ISSN 0494-7304 0132-053x

TARTU ÜLIKOOLI TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТАРТУСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

930

STRUCTURES ON THE MANIFOLDS

СТРУКТУРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ

STRUKTUURID MUUTKONDADEL

Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid

TARTU 1991

TARTU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТАРТУСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
Alustatud 1893.a. VIHIK 930 ВЫПУСК Основаны в 1893.г.

STRUCTURES ON THE MANIFOLDS

СТРУКТУРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ

STRUKTUURID MUUTKONDADEL

Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid

TARTU 1991

Tartu Ülikooli toimetised.
Vihik 930.
STRUKTUURID MUUTKONDADEL.
Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid.
Inglise ja vene keeles.
Tartu Ülikool.
EV, 202400 Tartu, Ülikooli, 18.
Vastutav toimetaja M. Rahula.
Paljundamisele antud 10.10.1991.
Formaat 60x90/16.
Kirjutuspaber.
Masinakiri. Rotaprint.
Arvestuspoognaid 9,35. Trükipoognaid 10,25.
Trükiarv 350.
Tell. nr. 478.
Hind rbl. 10.
TÜ trükikoda. EV, 202400 Tartu, Tiigi, 78.

2 - 2

TÜ Toimetised,
930 (1991), 3-14.

Уч. зап. Тартуск. ун-та
1991, 930, 3-14.

THE GRASSMANN ALGEBRA OF DE RHAM CURRENTS ON VECTOR BUNDLE AND TOPOLOGICAL QUANTUM FIELD THEORY

V. Abramov
Laboratory of Applied Mathematics

1. The abstract definition of infinite dimensional Grassmann algebra was given by Beresin in the book [1]. In order to describe the elements of that algebra, Berezin used the distributions on some set M with measure. In this paper, using the definition of Beresin, the infinite dimensional Grassmann algebra $\mathfrak{G}(E)$ of the Bermitian vector bundle E is constructed. Its elements are de Rham r-multicurrents with values on the bundle E. The alternation operator and functional wedge product for multicurrents are defined. The idea to construct such an algebra had arisen in connection with the topological quantum field theory of E. Witten on four dimensional manifold. The main purpose of the construction of infinite dimensional Grassmann algebra on the vector bundle is to describe the fermion part of Witten theory. It is shown in this paper that generators of the algebra $\mathfrak{G}(E)$ can be identified with fermion forms (i.e. the differential forms with anticommuting coefficients) with values on the bundle $E = P \times_G \underline{G}$, which coincide with the set of fermion fields η, ψ, χ of Witten theory in the case of four dimensional manifold. It follows from the construction of the algebra $\mathfrak{G}(E)$ that all the elements of Witten theory such as Lagrangian, supersymmetry current, energy-momentum tensor and others, which include fermion fields, would be interpreted as de Rham currents on vector bundle E. It is found what kind of ordinary currents and double currents correspond to the fermion forms W_2, W_3 which describe the Donaldson invariants. The special interest offers the possibility to consider the "differential forms" on the affine space $\mathfrak{A}$ of all irreducible connections if we suppose that elements of the algebra $\mathfrak{G}(E)$ depend on connection ω. It

gives the possibility to describe the supersymmetry operator Q of Witten theory in the terms of "differential forms" on the space $\mathfrak{U}$ and to define cohomological and homological complexes. That kind of questions are supposed to be considered in the further paper.

2. <u>The space of de Rham currents on the vector bundle.</u>

In this section the notion of de Rham current will be carried from manifold M to the vector bundle E over M. Let rank E = r, dimM = n and $\pi : E \to M$ is the projection of the vector bundle E. Let us denote by $\mathfrak{F}^p_c(E)$ the space of differential, smooth p-forms with values on E and compact support. Let $\Omega^*_c(E)$ be the space of all such forms, i.e. $\Omega^*_c(E) = \sum \mathfrak{F}^p_c(E)$. Following the de Rahm notation let us define the current on the vector bundle E as a continuous linear functional on the space $\Omega^*_c(E)$. The continuity of the functional is defined in the same way as in [2] only one must use the local trivialization of the bundle E instead of local coordinates on the manifold M. The current T is homogeneous p-dimensional current if $T(\sigma) \neq 0$ for $\sigma \in \mathfrak{F}^p_c(E)$ and $T(\sigma) = 0$ for others $\sigma \in \mathfrak{F}^p_c(E)$. In this paper we assume that manifold M is orientable, therefore there is no necessity at all to distinguish the odd and even currents ([2]). Let us denote the space of all currents on the vector bundle E by $\mathcal{D}'(E)$. This space splits into the sum $\mathcal{D}'(E) = \sum \mathcal{D}'^p(E)$ of homogeneous p-dimensional currents. If $T \in \mathcal{D}'^p(E)$ is a p-dimensional current, then the number n - p, where n is dimension of manifold M, is called the degree of current T.

The arbitrary differential p-form $e \in \mathfrak{F}^p_c(E)$ will be locally written in the form

$$e_{loc} = (e^{\alpha}_{(I)}(x)t_{\alpha}(x))dx^{(I)}, \qquad (2.1)$$

where $(I) = (i_1,\dots,i_p)$ is multi-index and $t_{\alpha}(x)$ is a local frame of the vector bundle E. Then the arbitrary current T on the vector bundle E would be locally written in the form

$$T_{loc} = T_{\alpha}t^{*\alpha}(x), \qquad (2.2)$$

where $t^{*\alpha}(x)$ is the frame dual to the $t_{\alpha}(x)$, i.e. $t^{*\alpha}(x)(t_{\beta}(x)) = \delta_{\alpha\beta}$ and $\{T_{\alpha}\}^r_{\alpha=1}$ is the set of p-dimensional ordinary de Rham currents on the manifold M. Then we have

$$T_{loc}(e_{loc}) = \sum_{\alpha} T_{\alpha}(e^{\alpha}). \qquad (2.3)$$

In the sense of formula (2.3) the space $\mathcal{D}'(E)$ would be called the space of currents with values in the dual vector bundle E^*.

However, in this paper we consider only the Hermitian vector bundle E (or Euclidean). The scalar product on fibers of vector bundle E allows to identify the dual space with the original space. Therefore the value of the current T on the form θ can be written in the form

$$T(\theta) = \langle T,\theta\rangle, \tag{2.4}$$

where $\langle , \rangle$ is the scalar product on the E. Locally, in the orthonormal frame, formula (2.4) has the simplest form

$$T(\theta) = \sum_{a} T_{a}(\theta_{a}). \tag{2.5}$$

There is a scalar product on the space $\mathcal{D}^{p}_{c}(E)$ defined by the following formula

$$(\sigma,\tau) = \int_{M} \langle \sigma \wedge *\tau\rangle, \tag{2.6}$$

where $*$ is star operator on the Riemannian manifold M . Let us denote by $H^{p}(E)$ the Hilbert space, which is the completion of the space $\mathcal{D}^{p}_{c}(E)$. It is clear that every form from $H^{p}(E)$ determines the p-dimensional current on bundle E in the following way

$$\sigma \to T_{\sigma}(\tau) = (\sigma,\tau). \tag{2.7}$$

In this sense $H^{p}(E) \subset \mathcal{D}'^{p}(E)$. Generally, one cannot uniquely associate the current with chain c on the manifold M if the currents with values on fiber bundle E are under consideration. However, one can associate a q-dimensional current $T_{(c,\theta)}$, which corresponds to the pair (c,θ), where c is chain and $\theta \in \mathcal{D}^{p}_{c}(E)$, $p + q = \dim c$, by the following way

$$(c,\theta) \to T_{(c,\theta)}(\tau) = \int_{c} \langle\theta \wedge \tau\rangle, \qquad \tau \in \mathcal{D}^{q}_{0}(E). \tag{2.8}$$

The currents of that kind are very important in this paper because of the fermion forms W_1 and W_3 obtained by Witten in [3] for description of Donaldson invariants.

3. The notions of double differential form, double current, r-multiform, r-multicurrent on the fiber bundle E are considered in this section. Such kind of forms and currents will be necessary in further sections for the construction of infinite dimensional Grassmann algebra. We also define an alternation operator and the functional wedge product for two multicurrents and prove some topological properties. For convenience sake, this section is divided into subsections.

a). <u>Double differential forms and r-multiforms on vector bundle E.</u> Let $E^{\otimes 2} = E \otimes E$ is a tensor product of fiber bundle E. Then $E^{\otimes 2}$ is a vector bundle over base M x M and its fiber over point $(x,y) \in M \times M$ is a tensor product of $E_x \otimes E_y$, where E_x is the fiber over x and E_y is the fiber over y on E. There are two Grassmann algebras Ω^*_x and Ω^*_y in manifold's M x M every point (x,y), which are generated by differentials $\{dx^1,\ldots,dx^n\}$ and $\{dy^1,\ldots,dy^n\}$. Following [2], we assume that the differentials from the first group commute with differentials from the second group. Therefore

$$[dx^i, dy^j] = 0, \tag{3.1}$$

for every i and j. That assumption allows us to consider the tensor product $\Omega^*_{(x,y)} = \Omega^*_x \otimes \Omega^*_y$. Let $\mathfrak{F}_c(E^{\otimes 2})$ be the space of smooth sections on bundle $E^{\otimes 2}$ with compact support. Then the space of double differential forms on bundle E is the space $\Omega^*_c(E^{\otimes 2}) = \mathfrak{F}_c(E^{\otimes 2}) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^*_{(x,y)}$. The space of double forms splits into the sum of homogeneous double forms

$$\Omega^*_c(E^{\otimes 2}) = \bigoplus_k \mathfrak{F}^k_c(E^{\otimes 2}), \tag{3.2}$$

where the space $\mathfrak{F}^k_c(E^{\otimes 2})$ consists of the (p,q)-type double forms (p is degree of form according to x and q is degree according to y), and p + q = k. The space of all (p,q)-type double forms is denoted by $\mathfrak{F}^{(p,q)}_c(E^{\otimes 2})$. Locally, the element of $\mathfrak{F}^{(p,q)}_c(E^{\otimes 2})$ can be written in the form

$$\theta_{loc} = \theta^{ab}_{(I);(J)}(x,y)dx^{(I)}dy^{(J)}t_a(x) \otimes t_b(y), \tag{3.3}$$

where $t_a(x) \otimes t_b(y)$ is a local frame of the bundle $E^{\otimes 2}$. The space $\Omega^*_c(E^{\otimes r})$ of r-multiforms on vector bundle $E^{\otimes r} = E\otimes\ldots\otimes E$ (r-time) is constructed in the quite analogously way. Therefore we bring only the main notations. Let $\mathfrak{F}^{(p_1\ldots p_r)}_c(E^{\otimes r})$ to be the space of all $(p_1,\ldots,p_r)$-type r-multiforms. Then we denote by $\mathfrak{F}^k_c(E^{\otimes r})$ the space of $(p_1,\ldots,p_r)$-type r-multiforms with $p_1 + \quad + p_r = k$. Locally, the element of $\mathfrak{F}^{(p_1\ldots p_r)}(E^{\otimes r})$ can be written in the form

$$\theta_{loc} = \theta^{a_1\ldots a_r}_{(I_1)\ldots(I_r)}(x_1,\ldots,x_r)dx_1^{(I_1)}\ldots dx_r^{(I_r)}. \tag{3.4}$$

It is well known ([2]) that there is a tensor product for two ordinary forms on manifold M which is a double form on the manifold M x M. That operation of tensor product is carried over to the multiforms with values on the vector bundle $E^{\otimes r}$. The simplest way of doing that is to concider forms locally. Let $\theta \in \mathfrak{F}^{(p_1\ldots p_r)}_c(E^{\otimes r})$ and $\varkappa \in \mathfrak{F}^{(q_1\ldots q_s)}_c(E^{\otimes s})$. Then locally the tensor product of forms θ and $\varkappa$ can be written in the form

$$\theta \cdot \varkappa = \theta^{a_1\ldots a_r}_{(I_1)\ldots(I_r)}(x_1,\ldots,x_r) \times \tag{3.5}$$

$$\times\ \varkappa^{b_1\ldots b_s}_{(J_1)\ldots(J_s)}(x_{r+1},\ldots,x_{r+s})dx_1^{(I_1)}\ldots dx_r^{(I_r)}\ldots dx_{r+1}^{(J_1)}\ldots dx_{r+s}^{(J_s)}.$$

Therefore $\mathfrak{F}_c(E^{\otimes r}) \cdot \mathfrak{F}_c(E^{\otimes s}) \subseteq \mathfrak{F}_c(E^{\otimes(r+s)})$.

b) Alternation. There exists a diffeomorphism on manifold M x M which maps the point (x,y) into the point (y,x). It coincides with identical diffeomorphism on the diagonal of M x M. Generally for manifold M^r = M x...x M (r-time), we have the corresponding diffeomorphisms which are induced by the elements of the group of permutations S_r, i.e. if $\alpha \in S_r$ then $\varphi_\alpha : M^r \to M^r$, where

$$\varphi_\alpha(X_1,\ldots,x_r) = (x_{\alpha(1)},\ldots,x_{\alpha(r)}). \tag{3.6}$$

Let $\theta \in \mathfrak{F}^k_c(E^{\otimes r})$ be an r-multiform. At each point $(x_1,\ldots,x_r) \in M^r$ that form takes the values in the fiber $E_{x1} \otimes\ldots\otimes E_{xr}$, i.e. $\theta(x_1,\ldots,x_r)$ is a tensor-form. So, one can define a new r-multiform $(\alpha\theta)(x_1,\ldots,x_r)$, $\alpha \in S_r$ performing the operation of renumbering the components of tensor $\theta(x_1,\ldots,x_r)$ accordingly to the permutation α. On the other hand, the permutation α defines the diffeomorphism (3.6). Finally, we define a new r-multiform $\alpha(\theta)$ for $\alpha \in S_r$, $\theta \in \mathfrak{F}^k_c(E^{\otimes r})$ in the following way

$$\alpha(\theta) = \varphi^*_\alpha\theta, \tag{3.7}$$

where the permutation α acts also on tensor components of form θ as it was explained above. Thus, the form $\alpha(\theta)$ is globally well defined since all operations in its definition are invariant with respect to the changing of the local coordinates in the bundle $E^{\otimes r}$. Then, the alternation operator on the space $\mathfrak{F}^k_c(E^{\otimes r})$ is the following sum

$$\mathrm{alt}(\theta) = \frac{1}{r!}\sum_{\alpha\in S_r} \mathrm{sgn}\alpha \cdot \alpha(\theta), \tag{3.8}$$

where sgnα is the parity of permutation α. One can find that if multiform θ has the local expression (3.4) then multiform alt(θ) will be written in the form (locally)

$$\mathrm{alt}(\theta) = \frac{1}{r!}\sum_\alpha \mathrm{sgn}\alpha \cdot \theta^{a_{\alpha(1)}\ldots a_{\alpha(r)}}_{(I_{\alpha(1)})\ldots(I_{\alpha(r)})}(x_{\alpha(1)},\ldots,x_{\alpha(r)}) \times \tag{3.9}$$

$$\times\ dx^{(I_{\alpha(1)})}\ldots dx^{(I_{\alpha(r)})}$$

It follows from (3.9) that, if $\theta \in \mathfrak{F}^k_c(E^{\otimes r})$, then alt($\theta$) $\in \mathfrak{F}^k_c(E^{\otimes r})$.

PROPOSITION 3.1. *Alternation operator* alt : $\mathfrak{F}^k_c(E^{\otimes r}) \to \mathfrak{F}^k_c(E^{\otimes r})$ *is continuous operator for every k and r ≥ 2.*

In order to prove that proposition, we remind some results from [2]. Let $\mathfrak{F}_c(M)$ be the space of smooth differential forms on M with real values and let $\{\psi_i\}_{i\in\iota}$ be the expansion of unit on the manifold M where the support of function ψ_i for every $i \in \iota$ is contained in the local coordinates system $\mathcal{U}_i \subset M$. Let $l_{i,p}(\theta)$ be the upper bound of the modules of derivatives which have the order $\le p$ for the coefficients of the form $\psi_i\theta$, where $\theta \in \mathfrak{F}_c(M)$. Then, as it was shown in the [2], the sequence of the forms θ_n converge to 0 if and only if the sequence $l_{i,p}(\theta)$ converge to o for each i and p. That topology can be well defined on the space $\mathfrak{F}^p_c(E)$ of smooth differential forms with values on bundle E and, analogously, on the space $\mathfrak{F}^k_c(E^{\otimes r})$ of r-multiforms (every step in this construction only increases the number of coefficients of the form and the number of arguments on which they depend). The expansion of unit $\{\psi_i\}$ on M induces the expansion $\{\psi_{i_1\dots i_r}\}$ on M^r, so the forms $\psi_i(\theta)$ get over to $\psi_{i_1\dots i_r}(\theta)$ (where θ is the form on $\mathcal{U}_{i_1}\times\dots\times\mathcal{U}_{i_r}$) and numbers $l_{i,p}(\theta)$ get over to $l_{i_1\dots i_r;p}(\theta)$. Now, to prove the proposition, we need to show that if $\theta_n \to 0$, where $\theta_n \in \mathfrak{F}^k_c(E^{\otimes r})$ then $\mathrm{alt}(\theta_n) \to 0$ for $h \to \infty$. From formula (3.9) we have the inequalities

$$0 \le l_{i_1\dots i_r;p}(\mathrm{alt}(\theta_n)) \le \frac{1}{r!}\sum_{\alpha\in S_r} l_{i_{\alpha(1)}\dots i_{\alpha(r)};p}(\theta_n). \qquad (3.10)$$

But all the forms of the finite sum in (3.10) converge to 0 for each set $j_1,\dots,j_r$ of indices and each p, if $h \to \infty$. Thus, it follows from (3.10) that $l_{i_1\dots i_r;p}(\mathrm{alt}(\theta_n)) \to 0$ for every $i_1\dots i_r$ and every p if $h \to \infty$. It means that $\mathrm{alt}(\theta_n) \to 0$.

Now, we extend the alternation operator to the whole space of r-multiforms $\Omega^*_c(E^{\otimes r})$ by linearity and we are able to define the most important thing in this paper – the functional wedge product of multiforms. Let $\theta \in \Omega^*_c(E^{\otimes r})$ and $\varkappa \in \Omega^*_c(E^{\otimes s})$. We define the functional wedge product of two multiforms by the following formula

$$\theta \wedge \varkappa = \mathrm{alt}(\theta\cdot\varkappa), \qquad (3.11)$$

where on the right side of the formula (3.11) we mean the tensor product of the forms θ and $\varkappa$. It is clear that $\theta\wedge\varkappa \in \Omega^*_c(E^{\otimes r+s})$.

c) Double currents and multicurrents of the bundle E.

The continuous linear functional L on the space $\Omega^*_c(E^{\otimes 2})$ ($\Omega^*_c(E^{\otimes r})$) of smooth differential double (r-multi-) forms with compact supports is called the double (r-multi-) current on the bundle E. Sometimes, we shall indicate the points of $M^2(M^r)$ on which current L depends, i.e. $L(x,y)(L(x_1,\dots,x_r))$. The space of all double currents (r-multicurrents) is denoted by $\mathcal{D}'(E^{\otimes 2})(\mathcal{D}'(E^{\otimes r}))$. The topology can be defined in the same way as it was defined in $\mathcal{D}'(E)$ [2]. The space of all r-multicurrents splits into the sum of homogeneous currents

$$\mathcal{D}'(E^{\otimes r}) = \sum \mathcal{D}'^{(p_1\dots p_r)}(E^{\otimes r}). \tag{3.12}$$

We also consider the spaces

$$\mathcal{D}'^{k}(E^{\otimes r}) = \sum_{p_1+\dots+p_r=k} \mathcal{D}'^{(p_1\dots p_r)}(E^{\otimes r}). \tag{3.13}$$

Let us extend the alternation operator to the space $\mathcal{D}'^k(E^{\otimes r})$ of multicurrents. The multicurrent alt(L), which is defined by the formula

$$\operatorname{alt}(L)(\theta) = L(\operatorname{alt}\theta), \tag{3.14}$$

is called an alternated multicurrent, where $L \in \mathcal{D}'^k(E^{\otimes r})$, and $\theta \in \mathcal{E}^k_c(E^{\otimes r})$. It follows from proposition 3.1 that alt(L) is the continuous linear functional. Thus $\operatorname{alt}(L) \in \mathcal{D}'^k(E^{\otimes r})$. The subspace of alternated multicurrents we denote by $\mathcal{D}'^k_a(E^{\otimes r})$. Quite analogously would be proved the

PROPOSITION 3.2. *Alternation operator* alt : $\mathcal{D}'^k(E^{\otimes r}) \to \mathcal{D}'^k(E^{\otimes r})$ *is a continuous operator on the space of r-multicurrents.*

Let T be a r-multicurrent and S be a s-multicurrent, i.e. $T \in \mathcal{D}'(E^{\otimes r})$, $S \in \mathcal{D}'(E^{\otimes s})$. Let θ be a (r + s) - multiform with compact support and it has a local form

$$\theta_{(x,y)} = \sum \theta^{b_1\dots b_s}_{(J_1)\dots(J_s)}(y_1,\dots,y_s)\,dy_1^{(J_1)}\dots dy_s^{(J_s)}\,t_{b_1}\otimes\dots\otimes t_{b_s}, \tag{3.15}$$

where coefficients are r-multiforms. There, one can define ([2]) s-multiform, using the local expression

$$\sum T(\theta^{b_1\dots b_s}_{(J_1)\dots(J_s)}(y_1,\dots,y_s))\,dy_1^{(J_1)}\dots dy_s^{(J_s)}\,t_{b_1}\otimes\dots\otimes t_{b_s}. \tag{3.16}$$

That form is usually denoted by ([2])

$$\int_x T(x) \wedge \theta(x,y) = T(x)(\theta(x,y)). \tag{3.17}$$

The tensor product of two multicurrents T and S is a (r + s)-multicurrent L defined as

$$L(\theta(x,y)) = S \cdot T = S(y)(T(x)(\theta(x,y))). \tag{3.18}$$

The functional wedge product of two multicurrents T and S is a multicurrent L, defined as

$$L = S \wedge T = \mathrm{alt}(S \cdot T), \tag{3.19}$$

where on the right side of the formula (3.19) we keep in mind the tensor product of currents S and T.

d) <u>Star operator on manifold M as involution.</u> If manifold M is a Riemannian manifold, there exists a star operator $* : \mathcal{E}^p_c(E) \to \mathcal{E}^{n-p}_c(E)$. Let us define a new operator in the following way

$$\theta^* = (-1)^{np+p} * \theta, \qquad \theta \in \mathcal{E}^p_c(E). \tag{3.20}$$

That operator has a property

$$(\theta^*)^* = \theta, \tag{3.21}$$

because of the property $(*)^2 = (-1)^{np+p}$ of star operator. By the natural way, that operator is extended to the whole space of currents $\mathcal{D}'(E)$

$$(T^*)(\sigma) = T(\sigma^*), \tag{3.22}$$

where $\sigma \in \Omega^*_c(E)$. It is easy to show that if $\sigma, \tau \in \mathcal{E}^p_c(E)$ then

$$(\sigma^*, \tau^*) = (\tau, \sigma). \tag{3.23}$$

Indeed

$$(\sigma^*, \tau^*) = (*\sigma, *\tau) = \int_M \langle *\sigma \wedge (-1)^{np+p}\tau \rangle = \tag{3.24}$$

$$= (-1)^{2np+p-p^2} \int_M \langle \tau \wedge *\sigma \rangle = (\tau, \sigma).$$

Moreover, if $T \in \mathcal{D}'^p(E)$ and $\sigma \in \mathcal{E}^p_c(E)$ then

$$(T^*, \sigma^*) = (T, \sigma).$$

Indeed

$$(T^*, \sigma^*) = T^*(\sigma^*) = T((\sigma^*)^*) = T(\sigma) = (T, \sigma).$$

The whole space $\mathcal{D}'(E)$ of currents on vector bundle E splits into the sum

$$\mathcal{D}'(E) = F(E) + F^*(E), \tag{3.25}$$

where $F(E) = \sum_{p=0}^{[n/2]} \mathcal{D}'^p(E)$ and $F^*(E) = \sum_{p=[\frac{n+1}{2}]}^{n} \mathcal{D}'^p(E)$. It is clear that spaces $F(E) \cap H(E)$ and $F^*(E) \cap H(E)$ are orthogonal. That decomposition allows us to write multiform θ in the canonical form

$$\theta\Big|_{\text{locally}} = \theta^{a_1 \ldots a_p; b_1 \ldots b_q}_{(I_1) \ldots (I_p); (J_1) \ldots (J_q)}(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_q) \times \tag{3.26}$$

$$\times\, dx_1^{(I_1)} \ldots dx_p^{(I_p)} \ldots dy_1^{(J_1)} \ldots dy_q^{(J_q)},$$

where $|I_1| \le |I_2| \le \ldots \le |I_p| \le |\frac{n}{2}|$, $|\frac{n+1}{2}| \le |J_1| \le \ldots \le |J_q|$, and $|I_k|$ is a degree of the form θ with respect to variable x_k. Now we are able to define the action of operator $*$ on the multiforms by the following local formula tional wedge product). In the second part the structure of the scalar product is described (in our case it means the triple of the spaces $\mathfrak{F}_{ca}(E^{\otimes r}) \subset H_a(E^{\otimes r}) \subset \mathcal{D}'_a(E^{\otimes r})$, where $H_a(E^{\otimes r})$ is the Hilbert space). In the last part, the properties of the involution are considered.

5. <u>The generators of algebra $\mathfrak{G}(E)$. Fermion fields.</u>

In this section the infinite dimensional Grassmann algebra $\mathfrak{G}(E)$, which appears in the quantum topological field theory, is considered. Therefore, we take the vector bundle $E = P \times_G \underline{G}$, where P is principal fiber bundle, G is its structure group and $\underline{G}$ is the Lie algebra of the group G. We also suppose that the base manifold M is 4-dimensional manifold, group G is compact semi-simple Lie group, and $\underline{G}$ is a Lie algebra of real, skew-symmetric matrices ([3]). Then E ve definite Cartan-Killing form which defines the corresponding scalar product on E.

It follows from these assumptions that the space of currents $\mathcal{D}'(E)$ on vector bundle E would be split into the sum $\mathcal{D}'(E) = F(E) + F^*(E)$, where $F(E) = \sum_{i=0}^{2} \mathcal{D}'^{i}(E)$, $F^*(E) = \sum_{i=2}^{4} \mathcal{D}'^{i}(E)$. In this section we consider only the subalgebra of the whole algebra which is generated by the space F(E). It will be denoted by $\mathfrak{G}(E)$ like the whole algebra. If we observe that the space $\mathcal{D}'^2(E)$ is contained in both F(E) and $F^*(E)$, then it is necessary to split the space $\mathcal{D}^2(E)$ into the direct sum in order to get the decomposition $\mathcal{D}'(E) = F(E) + + F^*(E)$. Since involution in the case of dim M = 4 coincides with Hodge operator (see (3.20)), the space $\mathcal{D}'^2(E)$ can be decomposed into the direct sum of the self-dual currents $\mathcal{D}'^2_{sf}(E)$ and antiself-dual currents $\mathcal{D}'^2_{asf}(E)$. So, we consider only the infinite dimensional algebra which is induced by the space

$$F(E) = \mathcal{D}'^0(E) + \mathcal{D}'^1(E) + \mathcal{D}'^2_{sf}(E). \qquad (5.1)$$

It is well known that the finite dimensional Grassmann algebra is generated by the symbols $\xi_1,\ldots,\xi_n$ if these symbols are anticommuting ones, e.i.

$$\{\xi_i,\xi_j\} = 0.$$

An arbitrary element of finite dimensional Grassmann algebra can be uniquely written by its coefficients in the expansion with respect to elements $\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_r}$. Thus, the finite dimensional Grassmann algebra has the coordinate space, which $\mathbb{R}^{2^n}$ if the algebra is generated by n symbols. But it is impossible to construct the infinite dimensional Grassmann algebra considering some anticommuting symbols (fermion fields) which depend on a point of some manifold. Therefore, the appropriate way is to construct at first the "coordinate space". The Grassmann algebra $\mathcal{D}(E)$ of de Rham currents which was constructed in the pervious sections can be used as coordinate space.

Let us consider the symbols $\psi(x)$ which are the 1-forms on the bundle $E = P \times_G \underline{G}$ and whose coefficients anticommute

$$\{\psi_i^\alpha(x), \psi_j^\beta(y)\} = 0, \tag{5.2}$$

where $\psi(x) = \psi_i^a(x)dx^i t_a$ is a local expression of the form $\psi(x)$. Such forms would be called fermion forms. Now, if $T \in \mathcal{D}'^1(E)$ is a de Rham current on the bundle E, we associate with it the formal expression

$$T \to T(\psi), \tag{5.3}$$

and call it expression in terms of the generators of algebra $\mathcal{G}(E)$. For example, if $\sigma \in H^1(E)$ is a 1-form, then the corresponding current will be written (see(2.6)) as

$$\sigma \to T_\sigma(\psi) = \int_M \mathrm{Tr}\ (\sigma \wedge *\psi). \tag{5.4}$$

If we take a pair (c, Θ), where c is a three dimensional chain and Θ is a 2-form, then we get the current $T_{(c,\Theta)}$ (see (2.8)) which will be written in the form

$$T_{(c,\Theta)}(\psi) = \int_c \mathrm{Tr}\ (\Theta \wedge \psi). \tag{5.5}$$

If Θ is a curvature 2-form Θ^ω for some connection ω, we get the form W_3 from [3],

$$T_{(c,\Theta^\omega)}(\psi) = \int_c \mathrm{Tr}\ (\Theta^\omega \wedge \psi). \tag{5.6}$$

It is very important that we are able now to give a sense to the integral (5.6) considering it as a formal expression of de Rahm current $T_{(c,\Theta^\omega)}$.

Quite analogously will be introduced the 0-form symbols $\eta(x)$ for the space $\mathcal{D}'^0(E)$ and $\varkappa(x)$ which are 2-forms for the space $\mathcal{D}'^2_{sf}(E)$. It should be noticed that symbols $\varkappa(x)$ are self-dual $\varkappa(x) = *\varkappa(x)$ because of the self-duality of the currents in $\mathcal{D}'^2_{sf}(E)$. Now we see that the generators of the algebra $\mathcal{G}(E)$ coincide with the set of fermion fields in Witten theory.

Quite analoguosly will be written an arbitrary element from $\mathcal{D}'_s(E^{\otimes r})$. Let us take, for example, the space $\mathcal{D}'^{1,1}_s(E^{\otimes 2})$.

We may consider the expression $\psi(x)\psi(y)$ (analogously $\eta(x)\psi(y)$, $\eta(x)\varkappa(y)$ and so on) as a formal double form (see section 3(a)) on the vector bundle E. Then the expression

$$T \to T(\psi(x)\psi(y)) \qquad (5.7)$$

can be associated with the double current $T \in \mathcal{D}'^{1,1}_{a}(E^{\otimes 2})$.

It is well known (see [2]) that there is an operator $A : \mathcal{E}^1_c(E) \to \mathcal{D}'^1(E)$ which might be associated with double current $T \in \mathcal{D}'^{1,1}(E^{\otimes 2})$. If c is a two-dimensional chain on the manifold M and σ is a 1-form on the bundle E, then we have an operator A which transfers the 1-form σ into the current $T_{(c,\sigma)} \in \mathcal{D}'^1(E)$, where

$$T_{(c,\sigma)}(\tau) = \int_c \mathrm{Tr}\,(\sigma \wedge \tau). \qquad (5.8)$$

The double current which corresponds to the operator $\wedge$ will be written in the form

$$L(\theta(x,y)) = \int_c \mathrm{Tr}(\theta(x,x)), \qquad (5.9)$$

where $\theta(x,y) \in \mathcal{E}^{1,1}_{ca}(E^{\otimes 2})$ and, by definition,

$$\theta(x,y)\Big|_{\substack{\text{diagonal of}\\ M\times M}} = \theta(x,x) = \theta_{ij}(x,x)dx^i \wedge dy^j, \qquad (5.10)$$

where $\theta_{ij}(x,x)dx^i dy^j$ is the local expression of the form θ. It should be noticed that in spite of the fact that double form θ is alternated, its restriction to the diagonal of M x M does not equal to zero (it follows from definition (5.10) and the fact that θ_{ij} is skew-symmetric with respect to indices i and j). So, we can write the double current L through the fermion forms in the form

$$L(\psi(x)\psi(y)) = \int_c \mathrm{Tr}(\psi(x) \wedge \psi(x)). \qquad (5.11)$$

So. we get the fermion part of the form W_2 from [3]. In an analogous way, it would be shown that the Lagrangian of Witten theory, supersymmetry current and some other things are the elements of the space $\mathcal{D}'_a(E^{\otimes 2})$, because they are expressed in the terms of the differential operators, such as covariant differential and its adjoint operator, on the vector bundle E.

References.

1. B e r e z i n F. The method of second quantization. Moscow, 1986.
2. D e R h a m G. Varietes differentiables. Paris, 1955.
3. W i t t e n E. Topological quantum field theory //. Commun. Math. Phys. - 1988. - 117. - P.353-411.

АЛГЕБРА ГРАССМАНА ТОКОВ де РАМА НА ВЕКТОРНОМ РАССЛОЕНИИ И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

В. А. Абрамов

Резюме

Набор фермионных полей квантовой топологической теории поля Виттена, описывающей инварианты гладкой структуры Дональдсона четырехмерного многообразия, состоит из формальных дифференциальных форм некоторого векторного расслоения. Коэффициенты этих форм в локальной записи являются антикоммутирующими переменными, зависящими от точки базового многообразия. Подобные переменные на некотором множестве с мерой были введены Ф. А. Березиным как образующие бесконечномерной алгебры Грассмана в связи с методом вторичного квантования. При этом в построении использовались пространства обобщенных функций. В данной работе описывается с использованием теории токов де Рама, аналогичная алгебра с образующими, которые можно было бы назвать фермионными дифференциальными формами на некотором векторном расслоении. Для этого понятие тока де Рама переносится с многообразия на расслоение. Доказывается, что построенная алгебра удовлетворяет всем аксиомам определения грассмановой алгебры со скалярным произведением и инволюцией. Показано, что образующие построенной алгебры дают набор фермионных полей теории Виттена. Найдены токи де Рама, соответствующие формальным выражениям, содержащим фермионные дифференциальные формы.

Received
13 V 1991

TÜ Toimetised,
930 (1991), 15-26.

Уч. зап. Тартуск. ун-та
1991, 930, 15-26.

SECOND ORDER ENVELOPES OF SYMMETRIC SEGRE SUBMANIFOLDS

Ü.Lumiste
Department of Algebra and Geometry

1. There are two well-known immersions which give some good examples of algebraic manifolds in a projective space P^n. The Veronese immersion $v_2 : P^m \longrightarrow P^{\frac{1}{2}m(m+3)}$ is determined as $(u^0, u^1, \dots, u^m) \mapsto (x^{00}, x^{01}, \dots, x^{mm})$ by the formulae $x^{ij} = u^i u^j$ and gives an m-dimensional submanifold $v_2(P^m)$ in $P^{\frac{1}{2}m(m+3)}$, which is called a Veronese submanifold or, if $m=2$, a Veronese surface (see [18], Ch. I, §4; [10], §6A). The Segre immersion $s : P^{m_1} \times P^{m_2} \longrightarrow P^{m_1+m_2+m_1m_2}$ is determined as $(u^0, u^1, \dots, u^{m_1}; v^0, v^1, \dots, v^{m_2}) \mapsto (x^{00}, x^{01}, \dots, x^{m_1m_2})$ by the formulae $x^{i_1j_2} = u^{i_1}v^{j_2}$ and gives a m_1m_2-dimensional submanifold $s(m_1, m_2)$ in $P^{m_1+m_2+m_1m_2}$, which is called a Segre submanifold (see [10], §2B).

Let us consider the real projective spaces and reduce the projective group $GP(n+1, \mathbb{R})$ of P^n ($n = \frac{1}{2}m(m+3)$ or $n = m_1 + m_2 + m_1m_2$) to the orthogonal group $O(n+1, \mathbb{R})$. Then we get the Veronese submanifold in an elliptic space $S^{\frac{1}{2}m(m+3)}$ and the Segre submanifold in $S^{m_1+m_2+m_1m_2}$.

Interpreting S^n as a sphere $S^n(R)$ in Euclidean space E^{n+1} (identifying the diametral points) we obtain by $n = \frac{1}{2}m(m+3)$ the Veronese submanifold $V^m(r)$ in $S^n(R)$, which is an orbit of a subgroup $O(m+1, \mathbb{R})$ and intrinsically is the elliptic space of curvature $r^{-2} = R^{-2}m : 2(m+1)$.

The Segre submanifold $s(m_1, m_2)$ has two families of plane generators which are determined by $u^{i_1} = const$ and $v^{j_2} = const$. In S^n there exists a Segre submanifold $s(S^{m_1} \times S^{m_2})$, the plane generators of which are mutually orthogonal, $n = m_1 + m_2 + m_1m_2$. In a sphere $S^n(R)$ it gives a Segre submanifold $S_{(m_1,m_2)}(R)$, generated by mutually orthogonal great m_1- and m_2-spheres of $S^n(R)$, which is an orbit of the subgroup $O(m_1+1, \mathbb{R}) \times O(m_2+1, \mathbb{R})$ of $O((m_1+1)(m_2+1), \mathbb{R})$.

Both of them, $V^m(r)$ and $S_{(m_1,m_2)}(R)$ are symmetric (or parallel [13]) submanifolds in $S^{\frac{1}{2}m(m+3)}(R)$ and $S^{m_1+m_2+m_1m_2}(R)$ respectively, i.e. have parallel second order fundamental form: $\bar\nabla h = 0$. This means (see [12], [3]) that they are symmetric with respect to every its normal great subsphere in $S^n(R)$ (or, equivalently, to every its normal subepace in E^{n+1} containing $S^n(R)$). Together with the planes E^m and spheres $S^m(r)$ they are the simplest irreducible (i.e. non-product) symmetric submanifolds in Euclidean spaces.

2. The integrability condition of the system $\bar\nabla h = 0$ is $\bar\nabla_{[X}\bar\nabla_{Y]} h = 0$, or, equivalently, $\bar R(X,Y)\cdot h = 0$. Submanifolds, satisfying the last condition, are called semi-symmetric (see [5]; or semi-parallel [2]). It is shown [7], that they are the 2nd order envelopes of symmetric submanifolds, i.e. the submanifolds, which have at every point the 2nd order tangency with some symmetric submanifold. Thus the investigation of semi-symmetric submanifolds in Euclidean spaces is reduced to the problem to find the 2nd order envelopes of irreducible symmetric submanifolds and their products.

For planes and spheres the answer is simple: 2nd order envelope of planes (included straight lines) is a single plane (resp. straight line), 2nd order envelope of spheres (excluded circles) is a single sphere. For circles there is a non-trivial universal example: every curve is the 2nd order envelope of its curvature circles. Nontrivial is also the 2nd order envelope of symmetric products with flat normal connection $\nabla^\perp$ (i.e. of products of a plane, circles and spheres: cf. [14]), or equivalently, the semi-symmetric submanifold with flat $\nabla^\perp$; the investigation of such envelopes is started in [6], [15] and completed in [16], § 4.

The existence of a nontrivial 2nd order envelope of Veronese submanifolds is shown in [8] (see also [11]). The aim of the present paper is to solve the similar problem for symmetric Segre submanifolds

Theorem. The 2nd order envelope of symmetric Segre submanifolds $S_{(m_1,m_2)}(R)$ in a Euclidean space E^n is

(i) in the case $m_1 = m_2 = 1$ a surface M^2 with flat $\bar\nabla$ (i.e. with zero Gaussian curvature and flat normal connection), the two principal curvature vectors of which have at every point the same length $\sqrt{2}R^{-1}$,

(ii) in the case $m_1 = 1$, $m_2 > 1$ a submanifold M^m in a $E^{2m} \subset E^n$ generated by an 1-parametric family of concentric $(m-1)$-spheres, the orthogonal trajectories of which are the congruent logarithmic spirals (specially circles) with the common pole in the centre of family spheres,

(iii) in the case $m_1>1$, $m_2>1$ a single $S_{(m_1,m_2)}(R)$ in $S^{m_1+m_2+m_1m_2}(R)\subset E^n$.

The proof will be given in the next sections.

Remark that $S_{(1,1)}(R)$ coincide with the rectangular Clifford torus in $S^3(R)$ i.e. with the product $S^1(\frac{1}{\sqrt{2}}R)\times$ $\times S^1(\frac{1}{\sqrt{2}}R)$ in E^4. The component circles of such products are the curvature circles of the curvature lines of M^2 in the case (i) (cf. [7]).

The submanifold M^m in the case (ii) is formerly indicated in [9] in the course of the classification of the three-dimensional semi-symmetric submanifolds in Euclidean spaces. The special case is single $S_{(1,m-1)}(R)$.

3. The criterion of the 2nd order tangency of two submanifolds at their common point is that their 2nd order fundamental forms at this points coincide [7]. So our first task is to find the 2nd order fundamental form h of a $S_{(m_1,m_2)}(R)$.

For the bundle $O(M^m,E^n)$ of the orthonormal frames $\{x,e_J\}$ in E^n, adapted to a submanifold (see [4]), in the formulas

$$dx=e_J\omega^J,\quad de_J=e_I\omega_J^I,\quad \omega_J^I+\omega_I^J=0 \tag{1}$$

there hold $\omega^\alpha=0$ $(\alpha,\beta,\ldots=m+1,\ldots,n)$. Due to the structural equations

$$d\omega^J=\omega^I\wedge\omega_I^J,\quad d\omega_J^I=\omega_J^K\wedge\omega_K^I, \tag{2}$$

which follow from (1) by the exterior differentiation, we get $\omega^i\wedge\omega_i^\alpha=0$ $(i,j,\ldots=1,\ldots,m)$ and thus $\omega_i^\alpha=h_{ij}^\alpha\omega^j$. Here $h_{ij}^\alpha=h_{ji}^\alpha$ are the components of h.

For $S_{(m_1,m_2)}(R)$ we can take e_{m+1} in the direction of the common radius at x of the generating great m_1- and m_2-spheres of $S^{m_1+m_2+m_1m_2}(R)$. Then $d(x+Re_{m+1})=0$ and thus

$$\omega_i^{m+1}=k\omega^i,\quad \omega_{m+1}^\varrho=0\quad (\varrho,\sigma,\ldots=m+2,\ldots,n),$$

where $k=R^{-1}$. Taking e_{i_1} (resp. e_{i_2}) tangent to the great m_1-sphere (resp. m_2-sphere), where $i_1,j_1,\ldots=1,\ldots,m_1$; $i_2,j_2,\ldots=m_1+1,\ldots,m_1+m_2$, we have

$$\omega_{i_1}^{j_2}=0,\quad h_{i_1j_1}^\varrho=h_{i_2j_2}^\varrho=0.$$

Due to (2) from the first these equations it follows that

$$\langle h_{i_1j_2}, h_{i_1j_2}\rangle = k^2, \qquad \langle h_{i_1j_2}, h_{\kappa_1 l_2}\rangle = 0$$

if $i_1 \neq \kappa_1$ or $j_2 \neq l_2$, where $h_{i_1j_2} = h^{\rho}_{i_1j_2}e_\rho$ are, as we see, mutually orthogonal nonzero vectors. Denoting the first m_1m_2 vectors among e_ρ by $e_{(i_1j_2)}$, the other by e_ξ, and taking $e_{(i_1j_2)} \uparrow\uparrow h_{i_1j_2}$ we get the next equations, which determine the components of the 2nd fundamental of $S_{(m_1,m_2)}(R)$ with respect to the bundle of so adapted frames:

$$\omega^{m+1} = 0, \quad \omega^{(i_1j_2)} = 0, \quad \omega^{\xi} = 0, \tag{3}$$

$$\omega_i^{m+1} = k\omega^i, \quad \omega_{i_1}^{(j_1\kappa_2)} = \delta_{i_1}^{j_1} k\omega^{\kappa_2}, \quad \omega_{i_2}^{(j_1\kappa_2)} = \delta_{i_2}^{\kappa_2} k\omega^{j_1}, \tag{4}$$

$$\omega_i^{\xi} = 0. \tag{5}$$

A submanifold M^m in E^n is the 2nd order envelope of symmetric Segre submanifolds iff the the frames, i.e. elements of $O(M^m, E^n)$ can be adapted to M^m so that these equations (3)-(5) hold. Remark, that for a general envelope $k = R^{-1}$ must not be a constant.

4. Let $m_1 = m_1 = 1$; then $i_1 = 1$, $j_2 = 2$ and instead of $(1;2)$ is more convinient to use the index 4. The equations (3)-(5) can be written as follows:

$$\omega^3 = \omega^4 = \omega^{\xi} = 0,$$

$$\omega_1^3 = k\omega^1, \quad \omega_2^3 = k\omega^2, \quad \omega_1^4 = k\omega^2, \quad \omega_2^4 = k\omega^1, \quad \omega_1^{\xi} = \omega_2^{\xi} = 0. \tag{6}$$

The curvature 2-form $\Omega_1^2 = d\omega_1^2$ of the considered surface M^2 in E^n is due to (2) zero:

$$\Omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 + \omega_1^4 \wedge \omega_4^2 + \omega_1^{\xi} \wedge \omega_{\xi}^2 = \\ = -k^2\omega^1 \wedge \omega^2 - k^2\omega^2 \wedge \omega^1 = 0.$$

The normal curvature 2-forms are also zero:

$$\Omega_3^4 = \omega_3^1 \wedge \omega_1^4 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^4 = -k^2\omega^1 \wedge \omega^2 - k^2\omega^2 \wedge \omega^1 = 0,$$

$$\Omega_3^{\xi} = \omega_3^1 \wedge \omega_1^{\xi} + \omega_3^2 \wedge \omega_2^{\xi} = 0$$

and similarly $\Omega_4^{\xi} = \Omega_{\xi}^{\eta} = 0$. Hence M^2 has flat $\bar\nabla$. But the considered envelope M^2 is not the general surface with flat $\bar\nabla$ in E^n. To prove it we simplify the system (6) turning e_1 and e_2 in their plane by $\frac{\pi}{4}$ and e_3 and e_4 in their plane by $\frac{\pi}{4}$. After that we get

$$\omega_1^3 = \sqrt{2}k\omega^1, \quad \omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_2^4 = \sqrt{2}k\omega^2, \quad \omega_1^{\xi} = \omega_2^{\xi} = 0. \tag{7}$$

Now $de_1 = \omega_1^2 e_2 + \sqrt{2}k\omega^1 e_3$, $de_2 = -\omega_1^2 e_1 + \sqrt{2}k\omega^2 e_4$, thus the principal curvature vectors of our M^2 are $\sqrt{2}ke_1$ and

$\sqrt{2}k e_4$ and they have the same length $\sqrt{2}k=\sqrt{2}R^{-1}$. The assertion (1) is proved.

Remark that for a general M^2 with flat $\overline{\nabla}$ the system, corresponding to (7), is as follows:

$$\omega_1^3=k_1\omega^1,\ \ \omega_1^4=0,\ \ \omega_2^3=0,\ \ \omega_2^4=k_2\omega^2,\ \ \omega_1^\xi=\omega_2^\xi=0.$$

The problem arises, is the 2nd order envelope M^2 of the case (i) nontrivial, i.e. different from a single $S_{(1,1)}(R)=S^1(\frac{1}{\sqrt{2}}R)\times S^1(\frac{1}{\sqrt{2}}R)$? The answer is affirmative. We prove it here for the special case $n=4$, when the set of values of ξ is empty. From (7) by the exterior differentiation using (2) we get

$$d\ln k\wedge\omega^1+\omega_1^2\wedge\omega^3=0,\qquad \omega_1^2\wedge\omega^1-\omega_3^4\wedge\omega^2=0,$$
$$\omega_1^2\wedge\omega^1-d\ln k\wedge\omega^2=0,\qquad \omega_3^4\wedge\omega^1-\omega_1^2\wedge\omega^2=0.$$

Due to the Cartan lemma

$$d\ln k=\varkappa\omega^1+\lambda\omega^2,\ \ \omega_1^2=\lambda\omega^1-\varkappa\omega^2,\ \ \omega_3^4=\varkappa\omega^1-\lambda\omega^2.$$

Now the same procedure gives

$$d\varkappa\wedge\omega^1+d\lambda\wedge\omega^2=0,$$
$$d\lambda\wedge\omega^1-d\varkappa\wedge\omega^2=-(\varkappa^2+\lambda^2)\omega^1\wedge\omega^2,$$
$$d\varkappa\wedge\omega^1-d\lambda\wedge\omega^2=-2\varkappa\lambda\,\omega^1\wedge\omega^2$$

and then

$$d\varkappa=\varphi\omega^1+\varkappa\lambda\omega^2,\qquad d\lambda=\varkappa\lambda\omega^1+(\varkappa^2+\lambda^2-\varphi)\omega^2.$$

The next step gives

$$(d\varphi-2\varphi\lambda\omega^2)\wedge\omega^1=0,$$
$$[d\varphi+2\varkappa(\varkappa^2-2\varphi)\omega^1]\wedge\omega^2=0$$

and thus $\frac{1}{2}d\varphi=\varkappa(2\varphi-\varkappa^2)\omega^1+2\varphi\lambda\omega^2$. Now the exterior differentation gives an identity. Hence the considered M^2 in E^4 exists with the arbitrariness of some constants. Here $S_{(1,1)}(R)$ corresponds to $\varkappa=\lambda=\varphi=0$, so in general our M^2 is different from $S_{(1,1)}(R)$.

5. Let $m_1=1$, $m_2=m-1>1$. Here instead of $j_2,\ldots$ we use $a,b,\ldots$ and (1a) will be replaced by $m+a$. The equations (3)-(5) are now

$$\omega^{m+1}=\omega^{m+a}=\omega^\xi=0,\tag{8}$$
$$\omega_1^{m+1}=k\omega^1,\ \ \omega_a^{m+1}=k\omega^a,\tag{9}$$
$$\omega_1^{m+a}=k\omega^a,\ \ \omega_b^{m+a}=\delta_b^a k\omega^1,\tag{10}$$

$$\omega_1^\xi = \omega_a^\xi = 0. \tag{11}$$

By exterior differentation the equations of the first row (8) give the identities, but from the second row (9) we get

$$d\ln k \wedge \omega^1 + \omega_{m+a}^{m+1} \wedge \omega^a = 0,$$
$$\omega_{m+a}^{m+1} \wedge \omega^1 + d\ln k \wedge \omega^a = 0,$$

thus

$$d\ln k = \varkappa \omega^1, \quad \omega_{m+a}^{m+1} = \varkappa \omega^a. \tag{12}$$

From the third row (10) we get

$$2(\omega_1^a + \varkappa \omega^a) \wedge \omega^1 + (\omega_b^a - \omega_{m+b}^{m+a}) \wedge \omega^b = 0,$$
$$(\omega_b^a - \omega_{m+a}^{m+b}) \wedge \omega^1 + (\omega_b^1 - \varkappa \omega^b) \wedge \omega^a + \delta_b^a \omega_c^1 \wedge \omega^c = 0.$$

The last covariants in the case $a = b$ give that $2\omega_1^a \wedge \omega^a + \sum_{c \neq a} \omega_1^c \wedge \omega^c = 0$ (not to sum by a!) and thus in particular, $2\omega_1^a = p^a \omega^a + \sum_{c \neq a} q_c^a \omega^c$ for every value $a = 2, \dots, m$. So $\omega_1^c = \frac{1}{2}(p^c \omega^c + \sum_{b \neq c} q_b^c \omega^b)$. Substituting these expressions we get $\sum_{c \neq a} q_c^a \omega^c \wedge \omega^a + \frac{1}{2} \sum_{c \neq a} \sum_{b \neq c} q_b^c \omega^b \wedge \omega^c = 0$ for every fixed a, hence $q_c^a - \frac{1}{2} q_a^c = 0 \, (a \neq c)$, $q_b^c = 0$ (a, b, c — three different values). If $m \geq 4$ we get that all $q_b^c = 0$; if $m = 3$ we have also $q_a^c - \frac{1}{2} q_c^a = 0$ and $q_a^c = 0$ as well. So $\omega_1^a = \frac{1}{2} p^a \omega^a$.

The same covariants in the case $a \neq b$ give

$$(\omega_b^a - \omega_{m+b}^{m+a}) \wedge \omega^1 - (\tfrac{1}{2} p^a + \varkappa) \omega^b \wedge \omega^a = 0,$$

thus $\frac{1}{2} p^a = -\varkappa$ and $\omega_b^a - \omega_{m+b}^{m+a} = s_b^a \omega^1$. Substituting this into the first covariants we get $s_b^a \omega^1 \wedge \omega^b = 0$ and hence $s_b^a = 0$ The result is that

$$\omega_1^a = -\varkappa \omega^a, \quad \omega_{m+b}^{m+a} = \omega_b^a. \tag{13}$$

From the equations (11) by the exterior differentiation we get

$$\omega_{m+1}^\xi \wedge \omega^1 + \omega_{m+a}^\xi \wedge \omega^a = 0,$$
$$\omega_{m+a}^\xi \wedge \omega^1 + \omega_{m+1}^\xi \wedge \omega^a = 0,$$

thus

$$\omega_{m+1}^\xi = \varphi^\xi \omega^1, \quad \omega_{m+a}^\xi = \varphi^\xi \omega^a.$$

The last equations (13) give in the same way that $\sum (\varphi^\xi)^2 \omega^a \wedge \omega^b = 0$, hence $\varphi^\xi = 0$. From the first equation (12) it follows $d\varkappa \wedge \omega^1 = 0$ and thus $d\varkappa = \lambda \omega^1$; now the first equations (13) give $\lambda = \varkappa^2$. So

$$\omega^{\xi}_{m+1} = \omega^{\xi}_{m+a} = 0, \quad d\varkappa = \varkappa^2 \omega^1. \tag{14}$$

The straightforward computation shows now that the system (8)-(14) is completely integrable. Thus the considered envelope M^m exists with the arbitrariness of some constants.

It remains to describe the geometrical construction of the considered envelope M^m. As $d\omega^1 = 0$ due to (13) we can take, at least locally, $\omega^1 = ds$. For $s = const$ we have $dx = e_a\omega^a$, $de_a = e_b\omega^b_a + (\varkappa e_1 + k e_{m+1})\omega^a$. So the submanifolds with $s = const$ in M^m consist of totally umbilic points and are the $(m-1)$-dimensional spheres or their parts. The centre of a such sphere has the radius vector $x + (\varkappa^2 + k^2)^{-1}(\varkappa e_1 + k e_{m+1})$ and as

$$\begin{aligned} d\left[x + (\varkappa^2 + k^2)^{-1}(\varkappa e_1 + k e_{m+1})\right] = \\ = e_1 ds + e_a\omega^a - (\varkappa^2 + k^2)^{-2}(2\varkappa^3 ds + 2k^2\varkappa ds)(\varkappa e_1 + k e_{m+1}) + \\ + (\varkappa^2 + k^2)^{-1}\left[\varkappa^2 ds\, e_1 + \varkappa(-\varkappa\omega^a e_a + k ds\, e_{m+1} + k\omega^a e_{m+a}) + \right. \\ \left. + k\varkappa ds\, e_{m+1} + k(-k ds\, e_1 - k\omega^a e_a - \varkappa\omega^a e_{m+a})\right] = 0 \end{aligned}$$

all these spheres have the common centre, i.e. they are concentric.

The orthogonal trajectories of all these spheres are determined by $\omega^a = 0$ and for each of them $dx = e_1 ds$, $de_1 = k ds\, e_{m+1}$, $de_{m+1} = -k ds\, e_1$. Thus the trajectory is a plane curve and k is its curvature. From (14) it follows that $d\varkappa = \varkappa^2 ds$.

Let $\varkappa \neq 0$; then $\varkappa = -s^{-1}$. Now from (12) $k = cs^{-1}$. Hence all these orthogonal trajectories are congruent logarithmic spirals.

It is well-known (see e.g. [17]) that a logaritmic spiral with polar equation $\rho = a^{\varphi}$ has the curvature $k = s^{-1}\tan\mu$, where s is the arc length from the pole, $\tan\mu = (\ln a)^{-1}$ and μ is the constant angle between the unit tangent vector and radius vector x. In this notation $\rho = s\cos\mu$ and the pole has the radius vector $c = x + s\cos\mu(n\sin\mu - t\cos\mu)$, where n is the normal unit vector.

In our case $c = x + s^2\cos^2\mu\left[e_{m+1}(s^{-1}\tan\mu) - s^{-1}e_1\right] = x + (k^2 + \varkappa^2)^{-1}(e_{m+1}k + e_1\varkappa)$, so the pole of all these logarithmic spirals coincide with the common centre of concentric generating $(m-1)$-spheres. The assertion (ii) is proved for the case $\varkappa \neq 0$.

Remark that in [9] we have shown the validity of the converse assertion: every submanifold M^m with the properties, indicated in (ii), is semi-symmetric; the equations (6.5) in [9] show that such M^m is the 2nd order envelope of symmetric Segre submanifolds $S_{(1,m-1)}(R)$, $R = s\,ctg\,\mu$.

We propose a such M^m in E^{2m} to call the "logarithmic spiral tube".

If $\varkappa \equiv 0$ we have a single $S_{(1,m-1)}(R)$; the argumentation is the same as below. So (ii) is completely proved.

