Tartu Ülikool

Matemaatika-informaatikateaduskond

Matemaatilise Statistika Instituut

Anet Tomberg

Portfelliriskide hindamine aktsiate portfelli näitel

Magistritöö

Juhendaja: prof. Tõnu Kollo

Tartu 2007

Sisukord

Sissejuhatus

Tänapäeval üha enam populaarsust koguv investeerimisviis on paigutada raha aktsiatesse. Kõige suuremate võiduvõimalustega investeerimisviisi juures kaasneb sellega ka enim riske. Levinuim meetod riskide hindamisel põhineb dispersioonil. Samas sõltub selle teist järku momendi informatiivsus paljuski portfelli jaotusest ja see näitaja ei anna ka palju informatsiooni kahjude suuruse kohta. Käesoleva töö eesmärgiks on uurida erinevaid riskide hindamise meetodeid aktsiaportfellide jaoks. Iseloomustamaks kirjeldatud meetodeid on koostatud Tallinna Börsil noteeritud aktsiatest näidisportfell.

Käesolev töö on jagatud kahte peatükki. Esimeses peatükis antakse lühiülevaade üldisest portfelliteooriast ja tutvustatakse peamisi riskimõõte. Pikemalt on kirjeldatud neist *VaR* ja oodatav puudujääk *ES*. Kirjeldatud on ka *VaR* meetodeid, mida kasutatakse riskimõõdu leidmiseks mitmemõõtmelistel juhtudel. *VaR*-meetodid jagatakse kolme klassi sõltuvalt kahju jaotuse hindamise metoodikast: ajalooline simuleerimine, kovariatsioonimaatriksil põhinev meetod ja Monte-Carlo meetod. Lähemalt tutvustakse ka peamisi *VaR* näitajate kasutamisega seotud probleeme ja riskide järeltestimist.

Teises peatükis vaatleme viiest Tallinna Börsil noteeritud väärtpaberist koostatud portfelli perioodil 15 oktoober 2003 kuni 23 veebruar 2007. Esialgu teeme kindlaks, kas käesolevad andmed on vaadeldavad sõltumatute ja sama jaotusega juhuslike suuruste realisatsioonidena. Seejärel leiame antud andmete kirjeldamiseks sobiva jaotuse, analüüsime aktsia hinnamuutuste vahelist sõltuvust, arvutame välja riskinäitajad ja analüüsime, kuidas mudel on viimase kahe kuu jooksul töötanud.

1 Portfelliteooria

Kaasaaegne portfelliteooria pakub investorile välja võimaluse oma portfelli optimiseerimiseks ja soovitab, kuidas vara peaks hindama arvestades tema riski turu suhtes. Teooria põhiliseks aluseks on Markowitzi teooria [1].

1.1 Markowitzi teooria

Tänapäeva portfelliteooriat tutvustas esimest korda Harry Markowitz oma töös [10] "Portfelli valik", mis ilmus aastal 1952 ajakirjas "Journal of Finance". Kolmkümmend kaheksa aastat hiljem jagas ta Nobeli preemiat koos Merton Miller'i ja William Sharpe'iga portfelli valiku teooria eest [2].

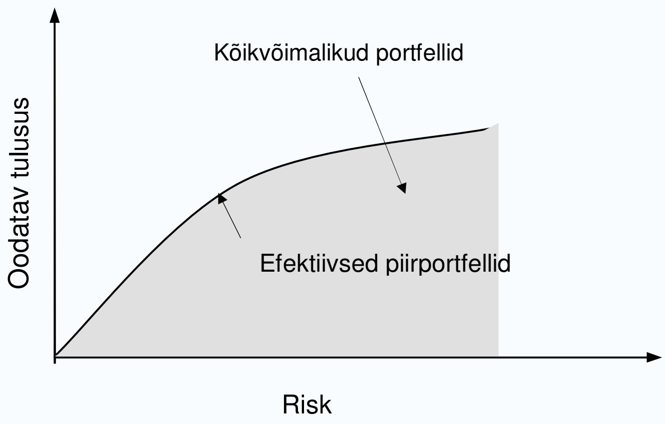
Enne Markowitzi teooriat hindasid investorid väärtpaberite riske ja tulususi eraldi ja seejärel kombineerisid portfelli, kuhu valisid parimaid tulemusi andnud väärtpaberid. Selliseid meetodeid kasutades võis juhtuda, et kogu raha paigutati ühe sektori aktsiatesse. Markowitz tõestas, et see meetod ei tööta, ja väitis, et valikuid tuleks teha hinnates kogu portfelli riske, ehk et tuleks valida portfell üksikute väärtpaberite asemel [2].

Kaasaegses portfelliteoorias modelleeritakse vara tulusus kui juhuslik suurus ja portfell kui kaalutud keskmine varadest, mistõttu ka portfelli tulusus on juhuslik suurus teatud keskväärtuse, dispersiooni ja teiste juhuslikku suurust iseloomustavate karakteristikutega. Riskimõõduna vaadatakse selles mudelis portfelli tulususe dispersiooni [1].

Varasid kombineerides saame tulemuseks erinevad portfellid, mille seas on alamhulk, mis sisaldab optimaalse riski ja tulususega portfelle. Selliseid portfelle nimetas Markowitz *efektiivseteks piirportfellideks (efficient portfolio)* (vt joonis 1) [2].

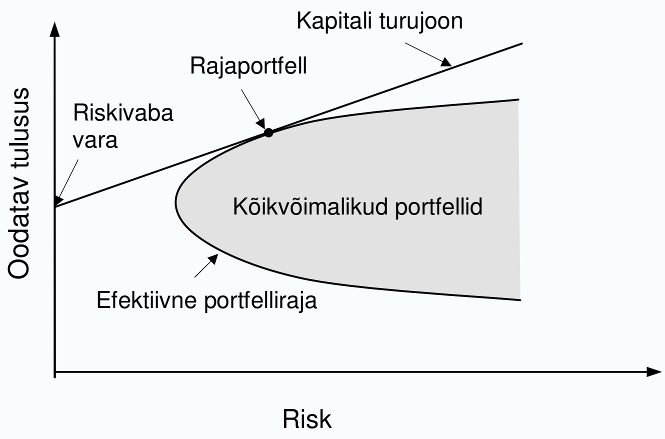
Efektiivsed piirportfellid on esitatavad graafiliselt tulususfunktsiooni *u (utility function)* abil, mis rahuldab tingimust $u''(x) \leq 0$, see tähendab, et $u(x)$ peab olema x suhtes mittekasvav funktsioon, kus x on võimalik võit. Mittekasvav funktsioon viitab sellele, et mida suurem võit, seda väiksema tõenäosusega ta esineb. Enimkasutatav tulususfunktsioon on logaritmiline tulususfunktsioon $u(x) = \log(x)$ [2].

Joonis 1. Efektiivsed piirportfellid



James Tobin täiendas aastal 1958 Markowitz'i teooriat artiklis [11] lisades riskivabad varad nii, et saadud kombineeritud portfelli tulusus oleks sama riski juures suurem kui efektiivsetel portfellidel. Selle tulemusena tekkisid mõisted *rajaportfell* ehk kõige efektiivsem portfell *(super-efficient portfolio)* ja *kapitali turujoon (capital market line)*. Rajaportfell on portfell, mis asub efektiivse portfelliraja *(efficient frontier of portfolios)* ja kapitali turujoone puutepunktis (vt joonis 2) [2].

Joonis 2. Kapitali turujoon



Kasutades riskivaba vara võib investor:

- vähendada riskivaba vara osa portfellis ja investeerida saadud raha muudesse varadesse rajaportfellis;
- müüa osa riskantsematest varadest ja investeerida saadud tulud riskivabasse varasse [2].

Mõlema käitumise tulemusel saadud uued portfellid asuvad kõik kapitali turujoonel. Tobin konstateeris, et portfelli valik peaks olema kaheosaline protsess. Esiteks tuleks leida rajaportfell ja seejärel leida sobiv riski aste muutes riskivaba vara osa portfellis [2].

Järgmisena tõi William Sharpe 1964 aastal sisse finantsvarade hindamise mudeli *(capital asset pricing model- CAMP)* [12]. Ta näitas, et kui

- tehingukulud ja maksud puuduvad;
- kõigil investoritel on võrdne investeerimishorisont st et kõik investorid plaanivad investeerida sama pikaks ajaks;
- kõigil investoritel on sarnane arusaam oodatavatest tulusustest, volatiilsusest ja võimalike investeeringute korrelatsioonidest,

siis peab rajaportfell olema turuportfell. Turuportfell on portfell, mis koosneb igast varast nn "universumis" ehk mingis valitud hulgas kaalutuna selle vara turuväärtusega. Enamasti valitakse "universumiks" kõik kohalikud väärtpaberid, kuid samas võidakse seda hulka ka laiendada lisades rahvusvahelisi väärtpabereid, kinnisvara jne [2].

CAPM jagab portfelli riskid süstemaatilisteks ja spetsiifilisteks. Süstemaatiline risk on portfelli üldine risk, kuna turu käitumine mõjutab vähem või rohkem kõiki väärtpabereid. Spetsiifiline risk on igal varal individuaalne. Sisuliselt kirjeldab see seda osa aktsia tulususe muutusest, mis ei korreleeru üldiste turumuutustega. Seega piisava arvu varade kombineerimise teel saadud portfelli risk on ainult süstemaatiline. Süstemaatilist riski mõõdetakse kasutades *β*-kordajat (vt lk 8) [2].

CAPM mudeli saab esitada kujul

$$R_p = r_f + \beta_p \left(R_t - r_f\right) + e_p,$$

kus R_p ja R_t tähistavad vastavalt portfelli ja turu oodatavat tulusust, r_f tähistab riskivaba vara tulusust, β_p on portfelli *β-kordaja* ning e_p on mudeli viga [5, lk 172]. Väärtpaberi tulususeks loetakse mingi kindla perioodi jooksul väärtpaberi hinnas toimunud muudatuste ja muude väärtpaberiga seotud tulude (näiteks dividendid) summa jagatist selle väärtpaberi hinnaga mõõdetava perioodi alguses [3, lk 19].

Sellisel juhul saame portfelli tulususe dispersiooni jaoks avaldise

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_t^2 + \sigma_e^2,$$

kus σ_e^2 tähistab spetsiifilist riski ja σ_t^2 on turu tulususe dispersioon [5, lk 173].

Kui spetsiifiline risk oleks nulli viidud, siis sellisel juhul saame portfelli tulususe esitada kujul

$$R_p = r_f + \beta_p \left(R_t - r_f\right). \tag{1}$$

β-kordaja defineeritakse järgmiselt

$$\beta_p = \frac{\operatorname{cov}\left(R_p, R_t\right)}{\sigma_t^2},$$

kuna valemist (1) saame, et

$$\operatorname{cov}\left(R_p, R_t\right) = \beta_p \operatorname{cov}\left(R_t, R_t\right) = \beta_p \sigma_t^2,$$

kus $\operatorname{cov}\left(R_p, R_t\right)$ on portfelli tulususe ja turu üldise tulususe vaheline kovariatsioon. β-kordaja hinnatakse tavaliselt turu käitumise põhjal mingil perioodil [2].

Mudelit kutsutakse finantsvarade hindamise mudeliks sellepärast, et teades β-kordajat ja soovitavat tulusust, saab investor kaubelda sellise hinnaga, et oodatav tulusus rahuldaks valemit (1). Praktikas ei leia see mudel eriti rakendamist, kuna selle meetodi korrektseks töötamiseks peaksid kõik investorid kasutama samu β-kordajaid.

β-kordaja kirjeldab instrumendi või portfelli tundlikkust turu muutuste suhtes. Kogu turu β-kordaja väärtus on 1 [5, lk 172]. Kui portfelli β-kordaja väärtus on 0,5, siis portfell reageerib turu muutustele ainult 50% ulatuses turu üldisest muutusest [5, lk 172]. β-kordaja võib olla ka suurem ühest või isegi negatiivne, kui portfell käitub vastupidiselt turule või ollakse nö lühikeses positsioonis ehk mängitakse aktsiahindade langusele [5, lk 172]. Tavaliselt on investori eesmärk osta aktsiaid odavalt ja müüa kallilt. Paraku eeldab odavalt ostmine ja kallilt müümine seda, et aktsia hind tõuseb. Et saada tulu hinnalanguselt, peab investor tegutsema vastupidises järjekorras: kõigepealt müüma kallilt ja siis ostma odavalt. Investeerimisstrateegiat, kus investor müüb maha aktsiad, mida tal veel ei ole, nimetatakse lühikeseks müümiseks ehk *short selling*'uks.

Portfelli spetsiifilist riski saab vähendada investeerides paljudesse erinevatesse mittekorreleeritud või negatiivselt korreleeritud väärtpaberitesse. Sel teel saadud portfelli hajuvus on väiksem kui erinevate väärtpaberite kaalutud keskmise hajuvus.

Olgu meil näiteks kahe varaga portfell

$$Y = a_1 X_1 + \left(1 - a_1\right) X_2,$$

kus a_1 on vara X_1 osakaal portfellis.

Selle portfelli hajuvust kirjeldav dispersioon avaldub kujul

$$\sigma_Y^2 = DY = E(Y^2) - (EY)^2 = a_1^2 EX_1^2 + (1-a_1)^2 EX_2^2 + 2a_1(1-a_1)E(X_1X_2) -$$
$$- a_1^2 (EX_1)^2 - (1-a_1)^2 (EX_2)^2 - 2a_1(1-a_1)E(X_1)E(X_2) =$$
$$= a_1^2\sigma_1^2 + (1-a_1)^2\sigma_2^2 + 2a_1(1-a_1)\sigma_{1,2}$$

ning

$$\sigma_Y = \sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + (1-a_1)^2\sigma_2^2 + 2a_1(1-a_1)\sigma_{1,2}}\,, \tag{2}$$

kus σ_i on *i*-nda vara standardhälve, $i = 1, 2$, ja $\sigma_{1,2}$ on varade kovariatsioon ning $\sigma_{1,2} = \sigma_1\sigma_2\rho_{1,2}$, kus $\rho_{1,2}$ on varade korrelatsioon. [3, lk 71]

Seega juhul kui korrelatsioon $\rho_{1,2} = 1$, siis on portfelli standardhälve kujul

$$\sigma_Y = \sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + (1-a_1)^2\sigma_2^2 + 2a_1(1-a_1)\sigma_1\sigma_2} =$$
$$= \sqrt{(a_1\sigma_1 + (1-a_1)\sigma_2)^2} = a_1\sigma_1 + (1-a_1)\sigma_2\,. \tag{3}$$

Juhul kui korrelatsioon $\rho_{1,2} = -1$, siis on portfelli standardhälve kujul

$$\sigma_Y = \sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + (1-a_1)^2\sigma_2^2 - 2a_1(1-a_1)\sigma_1\sigma_2} =$$
$$= \sqrt{(a_1\sigma_1 - (1-a_1)\sigma_2)^2} = a_1\sigma_1 - (1-a_1)\sigma_2\,. \tag{4}$$

Avaldistest (3) ja (4) näeme, et negatiivse korrelatsiooni korral on portfelli hajuvus väiksem kui positiivse korrelatsiooni korral. Teades varade standardhälbeid ja nendevahelist korrelatsiooni, saame otsida varade osakaalu portfellis, mille korral standardhälve σ_p on minimaalne. Selleks lahendame võrrandi $\frac{\partial\sigma_Y}{\partial a_1} = 0$.

Kuna

$$\frac{\partial\sigma_Y}{\partial a_1} = \frac{1}{2}\frac{2a_1\sigma_1^2 - 2(1-a_1)\sigma_2^2 + 2(1-a_1)\sigma_{1,2} - 2a_1\sigma_{1,2}}{\sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + (1-a_1)^2\sigma_2^2 + 2a_1(1-a_1)\sigma_{1,2}}} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{2a_1\sigma_1^2 - 2(1-a_1)\sigma_2^2 + 2\sigma_{1,2} - 4a_1\sigma_{1,2}}{\sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + (1-a_1)^2\sigma_2^2 + 2a_1(1-a_1)\sigma_{1,2}}}\,,$$

siis tingimusest $\frac{\partial\sigma_Y}{\partial a_1} = 0$ saame, et

$$a_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{1,2}} \quad [3, \text{lk } 78].$$

Juhul kui varade vaheline korrelatsioon on null, siis sobiv vara X_1 osakaal portfellis avaldub kujul

$$a_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \text{ [3, lk 78].}$$

1.2 Riskid

Investori eesmärgiks on leida kõige suurema tulususe ja minimaalse riskiga portfell. Need kaks omadust on aga börsi käitumise kohaselt vastakad, kuna reeglina kõige suurema tulususega väärtpaberid on ka kõige riskantsemad.

Aktsiaga seotud riske mõjutavad mitmed tegurid [3, lk 20]:

1. firma riski näitajad ja krediidivõimalused,
2. aktsia likviidsus[1] ja turg, kus sellega kaubeldakse,
3. nõuete olemus ja prioriteet, mida investeering omab tuludele ja varadele.

Toon näiteks USA erinevate väärtpaberitüüpide keskmise tulususe ja standardhälbe perioodil 1926 kuni 1993. Kõige suurema tulususe ja kõrgema riskiga on aktsiad.

Tabel 1. Vara tüübid koos nende keskmiste tulususte ja standardhälbega [3, lk 21]

Vara tüüp	Keskmine tulusus	Standardhälve
Valitsuse lühiajalised võlakirjad	3,7	3,3
Valitsuse pikaajalised võlakirjad	5,4	8,7
Suurte firmade aktsiad	12,3	20,5
Inflatsioon	3,2	4,6
Korporatiivsed võlakirjad	5,9	8,4
Väikeste firmade aktsiad	17,6	34,8

Aktsiaturge kirjeldavad indeksid, mis peegeldavad valitud aktsiate käitumist. Indeksite arvutamisel on tehtud eeldus, et tõenäosus, et investor ostab mõne valitud aktsiatest, on võrdne kõikide aktsiate korral. On ka indekseid, kus kaalutakse erinevaid aktsiaid. Näiteks Dow Jones'i indeksi arvutamisel kaalutakse aktsiaid nende hinnaga.

[1] Vara likviidsus näitab, kui kiiresti on võimalik seda vara rahaks muuta ehk maha müüa.

Tavaliselt modelleeritakse riskiteoorias portfelli väärtus Y_t hetkel t kui funktsioon ajast ja d-mõõtmelisest juhuslikust vektorist $Z_t = (Z_{t,1}, \ldots, Z_{t,d})'$, mis koosneb riskifaktoritest, järgmiselt:

$$Y_t = f(t, Z_t),$$

kus f on mingi mõõtuv funktsioon [6, lk 26].

Riski hindamiseks on meil eelkõige vaja hinnata kahju L_{t+1} jaotust, kus L_{t+1} avaldub järgmiselt

$$L_{t+1} = -(Y_{t+1} - Y_t). \tag{5}$$

Moodustagu riskifaktorite väärtuste muutused $(Z_t)_{t \in N}$ statsionaarse aegrea statsionaarse jaotusega F_z. Sellisel juhul on $(Z_t)_{t \in N}$ jaotus aja suhtes invariantne. Olgu meil nüüd ajahetk t ja F_t naturaalne filtratsioon[2] $F_t = \sigma(\{Z_s : s \le t\})$, siis sellisel juhul on meil juhusliku suuruse Z_{t+1} tinglik jaotus $F_{Z_{t+1}|F_t}$. Jaotus $F_{Z_{t+1}|F_t}$ ei ole reeglina sama, mis on statsionaarne jaotus F_z. Juhul, kui juhuslikud suurused $(Z_t)_{t \in N}$ on sõltumatud ja sama jaotusega, siis $F_{Z_{t+1}|F_t} = F_z$ [6, lk 28].

Väärtpaberite portfelli puhul kasutatakse reeglina riskifaktorina logaritmi väärtpaberi hinnast: $Z_{t,i} = \ln(X_{t,i})$. Sel juhul riskifaktorite muutused $W_{t+1,i} = \ln X_{t+1,i} - \ln X_{t,i}$ ja portfelli väärtus hetkel t avaldub kujul

$$Y_t = \sum_{i=1}^{d} b_i \exp(Z_{t,i})$$

ning

$$L_{t+1} = -(Y_{t+1} - Y_t) = -\left(\sum_{i=1}^{d} \left(b_i \exp(Z_{t+1,i}) - b_i \exp(Z_{t,i}) \right) \right) =$$

$$= -\left(\sum_{i=1}^{d} b_i \left(\exp(\ln X_{t+1,i}) - \exp(\ln X_{t,i}) \right) \right) = -\left(\sum_{i=1}^{d} b_i X_{t,i} \left(\exp(\ln X_{t+1,i} - \ln X_{t,i}) - 1 \right) \right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{d} b_i X_{t,i} \left(\exp(W_{t+1,i}) - 1 \right), \tag{6}$$

kus b_i on väärtpaberite kaalud portfellis [6, lk 29].

Kui arendada $\exp(W_{t+1,i})$ Taylori ritta

---

[2] Filtratsiooniks nimetatakse kasvavat alam-σ-algebrate jada $\{F_t, t \ge 0\}$, mille korral $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F$
Naturaalne filtratsioon on $F_n = \sigma(W_0, \ldots, W_n)$, kus $\{W_n\}$ on mingi juhuslik protsess.

$$\exp(W_{t+1,i}) = 1 + W_{t+1,i} + \frac{1}{2}(W_{t+1,i})^2 + \dots,$$

siis saame esimest järku lähendi avaldisele L_{t+1} kujul

$$L_{t+1}^{\Delta} = -\sum_{i=1}^{d} b_i X_{t+1,i} W_{t+1,i} = -Y_t \sum_{i=1}^{d} \alpha_{t,i} W_{t+1,i}, \tag{7}$$

kus $\alpha_{t,i} := (b_i X_{t,i}) / Y_t$ [6, lk 29].

Riski haldamise tehnikaid, mis põhinevad tinglikul jaotusel, nimetatakse tavaliselt tingliku ehk dünaamilise riski haldamiseks ja tehnikaid, mis põhinevad tavalisel jaotusel, nimetatakse staatilise riski haldamiseks. Olles teada saanud kahju L jaotuse, saame leida sobiva riskimõõdu.

Riskimõõte on erinevaid. Järgnevalt esitame neli tingimust, mida üks riskimõõt peaks rahuldama. Riskimõõtu, mis rahuldab tingimusi 1 – 4, nimetatakse koherentseks [6, lk 240].

Tingimus 1. (invariantsus nihke suhtes) Olgu $M \subset L^0(\Omega, F.P)$ finantsriskide hulk, kus $L^0(\Omega, F, P)$ tähistab kõikide peaaegu kindlasti lõplike juhuslike suuruste hulka ruumil (Ω, F), ja rahuldagu M tingimust: juhul kui $L_1 \in M$ ja $L_2 \in M$, siis ka $L_1 + L_2 \in M$. Siis iga $L \in M$ ja iga $l \in R$ korral riskimõõt $\gamma : M \to R$ rahuldab tingimust $\gamma(L + l) = \gamma(L) + l$ [6, lk 239].

Tingimus 2. (subaditiivsus) Iga $L_1, L_2 \in M$ korral $\gamma(L_1 + L_2) \leq \gamma(L_1) + \gamma(L_2)$ [6, lk 239].

See tingimus on eelkõige vajalik portfellide liitmise juures. Samas on see tingimus põhjustanud palju poleemikat, kuna riskimõõt *VaR* seda tingimust alati ei rahulda. Subaditiivsuse nõue peegeldab riskide jagamise ideed ehk seda, et otstarbekas on investeerida paljudesse väärtpaberitesse [6, lk 240].

Tingimus 3. (positiivne homogeensus) Iga $L \in M$ ja $\lambda \in R^+$ korral $\gamma(\lambda L) = \lambda \gamma(L)$ [6, lk 239].

Tingimus 4. (monotoonsus) Iga $L_1, L_2 \in M$ korral, kui $L_1 \leq L_2$, on täidetud tingimus $\gamma(L_1) \leq \gamma(L_2)$ [6, lk 240].

Praegusel ajal on kõige tuntum riskimõõt ***VaR*** (*Value-at-Risk*). Samas ajalooliselt on olnud üks tuntumaid riskimõõte **dispersioon**. Dispersioon levis riskimõõduna eelkõige seoses Markowitzi teooriaga. Üks suurimaid dispersiooni puudusi riski hindamisel on eeldus, et teist järku moment eksisteerib. Teine oluline moment seisneb selles, et dispersioon on informatiivne juhul, kui tegemist on sümmeetrilise jaotusega, kuna dispersiooni arvutamisel ei eristata kuidagi positiivset ja negatiivset erinevust keskmisest. [1]

Sellest puudusest ülesaamiseks toodi sisse mõiste **pooldispersioon** (semivariance)

$$UPM^{+}(2, EL) = \int_{EL}^{\infty} (1 - EL)^2 \, dF_L(l),$$

mis on juhusliku suuruse

$$Z^{+} = \begin{cases} 0, & L < EL \\ L, & L \geq EL \end{cases}$$

dispersioon [6, lk 44].

Veel on kasutusel **alumised ja ülemised osalised momendid**. Siinkohal keskendutakse jaotuse sabadele. Kuna meid huvitab võimalikult suure kahju esinemise tõenäosus, siis keskendume ülemisele osalisele *k*-ndat järku momendile, mis on defineeritud järgmiselt

$$UPM(k, q) = \int_{q}^{\infty} (1 - q)^k \, dF_L(l) \qquad \in [0, \infty] \text{ [6, lk 44].}$$

Järjest enam kogub tänapäeval populaarsust mõõduga *VaR* tihedalt seotud riskimõõt *oodatav puudujääk* (*expected shortfall*). Järgnevalt tutvustangi kahte levinumat riskimõõtu - *VaR* ja oodatav puudujääk *ES* ning *VaR* protseduure. *VaR* protseduurid annavad meetodid leidmaks sobivat mudelit kahju jaotuse hindamiseks.

1.2.1 *VaR*

VaR meetod on enim levinud riski hindamise meetod. Riski arvutamisel võidakse kasutada lihtsalt ajaloolisi andmeid. Probleem on antud meetodi puhul see, et ta ei arvesta turu potentsiaalseid tuleviku trende vaid põhineb ainult ajaloolisel infol. Ajalooline hajuvus iseloomustab seda, kui riskantne on portfell olnud lähiminevikus, kuid ei sisalda mingit informatsiooni tuleviku kohta. Kasutades *VaR* meetodit saab potentsiaalseid kaotusi paremini ette ennustada ja neid ära hoida.

Enam hakati *VaR* kasutama 1990ndatel, samas mõiste oli kasutusel juba ammu enne. Esimesena kasutas seda Markowitz portfelli optimiseerimismeetodite väljatöötamisel.

Definitsioon 1. *VaR* ehk *value-at-risk* usaldusnivool $\alpha \in (0, 1)$ on selline vähim suurus *l*, mille korral tõenäosus, et kahju *L* on suurem kui *l,* on $1 - \alpha$ ehk, et

$$VaR_{\alpha}(L) = \inf\{l \in R \; : P\{L > l\} \leq 1 - \alpha\},$$

kus *L* on oodatav kaotus.

Vaadeldava portfelli korral on oodatava kaotuse L väärtus ajahetkel $t+1$ määratud valemiga (5).

Tüüpilised väärtused α jaoks on 0,95 ja 0,99. Olgu meil kahju L jaotusfunktsioon $F_L(x) = P(L \leq x)$, siis saame *VaR* kirja panna järgmiselt

$$VaR_\alpha(L) = \inf\{l \in R : F_L(l) \geq \alpha\} \quad [6, \text{lk } 38].$$

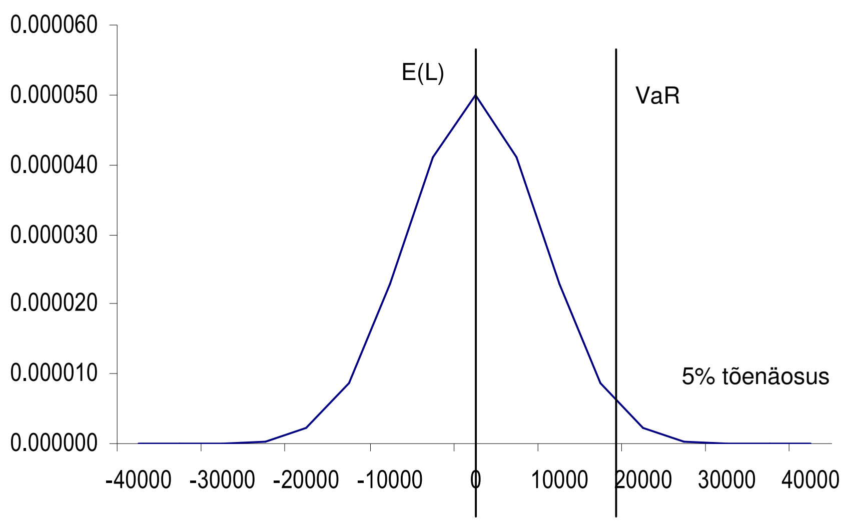
Kahju võib vaadelda ka üle suurema ajaperioodi kui üks päev. Sellisel juhul

$$L_{t+h} = -(Y_{t+h} - Y_t),$$

kus h tähistab perioodi, üle mille riski arvutatakse.

Graafiliselt on *VaR* iseloomustatud joonisel 3, kus on esitatud kahju L tihedusfunktsioon. Suurus *VaR* märgib siis väärtust x-teljel, millest suuremaid kahjusid esineb tõenäosusega 0.05.

