TARTU ÜLIKOOL

MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND

MATEMAATILISE STATISTIKA INSTITUUT

Silja Paju

Black-Littermani mudel

Magistritöö

finants- ja kindlustusmatemaatika erialal

30 EAP

Juhendaja: prof. Kalev Pärna

TARTU 2014

Black-Littermani mudel

Magistritöö

Silja Paju

Lühiülevaade

Käesoleva töö eesmärk oli uurida Black-Littermani mudelit ning anda üksikasjalised juhised mudeli praktiliseks kasutamiseks. Black-Littermani mudel on protsess, mille käigus saame hinnangud väärtpaberiportfelli optimiseerimisülesandele. See mudel võimaldab investoritel kombineerida lisainformatsiooni („vaateid“), mis neil on erinevate väärtpaberite kohta, turutasakaalu seisundiga. Töös anname ülevaate Markowitzi väärtpaberiportfelli optimiseerimise teooriast ning finantsvarade hindamise mudelist. Tuuakse välja Markowitzi teooria puudused ning kirjeldatakse kuidas Black-Littermani mudel neid probleeme leevendab. Uuritakse Black-Littermani mudelit ja mudeli olulisemaid omadusi ning seda mudelit rakendatakse reaalsetele Eesti aktsiaturu andmetele juhul kui investor kasutab 52-nädala kõrgeima momentumi strateegiat.

Märksõnad: Black-Litterman mudel, Markowitzi teooria, portfelli optimiseerimine, CAPM, momentumi strateegia

The Black-Litterman model

Master’s thesis

Silja Paju

Abstract

The purpose of this master’s thesis is to examine the Black-Litterman model and give step by step introductions that enable the reader to implement this model. This model is a process for developing better inputs for portfolio optimization. It enables invstors to combine addition information („views“) regarding the performance of various assets with the market equilibrium. In the thesis a general overview of Markowitz portfolio optimization theory and capital asset pricing model is given. Next there is brought out some common practical problems encountered in Markowitz optimization theory and how Black-Litterman model helps with these problems. Then the Black-Litterman model and its properties are described and there is also provided an illustration of the model by combining 52-week high momentum strategy with market equilibrium.

Keywords: Black-Litterman model, portfolio optimization, Markowitz theory, CAPM, momentum strategy

Sisukord

Sissejuhatus

Käesoleva magistritöö eesmärk on uurida Black-Littermani mudelit ning omadusi. Black-Littermani mudel on portfelli koostamise matemaatiline mudel, mille lõid Fisher Black ja Robert Litterman 1990 aastal ning sellest ajast alates on kasutuses paljudes finantsinstitutsioonides. Väärtpaberiteportfelli koostamise all mõistame investeerimise strateegiat, mille eesmärk on tasakaalustada risk ja tulusus reguleerides väärtpaberite osakaalusid investeerimisportfellis vastavalt investori riskitaluvusele, eesmärkidele ja investeerimistähtajale.

Optimaalse väärtpaberiportfelli koostamisel saab lähtuda mitmetest meetoditest ja mudelitest. Kuigi neist enamiku puhul püütakse saavutada optimaalset riski-tulu kompromissi, erinevad nad üksteisest nii riski hindamiseks vajavate näitajate kui ka meetodite rakendamiseks vajalike sisendandmete poolest. Klassikalises Markowitzi mudelis vajatakse optimaalse portfelli leidmiseks prognoose väärtpaberite oodatavate tulususte ning kovariatsioonide kohta, millele Black-Littermani mudel annab hinnangud võttes arvesse turutasakaalu seisundi ning investori lisainformatsiooni turu kohta. Seega Black-Littermani mudel kombineerib turult saadava informatsiooni lisainformatsiooniga, mida investor omab turu kohta, ning annab hinnangud klassikalise Markowitzi teooria väärtpaberiportfelli optimiseerimisülesande sisenditele. Kusjuures mudel kasutab turutasakaalu portfelli leidmisel finantsvarade hindamise mudelit.

Magistritöö on jaotatud neljaks osaks. Esimeses osas anname ülevaate klassikalisest Markowitzi teooriast ning finantsvarade hindamise mudelist ning näitame kuidas nad on omavahel seotud. Töö teises osas toome välja mõned Markowitzi portfellimudeli puudused, mida Black-Littermani mudel leevendab. Lisaks kirjeldame põhjalikumalt Black-Littermani matemaatilist mudelit ning näitame kuidas mudel kombineerib investori informatsiooni turu kohta turutasakaalu seisundiga. Töö kolmandas osas vaatame täpsemalt Black-Littermani mudeli olulisemaid omadusi ning mudeli parameetrite määramist. Viimases osas rakendame Black-Littermani mudelit reaalsetele Eesti aktsiaturu andmetele juhul kui investor kasutab nn. 52-nädala kõrgeima momentumi strateegiat. Lisaks võrdleme tulemusi juhuga kui investoril lisainformatsioon puuduv. Teooria rakendamisel ja tulemuste analüüsimisel kasutame tarkvarapaketti R.

1 Markowitzi teooria

Portfelliteooria olulisemaid ülesandeid on leida vastus küsimusele: kuidas peaks investor investeerima oma raha turul saadavatesse väärtpaberitesse. Ühe võimaliku lahenduse annab klassikaline Markowitzi mudel. Vaadeldavas peatükis anname ülevaate klassikalisest Markowitzi mudelist ja finantsvarade hindamise mudelist, mis põhineb Markowitzi teoorial.

1.1 Klassikaline Markowitzi mudel

1958. aastal pakkus Harry Markowitz optimaalse väärtpaberiportfelli leidmise meetodi, mis lähtus portfelli oodatavast tulususest ja tulususe standardhälbest ning mida kutsutakse *klassikaliseks Markowitzi mudeliks* [1]. Markowitzi teooria põhineb investori jõukuse kasulikkuse maksimiseerimisel. Selleks tuuakse sisse investori kasulikkusfunktsiooni mõiste. Investori *kasulikkusfunktsioon* on funktsioon, mis kirjeldab investori jõukuse ja sellest jõukusest saadava kasu vahelist seost. Kasu mõõdetakse abstraktse ühikuga.

Markowitzi portfellimudeli kohaselt teeb investor oma valiku efektiivsete portfellide hulgast, lähtudest suhtumisest riski. Portfelli nimetatakse *efektiivseks*, kui ükski teine portfell ei paku suuremat oodatavat tulusust samal või madalamal riskitasemel või teisiti väljendades madalamat riski sama või suurema oodatava tulususe juures. [2]

Antud töös on tulusused leitud järgmise valemi põhjal:

$$r_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}},$$

kus $r_{i,t}$ on väärtpaberi i tulusus ajahetkel t, $P_{i,t}$ on väärtpaberi i hind ajahetkel t ning $P_{i,t-1}$ on väärtpaberi i hind ajahetkel $t-1$. Järgnevates tähistustes me lihtsuse mõttes ajaindeksit ei näita.

Oletame, et portfelli kuulub N väärtpaberit. Olgu portfelli kuuluvate väärtpaberite tulusused r_i esitatud vektorina

$$r = (r_1, \dots, r_N)^T,$$

oodatavad tulusused $e_i = E(r_i)$ esitatud vektorina

$$e = (e_1, \dots, e_N)^T,$$

osakaalud w_i esitatud vektorina

$$w = (w_1, \dots, w_N)^T,$$

tulususte kovariatsioonid $\sigma_{ij} = cov(r_i, r_j)$ esitatud $N \times N$-mõõtmelise maatriksina

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\sigma_1}^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & {\sigma_2}^2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & {\sigma_N}^2 \end{pmatrix},$$

kus ${\sigma_i}^2$ on väärtpaberi i dispersioon [1]. Paneme tähele, et kovariatsioonimaatriks V on sümmeetriline ning eeldame, et V on positiivselt määratud, st $x^T V x > 0$ iga $x \neq 0$ korral, seega V on pööratav ja leidub V^{-1}.

Portfelli tulusus on väärtpaberite tulususte kaalutud summa

$$r_p = w_1 r_1 + \cdots + w_N r_N = \sum_{i=1}^{N} w_i r_i = w^T r = r^T w. \tag{1}$$

Seega portfelli oodatav tulusus ja tulususe dispersioon on vastavalt

$$e_p = E(r_p) = E(\sum_{i=1}^{N} w_i r_i) = \sum_{i=1}^{N} w_i e_i = w^T e = e^T w, \tag{2}$$

$${\sigma_p}^2 = D(r_p) = D(\sum_{i=1}^{N} w_i r_i) = \sum_{i,j} w_i w_j \sigma_{ij} = w^T V w. \tag{3}$$

Antud töös vaatleme riskimõõduna dispersiooni (standardhälvet), seega ${\sigma_i}^2 = D(r_i)$ on i-nda vara risk ja ${\sigma_p}^2$ on portfelli risk. Ütleme, et väärtpaber on *riskantne*, kui selle risk ${\sigma_i}^2$ on positiivne ja *riskivaba* kui selle risk on 0. Antud alapeatükis eeldame, et kõik väärtpaberid vaadeldavas portfellis on riskantsed ehk ${\sigma_i}^2 > 0$. [3]

Väärtpaberiga seostuvaid riske on kahte liiki: süstemaatiline ja spetsiifiline risk. *Süstemaatiline risk* on seotud makroökonoomiliste jõududega turul kui tervikul mitte kindla väärtpaberiga (näiteks muutused intressimäärades mõjutavad kogu turgu).

Spetsiifiline risk on seotud kindla väärtpaberiga või väärtpaberi grupiga. Spetsiifilist riski saab hajutada, süstemaatilist mitte. [3]

Markowitzi portfelli kitsendusteta optimiseerimise ülesanne [4] on järgmine: leida kaalud $(w_1, \dots, w_N)$ nii et portfelli tulususe dispersioon ${\sigma_p}^2 = w^T V w$ oleks võimalikult väike ning samal ajal portfelli oodatav tulusus $e_p = w^T e$ võimalikult suur. Kuna need kaks eesmärki on vastandlikud, siis tuleb nende vahel leida teatud kompromiss, selletõttu püütakse maksimiseerida kasulikkusfunktsiooni $U = e_p - \frac{1}{2}\lambda {\sigma_p}^2$ ehk leiame

$$\max_w \left\{ w^T e - \tfrac{\lambda}{2} w^T V w \right\}, \tag{4}$$

kus konstant $\lambda \geq 0$ on *investori riskikartlikkus*. Mida suurem on λ, seda riskikartlikum on investor. Konstanti λ võib vaadelda kui täiendava oodatava tulu suurust, mida investor nõuab, et võtta enda kanda üks ühik täiendavat riski (dispersiooni) [2]. Paneme tähele, et funktsioon U on nõgus ning seega leidub maksimumpunkt [5].

Järgnevalt leiame kaalude vektori w^*, mis on ülaltoodud ülesande (4) lahendiks [5]. Selleks võtame funktsioonist U tuletise w järgi ja võrdsustame saadud tulemuse nulliga:

$$\frac{d}{dw}\left(w^T e - \frac{\lambda}{2} w^T V w \right) = e - \lambda\, V w = 0,$$

millest

$$e = \lambda\, V w \tag{5}$$

ehk

$$w^* = (\lambda\, V)^{-1} e. \tag{6}$$

Markowitzi portfelli optimiseerimise ülesanne kitsendusega $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ on ülesanne (4) tingimusel, et $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$, seega antud juhul on ülesanne kujul

$$\max_w \left\{ w^T e - \tfrac{\lambda}{2} w^T V w \right\} \tag{7}$$

$$\text{nii et } \sum_{i=1}^{N} w_i = w^T \mathbf{1} = 1,$$

kus $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ on N-mõõtmeline vektor. [6]

Kitsendustega optimiseerimisülesande puhul leiame optimaalsed kaalud w^* kasutades nn. *Lagrange'i kordajate meetodit* [6]. Antud juhul Lagrange'i funktsioon on järgmine:

$$L = w^T e - \frac{\lambda}{2} w^T V w + \gamma(1 - w^T \mathbf{1}),$$

kus γ on Lagrange'i kordaja. Järgmise sammuna leiame funktsiooni L osatuletised ja võrdsustame need nulliga

$$\frac{\partial L}{\partial w} = e - \lambda V w - \gamma \mathbf{1} = \mathbf{0}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 1 - w^T \mathbf{1} = 0. \tag{9}$$

Korrutame võrrandi (8) mõlemaid pooli maatriksiga V^{-1} ning avaldades w saame

$$w = (\lambda V)^{-1} e - \gamma (\lambda V)^{-1} \mathbf{1}, \tag{10}$$

mille asendame võrrandisse (9) võttes arvesse V sümmeetrilisust

$$[(\lambda V)^{-1} e - \gamma (\lambda V)^{-1} \mathbf{1}]^T \mathbf{1} = 1,$$

$$\lambda^{-1} e^T V^{-1} \mathbf{1} - \gamma \lambda^{-1} \mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{1} = 1.$$

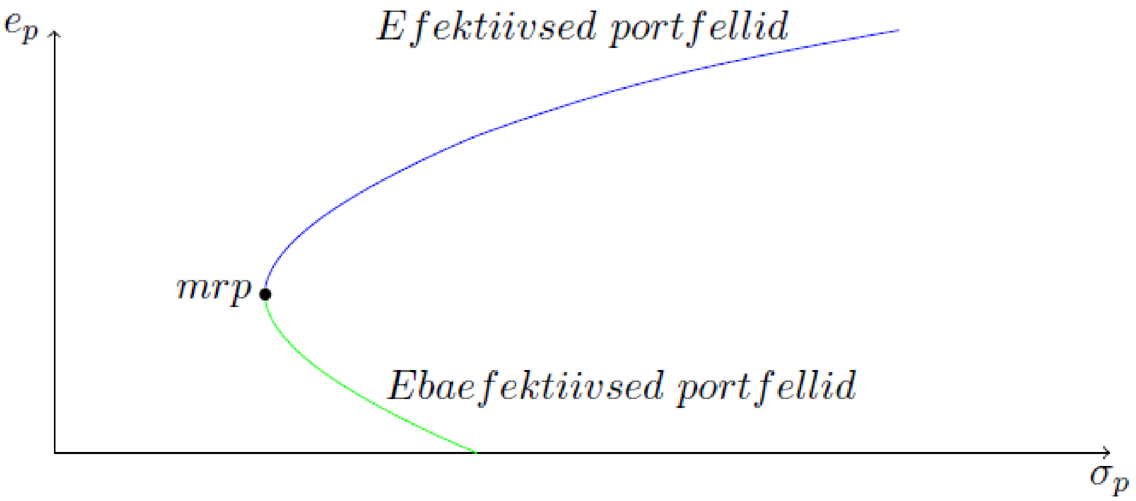
Avaldame eelmisest võrrandist γ

$$\gamma = \frac{e^T V^{-1} \mathbf{1} - \lambda}{\mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{1}},$$

mis on konstant ning asendades selle võrrandisse (10) saame optimaalse portfelli

$$w_* = \lambda^{-1} V^{-1} e - \left(\frac{e^T V^{-1} \mathbf{1} - \lambda}{\mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{1}}\right) \lambda^{-1} V^{-1} \mathbf{1}. \tag{11}$$

Muutes λ väärtust valemis (11) muutuvad ka optimaalsed kaalud w^* ning leides valemite (2) ja (3) abil e_p ja σ_p iga λ korral saame punktide hulga (e_p, σ_p), kus igale oodatavale tulususele vastab minimaalne risk. Sellist punktide hulka kitsendusega optimiseerimisülesande puhul kutsutakse *portfellirajaks* (vt joonis 1) ning igat punkti portfellirajal nimetatakse *raja portfelliks*. Portfelliraja ülemist haru nimetatakse *efektiivseteks portfellideks* ehk *Markowitzi kõveraks* ning alumist haru *ebaefektiivseteks portfellideks*. Punktid, mis paiknevad Markowitzi kõvera all, vastavad portfellidele, mille oodatav tulusus on sama mis efektiivsuspiiril paiknevatel portfellidel, kuid suurema riskiga või vastavad portfellidele, mille risk on sama, kuid väiksema oodatavat tulususega. Ala Markowitzi kõvera sees nimetatakse *Markowitzi kuuliks*. Optimaalne portfell asub Markowitzi kõveral, efektiivsete portfellide hulgas ning sõltub investori riskikartlikkusest λ. ([7],[3])



Joonis 1. Portfelliraja, kus on ära toodud ka efektiivsed ja ebaefektiivsed portfellid. Punkt mrp tähistab minimaalse riskiga portfelli.

1.2 CAPM ehk finantsvarade hindamise mudel

Finantsvarade hindamise mudeli [1] ehk CAPM väljatöötamisel oli lähtekohaks Markowitzi portfelliteooria. Mudeli väljatöötamise põhiau kuulub William Sharpe'ile, kuid enam-vähem samal ajal jõudsid sama mudelini ka Jack Treynor, John Lintner ja Jan Mossin 1960-ndatel. Markowitzi teooria eeldas, et kõik väärtpaberid portfellis on riskantsed, kuid nüüd lisame mudelisse ka riskivaba väärtpaberi. CAPM mudeli korral saab investor oodatava tulususe või riski tasakaalu muuta paremaks, investeerides osa kapitalist riskantsesse väärtpaberitesse ja teise osa riskivabasse väärtpaberisse [3].

Koosnegu suvaline portfell A N riskantsest väärtpaberist, mille tulususe, oodatava tulususe ja tulususe dispersiooni (riski) tähistame vastavalt r_A, $e_A = E(r_A)$, ${\sigma_A}^2$. Riskivaba väärtpaberi tulumäära tähistame r_f, mis on konstant.

Järgmisena konstrueerime uue portfelli investeerides kogukapitalist osa X riskantsesse portfelli A ja ülejäänud osa $1 - X$ riskivabasse väärtpaberisse. Näiteks, kui $X \equiv 0.7$, siis 70% rahast paigutatakse portfelli A ja 30% paigutatakse riskivabasse väärtpaberisse. Me lubame suurusel X olla mistahes mittenegatiive arv. Juhul $X > 1$ laename raha riskivaba määraga r_f ning investeerime selle portfelli A.

Tähistades uue portfelli sümboliga C, on selle tulusus järgmine:

$$r_C = Xr_A + (1 - X)r_f.$$

Kuna X ja r_f on konstandid, siis portfelli C oodatav tulusus ja risk on vastavalt

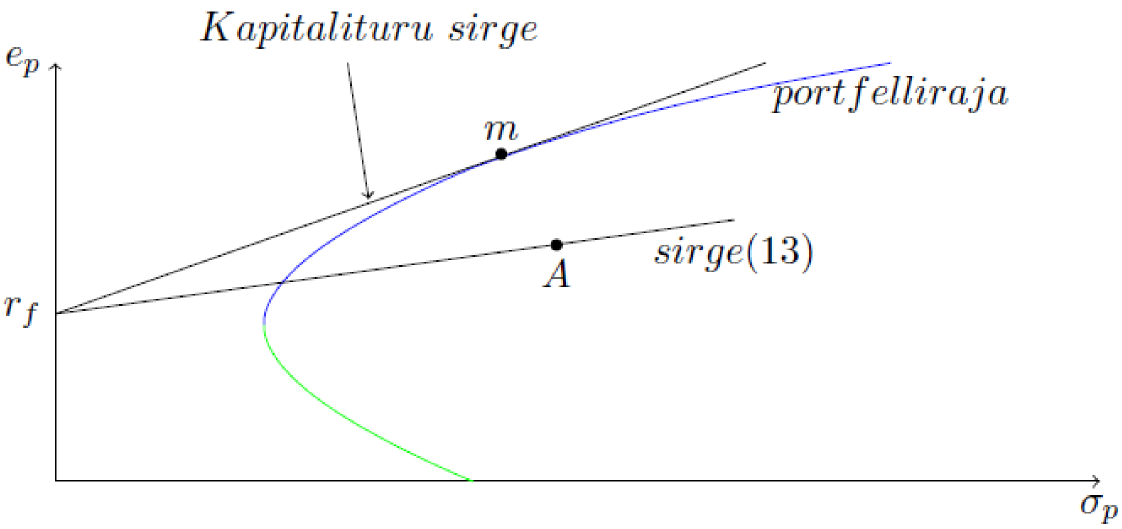
$$e_C = E(r_C) = E\big(Xr_A + (1 - X)r_f\big) = Xe_A + (1 - X)r_f, \tag{12}$$

$${\sigma_C}^2 = D(r_C) = D\big(Xr_A + (1 - X)r_f\big) = X^2{\sigma_A}^2.$$

Kuna ${\sigma_C}^2 = X^2{\sigma_A}^2$, siis $X = \frac{\sigma_C}{\sigma_A}$, mille asendamisel valemisse (12) saame

$$e_C = \frac{\sigma_C}{\sigma_A}e_A + \left(1 - \frac{\sigma_C}{\sigma_A}\right)r_f = \frac{\sigma_C}{\sigma_A}e_A + r_f - \frac{\sigma_C}{\sigma_A}r_f = r_f + \frac{e_A - r_f}{\sigma_A}\sigma_C. \tag{13}$$

Joonisel 2 on esitatud sirge (13), mis läbib punkti A. Punktis A investeerime 100% portfelli A ($X = 1$). Punktist A vasakule jäävad sirge (13) punktid on kombinatsioonid portfellist A ja investeerimisest riskivabasse väärtpaberisse ($0 < X < 1$) ning punktist A paremale jäävad sirge (13) punktid on kombinatsioonid portfellist A ja raha laenamisest riskivaba määraga ($X > 1$) [8].



