

R. Kinasošvili

# TUGEVUSÕPETUS

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

A-21346

R. S. KINASOŠVILI

# TUGEVUSÕPETUS TEHNIKUMIDELE

*Lubatud NSV Liidu Kõrgema Hariduse Ministeeriumi  
Kesk-eriõppeasutuste Peavalitsuse poolt kasutada  
õpikuna tehnikumides*



EESTI RIIKLIK KIRJASTUS  
TALLINN 1956

Originaali tiitel:

Р. С. Кинасошвили

**Соппротивление материалов для техникумов**

Четвертое переработанное издание

Государственное издательство  
технико-теоретической литературы  
Москва 1955

*Tõlkinud R. Loskit*

Hinnangud ja arvamused teose kui ka teoses kasutatud terminoloogia  
kohta palutakse saata aadressil:  
Tallinn, Pärnu mnt. 10. Eesti Riikliku Kirjastuse tehnilise kirjanduse  
toimetus.



## Eessõna neljandale väljaandele <sup>1</sup>.

Käesoleva raamatu neljas väljaanne erineb eelnevaist mõningate muudatuste poolest. Olulisemad neist on järgmised: peapingete ja tugevusteooriate mõisted on antud tunduvalt varem, on vaadeldud konstruktsiooni arvutusülesandeid lubatavate koormuste järgi, on antud keeviliidete arvutuse ja ristlõike tuuma mõisted, on esitatud Euleri valemi lähenduslik tuletamine, on juurde lisatud dünaamiliste arvutuste alged. Peale selle on vastavalt NSV Liidu Kõrgema Hariduse Ministeriumi Kesk-eriõppeasutuste Peavalitsuse soovile muudetud raamatu pealkirja (eelnevates väljaannetes oli selleks «Tugevusõpetuse elementaarkursus»).

Autor on püüdnud elementaarselt esitada materjali, mille teadmine on vajalik tehnikule tema töös. Raamatus on toodud palju näiteid, et hõlbustada teoreetilise materjali omandamist ning anda vilumust praktiliste ülesannete lahendamisel. Iga peatüki lõppu on lisatud kontrollküsimused.

Loen oma meeldivaks kohustuseks avaldada sügavat tänu tehnikumide ainekomisjonidele ja üksikutele õppejõududele, kes saatsid oma arvamused raamatu eelmise väljaande kohta. Paljud neist arvamustest on autori poolt käesoleva väljaande ettevalmistamisel arvesse võetud.

*Autor*

---

<sup>1</sup> Käesolev eessõna on kirjutatud venekeelsele neljandale väljaandele. (*Toim.*)

## SISSEJUHATUS

§ 1. Tugevusõpetus kui teadus.  
Deformatsiooni ja elastse keha mõiste

Ehitustele ja masinatele mõjuvad nende töötamisel väliskoormused. Näiteks raudteesilla toele mõjub mööda silda sõitva rongi kaal ja silla omakaal, aurumasina kolvivarrele mõjub auru rõhujõud silindris jne.

Et vältida ehituste ja masinate detailide, või lihtsalt konstruktsioonide detailide purunemist ja tunduvat deformeerumist neile mõjuvate koormuste toimel, peavad nad olema valmistatud sobivast materjalist ja omama vastavaid mõõteid, mis määratakse arvutusega.

*Tugevusõpetuseks nimetatakse teadust, mis tegeleb konstruktsioonide detailide tugevusarvutuse aluste loomisega.*

Projekteeritava detaili mõõdete määramisel tuleb arvestada materjali omadustega, millest kavatsetakse detail valmistada. Materjali ratsionaalseks valikuks ja selle täielikuks kasutamiseks peab teadma mitmesuguste ehitusmaterjalide (teras, malm, puit, betoon, kivi jt.) tähtsamaid omadusi iseloomustavaid andmeid. Siin eelkõige peame silmas neid andmeid, mis iseloomustavad materjali *tugevust*, s. o. materjali võimet taluda väliskoormusi, ilma seejuures purunemata.

Materjalide tugevuse eksperimentaalsed uurimisküsimused on muutunud tänapäeval eriti aktuaalseiks. Ühelt poolt on tugevusõpetus seotud materjaliõpetusega ja materjalide proovimisõpetusega, teiselt poolt aga teoreetilise mehaanikaga.

Tugevusõpetus tugineb teoreetilise mehaanika seadustele ja teoreemidele, kuid tal on ka oma eriülesanded, vör-

reldes teoreetilise mehaanika ülesannetega. Nende ülesannete lahendamiseks on tugevusõpetusse sisse toodud uued mõisted.

Tähtsamateks ja põhilisemateks neist on *deformatsiooni* mõiste ja *sise-elastsusjõudude* intensiivsuse mõiste või lihtsalt *pinge*. Asi seisab selles, et teoreetilises mehaanikas vaadeldakse ülesannete lahendamise lihtsustamiseks kõva keha kui absoluutselt kõva, s. o. kui keha, mis temale rakendatud välisjõudude mõjul ei muuda oma kuju. Katsete põhjal aga teame, et kõik kõvad kehad deformeeruvad neile rakendatud jõudude mõjul.

Üheks kõva keha põhiomaduseks on tema deformeerumine välisjõudude mõjul. Peale selle on kõval kehal võime avaldada vastupanu oma osakeste suhtelise asetuse muutusele. See ilmneb keha sees jõudude tekkimises, mis lisaks deformeerimise takistamisele püüavad ka osakesi tagasi viia nende algasendisse, s. o. asendisse, mis neil oli enne deformeerimist. Neid jõude nimetatakse *sisejõududeks* ehk *elastsusjõududeks*. Kõvade kehade omadust aga taastada pärast välisjõudude mõjumise lakkamist oma esialgne deformeerimata kuju, nimetatakse *elastsuseks*.

Täiesti elastseteks ehk absoluutselt elastseteks loetakse kehi, mis pärast välisjõudude mõjumise lakkamist täielikult taastavad oma esialgse deformeerimata kuju. Täiesti mitte-elastseteks nimetatakse kehi, mis ka pärast välisjõudude lakkamist täielikult säilitavad oma deformeeritud kuju.

Looduses ei ole täiesti elastseid ega ka täiesti mitte-elastseid kehi. Kuid materjalid, nagu teras, puit jt., on oma omadusilt küllalt lähedased täiesti elastsetele kehadele. Aga ka neid materjale võib lugeda täiesti elastseteks ainult koormamise kindlate piirideni, mis on püstitatud nende jaoks katseliselt. Nende piiride ületamisel tekivad kehasse välisjõudude mõjul jäävad deformatsioonid, mida ei saa jätta arvestamata.

Deformatsiooni, mis täielikult kaob pärast välisjõudude mõju lakkamist, nimetatakse *elastseks deformatsiooniks*. Hävimatut deformatsiooni nimetatakse *jäävaks* ehk *plastiliseks* deformatsiooniks. Projekteerimisel antakse konstruktsiooni osadele tavaliselt sellised geomeetrilised mõõted, millede puhul on välditud jäävate deformatsioonide tekkimine kehas.

Kõvale kehale mõjuvad välisjõud kutsuvad selles esile välisjõududele vastassuunaliselt mõjuvad sisejõud. Nii näi-

teks kui välisjõud tõmbavad kõva keha, siis sisejõud mõjuvad tõmbele vastupidi; kõva keha üksikute osakeste vahel hakkavad mõjuma vastastikused külgetõmbejõud. Välisjõudude suurendamisega suurenevad ka sisejõud. Kuid viimaste suurenemine võib toimuda iga materjali puhul ainult teatud piirini, mis on iseloomulik sellele materjalile. Tulemusena võivad välisjõud osutada nii suureks, et keha antud geomeetriliste mõõdete puhul sisejõud ei suuda neid tasakaalustada ja keha puruneb.

Olles nüüd mõningal määral tutvunud elastsete deformatsioonide ja sise-elastsusjõudude mõistetega, võime juba täpsemalt öelda, millega tegeleb tugevusõpetus. Viimases nimelt püstitatakse välisjõudude mõjumise mitmesuguste juhtude jaoks matemaatilised seosed välisjõudude, konstruktsiooni detailide geomeetriliste mõõdete, tekkivate elastsusjõudude ja deformatsioonide vahel. Kasutades neid seoseid ja materjalide tugevuse karakteristikuid, määratakse projekteeritavate konstruktsioonide vajalikud mõõted. Nende seoste püstitamisel tuleb aga teha mõningaid oletusi ja kitsendusi, kuna pole võimalik korruga haarata uuritavate nähtuste kogu keerulisust.

Kõigepealt eeldatakse, et materjal, millest konstruktsioon valmistatakse, on terviklik, keha kõikides punktides homogeenne ning igas suunas ühesuguste omadustega (isotroopne).

Tegelikkuses mõningad ehitusmaterjalid, nagu näiteks valatud metall, on suure homogeensusega (erandiks antud juhul on malm). Teised ehitusmaterjalid, nagu näiteks puit, on metallidega võrreldes väiksema homogeensusega. Mida homogeensem on materjal ja mida ühesugusamad on tema omadused osade kõikides suundades, seda paremini ühtuvad teooria ja katsete tulemused.

Tugevusõpetuses vaadeldakse ainult neid ülesandeid, kus väliskoormuste poolt tekitatud deformatsioonid on keha mõõdetega võrreldes väikesed. See lubab jätta arvestamata deformatsioonide tõttu kehale mõjuvate jõudude asetuses tekkivad muudatused.

Lisaks toodud oletustele tehakse tugevusõpetuses veel teisi oletusi, mida aga vaatleme kursuse vastavates kohtades.

Materjali valikul ning konstruktsioonide detailide kuju ja mõõdete määramisel tuleb arvestada rea asjaoludega: tingimustega, milledes hakkab töötama projekteeritav

detail, selle tugevus-, vastupidavus- ja ökonoomsusnõuetega jm.

Mõningatel juhtudel esitatakse konstruktsioonide projekteeritavatele osadele veel erinõudeid. Nii näiteks lennuki ja lennukimootorite detailide projekteerimisel on selliseks nõudeks minimaalne kaal. Erinevad on ka ajutistele, ütleme sõja ajal püstitatavatele objektidele ning pikaajalistele ehitustele esitatavad nõuded. Mõningad konstruktsioonidele esitatavad nõuded on omavahel vastuolus, nagu näiteks tugevus, kergus ja ökonoomsus. Nii näiteks suurendades lennukimootori silindri seinapaksust tõuseb küll silindri tugevus ja eksploatatsioonikindlus, kuid suureneb ka mootori kaal. Sama mootori väntvõlli kaalu vähendamiseks puuritakse see õõnsaks, mistõttu võll muutub kergemaks, kuid tema töötlemine, järelkult aga ka võlli maksumus kallineb.

Materjali valikul ja projekteeritava konstruktsiooni osade mõõdete määramisel tuleb üheaegselt arvestada kõiki konstruktsioonile esitatavaid nõudeid, nii põhi- (tugevus, iga, ökonoomsus) kui ka erinõudeid. Nende nõuete vasturääkivus on tugevusõpetuse kui teaduse arengu stiimuliks.

Ilma tugevusõpetuse aluste tundmiseta ei saa ehitada isegi lihtsamaid masinaid, nii et need vastaksid konstruktsioonidele esitatavaile nõuetele.

Tugevusõpetuses on praktika tihedalt seotud teoriaga. See teadus on samaaegselt nii teoreetiline kui ka eksperimentaalne. Kõiki teoreetilisi oletusi ja järeldusi kontrollitakse praktikas ning alles pärast nende õigsuses veendumist kasutatakse neid kui tõdesid. Katse on abiks teooriale ka sel juhul, kui teooria ei suuda lahendada küsimusi nende liigse keerukuse tõttu.

Koos tehnika arenguga kasvab ka tugevusõpetuse kui teaduse osatähtsus.

Vanal ajal polnud ehitajatel abiks teooriat ning nad juhendusid ainult üldistest kogemustest, kopeerides tuntud eeskujusid. Seetõttu olid ehitused kohmakad ning nende valmistamiseks kulus sajandeid. Tingituna rahvusvahelise merekaubanduse, metallurgia ja mäeasjanduse arenemisest XVII sajandil tekkis aga tarvidus lahendada laevade ja ehituste tugevuse komplitseeritumaid küsimusi. Vanad meetodid osutusid selleks aga kõlbmatuiks. Seepärast loe-

taksegi nimetatud ajajärku tugevusõpetuse kui teaduse arenemise alguseks.

Esimesed uurimused tugevuse valdkonnas tegi Galileo Galilei (1564—1642) XVII sajandi esimesel poolel. 1678. aastal formuleeris Robert Hook (1635—1703) mõningate vaatluste alusel tähtsa seaduse: deformatsiooni suurus elastses kehas on võrdeline koormusega.

Tugevusõpetust kui teadust arendasid oma töödega paljud õpetlased, nende hulgas ka vene väljapaistvad teadlased ja insenerid, kellede uurimused on suureks panuseks materjalide tugevusõpetusse.

Silmapaistev insener-ehitaja D. I. Žuravski (1821—1891) viis läbi rea hiilgavaid uurimusi, mis lubasid tal edasi arendada talade paindeteooriat ja luua diagonaalidega sõrestiku arvutusmeetodid. Esimesena andis kõverate varraste tugevuse ülesande õige lahenduse H. S. Golovin (1844—1904).

XVIII sajandil Peterburi Teaduste Akadeemia tegevliige Leonhard Euler (1707—1783) lahendas surutud varraste stabiilsuse küsimuse. XIX sajandi lõpul saavutasid samas valdkonnas maailmakuulsuse F. S. Jassinski (1856—1899) tööd, mis panid aluse surutud varraste kaasaegsete arvutusmeetodite edasiarendamiseks. Professor N. A. Belejubski (1845—1922) võttis esimesena maailmas sillaehituses kasutusele valuterase ja oli palju aastaid Materjalide Proovimise Rahvusvahelise Ühingu esimeheks. Professor V. L. Kirpitševi (1845—1916) poolt on kirjutatud väljapaistvaid töid tugevusõpetuse alal. Akadeemik A. N. Krõlov (1863—1945), üks omaaja suurimaist matemaatikuist ja mehaanikuist, töötas välja laeva arvustusteooria, elastsel alusel asetsevate talade arvustusteooria. Tema töid võnkumiste alal rakendatakse laialdaselt kogu maailmas. Maailmakuulsuse on saavutanud ka akadeemik B. G. Galjorkini (1871—1945) uurimused üldteoorias ning plaatide arvutamise alal, kuid samuti ka tema poolt antud lähenduslikud meetodid keerukate konstruktsioonide arvutamiseks.

Pärast Suurt Sotsialistlikku Oktoobrirevolutsiooni kindlustavad vene õpetlaste juhtivat osa tugevusõpetuses nõukogude teadlased. Hiiglaslikku panust, mille vene ja nõukogude teadlased on teinud tugevusõpetusse, võib hinnata ainult hästi tundes seda teadust, eriti aga selle viimaseid saavutusi.

## § 2. Välisjõudude klassifikatsioon

Välisjõud (koormused) võivad mõjuda masinate ja ehituste osadele erinevalt. Olenevalt jõu rakendamise viisist võib neid jaotada massijõududeks ja pinnajõududeks. Massijõudude hulka kuulub näiteks omakaal. Pinnajõud jagunevad jaotatuiks ja koondatuiks. Jaotatuiks nimetatakse jõudusid, mis on rakendatud mingile pinnale või joonele. Nii näiteks lumekiht katusel on mööda pinda jaotatud koormus. Sellist koormust väljendatakse jõuühikutes pinnauhiku kohta ( $t/m^2$ ,  $kg/cm^2$ ). Joonele jaotatud koormust väljendatakse jõuühikutes pikkusühiku kohta ( $t/m$ ,  $kg/cm$ ).

Koormus võib olla jaotatud joone või pinna ulatuses ühtlaselt või ebaühtlaselt. Ebaühtlaselt jaotatud koormuseks on näiteks rõhk paisule: sügavuse suurenedes rõhk kasvab.

Koondatud jõududeks nimetatakse jõude, mis mõjuvad keha väga väiksele pinnale.

Arvutuste lihtsustamiseks eeldatakse, et koondatud jõud on rakendatud punkti; selline lihtsustamine tavaliselt märkimisväärset viga ei põhjusta. Koondatud jõude mõõdetakse jõuühikuis, s. o. kilogrammides, tonnides.

Koormused võivad olla alalised või ajutised. Hoone vundamendile mõjub hoone kaal, s. o. alaline koormus. Tõstekraana ketile mõjub ajutine koormus — tõstetava lasti kaal. Peale selle jaotatakse koormused staatilisteks ja dünaamilisteks. Staatiliseks koormuseks nimetame koormust, mis kasvab aeglaselt nullist kuni mingi kindla maksimaalse väärtuseni ja edaspidi jääb püsivaks või muutub väga vähe.

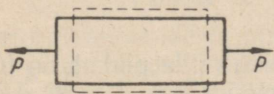
Dünaamilise koormuse näiteks on löökkkoormus — auruvasara löögiosa mõju rammitavale vaiale, mil koormuse mõjumise ajaks on murdosa sekundist.

Dünaamiliste koormuste hulka kuuluvad ka ajas muutuvad perioodilised koormused.

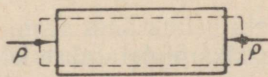
Selliseks koormuseks on näiteks suuruselt ja suunalt pidevalt muutuv koormus mootori kepsule, kusjuures koormuse muutuste arv küünib kepsu töötamisel miljoni-tesse.

### § 3. Deformatsioonide põhiliigid

Välisjõud mõjuvad ehituste ja masinate elementidele kõige erinevamalt. Seetõttu võivad välisjõudude poolt ehituste ja masinate elementides esile kutsutud deformatsioonid olla väga komplitseeritud. Kuid neid liitdeformatsioone võib alati vaadelda koosnevana üksikutest põhideformatsioonidest.

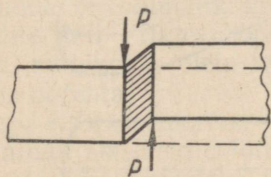


Joonis 1.

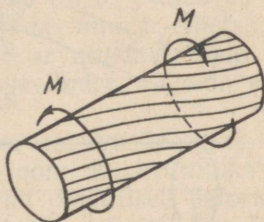


Joonis 2.

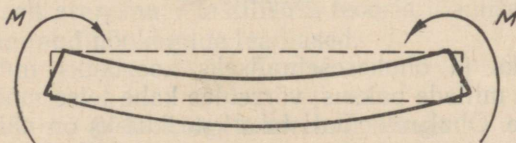
Tugevusõpetuses uuritavate deformatsioonide põhiliigid on alljärgnevad: 1) tõmme (joon. 1); 2) surve (joon. 2); 3) nihe (lõige) (joon. 3); 4) vääne (joon. 4); 5) paine (joon. 5).



Joonis 3.



Joonis 4.

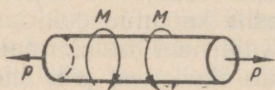


Joonis 5.

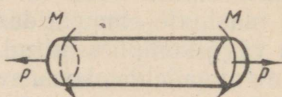
Liitdeformatsiooni näiteks võib olla samaaegne tõmme ja vääne (joon. 6) või samaaegne tõmme ja paine (joon. 7).

Raamatu vastavates peatükkides on vaadeldud üksikasjalikumalt ülaltoodud deformatsiooniliike ning antud deformatsioonide ja pingete määramise meetodid. Kuid

tuleb märkida, et tugevusõpetuses vaadeldakse ainult lihtsakujuiliste kehade deformatsioone. Sellisteks kehadeks on pruss, plaat ja õhukeseseinaline koorik.

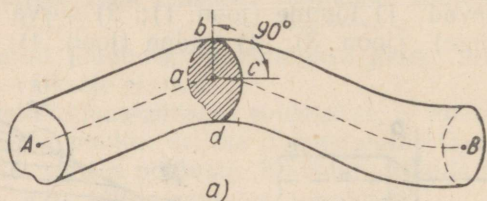


Joonis 6.

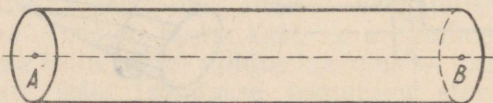


Joonis 7.

Prussiks nimetatakse kõva keha, mille pikkus on tunduvalt suurem, võrreldes ristlõike mõõdetega. Prussi  $AB$  telg võib olla kas sirg- või kõverjooneline (joon. 8,  $a$ ,  $b$ ). Sirgjoonelise teljega prusse, olenevalt nende ülesandest, nimetatakse varrasteks, taladeks või postideks.



$a)$



$b)$

Joonis 8.

Plaadiks ja õhukeseseinaliseks koorikuks nimetatakse kõvu kehi, millede paksus, võrreldes kahe teise mõõttega, on väga väike. Õhukeseseinalisteks koorikuteks on näiteks katlad, tsisternid, mitmesugused paagid jt. Katla lame põhi kujutab äga plaati.

Tugevusõpetuses vaadeldakse peamiselt prusse. Edaspidi vaatleme ainult sirgjoonelise teljega ja peaaegu alati konstantse ristlõikega prusse.

Mõnikord masinate projekteerimisel esinevad liitkujuga elemendid. Selliseid elemente ei saa arvutada tugevusõpetuse meetodite abil, kuid enamik neist laseb end lähendus-

likult viia prussi mõiste alla, mispuhul neid arvutatakse nagu prusse, kasutades tugevusõpetuse meetodeid. Sel teel saadud tulemused pole aga täpsed ning neid tuleb eksperimentaalsel teel täpsustada.

Käesoleval ajal rakendatakse praktikas laialdaselt deformatsioonide mõõtmise eksperimentaalseid meetodeid, mis võimaldavad küllaldase täpsusega määrata liitkujundeis teoreetiliste arvutuste abil mittemääratavaid pingeid.

Deformatsioonide ja pingete täpse määramise ülesannetega tegeleb teadus, mida nimetatakse elastsusteooriaks. Elastsusteoorias kasutatakse keerukaid matemaatilisi meetodeid. Praktikas pole aga liiga suur täpsus masinate ja ehituste osade arvutamisel sageli nõutav; täpsus peab olema ainult küllaldane, arvutusmeetodid aga niivõrd lihtsad, et neid oleks kerge rakendada. Seetõttu kasutatakse masinate ja ehituste arvutamisel tavaliselt tugevusõpetuse meetodeid, mis on elastsusteooria meetodeist tunduvalt lihtsamad ja annavad küllalt täpseid tulemusi. Siiski esineb ka ülesandeid, mida on võimalik lahendada ainult elastsusteooria meetodite abil. Tugevusõpetuse arvutusmeetodeid lihtsustatakse mõningate oletuste sisseviimisega, mida elastsusteoorias ei tehta.

Nagu elastsusteoorias, nii ka tugevusõpetuses vaadeldakse ainult elastseid deformatsioone, kuid praktikas esineb juhtumeid, kus materjalis tekivad plastilised deformatsioonid, näiteks terase sepistamisel või valtsimisel. Plastilisi deformatsioone uurib teadus, mida nimetatakse plastilisuse teooriaks. See teadus on tunduvalt noorem kui tugevusõpetus ja elastsusteooria, kuid viimasel ajal on ta hakanud intensiivselt arenema. Plastilisuse teooria loomisel on suure panuse andnud nõukogude teadlased.

#### § 4. Lõigete meetod. Pinge

Ülalpool mainisime, et kõvale kehale mõjuvad välisjõud põhjustavad selles sisejõudusid.

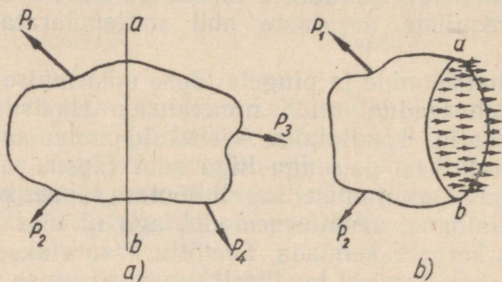
Välisjõud deformeerivad keha, sisejõud aga püüavad säilitada keha esialgset kuju ja mahtu, s. o. püüavad hävitada deformatsiooni.

Tugevusõpetuse ülesannete lahendamiseks peab oskama leida kehas tekkivaid sisejõudusid ja deformatsioone. Keha

mingis lõikes esinevate sisejõudude määramiseks kasutatakse lõigete meetodit, mille olemus on alljärgnev.

Võtame mingi elastse keha, mis on jõudude  $P_1, P_2, P_3$  ja  $P_4$  mõjul tasakaalus (joon. 9, a).

Siis on ilmselt tasakaalus ka keha iga üksik osa sellele mõjuvate välisjõudude ning keha üksikute osakeste vas-



Joonis 9.

tastikuse mõju jõudude (sisejõudude) toimel. Järelikult me vaatleme keha mõtteliselt eraldatud osa kui mingit uut keha, millele võime rakendada staatika tasakaalutingimusi.

Kui meid huvitavad näiteks lõikes  $ab$  mõjuvad sisejõud, siis lõikame keha mõtteliselt seda lõiget mööda ja eemaldame ühe kahest saadud osast, näiteks parempoolse. Siis allesjäänud vasakpoolsele osale (joon. 9, b) mõjuvad välisjõud  $P_1, P_2$ . Selleks, et see keha osa säilitaks tasakaalu, tuleb kogu lõikele rakendada sisejõud.

Need jõud kujutavad endast keha eemaldatud parempoolse osa mõju allesjäänud vasakpoolsele osale. Olles keha kui terviku suhtes sisejõududeks, on nad keha eraldatud osale välisjõududeks. Sisejõudude resultandi suuruse võime määrata keha eraldatud osa tasakaalutingimusest. Üldiselt sisejõudude jaotuse seadus mööda lõiget pole meil teada. Selle küsimuse lahendamiseks peab igal konkreetsel juhul teadma, kuidas deformeerub vaadeldav keha välisjõudude mõjul.

Seega lõigete meetod võimaldab meil määrata ainult vaadeldavas lõikes mõjuvate sisejõudude summa, milleks võib olla üks jõud, jõupaar või üldjuhul jõud ja jõupaar.

Kui eraldame lõikes lõpmatult väikese pinnaelemendi  $\Delta F$  ja oletame, et sisejõud mõjuvad lõike kõikides punktides, siis võime öelda, et sellele pinnaelemendile langeb ka lõp-

matult väike elementaarjõud  $\Delta P$ . Sisejõu  $\Delta P$  ja eraldatud pinnaelemendi  $\Delta F$  suhe annab keskmise pinge selles lõikes:

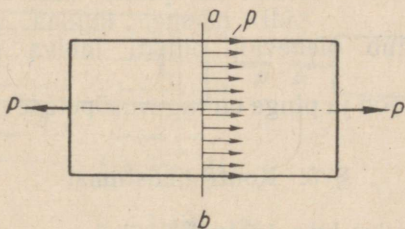
$$p_k = \frac{\Delta P}{\Delta F}.$$

Seega sisejõudude intensiivsust iseloomustav pinge määratakse ühele pinnaühikule tuleva jõuga. Tavaliselt väljendatakse pinget kilogrammides ruutsentimeetrile ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ ) või kilogrammides ruutmillimeetrile ( $\text{kg}/\text{mm}^2$ ).

Vähendades pinnaelemendi nullini, s. o. üle minnes piirväärtusele, saame tõelise pinge antud punktis (näiteks pinnaelemendi  $\Delta F$  tsentris). Järelikult tõeline pinge antud punktis avaldub:

$$p_t = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = \frac{dP}{dF}. \quad (1)$$

Kui on teada, et sisejõud (elastsusjõud) jaotuvad lõikes ühtlaselt (joon. 10), siis sel lihtsustatud juhul arvutatakse



Joonis 10.

pinge lõikes mõjuvate summaarsete elastsusjõudude ja lõike pindala jagatisena

$$p = \frac{P}{F}. \quad (2)$$

Kuna jõul on suund, siis ka pingel peab olema suund.

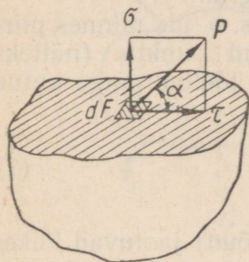
Üldjuhul pinge  $p$  antud pinnas  $dF$  moodustab selle pinnaga mingi nurga  $\alpha$  (joon. 11). Lahutame mõjuva pinge kaheks komponendiks: üheks, mis on suunatud pinnaga risti ning mida nimetatakse normaalpingeks ja tähistatakse tähelga  $\sigma$  (sigma) ja teiseks, mis asub pinna tasapinnas ja mida nimetatakse puute- (ehk tangentsiaal-) pingeks ning tähistatakse  $\tau$  (tau). Sel juhul

$$\sigma = p \sin \alpha; \quad \tau = p \cos \alpha.$$

Kogupinge avaldub täisnurkse kolmnurga külgede suhtest normaal- ja tangentsiaalpinge kaudu alljärgneva valemiga:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (3)$$

Normaalpinged püüavad keha üksikuid osakesi lähendada või eemaldada lõikepinna normaali suunas. Tangentsiaalpinged püüavad lõikepinnas keha osakesi üksteise suhtes nihutada. Seetõttu tangentsiaalpingeid nimetatakse ka nihkepingeteks.



Joonis 11.

Kuna keha mingis punktis mõjuvate pingete määramisel võime läbi selle punkti tõmmata lõpmata suure arvu erinevalt suunatud lõiketasapindasid, siis pinge täielikuks isoleerimiseks antud punktis on tarvis peale pinge suuruse ja suuna teada ka pinna kaldenurka. Edaspidi näeme, kuidas pinge antud

punktis muutub olenevalt punkti läbiva pinna kaldenurgast.

Deformatsioon ja pinge on tugevusõpetuse põhimõisted.

## § 5. Kontrollküsimusi

Mida nimetatakse keha deformatsiooniks?

Mida nimetatakse keha elastsuseks?

Millist deformatsiooni nimetatakse elastseks ja millist plastiliseks?

Milliseid ülesandeid lahendab tugevusõpetus?

Millised on projekteeritavatele masinatele ja ehitustele seatavad põhinõuded?

Kuidas klassifitseeritakse masinate ja ehituste osadele mõjuvaid koormusi?

Mida nimetatakse prussiks, plaadiks ja õhukeseseinaliseks koorikuks?

Milliseid deformatsioonide põhilikke kutsuvad esile välisjõud?

Milles seisneb lõike meetod?

Mida nimetatakse pingeks?

Milline dimensioon on pingel?

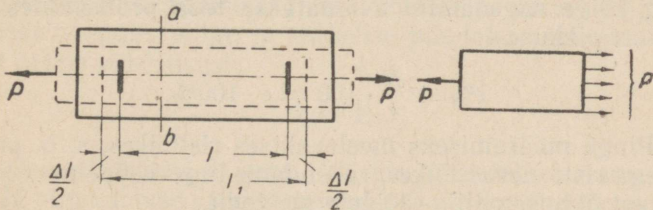
Millist pinget nimetatakse normaal- ja millist puute- ehk tangentsiaalpingeks?

## II PEATÜKK

### TÖMME JA SURVE

#### § 6. Pikideformatsioon. Pinge. Hooke'i seadus

Võtame konstantse ristlõikepinnaga  $F$  cm<sup>2</sup> prismaatilise prussi (joon. 12) ning tõmbame sellele terava nõelaga kaks teineteisest  $l$  mm kaugusel asuvat madalat joonekest. Rakendame nüüd prussi otstesse kaks suuruselt võrdset, kuid suu-



Joonis. 12.

nalt vastupidist jõudu  $P$  kg, mis mõjuksid täpselt piki prussi telge. Pruss, olles nende jõudude mõjul tasakaalus, pikeneb, tema ristlõikemõõted aga mõnevõrra vähenevad.

Seejuures eeldame, et vaadeldavas prussis jäävad kõik teljega risti olevad tasapinnalised lõiked ka pärast deformeerimist tasapinnalisteks ning teljega ristiolevaiks. See hüpotees kannab tasapinnaliste lõigete hüpoteesi nimetust ning seda kinnitavad katseandmed jõu  $P$  rakenduskohast eemalasetsevate lõigete kohta. Tuginedes sellele hüpoteesile eeldatakse, et prussi kõiki pikielemente tõmmatakse ühesuguselt.

Mõõtes nüüd hoolikalt kahe pealekantud joonekese vahe-  
maa, leiame, et see on suurenenud ning võrdub  $l_1$  mm. Tähis-

tades prussi pikenemise  $\Delta l$ -ga, võime selle väljendada kujul

$$\Delta l = l_1 - l.$$

Prussi pikkuse muutumist tõmbel nimetatakse kogu- ehk absoluutseks pikenemiseks, survele aga kogu- ehk absoluutseks lühenemiseks.

Absoluutne pikenemine (lühenemine) oleneb ilmselt prussi algpikkusest. Seetõttu on deformatsiooni kõige otsustavaks mõõta prussi algpikkuse ühiku kohta tuleva pikenemisega (lühenemisega). Suhet

$$\varepsilon = \frac{\Delta l \text{ absoluutne pikenemine (lühenemine) } mm}{l \text{ algpikkus } mm} \quad (4)$$

nimetatakse suhteliseks pikideformatsiooniks ehk suhteliseks pikenemiseks (lühenemiseks). Järelikult suhteliseks pikideformatsiooniks nimetatakse absoluutse pikenemise (lühenemise) suhet prussi algpikkusesse. Suhtelisel pikemisel (lühenemisel) ei ole dimensiooni. Ta on nimeta arv ning kõige sagedamini avaldatakse teda protsentides esialgsest pikkusest:

$$\varepsilon\% = \frac{\Delta l}{l} \cdot 100 = \varepsilon \cdot 100\%.$$

Pinge määramiseks meelevaldses ristlõikes, s. o. prussi teljega risti olevas lõikes, rakendame tugevusõpetuses kasutatavat üldmeetodit — lõigete meetodit.

Lõikame prussi mõtteliselt mööda pinda  $ab$  (joon. 12) kaheks osaks ning eemaldame parempoolse osa. Allesjäänud vasakpoolse osa tasakaalustamiseks rakendame lõikepinda siseelastsusjõud, mis on suunatud lõikepinnaga risti. Need jõud asendavad eemaldatud parempoolse osa mõju prussi vasakpoolsele osale. Elastsusjõudude resultant mõjub piki prussi telge ning selle suurus on  $P$  kg. Tuginedes tasapinnaliste lõigete hüpoteesile eeldatakse, et elastsusjõud on jaotatud üle kogu lõike ühtlaselt, mistõttu võime pinge ristlõike kõikides punktides määrata valemiga

$$\sigma = \frac{P}{F} \text{ kg/cm}^2. \quad (5)$$

See pinge on normaalpinge, sest ta on suunatud nagu jõud  $P$  risti ristlõikepinnaga. Mõõtes jõudu  $P$  kilogrammides ning pinda  $F$  ruutsentimeetrites, saame pinge dimensiooniks  $\text{kg/cm}^2$ .

Survel arvutatakse pinge sama valemiga (5), kuna siin muutub ainult jõudude suund.

Pinge suurus tõmbel ja survel ei olene lõikekoha valikust prussi pikkuse ulatuses, kuna eeldatakse, et elastsusjõud jaotuvad ühtlaselt kõikides ristlõigetes. Erandiks on ainult jõudude rakenduskohtadele väga lähedased ristlõiked.

Pingete määramine välisjõudude rakenduskohtadele väga lähedal asetsevais lõikeis on raske ülesanne ning ei kuulu tugevusõpetuse kursuse valdkonda. Seepärast prussi deformatsiooni määramisel me ei mõõtnudki prussi kogupikkust ühest otsast teise, vaid võtsime ainult lõigu, mille otspunktid on eemal prussi otstest.

Prussis tekkivad koormused ja deformatsioonid on omavahel tihedalt seotud. Koormuste ja deformatsioonide vahelise seose formuleeris esmakordselt Robert Hooke 1678. aastal. Vastavalt Hooke'i seadusele on deformatsioon võrdeline koormusega. See seadus on üheks põhilisemaks seaduseks tugevusõpetuse teoorias. Prussi tõmbel ja survel väljendab Hooke'i seadus pinge ja suhtelise pikideformatsiooni vahelist otsest võrdelisust:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (6)$$

See võrdelisus ei kehti, kui pinge ületab teatava piiri, mida nimetatakse proportsionaalsuse piiriks. Proportsionaalsuse piir määratakse mitmesugustele materjalidele katseliselt.

Valemis (6) esinevat tegurit  $E$  nimetatakse esimese liigi *elastsusmooduliks*. Valemist (6) näeme, et elastsusmoodulil  $E$  on sama dimensioon, mis pingelgi, sest  $\varepsilon$  on abstraktne suurus, s. o.  $E$  avaldub  $\text{kg/cm}^2$ . Ühe ja sama pinge puhul on suhteline deformatsioon väiksem sellel materjalil, millel  $E$  on suurem. Järelikult elastsusmoodul iseloomustab materjali jäikust, s. o. võimet avaldada vastupanu deformeerimisele. Tõepoolest valemist (6) saame:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}.$$

Mitmesugustele materjalidele määratakse elastsusmoodul katseliselt. Tabelis 1 on antud  $E$  keskmised väärtused mõningate materjalide jaoks toatemperatuuril.

## Elastsusmooduli väärtused

Materjal	$E$ kg/cm <sup>2</sup>
Teras . . . . .	$2 \cdot 10^6 - 2,2 \cdot 10^6$
Malm . . . . .	$0,75 \cdot 10^6 - 1,6 \cdot 10^6$
Vask . . . . .	$1 \cdot 10^6$
Pronks . . . . .	$1,2 \cdot 10^6$
Alumiinium . . . . .	$0,675 \cdot 10^6$
Puit . . . . .	$1 \cdot 10^5$

Materjalide puhul, mis ei allu Hooke'i seadusele, nagu malm, kivi, tsement ja teised, kasutatakse eksponentsiaalset olenevust  $\sigma^m = E\varepsilon$ . Ästmenäitaja  $m$  on lähedane ühele ning see valitakse katseliselt.

Hooke'i seadust väljendava valemi (6) võime kirjutada teisiti, asetades selles  $\sigma$  ja  $\varepsilon$  nende avaldistega

$$\sigma = \frac{P}{F} \text{ ja } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l};$$

sel juhul saame

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}. \quad (7)$$

Sellest valemist järgneb, et prussi pikenemine (lühene-mine) on võrdeline tõmbava (suruva) jõuga ja prussi pikkusega ning pöördvõrdeline prussi ristlõikega ja materjali elastsusmooduliga.

Valemi (7) nimetajas olevat korrutist  $EF$  nimetatakse jäikuseks tõmbel (survel). Mida suurem on prussi jäikus, seda vähem ta deformeerub ühe ja sama pikkuse puhul. Jäikus iseloomustab üheaegselt nii materjali füüsikalisi omadusi kui ka ristlõike geomeetrilisi mõõteid. Pinge valem (5) ja Hooke'i seadus (6) ja (7) on tõmbe ja surve arvutuste põhivalemeiks.

**Näide 1.** Määrata varda suhteline pikenemine, kui tema algpikkus  $l = 250$  mm, pikkus pärast tõmmet aga  $l_1 = 250,5$  mm.

*Lahendus.* Varda absoluutne pikenemine

$$\Delta l = l_1 - l = 250,5 - 250 = 0,5 \text{ mm.}$$

Varda suhteline pikenemine

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,5}{250} = 0,002.$$

Avaldades suhtelise pikenemise protsentides, saame

$$\varepsilon^0/0 = 0,002 \cdot 100 = 0,2\%.$$

Näide 2. Umarvarras läbimõõduga  $d = 2$  cm ja pikkusega  $l = 2$  m saab jõuga  $P = 800$  kg tõmmates absoluutse pikenemise  $\Delta l = 0,5$  mm. Määrata materjali elastsusmoodul  $E$ , kui on teada, et pinge vardas ei ületa proportsionaalsuse piiri.

Lahendus. Valemist (7) leiame

$$E = \frac{Pl}{F\Delta l} = \frac{800 \cdot 200}{\frac{3,14 \cdot 2^2}{4} \cdot 0,05} = 1\,020\,000 \text{ kg/cm}^2.$$

Näide 3. Määrata terasvardas esinev pinge ning suhteline ja absoluutne pikenemine (omakaal jätta arvestamata), kui tõmbav jõud  $P = 3$  t, varda pikkus  $l = 2$  m, ristlõikepindala  $F = 4$  cm<sup>2</sup>. Antud terase proportsionaalsuse piir on 2500 kg/cm<sup>2</sup> ning elastsusmoodul  $E = 2 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>.

Lahendus. Pinge vardas määrame valemiga (5):

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{3000}{4} = 750 \text{ kg/cm}^2.$$

Kuna saadud pinge ei ületa proportsionaalsuse piiri ( $750 < 2500$ ), siis deformatsioon on võrdeline pingega. Valemi (6) järgi saame

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{750}{2 \cdot 10^6} = 0,000375.$$

Varda absoluutne pikenemine on

$$\Delta l = \varepsilon l = 0,000375 \cdot 200 = 0,075 \text{ cm.}$$

Näide 4. Teraspolt pikkusega 160 mm pikenes tõmbamisel  $\Delta l = 0,12$  mm. Materjali elastsusmoodul  $E = 2 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>. Määrata pinge poldis.

Lahendus. Suhteline pikenemine

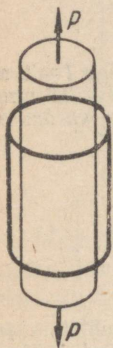
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,12}{160} = 0,00075.$$

Valemi (6) järgi määrame pinge poldis

$$\sigma = E\varepsilon = 2 \cdot 10^6 \cdot 0,00075 = 1500 \text{ kg/cm}^2.$$

## § 7. Ristdeformatsioon tõmbel ja survel

Katseliselt on kindlaks tehtud, et prussi ristlõike mõõted muutuvad isegi prussi väga väikeste pikideformatsioonide puhul. Pikenemine kutsub esile ristlõike ahenemise ja vastupidi, lühenemine ristlõike jämenemise. Järelikult tõmbe puhul keha pikeneb ja peeneneb (joon. 13), surve puhul aga lüheneb ja jämeneb. Ristdeformatsioonid tõmbe või surve puhul on võrdelised pingega, kuni see ei ületa materjali proportsionaalsuse piiri.



Joonis 13.

Kui suhteline pikideformatsioon tähistada  $\varepsilon$ , suhteline ristdeformatsioon aga  $\varepsilon_0$ , siis katsete põhjal  $\varepsilon_0$  moodustab ainult teatava osa  $\varepsilon$ -st, s. o.

$$\varepsilon_0 = \mu \varepsilon.$$

Tegurit  $\mu$  nimetatakse *Poisson'i teguriks*.

Poisson'i tegur tõmbel kujutab suhet

$$\mu = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = \frac{\text{suhteline peenenemine ristsuunas}}{\text{suhteline pikenedmine pikisuunas}},$$

survel aga

$$\mu = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \frac{\text{suhteline jämenemine ristsuunas}}{\text{suhteline lühenemine pikisuunas}}.$$

Poisson leidis, et tegur  $\mu$  on kõikide materjalide jaoks üks ja sama ning võrdub 0,25. Hilisemad katsed on siiski näidanud, et Poisson'i tegur on erinevate materjalide jaoks erinev, muutudes piirides 0 kuni 0,5. Selle teguri keskmised väärtused mõningate materjalide jaoks on antud tabelis 2.

Kasutades seda tegurit, võime määrata prussi mahu muutumise tõmbamisel või surumisel. Lahendame selle küsimuse esmalt üldkujul. Ruudukujulise ristlõikega prussi maht enne tõmmet võrdub

$$V_{alg} = a^2 l.$$

Pärast tõmmet on algpikkuse iga ühik suurenenud väärtuseni  $(1 + \varepsilon)$ . Järelikult prussi uus pikkus on  $l(1 + \varepsilon)$ . Pikkusühik ristsuunas lüheneb ja võrdub  $(1 - \varepsilon_0)$  ehk  $(1 - \mu\varepsilon)$ . Seetõttu on ristlõike suurus pärast tõmmet  $[a(1 - \mu\varepsilon)]^2$ .

## Poisson'i tegur mõningate materjalide jaoks

Materjal	$\mu$	Materjal	$\mu$
Kork . . . . .	0,00	Vask . . . . .	0,34
Süsinikteras . . . . .	0,24—0,28	Pronks . . . . .	0,35
Kroomnikkelteras . . . . .	0,25—0,30	Kummi . . . . .	0,47
Alumiinium . . . . .	0,26—0,36	Parafiin . . . . .	0,5

Seega on prussi maht pärast tõmmet

$$V_{lõpp} = [a(1 - \mu\varepsilon)]^2 l(1 + \varepsilon)$$

ehk

$$V_{lõpp} = a^2 l(1 + \varepsilon - 2\mu\varepsilon - 2\mu\varepsilon^2 + \mu^2\varepsilon^2 + \mu^2\varepsilon^3).$$

Jättes arvestamata tegureid  $\varepsilon^2$  ja  $\varepsilon^3$  sisaldavad liikmed kui kõrgemat järku suurused, saame

$$V_{lõpp} = a^2 l(1 + \varepsilon - 2\mu\varepsilon).$$

Mahu suurenemine

$$V_{lõpp} - V_{alg} = a^2 l(1 + \varepsilon - 2\mu\varepsilon) - a^2 l = a^2 l\varepsilon(1 - 2\mu).$$

Mahu suhteline suurenemine

$$\frac{V_{lõpp} - V_{alg}}{V_{alg}} = \frac{a^2 l\varepsilon(1 - 2\mu)}{a^2 l} = \varepsilon(1 - 2\mu).$$

Kuna  $\mu < 0,5$ , siis  $1 - 2\mu > 0$  ja mahu suurenemine on kõikide materjalide jaoks positiivne, s. o. tõmbel maht alati suureneb. Seda kinnitavad ka katsed. Ainult parafiini puhul, millel  $\mu = 0,5$ , mahu suurenemist ei esine.

**Näide 5.** Määrata ruudukujulise konstantse ristlõikega terasprussi mahu muutumine, kui prussi pikkus  $l = 200$  mm ja ristlõike küljepikkus  $a = 50$  mm, tõmmates prussi jõuga  $P = 25$  t. Poisson'i tegur  $\mu = 0,3$ .

*Lahendus.* Kõigepealt arvutame suhtelise pikennemise  $\varepsilon$ . Hooke'i seaduse (6) põhjal

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{F \cdot E} = \frac{25000}{5^2 \cdot 2 \cdot 10^6} = 0,0005.$$

Järelikult mahu muutus on

$$V_{lõpp} - V_{alg} = a^2 l\varepsilon(1 - 2\mu) = 5^2 \cdot 20 \cdot 0,0005(1 - 2 \cdot 0,3) = 0,1 \text{ cm}^3.$$

Mahu suhteline suurenemine on

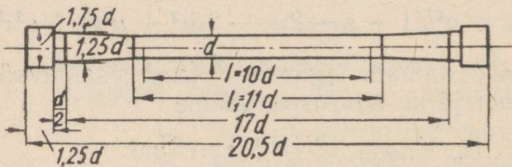
$$\frac{V_{lõpp} - V_{alg}}{V_{alg}} = \varepsilon(1 - 2\mu) = 0,0005 \cdot 0,4 = 0,0002 = 0,02\%$$

## § 8. Materjalide tõmbe katseline uurimine

Nagu eespool juba öeldi peab konstruktsioonile esitavate nõuete rahuldamiseks teadma nende materjalide omadusi, milledest konstruktsioon on valmistatud.

Materjalide mehaanilised omadused ilmnevad materjalide proovimisel koormuse all.

Kõige levinenum on materjalide proovimine tõmbele. Tõmbeproovil saadavad mehaanilised karakteristikud või-



Joonis 14.

maldavad paljudel juhtudel küllalt õigesti otsustada materjali käitumise üle ka teiste deformatsioonide puhul, nagu surve, nihe, vääne ja paine. Peale selle on tõmbeproov väga kergesti läbiviidav.

Peamiselt survele töötavad materjalid, nagu kivi, betoon ja teised, nõuavad tingimata ka surveproovi. Viimast kasutatakse ka teiste materjalide puhul.

Tõmbeprooviks valmistatakse proovitavast materjalist proovikeha, mida tõmmatakse spetsiaalsetel masinatel. Tavaliselt on proovikehad ümmarguse (joon. 14), harvem ristkülikukujulise ristlõikega. Proovikeha kummaski otsas on pea jämendi kujul. Proovikehade pead asetatakse tõmbemasinate erilistesse klambritesse. Proovikeha pea ja keskmise (töötava) osa vaheline üleminek kujundatakse ümmargustel proovikehadel koonusena, lamedatel ristkülikukujulise ristlõikega proovikehadel aga ümardustega. Kuna proovikeha ühtlane pikenemine toimub ainult proovikeha konstantse ristlõike pikkusel, siis mõõdetakse pikenemist ainult selle osa ulatuses; seda pikkust nimetatakse töötavaks pik-

kuseks ehk arvutus pikkuseks. Joonisel 14 on proovikeha arvutus pikkus tähistatud tähega  $l$ .

Katsed näitavad, et ühest ja samast materjalist proovikehad annavad ühesuguseid proovimistulemusi ainult siis, kui nad on geomeetriselt sarnased. Järelikult erinevate materjalide mehaaniliste omaduste võrdlemisel võivad proovikehade absoluutsed mõõted ka erineda, kuid tingimata peab olema täidetud sarnasuse tingimus. Hapraste materjalide korral kasutatakse aga ühesuguste mõõdetega proovikehasid.

Proovikehade kujud ja mõõted on standardiseeritud. Kui mingil põhjusel ei saa valmistada «normaalproovikehasid», siis võrreldavate tulemuste saamiseks kasutatakse normaalproovikehadega sarnaseid proovikehasid ümmarguse või ristkülikukujulise ristlõikega, kusjuures

$$l : \sqrt{F} = 11,3,$$

kus  $l$  on proovikeha töötav pikkus;

$F$  — proovikeha ristlõige.

Selline suhe ümmarguse ristlõikega proovikehadel saadakse, kui võtta  $l = 10 d$ .

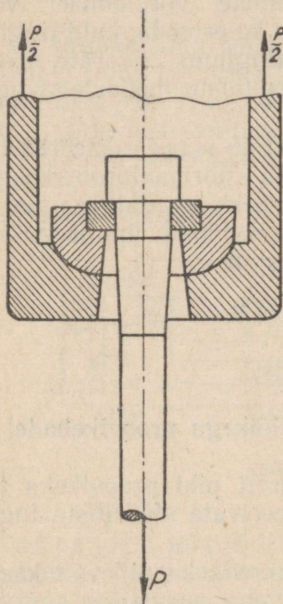
Et tõmbav jõud mõjuks täpselt piki proovikeha telge, tehakse masina klambrid tsentreerivate sfääriliste tugipindadega (joon. 15).

Tõmbemasinad koormavad proovikeha pidevalt kasvava koormusega nullist kuni proovikeha purustava suuruseni, s. o. tekitavad niinimetatud staatiliselt mõjuva koormuse. Koormuse suurust mõõdetakse jõumõõtjatega.

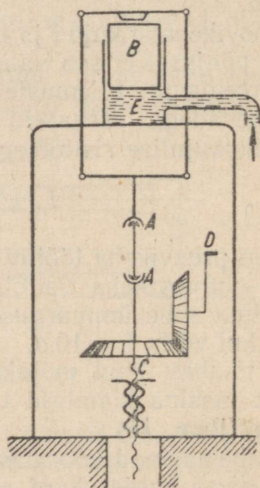
Tõmbemasinad võivad olla mitmesuguse konstruktsiooniga. Joonisel 16 on esitatud masina skeem, mida laialdaselt kasutatakse materjalide proovimislaboratoriumides. Proovitava proovikeha pead  $A$  kinnitatakse masina klambritesse. Alumine klamber jääb proovimise ajal liikumatuks. Teda tõstetakse või langetatakse ainult proovikeha paigaldamisel, pöörates selleks vända  $D$  abil krõvi  $C$ . Tõmbejõud tekitatakse õli pideva surumisega silindrisse  $E$ , mis on paigutatud masina kerele. Kolb  $B$  tõuseb üles ning tõstab omavahel šarniirselt ühendatud varrassüsteemi abil ka ülemist klambrit. Kuna proovimisel alumine klamber jääb liikumatuks, ülemine aga tõuseb, siis proovikeha tõmmatakse.

Paljudel tõmbemasinatel on isekirjutav seadis, mis joonestab kõvera kujul proovikeha tõmbava koormuse ja selle

koormusega saadud pikenemise vahelise olenevuse. Need seadised koosnevad põhiliselt pöörlevast paberiga kaetud trumlist ja sulest. Trumli pöörlemine on seotud liikuva klambri ümberpaigutumisega. Trumli pöördenurgad on võrdelised proovikeha pikenemistega. Sule vertikaalne liik-



Joonis 15.



Joonis 16.

mine on seotud jõumõõtjaga, ning see on võrdeline proovikehale mõjuvate koormustega. Selliste masinate hulka kuulub näiteks Gagarini press.

## § 9. Tõmbediagramm ja selle iseloomulikud punktid

Kõige paremini selgub materjali käitumine tõmbel kõveral, mida nimetatakse tõmbediagrammiks. Tõmbediagramm kujutab proovikehale mõjuva tõmbejõu ja proovikeha pikenemise vahelist olenevust.

See diagramm saadakse kas isekirjutava seadise abil või ehitatakse rea üksteisele järgnevate koormuse väärtuste

ning proovikeha vastavate pikenemiste alusel. Proovimise erinevatel momentidel mõõdetud jõud kantakse vastavas mõõtkavas ordinaatteljele, pikenemised aga abstsisssteljele.

Koordinaatides  $P, \Delta l$  saadud diagramm oleneb loomulikult proovikeha mõõdetest. Mida pikem on proovikeha, seda suurem on ühe ja sama jõu puhul absoluutne pikenemine. Et saadavad diagrammid oleksid erinevate materjalide puhul omavahel võrreldavad, s. t. et nad ei oleneks proovikeha mõõdetest, kantakse ordinaatteljele jõudude asemel pinged  $\sigma$ , mis saadakse tõmbejõu jagamisel proovikeha algriistlõikega  $F_0$ :

$$\sigma = \frac{P}{F_0}.$$

Abstsisssteljele kantakse absoluutsete pikenemiste asemel suhtelised pikenemised  $\epsilon$ .

Sel viisil saadud tõmbediagrammi punktid iseloomustavad proovikeha seisukorda proovimise erinevatel momentidel. Diagramm tervikuna annab aga proovikehas esinevate pingete ja suhteliste deformatsioonide vahelise olenevuse kogu proovimise kestel.

Joonisel 17 on toodud pehme terase tõmbediagrammi. Vaatleme selle iseloomulikke punkte.

*Proportsionaalsuse piir.* Kuni teatud momendini, mida iseloomustab diagrammil punkt  $A$ , läheb sirgjoon, mis näitab, et proovikeha pikenemised kasvavad siin võrdeliselt pingetega. See sirgjoon moodustab ordinaatteljega väga väikese nurga, s. o. proovikeha pikenemised selles piirkonnas kasvavad aeglaselt. Punkt  $A$  vastab pingele, mida nimetatakse proportsionaalsuse piiriks. Kuni proportsionaalsuse piirini kehtib Hooke'i seadus.

*Järelikul proportsionaalsuse piiriks nimetatakse sellist suurimat pinget, milleni deformatsioonid materjalis kasvavad võrdeliselt pingetega. Proportsionaalsuse piirile vastavat pinget tähistatakse  $\sigma_{pr}$ .*

Kui võtta diagrammi sirgjoonelises osas proovikeha mistahes olek, näiteks olek, mida väljendab punkt  $N$  (pinge —  $NN_1$ , suhteline pikenemine —  $ON_1$ ), siis diagrammi sirgjoonelise osa ja abstsissstelje vahelise nurga tangens võrdub

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{NN_1}{ON_1} = \frac{\sigma}{\epsilon},$$

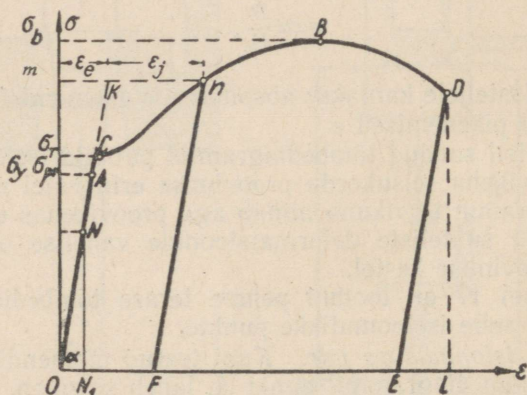
kus  $\sigma$  on dimensiooniga suurus,  $\varepsilon$  aga dimensioonita suurus. Teiselt poolt vastavalt Hooke'i seadusele (6)

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E.$$

Järelikult

$$\operatorname{tg} \alpha = E,$$

s. o. esimese liigi elastsusmooduli arvulise suuruse võime määrata kui sirgjoonelise osa  $OA$  ja abstsissitelje vahelise nurga tangensi.



Joonis 17.

*Elastsuspiir.* Mingisuguse konstruktsiooni projekteerimisel on mõnikord tähtis teada materjalis esimesi jäävaid deformatsioone põhjustava pingte väärtust. Täpsed mõõtmised näitavad, et ka väga elastsed materjalid saavad isegi üsna väikeste pingete juures jäävaid deformatsioone. Kuid viimaste suurus on niivõrd tähtsusetu, et nendega ei pruugi praktiliselt arvestada. Pingte suurenemisega jäävad deformatsioonid kasvavad. *Elastsuspiiriks* nimetatakse sellist pinget, mille juures saadakse materjalis jääv deformatsioon, mis võrdub etteantud väikese suurusega (0,002%—0,005% proovikeha esialgsest pikkusest).

Elastsuspiiri tähistatakse  $\sigma_y$ . Elastsuspiiri määramine on küllaltki keeruline ning nõuab väga täpseid ja kestvaid katseid. Praktiliselt on elastsuspiir, näiteks teraste puhul, väga lähedane proportsionaalsuse piirile, mistõttu viimasele vas-

tav punkt *A* loetakse ühtelangevaks elastsuspiiri vastava punktiga (nagu on näidatud ka joonisel 17). Pinge edasisel suurenemisel tõmbekõver tõuseb ülespoole ja kaldub sirgest kõrvale, pöördudes sujuvalt paremale punkti *C* poole.

*Voolavuspiir* (kriitiline punkt). Mõned materjalid, nagu näiteks pehme teras, annavad tõmbediagrammil natuke ülalpool proportsionaalsuse piiri, alates punktist *C*, piirkonna, milles proovikeha hakkab järsult pikenema ilma pinget suurendamata. Seda nähtust nimetatakse materjali voolavuseks. *Voolavuspiiriks nimetatakse sellist pinget, mille juures materjal ilmnevad märgatavad pikenemised ilma pinget suurendamata.* Voolavuspiiri tähistatakse tähega  $\sigma_T$ . Voolavuspiirile vastavat diagrammi punkti *C* nimetatakse kriitiliseks punktiks. Mõnikord saadakse diagrammil horisontaalse lõigu asemel kaldjoon suunaga paremale alla.

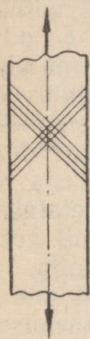
Pärast voolavuspiiri ületamist hakkab materjal uuesti avaldama vastupanu deformeerimisele, kuid pikenemised kasvavad nüüd kiiremini kui pinged. Kiiresti kasvavad ka jäävad deformatsioonid. Voolavuspiir on väga tähtsaks materjali mehaaniliste omaduste karakteristikuks, kuna voolavuspiiri ületavad pinged põhjustavad materjalis, järelikult aga ka konstruktsioonis jäävaid deformatsioone, mis pole lubatavad.

Paljudel materjalidel pole voolavuspiir selgelt märgatav. Selliste materjalide tõmbediagrammi üleminek elastsest osast suurte jäävate deformatsioonide ossa toimub sujuvalt. Voolavuspiir püstitatakse nimetatud juhul kokkuleppeliselt ning selleks loetakse pinget, mille juures materjal saab ette antud suurusele vastava jääva deformatsiooni. Järelikult selliste materjalide voolavuspiirist rääkides tuleb anda ka vastav suhteline pikenemine. Tavaliselt on kombeks lugeda voolavuspiiriks pinget, mis vastab suhtelisele pikenemisele 0,2%.

Järsult avalduva voolavuspiiriga materjalidel on voolavuspiiri tekkimise moment tõmbel hästi märgatav. Näiteks kui masinal on tõmbejõu näitamiseks osuti, jääb see voolavuspiiri saavutamise momendil liikumatuks, peatudes teatud aja ühel ja samal jaotusel, kuigi proovikeha deformatsioon kasvab.

Voolavuspiiri ilmnemise momendi materjalis võib määrata ka proovikeha enda jälgimisega. Voolavuspiiri saavutamisel proovikeha poleeritud pind tuhmub ning muutub aegamööda matiks. Väga hoolikal vaatlemisel võime pinnal

märgata proovikeha teljega  $45^\circ$  nurka moodustavate kaldjoonte ilmumist (joon. 18). Viimaseid nimetatakse vene metallurgi nime järgi Tšernovi joonteks, kes neid esmakordselt märkas ning kirjeldas. Nende joonte arv kasvab pidevalt, mis muudabki proovikeha pinna matiks. Joonte ilmumine kogu proovikeha pikkusel tõendab, et materjalis toimuvad kristallide nihked.

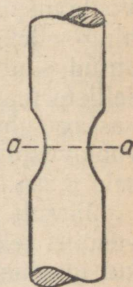


Joonis 18.

*Tugevuspiir.* Pärast voolavuspiiri suundub tõmbekõver kaarjalt ülespoole ning proovikeha deformatsioonid hakkavad siin kasvama kiiremini kui pinged.

Punkt *B* (vt. joon. 17) vastab pinge suurimale väärtusele. Seda *maksimaalset pinget, mis on taandatud proovikeha algristlõikele, nimetatakse tugevuspiiriks.* Tugevuspiiri tähistatakse  $\sigma_b$ . Tugevuspiiri saavutamisel tekib proovikehal aegamööda kohalik peenenemine, mida nimetatakse kaelaks (joon. 19). Proovikeha edasine pikenemine toimub peamiselt kaela ulatuses, kuna proovikeha ülejäänud osade pikkus peaaegu üldse ei muutu.

Kaela ilmumise kohas ristlõige väheneb üha enam ja enam, mistõttu proovikeha deformatsioon toimub väheneval koormusel. Tugevuspiir on materjali väga tähtsaks karakteristikuks. Eriti suur tähtsus on sellel habraste materjalide puhul, nagu näiteks malm, karastatud ja külmalt tõmmatud teras ja teised, millede deformeerumine purunemisel on suhteliselt väike. Punktile *D* vastava pinge juures (vt. joon. 17) proovikeha katkeb. Nagu näeme, asetseb proovikeha katkemise momendile vastav pinge tõmbediagrammil madalamal kui tugevuspiir. See on tingitud asjaolust, et me leppeliselt arvutame pinged proovikeha algristlõike järgi. Tegelikult on aga pinge materjalis proovikeha katkemise momendil suurim, sest lõike *aa* (joon. 19) pindala saavutab siis minimaalse väärtuse.



Joonis 19.

Mõnikord nimetatakse seda pinget *tõeliseks tugevuspiiriks.*

Meie poolt vaadeldud diagramm on kokkuleppeline, kuna pinged on siin taandatud algristlõikele, pikenemised aga

algpikkusele. Tegelikult proovikeha ristlõige ja pikkus proovimise ajal pidevalt muutuvad. Sellest hoolimata langeb nimetatud diagramm kuni voolavuspiirini peaaegu ühte tõelise diagrammiga. Viimase konstrueerimisel kantakse ordinaatteljele pinge, mis on saadud jõu jagamisel proovikeha vastava minimaalse ristlõikega, abstsissiteljele aga proovikeha tõelised suhtelised pikenemised.

*Materjali plastilisus.* Peale ülaltoodud pingete (elastsuspiir, proportsionaalsuse piir, voolavuspiir ja tugevuspiir), mis iseloomustavad materjali mehaanilisi omadusi, on üheks väga tähtsaks karakteristikuks materjali plastilisus. Plastilisuseks nimetatakse materjali võimet säilitada pärast koormuse lakkamist täielikult või osaliselt koormuse mõjul saadud deformatsiooni. Materjali plastilisust iseloomustab proovikeha suhteline pikenemine ja ristlõike suhteline peenenemine pärast katkemist.

Suhteline pikenemine katkemisel avaldub

$$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} \cdot 100\%,$$

kus  $l_k$  on proovikeha pikkus pärast katkemist,  $l_0$  — proovikeha algpikkus.

Ristlõike suhteline peenenemine leitakse avaldisest

$$\psi = \frac{F_0 - F_k}{F_0} \cdot 100\%,$$

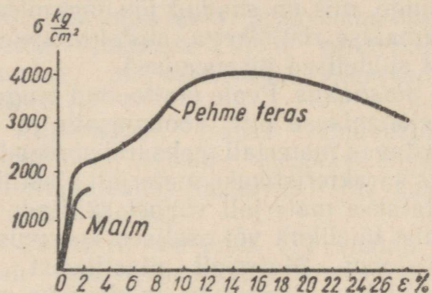
kus  $F_k$  on kaela ristlõige pärast katkemist,  $F_0$  — proovikeha algristlõige.

Olenevalt sellest, kas proovikeha katkemisel saadakse suured või väikesed jäävad deformatsioonid, räägitakse plastilisest või haprast materjalist.

Võrdluseks on joonisel 20 toodud plastilise materjali (pehme teras) ja hupra materjali (malm) tõmbediagrammid. Diagrammide võrdlemisel näeme, et hupra materjali puhul on jääv deformatsioon suhteliselt väike ning et diagrammil puudub voolavuspiiri iseloomustav horisontaalne osa. Kuid tuleb märkida, et materjali plastilisus muutub, olenevalt pingeolukorrast, deformeerimise kiirusest, temperatuurist ja teistest tingimustest. Materjal, mis näitab end tõmbel tavalise temperatuuri juures haprana, võib teistes tingimustes käituda kui plastiline, ja vastupidi.

Vaatleme proovikeha deformatsiooni üle elastsuspiiri.

Kui vabastada proovikeha koormusest pärast tema koormamist diagrammi (joon. 17) mistahes punktini  $n$ , mis asub elastsuspiirist kõrgemal, siis koormusest vabastamise jooneks on sirgega  $OA$  paralleelne sirge  $nF$ . Lõik  $mn$  kujutab



Joonis 20.

proovikeha suhtelist kogupikenemist pingel puhul, mis vastab punktile  $n$ . Lõik  $OF$ , mis võrdub  $kn$ , kujutab proovikehasse peale koormamist jääva plastilise deformatsiooni suurust. Järelikult deformatsioon väljaspool elastsuspiiri koosneb kahest osast: elastsest deformatsioonist, mis kaob pärast koormuse eemaldamist, ja jäävast deformatsioonist, mis jääb pärast proovikeha vabastamist koormusest:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_j.$$

Deformatsiooni elastne osa on ka väljaspool elastsuspiiri võrdeline pingetega.

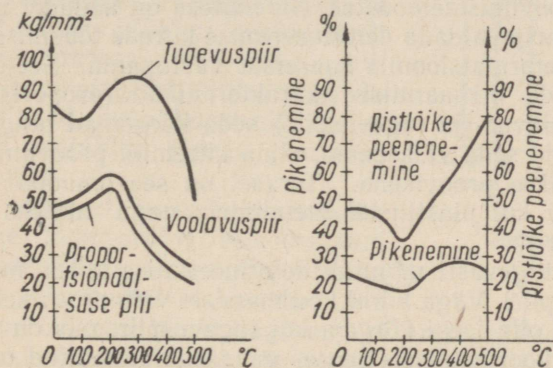
Selle seaduse alusel, mida nimetatakse *koormusest vabastamise seaduseks*, võime määrata deformatsiooni elastse osa ka väljaspool elastsuspiiri. Proovikeha kogupikenemist enne katkemist kujutab diagrammil lõik  $OL$ . Pärast katkemist deformatsiooni elastne osa  $EL$  kaob ja alles jääb ainult jääv deformatsioon  $OE$ . Mida suurem on jääv deformatsioon, seda plastilisemaks loetakse materjal.

Metallide mehaaniliste omaduste karakteristikud, mis on saadud proovimise teel, olenevad tervest reast tegureist, nagu materjali keemilisest koostisest, temperatuurist, termilisest töötlemisest, proovimise kiirusest, jäävatest deformatsioonidest jt.

Materjaliõpetuses uuritakse keemilise koostise ja termilise töötlemise mõju mehaanilistele omadustele. Kirjeldame

lühidalt teiste tegurite mõju materjalide mehaanilistele omadustele.

*Temperatuuri mõju.* Materjalide mehaaniliste proovimiste tulemused antakse harilikult toatemperatuuril ( $17^{\circ}$ – $18^{\circ}$  C), mille juures toimub proovimine laboratooriumides. Kuid paljud detailid töötavad isegi ühes ja samas masinas väga mitmesugustes temperatuuritingimustes. Nii näiteks töötavad lennukimootori klapid  $500^{\circ}$ – $800^{\circ}$  C juures, detailid aga, mis vahetult puutuvad kokku väliskeskkonnaga, töötavad mõnikord väga madalatel temperatuuridel, näiteks lendude puhul stratosfääris.



Joonis 21.

Enamikel materjalidel temperatuuri tõustes tugevus langeb, plastilisus aga tõuseb. Pehme teras käitub mõnevõrra teisiti: temperatuuril ca  $250^{\circ}$ – $300^{\circ}$  C, on terase tugevuspiir maksimaalne, temperatuuri edasisel suurenemisel hakkab see aga järsult alanema.

Joonisel 21 on antud terase tugevuspiiri ja plastilisuse muutumise diagrammid olenevalt temperatuuri muutumisest. Kõrgel temperatuuril, alates  $300^{\circ}$ – $400^{\circ}$  C deformeeruvad metallid konstantse koormuse puhul pidevalt, olgugi et väga aeglaselt. Temperatuuri või koormuse tõustes deformeerumise kiirus kasvab. Metallide omadust konstantse koormuse mõjul pidevalt kõrgel temperatuuril deformeeruda nimetatakse roomavuseks.

Nii näiteks gaasiturbiini labad, mis töötavad kõrgel temperatuuril ja millele mõjuvad tsentrifugaalkoormused, pidevalt pikenevad. Selle tagajärjel võivad nad puruneda

või hakata ohtlikult riivama korpust, mida mõnikord ka praktikas täheldatakse. Seetõttu tuleb vastavatel juhtumitel kasutada väikese roomavusega spetsiaalterasid.

Temperatuuri langemisega terase tugevus tõuseb, plastilisus aga väheneb märgatavalt. Teras muutub väga tundlikuks igasugustele põrutustele ja löökidele. Nikli lisamine tõstab terase vastupanu löökkoormusele ka madalatel temperatuuridel.

*Proovimise kiirus.* Materjalide mehaanilised karakteristikud olenevad ka proovimismetoodikast. Seetõttu kasutatakse võrreldavate proovitulemuste saamiseks kindlaksmääratud proovimismetoodikat. Nii näiteks on kõikidel metallidel omadus avaldada deformeerimise kiiruse tõusmisel plastilisele deformatsioonile suuremat vastupanu. Seetõttu on materjalide mehaanilised karakteristikud (proportsionaalsuse, voolavus- ja tugevuspiir) seda kõrgemad ning deformatsioonid seda väiksemad, mida kiiremini proovimise ajal koormatakse proovikeha. Terasel on see omadus vähem märgatav kui plastilistel metallidel, nagu näiteks tsink, plii, vask jt.

Eriti tugevasti mõjutab deformeerimise kiirus materjali voolavuspiiri. Väga kiirel koormamisel võib proovikeha voolavuspiir olla isegi kõrgem kui tugevuspiir, mis on saadud aeglasel koormamisel. Seoses metallide nimetatud omadustega ei ületa pingete tõstmise kiirus normaalsetel proovimistingimustel tavaliselt  $100 \text{ kg/cm}^2$  sekundis.

## § 10. Järelmõju ja kaldestus

Võtame proovikeha ja hakkame seda järk-järgult tõmbama. Olgu proovikeha suhteline pikenemine mingi elastsuspiirist  $\sigma_y$  madalama pinge  $\sigma_1$  mõjul  $\varepsilon_1$ . Oletame, et tõmbediagrammil (joon. 22) proovikeha selline pingeolukord vastab punktile  $n_1$ . Kui me koormust enam ei suurenda, vaid hoiame proovikehas saadud pinge  $\sigma_1$  konstantsena, võime märgata, et proovikeha pikeneb edasi ning teatava aja möödumisel tema suhteline pikenemine on  $\varepsilon_2$ . Algul on pikeneamise kasv (roomavus) eriti tähelepanuväärne. Aja möödumisel see aga aeglustub ikka enam ja enam ning lõpuks lakkab hoopis. Analoogiline nähtus esineb ka proovikeha purunemisel. Kui proovikeha koormata elastsuspiirist mõnevõrra madalama pingeni ning seejärel vabastada ta koormusest,

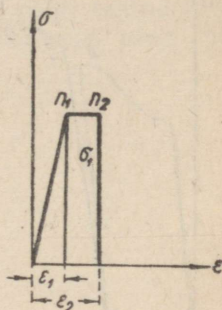
siis taastab proovikeha oma esialgsed mõõted alles teatud aja möödumisel.

Kirjeldatud nähtust, mis seisneb deformatsiooni muutumises aja jooksul, nimetatakse *järeilmõjuks*. See näitab, et kõva keha osakesed võivad väga pika aja jooksul nihkuda ainult sisejõudude mõjul.

Elastne järeilmõju on eriti suur orgaanilise päritoluga materjalidel (kanepist köied, rihmad jne.). Samuti on ta märgatav ka betoonkonstruktsioonides. Metallidel (välja arvatud näiteks plii) on elastne järeilmõju toatemperatuuril väike, eriti aga sellistel pingetel, millede harilikult töötavad metallkonstruktsioonid. Seetõttu metallide juures järeilmõju ei arvestata.

Kui pehmest terasest proovikeha oli enne tõmbeproovi eelkoormatud elastsuspiirist madalama pingeni ning seejärel koormusest vabastatud, siis sellise proovikeha tõmbediagramm ei erine millegagi eelkoormamiseta proovikeha tõmbediagrammist. Kui proovikeha eelkoormamisel oleks aga ületatud voolavuspiir, siis sellise proovikeha mehaanilised omadused erineksid juba eelkoormamata proovikeha omadustest.