Joonis 3. 95% VaR



VaR definitsioon on tegelikult sama mis kahju L jaotuse α-kvantiili definitsioon. See järeldub otseselt α-kvantiili definitsioonist.

Definitsioon 2. Punkt $x_\alpha \in R$ on jaotuse F α-kvantiil, kui on täidetud järgmised kaks tingimust

1. $F(x_\alpha) \geq \alpha$
2. $F(x) < \alpha, \, kus \; x < x_\alpha$. [6, lk 39]

Näide 1. Kui kahju $L \sim N(\mu, \sigma)$, siis

$$VaR_\alpha(L) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha), \tag{8}$$

kus $\Phi^{-1}(\alpha)$ on standardse normaaljaotuse α-kvantiil [6, lk 39].

Oletame, et meid huvitab, kui suur võib olla võimalik kaotus tõenäosusega 0,01. Kuna on teada, et $\Phi^{-1}(0.99)=2.33$, siis $VaR_{0.99}(L)=\mu+2.33\sigma$.

Eelnevas peatükis sai kirja pandud neli tingimust, mis kirjeldavad head riskimõõtu. Vaatame, milliseid neist *VaR* rahuldab.

Lause 1. *VaR* rahuldab riskitingimusi 1, 3 ja 4.

Tõestus

1. Invariantsus nihke suhtes:

$$VaR_\alpha(L+b)=\inf\{l+b\in R\ :P\{L+b>l+b\}\leq 1-\alpha\}=$$
$$=\inf\{l\in R\ :P\{L>l\}\leq 1-\alpha\}+b=VaR_\alpha(L)+b,$$

kus $b\in R$.

3. Positiivne homogeensus:

$$VaR_\alpha(\lambda L)=\inf\{\lambda l\in R\ :P\{\lambda L>\lambda l\}\leq 1-\alpha\}=$$
$$=\lambda\inf\{l\in R\ :P\{L>l\}\leq 1-\alpha\}=\lambda VaR_\alpha(L),$$

kus $\lambda\in R^+$.

4. Monotoonsus: Kui $L_1\leq L_2$, siis

$$VaR_\alpha(L_1)=\inf\{l\in R\ :P\{L_1>l\}\leq 1-\alpha\}\leq\inf\{l\in R\ :P\{L_2>l\}\leq 1-\alpha\}=VaR_\alpha(L_2).$$

□

VaR ei ole alati subaditiivne. Näiteks ei ole *VaR* enamasti subaditiivne, kui portfelli kuuluvate varade kahju jaotus on raske sabaga või kui üksikute varade jaotused on küll sümmeetrilised aga varade sõltuvusstruktuur on asümmeetriline [6, lk 242].

Näide 2. Olgu meil kaks kahju L_1 ja L_2 nii, et $L_i=\varepsilon_i+\eta_i$, kus $\varepsilon_i\sim\mathrm{N}(0,1)$ ja

$$\eta_i=\begin{cases}0 & \textit{tõenäosusega}\ 0.991\\ 10 & \textit{tõenäosusega}\ 0.009\end{cases}\ [13].$$

Kuna

$$0.99 = P(L_1 < VaR_{0.99}) = P(\varepsilon_1 + \eta_1 < VaR_{0.99}) =$$

$$= 0.009\underbrace{P(\varepsilon_1 < VaR_{0.99} - 10 \,|\, \eta_1 = 10)}_{\approx 0} + 0.991 P(\varepsilon_1 < VaR_{0.99} | \eta_1 = 0) \approx 0.991 P(\varepsilon_1 < VaR_{0.99} | \eta_1 = 0),$$

siis

$$0.991 P(\varepsilon_1 < VaR_{0.99}) \approx 0.99$$

$$P(\varepsilon_1 < VaR_{0.99}) \approx \frac{0.99}{0.991}$$

$$VaR_{0.99}(L_1) \approx \Phi^{-1}\left(\frac{0.99}{0.991}\right)$$

ning

$$VaR_{0,99}(L_1) + VaR_{0,99}(L_2) = 2\Phi^{-1}(0.99/0.991) = 2 * 3.1 = 6.2\,.$$

Kuna $L_1 + L_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \eta_1 + \eta_2$ ning

$$\eta_1 + \eta_2 = \begin{cases} 0 \quad \textit{tõenäosusega}\ 0.991 * 0.991 \\ 10 \ \ \textit{tõenäosusega}\ 2 * 0.009 * 0.991 \\ 20 \ \ \textit{tõenäosusega}\ 0.009 * 0.009, \end{cases}$$

siis

$$0.99 = P(L_1 + L_2 < VaR_{0.99}(L_1 + L_2)) =$$

$$= 0.982 P(L_1 + L_2 < VaR_{0.99} \,|\, \eta_1 + \eta_2 = 0) + 0.018 P(L_1 + L_2 < VaR_{0.99} - 10 \,|\, \eta_1 + \eta_2 = 10) +$$

$$+ 0.000081\underbrace{P(L_1 + L_2 < VaR_{0.99} - 20 \,|\, \eta_1 + \eta_2 = 20)}_{\approx 0} \approx 0.982\, \Phi(VaR_{0.99}) + 0.018\Phi(VaR_{0.99} - 10)$$

ehk

$$0.99 \approx 0.982\, \Phi(VaR_{0.99}) + 0.018\Phi(VaR_{0.99} - 10)\ .$$

Seda võrdust rahuldab $VaR_{0.99}(L_1 + L_2) = 9.8$.

Seega

$$VaR_{0.99}(L_1 + L_2) = 9.8 > 6.2 = VaR_{0.99}(L_1) + VaR_{0.99}(L_2)$$

ehk sellise kahjude jaotuse korral subaditiivsuse tingimus ei kehti.

□

VaR kasutamise juures on ka mõned probleemid:

1. Nagu enne tähele panime, ei ole ta subaditiivne. Kui meil on teada ühe portfelli kahju L_1 jaoks *VaR* ja teise portfelli kahju L_2 jaoks *VaR* ning me tahame need portfellid ühendada $L = L_1 + L_2$, siis sellest ei järeldu, et $VaR_\alpha(L) \leq VaR_\alpha(L_1) + VaR_\alpha(L_2)$ [6, lk 40].

2. *VaR* näitajate interpreteerimine võib kergesti olla eksitav. Üheltpoolt jäetakse siinjuures tavaliselt arvestamata, et kahju jaotus on hinnatud, ja tegelik risk võib olla hoopis midagi muud. Juhul kui tegelik jaotus on raske sabaga aga *VaR* arvutamisel eeldati, et tegemist on näiteks normaaljaotusega, siis on tulemus liiga optimistlik [6, lk 41].

3. *VaR* arvutamisel jäetakse arvestama väärtpaberite likviidsus.

1.2.2 Oodatav puudujääk

Käesolev paragrahv põhineb allikal [6, lk 44 – 47].

Definitsioon 3. Olgu kahju L jaotusfunktsiooniga F_L ja $E(|L|) < \infty$. Siis oodatav puudujääk usaldusnivool $\alpha \in (0,1)$ on defineeritud võrdusega

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_u(F_L)du,$$

kus $q_u(F_L)$ on F_L u-kvantiil.

Definitsioonist on näha, et oodatav puudujääk on riskimõõduga *VaR* seotud järgmiselt:

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(F_L)du.$$

Seega selle asemel, et vaadata fikseeritud väärtust α, keskmistab oodatav puudujääk riskimõõdu *VaR* üle kõikide $u \geq \alpha$.

Lause 2. Oodatav puudujääk on koherentne riskimõõt.

Tõestus

Tingimuste 1, 3 ja 4 kehtimine tuleneb seosest *VaR* mõõdu ja oodatava puudujäägi vahel. Näitame, et oodatav puudujääk on ka subaditiivne.

Selle tõestamiseks olgu meil juhuslikud suurused $L_1,\ldots,L_n$ ja nendega seotud järkstatistikud $L_{1,n} \geq \ldots \geq L_{n,n}$. Siis iga m korral, nii et $1 \leq m \leq n$,

$$\sum_{i=1}^{m} L_{i,n} = \sup\left\{L_{i_1} + \ldots + L_{i_m} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq m\right\}.$$

Olgu meil kaks juhuslikku suurust L ja $\tilde{L}$ ühisjaotusfunktsiooniga F ja juhuslikud vektorid $\left(L_1,\tilde{L}_1\right),\ldots,\left(L_n,\tilde{L}_n\right)$ samuti jaotusfunktsiooniga F. Tähistame $\left(L+\tilde{L}\right)_i := L_i + \tilde{L}_i$ ning suurusega $\left(L+\tilde{L}\right)_{i,n}$ tähistame $\left(L+\tilde{L}\right)_1,\ldots,\left(L+\tilde{L}\right)_n$ järkstatistikud. Sellisel juhul saame, et

$$\sum_{i=1}^{m}\left(L+\tilde{L}\right)_{i,n} = \sup\left\{\left(L+\tilde{L}\right)_{i_1} + \ldots + \left(L+\tilde{L}\right)_{i_m} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq m\right\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{L_{i_1} + \ldots + L_{i_m} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq m\right\} + \sup\left\{\tilde{L}_{i_1} + \ldots + \tilde{L}_{i_m} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq m\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} L_{i,n} + \sum_{i=1}^{m} \tilde{L}_{i,n}. \tag{9}$$

Edasi kasutame tulemust, et sõltumatute ja sama jaotusega juhuslike suuruste $\left(L_i\right)_{i\in N}$ korral, mis on jaotusfunktsiooniga F, kehtib seos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{[n(1-\alpha)]} L_{i,n}}{[n(1-\alpha)]} = ES_\alpha,$$

kus $L_{1,n} \geq \ldots \geq L_{n,n}$ on $L_1,\ldots,L_n$ järkstatistikud ja $[n(1-\alpha)]$ tähistab $n(1-\alpha)$ täisosa.

Seega, kui võrratuses (9) valime $m = [n(1-\alpha)]$ ja laseme $n \to \infty$, siis saame, et $ES_\alpha\left(L+\tilde{L}\right) \leq ES_\alpha(L) + ES_\alpha\left(\tilde{L}\right)$ ehk oodatav puudujääk on subaditiivne.

□

Lause 3. Olgu kahju L integreeruv ning pideva jaotusfunktsiooniga F_L, siis $\alpha \in (0,1)$ korral

$$ES_\alpha = \frac{E\left(L; L \geq q_\alpha(L)\right)}{1-\alpha} = E\left(L \mid L \geq VaR_\alpha\right). \tag{10}$$

Tõestus

Kuna definitsiooni järgi $ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_u\left(F_L\right)du$, siis valemi (10) kehtimiseks peab kehtima seos

$$E\left(L; L \geq q_\alpha(L)\right) = \int_\alpha^1 q_u\left(F_L\right)du.$$

Seda on lihtne näha, kuna

$$E(L; L \geq q_\alpha(L)) = E\left(\mathrm{F}_L^{\leftarrow}(U); \mathrm{F}_L^{\leftarrow}(U) \geq \mathrm{F}_L^{\leftarrow}(\alpha)\right) = E\left(\mathrm{F}_L^{\leftarrow}(U); U \geq \alpha\right) = \int_\alpha^1 \mathrm{F}_L^{\leftarrow}(u)du = \int_\alpha^1 q_u(F_L)du,$$

kus U on standardse ühtlase jaotusega juhuslik suurus ja $F^{\leftarrow}$ on kvantiilifunktsioon

$$q_\alpha(F) := F^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{x \in R : F(x) \geq \alpha\}.$$

Teine võrdus väites tuleneb sellest, et

$$\frac{E(L; L \geq q(L))}{1-\alpha} = \frac{P(L \geq q(L))E(L \mid L \geq q(L))}{(1-\alpha)} = \frac{(1-\alpha)E(L \mid L \geq q(L))}{(1-\alpha)} = E(L \mid L \geq q(L)).$$

□

Lause 4. Kui kahju *L* jaotusfunktsioon ei ole pidev, siis saame oodatava puudujäägi leida valemiga

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\left(E(L; L \geq q_\alpha) + q_\alpha(1 - \alpha - P(L \geq q_\alpha))\right). \tag{11}$$

Tõestus

Valemi (11) tõestamiseks piisab näidata, et $E(L; L \geq q_\alpha) + q_\alpha(1 - \alpha - P(L \geq q_\alpha)) = \int_\alpha^1 q_u(F_L)du$.

Kuna

$$\int_\alpha^1 q_u(F_L)du = \int_\alpha^1 F_L^{\leftarrow}(u)du = E(L; L \geq q_\alpha) + q_\alpha(P(L = q_\alpha)) =$$

$$= E(L; L \geq q_\alpha) + q_\alpha(1 - P(L > q_\alpha) - P(L < q_\alpha)) = E(L; L \geq q_\alpha) + q_\alpha(1 - (1-\alpha) - 1 + P(L \geq q_\alpha)),$$

kus $q_\alpha := q_\alpha(L)$.

□

Näide 3. Normaaljaotuse korral avaldub oodatav puudujääk *ES* järgmiselt

$$ES_\alpha(L) = \mu + \sigma\frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha},$$

kus ϕ on standardse normaaljaotuse tihedus.

Selle võrduseni jõuame nii:

$$ES_\alpha(L) = E(L \mid L \geq VaR_\alpha) = \mu + \sigma E\left(\frac{L-\mu}{\sigma} \;\middle|\; \frac{L-\mu}{\sigma} \geq q_\alpha\left(\frac{L-\mu}{\sigma}\right)\right) = \mu + \sigma\, ES_\alpha(\tilde{L}),$$

kus $\tilde{L} := \dfrac{L-\mu}{\sigma}$.

Leiame $ES_\alpha(\tilde{L})$

$$ES_\alpha(\tilde{L}) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u\, du = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \Phi^{-1}(u)du = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} l\,\phi(l)dl = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}.$$

Seega saime, et

$$ES_\alpha(L) = \mu + \sigma\frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \quad [6, lk 45].$$

1.3 *VaR* protseduurid

Põhinedes peamiselt allikal [6] tutvustan järgnevalt kolme peamist *VaR* protseduuri, mida kasutatakse kahjude hindamiseks: kovariatsioonimaatriksi meetod, Monte-Carlo meetod ja ajalooline simuleerimine.

1.3.1 Kovariatsioonimaatriksi meetod

Kovariatsioonimaatriksi meetod põhineb eeldusel, et riskifaktorite muutused $W_{t+1} = Z_{t+1} - Z_t$ on mitmemõõtmelise normaaljaotusega keskväärtusega μ ja kovariatsioonimaatriksiga Σ ehk $W_{t+1} \sim N_d(\mu, \Sigma)$ [6, lk 49].

Teisalt eeldame, et eelnevas peatükis (vt ptk 1.2 valem (7)) kirjeldatud lineariseeritud kahju L^Δ ehk esimest järku lähend kahjule L on piisavalt täpne hinnang tegelikule kahjule. Lineariseeritud kahju

$$L_{t+1}^\Delta = l_t^\Delta(W_{t+1}),$$

kus l_t^Δ on nn kahju operaator ehk funktsioon $R^n \to R$, mis teisendab riskifaktorid kahjuks:

$$l_t^\Delta(w) = -(c_t + b_t' w),$$

kus w on riskifaktorite vektor, c_t on konstant ja b_t on konstantide vektor, mille väärtused on meile hetkel t teada [6, lk 49].

Väärtpaberiportfelli puhul kasutatakse reeglina riskifaktorina logaritmi väärtpaberi hinnast ja sellisel juhul $l_t^\Delta(w) = -Y_t a_t' w$, kus Y_t on portfelli maht ajahetkel t, a_t on väärtpaberite osakaalude vektor hetkel t ja w on riskifaktorite ehk antud juhul väärtpaberi hindade logaritmide vektor.

Kuna $l_t^\Delta(w) = -(c_t + b_t' w)$ on ühemõõtmelise normaaljaotusega, siis saame, et

$$L_{t+1}^{\Delta} \sim N\left(-c_t - b_t^{'}\mu,\, b_t^{'}\Sigma b_t\right) \text{ [6, lk 49].}$$

Nüüd saame valemit (6) kasutades välja arvutada *VaR*. Selleks on vaja hinnata ka jaotuse parameetrid μ ja Σ. Keskväärtuse μ hinnang on

$$\overline{W}_{t+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{d} W_{t+1,i}$$

ja kovariatsioonimaatriksi Σ nihketa hinnang on

$$\hat{S} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{d}\left(W_{t+1,i} - \overline{W}_{t+1}\right)\left(W_{t+1,i} - \overline{W}_{t+1}\right)'. \text{ [6, lk 65]}$$

Kogu eelneva juures eeldasime, et meil on tegemist statsionaarse protsessiga. Juhul, kui meid huvitab tinglik *VaR*, siis vaatame andmeid realisatsioonina mitmemõõtmelisest aegreast, ja eeldame, et $W_{t+1}\left|F_t\right. \sim N_d\left(\mu_{t+1}, \Sigma_{t+1}\right)$, kus F_t tähistab filtratsiooni ja μ_{t+1}, Σ_{t+1} on jaotuse parameetrid, mis põhinevad infol, mis teada hetkeks *t*. Antud juhul tuleb hinnata aegrea mudel nagu näiteks üldistatud autoregressiivne tinglikult heteroskedastiline (GARCH) mudel või siis kasutada eksponentsiaalselt kaalutud libiseva keskmise protseduuri (EWMA) [6, lk 49].

Definitsioon 4. Aegrida nimetatakse rangelt statsionaarseks kui

$$\left(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}\right) \stackrel{d}{=} \left(W_{t_1+k}, \ldots, W_{t_n+k}\right)$$

$\forall\, t_1, \ldots, t_n, k \in \mathrm{Z}$ ja $\forall n \in N$ korral [6, lk 126].

Definitsioon 5. Olgu $\left(Z_t\right)_{t\in Z}$ range valge müra protsess, mille keskväärtus on 0 ja standardhälve 1. Protsess $\left(W_t\right)_{t\in Z}$ on GARCH(*p, q*) protsess juhul, kui ta on rangelt statsionaarne ja ta rahuldab $\forall\, t \in Z$ ja positiivsete väärtustega protsessi $\left(\sigma_t\right)_{t\in Z}$ korral võrdusi

$$W_t = \sigma_t Z_t, \qquad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i W_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q}\beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

kus $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \ldots, p$ ja $\beta_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, q$ [6, lk 145].

Definitsioon 6. Protsessi $\left(Z_t\right)_{t\in Z}$ nimetatakse rangeks valge müra protsessiks, kui tema kovariatsioon on statsionaarne; autokorrelatsioon avaldub järgmiselt:

$$\rho(h) = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases};$$

ja tal leidub lõplik dispersioon [6, lk 127].

GARCH protsessi korral sõltub volatiilsus eelmiste perioodide volatiilsustest.

Eksponentsiaalselt kaalutud liikuva keskmise mudel on aga kujul

$$P_t W_{t+1} = \alpha W_t + (1-\alpha) P_{t-1} W_t ,$$

kus $P_{t-1} = \sum_{j=0}^{n-2} \alpha (1-\alpha)^j$ ning $\alpha \in [0, 1]$. Mida suurem on α, seda suurem kaal antakse viimasele vaatlusele [6, lk 138].

Kovariatsioonimaatriksi meetod pakub küll riski hindamiseks lihtsa lahenduse, kuid see lihtsus on saavutatud kahe kitsendava eeldusega. Esiteks ei pruugi lineariseeritud ehk esimest järku lähend olla alati kõige sobivam. Teiseks ei ole normaaljaotuse eeldus kõige realistlikum, kuna sellist laadi andmed on harva normaaljaotusega. Finantsriski faktorite jaotused on tihti teravatipulised ja raskemate sabadega kui normaaljaotus.

Kuna see meetod kasutab fakti, et lineaarkombinatsioon mitmemõõtmelisest Gaussi vektori koordinaatidest on ühemõõtmelise normaaljaotusega, saame laiendada sama meetodit ka teistele jaotuste peredele, mis on selle teisenduse suhtes kinnised. Näiteks on katsetatud seda meetodit mitmemõõtmelise t-jaotuse [6, lk 50] ja üldistatud hüperboolse jaotuse korral.

1.3.2 Ajalooline simuleerimine

Eelnevast meetodist erineb ajaloolise simuleerimise meetod selle poolest, et selle asemel, et teha eeldus W_{t+1} jaotuse kohta, me hindame kahju operaatorit l varade W_{t+1} empiirilise jaotuse pealt perioodil $[t-n+1; t]$. Olles saanud hinnangu operaatorile l, rakendame seda ajaloolistele andmetele, et saada hulk ajalooliselt simuleeritud kahjusid $\{\tilde{L}_s = l_{(t)}(W_s) : s = t-n+1, \dots, t\}$. Saadud simuleeritud kahjude põhjal teeme kahju jaotuse kohta järelduse [6, lk 50].

Kui me eeldame, et riskifaktorite muutuste protsess on statsionaarne jaotusfunktsiooniga F_L, siis empiiriline jaotusfunktsioon F_n on hinnang jaotusfunktsioonile F_L. Suurte arvude seaduse järgi saame, et kui $n \to \infty$, siis

$$F_n(l) := \frac{1}{n} \sum_{s=t-n+1}^{t} I_{\{\tilde{L}_s \le l\}} = \frac{1}{n} \sum_{s=t-n+1}^{t} I_{\{l_{(t)}(W_s) \le l\}} \to P(l_{(t)}(W_s) \le l) = F_L(l) \quad [6, \text{lk } 50].$$

Väga levinud meetod praktikas on hinnata *VaR* kasutades meetodit, kus teoreetilise jaotuse kvantiile hinnatakse valimi kvantiilidega. Järjestame simuleeritud kahjud variatsioonritta nii, et $\tilde{L}_{n,n} \leq \ldots \leq \tilde{L}_{1,n}$. Siis *VaR* hinnanguks on $\tilde{L}_{[n(1-\alpha)],n}$, kus $[n(1-\alpha)]$ tähistab $n(1-\alpha)$ täisosa. Näiteks kui n = 1000 ja α = 0.99, siis võtame *VaR* hinnanguks variatsioonrea suuruselt 10-nda elemendi [6, lk 51].

Selle meetodi eeliseks on see, et ta taandab mitmemõõtmelise probleemi ühemõõtmeliseks ja seda on lihtne rakendada. Meetodi raskus peitub ajalooliste andmete kogumises riskifaktorite kohta. On raske arvestada ajaloolist infot, kui mingi perioodi kohta mõne riskifaktori hinnangud puuduvad või kui on lisandunud uus riskifaktor. Samuti peaks n olema küllaltki suur, et saada usaldusväärseid tulemusi. Üheks selle meetodi puuduseks võib pidada ka eeldust, et jaotus ajas ei muutu [6, lk 51].

Kuna riski hindamisel huvitab meid eelkõige jaotuse saba, siis soovitatakse jaotuse enda hindamise asemel kasutada hoopis ekstremaalväärtuste teooriat. Ekstremaalväärtuste teooria sisaldab erinevaid meetodeid jaotuse võimalikult täpseks hindamiseks jaotuse sabal. Põhilised neist on kaks järgnevat meetodit.

Esimene on *bloki maksimumi mudelid* (*block maxima model*), kus kogutakse suurest valimist kokku ekstreemsed väärtused ja hinnatakse nende jaotust. Teine tänapäeval üha enam populaarsust koguv mudelite klass on *läveületusmudelid*. Selle mudeli puhul vaadatakse kõiki mingit läve ületavaid väärtusi [6, lk 264]. Bloki maksimumi mudeli korral kasutatakse ekstreemsete väärtuste jaotuse kirjeldamiseks ekstremaalväärtuste jaotust.

Definitsioon 7. Juhuslik suurus X on üldistatud ekstremaalväärtuste jaotusega, kui tema jaotusfunktsioon on kujul

$$H_{\xi}(x) = \begin{cases} \exp\left(-(1+\xi x)^{-1/\xi}\right), & \xi \neq 0; \\ \exp\left(-e^{-x}\right), & \xi = 0, \end{cases}$$

kus $1+\xi x > 0$ ja ξ on kujuparameeter. Kolmeparameetriline juht saadakse, kui $H_{\xi,\mu,\sigma}(x) := H_{\xi}((x-\mu)/\sigma)$, kus μ on asukoha parameeter ja σ skaalaparameeter. Kui $\xi = 0$, siis nimetatakse seda jaotust Gumbeli jaotuseks; kui $\xi > 0$, siis Fréchet jaotuseks; kui $\xi < 0$, siis Weibulli jaotuseks. [6, lk 265]

Olgu meil $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ n vaatlusest koosneva bloki maksimum, siis ekstremaalväärtuste teooria järgi on see statistik üldistatud ekstremaalväärtuste jaotusega. Jagades vaatlused m gruppi, kus igas grupis on n vaatlust, saame m hinnangut suurusele M_n. Tähistame j-ndast blokis saadud hinnangu M_{nj}, kus $j = 1, \ldots, m$. Nüüd sobitame andmetele üldistatud ekstremaalväärtuste jaotuse kasutades suurima tõepära meetodit või mõnda muud meetodit. Selleks on meil vaja ekstremaalväärtuste jaotuse tihedusfunktsiooni avaldist kolmeparameetrilise juhu jaoks:

$$h_{\xi,\mu,\sigma} = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right)\left(\frac{1}{\xi}\right)\left(1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right), & \xi \neq 0; \\ \exp\left(-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)\left(-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)\left(-\frac{1}{\sigma}\right), & \xi = 0. \end{cases}$$

Logaritmiline tõepärafunktsioon avaldub seega järgmiselt

$$l(\xi, \mu, \sigma : M_{n1}, \ldots, M_{nm}) = \sum_{i=1}^{m} \ln h_{\xi,\mu,\sigma}(M_{ni}) =$$

$$= -m \ln \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^{m} \ln\left(1 + \xi \frac{M_{ni} - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^{m} \left(1 + \xi \frac{M_{ni} - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi},$$

kus $\sigma > 0$, $1 + \xi(M_{ni} - \mu)/\sigma > 0$ ja $\xi \neq 0$. Selle meetodi juures ei oma tähtsust see, kas algandmed on sõltuvad, kuna saadud maksimume võib üksteisest sõltumatuks pidada [6, lk 272].

Selle meetodi suurimaks puuduseks on see, et ta nii-öelda raiskab andmeid, kuna võetakse kasutusele ainult blokkide maksimumid. Aktsiaportfellide puhul võetakse tavaliselt päevased muutused ja grupeeritakse nad kas kuu-, kvartali-, poolaasta- või aastakaupa blokkidesse. Aastaste blokkide puhul peab meil väga pikk ajalugu olema, et saada piisavalt andmeid jaotuse sobitamiseks. Andmete „raiskamise" vältimiseks on kasutusele võetud läveületusmudelid.

Peamine jaotus, millega läve ületavaid vaatlusi kirjeldatakse, on üldistatud Pareto jaotus,

Definitsioon 8. Juhuslik suurus X on üldistatud Pareto jaotusega, kui tema jaotusfunktsioon on kujul

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x / \beta)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x/\beta), & \xi = 0 \end{cases},$$

kus $\beta > 0$ ja juhul kui $\xi \geq 0$, siis $x \geq 0$, ning kui $\xi < 0$, siis $0 \leq x \leq -\beta / \xi$ [6, lk 275].

Raskete sabadega juhul ($\xi > 0$), kehtib seos $E(X^k) = \infty$, kui $k \geq 1/\xi$. Juhul kui $\xi < 1$, siis

$$E(X) = \beta/(1-\xi) \quad [6, \text{lk } 276].$$

Enne selle meetodi kirjeldamist, defineerime läve *u* ületavate väärtuste jaotuse (*excess distribution over threshold u*).

Definitsioon 9. Olgu *X* juhuslik suurus jaotusfunktsiooniga *F*, siis läve *u* ületavate väärtuste jaotusfunktsioon F_u avaldub järgmiselt

$$F_u(x) = P(X - u \leq x \mid X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)},$$

kus $0 \leq x < x_F - u$ ning x_F tähistab jaotusfunktsiooni *F* maksimumi [6, lk 276].

Definitsioon 10. Juhusliku suuruse *X* keskmise jäägi funktsioon (*mean excess function*) on kujul

$$e(u) = E(X - u \mid X > u) \; [6, \text{lk } 276].$$

Definitsioon 11. Öeldakse, et jaotusfunktsioon *F* kuulub jaotuse H_ξ maksimaalsesse külgetõmbe piirkonda ehk $F \in \mathrm{MDA}(\mathrm{H}_\xi)$, kui

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x \right) = H_\xi(x),$$

kus d_n ja c_n on mingid konstantide jadad ja $c_n > 0 \;\; \forall n$ korral [6, lk 266].

Meetod põhineb järgmisel teoreemil:

Teoreem 1 (Pickands-Balkema-de Haan). Leidub mõõtuv funktsioon $\beta(u)$ nii, et

$$\lim_{u \to x_F} \sup_{0 \leq x < x_f - u} \left| F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x) \right| = 0,$$

kui $F \in \mathrm{MDA}(\mathrm{H}_\xi)$ ning $\xi \in R$ [6, lk 277].