6. Let $m_1 > 1$, $m_2 > 1$. Here we start with the first equations (4):

$$\omega_{i_1}^{m+1} = k\omega^{i_1}, \quad \omega_{i_2}^{m+1} = k\omega^{i_2}.$$

They lead to

$$d\ln k \wedge \omega^{i_1} + \omega_{(i_1 j_2)}^{m+1} \wedge \omega^{j_2} = 0,$$
$$\omega_{(i_1 j_2)}^{m+1} \wedge \omega^{i_1} + d\ln k \wedge \omega^{j_2} = 0,$$

thus $d\ln k$ must be by $\mathrm{mod}\,\omega^{\kappa_2}$ a multiple of every ω^{i_1} and by $\mathrm{mod}\,\omega^{\kappa_1}$ a multiple of every ω^{j_2}, hence $d\ln k = 0$. Similarly, $\omega_{(i_1 j_2)}^{m+1}$ must be a linear combination only of ω^{κ_2} and only of ω^{ℓ_1}, thus $\omega_{(i_1 j_2)}^{m+1} = 0$. So the first equations (4) give

$$k = \mathrm{const}, \qquad \omega_{(i_1 j_2)}^{m+1} = 0. \tag{15}$$

The second group of equations (4) leads to

$$(\delta_{i_1}^{j_1}\omega_{\ell_1}^{\kappa_2} + \omega_{i_1}^{\kappa_2}\delta_{\ell_1}^{j_1})\wedge\omega^{\ell_1} + (\delta_{i_1}^{j_1}\omega_{\ell_2}^{\kappa_2} + \omega_{i_1}^{j_1}\delta_{\ell_2}^{\kappa_2} - \omega_{(i_1\ell_2)}^{(j_1\kappa_2)})\wedge\omega^{\ell_2} = 0.$$

For $i_1 = j_1$ and fixed i_1 we have

$$2\omega_{i_1}^{\kappa_2}\wedge\omega^{i_1} + \sum_{\ell_1 \neq i_1}\omega_{\ell_1}^{\kappa_2}\wedge\omega^{\ell_1} + (\omega_{\ell_2}^{\kappa_2} - \omega_{(i_1\ell_2)}^{(i_1\kappa_2)})\wedge\omega^{\ell_2} = 0,$$

thus

$$2\omega_{i_1}^{\kappa_2} = p_{i_1}^{\kappa_2}\omega^{i_1} + \sum_{\ell_1 \neq i_1} q_{i_1\ell_1}^{\kappa_2}\omega^{\ell_1} + s_{i_1\ell_2}^{\kappa_2}\omega^{\ell_2}$$

and hence

$$\omega_{\ell_1}^{\kappa_2} = \tfrac{1}{2}(p_{\ell_1}^{\kappa_2}\omega^{\ell_1} + \sum_{j_1 \neq \ell_1} q_{\ell_1 j_1}^{\kappa_2}\omega^{j_1} + s_{\ell_1 j_2}^{\kappa_2}\omega^{j_2}), \quad \ell_1 \text{ fixed}.$$

Substituting we get

$$\sum_{\ell_1 \neq i_1} q_{i_1\ell_1}^{\kappa_2}\omega^{\ell_1}\wedge\omega^{i_1} + \tfrac{1}{2}\sum_{\ell_1 \neq i_1}\sum_{j_1 \neq \ell_1} q_{\ell_1 j_1}^{\kappa_2}\omega^{j_1}\wedge\omega^{\ell_1} + \Theta_{\ell_2}^{\kappa_2}\wedge\omega^{\ell_2} = 0,$$

thus $q_{i_1\ell_1}^{\kappa_2} - \frac{1}{2}q_{\ell_1 i_1}^{\kappa_2} = 0\ (i_1 \neq \ell_1)$, $q_{\ell_1 j_1}^{\kappa_2} = 0$ (i_1, j_1, ℓ_1 — three different values). If $m_1 \geq 3$ we get that all $q_{\ell_1 j_1}^{\kappa_2} = 0$; if $m_1 = 2$, we have also $q_{\ell_1 i_1}^{\kappa_2} - \frac{1}{2}q_{i_1\ell_1}^{\kappa_2} = 0$ and $q_{i_1\ell_1}^{\kappa_2} = 0$ as well.

Taking now $i_1 \neq j_1$ we get

$$\omega_{i_1}^{\kappa_2}\wedge\omega^{j_1}+(\omega_{i_1}^{j_1}\delta_{\ell_2}^{\kappa_2}-\omega_{(i_1\ell_2)}^{(j_1\kappa_2)})\wedge\omega^{\ell_2}=0$$

and after substituting the expression of $\omega_{i_1}^{\kappa_2}$

$$\tfrac{1}{2}p_{i_1}^{\kappa_2}\omega^{i_1}\wedge\omega^{j_1}+\Phi_{i_1\ell_2}^{j_1\kappa_2}\wedge\omega^{\ell_2}=0,$$

thus $p_{i_1}^{\kappa_2}=0$. So $\omega_{i_1}^{\kappa_2}$ can be expressed only by ω^{ℓ_2}.

But the subindices 1 and 2 have here the equivalent roles therefore $\omega_{\kappa_2}^{i_1}$ can be expressed only by ω^{ℓ_1}. As $\omega_{\kappa_2}^{i_1}=-\omega_{i_1}^{\kappa_2}$ it follows that

$$\omega_{i_1}^{\kappa_2}=0. \tag{16}$$

The covariants by $i_1=j_1$ reduce now to

$$(\omega_{\ell_2}^{\kappa_2}-\omega_{(i_1\ell_2)}^{(i_1\kappa_2)})\wedge\omega^{\ell_2}=0$$

and hence

$$\omega_{\ell_2}^{\kappa_2}-\omega_{(i_1\ell_2)}^{(i_1\kappa_2)}=S_{\ell_2 j_2}^{\kappa_2}\omega^{j_2},$$

where $S_{\ell_2 j_2}^{\kappa_2}=S_{j_2\ell_2}^{\kappa_2}$. On the other hand $S_{\ell_2 j_2}^{\kappa_2}=-S_{\kappa_2 j_2}^{\ell_2}$, thus $S_{\ell_2 j_2}^{\kappa_2}=S_{j_2\ell_2}^{\kappa_2}=-S_{\kappa_2\ell_2}^{j_2}=-S_{\ell_2\kappa_2}^{j_2}=S_{j_2\kappa_2}^{\ell_2}=S_{\kappa_2 j_2}^{\ell_2}=-S_{\ell_2 j_2}^{\kappa_2}$, hence $S_{\ell_2 j_2}^{\kappa_2}=0$ and

$$\omega_{(i_1\ell_2)}^{(i_1\kappa_2)}=\omega_{\ell_2}^{\kappa_2}. \tag{17}$$

Exchanging 1 and 2 we get

$$\omega_{(\ell_1 i_2)}^{(\kappa_1 i_2)}=\omega_{\ell_1}^{\kappa_1}. \tag{17'}$$

The covariants by $i_1\neq j_1$ give now

$$(\omega_{i_1}^{j_1}-\omega_{(i_1\kappa_2)}^{(j_1\kappa_2)})\wedge\omega^{\kappa_2}-\sum_{\ell_2\neq\kappa_2}\omega_{(i_1\ell_2)}^{(j_1\kappa_2)}\wedge\omega^{\ell_2}=0,$$

where in the brackets we have zero. It follows that $\omega_{(i_1\ell_2)}^{(j_1\kappa_2)}$ by $i_1\neq j_1$ and $\kappa_2\neq\ell_2$ can be expressed only by ω^{h_2}. But here 1 and 2 occur equivalently, thus $\omega_{(i_1\ell_2)}^{(j_1\kappa_2)}$ can be expressed only by ω^{h_1}; hence

$$\omega_{(i_1\ell_2)}^{(j_1\kappa_2)}=0\quad(i_1\neq j_1,\ \kappa_2\neq\ell_2). \tag{18}$$

Finally the equations (5) lead to

$$\omega^{i_1}\wedge\omega_{m+1}^{\xi}+\omega^{j_2}\wedge\omega_{(i_1j_2)}^{\xi}=0,$$
$$\omega^{i_1}\wedge\omega_{(i_1j_2)}^{\xi}+\omega^{j_2}\wedge\omega_{m+1}^{\xi}=0.$$

Thus ω_{m+1}^{ξ} must be by $\mathrm{mod}\,\omega^{\kappa_2}$ a multiple of every ω^{i_1} and by $\mathrm{mod}\,\omega^{\kappa_1}$ a multiple of every ω^{j_2}, hence $\omega_{m+1}^{\xi}=0$. Similarly $\omega_{(i_1j_2)}^{\xi}$ must be a linear combination only of ω^{κ_2} and only of ω^{ℓ_1}, thus $\omega_{(i_1j_2)}^{\xi}=0$. So the equation (5) give

$$\omega_{m+1}^{\xi}=\omega_{(i_1j_2)}^{\xi}=0. \tag{19}$$

The straightforward computation shows now that the system (3)-(5), (15)-(19) is completely integrable and the considered M^m exists with the arbitrariness of some constants. As $d\omega^{i_1} = \omega^{j_1} \wedge \omega^{i_1}_{j_1}$, the system $\omega^{i_1} = 0$ determines on M^m a family of m_2-dimensional submanifolds along every of which

$$dx = e_{i_2}\omega^{i_2}, \quad de_{i_2} = e_{j_2}\omega^{j_2}_{i_2} + k e_{m+1}\omega^{i_2}.$$

So this submanifold consits of totally umbilic points and is the m_2-sphere of the radius $R = k^{-1}$ (or its part). Here the roles of subindices 1 and 2 can be exchanged. Thus M^m is a symmetric Segre submanifold $S_{(m_1,m_2)}(R)$.

Theorem is completely proved.

References

1. B a c k e s, E., R e c k z i e g e l, H. On symmetric submanifolds of spaces of constant curvature// Math. Ann. - 1983. - 263, № 4. - P. 265-272.

2. D e p r e z, J. Semi-parallel surfaces in Euclidean space// J. Geom. - 1985 - 25, №2. - P. 192-200.

3. F e r u s, D. Symmetric submanifolds of Euclidean space// Math. Ann. - 1980. - 247, № 1. - P. 81-93.

4. K o b a y a s h i, S., N o m i z u, K. Foundations of Differential Geometry. V. I. New York - London: Intersc. Publ., 1963.

5. L u m i s t e, Ü. Decomposition and classification theorems for semi-symmetric immersions// Proc. Acad. sci. Estonian SSR. Phys. Math. - 1987. - 36, № 4. - P. 414-417.

6. L u m i s t e, Ü. Normally flat semi-symmetric submanifolds// Differ. Geom. and its Appl.: Proc. Conf. Dubrovnik, June 26 - July 3, 1988. - Novi Sad. 1989. - P. 159-171

7. L u m i s t e, Ü. Semi-symmetric submanifold as the second order envelope of symmetric submanifolds// Proc. Estonian Acad. sci. Phys. Math. - 1990. - 39, № 1. - P. 1-8.

8. L u m i s t e, Ü. Second order envelopes of m-dimensional Veronese submanifolds// Tartu Ülik. Toim. Acta et comm. Univ. Tartuensis. - 1991. - V. 930 - P. 35-46.

9. L u m i s t e Ü., R i i v e s K. Three-dimensional semi-symmetric submanifolds with axial, planar or spatial points in Euclidean spaces// Tartu Ülik. Toim. Acta et comm. Univ. Tartuensis. - 990. - V. 899. - P. 13-28.

10. M u m f o r d, D. Algebraic geometry. V. I., Berlin-Heidelberg - New York: Springer, 1976.

11. R i i v e s K. Second order envelope of congruent Veronese surfaces in E^6 // Tartu Ülik. Toim. Acta et comm. Univ. Tartuensie. - 1991. - V. 930, - P. 47-52.

12. S t r ü b i n g, W. Symmetric submanifolds of Riemannian manifolds// Math Ann. - 1979. - 245, № 1. - P. 37-44.

13. T a k e u c h i, M. Parallel submanifolds of space forms// Manifolds and Lie groups. Papers in honour of Y.Matsushima. - Basel, 1981. - C. 429-447.

14. W a l d e n, R. Untermannigfaltigkeiten mit paralleler zweiter Fundamentalform in euklidischen Räumen und Sphären// Manuscr. math. - 1973. - 10. № 1. - - P. 91-102.

I5. Л у м и с т е Ю. Г. Неприводимые нормально плоские полусимметрические подмногообразия. I. II // Изв. вузов, Мат. - I990. - № 8,9. - с. 45-53, 3I-40.

I6. Л у м и с т е Ю. Г. Полусимметрические подмногообразия // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геом. - I99I. - 23. - С. 3-28.

I7. С а в е л о в А. А. Плоские кривые . М. Гос. Изд. Физ.-мат. Лит., I960.

I8. Ш а ф а р е в и ч И. Р. Основы алгебраической геометрии. Т. I. М.: Наука, I988.

Received
March 18, 1991

ОГИБАЮЩИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА СИММЕТРИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ СЕГРЕ

Ю.Лумисте

Резюме

В алгебраической геометрии известно погружение Сегре s: $P^{m_1} \times P^{m_2} \to P^{m_1+m_2+m_1m_2}$, которое определяет $(u^0, u^1, \ldots, u^{m_1}; v^0, v^1, \ldots, v^{m_2}) \to (x^{00}, x^{01}, \ldots, x^{m_1m_2})$ согласно $x^{i_1j_2} = u^{i_1}v^{j_2}$ (см. [10], § 2B). Подмногообразие Сегре $s(P^{m_1} \times P^{m_2})$ имеет два семейства плоских образующих: $u^{i_1} = const$ и $v^{j_2} = const$. После введения эллиптической метрики выделяются подмногообразия Сегре с ортогональными образующими, каждое из которых при интерпретации эллиптического пространства с помощью сферы дает симметрическое подмногообразие Сегре $S_{(m_1, m_2)}(R)$ в $S^{m_1+m_2+m_1m_2}(R)$.

Известно [7], что подмногообразие в пространстве постоянной кривизны является полусимметрическим тогда и только тогда, когда оно есть огибающее второго порядка симметрических подмногообразий.

<u>Теорема</u>. В евклидовом пространстве E^n огибающими второго порядка симметрических подмногообразий Сегре $S_{(m_1, m_2)}(R)$ являются:

(i) при $m_1 = m_2 = 1$ поверхность M^2 с плоской связностью ван дер Вардена-Бортолотти $\bar{\nabla}$ (т.е. с нулевой гауссовой кривизны и плоской нормальной связностью $\nabla^{\perp}$), векторы нормальной кривизны которой имеют в каждой точке одинаковую длину $\sqrt{2}\,R^{-1}$,

(ii) при $m_1 = 1$, $m_2 = m - 1 > 1$ либо подмногообразие M^m в $E^{2m} \subset E^n$, образованное 1-параметрическим семейством концентрических $(m-1)$-сфер, ортогональные траектории которого суть конгруэнтные логарифмические спирали с общим полюсом в центре сфер семейства, либо одно единственное $S_{(1, m-1)}(R)$,

(iii) при $m_1 > 1$, $m_2 > 1$ одно единственное $S_{(m_1, m_2)}(R)$.

TÜ Toimetised,
930 (1991), 27-34.

Уч. зап. Тартуск. ун-та
1991, 930, 27-34.

THREE-DIMENSIONAL DUPIN HYPERSURFACES WITH HOLONOMIC NET OF CURVATURE LINES AND ONE ZERO PRINCIPAL CURVATURE

Ü. Lumiste, M.Väljas
Dep. of Algebra and Geometry, Tartu University
Dep. of Mathem., Tallinn Technical University

1. Introduction

The *Dupin hypersurface* is a hypersurface V_n in a Euclidean space E_{n+1} which has constant multiplicities of the principal curvatures and each of the latter is constant along its leaf of the curvature distribution [4, 5, 6, 7].

The Dupin surfaces in E_3 are only the spheres, planes and the *Dupin cyclides* (i.e. the surfaces V_2 in E_3 whose curvature lines are circles or straight lines).

The Dupin hypersurfaces V_n with two distinct principal curvatures of multiplicities p and $n-p$ have been classified in [1, 2].

The Dupin hypersurfaces with three distinct principal curvatures are intresting in many aspects. Compact of them in E_{n+1} are investigated in [4]. They play a distinguished role in the theory of conformally (specially, isothermic) hypersurfaces (see [8]). The first example of a conformally flat hypersurface V_3, which shows that the classical Cartan-Schouten theorem: "A conformally flat hypersurface in E_{n+1}, $n > 3$, has only two principal curvatures of the multiplicities 1 and $n-1$" is not valid, if $n = 3$, was given by

Verbitsky in 1963 as a *Dupin hypercone*. The classification of the isothermic hypersurfaces [8] gives the next two concrete examples: the so called *Dupin-Mannheim hypercyclides* in E_4 (i.e. Dupin hypersurfaces whose planes of curvature circles have for each family a common straight line or are parallel each other; see also [3]) and the Clifford hypercones. All these examples have the holonomic net of curvature lines (circles or straight lines).

The general Dupin hypersurfaces in E_4 with three distinct principal curvatures and with holonomic net of curvature lines are investigated in [9]. It is proved that they are determined by a completely integrable system of differential equations (i.e. they exist with the arbitrariness of some constants) and that the planes of the curvature circless of a such Dupin hypersurface have, for a given family, a fixed point of intersection.

The present paper continues these investigations. Here the special case is considered when one of the principal curvatures is zero. The corresponding curvature lines are then straight lines. The main result is the

T h e o r e m 1. *A hypersurface V_3 in a Euclidean space E_4 is a* Dupin *hypersurface with three distinct principal curvatures, one of which is zero, and with holonomic net of curvature lines iff it is either*

(i) a *ruled hypersurface whose rulings are normal lines in E_4 for a Dupin cyclide V_2 in a bypersphere $S_3(r)$ and form a constant angle $\alpha \neq 0$ with the radius of $S_3(r)$, or*

(ii) *a hypercone on such V_2 in $S_3(r)$ with the vertex* at *the centre of $S_3(r)$ (i.e. a limit case of* (i) *by $\alpha \longrightarrow 0$), or*

(iii) *a hypercylinder on a Dupin cyclide in a hyperplane E_3 ((i.e. a limit case of* (ii) *by $r \longrightarrow \infty$).*

Remark, that the Verbitsky (and Clifford) cones are the special cases of (ii), by which V_2 has the constant (resp. zero) Gauss curvature.

2. Preliminaries

Let V_3 be a 3-dimensional hypersurface in a Euclidean space E_4 and let $\mathfrak{R} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ be the canonical orthogonal moving frame at a point $x \in V_3$ with the vectors e_1, e_2, e_3 having the principal directions, i.e. giving the canonical form for the second fundamental form. Then, in the derivation formulas

$$dx = e_J \omega^J, \quad de_K = e_J \omega^J_K, \qquad J,K = 1,2,3,4, \tag{1}$$

we have $\omega^K_J = -\omega^J_K$, and

$$\omega^4 = 0, \quad \omega^4_p = k_p \omega^p, \qquad p = 1,2,3 \tag{2}$$

(no sum!), where k_1, k_2, k_3 are the principal curvatures of the hypersurface V_3. Let us suppose that they are mutually different, i.e. $k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_1$. By means of exterior differation and then by the Cartan lemma we get from (2) the equations

$$\omega^q_p = \Gamma_{rp}\omega^p - \Gamma_{rq}\omega^q + (k_p - k_q)^{-1}\lambda\omega^r, \tag{3}$$

$$dk_p = a_p\omega^p + (k_p - k_q)\Gamma_{rp}\omega^q + (k_p - k_r)\Gamma_{qp}\omega^r, \tag{4}$$

where p, q, r is an arbitrary permutation of 1, 2, 3.

Since the principal curvatures of the the Dupin hypersurfaces are constant along it's corresponding curvature lines, then for a Dupin hypersurface $a_p = 0$ in the formulas (3). Let the curvature lines form the holonomic net. Then every of the equations $\omega^q = 0$ is totally integrable and hence $\lambda = 0$. So from a Dupin hypersurface from (3) and (4) it follows that

$$\omega^q_p = \Gamma_{rp}\omega^p - \Gamma_{rq}\omega^q, \tag{5}$$

$$dk_p = (k_p - k_q)\Gamma_{rp}\omega^q + (k_p - k_r)\Gamma_{qp}\omega^r, \tag{6}$$

By the subsequent exterior differention and using the Cartan lemma we get

$$d\Gamma_{rp} = [A_{rpq} + \tfrac{1}{2}(2\Gamma^2_{rp} + \Gamma_{pq}\Gamma_{qp} + k_p k_q)]\omega^q + \Gamma_{qp}(\Gamma_{rp} - \Gamma_{pr})\omega^r, \tag{7}$$

where $A_{rpq} = -A_{rqp}$, and the last equations give in the same way that

$$dA_{rpq} = \Gamma_{rq}(\Gamma^2_{rp} + \tfrac{1}{2}\Gamma^2_{qp} + \tfrac{1}{2}k^2_p + A_{rpq})\omega^p - \Gamma_{rp}(\Gamma^2_{rq} + \tfrac{1}{2}\Gamma^2_{pq} + \tfrac{1}{2}k^2_q + A_{rqp})\omega^q +$$
$$+ [(\tfrac{1}{2}A_{qrp} + A_{rpq} + \tfrac{3}{4}\Gamma_{pr}\Gamma_{rp} + \tfrac{1}{4}k_p k_r)\Gamma_{pq} -$$
$$-(\tfrac{1}{2}A_{prq} + A_{rqp} + \tfrac{3}{4}\Gamma_{qr}\Gamma_{rq} + \tfrac{1}{4}k_q k_r)\Gamma_{qp}]\omega^r. \qquad (8)$$

The next theorem has been proved in [8].

T h e o r e m 2. *The Dupin hypersurface with three distinct principal curvatures and with the holonomic net of curvature lines is determined in its canonical moving frame by the completely integrable system (2), (5) - (8), where p, q, r is an arbitrary permutation of 1, 2, 3.*

3. Proof of the the Theorem 1

We start with the necessity. Let V_3 be the Dupin hypersurface of the Theorem 1. Then in (2), (5) - (8) $k_3 = 0$ and thus

$$\Gamma_{a3} = 0, \quad A_{a3b} = A_{ab3} = 0 \qquad (9)$$

where a, b is a permutation of 1, 2. Now from (1) and (5) it is seen that along the third curvature lines ($\omega^1 = \omega^2 = 0$) the tangent vector e_3 is constant ($de_3 = 0$), hence these lines are straight lines (the rulings of the ruled V_3). Every orthogonal surface V_2 ($\omega^3 = 0$) of the rulings has at arbitrary point $x \in V_2$ the normal vectors e_3 and e_4.

Let us look for the point z in the normal plane of V_2, i.e. having the radius vector

$$z = x + c_3 e_3 + c_4 e_4,$$

for which dz, taken along V_2 ($\omega^3 = 0$), is complanar to the normal plane. This leads to the system

$$\begin{cases} c_3\Gamma_{12} + c_4k_2 = 1, \\ c_3\Gamma_{21} + c_4k_1 = 1. \end{cases}$$

If $k_1\Gamma_{12} \neq k_2\Gamma_{21}$ then this system has the unique solution, which determines a point with the radius vector

$$z = x + \frac{(k_1-k_2)e_3 + (\Gamma_{12}-\Gamma_{21})e_4}{k_1\Gamma_{12} - k_2\Gamma_{21}}.$$

By a straightforward computation using (2), (5)-(8), where (9) is assumed, it can be proved that $dz = 0$ for the whole V_2, i.e. z is a fixed point for V_3, and $d\|z-x\| = 0$ on a given V_2 ($\omega^3=0$). This shows that V_2 belongs to a hypersphere $S_3(r)$ with the centre at z and with radius $r = \|z-x\|$.

The angle α between the ruling and the radius of the hypersphere $S_3(r)$ at a point $y \in V_2$ is determined by

$$\cos^2\alpha = \frac{\langle e_3, z - x\rangle^2}{\|z - x\|^2} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1-k_2)^2 + (\Gamma_{12}-\Gamma_{21})^2}.$$

It is easy to see, that along V_2 ($\omega^3=0$) we have $d(\cos^2\alpha) = 0$, i.e. $\alpha = const$.

Let us turn the base $\{e_3, e_4\}$ in the normal plane of V_2 at $y \in V_2$ by $\alpha - \frac{\pi}{2}$, so get the new base $\{e'_3, e'_4\}$, where e'_4 is collinear to the radius of $S_3(r)$ at y. Then

$$e'_3 = e_3\sin\alpha - e_4\cos\alpha, \qquad e'_4 = e_3\sin\alpha + e_4\cos\alpha,$$
$$e_3 = e'_3\sin\alpha + e'_4\cos\alpha, \qquad e_4 = -e'_3\sin\alpha + e'_4\cos\alpha.$$

Taking z as a new fixed origin in E_4 we have for the new radius vector of the point $y \in V_2$ that $y = -re'_4$. So $dy = \theta^1e_1+\theta^2e_2 \parallel -rde'_4 = -r(e_1\theta^1_4+e_2\theta^2_4+e'_3\theta^3_4)$, thus $\theta^a_4 = -r^{-1}\theta^a$, $\theta^3_4=0$. For V_2 we have

$$de_a = e_b\theta^b_a + e'_3k'_a\theta^a + e'_4r^{-1}\theta^a,$$

$$de'_3 = -e_1k'_1\theta^1 - e_2k'_2\theta^2,$$

$$de'_4 = -r^{-1}(e_1\theta^1 + e_2\theta^2).$$

Now the general point x of the considered ruled Dupin hypersurface V_3 is determined by

$$x = y + s(e'_3 \sin\alpha + e'_4 \cos\alpha).$$

As

$$dx = e_1\theta^1[1 - s(k'_1 \sin\alpha + r^{-1}\cos\alpha)] +$$
$$+ e_2\theta^2[1 - s(k'_2 \sin\alpha + r^{-1}\cos\alpha)] +$$
$$+ ds\,(e'_3 \sin\alpha + e'_4 \cos\alpha),$$

so $\omega^a = \theta^a x^a$, $\omega^3 = ds$, where $x^a = [1 - s(k'_a \sin\alpha + r^{-1}\cos\alpha)]$.

Futher

$$de_a = e_b\theta^b_a + \omega^a(x^a)^{-1}[(k'_a \sin\alpha + r^{-1}\cos\alpha)e_3 +$$
$$+(-k'_a\cos\alpha + r^{-1}\sin\alpha)e_4], \qquad (10)$$

thus

$$k_a = (x^a)^{-1}(-k'_a\cos\alpha + r^{-1}\sin\alpha).$$

Now

$$dk_a = (x^a)^{-1}[(s\cdot\sin\alpha - x^s\cos\alpha)dk'_a + \omega^3(k'_a\sin\alpha + r^{-1}\cos\alpha)]. \qquad (11)$$

Along the curvature line ($\omega^a=\omega^3=0$; a fixed) of the Dupin hypersurface V_3 we have $dk_a=0$; also $\theta^a=0$ on V_2, which is determined by $s=0$ and has $x^a=1$. So the last relation gives that V_2 has the property: $dk'_a=0$ along the corresponding curvature line ($\theta^a=0$). Hence V_2 is a Dupin surface in $S_3(r)$ and consequently is a Duipn cyclide in $S_3(r)$. We have got the necessity of (i), which refers to the case $\alpha\neq 0$ (or $\Gamma_{12}\neq\Gamma_{21}$), and also of (ii) by $\alpha=0$ (or $\Gamma_{12}=\Gamma_{21}$).

If $k_1\Gamma_{12}-k_2\Gamma_{21} \longrightarrow 0$ then z goes to the infinity, thus $S_3(r)$ tends to be a hyperplane E_3. This gives the necessity of (iii) when $k_1\Gamma_{12}-k_2\Gamma_{21}=0$.

The sufficiency of (i), (ii) and (iii) can be proved reciprocally. For instance, if V_2 is a Dupin cyclide in $S_3(r)$, then $\theta^a=0$ yields $dk'_a=0$ (a fixed), but then $\omega^a=\omega^3=0$ yield $dk_a=0$, due to (11), and as (10) can be complemented by

$$de_3= d(e'_3 sin\alpha+e'_4 cos\alpha)= -\sum_a \omega^a(x^a)^{-1}(k'_a sin\alpha+r^{-1}cos\alpha)e_a ,$$

the lines with tangent vectors e_1, e_2, e_3 are the curvature lines of the considered ruled hypersurface and $k_3=0$. Hence, this hypersurface is the desired Dupin hypersurface. This finishes the proof of the Theorem 1.

References

1. C e c i l, T.E., R y a n, P.I., Focal sets, taut embeddings and the cyclides of Dupin Math. Ann. - 1978. - Vol. 236, N2. - P. 177-190.
2. C e c i l, T.E., R y a n, P.I., Conformal geometry and the cyclides of Dupin// Can. J. Math. - 1980.- Vol.32, N4.- - P.767-782.
3. L u m i s t e, Ü., Cayley-Catalan construction for some Dupin hypersurfaces// Tartu Ülik. Toimetised. Acta et comm. Univ.Tartuensis. - 1986.- Vol.734. - P. 36-49 (Russian, Summary Engl.).
4. M i y a o k a, R., Compact Dupin hypersurfaces with three principal curvatures// Math. Z. - 1984. - Vol.187, N4.- P. 433-452.
5. P i n k a l l, U., Dupin hypersurfaces// Math. Ann. - 1985. - Vol.270, N3. - P. 427-440.
6. P i n k a l l, U., Dupinische Hyperflächen in E^4// Manuscr. math. - Vol.51, N1-3. - P. 89-119.
7. T h o r g b e r g s o n, G., Dupin hypersurfaces.// Bull. London Math. Soc.- 1983. - Vol.15, N5. - P. 493-498.

8. V ä l j a s, M., L u m i s t e, Ü., Isothermic hypesurfaces and the three-dimensional Dupin-Mannheim hypercyclides// Mat. Zametki - 1987. - Vol.41, N5, - P. 731-740 (Russian).

9. V ä l j a s M., Dupin hypersurfaces with holonomic net of curvature lines in the E_4 // Tartu Ülik. Toimetised. Acta et comm. Univ.Tartuensis. - 1986.- Vol.734. - P. 20-30 (Russian, Summary Engl.).

Recieved 26 III 1991

ТРЕХМЕРНЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ДЮПЕНА С ГОЛОНОМНОЙ СЕТЬЮ ЛИНИЙ КРИВИЗНЫ И ОДНОЙ НУЛЕВОЙ ГЛАВНОЙ КРИВИЗНЫ

Ю.Лумисте, М.Вяльяс

Р е з ю м е

Доказывается, что гиперповерхность V_3 в евклидовом пространстве E_n является гиперповерхностью Дюпена (т.е. имеет главные кривизны k_i каждая из которых постоянна вдоль соответствующей линии кривизны) с $k_1 \neq k_2 = k_3 = 0$ и с голономной сетью линий кривизны тогда и только тогда, когда она либо

(i) линейчатая гиперповерхность, образующие которой являются нормалями в E_4 для циклида Дюпена V_2 в гиперсфере $S_3(r)$ и образуют постоянный угол $\alpha \neq 0$ с радиусом этой $S_3(r)$, либо

(ii) гиперконус над таким V_2 в $S_3(r)$ с вершиной в центре этой $S_3(r)$ (т.е. предельный случая для (i) при $\alpha \to 0$), либо

(iii) гиперцилиндр на циклиде Дюпена в гиперплоскости E_3 (т.е. предельный случай для (ii) при $r \to \infty$).

TÜ Toimetised,
930 (1991), 35-46.

Уч. зап. Тартуск. ун-та
1991, 930, 35-46.

SECOND ORDER ENVELOPES OF m-DIMENSIONAL VERONESE SUBMANIFOLDS

Ü.Lumiste
Department of Algebra and Geometry

1. Introduction. Veronese submanifold $V^m(r)$ is the image of a sphere $S^m(r)$ by its 2nd standard isometric immersion into a Euclidean space $E^{n(m)}$, $n(m)=\frac{1}{2}m(m+3)$. All motions of $S^m(r)$ are realized as such rotations in $E^{n(m)}$ around a fixed point, with respect to which $V^m(r)$ is invariant. Thus $V^m(r)$ is an orbit of the orthogonal group $O(m+1)$, acting in $E^{n(m)}$ by isometries, and lies in a hypersphere $S^{n(m)-1}(R)$, $R=\frac{m}{2(m+1)}r$ (see [1], [5]).

Every m-dimensional symmetric submanifold (by D.Ferus [4], i.e. with $\bar\nabla h=0$; called also parallel submanifold [11]), which lies in its 1st order osculating space of maximal possible dimension $n(m)$, is the Veronese submanifold $V^m(r)$ [5]; here h is the 2nd fundamental form and $\bar\nabla$ the van der Waerden-Bortoletti connection. The integrability condition $\bar R(X,Y)\cdot h=0$ of the system $\bar\nabla h=0$ determines a class of so called semi-symmetric (or semi-parallel [3]) submanifolds, which are geometrically characterized as the 2nd order envelopes of symmetric submanifolds [6]; here a submanifold M^m in E^n is said to be a 2nd order envelope of the family of submanifolds $\tilde M^m(x)$ if for every point $x\in M^m$ there exists a $\tilde M^m(x)$ in E^n, which has with M^m the 2nd order tangency at x, i.e. for every path μ in M^m through x there is a path $\tilde\mu$ in $\tilde M^m(x)$, which has the 2nd order tangency with μ at x.

The classification problem for semi-symmetric submanifolds reduces to the problem to describe all 2nd order envelopes of symmetric submanifolds. This last problem is not trivial even for the simplest cases. For instance, every curve M^1 in E^n is the 2nd order envelope of its osculating circles (as symmetric curves in 2-planes), but the 2nd order envelope of m-dimensional ordinary spheres $(m\geq 2)$ in E^n is a single sphere itself, because every submanifold, consisting of the umbilic pointe only, is a sphere. It is known [5], that every 2nd order envelope of m-dimensional Veronese submanifolds in $E^{n(m)}$ is a single $V^m(r)$. A problem arises does it exist a nontrivial 2nd order envelope of m-dimensional Veronese submanifolds in E^n, $n > n(m)$. This problem is solved affirmatevely for $m=2$ and $n=6$ in [9] by the complementary condition that the Veronese surfaces $V^2(r)$ in E^6 are congruent with each other, i.e. that $r = \text{const}$. If $m \geqslant 3$ this condition is satisfied authomatically as follows from the next assertion, which will be proved in §2.

Theorem 1. If the family of m-dimensional Veronese submanifolds $V^m(r)$, $m \geqslant 3$, in a Euclidean space E^n, $n > n(m)$ has the 2nd order envelope M^m then all these $V^m(r)$ are congruent with each other. (i.e. $r = $ const on M^m) and M^m is locally isometric to the family submanifolds $V^m(r)$ (i.e. is intrinsically a Riemannian manifold of positive constant curvature $-r^2$).

It follows that if such a family exists then locally its 2nd order envelope admits the 2nd order bending on some of the congruent Veronese submanifolds $V^m(r)$ of the family. In §4 we prove the next existence theorem, which generalizes the result obtained in [9].

Theorem 2. In the homogeneous space of all congruent m-dimensional Veronese submanifolds in a Euclidean space $E^{n(m)+1}$, $m \geqslant 2$, $n(m) = \frac{1}{2}m(m+3)$, a smooth submanifold (i.e. a family of $V^m(r)$), which has the 2nd order envelope, different from a single $V^m(r)$,

(1) exists with the functional arbitrariness,

(2) has the dimension 1 (i.e. the family is 1-parametric) and

(3) the characteristics of its envelope are the $(m-1)$-dimensional congruent Veronese submanifolds.

Remark that if $m \geqslant 3$ the family of $V^m(r)$ in $E^{n(m)+1}$, having the 2nd order envelope M^m, can be only a family of the Theorem 2. It follows from the first assertion of the Theorem 1.

Relating to the case $m=2$ the next problem arises: does it exist a surface M^2 in $E^n, n \geqslant 6$, which is the 2nd order envelope of a family of noncongruent Veronese surfaces $V^2(r)$(i.e. with nonconstant r)? This problem is still open.

The envelopes of the Theorem 2 occur in the classification of semi-symmetric submanifolds M^m in $E^{n(m)+1}$ as the most general cases (see [3] for $m=2$ and [7] for $m=3$). Now we can describe completely such submanifolds for $m\geqslant 3$.

Corollary 1. A general semi-symmetric submanifold M^m in $E^{n(m)+1}$, which has $n(m)$-dimensional 1st osculating space at every point $x\in M^m$, is in the case $m\geqslant 3$ the envelope of the Theorem 2 and has the property indicated in the Theorem 1.

For the most general semi-symmetric surface M^2 (see [3]) there is known, that in E^5 it is a single $V^2(r)$ [5], but in E^n, $n\geqslant 6$, the geometric construction of such M^2 is not known yet; the envelope of the Theorem 2 (or of [9]) may be only an example in E^6.

The second conclusion from our results concerns the existence of constant isotropic submanifolds. A submanifold M^m in E^n is said to be isotropic, if $\| h(X,X)\| = \lambda \| X\|^2$ at every point $x\in M^m$, and constant isotropic, if here $\lambda = \mathrm{const}$ on M^m (see [8]). For instance, $V^m(r)$ is constant isotropic and also every 2nd order envelope of congruent $V^m(r)$ is constant isotropic. In [10] the next problem is formulated (for the case $m=2$): does it exist a constant isotropic submanifold M^m in E^n which is nonhomogeneous, i.e. is not an orbit of a Lie group G acting in E^n by isometries. From the Theorem 2 it follows an affirmative answer.

Corollary 2. In $E^{n(m)+1}$ there exist constant isotropic submanifolds M^m which are nonhomogeneous.

Such M^m are the envelopes of the Theorem 2. So these envelopes are interesting in many aspects. In §5 we introduce the central curve of such envelope as the curve consisting of the centres of the congruent family submanifolds $V^m(r)$ in $E^{n(m)+1}$ and show that its 1st curvature is a constant $\varkappa\sqrt{2m(m+1)}$, where $\varkappa = r^{-1}$; its 2nd curvature can not vanish and in general is not a constant (see the Proposition 1). There exist the special cases when all curvatures of the central curve are constants (Proposition 2).

2. Proof of the Theorem 1. A M^m in E^n, $n > n(m)$, is the 2nd order envelope of a family of m-dimensional Veronese submanifolds $V^m(r)$ iff M^m is semisymmetric and has at every point $x\in M^m$ the $n(m)$-dimensional 1st osculating

space $\mathcal{O}_x M^m$, i.e. the $\frac{1}{2}m(m+1)$-dimensional 1st normal space $N_x M^m$ (see [6]). In [5] there is shown that such a submanifold M^m has the 1st order parallel second fundamental form. For an orthonormal frame in E^n, adapted to M^m so that $e_i \in T_x M^m$, $i \in \{1,\dots,m\}$, $e_\varrho \in T_x^\perp M^m$, $\varrho \in \{m+1,\dots,n(m)\}$, it means (see [5]), that in

$$dx = e_J \omega^J, \quad de_J = e_K \omega_J^K, \quad \omega_J^K + \omega_K^J = 0 \tag{2.1}$$

we have

$$\omega^\varrho = \omega^\xi = 0, \quad \xi \in \{n(m)+1,\dots,n\}, \tag{2.2}$$

$$\omega_i^\varrho = h_{ij}^\varrho \omega^j, \quad h_{ij}^\varrho = h_{ji}^\varrho, \quad \omega_i^\xi = 0, \tag{2.3}$$

$$dh_{ij}^\varrho = h_{kj}^\varrho \omega_i^k + h_{ik}^\varrho \omega_j^k - h_{ij}^\sigma \omega_\sigma^\varrho, \tag{2.4}$$

where all $\frac{1}{2}m(m+1)$ vectors $h_{ij} = h_{ij}^\varrho e_\varrho$ are linearly independent and

$$h_{pj}^\varrho R_{i,kl}^p + h_{ip}^\varrho R_{j,kl}^p - h_{ij}^\sigma R_{\sigma,kl}^\varrho = 0. \tag{2.5}$$

The last relation is the condition of semi-symmetricity. Here

$$R_{i,kl}^j = \sum_\varrho h_{i[k}^\varrho h_{l]j}^\varrho, \quad R_{\sigma,kl}^\varrho = \sum_i h_{i[k}^\sigma h_{l]i}^\varrho \tag{2.6}$$

and thus this condition reduces to

$$\sum_k (h_{kj} B_{i[p,q]k} + h_{ik} B_{j[p,q]k} - B_{ij,k[p} h_{q]k}) = 0$$

with $B_{ij,kl} = \langle h_{ij}, h_{kl} \rangle = \sum_\varrho h_{ij}^\varrho h_{kl}^\varrho$. Due to the linearly independence of h_{ij} it gives

$$B_{ij,kl} = \varkappa^2 (2\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{2.7}$$

(see [5]), i.e. for every two distinct values a and b from $\{1,\dots,m\}$

$$B_{aa,aa} = 2B_{aa,bb} = 4B_{ab,ab} = 4\varkappa^2, \quad B_{aa,ab} = 0, \tag{2.8}$$

for every three distinct values a, b and c (if $m \geqslant 3$)

$$B_{aa,bc} = B_{ab,ac} = 0 \tag{2.9}$$

and for every four distinct values a, b, c and d (if $m \geqslant 4$)

$$B_{ab,cd} = 0. \tag{2.10}$$

Geometrically it means that the normal vectors $h_{11},\dots,h_{mm}$ are the side vectors of a regular simplex (with one vertex at $x \in M^m$), going out from x, and the other normal vectors $h_{12}, h_{13}, \dots, h_{m-1\,m}$ are orthogonal to them, also with each other; recall that all of them span the 1st normal space $N_x M^m$.

From (2.6) and (2.7) it follows that

$$R^{j}_{i,kl} = \varkappa^2 (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Thus the considered M^m, $m \geqslant 3$, is intrinsically a Riemannian manifold of positive constant curvature and hence $\varkappa = r^{-1}$ = const (due to the Schur theorem). This conclusion proves the Theorem 1.

3. Regular simplex frames for first normal spaces. In the following it is convinient to work with the moving frame which consists of the origin $x \in M^m$, of m mutually orthogonal free unit vectors $e_1, \dots, e_m$ in $T_x M^m$, of the vectors $h_{11}, \dots, h_{mm}, h_{12}, h_{13}, \dots, h_{(m-1)m}$ in $N_x M^m$, introduced above and denoted in the following by $e_{(ij)} = h_{ij}$, and of $n - n(m)$ mutually orthogonal free unit vectors $e_{n(m)+1}, \dots, e_n$, orthogonal to $O_x M^m = T_x M^m \oplus N_x M^m$. Note that here $\langle e_{(ij)}, e_{(kl)} \rangle = B_{ij,kl}$ and due to (2.8) the frame vectors $e_{(11)}, \dots, e_{(mm)}$ are not mutually orthogonal. The Gram matrix of $e_{(ij)}$ is determined by (2.8), (2.9) and (2.10). So in every $N_x M^m$ we have the free regular simplex frame.

In the previous formulas the role of the index φ plays now the double index (ij), the values of which are (aa) and symmetric pairs (ab) (i.e. (12) = (21), (13) = (31) etc.). The formulas (2.2)-(2.4) take the form

$$\omega^{(ij)} = 0, \qquad \omega^{\xi} = 0, \tag{3.1}$$

$$\omega^{(aa)}_{a} = \omega^{a}, \quad \omega^{(ab)}_{a} = \omega^{b}, \text{ all other } \omega^{(jk)}_{i} \text{ are } 0,\ \omega^{\xi}_{i} = 0, \tag{3.2}$$

$$\omega^{(ai)}_{(aa)} = 2\omega^{i}_{a}, \quad \omega^{(ai)}_{(ab)} = \omega^{i}_{b}, \text{ all other } \omega^{(kl)}_{(ij)} \text{ are } 0. \tag{3.3}$$

The last relations (2.1), which hold for the orthonormal frame bundle, are to replace by the formulas

$$\omega^{j}_{i} + \omega^{i}_{j} = 0, \quad \omega^{\eta}_{\xi} + \omega^{\xi}_{\eta} = 0, \tag{3.4}$$

$$2(m+1)\varkappa^2 \omega^{(aa)}_{\xi} + m\,\omega^{\xi}_{(aa)} - \sum_{b} \omega^{\xi}_{(bb)} = 0, \tag{3.5}$$

$$\varkappa^2 \omega^{(ab)}_{\xi} + \omega^{\xi}_{(ab)} = 0, \tag{3.6}$$

$$\omega^{a}_{(aa)} = -4\varkappa^2\omega^{a}, \quad \omega^{b}_{(aa)} = -2\varkappa^2\omega^{b}, \quad \omega^{a}_{(ab)} = -\varkappa^2\omega^{b}, \quad \omega^{a}_{(bc)} = 0; \tag{3.7}$$

they follow from $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $\langle e_\xi, e_\eta \rangle = \delta_{\xi\eta}$, $\langle e_i, e_{(kl)} \rangle = 0$, $\langle e_{(ij)}, e_\xi \rangle = 0$, $\langle e_{(ij)}, e_{(kl)} \rangle = \varkappa^2(2\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ by differentiation using (3.2) and (3.3).

In the following we need also the so called structure equations

$$d\omega^{J} = \omega^{K} \wedge \omega^{J}_{K}, \quad d\omega^{K}_{I} = \omega^{J}_{I} \wedge \omega^{K}_{J}, \tag{3.8}$$

which follow from the first two groups of the equations (2.1) by the exterior differentiation.

4. <u>Proof of the Theorem 2.</u> The submanifold M^m in $E^{n(m)+1}$ considered in the Theorem 2 is determined by the system of differential equations (3.1)-(3.3), where ξ takes a single value $n(m)+1$.

The equations obtained from (3.1) by exterior differentiation using (3.8) are satisfied due to (3.2). The equations obtained in the same way from (3.2) are satisfied due to (3.3), except $\omega_i^{(\kappa\ell)} \wedge \omega_{(\kappa\ell)}^{\xi} = 0$, which give

$$\omega_{(ii)}^{\xi} \wedge \omega^i + \sum_{j\neq i} \omega_{(ij)}^{\xi} \wedge \omega^j = 0.$$

From this it follows due to the Cartan lemma that

$$\omega_{(ii)}^{\xi} = \rho_i \omega^i + \sum_{j\neq i} \rho_{ij} \omega^j, \tag{4.1}$$

$$\omega_{(ij)}^{\xi} = \rho_{ij} \omega^i + \rho_{ji} \omega^j + \sum_{\kappa\neq i,j} \rho_{ij\kappa} \omega^\kappa \quad (i\neq j), \tag{4.2}$$

where $\rho_{ij\kappa}$ are symmetric with respect to all its mutually different indices.

From the equations $\omega_{(aa)}^{(ai)} = 2\omega_a^i$ we get after exterior differentiation $\omega_{(aa)}^{\xi} \wedge \omega_{\xi}^{(ai)} = 0$. If here $i=a$, then according to (3.5) we have

$$\omega_{(aa)}^{\xi} \wedge \sum_{b\neq a} \omega_{(bb)}^{\xi} = 0; \tag{4.3}$$

if $i=b\neq a$, then

$$\omega_{(aa)}^{\xi} \wedge \omega_{(ab)}^{\xi} = 0 \tag{4.4}$$

due to (3.6). From the equations $\omega_{(ab)}^{(ai)} = \omega_b^i$ we get in the same way $\omega_{(ab)}^{\xi} \wedge \omega_{\xi}^{(ai)} = 0$. If here $i=a$, then due to (3.5) and (4.4)

$$\omega_{(ab)}^{\xi} \wedge \sum_{c\neq a,b} \omega_{(cc)}^{\xi} = 0; \tag{4.5}$$

if $i=b$ then (3.6) leads to the identity; if $i=c$ then

$$\omega_{(ab)}^{\xi} \wedge \omega_{(ac)}^{\xi} = 0. \tag{4.6}$$

Among the other equations (3.3) we take $\omega_{(aa)}^{(bb)} = 0$ and get from this $\omega_{(aa)}^{\xi} \wedge \omega_{\xi}^{(bb)} = 0$. Using (3.5) we have

$$\omega_{(aa)}^{\xi} \wedge (m\,\omega_{(bb)}^{\xi} - \sum_c \omega_{(cc)}^{\xi}) = 0,$$

which together with (4.3) written in the form

$$\omega_{(aa)}^{\xi} \wedge (\omega_{(bb)}^{\xi} + \sum_c \omega_{(cc)}^{\xi}) = 0$$

(here c runs all values $1,\dots,m$, except a and b), gives

$$\omega_{(aa)}^{\xi} \wedge \omega_{(bb)}^{\xi} = 0.$$

This and (4.4)-(4.6) lead to the mutual proportionality all forms in the left sides of (4.1) and (4.2); recall that ξ takes only one value $n(m)+1$. Hence all rows in the matrix of coefficients of these last expressions are mutually proportional and this matrix has the rank 1. It follows that the columns of this matrix are also mutually proportional.

We can assume that at least one of the coefficients $\varrho_1, \dots, \varrho_m$ is nonzero. Otherwise the proportionality of columns gives $\omega^{\xi}_{(i i)} = \omega^{\xi}_{(ij)} = 0$, thus the considered M^m lies in $E^{n(m)}$ and is a Veronese submanifold $V^m(r)$. Renumerating the vectors $e_1, \dots, e_m$, if needed, we can assume that $\varrho_1 = \varrho \neq 0$ and denote $\varrho_{1u} = \lambda_u \varrho$ (here and in the following $u, v, \dots$ run the values $2, \dots, m$). Then

$$\omega^{\xi}_{(11)} = \varrho\,(\omega^1 + \lambda_v \omega^v) \tag{4.7}$$

and due to the proportionality

$$\omega^{\xi}_{(1u)} = \lambda_u \omega^{\xi}_{(11)}, \tag{4.8}$$

$$\omega^{\xi}_{(uv)} = \lambda_u \lambda_v \omega^{\xi}_{(11)}. \tag{4.9}$$

It is easy to verify that the conditions obtained from the other equations (3.3) are satisfied by (4.7)-(4.9). It remains to differentiate these last equations using (3.8) to get

$$\theta \wedge \omega^{\xi}_{(11)} + \varrho \Psi_u \wedge \omega^u = 0, \tag{4.10}$$

$$\Psi_u \wedge \omega^{\xi}_{(11)} = 0, \tag{4.11}$$

$$(\lambda_u \Psi_v + \lambda_v \Psi_u) \wedge \omega^{\xi}_{(11)} = 0, \tag{4.12}$$

where

$$\theta = d\ln\varrho - 3\lambda_u \omega^u_1,$$

$$\Psi_u = d\lambda_u - \lambda_v \omega^v_u + \lambda_u \lambda_v \omega^v_1 + \omega^u_1.$$

Due to $\varrho \neq 0$ the 1-forms $\omega^{\xi}_{(11)}$ and ω^u are m linearly independent forms and can be considered as basic forms. Then θ and Ψ_u are m linearly independent secondary forms. We see that the equations (4.12) are consequences of (4.10) and (4.11), so the 1st character (as the rank of the polar system for (4.10) and (4.11)) is $s_1 = m$ and hence the Cartan number is $Q = s_1 = m$. Due to the Cartan lemma it follows that

$$\theta = p\,\omega^{\xi}_{(11)} + \varrho\, p_u \omega^u, \tag{4.13}$$

$$\Psi_u = p_u \omega^{\xi}_{(11)}; \tag{4.14}$$

here we have $N=m$ new coefficients p and p_u. The Cartan criterion [2] is now satisfied because $N=Q=m$. Thus the system (3.1)-(3.3), (4.7)-(4.9) is involutory, the considered 2nd order envelope of congruent Veronese submanifolds $V^m(r)$ in $E^{n(m)+1}$ exists and is determined with the arbitrariness of m functions of 1 variable. This gives the assertion (1).

To prove the assertions (2) and (3) we show that the frame can be adapted to M^m so that $\lambda_u=0$. In fact, from (4.13) and (4.14) it follows that for a fixed point $x\in M^m$, when $\omega^1=\omega^u=0$, we have $\theta=\psi_u=0$ and hence $d\ln\rho=3\lambda_u\omega_1^u$, $d\lambda_u=\lambda_v\omega_u^v-\lambda_u\lambda_v\omega_1^v-\omega_1^u$. So at a fixed point $d[\rho(1+\Sigma\lambda_u^2)^{3/2}]=0$, $d(e_1+\Sigma\lambda_u e_u)=-\lambda_v\omega_1^v(e_1+\Sigma\lambda_u e_u)$. Consequently on M^m there is an invariant function $\rho(1+\Sigma\lambda_u^2)^{3/2}$ and an invariant direction field of the vector $e_1+\Sigma\lambda_u e_u$. Let us take the first frame vector e_1 at every point x in the direction of this field. Then $\lambda_u=0$ and ρ is an invariant function on M^m.

Now the part (4.7)-(4.9), (4.13), (4.14) of the system, which determines the envelope M^m, reduces to

$$\omega_{(11)}^{1}=\rho\omega^1, \quad \omega_{(1u)}^{1}=\omega_{(uv)}^{1}=0, \tag{4.15}$$

$$d\ln\rho=q\omega^1+q_u\omega^u, \quad \omega_1^u=q_u\omega^1, \tag{4.16}$$

where $q=\rho p$, $q_u=\rho p_u$.

Let us consider the equation $\omega^1=0$. As $d\omega^1=\omega^u\wedge\omega_u^1=-q_u\omega^u\wedge\omega^1$, this equation is completely integrable and determines a foliation on M^m with codimension 1. For every $(m-1)$-dimensional integral submanifold of this foliation we have due to (4.16), (3.2), (3.7) the next compementary relations:

$$\omega_1^u=0, \quad \omega_u^{(1u)}=0, \quad \omega_{(uv)}^{1}=0,$$

and thus

$$dx=e_u\omega^u, \quad de_u=\omega_u^v e_v+\omega_u^{(uv)}e_{(uv)},$$

$$de_{(uv)}=\omega_{(uv)}^{w}e_w+\omega_{(uv)}^{(uw)}e_{(uw)}+\omega_{(uv)}^{(vw)}e_{(vw)},$$

where, of course, (3.2), (3.3) and (3.7) must be taken into account. We see that this integral submanifold is a $(m-1)$-dimensional Veronese submanifold with the same constant value $\varkappa$, i.e. is a $V^{m-1}(r)$, $r=\varkappa^{-1}$, which belongs to the family submanifold $V^m(r)$. It follows that the family is 1-parametric and these $V^{m-1}(r)$ are its characteristics, i.e. (2) and (3) hold.

5. The central curve. Finally, let us consider the curve which consists of the centres of $V^m(r)$, enveloping M^m according to the Theorem 2. For a fixed Veronese submanifold $V^m(r)$ in a hyperplane $E^{n(m)}$, orthogonal to e_ξ, its centre is the centre of the sphere $S^{n(m)-1}(R)$ containing $V^m(r)$ and is determined by the radius vector

$$c = x + \frac{1}{\varkappa^2(m+1)} \sum_i e_{(ii)},$$

$\varkappa = r^{-1}$, as is shown in [5]. Along the family of $V^m(r)$ in $E^{n(m)+1}$, considered in the Theorem 2, we have due to (2.1), (3.7), (3.3), (4.15) and (4.16) that

$$dc = \frac{\varrho}{2\varkappa^2(m+1)} \omega^1 e_\xi .$$

It follows that e_ξ is the tangent unit vector of the considered curve, called the central curve, and that the differential of the arc parameter of this curve is

$$ds_c = \frac{\varrho\,\omega^1}{2\varkappa^2(m+1)} .$$

Here $\omega^1 = ds$ is the differential of the arc parameter for the orthogonal trajectory of the characteristics, i.e. for the integral curve of the system $\omega^u = 0$. So we get a geometric meaning of the invariant function ϱ : it is the differential quotient ds_c/ds multiplied by the constant $[2\varkappa^2(m+1)]^{-1}$.

From (3.5) and (4.15) it follows that $\omega_\xi^{(11)} = -m\,ds_c$, $\omega_\xi^{(uu)} = ds_c$ and the other $\omega_\xi^{(ij)}$ are zero. Thus

$$d e_\xi = ds_c\,(-m\,e_{(11)} + \sum_u e_{(uu)}),$$

which shows that the curvature vector $\kappa_1 t_2$ of the central curve is $\kappa_1 t_2 = -m e_{(11)} + \sum_u e_{(uu)}$, thus the square κ_1^2 of the first curvature is $m^2 B_{11,11} + \sum_u B_{uu,uu} - 2m \sum_u B_{11,uu} + 2\sum_{u\neq v} B_{uu,vv} = 2\varkappa^2 m(m+1)$, hence

$$\kappa_1 = \varkappa\sqrt{2m(m+1)} = \mathrm{const}.$$

Further,

$$d(-m e_{(11)} + \sum_u e_{(uu)}) = -\kappa_1^2\, ds_c\, e_\xi + 4\varkappa^2(m+1)\varrho^{-1}(\varkappa^2 e_1 - \sum_u q_u e_{(1u)})ds_c$$

but due to the second Frenet formula

$$d(\kappa_1 t_2) = \kappa_1(-\kappa_1 t_1 + \kappa_2 t_3)ds_c\ ;$$

thus

$$\kappa_1\kappa_2 t_3 = 4\varkappa^2(m+1)^2\varrho^{-1}(\varkappa^2 e_1 - \sum_u q_u e_{(1u)}). \qquad (5.1)$$

As here $\varkappa \neq 0$ then $\kappa_2 = 0$ is impossible. So we have proved the next

Proposition 1. The central curve of a 1-parameter family of congruent Veronese submanifolds $V^m(r)$ in $E^{n(m)+1}$ which has the 2nd order envelope (i.e. the curve consisting of the centres of $V^m(r)$ of such family) has the constant first curvature $\kappa_1 = \varkappa\sqrt{2m(m+1)}$, where $\varkappa = r^{-1}$, but its second curvature κ_2 can not vanish.