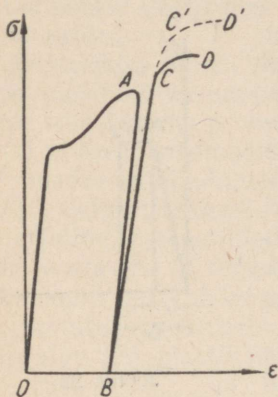
Olgu pehmest terasest proovikeha tõmmatud mingi pingeni, mida tõmbediagrammil iseloomustab punkt *A* (joon. 23). Kui nüüd eemaldada tõmbav koormus, siis diagrammil saadakse joon *AB*, mis on väga lähedane sirgele. Proovikeha kogupikenemise elastne osa kaob ning säilib ainult jääv pikenemine *OB*. Kui proovikeha otsekohe uuesti tõmmata, siis täpsete mõõtmiste juures ilmneb, et selle proportsionaalsuse piir on langenud, voolavuspiir aga tunduvalt tõusnud. Korduv koormamine tõmbediagrammil on kujutatud joonega *BC*. Seejuures osutub voolavuspiir ligikaudu võrdseks pingega, milleni proovikeha oli esialgu tõmmatud. Kui proovikehal pärast koormuse eemaldamist lasta mõni aeg «puhata» ja pärast seda veel tõmmata, siis proportsionaalsuse piir tõuseb uuesti, s. o. materjal saab tagasi oma elastsuse, voolavuspiir aga kõrgeneb veel tunduvalt (punktiirjoon *CC'D'*).



Joonis 22.

Elastsete omaduste täielikuks taastamiseks kulub kindel ajavahemik, mis oleneb materjalist.

Tugevuse tõusmist ja plastilisuse vähenemist eeltõmbamise tõttu üle voolavuspiiri nimetatakse *kalestuseks*. Järelikult kalestumisel nagu karastamiselgi muutuvad materjali mehaanilised omadused. Mõningail juhtudel on kalestus ebasoovitav nähtus ning selle vastu võideldakse, teistel juhtudel aga ümberpöörduvalt püütakse kalestust kunstlikult esile kutsuda.



Joonis 23.

Nii näiteks neediaukude löömisel lehtmaterjali kalestub augu servadel olev materjal ning muutub palju kõvemaks, materjali ülejäänud osa jääb aga muutumatuks.

Tingituna materjali omaduste sellisest ebaühtlusest jaotuvad ka jõud tõmbel ebaühtlaselt. Jäigemale osale mõjuvad suuremad jõud, mistõttu neis kohtades võivad tekkida praod. Seepärast eemaldatakse kalestuse kahjuliku

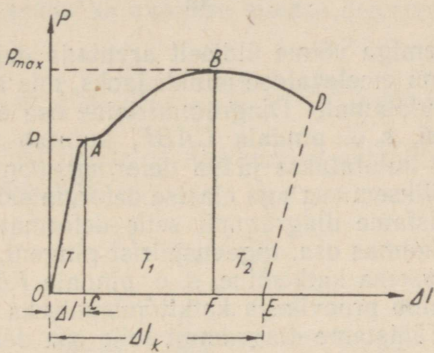
mõju vältimiseks materjali kalestunud osa, suurendades augu läbimõõtu puurimise teel. Peale selle võib kalestust kaotada lõõmutamisega, s. t. materjali kuumutamise mingi kindla temperatuurini, hoidmisega sellel temperatuuril teatud aja ja järgneva aeglase jahutamise. Teistel juhtumitel, nagu juba öeldud, tekitatakse kalestust kunstlikult. Näiteks tõstemasinat ketid allutatakse voolavuspiirist kõrgemale eeltõmbele, et vähendada nende plastilisust ja deformeerumist töötamise ajal, kuna vastasel korral võivad ketilülid mitte mahtuda oma pesadesse trumlil.

Kalestusega seletub ka fakt, et tõmmatud traadil on tunduvalt suurem tugevus kui terasel, millest ta on valmistatud.

## § 11. Deformatsioonitöö tõmbel

Võtame tõmbediagrammi  $P-\Delta l$ -koordinaatides (joon. 24) ja vaatleme, mida kujutab diagrammi kogupindala  $OABDE$ . Kuna abstsissiteljele on kantud proovikeha kogupikenemine ehk teiste sõnadega, tõmbejõu rakenduspunkti poolt läbitud

teekond, ordinaatteljele aga tõmbejõu suurus, siis *diagrammi pindala OABDE väljendab ilmselt proovikeha katkitõmbamiseks välisjõudude poolt kulutatud tööd*. Kui eemaldame üle elastsuspiiri tõmmatud proovikehalt järk-järgult koormuse, siis hakkab proovikeha aegamööda lühenema, kuid oma esialgseid mõõteid ta enam ei saavuta. Järelikult töö, mis on kulutatud proovikeha tõmbamisel üle elastsuspiiri, täielikult ei tagastu. Osa välisjõudude poolt tehtud tööst kulutatakse jäävate pikennemiste kujunemiseks ning seda pole võimalik tagastada.



Joonis 24.

Deformatsiooni kogutöö võime jaotada kolme ossa. Diagrammi pindala osa *OAC* kuni elastsuspiirini kujutab elastse deformatsiooni tööd, mis akumulereeritakse materjalisse potentsiaalse energiana ning mis võib koormuse eemaldamisel täielikult tagastuda. Tähistades selle töö *T*, elastsuspiirile vastava koormuse *P* ning seejuures saadud pikennemise  $\Delta l$ , leiame

$$T = \frac{P\Delta l}{2}; \quad (8)$$

kuna

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF},$$

siis

$$T = \frac{P^2 l}{2EF}, \quad (9)$$

ehk asendades  $P$  tema avaldisega valemist (7), saame

$$T = \frac{\Delta l^2 EF}{2l}. \quad (10)$$

Deformatsioonitöö elastsuspiirini võib avaldada ka pinge kaudu. Kuna

$$P = \sigma F,$$

siis valemist (9) saame:

$$T = \frac{\sigma^2 Fl}{2E}. \quad (11)$$

Selle valemiga võime üldiselt arvutada deformatsioonitöö diagrammi meelevaldse punkti jaoks, mis asetseb elastsuspiirist madalamal. Diagrammi teine osa elastsuspiirist tugevuspiirini, s. o. pindala  $CABF$ , kujutab tööd, millest peamine osa kulutatakse jääva deformatsiooni kujundamiseks, teine väiksem osa aga elastse deformatsiooni kujundamiseks. Tähistame diagrammil selle deformatsioonitöö  $T_1$ . Diagrammi kolmas osa, tugevuspiirist pingeni, mille juures toimub proovikeha katkemine, s. o. pindala  $FBDE$  kujutab tööd, mis kulub proovikeha katkitõmbamiseks pärast kaela tekkimist. Tähistame diagrammi selle osa deformatsioonitöö  $T_2$ .

Deformatsiooni kogutöö kuni proovikeha täieliku purunemiseni  $T_p$  võrdub summaga

$$T_p = T + T_1 + T_2.$$

Seda tööd võime kujutada osana ristküliku pindalast  $P_{max} \Delta l_p$ , kus  $P_{max}$  on tugevuspiirile vastav koormus,  $\Delta l_p$  aga pikenemine katkemise momendil:

$$T_p = \eta P_{max} \Delta l_p \text{ kgcm,}$$

kus  $\eta$  on diagrammi täiuse tegur. Viimane on väiksem ühest ( $\eta < 1$ ) ning on ühel ja samal materjalil peaaegu konstantne suurus.

Kuna deformatsiooni kogutöö  $T_p$  oleneb peale materjali töövõimelisuse veel ka proovikeha suuruselt, siis proovikeha mõõdete mõju elimineerimiseks toome sisse eritöö mõiste. Deformatsiooni eritööks nimetatakse deformatsioonitööd, mis tuleb proovikeha töötava osa mahuühikule:

$$T_{ep} = \frac{T_p}{V} = \frac{T_p}{Fl} = \eta \frac{P_{max}}{F} \cdot \frac{\Delta l_p}{l} \text{ kgcm/cm}^3.$$

Kuna suhe  $\frac{P_{max}}{F} = \sigma_b$ , suhe  $\frac{\Delta l_p}{l}$  aga proovikeha suhteline pikenemine katkemise momendil, mida tähistame  $\delta$ , siis

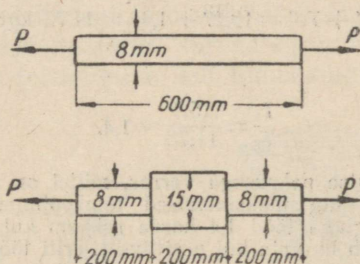
$$T_{ep} = \eta \sigma_b \delta \text{ kgcm/cm}^3.$$

Mida suuremad on materjali  $\eta$ ,  $\sigma_b$  ja  $\delta$ , seda suurem on tema purustamiseks vajalik välisjõudude töö. Analoogiliselt toodule võime saada ka avaldise elastse deformatsiooni eritöö jaoks:

$$T_{ee} = \frac{T}{Fl} = \frac{P\Delta l}{2Fl} = \frac{1}{2} \frac{P}{F} \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_y \varepsilon_y}{2} \text{ kgcm/cm}^3,$$

kus  $\sigma_y$  on elastsuspiir,  $\varepsilon_y$  aga vastav suhteline pikenemine. Kuna  $\sigma_y = E\varepsilon_y$ , siis

$$T_{ee} = \frac{\sigma_y^2}{2E}. \quad (12)$$



Joonis 25.

**Näide 6.** Arvutada terase tõmbamisel elastse deformatsiooni eritöö, kui terase elastsuspiir  $\sigma_y = 2500 \text{ kg/cm}^2$  ja elastsusmoodul  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

*Lahendus.* Elastse deformatsiooni eritöö määrame valemiga (12):

$$T_{ee} = \frac{\sigma_y^2}{2E} = \frac{2500^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^6} = 1,56 \text{ kgcm/cm}^3.$$

**Näide 7.** Võrrelda kahe ümmarguse ristlõikega terasvarda (joon. 25) deformatsioonitöid, kui suurimad tõmbepinged mõlemas vardas on ühesugused  $\sigma = 1500 \text{ kg/cm}^2$  ning  $E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

*Lahendus.* Kuna mõlemal vardal minimaalsed ristlõiked ja suuri-  
mad pinged on ühesugused, siis peavad olema võrdsed ka tõmbejõud.  
Valemist (5) saame

$$P = \sigma F = 1500 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0,8^2 = 754 \text{ kg.}$$

Esimese varda deformatsioonitöö vastavalt valemile (9) avaldub

$$T_1 = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{754^2 \cdot 60}{2 \cdot 2,2 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0,8^2} = 15,4 \text{ kgcm/cm}^3.$$

Teise varda vasak- ja parempoolse osa deformatsioonitöö

$$T_2' = \frac{2}{3} T_1 = \frac{2}{3} \cdot 15,4 = 10,27 \text{ kgcm/cm}^3.$$

Teise varda keskmise osa deformatsioonitöö

$$T_2'' = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{754^2 \cdot 20}{2 \cdot 2,2 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1,5^2} = 1,46 \text{ kgcm/cm}^3.$$

Teise varda deformatsioonitöö

$$T_2 = T_2' + T_2'' = 10,27 + 1,46 = 11,73 \text{ kgcm/cm}^3.$$

Järelikult

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{15,4}{11,73} \approx 1,4.$$

Seega konstantse paksusega varras, millel on astmelise vardaga  
ühesugune pikkus ning maksimaalsed tõmbe pinged, varub endasse  
potentsiaalse energiaga tööd 1,4 korda rohkem kui astmeline varras.  
Seda omadust tuleb hinnata kui positiivset, eriti löökkormuste puhul.

## § 12. Surveproov

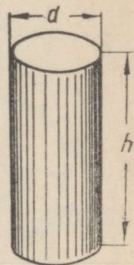
Katse näitab, et teraste tõmbe- ja surveproovil saada-  
vad tulemused on üheväärsed. Seetõttu proovitakse teraseid  
survele harva. Erijuhtudel aga, nagu näiteks veerelaagrite  
rullide ja kuulide valmistamisel, on ka surveproov tingi-  
mata vajalik. Malmi, mis töötab peamiselt survele ja pain-  
dele, proovitakse kõige sagedamini nimetatud deformat-  
siooniliikidele, harvemini ka tõmbele.

Metallide surveproov toimub silindriliste proovikeha-  
dega (joon. 26), millel  $1 < \frac{h}{d} < 3$ . Kivi, tsemendi ja

puidu proovimiseks ettenähtud proovikehad on sageli kuu-  
bikukujulised. Surveprooviks kasutatakse eripresse või uni-  
versaalseid masinaid, mis võimaldavad materjali proovida  
tõmbele ja survele. Kuju, mille proovikeha saab proovimise  
ajal, oleneb materjalist, proovikeha kõrguse ja ristlõike suh-  
test, peamiselt aga hõõrdumisest, mis tekib  
proovikeha aluste ning pressi tugiplaatide  
kokkupuutepindades.

Suur hõõrdumine proovikeha otstel põh-  
justab pingete ebaühtlast jaotumist ristlõike-  
pindades. Seetõttu surveproovil püütakse  
seda hõõrdumist vähendada, määrides proovi-  
keha otspindu või kasutades erivahetükke,  
mis on valmistatud pehmemast materjalist  
kui proovitav materjal. Surutud proovikehade  
tünjas kuju (joon. 27) ja tsemendist kuubiku  
(joon. 28) tüüpiline purunemispilt seletuvad  
ainult hõõrdumisega proovikeha otspindadel.

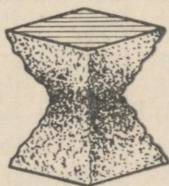
Sitked materjalid surveproovil ei purune. Sellisest mater-  
jalist proovikeha muljutakse laiaks ja see võtab ketta kuju.  
Ristlõike suurendamisega proovikeha vastupanu deformat-  
sioonile suureneb, mistõttu survediagrammi kuju pärast  
voolavuspiiri on teistsugune kui tõmbediagrammil.



Joonis 26.



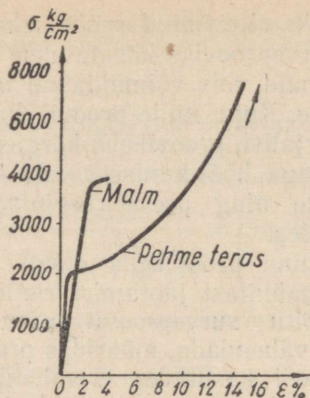
Joonis 27.



Joonis 28.

Joonisel 29 on näidatud plastilise materjali (pehme  
teras) ja hrapra materjali (malm) survediagrammid. Plasti-  
lisel materjalil, nagu näiteks pehmel terasel, ei ole survel  
tugevuspiiri. Nagu selgub diagrammist, puruneb habras  
materjal, nagu näiteks malm, survel väikeste suhteliste  
deformatsioonide juures.

Tabelis 3 on toodud mõnede materjalide tugevuspiirid ja  
suhtelised pikenemised.



Joonis 29.

Tugevuspiirid ja suhtelised pikenemised

Tabel 3

Materjal	$\sigma_b$ kg/mm <sup>2</sup>	$\delta$ %	Materjal	$\sigma_b$ kg/mm <sup>2</sup>	$\delta$ %
Teras 10 . . . . .	32—40	28	Tamm, piki	9,5 (tõmme)	4
Teras 20 . . . . .	40—50	26	kiudu .		
Teras 30 . . . . .	48—60	22		5 (surve)	
Teras 40 . . . . .	60—75	20	Mänd, piki	8 (tõmme)	3
Teras 50 . . . . .	63—80	16	kiudu .		
Teras, 3% nikli- sisaldusega . . . . .	78	24		4 (surve)	
Kroomnikkel- teras (karas- tatud) . . . . .	115—140	12	Pöökpuid .	13 (tõmme)	3
Vedruteras (ka- rastatud) . . . . .	135—155	6—8	Graniit .	0,5—0,8 (tõmme)	—
Alumiinium, tõmmatud . . . . .	9—10	8—13	Liivakivi .	0,25 (tõmme)	—
Vask . . . . .	22	35—38		4—15 (surve)	
Hallmalm, hari- lik . . . . .	14—18 (tõmme)	—	Tellis . . . . .	0,74—3 (surve)	—
	60—100 (surve)				

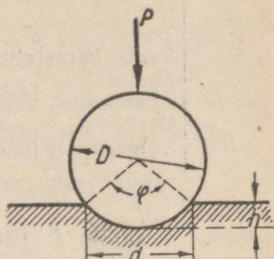
### § 13. Kõvadus

Materjali kõvaduse all mõistetakse tema omadust avaldada vastupanu teise kõvema keha sissetungimisele. Kõvadus on materjali tähtsamaks omaduseks. Peale selle võimaldab kõvadus otsustada materjali tugevuse üle.

Metallide kõvaduse määramiseks on mitu meetodit, milledest kõige enam kasutatava olemus seisab karastatud teraskuuli surumises proovitava metalli.

Kui suruda karastatud teraskuuli läbimõõduga  $D$  proovitava metalli jõuga  $P$  (vt. joon. 30), siis kuul tungib metalli mingisuguse sügavuseni  $h$  ja tingituna proovitava metalli plastilisest deformeerumisest jätab sellesse lohukese läbimõõduga  $d$ .

Kõvadust iseloomustavaks suuruseks, või nagu öeldakse Brinelli kõvadusarvuks ( $H_B$ ) on sel juhul kuuli sissesuruva jõu  $P$  ja proovitava metalli tekkinud lohu pindala  $f$  suhe



Joonis 30.

$$H_B = \frac{P}{f} = \frac{P}{\frac{\pi D}{2}(D - \sqrt{D^2 - d^2})}. \quad (13)$$

Kõvadust proovitakse kõige sagedamini valmistoodeltel. Kuna toodete paksus on erinev, siis mida väiksem on paksus, seda väiksema läbimõõduga võetakse kuulike ning seda väiksema jõuga ta surutakse detaili. Ühesuguste kõvadusarvude saamiseks peavad kuulile rakendatavad jõud ühe ja sama materjali puhul olema võrdelised kuulikeste läbimõõtude ruutudega, s. o.

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Olenevalt toote paksusest kasutatakse erinevate läbimõõtudega kuulikesi.

Teraste jaoks avaldub kõvadusarvu  $H_B$  ja tugevuspiiri vaheline ligikaudne seos kujul

$$\sigma_b \approx 0,36 H_B. \quad (14)$$

Tabelis 4 on antud mõningate materjalide Brinelli kõvadus.

Tabel 4

Materjal	Brinelli kõvadus $H_B$ kg/mm <sup>2</sup>
Teras . . . . .	150—300
Teras, karastatud . . . . .	kuni 850
Malm . . . . .	130—300
Alumiinium, valtsitud . . . . .	45
Vask . . . . .	60
Valgemetall (laagrite jaoks) . . . . .	20—28

## § 14. Kontrollküsimusi

Milles seisab tasapinnaliste lõigete hüpotees?

Mida nimetatakse kogu- ehk absoluutseks pikenemiseks?

Mida nimetatakse suhteliseks pikenemiseks? Milline on selle dimensioon?

Milles seisab Hooke'i seadus ja kuidas see avaldub matemaatiliselt?

Mida iseloomustab esimese liigi elastsusmoodul?

Milline on elastsusmooduli dimensioon?

Kas kõik materjalid alluvad Hooke'i seadusele?

Mida nimetatakse varda jäikuseks tõmbel ja surveel?

Mida nimetatakse Poisson'i teguriks?

Millised karakteristiklikud punktid on pehme terase tõmbediagrammil?

Mida nimetatakse proportsionaalsuse piiriks, elastsuse piiriks, voolavuspiiriks, tugevuspiiriks?

Kuidas võib tõmbediagrammilt määrata elastsusmooduli  $E$  suuruse?

Millal ilmuvad proovitaval proovikehal Tšernovi jooned?

Miks on tõmbediagrammil purunemispinge väiksem tugevuspiirist?

Mida nimetatakse materjali plastilisuseks? Millega seda iseloomustatakse?

Milles seisab koormusest vabastamise seadus?

Mida nimetatakse elastseks järelmõjuks?

Mida nimetatakse materjali kalestuseks?

Mida väljendab tõmbediagrammi pindala? Missuguseks kolmeks osaks võime jaotada tõmbediagrammi kogupindala?

Mida nimetatakse deformatsiooni eritöök? Milline on selle dimensioon?

Kuidas muutuvad terase mehaanilised omadused temperatuuri tõusul ja alanemisel?

Kuidas mõjub proovikeha koormamise kiirus mehaanilistele karakteristikutele?

Mida nimetatakse kõvaduseks ja kuidas seda mõõdetakse?

Mida nimetatakse kõvadusarvuks?

## TUGEVUSARVUTUSED TÖMBEL JA SURVEL

## § 15. Lubatav pinge ja ristlõigete valik

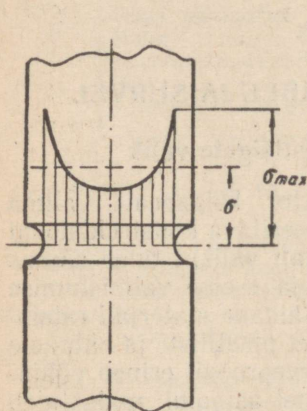
Projekteerimisel peab konstruktor kõigepealt valima materjali, lähtudes seejuures projekteeritava konstruktsiooni elementide töötingimustest. Materjali valikul tuleb silmas pidada ka ökonoomsuse kaalutlusi ja eseme valmistamise tehnoloogiat. Kuid see pole veel küllaldane materjali ratsionaalseks valikuks. Eespool nägime, et plastiliste ja habraste materjalide käitumine tõmbe- ja surveproovil erineb põhjalikult. Nüüd peatume veel ainult ühel asjaolul, mida tuleb arvestada materjali valikul. Nimelt plastilised materjalid, erinevalt habrastest materjalidest, käituvad täiesti teisiti niinimetatud kohalike pingete suhtes, s. o. pingete suhtes, mis tekivad ristlõike väikesel osal ja ületavad tunduvalt pingeid ülejäänud ristlõikes.

Tõmbe- ja survepinged jaotuvad ristlõike ulatuses ühtlaselt ainult konstantse ristlõikega prismaatilistes varrastes. Kuid tegelikkuses on üsna raske leida mõnd masinaosa, mis kujutaks endast konstantse ristlõikega varrast. Isegi selline lihtne detail, nagu polt, on järsult muutuva ristlõikega: poldi keermetatud osas erinevad järsult keerme vahesid ja keerme harjasid läbivad ristlõiked; järsult muutub ristlõige ka poldi varva üleminekul poldi peaks. Masinaosade purunemine toimub tavaliselt ristlõike järsu ülemineku kohas. Tugevuse langemist ristlõike järsu muutumise tõttu kinnitavad ka katsed proovikehadega. Tugevuse selline vähene mine seletub pingete tõusuga ristlõike mõõdete järsu muutumise piirkonnas. Nii näiteks sissetreitud soonega ümmarguse proovikeha (joon. 31) või avaga ristkülikukujulise ristlõikega proovikeha (joon. 32) tõmbamisel jaotuvad pinged

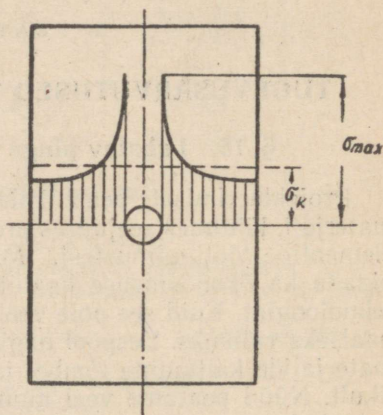
ohtliku ristlõike ulatuses ebaühtlaselt, nagu on näidatud vastavatel joonistel.

Pingete järsk suurenemine esineb väikeses tsoonis, millest eemaldumisel pinge väheneb kiiresti.

Pingete kontsentratsiooni teguriks nimetatakse maksimaalse kohaliku pinge suhet keskmise pingega, mis esineb ühtlasel jaotumisel. Pingete kontsentratsiooni tegur arves-



Joonis 31.



Joonis 32.

tab ainult pingete tõusmist lõike järsu muutumise tagajärjel. Tähistades pingete kontsentratsiooni teguri  $a$ -ga, saame:

$$a = \frac{\sigma_{max}}{\sigma}, \quad (15)$$

kus  $\sigma_{max}$  on maksimaalne kohalik pinge,  $\sigma$  — keskmine pinge, mis esineb pingete ühtlase jaotumise puhul. Seda pinget nimetatakse sageli ka nimipingeks

$$\sigma = \frac{P}{F}.$$

Pingete kontsentratsiooni teguri leidmiseks peab ilmselt oskama määrata kohalikke pinget  $\sigma_{max}$ . See ülesanne on raske ning pole tugevusõpetuse meetoditega lahendatav. Enamikul juhtudel määratakse maksimaalsed pinged elastusteooria meetoditega või katseliselt. Paljude tüüpiliste juhtude jaoks (treitud sooned, puuritud augud, ümardused, kiilusooned, keermed jne.) on aga pingete kontsentratsiooni

tegurid mitmesugustele deformatsiooniliikidele määratud ning need võib leida käsiraamatutest. Pingete kontsentratsiooni teguri väärtus on tavaliselt piirides 1,2—3.

Pingete kontsentratsiooni mõju tugevusele etendab tähtsat osa materjalide valikul mitmesuguste koormustingimuste puhul. Jaotades materjalid «plastilisteks» ja «habrasteks» olenevalt sellest, kas materjali pikenemine staatilisel tõmbamisel normaalsetes temperatuuritingimustes on purunemisel suur või väike, võime öelda, et pingete kontsentratsiooni mõju plastiliste ja habraste materjalide tugevusele on erinev. Võtame küllalt plastilisest materjalist valmistatud proovikeha, millel esineb pingete kontsentratsioon, ning hakkame seda staatiliselt tõmbama. Koormuse suurenemisega pinged proovikehas kasvavad. Pärast seda, kui pingete kontsentratsiooni kohas maksimaalne pinge on saavutanud voolavuspiiri, jääb ta koormuse suurendamisel muutumatuks. Koormuse suurendamisel jätkavad ohtlikus lõikes kasvamist pinged, mis pole saavutanud veel voolavuspiiri. Seega koormuse edasise tõusuga toimub ristlõikes pingete ühtlustamine. Järelikult võime öelda, et pingete kontsentratsioon plastilises materjalis staatilisel koormamisel tugevust ei alanda, mistõttu nimetatud juhul pole arvutustes pingete kontsentratsiooni vaja silmas pidada. Teisiti on lugu hapra homogeense materjaliga, nagu näiteks väga tugev habras teras. Siin ei saa jätta arvestamata pingete kontsentratsiooni.

Praegusajal kasutatakse tehnikas väga paljusid erinevate mehaaniliste omadustega materjale, mis vastavad erinevatele töötingimustele, et isegi nende materjalide mehaaniliste omaduste lühiülevaade võtaks liiga palju ruumi. Täielikke andmeid nende materjalide mehaaniliste omaduste kohta võib leida vastavatest käsiraamatutest.

Materjalide mehaanilised proovimised annavad pingete piirväärtused (tugevuspiir, voolavuspiir), millede esinemisel masinaosad kas purunevad või deformeeruvad lubamatult.

Konstruktiooni ohutuks tööks peavad selle elementides tekkivad pinged olema madalamad nimetatud piirpingetest. Seetõttu on konstrueerimisel teiseks tähtsaks küsimuseks ohutu või niinimetatud *lubatava pinge* valik. Lubatavaks pingeks nimetatakse suurimat pinget, mille juures on tagatud projekteeritava konstruktsiooni elemendi tugevus ja pikk iga. Lubatavad pinged moodustavad teatud osa piirpinge-

test. Arvu  $k$ , mis näitab, mitu korda lubatav pinge on väiksem piirpingest, nimetatakse *tugevusvaruks*.

Olenevalt koormusest ja materjalist võetakse lubatava pinge valikul aluseks üks või teine piirpinge.

Habraste materjalide puhul võetakse piirpingeks tugevuspiir:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_b}{k}. \quad (16)$$

Kui väga haprast terasest valmistatavas konstruktsiooni elemendis esineb kohalik pinge ja see on detaili jaoks suurim, siis määratakse lubatav pinge valemiga

$$[\sigma] = \frac{\sigma_b}{\alpha k}, \quad (17)$$

kus  $\alpha$  on pingete kontsentratsiooni tegur, mis leitakse käsi- raamatust.

Kui detailis on ette näha pingete kontsentratsiooni, siis tuleb detail valmistada sellisest plastilisest materjalist, mis on kohalikele pingetele vähetundlik.

Juhul, kui konstruktsiooni element valmistatakse mittehomogeensest materjalist, näiteks malmist, siis pingete kontsentratsiooni ei arvestata.

Plastilisel materjalil, nagu näiteks ehitusteras, võetakse piirpingeks voolavuspiir. Sel juhul lubatav pinge avaldub:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{k}. \quad (18)$$

Konstantse koormuse ja plastilise materjali puhul jäetakse ristlõike järsust muutumisest tingitud pingete kontsentratsioonid arvestamata, mistõttu pingete kontsentratsiooni esinemisel lubatav pinge määratakse valemiga (18).

Lubatava pinge või tugevusvaru määramine on väga tähtsaks praktiliseks küsimuseks. Kui lubatav pinge on valitud liiga suur, siis konstruktsioon ei ole tugev. Teiselt poolt valides lubatava pinge väikese, kujuneb konstruktsioon mõõdetelt liiga suureks, mistõttu see kallineb ning muutub kaalult raskeks. Paljudel juhtudel on aga konstruktsiooni kaalu suurenemine täiesti lubamatu, nagu näiteks lennukiehituses.

Lubatava pinge õigeks valikuks tuleb arvestada rea asjaoludega. Eelkõige märgime, et paljudel juhtudel pole pro-

jektteeritava konstruktsiooni elementidele mõjuvad välisjõud täpselt määratavad. Samuti määratakse pinged sageli ainult ligikaudu, eriti kohalike pingete ja keerulise kujuga konstruktsioonelementide puhul. Mida väiksema täpsusega on määratud koormused ja pinged, seda suurem tuleb võtta tugevusvaru lubatava pinge määramisel.

Tugevusvaru peab olema määratud nii, et ta arvutustes kataks koormuste ja pingete ebatäpsest määramisest tingitud vead. Lubatavat pinget mõjutab ka materjal: mida mittehomoogeensem on materjal, seda suurem tuleb võtta tugevusvaru lubatava pinge määramisel, kuna mittehomoogeense materjali puhul pole materjali mehaanilised karakteristikud täpselt määratavad.

Tugevusvaru võetakse seda suurem, mida pikemaajalisem peab olema konstruktsioon. Lennukimootorite detailide tugevusvaru on tunduvalt väiksem statsionaarsete mootorite tugevusvarust, sest nende kaal peab olema minimaalne. Tulemusena on lennukimootorite eksploatatsiooniga tunduvalt lühem kui statsionaarsetel mootoritel.

Esitatud põhimõtted, milledest juhindutakse lubatavate pingete valikul kõikide deformatsiooniliikide puhul, näitavad kuivõrd komplitseeritud on see küsimus. Üldisi norme lubatavate pingete määramiseks, mis sobiksid kõikide praktikas esinevate juhtude jaoks, ei saa anda. Eriti raske on anda selliseid norme masinaehituse kõikide harude jaoks. Taolised normid on olemas ainult mõningate masinaehituse ja ehitusanduse harude jaoks, kus nende kasutamine on ka kohustuslik. Lubatavate pingete normid aeg-ajalt täienevad ja muutuvad seoses arvutusmeetodite täiustamisega, katsete kogumisega ja tundmaõppimisega ning materjali omadusi puudutavate teadmiste süvenemisega.

Juhul, kui norme ei ole, juhindutakse lubatavate pingete määramisel ülaltoodud üldistest kaalutlustest ja kogemustest, mis on saadud varemehitatud analoogiliste konstruktsioonide vaatlustest.

Tabelis 5 on toodud mõningate materjalide lubatavate tõmbe- ja survepingete orienteeruvad suurused staatilisel koormusel. Tabel on koostatud NSV Liidus kehtivate normide alusel (N. M. Beljajev, Tugevusõpetus, 1949).

Lubatavate tõmbe- ja survepingete orienteeruvad väärtused kg/cm<sup>2</sup>

Materjali nimetus	[ $\sigma_t$ ]	[ $\sigma_s$ ]
Hallmalm, valandites . . . . .	—	1200—1500
Teras OC ja teras 20 . . . . .	1400	
Teras 30 . . . . .	1600	
Teras 30, sildades . . . . .	1400	
Süsinik-konstruksiooniteras, masinaehituses . . . . .	600—2500	
Legeeritud konstruksiooniteras, masinaehituses . . . . .	1000—4000 ja kõrgem	
Vask . . . . .	300—1200	
Valgevask . . . . .	700—1400	
Pronks . . . . .	600—1200	
Alumiinium . . . . .	300—800	
Alumiiniumpronks . . . . .	800—1200	
Duralumiinium . . . . .	800—1500	
Elektron . . . . .	900—1200	
Tekstoliit . . . . .	300—400	
Getinaks . . . . .	500—700	
Bakeliitvineer . . . . .	400—500	
Mänd, piki kiudu . . . . .	70—100	100—120
Mänd, risti kiudu . . . . .	—	15—20
Tamm, piki kiudu . . . . .	90—130	130—150
Tamm, risti kiudu . . . . .	—	20—35
Looduskivimüüritus . . . . .	Kuni 3	4—40
Tellismüüritus . . . . .	Kuni 2	6—25
Betoon . . . . .	1—7	10—90

Tõmbe- või surevpinge määratakse valemiga (5):

$$\sigma = \frac{P}{F}$$

Tuues sisse lubatava pinge mõiste, võtab staatilise tugevuse võrrand või tõmbe ja surve arvutusvõrrand kuju

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma], \quad (19)$$

kus  $[\sigma]$  on lubatav tõmbe- või survepinge.

See arvutusvõrrand võimaldab lahendada järgmisi ülesandeid:

1. Antud jõu  $P$  ja lubatava pinge  $[\sigma]$  järgi määrata vajalik ristlõige:

$$F \geq \frac{P}{[\sigma]} \quad (20)$$

2. Antud ristlõike ja lubatava pinge järgi määrata lubatav koormus:

$$P \leq [\sigma] F. \quad (21)$$

3. Antud jõu  $P$  ja tuntud ristlõike  $F$  järgi valemiga (5) leitud pinge  $\sigma$  võrdlemisel lubatava pingega  $[\sigma]$ , määrata kas keha on küllaldaselt tugev.

**Näide 8.** Oõnsat silindrilist 25 cm pikkust malmalustuge surutakse jõuga  $P = 8$  t. Määrata alustoe välisläbimõõt  $D$ , siseläbimõõt  $d$  ja kogulühenemine, kui lubatav survepinge  $[\sigma] = 1200$  kg/cm<sup>2</sup>,  $E = 8 \cdot 10^5$  kg/cm<sup>2</sup> ja  $d : D = 4 : 5$ .

*Lahendus.* Võrrandiist 19 saame:

$$\frac{P}{\frac{\pi}{4} \left[ D^2 - \left( \frac{4}{5} D \right)^2 \right]} = \frac{100P}{9\pi D^2} \leq [\sigma],$$

millest

$$D \geq \sqrt{\frac{100P}{9\pi [\sigma]}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 8000}{9 \cdot 3,14 \cdot 1200}} = 4,8 \text{ cm.}$$

Võtame  $D = 5$  cm. Sel juhul siseläbimõõt

$$d = \frac{4}{5} D = \frac{4}{5} \cdot 5 = 4 \text{ cm.}$$

Valemiga (7) leiame alustoe absoluutse lühenemise:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} = \frac{8000 \cdot 25}{8 \cdot 10^5 \frac{\pi}{4} (5^2 - 4^2)} = 0,036 \text{ cm.}$$

**Näide 9.** Ketiterase (joon. 33) läbimõõdu määramiseks vähepingestatud kettide puhul kasutatakse valemit  $P = 1000 d^2$  (kus  $P$  on tõmbav jõud kg-des,  $d$  aga ketiterase läbimõõt cm-tes). Määrata, millist lubatavat pinget on kasutatud selles valemis.

*Lahendus.* Keti lüli jaoks arvutusvõrrand avaldub:

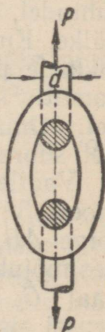
$$2 \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq [\sigma], \text{ millest } P \leq [\sigma] \frac{\pi}{2} d^2.$$

Võrreldes tõmbejõu  $P$  jaoks tuletatud valemit antud valemiga, leiame

$$[\sigma] \frac{\pi}{2} d^2 \geq 1000 d^2,$$

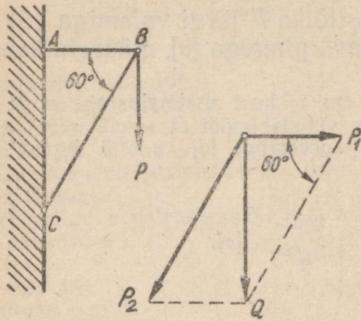
millest

$$[\sigma] \geq \frac{1000}{\frac{\pi}{2}} = 637 \text{ kg/cm}^2.$$



Joonis 33.

Näide 10. Malmist kronsteinile  $ABC$  (joon. 34) on šarniirsel riputatud koormus  $Q = 5$  t. Määrata tõmbitsa  $AB$  ja kaldtoe  $BC$  ristlõige, kui lubatav tõmbepinge malmil on  $300 \text{ kg/cm}^2$ , lubatav survepinge aga  $900 \text{ kg/cm}^2$ .



Joonis 34.

Kaldtoe vajalik ristlõige

$$F_2 \geq \frac{5780}{900} = 6,43 \text{ cm}^2 \approx 6,5 \text{ cm}^2.$$

*Lahendus.* Lahutame jõu  $Q$  kaheks komponendiks, milledest üks on suunatud piki tõmbitsat  $AB$ , teine aga piki kaldtuge  $BC$ .

Tõmbitsat tõmbav jõud

$$P_1 = \frac{Q}{\text{tg } 60^\circ} = \frac{5000}{1,732} = 2880 \text{ kg}.$$

Kaldtuge suruv jõud

$$P_2 = \frac{Q}{\sin 60^\circ} = \frac{5000}{0,866} = 5780 \text{ kg}.$$

Tõmbitsa vajalik ristlõige

$$F_1 \geq \frac{2880}{300} = 9,6 \text{ cm}^2 \approx 10 \text{ cm}^2.$$

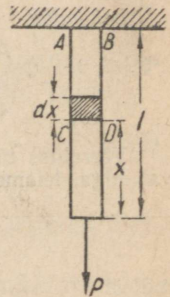
## § 16. Omakaalu mõju tõmbel ja surve

Tugevusarvutuses jäetakse keha omakaal arvestamata juhtudel, kui see võrreldes väliskoormusega on tähtsusetult väike. Kuid omakaalu ei saa jätta arvestamata suhteliselt pikkade prusside (vardad, trossid, ketid), samuti kivist sillatugede jt. arvutamisel. Omakaalu toome arvutusse kui pinget suurendava täiendava koormuse.

Vaatleme jõuga  $P$  tõmmatavat prussi (joon. 35). Prussi ohtlikumaks lõikeks on lõige  $AB$  prussi kinnituskohas. Selles lõikes mõjub prussile tõmme  $P$  ja prussi omakaal  $G$ , s. o. jõud  $P + G$ . Tähistame prussi ristlõikepindala  $F$ -iga. Siis maksimaalne pinge prussi arvutuslõikes on

$$\sigma_{max} = \frac{P + G}{F}, \quad (22)$$

või asetades selle avaldise võrrandisse (19), saame arvutusvõrrandi



Joonis 35.

$$\sigma_{max} = \frac{P + G}{F} \leq [\sigma]. \quad (23)$$

Kuna prussi kaal  $G = Fl\gamma$ , kus  $\gamma$  on erikaal, s. o. materjali mahuühiku kaal, siis võime arvutusvõrrandi avaldada kujul

$$\frac{P}{F} + l\gamma \leq [\sigma]. \quad (24)$$

Siit saame löike arvutusliku pindala

$$F \geq \frac{P}{[\sigma] - l\gamma}. \quad (25)$$

Pinge omakaalust mistahes löikes  $CD$ , mis jääb alumisest otsast kaugusele  $x$ , võrdub

$$\sigma_x = \frac{G_x}{F} = \frac{Fx\gamma}{F} = x\gamma. \quad (26)$$

Võrrandist näeme, et konstantse ristlõikega prussis ei olene omakaalust tingitud pinge ristlõikepindalast. Peale selle näeme samast võrrandist, et pruss puruneb omakaalu mõjul sellise pikkuse  $x$  juures, mil suurus  $x\gamma$  võrdub materjali tugevuspiiriga  $\sigma_b$ . Seda pikkust, mille juures pruss puruneb omakaalu mõjul, nimetatakse *kriitiliseks pikkuseks*  $l_{kr}$ . Võrrandi (26) alusel saame:

$$l_{kr} = \frac{\sigma_b}{\gamma}. \quad (27)$$

Pikkust, mille juures prussis saavutatakse lubatav pinge ainult omakaalu mõjul, nimetatakse *piirpikkuseks*  $l_p$

$$l_p = \frac{[\sigma]}{\gamma}. \quad (28)$$

Maksimaalse pinge määramisel [valem (22)] leidsime kõigepealt prussi ohtlikuimas löikes mõjuva summaarse jõu ning seejärel juba selle jõu poolt esilekutsutud pinge. Kuid maksimaalse pinge võime leida ka teisiti ja nimelt: määrame eraldi jõust  $P$  ja omakaalust  $G$  esilekutsutud pinged ning liidame need. Pole raske näha, et tulemus on endine. Viimasel juhul kasutasime niinimetatud jõudude mõju sõltumatuse printsiipi. *Jõudude mõju sõltumatuse printsiip* ehk lühidalt *liitmise printsiip*, seisneb selles, et süsteemile mitme koormuse mõjumise puhul võime pinged või deformatsioo-

nid määrata kui iga koormuse kohta eraldi leitud pingete või deformatsioonide summa.

Seega eeldatakse, et iga eraldi võetud koormus avaldab sellist mõju, nagu oleks ta ainuke süsteemile mõjuv koormus. Liitmise printsiip kehtib, kui kõikide koormuste summaarne pinge või summaarne deformatsioon jääb Hooke'i seaduse piiridesse. Vastasel korral ei saa seda printsiipi kasutada.

Paljudel juhtudel see printsiip kiirendab tugevusõpetuse ülesannete lahendamist.

Kasutame liitmise printsiipi prussi deformatsiooni määramiseks (vt. joon. 35). Esmalt määrame prussi deformatsiooni, mis on tingitud omakaalust. Eraldame prussi alumisest otsast kaugusel  $x$  kahe lõpmata lähedalasetseva lõikega elemendi pikkusega  $dx$  (joon. 35). Kuna eraldatud elemendi pikkus on lõpmata väike, siis loeme tõmbejõu pikkuse  $dx$  ulatuses konstantseks. See jõud võrdub  $F\gamma x$ . Eraldatud elemendi absoluutne pikenemine Hooke'i seaduse (7) põhjal on

$$d(\Delta l) = \frac{F\gamma x dx}{EF} = \frac{\gamma}{E} x dx.$$

Integreerides selle avaldise radades 0-st kuni  $l$ -ni, saame kogu prussi pikenemise

$$\Delta l = \int_0^l \frac{\gamma}{E} x dx = \frac{\gamma l^2}{2E}. \quad (29)$$

Avaldise (29) võime esitada teisel kujul, asetades selles  $\frac{G}{F}$  asemele  $\gamma l$ . Seega saame:

$$\Delta l = \frac{Gl}{2EF}. \quad (30)$$

Prussi pikenemine, mis on esile kutsutud jõu  $P$  poolt, võrdub  $\frac{Pl}{EF}$ .

Siit näeme, et prussi pikenemine omakaalu mõjul on kaks korda väiksem kui pikenemine prussi omakaaluga võrduva ning prussi otsa rakendatud jõu mõjul. Rakendades jõudude mõju sõltumatuse printsiipi, leiame, et prussi kogupikenemine avaldub

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{Gl}{2EF} = \frac{\left(P + \frac{G}{2}\right)l}{EF}. \quad (31)$$

**Näide 11.** Määrata terasvarda piir- ja kriitiline pikkus, kui lubatav pinge  $[\sigma] = 1500 \text{ kg/cm}^2$ , tugevuspiir  $\sigma_b = 4500 \text{ kg/cm}^2$  ja erikaal  $\gamma = 0,0078 \text{ kg/cm}^3$ .

*Lahendus.* Piirpikkus

$$l_p = \frac{[\sigma]}{\gamma} = \frac{1500}{0,0078} = 192\,000 \text{ cm} = 1920 \text{ m}.$$

Kriitiline pikkus

$$l_{kr} = \frac{\sigma_b}{\gamma} = \frac{4500}{0,0078} = 576\,000 \text{ cm} = 5760 \text{ m}.$$

**Näide 12.** Määrata pinge ja pikenemine ruudukujulise ristlõikega  $5 \times 5 \text{ cm}^2$   $l = 10 \text{ m}$  pikkuses terasvardas, arvestades ka omakaalu, kui tõmbav koormus  $P = 15 \text{ t}$ ,  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$  ja erikaal  $\gamma = 7,8 \text{ g/cm}^3 = 0,0078 \text{ kg/cm}^3$

*Lahendus.* Maksimaalne pinge vardas

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + l\gamma = \frac{15\,000}{25} + 1000 \cdot 0,0078 = 600 + 7,8 \approx 608 \text{ kg/cm}^2.$$

Omakaalu mitte arvestades saaksime pingeks  $600 \text{ kg/cm}^2$ . Järelikult moodustaks pinge arvutamisel tehtav viga sel juhul

$$\frac{608 - 600}{608} \cdot 100 \approx 1,2\%.$$

Arvestades ka omakaalu leiame pikenemise valemiga (31):

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{Pl}{EF} + \frac{Gl}{2EF} = \frac{15\,000 \cdot 1000}{2 \cdot 10^6 \cdot 25} + \frac{25 \cdot 1000 \cdot 0,0078 \cdot 1000}{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 25} = \\ &= 0,3 + 0,00195 = 0,30195 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Jättes omakaalu arvestamata, saame varda pikenemises yea, mis võrdub

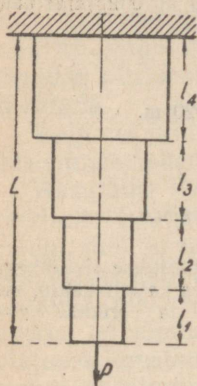
$$\frac{0,30195 - 0,3}{0,30195} \cdot 100 = 0,65\%.$$

Toodud näitest selgub, et lühikese prussi puhul on omakaalu mittearvestamisest tingitud viga väike.

## § 17. Astmeline pruss

Valemist (26) näeme, et pikal prismaatilisel prussil mõjub erinevates ristlõigetes ka erinev pinge. Materjali jaotus sellistes prussides on ebaökoonoomne. Kui projekteerime prussi kogu pikkuses ühesuguse ristlõikega, mille

leiame enampingestatud osa arvutamisel, siis muutub pruss ülemäära raskeks. Et vähendada omakaalu mõju ja ratsionaalsemalt kasutada materjali, tehakse pikkade varraste, köite, kõrgete sillatugede ristlõiked muutuvatena.



Joonis 36.

Prussile võime anda sellise kuju, et tema kõikides ristlõigetes mõjub ühesugune pinge. Sellist prussi nimetatakse võrdvastupidavusega prussiks. Võrdvastupidavusega prusside valmistamise keerulisuse tõttu tehakse nad sageli astmelistena.

Tuletame valemi astmelise prussi ristlõigete pindalade määramiseks. Tõmmatagu astmelist prussi (joon. 36) jõuga  $P$  ja omakaaluga. Lugeses materjali küllalt plastiliseks jätame pingete kontsentratsiooni järsult muutuvates ristlõigetes arvestamata.

Üldjuhul võivad prussi üksikute elementide pikkused olla erinevad —  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ .

Esimest, kõige alumist prussi prismaatilist elementi tõmmatakse jõuga  $P$  ja selle elemendi omakaaluga.

Selle elemendi ristlõike vajalik pindala määratakse valemiga (25):

$$F_1 \geq \frac{P}{[\sigma] - l_1 \gamma}.$$

Teise elemendi alumisele lõikele on rakendatud jõud  $P + F_1 l_1 \gamma$  või teisiti, jõud  $F_1 [\sigma]$ . Teise elemendi ristlõike vajalik pindala määratakse samuti valemiga (25), asendades selles jõu  $P$  jõuga  $F_1 [\sigma]$ . Seega

$$F_2 \geq \frac{F_1 [\sigma]}{[\sigma] - l_2 \gamma},$$

või asendades  $F_1$  tema väärtusega, saame:

$$F_2 \geq \frac{P [\sigma]}{([\sigma] - l_1 \gamma) ([\sigma] - l_2 \gamma)}.$$

Kolmanda elemendi alumisele ristlõikele on rakendatud jõud  $F_2 [\sigma]$ . Järelikult sama valemi (25) järgi

$$F_3 \geq \frac{F_2 [\sigma]}{[\sigma] - l_3 \gamma} = \frac{P [\sigma]^3}{([\sigma] - l_1 \gamma) ([\sigma] - l_2 \gamma) ([\sigma] - l_3 \gamma)}$$

Analoogiliselt ristlõigetega  $F_2$  ja  $F_3$  määramise valemitele kirjutame ka valemi  $n$ -da elemendi ristlõike määramiseks:

$$F_n \geq \frac{P [\sigma]^{n-1}}{([\sigma] - l_1 \gamma) ([\sigma] - l_2 \gamma) ([\sigma] - l_3 \gamma) \dots ([\sigma] - l_n \gamma)}$$

Erijuhul, kui kõikide astmete pikkused on ühesugused, s. o.

$$l_1 = l_2 = l_3 = \dots = l_n = \frac{L}{n}, \text{ siis}$$

$$F_n \geq \frac{P [\sigma]^{n-1}}{\left([\sigma] - \frac{L}{n} \cdot \gamma\right)^n}$$

Arvutamise lihtsustamiseks võime selle valemi teisendada järgmiseks:

$$F_n \geq \frac{P [\sigma]^{n-1}}{[\sigma]^n \left(1 - \frac{L}{n} \frac{\gamma}{[\sigma]}\right)^n} = \frac{P}{[\sigma]} \frac{1}{\left(1 - \frac{L}{n} \frac{\gamma}{[\sigma]}\right)^n} \quad (32)$$

**Näide 13.** Kolme astmega prismaatilisele vardale mõjub tõmbav koormus  $P = 12$  t, mis on rakendatud varda otsa. Määrata varda astmete ristlõiked, varda kogupikenemine ning saavutatav kaalu vähenemine, võrreldes konstantse ristlõikega vardaga, kui varda iga üksiku astme pikkus  $l = 50$  m, lubatav pinge  $[\sigma] = 500$  kg/cm<sup>2</sup>, elastsusmoodul  $E = 2 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup> ja erikaal  $\gamma = 7,8$  g/cm<sup>3</sup> = 0,0078 kg/cm<sup>3</sup>.

*Lahendus.* Lugesed astmeid altpoolt ülespoole, saame esimese astme ristlõikepindalaks

$$F_1 = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l} = \frac{12\,000}{500 - 0,0078 \cdot 5000} = 26 \text{ cm}^2.$$

Esimese astme kaal

$$G_1 = F_1 l \gamma = 26 \cdot 5000 \cdot 0,0078 = 1010 \text{ kg}.$$

Esimese astme pikenemine valemi (31) järgi

$$\Delta l_1 = \frac{Pl}{EF_1} + \frac{G_1 l}{2EF_1} = \frac{12\,000 \cdot 5000}{2 \cdot 10^6 \cdot 26} + \frac{1010 \cdot 5000}{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 26} = 1,20 \text{ cm}.$$

Teise astme ristlõikepindala

$$F_2 \geq \frac{P [\sigma]}{([\sigma] - l \gamma)^2} = \frac{12\,000 \cdot 500}{(500 - 0,0078 \cdot 5000)^2} = 28,2 \text{ cm}^2.$$

Teise astme kaal

$$G_2 = F_2 l \gamma = 28,2 \cdot 5000 \cdot 0,0078 = 1100 \text{ kg}.$$

Teise astme pikenemine

$$\begin{aligned}\Delta l_2 &= \frac{(P + G_1)l}{EF_2} + \frac{G_2 l}{2EF_2} = \\ &= \frac{(12000 + 1010) 5000}{2 \cdot 10^6 \cdot 28,2} + \frac{1100 \cdot 5000}{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 28,2} = 1,12 \text{ cm.}\end{aligned}$$

Kolmanda astme ristlõikepindala

$$F_3 \geq \frac{P[\sigma]^2}{([\sigma] - \gamma l)^3} = \frac{12000 \cdot 500^2}{(500 - 0,0078 \cdot 5000)^3} = 30,6 \text{ cm}^2.$$

Kolmanda astme kaal

$$G_3 = F_3 \gamma l = 30,6 \cdot 0,0078 \cdot 5000 = 1190 \text{ kg.}$$

Kolmanda astme pikenemine

$$\begin{aligned}\Delta l_3 &= \frac{(P_1 + G_1 + G_2)l}{EF_3} + \frac{G_3 l}{2EF_3} = \\ &= \frac{(12000 + 1010 + 1100) 5000}{2 \cdot 10^6 \cdot 30,6} + \frac{1190 \cdot 5000}{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 30,6} = 1 \text{ cm.}\end{aligned}$$

Varda kogukaal

$$G = G_1 + G_2 + G_3 = 1010 + 1100 + 1190 = 3300 \text{ kg.}$$

Varda kogupikenemine

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 1,2 + 1,12 + 1 = 3,32 \text{ cm.}$$

Kui varras oleks konstantne ristlõikega, siis valemiga (25) määratav vajalik ristlõige, arvestades omakaalu, oleks:

$$F \geq \frac{P}{[\sigma] - \gamma L} = \frac{12000}{500 - 0,0078 \cdot 3 \cdot 5000} = 31,3 \text{ cm}^2.$$

Sellise varda kaal on:

$$G' = FL\gamma = 31,3 \cdot 3 \cdot 5000 \cdot 0,0078 = 3662 \text{ kg.}$$

Järelikult astmelise varda puhul kokkuhoid kaalus võrdub

$$\Delta G = G' - G = 3662 - 3300 = 362 \text{ kg,}$$

või protsentides

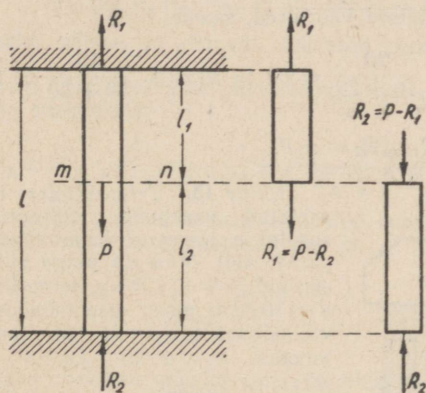
$$\frac{362}{3662} \cdot 100 \approx 10\%.$$

## § 18. Staatiliselt määramatud ülesanded tõmbel ja survel

Paljudes tugevusõpetuse ülesannetes ei saa prussides mõjuvaid sisejõude määrata ainuüksi absoluutselt kõva keha staatika tasakaaluvõrrandite abil. See osutub võimatuks näi-

teks juhul, kui tundmatute jõudude arv on suurem antud juhu jaoks koostatavate staatika tasakaaluvõrrandite arvust. Seetõttu nimetatakse selliseid ülesandeid *staatiliselt määramatuteks* ülesanneteks. Staatiliselt määramatute ülesannete lahendamiseks lisatakse absoluutselt kõva keha staatika võrranditele elastsete deformatsioonide uurimisel saadud puuduvate võrrandite arv. Elastsete deformatsioonide võrrandid erinevad absoluutselt kõva keha staatika võrranditest. Neis esineb peale jõudude ja geomeetriliste mõõdete veel suurus, mis iseloomustab materjali elastseid omadusi, s. o. materjali elastsusmoodul.

Käesolevas paragrahvis on konkreetsete näidete varal antud mõningate staatiliselt määramatute ülesannete lahendused tõmbel ja survel.



Joonis 37.

**Näide 14.** Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud terasprussile, mille pikkus on  $l$  ja ristlõikepindala  $F \text{ cm}^2$ , mõjub lõikes  $mn$  rakendatud jõud  $P = 3 \text{ t}$  (joon. 37). Lõige  $mn$  asetseb ülemisest kinnitusest kaugusel  $l_1 = 10 \text{ cm}$ , alumisest aga kaugusel  $l_2 = 20 \text{ cm}$ . Määrata jõud prussi osades  $l_1$  ja  $l_2$ .

*Lahendus.* Jõud  $P$  tõmbab prussi ülemist osa ja surub alumist osa, mistõttu prussi mõlemad kinnitusreaktsioonid on suunatud ülespoole. Tähistame reaktsiooni ülemises kinnituses  $R_1$ , alumises kinnituses aga  $R_2$ . Antud juhul annab staatika reaktsioonide määramiseks ainult ühe tasakaaluvõrrandi  $\sum Y = 0$ , millest saame

$$R_1 + R_2 = P.$$

Teise võrrandi saame prussi deformatsiooni uurimisel. Kuna prussi otsad on kinnitatud, siis ilmselt jõud  $P$  jaotub ülemise ja alumise osa vahel nii, et ülemise osa pikenedamine võrdub alumise lühenedamisega. Siit saame teise võrrandi

$$\frac{R_1 l_1}{EF} = \frac{R_2 l_2}{EF}$$

ehk

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_2}{l_1},$$

s. o. reaktsioonid on pöörduvõrdelised pikkustega  $l_1$  ja  $l_2$ .

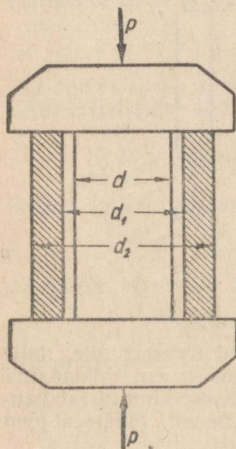
Lahendades selle võrrandi koos staatika võrrandiga, leiame, et

$$R_1 = P \frac{l_2}{l_1 + l_2} \text{ ja } R_2 = P \frac{l_1}{l_1 + l_2},$$

ehk asetades arvulised väärtused, saame:

$$R_1 = 3 \cdot \frac{20}{10 + 20} = 2 \text{ t ja } R_2 = 3 \cdot \frac{10}{10 + 20} = 1 \text{ t.}$$

Kui  $l_1 = l_2$ , siis  $R_1 = R_2 = \frac{1}{2} P$ .



Joonis 38.

Näide 15. Terassilinder (joon. 38) on asetatud vaskpuksi. Silindrit ja puksi surutakse jõuga  $P$  kahe absoluutselt jäiga plaadi abil. Määrata pinge silindris ja püksis, kui  $P = 40\,000$  kg, terassilindri läbimõõt  $d = 10$  cm, puksi siseläbimõõt  $d_1 = 11$  cm, välisläbimõõt  $d_2 = 21$  cm, terase elastsusmoodul  $E_t = 2 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>, vasel  $E_v = 1 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>.

Lahendus. Terassilindrile tuleva jõu  $P_t$  ja vaskpuksile tuleva jõu  $P_v$  määramiseks annab staatika ainult ühe võrrandi

$$P_t + P_v = P. \quad (a)$$

Ülesande lahendamiseks puuduva teise võrrandi saame deformatsioonide uurimisel. Plaatide järeleandmatuse tõttu lühenevad silinder ja püks ühepalju. Terassilindri lühenedamine

$$\Delta l_t = \frac{P_t l_t}{E_t F_t}$$

Vaskpuksi lühenedamine

$$\Delta l_v = \frac{P_v l_v}{E_v F_v}.$$

Kuna ülesande tingimuste põhjal  $\Delta l_t = \Delta l_v$ , siis

$$\frac{P_t}{E_t F_t} = \frac{P_v}{E_v F_v}.$$

Selle deformatsioonivõrrandi võime avaldada kujul:

$$\frac{P_t}{P_v} = \frac{E_t F_t}{E_v F_v}. \quad (b)$$

Võrrandist (b) näeme, et silindrile ja puksile mõjuv jõud  $P$  jaotub võrdeliselt nende jäikustega.

Lahendades võrrandid (a) ja (b) koos, saame:

$$P_t = P \frac{E_t F_t}{E_t F_t + E_v F_v} \quad \text{ja} \quad P_v = P \frac{E_v F_v}{E_v F_v + E_t F_t}.$$

Näist võrrandeist näeme, et jõudude suurused olenevad silindri ja puksi jäikusest.

Jagades need jõud ristlõigete pindaladega, leiame vastavalt pingete terasilindris ja vaskpuksis:

$$\sigma_t = P \frac{E_t}{E_t F_t + E_v F_v}, \quad \sigma_v = P \frac{E_v}{E_v F_v + E_t F_t}.$$

Võrreldes saadud pingeid näeme, et nende suhe teineteisesse on võrdeline materjalide elastsusmoodulitega ja ei olene ristlõigete suhtest:

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_v} = \frac{E_t}{E_v}. \quad (c)$$

Sellele järeldusele oleksime võinud tulla ka lihtsamini: kuna silindri ja puksi suhtelised deformatsioonid neid suruvate plaatide järeleandmatuse tõttu on võrdsed, siis vastavalt Hooke'i seadusele on pinged neis võrdelised elastsusmoodulitega:

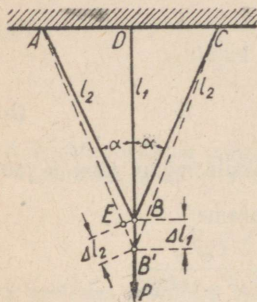
$$\frac{\sigma_t}{\sigma_v} = \frac{E_t \varepsilon_t}{E_v \varepsilon_v} = \frac{E_t}{E_v}.$$

Määrame nüüd pingete arvulised väärtused, asetades vastavatesse avaldistesse täht-tähiste väärtused:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= P \frac{E_t}{E_t F_t + E_v F_v} = 40\,000 \frac{2 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6 \frac{3,14 \cdot 10^2}{4} + 1 \cdot 10^6 \frac{3,14(21^2 - 11^2)}{4}} \\ &= 194 \text{ kg/cm}^2, \end{aligned}$$

$$\sigma_v = \sigma_t \frac{E_v}{E_t} = 194 \frac{1 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6} = 97 \text{ kg/cm}^2.$$

Näide 16. Koormus  $P = 1 \text{ t}$  (joon. 39) on riputatud kolme varda külge. Vertikaalse terasvarda ristlõige  $F_t = 1 \text{ cm}^2$ , kummagi külgmise vaskvarda oma aga  $F_v = 2 \text{ cm}^2$ . Määrata pinged varrastes ja leida, kuipalju vajub allapoole koormuse rakenduspunkt  $B$ , kui vertikaalse varda pikkus  $l_1 = 0,5 \text{ m}$  ja nurk  $\alpha = 45^\circ$ .



Joonis 39.

*Lahendus.* Tähistame vertikaalvardas mõjuva tõmbejõu  $X$ -iga.

Sarniiri  $B$  esimesest tasakaalutingimusest (jõudude projektsioonide summa horisontaalsuunale võrdub nulliga) järgneb, et sisejõud kaldvarrastes on võrdsed. Tähistame need jõud  $Y$ -ga. Sarniiri  $B$  teisest tasakaalutingimusest (jõudude projektsioonide summa vertikaalsuunale võrdub nulliga) saame:

$$X + 2Y \cos \alpha = P. \quad (a)$$

Jõudude  $X$  ja  $Y$  määramiseks puuduva võrrandi saame varraste deformatsioonide uurimisel. Võtku koormuse rakenduspunkt pärast varraste deformeerumist uue asendi  $B'$ . Varraste asendid pärast deformatsiooni on näidatud joonisel 39 punktiiriga.

Vertikaalvarda pikenemine avaldub:

$$BB' = \Delta l_1 = \frac{Xl_1}{E_t F_t}.$$

Mingi kaldvarda, näiteks vasakpoolse kaldvarda pikenemise võime määrata, langetades punktist  $B$  ristjoone varda uuele asendile  $AB'$ . Kuna tugevusõpetuses vaadeldavad deformatsioonid on väikesed, siis võime võtta pikkuse  $AE = AB$ , s. o. ristjoone  $BE$  võtta ringjoone kaareks raadiusega  $AB$  ja lugeda, et nurk  $DB'A = \alpha$ . Siis külgmise varda pikenemine, nagu näeme kolmnurgast  $BB'E$ , võrdub:

$$EB' + BB' \cos \alpha, \\ \Delta l_2 = \Delta l_1 \cos \alpha = \frac{Xl_1}{E_t F_t} \cos \alpha.$$

Kuid külgmise varda pikenemise  $\Delta l_2$  võime määrata ka Hooke'i seaduse järgi:

$$\Delta l_2 = \frac{Yl_2}{E_v F_v},$$

järelikult,

$$\frac{Yl_2}{E_v F_v} = \frac{Xl_1 \cos \alpha}{E_t F_t};$$

kuna  $l_1 = l_2 \cos \alpha$ , siis

$$\frac{Y}{E_v F_v} = \frac{X \cos^2 \alpha}{E_t F_t} \quad (b)$$

Lahendame selle deformatsioonivõrrandi koos staatika võrrandiga (a). Võrrandist (b) saame

$$Y = X \cos^2 \alpha \frac{E_v F_v}{E_t F_t} \quad (c)$$

Asetades selle  $Y$  väärtuse võrrandisse (a), saame

$$X + 2X \cos^3 \alpha \frac{E_v F_v}{E_t F_t} = P,$$

millest

$$X = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha \frac{E_v F_v}{E_t F_t}} \quad (d)$$

Asetades leitud  $X$  väärtuse võrrandisse (c), saame

$$Y = \frac{P \cos^2 \alpha \frac{E_v F_v}{E_t F_t}}{1 + 2 \cos^3 \alpha \frac{E_v F_v}{E_t F_t}}$$

Kui kõik vardad on valmistatud ühesugusest materjalist ja ühesuguse ristlõikega, siis jõud  $X$  ja  $Y$  võrranditest (d) ja (c) võrduvad:

$$X = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

ja

$$Y = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

Leiame varrastes mõjuvate jõudude arvulised väärtused:

$$\cos \alpha = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos^2 \alpha = 0,5; \quad \cos^3 \alpha = 0,353;$$

$$X = \frac{1000}{1 + 2 \cdot 0,353 \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 2}{2 \cdot 10^6 \cdot 1}} = \frac{1000}{1,706} = 585 \text{ kg.}$$

$$Y = \frac{1000 \cdot 0,5 \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 2}{2 \cdot 10^6 \cdot 1}}{1 + 2 \cdot 0,353 \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 2}{2 \cdot 10^6 \cdot 1}} = 293 \text{ kg.}$$

Pinged vertikaalvardas ja külgmistes varrastes võrduvad vastavalt:

$$\sigma_t = \frac{X}{F_t} = \frac{585}{1} = 585 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_v = \frac{Y}{F_v} = \frac{293}{2} \approx 147 \text{ kg/cm}^2.$$

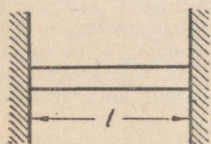
Koormuse rakenduspunkt  $B$  vajub allapoole suuruse võrra

$$\Delta l_1 = \frac{Xl_1}{E_t F_t} = \frac{585 \cdot 50}{2 \cdot 10^6 \cdot 1} = 0,0146 \text{ cm} = 0,146 \text{ mm}.$$

## § 19. Temperatuuri muutumisest tekkivad pinged

Materjali temperatuuri tõusmine ja langemine põhjustab materjalis vastavalt pikenedamise või lühenemise. Seetõttu detaili ebaühtlasel soojenemisel või jahtumisel võivad selles takistatud deformatsioonide puhul tekkida temperatuuripinged. Nii näiteks valandites võivad ohtlikud pinged tekkida ebaühtlase jahtumise tõttu. Turbiini kettas tekivad suured temperatuuripinged temperatuuri erinevuse tõttu ketta tsentris ja perifeerias. Temperatuuripinged tekivad samuti erinevatest materjalidest valmistatud ning siis omavahel ühendatud masinaosades, tingituna materjalide erinevatest joonpaisumisteguritest.

Vaatleme nüüd temperatuuri muutumisest tingitud temperatuuripingete tekkimise lihtsaimat näidet staatiliselt määramatus süsteemis. Olgu teraspruss pikkusega  $l$  (joon. 40) kinnitatud hoone kahe kivi-seina vahele. Kui üks prussi otstest ei oleks kinnitatud, siis temperatuuri muutumisel pruss võib vabalt pikeneda ja lüheneda, s. o. temperatuuri muutumine ei kutsu temas esile temperatuuripingeid. Antud juhul tekib prussis aga pinge, kuna seinad takistavad prussi deformeerumist.



Joonis 40.

Olgu pruss kinnitatud seintesse temperatuuril  $t_1$  ning olgu terase joonpaisumistegur  $\alpha$ . Leiame pinge prussis, kui temperatuur muutub ja saab võrdseks  $t_2$ .

Tähistame temperatuuri muutumise  $t$ -ga. Kui prussi üks otstest jätta vabaks, oleks prussi absoluutne pikenedamine (lühenemine) ilmselt

$$\Delta l = \alpha(t_1 - t_2)l = \alpha t l.$$

Kuid seinad ei võimalda prussil pikeneda (lüheneda). Järelikult tekib temas suhtelisele deformatsioonile vastav surve (tõmbe-)pinge.

Prussi suhteline deformatsioon võrdub:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\alpha t l}{l} \alpha t.$$

Hooke'i seaduse järgi normaalpinge võrdub:

$$\sigma = E\varepsilon = E\alpha t. \quad (33)$$

Kui  $t_1 > t_2$ , siis prussis tekivad tõmbepinged; kui  $t_1 < t_2$ , siis vastupidi, survepinged.

Selleks et määrata jõudu, millega pruss mõjub seinale, on vaja teada prussi ristlõikepindala. Tähistades selle jõu  $P$ , prussi ristlõikepindala aga  $F$ , saame:

$$P = \sigma F = E\alpha t F.$$

Kui võtta terase jaoks lubatav pingeline  $[\sigma] = 1000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$  ja joonpaisumistegur  $\alpha = 0,000012$ , siis temperatuuri muutumisel  $t = 50^\circ \text{C}$  võrra pingeline prussis moodustab:

$$\sigma = E\alpha t = 2 \cdot 10^6 \cdot 0,000012 \cdot 50 = 1200 \text{ kg/cm}^2 > > 1000 \text{ kg/cm}^2.$$

Nagu näeme on tekkiv pingeline lubatavast suurem. Siit järeldub, et projekteerimisel tuleb arvestada temperatuuripingetega ja projekteerida nii, et need üldse puuduksid või oleksid tähtsusetud. Seda saavutatakse otste erilise kinnitamise, temperatuuripilude jätmisega jne.

Tabelis 6 on antud mõningate metallide joonpaisumistegurid.

Tabel 6

Mõningate metallide joonpaisumistegurid  $\alpha$

Materjali nimetus	$\alpha$	Materjali nimetus	$\alpha$
Alumiinium . . . . .	$22,5 \cdot 10^{-6}$	Teras . . . . .	$12 \cdot 10^{-6}$
Pronks . . . . .	$17,5 \cdot 10^{-6}$	Tsink . . . . .	$35,4 \cdot 10^{-6}$
Vask . . . . .	$16,5 \cdot 10^{-6}$	Malm . . . . .	$10,4 \cdot 10^{-6}$
Nikkel . . . . .	$13 \cdot 10^{-6}$	Elektron . . . . .	$28,5 \cdot 10^{-6}$

Näide 17. Trammirööpad on keevitatud kokku ümbritseva keskkonna temperatuuril  $20^{\circ}\text{C}$ . Milline on pinge rööbastes temperatuuri tõusmisel kuni  $40^{\circ}\text{C}$ , kui  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$  ja  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

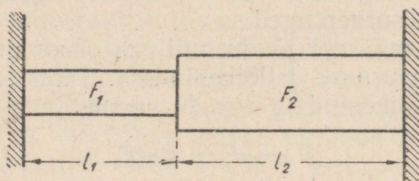
Lahendus. Temperatuuri muutus võrdub:

$$t = 40^{\circ} - 20^{\circ} = 20^{\circ}\text{C}.$$

Pinge määrame valemiga (33):

$$\sigma = Eat = 2 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 480 \text{ kg/cm}^2.$$

Näide 18. Astmeline teraspruss (joon. 41) on kinnitatud kahe järeleandmatu seina vahele temperatuuril  $t_1$ . Määrata pingete suurused prussi mõlemas otsas, kui temperatuur tõusis väärtuseni  $t_2$ .



Joonis 41.

Lahendus. Seinte puudumisel oleks prussi absoluutne pikenemine

$$\Delta l = \alpha(t_2 - t_1)(l_1 + l_2). \quad (\text{a})$$

Kuna seinad takistavad prussi vaba pikenemist, siis järelikult suruvad nad prussi jõuga  $P$ , mis kutsub prussis esile suuruselt pikene misega  $\Delta l$  võrdse lühenemise.

Jõu  $P$  poolt esile kutsutud lühenemine avaldub:

$$\Delta l = \frac{Pl_1}{EF_1} + \frac{Pl_2}{EF_2}. \quad (\text{b})$$

Võrranditest (a) ja (b) saame:

$$\alpha(t_2 - t_1)(l_1 + l_2) = P \left( \frac{l_1}{EF_1} + \frac{l_2}{EF_2} \right),$$

millest

$$P = \frac{\alpha(t_2 - t_1)(l_1 + l_2)}{\frac{l_1}{EF_1} + \frac{l_2}{EF_2}}.$$

Prussi vasakpoolses astmes mõjub pinge

$$\sigma = \frac{\alpha(t_2 - t_1)(l_1 + l_2)}{\left( \frac{l_1}{EF_1} + \frac{l_2}{EF_2} \right) F_1}.$$

Prussi parempoolses astmes mõjub pinge

$$\sigma = \frac{\alpha(t_2 - t_1)(l_1 + l_2)}{\left(\frac{l_1}{EF_1} + \frac{l_2}{EF_2}\right)F_2}$$

## § 20. Staatiliselt määramatute süsteemide arvutus lubatavate koormuste järgi

Ülalpool, nii staatiliselt määratud kui ka staatiliselt määramatute konstruktsioonide arvutamisel tõmbele ja survele määrasime ristlõigete mõõted tingimusest

$$\sigma_{max} \leq [\sigma],$$

kus maksimaalne pinge enampingestatud kohas ei ületa lubatavat pinget. Teisiti öeldes, mõõdete määramine põhines lubatavale pingele.