Meetodi rakendamiseks eraldame algandmetest välja etteantud lävendit *u* ületavad väärtused ja saame uue valimi $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{N_u}$ valimimahuga N_u. Nüüd arvutame erinevused lävendist $Y_j = \tilde{X}_j - u$ ja sobitame saadud andmetele üldistatud Pareto jaotuse. Sobitamisel kasutame suurima tõepära meetodit. Üldistatud Pareto jaotuse tihedusfunktsioon on kujul

$$g_{\xi,\beta}(x)=\begin{cases}\frac{1}{\xi}\left(1+\xi\frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}\frac{\xi}{\beta}, & \xi\neq 0\\ \frac{1}{\beta}\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), & \xi=0.\end{cases}$$

Logaritmiline tõepärafunktsioon avaldub seega järgmiselt:

$$\ln L\left(\xi,\beta;Y_1,\ldots Y_{N_u}\right)=\sum_{j=1}^{N_u}\ln g_{\xi,\beta}\left(Y_j\right)=-N_u\ln\beta-\left(1+\frac{1}{\xi}\right)\sum_{j=1}^{N_u}\ln\left(1+\xi\frac{Y_j}{\beta}\right),$$

kus $\beta>0$ ja $1+\xi Y_j/\beta>0$ [6, lk 278].

Siinjuures eeldame, et jaotusfunktsiooni F ja läve u korral $F_u(x)=G_{\xi,\beta}(x)$, kus $0\leq x<x_F-u$, $\xi\in R$ ja $\beta>0$. Et saada avaldist suurusele *VaR*, paneme tähele, et eelneva eelduse ja $x\geq u$ korral saame, et

$$\overline{F}(x)=P(X>u)\,P(X>x\mid X>u)=\overline{F}(u)P(X-u>x-u\mid X>u)=$$

$$=\overline{F}(u)\overline{F}_u(x-u)=\overline{F}(u)\left(1+\xi\frac{x-u}{\beta}\right)^{-1/\xi},$$

kus $\overline{F}(x):=1-F(x)$.

Kui $\alpha\geq F(u)$, siis

$$\overline{F}(VaR_\alpha(L))=1-\alpha=\overline{F}(u)\left(1+\xi\frac{VaR_\alpha(L)-u}{\beta}\right)^{-1/\xi},$$

millest saame

$$VaR_\alpha(L)=q_\alpha(F)=u+\frac{\beta}{\xi}\left(\left(\frac{1-\alpha}{\overline{F}(u)}\right)^{-\xi}-1\right).$$

Kuna oodatav puudujääk on keskmistatud *VaR*, siis ta avaldub järgmiselt

$$ES_\alpha(L)=\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_w(L)dw=\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1\left(u+\frac{\beta}{\xi}\left(\left(\frac{1-w}{\overline{F}(u)}\right)^{-\xi}-1\right)\right)dw=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\left(u(1-\alpha)-\frac{\beta}{\xi}(1-\alpha)+\frac{\beta}{\xi}\int_\alpha^1\left(\frac{1-w}{\overline{F}(u)}\right)^{-\xi}dw\right)=$$

$$= u - \frac{\beta}{\xi} + \frac{\beta}{\xi(1-\alpha)} \int_{\alpha}^{1} \left(\frac{1-w}{\overline{F}(u)} \right)^{-\xi} dw = u - \frac{\beta}{\xi} + \frac{\beta \overline{F}(u)}{\xi(1-\xi)(1-\alpha)} \int_{\alpha}^{1} \frac{1-\xi}{\overline{F}(u)} \left(\frac{1-w}{\overline{F}(u)} \right)^{-\xi} dw =$$

$$= u - \frac{\beta}{\xi} + \frac{\beta \overline{F}(u)}{\xi(1-\xi)(1-\alpha)} \int_{\alpha}^{1} \frac{1-\xi}{\overline{F}(u)} \left(\frac{1-w}{\overline{F}(u)} \right)^{-\xi} dw = u - \frac{\beta}{\xi} + \frac{\beta \overline{F}(u)}{\xi(1-\xi)(1-\alpha)} \left(\frac{1-\alpha}{\overline{F}(u)} \right)^{1-\xi} =$$

$$= u - \frac{\beta}{\xi} + \frac{\beta}{\xi(1-\xi)} \left(\frac{1-\alpha}{\overline{F}(u)} \right)^{-\xi} = \frac{u(1-\xi)}{1-\xi} - \frac{\beta(1-\xi)}{\xi(1-\xi)} + \frac{\beta}{\xi(1-\xi)} \left(\frac{1-\alpha}{\overline{F}(u)} \right)^{-\xi} = \frac{\beta - u\xi}{1-\xi} + \frac{VaR_{\alpha}(L)}{1-\xi}.$$

1.3.3 Monte-Carlo meetod

Monte-Carlo meetod on üldine nimetus meetoditele, mis püüavad riske hinnata simuleerides selleks teatavat parameetrilist mudelit, mis kirjeldab riskifaktorite muutusi. Meetod on rakendatav nii juhul, kui riskifaktorite mudel on ajas statsionaarne kui ka ajas muutuva jaotuse korral. Meetodi kirjeldus põhineb allikal [6, lk 52].

Esimese sammuna tuleb leida sobiv mudel ja seda rakendada ajaloolistele andmetele. Teise sammuna genereerime m sõltumatut realisatsiooni riskifaktorite muutustest $\widetilde{W}_{t+1}^{(1)}, \ldots, \widetilde{W}_{t+1}^{(m)}$. Nüüd rakendame kahju operaatorit l saadud riskifaktorite muutustele ja saame kahjud $\left\{ \widetilde{L}_{t+1}^{(i)} = l_{(t)}\left(\widetilde{W}_{t+1}^{(i)} \right) : i = 1, \ldots, m \right\}$. Järgmisena hinnatakse riske kasutades kvantiilide meetodit või ekstremaalväärtuste teooriat.

Meetodi nimetus Monte Carlo viitab sellele, et korduste arvu m saame valida ise. Tihti valitakse m suur, kuna see võimaldab saavutada täpsemaid empiirilisi riskimõõdu hinnanguid kui ajaloolise simuleerimise meetodiga. Meetodi probleemiks on see, et ta töötab hästi, kui valitud mudel on hea, mida on aga raske ette öelda. Teine probleem on see, et suurte portfellide jaoks läheb arvutuste hulk väga suureks ja kogu protsess on liiga aeglane.

1.4 Probleemid portfelli riski hindamisel

Iga portfelli kahju jaotus sisaldab endas infot üksikute väärpaberite jaotuste kohta ja nende omavahelise sõltuvuse kohta. Enamasti on meil piisavalt infot üksikute riskifaktorite kohta, kuid puudub info kogu portfelli kahju jaotuse kohta ja portfelli riskide hindamisel tuleb lähtuda olemasolevast infost. Kui on võimalik kirjeldada sõltuvusstruktuur, siis saab koopulate teooriat kasutades hinnata juhuslike suuruste ühisjaotust.

1.4.1 Koopulate teooria

Kui meil on varade omavahelise sõltuvuse kohta piisavalt infot, siis sellisel juhul kasutatakse portfelli riski hindamisel koopulate teooriat. Koopulate teooria võimaldab leida ühisjaotus arvestades ka komponentide sõltuvust. Eriti vajalik on see lähenemine Monte-Carlo meetodite puhul. Koopulate tutvustus põhineb allika [6] lehekülgedel 185 kuni 221.

Definitsioon 12. d-dimensionaalne koopula C on jaotusfunktsioon ruumis $[0, 1]^d$ ning tema marginaaljaotused on standardsed ühtlased jaotused ehk $C:[0, 1]^d \to [0, 1]$.

Koopula $C(u) = C(u_1, \dots, u_d)$ peab rahuldama järgmisi tingimusi:

1. $C(u) = C(u_1, \dots, u_d)$ on kasvav;
2. $C(u) = C(1, \dots 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ kõikide $i = 1, \dots, d$ ja $u_i \in [0, 1]$;
3. Kõikide $(a_1, \dots, a_d)(b_1, \dots b,_d) \in [0,1]^d$, kus $a_i \le b_i$, korral kehtib

$$\sum_{i_1=1}^{2} \cdots \sum_{i_d}^{2} (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1i}, \dots u_{di_d}) \ge 0,$$

   kus $u_{j1} = a_j$ ja $u_{j2} = b_j$ kõikide $j = 1, \dots, d$.

Kui funktsioon täidab toodud kolme omadust, siis ta on koopula [6, lk 185]. Koopulate teooria kasutamine põhineb asjaolul, et kui juhuslik suurus X on pideva jaotusfunktsiooniga F, siis $F(X) \sim \mathrm{U}(0,1)$.

Oluline seos on välja toodud järgnevas Sklar'i teoreemis:

Teoreem 2 (Sklar). Olgu F d-mõõtmeline ühisjaotusfunktsioon marginaaljaotustega $F_1, \dots, F_d$, siis leidub koopula $C:[0, 1]^d \to [0, 1]$ nii, et kõikide $x_1, \dots, x_d \in R$ korral

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)).$$

Kui marginaaljaotused on pidevad, siis on koopula C üheselt määratud. Koopulatel on ka see hea omadus, et nad on invariantsed marginaalide suhtes rangelt kasvavate teisenduste suhtes.

Lause 4. Olgu meil pidevate marginaalidega juhuslik vektor $(X_1, \dots, X_d)$ koopulaga C ja rangelt kasvavad funktsioonid $T_1, \dots, T_d$, siis ka vektor $(T_1(X_1), \dots T_d(X_d))$ on koopulaga C.

Tõestus

Kuna $T_i(x_i)$ jaotusfunktsioon on pidev, siis

$$F_i(X_i) = F_i\left(T_i^{-1}(T_i(X_i))\right) := \tilde{F}_i(T_i(X_i)),$$

kus $\tilde{F}_i(y)$ on $T_i(x_i)$ jaotusfunktsioon.

Siis saame, et

$$C(u_1,\ldots,u_d) = P(F_1(X_1) \le u_1,\ldots,F_d(X_d) \le u_d) = P\left(\tilde{F}_1(T_1(X_1)) \le u_1,\ldots,\tilde{F}_d(T_d(X_d)) \le u_d\right).$$

Koopula definitsiooni järgi tähendabki see, et ka vektor $(T_1(X_1),\ldots T_d(X_d))$ on koopulaga C.

□

Lause 5. Iga koopula $C(u_1,\ldots,u_d)$ on piiratud alumise ja ülemise nn Frechet piiriga ehk et

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{d} u_i + 1 - d, 0\right\} \le C(u_1,\ldots,u_d) \le \min\{u_1,\ldots,u_d\},$$

kus alumist piiri tähistatakse $W(u_1,\ldots,u_d)$, ülemist piiri tähistatakse $M(u_1,\ldots,u_d)$ ning $u_i := F_i(x_i)$.

Tõestus

Ülemise piiri leidumine tuleneb sellest, et

$$C(u_1,\ldots,u_d) = P(U_1 \le u_1,\ldots,U_d \le u_d)$$

ja kuna

$$\bigcap_{1\le j\le d}\{U_j \le u_j\} \subset \{U_i \le u_i\},$$

siis

$$C(u_1,\ldots,u_d) = P(U_1 \le u_1,\ldots,U_d \le u_d) = P\left(\bigcap_{1\le j\le d}\{U_j \le u_j\}\right) \le P(U_i \le u_i) = u_i,$$

kus $u_i := \min\{u_1,\ldots,u_d\}$.

Väide alumise piiri kohta kehtib, kuna

$$C(u_1,\ldots,u_d) = P\left(\bigcap_{1\le j\le d}\{U_j \le u_j\}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{1\le j\le d}\{U_j > u_j\}\right) \ge$$

$$\ge 1 - \sum_{j=1}^{d} P(U_j > u_j) = 1 - \sum_{j=1}^{d}\left(1 - P(U_j \le u_j)\right) = 1 - d + \sum_{j=1}^{d} u_j .$$

□

Näited koopulatest:

- Koopulat $\Pi(u_1,\ldots,u_d)=\prod_{i=1}^{d}u_i$ nimetatakse korrutiskoopulaks.

- Minimaalne koopula on Fréchet ülemise piiri koopula

$$M(u_1,\ldots,u_d)=\min\{u_1,\ldots,u_d\}.$$

- Kahemõõtmelisel juhul on maksimaalne koopula Frechet alumise piiri koopula

$$W(u_1,u_2)=\max\{u_1+u_2-1,\,0\}.$$

- Kui juhuslik vektor $Y\sim \mathrm{N}_{\mathrm{d}}(\mu,\Sigma)$ siis tema koopulat kutsutakse Gaussi koopulaks. Kahemõõtmelisel juhul avaldub Gaussi koopula kujul

$$C_\rho^{Ga}(u_1,u_2)=\int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)}\int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)}\frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}}\exp\left\{\frac{-\left(s_1^2-2\rho s_1 s_2+s_2^2\right)}{2(1-\rho^2)}\right\}ds_1 ds_2\ ,$$

kus $\rho=\rho(X_1,X_2)$.

- Gumbeli koopula

$$C_\theta^{Gu}(u_1,u_2)=\exp\left\{-\left((-\ln u_1)^\theta+(-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right\},\ 1\le\theta<\infty\ ,$$

Kui $\theta=1$, siis saame korrutiskoopula. Kui $\theta\to\infty$, siis saame kahemõõtmelise maksimaalse koopula. [6, lk 192]

- Claytoni koopula

$$C_\theta^{Cl}(u_1,u_2)=\left(u_1^{-\theta}+u_2^{-\theta}-1\right)^{-\frac{1}{\theta}},\quad -1\le\theta<\infty\,.$$

- Franki koopula

$$C_\theta^{Fr}(u_1,u_2)=-\frac{1}{\theta}\ln\left(1+\frac{(\exp(-\theta u_1)-1)(\exp(-\theta u_2)-1)}{\exp(-\theta)-1}\right),\quad \theta\in R\,.$$

Gumbeli, Claytoni ja Franki koopula kuuluvad arhimeediliste koopulate perre. Arhimeediliste koopulate perre kuuluvad kõik koopulad, mis avalduvad kujul

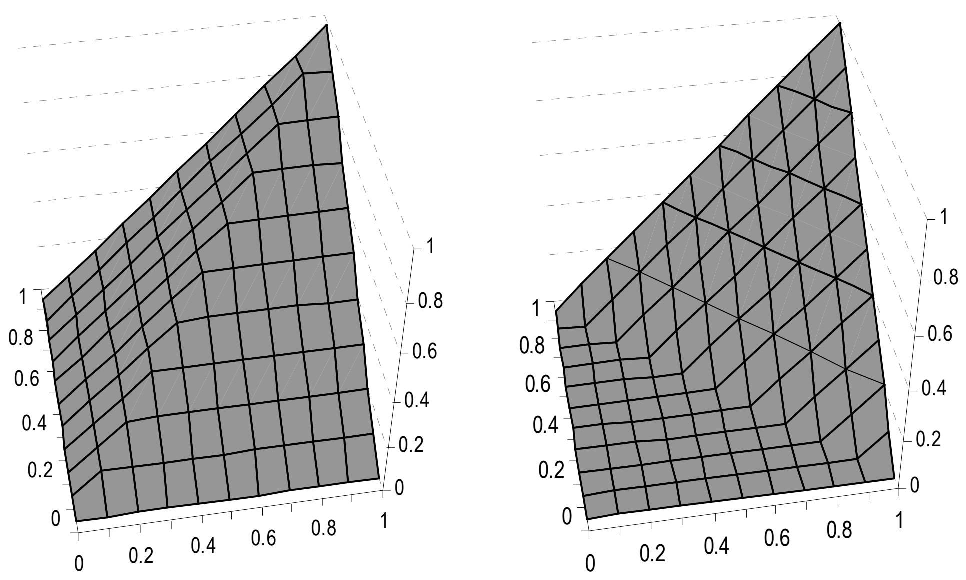
$$C(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2)),$$

kus $\phi : [0, 1] \to [0, \infty]$ on pidev ja rangelt kasvav funktsioon, mis rahuldab tingimust $\phi(1) = 0$, ja

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & 0 \le t \le \phi(0) \\ 0, & \phi(0) < t \le \infty \end{cases}.$$

Funktsiooni ϕ kutsutakse arhimeedilise koopula generaatoriks. Kõik kahemõõtmelisel koopulad jäävad minimaalse ja maksimaalse koopula vahele (vt joonis 4).

Joonis 4. Maksimaalne ja minimaalne koopula



1.4.2 Sõltuvuse mõõdud

Sõltuvuse mõõtude tutvustus põhineb allikal [6 ptk 5.2 lk 210-210]. Esmalt tooksin sisse kaks olulist mõistet sõltuvuste kirjeldamisel: ko- ja vastakmonotoonsuse mõisted.

Definitsioon 13. Juhuslikud suurused $X_1, \dots, X_d$ on komonotoonsed *(comonotonic)*, kui nende ühisjaotus avaldub kujul $F(x_1, \dots, x_d) = \min\{F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\}$.

See tähendab, et juhuslikud suurused $X_1, \dots, X_d$ on komotonoosed, kui iga *i, j* korral $X_j = T_{ji}(X_i)$, kus T_{ji} on mingi kasvav funktsioon.

Definitsioon 14. Juhuslikud suurused X_1, X_2 on vastakmonotoonsed *(countermonotonic)*, kui nende ühisjaotus avaldub järgmiselt $F(x_1, x_2) = \max\{F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0\}$.

Vastakmonotoonsus tähendab seda, et leidub kahanev funktsioon T nii, et $X_2 = T(X_1)$. Vastakmonotoonsuse mõiste on kasutusel vaid kahemõõtmelisel juhul, kuna Fréchet alumine piir ei ole enam koopula suuremal kui kahemõõtmelisel juhul. [6, lk 200]

Juhuslike suuruste omavahelise sõltuvuse iseloomustamiseks kasutatakse statistikas enamasti Pearsoni korrelatsioonikordajat vaatamata sellele, et sellel on mitmeid puudujääke.

Pearsoni korrelatsioonikordaja $|\rho(X_1, X_2)| = 1$ tähendab, et üks juhuslik suurus on mingi lineaarne funktsioon teisest: $X_2 = \alpha + \beta X_1$. Pearsoni korrelatsioonikordaja on lineaarse teisenduse suhtes invariantne st $\forall \alpha_i$ korral ja $\forall \beta_i > 0$, kus $i = 1, 2$, kehtib seos

$$\rho(\alpha_1 + \beta_1 X_1, \alpha_2 + \beta_2 X_2) = \rho(X_1, X_2).$$

Samas ei kehti sama invariantsus mittelineaarsete teisenduste suhtes. Teine Pearsoni korrelatsioonikordaja puudus on piirang, et juhuslikel suurustel X_1 ja X_2 peavad leiduma teist järku momendid, et $\rho(X_1, X_2)$ saaks leida. Selline piirang võib saada takistuseks, kui tegemist on raske sabaga jaotustega.

Siinkohal võetakse kasutusele astakkorrelatsioonid. Astakkorrelatsioonid kirjeldavad monotoonse sõltuvuse tugevust, mille erijuht on lineaarne sõltuvus. Astakkorrelatsioonikordajad on invariantsed iga rangelt monotoonse teisenduse suhtes. Kuna astakkorrelatsioonikordajad ei ole tundlikud ekstreemsete väärtuste suhtes, siis on neid hea kasutada raske sabaga jaotuste suhtes.

Definitsioon 15. Olgu juhuslikud suurused X_1 ja X_2 vastavalt jaotusfunktsioonidega F_1 ja F_2. Siis Spearmani korrelatsioonikordaja on määratud võrdusega

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho(F_1(X_1), F_2(X_2)).$$

Spearmani korrelatsioonimaatriks avaldub kujul $\rho_S(X) = \rho(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$. Tuntumatest astakkorrelatsioonikordajatest on veel kasutusel Kendalli τ.

Definitsioon 16. Juhuslike suuruste X_1 ja X_2 astakkorrelatsioonikordaja Kendalli τ on määratud võrdusega

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = E\left(sign\left(\left(X_1 - \tilde{X}_1\right)\left(X_2 - \tilde{X}_2\right)\right)\right),$$

kus $\left(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\right)$ on sõltumatu kuid sama jaotusega kui vektor (X_1, X_2).

Kendalli τ võib defineerida ka kujul

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = P\left(\left(X_1 - \tilde{X}_1\right)\left(X_2 - \tilde{X}_2\right) > 0\right) - P\left(\left(X_1 - \tilde{X}_1\right)\left(X_2 - \tilde{X}_2\right) < 0\right).$$

Maatriks Kendalli τ kordajatest avaldub kujul $\rho_\tau(X) = \operatorname{cov}\left(sign\left(X - \tilde{X}\right)\right)$, kus $\tilde{X}$ on sõltumatu kuid sama jaotusega kui X.

Spearmani korrelatsioonikordaja ja Kendalli τ omadused on sarnased. Nad mõlemad omavad väärtusi lõigus $[-1, 1]$. Kui kordaja võrdub nulliga, siis viitab see kahe suuruse omavahelise monotoonse seose puudumisele. Kui kordaja väärtus on 1, siis on need muutujad komonotoonsed, ja kui -1, siis vastakmonotoonsed.

Lause 6. Olgu juhuslikud suurused X_1 ja X_2 pidevate marginaaljaotustega ja üheselt määratud koopulaga *C*, siis

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 4\int_0^1\int_0^1 C(u_1, u_2)\,dC(u_1, u_2) - 1 \text{ ja}$$

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12\int_0^1\int_0^1 \left(C(u_1, u_2) - u_1 u_2\right) du_1\, du_2\,,$$

kus $u_1 := F_1(x_1)$ ja $u_2 := F_2(x_2)$.

Tõestus

Kendalli τ korral on seost lihtne näha, kuna

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 2P\left(\left(X_1 - \tilde{X}_1\right)\left(X_2 - \tilde{X}_2\right) > 0\right) - 1 = 4P\left(X_1 < \tilde{X}_1, X_2 < \tilde{X}_2\right) - 1 =$$

$$= 4E\left(P\left(X_1 < \tilde{X}_1, X_2 < \tilde{X}_2 \,\middle|\, \tilde{X}_1 \tilde{X}_2\right)\right) = 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C(u_1, u_2)\,dC(u_1, u_2) - 1.$$

Spearmani korrelatsioonikordaja avaldise leidmiseks kasutame Höffding'i valemit:

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2)\right) dx_1 dx_2\,.$$

Kuna $F_i(X_i)$ on ühtlase jaotusega dispersiooniga 1/12 ja seega Spearmani korrelatsioonikordaja

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12\operatorname{cov}\left(F_1(X_1), F_2(X_2)\right),$$

siis kasutades Höffding'i valemit, saame Spearmani korrelatsioonikordaja jaoks avaldise

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12\int_0^1\int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2)du_1\, du_2 \,.$$

□

Teades marginaaljaotusi saame konstrueerida ühisjaotuse sellise astakkorrelatsiooniga nagu ise soovime. Üks viis selleks on defineerida ühisjaotus järgmiselt

$$F(x_1, x_2) = \lambda W(F_1(x_1), F_2(x_2)) + (1-\lambda)M(F_1(x_1), F_2(x_2)),$$

kus W on maksimaalne ja M minimaalne koopula. Sellise jaotusega juhusliku vektori (X_1, X_2) korrelatsioon avaldub kujul

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = (1-2\lambda).$$

Kuna riskiteoorias huvitab meid just juhuslike suuruste omavaheline sõltuvus jaotuse sabadel, siis on välja töötatud mõõdud, mis mõõdavad nn ekstremaalset sõltuvust ehk sõltuvust sabadel. Näiteks ülemise saba sõltuvuse uurimiseks vaatame, kui suure tõenäosusega üks juhuslik suurus ületab oma q-kvantiili, kui teine juhuslik suurus ületab enda q-kvantiili, ja laseme sealjuures suurusel q läheneda 1-le ehk

$$\lambda_u := \lambda_u(X_1, X_2) = \lim_{q\to 1^-} P\left(X_2 > F_2^{\leftarrow}(q) \middle| X_1 > F_1^{\leftarrow}(q)\right),$$

eeldades, et selline piirväärtus $\lambda_u \in [0,1]$ eksisteerib.

Analoogiliselt saame sõltuvuse hindamiseks alumises sabas seose

$$\lambda_l := \lambda_l(X_1, X_2) = \lim_{q\to 0^+} P\left(X_2 \le F_2^{\leftarrow}(q) \middle| X_1 \le F_1^{\leftarrow}(q)\right).$$

Pearsoni korrelatsiooniga seoses on levinud kaks eksiarvamust. Esiteks arvatakse, et kui on teada kahe juhusliku suuruse jaotused ja nende vaheline korrelatsioon, siis saab määrata üheselt nende ühisjaotuse. Olgu meil juhuslikud suurused X_1 ja X_2 jaotusfunktsioonidega F_1 ja F_2 ja nende vaheline korrelatsioon $\rho(X_1, X_2) = \rho$, siis nende ühisjaotus avaldub koopula C kaudu järgmiselt $C(F_1(x_1), F_2(x_2))$. Samas on võimalik konstrueerida ka koopula $C_2 \ne C$ ja konstrueerida vektor (Y_1, Y_2), mille ühisjaotus on $C_2(F_1(x_1), F_2(x_2))$ ja $\rho(Y_1, Y_2) = \rho$. Seega kuna marginaaljaotused ja korrelatsioon on samad, kuid ühisjaotus on erinev, ei ole järelikult ühisjaotuse üheseks määramiseks piisav teada korrelatsioone ja marginaaljaotusi.

Teine eksiarvamus on, et teades juhuslike suuruste X_1 ja X_2 jaotusi F_1 ja F_2 ning korrelatsiooni $\rho \in [-1,1]$, saame konstrueerida ühisjaotuse marginaalidega F_1 ja F_2 ja korrelatsiooniga $\rho \in [-1, 1]$. Tegelikult nn saavutatavad (*attainable*) korrelatsioonid moodustavad alamhulga $[\rho_{\min}, \rho_{\max}] \in [-1, 1]$. Maksimaalne korrelatsioon $\rho_{\max} > 0$ on saavutatav juhul, kui juhuslikud suurused on komonotoonsed. Minimaalne korrelatsioon $\rho_{\min} < 0$ on saavutatav juhul, kui juhuslikud suurused on vastakmonotoonsed.

1.4.3 Koopulate sobitamine andmetega

Konkreetsete andmete korral kasutatakse mitmeid erinevaid meetodeid koopula parameetrite hindamiseks. Ühe võimalusena kasutatakse parameetrite hindamisel suurima tõepära meetodit, enne aga vaatame lihtsamat meetodit, mida kasutatakse arhimeediliste koopulate korral.

Momentide meetodi korral leitakse kas Spearmani korrelatsioonikordaja või Kendalli τ ja selle korrelatsioonikordaja seosest koopula parameetriga θ hinnatakse koopula parameeter θ. Järgnevalt valitakse konkreetsest perest välja parim lähend andmetele.

Spearmani korrelatsioonikordaja hinnangu saab leida kujul

$$\hat{\rho}_S(X_i, X_j) = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{t=1}^{n} \left(\left(rank(X_{t,i}) - \frac{1}{2}(n+1) \right) \left(rank(X_{t,j}) - \frac{1}{2}(n+1) \right) \right) \quad [6, \text{lk } 229].$$

Kendalli τ hinnang avaldub kujul

$$\hat{\rho}_\tau(X_1, X_2) = \frac{1}{C_n^2} \sum_{1 \le t < s \le n} sign\left((X_{t,i} - X_{s,i})(X_{t,j} - X_{s,j}) \right) \ [6, \text{lk } 229].$$

Näiteks arhimeediliste koopulate pere korral saame leida hinnangu koopula parameetrile θ seosest Kendalli τ'ga, kuna arhimeediliste koopulate korral kehtib seos

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi^{'}(t)} dt,$$

kus X_1 ja X_2 on pidevad juhuslikud suurused. Tabelis 2 on toodud Kendalli τ avaldis mõne tuntuma arhimeedilise pere koopula jaoks.

Tabel 2. Kendalli τ ja arhimeediliste koopulate vaheline seos [6, lk 222]

Koopula	$\phi(t)$	ρ_τ
Gumbel'i	$(-\ln t)^\theta$	$1-1/\theta$
Clayton'i	$\frac{1}{\theta}\left(t^{-\theta}-1\right)$	$\theta/(\theta+2)$
Frank'i	$-\ln\left(\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}\right)$	$1-4\theta^{-1}\left(1-\theta^{-1}\int_0^1 t/(\exp(t)-1)dt\right)$

Mitmemõõtmelise Gaussi mudeli korral hinnatakse koopula leidmiseks korrelatsioonimaatriksit.

Suurima tõepära meetodil koopulate leidmisel hinnatakse kõigepealt marginaaljaotused. Seejärel leitakse suurima tõepära hinnang koopula parameetrite vektorile θ, maksimiseerides logaritmilise tõepärafunktsiooni

$$\ln L\left(\theta;\hat{U}_1,\ldots,\hat{U}_d\right)=\sum_{i=1}^{d}\ln c_\theta\left(\hat{U}_i\right),$$

kus $c_\theta(u_1,\ldots,u_d)=\frac{\partial C_\theta(u_1,\ldots,u_d)}{\partial u_1\cdots\partial u_d}$ [6, lk 234]. Hinnangu headus sõltub jällegi palju sellest, kui täpselt marginaaljaotused on hinnatud.

1.4.4 Fréchet probleem

Kui meil pole sõltuvuse kohta küllaldaselt infot, siis enamasti formuleeritakse ülesanne kui Fréchet probleem. Fréchet probleemiks nimetatakse olukorda, kus jaotuse leidmine taandatakse Fréchet piiride leidmiseks, mida tutvustasime eelnevalt peatükis 1.4.1.

Olgu meil üksikute varade kahjude vektor $L=(L_1,\ldots,L_d)'$, mõõtuv funktsioon $\psi:R^d\to R$, mis kirjeldab üksikute varade agregeerimist portfelli, ja riskimõõt $\gamma:M\to R$ [6, lk 249].