From (5.1) it follows that

$$\kappa_2 = 2\varkappa\sqrt{\frac{2(m+1)^3}{m}} \cdot \frac{\sqrt{\varkappa^2+\sum q_u^2}}{\rho}$$

and in general κ_2 is not a constant. In the following we show that there is an interesting special case, for which not only κ_2 but all curvatures of the central curve are constant.

Recall, that ρ is the differential quotient ds_c/ds multiplied by the constant $[2\varkappa^2(m+1)]^{-1}$.

Proposition 2. In $E^{n(m)+1}$ there exist 2nd order envelopes of 1-parameter families of congruent Veronese submanifolds $V^m(r)$, for which the differential quotient ds_c/ds is constant along every orthogonal trajectory of characteristics. All curvatures of the central curve of a such family are constants.

Proof. The condition demands that $\omega^u = 0$ must imply $\rho = const$ and gives that $q = 0$ on every orthogonal trajectory; thus $q = 0$ on M^m.

By exterior differentiation from (4.16) it follows that

$$dq = qq_u\omega^u + \tilde{q}\,\omega^1 + \tilde{q}_u\omega^u, \tag{5.2}$$

$$dq_u = q_v\omega_u^v + q_uq_v\omega^v + \tilde{q}_u\omega^1 + \varkappa^2\omega^u. \tag{5.3}$$

Now the vector $\sum_u q_u e_u$ is invariant at every fixed point $x \in M^m$ because $\omega^1 = \omega^u = 0$ imply $d(\sum q_u e_u) = 0$. If to adapt the frame so that e_2 is collinear to this vector (which is nonzero, because otherwise (5.3) gives a contradiction) we get $q_2 = \lambda \neq 0$, $q_{u'} = 0$; $u', v', \ldots = 3, \ldots, m$. Together with the condition $q = 0$ this gives due to (4.16), (5.2) and (5.3) that

$$d\ln\rho = \lambda\omega^2, \qquad \omega_1^2 = \lambda\omega^1, \qquad \omega_1^{u'} = 0,$$

$$d\lambda = (\lambda^2 + \varkappa^2)\omega^2, \qquad \lambda\omega_{u'}^2 + \varkappa^2\omega^{u'} = 0.$$

Here the exterior differentiation gives identities, so the system of differential equations, which determines the considered M^m is completely integrable and this M^m

exists. The first assertion of the Proposition 2 is proved.

Now

$$d\left[\varrho^{-2}(\varkappa^2+\lambda^2)\right]=0 \qquad (5.4)$$

and thus $\kappa_2=const$. Using the Frenet formula $dt_3=$ $=(-\kappa_2 t_2+\kappa_3 t_4)ds_c$, we get from (5.1) that

$$\kappa_1\kappa_2(-\kappa_2 t_2+\kappa_3 t_4)ds_c=4\varkappa^2(m+1)^2 d\left[\varrho^{-1}(\varkappa^2 e_1-\lambda e_{(12)})\right]. \qquad (5.5)$$

Here

$$d\left[\varrho^{-1}(\varkappa^2 e_1-\lambda e_{(12)})\right]=\varrho^{-2}2\varkappa^2(m+1)\left[2\varkappa^2\lambda e_2+(\varkappa^2+\lambda^2)e_{(11)}-\lambda^2 e_{(22)}\right]ds_c.$$

Substituting this into (5.5) and taking scalar squares we get

$$\kappa_1^2\kappa_2^2(\kappa_2^2+\kappa_3^2)=C\cdot\varrho^{-2}(\varkappa^2+\lambda^2),$$

where C is a constant. Now (5.4) gives that $\kappa_3=const$. So it goes further until the Proposition 2. will be proved.

References

1. d o   C a r m o, M., W a l l a c h, N. Minimal immersions of spheres // Ann. of Math. - 1971. - V. 93. - P. 43.62.
2. C a r t a n, E., Sur la structure des groupes infinis de transformations// Ann. de l'Ecole Normale Sup. 3-e ser. - 1904. - V. 21, Chap. I.
3. D e p r e z, J. Semi-parallel surfaces in Euclidean space// J. Geom. - 1985. - V. 25. - P. 192-200.
4. F e r u s, D. Symmetric submanifolds of Euclidean space// Math. Ann. - 1980. - B. 247. - P. 81-93.
5. L u m i s t e, Ü. Semi-symmetric submanifolds with maximal first normal space// Proc. Acad. Sci. Estonian SSR. Phys. Math. - 1989. - V. 38. - № 4. - P. 303-316.
6. L u m i s t e, Ü. Semi-symmetric submanifold as the second-order envelope of symmetric submanifolds// Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. - 1990. - V. 39. - № 1. - S. 1-8.
7. L u m i s t e, Ü. Classification of three-dimensional semi-symmetric submanifolds in Euclidean spaces// Tartu Ülikooli Toimetised. Acta et comm. Univ. Tartuensis. - 1990. - № 899. - P. 29-46.
8. P a k, J. S., S a k a m o t o, K. Constant isotropic submanifolds with 4-planar geodesics// Trans. Amer Math. Soc. - 1988. - V. 307. - P. 317-333.

9. R i i v e s, K. Second-order envelope of congruent Veronese surfaces in E^6 // Tartu Ülik. Toimetised. Acta et comm. Univ. Tartuensis. - 1991. - №930, - P. 47-52.

10. S a k a m o t o, K. Constant isotropic surfaces in 5-dimensional space forms// Geom. dedic. - 1989. - V. 29. - № 3. - P. 293-306.

11. T a k e u c h i, M., Parallel submanifolds of space forms// Manifolds and Lie groups. Papers in honour of Y.Matsushima. - Basel. 1981. - P. 429-447.

Received
5 VI 1991

ОГИБАЮЩИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА m-МЕРНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ВЕРОНЕЗЕ

Ю.Лумисте

Р е з ю м е

Известно, что любое полусимметрическое подмногообразие в пространстве постоянной кривизны является огибающим 2-го порядка симметрических подмногообразий (см. [6]) и что симметрическое подмногообразие M^m в евклидовом пространстве E^n, лежащее в своей соприкасающейся плоскости максимальной размерности $\frac{1}{2}m(m+3)$, является подмногообразием Веронезе $V^m(r)$ (см. [5]). Доказывается, что в $E^{\frac{1}{2}m(m+3)+1}$ существуют нетривиальные (т.е. не сводящиеся к одному $V^m(r)$) огибающие 2-го порядка подмногообразий Веронезе $V^m(r)$. Выделяется специальный класс таких огибающих, центральные кривые характеристических $V^{m-1}(r)$ которых являются линиями с постоянными кривизнами всех порядков. Этим описываются геометрически полусимметрические подмногообразия M^m наиболее общего класса в $E^{\frac{1}{2}m(m+3)+1}$ (при $m = 2$ см. [3], при $m = 3$ см. [7]).

TÜ Toimetised,
930 (1991), 47-52.

Уч. зап. Тартуск. ун-та
1991, 930, 47-52.

SECOND ORDER ENVELOPE OF CONGRUENT VERONESE SURFACES IN E^6

K.Riives
Dep. of Mathem. Estonian Agricultural Academy

1. Introduction. In [1] J.Deprez introduced the class of submanifolds M^m in an Euclidean space E^n satisfying the condition $\bar{R}(X,Y)\circ h = 0$, where h is the second fundamental form and $\bar{R}$ is the curvature operator of the van der Waerden-Bortolotti connection $\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^{\perp}$. He also proved the classification theorem for $m=2$ stating that a surface M^2 in E^n which satisfies the condition above is locally either (i) a part of a sphere $S^2(r)$ or (ii) has flat $\bar{\nabla}$ or (iii) an isotropic M^2 codimension of which is at least 3 and $H^2 = 3K$ (here H is the mean curvature vector and K is the Gaussian curvature).

In [3] Ü.Lumiste showed that every submanifold M^m in E^n satisfying $\bar{R}(X,Y)\circ h = 0$ is a 2nd order envelope of symmetric submanifolds (by D.Ferus [2], i.e. having parallel h : $\bar{\nabla} h = 0$). In particular, the surface (iii) is the 2nd order envelope of Veronese surfaces. In [3] he proved that such envelope M^2 in E^5 (i.e. if codimension is 3) is a single Veronese surface. Recall that the Veronese surface in E^5 is the 2nd standard immersion of a 2-sphere. The problem arises does it exist a nonsymmetric 2nd order envelope of Veronese surfaces in E^n, $n > 5$. In the following an affirmative answer is given in the particular case if $n = 6$ and the family consists of Veronese surfaces congruent to each other.

Theorem. In E^6 there exists a 2nd order envelope M^2 of the 1-parameter family of congruent Veronese surfaces which is not symmetric, i.e. for which $\bar{\nabla} h \neq 0$.

To prove it the Pfaffian system is deduced which determines such envelope and it is shown by the Cartan method that this system is involutive. Some geometric properties of this envelope are established, too.

It is remarkable that for 1st standard immersions of 2-spheres (i.e. for ordinary spheres $S^2(r)$) in E^n the statement analogous to the Theorem is not true. In fact, if M^2 in E^n, $n \geq 3$, has in every point $x \in M^2$ the 2nd order contact with some sphere $S^2(r)$ then M^2 consists of umbilic points and is itself a sphere $S^2(r)$ for all values of n. By our theorem for the 2nd standard immersions of 2-spheres into sufficiently high-dimensional ambient spaces of their family the situation is more complicated. Recently in [5] Ü.Lumiste generalized our Theorem for the case of the 2nd order envelope of m-dimensional Veronese submanifolds in $E^{\frac{1}{2}m(m+3)+1}$. We don't know yet the situation if the Veronese surfaces of the family may be noncongruent in E^n, $n>6$.

2. Apparatus. Let the orthonormal frame bundle $\mathcal{O}(E^6)$ be reduced to $\mathcal{O}(M^2, E^6)$, i.e. $e_i \in T_x(M^2)$ and $e_\alpha \in T_x^\perp(M^2)$ at every point $x \in M^2$, $i,\ldots = 1,2$; $\alpha,\ldots = 3,\ldots,6$. Then in the infinitesimal displacement formulae of $\mathcal{O}(E^6)$

$$dx = \omega^J e_J, \quad de_J = \omega_J^K e_K, \quad \omega_J^K + \omega_K^J = 0, \; J, K, \ldots = 1, \ldots, 6, \tag{1}$$

and in the structure equations

$$d\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J, \quad d\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K \tag{2}$$

we have

$$\omega^\alpha = 0. \tag{3}$$

Now from $d\omega^\alpha = \omega^i \wedge \omega_i^\alpha = 0$ due to Cartan's lemma we get

$$\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha. \tag{4}$$

By exterior differentiation of (4) using (2) and Cartan's lemma we get

$$\bar{\nabla} h_{ij}^\alpha = h_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad h_{ikj}^\alpha = h_{ijk}^\alpha, \tag{5}$$

where $\bar{\nabla}$ is the covariant differential operator of the van der Waerden - Bortolotti connection, i.e.

$$\bar{\nabla} h_{ij}^\alpha = dh_{ij}^\alpha - h_{kj}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha.$$

From (5) in the same manner we get the integrability conditions

$$\bar{\nabla} h_{ijk}^\alpha \wedge \omega^k = h_{kj}^\alpha \Omega_i^k + h_{ik}^\alpha \Omega_j^k - h_{ij}^\beta \Omega_\beta^\alpha, \tag{6}$$

where

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = -\sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l,$$

$$\Omega_\alpha^\beta = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta = -\sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta \omega^k \wedge \omega^l$$

are the curvature 2-forms of the van der Waerden - Bortolotti connection $\bar{\nabla}$. The submanifold M^2 is said to be semi-symmetric if

$$h^{\alpha}_{kj}\,\Omega^{k}_{i} + h^{\alpha}_{ik}\,\Omega^{k}_{j} - h^{\beta}_{ij}\,\Omega^{\alpha}_{\beta} = 0. \tag{7}$$

The second fundamental form h of M^2 is given by $h(X,Y) = h_{ij} X^i Y^j$ for $X = e_i X^i$, $Y = e_j Y^j$, where $h_{ij} = h^{\alpha}_{ij} e_{\alpha}$. Recall that the first normal space is the span $N^1_x M^2$ of $h(X,X)$ in a given point $x \in M^2$ for arbitrary $X \in T_x M^2$ and it is said to be maximal if its dimension has the maximal possible value. In our case it is 3 and then the point $x \in M^2$ is said to be the spatial one.

In [3], [4] there is shown that a semi-symmetric M^2 in E^n, $n \geqslant 6$, is a 2nd order envelope of Veronese surfaces iff M^2 consists of spatial points. Then h_{11} and h_{22} with the origin at x are the side vectors of a regular triangle and h_{12} is orthogonal to it.

3. <u>Proof of the Theorem</u>. Let us take the orthonormal frame vectors e_3, e_4, e_5 so that $e_3 \parallel h_{11} + h_{22}$, $e_4 \parallel h_{11} - h_{22}$, $e_5 \parallel h_{12}$. Then $h_{11} = \varkappa(\sqrt{3}\,e_3 + e_4)$, $h_{22} = \varkappa(\sqrt{3}\,e_3 - e_4)$, $h_{12} = \varkappa e_5$ and

$$\left\| h^{3}_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} \varkappa\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \varkappa\sqrt{3} \end{Vmatrix}, \quad \left\| h^{4}_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} \varkappa & 0 \\ 0 & -\varkappa \end{Vmatrix},$$

$$\left\| h^{5}_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & \varkappa \\ \varkappa & 0 \end{Vmatrix}, \quad \left\| h^{6}_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

For the 2nd order envelope M^2 of the congruent Veronese surfaces we have $\varkappa = const$ on M^2. So the considered envelope M^2 in E^6 is determined by the next system of differential equations:

$$\begin{aligned} &\omega^3 = \omega^4 = \omega^5 = \omega^6 = 0, \\ &\omega^3_1 = \varkappa\sqrt{3}\,\omega^1, \quad \omega^4_1 = \varkappa\omega^1, \quad \omega^5_1 = \varkappa\omega^2, \quad \omega^6_1 = 0, \\ &\omega^3_2 = \varkappa\sqrt{3}\,\omega^2, \quad \omega^4_2 = -\varkappa\omega^2, \quad \omega^5_2 = \varkappa\omega^1, \quad \omega^6_2 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Exterior differentiation of these equations by (2) gives due to Cartan's lemma that

$$\omega^4_3 = 0, \quad \omega^5_3 = 0, \quad \omega^5_4 = 2\omega^2_1, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \omega^6_3 &= \tfrac{1}{2\sqrt{3}}(\rho + \tau)\,\omega^1 + \tfrac{1}{2\sqrt{3}}(\delta + \psi)\,\omega^2, \\ \omega^6_4 &= \tfrac{1}{2}(\rho - \tau)\,\omega^1 + \tfrac{1}{2}(\delta - \psi)\,\omega^2, \\ \omega^6_5 &= \delta\omega^1 + \tau\omega^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Differential prolongation of (10) by meane of (2) leads to the system

$$\sigma\tau + \rho\varphi = 0,$$
$$\sigma(\sigma + 4\varphi) - \tau(\rho + 4\tau) = 0,$$
$$\sigma(4\sigma + \varphi) - \tau(4\rho + \tau) = 0.$$

It is equivalent to

$$\tau^2 = \sigma\varphi, \quad \sigma^2 = \tau\rho, \quad \sigma\tau = \rho\varphi.$$

Here we can suppose that $\rho \neq 0$ as if we exchange e_1 by e_2 and e_4 by $-e_4$ we must replace $\rho, \sigma, \tau, \varphi$ by $\varphi, \tau, \sigma, \rho$, respectively. But $\rho = \varphi = 0$ lead to $\sigma = \tau = 0$ and then the system (9), (10), (11) determines a single Veronese surface. Hence a function θ exists so that the last system is equivalent to

$$\sigma = \rho\theta, \quad \tau = \rho\theta^2, \quad \varphi = \rho\theta^3$$

and (11) turns into

$$\omega_3^6 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\rho(1+\theta^2)(\omega^1 + \theta\omega^2),$$
$$\omega_4^6 = \frac{1}{2}\rho(1-\theta^2)(\omega^1 + \theta\omega^2),$$
$$\omega_5^6 = \rho\theta(\omega^1 + \theta\omega^2).$$

Denoting here $\theta = \tan\varphi$ we can write the last system as follows:

$$\begin{aligned} \omega^1 &= 2\sqrt{3}\,\rho^{-1}\cos^2\varphi\,\omega_3^6 - \tan\varphi\,\omega^2, \\ \omega_4^6 &= \sqrt{3}\cos 2\varphi\,\omega_3^6, \\ \omega_5^6 &= \sqrt{3}\sin 2\varphi\,\omega_3^6. \end{aligned} \tag{12}$$

Differential prolongation leads to the system of covariants:

$$2\sqrt{3}\cos^4\varphi\,[(d\ln\rho + \tan\varphi\,\omega_1^2) - 2\tan\varphi\,(d\varphi + \omega_1^2)] \wedge \omega_3^6 + $$
$$+ \rho(d\varphi + \omega_1^2) \wedge \omega^2 = 0,$$
$$\sin 2\varphi\,(d\varphi + \omega_1^2) \wedge \omega_3^6 = 0,$$
$$\cos 2\varphi\,(d\varphi + \omega_1^2) \wedge \omega_3^6 = 0,$$

which is equivalent to

$$2\sqrt{3}\cos^4\varphi\,(d\ln\rho + \tan\varphi\,\omega_1^2) \wedge \omega_3^6 + \rho(d\varphi + \omega_1^2) \wedge \omega^2 = 0,$$
$$(d\varphi + \omega_1^2) \wedge \omega_3^6 = 0.$$

So there exist two linearly independent secondary forms $d\ln\rho + \tan\varphi\,\omega_1^2$, $d\varphi + \omega_1^2$ and the first Cartan character is $s_1 = 2$. By the Cartan lemma

$$2\sqrt{3}\cos^4\varphi\,(d\ln\varrho + \tan\varphi\,\omega_1^2) = \lambda\omega_5^6 + \varrho\mu\omega^2,$$
$$d\varphi + \omega_1^2 = \mu\omega_3^6. \tag{13}$$

Here we have two parameters λ and μ, i.e. $N=2$. As the Cartan number $Q=s_1$ is also 2 we have $N=Q$ and the system of differential equations (9), (10) and (12) is involutive. The considered surface M^2 in E^6 exists with the arbitrariness of two functions of one variable. The Theorem is proved.

4. <u>Some geometric properties.</u> It is well known that if we turn the frame $\{x, e_1, e_2\}$ in the every tangent plane $T_x M^2$ by the angle φ then for the new frame $\{x, e_{1'}, e_{2'}\}$ we have $\omega_{1'}^{2'} = d\varphi + \omega_1^2$. Thus the frame can be adapted to the considered M^2 in E^6 so that $\varphi \equiv 0$ and if we return to the previous denotations the (12) and (13) turn into

$$\omega_3^6 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\varrho\omega^1, \quad \omega_4^6 = \frac{1}{2}\varrho\omega^1, \quad \omega_5^6 = 0, \tag{14}$$
$$d\ln\varrho = \tilde{\lambda}\omega^1 + \tilde{\mu}\omega^2, \quad \omega_1^2 = \tilde{\mu}\omega^1. \tag{15}$$

<u>Proposition</u>. The characteristics of the 2nd order envelope M^2 of 1-parameter family of congruent Veronese surfaces in E^6 are the congruent circles.

<u>Proof</u>. The formulae (1) are now due to (9), (10), (14) the following

$$\begin{aligned}
dx &= \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2,\\
de_1 &= \tilde{\mu}\omega^1 e_2 + \varkappa\sqrt{3}\omega^1 e_3 + \varkappa\omega^1 e_4 + \varkappa\omega^2 e_5,\\
de_2 &= -\tilde{\mu}\omega^1 e_1 + \varkappa\sqrt{3}\omega^2 e_3 - \varkappa\omega^2 e_4 + \varkappa\omega^1 e_5,\\
de_3 &= -\varkappa\sqrt{3}\omega^1 e_1 - \varkappa\sqrt{3}\omega^2 e_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\varrho\omega^1 e_6,\\
de_4 &= -\varkappa\omega^1 e_1 + \varkappa\omega^2 e_2 + 2\tilde{\mu}\omega^1 e_5 + \frac{1}{2}\varrho\omega^1 e_6,\\
de_5 &= -\varkappa\omega^2 e_1 - \varkappa\omega^1 e_2 - 2\tilde{\mu}\omega^1 e_4,\\
de_6 &= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\varrho\omega^1 e_3 - \frac{1}{2}\varrho\omega^1 e_4.
\end{aligned} \tag{16}$$

If $\omega^1 = 0$ we get

$$dx = \omega^2 e_2,$$
$$de_2 = \varkappa\omega^2(\sqrt{3}e_3 - e_4),$$
$$d(\sqrt{3}e_3 - e_4) = -4\varkappa\omega^2 e_2.$$

It is seen that $d\left(x + \frac{1}{4\varkappa}(\sqrt{3}e_3 - e_4)\right) = 0$ and $de_2 = 2\varkappa\omega^2 y$ where $y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}e_3 - e_4)$. So each curve $\omega^1 = 0$ on $M^2 \subset E^6$ is a circle in the span $\{e_2, \sqrt{3}e_3 - e_4\}$ with the centre

$C = x + \frac{1}{4\varkappa}(\sqrt{3}\, e_3 - e_4)$ and it's curvature is $\kappa = 2\varkappa = const$. This circle lies on the Veronese surface of the family and is the characteristic. The Proposition is proved.

It is easy to show that the orthogonal trajectories of the characteristics are in general the curves in E^6 with 5 curvatures.

References

1. D e p r e z, J. Semi-parallel surfaces in Euclidean space// J. of Geometry. - 1985. - V. 25. - P. 192-200.
2. F e r u s, D. Symmetric submanifolds of Euclidean space// Math. Ann. - 1980. - B. 247. - S. 81-93.
3. L u m i s t e, Ü. Semi-symmetric submanifolds with maximal first normal space// Proc. Acad. sci. Estonian SSR. Phys. Math. - 1989. - V. 38. - № 4. - P. 303-316.
4. L u m i s t e, Ü. Semi-symmetric submanifolds as the 2nd order envelope of symmetric manifolds// Proc. Acad. sci. Estonian SSR. Phys. Math. - 1990. - V. 39. - № 1. - P. 1-8.
5. L u m i s t e, Ü. Second order envelope of m-dimensional Veronese submanifolds// Tartu Ülik. Toim. Acta et comm. Univ. Tartuensis. - 1991. - V. 930 . - P. 35-46.

Received
25.XI 1990

ОГИБАЮЩИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ КОНГРУЕНТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВЕРОНЕЗЕ В E^6

К.Рийвес

Р е з ю м е

В [4] доказано, что полусимметрические подмногообразия евклидова пространства, удовлетворяющие по определению условию $\bar{R}(X,Y)\circ h = 0$, являются огибающими второго порядка симметрических подмногообразий в смысле Феруса [2]. В настоящей работе доказывается, что в E^6 существуют несимметрические огибающие второго порядка однопараметрических семейств конгруэнтных поверхностей Веронезе. Характеристиками таких огибающих являются конгруэнтные окружности.

TÜ Toimetised,
930 (1991), 53-62.

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
1991, 930, 53-62.

EXTREMAL SURFACES IN MINKOWSKI SPACE ${}^1E_3$

J. Varik
Department of Algebra and Geometry

1. Introduction. Let M be a smooth surface in the three-dimensional Minkowski space ${}^1E_3$ and let M have the pseudo-Euclidean tangent plane at every point $x \in M$. Identifying the point x with its radius vector by a fixed origin we have locally $x = x(v^1, v^2)$.

As usually we denote
$$\frac{\partial x}{\partial v^i} = x_i, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^i \partial v^j} = x_{ij}, \quad \frac{\partial^3 x}{\partial v^i \partial v^j \partial v^k} = x_{ijk}, \quad g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle,$$
where $i, j, k, \ldots = 1, 2$. The inner metric of such surface M, given by $(ds)^2 = g_{ij} dv^i dv^j$, is pseudo-Riemannian.

The real parameters v^1 and v^2 can be always choosen so that v^1- and v^2-curves are isotropic (or null curves) of M. Then

$$g_{11} = g_{22} = 0; \tag{1}$$

these parameters are called isotropic.

The normal vector of a such surface M has the real length; denoting the normal unit vector by m we have $\langle m, m \rangle = 1$, $\langle m, x_i \rangle = 0$.

The next well-known formulas hold:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^k x_k + h_{ij} m, \qquad m_\ell = -g^{jk} h_{k\ell} x_j, \tag{2}$$

$$x_{ik\ell} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial v^\ell} + \Gamma_{p\ell}^j \Gamma_{ik}^p - g^{jp} h_{p\ell} h_{ik}\right) x_j + \left(h_{p\ell} \Gamma_{ik}^p + \frac{\partial h_{ik}}{\partial v^\ell}\right) m, \tag{3}$$

where h_{ij} are the components of the second fundamental form, $g^{jk} g_{ki} = \delta_i^j$ and

$$\Gamma_{ik}^j = \frac{1}{2} g^{j\ell} \left(\frac{\partial g_{k\ell}}{\partial v^i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial v^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial v^\ell}\right), \quad h_{ij} = \langle m, x_{ij} \rangle. \tag{4}$$

The mean curvature H and the Gaussian curvature K are expressed by the formulas

$$H = \frac{1}{2} g^{ij} h_{ij}, \qquad K = g^{i[k} g^{\ell]j} h_{ik} h_{\ell j}, \tag{5}$$

where $g^{i[k} g^{\ell]j}$ means the alternated product.

The principal curvatures K_1 and K_2 are the roots of the quadratic equation

$$(K_0)^2 - 2HK_0 + K = 0. \tag{6}$$

The equation for the asymptotic directions is

$$h_{11}(dv^1)^2 + 2h_{12}dv^1dv^2 + h_{22}(dv^2)^2 = 0. \tag{7}$$

Taking into account the relations (1) we find that

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial v^1}, \quad \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial v^2}, \tag{8}$$

$$gH = h_{12}, \quad (g)^2K = (h_{12})^2 - h_{11}h_{22}, \tag{9}$$

$$\mathcal{X}_{12} = gHm, \tag{10}$$

where $g = g_{12}$.

The aim of the present paper is to investigate the surfaces with vanishing mean curvature $H \equiv 0$ and with pseudo-Riemannian inner metric in the Minkowskian space ${}^1E_3$. They are called the extremal surfaces in ${}^1E_3$ [2], [3] and are the analogues of the minimal surfaces in E_3 (see [5], [6], [8]). The interest to the latter is caused mainly be the Plateau' problem. The extremal surfaces of considered type in ${}^1E_3$ (and in ${}^1E_n$) are connected with the string theory: they model the simplest moving strings [1]. The variation properties of the extremal surfaces in ${}^1E_3$ are investigated in [7], [9], [10].

In the following some theorems concerning the extremal surfaces in ${}^1E_3$ are given. Among them there are direct analogues of the corresponding theorems for the minimal surfaces in E_3. The treatment culminates in the theorem 2, which gives the general parametric equations of the extremal surfaces in ${}^1E_3$ with the arbitrariness of two functions of one parameter. These equations play the same roll as the Enneper, Monge, Lagrange, Scherk, Catalan, Beltram, Weingarten etc. equations [4], known in the theory of the minimal surfaces in E_3. The one difference is that we need no imaginary quantities. The second difference is that the Gaussian curvature K of the extremal surface in ${}^1E_3$ can be not only negative, but also zero and positive.

By the suitable concrete choice of the two arbitrary functions, mentioned above, we can get from these general equations a number of examples of the extremal surfaces in ${}^1E_3$. some of them are analogues of well-known minimal surfaces in E_3 (catenoid, Enneper surface, etc.); they are given in the final part of our paper. Also the explicit equations of the corresponding extremal surfaces have been deduced by the elimination of the parameters. The last examples show that there exist extremal surfaces with $K\equiv 0$ not degenerating to a part of a plane.

2. The general case. It is well-known that every minimal surface in E_3 is a translation surface of its imaginary isotropic curves [6]. From (10) it follows immediately that the analogues property has every extremal surface in ${}^1E_3$: if $H\equiv 0$ then $X_{,12}=0$ and thus $X(v^1,v^2)=Y(v^1)+Z(v^2)$ where v^1 and v^2 are the isotropic parameters. So we have the next .

Theorem 1. Every extremal surface in the ${}^1E_3$ is the translation surface of its isotropic curves.

This theorem leads to some simple relations on the components of second fundamental form of an extremal surface in ${}^1E_3$.

Lemma. If the extremal surface in the space ${}^1E_3$ is presented by means of its isotropic parameters v^1 and v^2 then

$$h_{12}=0\ ,\ h_{11}=p(v^1)\ ,\ h_{22}=q(v^2)\ , \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^1 \partial v^2}-\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial v^1}\frac{\partial g}{\partial v^2}=pq\,. \tag{12}$$

Proof. From $X_{,12}=0$ it follows that $X_{,112}=X_{,221}=0$. Now (3) gives due to (8) immidiately (12) and

$$\frac{\partial h_{11}}{\partial v^2}=\frac{\partial h_{22}}{\partial v^1}=0.$$

This together with (9) leads to (11). □

Remark 1. We can denote $\omega=\ln|g|$; then (12) is equivalent to

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial v^1\partial v^2}=\delta pq e^{-\omega}, \tag{13}$$

where $\delta=1$ if $g>0$ and $\delta=-1$ if $g<0$ at every point $X\in M$.

Proposition 1. For the extremal surface with $K\neq 0$ in ${}^1E_3$ there exist such isotropic parameters u^1 and u^2 that the components of the second fundamental form have the next constant values:

$$\tilde h_{11}=1\ ,\ \tilde h_{22}=\varepsilon\ ,\ \tilde h_{12}=0\ , \tag{14}$$

where $\varepsilon=\pm 1$.

Proof. If $K \neq 0$ then $pq \neq 0$ and m can be directed so that $h_{11} = p > 0$. Taking now on the isotropic curves of the considered surface M the new parameters $u^1 = \int\sqrt{p(v^1)}\,dv^1$, $u^2 = \int\sqrt{|q(v^2)|}\,dv^2$ we have $h_{ik} = \tilde{h}_{jl} \frac{\partial u^j}{\partial v^i} \frac{\partial u^l}{\partial v^k}$ and this gives relations (14). □

The isotropic parameters u^1 and u^2, for which the equalities (14) hold, we call the special isotropic parameters. The equations (12) and (13) are now

$$\frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial u^1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial u^2} = \varepsilon , \quad \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial u^1 \partial u^2} = \varepsilon \delta e^{-\tilde{\omega}} , \tag{15}$$

where $\tilde{\omega} = \ln|\tilde{g}|$; $\tilde{g} = \tilde{g}_{12}$.

A remarkable difference from the case of minimal surfaces in E_3 is that in ${}^1E_3$ there exist, as we see below, the extremal surfaces with $K \equiv 0$ which are not the parts of planes (see Examples 5 and 6).

Proposition 2. For an extremal surface with zero Gaussian curvature in ${}^1E_3$, different from a part of a plane, there exist isotropic parameters u^1 and u^2 so that the components of the second fundamental form have the next constant values:

$$\tilde{h}_{11} = 1 , \tilde{h}_{22} = 0 , \tilde{h}_{12} = 0 . \tag{16}$$

Proof. If $K \equiv 0$ then $pq \equiv 0$. The case $p = q = 0$ leads to a part of a plane. If we exclude this case then after exchanging the roles of v^1 and v^2 if needed, we have $p \neq 0$, $q = 0$. Now m cam be directed so that $h_{11} = p > 0$. Taking after that on the isotropic v^1-curve of the considered surface M a new parameter $u^1 = \int\sqrt{p(v^1)}\,dv^1$ and denoting $u^2 = v^2$ we find, analogically as in Proposition 1 the equatities (16). □

Such parameters u^1 and u^2 are also called the special isotropic parameters. The equations (12) and (13) are now

$$\frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{\tilde{g}} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial u^1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial u^2} = 0 , \quad \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial u^1 \partial u^2} = 0 . \tag{17}$$

3. The general parametric equations of the extremal surfaces.

With respect to a fixed orthonormal frame $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ in ${}^1E_3$ with $\langle e_1, e_1\rangle = -\langle e_2, e_2\rangle = \langle e_3, e_3\rangle = 1$ we have $\mathfrak{X} = \tilde{\mathfrak{X}}(u^1, u^2) = (x^1(u^1,u^2), x^2(u^1,u^2), x^3(u^1,u^2))$ or, in another way, $\mathfrak{X} = x^i(u^1, u^2) e_i$ where the parameters u^1 and u^2 let be the special isotropic parameters.

<u>Theorem 2</u>. A surface M in the space ${}^1E_3$ with pseudo-Euclidean tangent planes and different from a part of a plane is the extremal surface if and only if its parametric equations can be presented

A) in the case of nonzero Gaussian curvature $K \neq 0$ as follows:

$$
\begin{aligned}
x^1 &= \int \tfrac{1}{\varphi'} \cos\varphi \, du^1 - \varepsilon \int \tfrac{1}{\psi'} \cos\psi \, du^2, \\
x^2 &= \int \tfrac{1}{\varphi'} \, du^1 - \varepsilon \int \tfrac{1}{\psi'} \, du^2, \\
x^3 &= \int \tfrac{1}{\varphi'} \sin\varphi \, du^1 - \varepsilon \int \tfrac{1}{\psi'} \sin\psi \, du^2,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

B) in the case of zero Gaussian curvature $K = 0$ as follows:

$$
\begin{aligned}
x^1 &= \int \tfrac{1}{\varphi'} \cos\varphi \, du^1 + \cos c \int \psi \, du^2, \\
x^2 &= \int \tfrac{1}{\varphi'} \, du^1 + \int \psi \, du^2, \\
x^3 &= \int \tfrac{1}{\varphi'} \sin\varphi \, du^1 + \sin c \int \psi \, du^2,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

where $\varphi = \varphi(u^1)$, $\psi = \psi(u^2)$ are the arbitrary C^3-functions and c = const.

<u>Proof</u>. We start with the case A)

<u>Sufficiency</u>. Let us assume that the surface in ${}^1E_3$ is given by equations (18) and show that then $H = 0$, $K \neq 0$. By means of the immediate calculation we get $\tilde{g}_{11} - \tilde{g}_{22} = 0$ $\tilde{x}_{12} = 0$ i.e. $\tilde{h}_{12} = 0$ and

$$\tilde{g} = \frac{\varepsilon}{\varphi' \psi'} \left[1 - \cos(\varphi - \psi) \right]. \tag{20}$$

From (9) and (4) it follows that $H = 0$ and $(\tilde{g})^2 K = -\varepsilon$. Due to (2), (4) and (8)

$\langle m, m \rangle = \langle \tilde{x}_{11}, \tilde{x}_{11} \rangle = \langle \tilde{x}_{22}, \tilde{x}_{22} \rangle = 1$ i.e. the considered surface has the pseudo-Euclidean tangent plane at every point.

<u>Necessity</u>. Let us assume that the tangent plane at every point $x \in M$ is pseudo-Euclidean and that $H \equiv 0$, $K \neq 0$. We have to prove that M can be presented by (18). Due to the Theorem 1

$$
\begin{aligned}
x^1 &= \int \alpha(u^1) \, du^1 + \int \beta(u^2) \, du^2, \\
x^2 &= \int \gamma(u^1) \, du^1 + \int \eta(u^2) \, du^2, \\
x^3 &= \int \mu(u^1) \, du^1 + \int \nu(u^2) \, du^2.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Taking into account (1), (2), (8), (14) and assumtions $\langle m, m \rangle = 1$, $\tilde{g} \neq 0$ we get

$$(\gamma)^2 = (\alpha)^2 + (\mu)^2 \,, \quad (\eta)^2 = (\beta)^2 + (\nu)^2 \,,$$

$$\tilde{g} = \alpha\beta - \gamma\eta + \mu\nu \,, \tag{22}$$

$$(\alpha')^2 + (\mu')^2 - (\gamma')^2 = 1 \,, \quad (\beta')^2 + (\nu')^2 - (\eta')^2 = 1 \,. \tag{23}$$

Here the first relations give $\alpha(u^1) = \gamma(u^1)\cos\varphi(u^1)$, $\mu(u^1) = \gamma(u^1)\sin\varphi(u^1)$, $\beta(u^2) = \eta(u^2)\cos\psi(u^2)$ and $\nu(u^2) = \eta(u^2)\sin\psi(u^2)$; then (22), (23) take the following form:

$$\tilde{g} = \gamma\eta\left[\cos(\varphi - \psi) - 1\right] \,,$$

$$(\gamma\varphi')^2 = 1 \,, \quad (\eta\psi')^2 = 1 \,.$$

From the last relations we get $\gamma = \frac{1}{\varphi'}$ and $\eta = -\frac{\varepsilon}{\psi'}$ where $\varepsilon = \pm 1$. If to substitute all this into (21) we obtain (18).

Now we go to the case B)

Sufficiency. From (19) it follows that $\tilde{g}_{11} = \tilde{g}_{22} = \tilde{h}_{11} = \tilde{h}_{22} = 0$ and

$$\tilde{g} = \frac{\psi}{\varphi'}\left[\cos(c - \varphi) - 1\right] . \tag{24}$$

Using the formulas (9) and (4) we deduce $H = K = 0$. Due to (2), (4) and (8) $\langle m, m \rangle = \langle \tilde{\mathfrak{X}}_{u}, \tilde{\mathfrak{X}}_{u} \rangle = 1$ i.e. the considered surface has the pseudo-Euclidean tangent plane at every point.

Necessity: Let us assume that the tangent plane at every point $\mathfrak{X} \in M$ is pseudo-Euclidean and that $H = K = 0$. Now the difference from the case A) is that instead of (23) we get

$$(\alpha')^2 + (\mu')^2 - (\gamma')^2 = 1 \,, \quad (\beta')^2 + (\nu')^2 - (\eta')^2 = 0 \,. \tag{25}$$

Further, $(\gamma\varphi')^2 = 1$ and $\eta\psi' = 0$. As $\eta \neq 0$ we get that $\psi = C =$ constant and $\gamma = \frac{1}{\varphi'}$. This leads to (19). □

Remark 2. The equations (18) are equivalent to the equations (2.13) in [2] (see also [3] equations (2.1)).

The geometrical meaning of (19) gives the next.

Theorem 3. The extremal surface with $K \equiv 0$ in ${}^1E_3$ is a cylinder with isotropic generators. Conversely, every cylinder with isotropic generators in ${}^1E_3$ is an extremal surface with $K \equiv 0$.

Proof. If $H = K = 0$, then from (19) it follows that $\tilde{\mathfrak{X}}_{22} = \frac{\psi'}{\psi}\tilde{\mathfrak{X}}_2$ and due to $\tilde{\mathfrak{X}}_{12} = 0$ we have $d\tilde{\mathfrak{X}}_2 = \frac{\psi'}{\psi}\tilde{\mathfrak{X}}_2\, du^2$. So the direction of $\tilde{\mathfrak{X}}_2$ is invariant on the surface.

Conversaly, let the parameters u^1 and u^2 on a surface be isotropic and let u^2 -lines are straight lines. Then $d\tilde{X}_2 = \lambda \tilde{X}_1 du^2$ thus $\tilde{X}_{22} = \lambda \tilde{X}_2$, $\tilde{X}_{12} = 0$ and hence $\tilde{h}_{12} = \tilde{h}_{22} = 0$. Due to (9) we have $H = K = 0$. □

Remark 3. Propositions 1 and 2 together give that if u^1 and u^2 are the special isotropic parameters on an extremal surface in ${}^1E_3$ then $\tilde{h}_{11} = 1$, $\tilde{h}_{12} = 0$, $\tilde{h}_{22} = \eta$, where η is $1, -1$ or 0; now (9) gives $(\tilde{g})^2 K = -\eta$. The equation (6) for the principal curvatures K_1 and K_2 is $(K_0)^2 + K = 0$ and (7) get form $(du^1)^2 + \eta (du^2)^2 = 0$. There are the next possibilities:

η	K	K_1, K_2	asymptotic net
1	< 0	real	imaginary
-1	> 0	imag.	real
0	0	zero	degenerated, reduced to the family of isotropic generators

4. The examples of extremal surfaces.

Next we use the equations of the Theorem 2 to get the concrete extremal surfaces in ${}^1E_3$ substituting such functions $f(u^1)$ and $f(u^2)$ by which the integrals can be expressed in elementary functions. In all cases, given below, the parameters can be eliminated.

A) The case $K \neq 0$. Substituting $f = 2\arctan\omega$ and $f = 2\arctan w$ into (18) we have

$$x^2 + x^1 = \int \frac{du^1}{\omega'} - \varepsilon \int \frac{du^2}{w'},$$

$$x^2 - x^1 = \int \frac{(\omega)^2}{\omega'} du^1 - \varepsilon \int \frac{(w)^2}{w'} du^2, \qquad (26)$$

$$x^3 = \int \frac{\omega}{\omega'} du^1 - \varepsilon \int \frac{w}{w'} du^2.$$

Example. 1. Let us take $\omega = \frac{1}{c^*} u^1$, $w = \frac{1}{c^*} u^2$ and $\varepsilon = 1$; then from (26)

$$x^2 + x^1 = c^* (u^1 - u^2),$$

$$x^2 - x^1 = \frac{1}{3c^*} [(u^1)^3 - (u^2)^3],$$

$$x^3 = \frac{1}{2} [(u^1)^2 - (u^2)^2]$$

and so

$$(x^3)^2 = (x^2)^2 - (x^1)^2 - c(x^2 + x^1)^4,$$

where $c > 0$. If $\varepsilon = -1$ then

$$x^2 + x^1 = c^* (u^1 + u^2),$$

$$x^2 - x^1 = \frac{1}{3c^*} [(u^1)^3 + (u^2)^3],$$

3

$$x^3 = \frac{1}{2}\left[(u^1)^2 + (u^2)^2\right]$$

and so

$$x^3 = \frac{1}{6c}\,(x^2 + x^1)^2 + c\,\frac{x^2 - x^1}{x^2 + x^1}\,,$$

where $c > 0$.

Example. 2. If we take $\omega = e^{u^1}$, $w = -e^{u^2}$ and $\varepsilon = -1$ the equations (26) give

$$x^2 + x^1 = -e^{-u^1} + e^{-u^2},$$

$$x^2 - x^1 = e^{u^1} - e^{u^2},$$

$$x^3 = u^1 + u^2,$$

thus

$$x^3 = \ln\left|\frac{x^2 - x^1}{x^2 + x^1}\right|$$

Example. 3. Let $f = c^* u^1$, $t = c^* u^2$; then directly from (18) it follows that

$$x^1 = \frac{1}{(c^*)^2}\left[\sin(c^* u^1) - \varepsilon \sin(c^* u^2)\right],$$

$$x^2 = \frac{1}{c^*}\,(u^1 - \varepsilon u^2),$$

$$x^3 = \frac{1}{(c^*)^2}\left[-\cos(c^* u^1) + \varepsilon \cos(c^* u^2)\right].$$

If $\varepsilon = 1$ we have

$$x^2 = \pm\frac{1}{c}\arcsin\left[c\sqrt{(x^1)^2 + (x^3)^2}\right],\ c > 0 .$$

For $\varepsilon = -1$ we get

$$x^2 = c\,\arctan\frac{x^1}{x^3}$$

Example. 4. Let $\omega = a(u^1)^2$, $w = a(u^2)^2$ Then

$$x^2 + x^1 = \frac{1}{2a}\,(\ln u^1 - \varepsilon \ln u^2),$$

$$x^2 - x^1 = \frac{a}{8}\left[(u^1)^4 - \varepsilon (u^2)^4\right],$$

$$x^3 = \frac{1}{4}\left[(u^1)^2 - \varepsilon (u^2)^2\right].$$

If $\varepsilon = 1$ we have

$$(x^3)^2 = \frac{1}{2a}\,(x^2 - x^1)\,\mathrm{th}\left[2a(x^2 + x^1)\right]$$

but for $\varepsilon = -1$

$$(x^3)^2 = \frac{1}{2a}\,(x^2 - x^1) + \frac{1}{8}\,e^{4a(x^2 + x^1)}$$

B) The case $K = 0$

Example. 5. Taking $c=0$ in (19) we have $x^3=F(u^1)$ $x^1-x^2=G(u^1)$ and thus

$$x^3=f(x^1-x^2).$$

Here for arbitrary C^2-function f we get a extremal surface with $K\equiv 0$ in ${}^1E_3$.

Example. 6. Let $c=\frac{\pi}{4}$, then we get from (19) that $x^1-x^3=F(u^1)$, $x^2=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^1+x^3)+G(u^1)$ and thus

$$x^2=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^1+x^3)+f(x^1-x^3).$$

References

1. G u C h a o h a o. On the motion of a string in a curved space-time// Proc. of Grossmann Symposion - 1982. - P. 139-142.
2. G u C h a o h a o. A global study of extremal surfaces in 3-dimensional Minkowski space// Lect. Notes Math. - 1987 - V. 1255. - P. 26-33.
3. G u C h a o h a o. A class of boundary problems for extremal surfaces of mixed type in Minkowski 3-space.// J. reine u angew. Math. - 1988. - 1988. - B. 385. - P. 195-202.
4. L i l i e n t h a l, R. v. Besondere Flächen// Euz.d. Math. Wiss. 1903, III D 5, 269-354.
5. L u m i s t e, Ü. Diferentsiaalgeomeetria. Tallinn: Valgus, 1987.
6. Б л я ш к е В. Введение в дифференциальную геометрию. Москва, Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1957.
7. Г о р о х В. П. Об устойчивости минимальной поверхности в псевдоевклидовом пространстве// Украинский геом. сб. - 1990 - № 33 - С. 41-45.
8. Н о р д е н А. Р. Теория поверхностей. Москва: Гос. изд. техн.-теорет. лит. 1956.
9. Ш а в о х и н а Н. С. Краевая задача для минимальной поверхности в трехмерном мире Минковского// Изв. ВУЗов. Физика. - 1981 - № 7 - С. 91-93.
10. Ш а в о х и н а Н. С. Решения уравнений Борна-Инфельда в виде минимальных поверхностей.// Сообщ. объед. ин-та ядерных иссл. Р 4-86-485. Дубна, 1986. 6 с.

Received
5 VI 1991

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО ${}^1E_3$

Я.Варик

Р е з ю м е

В пространстве Минковского ${}^1E_3$ рассматриваются поверхности, у которых касательная плоскость псевдоевклидова во всех точках. За координатную сеть на поверхности выбрана сеть изотропных линий. Изучаются такие поверхности, у которых средняя кривизна H тождественно обращается в нуль, т.е. $H \equiv 0$. Такие поверхности в пространстве Минковского ${}^1E_3$ называются экстремальными; они являются аналогами минимальных поверхностей в E_3.

Выводятся общие параметрические уравнения рассматриваемых экстремальных поверхностей в пространстве ${}^1E_3$. Эти уравнения получаются с произволом двух независимых друг от друга функций одной переменной.

Оказывается, что гауссова кривизна экстремальной поверхности в ${}^1E_3$ может принимать любое вещественное значение. В частном случае найдены отличные от плоскости экстремальные поверхности нулевой гауссовой кривизны.

Задача найти общие параметрические уравнения экстремальных поверхностей решается отдельно в двух случаях, в зависимости от того, тождественно ли равна нулю гауссова кривизна K или нет. Из этих уравнений в случае $K \equiv 0$ вытекает, что всякая такая поверхность геометрически представляет собой цилиндр.

В заключительной части статьи дан ряд конкретных примеров исследуемых экстремальных поверхностей в пространстве ${}^1E_3$ как при $K \neq 0$, так и при $K \equiv 0$.

TU Toimetised,
930 (1991), 63-77.

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
I99I, 930, 63-77

FOCUS AND POLAR SUBMANIFOLDS OF HIGHER ORDER FOR A SUBMANIFOLD M^m IN E^n

Tõnis Virovere
Tallinn Technical University

Introduction. Let M^m be a smooth submanifold in a Euclidean space E^n with tangent bundle TM^m and normal bundle $T^{\perp}M^m$. The fibres of these bundles at a point $x \in M^m$ are, respectively, the tangent space T_xM^m and the normal space $T_x^{\perp}M^m$ as vector spaces. Correspondingly the tangential m-plane $[x, T_xM^m]$ and the normal (n-m)-plane $[x, T_x^{\perp}M^m]$ are defined at $x \in M^m$ as subspaces of E^n.

The classical construction of the evolute of a plane curve has been generalized in two directions. For the curve M^1 in E^n the envelope of the family of normal spaces $[x, T_x^{\perp}M^1]$ is called (see [2]) the polar hypersurface. The curve W^1, the tangent lines of which $[y, T_yW^1]$ are the normals of M^1 at corresponding points $x = \rho(y) \in M^1$, is called the evolute of M^1 and the point $y \in W^1$ is said to be the focus of the family of these normals.

There are higher order generalizations of the last two concepts. A curve W^1 in E^n is said to be (see [9]) the evolute of order λ for a curve M^1 if its osculating spaces $[y, O_y^{(\lambda-1)}W^1]$ of order $\lambda-1$ are normal to M^1 at corresponding points $x = \rho(y)$, where $x \in M^1$. The point $y \in W^1$ is called then the focus of order λ of the family of these normals.

R. Mullari [9] extended the concept of polar hypersurface to the case of the general M^m in E^n. The polar submanifold $W^{(1)}$ of a M^m in E^n (in [9] it is called the first evolute) is the envelope of the family of normal spaces $[x, T_x^{\perp}M^m]$. Here $W^{(1)}$ consists of characteristics $S^{(1)}$, the envelope of which is called the second order polar submanifold $W^{(2)}$ (the 2 nd evolute) etc.

So a sequence

$$W^{(1)} \supset W^{(2)} \supset \dots \supset W^{(\lambda)} \supset \dots$$

of polar submanifolds of order 1, 2, ..., λ, ... and some of their general geometrical properties are obtained in [9]. It is shown that if $[x, O_x^{(\lambda)} M^m]$ is the osculating space of order λ and $S_x^{(\lambda)}$ is the plane generatrix of $W^{(\lambda)}$ at the point $x \in M^m$, then they are orthogonal to each other and intersect at a point.

The concept of the focus point (of order 1) is also extended to the case of M^m in E^n (see [3]). In connection with polar submanifolds the focus points of order 1 are used by R. Mullari [9]. It is shown that to every $X \in T_x M^m$ there corresponds a focus $(n-m-1)$-plane $\phi_x^{(1)}(X)$ in $[x, T_x^{\perp} M^m]$ which consists of focus points and $S_x^{(1)} = \bigcap_{X \in T_x M^m} \phi_x^{(1)}(X)$.

The aim of this paper is to introduce the focus point of order λ for a normal subbundle on M^m, restricted to a curve M^1 in M^m and to generalize the results of R. Mullari, i.e. to show, how the polar submanifold $W^{(\lambda)}$ can be generated by means of focus points of order λ.

In §1 the exact definitions of the above mentioned concepts and necessary auxiliary results are given in order to formulate the main theorem. The Bartels-Frenet' formulas, representing the main analytical tool, are derived in §2 in a suitable for us form. They open a new possibility to determine focus points of higher order which is realized on §3. Finally, the proof of the main theorem is given in §4.

The results of this paper for a special case of Cartan normally flat submanifolds M^m in E^n are announced in [5] and deduced in [4] (see also [6]). Here they are generalized to the case of general M^m in E^n.

§1. Focus and polar submanifolds. Let $\mathbb{N}^r M^m$ be a subbundle of $T^{\perp} M^m$, i.e. we suppose that in every normal vector space $T_x^{\perp} M^m$ an r-dimensional vector subspace $N^r(x)$ is given, which depends smoothly on the point $x \in M^m$. The corresponding r-plane in E^n through x we denote by $[x, N^r(x)]$ and the total space of the canonical bundle $\mathfrak{X}(M^m, \mathbb{N}^r)$ by $\mathfrak{X}^{m+r}$. Here $\mathfrak{X}^{m+r}$ consists of pairs (x, y), where $x \in M^m$ and $y \in [x, N^r(x)]$, and it is a $(m+r)$-dimensional smooth manifold. We have the bundle projection

$$p : \mathfrak{X}^{m+r} \longrightarrow M^m, \qquad (x, y) \longmapsto x$$

and a smooth map

$$\pi : \mathfrak{X}^{m+r} \longrightarrow E^n, \qquad (x, y) \longmapsto y.$$

Definition 1. (see [6]). *Every singular point of* $d\pi$, *i.e. such a point* $(x, y) \in \mathfrak{X}^{m+r}$, *where the linear map*

$$d\pi_{(x,y)} : T_{(x,y)}\mathfrak{X}^{m+r} \longrightarrow T_y E^n$$

has the rank $< m+r$, *is called the* *focal point* *of* $\mathfrak{X}(M^m, \mathbb{N}^r)$.

Note, that here $m+1 < m+r < n$.

The next lemma gives another possibility to define the focal point.

Lemma [7]. A point $(x, y) \in \mathfrak{X}^{m+r}$ is focal point iff in vector space $T_{(x,y)}\mathfrak{X}^{m+r}$ there exists a vector $Z(x, y)$, so that $dp_{(x,y)}Z(x, y) \neq 0$ and $d\pi_{(x,y)}Z(x, y) \in N^r(x)$.

If $(x, y) \in \mathfrak{X}^{m+r}$ is a focal point of $\mathfrak{X}(M^m, \mathbb{N}^r)$, then $y = \pi(x, y)$ is called the focus point of the normal field $\mathbb{N}^r$ on M^m.

Note, that in case $r = n-m$, when $\mathbb{N}^r M^m = T^\perp M^m$, we get the focus point of the submanifold M^m in the sense of [8].

The statement of the lemma is often formulated in the following way (see [3]). Let y be a point of $[x, N^r(x)]$, so that for every $x \in M^m$ the vector $\vec{xy}$ constitutes a smooth section of the subbundle $\mathbb{N}^r M^m$ and let $\vec{y}$ be the radius vector of y by some origin in E^n. The point y is the focus of $\mathbb{N}^r$ on M^m iff there exists a displacement $d\vec{x}$ of the point $x \in M^m$ that the corresponding displacement $d\vec{y}$ of the point y belongs to $N^r(x)$. Note that here $d\vec{x}$ is collinear to $dp_{(x,y)}Z(x, y)$; its direction is called the focal direction of the bundle $\mathfrak{X}(M^m, \mathbb{N}^r)$ at the point $x \in M^m$.

Next a definition of the focus point of higher order is given. Let there be given a smooth field $\mathbb{N}^r$ of normal vector spaces $N^r(x)$ on M^m and a line $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M^m$, where $\varepsilon > 0$. Then we get the restrictions of the vector bundle $\mathbb{N}^r M^m$ and of the canonical bundle $\mathfrak{F}(M^m, \mathbb{N}^r)$ on $M^1 = \gamma\ (]-\varepsilon,\varepsilon\ [)$. We denote these restrictions by $\mathbb{N}^r|_{M^1}$ and $\mathfrak{F}|_{M^1}$, respectively.

Definition 2. *A section $\sigma : M^1 \longrightarrow \mathbb{N}^r|_{M^1}$ is called the* <u>*focus section of order λ*</u> *on $M^1 \subset M^m$, if*

$$d^{\mu}(\overline{x}+ \vec{\sigma}(\ M^1)) \in [x,\ N^r(x)] \qquad (1.1)$$

for every point $x \in M^1$ and for every value of $\mu = 1,\dots,\lambda$, where $\overline{x}$ is the radius vector of the point $x \in M^1$. A point with radius vector $\overline{x} + \vec{\sigma}(\ M^1)$ of such a section is called the <u>*focus point of order λ*</u> *on the line M^1 for a field $\mathbb{N}^r$.*

In a special case, when $r = n-m$ and $\lambda = 1$ this definition gives the focus point of the submanifold M^m in the sense of [8]. It is known, that this focus point depends only on the direction in T_xM^m (i.e. on the focal direction).

The evolute of order λ for a curve (see Introduction) can be generalized in the following way.

Definition 3. *The submanifold $W^{(\lambda)}$ is called* <u>*polar submanifold of order λ*</u> *for submanifold M^m in E^n, when exists such a submersion $\rho : W^{(\lambda)} \longrightarrow M^m$, so that an osculating plane $[y,\ O_y^{(\lambda-1)}W^{(\lambda)}]$ of order λ-1 in every point $y \in W^{(\lambda)}$ coincides with the normal (n-m)-plane $[x,\ T_x^{\perp}M^m]$ at the corresponding point $x = \rho(y)$.*

The main result of this paper is the next theorem, which connects the concepts of focus and polar submanifolds of higher order.

Let M^m be a smooth submanifold in Euclidean space E^n. Let h be its second fundamental form and ∇h, $\nabla\nabla h,\dots,\nabla..\nabla h$ the covariant differentials of h with respect to the van der Waerden-Bortolotti connection [1]. Then

$$O_x^{(\lambda)}M^m = T_xM^m \oplus \text{span}\ \{h(X,\ Y),\ \nabla_{Z_1}h(X,\ Y),\dots,\nabla_{Z_{\lambda-2}}\dots\nabla_{Z_1}h(X,\quad Y)\}$$

where X, Y, $Z_1,\dots,Z_{\lambda-2}$ are arbitrary vectors in T_xM^m, is called the osculating vector space of order λ of the submanifold M^m in E^n. There exists the last osculating space $[x,\ O_x^{(p)}M^m]$, which coincides with E^n.