Viimasel ajal on hakatud konstruktsiooni mõõteid mõnel juhitudel määrama mitte lubatava *pinge*, vaid lubatava *koormuse* järgi. Selgitame uue meetodi eelist, võrreldes arvutusmeetodiga lubatavate pingete järgi.

Määrame pehmest terasest, mille voolavuspiir on  $\sigma_T$ , valmistatud varda ristlõikemõõded. Tugevusvaru olgu  $k$ . Varda ristlõikepindala määratakse järgmisest võrratusest:

$$\frac{P}{F} \leq \frac{\sigma_T}{k} \quad (a)$$

ehk

$$F \geq \frac{Pk}{\sigma_T}. \quad (b)$$

Määrame nüüd ristlõike pindala *lubatava koormuse* järgi, võttes ühe ja sama tugevusvaru  $k$ .

Arvutusmeetodist lubatava koormuse järgi saame:

$$P \leq [P] = \frac{P_{piir}}{k},$$

kus  $[P]$  on lubatav koormus,  $P_{piir}$  aga piirkoormus, antud juhul koormus, mis põhjustab ristlõikes voolavuspiiriga  $\sigma_T$  võrdse pinget:

$$P_{piir} = F\sigma_T. \quad (c)$$

$$[P] = \frac{F\sigma_T}{k}$$

Tugevustingimus (c) avaldub kujul

$$P \leq \frac{F\sigma_T}{k} \quad (d)$$

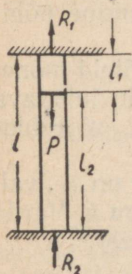
ehk

$$F \geq \frac{Pk}{\sigma_T} \quad (e)$$

Seega antud juhul andis arvutus lubatava koormuse järgi sama tulemuse, mis arvutus lubatava pinge järgi, kuna tugevustingimused [võrrandid (a) ja (d)] jäid ühesugusteks.

Sama tulemuse saame, kui vaatleme staatiliselt määratud konstruktsioonide arvutuse keerukamaid juhte.

Teise tulemuse saame aga juhul, kui konstruktsioon on määramatu ja valmistatud plastilisest materjalist, näiteks pehmest terasest. Vaatleme lihtsat näidet. Olgu pehmest terasest varras, mis on kinnitatud otstest, koormatud jõuga  $P$  joonisel 42 näidatud viisil. Määrame vajaliku ristlõike lubatava pinge ja lubatava koormuse järgi ühe ja sama tugevusvaru  $k$  puhul. Varda ülemises ja alumises osas (vt. näide 14, lk. 59) mõjuvad sisejõud on vastavalt



Joonis. 42.

$$R_1 = P \frac{l_2}{l_1 + l_2} \text{ ja } R_2 = P \frac{l_1}{l_1 + l_2}$$

Olgu  $l_2 > l_1$ ; siis varda ülemises osas pinged on suuremad kui alumises. Varda ristlõikepindala määratakse lubatava pinge järgi arvutamisel tingimusest

$$F \geq \frac{R_1 k}{\sigma_T} = P \frac{l_2}{l_1 + l_2} \frac{k}{\sigma_T}$$

Pinge varda ülemises osas on maksimaalne  $\frac{\sigma_T}{k}$ . Alumises osas mõjub väiksem jõud  $R_2$ , mistõttu ka pinge on siin väiksem kui  $\frac{\sigma_T}{k}$ , tugevusvaru see-eest aga suurem.

Järelikult varda ristlõikepindala määramisel lubatava pinge järgi ei ole materjal varda alumises osas kasutatud täielikult.

Määrame nüüd varda ristlõikepindala lubatava koormuse järgi. Kuna varras on pehmest terasest, millel tõmbe- ja survediagrammil on voolavust tähistav lõik, siis pärast seda, kui pinge varda ülemises osas küünib voolavuspiirini, ta ei saa enam suureneda. Jõu  $P$  suurenemisel kasvab pinge ainult varda alumises osas. See toimub kuni jõu  $P$  selle väärtuseni, mil ka varda alumises osas pinge saavutab voolavuspiiri. Alles pärast seda põhjustab jõu edasine suuremine kogu varda voolamise. Teiste sõnadega, antud juhul on piirkoormuseks koormus, mis tekitab varda alumises osas  $\sigma_T$ -ga võrdse pinge.

Pärast seda, kui pinge varda ülemises osas küünib  $\sigma_T$ -ni, muutub meie süsteem staatiliselt määratuks, kuna on teada ülemise osa tõmbele tuleva piirjõu osa. Viimane võrdub  $\sigma_T \cdot F_1$ , kus  $F_1$  on varda otsitav ristlõikepindala.

Järelikult, prussi alumist osa suruva piirjõu teine osa võrdub  $P_{piir} - \sigma_T F_1$ . Kui see jõud kutsub esile varda alumises osas  $\sigma_T$ -ga võrdse pinge, siis kehtib võrdus

$$P_{piir} - \sigma_T F_1 = \sigma_T F_1.$$

Järelikult piirkoormus võrdub:

$$P_{piir} = 2\sigma_T F_1.$$

Kuna tugevustingimus lubatava koormuse järgi arvutamisel avaldub võrratusega

$$P \leq [P] = \frac{P_{piir}}{k},$$

siis saame

$$Pk \leq 2\sigma_T F_1,$$

millest otsitav pindala

$$F_1 \geq \frac{Pk}{2\sigma_T}.$$

Võrreldes lubatava pinge järgi leitud pindala  $F$  lubatava koormuse järgi leitud pindalaga  $F_1$ , näeme et

$$F_1 < F.$$

## Pindalade suhe

$$\frac{F_1}{F} = \frac{Pk}{2\sigma_T} \cdot \frac{Pk}{\sigma_T} \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2} = \frac{l_1 + l_2}{2l_2}$$

Tähistades  $\frac{l_2}{l_1} = n$ , siis

$$\frac{F_1}{F} = \frac{1+n}{2n}$$

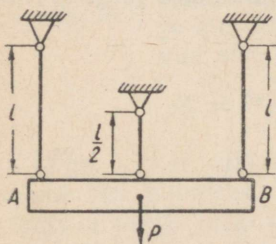
Seega vaadeldud juhul oleneb pindalade suhe suurusest  $n$ , s. o. koormuse  $P$  rakenduskohast.

Nii näiteks kui  $\frac{l_2}{l_1} = 20$ , siis  $\frac{F_1}{F} = \frac{21}{40}$ , s. o. lubatava

koormuse järgi arvutamisel saadakse ristlõike vajalik pindala ligi kaks korda väiksem, kui lubatava pinge järgi arvutamisel. Järelikult kulub detaili valmistamiseks ka kaks korda vähem materjali. Ökonoomiat ei saavutata ainult ühel juhul, s. o. kui  $n = 1$ . Sel juhul annavad lubatava koormuse ja lubatava pinge järgi tehtud arvutused ühesugused tulemused, sest  $n = 1$  puhul on pinge üks ja sama kogu varda pikkuse ulatuses.

Arvutusmeetod lubatava koormuse järgi arvestab täielikumalt plastilistest materjalidest valmistatud konstruktsioonide tugevust. See võimaldab vähendada konstruktsiooni kaalu, s. o. hoida kokku selle valmistamiseks kuluvat materjali, mistõttu viimasel ajal see meetod leiab praktikas üha laialdasemat rakendamist. Arvutuste tulemused uue meetodi järgi langevad hästi ühte katseandmetega.

**Näide 19.** Kolm pehmet terasest varrast, voolavuspiiriga  $\sigma_T$  ja ühesuguse ristlõikega  $F$ , hoiavad ülal absoluutselt kõva prussi  $AB$ , millele on rakendatud jõud  $P$  (joon. 43). Äärmised vardad pikkusega  $l$  on asetatud sümmeetriliselt keskmise varda suhtes, mille pikkus on  $\frac{1}{2}l$ .



Joonis 43.

Võrrelda lubatavate jõudude suurusi, mis on saadud arvutamisel lubatava pinge ja lubatava koormuse järgi, kui tugevusvaru nii ühel kui ka teisel juhul on  $k$ .

*Lahendus.* Määrame lubatava jõu esmalt lubatava pinge järgi. Tähistame selle jõu  $P'$ -ga. Kuna äärmised vardad on asetatud kesk-

mise varda ja koormuse rakenduspunkti suhtes sümmeetriliselt, siis nad võtavad vastu võrdsed jõud. Tähistame need jõud  $P_1$ -ga. Keskmise vardaga vastuvõetava jõu tähistame  $P_2$ -ga.

Tasakaalutingimusest saame:

$$2P_1 + P_2 - [P'] = 0. \quad (a)$$

Tundmatute  $P_1$  ja  $P_2$  määramiseks koostame deformatsiooni lisavõrrandi. Kuna pruss on absoluutselt jäik, siis varraste pikenemised on ühesugused:

$$\frac{P_1 l}{EF} = \frac{P_2 \frac{1}{2} l}{EF}$$

ehk

$$P_1 = \frac{1}{2} P_2. \quad (b)$$

Võrranditest (a) ja (b) leiame:

$$P_1 = \frac{1}{4} [P']; \quad P_2 = \frac{1}{2} P'.$$

Kuna keskmine varras võtab vastu suurema jõu, siis lubatava jõu  $[P']$  määrame selle varda tugevustingimusest:

$$\frac{1}{2} [P'] \leq \frac{\sigma_T}{k} = [\sigma],$$

millest

$$[P'] \leq \frac{2\sigma_T F}{k}.$$

Määrame nüüd lubatava koormuse arvutusmeetodiga lubatava jõu. Tähistame jõu piirväärtuse, mille juures kõikides varrastes pinged saavutavad voolavuspiiri,  $P_{piir}$ . Jõu kasvamisel pinged saavutavad voolavuspiiri keskmises vardas varem, kui äärmistes varrastes. Momendil, mil pinged keskmises vardas saavutavad voolavuspiiri  $\sigma_T$  võtab see vastu jõu  $\sigma_T F$ . Sel juhul kummalegi äärmisele vardale langeks jõud

$$\frac{1}{2} (P_{piir} - \sigma_T F).$$

Kuna jõu piirväärtuse puhul pinge saavutab äärmistes varrastes voolavuspiiri, siis saame:

$$\frac{1}{2} \frac{(P_{piir} - \sigma_T F)}{F} = \sigma_T.$$

Määrame siit  $P_{piir}$  väärtuse:

$$P_{piir} = 3\sigma_T F.$$

Jõu lubatav väärtus, mille tähistame  $[P'']$ , avaldub:

$$[P''] = \frac{P_{piir}}{k} = \frac{3\sigma_T F}{k}.$$

Lubatavate jõudude  $[P']$  ja  $[P'']$  väärtuste võrdlusest järgneb, et arvutusmeetod lubatava koormuse järgi lubab kasutada 1,5 korda suuremat jõudu, kui arvutusmeetod lubatava pinge järgi.

## § 21. Kontrollküsimusi.

Mida nimetatakse pingete kontsentratsiooniteguriks?

Mida nimetatakse lubatavaks pingeks ja tugevusvaruks?

Missugune pinge võetakse aluseks lubatava pinge valikul hapra materjali korral?

Missugune pinge võetakse aluseks lubatava pinge valikul plastilise materjali korral?

Millistel juhtudel ei arvestata pingete kontsentratsiooni lubatava pinge valikul?

Millist tüüpi ülesandeid lubab lahendada arvutusvõrrand tõmbe (surve) puhul?

Missugust varda pikkust nimetatakse kriitiliseks pikkuseks ja missugust piirpikkuseks?

Milliste valemitega määratakse pinged ja deformatsioonid tõmmatavas või surutavas konstantse ristlõikega prussis, arvestades oma-kaalu mõju?

Milliseid ülesandeid nimetatakse staatiliselt määramatuiuks?

Millised lisavõrrandid tuleb koostada staatiliselt määramatute ülesannete lahendamiseks?

Tuua näide temperatuuripingete tekkimise kohta.

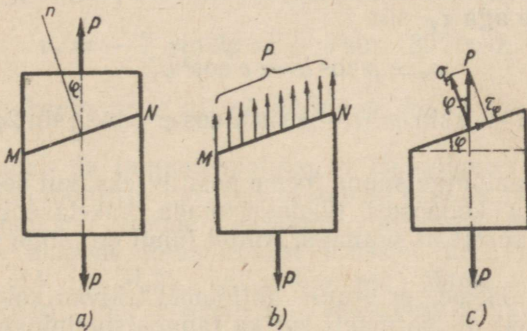
Millistel juhtudel on lubatava koormuse ja lubatava pinge järgi saadud arvutustulemused erinevad?

## LIITPINGEOLUKORD

## § 22. Pinged tasapinnalistes kaldlõigetel telgtõmbe või -surve puhul

Eespool prussi tõmbe vaatlemisel määrasime pinged tasapinnas, mis oli risti mõjuvate jõudude suunaga.

Leiame nüüd, millised pinged tekivad kahe vastassuunalise jõuga  $P$  tõmmatava prussielemendi kaldlõikes  $MN$  (joon. 44, *a*). Loeme lõike kaldenurga  $\varphi$  jõu suunast lõike



Joonis 44.

normaalini vastu kellaosuti liikumissuunda positiivseks. Lõikame mõtteliselt prussi mööda lõiget  $MN$  ja eemaldame ülemise osa (joon. 44, *b*). Alumise allesjäänud osa tasakaalustamiseks rakendame lõikepinnas sise-elastsusjõud. Viimased on paralleelsed jõuga  $P$  ja suunatud ülespoole. Nende resultantjõud on  $P$ . Elastsusjõudude ühtlasel jaotumisel on pinged lõikes  $MN$ :

$$p = \frac{P}{F_\varphi},$$

kus  $F_\varphi$  on lõike  $MN$  pindala.

Kui tähistame ristlõike pindala  $F$ , pinget aga selles lõikes  $\sigma$ , siis

$$\sigma = \frac{P}{F}.$$

Kuna

$$F_\varphi = \frac{F}{\cos \varphi},$$

siis

$$p = \frac{P}{F_\varphi} = \frac{P \cos \varphi}{F} = \sigma \cos \varphi.$$

Pinge  $p$  on kogupinge lõikes  $MN$ . Lõike  $MN$  normaal- ja tangentsiaalpingete määramiseks lahutame kogupinge kaheks komponendiks joonisel 44,  $c$  näidatud viisil. Kui tähistame kaldlõikes  $MN$  mõjuva normaalpinge  $\sigma_\varphi$ , tangentsiaalpinge aga  $\tau_\varphi$  siis

$$\sigma_\varphi = p \cos \varphi = \sigma \cos^2 \varphi, \quad (34)$$

$$\tau_\varphi = -p \sin \varphi = -\sigma \sin \varphi \cos \varphi = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\varphi. \quad (35)$$

Tangentsiaalpinge suuna loeme positiivseks, kui see langeb ühte vastu kellaosuti liikumissuunda lõiketaspinda  $MN$  pööratud normaali suunaga. Antud juhul on pinget  $\tau_\varphi$  negatiivne.

Seega näeme, et prussi lihttõmbel tekivad kaldlõigetes samaaegselt nii normaal- kui ka tangentsiaalpinged. Avaldistest (34) ja (35) näeme, et  $\sigma_\varphi$  ja  $\tau_\varphi$  olenevad kaldenurgast. Vaatleme kuidas need pinged muutuvad nurga  $\varphi$  muutmisega.

Kui  $\varphi = 0$ , s. o. ristlõike puhul saavutab normaalpinge avaldise (34) põhjal oma maksimaalse väärtuse ja võrdub  $\sigma$ -ga:

$$\sigma_\varphi \max = \sigma.$$

Avaldisest (35) näeme, et vaadeldavas tasapinnalises lõikes on tangentsiaalpinge null

$$\tau_{\varphi} = -\frac{\sigma}{2} \sin 0 = 0.$$

Kui  $\varphi = 45^{\circ}$ , siis

$$\sigma_{\varphi} = \sigma \cos^2 \varphi = \sigma \cos^2 45^{\circ} = \sigma \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\sigma}{2},$$

$$\tau_{\varphi} = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\varphi = -\frac{\sigma}{2} \sin 90^{\circ} = -\frac{\sigma}{2}.$$

Järelikult, tõmbejõududega  $45^{\circ}$ -lise nurga all asuvates tasapinnalistes kaldlõigetes on normaal- ja tangentsiaalpinged võrdsed ristlõikes mõjuva poole maksimaalse normaalpingega.

Tasapindades, millel  $\varphi = 135^{\circ}$  ja  $\varphi = 45^{\circ}$ , saavutavad tangentsiaalpinged oma suurima absoluutväärtuse:

$$\tau_{\varphi \max} = \frac{\sigma}{2}, \quad \tau_{\varphi \min} = -\frac{\sigma}{2}. \quad (36)$$

Pikitasapinnas ehk teisiti,  $\varphi = 90^{\circ}$  puhul:

$$\sigma_{\varphi} = \sigma \cos^2 \varphi = \sigma \cos^2 90^{\circ} = 0,$$

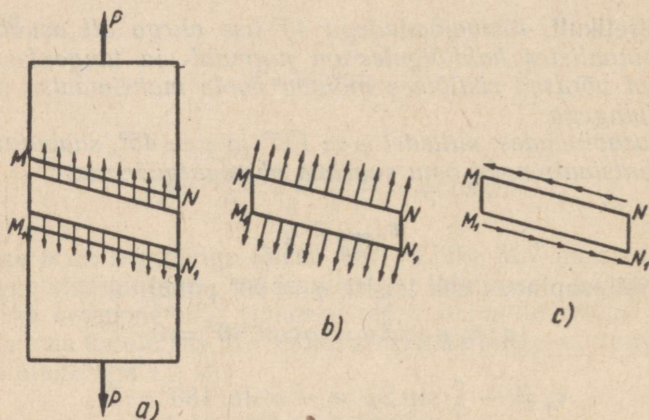
$$\tau_{\varphi} = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\varphi = -\frac{\sigma}{2} \sin 180^{\circ} = 0,$$

s. o. pikitasapinnas ei ole nii normaal- kui ka tangentsiaalpingeid.

Normaal- ja tangentsiaalpinged kaldlõigetes põhjustavad pikijõu mõjumisel prussis vastavaid pikenemis- ja nihkedeformatsioone. Nende deformatsioonide näitlikuks kujutamiseks lõikame tõmmatavast prussist kahe paralleelse lõikega  $MN$  ja  $M_1N_1$  välja lõpmata õhukese elemendi (joon. 45, a). See element on tasakaalus temale lõigetes  $MN$  ja  $M_1N_1$  rakendatud sisejõudude mõjul. Lõikes  $MN$  rakendatud sisejõud kujutavad äralõigatud ülemise osa mõju elemendile, lõikes  $M_1N_1$  aga äralõigatud alumise osa mõju elemendile. Lahutame väljalõigatud elemendile mõjuvad sisejõud normaalseiks (joon. 45, b) ja tangentsiaalseiks (joon. 45, c). Nagu näeme, elemendi tasapindadele  $MN$  ja  $M_1N_1$  mõjuvad normaalsihilised jõud tõmbavad elementi, puutuja sihis mõjuvad jõud aga nihutavad lõikeid  $MN$  ja  $M_1N_1$  teineteise suhtes. Seega pikijõu mõjumisel tekivad prussis samaaegselt normaal- ja tangentsiaalpinged ning neile pingetele vastavad pikenemis- ja nihkedeformatsioonid.

Sellel järelduel on tugevusõpetuses erakordselt suur tähtsus.

Paljud materialid, nagu näiteks pehme teras, avaldavad nihkele väiksemat vastupanu kui katkemisele. Vaatamata sellele, et maksimaalsed tangentsiaalpinged tõmbel ja survel moodustavad ainult poole maksimaalsest normaalpingest, on nad ohtlikud ning võivad põhjustada selliste materjalide purunemist.



Joonis 45.

Tšernovi kaldjoonte ilmumine tõmmataval proovikehal on seletatav tangentsiaalpingete mõjuga. Need palja silmaga märgatavad jooned näitavad materjalis kristallide nihete tekkimist. Joonte sihid langevad peaaegu ühte maksimaalsete tangentsiaalpingete tasapindadega.

Normaalpinge  $\sigma_{\varphi + \frac{3\pi}{2}}$  ja tangentsiaalpinge  $\tau_{\varphi + \frac{3\pi}{2}}$  lõike MN tasapinna ristasapinnas  $M_1N_1$  (joon. 46) võime määrata valemitega (34) ja (35), asetades neis nurga  $\varphi$  nurgaga  $\varphi + \frac{3\pi}{2}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi + \frac{3\pi}{2}} &= \sigma \cos^2 \left( \varphi + \frac{3\pi}{2} \right) = \\ &= \sigma \sin^2 \varphi, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi + \frac{3\pi}{2}} &= -\frac{\sigma}{2} \sin 2\left(\varphi + \frac{3\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (38)$$

Liites kahes teineteisega risti asetsevas tasapinnas (lõiked  $MN$  ja  $M_1N_1$ ) mõjuvad normaalpinged, saame:

$$\sigma_{\varphi} + \sigma_{\varphi + \frac{3\pi}{2}} = \sigma \cos^2\varphi + \sigma \sin^2\varphi = \sigma(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \sigma. \quad (39)$$

Järelikult, normaalpingete summa tõmmatava prussi kahes teineteisega risti asetsevas tasapinnas võrdub ristlõike tasapinnas mõjuva normaalpingega  $\sigma$ .

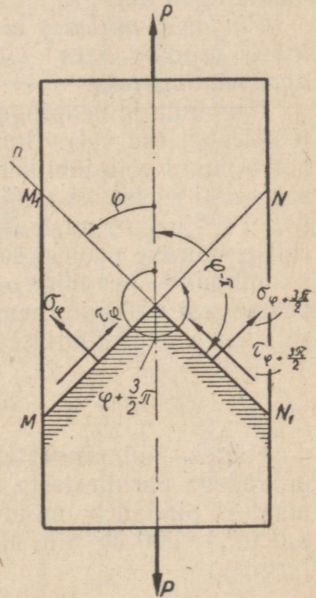
Teineteisega risti asetsevates tasapindades mõjuvate tangentsiaalpingete võrdlemisest [valemid (35) ja (38)] leiame, et

$$\tau_{\varphi} = -\tau_{\varphi + \frac{3\pi}{2}}. \quad (40)$$

Järelikult, kahes teineteisega risti asetsevas tasapinnas mõjuvad tangentsiaalpinged on absoluutsuuruselt võrdsed, kuid vastupidise märgiga (suunaga).

Seda tähtsat järeldust nimetatakse tangentsiaalpingete paaritiesinemise seaduseks. Seega kui elemendi mingis tasapinnas mõjuvad tangentsiaalpinged, siis selle risttasapinnas mõjuvad absoluutsuuruselt võrdsed, kuid märgilt vastupidised tangentsiaalpinged.

Lõpuks märgime, et kõik selles paragrahvis prussi telg-tõmbele tuletatud valemid kehtivad ka prussi telgsurve puhul. Tuleb ainult meeles pidada, et tõmbavad pinged loetakse positiivseteks, suruvad aga negatiivseteks.



Joonis 46.

## § 23. Peapingete mõiste

Paragrahvis 22 prussi ühesuunalisel tõmbel (survel) nägime, et prussis mõnedel pinnakestel tekivad üheaegselt normaalpinged  $\sigma$  kui ka tangentsiaalpinged  $\tau$ . Lisaks sellele leidsime samas paragrahvis, et prussis on lõikeid, milledes tangentsiaalpingeid ei esine. Ühed sellistest lõigetest on risti tõmmatava (surutava) prussi teljega ( $\varphi = 0$ ), teised aga paralleelsed ( $\varphi = 90^\circ$ ). Nagu nägime, on esimestes lõigetes tekkivad normaalpinged maksimaalsed, teistes lõigetes aga minimaalsed. Vaadeldaval juhul võrduvad minimaalsed normaalpinged nulliga.

*Pindasid, milledes ei mõju tangentsiaalpingeid, nimetatakse peapindadeks, viimastes mõjuvaid normaalpingeid aga peapingeteks.*

Peapindu ja peapingeid võib määrata mitte ainult prussi telgtõmbel (survel). Ilmneb, et keha meelevaldse pingeolukorra puhul võib läbi keha iga punkti tõmmata kolm üksteisega risti asetsevat peapinda, s. o. kolm sellist pinda, milledel ei mõju tangentsiaalpingeid. Ühes pinnas mõjub algebralise suuruse poolest suurim (maksimaalne) pinge  $\sigma_1$ , teises pinnas — peapinge  $\sigma_2$  ning kolmandas pinnas — kolmest peapingest väikseim peapinge  $\sigma_3$ . Seega peapingete numeratsioon vastab tingimusele

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Näiteks kui pingestatud kehast on lõigatud välja peapindadega paralleelsete tahkudega elementaarkuubik ja kui nendes pindades mõjuvad pinged  $+500 \text{ kg/cm}^2$ ,  $-300 \text{ kg/cm}^2$ ,  $-200 \text{ kg/cm}^2$ , siis peapingete numeratsioon on alljärgnev:

$$\sigma_1 = 500 \text{ kg/cm}^2, \sigma_2 = -200 \text{ kg/cm}^2, \sigma_3 = -300 \text{ kg/cm}^2.$$

Kui ükski kolmest peapingest ei võrdu nulliga, nagu esitatud näites, siis sellist pingeolukorda nimetatakse ruumiliseks pingeolukorraks.

Tasapinnaliseks pingeolukorraks nimetatakse sellist olukorda, kus üks peapingetest võrdub nulliga. Kahesuunalise tõmbe (surve) juhtum kuulub tasapinnalise pingeolukorra hulka.

Kui kaks peapinget võrduvad nulliga, siis sellist pinge-

olukorda nimetatakse lineaarseks pingelukuraks. Paragrahvis 22 vaadeldud ühesuunalise tõmbe (surve) juhtum kuulub lineaarse pingelukorra hulka.

### § 24. Pinged tasapinnalistes kaldlõigetes kahes teineteisega risti asetsevas suunas mõjuva tõmbe (surve) puhul

Olgu prismaatilisest prussist väljalõigatud element tõmmatud ühtlaselt jaotatud pingetega (joon. 47), mis mõjuvad kahes teineteisega risti asetsevas suunas — horisontaalses ja vertikaalses. Kuna prussi horisontaalsetel ja vertikaalsetel pindadel ei ole tangentsiaalpingeid, siis normaalpinged on peapingeteks, mistõttu neid tähistame  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$ , kusjuures

$$\sigma_1 > \sigma_2.$$

Määrame pinged mingis kaldlõikes, mis on risti joonise tasapinnaga.

Kui prussi oleks tõmmatud ainult ühes horisontaalsihis, siis vastavalt valemitele (34) ja (35) pinged lõikes  $MN$  võrduksid:

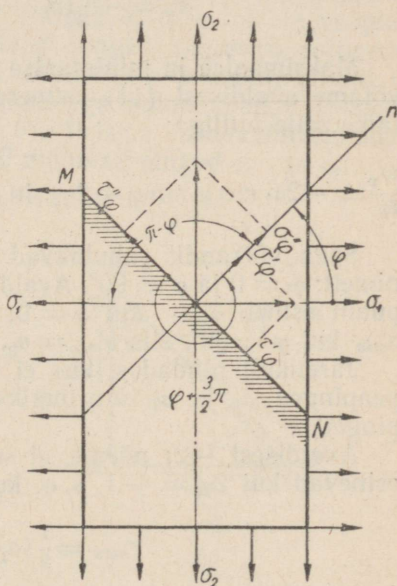
$$\sigma'_\varphi = \sigma_1 \cos^2 \varphi, \quad (a)$$

$$\tau'_\varphi = -\frac{\sigma_1}{2} \sin 2\varphi. \quad (b)$$

Pinged samas lõikes  $MN$ , kuid prussi tõmbest vertikaalsihis, määratakse samuti valemitega (34) ja (35). Asetades viimaste paremates pooltes nurga  $\varphi$  nurgaga  $\varphi + \frac{3}{2}\pi$ , leiame

$$\sigma''_\varphi = \sigma_2 \sin^2 \varphi, \quad (c)$$

$$\tau''_\varphi = \frac{\sigma_2}{2} \sin 2\varphi. \quad (d)$$



Joonis 47.

Kogu normaalpinge lõikes  $MN$  leiame jõudude sõltumatu printsiibi alusel, s. o. summeerides avaldised (a) ja (c):

$$\sigma_{\varphi} = \sigma'_{\varphi} + \sigma''_{\varphi} = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi. \quad (41)$$

Samuti avaldise (b) ja (d) liites saame kogu tangentsiaalpinge:

$$\tau_{\varphi} = \tau'_{\varphi} + \tau''_{\varphi} = -\frac{\sigma_1}{2} \sin 2\varphi + \frac{\sigma_2}{2} \sin 2\varphi$$

ehk

$$\tau_{\varphi} = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\varphi. \quad (42)$$

Maksimaalse ja minimaalse normaalpinge määramiseks võtame avaldisest (41) esimese tuletise  $\varphi$  järgi ja võrrutame selle nulliga:

$$\frac{d\sigma_{\varphi}}{d\varphi} = -2\sigma_1 \cos \varphi \sin \varphi + 2\sigma_2 \sin \varphi \cos \varphi = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\varphi = 0.$$

Seda võrrandit rahuldavad nurga  $\varphi$  kaks väärtust ja nimelt:  $\varphi = 0$  ja  $\varphi = 90^\circ$ . Avaldisest (41) näeme, et  $\sigma_1 > \sigma_2$  puhul esineb  $\sigma_{max}$  kui  $\varphi = 0$ ; sel juhul  $\sigma_{max} = \sigma_1$ , ning  $\sigma_{min}$  kui  $\varphi = 90^\circ$ , siis  $\sigma_{min} = \sigma_2$ .

Järelikult pindades, kus ei ole tangentsiaalpingeid, on peapinged  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  suurimaiks ja väiksemaiks normaalpingeiks.

Avaldisest (42) näeme, et suurimad tangentsiaalpinged esinevad kui  $2\varphi = -1$ , s. o. kui  $\varphi = 135^\circ$ :

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (43)$$

Kui  $2\varphi = +1$ , s. o.  $\varphi = 45^\circ$ , siis sellise pinna jaoks tangentsiaalpinge absoluutsuuruselt võrdub  $\tau_{max}$ .

Järelikult suurimad tangentsiaalpinged võrduvad peapingete poole vahega ja mõjuvad peapindadega  $45^\circ$  nurga all asuvates pindades.

**Näide 20.** Määrata normaal- ja tangentsiaalpinged prussi horizontaaltahuga nurka  $\varphi$  moodustavas kaldpinnas, kui prussi tõmmatakse võrdsete pingetega  $\sigma$  kahes teineteisega risti olevas suunas.

*Lahendus.* Valemi (41) järgi

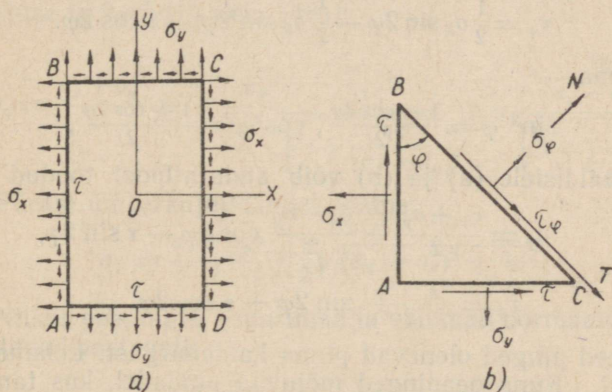
$$\sigma_{\varphi} = \sigma \cos^2 \varphi + \sigma \sin^2 \varphi = \sigma,$$

$$\tau_{\varphi} = -\frac{1}{2}(\sigma - \sigma) \sin 2\varphi = 0.$$

Järelikult, kõikides lõigetes mõjuvad võrdsed normaalpinged; tangentsiaalpingeid lõigetes ei esine.

## § 25. Peapingete määramine

Määrame peapinged tasapinnalise pingeolukorra üldjuhu jaoks. Võtame prussi elemendi, mille tahkudel mõjuvad ühtlaselt jaotatud normaalpinged  $\sigma_x$  ja  $\sigma_y$  ning tangentsiaalpinged  $\tau$  (joon. 48, a). Pinged  $\sigma_x$  ja  $\sigma_y$  ei ole peapinged, kuna pindades, kus need pinged mõjuvad, esinevad veel ka tangentsiaalpinged. Eraldame prussist punkti A ümber lõpmata väikeste tahkudega kolmetahulise elementaarprisma ABC (joon. 48, b). Prisma tasakaalutingimustest määrame kaldpinnal BC mõjuvad pinged  $\sigma_{\varphi}$  ja  $\tau_{\varphi}$ .



Joonis 48.

Kui tähistame tahu BC pindala  $dF$ , siis tahu AC pindala on  $dF \sin \varphi$ , tahu AB pindala aga  $dF \cos \varphi$ . Tahule BC mõjub normaaljõud  $\sigma_{\varphi} dF$  ja tangentsiaaljõud  $\tau_{\varphi} dF$ . Tahule AB mõjub tangentsiaaljõud  $\tau dF \cos \varphi$  ja normaaljõud  $\sigma_x dF \cos \varphi$ . Tahule AC mõjub tangentsiaaljõud  $\tau dF \sin \varphi$  ja normaaljõud  $\sigma_y dF \cos \varphi$ . Otsitavad pinged  $\sigma_{\varphi}$  ja  $\tau_{\varphi}$  leiame, kui projekteerime eraldatud prismale mõjuvad kõik jõud pingete  $\sigma_{\varphi}$  ja  $\tau_{\varphi}$  suundadele ja võrrutame nende jõudude projektsioonide summa nulliga.

Projekteerides jõud teljele  $N$ , saame:

$$\Sigma N = \sigma_{\varphi} dF - \sigma_x dF \cos^2 \varphi + \tau dF \sin \varphi \cos \varphi + \\ + \tau dF \cos \varphi \sin \varphi - \sigma_y dF \sin^2 \varphi = 0;$$

teljele  $T$ :

$$\Sigma T = \tau_{\varphi} dF - \sigma_x dF \sin \varphi \cos \varphi + \tau dF \sin \varphi \sin \varphi - \\ - \tau dF \cos \varphi \cos \varphi + \sigma_y dF \sin \varphi \cos \varphi = 0.$$

Taandades nende võrrandite vasakud ja paremad pooled  $dF$ -ga ja silmas pidades, et

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi); \quad 2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi; \\ \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi,$$

saame normaal- ja tangentsiaalpingete jaoks alljärgnevad avaldised:

$$\sigma_{\varphi} = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi - \tau \sin 2\varphi, \quad (a)$$

$$\tau_{\varphi} = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \sigma_y \sin 2\varphi + \tau \cos 2\varphi. \quad (b)$$

Kuna

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2},$$

siis avaldistele (a) ja (b) võib anda allpool toodud kuju:

$$\sigma_{\varphi} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi - \tau \sin 2\varphi, \quad (44)$$

$$\tau_{\varphi} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau \cos 2\varphi. \quad (45)$$

Need pinged olenevad pinna kaldenurgast. Leiame peapinged. Kuna peapinged mõjuvad pindadel, kus tangentsiaalpingeid ei ole, siis võrrandi (45) järgi saame peapindade asendid, võrrutades  $\tau_{\varphi}$  nulliga.

Siis

$$\operatorname{tg} 2\varphi = - \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (46)$$

Ühest võrrandist saame  $\varphi$  jaoks kaks teineteisest  $90^\circ$  võrra erinevat väärtust. Üks  $\varphi$  väärtusest vastab  $\sigma_{\varphi}$  maksimaalsele väärtusele, teine aga minimaalsele väärtusele.

Selles võime kergesti veenduda, kuna  $\sigma_{\varphi}$ -st esimene tulemus  $\varphi$  järgi

$$\frac{d\sigma_\varphi}{d\varphi} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2 \sin 2\varphi - 2\tau \cos 2\varphi$$

muutub nulliks, asetades sellesse valemi (46) järgi leitud nurga väärtuse.

Seega maksimaalne ja minimaalne pinge, s. o. peapinged prussi iga punkti jaoks mõjuvad kahes teineteisega risti asetsevas tasapinnas. Peapingete määramiseks tuleb meelde, et valemis (44) olevaid trigonomeetrilisi funktsioone võib esitada kujul

$$\sin 2\varphi = \pm \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}}; \quad \cos 2\varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}}.$$

Nüüd kirjutame võrrandi (44) ümber järgmiselt:

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}} \mp \tau \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}}.$$

Peapingete arvutamiseks asetame viimasesse avaldisse väärtuse  $\operatorname{tg} 2\varphi$  [vt. valem (46)]:

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\tau^2}{(\sigma_x - \sigma_y)^2}}} \pm \tau \frac{\frac{2\tau}{(\sigma_x - \sigma_y)}}{\sqrt{1 + \frac{4\tau^2}{(\sigma_x - \sigma_y)^2}}}.$$

Pärast ümberkujundamist saame:

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}.$$

Niisiis peapinged (suurimad ja vähimad normaalpinged) võrduvad vastavalt:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}, \\ \sigma_{min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Liites kaks peapinget, saame:

$$\sigma_{max} + \sigma_{min} = \sigma_x + \sigma_y.$$

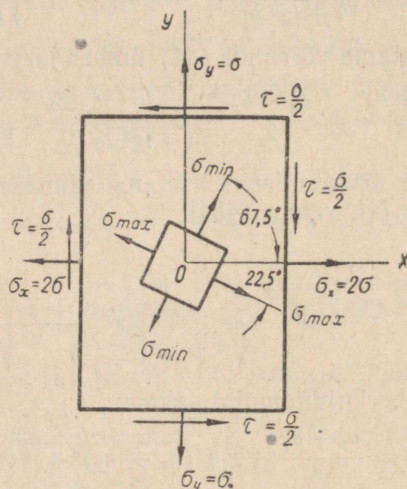
Siit järgneb, et tasapinnalise pingeolukorra üldjuhul, nagu lihttõmbegi puhul [vt. valem (39)], on kahes teineteisega risti asetsevas pinnas mõjuvate normaalpingete summa konstantne suurus ja võrdub peapingete summaga.

Paragrahvis 24 leidsime, et maksimaalsed tangentsiaalpinged võrduvad peapingete poole vahega ja mõjuvad peapindadega  $45^\circ$  nurka moodustavates kaldpindades.

Järelikult maksimaalne tangentsiaalpinge võrdub:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}. \quad (48)$$

Sama tulemuse oleksime saanud võrrandist (45), nagu analoogiliselt võrrandist (44) saime  $\sigma_{max}$  väärtuse.



Joonis 49.

Näide 21. Määrata peapinged ja peapindade asendid elemendile (joon. 49), millele mõjuvad pinged

$$\sigma_x = 2\sigma, \quad \sigma_y = \sigma, \quad \tau = \frac{\sigma}{2}.$$

Valemi (47) järgi määrame peapinged:

$$\sigma_{max} = \frac{2\sigma + \sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(2\sigma - \sigma)^2 + 4 \frac{\sigma^2}{4}} = 2,205\sigma,$$

$$\sigma_{min} = \frac{2\sigma + \sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(2\sigma - \sigma)^2 + 4 \frac{\sigma^2}{4}} = 0,795\sigma.$$

Peapindade asendid määratakse valemiga (46):

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{\sigma}{\sigma} = -1,$$

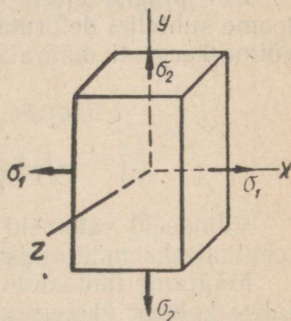
$$\begin{aligned} 2\varphi_1 &= 135^\circ, & 2\varphi_2 &= -45^\circ, \\ \varphi_1 &= 67,5^\circ, & \varphi_2 &= -22,5^\circ. \end{aligned}$$

## § 26. Deformatsioonid kahes teineteisega risti asetsevas suunas mõjuva tõmbe või surve puhul. . Deformatsiooni eritöö

Tõmmatagu ristkülikukujulise ristlõikega prussi (joon. 50) kahes teineteisega risti asetsevas suunas  $x$  ja  $y$  pingetega  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$ . Määratakse suhtelised pikenedused, millised saab pruss telgede  $x$ ,  $y$  ja  $z$  suundades.

Kui prussis mõjuks ainult tõmbepinge  $\sigma_1$ , siis vastavalt Hooke'i seadusele suhteline pikenedamine tõmbe suunas võrduks  $\frac{\sigma_1}{E}$ , suhteline lühenemine telgede  $y$  ja  $z$  suunas aga  $\mu \frac{\sigma_1}{E}$ .

Analoogiliselt sellele ainult ühe tõmbepinge  $\sigma_2$  mõjumisel suhteline pikenedamine tõmbe suunas võrduks  $\frac{\sigma_2}{E}$ , telgede  $x$  ja  $z$  suunas saaks aga pruss suhteliselt lühenemise  $-\mu \frac{\sigma_2}{E}$ .



Joonis 50.

Järelikult pingete  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  samaaegsel mõjumisel on suhtelised deformatsioonid telgede  $x$ ,  $y$  ja  $z$  suundades vastavalt

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E},$$

$$\varepsilon_3 = -\mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E}.$$

Ruumilise pingelõigu üldjuhul on suhtelised deformatsioonid  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  ja  $\varepsilon_3$  vastavalt

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu \left( \frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E} \right), \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \mu \left( \frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_3}{E} \right), \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \mu \left( \frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} \right). \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Erijuhud. 1) Lihttõmme, mil  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = 0$  siis valemist (49) saame:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E}, \quad \varepsilon_2 = -\mu \frac{\sigma}{E}, \quad \varepsilon_3 = -\mu \frac{\sigma}{E}.$$

2) Tõmme kahes omavahel risti olevas suunas, kui  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ;  $\sigma_3 = 0$ ; siis valemist (49) saame:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\sigma}{E} (1 - \mu). \quad (50)$$

Kui pingelokord on tasapinnaline, s. o.  $\sigma_3 = 0$  ning teame suhtelisi deformatsioone  $\varepsilon_1$  ja  $\varepsilon_2$ , siis valemist (49) võime kergesti määrata pinged  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2), \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Viimaseid valemid kasutatakse sageli pingete eksperimentaalseks määramiseks, mõõtes selleks  $\varepsilon_1$  ja  $\varepsilon_2$ .

Määrame ühikkuubi mahu muutumise, kui teda tõmmatakse kolmes üksteisega risti asetsevas suunas  $x$ ,  $y$  ja  $z$ .

Kui enne deformatsiooni kuubi maht võrdus ühikuga  $V_{alg} = 1$ , siis tema maht pärast deformatsiooni külgede pikkuste muutumiste tõttu võrdub:

$$V_{lõpp} = (1 + \varepsilon_1) (1 + \varepsilon_2) (1 + \varepsilon_3).$$

Jättes arvestamata väikeste suhteliste deformatsioonide korutised, saame:

$$V_{lõpp} = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Mahu suurenemine

$$V_{lõpp} - V_{alg} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Asetades valemisse võrranditest (49) saadud  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  ja  $\varepsilon_3$  väärtused, saame:

$$V_{lõpp} - V_{alg} = \left[ \frac{\sigma_1}{E} - \mu \left( \frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E} \right) \right] + \left[ \frac{\sigma_2}{E} - \mu \left( \frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_3}{E} \right) \right] + \left[ \frac{\sigma_3}{E} - \mu \left( \frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} \right) \right]$$

ehk

$$V_{lõpp} - V_{alg} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{E} (1 - 2\mu). \quad (52)$$

Sellest valemist näeme, et  $\mu = 0,5$  puhul pingeolukorra kõikidel juhtudel ei toimu elemendi mahu muutumist.

Leiame nüüd deformatsiooni eritöö avaldise kahesuunalise tõmbe ja surve jaoks. Deformatsiooni eritöö ühesuunalise tõmbe (surve) puhul avaldub valemiga (12):

$$T = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\sigma \varepsilon}{2}. \quad (12)$$

Orienteerides tasapinnalise pingeolukorra korral ühikuubi tahud pindadele, kus mõjuvad pinged  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$ , saame:

$$T = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2}. \quad (53)$$

Asetades siia  $\varepsilon_1$  ja  $\varepsilon_2$  väärtused, leiame:

$$T = \frac{\sigma_1}{2} \left( \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} \right) + \frac{\sigma_2}{2} \left( \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} \right)$$

ehk

$$T = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu \sigma_1 \sigma_2). \quad (54)$$

See ongi eritöö avaldis tasapinnalise pingeolukorra puhul.

**Näide 22.** Määrata kahes teineteisega risti asetsevas suunas pinged  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$ , kui neis suundades mõõdetud suhtelised deformatsioonid võrduvad vastavalt  $\varepsilon_1 = 0,00075$  ja  $\varepsilon_2 = -0,00065$ . Samuti on teada, et

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad \mu = 0,3.$$

*Lahendus.* Pinged  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  arvutame valemitega (51):

$$\sigma_1 = \frac{2 \cdot 10^6}{1 - 0,3^2} (0,00075 - 0,3 \cdot 0,00065) = 1220 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{2 \cdot 10^6}{1 - 0,3^2} (-0,00065 + 0,3 \cdot 0,00075) = -935 \text{ kg/cm}^2.$$

**Näide 23.** Määrata prussi suhtelised deformatsioonid  $\varepsilon_1$  ja  $\varepsilon_2$ , kui tõmbepinged  $\sigma_1 = 1000 \text{ kg/cm}^2$  ja  $\sigma_2 = 500 \text{ kg/cm}^2$ . Elastsusmoodul  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ , Poisson'i tegur  $\mu = 0,3$ .

*Lahendus.* Valemite (49) alusel leiame:

$$\varepsilon_1 = \frac{1000}{2 \cdot 10^6} - 0,3 \frac{500}{2 \cdot 10^6} = 0,0005 - 0,000075 = 0,000425,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{500}{2 \cdot 10^6} - 0,3 \frac{1000}{2 \cdot 10^6} = 0,00025 - 0,00015 = 0,0001.$$

**Näide 24.** Määrata prussi suhtelised deformatsioonid  $\varepsilon_1$  ja  $\varepsilon_2$ , kui tõmbepinge  $\sigma_1 = 600 \text{ kg/cm}^2$ , survepinge aga  $\sigma_2 = -750 \text{ kg/cm}^2$ . Elastsusmoodul  $E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ . Poisson'i tegur  $\mu = 0,3$ .

*Lahendus.* Valemite (49) alusel saame:

$$\varepsilon_1 = \frac{600}{2,2 \cdot 10^6} - 0,3 \frac{-750}{2,2 \cdot 10^6} = 0,000375,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{-750}{2,2 \cdot 10^6} - 0,3 \frac{600}{2,2 \cdot 10^6} = -0,000423.$$

**Näide 25.** Määrata prussile kahes omavahel risti olevas suunas mõjuvate tõmbepingete  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  (joon. 50) suhe, et suhteline deformatsioon  $\varepsilon_1$  puuduks.

*Lahendus.* Asendades valemis (49)  $\varepsilon_1$  nulliga, saame:

$$0 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E},$$

millest

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \mu.$$

## § 27. Tugevusteooriad

Pingete vaatlemisel tõmmatava prussi kaldlõigetes (§ 22) nägime, et nendes esinevad üheaegselt nii normaal- kui ka tangentsiaalpinged ning viimastest tingitud lineaarsed ja nurkdeformatsioonid. Seetõttu isegi pingeolukorra kõige lihtsamal juhul, nagu näiteks prussi ühesuunalisel tõmbel, võivad materjali ohtliku olukorra tekkimise põhjuseks olla antud materjali jaoks määratud piirideni ulatuvad normaal- ja tangentsiaalpinged või suured pikenemised. Edaspidi lepime kokku materjali purunemise all mõista plastiliste materjalide jaoks voolavuse olukorra, habraste materjalide jaoks aga purunemise olukorra tekkimist. Materjalide jaotamine habrasteks ja plastilisteks, nagu juba tähendasime ülalpool §-s 9, on täiesti kokkuleppeline. Lihttõmbel plastilisena näiv materjal võib keerukama pingeolukorra korral puruneda nagu habras materjal, ilma tunduvate jäävate deformatsioonideta. Samuti ka vastupidi, lihttõmbel haprana näiv materjal käitub teises pingeolukorras nagu plastiline.

Seetõttu on õigem rääkida mitte haprast ja plastilisest materjalist, vaid materjali haprast või plastilisest olukorrast.

Sellise hapra materjali nagu malm, osakeste vastupanu katkemisele on väiksem, kui vastupanu libisemisele. Seetõttu tema osakeste vahelise seose rikkumine toimub kuni märgatavate jäävate deformatsioonide ilmumiseni, purunemine aga katkemise näol. Plastilisel materjalil, nagu näiteks pehmel terasel, on vastupanu libisemisele algul väiksem vastupanust katkemisele. Seetõttu sellises materjalis toimub kristallruumvõre elementide libisemine kristallograafilistel tasapindadel, mille tagajärjel tekivad jäävad deformatsioonid. Vastupanu libisemisele hakkab kasvama esimeste jäävate deformatsioonide ilmumisel. Materjali tunduvatele plastilistele deformatsioonidele kaasneb tema lõplik purunemine.

Seega hapras olukorras olevate materjalide tugevust iseloomustatakse osakeste vastupanu suurusega katkemisele, plastiliste materjalide tugevust aga osakeste vastupanu suurusega jäävate deformatsioonide kujunemisele, s. o. voolavuspiiriga.

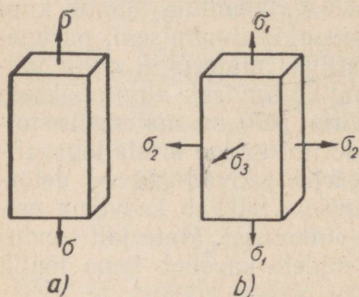
Materjali tõelise purunemispõhjuse küsimusel pole prussi ühesuunalise pingeolukorra puhul erilist praktilist väärtust, kuna lubatavad pinged võime alati määrata materjali vahetu proovimise tulemustest.

Teisiti on see liitpingeolukorra puhul, näiteks nagu prussi tõmbamisel kahes omavahel risti olevas suunas. Sellisel juhul materjali tugevust iseloomustavate suuruste (voolavuspiir plastilistel materjalidel ja tugevuspiir habras- tel materjalidel) katseline määramine on seotud suurte raskustega.

Lihttõmbel saadud voolavuspiiri või tugevuspiiri järgi materjali purunemise tekkimise otsustamiseks liitpingeolukorra puhul on vaja teada materjali purunemise tekkimise tõelist põhjust. Käesoleva ajani on teoreetiliste ja katseliste uurimuste baasil püstitatud mõned oletused materjalide purunemise põhjustest, mida nimetatakse tugevusteooriateks. Tugevusteooriate ülesandeks on hinnata materjalide lihttõmbel või -survel saadud karakteristikute alusel liitpingeolukorras oleva materjali purunemise võimalust.

*Maksimaalsete normaalpingete teooria.* Selle, juba Galilei poolt avaldatud tugevusteooria aluseks on oletus, et materjal puruneb suurimate normaalpingete mõjul. Teisiti väljendades, sõltumatult pingeolukorrast tekib materjali

purunemine siis, kui normaalpinge mingis suunas saavutab sellise suuruse, mille puhul lihttõmbe või -surve juhul toimub purunemine. Purunegu näiteks pruss (joon. 51, a) ühesuunalisel tõmbel normaalpinge  $\sigma$  puhul. Vastavalt sellele teorialele hakkab kolmes omavahel risti olevas suunas tõmmatav pruss (joon. 51, b)



Joonis 51.

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  purunema, kui suurim pinge  $\sigma_1$  saavutab väärtuse  $\sigma$ . Kuna pinged  $\sigma_2$  ja  $\sigma_3$  on väiksemad kui  $\sigma_1$ , siis selles tugevusteoorias neid ei arvestata.

Tõmbele ja survele ühesuguselt töötavate materjalide jaoks tugevustingimus avaldub:

$$\sigma_1 \leq [\sigma].$$

Kui materjalide lubatav survepinge  $[\sigma]_s \neq [\sigma]_t$ , siis tuleb tugevuskontroll teha ka survele.

Kui näiteks  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ , aga  $\sigma_3 < 0$ , siis tugevustingimus avaldub:

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_t, \quad \sigma_3 \leq [\sigma]_s. \quad (55)$$

kus  $[\sigma]_t$  on materjali lubatav tõmbepinge,  $[\sigma]_s$  aga materjali lubatav survepinge.

Esimene tugevusteooria on vanim. Selle tekkimise perioodil olid põhilisteks ehitusmaterjalideks peamiselt haprad materjalid nagu näiteks malm, kivi jt. Materjalide purunemise vaatlused viisid selle teooria loojaid mõttele, et kõikide materjalide purunemise põhjuseks on suurimad normaalpinged. Rahuldavaid tulemusi annab see teooria ainult haprast materjalist detailide arvutamisel. See teooria ei seleta plastiliste materjalide purunemise algust, s. o. voolavuse tekkimist suurte tangentsiaalpingete tagajärjel. Peale selle on esimesele teorialele tõsiseks vastuväiteks fakt, et kuubik igakülgsel surveel, nagu näitas katse, talub mitu korda suuremaid pingeid kui lihtsurvel.

*Suurimate lineaarsete deformatsioonide teooria.* Selle teooria aluseks on oletus, et materjal, sõltumata pingeolukorra keerulisusest, puruneb siis, kui suhteline pikenemine

või lühenemine mingis suunas saavutab sellise suuruse, mille puhul toimub purunemine lihttõmbel või -survel. See teooria avaldati juba XVII sajandi 90-ndatel aastatel.

Kui pruss on liitpingeolukorras ning teame peapingeid  $\sigma_1, \sigma_2$  ja  $\sigma_3$ , siis suurim lineaarne deformatsioon tekib ühes peapingete suundadest. Liitpingeolukorra puhul lineaarseid deformatsioone peapingete suundades määratakse valemitega (49):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu(\sigma_2 + \sigma_3), \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \mu(\sigma_3 + \sigma_1), \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \mu(\sigma_1 + \sigma_2). \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Tuletame meelde, et neisse valemisse pinged  $\sigma_1, \sigma_2$  ja  $\sigma_3$  asetatakse oma märkidega. Antud materjali jaoks ohtlikuima deformatsiooni võime alati määrata valemitega (49), olenevalt suuruste  $\sigma_1, \sigma_2$  ja  $\sigma_3$  vahekorrast. Vastavalt teisele tugevusteooriale ei tohi ohtlikuim suhteline deformatsioon, mida tähistame  $\varepsilon_{max}$ , ületada lubatavat suhtelist deformatsiooni  $[\varepsilon]$  lihttõmbel või survel, s. o.

$$\varepsilon_{max} \leq [\varepsilon]. \quad (56)$$

Lubatava suhtelise deformatsiooni määrame valemist

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}, \quad (57)$$

kus  $[\sigma]$  on lubatav tõmbe- või survepinge.

Olgu ohtlikuimaks suhteliseks pikenemiseks, mis on määratav valemiga (49), pikenemine  $\varepsilon_1$ , s. o.  $\varepsilon_{max} = \varepsilon_1$ . Seda väärtust võrratusse (56) asetades saame:

$$\varepsilon_1 \leq [\varepsilon]. \quad (58)$$

Tugevustingimust on sobivam avaldada pingete kaudu, kuna siis ei ole vaja arvutada suhtelisi deformatsioone. Selleks asetame võrratusse (58)  $\varepsilon_1$  ja  $[\varepsilon]$  asemele nende avaldised

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (59)$$

Kui ohtlikuks suhteliseks pikenemiseks on  $\varepsilon_2$ , siis tugevus-tingimus avaldub:

$$\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1) \leq [\sigma]. \quad (60)$$

Võrratuste (59) ja (60) vasakud pooled kujutavad pingeid, mida nimetatakse *ekvivalentseteks pingeteks* ja tähistatakse  $\sigma_{ek}$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ek} &= \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma], \\ \sigma_{ek} &= \sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1) \leq [\sigma], \\ \sigma_{ek} &= \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq [\sigma]. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Suurima ekvivalentse pinget, mis ei tohi ületada lubatavat pinget, määrame teise tugevusteooria järgi valemitega (61). Kuigi prussis tegelikult ekvivalentset pinget ei esine, tuuakse selle mõiste sisse ainult suhteliste deformatsioonide arvutuse vältimiseks. Ekvivalentne pinget võrdub sellise pingega, mis esineks tõmmatavas või surutavas prussis, kui selle suhteline deformatsioon võrduks keerulises pingelukorras oleva prussi maksimaalse suhtelise deformatsiooniga. Olgugi, et teine tugevusteooria võtab arvesse kõiki kolme peapinget, katsed seda teooriat siiski küllaldaselt ei kinnita ning on mõnikord isegi sellega vasturääkivuses. Nii näiteks selle teooria põhjal kahes teineteisega risti asetsevas suunas tõmmatav pruss peab kandma suuremat koormust kui ühesuunalise tõmbe puhul. Katse ei kinnita seda järeldust.

*Suurimate tangentsiaalpingete teooria.* Selle tugevusteooria aluseks on oletus, et materjali purunemise peapõhjuseks on suurimad tangentsiaalpinged. See teooria esitati XVIII sajandi 80-ndatel aastatel. Selle teooria järgi puruneb materjal, sõltumata pingelukorra keerulisusest, momendil, mil suurim tangentsiaalpinge saavutab väärtuse, mille puhul lihttõmbel toimuks purunemine.

Paragrahvis 24 tuletasime valemi suurimate tangentsiaalpingete määramiseks prussi deformeermisel kahes teineteisega risti asetsevas suunas pingete  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  mõjul.

Sel juhul suurim tangentsiaalpinge võrdub:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (43)$$

Kui pruss pingete  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ja  $\sigma_3$  mõjul deformeerub kolmes üksteisega risti olevas suunas, siis suurimad tangentsiaalpinged määratakse valemitega:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \\ \tau_2 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \\ \tau_3 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Pinged  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ja  $\sigma_3$  asetatakse neisse valemisse oma märkidega. Olgu  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Siis suurimaks tangentsiaalpingeks on pinge

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (63)$$

Kui  $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$  ja  $\sigma_3 = 0$ , siis suurimaks tangentsiaalpingeks on pinge

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}.$$

Tugevustingimuse rahuldamiseks kolmanda tugevusteooria järgi ei tohi suurim tangentsiaalpinge ületada maksimaalset lubatavat tangentsiaalpinget lihttõmbel:

$$\tau_{max} \leq [\tau].$$

Kui lubatavaks normaalpingeks lihttõmbel võtta  $[\sigma]$ , siis lubatav tangentsiaalpinge vastavalt valemile (36) avaldub:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Järelikult tugevustingimuseks on

$$\tau_{max} \leq \frac{[\sigma]}{2} \quad (64)$$

ehk silmas pidades avaldist (63), saame

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (65)$$

Pinge  $\sigma_1 - \sigma_3$  on ekvivalentne pinge. Seetõttu võime tugevustingimuse (65) kirjutada kujul:

$$\sigma_{ek} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (66)$$

Seega vastavalt sellele tugevusteooriale tekib ohtlik olukord materjalis siis, kui suurima ja vähima normaalpinge vahe saavutab antud materjali jaoks piirsuuruse.

See tugevusteooria on küllalt hästi kooskõlas katsetulemustega, eriti plastiliste materjalide puhul, nagu näiteks

pehme teras ja teised. Materjalidel aga, millel  $[\sigma]_t \neq [\sigma]_s$ , nagu näiteks malm, tuuakse tugevustingimusse (66) sisse parandus.

Tugevusteooria, mis üldistab kolmandat tugevusteooriat ka juhul, kui  $[\sigma]_t \neq [\sigma]_s$ , kannab *Mohr'i tugevusteooria* nimetust.

Juhul, kui  $\sigma_3 < 0$  ja  $[\sigma]_t \neq [\sigma]_s$ , on Mohr'i tugevusteooria põhjal tugevustingimuseks

$$\sigma_{ek} = \sigma_1 - \sigma_3 \frac{[\sigma]_t}{[\sigma]_s} \leq [\sigma]_t. \quad (67)$$

Erijuhul, kui  $[\sigma]_t = [\sigma]_s$ , langeb see tugevusteooria täielikult ühte kolmanda tugevusteooriaga. Suurimate tangentsiaalpingete teooria ja Mohr'i tugevusteooria annavad katsetega paremini kokkulangevaid tulemusi, kui kaks esimest teooriat. Siiski ei saa ka neid tunnistada täiuslikeks.

Kolmes üksteisega risti asetsevas suunas võrdsete pingetega, s. o. kui  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$ , tõmmatava prussi purunemise fakti ei saa seletada tangentsiaalpingetega, mis võrduvad nulliga ( $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 0$ ).

Käesoleval ajal on laialdaselt levinud plastiliste materjalide jaoks neljas energeetiline tugevusteooria. See tugevusteooria põhineb oletusele, et sõltumatult pingeolukorrast tekib materjalis ohtlik olukord siis, kui kuju muutumisega seotud deformatsiooni potentsiaalne eriennergia saavutab määratud suuruse.

Paragrahvis 26 tuletatakse eritöö avaldise (54) tasapinnalise pingeolukorra jaoks:

$$T = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu \sigma_1 \sigma_2). \quad (54)$$

Seda eritööd võib kujutada koosnevana kahest osast: ühest, mis kulub kuubiku mahu muutmiseks, ning teisest, mis kulub tema kuju muutmiseks. Paragrahvis 26 näitasime, et keha maht ei muutu kui  $\mu = 0,5$ . Selle alusel, võttes avaldises (54) Poisson'i teguri  $\mu$  võrdseks 0,5, saame eritöö suuruse muutumatu mahu puhul, s. o. eritöö suuruse ( $T_k$ ) ainult kujumuutumisest:

$$T_k = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2).$$

Lihttõmbel, kui pinge võrdub lubatavaga, eritöö avaldub  $\frac{1}{2E}[\sigma]^2$ .

Järelikult neljanda tugevusteooria järgi tugevustingimus tasapinnalise pingeolukorra jaoks avaldub:

$$\frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) \leq \frac{1}{2E}[\sigma]^2$$

ehk

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq [\sigma]. \quad (68)$$

Ruumilise pingeolukorra jaoks

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} \leq [\sigma]. \quad (69)$$

Tugevustingimuste (68) ja (69) vasakud pooled kujutavad ekvivalentseid pingeid. Tähistades need pinged, nagu varem  $\sigma_{ek}$ , kirjutame tugevustingimuse kujul:

$$\sigma_{ek} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq [\sigma], \quad (70)$$

$$\sigma_{ek} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} \leq [\sigma]. \quad (71)$$

Materjalide purunemise küsimust ei ole veel küllaldaselt uuritud, vaatamata selle suurele praktilisele tähtsusele. Seda küsimust uurivad suure eduga nõukogude teadlased.

Viimasel ajal on nõukogude teadlaste N. N. Davidenko ja J. B. Friedmani tööd toonud selguse materjalide purunemise iseloomu ning purunemise ja materjalide omaduste ning pingeolukorra liigi vahelisse seosesse.

## § 28. Õhukeseseinaliste reservuaaride arvutus

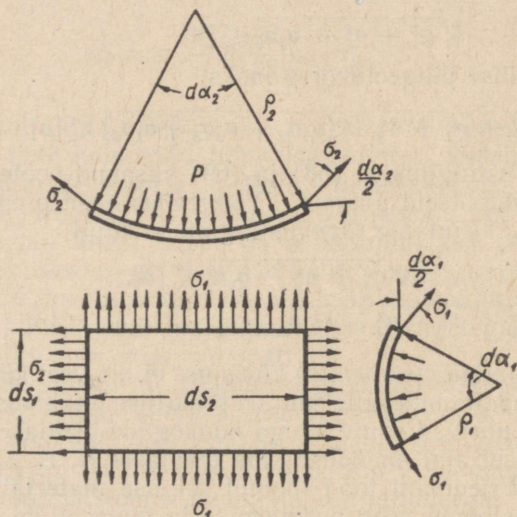
Õhukeseseinalisteks reservuaarideks nimetatakse anu- maid, millede seinte paksus, võrreldes reservuaari mõõde- tega, on väike, seinte kõverusraadiused aga vähemalt 20 korda suuremad nende paksusest.

Õhukeseseinaliste reservuaaride arvutusel oletatakse, et õhukesed seinad ei avalda vastupanu paindele ja neis teki- vad ainult tõmbe- ja survepinged, mis jaotuvad ühtlaselt seinte paksuse ulatuses. Selliste oletuste puhul saame gaa- side ja vedelike hoidmiseks ettenähtud reservuaaride (tsis- ternid, paagid, aurukatlad, mootorite silindrid ja teised) arvutamisel täiesti rahuldavaid tulemusi.

Tuletame pöördkeha kujuga õhukeseseinaliste reservuaaride arvutamise üldvalemi.

Tähistame reservuaari seinapaksuse  $\delta$ , ülerõhu  $p$ , pikilõikele vastava kõverusraadiuse  $\rho_1$ , ristlõikele vastava kõverusraadiuse  $\rho_2$ .

Lõikame välja siserõhule allutatud reservuaarist lõpmata väikese elemendi (joon. 52). Saadud lõigetes mõjuvad pinged  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  kahes teineteisega risti asetsevas suunas, s. o.



Joonis 52.

väljalõigatud element on tasapinnalises pingeolukorras. Sellele elemendile mõjuvad lõikes, mille pikkuse tähistame  $ds_2$ , jõud

$$dN_1 = \sigma_1 \delta ds_2,$$

ning lõikes, mille pikkuse tähistame  $ds_1$ , jõud

$$dN_2 = \sigma_2 \delta ds_1.$$

Need jõud peavad tasakaalustama reservuaaris rõhu poolt põhjustatud ja elemendi pinnale mõjuva jõu, s. o. jõu

$$dP = p ds_1 ds_2.$$

Koostame väljalõigatud elemendile mõjuvate jõudude tasakaaluvõrrandi. Selleks projekteerime jõud  $dN_1$ ,  $dN_2$  ja  $dP$  elemendi pinna normaali suunale

$$2dN_1 \sin \frac{d\alpha_1}{2} + 2dN_2 \sin \frac{d\alpha_2}{2} - dP = 0.$$

Kuna nurgad  $d\alpha_1$  ja  $d\alpha_2$  on lõpmata väikesed, siis võime lähenduslikult võtta, et

$$\sin \frac{d\alpha_1}{2} = \frac{d\alpha_1}{2}; \quad \sin \frac{d\alpha_2}{2} = \frac{d\alpha_2}{2}.$$

Järelikult tasakaaluvõrrandi võib kirjutada kujul:

$$dN_1 d\alpha_1 + dN_2 d\alpha_2 = dP.$$

Lõpmata väikesed nurgad lõigete vahel võrduvad:

$$d\alpha_1 = \frac{ds_1}{\varrho_1}; \quad d\alpha_2 = \frac{ds_2}{\varrho_2}.$$

Asetades jõudude ja nurkade väärtused tasakaaluvõrrandisse, saame:

$$\sigma_1 \delta dS_2 \frac{dS_1}{\varrho_1} + \sigma_2 \delta dS_1 \frac{dS_2}{\varrho_2} = p dS_1 dS_2 \delta.$$

Jagades võrrandi kõik liikmed korrutisega  $dS_1 dS_2 \delta$ , saame võrrandi

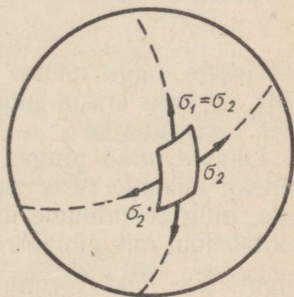
$$\frac{\sigma_1}{\varrho_1} + \frac{\sigma_2}{\varrho_2} = \frac{p}{\delta}. \quad (72)$$

Rakendame seda võrrandit sagedamini esineva kujuga õhukeseseinaliste reservuaaride — sfääriliste ja silindriliste — arvutamisel.

*Sfääriline reservuaar.* Mõjugu õhukeseseinalisele sfäärilisele reservuaarile siseülerõhk  $p$  (joon. 53). Tähistame reservuaari keskmise läbimõõdu  $D$ -ga. Sfäärilisel reservuaaril  $\varrho_1 = \varrho_2 = \frac{D}{2}$ .

Võrrandi (72) põhjal saame:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\frac{D}{2}} = \frac{p}{\delta}.$$

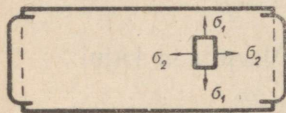


Joonis 53.

Kuna sfäärilises reservuaaris sümmeetria tõttu  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ , siis

$$\sigma = \frac{Dp}{4\delta}. \quad (73)$$

Järelikult pinge sfäärilises reservuaaris kahes teineteisega risti asetsevas suunas on võrdeline rõhu ja läbimõõduga ning pöördvõrdeline seina paksusega.



Joonis 54.

*Silindriline reservuaar.* Olgu silindrilise reservuaari (joon. 54) keskmine läbimõõt  $D$ , seina paksus  $\delta$ , pikkus  $l$ . Leiame pinged  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$ , mis mõjuvad vastavalt seinte piki- ja ristlõigetel, kui sise-ülerõhk on  $p$ .

Silindrilise reservuaari ristlõikele vastav kõverusraadius on lõpmatult suur ( $\rho_2 = \infty$ ), sest silindri moodustajad on sirgjoonelised, pikilõikele vastav kõverusraadius on aga võrdne silindri raadiusega

$$\rho_1 = \frac{D}{2}.$$

Seetõttu võrrandi (72) põhjal saame:

$$\frac{\sigma_1}{\frac{D}{2}} = \frac{p}{\delta}.$$

Järelikult pinge pikilõikes, mis püüab reservuaari katki rebida piki silindri moodustajat, avaldub

$$\sigma_1 = \frac{Dp}{2\delta}. \quad (74)$$

See pinge, nagu näeme valemiga (74) võrdlemisel valemiga (73), on kaks korda suurem, kui sama läbimõõduga sfäärilises reservuaaris.

Leiame nüüd pinge silindrilise reservuaari ristlõikes. Selleks lõikame reservuaari tasapinnaga, mis on risti teljega, ning eemaldame ühe poole. Rõhk reservuaari põhjale tekitab jõu, mis püüab reservuaari katki rebida mööda ristlõiget. See jõud võrdub  $p \frac{\pi D^2}{4}$  ning selle tasakaalustavad reservuaari ristlõike rõngaspinnal ühtlaselt jaotuvad elastsusjõud, s. o. jõud  $\sigma_2 \pi D \delta$ . Tasakaalutingimusest saame:

$$\sigma_2 \pi \delta D = p \frac{\pi D^2}{4},$$

millest

$$\sigma_2 = \frac{Dp}{4\delta}.$$

Võrrandite (74) ja (75) võrdlemisel näeme, et pinge silindrilise reservuaari pikilõikes on kaks korda suurem, kui ristlõikes. Seetõttu tehakse needitud silindriliste reservuaaride pikiõmblused tugevamad kui ristõmblused.

**Näide 26.** Määrata neljanda tugevusteooria järgi kerakujulise reservuaari seinapaksus, kui reservuaaris hoitava kokkusurutud gaasi rõhk  $p = 400 \text{ kg/cm}^2$ ;  $D = 40 \text{ cm}$  ning lubatav pinge  $[\sigma] = 4000 \text{ kg/cm}^2$ .

*Lahendus.* Valemi (73) järgi peapinged

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pD}{4\delta}.$$

Asetades need pinged neljanda tugevusteooria arvutusvalemisse (70), saame

$$\sqrt{\left(\frac{pD}{4\delta}\right)^2 + \left(\frac{pD}{4\delta}\right)^2} - \frac{pD}{4\delta} \cdot \frac{pD}{4\delta} < [\sigma],$$

millest

$$\delta \geq \frac{pD}{4[\sigma]} = \frac{400 \cdot 40}{4 \cdot 4000} = 1 \text{ cm}.$$

Arvutus neljanda tugevusteooria järgi annab käesoleval juhul sama tulemuse, mis arvutus esimese tugevusteooria järgi.

**Näide 27.** Määrata kolmanda ja neljanda tugevusteooria järgi silindrilise gaasireservuaari seinapaksus, kui gaasi rõhk  $p = 150 \text{ kg/cm}^2$ ,  $D = 40 \text{ cm}$  ning lubatav pinge  $[\sigma] = 4000 \text{ kg/cm}^2$ .

*Lahendus.* Peapinged valemite (74) ja (75) järgi avalduvad:

$$\sigma_1 = \frac{pD}{2\delta}, \quad \sigma_2 = \frac{pD}{4\delta}.$$

Siseseinale risti suunatud survepinge  $\sigma_3 = -p$ . Asetame pingete  $\sigma_1$  ja  $\sigma_3$  väärtused kolmanda tugevusteooria arvutusvalemisse (65):

$$\frac{pD}{2\delta} - (-p) \leq [\sigma],$$

millest

$$\delta \geq \frac{pD}{2([\sigma] - p)} = \frac{150 \cdot 40}{2(4000 + 150)} = 0,72 \text{ cm}.$$

Jättes arvestamata  $\sigma_3$ , saame

$$\delta \geq \frac{pD}{2[\sigma]} = \frac{150 \cdot 40}{2 \cdot 4000} = 0,75 \text{ cm}.$$

Seina paksuse määramiseks neljanda tugevusteooria järgi asetame  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  väärtused valemisse (70):

$$\sqrt{\left(\frac{pD}{2\delta}\right)^2 + \left(\frac{pD}{4\delta}\right)^2} - \frac{pD}{2\delta} \cdot \frac{pD}{4\delta} \leq [\sigma]$$

ehk

$$0,433 \frac{pD}{\delta} \leq [\sigma],$$

millest

$$\delta \geq \frac{150 \cdot 40 \cdot 0,433}{4000} = 0,65 \text{ cm.}$$

## § 29. Kontrollküsimusi

Milliste valemitega määratakse normaal- ja tangentsiaalpinged tasapinnalistes kaldlõigetes lihttõmbe puhul?

Millises prussi lõikes tekivad tõmbel maksimaalsed normaalpinged ja millises lõikes maksimaalsed tangentsiaalpinged?

Millega võrdub tõmmatava prussi kahes teineteisega risti asetsevas suunas mõjuvate normaalpingete summa?

Milles seisneb tangentsiaalpingete paariti esinemise seadus?

Milliseid pingeid nimetatakse peapingeteks?

Kuidas tähistatakse peapingeid?

Millist materjali olukorda nimetatakse lineaarseks, tasapinnaliseks ja ruumiliseks pingeolukorraks?