Funktsioonina $\psi:R^d\to R$ kasutatakse näiteks funktsioone

- $\psi(x_1,\ldots,x_d)=x_1+\ldots+x_d$;
- $\psi(x_1,\ldots,x_d)=\sum_{i=1}^{d}(x_i-k)^+$, $k\ge 0$;
- $\psi(x_1,\ldots,x_d)=\left(\sum_{i=1}^{d}x_i-k\right)^+$, $k\ge 0$ [4, lk 6,7].

Meie eesmärk on leida $\gamma(\psi(L))$, mis aga tähendab, et me peaksime teadma $\psi(L)$ jaotust. Enamasti on meil teada hoopis L_i jaotus. Kui meil puudub täpne info kahjude L_i omavaheliste sõltuvuste kohta, ei saa me täpselt leida $\gamma(\psi(L))$, kuid saame leida alumise ja ülemise piiri nii, et

$$\gamma_{\min} \le \gamma(\psi(L)) \le \gamma_{\max} \quad [6, \text{lk } 249].$$

Probleem taandub seega matemaatilisele ülesandele leida

$$\gamma_{\min} = \inf\{\gamma(\psi(L)) : L_i \sim \mathrm{F_i}, i = 1, \ldots, d\}$$
$$\gamma_{\max} = \sup\{\gamma(\psi(L)) : L_i \sim \mathrm{F_i}, i = 1, \ldots, d\}.$$

Teatud tingimuste kehtimisel saab *VaR* korral portfelli riski ka lihtsamini leida.

Enne, kui saame leida täpsema ülemise ja alumise piiri riskimõõdule *VaR*, peame kirjeldama jaotusfunktsiooni *F* sõltuvusstruktuuri ja kuna $F = C(F_1, \ldots, F_d)$, siis üks võimalus on rakendada piiranguid koopulale *C*, et sätestada piirangud kahjude $L_1, \ldots, L_d$ omavahelisele sõltuvusstruktuurile. Selleks sobiksid ideaalselt Fréchet piirid $W \le C \le M$. Kuna aga Fréchet alumine piir on koopula ainult kahemõõtmelisel juhul, siis juhul kui *d* > 2, peame leidma mõne koopula $C_0 \le C$. Põhitulemuse esitamiseks defineerime kasvava funktsiooni paremalt ja vasakult pideva pöördfunktsiooni.

Definitsioon 17. Olgu meil kasvav funktsioon $\varphi : R \to R$. Siis tema üldistatud vasakult pidev pöördfunktsioon $\varphi^{-1} : R \to R$ ja paremalt pidev pöördfunktsioon $\varphi^{\wedge} : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ on defineeritud võrdustega

$$\varphi^{-1}(\mathrm{y}) := \inf\{x \in R \mid \varphi(x) \ge y\}$$
$$\varphi^{\wedge}(\mathrm{y}) := \sup\{x \in R \mid \varphi(x) \le y\} \quad [4. \text{lk } 3].$$

Põhiteoreem piiride jaoks on järgmine:

Teoreem 3. Olgu vektor $L = (L_1, \ldots, L_d) \in R^d \, (d \ge 2)$ marginaaljaotustega $F_1, \ldots, F_d$. Kui koopula *C* rahuldab tingimusi $C \ge C_0$ ja $C^{dual} \le C_1^{dual}$ mingite koopulate C_0 ja C_1 korral, siis kasvava funktsiooni $\psi : R^d \to R$ korral kehtib seos

$$\tau_{C_0,\psi}(F_1, \ldots, F_d) \le \sigma_{C,\psi}(F_1, \ldots, F_d) \le \rho_{C_1,\psi}(F_1, \ldots, F_d),$$

kus

$$\tau_{C,\psi}(F_1,\ldots,F_d)(s) := \sup_{x_1,\ldots,x_{d-1}\in R} C\left(F_1(x_1),\ldots,F_{d-1}(X_{d-.1}),F_d\left(\psi^{\wedge}_{x_1,\ldots,x_{d-1}}(s)\right)\right),$$

$$\sigma_{C,\psi}(F_1,\ldots,F_d)(s) := \int_{\psi(L)<s} dC\left(F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d)\right),$$

$$\rho_{C,\psi}(F_1,\ldots,F_d)(s) := \inf_{x_1,\ldots,x_{d-1}\in R} C^{dual}\left(F_1(x_1),\ldots,F_{d-1}(X_{d-.1}),F_d\left(\psi^{\wedge}_{x_1,\ldots,x_{d-1}}(s)\right)\right),$$

kus $C^{dual}(u_1,\ldots,u_d) := P\left[\bigcup_{i=1}^{d}\{U_i \le u_i\}\right]$ [4, lk 8].

Lähtudes eelmisest teoreemist, saame *VaR* jaoks järgmised piirid:

$$\rho_{C_1,\psi}(F_1,\ldots,F_d)^{-1}(\alpha) \le VaR_\alpha(\psi(L_1,\ldots,L_d)) \le \tau_{C_0,\psi}(F_1,\ldots,F_d)^{-1}(\alpha) \quad [4, \text{lk } 8].$$

Koopulad C_0 ja C_1 valitakse sõltuvalt andmetest. Mida rohkem informatsiooni sõltuvusstruktuuri kohta leidub, seda täpsemini saab piire hinnata. Olgu meil kahemõõtmeline juht ja valime $C \ge C_0 = W(u_1,u_2) = \max\{u_1+u_2-1,0\}$ ning $C^{dual}(u_1,u_2) \le C_1^{dual}(u_1,u_2) = (u_1+u_2)\wedge 1$. Sellisel juhul kas ei ole informatsiooni sõltuvuse kohta või lihtsalt ei soovita sõltuvuse kohta piiranguid sätestada. Kui valida

$$C_0 = C_1 = \prod_{i=1}^{d} u_i ,$$

siis on riskid positiivselt sõltuvad (*positive orthant dependent*) [4, lk 9]. Mida täpsemad piirid suudetakse koopulale leida, seda täpsemini saame riski hinnata.

Komonotoonsuse ja sõltumatuse eelduse korral saame portfelli *VaR* leidmiseks kasutada lihtsamaid tulemusi.

Lause 7. Rangelt kasvavate ja pidevate komonotoonsete juhuslike suuruste $L_1,\ldots,L_d$ korral

$$VaR_\alpha(L_1+\ldots+L_d) = VaR_\alpha(L_1)+\ldots+VaR_\alpha(L_d) \quad [6, \text{lk } 250].$$

Tõestus

Esitame tõestuse idee kahemõõtmelisel juhul. Olgu L_i jaotusfunktsiooniga F_i.

Kuna $(L_1,L_2) \overset{D}{=} \left(F_1^{-1}(U),F_2^{-1}(U)\right)$ mingi $U \sim U(0,1)$, siis saame, et

$$VaR_\alpha(L_1+L_2) = VaR_\alpha\left(F_1^{-1}(U)+F_2^{-1}(U)\right) = F_{T(U)}^{-1}(\alpha),$$

kus $T(U) := F_1^{-1}(U)+F_2^{-1}(U)$ [6, lk 250].

Kuna $P(T(U) \le T(\alpha)) = P(U \le \alpha) = \alpha$, siis

$$F_{T(U)}^{-1}(\alpha) = T(\alpha) = F_1^{-1}(\alpha) + F_2^{-1}(\alpha) = VaR_\alpha(L_1) + VaR_\alpha(L_2) \text{ [6, lk 250].}$$

□

Sarnane seos kehtib ka üldisemal juhul.

Lause 8. Olgu $\psi : R^d \to R$ kasvav ja vasakult pidev kõikides punktides ja $0 \le \alpha \le 1$ ning $L_1, \ldots, L_d$ komonotoonsed juhuslikud suurused. Siis

$$VaR_\alpha(\psi(L_1, \ldots, L_d)) = \psi(VaR_\alpha(L_1), \ldots, VaR_\alpha(L_d)) \text{ [6, lk 250].}$$

Tõestus

Tõestus põhineb allikal [4, lk 10].

Funktsiooni $\varphi : R \to R$ üldistatud paremalt pideva pöördfunktsiooni korral saame, et

$$F_{\varphi(Z)}(t) = P(\varphi(Z) \le t) = P(Z \le \varphi^\wedge(\mathrm{t})) = F_Z(\varphi^\wedge(\mathrm{t})),$$

kus Z on mingi juhuslik suurus.

Saame, et

$$VaR_\alpha(\varphi(Z)) = \inf\{t \in R \mid F_{\varphi(Z)}(t) \ge \alpha\} = \inf\{t \in R \mid F_Z(\varphi^\wedge(\mathrm{t})) \ge \alpha\} =$$
$$= \inf\{t \in R \mid \varphi^\wedge(\mathrm{t}) \ge F_Z^{-1}(\alpha)\} = \inf\{t \in R \mid \mathrm{t} \ge \varphi(F_Z^{-1}(\alpha))\} = \varphi(F_Z^{-1}(\alpha)) = \varphi(VaR_\alpha(Z)).$$

Olgu meil nüüd juhuslikud suurused $X_1, \ldots, X_d$ jaotusfunktsioonidega $F_1, \ldots, F_d$ ning funktsioon $\varphi(\alpha) := \psi(F_1^{-1}(\alpha), \ldots, F_d^{-1}(\alpha))$, siis

$$VaR_\alpha(\psi(X_1, \ldots, X_d)) = VaR_\alpha(\psi(F_1^{-1}(U), \ldots, F_d^{-1}(U))) = VaR_\alpha(\varphi(U)) =$$
$$= \varphi(VaR_\alpha(U)) = \varphi(\alpha) = \psi(F_1^{-1}(U), \ldots, F_d^{-1}(U)) = \psi(VaR_\alpha(X_1), \ldots, VaR_\alpha(X_d)),$$

kus U on standardse ühtlase jaotusega juhuslik suurus.

□

Eelneva tulemuse põhjal on teada, et kahemõõtmelisel juhul komonotoonsete suuruste L_1 ja L_2 korral on $VaR(L_1) + VaR(L_2)$ võrdne suurusega $VaR(L_1 + L_2)$. Järelikult superaditiivse VaR ehk $VaR(L_1 + L_2) > VaR(L_1) + VaR(L_2)$ korral suurused L_1 ja L_2 ei ole komonotoonsed. Seega, kuna komonotoonsuse korral on korrelatsioon kahe juhusliku suuruse vahel maksimaalne, siis peab superaditiivse portfelli korral korrelatsioon olema väiksem kui maksimum. Teisiti öeldes, halvimat võimalikku juhtu ei saa me kätte komonotoonsuse korral. Oodatava puudujäägi korral kehtib meil subaditiivsuse tingimus, seega siin saame võimaliku halvima juhu kätte just komonotoonsuse korral.

1.5 Mudeli kontroll ehk järeltestimine

Eelnevates peatükkides vaatasime peamisi meetodeid kahjude modelleerimiseks ja mudelite abil riskide hindamist. Mudelite monitoorimist ehk testimist, kui hästi nad töötavad, kutsutakse riskiteoorias järeltestimisena (*backtesting*) [6, lk 55].

VaR definitsiooni kohaselt $P\left(L_{t+h} > VaR_{\alpha}^{t,h}\right) = 1 - \alpha$, kus h märgib ajaperioodi, mille jooksul me *VaR* uurime, ja t ajahetke millal hinnangud on tehtud. Nüüd toome sisse indikaatorfunktsiooni

$$I_{t+h}^{(h)} := I_{\left\{L_{t+h}^{(h)} > VaR_{\alpha}^{t,h}\right\}}.$$

Me eeldame, et kui meie mudel on sobiv andmete kirjeldamiseks, siis need indikaatorid on Bernoulli jaotusega parameetriga $1-\alpha$. Võrreldes hinnatud *VaR* ja tegelikke kahjusid saame hulga väärtusi indikaatoritele, kusjuures eeldame, et $1-\alpha$ osal vaatlustest oli tegelik kahju suurem kui *VaR* [6, lk 55].

Veel spetsiifilisemalt saame igal ajahetkel t hinnata *VaR* ajahetke $t+1$ jaoks ja teha seda perioodi m jooksul. Sellisel juhul on protsess $\left(I_t\right)_{t\in Z}$ sõltumatu ja sama jaotusega juhuslike suuruste protsess, mis on Bernoulli jaotusega parameetriga $1-\alpha$ [6, lk 55]. Sellisel juhul on $m(1-\alpha)$ osal vaadeldud andmetest tegelik kahju suurem kui *VaR* ehk, et $\sum_{t=1}^{m} \hat{I}_t \sim B(m, 1-\alpha)$, kus $\hat{I}_{t+1} := I_{\left\{L_{t+1} > \hat{VaR}_{\alpha}^{t}\right\}}$ [6, lk 162].

Kui tahame kontrollida mudelit suurema ajanihke korral kui üks päev, siis tuleb arvestada, et sõltumatute vaatluste saamiseks ei tohi vaadelda kattuvaid perioode. Teisalt, kui nihe on suur, siis seda eeldust jälgides saame tulemuseks suhteliselt vähe andmeid, mille põhjal on mudeli usaldusväärususe kohta raske järeldusi teha [6, lk 163].

Kui vaatleme oodatavat puudujääki, mis on leitud tingliku jaotuse $F_{L_{t+1}|F_t}$ korral, ja defineerime muutuja $S_{t+1} := (L_{t+1} - ES_\alpha(L))I_{\{L_{t+1} > VaR_\alpha^t\}}$, siis suvalise kahjuprotsessi $(L_t)_{t \in Z}$ korral protsess $(S_t)_{t \in Z}$ moodustab martingaali[3], mis rahuldab tingimust $E(S_{t+1}|F_t) = 0$ [6, lk 163].

Protsess $(L_t)_{t \in Z}$ on kohandatud filtratsioonile $(F_t)_{t \in Z}$ ja rahuldab statsionaarset mudelit kujul $L_t = \mu_t + \sigma_t Z_t$, kus μ_t ja σ_t on F_{t-1}-mõõtuvad ja $(Z_t)_{t \in Z}$ on range valge müra keskväärtusega 0 ja dispersiooniga 1. Tänu sellele tulemusele saame, et

$$S_{t+1} = \sigma_{t+1}(Z_{t+1} - ES_\alpha(Z))I_{\{L_{t+1} > VaR_\alpha^t\}} \text{ [6, lk 163].}$$

Praktikas kasutamiseks võtame kasutusele suuruse

$$\hat{R}_{t+1} := \hat{S}_{t+1} / \hat{\sigma}_{t+1},$$

kus

$$\hat{S}_{t+1} := \left(L_{t+1} - \hat{ES}_\alpha^t \right) \hat{I}_{t+1} \text{ [6, lk 163].}$$

Me eeldame, et $\hat{S}_{t+1}$ ja $\hat{R}_{t+1}$ käituvad nagu realisatsioonid sõltumatutest sama jaotusega juhuslikust suurustest keskväärtusega null [6, lk 163]. Seega meie ülesanne on kontrollida, kas need muutujad on jaotusest, mille keskväärtus on null [6, lk 163]. Teeme seda bootstrap-meetodil.

Bootstrapi testi kasutades ei pea meil olema teada keskväärtuse jaotus. Hüpoteesi $H_0 : \overline{S}_{t+1} = 0$ kontrollimiseks leiame statistiku

$$t(s) = \frac{\overline{s}}{\overline{\sigma}/n},$$

kus $\overline{s}$ on keskväärtus ja $\overline{\sigma}$ on standardhälve, millele meil on hinnanguid vaja, et statistiku väärtust arvutada [9, lk 225].

Leiame *t(s)* olemasolevate andmete jaoks hinnates standardhälbe ja keskväärtuse. Teisendame algandmeid järgmiselt $\tilde{s}_i = s_i - \overline{s}$. Edasi genereerime bootstrap-valimid suurustest $\tilde{s}_i$ kasutades lihtsat juhuslikku valikut tagasipanekuga. Nüüd arvutame statistikud iga saadud valimi jaoks

---

[3] Juhuslikku protsessi $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ nimetatakse martingaaliks, kui $\forall n$ korral X_n on F_n-mõõtuv, $E(|X_n|) < \infty, \forall n \geq 0$ korral ning $E(X_{n+1} | F_n) = X_n$ $p.k$ $\forall n \geq 0$.

$$t\left(s^*\right) = \frac{\tilde{\bar{s}}^*}{\tilde{\bar{\sigma}}^* / n},$$

kus $\tilde{\bar{s}}^*$ on keskväärtuse hinnang ja $\tilde{\bar{\sigma}}^*$ on standardhälbe hinnang konkreetse bootstrap-valimi pealt [9, lk 226].

Kokkuvõttes saame *n* hinnangut statistikule, mida võrdleme statistikuga *t(s)*. Seega saame olulisuse tõenäosuse

$$ASL = \#\left(t\left(s^*\right) < t\left(s\right)\right) / n \quad [9, \text{lk } 226].$$

Mida väiksem on *ASL*, seda suurem on tõenäosus, et nullhüpotees ei kehti.

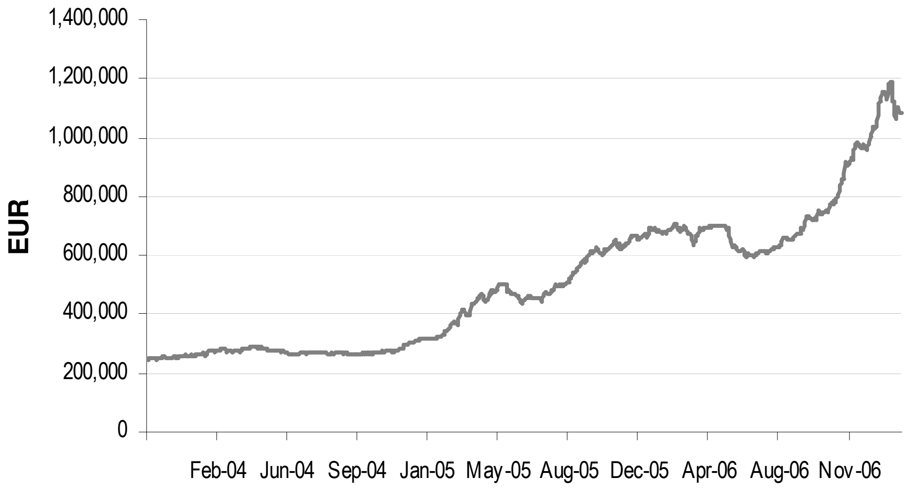
2 Aktsiaportfelli riskide analüüs

2.1 Portfelli valik

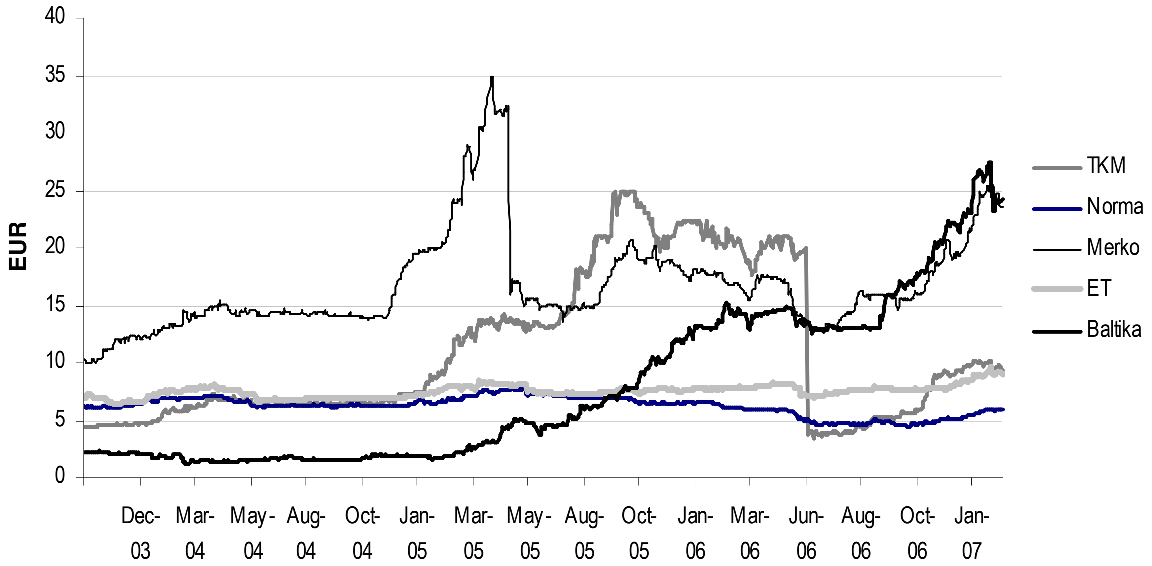
Eelneva osa illustreerimiseks koostasin portfelli viiest Tallinna Börsil noteeritud aktsiast: Norma, Baltika, Eesti Telekom, Merko ja Tallinna Kaubamaja. Vaatluse alla võtsin antud viiest aktsiast koosneva portfelli nii, et osakaalud olid vastavalt: Norma – 10000 aktsiat, Baltika – 20000 aktsiat; Merko - 6000 aktsiat; Eesti Telekom – 10000 aktsiat ja Tallinna Kaubamaja – 3000 aktsiat. Kuna antud töö eesmärgiks ei ole uurida optimaalse portfelli koostamise meetodeid, siis aktsiate osakaalud said valitud juhuslikult. Vaatlesin portfelli alates 15 oktoober 2003 kuni 23 veebruar 2007. Mudeli sobivuse hindamiseks kasutasin andmeid alates 24 veebruar 2007 kuni 22 aprill 2007.

Nii Merko kui ka Tallinna Kaubamaja aktsiatel toimus selle aja sees fondiemissoon. Merkol oli 2005 aasta mais fondiemissioon, mille käigus iga aktsia kohta emiteeriti üks uus aktsia. Tallinna Kaubamaja fondiemissiooni käigus 13 juunil 2006 emiteeriti iga aktsia kohta viis uut aktsiat. Seega vaatluse lõpul koosnes portfell 10000 Norma, 10000 Eesti Telekomi, 20000 Baltika, 18000 Tallinna Kaubamaja ja 12000 Merko aktsiast. Graafikul 1 on ära toodud portfelli väärtuse muutumine ajas. Portfelli väärtuse arvutamisel kasutasin sulgemishindu. On näha, et portfelli maht on perioodi algusega võrreldes kasvanud kuni 4 korda. Graafikul 2 on kujutatud portfellis olevate aktsiahindade muutus.

Graafik 1. Portfelli väärtuse muutus (15 oktoober 2003 kuni 23 veebruar 2007)



Graafik 2. Aktsiahindade muutus (15 oktoober 2003 kuni 23 veebruar 2007)



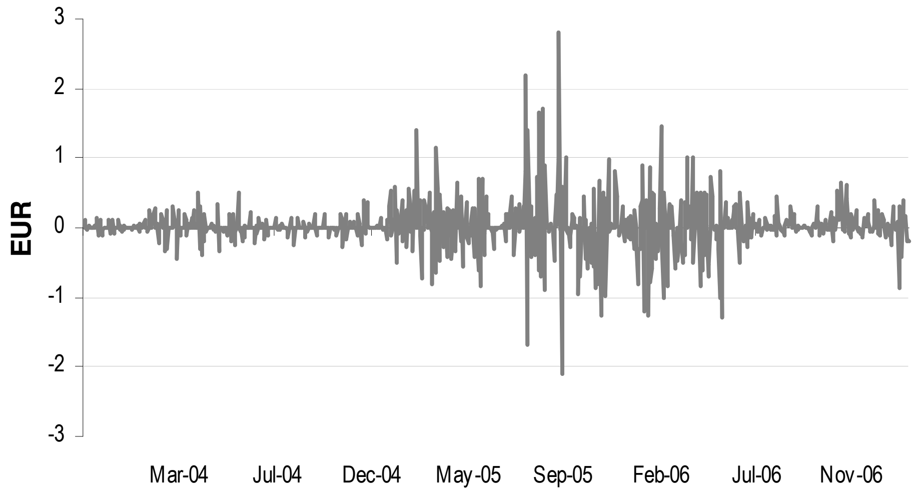
Graafikul 2 näha olevad hüpped Merko ja Tallinna Kaubamaja aktsia hinnas on fondiemissiooni hetkedel. Vaadeldava perioodi jooksul on tugevalt ja stabiilselt tõusnud Baltika aktsia. Eesti Telekomi ja Norma aktsia hinda iseloomustab eelkõige stabiilsus. Tallinna Kaubamaja ja Merko aktsia hind on enne fondiemissooni hoogsalt tõusnud ja pärast mõningat seisakut peale emissiooni on tõusu jätkanud.

2.2 Kahjude juurdekasvude sõltumatus

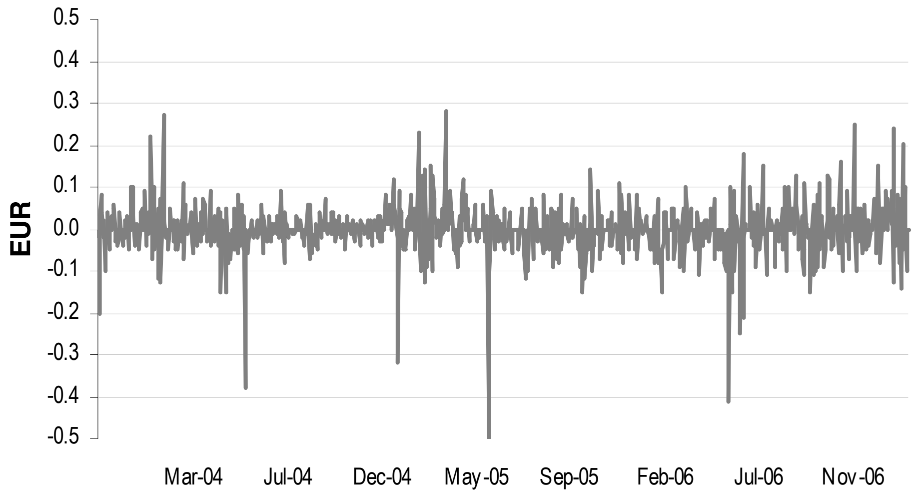
Enne meetodi valimist peab kindlaks tegema, kas üksikuid väärtpaberi hinnamuutusi saab vaadelda kui sõltumatute ja sama jaotusega juhuslike suuruste väärtusi. Kui nad ei ole sõltumatud ja sama jaotusega, siis peab riskide hindamiseks kasutama aegridade mudeleid. Kui nad on sõltumatud ja sama jaotusega, siis piisab riskide hindamiseks hinnata ära üksikute kahjude (kahju on negatiivne hinnamuutus) jaotused ja hiljem portfelli kahju jaotus.

Üksikuid väärtpabereid eraldi vaadeldes on näha, et Tallinna Kaubamaja ja Baltika aktsia hajuvused on erinevatel perioodidel erinevad (vt graafik 3 kuni 7). Teiste aktsiate puhul on nii keskväärtus kui ka hajuvus vaadeldava perioodi jooksul püsinud samas suurusjärgus.