Joonis 2. Sirge (13), kapitalituru sirge, portfelliraja ning turuportfell. Punkt $\boldsymbol{A}$ tähistab portfelli $\boldsymbol{A}$, punkt $\boldsymbol{m}$ tähistab turuportfelli ning $\boldsymbol{r_f}$ tähistab riskivaba tulumäära.

Kõrgeimat tulusust etteantud riskiga σ_C saavutatakse, kui portfell A valitakse Markowitzi kõvera ja sirge (13) lõikumispunktist. Seda punkti nimetatakse *turuportfelliks* ning antud punkti läbivat sirget *kapitalituru sirgeks* (vt joonis 2). Kui meil on σ_C fikseeritud ning sobiv portfell A raja portfellide hulgast valitud, siis kõrgeim tulusus saavutatakse, kui sirge (13) tõus $\frac{e_A - r_f}{\sigma_A}$ on nii suur kui võimalik. Võimaliku maksimaalse tõusu saavutame, kui keerame sirget vastupäeva kuni A on sirge ja Markowitzi kõvera puutepunkt. Iga punkt kapitalituru sirgel on turutasakaalu seisund ehk efektiivne portfell ning ratsionaalne investor investeerib portfelli, mis asub kapitalituru sirgel. Kapitalituru sirge võrrand on järgmine:

$$e_C = r_f + \frac{e_m - r_f}{\sigma_m}\sigma_C, \tag{14}$$

kus m tähistab turuportfelli ([7],[3]). Valemis (14) väljendab tõus $\frac{e_m - r_f}{\sigma_m}$ täiendavat tulu, mida investor saab, suurendades efektiivse portfelli riskitaset σ_C ühe ühiku võrra (tegemist on nö riski turuhinnaga) [9].

Kuna turuportfell sisaldab kõiki väärtpabereid, siis portfellil puudub spetsiifiline risk – spetsiifiline risk on täielikult hajutatud. Seega turuportfelliga on seotud ainult süstemaatiline risk. [3]

Nüüd me teame, kuidas konstrueerida efektiivne portfell – investeerides osa kogukapitalist turuportfelli ja ülejäänud osa kogukapitalist riskivabasse väärtpaberisse. Järgmisena tuletame mudeli, mille abil saab leida riskantse väärtpaberi hinna, kui turg on tasakaalus [1].

Vaatleme suvalist turuportfelli m väärtpaberit k. Oletame, et investor investeerib osa a oma vahenditest väärtpaberisse k ja ülejäänud osa $1-a$ vahendidest turuportfelli m. Kuna a on konstant, siis uue portfelli, tähistame F, tulusus, oodatav tulusus ja tulususe dispersioon on järgmised:

$$r_F = ar_k + (1-a)r_m,$$

$$e_F = E(r_F) = E(ar_k + (1-a)r_m) = ae_k + (1-a)e_m, \tag{15}$$

$$\sigma_F{}^2 = D(r_F) = D(ar_k + (1-a)r_m)$$

$$= a^2\sigma_k{}^2 + (1-a)^2\sigma_m{}^2 + 2a(1-a)cov(r_k, r_m). \tag{16}$$

Muutes a väärtust valemites (15) ja (16), moodustavad punktid (e_F, σ_F) kõverjoone. Kusjuures $a = 0$ korral on tegemist turuportfelliga m. Kuna kapitalituru sirge (14) on efektiivsuspiir, siis vaadeldav kõverjoon ei saa läbida kapitalituru sirget. Seega $a = 0$ korral peab kõverjoon puutuma kapitalituru sirget punktis m. Puutuja definitsiooni kohaselt kõvera puutuja tõus ja kõvera tõus ühtivad. Leiame kõvera tõusu punktis m ehk $a = 0$ korral:

$$\left.\frac{\partial e_F}{\partial \sigma_F}\right|_{a=0} = \left.\frac{\partial e_F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \sigma_F}\right|_{a=0} = \left.\frac{\partial e_F/\partial a}{\partial \sigma_F/\partial a}\right|_{a=0}.$$

Selleks võtame valemitest (15) ja (16) esimest järku tuletise a järgi ning võtame $a = 0$, saame:

$$\left.\frac{\partial e_F}{\partial a}\right|_{a=0} = \left.\frac{\partial(ae_k + (1-a)e_m)}{\partial a}\right|_{a=0} = (e_k - e_m)|_{a=0} = e_k - e_m,$$

$$\left.\frac{\partial \sigma_F}{\partial a}\right|_{a=0} = \left.\frac{\partial\left(\sqrt{a^2\sigma_k{}^2 + (1-a)^2\sigma_m{}^2 + 2a(1-a)cov(r_k, r_m)}\right)}{\partial a}\right|_{a=0}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(a^2\sigma_k{}^2 + (1-a)^2\sigma_m{}^2 + 2a(1-a)cov(r_k, r_m)\right)^{-\frac{1}{2}} \times\right.$$

$$\left.\times\left(2a\sigma_k{}^2 - 2(1-a)\sigma_m{}^2 + 2(1-a)cov(r_k, r_m) - 2acov(r_k, r_m)\right)\right]_{a=0}$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma_m{}^2)^{-\frac{1}{2}}\left(-2\sigma_m{}^2 + 2cov(r_k, r_m)\right)$$

$$= \frac{cov(r_k, r_m) - \sigma_m{}^2}{\sigma_m}.$$

Seega punktis m on turuportfelli ja väärtpaberist k koosnevaid portfelle kajastava kõverjoone puutuja tõus kapitalituru tasakaalu tingimustes leitav järgmiselt:

$$\left.\frac{\partial e_F/\partial a}{\partial \sigma_F/\partial a}\right|_{a=0} = \frac{e_k - e_m}{(cov(r_k, r_m) - \sigma_m{}^2)/\sigma_m}. \tag{17}$$

Kuna portfell m asub efektiivsuspiiri ja kapitalituru sirge puutepunktis ning kõverjoonel ei saa mingis konkreetses punktis olla rohkem kui üks puutuja, siis valem (17) peab võrduma kapitalituru sirge tõusuga $\frac{e_m - r_f}{\sigma_m}$:

$$\frac{e_k - e_m}{(cov(r_k, r_m) - \sigma_m{}^2)/\sigma_m} = \frac{e_m - r_f}{\sigma_m},$$

millest

$$(e_k - e_m)\sigma_m{}^2 = (cov(r_k, r_m) - \sigma_m{}^2)(e_m - r_f)$$

ning millest saame mudeli, mida nimetatakse *finantsvarade hindamise mudeliks* ehk *CAPM mudeliks*:

$$e_k = r_f + \beta_k\left(e_m - r_f\right)$$

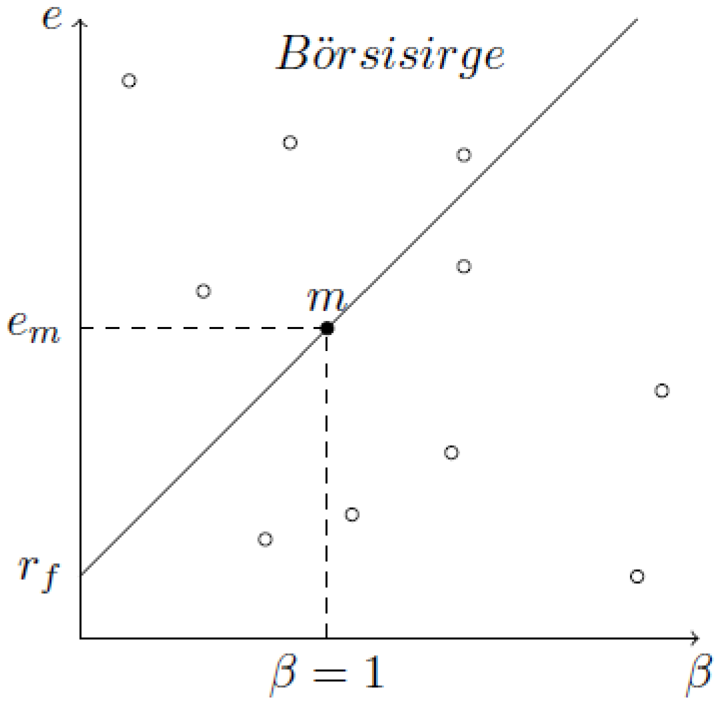
ehk

$$e_k - r_f = \beta_k\left(e_m - r_f\right), \tag{18}$$

kus e_k on väärtpaberi k oodatav tulusus tasakaalu seisundis, r_f on riskivaba tulusus, $e_m = E(r_m)$ on turuportfelli oodatav tulusus ning $\beta_k = \frac{cov(r_k, r_m)}{\sigma_m{}^2}$ väärtpaberi k

süstemaatilist riski väljendav beetakordaja, suurust $e_k - r_f$ nimetatakse *üleliigseks tulususeks* (*riskipreemiaks*), suurust $e_m - r_f$ nimetatakse *turu riskipreemiaks*.

CAPM mudeli kohaselt kompenseeritakse investorile üksnes sellise riski võtmine, mida pole võimalik kõrvaldada väärtpaberiportfelli koostamise teel (süstemaatiline risk) [1]. Suurus β_k väljendab väärtpaberi tulususe tundlikkust turult saadava tulususe muutuste suhtes: kui turu riskipreemia suureneb 1% võrra, siis k-nda väärtpaberi riskipreemia kasvab β_k% võrra [8].



Joonis 3. Börsisirge. Joonisel $\boldsymbol{m}$ tähistab turuportfelli, $\boldsymbol{r_f}$ tähistab riskivaba tulumäära, punktid börsisirge peal ja all tähistavad individuaalsete väärtpaberite beetakordajatele vastavat oodatavat tulusust.

Võrrandi (18) graafikut e_k ja β_k suhtes nimetatakse *börsisirgeks* (vaata joonis 3). Kuna tegemist on lineaarse mudeliga, siis peavad kõigi väärtpaberite süstemaatilist riski arvestavad oodatavad tulusused asuma börsisirgel [1]. Paneme tähele, et kui $\beta_k = 1$, siis

$$e_k = r_f + 1(e_m - r_f) = e_m.$$

Kuigi me eeldame, et investorid on ratsionaalsed ning puuduvad investeerimise piirangud, siis praktikas see täitsa nii ei ole. Seega praktikas on väärtpaberid jaotunud börsisirge ümber laiali. Börsisirgest allpool asuv punkt on väärtpaber, mille tulusus on fikseeritud riski korral turu mõttes liiga väike. Antud olukorras keegi ei osta seda väärtpaberit ning vaadeldava väärtpaberi hind langeb, mis omakorda tõstab selle väärtpaberite tulusust tulevikus. Analoogselt, kui väärtpaber asub börsisirgest ülevalpool, siis vaadeldava väärtpaberi tulusus on fikseeritud riski korral turu mõttes liiga kõrge ning sel juhul ostab rohkem investoreid seda väärtpaberit, mis põhjustab väärtpaberi hinna languse, mis omakorda langetab väärtpaberi tulusust tulevikus. Seega liiguvad kõik väärtpaberid börsisirgele lähemale. [3]

2 Black-Littermani mudel

F. Black ja R. Litterman tutvustasid Black-Littermani mudelit 1992. aastal avaldatud artiklis "Global Portfolio Optimization" [10]. *Black-Littermani mudel* on väärtpaberite paigutuse mudel, mis kombineerib turutasakaalu lisainformatsiooniga, mida investor omab turu kohta. Antud peatükis toome välja mõned Markowitzi mudeli puudused, mida Black-Littermani mudel leevendab, anname ülevaate Black-Littermani mudelist ning näitame kuidas see mudel kombineerib turutasakaalu investori lisainformatsiooniga turu kohta.

2.1 Black-Littermani mudeli idee

Praktikas Markowitzi mudel ei tööta nii hästi kui teoorias. Väärtpaberid, millel on kõrged oodatavad tulusused ja madalad standardhälbed, hinnatakse üle ning väärtpaberid, millel on madalad oodatavad tulusused ja kõrged standardhälbed, alahinnatakse. Seega oodatavate tulususte ja kovariatsioonide hinnangute suured vead põhjustavad vigu optimeeritud portfelli kaaludes. Markowitzi mudel eeldab, et sisendid on täpsed ning ilma hindamisveata. Väike muutus ühe väärtpaberi keskväärtuses võib põhjustada väga suure erinevuse portfelli kaaludes [11]. Seega saadud optimaalsed portfellid on riski-tulususe hindamisvigade suhtes ebastabiilsed ja väga tundlikud. [12]

Klassikalise Markowitzi mudeli hinnangute vigade vähendamisel on häid tulemusi andnud Black-Littemanni mudel. Black-Littermani mudel kasutab väärtpaberite tulususte hindamisel lähtepunktina CAPM turutasakaalu portfelli, mille kombineerib investori lisainformatsiooniga ning annab hinnangud oodatavale üleliigsele tulususele ja tulususte kovariatsioonidele, mida kasutatakse Markowitzi teooria optimiseerimisülesande sisenditena. Black-Littermani mudel kui väärtpaberiportfelli koostamise protsessi osa annab palju stabiilsema ja mitmekesisema portfelli kui klassikaline Markowitzi mudel. [12]

Klassikalise Markowitzi teooria rakendamisel on vaja ette anda kõikide eksisteerivate väärtpaberite oodatavate tulususte ja kovariatsioonide hinnangud. Kuna tänapäeval on väga palju väärtpaberid, siis portfellihalduritel on ebareaalne omada kogu vajalikku informatsiooni kõikide väärtpaberite ja ettevõtete kohta maailmas. Seega pole võimalik portfellihalduril leida häid hinnanguid. Black-Littermani mudeli korral ei ole vaja ennustusi kõikide eksisteerivate väärtpaberite kohta, vaid mudel kombineerib investori informatsiooni ja ettekujutused („vaated“) ühe, mitme või kõikide väärtpaberite kohta turutasakaaluga. [12]

Tänapäeval on väga palju kauplemise strateegiaid ning paljusid neist ei saa väljendada oodatavate tulususte ja kovariatsioonide kaudu ehk niiöelda *absoluutsete vaadete* kaudu. *Vaade* on investori veendumus investeeringu riski ja tulususe omaduste kohta [13]. *Kauplemisstrateegia* on kindel plaan, mida investor järgib, et saada tulu võttes turul lühikese või pika positsiooni. Paljud strateegiad väljendavad *suhtelist vaadet*, st strateegia annab suhtelised väärtpaberite järjestused, mille korral väärtpaberid edestavad või on kehvemad teistest väärtpaberitest. Vaatleme näiteks kahte väärtpaberit A ja B. Absoluutne vaade antud kahe väärtpaberi kohta on näiteks: väärtpaberite A ja B ühe kuu oodatavad tulusused on vastavalt 1.2% ja 1.7% ning standardhälbed on vastavalt 5% ja 5.5%. Suhteline vaade oleks järgmine: järgmise kuu jooksul edestab väärtpaber B väärtpaberit A 0.5% võrra või väärtpaber B edestab järgmise kuu jooksul väärtpaberit A. Seega on raske teisendada suhtelisi vaateid portfelli optimiseerimise ülesande sisenditeks. Black-Littermani mudeli korral võivad investori vaated olla nii absoluutsed kui ka suhtelised. Lisaks võivad vaated olla saadud kvantitatiivsete mudelite või mõne muu protsessi tulemusel. [12]

2.2 Black-Littermani portfelli mudel

Black-Littermani mudel eeldab, et informatsioon üleliigse tulususe kohta saadakse kahest erinevast allikast: investori enda vaadetest ja turutasakaalu seisundist. Mudelis kasutatakse nn *Bayesi lähenemist* – eeldatakse, et oodatavad tulusused on juhuslikud suurused ning need ei ole vaadeldavad [4].

Vaatleme N väärtpaberit. Olgu väärtpaberite tulusused $r = (r_1, \dots, r_N)^T$ normaal-jaotusega

$$r \sim N(\mu, V),$$

kus $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)^T$ on väärtpaberite tegelikud oodatavad tulususte N-mõõtmeline vektor ning V on väärtpaberite tulususte $N \times N$-mõõtmeline kovariatsioonimaatriks.

Alustame CAPM mudelist (18), mis on väärtpaberi tulususte hindamise alguspunkt ja esitame selle vektorkujul:

$$e - r_f = \beta(e_m - r_f), \tag{19}$$

kus $e = (e_1, \dots, e_N)^T$ on väärtpaberite oodatavate tulususte N-mõõtmeline vektor, r_f on riskivaba tulusus, e_m on turuportfelli oodatav tulusus ja $N \times 1$-mõõtmeline vektor $\beta = \frac{cov(r,r_m)}{{\sigma_m}^2}$, kus r_m ja ${\sigma_m}^2$ on vastavalt turuportfelli tulusus ja tulususe dispersioon.

Olgu $w_m = (w_{m1}, \dots, w_{mN})^T$ turuportfelli kaalud, siis vastavalt valemile (1) on turuportfelli tulusus $r_m = \sum_{i=1}^N w_{mi} r_i = (w_m)^T r = r^T w_m$.

Tähistame portfelli üleliigse tulususe $\Pi = e - r_f$, mis on n-mõõtmeline vektor.

Valemi (19) abil saame [12]

$$\Pi = e - r_f = \beta(e_m - r_f) = \frac{cov(r, r_m)}{{\sigma_m}^2}(e_m - r_f) = \frac{e_m - r_f}{{\sigma_m}^2}\, cov(r, r^T w_m).$$

Tähistades

$$\delta = \frac{e_m - r_f}{{\sigma_m}^2}, \tag{20}$$

ja arvestades, et $cov(r, r^T w_m) = cov(r, r^T) w_m = V w_m$ saame seose

$$\Pi = \delta V w_m. \tag{21}$$

Arvestades, et Markowitzi teooria kitsendusteta optimiseerimisülesande (4) lahendi (6) korral turutasakaalu seisundi üleliigne tulusus on $\Pi = \lambda\, V w_m$, siis võime võtta $\lambda = \delta$ ehk δ väljendab antud olukorras investori riskikartlikkust [5]. Eeldame, et V on teada. Praktikas enamasti leitakse kovariatsioonimaatriks V ajalooliste andmete põhjal [5].