Milliste valemitega määratakse tasapinnalise pingeolukorra üldjuhul peapingeid?

Kuidas avalduvad suhtelised deformatsioonid pingete kaudu ruumilise pingeolukorra puhul?

Kuidas avaldub eritöö pingete kaudu tasapinnalise pingeolukorra puhul?

Mis ülesanne on tugevusteooriatel?

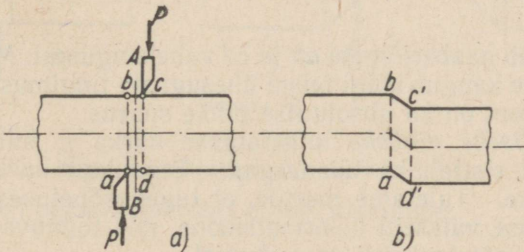
Millistele oletustele baseerub esimene, teine, kolmas ja neljas tugevusteooria?

Missugust üldvalemit kasutatakse õhukeseseinaliste reservuaaride arvutamisel?

NIHE

§ 30. Lõike ja nihke mõiste. Nihkepinged. Hooke'i seadus nihkel

Kui prussile mõjub kaks võrdlemisi teineteise lähedal asetsevat jõudu  $P$ , mis on risti prussi teljega ning on suunatud vastupidi, nagu see esineb metallvarbade ja lehtede lõikamisel kääridega (joon. 55, *a*), siis jõudude mingi tea-



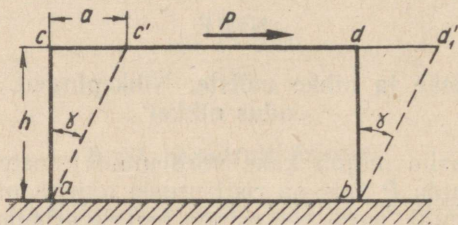
Joonis 55.

tud suuruse puhul toimub lõige. Keha vasakpoolne osa eraldub parempoolsest mööda mingit pinda  $AB$ . Lõiget iseloomustab jõudude  $P$  vahekaugus. Lõikele eelnev deformatsioon seisneb elementaarse risttahuka täisnurkade muutumises vildakuiks. Seda deformatsiooni nimetatakse nihkeks. Nihe, mis toimus risttahukas enne lõiget, on näidatud joonisel 55, *b*. Ristkülik  $abcd$  muutub parallelogrammiks  $abc'd'$ .

Kõik kehas esinevad deformatsioonid võime alati jagada kahte rühma: lineaarsed deformatsioonid ja nurkdeformatsioonid. Esimeste puhul muutub sirgjoonte pikkus, teiste puhul elementaarse risttahuka täisnurgad. Tavaliselt teki-

vad välisjõudude mõjul kehas üheaegselt nii lineaarsed kui ka nurkdeformatsioonid.

*Absoluutseks nihkeks* nimetatakse suurust  $cc'$  (joon. 56), mille võrra nihkub lõige  $cd$  tema lähedal asetseva naaberlõike  $ab$  suhtes. Mõnikord absoluutset nihet nimetatakse lineaarseks nihkeks. Lineaarsel nihkel pole midagi ühist lineaarse deformatsiooniga. See nimetus näitab ainult seda, et absoluutsel nihkel on pikkuse dimensioon. Absoluutne



Joonis 56.

nihe oleneb naaberlõigete  $ab$  ja  $cd$  vahekaugusest. Mida suurem on see kaugus kõigi teiste ühesuguste tingimuste puhul, seda suurem on ka absoluutse nihke suurus.

*Suhteliseks nihkeks* nimetatakse nurka  $\gamma$ , mille võrra muutuvad risttahuka täisnurgad. Tegelikult on see nurk väga väike. Tuletame meelde, et tugevusõpetuses üldiselt vaadeldakse väikseid deformatsioone, mis toimuvad materjalil enne elastsuspiiri saavutamist.

Nurga  $\gamma$  väiksuse tõttu võib kõrvale jätta lõigete  $ab$  ja  $c'd'$  lähenemise ning lugeda risttahuka maht nihkel muutumatuks.

Suhtelise nihke võime määrata avaldisest

$$\frac{cc'}{ac} = \frac{a}{h} = \operatorname{tg}\gamma \approx \gamma. \quad (76)$$

Nurga  $\gamma$  väiksuse tõttu võime tema tangensi võtta ligikaudu võrdseks nurga väärtusega, avaldatuna radiaanides.

Nihke mõõduks on suhteline nihe  $\gamma$ . Viimane määratakse kui kahe naaberlõike vahelise absoluutse nihke suhe nende lõigete vahekaugusesse. Nihe antakse radiaanides.

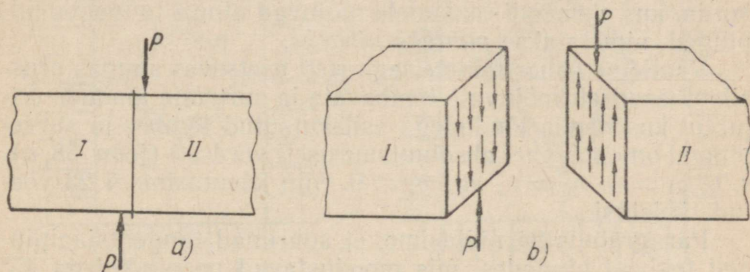
Kui pruss kahe lõikava jõu vahel mõtteliselt läbi lõigata (joon. 57,  $a$ ) ning eemaldada üks osa, siis tuleb kõrvalejäe-

tud osa mõju allesjäänud osale asendada sisejõududega. Need jõud mõjuvad lõike tasapinnas (joon. 57, b). Järelikult tekivad nihkel tangentsiaalpinged. Kui oletada, et sisejõud jaotuvad ühtlaselt üle kogu lõike, siis tangentsiaal- ehk nihkepingete suurus määratakse valemiga

$$\tau = \frac{P}{F}, \quad (77)$$

kus  $F$  on prussi ristlõikepindala.

Absoluutse nihke suurus enne proportsionaalsuse piiri on võrdeline nihkejõuga  $P$ , kaugusega  $h$ , millel toimub nihe, ja pöördvõrdeline lõike pindalaga  $F$ .



Joonis 57.

Kui toome sisse materjalist oleneva võrdelisuse teguri  $\frac{1}{G}$ , siis Hooke'i seadus avaldub nihkel valemiga:

$$a = \frac{Ph}{GF}. \quad (78)$$

Silmas pidades, et  $\frac{a}{h} = \gamma$  ja  $\frac{P}{F} = \tau$ , saame Hooke'i seadusele nihkel teise avaldise:

$$\tau = G\gamma. \quad (79)$$

Võrreldes valemeid (77) ja (5), (78) ja (7) ning (79) ja (6), näeme, et kõik nihke põhivalemid on analoogilised tõmbe- ja survevalemitega.

Valemites (78) ja (79) esinevat suurust  $G$  nimetatakse nihkeelastsusmooduliks ehk teise liigi elastsusmooduliks. Kuna  $\gamma$  on nimeta suurus, siis valemist (79) jäeldub, et  $G$  dimensioon on sama, mis pingel, s. o.  $\text{kg/cm}^2$ . Suurused

$E$  ja  $G$  on ühe ja sama materjali korral omavahel seotud kujul

$$G \approx 0,4 E. \quad (80)$$

See suhe on kindlaks määratud katseliste mõõtmistega. Teoreetiliselt on see suhe tõestatud § 32.

### § 31. Puhas nihe tõmbel ja survel kahes teineteisega risti asetsevas suunas

Kõvas kehas võime luua sellise pingeolukorra, kus kehast teatud viisil väljalõigatud elementide pindadele mõjuvad ainult tangentsiaalpinged. Sellist elemendi pingeolukorda, kus elemendi tahkudele mõjuvad ainult tangentsiaalpinged, nimetatakse *puhtaks nihkeks*.

Vaatleme kahes teineteisega risti asetsevas suunas prussile üheaegselt mõjuvate tõmbavate ja suruvate jõudude erijuhtu, kus nende jõududega esilekutsutud tõmbe- ja survepinged on omavahel absoluutsuuruselt võrdsed (joon. 58, *a*), s. o.  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma$ , aga  $\sigma_2 = 0$ . Siin kasutasime § 23 võetud tähistusi.

Paragrahvis 24 näitasime, et suurimad tangentsiaalpinged tekivad pindades, mis moodustavad peapindadega  $45^\circ$  või  $135^\circ$  nurga.

Antud erijuhul tangentsiaalpinged neis pindades valemi (43) põhjal võrduvad:

$$\tau_{\varphi \max} = \frac{1}{2} [\sigma_1 - (-\sigma_3)] = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{1}{2} (\sigma + \sigma) = \sigma.$$

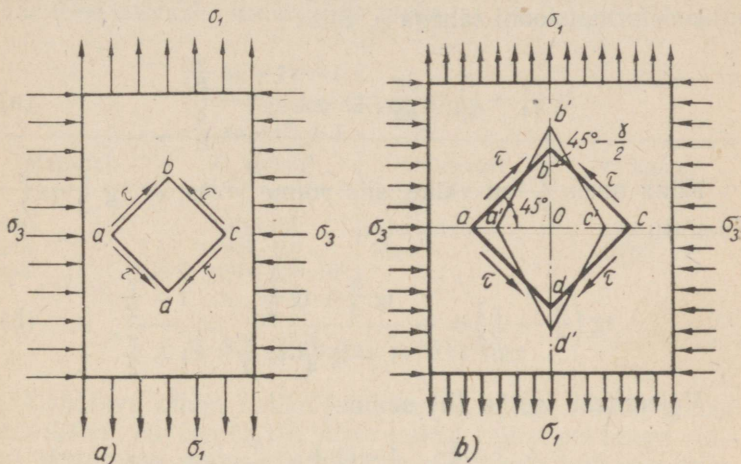
Normaalpingeid neis pindades üldse ei esine. Selles võime kergesti veenduda, kui asetame valemisse (41)  $\varphi = 45^\circ$  ja  $\varphi = 135^\circ$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi} &= \sigma_1 \cos^2 45^\circ + (-\sigma_3 \sin^2 45^\circ) = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_1 - \frac{1}{2} \sigma_3 = \frac{1}{2} \sigma - \frac{1}{2} \sigma = 0, \\ \sigma_{\varphi} &= \sigma_1 \cos^2 135^\circ + (-\sigma_3 \sin^2 135^\circ) = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_1 - \frac{1}{2} \sigma_3 = \frac{1}{2} \sigma - \frac{1}{2} \sigma = 0. \end{aligned}$$

Järelikult vaadeldaval juhul prussi sees olev element  $abcd$ , mille külgtahud moodustavad peapingete suundadega  $45^\circ$  nurga, saab tunda oma tahkudel ainult tangentsiaalpingeid. Teiste sõnadega, element on pingeolukorras, mida nimetatakse puhtaks nihkeks.

## § 32. Elastsusmoodulite $E$ ja $G$ vaheline seos

Ülalpool näitasime, et prussi tõmbele või survele kaasub nihe prussi tasapinnalistes kaldlõigetes. Järelikult tõmbe- või survedeformatsioon on tihedalt seotud nihkedeformatsiooniga. Tuginedes sellele seosele võime määrata teoreetiliselt elastsusmoodulite  $E$  ja  $G$  vahelise olenevuse.



Joonis 58.

Võtame täisnurkse risttahuka, mida tõmmatakse ühes suunas ning surutakse teises suunas, nagu see on näidatud joonisel 58, *b*.

Kui  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = 0$  ja  $\sigma_3 = -\sigma$ , siis elementaarkuubik  $abcd$  on puhta nihke olukorras. Enne deformatsiooni võrdsed olnud pikkused  $ob$  ja  $oc$  pärast deformatsiooni muutuvad: pikkus  $ob$  suureneb väärtuseni  $ob'$ , pikkus  $oc$  aga väheneb väärtuseni  $oc'$ :

$$ob' = ob(1 + \varepsilon_1), \quad oc' = oc(1 + \varepsilon_3).$$

Suhtelised deformatsioonid  $\varepsilon_1$  ja  $\varepsilon_3$  valemite (49) järgi võrduvad:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2) = \frac{1}{E}(\sigma + \mu\sigma) = \frac{\sigma}{E}(1 + \mu),$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \mu\sigma_1) = \frac{1}{E}(-\sigma - \mu\sigma) = -\frac{\sigma}{E}(1 + \mu).$$

$$ob' = ob \left[ 1 + (1 + \mu) \frac{\sigma}{E} \right],$$

$$oc' = oc \left[ 1 - (1 + \mu) \frac{\sigma}{E} \right].$$

Täisnurk kuubiku külgede  $ab$  ja  $bc$  vahel pärast deformatsiooni väheneb. Tähistame selle nurga vähenemise, s. o. nihkedeformatsiooni tähega  $\gamma$ . Siis

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{oc'}{ob'} = \frac{1 - (1 + \mu) \frac{\sigma}{E}}{1 + (1 + \mu) \frac{\sigma}{E}}. \quad (a)$$

Kuna nurk  $\frac{\gamma}{2}$  on väike, siis võime võtta, et  $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$ .  
Seetõttu

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = - \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}. \quad (b)$$

Valemitest (a) ja (b) saame:

$$\frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - (1 + \mu) \frac{\sigma}{E}}{1 + (1 + \mu) \frac{\sigma}{E}}$$

ehk

$$\gamma = 2(1 + \mu) \frac{\sigma}{E}. \quad (c)$$

Eespool § 31 näitasime, et puhta nihke olukorras oleva elementaarkuubiku tahkudel on tangentsiaalpinged  $\tau$  võrdsed normaalpingega  $\sigma$ , s. o.  $\tau = \sigma$ . Teiselt poolt  $\tau = G\gamma$ . Järelikult antud juhul

$$\sigma = G\gamma.$$

Asetades selle  $\sigma$  väärtuse valemisse (c), saame:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (81)$$

See valem annab olenevuse nihke-elastsusmooduli ja tõmbe- või surve-elastsusmooduli vahel Poisson'i teguri kaudu.

Sõltuvalt  $\mu$  väärtusest antud materjali jaoks muutub ka arvuline olenevus  $G$  ja  $E$  vahel.

$$\text{Kui } \mu = \frac{1}{4}, \text{ siis } G = \frac{2}{5} E.$$

$$\text{Kui } \mu = \frac{1}{3}, \text{ siis } G = \frac{3}{8} E.$$

Tabelis 7 on antud nihke-elastsusmooduli  $G$  keskmised väärtused mõnede materjalide jaoks.

Tabel 7

Mooduli  $G$  väärtused

Materjal	$G$ kg/cm <sup>2</sup>	Materjal	$G$ kg/cm <sup>2</sup>
Teras . . . . .	$8,1 \cdot 10^5$	Alumiinium . . . . .	$2,6 \cdot 10^5$
Malm . . . . .	$4,5 \cdot 10^5$	Puit . . . . .	$0,055 \cdot 10^5$
Vask . . . . .	$4 \cdot 10^5 - 4,9 \cdot 10^5$		

### § 33. Lubatav nihkepinge

Lubatava pinge valiku küsimus on nihke (lõike) puhul keerulisem, kui tõmbe või surve puhul. Lubatava pinge valikul lähtutakse materjali voolavuspiirist või tugevuspiirist. Kuid nihkel on materjali voolavus- ja tugevuspiiri vahetu määramine raskendatud, sest praktiliselt on raske saada puhast nihet ilma painde ja teiste lisanähtusteta, mis avaldavad mõju proovimistulemustele. Seetõttu praktikas määratakse lubatav nihkepinge eelnevalt kontrollitud teoreetilistest kaalutlustest.

Paragrahvis 25 vaatlesime tasapinnalise pingeolukorra üldjuhtu, mis oli näidatud joonisel 48, *a*.

Selle üldjuhu jaoks määratakse peapinged võrranditega (47):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Puhas nihe kujutab tasapinnalise pingeolukorra üldjuhu erijuhtu, kus  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ , s. o. kui elemendi tahkudele mõjuvad ainult tangentsiaalpinged. Seetõttu puhtal nihkel valemitega (47) määratavad peapinged avalduvad:

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = -\tau.$$

Tasapinnalises pingeolukorras üks kolmest peapingest võrdub nulliga. Kuna viimase pinge saime negatiivsena, siis järelikult see pinge on kolmest peapingest vähim ja teda ei tohi märkida  $\sigma_2$ -ga, vaid  $\sigma_3$ -ga (vt. § 23).

Niisiis, puhtal nihkel

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau.$$

Vastavalt esimese tugevusteooria tingimusele (55) saame:

$$[\sigma] \geq \sigma_1 = \tau,$$

s. o. nihkel tangentsiaalpinged ei tohi ületada lubatavat tõmbepinget, s. o.

$$[\tau] \leq [\sigma].$$

Teise tugevusteooria tingimuse (59) järgi saame:

$$[\sigma] \geq \sigma_1 - \mu\sigma_3 = (\tau + \mu\tau).$$

Kui terase jaoks võtta  $\mu = 0,3$ , siis lubatav tangentsiaalpinge peab olema:

$$[\tau] \approx 0,77 [\sigma].$$

Analoogiliselt saame kolmanda tugevusteooria tingimusele (65) vastavalt:

$$[\sigma] \geq \sigma_1 - \sigma_3 = \tau + \tau = 2\tau.$$

Järelikult

$$[\tau] = 0,5 [\sigma].$$

Lõpuks neljanda tugevusteooria tingimuse (71) järgi saame:

$$\begin{aligned} \sigma &\geq \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} = \\ &= \sqrt{\tau^2 + \tau^2 + \tau^2} = \tau\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Järelikult

$$[\tau] = 0,57 [\sigma].$$

Praktikas tavaliselt võetakse habraste materjalide jaoks

$$[\tau] = (0,8 \div 1,0) [\sigma]; \quad (82)$$

plastiliste materjalide jaoks

$$[\tau] = (0,5 \div 0,6) [\sigma]. \quad (83)$$

Kiudmaterjalid, nagu näiteks puit, avaldavad nihkele pikikiudu (või nagu räägitakse — lõhestumisele) vastu-panu teisiti, kui ristkiudu. Selliste materjalide jaoks toimub lubatava pinge valik olemasolevate normide alusel.

Nii näiteks keskmise kvaliteediga männi jaoks on lubatav pinge lõhestumisele pikikiudu kõigest  $[\tau] = 10 \text{ kg/cm}^2$ , lubatav tõmbepinge pikikiudu aga  $[\sigma] = 100 \text{ kg/cm}^2$ . Seega männil  $[\tau]$  on kõigest  $0,1 [\sigma]$ .

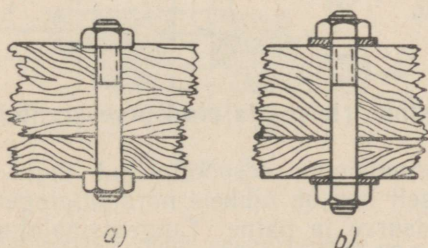
Kui teame lubatavat nihkepinget, siis võime kirjutada tugevustingimuse nihke jaoks:

$$\tau = \frac{P}{F} \leq [\tau]. \quad (84)$$

See võrrand on analoogiline tõmbe (surve) arvutusvõrrandile.

### § 34. Pindsurve

Nihke- (lõike-) deformatsioonile kaasneb sageli pindsurve (muljumine). Pindsurvet iseloomustab suruva jõu mõjumine suhteliselt väikesele osale. Kui näiteks ühendada



Joonis 59.

kaks puidust prussi poldiga (joon. 59, a), siis mutri pealekeeramisel esineb puidu pinnal mutri ja poldipea all muljumine, laienedes puidu sügavusse. Neis kohtades tekib kohalik surve, mille pinge kiiresti väheneb eemaldumisel külgedele ja sügavusse. Pindsurvepinge vähendamiseks suurendatakse tugipinda muljumise kohas, asetades mutri ja poldipea alla metallseibid (joon. 59, b), millel on suurem kokkupuutepind puiduga.

Kui kehade kokkupuutepindadeks on hästi töödeldud

tasapinnad, siis toimub kokkupuude kõikides punktides. Sel juhul võime suruvate jõudude tsentraalsel mõjumisel oletada pindsurvepingete ühtlast jaotust üle kogu kokkupuutepinna.

Tähistades suruva jõu  $P$ , kokkupuutepinna pindala  $F$  ja pindsurvepinge  $\sigma_{ps}$ , saame:

$$\sigma_{ps} = \frac{P}{F}. \quad (85)$$

Kui kokkupuutuvad kehad on valmistatud erinevatest materjalidest, siis kontrollitakse pindsurvele pehmemat materjali.

Lubataav pinge  $[\sigma_{ps}]$  võetakse ühtlaselt jaotatud pindsurvepinge puhul terasel võrdseks

$$[\sigma_{ps}] = (2 \div 2,5)[\sigma],$$

kus  $[\sigma]$  on lubataav survepinge. Puidul  $[\sigma_{ps}]$  ligikaudu võrdub  $[\sigma]$ -ga ja oleneb jõu ning kiudude suuna vahelisest nurgast.

Teades lubataavat pinget, kirjutame tugevusvõrrandi pindsurvele:

$$\sigma_{ps} = \frac{P}{F} \leq [\sigma_{ps}]. \quad (86)$$

### § 35. Nihke (lõike) ja pindsurve arvutusnäiteid

Nihkedeformatsiooni eespooltoodud kujul praktikas ei esine. Tavaliselt kaasub nihkele normaalpingete poolt esile kutsutud pindsurve ja paine. Tangentsiaalpinged neil lõigetel, mida mööda toimub nihe, jaotuvad ebaühtlaselt. Ebaühtlaselt jaotuvad ka pindsurvepinged. Praktiliste arvutuste lihtsustamiseks eeldatakse aga sageli, et nihke- ja pindsurvepinged jaotuvad ühtlaselt. Sellisele oletusele tuginetakse eriti neetide, pikikiilude, hammasvõllide, tappide jms. arvutamisel.

Lihtsustavate oletuste puhul määratud pinged erinevad tegelikest pingetest — nad on tingimuslikud.

Vaatleme nihke ja pindsurve mõningaid arvutusnäiteid.

**Näide 28.** Arvutada joonisel 60,  $a$  näidatud põltliide, kui jõud  $P = 800$  kg, liidetavate detailide paksus  $\delta = 8$  mm, lubataav nihkepinge  $[\tau] = 600$  kg/cm<sup>2</sup> ja lubataav pindsurvepinge  $[\sigma_{ps}] = 2000$  kg/cm<sup>2</sup>.

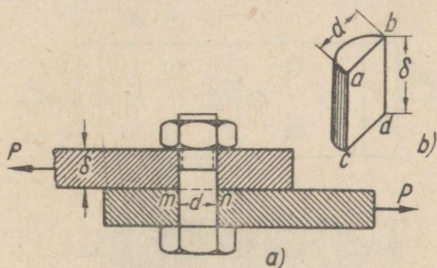
*Lahendus.* Jõud  $P$  püüab polti pinnas  $mn$  läbi lõigata. Poldi vajaliku läbimõõdu määrame arvutusvõrrandist (84):

$$\frac{P}{F} = \frac{P}{\frac{\pi}{4}d^2} \leq [\tau],$$

millest

$$d \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi[\tau]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 800}{3,14 \cdot 600}} = 1,3 \text{ cm.}$$

Kontrollime poldiga liidetavate detailide augu seinu pindsurvele. Poldi ja ühe detaili augu kokkupuutepind, mis töötab pindsurvele, kujutab kõrgusega  $\delta$  ja läbimõõduga  $d$  poolsilindri külgpinda (joon. 60, *b*). Pindsurve jaotust selle poolsilindri pinnal me ei tea. See sõltub lõtkust poldi ja kinnitatavate detailide vahel, augu ja poldi kuju ebatäpsusest ja materjalist. Arvutamise lihtsustamiseks loetakse pindsurve ühtlaseks ning suuruselt võrdseks jõu ja poolsilindri diametraallõike  $abcd$  pindala, mitte aga poolsilindri pindala jagatisega, s. o. pindalaga  $\delta d$ .



Joonis 60.

Seega aukude seintele mõjuv pindsurvepinge on

$$\sigma_{ps} = \frac{P}{\delta d} = \frac{800}{0,8 \cdot 1,3} = 768 \text{ kg/cm}^2.$$

Saadud pinge on lubatavast pingest väiksem, s. o.  $\sigma_{ps} < [\sigma_{ps}]$ . Kui pindsurvepinge on lubatavast suurem, siis poldi töötingimused halvenevad poldi ja augu seinte vahelise muljumise tõttu. Seepärast tuleb augu seinu alati kontrollida pindsurvele.

**Näide 29.** Terasribad  $A$  ja  $B$ , millede paksus  $\delta = 10$  mm ja laius  $b = 150$  mm, on liidetud kahe lapi ja neetide abil kokku joonisel 61 näidatud viisil. Neetide läbimõõt  $d = 16$  mm, lappide paksus  $\delta_1 = 6$  mm. Lappide laius võrdub needitavate lehtede laiussega, s. o. 150 mm. Määrata pinged neetides ja needitud lehtedes, kui tõmbav jõud  $P = 8$  t.

*Lahendus.* 1) Pinge neetides. Mõlemale poole lehtede jätkukohast on paigutatud neli neeti ( $i = 4$ ). Igale needile mõjub löikejõud  $\frac{P}{i}$  kahes löikes (kahelöikelised needid). Järelikult neetides esinev nihkepinge

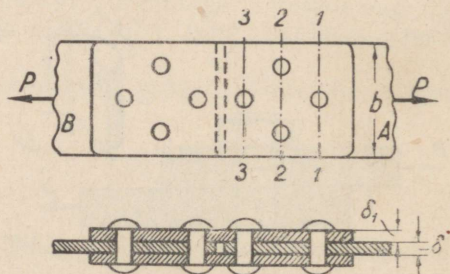
$$\tau = \frac{P}{i \cdot 2 \frac{\pi}{4} d^2} = \frac{8000}{4 \cdot 2 \cdot 0,785 \cdot 1,6^2} \approx 500 \text{ kg/cm}^2.$$

2) Pinge needitud lehtedes. Lõikes 1—1 antakse lehega üle kogu jõud  $P$ . Kuna see löige on nõrgestatud ühe neediga, siis löike pindala avaidub:

$$F_{1-1} = \delta(b - d) = 1(15 - 1,6) = 13,4 \text{ cm}.$$

Tõmbepinge selles löikes

$$\sigma_{1-1} = \frac{P}{F_{1-1}} = \frac{8000}{13,4} = 597 \text{ kg/cm}^2.$$



Joonis 61.

Lõikes 2—2 antakse lehele  $B$  üle mitte kogu jõud, vaid ainult  $\frac{3}{4}P$ , kuna jõu  $\frac{1}{4}P$  võtab vastu esimene neet lappide ja lehtede jätkukohast vasakule poole paigutatud neetide kaudu. Lõige 2—2 on nõrgestatud kahe neediga. Järelikult löike 2—2 arvutuspinjala on

$$F_{2-2} = \delta(b - 2d) = 1(15 - 2 \cdot 1,6) = 11,8 \text{ cm}^2$$

Tõmbepinge selles löikes

$$\sigma_{2-2} = \frac{\frac{3}{4}P}{F_{2-2}} = \frac{\frac{3}{4} \cdot 8000}{11,8} = 508 \text{ kg/cm}^2,$$

s. o. 15% võrra madalam kui löikes 1—1.

Lõikes 3—3 antakse lehele  $B$  üle jõud  $P - \frac{3}{4}P = \frac{1}{4}P$ .

Lõike arvutuspinjala on sama, mis lõikel 1—1, s. o.

$$F_{3-3} = F_{1-1} = 13,4 \text{ cm}^2.$$

Tõmbepinge selles lõikes

$$\sigma_{3-3} = \frac{\frac{1}{4}P}{F_{3-3}} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 8000}{13,4} = 150 \text{ kg/cm}^2,$$

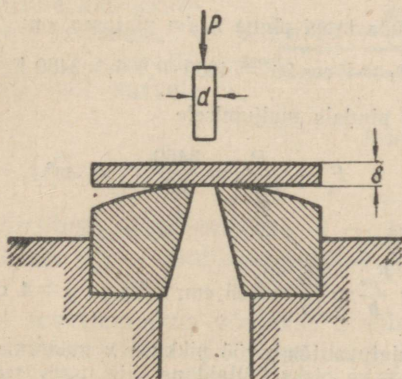
s. o. 75% võrra madalam, kui lõikes 1—1.

Määrame nüüd neetide poolt tekitatud pindsurvepinge lehes. Lehe augu ja needi kokkupuutepinna diameetraallõike pindala

$$F_{ps} = \delta d = 1 \cdot 1,6 = 1,6 \text{ cm}^2.$$

Uhe needi muljumisjõud on  $\frac{1}{4}P$ . Järelikult pindsurvepinge

$$\sigma_{ps} = \frac{\frac{1}{4}P}{F_{ps}} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 8000}{1,6} = 1250 \text{ kg/cm}^2.$$



Joonis 62.

Näide 30. Määrata, kui suur jõud  $P$  (joon. 62) tuleb rakendada templile, et sellega lüüa 10 mm paksusesse teraslehte auk läbimõõduga  $d = 12$  mm, kui lehtmaterjali tugevuspiir lõikele  $\tau_b = 4000 \text{ kg/cm}^2$ .

Lahendus. Templiga eraldatava leheosa pindala augu löömisel

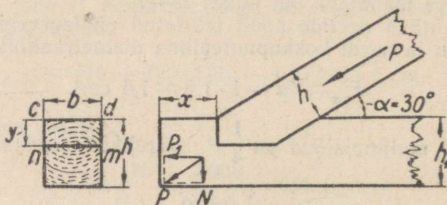
$$F = \pi d \delta = 3,14 \cdot 1,2 \cdot 1 = 3,78 \text{ cm}^2.$$

Augulõõmiseks vajalik jõud  $P$ :

$$P = \tau_b \cdot F = 4000 \cdot 3,78 = 15\,120 \text{ kg.}$$

**Näide 31.** Arvutada sarika jala liide sarika tõmbevõõga (joon. 63). Materjal — mänd. Sarikajala ja tõmbevõõ telgedevaheline nurk  $\alpha = 30^\circ$ . Mõõda sarika jalga mõjuv jõud  $P = 4000 \text{ kg}$ , männi lubatav lõhestumispinge  $[\tau] = 12 \text{ kg/cm}^2$ , lubatav pindsurve nurga all  $[\sigma_{ps}] = 60 \text{ kg/cm}^2$ , sarika jala ristlõikemõõted  $h = b = 15 \text{ cm}$ .

*Lahendus.* Jõud, mis püüab tõmbevõõ otsa nihutada pikkuse  $x$



Joonis 63.

ulatuses ja muljuda tappi pinna  $ncdm$  ulatuses, on:

$$P_1 = P \cos 30^\circ = 4000 \cdot 0,866 = 3460 \text{ kg.}$$

Tapi vajalik pindala muljumisele

$$F_{ps} \geq \frac{P_1}{[\sigma_{ps}]} = \frac{3460}{60} = 58 \text{ cm}^2.$$

Tapi sügavus

$$y = \frac{F_{ps}}{b} = \frac{58}{15} = 3,86 \text{ cm; võtame } y = 4 \text{ cm.}$$

Tapi taha ulatuva tõmbevõõ pikkuse  $x$  määrame tingimusest, et lõikepindala  $F_{lp} = xb$  oleks küllaldane liite tugevuseks.

Vajalik lõikepindala

$$F_{lp} \geq \frac{P_1}{[\tau]} = \frac{3460}{12} = 290 \text{ cm}^2.$$

Tingimusest, et  $xb = 290$ , määrame pikkuse:

$$x = \frac{290}{b} = \frac{290}{15} = 19,4 \text{ cm.}$$

Võtame ümardatult  $x = 20 \text{ cm}$ .

## § 36. Keevisliidete arvutus

Viimastel aastatel kasutatakse tehnikas üha laialdsemalt elekterkeevitust. Keevisliidete töömaht on väiksem kui neetliidetal, nad ei nõrgesta liidetavate elementide lõiget, lihtsustavad konstruktsiooni ega jää eksploatatsioonikindluselt maha neetliiteist. Seetõttu tõrjuvadki keevisliited praktikast neetliiteid üha enam välja.

Lihtsamaks keevisliite põhitüübiks on põkkliide (joon. 64), mille puhul kahe liidetava elemendi vaheline pilu täidetakse pealesulatatud metalliga. Olenevalt liidetavate elementide paksustest, antakse liidetavate elementide vahelisele pilule üks joonisel 64 esitatud kujudest.

Põkkliidet kontrollitakse tõmbele või survele võrrandiga

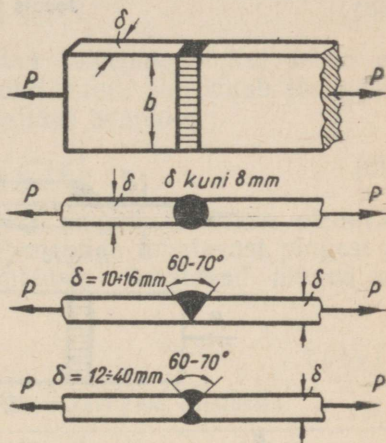
$$\sigma = \frac{P}{l\delta} \leq [\sigma'], \quad (87)$$

(kus  $l$  on õmbluse arvutus pikkus,  $\delta$  — keevitatavate elementide paksus,  $[\sigma']$  — õmbluse lubatav tõmbe- või survepinge).

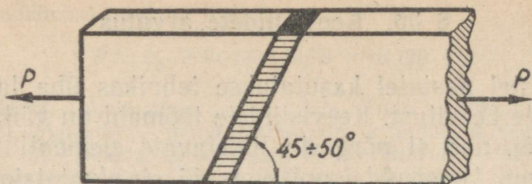
Õmbluse arvutus pikkus võetakse õmbluse otstes esinevate keevitusvigade tõttu alati tegelikust pikkusest 10 mm võrra lühem. Õmbluse kõrgus on keevitatavate elementide paksusest mõnevõrra suurem, kuid arvutamisel võetakse see kindluse mõttes võrdseks paksusega  $\delta$ .

Eksperimentaalsed uurimised on tõestanud, et kaldpõkkliide (joon. 65)  $45^\circ$  nurga all on võrdtugev tervele lõikele.

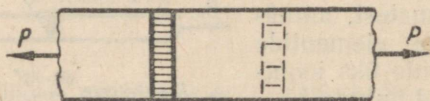
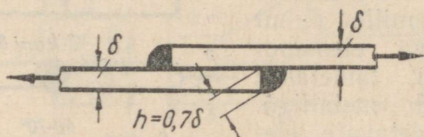
Lehtede teine liitmisviis on ülekatteliide, mille puhul kasutatakse nurkõmblusi. Viimaseid nimetatakse otsõmblusteks, kui nad on risti mõjuva jõu suunaga (joon. 66, a), külõmblusteks, kui nad on paralleelsed jõu suunaga



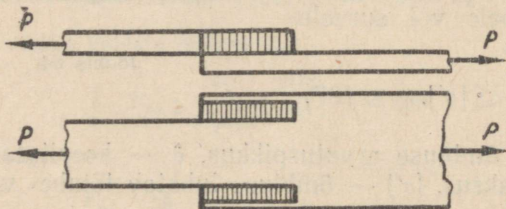
Joonis 64.



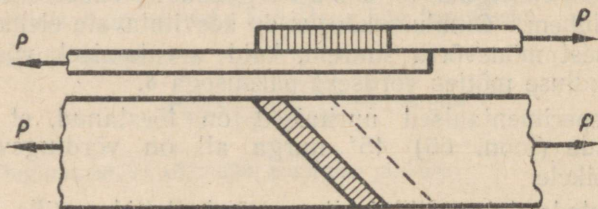
Joonis 65.



a)



b)



c)

Joonis 66.

(joon. 66, b) ja kaldõmblusteks, kui nad asetsevad jõu suhtes kaldu (joon. 66, c).

Nurkõmblused arvutatakse kokkuleppeliselt lõikele mööda lõiget, mille pindala võrdub  $F = lh$ , kus

$$l = b - 10 \text{ mm}, h = \delta \cos 45^\circ \approx 0,7 \delta.$$

Tugevustingimus avaldub:

$$\tau = \frac{P}{0,7l\delta} \leq [\tau], \quad (88)$$

kus  $[\tau]$  on õmbluse lubatav lõikepinge. Kui lehed on liidetud joonisel 66, a esitatud kujul, siis võtab jõu vastu kaks õmblust ja tugevustingimus avaldub

$$\tau = \frac{P}{1,4l\delta} \leq [\tau]. \quad (89)$$

Keevisõmbluste lubatavad pinged valitakse olenevalt liidetavate konstruktsioonielementide lubatavast pingest ja keevitamisiisist. Keevisõmblustes lubatavad pinged on roodud tabelis 8.

Tabel 8

Lubatavad pinged elekterkeevitatud õmblustes

Pinge liik	Tähistus	Käsitsikeevitus		Automaatkeevitus
		Õhukese-kattelised elektroodid	Paksu-kattelised elektroodid	
Tõmme } Surve } Lõige }	$[\sigma']$ { $[\tau']$ {	1000 kg/cm <sup>2</sup> 1100 „ 800 „	1300 kg/cm <sup>2</sup> 1450 „ 1100 „	1300 kg/cm <sup>2</sup> 1450 „ 1100 „

Näide 32. Määrata joonisel 67 kujutatud pöckliitele tulev lubatav koormus. Alusmetalli lubatav pinge  $[\sigma] = 1400 \text{ kg/cm}^2$ , õmblusmetalli lubatav pinge aga

$$[\sigma'] = 1000 \text{ kg/cm}^2.$$

Lahendus. Õmbluse poolt vastu võetava lubatava jõu määrame valemiga (87):

$$P \leq [\sigma] lt.$$

Õmbluse arvutus pikkus, arvestades halba läbikeevitamist otstes, võetakse tegelikust 1 cm võrra väiksem:

$$l = 10 - 1 = 9 \text{ cm}.$$

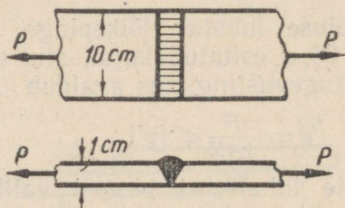
Pökkõmblyse arvutuspaksuse võtame võrdseks liidetavate ribade paksusega  $t = 1$  cm. Lubatav jõud võrdub:

$$P \leq 1000 \cdot 9 \cdot 1 = 9000 \text{ kg.}$$

Lubatav jõud alusmetalli järgi avaldub:

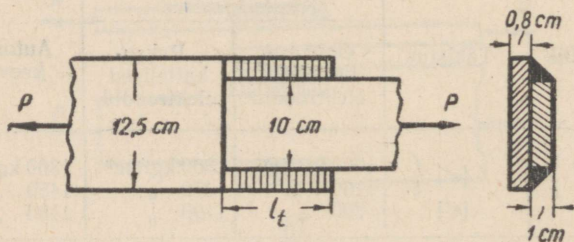
$$P \leq [\sigma]bt = 1400 \cdot 10 \cdot 1 = 14000 \text{ kg.}$$

Järelikult antud õmblyses töötab alusmetall alakoormusega.



Joonis 67.

**Näide 33.** Määrata külõmblyse vajalikud mõõted (joon. 68), kui liidetavate ribade ristlõiked on samad, mis eelmises näites. Tõmbav jõud  $P = 14000$  kg, õmblysmetalli lubatav lõikepinge  $[\tau'] = 800$  kg/cm<sup>2</sup>.



Joonis 68.

*Lahendus.* Määrame õmblyse tegeliku pikkuse  $l_t$ . Õmblyse arvutuspikkus valemi (89) järgi võrdub:

$$l \geq \frac{P}{1,4t[\tau']} = \frac{14000}{1,4 \cdot 1 \cdot 800} = 12,5 \text{ cm.}$$

Õmblyse tegelik pikkus

$$l_t = 12,5 + 1 = 13,5 \text{ cm.}$$

## § 37. Kontrollküsimusi

Millistel tingimustel toimub lõige?

Milles seisneb nihkedeformatsioon?

Mida nimetatakse absoluutseks ja suhteliseks nihkeks? Milline dimensioon neil on?

Millise valemiga määratakse tangentsiaalpingeid nihke puhul?

Missugust pingeolukorda nimetatakse puhtaks nihkeks?

Kuidas avaldub Hooke'i seadus nihke puhul?

Milline on esimese ja teise liigi elastsusmoodulite vaheline seos?

Milliseid suhteid kasutatakse lubatavate tõmbe- ja nihkepingete vahel?

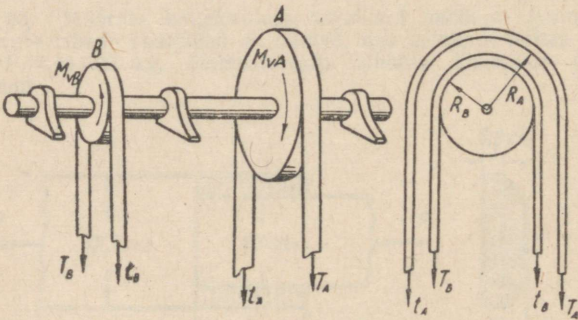
Mida nimetatakse pindsurveks (muljumiseks)?

Millised on keevisliidete tüübid?

## VÄÄNE

§ 38. Väändemomentide epüüride konstrueerimine.  
Väändemomendi seos võimsuse ja pöörete arvuga

Paljud masina- ja konstruktsioonielemendid, nagu näiteks võllid, vedrud jt. töötavad väände. Vaatleme võlli väände näidet. Kujutame enesele ette laagritele toetuvat võlli (joon. 69), millele on kinnitatud kaks rihmaratast  $A$



Joonis 69.

ja  $B$ . Rihmaratas  $A$  on ühendatud rihmülekande abil jõumasina, rihmaratas  $B$  samuti rihmülekande abil aga tööpingiga. Rihmaratta  $A$  poolt antakse võllile pöörlemine, mis tekib vedava ja veetava rihmaharu ebavõrdse tõmbejõu tõttu. Rihma vedavas harus on tõmbejõud  $T_A$  suurem kui rihma veetavas harus jõud  $t_A$ .

Rihmaratta  $A$  rihma tõmbejõud  $T_A$  ja  $t_A$  tekitavad peale surve tugeses jõupaari, mille saame kergesti määrata, kui koostame momentide võrrandi rihmaratta tsentri suhtes

$$M_{vA} = T_A R_A - t_A R_A = (T_A - t_A) R_A.$$

Rihmarattaga  $B$  käitatav tööpink avaldab pöörlemisele vastupanu. Seetõttu tekivad selle rihmaratta rihmaharudes tõmbejõud, mis moodustavad jõupaari:

$$M_{vB} = T_B R_B - t_B R_B = (T_B - t_B) R_B.$$

Kui jätame arvestamata hõõrdumise laagrites ning peatume võlli ühtlase pöörlemise juures, siis tasakaalutingimuse põhjal jõumasinalt saadud moment  $M_{vA}$  peab võrduma kasulikust takistusest tekitatud momendiga  $M_{vB}$ , s. o.

$$(T_A - t_A) R_A = (T_B - t_B) R_B = M_v.$$

Rihmarataste, või teiste sõnadega jõupaaritasapindade vahelist võlli osa väänatakse. Sellisesse deformeeritud väänatud olukorda jääb võll kogu töötamise ajal. Pärast jõumasina seiskamist hakkavad võllile mõjuma teda tagasi väänavad jõupaarid, deformatsioon kaob ning võll taastab oma esialgse oleku.

Võlli pingete ja deformatsioonide määramiseks peab teadma üksikutes vahemikkudes mõjuvate väändemomentide suurusi. Diagrammi, mis näitab väändemomendi suurusi võlli pikkuses, nimetatakse ka *väändemomentide epüüriks*.

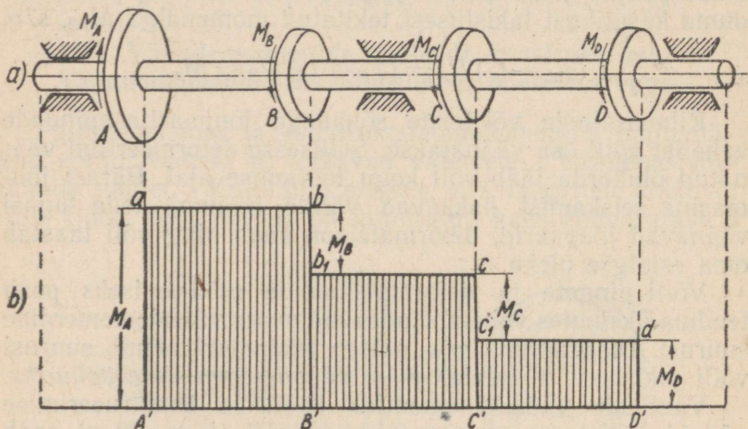
Vaatleme väändemomentide epüüride konstrueerimise näiteid. Oletame, et transmissioonivõll (joon. 70, *a*) saab rihmülekanne ja rihmaratta  $A$  kaudu jõumasinalt väändemomendi  $M_A$ , mis rihmülekannete ja rihmarataste  $B$ ,  $C$  ja  $D$  kaudu kulutatakse tööpinkides esinevate takistuste ületamiseks. Kirjutame tasakaalutingimuse

$$M_A = M_B + M_C + M_D.$$

Rihmarataste vahelistes võlli osades mõjuvad erineva suurusega väändemomendid. Väändemomentide epüüri konstrueerimiseks tõmbame võlli teljega paralleelse joone  $A'D'$  (joon. 70, *b*). Punktid  $A'$  ja  $D'$  vastavad äärmiste rihmarataste kesktasapindadele. Punktist  $A'$  püstitame ristjoone, mille pikkus  $A'a$  valitud mõõtkavas vastab jõumasinalt võllile antud väändemomendile  $M_A$ . See moment ei muutu, kuni rihmaratta  $B$  kesktasapinnani. Seetõttu tõmbame punktist  $a$  alusjoonega  $A'D'$  paralleelse joone  $ab$ . Rihmaratta  $B$  kaudu antakse osa väändemomendist  $M_A$  ja nimelt, moment  $M_B$ , üle tööpingile. Järelikult rihmaratta  $B$  kesktasapinnast

edasi on võllile rakendatud väändemoment  $M_A - M_B$ , millele vastab epüüril ordinaat  $B'b_1$ .

Kuni rihmaratta  $C$  kesktasapinnani jääb väändemoment  $M_A - M_B$  muutumatuks. Seetõttu tõmbame punktist  $b_1$  alusele  $A'D'$  paralleelse joone  $b_1c$ . Rihmaratta  $C$  kaudu tööpingile üleantav väändemoment  $M_C$  on kujutatud vastavas mõõtkavas lõiguna  $cc_1$ . Järelikult on võllile teisel pool rihmaratast  $C$  rakendatud moment  $M_A - M_B - M_C$ , mida epüüril kujutab ordinaat  $C'c_1$ . See moment ei muutu kuni viimase rihmaratta  $D$  kesktasapinnani, mistõttu tõmbame punktist  $c_1$



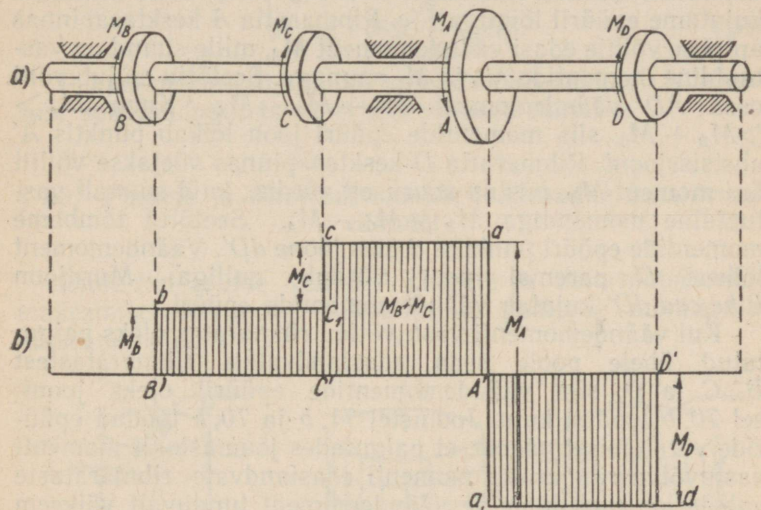
Joonis 70.

alusele  $A'D'$  paralleelse joone  $c_1d$ . Rihmaratas  $D$  annab pingile üle väändemomendi  $M_D$ , mis võrdub võllile järelejäänud väändemomendiga  $M_A - M_B - M_C$ . Rihmaratta  $D$  taga, samuti rihmaratta  $A$  ees väändemoment võrdub nulliga.

Murdjoonega  $A'abb_1cc_1dD'$  kujutatud väändemomentide epüür näitab, et kõige enam on võll koormatud rihmarataste  $A$  ja  $B$  vahel, kus antakse edasi suurim väändemoment. Kui võlli läbimõõt pikkuse ulatuses ei muutu, siis määratakse ta läbimõõt suurima väändemomendi järgi. Sel juhul on väiksemate väändemomentidega koormatud võlli osad liigse tugevusega. Järelikult teoreetilisest seisukohast on kasulik teha võll pikkuses muutuva läbimõõduga. Praktiliselt pole see aga alati otstarbekas, kuna võlli valmistamine muutub kalliks. Materjali kokkuhoiu võib aga saavutada ka rihmarataste ratsionaalse paigutusega võllile. Nimelt osutub

kasulikuks paigutada rihmaratas, mis võtab jõumasinalt vastu väändemomendi, võlli keskossa nii, et sellest rihmarattast võlliga mõlemale poole edasiantavate momentide summad oleksid võimalikult ühesuursed. Tõestame seda alljärgneva näitega.

Väändemoment  $M_A$  antakse jõumasinalt võllile rihmaratta  $A$  kaudu (joon. 71, *a*). Rihmaratas  $A$  on paigutatud rihmarataste  $B$ ,  $C$  ja  $D$  vahele, mis annavad võllilt vasta-



Joonis 71.

vad väändemomendid  $M_B$ ,  $M_C$  ja  $M_D$  edasi tööpinkidele. Jättes arvestamata hõõrdumise laagrites, võime kirjutada:

$$M_A = M_B + M_C + M_D.$$

Väändemomentide epüüri õigeks konstrueerimiseks on vaja meeles pidada, et *võlli meelevaldses löikes mõjuv väändemoment võrdub sellest löikest ühel pool mõjuvate väändemomentide summaga*. Vaadeldes võlli poolt tööpinkidele antavaid väändemomente kui võllile rakendatud momente, millel on võlli poolt vastuvõetava väändemomendiga vastupidine märk, pole raske ehitada momentide epüüri ka juhu jaoks, mil jõumasinalt väändemomenti vastuvõtlev rihmaratas on paigutatud tööpinkidele väändemomente jaotavate rihmarataste vahele.

Antud juhul on völlile vahemikus kuni rihmaratta  $B$  kesktaapinnani mõjuv väändemoment null. Vahemiku  $BC$  meelevaldses lõikes väändemoment võrdub rihmaratta  $B$  poolt edasiantava momendiga, s. o. momendiga  $M_B$ . Seda momenti kujutab joonisel 71,  $b$  vastavas mõõtkavas abstsissiteljest ülespoole kantud lõik  $B'b$ . Völli osa  $CA$  meelevaldses lõikes võrdub väändemoment lõikest vasakule poole jäävate väändemomentide summaga, s. o.  $M_B + M_C$ . Selle momendi kujutame epüüril lõiguga  $C'c$ . Rihmaratta  $A$  kesktaapinnas antakse völlile edasi väändemoment  $M_A$ , mille suund on vastupidine momentide  $M_B$  ja  $M_C$  suunaga. Seetötu mõjub völli osas  $AD$  väändemoment  $M_B + M_C - M_A$ . Kuna  $M_A > M_B + M_C$ , siis momentide epüüri joon lõikab punktis  $A'$  abstsissjoont. Rihmaratta  $D$  kesktaapinnas võetakse völlilt ära moment  $M_D$ , mis on suuruselt võrdne, kuid suunalt vastupidine momendiga  $M_B + M_C - M_A$ . Seetötu tõmbame momentide epüüri punktist  $d$  üles joone  $dD'$ . Väändemoment lõikest  $D$  paremal pool võrdub nulliga. Murdjoon  $B'bc_1caa_1dD'$  kujutab väändemomentide epüüri.

Kui väändemomenti vastuvöttev rihmaratas oleks paigutatud ühele poole seda edasiandvatest rihmaratatest  $B$ ,  $C$  ja  $D$ , siis väändemomentide epüüril oleks joonisel 70,  $b$  toodud kuju. Joonistel 71,  $b$  ja 70,  $b$  toodud epüüride võrdlemisel näeme, et paigutades jõumasinalt momenti vastuvötvä rihmaratta momenti edasiandvate rihmarataste vahele, on maksimaalne väändemoment tunduvalt väiksem kui juhul, mil jõumasinalt momenti vastuvöttev rihmaratas on paigutatud momenti edasiandvatest rihmaratatest ühele poole. Völlile mõjuva maksimaalse väändemomendi vähendamise võimaldab vähendada ka völli läbimöötü ning hoida seega kokku materjali.

Völlide tugevusarvutusel sageli ei anta väändemomenti, vaid völliga edasiantav võimsus  $N$  hobujöududes ja völli pöorete arv  $n$ . Tuletame valemi väändemomendi määramiseks antud võimsuse  $N(HJ)$  ja pöorete arvu  $n \frac{P}{\text{min}}$  kaudu. Mehaanikast on teada, et pöordemomendi võimsus võrdub momendi ja nurkkiiruse korrutisega, s. o.

$$W = M_v \omega = M_v \frac{\pi n}{30} \text{ kgm/sek.}$$

Teiselt poolt

$$W = 75N \text{ kgm/sek;}$$

järelikult

$$M_v \frac{\pi n}{30} = 75N,$$

millest

$$M_v = \frac{30 \cdot 75}{\pi} \frac{N}{n} = 716,2 \frac{N}{n} \text{ kgm}$$

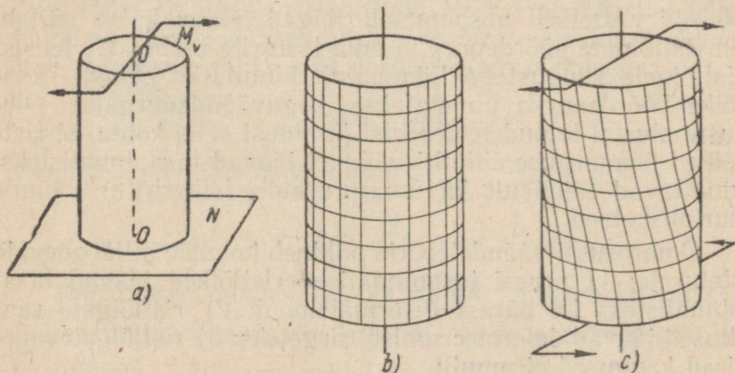
ehk

$$M_v = 71620 \frac{N}{n} \text{ kgcm.} \quad (90)$$

Peame meeles, et saadud valemis (90) tähistab  $N$  võimsust hobujõududes ja  $n$  — pöörete arvu minutis.

### § 39. Pingete ja deformatsioonide määramine ümarprussi väändel

Enne kui asume väändel pingete ja deformatsioonide määramise võrrandite tuletamisele, peatume mõningatel katseandmetel.



Joonis 72.

Võtame ümmarguse silindri, mille alumise otsa kinnitame liikumatule tasapinnale  $N$  (joon. 72, a), vabale ülemisele otsale rakendame aga silindri telje risttasapinnas mõjuva jõupaari momendiga  $M_v$ . Silinder selle momendi mõjul allub deformatsioonile, mida nimetatakse *väändeks*.

Silindri väändel jääb tema telg  $OO$  sirgeks. Seda telge nimetatakse *väände teljeks*. Kui enne väänet oli silindri külgpinnale kantud ringjoontest ja moodustajatest kujundatud võrk (joon. 72, *b*), siis pärast deformatsiooni täheledatakse järgnevaid muudatusi (joon. 72, *c*).

1) Võrguga kujundatud ruudukesed muutuvad täiesti ühesugusteks rombideks.

2) Silindri ümmargused lõiked jäävad endise läbimõõduga ringideks.

3) Ringjoontevaheline kaugus ei muutu, järelikult ka silindri kogupikkus jääb endiseks.

4) Silindri moodustajad muutuvad suure samuga kruvijoonteks.

Nende väliste tunnuste järgi ei saa absoluutse kindlusega teha järeldust muutustest, mis toimuvad väändel silindri sisemistes punktides. Kuid siiski fakt, et silindrile kantud ringjooned ka pärast deformatsiooni jäävad tasapinnalisteks, moodustajad aga muutuvad kruvijoonteks, annavad õiguse oletada, et iga tasapinnaliseks jäänud ristlõige nihkub naaberlõike suhtes. Ristlõigete pöördumine mingi nurga võrra silindri telje suhtes toimub nii, nagu oleksid ristlõiked absoluutselt jäigad. Nagu katse näitab, on ristlõigete pöördenurgad oma tsentrite ümber võrdelised ristlõigete kaugustega liikumatult kinnitatud otsast. Otslõike pöördenurka nimetatakse koguväändenurgaks. Oletuste alusel tehtud teoreetilisi järeldusi selle kohta, et ristlõiked ümmarguse silindri väändel jäävad tasapinnalisteks, kinnitavad täielikult ka ümarprusside (silindrite) väände uurimiskatsed.

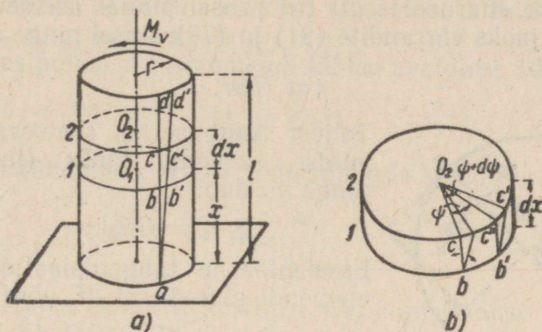
Ümarprussi väändeteooria põhineb kolmele alljärgnevale oletusele: 1) prussi tasapinnalised ristlõiked jäävad tasapinnalisteks ka pärast deformatsiooni; 2) ristlõigete raadiused jäävad deformeerumisel sirgeteks; 3) ristlõigetevahelised kaugused ei muutu.

Asume ümarprussi väände põhivõrrandite tuletamisele. Eraldame väänatavast prussist, mille raadius on  $r$  (joon. 73, *a*), ketta kaugusel  $x$  kinnituskohast. Ketas on piiratud kahe naaberlõikega 1 ja 2, mis asetsevad teineteisest kaugusel  $dx$ . Enne deformatsiooni ühel moodustajal asunud punktid  $b$ ,  $c$  ja  $d$  asetsevad pärast deformatsiooni kruvijoonele ning nende uued asendid on  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$ .

Kui alumisest otsast kaugusel  $x$  asetsev lõige pöördub kinnitatud otsa suhtes nurga  $\varphi$  võrra, siis kaugusel  $x + dx$

asetsev lõige pöörduv kinnitatud otsa suhtes nurga  $\psi + d\psi$  võrra (joon. 73, b).

Tõmbame punktist  $b$  sirge  $bc''$ , mis on paralleelne  $b'c'$ -ga ja ühendame teise lõike tsentri punktiga  $c''$ . Siis nurk  $cO_2c''$  võrdub  $d\psi$  ja on lõike 2 pöördenurk lõike 1 suhtes. Elemendi  $bc''c'b'$  külgpinnad olid enne lõike 2 pöördu-



Joonis 73.

mist lõike 1 suhtes vertikaalselt. Pärast pöördumist küljed kaldusid ja võtsid asendid  $bc''$  ja  $b'c'$ . Järelikult element tegi absoluutse nihke, mis võrdub kaare pikkusega:

$$cc'' = rd\psi.$$

Elemendi suhteline nihe oleks

$$\gamma = \frac{rd\psi}{dx}.$$

Konstantse momendiga väänatud ümarprussil on suhe  $\frac{d\psi}{xd}$  konstantne suurus ja kujutab väändenurka prussi pikkusühikule. Tähistame selle tähega  $\Theta$ . Siis

$$\gamma = r\Theta. \quad (91)$$

Sellest valemist näeme, et suhteline nihe on võrdeline väänatava silindrilise keha raadiusega.

Kuna paragrahvi algul eeldasime, et ristlõigetega raadiused ei kõverdu, vaid jäävad sirgeteks, siis võime öelda, et silindri sees mingisuguse raadiuse kaugusel asetseval samasuguselt väljalõigatud elemendil suhteline nihe võrdub

$$\gamma_s = \varrho \Theta. \quad (a)$$

Nihkel Hooke'i seaduse põhjal

$$\tau = G\gamma \quad (79)$$

võib määrata pinge meelevaldse elemendi jaoks tema suhtelise nihke suuruse järgi. Nii prussi pinnal asetsevate elementide jaoks võrrandite (91) ja (79) alusel pinge avaldub:

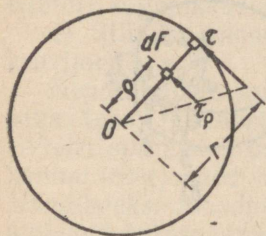
$$\tau = G\Theta r.$$

Teljest kaugusel  $\varrho$  asetseva meelevaldse elemendi jaoks (joon. 74) pinge võrdub:

$$\tau_\varrho = G\Theta\varrho. \quad (b)$$

Elementaarne tangentsiaaljõud selle elemendi pinnakesel  $dF$  võrdub:

$$\tau_\varrho dF = G\Theta\varrho dF.$$



Joonis 74.

Nende elementaarsete sisejõudude sihid on risti vastavate raadiustega, kuna nimelt selles sihis toimub ka nihe.

Meelevaldse elementaarjõu moment prussi telje suhtes avaldub:

$$dM = G\Theta\varrho^2 dF. \quad (c)$$

Selliste elementaarsete momentide summa võetuna üle kogu ristlõikepinna  $F$ , peab pärast deformatsiooni saabuva tasakaalu puhul võrduma välise väändemomendiga, mis antakse edasi muutumatult kõikidele ristlõigetele. Elementaarsete momentide summa leiame avaldise (c) integreerimisel:

$$M_v = \int_F dM = \int_F G\Theta\varrho^2 dF.$$

Tuues konstandid integraali märgi ette, saame:

$$M_v = G\Theta \int_F \varrho^2 dF.$$

Avaldist  $\int_F \varrho^2 dF$ , s. o. pinnaelementide  $dF$  korrutiste sum-

mat nende kauguste ruututega  $\rho^2$  mingist kujundi tasapinnas asetsevast poolusest, võetuna üle kujundi kogu pindala, nimetatakse kujundi *polaarinertsmomendiks* ja tähistatakse  $J_p$ .

Polaarinertsmoment on puhtgeomeetiline suurus ning selle dimensioon on  $\text{cm}^4$ . Polaarinerstsmoment on alati positiivne suurus. Meie tuletuses on  $J_p$  pooluseks rsiitlõike tsenter, s. o. ringi tsenter.

Tuues polaarinerstsmomendi tähise avaldisse (d), saame:

$$M_v = G\Theta J_p,$$

millest väändenurk prussi pikkusühikule avaldub:

$$\Theta = \frac{M_v}{GJ_p}. \quad (92)$$

Nimetajas esinevat korrutist  $GJ_p$  nimetatakse *jäikuseks väändel*.

Koguväändenurga saame, kui korrutame  $\Theta$  prussi pikkusega  $l$ :

$$\varphi = \frac{M_v l}{GJ_p}. \quad (93)$$

Saadud valem näitab, et prussi koguväändenurk on võrdeline väändemomendiga  $M_v$ , prussi pikkusega  $l$  ja pöördvõrdeline jäikusega  $GJ_p$ .

Tuleb silmas pidada, et valemi (93) tuletamisel me kasutasime Hooke'i seadust. Seega me eeldasime, et väändemoment on suuruselt selline, mille korral materjal ei esine jäävaid deformatsioone.

Valemis (93) on koguväändenurk avaldatud radiaanides. Üleminek kraadidele toimub üldtuntud valemi järgi

$$\varphi^\circ = \varphi \frac{180^\circ}{\pi}; \quad (94)$$

järelikult

$$\varphi^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{M_v l}{GJ_p}. \quad (95)$$

Asetame võrrandisse (b) väändenurga pikkusühikule valemist (92):

$$\tau_{\varrho} = G\varrho \frac{M_{\varrho}}{GJ_p} = \frac{M_{\varrho}\varrho}{J_p}. \quad (96)$$

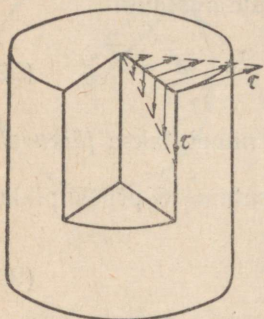
See võrrand näitab, et pinged ristlõike pinnakestes on võrdelised nende kaugustega ristlõike tsentrist (joon. 75). Kui  $\varrho = 0$ , siis

$$\tau = 0,$$

s. o. teljel (ristlõike tsentris) pingeid ei ole. Eemaldumisel tsentrist prussi perifeeriasse pinged kasvavad lineaarselt.

Ümarprussi väändel esineb suurim pinge prussi pinnal ning see võrdub:

$$\tau_{max} = \frac{M_{\varrho}r}{J_p}. \quad (97)$$



Joonis 75.

Erinevalt varem käsitletud deformatsioonidest jaotuvad pinged väändel ristlõikes ebaühtlaselt ja kasvavad tsentrist äärte poole.

Pingete muutumiste diagramm ristlõike raadiuse ulatuses on kujutatud joonisel 75. Tangentsiaalpingete paaritiesinemise seaduse põhjal tekivad viimased ka pikilõigetes. Kiulistel materjalidel, millele vastupanu nihkele on pikikiudu väiksem kui ristikiudu (puit), tekivad väändest purunemisel pikisuunalised praod.

Väändele töötavate võllide keskmised osad, kui kõige vähem pingestatud, sageli eemaldatakse, s. o. võll tehakse õõnsana. Pinged õõnessilindris ületavad väga vähe pingeid täissilindris, kuid kaalus saavutatakse suur kokkuhoid. Seejärel puuritaksegi kõigi lennukimootorite võllid kaalu vähendamiseks seest õõnsaiks.

Tavaliselt antakse valemile (97) mõnevõrra teistsugune kuju. Polaarinertsmomendi  $J_p$  suhet ristlõike suurimasse raadiusse  $r$  nimetatakse *polaarvastupidavusmomendiks väändel* ja tähistatakse tähega  $W_p$ , s. o.

$$W_p = \frac{J_p}{r}. \quad (98)$$

Sel juhul valem (97) avaldub kujul

$$\tau_{max} = \frac{M_v}{W_p} \quad (99)$$

Ümarsilindrite väändeteooria põhivalemiks on deformatsiooni määrav valem (93) ja maksimaalset pinget avaldav valem (99).

#### § 40. Ringi ja rõnga polaarinertsmoment ning polaarvastupidavusmoment

Valemite (93) ja (99) järgi täis- ja õõnesvõllide arvutamiseks peab oskama määrata ringi ja rõnga polaarinertsmomenti ja polaarvastupidavusmomenti.

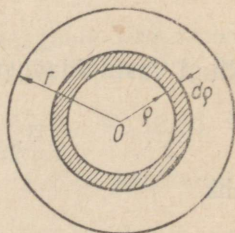
Kujundi polaarinertsmomendiks me nimetasime avaldist  $\int_F \varrho^2 dF$ , s. o. kujundi elementaarpindade  $dF$  korrutiste summat nende kauguste ruutudega  $\varrho^2$  mingist poolusest, võetuna üle kujundi kogu pinna. Lähtudes sellest määrangust, arvutame ringi polaarinertsmomendi. Selleks jaotame ringi mõtteliselt (joon. 76) lõpmatult suureks arvuks lõpmatult õhukesteks rõngasteks. Kui ühe sellise rõnga raadius on  $\varrho$ , laius aga  $d\varrho$ , siis elementaarrõnga pindala avaldub

$$dF = 2\pi\varrho d\varrho.$$

Selle elementaarrõnga kõiki punkte võime lugeda ühel ja samal kaugusel  $\varrho$  asetsevateks poolusest, s. o. ringi tsentrist. Korrutades rõnga pindala  $dF$  tema punktide kauguse ruutudega  $\varrho^2$  poolusest ja integreerides selle korrutise radades  $\varrho = 0$  kuni  $\varrho = r$ , s. o. summeerides korrutise  $\varrho^2 dF$  üle kogu ringi pinna, saame:

$$J_p = \int_F \varrho^2 dF = \int_0^r \varrho^2 2\pi\varrho d\varrho = 2\pi \left| \frac{\varrho^4}{4} \right|_0^r = \frac{\pi r^4}{2} \quad (100)$$

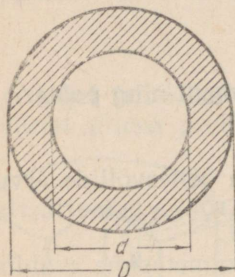
Asetades valemis (100)  $r$  asemele  $\frac{d}{2}$ , saame teise rohkem kasutatava avaldise *ringi polaarinertsmomendi* jaoks:



Joonis 76.

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4. \quad (101)$$

Välisläbimõõduga  $D$  ja siseläbimõõduga  $d$  rõnga (joon. 77) polaarinertsmomendi leiame kui välis- ja siserõnga polaarinertsmomentide vahe:



Joonis 77.

$$\begin{aligned} J_p &= \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \quad (102) \\ &= \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} \approx 0,1(D^4 - d^4). \end{aligned}$$

Mõnikord on õõnesvõllide arvutamisel sobivam kasutada rõnga polaarinertsmomendi avaldist teistsugusel kujul.

Kui tähistada suhe  $\frac{d}{D} = \alpha$ , siis avaldisest (102) saame:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} [D^4 - (D\alpha)^4]$$

ehk

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4). \quad (103)$$

Ringi vastupidavusmoment väändeale on:

$$W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi r^4}{2r} = \frac{\pi r^3}{2}$$

ehk

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (104)$$

Rõnga vastupidavusmoment väändeale on:

$$W_p = \frac{J_p}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32 \cdot \frac{D}{2}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} \approx 0,2 \frac{D^4 - d^4}{D} \quad (105)$$

ehk

$$W_p = \frac{\pi}{16} D^3 (1 - \alpha^4) \approx 0,2D^3 (1 - \alpha^4). \quad (106)$$

Märgime, et rõnga vastupidavusmomenti ei saa määrata suure ja väikse ringi vastupidavusmomentide vahena.

## § 41. Väände arvutusvõrrandid

Tähistades lubatava väändepinge, nagu lubatava nihkepingegi,  $[\tau]$ -ga, saame väändetugevuse arvutusvalem:

$$\tau_{max} = \frac{M_v}{W_p} \leq [\tau]. \quad (107)$$

Lubatava pinge  $[\tau]$  võtame võrdseks  $0,5 \div 0,6$  lubatavast tõmbepingest.

Lubatav pinge plastilisele materjalile määratakse ettenähtud tugevusvaru  $k$  korral voolavuspiiri järgi väände:

$$[\tau] = \frac{\tau_T}{k}, \quad (108)$$

kusjuures näiteks terase jaoks  $\tau_T = (0,5 \div 0,6)\sigma_T$ . Arvutusvõrrand (107) oma kujult sarnaneb tõmbe, surve ja nihke arvutusvõrranditega. Siin koormus (mitte jõud, vaid moment) jagatakse ristlõiget iseloomustava mingi geomeetrilise faktoriga ja nimelt vastupidavusmomendiga (mitte ristlõikepindalaga, nagu seda tegime tõmbe, surve ja nihke puhul).

Arvutusvõrrand (107) kehtib ümmarguste (nii umbsete kui ka õõnsate) võllide väändel. Kõikide teiste ristlõigete puhul seda kasutada ei saa.

Võrrandis (107) esineb kolm suurust  $M_v$ ,  $W_p$  ja  $[\tau]$ . Teades neist kahte, võime määrata kolmanda.

Kui on teada  $M_v$  ja  $W_p$ , siis töötava võlli kontrollarvutusel määrame pinge valemiga (99).

Teades võlli mõõteid ja tema materjali lubatavat pinget antud töötingimustel, võime võlliga edasiantava maksimaalse lubatava väändemomendi määrata valemiga (107):

$$M_v \leq [\tau] W_p. \quad (109)$$

Uue võlli projekteerimisel on selle mõõdete määramiseks tarvis teada kasutatava materjali lubatavat pinget ja väändemomenti. Nii näiteks täisvõlli korral, asetades valemisse (107) vastupidavusmomendi avaldise, saame:

$$\frac{16M_v}{\pi d^3} \leq [\tau], \quad (110)$$

millest

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_v}{n[\tau]}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{M_v}{[\tau]}}. \quad (111)$$

Asendades selles valemis väändemomendi  $N$  ja  $n$  kaudu (90), saame:

$$d \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{71\,620 N}{n[\tau]}} = 72 \sqrt[3]{\frac{N}{n[\tau]}}. \quad (112)$$

Analoogiliselt leiame õõnesvõllide jaoks:

$$D \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{M}{(1-\alpha^4)[\tau]}} \quad (113)$$

ehk

$$D \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{71\,620 N}{n[\tau]}} = 72 \sqrt[3]{\frac{N}{n(1-\alpha^4)[\tau]}}. \quad (114)$$

Valemitest (112) ja (114) näeme, et antud võimsuse puhul võimaldab pöörete arvu  $n$  suurendamine vähendada võlli läbimõõtu.

Praktikas nõutakse võllilt peale tugevuse sageli ka küllaldast jäikust, mis seisneb selles, et võlli väändenurk pikkusühikule ei tohi ületada määratud suurust. Nimetatud tingimus esitatakse võlli vetrumise vältimiseks. Lubatav väändenurk on igal üksikjuhul erineva suurusega.

Mida väiksem on väändenurk, seda väiksem on võlli vetrumine. Mõningatel juhtudel on aga võlli suur vetrumine soovitatav. Näiteks mittekonstantse väändemomendi üleandmisel ühelt võllilt teisele asetatakse momentide ebaühtlase mõju leevendamiseks võllide vahele ressoori osa etendav väikese jäikusega vahevõllik.