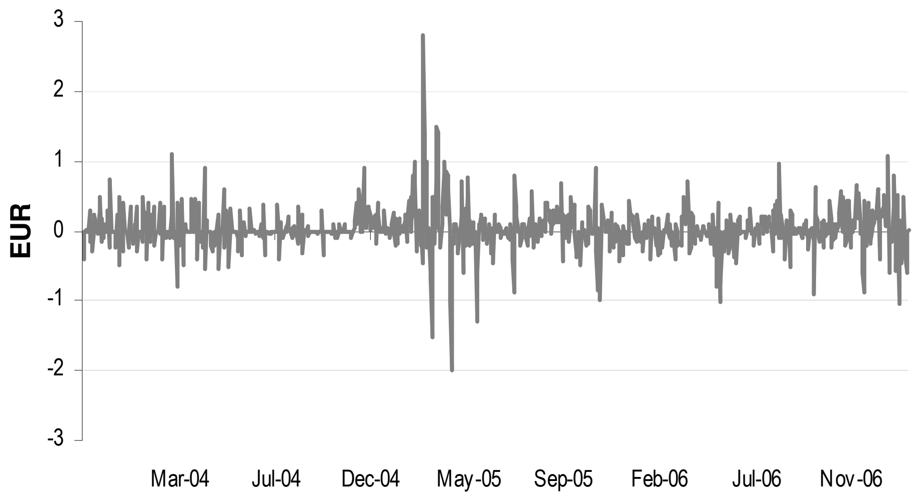
Graafik 3. Tallinna Kaubamaja aktsia hinnamuutused



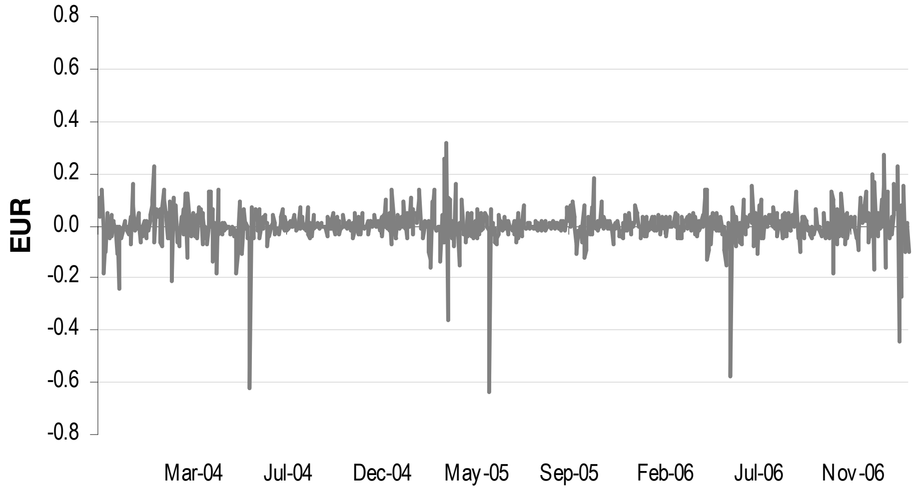
Graafik 4. Norma aktsia hinnamuutused



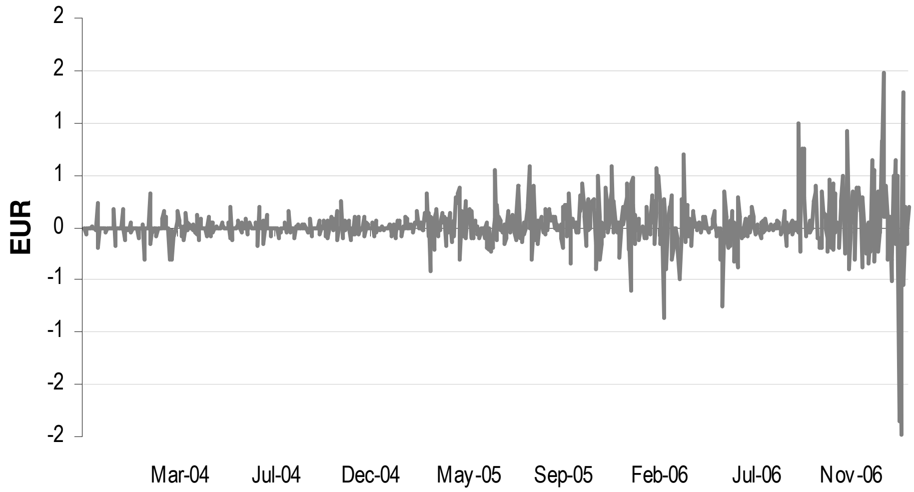
Graafik 5. Merko aktsia hinnamuutused



Graafik 6. Eesti Telekomi aktsia hinnamuutused



Graafik 7. Baltika aktsia hinnamuutused



Veendumaks, et saame antud muutujaid vaadelda kui sõltumatuid ja sama jaotusega juhuslikke suurusi, leiame nende autokorrelatsioonid, testime statsionaarsust ja valget müra (vt Lisa 1). Autokorrelatsioone vaadates on näha, et lineaarne seos hinnamuutuste vahel ajas puudub. Valge müra testist selgub, et Tallinna Kaubamaja, Merko ja Baltika aktsiate hinnamuutustest võib teatud mustreid leida. Eesti Telekomi ja Norma aktsiate hinnamuutused on suhteliselt juhuslikud. Kõik viis aegrida on statsionaarsed. Selle analüüsi põhjal leian, et võib käesolevaid hinnamuutusi vaadelda kui sõltumatuid ja sama jaotusega juhuslike suuruste väärtusi.

2.3 Aktsiahinna muutuste jaotuste hindamine

Kuna eelnevas paragrahvis selgus, et uuritavaid andmed võib vaadelda kui sõltumatute juhuslike suuruste väärtusi, on meie järgmiseks eesmärgiks leida sobiv jaotus nende kirjeldamiseks. Kuna meie eesmärk on hinnata portfelli kahjusid, hindame kõigepealt üksikute väärtpaberite kahjude jaotust.

Ühe aktsia korral avaldub tema kahju analoogiliselt portfelli kahjule vahena

$$L_i = -\left(X_{t+1,i} - X_{t,i}\right),$$

kus X_t tähistab aktsia hinda ajahetkel t ja $i = 1,\ldots d$. Sisuliselt on see kahju juhul, kui on soetatud üks aktsia. Tabelis 3 on ära toodud kahjude jaotust iseloomustavad arvkarakteristikud.

Tabel 3. Üksikute kahjude jaotuskarakteristikud

	TKM	*Norma*	*Merko*	*Eesti Telekom*	*Baltika*
Keskväärtus	-0.025	0.000	-0.034	-0.002	-0.026
Mood	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Standardhälve	0.331	0.060	0.308	0.070	0.206
Dispersioon	0.110	0.004	0.095	0.005	0.042
Järsakusekordaja	13.981	12.540	12.911	24.892	24.669
Asümmeetriakordaja	0.777	-1.106	0.684	-2.618	-0.817
Miinimum	-2.80	-0.28	-2.80	-0.32	-1.47
Alumine kvartiil	-0.09	-0.02	-0.13	-0.03	-0.07
Mediaan	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Ülemine kvartiil	0.03	0.02	0.07	0.02	0.03
Maksimum	2.10	0.50	2.00	0.64	1.99
Valimimaht	861	861	861	861	861

Asümmeetriakordaja erineb nullist kõigil viiel väärpaberil. Sellest lähtuvalt võiks katsetada asümmeetrilisi jaotusi ja kuna järsakusekordaja on suur, seega võiks nad olla võimalikult raske sabaga. Samas üldistatud Pareto ja ekstremaalväärtuste jaotuste korral vaadatakse ainult parempoolset saba, seega asümmeetriakordaja ei oma siin suurt tähtsust. Lisaks katsetan siiski ka sümmeetrilisi jaotus nagu normaaljaotust, Laplace jaotus ja eksponentsiaalset veajaotust.

Esimesena kontrollin kooskõla normaaljaotusega. Tabeli 4 info põhjal on näha, et andmed ei ole modelleeritavad normaaljaotusega.

Tabel 4. Normaaljaotuse testid

Normaaljaotus	TKM		Norma		Merko		ET		Baltika	
	statistik	olulisuse tõenäosus	statistik	olulisuse tõenäosus	statistik	olulisuse tõenäosus	statistik	olulisuse tõenäosus	statistik	olulisuse tõenäosus
Shapiro-Wilk	0.7665	0	0.8505	0	0.8444	0	0.7665	0	0.747	0
Kolmogorov-Smirnov	0.2068	<.0100	0.1573	<.0100	0.1398	<.0100	0.1596	<.0100	0.1795	<.0100
Cramer-von Mises	14.0919	<.0050	6.007	<.0050	7.2703	<.0050	7.2038	<.0050	11.3478	<.0050
Anderson-Darling	67.1774	<.0050	29.9548	<.0050	36.3658	<.0050	39.0621	<.0050	56.1549	<.0050

2.3.1 Laplace jaotus

Järgnevalt katsetan Laplace jaotust. Laplace jaotuse jaotusfunktsioon on kujul

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + sign(x-\mu)\left(1 - \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)\right)\right],$$

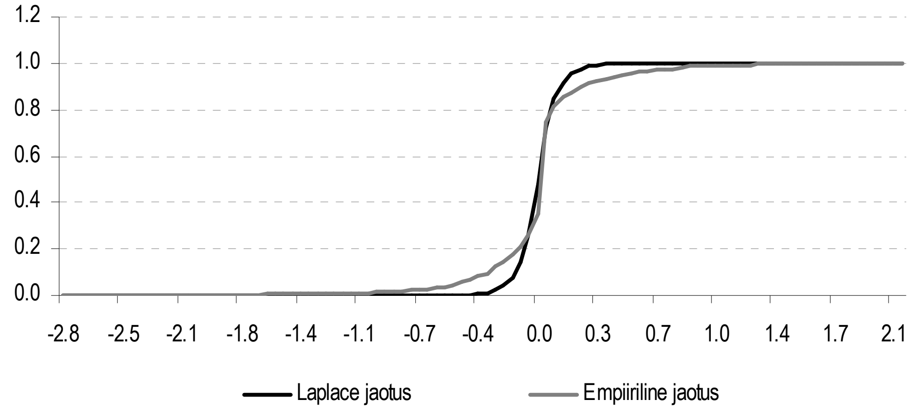
kus μ on asukohaparameeter ja σ on skaalaparameeter. [7]

Asukohaparameetri μ hindasin valimi keskväärtusega ja skaalaparameetri leidsin minimiseerides Kolmogorov-Smirnovi statistikut (vt Lisa 2). Kõikidele väärtpaberitele peale Baltika aktsia sobis see jaotus hästi. Tabelis 5 on ära toodud iga väärtpaberi jaoks sobivaimad parameetrid ja Kolmogorov-Smirnovi statistiku väärtus jaotuse sobivuse hindamiseks. Kriitiline väärtus on Kolmogorov-Smirnovi statistiku kriitiline väärtus juhul, kui valimimaht on 100. Graafikutel 9 – 13 on näha, kuidas leitud teoreetiline jaotus sobib antud andmete kirjeldamiseks. On näha, et Tallinna Kaubamaja ja Baltika aktsiad ei ole Laplace jaotusega hästi kirjeldatud ja tuleks vaadata täiendavalt veel teisi jaotusi.

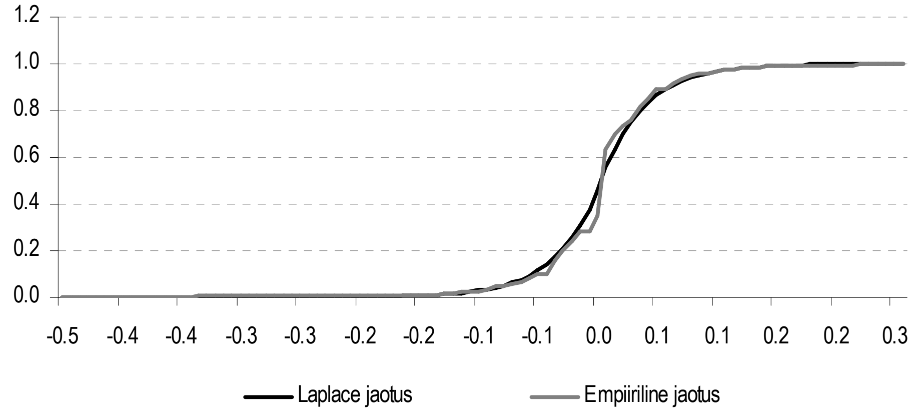
Tabel 5. Laplace jaotuse sobitamise tulemused

Tunnus	μ	σ	Kolmogorov-Smirnov	Kriitiline väärtus
TKM	-0.0251	0.07	0.1291	0.136
Norma	0.0004	0.03	0.1040	0.136
Merko	-0.0340	0.11	0.0980	0.136
Eesti Telekom	-0.0024	0.03	0.0767	0.136
Baltika	-0.0255	0.20	0.1603	0.136

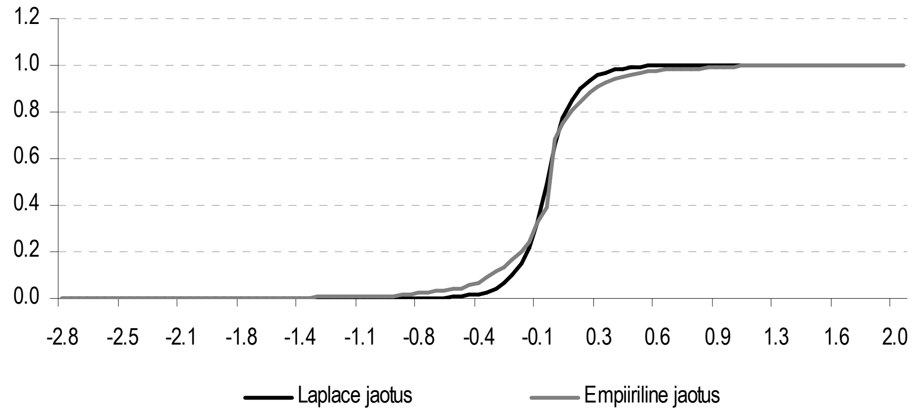
Graafik 9. Tallinna Kaubamaja aktsiale sobitatud Laplace jaotus parameetritega μ = -0.0251 ja σ = 0.07



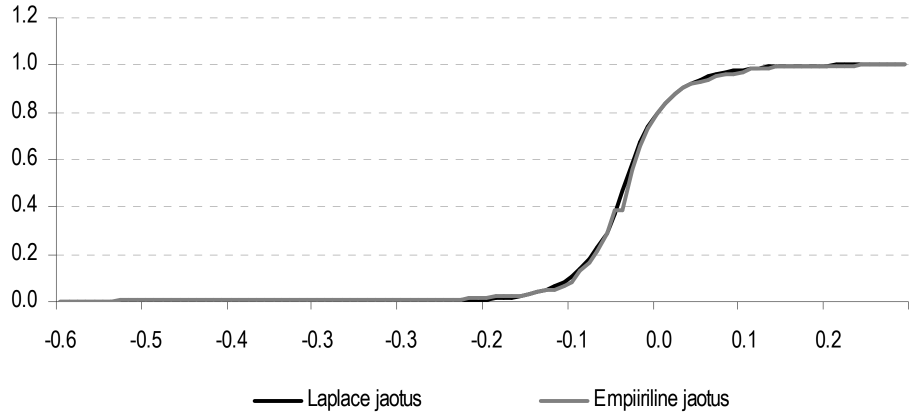
Graafik 10. Norma aktsiale sobitatud Laplace jaotus parameetritega μ = 0.0004 ja σ = 0.03



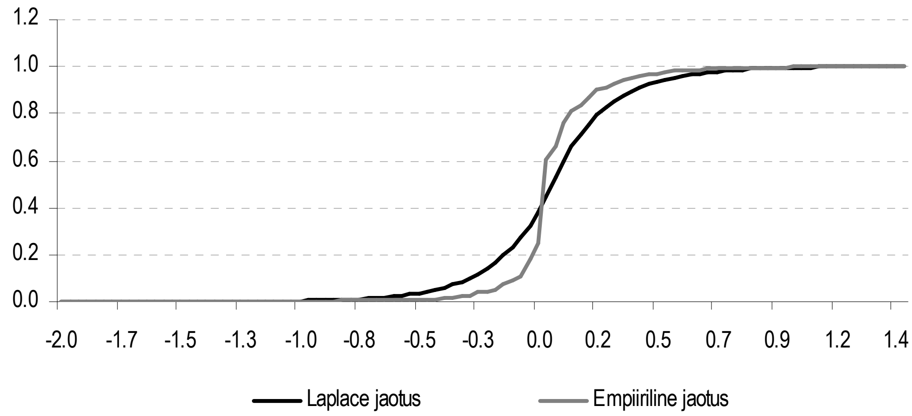
Graafik 11. Merko aktsiale sobitatud Laplace jaotus parameetritega μ = -0.0340 ja σ = 0.11



Graafik 12. Eesti Telekomi aktsiale sobitatud Laplace jaotus parameetritega μ = -0.0024 ja σ = 0.03



Graafik 13. Baltika aktsiale sobitatud Laplace jaotus parameetritega μ = -0.0255 ja σ = 0.20



2.3.2 Üldistatud Pareto jaotus ehk läveületusmudel

Järgmisena proovin andmetele sobitada üldistatud Pareto jaotust, mille jaotusfunktsioon on kujul

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1-(1+\xi x/\beta)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1-\exp(-x/\beta), & \xi = 0 \end{cases},$$

kus $\xi \geq 0$ korral ka $x \geq 0$ ja $\xi < 0$ korral $0 \leq x \leq -\beta/\xi$ ning $\beta > 0$. [6, lk 275]

Vaatleme juhtu, kui parameeter $\xi > 0$, kuna sellisel juhul ei ole x väärtuste hulk ülemise tõkkega piiratud. Parameetrite hindamiseks minimiseerisin jällegi Kolmogorov-Smirnovi statistikut. Läveks u valisin 0 ehk uurisin kõiki võimalikke kahjusid vaatamata nende suurusele. Sobivad parameetrite väärtused koos statistiku väärtusega on ära toodud tabelis 6 ja nende leidmiseks kasutatud programm on ära toodud Lisas 3. Valimimahu all tabelis 6 on näidatud läve ületanud kahjude arv. Kriitiline väärtus on Kolmogorov-Smirnovi statistiku kriitiline väärtus juhul, kui $n = 50$.

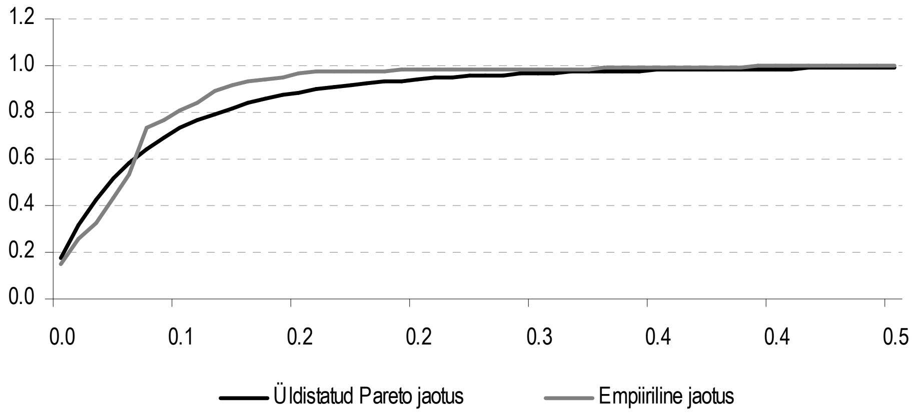
Tabel 6. Üldistatud Pareto jaotuse sobitamine

Tunnus	β	ξ	lävi u	valimimaht	Kolmogorov-Smirnov	Kriitiline väärtus
TKM	0.17	0.51	0	250	0.052	0.192
Norma	0.05	0.29	0	297	0.102	0.192
Merko	0.20	0.02	0	290	0.031	0.192
Eesti Telekom	0.04	0.02	0	331	0.048	0.192
Baltika	0.12	0.09	0	277	0.076	0.192

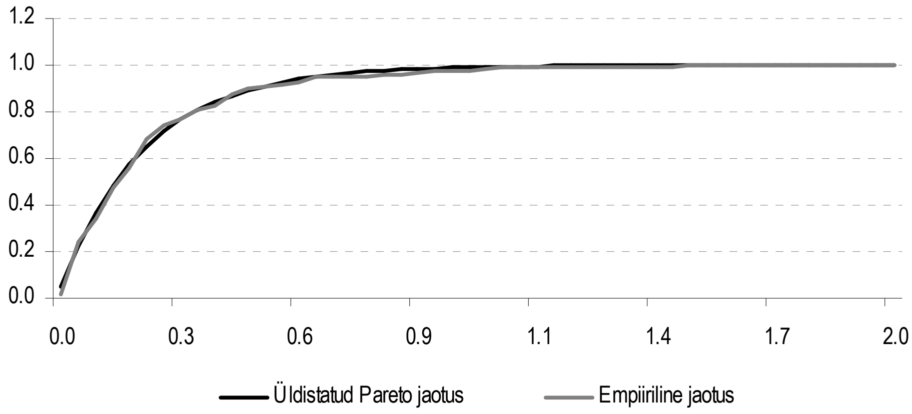
Empiirilised ja teoreetilised jaotusfunktsioonid on näha graafikutel 14 kuni 18. Seekord on problemaatilisemad Norma ja Eesti Telekomi jaotus. Samas teistele aktsiatele õnnestus üldistatud Pareto jaotust hästi sobitada.

Graafik 14. Tallinna Kaubamaja aktsiale sobitatud üldistatud Pareto jaotus parameetritega $\xi = 0.51$ ja $\beta = 0.17$

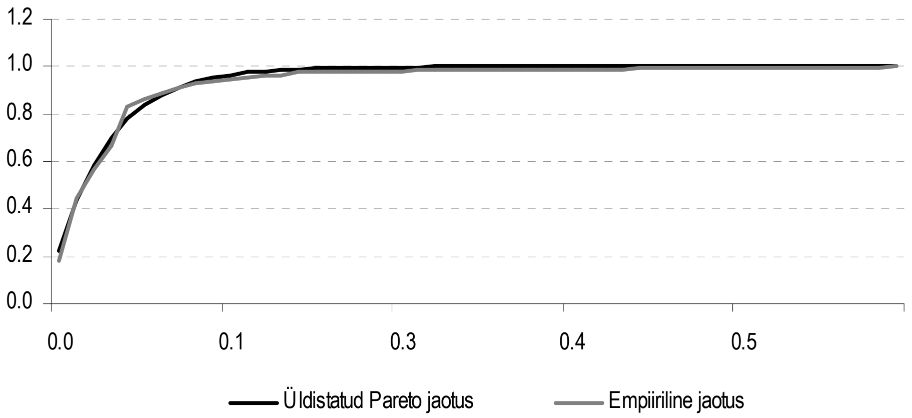
Graafik 15. Norma aktsiale sobitatud üldistatud Pareto jaotus parameetritega $\xi = 0.29$ ja $\beta = 0.05$



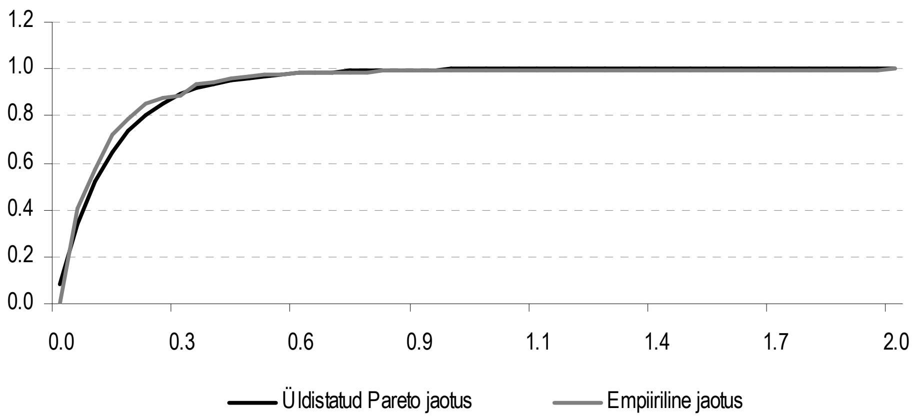
Graafik 16. Merko aktsiale sobitatud üldistatud Pareto jaotus parameetritega $\xi = 0.02$ ja $\beta = 0.20$



Graafik 17. Eesti Telekomi aktsiale sobitatud üldistatud Pareto jaotus parameetritega $\xi = 0.02$ ja $\beta = 0.04$



Graafik 18. Baltika aktsiale sobitatud üldistatud Pareto jaotus parameetritega $\xi = 0.09$ ja $\beta = 0.12$



2.3.3 Ekstremaalväärtuste jaotus ehk bloki maksimumi mudel

Kontrollin ka ekstremaalväärtuste jaotuste sobivust. Vastav jaotusfunktsioon on kujul

$$H(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \xi \dfrac{x-\mu}{\beta} \right)^{-1/\xi} \right), & \xi \neq 0 \\ \exp\left(-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} \right), & \xi = 0 \end{cases},$$

kus $1 + \xi \dfrac{x-\mu}{\beta} > 0$.

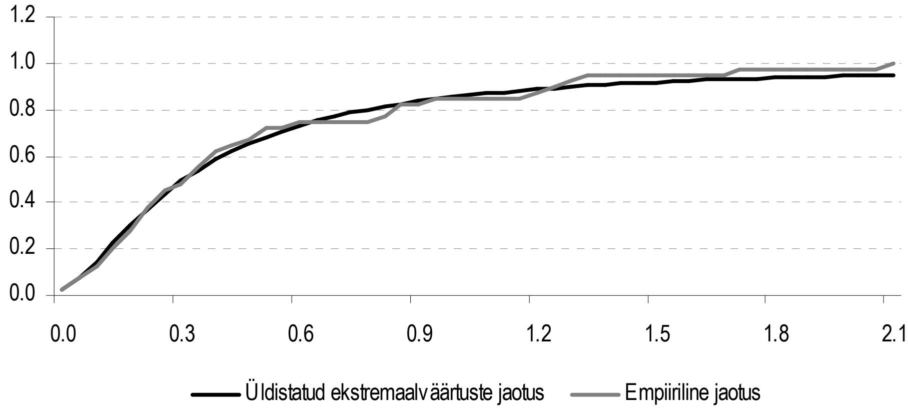
Kõigepealt leidsin iga kuu kõige suurema kahju kõikidele aktsiatele ja sain valimi, mille maht on 40. Kuna ekstremaalväärtuste jaotuste hulka kuuluv Weibull'i jaotus ($\xi < 0$) ei ole raske sabaga jaotus, siis juhtu $\xi < 0$ ma ei vaadanud. Samuti Gumbeli ($\xi = 0$) ja Frechet jaotuse ($\xi > 0$) vahel valides otsustasin katsetada Frechet jaotust, kuna tal on raskemad sabad.

Parameetrite hindamiseks minimiseerisin Kolmogorov-Smirnovi statistikut. Sobivaimad parameetrid ja nendele vastavad Kolmogorov-Smirnovi statistiku väärtused on ära toodud tabelis 7. Graafikutel 19 – 23 on ära toodud empiirilised ja teoreetilised jaotused kõikide aktsiate jaoks. Ka Frechet jaotus tundub andmetele sobivat, kuigi valimimaht antud meetodi juures on väike, mis on selle meetodi üks suurimaid puudusi. Seda jaotust kasutades saame ette ennustada ainult suurimaid võimalikke kahjusid kuus. Ta ei anna mingit infot kahjude üldise käitumise kohta. Programm jaotuse sobitamiseks kui ka riskide leidmiseks on toodud Lisas 4.

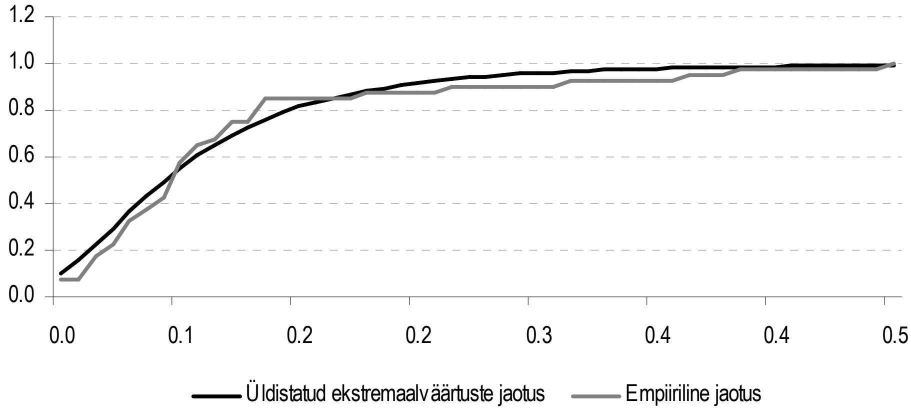
Tabel 7. Frechet tüüpi ekstremaalväärtuste jaotuse sobitamine

Tunnus	μ	β	ξ	valimimaht	Kolmogorov-Smirnov	Kriitiline väärtus
TKM	0.23	0.23	0.59	40	0.04986	0.192
Norma	0.08	0.05	0.21	40	0.08912	0.192
Merko	0.35	0.17	0.49	40	0.06145	0.192
Eesti Telekom	0.06	0.05	0.61	40	0.05925	0.192
Baltika	0.16	0.11	0.39	40	0.05899	0.192

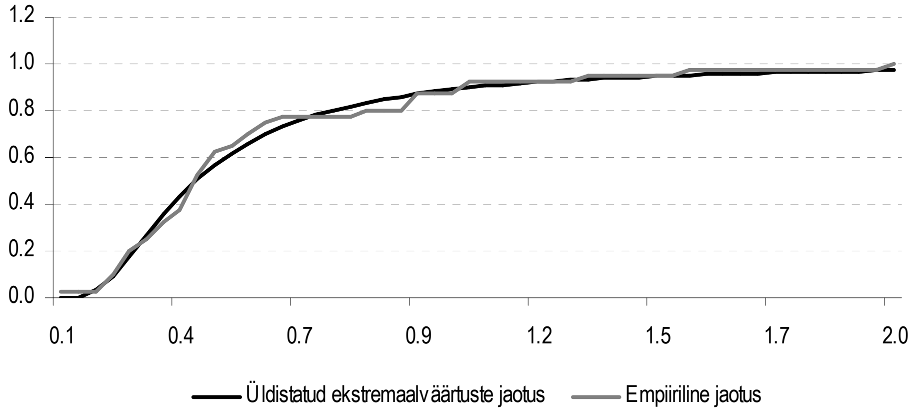
Graafik 19. Tallinna Kaubamaja aktsiale sobitatud üldistatud ekstremaalväärtuste jaotus parameetritega μ =0.23, β = 0.23 ja ξ = 0.59



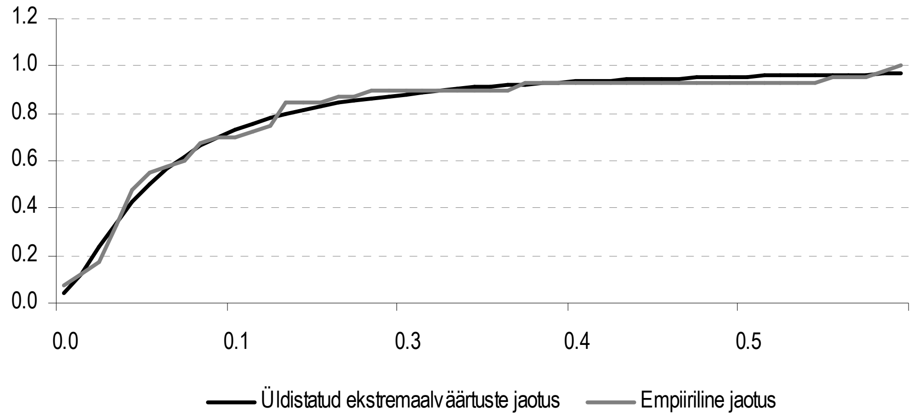
Graafik 20. Norma aktsiale sobitatud üldistatud ekstremaalväärtuste jaotus parameetritega μ = 0.08, β = 0.05 ja ξ = 0.21



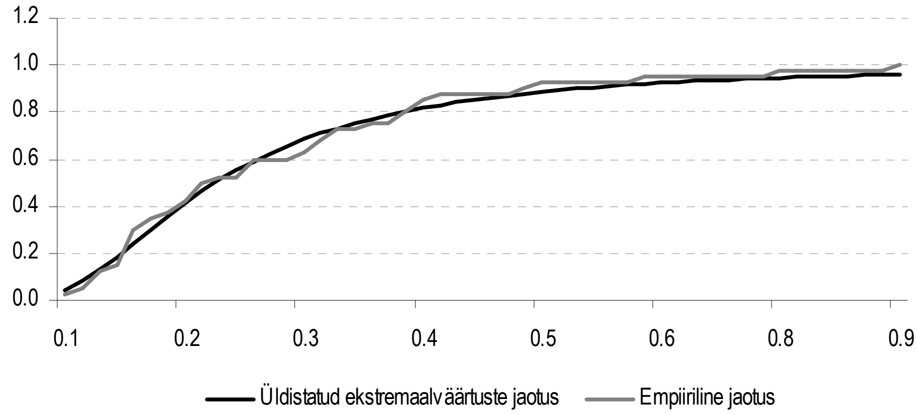
Graafik 21. Merko aktsiale sobitatud üldistatud ekstremaalväärtuste jaotus parameetritega μ =0.35, β = 0.17 ja ξ = 0.49



Graafik 22. Eesti Telekomi aktsiale sobitatud üldistatud ekstremaalväärtuste jaotus parameetritega μ =0.06, β = 0.05 ja ξ = 0.61



Graafik 23. Baltika aktsiale sobitatud üldistatud ekstremaalväärtuste jaotus parameetritega μ = 0.16, β = 0.11 ja ξ = 0.39



2.3.4 Eksponentsiaalne veajaotus

Kuna Laplace jaotus enamustele väärtpaberitele sobis, siis uurin ka üldisemat jaotuste peret, kuhu Laplace jaotus kuulub. Neid jaotusi nimetatakse eksponentsiaalseteks veajaotusteks ja nende tihedusfunktsioon on kujul

$$f(x) = k\phi^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left| \frac{x-\theta}{\phi} \right|^{2/(1+\beta)} \right),$$

kus $k^{-1} = \Gamma\left(1 + \frac{1+\beta}{2}\right) 2^{1+\frac{1}{2}(1+\beta)}$ ning $\phi > 0$, $-\infty < \theta < \infty$ ja $-1 < \beta \le 1$. Laplace jaotus on eksponentsiaalse veajaotuse erijuht, kui $\beta = 1$. [8, lk 157]

Leiame jaotusfunktsiooni kuju selle pere jaoks. Muutujavahetuste tähistamiseks toon vastavad seosed ära võrduste kohal. Näiteks $y := 2x$ tähendab, et asendan muutuja *y* muutujaga *2x*.