Eeldame, et Π saab esitada kujul

$$\Pi = \mu + \varepsilon_\Pi, \tag{22}$$

kus μ on väärtpaberite tegelike oodatavate tulususte N-mõõtmeline vektor, mudeli viga ε_Π on N-mõõtmeline vektor ning $\varepsilon_\Pi \sim \mathrm{N}(0, \tau V)$, $\tau \ll 1$ on konstant. Eeldame, et oodatavad tulused on normaaljaotusega juhuslikud suurused

$$\mu \sim N(\Pi, \tau V),$$

kusjuures $\mathrm{cov}(\varepsilon_\Pi, \mu) = 0$. Vea dispersioon τV väljendab kindlust, kui hästi saame ennustada tasakaalu seisundi oodatavaid tulususi. Mida väiksem τ, seda kindlamad oleme tasakaalu seisundi hinnangutes ja vastupidi. Kuna info turu kohta on meil etteantud ning maatriks V ajalooliste andmete põhjal hinnatud, siis saame leida vektori Π valemi (21) abil. Seega valemis (22) on meil Π ja τV määratud. ([4], [14])

Oletame, et investoril on $K < N$ unikaalset (kordumatut) vaadet. Portfellihalduri ülesanne on luua asjakohased vaated ja hinnata nende oodatav tulusus ning risk. *Vaate portfelliks* nimetatakse väärtpaberite osakaalude vektorit, mis kirjeldab kindlat vaadet [13]. Vaate portfelli loomisel on erinevaid viise – näiteks võivad vaated olla saadud kvalitatiivse või kvantitatiivse protsessi tulemusena. Olgu vaadete tulusused tähistatud vektorina q, mis on K mõõtmeline. Investori vaated väljendugu järgmiselt:

$$q = P\mu + \varepsilon_q, \tag{23}$$

kus μ on väärtpaberite tegelike oodatavate tulususte N-mõõtmeline vektor, P on $K \times N$-mõõtmeline vaadete kaalude maatriks, viga ε_q on K-mõõtmeline vektor ja $\varepsilon_q \sim \mathrm{N}(0, \Omega)$ ning $K \times K$-mõõtmeline kovariatsioonimaatriks Ω väljendab vaadete usaldusväärsust. Mida suurem on Ω element, seda ebakindlam me vastava vaate suhtes oleme. Tavaliselt võetakse maatriksi Ω elemendid väljaspool diagonaali võrdeks nulliga, kuna enamasti eeldatatakse, et vaated on omavahel sõltumatud ja mittekorreleeruvad, mida eeldame ka meie antud töös. Maatriksi Ω elemendid võivad peadiagonaalil olla võrdsed ka nulliga, mis tähendab, et me oleme vaates täiesti, s.t 100%, kindlad. Seega Ω ei pea olema pööratav, kuid praegu eeldame, et Ω on pööratav [5]. Suhtelise vaate korral on maatriksi P rea summa 0 ja absoluutse vaate korral 1. Maatriksi P iga rida on vaate portfell. Eeldame, et

$$P\mu \sim N(q, \Omega),$$

kusjuures $\mathrm{cov}(\varepsilon_q, \mu) = 0$. Lisaks eeldame, et vigade vektorid ε_Π ja ε_q on mittekorreleeruvad. Valemis (23) on investori poolt määratud vektor q ning maatriksid P ja Ω. ([4], [14])

<u>Näide.</u>

Oletame, et aktsia portfell koosneb viiest aktsiast, s.t $N = 5$, ning investoril on kaks vaadet:

1. Aktsia 1 tulusus on 1.5% ehk $\mu_1 = 1.5\%$.
2. Aktsia 3 tulusus edestab aktsia 2 tulusust 4% võrra ehk $\mu_3 - \mu_2 = 4\%$.

Näeme, et 1. vaade on absoluutne vaade ning 2. vaade on suhteline vaade.

Siis

$$q = \begin{pmatrix} 1.5\% \\ 4\% \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \end{pmatrix}, \varepsilon_q = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

ja seos (23) avaldub kujul

$$\begin{pmatrix} 1.5\% \\ 4\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

Maatriksi P esimene rida väljendab 1. vaadet ning teine rida 2. vaadet. Paneme tähele, et vead ε_1 ja ε_2 ei ole otseselt ette antud, ette antakse vigade dispersioonid, mis on erinevate vaadete tulususte dispersioonid. Näiteks

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1\%^2 & 0 \\ 0 & 1\%^2 \end{pmatrix}$$

vastab kõrgele usaldusväärsusele vaadete suhtes ja vastupidi

$$\Omega = \begin{pmatrix} 5\%^2 & 0 \\ 0 & 7\%^2 \end{pmatrix}$$

vastab palju väiksemale usaldusväärsusele vaadete suhtes.

2.3 Investori vaadete kombineerimine turutasakaaluga

Järgmisena kombineerime investori vaated (23) turutasakaalu seisundiga (22) ([12],[5]). Selleks läheb meil vaja üldistatud vähimruutude meetodit.

<u>Üldistatud vähimruutude meetod</u>. Olgu $y = X\gamma + \epsilon$, kus $y \in \mathbb{R}^k$ on teada, $X \in \mathbb{R}^{k\times n}$ on täisveeruastakuga maatriks ning mittejuhuslik, $\gamma \in \mathbb{R}^n$ on tundmatu ja $\epsilon \in \mathbb{R}^k$ on vealiige, $E(\epsilon) = 0$, $D(\epsilon) = W \in \mathbb{R}^{k\times k}$, kus W on positiivselt määratud. Siis

$$\hat{\gamma} = (X^T W^{-1} X)^{-1} (X^T W^{-1} y) \tag{24}$$

on parim lineaarne nihketa hinnang vektorile γ ja hinnangu kovariatsioonimaatriks on $(X^T W^{-1} X)^{-1}$. [15]

Viime võrrandid (22) ja (23) kujule $y = X\gamma + \epsilon$, kus

$$y = \begin{pmatrix} \Pi \\ q \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix}, \mathrm{W} = \begin{pmatrix} \tau V & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}, \epsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_\Pi \\ \varepsilon_q \end{pmatrix} \text{ ning } \gamma = \mu,$$

kus I on $N \times N$ ühikmaatriks ning vektor μ on võetud kui protsessi $r \sim N(\mu, \mathrm{V})$ tundmatud keskväärtused [5].

Järgmisena kontrollime kas üldistatud vähimruutude meetodi eeldused meie juhul kehtivad. Eelnevast teame, et

$$E(\epsilon) = E\left[\begin{pmatrix} \varepsilon_\Pi \\ \varepsilon_q \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$D(\epsilon) = D\left[\begin{pmatrix} \varepsilon_\Pi \\ \varepsilon_q \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mathrm{D}(\varepsilon_\Pi) & \mathrm{cov}(\varepsilon_\Pi, \varepsilon_q) \\ \mathrm{cov}(\varepsilon_q, \varepsilon_\Pi) & \mathrm{D}(\varepsilon_q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau V & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix} = W.$$

Seega kõik eeldused üldistatud vähimruutude meetodi kasutamiseks on täidetud. Nüüd vastavalt valemile (24) leiame üldistatud vähimruutude hinnangu vektorile μ ja tähistame selle $\hat{\mu}_{BL}$:

$$\hat{\mu}_{BL} = (X^T W^{-1} X)^{-1} (X^T W^{-1} y)$$

$$= \left[\begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tau V & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} \right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tau V & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Pi \\ q \end{pmatrix} \right]$$

$$= \left[\begin{pmatrix} I & P^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\tau V)^{-1} & 0 \\ 0 & \Omega^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} I & P^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\tau V)^{-1} & 0 \\ 0 & \Omega^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ q \end{pmatrix}$$

$$= \left[[(\tau V)^{-1} \quad P^T \Omega^{-1}] \begin{pmatrix} I \\ P \end{pmatrix} \right]^{-1} [(\tau V)^{-1} \quad P^T \Omega^{-1}] \begin{pmatrix} \Pi \\ q \end{pmatrix}$$

$$= [(\tau V)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau V)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} q]. \tag{25}$$

Viimane rida eelmisest valemist on Black-Littermani oodatavad tulusused, mis kombineerivad turutasakaalu seisundi investori vaadetega.

Tähistame hinnangu $\hat{\mu}_{BL}$ kovariatsioonimaatriksi $\widehat{\Phi}^{-1}$ ning vastavalt üldistatud vähimruutude meetodi definitsioonile

$$\widehat{\Phi}^{-1} = D(\hat{\mu}_{BL}) = (X^T W^{-1} X)^{-1} = [(\tau V)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1}. \tag{26}$$

Seega saame, et $\mu \sim N(\hat{\mu}_{BL}, \widehat{\Phi}^{-1})$.

Kirjutame eelduse $r \sim N(\mu, V)$ järgmisel kujul:

$$r = \mu + \varepsilon,$$

kus r on väärtpaberite tulususte N-mõõtmeline vektor, μ on väärtpaberite tegelike oodatavate tulususte N-mõõtmeline vektor, juhuslik suurus ε on N-mõõtmeline vektor normaaljaotusega $\varepsilon \sim \mathrm{N}(0, \mathrm{V})$ ning $\mathrm{cov}(\mu, \varepsilon) = 0$. Arvestades antud eelduse kuju ning et $\mu \sim N(\hat{\mu}_{BL}, \widehat{\Phi}^{-1})$, siis [14]

$$r \sim N(\hat{\mu}_{BL}, \bar{V}),$$

kus

$$\bar{V} = V + \widehat{\Phi}^{-1}. \tag{27}$$

Näitame, et valem (25) saab esitada kujul, mis ei sisalda pöördmaatriksit Ω^{-1} :

$$\hat{\mu}_{BL} = \Pi + (\tau V) P^T [\Omega + P^T (\tau V) P]^{-1} (q - P\Pi). \tag{28}$$

Kasutades maatriksi transponeerimise, pöördmaatriksi ja sümmeetrilise maatriksi omadusi, saame

$$\hat{\mu}_{BL} = [(\tau V)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau V)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} q]$$

$$= [(\tau V)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1} (\tau V)^{-1} (\tau V) [(\tau V)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} q]$$

$$= [(\tau V)((\tau V)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P)]^{-1} [(\tau V)(\tau V)^{-1} \Pi + (\tau V) P^T \Omega^{-1} q]$$

$$= [I + (\tau V) P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [\Pi + (\tau V) P^T \Omega^{-1} q]$$

$$= [I + (\tau V) P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [\Pi + (\tau V) P^T \Omega^{-1} q + (\tau V) P^T \Omega^{-1} P \Pi - (\tau V) P^T \Omega^{-1} P \Pi]$$

$$= [I + (\tau V) P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [\Pi + (\tau V) P^T \Omega^{-1} q + (\tau V) P^T \Omega^{-1} P \Pi - (\tau V) P^T \Omega^{-1} P \Pi]$$

$$= [I + (\tau V) P^T \Omega^{-1} P]^{-1} \big[[I + (\tau V) P^T \Omega^{-1} P] \Pi + (\tau V) P^T \Omega^{-1} (q - P \Pi)\big]$$

$$= [I + (\tau V) P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [I + (\tau V) P^T \Omega^{-1} P] \Pi +$$

$$+ [I + (\tau V) P^T \Omega^{-1} P]^{-1} (\tau V) P^T \Omega^{-1} (q - P \Pi) =$$

$$= \Pi + [I + (\tau V) P^T \Omega^{-1} P]^{-1} (\tau V) P^T \Omega^{-1} [\Omega + P^T (\tau V) P] [\Omega + P^T (\tau V) P]^{-1} \times$$

$$\times (q - P \Pi) =$$

$$= \Pi + [I + (\tau V) P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau V) P^T \Omega^{-1} \Omega + (\tau V) P^T \Omega^{-1} P^T (\tau V) P] \times$$

$$\times [\Omega + P^T (\tau V) P]^{-1} (q - P \Pi) =$$

$$= \Pi + [I + (\tau V) P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [I + (\tau V) P^T \Omega^{-1} P] (\tau V) P^T [\Omega + P^T (\tau V) P]^{-1} (q - P \Pi)$$

$$= \Pi + (\tau V) P^T [\Omega + P^T (\tau V) P]^{-1} (q - P \Pi).$$

Seega jõudsimegi valemini (28). [14]

Järgmisena näitame, et ka valemi (27) saab esitada kujul, mis ei sisalda pöördmaatriksit Ω^{-1} :

$$\bar{V} = V + \widehat{\Phi}^{-1}$$

$$= V + [(\tau V)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1}$$

$$= V + (\tau V)[I + P^T\Omega^{-1}P(\tau V)]^{-1}$$

$$= V + (\tau V)[P^T\Omega^{-1}P(P^T\Omega^{-1}P)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P(\tau V)]^{-1}$$

$$= V + (\tau V)\big[P^T\Omega^{-1}P[P^{-1}\Omega(P^T)^{-1} + (\tau V)]\big]^{-1}$$

$$= V + (\tau V)[P^T\Omega^{-1}PP^{-1}[\Omega + P(\tau V)P^T](P^T)^{-1}]^{-1}$$

$$= V + (\tau V)P^T[\Omega + P(\tau V)P^T]^{-1}\Omega(P^T)^{-1}$$

$$= V + \tau V - \tau V + (\tau V)P^T[\Omega + P(\tau V)P^T]^{-1}\Omega(P^T)^{-1}$$

$$= (1+\tau)V + (\tau V)[P^T[\Omega + P(\tau V)P^T]^{-1}\Omega(P^T)^{-1} - I]$$

$$= (1+\tau)V + (\tau V) \times$$

$$\times [P^T[\Omega + P(\tau V)P^T]^{-1}\Omega(P^T)^{-1} - P^T[\Omega + P(\tau V)P^T]^{-1}[\Omega + P(\tau V)P^T](P^T)^{-1}]$$

$$= (1+\tau)V + (\tau V)P^T[\Omega + P(\tau V)P^T]^{-1}[\Omega(P^T)^{-1} - [\Omega + P(\tau V)P^T](P^T)^{-1}]$$

$$= (1+\tau)V + (\tau V)P^T[\Omega + P(\tau V)P^T]^{-1}[\Omega(P^T)^{-1} - \Omega(P^T)^{-1} - P(\tau V)]$$

$$= (1+\tau)V - \tau^2 VP^T[\Omega + P^T(\tau V)P]^{-1}PV. \qquad (29)$$

Seega näitasime, et valemi (27) saab esitada kujul (29). [14]

2.4 Black-Littermani optimaalne portfell

Järgmisena leiame optimaalse portfelli kasutades Black-Littermani mudeliga saadud hinnanguid oodatavale tulususele ja hinnangute kovariatsioonimaatriksit [4]. Lihtsuse mõttes vaatame kitsendusteta optimiseerimisülesannet (4), mis on antud juhul kujul:

$$\max_w \left\{ w^T\hat{\mu}_{BL} - \frac{\delta}{2} w^T\bar{V}w \right\},$$

mille lahend on vastavalt valemile (6) järgmine

$$w^* = (\delta\bar{V})^{-1}\hat{\mu}_{BL}, \qquad (30)$$

kus w^* tähistab optimaalse portfelli kaalusid.

Asendades valemid (25) ja (26) valemisse (30) saame

$$w^* = \frac{1}{\delta}\bar{V}^{-1}\widehat{\Phi}^{-1}[(\tau V)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}q]. \tag{31}$$

Paneme tähele, et $\bar{V}^{-1}\widehat{\Phi}^{-1}$ saab viia järgmisele kujule

$$\bar{V}^{-1}\widehat{\Phi}^{-1} = \left(V + \widehat{\Phi}^{-1}\right)^{-1}\widehat{\Phi}^{-1} = \left(\widehat{\Phi}V + I\right)^{-1} = \left[[(\tau V)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]V + I\right]^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{\tau}I + P^T\Omega^{-1}PV + I\right)^{-1} = \left[\left(\frac{1}{\tau} + 1\right)I + P^T\Omega^{-1}PV\right]^{-1}$$

$$= \frac{\tau}{1+\tau}\left[P^T\Omega^{-1}P(P^T\Omega^{-1}P)^{-1} + \frac{\tau}{1+\tau}P^T\Omega^{-1}PV\right]^{-1}$$

$$= \frac{\tau}{1+\tau}\left[P^T\Omega^{-1}P\left[(P^T\Omega^{-1}P)^{-1} + \frac{\tau}{1+\tau}V\right]\right]^{-1}$$

$$= \frac{\tau}{1+\tau}\left[P^T\Omega^{-1}P\left[P^{-1}\Omega(P^T)^{-1} + \frac{\tau}{1+\tau}V\right]\right]^{-1}$$

$$= \frac{\tau}{1+\tau}\left[P^T\Omega^{-1}\tau\left(\frac{\Omega}{\tau} + P\frac{V}{1+\tau}P^T\right)(P^T)^{-1}\right]^{-1}.$$

Tähistame $A = \frac{\Omega}{\tau} + P\frac{V}{1+\tau}P^T$, siis

$$\bar{V}^{-1}\widehat{\Phi}^{-1} = \frac{\tau}{1+\tau}[P^T\Omega^{-1}\tau A(P^T)^{-1}]^{-1} = \frac{\tau}{1+\tau}P^TA^{-1}\frac{1}{\tau}\Omega(P^T)^{-1}$$

$$= \frac{\tau}{1+\tau}\left[P^TA^{-1}\frac{\Omega}{\tau}(P^T)^{-1} + I - I\right] = \frac{\tau}{1+\tau}\left[I - \left[I - P^TA^{-1}\frac{\Omega}{\tau}(P^T)^{-1}\right]\right]$$

$$= \frac{\tau}{1+\tau}\left[I - \frac{1}{1+\tau}P^TA^{-1}\left[A(P^T)^{-1}(1+\tau) - \frac{1+\tau}{\tau}\Omega(P^T)^{-1}\right]\right]$$

$$= \frac{\tau}{1+\tau}\left[I - \frac{1}{1+\tau}P^TA^{-1}\left[\left(\frac{\Omega}{\tau} + P\frac{V}{1+\tau}P^T\right)(P^T)^{-1}(1+\tau) - \frac{1+\tau}{\tau}\Omega(P^T)^{-1}\right]\right]$$

$$= \frac{\tau}{1+\tau}\left[I - \frac{1}{1+\tau}P^TA^{-1}\left[\frac{\Omega}{\tau}(P^T)^{-1}(1+\tau) + PV - \frac{1+\tau}{\tau}\Omega(P^T)^{-1}\right]\right]$$

$$= \frac{\tau}{1+\tau}\left(I - P^TA^{-1}P\frac{V}{1+\tau}\right),$$

mille asendades valemisse (31) saame

$$w^* = \frac{1}{\delta}\frac{\tau}{1+\tau}\left(I - P^TA^{-1}P\frac{V}{1+\tau}\right)[(\tau V)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}q]$$

$$= \frac{1}{1+\tau}\left[\frac{\tau}{\delta}(\tau V)^{-1}\Pi + \frac{\tau}{\delta}P^T\Omega^{-1}q - \frac{\tau}{\delta}P^TA^{-1}P\frac{V}{1+\tau}(\tau V)^{-1}\Pi - \frac{\tau}{\delta}P^TA^{-1}P\frac{V}{1+\tau}P^T\Omega^{-1}q\right]$$

$$= \frac{1}{1+\tau}\left[\frac{1}{\delta}V^{-1}\Pi + P^T\left(\frac{\tau}{\delta}\Omega^{-1}q - A^{-1}P\frac{V}{1+\tau}\frac{1}{\delta}V^{-1}\Pi - \frac{\tau}{\delta}A^{-1}P\frac{V}{1+\tau}P^T\Omega^{-1}q\right)\right]$$

$$= \frac{1}{1+\tau}\left[w_m + P^T\left(\frac{\tau}{\delta}\Omega^{-1}q - A^{-1}P\frac{V}{1+\tau}w_m - \frac{\tau}{\delta}A^{-1}P\frac{V}{1+\tau}P^T\Omega^{-1}q\right)\right]. \quad (32)$$