Jäikuse arvutusvalemi saamiseks toome avaldisse (95) lubatava väändenurga  $[\varphi^\circ]$  pikkuse ühele meetrile:

$$\varphi^\circ = \frac{180^\circ M_v 100}{\pi G J_p} \leq [\varphi^\circ],$$

millest

$$J_p \geq \frac{18\,000 M_v}{G \pi [\varphi^\circ]}. \quad (115)$$

Täisvõlli jaoks saame:

$$\frac{\pi}{32} d^4 \geq \frac{18\,000 M_v}{G \pi [\varphi^\circ]}.$$

Järelikult jäikuse tingimusest lähtudes, peab võlli läbimõõt rahuldama tingimust

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{18\,000 M_v \cdot 32}{G \pi^2 [\varphi^\circ]}} = 15,3 \sqrt[4]{\frac{M_v}{G [\varphi^\circ]}} \quad (116)$$

ehk, asetades väärtuse  $M_v$  saame:

$$d \geq 15,3 \sqrt[4]{\frac{71\,620 M_v}{nG [\varphi^\circ]}} = 250 \sqrt[4]{\frac{N}{nG [\varphi^\circ]}}. \quad (117)$$

Analoogiliselt leiame õõnesvõllide jaoks:

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{18\,000 M_v \cdot 32}{G \pi^2 (1 - \alpha^4) [\varphi^\circ]}} = 15,3 \sqrt[4]{\frac{M_v}{G (1 - \alpha^4) [\varphi^\circ]}} \quad (118)$$

ehk

$$D = 15,3 \sqrt[4]{\frac{71\,620 M_v}{G (1 - \alpha^4) n [\varphi^\circ]}} = 250 \sqrt[4]{\frac{N}{nG (1 - \alpha^4) [\varphi^\circ]}}. \quad (119)$$

Kui võlli projekteerimisel antakse ette ainult lubatav pinge, s. o. võlli läbimõõt määratakse lähtudes tema tugevusest, siis kasutatakse valemit (112), õõnesvõllide puhul aga valemit (114).

Transmissioonvõllid töötavad tavaliselt peale väände veel paindele, mida põhjustab rihmarataste kaal, rihmade tõmme jt. Transmissioonvõllid lihtsustatud juhtudel arvutatakse ainult väände, kuid seejuures kasutatakse väiksemat lubatavat pinget.

Valuterasest võllidel tavaliselt võetakse  $[\tau] = 120 - 250 \text{ kg/cm}^2$ , spetsiaalterasest võllidel aga rohkem.

Kui võlli projekteerimisel antakse peale lubatava pinge ette ka veel lubatav väändenurk, siis määratakse võlli läbimõõt täiendavalt jäikuse arvutusvalemi (117) järgi, õõnesvõllide puhul aga valemi (119) järgi.

Selleks, et võll üheaegselt rahuldaks mõlemat tingimust (tugevust ja jäikust), võetakse kahest leitud läbimõõdust suurem.

Lubatav väändenurk  $[\varphi^\circ]$  võlli pikkuse ühele meetrile võetakse  $0,3^\circ$  ja enam (kuni  $2^\circ$ ).

Näide 34. Völlile mõjub väändemoment  $M_v = 200$  kgm. Määrata völli läbimõõt, kui lubatav pinge  $[\tau] = 500$  kg/cm<sup>2</sup>.

Lahendus. Völli ristlõike vastupidavusmoment valemi (107) järgi võrdub:

$$W_p = \frac{M_v}{[\tau]} = \frac{20\,000}{500} = 40 \text{ cm}^3.$$

Kuna

$$W_p = \frac{\pi}{16} d^3,$$

siis

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 W_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 40}{3,14}} = 5,89 \approx 6,0 \text{ cm}.$$

Näide 35. Oõnesvöllile mõjub väändemoment  $M_v = 500$  kgm. Völli sise- ja välisläbimõõtude suhe

$$\frac{d}{D} = \alpha = 0,7.$$

Lubatav pinge  $[\tau] = 600$  kg/cm<sup>2</sup>. Määrata ristlõike mõõted ja kaalu kokkuhoid, võrreldes sama tugeva täisvölliga.

Lahendus. Völli välisläbimõõt valemi (113) järgi võrdub:

$$D \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{M_v}{(1-\alpha^4)[\tau]}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{50\,000}{(1-0,7^4)600}} = 8,22 \text{ cm}.$$

Völli siseläbimõõt

$$d = D\alpha = 8,22 \cdot 0,7 \approx 5,75 \text{ cm}.$$

Läbimõõt täisvölli valemi (111) järgi peab võrduma:

$$d_{\text{täis}} \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{M_v}{[\tau]}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{50\,000}{600}} = 7,5 \text{ cm}.$$

Völlide kaalud suhtuvad nagu nende ristlõiked. Oõnesvölli ristlõikepindala

$$F = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 0,785 (8,22^2 - 5,75^2) = 26,9 \text{ cm}^2.$$

Täisvölli ristlõikepindala

$$F_{\text{täis}} = \frac{\pi}{4} \cdot d_{\text{täis}}^2 = 0,785 \cdot 7,5^2 = 44,2 \text{ cm}^2.$$

Järelikult kaalu saavutatav kokkuhoid

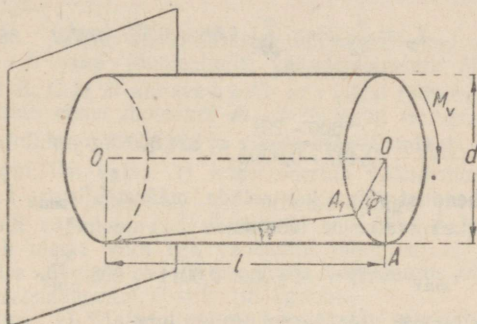
$$\frac{F}{F_{\text{täis}}} = \frac{26,9}{44,2} = 0,61,$$

s. o. oõnesvöll kaalub sama tugevusega täisvöllist 39% vähem.

Näide 36. Terasvarda, mille läbimõõt  $d = 15$  mm ja pikkus  $l = 200$  mm (joon. 78), väänamisel paigutus varda vaba otsa rakendatud momendi  $M_v = 600$  kg/cm mõjul punkt  $A$  asendisse  $A_1$ , läbides seejuures kaare.

$$s = \overset{\frown}{AA_1} = 0,22 \text{ mm.}$$

Määrata: 1) maksimaalne väändepinge  $\tau_{max}$ , 2) varda vaba otsa pöördenurk  $\varphi$  kinnituse suhtes, 3) varda pinna suhteline nihe ja 4) varda materjali elastsusmoodul  $G$ .



Joonis 78.

Lahendus. 1) Maksimaalse väändepinge määramiseks arvutame esmalt vastupidavusmomendi väände valemiga (104):

$$W_p = \frac{\pi}{16} d^3 = \frac{\pi}{16} 1,5^3 = 0,663 \text{ cm}^3.$$

Maksimaalne väändepinge määratakse valemiga (99):

$$\tau_{max} = \frac{M_v}{W_p} = \frac{600}{0,663} = 906 \text{ kg/cm}^2.$$

2) Määrame, millise nurga  $\varphi$  võrra pöörduv varda vaba ots kinnitatud otsa suhtes. Selleks avaldame kaarepikkuse  $s$  nurga  $\varphi$  ja varda raadiuse  $\frac{d}{2}$  kaudu:

$$s = \varphi \frac{d}{2},$$

millest

$$\varphi = \frac{2s}{d} = \frac{2 \cdot 0,022}{1,5} = 0,0293 \text{ radiaanid.}$$

3) Suhteline nihe  $\gamma$  varda pinnal

$$\gamma = \frac{\overline{AA_1}}{l} = \frac{s}{l} = \frac{0,022}{20} = 0,0011.$$

4) Varda materjali elastsusmoodul  $G$  valemi (93) järgi võrdub:

$$G = \frac{M_v l}{J_p \varphi}.$$

Varda ristlõike polaarinerntsmoment

$$J_p = \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{32} \cdot 1,5^4 = 0,497 \text{ cm}^4;$$

järelikult

$$G = \frac{600 \cdot 20}{0,497 \cdot 0,0293} = 824\,000 \text{ kg/cm}^2.$$

Selle näite lahendust võime kontrollida, määrates  $\tau_{max}$   $\gamma$  ja  $G$  kaudu. Vastavalt Hooke'i seadusele leiame:

$$\tau_{max} = G\gamma = 824\,000 \cdot 0,0011 = 906 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Saadud pinged langeb ühte varem arvatutuga.

**Näide 37.** Kaks ühesuguse pikkusega  $l$  võlli, millest üks on õõnes, annavad edasi võrdseid väändemomente  $M_v$ , kusjuures maksimaalsed mõjuvad väändepinged  $\tau_{max}$  on võrdsed. Määrata nende võllide väändenurkade suhe.

*Lahendus.* Tähistame täisvõllil väändenurga  $\varphi$  ja õõnesvõllil  $\varphi'$ . Võllide ristlõigete polaarinerntsmomendid tähistame vastavalt  $J_p$  ja  $J'_p$ . Täisvõlli läbimõõdu tähistame  $d$ , õõnesvõlli välisläbimõõdu  $D$ .

Kuna edasiantavad väändemomendid ja maksimaalsed pinged mõlemal võllil on võrdsed, siis võllide vastupidavusmomendid väände  $W$  peavad olema samuti võrdsed.

Täisvõlli väändenurk valemi (93) alusel on:

$$\varphi = \frac{M_v l}{G J_p}.$$

Silmas pidades, et

$$M_v = \tau_{max} \cdot W_p = \tau_{max} \frac{J_p}{d},$$

saame:

$$\varphi = \frac{M_v l}{G J_p} = \frac{\tau_{max} 2 J_p l}{d G J_p} = \frac{2 \tau_{max} l}{d G}.$$

Analoogiliselt sellele saame õõnesvõlli jaoks:

$$\varphi' = \frac{M_v l}{GJ_p} = \frac{\tau_{max} 2J_p l}{DGJ_p} = \frac{2\tau_{max} l}{DG}$$

Võllide väändenurkade suhe võrdub:

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{2\tau_{max} l}{dG} : \frac{2\tau_{max} l}{DG} = \frac{D}{d}$$

Järelikult antud tingimustel väändenurgad on pöördvõrdelised läbimõõtudega.

**Näide 38.** Võllile on kinnitatud neli rihmaratast  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ja  $D$ . Rihmaratas  $A$  saab jõumasinalt väändemomendi  $M_A = 100$  kgm, rihmarattad  $B$ ,  $C$  ja  $D$  annavad selle aga edasi töömasinatele. Rihmaratas  $B$  annab edasi momendi  $M_B = 25$  kgm, rihmaratas  $C$  annab edasi momendi  $M_C = 25$  kgm ja rihmaratas  $D$  annab edasi momendi  $M_D = 50$  kgm. On vaja: 1) konstrueerida väändemomentide epüür, 2) määrata võlli läbimõõt, kui lubatav pinge  $[\tau] = 200$  kg/cm<sup>2</sup>, 3) leida võlli väändenurgad üksikutes vahemikkudes ja 4) määrata, milline peab olema võlli iga vahemiku läbimõõt, et pinge võrduks kõigis nendes lubatavaga. Rihmarataste vahekaugus on üks ja sama  $l = 1$  m, elastsusmoodul  $G = 8 \cdot 10^5$  kg/cm<sup>2</sup>.

**Lahendus.** 1) Ülalpool esitatud vastavate seletuste põhjal konstrueeritud väändemomentide epüür on kujutatud joonisel 71, *b*. 2) Sellest epüürist näeme, et kõige enam pingestatud on võlli vahemikud  $AC$  ja  $AD$ , milledes momendid on ühesugused ja võrduvad 50 kgm. Lähtudes selle väändemomendi suurusest, määrame võlli läbimõõdu valemiga (111):

$$d = 1,72 \sqrt[3]{\frac{M_v}{[\tau]}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{5000}{200}} = 5,03 \text{ cm.}$$

Umardame seda väärtust ja võtame  $d = 5$  cm. 3) Vahemikus  $BC$  on väändenurk:

$$\varphi_{B-C} = \frac{M_v l}{GJ_p} = \frac{2500 \cdot 100}{8 \cdot 10^5 \frac{\pi}{32} 5^4} = 0,0051 \text{ radiaani.}$$

Väändenurgad vahemikkudes  $CA$  ja  $AD$  on:

$$\varphi_{C-A} = \varphi_{A-D} = \frac{5000 \cdot 100}{8 \cdot 10^5 \frac{\pi}{32} 5^4} = 0,0102 \text{ radiaani.}$$

Nurk, mille võrra pöördub löige  $B$  löike  $A$  suhtes, võrdub väändenurkade  $\varphi_{B-C}$  ja  $\varphi_{C-A}$  summaga, s. o.

$$\varphi_{B-A} = \varphi_{B-C} + \varphi_{C-A} = 0,0051 + 0,0102 = 0,0153 \text{ radiaani}$$

ehk kraadides:

$$\varphi^\circ = \frac{180}{\pi} \varphi_{B-A} = 0,885^\circ.$$

4) Tuues sisse lubatava pinge, leiame, et võlli vahemikkudes  $CA$  ja  $AD$  võlli läbimõõt peab võrduma 5 cm, vahemikus  $BC$  aga peab olema:

$$d = 1,72 \sqrt[3]{\frac{2500}{200}} = 3,96 \text{ cm}$$

ehk ümardatult  $d = 4$  cm.

**Näide 39.** Määrata jõumasina võlliga edasiantav võimsus, kui võlli pikkusel 1,5 m mõõdetud väändenurk osutus võrdseks  $0,5^\circ$ . Võlli

läbimõõt  $d = 100$  mm, võlli pöörete arv  $n = 500 \frac{\text{p}}{\text{min}}$ , materjali elastsusmoodul  $G = 8 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ .

*Lahendus.* Valemist (93) saame:

$$M_v = \frac{\varphi G J_p}{l}.$$

Asetades väändemomendi selle väärtuse valemisse (90), saame:

$$\frac{\varphi G J_p}{l} = 71\,620 \frac{N}{n},$$

millest

$$N = \frac{\varphi G J_p n}{71\,620 l}.$$

Võlli väändenurk, avaldatuna radiaanides, võrdub:

$$\varphi = \frac{\varphi^\circ \pi}{180} = \frac{0,5 \cdot 3,14}{180}.$$

Asendades võimsuse  $N$  jaoks saadud avaldise parempoolses osas seisvad suurused nende väärtustega, saame:

$$N = \frac{0,5 \cdot 3,14 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 10^4 \cdot 500}{180 \cdot 71\,620 \cdot 150 \cdot 32} = 318 \text{ HJ}.$$

**Näide 40.** Terasvõll, läbimõõduga  $d = 8$  cm, on mõlemast otsast liikumatult kinnitatud (joon. 79, a). Vahepealses lõikes, mis jääb vasaku otsa kinnitustasapinnast kaugusele  $a = 0,5$  m, parema otsa kinnitustasapinnast aga kaugusele  $b = 1$  m, on rakendatud väändemoment

$$M_v = 750 \text{ kgm}.$$

Määrata pinge võllis ja väändenurk.

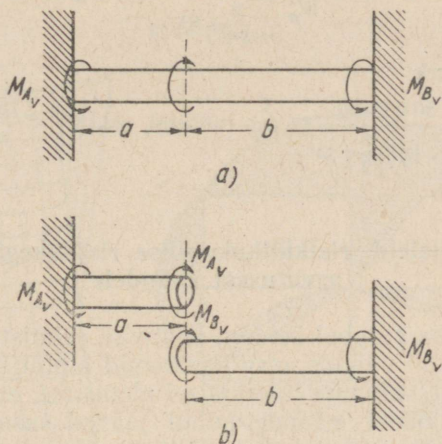
*Lahendus.* Eelkõige määrame reaktsioonmomendid  $M_{Av}$  ja  $M_{Bv}$  kinnitustasapindades.

Nende määramiseks annavad staatika tasakaalutingimused ainult ühe võrrandi (joon. 79, b):

$$M_{A_v} + M_{B_v} = M_v. \quad (a)$$

Järelikult antud ülesanne on staatiliselt määratu.

Ülesande lahendamiseks teise vajaliku võrrandi koostame võlli



Joonis 79.

deformatsiooni põhjal. Väändenurga võime momendi rakendusriistlõikes määrata kahel viisil:

$$1) \quad \varphi = \frac{M_{A_v} \cdot a}{GJ_p} \quad \text{ja} \quad 2) \quad \varphi = \frac{M_{B_v} \cdot b}{GJ_p}.$$

Järelikult

$$\frac{M_{A_v} \cdot a}{GJ_p} = \frac{M_{B_v} \cdot b}{GJ_p}$$

ehk

$$\frac{M_{A_v}}{M_{B_v}} = \frac{b}{a}, \quad (b)$$

s. o. reaktsioonmomentid on pöördvõrdelised kaugustega  $a$  ja  $b$  kuni väänava momendi rakendusriistlõikeni.

Võrranditest (a) ja (b) leiame:

$$M_{A_v} = M_v \frac{b}{a+b} \quad \text{ja} \quad M_{B_v} = M_v \frac{a}{a+b}.$$

Asendades  $M_v$ ,  $a$  ja  $b$  nende väärtustega, saame:

$$M_{A_v} = 750 \frac{1}{0,5 + 1} = 500 \text{ kgm}, \quad M_{B_v} = 750 \frac{0,5}{0,5 + 1} = 250 \text{ kgm}.$$

Ilmselt suurem pinge esineb võlli vasakpoolses osas:

$$\tau = \frac{M_{A_v}}{W_p} = \frac{50\,000}{\frac{\pi}{16} \cdot 8^3} = 500 \text{ kg/cm}^2.$$

Koguväändenurk

$$\varphi = \frac{M_{A_v} a}{GJ_p} = \frac{50\,000 \cdot 50}{8 \cdot 10^5 \frac{\pi}{32} \cdot 8^4} = \frac{1}{128} \text{ radiaani, ehk } \varphi^\circ = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1}{128} \approx 0,45^\circ.$$

## § 42. Mõisteid ristkülikukujulise ristlõikega prusside arvutusest väände

Nagu juba eespool öeldud, kehtivad eelmistes paragrahvides tuletatud väände arvutusvalemid ainult ümarprusside puhul. Nende valemite tuletamisel oletasime, et prussi tasapinnalised lõiked väände puhul jäävad tasapinnalisteks. Katse kinnitab seda oletust. Mitteringikujulise ristlõikega varraste väänamisel ristlõiked kõverduvad. Seda tõestab lihtne katse väänatud kummivardaga, millel on ristkülikukujuline ristlõige. Joonisel 80,  $a$  näidatud ristkülikukujulise ristlõikega kummivarras, millele on enne väänamist joonestatud omavahel ristuvate joontega võrk. Joonisest näeme, et ristjooned pärast väändumist kõverduvad. Suurimad kõverdumised ilmnevad ristlõike külgede keskohtades. Nurkades kõverdumisi üldse ei esine. Ristkülikukujulise ristlõikega varraste väände teooria muutub ristlõigete kõverdumise tõttu tunduvalt komplitseeritumaks. Joonisel 80,  $b$  on näidatud väändepingete epüür ristkülikukujulise ristlõike puhul.

Ristlõike suurema külje keskel tekkiv maksimaalne pinge määratakse valemiga

$$\tau_{max} = \frac{M_v}{a \cdot b \cdot c^2}, \quad (120)$$

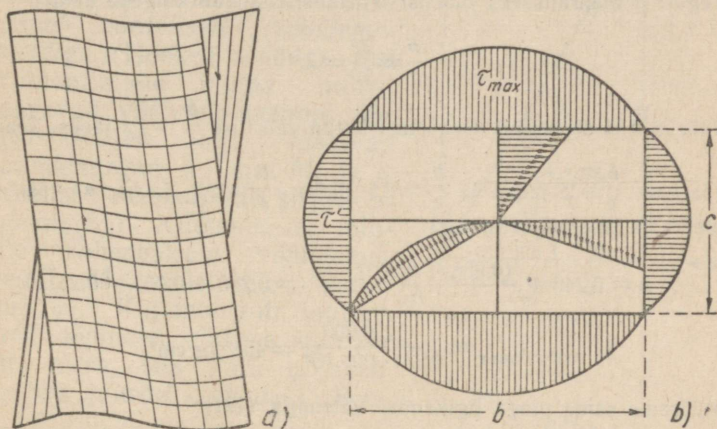
kus  $b$  on ristlõike suurem ja  $c$  — ristlõike väiksem külge;  $a$  — arvuline tegur, mis sõltub suhtest  $b : c$ . Tabelis 9 on antud selle teguri suurused suhete  $b : c$  erinevate väärtuste jaoks.

Pinge võime määrata ka järgmise ligikaudse valemi abil:

$$\tau_{max} = \frac{M_v}{b \cdot c^2} \left( 3 + 1,8 \frac{c}{b} \right). \quad (121)$$

Ristlõike väiksema külje keskel maksimaalne pinge  $\tau'$  määratakse valemiga

$$\tau' = \gamma \tau_{max}. \quad (122)$$



Joonis 80.

Väändenurk määratakse valemiga

$$\varphi = \frac{M_v l}{\beta \cdot bc^3 G}, \quad (123)$$

kus  $\beta$  on arvuline tegur mis sõltub nagu tegur  $\alpha$ -gi suhtest  $b : c$ .  $\beta$  väärtused on toodud tabelis 9.

Tegurite  $\alpha$  ja  $\beta$  väärtused

Tabel 9

$\frac{b}{c}$	1	1,5	2	3,0	4,0	6,0	8,0	10	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta$	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
$\gamma$	1,000	0,858	0,796	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743

**Näide 41.** Terasvardale, mille pikkus  $l=4$  m ning ristküliku-  
kujulise ristlõike mõõted  $b=10$  cm ja  $c=22$  cm, mõjub väände-  
moment  $M_v=250\,000$  kgcm. Määrata maksimaalne pinge ja väände-  
nurk, kui  $G=8 \cdot 10^5$  kg/cm<sup>2</sup>.

*Lahendus.* Suurema külje  $b$  keskel mõjuva maksimaalse pinge  
määrame valemiga (120):

$$\tau_{max} = \frac{M_v}{a \cdot b \cdot c^2}.$$

Teguri  $a$  määramiseks tabelist 9 leiame ristlõike külgede suhte:

$$\frac{b}{c} = \frac{22}{10} = 2,2.$$

Tabelis 9 ei ole teguri  $a$  väärtust leitud väärtuse  $\frac{b}{c} = 2,2$  jaoks. Teame  
väärtusi  $\frac{b}{c} = 2$  jaoks ja  $\frac{b}{c} = 2,5$  jaoks;  $\frac{b}{c} = 2,2$  jaoks  $a$  väärtuse  
määrame interpoleerimisega:

$$a = 0,246 + \frac{(0,258 - 0,246) \cdot 0,2}{0,5} = 0,246 + 0,005 = 0,251,$$

$$\tau_{max} = \frac{250\,000}{0,251 \cdot 22 \cdot 10^2} = 453 \text{ kg/cm}^2.$$

Määrame sama pinge ligikaudse valemiga (121):

$$\tau_{max} = \frac{250\,000}{22 \cdot 10^2} \left( 3 + 1,8 \frac{10}{22} \right) = 434 \text{ kg/cm}^2.$$

Saadud pingete erinevus on umbes 5%. Väändenurga määrame valemiga (123):

$$\varphi = \frac{M_v l}{\beta \cdot b c^3 G}.$$

Teguri  $\beta$  väärtuse määrame interpoleerimisega tabelist 9:

$$\beta = 0,299 + \frac{(0,249 - 0,229) \cdot 0,2}{0,5} = 0,229 + 0,008 = 0,237.$$

Järelikult väändenurk on:

$$\varphi = \frac{250\,000 \cdot 400}{0,237 \cdot 22 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^5} = 0,0239 \text{ radiaani}$$

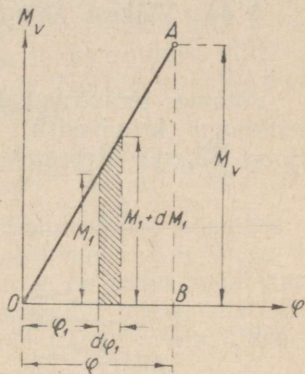
ehk

$$\varphi^\circ = \frac{180}{\pi} \cdot 0,0239 = 1,37^\circ.$$

### § 43. Potentsiaalne energia väändel

Kui silindrilist varrast väänata momendiga elastsete deformatsioonide piirides, siis momendi poolt tehtud töö akumuleeritakse vardasse potentsiaalse elastsusenergia. Pärast väändemomendi mõju lakkamist varras väändub tagasi ja annab ära akumuleeritud energia. *Elastsete deformatsioonide piirides väändenurk kasvab võrdeliselt väändemomendiga* (Hooke'i seadus). Kui

ordinaatteljele kanda nullist kasvavad väändemomendid  $M_v$ , abstsissteljele aga vastavad väändenurgad  $\varphi$ , siis  $M_v$  ja  $\varphi$  vahelist seost kujutab sirge  $OA$  (joonis 81). Oletame, et mingile vahepealsele väändemomendi  $M_1$  väärtusele vastab nurk  $\varphi_1$ . Kui momenti suurendada lõpmata väikese suuruse  $dM_1$  võrra, siis nurk  $\varphi$  saab vastava juurdekasvu  $d\varphi_1$ . See-



Joonis 81.

juures tehtud töö võrdub korrutisega  $\left(M_1 + \frac{dM_1}{2}\right) d\varphi_1$  ning seda kujutab graafikul viirutatud trapetsi pindala. Deformatsiooni kogutööd väändemomendi kasvamisel nullist kuni mingi lõpliku väärtuseni  $M_v$ , mis võrdub akumuleeritud potentsiaalse energiaga, kujutab kolmnurga  $OAB$  pindala ning see avaldub:

$$A = \frac{M_v \varphi}{2}. \quad (124)$$

Asetades sellesse valemisse nurga  $\varphi$  väärtuse valemist (93), saame:

$$A = \frac{M_v M_v l}{2 G J_p} = \frac{M_v^2 l}{2 G J_p}. \quad (125)$$

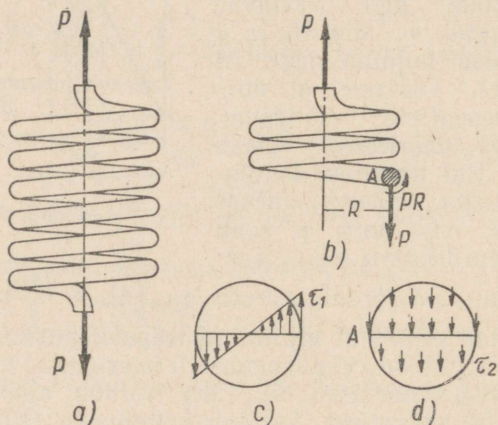
**Näide 42.** Määrata potentsiaalse energia suurus, mis on akumuleeritud terasvardasse läbimõõduga  $d=12$  mm ja pikkusega  $l=400$  mm, kui vardale mõjub väändemoment  $M_v=200$  kgcm, ning  $G=8 \cdot 10^5$  kg/cm<sup>2</sup>.

Lahendus. Asetades anid väärtused valemisse (125), saame:

$$A = \frac{M_{\sigma}^2 l}{2GJ_p} = \frac{200^2 \cdot 40}{2 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot \frac{3,14 \cdot 1,2^4}{32}} = 4,92 \text{ kgcm.}$$

#### § 44. Väikese sammuga silindriliste kruvivedrude arvutus

Võtame terastraadist valmistatud silindrilise väikese sammuga kruvivedru, millele mõjub telgtõmbejõud  $P$  (joon. 82, a). Keerdude väikese sammu tõttu eeldame, et



Joonis 82.

vedru üksikute keerdude tasapinnad on risti vedru teljega. Lõikame vedru keeru tasapinnaga, mis läbib vedru telge. Eemaldame vedru ühe osa ja vaatleme järelejäänud osa tasakaalu (joon. 82, b). Järelejäänud osa tasakaaluks on vaja rakendada lõike tsentrisse vedru teljega paralleelne jõud  $P$  ja moment  $PR$ , kus  $R$  on vedru keeru keskmine raadius. Kuna moment  $PR$  mõjub ristlõike tasapinnas, siis põhjustab ta ristlõikes väändepingeid (82, c), millede maksimaalne suurus väliskiududes võrdub:

$$\tau_1 = \frac{PR}{W_p} = \frac{16PR}{\pi d^3},$$

kus  $d$  on traadi läbimõõt. Ristlõike tasapinnas mõjuv jõud  $P$  kutsub esile selles nihkepinge, mille loeme ristlõikes ühtlaselt jaotatuks (joon. 82,  $d$ ). See pinge võrdub:

$$\tau_2 = \frac{P}{F} = \frac{4P}{\pi d^2}.$$

Summaarsete pingete määramiseks vedru traadi väliskindudes tuleb pinged  $\tau_1$  ja  $\tau_2$  geomeetriliselt liita. Maksimalne pinge on lõike perifeeria selles punktis, milles pingete  $\tau_1$  ja  $\tau_2$  suunad langevad ühte. Näeme, et selleks punktiks on punkt  $A$ , milles pinge võrdub:

$$\tau_{max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{16PR}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R}\right). \quad (126)$$

Vaatlesime vedru tõmmet. Samasuguse tulemuse oleksime saanud ka vedru surve vaatlemisel. Kui vedru arvutamisel vedru keskmine raadius  $R$  on palju kordi suurem vedru traadi läbimõõdust, siis sulgudes olevat teist liidetatavat ei arvestata. Selliste vedrude puhul valem (126) lihtsustub ja võtab kuju:

$$\tau_{max} = \frac{16PR}{\pi d^3}, \quad (127)$$

s. o. sellised vedrud arvutame ainult väände. Vedrude arvutusvalem avaldub üldiselt kujul

$$\tau_{max} = \frac{16PR}{\pi d^3} \leq [\tau], \quad (128)$$

kus  $[\tau]$  on lubatav pinge, mis vedruterastel võetakse 3000 kuni 7000 kg/cm<sup>2</sup>.

Peale vedrude tugevusarvutuse tuleb sageli määrata vedru pikenemine või lühenemine, s. o. tema deformatsioon.

Olgu meil vedru, mille ülemine ots on kinnitatud ning alumisele otsale mõjub tõmbejõud  $P$ . Oletame, et see jõud kasvab nullist kuni lõpliku väärtuseni  $P$ . Kui vedru alumine ots nihkub alla pikkuse  $f$  võrra, siis selle jõu töö võrdub  $\frac{Pf}{2}$ .

See töö võrdub vedru potentsiaalse energiaga, mis akumuleerus temasse keerdude väändumise tagajärjel.

Järelikult valemi (125) põhjal võib kirjutada võrduse:

$$\frac{Pf}{2} = \frac{M_v^2 l}{2GJ_p}. \quad (a)$$

Siin  $l$  on sirgestunud vedru pikkus:

$$l = 2\pi Rn,$$

kus  $n$  on vedru keerdude arv;

$$M_v = PR;$$

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Asetades need väärtused avaldisse (a), saame:

$$\frac{Pf}{2} = \frac{P^2 R^2 \cdot 2\pi Rn \cdot 32}{2G\pi d^4},$$

millest vedru pikenemine võrdub:

$$f = \frac{64PR^3n}{Gd^4}. \quad (129)$$

Tõmbevedrude jaoks tuletatud valemid (126), (127), (128) ja (129) on kehtivad ka survevedrude jaoks.

**Näide 43.** Määrata silindrilise kruvivedru suurim pinge ja lühenemine, kui suruv jõud  $P = 60$  kg, vedru keskmine raadius  $R = 25$  mm, traadi läbimõõt  $d = 6$  mm, töötavate keerdude arv  $n = 5$  ja  $G = 825\,000$  kg/cm<sup>2</sup>.

*Lahendus.* Valemi (127) järgi määrame suurima pinge:

$$\tau_{max} = \frac{16PR}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 60 \cdot 2,5}{3,14 \cdot 0,6^3} = 3540 \text{ kg/cm}^2$$

ja valemiga (129) vedru lühenemise:

$$f = \frac{64PR^3n}{Gd^4} = \frac{64 \cdot 60 \cdot 2,5^3 \cdot 5}{825\,000 \cdot 0,6^4} = 2,8 \text{ cm}.$$

**Näide 44.** Määrata vedru ühe keeru deformeerimiseks 1 mm võrra vajalik jõud, kui vedru keskmine raadius  $R = 35$  mm, traadi läbimõõt  $d = 8$  mm, töötavate keerdude arv  $n = 10$  ja  $G = 825\,000$  kg/cm<sup>2</sup>.

*Lahendus.* Valemiga (129) määrame jõu  $P$ :

$$P = \frac{fGd^4}{64R^3n}.$$

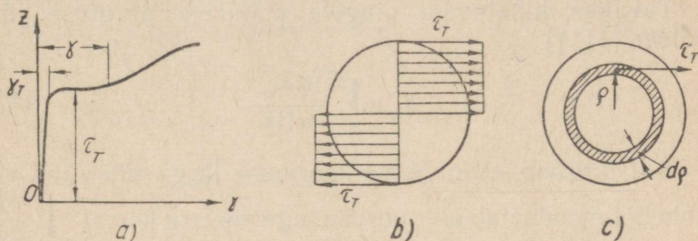
Asendades saadud avaldisse  $f = 0,1$  cm,  $n = 1$  ja teised ülesande tingimuses antud suuruste väärtused, saame:

$$P = \frac{0,1 \cdot 825\,000 \cdot 0,8^4}{64 \cdot 3,5^3} = 12,3 \text{ kg}.$$

## § 45. Võllide arvutus lubatava koormuse järgi

Väänatud võlli läbimõõdu määramisel võtsime tugevustingimuseks, et suurimad tangentsiaalpinged võlli pinnal ei ületa lubatavat pinget  $[\tau]$ .

Eeldasime, et plastilisest materjalist võllil (joon. 83, a) tekib ohtlik olukord siis, kui maksimaalne pinge võlli pinnal saavutab voolavuspiiri.



Joonis 83.

On teada, et plastilise materjali puhul pärast seda, kui maksimaalne pinge ületab voolavuspiiri  $\tau_T$ , väändemomendi suurendamine enam pingete edasist suurenemist võlli äärmistes kiududes materjali voolavuse tõttu esile ei kutsu. Kuid võlli ristlõike elastses osas kasvavad pinged seni, kuni saavutavad kogu lõikes väärtuse  $\tau_T$ . Võlli selline pingelukord on näidatud joonisel 83, b. Sellise piirolukorra juures on võlli kandevõime ammendatud.

Arvutame väändemomendi suuruse selle piirolukorra jaoks. Jactame võlli ristlõikepinna lõpmata õhukesteks rõngaspindadeks (joon. 83, c). Tsentrist kaugusel  $\rho$  asetseval pinnakesel  $dF$  on sisejõududest põhjustatud elementaarne väändemoment:

$$dM = \tau_T \rho dF = \tau_T \rho 2\pi \rho d\rho.$$

Välis- ja sisemomentide tasakaalutingimusest leiame piirvälismomendi:

$$M_{\text{piir}} = \int_0^{\frac{d}{2}} \tau_T \rho 2\pi \rho d\rho = \frac{1}{12} \pi d^3 \tau_T$$

Lubata väändemoment tugevusvaru  $k$  korral võrdub:

$$[M_v] = \frac{M_{piir}}{k} = \frac{\pi d^3 \tau_T}{12k} = \frac{\pi d^3}{12} [\tau],$$

millest

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{12 [M_v]}{\pi [\tau]}}. \quad (130)$$

Tavalise, lubatavale pingele põhineva arvutuse järgi [valem (111)]

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_v}{\pi [\tau]}}. \quad (111)$$

Siit järgneb, et lubatava koormuse järgi määratud võlli läbimõõt moodustab ühesuuruse tugevusvaru korral  $\sqrt[3]{\frac{12}{16}} = 0,91$  lubatava pingele järgi määratud läbimõödust.

Märgime, et lubatava koormuse järgi arvutust, mis võimaldab hoida kokku materjali, kasutame ainult plastilisest materjalist ja konstantset momenti edasiandvate võllide korral, kui tugeuskriteeriumiks on materjali voolavuspiir.

## § 46. Kontrollküsimusi

Milline on väändemomendi ja võlliga edasiantava võimsuse ning võlli pöörete arvu vaheline seos?

Millised oletused on ümarlõikega prussi väändeteooria aluseks?

Missugust nurka nimetatakse koguväändenurgaks?

Mida nimetatakse polaarineritsemomendiks? Milline on selle dimensioon?

Milline on koguväändenurga valem?

Mida nimetatakse väändel jääkuseks?

Missugustes võlli punktides esinevad väändel suurimad pinged?

Kuidas jaotuvad väändepinged võlli ristlõikes?

Millist kasu annab võllide õõnsaks puurimine?

Missuguse valemi järgi määratakse ümmarguse ristlõikega varda maksimaalne väändepinge?

Mida nimetatakse vastupidavusmomendiks väändel? Missugune on selle dimensioon?

Missuguste valemite järgi määratakse ringi ja rõnga polaarineritsemoment ning polaarvastupidavusmoment väändel?

Milline on väände arvutusvõrrand?

Kuidas muutub võlli läbimõõt, kui tema poolt edasiantav võimsus jääb konstantseks, pöörete arv aga suureneb?

Missugustes ristlõike punktides saadakse suurimad pinged ristkülikukujulise ristlõikega prussi väändel?

Kuidas avaldub deformatsioonitöö väändel?

Millised pinged tekivad silindrilise kruvivedru keerdudes surve ja tõmbel?

Millise valemi järgi määratakse silindrilise kruvivedru lühene-  
mine?

---

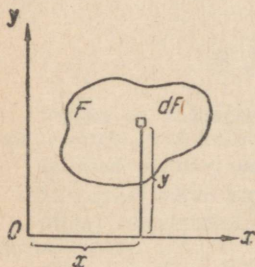
## TASAPINNALISTE KUJUNDITE STAATILISED MOMENDID, RASKUSKESKMED JA INERTS-MOMENDID

### § 47. Tasapinnaliste kujundite staatilised momendid

Umarprussi väände uurimisel esines määratud integraal  $\int_F \rho^2 dF$ , mida nimetasime polaarinertsmomendiks. Sellised määratud integraalid, mida nimetatakse inertsmomentideks, esinevad ka painde uurimisel.

Inertsmomentid kujutavad enesest geomeetrilisi suursi. Väändel ja paindel nad etendavad umbes samasugust osa nagu ristlõike pindala tõmbel ja survel.

Käesolevas peatükis antakse põhi-teadmisi tasapinnaliste kujundite inertsmomentidest, mis on vajalikud tugevusõpetuse edaspidiseks uurimiseks. Inertsmomentide määramine on tihedalt seotud pindade staatiliste momentidega ja raskuskeskmetega. Seetõttu tuletame käesoleva peatüki



Joonis 84.

algul meelde staatiliste momentide arvutusreegli, mis on tuntud juba teoreetilisest mehaanikast.

Kujundi pinna *staatiliseks momendiks* mingi samas pinnas võetud telje  $x$  suhtes (joon. 84) nimetatakse kujundi pinna elementide  $dF$  korrutiste summat nende kaugustega teljest. See summa on laiendatud kujundi kogu pinnale  $F$ .

Staatiline moment telje  $x$  suhtes võrdub:

$$S_x = \int_F y dF. \quad (131)$$

Staatiline moment telje  $y$  suhtes võrdub:

$$S_y = \int_F x dF. \quad (132)$$

Vaadeldes elementaarpinda kui jõudu ja tema kaugust teljest kui jõu õlga, ning tuginedes teoreemile: komponentide momentide summa võrdub resultandi momendiga, võime kirjutada, et

$$\int_F y dF = F y_c, \quad \int_F x dF = F x_c,$$

kus  $x_c$  ja  $y_c$  on pinna  $F$  raskuskeskme koordinaadid. Järelikult pinna  $F$  staatiline moment mingi telje suhtes võrdub pinna ja selle raskuskeskme kauguse korrutisega nimetatud teljest:

$$\left. \begin{aligned} S_x &= F y_c, \\ S_y &= F x_c. \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

Kuna pindala  $F$  dimensiooniks on  $\text{cm}^2$ , raskuskeskme kaugusel telgedest ( $x_c$  ja  $y_c$ ) aga  $\text{cm}$ , siis staatilise momendi dimensiooniks kujuneb  $\text{cm}^3$  ( $\text{cm} \times \text{cm}^2 = \text{cm}^3$ ). Staatiline moment võib olla kas positiivne või negatiivne, sest pindala on alati positiivne suurus, kaugused  $x_c$  ja  $y_c$  võivad aga olla nii positiivsed kui ka negatiivsed. Kaugusi ühel pool telge loeme positiivseteks, teisel pool aga negatiivseteks. Kui telg, mille suhtes määrame staatilist momenti, läbib pinna raskuskeset, siis staatiline moment selle telje suhtes võrdub nulliga.

Tõepoolest, kui  $x_c = 0$  ja  $y_c = 0$ , siis võrranditest (133) saame:

$$S_x = F \cdot 0 = 0, \quad S_y = F \cdot 0 = 0.$$

Kui kujundil on sümmeetriatelg, siis viimane läbib alati kujundi raskuskeset. Seetõttu kujundi staatiline moment sümmeetriatelje suhtes võrdub nulliga.

Kui liitkujundit on võimalik lahutada lihtkujunditeks, millede pindalasid ja raskuskeskmeid on kerge määrata, siis mingi telje suhtes kogu kujundi staatilise momendi võime leida kui tema üksikute osade staatiliste momentide summa

sama telje suhtes. Liitkujundite staatiliste momentide arvutamise võte põhineb teoreemil: summa integraal võrdub liidetavate integraalide summaga:

$$S_x = S_{1x} + S_{2x} + S_{3x} + \dots + S_{nx}, \quad (134)$$

kus  $S_x$  on kogu kujundi staatiline moment,  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  — kujundi üksikute osade staatilised momendid.

Kui tähistada liitkujundi üksikute osade pindalad tähtedega  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ , nende raskuskeskmete kaugused  $x$ -teljest aga tähtedega  $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \dots, \bar{y}_n$ , siis võime avaldise (134) kirjutada kujul:

$$(F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n)y_c = F_1\bar{y}_1 + F_2\bar{y}_2 + F_3\bar{y}_3 + \dots + F_n\bar{y}_n,$$

millest kogu kujundi raskuskeskme kaugus  $x$ -teljest avaldub:

$$y_c = \frac{F_1\bar{y}_1 + F_2\bar{y}_2 + F_3\bar{y}_3 + \dots + F_n\bar{y}_n}{F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n}. \quad (135)$$

Analoogiliselt sellele võime kujundi raskuskeskme kauguse  $y$ -teljest avaldada kujul:

$$x_c = \frac{F_1\bar{x}_1 + F_2\bar{x}_2 + F_3\bar{x}_3 + \dots + F_n\bar{x}_n}{F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n}. \quad (136)$$

**Näide 45.** Määrata kolmnurga raskuskeskme koordinaadid, kui kolmnurga alus on  $l$  ja kõrgus  $h$  (joon. 85).

*Lahendus.* Kui langetame kolmnurga  $ABC$  tipust  $B$  ristjoone alusele  $AC$ , siis kolmnurk jaotub kaheks täisnurkseks kolmnurgaks, millede raskuskeskmed on teada. Tähistame vasakpoolse kolmnurga aluse  $AD$  tähega  $a$  ja parempoolse kolmnurga aluse  $DC$  tähega  $b$ .

Kolmnurkade  $ADB$  ja  $BDC$  raskuskeskmed  $O_1$  ja  $O_2$  leiame ühe kolmandiku kõrgusel ( $\frac{h}{3}$ ) nende alustest. Järelikult asetseb kogu kolmnurga  $ABC$  raskuskese  $O$  samuti ühe kolmandiku kõrgusel alusest, s. o.

$$y_c = \frac{h}{3}.$$

Vasakpoolse kolmnurga raskuskese  $O_1$  asetseb vertikaalkaetatist  $BD$  kaugusel  $\frac{a}{3}$ , mistõttu punkti  $O_1$  kaugus ordinaatteljest  $Ay$  võrdub  $\frac{2}{3}a$ .

Parempoolse kolmnurga raskuskese  $O_2$  asetseb kaetatist  $BD$  kaugusel  $\frac{b}{3}$ , järelikult punkti  $O_2$  kaugus teljest  $Ay$  võrdub  $(a + \frac{b}{3})$ .

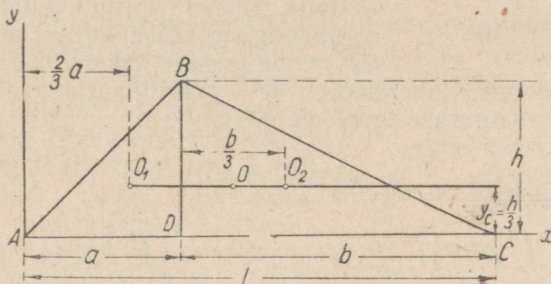
Kahe täisnurkse kolmnurga staatilised momendid telje  $A_y$  suhtes avalduvad:

kolmnurgal  $ADB$

$$S_{1y} = \frac{ah}{2} \cdot \frac{2}{3}a = \frac{a^2h}{3},$$

kolmnurgal  $BDC$

$$S_{2y} = \frac{bh}{2} \left( a + \frac{b}{3} \right) = \frac{bh(2a + b)}{6}.$$



Joonis 85.

Kogu kolmnurga  $ABC$  raskuskeskme kaugus teljest  $A_y$  vastavalt valemile (136) võrdub:

$$x_c = \frac{S_{1y} + S_{2y}}{F} = \frac{\frac{a^2h}{3} + \frac{bh(2a + b)}{6}}{\frac{lh}{2}} = \frac{2a^2 + 3ab + b^2}{3l}.$$

Seda avaldist mõnevõrra teisendades saame talle anda hästi meeldejäätava kuju:

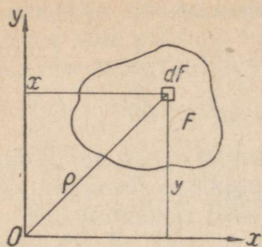
$$x_c = \frac{2a^2 + 3ab + b^2}{3l} = \frac{(a^2 + 2ab + b^2) + a(a + b)}{3l};$$

kuna  $a + b = l$ , siis

$$x_c = \frac{l + a}{3}.$$

## § 48. Tasapinnaliste kujundite inertsmomendid

Tasapinnalise lõike *telg-* (*ekvatoriaal-*) *inertsmomendiks* mingisuguse selles tasapinnas oleva telje suhtes (joon. 86) nimetatakse pinnaelementide korrutiste summat nende kauguste ruutudega sellest teljest:



Joonis 86.

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int_F y^2 dF, \\ J_y &= \int_F x^2 dF. \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

Näeme, et tasapinnalise löike telginertsmomentide summa kahe risttelje suhtes võrdub polaarinertsmomendiga pooluse suhtes, mis kujutab nende telgede löikepunkti.

Tõepoolest, ühendades  $dF$  koordinaatide algusega, saame Pythagorase teoreemi põhjal:

$$\rho^2 = x^2 + y^2;$$

järelikult

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = \int_F (x^2 + y^2) dF = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF$$

ehk

$$J_y + J_x = J_p. \quad (138)$$

Valem (138) on kehtiv kahe meelevaldse ristiasesteva telje puhul. Järelikult telgesid *koordinaatide alguse suhtes ükskõik millisesse asendisse pöörates jääb telginertsmomentide summa konstantseks suuruseks ning võrdub polaarinertsmomendiga.*

Nagu valemist (137) selgub on telginertsmomendid positiivsed suurused ega saa võrduda nulliga. Neid mõõdetakse pikkusühikutega neljandas astmes ( $\text{cm}^4$ ).

Tasapinnalise kujundi *tsentrifugaalinertsmomendiks* nimetatakse elementaarpindade korrutiste summat nende koordinaatidega, laiendatuna löike kogu pinnale:

$$J_{xy} = \int_F xy dF. \quad (139)$$

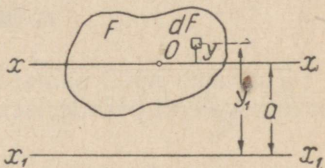
Tsentrifugaalinertsmomendi dimensiooniks on  $\text{cm}^4$ . Eri-nevalt telg- ja polaarinertsmomendist võib tsentrifugaalinertsmoment olla kas positiivne või negatiivne suurus ning võrduda ka nulliga. Tsentrifugaalinertsmomendi märk oleb liidetavate  $xy dF$  märkidest. Edaspidi tuleb kokku puutada ainult lihtsate geomeetriliste kujunditega. Selliste

kujundite inertsmomentide määramiseks kasutame tavaliselt integreerimise meetodit.

Kui kujund on keeruline ja seda ei saa jaotada lihtkujunditeks, siis selliste kujundite inertsmomentid määratakse graafiliste meetodite abil või rakendatakse erilisi aparate.

### § 49. Inertsmomentide arvutusvalemid telje paralleellükkel

Edaspidi lepime kokku kujundi raskuskeset läbivat telge nimetada tsentraalteljeks, selle telje suhtes võetud inertsmomenti aga tsentraalinertsmomentiks. Oletame, et mingisugusel kujundil on tsentraalteljeks  $x$ -telg (joon. 87), mille suhtes võetud inertsmoment  $J_x$  on meil teada. Tuleb leida sama kujundi inertsmoment  $J_{x_1}$  tsentraalteljest kaugusel  $a$  asetseva temaga paralleelse telje  $x_1$  suhtes.



Joonis 87.

Üldise määrangu alusel tuntud tsentraalinertsmoment  $J_x$  ja otsitav  $J_{x_1}$  avalduvad vastavalt:

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF.$$

Jooniselt 87 näeme, et kõikide elementaarpindade  $dF$  kaugused uuest teljest  $x_1$  on suuremad konstantse suuruse  $a$  võrra, s. o.

$$y_1 = y + a.$$

Asetades  $y_1$  selle väärtuse  $J_{x_1}$  avaldisse, saame:

$$J_{x_1} = \int_F (y + a)^2 dF = \int_F y^2 dF + 2a \int_F y dF + a^2 \int_F dF.$$

Selle avaldise esimene integraal on tsentraalinertsmoment  $J_x$ . Teine integraal võrdub nulliga, kuna ta väljendab kujundi raskuskeset läbiva telje  $x$  suhtes võetud staatilist momenti. Kolmas integraal võrdub korrutisega  $a^2 F$ . Järelikult

$$J_{x_1} = J_x + a^2 F. \quad (140)$$

Seda suure praktilise tähtsusega valemit loetakse järgmiselt: *kujundi inertsmoment mingi telje suhtes võrdub selle*

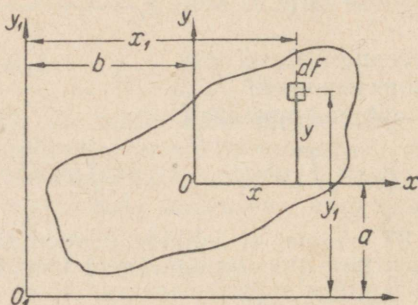
teljega paralleelse tsentraaltelje suhtes võetud inertsmomenti ja kujundi pindala ning telgedevahelise kauguse ruudu korrutise summaga.

Valemist (140) näeme, et paralleelsete telgede suhtes võetud inertsmomentidest on väikseim kujundi raskuskeset läbiva telje suhtes võetud inertsmoment, s. o. tsentraalinertsmoment.

Valemit (140) kasutatakse laialdaselt liitkujundite inertsmomentide määramisel. Peale selle võimaldab ta määrata tsentraalinertsmomenti, kui on teada inertsmoment mingi teise telje suhtes. Sel juhul võime valemi kirjutada järgmisel kujul:

$$J_x = J_{x_1} - a^2 F.$$

Tuletame nüüd samal viisil tsentrifugaalinertsmomentide arvutusvalemi paralleelsete telgede puhul.



Joonis 88.

Olgu teada mingi kujundi tsentrifugaalinertsmoment tema tsentraaltelgede  $x$  ja  $y$  suhtes (joon. 88). Tuleb määrata selle kujundi tsentrifugaalinertsmoment tsentraaltelgedega paralleelsete telgede  $x_1$  ja  $y_1$  suhtes.

Tähistame paralleelsetelgede vahelised kaugused vastavalt  $a$  ja  $b$ , nagu see on näidatud joonisel 88.

Tuntud tsentrifugaalinertsmoment tsentraaltelgede suhtes avaldub:

$$J_{xy} = \int_F xy dF.$$

Otsitav tsentrifugaalinertsmoment telgede  $x_1$  ja  $y_1$  suhtes avaldub:

$$J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF.$$

Elementaarpindade uued koordinaadid avalduvad vanade koordinaatide kaudu valemitega:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + b, \\ y_1 &= y + a. \end{aligned}$$

Asetades need  $x_1$  ja  $y_1$  väärtused  $J_{x_1 y_1}$  avaldisse, saame:

$$\begin{aligned} J_{x_1 y_1} &= \int_F (x + b)(y + a) dF = \\ &= \int_F xy dF + b \int_F y dF + a \int_F x dF + ab \int_F dF. \end{aligned}$$

Esimene integraal võrdub  $J_{xy}$ , teine ja kolmas aga nulliga, sest nad kujutavad enesest kujundi staatilist momenti raskuskeset läbivate telgede suhtes. Seetõttu lõpuks saame:

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + abF.$$

Selle valemi võime sõnastada nii: *tsentrifugaalinertsmoment tsentraaltelgedega paralleelsete meelevaldsete telgede suhtes võrdub tsentrifugaalinertsmomendiga tsentraaltelgedes suhtes, pluss kujundi pindala ja meelevaldsete telgede suhtes kujundi raskuskeskme koordinaatide korrutis.*

## § 50. Mõningate lihtkujundite inertsmomendid

Selles paragrahvis vaatleme praktilistes arvutustes sagedasti esinevate lihtsamate geomeetriliste kujundite telginertsmomentide avaldasi. Kui teame lihtkujundite inertsmomente, siis võime määrata ka lihtkujundite inertsmomente, kuna viimased arvutatakse lihtkujundite inertsmomentide summamana.

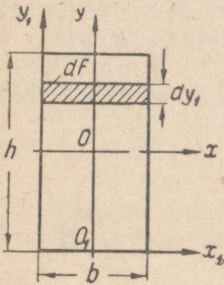
*Ristkülik.* Leiame alusega  $b$  ja kõrgusega  $h$  ristküliku telginertsmomendi tema aluse suhtes (joon. 89).

Jaotame ristküliku pindala pinnaelementideks  $dF$ , alusega  $b$  ja kõrgusega  $dy_1$ . Üks neist pinnakestest on näidatud joonisel viirutatud ribana

$$dF = b dy_1.$$

Asetades elementaarriba pindala tuletatud avaldise inertsmomendi üldavaldisse, saame:

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_0^h y_1^2 b dy_1 = b \left| \frac{y_1^3}{3} \right|_0^h.$$



Joonis 89.

Integraali rajad 0 ja  $h$  näitavad, et integreerimine on laiendatud ristküliku kogu pinnale, alates pinnakesest, millel  $y_1 = 0$ , ja lõpetades pinnakesega, millel  $y_1 = h$ . Asetades rajad, leiame lõpuks:

$$J_{x_1} = \frac{bh^3}{3}. \quad (142)$$

Ristküliku inertsmomendi vertikaaltele  $y_1$  suhtes leiame analoogiliselt:

$$J_{y_1} = \frac{hb^3}{3}.$$

Arvutame nüüd ristküliku inertsmomendi tema horisontaalse tsentraaltele suhtes, kasutades valemit (140):

$$J_x = J_{x_1} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 F = \frac{bh^3}{3} - \frac{h^2}{4} bh = \frac{bh^3}{12}. \quad (143)$$

Ristküliku inertsmoment vertikaalse tsentraaltele suhtes avaldub:

$$J_y = \frac{hb^3}{12}.$$

Ruut küljega  $a$ . Asetades valemitesse (142) ja (143)  $b = h = a$ , saame:

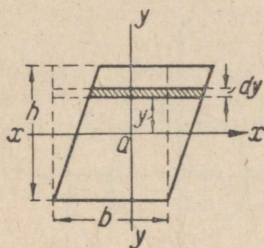
$$J_{x_1} = J_{y_1} = \frac{a^4}{3}, \quad (144)$$

$$J_x = J_y = \frac{a^4}{12}. \quad (145)$$

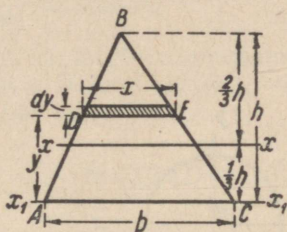
*Parallelogramm* (joon. 90). Parallelogrammi telginertsmomendid tsentraaltele  $x$  ja aluse suhtes määratakse ristküliku jaoks tuletatud valemite (143) ja (142) abil, sest parallelogrammi me võime kujundada ristkülikust, nihutades selle lõpmata väikese kõrgusega pinnaelemente paral-

leelselt alusega. Kujundi inertsmoment ei muutu, kui nihutada kujundi osasid paralleelselt teljega, mille suhtes inertsmomenti määratakse, kuna sellise nihutamise puhul ei muutu pinnaelemendid  $dF$  ega ka nende kaugused teljest.

Tuleb aga märkida, et mitte mingil juhul parallelogrammi inertsmomenti  $y$ -telje suhtes ei tohi arvutada rist-



Joonis 90.



Joonis 91.

küliku jaoks tuletatud valemiga, kuna nimetatud juhul pole pinnaelemendid  $y$ -telje suhtes nihutatud paralleelselt, vaid sellega risti.

**Kolmnurk.** Määrame alusega  $b$  ja kõrgusega  $h$  kolmnurga telginertsmomendi aluse ja alusega paralleelse tsentraaltelje suhtes (joon. 91).

Jaotame kolmnurga lõpmata väikesteks, alusega paralleelseteks ribadeks, nagu seda tegime ristküliku inertsmomendi arvutamisel. Üks sellistest ribadest on kujundil näidatud viirutatuna. Kolmnurga alusest kaugusel  $y$  asuva riba pindala on:

$$dF = xdy.$$

Riba pikkuse  $x$  määrame kolmnurkade  $ABC$  ja  $DBE$  sarnasusest:

$$x = b \frac{h-y}{h};$$

järelikult

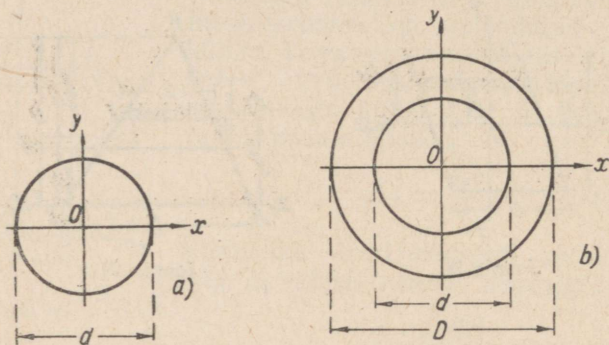
$$dF = b \frac{h-y}{h} dy.$$

Kolmnurga inertsmoment aluse suhtes avaldub:

$$J_{x_1} = \int_F y^2 dF = \int_0^h y^2 b \frac{h-y}{h} dy = b \int_0^h y^2 dy - \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy.$$

Integreerides saame:

$$J_{x_1} = b \left| \frac{y^3}{3} \Big|_0^h - \frac{b}{h} \left| \frac{y^4}{4} \Big|_0^h \right. = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}. \quad (146)$$



Joonis 92.

Inertsmomendi alusega paralleelse tsentraaltelje  $x$  suhtes määrame valemiga (140):

$$J_x = J_{x_1} - a^2 F.$$

Asetades sellesse valemisse leitud  $J_{x_1}$  väärtuse, kolmnurga pindala  $\frac{bh}{2}$  ja kauguse kolmnurga tsentraalteljest kuni aluseni  $\left(\frac{h}{3}\right)$ , saame:

$$J_x = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}. \quad (147)$$

*Ring.* Ringi (joon. 92, *a*) kõik tsentraalinertsmomendid on kujundi sümmeetrilisuse tõttu võrdsed ja seetõttu

$$J_x = J_y = \frac{J_x + J_y}{2}.$$

Paragrahvis 48 tõestasime, et kahe ristiasetseva telje suhtes kujundi telginertsmomentide summa võrdub polaar-

inertsmomendiga nende telgede lõikepunkti suhtes; järelikult

$$J_x = J_y = \frac{1}{2}(J_x + J_y) = \frac{1}{2} J_p.$$

Asetades valemisse ringi polaarinertsmomendi väärtuse, mille leidsime § 40, saame:

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4. \quad (148)$$

*Rõngas.* Rõnga (joon. 92, *b*) telginertsmomendi määrame kui suurema läbimõõduga  $D$  ja väiksema läbimõõduga  $d$  ringide inertsmomentide vahe:

$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \approx 0,05(D^4 - d^4). \quad (149)$$

Praktiliste ülesannete lahendamisel on sageli sobivam kasutada valemeid, milledes ei esine  $D$  ja  $d$ , vaid  $D$  ja suhe  $\frac{d}{D} = \alpha$ , s. o.

$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0,05D^4(1 - \alpha^4). \quad (150)$$

## § 51. Lihtsamaist kujundeist koostatud kujundite inertsmomentide määramine

Käesolevas paragrahvis vaatleme lihtsamaist kujundeist koostatud pindade inertsmomentide määramise mõningaid näiteid eelnevais paragrahvides tuletatud valemite abil.

**Näide 46.** Määrata joonisel 93 näidatud ristlõike inertsmoment telje  $xx$  suhtes. Mõõted on antud millimeetrites.

*Lahendus.* Kujundi inertsmomendi määrame kui ristküliku  $bh$  ja läbimõõduga  $d$  ( $r = 4$  cm) ringi inertsmomentide vahe.

Valemite (143) ja 148) alusel leiame:

$$J = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{10 \cdot 12^3}{12} - \frac{\pi}{64} \cdot 8^4 = 1440 - 203 = 1237 \text{ cm}^4.$$

**Näide 47.** Määrata U-ristlõike (joon. 94) tsentraalsed telginertsmomendid. Joonisel on mõõted antud millimeetrites.

*Lahendus.* Jaotame ristlõike kolmeks ristkülikuks, nagu on näidatud joonisel. U-ristlõike raskuskese asetseb sümmeetriateljel  $xx$ . Raskuskese kauguse määramiseks teljest  $y_1$  rakendame valemit (136), leides eelkõige kolme ristküliku staatilised momendid telje  $y$  suhtes ja kogu ristlõike pindala.

Vertikaalristküliku staatiline moment

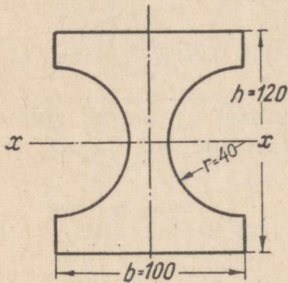
$$S'_{y_1} = 10 \cdot 0,6 \cdot 0,3 = 1,8 \text{ cm}^3.$$

Uhe horisontaalristküliku staatiline moment

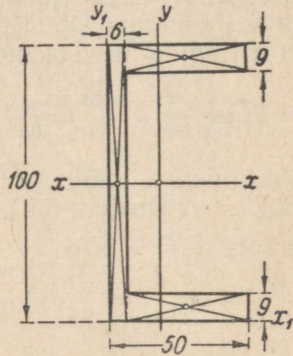
$$S''_{y_1} = (5 - 0,6) \cdot 0,9 \left( \frac{5 - 0,6}{2} + 0,6 \right) = 4,4 \cdot 0,9 \cdot 2,8 = 11,1 \text{ cm}^3.$$

U-ristlõike kogupindala

$$F = 10 \cdot 0,6 + 2(5 - 0,6) \cdot 0,9 = 6 + 7,92 = 13,92 \text{ cm}^2.$$



Joonis 93.



Joonis 94.

U-ristlõike raskuskeskme kaugus teljest  $y_1$

$$x_c = \frac{S'_{y_1} + 2S''_{y_1}}{F} = \frac{1,8 + 2 \cdot 11,1}{13,92} = 1,72 \text{ cm}.$$

Määrame nüüd tsentraalinertsmomendid, kasutades U-ristlõike jagamist kolmeks ristkülikuks ülaltoodud viisil.

Vertikaalristküliku inertsmomendid tsentraaltelgede suhtes on vastavalt:

$$J'_x = \frac{0,6 \cdot 10^3}{12} = 50 \text{ cm}^4,$$

$$J''_y = \frac{10 \cdot 0,6^3}{12} + 10 \cdot 0,6 \left( 1,72 - \frac{0,6}{2} \right)^2 = 0,18 + 12,1 \approx 12,3 \text{ cm}^4.$$

Horisontaalristküliku inertsmomendid

$$J''_x = \frac{(5 - 0,6) \cdot 0,9^3}{12} + (5 - 0,6) \cdot 0,9 \left[ \pm \left( \frac{10}{2} - \frac{0,9}{2} \right) \right]^2 = 0,267 + 82 \approx 82,3 \text{ cm}^4,$$

$$J_y'' = \frac{0,9(5-0,6)^3}{12} + (5-0,6) \cdot 0,9 \left( \frac{5-0,6}{2} + 0,6 - 1,72 \right)^2 = 6,38 + 1,2 = 7,58 \text{ cm}^4.$$

Kogu U-ristlõike inertsmomentid tsentraaltelgede suhtes avalduvad:

$$J_x = J_x' + 2J_x'' = 50 + 2 \cdot 82,3 = 214,6 \text{ cm}^4,$$

$$J_y = J_y' + 2J_y'' = 12,3 + 2 \cdot 7,6 = 27,5 \text{ cm}^4.$$

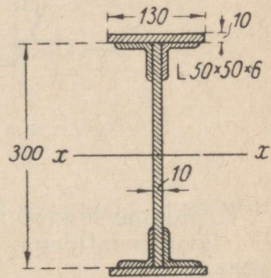
U-ristlõike inertsmomenti telje  $xx$  suhtes oleks võinud määrata ka lihtsamalt, vaadeldes ristlõiget kui 5 cm pikkuse alusega ja 10 cm kõrguse ristküliku ning (5-0,6) cm pikkuse alusega ja (10-2·0,9) cm kõrguse ristküliku vahet:

$$J_x = \frac{5 \cdot 10^3}{12} - \frac{(5-0,6)(10-2 \cdot 0,9)^3}{12} = 416 - 202 = 214 \text{ cm}^4.$$

**Näide 48.** Määrata I-ristlõike inertsmoment telje  $xx$  suhtes. I-ristlõike koosneb vertikaalseinast, neljast võrdkülgsest nurkterasest nr. 5 haarade paksusega 6 mm ja kahest horisontaallehest (joon. 95). Mõõted on joonisel antud millimeetrites.

*Lahendus.* Vertikaallehe inertsmoment

$$J_y' = \frac{1 \cdot 30^3}{12} = 2250 \text{ cm}^4.$$



Joonis 95.

Horisontaallehe inertsmoment

$$J_x'' = \frac{13 \cdot 1^3}{12} + 13 \cdot 1 \left( 15 + \frac{1}{2} \right)^2 = 1,08 + 3120 = 3121 \text{ cm}^4.$$

Normaalsortimendi tabelitest leiame võrdkülgse nurkterase ristlõikepindala, inertsmomenti nurkterase raskuskeset läbiva horisontaaltelje suhtes ja raskuskeskme kauguse nurkterase alusest:

$$F = 5,69 \text{ cm}^2; \quad J = 13,1 \text{ cm}^4; \quad y = 1,46 \text{ cm}.$$

Nurkterase inertsmoment telje  $xx$  suhtes võrdub:

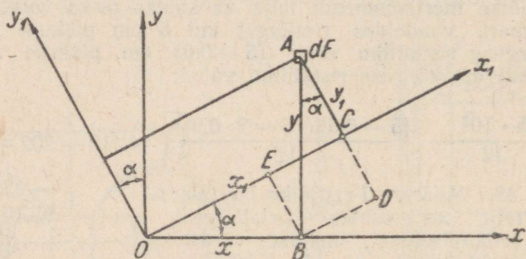
$$J_x''' = J + Fa^2 = 13,1 + 5,69 \left( \frac{30}{2} - 1,46 \right)^2 = 1056 \text{ cm}^4.$$

Kogu ristlõike inertsmoment võrdub:

$$J_x = J_x' + 2J_x'' + 4J_x''' = 2250 + 2 \cdot 3121 + 4 \cdot 1056 = 13716 \text{ cm}^4.$$

## § 52. Inertsmomentide arvutusvalemid telgede pööramisele mingi nurga $\alpha$ võrra

Olgu teada mingi kujundi inertsmomendid  $J_x$ ,  $J_y$  ja  $J_{xy}$  koordinaattelgede  $x$  ja  $y$  suhtes (joon. 96). On vaja määrata samad inertsmomendid teiste telgede  $x_1$  ja  $y_1$  suhtes, mis on telgede  $x$  ja  $y$  suhtes pööratud mingi nurga  $\alpha$  võrra, s. o.  $J_{x_1}$ ,  $J_{y_1}$  ja  $J_{x_1 y_1}$ .



Joonis 96.

Eraldame lõikest punkti  $A$  ümber mingi pinnaelemendi  $dF$  koordinaatidega  $(x, y)$  endise koordinaatsüsteemi suhtes:

$$x = \overline{OB}; \quad y = \overline{AB}.$$

Sama pinna koordinaadid uue koordinaatsüsteemi suhtes on:

$$x_1 = \overline{OC} \text{ ja } y_1 = \overline{AC}.$$

Avaldame uued koordinaadid  $x_1$  ja  $y_1$  vanade koordinaatide  $x$  ja  $y$  ning pöördenurga  $\alpha$  kaudu. Tõmmates abijooned  $CD$  ja  $BE$  paralleelselt teljele  $Oy_1$  ja  $BD$  paralleelselt teljele  $Ox_1$ , saame:

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= \overline{OE} + \overline{EC} = \overline{OE} + \overline{BD}, \\ \overline{AC} &= \overline{AD} - \overline{CD} = \overline{AD} - \overline{BE}. \end{aligned}$$

Asendades avaldistes esinevad suurused nende väärtustega

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= x_1; \quad \overline{OE} = \overline{OB} \cos \alpha = x \cos \alpha; \\ \overline{BD} &= \overline{AB} \sin \alpha = y \sin \alpha, \\ \overline{AC} &= y_1; \quad \overline{AD} = \overline{AB} \cos \alpha = y \cos \alpha; \\ \overline{BE} &= \overline{OB} \sin \alpha = x \sin \alpha,\end{aligned}$$

saame:

$$\begin{aligned}x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y_1 &= y \cos \alpha - x \sin \alpha.\end{aligned}$$

Otsitavad inertsomendid uute telgede suhtes, vastavalt määrangule, avalduvad:

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF; \quad J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF \quad \text{ja} \quad J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF.$$

Asetame neisse avaldistesse  $x_1$  ja  $y_1$  väärtused:

$$\begin{aligned}J_{x_1} &= \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF = \\ &= \cos^2 \alpha \int_F y^2 dF + \sin^2 \alpha \int_F x^2 dF - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_F xy dF = \\ &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha.\end{aligned} \quad (151)$$

Analoogiliselt saame inertsomendi avaldise ka teise telje suhtes:

$$\begin{aligned}J_{y_1} &= \int_F (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dF = \\ &= \cos^2 \alpha \int_F x^2 dF + \sin^2 \alpha \int_F y^2 dF + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_F xy dF = \\ &= J_y \cos^2 \alpha + J_x \sin^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha.\end{aligned} \quad (152)$$

Liites ja lahutades avaldised (151) ja (152), saame:

$$\begin{aligned}J_{x_1} + J_{y_1} &= J_x (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + J_y (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha); \\ J_{x_1} - J_{y_1} &= J_x (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - J_y (\cos^2 \alpha - \\ &\quad - \sin^2 \alpha) - 2J_{xy} \sin 2\alpha;\end{aligned}$$

kuna

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1, \\ \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha &= \cos 2\alpha,\end{aligned}$$

siis

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y, \quad (153)$$

$$J_{x_1} - J_{y_1} = (J_x - J_y) \cos 2\alpha - 2J_{xy} \sin 2\alpha. \quad (154)$$

Neist võrdustest esimene väljendab inertsmomentide summa omadust kahe ristiasetseva telje suhtes, mis § 48 tuletati varem teisel viisil. Valemid (153) ja (154) on sobivad inertsmomentide  $J_{x_1}$  ja  $J_{y_1}$  määramiseks.

Määrame nüüd tsentrifugaalinertsmomenti samuti nagu seda tegime telginertsmomentide puhul:

$$\begin{aligned}J_{x_1 y_1} &= \int_F x_1 y_1 dF = \int_F x (\cos \alpha + y \sin \alpha) (y \cos \alpha - x \sin \alpha) dF = \\ &= \cos^2 \alpha \int_F xy dF + \sin \alpha \cos \alpha \int_F y^2 dF - \\ &\quad - \sin \alpha \cos \alpha \int_F x^2 dF - \sin^2 \alpha \int_F xy dF = \\ &= \sin \alpha \cos \alpha \left( \int_F y^2 dF - \int_F x^2 dF \right) + (\cos^2 \alpha - \\ &\quad - \sin^2 \alpha) \int_F xy dF = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \quad (155)\end{aligned}$$

Seega telgede pöörämisel mingi nurga  $\alpha$  võrra on inertsmomentide arvutusvalemid:

$$J_{x_1} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha, \quad (151)$$

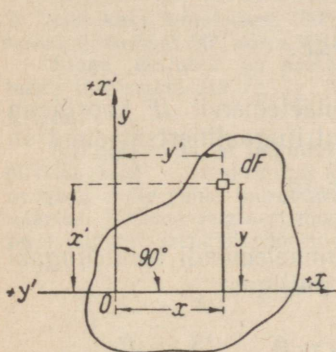
$$J_{y_1} = J_y \cos^2 \alpha + J_x \sin^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha, \quad (152)$$

$$J_{x_1 y_1} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \quad (155)$$

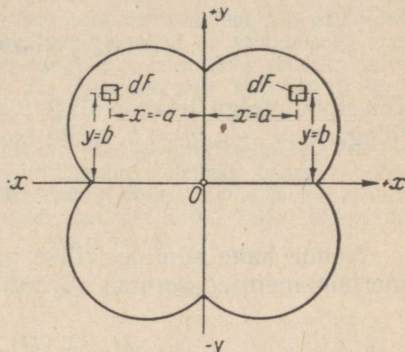
### § 53. Peainertstelgede mõiste ja nende asendi määramine

Valemitest (151), (152) ja (155) näeme, et inerts-momendid  $J_{x_1}$ ,  $J_{y_1}$  ja  $J_{x_1y_1}$  olenevad nurgast  $\alpha$ . Telgede pöör-  
ramisnurga  $\alpha$  muutumisega muutuvad ka inertsmomentide  
suurused.

