu. Olgu need kuubi tipud B, C ja D. Punktid A, B, C ja D on korrapärase tetraeedri tippudeks. Tõepoolest, lõikudest AB, BC,

CD, AD, BD ja AC on igaüks ilmselt kuubi ühe tahu diagonaaliks. Ja seepärast kõik need lõigud on võrdsed. Siit järeldub, et kolmnurkses püramiidis, mille tipp on A ja põhi on BCD, on kõik tahud korrapärased kolmnurgad, seega see püramiid on korrapärane tetraeeder. See tetraeeder on kujundatud antud kuupi.

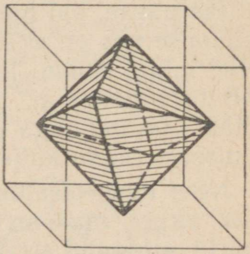
On kasulik tähele panna, et kuubi ülejäänud neli tippu on teise samasse kuupi kujundatud korrapärase tetraeedri tippudeks, mis on kongruentne esimesega.

Oktaeedri konstruktsioon.

Kui antud kuubil ehitada kõikide tahkude keskpunktid, siis sel teel saadud kuus punkti on korrapärase oktaeedri tippudeks. Selles on kerge veenduda, vaadeldes joonist 113.



Joon. 112.



Joon. 113.

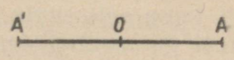
Dodekaeedri ja ikosaeedri konstruktsioon.

Kui läbi kuubi iga serva võtta tasapind, millel kuubi pinnaga ei ole teisi ühiseid punkte peale selle serva punktide, siis 12 saadud tasapinda on mingi 12-tahuka tahkudeks. Selle hulktahuka lähem uurimine näitab, et tasapindade kalded kuubi tahkude suhtes võib nii valida, et tekib korrapärane dodekaeeder.

Lõpuks, kui oskame ehitada dodekaeedrit, siis ikosaeedri ehitamine ei tee raskusi: dodekaeedri tahkude keskpunktid on ikosaeedri tippudeks.

V. Ruumiliste kujundite sümmeetria.

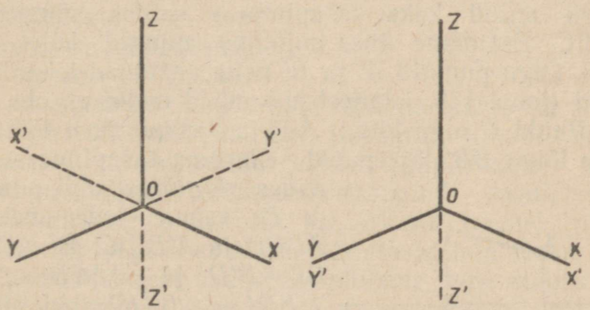
99. Tsentraalne sümmeetria. Kahte kujundit nimetatakse ruumi mingi punkti O suhtes sümmeetrilisteks, kui ühe kujundi igale punktile A vastab teise kujundi punkt A', mis asetseb sirgel OA teisel pool punkti O samal kaugusel sellest punktist nagu punkt A (joon. 114). Punkti O nime-



Joon. 114.

tatakse kujundite sümmeetriakeskpunktiks. Sääraste sümmeetriliste kujundite näidet ruumis me juba nägime (§ 53), kui pikendasime mitmetahulise nurga servi üle tema tipu ning saime antud mitmetahulise nurgaga sümmeetrilise mitmetahulise nurga.

Sümmeetriliste kujundite vastavad lõigud ja vastavad nurgad on võrdsed. Sellele vaatamata ei saa nimetada neid kujundeid kongruentseteks: neid ei saa paigutada teineteise sisse seetõttu, et ühe kujundi elementide järje-



Joon. 115.

kord on erinev teise kujundi elementide järjekorrast, nagu nägime sümmeetriliste mitmetahuliste nurkade näites.

Erijuhtumitel sümmeetrilised kujundid võivad ka ühtida, kuid seejuures ei ühti nende vastavad elemendid. Näiteks võtame kolmetahulise täisnurga (joon. 115) tipuga O ja servadega OX, OY, OZ.

Ehitame temale sümmeetrilise nurga $OX'Y'Z'$. Nurga $OXYZ$ võib paigutada nurga $OX'Y'Z'$ sisse nii, et serv OX ühtib servaga OY' ning serv OY ühtib servaga OX'. Kui aga paigutada ühte vastavad servad: OX ja OX' ning OY ja OY', siis servad OZ ja OZ' lähevad teineteisele vastassuundades.

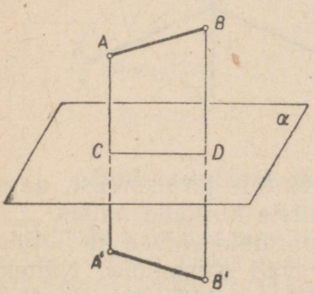
Kui sümmeetrilised kujundid moodustavad teineteisega koos ühe geomeetrilise keha, siis öeldakse, et sellel geomeetrilisel kehal on sümmeetriakeskpunkt. Seega, kui antud kehal on sümmeetriakeskpunkt, siis igale selle keha punktile vastab mingi teine sellesama keha sümmeetriline punkt. Meile tuttavatest geomeetrilistest kehadest on sümmeetriakeskpunkt näiteks: 1) rööptahukal; 2) prismal, mille põhjaks on paarisarvulise külgede arvuga korrapärane hulknurk.

Korrapärasel tetraeedril ei ole sümmeetriakeskpunkti.

100. Sümmeetria tasapinna suhtes. Kahte ruumilist kujundit nimetatakse sümmeetrilisteks tasapinna α suhtes, kui ühe kujundi igale punktile A vastab teise kujundi punkt A', kusjuures lõik AA' on risti tasapinnaga α ja poolitub lõikumisel selle tasapinnaga.

Teoreem. ***Kahe sümmeetrilise kujundi iga paar vastavaid lõike on võrdsed.***

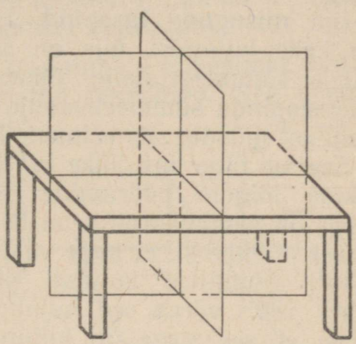
Olgu antud kaks tasapinna α suhtes sümmeetrilist kujundit. Eraldame ühes kujundis mingid kaks punkti A ja B. Olgu punktid A' ja B' neile vastavad teise kujundi punktid (joon. 116, joonisel kujundeid endid ei ole näidatud). Punkt C olgu lõigu AA' ja tasapinna α lõikepunkt, D olgu lõigu BB' lõikepunkt sellesama tasapinnaga. Ühendades sirglõigu abil punktid C ja D, saame kaks nelinurka, $ABCD$ ja $A'B'DC$. Et $AC=A'C$, $BD=B'D$ ja $\angle ACD=\angle A'CD$, $\angle BDC=\angle B'DC$ kui täisnurgad, siis need nelinurgad on kongruentsed (milles veendume kergesti nende paigutamise teel teineteisele). Järelikult $AB=$ $=A'B'$. Sellest teoreemist järeldub otseselt, et tasapinna suhtes sümmeetriliste kujundite vastavad tasanurgad ja vastavad kahetahulised nurgad on võrdsed. Sellele vaatamata neid kujundeid ei saa teineteise sisse paigutada nii, et nende vastavad osad ühtiksid,



Joon. 116.

sest ühe kujundi osade järjestus on vastupidine teise kujundi osade järjestusega (seda tõestatakse hiljem § 102). Tasapinna suhtes sümmeetriliste kujundite lihtsaimaks näiteks on mistahes ese ja tema peegeldus tasapinnalises peeglis: iga kujund on peegli tasapinna suhtes sümmeetriline oma peegeldusega.

Kui mingit geomeetrilist keha võib tükeldada kaheks osaks, mis on sümmeetrilised mingi tasapinna suhtes, siis seda tasapinda nimetatakse antud keha sümmeetriatasapinnaks.



Joon. 117.

Geomeetrilisi kehi, milledel on sümmeetriatasapind, esineb väga palju looduses ja igapäevases elus. Inimese ja looma kehal on sümmeetriatasapind, mis jaotab keha paremaks ja vasakuks pooleks.

Sellest näitest nähtub eriti selgesti, et sümmeetrilisi kujundeid ei saa teineteise sisse paigutada. Nii on parema ja vasaku käe labad sümmeetrilised, kuid ühtima neid viia ei saa, mis nähtub sellestki, et üks ja sama kinnas ei sobi nii paremale kui vasakule käele. Igapäevastest tarbeasjadest on paljudel sümmeetriatasapind: toolil, söögilaual, raamatukapil, diivanil jm. Mõnel esemel, näiteks söögilaual, on isegi kaks sümmeetriatasapinda (joon. 117).

Sümmeetrilist eset vaadeldes püüame tema suhtes harilikult võtta niisugust asendit, et meie keha või vähemalt meie pea sümmeetriatasapind ühtiks selle eseme sümmeetriatasapinnaga. Sel juhul on eseme kuju sümmeetrilisus eriti märgatav.

101. Teljeline sümmeetria. Teist järku sümmeetriatelg. Kahte kujundit nimetatakse sümmeetrilisteks telje *l* suhtes, kui esimese kujundi igale punktile *A* vastab teise kujundi punkt *A′* nii, et lõik *AA′* on risti teljega *l*, lõikub temaga ja lõikepunktis poolitub.

Telge *l* ennast nimetatakse teist järku sümmeetriateljeks.

Sellest definitsioonist järeldub otseselt, et kui kahte mingi sirge suhtes sümmeetrilist keha lõigata selle sirge risttasapinnaga, siis tekib kaks tasapinnalist kujundit, mis on sümmeetrilised sirge ja tasapinna lõikepunkti suhtes. Edasi on siit kerge järeldada, et kahte telje suhtes sümmeetrilist keha on võimalik viia teineteisega ühtima, pöörates ühte neist sümmeetriatelje ümber 180° võrra. Kujutleme kõiki võimalikke sümmeetriateljega ristuvaid tasapindu.

Iga niisugune tasapind, lõigates kumbagi keha, sisaldab kaks kujundit, mis on sümmeetrilised tasapinna ja kehade sümmeetriatelje lõikepunkti suhtes. Kui pöörata lõiketasapinda sümmeetriatelje ümber 180°, libistades teda iseennast mööda, siis esimene kujund ühtib teisega.

See on õige iga lõike ja tasapinna kohta. Kuid keha kõikide lõigete pööramine 180° võrra sümmeetriatelje ümber on samaväärne keha enda pööramisega 180° võrra. Sellest järeldubki, et meie väide on õige.

Kui ruumilise kujundi pööramisel mingi sirgjoone ümber 180° võrra see kujund ühtib iseenesega, siis öeldakse, et see sirge on kujundi teist järku sümmeetriateljeks.

Nimetus «teist järku sümmeetriatelg» tuleneb sellest, et täispöörde jooksul selle telje ümber keha satub kaks korda esialgse asendiga ühtivasse asendisse (arvestades ka esialgset asendit). Geomeetriliste kehade näideteks, milledel on teist järku sümmeetriatelg, võivad olla:

1) korrapärane püramiid, mille külgtahkude arv on paarisarv; tema sümmeetriateljeks on tema kõrgus;

2) risttahukas; tal on kolm sümmeetriatelge: nendeks on vastastahkude keskpunkte läbivad sirged;

3) korrapärane prisma, mille külgtahkude arv on paarisarv. Tema sümmeetriateljeks on iga sirge, mis läbib vastastahkude (kas külgtahkude või põhitahkude) keskpunkte. Kui prisma külgtahkude arv on $2k$, siis sümmeetriatelgede arv on $k+1$. Peale selle on niisuguse prisma sümmeetriateljeks iga sirge, mis läbib tema teineteise vastas asetsevate külgservade keskpunkte. Sääraste sümmeetriatelgede arv on k.

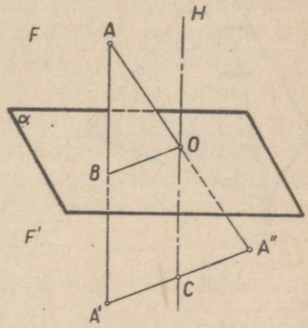
Seega on korrapärasel $2k$-nurksel prismal $2k+1$ sümmeetriatelge.

102. Seos mitmesuguste ruumilise sümmeetria liikide vahel. Eri liiki sümmeetriate vahel ruumis — teljelise, tasapinnalise ja tsentraalse sümmeetria vahel — kehtib seos, mida väljendab järgmine teoreem.

Teoreem. ***Kui kujund F on sümmeetriline kujundiga F' tasapinna α suhtes ja ühtlasi sümmeetriline kujundiga F'' tasapinnal α asetseva punkti O suhtes, siis kujundid F' ja F'' on sümmeetrilised telje suhtes, mis läbib punkti O ja on risti tasapinnaga α.***

Võtame kujundi F mingi punkti A (joon. 118). Sellele vastab kujundi F' punkt A' ja kujundi F'' punkt A'' (kujundeid F, F' ja F'' ise ei ole joonisel kujutatud).

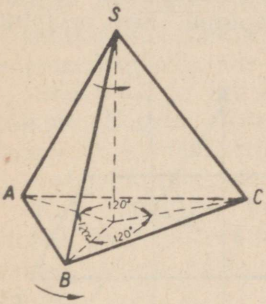
Olgu B sirglõigu AA' ja tasapinna α lõikepunkt. Võtame punktidega A, A' ja O määratud tasapinna. See tasapind on risti tasapinnaga α, sest ta läbib sirget AA', mis on risti tasapinnaga α. Tõmbame tasapinnal $AA'O$ sirgele OB ristsirge OH. Sirge OH on ka risti tasapinnaga α. Olgu punkt C sirgete $A'A''$ ja OH lõikepunkt.



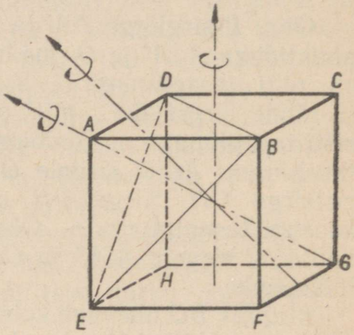
Joon. 118.

Sirglõik BO ühendab kolmnurgas $AA'A''$ külgede AA' ja AA'' keskpunkte, seega $BO \parallel A'A''$, kuid $BO \perp OH$, tähendab $A'A'' \perp OH$. Edasi, et punkt O on külje AA'' keskpunkt ja $CO \parallel AA'$, siis $A'C = A''C$. Siit järeldame, et punktid A' ja A'' on sümmeetrilised telje OH suhtes. Seesama on kehtiv kujundi kõikide teiste punktide kohta. Seega meie teoreem on tõestatud. Sellest teoreemist järeldub otseselt, et kaks tasapinna suhtes sümmeetrilist kujundit ei saa ühtida nii, et nende vastavad osad ühtiksid. Tõepoolest, kujund F' ühtib kujundiga F'' tema pööramisel 180° võrra telje OH ümber. Kuid kujundid F'' ja F ei saa ühtida, sest nad on sümmeetrilised punkti suhtes; järelikult ei saa ühtida ka kujundid F ja F'.