Tähistame

$$\Lambda = \frac{\tau}{\delta}\Omega^{-1}q - A^{-1}P\frac{V}{1+\tau}w_m - \frac{\tau}{\delta}A^{-1}P\frac{V}{1+\tau}P^T\Omega^{-1}q, \quad (33)$$

mis on K-mõõtmeline vektor ning kus $A = \frac{\Omega}{\tau} + P\frac{V}{1+\tau}P^T$, mis on $K \times K$-mõõtmeline maatriks. Siis optimaalse portfelli osakaalud (32) avalduvad järgmisel kujul:

$$w^* = \frac{1}{1+\tau}(w_m + P^T\Lambda). \quad (34)$$

Kuna maatriksi P iga rida on vaate portfell, siis investori optimaalne portfell on turutasakaalu seisundi portfell pluss vaadete portfellide kaalutud summa, mis on omakorda kaalutud faktoriga $\frac{1}{1+\tau}$. Vektor Λ on vaadete portfellide kaalud optimaalses portfellis. Valemi (33) esimene liidetav $\frac{\tau}{\delta}\Omega^{-1}q$ näitab, mida tugevam on vaade (kas siis kõrge oodatava tulususega q või suure kindlusega ehk Ω väike), seda suurem on osakaal vastava vaate portfellil optimaalses portfellis. Järgmisena arvestatakse valemis (33) maha vektor $A^{-1}P\frac{V}{1+\tau}w_m$. Kuna optimaalses turuportfellis arvestatakse juba turuportfelli, siis vaadete portfellist arvestatakse maha see osa informatsioonist, mida juba sisaldab turuportfell. Viimasena arvestatakse valemis (33) maha vektor $\frac{\tau}{\delta}A^{-1}P\frac{V}{1+\tau}P^T\Omega^{-1}q$, mis väljendab informatsiooni, mida sisaldavad juba teised vaadete portfellid. [4]

Paneme tähele, et teistsuguse riskikartlikkusega investori korral, s.t $\lambda \neq \delta$, optimiseerimisülesanne (4) on kujul

$$\max_w\left\{w^T\hat{\mu}_{BL} - \frac{\lambda}{2}w^T\bar{V}w\right\}$$

ning lahend (6) avaldub järgmiselt

$$\widetilde{w}^* = \frac{\delta}{\lambda} w^*. \text{ [4]}$$

2.5 Väärpaberiteportfelli koostamise protsess

Black-Littermani mudel on üks osa väärtpaberiteportfelli koostamise protsessist. Järgnevalt toome üldised sammud investeerimisprotsessist [5]:

1. Anname ette andmed turu, portfelli ja investori vaadete kohta:
    1.1. Otsustame, mis väärtpaberid või väärtpaberite klassid moodustavad turuportfelli, fikseerime N.
    1.2. Hindame turuportfelli oodatavad tulusused e_m ja turuportfelli väärtpaberite kaalud w_m.
    1.3. Fikseerime riskivaba tulumäära r_f.
    1.4. Hindame ajalooliste andmete põhjal väärtpaberite kovariatsiooni maatriksi V ning määrame τ.
    1.5. Teeme kindlaks investori vaated turu kohta: määrame vaadete kaalude maatriks P, hindame vaadete tulusused q ning vaadete kovariatsioonimaatriksi Ω valemis (23).
2. Anname hinnangud CAPM mudeliga turutasakaalu seisundite tulusustele Π valemi (21) abil.
3. Kasutades Black-Littermani mudelit kombineerime CAPM tasakaalu seisundi tulusused investori vaadetega ning saame hinnangud oodatavatele tulusustele $\hat{\mu}_{BL}$ ja hinnangu kovariatsioonimaatriksi $\widehat{\Phi}^{-1}$ vastavalt valemite (25) ja (26) abil.
4. Leiame optimaalse portfelli kasutades Black-Littermani mudeli poolt hinnatud tulususi $\hat{\mu}_{BL}$ ja kovariatsioonimaatriksit $\bar{V} = V + \widehat{\Phi}^{-1}$ valemi (30) abil.
5. Valime efektiivsete portfellide seast portfell, mis vastab investori riski eelistustele.

3 Black-Littermani mudeli omadused

Vaadeldavas peatükis toome välja Black-Littermani mudeli olulisemad omadused ning toome välja ka erinevad viisid kuidas määrata Black-Littermani mudeli parameetrit τ ja investori vaadete usaldusväärsust Ω.

3.1 Investori vaated

Oletame, et investoril vaated puuduvad, st $P = q = 0$, siis võttes arvesse, et $r \sim N(\mu, V)$ ja $\mu \sim N(\Pi, \tau V)$ saame kokkuvõttes, et $r \sim N(\Pi, (1+\tau)V)$.

Kuid sama tulemuseni jõuame ka järgmiselt: valemi (28) põhjal

$$\hat{\mu}_{BL} = \Pi + (\tau V)P^T[\Omega + P^T(\tau V)P]^{-1}(q - P\Pi) = \Pi, \tag{35}$$

valemi (29) põhjal

$$\bar{V} = (1+\tau)V - \tau^2 V P^T[\Omega + P^T(\tau V)P]^{-1}PV = (1+\tau)V \tag{36}$$

ning seega $r \sim N(\Pi, (1+\tau)V)$ ja valemi (34) põhjal

$$w^* = \frac{1}{1+\tau}(w_m + P^T\Lambda) = \frac{1}{1+\tau}w_m. \tag{37}$$

Seega investori vaadete puudumisel omab lõpuks investor CAPM mudeli poolt ennustatud turuportfelli, võttes arvesse viga hinnatud turutasakaalu seisundi kohta [12]. Mida väiksem on τ ehk mida kindlam oleme turutasakaalu seisundites, seda lähemal on optimaalne portfell turuportfellile. Näiteks, kui me oleme täitsa kindlad turult saadavas informatsioonis, st 100%, siis $\tau = 0$ ning tegemist on turuportfelliga. [14]

Oletame, et investor on oma vaadetes väga kindel (100% kindel), st $\Omega = 0$, siis valemi (23) põhjal

$$\mu = P^{-1}q$$

ning võttes arvesse, et $r \sim N(\mu, V)$ saame kokkuvõttes, et $r \sim N(P^{-1}q, V)$.

Kuid sama tulemuseni jõuame ka järgnevalt. Võttes arvesse maatriksi V sümmeetrilisust saame valemi (28) põhjal

$$\hat{\mu}_{BL} = \Pi + (\tau V)P^T[\Omega + P^T(\tau V)P]^{-1}(q - P\Pi)$$

$$= \Pi + (\tau V)P^T[0 + P(\tau V)P^T]^{-1}(q - P\Pi)$$

$$= \Pi + (\tau V)P^T(P^T)^{-1}(\tau V)^{-1}P^{-1}(q - P\Pi)$$

$$= \Pi + P^{-1}q - P^{-1}P\Pi$$

$$= P^{-1}q$$

ning valemi (29) põhjal

$$\bar{V} = (1+\tau)V - \tau^2 VP^T[0 + P^T(\tau V)P]^{-1}PV$$

$$= (1+\tau)V - \tau^2 VP^T(P^T)^{-1}(\tau V)^{-1}P^{-1}PV$$

$$= (1+\tau)V - \tau V$$

$$= V.$$

Seega $r \sim N(P^{-1}q, V)$ ning sel juhul optimaalne portfell on valemi (30) põhjal järgmine

$$w^* = (\delta\bar{V})^{-1}\hat{\mu}_{BL} = \frac{1}{\delta}V^{-1}P^{-1}q.$$

Seega näeme, et kui investor on oma vaadetes väga kindel, siis omab investor vaadete portfelli. [14]

Oletame, et investor on oma vaadetes väga ebakindel (0% kindel), st $\Omega \to \infty$. Kuna investor ei ole oma vaadetes üldse kindel, siis pole mõtet mudelis vaateid arvestada, seega kuna $r \sim N(\mu, V)$ ja $\mu \sim N(\Pi, \tau V)$ saame kokkuvõttes, et $r \sim N(\Pi, (1+\tau)V)$ ning arvestades, et $w_m = (\delta V)^{-1}\Pi$, siis optimaalne portfell valemi (6) põhjal on järgmine

$$w^* = [\delta(1+\tau)V]^{-1}\Pi = \frac{1}{1+\tau}(\delta V)^{-1}\Pi = \frac{1}{1+\tau}w_m.$$

Seega kui investor on oma vaadetes väga ebakindel, siis investor omab samuti turuportfelli arvestades turuportfelli hinnangu viga. [14]

3.2 Usaldusväärsusega kaalutud oodatav tulusus

Vaatame ainult investori vaadete võrrandit (23): $q = P\mu + \varepsilon_q$.

Vähimruutude meetod. Olgu $y = X\gamma + \epsilon$, kus $y \in \mathbb{R}^k$ on teada, $X \in \mathbb{R}^{k\times n}$ on täisveeruastakuga maatriks ning mittejuhuslik, $\gamma \in \mathbb{R}^n$ on tundmatu ja $\epsilon \in \mathbb{R}^k$ on vealiige, $E(\epsilon) = 0$, $D(\epsilon_i) = \sigma^2$ iga $i = 1,2, \dots, k$. Siis

$$\hat{\gamma} = (X^T X)^{-1}(X^T y)$$

on parim lineaarne nihketa hinnang vektorile γ ja hinnangu dispersioon on $(X^T X)^{-1}\sigma^2$. [15]

Kasutades vähimruutude meetodit hindamaks oodatavate tulususte vektorit μ, saame

$$\hat{\mu} = (P^T P)^{-1} P^T q. \tag{38}$$

Võttes arvesse, et $P(P^T P)^{-1}P^T = PP^{-1}(P^{-1})^T P^T = I$ ja korrutades võrrandi (38) mõlemaid pooli maatriksiga P, saame

$$P\hat{\mu} = P(P^T P)^{-1}P^T q = q.$$

mille asendades võrrandisse (25), saame

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{BL} &= [(\tau V)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau V)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}P\hat{\mu}] \\ &= [(\tau V)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}(\tau V)^{-1}\Pi + [(\tau V)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}P^T\Omega^{-1}P\hat{\mu}. \end{aligned} \tag{39}$$

Tähistades

$$w_\Pi = [(\tau V)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}(\tau V)^{-1}$$

ja

$$w_q = [(\tau V)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}P^T\Omega^{-1}P$$

saame võrrandi (39) kirjutada kujul

$$\hat{\mu}_{BL} = w_\Pi \Pi + w_q \hat{\mu}.$$

Paneme tähele, et

$$w_\Pi + w_q = [(\tau V)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}(\tau V)^{-1} + [(\tau V)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}P^T\Omega^{-1}P$$

$$= [(\tau V)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau V)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P] = I.$$

Näeme, et Black-Littermani oodatavad tulusused on usaldusväärsusega kaalutud lineaarne kombinatsioon turutasakaalu seisundist Π ja investori vaadete oodatavatest tulusustest $\hat{\mu}$. Antud juhul on kaalumaatriksid vastavalt w_Π ja w_q. Kaalumaatriksid w_Π ja w_q erinevad $(\tau V)^{-1}$ ja $P^T\Omega^{-1}P$ poolest, mis väljendavad vastavalt meie kindlust turutasakaalu ja vaadete hinnangutesse. Kui meie kindlus vaadetesse on väike, st Ω on suur, või kindlus turutasakaalu seisundisse on suur, st V on väike, siis oodatav tulusus on lähedane turutasakaalu hinnangutele. Vastupidi, kui meie kindlus vaadetesse on suur või kindlus turutasakaalu on väike, siis oodatav tulusus kaldub turutasakaalust kõrvale. [12]

Lisaks näeme ka valemis (28), et Black-Littermani mudeliga saadud oodatav tulusus kaldub tasakaalu seisundi tulususest Π kõrvale täpselt vektori $(\tau V)P^T[\Omega + P^T(\tau V)P]^{-1}(q - P\Pi)$ suurusjärgu võrra. [12]

3.3 Kuidas hinnangute vigade mõju väheneb

Black-Littermani mudeli kõige tähtsam omadus on see, et mudel kasutab üldistatud vähimruutude meetodit, mis kohandab kogu turutasakaalu seisundi oodatavate tulususte vektori investori vaadete suhtes. Kuna väärtpaberite tulusused on omavahel korreleeruvad, siis vaated, mis käivad vaid mõne väärtpaberi kohta, mõjutavad kõikide väärtpaberite oodatavaid tulususi. [12]

Paneme tähele, et kuigi vektor q on K-mõõtmeline ning K võib olla väga palju väiksem väärtpaberite arvust N ehk $K \ll N$, siis valemis (25) $N \times K$-mõõtmeline maatriks $P^T\Omega^{-1}$ levitab kõik K vaadet igasse N komponenti, $P^T\Omega^{-1}q$. Mida rohkem korreleeritud erinevad väärtpaberid on, seda tugevam antud omadus on. Kui vaadeldav omadus puuduks, siis portfell keskenduks ainult mõnele väärtpaberile. Seega hinnangute vead on jaotatud kõikide väärtpaberite vahel, mis teebki Black-Littermani mudeli oodatavate tulususte vektori vähem tundlikuks üksikute vaadete suhtes. Antud omadus vähendab optimiseerimisprotsessis nii hinnatud riski kui ka vea maksimiseerimist. [12]

3.4 Vaadete usaldusväärsuse Ω määramine

Investori vaadete kovariatsioonimaatriks Ω väljendab investori kindlust vaadetesse. Eelnevalt nägime, et mida kindlam oleme oma vaadetes ehk mida väiksem on Ω, seda lähemal on Black-Littermani mudeliga hinnatud oodatavate tulususte vektor vaadetele ning vastupidi, mida ebakindlam oleme oma vaadetes ehk mida suurem on Ω, seda lähemal on hinnatud oodatavate tulususte vektor turutasakaalule. Black-Littermani mudel ei ütle, kuidas vaadete usaldusväärsust Ω leida, seega investor valib ise, millist meetodit kasutada. Järgmisena toome välja mõned Ω leidmise viisid. [5]

3.4.1 Turuportfelli dispersiooni kasutamine

Vaadeldava meetodi korral eeldame, et vaadete tulususte dispersioon on proportsionaalne väärtpaberi tulususte dispersiooniga V. Lisaks on kaks erinevat viisi, kuidas seda meetodit on kasutatud. Ühe viisi on välja pakkunud He ja Litterman (1999) artiklis „The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolio“ [4], kus defineeritakse vaadete tulususte dispersioon järgmiselt:

$$\Omega = diag(P(\tau V)P^T) \tag{40}$$

ehk

$$\frac{\Omega}{\tau} = diag(PVP^T).$$

Antud meetod on kirjanduses ka kõige populaarsem. Asendades valemi (40) valemisse (28), siis näeme, et Black-Littermani mudeliga saadud oodatavad tulusused ei jää sõltuma parameetrist τ:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{BL} &= \Pi + (\tau V)P^T[diag(P(\tau V)P^T) + P^T(\tau V)P]^{-1}(q - P\Pi) \\ &= \Pi + VP^T[diag(PVP^T) + P^TVP]^{-1}(q - P\Pi).\end{aligned}$$

Kuid asendades valemi (40) valemisse (29) näeme, et tulususte kovariatsioonimaatriks $\bar{V}$ jääb ikkagi parameetrist τ sõltuma:

$$\bar{V} = (1+\tau)V - \tau^2 VP^T[diag(P(\tau V)P^T) + P^T(\tau V)P]^{-1}PV$$

$$= (1+\tau)V - \tau VP^T[diag(PVP^T) + P^TVP]^{-1}PV.$$

Teine viis, mille pakkus välja Meucci (2006) oma artiklis „Beyond Black-Litterman in Practice: A Five-Step Recipe to Input Views on non-Normal Markets“ [16], sarnaneb eelmisega ning on ilma diagonaliseerimiseta:

$$\Omega = \frac{1}{c}PVP^T,$$

kus $c < 1$ väljendab vaadete usaldusväärsust. Mida väiksem on c, seda ebakindlam me vaates oleme.

Üks võimalus on võtta $c = \tau^{-1}$, siis valem (28) on lihtsustatud kujul järgmine:

$$\hat{\mu}_{BL} = \Pi + (\tau V)P^T[P(\tau V)P^T + P^T(\tau V)P]^{-1}(q - P\Pi)$$

$$= \Pi + (\tau V)P^T[2P^T(\tau V)P]^{-1}(q - P\Pi)$$

$$= \Pi + \tfrac{1}{2}(\tau V)P^T(P^T)^{-1}(\tau V)^{-1}P^{-1}(q - P\Pi)$$

$$= \Pi + \tfrac{1}{2}P^{-1}(q - P\Pi)$$

$$= \Pi + \tfrac{1}{2}P^{-1}q - \tfrac{1}{2}\Pi$$

$$= \tfrac{1}{2}(\Pi + P^{-1}q)$$

ning

$$\bar{V} = (1+\tau)V - \tau^2 VP^T[P(\tau V)P^T + P^T(\tau V)P]^{-1}PV$$

$$= (1+\tau)V - \tau^2 VP^T[2P(\tau V)P^T]^{-1}PV$$

$$= (1+\tau)V - \tfrac{1}{2}\tau^2 VP^T(P^T)^{-1}(\tau V)^{-1}P^{-1}PV$$

$$= (1 + \tau)V - \frac{1}{2}\tau V$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\tau\right)V$$

Sarnaselt eelneva juhuga ei jäänud Black-Littermani mudeliga saadud oodatavad tulusused sõltuma parameetrist τ, kuid tulususte kovariatsioonimaatriks $\bar{V}$ jäi.

3.4.2 Usaldusintervalli kasutamine

Usaldusintervalli kasutamise korral arvutab investor ise vaate tulususe dispersiooni. Kõige lihtsam on anda ette usaldusintervall hinnatud oodatavale tulususele q. Näiteks, väärtpaberi oodatava tulususe hinnang on 3% eeldusel, et hinnang asub vahemikus $(2\%, 4\%)$ tõenäosusega 68%. Kuna me eeldame Black-Littermani mudeli korral normaaljaotust, siis järelikult dispersioon peab võrduma $(1\%)^2$.

3.4.3 Faktormudeli jääkide dispersiooni kasutamine

Nimetatud meetodit saab kasutada, kui investor leiab vaated faktormudeliga. *Faktormudeliks* nimetatakse mudelit kujul

$$r = \alpha + F\beta + \varepsilon,$$

kus α on N-mõõtmeline konstantide vektor ehk vabaliikme vektor, $F = (F_1, \dots, F_K)^T$ on faktorite vektor, kusjuures β on $N \times K$ mõõtmeline faktorkaalude maatriks, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_K)^T$ on juhuslik viga ning juhuslikud vead on keskväärtusega 0, st $E(\varepsilon_i) = 0$, omavahel mittekorreleeruvad, st $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \ i \neq j$ ja mitterkorreleeruvad faktoritega, st $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, F_j) = 0, \ i, j = 1, \dots, N, \ i \neq j$. [7]

Kuna $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, F_j) = 0$, siis kovariatsioonimaatriks on

$$\Omega = \mathrm{D}(r) = \mathrm{D}(\alpha + F\beta + \varepsilon) = \mathrm{D}(F\beta + \varepsilon) = \beta W \beta^T + \Upsilon,$$

kus Υ on vea ε kovariatsiooni-maatriks, mille elemendid väljaspool peadiagonaali on nullid ning W on faktorite kovariatsioonimaatriks. [7]

3.5 Parameetri τ määramine

Parameeter τ väljendab kindlust turutasakaalu seisundite hinnangute kohta. Kirjanduses on toodud mitmeid erinevaid viise parameetri τ määramiseks, kuid enamasti võetakse τ vahemikust (0,1).