Theorem. *Let all the higher order osculating spaces of a submanifold M^m in E^n have the maximal possible dimensions (except, perhaps, the last one). For a line M^1 in M^m through the point $x \in M^m$ the focus points of order λ for the normal bundle $T^{\perp}M^m$ fill up a plane $\phi_x^{(\lambda)}(O_x^{(\lambda-1)}M^1)$ which is the same for all lines, having a common osculating vector space $O_x^{(\lambda-1)}M^1$ of order λ; here*

$$\phi_x^{(p)}(T_x M^1) \supset \phi_x^{(2)}(O_x^{(1)}M^1) \supset \qquad \supset \phi_x^{(p)}(O_x^{(p-1)}M^1) \qquad (1.2)$$

If all $O_x^{(\lambda)}M^1$, $\lambda = 0,\dots,p$, belong to the linear hull

$$\mathrm{span}\ \{X,\ h(X,\ Y), \nabla_{Z_1} h(X,\ Y),\dots,\nabla_{Z_{p-2}}\dots\nabla_{Z_1} h(X,\ Y)\},$$

where $X \in T_x M^1$ and $Y,\ Z_1,\dots,Z_{p-2}$ are the arbitrary vectors of $T_x M^m$, then the sequence of focus planes (1.2) is the same for all lines M^1 with such osculating vector spaces $O_x^{(\lambda)}M^1$ at $x \in M^m$. Moreover, the plane generatrix $S_x^{(\lambda)}$ of the polar submanifold $W^{(\lambda)}$ is the intersection of all $\phi_x^{(\lambda)}(O_x^{(\lambda-1)}M^1)$ for all lines M^1 in M^m through $x \in M^m$.

§2. Bartels-Frenet' formulas. If a submanifold M^m in E^n is given, the orthonormal frame bundle $\mathcal{O}(E^n)$ can be reduced to $\mathcal{O}(M^m,\ E^n)$; here $(x,\ X_i,\ X_\alpha) \in \mathcal{O}(M^m, E^n)$ implies

$$X_i \in T_x M^m,\ X_\alpha \in T_x^{\perp} M^m;\ i = 1,\dots,m;\ \alpha = m+1,\dots,n.$$

Identifying the point $x \in M^m$ with its radius vector we have

$$d\vec{x} = X_I \omega^I,\ dX_I = X_K \omega_I^K,\quad \omega_I^K + \omega_K^I = 0, \qquad (2.1)$$

where $I, K = 1,\dots,n$ and the following differential system is satisfied:

$$\omega^\alpha = 0 \qquad (2.2)$$

At the same time the next structure equations (i.e integrability conditions of (2.1) are valid :

$$d\omega^I = \omega^K \wedge \omega_K^I\ ,\ d\omega_I^K = \omega_I^J \wedge \omega_J^K\ . \qquad (2.3)$$

9*

Now (2.2) and (2.3) give due to the Cartan lemma, that

$$\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j \ , \ h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha. \tag{2.4}$$

and from (2.1) we get

$$dX_i = X_j \omega_i^j + h_{ik}\omega^k. \tag{2.5}$$

where $h_{ik} = h_{ik}^\alpha X_\alpha$ are linear independent. The linear hull of these vectors h_{ik} at $x \in M^m$ is called first principal normal space $N_x^{(1)}M^m$ (see [2]). We assume that it has the maximal dimension $m_1 = \frac{1}{2} m(m+1)$.

After exterior differentiation we get from (2.5) that

$$(dh_{ik} - h_{jk}\omega_i^j - h_{ij}\omega_k^j) \wedge \omega^k + X_j \omega_i^\alpha \wedge \omega_\alpha^j = 0.$$

Using (2.1) and (2.4) we check up, that

$$\omega_i^\alpha \wedge \omega_\alpha^j = \sum_\alpha h_{ik}^\alpha \omega^k \wedge h_{jl}^\alpha \omega^l = -\sum_\alpha \sum_{k<l} (h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha)\ \omega^k \wedge \omega^l =$$

$$= \sum_{k<l} (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk})\ \omega^l \wedge \omega^k,$$

so by means of Cartan lemma

$$dh_{ik} - h_{jk}\omega_i^j - h_{ij}\omega_k^j + X_j \sum_{k<l} (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk})\omega^l = h_{ikl}\omega^l =$$

$$= (h_{ikl}^{(0)} + h_{ikl}^{(1)} + h_{ikl}^{(2)})\ \omega^l. \tag{2.6}$$

Here we decompose h_{ikl} so that the suemands are mutually orthogonal and the first two belong to T_xM and $N_x^{(1)}$, respectively. Here the linear hull of all $h_{ikl}^{(2)}$ at $x \in M^m$ is the second principal normal space $N_x^{(2)}M^m$. We assume that $h_{ikl}^{(2)}$ are linear independent, then $m_2 = \dim N_x^{(2)} = \frac{1}{6}m(m+1)(m+2)$ [9].

Let us put the last addend in (2.6) from the left side to the right side and denote all tangential components through the $\bar{h}_{ikl}^{(0)}$, so we get (2.6) in the following form:

$$dh_{ik} = h_{jk}\omega_i^j + h_{ij}\omega_k^j + (\bar{h}_{ikl}^{(0)} + h_{ikl}^{(1)} + h_{ikl}^{(2)})\omega^l \tag{2.7}$$

Repeating this procedure we obtain by the next step

$$d(\bar{h}^{(0)}_{ijk} + h^{(1)}_{ijk} + h^{(2)}_{ijk}) = h_{ljk}\omega^l_i + h_{ilk}\omega^l_j + h_{ijl}\omega^l_k +$$

$$+ (h^{(0)}_{ijkl} + \bar{h}^{(1)}_{ijkl} + h^{(2)}_{ijkl} + h^{(3)}_{ijkl})\omega^l; \qquad (2.8)$$

in general

$$d(h^{(0)}_{i_1 \dots i_\lambda} + \dots + h^{(\lambda-4)}_{i_1 \dots i_\lambda} + \bar{h}^{(\lambda-3)}_{i_1 \dots i_\lambda} + h^{(\lambda-2)}_{i_1 \dots i_\lambda} + h^{(\lambda-1)}_{i_1 \dots i_\lambda}) =$$

$$= \sum_\mu h_{i_1 \dots i_{\mu-1} l i_{\mu+1} \dots i_\lambda}\omega^l_{i_\mu} + \qquad (2.9)$$

$$+ (h^{(0)}_{i_1 \dots i_{\lambda+1}} + \dots + \bar{h}^{(\lambda-2)}_{i_1 \dots i_{\lambda+1}} + h^{(\lambda-1)}_{i_1 \dots i_{\lambda+1}} + h^{(\lambda)}_{i_1 \dots i_{\lambda+1}})\omega^{i_{\lambda+1}}$$

where $\mu = 1,\dots\lambda$. This formula (2.9) can be verified by induction. In (2.9) an upper index denotes, in to which order principal normal space the considered vector belongs. We assume that the vectors $h^{(\lambda)}_{i_1 \dots i_{\lambda+1}}$ are all linear independent, so that $N^{(\lambda)}_x M^m$ has a possible maximum dimension $m_\lambda = \dim N^{(\lambda)}_x M^m = \frac{1}{(\lambda+1)!}m(m+1)\dots(m+\lambda)$ [9].

This differential prolongation procedure terminates, if for the some value $\lambda = p+1$ we get $h^{(p+1)}_{i_1 \dots i_{p+2}} = 0$. Such a p exists because E^n has a finite dimension: $n = m + m_1 + m_2 + \dots + m_p$. In this case quantity p is called order of curvature for submanifold M^m in E^n.

Remark 1. Formulas (2.1), (2.5), (2.7), (2.8), (2.9) are called the Bartels-Frenet' formulas for submanifold M^m in E^n. They are deduced by R. Mullari [9] in the light different notations.

Remark 2. It is often convenient to use this kind of adapted to M^m orthonormal frame bundle, where every basis $\{X_\alpha\}$ is decomposed to components from $N^{(\lambda)}_x M^m$, $\lambda = 1,\dots p$, i.e. in a form $\{X_{\alpha_1},\dots,X_{\alpha_p}\}$, where $X_{\alpha_\lambda} \in N^{(\lambda)}_x M^m$. Then the formulas (2.1) of infinitesimal displacement can be presented in a following way:

$$
\begin{aligned}
d\bar{x} &= X_k\omega^k,\\
dX_i &= X_j\omega_i^j + X_{\alpha_1}\omega_i^{\alpha_1},\\
dX_{\beta_1} &= X_k\omega_{\beta_1}^k + X_{\alpha_1}\omega_{\beta_1}^{\alpha_1} + X_{\alpha_2}\omega_{\beta_1}^{\alpha_2}, \qquad (2.10)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
dX_{\beta_p} &= X_{\alpha_{p-1}}\omega_{\beta_p}^{\alpha_{p-1}} + X_{\alpha_p}\omega_{\beta_p}^{\alpha_p},
\end{aligned}
$$

where the fact that $\omega_{\alpha_\lambda}^{\alpha_\mu} = 0$, if $\mu \geq \lambda + 2$, is taken into consideration.

§3. The other way to determine focuses of higher order. The Bartels-Frenet' formulas do not work, if we compile the equations of the sets of focuses of higher order on the basis of definition 2. Therefore we show the new analytical possibility to determine focuses of higher order. Namely, the following proposition is valid.

Proposition. *Let the osculating spaces of order* $1,2,..,p-1$ *of* M^m *in* E^n *have the maximal dimensions. The point* $y \in [x, T_x^{\perp}M^m]$ *is a focus of order* $\lambda+1$ *for a line* M^1 *in* M^m *and for the normal bundle* $T^{\perp}M^m$ *iff the infinitesimal displacement* $d\bar{y}$ *of it radius vector along* M^1 *at* $x \in M^m$ *is by* $X \in T_xM^m$ *and arbitrary* Y, $Z_1, \dots, Z_\mu \in T_xM^m$ *orthogonal to the linear hull*

$$\mathrm{span}\,\{X,\ h(X,Y),\ \nabla_{Z_1}h(X,Y),\dots,\nabla_{Z_\mu}\dots\nabla_{Z_1}h(X,Y)\}$$

for every value $\mu = 0,\dots\lambda-1$.

Proof. Let us take the basis $\{X_1,\dots,X_m\}$ in T_xM^m, where $x \in M^1$, so that X_1 goes in tangent direction to the M^1. So this proposition can be analytically interpreted, that next conditions are satisfied:

$$d\bar{y}\cdot X_1 = 0,\ d\bar{y}\cdot h_{1k} = 0,\dots,d\bar{y}\cdot h^{(\lambda)}_{1k_1\dots k_\lambda} = 0 \qquad (3.1)$$

Necessity. Let in $[x, T_x^{\perp}M^m]$ be given a point y with radius vector $\bar{y} = \bar{x} + y^{\alpha}X_{\alpha}$, the arbitrary displacement of which is determined in the following way:

$$d\bar{y} = (\omega^k + y^{\alpha}\omega_{\alpha}^k)X_k + (dy^{\alpha} + y^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha})X_{\alpha} \qquad (3.2)$$

Here, due to $\omega^k = \delta_l^k\omega^l$ and (2.4)

$$(\omega^k + y^{\alpha}\omega_{\alpha}^k)X_k = [(\delta_l^k - \sum_{\alpha} h_{kl}^{\alpha}y^{\alpha})\omega^l]X_k$$

from where, applying the condition $d\bar{y} \in [x, T_x^{\perp}M^m]$ of definition 2, we obtain the system

$$(\delta_l^k - \sum_{\alpha} h_{kl}^{\alpha}y^{\alpha})\omega^l = 0, \quad k = 1,\ldots,m, \qquad (3.3)$$

which determines us the focal directions and corresponding focus points. From (3.3) it is obvious, that along the line $\omega^1 = ds_1$, $\omega^j = 0$, $j \neq 1$ (i.e. the line M^1 with tangent straight $[x, X_1]$) the focuses fill up the plane $\phi_x^{(1)}(X_1)$ with equations

$$\delta_1^k - h_{k1}\cdot(\bar{y} - \bar{x}) = 0, \quad k = 1,\ldots,m. \qquad (3.4)$$

Comparing (3.2) and (3.4) shows us that the left side of (3.4) is obtained from (3.2) by scalar multiplication with vector X_1. Consequently, all the radius vectors of focus points from $\phi_x^{(1)}(X_1)$ satisfy the next condition:

$$d\bar{y}\cdot X_1 = 0. \qquad (3.5)$$

Further, we use in $T_x^{\perp}M^m$ the new basis $\{X_{\alpha_1},\ldots X_{\alpha_p}\}$, where $X_{\alpha_\lambda} \in N_x^{(\lambda)}$, so we can decompose the second addend from (3.2) into the components from principal normal spaces $N_x^{(1)},\ldots,N_x^{(p)}$ in the form

$$(dy^{\alpha} + y^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha})X_{\alpha} = \sum_{\lambda=1}^{p}(dy^{\alpha_\lambda} + y^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha_\lambda})X_{\alpha_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{p} Dy^{\alpha_\lambda}X_{\alpha_\lambda},$$

where we denote

$$Dy^{\alpha_\lambda} = dy^{\alpha_\lambda} + y^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha_\lambda}.$$

After this we obtain for radius vector $\overline{y}$ of arbitrary focus point $y \in \phi^{(1)}_{*}(X_1)$, that along the line M^1 the diplacement $d\overline{y}$ is

$$d\overline{y} = Dy^{\alpha_1} X_{\alpha_1} + \sum_{\lambda=2}^{p} Dy^{\alpha_\lambda} X_{\alpha_\lambda} \tag{3.6}$$

Now, using the differentiation along the same line and (2.10) we get

$$d^2\overline{y} = d(Dy^{\alpha_1})X_{\alpha_1} + (Dy^{\alpha_1})(\omega^k_{\alpha_1} X_k + \omega^{\beta_1}_{\alpha_1} X_{\beta_1} + \omega^{\alpha_2}_{\alpha_1} X_{\alpha_2}) +$$

$$+ \sum_{\lambda=2}^{p} [d(Dy^{\alpha_\lambda})X_{\alpha_\lambda} + (Dy^{\alpha_\lambda})(\omega^{\alpha_{\lambda-1}}_{\alpha_\lambda} X_{\alpha_{\lambda-1}} + \omega^{\beta_\lambda}_{\alpha_\lambda} X_{\beta_\lambda} + \omega^{\alpha_{\lambda+1}}_{\alpha_\lambda} X_{\alpha_{\lambda+1}})] =$$

$$= (Dy^{\alpha_1})\omega^k_{\alpha_1} X_k + \sum_{\lambda=1}^{p} (D^2 y^{\alpha_\lambda})X_{\alpha_\lambda} = \tag{3.7}$$

$$= - \sum_{\alpha_1} Dy^{\alpha_1} \sum_{k} h^{\alpha_1}_{k1} ds_1 X_k + \sum_{\lambda=1}^{p} (D^2 y^{\alpha_\lambda})X_{\alpha_\lambda},$$

where

$$D^2 y^{\alpha_\lambda} = d(Dy^{\alpha_\lambda}) + (Dy^{\alpha_{\lambda-1}})\omega^{\alpha_\lambda}_{\alpha_{\lambda-1}} + (Dy^{\gamma_\lambda})\omega^{\alpha_\lambda}_{\gamma_\lambda} + (Dy^{\alpha_{\lambda+1}})\omega^{\alpha_\lambda}_{\alpha_{\lambda+1}}.$$

On the basis of definition 2 the point y appears to be the focus point of order 2 for the T^1M^m, when $d^2\overline{y} \in [x, T^1_* M^m]$, so (3.7) yields

$$\sum_{\alpha_1} (Dy^{\alpha_1})h^{\alpha_1}_{k1} = 0, \; k = 1,\dots,m,$$

which means, that

$$d\overline{y} \cdot h_{k1} = 0. \tag{3.8}$$

Again, using the differentiation along the same line M^1 from (3.7) we get

$$d^3\overline{y} = (D^2 y^{\alpha_1})\omega^k_{\alpha_1} X_k + \sum_{\lambda=1}^{p} (D^3 y^{\alpha_\lambda})X_{\alpha_\lambda},$$

where, analogically to the previous, by arbitrary value of λ :

$$D^3 y^{\alpha_\lambda} = d(D^2 y^{\alpha_\lambda}) + (D^2 y^{\alpha_{\lambda-1}})\omega^{\alpha_\lambda} + (D^2 y^{\gamma_\lambda})\omega^{\alpha_\lambda} + (D^2 y^{\alpha_{\lambda+1}})\omega^{\alpha_\lambda}_{\alpha_{\lambda+1}}.$$

Applying once again the definition 2 to determine focus points of order 3, we demand $d^3\bar{y} \in [x, T_x^{\perp}M^m]$, that yields

$$(D^2 y^{\alpha_1})\omega^k_{\alpha_1} = 0 \qquad \text{or} \qquad d^2\bar{y}\cdot h_{k1} = 0.$$

Therefore, using the differentiation and the Bartels-Frenet' formulas (2.7) to (3.7) we obtain

$$d\bar{y}\cdot(\bar{h}^{(0)}_{1k_1k_2} + h^{(1)}_{1k_1k_2} + h^{(2)}_{1k_1k_2}) = 0 \qquad (3.9)$$

which leads us with (3.5) and (3.8) to

$$d\bar{y}\cdot h^{(2)}_{1k_1k_2} = 0.$$

Now, by induction it is not complicated to check up, that for focus points of higher order $\lambda+1$

$$d\bar{y}\cdot h^{(\lambda)}_{1k_1\ldots k_\lambda} = 0.$$

is valid.

Conversely, the conditions (3.1) are sufficient for the point $y \in [x, T_x^{\perp}M^m]$ to be a focus of order $\lambda+1$, because the conditions (1.1) are satisfied. Proposition is proved.

§4. Proof of the theorem. From (3.4) it is obvious now, that all the focus points of order 1, corresponding to the focal direction X_1, are generating the focus plane $\phi^{(1)}_x(X_1)$ of order 1. By assumption, that the curvature vectors h_{1k} of order 1 are linear independent, is $\dim \phi^{(1)}_x(X_1) = n-2m$.

We like to note that the direction X_1 is not preferred to any other tangential direction from T_xM^m. Consequently, the focus planes $\phi^{(1)}_x(X_k)$ for m different linear independent tangential directions X_k, $k = 1,..,m$ (which determine T_xM^m), have (assuming that $m_1 = \dim N^{(1)}_x = \frac{1}{2}m(m+1)$) $(n-m-m_1)$-dimensional intersection $\bigcap_{k=1}^{m} \phi^{(1)}_x(X_k)$. It consists of the points y, displacements of which belong to the normal plane $[x, T_x^{\perp}M^m]$ by any choice of $X \in T_xM^m$. It means that $\bigcap_{k=1}^{m} \phi^{(1)}_x(X_k)$ coincides with the plane generatrix $S^{(1)}_x$ of the polar submanifold $W^{(1)}$.

10

Now, we find out the focus points of order 2. Let us take a point y from $S^{(1)}_x$, determined by the next system

$$\delta^j_k - h_{kj}\cdot(\vec{y} - \vec{x}) = 0, \quad k,j = 1,\ldots,m \qquad (4.1)$$

Using the differentiation and (3.8) we obtain

$$dh_{kj}\cdot(\vec{y} - \vec{x}) = 0,$$

where applying (2.7) gives us

$$h_{lj}\cdot(\vec{y} - \vec{x})\omega^l_k + h_{kl}\cdot(\vec{y} - \vec{x})\omega^l_j + h_{kjl}\cdot(\vec{y} - \vec{x})\omega^l = 0.$$

From here by $\omega^1 = ds_1$, $\omega^j = 0$, $j \neq 1$ and due to (4.1) we get a system

$$h_{kj1}\cdot(\vec{y} - \vec{x}) = 0, \quad k,j = 1,\ldots,m. \qquad (4.2)$$

Therefore, the focus points fill up the plane $\phi^{(2)}_x(X_1, h_{1k})$, which $\dim \phi^{(2)}_x(X_1, h_{1k}) = n-m-m_1-\frac{1}{m}m_2$. Now, if $n \geq m+m_1+m_2$, analogically to the stage preceding we can deduce that the intersection $\bigcap_{l=1}^{m} \phi^{(2)}_x(X_l, h_{lk})$ coincides with the plane generatrix $S^{(2)}_x$ of the polar submanifold $W^{(2)}$. Indeed, the plane $\bigcap_{l=1}^{m} \phi^{(2)}_x(X_l, h_{lk})$ consists of points y, displacements of which $d^2\vec{y}$ of order 2 belong to the normal plane $[x, T^{\perp}_x M^m]$ by any $X \in T_x M^m$, at that $\dim S^{(2)}_x = n-m-m_1-m_2$.

Next, we will find the focus points of order 3 by $d\vec{x} \| X_1$. For this let us take the plane $S^{(2)}_x$, which is determined by the system (4.1) and

$$h_{k_1k_2l}\cdot(\vec{y} - \vec{x}) = 0, \quad k_1,k_2,l = 1,\ldots,m \qquad (4.3)$$

Using again the differentiation, the conditions (3.9), Bartels-Frenet' formulas (2.8) and the equations (4.3) we obtain

$$[h_{k_1k_2l1}\cdot(\vec{y} - \vec{x}) + h_{k_1k_2l}\cdot(-X_1)]\omega^1 +$$

$$+ \sum_{j\neq 1}[h_{k_1k_2lj}\cdot(\vec{y} - \vec{x}) + h_{k_1k_2l}\cdot(-X_j)]\omega^j = 0.$$

Therefore, along the line $\omega^1 = ds_1$, $\omega^j = 0$, $j \neq 1$ the focus points of order 3, fill up the $(n-m-m_1-m_2-\frac{1}{m}m_3)$-dimensional plane $\phi^{(3)}_{x}(X_1, h_{k1}, h_{k_1k_2})$, determined by (4.1), (4.3) and

$$\partial_1^{(3-2)}[h_{k_1k_2l}\cdot(\vec{y} - \vec{x})] = 0,$$

where through the $\partial_1^{(3-2)}[h_{k_1k_2l}\cdot(\vec{y} - \vec{x})]$ the coefficient ahead ω^l is denoted. Consequently, if $n \geq m+m_1+m_2+m_3$, there exists the intersection $\bigcap\limits_{k=1}^{m}\phi^{(3)}_{x}(X_1,h_{1k},h_{1k_1k_2}) = S^{(3)}_{x}$, where $S^{(3)}_{x}$ as the plane generatrix of the polar submanifold $W^{(3)}$ is determined by (4.1), (4.3) and

$$\partial_k^{(3-2)}[h_{k_1k_2l}\cdot(\vec{y} - \vec{x})] = 0,\ k = 1,\dots,m.$$

In general, we assume that the plane generatrix $S^{(\lambda)}_{x}$ of the polar submanifold $W^{(\lambda)}$ is determined by the next system

$$\begin{aligned}
&\delta^{k_2}_{k_1} - h_{k_1k_2}\cdot(\vec{y} - \vec{x}) = 0,\\
&h_{k_1k_2k_3}\cdot(\vec{y} - \vec{x}) = 0,\\
&\partial_k^{(3-2)}[h_{k_1k_2k_3}\cdot(\vec{y} - \vec{x})] = 0, \qquad\qquad (4.4)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\partial_k^{(\lambda-2)}[h_{k_1k_2k_3}\cdot(\vec{y} - \vec{x})] = 0,\ k = 1,\dots,m
\end{aligned}$$

where on the besis of well-known formula

$$(uv)^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}u^{(n-\nu)}v^{(\nu)}$$

for all values of λ is denoted:

$$\partial_k^{(\lambda-2)}[h_{k_1k_2k_3}\cdot(\vec{y} - \vec{x})] =$$

$$= h_{k_1\dots k_{\lambda+1}}\cdot(\vec{y} - \vec{x}) - \binom{\lambda-2}{1}h_{k_1\dots k_\lambda}\cdot X_l - \binom{\lambda-2}{2}h_{k_1\dots k_{\lambda-1}}\cdot h_{l_1l_2} -$$

$$-\dots-\binom{\lambda-2}{\lambda-3}h_{k_1\dots k_4}\cdot h_{l_1\dots l_{\lambda-3}} - h_{k_1k_2k_3}\cdot h_{l_1\dots l_{\lambda-2}}.$$

Now, if we want to find the focus points of order $\lambda+1$ for a line M^1 in M^m, we have to use once more the differentiation, the conditions (3.1), Bartels-Frenet' formulas (2.9) and the equations (4.4). As the result we get

$$\sum_{k=1}^{m} \sigma_k^{(\lambda-1)}[h_{\lambda_1\lambda_2 k_n}\cdot(\bar{y}-\bar{x})]\omega^k = 0.$$

So along the line $\omega^1 = ds_1$, $\omega^j = 0$, $j\neq 1$, the focus points of order $\lambda+1$ fill up the $(n-m-m_1-\ldots-\frac{1}{m}m_{\lambda+1})$-dimensional plane $\phi_x^{(\lambda+1)}(X_1,h_{k1},\ldots,h_{k_1\ldots k_\lambda 1})$, determined by (4.4) and

$$\sigma_1^{(\lambda-1)}[h_{\lambda_1\lambda_2 k_n}\cdot(\bar{y}-\bar{x})] = 0.$$

Thus, if $n \geq m+m_1+\ldots+m_{\lambda+1}$, there exists the intersection

$$\bigcap_{k=1}^{m} \phi_x^{(\lambda+1)}(X_1,h_{1k},\ldots,h_{1k_1\ldots k_\lambda}) = S_x^{(\lambda+1)},$$

which is the $(n-m-m_1-\ldots-m_{\lambda+1})$-dimensional plane generatrix of the polar submanifold $\Psi^{(\lambda+1)}$, because all the points y from $S_x^{(\lambda+1)}$ are satisfying the next condition: $d^{\lambda+1}\bar{y} \in [x, T_x^{\perp}M^m]$ by any $X \in T_xM^m$. Consequently, the theorem is proved by induction.

References

1. Kobayashi S.,Nomizu K. Foundations of differential geometry V1. N.Y.London. Interscience Publischers. 1963.
2. Shouten J.A.,Struik D.J. Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie. B2. Berlin. Springer. 1938.
3. Акивис М.А. Фокальные образы поверхности ранга r // Изв. вузов. -Матем. -1957. -№1. -С.9- 19.
4. Вировере Т.М. О фокусно-эволютной структуре картанова подмногообразия M^m общего типа с плоской нормальной связностью в E^n // Деп. Эст. НИИНТИ 14.08.87 - №II Эс87 РЖ Мат 1987. 12А693Деп.
5. Вировере Т.М. О фокусных и эволютных плоскостях высших порядков нормально плоского картанова подмногообразия. Тезисы 9-ой Всес. геом. конф. -Кишинев -1988. -С.67.

6. Вировере Т. Об эволютах высшего порядка нормально плоского картанова подмногообразия M^m в E^n // Изв. АН Эст. -1989. -38. -№3. -С.212-216.
7. Лумисте Ю.Г. Однородные расслоения со связностью и их погружения // Труды геом. сем. -1966 -т.I. -С.191-237.
8. Милнор Дж. Теория Морса -1965.
9. Муллари Р.Р. К теории многомерных поверхностей евклидова пространства. // Труды выч. центра. -Вып.16. -Тарту.-1969.

Поступило
12 V 1991

ФОКУСНЫЕ И ПОЛЯРНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ ПОДМНОГООБРАЗИЯ M^m В E^n

Т.Вировере

Резюме

В евклидовом пространстве E^n изучается фокусно-эволютная структура высшего порядка подмногообразия M^m, у которого каждое соприкасательное пространство $O_x^{(\lambda)} M^m$ (в точке $x \in M^m$) высшего порядка $\lambda \geqslant 1$ имеет максимально возможную размерность $m\left(1+\frac{1}{2}(m+1)+\ldots+\frac{1}{\lambda!}(m+1)\ldots(m+\lambda)\right)$. Для таких M^m обобщается понятие фокусной точки (первого порядка) и устанавливается связь между фокусными подмногообразиями и полярными подмногообразиями (в [9] они называются **эволютами**) одного и того же высшего порядка. Именно, доказывается (Теорема), что для рассматриваемых подмногообразий фокусные точки над всеми линиями $M^1 \subset M^m$, которые имеют в точке $x \in M^m$ общее соприкасательное пространство $O_x^{(\lambda)} M^1$ порядка λ , заполняют, при **предположении**, что все $O_x^{(\lambda)} M^1, \lambda = 0, \ldots, p$, принадлежат в линейную оболочку

$$\operatorname{span}\left\{X, h(X,Y), \bar{\nabla}_{Z_1} h(X,Y), \ldots, \bar{\nabla}_{Z_{p-2}} \ldots \bar{\nabla}_{Z_1} h(X,Y)\right\}$$

(где X - касательное к M^1 и $Y, Z_1, \ldots, Z_{p-2}$ - произвольные касательные направления из $T_x M^m$) , одну и ту же последовательность (I.2) фокусных плоскостей. При этом плоская образующая $S_x^{(\lambda)}$ полярного подмногообразия является пересечением всех фокусных плоскостей $\Phi_x^{(\lambda)}(O_x^{(\lambda-1)} M^1)$ того же порядка λ всех линий $M^1 \subset M^m$, проходящих через точку $x \in M^m$.

TÜ Toimetised,
930 (1991), 78-96

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
1991, 930, 78-96.

LIGHTING OF SURFACES, CUSPOID SINGULARITIES AND VIETA MAPS

M.Rahula
Algebra ja geomeetria kateeder

Lighting of surfaces along trajectories of a vector field and cuspoid singularities. Shadows and their singularities on a screen, description by invariants of differential equations. Applications in polynomials.

§1. Strata on a surface

1.1. Let there be given a vector field X without singularities in n-space $\mathbb{R}^n$ and let $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a smooth function. The function φ can be dragged* by the flow $a_t = \exp tX$. The dragging is described by the composition $\varphi \circ a_t$ and Maclaurin's expansion

$$\varphi \circ a_t = \varphi + \varphi' t + \varphi'' t^2/2 + \dots + \varphi^{(k)} t^k/k! + \dots ,$$

where $\varphi' = (\varphi \circ a_t)'_{t=0}$ is the derivative of φ along X, usually designated $X\varphi$ and $\varphi'', \varphi''', \dots$ are the higher-order derivatives $X^2\varphi, X^3\varphi, \dots$ The function φ is called an invariant of the field X, if $X\varphi \equiv 0$, i.e. φ is constant on the trajectories of X.

Independent invariants $I^2, I^3, \dots, I^n$ of X engender a submersion $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, or a projection of the space $\mathbb{R}^n$ on the screen $\mathbb{R}^{n-1}$.

The set induced in $\mathbb{R}^n$ by the equations $\varphi' = \dots = \varphi^{(k)} = 0$ is called the stratum A_k. Thereby a stratification $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_k$ arises, the geometrical sense of which is the following. Let us imagine level surfaces $\varphi = const$ lighted by rays running along trajectories of X. Then the set A_1 consists of the points where the rays touch the surfaces

* This term originates with J.A.Schouten

$\varphi = const$. Otherwise, the stratum A_1 determines the shadow boundary on every surface. In the points of A_1 the rays touch the stratum A_1. In the points of A_3 the rays touch the stratum A_2, etc. So every stratum A_k, $k>1$, determines the shadow boundary on the previous stratum.

The stratification arises on every surface separately and in the space $\mathbb{R}^n$ as a whole. This is clear when we bear in mind both the singularities of the map of every surface $\varphi = const$ onto the screen $\mathbb{R}^{n-1}$ (induced by submersion I) and the singularities of the map $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ realized by the functions $I^1, I^2, \dots, I^n$, where $I^1 = \varphi$ is the function given above and $I^2, \dots, I^n$ are the invariants of X mentioned previously.

The derivatives $\varphi', \varphi'', \dots$ can be identified with the Jacobians $|I^1 I^2 \dots I^n|$, $||I^1 I^2 \dots I^n|\ I^2 \dots I^n|$, ... Indeed, if we take $I^2, \dots, I^n$ as the coordinate-functions $u^2, \dots, u^n$ and suppose $X = \partial/\partial u^1$ then the Jacobian

$$|I^1 I^2 \dots I^n| = \begin{vmatrix} \partial\varphi/\partial u^1 & \partial\varphi/\partial u^2 & \dots & \partial\varphi/\partial u^n \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

coincides with the derivative φ'.

The strata A_k apply to the singularities of the cuspoid type. The first ones have special names: A_1 - fold, A_2 - cusp, A_3 - swallowtail, A_4 - butterfly, A_5 - wigwam, A_6 - star [2].

1.2. Fig. 1 shows how in the case of the map

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : M \mapsto f(M)$$

a fold A_1 with cusp point A_2 may arise.

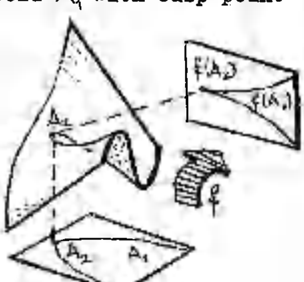

Fig.1

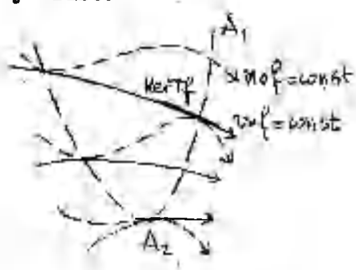

Fig.2

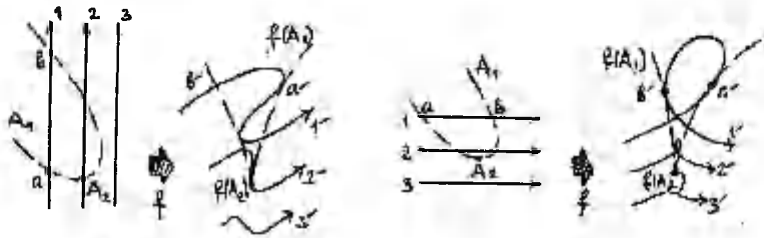

Fig. 3

Let there be given two planes: an xy-plane and a uv-plane, and let the map f be defined by the functions (φ,ψ) on the xy-plane, f - associated with the functions (u,v), i.e.

$$\varphi = u\circ f \ , \quad \psi = v\circ f \ .$$

Let us call the curves on which the functions φ and ψ are constant (level curves) φ and ψ lines. Let φ_1, φ_2 and ψ_1, ψ_2 be partial derivatives of the functions φ and ψ with respect to x, y respectively. The vector field $X(\psi_2, -\psi_1)$ having the invariant ψ lights the φ lines. Let

$$\varphi' = |\varphi\psi| \ , \qquad \varphi'' = ||\varphi\psi|\psi| \ .$$

The equation $\varphi' = 0$ determines a fold A_1 on xy-plane. The equation $\varphi'' = 0$ determines a cusp point A_2 (or points) on the fold A_1, see fig. 2.

The tangent map Tf defined at any point M by the Jacobi matrix $\begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{bmatrix}$ maps the vector $Y(\xi,\eta)$ at the point M into the vector $TfY(Y\varphi, Y\psi)$ at the point $f(M)$. In particular, the vector $t = (|\varphi\psi|_2, -|\varphi\psi|_1)$ tangent to the $|\varphi\psi|$ line is mapped into the vector

$$T = Tf\,t = \left(|\varphi|\varphi\psi||, |\psi|\varphi\psi||\right) .$$

At every point of A_1 the map Tf has the kernel defined by the field X. At the points of $f(A_1)$, supposing $\varphi_1\psi_1 \neq 0$, the components of the vector T can be presented as the following:

$$|\varphi|\varphi\psi|| = \frac{\psi_1}{\varphi_1}\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right)^{3/2}\lambda \ , \quad |\psi|\varphi\psi|| = \frac{\varphi_1}{\psi_1}\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)^{3/2}\lambda \ ,$$

where

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_1 \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{vmatrix}}{(\varphi_1^2+\varphi_2^2)^{3/2}} - \frac{\begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_1 \\ \psi_{12} & \psi_{22} & \psi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 & 0 \end{vmatrix}}{(\psi_1^2+\psi_2^2)^{3/2}}$$

At the cusp points A_2 the value λ becomes zero and the points $f(A_2)$ on the curve $f(A_1)$ are singular. At an ordinary point the φ and ψ lines have simple intersection, at the points A_1 - a 2-point contact, and at the points A_2 - a 3-point contact, i.e. equality of curvatures: $\lambda = 0$. It is remarkable that the curvature is a metric notion while the equality of curvatures of two tangent curves (it doesn't matter in what coordinate systems they have been calculated) is a differential topological notion.

Fig. 3 shows how the x and y lines can be mapped onto the uv-plane.

§2. <u>The jet space</u>

2.1. Let us consider the jet space $J^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ with coordinates $(t, u, u', u'', \dots)$ and basic variable t. Any smooth function $u(t)$ engenders the jet prolongation in the shape of a curve $(t, u(t), u'(t), \dots)$, where $u'(t), \dots$ are the usual derivatives of $u(t)$ with respect to the variable t. The function $f: J^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ stands for some differential operator and $f = 0$ can be observed as an ordinary differential equation.

In the jet space $J^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ the vector field

$$Y = \partial/\partial t + u' \,\partial/\partial u + u''\, \partial/\partial u' + \dots$$

plays an important role and it is called a complete differential operator. In the following formulas primes mean derivatives with respect to the field Y : $f' = Yf$, $f'' = Y^2 f, \dots$ Using the designations

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ u'_t \\ u''_t \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots \end{pmatrix}, \quad e^{Ct} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots \\ 0 & 1 & t & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

we notice, on account of $U' = CU$, that $U_t = e^{Ct}U$. When we supplement the coordinate t to the last formula we determine the trajectories of the field Y. The functions

$U_{-t} = e^{-ct}U$ are the invariants of Y.

The system

$$f = f' = \ldots = f^{(k)} = 0$$

is called the k-th prolongation of the differential equation $f=0$. When lighting the surface $f=0$ along the trajectories of the field Y, a stratification on $f=0$ arises, the above equations determining the stratum A_k. The stratum which is determined by the infinite system $f = f' = f'' = \ldots = 0$ $(k=\infty)$ is called a complete stratum of the equation $f=0$ and is marked by the symbol A_∞.

The function $u(t)$, all prolongations of which belong to the complete stratum A_∞, is the solution of the differential equation $f=0$. The functions that are constant on all solutions of the equation $f=0$ are called its invariants.

2.2. The simplest differential equation is $u^{(n+1)}=0$. Its solutions are the polynomials of degree n

$$u_t = u + u't + u''t^2/2 + \ldots + u^{(n)}t^n/n!$$

The complete stratum A_∞ is the $uu'\ldots u^{(n)}$- space. For independent invariants of the equation (in addition to the functions $u^{(n+1)}, u^{(n+2)}, \ldots$ constant on A_∞, more precisely equal to zero) we have the function $u^{(n)}$ and the further $n-1$ functions, which can be obtained from the functions $u_t, u'_t, \ldots, u_t^{(n-2)}$ as a result of the substitution $t = -u^{(n-1)}/u^{(n)}$.

In the case $n=2$ the discriminant

$$\delta = u - (u')^2/2u''$$

turns out to be invariant like the above. In the case $n=3$ we have the two invariants

$$D_1 = u - u'u''/u''' + (u'')^3/3(u''')^2 , \qquad D_2 = u' - (u'')^2/2u''' .$$

The known discriminant of a cubic polynomial

$$D = (2D_2/u''')^3 + (3D_1/u''')^2$$

is also invariant but it is a function of u''', D_1, D_2. Let us note that the equation $D=0$ determines a certain cone in the $uu'u''u'''$-space. The cone cuts out a certain developable surface with the edge $A_t = (t^3/6, t^2/2, t, 1)$ on the plane $u'''=1$. This is easy to understand when we take the tangent $A_t + sA'_t = (t^3/6 + st^2/2, t^2/2 + st, t+s, 1)$ on which $D_1 = s^3/3$, $D_2 = -s^2/2$, $D=0$. Unlike the D_1 and D_2, the invariant D possesses the following property we need later:

$$u = u' = 0 \Rightarrow D = 0.$$

2.3. For the differential equation $u'' + pu' + qu = 0$ with the real coefficients p, q the complete stratum A_∞ is determined by the matrix equation $U'' + pU' + qU = 0$, where $U' = CU$, $U'' = C^2U$. It is a 2-dimensional plane extended on the vectors U, U'. The trajectories of the field Y belonging to A_∞, i.e. the solutions of the equation, can be represented on the basis $U, U^* = \frac{p}{2}U + U'$ in the next mode. Let $a = -p/2$, $d = p^2 - 4q$, $b = |d|^{1/2}$. Corresponding to the sign of the discriminant d of the characteristic equation $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ we have three cases:

1) $d > 0$, the roots $\lambda_{1,2} = a \pm b$ are real and distinct, the trajectories are

$$U_t = e^{at}\left(U \operatorname{ch} bt + \frac{1}{b} U^* \operatorname{sh} bt\right);$$

2) $d < 0$, the roots $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ are conjugate complex, the trajectories are

$$U_t = e^{at}\left(U \cos bt + \frac{1}{b} U^* \sin bt\right);$$

3) $d = 0$, there is a double root $\lambda_1 = \lambda_2 = a$, the trajectories are

$$U_t = e^{at}(U + U^* t).$$

The 3rd case is the limiting one between the cases 1 and 2 when $b \to 0$.

In the case of the real roots λ_1, λ_2 we have

$$(u' - \lambda_1 u)' = \lambda_2 (u' - \lambda_1 u), \qquad u'_t - \lambda_1 u_t = (u' - \lambda_1 u)e^{\lambda_2 t},$$
$$(u' - \lambda_2 u)' = \lambda_1 (u' - \lambda_2 u), \qquad u'_t - \lambda_2 u_t = (u' - \lambda_2 u)e^{\lambda_1 t}.$$

It follows from here that the function

$$(u' - \lambda_2 u)^{\lambda_2} (u' - \lambda_1 u)^{-\lambda_2}$$

is an invariant of the equation.

If $p = 0$ then the function $(u')^2 + qu^2$ is an invariant of the given equation.

2.4. For the differential equation $u''' + pu'' + qu' = 0$ with real coefficients p, q an invariant $u'' + pu' + qu$ is added.

When the roots λ_1, λ_2 are real the function

$$(u'' - pu' + qu)^{\lambda_2 - \lambda_1} - (u'' - \lambda_2 u')^{\lambda_2} (u'' - \lambda_1 u')^{-\lambda_1}$$

is an invariant of the equation.

If $p = 0$ we have an invariant

$$(u'' - qu)^2 - (u'')^2 - q(u')^2.$$

Note that all these invariants will vanish in consequence of $u = u' = 0$.

2.5. In the case of the differential equation

$$u''' + pu'' + qu' + ru = 0$$

with real coefficients p, q, r we argue as follows. Let us consider only the case of real roots $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ of the characteristic equation. It is convenient to denote

$$A = u'' - (\lambda_2+\lambda_3)u' + \lambda_2\lambda_3 u, \; B = u'' - (\lambda_3+\lambda_1)u' + \lambda_3\lambda_1 u, \; C = u'' - (\lambda_1+\lambda_2)u' + \lambda_1\lambda_2 u.$$

Taking into account the Vieta theorem, we have

$$A' = \lambda_1 A, \quad B' = \lambda_2 B, \quad C' = \lambda_3 C,$$

from which

$$A_t = Ae^{\lambda_1 t}, \quad B_t = Be^{\lambda_2 t}, \quad C_t = Ce^{\lambda_3 t}.$$

The ratios

$$A^{\lambda_2\lambda_3} : B^{\lambda_3\lambda_1} : C^{\lambda_1\lambda_2}$$

do not depend on t and give two independent invariants. The invariant

$$(A^{\lambda_2}/B^{\lambda_1})^{\lambda_1\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2)} - (B^{\lambda_3}/C^{\lambda_2})^{\lambda_1\lambda_3(\lambda_2-\lambda_1)}$$

will vanish in consequence of $u = u' = 0$.

2.6. We have a more general situation in the jet space $J^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ with coordinates $(t^i, u, u_i, u_{ij}, \ldots)$, see [1]. Here p complete differential operators $\mathcal{D}_i$ form an involutive distribution. In this context we can speak about the action of the additive group $\mathbb{R}^p$ and its p-dimensional orbits, specifically about the lighting of surfaces (differential equations) by the p-dimensional rays.

Thus for the system $u_{ijk} = 0$, $i,j,k = 1,\ldots,p$, the general solution can be represented as a quadratic polynomial

$$u + u_i t^i + \frac{1}{2} u_{ij} t^i t^j.$$

There is only one essential invariant, the analogue of the invariant δ from 2.2:

$$\begin{vmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} & u_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1} & \ldots & u_{nn} & u_n \\ u_1 & \ldots & u_n & 2u \end{vmatrix}.$$

Let us here present to the reader an unsolved problem. Find, in the case of cubic polynomial

$$u + u_i t^i + \frac{1}{2} u_{ij} t^i t^j + \frac{1}{6} u_{ijk} t^i t^j t^k,$$

the analogues of the invariants D_1, D_2, D of section 2.2.

Generalize this result for any polynomial of degree n .

§3. Shadows

3.1. Let us return to the space $\mathbb{R}^n$ in which the surface $\varphi=0$ is lighted by the vector field X . Denote

$$u=\varphi,\ u'=X\varphi,\ u''=X^2\varphi,\ldots$$

We obtain the system which defines the map of the space $\mathbb{R}^n$ into the fibre of the jet bundle $\mathbb{R}^\infty$ with the coordinates $u, u', \ldots$ Let us speak about the map $\Phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^\infty$ The tangent map $T\Phi$ maps the vector field X from $\mathbb{R}^n$ into the vector field $Y-\frac{\partial}{\partial t}$ in the jet space. Indeed, because $u\circ\Phi=\varphi$ there will be $(Yu)\circ\Phi=X(u\circ\Phi)$, $(Yu')\circ\Phi=X(u'\circ\Phi)$, etc. It signifies that any relation between the function φ and its derivatives $X\varphi, X^2\varphi,\ldots$ induces a differential equation, the invariants of which in composition with the map Φ define the corresponding invariants of the field X in $\mathbb{R}^n$. Suppose we find p invariants of the differential equation. Simultaneously with the map $J:\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}^p$ we then have the composition $J\circ\Phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ and as a result the invariants of the field X which can be expressed by means of the basic invariants $I^2,\ldots,I^n$, i.e. there is a map $\Psi:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^p$ that makes the diagram

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R}^\infty \\
{\scriptstyle I}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J} \\
\mathbb{R}^{n-1} & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{R}^p
\end{array}$$

commutative. This diagram is used below to define the shadows cast by the lighted surface on the screen $\mathbb{R}^{n-1}$.

3.2. For the first example let the vector field $X(1,0,k)$, $k\in\mathbb{R}$, in the xyz-space light the one-sheet hyperboloid $\varphi=0$:

$$\varphi=\tfrac{1}{2}(x^2+y^2-z^2-1),\ X\varphi=x-kz,\ X^2\varphi=1-k^2,\ X^3\varphi=0.$$

In the jet space we have the differential equation $u'''=0$ with the invariant δ, or $J=2uu''-(u')^2$, possessing the property $u=u'=0\Rightarrow J=0$. It signifies that the equation $J\circ\Phi=0$ defines a cylinder in $\mathbb{R}^3$ that touches the surface $\varphi=0$ and projects the stratum A_1, the fold line, onto the screen. Let us express $J\circ\Phi$ by means of the invariants $U=y$, $V=kx-z$ of the field X (see the arrow $\Downarrow$ on the diagram):

$$J \circ \Phi = -(kx - z)^2 + (1-k^2)(y^2-1) = -V^2 + (1-k^2)(U^2-1)$$

It turns out: $\varphi = X\varphi = 0 \Rightarrow U^2 - V^2/_{1-k^2} = 1$. On the UV-plane, i.e. on the screen, the shadow boundary appears in the shape of an ellipse, $|k| > 1$, or hyperbola, $|k| < 1$ In the case $|k| = 1$ · bifurcation takes place: when $|k|$ passes through the value 1 the ellipse is folded into the segment $|U| \leq 1$ of the U-axis and the rays $|U| \geq 1$ open into the branches of the hyperbola, see fig.4.

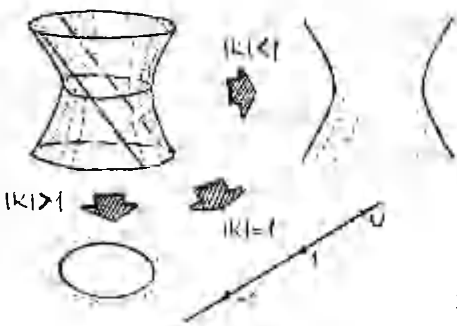

Fig. 4.

3.3. Now let the cubic surfaces "monkey-saddle" and "chair" be lighted by the same vector field X with the invariants U, V ; see fig. 5:

$$\varphi = \tfrac{1}{6}(x^3 \mp 3xy^2 - 6z),\ X\varphi = \tfrac{1}{2}(x^2 \mp y^2 - 2u),\ X^2\varphi = x,\ X^3\varphi = 1 .$$

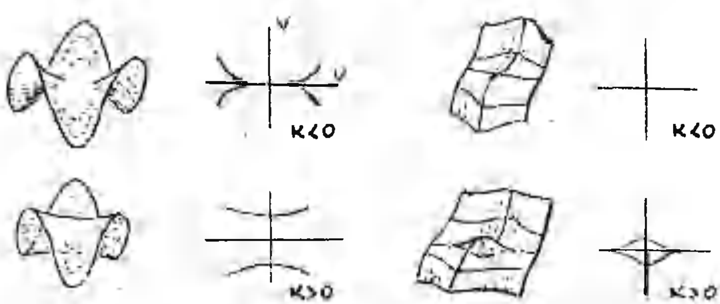

Fig. 5.

In the jet space we have $u''' = 1$ and the invariants D_1, D_2, D_3

A calculation gives

$$D_1 = V, \quad D_2 = \mp \frac{U^2}{2} - k, \quad D = 9V^2 - (2k \pm U^2)^3.$$

The shadow is the 6^{th} order curve $9V^2 = (2k \pm U^2)^3$ on the UV-plane. Simultaneously it is the image of the foldline. The cusp points A_2 can be seen when $D_2 = 0$ or $D_1 = 0$. On the screen we can also see two spinodes. At first when lighting the "monkey-saddle" if $k < 0$ and secondly when lighting the "chair" if $k > 0$. When lighting the "monkey-saddle" if $k > 0$ the cusp A_2 does not exist. When lighting the "chair" if $k < 0$ the fold A_1 also does not appear.

3.4. When lighting the hyperquadric in $\mathbb{R}^4$ the shadow on the 3-dimensional screen stands for the 2^{nd}-order surface.

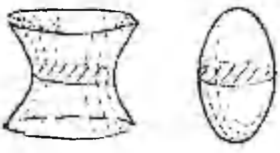

Fig. 6.

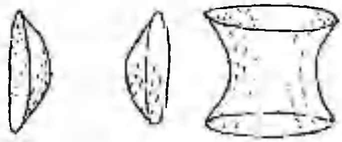

Fig. 7.

Given in $\mathbb{R}^4$ a vector field $X(1,0,0,k)$ with the invariants $U = y, V = z, W = kx - t$, where x, y, z, t are the coordinates in $\mathbb{R}^4$. Let the function φ be defined and the derivatives calculated as follows:

$$\varphi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 \pm z^2 - t^2 - 1), \quad X\varphi = x - kt, \quad X^2\varphi = 1 - k^2,$$

and after that $J = (k^2-1)(y^2 \pm z^2 - 1) + (kx - t)^2$. The shadow appears in the UVW-space (on the screen) as a surface

$$U^2 \pm V^2 + \frac{W^2}{k^2-1} = 1.$$

In the case of the upper sign "+" we see a one-sheet hyperboloid if $|k| < 1$ and an ellipsoid if $|k| > 1$, see fig. 6. When $|k|$ passes through the value 1 the one-sheet hyperboloid folds on the exterior domain of the circle $U^2 + V^2 = 1$ and at the same time the interior of this circle expands into the ellipsoid (bifurcation). In the case of the lower sign "-" we see a two-sheet hyperboloid if $|k| < 1$ and a one-sheet hyperboloid if $|k| > 1$, see fig. 7. When $|k|$ passes 1 the two-sheet hyperboloid folds on the interior of the branches of the hyperbola $U^2 - V^2 = 1$ and the intermediate domain between the branches expands into the one-sheet hyperboloid.

3.5. When lighting the same quadrics in $\mathbb{R}^4$ by 2-dimensional rays we see the shadows on a 2-dimensional screen in the shape of conics. Let the lighting along the 2-dimesional planes be determined by the vector fields $X_1(1,0,k,0), X_2(1,0,0,\ell)$, $k,\ell \in \mathbb{R}$. The invariants are $U=y$, $V=k\ell x-\ell z-kt$. Then

$$\varphi_1 = x \pm kz,\ \varphi_2 = x-\ell t,\ \varphi_{11}=1\pm k^2,\ \varphi_{12}=1,\ \varphi_{22}=1-\ell^2.$$

Let us use the invariant from sect. 2.6. We obtain the equation

$$A(U^2-1) \mp V^2 = 0,$$

where $A=(1\pm k^2)(1-\ell^2)-1$, that defines the shadow on the UV-plane - an ellipse or a hyperbola . When $A=0$ we have bifurcation.

Lighting of higher-order surfaces by multi-dimensional rays could be examined by means of invariants in section 2.6 but they have not yet been discovered.

3.6. In the case of central projection of the quadrics we have to deal with the differential equation

$$u''' - 3u'' + 2u' = 0.$$

The lighting acts along the rays coming from the some point.

For example, take the vector field $X(x-a, y-b)$ with the trajectories issuing from the point (a,b) and with the invariant $I = y-b/x-a$. When this field lights the quadric $\varphi=0$, where

$$\varphi = \frac{1}{2}\{x\ y\ 1\} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix},$$

it is easy to see:

$$X\varphi = \{x\ y\ 1\} \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$X^2\varphi = X\varphi + (x-a\ \ y-b\ \ 0) \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$X^3\varphi = X^2\varphi + 2(X^2\varphi - X\varphi).$$

The last relationsship reduces to the differential equation $u'''-3u''+2u'=0$. The characteristic equation has two roots

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. The invariant $u'' - 3u' + 2u -$ $- (u'' - 2u')^2 (u'' - u')^{-1}$ defines the fold $(u'' - u')(u'' - 3u' + 2u) =$ $= (u'' - 2u')^2$, or

$$2u(u'' - u') - (u')^2 = 0 .$$

So when $\varphi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - r^2)$ the image of the fold is defined by the quadratic equation

$$(a^2 - r^2) I^2 - 2ab\, I + b^2 - r^2 = 0 ,$$

this gives a pair of points on the I-axis.

When lighting cubic surfaces we obtain a differential equation whose characteristic equation possesses the roots 1,2,3; see section 2.5.

3.7. The lighting of surfaces can also take place along curved rays. So when lighting the sphere $\varphi = 0$, where $\varphi = \frac{1}{2}[(x-a)^2 + y^2 + z^2 - r^2]$, along the trajectories of the vector field $X(-y, x, 0)$, we obtain the differential equation $u''' + u' = 0$ which allows the desired invariant $(u'')^2 + (u')^2 - (u'' + u)^2$, see section 2.4. The trajectories of the field X tangent to the sphere $\varphi = 0$ compose the torus

$$(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)(z^2 - r^2 - a^2) + (z^2 - r^2 + a^2)^2 = 0 .$$

We get this equation as a result of the corresponding substitution.

§4. Vieta maps

4.1. In this section we apply the diagram in section 3.1 in order to study Vieta maps.

For the trinomial $u + u't + t^2/2$ the Vieta theorem affirms that the coefficients (u, u') can be expressed in terms of the roots (t_1, t_2) by the formulas

$$u = \frac{t_1 t_2}{2} , \quad u' = -\frac{t_1 + t_2}{2}$$

If the values (t_1, t_2) are real these formulas define a quadratic map Φ of the $t_1 t_2$-plane into the uu'-plane. In this context the $t_1 t_2$-plane folds in two along the line $t_1 = t_2$ and the half-plane obtained in this way covers the domain on the uu'-plane below the parabola $\delta = 0$, where $\delta = (u')^2 - 2u$. This follows from the inequality $\delta \circ \Phi \geqslant 0$.

If the values (t_1, t_2) are conjugate complex numbers, $t_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, then

$$u = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\ , \quad u' = -\alpha\ .$$

A quadratic map Φ_1 of the $\alpha\beta$-plane into the uu'-plane is defined by these formulas. In this context the $\alpha\beta$-plane folds in two along the α-axis and the half-plane obtained in this way covers the domain on the uu'-plane above the parabola $\delta = 0$, because $\delta \circ \Phi_1 = -\beta^2 \leq 0$. It is shown on the fig. 8 how concurrently with the maps Φ and Φ_1 the t_1t_2- and $\alpha\beta$-planes bend into hyperbolic and elliptic paraboloids, in order to cover thereafter the domains of the -plane mentioned above.