103. Kõrgemat järku sümmeetriateljed. Kujund, millel on sümmeetriatelg, ühtib iseenesega pärast sümmeetriatelje ümber pööramist 180° võrra. Kuid on võimalikud juhud, mil kujund ühtib oma esialgse asendiga pärast pööramist mingi telje ümber vähem kui 180° võrra. Nii et kui keha teeb selle telje ümber täispöörde, siis ühtib ta täispöörde vältel oma esialgse asendiga mitu korda. Niisugust telge nimetatakse **kõrgemat järku sümmeetriateljeks**, kusjuures täispöörde vältel keha esialgse asendiga ühtivate asendite arvu nimetatakse sümmeetriatelje järguks. See telg ei tarvitse ühtida teist järku sümmeetriateljega. Nii ei ole korrapärasel kolmnurksel püramiidil teist järku sümmeetriatelge, kuid kõrgus on tema kolmandat järku sümmeetriateljeks. Tõepoolest, pärast selle püra-



Joon. 119.



Joon. 120.

miidi pööramist tema kõrguse ümber 120° võrra ta ühtib iseenesega (joon. 119). Püramiidi pööramisel kõrguse ümber võtab ta kolm asendit, mis ühtivad lähteasendiga, lähteasend kaasa arvatud. Kergesti nähtub, et iga paarisjärku sümmeetriatelg on ühtaegu ka teist järku sümmeetriateljeks.

Kõrgemat järku sümmeetriatelgede näited:

1) korrapärasel n-nurksel püramiidil on n-ndat järku sümmeetriatelg; selleks teljeks on püramiidi kõrgus;

2) korrapärasel n-nurksel prismal on n-ndat järku sümmeetriatelg; selleks teljeks on prisma põhjade keskpunkte läbiv sirge.

104. Kuubi sümmeetria. Nagu iga rööptahuka, nii ka kuubi diagonaalide lõikepunkt on tema sümmeetria keskpunktiks.

Kuubil on üheksa sümmeetriatasapinda: kuus diagonaaltasapinda ja kolm tasapinda, mis läbivad iga nelja paralleelse serva keskpunkte.

Kuubil on üheksa teist järku sümmeetriatelge: kuus sirget, mis ühendavad tema vastasservade keskpunkte, ja kolm sirget, mis ühendavad vastastahkude keskpunkte (joon. 120). Viimased sirged on neljandat järku sümmeetriatelgedeks. Kuubil on peale selle neli kolmandat järku sümmeetriatelge, mis on tema diagonaalideks. Tõepoolest, kuubi diagonaal AG (joon. 120) on ilmselt ühteviisi kaldu servade AB, AD ja AE suhtes ja need servad on ühteviisi kaldu üksteise suhtes. Kui ühendada punktid B, D ja E, siis saame korrapärase kolmnurkse püramiidi, mille kõrgus asub kuubi diagonaalil. Kui püramiidi pööramisel kõrguse ümber püramiid ühtib iseenesega, siis ka kogu kuup ühtib oma lähteasendiga. Muid sümmeetriatelgi, nagu kerge on veenduda, kuubil ei ole.

Vaatame, mitmel eri viisil kuup võib ühtida iseenesega. Pööramine hariliku sümmeetriatelje ümber annab ühe lähteasendist erineva kuubi asendi, milles kuup ühtib iseenesega. Pööramine kolmandat järku sümmeetriatelje ümber annab kaks niisugust asendit ning pööramine neljandat järku sümmeetriatelje ümber — kolm niisugust asendit. Et kuubil on kuus teist järku sümmeetriatelge (need on harilikud sümmeetriateljed), neli kolmandat järku ning kolm neljandat järku sümmeetriatelge, siis on

$$6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 23$$

lähteasendist erinevat kuubi asendit, milles ta ühtib iseenesega.

On kerge otseselt veenduda, et kõik need asendid erinevad üksteisest ja ka kuubi lähteasendist. Koos lähteasendiga moodustavad nad 24 võimalikku kuubi iseenesega ühtimise juhtu.

Harjutusi.

1. Antud kuubi serva pikkus on a. Avaldada kaks korda suurema ruumalaga kuubi serva pikkus.

Märkus. See vanast ajast tuntud **kuubi kahekordistamise ülesanne** lahendub kergesti arvutamise teel (nimelt: $x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2} = a \cdot 1{,}25992\ldots$), kuid konstruktsiooni teel (sirkli ja joonlaua abil) teda lahendada ei saa, sest otsitav avaldis sisaldab kuupjuurt arvust, mis ei ole ratsionaalarvu kuup.

2. Arvutada niisuguse püstprisma pindala ja ruumala, mille põhjaks on korrapärane kõõlkolmnurk ringis raadiusega $r = 2$ m ja

mille kõrgus võrdub sama ringi korrapärase puutujakuusnurga küljega.

3. Arvutada korrapärase kaheksanurkse prisma pindala ja ruumala, kui prisma kõrgus $h = 6$ dm ja põhiserv $a = 8$ cm.

4. Arvutada korrapärase kuusnurkse püramiidi külgpindala ja ruumala, kui püramiidi kõrgus on 1 m ja apoteem moodustab kõrgusega 30°-se nurga.

5. Avaldada kolmnurkse püramiidi ruumala, kui püramiidi iga külgserv on l ja põhiservad on a, b ja c.

6. Antud on kolmetahuline nurk $SABC$, mille kõik kolm tasanurka on täisnurgad. Tema servadele on paigutatud pikkused: $SA = a$, $SB = b$ ja $SC = c$. Läbi punktide A, B ja C on pandud tasapind. Avaldada püramiidi $SABC$ ruumala.

7. Püramiidi kõrgus on h ja põhi on korrapärane kuusnurk küljega a. Missugusel kaugusel x, püramiidi tipust arvates, tuleb püramiidi lõigata põhjaga paralleelse tasapinnaga, et tekkinud tüvipüramiidi ruumala oleks V?

8. Korrapärase tetraeedri serv on a. Avaldada ruumala.

9. Korrapärase oktaeedri serv on a. Avaldada ruumala.

10. Tüvipüramiidi ruumala $V = 1465$ cm^3, tema põhjadeks on korrapärased kuusnurgad servadega $a = 23$ cm ja $b = 17$ cm. Arvutada selle tüvipüramiidi kõrgus.

11. Tüvipüramiidi ruumala $V = 10{,}5$ m^3, kõrgus $h = \sqrt{3}$ m ja tema alumiseks põhjaks oleva korrapärase kuusnurga külg $a = 2$ m. Arvutada ülemiseks põhjaks oleva korrapärase kuusnurga külje pikkus.

12. Kui kaugel püramiidi $SABC$ tipust S tuleb võtta põhjaga paralleelne tasapind, et nende osade, milledeks see tasapind jaotab püramiidi, ruumalade suhe oleks m?

13. Püramiid kõrgusega h on põhjaga paralleelsete tasapindadega jaotatud kolmeks osaks, kusjuures nende osade ruumalad suhtuvad nagu $m:n:p$. Avaldada nende tasapindade kaugused püramiidi tipust.

14. Kahe sarnase hulktahuka ruumalade summa on V ja vastavate servade suhe on $m:n$. Avaldada nende ruumalad.

15. Lõigata tüvipüramiid põhjadega S_1 ja S_2 paralleelse tasapinnaga kaheks niisuguseks osaks, mille ruumalad suhtuvad nagu $m:n$.

16. Leida sümmeetriakeskpunkt, -teljed ja -tasapinnad kujundile, mis koosneb tasapinnast ja teda kaldu lõikavast sirgest.

Vastus: sümmeetriakeskpunktiks on sirge ja tasapinna lõikepunkt; sümmeetriatasapinnaks osutub antud tasapinnaga ristuv ja antud sirget läbiv tasapind; sümmeetriateljeks on sirge, mis asetseb antud tasapinnas ja on risti antud sirgega.

17. Leida sümmeetriakeskpunkt, -teljed ja -tasapinnad kujundile, mis koosneb kahest lõikuvast sirgest.

Vastus: kujundil on kaks sümmeetriatasapinda ja kolm sümmeetriatelge (näidata, millised).

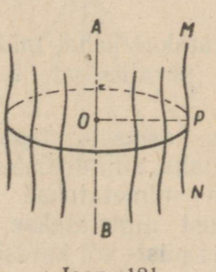
NELJAS PEATÜKK.

ÜMARKEHAD.

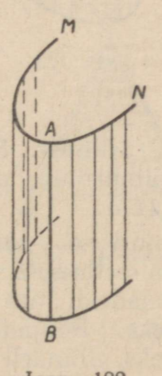
I. Silinder ja koonus.

105. Pöördpind. Pöördpinnaks nimetatakse pinda, mis tekib mingi **moodustajaks** nimetatava joone (MN, joon. 121) pöörlemisel liikumatu sirge (AB) ümber, mida nimetatakse **teljeks;** seejuures eeldatakse, et moodustaja (MN) on pöörlemisel muutumatult seotud teljega (AB).

Võtame moodustajal mingi punkti P ja ehitame sellest teljele ristlõigu PO. On ilmne, et pöörlemisel ei muutu ei



Joon. 121.



Joon. 122.

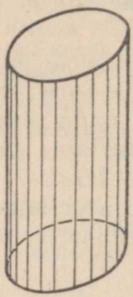
selle ristlõigu pikkus, ei nurga AOP suurus ega ka punkti O asend. Seepärast moodustaja iga punkt joonestab ringjoone, mille tasapind on risti teljega AB ja mille keskpunktiks on selle tasapinna ja telje lõikepunkt.

Siit järeldub:

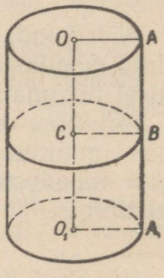
teljega ristuva tasapinna ja pöördpinna lõikejoon on ringjoon.

Iga lõiketasapinda, mis läbib pöördpinna telge, nimetatakse **meridiaantasapinnaks** ja tema lõikejoont pöördpinnaga nimetatakse pöördpinna m e r i d i a a n i k s. Kõik meridiaanid on kongruentsed, sest pöörlemisel igaüks neist läbib selle asendi, milles varem oli mõni teine meridiaan.

106. Silindriline pind. Silindriliseks pinnaks nimetatakse pinda, mille moodustab sirge (AB, joon. 122) liikudes ruumis nii, et ta jääb paralleelseks antud sirgega ja lõikab seejuures antud joont (MN). Sirget AB nimetatakse **moodustajaks** ja joont MN **juhtjooneks.**



Joon. 123.



Joon. 124.

107. Silinder. Silindriks nimetatakse keha, mida piiravad silindriline pind ja kaks paralleelset tasapinda (joon. 123).

Silindrilise pinna osa, mis asetseb tasapindade vahel, nimetatakse silindri **külgpinnaks**, silindrilise pinnaga tasapindadest ära lõigatud osi nimetatakse silindri **põhjadeks.** Põhjadevahelist kaugust nimetatakse silindri **kõrguseks.** Silindrit nimetatakse kas **püst-** või **kaldsilindriks** vastavalt sellele, kas moodustajad on põhjadega risti või kaldu.

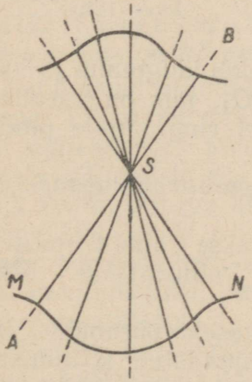
Püstsilindrit (joon. 124) nimetatakse **ringsilindriks, kui** tema põhjad on ringid. Säärast silindrit võib vaadelda kui keha, mis tekib ristküliku OAA_1O_1 pöörlemisel külje OO_1 kui telje ümber; külg AA_1 kujundab seejuures külgpinna ning küljed OA ja O_1A_1 — põhiringid. Iga sirglõik BC, mis on paralleelne lõiguga OA, kujundab samuti ringi, mille pind on risti teljega. Siit järeldub:

püstringsilindri lõige põhjadega paralleelse tasapinnaga on ring.

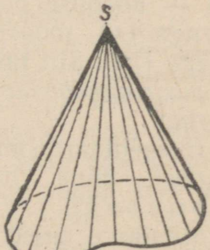
Elementaargeomeetrias käsitletakse ainult püstringsilindrit; lühiduse pärast nimetatakse teda lihtsalt s i l i n d r i k s.

Mõnikord tuleb käsitleda niisuguseid prismasid, mille põhjad on silindri põhjadesse kujundatud kõõlhulknurgad või silindri põhjade ümber kujundatud puutujahulknurgad, aga kõrgused on võrdsed silindri kõrgusega; sääraseid prismasid nimetatakse silindri s i s s e või silindri ü m b e r kujundatud prismadeks.

108. Kooniline pind. Kooniliseks pinnaks nimetatakse pinda, mis tekib sirge (*AB*, joon. 125) liikumisel ruumis nii, et see sirge läbib liikumatut punkti (*S*) ja lõikub antud joonega (*MN*). Sirget *AB* nimetatakse **moodustajaks,** joont *MN* — **juhtjooneks** ja punkti *S* — **koonilise pinna tipuks.**



Joon. 125.

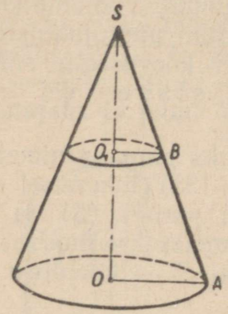


Joon. 126.

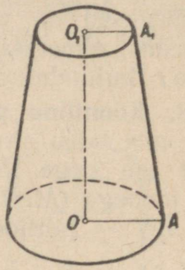
109. Koonus. Koonuseks nimetatakse keha, mida piiravad ühel pool tippu asetseva koonilise pinna osa ja tasapind, mis lõikab kõiki moodustajaid ühel ja samal pool tippu (joon. 126). Selle tasapinnaga piiratud koonilise pinna osa nimetatakse koonuse **külgpinnaks** ja koonilise pinnaga tasapinnast äralõigatud osa nimetatakse koonuse **põhjaks.**

Koonuse tipust põhitasapinnale tõmmatud ristlõiku nimetatakse koonuse **kõrguseks.**

Koonust nimetatakse **püstringkoonuseks**, kui tema põhi on ring ja kõrguse aluspunkt on põhja keskpunktiks (joon. 127). Säärast koonust võib vaadelda kui keha, mis tekib täisnurkse kolmnurga SOA pöörlemisel kaateti OS kui telje ümber.



Joon. 127.



Joon. 128.