Juht, kus $x < \theta$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{k}{\phi}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta - t}{\phi}\right)^{\frac{2}{1+\beta}}\right)dt \overset{u:=\frac{\theta-t}{\phi}}{=} \frac{k}{\phi}\int_{\infty}^{\frac{\theta-x}{\phi}} (-\phi)\exp\left(-\frac{1}{2}u^{\frac{2}{1+\beta}}\right)du = k\int_{\frac{\theta-x}{\phi}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}u^{\frac{2}{1+\beta}}\right)du =$$

$$\overset{u^{\frac{2}{1+\beta}}:=y}{=} k\int_{\left(\frac{\theta-x}{\phi}\right)^{\frac{2}{1+\beta}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right)\frac{1+\beta}{2}y^{\frac{1+\beta}{2}-1}dy \overset{\frac{1}{2}y:=x}{=} \frac{k(1+\beta)}{2}\int_{\frac{1}{2}\left(\frac{\theta-x}{\phi}\right)^{\frac{2}{1+\beta}}}^{\infty} (2x)^{\frac{1+\beta}{2}-1}\exp(-x)2dx =$$

$$= k(1+\beta)2^{\frac{\beta-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1+\beta}{2}, \frac{1}{2}\left(\frac{\theta - x}{\phi}\right)^{\frac{2}{1+\beta}}\right).$$

Juht, kus $x \geq \theta$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\theta} f(t)dt + \int_{\theta}^{x} f(t)dt = k(1+\beta)2^{\frac{\beta-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1+\beta}{2}\right) + \int_{\theta}^{x} f(t)dt = \ldots$$

$$\int_{\theta}^{x} f(t)dt = \frac{k}{\phi}\int_{\theta}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\theta}{\phi}\right)^{\frac{2}{1+\beta}}\right)dt \overset{u:=\frac{t-\theta}{\phi}}{=} \frac{k}{\phi}\int_{0}^{\frac{x-\theta}{\phi}} \phi\exp\left(-\frac{1}{2}u^{\frac{2}{1+\beta}}\right)du = k\int_{0}^{\frac{x-\theta}{\phi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^{\frac{2}{1+\beta}}\right)du =$$

$$\overset{u^{\frac{2}{1+\beta}}:=y}{=} k\int_{0}^{\left(\frac{x-\theta}{\phi}\right)^{\frac{2}{1+\beta}}} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right)\frac{1+\beta}{2}y^{\frac{1+\beta}{2}-1}dy \overset{\frac{1}{2}y:=x}{=} \frac{k(1+\beta)}{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta}{\phi}\right)^{\frac{2}{1+\beta}}} (2x)^{\frac{1+\beta}{2}-1}\exp(-x)2dx =$$

$$= k(1+\beta)2^{\frac{\beta-1}{2}}\left(\Gamma\left(\frac{1+\beta}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{1+\beta}{2}, \frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta}{\phi}\right)^{\frac{2}{1+\beta}}\right)\right)$$

$$\ldots = k(1+\beta)2^{\frac{\beta-1}{2}}\left(2\Gamma\left(\frac{1+\beta}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{1+\beta}{2}, \frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta}{\phi}\right)^{\frac{2}{1+\beta}}\right)\right).$$

Kui k asendada, siis saame, et

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{(1+\beta)}{4\Gamma\left(1+\dfrac{1+\beta}{2}\right)} \Gamma\left(\dfrac{1+\beta}{2}, \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\theta - x}{\phi}\right)^{\frac{2}{1+\beta}} \right), & kui\ x < \theta \\ \dfrac{(1+\beta)}{4\Gamma\left(1+\dfrac{1+\beta}{2}\right)} \left(\left(2\Gamma\left(\dfrac{1+\beta}{2}\right)\right) - \Gamma\left(\dfrac{1+\beta}{2}, \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\theta}{\phi}\right)^{\frac{2}{1+\beta}} \right)\right), & kui\ x \geq \theta. \end{cases}$$

Jaotuse sobitamine oli keeruline jaotusfunktsiooni komplitseeritud kuju tõttu (vt Lisa 5). Jaotusfunktsiooni sobitamiseks leidsin mittetäieliku Γ-funktsiooni kasutades seost

$$\Gamma(a,x) = \Gamma(a) - e^{-x} x^{a} \sum_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+i+1)} x^{n} ,$$

kui $x < a+1$, ning Γ-funktsiooni esitust ahelmurdude abil

$$\Gamma(a,x) = \cfrac{e^{-x}x^{a}}{x + \cfrac{1-a}{1 + \cfrac{1}{x + \cfrac{2-a}{1 + \cfrac{2}{x + \cfrac{3-a}{1 + \cfrac{3}{x + \ldots}}}}}}} ,$$

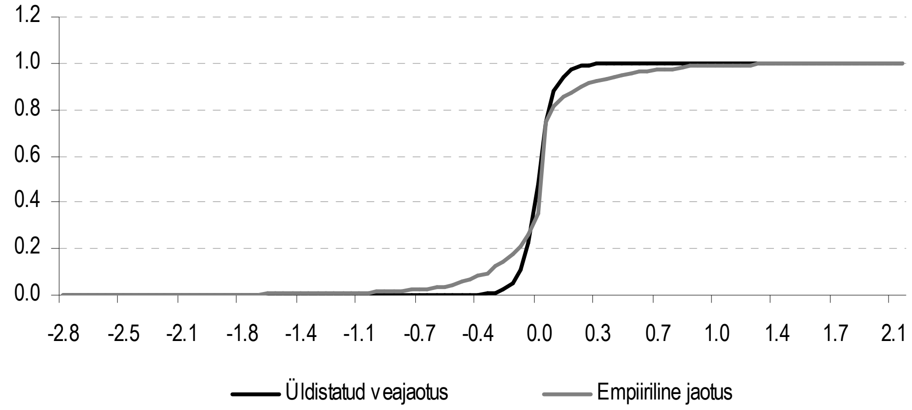
kui $x \geq a+1$.

Jaotuse sobitamisel saadud Kolmogorov-Smirnovi statistik tuli küll väiksem kui Laplace jaotuse korral, kuid kuna eesmärk oleks ikkagi leida võimalikult lihtne avaldist riski jaoks ja vahe sobivusenäitajates ei olnud kuigi suur, siis riskinäitajate leidmisel kasutan edaspidi Laplace jaotust.

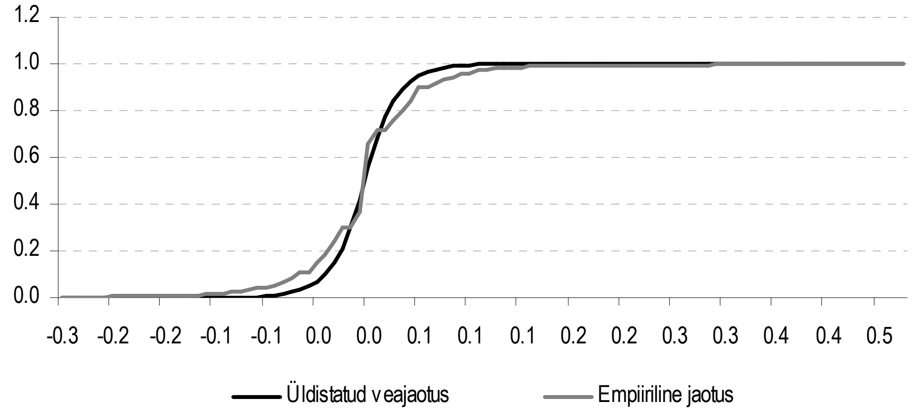
Tabel 8. Üldistatud veajaotuse sobitamine

Tunnus	θ	β	φ	Kolmogorov-Smirnov	Kriitiline väärtus
TKM	-0.0251	0.96	0.035	0.1286	0.136
Norma	0.0004	0.72	0.015	0.0949	0.136
Merko	-0.0340	0.94	0.055	0.0976	0.136
Eesti Telekom	-0.0024	0.92	0.02	0.0750	0.136
Baltika	-0.0255	0.36	0.15	0.1582	0.136

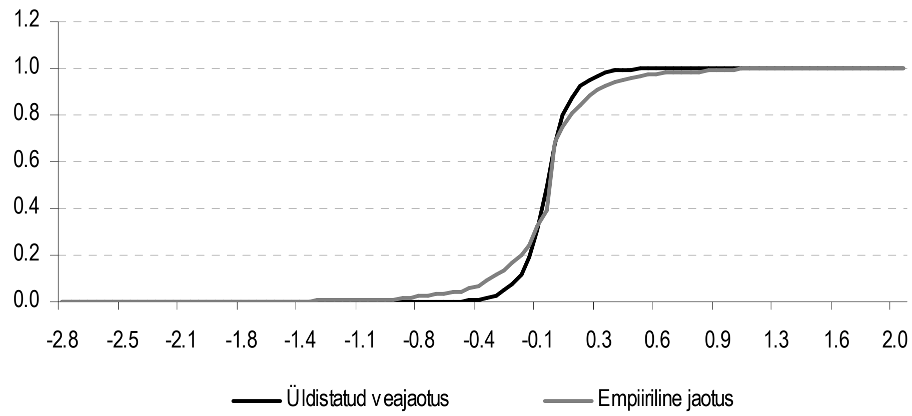
Graafik 24. Tallinna Kaubamaja aktsiale sobitatud üldistatud veajaotus parameetritega θ = -0.0251, β = 0.96 ja φ = 0.035



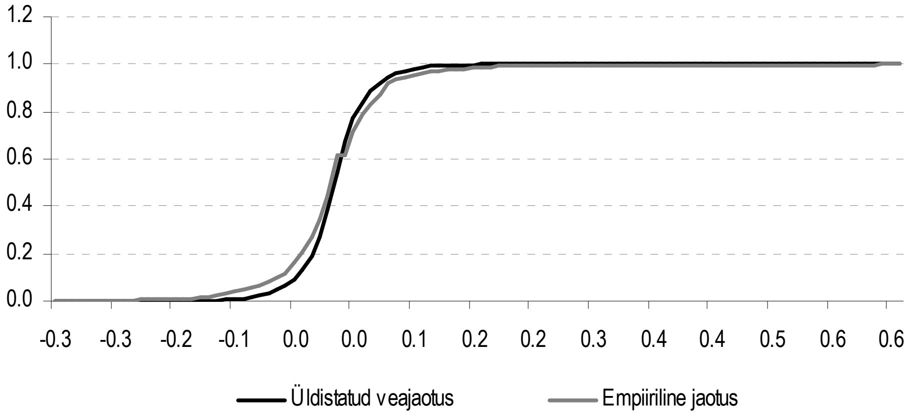
Graafik 25. Norma aktsiale sobitatud üldistatud veajaotus parameetritega θ = 0.0004, β = 0.72 ja φ = 0.015



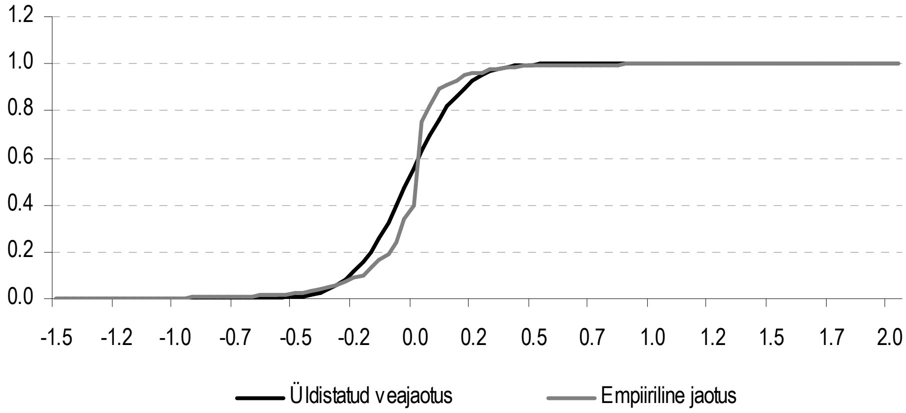
Graafik 26. Merko aktsiale sobitatud üldistatud veajaotus parameetritega θ = -0.0340, β = 0.94 ja φ = 0.055



Graafik 27. Eesti Telekomi aktsiale sobitatud üldistatud veajaotus parameetritega θ = -0.0024, β = 0.92 ja φ = 0.02



Graafik 28. Baltika aktsiale sobitatud üldistatud veajaotus parameetritega θ = -0.0255, β = 0.36 ja φ = 0.15



2.4 *VaR* ja *ES* hindamine

2.4.1 *VaR* ja *ES* Laplace jaotuse korral

Kuna *VaR* on avaldatav jaotusfunktsiooni kaudu ja Laplace jaotusfunktsioon on kujul

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + sign(x-\mu)\left(1 - \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)\right)\right],$$

siis saame leida *VaR* hinnangu järgmiselt:

$$P(L < VaR) = \alpha$$

ehk siis

$$2\alpha - 1 = sign(VaR_\alpha(L) - \mu)\left(1 - \exp\left(-\frac{|VaR_\alpha(L) - \mu|}{\sigma}\right)\right).$$

Kui $\alpha \geq 0.5$, siis

$$2\alpha - 1 = 1 - \exp\left(-\frac{(VaR_\alpha(L) - \mu)}{\sigma}\right),$$

kuna siis $VaR_\alpha(L) \geq \mu$, ning järelikult

$$2(1-\alpha) = \exp\left(\frac{\mu - VaR_\alpha(L)}{\sigma}\right)$$

ja seega

$$VaR_\alpha(L) = \mu - \sigma \ln(2(1-\alpha)).$$

Kui $\alpha < 0.5$, siis

$$2\alpha = \exp\left(-\frac{(\mu - VaR_\alpha(L))}{\sigma}\right),$$

kuna $VaR_\alpha(L) < \mu$, ning järelikult

$$VaR_\alpha(L) = \mu + \sigma \ln(2\alpha).$$

Oodatava puudujäägi avaldamiseks kasutame seost riskimõõduga VaR:

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(F)du.$$

Kui $\alpha \geq 0.5$, siis

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 (\mu - \sigma \ln(2-2u))du = \frac{1}{1-\alpha}\left(\mu(1-\alpha) - \sigma\int_\alpha^1 \ln(2-2u)du\right).$$

Kasutan ositi integreerimist:

$$x := \ln(2-2u) \Rightarrow dx = \frac{-2}{2(1-u)}du$$

ning

$$v = 2-2u \Rightarrow dv = -2du.$$

Seega

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\left(\mu(1-\alpha) + \frac{\sigma}{2}\left((2-2u)\ln(2-2u)\Big|_\alpha^1 + \int_\alpha^1 2\frac{1-u}{1-u}du\right)\right) =$$

$$= \mu + \frac{\sigma}{2(1-\alpha)}\left((2-2)\ln(2-2) - (2-2\alpha)\ln(2-2\alpha) + 2(1-\alpha)\right) =$$

$$= \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha}\left((1-\alpha) - (1-\alpha)(\ln 2 + \ln(1-\alpha))\right) =$$

$$= \mu + \sigma - \sigma(\ln 2 + \ln(1-\alpha)).$$

Kui $\alpha < 0.5$

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{0.5}^{1}(\mu - \sigma\ln(2-2u))du + \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{0.5}(\mu + \sigma\ln(2u))du =$$

$$= \mu + \sigma - \underbrace{\sigma(\ln 2 + \ln(1-0.5))}_{=0} + \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{0.5}(\mu + \sigma\ln(2u))du = \mu + \sigma + \frac{1}{1-\alpha}\left(\mu(1-\alpha) + \sigma\int_{\alpha}^{0.5}\ln(2u)du\right).$$

Edasi kasutan ositi integreerimise valemit: $x := \ln(2u) \Rightarrow dx = \frac{1}{u}du$ ning $v = 2u \Rightarrow dv = 2du$.

Seega

$$ES_\alpha(L) = \mu + \sigma + \frac{1}{1-\alpha}\left(\mu(1-\alpha) + \frac{\sigma}{2}\left(2u\ln(2u)\Big|_{\alpha}^{0.5} - \int_{\alpha}^{0.5}2u\frac{1}{u}du\right)\right) =$$

$$= \mu + \sigma - \mu + \frac{\sigma}{2(1-\alpha)}(\ln 1 - 2\alpha\ln 2\alpha - 2(0.5-\alpha)) = \sigma + \frac{\sigma}{1-\alpha}(-\alpha(\ln 2 + \ln\alpha) - (0.5-\alpha)) =$$

$$= \sigma + \frac{\sigma}{1-\alpha}(-\alpha\ln 2 - \alpha\ln\alpha - (0.5-\alpha)) = \sigma - \frac{\alpha\sigma}{1-\alpha}\left(\ln 2 + \ln\alpha + \frac{1}{2\alpha} - 1\right).$$

Tabelis 9 on toodud *VaR* ja *ES* üksikute väärtpaberite kahjude jaoks vastavalt eelnevas peatükis leitud sobivaimatele parameetrite väärtustele erinevate *α* väärtuste korral.

Tabel 9. VaR_α ja ES_α Laplace jaotuse korral.

Laplace	TKM		Norma		Merko		ET		Baltika	
α	VaR	ES	VaR	ES	VaR	ES	VaR	ES	VaR	ES
0.90	0.088	0.158	0.049	0.079	0.143	0.253	0.046	0.076	0.296	0.496
0.91	0.095	0.165	0.052	0.082	0.155	0.265	0.049	0.079	0.317	0.517
0.92	0.103	0.173	0.055	0.085	0.168	0.278	0.053	0.083	0.341	0.541
0.93	0.113	0.183	0.059	0.089	0.182	0.292	0.057	0.087	0.368	0.568
0.94	0.123	0.193	0.064	0.094	0.199	0.309	0.061	0.091	0.399	0.599
0.95	0.136	0.206	0.069	0.099	0.219	0.329	0.067	0.097	0.435	0.635
0.96	0.152	0.222	0.076	0.106	0.244	0.354	0.073	0.103	0.480	0.680
0.97	0.172	0.242	0.085	0.115	0.275	0.385	0.082	0.112	0.537	0.737
0.98	0.200	0.270	0.097	0.127	0.320	0.430	0.094	0.124	0.618	0.818
0.99	0.249	0.319	0.118	0.148	0.396	0.506	0.115	0.145	0.757	0.957

2.4.2 *VaR* ja *ES* Pareto jaotuse korral

Üldistatud Pareto jaotuse jaoks leidsime juba paragrahvis 1.3.2 *VaR* ja *ES* avaldised. Pareto jaotuse korral avaldub *VaR* järgmiselt:

$$VaR_\alpha(L) = q_\alpha(F) = u + \frac{\beta}{\xi}\left(\left(\frac{1-\alpha}{\overline{F}(u)}\right)^{-\xi} - 1\right),\ \xi \neq 0.$$

Oodatav puudujääk *ES* on kujul:

$$ES_\alpha(L) = \frac{\beta - u\xi}{1-\xi} + \frac{VaR_\alpha(L)}{1-\xi}.$$

Tabelis 10 on toodud *VaR* ja *ES* üksikute väärtpaberite kahjude jaoks vastavalt varem leitud sobivaimatele parameetrite väärtustele erinevate *α* väärtuste korral.

Tabel 10. VaR_α ja ES_α üldistatud Pareto jaotuse korral

Pareto	TKM		Norma		Merko		ET		Baltika	
α	VaR	ES	VaR	ES	VaR	ES	VaR	ES	VaR	ES
0.90	0.745	1.868	0.164	0.301	0.471	0.685	0.094	0.137	0.307	0.469
0.91	0.805	1.990	0.174	0.316	0.493	0.708	0.099	0.142	0.323	0.486
0.92	0.875	2.133	0.186	0.333	0.518	0.733	0.104	0.147	0.340	0.506
0.93	0.961	2.307	0.200	0.353	0.546	0.761	0.109	0.152	0.361	0.528
0.94	1.066	2.523	0.217	0.377	0.579	0.795	0.116	0.159	0.384	0.554
0.95	1.203	2.801	0.239	0.406	0.617	0.834	0.123	0.167	0.413	0.585
0.96	1.388	3.179	0.266	0.445	0.665	0.883	0.133	0.177	0.448	0.624
0.97	1.660	3.734	0.304	0.499	0.726	0.945	0.145	0.189	0.495	0.676
0.98	2.118	4.669	0.364	0.583	0.814	1.035	0.163	0.207	0.563	0.750
0.99	3.157	6.790	0.483	0.751	0.965	1.189	0.193	0.238	0.685	0.884

2.4.3 *VaR* ja *ES* ekstremaalväärtuste jaotuse korral

Leiame nii *VaR* kui ka oodatava puudujäägi *ES* juhul, kui $\xi \neq 0$. Kuna *VaR* on avaldatav jaotusfunktsiooni kaudu ja jaotusfunktsioon on kujul

$$H(x) = \exp\left(-\left(1 + \xi\frac{x-\mu}{\beta}\right)^{-1/\xi}\right),\quad \xi \neq 0,$$

siis saame leida *VaR* hinnangu järgmiselt:

$$\alpha = \exp\left(-\left(1 + \xi\frac{VaR_\alpha(L) - \mu}{\beta}\right)^{-1/\xi}\right)$$

$$\ln(\alpha) = -\left(1 + \xi\frac{(VaR_\alpha(L) - \mu)}{\beta}\right)^{-1/\xi}$$

$$(-\ln(\alpha))^{-\xi} - 1 = \xi\frac{VaR_\alpha(L) - \mu}{\beta}$$

ning järelikult

$$VaR_\alpha(L) = \mu + \frac{\beta}{\xi}\left((-\ln(\alpha))^{-\xi} - 1\right).$$

Oodatav puudujääk avaldub järgmiselt

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(L)du = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1\left(\mu + \frac{\beta}{\xi}\left((-\ln(u))^{-\xi} - 1\right)du\right) =$$

$$= \mu - \frac{\beta}{\xi} + \frac{\beta}{\xi(1-\alpha)}\int_\alpha^1 (-\ln(u))^{-\xi}\,du\,.$$

Teeme muutujavahetuse $-\ln u = x$ ehk $u = e^{-x}$ ning seega $du = -e^{-x}dx$ ja

$$ES_\alpha(L) = \mu - \frac{\beta}{\xi} + \frac{\beta}{\xi(1-\alpha)}\int_0^{-\ln\alpha} x^{-\xi}e^{-x}dx\,.$$

Kasutame saadud võrduses esineva integraali leidmiseks lihtsat Monte-Carlo meetodit [15, lk 165]. Selle kohaselt integraal lähend I_n integraalile $I = \int_A g(x)f_Y(x)dx$ on kujul

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I_A(y_i)g(y_i),$$

kus y_i on pseudojuhuslikud arvud tihedusega $f_Y(x)$. Rakendades lihtsalt Monte-Carlo meetodit saame oodatava puudujäägi hinnangu

$$ES_\alpha(L) \approx \mu - \frac{\beta}{\xi} + \frac{\beta}{\xi n(1-\alpha)}\sum_{i=1}^n I_{[0,-\ln\alpha]}(y_i)y_i^{-\xi}\,,$$

kus y_i on juhusliku suuruse $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$ sõltumatud väärtused.

Tabelis 11 on toodud *VaR* ja *ES* väärtused üksikute väärtpaberite kahjude jaoks vastavalt eelnevalt leitud sobivaimatele parameetrite väärtustele erinevate α väärtuste korral.

Tabel 11. VaR_α ja ES_α ekstremaalväärtuste jaotuse korral

Ekstremaal	TKM		Norma		Merko		ET		Baltika	
α	VaR	ES	VaR	ES	VaR	ES	VaR	ES	VaR	ES
0.90	1.311	3.272	0.222	0.347	1.045	2.178	0.303	0.843	0.558	0.926
0.91	1.410	3.485	0.231	0.361	1.103	2.331	0.326	0.907	0.588	0.959
0.92	1.528	3.741	0.241	0.377	1.172	2.490	0.353	0.976	0.623	1.005
0.93	1.672	4.071	0.253	0.395	1.255	2.658	0.386	1.055	0.665	1.052
0.94	1.853	4.457	0.267	0.418	1.356	2.899	0.428	1.163	0.715	1.116
0.95	2.089	4.932	0.284	0.413	1.487	3.235	0.482	1.309	0.778	1.179
0.96	2.413	5.611	0.306	0.421	1.663	3.665	0.557	1.491	0.862	1.248
0.97	2.898	6.662	0.336	0.463	1.920	4.291	0.670	1.809	0.981	1.392
0.98	3.737	8.484	0.380	0.502	2.347	5.471	0.866	2.334	1.172	1.587
0.99	5.723	12.189	0.466	0.686	3.305	8.021	1.336	3.737	1.576	1.778

2.4.4 Tunnuste sõltumatus

Olles kätte saanud üksikute väärtpaberite *VaR* ja *ES* hinnangud, on meil portfelli hinnangute jaoks vaja uurida tunnuste omavahelist sõltuvust. Juhul kui üksikud kahjud ei ole omavahel tugevalt seotud, siis saame portfelli kahju leidmisel üksikud kahjud summeerida. Kui üksikute kahjude vaheline seos on tugev, siis tuleb hinnata nende ühisjaotust kasutades koopulate metoodikat.

Uurin tavalist lineaarset sõltuvust üksikute aktsiate kahjude vahel. Tabelis 12 on toodud ära kahjude Pearsoni korrelatsioonikordajad erinevate aktsiate korral. Korrelatsioonimaatriksis ei leidu ühtegi isegi mitte keskmiselt tugevat korrelatsiooni. Kõige tugevam korrelatsioon 0.2138 on Eesti Telekomi ja Baltika aktsia vahel.

Tabel 12. Pearsoni korrelatsioonid

Pearson	*TKM*	*Norma*	*Merko*	*ET*	*Baltika*
TKM	1				
Norma	0.0711	1			
Merko	0.1643	0.1781	1		
ET	0.0517	0.1545	0.1617	1	
Baltika	0.0968	0.1016	0.1074	0.2138	1

Kontrollin ka hüpoteese:

$$H_0 : \rho(X_i, X_j) = 0,$$
$$H_1 : \rho(X_i, X_j) \neq 0.$$

Leiame usalduspiirid korrelatsioonikordajale kasutades Fisher z-teisendust

$$Z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\bar{\rho}}{1-\bar{\rho}}\right),$$

kus statistik $Z \sim \mathrm{N}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)+\frac{\rho}{2\mathrm{n}},\frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}-3}}\right)$ ning ρ ja $\bar{\rho}$ tähistavad vastavalt teoreetilist ja empiirilist korrelatsioonikordajat [14, lk 382].