Kui eeldada, et oleme turutasakaalu oodatavate tulususte hinnangutes kindlamad kui ajaloo põhjal hinnatud tulusustes, siis tuleks võtta τ nulli lähedane [5]. Üks võimalus on kasutada põhistatistikat. Kuna me hindame kovariatsioonimaatriksit ajalooliste andmete põhjal, siis valimi keskmine on $\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t \sim \mathrm{N}(\Pi, \frac{V}{T})$ ning kuna eeldame, et $\mu \sim \mathrm{N}(\Pi, \tau V)$, siis

$$\tau = \frac{1}{T}, \tag{41}$$

kus T on valimi maht. On veel erinevaid τ hinnanguid, kuid enamasti kasutakse valemit (41). [14]

Kui võtame $\tau = 0$, st eeldame, et turutasakaalu seisundi hinnangud on täpsed, siis saame $r \sim N(\Pi, V)$ ning valem (28) on kujul

$$\hat{\mu}_{BL} = \Pi + (\tau V)P^T[\Omega + P^T(\tau V)P]^{-1}(q - P\Pi) = \Pi$$

ning valem (29) on kujul

$$\bar{V} = (1+\tau)V - \tau^2 V P^T[\Omega + P^T(\tau V)P]^{-1}PV = V.$$

Seega juhul $\tau = 0$ omab investor turuportfelli.

4 Näide Black-Littermani mudeli kasutamise kohta

Eesmärgiks on konstrueerida numbriline näide Eesti aktsiaturu põhjal olukorras, kus investor kasutab nn. momentumi strateegiat. Strateegiad võib jagada väga mitmete parameetrite järgi, kuid lihtsamad jaotused on riski ja tulususe järgi. *Investeerimisstrateegia* on investori investeerimispõhimõtete, -käitumiste või -protseduuride kogum, mille määrab investor ise vastavalt sellele, milline on investeerimise eesmärk. Paljud kvantitatiivsed investeerimisstrateegiad ei põhine oodatavatel tulusustel vaid väärtpaberite järjestusel nii ka momentumi strateegia. Antud olukorras on strateegia lisainformatsioon, mida investor tahab portfelli koostamisel arvesse võtta. Vaadeldavas peatükis kirjeldame täpsemalt, mida kujutab endast momentumi strateegia, seejärel konstrueerime ning lahendame ülesande Eesti aktsiaturu põhjal.

4.1 Black-Littermani mudeli vaadete genereerimine – 52-nädala kõrgeima momentumi strateegia

Teadlased ja praktikud on leidnud erinevaid viise kuidas ajaloo põhjal edukalt ennustada tuleviku väärtpaberite tulusust. Üks populaarseimaid on momentumi strateegiad. Momentumi strateegia kohaselt tuleb osta aktsiaid, mis on olnud minevikus edukad, ja müüa aktsiaid, mis on andnud minevikus kehvi tulemusi. Strateegia eeldab, et minevikus esinev trend jätkub ka lähi tulevikus. [12]

Antud peatükis vaatame 52-nädala kõrgeima momentumi strateegiat, mille kohaselt investor ei soovi uue informatsiooni saabudes osta aktsiat, mis on eelneva 52 nädala kõrgeima hinna lähedal ega müüa aktsiat, mis on 52-nädala kõrgeimast hinnast kaugel. Kui hea uudis on tõstnud aktsia hinna 52-nädala kõrgeima hinna lähedale või võrdseks sellega, siis kauplejad ei taha pakkuda kõrgemat hinda isegi siis kui informatsioon seda õigustab. Kuid lõpuks informatsioon domineerib ning hind liigub ülesse ja nii jätkub. Analoogselt, kui halb uudis viib aktsia hinna 52-nädala kõrgeimast hinnast kaugele, siis kauplejad ei ole algselt nõus müüma aktsiat nii madala hinna eest. Samuti informatsioon lõpuks domineerib ning hind kukub. Mida lähemal (kaugemal) aktsia hind 52-nädala kõrgeimale hinnale on, seda vastumeelsem on investor pakkuma kõrgemat hind (müüma). Kui aktsia hind ei ole 52-nädala kõrgeimast hinnast ei kaugel ega lähedal, siis kauplejad kohanevad kiiremini ning ei ole võimalik ennustada kauplejate käitumist informatsiooni saabudes. [17]

52- nädala kõrgeima momentumi strateegia kohaselt järjestatakse aktsiad iga kuu t algul kahanevalt järgmise valemi põhjal:

$$z_{i,t} = \frac{P_{i,t-1}}{high_{i,t-1}}, \tag{42}$$

kus $P_{i,t-1}$ on i-nda aktsia hind $t-1$ kuu lõpus ja $high_{i,t-1}$ on i-nda aktsia kõige kõrgem hind eeleneva 12 kuu perioodil, mis lõpeb $t-1$ kuu viimasel päeval. Järjestatud aktsiatest moodustatakse kaks portfelli: esimesed 30% moodustavad nn. võitjate portfelli, viimased 30% moodustavad nn. kaotajate portfelli. Mõlemad portfellid on võrdete kaaludega. [17]

Antud töös olgu 52-nädala kõrgeima momentumi strateegia järgmine: hoiame 1 kuu isefinantseerivat portfelli, mis koosneb võitjate portfelli pikast positsioonist ning kaotajate portfelli lühikesest portfellist. Strateegia kohaselt võitjate portfelli tulusus edestab kaotajate portfelli tulusust ning vaadeldava strateegia tulusus olgu määratud järgmiselt:

$$r_{strat} = r_{võitjad} - r_{kaotajad}, \tag{43}$$

kus $r_{võitjad}$ ja $r_{kaotajad}$ on vastavalt võitjate ja kaotajate portfelli tulusus [17].

Seega on investoril üks vaade – 52-nädala kõrgeima momentumi strateegia. Antud vaate kohaselt on ootus, et võitjate portfelli tulusus edestab kaotajate portfelli tulusust, seega Black-Littermani mudeli vaate oodatav tulusus q valemis (23) on skalaar ning on võrdne 52-nädala kõrgeima momentumi strateegia oodatava tulususega [12]:

$$q = E(r_{strat}) = E\left(r_{võitjad}\right) - E\left(r_{kaotajad}\right). \tag{44}$$

Valemis (23) maatriks P on $1 \times N$-mõõtmeline maatriks ning

$$p_{1,i} = \begin{cases} 1, & kui\ aktsia\ i\ kuulub\ võitjate\ portfelli, \\ -1, & kui\ aktsia\ i\ kuulub\ kaotajate\ portfelli, \\ 0, & muudel\ juhtudel. \end{cases} \tag{45}$$

Kovariatsiooni maatriksi leiame valemi (40) põhjal:

$$\Omega = diag(P(\tau V)P^T),$$

mis on antud juhul konstant, sest maatriks P on $1 \times N$-mõõtmeline ning maatriks V on $N \times N$-mõõtmeline. [12]

4.2 Eesmärk ja ülevaade andmestikust

Oletame, et turuporfelliks on NASDAQ OMX Tallinn ehk OMXT üldindeks, milles on esindatud kõik NASDAQ OMX Tallinn Põhi- ja Lisanimekirja ettevõtted, v.a. nende ettevõtete aktsiad, kus üks aktsionär kontrollib vähemalt 90% aktsiatest. Indeks kajastab Eesti väärtpaberituru hetkeolukorda ja muutusi. Lisaks oletame, et investor kasutab 52-nädala kõrgeima momentumi strateegiat. Eesmärk on leida optimaalse portfelli koosseis võttes arvesse investori strateegia.

Andmed on võetud NASDAQ OMX balti kodulehelt [18]. Indeks põhineb 16-nel NASDAQ OMQ Tallinna väärtpaberiturul kaubeldaval aktsial. Tabelis 1 on ära toodud vaadeldavad aktsiad ning nende kaalud turuportfellis. Kaalud põhinevad järgmisel valemil:

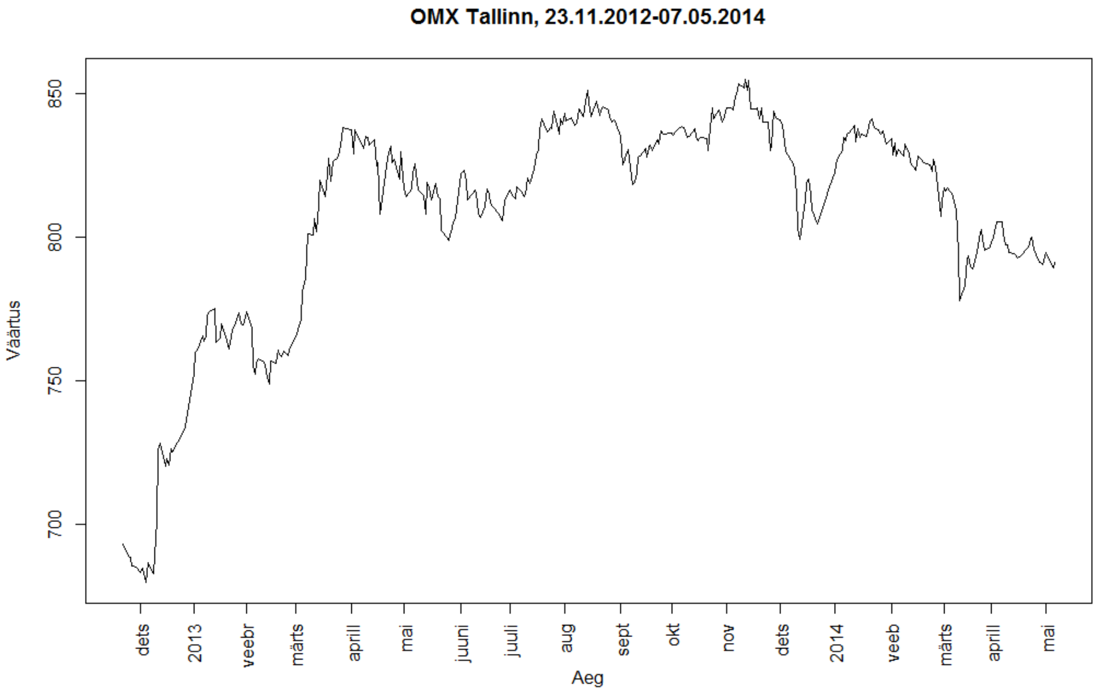
$$w_{mi} = \frac{aktsia\ i\ turukapitalisatsioon}{\sum_{i=1}^{N}(aktsia\ i\ turukapitalisatsioon)},$$

kus w_{mi} on i-nda aktsia osakaal turuportfellis ning $aktsia\ i\ turukapitalisatsioon = aktsia\ i\ arv \times aktsia\ i\ turu\ hind$. Ettevõtte kapitalisatsioon, mille järgi kaalud on tabelis 1 võetud, on seisuga 2. jaanuar 2014. Informatsioon ettevõtte kapitalisatsiooni kohta on võetud interneti leheküljelt [19].

Tabel 1. Turuportfelli koosseis ning portfelli kuuluvate aktsiate osakaal portfellis.

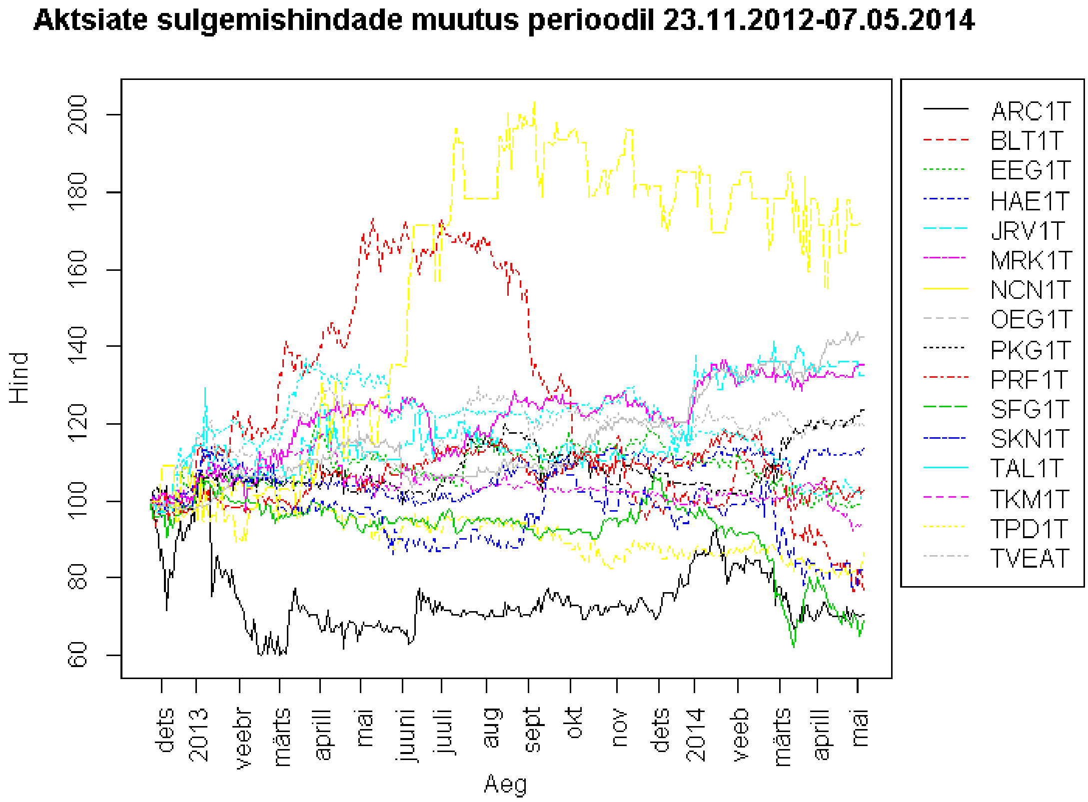
Ettevõte	Kood	Osakaal (%) (w_m)
Arco Vara	ARC1T	0.35
Baltika	BLT1T	1.19
Ekspress Grupp	EEG1T	1.81
Harju Elekter	HAE1T	2.50
Järvevana	JRV1T	0.57
Merko Ehitus	MRK1T	6.79
Nordecon	NCN1T	1.72
Olympic Entertainment Group	OEG1T	15.00
Pro Kapital Grupp	PKG1T	6.46
Premia Foods	PRF1T	1.44
Silvano Fashion Group	SFG1T	5.61
Skano Group	SKN1T	0.29
Tallink Grupp	TAL1T	31.96
Tallinna Kaubamaja	TKM1T	11.50
Trigon Property Development	TPD1T	0.12
Tallinna Vesi	TVEAT	12.68
	Kokku	99.99

Indeksi väärtused ja tulusused on võetud vahemikust 23.11.2012 kuni 07.05.2014 ning on vaadeldud iga päev. Joonisel 4 on ära toodud OMX Tallinna indeksi päevased väärtused vaadeldaval perioodil. Joonise kood programmis R on ära toodud lisas 1. Joonisel näeme, et alates 2012 aasta detsembrist hakkas indeksi väärtus tõusma ning 2013 aasta märtsi lõpuks oli väärtus tõusnud umbes 150 euro võrra. 2013 aasta märtsi lõpust kuni 2014 aasta 7. maini on indeksi väärtus kõikunud 775 ja 850 euro vahel.



Joonis 4. Indeks OMX Tallinn väärtused perioodil 23.11.2012-07.05.2014.

Turuportfelli kuuluvate aktsiate hindadeks on võetud kohandatud sulgemishinnad perioodil 23.11.2012-07.05.2014. 52-nädala momentumi strateegia realiseerimisel läheb meil vaja aktsiate hindu 2013 aasta maist kuni 2014 aasta maini. Hinnad on eurodes. Joonis 5 annab ülevaate aktsiate hindade kõikumisest vaadeldaval perioodil, baashinnaks on võetud 100. Joonise kood programmis R on ära toodud lisas 1. Joonisel näeme, et kõige suurema hüppe tegi aktsia NCN1T, mille hind tõusis 2013 juulis peaaegu 200-ni ning mille hind on püsinud kõige kõrgem võrreldes ülejäänud aktsiatega vaadeldava perioodi lõpuni, 2014. aasta maini. Aktsia BLT1T hind tõusis vaadeldava perioodi algul järsult ning püsis 2013 aasta maist kuni 2013 aasta septembrini vahemikus 160-180, millele järgnes kiire langus ning vaadeldava perioodi lõpuks on hind alla 100. Kehvasti on läinud aktsial ARC1T, mille hind langes kohe vaadeldava perioodi alguses alla 100, korra 2013 aasta jaanuari algul tõusis küll 100-ni, kuid sellele järgnes kohe langus ning hind on püsinud alla 100 vaadeldava perioodi lõpuni.



Joonis 5. Aktsiate sulgemishindade muutus perioodil 23.11.2012-07.05.2014, baashind 100.

Kuna Eestil valitsuse võlakirjad puuduvad, siis võtame riskivabaks väärtpaberiks Saksamaa valitsuse võlakirjad, mille tähtaeg on 3 kuud, seega seisuga 07.05.2014 võtame $r_f = 0.026\%$ [20].

4.3 Black-Littermani mudeli parameetrite hindamine programmis R

Antud alapeatüki arvutuste ja jooniste kood programmis R on ära toodud lisas 2. Eelnevas alapeatükis tegime kindlaks turuportfelli koosseisu ja osakaalud w_m (vt tabel 1). Paneme tähele, et $N = 16$ ning $r_f = 0.026\%$. Ajaloo põhjal hinnatud väärtpaberite tulususte kovariatsiooni maatriksi V on toodud lisas 4. Kuna aktsiate tulusused on vahemikust 23.11.2012 kuni 07.05.2014, siis antud juhul on valimimaht $T = 359$. Parameetri τ võtame valemi (41) põhjal järgmise:

$$\tau = \frac{1}{T} = \frac{1}{359} = 0.00279.$$

Alustuseks uurime turult saadavat informatsiooni. OMXT tulususte põhjal hindame turuportfelli oodatavat tulusust ning riski:

$$e_m = 0.00039 = 0.039\%, \quad (46)$$

$$\sigma_m = 0.00639 = 0.639\%. \quad (47)$$

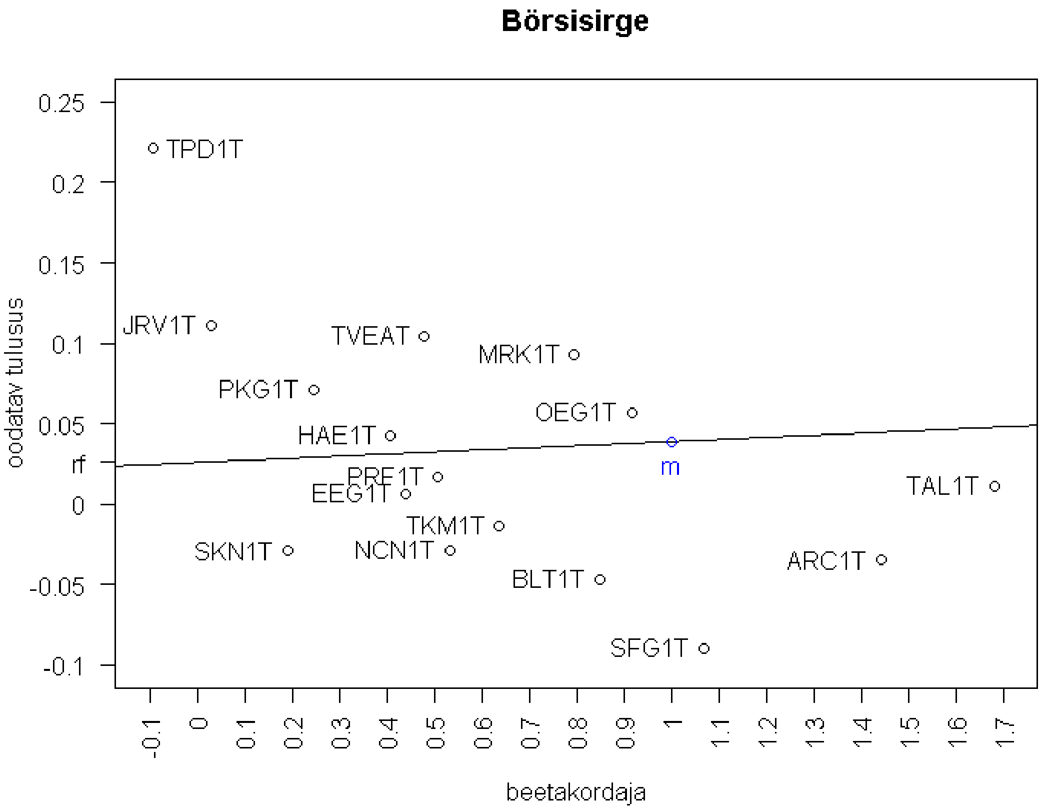
Kasutades väärtusi (46) ja (47) ning võttes arvesse, et $r_f = 0.026\%$, leiame parameetri δ väärtuse valemi (20) põhjal:

$$\delta = 3.17977,$$

mille võtame ka investori riskikartlikkuse näitajaks.