Seejuures hüpotenuus SA kujundab külgpinna ja kaatet OA — koonuse põhja. Iga lõik BO_1, mis on paralleelne lõiguga OA, moodustab pöörlemisel ringi, mille pind on teljega risti. Siit järeldub:

püstringkoonuse lõige põhjaga paralleelse tasapinnaga on ring.

Elementaargeomeetrias käsitletakse ainult püstringkoonust, mida lühiduse pärast nimetatakse lihtsalt k o o n u s e k s.

Mõnikord tuleb käsitleda niisuguseid püramiide, mille põhjadeks on koonuse põhjasse kujundatud kõõlhulknurk või koonuse põhja ümber kujundatud puutujahulknurk ja mille tipp ühtib koonuse tipuga. Sääraseid püramiide nimetatakse koonuse s i s s e või koonuse ü m b e r kujundatud püramiidideks.

110. Tüvikoonus. Tüvikoonuseks nimetatakse koonuse osa, mis asetseb põhja ja p õ h j a g a p a r a l l e e l s e lõiketasapinna vahel.

Ringe, mida mööda paralleelsed tasapinnad lõikavad koonust, nimetatakse tüvikoonuse **põhjadeks.**

Tüvikoonust võib vaadelda kui keha (joon. 128), mis tekib täisnurkse trapetsi OAA_1O_1 pöörlemisel trapetsi alustega ristuva haara OO_1 ümber.

Silindri ja koonuse pindala.

111. Definitsioonid. Silindri ja koonuse külgpinnad kuuluvad **kõverate** pindade hulka, s. o. niisuguste pindade hulka, mille ükski osa ei ühti tasapinnaga. Seepärast peame eriti defineerima, mida mõista silindri või koonuse külgpindala all, kui neid pindalasid võrreldakse t a s a s e pindalaühikuga. Edaspidi toetume järgmistele d e f i n i t s i o o n i d e l e:

1) *Silindri külgpindalaks loetakse silindri sisse kujundatud korrapärase prisma külgpindala piirväärtust selle prisma põhiservade arvu piiramatul suurenemisel* (järelikult iga külgtahu pindala kahanemisel).

2) *Koonuse* (või tüvikoonuse) *külgpindalaks loetakse koonuse sisse kujundatud korrapärase püramiidi* (või tüvipüramiidi) *külgpindala piirväärtust põhiservade arvu piiramatul suurenemisel* (järelikult iga külgtahu pindala kahanemisel).

112. T e o r e e m. ***Silindri külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega.***

Kujundame silindrisse (joon. 129) mingi korrapärase prisma. Tähistame selle prisma põhja ümbermõõtu ja kõrgust väljendavaid arvusid tähtedega p ja h. Tema külgpindala väljendab siis korrutis $p \cdot h$. Kujutleme nüüd, et põhja kõõlhulknurga külgede arv piiramatult kasvab.

Siis ümbermõõt p läheneb piirväärtusele, mida loetakse silindri põhja ümbermõõdu pikkuseks C, kuna aga kõrgus h jääb muutumatuks; seega prisma külgpindala, mis alati võrdub korrutisega $p \cdot h$, läheneb piirväärtusele $C \cdot h$. Seda piirväärtust loetaksegi silindri külgpindalaks. Tähistades silindri külgpindala tähega S, võime kirjutada:

$$S = C \cdot h.$$

113. J ä r e l d u s e d. 1) Kui R tähendab silindri põhja raadiust, siis $C = 2\pi R$, seepärast silindri külgpindala väljendub valemiga

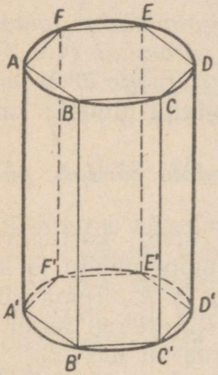
$$S = 2\pi R \cdot h.$$

2) Et saada silindri t ä i s p i n d a l a, tuleb külgpindalale lisada põhjade pindalade summa; seega, tähistades täispindala tähega T, saame:

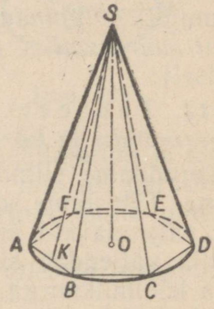
$$T = 2\pi Rh + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi R(h + R).$$

114. Teoreem. ***Koonuse külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja moodustaja poole korrutisega.***

Kujundame koonuse sisse (joon. 130) mingi korrapärase püramiidi ning tähistame selle püramiidi põhja ümbermõõdu ja külgtahu apoteemi tähtedega p ja l. Püramiidi külgpindala väljendub siis korrutisega $\frac{1}{2}p \cdot l$. Kujutleme nüüd, et põhja kõõlhulknurga külgede arv piiramatult kasvab; siis ümbermõõt p läheneb piirväärtusele, mida loetakse koonuse põhja ümbermõõdu pikkuseks C, kuna apoteemi l piirväärtuseks on koonuse moodustaja (sest kolmnurgast SAK järeldub, et $SA - SK < AK$); tähendab, kui



Joon. 129.



Joon. 130.

koonuse moodustaja tähistada tähega L, siis sissekujundatud püramiidi külgpindala, olles alati võrdne korrutisega $\frac{1}{2}p \cdot l$, läheneb piirväärtusele $\frac{1}{2}C \cdot L$. Seda piirväärtust loetaksegi koonuse külgpindalaks. Tähistades koonuse külgpindala tähega S, võime kirjutada:

$$S = \frac{1}{2}C \cdot L = C \cdot \frac{1}{2}L.$$

115. Järeldused. 1) Et $C = 2\pi R$, siis koonuse külgpindala väljendub valemiga:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot L = \pi RL.$$

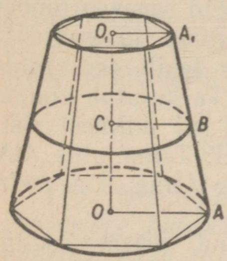
2) Koonuse täispindala saame, kui külgpindalaga liidame põhja pindala; seega, tähistades täispindala tähega T, saame:

$$T = \pi RL + \pi R^2 = \pi R\,(L + R).$$

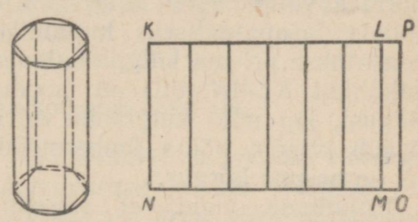
116. Teoreem. ***Tüvikoonuse külgpindala võrdub põhjade ümbermõõtude poolsumma ja moodustaja korrutisega.***

Kujundame tüvikoonuse sisse (joon. 131) mingi korrapärase tüvipüramiidi ning tähistame selle tüvipüramiidi põhjade ümbermõõdud ja külgtahu apoteemi tähtedega p, p_1 ja l. Siis sissekujundatud tüvipüramiidi külgpindala on $\frac{1}{2}(p + p_1)\,l$.

Sissekujundatud tüvipüramiidi külgtahkude arvu piiramatul kasvamisel ümbermõõdud p ja p_1 lähenevad piirväärtustele, mida loetakse tüvikoonuse põhjade ümbermõõtude pikkusteks C ja C_1, kuna apoteemi l piirväärtuseks on tüvikoonuse moodustaja L. Järelikult sissekujun-



Joon. 131.



Joon. 132.

datud tüvipüramiidi külgpindala läheneb piirväärtusele $\frac{1}{2}(C + C_1)L$. Seda arvu loetaksegi tüvikoonuse külgpindalaks. Tähistades tüvikoonuse külgpindala tähega S, saame:

$$S = \tfrac{1}{2}(C + C_1)L.$$

117. Järeldused. 1) Kui R ja r tähendavad alumise ja ülemise põhja raadiusi, siis tüvikoonuse külgpindala on:

$$S = \tfrac{1}{2}(2\pi R + 2\pi r)L = \pi(R + r)L.$$

2) Kui trapetsis OO_1A_1A (joon. 131), mille pöörlemisel tüvikoonus tekib, võtame kesklõigu BC ja tähistame tema pikkuse tähega k, siis saame:

$$BC = \tfrac{1}{2}(OA + O_1A_1)$$

ehk

$$k = \tfrac{1}{2}(R + r),$$

millest leiame, et

$$R + r = 2k.$$

Seega:

$$S = 2\pi k \cdot L,$$

s. o.

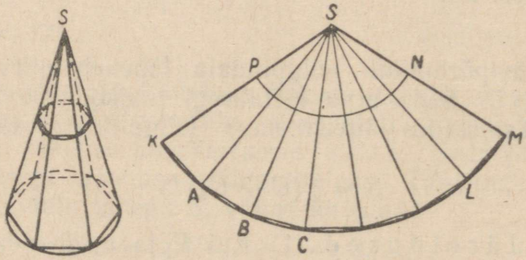
tüvikoonuse külgpindala võrdub kesklõike ümbermõõdu ja moodustaja korrutisega.

3) Tüvikoonuse täispindala T väljendub nii:

$$T = \pi(R^2 + r^2 + RL + rL).$$

118. Silindri ja koonuse pinnalaotus. Kujundame silindri sisse (joon. 132) mingi korrapärase prisma ja kujutleme seejärel, et tema külgpind on ühte külgserva mööda lahti lõigatud. On ilmne, et tahkusid servade ümber pöörates võime selle külgpinna käristamata ja voltideta laotada tasapinnaliseks kujundiks. Siis tekib see, mida nimetatakse prisma **külgpinnalaotuseks.** Ta kujutab endast ristkülikut $KLMN$, mis on moodustatud nii mitmest ristkülikust, kui mitu külgtahku on prismal. Tema alus MN võrdub prisma põhja ümbermõõduga ja tema kõrguseks KN on prisma kõrgus.

Kujutleme nüüd, et sissekujundatud prisma külgtahkude arv järjest suureneb; siis tema külgpinnalaotus



Joon. 133.

küll järjest pikeneb, kuid läheneb piir-ristkülikule $KPON$, mille alus on võrdne silindri põhja ümbermõõduga ja mille kõrguseks on silindri kõrgus. Seda ristkülikut nimetatakse silindri **külgpinnalaotuseks.**

Samal viisil kujutleme, et koonusesse on kujundatud mingi korrapärane püramiid (joon. 133). Meie võime **tema** külgpinna lahti lõigata ühte külgserva mööda ning seejärel tahkusid servade ümber pöörates saada külgpinna tasapinnaliseks laotuseks hulknurkse sektori SKL, mis on moodustatud nii mitmest võrdhaarsest kolmnurgast, kui mitu külgtahku on püramiidil. Lõigud SK, SA, SB, ... võrduvad püramiidi külgservaga (ehk koonuse moodustajaga) ning murdjoone $KAB \ldots L$ pikkus võrdub püramiidi põhja ümbermõõduga. Koonusesse kujundatud püramiidi külgtahkude arvu piiramatul suurenemisel tema pinnalaotus küll järjest suureneb, kuid läheneb piir-sektorile SKM, mille kaare KM pikkus võrdub koonuse põhja ümbermõõdu pikkusega ja raadius SK võrdub koonuse moodustajaga. Seda sektorit nimetatakse koonuse **külgpinnalaotuseks.**

Samal viisil võime saada tüvikoonuse külgpinnalaotuse $KMNP$ (joon. 133), mis kujutab endast rõnga osa. On kerge näha, et silindri ja koonuse külgpindala on võrdne vastava pinnalaotuse pindalaga.

Silindri ja koonuse ruumala.

119. Definitsioonid. 1) *Silindri ruumalaks loetakse silindrisse kujundatud korrapärase prisma ruumala piirväärtust selle prisma külgtahkude arvu piiramatul suurenemisel.*

2) *Koonuse* (või tüvikoonuse) *ruumalaks loetakse koonusesse* (või tüvikoonusesse) *kujundatud korrapärase püramiidi* (või tüvipüramiidi) *ruumala piirväärtust külgtahkude arvu piiramatul suurenemisel.*

120. Teoreemid. 1) ***Silindri ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.***

2) ***Koonuse ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse ühe kolmandiku korrutisega.***

Kujundame silindrisse mingi korrapärase prisma ja koonusesse mingi korrapärase püramiidi; tähistanud siis prisma või püramiidi põhja pindala tähega S_1, nende kõrguse — tähega h ja ruumala — tähega V_1, saame:

$$\text{prisma ruumala } V_1 = S_1 h;$$

$$\text{püramiidi ruumala } V_1 = \tfrac{1}{3} S_1 h.$$

Kujutleme nüüd, et nii prisma kui ka püramiidi külgtahkude arv piiramatult suureneb. Siis suuruse S_1 piirväärtuseks on silindri või koonuse põhja pindala S, nende kõrgus h jääb aga muutumatuks; tähendab korrutised S_1h ja $\frac{1}{3}S_1h$ lähenevad piirväärtustele Sh ja $\frac{1}{3}Sh$ ja seepärast silindri ja koonuse ruumalad on:

$$\text{silindri ruumala } V = Sh;$$

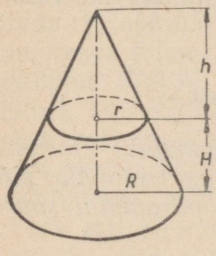
$$\text{koonuse ruumala } V = \tfrac{1}{3}Sh.$$

121. Järeldus. Kui tähistada silindri või koonuse raadiuse tähega R, siis $S = \pi R^2$; seepärast:

$$\text{silindri ruumala } V = \pi R^2 h;$$

$$\text{koonuse ruumala } V = \tfrac{1}{3}\pi R^2 h.$$

122. Teoreem. ***Tüvikoonuse ruumala võrdub kolme niisuguse koonuse ruumala summaga, millede kõrgused on võrdsed antud tüvikoonuse kõrgusega ja millede põhjadeks on: esimesel — tüvikoonuse alumine põhi, teisel — ülemine põhi, kolmanda koonuse põhja pindala võrdub aga ülemise ja alumise põhja pindalade geomeetrilise keskmisega.***



Joon. 134.