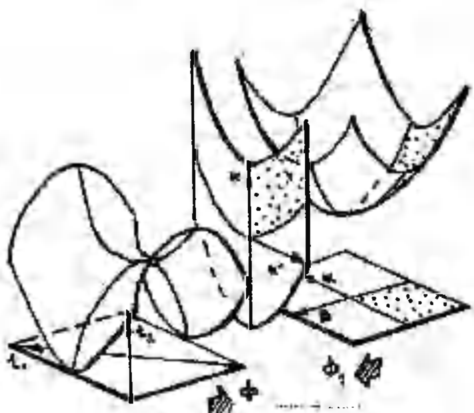

Fig.8

On the t_1t_2-plane we have the vector field $X(-1,-1)$ with the invariant $t_1 - t_2$, Φ-associated with the vector field $Y(u',1)$ on the uu'-plane with the invariant δ. Therefore $\delta \circ \Phi$ can be expressed in terms of $t_1 - t_2$:

$$\delta \circ \Phi = \frac{1}{4}(t_1 - t_2)^2 .$$

On the $\alpha\beta$-plane there is the vector field $X_1(-1,0)$ with invariant β, Φ_1 - associated with the same vector field Y. Therefore $\delta \circ \Phi_1$ is expressed in terms of β:

$$\delta \circ \Phi_1 = -\beta^2 .$$

Thus in both cases there are the maps Ψ and Ψ_1 which complete the diagram of section 3.1:

$$\begin{tikzcd} t_1t_2 \arrow[r, mapsto, "\Phi"] \arrow[d, mapsto] & uu' \arrow[d, mapsto] & \alpha\beta \arrow[l, mapsto, "\Phi_1"'] \arrow[d, mapsto] \\ t_1 - t_2 \arrow[r, mapsto, "\Psi"] & \delta & \beta \arrow[l, "\Psi_1"'] \end{tikzcd}$$

4.2. The cubic quadrinomial

$$u+u't+u''t^2/2+t^3/6$$

provides two Vieta maps

$\Phi: u=-\frac{1}{6}t_1t_2t_3,\ u'=\frac{1}{6}(t_2t_3+t_3t_1+t_1t_2),\ u''=-\frac{1}{3}(t_1+t_2+t_3);$

$\Phi_1: u=-\frac{1}{6}(\alpha^2+\beta^2)\tau,\ u'=\frac{1}{6}(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\tau),\ u''=-\frac{1}{3}(2\alpha+\tau).$

Take another map,

$\mathrm{J}: D_1=u-u'u''+\frac{1}{3}(u'')^3,\ D_2=u'-\frac{1}{2}(u'')^2,\ D=(2D_2)^3+(3D_1)^2.$

In the $uu'u''$-space there is the vector field $Y(u',u'',1)$ with the invariants D_1, D_2, while in the $t_1t_2t_3$-space there is the vector field $X(-1,-1,-1)$ with the invariante

$$\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix},$$

Φ-associated with Y, and in the $\alpha\beta\tau$-space, there is the vector field $X_1(-1,0,-1)$ with the invariants $\alpha-\tau$, β, Φ_1-associated with Y also. The diagram of section 3.1 shows that the compositions $\mathrm{J}\circ\Phi$ and $\mathrm{J}\circ\Phi_1$ can be expressed in terms of the invariants of the fields X and X_1. First let us define the maps (in matrix form):

$$\mathrm{I}: \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&-\sqrt{3}&\sqrt{3}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{I}_1: \quad \begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&\sqrt{3}&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\tau\end{pmatrix}.$$

Immediate computation shows that

$\Psi: D_1=-\frac{4}{3}x(x^2-3y^2),\ D_2=-\frac{4}{2}(x^2+y^2),\ D=-y^2(3x^2-y^2)^2,$

$\Psi_1: D_1=-\frac{4}{3}\xi(\xi^2+3\eta^2),\ D_2=-\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2),\ D=\eta^2(3\xi^2+\eta^2)^2.$

Note: because of $u_t=u+u't+u''t^2/2+t^3/6$ and $u_{t-u''}=$ $=D_1+D_2t+t^3/6$ the values t_1, t_2, t_3 are the roots of u_t and the values $b-c=t_1+u''$, $c-a=t_2+u''$, $a-b=t_3+u''$ are the roots of $u_{t-u''}$. Therefore when taking into account the same Vieta theorem we get

$D_1=-\frac{1}{6}(a-b)(b-c)(c-a),\ D_2=\frac{1}{6}[(b-c)(c-a)+(a-b)(c-a)+(a-b)(b-c)]$

and
$$D=-\frac{27}{4}a^2b^2c^2.$$

Thus in the case of the map Ψ we have
$$b-c=2x,\quad c-a=-x-\sqrt{3}y,\quad a-b=-x+\sqrt{3}y,$$
and in the case of the map Ψ_1
$$b-c=-\frac{2}{3}(\alpha-\tau),\quad c-a=\frac{1}{3}(\alpha-\tau)+\beta i,\quad a-b=\frac{1}{3}(\alpha-\tau)-\beta i.$$
The corresponding expressions for D_1, D_2, D also follow from here.

The maps Ψ and Ψ_1 complete both cages of the following diagram:
$$\begin{tikzcd}
t_1t_2t_3 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "I"'] & uu'u'' \arrow[d, "J"] & \alpha\beta\tau \arrow[l, "\Phi_1"'] \arrow[d, "I_1"] \\
xy \arrow[r, "\Psi"] & D_1D_2 \arrow[d] & \xi\eta \arrow[l, "\Psi_1"'] \\
& D &
\end{tikzcd}$$
The fig. 9 explains the geometrical sense of this.

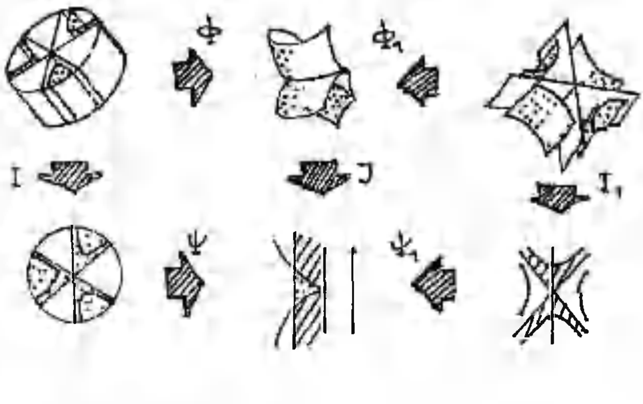

Fig. 9.

In the $uu'u''$-space the cubic parabola $M_t\,(t^3/6,\ t^2/2,\ t)$ serves as the edge of the developable surface $D=0$ see section 2.2. The projections I, J, I_1 project the $t_1t_2t_3$-, $uu'u''$ - and $\alpha\beta\tau$ - spaces along the trajectories of the vector fields X, Y, X_1 onto the xy-, D_1D_2- and $\xi\eta$-planes respectively. The maps Φ, Φ_1 can be described by the maps Ψ, Ψ_1. The map Ψ folds the xy-plane six times and covers in this way the interior domain $D<0$ of the spinode on the D_1D_2-plane. The map Ψ_1 folds the $\xi\eta$-plane in half and covere the exterior domain $D \geqslant 0$ of the spinode. The original of the D_2-line consists of the circle $x^2+y^2=-2D_2$ on the xy-plane - for the part between the branches of the spinode, and the branches of the hyperbola $\xi^2-\eta^2=-2D_2$ - for the exterior parts. Consequently, the maps Φ and Φ_1 fill up the $t_1t_2t_3$ - and $\alpha\beta\tau$ - spaces into the interior and exterior domains with respect to the sheets of the developable surface $D=0$.

4.3. Introduce the matrices

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \quad I=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}, \quad J=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

and $P=xE+yI$, $Q=\xi E+\eta J$, where (x,y) and (ξ,η) had been defined in section 4.2.

It is clear that the equality $D=(2D_2)^3+(3D_1)^2$ comes to one of the identities

$$x^2(x^2-3y^2)^2+y^2(3x^2-y^2)^2=(x^2+y^2)^3,$$
$$\xi^2(\xi^2+3\eta^2)^2-\eta^2(3\xi^2+\eta^2)^2=(\xi^2-\eta^2)^3,$$

that is on a par with the identities

$$|P^3|=|P|^3, \quad |Q^3|=|Q|^3,$$

for P and Q respectively. If we write down the cubes of P and Q

$$P^3=-3D_1E+\sqrt{-D}\,I, \quad Q^3=-3D_1E+\sqrt{D}\,J,$$

and compose their characteristic equations

$$|P^3-\lambda^3E|=0, \qquad |Q^3-\lambda^3E|=0,$$

then we can see that they coincide; in particular we get a quadratic equation with respect to λ^3

$$(\lambda^3+3D_1)^2=D,$$

with the roots

$$\lambda^3_{1,2}=-3D_1\pm\sqrt{D}.$$

We may remark that

$$\lambda_1^3+\lambda_2^3=-6D_1, \quad (\lambda_1\lambda_2)^3=(3D_1)^2-D=-(2D_2)^3,$$
$$\lambda_1\lambda_2=-2D_2,$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)^3+6D_2(\lambda_1+\lambda_2)+6D_1=0\,,$$
$$(\lambda_1\varepsilon+\lambda_2\bar{\varepsilon})^3+6D_2(\lambda_1\varepsilon+\lambda_2\bar{\varepsilon})+6D_1=0\,,$$
$$(\lambda_1\bar{\varepsilon}+\lambda_2\varepsilon)^3+6D_2(\lambda_1\bar{\varepsilon}+\lambda_2\varepsilon)+6D_1=0\,,$$

where $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\bar{\varepsilon}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Consequently, $\lambda_1+\lambda_2$, $\lambda_1\varepsilon+\lambda_2\bar{\varepsilon}$ $\lambda_1\bar{\varepsilon}+\lambda_2\varepsilon$ are the roots of the polynomial $\psi(z)=$ $=z^3/6+D_2z+D_1$ and

$$z_1=-u''+\lambda_1+\lambda_2\,,\quad z_2=-u''+\lambda_1\varepsilon+\lambda_2\bar{\varepsilon}\,,\quad z_3=-u''+\lambda_1\bar{\varepsilon}+\lambda_2\varepsilon$$

are the roots of the polynomial $\varphi(z)=z^3/6+u''z^2/2+u'z+u$ because $\varphi(z-u'')=\psi(z)$

The function

$$f(z)=\lambda_1 z+\lambda_2 z^2-u''$$

maps the primitive cubic roots of one $1,\varepsilon,\bar{\varepsilon}$, i.e. the roots of the polynomial $\chi(z)=\frac{1}{6}(z^3-1)$ for the roots z_1,z_2,z_3 of $\varphi(z)$: $f(1)=z_1$, $f(\varepsilon)=z_2$, $f(\bar{\varepsilon})=z_3$, and so it gives us the generalized Cardano's formula. The coefficients $\lambda_1=\frac{1}{3}(z_1+\bar{\varepsilon}z_2+\varepsilon z_3)$ and $\lambda_2=\frac{1}{3}(z_1+\varepsilon z_2+\bar{\varepsilon}z_3)$ Lagrange's resolvents, can be expressed by the matrices P and Q : $\lambda_{1,2}=x\pm yi$, or $\lambda_{1,2}=\xi\pm\eta$, because $(x\pm yi)^3=$ $(\xi\pm\eta)^3=-3D_1\pm\sqrt{D}$.

The function $f(z)$ binds the polynomials $\varphi(z)$ and $\chi(z)$ by the relation $\varphi\circ f=\omega\cdot\chi$, where $\omega=(\lambda_2 z+\lambda_1)^3+\lambda_2^3$.

4.4. By means of the function $f(z)$ we can obtain a simple construction for the roots of the cubic equation $\varphi(z)=0$, with complex coefficients. Let us image a circle on the complex z-plane with the centre $-u''$ and the radius $|\lambda_1|$ and another moving circle with the centre on the first circle and radius $|\lambda_2|$. Let us fix the point $-u''+\lambda_1$ on the first circle and the point $-u''+\lambda_1+\lambda_2$ on the second. While the radius of the motionless circle turns left through 120° and 240° counterclockwise, the radius of the moving circle turns in the same sense but at twice the speed through 240° and 480° (or 120°), respectively. And so we obtain all the roots z_1, z_2 and z_3, see fig. 10. The image of the unite circle stands for a Pascal's snail (not shown on the figure).

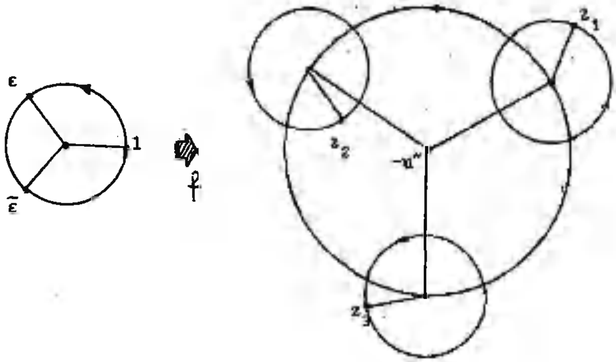

Fig. 10

If the coefficients u, u', u'' of the polynomial $\varphi(z)$ are real, then the roots z_1, z_2, z_3 settle on the z-plane depending on the sign of the discriminant D as is shown on the fig. 11.

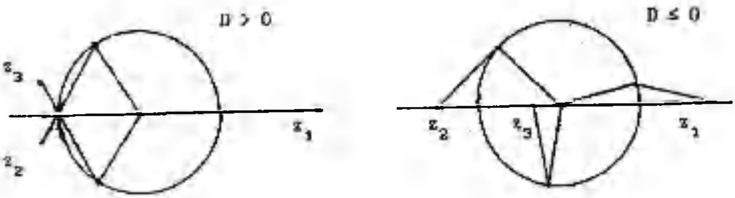

Fig. 11.

References

1. R a h u l a, M. К геометрии дифференциальных уравнений. Tartu Ülik. Toimetised. 1989, 836, 118-125.
2. W o o d c o c k, A. E. R., P o s t o n, T. A geometrical study of the Elementary Catastrophes. Lectures Notes in Mathematics, 373. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York. 1974, 257 p.

Received
10 V 1991

ОСВЕЩЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ, КАСПОИДНЫЕ ОСОБЕННОСТИ И ОТОБРАЖЕНИЯ ВИЕТА

М.Рахула

Р е з ю м е

При освещении поверхности вдоль траекторий векторного поля на поверхности возникает стратификация. Тени при их проектировании на экран порождают каспоидные особенности, которые описываются с помощью инвариантов соответствующего дифференциального уравнения. Приводится ряд примеров. Особый интерес представляют отображения Виета в случае кубического уравнения.

TÜ Toimetised,
930 (1991), 97-112.

Уч. зап.Тартуск. ун-та,
1991, 930, 97-112.

О ПОДМНОГООБРАЗИЯХ С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФОРМОЙ α_s $(s \geq 3)$

В.Мирзоян
Ереванский политехнический институт

§1. Введение

Одним из значительных достижений в геометрии подмногообразий за последние 17 лет является описание, всестороннее изучение и классификация подмногообразий с параллельной второй фундаментальной формой (ф.ф.) α_2 в евклидовом пространстве E_n и пространствах постоянной кривизны.

Подмногообразия с параллельной ф.ф. α_2 в E_n впервые рассматривались в работах Хоух [28], Вилмса [37], Яно и Исихара [39], Сакамото [34], Валдена [38], в которых изучались, в основном, локальное строение и гауссовы образы этих подмногообразий. Вскоре в работах Феруса [24-26] была установлена связь этого класса подмногообразий со стандартными погружениями симметрических R-пространств, которая привела к их полной классификации [27]. В пространствах постоянной кривизны подмногообразия с параллельной ф.ф. α_2 изучены в [9]; их классификацию дал Такеути [36].

Другим путем, более алгебраическим, эту же классификацию Бакес и Рекцигел [19]. В более общих объемлющих пространствах подмногообразия с параллельной ф.ф. α_2 рассматривались в работах [31, 32], [35]. Таким образом, результаты Феруса вызвали оживленный интерес и стимулировали дальнейшее изучение подмногообразий с параллельной ф.ф. α_2. Одновременно с этим возникла проблема изучения подмногообразий с параллельной ф.ф. высшего порядка. Этой проблеме посвящены работы автора [10-15], в которых основное внимание уделено общим свойствам, локальному строению, вопросам разложения в произведение, редукции коразмерности, доказана их некомпактность. Рассмотрены также некоторые частные классы подмногообразий с параллельной ф.ф. α_3 и α_4. Изучение двумерных подмногообразий с параллельной ф.ф. α_3 начатое в [7] и [16, 17], завершается их перечислением в работе Лумисте [3]. Цикл работ Лумисте [2, 4-6] заканчивается в [29] полным описанием подмногообразий с параллельной ф.ф. α_3 и плоской нормальной связностью в E_n. Классификация трехмерных подмногообразий с параллельной ф.ф. α_3 в E_n начата в [18] (при n = 5) и полностью завершена в [30]. Гиперповерхности с параллельной ф.ф. α_s ($s \geqslant 3$) изучил Диллен как в E_n (см. [21]), так и в пространстве постоянной кривизны [22] и дал их полное описание.

В настоящей работе продолжаются исследования по подмногообразиям с параллельной ф.ф. α_s ($s \geqslant 3$) в E_n. Доказано, что они являются локально симметрическими (в смысле внутренней геометрии), внутренне приводимыми (при условии полноты) и допускают вполне коммутирующее (в частности, паралельное) подрасслоение нормального расслоения. Последнее обстоятельство, с учетом результатов из [8], [14], значительно проясняет локальное строение этих подмногообразий. Впервые появляется в печати часть результатов из [12] (Теорема 4.1 и теорема 4.2, исключая вторую часть утверждения 2).

§2. Основные формулы и определения

Пусть M является m-мерным подмногообразием n-мерного евклидова пространства E_n. Через $<,>$ будем обозначать скалярное произведение в E_n а через g - индуцированную на M метрику. На протяжении всей статьи $\mathfrak{X}(M)$ обозначает алгебру Ли касательных к M векторных полей, а $\mathfrak{X}^{\perp}(M)$ - модуль векторных полей, нормальных к M. Пусть $\tilde{\nabla}$ и ∇ обозначают римановы связности на E_n и M соответственно. Вторая фундаментальная форма (ф.ф.) α_2 подмногообразия M определяется равенством

$$\alpha_2(x, y) = \tilde{\nabla}_x y - \nabla_x y$$

для любых $x, y \in \mathfrak{X}(M)$. Известно, что α_2 является билинейной симметрической формой, определенной на $T(M) \times T(M)$ (где $T(M)$ - касательное расслоение) со значениями в нормальном расслоении $T^{\perp}(M)$. Для $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$ и $x \in \mathfrak{X}(M)$ положим

$$\tilde{\nabla}_x \xi = -A_\xi x + \nabla^{\perp}_x \xi, \tag{2.1}$$

где $-A_\xi x$ и $\nabla_x^\perp \xi$ обозначают касательную и нормальную компоненту соответственно. Известно, что A_ξ и α_2 связаны формулой

$$\langle \alpha_2(x,y), \xi\rangle = g(A_\xi x, y).$$

Отсюда следует, что A_ξ является симметрическим линейным преобразованием $T_x(M)$. Оно называется вторым фундаментальным тензором, соответствующим нормальному векторному полю ξ.

В (2.1) нормальная компонента $\nabla_x^\perp \xi$ от $\bar\nabla_x \xi$ определяет в нормальном расслоении некоторую метрическую связность $\nabla^\perp$ называемую нормальной связностью. Нормальное векторное поле ξ называется параллельным, если $\nabla_x^\perp \xi = 0$ для любого $x \in \mathcal{X}(M)$. Как известно, тензор кривизны R связности ∇, определяемый равенством

$$R(x,y)z = \nabla_x\nabla_y z - \nabla_y\nabla_x z - \nabla_{[x,y]}z,$$

и ф.ф. α_2 связаны между собой уравнением Гаусса

$$\langle R(x,y)z, u\rangle = \langle\alpha_2(x,u), \alpha_2(y,z)\rangle - \langle\alpha_2(x,z), \alpha_2(y,u)\rangle \quad (2.2)$$

для любых $x,y,z,u \in \mathcal{X}(M)$. Ковариантная производная второй ф.ф. α_2 в свзности ван-дер-Вардена-Бортолотти $\bar\nabla$ определяется равенством

$$(\bar\nabla_x \alpha_2)(y,z) = \nabla_x^\perp \alpha_2(y,z) - \alpha_2(\nabla_x y, z) - \alpha_2(y, \nabla_x z),$$

где $x, y, z \in \mathcal{X}(M)$. Известное уравнение Кодацци теперь можно записать в виде

$$(\bar\nabla_x \alpha_2)(y,z) = (\bar\nabla_y \alpha_2)(x,z). \quad (2.3)$$

Тензор кривизны $R^\perp$ связности $\nabla^\perp$ определяется равенством

$$R^\perp(x,y)\xi = \nabla_x^\perp\nabla_y^\perp\xi - \nabla_y^\perp\nabla_x^\perp\xi - \nabla_{[x,y]}^\perp\xi,$$

где $x,y \in \mathcal{X}(M)$, $\xi \in \mathcal{X}^\perp(M)$. Тензоры $R^\perp$ и A_ξ связаны между собой уравнением Риччи

$$\langle R^\perp(x,y)\xi, \eta\rangle = g([A_\xi, A_\eta]x, y). \quad (2.4)$$

Если $R^\perp = 0$, то говорят, что нормальная связность подмногообразия M плоская.

Вектор средней кривизны H подмногообразия M определяется формулой $H = \operatorname{tr}\alpha_2$.

За подробностями о приведенных формулах, а также других сведениях отсылаем к монографии Чена [20].

§3. Фундаментальные формы высшего порядка и связанные с ними объекты

Фундаментальные формы высших порядков подмногообразия M строятся следующим образом. Если s-ая ф.ф. α_s $(s \geqslant 2)$ уже построена, то α_{s+1} получается по рекуррентной формуле

$$\alpha_{s+1}(x_1, \ldots, x_s, x) = (\bar{\nabla}_x \alpha_s)(x_1, \ldots, x_s)$$

для любых $x, x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{X}(M)$, где ковариантная производная в правой части определяется равенством

$$(\bar{\nabla}_x \alpha_s)(x_1, \ldots, x_s) = \nabla_x^{\perp} \alpha_s(x_1, \ldots, x_s) - \sum_{t=1}^{s} \alpha_s(x_1, \ldots, \nabla_x x_t, \ldots, x_s).$$

Отсюда следует, что ф.ф. α_s $(s \geqslant 3)$ является s-линейной формой, определенной на $T(M) \times \cdots \times T(M)$ (s раз) со значениями в $T^{\perp}(M)$. Из уравнения Кодацци (2.3) следует также, что все они симметричные по первым трем аргументам.

Пусть α_{2s} – некоторая ф.ф. четного порядка и пусть векторы $e_1, \ldots, e_m$ образуют ортонормированный базис касательного пространства $T_x(M)$ в точке $x \in M$. Тогда нормальный вектор

$$\xi = \sum_{i_1 \cdots i_s} \alpha_{2s}(e_{i_1}, e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_s}, e_{i_s}) \qquad (3.I)$$

инвариантно определен. Если в (3.I) суммирования проводить в каком-либо другом порядке, то получим, очевидно, другой инвариантно определенный нормальный вектор, например

$$\eta = \sum_{i_1 \cdots i_s} \alpha_{2s}(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, \ldots, e_{i_3}, e_{i_2}, e_{i_1}).$$

Линейная оболочка множества определенных таким образом нормальных векторов образует некоторое подпространство $G_s(x)$ в нормальном пространстве $T_x^{\perp}(M)$. Считая, что $\dim G_s(x) = const$ в некоторой области на M, мы будем обозначать через G_s соответствующее подрасслоение в нормальном расслоении $T^{\perp}(M)$. Если в (3.I) положить $s=1$, то получим, очевидно, вектор средней кривизны H. Следовательно, $\dim G_1(x) = 1$ при $H_x \neq 0$. В силу симметричности ф.ф. α_4 по первым трем аргументам подпространство $G_2(x)$ также одномерно и порождается инвариантно определенным нормальным вектором $\zeta = \sum_{i,j} \alpha_4(e_i, e_i, e_j, e_j)$. Очевидно, что если ф.ф. четных порядков, до порядка $2s$ включительно, симметричны по всем аргументам, то все подпространства $G_1(x), \dots, G_s(x)$ одномерны. Действительно, в этом случае порядок, в котором производятся суммирования в (3.I), не имеет значения и дает один и тот же вектор. Например, для локально евклидовых подмногообразий с плоской нормальной связностью ковариантные производные сводятся к частным производным; поэтому все ф.ф. α_{2s} будут симметричны по всем аргументам и для таких подмногообразий все подпространства $G_1(x), \dots, G_s(x) \dots$ одномерны.

Перейдем к построению нормальных пространств подмногообразия M в данной точке x. При этом будем придерживаться следующих обозначений: если N_x - некоторое подпространство в $T_x^{\perp}(M)$, то $N_x^{\perp}$ обозначает его ортогональное дополнение в $T_x^{\perp}(M)$.

Пусть $P_s(x)$ $(s \geqslant 1)$ обозначает линейную оболочку множества нормальных векторов

$$\{\alpha_{s+1}(x_1, \dots, x_{s+1}) \mid x_1, \dots, x_{s+1} \in T_x(M)\}.$$

Полагая $N_1(x) = P_1(x)$ определим в $T_x^{\perp}(M)$ подпространство $N_{s+1}(x)$ по рекуррентной формуле

$$N_{s+1}(x) = P_{s+1}(x) \cap (N_1(x) \oplus \dots \oplus N_s(x))^{\perp}.$$

Подпространство $N_s(x)$ $(s \geqslant 1)$ называется s-м нормальным пространством подмногообразия M в точке x. Считая, что подпространства $P_s(x)$ и $N_s(x)$ имеют в некоторой области на M постоянные размерности, будем обозначать через P_s и N_s образуемые ими подрасслоения в нормальном расслоении.

Прямая сумма $T_x(M) \oplus N_1(x) \oplus \dots \oplus N_s(x)$ называется s-м соприкасающимся пространством подмногообразия M в точке x.

Пусть Q обозначает ν-мерное подрасслоение в $T^{\perp}(M)$. Если для $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$ в любой точке $x \in M$ имеем $\xi_x \in Q_x$, то мы будем писать $\xi \in Q$. Подрасслоение Q называется параллельным, если для любого $\xi \in Q$ ковариантная производная $\nabla_X^{\perp} \xi$ для любого $X \in \mathfrak{X}(M)$ также принадлежит Q.

Справедлива следующая

Теорема 3.I. (Эрбахер [23]). Пусть M является связным подмногообразием пространства постоянной кривизны $\tilde{M}$ и пусть Q есть ν-мерное параллельное подрасслоение нормального расслоения, такое, что $N_1 \subset Q$. Тогда существует $(m+\nu)$-мерное $(m=\dim M)$ вполне геодезическое подмногообразие $M_{m+\nu}$ пространства M, содержащее M.

§4. Редукция коразмерности и некоторые свойства подмногообразий с параллельной ф.ф.

Говорят, что ф.ф. α_s подмногообразия M является параллельной (ковариантно постоянной), если $\bar\nabla_x \alpha_s = 0$ для любого $x \in \mathfrak{X}(M)$ или, что равносильно,

$$\nabla_x^\perp \alpha_s(x_1,\dots,x_s) = \sum_{t=1} \alpha_s(x_1,\dots,\nabla_x x_t,\dots,x_s) \tag{4.I}$$

для любых $x, x_1,\dots,x_s \in \mathfrak{X}(M)$ или, что также равносильно, $\alpha_{s+1}=0$.

Из равенства (4.I) непосредственно следует

Лемма 4.I. Если подмногообразие M в E_n имеет параллельную ф.ф. α_s $(s \geqslant 2)$, то подрасслоение P_{s-1}, слои которого являются линейными оболочками множества нормальных векторов $\alpha_s(x_1,\dots,x_s)$, параллельно в нормальном расслоении.

Следующая теорема позволяет понижать коразмерность подмногообразия с параллельной ф.ф. α_s.

Теорема 4.I. Если ф.ф. α_s подмногообразия M в E_n параллельна, то M содержится в своем $(s-1)$-м соприкасающемся пространстве.

Доказательство. Пусть $K_{s-1} = N_1 \oplus \dots \oplus N_{s-1}$. Тогда из цепочки равенств

$$\nabla^\perp_{x_3} \alpha_2(x_1,x_2) = \alpha_2(\nabla_{x_3} x_1, x_2) + \alpha_2(x_1, \nabla_{x_3} x_2) + \alpha_3(x_1,x_2,x_3),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\nabla^\perp_{x_s} \alpha_{s-1}(x_1,\dots,x_{s-1}) = \alpha_{s-1}(\nabla_{x_s} x_1,\dots,x_{s-1}) + \dots +$$
$$+ \alpha_{s-1}(x_1,\dots,\nabla_{x_s} x_{s-1}) + \alpha_s(x_1,\dots,x_{s-1},x_s)$$

и из (4.I) следует, что подрасслоение K_{s-1} параллельно в нормальном расслоении. Так как $N_1 \subset K_{s-1}$, то, полагая в теореме 3.I $Q = K_{s-1}$ получим, что M содержится в своем $(s-1)$-м соприкасающемся пространстве. Теорема доказана.

Пусть h^α_{ij} - компоненты ф.ф. α_2 в некотором адаптированном к M ортонормрепере $(e_1,\dots,e_m, e_{m+1},\dots,e_n)$; здесь индексы пробегают следующие значения

$$i,j,k,\dots,i_1,i_2,j_1,j_2,\dots = 1,\dots,m,\quad \alpha,\beta,\dots = m+1,\dots,n$$

Компоненты $h^{\alpha}_{i_1\ldots i_s}$ ф.ф. α_s $(s>3)$ определяются в выбранном выше репере, очевидно, формулой

$$h^{\alpha}_{i_1 i_2\ldots i_{s-1} i_s}=\bar{\nabla}_{i_s} h^{\alpha}_{i_1 i_2\ldots i_{s-1}}=\ldots=\bar{\nabla}_{i_s}\bar{\nabla}_{i_{s-1}}\ldots\bar{\nabla}_{i_s} h^{\alpha}_{i_1 i_3},$$

где $\bar{\nabla}_i=\bar{\nabla}_{e_i}$. Условие параллельности α_s равносильно условию $\bar{\nabla}_k h^{\alpha}_{i_1\ldots i_s}=0$.

Функцию $\langle\alpha_s\rangle^2=h^{\alpha}_{i_1\ldots i_s} h_{\alpha}^{i_1\ldots i_s}$, где $h_{\alpha}^{i_1\ldots i_s}=h^{\alpha}_{i_1\ldots i_s}$, будем называть квадратом длины ф.ф. α_s.

Ниже, при доказательстве теоремы 4.2, мы будем применять оператор $\Delta'=\delta^{ij}\bar{\nabla}_i\bar{\nabla}_j$ (δ^{ij} символ Кронекера), который в отличие от оператора Лапласа $\Delta=\delta^{ij}\nabla_i\nabla_j$, назовем обобщенным оператором Лапласа. Если f - дифференцируемая функция на подмногообразии M, то легко видеть, что $\Delta' f=\Delta f$. Однако, действие этих операторов на тензорные поля может привести к различным результатам.

<u>Теорема 4.2</u>. Пусть M - подмногообразие в E_n с ненулевой параллельной ф.ф. α_s $(s\geqslant 3)$. Тогда

I) $\langle\alpha_s\rangle^2=const\ (\neq 0)$, $\langle\alpha_{s-1}\rangle^2\neq const$;

2) M некомпактно и является внутренне локально симметрическим, т.е. $\nabla R=0$.

<u>Доказательство.</u> В силу параллельности α_s имеем

$$x\langle\alpha_s\rangle^2=\bar{\nabla}_x\langle\alpha_2\rangle^2=\bar{\nabla}_x h^{\alpha}_{i_1\ldots i_s} h_{\alpha}^{i_1\ldots i_s}+h^{\alpha}_{i_1\ldots i_s}\bar{\nabla}_x h_{\alpha}^{i_1\ldots i_s}=0$$

для любого $x\in\mathfrak{X}(M)$. Следовательно, $\langle\alpha_2\rangle^2=const$, причем $\langle\alpha_s\rangle^2\neq 0$, так как из $\langle\alpha_s\rangle^2=0$ следует $\alpha_s=0$, что противоречит условию теоремы. Далее путем прямого применения оператора Δ' к функции $\langle\alpha_{s-1}\rangle^2$, получим

$$\frac{1}{2}\Delta'\langle\alpha_{s-1}\rangle^2=\delta^{ij}(\bar{\nabla}_i\bar{\nabla}_j h^{\alpha}_{i_1\ldots i_{s-1}})\cdot h_{\alpha}^{i_1\ldots i_{s-1}}+\langle\alpha_s\rangle^2 \tag{4.2}$$

Если ф.ф. α_s параллельна, то первое слагаемое в правой части (4.2) равно нулю и мы имеем

$$\frac{1}{2}\Delta'\langle\alpha_{s-1}\rangle^2=\langle\alpha_s\rangle^2. \tag{4.3}$$

Пусть $\langle\alpha_{s-1}\rangle^2=const$. Тогда из (4.3) имеем $\langle\alpha_s\rangle^2=0$ и, следовательно, $\alpha_s=0$, что противоречит условию теоремы. Итак, $\langle\alpha_{s-1}\rangle^2\neq const$ и утверждение I) доказано. Далее из (4.3) следует, что $\Delta'\langle\alpha_{s-1}\rangle^2>0$. Если M компактно, то, согласно лемме Хопфа ([20], с. II), будем иметь $\langle\alpha_{s-1}\rangle^2=const$, что противоречит утверждению I). Следовательно, M некомпактно. Если в (2.2) положить

$x = e_i, y = e_j, z = e_k, u = e_l$, то получим

$$R_{ijkl} = \sum (h^{\alpha}_{il} h^{\alpha}_{jk} - h^{\alpha}_{ik} h^{\alpha}_{jl}),$$

где R_{ijkl} – компоненты тензора кривизны R. Непосредственной проверкой, с учетом параллельности α_s, легко убедиться, что $(2s-3)$-я ковариантная производная $\nabla^{2s-3} R_{ijkl}$ равна 0. Теперь вторая часть утверждения 2) следует из следующего результаты Номидзу и Одзеки: для любого риманова многообразия M с тензором кривизны h условие $\nabla^k R = 0$ для некоторого $k \geqslant 1$ влечет $\nabla R = 0$ (см. [I], стр. 279). Теорема доказана.

Замечание 4.I. Так как условие $\bar{\nabla}\alpha_2 = 0$ также влечет $\nabla R = 0$, то мы доказали, таким образом, что внутренняя геометрия подмногообразий с параллельной ф.ф. α_s $(s \geqslant 2)$ является геометрией локально симметрического риманова пространства.

Замечание 4.2. Если M – компактное подмногообразие, то из параллельности ф.ф. α_s следует параллельность α_s. Действительно, из (4.3) следует $\Delta' \langle \alpha_{s-1} \rangle^2 \geqslant 0$ и по лемме Хопфа $\langle \alpha_{s-1} \rangle^2 = const$. Тогда $\Delta' \langle \alpha_{s-1} \rangle^2 = 0$ и из (4.3) получаем $\alpha_s = 0$. Следовательно, ф.ф. α_{s-1} параллельна. Продолжая этот процесс, получим $\alpha_s = \alpha_{s-1} = \dots = \alpha_3 = 0$, что и требовалось.

Согласно утверждению I) теоремы 4.2, условие параллельности α_{s-1} влечет $\langle \alpha_{s-1} \rangle^2 = const$. При этом $\alpha_s = 0$ и ф.ф. α_s также параллельна. Верно и обратное: если α_s параллельна и $\langle \alpha_{s-1} \rangle^2 = const$, то α_{s-1} параллельна. Действительно, если $\langle \alpha_{s-1} \rangle^2 = const$ и $\bar{\nabla}\alpha_s = 0$, то $\alpha_s = 0$, как это было доказано в ходе доказательства утверждения I) теоремы 4.2. Так как $\alpha_s = \bar{\nabla}\alpha_{s-1}$, то $\bar{\nabla}\alpha_{s-1} = 0$, что и требовалось. Итак, справедлива следующая

Лемма 4.2. Для того, чтобы ф.ф. α_{s-1} $(s \geqslant 3)$ подмногообразия была параллельной, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

(I) $\langle \alpha_{s-1} \rangle^2 = const$;

(2) $\bar{\nabla}\alpha_s = 0$.

Эта лемма показывает, что все m-мерные подмногообразия с $\bar{\nabla}\alpha_{s-1} = 0$ включаются в класс m-мерных подмногообразий с $\bar{\nabla}\alpha_s = 0$ и характеризуются в нем условием $\langle \alpha_{s-1} \rangle^2 = const$.

Риманово многообразие M с римановой связностью ∇ называется приводимым, если на нем существуют попарно вполне ортогональные распределения $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, параллельные в связности ∇ и такие, что $T_x(M) = \Delta_1(x) \oplus \dots \oplus \Delta_n(x)$ в любой точке $x \in M$. Если на M таких распределений нет, то говорят о неприводимости M. Если M - подмногообразие в E_n с римановой связностью ∇, то при выполнении аналогичных условий будем говорить о внутренней приводимости M, а в противном случае - о внутренней неприводимости. Справедлива следующая

Лемма 4.3. (Номидзу, Одзеки [33]). Пусть M является полным неприводимым римановым многообразием и пусть K - произвольное тензорное поле на M. Если p-я ковариантная производная $\nabla^p K$ равна нулю для некоторого $p \geqslant 1$, то $\nabla K = 0$.

Следующая лемма характеризует полные внутренне неприводимые подмногообразия с $\bar\nabla \alpha_s = 0\ (s \geqslant 3)$ в E_n.

Лемма 4.4. Пусть M является полным внутренне неприводимым подмногообразием в E_n. Тогда условие $\bar\nabla \alpha_s = 0$ $(s \geqslant 3)$ влечет $\bar\nabla \alpha_2 = 0$.

Доказательство. Если $\bar\nabla \alpha_s = 0$, то для тензорного поля $K^{(s)}$ с компонентами

$$K^{(s)}_{ij} = h^{\alpha}_{i_1 \dots i_{s-2} i}\, h^{i_1 \dots i_{s-2}}_{\alpha j}$$

имеем $\nabla^3 K^{(s)} = 0$. Отсюда, в силу леммы 4.3, получаем $\nabla K^{(s)} = 0$, т.е. $\nabla_x K^{(s)}_{ij} = 0$ для любого $x \in \mathfrak{X}(M)$. Тогда

$$x \langle \alpha_{s-1} \rangle^2 = \nabla_x \langle \alpha_{s-1} \rangle = \nabla_x \Big(\sum_i K^{(s)}_{ii} \Big) = \sum_i \nabla_x K^{(s)}_{ii} = 0$$

и $\langle \alpha_{s-1} \rangle^2 = const$. Следовательно, $\alpha_s = \bar\nabla \alpha_{s-1} = 0$ по лемме 4.2. Точно также получаем $\alpha_{s-1} = \dots = \alpha_3 = 0$, т.е. $\bar\nabla \alpha_2 = 0$.

Лемма доказана.

Следствие 4.1.. Всякое полное подмногообразие M с ненулевой параллельной ф.ф. α_s $(s \geqslant 3)$ является внутренне приводимым.

Следствие 4.2. Всякое полное двумерное подмногообразие с ненулевой параллельной ф.ф. α_s $(s \geqslant 3)$ является локально евклидовым.

§5. Структура нормального расслоения подмногообразия с параллельной ф.ф.

Прежде чем перейти к изучению нормального расслоения подмногообразия с параллельной ф.ф. α_s, напомним некоторые определения, необходимые в дальнейшем.

Нормальное векторное поле ξ к подмногообразию M называется коммутирующим, если $[A_\xi, A_\eta] = 0$ для любого $\eta \in \mathfrak{X}^\perp(M)$. Из (2.4) следует, что равносильным условием является следующее: $R^\perp(x,y)\xi = 0$ для любых $x, y \in \mathfrak{X}(M)$. Другим равносильным условием является условие $\bar\nabla_x \bar\nabla_y \xi = \bar\nabla_y \bar\nabla_x \xi$, которое следует из тождества $\bar\nabla_x \bar\nabla_y \xi - \bar\nabla_y \bar\nabla_x \xi = R^\perp(x,y)\xi$. Примером коммутирующего нормального векторного поля является произвольное параллельное нормальное векторное поле. Подрасслоение Q нормального расслоения называется коммутирующим, если для любого $\xi \in Q$ и любых $x, y \in \mathfrak{X}(M)$ имеем $R^\perp(x,y)\xi \in Q$. Из уравнения Риччи (2.4) следует, что это условие равносильно условию $[A_\xi, A_\eta]$ для любого $\xi \in Q$ и для любого $\eta \in Q^\perp$. Каждое параллельное подрасслоение Q является также коммутирующим [14]. Если для любого $\xi \in Q$ имеем $R^\perp(x,y)\xi = 0$ для любых $x, y \in \mathfrak{X}(M)$, то Q называется вполне коммутирующим подрасслоением. Параллельное подрасслоение Q нормального расслоения, в котором индуцируется плоская связность, является примером вполне коммутирующего подрасслоения [14]. Однако, связность во вполне коммутирующем подрасслоении в общем случае не обязана быть плоской.

Известно, что вектор средней кривизны подмногообразия с параллельной ф.ф. α_2 параллелен в нормальном расслоении [25], а вектор средней кривизны подмногообразия с параллельной ф.ф. α_3 является коммутирующим [14]. В общем случае справедлива следующая

<u>Теорема 5.2</u>. Если ф.ф. четного порядка α_{2s} $(s \geq 1)$ подмногообразия M является параллельной, то подрасслоение G_s нормального расслоения $T^\perp(M)$ параллельно и в нем индуцируется плоская нормальная связность. Если же параллельна ф.ф. нечетного порядка α_{2s+1}, то подрасслоение G_s является вполне коммутирующим.

Доказательство теоремы опирается на следующие две леммы, имеющие также самостоятельное значение.

Лемма 5.I. Пусть C^{α}_{ij} - компоненты некоторой билинейной формы C, определенной на $T(M)\times T(M)$ со значениями в $T^{\perp}(M)$, в адаптированном к M поле ортонормрепера $\{e_1,\dots,e_m,e_{m+1},\dots,e_n\}$. Если форма C параллельна в связности $\bar\nabla$, то нормальное векторное поле $\xi=\xi^{\alpha}e_{\alpha}$, где $\xi^{\alpha}=C^{\alpha}_{ij}\delta^{ij}$, параллельно в нормальном расслоении.

Доказательство. Параллельность форма C равносильна тому, что $e_k(C^{\alpha}_{ij})+C^{\beta}_{ij}\omega^{\alpha}_{\beta}(e_k)-C^{\alpha}_{\ell j}\omega^{\ell}_{i}(e_k)-C^{\alpha}_{i\ell}\omega^{\ell}_{j}(e_k)=0$, где $\omega^{j}_{i}=-\omega^{i}_{j}$, $\omega^{\beta}_{\alpha}=-\omega^{\alpha}_{\beta}$ обозначают 1-формы для ∇ и $\nabla^{\perp}$ соответственно. Свертывая левую часть этого равенства с δ^{ij}, будем иметь

$$e_k(\xi^{\alpha})+\xi^{\beta}\omega^{\alpha}_{\beta}(e_k)-C^{\alpha}_{\ell j}\omega^{\ell}_{i}(e_k)\delta^{ij}-C^{\alpha}_{i\ell}\omega^{\ell}_{j}(e_k)\delta^{ij}=0.$$

Так как сумма третьего и четвертого слагаемых в левой части равна 0, то мы получаем $e_k(\xi^{\alpha})+\xi^{\beta}\omega^{\alpha}_{\beta}(e_k)=0$, что и требовалось.

Лемма доказана.

Лемма 5.2. Пусть C^{α}_{ij} как и в лемме 5.I. Если $\bar\nabla_{[k}\bar\nabla_{\ell]}C^{\alpha}_{ij}=0$, то нормальное векторное поле $\xi=\xi^{\alpha}e_{\alpha}$, где $\xi^{\alpha}=C^{\alpha}_{ij}\delta^{ij}$, является коммутирующим.

Доказательство. Из тождества Риччи для C^{α}_{ij}, с учетом условия леммы, непосредственно получаем

$$R_{k\ell i}{}^{t}C^{\alpha}_{tj}+R_{k\ell j}{}^{t}C^{\alpha}_{it}-R_{k\ell\beta}{}^{\alpha}C^{\beta}_{ij}=0,$$

где $R_{ij\alpha}{}^{\beta}$ - компоненты тензора кривизны $R^{\perp}$. Свертывая левую часть этого равенства с δ^{ij} и учитывая, что сумма первых двух слагаемых равна 0, получим $R_{k\ell\beta}{}^{\alpha}\xi^{\beta}=0$. Это и есть условие коммутируемости векторного поля ξ. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5.2. Пусть $\bar\nabla\alpha_{2s}=0$ и пусть C^{α}_{ij} в лемме 5.I получаются из компонент $h^{\alpha}_{i_1\dots i_{2s}}$ ф.ф. α_{2s} путем свертывания в произвольном порядке $2s-2$ нижних индексов с символами Кронекера. Тогда $\bar\nabla_k C^{\alpha}_{ij}=0$ и на основании леммы 5.I получаем, что все нормальные векторные поля, порождающие G_s, параллельны. Тогда и G_s является параллльным подрасслоением нормального расслоения $T^{\perp}(M)$ и связность в G_s плоская. Это доказывает первое утверждение теоремы.

Пусть теперь $\bar\nabla\alpha_{2s+1}=0$ и пусть C^{α}_{ij} в лемме 5.2 получаются из $h^{\alpha}_{i_1\dots i_{2s}}$, как и выше. Тогда $\bar\nabla_k\bar\nabla_\ell C^{\alpha}_{ij}=0$ и, следовательно, $\bar\nabla_{[k}\bar\nabla_{\ell]}C^{\alpha}_{ij}=0$. На основании леммы 5.2 заключаем, что все нормальные векторные поля, порождающие G_s, являются коммутирующими. Следовательно, G_s - вполне коммутирующее подрасслоение. Теорема доказана.

Параллельность вектора средней кривизны H при $\bar{\nabla}\alpha_2 = 0$ или коммутируемость H при $\bar{\nabla}\alpha_3 = 0$, очевидно, являются частными случаями теоремы 5.2 при $s = 1$.

Знание размерности подрасслоения G_s в некоторых случаях может заключать в себе важную информацию. Действительно, справедлива следующая

Теорема 5.3. Пусть ф.ф. α_{2s+1} подмногообразия M $(\dim M = m)$ в E_n является параллельной. Тогда при $\dim G_s = n - m$ или $\dim G_s = n - m - 1$ нормальная связность плоская.

Доказательство. Так как $\bar{\nabla}\alpha_{2s+1} = 0$, то подрасслоение G_s является вполне коммутирующим по теореме 5.2, т.е. $[A_\xi, A_\eta] = 0$ для любого $\xi \in G_s$ и любого $\eta \in \mathfrak{X}^\perp(M)$. Если $\dim G_s = n - m$, то G_s совпадает с нормальным расслоением $T^\perp(M)$. Тогда $[A_\xi, A_\eta] = 0$ для любых $\xi, \eta \in \mathfrak{X}^\perp(M)$ и нормальная связность плоская. Если $\dim G_s = n - m - 1$, то $\dim G_s^\perp = 1$ и $[A_\xi, A_\eta] = 0$ для любого $\xi \in G_s$ и любого $\eta = G_s^\perp$. Тогда $[A_\xi, A_\eta] = 0$ для любых $\xi, \eta \in \mathfrak{X}^\perp(M)$ и нормальная связность плоская. Теорема доказана.

Замечание. В теореме 5.3 случай $\alpha_{2s+1} = 0$ (т.е. $\bar{\nabla}\alpha_{2s} = 0$) не исключается. В этом случае подрасслоение G_s является параллельным и в нем индуцируется плоская нормальная связность (теорема 5.2). Из §3 известно, что $\dim G_1 \leqslant 1$, $\dim G_2 \leqslant 1$. При достаточно высокой коразмерности подмногообразия и при $s \geqslant 3$ максимальное число линейно независимых нормальных векторов вида (3.I), порождающих G_s, как нетрудно подсчитать, может быть равно

$$\Theta = \frac{(2s-3)!\,(s+1)}{3 \cdot 2^{s-2} \cdot (s-2)(s-3)!}$$

Следовательно, при $n - m \geqslant \Theta$ справедлива оценка $\dim G_s \leqslant \Theta$.

Из теоремы 5.3 следует, что если $\bar{\nabla}\alpha_{2s+1} = 0$, $\dim G_s \neq 0$ и коразмерность подмногообразия M равна 2, то нормальная связность всегда плоская.

Из теоремы 5.2 следует, что подмногообразия с параллельной ф.ф. α_s включаются в класс подмногообразий с вполне коммутирующим (в частности, параллельным с плоской связностью $\nabla^\perp$) нормальным векторным подрасслоением. Следовательно, к ним могут быть применены результаты о локальном строении подмногообразия с вполне коммутирующим подрасслоением нормального расслоения, полученные автором в [I4], а в частном случае

Лумисте и Чакмазяном [8].

Литература

I. К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К. Основы дифференциальной геометрии.// Т. I,М. Наука, 1981.

2. Л у м и с т е Ю. Г. Приводимость подмногообразия с параллельной третьей фундаментальной формой.// В сб.: Теор. и прикл. вопросы матем. I. Тарту. 1985. С.105-107.

3. Л у м и с т е Ю. Г. Неприводимые подмногообразия малых размерностей с параллельной третьей фундаментальной формой.// Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1986. Вып. 734. С. 36-49.

4. Л у м и с т е Ю. Г. Подмногообразия с плоской связностью Ван дер Вардена-Бортолотти и параллельность третьей фундаментальной формы.// Изв. вузов. Матем. 1987, № I, С. 18-27.

5. Л у м и с т е Ю. Г. Приводимость подмногоообразий с параллельной третьей фундаментальной формой.// Изв. вузов. Матем. 1987. № II. С. 32-41.

6. Л у м и с т е Ю. Г. Нормально плоские подмногообразия с параллельной третьей фундаментальной формой.// В сб.: IX Всесоюзн. геометр. конф. (тез. докл.). Кишинев, 1988, С. 192.

7. Л у м и с т е Ю. Г., М и р з о я н В. А. Подмногообразия с параллельной третьей фундаментальной формой. //Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1984, Вып. 665. С. 42-54.

8. Л у м и с т е Ю. Г., Ч а к м а з я н А. В. Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространстве постоянной кривизны.// Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. Пробл. геометрии. 1981. Т. 12. С. 3-30.

9. М и р з о я н В. А. О подмногообразиях с параллельной второй фундаментальной формой в пространствах постоянной кривизны. //Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1978. Вып. 464. С. 59-74.

10. М и р з о я н В. А. О подмногообразиях с параллельной фундаментальной формой высшего порядка.//ДАН Арм.ССР. 1978. Т. 66. С. 71-75.

11. М и р з о я н В. А. О подмногообразиях с ковариантно постоянным полем эндоморфизма нормального расслоения.

//В сб.: Пятая прибалт. геометр. конф. (тез. докл.). Друскининкай. 1978. С. 56.

12. М и р з о я н В. А. Подмногообразия с параллельной фундаментальной формой высшего порядка.// ВИНИТИ АН СССР. № 2074-78 Деп. 1978. 47 С.

13. М и р з о н В. А. Подмногообразия с параллельной третьей фундаментальной формой.// В сб.: Седьмая Всесоюзная конф. по современным пробл. геометр. (тез. докл.). Минск. 1979. С. 130.

14. М и р з о я н В. А. Подмногообразия с коммутирующим нормальным векторным полем.// Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. Пробл. геометрии. 1983. Т. 14. С. 73-100.

15. М и р з о я н В. А. О локальном строении подмногообразия с параллельной фундаментальной формой α_k $(k \geq 3)$. //В сб.: Тез. докл. УI Прибалт. геометр. конф. Таллин. 1984. С. 83.

16. Р и й в е с К. В. Поверхности $V_2 \subset E_5$ с параллельной третьей фундаментальной формой, имеющие плоскую нормальную связность. // В сб.: Тез. докл. УI Прибалт. геометр. конф. Таллин. 1984. С. 103-104.

17. Р и й в е с К. В. О поверхностях $V_2 \subset E_5$ с параллельной третьей фундаментальной формой, имеющих неплоскую нормальную связность. // В сб.: Восьмая всесоюзн. науч. конф. по соврем. пробл. дифф. геом. (тез. докл.). Одесса. 1984. С. 131.

18. Р и й в е с К. В. Подмногообразия V_3 с параллельной третьей фундаментальной формой в евклидовом пространстве E_5. //Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1986. Вып. 734 С. 102-110.

19. B a c k e s E., R e c k z i e g e l H. On symmetric submanifolds of spaces of constant curvature.// Math. Ann. 1983. B. 263. P. 419-433.

20. C h e n B. - Y. Geometry of submanifolds.// New York: Marcel Dekker. 1973.

21. D i l l e n F. The classification of hypersurfaces of a euclidean space with parallel higher order fundamental form.// Preprint. Kathol. Univ. Leuven. 1989. 15 P.

22. D i l l e n F. The classification of hypersurfaces of a real space form with parallel higher order fundamental form.// Preprint. Kathol. Univ. Leuven. 1989. 23 P.

23. E r b a c h e r J. Reduction of the codimension of an isometric immersion.// J. Diff. Geom. 1971. V. 5. P. 333-340.
24. F e r u s D. Immersionen mit paralleler zweiter Fundamentalform: Beispiele und Nicht-Beispiele.// Manuscr. math. 1974. V. 12. No. 2. P. 153-162.
25. F e r u s D. Product-Zerlegung von Immersionen mit paralleler zweiter Fundamentalform.// Math. Ann. 1974. B. 211. S. 1-5.
26. F e r u s D. Immersions with parallel second fundamental form.// Math. Z. 1974. B. 140. S. 87-93.
27. F e r u s D. Symmetric submanifolds of euclidean space. // Math. Ann. 1980. B. 247. S. 81-93.
28. H o u h C. S. Pseudo-umbilical surfaces with parallel second fundamental form.// Tensor. 1972. V.26. P. 262-266.
29. L u m i s t e Ü. Normally flat submanifolds with parallel third fundamental form.// Proc. Acad. sci. Estonian SSR. 1989. V. 38. No. 2. P.129-138.
30. L u m i s t e Ü. Three-dimensional submanifolds with parallel third fundamental form in Euclidean spaces// Tartu Ülikooli Toimetised. Acta et comm. Univ. Tartuensis. 1990. № 899. P. 45-56.
31. M a g i d M. A. Isometric immersions of Lorentz space with parallel second fundamental forms.// Tsukuba J. Math. 1984. V. 8. P. 31-54.
32. N a i t o h H. Isotropic submanifolds with parallel second fundamental forms in symmetric spaces.// Osaka J. Math. 1980. V. 17. P. 95-110.
33. N o m i z u K., O z e k i H. A theorem on curvature tensor fields.// Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1962. V. 48. P. 206-207.
34. S a k a m o t o K. Submanifolds satisfying the condition $K(x,y)K=0$. // Kodai. Math. Sem. rep. 1973. V. 25. P. 143-152.
35. S t r ü b i n g W. Symmetric submanifolds of riemannian manifolds.// Math. Ann. 1979. B. 245. S. 37-44.
36. T a k e u c h i M. Parallel submanifolds of space forms.// Manifolds and Lie groups. Papers in honour of Matsushima. Basel. Birkhauser. 1981. P. 429-447.
37. V i l m s J. Submanifolds of euclidean space with parallel second fundamental form.//Proc. Math. Soc.

1972. V. 32. P. 263-276.
38. W a l d e n R. Untermannigfaltigkeiten mit paralleler zweiter Fundamental form in euklidischen Räumen und Sphären.// Manuscr. math. 1973. V.10, № 1. P. 91-102.
39. Y a n o K., I s h i h a r a S. Submanifolds of codimension 2 or 3 with parallel second fundamental tensor.// J. Korean Math. Soc. 1972. V. 9. P. 1-11.

Поступило
22.XII 1989

ON SUBMANIFOLDS WITH PARALLEL FUNDAMENTAL FORM $\alpha_s (s \geq 3)$

V.Mirzoyan

S u m m a r y

The fundamental form $\alpha_s (s \geqslant 3)$ of the submanifold M in a Euclidean space E_n (or space of constant curvature) is defined by $\alpha_s = \bar{\nabla}^{s-2}\alpha_2$, where $\bar{\nabla}$ is the operator of covariant differentiation in van der Waerden-Bortolotti connection and α_2 is the second fundamental form.

The submanifolds with parallel fundamental form $\alpha_s (\bar{\nabla}\alpha_s = 0)$ are investigated. It is proved that they lie in their osculating space of order $s-1$ (Theorem 4.1), are locally symmetric (in the sense of inner geometry), and if $\alpha_s \neq 0$, $s \geqslant 3$, then noncompact (Theorem 4.2). If M is compact or complete and intrisically irreducible then $\bar{\nabla}\alpha_s = 0$ $(s \geqslant 3)$ yields $\bar{\nabla}\alpha_2 = 0$ (Lemma 4.4). The last result gives that every two-dimensional M in E_n with parallel $\alpha_s \neq 0$ $(s \geqslant 3)$ is locally euclidean. For the normal vector bundle of a submanifold M with parallel α_s there is proved that locally it admits a parallel normal subbundle with flat normal connection (if $s = 2r$) or a totally commutating normal subbundle (if $s = 2r+1$), which are determined by α_s (Theorem 5.2). They are noncompact, locally symmetric (in sense of inner geometry) and admit a parallel normal subbundle with flat normal connection (if $s = 2r$) or totally commutiving normal subbundle (if $s = 2r+1$) in natural way.

TÜ Toimetised,
930 (1991), 113-128.

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
1991, 930, 113-128.