Valemi (21) abil saame nüüd hinnata turutasakaalu seisundi tulusused Π. Saadud Π väärtused on toodud tabelis 3.

Joonisel 6 on näidatud börsisirge, mis on leitud valemi (18) abil. Joonisel on ära toodud ka turuportfelli m paiknemine ning üksikute aktsiate paiknemine antud graafikul.



Joonis 6. Börsisirge vaadeldavate aktsiate korral ning üksikute aktsiate beetakordajatele vastavad oodatavad tulusused. Joonisel $\boldsymbol{m}$ tähistab turuportfelli ning $\boldsymbol{rf}$ tähistab riskivaba tulumäära.

Nüüd, kus meil on turutasakaalu seisundid leitud, määrame valemis (23) q, P ja Ω. Kuna investor kasutab 52-nädala kõrgeima momentumi strateegiat, siis tuleb järjestada aktsiad valemi (42) põhjal. Sel juhul on vaadeldav periood 2.05.2013-07.05.2014. Tabelis 2 on ära toodud saadud järjestus, aktsia hind vaadeldava perioodi viimasele kuupäevale eelneva kuu viimasel kuupäeval (30.04.2014), aktsia kõige kõrgem hind perioodil 2.05.2013-30.04.2014 ning suuruse z väärtus.

Tabel 2. Aktsiate järgjestus 52-nädala kõrgeima momentumi strateegia kohaselt, aktsiate hind viimasel vaadeldava perioodi kuupäeval, 52-nädala kõrgeim hind ning suurus z, millel põhineb järjestus.

Jrk nr.	Aktsia	Hind viimasel kuupäeval (30.04.2014)	52-nädala kõrgeim hind	z
1	PKG1T	2.63	2.630	1.000
2	MRK1T	7.84	7.950	0.986
3	TVEAT	13.30	13.500	0.985
4	HAE1T	2.80	2.850	0.982
5	JRV1T	0.70	0.728	0.962
6	OEG1T	1.89	2.050	0.922
7	PRF1T	0.65	0.755	0.861
8	TKM1T	5.00	5.850	0.855
9	NCN1T	0.98	1.160	0.845
10	TPD1T	0.48	0.570	0.842
11	EEG1T	1.00	1.200	0.833
12	TAL1T	0.78	1.020	0.765
13	ARC1T	1.18	1.550	0.761
14	SKN1T	0.95	1.350	0.704
15	SFG1T	1.94	2.930	0.662
16	BLT1T	0.42	0.950	0.442

Võtame võitjate ja kaotajate portfelliks vastavalt 5 (ligikaudu 30% aktsiate arvust) esimest ja 5 viimast aktsiat tabelist 2. Seega võitjate porfelli moodustavad: PKG1T, MRK1T, TVEAT, HAE1T, JRV1T. Kaotajate portfelli moodustavad: TAL1T, ARC1T, SKN1T, SFG1T, BLT1T. Mõlemad portfellid on võrdsete kaaludega, seega vastavalt valemile (1) võitjate ja kaotajate portfelli tulusus on vastavalt

$$r_{win} = \frac{1}{5} r_{\text{PKG1T}} + \frac{1}{5} r_{\text{MRK1T}} + \frac{1}{5} r_{\text{TVEAT}} + \frac{1}{5} r_{\text{HAE1T}} + \frac{1}{5} r_{\text{JRV1T}}$$

ja

$$r_{lose} = \frac{1}{5} r_{\mathrm{TAL1T}} + \frac{1}{5} r_{\mathrm{ARC1T}} + \frac{1}{5} r_{\mathrm{SKN1T}} + \frac{1}{5} r_{\mathrm{SFG1T}} + \frac{1}{5} r_{\mathrm{BLT1T}}.$$

Paneme tähele, et $K = 1$, sest investoril on antud juhul ainult üks vaade – 52-nädala kõrgeima momentumi strateegia. Leides perioodi 2.05.2013-30.04.2014 tulususte põhjal hinnangud võitjate ning kaotajate portfelli oodatavatele tulusustele saame valemi (44) põhjal

$$q = E(r_{win}) - E(r_{lose}) = 0.00066 - (-0.00093) = 0.00160 = 0.160\%.$$

Vastavalt valemitele (45) ja (40) saame

$$P = (-1, -1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 0, 1),$$

$$\Omega = diag(P(\tau V)P^T) = 1.10434 \cdot 10^{-5} = 0.0011\%.$$

Järgmisena leiame hinnangud oodatavale tulususele μ kombineerides turutasakaalu seisundi investori vaadetega valemi (25) põhjal, leitud kovariatsioonimaatriks $\bar{V}$ on toodud lisas 5 ning $\hat{\mu}_{BL}$ väärtused tabelis 3.

Tabel 3. CAPM mudeliga saadud hinnangud oodatavatele tulusustele ning Black-Littermani mudeliga saadud hinnangud oodatavatele tulusustele juhul kui investor kasutab 52-nädala kõrgeima momentumi strateegiat.

Aktsia	Π (%)	$\hat{\mu}_{BL}$ (%)
ARC1T	0.01854	-0.01458
BLT1T	0.01035	-0.00472
EEG1T	0.00602	0.00289
HAE1T	0.00563	0.00829
JRV1T	0.00039	0.01684
MRK1T	0.01013	0.01005
NCN1T	0.00663	0.00392
OEG1T	0.01234	0.01083
PKG1T	0.00359	0.00905
PRF1T	0.00703	0.00742
SFG1T	0.01452	0.00377
SKN1T	0.00232	-0.00757
TAL1T	0.02228	0.01511
TKM1T	0.00806	0.00580

TPD1T	-0.00176	0.00121
TVEAT	0.00698	0.00699

4.4 Optimaalse portfelli leidmine ja tulemuste analüüsimine

Antud alapeatüki arvutuste ja jooniste kood programmis R on ära toodud lisas 3. Leiame optimaalsed kaalud w^* valemi (30) abil ning saadud optimaalsed kaalud on toodud tabelis 4.

Valemite (2) ja (3) abil saame leida vastavalt optimaalse portfelli oodatava tulususe ja tulususe standardhälbe:

$$e_{opt} = (w^*)^T \hat{\mu}_{BL} = 0.00015 = 0.015\%,$$

$$\sigma_{opt} = \sqrt{(w^*)^T \bar{V} w^*} = 0.00677 = 0.677\%.$$

Alapeatükis 3.1 tuli välja, et kui investoril vaated puuduvad, siis investor omab turuportfelli ning vastavalt valemitele (35), (36) ning (37) :

$$\hat{\mu}_{BL\_0\_vaated} = \Pi,$$

$$\bar{V}_{BL\_0\_vaated} = (1 + \tau)V,$$

$$w_{BL\_0\_vaated} = \frac{1}{1 + \tau} w_m.$$

Portfelli optimaalsed osakaalud, juhul kui investori vaated puuduvad, on toodud tabelis 4. Lisas 6 on ära toodud kovariatsioonimaatriksi $\bar{V}$ väärtused juhul, kui investoril vaated puuduvad.

Tabel 4. Turuportfelli osakaalud, Black-Littermani mudeliga saadud osakaalud juhul kui investoril vaated puuduvad ning juhul kui investor kasutab 52-nädala kõrgeima momentumi strateegiat.

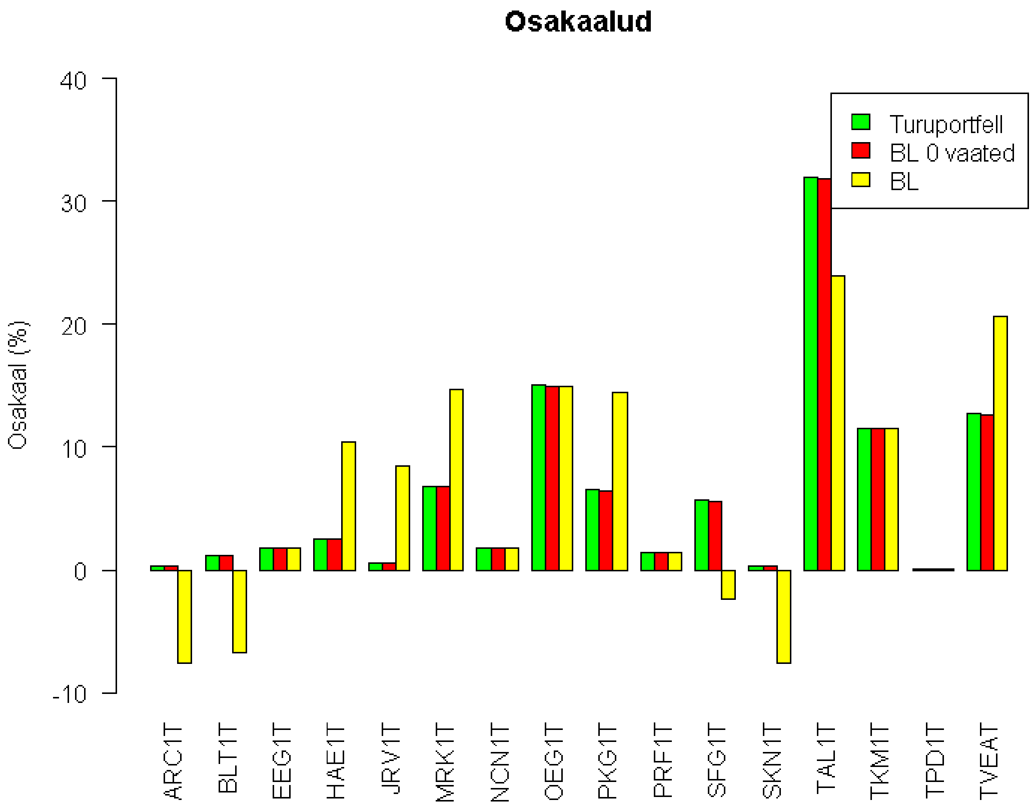
Aktsia	w_m (%)	$w_{BL\_0\_vaated}$ (%)	w^* (%)
ARC1T	0.35	0.35	-7.61
BLT1T	1.19	1.19	-6.77
EEG1T	1.81	1.80	1.80
HAE1T	2.50	2.49	10.45
JRV1T	0.57	0.57	8.53
MRK1T	6.79	6.77	14.73
NCN1T	1.72	1.72	1.72
OEG1T	15.00	14.96	14.96
PKG1T	6.46	6.44	14.40
PRF1T	1.44	1.44	1.44
SFG1T	5.61	5.59	-2.36
SKN1T	0.29	0.29	-7.67
TAL1T	31.96	31.87	23.91
TKM1T	11.50	11.47	11.47
TPD1T	0.12	0.12	0.12
TVEAT	12.68	12.64	20.60
Summa	99.99	99.71	99.72

Valemite (2) ja (3) põhjal saame juhul kui investori vaated puuduvad optimaalse portfelli oodatava tulususe ja tulususte standardhälbe vastavalt:

$$e_{opt\_0\_vaated} = \frac{1}{1+\tau}(w_m)^T\Pi = 0.00013 = 0.013\%,$$

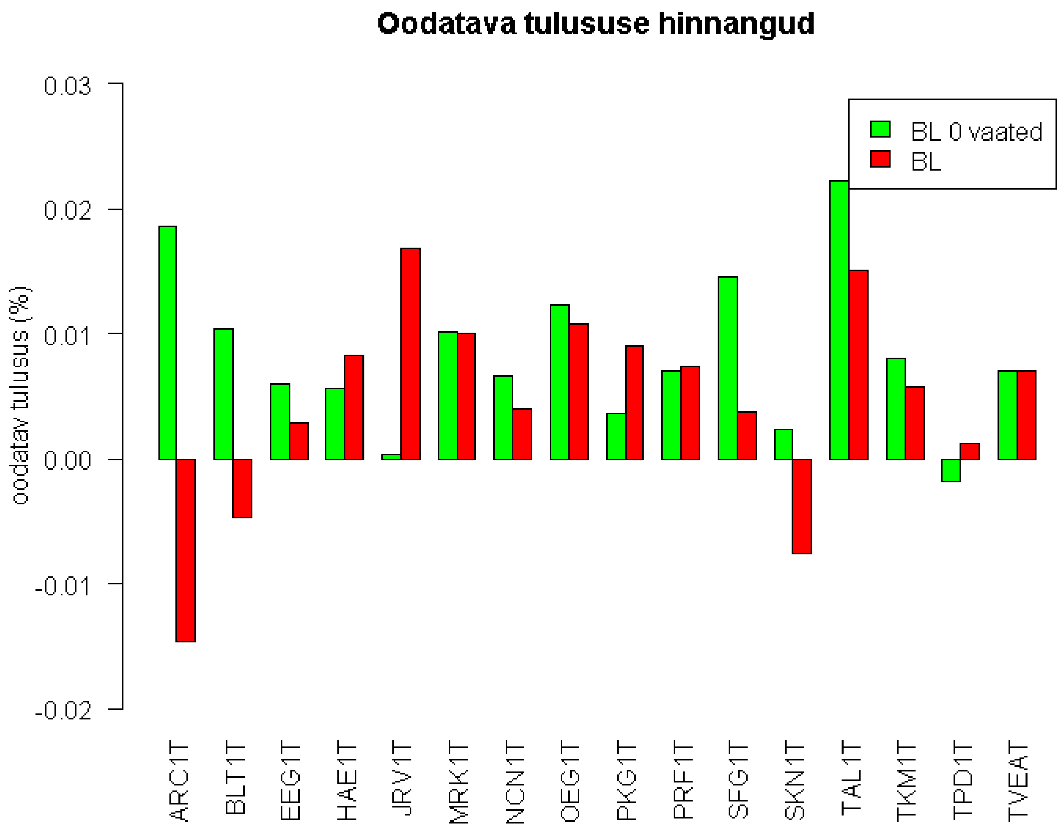
$$\sigma_{opt\_0\_vaated} = \sqrt{\frac{1}{1+\tau}(w_m)^T V w_m} = 0.00643 = 0.643\%.$$

Näeme, et vaadete puudumise korral on optimaalse portfelli oodatav tulusus 0.002% võrra väiksem võrreldes juhuga kui investor kasutab 52-nädala kõrgeima momentumi strateegiat ning risk on 0.034% võrra väiksem. Seega portfell, mis on koostatud võttes arvesse 52-nädala kõrgeima momentumi strateegiat, on riskantsem kuid tulusam.



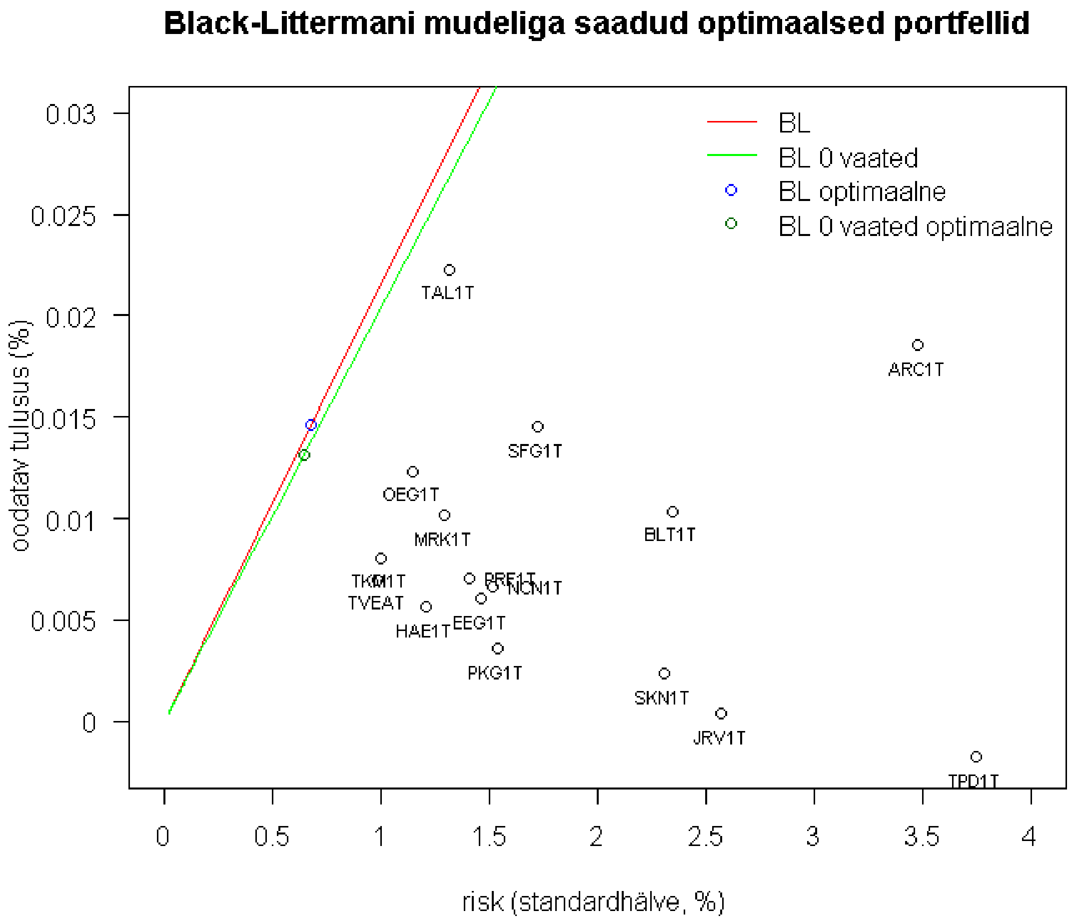
Joonis 7. Osakaalude võrdlus järgmiste portfellide vahel: turuportfell, portfell, mis oli saadud Black-Littermani mudeliga juhul kui investoril vaated puuduvad ning portfell, mis oli saadud Black-Littermani mudeliga juhul, kui investor kasutab 52-nädala kõrgeima momentumi strateegiat.

Joonisel 7 on kujutatud aktsiate osakaalude võrdlus turuportfelli ning Black-Littermani mudeliga saadud optimaalsete portfellide (juhul kui investor omab vaadet ja juhul kui vaated puuduvad) vahel. Näeme, et turuportfelli osakaalud ja Black-Littermani optimaalse portfelli osakaalud juhul, kui investori vaated puuduvad, langevad enam vähem kokku (vt ka tabel 4), väike erinevus tuleb kuna Black-Littermani mudelis eeldame, et turult saadud informatsioon on vigane. Juhul, kui investor omab vaateid, on osakaalud optimaalses portfellis kallutatud teatud määral vaadete poole. Joonisel näeme, et aktsiad, mis kuulusid võitjate portfelli (PKG1T, MRK1T, TVEAT, HAE1T, JRV1T), on palju suuremate osakaaludega ning aktsiad, mis kuulusid kaotajate portfelli (TAL1T, ARC1T, SKN1T, SFG1T, BLT1T), on palju väiksemate osakaaludega võrreldes portfelliga, mis oli saadud vaadete puudumisel. Ülejäänute aktsiate korral erinevused on väga väiksed. Seega vaated ülejäänud akstate osakaalusid ei mõjutanud.



Joonis 8. Black-Littermani mudeliga saadud oodatavate tulususte võrdlus juhul kui investoril vaated puuduvad ning juhul kui investor kasutab 52-nädala kõrgeima momentumi strateegiat.