Tõestame, et koordinaattelgede pööramisel  $90^\circ$  võrra  
tsentrifugaalinertsmomenti märk muutub vastupidiseks.  
Tõepoolest, olgu näiteks mingi kujundi (joon. 97) koordi-  
naatteljed  $x$  ja  $y$  pööratud  $90^\circ$  võrra vastu kellaosuti liiku-  
mise suunda koordinaatide alguse ümber ning olgu nende



Joonis 97.



Joonis 98.

uued asendid  $x'$  ja  $y'$ . Pinnaelemendi  $dF$  uued koordinaadid  
avalduvad vanade kaudu kujul:

$$\begin{aligned} x' &= +y, \\ y' &= -x. \end{aligned}$$

Tsentrifugaalinertsmoment uute telgede  $x'$  ja  $y'$  suhtes on:

$$J_{x_1y_1} = \int_F x'y'dF = - \int_F xy dF = -J_{xy}.$$

Seda saab tõestada ka nii, et asetame valemisse (155)  
nurga  $\alpha$  asemele nurga  $(\alpha + 90^\circ)$ .

Tsentrifugaalinertsmomenti suurus muutub pidevalt,  
kui muudame koordinaattelgede pöördenurka. Telgede pöör-  
ramisel  $90^\circ$  võrra tsentrifugaalinertsmoment muudab oma  
märki. Järelikult üleminekul ühelt märgilt teisele peavad

teljed olema niisuguses asendis, mille puhul tsentrifugaalinertsmoment võrdub nulliga.

Telgesid, millede suhtes tsentrifugaalinertsmoment on null, nimetatakse *peainertstelgedeks*. Kui koordinaatide algus langeb ühte kujundi raskuskeskmega, siis vastavaid peatelgi nimetatakse *tsentraalseteks peainertstelgedeks*.

Kui kujundil on sümmeetriatelg, siis on viimane alati üheks peatelgedest. Tõepoolest, olgu joonisel 98 kujutatud ristlõikel  $y$ -telg sümmeetriateljeks. Võtame mingi pinnaelemendi  $dF$  koordinaattelgedega  $x = a$ ,  $y = b$ . Selle pinnaelemendi tsentrifugaalinertsmoment on:

$$dJ_{xy} = ab dF.$$

Teiselpool telge leiame alati pinnaelemendi  $dF$  koordinaatidega  $x = -a$ ,  $y = b$ , mille tsentrifugaalinertsmoment on:

$$dJ'_{xy} = -ab dF.$$

Nende kahe sümmeetrilise pinnaelemendi tsentrifugaalinertsmomentide summa võrdub nulliga:

$$dJ_{xy} + dJ'_{xy} = 0.$$

Iga kahe sümmeetriliselt paigutatud pinnaelemendi jaoks saame alati sama tulemuse. Seetõttu sümmeetrilistest pinnaelementidest koosneva kujundi tsentrifugaalinertsmoment võrdub nulliga. Kui aga tsentrifugaalinertsmoment on null, siis teljed on peateljed. Järelikult sümmeetriatelg on alati kujundi üheks peainertsteljeks.

Seega peainertstelgede leidmine sümmeetriliste kujundite jaoks ei tekita mingit raskust.

Vaatleme nüüd peainertstelgede määramise küsimust üldkujul, kui kujundil ei ole sümmeetriatelge.

Olgu meil teada inertsmomendid  $J_x$ ,  $J_y$  ja  $J_{xy}$  mingisuguste meelvaldsete telgede  $x$  ja  $y$  suhtes. Tsentrifugaalinertsmoment teiste koordinaattelgede  $x_1$  ja  $y_1$  suhtes, millel on sama koordinaatide algus, kuid mis on pööratud esimeste suhtes nurga  $\alpha$  võrra, avaldub valemi (155) järgi kujul:

$$J_{x_1y_1} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha.$$

Võrrutades tsentrifugaalinertsmomendi  $J_{x_1 y_1}$  nulliga, leiame nurga, mille võrra on vaja pöörata esialgseid telgi, et uued teljed oleksid peatelgedeks:

$$\frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha = 0,$$

millest

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (156)$$

Asetades sellesse valemisse  $J_x$ ,  $J_y$  ja  $J_{xy}$  väärtused, leiame nurga  $2\alpha$  jaoks kaks teineteisest  $180^\circ$  võrra erinevat väärtust. Nurgad  $\alpha$  erinevad üksteisest  $90^\circ$  võrra. Järelikult peateljed on teineteisega risti.

Seega üldjuhul on painertstelgede asendi määramiseks tarvis teada inerts momente  $J_x$ ,  $J_y$  ja  $J_{xy}$  mingisuguste koordinaattelgede suhtes.

Näitame nüüd, et telginertsmomentidel painertstelgede suhtes on piirväärtused — maksimum ja miinimum. Selleks leiame pöördenurga  $\alpha$ , mille puhul inerts momentidel on maksimaalne ja minimaalne väärtus. Võtame telginertsmomendi avaldise (151) telje suhtes, mis on esialgselt asendist pööratud nurga  $\alpha$  võrra:

$$J_{x_1} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha.$$

Leiame tuletise  $\frac{dJ_{x_1}}{d\alpha}$  ja võrrutame selle nulliga:

$$\frac{dJ_{x_1}}{d\alpha} = -2J_x \sin \alpha \cos \alpha + 2J_y \sin \alpha \cos \alpha - 2J_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

ehk

$$(J_y - J_x) \sin 2\alpha = 2J_{xy} \cos 2\alpha,$$

kust saame

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}.$$

Seega saime pöördenurga jaoks samasuguse valemi nagu peatelgedegi jaoks [valem (156)]. Järelikult ülaltoodud väide on tõestatud. Kui inerts momendil uue telje suhtes, mis on pööratud tuletatud avaldisest saadud nurga  $\alpha$  võrra, on maksimaalne väärtus, siis teise risttelje suhtes on inerts momendil minimaalne väärtus, ja vastupidi. Eeltoodu järgneb sellest, et telginertsmomentide summa kahe ristiasetseva telje suhtes ei muutu nende telgede pööramisel ümber koordinaatide alguse [valem (138)].

Nüüd võime anda ka teise määrangu peatelgede jaoks: peatelgedeks nimetatakse sellist kaht ristiasetsevat telge, millede suhtes telginertsmomentidel on maksimaalne ja minimaalne väärtus.

Mõnikord kasutatakse valemi (156) asemel sellest tuletatud valemit

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_{\min} - J_x}, \quad (157)$$

mis võimaldab leida nurga  $\alpha_1$ , mille võrra tuleb pöörata  $x$ -telge, et saada  $J_{\max}$  andvat telge.

## § 54. Peainertsmomentide määramine

Kui on teada kujundi inertsmomendid  $J_x$ ,  $J_y$  ja  $J_{xy}$  mingisuguste koordinaattelgede suhtes, siis võime peainertsmomendid määrata järgmiselt.

Eelkõige määrame peainertstelgede asendid valemiga,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (156)$$

Leidnud nurga  $2\alpha$ , määrame tabelite järgi väärtused  $\sin 2\alpha$  ja  $\cos 2\alpha$ .

Ülaltoodust teame, et inertsmomentide summa ja vahe pööratud telgede korral määratakse valemitega (153) ja (154):

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y, \quad (153)$$

$$J_{x_1} - J_{y_1} = (J_x - J_y) \cos 2\alpha - 2J_{xy} \sin 2\alpha. \quad (154)$$

Asetades valemisse (154) leitud  $\sin 2\alpha$  ja  $\cos 2\alpha$  väärtused, saame kahest võrrandist koosneva süsteemi peainertsmomentide  $J_{x_1}$  ja  $J_{y_1}$  määramiseks.

Lahendades selle süsteemi üldkujul, saame peainertsmomentide jaoks alljärgnevad valemid:

$$J_{\max} = \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}, \quad (158)$$

$$J_{\min} = \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}. \quad (159)$$

Kui inertsmomendid peattelgede  $x_1$  ja  $y_1$  suhtes on leitud, siis inertsmomendid mingisuguste teiste, nurga  $\alpha$  võrra pööratud telgede  $x$  ja  $y$  suhtes määratakse valemitega (151), (152) ja (155):

$$J_x = J_{x_1} \cos^2 \alpha + J_{y_1} \sin^2 \alpha, \quad (160)$$

$$J_y = J_{y_1} \cos^2 \alpha + J_{x_1} \sin^2 \alpha, \quad (161)$$

$$J_{xy} = \frac{J_{x_1} - J_{y_1}}{2} \sin 2\alpha. \quad (162)$$

Need valemid erinevad valemitest (151), (152) ja (155) sellepolest, et neis puudub tsentrifugaalinertsmomenti sisaldav liige, kuna tsentrifugaalinertsmoment peattelgede  $x_1$ ,  $y_1$  suhtes on null.

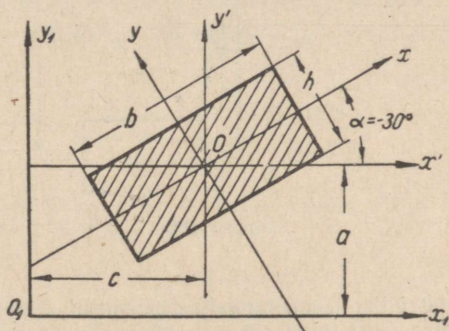
**Näide 49.** Määrata külgedega  $b = 9$  cm,  $h = 4$  cm ristküliku telg-inertsmoment telgede  $x_1$  ja  $y_1$  suhtes, kui  $\alpha = 30^\circ$ ,  $a = 10$  cm ja  $c = 8$  cm (joon. 99).

*Lahendus.* Ristküliku inertsmomentid peatsentraaltelgede  $x$  ja  $y$  suhtes:

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{9 \cdot 4^3}{12} = 48 \text{ cm}^4; \quad J_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \cdot 9^3}{12} = 243 \text{ cm}^4.$$

Valemite (160) ja (161) alusel määrame inertsmomentid pööratud telgede  $x'$  ja  $y'$  suhtes. Kuna neis valemis  $\sin \alpha$  ja  $\cos \alpha$  on teiseastmelised, siis telgede pööramise suunal ei ole tähtsust ning me saame:

$$\begin{aligned} J_{x'} &= J_x \cos^2 30^\circ + J_y \sin^2 30^\circ = \\ &= 48 \cdot 0,866^2 + 243 \cdot 0,5^2 = 36 + 60,7 = 96,7 \text{ cm}^4, \\ J_{y'} &= J_y \cos^2 30^\circ + J_x \sin^2 30^\circ = \\ &= 243 \cdot 0,866^2 + 48 \cdot 0,5^2 = 182 + 12 = 194 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$



Joonis 99.

Valemi (140) alusel ristküliku inertsmomentid telgede  $x_1$  ja  $y_1$  suhtes on:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= J_{x'} + Fa^2 = 96,7 + 9 \cdot 4 \cdot 10^2 = 3700 \text{ cm}^4; \\ J_{y_1} &= J_{y'} + Fa^2 = 194 + 9 \cdot 4 \cdot 8^2 = 2490 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

**Näide 50.** Määrata  $\perp$ -ristlõike (joon. 100) tsentraalsete peainertstelgede asend ja peainertsmomentide suurused. Ristlõike kõik mõõted on antud millimeetrites.

*Lahendus.* Määrame esmalt inertsmomentid  $J_x$ ,  $J_y$  ja  $J_{xy}$  telgede  $x$  ja  $y$  suhtes. Selleks jaotame ristlõike joonisel 100 esitatud viisil vertikaalristkülikuks ja kaheks horisontaalristkülikuks.

Vertikaalristküliku inertsmomentid telgede  $x$  ja  $y$  suhtes võrduvad:

$$J'_x = \frac{1 \cdot 20^3}{12} = 667 \text{ cm}^4; \quad J'_y = \frac{20 \cdot 1^3}{12} = 1,66 \text{ cm}^4.$$

Ühe horisontaalristküliku inertsmomentid:

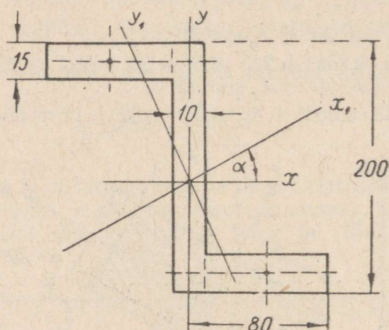
$$J_x'' = \frac{(8-1) \cdot 1,5^3}{12} + (8-1) \cdot 1,5 \left( \frac{20}{2} - \frac{1,5}{2} \right)^2 = 1,97 + 898 \approx 900 \text{ cm}^4;$$

$$J_y'' = \frac{1,5 \cdot (8-1)^3}{12} + (8-1) \cdot 1,5 \left( \frac{8-1}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 = 30,4 + 168 \approx 198 \text{ cm}^4.$$

Kogu ristlõike inertsmomentid:

$$J_x = J_x' + 2J_x'' = 667 + 2 \cdot 900 \approx 2467 \text{ cm}^4;$$

$$J_y = J_y' + 2J_y'' = 1,66 + 2 \cdot 198 \approx 398 \text{ cm}^4.$$



Joonis 100.

Vertikaalristküliku tsentrifugaalinertsmoment telgede  $x$  ja  $y$  suhtes on null, kuna need teljed on selle ristküliku peatelgedeks.

Määrame horisontaalristkülikute tsentrifugaalinertsmomentide. Viimased on horisontaalristkülikute sümmeetriatelgede suhtes, mis on joonisel näidatud punktiiriga, võrdsed nulliga. Minnes üle telgedele  $x$ ,  $y$ , saame võrrandi (141) alusel:

ülemise horisontaalristküliku jaoks:

$$\begin{aligned} J_{xy}' &= (8-1) \cdot 1,5 \left[ - \left( \frac{8-1}{2} + \frac{1}{2} \right) \right] \cdot 9,25 = \\ &= 7 \cdot 1,5 (-4) \cdot 9,25 = -388 \text{ cm}^4, \end{aligned}$$

alumise horisontaalristküliku jaoks:

$$\begin{aligned} J_{xy}'' &= (8-1) \cdot 1,5 \left( \frac{8-1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left[ - \left( \frac{20}{2} - \frac{1,5}{2} \right) \right] = \\ &= 7 \cdot 1,5 \cdot 4 (-9,25) = -388 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Kogu ristlõike tsentrifugaalinertsmoment

$$J_{xy} = J_{xy}' + J_{xy}'' = -388 + (-388) = -776 \text{ cm}^4.$$

Tsentraalsete peainertstelgede asendi määramise valemiga (156):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} = \frac{2(-776)}{398 - 2467} = 0,75.$$

Nurkade trigonomeetriliste funktsioonide tabeli järgi leiame:

$$\begin{aligned} 2\alpha &= 36^\circ 52', & \alpha &= 18^\circ 26', \\ 2\alpha &= 216^\circ 52', & \alpha &= 108^\circ 26'. \end{aligned}$$

Samast tabelist kirjutame välja väärtused:

$$\sin 2\alpha = \pm 0,6 \text{ ja } \cos 2\alpha = \pm 0,8.$$

Valemite (153) ja (154) alusel leiame:

$$\begin{aligned} J_{x_1} + J_{y_1} &= J_x + J_y = 398 + 2467 = 2865 \text{ cm}^4, \\ J_{x_1} - J_{y_1} &= (J_x - J_y) \cos 2\alpha - 2J_{xy} \sin 2\alpha = \\ &= (2467 - 398) (\pm 0,8) - 2(-776) (\pm 0,6) \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned} J_{x_1} + J_{y_1} &= 2865 \text{ cm}^4, \\ J_{x_1} - J_{y_1} &= \pm 2585 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Liites ja lahutades need võrrandid, ning võttes teise võrrandi parempoolse osa ette pluss märgi, saame:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= 2725 \text{ cm}^4, \\ J_{y_1} &= 140 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Inertsmoment  $J_{x_1}$  on maksimaalne,  $J_{y_1}$  aga minimaalne.

Kui teise võrrandi parempoolse osa ette võtta miinus märk, siis saame  $J_{x_1} = 140 \text{ cm}^4$ ,  $J_{y_1} = 2725 \text{ cm}^4$ , kuid teljed  $x_1$  ja  $y_1$  on seejuures pööratud  $90^\circ$  võrra joonisel 100 näidatud telgede  $x_1$  ja  $y_1$  suhtes.

## § 55. Kontrollküsimusi

Kuidas määratakse kujundi staatilist momenti kujundi pindala ja tema raskuskeskme koordinaatide kaudu? Milline on staatilise momenti dimensioon?

Millega võrdub kujundi staatiline moment kujundi raskuskeset läbiva telje suhtes?

Missuguste valemitega määratakse kujundi raskuskeskme koordinaadid?

Mida nimetatakse telginertsmomendiks, polaarinertsmomendiks ja tsentrifugaalinertsmomendiks? Millised on nende dimensioonid?

Kuidas on seotud omavahel telginertsmomentide summa risti-

asetsevate telgede suhtes ja polaarinerntsmoment nende telgede löikepunkti suhtes?

Millised inerntsmomentidest on alati positiivsed suurused?

Kuidas avalduvad telginerntsmomendi ja tsentrifugaalinerntsmomendi arvutusvalemid telje paralleellükkel?

Millega võrdub ristküliku telginerntsmoment ristküliku alusega paralleelse tsentraaltelje suhtes?

Millega võrduvad ringi ja rõnga tsentraalsed telginerntsmomendid?

Kuidas muutub tsentrifugaalinerntsmoment koordinaattelgede pöörämisel  $90^\circ$  võrra?

Milliseid telgi nimetatakse tsentraalseteks peainerntstelgedeks?

Miks kujundi sümmeetriatelg on alati üheks peainerntsteljeks?

Kuidas määratakse lihtkujunditeks jaotuva lihtkujundi inerntsmoment, kui esimeste inerntsmomendid on kergelt leitavad valemite või tabelite abil?

SIRGE PRUSSI PAINE, PAINDEMOMENT  
JA PÕIKJÕUD

## § 56. Paine üldmõiste

Võtame sirge pikisümmeetria tasapinnaga prismaatilise prussi (joon. 101). Rakendame selles tasapinnas prussi teljega risti mõjuvad tasakaalustatud jõud. Pruss nende jõudude mõjul paindub, tema telg kõverdub. Prussi painet jõudude toimel, mis on risti tema teljega ja asetsevad prussi telge läbivas tasapinnas, nimetatakse lamepaindeks. Prussi paindeformatsioon toimub jõudude mõjumise tasapinnas. Sellist painet, kus deformatsioon toimub väliskoorumuse mõjumise tasapinnas, nimetatakse tasapinnaliseks paindeks.



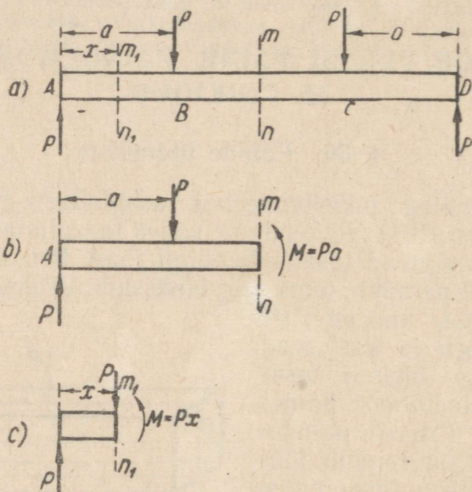
Joonis 101.

Eespooltoodu näitena vaatame nelja võrdse jõuga  $P$  painutatud prussi. Jõud mõjuvad risti prussi teljega ja asetsevad ühes tasapinnas (joon. 102, *a*). Näeme, et pruss on temale rakendatud jõudude mõjul tasakaalus. Lõikame prussi mõtteliselt vahemiku  $BC$  meelevaldses kohas mööda pinda  $mn$  pooleks.

Vaatleme nüüd prussi üht, näiteks vasakpoolset äralõigatud osa (joon. 102, *b*). Prussi sellele osale mõjub jõupaar momendiga  $Pa$ , mis püüab prussi pöörata kellaosuti liikumise suunas. Selleks, et vaadeldav prussi osa säilitaks tasakaalu, mis tal oli enne läbilõikamist, on küllaldane, kui rakendame lõikesse  $mn$  elastsusjõudude momendi

$M$ , mis on suuruselt võrdne, kuid suunalt vastupidine välisjõudude momendiga  $Pa$ . Millises vahemikus  $BC$  ka lõige ei asetseks, saaksime ikka ühe ja sama tulemuse ja nimelt — prussi ärälõigatud osa on alati tasakaalus kahe momendi mõjul, mis on suuruselt võrdsed, kuid suunalt vastupidised momendiga  $Pa$ . Kahe võrdvastupidise momendiga esilekutsutud prussi painet nimetatakse *puhtaks paindeks*.

Järelikult prussi osa  $BC$  on puhta painde olukorras.



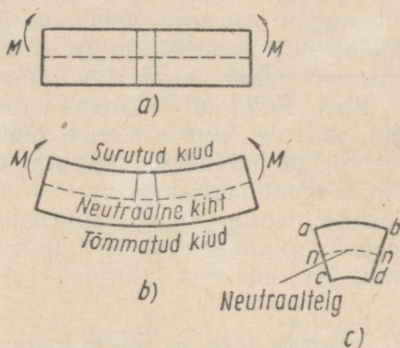
Joonis 102.

Teistsuguse tulemuse saame, kui lõikame prussi mõtteliselt kas vahemikus  $AB$  või  $CD$ . Lõikame prussi vahemikus  $AB$  pooleks mööda pinda  $m_1n_1$ , mis asetseb vasakust otsast kaugusel  $x$  (joon. 102, c). Prussi vasakpoolne osa on tasakaalus juhul, kui rakendame lõikesse  $m_1n_1$  elastsusjõudude momendi  $M$ , mis on suuruselt võrdne, kuid suunalt vastupidine välisjõudude momendiga  $Px$ , ning elastsusjõu resultandi, mille suurus on  $P$  ning mis on suunatud alla. Lõiketasapinnas mõjuv jõud  $P$  püüab prussi selles lõikes läbi lõigata. Järelikult momentide poolt esilekutsutud paindele lisandub veel nihkedeformatsioon.

Paindedeformatsiooni näitlikuks esitamiseks võtame väheldase kummist prismaatilise varda. Märgive selle külgpinnale kaks omavahel paralleelset ja varda teljega

risti asetsevat joont. Rakendame varda otstesse sümmeetrilise tasapinnas kaks võrdvastupidist momenti (joon. 103, a), millede mõjul varras paindub. Seejuures jäävad vardale märgitud jooned sirgeteks ja ristiasetsevaiks varda teljega (joon. 103, b).

See lihtne katse võimaldab meil teha rea järeldusi. Eeldades, et prussi sees toimuvad samad nähtused, mis prussi külgpindadelgi, võib katse põhjal järeldada, et *paindel jäävad tasapinnalised lõiked ka pärast deformeerumist tasapinnalisteks*. Edasi nähtub, et need *tasapinnalised lõiked pöörduvad teineteise suhtes*. Ilmselt võib viimane muutus toimuda ainult materjali ühete kiudude piknemise ja



Joonis 103.

teiste lühenemise arvel. Vaadeldavas näites on ülemised kiud varda nõgusal küljel kokku surutud. Sellest pole raske järeldada, et talal on selline kiudude kiht, mis ei allu ei tõmbele ega survele. Seda kihti nimetatakse neutraalkihiks. Neutraalkihi ja mingi meelevaldse ristlõiketasapinna lõikejoont nimetatakse neutraalteljeks. Joonisel 103, b joon *nn* kujutab neutraaltelge.

Samal kummimudelil paneme tähele, et nõgusal küljel kaasneb kiudude pikisuunalisele lühenemisele nende paksemine ristsuunas, kumeral küljel aga kiudude piknemisele nende ahenemine ristsuunas, s. t. nähtused kulgevad nii, nagu lihtsal tõmbel ja survele. Selle tagajärjel ristlõike külgejooned *ab* ja *cd* kõverduvad, kusjuures nende kõveruskeskpunktid langevad ühte. Ülemine joon *ab* pikeneb, alumine *cd* aga lüheneb.

Nendele üsna väärtuslikele ja nagu näib, küllaltki lihtsatele järeldustele ei tulnud teadlased kohe. Kulus rohkem kui sajand paindenähtuse uurimise algusest, et jõuda nendele õigetele järeldustele. Galilei, hakates esimesena juba XVII sajandil uurima paindeteooriat, tegi väära oletuse, et paindel materjali kõik kiud pikenevad ühesuguselt. Alles XVIII sajandi lõpul jõuti katselisel teel õigele oletusele, mis püstitati sama sajandi algul, et paindel on kiud kumeral küljel tõmmatud, nõgusal küljel aga surutud.

Prussis paindemomentidega esilekutsutud ühtede kiudude pikenedemise ja teiste lühenemise tagajärjel tekivad prussi ristlõigetel normaalsed tõmbe- ja survepinged. Antud ristlõikes nende pingete suurused sõltuvad selles lõikes mõjuva paindemomendi suuruselt. Eespoolesitatust nägime, et prussi painutamisel jõududega mõjuvad prussi ristlõigetel lisaks paindemomendile veel põikjõud, mis püüavad esile kutsuda prussi nihet. Põikjõud kutsuvad prussis esile tangentsiaalpingeid, millede suurus oleneb põikjõu suuruselt antud ristlõikes. Seega jõududega painutatud prussis tekiavad normaal- ja tangentsiaalpinged.

Enne kui asuda nende pingete suuruste määramisele vaatleme paindemomentide ja põikjõudude määramise meetodeid painutatud prusside mitmesugustes ristlõigetel.

## § 57. Talade toed ja toereaktsioonid

Tugedel asuvaid sirge teljega prusse, milledele mõjuvad paindekoormused, nimetatakse harilikult taladeks. Talade ülesandeks on nendele mõjuvate koormuste ülekandmine tugedele. Talade tugedes tekivad reaktsioonid, millede määramisega tuleb alustada kõikide paindega seotud ülesannete lahendamist. Olenevalt talade tugede arvust ja ehitusest, on määramisele kuuluvate reaktsioonide arv erinev.

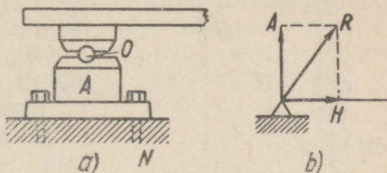
Ehituselt võib talade toed jaotada kolme alljärgnevasse põhitüüpi:

- 1) liikumatu šarniirtugi,
- 2) liikuv šarniirtugi,
- 3) jäigalt kinnitatud otstugi.

Liikumatu šarniirtugi on näidatud joonisel 104, *a*. Tala ots toetub rullikule *O*. Viimane toetub tugipadjale *A*, mis omakorda on jäigalt kinnitatud tugipinnale *N*. Selline tugi ei võimalda tala otsal nihkuda meelevaldses suunas, võimaldab sellel aga pöörduda šarniiri tsentri suhtes. Edaspidi

kujutame liikumatut šarniirtuge skemaatiliselt nii, nagu see on näidatud joonisel 104, *b*.

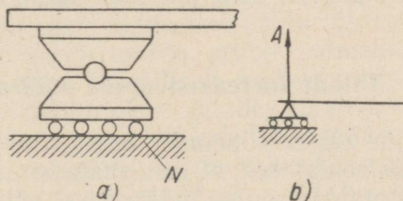
Liikumatus šarniirtoes tekkivast reaktsioonist teame ainult, et see asub talale mõjuvate jõudude tasapinnas ja läbib šarniiritsentrit. Reaktsiooni suurus ja suund on tundmatud. Suuruselt ja suunalt tundmatu reaktsiooni võime alati asendada tema kahe komponendiga: vertikaalkomponendiga  $A$  ja horisontaalkomponendiga  $H$ . Sel juhul saame suuruselt ja suunalt



Joonis 104.

tundmatu reaktsiooni asemel kaks reaktsiooni, mis on suuruselt tundmatud, suunalt aga teada. Järelikult võime öelda, et liikumatu šarniirtugi annab kaks suuruselt tundmatut reaktsiooni.

Liikuv šarniirtugi on toodud joonisel 105, *a*. Erinevalt liikumatust šarniirtoest on selle tugipadi asetatud rulliku-



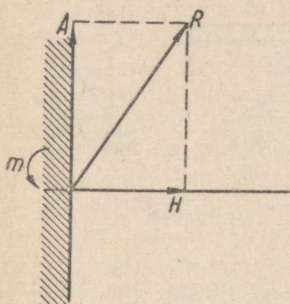
Joonis 105.

tele, mis võimaldavad tal nihkuda koos tala otsaga piki viimase telge tugipinnal  $N$ . Edaspidi kujutame liikuvat šarniirtuge skemaatiliselt nii, nagu on näidatud joonisel 105, *b*. Liikuva šarniirtoe korral on tala otsal ainult üks side — ta ei võimalda tala otsal liikuda tala teljega ristsihis.

Järelikult liikuv šarniirtugi annab ainult ühe reaktsiooni, mis on suunalt teada, kuid suuruselt tundmatu.

Tala otsa jäik kinnitus on skemaatiliselt näidatud joonisel 106. Selline tugi takistab tala otsa iga nihet väliskooruste mõjumise tasapinnas, ning lisaks sellele veel ka tala otsa pöördumist. Järgalt kinnitatud toes tekib suuruselt ja suunalt tundmatu reaktsioon, mis takistab tala otsa nihku-

mist, ja reaktsioonmoment, mis takistab tala otsa pöördu- mist. Tundmatu reaktsiooni  $R$  võime alati asendada kahe reaktsiooniga: vertikaalsega  $A$  ja horisontaalsega  $H$ . Selle



Joonis 106.

põhjal võime öelda, et jäigalt kinnitatud tugi annab kolm tundmatut reaktsiooni: vertikaalse reaktsiooni  $A$ , horisontaalse reaktsiooni  $H$  ja toemomendi  $m$ .

Praktikas kõige sagedamini mõjuvad tala painutavad jõud tala teljega risti. Neil juhtudel tugeses tekkivate tundmatute reaktsioonide arv väheneb, sest reaktsioon piki tala telge on nii liikumatus kui ka šarniirtoes null. Seega tala teljega risti mõjuvate koormuste korral esineb tala liikumatus kui ka liikuvus šarniirtoes

üks tundmatu reaktsioon  $A$ , mis on suunatud risti tala teljega, jäigalt kinnitatud toes aga kaks tundmatut reaktsiooni — reaktsioon  $A$ , mis on risti tala teljega ja toemoment  $m$ .

## § 58. Talade toereaktsioonide määramine

Nagu kõikide tugevusõpetuses uuritavate deformatsioonide juures, kus eeldatakse, et deformatsioonid on väikesed, nii ka talade toereaktsioonide määramisel võib arvestamata jätta need muutused, mis toimuvad talale mõjuvate välisjõudude paigutuses tala deformeerumise tagajärjel.

Juhul, kui talale mõjuvad jõud asetsevad ühes tasapinnas, siis staatika annab kolm tasakaalu võrrandit:

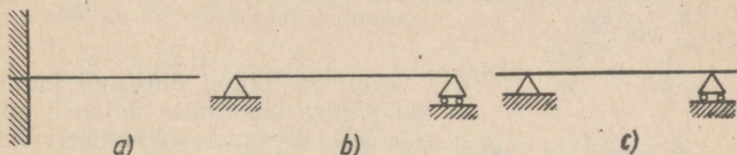
$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M = 0,$$

s. o. tala tasakaaluks on vajalik, et talale rakendatud kõikide jõudude, kaasa arvatud toereaktsioonide, projektsioonide summa  $x$ - ja  $y$ -teljele võrduks nulliga. Peale selle peab ka kõikide jõudude momentide summa võrduma nulliga.

Kui tala painutavad jõud mõjuvad risti tala teljega, siis võrrand  $\sum X = 0$  muutub samasuseks ja reaktsioonide määramiseks jääb kaks staatika võrrandit:

$$1) \quad Y = 0; \quad 2) \quad \sum M = 0. \quad (163)$$

Kui lamepaindel tala tugestes tekkivate reaktsioonide üldarv ei ületa kahte, siis saab need alati määrata kahest staatika võrrandist (163). Selliseid talasid, millede toereaktsioone on võimalik määrata staatika võrranditest, nimetatakse *staatiliselt määratud taladeks*. Staatiliselt määratud talad võivad esineda ainult kahes alljärgnevas kujus: 1) tala üks ots on jäigalt kinnitatud, teine ots on aga vaba (joon. 107, *a*) ja 2) tala toetub ühe otsaga liikumatule, teise otsaga aga liikuvale šarniirtoele (joon. 107, *b* ja 107, *c*).

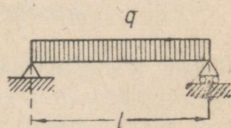


Joonis 107.

Talal, mis on näidatud joonisel 107, *c*, on tugedest üleulatuvad otsad. Sellist tala nimetatakse konsoolseks talaks, üleulatuvaid otsi aga konsoolideks.

Talasid, milledele toereaktsioonide üldarv on suurem staatika tasakaaluvõrrandite arvust, nimetatakse *staatiliselt määramatuteks*. Staatiliselt määramatute talade puhul toereaktsioonid määratakse talade staatika võrrandite ja deformatsioonide võrrandite kooslahendamisega. Seetõttu staatiliselt määramatute talade toereaktsioonide määramisega me tutvume edaspidi, pärast seda, kui oleme õppinud talade deformatsioonide määramist. Nüüd aga esitame konkreetsete näidete varal staatiliselt määratud talade toereaktsioonide määramise võtteid.

Eelnevalt lepime kokku suunata  $x$ -telg alati tala telge mööda,  $y$ -telg aga vertikaalselt üles. Mõmentide võrrandite koostamisel loeme kokkuleppeliselt positiivseteks momente, mis on suunatud kellaosuti liikumise suunas. Kui talale mõjub pidev ühtlaselt jaotatud koormus, nagu see on näidatud joonisel 108, siis reaktsioonide määramisel see koormus asendatakse tema resultandiga. Näiteks pidevalt ühtlaselt jaotatud koormuseks võib olla tala omakaal. Pidevalt ühtlaselt jaotatud koormuse resultandi rakenduspunkt

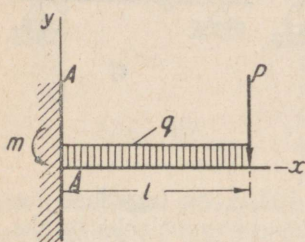


Joonis 108.

asub koormuse mõjumise vahemiku keskel. Sageli antakse pidev ühtlaselt jaotatud koormus tema intensiivsusega. *Pideva koormuse intensiivsuse* all mõistame koormuse suurust, mis langeb ühele pikkusühikule. Kui kogu pidev koormus on võrdne  $P$  ning tema mõjumise vahemiku pikkus on  $l$ , siis koormuse intensiivsus avaldub

$$q = \frac{P}{l}.$$

Koormuse intensiivsuse  $q$  dimensiooniks on tavaliselt  $\frac{\text{t}}{\text{m}}$ ,  $\frac{\text{kg}}{\text{m}}$  või  $\frac{\text{kg}}{\text{cm}}$ .



Joonis 109.

Kui on antud ühtlaselt jaotatud pideva koormuse intensiivsus  $q$  ja selle koormuse mõjumise vahemiku pikkus  $l$ , siis tema resultant määratakse koormuse intensiivsuse ja vahemiku pikkuse korrutisega:

$$P = q \cdot l.$$

**Näide 51.** Järgalt kinnitatud otsaga talale (konsoolile) mõjub kogu selle pikkuses ühtlaselt jaotatud koormus, mille intensiivsus  $q = 0,5 \frac{\text{t}}{\text{m}}$ , ning vabale otsale koondatud jõud  $P = 2 \text{ t}$ . Määrata toereaktsioonid, kui tala pikkus  $l = 4 \text{ m}$ .

*Lahendus.* Kinnituses tekivad vertikaalne reaktsioon ja reaktsioonmoment, millede suunad on tundmatud. Suuname esialgu vertikaalse reaktsiooni  $A$  üles, toemomendi  $m$  aga vastupidiselt kellaosuti liikumisele. Kirjutame tasakaalutingimuse, võttes momentide tsentriks punkti  $A$ :

$$\sum M_A = -m + ql \cdot \frac{l}{2} + Pl = 0,$$

millest reaktsioonmomendi suurus

$$m = \frac{ql^2}{2} + Pl = \frac{0,5 \cdot 4^2}{2} + 2 \cdot 4 = 12 \text{ tm}.$$

Jõudude projektsioonide võrrandist  $y$ -teljele saame:

$$A - ql - P = 0,$$

millest reaktsioon

$$A = ql + P = 0,5 \cdot 4 + 2 = 4 \text{ t}.$$

Antud juhul saime momendi  $m$  ja reaktsiooni  $A$  positiivsetena. See näitab, et suunad olid meil õigesti valitud. Kui pärast reaktsioonide

määramist mõni neist on miinusemärgiga, siis see näitab, et meelevaldselt ette valitud suund ei lange ühte reaktsiooni tõelise suunaga. Seepärast tuleb pärast reaktsioonide määramist miinusemärgiga saadud reaktsiooni suund muuta joonisel vastupidiseks ja edaspidistes arvutustes lugeda ta positiivseks.

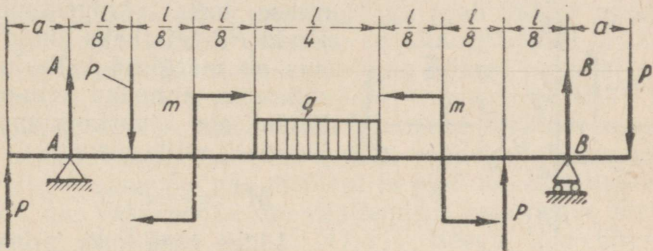
Näide 52. Määrata joonisel 110 toodud tala toereaktsioonid.

Lahendus. Suuname reaktsioonid  $A$  ja  $B$  üles. Koostame momentide võrrandi punkti  $A$  suhtes:

$$\sum M_A = 0.$$

Siit leiame reaktsiooni  $B$  suuruse:

$$B = P \left( \frac{a}{l} + \frac{1}{8} - \frac{7}{8} + \frac{a}{l} + 1 \right) + q \frac{l}{8} = P \frac{8a+l}{4l} + q \frac{l}{8}.$$



Joonis 110.

Koostame momentide võrrandi punkti  $B$  suhtes:

$$\sum M_B = 0.$$

Siit leiame reaktsiooni  $A$  suuruse:

$$A = P \left( \frac{7}{8} - \frac{a}{l} - 1 - \frac{1}{8} - \frac{a}{l} \right) + \frac{ql}{8} = -P \frac{8a+l}{4l} + q \frac{l}{8}.$$

## 59. Põikjõud ja paindemoment

Vaatleme lihttala, millele mõjuvad jõud  $P_1$  ja  $P_2$  (joon. 111,  $a$ ). Olgu vasakus ja paremas toes reaktsioonid vastavalt  $A$  ja  $B$ . Siseelastsusjõudude määramiseks tala mingis lõikes rakendame üldist võtet ja nimelt lõikemeetodit.

Teeme mõtteliselt talale lõike  $mn$ , mis asetseb tala vasakust otsast kaugusel  $x$  ja vaatleme vasakpoolset tala osa, jättes kõrvale tema parempoolse osa. Välisjõud, mis mõju-

vad tala vasakpoolsele osale, asendame jõupaari ja jõuga, mis on rakendatud lõike raskuskeskmesse.

Kui rakendame lõike raskuskeskmesse kaks suuruselt võrdset ja suunalt vastupidist (üles ja alla) jõudu  $A$ , siis vasaku toe reaktsioon  $A$ , mis on suunatud üles, ja jõud  $A$ , mis on rakendatud lõike raskuskeskmesse ning on suunatud alla, moodustavad kellaosuti pöörlemissuunalise jõupaari.

Selle jõupaari moment  $M' = Ax$ . Jõud, mis moodustavad selle jõupaari, on joonisel märgitud kriipsukesega. Samuti teeme ka jõuga  $P_1$ . Rakendame lõike raskuskeskmesse kaks võrdvastupidist jõudu  $P_1$ . Siis kaks jõudu  $P_1$ , mis on märgitud kahe kriipsukesega, annavad kellaosuti liikumisele vastassuunalise jõupaari, mille moment

$$M'' = -P_1(x - a).$$

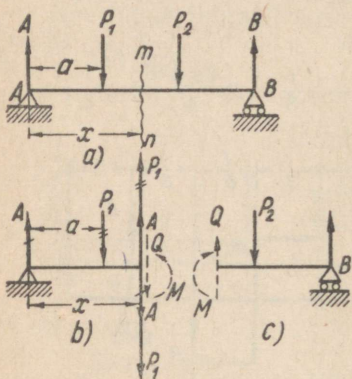
Liites need kaks jõupaari, leiame nende resultantjõupaari, mille moment

$$M = M' + M'' = Ax - P_1(x - a).$$

Liites ülejäänud läbikriipsutamata jõud  $A$  ja  $P_1$ , mis on rakendatud lõike raskuskeskmesse, saame resultantjõu.

$$Q = A - P_1.$$

Seega asendasime vasakpoolsele tala osale mõjuvad välisjõud jõupaariga, mille moment on  $M$  ja jõuga  $Q$ . Sellise asenduse võime teha alati, sõltumata tala äralõigatud osale mõjuvate välisjõudude arvust, s. o. tala äralõigatud osale mõjuvate välisjõudude meelevaldse arvu puhul võime kõik välisjõud asendada vaadeldavas lõikes mõjuva momendi ja jõuga. Lähtudes tasakaalutingimusest, peavad lõikes  $mn$  rakendatud sise-elastsusjõud andma momendi ja jõu, mis on vastavalt võrdvastupidised momendile  $M$  ja jõule  $Q$ . Elastsusjõudude moment  $M$  ja jõud  $Q$  on näidatud joonisel 111,  $b$  punktiiriga.



Joonis 111.

Allesjäänud tala osale rakendatud sisejõudude poolt moodustatud jõupaari momenti  $M$ , mis arvuliselt võrdub ühel pool lõiget mõjuvate välisjõudude momentide algebraalse summaga, nimetatakse *paindemomendiks lõikes*.

Allesjäänud tala osale rakendatud sisejõudude resultantjõudu  $Q$ , mis arvuliselt võrdub ühel pool lõiget mõjuvate välisjõudude algebraalse summaga, nimetatakse *põikjõuks* ehk *lõikejõuks lõikes*.

Kuna kogu tala kõikide välisjõudude, kaasa arvatud ka reaktsioonjõudude mõjul on tasakaalus, siis lõikest vasakule jäävale tala osale mõjuvate kõikide jõudude summa peab võrduma lõikest paremale jäävale tala osale mõjuvate kõikide jõudude summaga, kuid suunalt olema vastupidine.

Sama tasakaalutingimuse põhjal peab lõikest vasakul pool mõjuvate kõikide jõudude resultantjõupaari moment lõike raskuskeskme suhtes võrduma lõikest paremal pool mõjuvate jõudude resultantjõupaari momendiga lõike raskuskeskme suhtes, kuid olema suunatud sellele vastupidi.

Kui tala vasakpoolse osa asemel vaadelda parempoolset osa, siis elastsusjõudude moment ja jõud lõikes  $mn$  oleksid samad, mis vasakpoolse osa vaatlemisel, kuid nende suunad oleksid vastupidised (joon. 111, c). Seega tala ühes ja samas ristlõikes on elastsusjõududel erinev suund, sõltuvalt sellest, millisele tala osale (parempoolsele või vasakpoolsele) nad on rakendatud.



Joonis 112.

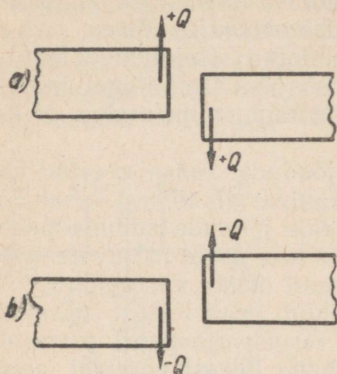
Selleks, et paindemomendil ja põikjõul oleks ühes ja samas ristlõikes üks ja sama märk, sõltumata sellest, millisele tala osale nad on rakendatud, lepime kokku järgmise märkide reegli suhtes.

Paindemomendi loeme positiivseks, kui ta painutab tala kumerusega alla, s. t. kui ta püüab tala vasakpoolset osa pöörata kellaosuti liikumise suunas või tala parempoolset osa — vastu kellaosuti liikumise suunda (joon. 112, a).

Paindemomendi loeme negatiivseks, kui ta painutab tala kumerusega üles, s. t. kui ta tala vasakpoolset osa püüab pöörata vastu kellaosuti liikumise suunda või tala parempoolset osa kellaosuti liikumise suunas (joon. 112, *b*).

Põikjõu loeme positiivseks, kui ta püüab tala vasakpoolset osa parempoolse osa suhtes nihutada üles või parempoolset osa vasakpoolse suhtes alla (joon. 113, *a*).

Põikjõu loeme negatiivseks, kui ta püüab tala vasakpoolset osa parempoolse osa suhtes nihutada alla või parempoolset osa vasakpoolse osa suhtes üles (joon. 113, *b*).

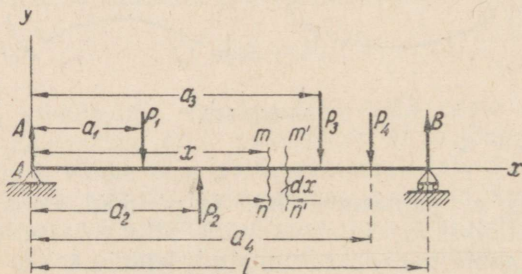


Joonis 113.

## § 60. Jaotatud koormuse intensiivsuse, põikjõu ja paindemomendi vaheline seos

Vaatleme lihttala, mis on painutatud jõududega  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (joon. 114). Toereaktsioonid olgu  $A$  ja  $B$ . Avaldame lõikes  $mn$  mõjuva momendi, mille põhjustavad lõikest vasakule jäävad jõud:

$$M_x = Ax - P_1(x - a_1) + P_2(x - a_2).$$



Joonis 114.

Jõudude  $A$  ja  $P_2$  momendid on positiivsed, kuna nad püüavad pöörata tala vasakpoolset osa kellaosuti liikumise

suunas, jōu  $P_1$  moment on aga negatiivne, kuna ta pūiab pōorata tala vasakpoolset osa vastu kellaosuti liikumise suunda.

Pōikjōud lōikes  $mn$  kui lōikest vasakul pool asetsevate kōikide jōudude algebraline summa, vōrdub

$$Q = A - P_1 + P_2.$$

Kirjutame momendi vāertuse lōikes  $m'n'$ , mis asetseb lōikest  $mn$  kaugusel  $dx$ :

$$M_{x+dx} = A(x + dx) - P_1(x + dx - a_1) + P_2(x + dx - a_2).$$

Momendi juurdekasv

$$dM = M_{x+dx} - M_x = A dx - P_1 dx + P_2 dx = (A - P_1 + P_2) dx.$$

Sulgudes seisev suurus kujutab pōikjōudu lōikes  $mn$  vōi ka lōikes  $m'n'$ , kuna nende lōigete vahel välisjōud ei mōju:

$$dM = Q dx \text{ ehk } Q = \frac{dM}{dx}, \quad (164)$$

s. o. pōikjōud vōrdub momendi tuletisega abstsissi  $x$  suhtes.

Tuletame teise tähtsa seose.

Mōjugu talale kogu selle pikkuses ūhtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega  $q$ . Ūhtlaselt jaotatud koormuse loeme positiivseks, kui ta on suunatud ūlespoole. Kui tala mingis lōikes pōikjōud vōrdub  $Q$ , siis sellest lōikest  $dx$  kaugusel asetsevas lōikes on pōikjōud  $Q + dQ$ , kus  $dQ = q dx$ , järelikult

$$q = \frac{dQ}{dx}. \quad (165)$$

Vōtame vōrduse (164) mōlemast poolest tuletise:

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2 M}{dx^2},$$

vōi silmas pidades seost (165), saame:

$$q = \frac{d^2 M}{dx^2}, \quad (166)$$

s. o. teine tuletis paindemomendist abstsissi  $x$  suhtes võrdub jaotatud koormuse intensiivsusega.

Seosed (164) ja (166) tuletas esmakordselt vene teadlane D. Žuravski.

### § 61. Paindemomentide ja põikjõudude epüüride konstrueerimine

Tala ristlõigetes tekkivad normaal- ja tangentsiaalpinged sõltuvad vastavalt paindemomendist  $M$  ja põikjõust  $Q$ . Järelikult ohtlikuma ristlõike määramiseks, s. o. sellise, millises tekivad suurimad pinged, peab teadma momentide ja põikjõudude muutumist kogu tala pikkuse ulatuses. Tavaliselt suurema näitlikkuse saamiseks antakse nimetatud suuruste  $M$  ja  $Q$  muutumine tala pikkuse ulatuses graafiliselt. Selliseid  $M$  ja  $Q$  muutumise graafikuid nimetatakse paindemomentide ja põikjõudude epüürideks. Need epüürid konstrueeritakse samuti, nagu konstrueerisime völlide väändmomentide epüürid. Paindemomentide epüüri saame, kui kanname tala teljega paralleelsest teljest mingis mõõtkavas tala üksikutes ristlõigetes mõjuvate paindemomentide suurused ning ühendame saadud lõikude otsad. Põikjõudude epüüri konstrueerimiseks joonestame välja lõigud, mis teatud mõõtkavas kujutavad üksikutes ristlõigetes mõjuvate põikjõudude suurusi. Paindemomentide ja põikjõudude epüüride konstrueerimisel kantakse positiivsed  $M$  ja  $Q$  väärtused teljest ülespoole, negatiivsed aga allapoole.

Eelmises paragrahvis tuletatud suhteid (164) ja (165) võib kasutada  $M$  ja  $Q$  epüüride konstrueerimisel. Tõepoolest, paindemomendi ja põikjõu vahelisele suhtele  $Q = \frac{dM}{dx}$  võime anda geomeetrilise interpretatsiooni. Teame, et tuletist võib geomeetriliselt kujutada kui kõverale antud punktis püstitatud puutuja kaldenurga tangensit, s. o.

$$Q = \frac{dM}{dx} = tg\alpha.$$

Järelikult antud ristlõikes võib põikjõudu vaadelda kui paindemomentide epüüri sellele lõikele vastavas punktis püstitatud puutuja kaldenurga tangensit. Selles lõikes, kus  $Q = \frac{dM}{dx} = 0$ , s. o. lõikes, kus põikjõud läbib nulli, on paindemoment kas maksimaalne või minimaalne.

Selles lõikes, kus jaotatud koormuse intensiivsus  $q = \frac{dQ}{dx} = 0$ , on põikjõud  $Q$  kas maksimaalne või minimaalne. See järeldub sellest, et  $q = 0$  korral on põikjõudude epüürile tõmmatud puutuja paralleelne abstsissiteljega. Sõltuvuse (164) alusel võib põikjõudude olemasoleva epüüri järgi konstrueerida paindemomentide epüüri ja vastupidi. Siiski  $Q$  ja  $M$  epüürid konstrueeritakse sõltumatult teineteisest. Sõltuvust (164) kasutatakse aga ainult konstrueeritud epüüride kontrollimiseks.

Asume  $Q$  ja  $M$  epüüride konstrueerimise näidete juurde.

Olgu konsooltala painutatud vabas otsas koondatud jõuga (joon. 115, a). Konstrueerime põikjõudude ja paindemomentide epüürid.

a) *Reaktsioonide määramine.*

Kinnituses tekivad vertikaalne reaktsioon ja reaktsioonmoment. Suuname reaktsiooni  $A$  ülespoole, reaktsioonmomenti aga vastupidiselt kellaosuti liikumise suunale.

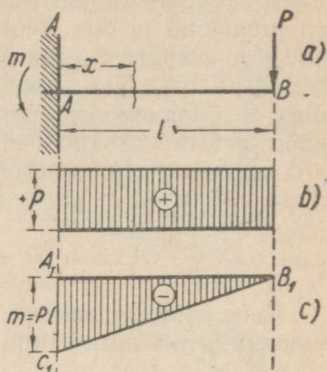
Tasakaalutingimustest leiame:

$$\begin{aligned} \sum Y = 0; \quad A - P = 0; \quad A = P. \\ \sum M_A = 0; \quad -m + P \cdot l = 0; \quad m = P \cdot l. \end{aligned}$$

Kuna reaktsiooni ja momenti saime positiivsed, siis järelikult oli nende suund valitud õigesti.

b) *Põikjõudude epüüri konstrueerimine.* Tala kõikides ristlõigetēs lõikest vasakul pool asetsevate jõudude summa avaldub ühe jõuga — kinnituse reaktsiooni kaudu, mille suurus on  $P$  ning mis on suunatud ülespoole. Järelikult on põikjõud tala kogu pikkuse ulatuses konstantne. Selle epüüri konstrueerimiseks (joon. 115, b) kanname mõõtkavas jõudu  $P$  esitava lõigu ülespoole ja tõmbame horisontaalse joone.

c) *Paindemomentide epüüri konstrueerimine.* Paindemomendi leiame kinnitusest kaugusele  $x$  jäävas ristlõikes, kui sellest lõikest ühel pool asetsevate kõikide koormuste mo-



Joonis 115.

mentide summa. Lõikest vasakul pool mõjuvad toereaktsioon ja toemoment. Moment lõikes avaldub:

$$M = -m + Ax.$$

Reaktsioonmomenti õlaga korrutada ei tule, kuna selles on juba jõud ja õlg. Reaktsioonmoment on võetud miinusmärgiga seepärast, et ta pöörab tala vasakpoolset osa vastu kellaosuti liikumise suunda, s. o. painutab tala kumerusega üles. Reaktsiooni  $A$  momendil on plussmärk, kuna ta püüab pöörata tala vasakpoolset osa kellaosuti liikumise suunas, s. o. painutab tala kumerusega alla. Asetades momendi avaldisse väärtused  $m$  ja  $A$ , saame:

$$M = -Pl + Px = -P(l - x).$$

Kui kirjutame samast lõikest paremale jäävate jõudude momendi, mis antud juhul on lihtsam, saame:

$$M = -P(l - x).$$

Nagu võis oodata, saime sama momendi mis esimeselgi korral. Tala vabale otsale mõjuv jõud  $P$  tekitab momendi, mis püüab tala parempoolset osa pöörata kellaosuti liikumise suunas, s. o. painutab tala kumerusega üles. Seetõttu selle jõu moment on negatiivne. Meie poolt saadud paindemomendi avaldist tuleb vaadata kui võrrandit, mis annab momendi suuruse muutumise seaduse lõike koordinaadi  $x$  muutumisega. Momendi muutumise seadus kogu tala pikkuse ulatuses tuleb üks ja seesama. Antud juhul saime momentide võrrandi esimeseastmelise; järelikult see on sirgjoone võrrand. Konstrueerime paindemomentide epüüri vaadeldava tala jaoks. Kuna antud juhul momentide muutumise seadus kujutab sirget, siis momentide epüüri konstrueerimiseks on vaja teada momente tala kahes mingisuguses lõikes.

Võtame lõike, mis ühtub kinnitustasapinnaga, s. o.  $x = 0$ . Selles lõikes on moment absoluutväärtuselt suurim ning võrdub:

$$M_{max} = -Pl.$$

Kui  $x = l$ , s. o. painutava jõu  $P$  rakenduskohas

$$M = -P(l - x) = -P(l - l) = 0.$$

Teades momente kahes lõikes, ehitame momentide epüüri, nagu see on näidatud joonisel 115, *c*. Momendid on kantud horisontaaljoonest  $A_1B_1$  allapoole seepärast, et paindemomendid on negatiivsed. Seega antud juhul momentide epüür väljendub kolmnurgana  $A_1B_1C_1$ . Sellel talal on ohtlikuks lõikeks kinnituslõige, kuna viimases esineb maksimaalne paindemoment.

Antud juhul oleks võinud momentide ja põikjõudude epüürid konstrueerida lihtsamalt, jättes määramata toereaktsioonid kinnituses. Selleks oleks tulnud määrata  $M$  ja  $Q$  lõikes, mis jääb kinnitusest kaugusele  $x$ , kasutades paremal pool asetsevaid jõude.

Vaatleme veel üht näidet. Konsooltala pikkusega  $l$ , painutatakse koormusega  $P$ , mis jaotub ühtlaselt kogu tala pikkuse ulatuses, kusjuures tala ühele pikkusühikule langev koormus on  $q$  (joon. 116, *a*). Konstrueerime momentide ja põikjõudude epüürid.

a) *Põikjõudude epüüri konstrueerimine.* Antud tala jaoks konstrueerime epüürid ilma toereaktsioone määramata. Lõikest  $x$  vasakul pool asetsevate kõikide jõudude summa on:

$$Q = -qx.$$

Sellest võrrandist näeme, et põikjõud muutub lineaarselt:

kui  $x = 0$ , siis põikjõud  $Q = 0$ ,

kui  $x = l$ , siis põikjõud  $Q = -ql = -P$ .

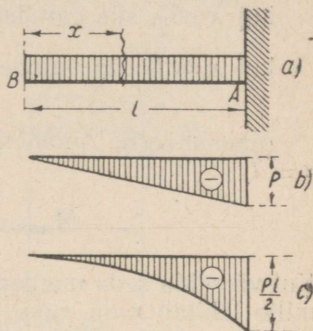
Põikjõu maksimaalne väärtus saadakse kinnituses:

$$Q_{max} = -P;$$

kahe väärtuse järgi on joonestatud  $Q$  epüür (joon. 116, *b*).

b) *Momentide epüüri konstrueerimine.* Vaadeldes vasakpoolset äralõigatud osa, saame

$$M = -qx \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2}.$$



Joonis 116.

Paindemomendi muutumise seadus, mis avaldub viimase võrrandiga, on tala kogu pikkuse ulatuses üks ja sama;  $x$  muutub piirides  $x = 0$  kuni  $x = l$ . Momentide võrrand kujutab parabooli. Selle konstrueerimiseks määrame momendid mõnes lõikes:

kui  $x = 0$ , siis paindemoment  $M = 0$ ;

kui  $x = \frac{l}{2}$ , siis paindemoment  $M = -\frac{ql^2}{8} = -P \frac{l}{8}$ ;

kui  $x = l$ , siis paindemoment  $M = -\frac{ql^2}{2} = -P \frac{l}{2}$ .

Maksimaalne moment saadakse kinnituses, s. o. kui  $x = l$ :

$$M_{max} = -\frac{ql^2}{2} = -\frac{Pl}{2}. \quad (167)$$

Kui võrrelda seda momenti maksimaalse paindemomendiga, mille tekitab tala otsa rakendatud koondatud jõud, siis näeme, et ühtlaselt jaotatud koormuse maksimaalne paindemoment on kaks korda väiksem, kui koondatud jõu oma.

Paindemomentide epüür on konstrueeritud parabooli leitud punktide järgi, ning see on toodud joonisel 116, c.

**Näide 53.** Konstrueerida joonisel 117, a esitatud talale põikjõudude ja paindemomentide epüürid. Koormuse intensiivsus  $q = 2$  t/m, jõud  $P = 2$  t, koondatud moment tala otsal  $m = 3$  tm. Vahemikkude pikkused:  $a = 1$  m,  $b = 3$  m,  $c = 2$  m.

*Põikjõudude epüüri konstrueerimine.* Esimeses vahemikus põikjõudu ei ole. Teises vahemikus põikjõud on:

$$Q_2 = P = 2 \text{ t,}$$

s. o. põikjõud on kogu vahemikus konstantne.

Kolmandas vahemikus põikjõud on:

$$Q_3 = P - q[x - (a + b)] = 2 - 2(x - 4)$$

ehk

$$Q_3 = 10 - 2x,$$

s. o. põikjõud kolmandas vahemikus muutub lineaarselt.

Leiame  $Q$  kaks väärtust selles vahemikus:

kui  $x = a + b = 4$  m, siis

$$Q = 10 - 2 \cdot 4 = 2 \text{ t;}$$

kui  $x = a + b + c = 6$  m, siis

$$Q = 10 - 2 \cdot 6 = -2 \text{ t.}$$

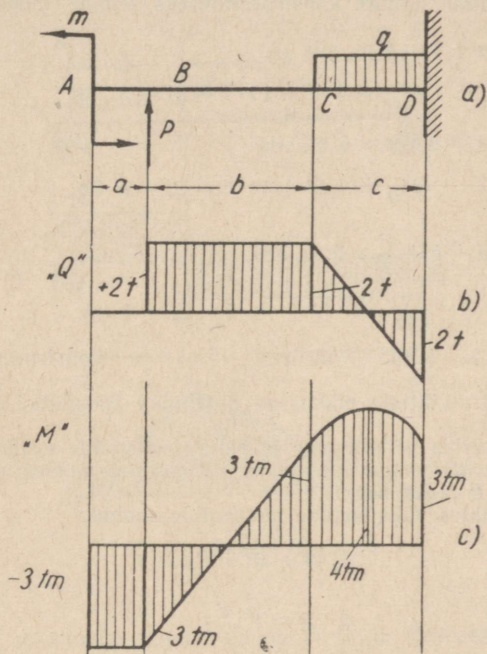
Leitud  $Q$  väärtuste järgi konstrueerime epüüri (joon. 117, b).

Paindemomentide epüüri konstrueerimine. Tala esimeses vahemikus moment on konstantne ja võrdub:

$$M_1 = -m = -3 \text{ tm.}$$

Teises vahemikus:

$$M_2 = -m + P(x - a) = -3 + 2(x - 1) = -5 + 2x.$$



Joonis 117.

Selles vahemikus paindemoment muutub lineaarselt; epüüri konstrueerimiseks leiame kaks väärtust:

kui  $x = a = 1\text{ m}$ , siis

$$M_B = -5 + 2 \cdot 1 = -3 \text{ tm};$$

kui  $x = a + b = 4 \text{ m}$ , siis

$$M_C = -5 + 2 \cdot 4 = 3 \text{ tm.}$$

Kolmandas vahemikus:

$$M_3 = -m + P(x - a) - \frac{q[x - (a + b)]^2}{2}$$

ehk

$$M_3 = -3 + 2(x - 1) - \frac{2(x - 4)^2}{2} = -x^2 + 10x - 21.$$

Selles vahemikus momendi graafik muutub parabooli järgi, mistõttu momentide epüüri konstrueerimiseks leiame momentide kolm väärtust:

kui  $x = a + b = 4$  m, siis

$$M_C = -4^2 + 10 \cdot 4 - 21 = 3 \text{ tm};$$

kui  $x = a + b + c = 6$  m, siis

$$M_D = -6^2 + 10 \cdot 6 - 21 = 3 \text{ tm};$$

kui  $x = a + b + \frac{c}{2} = 5$  m, siis

$$M = -5^2 + 10 \cdot 5 - 21 = 4 \text{ tm}.$$

Momentide leitud väärtuste järgi on konstrueeritud epüür (joon. 117, c).

Näide 54. Lihttala pikkusega  $l$  paindub koondatud jõu  $P$  mõjul (joon. 118, a).

Konstrueerida põikjõudude ja paindemomentide epüürid.

a) Toereaktsioonide määramine Koostades momentide võrrandid tuge A ja B jaoks, saame:

toe A suhtes välisjõudude momentide summa:

$$\Sigma M_A = -Bl + Pa = 0,$$

$$B = P \frac{a}{l};$$

toe B suhtes välisjõudude momentide summa:

$$\Sigma M_B = Al - Pb = 0, \quad A = P \frac{b}{l}.$$

Mõlemal juhul momentide võrrandite rakendamise eeliseks on asjaolu, et igas võrrandis esineb ainult üks tundmatu reaktsioon.

Leitud reaktsioonide kontrolliks kasutame tasakaalu teist tingimust, ja nimelt:

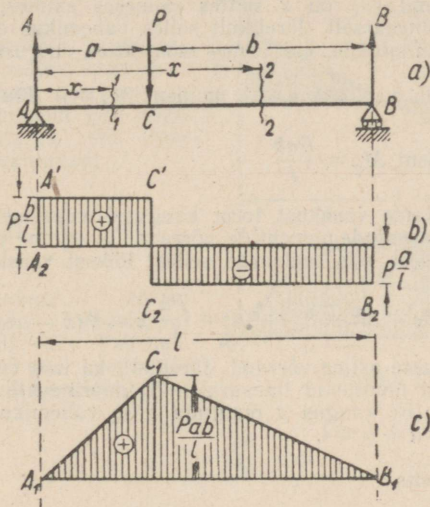
$$\Sigma Y = 0;$$

$$\Sigma Y = A + B - P = 0.$$

Asetades avaldise  $A$  ja  $B$  väärtused, veendume reaktsioonide määramise õigsuses.

b) Põikjõudude epüüri konstrueerimine. Vaadeldaval talal on kaks vahemikku: esimene vahemik — vasakust toest  $A$  kuni lõikeni, milles on rakendatud jõud  $P$ , s. o. kuni lõikeni  $C$ , teine vahemik — lõikest  $C$  kuni parema toeni  $B$ . Esimese vahemiku kõikide lõigete jaoks avaldub lõikest vasakule jäävate jõudude summa ühe jõu kaudu ja nimelt, vasaku toe reaktsiooniga  $A = P \cdot \frac{b}{l}$ , mis on suunatud üles.

Seetõttu esimeses vahemikus on põikjõud konstantne. Epüüri konstrueerimiseks kanname punktist  $A_2$  (joon. 118, b) ülespoole lõigu  $A_2A'$ ,



Joonis 118.

mis mingis mõõtkavas kujutab jõudu  $P \cdot \frac{b}{l}$ , ja tõmbame horisontaaljoone  $A'C'$  kuni esimese vahemiku lõpuni. Kahe vahemiku eralduslõike läbimisel, s. o. lõike läbimisel, millesse on rakendatud jõud  $P$ , teeb põikjõud järsu hüppe. Põikjõu hüppe absoluutväärtus on võrdne sellesse lõikesse rakendatud koondatud jõu väärtusega. Seega teises vahemikus põikjõud on võrdne jõudude summaga:

$$P \frac{b}{l} + (-P) = P \frac{b-l}{l} = -P \frac{a}{l}.$$

Järelikult põikjõud teises vahemikus on negatiivne, jäädes konstantseks kogu vahemiku ulatuses. Põikjõudude epüüri konstrueerimise lõpetamiseks kanname punktist  $C'$  allapoole lõigu  $C'C_2$ , mis mõõtkavas kujutab jõudu  $P$ , ja punktist  $C_2$  tõmbame horisontaaljoone  $C_2B_2$ .

c) *Momentide epüüri konstrueerimine.* Vasakust toest kaugusel  $x$  asetsevas esimese vahemiku meelevaldses lõikes sõltub paindemoment ainult ühest jõust  $A$  ning avaldub:

$$M_1 = Ax = P \frac{b}{l} x. \quad (a)$$

Sellest võrrandist näeme, et paindemoment suureneb võrdeliselt kaugusega  $x$ . Selles esimese vahemiku momentide võrrandis suurus  $x$  võib omada ainult väärtust  $x=0$  kuni  $x=a$ ; suuremad väärtused vastavad tala teises vahemikus asetsevatele lõigetele, mille jaoks tuleb oma momentide võrrand.

Kuna võrrand (a) on  $x$  suhtes esimeses astmes, siis muutub paindemoment lineaarselt. Järelikult selles vahemikus epüüri konstrueerimiseks on küllaldane, kui teame momentide suurusi mingis kahes lõikes.

Toe  $A$  kohal, s. o. kui  $x=0$ , moment  $M_A=0$ . Jõu  $P$  kohal, s. o.

kui  $x=a$ , moment  $M_C = \frac{Pab}{l}$ .

Nüüd kirjutame vasakust toest kaugusel  $x$  asetseva teise vahemiku lõike jaoks paindemomentide võrrandi ja leiame paindemomendi kõikidest jõududest, mis asetsevad sellest lõikest vasakul pool:

$$M_2 = Ax - P(x-a) = \frac{Pb}{l} x - P(x-a). \quad (b)$$

See on esimese astme võrrand. Järelikult ka tala teises vahemikus paindemomendid muutuvad lineaarselt. Kuid erinevalt võrrandist (a) võib võrrandis (b) kaugus  $x$  muutuda teise vahemiku piirides, s. o.  $x=a$  kuni  $x=a+b=l$ .

Saame:

kui  $x=a$ , siis

$$M_C = P \cdot \frac{b}{l} \cdot a - P(a-a) = \frac{Pab}{l},$$

kui  $x=l$ , s. o. parema toe kohal, siis

$$M_B = \frac{Pb}{l} \cdot l - P(l-a) = 0.$$

Järelikult tala ohtlik ehk arvutuslik ristlõige, mis vastab suurimale paindemomendile

$$M_{max} = \frac{Pab}{l} \quad (168)$$

on jõu  $P$  kohal.

Erijuhul, kui  $a=b=\frac{l}{2}$  s. o. kui jõud  $P$  on rakendatud tala keskele, saame:

$$M_{max} = \frac{Pl}{4}. \quad (169)$$

Paindemomendid tala mõlemas vahemikus muutuvad lineaarselt. Tugede kohal on momendid võrdsed nulliga. Tala momentide epüüri kujutatakse murtud joonena  $A_1C_1B_1$  (joon. 118, c). Viirutatud kolmnurga  $A_1C_1B_1$  kõrgus kujutab mõõtkavas momenti  $P \cdot \frac{ab}{l}$ .

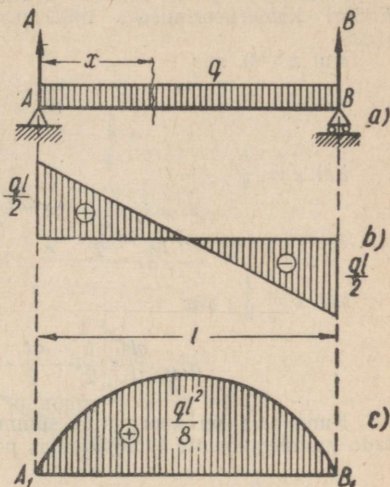
Lõikes  $C$ , kus põikjõud läbib nulli, on paindemoment maksimaalne.

**Näide 55.** Lihttalale pikkusega  $l$  mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega  $q$  (joon. 119, a). Konstrueerida põikjõudude ja paindemomentide epüürid.

a) *Reaktsioonide määramine.* Talale mõjuv kogukoormus on  $ql$ . Kuna see koormus on jaotatud ühtlaselt tala kogu kandeava ulatuses, siis toe reaktsioonid avalduvad:

$$A = B = \frac{ql}{2}.$$

b) *Põikjõudude epüüri konstrueerimine.* Vaadeldaval talal on ainult üks vahemik. Lõikest vasakul pool asetsevate jõudude summa avaldub võrdandiga:



Joonis 119.

$$Q = \frac{ql}{2} - qx.$$

Kuna põikjõudude võrrand on esimese astmeline, siis epüür kujutab endast sirget, mille konstrueerimiseks on küllaldane, kui teame põikjõu kahte väärtust:

kui  $x = 0$ , siis põikjõud on võrdne

$$Q_A = \frac{ql}{2} = A;$$

kui  $x = l$ , siis põikjõud on võrdne

$$Q_B = -\frac{ql}{2} = -B.$$

Põikjõudude epüür on näidatud joonisel 119, b.

c) *Momentide epüüri konstrueerimine.* Kuna vaadeldaval talal on ainult üks vahemik, siis paindemomendi muutmise seadus tala kogu pikkuse ulatuses on üks ja sama. Paindemoment vasakust toest kaugusel  $x$  asetsevas tala mingis lõikes on võrdne reaktsiooni  $A = \frac{ql}{2}$  ja

tala pikkuse  $x$  ulatuses asetseva ühtlaselt jaotatud koormuse momentide summaga:

$$M = \frac{ql}{2} x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{qx(l-x)}{2}.$$

Momentide jaoks saadud avaldis kujutab parabooli võrrandit. Epüüri konstrueerimiseks määrame momendid mõningate lõigete jaoks.

Kui  $x = 0$ , siis

$$M_A = 0;$$

kui  $x = \frac{l}{4}$ , siis

$$M_{l/4} = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} - \frac{ql}{4} \cdot \frac{l}{2 \cdot 4} = \frac{3}{32} ql^2;$$

kui  $x = \frac{l}{2}$ , siis

$$M_{l/2} = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2 \cdot 2} = \frac{ql^2}{8}.$$

Kuna tala on koormatud sümmeetriliselt, siis pole tarvis arvutada paindemomente tala paremas pooles. Võime kohe kirjutada:

kui  $x = \frac{3}{4}l$ , siis

$$M_{3l/4} = \frac{3}{32} ql^2;$$

kui  $x = l$ , siis

$$M_B = 0.$$

Paindemomendil on suurim väärtus tala keskel, kus põikjõud läbib nulli ning see võrdub:

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8}. \quad (170)$$

Kui tähistame talale mõjuva koormuse  $P$ , s. o. asetame  $ql = P$ , siis

$$M_{max} = \frac{Pl}{8}.$$

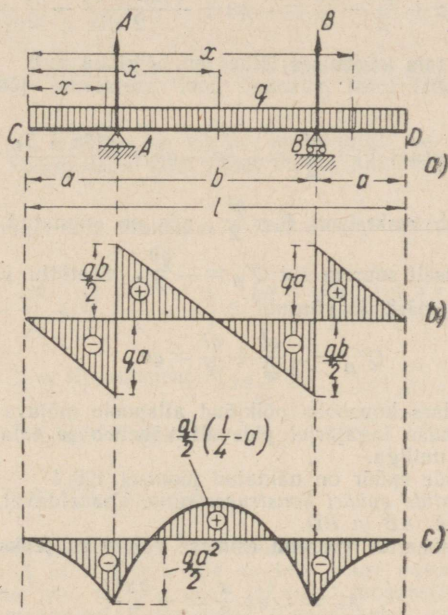
Selle valemi võrdlemisel maksimaalse paindemomendi valemiga (169), mis on tuletatud tala keskele rakendatud koormuse jaoks, näeme, et ühtlaselt jaotatud koormusel on maksimaalne paindemoment kaks korda väiksem kui sama suurusega koormatud jõu korral.

Paindemomentide epüür on konstrueeritud momentide leitud väärtuste järgi ning see on toodud joonisel 119, c.