ПОДМНОГООБРАЗИЯ С ПОЛУПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ТЕНЗОРОМ РИЧЧИ

В.Мирзоян
Ереванский политехнический институт

§1. Введение

В 1920-ых годах П.А.Широков и Э.Картан открыли и изучили класс локально симметрических римановых пространств, характеризующийся условием $\nabla R = 0$ на тензор кривизны R. Условия интегрируемости этой системы $R(X,Y)\cdot R = 0$ успешно применялись в теории геодезических отображений римановых пространств Н.С.Синюковым [9], который назвал римановы пространства, удовлетворяющие этому условию, полусимметрическими. Важная роль полусимметрических римановых пространств в теории относительности была выяснена в работах В.Р.Кайгородова [1,2]. Используя тройные системы Ли П.И.Ковалев [4] дал алгебраическую трактовку условия $R(X,Y)\cdot R = 0$. Полную классификацию полусимметрических римановых пространств дал З.Сабо [20].

Параллельно с изучением полусимметрических римановых пространств стали рассматриваться подмногообразия евклидовых пространств, имеющие внутреннюю геометрию полусимметрического риманова пространства. В этом направлении исследования начались с рассмотрения гиперповерхностей [17]. Классификация таких гиперповерхностей в евклидовом пространстве E_n дана З.Сабо [21]. Недавно был открыт новый класс подмногообразий с внутренней геометрией полусимметрического риманова пространства - это так называемые полусимметрические подмногообразия, характеризующиеся условием $\bar{R}(X,Y)\alpha_2 = 0$ на вторую фундаментальную форму α_2, где $\bar{R}(X,Y)$ - оператор кривизны связности ван-дер-Вардена-Бортолотти. Такие поверхности и гиперповерхности в E_n классифицировал Деприи [11,12]. Полная классификация и геометрическое описание полусимметрических подмногообразий с плоской нормальной связностью в E_n дана в работах Ю.Г.Лумисте [5,6] (см. также [13,15]).

Подмногообразия, удовлетворяющие условию $R(X,Y)\cdot R=0$, естественным образом включаются в класс подмногообразий, характеризующийся условием $R(X,Y)\cdot K=0$ где K -тензор Риччи. Гиперповерхности, удовлетворяющие этому условию, рассматривали Ш.Танно [22] и К.Секигава [19]. В [22] доказано, что если связная полная гиперповерхность M в E_{m+1} имеет положительную скалярную кривизну, полупараллельный тензор Риччи и ее типовое число $k(x)$ (равное рангу второго фундаментального тензора в x) по крайней мере в одной точке x не меньше 3, то M имеет вид $S^K\times E_{m-K}$. Если $k(x)=2$ по крайней мере в одной точке x и скалярная кривизна есть положительная константа, то гиперповерхность имеет вид $S^2\times E_{m-2}$. Рассмотрен также случай компактной гиперповерхности. В [19] доказано, что если полная гиперповерхность с полупараллельным тензором Риччи в E_{m+1} имеет типовое число $k(x)\geqslant 3$, где $k(x)$ нечетно, или $k(x)>2m/3$ по крайней мере в одной точке x, то она имеет вид $S^{k}\times E_{m-k}$.

Настоящая работа посвящена подмногообразиям, удовлетворяющим условию $R(X,Y)\cdot K=0$ и имеющим нулевой индекс дефектности. Доказаны структурные теоремы о внутренней приводимости, о разложении в произведение в случае плоской нормальной связности. Доказаны также структурные теоремы для подмногообразий, удовлетворяющих условиям $R(X,Y)\cdot R=0$ и $\bar{R}(X,Y)\alpha_2=0$.

§2. Основные определения и формулы

Пусть M является m-мерным подмногообразием n-мерного евклидова пространства E_n. Через $<\ ,\ >$ будем обозначать скалярное произведение в E_n, а через g-индуцированную на M метрику. Пусть $\tilde{\nabla}$ и ∇ - римановы связности на E_n и M соответственно. Вторая фундаментальная форма (ф.ф.) α_2 определяется равенством $\alpha_2(X,Y)=\tilde{\nabla}_X Y-\nabla_X Y$, где X,Y - касательные к M векторные поля. α_2 является билинейной симметрической формой, определенной на $T(M)\times T(M)$ (где $T(M)$ - касательное расслоение), со значениями в нормальном расслоении $T^\perp(M)$. Если $\alpha_2=0$, то M называется вполне геодезическим подмногообразием. Для ковариантной производной $\tilde{\nabla}_x\xi$ нормального к M векторного поля ξ имеет место разложение $\bar{\nabla}_X\xi = -A_\xi(X) + \nabla^\perp_X\xi$ где $-A_\xi(X)$ и $\nabla^\perp_X\xi$ обозначают касательную и нормальную компоненты соответственно. A_ξ и α_2 связаны между собой формулой $\langle\alpha_2(X,Y),\xi\rangle = g(A_\xi(X),Y)$. Следовательно, A_ξ в каждой точке $x\in M$ для каждого вектора $\xi\in T^\perp_x(M)$ является симметрическим линейным преобразованием касательного пространства $T_x(M)$. Для нормального векторного поля ξ получается поле второго фундаментального тензора A_ξ соответствующее ξ. Нормальная компонента $\nabla^\perp_X\xi$ от $\bar{\nabla}_X\xi$ определяет в $T^\perp(M)$ некоторую метрическую связность $\nabla^\perp$, называемую нормальной связностью. Если $\nabla^\perp_X\xi = 0$ для любого касательного векторного поля X, то ξ называется параллельным нормальным векторным полем. Тензоры кривизны R и $R^\perp$ связностей ∇ и $\nabla^\perp$ определяются, соответственно, равенствами

$$R(X,Y)Z = [\nabla_X,\nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \quad R^\perp(X,Y)\xi = [\nabla^\perp_X,\nabla^\perp_Y]\xi - \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi.$$

Если $R^\perp = 0$, то говорят о подмногообразии с плоской нормальной связностью. Ковариантная производная ф.ф. α_2 в связности $\bar{\nabla}$ ван-дер-Вардена-Бортолотти определяется формулой

$$(\bar{\nabla}_X\alpha_2)(Y,Z) = \nabla^\perp_X\alpha_2(Y,Z) - \alpha_2(\nabla_X Y,Z) - \alpha_2(Y,\nabla_X Z),$$

где X, Y, Z – касательные к M векторные поля. Тензоры R, $R^\perp$, A_ξ и ф.ф. α_2 удовлетворяют следующим уравнениям

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle\alpha_2(X,W),\alpha_2(Y,Z)\rangle - \langle\alpha_2(X,Z),\alpha_2(Y,W)\rangle, \quad (2.1)$$

$$(\bar{\nabla}_X\alpha_2)(Y,Z) = (\bar{\nabla}_Y\alpha_2)(X,Z),$$

$$\langle R^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle = g([A_\xi,A_\eta]X,Y), \quad (2.2)$$

где X, Y, Z, W – произвольные касательные, а ξ, η – произвольные нормальные к M векторные поля. Эти уравнения называются уравнениями Гаусса, Кодацци и Риччи соответственно.

Нормальное векторное поле ξ называется коммутирующим, если $[A_\xi, A_\eta] = 0$ для любого нормального векторного поля η [7]. Из (2.2) следует, что коммутируемость ξ равносильна условию: $R^\perp(X,Y)\xi = 0$ для любых касательных полей X, Y. Если $A_\xi = \lambda I$ где λ-некоторая функция, а I – тождественное преобразование, то подмногообразие M называется омбилическим относительно ξ. Вектор средней кривизны H определяется равенством $H = tr\,\alpha_2$. Если $A_H = \lambda I$, то M называется псевдоомбилическим подмногообразием.

§3. Подмногообразия с полупараллельным тензором Риччи

Пусть R_{kijl} обозначают компоненты тензора кривизны R подмногообразия M в некотором адаптированном ортонорм-базисе $(e_1,\dots,e_m,e_{m+1},\dots,e_n)$, где $i,j,k,l,\dots=1,\dots,m$. Тогда компоненты K_{ij} тензора Риччи K определяются, как известно, равенством $K_{ij}=R_{kijl}\,\delta^{kl}$, где δ^{kl} – символ Кронекера. Так как $K_{ij}=K_{ji}$, то K мы будем рассматривать как симметрическое линейное преобразование касательного пространства $T_x(M)$, которое на касательный вектор $X=X^i e_i\in T_x(M)$ действует следующим образом: $K(X)=K_{ij}X^i\delta^{jk}e_k$. Ковариантная производная $\nabla_Y K$ тензора K определяется следующим равенством

$$(\nabla_Y K)(Z)=\nabla_Y K(Z)-K(\nabla_Y Z). \qquad (3.1)$$

Если $\nabla_Y K=0$ для любого касательного векторного поля Y, то говорят, что тензор Риччи K является параллельным или ковариантно постоянным.

Вторая ковариантная производная тензора K определяется равенством

$$(\nabla_X\nabla_Y K)(Z)=\nabla_X\nabla_Y K(Z)-\nabla_X K(\nabla_Y Z)-\nabla_{\nabla_X Y}K(Z)-$$
$$-\nabla_Y K(\nabla_X Z)+K(\nabla_{\nabla_X Y}Z)+K(\nabla_Y\nabla_X Z).$$

Путем непосредственного вычисления, с учетом того, что связность ∇ имеет нулевое кручение, т.е. $\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]$, получаем следующее тождество Риччи для K :

$$(\nabla_X\nabla_Y K)(Z)-(\nabla_Y\nabla_X K)(Z)=R(X,Y)K(Z)-K(R(X,Y)Z). \qquad (3.2)$$

Определение. Будем говорить, что тензор Риччи K подмногообразия M является полупараллельным, если $\nabla_X\nabla_Y K=\nabla_Y\nabla_X K$ для любых касательных к M векторных полей X,Y.

Из (3.2) следует, что K является полупараллельным тогда и только тогда, когда

$$K(R(X,Y)Z)=R(X,Y)K(Z) \qquad (3.3)$$

для любых X,Y,Z, т.е. когда тензор Риччи K коммутирует со всеми операторами кривизны $R(X,Y)$. Это обстоятельство имеет важные следствия, которые мы сформулируем и докажем в виде лемм.

Лемма 3.1. Пусть M – подмногообразие в E_n с полупараллельным тензором Риччи K. Тогда собственные распределения этого тензора

$\Delta_\varphi : x \in M \to \Delta_\varphi(x) = \{X \in T_x(M);\ K(X) = \rho_\varphi X\},\ \varphi = 1, \dots, n,$
инварианты относительно операторов кривизны $R(X,Y)$.

Доказательство. Действительно, если $Z \in \Delta_\varphi$, то $K(Z) = \rho_\varphi Z$ и мы имеем

$$K(R(X,Y)Z) = R(X,Y)K(Z) = \rho_\varphi R(X,Y)Z.$$

Следовательно, $R(X,Y)Z \in \Delta_\varphi$ для любых X, Y, что и доказывает инвариантность Δ_φ относительно операторов $R(X,Y)$Лемма доказана.

В следующей лемме $X_\psi, Y_\psi, \dots$ обозначают векторы из $\Delta_\varphi(x), \psi, \chi, \dots = 1, \dots, n$.

Лемма 3.2. Пусть выполняются условия леммы 3.I. Тогда $R(X_\varphi, Y_\varphi)Z_\chi = 0$, если хотя бы два индекса принимают различные значения.

Доказательство. Так как подпространства $\Delta_\varphi(x)$ и $\Delta_\psi(x)$ при $\varphi \neq \psi$ попарно вполне ортогональны (как подпространства собственных векторов симметрического тензора), то для любых X, Y имеем

$$g(R(X_\varphi, Y_\psi)X, Y) = g(R(X,Y)X_\varphi, Y_\psi) = 0.$$

Следовательно, $R(X_\varphi, Y_\psi)X = 0$ при $\varphi \neq \psi$. Применяя первое тождество Бианки, получим $R(X_\psi, Y_\psi)Z_\varphi = -R(Y_\psi, Z_\varphi)X_\psi - R(Z_\varphi, X_\psi)Y_\psi = 0$ при $\varphi \neq \psi$. Таким образом, $R(X_\varphi, Y_\psi)Z_\chi = 0$, если хотя бы два индекса принимают неравные значения. Лемма доказана.

Замечание 3.I. Утверждения лемм 3.I и 3.2 справедливы для произвольного риманова многообразия, на котором задано поле симметрического эндоморфизма A касательного расслоения, удовлетворяющее условию полупараллельности $\nabla_X\nabla_Y A = \nabla_Y\nabla_X A$. Действительно, при доказательстве этих лемм мы пользовались только этим условием.

Лемма 3.3. Пусть выполняются условия леммы 3.I и пусть нормальная связность подмногообразия M плоская. Тогда распределения Δ_φ сопряжены относительно ф.ф. α_2 т.т. $\alpha_2(X,Y) = 0$ для любого $X \in \Delta_\varphi$ и любого $Y \in \Delta_\psi$ при $\varphi \neq \psi$.

Доказательство. Пусть h^α_{ij} - компоненты ф.ф. α_2 в ортонормбазисе $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}, \alpha, \beta, \dots = m+1, \dots, n$.
Из уравнения Гаусса легко получаем

$$K_{ij} = R_{kijl}\,\delta^{kl} = \sum_\alpha (H^\alpha h^\alpha_{ij} - h^\alpha_{ik} h^{\alpha k}_j), \tag{3.4}$$

где H^α- компоненты вектора средней кривизны H_α. Так как нормальная связность плоская, то все матрицы (h_{ij}) некоторым ортогональным преобразованием могут быть одновременно приведены к диагональному виду $(\lambda_i^\alpha \delta_{ij})$. Подставляя в (3.4), получим

$$K_{ij} = \sum_\alpha [H^\alpha \lambda_i^\alpha - (\lambda_i^\alpha)^2] \cdot \delta_{ij}. \tag{3.5}$$

Отсюда следует, что матрица (K_{ij}) также имеет диагональный вид с диагональными элементами $\sum_\alpha [H^\alpha \lambda_i^\alpha - (\lambda_i^\alpha)^2]$. Следовательно, матрица (K_{ij}) коммутирует со всеми матрицами (h^α_{ij}) в любом базисе. Это означает, что тензор Риччи K коммутирует со всеми вторыми фундаментальными тензорами A_ξ, т.е. $K \cdot A_\xi = A_\xi \cdot K$. Если теперь $X \in \Delta_\varphi$, то $K(A_\xi(X)) = A_\xi(K(X)) = A_\xi(\varrho_\varphi X) = \varrho_\varphi A_\xi(X)$ и, следовательно, $A_\xi(X) \in \Delta_\varphi$. Пусть $Y \in \Delta_\psi$, причем $\psi \neq \varphi$. Тогда, в силу ортогональности подпространств $\Delta_\varphi(x)$ и $\Delta_\psi(x)$, будем иметь $\langle \alpha_2(X,Y), \xi \rangle = g(A_\xi(X), Y) = 0$. Так как ξ произвольно, то $\alpha_2(X,Y) = 0$. Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые конструкции и результаты, принадлежащие З.Сабо [20].

Пусть M - риманово многообразие с римановой связностью ∇ и тензором кривизны R. В линейном пространстве всех кососимметрических линейных операторов $T_x(M) \to T_x(M)$ рассмотрим линейное подпространство h_x, натянутое на $R_x(X,Y)$, где $X, Y \in T_x(M)$, x - фиксированная точка в M, т.е. $h_x = \operatorname{span} R(X,Y)$. Для $R_x(X,Y)$ и $R_x(Z,W)$ из h_x определим коммутатор по формуле

$$[R_x(X,Y), R(Z,W)] = R_x(X,Y) \cdot R_x(Z,W) - R_x(Z,W) \cdot R_x(X,Y). \tag{3.6}$$

Обозначим через $\bar{h}_x$ алгебру Ли, порожденную множеством h_x и пусть P_x - связная подгруппа группы изометрий в $T_x(M)$, определенная алгеброй Ли $\bar{h}_x$. Эта подгруппа называется примитивной группой голономии в точке x. Пусть

$$T_x(M) = V_x^{(0)} + V_x^{(1)} + \ldots + V_x^{(t)} \tag{3.7}$$

является неприводимым разложением пространства $T_x(M)$ относительно P_x. Подпространства $V_x^{(\varrho)}$ инварианты относительно P_x и попарно вполне ортогональны. Более того, P_x действует на $V_x^{(0)}$ тривиально, а на $V_x^{(\varrho)}$, $\varrho > 0$, неприводимо. Разложение (3.7) называется V-разложением пространства $T_x(M)$.

<u>Теорема 3.I</u>. (Сабо З. [20]). На римановом многообразии M существует всюду плотное открытое множество G, на котором размерности подпространств $V_x^{(\varrho)}$ постоянны, разложение (3.7) единственно с точностью до порядка прямых слагаемых, а соответствующие распределения $V^{(\varrho)}$ на G обладают

следующими свойствами:

$$\nabla_{V^{(0)}}V^{(0)} \subseteq V^{(0)},\ \nabla_{V^{(0)}}V^{(\rho)} \subseteq V^{\rho},\ \nabla_{V^{(\rho)}}V^{(0)} \subseteq V^{(0)}+V^{(\rho)},$$

$$\nabla_{V^{(\rho)}}V^{(\rho)} \subseteq V^{(0)}+V^{(\rho)}\ \nabla_{V^{(\tau)}}V^{(\rho)} \subseteq V^{(\rho)}\ \tau\neq\rho,\ \tau,\rho\neq 0,$$

где $\nabla_{V^{(\tau)}}V^{(\rho)} \subseteq V^{(\sigma)}$ означает, что для любого $X \in V^{(\tau)}$ и любого $Y \in V^{(\rho)}$ вектор $(\nabla_X Y)_x$ принадлежит $V_x^{(\sigma)}$.

Замечание 3.2. В (3.7) подпространство $V_x^{(0)}$ - это, так называемое, пространство дефектности многообразия M в точке x, которое было определено и изучено Ченом и Кейпером [10]. По определению, $V_x^{(0)}=\{Z\in T_x(M):\ R(X,Y)Z=0$ для любых $X,Y\in T_x(M)\}$. Если учесть свойства тензора R, то легко получить, что $V_x^{(0)}=\{X\in T_x(M):\ R(X,Y)=0$ для любого $Y\in T_x(M)\}$. Размерность $\mu_x=\dim V_x^{(0)}$ называется индексом дефектности многообразия M в точке x. Из теоремы 3.1 следует, что если $\mu=0$ на G, то

$$\nabla_{V^{(\rho)}}V^{(\rho)} \subseteq V^{(\rho)},\ \nabla_{V^{(\tau)}}V^{(\rho)} \subseteq V^{(\rho)},\ \tau\neq\rho, \tag{3.8}$$

и распределения $V^{(\rho)}$ параллельны в связности ∇.

Продолжим изучение подмногообразия M с полупараллельным тензором Риччи K в евклидовом пространстве E_n.

Пусть $\Delta_\varphi(x)$- некоторое подпространство собственных векторов тензора K. Из леммы 3.1 следует, что $R(X_\varphi,Y_\varphi)\Delta_\varphi(x)\subseteq \subseteq\Delta_\varphi^{(x)}$, где $X_\varphi, Y_\varphi\in\Delta_\varphi(x)$, а из леммы 3.2 получаем, что эндоморфизмы $R(X_\varphi,Y_\varphi)$ действует на $\Delta_\psi(x)$, $\psi\neq\varphi$, тривиальным образом. Точно так же, как и выше, получается линейное подпространство $h_x^{(\varphi)}=span\ R(X_\varphi,Y_\varphi)$ в линейном пространстве всех кососимметрических эндоморфизмов $\Delta_\varphi(x)\to\Delta_\varphi(x)$. Обозначим через $h_x^{(\varphi)}$ алгебру Ли, порожденную множеством $h_x^{(\varphi)}$ относительно скобочной операции (3.6). Она будет подалгеброй алгебры Ли h_x. Следовательно, h_x является прямой суммой своих подалгебр $h_x^{(\varphi)}$. Тогда примитивная группа голономии P_x приводима и имеет место разложение

$$P_x=P_x^{(1)}\times P_x^{(2)}\times\ldots\times P_x^{(r)},$$

где $P_x^{(\varphi)}$ - связная подгруппа группы изометрий в $\Delta_\varphi(x)$, определенная алгеброй $h_x^{(\varphi)}$. Подгруппа $P_x^{(\varphi)}$ действует на $\Delta_\psi(x)$, $\psi\neq\varphi$, тривиально, а на $\Delta_\varphi(x)$ она, вообще говоря, может быть приводимой. Пусть

$$\Delta_\varphi(x)=V_x^{(\varphi,0)}+V_x^{(\varphi,1)}+\ldots+V_x^{(\varphi,s_\varphi)}$$

является неприводимым разложением $\Delta_\varphi(x)$ относительно $P_x^{(\varphi)}$. Тогда

$$T_x(M) = V_x^{(0)} + V_x^{(1,1)} + \ldots + V^{(1,s_1)} +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ V_x^{(n,1)} + \ldots + V_x^{(n,s_n)} \qquad (3.9)$$

будет V-разложением пространства $T_x(M)$, где $V_x^{(0)} = V_x^{(1,0)} + \ldots + V_x^{(n,0)}$. Если подмногообразие M имеет нулевой индекс дефектности в области G, определенной теоремой 3.I, то в этой области $V_x^{(0)}$ – нулевое подпространство, а $V^{(\varphi,s_\varphi)}$ параллельны в связности ∇ в силу включений (3.8). Тогда и Δ_φ параллельны в связности ∇ и, следовательно, инволютивны и геодезичны, т.е. их интегральные многообразия M^φ вполне геодезичны в M. Из леммы 3.2 следует, что тензор кривизны R^φ интегрального многообразия M^φ является ограничением на M^φ тензора кривизны R. Тогда и тензор Риччи K^φ для M^φ будет ограничением тензора Риччи K. Так как на M^φ имеет единственное собственное значение ρ_φ, то $K^\varphi = \rho_\varphi I$. Следовательно, $K^\varphi \cdot R^\varphi(X,Y) = R^\varphi(X,Y) \cdot K^\varphi$ для любых касательных к M^φ векторных полей X, Y, что равносильно полупараллельности K^φ. Таким образом, M^φ как подмногообразие в E_n также имеет полупараллельный тензор Риччи. При этом $\dim M^\varphi \geqslant 2$ для любого φ, ибо в противном случае индекс дефектности подмногообразия M был бы отличен от нуля. Очевидно, что каждое M^φ также имеет нулевой индекс дефектности, ибо в противном случае, если индекс дефектности какого-либо M^φ отличен от нуля, подмногообразие M также будет иметь ненулевой индекс дефектности. Следовательно, справедлива

<u>Теорема 3.2</u>. Пусть M – подмногообразие с полупараллельным тензором Риччи K в евклидовом пространстве E_n и с нулевым индексом дефектности в каждой точке. Тогда в некоторой области на M собственные распределения $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ тензора K параллельны в связности ∇ и, следовательно, инволютивны и их интегральные многообразия $M^1, \ldots, M^n$ вполне геодезичны в M. При этом каждое M^φ как подмногообразие в E_n имеет полупараллельный тензор Риччи, пропорциональный метрическому тензору, нулевой индекс дефектности и $\dim M^\varphi \geqslant 2$ для любого φ.

<u>Замечание 3.3</u>. Легко проверить, что если $V_x^{(0)}$ – пространство дефектности подмногообразия M в точке x и $X \in V_x^{(0)}$, то $K(X) = 0$. Отсюда следует, что $V_x^{(0)}$, где $\Delta_x^{(0)}$ обозначает подпространство собственных векторов тензора K, отвечающих нулевому собственному значению. Следовательно,

если $\operatorname{rang} K = m (m = \dim M)$ в каждой точке $x \in M$, то подмногообразие M имеет нулевой индекс дефектности. Если написать ∇-разложение $\Delta_x^{(0)}$ и учесть включения из теоремы 3.I, легко видеть, что распределение $\Delta^{(0)}$ является геодезическим, т.е. его интегральное многообразие вполне геодезично в M (при условии полупараллельности K).

Пусть выполняются условия теоремы 3.2 и пусть нормальная связность подмногообразия M является плоской. Тогда распределения Δ_φ сопряжены относительно второй ф.ф. α_2 (лемма 3.3) и так как они параллельны в связности ∇ , то выполняются условия основной леммы Мура [I6]. Следовательно, M является произведением интегральных многообразий M^φ (это значит, что каждое M^φ содержится в некотором подпространвсте E_{n_φ} пространства E_n и любые два подпространства E_{n_φ} и E_{n_ψ}, $\varphi \neq \psi$, вполне ортогональны в E_n). Покажем, что каждое M^φ в E_{n_φ} также имеет плоскую нормальную связность. Действительно, так как M имеет плоскую нормальную связность, то все вторые фундаментальные тензоры A_ξ коммутируют между собой (это следует из уравнения Риччи (2.3)). В ходе доказательства леммы 3.3 было доказано, что $\Delta_\varphi(x)$ инвариантны относительно тензоров A_ξ. Поэтому в каждом подпространстве $\Delta_\varphi(x)$ мы можем ортонормбазис выбрать так, чтобы матрицы всех тензоров A_ξ имели диагональный вид. Так как M^φ вполне геодезично в M, то все вторые фундаментальные тензоры A_ξ^φ для M^φ будут ограничениями соответствующих тензоров A_ξ. Но тогда матрицы тензоров A_ξ^φ также будут иметь диагональный вид и, следовательно, все тензоры A_ξ^φ будут коммутировать между собой. Это равносильно тому, что нормальная связность M^φ в E_{n_φ} плоская. Этим доказана следующая

<u>Теорема 3.3</u>. Пусть выполняются условия теоремы 3.2 и пусть нормальная связность подмногообразия M является плоской. Тогда M разлагается в произведение подмногообразий $M^1, \dots, M^r$, где каждое M^φ также имеет полупараллельный тензор Риччи, пропорциональный метрическому тензору, плоскую нормальную связность, нулевой индекс дефектности и $\dim M^\varphi \geq 2$ для любого φ .

§4. О двух классах подмногообразий с полупараллельным тензором Риччи

I. Внутренне полусимметрические подмногообразия. Риманово многообразие M $(\dim M = m)$ с римановой связностью ∇ и тензором кривизны R называется полусимметрическим, если $R(X,Y)\cdot R=0$ для любых касательных векторных полей X, Y или, более подробно, $\nabla_X \nabla_Y R - \nabla_Y \nabla_X R - \nabla_{[X,Y]} R = 0$. Пусть R_{kijl} - компоненты тензора R в некотором ортонормбазисе $(e_1, \dots, e_m)$. Тогда это условие равносильно следующему: $\nabla_p \nabla_q R_{kijl} = \nabla_q \nabla_p R_{kijl}$, где $\nabla_p = \nabla_{e_p}$. Свертывая обе части этого равенства с δ^{kl}, получим $\nabla_p \nabla_q K_{ij} = \nabla_q \nabla_p K_{ij}$, что равносильно полупараллельности тензора Риччи K. Следовательно, справедлива

Лемма 4.I. Тензор Риччи произвольного полусимметрического риманова многообразия M является полупараллельным.

Пусть теперь M является подмногообразием евклидова пространства E_n. Если его тензор кривизны R удовлетворяет условию $R(X,Y)\cdot R=0$ для любых касательных векторных полей X, Y, то мы будем называть M внутренне полусимметрическим подмногообразием. Лемма 4.I гласит, что каждое внутренне полусимметрическое подмногообразие имеет полупараллельный тензор Риччи. Для этого класса подмногообразий теоремы 3.2 и 3.3 принимают, соответственно следующий вид.

Теорема 4.I. Пусть M - внутренне полусимметрическое подмногообразие с нулевым индексом дефектности в E_n. Тогда в некоторой области на M собственные распределения $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ тензора Риччи K параллельны в связности ∇ и, следовательно, инволютивны и их интегральные многообразия $M^1, \dots, M^r$ вполне геодезичны в M. При этом каждое M^φ, как подмногообразие в E_n, является внутренне полусимметрическим, имеет нулевой индекс дефектности, его тензор Риччи пропорционален метрическому тензору и $\dim M^\varphi \geqslant 2$ для любого φ.

Теорема 4.2. Пусть выполняются условия теоремы 4.I и пусть нормальная связность подмногообразия M является плоской. Тогда M разлагается в произведение подмногообразий $M^1, \dots, M^r$, где каждое M^φ является внутренне полусимметрическим, имеет плоскую нормальную связность, нулевой индекс дефектности, его тензор Риччи пропорцианален метрическому тензору и $\dim M^\varphi \geqslant 2$ для любого φ.

В теоремах 4.1 и 4.2 в доказательстве нуждается только то, что каждое M^φ является внутренне полусимметрическим. Это легко усматривается из следующих соображений.

Пусть Δ_φ – некоторое собственное распределение тензора Риччи K. Так как Δ_φ параллельно, то для любых $X, Y \in \Delta_\varphi$ имеем $\nabla_X Y \in \Delta_\varphi$. Этим определяется риманова связность ∇^φ на M^φ, которая является ограничением связности ∇ на M^φ. Тензор кривизны R^φ этой связности, как следует из леммы 3.2, есть ограничение тензора R на M^φ. Теперь, в силу инвариантности Δ_φ относительно операторов $R(X,Y)$, легко видеть, что ковариантные производные $(\nabla^\varphi_Y R^\varphi)(Z,U)W$, $(\nabla^\varphi_X \nabla^\varphi_Y R^\varphi)(Z,U)W$ для любых $X,Y,Z,U,W \in \Delta_\varphi$ совпадают, соответственно, с ковариантными производными $(\nabla_Y R)(Z,U)W$, $(\nabla_X \nabla_Y R)(Z,U)W$. Следовательно,

$$(\nabla^\varphi_X \nabla^\varphi_Y R^\varphi)(Z,U)W - (\nabla^\varphi_Y \nabla^\varphi_X R^\varphi)(Z,U)W - (\nabla^\varphi_{[X,Y]} R^\varphi)(Z,U)W =$$
$$= (\nabla_X \nabla_Y R)(Z,U)W - (\nabla_Y \nabla_X R)(Z,U)W - (\nabla_{[X,Y]} R)(Z,U)W = 0$$

для любых $X,Y,Z,U,W \in \Delta_\varphi$ и M^φ – внутренне полусимметрическое подмногообразие.

Полные внутренне полусимметрические гиперповерхности классифицировал З.Сабо [21].

2. Полусимметрические подмногообразия. Подмногообразие M в E_n называется полусимметрическим, если его вторая ф.ф. α_2 удовлетворяет условию $\bar\nabla_X \bar\nabla_Y \alpha_2 = \bar\nabla_Y \bar\nabla_X \alpha_2$ для любых касательных к M векторных полей X, Y. Если для связности $\bar\nabla$ определить тензор кривизны $\bar R$ по формуле $\bar R(X,Y) = [\bar\nabla_X, \bar\nabla_Y]$, то условие полусимметричности M примет следующий вид: $\bar R(X,Y)\alpha_2 = 0$. Условие полусимметричности можно записать также в другой, эквивалентной, форме:

$$\bar R(X,Y) A_\xi = \bar\nabla_X \bar\nabla_Y A_\xi - \bar\nabla_Y \bar\nabla_X A_\xi = 0$$

для любых касательных к M векторных полей X, Y и любого нормального векторного поля ξ. Справедлива следующая

Лемма 4.2. Подмногообразие M в E_n является полусимметрическим тогда и только тогда, когда

$$R(X,Y)A_\xi(Z) = A_\xi(R(X,Y)Z) + A_{R^\perp(X,Y)\xi}(Z) \qquad (4.1)$$

для любых касательных к M векторных полей X, Y и любого нормального векторного поля ξ.

Доказательство этой леммы непосредственно следует из тождества

$$(\bar{R}(X,Y)A_\xi)(Z)=R(X,Y)A_\xi(Z)-A_\xi(R(X,Y)Z)-A_{R^\perp(X,Y)\xi}(Z).$$

Лемма 4.3. Каждое полусимметрическое подмногообразие является внутренне полусимметрическим.

Доказательство. Пусть h^α_{ij} и R_{ijkl} – компоненты ф.ф. α_2 и тензора кривизны R полусимметрического подмногообразия M в некотором адаптированном ортонормбазисе $(e_1,\dots,e_m,e_{m+1},\dots,e_n)$. Из уравнения Гаусса (2.I) легко получаем

$$R_{ijkl}=\sum_\alpha(h^\alpha_{il}h^\alpha_{ik}-h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl}).$$

Отсюда, путем прямого вычисления, имеем

$$\nabla_q\nabla_p R_{ijkl}-\nabla_p\nabla_q R_{ijkl}=\sum_\alpha\{(\bar\nabla_q\bar\nabla_p h^\alpha_{il}-\bar\nabla_p\bar\nabla_q h^\alpha_{il})h^\alpha_{jk}+$$
$$+(\bar\nabla_q\bar\nabla_p h^\alpha_{jk}-\bar\nabla_p\bar\nabla_q h^\alpha_{jk})h^\alpha_{il}-(\bar\nabla_q\bar\nabla_p h^\alpha_{ik}-\bar\nabla_p\bar\nabla_q h^\alpha_{ik})h^\alpha_{jl}-$$
$$-(\bar\nabla_q\bar\nabla_p h^\alpha_{jl}-\bar\nabla_p\bar\nabla_q h^\alpha_{jl})h^\alpha_{ik}\}$$

Условие $\bar\nabla_q\bar\nabla_p h^\alpha_{ij}=\bar\nabla_p\bar\nabla_q h^\alpha_{ij}$, очевидно, равносильно полусимметричности M. Следовательно, в правой части написанного выше равенства все круглые скобки равны нулю и мы получаем $\nabla_p\nabla_q R_{ijkl}=\nabla_q\nabla_p R_{ijkl}$, что равносильно внутренней полусимметричности M. Лемма доказана.

Следствие. Каждое полусимметрическое подмногообразие M в E_n имеет полупараллельный тензор Риччи.

Таким образом, к полусимметрическим подмногообразиям применимы теоремы 4.I и 4.2. Однако, в этом случае к описанию локального строения подмногообразия можно подойти несколько иначе, если воспользоваться условием (4.I). Справедлива следующая

Лемма 4.4. Вектор средней кривизны H полусимметрического подмногообразия является коммутирующим.

Доказательство. Так как ковариантные дифференцирования перестановочны со свертываниями, то

$$\bar\nabla_X\bar\nabla_Y H=\bar\nabla_X\bar\nabla_Y\,tr\,\alpha_2=tr\,\bar\nabla_X\bar\nabla_Y\alpha_2=$$
$$=tr\,\bar\nabla_Y\bar\nabla_X\alpha_2=\bar\nabla_Y\bar\nabla_X tr\,\alpha_2=\bar\nabla_Y\bar\nabla_X H.$$

Отсюда и из тождества $\bar\nabla_X\bar\nabla_Y H-\bar\nabla_Y\bar\nabla_X H=R^\perp(X,Y)H$ непосредственно получаем $R^\perp(X,Y)H=0$ для любых X,Y. Лемма доказана.

Замечание 4.I. Другим способом эта лемма доказана Депри [II], а еще раньше, для случая $\bar\nabla\bar\nabla\alpha_2=0$ она доказана автором [7].

$$A_H(R(X,Y)Z) = R(X,Y)A_H(Z). \tag{4.2}$$

Следовательно, справедлива следующая

Лемма 4.5. Пусть M - полусимметрическое подмногообразие в E_n. Тогда его второй фундаментальный тензор A_H, соответствующий вектору средней кривизны, коммутирует со всеми операторами кривизны $R(X,Y)$.

Тождество (4.2) аналогично (3.3). Делая такие же рассуждения для собственных распределений Δ'_φ тензора A_H, какие были сделаны в §3 для собственных распределений тензора Риччи K, мы получим, что они параллельны, если подмногообразие M имеет нулевой индекс дефектности. Так как $R^\perp(X,Y)H = 0$, то из уравнения Риччи (2.2) получаем, что $[A_H, A_\xi]=0$ для любого ξ. Тогда Δ'_φ будут инвариантны относительно всех тензоров A_ξ и, следовательно, они будут сопряжены относительно ф.ф. α_2. Следовательно, подмногообразие M разлагается в произведение интегральных многообразий M'^φ распределений Δ'_φ. При этом каждое M'^φ также будет полусимметрическим подмногообразием. Это вытекает из следующего результата Лумисте [14]: если подмногообразие M является произведением подмногообразий $M^1, \dots, M^t$, то оно будет полусимметрическим тогда и только тогда, когда каждый сомножитель является полусимметрическим. Так как M'^φ вполне геодезично в M, то все его вторые фундаментальные тензоры являются ограничениями тензоров A_ξ на M'^φ. Тогда и вектор средней кривизны H'^φ для M'^φ является ограничением вектора H. Следовательно, $A_{H'^\varphi} = A_{H|M'^\varphi}$, и, так как $A_{H|M'^\varphi}$ имеет только собственное значение, M'^φ является псевдоомбилическим.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 4.3. Пусть M - полусимметрическое подмногообразие с нулевым индексом дефектности в E_n. Тогда, в некоторой области на M собственные распределения Δ'_φ второго фундаментального тензора A_H параллельны в связности ∇, сопряжены относительно ф.ф. α_2 и попарно вполне ортогональны. При этом M локально разлагается в произведение интегральных многообразий $M'^1, \dots, M'^t$ распределений $\Delta'_1, \dots, \Delta'_t$ соответственно. Каждое M'^φ является псевдоомбилическим полусимметрическим подмногообразием с нулевым индексом дефектности и $\dim M'^\varphi \geq 2$ для любого φ.

Замечание 4.2. Эта теорема для частного случая нулевого индекса дефектности усиливает результат из [14], где условие параллельности собственных распределений для A_H в связности ∇ принимается за предположение. Заметим, что доказательство в [14] проводится не с применением леммы Мура, а непосредственными выкладками.

Подмногообразия с параллельным тензором Риччи, $\nabla K = 0$, (в частности, внутренне симметрические подмногообразия, характеризующиеся условием $\nabla R = 0$), также входят в класс подмногообразий с полупараллельным тензором Риччи. Для них структурные теоремы будут доказаны в одной из следующих публикаций. Частный случай внутренне симметрических подмногообразий в E_n рассмотрен автором в [8].

Литература

1. К а й г о р о д о в В. Р. О римановых пространствах K_n^s // Тр. геометр. семин. М., 1974. Т.5. С.359-373.
2. К а й г о р о д о в В. Р. Полусимметрические лоренцовы пространства с совершенной группой голономии.// Гравит. и теория относит. 1978. Вып. 14-15.С.113-120.
3. К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К. Основы дифференциальной геометрии. Т. II, М.: Наука, 1981.
4. К о в а л е в П. И. Тройные системы Ли и пространства аффинной связности.// Мат. заметки. 1973. Т. 14. С. 107-112.
5. Л у м и с т е Ю. Г. Неприводимые нормально плоские полусимметрические подмногообразия. I. // Изв. вузов. Матем.
6. Л у м и с т е Ю. Г. Неприводимые нормально плоские полусимметрические подмногообразия. II // Изв. вузов. Матем.
7. М и р з о я н В. А. Подмногообразия с коммутирующим нормальным векторным полем.// Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. Пробл. геометрии. 1983. Т. 14. С.73-100.
8. М и р з о я н В. А. О подмногообразиях с параллельной фундаментальной формой α_s $(s \geq 3)$. // Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1991, Вып. 930, с. 97-112.
9. С и н ю к о в Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука. 1979.

10. C h e r n S. S., K u i p e r N. H. Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space.// Ann. of Math. 1952. V.56. P. 422-430.

11. D e p r e z J. Semi-parallel surfaces in euclidean space. // J. of Geometry. 1985. V. 25. P. 192-200.

12. D e p r e z J. Semi-parallel hypersurfaces.// Rend. semin. mat. Univ. politecn. Torino. 1987. V.44. No.2. P. 303-316.

13. L u m i s t e Ü. Decomposition and classification theorems for semisymmetric immersions.// Proc. Acad. sci. Eston. SSR. Physics. Mathem. 1987. V.36. No. 4. P. 414-417.

14. L u m i s t e Ü. Decomposition of semi-symmetric submanifolds.// Tartu Ülikooli Toimetised. 1988. 803. P. 69-78.

15. L u m i s t e Ü. Normally flat semi-symmetric submanifolds. // Diff. geom. and appl. (Proc. of conf. June 26-July 3). Dubrovnik, 1988. P. 159-171.

16. M o o r e J. D. Isometric immersions of riemannian products.// J. Diff. Geom. 1971. V. 5. P. 159-168.

17. N o m i z u K. On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor.// Tôhoku Math. J. 1968. V.20. P. 46-59.

18. R e c k z i e g e l H. Krümmungsflächen von isometrischen Immersionen in Räume konstanter Krümmung.// Math. Ann. 1976. V. 223. No. 2. P. 169-181.

19. S e k i g a w a K. On some hypersurfaces satisfying $R(X,Y)\cdot R_1 = 0$ // Hokkaido Math. J. 1972. V. 1, No 1. P. 102-109.

20. S z a b o Z. I. Structure theorems on riemannian spaces satisfying $R(X,Y)\cdot R = 0$. I. The local version. // J. Diff. Geom. 1982. V. 17. P. 531-582.

21. S z a b o Z. I. Classification and construction of complete hypersurfaces satisfying $R(X,Y)\cdot R = 0$ // Acta sci. math. 1984. V. 47. No. 3-4. P. 321-348.

22. T a n n o S. Hypersurfaces satisfying a certain condition on the Ricci tensor.// Tôhoku Math. J. 1969, V. 21. P. 297-303.

Поступило
I5 V 1991

SUBMANIFOLDS WITH SEMI-PARALLEL RICCI TENSOR

V.Mirzoyan

S u m m a r y

Let M be a Riemannian manifold with Levi-Civita connection ∇, $R(X,Y)$ its curvature operator for vector fields X and Y and K its Ricci tensor. This tensor K is said to be semi-parallel if $\bar\nabla_X \bar\nabla_Y K = \bar\nabla_Y \bar\nabla_X K$ or, equivalently $R(X,Y)K(Z) = K(R(X,Y)Z)$ for every X, Y, Z. Let M be a submanifold in a Euclidean space E_n with semi-parallel Ricci tensor, zero nullity index and flat normal connection. It is proved that euch M is a product submanifold $M^1 \times \dots \times M^r$, $\dim M^\rho \geqslant 2$, $1 \leqslant \rho \leqslant r$, where every M^ρ has semi-parallel Ricci tensor, proportional to the metric teneor, its normal connection is flat and nullity index ie zero. Analogous decomposition theorems are proved for more special cases of intrinsically semi-symmetric submanifolds (i.e. satisfying $R(X,Y)R=0$) and of semi-symmetric submanifolds (i.e. satisfying $\bar R(X,Y)\alpha_2=0$, where $\bar R$ is the van der Waerden-Bortolotti curvature tensor and α_2 is the second fundamental form).

TÜ Toimetised,
930 (1991), 129-161.

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
1991, 930, 129-161.

ЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗНОСТИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

А.Парринг
Кафедра алгебры и геометрии

Аффинные (линейные) связности высших порядков рассматривались Г.Ф.Лаптевым в работе [3]. Там для гладкого многообразия M_n построено продолженное гладкое многообразие (присоединенное расслоение) порядка p. На соответствующем главном расслоении, структурной группой которого является голономная дифференциальная группа L^p_n порядка p, определяется аффинная связность. Она называется аффинной связностью порядка p. Более подробно такие связности при $p = 2$ рассматривались А.К.Рыбниковым в статьях [6, 7]. В статье [6] структурной группой главного расслоения является голономная дифференциальная группа L^2_n, а в [7] неголономная дифференциальная группа $\bar{L}^2_n$.

В данной статье рассматриваются также линейные связности высших порядков, но при неголономной дифференциальной группе. Чтобы лучше объяснить сущность линейных связностей порядка p (кратко p-связностей), применим хорошо известные обычные линейные связности на подходящем гладком многообразии, построенном по заданному многообразию M_n. При этом мы используем аппарат как векторных полей, так и дифференциальных форм, предпочитая первый из них.

В данном случае подходящим многообразием является p-касательное гладкое многообразие $\bar{D}^p(M_n)$, которое является векторным расслоением ступенчатого строения с базой M_n. Это расслоение $\bar{D}^p(M_n)$ является ассоциированным расслоением для главного p-расслоения p-реперов $H^p(M_n, \pi_p, \bar{L}^p_n)$. Класс линейных связностей на гладком многообразии $\bar{D}^p(M_n)$, точнее на главном расслоении реперов $H(\bar{D}^p(M_n))$, содержит интересующие нас линейные p-связности. Для их получения надо приклеить $\bar{D}^p(M_n)$ к базе M_n, а главное расслоение $H(\tilde{D}\Gamma(M_n))$ редуцировать к неголономной дифференциальной группе $\tilde{L}\Gamma_k$. Такой подход к линейным p-связностям дает возможность использовать при их изучении теорию линейных связностей. Так, например, можно сразу выписать формулы ковариантного дифференцирования при линейной p-связности. Кроме того, приводится один класс линейных p-связностей на M_n, каждая связность которого при $p=2$ дает 2-связность, рассмотренную в [7].

Вообще связности высшего порядка на гладком многообразии и на продолженном главном расслоении рассматривается Ш.Эресманом (см. [9, 10]). Обзор теории связностей дан Ю.Лумисте в [5].

1. Пусть M_n является n-мерным многообразием и $A(M_n)=\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ его атласом. Обозначим через $\mathcal{F}(M_n)$ кольцо гладких функций на M_n, а через $\mathfrak{X}(M_n)$ и $\mathfrak{X}^*(M_n)$ соответственно модули векторных полей и 1-форм на M_n. Аналогичные обозначения $\mathcal{F}(\mathcal{U})$, $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$ и $\mathfrak{X}^*(\mathcal{U})$ введем для произвольной области $\mathcal{U}\subset M_n$.

Определение. Говорят, что на области $\mathcal{U}\subset M_n$ задано гладкое реперное поле, если на $\mathcal{U}$ заданы n гладких векторных полей $e_i\in\mathfrak{X}(\mathcal{U})$, где $i,j,\ldots=1,\ldots,n$, векторы которых в каждой точке $x\in\mathcal{U}$ образуют линейно независимую систему $\{e_i(x)\}$.

Каждое векторное поле $X\in\mathfrak{X}(\mathcal{U})$ выражается через базисные поля $\{e_i\}$ по формуле $X=\xi^i e_i$, где $\xi^i\in\mathcal{F}(\mathcal{U})$. Поскольку каждое векторное поле $X\in\mathfrak{X}(M_n)$ есть отображение $X:\mathcal{F}(M_n)\longrightarrow\mathcal{F}(M_n)$, то можно определить их суперпозицию (композицию). Исходя из реперного поля, составленного из $e_{k_1}\in\mathfrak{X}(\mathcal{U})$, определим следующие поля $e_{k_1k_2}, e_{k_1k_2k_3},\ldots, e_{k_1k_2\ldots k_p}$, как отображения $\mathcal{F}(M)\longrightarrow$ $\longrightarrow\mathcal{F}(M_n)$ рекуррентной формулой

$$e_{k_1k_2\ldots k_{t-1}k_t}=e_{k_t}\,e_{k_1k_2\ldots k_{t-1}},$$

где $t=2,\ldots,p$, а p произвольно фиксированное натуральное число. Разумеется, поля $e_{k_1\ldots k_t}$ не являются векторными полями.

Определение. Система гладких полей $\{e_{k_1}, e_{k_1k_2},\ldots, e_{k_1\ldots k_p}\}$, заданная на области $\mathcal{U}\subset M_n$, называется p-реперным полем на $\mathcal{U}$.

По этому определению реперное поле $\{e_k\}$ является 1-реперным полем. Пусть заданы два p-реперных поля

$$\{ e_{k_1}, e_{k_1k_2}, \dots, e_{k_1\dots k_p} \} \qquad (1.1)$$

и

$$\{ e_{k_1'}, e_{k_1'k_2'}, \dots, e_{k_1'\dots k_p'} \} \qquad (1.2)$$

соответственно на областях $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ с непустым пересечением $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = V$ На пересечении V 1-реперные поля $\{e_{k_1}\}$ и $\{e_{k_1'}\}$ связаны формулами

$$e_{k_1'} = A^{k_1}_{k_1'} e_{k_1}, \qquad (1.3)$$

где $A^{(1)} = \| A^{k_1}_{k_1'} \|$ матричная функция на V, принимающая значения в $GL(n, \mathbb{R})$. Чтобы найти формулы, аналогичные (1.3), для 2-реперных полей $\{e_{k_1}, e_{k_1k_2}\}$ и $\{e_{k_1'}, e_{k_1'k_2'}\}$ надо дополнительно к (1.3) выразить $e_{k_1'k_2'}$ через e_{k_1} и $e_{k_1k_2}$. При произвольной гладкой функции $f \in \mathcal{F}(V)$ из

$$\begin{aligned} e_{k_1'k_2'} f = (e_{k_2'} e_{k_1'}) f = A^{k_2}_{k_2'} (e_{k_2} (A^{k_1}_{k_1'} (e_{k_1} f))) = \\ = (e_{k_2'} A^{k_1}_{k_1'})(e_{k_1} f) + A^{k_2}_{k_2'} A^{k_1}_{k_1'} e_{k_2} (e_{k_1} f) = \\ = ((e_{k_2'} A^{k_1}_{k_1'}) e_{k_1} + A^{k_2}_{k_2'} A^{k_1}_{k_1'} e_{k_1k_2}) f \end{aligned}$$

следует

$$e_{k_1'k_2'} = A^{k_1}_{k_1'k_2'} e_{k_1} + A^{k_1k_2}_{k_1'k_2'} e_{k_1k_2},$$

где

$$A^{k_1}_{k_1'k_2'} = e_{k_2'} A^{k_1}_{k_1'}, \qquad A^{k_1k_2}_{k_1'k_2'} = A^{k_1}_{k_1'} A^{k_2}_{k_2'}.$$

Итак, (1.3) индуцирует

$$e_{k_1'} = A^{k_1}_{k_1'} e_{k_1},$$

$$e_{k_1'k_2'} = A^{k_1}_{k_1'k_2'} e_{k_1} + A^{k_1k_2}_{k_1'k_2'} e_{k_1k_2},$$

где

$$A^{(2)} = \begin{Vmatrix} A^{k_1}_{k_1'} & A^{k_1}_{k_1'k_2'} \\ 0 & A^{k_1k_2}_{k_1'k_2'} \end{Vmatrix}$$

– матричная функция на V.

Оказывается, что (1.2) выражается через (1.1) следующим образом

$$e_{k_1'\dots k_t'} = \sum_{s=1}^{t} A^{k_1\dots k_s}_{k_1'\dots k_t'} e_{k_1\dots k_s} \quad (t = 1, 2, \dots, p), \qquad (1.4)$$

где

$$A^{k_1}_{k'_1\ldots k'_{t-1}k'_t} = e_{k'_t} A_{k'_1\ldots k'_{t-1}},$$

$$A^{k_1\ldots k_{s-1}k_s}_{k'_1\ldots k'_{t-1}k'_t} = e_{k'_t} A^{k_1\ldots k_{s-1}k_s}_{k'_1\ldots k'_{t-1}} + A^{k_s}_{k'_t} A^{k_1\ldots k_{s-1}}_{k'_1\ldots k'_{t-1}} \quad (1 < s < t), \tag{1.5}$$

$$A^{k_1\ldots k_{t-1}k_t}_{k'_1\ldots k'_{t-1}k'_t} = A^{k_t}_{k'_t} A^{k_1\ldots k_{t-1}}_{k'_1\ldots k'_{t-1}}.$$

Справедливость формул (1.4) устанавливается математической индукцией по t (см. [4], стр. 242-243). Первый шаг был показан. В формулах (1.4) элементы $A^{k_1\ldots k_s}_{k'_1\ldots k'_t}$ определяют матричную функцию

$$A^{(p)} = \left\| \begin{array}{cccccc} A^{k_1}_{k'_1} & A^{k_1}_{k'_1k'_2} & \ldots & A^{k_1}_{k'_1\ldots k'_t} & \ldots & A^{k_1}_{k'_1\ldots k'_p} \\ 0 & A^{k_1k_2}_{k'_1k'_2} & \ldots & A^{k_1k_2}_{k'_1\ldots k'_t} & \ldots & A^{k_1k_2}_{k'_1\ldots k'_p} \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \ldots & A^{k_1\ldots k_t}_{k'_1\ldots k'_t} & \ldots & A^{k_1\ldots k_t}_{k'_1\ldots k'_p} \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & A^{k_1\ldots k_p}_{k'_1\ldots k'_p} \end{array} \right\| \tag{1.6}$$

регулярную в каждой точке $x \in V$, т.е. $\det A^{(p)}(x) \neq 0$. Матрица $A^{(p)}(x)$ является матрицей порядка $N_p = n + n^2 + \ldots + n^p$.

Матричные функции вида (1.6) в каждой точке образуют относительно умножения группу Ли; она обозначается L^p_n и называется неголономной дифференциальной группой порядка p. Эта группа L^p_n является подгруппой полной линейной группы $GL(N_p, \mathbb{R})$ (см., напр., [4], стр. 244-247).

2. На области $\mathcal{U}$ произвольной карты $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{A}(M_n)$ с помощью координатных функций $\varphi(x) = (x^k(x))$, где $x \in \mathcal{U}$ и $x^k \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$, возникает натуральное p-реперное поле

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{k_1}}, \frac{\partial^2}{\partial x^{k_1}\partial x^{k_2}}, \ldots, \frac{\partial^p}{\partial x^{k_1}\ldots\partial x^{k_p}} \right\}. \tag{2.1}$$

При помощи формул

$$e_{k'_1\ldots k'_t}(x) = \sum_{s=1}^{t} A^{k_1\ldots k_s}_{k'_1\ldots k'_t}(x) \frac{\partial^s}{\partial x^{k_1}\ldots\partial x^{k_s}}(x) \qquad (t = 1, \ldots, p)$$

получим в каждой точке $x \in \mathcal{U}$ множество p-реперов, если $A^{(p)}(x)$ принимает все значения из неголономной дифференциальной группы L^p_n порядка p. Обозначим множество p-реперов в точке $x \in \mathcal{U}$ через $H^p(x)$. Множество $H^p(\mathcal{U}) = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} H^p(x)$

есть главное расслоение p-реперов с проекцией $\pi_p: \overline{H}^p_{(x)} \longmapsto x$ и структурной группой $\overline{L}^p_n$. Вернее было бы вместо $\overline{H}^p(\mathcal{U})$ писать $\overline{H}^p(\mathcal{U}, \pi_p, \overline{L}^p_n)$.

При наличии двух карт $(\mathcal{U}, \varphi)$ и $(\mathcal{U}', \varphi')$ с непустым пересечением $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = V$ областей $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ получим на V два натуральных p-реперных поля: исходя из $\mathcal{U}$ получим (2.1), а из $\mathcal{U}'$ получим

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^{k_1'}}, \frac{\partial^2}{\partial x^{k_1'} \partial x^{k_2'}}, \dots, \frac{\partial^p}{\partial x^{k_1'} \dots \partial x^{k_p'}}\right\}.$$

Они связаны формулами, аналогичными (1.4),

$$\frac{\partial^t}{\partial x^{k_1'} \dots \partial x^{k_t'}} = \sum_{s=1}^{t} A^{k_1 \dots k_s}_{k_1' \dots k_t'} \frac{\partial^s}{\partial x^{k_1} \dots \partial x^{k_s}} \quad (t = 1, \dots, p) \tag{2.2}$$

только здесь $A^{(p)}(x)$ в (2.2) принадлежит голономной дифференциальной группе L^p_n порядка p, которая является подгруппой группы $\overline{L}^p_n$. Следовательно, структура главного расслоения p-реперов с базой $\mathcal{U}$ распространяется на все гладкое многообразие M_n. Таким образом, имеет место следующее

<u>Предложение 1</u>. На каждом гладком многообразии M_n при любом $p \in \mathbb{N}$ возникает главное расслоение p-реперов $\overline{H}^p(M_n, \pi_p, \overline{L}^p_n)$ с базой M_n и структурной группой $\overline{L}^p_n$. При этом каждое $\overline{H}^p(\mathcal{U}, \pi_p, \overline{L}^p_n)$ получается из $\overline{H}^p(M_n, \pi_p, \overline{L}^p_n)$ ограничивая базу M_n на область $\mathcal{U}$. Натуральное p-реперное поле (2.1) является локальным сечением над $\mathcal{U}$ главного расслоения $\overline{H}^p(M_n, \pi_p, \overline{L}^p_n)$.

При каждом натуральном числе $q < p$ выделим из группы $\overline{L}^p_n$ подгруппу $\overline{L}^{(p,q)}_n$, состоящую из матриц строением

$$A^{(p)}_q(x) = \begin{Vmatrix} A^{(q)}(x) & 0 \\ 0 & E \end{Vmatrix} \tag{2.3}$$

(ср. с (1.6)). Здесь E – единичная и 0 – нулевая матрицы. Неголономная дифференциальная группа $\overline{L}^q_n$ порядка q изоморфна подгруппе $\overline{L}^{(p,q)}_n$. Этот изоморфизм мы получим, если каждому $A^{(q)}(x) \in \overline{L}^q_n$ сопоставим элемент $A^{(p)}_q(x) \in \overline{L}^{(p,q)}_n$.