Joonisel 8 on kirjeldatud aktsiate Black-Littermani mudeliga hinnatud oodatavad tulusused juhul kui investoril puuduvad vaated ja juhul kui investor omab vaateid. Näeme, et kui investor omab vaateid, siis aktsiad, mis kuulusid võitjate portfelli ning mille hinnatud oodatav tulusus vaadete puudumise korral oli väike, s.o aktsiad JRV1T ja PKG1T, on oluliselt suuremate oodatavate tulusustega kui oodatavad tulusused, mis on leitud vaadete puudumise korral. Paneme tähele, et võitjate portfelli kuuluvad aktsiate MRK1T ja TVEAT oodatavad tulusused vaadete korral ei erine väga vaadeteta mudeliga saadud oodatavatest tulusustest (vt ka tabel 3), mis tuleneb sellest, et Black-Littermani mudel jaotab lisainformatsiooni kõikide aktsiate vahel. Aktsiad, mis kuulusid kaotajate portfelli, on oluliselt väiksemate oodatavate tulusustega võrreldes oodatavate tulusustega, mis olid saadud vaadeteta mudeliga. Jooniselt näeme, et vaated mõjutasid ka ülejäänud aktsiate (aktsiad, mis ei kuulunud võitjate ega kaotajate portfelli) oodatavaid tulususi), mis samuti tuleneb sellest, et Black-Littermani mudel jaotab lisainformatsiooni kõikide aktsiate vahel.



Joonis 9. Black-Littermani mudeliga saadud optimaalsed portfellid juhul kui investoril vaated puuduvad ja juhul kui investor kasutab 52-nädala kõrgeima momentumi strateegiat. Ära on toodud ka üksikute aktsiate riskile vastav oodatav tulusus.

Joonisel 9 on ära toodud Black-Littermani mudeliga saadud optimaalsete portfellide riski ja oodatava tulususe suhe erinevate riskikartlikkuse λ väärtuste korral juhul, kui investor omab vaateid ja kui investori vaated puuduvad. Lisaks on joonisel ära toodud ka individuaalsed aktsiad. Joonisel näeme, et optimaalne portfell juhul, kui investor omab vaateid on vaadeteta portfellist veidi kõrgemal kuna lisainformatsiooni tõttu kaldub optimaalne portfell turuportfellist kaugemale sõltuvalt vaadetest ja kindlusest vaadetesse.

5 Kasutatud kirjandus

[1] Portfelliteooria II. Priit Sander. Tartu Ülikooli Kirjastus, 2003.

[2] Portfelliteooria I. Priit Sander. Tartu Ülikooli Kirjastus, 1999.

[3] Introduction to the Mathematics of Finance. Steven Roman. Springer, 2004, lk 41-74

[4] The Intuition Behind the Black-Litterman Model Portfolios. Guangliang He, Robert Litterman. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=334304. [18.05.2014]

[5] The Black-Litterman Model in Detail. Jay Walters. 2011. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1314585 [18.05.2014]

[6] Portfolio Optimization, Part 1-Unconstrained Portfolios. John Nordstad. 2011. http://www.norstad.org/finance/portopt1.pdf [18.05.2014]

[7] Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. Edwin J. Elton, Martin J. Gruber. Wiley, 1995, 5th ed.

[8] Market Risk Analysis Volume I, Quantitative Methods in Finance. Carol Alexander. John Wiley & Sons, Ltd, 2008, lk 225-253.

[9] Capital Markets. Frank Fabozzi, Franco Modigliani. Prentice-Hall International, Inc, 2nd ed, 1996, lk 193.

[10] Global Portfolio Optimization. Fisher Black, Robert Litterman. Financial Analysts Journal, 1992, Volüüm 48, Number 5, lk 28-43. https://ciber.fuqua.duke.edu/~charvey/Teaching/BA453_2005/blacklitterman.pdf [18.05.2014]

[11] On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means. Michael J. Best, Robert R. Grauer. The Review if Financial Studies, 1991 Volüüm 4, number 2, lk 315-342

http://www.grbestpractices.org/sites/grbestpractices.org/files/Best%20and%20Grauer%201991.pdf [18.05.2014]

[12] Incorporating Trading Strategies in the Black-Litterman Framework. Frank J. Fabozzi, Sergio M. Focardi, Petter N. Kolm. The Journal of Trading, Kevad 2006, Volüüm 1, Number 2, lk 28-37. http://www.researchgate.net/publication/230329526_Incorporating_Trading_Strategies_in_the_BlackLitterman_Framework/file/3deec519f9ee0c45cd.pdf [18.05.2014]

[13] The Black-Litterman Model for Structured Equity Portfolios. Robert Jones, Terence Lim, Peter J. Zangari. The Journal of Portfolio Management, Talv 2007, Volüüm 33, Number 2, lk 24-33. Kättesaadav otsinguportaalist Ebsco Discovery.

[14] The Black-Litterman Approach: Original Model and Extensions. Attilio Meucci. 2008. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1117574 [18.05.2014]

[15] Takeaki Kariya, Hiroshi Kurata. Generalized Least Squares. John Wiley & Sons, Ltd, 2004, lk 25-35

[16] Beyond Black-Litterman in Practice: A Five-Step Recipe to Input Views on non-Normal Markets. Attilio Meucci. 2006. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=872577 [18.05.2014]

[17] The 52-week High and Momentumn Investing, Thomas J. George, Chyan-Yang Hwang. The Journal of Finance, 2004, Volüüm 59, Number 5, lk 2145-2176 http://basehitinvesting.com/wp-content/uploads/2013/01/52-Week-High-and-Momentum-Investing.pdf [18.05.2014]

[18] Nasdaq OMX kodulehekülg. http://www.nasdaqomxbaltic.com/et/bors/ettevottest/nasdaq-omx/ [18.05.2014]

[19] Nasdaq OMX kodulehekülg, indeksite koosseisud. http://www.nasdaqomxbaltic.com/en/indexes/about-indexes/latest-compositions [18.05.2014]

[20] Saksamaa valitsuse võlakirjade määrad tähtajaga 3 kuud. http://www.investing.com/rates-bonds/germany-3-month-bond-yield-historical-data [18.05.2014]

6 Lisad

Lisa 1. Andmestike joonised programmis R.

```
#Turuportfelli kuuluvate aktsiate osakaalud
w_m=c(0.0035, 0.0119, 0.0181, 0.025, 0.0057, 0.0679, 0.0172, 0.15, 0.0646, 0.0144, 0.0561, 
0.0029, 0.3196, 0.1150, 0.0012, 0.1268)

#Turuportfelli väärtused, OMX Tallinn indeks
omxt_val=read.table("C:/Users/Silja/Desktop/andmed/index_OMXT.csv",sep=";",dec = 
".",header = TRUE)[,1:2]

attach(omxt_val)
omxt_val$Date=as.Date(omxt_val[,1],format="%d .%m.%Y")

#Joonis 4. Indeksi OMX Tallinn väärtused perioodil 23.11.2012-07.05.2014.
plot(omxt_val[,2]~omxt_val[,1], type="l", ylab="Väärtus", xlab="Aeg", main="OMX Tallinn, 
23.11.2012-07.05.2014",xaxt="n")
x=as.numeric(omxt_val[,1])[c(7,24,46,66,86,107,128,147,170,191,212,235,256,274,296,317,33
6,356)]
axis(side = 1, at = x, 
labels=c("dets","2013","veebr","märts","aprill","mai","juuni","juuli","aug","sept","okt","nov","
dets","2014","veeb","märts","aprill","mai"),cex.lab=0.6,las=2)

#Leian indeksi OMX Tallinn tulusused
T=nrow(omxt_val)
omxt_r=rep(0,T-1)
for(i in 1:(T-1)){
	omxt_r[i]=(omxt_val[i+1,2]-omxt_val[i,2])/omxt_val[i,2]
}

#Loen andmed sisse, aktsiate hinnad
hist=read.table("C:/Users/Silja/Desktop/andmed/OMX_portfell.csv",sep=";",dec = ",",header = 
TRUE)
n=ncol(hist)
hist_prices=hist[,2:n] #Võtan kuupäevade veeru maha

n=ncol(hist_prices) #väärtpaberite arv
T=nrow(hist_prices) #ajahetkede arv

#Leian aktsiate tulusused igal ajahetkel
hist_r=matrix(0,T-1,n)
for (j in 1:n){
	for(i in 1:(T-1)){
```

```
		hist_r[i,j]=(hist_prices[i+1,j]-hist_prices[i,j])/hist_prices[i,j]
	}
}
colnames(hist_r)=colnames(hist_prices)

#Joonis 5. Aktsiate sulgemishindade muutus
joonis=matrix(100,T,n) #baashind 100%
for (j in 1:n){
	for(i in 2:T){
		joonis[i,j]=joonis[i-1,j]*(1+hist_r[i-1,j])
	}
}
par(mar=c(5.1, 4.1, 4.1, 8.1), xpd=TRUE)
matplot(joonis,type="l", main="Aktsiate sulgemishindade muutus perioodil 23.11.2012-
07.05.2014", xlab="Aeg", ylab="Hind %",xaxt="n", col=1:16)
x=c(7,24,46,66,86,107,128,147,170,191,212,235,256,274,296,317,336,356)
axis(side = 1, at = x,
labels=c("dets","2013","veebr","märts","aprill","mai","juuni","juuli","aug","sept","okt","nov","
dets","2014","veeb","märts","aprill","mai"),cex.lab=0.6,las=2)
axis(side = 2, at = seq(1,13,2),label=seq(1,13,2))
legend("topright",legend=colnames(hist_prices),inset=c(-0.25,0), lty=1:16, col=1:16)
```

Lisa 2. Black-Littermani mudeli parameetrite hindamine programmis R.

```
rf=0.00026 #0.026% Saksamaa valitsuse võlakirjad tähtajaga 3 kuu seisuga 7.05.2014
V=cov(hist_r) #Tulususte kovariatsioonimaatriks
tau=1/T
e_m=mean(omxt_r) #Turuportfelli oodatav tulusus
sigma_m=sd(omxt_r) #Turuportfelli oodatava tulususe standardhälve
delta=(e_m-rf)/var(omxt_r)
pi=delta*V%*%w_m # Turutasakaalu seisund
round(as.vector(pi)*100,5) # Turutasakaalu seisund protsentides

#Börsisirge joonis
beeta=seq(-0.2,2,0.01)
e=rf+beeta*(e_m-rf) #CAPM võrrand
plot(beeta,e*100, type="l", main="Börsisirge", xaxt="n",yaxt="n", ylab="oodatav tulusus",
xlab="beetakordaja", xlim=c(-0.1,1.7), ylim=c(-0.1,0.25))
lines(1, (rf+(e_m-rf))*100, type="p", col="blue") #beta=1, turuportfell
axis(side = 2, at=seq(-0.1,0.25,0.05),label=seq(-0.1,0.25,0.05),las=2)
axis(side = 1, at=seq(-0.1,1.7,0.1),label=seq(-0.1,1.7,0.1),las=2)
text(1,(rf+(e_m-rf))*100,labels="m",pos=1, col="blue")
beeta_k=cov(hist_r,omxt_r)/var(omxt_r) #Üksikute aktsiate beetakordajad
```

```
e_r=colMeans(hist_r) #Üksikute aktsiate oodatavate tulusused
lines(beeta_k,e_r*100, type="p")
text(beeta_k,e_r*100,label=rownames(pi),pos=c(rep(2,14),4,2))

#Lisa informatsioon - BL vaated
#Loen andmed sisse
strat_prices=read.table("C:/Users/Silja/Desktop/andmed/52_week.csv",sep=";",dec = ",",header
= TRUE)
strat_prices=strat_prices[,2:ncol(strat_prices)]
t=nrow(strat_prices) #ajahetkede arv

install.packages("matrixStats")
library(matrixStats)

high=colMaxs(strat_prices) #12 kuu kõrgeim hind
rank=strat_prices[t,]/high #Järjestuse suhtearvu leidmine
l=t(rank)
rank=order(-l) #Järjestus kahanevalt
rank_names=rownames(l)[rank] #Aktsiate järjestus
#Tabel 2:Aktsiate järjestus, perioodi viimane hind, 12 kuu kõrgeim hind, järjestuse suhtearv
tabel_2=cbind(as.vector(rank_names),as.vector(t(strat_prices[t,]))[rank],high[rank],round(as.ve
ctor(l)[rank],3))
colnames(tabel_2)=c("Aktsia","Viimane hind","12 kuu kõrgeim hind", "rank")
tabel_2

m=5 #30% 16st, väärtpaberitearvust
win=rank[1:m] #võitjate portfell
lose=rank[(n-m+1):n] #kaotajate portfell
win_names=rank_names[1:m]
lose_names=rank_names[(n-m+1):n]

win_prices=cbind(strat_prices[,win]) #võitjate portfelli kuuluvate aktsiate hinnad
lose_prices=cbind(strat_prices[,lose]) #kaotajate portfelli kuuluvate aktsiate hinnad

#Leiame võitjate ja kaotajate portfelli kuuluvate aktsiate tulusused
r_win=matrix(0,t-1,m)
colnames(r_win)=win_names
r_lose=matrix(0,t-1,m)
colnames(r_lose)=lose_names
for (j in 1:m){
for(i in 1:(t-1)){
r_win[i,j]=(win_prices[i+1,j]-win_prices[i,j])/win_prices[i,j]
r_lose[i,j]=(lose_prices[i+1,j]-lose_prices[i,j])/lose_prices[i,j]
}
}
```

```
e_win=sum(1/m*colMeans(r_win)) #võitjate portfelli oodatav tulusus
e_lose=sum(1/m*colMeans(r_lose)) #kaotajate portfelli oodatav tulusus
q=e_win-e_lose #strateegia oodatav tulusus

#Maatriksi P leidmine
K=1 #vaadete arv
P=matrix(0,K,n)
P[win]=1
P[lose]=-1

omega=P%*%(tau*V)%*%t(P) #usaldusväärsus vaadetesse

#Black-Littermani mudeli funktsioon
bl.compute.posterior <- function
(
mu,             # üleliigse tulususe vektor
cov,            # kovariatsioonimaatriks
pmat=NULL,      # vaadete kaalude maatriks
qmat=NULL,      # vaadete tulususte vektor
tau=0.025       # tau
)
{
out = list()
if( !is.null(pmat) ) {
omega = diag(c(1,diag(tau * pmat %*% cov %*% t(pmat))))[-1,-1]
temp = solve(solve(tau * cov) + t(pmat) %*% solve(omega) %*% pmat)
out$cov = cov + temp
out$expected.return = temp %*% (solve(tau * cov) %*% mu + t(pmat) %*% solve(omega)
%*% qmat)
} else { # vaated puuduvad
temp = tau * cov
out$cov = cov + temp
out$expected.return = temp %*% (solve(tau * cov) %*% mu )
}
return(out)
}

bl=bl.compute.posterior(mu=pi,cov=V,pmat=P,qmat=q, tau=tau)
mu_bl=bl$expected.return #Black-Littermani mudeliga saadud hinnangud oodatavatele
tulusustele
round(as.vector(mu_bl)*100,5)
mu_cov=bl$cov # Black-Littermani mudeliga saadud tulususte hinnangu kovariatsioonimaatriks
```

Lisa 3. Optimaalse portfelli leidmine ja tulemuste analüüs programmis R.

```
#Optimaalse portfelli kuuluvate väärtpaberite osakaalude leidmise funktsioon, kitsendusteta
ülesanne
bl.compute.optimal <- function(risk.aversion, mu, cov)
{
	return( (1/risk.aversion) * solve(cov) %*% mu )
}

opt=bl.compute.optimal(risk.aversion=delta,mu=mu_bl,cov=mu_cov) #optimaalse portfelli
kaalud
w_opt=opt
round(as.vector(w_opt)*100,2)
sum(round(as.vector(w_opt)*100,2)) #osakaalude summa
e_opt=t(mu_bl)%*%w_opt #optimaalse portfelli oodatav tulusus
sigma_opt=sqrt(t(w_opt)%*%mu_cov%*%w_opt) #optimaalse portfelli tulususe standardhälve

##Black-Littermani mudel vaadete puudumisel
bl_0=bl.compute.posterior(mu=pi,cov=V,pmat=NULL, qmat=NULL, tau=tau)
mu_bl_0=bl_0$expected.return #hinnang oodatavatele tulusustele
round(as.vector(mu_bl_0)*100,5)
mu_cov_0=bl_0$cov #tulususte hinnangute kovariatsioonimaatriks

opt_0=bl.compute.optimal(risk.aversion=delta,mu=mu_bl_0,cov=mu_cov_0)
w_opt_0=opt_0 #optimaalse portfelli kaalud
round(as.vector(w_opt_0)*100,2)
sum(round(as.vector(w_opt_0)*100,2)) #osakaalude summa
e_opt_0=t(mu_bl_0)%*%w_opt_0 #optimaalse portfelli oodatav tulusus
sigma_opt_0=sqrt(t(w_opt_0)%*%mu_cov_0%*%w_opt_0) #optimaalse portfelli tulususe
standardhälve

#Joonis 7. Osakaalude võrdlus
barplot(as.matrix(t(cbind(w_m, w_opt_0,w_opt)))*100, main="Osakaalud", ylab= "Osakaal
(%)",beside=TRUE, col=c("green","red", "yellow"),las=2,ylim=c(-10,40),
legend=c("Turuportfell","BL 0 vaated","BL"))

#Joonis 8. Oodatavate tulususte võrdlus
barplot(as.matrix(t(cbind(mu_bl_0,mu_bl)))*100, main="Oodatava tulususe hinnangud", ylab=
"oodatav tulusus (%)",beside=TRUE, col=c("green","red"),las=2,legend =c("BL 0
vaated","BL"),ylim=c(-0.020,0.03))

####Joonis 9.

lambda=seq(1,100,1) #investori riskikartlikkus
```

```
s=length(lambda)

#Black-Littermani mudeliga saadud oodatavad tulusused, kui investor omab vaateid
ep=rep(0,s)
sig=rep(0,s)
j=1
for (i in lambda){
	w_opt=bl.compute.optimal(risk.aversion=i,mu=mu_bl,cov=mu_cov)
	ep[j]=t(w_opt)%*%mu_bl
	sig[j]=sqrt(t(w_opt)%*%mu_cov%*%w_opt)
	j=j+1
}
plot(sig*100,ep*100, type="l", xlim=c(0,4), ylim=c(-0.002,0.03), col="red",yaxt="n",xaxt="n",
main="Black-Littermani mudeliga saadud optimaalsed portfellid", xlab="risk (standardhälve,
%) ", ylab="oodatav tulusus (%)", las=2)
#optimaalne portfell, kui investori riskikartlikkus on delta
lines(sigma_opt*100, e_opt*100, type="p", col="blue")
axis(2, at=seq(0,0.03,0.005), label=seq(0,0.03,0.005), las=2)
axis(1,at=seq(0,4,0.5), label=seq(0,4,0.5), las=1)
legend("topright",legend=c("BL","BL 0 vaated", "BL optimaalne","BL 0 vaated
optimaalne"),bty = "n", lty = c(1, 1, NA, NA), pch = c(NA, NA, 1,1),
col=c("red","green","blue","dark green"))

#Black-Littermani mudeliga saadud oodatavad tulusused, kui investoril vaated puuduvad
ep=rep(0,s)
sig=rep(0,s)
j=1
for (i in lambda){
	w_opt_0=bl.compute.optimal(risk.aversion=i,mu=mu_bl_0,cov=mu_cov_0)
	ep[j]=t(w_opt_0)%*%mu_bl_0
	sig[j]=sqrt(t(w_opt_0)%*%mu_cov_0%*%w_opt_0)
	j=j+1
}
lines(sig*100,ep*100, type="l", col="green")
#optimaalne portfell, kui investori riskikartlikkus on delta
lines(sigma_opt_0*100, e_opt_0*100, type="p", col="dark green")

#Üksikud aktsiad
lines(sqrt(diag(V))*100,pi*100,type="p")
c=c(1:6,8:9,11:16)
text((sqrt(diag(V))*100)[c],(pi*100)[c], label=colnames(V)[c], cex=0.7, pos=1)
c=c(7,10)
text((sqrt(diag(V))*100)[c],(pi*100)[c], label=colnames(V)[c], cex=0.7, pos=4)
```

LISA 4. Ajalooliste andmete põhjal hinnatud tulususte kovariatsioonimaatriks V.