Seda teoreemi tõestame täiesti samal viisil, nagu tõestasime tüvipüramiidi ruumala teoreemi (§ 92). Paigutame tüvikoonuse ülemisele põhjale (joon. 134) niisuguse koonuse (kõrgusega h), mis täiendab antud tüvikoonuse täiskoonuseks. Siis võib tüvikoonuse ruumala V vaadelda nagu täiskoonuse ja täiendava koonuse ruumalade vahet. Seepärast:

$$V = \tfrac{1}{3}\pi R^2 (H + h) - \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \tfrac{1}{3}\pi [R^2 H + (R^2 - r^2) h].$$

Kolmnurkade sarnasusest leiame, et:

$$\frac{R}{r} = \frac{H + h}{h},$$

millest saame:

$$Rh = rH + rh; \ (R - r)h = rH; \ h = \frac{rH}{R - r}.$$

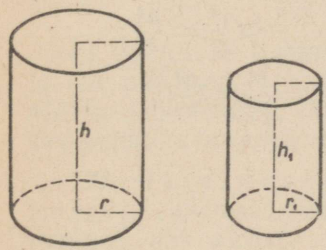
Seepärast:

$$V=\tfrac{1}{3}\pi[R^2H+(R+r)rH]=$$
$$=\tfrac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)=$$
$$=\tfrac{1}{3}\pi R^2H+\tfrac{1}{3}\pi RrH+\tfrac{1}{3}\pi r^2H.$$

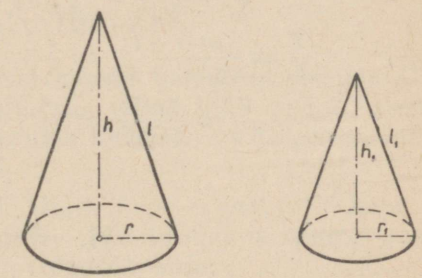
Et πR^2 väljendab alumise põhja pindala, πr^2 väljendab ülemise põhja pindala ja πRr ehk $\sqrt{\pi R^2\cdot\pi r^2}$ on nimetatud põhjade pindalade geomeetriline keskmine, siis saadud valem on täiesti kooskõlas teoreemiga.

Sarnased silindrid ja koonused.

123. Definitsioon. Kahte silindrit või kahte koonust nimetatakse **sarnasteks,** kui nad on tekkinud sarnaste ristkülikute või sarnaste täisnurksete kolmnurkade pöörlemisel vastavate külgede ümber.



Joon. 135.



Joon. 136.

Olgu (joon. 135 ja 136) h ja h_1 kahe sarnase silindri või kahe sarnase koonuse kõrgused, r ja r_1 — nende põhjade raadiused ning l ja l_1 — moodustajad; siis definitsiooni põhjal:

$$\frac{r}{r_1}=\frac{h}{h_1} \text{ ja } \frac{r}{r_1}=\frac{l}{l_1},$$

millest (võrdsete suhete omaduse põhjal) leiame, et

$$\frac{r+h}{r_1+h_1}=\frac{r}{r_1} \text{ ja } \frac{r+l}{r_1+l_1}=\frac{r}{r_1}.$$

Silmas pidades neid võrdeid, tõestame järgmise teoreemi.

124. Teoreem. ***Sarnaste silindrite või sarnaste koonuste külg- ning täispindalad suhtuvad nagu raadiuste või kõrguste ruudud; ruumalad suhtuvad aga nagu raadiuste või kõrguste kuubid.***

Olgu S, T ja V vastavalt ühe silindri või ühe koonuse külgpindala, täispindala ja ruumala; S_1, T_1 ja V_1 tähistagu teise sarnase silindri või teise sarnase koonuse vastavaid suurusi. Siis võime silindrite kohta kirjutada:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{2\pi rh}{2\pi r_1h_1}=\frac{rh}{r_1h_1}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{T}{T_1}=\frac{2\pi r(r+h)}{2\pi r_1(r_1+h_1)}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{r+h}{r_1+h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\pi r^2h}{\pi r_1^2h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^3}{r_1^3}=\frac{h^3}{h_1^3}$$

ja koonuste kohta:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{\pi rl}{\pi r_1l_1}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{l}{l_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{T}{T_1}=\frac{\pi r(r+l)}{\pi r_1(r_1+l_1)}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{r+l}{r_1+l_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\frac{1}{3}\pi r^2h}{\frac{1}{3}\pi r_1^2h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^3}{r_1^3}=\frac{h^3}{h_1^3}.$$

II. Kera.

Kera tasapinnaline lõige.

125. Definitsioon. Keha, mis tekib poolringi pöörlemisel diameetri ümber, nimetatakse **keraks,** seejuures poolringjoone poolt moodustatud pinda nimetatakse **kera pinnaks** ehk **sfääriks.** Võib öelda, et see pind on ühest ja samast punktist (mida nimetatakse kera **keskpunktiks)** võrdsetel kaugustel asetsevate punktide geomeetriliseks kohaks.

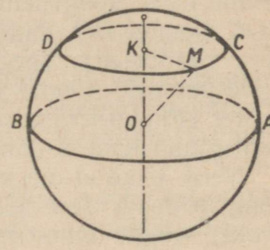
Keskpunkti mingi pinna punktiga ühendavat lõiku nimetatakse kera **raadiuseks** ja kahte pinna punkti ühendavat lõiku, mis läbib keskpunkti, nimetatakse kera **diameetriks.**

Ühe ja sama kera raadiused on kõik võrdsed; iga diameeter võrdub kahe raadiuse summaga.

Kaks võrdsete raadiustega kera on kongruentsed, sest teineteise sisse paigutamisel nad ühtivad.

126. T e o r e e m. ***Kera iga tasapinnaline lõige on ring.***

1) Oletame esiteks, et lõiketasapind AB (joon. 137) läbib kera keskpunkti O. Lõikejoone kõik punktid asetsevad kera pinnal ja on seepärast võrdsetel kaugustel punktist O, mis asetseb lõiketasapinnal; seega lõige on ring keskpunktiga punktis O.



Joon. 137.

2) Oletame nüüd, et lõiketasapind CD ei läbi keskpunkti. Ehitame kera keskpunktist lõiketasapinnale ristlõigu OK ning võtame kera ja tasapinna lõikejoonel mingi punkti M. Ühendades selle punktidega O ja K, saame täisnurkse kolmnurga MOK, millest leiame, et:

$$MK=\sqrt{OM^2-OK^2}. \qquad (1)$$

Et punkti M liikumisel mööda lõikejoont lõikude OM ja OK pikkused ei muutu, siis antud lõike puhul kaugus MK on jääv suurus; tähendab lõikejoon on ringjoon, mille keskpunktiks on punkt K.

127. J ä r e l d u s e d. Olgu R ja r vastavalt kera ja lõikeringi raadiused ning d — lõiketasapinna kaugus keskpunktist; siis võrdus (1) omandab kuju:

$$r=\sqrt{R^2-d^2}.$$

Sellest valemist järeldame:

1) *Lõike raadius on suurim juhul, kui* $d=0$, *s. o. siis, kui lõiketasapind läbib kera keskpunkti.* Sel juhul $r=R$. Saadud ringi nimetatakse sel juhul **suurringiks.**

2) *Lõike raadius on väikseim juhul, kui* $d=R$. Sel juhul $r=0$, s. o. lõige taandub punktiks.

3) *Kera keskpunktist võrdsetel kaugustel asetsevad lõiked on võrdsed.*

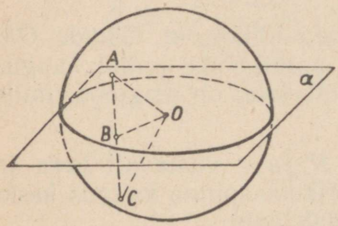
4) *Kera keskpunktist mittevõrdsetel kaugustel asetsevaist lõikeist on suurem raadius sellel, mis asetseb keskpunktile ligemal.*

128. T e o r e e m. ***Iga tasapind** (α, joon. 138), **mis läbib kera keskpunkti, jaotab kera pinna kaheks sümmeetriliseks ja kongruentseks osaks.***

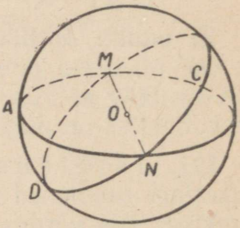
Võtame kera pinnal mingi punkti A; olgu AB punktist A tasapinnale α ehitatud ristlõik. Pikendame lõiku AB lõikumiseni kera pinnaga punktis C. Ehitades lõigu BO saame kaks kongruentset täisnurkset kolmnurka AOB ja BOC (kaatet BO on ühine ja hüpotenuusid on võrdsed kui kera raadiused); seega $AB = BC$. Nii vastab kera pinna igale punktile A selle pinna teine, punktiga A tasapinna α suhtes sümmeetriline punkt C. Tähendab, tasapind α jaotab kera pinna kaheks sümmeetriliseks osaks.

Need osad ei ole mitte ainult sümmeetrilised, vaid ka kongruentsed, sest lõiganud kera tasapinnaga α kaheks osaks, võime ühe osa paigutada teisesse nii, et nad ühtivad.

129. T e o r e e m. ***Kera pinna kahte punkti, mis ei ole ühe diameetri otspunktideks, läbib üksainus suurringjoon.***



Joon. 138.



Joon. 139.

Olgu kera pinnal, mille keskpunktiks on punkt O (joon. 139), võetud kaks mingit punkti, näiteks punktid C ja N, mis ei asetse ühel ja samal sirgel punktiga O. Siis punktid C, O ja N määravad tasapinna. See tasapind, läbides keskpunkti O, lõikub kera pinnaga mööda suurringjoont.

Teist suurringjoont läbi punktide C ja N ei saa panna. Tõepoolest, definitsiooni põhjal peab iga suurring asetsema kera keskpunkti läbival tasapinnal; järelikult, kui punkte C ja N läbiks veel teine suurringjoon, siis ilmneks, et kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti C, N ja O määravad kaks erinevat tasapinda, mis on aga võimatu.

130. T e o r e e m. ***Kaks lõikuvat suurringjoont poolitavad teineteist.***

Keskpunkt O (joon. 139), asetsedes mõlema suurringi tasapinnal, asetseb nende suurringide lõikesirgel; tähendab, sellel sirgel asetseb nii ühe kui teise ringi diameeter, kuid diameeter poolitab ringjoone.

Kera puutujatasapind.

131. Definitsioon. Tasapinda, millel on kera pinnaga üksainus ühine punkt, nimetatakse **puutujatasapinnaks.** Säärase tasapinna olemasolu võimalikkust näitab järgmine teoreem.

132. T e o r e e m. ***Tasapind*** (α, joon. 140), ***mis läbib kera pinna ühte punkti ja on risti sellesse punkti ehitatud raadiusega*** (OA), ***on puutujatasapind.***

Võtame tasapinnal α vabalt punkti B ja ühendame punktid O ja B sirglõiguga OB. Et sirglõik OB on tasapinna α suhtes kaldu ja sirglõik OA on risti selle tasapinnaga, siis $OB > OA$. Seepärast punkt B asetseb väljaspool kera pinda; seega on tasapinnal α kera pinnaga üksainus ühine punkt A; tähendab, see tasapind on puutujatasapind.

133. P ö ö r d t e o r e e m. ***Puutujatasapind*** (α, joon. 140) ***on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega*** (OA).

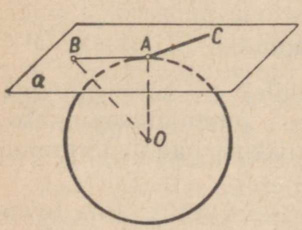
Et punkt A on definitsiooni põhjal puutujatasapinna ja kera pinna ainus ühine punkt, siis selle tasapinna iga muu punkt asetseb väljaspool kera pinda ja asetseb seega keskpunktist kaugemal kui punkt A; nii on lõik OA punkti O väikseim kaugus tasapinnast α, s. o. lõik OA on risti tasapinnaga α.

Sirget, millel on kera pinnaga üksainus ühine punkt, nimetatakse kera puutujaks. On kerge näha, et on olemas lõpmatu palju sirgeid, mis puudutavad kera antud punktis. Tõepoolest, iga sirge (AC, joon. 40), mis asetseb kera puutujatasapinnas ja läbib puutepunkti (A), on kera puutujaks.

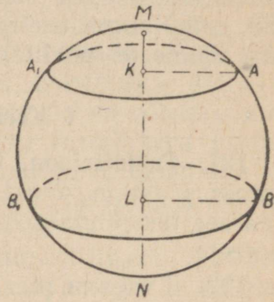
Kera ja tema osade pindalad.

134. Definitsioonid. 1) Kera pinnast mingi tasapinnaga (AA_1) eraldatud osa (joon. 141) nimetatakse **segmendi pinnaks** e. **sfääri segmendiks.**

Ringjoont AA_1 nimetatakse segmendi pinna **äärjooneks,** lõiketasapinnaga ristuva raadiuse lõiku KM nimetatakse segmendi pinna **kõrguseks.**



Joon. 140.



Joon. 141.

2) Kahe paralleelse lõiketasapinna (AA_1 ja BB_1) vahelist kera pinna osa nimetatakse kera **vööks.**

Lõikeringjooni AA_1 ja BB_1 nimetatakse vöö **äärjoonteks** ja paralleelsete lõiketasapindade vahelist kaugust nimetatakse vöö **kõrguseks.**

Kera vööd ja segmendi pinda võib vaadelda kui pöördpindu: kui mingi poolringjoon $MABN$ diameetri MN ümber pööreldes kujundab kera pinna, siis tema kaar AB kujundab vöö ja kaar MA kujundab segmendi pinna.

Kera ja tema osade pindalade leidmiseks tõestame järgmise lemma.

135. Lemma. ***Nii koonuse, tüvikoonuse kui ka silindri külgpindala võrdub keha kõrguse ja niisuguse ringjoone pikkuse korrutisega, mille raadiuseks on moodustaja keskpunktist teljeni tõmmatud moodustajaga ristuv lõik.***

1) Tekkigu koonus (joon. 142) kolmnurga ABC pöörlemisel kaateti AC ümber. Kui punkt D on moodustaja AB keskpunkt, siis (§ 115):

$$\text{koonuse külgpindala} = 2\pi \cdot BC \cdot AD. \tag{1}$$

Võttes $DE \perp AB$, saame kaks sarnast kolmnurka ABC ja AED (nad on täisnurksed ja neil on ühine nurk A); nende kolmnurkade sarnasusest järeldame, et:

$$BC : ED = AC : AD,$$

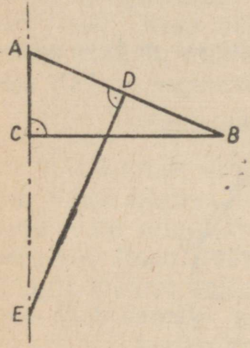
millest leiame, et:

$$BC \cdot AD = ED \cdot AC,$$

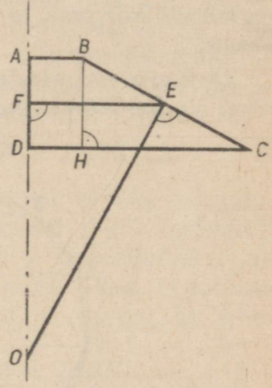
ning võrduse (1) põhjal saame:

$$\text{koonuse külgpindala} = 2\pi \cdot ED \cdot AC,$$

mida pidimegi tõestama.



Joon. 142.



Joon. 143.

2) Tekkigu tüvikoonus (joon. 143) trapetsi $ABCD$ pöörlemisel külje AD ümber.

Võtnud kesklõigu EF, saame (§ 117):

$$\text{tüvikoonuse külgpindala} = 2\pi \cdot EF \cdot BC. \qquad (2)$$

Tõmbame $EO \perp BC$ ja $BH \perp DC$, siis saame kaks sarnast kolmnurka EFO ja BHC (ühe küljed on risti teise omadega); nende kolmnurkade sarnasusest järeldame, et:

$$EF : BH = EO : BC;$$

siit saame, et:

$$EF \cdot BC = BH \cdot EO = AD \cdot EO.$$

Seepärast võib võrduse (2) kirjutada nii:

$$\text{tüvikoonuse külgpindala} = 2\pi \cdot EO \cdot AD,$$

mida pidimegi tõestama.