Главное расслоение $\overline{H}^q(\mathcal{U}, \pi_q, \overline{L}^q_n)$ получим из натурального q-реперного поля

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}, \frac{\partial^2}{\partial x^{k_1} \partial x^{k_2}}, \dots, \frac{\partial^q}{\partial x^{k_1} \dots \partial x^{k_q}}\right\} \tag{2.4}$$

как множество q-реперов в каждой точке $x \in \mathcal{U}$ по формулам (ср. с (2.2))

$$e_{k'_1 \dots k'_t}(x) = \sum_{s=1}^{t} A^{k_1 \dots k_s}_{k'_1 \dots k'_t}(x) \frac{\partial^s}{\partial x^{k_1} \dots \partial x^{k_s}}(x); \ x \in \mathcal{U}, \ t = 1, \dots, q,$$

если $A^{(q)}(x)$ в этих формулах пробегает всю группу $\bar{L}^q_n$. Так как функции на M_n предполагаются гладкими, то частные производные

$$\frac{\partial^t f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^{k_1} \dots \partial x^{k_t}}$$

существуют не только при $t = 1, \dots, q$, а также при $t = 1, \dots, p$. Следовательно, вместе с q-реперным полем (2.4) мы автоматически имеем p-реперное поле

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{k_1}}, \frac{\partial^2}{\partial x^{k_1} \partial x^{k_2}}, \dots, \frac{\partial^p}{\partial x^{k_1} \dots \partial x^{k_p}} \right\}. \qquad (2.5)$$

Кроме того, матричная функция $A^{(q)}$, где $A^{(q)}(x) \in \bar{L}^q_n$, индуцирует матричную функцию $A^{(p)}$, дополняя $A^{(q)}$ по формуле (1.6) до $A^{(p)}$ и матричную функцию $A^{(p)}_q$ по (2.3). Здесь $A^{(p)}(x) \in \bar{L}^p_n$ и $A^{(p)}_q(x) \in \bar{L}^{(p,q)}_n$. Когда матрица $A^{(q)}(x)$ пробегает группу $\bar{L}^q_n$, тогда индуцированные ей матрицы $A^{(p)}(x)$ и $A^{(p)}_q(x)$ описывают соответственно группы $\bar{L}^p_n$ и $\bar{L}^{(p,q)}_n$. Итак, получив из сечения (2.4) главное расслоение $\bar{H}^q(\mathcal{U}, \pi_q, \bar{L}^q_n)$, из сечения (2.5) получаем главное расслоение $\bar{H}^p(\mathcal{U}, \pi_p, \bar{L}^p_n)$ и в это же время его подрасслоение $\bar{H}^p(\mathcal{U}, \pi_p, \bar{L}^{(p,q)}_n)$. Здесь естественно отождествить главное расслоение $\bar{H}^q(\mathcal{U}, \pi_q, \bar{L}^q_n)$ с главным расслоением $\bar{H}^p(\mathcal{U}, \pi_p, \bar{L}^{(p,q)}_n)$. В указанном смысле мы считаем главное расслоение $\bar{H}^q(\mathcal{U}, \pi_q, \bar{L}^q_n)$ подрасслоением главного расслоения $\bar{H}^p(\mathcal{U}, \pi_p, \bar{L}^p_n)$.

Отметим, что сказанное имеет глобальный характер: $\bar{H}^q(M_n, \pi_q, \bar{L}^q_n)$ является подрасслоением главного расслоения $\bar{H}^p(M_n, \pi_p, \bar{L}^p_n)$. Пусть области $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ многообразия M_n имеют непустое пересечение $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = V \neq \emptyset$. Мы имеем

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{k_1}}, \dots, \frac{\partial^q}{\partial x^{k_1} \dots \partial x^{k_q}} \right\}, \qquad \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{k'_1}}, \dots, \frac{\partial^q}{\partial x^{k'_1} \dots \partial x^{k'_q}} \right\}, \qquad (2.6)$$

а также

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{k_1}}, \dots, \frac{\partial^p}{\partial x^{k_1} \dots \partial x^{k_p}} \right\}, \qquad \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{k'_1}}, \dots, \frac{\partial^p}{\partial x^{k'_1} \dots \partial x^{k'_p}} \right\}. \qquad (2.7)$$

При помощи групп $\bar{L}^q_n$, $\bar{L}^{(p,q)}_n$ и $\bar{L}^p_n$ соответственно получаем

$$\bar{H}^q(\mathcal{U}, \pi_q, \bar{L}^q_n) = \bar{H}^p(\mathcal{U}, \pi_p, \bar{L}^{(p,q)}_n) \subset \bar{H}^p(\mathcal{U}, \pi_p, \bar{L}^p_n) \qquad (2.8)$$

и

$$\overline{H}^q(\mathcal{U}', \pi_q, \overline{L}^q_n) = \overline{H}^p(\mathcal{U}', \pi_p, \overline{L}^{(p,q)}_n) \subset \overline{H}^p(\mathcal{U}', \pi_p, \overline{L}^p_n). \tag{2.9}$$

Если ограничивать $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ до их пересечения V, то натуральные q-реперные поля (2.6) выразятся друг через друга по формулам

$$\frac{\partial^t}{\partial x^{k_1'} \dots \partial x^{k_t'}}(x) = \sum_{s=1}^{t} A^{k_1 \dots k_s}_{k_1' \dots k_t'}(x) \frac{\partial^s}{\partial x^{k_1} \dots \partial x^{k_s}}(x), \tag{2.10}$$

где $x \in V$ и $t = 1, \dots, q$. Здесь $A^{(q)}(x) \in L^q_n \subset \overline{L}^q_n$. Матричная функция $A^{(q)}$ на V индуцирует согласно (1.5) матричную функцию $A^{(p)}$ на V, где $A^{(p)}(x) \in \overline{L}^p_n \subset \overline{L}^p_n$. Следовательно, формулы (2.10) дополняются новыми формулами такого же строения также для $t = q+1, \dots, p$ и дают для натуральных p-реперных полей (2.7) формулы перехода. Теперь заметим, что (2.8) на V совпадает с (2.9) на V. Этим доказано, что $\overline{H}^q(M_n, \pi_q, \overline{L}^q_n)$ является подрасслоением главного расслоения $\overline{H}^p(M_n, \overline{\pi}_p, \overline{L}^p_n)$.

Из сказанного непосредственно следует цепочка подрасслоений:

$$\overline{H}(M_n, \pi, \overline{L}^1_n) \subset \overline{H}^2(M_n, \pi_2, \overline{L}^2_n) \subset \dots \subset \overline{H}^p(M_n, \pi_p, \overline{L}^p_n). \tag{2.11}$$

3. Определим на области $\mathcal{U} \subset M_n$ поле $X^{(p)}$ как формальную линейную комбинацию формулой

$$X^{(p)}(x) = \sum_{s=1}^{p} \xi^{k_1 \dots k_s}(x)\, e_{k_1 \dots k_s}(x), \tag{3.1}$$

где $\xi^{k_1}(x), \ \xi^{k_1 k_2}(x), \dots, \ \xi^{k_1 \dots k_p}(x) \in \mathbb{R}$. В множестве таких полей определим сложение и умножение на функцию $\alpha \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ соответственно формулами

$$(X^{(p)} + Y^{(p)})(x) = \sum_{s=1}^{p} (\xi^{k_1 \dots k_s}(x) + \eta^{k_1 \dots k_s}(x))\, e_{k_1 \dots k_s}(x),$$

$$(\alpha X^{(p)})(x) = \sum_{s=1}^{p} (\alpha(x)\, \xi^{k_1 \dots k_s}(x))\, e_{k_1 \dots k_s}(x),$$

где

$$Y^{(p)}(x) = \sum_{s=1}^{p} \eta^{k_1 \dots k_s}(x)\, e_{k_1 \dots k_s}(x).$$

Таким образом, в каждой точке $x \in \mathcal{U}$ получим N_p-мерное векторное пространство, которое обозначим через $\overline{D}^p(x)$. Итак, $\overline{D}^p(\mathcal{U}) = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} \overline{D}^p(x)$ является тривиальным векторным расслоением, каждый слой $D^p(x)$ которого есть векторное пространство размерности N_p.

Определение. Расслоение $\overline{D}^p(\mathcal{U})$ с базой $\mathcal{U}$ назовем p-касательным векторным расслоением на $\mathcal{U}$.

Далее будем предполагать, что на каждом непустом пересечении $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = V$ областей $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ координатные функции $\xi^{k_1 \dots k_s}$ и $\xi^{k'_1 \dots k'_s}$ поля $X^{(p)}$ заданные на $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ соответственно формулами

$$X^{(p)} = \sum_{s=1}^{t} \xi^{k_1 \dots k_s} e_{k_1 \dots k_s}, \qquad X^{(p)} = \sum_{s=1}^{t} \xi^{k'_1 \dots k'_s} e_{k'_1 \dots k'_s}$$

на пересечении V преобразуются по формулам

$$\xi^{k_1 \dots k_t} = \sum_{s=t}^{p} A^{k_1 \dots k_t}_{k'_1 \dots k'_s} \xi^{k'_1 \dots k'_s} \quad (t = 1, \dots, p), \tag{3.2}$$

где $A^{k_1 \dots k_t}_{k'_1 \dots k'_s}$ соответствуют (1.4). Это значит, что структура векторного пространства слоев $\bar{D}^p(x)$ на пересечениях $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = V$ разных карт $(\mathcal{U}, \varphi)$ и $(\mathcal{U}', \varphi')$ согласована. Таким образом, мы можем сформулировать следующее

Предложение 2. На каждом гладком многообразии M_n возникает p-касательное расслоение $\bar{D}^p(M_n)$ с базой M_n и с такой проекцией $\Pi_p : \bar{D}^p(M_n) \longrightarrow M_n$, что слоем в каждой точке $x \in M_n$ является $\Pi_p^{-1}(x) = \bar{D}^p(x)$.

Отметим, что p-касательное векторное расслоение $\bar{D}^p(M_n)$ является ассоциированным расслоением. Оно ассоциируется с главным расслоением p-реперов $\bar{H}^p(M_n, \pi_p, L^p_n)$. Типовым слоем является N_p-мерное векторное пространство, на котором действует слева неголономная дифференциальная группа по формулам (3.2), т.е. элементу

$$'X^{(p)} = \sum_{s=1}^{p} \xi^{k'_1 \dots k'_s} e_{k_1 \dots k_s}$$

ставится в соответствие элемент (3.1). По этой причине расслоение $\bar{D}^p(M_n)$ могло бы точнее обозначаться $\bar{D}^p(M_n, \mathbb{R}^{N_p}, L^p_n, \bar{H}^p)$.

Любая точка $x^{(p)} \in \bar{D}^p(M_n)$ области $\mathcal{U}^{(p)} \subset \bar{D}^p(M_n)$ имеет координаты

$$(x^k(x);\ \xi^{k_1}(x),\ \xi^{k_1 k_2}(x),\ \dots,\ \xi^{k_1 \dots k_p}(x)),$$

где $x^k(x)$ координаты точки $\Pi_p(x^{(p)}) = x \in M_n$, а $\xi^{k_1}(x), \xi^{k_1 k_2}(x), \dots, \xi^{k_1 \dots k_p}(x)$ слоевые координаты из (3.1), Функции $f^{(p)} : \bar{D}^p(M_n) \longrightarrow \mathbb{R}$ локально зависят от координат точки $x^{(p)}$. Каждую функцию $f : M_n \longrightarrow \mathbb{R}$ можно рассматривать также как функцию $f^{(p)}$ на $\bar{D}^p(M_n)$, определяя ее по формуле $f^{(p)}(x^{(p)}) = f \circ \Pi_p(x^{(p)})$. Итак, $f^{(p)}$ постоянна во всех точках одного и того же слоя. Обратно, функцию $f^{(p)}$ постоянную на слоях $\bar{D}^p(x)$ можно рассматривать как функцию на M_n.

Пусть q, где $q < p$, натуральное число. Тогда каждое поле $X^{(q)} \in \bar{D}^q(M_n)$ на $\mathcal{U} \subset M_n$ можно записать в виде

$$X^{(q)} = \sum_{s=1}^{q} \xi^{k_1 \ldots k_s} e_{k_1 \ldots k_s}$$

или

$$X^{(q)} = \sum_{s=1}^{p} \xi^{k_1 \ldots k_s} e_{k_1 \ldots k_s},$$

где

$$\xi^{k_1 \ldots k_t} = 0 \quad (t = q+1, \ldots, p). \tag{3.3}$$

Следовательно, $X^{(q)} \in \bar{D}^p(\mathcal{U})$, в силу чего $\bar{D}^q(\mathcal{U}) \subset \bar{D}^p(\mathcal{U})$. В силу (3.2) на пересечении $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = V \neq \varnothing$ равенства (3.3) также выполняются, т.е. $\xi^{k'_1 \ldots k'_t} = 0$ при $t = q+1, \ldots, p$. Это означает, что $\bar{D}^q(M_n) \subset \bar{D}^p(M_n)$. Заметим, что при каждом $q \in \mathbb{N}$, где $q < p$, q-касательное векторное расслоение $\bar{D}^q(M_n)$ является подрасслоением p-касательного векторного расслоения $\bar{D}^p(M_n)$, другими словами $\bar{D}^p(M_n)$ имеет ступенчатое строение. Итак, имеем последовательность

$$\bar{D}^1(M_n) \subset \bar{D}^2(M_n) \subset \ldots \subset \bar{D}^{p-1}(M_n) \subset \bar{D}^p(M_n). \tag{3.4}$$

Не только функцию, заданную на M_n можно рассматривать как функцию на $\bar{D}^p(M_n)$, но и каждую функцию $f^{(q)}$ на $\bar{D}^q(M_n)$ можно рассматривать как функцию $f^{(p)}$ на $\bar{D}^p(M_n)$, определяя ее формулой

$$f^{(p)}(x^{(p)}) = f^{(q)} \circ \Pi_{pq}(x^{(p)}).$$

Здесь проекция Π_{pq} отображает каждый слой $\Pi_p^{-1}(x)$ на слой $\Pi_q^{-1}(x)$ по следующему правилу: каждой точке $x^{(p)} \in \bar{D}^p(\mathcal{U})$ с координатами

$$(x^k(x);\ \xi^{k_1}(x), \ldots, \xi^{k_1 \ldots k_q}(x),\ \xi^{k_1 \ldots k_{q+1}}(x), \ldots, \xi^{k_1 \ldots k_p}(x))$$

сопоставляем точку $\Pi_{pq}(x^{(p)})$ с координатами

$$(x^k(x);\ \xi^{k_1}(x), \ldots, \xi^{k_1 \ldots k_q}(x),\ 0, \ldots, 0),$$

которую отождествляем с точкой

$$(x^k(x),\ \xi^{k_1}(x), \ldots, \xi^{k_1 \ldots k_q}(x)).$$

Ясно, что каждая такая функция $f^{(p)}$ постоянна относительно координат $\xi^{k_1 \ldots k_{q+1}}, \ldots, \xi^{k_1 \ldots k_p}$.

4. Следуя [4], выпишем структурные уравнения главного расслоения p-реперов $\bar{H}^p(M_n, \bar{\pi}_p, \bar{L}^p_n)$.

Каждый элемент

$$
\omega^{(p)} = \left\| \begin{array}{cccccc}
\omega^{l_1}_{k_1} & \omega^{l_1}_{k_1k_2} & \dots & \omega^{l_1}_{k_1\dots k_t} & \dots & \omega^{l_1}_{k_1\dots k_p} \\
0 & \omega^{l_1l_2}_{k_1k_2} & \dots & \omega^{l_1l_2}_{k_1\dots k_t} & \dots & \omega^{l_1l_2}_{k_1\dots k_p} \\
\hdashline
0 & 0 & \dots & \omega^{l_1\dots l_t}_{k_1\dots k_t} & \dots & \omega^{l_1\dots l_t}_{k_1\dots k_p} \\
\hdashline
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \omega^{l_1\dots l_p}_{k_1\dots k_p}
\end{array} \right\|
$$

алгебры Ли T^p_n группы T^p_n содержит $N^2_{p_n}$ 1-форм, среди которых существенны лишь $\omega^{l_1}_{k_1}, \omega^{l_1}_{k_1k_2}, \dots, \omega^{l_1}_{k_1\dots k_p}$. Остальные выражаются через них по формулам

$$
\omega^{l_1\dots l_t}_{k_1\dots k_t} = \sum_{\Lambda(u,v,t)}^{0\le u<v\le t} \delta^{l_1}_{k_1}\dots\delta^{l_u}_{k_u}\,\omega^{l_{u+1}}_{k_{u+1}k_{\lambda_{u+2}}\dots k_{\lambda_v}}\,\delta^{l_{u+2}}_{k_{\lambda_{v+1}}}\dots\delta^{l_t}_{k_{\lambda_t}}. \qquad (4.1)
$$

Здесь $\Lambda(u,v,t)$ — множество всех перестановок, которые можно составить из натуральных чисел $u+2, \dots, t$ с учетом ограничений $\lambda_{u+2} < \dots < \lambda_v$ и $\lambda_{v+1} < \dots < \lambda_t$. Например, при $t = 3$ из (4.1) получим

$$
\omega^{l_1l_2}_{k_1k_2} = \delta^{l_1}_{k_1}\omega^{l_2}_{k_2} + \omega^{l_1}_{k_1}\delta^{l_2}_{k_2},
$$

$$
\omega^{l_1l_2l_3}_{k_1k_2k_3} = \delta^{l_1}_{k_1}\delta^{l_2}_{k_2}\omega^{l_3}_{k_3} + \delta^{l_1}_{k_1}\omega^{l_2}_{k_2}\delta^{l_3}_{k_3} + \omega^{l_1}_{k_1}\delta^{l_2}_{k_2}\delta^{l_3}_{k_3},
$$

$$
\omega^{l_1l_2}_{k_1k_2k_3} = \delta^{l_1}_{k_1}\omega^{l_2}_{k_2k_3} + \omega^{l_1}_{k_1k_2}\delta^{l_2}_{k_3} + \omega^{l_1}_{k_1k_3}\delta^{l_2}_{k_2}.
$$

Учитывая структурные уравнения

$$
d\omega^{\alpha}_{\varkappa} = \omega^{\mu}_{\varkappa}\wedge\omega^{\alpha}_{\mu}
$$

полной линейной группы $GL(N_p, R)$, для ее подгруппы получим следующие структурные уравнения

$$
d\omega^{i_1\dots i_u}_{k_1\dots k_t} = \sum_{s=u}^{t}\omega^{l_1\dots l_s}_{k_1\dots k_t}\wedge\omega^{i_1\dots i_u}_{l_1\dots l_s},
$$

где $u \le t$ и $t = 1, \dots, p$. Отсюда для существенных форм $\omega^{i}_{k_1\dots k_t}$ получим

$$
d\omega^{i}_{k_1\dots k_t} = \sum_{s=u}^{t}\omega^{l_1\dots l_s}_{k_1\dots k_t}\wedge\omega^{i}_{l_1\dots l_s}.
$$

Если учесть (4.1), то отсюда для структурных уравнений группы получается следующий окончательный вид:

$$
d\omega^{i}_{k_1\dots k_t} = \sum_{\Lambda(u,v,t)}^{0\le u<v\le t}\omega^{l}_{k_{u+1}k_{\lambda_{u+2}}\dots k_{\lambda_v}}\wedge\omega^{i}_{k_1\dots k_u l k_{\lambda_{v+1}}\dots k_{\lambda_t}}. \qquad (4.2)
$$

Например, при T^3_n из (4.2) следует

$$
\begin{aligned}
d\omega^i_{k_1} &= \omega^l_{k_1} \wedge \omega^i_l,\\
d\omega^i_{k_1k_2} &= \omega^l_{k_1k_2} \wedge \omega^i_l + \omega^l_{k_1} \wedge \omega^i_{lk_2} + \omega^l_{k_2} \wedge \omega^i_{k_1 l},\\
d\omega^i_{k_1k_2k_3} &= \omega^l_{k_1k_2k_3} \wedge \omega^i_l + \omega^l_{k_1k_2} \wedge \omega^i_{lk_3} + \omega^l_{k_1k_3} \wedge \omega^i_{lk_2} +\\
&\quad + \omega^l_{k_1} \wedge \omega^i_{lk_2k_3} + \omega^l_{k_2k_3} \wedge \omega^i_{k_1 l} + \omega^l_{k_2} \wedge \omega^i_{k_1 l k_3} + \omega^l_{k_3} \wedge \omega^i_{k_1k_2 l}.
\end{aligned}
$$

Теперь легко записать структурные уравнения главного p-расслоения p-реперов $\bar{H}^p(M_n, \pi_p, \bar{L}^p_n)$, так как каждый его слой изоморфен группе $\bar{L}^p_n$. В заключительной части [4] указано, что они могут быть получены в виде

$$
\begin{aligned}
d\omega^i &= \omega^l \wedge \omega^i_l,\\
d\omega^i_{k_1\ldots k_t} &= \sum_{\Lambda(u,v,t)}^{0\le u<v\le t} \omega^l_{k_{u+1}k_{\lambda_{u+2}}\ldots k_{\lambda_v}} \wedge \omega^i_{k_1\ldots k_u l k_{\lambda_{v+1}}\ldots k_{\lambda_t}} +\\
&\quad + \omega^l \wedge \omega^i_{k_1\ldots k_t l} \qquad (t = 1, \ldots, p).
\end{aligned}
$$

5. В этом пункте мы приводим структурные уравнения p-касательного расслоения $\bar{D}^p(M_n)$, рассматривая его лишь как обычное гладкое многообразие. Сначала запишем структурные уравнения для произвольного гладкого многообразия V_m, а затем применим их в случае, когда многообразием V_m является $\bar{D}^p(M_n)$.

Пусть $\mathcal{U}$ — область гладкого многообразия V_m, а $\{e_\alpha\}$ и $\{\omega^\alpha\}$ реперное и дуальное базисные поля на $\mathcal{U}$. При любых двух векторных полях $X, Y \in \mathfrak{X}(V_m)$ их скобка Ли $[X, Y]$ определяется формулой $[X,Y] = XY - YX$. Структурные уравнения гладкого многообразия V_m на $\mathcal{U}$ в языке векторных полей задаются формулами

$$[e_\alpha, e_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma, \tag{5.1}$$

где $C^\gamma_{\alpha\beta} \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$. Дуальные структурные уравнения имеют вид

$$d\omega^\alpha = -\tfrac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma \tag{5.2}$$

или

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta,$$

где $\omega^\alpha_\beta = -\frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\gamma$. Формулы (5.1) и (5.2) имеют глобальный характер, поскольку они согласованы на пересечении $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = V \neq \emptyset$ двух областей $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$.

Мы применим формулы (5.4) и (5.2) в случае, когда гладким многообразием V_m является p-касательное векторное расслоение $D^p(M_n)$. Далее для большей компактности записи переобозначим каждый мульти-индекс в виде $k_1 \ldots k_t$ через $k(t)$.

На каждой области $\mathcal{U}^{(p)} \subset \bar{D}^p(M_n)$ координатные функции произвольной точки $x^{(p)} \in \mathcal{U}^{(p)}$

$$(x^{\kappa};\ \xi^{\kappa(1)},\ \xi^{\kappa(2)}, \dots, \xi^{\kappa(p)}),$$

или

$$(\xi^{\kappa(0)};\ \xi^{\kappa(1)}, \xi^{\kappa(2)}, \dots, \xi^{\kappa(p)}),$$

где $\xi^{\kappa(0)} = x^{\kappa}$ индуцируют на $\mathcal{U}^{(p)}$ натуральное реперное поле

$$\left\{\frac{\partial}{\partial \xi^{\kappa(0)}};\ \frac{\partial}{\partial \xi^{\kappa(1)}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^{\kappa(p)}}\right\}, \tag{5.3}$$

из которых получим все реперные поля

$$\{\varepsilon_{\kappa(0)},\ \varepsilon_{\kappa(1)}, \dots, \varepsilon_{\kappa(p)}\} \tag{5.4}$$

по формулам

$$\varepsilon_{\kappa(t)} = \sum_{s=0}^{p} \mathfrak{A}^{\ell(s)}_{\kappa(t)} \frac{\partial}{\partial \xi^{\ell(s)}} \quad (t = 0, \dots, p), \tag{5.5}$$

где

$$\mathfrak{A}^{(p)} = \left\| \mathfrak{A}^{\ell(s)}_{\kappa(t)} \right\| \qquad (s, t = 0, \dots, p) \tag{5.6}$$

– матричная функция на $\mathcal{U}^{(p)}$, принимающая в каждой точке значения в линейной группе $GL(n+N_p, \mathbb{R})$. Реперное поле (5.3) при помощи элементов (5.6) группы $GL(n+N_p, \mathbb{R})$ индуцирует на $\mathcal{U}^{(p)} \subset \bar{D}^p(M_n)$ главное расслоение реперов $\bar{H}(\mathcal{U}^{(p)})$. Благодаря согласованности структуры этого главного расслоения на пересечениях $\mathcal{U}^{(p)} \cap \mathcal{U}'^{(p)} \neq \varnothing$ областей $\mathcal{U}^{(p)}$ и $\mathcal{U}'^{(p)}$, имеем расслоение реперов $\bar{H}(\bar{D}^p(M_n))$ с базой $\bar{D}^p(M_n)$ и структурной группой $GL(n+N_p, \mathbb{R})$. Аналогично (5.1), структурными уравнениями многообразия $\bar{H}(\bar{D}^p(M_n))$ на $\mathcal{U}^{(p)}$ будут

$$[\varepsilon_{\kappa(s)}, \varepsilon_{\ell(t)}] = \sum_{u=0}^{p} C^{m(u)}_{\kappa(s)\ell(t)} \varepsilon_{m(u)}, \tag{5.7}$$

где $C^{m(u)}_{\kappa(s)\ell(t)} \in \mathcal{F}(\mathcal{U}^{(p)})$. Если воспользоваться дуальным базисным полем $\{\omega^{\kappa(0)}, \omega^{\kappa(1)}, \dots, \omega^{\kappa(p)}\}$ к полю (5.4), то уравнения (5.7) равносильны ввиду (5.2) уравнениям

$$d\omega^{\kappa(t)} = -\frac{1}{2} \sum_{u,v=0}^{p} C^{\kappa(t)}_{\ell(u)m(v)}\, \omega^{\ell(u)} \wedge \omega^{m(v)}. \tag{5.8}$$

6. В предыдущем пункте при получении структурных уравнений (5.7) и (5.8) мы не учитывали, что $\bar{D}^p(M_n)$ является векторным расслоением и обладает при этом ступенчатой структурой.

В дальнейшем мы предполагаем, что $\bar{H}(\bar{D}\Gamma(M_n))$ приклеено к базовому многообразию $\bar{D}\Gamma(M_n)$. Тем самым из группы $GL(n+N_p, \mathbb{R})$ выделяется некоторая ее подгруппа, с помощью которой делается редукция главного расслоения $\bar{H}(\bar{D}\Gamma(M_n))$.

Обозначим, аналогично п.1, через $\mathcal{F}(\bar{D}\Gamma(M_n))$ кольцо гладких функций на $\bar{D}\Gamma(M_n)$, через $\mathfrak{X}(\bar{D}\Gamma(M_n))$ и $\mathfrak{X}^*(\bar{D}\Gamma(M_n))$ модули векторных полей и 1-форм на $\bar{D}\Gamma(M_n)$. Каждое векторное поле $X^{(\varphi)} \in \mathfrak{X}(\bar{D}\Gamma(M_n))$ на области $\mathcal{U}^{(\varphi)} \subset \bar{D}\Gamma(M_n)$ выражается в виде

$$\bar{X}^{(\varphi)} = \bar{\varphi}\bar{E}_k + \sum_{t=1}^{p} \varphi^{k_1 \dots k_t} \mathcal{E}_{k_1 \dots k_t}, \tag{6.1}$$

где $\bar{\varphi}^k$, $\varphi^{k_1 \dots k_t} \in \mathcal{F}(\mathcal{U}^{(\varphi)})$. Сравнивая с предыдущем пунктом, мы перешли обратно к индексам $k(t) = k_1 \dots k_t$ и дополнительно обозначали $\mathcal{E}_{k(0)} = \bar{E}_k$. Модуль $\mathfrak{X}(\bar{D}\Gamma(M_n))$ достаточно общий. Он ни как не адаптирован к строению (3.4) расслоения $\bar{D}\Gamma(M_n)$. Чтобы достичь этого, мы выделим из модуля $\mathfrak{X}(\bar{D}\Gamma(M_n))$ подходящей подмодуль.

Прежде чем приступить к выделению этого подмодуля, мы находим взаимносвязь между натуральными реперными полями

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}; \frac{\partial}{\partial \xi^{k_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^{k_1 \dots k_p}}\right\} \tag{6.2}$$

и

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^{k'}}; \frac{\partial}{\partial \xi^{k'_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi^{k'_1 \dots k'_p}}\right\} \tag{6.3}$$

на пересечении $\mathcal{U}^{(\varphi)} \cap \mathcal{U}'^{(\varphi)} = V^{(\varphi)} \neq \emptyset$ областей $\mathcal{U}^{(\varphi)}$ и $\mathcal{U}'^{(\varphi)}$ расслоения $\bar{D}\Gamma(M_n)$ соответственно с координатными функциями

$$(x^k; \xi^{k_1}, \dots, \xi^{k_1 \dots k_p})$$

и

$$(x^{k'}; \xi^{k'_1}, \dots, \xi^{k'_1 \dots k'_p}).$$

Здесь x^k и $x^{k'}$ – координатные функции соответственно на $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$. На $V = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \pi_p(\mathcal{U}^{(\varphi)} \cap \mathcal{U}'^{(\varphi)}) \neq \emptyset$ эти две системы координатных функций выражаются взаимно друг через друга: $x^i = f^i(x^{1'}, \dots, x^{n'})$. Отсюда для натуральных кобазисов $\{dx^i\}$ и $\{dx^{i'}\}$ получаем

$$dx^i = A^i_{i'}(x^{1'}, \dots, x^{n'})dx^{i'}, \quad A^i_{i'}(x^{1'}, \dots, x^{n'}) = \frac{\partial f^i(x^{1'}, \dots, x^{n'})}{\partial x^{i'}}. \tag{6.4}$$

Для дуальных натуральных базисов $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ и $e_{i'} = \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$ следует

$$e_{i'} = A^i_{i'}(x^{1'}, \dots, x^{n'})\, e_i. \tag{6.5}$$

Последние (см. п. 1) индуцируют переход от натурального p-

реперного поля $\{e_{i_1}, e_{i_1 i_2}, \dots, e_{i_1 \dots i_p}\}$ к натуральному p-реперному полю $\{e_{i'_1}, e_{i'_1 i'_2}, \dots, e_{i'_1 \dots i'_p}\}$ по формулам (1.4) с учетом (6.3) и (6.4). Здесь

$$e_{i_1 \dots i_t} = \frac{\partial^t}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_t}}, \qquad e_{i'_1 \dots i'_t} = \frac{\partial^t}{\partial x^{i'_1} \dots \partial x^{i'_t}} \quad (t = 1, \dots, p). \tag{6.6}$$

Теперь матрица $A^{(p)}(x)$, имеющая строение (1.5), принадлежит группе L^p_n. Для каждого $X^{(p)} \subset V^{(p)}$ при (6.6) получим два разложения (ср. с (3.1)):

$$X^{(p)} = \sum_{t=1}^{p} \xi^{i_1 \dots i_t}(x^1, \dots, x^n) e_{i_1 \dots i_t}, \quad X^{(p)} = \sum_{t=1}^{p} \xi^{i'_1 \dots i'_t}(x^{1'}, \dots, x^{n'}) e_{i'_1 \dots i'_t}. \tag{6.7}$$

Здесь функции $\xi^{i_1 \dots i_t}$, $\xi^{i'_1 \dots i'_t} \in \mathcal{F}(V)$ в силу (3.2) взаимосвязаны формулами

$$\xi^{i_1 \dots i_t} = \sum_{s=t}^{p} A^{i_1 \dots i_t}_{i'_1 \dots i'_s}(x^{1'}, \dots, x^{n'}) \xi^{i'_1 \dots i'_s} \quad (t = 1, \dots, p), \tag{6.8}$$

где $A^{(p)}(x) \in L^p_n$. Отсюда для кобазисов $\{dx^i; d\xi^{i_1}, \dots, d\xi^{i_1 \dots i_p}\}$ и $\{dx^{i'}; d\xi^{i'_1}, \dots, d\xi^{i'_1 \dots i'_p}\}$ дуальных к (6.2) и (6.3), находим переходные формулы. Мы уже имеем формулу (6.4). Дополнительно к этим из (6.8) получаем еще

$$d\xi^{i_1 \dots i_t} = \bar{A}^{i_1 \dots i_t}_{i'} dx^{i'} + \sum_{s=t}^{p} A^{i_1 \dots i_t}_{i'_1 \dots i'_s} d\xi^{i'_1 \dots i'_s}. \tag{6.9}$$

Здесь обозначено

$$\bar{A}^{i_1 \dots i_t}_{i'} = \sum_{s=t}^{p} \left[\frac{\partial}{\partial x^{i'}} A^{i_1 \dots i_t}_{i'_1 \dots i'_s}(x^{1'}, \dots, x^{n'})\right] \xi^{i'_1 \dots i'_s}. \tag{6.10}$$

Отсюда для натуральных базисов (6.2) и (6.3) получаем следующие формулы преобразования

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = A^i_{i'} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{t=1}^{p} \bar{A}^{i_1 \dots i_t}_{i'} \frac{\partial}{\partial \xi^{i_1 \dots i_t}}, \tag{6.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^{i'_1 \dots i'_t}} = \sum_{s=1}^{t} A^{i_1 \dots i_s}_{i'_1 \dots i'_t} \frac{\partial}{\partial \xi^{i_1 \dots i_s}}. \tag{6.12}$$

Если последние сравнивать с (5.5) при (6.2) и (6.3), имеем

$$\mathfrak{a}^{i(0)}_{i'(0)} = A^i_{i'}, \qquad \mathfrak{a}^{i(t)}_{i'(0)} = \bar{A}^{i_1 \dots i_t}_{i'},$$

$$\mathfrak{a}^{i(s)}_{i'(t)} = A^{i_1 \dots i_s}_{i'_1 \dots i'_t} \ (s \le t), \qquad \mathfrak{a}^{i(s)}_{i'(t)} = 0 \ (s > t).$$

Теперь опишем подробно, как выделить подмодуль модуля $\mathfrak{X}(\overline{D}^{r}(M_n))$, т.е. те векторные поля $\overline{X}(\varphi) \in \mathfrak{X}(\overline{D}^{r}(M_n))$, которые нам понадобятся ниже.

Во-первых, рассмотрим только такие реперные поля $\{\overline{\varepsilon}_k, \varepsilon_{k_1}, \ldots, \varepsilon_{k_1 \ldots k_r}\}$, которые постоянные на слоях $\Pi_r^{-1}(x)$, $x \in \mathcal{U} \subset M_n$. Начиная с этого момента оправдана запись $\overline{\varepsilon}_k(x)$ и $\varepsilon_{k_1 \ldots k_t}(x)$ вместо $\overline{\varepsilon}_k(x^{\varphi})$ и $\varepsilon_{k_1 \ldots k_t}(x^{\varphi})$. Чтобы векторные поля (6.1) были постоянными на слоях, придется требовать и от функций $\overline{\varphi}^k$ и $\varphi^{k_1 \ldots k_t}$ чтобы они были постоянны на слоях. Такие функции из $\mathcal{F}(\mathcal{U}^{r})$ принадлежат $\mathcal{F}(\mathcal{U})$.

Предположим, что в последовательности (3.4) база M_n приклеена к многообразию $\overline{D}^{r}(M_n)$. Имеем

$$\mathcal{U} \subset \overline{D}^1(\mathcal{U}) \subset \overline{D}^2(\mathcal{U}) \subset \ldots \subset \overline{D}^{r}(\mathcal{U}).$$

Отсюда для касательных расслоений $T(\overline{D}^t(\mathcal{U}))$, где $t = 0, \ldots, r$, получим

$$T(\mathcal{U}) \subset T(\overline{D}^1(\mathcal{U})) \subset T(\overline{D}^2(\mathcal{U})) \subset \ldots \subset T(\overline{D}^{r}(\mathcal{U})). \qquad (6.13)$$

Здесь обозначено $\mathcal{U} = \overline{D}^0(\mathcal{U})$. Во-вторых, согласуем выбор реперного поля $\{\overline{\varepsilon}_k, \varepsilon_{k_1}, \ldots, \varepsilon_{k_1 \ldots k_r}\}$ с последовательностью (6.13), т.е. потребуем, чтобы $\{\overline{\varepsilon}_k\}$ являлось реперным полем в $T(\mathcal{U})$, а $\{\overline{\varepsilon}_k, \varepsilon_{k_1}, \ldots, \varepsilon_{k_1 \ldots k_t}\}$, свою очередь, реперным полем в $T(\overline{D}^t(\mathcal{U}))$. Итак, произвольное реперное поле $e_k \subset T(\mathcal{U})$, которое применяется для построения $\overline{D}^1(\mathcal{U})$, можно включить в произвольное реперное поле $\{\overline{\varepsilon}_k, \varepsilon_{k_1}, \ldots, \varepsilon_{k_1 \ldots k_r}\}$, т.е. $\overline{\varepsilon}_k = e_k \subset \subset T(\mathcal{U})$.

Теперь сосредоточим внимание на $\overline{D}^1(\mathcal{U})$. Для выбора реперного поля $\{\overline{\varepsilon}_k, \varepsilon_{k_1}\} = \{e_k, \varepsilon_{k_1}\}$ в нем к векторным полям e_k необходимо добавить векторные поля $\varepsilon_{k_1} \subset T(\overline{D}(\mathcal{U}))$ и при этом такие, которые постоянны на слоях $\Pi_1^{-1}(x)$, $x \in \mathcal{U}$. Это дает нам возможность отождествить $T(\overline{D}^1(\mathcal{U}))$ с $\overline{D}^1(\mathcal{U})$ и брать $\varepsilon_k = e_k$. Значит, $\{\overline{\varepsilon}_k, \varepsilon_k\} = \{e_k, e_k\} = \{e_k\}$.

Тем самым закончена адаптация реперных полей к строению $\overline{D}^{r}(\mathcal{U})$. Из сказанного следует, что на $\mathcal{U}$ допустимыми реперными полями $\{\varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_1 k_2}, \ldots, \varepsilon_{k_1 \ldots k_r}\}$ являются те, которые выражаются одно через другое по формулам

$$\varepsilon_{k'_1 \ldots k'_t}(x) = \sum_{s=1}^{t} A^{k_1 \ldots k_s}_{k'_1 \ldots k'_t}(x)\, \varepsilon_{k_1 \ldots k_s}(x).$$

В этих формулах, конечно, $\varepsilon_k = e_k$. Здесь матрица преобразования имеет строение (1.6), но условие (1.5) не требуется. Итак, группа (обозначим ее через $\hat{L}^{r}_n$), охарактеризующая этот класс реперов на $\mathcal{U}$, шире, чем группа $\bar{L}\Gamma_n$. Последнюю группу получим из $\hat{L}\Gamma_n$ при условии (1.5).

Сказанное о выборе реперов $\{\varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_1k_2}, \ldots, \varepsilon_{k_1\ldots k_p}\}$ на $\mathcal{U}\subset M_n$ имеет и глобальный смысл. Чтобы в этом убедиться, вернемся к формулам (6.11) и (6.12). Предварительно сделаем некоторые уточнения. Как было отмечено на $\bar{D}\Gamma(\mathcal{U})$ рассматриваются функции, постоянные на слоях. Следовательно, при изменении у точки с координатами $(x^k, \xi^{k_1}, \ldots, \xi^{k_1\ldots k_p})$ слоевых координат $\xi^{k_1}, \ldots, \xi^{k_1\ldots k_p}$ величины (6.10) остаются неизменными. Поскольку при $\xi^{k_1\ldots k_t}=0$ $(t=1,\ldots,p)$ имеем $\bar{A}_{i'}^{i_1\ldots i_t}=0$, то и во всех точках слоя также имеем $\bar{A}_{i'}^{i_1\ldots i_t}=0$. Итак, в (6.11) имеем $\bar{A}_{i'}^{i_1\ldots i_t}=0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}}=A_{i'}^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}},$$

Эти формулы включены в (6.12) при $t=1$, т.е. в ходе второго этапа адаптации реперного поля. Следовательно, на пересечениях $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}'=V\neq\emptyset$ областей $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ допустимые натуральные реперные поля $\left\{\frac{\partial}{\partial\xi^{k_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial\xi^{k_1\ldots k_p}}\right\}$ преобразуются по формулам (6.12), где матрица преобразования является элементом голономной дифференциальной группы $L\Gamma_n$, причем $L\Gamma_n\subset\bar{L}\Gamma_n\subset$ $\subset\hat{L}\Gamma_n$. Поскольку все допустимые реперные поля $\{\varepsilon_{k_1},\ldots,\varepsilon_{k_1\ldots k_p}\}$ на $\mathcal{U}$ получены из натурального поля $\left\{\frac{\partial}{\partial\xi^{k_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial\xi^{k_1\ldots k_p}}\right\}$ согласно формулам

$$\varepsilon_{k'_1\ldots k'_t}(x)=\sum_{s=1}^{t}A_{k'_1\ldots k'_t}^{k_1\ldots k_s}(x)\frac{\partial}{\partial\xi^{k_1\ldots k_s}}(x)\quad(t=1,\ldots,p), \tag{6.14}$$

где матрица преобразования принадлежит $\bar{L}\Gamma_n$, то, учитывая еще и соотношения (6.12) на $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}'$, приходим к выводу, что при задании реперного поля $\{\varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_1k_2},\ldots,\varepsilon_{k_1\ldots k_p}\}$ его координатные представления на пересечении $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}'$ согласованы. Итак, выбор реперных полей $\{\varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_1k_2},\ldots,\varepsilon_{k_1\ldots k_p}\}$ на $\mathcal{U}$ имеет глобальный характер.

Если в (6.14) ограничиться матрицами из группы $\hat{L}\Gamma_n$, удовлетворяющими еще условию (1.5), то получим подгруппу $\bar{L}\Gamma_n\subset\hat{L}\Gamma_n$ и соответствующее подрасслоение реперов.

Итак, на $\bar{D}\Gamma(M_n)$ имеются два главного расслоения $\bar{H}(\bar{D}\Gamma(M_n))$ и $\hat{H}(\bar{D}\Gamma(M_n))$, соответствующих структурным группам $\bar{L}\Gamma_n$ и $\hat{L}\Gamma_n$.

7. Следуя ([8] стр. 56-58), приведем некоторые известные и нужные в дальнейшем факты.

Для каждого векторного поля $X\in\mathcal{X}(V_n)$ гладкого многообразия V_m линейное отображение

$$\nabla_X : \mathfrak{X}(V_m) \longrightarrow \mathfrak{X}(V_m),$$

удовлетворяющее условиям

$$\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y,$$
$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y,$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(V_m)$ и $f, g \in \mathcal{F}(V_m)$ называется ковариантной производной в направлении векторного поля X. Отображения ∇_X в итоге индуцируют отображение

$$\nabla : \mathfrak{X}(V_m) \times \mathfrak{X}(V_m) \longrightarrow \mathfrak{X}(V_m),$$

которое называется линейной связностью на V_m. Векторные поля

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$
$$R(X,Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z, \tag{7.4}$$

где $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(V_m)$, называются соответственно полями кручения и кривизны. Ввиду (7.2) они линейны и кососимметричны по аргументам X и Y. На любой области $\mathcal{U} \subset V_m$ с базисными полями e_α векторные поля $\nabla_{e_\alpha} e_\beta$ ввиду (7.1) принадлежат $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$ и, следовательно, разлагаются через e_α:

$$\nabla_{e_\alpha} e_\beta = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma, \tag{7.5}$$

где функции $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ называются коэффициентами линейной связности ∇. При переходе к новым базисным полям $e_{\alpha'} = A^\alpha_{\alpha'} e_\alpha$, где $\| A^\alpha_{\alpha'}(x) \| \in GL(m, \mathbb{R})$, коэффициенты $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ линейной связности преобразуются в новые коэффициенты $\Gamma^{\gamma'}_{\alpha'\beta'}$ по формулам

$$\Gamma^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} = A^\alpha_{\alpha'} A^\beta_{\beta'} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \tilde{A}^{\gamma'}_\gamma + (e_{\alpha'} A^\gamma_{\beta'}) \tilde{A}^{\gamma'}_\gamma, \tag{7.6}$$

где $\tilde{A}^{\beta'}_\alpha A^\gamma_{\beta'} = \delta^\gamma_\alpha$. Из разложений

$$T(e_\alpha, e_\beta) = T^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma, \qquad R(e_\alpha, e_\beta) e_\gamma = R^\sigma_{\gamma\alpha\beta}\, e_\sigma$$

получим тензоры кручения и кривизны, которые по определению (7.4) выражаются в виде

$$T^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} - C^\gamma_{\alpha\beta},$$
$$R^\sigma_{\sigma\alpha\beta} = e_\alpha \Gamma^\sigma_{\beta\gamma} - e_\beta \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} + \Gamma^\tau_{\beta\gamma} \Gamma^\sigma_{\alpha\tau} - \Gamma^\tau_{\alpha\gamma} \Gamma^\sigma_{\beta\tau} - C^\tau_{\alpha\beta} \Gamma^\sigma_{\tau\gamma}. \tag{7.7}$$

Здесь функции $C^\gamma_{\alpha\beta} \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ являются координатами скобки $[e_\alpha, e_\beta]$ в базисе e_α:

$$[e_\alpha, e_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma.$$

Пусть ω^α — базис, дуальный к e_α, т.е. $\omega^\beta(e_\alpha) = \delta^\beta_\alpha$. Формы

$$\omega^\beta_\alpha = \Gamma^\beta_{\gamma\alpha}\, \omega^\gamma \tag{7.8}$$

называются <u>формами</u> <u>линейной</u> <u>связности</u> ∇. Формы ω^α и ω_α^β удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \Omega^\alpha; \qquad d\omega_\beta^\alpha = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \Omega_\beta^\alpha, \quad (7.9)$$

где

$$\Omega^\alpha = \frac{1}{2} T^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma, \qquad \Omega^\alpha_\beta = \frac{1}{2} R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\, \omega^\gamma \wedge \omega^\delta \quad (7.10)$$

— <u>формы</u> <u>кручения</u> и <u>кривизны</u>.

Наконец, нам понадобится формула ковариантной производной для любого геометрического объекта. Если у нас $H^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_t}$ система функций, определяющая геометрический объект на многообразии V_m, то его ковариантный дифференциал $\nabla H^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_t}$ и ковариантная производная $\nabla_{e_\delta} H^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_t}$ выражаются по формулам

$$\nabla H^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_t} = dH^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_t} - \sum_{\xi=1}^{t} H^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \tau \dots \alpha_t} \omega^\tau_{\alpha_\xi} + \sum_{\xi=1}^{s} H^{\beta_1 \dots \tau \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_t} \omega^{\beta_\xi}_\tau$$

и

$$\nabla_{e_\delta} H^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_t} = e_\delta H^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_t} - \sum_{\xi=1}^{t} H^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \tau \dots \alpha_t} \Gamma^\tau_{\delta\alpha_\xi} + \sum_{\xi=1}^{s} H^{\beta_1 \dots \tau \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_t} \Gamma^{\beta_\xi}_{\delta\tau},$$

Это распространяется и на коэффициенты линейной связности

$$\nabla \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = d\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\tau\beta}\, \omega^\tau_\alpha - \Gamma^\gamma_{\alpha\tau}\, \omega^\tau_\beta + \Gamma^\tau_{\alpha\beta}\, \omega^\gamma_\tau$$

и

$$\nabla_{e_\delta} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = e_\delta \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\tau\beta} \Gamma^\tau_{\delta\alpha} - \Gamma^\gamma_{\alpha\tau} \Gamma^\tau_{\delta\beta} + \Gamma^\tau_{\alpha\beta} \Gamma^\gamma_{\delta\tau}. \quad (7.11)$$

Если $H^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_t}$ образует тензор, то тензором является и его ковариантная производная $\nabla_{e_\delta} H^{\beta_1 \dots \beta_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_t}$. Отметим, что имеет место следующая известная.

<u>Теорема 1</u>. (см., напр., [2], предложение 7.10). При любых двух линейных связностях ∇ и $\bar{\nabla}$ на V_m их коэффициенты $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ и $\bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$ удовлетворяют формулам

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = H^\gamma_{\alpha\beta} + \bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}, \quad (7.12)$$

где $H^\gamma_{\alpha\beta}$ подходящий тензор. Обратно, все линейные связности ∇ получаются из произвольно фиксированной линейной связности $\bar{\nabla}$ по формуле (7.12), где $H^\gamma_{\alpha\beta}$ произвольный тензор.

Перепишем вышеприведенные формулы для случая, когда многообразием V_m является p-касательное векторное расслоение $D^p(M_n)$. В формулах (7.1) и (7.2) векторные поля $\bar{X}^{(p)}, \bar{Y}^{(p)}, \bar{Z}^{(p)}$ и функции f, g принадлежат соответственно

$\mathfrak{X}(\overline{D}\Gamma(M_n))$ и $\mathcal{F}(\overline{D}\Gamma(M_n))$. Формулы (7.5) принимают вид

$$\nabla_{\varepsilon_{\ell(\ell)}} \varepsilon_{k(t)} = \sum_{u=1}^{p} \Gamma^{m(u)}_{\ell(s)k(t)} \varepsilon_{m(u)}. \qquad (7.13)$$

Присутствующие здесь коэффициенты линейной связности $\Gamma^{m(u)}_{\ell(s)k(t)}$ суть функции на $\mathcal{U}^{(p)} \subset \overline{D}\Gamma(M_n)$. Они преобразуются по формулам (7.6), только группу $GL(m, \mathbb{R})$ надо заменить на группу $\mathbb{L}^p_n$. Формы линейной связности (7.8) на $\overline{D}\Gamma(M_n)$ имеют вид

$$\omega^{i(s)}_{k(t)} = \sum_{u=1}^{p} \Gamma^{i(s)}_{\ell(u)k(t)} \omega^{\ell(u)}. \qquad (7.14)$$

Формы $\omega^{k(t)}$ и формы линейной связности $\omega^{i(s)}_{k(t)}$ удовлетворяют структурным уравнениям, аналогичным (7.9),

$$d\omega^{k(t)} = \sum_{u=1}^{p} \omega^{\ell(u)} \wedge \omega^{k(t)}_{\ell(u)} + \Omega^{k(t)}, \qquad (7.15)$$

$$d\omega^{i(s)}_{k(t)} = \sum_{u=1}^{p} \omega^{\ell(u)}_{k(t)} \wedge \omega^{i(s)}_{\ell(u)} + \Omega^{i(s)}_{k(t)}, \qquad (7.16)$$

где $s, t = 1, \ldots, p$. Здесь $\Omega^{k(t)}$ – формы кручения и $\Omega^{i(s)}_{k(t)}$ – формы кривизны.

Если требовать, чтобы эта линейная связность индуцировала линейную связность на каждом расслоении $\overline{D}^t(M_n)$, где $1 \leq t \leq p$, то формулы (7.15) - (7.16) получают соответственно вид

$$\nabla_{\varepsilon_{\ell(s)}} \varepsilon_{k(t)} = \sum_{u=1}^{\max(s,t)} \Gamma^{m(u)}_{\ell(s)k(t)} \varepsilon_{m(u)}, \qquad (7.17)$$

при $u > \max(s,t)$ заметим, $\Gamma^{m(u)}_{\ell(s)k(t)} = 0$,

$$\omega^{i(s)}_{k(t)} = \sum_{u=s}^{t} \Gamma^{i(s)}_{\ell(u)k(t)} \omega^{\ell(u)} \quad (s \leq t) \qquad (7.18)$$

и

$$d\omega^{k(t)} = \sum_{u=t}^{p} \omega^{\ell(u)} \wedge \omega^{k(t)}_{\ell(u)} + \Omega^{k(t)}, \qquad (7.19)$$

$$d\omega^{i(s)}_{k(t)} = \sum_{u=s}^{t} \omega^{\ell(u)}_{k(t)} \wedge \omega^{i(s)}_{\ell(u)} + \Omega^{i(s)}_{k(t)} \quad (s \leq t). \qquad (7.20)$$

В силу теоремы 1, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для любых двух линейных связностей и на $\overline{D}\Gamma(M_n)$ их коэффициенты $\Gamma^{m(u)}_{\ell(s)k(t)}$ и $\overline{\Gamma}^{m(u)}_{\ell(s)k(t)}$ удовлетворяют формулам

$$\overline{\Gamma}^{m(u)}_{\ell(s)k(t)} = H^{m(u)}_{\ell(s)k(t)} + \Gamma^{m(u)}_{\ell(s)k(t)}, \qquad (7.21)$$

где $H^{m(u)}_{\ell(s)k(t)}$ подходящий тензор. Обратно, все линейные связности ∇ на $\overline{D}^{p}(M_n)$ получаются из произвольно фиксированной линейной связности $\overline{\nabla}$ на $\overline{D}^{p}(M_n)$ по формулам (7.21), где $H^{m(u)}_{l(s)k(t)}$ произвольный тензор. Если рассматривать только такие линейные связности, у которых $\Gamma^{m(u)}_{l(s)k(t)} = 0$ при $u > \max(s,t)$, то у тензора $H^{m(u)}_{l(s)k(t)}$ также

$$H^{m(u)}_{l(s)k(t)} = 0 \quad (u > \max(s,t)).$$

8. Предположим, что на p-касательном векторном расслоении $\overline{D}^{p}(M_n)$ рассматриваются только реперные поля $\{\varepsilon_{k(1)}, \varepsilon_{k(2)}, \dots, \varepsilon_{k(p)}\}$, которые допустимы при сделанной в п. 6 адаптации.

При помощи каждой линейной связности ∇ на $\overline{D}^{p}(M_n)$ мы индуцируем линейную связность на подмногообразии M_n. Обозначим через $\mathfrak{X}^{p}(M_n)$ подмодуль модуля векторных полей $\mathfrak{X}(D^{p}(M_n))$, выделенный в п. 6. По (7.3) линейная связность на есть отображение

$$\nabla : \mathfrak{X}^{p}(M_n) \times \mathfrak{X}^{p}(M_n) \longrightarrow \mathfrak{X}^{p}(M_n), \tag{8.1}$$

которое при любом векторном поле $\overline{X}(p) \in \mathfrak{X}^{p}(M_n)$ индуцирует отображение

$$\nabla_{\overline{X}(p)} : \mathfrak{X}^{p}(M_n) \longrightarrow \mathfrak{X}^{p}(M_n), \tag{8.2}$$

удовлетворяющее условиям

$$\nabla_{f\overline{X}(p) + g\overline{Y}(p)} = f\nabla_{\overline{X}(p)} + g\nabla_{\overline{Y}(p)},$$

$$\nabla_{\overline{X}(p)}(f\overline{Y}(p)) = (\overline{X}(p)f)\overline{Y}(p) + f\nabla_{\overline{X}(p)}\overline{Y}(p),$$

где $\overline{X}(p)$, $\overline{Y}(p) \in \mathfrak{X}^{p}(M_n)$ и $f, g \in \mathcal{F}(M_n)$. Отображение (8.1) индуцирует отображение

$$\nabla : \mathfrak{X}(M_n) \times \mathfrak{X}^{p}(M_n) \longrightarrow \mathfrak{X}^{p}(M_n), \tag{8.3}$$

ибо $\mathfrak{X}(M_n) \subset \mathfrak{X}^{p}(M_n)$. Итак, отображения (8.2) рассматриваются только при векторных полях $X \in \mathfrak{X}(M_n)$.

Полученную линейную связность (8.3) обозначения через $\overset{(p)}{\nabla}$ и назовем p-связностью на многообразии M_n, индуцированной связностью ∇. Из (7.17) - и (7.19) получим

$$\nabla_{\varepsilon_{l(1)}} \varepsilon_{k(t)} = \sum_{u=1}^{t} \Gamma^{m(u)}_{l(1)k(t)}\, \varepsilon_{m(u)},$$

$$\omega^{i(s)}_{k(t)} = \sum_{u=1}^{t} \Gamma^{i(s)}_{l(1)k(t)}\, \omega^{l(1)} \quad (s \le t) \tag{8.4}$$

и

$$d\omega^{k(1)} = \omega^{l(1)} \wedge \omega^{k(1)}_{l(1)} + \Omega^{k(1)}, \tag{8.5}$$

$$d\omega^{i(s)}_{k(t)} = \sum_{u=1}^{t} \omega^{l(u)}_{k(t)} \wedge \omega^{i(s)}_{l(u)} + \Omega^{i(s)}_{k(t)} \quad (s \le t). \tag{8.6}$$

Отметим, что эту p-связность $\overset{(t)}{\nabla}$ можно определить и непосредственно, а не через линейную связность ∇ на $\tilde{D}(MM_n)$. Линейные связности на произвольном векторном расслоении рассматриваются, например, в [1].