	ARC1T	BLT1T	EEG1T	HAE1T	JRV1T
ARC1T	1.205428e-03	1.668775e-05	3.971214e-05	3.996637e-06	1.108443e-05
BLT1T	1.668775e-05	5.480417e-04	3.543108e-05	4.122054e-06	-5.078526e-06
EEG1T	3.971214e-05	3.543108e-05	2.139894e-04	-4.399024e-07	-2.777368e-05
HAE1T	3.996637e-06	4.122054e-06	-4.399024e-07	1.456079e-04	4.279621e-06
JRV1T	1.108443e-05	-5.078526e-06	-2.777368e-05	4.279621e-06	6.588312e-04
MRK1T	4.563108e-05	2.333798e-05	3.417390e-06	1.456180e-05	-6.916612e-06
NCN1T	1.297882e-05	3.134997e-05	2.163217e-05	1.416199e-05	3.029806e-06
OEG1T	2.956943e-05	2.751924e-05	-2.120423e-07	3.030516e-05	7.784947e-06
PKG1T	1.181141e-05	-5.484452e-07	2.708568e-05	3.852085e-06	-4.604554e-06
PRF1T	-4.972909e-06	2.324969e-05	1.022807e-05	1.000278e-05	3.040753e-05
SFG1T	1.257803e-04	8.210082e-05	3.003287e-05	2.149654e-05	7.775830e-06
SKN1T	7.503621e-06	-4.700180e-05	-1.738990e-06	1.484992e-05	-2.763286e-06
TAL1T	8.052927e-05	2.873688e-05	2.126385e-05	1.875766e-05	-1.140506e-05
TKM1T	3.969335e-05	3.054564e-05	3.341188e-05	5.497138e-06	4.584484e-06
TPD1T	-2.599535e-06	4.476071e-06	1.613006e-06	-2.608508e-05	8.207499e-05
TVEAT	5.667413e-05	1.212047e-05	-1.006243e-06	-1.538094e-07	-3.206205e-06

	MRK1T	NCN1T	OEG1T	PKG1T	PRF1T
ARC1T	4.563108e-05	1.297882e-05	2.956943e-05	1.181141e-05	-4.972909e-06
BLT1T	2.333798e-05	3.134997e-05	2.751924e-05	-5.484452e-07	2.324969e-05
EEG1T	3.417390e-06	2.163217e-05	-2.120423e-07	2.708568e-05	1.022807e-05
HAE1T	1.456180e-05	1.416199e-05	3.030516e-05	3.852085e-06	1.000278e-05
JRV1T	-6.916612e-06	3.029806e-06	7.784947e-06	-4.604554e-06	3.040753e-05
MRK1T	1.664822e-04	2.000173e-05	2.540697e-05	-1.205944e-05	1.868465e-05
NCN1T	2.000173e-05	2.290765e-04	1.480688e-05	-5.028558e-06	2.519961e-05
OEG1T	2.540697e-05	1.480688e-05	1.313588e-04	-1.153678e-06	1.677239e-05
PKG1T	-1.205944e-05	-5.028558e-06	-1.153678e-06	2.351982e-04	-2.182345e-06
PRF1T	1.868465e-05	2.519961e-05	1.677239e-05	-2.182345e-06	1.977105e-04
SFG1T	4.400485e-05	3.340921e-05	3.587435e-05	-5.111118e-06	3.177250e-05
SKN1T	3.061607e-05	2.649627e-05	6.026446e-06	2.422365e-05	-3.440295e-05
TAL1T	3.094860e-05	2.855380e-05	3.304571e-05	-1.351628e-05	3.185308e-05
TKM1T	2.125105e-05	1.563207e-05	1.593326e-05	-7.050943e-07	1.462775e-05
TPD1T	2.870657e-05	9.559748e-06	-2.649079e-05	2.926355e-05	2.917781e-05
TVEAT	9.235780e-06	-6.198633e-06	1.043083e-05	9.513162e-06	5.866114e-06

	SFG1T	SKN1T	TAL1T	TKM1T	TPD1T
ARC1T	1.257803e-04	7.503621e-06	8.052927e-05	3.969335e-05	-2.599535e-06
BLT1T	8.210082e-05	-4.700180e-05	2.873688e-05	3.054564e-05	4.476071e-06
EEG1T	3.003287e-05	-1.738990e-06	2.126385e-05	3.341188e-05	1.613006e-06

HAE1T	2.149654e-05	1.484992e-05	1.875766e-05	5.497138e-06	-2.608508e-05
JRV1T	7.775830e-06	-2.763286e-06	-1.140506e-05	4.584484e-06	8.207499e-05
MRK1T	4.400485e-05	3.061607e-05	3.094860e-05	2.125105e-05	2.870657e-05
NCN1T	3.340921e-05	2.649627e-05	2.855380e-05	1.563207e-05	9.559748e-06
OEG1T	3.587435e-05	6.026446e-06	3.304571e-05	1.593326e-05	-2.649079e-05
PKG1T	-5.111118e-06	2.422365e-05	-1.351628e-05	-7.050943e-07	2.926355e-05
PRF1T	3.177250e-05	-3.440295e-05	3.185308e-05	1.462775e-05	2.917781e-05
SFG1T	2.967894e-04	-2.925021e-05	3.704331e-05	2.666085e-05	4.920605e-06
SKN1T	-2.925021e-05	5.311853e-04	2.914789e-06	9.196101e-06	4.531754e-05
TAL1T	3.704331e-05	2.914789e-06	1.733473e-04	1.919718e-05	-3.876133e-05
TKM1T	2.666085e-05	9.196101e-06	1.919718e-05	9.950907e-05	2.023322e-05
TPD1T	4.920605e-06	4.531754e-05	-3.876133e-05	2.023322e-05	1.401808e-03
TVEAT	2.021315e-05	8.330465e-06	1.477814e-05	5.469794e-06	1.652964e-05

	TVEAT
ARC1T	5.667413e-05
BLT1T	1.212047e-05
EEG1T	-1.006243e-06
HAE1T	-1.538094e-07
JRV1T	-3.206205e-06
MRK1T	9.235780e-06
NCN1T	-6.198633e-06
OEG1T	1.043083e-05
PKG1T	9.513162e-06
PRF1T	5.866114e-06
SFG1T	2.021315e-05
SKN1T	8.330465e-06
TAL1T	1.477814e-05
TKM1T	5.469794e-06
TPD1T	1.652964e-05
TVEAT	9.727187e-05

LISA 5. Black-Littermani mudeliga saadud oodatavate tulususte hinnangute kovariatsioonimaatris.

	ARC1T	BLT1T	EEG1T	HAE1T	JRV1T
ARC1T	1.208186e-03	1.646127e-05	3.976610e-05	4.055936e-06	1.141313e-05
BLT1T	1.646127e-05	5.494441e-04	3.550399e-05	4.155453e-06	-4.957152e-06
EEG1T	3.976610e-05	3.550399e-05	2.145801e-04	-4.365785e-07	-2.782292e-05
HAE1T	4.055936e-06	4.155453e-06	-4.365785e-07	1.460096e-04	4.267628e-06
JRV1T	1.141313e-05	-4.957152e-06	-2.782292e-05	4.267628e-06	6.605186e-04
MRK1T	4.575670e-05	2.340231e-05	3.426769e-06	1.460248e-05	-6.935141e-06
NCN1T	1.296594e-05	3.141498e-05	2.168779e-05	1.420538e-05	3.062591e-06
OEG1T	2.962460e-05	2.758352e-05	-2.152023e-07	3.039176e-05	7.820139e-06
PKG1T	1.194303e-05	-5.050537e-07	2.717045e-05	3.854888e-06	-4.666391e-06
PRF1T	-4.979747e-06	2.331765e-05	1.025722e-05	1.003008e-05	3.048874e-05
SFG1T	1.259360e-04	8.224092e-05	3.009814e-05	2.157205e-05	7.894144e-06
SKN1T	7.345447e-06	-4.721421e-05	-1.760747e-06	1.490566e-05	-2.682076e-06
TAL1T	8.062367e-05	2.875781e-05	2.131081e-05	1.882034e-05	-1.137233e-05
TKM1T	3.976297e-05	3.061209e-05	3.350109e-05	5.515738e-06	4.617583e-06
TPD1T	-2.553004e-06	4.513007e-06	1.622577e-06	-2.616206e-05	8.227691e-05
TVEAT	5.683224e-05	1.215434e-05	-1.009022e-06	-1.542579e-07	-3.215260e-06

	MRK1T	NCN1T	OEG1T	PKG1T	PRF1T
ARC1T	4.575670e-05	1.296594e-05	2.962460e-05	1.194303e-05	-4.979747e-06
BLT1T	2.340231e-05	3.141498e-05	2.758352e-05	-5.050537e-07	2.331765e-05
EEG1T	3.426769e-06	2.168779e-05	-2.152023e-07	2.717045e-05	1.025722e-05
HAE1T	1.460248e-05	1.420538e-05	3.039176e-05	3.854888e-06	1.003008e-05
JRV1T	-6.935141e-06	3.062591e-06	7.820139e-06	-4.666391e-06	3.048874e-05
MRK1T	1.669459e-04	2.005732e-05	2.547767e-05	-1.209279e-05	1.873672e-05
NCN1T	2.005732e-05	2.297106e-04	1.484590e-05	-5.034496e-06	2.527038e-05
OEG1T	2.547767e-05	1.484590e-05	1.317235e-04	-1.152415e-06	1.681943e-05
PKG1T	-1.209279e-05	-5.034496e-06	-1.152415e-06	2.358371e-04	-2.189578e-06
PRF1T	1.873672e-05	2.527038e-05	1.681943e-05	-2.189578e-06	1.982611e-04
SFG1T	4.412694e-05	3.348636e-05	3.596545e-05	-5.093319e-06	3.186328e-05
SKN1T	3.070091e-05	2.655544e-05	6.035111e-06	2.432059e-05	-3.449668e-05
TAL1T	3.103449e-05	2.862272e-05	3.313187e-05	-1.353255e-05	3.194333e-05
TKM1T	2.131014e-05	1.567227e-05	1.597579e-05	-7.003201e-07	1.466897e-05
TPD1T	2.878667e-05	9.590772e-06	-2.656215e-05	2.933622e-05	2.925846e-05
TVEAT	9.261507e-06	-6.215879e-06	1.045990e-05	9.539620e-06	5.882451e-06

	SFG1T	SKN1T	TAL1T	TKM1T	TPD1T
ARC1T	1.259360e-04	7.345447e-06	8.062367e-05	3.976297e-05	-2.553004e-06
BLT1T	8.224092e-05	-4.721421e-05	2.875781e-05	3.061209e-05	4.513007e-06
EEG1T	3.009814e-05	-1.760747e-06	2.131081e-05	3.350109e-05	1.622577e-06

HAE1T	2.157205e-05	1.490566e-05	1.882034e-05	5.515738e-06	-2.616206e-05
JRV1T	7.894144e-06	-2.682076e-06	-1.137233e-05	4.617583e-06	8.227691e-05
MRK1T	4.412694e-05	3.070091e-05	3.103449e-05	2.131014e-05	2.878667e-05
NCN1T	3.348636e-05	2.655544e-05	2.862272e-05	1.567227e-05	9.590772e-06
OEG1T	3.596545e-05	6.035111e-06	3.313187e-05	1.597579e-05	-2.656215e-05
PKG1T	-5.093319e-06	2.432059e-05	-1.353255e-05	-7.003201e-07	2.933622e-05
PRF1T	3.186328e-05	-3.449668e-05	3.194333e-05	1.466897e-05	2.925846e-05
SFG1T	2.975530e-04	-2.938980e-05	3.710433e-05	2.672183e-05	4.951763e-06
SKN1T	-2.938980e-05	5.326115e-04	2.884125e-06	9.209494e-06	4.545982e-05
TAL1T	3.710433e-05	2.884125e-06	1.738020e-04	1.924179e-05	-3.885766e-05
TKM1T	2.672183e-05	9.209494e-06	1.924179e-05	9.978346e-05	2.029325e-05
TPD1T	4.951763e-06	4.545982e-05	-3.885766e-05	2.029325e-05	1.405708e-03
TVEAT	2.026954e-05	8.353744e-06	1.481936e-05	5.485048e-06	1.657566e-05

	TVEAT
ARC1T	5.683224e-05
BLT1T	1.215434e-05
EEG1T	-1.009022e-06
HAE1T	-1.542579e-07
JRV1T	-3.215260e-06
MRK1T	9.261507e-06
NCN1T	-6.215879e-06
OEG1T	1.045990e-05
PKG1T	9.539620e-06
PRF1T	5.882451e-06
SFG1T	2.026954e-05
SKN1T	8.353744e-06
TAL1T	1.481936e-05
TKM1T	5.485048e-06
TPD1T	1.657566e-05
TVEAT	9.754282e-05

LISA 6. Black-Littermani mudeliga saadud oodatavate tulususte hinnangute kovariatsioonimaatris, juhul kui vaated puuduvad.

	ARC1T	BLT1T	EEG1T	HAE1T	JRV1T
ARC1T	1.208786e-03	1.673423e-05	3.982276e-05	4.007770e-06	1.111531e-05
BLT1T	1.673423e-05	5.495683e-04	3.552977e-05	4.133536e-06	-5.092672e-06
EEG1T	3.982276e-05	3.552977e-05	2.145855e-04	-4.411277e-07	-2.785105e-05
HAE1T	4.007770e-06	4.133536e-06	-4.411277e-07	1.460135e-04	4.291542e-06
JRV1T	1.111531e-05	-5.092672e-06	-2.785105e-05	4.291542e-06	6.606664e-04
MRK1T	4.575819e-05	2.340298e-05	3.426909e-06	1.460236e-05	-6.935878e-06
NCN1T	1.301498e-05	3.143730e-05	2.169242e-05	1.420144e-05	3.038245e-06
OEG1T	2.965180e-05	2.759590e-05	-2.126329e-07	3.038957e-05	7.806632e-06
PKG1T	1.184432e-05	-5.499729e-07	2.716113e-05	3.862815e-06	-4.617380e-06
PRF1T	-4.986761e-06	2.331446e-05	1.025656e-05	1.003065e-05	3.049223e-05
SFG1T	1.261307e-04	8.232951e-05	3.011653e-05	2.155642e-05	7.797489e-06
SKN1T	7.524522e-06	-4.713273e-05	-1.743834e-06	1.489128e-05	-2.770984e-06
TAL1T	8.075359e-05	2.881693e-05	2.132308e-05	1.880991e-05	-1.143683e-05
TKM1T	3.980391e-05	3.063072e-05	3.350495e-05	5.512450e-06	4.597254e-06
TPD1T	-2.606777e-06	4.488539e-06	1.617499e-06	-2.615774e-05	8.230361e-05
TVEAT	5.683199e-05	1.215423e-05	-1.009046e-06	-1.542378e-07	-3.215136e-06

	MRK1T	NCN1T	OEG1T	PKG1T	PRF1T
ARC1T	4.575819e-05	1.301498e-05	2.965180e-05	1.184432e-05	-4.986761e-06
BLT1T	2.340298e-05	3.143730e-05	2.759590e-05	-5.499729e-07	2.331446e-05
EEG1T	3.426909e-06	2.169242e-05	-2.126329e-07	2.716113e-05	1.025656e-05
HAE1T	1.460236e-05	1.420144e-05	3.038957e-05	3.862815e-06	1.003065e-05
JRV1T	-6.935878e-06	3.038245e-06	7.806632e-06	-4.617380e-06	3.049223e-05
MRK1T	1.669459e-04	2.005744e-05	2.547774e-05	-1.209304e-05	1.873670e-05
NCN1T	2.005744e-05	2.297146e-04	1.484812e-05	-5.042565e-06	2.526980e-05
OEG1T	2.547774e-05	1.484812e-05	1.317247e-04	-1.156891e-06	1.681911e-05
PKG1T	-1.209304e-05	-5.042565e-06	-1.156891e-06	2.358534e-04	-2.188424e-06
PRF1T	1.873670e-05	2.526980e-05	1.681911e-05	-2.188424e-06	1.982612e-04
SFG1T	4.412742e-05	3.350228e-05	3.597428e-05	-5.125356e-06	3.186101e-05
SKN1T	3.070135e-05	2.657008e-05	6.043232e-06	2.429112e-05	-3.449878e-05
TAL1T	3.103481e-05	2.863334e-05	3.313776e-05	-1.355393e-05	3.194181e-05
TKM1T	2.131024e-05	1.567562e-05	1.597764e-05	-7.070583e-07	1.466849e-05
TPD1T	2.878654e-05	9.586377e-06	-2.656458e-05	2.934507e-05	2.925909e-05
TVEAT	9.261507e-06	-6.215900e-06	1.045989e-05	9.539661e-06	5.882454e-06

	SFG1T	SKN1T	TAL1T	TKM1T	TPD1T
ARC1T	1.261307e-04	7.524522e-06	8.075359e-05	3.980391e-05	-2.606777e-06
BLT1T	8.232951e-05	-4.713273e-05	2.881693e-05	3.063072e-05	4.488539e-06
EEG1T	3.011653e-05	-1.743834e-06	2.132308e-05	3.350495e-05	1.617499e-06

HAE1T	2.155642e-05	1.489128e-05	1.880991e-05	5.512450e-06	-2.615774e-05
JRV1T	7.797489e-06	-2.770984e-06	-1.143683e-05	4.597254e-06	8.230361e-05
MRK1T	4.412742e-05	3.070135e-05	3.103481e-05	2.131024e-05	2.878654e-05
NCN1T	3.350228e-05	2.657008e-05	2.863334e-05	1.567562e-05	9.586377e-06
OEG1T	3.597428e-05	6.043232e-06	3.313776e-05	1.597764e-05	-2.656458e-05
PKG1T	-5.125356e-06	2.429112e-05	-1.355393e-05	-7.070583e-07	2.934507e-05
PRF1T	3.186101e-05	-3.449878e-05	3.194181e-05	1.466849e-05	2.925909e-05
SFG1T	2.976162e-04	-2.933168e-05	3.714650e-05	2.673511e-05	4.934312e-06
SKN1T	-2.933168e-05	5.326649e-04	2.922908e-06	9.221717e-06	4.544377e-05
TAL1T	3.714650e-05	2.922908e-06	1.738301e-04	1.925065e-05	-3.886930e-05
TKM1T	2.673511e-05	9.221717e-06	1.925065e-05	9.978626e-05	2.028958e-05
TPD1T	4.934312e-06	4.544377e-05	-3.886930e-05	2.028958e-05	1.405713e-03
TVEAT	2.026945e-05	8.353669e-06	1.481931e-05	5.485031e-06	1.657568e-05

	TVEAT
ARC1T	5.683199e-05
BLT1T	1.215423e-05
EEG1T	-1.009046e-06
HAE1T	-1.542378e-07
JRV1T	-3.215136e-06
MRK1T	9.261507e-06
NCN1T	-6.215900e-06
OEG1T	1.045989e-05
PKG1T	9.539661e-06
PRF1T	5.882454e-06
SFG1T	2.026945e-05
SKN1T	8.353669e-06
TAL1T	1.481931e-05
TKM1T	5.485031e-06
TPD1T	1.657568e-05
TVEAT	9.754282e-05

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Silja Paju,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Black-Littermani mudel,

mille juhendaja on Kalev Pärna,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **18.05.2014**