Usalduspiirid avalduvad järgmiselt:

$$z_{al} = z - q_\alpha / \sqrt{n-3},$$
$$z_{\ddot{u}l} = z + q_\alpha / \sqrt{n-3},$$

kus q_α on normaaljaotuse $\alpha/2$ täiendkvantiil [14, lk 382].

Tabel 13. Usalduspiirid korrelatsioonile

Korrelatsiooni alumine piir	*TKM*	*Norma*	*Merko*	*ET*	*Baltika*
TKM					
Norma	0.0043				
Merko	0.0986	0.1126			
ET	-0.0152	0.0886	0.0959		
Baltika	0.0302	0.0351	0.0408	0.1492	

Korrelatsiooni ülemine piir	*TKM*	*Norma*	*Merko*	*ET*	*Baltika*
TKM					
Norma	0.1373				
Merko	0.2286	0.2420			
ET	0.1181	0.2190	0.2261		
Baltika	0.1626	0.1673	0.1729	0.2767	

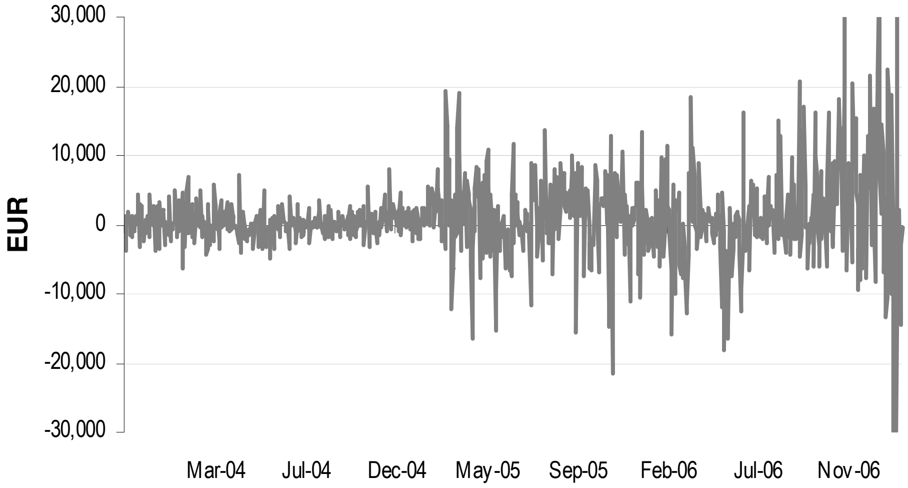
Ainult Tallinna Kaubamaja ja Eesti Telekomi aktsiate vahelisel korrelatsioonil jääb 0 usalduspiiridesse olulisuse nivool 0.05, teiste väärtpaberite puhul peaks vastu võtma sisuka hüpoteesi ehk korrelatsioon on nullist oluliselt erinev. Kuna korrelatsioonid on aga siiski väiksed ja kahju ühisjaotuse leidmine viie väärtpaberiga portfelli korral on äärmiselt keerukas, siis vaatlen andmeid kui realisatsioone sõltumatutest juhuslikest suurustest.

Kuna antud väärtpaberi korral on tegemist raskemate sabadega jaotustega, siis oleks informatiivsem vaadata astakkorrelatsioonikordajaid. Samas, kuna andmetest leidub palju nullväärtusi, mis suuresti mõjutavad Spearmani kui ka Kendalli τ kordajaid, siis ei ole astakkorrelatsioonid siinkohal usaldusväärsed.

2.5 *VaR* ja *ES* portfelli korral

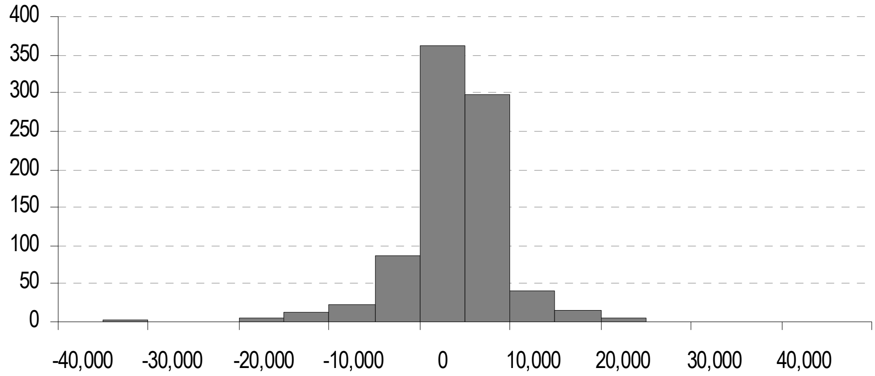
Vaatleme kõigepealt portfelli kahjude muutusi vaadeldava perioodi jooksul (vt graafik 29). Näeme, et kahjud on keskmiselt olnud sama suured kogu vaadeldava perioodi jooksul, kuid hajuvus on muutunud. Vaadeldavate andmete järgi on portfelli väärtus olnud suhteliselt stabiilne aastal 2004. Hilisematel aastatel on suuremate kahjude ja võitude esinemissagedus suurem.

Graafik 29. Kahju muutumine ajas (15 oktoober 2003 kuni 23 veebruar 2007)



Analüüsides suuremaid „hüppeid” algandmetes selgus, et enamasti on ekstreemsemad portfelliväärtuste muutumised seotud Merko aktsia hinna muutumisega. Graafikul 30 on näha portfelli kahju empiiriline jaotus.

Graafik 30. Portfelli kahju empiiriline jaotus



Portfelli oodatav puudujääk *ES* ja *VaR* tulid erinevaid jaotusi kasutades küllaltki erinevad. Erinevatest jaotustest vaatasin portfelli riske Laplace, üldistatud Pareto ja ekstremaalväärtuste jaotuse korral. Siinkohal ei ole kõige korrektsem võrrelda ekstremaalväärtuste korral leitud riskimõõte teiste jaotustega. Ekstremaalväärtuste jaotuse korral tähendab $VaR_{0.9}(L)$ sisuliselt suurimat võimalikku kahju, mis võib esineda ühel päeval kümne kuu jooksul. Samas ei anna see meile mingit infot pisemate kahjude suuruse kohta kuus.

Tabel 14. *VaR* ja *ES* portfelli korral

	Ekstremaal		Pareto		Laplace	
α	**VaR**	**ES**	**VaR**	**ES**	**VaR**	**ES**
0.90	52553	115459	27792	55609	10166	17346
0.91	55956	122560	29590	58603	10922	18102
0.92	59980	130840	31678	62102	11768	18948
0.93	64840	140729	34151	66277	12727	19907
0.94	70879	153142	37156	71390	13834	21014
0.95	78667	168388	40932	77875	15143	22323
0.96	89259	189048	45912	86520	16745	23925
0.97	104872	221993	52986	98955	18810	25990
0.98	131327	278468	64404	119354	21722	28902
0.99	192214	395447	88860	164055	26698	33878

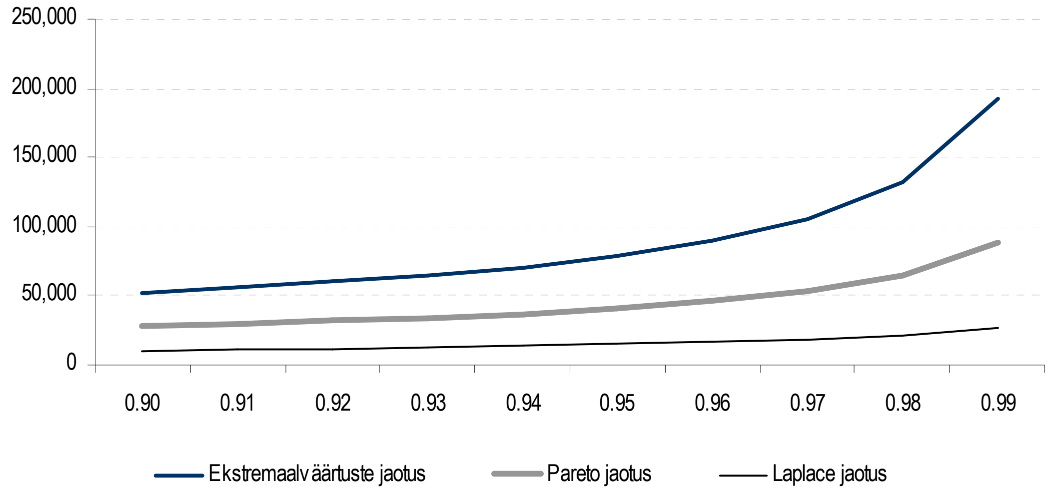
Kui võrrelda *VaR* ja oodatavat puudujääki *ES* ajalooliste kahjudega, siis tundub, et nii Pareto jaotus kui ka ekstremaalväärtuste jaotus hindavad sabade raskust üle. Kui vaadata jaotuskarakteristikuid tabelist 15, siis ajalooliste andmetega on kõige paremini kooskõlas Laplace jaotus.

Tabel 15. Portfelli kahju *L* jaotuskarakteristikud

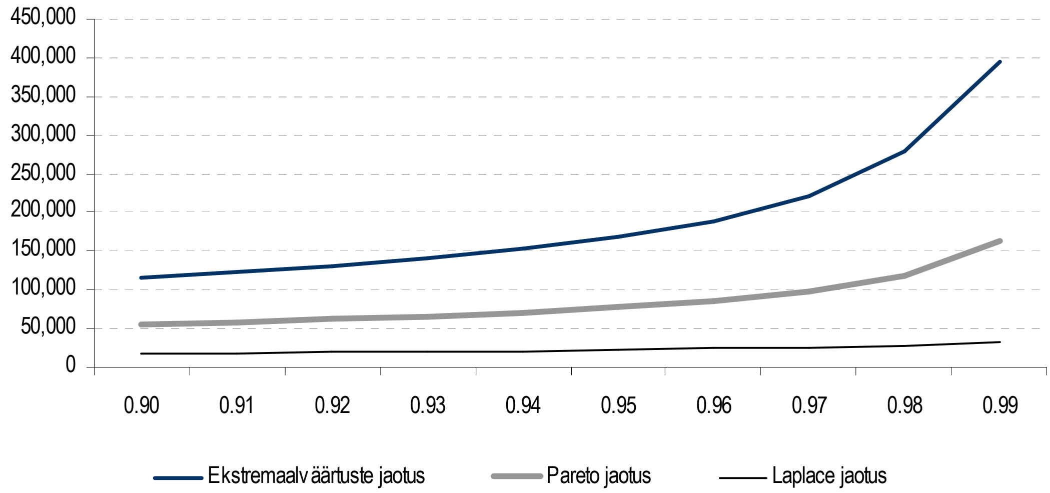
	Portfell
Keskväärtus	-965
Mood	0
Standardhälve	6,412
Dispersioon	41,119,586
Järsakusekordaja	24.14
Asümmeetriakordaja	0.18
Miinimum	-38,780
Alumine kvartiil	-2,970
Mediaan	-340
Ülemine kvartiil	1,500
Maksimum	70,280
Valimimaht	860

Graafikutel 31 ja 32 on välja toodud oodatava puudujäägi *ES* kui ka *VaR* sõltuvus α väärtusest erinevate jaotuste korral. Mida kiiremini α suurenedes riskimõõt suureneb, seda raskema sabaga jaotusega tegemist on. Järgmises paragrahvis saame teada, kas kasutades Pareto jaotust oleme saba raskust üle hinnanud või mitte.

Graafik 31. *VaR*



Graafik 32. Oodatav puudujääk *ES*



2.6 Mudeli sobivuse testimine ehk järeltestimine

Leitud Laplace ja Pareto jaotusel põhinevate hinnangute sobivust kontrollisin perioodi 23 veebruar kuni 22 aprill andmete põhjal. See vahemik ei olnud väga pikk, et siit teha järeldusi mudeli sobivuse kohta pikemaks perspektiivis. Perioodi vähese pikkuse tõttu ei olnud võimalik testida bloki maksimumi mudelit. Testimise tulemusi mõjutas ka suurem aktsiahindade langus veebruari lõpus.

Järeltestimise programmid on toodud Lisades 6 ja 7 vastavalt Laplace ja Pareto jaotuse jaoks ja tulemused *VaR* osas on tabelis 16.

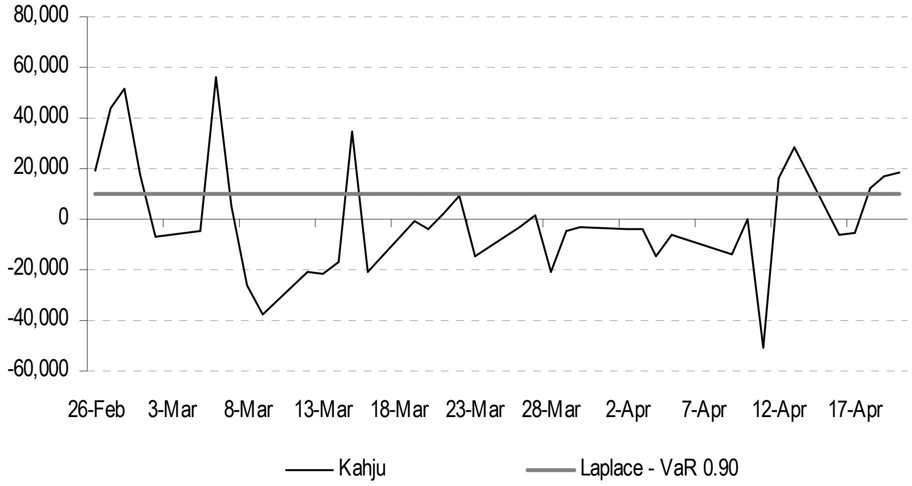
Tabel 16. Järeltestimise tulemused *VaR* kohta

Alpha		TKM	Norma	Merko	ET	Baltika	Portfell
0.90	Valimimaht	40	40	40	40	40	40
	Oodatav	4	4	4	4	4	4
	Laplace	13	8	15	9	11	11
	Valimimaht	18	16	22	17	17	15
	Oodatav	2	2	2	2	2	2
	Pareto	0	1	4	3	10	5
0.95	Valimimaht	40	40	40	40	40	40
	Oodatav	2	2	2	2	2	2
	Laplace	11	6	13	7	6	10
	Valimimaht	18	16	22	17	17	15
	Oodatav	1	1	1	1	1	1
	Pareto	0	1	4	2	6	3
0.99	Valimimaht	40	40	40	40	40	40
	Oodatav	0	0	0	0	0	0
	Laplace	8	2	7	2	5	5
	Valimimaht	18	16	22	17	17	15
	Oodatav	0	0	0	0	0	0
	Pareto	0	1	1	2	5	0

Reanimetus „Oodatav“ on vastava α korral oodatav *VaR* ületavate väärtuste arv. Kuna Pareto jaotusel on valimimaht väiksem, siis on ka oodatav ületamiste arv väiksem. Ridadel „Laplace“ ja „Pareto“ on vastava jaotuse põhjal hinnatud *VaR* ületanud kahjude arv. Tabelist on näha, et Laplace jaotus alahindab jaotuse sabade tegelikku raskust. Saavutamaks oodatavat *VaR* ületavate kahjude osakaalu peaks hinnatud *VaR* olema suurem. Pareto jaotuse korral oli olukord parem, kuigi ikkagi oodatav kahjude arv on palju väiksem kui hinnangut ületavate kahjude arv. Kõige täpsemini tundub olevat hinnatud Eesti Telekomi ja Norma aktsiate jaotus. Tallinna Kaubamajale ja Merko aktsiale võiks leiduda mõni jaotus, mis täpsemini kirjeldaks sabasid. Tallinna kaubamaja ja Baltika aktsia osakaal oli portfellis kõige suurem, seega nemad mõjutasid enim üldist portfelli riski käitumist.

Graafikul 33 on näha, kuidas vaadeldud perioodi jooksul kahju on käitunud hinnatud riskimõõdu $\mathrm{VaR}_{0.90}$ suhtes. Peamiselt on kahjud olnud suured veebruari lõpul ja märtsi alguses, kui börsil olid suhteliselt segased ajad ja toimusid suured langused. Seega osalt on testimise halvad tulemused mõjutatud sellest perioodist.

Graafik 33. Kahju ja Laplace jaotuse põhjal hinnatud $VaR_{0.90}$



Probleemiks antud testimise juures on kindlasti väike andmemaht. Kui $\alpha = 0.99$, siis järelikult ainult üks kahju sajast ületab VaR_α. Antud juhul oli meil Laplace jaotuse sobivuse testimiseks valimimaht 40 ja Pareto jaotuse korral veelgi väiksem.

Oodatava puudujäägi testimiseks uurisin, kas *VaR* ületanud kahjude keskmine erinevus oodatavast puudujäägist on null. Kasutades bootstrap meetodit leidsin vastavad olulisuse tõenäosused. Tabelis 17 on ära toodud tulemused.

Tabel 17. Järeltestimise tulemused oodatava puudujäägi kohta

Alpha		**TKM**	**Norma**	**Merko**	**ET**	**Baltika**	**Portfell**
0.9	Laplace	0.998	0.946	1.000	0.958	0.966	0.996
	Pareto			0.952	0.736	0.978	**0.038**
0.91	Laplace	0.998	0.926	0.998	0.966	0.970	0.988
	Pareto			0.972	0.692	0.988	0.072
0.92	Laplace	1.000	0.916	1.000	0.956	0.974	0.986
	Pareto			0.920	1.000	0.988	**0.024**
0.93	Laplace	0.998	0.930	0.994	0.936	0.974	0.992
	Pareto			0.920	1.000	0.988	**0.014**
0.94	Laplace	0.998	0.952	0.996	0.928	0.944	0.974
	Pareto			0.868	1.000	0.984	0.118
0.95	Laplace	0.994	0.944	0.982	0.920	0.988	0.954
	Pareto			0.754	1.000	0.990	0.118
0.96	Laplace	0.994	0.930	0.986	0.902	0.990	0.936
	Pareto			0.582	1.000	0.992	0.478
0.97	Laplace	0.996	0.896	0.980	0.912	0.990	0.952
	Pareto			0.660	1.000	0.970	
0.98	Laplace	0.990	0.852	0.990	0.740	0.988	0.962
	Pareto			1.000	1.000	0.990	
0.99	Laplace	0.990	1.000	0.958	1.000	0.916	0.910
	Pareto				1.000	0.958	

Rasvaselt on ära toodud olulisuse tõenäosused, mille korral peaks vastu võtma sisuka hüpoteesi ehk et oodatava puudujäägi keskmine erinevus tegelikust kahjust erineb oluliselt nullist. Muudel juhtudel tegelike *VaR* ületavate kahjude keskmine erinevus oodatavast puudujäägist ei erine oluliselt nullist. Tabelis Pareto jaotus puhul olevad tühjad lahtrid viitavad sellele, et nende aktsiate korral ei olnud ühtegi või oli üks kahju, mis ületas *VaR*. Samuti mõjutas Tallinna Kaubamaja ja Norma kõrge *VaR* portfelli üldist tulemust.

Kokkuvõttes arvan, et mudeleid tuleks testida pikema ajaperioodi korral, et otsustada, kas nad on sobivad või mitte. Samuti võiks kaaluda Tallinna Kaubamaja aktsia kahjule uue jaotuse sobitamist, et portfelli hinnanguid parandada.

Kokkuvõte

Käesoleva töö eesmärgiks oli uurida erinevaid riskide hindamise meetodeid aktsiaportfellide korral. Aegade jooksul on kasutusel olnud suhteliselt mitmeid riskimõõte. Tänapäeval on peamiselt kasutusel riskimõõt *VaR*, mis on määratud jaotuse kvantiiliga. Samas, kuna riskimõõt *VaR* ei täida kõiki nn koherentse riskimõõdu omadusi, millest üks on subaditiivsus, siis on tänapäeval kasutusele võetud oodatav puudujääk *ES*. Oodatav puudujääk on keskmistatud *VaR* üle jaotuse saba.

Kuna enamus riskimõõte on defineeritud portfelli kahju jaotuse kaudu, siis peamine raskus riskide hindamisel on portfelli kahju jaotuse hindamine. Kahjude jaotuse hindamisel on oluline teada, kas kahjud jaotus on statsionaarne või on nende jaotus ajas muutuv. Viimasel juhul tuleb kasutada kahjude hindamiseks tinglikku jaotust.

Kahjude jaotuse hindamiseks kasutatakse erinevaid meetodeid: kovariatsioonimaatriksi meetod, ajalooline simuleerimine ja Monte-Carlo meetod. Kovariatsioonimaatriksi meetod põhineb ideel, et portfelli kahjud on mitmemõõtmelise normaaljaotusega. See on väga lihtsustav eeldus ja seega praktikas soovitatakse teisi keerulisemaid meetodeid. Ajalooline simuleerimine tähendab, et kahjude jaotust hinnatakse ajalooliste andmete pealt. Monte-Carlo meetodi korral simuleeritakse vastavate meetoditega parameetrilist mudelit, mis kirjeldab kahjusid.

Jaotustest on enam kasutusel üldistatud Pareto jaotus ja üldistatud ekstremaalväärtuste jaotus. Viimase jaotuse puhul saame aga infot ainult mingi perioodi kõige suuremate kahjude kohta. Üldistatud Pareto jaotus annab informatsiooni kõigi mingit läve ületavate kahjude käitumise kohta.

Kuna *VaR* ei ole subaditiivne riskimõõt, siis praktikas ei piisa alati üksikute kahjude jaotuse hindamisest, vaid on vajalik hinnata nende ühisjaotust. Ühisjaotuse hindamisel kasutatakse koopulate teooriat, mis eeldab, et ühisjaotuse saab ära kirjeldada teades marginaaljaotusi ja tunnuste vahelist sõltuvusstruktuuri. Sõltuvuse mõõtmiseks kasutatakse nii lineaarset kui ka astakkorrelatsioonikordajaid. Kuna kahjud peamiselt on tavaliselt kirjeldatavad raske sabaga jaotusega, siis lineaarne korrelatsioonikordaja ei ole nii informatiivne kui astakkorrelatsioonikordajad. Astakkorrelatsioonikordajatest on peamiselt kasutusel Kendalli τ ja Spearmani korrelatsioonikordaja.

Töö empiirilises osas vaatlesin viiest Tallinna Börsil noteeritud väärtpaberist koostatud portfelli perioodil 15 oktoober 2003 kuni 23 veebruar 2007. Selgus, et vastavate väärtpaberite kahjusid võib vaadelda kui sõltumatuid ja sama jaotusega juhuslike suuruste realisatsioone. *VaR* korral sai näidatud, et kui kahjud on sõltumatud, siis *VaR* on subaditiivne. Seega piisab portfelli riski hindamiseks leida üksikute väärtpaberite riskid ja need summeerida. Kuna antud kahjud olid omavahel väga nõrgas lineaarses seoses, siis lugesin nad sõltumatuks ja portfelli riski saamiseks summeerisin üksikud riskid.

Jaotustest sobis antud andmete kirjeldamiseks kõige paremini Laplace jaotus. Katsetasin ka üldistatud ekstremaalväärtuste jaotust ja üldistatud Pareto jaotust. Mudeli testimisel ei olnud andmete vähesuse tõttu võimalik kontrollida üldistatud ekstremaalväärtuste jaotuse sobivust. Laplace ja Pareto jaotuse korral aga selgus, et hinnangud alahindavad tegelikku riskimäära. Riskimäära *VaR* ületanud kahjude arv oli suurem kui oleks pidanud olema. Testimise tulemusel tasuks leida aktsia kahjude jaotustele paremad hinnangud. Samas, kuna testimise periood oli lühike ja sisaldas mõõnaperioodi börsil, siis tasuks olemasolevaid mudeleid testida pikema aja vältel.

Estimating portfolio risks on an example of shares portfolio

Anet Tomberg

Summary

The aim of this paper is to investigate different methods for estimating portfolio risks. The paper consists of two chapters. In the first chapter I describe different methods and problems of estimating portfolio risks and in the second chapter I apply described methods to real data.

The most popular risk measure in practice is Value-at-Risk. Value-at-Risk is defined as quantile of the distribution. The main disadvantage of that measure is that it is not subadditive. Subadditivity is one of the criterias for a good risk measure because it makes it easier to estimate the risk of a portfolio when the risks of sub portfolios are known. Because of that disadvantage another risk measure – expected shortfall is becoming more and more popular. Expected shortfall is defined as the average of Value-at-Risks on the tail of the distribution. Expected shortfall satisfies four main properties of a risk measure: subadditivity, translation invariance, positive homogeneity and monotonicity.

As risk measures are based on the distribution of loss then for estimating risk the loss distribution has to be estimated. The distribution can be conditional or unconditional depending on whether loss is stationary random variable or not. There are several methods for risk estimation: covariance method, historical simulation method and Monte-Carlo method.

Covariance method assumes that risk vector has multivariate normal distribution. As this assumption makes quite crude simplifying assumption it is generally better to use other methods. Historical simulation method assumes that we can estimate distribution from empirical data. Monte-Carlo method is a rather general name for any approach for risk measurement that involves the simulation of an explicit parametric model for risks.

With historical simulation method we have to estimate joint distribution. By copula theory we can construct joint distribution when marginal distributions and their dependence structure are known. Rank correlation coefficients are used to measure dependence. To estimate marginal distributions mainly generalized extreme value distribution and generalized Pareto distribution are used. Main problem with extreme value distribution is that a lot of data will be wasted. In the last years also

Laplace distribution is becoming popular. Laplace distribution belongs to the exponential power distribution family.

In practical part of the paper a portfolio has been constructed from five different shares on Estonian market. Portfolio values have been calculated for each trading day using closing prices and by taking random weights on shares. Based on analysis of autocorrelations and white noise test applied to daily differences in share prices, it can be concluded that daily differences can be considered as realizations from independent and identically distributed random variables. Also their distribution does not change in time so they are stationary.

Next step was finding suitable distributions for share prices based on historical data. As characteristics showed that empirical distribution is slightly asymmetric and heavy-tailed Laplace distribution, exponential error distribution, generalized Pareto distribution and generalized extreme value distribution seemed to be suitable models to examine. Laplace distribution fitted the best. Generalized Pareto distribution described original data also quite accurately. For block maxima model maximums were found each month. Generalized extreme value distribution fitted well, but as there were only a little more than 36 observations then it is not proper to make overall conclusions.

At the next step Value-at-Risk measures and expected shortfall risk measures were found for shares. To estimate risk measures for portfolio dependence between shares had to be investigated. If the dependence would be strong then method of copulas should be used. If the dependence is weak between share prices we can find risk measures for portfolio by just adding up risk measures for shares. To measure dependence Pearson correlation coefficient was used.

Finally the obtained models were tested by using data of March and April 2007. As the testing period was short and in the beginning of testing period there was an unexpected fall in the stock exchange, then the results can not be trusted highly. As the tendency, the results seemed to underestimate the actual risk.

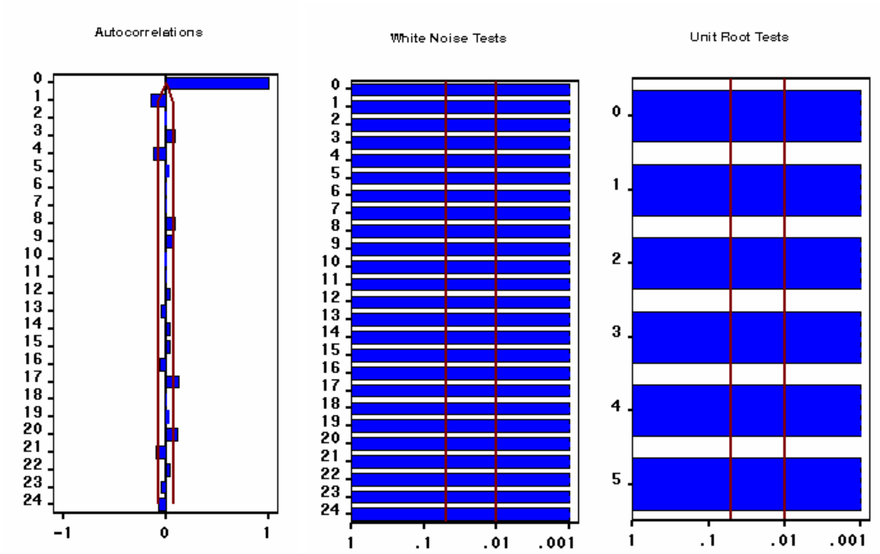
Kasutatud kirjandus

1. Internet: http://en.wikipedia.org/wiki/Modern_portfolio_theory, 17.09.2006.
2. Internet: http://www.riskglossary.com/link/portfolio_theory.htm, 01.10.2006.
3. Elton, E.J.; Gruber, M.J.. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis.* Wiley, New York, 1995, 1-42.
4. Embrechts, P.; Höing, A.; Juri, A.. Using copulaes to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risks. *Finance and Stohastics, **7,*** 2003, 145-167.
5. Ross, S.M.. *An Elementary Introduction to Mathematical Finance. Options and Other Topics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003, 152-180.
6. McNeil, A.J.; Frey, R.; Embrechts, P.. *Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2005.
7. Internet: http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_distribution, 13.03.2007.
8. Box, G.E.P.; Tiao, G.C.. *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Wiley, New York, 1992, 157-159.
9. Efron, B.; Tibshirani, R.J.. *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman&Hall, USA, 1993, 224-227.
10. Markowitz, H.. Portfolio selection. *Journal on Finance, **7***, 1952, 77-91.
11. Tobin, J.. Liquidity preference as behavior towards risk. *The Review of Economic Studies, **25***, 1958, 65-86.
12. Sharpe, W.F.. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance, **19**,* 1964, 425-442.
13. Danielsson, J.; Jorgensen, B.N.; Samorodnistky, G.; Sarma, M.; de Vries, C.G.. *Subadditivity re–examined: the case for Value-at-Risk.* http://legacy.orie.cornell.edu/~gennady/techreports/VaRsubadd.pdf, 1995.
14. Tiit, E.M.; Parring, A.M.; Möls, T.. *Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika.* Valgus, Tallinn, 1977, 382.
15. Kollo, T.. *Monte-Carlo meetodid*, Tartu Ülikooli Kirjastus, Tartu, 2003, 165-169.