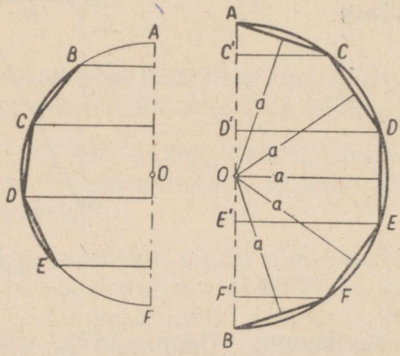
3) Teoreem jääb õigeks ka silindri kohta, sest teoreemis nimetatud sirglõik on võrdne silindri põhja raadiusega.

136. Definitsioon. Poolringjoone mingi kaare (*BE*, joon. 144) pöörlemisel diameetri (*AF*) ümber tekkinud kera vöö pindalaks loetakse piirväärtust, millele läheneb sama diameetri ümber pöörleva korrapärase kõõlmurdjoone (*BCDE*) poolt kujundatud pinna pindala, kui külgede arv piiramatult kasvab.

Seda definitsiooni laiendatakse ka segmendi pindala ja kera pindala jaoks; viimasel juhul hõlmab kõõlmurdjoont terve poolringjoon.

137. Teoreemid. 1) ***Segmendi pindala võrdub segmendi kõrguse ja kera suurringi ümbermõõdu korrutisega.***

2) ***Kera vöö pindala võrdub vöö kõrguse ja kera suurringi ümbermõõdu korrutisega.***



Joon. 144. Joon. 145.

1) Ehitame kaaresse *AF* (joon. 145), mis pöörlemisel kujundab segmendi pinna, vabalt võetud külgede arvuga korrapärase murdjoone *ACDEF*.

Pind, mis tekib selle murdjoone pöörlemisel, koosneb külgede *AC, CD, DE* jne. poolt kujundatud osadest. Need osad on kas koonuse (külje *AC* kujundatud) või tüvikoonuse (külgede *CD, EF*, ... kujundatud) või silindri (külje *DE* kujundatud, kui $DE \parallel AB$) külgpindalad. Seepärast võime siin rakendada lemmat § 135. Seejuures paneme tähele, et iga moodustajaga ristuv lõik, mis on tõmmatud moodustaja keskpunktist teljeni, võrdub murdjoone apoteemiga. Tähistades selle apoteemi tähega a, saame:

külje AC poolt kujundatud pinna pindala $= AC' \cdot 2\pi a$;
„ CD „ „ „ „ $= C'D' \cdot 2\pi a$;
. . . .
„ EF „ „ „ „ $= E'F' \cdot 2\pi a$.

Liitnud liikmeti need võrdused, leiame, et murdjoone $ACDEF$ poolt kujundatud pinna pindala $= AF' \cdot 2\pi a$.

Kõõlmurdjoone külgede arvu piiramatul kasvamisel apoteemi a piirväärtuseks on kera raadius R, aga lõik AF' jääb muutumatuks; järelikult, murdjoone $ACDEF$ pöörlemisel kujundatud pinna pindala piirväärtuseks on $AF' \cdot 2\pi R$. Kuid murdjoone $ACDEF$ pöörlemisel tekkinud pinna pindala piirväärtust loetakse segmendi pindalaks ja lõik AF' on segmendi kõrgus h, seepärast:

segmendi pindala $= h \cdot 2\pi R = 2\pi Rh$.

2) Oletame, et korrapärane murdjoon ei ole kujundatud mitte kaaresse AF, mille pöörlemisel tekib segmendi pind, vaid mingisse kaaresse CF, mille pöörlemisel tekib kera vöö (joon. 145). See muudatus, nagu näha, ei mõjuta mingil määral eelneva arutluse käiku, seepärast ka tulemus jääb samaks, s. o.:

kera vöö pindala $= h \cdot 2\pi R = 2\pi Rh$,

kus tähega h on nüüd tähistatud kera vöö kõrgust $C'F'$.

138. Teoreem. ***Kera pindala võrdub suurringi ümbermõõdu ja diameetri korrutisega.***

ehk ***kera pindala võrdub neljakordse suurringi pindalaga.***

Poolringjoone ADB (joon. 145) pöörlemisel tekkinud kera pinda võib vaadelda kui kaarte AD ja DB pöörlemisel tekkinud pindade summat. Seepärast võime eelneva teoreemi põhjal kirjutada:

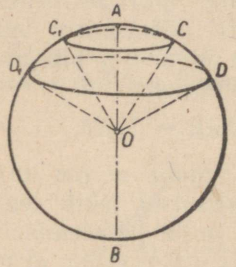
$$\text{kera pindala} = 2\pi R \cdot AD' + 2\pi R \cdot D'B =$$
$$= 2\pi R\,(AD' + D'B) = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

139. Järeldus. *Kerade pindalad suhtuvad nagu nende raadiuste või diameetrite ruudud,* sest tähistades kerade raadiused tähtedega R ja R_1 ning pindalad tähtedega S ja S_1, saame:

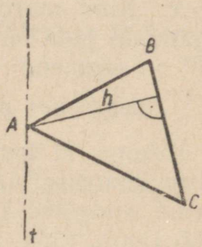
$$S : S_1 = 4\pi R^2 : 4\pi R_1{}^2 = R^2 : R_1{}^2 = 4R^2 : 4R_1{}^2 =$$
$$= (2R)^2 : (2R_1)^2.$$

140. Definitsioon. Ringi sektori (*COD*, joon. 146) pöörlemisel tema kaarega mitte lõikuva diameetri (*AB*) ümber tekkinud keha nimetatakse **kera sektoriks.**

Seda keha piiravad kahe koonuse külgpinnad ja kera vöö pind. Viimast nimetatakse kera sektori **põhjaks.** Üks ringi sektorit piiravatest raadiustest võib ühtida pöörlemisteljega; näiteks sektor *AOC*, pööreldes telje *AO* ümber, kujundab kera sektori $OCAC_1$, mida piirab koonuse külgpind ja segmendi pind. Kera sektori ja kera ruumala leidmiseks tõestame algul järgmise lemma.



Joon. 146.



Joon. 147.

141. L e m m a. ***Kui △ ABC** (joon. 147) **pöörleb telje t ümber, mis asetseb kolmnurga tasapinnas ning läbib tippu A ja ei lõika külge BC, siis pöörlemisel tekkiva keha ruumala võrdub külje BC poolt kujundatud pinna pindala ja sellele küljele joonestatud kõrguse h ühe kolmandiku korrutisega.***

Tõestamisel eristame kolm juhtu.

1) Telg ühtib küljega *AB* (joon. 148). Sel juhul otsitav ruumala võrdub täisnurksete kolmnurkade *BCD* ja *DCA* pöörlemisel tekkivate koonuste ruumalade summaga. Esimene ruumala on $\frac{1}{3}\pi CD^2 \cdot DB$ ja teine on $\frac{1}{3}\pi CD^2 \cdot DA$; seepärast kolmnurga *ABC* poolt kujundatud keha ruumala

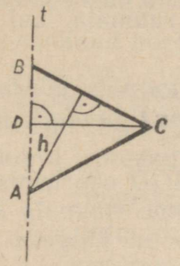
$$= \frac{1}{3}\pi CD^2 (DB + DA) = \frac{1}{3}\pi CD \cdot CD \cdot BA.$$

Korrutis $CD \cdot BA$ võrdub korrutisega $BC \cdot h$, sest kumbki neist korrutistest väljendab kolmnurga *ABC* kahekordset pindala; seega:

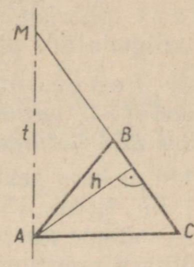
$$\text{ruumala } ABC = \tfrac{1}{3}\pi CD \cdot BC \cdot h.$$

Kuid korrutis $\pi CD \cdot BC$ võrdub koonuse BDC külgpindalaga, tähendab:

$$\text{ruumala } ABC = (\text{pindala } BC) \cdot \tfrac{1}{3} h.$$



Joon. 148.



Joon. 149.

2) Telg ei ühti küljega AB ega ole paralleelne küljega BC (joon. 149). Sel juhul otsitav ruumala võrdub kolmnurkade AMC ja AMB pöörlemisel tekkivate kehade ruumalade vahega. Esimesel juhul tõestatu põhjal:

$$\text{ruumala } AMC = \tfrac{1}{3} h \cdot (\text{pindala } MC),$$
$$\text{ruumala } AMB = \tfrac{1}{3} h \cdot (\text{pindala } MB);$$

järelikult:

$$\text{ruumala } ABC = \tfrac{1}{3} h \cdot (\text{pindala } MC - \text{pindala } MB) = \\ = \tfrac{1}{3} h \cdot (\text{pindala } BC).$$

3) Telg on paralleelne küljega BC (joon 150). Siis otsitav ruumala võrdub ristküliku $DEBC$ pöörlemisel tekkiva silindri ruumalaga, millest on lahutatud kolmnurkade AEB ja ACD poolt kujundatud koonuste ruumalade summa; esimene neist ruumaladest on $\pi DC^2 \cdot ED$; teine ruumala on $\frac{1}{3}\pi EB^2 \cdot EA$ ja kolmas on $\frac{1}{3}\pi DC^2 \cdot AD$. Pidades nüüd silmas, et $EB = DC$, saame:

$$\text{ruumala } ABC = \pi DC^2[ED - \tfrac{1}{3}(EA + AD)] = \\ = \pi DC^2 (ED - \tfrac{1}{3} ED) = \tfrac{2}{3}\pi DC^2 \cdot ED.$$

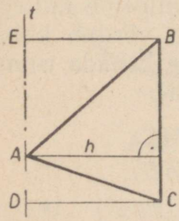
Korrutis $2\pi DC \cdot ED$ väljendab külje BC poolt kujundatud silindri külgpinna suurust, seepärast:

$$\text{ruumala } ABC = \tfrac{1}{3} (\text{pindala } BC) \cdot DC = \tfrac{1}{3} (\text{pindala } BC) \cdot h.$$

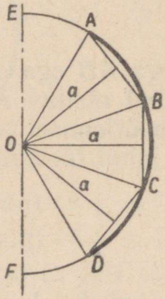
142. Definitsioon. Ringi sektori (AOD, joon. 151) pöörlemisel diameetri (EF) ümber tekkiva kera sektori ruumalaks loetakse piirväärtust, millele läheneb sektori äärmiste raadiustega (OA ja OD) ja sektori kaaresse kujundatud korrapärase murdjoonega ($ABCD$) piiratud hulknurkse sektori pöörlemisel tekkiva keha ruumala, kui murdjoone külgede arv piiramatult kasvab.

143. Teoreem. ***Kera sektori ruumala võrdub vastava vöö (või vastava segmendi pinna) pindala ja kera raadiuse ühe kolmandiku korrutisega.***

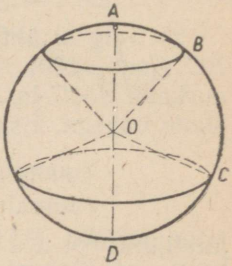
Tekkigu kera sektor ringi sektori AOD pöörlemisel diameetri EF (joon. 151) ümber. Avaldame ruumala V. Selleks kujundame kaaresse AD vabalt võetud külgede arvuga korrapärase murdjoone ABCD.



Joon. 150.



Joon. 151.



Joon. 152.

Hulknurkne sektor $OABCD$ kujundab pöörlemisel mingi keha, mille ruumala tähistame tähega V_1. See ruumala on nende kehade ruumalade summa, mille kujundavad diameetri EF ümber pöörlemisel kolmnurgad OAB, OBC ja OCD. Rakendame siin § 141 tõestatud lemmat, märkides seejuures, et kolmnurkade kõrgused võrduvad kõõlmurdjoone apoteemiga a. Vastavalt sellele lemmale saame:

$$V_1 = \tfrac{1}{3}(\text{pindala } AB)\cdot a + \tfrac{1}{3}(\text{pindala } BC)\cdot a + \ldots =$$
$$= \tfrac{1}{3}(\text{pindala } ABCD)\cdot a.$$

Kujutleme nüüd, et murdjoone külgede arv piiramatult kasvab. Säärasel tingimusel on pindala $ABCD$ piirväärtuseks kera vöö AD pindala, kuid apoteemi a piirväärtuseks on raadius R; seega:

$$V = \tfrac{1}{3}(\text{vöö } AD \text{ pindala})\cdot R.$$

M ä r k u s. See teoreem ja tema tõestus ei sõltu sellest, kas üks ringi sektorit piirav raadius ühtib pöörlemisteljega või mitte.

144. T e o r e e m. ***Kera ruumala võrdub tema pindala ja raadiuse ühe kolmandiku korrutisega.***

Tükeldanud poolringi $ABCD$ (joon. 152), mis kujundab kera, mingiteks ringi sektoriteks AOB, BOC, COD, märkame, et kera ruumala võib vaadelda nende ringi sektorite pöörlemisel kujundatud kera sektorite ruumalade summana. Et eelmise teoreemi põhjal:

$$\text{ruumala } AOB = \tfrac{1}{3}\,(\text{pindala } AB) \cdot R,$$
$$\text{ruumala } BOC = \tfrac{1}{3}\,(\text{pindala } BC) \cdot R,$$
$$\text{ruumala } COD = \tfrac{1}{3}\,(\text{pindala } CD) \cdot R,$$

siis

$$\text{kera ruumala} = \tfrac{1}{3}\,(\text{pindala } AB + \text{pindala } BC +$$
$$+ \text{pindala } CD) \cdot R = \tfrac{1}{3}\,(\text{pindala } ABCD) \cdot R.$$

M ä r k u s. Kera ruumala võib vaadelda ka kui diameetri ümber pöörleva 180°-se ringi sektori kujundatud keha ruumala.

Säärasel juhul saadakse kera ruumala niisuguse kera sektori ruumalana, mille vöö pindala moodustab kogu kera pindala.

Eelmise teoreemi põhjal:

kera ruumala võrdub tema pindala ja raadiuse ühe kolmandiku korrutisega.