Теперь мы переходим от мультииндексов $k(t)$ введенных в п. 5, обратно к более длинным обозначениям $k_1k_2 \ldots k_t$. В то же время мультииндекс $k_1k_2 \ldots k_t$ будет выступать как один символ. Чтобы избежать путаницы, когда таких символов несколько или когда они стоят рядом, мы вместо $k_1k_2 \ldots k_t$ будем писать $\langle k_1 k_2 \ldots k_t \rangle$. В таком случае две записи $\omega^{i_1 l_2 \ldots i_s}_{k_1 k_2 \ldots k_t}$ и $\omega^{\langle i_1 l_2 \ldots i_s\rangle}_{\langle k_1 k_2 \ldots k_t\rangle}$ имеют один и тот же смысл. Если формы $\omega^{\langle i_1 \ldots i_s\rangle}_{\langle k_1 \ldots k_t\rangle}$ $(s \le t)$ линейной p-связности принимают значения в алгебре Ли $\mathfrak{L}^p_n$ неголономной дифференциальной группы L^p_n, то мы имеем (см. п. 4)

$$\omega^{\langle i_1 \ldots i_s\rangle}_{\langle k_1 \ldots k_t\rangle} = \sum_{\Lambda(u,v,t)}^{0 \le u < v \le t} \delta^{i_1}_{k_1} \ldots \delta^{i_u}_{k_u} \omega^{i_{u+1}}_{\langle k_{u+1} k_{\lambda_{u+2}} \ldots k_{\lambda_v}\rangle} \delta^{i_{u+2}}_{k_{\lambda_{v+1}}} \ldots \delta^{i_s}_{k_{\lambda_t}}, \qquad (8.7)$$

из чего по (8.4) следует

$$\Gamma^{\langle i_1 \ldots i_s\rangle}_{m\langle k_1 \ldots k_t\rangle} = \sum_{\Lambda(u,v,t)}^{0 \le u < v \le t} \delta^{i_1}_{k_1} \ldots \delta^{i_u}_{k_u} \Gamma^{i_{u+1}}_{m\langle k_{u+1} k_{\lambda_{u+2}} \ldots k_{\lambda_v}\rangle} \delta^{i_{u+2}}_{k_{\lambda_{v+1}}} \ldots \delta^{i_s}_{k_{\lambda_t}}. \qquad (8.8)$$

Среди форм $\omega^{\langle i_1 \ldots i_s\rangle}_{\langle k_1 \ldots k_t\rangle}$ $(s \le t)$ линейной p-связности $\overset{(t)}{\nabla}$ независимы только $\omega^{i}_{\langle k_1 \ldots k_t\rangle}$ $(t = 1, \ldots, p)$. Остальные формы можно восстановить по (8.7). По этой причине в уравнениях (8.6) существенны только следующие

$$d\omega^i_{\langle k_1 \ldots k_t\rangle} = \sum_{u=1}^{t} \omega^{\langle l_1 \ldots l_u\rangle}_{\langle k_1 \ldots k_t\rangle} \wedge \omega^i_{\langle l_1 \ldots l_u\rangle} + \Omega^i_{\langle k_1 \ldots k_t\rangle} \quad (t = 1, \ldots, p).$$

Если сюда из (8.7) подставить $\omega^{\langle l_1 \ldots l_u\rangle}_{\langle k_1 \ldots k_t\rangle}$, то получим

$$d\omega^i_{\langle k_1 \ldots k_t\rangle} = \sum_{\Lambda(u,v,t)}^{0 \le u < v \le t} \omega^l_{\langle k_{u+1} k_{\lambda_{u+2}} \ldots k_{\lambda_v}\rangle} \wedge \omega^i_{\langle k_1 \ldots k_u l k_{\lambda_{v+1}} \ldots k_{\lambda_t}\rangle} + \Omega^i_{\langle k_1 \ldots k_t\rangle}.$$

Формы (8.5) можно записать в следующем виде:

$$d\omega^i = \omega^l \wedge \omega^i_l + \Omega^i.$$

Здесь по аналогии с (7.10), формы

$$\Omega^i = \frac{1}{2} T^i_{rl} \omega^r \wedge \omega^l,$$

$$\Omega^i_{\langle k_1 \ldots k_t\rangle} = \frac{1}{2} R^i_{\langle k_1 \ldots k_t\rangle rl} \omega^r \wedge \omega^l \quad (t = 1, \ldots, p)$$

есть формы кручения и кривизны. Применяя в нашей ситуации (7.7), получаем

$$T^{i}_{pq} = \Gamma^{i}_{pq} - \Gamma^{i}_{qp} - C^{i}_{pq},$$

$$R^{i}_{\langle k_1 \dots k_t \rangle pq} = e_p \Gamma^{i}_{q\langle k_1 \dots k_t \rangle} - e_q \Gamma^{i}_{p\langle k_1 \dots k_t \rangle} + \sum_{s=1}^{t} \Gamma^{i}_{p\langle l_1 \dots l_s \rangle} \Gamma^{\langle l_1 \dots l_s \rangle}_{q\langle k_1 \dots k_t \rangle} - \tag{8.9}$$
$$- \sum_{s=1}^{t} \Gamma^{i}_{q\langle l_1 \dots l_s \rangle} \Gamma^{\langle l_1 \dots l_s \rangle}_{p\langle k_1 \dots k_t \rangle} + C^{l}_{pq} \Gamma^{i}_{l\langle k_1 \dots k_t \rangle} \quad (t = 1, \dots, p).$$

Если в (8.9) подставить из (8.8), то получим

$$R^{i}_{\langle k_1 \dots k_t \rangle pq} = e_p \Gamma^{i}_{q\langle k_1 \dots k_t \rangle} - e_q \Gamma^{i}_{p\langle k_1 \dots k_t \rangle} + \sum_{s=1}^{t} \sum_{\Lambda(u,v,t)}^{0 \le u < v \le t} \left(\Gamma^{i}_{p\langle k_1 \dots k_u k_{v+1} \dots k_t \rangle} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \Gamma^{l}_{q\langle k_{u+1} \dots k_v \rangle} - \Gamma^{i}_{q\langle k_1 \dots k_u k_{v+1} \dots k_t \rangle} \Gamma^{l}_{p\langle k_{u+1} \dots k_v \rangle} \right) + C^{l}_{pq} \Gamma^{i}_{l\langle k_1 \dots k_t \rangle}.$$

В силу теоремы 2 и формулы (8.8), справедлива

Теорема 3. Для любых двух линейных p-связностей $\overset{(1)}{\nabla}$ и $\overset{(2)}{\nabla}$ на M_n их коэффициенты $\overset{(1)}{\Gamma}{}^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{m\langle k_1 \dots k_t \rangle}$ и $\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{m\langle k_1 \dots k_t \rangle}$ удовлетворяют формулам

$$\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{m\langle k_1 \dots k_t \rangle} = H^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{m\langle k_1 \dots k_t \rangle} + \overset{(1)}{\Gamma}{}^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{m\langle k_1 \dots k_t \rangle} \quad (1 \le s \le t \le p), \tag{8.10}$$

где $H^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{m\langle k_1 \dots k_t \rangle}$ — подходящий тензор со строением

$$H^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{m\langle k_1 \dots k_t \rangle} = \sum_{\Lambda(u,v,t)}^{0 \le u < v \le t} \delta^{i_1}_{k_1} \dots \delta^{i_u}_{k_u} H^{i_{u+1}}_{m\langle k_{u+1} k_{u+2} \dots k_v \rangle} \delta^{i_{u+2}}_{k_{v+1}} \dots \delta^{i_s}_{k_t}, \tag{8.11}$$
$$(2 \le s \le t \le p)$$

Обратно, все линейные p-связности $\overset{(2)}{\nabla}$ на M_n получаются из произвольно фиксированной линейной p-связности $\overset{(1)}{\nabla}$ по формулам (8.10), где $H^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{m\langle k_1 \dots k_t \rangle}$ $(1 \le s \le t \le p)$ произвольный тензор со строением (8.11).

Наконец, поясним на примере, как в данном случае выглядят формулы ковариантного дифференцирования и ковариантной производной геометрического объекта. В качестве объекта возьмем $\Gamma^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{m\langle k_1 \dots k_t \rangle}$ $(1 \le s \le t \le p)$, точнее $\Gamma^{i_1}_{mk_1}, \dots,$ $\Gamma^{i_1}_{m\langle k_1 \dots k_p \rangle}, \Gamma^{\langle i_1 i_2 \rangle}_{m\langle k_1 k_2 \rangle}, \dots, \Gamma^{\langle i_1 i_2 \rangle}_{m\langle k_1 \dots k_p \rangle}, \dots, \Gamma^{\langle i_1 \dots i_{p-1} \rangle}_{m\langle k_1 \dots k_p \rangle}, \dots,$ $\Gamma^{\langle i_1 \dots i_p \rangle}_{m\langle k_1 \dots k_p \rangle}$. Аналогично формулам (7.11) и (7.12) соответственно, получим

$$\nabla \Gamma^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{m\langle k_1 \dots k_t \rangle} = d\Gamma^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{m\langle k_1 \dots k_t \rangle} - \Gamma^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{l\langle k_1 \dots k_t \rangle} \omega^{l}_{m} -$$
$$- \sum_{u=1}^{t} \Gamma^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{m\langle l_1 \dots l_u \rangle} \omega^{\langle l_1 \dots l_u \rangle}_{\langle k_1 \dots k_t \rangle} + \sum_{u=1}^{t} \Gamma^{\langle l_1 \dots l_u \rangle}_{m\langle k_1 \dots k_t \rangle} \omega^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{\langle l_1 \dots l_u \rangle} \tag{8.12}$$

и

$$\nabla_{e_p} \Gamma^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{m\langle k_1 \dots k_t \rangle} = e_p \Gamma^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{m\langle k_1 \dots k_t \rangle} - \Gamma^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{l\langle k_1 \dots k_t \rangle} \Gamma^{l}_{pm} -$$
$$- \sum_{u=1}^{t} \Gamma^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{m\langle l_1 \dots l_u \rangle} \Gamma^{\langle l_1 \dots l_u \rangle}_{p\langle k_1 \dots k_t \rangle} + \sum_{u=1}^{t} \Gamma^{\langle l_1 \dots l_u \rangle}_{m\langle k_1 \dots k_t \rangle} \Gamma^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{p\langle l_1 \dots l_u \rangle}, \tag{8.13}$$

где следует иметь в виду подстановки из (8.7) и (8.8).

9. В этом пункте дается конструкция одного класса p-связностей на M_n.

Пусть ∇ — произвольная линейная связность на M_n. Исходя из произвольного допустимого реперного поля $\{\varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_1k_2}, \ldots, \varepsilon_{k_1\ldots k_p}\}$ на области $\mathcal{U}^{(p)}$ p-касательного расслоения $\overline{D}^p(M_n)$ мы на области $\mathcal{U}$ многообразия M_n получим произвольное реперное поле ε_{k_1}. Пусть $\Gamma^{i_1}_{mk_1}$ коэффициенты этой выбранной на M_n линейной связности ∇ в репере $\{\varepsilon_{k_1}\}$. Определим через эти коэффициенты $\Gamma^{i_1}_{mk_1}$ рекуррентно следующие величины:

$$\Gamma^{i_1}_{m\langle k_1\ldots k_{t-1}k_t\rangle} = \nabla_{\varepsilon_m}\Gamma^{i_1}_{k_t\langle k_1\ldots k_{t-1}\rangle} \qquad (t=2,\ldots,p), \tag{9.1}$$

$$\Gamma^{\langle i_1\ldots i_s\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_t\rangle} = \sum_{\Lambda(u,v,t)}^{0\leq u<v\leq t} \delta^{i_1}_{k_1}\ldots\delta^{i_u}_{k_u}\Gamma^{i_{u+1}}_{m\langle k_{h_{u+1}}k_{h_{u+2}}\ldots k_{h_v}\rangle}\delta^{i_{v+1}}_{k_{\lambda_{v+1}}}\ldots\delta^{i_s}_{k_{\lambda_t}} \tag{9.2}$$

$$(2\leq s\leq t\leq p).$$

Теорема 4. Каждая линейная связность ∇ на M_n с коэффициентами $\Gamma^{i_1}_{mk_1}$ индуцирует на M_n линейную p-связность, с теми же коэффициентами $\Gamma^{i_1}_{mk_1}$, но дополненными коэффициентами $\Gamma^{i_1}_{m\langle k_1\ldots k_t\rangle}$ $(t=2,\ldots,p)$ и $\Gamma^{\langle i_1\ldots i_s\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_t\rangle}$ $(2\leq s\leq t\leq p)$, определенными по формулам (9.1) и (9.2).

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, мы найдем для (9.2) более подходящее выражение.

Лемма. При (9.1) справедливы следующие формулы

$$\Gamma^{\langle i_1\ldots i_t\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_t\rangle} = \Gamma^{\langle i_1\ldots i_{t-1}\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_{t-1}\rangle}\delta^{i_t}_{k_t} + \delta^{i_1}_{k_1}\ldots\delta^{i_{t-1}}_{k_{t-1}}\Gamma^{i_t}_{mk_t} \qquad (t=2,\ldots,p), \tag{9.3}$$

$$\Gamma^{\langle i_1\ldots i_t\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_t\rangle} = \Gamma^{\langle i_1\ldots i_{s-1}\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_{t-1}\rangle}\delta^{i_s}_{k_t} + \nabla_{\varepsilon_m}\Gamma^{\langle i_1\ldots i_s\rangle}_{k_t\langle k_1\ldots k_{t-1}\rangle} \qquad (2\leq s<t\leq p). \tag{9.4}$$

Доказательство. При $s=t$ из формулы (9.2) получим

$$\Gamma^{\langle i_1\ldots i_t\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_t\rangle} = \sum_{u=1}^{t}\delta^{i_1}_{k_1}\ldots\delta^{i_u}_{k_u}\Gamma^{i_{u+1}}_{mk_{u+1}}\delta^{i_{u+2}}_{k_{u+2}}\ldots\delta^{i_t}_{k_t} =$$

$$=\Big(\sum_{u=1}^{t-1}\delta^{i_1}_{k_1}\ldots\delta^{i_u}_{k_u}\Gamma^{i_{u+1}}_{mk_{u+1}}\delta^{i_{u+2}}_{k_{u+2}}\ldots\delta^{i_{t-1}}_{k_{t-1}}\Big)\delta^{i_t}_{k_t} +$$

$$+\delta^{i_1}_{k_1}\ldots\delta^{i_{t-1}}_{k_{t-1}}\Gamma^{i_t}_{mk_t} = \Gamma^{\langle i_1\ldots i_{t-1}\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_{t-1}\rangle}\delta^{i_t}_{k_t} + \delta^{i_1}_{k_1}\ldots\delta^{i_{t-1}}_{k_{t-1}}\Gamma^{i_t}_{mk_t}.$$

Итак, формула (9.3) доказана.

Чтобы доказать формулу (9.4), мы исходим из (9.2). В этой сумме можем разбить слагаемые на две части: члены, которых $\lambda_t = t$, и члены, у которых $\lambda_t \neq t$. Первую и вторую группу членов можно соответственно записать в виде

$$\Big(\sum_{\Lambda(m,v,t-1)}^{0\le u<v\le t-1} \delta^{i_1}_{k_1}\ldots\delta^{i_u}_{k_u}\Gamma^{i_{u+1}}_{m<k_{u+1}k_{\lambda_{u+2}}\ldots k_{\lambda_v}>}\delta^{i_{v+1}}_{k_{\lambda_{v+1}}}\ldots\delta^{i_{s-1}}_{k_{\lambda_{t-1}}}\Big)\delta^{i_s}_{k_t} =$$

$$= \Gamma^{<i_1\ldots i_{s-1}>}_{m<k_1\ldots k_{t-1}>}\delta^{i_s}_{k_t},$$

$$\sum_{\Lambda(m,v,t-1)}^{0\le u<v\le t-1} \delta^{i_1}_{k_1}\ldots\delta^{i_u}_{k_u}\Gamma^{i_{u+1}}_{m<k_{u+1}k_{\lambda_{u+2}}\ldots k_{\lambda_v}k_t>}\delta^{i_{u+2}}_{k_{\lambda_{v+1}}}\ldots\delta^{i_s}_{k_{\lambda_{t-1}}}. \qquad (9.5)$$

Для получения последней суммы (9.5) мы пользовались тем, что у этих слагаемых в сумме (9.4) $\lambda_t \neq t$. Так как $\lambda_{v+1} < \ldots < \lambda_t$, то k_t входит в мультииндекс при $\Gamma^{i_{u+1}}_{m<k_{u+1}\ldots k_{\lambda_v}>}$. Если также учесть, что $\lambda_{u+2} < \ldots < \lambda_v$, то k_t может находиться только на последнем месте. В силу (9.1) формула (9.5) примет вид

$$\nabla_{\varepsilon_m}\Big(\sum_{\Lambda(u,v,t-1)}^{0\le u<v\le t-1} \delta^{i_1}_{k_1}\ldots\delta^{i_u}_{k_u}\Gamma^{i_{u+1}}_{k_t<k_{u+1}k_{\lambda_{u+2}}\ldots k_{\lambda_v}>}\delta^{i_{u+2}}_{k_{\lambda_{v+1}}}\ldots\delta^{i_s}_{k_{\lambda_{t-1}}}\Big) =$$

$$= \nabla_{\varepsilon_m}\Gamma^{<i_1\ldots i_s>}_{k_t<k_1\ldots k_{t-1}>}.$$

Итак, формула (9.4) установлена. Это и доказывает лемму.

Доказательство теоремы. Нам надо показать, что величины $\Gamma^{<i_1\ldots i_s>}_{m<k_1\ldots k_t>}$ $(1\le s\le t\le p)$ при переходе от репера $\{\varepsilon_{k_1},\ldots,\varepsilon_{<k_1\ldots k_t>},\ldots,\varepsilon_{<k_1\ldots k_p>}\}$ к реперу $\{\varepsilon_{k'_1},\ldots,\varepsilon_{<k'_1\ldots k'_t>},\ldots,\varepsilon_{<k'_1\ldots k'_p>}\}$ по формулам

$$\varepsilon_{<k'_1\ldots k'_t>} = \sum_{s=1}^{t} A^{<k_1\ldots k_s>}_{<k'_1\ldots k'_t>}\varepsilon_{<k_1\ldots k_s>} \qquad (t=1,\ldots,p),$$

где матрица $A^{(p)}(x) = \| A^{<k_1\ldots k_s>}_{<k'_1\ldots k'_t>}(x)\|$ принадлежит в L^{p}_{n} (см. (1.6)), преобразуется по формулам

$$\Gamma^{<i'_1\ldots i'_s>}_{m'<k'_1\ldots k'_t>} = \sum_{u=v}^{t}\sum_{v=s}^{t} A^{m}_{m'}A^{<k_1\ldots k_u>}_{<k'_1\ldots k'_t>}\Gamma^{<i_1\ldots i_v>}_{m<k_1\ldots k_u>}\tilde{A}^{<i'_1\ldots i'_s>}_{<i_1\ldots i_v>} + \qquad (9.6)$$

$$+\sum_{u=s}^{t}\big(\varepsilon_{m'}A^{<i_1\ldots i_u>}_{<k'_1\ldots k'_t>}\big)\tilde{A}^{<i'_1\ldots i'_s>}_{<i_1\ldots i_u>}.$$

Здесь $\tilde{A}^{<k'_1\ldots k'_s>}_{<k_1\ldots k_t>}$ элементы матрицы $\tilde{A}^{(p)}$, обратной к матрице $A^{(p)}$. Они удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{u=s}^{t} A^{<l_1\ldots l_u>}_{<k'_1\ldots k'_t>}\tilde{A}^{<i'_1\ldots i'_s>}_{<l_1\ldots l_u>} = \begin{cases} 0, & \text{если } s<t \\ \delta^{i'_1}_{k'_1}\ldots\delta^{i'_t}_{k'_t}, & \text{если } s=t \end{cases} \qquad (9.7)$$

$$\sum_{u=1}^{t} \tilde{A}^{\langle l'_1 \dots l'_u \rangle}_{\langle k_1 \dots k_u \rangle} A^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{\langle l'_1 \dots l'_u \rangle} = \begin{cases} 0, & \text{если } s < t \\ \delta^{i_1}_{k_1} \dots \delta^{i_t}_{k_t}, & \text{если } s = t. \end{cases}$$

Формулы (9.7) после дифференцирования в направлении $\varepsilon_{m'}$ дают нужные нам соотношения

$$\sum_{u=1}^{t} \left(\varepsilon_{m'} A^{\langle l_1 \dots l_u \rangle}_{\langle k'_1 \dots k'_t \rangle}\right) \tilde{A}^{\langle i'_1 \dots i'_s \rangle}_{\langle l_1 \dots l_u \rangle} = -\sum_{u=1}^{t} A^{\langle l_1 \dots l_u \rangle}_{\langle k'_1 \dots k'_t \rangle} \left(\varepsilon_{m'} \tilde{A}^{\langle i'_1 \dots i'_s \rangle}_{\langle l_1 \dots l_u \rangle}\right). \qquad (9.8)$$

Аналогичные соотношения получаются из последующих формул.

Теперь приступим к выводу формул (9.6). Используем метод математической индукцией по t. При $t = 1$ формулы (9.6) верны, поскольку $\Gamma^{i_1}_{m k_1}$ — коэффициенты линейной связности ∇ на M_n.

Предположим, что для $\Gamma^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{m \langle k_1 \dots k_u \rangle}$ $(1 \le s \le u \le t)$ формулы (9.6) верны. Докажем, что для $\Gamma^{\langle i_1 \dots i_s \rangle}_{m \langle k_1 \dots k_{t+1} \rangle}$ $(1 \le s \le t+1)$ они также верны. Доказательство последнего утверждения разобьем на три случая: 1) $s = t+1$, 2) $1 < s < t+1$ и 3) $s = 1$.

<u>Случай 1</u>. При $s = t+1$ по формулам (9.3) получим

$$\Gamma^{\langle i'_1 \dots i'_{t+1} \rangle}_{m' \langle k'_1 \dots k'_{t+1} \rangle} = \Gamma^{\langle i'_1 \dots i'_t \rangle}_{m' \langle k'_1 \dots k'_t \rangle} \delta^{i'_{t+1}}_{k'_{t+1}} + \delta^{i'_1}_{k'_1} \dots \delta^{i'_t}_{k'_t} \Gamma^{i'_{t+1}}_{m' k'_{t+1}},$$

откуда, в силу предположения индукции,

$$\Gamma^{\langle i'_1 \dots i'_{t+1} \rangle}_{m' \langle k'_1 \dots k'_{t+1} \rangle} = \left(A^{m}_{m'} A^{\langle k_1 \dots k_t \rangle}_{\langle k'_1 \dots k'_t \rangle} \Gamma^{\langle i_1 \dots i_t \rangle}_{m \langle k_1 \dots k_t \rangle} \tilde{A}^{\langle i'_1 \dots i'_t \rangle}_{\langle i_1 \dots i_t \rangle}\right)\left(A^{k_{t+1}}_{k'_{t+1}} \delta^{i_{t+1}}_{k_{t+1}} \tilde{A}^{i'_{t+1}}_{i_{t+1}}\right) +$$

$$+\left(\varepsilon_{m'} A^{\langle i_1 \dots i_t \rangle}_{\langle k'_1 \dots k'_t \rangle}\right) \tilde{A}^{\langle i'_1 \dots i'_t \rangle}_{\langle i_1 \dots i_t \rangle} \left(A^{i_{t+1}}_{k'_{t+1}} \tilde{A}^{i'_{t+1}}_{i_{t+1}}\right) +$$

$$+\left(A^{k_1}_{k'_1} \delta^{i_1}_{k_1} \tilde{A}^{i'_1}_{i_1}\right) \dots \left(A^{k_t}_{k'_t} \delta^{i_t}_{k_t} \tilde{A}^{i'_t}_{i_t}\right)\left(A^{m}_{m'} A^{k_{t+1}}_{k'_{t+1}} \Gamma^{i_{t+1}}_{m k_{t+1}} \tilde{A}^{i'_{t+1}}_{i_{t+1}}\right) +$$

$$+\left(A^{i_1}_{k'_1} \tilde{A}^{i'_1}_{i_1}\right) \dots \left(A^{i_t}_{k'_t} \tilde{A}^{i'_t}_{i_t}\right)\left(\varepsilon_{m'} A^{i_{t+1}}_{k'_{t+1}}\right) \tilde{A}^{i'_{t+1}}_{i_{t+1}}$$

или

$$\Gamma^{\langle i'_1 \dots i'_{t+1} \rangle}_{m' \langle k'_1 \dots k'_{t+1} \rangle} = A^{m}_{m'} A^{\langle k_1 \dots k_t \rangle}_{\langle k'_1 \dots k'_t \rangle} A^{k_{t+1}}_{k'_{t+1}} \left(\Gamma^{\langle i_1 \dots i_t \rangle}_{m \langle k_1 \dots k_t \rangle} \delta^{i_{t+1}}_{k_{t+1}} + \delta^{i_1}_{k_1} \dots \delta^{i_t}_{k_t} \Gamma^{i_{t+1}}_{m k_{t+1}}\right) \cdot$$

$$A^{\langle i'_1 \dots i'_t \rangle}_{\langle i_1 \dots i_t \rangle} \tilde{A}^{i'_{t+1}}_{i_{t+1}} + \varepsilon_{m'} \left(A^{\langle i_1 \dots i_t \rangle}_{\langle k'_1 \dots k'_t \rangle} A^{i_{t+1}}_{k'_{t+1}}\right)\left(\tilde{A}^{\langle i'_1 \dots i'_t \rangle}_{\langle i_1 \dots i_t \rangle} \tilde{A}^{i'_{t+1}}_{i_{t+1}}\right).$$

В силу (1.5) и (9.3), эти формулы принимают вид

$$\Gamma^{\langle i'_1\ldots i'_{s+1}\rangle}_{m'\langle k'_1\ldots k'_{t+1}\rangle} = A^m_{m'} A^{\langle k_1\ldots k_{t+1}\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_{t+1}\rangle}\Gamma^{\langle i_1\ldots i_{s+1}\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_{t+1}\rangle}\tilde A^{\langle i'_1\ldots i'_{s+1}\rangle}_{\langle i_1\ldots i_{s+1}\rangle} +$$
$$+\left(\varepsilon_{m'} A^{\langle k_1\ldots k_{t+1}\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_{t+1}\rangle}\right)\tilde A^{\langle i'_1\ldots i'_{s+1}\rangle}_{\langle i_1\ldots i_{s+1}\rangle},$$

что и требовалось доказать.

Случай 2. При $1 < s < t+1$ по формулам (9.3) и (8.13) получаем

$$\Gamma^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{m'\langle k'_1\ldots k'_{t+1}\rangle} = \Gamma^{\langle i'_1\ldots i'_{s-1}\rangle}_{m'\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}\delta^{i'_s}_{k'_{t+1}} + \nabla_{E_{m'}}\Gamma^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{k'_{t+1}\langle k'_1\ldots k'_t\rangle} =$$
$$= \Gamma^{\langle i'_1\ldots i'_{s-1}\rangle}_{m'\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}\delta^{i'_s}_{k'_{t+1}} + \varepsilon_{m'}\Gamma^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{k'_{t+1}\langle k'_1\ldots k'_t\rangle} - \tag{9.9}$$
$$- \Gamma^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{p'\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}\Gamma^{p'}_{m'k'_{t+1}} - \sum_{u=s}^{t}\Gamma^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{k'_{t+1}\langle p'_1\ldots p'_u\rangle}\Gamma^{\langle p'_1\ldots p'_u\rangle}_{m'\langle k'_1\ldots k'_t\rangle} +$$
$$+ \sum_{u=s}^{t}\Gamma^{\langle p'_1\ldots p'_u\rangle}_{k'_{t+1}\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}\Gamma^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{m'\langle p'_1\ldots p'_u\rangle}.$$

По предположению индукции в правую часть мы можем сделать подстановку из (9.6). Раскрывая после этого скобки и учитывая (9.7), получаем

$$\Gamma^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{m'\langle k'_1\ldots k'_{t+1}\rangle} = \sum_{u=v}^{t}\sum_{u=s-1}^{t} A^m_{m'} A^{\langle k_1\ldots k_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}\Gamma^{\langle i_1\ldots i_v\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_u\rangle}\tilde A^{\langle i'_1\ldots i'_{s-1}\rangle}_{\langle i_1\ldots i_v\rangle}\left(A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}}\delta^{i_{v+1}}_{k_{u+1}}\tilde A^{i'_s}_{i_{v+1}}\right) +$$
$$+ \sum_{u=v}^{t}\sum_{v=s}^{t}\varepsilon_{m'}\left(A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}} A^{\langle k_1\ldots k_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}\right)\tilde A^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_v\rangle}\Gamma^{\langle i_1\ldots i_v\rangle}_{k_{u+1}\langle k_1\ldots k_u\rangle} +$$
$$+ \Bigg[\sum_{u=v}^{t}\sum_{v=s}^{t} A^m_{m'} A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}} A^{\langle k_1\ldots k_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}\left(\varepsilon_m\Gamma^{\langle i_1\ldots i_v\rangle}_{k_{u+1}\langle k_1\ldots k_u\rangle}\right)\tilde A^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_v\rangle} -$$
$$- \sum_{u=v}^{t}\sum_{v=s}^{t} A^m_{m'} A^{\langle k_1\ldots k_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle} A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}}\left(\Gamma^{\langle i_1\ldots i_v\rangle}_{p\langle k_1\ldots k_u\rangle}\Gamma^{p}_{mk_{u+1}}\right)\tilde A^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_v\rangle} -$$
$$- \sum_{u=v}^{t}\sum_{v=s}^{t} A^m_{m'} A^{\langle k_1\ldots k_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle} A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}}\left(\sum_{w=v}^{u}\Gamma^{\langle i_1\ldots i_v\rangle}_{k_{u+1}\langle p_1\ldots p_w\rangle}\Gamma^{\langle p_1\ldots p_w\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_u\rangle}\right)\tilde A^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_v\rangle} +$$
$$+ \sum_{u=v}^{t}\sum_{v=s}^{t} A^m_{m'} A^{\langle k_1\ldots k_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle} A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}}\left(\sum_{w=v}^{u}\Gamma^{\langle p_1\ldots p_w\rangle}_{k_{u+1}\langle k_1\ldots k_u\rangle}\Gamma^{\langle i_1\ldots i_v\rangle}_{m\langle p_1\ldots p_w\rangle}\right)\tilde A^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_v\rangle}\Bigg] -$$
$$- \Bigg[\sum_{u=v}^{t}\sum_{v=s}^{t}\left(\varepsilon_{m'} A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}}\right) A^{\langle k_1\ldots k_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}\tilde A^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_v\rangle}\Gamma^{\langle i_1\ldots i_v\rangle}_{k_{u+1}\langle k_1\ldots k_u\rangle} +$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{u=v}^{t}\sum_{v=1}^{t} A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}}\left(\varepsilon_{m'} A^{\langle k_1\ldots k_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}\right)\tilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_v\rangle}\Gamma^{\langle i_1\ldots i_v\rangle}_{k_{u+1}\langle k_1\ldots k_u\rangle}+\\
&+\sum_{u=v}^{t}\sum_{v=1}^{t} A^{\langle k_1\ldots k_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}}\left(\varepsilon_{m'} A^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_v\rangle}\right)\Gamma^{\langle i_1\ldots i_v\rangle}_{k_{u+1}\langle k_1\ldots k_u\rangle}\Big]+\\
&+\Big[\sum_{u=1}^{t} A^{m}_{m'}A^{\langle i_1\ldots i_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}}\Gamma^{i_{u+1}}_{m k_{u+1}}\left(\varepsilon_{i_{u+1}}\tilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_u\rangle}\right)+\\
&+\sum_{u=v}^{t}\sum_{v=1}^{t} A^{m}_{m'}A^{\langle k_1\ldots k_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}\Gamma^{\langle i_1\ldots i_v\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_u\rangle}\left(\varepsilon_{k'_{t+1}}\tilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_v\rangle}\right)+\\
&+\sum_{u=v}^{t}\sum_{v=1}^{t} A^{m}_{m'}\left(\varepsilon_{k'_{t+1}}A^{\langle k_1\ldots k_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}\right)\Gamma^{\langle i_1\ldots i_v\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_u\rangle}\tilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_v\rangle}\Big]+\\
&+\Big[\sum_{u=s-1}^{t}\left(\varepsilon_{m'}A^{\langle i_1\ldots i_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}\right)A^{i_{u+1}}_{k'_{t+1}}\left(\tilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_{s-1}\rangle}_{\langle i_1\ldots i_u\rangle}\tilde{A}^{i'_s}_{i_{u+1}}\right)+ \qquad (9.10)\\
&+\sum_{u=1}^{t}\left(\varepsilon_{m'}\left(\varepsilon_{k'_{t+1}}A^{\langle i_1\ldots i_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}\right)\right)\tilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_u\rangle}+\\
&+\sum_{u=1}^{t}\left(\varepsilon_{k'_{t+1}}A^{\langle i_1\ldots i_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}\right)\left(\varepsilon_{m'}\tilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_u\rangle}\right)+\\
&+\sum_{u=1}^{t}A^{\langle i_1\ldots i_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}\left(\varepsilon_{k_{u+1}}\tilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_u\rangle}\right)\left(\varepsilon_{m'}A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}}\right)+\\
&+\sum_{u=1}^{t}\left(\varepsilon_{m'}A^{\langle i_1\ldots i_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}\right)\left(\varepsilon_{k'_{t+1}}\tilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_u\rangle}\right)-\\
&-\sum_{u=1}^{t}\left(\varepsilon_{k'_{t+1}}A^{\langle i_1\ldots i_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}\right)\left(\varepsilon_{m'}\tilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_u\rangle}\right)\Big].
\end{aligned}
$$

Заметим, что второе слагаемое и слагаемые во вторых квадратных скобках уничтожаются. Также уничтожаются второе и шестое слагаемые в последних квадратных скобках. Во втором слагаемом в третьих квадратных скобках подставим

$\varepsilon_{k'_{t+1}} = A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}}\,\delta^{i_{u+1}}_{k_{u+1}}\,\varepsilon_{i_{u+1}}$. Тогда это слагаемое вместе с первым слагаемым по (1.5) дают

$$\sum_{u=v}^{t}\sum_{v=s-1}^{t} A^{m}_{m'} A^{\langle k_1 \dots k_u\rangle}_{\langle k'_1 \dots k'_t\rangle} A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}} \Gamma^{\langle i_1 \dots i_v\rangle}_{m\langle k_1 \dots k_u\rangle} \tilde{A}^{\langle i'_1 \dots i'_s\rangle}_{\langle i_1 \dots i_{v+1}\rangle} -$$

Аналогично в последних квадратных скобках в пятом слагаемом подставим $\varepsilon_{k'_{t+1}} = A^{i_{u+1}}_{k'_{t+1}} \varepsilon_{i_{u+1}}$. Тогда это слагаемое вместе с первым слагаемым в этих же квадратных скобках по (1.5) дают

$$\sum_{u=s-1}^{t} \left(\varepsilon_{m'} A^{\langle i_1 \dots i_u\rangle}_{\langle k'_1 \dots k'_t\rangle}\right) A^{i_{u+1}}_{k'_{t+1}} \tilde{A}^{\langle i'_1 \dots i'_s\rangle}_{\langle i_1 \dots i_{u+1}\rangle}.$$

Первое слагаемое в третьих квадратных скобках, учитывая (1.5) запишем в виде

$$\sum_{u=s}^{t} A^{m}_{m'} A^{\langle k_1 \dots k_u\rangle}_{\langle k'_1 \dots k'_t\rangle} A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}} \left(\delta^{i_1}_{k_1} \dots \delta^{i_u}_{k_u} \Gamma^{i_{u+1}}_{m k_{u+1}}\right)\left(\tilde{A}^{\langle i'_1 \dots i'_s\rangle}_{\langle i_1 \dots i_{u+1}\rangle} - \tilde{A}^{\langle i'_1 \dots i'_{s-1}\rangle}_{\langle i_1 \dots i_u\rangle} \tilde{A}^{i'_s}_{i_{u+1}}\right).$$

Учитывая все сказанное, формула (9.10) принимает вид

$$\Gamma^{\langle i'_1 \dots i'_s\rangle}_{m'\langle k'_1 \dots k'_{t+1}\rangle} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{u=v}^{t}\sum_{v=s-1}^{t} A^{m}_{m'} A^{\langle k_1 \dots k_u\rangle}_{\langle k'_1 \dots k'_t\rangle} A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}} \left(\Gamma^{\langle i_1 \dots i_v\rangle}_{m\langle k_1 \dots k_u\rangle} \delta^{i_{v+1}}_{k_{u+1}}\right) \tilde{A}^{\langle i'_1 \dots i'_s\rangle}_{\langle i_1 \dots i_{v+1}\rangle} + \\
&+ \sum_{u=v}^{t}\sum_{v=s}^{t} A^{m}_{m'} A^{\langle k_1 \dots k_u\rangle}_{\langle k'_1 \dots k'_t\rangle} A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}} \left(\nabla_{\varepsilon_m} \Gamma^{\langle i_1 \dots i_v\rangle}_{k_{u+1}\langle k_1 \dots k_u\rangle}\right) \tilde{A}^{\langle i'_1 \dots i'_s\rangle}_{\langle i_1 \dots i_v\rangle} + \\
&+ \Bigg[\sum_{u=s}^{t} A^{m}_{m'} A^{\langle k_1 \dots k_u\rangle}_{\langle k'_1 \dots k'_t\rangle} A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}} \left(\delta^{i_1}_{k_1} \dots \delta^{i_u}_{k_u} \Gamma^{i_{u+1}}_{m k_{u+1}}\right)\left(\tilde{A}^{\langle i'_1 \dots i'_s\rangle}_{\langle i_1 \dots i_{u+1}\rangle} - \tilde{A}^{\langle i'_1 \dots i'_{s-1}\rangle}_{\langle i_1 \dots i_u\rangle} \tilde{A}^{i'_s}_{i_{u+1}}\right) + \\
&+ \sum_{u=v}^{t}\sum_{v=s}^{t} A^{m}_{m'} \left(\varepsilon_{k'_{t+1}} A^{\langle k_1 \dots k_u\rangle}_{\langle k'_1 \dots k'_t\rangle}\right) \Gamma^{\langle i_1 \dots i_v\rangle}_{m\langle k_1 \dots k_u\rangle} \tilde{A}^{\langle i'_1 \dots i'_s\rangle}_{\langle i_1 \dots i_v\rangle}\Bigg] + \qquad (9.11) \\
&+ \Bigg[\sum_{u=s}^{t+1} \left(\varepsilon_{m'} A^{\langle i_1 \dots i_{u-1}\rangle}_{\langle k'_1 \dots k'_t\rangle}\right) A^{i_u}_{k'_{t+1}} \tilde{A}^{\langle i'_1 \dots i'_s\rangle}_{\langle i_1 \dots i_u\rangle} + \\
&+ \sum_{u=s}^{t} \left(\varepsilon_{m'}\left(\varepsilon_{k'_{t+1}} A^{\langle i_1 \dots i_u\rangle}_{\langle k'_1 \dots k'_t\rangle}\right)\right) \tilde{A}^{\langle i'_1 \dots i'_s\rangle}_{\langle i_1 \dots i_u\rangle} + \\
&+ \sum_{u=s}^{t} A^{\langle i_1 \dots i_u\rangle}_{\langle k'_1 \dots k'_t\rangle} \left(\varepsilon_{i_{u+1}} \tilde{A}^{\langle i'_1 \dots i'_s\rangle}_{\langle i_1 \dots i_{u+1}\rangle}\right)\left(\varepsilon_{m'} A^{i_{u+1}}_{k'_{t+1}}\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

Раскроем скобки в третьем слагаемом. Если бы суммирование осуществлялось от $s-1$, то ввиду (9.7) вторая сумма равнялась бы нулю, ибо $s-1 \neq 0$. Однако, в самом деле эта сумма равна

$$A^{m}_{m'}A^{\langle k_1\ldots k_{s-1}\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}A^{k_s}_{k'_{t+1}}\left(\delta^{i_1}_{k_1}\ldots\delta^{i_{s-1}}_{k_{s-1}}\Gamma^{i_s}_{mk_s}\right)\widetilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_s\rangle}.$$

Мы можем прибавить ее к первой сумме рассматриваемого слагаемого, суммируя от $s-1$ до t. Таким образом, это третье слагаемое принимает вид

$$\sum_{u=s-1}^{t}A^{m}_{m'}A^{\langle k_1\ldots k_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}}\left(\delta^{i_1}_{k_1}\ldots\delta^{i_u}_{k_u}\Gamma^{i_{u+1}}_{mk_{u+1}}\right)\widetilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_{u+1}\rangle}. \qquad (9.12)$$

Теперь заметим, что диагональ первого слагаемого в (9.11) вместе с (9.12) дает

$$\sum_{u=s+1}^{t}A^{m}_{m'}A^{\langle k_1\ldots k_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}}\left(\Gamma^{\langle i_1\ldots i_u\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_u\rangle}\delta^{i_{u+1}}_{k_{u+1}}+\delta^{i_1}_{k_1}\ldots\delta^{i_u}_{k_u}\Gamma^{i_{u+1}}_{mk_{u+1}}\right)\widetilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_{u+1}\rangle}=$$

$$=\sum_{u=s}^{t+1}A^{m}_{m'}A^{\langle k_1\ldots k_{u-1}\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}A^{k_u}_{k'_{t+1}}\Gamma^{\langle i_1\ldots i_u\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_u\rangle}\widetilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_u\rangle}. \qquad (9.13)$$

Здесь мы использовали (9.2) и заменили индекс суммирования u на $u+1$.

Остальные члены первого слагаемого в (9.11) можно записать ви виде

$$\sum_{u=v+1}^{t+1}\sum_{v=s}^{t}A^{m}_{m'}A^{\langle k_1\ldots k_{u-1}\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}A^{k_u}_{k'_{t+1}}\left(\Gamma^{\langle i_1\ldots i_{v-1}\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_{u-1}\rangle}\delta^{i_v}_{k_u}\right)\widetilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_v\rangle}$$

и они вместе со вторым слагаемым в (9.11) в силу (9.1) дают

$$\sum_{u=v+1}^{t+1}\sum_{v=s}^{t}A^{m}_{m'}A^{\langle k_1\ldots k_{u-1}\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}A^{k_u}_{k'_{t+1}}\Gamma^{\langle i_1\ldots i_v\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_u\rangle}\widetilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_v\rangle}. \qquad (9.14)$$

Таким образом, сумма трех слагаемых в (9.11) равняется сумме членов (9.13) и (9.14), т.е.

$$\sum_{u=v}^{t+1}\sum_{v=s}^{t+1}A^{m}_{m'}A^{\langle k_1\ldots k_{u-1}\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}A^{k_u}_{k'_{t+1}}\Gamma^{\langle i_1\ldots i_v\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_u\rangle}\widetilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_v\rangle}.$$

В формулах (9.11) в последнем слагаемом используем выражение (1.5) для $\varepsilon_{i_{u+1}}\widetilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_u\rangle}$ и после этого заменим индекс суммирования u на $u+1$.

После всего проделанного выражение (9.11) примет вид

$$\Gamma^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{m'\langle k'_1\ldots k'_{t+1}\rangle}=\Big[\sum_{u=v}^{t+1}\sum_{v=s}^{t+1}A^{m}_{m'}A^{\langle k_1\ldots k_{u-1}\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}A^{k_u}_{k'_{t+1}}\Gamma^{\langle i_1\ldots i_v\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_u\rangle}\widetilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_v\rangle}+$$

$$+\sum_{u=v}^{t}\sum_{v=s}^{t}A^{m}_{m'}\left(\varepsilon_{k'_{t+1}}A^{\langle k_1\ldots k_u\rangle}_{\langle k'_1\ldots k'_t\rangle}\right)\Gamma^{\langle i_1\ldots i_v\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_u\rangle}\widetilde{A}^{\langle i'_1\ldots i'_s\rangle}_{\langle i_1\ldots i_v\rangle}\Big]+$$

$$+\Big[\sum_{u=1}^{t+1}\big(\varepsilon_{m'}A^{\langle i_1\ldots i_{u-1}\rangle}_{\langle k_1'\ldots k_t'\rangle}\big)A^{i_u}_{k'_{t+1}}\tilde{A}^{\langle i_1'\ldots i_s'\rangle}_{\langle i_1\ldots i_u\rangle}+$$

$$+\sum_{u=1}^{t}\big(\varepsilon_{m'}(\varepsilon_{k'_{t+1}}A^{\langle i_1\ldots i_u\rangle}_{\langle k_1'\ldots k_t'\rangle})\big)\tilde{A}^{\langle i_1'\ldots i_s'\rangle}_{\langle i_1\ldots i_u\rangle}+ \qquad (9.16)$$

$$+\sum_{u=1}^{t+1}A^{\langle i_1\ldots i_{u-1}\rangle}_{\langle k_1'\ldots k_t'\rangle}\big(\tilde{A}^{\langle i_1'\ldots i_s'\rangle}_{\langle i_1\ldots i_u\rangle}-\tilde{A}^{\langle i_1'\ldots i_{s-1}'\rangle}_{\langle i_1\ldots i_{u-1}\rangle}\big)\big(\varepsilon_{m'}A^{i_u}_{k'_{t+1}}\big)\Big].$$

Первые два слагаемых, в силу (1.5), дают

$$\sum_{u=r}^{t+1}\sum_{r=1}^{t+1}A^{m}_{m'}A^{\langle k_1\ldots k_u\rangle}_{\langle k_1'\ldots k'_{t+1}\rangle}\Gamma^{\langle i_1\ldots i_r\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_u\rangle}\tilde{A}^{\langle i_1'\ldots i_s'\rangle}_{\langle i_1\ldots i_r\rangle}.$$

Третье слагаемое в последних квадратных скобках после преобразований, аналогичных применяемым для (9.12), дает

$$\sum_{u=1}^{t+1}A^{\langle i_1\ldots i_{u-1}\rangle}_{\langle k_1'\ldots k_t'\rangle}\tilde{A}^{\langle i_1'\ldots i_s'\rangle}_{\langle i_1\ldots i_u\rangle}\big(\varepsilon_{m'}A^{i_u}_{k'_{t+1}}\big).$$

Теперь, в силу (1.5), довольно легко установить, что сумма слагаемых в последних квадратных скобках равна

$$\sum_{u=1}^{t}\big(\varepsilon_{m'}A^{\langle i_1\ldots i_u\rangle}_{\langle k_1'\ldots k'_{t+1}\rangle}\big)\tilde{A}^{\langle i_1'\ldots i_s'\rangle}_{\langle i_1\ldots i_u\rangle}.$$

Наконец, (9.15) примет вид

$$\Gamma^{\langle i_1'\ldots i_s'\rangle}_{m'\langle k_1'\ldots k'_{t+1}\rangle}=\sum_{u=r}^{t+1}\sum_{r=1}^{t+1}A^{m}_{m'}A^{\langle k_1\ldots k_u\rangle}_{\langle k_1'\ldots k'_{t+1}\rangle}\Gamma^{\langle i_1\ldots i_r\rangle}_{m\langle k_1\ldots k_u\rangle}\tilde{A}^{\langle i_1'\ldots i_s'\rangle}_{\langle i_1\ldots i_r\rangle}+$$

$$+\sum_{u=1}^{t}\big(\varepsilon_{m'}A^{\langle i_1\ldots i_u\rangle}_{\langle k_1'\ldots k'_{t+1}\rangle}\big)\tilde{A}^{\langle i_1'\ldots i_s'\rangle}_{\langle i_1\ldots i_u\rangle},$$

что и требовалось доказать.

Случай 3. При $s=1$ по (9.1) получим

$$\Gamma^{i_1}_{m'\langle k_1'\ldots k'_{t+1}\rangle}=\nabla_{\varepsilon_{m'}}\Gamma^{i_1}_{k'_{t+1}\langle k_1'\ldots k_t'\rangle}.$$

Сравнивая это с (9.9), заметим, что если приравнять $s=1$, то придется пропустить первое слагаемое, а в (9.10) - те слагаемые, которые получаются из этого первого, т.е. первое и четырнадцатое. Если при этом учесть, что там некоторые члены сокращаются и можно применить символ ковариантного дифференцирования, то из (9.10) при $s=1$ для $\Gamma^{i_1}_{m'\langle k_1'\ldots k'_{t+1}\rangle}$ следует

$$\Gamma^{i_1'}_{m'\langle k_1'\ldots k'_{t+1}\rangle}=\sum_{u=r}^{t}\sum_{r=1}^{t}A^{m}_{m'}A^{\langle k_1\ldots k_u\rangle}_{\langle k_1'\ldots k_t'\rangle}A^{k_{u+1}}_{k'_{t+1}}\big(\nabla_{\varepsilon_m}\Gamma^{\langle i_1\ldots i_r\rangle}_{k_{u+1}\langle k_1\ldots k_u\rangle}\big)\tilde{A}^{i_1'}_{\langle i_1\ldots i_r\rangle}+$$

$$+\Big[\sum_{u=v}^{t} A^{m}_{m'} A^{\langle i_1 \ldots i_u\rangle}_{\langle k'_1 \ldots k'_t\rangle} A^{i_{u+1}}_{k'_{t+1}} \big(\varepsilon_{i_{u+1}} \tilde{A}^{i'_1}_{\langle i_1 \ldots i_u\rangle}\big)+$$

$$+\sum_{u=v}^{t}\sum_{v=1}^{t} A^{m}_{m'}\Big(\varepsilon_{k'_{t+1}} A^{\langle k_1 \ldots k_u\rangle}_{\langle k'_1 \ldots k'_t\rangle}\Big) \Gamma^{\langle i_1 \ldots i_v\rangle}_{m\langle k_1 \ldots k_u\rangle} \tilde{A}^{i'_1}_{\langle i_1 \ldots i_v\rangle}+$$

$$+\sum_{u=v}^{t}\sum_{v=1}^{t} A^{m}_{m'} A^{\langle k_1 \ldots k_u\rangle}_{\langle k'_1 \ldots k'_t\rangle} \Gamma^{\langle i_1 \ldots i_v\rangle}_{m\langle k_1 \ldots k_u\rangle}\Big(\varepsilon_{k'_{t+1}} \tilde{A}^{i'_1}_{\langle i_1 \ldots i_v\rangle}\Big)\Big]+$$

$$+\Big[\sum_{u=1}^{t}\Big(\varepsilon_{m'}\Big(\varepsilon_{k'_{t+1}} A^{\langle i_1 \ldots i_u\rangle}_{\langle k'_1 \ldots k'_t\rangle}\Big)\Big) \tilde{A}^{i'_1}_{\langle i_1 \ldots i_u\rangle}+$$

$$+\sum_{u=1}^{t} A^{\langle i_1 \ldots i_u\rangle}_{\langle k'_1 \ldots k'_t\rangle}\Big(\varepsilon_{i_{u+1}} \tilde{A}^{i'_1}_{\langle i_1 \ldots i_u\rangle}\Big)\Big(\varepsilon_{m'} A^{i_{u+1}}_{k'_{t+1}}\Big)+$$

$$+\sum_{u=1}^{t}\Big(\varepsilon_{m'} A^{\langle i_1 \ldots i_u\rangle}_{\langle k'_1 \ldots k'_t\rangle}\Big)\Big(\varepsilon_{k'_{t+1}} \tilde{A}^{i'_1}_{\langle i_1 \ldots i_u\rangle}\Big)\Big].$$

Изменим пределы суммирования следующим образом:
$u\in[v+1,\ t+1]$ (первое слагаемое), $u\in[2,\ t+1]$ (второе слагаемое), $v\in[2,\ t+1]$, $u\in[v,\ t+1]$ (четвертое слагаемое), $u\in[2,\ t+1]$ (шестое и седьмое слагаемые). После этого первое, второе и четвертое слагаемые можно объединить:

$$\sum_{u=v}^{t+1}\sum_{v=1}^{t+1} A^{m}_{m'} A^{\langle k_1 \ldots k_{u-1}\rangle}_{\langle k'_1 \ldots k'_t\rangle} A^{k_u}_{k'_{t+1}} \Gamma^{\langle i_1 \ldots i_v\rangle}_{m\langle k_1 \ldots k_u\rangle} \tilde{A}^{i'_1}_{\langle i_1 \ldots i_v\rangle}.$$

Таким образом,

$$\Gamma^{i'_1}_{m'\langle k'_1 \ldots k'_{t+1}\rangle}=\Big[\sum_{u=v}^{t+1}\sum_{v=1}^{t+1} A^{m}_{m'} A^{\langle k_1 \ldots k_{u-1}\rangle}_{\langle k'_1 \ldots k'_t\rangle} A^{k_u}_{k'_{t+1}} \Gamma^{\langle i_1 \ldots i_v\rangle}_{m\langle k_1 \ldots k_u\rangle} \tilde{A}^{i'_1}_{\langle i_1 \ldots i_v\rangle}+$$

$$+\sum_{u=v}^{t}\sum_{v=1}^{t} A^{m}_{m'}\Big(\varepsilon_{k'_{t+1}} A^{\langle k_1 \ldots k_u\rangle}_{\langle k'_1 \ldots k'_t\rangle}\Big) \Gamma^{\langle i_1 \ldots i_v\rangle}_{m\langle k_1 \ldots k_u\rangle} \tilde{A}^{i'_1}_{\langle i_1 \ldots i_v\rangle}\Big]+$$

$$+\Big[\sum_{u=1}^{t}\Big(\varepsilon_{m'}\Big(\varepsilon_{k'_{t+1}} A^{\langle i_1 \ldots i_u\rangle}_{\langle k'_1 \ldots k'_t\rangle}\Big)\Big) \tilde{A}^{i'_1}_{\langle i_1 \ldots i_u\rangle}+$$

$$+\sum_{u=1}^{t+1}\varepsilon_{m'}\Big(A^{\langle i_1 \ldots i_{u-1}\rangle}_{\langle k'_1 \ldots k'_t\rangle} A^{i_u}_{k'_{t+1}}\Big) \tilde{A}^{i'_1}_{\langle i_1 \ldots i_u\rangle}\Big].$$

Теперь, в силу (1.5), легко заметить, что

$$\Gamma^{i'_1}_{m'\langle k'_1 \ldots k'_{t+1}\rangle}=\sum_{u=v}^{t+1}\sum_{v=1}^{t+1} A^{m}_{m'} A^{\langle k_1 \ldots k_u\rangle}_{\langle k'_1 \ldots k'_{t+1}\rangle} \Gamma^{\langle i_1 \ldots i_v\rangle}_{m\langle k_1 \ldots k_u\rangle} \tilde{A}^{i'_1}_{\langle i_1 \ldots i_v\rangle}+$$

$$+\sum_{u=1}^{t+1}\Big(\varepsilon_{m'} A^{\langle i_1 \ldots i_u\rangle}_{\langle k'_1 \ldots k'_{t+1}\rangle}\Big) \tilde{A}^{i'_1}_{\langle i_1 \ldots i_u\rangle}.$$

Это и требовалось доказать. Теорема доказана.

Литература

1. Е р м а к о в Ю. И. Линейные связности в гладких векторных расслоениях// Дифференциальная геометрия (Саратов). 1974, Т.4. С. 140-150.
2. К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. Москва: Наука, 1981.
3. Л а п т е в Г. Ф. Основные инфинитезимальные структуры на гладком многообразии// Труды геометрического семинара. Т.1. Москва: ВИНИТИ, 1966. С. 139-189.
4. Л у м и с т е Ю. Г. Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения p -кореперов// Труды геометрического семинара. Т. 5. Москва: ВИНИТИ, 1974. С. 239-257.
5. Л у м и с т е Ю. Г. Теория связностей в расслоенных пространствах// Алгебра. Топология. Геометрия. Итоги науки. Москва: ВИНИТИ, 1969. С. 123-168.
6. Р ы б н и к о в А. К. Об аффинных связностях второго порядка// Математические заметки. 1981. Т. 29, вып. 2. С. 279-290.
7. Р ы б н и к о в А. К. Об обобщенных аффинных связностях второго рода// Изв. вузов. Математика. 1983.Н.º 1. С. 73-80.
8. Х е л г а с о н С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. Москва: Мир, 1964.
9. E h r e s m a n n C. Les prolongements d'une variété différentiable. V. Covariants différentials et prolongements d'une structure infinitésimale// C.r. Akad. sci. 1952. V. 234. P. 1424-1426.
10. E h r e s m a n n C. Sur les connections d'ordre supérieur// Atti der V° Congr. dell' Unione Mat. Ital., 1955, Roma. Cremonese, 1956. P. 326.

Поступило
15 VI 1991

HIGHER ORDER LINEAR CONNECTIONS

A.Parring

S u m m a r y

This paper is based on the investigation of the higher order affine connections on a smooth manifold by G.F.Laptev [3]. For each smooth manifold M_n in [3] a serie of p-order prolonged manifolds $(p = 1, 2, \ldots)$ is introduced. They are associated to principal p-order frame bundles, every of which has the p-order holonomic differential group L_n^p as the structural group. For every p a connection is defined in this frame bundle (G.F.Laptev calls it an p-order affine connection). A more detailed research of these connections for $p = 2$ is made by A.K.Rybnikov [6,7], in [6] for the case of holonomic group L_n^2, but in [7] already for the case of non-holonomic group $\bar{L}_n^2$.

In the present paper the connections in the principal p-order nonholonomic frame bundles are investigated, i.e. the case of non-holonomic differential group $\bar{L}_n^p$ is considered for $p > 2$; these connections are called here p-order linear connections. In order to give the better explanation of such p-order linear connection, the well-known notion of the linear connection is used on the suitable prolonged manifold. Proceeding from a smooth manifold M_n, a new smooth manifold $\bar{D}^p(M_n)$ is constructed, which is called the p-order tangent bundle of M_n. Let $H(\bar{D}^p(M_n))$ be the usual frame bundle on $\bar{D}^p(M_n)$. Among the linear connections in $H(\bar{D}^p(M_n))$ there are the p-order linear connection of the base manifold M_n. So a new approach to the last connections is given based on the concept of the usual linear connection.

In the last section 9 a certain algorithm is constructed to obtain special type p-order linear connections on M_n for every $p \geq 2$ starting from a given (first order) linear connection on M_n. For the particular case $p = 2$ this algorithm gives the 2nd order linear connection, considered by A.K.Rybnikov [7].

CONTENTS - СОДЕРЖАНИЕ - SISUKORD