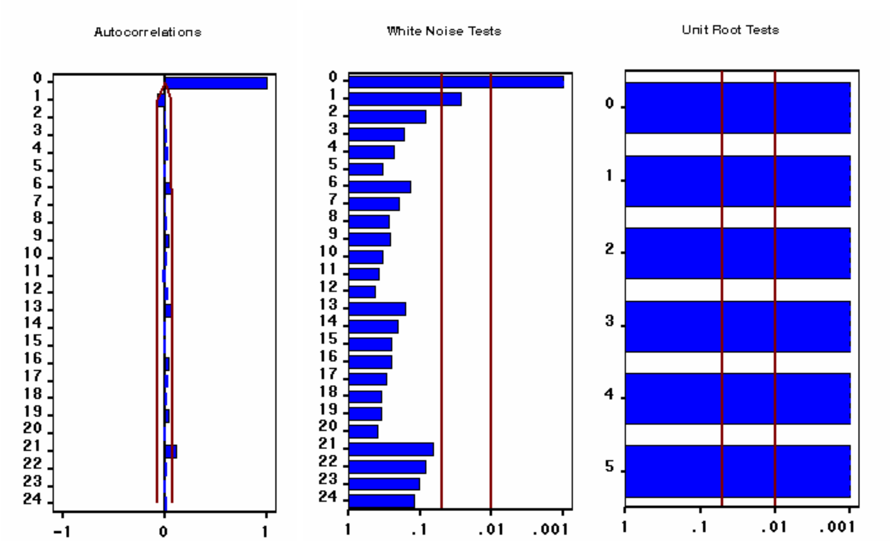
Lisad

Lisa 1. Aktsia hinnamuutuste autokorrelatsioonid ja valge müra testid

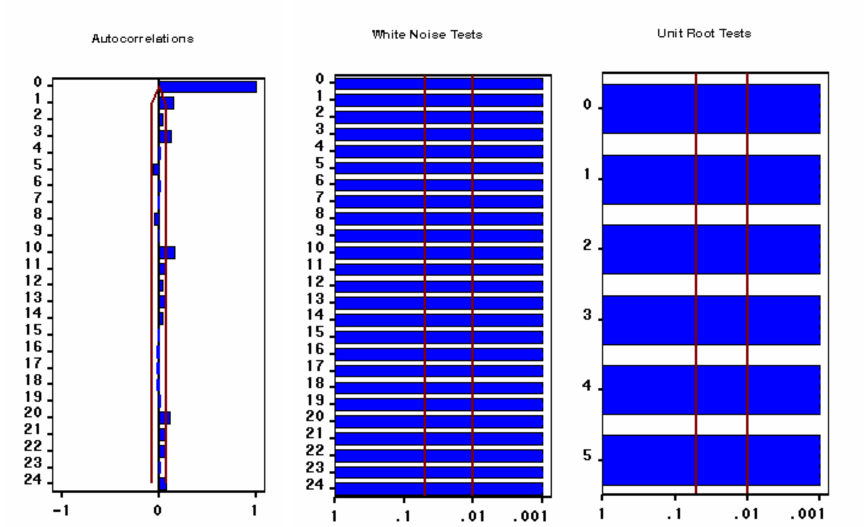
Tallinna Kaubamaja



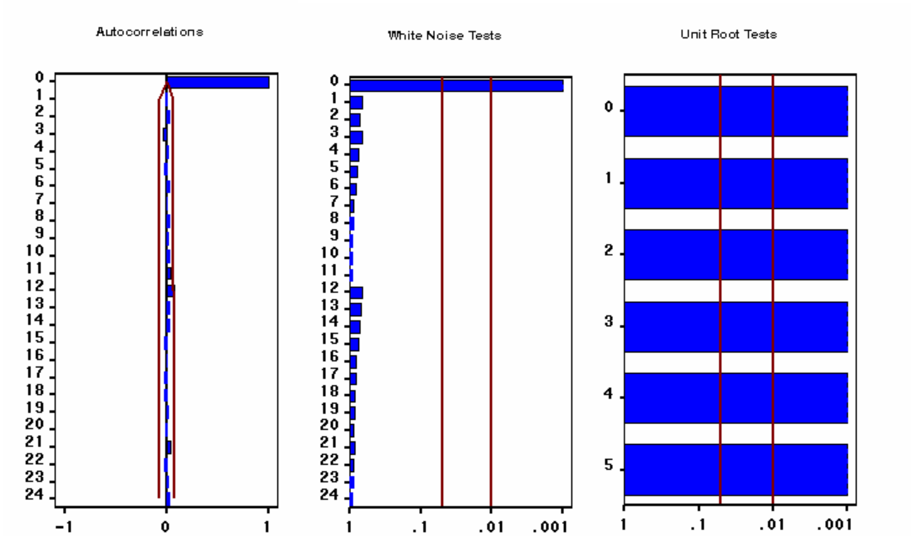
Norma



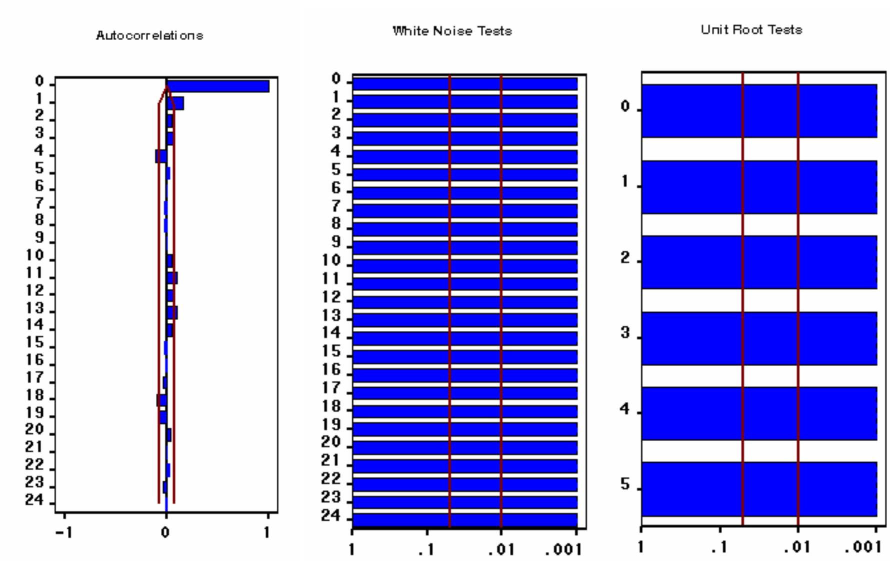
Merko



ET



Baltika



Lisa 2. Laplace jaotuse sobitamine ning *VaR* ja *ES* leidmine

```
proc iml;               /*jaotuste sobitamine*/
start;
use work.port_abi;
read all var {Muutus_TKM Muutus_Norma Muutus_Merko Muutus_ET Muutus_Baltika} into
x;

n=nrow(X);
c=ncol(x);

min = x[><,];
max = x[<>,];
d = 100;
W = j(d,5,0); /*maatriks alumise erinevuse hoidmiseks*/
R = j(d,5,0); /*maatriks ülemise erinevuse hoidmiseks*/
F = j(d,5,0); /*teoreetiline jaotus*/
E = j(d,5,0); /*empiiriline jaotus*/
y = j(d,5,0); /*valimi punktid, kus jaotuse väärtusi arvutatakse*/
kesk = x[:,];

do j = 1 to c; /*käime kõik tunnused läbi*/

      /*JAOTUSE PARAMEETRITE HINDAMINE*/
      b = 0;     /*teise parameetri hindamiseks minimiseerime K-S*/
      k = 0;
      Kolmogorov = 100;

      do until(k = 1);
            b = b + 0.01;
            do i = 1 to d;
                  abi = 0;
                  y[i,j] = min[,j] + (i-1)*(max[,j]-min[,j])/(d-1); /*väärtused
kus arvutame jaotusi*/
                  F[i,j] = 0.5*(1+((y[i,j]-kesk[,j])/abs(y[i,j]-kesk[,j]))*(1-
exp(-abs(y[i,j]-kesk[,j])/b))); /*Laplace*/
                  do  t = 1 to n;
                        if x[t,j] <= y[i,j] then abi = abi + 1;
                  end;
                  E[i,j] = abi/n; /*empiiriline*/
                  W[i,j] = F[i,j]-E[i,j];
                  R[i,j] = E[i,j]-F[i,j];
                  free abi;
            end;
            abi1 = W[<>,j];
            abi2 = R[<>,j];
            abi3 = max(abi1,abi2);
            if Kolmogorov <= abi3 then
                  do; k = 1; b = b - 0.01; free abi1 abi2 abi3; end; /*juhul kui
järgmine b väärtus juba suurendab K-S siis lõpetada*/
            else Kolmogorov = abi3;
      end;

      /*VAR JA ES LEIDMINE*/
      alpha = 0.89;

      do until (alpha > 0.99);
            alpha = alpha + 0.01;
```

```
            VaR = kesk[,j] - b*log(2-2*alpha);
            ES = kesk[,j] + b - b*(log(2)+log(1-alpha));
            if j = 1 then abi = abi//(alpha||VaR||ES);
                  else abi = abi//(VaR||ES);
      end;

      Laplace = Laplace||y[,j]||F[,j]||E[,j];
      P = P//(Kolmogorov||kesk[,j]||b);
      Risk = Risk||abi;
      free abi;

end;    /*järgmine tunnus*/

create LaPlace from Laplace; /*jaotused*/
append from Laplace;

create Jaotus from P; /*parameetrid ja K-S*/
append from P;

create Risk from Risk;
append from Risk;

finish;
run;quit;
```

Lisa 3. Üldistatud Pareto jaotuse sobitamine ja *VaR* ning *ES* leidmine

```
proc iml;                /*jaotuste sobitamine*/
start;
use work.port_abi;
read all var {Muutus_TKM Muutus_Norma Muutus_Merko Muutus_ET Muutus_Baltika} into
x;
/*read all var {Muutus_ET} into x;*/

c=ncol(x);
n = nrow(x);

d = 50;
W = j(d,c,0); /*maatriks alumise erinevuse hoidmiseks*/
R = j(d,c,0); /*maatriks ülemise erinevuse hoidmiseks*/
F = j(d,c,0); /*teoreetiline jaotus*/
E = j(d,c,0); /*empiiriline jaotus*/
y = j(d,c,0); /*valimi punktid, kus jaotuse väärtusi arvutatakse*/

do j = 1 to c; /*käime kõik tunnused läbi*/

      /*LÄVENDILE VASTAVA VALIMI KOOSTAMINE*/
      u = 0; /*lävend*/
      do i = 1 to n;
            if x[i,j] > u then z = z//(x[i,j]-u);
      end;
      n1 = nrow(z);
      max = z[<>,];
      min = z[><,];

      /*JAOTUSE PARAMEETRITE HINDAMINE*/
      ksii = 0.01;

      do p = 1 to d;
            Kolmogorov = 100;
            ksii = ksii + 0.01;
            b = 0.01;
            do k = 1 to d;
                  b = b + 0.01;
                  do i = 1 to d;
                        abi = 0;
                        y[i,j] = min + (i-1)*(max - min)/(d-1);      /*väärtused*/
                        F[i,j] = 1 - (1 + ksii*y[i,j]/b)##(-1/ksii); /*Pareto*/
                        do t = 1 to n1;
                              if z[t,1] <= y[i,j] then abi = abi + 1;
                        end;
                        E[i,j] = abi/n1; /*empiiriline*/
                        W[i,j] = F[i,j]-E[i,j];
                        R[i,j] = E[i,j]-F[i,j];
                        free abi;
                  end;
                  abi1 = W[<>,j];
                  abi2 = R[<>,j];
                  abi3 = max(abi1,abi2);
                  Kol = Kol//abi3;
                  beeta = beeta//b;
                  ksi = ksi//ksii;
            end;
      end;
```

```
        minKS = Kol[><,];
        do t = 1 to nrow(Kol);
              if minKS = Kol[t,1] then
              do;
                    ksii = ksi[t,1];
                    b = beeta[t,1];
              end;
        end;

        do i = 1 to d;
              abi = 0;
              y[i,j] = min + (i-1)*(max - min)/(d-1);      /*väärtused*/
              F[i,j] = 1 - (1 + ksii*y[i,j]/b)##(-1/ksii); /*Pareto*/
              do t = 1 to n1;
                    if z[t,1] <= y[i,j] then abi = abi + 1;
              end;
              E[i,j] = abi/n1; /*empiiriline*/
              free abi;
        end;

        /*VAR JA ES LEIDMINE*/
        lävi = (1 + ksii*u/b)##(-1/ksii);
        alpha = 0.89;

        do until (alpha > 0.99);
              alpha = alpha + 0.01;
              VaR = u + b/ksii*(((1-alpha)/lävi)##(-ksii)-1);
              ES = VaR/(1-ksii)+(b - ksii*u)/(1-ksii);
              if j = 1 then abi = abi//(alpha||VaR||ES);
                    else abi = abi//(VaR||ES);
        end;

        Pareto = Pareto||y[,j]||F[,j]||E[,j];
        Param = Param//(minKS||b||ksii||u||n1);
        Risk = Risk||abi;
        free abi z Kol beeta ksi;

  end;    /*järgmine tunnus*/

  print Param;

  create Pareto from Pareto; /*jaotused*/
  append from Pareto;

  create Jaotus from Param; /*parameetrid ja K-S*/
  append from Param;

  create Risk from Risk;
  append from Risk;

  finish;
  run; quit;
```

Lisa 4. Üldistatud ekstremaalväärtuste jaotuse sobitamine ja *VaR* ning *ES* leidmine

```
proc iml;               /*jaotuste sobitamine*/
start;
use work.gem;
read all var {Muutus_TKM Muutus_Norma Muutus_Merko Muutus_ET Muutus_Baltika} into
x;
/*read all var {Muutus_ET} into x;*/

c = ncol(x);
n = nrow(x);

d = 40;
d1 = 50;
W = j(d1,c,0); /*maatriks alumise erinevuse hoidmiseks*/
R = j(d1,c,0); /*maatriks ülemise erinevuse hoidmiseks*/
F = j(d1,c,0); /*teoreetiline jaotus*/
E = j(d1,c,0); /*empiiriline jaotus*/
y = j(d1,c,0); /*valimi punktid, kus jaotuse väärtusi arvutatakse*/
min = x[><,];
max = x[<>,];

do j = 1 to c; /*käime kõik tunnused läbi*/

      /*JAOTUSE PARAMEETRITE HINDAMINE*/
      do p = 1 to d1;
            abi = 0;
            y[p,j] = min[,j] + (p - 1)*(max[,j] - min[,j])/(d1-1);
/*väärtused*/
            do t = 1 to n;
                  if x[t,j] <= y[p,j] then abi = abi + 1;
            end;
            E[p,j] = abi/n; /*empiiriline*/
            free abi;
      end;

      ksii = 0.01;
      do p = 1 to d;

            Kolmogorov = 100;
            ksii = ksii + 0.02;
            b = 0.01;

            do k = 1 to d;
                  b = b + 0.02;
                  kesk = min[,j] + b/ksii;
                        do u = 1 to d;
                        kesk = kesk - 0.01;
                              do i = 1 to d1;
                                    F[i,j] = exp(-(1 + ksii*(y[i,j]-kesk)/b)##(-
1/ksii)); /*Ekstremaal */
                                    W[i,j] = F[i,j]-E[i,j];
                                    R[i,j] = E[i,j]-F[i,j];
                              end;
                        abi1 = W[<>,j];
                        abi2 = R[<>,j];
                        abi3 = max(abi1,abi2);
                        Kol = Kol//abi3;
                        beeta = beeta//b;
```

```
                        ksi = ksi//ksii;
                        kes = kes//kesk;
                        end;
                  end;
            end;

      minKS = Kol[><,];
      do t = 1 to nrow(Kol);
            if minKS = Kol[t,1] then
            do;
                  ksii = ksi[t,1];
                  b = beeta[t,1];
                  kesk = kes[t,1];
            end;
      end;

      do i = 1 to d1;
            y[i,j] = min[,j] + (i-1)*(max[,j] - min[,j])/(d1-1);
/*väärtused*/
            F[i,j] = exp(-(1+ksii*(y[i,j]-kesk)/b)##(-1/ksii)); /*Ekstremaal*/
      end;

      /*VAR JA ES LEIDMINE*/
      alpha = 0.89;
      z = -log(ranuni(j(10000,1,0)));

      do until (alpha > 0.99);
            alpha = alpha + 0.01;
            VaR = kesk + b/ksii*((-log(alpha))##(-ksii)-1);
            z1 = (z >= 0)&(z <= -log(alpha));
            ES = 1/10000*sum(z1#(z##(-ksii)));
            ES = kesk - b/ksii - b/(ksii*(1-alpha))*ES;
            if j = 1 then abi = abi//(alpha||VaR||ES);
                  else abi = abi//(VaR||ES);
      end;

      Ekst = Ekst||y[,j]||F[,j]||E[,j];
      Param = Param//(minKS||kesk||b||ksii);
      Risk = Risk||abi;
      free abi Kol beeta ksi kes;

end;    /*järgmine tunnus*/

create Ekstremaal from Ekst; /*jaotused*/
append from Ekst;

create Jaotus from Param; /*parameetrid ja K-S*/
append from Param;

create Risk from Risk;
append from Risk;

finish;
run;quit;
```

Lisa 5. Üldistatud veajaotuse sobitamine

```
proc iml;               /*jaotuste sobitamine*/
start;
use work.port_abi;
read all var {Muutus_TKM Muutus_Norma Muutus_Merko Muutus_ET Muutus_Baltika} into
x;

c = ncol(x);
n = nrow(x);

d = 100;
d1 = 30;
W = j(d,c,0); /*maatriks alumise erinevuse hoidmiseks*/
R = j(d,c,0); /*maatriks ülemise erinevuse hoidmiseks*/
F = j(d,c,0); /*teoreetiline jaotus*/
E = j(d,c,0); /*empiiriline jaotus*/
y = j(d,c,0); /*valimi punktid, kus jaotuse väärtusi arvutatakse*/
min = x[><,];
max = x[<>,];

do j = 1 to c; /*käime kõik tunnused läbi*/

      /*JAOTUSE PARAMEETRITE HINDAMINE*/
      do p = 1 to d;
            abi = 0;
            y[p,j] = min[,j] + (p - 1)*(max[,j] - min[,j])/(d-1);
/*väärtused*/
            do t = 1 to n;
                  if x[t,j] <= y[p,j] then abi = abi + 1;
            end;
            E[p,j] = abi/n; /*empiiriline*/
            free abi;
      end;

      kesk = x[:,j];
      ep = 0.00;
      do p = 1 to d1;

            Kolmogorov = 100;
            ep = ep + 0.005;
            b = -0.5;

            do while (b <= 1);
                  b = b + 0.02;
                  do i = 1 to d;
                        ga = 1/2*(abs(y[i,j]-kesk)/ep)##(2/(1+b));
                        if (b = 1) then gabi1 = exp(-ga);
                              else do;
                                    if (ga < ((b+1)/2 +1)) then do;
                                          gabi = 0;
                                          do z = 0 to 50;
                                                gabi = gabi +
gamma((1+b)/2)/gamma((1+b)/2+z+1)*ga##z;
                                          end;
                                          gabi1 = gamma((1+b)/2)-exp(-
ga)*ga##((1+b)/2)*gabi;
                                    end;
                                    else do;
```

```
                                                    gabi = 1;
                                                    do z = 0 to 49;
                                                          gabi = 1 + (50-z)/gabi;
                                                          gabi = ga + (50-z-(b+1)/2)/gabi;
                                                    end;
                                                    gabi1 = (exp(-ga)*ga##((1+b)/2))/gabi;
                                              end;
                                        end;
                                  F[i,j] =
(1+b)/(4*gamma(1+(1+b)/2))*((y[i,j]>=kesk)*2*(gamma((1+b)/2))-sign(y[i,j]-
kesk)*gabi1);
                                  W[i,j] = F[i,j]-E[i,j];
                                  R[i,j] = E[i,j]-F[i,j];
                            end;
                            abi1 = W[<>,j];
                            abi2 = R[<>,j];
                            abi3 = max(abi1,abi2);
                            Kol = Kol//abi3;
                            beeta = beeta//b;
                            eps = eps//ep;
                            kes = kes//kesk;
                      end;
                end;

                minKS = Kol[><,];
                do t = 1 to nrow(Kol);
                      if minKS = Kol[t,1] then
                      do;
                            ep = eps[t,1];
                            b = beeta[t,1];
                            kesk = kes[t,1];
                      end;
                end;

                do i = 1 to d;
                      y[i,j] = min[,j] + (i-1)*(max[,j] - min[,j])/(d-1);      /*väärtused*/
                      ga = 1/2*(abs(y[i,j]-kesk)/ep)##(2/(1+b));
                      if (b = 1) then gabi1 = exp(-ga);
                      else do;
                            if (ga < ((b+1)/2 +1)) then do;
                                  gabi = 0;
                                  do z = 0 to 50;
                                        gabi = gabi +
gamma((1+b)/2)/gamma((1+b)/2+z+1)*ga##z;
                                  end;
                                  gabi1 = gamma((1+b)/2)-exp(-ga)*ga##((1+b)/2)*gabi;
                                  end;
                            else do;
                                  gabi = 1;
                                  do z = 0 to 49;
                                        gabi = 1 + (50-z)/gabi;
                                        gabi = ga + (50-z-(b+1)/2)/gabi;
                                  end;
                                  gabi1 = (exp(-ga)*ga##((1+b)/2))/gabi;
                                  end;
                      end;
                      F[i,j] = (1+b)/(4*gamma(1+(1+b)/2))*((y[i,j]>=kesk)*2*gamma((1+b)/2)-
sign(y[i,j]-kesk)*gabi1) ; /*exponential power distribution*/
                      trr = trr//(y[i,j]||ga||gabi||gabi1||F[i,j]);
                end;
```

```
      print trr;

      Eksp = Eksp||y[,j]||F[,j]||E[,j];
      Param = Param//(minKS||kesk||b||ep);
      free abi Kol beeta eps kes;

end;    /*järgmine tunnus*/

print Param;

create Eksp from Eksp; /*jaotused*/
append from Eksp;

create Jaotus from Param; /*parameetrid ja K-S*/
append from Param;

finish;
run;quit;
```

Lisa 6. Järeltestimine – Laplace jaotus

```
proc iml;                /*Laplace testimine*/
start;
use work.port_abi;
read all var {Muutus_TKM Muutus_Norma Muutus_Merko Muutus_ET Muutus_Baltika
TKM_osakaal Norma_osakaal Merko_osakaal ET_osakaal Baltika_osakaal} into x;
use work.laplace;
read all var _all_ into y;

osakaal = x[,6:10]; /*osakaalud*/
x = x[,1:5];            /*andmed ise*/
portfell = osakaal#x;
x = x||portfell[,+];
c = ncol(x);
n = nrow(x);            /*ridade arv*/
y = y[1:10,];
p = y[,1];              /*toenäosused*/
k = 500;                /*bootsrtrap valimite arv*/

do t = 1 to 10;

      /*VAR KONTROLLIMINE*/

      y1 = shape(y[t,{2,4,6,8,10}],n,5);
      abi = y1#repeat(osakaal[1,],nrow(y1),1);
      y1 = y1||abi[,+];
      z1 = (x > y1);
      onn = z1[+,];
      on = onn/nrow(z1);
      al = on - 1.96*(onn#(nrow(z1)-onn)/(nrow(z1)##3))##(1/2);
      yl = on + 1.96*(onn#(nrow(z1)-onn)/(nrow(z1)##3))##(1/2);
      tegelik = repeat((1-p[t,1]),1,c);
      abi1 = tegelik#n;
      abi2 = on#n;
      abii = abii//(abi1//abi2);
      VaR = VaR//(al//on//yl//tegelik//onn);

      /*ES KONTROLLIMINE*/

      y2 = shape(y[t,{3,5,7,9,11}],n,5);
      abi = y2#repeat(osakaal[1,],nrow(y2),1);
      y2 = y2||abi[,+];

      do j = 1 to c; /*käime kõik tunnused läbi*/

            do i = 1 to n;
                  if (x[i,j] > y1[i,j]) then
                  z2 = z2//(x[i,j] - y2[i,j]);
            end;

            if nrow(z2) = 0 then
            do;
                  ESS = ESS||(0//0//0//0//0);
                  goto jatk;
            end;

            n1 = nrow(z2);
            disp = z2[,1]-repeat(z2[:,1],n1,1);
            d = sqrt(1/(n1-1)*sum(disp##2));
```

```
            teststat = z2[:,1]/(d/sqrt(n1));
            zz2 = z2[,1]-repeat(z2[:,1],n1,1);
            testst = j(k,1,0);

            do i = 1 to k;
                  nr = int(ranuni(j(1,n1,0))#n1)+1;   /*juhuslikud järjenr*/
                  bv = shape(zz2[nr,1],n1,1);           /*bootstrap valim*/

                  disp = bv[,1]-repeat(bv[:,1],n1,1);
                  d = sqrt(1/(n1-1)*sum(disp##2));
                  testst[i,1] = bv[:,1]/(d/sqrt(n1));
            end;

            abi = sum(testst < shape(teststat,k,1));
            olulisus = abi/k;
            ESS = ESS||(teststat//n1//abi//k//olulisus);
            jatk: free z2;

      end;    /*järgmine tunnus*/

      ES = ES//ESS;
      free ESS;

end;

print abii;

create VaR_Laplace from VaR;
append from VaR;
create ES_Laplace from ES;
append from ES;

finish;
run;quit;
```

Lisa 7. Järeltestimine – Pareto jaotus

```
proc iml;              /*Pareto testimine*/
start;
use work.andmed;
read all var {Muutus_TKM Muutus_Norma Muutus_Merko Muutus_ET Muutus_Baltika
TKM_osakaal Norma_osakaal Merko_osakaal ET_osakaal Baltika_osakaal} into xx;
use work.pareto;
read all var _all_ into y;

osakaal = xx[,6:10]; /*osakaalud*/
xx = -xx[,1:5];          /*andmed ise*/
portfell = osakaal#xx;
xx = xx||portfell[,+];
c = ncol(xx);
nn = nrow(xx);           /*ridade arv*/
y = y[1:10,];
p = y[,1];               /*toenäosused*/
k = 500;                 /*bootsrtrap valimite arv*/

do t = 1 to 10;

      y1 = shape(y[t,{2,4,6,8,10}],1,5);
      abi = y1#osakaal[1,];
      y1 = y1||abi[,+];

      y2 = shape(y[t,{3,5,7,9,11}],1,5);
      abi = y2#osakaal[1,];
      y2 = y2||abi[,+];

      do j = 1 to c;

            u = 0; /*lävend*/
            do i = 1 to nn;
                  if xx[i,j] > u then x = x//(xx[i,j]-u);
            end;

            n = nrow(x);

            /*VAR KONTROLLIMINE*/

            y1 = shape(y1,n,c);
            y2 = shape(y2,n,c);
            z1 = (x > y1[,j]);
            onn = z1[+,];
            on = onn/nrow(z1);
            al = on - 1.96*(onn#(nrow(z1)-onn)/(nrow(z1)##3))##(1/2);
            yl = on + 1.96*(onn#(nrow(z1)-onn)/(nrow(z1)##3))##(1/2);
            tegelik = (1-p[t,1]);
            abi1 = tegelik#n;
            abi2 = on#n;
            abii = abii//(abi1//abi2);
            VaR1 = VaR1||(al//on//yl//tegelik//n);

            /*ES KONTROLLIMINE*/

            do i = 1 to n;
                  if (x[i,1] > y1[i,j]) then
                  z2 = z2//(x[i,1] - y2[i,j]);
            end;
```

```
            if nrow(z2) = 0 then
            do;
                  ESS = ESS||(0//0//0//0//0);
                  goto jatk;
            end;

            n1 = nrow(z2);
            disp = z2[,1]-repeat(z2[:,1],n1,1);
            d = sqrt(1/(n1-1)*sum(disp##2));
            teststat = z2[:,1]/(d/sqrt(n1));
            zz2 = z2[,1]-repeat(z2[:,1],n1,1);
            testst = j(k,1,0);

            do i = 1 to k;
                  nr = int(ranuni(j(1,n1,0))#n1)+1;   /*juhuslikud järjenr*/
                  bv = shape(zz2[nr,1],n1,1);           /*bootstrap valim*/

                  disp = bv[,1]-repeat(bv[:,1],n1,1);
                  d = sqrt(1/(n1-1)*sum(disp##2));
                  testst[i,1] = bv[:,1]/(d/sqrt(n1));
            end;

            abi = sum(testst < shape(teststat,k,1));
            olulisus = abi/k;
            ESS = ESS||(teststat//n1//abi//k//olulisus);
            jatk: free z2 x;

      end;    /*järgmine tunnus*/

      VaR = VaR//VaR1;
      ES = ES//ESS;
      free ESS VaR1;

end;

create VaR_pareto from VaR;
append from VaR;
create ES_pareto from ES;
append from ES;

finish;
run;quit;
```