145. J ä r e l d u s 1. Tähistame kera vöö või segmendi pinna kõrguse tähega h, kera raadiuse tähega R ja diameetri tähega D; siis vöö või segmendi pindala, nagu nägime (§ 137), väljendab avaldis $2\pi Rh$ ja kera pindala (§ 138) väljendab avaldis $4\pi R^2$, seepärast:

$$\text{kera sektori ruumala} = \tfrac{1}{3} \cdot 2\pi Rh \cdot R = \tfrac{2}{3}\pi R^2 \cdot h;$$

$$\text{kera ruumala} = \tfrac{1}{3} \cdot 4\pi R^2 \cdot R = \tfrac{4}{3}\pi R^3$$

ehk

$$\text{kera ruumala} = \tfrac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{6}\pi D^3.$$

Siit on näha, et *kerade ruumalad suhtuvad nagu nende raadiuste või diameetrite kuubid.*

Märkus. Kera ruumala valemi võib tuletada (muide mitte täiesti rangelt) järgmise lihtsa arutluse teel. Kujutleme, et kogu kera pindala on tükeldatud väga väikesteks osadeks ja et iga osa piirjoone kõik punktid on raadiuste abil ühendatud kera keskpunktiga. Siis kera tükeldub väga suureks arvuks väikesteks kehadeks, milledest igaühte võib vaadelda kui püramiidi, mille tipuks on kera keskpunkt. Et püramiidi ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse (mille võib võtta võrdseks kera raadiusega) ühe kolmandiku korrutisega, siis kera ruumala, mis ilmselt võrdub kõikide püramiidide ruumalade summaga, väljendub nii:

$$\text{kera ruumala} = \tfrac{1}{3} S \cdot R,$$

kus S on kõikide püramiidide põhjade pindalade summa. Kuid see põhjade pindalade summa peab moodustama kera pindala, tähendab:

$$\text{kera ruumala} = \tfrac{1}{3} \cdot 4\pi R^2 \cdot R = \tfrac{4}{3}\pi R^3.$$

Nii võib kera ruumala valemi tuletada tema pindala valemi abil. Ümberpöördult, kera pindala valemi võib tuletada tema ruumala valemi abil võrdusest:

$$\tfrac{1}{3} S \cdot R = \tfrac{4}{3}\pi R^3; \text{ siit } S = 4\pi R^2.$$

146. Järeldus 2. *Kera pindala ja ruumala moodustavad vastavalt $\frac{2}{3}$ kera ümber kujundatud silindri täispindalast ja ruumalast.*

Tõepoolest, kera ümber kujundatud silindri põhja raadius võrdub kera raadiusega ja kõrgus võrdub kera diameetriga; seepärast: säärase

$$\text{silindri täispindala} = 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2;$$
$$\text{silindri ruumala} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

Siit on näha, et $\frac{2}{3}$ selle silindri täispindalast võrdub $4\pi R^2$, s. o. võrdub kera pindalaga, ja $\frac{2}{3}$ silindri ruumalast moodustab $\frac{4}{3}\pi R^2$, s. o. kera ruumala.[1]

147. Märkus. Kera ruumala valemi võib väga lihtsalt saada Cavalieri printsiibi (§ 89) põhjal järgmisel viisil.

Olgu ühele ning samale tasapinnale α (joon. 153) paigutatud kera raadiusega R ja silinder, mille põhja raadius on R ja kõrgus on $2R$ (tähendab see on niisugune silinder, mida võib kujundada nimetatud kera ümber). Kujutleme edasi, et silindrist on välja õõnes-

---

[1] Selle lause tõestas Archimedes (III sajandil e. m. a.). Archimedes avaldas soovi, et selle teoreemi joonis tehtaks tema hauakivile, mis rooma sõjapealiku Marcelluse poolt ka teostati (F. Cajori, Elementaarmatemaatika ajalugu).

Soovitame lugejatele kasuliku harjutusena tõestada, et kera pindala ja ruumala moodustavad $\frac{4}{9}$ vastavalt kera ümber kujundatud koonuse täispindalast ja ruumalast, kui moodustaja võrdub põhja diameetriga. Ühenduses selle lause järeldusega 2 võime kirjutada niisuguse võrduse, milles täht Q tähistab kas pindala või ruumala:

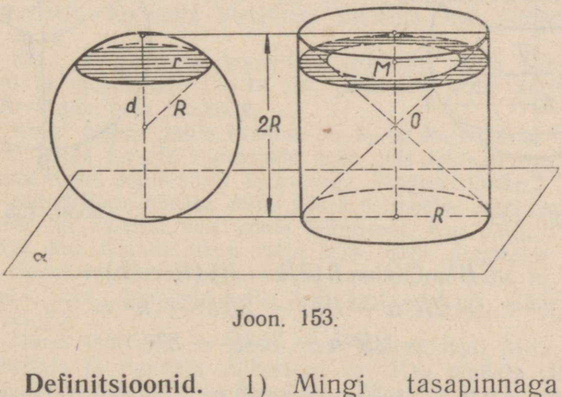
$$\frac{Q_{\text{kera}}}{4} = \frac{Q_{\text{silinder}}}{6} = \frac{Q_{\text{koonus}}}{9}.$$

tatud kaks koonust, millede ühine tipp asetseb silindri telje keskpunktis O ja millede põhjadeks on: ühel — silindri ülemine põhi, teisel — silindri alumine põhi. Silindrist jääb siis järele keha, mille ruumala, nagu kohe näeme, võrdub antud kera ruumalaga.

Võtame tasapinnaga α mingi paralleelse tasapinna, mis lõikab mõlemat keha. Olgu selle tasapinna kaugus kera keskpunktist d ja olgu tasapinna ning kera lõikeringi raadius r. Siis selle ringi pindala on $\pi r^2 = \pi(R^2 - d^2)$. Sellesama tasapinna lõikumisel silindrist saadud kehaga tekib rõngas (mis joonisel on kriipsutatud), mille välimine raadius on R ja sisemine raadius on d (täisnurkne kolmnurk, mille moodustavad see raadius ja lõik OM, on võrdhaarne, sest tema kumbki teravnurk on 45°). Tähendab, selle rõnga pindala on $\pi R^2 - \pi d^2 = \pi(R^2 - d^2)$. Nii näeme, et kera ja silindrist saadud keha lõiked tasapinna α paralleeltasapinnaga on pindvõrdsed kujundid; järelikult vastavalt Cavalieri printsiibile nende kehade ruumalad on võrdsed. Kuid silindrist saadud keha ruumala on võrdne silindri ruumalaga, millest on lahutatud kahekordne koonuse ruumala, s. o. ta võrdub avaldisega

$$\pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \tfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = 2\pi R^3 - \tfrac{2}{3}\pi R^3 = \tfrac{4}{3}\pi R^3,$$

tähendab, see ongi kera ruumala.



Joon. 153.

148. Definitsioonid. 1) Mingi tasapinnaga (CC', joon. 154) kerast eraldatud osa (ACC') nimetatakse **kera segmendiks.** Lõikeringi nimetatakse segmendi **põhjaks** ja põhjaga risti asetseva raadiuse lõiku AM nimetatakse segmendi **kõrguseks.**

2) Kahe paralleelse lõiketasapinna (CC' ja DD') vahelist kera osa nimetatakse **kera kihiks.** Paralleelseid lõikeringe nimetatakse kihi põhjadeks ja nendevahelist kaugust MN kihi **kõrguseks.**

Mõlemat keha võib vaadelda kui mingi ringi osade AMC ja $MCDN$ pöörlemisel diameetri AB ümber tekkinud kehasid.

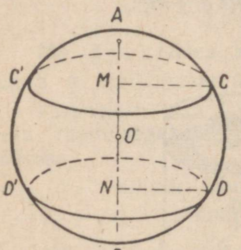
149. Teoreem. ***Kera segmendi ruumala võrdub niisuguse silindri ruumalaga, mille põhja raadiuseks on segmendi kõrgus ja mille kõrguseks on ühe kolmandiku segmendi kõrguse võrra vähendatud kera raadius,***

s. o.

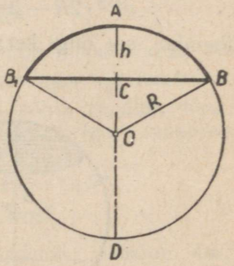
$$V = \pi h^2 \left(R - \tfrac{1}{3} h\right),$$

kus h on segmendi kõrgus ja R on kera raadius.

Ringi osa ACB (joon. 155) pöörlemisel diameetri AD ümber saadud kera segmendi ruumala leiame sel teel, et ringi sektori AOB pöörlemisel tekkinud kera sektori ruumalast lahutame koonuse ruumala, mis tekib kolmnurga COB pöörlemisel. Esimene neist on $\frac{2}{3}\pi R^2 h$ ja teine on $\frac{1}{3}\pi CB^2 \cdot CO$. Et lõik CB on lõikude AC ja CD keskmine võrdeline, siis $CB^2 = h(2R - h)$, seega:



Joon. 154.



Joon. 155.

$$CB^2 \cdot CO = h(2R - h)(R - h) =$$
$$= 2R^2h - Rh^2 - 2Rh^2 + h^3 =$$
$$= 2R^2h - 3h^2R + h^3;$$

järelikult:

$$\text{ruumala } ABB_1 = \text{ruumala } OBAB_1 - \text{ruumala } OBB_1 =$$
$$= \tfrac{2}{3}\pi R^2 h - \tfrac{1}{3}\pi CB^2 \cdot CO =$$
$$= \tfrac{2}{3}\pi R^2 h - \tfrac{2}{3}\pi R^2 h + \pi R h^2 - \tfrac{1}{3}\pi h^3 =$$
$$= \pi h^2 \left(R - \tfrac{1}{3} h\right).$$

Harjutusi.

1. Põhja raadiusest kaks korda suurema kõrgusega silindri ruumala on 1 m³. Arvutada silindri kõrgus.

2. Tüvikoonuse põhjade raadiused on 27 cm ja 18 cm ning moodustaja on 21 cm. Arvutada tüvikoonuse külgpindala ja ruumala.

3. Missugusel kaugusel keskpunktist peab tasapinnaga lõikama kera, mille raadius on 2,425 m, et väiksema segmendi pindala ja niisuguse koonuse külgpindala suhe, millel on segmendiga ühine põhi ja mille tipuks on kera keskpunkt, on 7 : 4?

4. Avaldada niisuguse pöördkeha ruumala, mis tekib korrapärase kuusnurga pöörlemisel tema külje a ümber.

5. Arvutada kuubi ümber kujundatud kera raadius, kui kuubi serv on 1 m.

6. Avaldada niisuguse pöördkeha ruumala, mis tekib võrdkülgse kolmnurga pöörlemisel telje ümber, mis läbib üht tippu ja on vastasküljega paralleelne, kui kolmnurga külg on a.

7. On antud võrdkülgne $\triangle ABC$, mille külg on a; küljele BC ehitatakse ruut $BCDE$, mis asetseb väljaspool kolmnurka. Viisnurk $ABEDC$ pöörleb külje AB ümber. Avaldada pöördkeha ruumala.

8. On antud ruut $ABCD$, mille külg on a. Läbi tipu A on joonestatud diagonaaliga AC ristuv sirge AM ja selle sirge ümber pööratakse ruutu. Avaldada pindala, mille kujundab ruudu piirdejoon, ning ruumala, mille kujundab ruudu pind.

9. On antud korrapärane kuusnurk $ABCDEF$, mille külg on a. Läbi tipu A joonestatakse raadiusega OA ristuv sirge AM ja selle ümber pööratakse kuusnurka. Avaldada kuusnurga poolt kujundatud keha pindala ja ruumala.

10. Kerasse, mille raadius on 2, on puuritud silindriline auk piki diameetrit. Arvutada ülejäänud ruumala, kui silindrilise augu raadius on 1.

11. Kera, paigutatuna koonilisse lehtrisse, mille põhja raadius $r = 5$ cm ja moodustaja $l = 13$ cm, puudutab lehtri äärjoone tasapinda. Arvutada kera ruumala.

12. Ringi ümber, mille raadius on 2, on kujundatud võrdkülgne kolmnurk. Leida kehade ruumalade suhe, mis tekivad ringi ja kolmnurga pindalade pöörlemisel kolmnurga kõrguse ümber.

13. Silindrilisse nõusse, mille põhja diameeter on 6 cm ja kõrgus on 36 cm, on valatud vett poole kõrguseni. Kui palju tõuseb veepind nõus, kui asetada üleni vette kera, mille diameeter on 5 cm?

14. Õõnes raudkera, mille väline raadius on 0,154 m, ujub poolest saadik vees. Arvutada selle kera kesta paksus, teades, et raua erikaal on 7,7.

15. Marsi läbimõõt on pool Maa läbimõõdust. Mitu korda on Marsi pindala ja ruumala väiksemad kui Maa pindala ja ruumala?

16. Jupiteri läbimõõt on Maa läbimõõdust 11 korda suurem; mitu korda Jupiter ületab Maad pindala ja ruumala poolest?

LISA.

Geomeetria aksioomidest.

1. Geomeetria erineb teistest matemaatika harudest (algebra, aritmeetika) ainult temale omase iseärasusega. See iseärasus seisneb selles, et need teoreemid ja kujundite omadused, mida uuritakse geomeetrias, ei põhine mitte üksi arutluste real, vaid paljudel juhtumitel võivad olla ka otsese vaatluse objektiks; nende omaduste kehtivust mitte ainult ei tõestata, vaid nad leiavad kinnitust ka nägemismeele abil. Nii võib võrdhaarse kolmnurga alusnurkade võrdsust või kahe vastavalt võrdsete külgedega kolmnurga võrdsust ja paljusid teisi kujundite omadusi otseselt näha.

Geomeetriliste objektide kaemuslikkus aitab avastada ja ette näha paljusid geomeetrilisi tõdesid enne nende tõestamist. Muistsetel egiptlastel (2000 aastat enne meie ajaarvamist) oli geomeetriliste kujundite otsene vaatlemine peamiseks vahendiks nende kujundite ühtedes või teistes omadustes veendumisel. Kuid säärane vahend oli kõlblik ainult lihtsaimate geomeetriliste tõdede kindlaksmääramisel, ja just sääraste tõdedega tegelesid egiptlased, kes kasutasid geomeetriat kitsal praktilisel eesmärgil. Kuid juba praktiliste ülesannete rohkus ja komplitseeritus sundis õppima üha keerulisemate geomeetriliste kujundite omadusi ning selleks ei piisanud enam joonise lihtsast vaatlusest; tekkis vajadus rakendada üha komplitseeritumaid arutlusi.

Peale selle on keerulisemate geomeetriliste kujundite näitlikkus sageli väga petlik ja juhib mõnikord lausa valedele järeldustele.

Võib tuua palju näiteid sellest, kuidas joonise üldine kuju sisendab vale otsuse joonisel kujutatud kujundite vastastikuste asendite ja omaduste kohta. Sellel põhjeneb palju geomeetrilisi paradokse, mida meie siin ei hakka esitama.

Muistsed kreeklased, kes geomeetria said egiptlastelt, üldistasid üksikuid egiptlastele tuntud tõsiasju ning töötasid välja kindlakujulised arutlused, mille abil nad avastasid uusi geomeetrilisi tõdesid. Umbes 300 aastat enne meie ajaarvamist andis kreeka matemaatik Eukleides oma raamatutes nimetusega «Elemendid» geomeetriale esimese teadusliku aluse.