Näide 56. Kahe konsooliga talale  $CD$  pikkusega  $l$  (joon. 120, a) mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega  $q$ . Konstrueerida põikjõudude ja paindemomentide epiürid.

a) *Reaktsioonide määramine.* Kuna koormus on jaotatud sümmeetriliselt tala telgede suhtes, siis reaktsioonid tuges avalduvad:

$$A = B = \frac{ql}{2}.$$



Joonis 120.

b) *Põikjõudude epiüri konstrueerimine.* Vasakpoolse konsooli otsas on põikjõud null. Edasi kuni toeni A see kasvab oma absoluutväärtuselt seaduse järgi:

$$Q_1 = -qx.$$

Toe A kohal on põikjõul suurim negatiivne väärtus, mis võrdub  $Q'_A = -qa$ . Siin mõjub ülessuunatud reaktsioon  $A = \frac{ql}{2}$ , mille absoluutväärtus on suurem kui

$$Q'_A = -qa.$$

Seetõttu toe  $A$  kohal põikjõud muudab märki ja võrdub:

$$Q''_A = -qa + \frac{ql}{2} = -qa + \frac{q(2a+b)}{2} = \frac{qb}{2}.$$

Teises vahemikus allapoole mõjuva ühtlaselt jaotatud koormuse tagajärjel põikjõud pidevalt väheneb. Tala keskmisest lõikest vasakul pool asetsevate jõudude summa võrdub:

$$-qa + \frac{ql}{2} - \frac{qb}{2} = -qa + \frac{q(2a+b)}{2} - \frac{qb}{2} = 0.$$

Järelikult tala keskmises lõikes on põikjõud null.

Toe  $B$  kohal toest vasakul pool asetsevate jõudude summa võrdub:

$$Q'_B = -q(a+b) + \frac{ql}{2} = -qa - qb + \frac{q(2a+b)}{2} = -\frac{qb}{2}.$$

Siin mõjub reaktsioon  $B = \frac{ql}{2}$ , mis on suunatud üles ning on absoluutväärtuselt suurem kui  $Q'_B = -\frac{qb}{2}$ . Seetõttu põikjõud toe  $B$  kohal muudab märki ja võrdub:

$$Q''_B = -\frac{qb}{2} + \frac{ql}{2} = qa.$$

Parempoolses konsoolis põikjõud allapoole mõjuva ühtlase koormuse lisandumise tagajärjel pidevalt väheneb ja tala parempoolses otsas võrdub nulliga.

Põikjõudude epüür on näidatud joonisel 120,  $b$ .

c) *Momentide epüüri konstrueerimine*. Vaadeldaval talal on kolm vahemikku:  $CA$ ,  $AB$  ja  $BD$ .

Paindemomentide võrrand esimese vahemiku jaoks

$$M_1 = -qx \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2}; \quad (a)$$

kui  $x = 0$ , siis

$$M_C = 0;$$

kui  $x = a$ , siis

$$M_A = -\frac{qa^2}{2}.$$

Kuna võrrand (a) esitab parabooli, siis momentide epüüri konstrueerimiseks võtame veel ühe vahepealse lõike. Kui  $x = \frac{a}{2}$ , saame

$$M_{a/2} = -\frac{qa^2}{8}.$$

Paindemomentide võrrand teise vahemiku jaoks

$$M_2 = -\frac{qx^2}{2} + \frac{ql}{2}(x-a); \quad (b)$$

kui  $x = a$ , siis

$$M_A = -\frac{qa^2}{2};$$

kui  $x = a + b$ , siis

$$M_B = -\frac{q(a+b)^2}{2} + \frac{ql(a+b-a)}{2};$$

kuna aga  $l = 2a + b$ , siis

$$M_B = -\frac{q(a^2 + 2ab + b^2)}{2} + \frac{q(2ab + b^2)}{2} = -\frac{qa^2}{2},$$

s. t. moment toe  $B$  kohal on võrdne momendiga toe  $A$  kohal, kuna sümmeetrilise koormusega tala puhul on ka paindemomentide epüür sümmeetriline.

Paindemoment tala keskel, s. o. kui  $x = \frac{l}{2}$ , võrrandi (b) põhjal avaldub:

$$M_{l/2} = -\frac{ql^2}{8} + \frac{ql}{2} \left( \frac{l}{2} - a \right) = \frac{ql^2}{8} - \frac{qla}{2} = \frac{ql}{2} \left( \frac{l}{4} - a \right).$$

1) kui  $\frac{l}{4} > a$ , siis moment  $M_{l/2} > 0$ ;

2) kui  $\frac{l}{4} < a$ , siis  $M_{l/2} < 0$ ;

3) kui  $\frac{l}{4} = a$ , siis  $M_{l/2} = 0$ .

Kui moment tala keskel absoluutsuuruselt võrdub paindemomentidega tugede  $A$  ja  $B$  kohal, siis on tala kõige paremini ära kasutatud. Määrame osa, mille  $a$  peab sel juhul moodustama  $l$ -st. Selle küsimuse lahendamiseks võrrutame tugede kohal paindemomentide absoluutväärtused tala keskel saadud momendiga:

$$\frac{qa^2}{2} = \frac{ql}{2} \left( \frac{l}{4} - a \right),$$

millest

$$a^2 = \frac{l^2}{4} - al$$

ehk

$$a^2 + al - \frac{l^2}{4} = 0.$$

Lahendades saadud ruutvõrrandi, leiame:

$$a = -\frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4}}.$$

Miinus juure ees ülesande sisu tõttu langeb ära, seetõttu

$$a = -\frac{l}{2} + \frac{l}{2} \sqrt{2} = \frac{l}{2} (\sqrt{2} - 1) = 0,207l.$$

Talale mõjuvad kolmes lõikes absoluutväärtuselt võrdsed suurimad paindemomendid juhul, kui  $a = 0,207l$ . Kolmandas vahemikus paindemomendid sümmeetria tõttu on samad, mis esimeses vahemikus. Joonisel 120, c on konstrueeritud momentide epüür eeldusel, et  $\frac{l}{4} > a$ .

Põikjõudude epüüri kolm lõikepunkti horisontaalteljega vastavad paindemomentide maksimaalsetele kohtadele.

Näide 57. Lihttala pikku-sega  $l$  paindub momendi  $m$  mõjul (joon. 121, a). Konstrueerida põikjõudude ja paindemomentide epüürid.

a) Toereaktsioonide määramine. Suuname reaktsiooni  $A$  üles, reaktsiooni  $B$  aga alla. Tasakaalutingimustest saame:

$$\Sigma M_B = 0; \quad Al - m = 0.$$

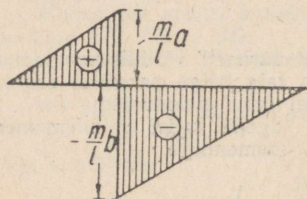
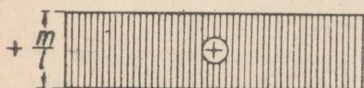
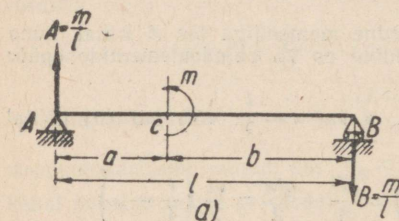
$$A = \frac{m}{l};$$

$$\Sigma Y = 0; \quad A - B = 0;$$

$$B = A = \frac{m}{l}.$$

Järelikult tala painutav moment tekitab tuges suuruselt võrdsed, kuid suunalt vastupidised reaktsioonid, mis tekitavad talale rakendatud momenti tasakaalustava momendi.

b) Põikjõudude epüüri konstrueerimine. Tala lõikest vasakul pool asetsevate jõudude summa tala esimese ja teise vahemiku kõikide lõigete jaoks avaldub ainult ühe jõu — toe  $A$  reaktsiooni, s. o. jõu  $\frac{m}{l}$  kaudu.



Joonis 121.

Seetõttu kujutab põikjõudude epüür vaadeldaval juhul tala teljega paralleelset sirget (joon. 121, b).

c) Momentide epüüri konstrueerimine. Vaadeldaval talal on kaks vahemikku: esimene vahemik — toest  $A$  kuni lõikeni, milles on rakendatud paindemoment, s. o. kuni punkti  $C$ ; teine vahemik — punktist  $C$  kuni toeni  $B$ . Esimese vahemiku meelevaldses lõikes paindemoment avaldub võrrandiga:

$$M_i = Ax = \frac{m}{l} x.$$

Toe  $A$  kohal, s. o. kui  $x = 0$ ,

$$M_A = 0.$$

Lõikes, kus on rakendatud moment, s. o. kui  $x = a$ ,

$$M_C = \frac{m}{l} a.$$

Koostame momentide võrrandi tala teise vahemiku jaoks:

$$M_2 = Ax - m = \frac{m}{l} x - m = \frac{m}{l} (x - l).$$

Saame:

kui  $x = a$ , siis

$$M_C = \frac{m}{l} (x - l) = m \frac{a - l}{l} = -\frac{m}{l} b;$$

kui  $x = a + b$ , siis

$$M_B = \frac{m}{l} (a + b - l) = 0.$$

Momentide epüür, mis on konstrueeritud momentide leitud väärtuste järgi, on näidatud joonisel 121, *c*. Momentide epüüri jooned peavad koondatud momendiga eraldatud osades olema seose (164) põhjal paralleelsed.

Painutava momendi rakenduslõikes momentide epüür teeb järsu hüppe, muutes seejuures märki. Kuna  $b > a$ , siis maksimaalne moment avaldub:

$$M_{max} = -\frac{m}{l} b. \quad (171)$$

Erijuhul, kui moment on rakendatud tala ava keskele, s. o. kui

$$a = b = \frac{l}{2}, \text{ siis } M_{max} = \pm \frac{m}{2}.$$

Näide 58. Konstrueerida joonisel 122, *a* toodud talale põikjõudude ja momentide epüürid, kui  $P = 2$  t,  $a = 0,5$  m.

a) *Reaktsioonide määramine*. Toereaktsioonid  $A$  ja  $B$  leiame jõudude momentide võrranditest punktide  $A$  ja  $B$  suhtes:

$$\sum M_A = -P \frac{a}{2} - Pa - B \cdot 2a + P \cdot 3a = 0;$$

$$B = 0,75P = 0,75 \cdot 2 = 1,5 \text{ t,}$$

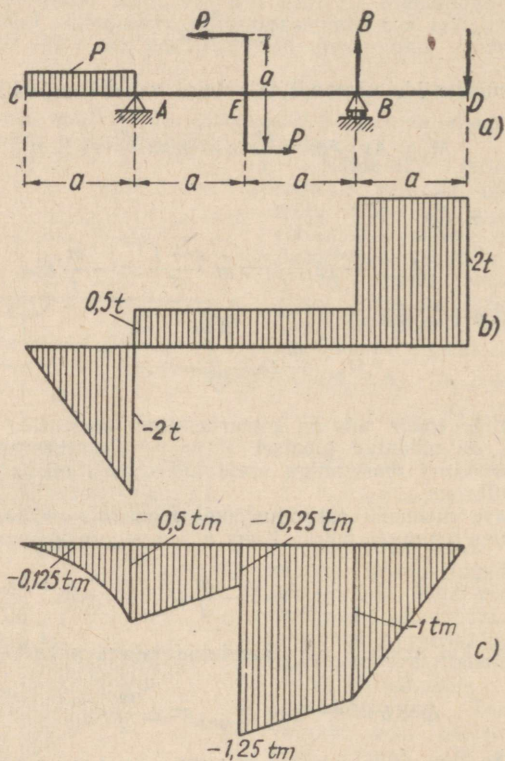
$$\sum M_B = -P \cdot 2,5a + A \cdot 2a - P \cdot a + P \cdot a = 0,$$

$$A = 1,25P = 1,25 \cdot 2 = 2,5 \text{ t.}$$

b) *Põikjõudude epüüri konstrueerimine* (joon. 122, *b*). Vaadeldaval talal on neli vahemikku:  $CA$ ,  $AE$ ,  $EB$  ja  $BD$ . Tala vasakust

otsast  $C$  kaugusel  $x$  asetsevas esimese vahemiku lõikes põikjõud võrdub:

$$Q_1 = -\frac{P}{a}x = -\frac{2}{0,5}x = -4x.$$



Joonis 122.

Selles vahemikus kujutatakse epüüri sirgjoonega. Kui  $x=0$ , saame

$$Q_C = 0,$$

kui  $x=a$ , siis

$$Q_A = -4a = -4 \cdot 0,5 = -2 \text{ t.}$$

Teises vahemikus lõikest vasakule jäävate jõudude summa on:

$$Q_2 = -P + A = -2 + 2,5 = 0,5 \text{ t.}$$

Toe  $A$  kohal põikjõud muudab märki, muutudes negatiivsest positiivseks. Teises vahemikus põikjõud on konstantne vahemiku kogu pikkuse ulatuses, mistõttu põikjõu epüüriks on teljega paralleelne sirge.

Tala kolmandas vahemikus meelevaldselt lõikest vasakul pool asetsevate jõudude summa jääb samaks mis teises vahemikus, s. o.

$$Q_3 = 0,5 \text{ t.}$$

Seetõttu selles vahemikus epüür on teljega paralleelne sirge nagu teises vahemikuski.

Neljandas vahemikus põikjõud on võrdne:

$$Q_4 = -P + A + B = -2 + 2,5 + 1,5 = 2 \text{ t.}$$

Selles vahemikus epüür kujutab samuti teljega paralleelset sirget. Neljanda vahemiku lõpus lisandub allapoole suunatud jõud  $2 \text{ t}$ , mistõttu tala parempoolses otsas põikjõud on null.

Suurima põikjõu saame toe  $A$  kohal ja neljanda vahemiku kogu pikkuse ulatuses:

$$Q_{max} = 2 \text{ t.}$$

c) *Momentide epüüri konstrueerimine* (joon. 122, c). Tala vasakust otsast  $C$  kaugusel  $x$  asetsevas esimese vahemiku  $CA$  lõikes moment võrdub:

$$M_1 = \frac{P}{a} x \cdot \frac{x}{2} = -\frac{2}{0,5} \frac{x^2}{2} = -2x^2.$$

Kui  $x = 0$ , siis

$$M_C = 0;$$

kui  $x = \frac{a}{2}$ , siis

$$M = -2 \left(\frac{a}{2}\right)^2 = -2 \left(\frac{0,5}{2}\right)^2 = -0,125 \text{ tm};$$

kui  $x = a$ , siis

$$M_A = -2a^2 = -2 \cdot 0,5^2 = -0,5 \text{ tm.}$$

Moment teises vahemikus:

$$\begin{aligned} M_2 &= -P \left(x - \frac{a}{2}\right) + A(x - a) = \\ &= -2 \left(x - \frac{0,5}{2}\right) + 2,5(x - 0,5) = 0,5x - 0,75, \end{aligned}$$

kusjuures kui  $x = a$ , siis

$$M_A = +0,5 \cdot 0,5 - 0,75 = -0,5 \text{ tm};$$

kui  $x = 2a$ , siis

$$M_E = 0,5 \cdot 2 \cdot 0,5 - 0,75 = -0,25 \text{ tm.}$$

Moment kolmandas vahemikus:

$$\begin{aligned} M_3 &= -P \left( x - \frac{a}{2} \right) + A(x - a) - Pa = \\ &= -2 \left( x - \frac{0,5}{2} \right) + 2,5(x - 0,5) - 2 \cdot 0,5 = 0,5x - 1,75, \end{aligned}$$

kusjuures kui  $x = 2a$ , siis

$$M_E = 0,5 \cdot 2 \cdot 0,5 - 1,75 = -1,25 \text{ tm;}$$

kui  $x = 3a$ , siis

$$M_B = 0,5 \cdot 3 \cdot 0,5 - 1,75 = -1 \text{ tm.}$$

Moment neljandas vahemikus jõududest, mis asetsevad löikest paremal pool:

$$M_4 = -P(4a - x) = -2(2 - x),$$

kusjuures kui  $x = 3a$ , siis

$$M_B = -2(2 - 1,5) = -1 \text{ tm;}$$

kui  $x = 4a$ , siis

$$M_D = 0.$$

Momentide epüür on konstrueeritud momentide leitud väärtuste järgi ning see on antud joonisel 122, c.

Paindemomendi maksimaalse absoluutväärtuse saime löikes  $E$ , kuhu on rakendatud jõupaar

$$M_{max} = -1,25 \text{ tm.}$$

## § 62. Kontrollküsimusi

Millist painet nimetatakse lamepaindeks?

Millist painet nimetatakse puhtaks paindeks?

Mis toimub paindel materjali pikikiududega?

Millist tala kiudude kihti nimetatakse neutraalseks?

Mida nimetatakse neutraalteljeks?

Milliseks kolmeks tüübiks jaotatakse talade toed?

Millised reaktsioonid tekivad talade tugede ehituse kolmes tüübis tala teljega risti asetsevate paindejõudude mõjul?

Mida nimetatakse ühtlaselt jaotuva koormuse intensiivsuseks?

Mida nimetatakse paindemomendiks ja põikjõuks antud löikes?

Kuidas määratakse paindemomendi ja põikjõu märki?

Milline on paindemomendi ja põikjõu vaheline seos?

Milleks konstrueeritakse paindemomentide ja põikjõudude epüüre?

## PINGED PAINDEL. TALADE TUGEVUSARVUTUS

## § 63. Normaalpingete määramine paindel

Lõikemeetod paindel nagu teistelgi deformatsiooniliikidel võimaldab määrata elastsusjõude prussi lõikes. Elastsusjõudude jaotumise küsimus lõikes kuulub üldiselt aga staatiliselt määramatute ülesannete hulka. Selliseid ülesandeid lahendatakse, nagu nägime eespool, prussis tekkinud deformatsioonide vaatlemise alusel. Tõmbel ja survele eeldati, et materjali kõikide kiudude suhteline deformeerumine jõudude mõjumise sihis on ühesugune. Siit tehti järeldus, et pinged jaotuvad ristlõikes ühtlaselt. Pingete jaotuse küsimus väändel lahendati eeldusel, et ristlõike üksikute elementide suhtelised nihked on võrdelised nende kaugusega varda teljest. Ka paindel võime pingete jaotuseaduse ristlõikes selgitada samuti ainult deformatsioonide vaatlusel.

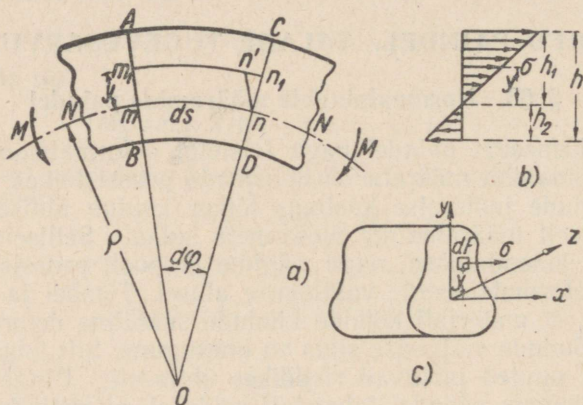
Vaatleme osa prussist, millele mõjuvad prussi pikisümmeetria tasapinnas kaks painutavat võrdvastupidist momenti (joon. 123, *a*). Joonisel on näitlikkuse tõstmiseks prussi paine tugevasti suurendatud. Eeldame nagu teistegi deformatsiooniliikide juures, et paindedeformatsiooni suurus on väga väike ja prussi kõverdunud telg erineb vähe esialgsest sirgest teljest.

Kujutagu joon *NN* neutraalkihti, millest ülalpool prussi kiud on tõmmatud, allpool aga surutud. Olgu painutatud kiudude üldine kõveruskeskpunkt punktis *O* ning neutraalkihi kõverusraadius  $\rho$ . Eraldame tala vaadeldavast osast elemendi *ABDC* kahe väga lähedase lõikega, mis läbivad prussi kõveruskeskpunkti ja moodustavad teineteisega lõpmatult väikese nurga  $d\varphi$ . Neutraalkihi kiu *mn* lõpmata väike pikkus *ds* jääb pärast paindumist endiseks. Neutraalkihist

kaugusel  $y$  asetsev kiud  $m_1n_1$  pikeneb. Pikenemise leidmiseks tõmbame punktist  $n$  sirgele  $AB$  paralleeljoone. Sel juhul kaar  $n'n_1$  annabki otsitava pikenemise. Suure kolmnurga  $Omn$  ja väikese kolmnurga  $nn'n_1$  sarnasusest saame:

$$\frac{n'n_1}{ds} = \frac{y}{\rho}. \quad (a)$$

Selle võrduse vasak pool kujutab kiu  $m_1n_1$ , mille pikkus enne deformeerumist oli  $ds$ , suhtelist pikenemist. Tähistades



Joonis 123.

vaadeldava kiu suhtelise pikenemise  $\varepsilon$ , kirjutame võrduse (a) järgmisel kujul:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (b)$$

Antud löike jaoks on kõverusraadius  $\rho$  konstantne suurus. Seetõttu võrrandist (b) võime teha järelduse, et painutatava tala kiudude suhtelise deformatsiooni suurus on võrdeline nende kaugusega neutraalkihist. Kuna prussi kiud paindel alluvad ainult lihttõmbele ja lihtsurvele, siis elastsusjõudude jaotumise määramiseks ristlõikes võib kasutada Hooke'i seadust tõmbel ja survele:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (c)$$

Asetades avaldisest (b) saadud  $\varepsilon$  väärtuse avaldisse (c), saame:

$$\sigma = E \frac{y}{\varrho}. \quad (172)$$

Deformatsiooni põhjal saadud valem (172) annab elastsusjõudude jaotusseaduse tala ristlõikes. Sellest valemist järgneb, et painutatud prussi ristlõikes on pinged võrdelised ristlõike vaadeldava punkti kaugusega neutraalkihist. Neutraalkihist ühesugusel kaugusel asetsevatele kiududele mõjuvad ühesugused pinged, s. o. tala laiuses pinged ei muutu.

Neutraalkihil  $y = 0$ . Järelikult sellel kihil ka  $\sigma = 0$ . Neutraalkihist allapoole minnes  $y$  märk muutub, samuti muutub ka pinge  $\sigma$  märk. Maksimalne pinge esineb ristlõike punktides, millede kaugus  $y$  on suurim, s. o. lõike ülemises ja alumises kihis.

Ristlõikes mõjuvate pingete epüür on toodud joonisel 123, *b*, kus tõmbepinged on näidatud suunatuna ühele poole, survepinged aga teisele poole.

Valemis (172) esineb neutraalkihi kõverusraadius. Selle määramiseks eraldame ristlõike pinnal neutraaljoonest kaugusele  $y$  jääva pinnaelemendi  $dF$ . Viimasele mõjuv elementaarne normaaljõud avaldub valemi (172) põhjal:

$$dN = \sigma dF = \frac{Ey}{\varrho} dF. \quad (d)$$

Kuna kõik ristlõikes mõjuvad elastsusjõud peavad tasakaalutingimuse põhjal andma ainult momendi, mis võrdub välismomendiga, siis nende projektsioonide summa prussi  $x$ -teljele peab võrduma nulliga, s. o.

$$\int_F \frac{Ey}{\varrho} dF = 0 \quad \text{ehk} \quad \frac{E}{\varrho} \int_F y dF = 0.$$

Suhe  $\frac{E}{\varrho} \neq 0$ , järelikult

$$\int_F y dF = 0.$$

See integraal kujutab ristlõikepinna staatilist momenti neutraaljoone suhtes. Teame, kui staatiline moment võrdub nulliga, siis telg, mille suhtes ta on võetud, läbib kujundi raskuskeset. Siit saame väga tähtsa järelduse, s. o. neutraaltelg läbib ristlõike raskuskeset.

Pinnaelemendile  $dF$  mõjuvate sisejõudude elementaar-moment neutraaltelje  $z$  suhtes avaldub võrrandi (d) põhjal:

$$dNy = \frac{E}{\rho} y dFy = \frac{E}{\rho} y^2 dF.$$

Siseelastsusjõudude kõikide elementaarmomentide summa peab tasakaalutingimuse põhjal võrduma välismomendiga, s. o.

$$\int_F \frac{E}{\rho} y^2 dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = M. \quad (e)$$

Integraal  $\int_F y^2 dF$  kujutab ristlõike inertsmomenti neutraaltelje suhtes. Tähistades selle  $J$ -ga, saame:

$$\frac{E}{\rho} J = M,$$

või, kirjutades selle avaldise teisiti, saame:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}. \quad (173)$$

Valem (173) on paindeteooria põhivalem. Suurus  $\frac{1}{\rho}$  — *tala painutatud telje kõverus* — iseloomustab deformatsiooni paindel. Valemist (173) järgneb, et deformatsioon paindel on võrdeline paindemomendiga ja pöördvõrdeline *korrutisega EJ, mida nimetatakse tala jäikuseks*. Peale selle võime valemist (173) teha ka teise järelduse: tala vahemikud, mis on koormatud konstantse momendiga, s. o. mis on puhta painde olukorras, kõverduvad raadiusega  $\frac{EJ}{M}$  ringjoone kaart mööda. See tuleneb sellest, et konstantse ristlõikega taladel on korrutis  $EJ$  konstantne suurus, mistõttu ka kõverusraadius  $\rho$  on konstantse momendi  $M$  korral konstantne suurus; konstantse kõverusraadiusega kõver on aga ringjoone osa.

Määrates valemist (173)  $\rho$  ja asetades selle väärtuse valemisse (172), saame:

$$\sigma = \frac{My}{J}. \quad (174)$$

Sellest võrrandist nagu võrrandist (172) nähtub, et suurimad pinged tekivad neutraalteljest kõige kaugemal asetsevates kiududes. Tugevusarvutusel meid huvitavad tavaliselt suurimad pinged. Järelikult võrrandis (174) tuleb  $y$  asemele kirjutada äärmiste kiudude kaugus neutraalteljest.

Kui aga, nagu vaadeldaval juhul, ristlõike raskuskese ei asetse tala poolel kõrgusel, siis maksimaalsed pinged lõike äärmistes kiududes avalduvad:

$$\sigma_{max_1} = \frac{Mh_1}{J}; \quad \sigma_{max_2} = \frac{Mh_2}{J}. \quad (175)$$

Üks nendest annab maksimaalse tõmbepinge tõmmatud kiududes, teine aga maksimaalse survepinge surutud kiududes. Kui tala materjal avaldab ühesugust vastupanu nii tõmbele kui ka survele, siis on küllaldane, kui määrame ainult ühe maksimaalse pinge neutraalteljest kõige kaugemal asetsevatele kiududele, sõltumatult sellest, kas neid tõmmatakse või surutakse.

Vaadeldaval juhul on suurim pinge

$$\sigma_{max} = \frac{Mh_1}{J},$$

sest  $h_1 > h_2$ .

Kui materjali vastupanu tõmbele ja survele on erinev, nagu näiteks malmil, siis tuleb määrata mõlemad maksimaalsed pinged. Kui ühesuguselt tõmbele ja survele vastu-panevast materjalist tala raskuskese asub kõrguse keskkohas, s. o.  $h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$ , siis on tõmbe- ja survepinged absoluutväärtuselt võrdsed ning määratakse valemiga

$$\sigma_{max} = \frac{M \frac{h}{2}}{J}, \quad (176)$$

kus  $\frac{h}{2}$  on äärmise tõmmatud või surutud kiu kaugus neutraalteljest.

Kui momendi suurus prussi pikkuse ulatuses muutub, siis tuleb maksimaalsete pingete määramiseks võtta see lõige, milles paindemoment on maksimaalne. Tala sellist lõiget nimetasime eespool *ohtlikuks lõikeks*.

Inertsmomendi  $J$  suhet neutraalteljest kõige kaugemal asetseva kiu kaugusesse  $y_{max}$  nimetatakse ristlõike *vastupidavusmomendiks paindele* ja tähistatakse  $W$ :

$$\frac{J}{y_{max}} = W. \quad (177)$$

Kuna  $J$  dimensioon on  $\text{cm}^4$ ,  $y_{max}$  aga  $\text{cm}$ , siis  $W$  dimensiooniks on  $\text{cm}^3$ .

Silmas pidades avaldist (177), võime maksimaalse pinge määramise valemi (176) prussi jaoks, millel  $y_{max} = h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$ , kirjutada kujul

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}. \quad (178)$$

Tähistades prussi, millel  $h_1 \neq h_2$ , vastupidavusmomendid vastavalt  $W_1$  ja  $W_2$ , saame:

$$\frac{J}{h_1} = W_1; \quad \frac{J}{h_2} = W_2.$$

Siis sellisel talal:

$$\sigma_{max_1} = \frac{M_{max}}{W_1}; \quad \sigma_{max_2} = \frac{M_{max}}{W_2}. \quad (179)$$

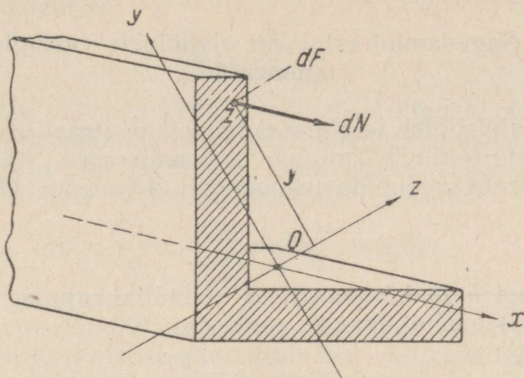
Käesoleva paragrahvi valemite tuletamisel oletasime, et prussil on pikisümmeetria tasapind, et just selles tasapinnas mõjuvad paindemomendid ning et paindedeformatsioonid toimuvad seejuures koormuse mõjumise tasapinnas. Tegelikult peaks prussi paine sel juhul toimuma paindemomentide mõjumise tasapinnas, sest mingis teises tasapinnas võiks paine toimuda ainult juhul, kui välispaindemomendid või sisejõud annaksid pikisümmeetriatasapinnas asetsevate telgede suhtes momenti. Välismomendid mõjuvad aga ise selles tasapinnas, mistõttu nad ei saa nende telgede suhtes momenti anda. Sisejõud küll annavad sellised momendid, kuid pikitasapinna sümmeetria tõttu on sümmeetria tasapinnast ühel pool mõjuvad momendid võrdvastupidised sümmeetria tasapinnast teisel pool mõjuvate momentidega, mistõttu sisejõudude kõikide selliste momentide summa võrdub nulliga.

Prussi peatasapindadeks nimetatakse prussi pikitasapindasid, mis läbivad ristlõike ühte peatsentraaltelgedest. Selles paragrahvis tuletatud valemid on rakendatavad ka sel juhul, kui sümmeetriatasapinnata prussi ühes peatasapindadest mõjuvad paindemomendid.

Võtame ebasümmeetrilise ristlõike, näiteks isekülgse nurkterase (joon. 124). Olgu teljed  $y$  ja  $z$  ristlõike peatsentraaltelgedeks. Paindemomendid mõjugu  $y$ -telge läbivas peatasapinnas. Vaatame kas on rahuldatud tasakaalutingimus, kui oletame, et sel juhul pingete jaotus tala ristlõikes on sama, mis prussi sümmeetriatasapinnas mõjuvate painde-

momentide korral, s. o. valemi (174) järgi, ja kas neutraaljoon langeb ühte prussi ristlõike peatsentraalteljega  $z$ .

Pingete jaotumisel ristlõikes valemi (174) järgi tasakaalustab sisejõudude moment neutraaltelje suhtes välispaindemomendi. Mingis pinnaelemendis  $dF$ , mille koordi-



Joonis 124.

naadid on  $z$ ,  $y$ , mõjuv elementaarjõud avaldub valemi (174) järgi kujul:

$$dN = \sigma dF = \frac{My}{J} dF.$$

Selle jõu elementaarmoment peatelje  $Oy$  suhtes võrdub:

$$dM_y = \frac{My}{J} dF \cdot z.$$

Ristlõikes mõjuvate kõikide sisejõudude elementaar-momentide summa peatelje  $Oy$  suhtes on:

$$M_y = \int_F \frac{My}{J} z \cdot dF = \frac{M}{J} \int_F yz dF.$$

Välispaindemoment prussi sama telje suhtes on võrdne nulliga. Järelikult ka  $M_y$  peab võrduma nulliga, mis on võimalik juhul, kui  $\int yz dF = 0$ , s. o. kui ristlõike tsentrifugaalinertsmoment võrdub nulliga. Kuna  $y$ - ja  $z$ -teljed on peateljed, siis tsentrifugaalinertsmoment nende telgede suhtes tõe-poolest võrdub nulliga (vt. § 53). Järelikult painde-

momendi mõjumisel prussi ühes peatasapindadest teine peatasapind ühtub neutraaltasapinnaga, või teisiti — ristlõike neutraaljoon ühtub ristlõike peatsentraalteljega ja pingete jaotus ristlõikes on sama, mis prussi sümmeetriatasapinnas mõjuvate paindemomentide puhul.

### § 64. Sagedamini esinevate ristlõigete vastupidavusmomentid

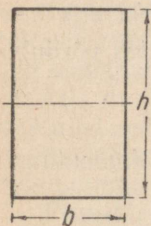
Teades ristlõike telginertsmomenti neutraaljoone suhtes ja äärmiste kiudude kaugust neutraaljoonest, võime hõlpsasti määrata vastupidavusmomenti üldvalemi (177) järgi:

$$W = \frac{J}{y_{max}}.$$

Alusega  $b$  ja kõrgusega  $h$  ristkülikukujulise ristlõike (joon. 125) vastupidavusmoment on:

$$W = \frac{J}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12 \cdot \frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}. \quad (180)$$

Valemis (178) vastupidavusmoment seisab nimetajas, järelikult vastupidavusmomenti suurendamisega suureneb ka tala tugevus. Seetõttu materjali ökonoomsuse seisukohalt on kõige ratsionaalsemad sellised ristlõiked, millel väikese pindala puhul saadakse suurimad vastupidavusmomentid. Nii näiteks ristkülikukujulise ristlõikega tala, millel  $h > b$ , on kasulikum ruudukujulisest. Tõepoolest, ruudukujulise ristlõike vastupidavusmoment võrdub:



Joonis 125.

$$W_r = \frac{J}{\frac{a}{2}} = \frac{a^4}{12 \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a^3}{6}. \quad (181)$$

Kui ristküliku- ja ruudukujulise ristlõigete pindalad on võrdsed, s. o.

$$bh = a^2,$$

siis ristkülikukujulise ristlõike vastupidavusmomenti suhe ruudukujulise ristlõike vastupidavusmomentidesse on:

$$\frac{W_{rk}}{W_r} = \frac{bh^2}{6} : \frac{a^3}{6} = \frac{bh}{a^2} \cdot \frac{h}{a} = \frac{h}{a}.$$

Kuna  $bh = a^2$  ja  $h > b$ , siis  $h > a$ , järelikult ristküliku-  
kujulise ristlõike  $W_{rk}$  on niipalju kordi suurem sama pind-  
alaga ruudukujulise ristlõike  $W_r$ , kui mitu korda ristküliku  
kõrgus on suurem ruudu küljest.

Lapiti asetatud ristkülikukujulise ristlõikega tala vastu-  
pidavusmoment on:

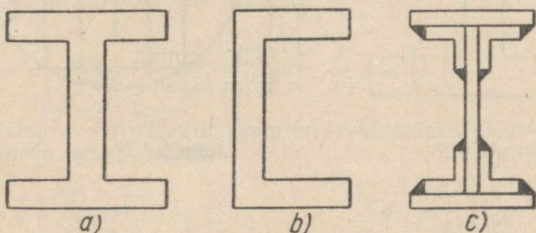
$$W = \frac{hb^2}{6}. \quad (182)$$

Valemite (180) ja (182) võrdlemisel ilmneb, et viimase-  
juhul (lapiti asetatud tala) vastupidavusmoment on väik-  
sem, mistõttu tala asetamine lapiti pole kasulik.

Ümarristlõike vastupidavusmoment võrdub:

$$W = \frac{J}{d} = \frac{\pi d^4}{64 \cdot d} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3. \quad (183)$$

Ümar- ja ristkülikukujulised ristlõiked esinevad kõige  
sagedamini puittaladel. Metalltaladele valitakse teised, rat-  
sionaalsemad ristlõiked. Kuna materjal neutraaltelje lähe-



Joonis 126.

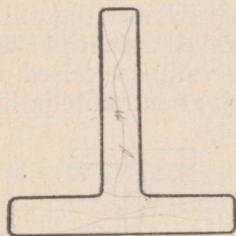
dal on vähepingestatud, siis on kasulikum rohkem mater-  
jali koondada neutraalteljest eemale, s. o. kanda materjal  
vähepingestatud kohtadest enampingestatud kohtadesse.  
Seetõttu metalltaladel, millel materjal avaldab ühesugust  
vastupanu tõmbele ja survele, valitakse sageli I- (joon.  
126, a) või [-kujuline (joon. 126, b) ristlõige. Sellised talad,  
võrreldes ristkülikukujulise ja ümarristlõikega taladega,  
millel on samasugune ristlõikepindala, annavad tundu-  
valt suuremaid vastupidavusmomente. Nendes ristlõigetes  
neutraaljoon läbib kõrguse keskkoha, mistõttu suurimad  
tõmbe- ja survepinged nendes ristlõigetes on võrdsed. Tõmbe-  
bele ja survele erinevat vastupanu avaldavast materjalist

taladele antakse neutraaljoone suhtes ebasümmeetriline ristlõige, nagu näiteks  $\perp$ -ristlõige (joon. 127).

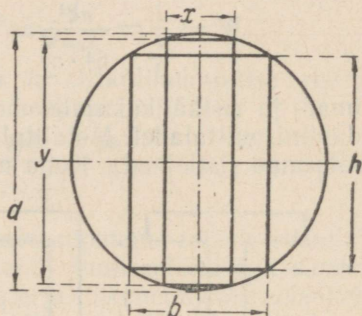
Praktikas tuleb sageli kokku puutuda rõngakujulise (torukujulise) ristlõikega. Rõngakujulise ristlõike vastupidavusmoment on suurem kui sama pindalaga ümarristlõikel. Rõngakujulises ristlõikes on materjal palju ratsionaalsemalt kasutatud, kuna ta on viidud eemale neutraaljoonest.

Välisläbimõõduga  $D$  ja siseläbimõõduga  $d$  rõngakujulise ristlõike vastupidavusmoment võrdub:

$$W = \frac{J}{D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64 \cdot \frac{D}{2}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} \approx 0,1 \frac{D^4 - d^4}{D}, \quad (184)$$



Joonis 127.



Joonis 128.

või tähistades  $\frac{d}{D} = \alpha$ , saame teise avaldise rõngakujulise ristlõike  $W$ -le:

$$W \approx 0,1D^3(1 - \alpha^4). \quad (185)$$

Tavaliselt kasutatakse avaldist (185) ristlõike läbimõõtude  $D$  ja  $d$  määramiseks antud suhte  $\frac{d}{D} = \alpha$  puhul.

Valtsitud standardmöödetega profiilide inertsmomentid ja vastupidavusmomentid on antud ГОСТ-i tabelites.

**Näide 59.** Määrata ümarpalgist, mille läbimõõt on  $d$  (joon. 128), välja lõigatud suurima vastupidavusmomentiga  $W$  ristkülikukujulise tala külgede  $h$  ja  $b$  vaheline suhe.

*Lahendus* Alusega  $x$  ja kõrgusega  $y$  ristküliku vastupidavusmoment avaldub:

$$W = \frac{xy^2}{6};$$

kuna

$$y = \sqrt{d^2 - x^2},$$

siis

$$W = \frac{x(d^2 - x^2)}{6} = \frac{xd^2 - x^3}{6}.$$

Maksimaalse  $W$  väärtuse määramiseks koostame avaldise  $\frac{dW}{dx} = 0$ :

$$\frac{dW}{dx} = \frac{d^2}{6} - \frac{3x^2}{6} = 0,$$

millest

$$3x^2 = d^2;$$

järelikult

$$x = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Alusega  $\frac{d}{\sqrt{3}}$  ristküliku kõrgus avaldub:

$$y = \sqrt{d^2 - x^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = d \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

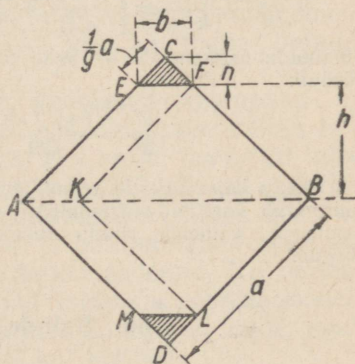
Järelikult ringist väljalõigatud suurima vastupidavusmomendiga ristküliku külgede suhe avaldub:

$$y : x = d \sqrt{\frac{2}{3}} : \frac{d}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

ehk

$$h : b = \sqrt{2} \approx 7 : 5.$$

**Näide 60.** Määrata, kuidas muutub servale toetuva ruudukujulise ristlõike vastupidavusmoment diagonaali  $AB$  suhtes (joon. 129), kui lõigata ära ülal ja all nurgakesed, millede küljepikkus on  $\frac{1}{9}$  ruudu küljest. Ruudu külje pikkus olgu  $a$ . Äralõigatavad nurgad on joonisel näidatud viirutatuna.



Joonis 129.

**Lahendus.** Terve ruudu vastupidavusmoment diagonaali  $AB$  suhtes avaldub:

$$W = \frac{J}{h} = \frac{a^4}{12 \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Nüüd määrame pärast kolmnurkade eemaldamist ruudu allesjäänud osa vastupidavusmomendi. Seda osa võib vaadelda koosnevana ruudust *FKLB* ja kahest parallelogrammist *AEFK* ja *AKLM*.

Kolmnurga alus

$$b = \frac{1}{9} a\sqrt{2}.$$

Kolmnurga kõrgus

$$n = \frac{1}{18} a\sqrt{2}.$$

Ruudu *FKLB* inertsmoment diagonaali suhtes võrdub:

$$J' = \frac{\left(a - \frac{1}{9}a\right)^4}{12}.$$

Oma alustega liitunud parallelogrammide *AEFK* ja *AKLM* inertsmomentide summa võrdub:

$$J'' = \frac{2 \cdot \frac{1}{9} a\sqrt{2} h^3}{3} = \frac{2a\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{\sqrt{2}}{18}a\right)^3}{27} = \frac{8a^4 \left(\frac{4}{9}\right)^3}{27}.$$

Ruudu allesjäänud osa vastupidavusmoment

$$W' = \frac{J' + J''}{h} = \left[ \frac{\left(\frac{8}{9}a\right)^4}{12} + \frac{8a^4 \left(\frac{4}{9}\right)^3}{27} \right] : \frac{4\sqrt{2}}{9} a = \frac{64\sqrt{2}}{729} a^3.$$

Vastupidavusmomendi  $W'$  suhe terve ruudu vastupidavusmomendis võrdub:

$$\frac{W'}{W} = \frac{64\sqrt{2}a^3}{729} : \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \approx 1,054.$$

Seega kolmnurkade eemaldamine vähendab ristlõike pindala, kuid suurendab vastupidavusmomenti  $\sim 5\%$  võrra. Kolmnurkade eemaldamisega väheneb ruudu inertsmoment, kuid veel rohkem tala kõrgus.

## § 65. Painde arvutusvalemid

### Talade arvutuse näiteid

Eespool näitasime, et tala paindel ristjõududega mõjuvad tala ristlõigetel normaalpingeid esile kutsuvad paindemomendid ja põikjõud. Põikjõudude poolt põhjusta-

tud tangentsiaalpinged saavutavad märkimisväärseid väärtusi ainult väga kitsastes või lühikestes talades. Seelõttu toimub talade arvutus harilikult normaalpingete järgi.

Teades antud materjali lubatavaid pingeid tõmbele  $[\sigma_t]$  ja survele  $[\sigma_s]$ , võime valemite (178) põhjal kirjutada painde tugevusvõrrandid kujul

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{M_{max}}{W_1} \leq [\sigma_t]; \\ \sigma_2 &= \frac{M_{max}}{W_2} \leq [\sigma_s], \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

s. t. et pinged äärmistes kiududes ei tohi ületada lubatavaid pingeid tõmbel ja survele.

Kui antud materjalil  $[\sigma_t] = [\sigma_s] = [\sigma]$ , siis painde arvutusvõrrand avaldub:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \leq [\sigma]. \quad (187)$$

Tugevuse arvutusvõrrandid paindel on analoogilised eespoolvaadeldud arvutusvõrranditega. Nad võimaldavad samuti lahendada kolme tüüpi ülesandeid: 1) määrata pinged, kui on teada talale mõjuv paindemoment ja tala ristlõike vastupidavusmoment; 2) määrata talale mõjuv paindemoment, kui on teada lubatav pinge ja ristlõike vastupidavusmoment; 3) määrata vastupidavusmoment ning selle järgi ristlõike mõõted, kui on teada paindemoment ja lubatav pinge.

Kui tala materjal avaldab ühesugust vastupanu nii tõmbele kui ka survele, siis on otstarbekohane valida tala ristlõige kahe sümmeetriateljega. Kui antud materjali lubatavad pinged tõmbel ja survele on erinevad, siis on otstarbekohane valida tala ristlõige neutraaltelje suhtes ebasümmeetriline ja tala paigutada nii, et ohtlikumatele pingetele allutatud kiud asuksid neutraalteljele lähemal. Nii näiteks malmatalal peavad tõmmatud kiud asetsema neutraaljoonele lähemal kui surutud kiud, kuna malm, nagu on teada, avaldab paremini vastupanu survele kui tõmbele.

**Näide 61.** Määrata liht-terastala, mille pikkus on 3 m, painutava jõu  $P$  lubatav suurus (joon. 130). Tala ristlõige — ristkülik mõõdetega  $b = 6$  cm,  $h = 12$  cm, materjali voolavuspiir  $\sigma_T = 2500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ , tugevusvaru  $k = 2,5$ .

*Lahendus.* Maksimaalne paindemoment, mis mõjub tala keskel, on valemi (170) põhjal:

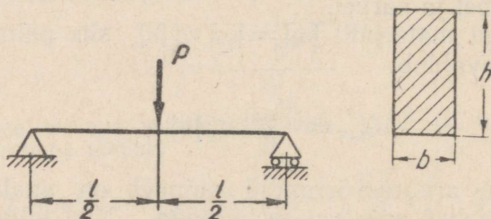
$$M_{max} = \frac{Pl}{4}$$

Kirjutame tugevustingimuse:

$$\frac{M_{max}}{W} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{k} \quad \text{ehk} \quad \frac{Pl}{4 \cdot \frac{bh^2}{6}} \leq \frac{\sigma_T}{k},$$

millest

$$P \leq \frac{4\sigma_T bh^2}{6 \cdot 2,5 \cdot l} = \frac{4 \cdot 2500 \cdot 6 \cdot 12^2}{6 \cdot 2,5 \cdot 300} = 1920 \text{ kg}.$$



Joonis 130.

**Näide 62.** Määrata hammasratta hamba arvutuslõikes *AB* (joon. 131) tingimuslik pinge, kui hambale mõjuv jõud  $P = 4500$  kg on rakendatud selle pea servale. Hamba kõrgus  $h = 30$  mm, hamba pikkus  $b = 90$  mm, hamba paksus  $S = 22$  mm.

*Lahendus.* Paindemoment arvutuslõikes

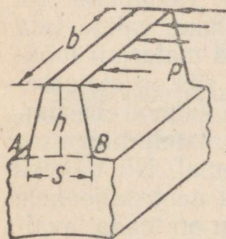
$$M = P \cdot h = 4500 \cdot 3 = 13\,500 \text{ kgcm}.$$

Arvutuslõike vastupidavusmoment

$$W = \frac{b \cdot S^2}{6} = \frac{9 \cdot 2,2^2}{6} = 7,26 \text{ cm}^3.$$

Pinge arvutuslõikes

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{13\,500}{7,26} = 1860 \text{ kg/cm}^2.$$



Joonis 131.

**Näide 63.** Määrata vagoneti telje läbi-mõõt, kui telje otstele mõjuvad jõud (joon. 132, a)  $P = 2500$  kg; jõudude rakenduspunktide kesktasapindadest  $a = 15$  cm, lubatav pinge

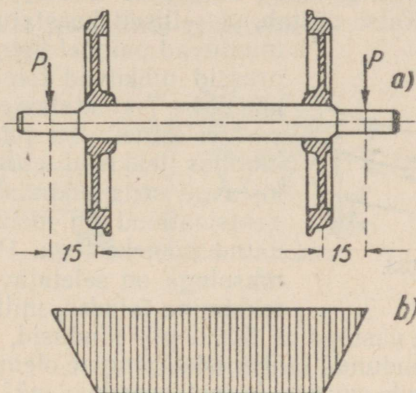
$$[\sigma] = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Lahendus. Toereaktsioonid  $A$  ja  $B$  on võrdsed:

$$A = B = 2000 \text{ kg.}$$

Maksimaalne paindemoment (joon. 132,  $b$ ) võrdub:

$$M_{max} = P \cdot a = 2000 \cdot 15 = 30\,000 \text{ kgcm.}$$



Joonis 132.

Vastupidavusmoment

$$W = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{30\,000}{1000} = 30 \text{ cm}^3.$$

kuna aga  $W = 0,1 d^3$ , siis

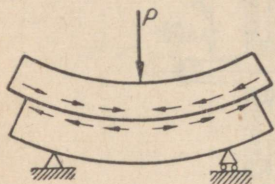
$$d = \sqrt[3]{\frac{30}{0,1}} = 6,69 \approx 7 \text{ cm.}$$

## § 66. Tangentsiaalpinged ristkülikukujulise ristlõikega tala paindel. Žuravski valem.

Paragrahvis 56 nägime, et tala teljega risti mõjuvate jõududega painde üldjuhul mõjuvad tala ristlõigetel normaalseid tõmbe- ja survepingeid esile kutsuvad paindemomendid ning põikjõud. Põikjõud püüab nihutada tala üht osa teise suhtes tala teljega ristsihis. Seetõttu kutsuvad põikjõud tala ristlõikepinnas esile tangentsiaalpingeid. Tangentsiaalpingete paariti esinemise seaduse järgi tekivad talas neutraalkihiga paralleelselt mõjuvad tangentsiaalpin-

ged, mis püüavad nihutada tala horisontaalkihte üksteise suhtes. Nimetatud pingete olemasolus võime kergesti veenduda järgmise lihtsa katse abil.

Võtame kahest omavahel kinnitamata prussist koosneva tala ja koormame seda painutava jõuga, nagu on näidatud joonisel 133. Sel juhul kumbki pruss käitub kui omaette tala, milles ülemisi kiude surutakse kokku, alumisi aga tõmmatakse. Katse näitab, et selliselt koostatud tala otsad



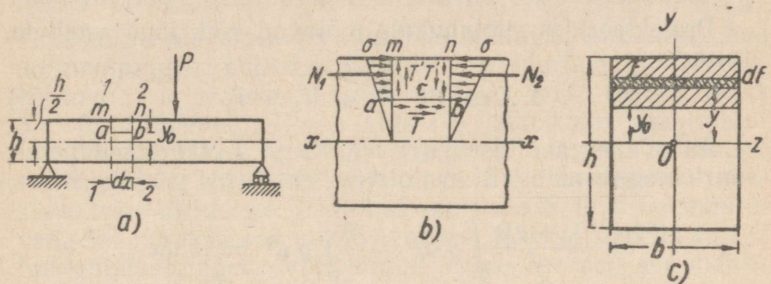
Joonis 133.

muutuvad paindel astmeliseks, s. o. prussid nihkuvad teineteise suhtes pikisihis. Terviktalas otste astmelisust ei esine. Sel juhul tala piki kihtides tekkivad elastsusjõud takistavad seda pikinihet. Need tangentsiaaljõud on joonisel 133 näidatud noolekestega. Pikinihke olemasoluga on seletatav pikipragude tekkimine talades, millede materjal

avaldatakse nõrka vastupanu löikele piki kiudusid, nagu näiteks puit. Olles veendunud tangentsiaalpingete olemasolust paindel, asume nende suuruse ja jaotusseaduse määramisele tala kõrguse suhtes. Vaatleme lihtsaimat juhtu — ristkülikukujulise ristlõikega tala. Oletame, et ristkülikukujulises ristlõikes tangentsiaalpinged on paralleelsed põikjõuga  $Q$  ja et nende suurus ei muutu tala laiuses, s. o. jääb konstantseks neutraalkihiga paralleelse lõpmatu õhukese kihi ulatuses. Selle oletusega tehtav viga, nagu näitavad täpsed uurimused, on väga väike.

Võtame tala, mille ristlõige on ristkülik külgedega  $h \times b$ . Olgu see tala painutatud jõuga  $P$  (joon. 134, a). Võtame tala vasakpoolses osas kaks ristlõiget  $1-1$  ja  $2-2$ , mis asetsevad teineteisest kaugusel  $dx$ , ja piki lõike  $ab$ , mis on paralleelne neutraalkihiga ja viimasest kaugusel  $y_0$ . Sellise kolme lõikega eraldame lõpmatu õhukese risttahuka  $mabn$ , mõõdetega  $dx$ ,  $\frac{h}{2} - y_0$  ja  $b$ . Tähistame paindemomendi ristlõikes  $1-1$   $M$ , ristlõikes  $2-2$   $M' = M + dM$ . Ristlõiked  $1-1$  ja  $2-2$  on võetud tala vasakpoolsel osal, kus paindemomendid ja põikjõud on positiivsed. Seetõttu  $M' > M$  ehk  $dM > 0$ . Vaatleme talast mõtteliselt eraldatud risttahuka  $mabn$  (joon. 134, b) tasakaalutingimusi. Eraldatud osa mõju talale asendame sisejõududega. Risttahuka külgtahkudele mõjuvad painde-

momentide poolt tekitatud surve normaaljõud  $N_1$  ja  $N_2$ , kusjuures tahule  $ma$  mõjuv jõud  $N_1$  on väiksem kui tahule  $nb$  mõjuv jõud  $N_2$ , sest  $M' > M$ . Külgtahkudele mõjuvad veel põikjõudude poolt tekitatud tangentsiaaljõud. Nende jõudude resultandi tähistame  $T'$ . Kuna normaaljõud  $N_2 > N_1$ , siis risttahukas peab nihkuma vasakule. Seda nihet aga takistavad tahu  $ab$  pikikihis tekkivad tangentsiaaljõud. Nende jõudude resultandi tähistame  $T$ .



Joonis 134.

Elementaar normaaljõud, mis mõjub risttahuka vasakul tahul neutraalteljest kaugusel  $y$  asetsevale lõpmatu väike- sele pinnakesele  $dF$ , võrdub:

$$dN_1 = \sigma dF = \frac{My}{J} dF,$$

kus  $J$  on kogu ristlõike inertsmoment neutraaltelje suhtes.

Risttahuka kogu vasakule tahule mõjuv normaaljõud avaldub:

$$N_1 = \int_{F_y} \sigma dF = \int_{F_y} \frac{My}{J} dF.$$

Integraali avaldises suurus  $\frac{M}{J}$  on konstantne, sest antud ristlõikes on  $M$  ja  $J$  alati konstantsed; seetõttu

$$N_1 = \frac{M}{J} \int_{F_y} y dF. \quad (a)$$

Analoogiliselt leiame risttahuka parempoolsele tahule mõjuva jõu  $N_2$  suuruse:

$$N_2 = \frac{M_1 + dM}{J} \int_{F_y} y dF. \quad (b)$$

Kui lugeda jõud tahu lõpmatu väikesel pikkusel  $dx$  ühtlaselt jaotatuks, siis risttahuka alumisele tahule mõjuvate tangentsiaaljõudude resultant  $T$  võrdub:

$$T = \tau b dx. \quad (c)$$

Projekteerides risttahukale mõjuvad kõik jõud  $x$ -teljele, saame:

$$\Sigma X = 0, \quad N_2 - N_1 = T. \quad (d)$$

Asendades avaldises (d)  $N_1$ ,  $N_2$  ja  $T$  väärtused nende väärtustega vastavalt avaldistest (a), (b) ja (c), saame

$$\frac{M + dM}{J} \int_{F_y} y dF - \frac{M}{J} \int_{F_y} y dF = \tau b dx$$

ehk

$$\frac{dM}{J} \int_{F_y} y dF = \tau b dx,$$

millest

$$\tau = \frac{dM}{dx} \frac{1}{bJ} \int_{F_y} y dF. \quad (e)$$

Integraal  $\int_{F_y} y dF$  kujutab viirutatud pinna, s. o. risttahuka külgpinna, staatilist momenti neutraaljoone suhtes. Tähistame selle lühidalt:

$$\int_{F_y} y dF = S.$$

Suurus  $\frac{dM}{dx}$  on võrdne  $Q$ -ga, s. o. põikjõuga. Seetõttu võime avaldise (e) lõplikult kirjutada kujul:

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{J \cdot b}. \quad (188)$$

Seega on tangentsiaalpinge tala pikikihis võrdeline vaadeldavas ristlõikes mõjuva põikjõuga ( $Q$ ) ja vaadeldavast kihist ülalpool asetseva ristlõikepinna osa staatilise momendiga ( $S$ ), mis on võetud neutraaltelje suhtes ning pöördvõrdeline neutraaltelje suhtes võetud kogu lõike inertsimomendiga ( $J$ ) ja vaadeldava pikikihi laiusega ( $b$ ).

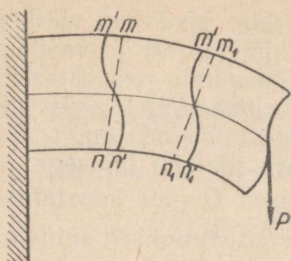
Antud ristlõike jaoks on suurused  $Q$  ja  $J$  konstantsed. Seetõttu tangentsiaalpinged muutuvad võrdeliselt suhtele  $\frac{S}{b}$ . Tala kõige ülemistes ja alumistes kihtides, s. o. seal, kus normaalpinged paindemomendist on suurima väärtusega, võrduvad tangentsiaalpinged nulliga, sest nende jaoks  $S = 0$ . Lõigetes, millede laius ( $b$ ) jääb kogu lõike ulatuses konstantseks, tekivad suurimad tangentsiaalpinged neutraalkihis, kuna staatiline moment on selle suhtes maksimaalse väärtusega. Üldjuhul suurused  $S$  ja  $b$  on muutuvad. Sel juhul ei saa ette öelda, kus tekivad maksimaalsed tangentsiaalpinged. Võib ainult öelda, et nad on maksimaalsed nendes kihtides, millel suhe  $\frac{S}{b}$  on maksimaalne.

Tangentsiaalpingete paaritisesinemise seaduse põhjal valem (188) määrab ka tangentsiaalpingete suuruse tala ristlõigetes. Järelikult jaotuvad tangentsiaalpinged tala ristlõikes ebahetlaselt.

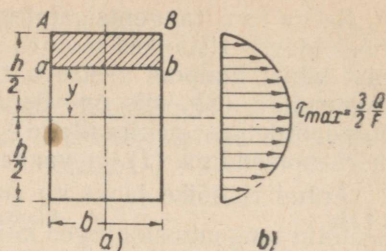
Talade paindel tekkivad tangentsiaalpinged ei mõjuta paindemomentide poolt põhjustatud normaalpingeid, mis on määratavad valemiga (178). Kuid ristlõike kõrguses ebahetlaselt jaotatud tangentsiaalpinged kutsuvad esile talas nihkedeformatsiooni, mistõttu enne painet tasapinnalised olnud ristlõiked ei jää tasapinnalisteks nagu puhtal paindel, vaid kõverduvad. Joonisel 135 on näidatud ristlõigete kõverdumine. Suurim nihe saadakse kohas, kus tangentsiaalpinged on maksimaalsed. Neutraalkihist kõige kaugemal asetsevates kiududes tangentsiaalpingeid ei ole, mistõttu seal ei esine nihet ja kõverad  $mn$  jäävad risti tala äärmiste pindadega.

Leiame tangentsiaalpingete jaotumisseaduse riskülikukujulises ristlõikes. Neutraalteljest (joon. 136,  $a$ ) kaugusel  $y$  asetseval joonel  $ab$  avalduvad tangentsiaalpinged valemi (188) järgi:

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{J \cdot b}.$$



Joonis 135.



Joonis 136.

Vaadeldava ristlõike jaoks on  $Q$ ,  $J$  ja  $b$  konstantsed suurused. Seetõttu  $\tau$  muutub võrdeliselt  $S$ . Joonest  $ab$  kõrgemal asetseva ristküliku  $AabB$  viirutatud pinna staatiline moment neutraaltelje suhtes võrdub:

$$S = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \left( y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2} \right).$$

Siin kahe esimese teguri korrutis kujutab ristküliku  $AabB$  pindala, kolmas tegur aga selle ristküliku raskuskeskme kaugust neutraalteljest. Teisendades selle avaldise, leiame:

$$S = \frac{b}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \left( \frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Kogu ristlõike inertsmoment neutraaltelje suhtes (vt. lk. 160):

$$J = \frac{bh^3}{12}.$$

Asetades  $S$  ja  $J$  väärtused valemisse (188), saame:

$$\tau = \frac{Q \cdot \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{6Q}{bk^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (189)$$

Tangentsiaalpinge maksimaalne väärtus on neutraalteljel, kus  $y = 0$ :

$$\tau_{max} = \frac{6Q}{bh^3} \frac{h^2}{4} = \frac{3Q}{2bh}. \quad (190)$$

Kogu ristlõike pindala on  $bh$ . Tähistades selle tähega  $F$ , saame:

$$\tau_{max} = \frac{3Q}{2F}. \quad (191)$$

Suurus  $\frac{Q}{F}$  kujutab keskmist tangentsiaalpinget. Järelikult tangentsiaalpinge paindel on riskülikukujulisel ristlõikel 1,5 korda suurem kui see keskmine pinge, mille oleksime saanud tangentsiaalpingete ühtlasel jaotumisel ristlõikes.

Valem (189) näitab, et tangentsiaalpinged ristlõikes muutuvad parabooli seaduse järgi. Kui  $y = \frac{h}{2}$ , s. o. neutraalteljest kõige kaugemal asetsevates kiududes, siis  $\tau = 0$ .

Tangentsiaalpingete epüür riskülikukujulisel ristlõikel on näidatud joonisel 136, *b*. Suurus  $y$  esineb valemis (189) ruudus, mistõttu  $y$  märk  $\tau$  suurust ei mõjuta. Riskülikukujulises ristlõikes on neutraaltelje suhtes sümmeetriliselt asetsevates kiududes pinged ühesugused.

Valem riskülikukujulise ristlõikega tala paindel tekivate tangentsiaalpingete määramiseks tuletati esmakordselt silmapaistva vene inseneri D. I. Žuravski poolt 1855. a.

D. I. Žuravski, olles üks ehitusmehaanika ja sildade ehituse pioneere Venemaal, on tugevusõpetuse kui teaduse rajajaks, kes andis suure panuse selle teaduse ühe tähtsama haru, nimelt paindeteooria arendamisse.

## § 67. Tangentsiaalpinged I-talas

Kui teame tangentsiaalpingete jaotumist riskülikukujulises ristlõikes, võime konstrueerida pingete epüürid riskülikuist koosnevaile teistele ristlõigetele, nende seas ka I-ristlõikele (joon. 137, *a*).

Horisontaalvöödes ja vertikaalseinas tangentsiaalpinged muutuvad parabooli seaduse järgi. Joonte 1 — 2 ja 11 — 12 punktides on pinged null. Joonte 3 — 4 ja 9 — 10 punktides määrame tangentsiaalpinged valemiga (189), asetades sellesse vastavad väärtused. Siis saame:

$$\tau_{3-4} = \frac{6Q}{B(H^3 - \beta h^3)} \left( \frac{H^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right) = \frac{3Q(H^2 - h^2)}{2B(H^3 - \beta h^3)}, \quad (a)$$

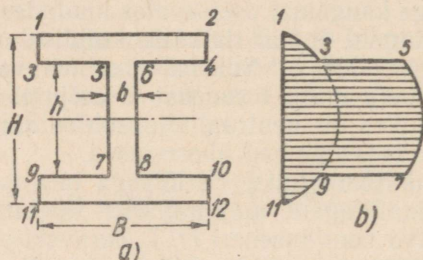
kus  $\beta = \frac{B-b}{B}$ . Valemi (a) järgi arvutatud pinged erinevad tegelikest. Nad on kokkuleppelised, kuna antud juhul

ei ole  $\tau$  ühtlaselt jaotatud ristlõike laiuses, nagu see oli aluseks valemi (188) tuletamisel.

Üleminekul vertikaalseinale tangentsiaalpingete suurus järsult muutub, kuna nimetatud kohas muutub laius järsult suurusest  $B$  suuruseni  $b$ . Seetõttu vertikaalseina joontel 5—6 ja 7—8 määratakse tangentsiaalpinged avaldisest (a), asetades  $B$  asemele  $b$ . Seega:

$$\tau_{5-6} = \frac{3Q}{2b(H^3 - \beta h^3)} (H^2 - h^2). \quad (b)$$

Maksimaalpinge on neutraaljoonel. Selle määramiseks arvutame I-ristlõike poole pinna staatilise momendi neut-



Joonis 137.

raaljoone suhtes ja kogu ristlõike inertsmomenti. Staatiline moment

$$S = B \frac{(H-h)}{2} \left( \frac{H}{2} - \frac{H-h}{4} \right) + b \frac{h^3}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{B(H^2 - h^2)}{8} + \frac{bh^2}{8}.$$

I-ristlõike inertsmoment

$$J = \frac{BH^3}{12} - \frac{(B-b)h^3}{12}.$$

Asetades  $S$  ja  $J$  valemisse (188), saame:

$$\tau_{max} = \frac{Q \frac{B(H^2 - h^2) + bh^2}{8}}{\frac{BH^3 - (B-b)h^3}{12} \cdot b} = \frac{3Q[B(H^2 - h^2) + bh^2]}{2[BH^3 - (B-b)h^3]b}.$$

Tangentsiaalpingete epüür I-ristlõike jaoks on näidatud joonisel 137, b.

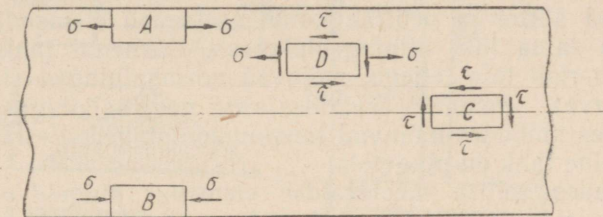
## § 68. Tala tugevuse kontroll peapingete järgi

Tala ristlõike mõõted tuleb valida nii, et tala üheski punktis pinged ei ületaks lubatavat suurust. Eespool nägime, et talas tekivad normaal- ja tangentsiaalpinged.

Enamikul juhtudel talade tugevuse kontroll piirub ainult maksimaalsete normaalpingete määramisega valemi

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \leq [\sigma]. \quad (187)$$

järgi. See tugevustingimus käib neutraalkihist kõige kaugemal asetsevate elementide kohta, mis asetsevad maksimaalse paindemomendi lõikes (joon. 138).



Joonis 138.

Tala ühes ääres element (A) allub tõmbele, tala vastaspooles ääres element (B) aga survele.

Maksimaalset tangentsiaalpinget talas kontrollitakse valemiga

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}S}{Jb} \leq [\tau]. \quad (188)$$

See tugevustingimus käib neutraalkihi juures asetseva elemendi kohta, mis asetseb maksimaalse põikjõu mõjumise ristlõikes. Element (C) allub puhtale nihkele.

Kuivõrd läheneme tala äärtest neutraalkihi poole, sedavõrd normaalpinged vähenevad, tangentsiaalpinged aga kasvavad.

Tala tugevuse kontrollil ainult tema kolme elemendi (A), (B) ja (C) järgi ei või kindel olla selles, et me määrame tala suurimad pinged. Võib juhtuda, et kõige enam pingetatud element ei asetse ei tala äärtel ega ka neutraalkihil. See esineb juhul, kui maksimaalne paindemoment ja maksimaalne põikjõud mõjuvad tala ühes ja samas ristlõikes ning

ristlõike laius muutub järsult äärtel (näiteks I-tala). Normaali- ja tangentsiaalpinged me oskame määrata neutraalkihist meelevaldsel kaugusel  $y$  asetseva elemendi jaoks, kui on teada antud ristlõikes mõjuvad  $M$  ja  $Q$  ning ristlõike mõõted.

Nii elemendi ( $D$ ) jaoks võime valemite (174) ja (188) järgi

$$\sigma = \frac{My}{J}, \quad (174)$$

$$\tau = \frac{QS}{Jb} \quad (188)$$

kergelt määrata pinged  $\sigma$  ja  $\tau$ . Kõik tala elemendid, välja arvatud äärtel ja neutraaljoonel asetsevad elemendid, on üht ja sama liiki liitpingeolukorras. Elemendi tahkudele, mis on risti tala teljega, mõjuvad normaalpinged (tõmme või surve). Samades tahkudes ning neutraalkihiga paralleelsetes tahkudes mõjuvad tangentsiaalpinged. Eesmine ja tagumine tahk on pingeteta.

Teades sellise meelevaldse elemendi pingeid  $\sigma$  ja  $\tau$ , võime leida elemendile mõjuvad peapinged, seejärel aga ühe või teise tugevusteooria alusel hinnata tala tugevust tema suurima ekvivalentse pinge järgi.

Sageli tala tugevuse kontroll piirdub ainult peapingete määramisega valemite (47) järgi, eeldades, et  $\sigma_y = 0$ , s. o. valemite

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{1}{2} \sigma + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \\ \sigma_{min} &= \frac{1}{2} \sigma - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

järgi.

**Näide 64.** I-ristlõikega 1 m pikkune lihttala paindub tema keskele rakendatud jõu  $P = 16$  t mõjul (joonis 139). Määrata peapinged tala ohtlikema ristlõike ülemise poole punktides 1, 3 ja 4. Tala ristlõike mõõted on antud sentimeetrites.

*Lähendus.* Paindemomentide ja põikjõudude epüüride vaatlemisel näeme, et tala ohtlikem ristlõige asetseb tala keskel.

Selles ristlõikes mõjub paindemoment

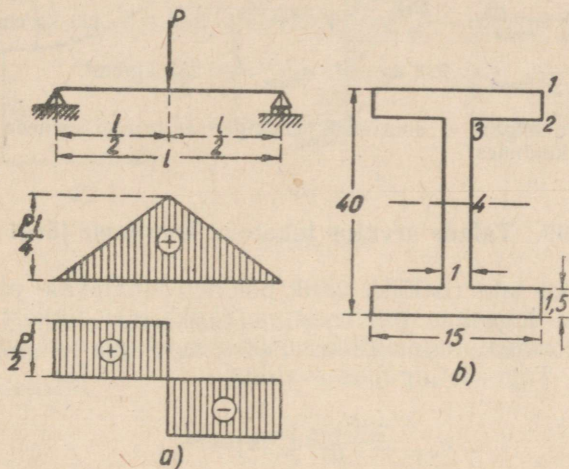
$$M_{max} = \frac{Pl}{4} = \frac{16\,000 \cdot 100}{4} = 400\,000 \text{ kgcm.}$$

Põikjõud  $Q = \frac{P}{2} = 8000$  kg. Ristlõike inertsmoment neutraaltelje suhtes:

$$J = \frac{15 \cdot 40^3}{12} - \frac{(15 - 1)(40 - 2 \cdot 1,5)^3}{12} = 20\,900 \text{ cm}^4.$$

Normaalpinged paindemomendist ja tangentsiaalpinged põikjõust ristlõike antud punktide jaoks määrame valemitega:

$$\sigma = \frac{My}{J} \text{ ja } \tau = \frac{QS}{Jb}.$$



Joonis 139.

Arvutame esialgu staatilised momendid:

$$S_1 = 0; \quad S_3 = 15 \cdot 1,5 \left( \frac{40}{2} - \frac{1,5}{2} \right) = 434 \text{ cm}^3,$$

$$S_4 = S_3 + 1 \left( \frac{40}{2} - 1,5 \right) \left( \frac{40}{2} - 1,5 \right) \frac{1}{2} = 434 + 171 = 605 \text{ cm}^3.$$

Määrame normaalpinged:

$$\sigma_1 = - \frac{400\,000 \cdot 20}{20\,900} = -383 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_3 = - \frac{400\,000 \left( \frac{40}{2} - 1,5 \right)}{20\,900} = -354 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_4 = 0.$$

Normaalpinged on negatiivsed, sest ristlõike ülemises pooles kiud on surutud.

Määrame tangentsiaalpinged:

$$\tau_1 = 0; \quad \tau_3 = \frac{8000 \cdot 434}{20\,900 \cdot 1} = 166 \text{ kg/cm}^2; \quad \tau_4 = \frac{8000 \cdot 605}{20\,900 \cdot 1} = 232 \text{ kg/cm}^2.$$

Peapinged leiame valemiga (47):

$$\sigma_{1_{max}} = 0 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{min} = -383 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_{2_{max}} = -\frac{354}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{354^2 + 4 \cdot 166^2} = 66 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_{3_{min}} = -\frac{354}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{354^2 + 4 \cdot 166^2} = -420 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_{4_{max}} = 232 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{4_{min}} = -232 \text{ kg/cm}^2.$$

Näitest selgub, et suurimad peapinged ei pruugi esineda ainult äärmistes kiududes

## § 69. Talade arvutus lubatava koormuse järgi

Eespool tala ristlõike valik põhines lubatavale pingele. Seejuures lugesime piiriliselt ohtlikuks tala olukorra, mil suurim normaalpinge ohtlikus lõikes saavutab voolavuspiiri väärtuse. Tugevustingimus avaldus:

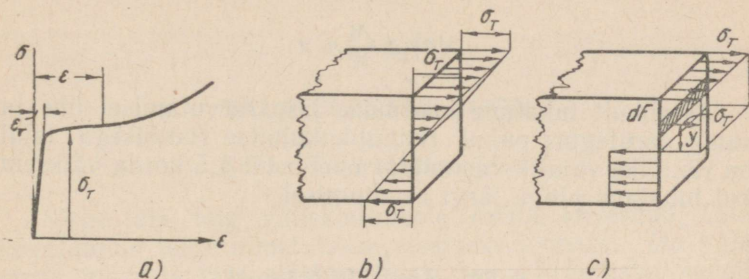
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{k},$$

kus  $\sigma_T$  on materjali voolavuspiir ning  $k$  — tugevusvaru.

Nagu aga nägime võlli väände vaatlemisel, annab pingete ebahütlase jaotuse ja plastilise materjali korral ristlõike mõõdete määramine lubatavate koormuste järgi teise tulemuse kui lubatavate pingete järgi, kuigi tugevusvaru jääb samaks. Samasugune olukord on plastilisest materjalist paindele töötava tala korral. Joonisel 140, *a* on skemaatiliselt näidatud plastilise materjali tõmbediagramm. Kui tala ohtlikema ristlõike äärmistes kiududes pinge saavutab väärtuse  $\sigma_T$ , siis on ristlõikes mõjuvate pingete epüüril joonisel 140, *b* näidatud kuju. Koormuse edasisel suurendamisel maksimaalne pinge äärmistes kiududes materjali voolavuse tõttu enam ei suurene. Koormuse suurendamisega suureneb pinge ainult neutraaljoone lähedal asetsevates kiududes.