Ta püüdis võimalikult täpselt kirjeldada sääraseid lihtsamaid geomeetrilisi kujundeid, nagu punkt, joon, pind, ja nendevahelisi seoseid, mida selle ajani loeti endastmõistetavaiks.

Rajanedes sellele, ta andis loogiliselt range geomeetria ülesehituse, mis oma vormilt nüüdisaegsegi teaduse vaatepunktist on ülimal määral täiuslik.

Ta taotles kõigepealt anda täpseid definitsioone geomeetrilistele põhimõistetele: punkt, joon, sirgjoon, pind, tasapind ja geomeetriline keha. Toome siin tema poolt antud definitsioonid:

1. Punkt on see, millel ei ole osi.

2. Joon on laiuseta pikkus.

3. Joone piirideks on punktid.

4. Sirgjoon on see, mis on asetatud kõigi oma punktide suhtes ühteviisi.

5. Pind on see, mis omab ainult pikkust ja laiust.

6. Pinna piirideks on jooned.

7. Tasapind on pind, mis on asetatud kõigi oma sirgjoonte suhtes ühteviisi.

8. Kehaks nimetatakse seda, mis omab pikkust, laiust ja kõrgust.

9. Keha piirideks on pinnad.

Nende definitsioonide eesmärgiks oli saavutada seda, et nimetused «punkt», «sirge» jne. mitte ainult ei kutsuks esile kindlat visuaalset kujutlust, vaid ühtaegu sellega määraksid kindlaks ka vastava mõiste, millele tuginedes võis teha edaspidiseid loogilisi järeldusi. Ja kuigi need definitsioonid nüüdisaja teaduse seisukohalt ei ole täiuslikud, ometi vastasid nad täielikult tolleaegse teadusliku mõtlemise tasemele ja olid kujutlustelt mõistetele ülemineku esimeseks sammuks.

Nad olid kõigi järgnevate geomeetriliste teoste lähtepunktiks ja määrasid tee geomeetria edaspidiseks arenemiseks.

Kõik geomeetrias tunnetatud tõed liigitas Eukleides kolme liiki: postulaadid, aksioomid ja teoreemid. Esimesse kahte liiki [1] kuulusid tähtsaimad tõed, mis ei tekitanud mingeidki kahtlusi, olid vahetult ilmsed ning võisid olla seepärast lähtelauseteks, milledest loogiliselt tuletati teised tõed.

Kolmas liik lauseid — teoreemid — on tõed, mille kehtivust peab tõestama, s. o. rea arutluste teel tuletama esimese kahe liigi tõdedest. Toome Eukleidese postulaadid ja aksioomid.

a) **Postulaadid.** *Nõutakse, et*

1) *igast punktist võib igasse teise punkti ehitada ühe sirgjoone;*
2) *sirglõiku ja kiirt võib pidevalt pikendada sirgjoont mööda;*
3) *mistahes punktist võib joonestada mistahes raadiusega ringjoone;*
4) *kõik täisnurgad on võrdsed;*
5) *kaks sirget lõikuvad teineteisega sealpool, kuspool nad kolmanda, neid lõikuva sirgega moodustavad lähisnurki, millede summa on väiksem kui kaks täisnurka.*

b) **Aksioomid.**

1) *ühe ja samaga võrdsed on omavahel võrdsed;*
2) *kui võrdsetega liita ühepalju, siis summad on võrdsed;*
3) *kui võrdsetest lahutada ühepalju, siis jäägid on võrdsed;*
4) *üksteisega ühtivad on võrdsed;*
5) *tervik on suurem kui tema osa.*

---

[1] Missugune on põhimõtteline vahe ühtede ja teiste vahel, seda Eukleides ei näita, kuid postulaatidega on tal tavaliselt ikka seotud väide, et üht või teist konstruktsiooni on võimalik teostada

Need Eukleidese aksioomid ja postulaadid olid sajandeid aluseks, millele ehitati kogu geomeetria.

2. Juba lähemad Eukleidese järglased pöörasid erilist tähelepanu Eukleidese viiendale postulaadile. See tõmbas endale tähelepanu oma sõnastuse keerulisusega ja sellega, et ta kehtivus ei olnud kaugeltki täiesti ilmne.

Viimane asjaolu põhjustas püüdeid postulaadi kehtivust üht- või teistviisi tõestada, s. o. järeldada teda teistest, mitte kahtlust äratavatest tõdedest. Viienda postulaadi tõestamise katsed kestsid enam kui 2000 aastat, kuid ei viinud, ja nagu hiljem selgus, ei võinudki viia positiivsele tulemusele. Õnnestus vaid postulaati asendada teise, temaga samaväärse lausega, mis oli aga niisama silmanähtamatu ning mis ei järeldunud teistest geomeetrilistest aksioomidest ja postulaatidest.

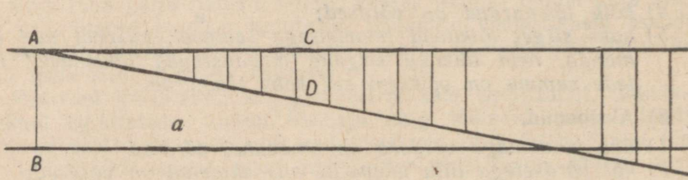
On kerge näidata, et Eukleidese postulaat on samaväärne väitega, et antud tasapinnas võib igast punktist igale sirgele joonestada üheainsa paralleelse sirge (s. o. antud sirgega mitte lõikuva sirge). Tõepoolest, kui see oletus võtta aksioomiks, siis planimeetrias tõestatud teoreemidest järeldub otseselt Eukleidese postulaat. See lause ainsast paralleelsest sirgest võetaksegi harilikult aksioomiks Eukleidese postulaadi asmel (nagu see on tehtud ka selle raamatu esimeses osas).

Teiseks Eukleidese postulaadiga samaväärseks lauseks on kolmnurga nurkade summa teoreem.

Matemaatikute pingutused olid mitme sajandi vältel sihitud sellele, et tõestada kas Eukleidese postulaati ennast või mõnd sellega samaväärset lauset.

Toome siin illustratsiooniks mõned säärased tõestused.

P r o k l o s e t õ e s t u s (V sajandil). Võtame antud tasapinnal sirge a ja väljaspool seda punkti A (joon. 156). Joonestame punktist A sirgele a ristlõigu AB ning punktist A joonestame sirgele AB ristsirge AC. Sirged a ja AC ei lõiku, sest vastasel korral oleks nende lõikepunktist sirgele AB joonestatud kaks ristsirget. Olgu nüüd läbi punkti A joonestatud veel mingi sirge AD. Proklos tõestab, et see sirge peab lõikuma sirgega a. Siin on tema tõestus.

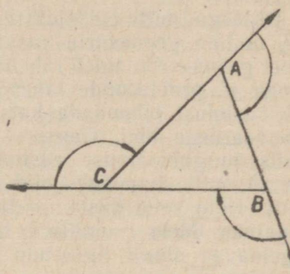


Joon. 156.

Hakkame joonestama sirge AC punktidest sellele sirgele ristlõike, pikendades neid kuni lõikumiseni sirgega AD. Ristlõigu aluspunkti kaugenedes punktist A tema pikkus kasvab, ning küllalt kaugel punktist A see pikkus saab suuremaks kui paralleelide a

ja AC vaheline kaugus. Sirge AD vastavad punktid asetsevad niisiis teisel pool sirget a, nii et sirge AD läheb sirge a ühelt poolt teisele poole. Kuid see võib juhtuda ainult siis, kui ta lõikub sirgega a. Proklos toetub oma tõestuses oletusele, et ühe paralleelse sirge punktide kaugus teisest paralleelsest sirgest ei või piiramatult kasvada. Kuid see oletus on omakorda uus postulaat, mis on samaväärne Eukleidese postulaadiga.

Toome veel kolmnurga nurkade summa teoreemi tõestamise katse, mis ei rakenda paralleelsete sirgete omadusi. See tõestus on pärit XIX sajandist ja kuulub Göttingeni ülikooli professorile Thibaut'le (l.: *tiboo*). Olgu antud $\triangle ABC$ (joon. 157). Pikendame külge CA punktist A, külge AB punktist B ja külge BC punktist C. Tõestame, et sel teel tekkinud välisnurkade summa on 360°. Pöörame sirget AC punkti A ümber välisnurga A võrra. Pärast seda pööramist ühtib ta sirgega AB. Pöörame nüüd edasi seda sirget punkti B ümber tema uuest asendist välisnurga B võrra; pärast pööramist ühtib ta sirgega BC. Pöörame seda sirget nüüd tema viimasest asendist punkti C ümber välisnurga C võrra. Pärast kolme pööramist sirge tuleb oma esialgsesse asendisse. Järelikult, üldse pöördub ta täispöörde võrra, s. o. 360° võrra, kuid tema kolm pööret koosnesid kolmnurga kolme välisnurga suurustest pööretest. Järelikult on nende välisnurkade summa 360°. Kuid on ilmne, et kolmnurga kõigi välis- ja sisenurkade summa on $3 \cdot 180°$, seega sisenurkade summaks osutub 540°—360° ehk 180°.



Joon. 157.

Selles tõestuses Thibaut teostas sirgega kolm pööret üksteisest e r i n e v a t e punktide ümber ning eeldas vaikides, et säärane pööramine on samaväärne täispöördega ü h e keskpunkti ümber.

Niisugune oletus on omakorda teatav postulaat. Selle postulaadi lähem uurimine näitab, et ta on samaväärne Eukleidese postulaadiga.

Vaatamata Eukleidese postulaadi arvukate tõestamiskatsete ebaõnnestumisele, selle tõestamise katsed ei lakanud, ning selle põhjuseks oli matemaatikute täielik veendumus selles, et ilma selle postulaadita on geomeetria ülesehitus võimatu.

3. XIX sajandi esimesel poolel vene matemaatik, Kaasani ülikooli professor Nikolai Lobatševski, ungari matemaatik János Bólyai ja saksa matemaatik Karl Friedrich Gauss avaldasid julge mõtte, et Eukleidese postulaat ei ole geomeetria teiste aksioomide loogiline järeldus ning seepärast ei olegi võimalik teda tõestada ja et selle postulaadi tarvituselevõtmine ei ole geomeetria ülesehitamiseks vajalik.

Oma väite kinnitamiseks nad ehitasid uue geomeetria, milles Eukleidese postulaat oli asendatud teise oletusega, nimelt et antud tasapinnal antud punktist võib joonestada kuitahes palju sirgeid, mis ei lõiku antud sirgega.

Selle geomeetria laused erinesid oluliselt Eukleidese geomeetria teoreemidest. Nii osutus kolmnurga nurkade summa väiksemaks kui 360°, kolmnurga kongruentsuse teoreemidele lisandus uus: «kolmnurgad on kongruentsed, kui kolm nurka ühes on võrdsed kolme nurgaga teises». Seega selles geomeetrias ei ole kolmnurki, mis on sarnased, kuid ühtimatud.

Vaatamata uue geomeetria sääraste lausete uudsusele, oli tal siiski harmooniline ja täiuslik kuju nagu Eukleidese geomeetrialgi. Hiljem hakati teda nimetama mitte-eukleidiliseks geomeetriaks.

Ühtaegu mitte-eukleidilise geomeetria avastamisega kerkis küsimus, milline geomeetria vastab tõelisele materiaalsele maailmale ja millist geomeetriat tuleb rakendada rakendusteaduste — füüsika, astronoomia jt. probleemide lahendamisel. Lobatševski ja Gauss püüdsid seda küsimust lahendada katselisel teel (Lobatševski — astronoomiliste vaatluste abil, Gauss — mõõtmise abil maapinnal. Viimane mõõtis nurgamõõtmise riistade abil niisuguse kolmnurga nurkade summat, mille tippudeks olid üksteisest suurel kaugusel olevad mäetipud). Kuid selle küsimuse lahendamine lihtsate vahenditega osutus võimatuks. Meie ruumilised tajumised ei ole absoluutselt täpsed ja peegeldavad ainult ligikaudu materiaalse maailma ruumilisi suhteid.

Eukleidese geomeetria arenes tähelepanekutest materiaalses maailmas ja peegeldab seepärast suure täpsusega selles esinevaid seoseid, vähemalt nende lihtsamais avaldusis.

Lobatševski ja Gauss'i katsed ei andnud seepärast seatud küsimustele ammendavat vastust: nad ei leidnud märgatavaid kõrvalekaldumisi sellest, mida andis Eukleidese geomeetria, kuid nad ei saanud ka kindlaks teha selle geomeetria lausete ja materiaalse maailma ruumiliste suhete absoluutset vastavust.

Mitte-eukleidilise geomeetria avastamine mõjutas sügavalt matemaatikute teadvust. Juba see tõsiasi, et on olemas harmooniline ja vasturääkivusteta mitte-eukleidiline geomeetria, purustas sajandeid kestnud usalduse «kaemusse» ja «silmanähtavusse», mis juhtisid muistsete geomeetrite-matemaatikute mõtlemist. Viienda postulaadi sajanditepikkune analüüs pani vankuma geomeetriliste põhikujutluste alustoed, milledele rajanes Eukleidese geomeetria. See analüüs avastas üksikute, näiliselt üksteisest kaugete geomeetriliste tõdede sügavad sõltumused ja näitas materiaalse maailma ruumilisi suhteid uues valguses.

Seepärast osutus Ekleidese aksioomide ja definitsioonide süsteem kui geomeetria ülesehituse alus puudulikuks ja ei vastanud enam teadusliku ranguse kasvavaile nõudeile.

Säärane definitsioon, nagu näiteks «joon on laiuseta pikkus», ei rahuldanud enam matemaatikuid, sest pikkuse ja laiuse mõisted ise kaotasid nende teadvuses selle absoluutse selguse ja aprioorsuse iseloomu, mis neil mõistetel oli Eukleidese ajal. Uue aja matemaatikud ei pidanud küllaldaseks mitmeid Eukleidese definitsioone ilma mõningate täiendusteta, mida ei olnud selgesti väljendatud, kuid vaikides ja märkamatult tunnustati muistsete matemaatikute poolt. Teisiti on raske seletada, miks näiteks definitsiooni 4 ei tohi rakendada ringjoone puhul ning definitsiooni 7 silindri või koonuse pinna puhul.

Geomeetriliste definitsioonide ja aksioomide täiuslikkuse nõudlus viis selleni, et XIX sajandi lõpul seati üles kogu geomeetria aksiomaatilise aluse revideerimise ja täpsustamise küsimus. Töödega sel alal loodi geomeetria uus aksiomaatika, mis täielikult vastab matemaatika nüüdisaegseile rangeile nõudeile.

Alamal anname lühikese ülevaate selle küsimuse nüüdisaja seisundi kohta.

4. Kõige esmalt seame küsimuse, kuidas defineerida geomeetrilisi põhikujundeid: punkti, sirgjoont ja tasapinda. Märgime, et defineerida mingit mõistet tähendab kirjeldada teda varem kindlaksmääratud mõistete abil. Kui aga otsida l i h t s a i m a t e mõistete definitsiooni, siis jõuame vältimatult ainult ühe nimetuse asendamisele teisega, mis omakorda nõuab defineerimist. Nii oli lugu ka Eukleidesega, kes mõistet «joon» defineeris «pikkuse» või «piiri» mõistete abil, jättes viimased defineerimata

Seepärast võib algusest peale jätta defineerimata lihtsaimad geomeetrilised mõisted ja võtta nad algmõisteteks, mida ei saa väljendada lihtsamate mõistete abil. «Punkt», «sirge» ja «tasapind» võetaksegi sellisteks ürgseteks, mittedefineeritavaiks geomeetrilisteks mõisteteks. Vastavalt nendele määratakse terve põhioletuste, «aksioomide» süsteem, mida tunnustatakse tõestamatute lähtetõdedena. Oma olemuselt on need aksioomid materiaalse maailma ruumiliste seoste otstarbekohased abstraktsioonid.

Toome siin saksa matemaatiku Hilbert'i poolt loodud aksioomide süsteemi. Selle süsteemi geomeetria aksioomid liigitatakse 5 rühma.

Esimene rühm — **«ühendamisaksioomid».** Selle rühma aksioomide ülesandeks on kindlaks määrata mõistete: p u n k t, s i r g e ja t a s a p i n d need suhted, mida harilikult iseloomustatakse sõnadega: «sirge läbib punkti», «punkt asetseb sirgel või tasapinnal» jne. See rühm koosneb järgmistest aksioomidest:

1. *Kaks punkti määravad üheainsa neid läbiva sirge.*
2. *Igal sirgel asetseb vähemalt kaks punkti; on olemas vähemalt kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel.*
3. *Kolme mitte ühel sirgel asetsevat punkti läbib üksainus tasapind. Igas tasapinnas asetseb vähemalt üks punkt.*
4. *Kui sirge kaks punkti asetsevad ühel tasapinnal, siis selle sirge kõik punktid asetsevad samal tasapinnal*
5. *Kui kahel tasapinnal on üks ühine punkt, siis on neil veel vähemalt üks ühine punkt.*
6. *On olemas vähemalt neli punkti, mis ei asetse ühel tasapinnal.*

Esimesel pilgul mõned neist aksioomidest võivad näida puudulikud või üldse mittevajalikud. Näiteks aksioom 2 oleks nagu vastuolus hariliku kujutlusega sirgest, millel me kujutleme loendamatut hulka punkte. Kuid ei tohi unustada, et punkti ja sirge mõisted on siin tarvitusele võetud kui ürgsed teineteisest sõltumatud mõisted. Nad võivad esineda üksikult. Seepärast, kui meie ütlesime, et punkt asetseb sirgel või et sirge läbib punkti, siis meie anname punktile ja sirgele omaduse olla teineteisega mingis ühenduses. Et selgemini ette kujutada säärast punktide, sirgete ja tasapindade olemasolu üksikult ja nendevahelisi seoseid, kujutleme neid kui konkreetseid füüsikalisi esemeid. Punkte kujutleme kui mingi kindla suurusega herneteri. Oletame, et need herneterad on kerakujulised ja küllalt pehmed (näiteks vees leotatud), et neid saab nõelaga läbi torgata ja tükkideks lõigata. Sirgeid kujutleme kui hästi peeni terasvardaid ja tasapindu kui hästi õhukesi lesti. Esmalt kujutleme, et need lestad, vardad ja herneterad ei ole millegagi seotud ja et nad asetsevad koguni eri kohtades: ühes kohas kuhi herneid, teises — kimp terasvardaid ja kolmandas — virn lesti. Hakkame nüüd neid allutama nendele tingimustele, mida sisaldavad meie aksioomid. Meie ütleme, et punkt asetseb sirgel, kui varras on hernest läbi torgatud või vähemalt osaliselt tungib temasse. Meie ütleme, et punkt asetseb tasapinnal, kui õhuke lest lõikab hernetera pooleks või tungib ainult servaga herneterasse. Lõpuks ütleme, et sirge asetseb tasapinnal, kui peenike varras on lesta servaks, s. o. kui varras kogu ulatuses liibub lesta servale, ei ühele ega teisele poole välja ulatudes. Mida tähendavad neil tingimustel aksioomid? Nad nõuavad, et meie herneterad, vardad ja lestad asetseksid ruumis nii, et iga paar herneteri oleks läbi torgatud vähemalt ühe vardaga või oleks ühele vardale lükatud (aksioom 1); et iga varras läbiks vähemalt kahte hernetera (aksioom 2); et iga kolmik herneteri oleks ühe lestaga läbi lõigatud ja et iga lest läbiks vähemalt ühe hernetera (aksioom 3); et kui ühele vardale lükitud kaks hernetera mingi lestaga läbi lõigata, siis see lest lõikab kõiki herneteri, mis võiksid veel olla lükitud sellele vardale (aksioom 4); et kui kaks lesta lõikavad ühte ja sama hernetera, siis lõikavad nad veel vähemalt ühte hernetera (aksioom 5); et on olemas vähemalt neli hernetera, mida üks ja sama lest ei lõika (aksioom 6). Neile nõudeile peavad vastama meie herneterad, vardad ja lestad. Säärast hernetera, varraste ja lestade kombinatsiooni ei ole raske ehitada. Tõepoolest, eraldame lestade virnast neli lesta. Lõikame neid servi mööda nii, et igaühel oleks kindla suurusega võrdkülgse kolmnurga kuju. Varraste kimbust võtame 6 varrast ja murrame otstest tükid ära nii, et kõik vardad oleksid võrdkülgse kolmnurga küljega ühepikkused. Edasi võtame 4 hernetera ja moodustame järgmise kujundi: 4-st lestast koostame korrapärase tetraeedri; lestade servade liitekohtadele paigutame vardad ning tetraeedri tippudesse asetame herneterad nii, et lestade servad oleksid neile sisse lõigatud ja vardad otsapidi neisse torgatud.

See herneste, varraste ja lestade komplekt rahuldab kõiki ülemal seatud nõudeid, s. o. vastab kõigile meie aksioomidele.

Sellest näitest nähtub, et 1. rühma aksioomidele vastavate punktide, sirgete ja tasapindade hulk võib olla lõplik. Meie näites on meil ainult 4 punkti, 6 sirget ja 4 tasapinda.

Teise rühma aksioomide — **«järjestuse aksioomide»** ülesandeks on selgesti väljendada need oletused, millele toetume, kui kõneleme ühest või teisest punktide järjestusest sirgel ja tasapinnal. Tähtsamaks mõisteks on siin ühe punkti asetsemine sirgel kahe teise punkti vahel. Selle mõiste loogiline sisu väljendubki teise rühma aksioomides. Selle rühma aksioomid on järgmised:

1. *Kui punkt B asetseb punktide A ja C vahel, siis A, B ja C on üksteisest erinevad sirgjoone punktid ning B asetseb ka C ja A vahel.*
2. *Kui sirgel on antud kaks punkti A ja B, siis on sellel sirgel veel vähemalt üks punkt C nii, et B asetseb A ja C vahel.*
3. *Kolmest sirgel antud punktist ei asetse rohkem kui üks kahe teise vahel.*
4. *Kui antud tasapinnal on antud kolmnurk ABC ja mingi sirge a, mis ei läbi ühtegi kolmnurga tippu ja lõikab lõiguga AB, siis lõikub ta tingimata kas lõiguga BC või lõiguga AC.*

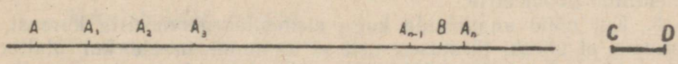
Neis aksioomides esitatud nõudeid peavad rahuldama meie punktid, sirged ja tasapinnad. See tetraeedri tahkude, servade ja tippude komplekt, mis rahuldas 1. rühma aksioomide nõudeid, ei vasta enam 2. rühma aksioomidele. Tõepoolest, igale meie vardale oli lükitud ainult kaks hernest, kuna teise rühma 2. aksioom nõuab, et sirgel oleks vähemalt kolm punkti. Põhjalikum analüüs näitab, et igal sirgel peab asetsema loendamatu hulk punkte ning et 1. ja 2. rühma aksioome koos võetult rahuldab ainult lõpmatu hulk punkte, sirgeid ja tasapindu.[1]

Kolmanda rühma aksioomide — **«kongruentsi aksioomide»** — ülesandeks on kindlaks määrata lõikude ja nurkade võrdsuse põhitingimused. See rühm sisaldab järgmisi aksioome:

1. *Igale sirgele võib igast punktist paigutada antud lõiguga võrdse lõigu.*
2. *Kaks lõiku, mis on võrdsed kolmandaga, on omavahel võrdsed.*
3. *Olgu A, B, C punktid ühel sirgel ja A_1, B_1, C_1 samuti punktid ühel sirgel ning olgu $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$; kui lõikudel AB ja BC ning samuti lõikudel A_1B_1 ja B_1C_1 ei ole ühiseid punkte, siis $AC = A_1C_1$.*
4. *Antud sirge mistahes punktist võib selle sirge ühele või teisele poole ehitada ühe ja ainult ühe nurga, mis on võrdne antuga; iga nurk on võrdne iseenesega.*
5. *Kui kahes kolmnurgas ABC ja $A_1B_1C_1$ küljed $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ ja $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, siis $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.*

Paneme tähele viimast aksioomi.

Geomeetria õpikutes see aksioom esineb kolmnurkade kongruentsuse teise tunnuse järeldusena. Kuid kolmnurkade kongruentsus ise tõestatakse sel juhul pealepaigutamise teel ja eeldab seega kujundite ümberpaigutamise võimalust. Kuid säärane ümberpaigutamine moodustab omakorda mingi uue, seejuures meie süsteemi mittekuuluva aksioomi. Seepärast tulebki 5. lauset võtta kui uut aksioomi. Tema rakendamine asendab geomeetrias tarvitusel oleva kujundite ümberpaigutamise võtte.



Joon. 158.

Neljanda aksioomide rühma moodustab üksainus — **«paralleelide aksioom»**. Seejuures paralleelsirgete olemasolu võimalus tõestatakse ilma uute aksioomideta. Seepärast aksioom nõuab ainsa paralleelsirge võimalust:

antud tasapinnal ei saa ehitada läbi antud punkti rohkem kui ühe sirge, mis ei lõiku antud sirgega. Sellest aksioomist kõnelesime juba eespool.

---

[1] Selle tõestus ei kuulu selle raamatu piiridesse.

Lõpuks viienda ja viimase aksioomide rühma moodustavad **«pidevuse aksioomid»**. See rühm koosneb kahest aksioomist.

1. **Archimedese aksioom.** *Kui AB ja CD on mistahes lõigud, siis sirgel AB on olemas niisugune punktide hulk* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, *et* $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = CD$ *ja et B asetseb* A_{n-1} *ja* A_n *vahel* (joon. 158).

2. **Sirge täielikkuse aksioom.** *Sirge punktid moodustavad punktide süsteemi, millele ei saa lisada uusi punkte, mida võiks lugeda samale sirgele kuuluvateks, rikkumata varem ülesseatud aksioome.* [1]

Esimese — Archimedese aksioomi sisu on selge: aksioom nõuab, et sirge iga punktini, kui kaugel ta olekski märgitud, võib küündida, tehes lõpliku arvu võrdseid samme, ja et seega on võimalik mõõta sirge iga punkti kaugust antud punktist. Seepärast seda aksioomi nimetataksegi mõnikord mõõtmise aksioomiks.

Vaatame, milles seisneb sirge täielikkuse aksioom.

Algebra kursusest on teada, et kui arvteljel märkida kõik ratsionaalsete abstsissidega punktid, siis sellega ei ole veel arvtelje kõik punktid ammutatud: nende punktidega üksi ei ole sirge veel pidevalt täidetud. Irratsionaalsete abstsissidega punktid on veel märkimata. Kui võetakse tarvitusele algebralised irratsionaalarvud igasuguste juurijatega ratsionaalarvude juurte ja ratsionaalsete kordajatega algebraliste võrrandite lahendite näol ja märgitakse nendele vastavad punktid arvteljel, siis arvtelg rikastub uute punktidega, millede abstsissid on irratsionaalsed. Kui arvteljele jääb ikka veel tühje kohti, kuhu võib paigutada veel uusi punkte. Nii näiteks on arvteljel märkimata punktid abstsissidega π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\sqrt{\pi}$ jne. Arvtelg täitub alles siis, kui võetakse tarvitusele kõik reaalarvud. Pärast seda ei saa sinna enam uut punkti paigutada. Sirgel ei ole enam tühja kohta. Täielikkuse aksioom nõuab, et geomeetrilisel sirgel oleks nimelt see omadus: et temal ei oleks tühja kohta, kuhu võiks paigutada uue punkti.

Sellest aksioomist järeldub, et igale reaalarvule vastab valitud abstsisside lugemise alguse ja ühiku ning suuna puhul kindel sirgjoone punkt ja ümberpöördult — igale sirge punktile vastab kindel reaalarv.

Säärane on aksioomide loetelu, milledel praegusel ajal baseerub eukleidiline geomeetria.

5. Kui nüüd analüüsida kogu elementaargeomeetria kursust, siis märkame, et üheski tõestuses meie ei toetunud muule kui ülaltoodud aksioomide süsteemile. Mõned meie oletused, nagu paralleelide aksioom ja mõned ühendamisaksioomid, olid sõnades otse väljendatud, teisi rakendasime vaikides kui endastmõistetavaid. Kongruentsi aksioomid asendasime oletusega, et kujundeid on võimalik ruumis ümber paigutada. Kuid see oletus ise, nagu näitab tema põhjalikum analüüs, on komplitseeritud aksioom, mis on samaväärne kongruentsi aksioomide rühmaga.

---

[1] Täpsemalt: rikkumata kahte esimest ühendamisaksioomi, järjestuse aksioome, esimest kongruentsi aksioomi ja Archimedese aksioomi.

Sisukord.

Stereomeetria.

Esimene peatükk.

Sirged ja tasapinnad.

Teine peatükk.

Kolmas peatükk.

Hulktahukad.

Neljas peatükk.

Ümarkehad.

А. П. Киселёв

ГЕОМЕТРИЯ, ЧАСТЬ ВТОРАЯ, СТЕРЕОМЕТРИЯ

Учебник для 11-го класса средней школы.
На эстонском языке.
Эстонское Государственное Издательство.
Таллин, Пярну маантеэ, 10.

*

Toimetaja K. Kallaste
Tehniline toimetaja H. Kohu
Korrektor S. Vasard

Ladumisele antud 31. VIII 1956. Trükkimisele antud 12 XII 1956. Paber 54×84, $^1/_{16}$. Trükipoognaid 8. Formaadile 60×92 kohaldatud trükipoognaid 6.56. Arvutuspoognaid 6,7. Trükiarv 2000. Tellimise nr. 2069.
Trükikoda „Pioneer“, Tartu, Kastani 38.

Hind rbl. 1.40

6—6

Rbl. 1.40