Kui pinged materjalis saavutavad kogu ristlõike ulatuses voolavuspiiri, s. o. pingete epüür võtab kahe ristküliku kuju

(joon. 140, c), siis tala kandevõime koormuse mingi väärtuse juures on ammendatud. Määrame tala piirilukorradele vastava paindemomendi suuruse  $M_{piir}$ . Välismoment  $M_{piir}$  peab tasakaalutingimuse järgi võrduma sisemomendiga. Sisemoment võrdub sisejõudude elementaarmomentide summaga neutraaltelje suhtes.



Joonis 140.

Viirutatud pinnaelemendile  $dF$  mõjub jõud  $\sigma_T dF$ . Selle jõu moment neutraaltelje suhtes võrdub  $\sigma_T y dF$ .

Järelikult

$$M_{piir} = \int_F \sigma_T y dF$$

ehk lõike sümmeetrilise tõttu neutraaljoone suhtes

$$M_{piir} = 2\sigma_T \int_0^{\frac{h}{2}} by dy = \frac{\sigma_T b h^2}{4}$$

( $\sigma_T$  võib integraali märgi ette tuua, kuna ta on konstantne kogu ristlõike ulatuses).

Tugevusvaru  $k$  korral tugevustingimus avaldub:

$$[M] \leq \frac{M_{piir}}{k} = \frac{\sigma_T b h^2}{4k}$$

ehk tuues sisse lubatava pinget  $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{k}$ , saame:

$$[M] \leq \frac{[\sigma] b h^2}{4} \quad (192)$$

ehk

$$[\sigma] \geq \frac{4[M]}{bh^2} = \frac{M}{\frac{3}{2}W}$$

Arvutamisel lubatava pinge järgi saime:

$$[\sigma] \geq \frac{M}{W}.$$

Järelikult lubatava koormuse järgi arvutamisel ühe ja sama varuteguri puhul ristkülikukujulise ristlõikega talal on ristlõike vajalik vastupidavusmoment 1,5 korda väiksem kui lubatava pinge järgi arvutamisel.

## § 70. Kontrollküsimusi

Kuidas muutuvad paindel normaalpinged tala ristlõikes?

Mida nimetatakse vastupidavusmomentiks?

Millega on võrdne ristküliku ja ringi vastupidavusmoment?

Kuidas avaldub painde arvutusvalem?

Kuidas avaldub paindel tangentsiaalpingete valem?

Millega võrduvad paindel tangentsiaalpinged tala äärmistes kiududes?

Millega võrduvad paindel tangentsiaalpinged ristkülikukujulise ristlõikega talas?

Missugusel juhul on otstarbekohane valida tala ristlõige sümmeetriline neutraaltelje suhtes?

Kuidas toimub tala tugevuse kontroll peapingete järgi?

---

## TALA ELASTNE JOON

## § 71. Tala elastne joon

Sirge tala telg väliskoormuste mõjul kõverdub. Tala kõverdunud telge nimetatakse elastseks jooneks. On vaja osata määrata tala elastset joont, kuna arvutustel sageli püstitatakse nõue, et mitte ainult talas tekkivad pinged ei ületaks lubatavat pinget, vaid ka tala maksimaalne läbipaine ei ületaks etteantud suurust. Kui vaatleme staatiliselt määramatuid talasid, s. o. selliseid talasid, millel reaktsioonide arv on suurem staatika tasakaalutingimuste arvust, siis puudujäävad võrrandid leiame deformatsiooni-tingimuste põhjal.

Paindel pingevõrrandi tuletamisel (§ 63) me saime valemi (173):

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ} \quad (173)$$

ehk

$$\varrho = \frac{EJ}{M}.$$

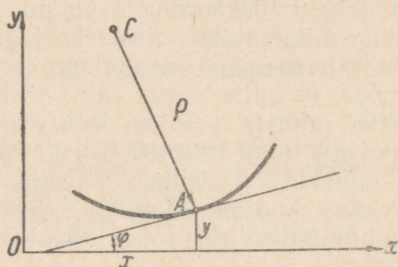
mis väljendab *painde teooria kõige tähtsamat seost*. Sõna-des see valem väljendub nii: *konstantse ristlõikega tala elastse joone meelevaldses punktis kõverusraadius  $\varrho$  on võrdeline jäikusega  $EJ$  ja pöördvõrdeline paindemomendiga  $M$* . Kui tala painutab jõupaar, siis moment  $M$  on konstantne tala kogu pikkuse ulatuses, mistõttu ka kõverusraadius on konstantne suurus, s. o. tala elastne joon on ringjoone osaks. Kõikidel teistel juhtudel võib elastsel joonel olla väga mitmesugune kuju. Elastse joone võrrandi saamiseks ristkoordinaatides lepime kokku suunata  $x$ -telg mööda tala telge paremale,  $y$ -telg aga vertikaalselt üles. Elastse joone võrrand peab andma tema punktide koordinaatide  $x$  ja  $y$  vahelise olenevuse. Selle olenevuse põhjal võime koordinaa-

tide algusest kaugusel  $x$  asetseva tala iga ristlõike jaoks leida vastava läbipainde  $y$ .

Kõverusraadiuse leidmiseks punktis  $A$  koordinaatidega  $x, y$  on matemaatikas tuletatud järgmine avaldis (joon. 141).

$$\rho = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Kõverusraadiuse selle täpse avaldise võime asendada lihtsama, ligikaudsema avaldisega, sest paindel on lubatavad läbivajumised väga väikesed (moodustavad ligikaudu



Joonis 141.

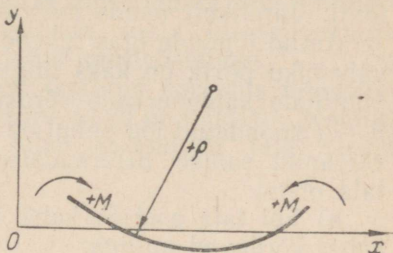
ühe tuhandendiku tala pikkusest) ning elastne joon erineb vähe sirgest. Suurus  $\frac{dy}{dx}$ , mis kujutab endast  $\tan \varphi$ , s. o. elastse joone puutuja ja  $x$ -telje positiivse suuna vahelise nurga tangensit, on niivõrd väike, et võetuna ruutu, muutub tähtsusetult väikseks, võrreldes juurdeliidetava ühega. Selle suuruse väiksuse tõttu võime avaldise  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$  jätta tähele panemata. Kõverusraadiuse leidmisel tehtav viga ei ületa seejuures 0,5%. Taolisel juhul avaldub tala elastse joone kõverusraadius lihtsamal kujul:

$$\rho = \pm \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \quad (194)$$

Asetades väärtuse  $\rho$  valemisse (173), saame elastse joone võrrandi järgmisel kujul (diferentsiaalne kuju):

$$\pm EJ \frac{d^2y}{dx^2} = M. \quad (195)$$

Võrrandi vasaku poole ees seisvad kaks märki on vajalikud vasak- ja parempoolsete osade märkide kooskõlastamiseks. Vasakus osas märk asetatakse sõltuvalt kõvera kõveruse suunast, parempoolses osas võetakse momendi märk. Kui kõver on pööratud nõgususega positiivsete  $y$  suunas (joon. 142), siis  $\varrho > 0$ , sest  $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$  ja vastupidi, kui kõver on pööratud nõgususega negatiivsete  $y$  poole (joon. 143), siis  $\varrho < 0$ , sest  $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ . Kui kokkuleppeliselt lugeda  $y$ -telg suunatuks üles, siis  $\varrho$  või  $\frac{d^2y}{dx^2}$  märk langeb

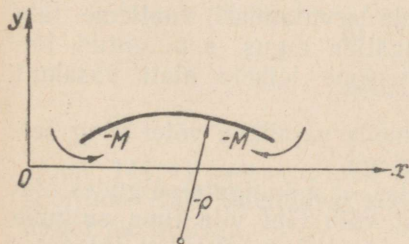


Joonis 142.

ühte paindemomendi märgiga, mida võime tähele panna joonistel 142 ja 143. Siit järeldub, et nimetatud tingimusel koordinaattelgede valikul elastse joone võrrand avaldub üldkujul:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = M. \quad (196)$$

Et saada elastse joone võrrandit kujul, mis seoks vahetult läbipainde  $y$  ja abstsissi  $x$ , tuleb võrrandit (196) kaks korda integreerida. Esimene integreerimine annab võrrandi, mis seob elastse joone elementide puutujate ja  $x$ -telje vahelise nurkade tangensid  $\left(\frac{dy}{dx}\right)$  elementide abstsissidega. Teine integreerimine viib elastse joone võrrandi juurde, mis annab läbipainde  $y$  ja abstsissi  $x$  vahelise vahetu seose. Iga



Joonis 143.

integreerimise järel saame mõnesuguse konstandi. Pärast tala elastse joone võrrandi kahekordset integreerimist saame tala iga vahemiku jaoks kaks integreerimiskonstanti.

Kui näiteks talale mõjub  $n - 1$  koondatud jõudu, siis tala jaotub  $n$  vahemikuks, millede piirideks on jõudude rakenduspunktid. Igale  $n$  vahemikust võime koostada oma momentide võrrandi. Integreerides kaks korda igat neist võrrandeist, saame üldiselt  $2n$  tundmatut meelevaldset konstanti. Järelikult nende määramiseks vajame  $2n$  võrrandit.

Antud jõudude igas rakenduspunktis, s. o. kahe naabervahemiku piiril, on kaks tingimust: läbipainete võrdsus ja puutujate kaldenurkade võrdsus. Järelikult neid tingimusi  $n - 1$  koondatud jõu puhul on  $2(n - 1)$ . Kaks puudujäävat võrrandit saame deformatsiooni tingimuste vaatlemisest tala otstel:

a) kui tala asetseb kahel toel, siis läbipainded tugede kohal võrduvad nulliga;

b) kui tala on ühe otsaga jäigalt kinnitatud, siis kinnituskohas läbipaine võrdub nulliga ja puutuja kaldenurk võrdub nulliga. Seega talale mõjuvate jõudude meelevaldse arvu korral meil on küllaldane arv võrrandeid integreerimiskonstantide määramiseks.

Tala vahemikkude suure arvu korral viib see meetod suure arvu tundmatutega võrrandsüsteemi lahendamisele. Kuid pidades silmas mõningaid tingimusi ja vahemikkude järgi paindemomentide koostamise ning integreerimise võtteid, võime alati tundmatute arvu vähendada kahele. See lihtsustab tunduvalt mitme vahemikuga tala elastse joone leidmise ülesannet.

Eelkõige lepime kokku paigutada koordinaatide algus tala vasakusse otsa, kusjuures  $x$ -telje suuname paremale,  $y$ -telje aga üles. Momentide arvutamisel vaatleme tala osa, milles asetseb koordinaatide algus, s. o. antud lõikes momenti määrates läheneme lõikele alati vasakult poolt.

Nüüd kirjeldame kolme meile vajalikku võtet ning selgitame neid vastavate näidetega.

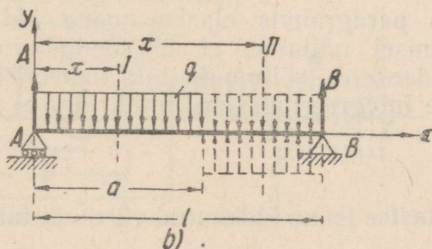
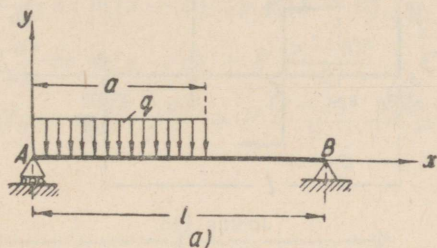
Esimene võte seisneb selles, et mõningate sulgudes olevate avaldiste integreerimist võib läbi viia ilma sulgude avamiseta. Nii näiteks  $P(x - a)$  kujuga avaldise integreerimine viiakse läbi ilma sulgude avamiseta alljärgneva valemiga:

$$\int P(x - a)^m dx = P \frac{(x - a)^{m+1}}{m + 1} + C.$$

Selle valemi järgi integreerimine erineb sulgude eetneva avamisega integreerimisest ainult meelevaldse konstandi väärtuse poolest.

Teine võte seisneb alljärgnevas. Kui talale mõjub jaotatud koormus, mis ei ulatu tala otsani, siis tuleb seda pikendada tala otsani. Selleks et mitte muuta tala töötingimusi, tuleb üheaegselt rakendada sama intensiivsusega koormus, mis on võrdvastupidine juurdelisatuga.

Kui talale mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega  $q$ , mis ei ulatu tala otsani, nagu on näidatud joonisel 144,  $a$ , siis seda koormust tuleb pikendada tala otsani



Joonis 144.

(joon. 144,  $b$ ) ja rakendada juurdelisatule võrdvastupidine koormus. Kaks täiendavat koormust on joonisel 144,  $b$  näidatud punktiiriga.

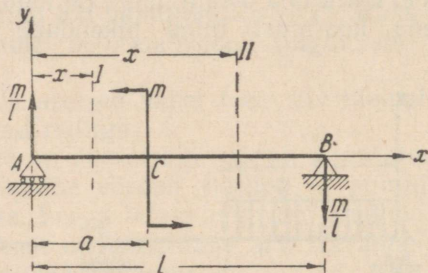
Kolmandat võtet selgitame näite varal. Mõjuga talale vasakust toest kaugusel  $a$  koondatud moment  $m$  (joon. 145). Kui läheneme teise vahemiku lõikele kokkuleppe kohaselt koordinaatide algusest, siis paindemoment lõikes avaldub:

$$Ax - m.$$

Midagi ei muutu, kui me selle momendi kirjutame järgmisel kujul:

$$Ax - m(x - a)^0,$$

s. o. me tõime sisse ühega võrduva teguri  $(x - a)^0$ , kus  $a$  on tala pikkus koordinaatide algusest kuni lõikeni, kuhu on rakendatud koondatud moment  $m$ . Selles seisabki kolmas võte, et korrutame koondatud momenti suluga  $(x - a)^0$ , mis võrdub ühega.



Joonis 145.

Järgmises paragrahvis elastse joone üldistatud võrrandi tuletamisel näitame, et ülaltoodud tingimuste ja võtete rakendamisel, sõltumata tala vahemikkude arvust, meelevaldsete integreerimiskonstantide arv ei ületa kunagi kahte.

## § 72. Elastse joone üldistatud võrrandi tuletamine

Olgu joonisel 146 toodud tala positiivsete koormuste (mis annavad positiivseid paindemomente) mõjul tasakaalus. Koordinaatide alguse võtame punktis  $O$ ,  $x$ -telje suuna tala telge mööda paremale,  $y$ -telje aga vertikaalselt ülles.

Vaatleme tala viit vahemikku.

*I vahemik.* Esimeses vahemikus  $OA$  koormusi ei ole. Järelikult elastse joone võrrand avaldub:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad EJ \frac{dy}{dx} = C_1,$$

$$EJy = C_1x + D_1.$$

II vahemik: AB. Rakendame kolmandat võtet:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = m(x - a)^0.$$

Selle võrrandi integreerimiseks rakendades esimest võtet:

$$EJ \frac{dy}{dx} = m(x - a) + C_2,$$

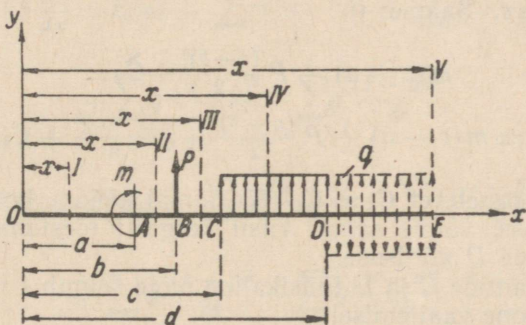
$$EJy = m \frac{(x - a)^2}{2} + C_2x + D_2.$$

III vahemik: BC.

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = m(x - a)^0 + P(x - b),$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = m(x - a) + P \frac{(x - b)^2}{2} + C_3,$$

$$EJy = m \frac{(x - a)^2}{2} + P \frac{(x - b)^3}{6} + C_3x + D_3.$$



Joonis 146.

IV vahemik: CD.

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = m(x - a)^0 + P(x - b) + q \frac{(x - c)^2}{2},$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = m(x - a) + P \frac{(x - b)^2}{2} + q \frac{(x - c)^3}{6} + C_4,$$

$$EJy = m \frac{(x - a)^2}{2} + P \frac{(x - b)^3}{6} + q \frac{(x - c)^4}{24} + C_4x + D_4.$$

V vahemik: DE. Jaotatud koormust V vahemikus ei ole; seepärast lisame võrdsete integreerimiskonstantide saami-

seks vastavalt teisele võttele positiivse koormuse ning tala töötingimuse säilitamiseks — samasuguse negatiivse koormuse. Lisatud koormused on joonisel näidatud punktiiriga.

Sel juhul saame  $V$  vahemiku jaoks:

$$\begin{aligned}
 EJ \frac{d^2y}{dx^2} &= m(x-a)^0 + P(x-b) + q \frac{(x-c)^2}{2} - q \frac{(x-d)^2}{2}, \\
 EJ \frac{dy}{dx} &= m(x-a) + P \frac{(x-b)^2}{2} + q \frac{(x-c)^3}{6} - q \frac{(x-d)^3}{6} + C_5, \\
 EJy &= m \frac{(x-a)^2}{2} + P \frac{(x-b)^3}{6} + q \frac{(x-c)^4}{24} - q \frac{(x-d)^4}{24} + \\
 &\quad + C_5x + D_5.
 \end{aligned}$$

Konstantide võrdsus ( $C_1 = C_2 = \dots = C$  ja  $D_1 = \dots = D$ ) järgneb vastavate võrrandite võrdlemisest, milledesse asetatakse kahe naabervahemiku piirile vastavad  $x$  väärtused. Et tõestada näiteks võrdsust  $C_3 = C_4$ , asetame III ja IV vahemikkude puutujate kaldenurkade võrranditesse  $x = c$ . Saame:

$$\begin{aligned}
 m(c-a) + P \frac{(c-b)^2}{2} + C_3 &= \\
 = m(c-a) + P \frac{(c-b)^2}{2} + q \frac{(c-c)^3}{6} + C_4,
 \end{aligned}$$

millest järgneb, et  $C_3 = C_4$ . Tõestanud kõikide konstantide  $C$  võrdsuse, võime samal viisil kergesti tõestada kõikide konstantide  $D$  võrdsuse.

Konstantide  $C$  ja  $D$  füüsikaline mõte selgub  $I$  vahemiku elastse joone vaatlemisel.

Kui tähistada elastsele joonele koordinaatide alguses tõmmatud puutuja kaldenurga tangensi  $\alpha_0$ , samas lõikes läbipainde aga  $f_0$ , siis  $I$  vahemiku puutujate ja kaldenurkade võrranditest, kui  $x = 0$ , saame:

$$\begin{aligned}
 EJ\alpha_0 &= C, \\
 EJf_0 &= D.
 \end{aligned}$$

Järelikult konstant  $C$  kujutab enesest koordinaatide algusest tõmmatud puutuja kaldenurga tangensit, mis on korrutatud tala jäikusega  $EJ$ , konstant  $D$  aga — koordinaatide alguses läbipainet, mis on korrutatud jäikuse  $EJ$  sama suurusega.

Asetame konstantide  $C$  ja  $D$  väärtused  $V$  vahemiku puu-

tujate kaldenurkade võrrandisse ja läbipainete võrrandisse kui kõige üldisemasse võrrandisse, mis sisaldab kõiki painet esile kutsuvaid faktoreid (jõupaar, koondatud koormus ja jaotatud koormus).

Siis puutujate kaldenurkade võrrand avaldub:

$$EJ \frac{dy}{dx} = EJ\alpha_0 + m(x-a) + P \frac{(x-b)^2}{2} + q \frac{(x-c)^3}{6} - q \frac{(x-d)^3}{6}.$$

Läbipainete võrrand:

$$EJy = EJf_0 + EJ\alpha_0 x + m \frac{(x-a)^2}{2} + P \frac{(x-b)^3}{6} + q \frac{(x-c)^4}{24} - q \frac{(x-d)^4}{24}.$$

Üldiselt võime need võrrandid talale mõjuvate koormuste mitmekordsel kordumisel kirjutada järgmisel kujul:

$$EJ \frac{dy}{dx} = EJ\alpha_0 + \sum m(x-a) + \sum P \frac{(x-b)^2}{2} + \sum q \frac{(x-c)^3}{6} - \sum q \frac{(x-d)^3}{6}, \quad (197)$$

$$EJy = EJf_0 + EJ\alpha_0 x + \sum m \frac{(x-a)^2}{2} + \sum P \frac{(x-b)^3}{6} + \sum q \frac{(x-c)^4}{24} - \sum q \frac{(x-d)^4}{24}. \quad (198)$$

Võrrandeid (197) ja (198) nimetatakse kas elastse joone üldistatud (koormuste vaadeldud tüüpide jaoks) või universaalseiks võrrandeks. Meetod, mis tehnika ülesannete lahendamisel annab võrranditega (197) ja (198) analoogilised võrrandid, on üldiselt välja töötatud A. N. Krõlovi poolt.

Kui tala on jäigalt kinnitatud, siis tundmatud  $\alpha_0$  ja  $f_0$  muutuvad nulliks (kinnituskohal langeb ühte koordinaatide algusega), kuna kinnituses puutuja kaldenurk  $x$ -teljega ja läbipaine võrduvad nulliga.

Kui tala asetseb vabalt kahel toel kas konsoolideta või ühe konsooliga, siis jääb määrata ainult üks tundmatu  $\alpha_0$ , kuna vasakul otsal, mis langeb ühte koordinaatide algu-

sega, läbipaine võrdub nulliga. Sel juhul tundmatu  $\alpha_0$  määratakse tingimusest, et läbipaine teise, parempoolse toe kohal võrdub nulliga.

Kolmandal juhul, kui vabalt kahel toel asetseval talal on mõlemal pool tugesid konsoolid, mispuhul koordinaatide algus järelikult ei asetse tugede kohal, tuleb määrata kaks tundmatut:  $\alpha_0$  ja  $f_0$ . Need tundmatud määratakse tingimusest, et läbipained tugede kohal võrduvad nulliga.

### § 73. Tala paigutuste määramise erijuhud elastse joone üldistatud võrrandi abil

Allpool me vaatleme praktikas enam esineva tala paigutuste määramise mõningaid erijuhtusid.

**Juhus 1.** Konsooltalale mõjub vabas otsas jõud  $P$  (joon. 147). Määrata läbipaine jõu  $P$  kohal.

*Lahendus.* Toereaktsioon kinnituses

$$A = P.$$

Jäikkinnituse moment

$$m = -Pl.$$

Kuna koordinaatide alguses puutuja kaldenurk ja läbipaine on võrdsed nulliga, s. o.  $\alpha_0 = 0$  ja  $f_0 = 0$ , siis võime kohe võrrandi (198) järgi kirjutada läbipainde jõu mõjumise lõikes  $B$ . Võrrandi kaht viimast liiget sel juhul ei esine, kuna puudub jaotatud koormus. Momenti  $m$  sisaldava liikme ees märk muutub vastupidiseks, kuna jäikkinnituse moment on negatiivne. Seega võrrandist (198), kui  $x = l$ , saame:

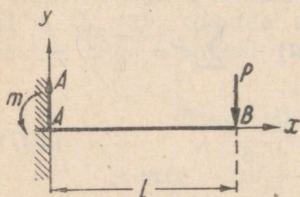
$$EJy_B = A \frac{l^3}{6} - m \frac{l^2}{2}.$$

Asetades  $A$  ja  $m$  väärtused, saame:

$$y_B = \frac{1}{EJ} \left( P \frac{l^3}{6} - P \frac{l^2}{2} \right) = -\frac{Pl^3}{3EJ}. \quad (199)$$

Miinus märk näitab, et läbipaine on suunatud negatiivsete  $y$  poole, s. o. allapoole.

**Juhus 2.** Määrata konsooltala vaba otsa läbipaine (joon. 148) momendi  $m$  mõjul.



Joonis 147.

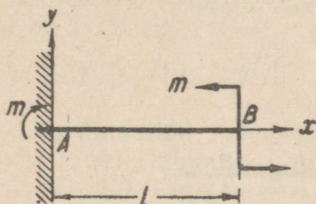
*Lahendus.* Kinnitusemoment on võrdne  $m$ . Läbipainde võime võrrandi (198) järgi, kui  $x=l$ , kirjutada kohe, kuna  $\alpha_0 = 0$  ja  $f_0 = 0$ :

$$EJy_B = \frac{ml^2}{2}$$

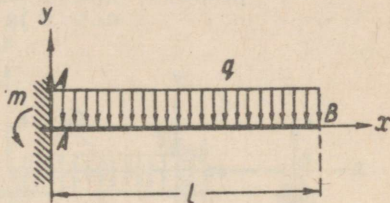
ehk

$$y_B = \frac{ml^2}{2EJ}. \quad (200)$$

**Juhus 3.** Määrata joonisel 149 esitatud tala vaba otsa läbipaine lõikes  $B$ .



Joonis 148.



Joonis 149.

*Lahendus.* Toereaktsioon kinnituses

$$A = ql.$$

Jäikkinnituse moment

$$m = -\frac{ql^2}{2}.$$

Koordinaatide alguses  $\alpha_0 = 0$  ja  $f_0 = 0$ .

Tala otsa läbipaine, s. o. kui  $x=l$ , avaldub võrrandi (198) järgi kujul:

$$EJy_B = A \frac{l^3}{6} - m \frac{l^2}{2} - q \frac{l^4}{24}.$$

Kaks viimast liiget on võetud miinusemärkidega, kuna moment  $m$  ja jaotatud koormus  $q$  on negatiivsed.

Asetades  $A$  ja  $m$  väärtused, saame läbipainde lõikes  $B$ :

$$y_B = \frac{1}{EJ} \left( q \frac{l^4}{6} - q \frac{l^4}{4} - q \frac{l^4}{24} \right) = -\frac{ql^4}{8EJ}. \quad (201)$$

**Juhus 4.** Määrata joonisel 150 kujutatud tala läbipainded lõigetes  $B$  ja  $C$ .

Lahendus. Toereaktsioon

$$A = P.$$

Jäikkinnituse moment

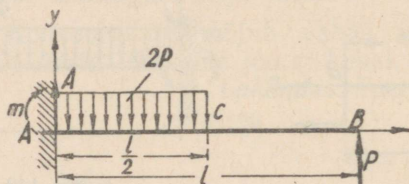
$$m = P \frac{l}{2}.$$

Jaotatud koormuse intensiivsus

$$q = \frac{4P}{l}.$$

Koordinaatide alguses

$$\alpha_0 = 0 \text{ ja } f_0 = 0.$$



Joonis 150.

Läbipainde lõikes  $C$ , s. o. kui  $x = \frac{l}{2}$ , saame võrrandist (198):

$$EJy_C = A \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} + m \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} - q \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^4}{24} = A \frac{l^3}{48} + m \frac{l^2}{8} - q \frac{l^4}{384}.$$

Jaotatud koormus ulatub lõikeni  $C$ . Seetõttu võrrandi (198) viimane liige muutub nulliks. Kuna jaotatud koormus on negatiivne, siis  $q$  ees on miinus. Asetades  $A$ ,  $m$  ja  $q$  väärtused, saame:

$$y_C = \frac{1}{EJ} \left( P \frac{l^3}{48} + P \frac{l^3}{16} - P \frac{l^3}{96} \right) = \frac{7Pl^3}{96EJ}.$$

Läbipaine lõikes  $B$  võrrandi (198) järgi, kui  $x = l$ , avaldub

$$EJy_B = A \frac{l^3}{6} + m \frac{l^2}{2} - q \frac{l^4}{24} + q \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^4}{24}.$$

Asetades  $A$ ,  $m$  ja  $q$  väärtused, leiame:

$$y_B = \frac{1}{EJ} \left( P \frac{l^3}{6} + P \frac{l^3}{6} - P \frac{l^3}{6} + P \frac{l^3}{96} \right)$$

ehk

$$y_B = \frac{25Pl^3}{96EJ}.$$

**Juhus 5.** Lihttala paindub koondatud jõu  $P$  mõjul (joon. 151). Määrata lõigete pöördenurgad tugede kohal, läbipaine jõu  $P$  kohal ja maksimaalne läbipaine.

*Lahendus.* Toereaktsioonid on võrdsed:

$$A = P \frac{b}{l}; \quad B = P \frac{a}{l}.$$

Koordinaatide alguses (punktis  $A$ ) läbipaine on null:  $f_0 = 0$ , aga  $\alpha_0 \neq 0$ . Lõike pöördenurga  $\alpha_0$  tangensi koordinaatide alguspunktis leiame tingimusest, et toe  $B$  kohal läbipaine võrdub nulliga. Kui  $x = l$ , siis võrrandist (198) saame:

$$0 = EJ\alpha_0 l + A \frac{l^3}{6} - P \frac{(l-a)^3}{6},$$

millest

$$EJ\alpha_0 = P \frac{b^3}{6l} - A \frac{l^2}{6} = P \frac{b^3}{6l} - P \frac{bl^2}{6l}$$

ehk

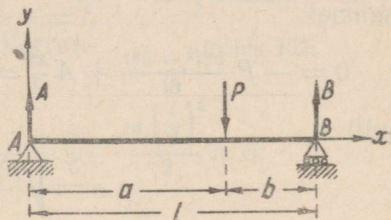
$$\alpha_0 = -P \frac{b(l^2 - b^2)}{6lEJ}. \quad (202)$$

Lõike pöördenurga parempoolse toe kohal leiame, kui valemis (202)  $b$  asemele asetame  $a$  ja muudame märgi vastupidiseks:

$$\alpha = \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6lEJ}.$$

Läbipainde jõu  $P$  kohal määrame võrrandist (198), võttes  $x = a$ :

$$EJy_P = EJ\alpha_0 a + A \frac{a^3}{6}$$



Joonis 151.

ehk

$$\begin{aligned} y_P &= -\frac{Pab(l^2 - b^2)}{6lEJ} + \frac{Pba^3}{6lEJ} = \\ &= -\frac{Pab(a^2 + 2ab + b^2 - b^2 - a^2)}{6lEJ} = -\frac{Pa^2b^2}{3EJl}. \end{aligned} \quad (203)$$

Tala maksimaalse läbipainde määramiseks peab teadma selle esinemise kohta. Viimase määramiseks kasutame tingimust, et maksimaalse läbipainde kohas on puutuja paralleelne  $Ox$ -teljega, s. o.  $\frac{dy}{dx} = 0$ . Esimeses vahemikus, eeldades, et  $a > b$ , puutujate kaldenurkade võrrandist (197) saame:

$$0 = -P \frac{b(l^2 - b^2)}{6l} + A \frac{x^2}{2} = -P \frac{b(l^2 - b^2)}{6l} + P \frac{b}{l} \frac{x^2}{2},$$

millest

$$x = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}.$$

Läbipainete võrrand esimeses vahemikus

$$EJy = EJ\alpha_0 x + A \frac{x^3}{6} = -P \frac{b(l^2 - b^2)}{6l} x + P \frac{b}{l} \frac{x^3}{6}.$$

Asetades sellesse avaldisse leitud  $x$  väärtuse, saame:

$$EJy_{max} = -P \frac{b(l^2 - b^2)}{6l} \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} + P \frac{b}{l} \left( \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \right)^3,$$

millest

$$y_{max} = \frac{-Pb(l^2 - b^2) \sqrt{3(l^2 - b^2)}}{27EJl}. \quad (204)$$

Erijuhul, kui jõud  $P$  mõjub tala keskel, s. o. kui  $a = b = \frac{l}{2}$ , on lõigete pöördenurgad tugede kohal:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{Pl^2}{16EJ}, \\ \alpha &= \frac{Pl^2}{16EJ}. \end{aligned} \right\} \quad (205)$$

Sellel erijuhul esineb maksimaalne läbipaine jõu kohal:

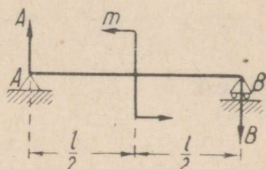
$$y_{max} = -\frac{Pl^3}{48EJ}. \quad (206)$$

**Juhus 6.** Lihttala paindub tala ava keskel mõjuva momendi  $m$  mõjul (joon. 152). Määrata elastse joone puutujate kaldenurgad tugede kohal ja tala maksimaalne läbipaine.

*Lahendus.* Antud tala reaktsioonid olid määratud lk. 204 ja avalduvad alljärgnevalt:

$$A = B = \frac{m}{l}.$$

Elastse joone puutuja kaldenurga koordinaatide alguses, s. o. toe  $A$  kohal, määrame tingimusest, et toe  $B$  kohal, kus  $x = l$ , läbipaine võrdub nulliga. Võrrandist (198) leiame:



Joonis 152.

$$EJy_B = EJ\alpha_0 l + \frac{m}{l} \frac{l^3}{6} - \frac{m \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = 0,$$

millest

$$EJ\alpha_0 l = \frac{ml^2}{8} - \frac{ml^2}{6}$$

ehk

$$\alpha_0 = - \frac{ml}{24EJ}.$$

Elastse joone puutuja kaldenurga toe  $B$  kohal leiame võrrandist (197):

$$EJ\alpha_B = EJ\alpha_0 + \frac{m}{l} \frac{l^2}{2} - m \frac{l}{2},$$

millest

$$\alpha_B = \alpha_0 = - \frac{ml}{24EJ}. \quad (207)$$

Tala esimeses vahemikus, vastavalt võrrandile (198), läbipainete võrrand kujuneb:

$$EJy = EJ\alpha_0 x + \frac{m}{l} \frac{x^3}{6} = - \frac{ml}{24} x + \frac{m}{l} \frac{x^3}{6}. \quad (a)$$

Määrame  $x$  väärtuse, mille puhul läbipaine esimeses

vahemikus saab maksimaalse väärtuse. Selleks koostame avaldise  $\frac{dy}{dx}$  ja võrrutame selle nulliga:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EJ} \left( -\frac{ml}{24} + \frac{m}{l} \frac{x^2}{2} \right) = 0$$

või

$$-\frac{l}{24} + \frac{x^2}{2l} = 0,$$

millest

$$x = \sqrt{\frac{2l^2}{24}} = \frac{l}{2\sqrt{3}}.$$

Esimeses vahemikus maksimaalse läbipainde leiame, asetades saadud  $x$  väärtuse läbipainete võrrandisse (a):

$$EJy_{max} = -\frac{ml}{24} \frac{l}{2\sqrt{3}} + \frac{m}{l} \frac{l^3}{144\sqrt{3}},$$

millest

$$y_{max} = -\frac{ml^2}{EJ\sqrt{3}} \left( \frac{1}{48} - \frac{1}{144} \right) = -\frac{ml^2}{72\sqrt{3}EJ}. \quad (208)$$

Määrame läbipainde tala keskel, s. o. kui  $x = \frac{l}{2}$ . Võrrandist (a) saame:

$$EJy_c = -\frac{ml}{24} \frac{l}{2} + \frac{m}{l} \frac{l^3}{48} = 0,$$

s. o. tala keskel läbipaine võrdub nulliga. Elastisel joonel on siin käänupunkt.

Teises vahemikus läbipainded on samad, mis esimeses vahemikus, kuid märgilt positiivsed.

**Juhus 7.** Lihttalale mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega  $q$  (joon. 153). Määrata läbipaine tala keskel.

*Lahendus.* Toereaktsioonid on võrdsed:

$$A = B = q \frac{l}{2}.$$

Eelnevalt määrame koordinaatide alguses (lõige toe kohal) kaldenurga tangensi  $\alpha_0$  tingimusest, et toe  $B$  kohal

läbipaine võrdub nulliga. Võrrandist (198), kui  $x = l$ , saame:

$$0 = EJ\alpha_0 l + A \frac{l^3}{6} - q \frac{l^4}{24},$$

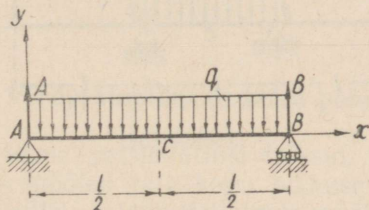
millest

$$EJ\alpha_0 = -A \frac{l^2}{6} + q \frac{l^3}{24} = -q \frac{l^3}{12} + q \frac{l^3}{24}$$

ehk

$$EJ\alpha_0 = -q \frac{l^3}{24}. \quad (209)$$

Läbipainde tala keskel leiame, kui asetame võrrandisse



Joonis 153.

(198) väärtused  $EJ\alpha_0$  ja  $x = \frac{l}{2}$ :

$$EJy_c = -q \frac{l^3}{24} \frac{l}{2} + A \left(\frac{l}{2}\right)^3 - q \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^4}{24}$$

ehk asetades reaktsiooni  $A$  väärtuse, leiame

$$EJy_c = -q \frac{l^4}{48} + q \frac{l^4}{96} - q \frac{l^4}{384},$$

millest

$$y_c = -\frac{5ql^4}{384EJ}. \quad (210)$$

Näide 65. Määrata läbipainded joonisel 154 esitatud tala otstes ja keskel, kui koormuse intensiivsus  $q = \frac{2P}{l}$ .

Lahendus: Reaktsioonid tugedes

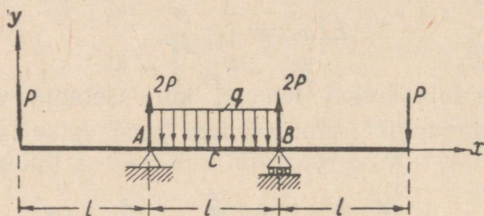
$$A = B = 2P.$$

Jaotatud koormuse intensiivsus

$$q = \frac{2P}{l}.$$

Koordinaatide alguse võtame tala vasakpoolsesse otsa.

Koordinaatide alguses  $\alpha_0 \neq 0$  ja  $f_0 \neq 0$ . Enne kui määrata läbipained, peame määrama  $EJ\alpha_0$  ja  $EJf_0$ , mis esinevad läbipainete võrrandis (198). Nende tundmatute määramiseks koostame kaks võrrandit tingimusest, et tugede kohal läbipainded võrduvad nulliga. Läbipaine toe  $A$  kohal võrdub nulliga:



Joonis 154.

$$0 = EJf_0 + EJ\alpha_0 l - P \frac{l^3}{6}.$$

Läbipaine toe  $B$  kohal võrdub nulliga:

$$0 = EJf_0 + EJ\alpha_0 2l - P \frac{(2l)^3}{6} + 2P \frac{l^3}{6} - \frac{2P}{l} \frac{l^4}{24}.$$

Laheñdame selle kahevõrrandilise süsteemi:

$$EJf_0 + EJ\alpha_0 l - P \frac{l^3}{6} = 0, \quad (a)$$

$$EJf_0 + 2EJ\alpha_0 l - \frac{13}{12} Pl^3 = 0. \quad (b)$$

Lahutades teisest võrrandist esimese, saame:

$$EJ\alpha_0 l - \frac{11}{12} Pl^3 = 0,$$

millest

$$EJ\alpha_0 = \frac{11}{12} Pl^2.$$

Võrrandist (a), asetades sellesse  $EJ\alpha_0$  väärtuse, leiame:

$$EJf_0 = \frac{1}{6} Pl^3 - \frac{11}{12} Pl^3 = -\frac{3}{4} Pl^3.$$

Nüüd võrrandist (198) määrame läbipainde tala keskel punktis C, kus  $x = \frac{3}{2} l$ ,

$$EJy_c = -\frac{3}{4} Pl^3 + \frac{11}{12} Pl^2 \cdot \frac{3}{2} l - P \frac{\left(\frac{3}{2} l\right)^3}{6} + \\ + 2P \frac{\left(\frac{3}{2} l - l\right)^3}{6} - \frac{2P}{l} \frac{\left(\frac{3}{2} l - l\right)^4}{24},$$

kust

$$y_c = \frac{19Pl^3}{192EJ}.$$

## § 74. Võrdvastupidavad talad paindele

Senini vaatlesime prismaatilisi talasid, s. o. selliseid, millel ristlõike mõõted tala kogu pikkuse ulatuses jäid konstantseteks. Selliste talade ristlõigete mõõted määrasime ohtlikus lõikes mõjuva maksimaalse paindemomendi  $M_{max}$  järgi, kusjuures ohtlikus lõikes pinget ei tohtinud ületada lubatavat  $[\sigma]$ :

$$W \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}. \quad (187)$$

On pikemata selge, et prismaatilise tala kõikides ülejäänud ristlõigetel pinged on väiksemad lubatavast ning ainult puhtal paindel on pinged prismaatilise tala kõikides ristlõigetel ühesugused. Viimasel juhul on tala kõik ristlõiked võrdohalikud. Seega konstantse ristlõikega tala paindel, välja arvatud puhas paine, on tala kõik ristlõiked, peale ohtliku, liigse tugevusvaruga. See näitab, et materjali on talades kasutatud ebaratsionaalselt.

Kõige ratsionaalsemaks tala kujud antud koormamisviisil on kuju, mille juures pinged kõikides ristlõigetel on võrdsed lubatavaga. Sellise kujuga talasid, mis rahuldavad seda tingimust, nimetatakse *võrdvastupidavateks taladeks paindele*.

Kui tähistada paindemoment võrdvastupidava tala

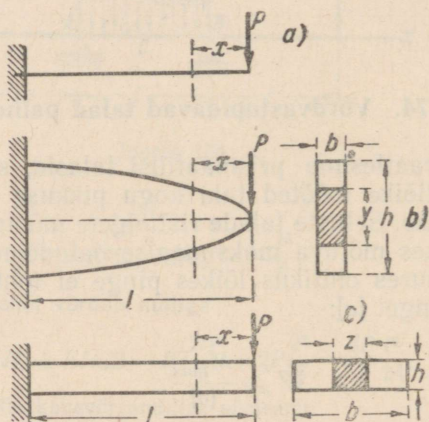
meevaldses ristlõikes  $M_x$ , vastupidavusmomendi aga  $W_x$ , siis tuleb silmas pidada tingimust:

$$\frac{M_x}{W_x} = \frac{M_{max}}{W_x} = \sigma = \text{konst.}$$

Siit

$$\frac{x}{W} = \frac{M_x}{M_{max}}. \quad (211)$$

Järelikult paindele võrdvastupidavates talades peavad ristlõigete vastupidavusmomendid olema võrdelised vastavate paindemomentidega.



Joonis 155.

Võrdvastupidavate taladega saadav materjali ökonoomia alati aga ei tasu end, kuna tala valmistamine muutub liiga keerukaks. Seetõttu on praktikas nimetatud talade rakendamine piiratud.

Võrdvastupidava tala teooria illustreerimiseks vaatleme alljärgnevat näidet.

Ristkülikukujulise ristlõikega tala on ühe otsaga jäigalt kinnitatud, teise otsa on aga rakendatud koondatud jõud  $P$  (joon. 155, a). Kuidas peab muutuma tala kõrgus konstantse laiuse juures ja kuidas peab muutuma tala laius konstantse kõrguse juures, et tala oleks kogu pikkuse ula-

tuses võrdvastupidav paindele? Määrata, millise läbipainde saab konstantse kõrgusega võrdvastupidava tala vaba ots.

*Lahendus.* 1) Tala laius on konstantne. Paindemoment tala vabast otsast kaugusel  $x$  asetsevas meelevaldses lõikes avaldub:

$$M_x = -Px.$$

Vastav vastupidavusmoment paindele (joon. 155, *b*):

$$W_x = \frac{by^2}{6},$$

kus  $b$  on tala konstantne laius ning  $y$  — tala muutuv kõrgus.

Paindemoment kinnitustasapinnas

$$M_{max} = -Pl.$$

Kui tähistada kinnitustasapinnas tala kõrgus  $h$ , siis vastav vastupidavusmoment paindele avaldub:

$$W = \frac{bh^2}{6}$$

Võrrandi (211) alusel saame:

$$\frac{by^2}{6} = \frac{-Px}{-Pl},$$

millest

$$y^2 = \frac{h^2}{l} x. \quad (212)$$

Järelikult konstantse laiuslega võrdvastupidava tala ristlõike kõrgus muutub parabooli seaduse järgi (joon. 155, *b*).

Teades lubatavat pinget võrrandist

$$[\sigma] = \frac{M_{max}}{\frac{bh^2}{6}},$$

võime määrata  $h$ , järelikult aga ka võrrandiga (212) tala kõrguse  $y$  meelevaldses ristlõikes.

Kuna antud parabooli pindala moodustab  $\frac{2}{3}$  pikkusega  $l$  ja kõrgusega  $h$  ristküliku pindalast, siis sellise tala ruum-

ala moodustab  $\frac{2}{3}$  konstantse ristlõikega  $bh$  tala ruumalast, s. o. materjali ökonoomsus on 33%.

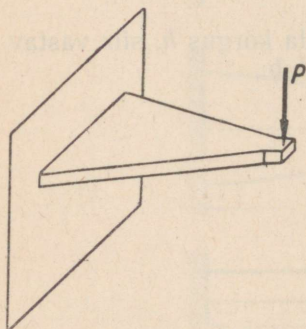
2) Tala kõrgus on konstantne. Tähistame tala konstantse kõrguse  $h$ , muutuva laiuse  $z$  ja tala laiuse kinnitustasapinnas  $b$ . Võrrandi (211) alusel leiame

$$\frac{W_x}{W} = \frac{\frac{zh^2}{6}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{-Px}{-Pl},$$

millest

$$z = \frac{b}{l}x. \quad (213)$$

Sel juhul tala laius muutub sirgjoone seaduse järgi. Sellise kujuga tala on kergesti valmistatav. Ta on kujutatud joonisel 155, *c*. Taoline tala, võrreldes prismaatilise talaga, mille ristlõige on  $bh$ , annab 50% materjali ökonoomiat. Tegelikult on ökonoomia mõnevõrra väiksem, kuna tala vaba ots kujundatakse mingil väiksel pikkusel konstantse laiusega (joon. 156). Vastasel juhul tekiksid tala otsas põikjõu tõttu lubamatult suured tangentsiaalpinged. Seepärast tugevdatakse ka paindele võrdvastupidava konstantse laiusega tala vaba otsa.



Joonis 156.

3) Konstantse kõrgusega võrdvastupidava tala vaba otsa läbipainde määramisel viisil. Valemi (173) § 63 alusel võime kirjutada

$$\frac{EJ_x}{\varrho} = -Px,$$

kus  $\varrho$  tähistab tala elastse joone kõverusraadiust meelevaldses vaadeldavas ristlõikes ning  $I_x$  — selle ristlõike inertsmomenti. Vaadeldaval juhul inertsmoment, silmas pidades võrrandit (213), võrdub:

$$J_x = \frac{b}{12} xh^3.$$

$$\frac{Ebxh^3}{12lq} = -Px$$

ehk

$$q = -\frac{Ebh^3}{12Pl} = -\frac{EJ}{Pl},$$

kus  $J$  tähistab tala ristlõike inertsmomenti kinnitustasapinnas, mis võrdub  $\frac{bh^3}{12}$ . Saadud avaldise parem pool on konstantne. Järelikult vaadeldava tala elastse joone kõverusraadius  $\rho$  on kõikides lõigetes üks ja sama, s. o. tala paindub ringjoone kaart mööda (joon. 157). Täisnurksest kolmnurgast  $OAB$  leiame:

$$\overline{OB^2} = \overline{OA^2} + \overline{AB^2}.$$

Läbipainde  $f$  väiksuse tõttu, võrreldes kõverusraadiusega  $\rho$  (joonis 157 ei ole tehtud mõõtkavas) võime poolkõõlu, s. o. lõigu  $AB$  ilma suurema veata võtta võrdseks tala pikkusega  $l$ . Järelikult saame:

$$\rho^2 = (\rho - f)^2 + l^2,$$

millest

$$\rho^2 = \rho^2 - 2\rho f + f^2 + l^2.$$

Jättes suuruse  $f^2$  tema väiksuse tõttu arvestamata, võrreldes samas valemis esinevate teiste suurustega, saame:

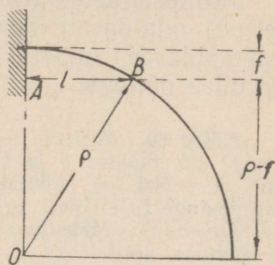
$$2\rho f = l^2,$$

millest

$$f = \frac{l^2}{2\rho}.$$

Asetades sellesse avaldise kõverusraadiuse suuruse  $q = -\frac{EJ}{Pl}$ , leiame:

$$f = -\frac{Pl^3}{2EJ}. \quad (214)$$



Joonis 157.

Võrreldes saadud läbipainet konstantse ristlõikega tala läbipaindega

$$f = - \frac{Pl^3}{3EJ}, \quad (199)$$

näeme, et võrdvastupidava tala läbipaine on 1,5 korda suurem kui konstantse ristlõikega talal.

Kuna ühesuguste koormuste ja lubatavate pingete korral võrdvastupidav tala deformeerub rohkem kui konstantse ristlõikega tala, siis kasutatakse võrdvastupidavaid talasid ainult neil juhtudel, kui on vaja pehmenada löögiliste koormuste mõju.

Mitmesugustes transpordiliikides (autod, vagunid ja teised) laialdaselt kasutatavad lehtvedrud kujutavad võrdvastupidavaid talasid. Selgitame selliste vedrude arvutust arvulise näitega.

**Näide 66.** Määrata terasest lehtvedru (joon. 158, a), mille pikkus  $l = 40$  cm, mõõted  $b$  ja  $h$ , et vedru vabale otsale rakendatud koormus  $P = 500$  kg tekitaks läbipainde vähemalt 5 cm. Lubatav paindepinge  $[\sigma] = 5000$  kg/cm<sup>2</sup>;  $E = 2,1 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>.

*Lahendus.* Maksimaalne paindemoment, mõjudes vedru kinnitustasapinnas, võrdub:

$$M_{max} = Pl.$$

Tugevusvõrrandist (187) saame:

$$W = \frac{bh^2}{6} \geq \frac{Pl}{[\sigma]},$$

millest

$$b \geq \frac{6Pl}{h^2[\sigma]} = \frac{6 \cdot 500 \cdot 40}{h^2 \cdot 5000} = \frac{24}{h^2}. \quad (a)$$

Teiseks võrrandiks otsitavate mõõtete  $b$  ja  $h$  määramisel on deformatsiooni võrrand. Võrrandi (214) alusel saame:

$$5 = \frac{500 \cdot 40^3}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{bh^3}{12}}.$$

Valemi parema poole ees seisev miinusmärk on ära jäetud, kuna antud juhul on tähtis läbipainde absoluutväärtus, mitte aga selle suund.

Lahendades viimase võrrandi  $b$  suhtes, saame:

$$b = \frac{500 \cdot 64\,000 \cdot 12}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 5h^3} = \frac{18,3}{h^3}.$$

Avaldistest (a) ja (b) saame:

$$\frac{24}{h^2} = \frac{18,3}{h^3},$$

millest

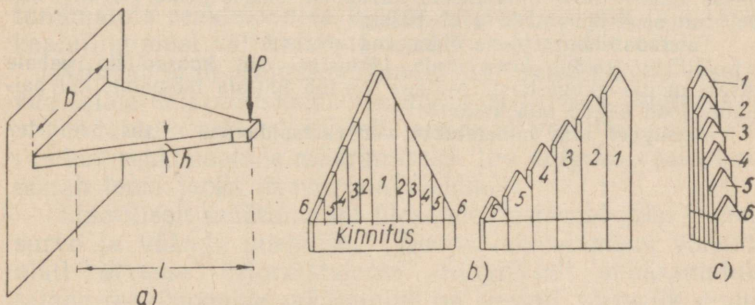
$$h = \frac{18,3}{24} = 0,763 \text{ cm.}$$

Seega võrrandist (a) saame

$$b = \frac{24}{0,763^2} = 41,3 \text{ cm.}$$

Umardame mõnevõrra saadud mõõteid ja võtame

$$h = 0,75 \text{ cm, } b = 42 \text{ cm.}$$



Joonis 158.

Kontrollime valitud mõõdete korral saadavaid pingeid ja läbipainet:

$$\sigma = \frac{Pl}{bh^2} = \frac{500 \cdot 40 \cdot 6}{42 \cdot 0,75^2} = 5100 \text{ kg/cm}^2,$$

$$f = - \frac{Pl^3}{2E \frac{bh^3}{12}} = - \frac{500 \cdot 40^3 \cdot 12}{2 \cdot 2,1 \cdot 10 \cdot 42 \cdot 0,75^3} = - 5,17 \text{ cm.}$$

Saadud pinge ületab lubatava ainult 2% võrra. Läbipaine on natuke suurem kui 5 cm, mistõttu võetud mõõteid võib lugeda vastuvõetavateks püstitatud tingimustele.

Praktikas kasutatakse mõnevõrra teise kujuga lehtvedrusid. Vedru suur laius kinnitusekohas nõuab palju ruumi, mis on sageli ebamugav. Kui vedru lõigata üksikuteks võrdse laiusega ribadeks (nagu näidatud joonisel 158, b) ja ribad asetada üksteise peale (nagu

näidatud joonisel 158, c), siis sellisel viisil saadud vedru, kui mitte arvestada ribadevahelist hõõrdumist, töötab samuti nagu terve. Seejuures saavutame ruumi märkimisväärse ökonoomia. Loomulikult ter- vet lehtvedrut ei lõigata üksikuteks ribadeks, vaid viimased valmistatakse valmispikkusega kitsastest terasribadest ning seejärel pan- nakse kokku eespoolnäidatud viisil. Vaadeldavas näites võime vedru monteerida näiteks kuuest üksikust ribast, kusjuures iga riba laius peab võrduma:

$$42 : 6 = 7 \text{ cm.}$$

## § 75. Kontrollküsimusi

Mida nimetatakse tala elastseks jooneks?

Milline on kõverusraadiuse  $\rho$ , paindemomendi  $M$  ja tala jääkuse  $EJ$  vaheline seos?

Milline on elastse joone võrrand diferentsiaalvõrrandist? Kuidas saa- dakse elastse joone diferentsiaalvõrrandist elastse joone võrrand, mis vahetult seob läbipainde  $y$  abstsissiga  $x$ ?

Tuletada elastse joone üldistatud võrrand.

Millega võrdub konsooltala läbipaine, kui konsooltala vabale otsale mõjub mingi jõud? Millega võrdub lihttala läbipaine, kui pai- nutav jõud mõjub tala keskel?

Missugust tala nimetatakse võrdvastupidavaks talaks paindele?

## STAATILISELT MÄÄRAMATUD TALAD

### § 76. Staatiliselt määramatute talade mõiste

Staatiliselt määramatuks nimetatakse sellist tala, mille tundmatute reaktsioonide üldarv on suurem, kui tala tasakaalutingimusi väljendavate staatika võrrandite arv.

Niinimetatud «liigsed» tundmatud reaktsioonid asetavad talale deformatsiooni lisatingimused. Need tingimused, väljendatuna matemaatiliselt, annavad vajaliku arvu võrrandeid reaktsioonide määramiseks. Iga «liigne» reaktsioon nõuab tema jaoks lisavõrrandi leidmist.

Staatiliselt määramatud ülesanded esinesid juba tõmbe, surve ja väände uurimisel. Nende lahendamisel võtsime alati arvesse deformatsiooni. Staatiliselt määramatute talade reaktsioonide määramine on samuti võimalik ainult deformatsioonide vaatlemise alusel. Seega võib öelda, et meelevaldse staatiliselt määramatu ülesande lahendamisel tuleb «liigsete» tundmatute leidmiseks staatika võrranditele lisada deformatsioonide vaatlemisest saadud vajalik arv võrrandeid.

Need deformatsioonide lisavõrrandid koostatakse mitmesuguste meetodite abil. Üheks lihtsamaks meetodiks on jõudude mõjumise sõltumatuse printsiip ehk liitmise printsiip, millega tutvusime § 20.

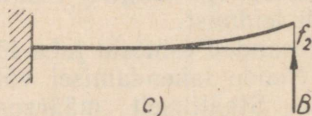
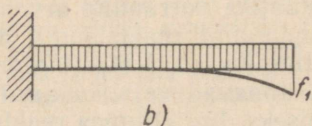
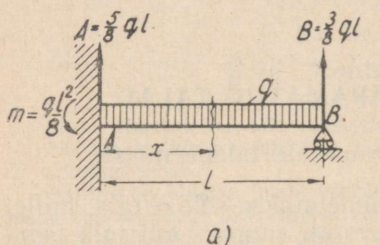
Staatiliselt määramatute talade uurimisel piirdume juhtudega, kus liigsete tundmatute arv ei ületa kahte.

### § 77. Ühest otsast jäigalt kinnitatud ja teise otsaga vabalt toel asetsev tala

Tala jäigalt kinnitatud otsas tekivad reaktsioonijõud ja kinnitusmoment. Teises otsas, mis asetseb toel, tekib

reaktsioonjõud. Seega talal, mis ühe otsaga on jäigalt kinnitatud, teisega aga asetseb toel, on kolm tundmatut. Ühes tasapinnas ja tala teljega risti mõjuvate jõudude korral on reaktsioonide määramiseks ainult kaks tasakaaluvõrrandit. Järelikult vadeldav talal on üks «liigne» tundmatu.

Selles talas võtame «liigseks» tundmatuks reaktsiooni, mis tekib toel asetsevas otsas.



Joonis 159.

Liigne tundmatu asetab tala deformatsioonile lisatingimuse. Antud juhul seisab lisatingimus selles, et läbipaine tala otsas, mis asetseb toel, peab võrduma nulliga. See tingimus, avaldatuna matemaatiliselt, annab deformatsiooni lisavõrrandi, mis võetuna koos tasakaaluvõrranditega lubab määrata vaadeldava tala kõik reaktsioonid.

Määrame näiteks joonisel 159, a esitatud maksimaalse paindemomendi ja maksimaalse läbipainde, kui talale mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega  $q$ .

Määrame esmalt liigse tundmatu reaktsiooni toes  $B$ . Jättes kõrvale toe  $B$ , saame staatiliselt määratud tala (joon. 159, b). Sellise tala vaba otsa läbipainde määramise leheküljel 247 ning see võrdub:

$$f_1 = - \frac{1}{8} \frac{ql^4}{EJ}.$$

Tegelikult aga tala ots asetseb toel ja tema läbipaine on võrdne nulliga. Järelikult jõudude mõju sõltumatuse printsiibi alusel toereaktsioonil toes  $B$  peab olema selline suurus, mis hävitab meie poolt saadud läbipainde, s. o. reaktsioon, mõjudes üksikult, peab andma  $f_1$ -le võrdvastupidise läbipainde  $f_2$ . Sellest tingimusest määrame toes  $B$  tekkiva liigse reaktsiooni.

Tala otsa rakendatud jõust  $B$  läbipaine (joon. 159,  $c$ ) võrdub:

$$f_2 = \frac{1}{3} \frac{Bl^3}{EJ}.$$

Läbipainete  $f_1$  ja  $f_2$  summa peab võrduma nulliga, s. o.

$$-\frac{1}{8} \frac{ql^4}{EJ} + \frac{1}{3} \frac{Bl^3}{EJ} = 0,$$

millest

$$B = \frac{3}{8} ql.$$

Määranud tala deformatsiooni vaatlemise põhjal liigse tundmatu reaktsiooni  $B$ , leiame ülejäänud tundmatud, s. o. reaktsiooni  $A$  kinnituses ja momendi  $m$  tasakaalutingimustest nii, nagu staatiliselt määratud taladel (joon. 159,  $a$ ).

Reaktsioon

$$A = ql - B = ql - \frac{3}{8} ql = \frac{5}{8} ql.$$

Momendi  $m$  kinnituses saame määrata, kui võtame momentide summa  $A$  suhtes:

$$-m + ql \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{8} ql \cdot l = 0,$$

millest

$$m = ql^2 - \frac{3}{8} ql^2 = \frac{5}{8} ql^2. \quad (215)$$

Kinnitusest  $A$  kaugusel  $x$  asetsevas mingis tala lõikes momentide võrrand avaldub:

$$M = Ax - m - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{5}{8} qlx - \frac{ql^2}{8} - \frac{qx^2}{2}.$$

$x$  väärtuse leidmiseks, mille puhul paindemoment on maksimaalne, võrrutame tuletise  $\frac{dM}{dx}$  nulliga:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{5}{8} ql - qx = 0,$$

millest

$$x = \frac{5}{8} l.$$

Järelikult maksimaalne moment avaldub:

$$M_{max} = \frac{5}{8} ql \cdot \frac{5}{8} l - \frac{ql^2}{8} - \frac{q \left(\frac{5}{8} l\right)^2}{2} = \frac{9}{128} ql^2.$$

Võrreldes seda momenti kinnitusemomendiga, näeme, et viimane on suurem kui maksimaalne moment tala avas, mistõttu arvutusmomendiks on kinnitusemoment.

Selle tala arvutusvõrrand on:

$$[\sigma] \geq \frac{ql^2}{8W}.$$

Määrame tala maksimaalse läbipainde.

Läbipainete võrrand avaldub:

$$EJy = -m \frac{x^2}{2} + A \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24} = -\frac{ql^2}{8} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{5}{8} ql \frac{x^3}{6} - \frac{qx^4}{24}.$$

Maksimaalse läbipainde koha määrame, võrrutades tuletise  $\frac{dy}{dx}$  nulliga:

$$\frac{dy}{dx} EJ = -\frac{ql^2 x}{8} + \frac{5}{16} qlx^2 - \frac{qx^3}{6} = 0,$$

$$x \left( \frac{x^2}{3} - \frac{5}{8} lx + \frac{l^2}{4} \right) = 0.$$

Maksimaalne läbipaine ei esine kinnituses, kuna see seal on null; järelikult,

$$\frac{x^2}{3} - \frac{5}{8} lx + \frac{l^2}{4} = 0$$

ehk

$$x^2 - \frac{15}{8} lx + \frac{3}{4} l^2 = 0,$$

millest

$$x = \frac{15}{16} l \pm \sqrt{\frac{225}{256} l^2 - \frac{3}{4} l^2} = \frac{15}{16} l \pm \frac{\sqrt{33}}{16} l = \frac{15 \pm 5,74}{16} l.$$

Kuna  $x$  väärtus ei või olla suurem  $l$ -st, siis juuremärgi ette võtame miinusmärgi:

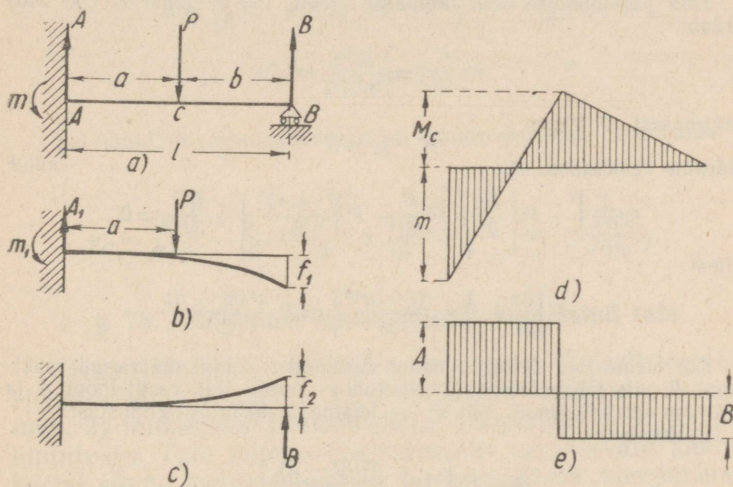
$$x = \frac{15}{16} l - \frac{5,74}{16} l = \frac{9,26}{16} l = 0,579l.$$

Kui oleme määranud maksimaalse läbipaindega lõike asukoha, siis leiame läbipainde suuruse. Selleks asendame läbipainete võrrandis  $x = 0,579l$ :

$$EJy_{max} = -\frac{ql^2}{8} \frac{(0,579l)^2}{2} + \frac{5}{8} ql \frac{(0,579l)^3}{9} - \frac{q(0,579l)^4}{24},$$

millest

$$y_{max} = \frac{ql^4}{EJ} (-0,02093 + 0,0202 - 0,00467) = \\ = -\frac{0,0054ql^4}{EJ} = -\frac{ql^4}{185EJ}.$$



Joonis 160.

**Näide 67.** Uhe otsaga jäigalt seina kinnitatud ja teise otsaga vabalt toel asetsev tala  $AB$  paindub koondatud jõu  $P$  mõjul (joon. 160,  $a$ ). Konstrueerida momentide epüür, põikjõudude epüür ja määrata läbipaine jõu  $P$  kohal.

*Lahendus.* Võtame liigseks tundmatuks toel  $B$  tekkiva toereaktsiooni. Kõrvale jättes toe  $B$ , saame staatiliselt määratud tala (joon. 160,  $b$ ), mille parempoolne ots koormuse  $P$  mõjul paindub läbi. Selle läbipainde määramiseks leiame algul reaktsioonid kinnituses (joon. 160,  $b$ ). Staatika võrranditest saame:

$$A_1 = P; \quad m_1 = Pa.$$

Kinnituse reaktsiooni ja momendi suund on näidatud joonisel 160,  $b$ .

Tala parempoolse osa läbipainete võrrand, vastavalt võrrandile (198), avaldub:

$$y = \frac{1}{EJ} \left[ -m_1 \frac{x^2}{2} + A_1 \frac{x^3}{6} - P \frac{(x-a)^3}{6} \right].$$

Asetades sellesse võrrandisse väärtused  $A_1$  ja  $m_1$  ning  $x$  asemel pikkuse  $l$ , leiame tala parempoolse otsa läbipainde:

$$f_1 = \frac{1}{EJ} \left[ -Pa \frac{l^2}{2} + P \frac{l^3}{6} - P \frac{(l-a)^3}{6} \right].$$

Tegelikult tala ots  $B$  asetseb toel ning tema läbipaine on null. Järelikult toereaktsioon  $B$  peab olema niisugune, et tema poolt tekitatud läbipaine oleks võrdvastupidine koormuse  $P$  läbipaindega.

Tala parempoolse otsa läbipaine (joon. 160, *c*) jõust  $B$  (lk. 246) võrdub:

$$f_2 = \frac{Bl^3}{3EJ}.$$

Tingimusest

$$f_1 + f_2 = 0$$

määrame reaktsiooni  $B$ :

$$\frac{1}{EJ} \left[ -Pa \frac{l^2}{2} + P \frac{l^3}{6} - P \frac{(l-a)^3}{6} \right] + \frac{Bl^3}{3EJ} = 0,$$

millest

$$B = P \left[ \frac{3a}{2l} - \frac{1}{2} + \frac{(l-a)^3}{2l^3} \right] = P \frac{a^2(3l-a)}{2l^3}.$$

Kui oleme tala deformatsiooni vaatlemise põhjal määranud reaktsiooni  $B$ , siis järelejäänud tundmatud — antud tala reaktsiooni  $A$  ja kinnitusemomendi (joon. 160, *a*) — leiame tasakaalutingimustest.

Reaktsioon

$$A = P \left[ 1 - \frac{a^2(3l-a)}{2l^3} \right].$$

Kinnitusemoment

$$m = Pa - \frac{Pa^2(3l-a)}{2l^2} = \frac{Pa(2l^2 - 3al + a^2)}{2l^2} = \frac{Pab(l+b)}{2l^2}. \quad (216)$$

Momentide epüüri konstrueerimiseks on vaja määrata moment lõikes, kus on rakendatud jõud  $P$ . Selles lõikes moment võrdub:

$$M_C = B \cdot b = P \frac{a^2b(3l-a)}{2l^3}.$$

Momentide ja põikjõudude epüürid on esitatud joonisel 160, *d* ja *e*.

Läbipainde määramiseks jõud  $P$  kohal kirjutame tala esimese osa jaoks läbipainete võrrandi:

$$EJy = -m \frac{x^2}{2} + A \frac{x^3}{6}.$$

Asetades siia  $m$ ,  $A$  ja  $x = a$  väärtused, saame:

$$y_C = \frac{1}{EJ} \left\{ -P \frac{ab(l+b)}{2l^2} \cdot \frac{a^2}{2} + P \left[ 1 - \frac{a^2(3l-a)}{2l^3} \right] \frac{a^3}{6} \right\}.$$

Erijuhul, kui jõud  $P$  mõjub tala keskel,

$$a = b = \frac{l}{2},$$

$$A = P \left[ 1 - \frac{l^2 \left( 3l - \frac{l}{2} \right)}{4 \cdot 2l^3} \right] = \frac{11}{16} P,$$

$$B = \frac{5}{16} P, \quad m = \frac{5}{16} Pl - P \frac{l}{2} = -\frac{3}{16} Pl,$$

$$M_C = \frac{5}{16} P \frac{l}{2} = \frac{5}{32} Pl.$$

Sel juhul on arvutusmomendiks kinnitusemoment. Läbipaine jõu kohal

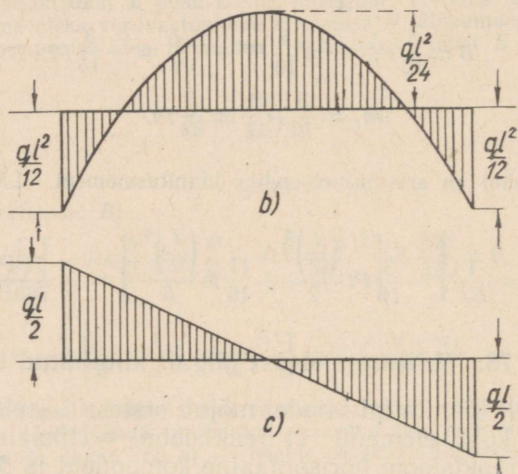
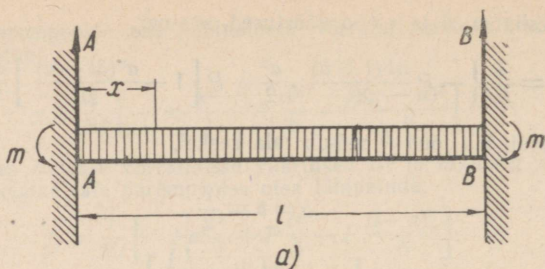
$$y_C = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{3}{16} Pl \frac{\left( \frac{l}{2} \right)^2}{2} + \frac{11}{16} P \frac{\left( \frac{l}{2} \right)^3}{6} \right] = -\frac{7Pl^3}{768EJ}.$$

## § 78. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud tala

Jäigalt kinnitatud taladel mõjub otstes üldiselt toereaktsioonide kolm elementi: 1) reaktsiooni vertikaalne komponent, 2) reaktsiooni horisontaalne komponent ja 3) moment kinnituses. Tala teljega ristimõjuvate painutatavate jõudude korral võime toereaktsioonide horisontaalsed komponendid jätta tähele panemata, kuna nende poolt tavalistes talades esilekutsutud pinged on väikesed, võrreldes paindepingetega. Seega mõlemast otsast jäigalt kinnitatud talas, mis on koormatud tala teljega ristimõjuvate jõududega, jääb määrata reaktsioonide neli elementi, milledest kaks elementi on staatiliselt määramatud.

Nende määramiseks on vaja nelja võrrandit. Kaks võrrandit annab staatika, kaks ülejäänud võrrandit tuleb aga koostada deformatsioonide lisatingimustest. Nendeks tingimusteks võib olla kas tala otste pöördenurkade võrdsus nulliga või läbipainete võrdsus nulliga. Lisavõrrandite koostamiseks kasutame jõudude mõjumise sõltumatuse seadust.

Vaatleme näidet. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud tala  $AB$  painutab ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega  $q$



Joonis 161.

(joon. 161, a). Konstrueerida momentide ja põikjõudude epüürid ning määrata maksimaalne läbipaine.

Sümmeetrilise koormuse tõttu toereaktsioonid on võrdsed:

$$A = B = \frac{ql}{2}.$$

Samal põhjusel on võrdsed ka momendid  $m$  kinnituses.

Koostame deformatsiooni võrrandi. Kuna elastse joone puutujate kaldenurgad tala otstes võrduvad nulliga, siis võrrandist (197) saame:

$$0 = -ml + \frac{ql}{2} \frac{l^2}{2} + \frac{ql^3}{6},$$

millest

$$m = \frac{ql^2}{12}. \quad (217)$$

Kui oleme määranud momendid kinnitustes, siis asume paindemomentide epüüri konstrueerimisele. Vaadeldaval talal on üks vahemik. Kirjutame selle jaoks momentide võrrandi:

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{ql^2}{12} - q \frac{x^2}{2}.$$

Maksimaalse momendi vahemikus leiame, kui võrrutame tuletise  $\frac{dM}{dx}$  nulliga.

Maksimaalse momendi saame tala keskel. See võrdub:

$$M_{max} = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{12} - q \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ql^2}{24}.$$

Moment kinnituses on kaks korda suurem viimati saadust, mistõttu võtame ta arvutusmomendiks.

Põikjõudude epüüri konstrueerimine selgitusi ei vaja. Epüür tuleb täiesti sama, mis lihttalal. Tala elastse joone võrrand avaldub:

$$EJy = \frac{ql}{2} \frac{x^3}{6} - \frac{ql^2}{12} \frac{x^2}{2} - \frac{qx^4}{24}.$$

Tala maksimaalne läbipaine, kui  $x = \frac{l}{2}$ , võrdub:

$$y_{max} = f_c = \frac{l}{EJ} \left( \frac{ql^4}{96} - \frac{ql^4}{96} - \frac{ql^4}{384} \right) = - \frac{ql^4}{384EJ}.$$

Leheküljel 253 leidsime lihttala, millele mõjub ühtlaselt jaotatud koormus, maksimaalse läbipainde ava keskel. See võrdub:

$$y_{max} = - \frac{5ql^4}{384EJ}.$$

Seega läbipainete võrdlemisest näeme, et jäigalt kinnitatud otstega tala läbipaine ühtlaselt jaotatud koormuse mõjul on 5 korda väiksem, kui lihttala läbipaine ava keskel.

**Näide 68.** Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud tala paindub koondatud jõu  $P$  mõjul (joon. 162, a). Konstrueerida paindemomentide ja põikjõudude epüürid.

Lahendus. Koostame võrrandi reaktsioonide määramiseks. Tasa-kaalutingimustest saame:

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0; & A + B &= P, \\ \sum M_A &= 0; & -Bl + m_B + Pa - m_A &= 0. \end{aligned}$$

Tingimustest, et puutuja kaldenurk ja läbipaine toe  $B$  kohal võrduvad nulliga, saame:

$$\begin{aligned} -m_A l + A \frac{l^2}{2} - P \frac{b^2}{2} &= 0, \\ -m_A \frac{l^2}{2} + A \frac{l^3}{6} - P \frac{b^3}{6} &= 0. \end{aligned}$$

Lahendades saadud võrrandsüsteemi, leiame, et

$$A = P \frac{b^2(l+2a)}{l^3};$$

$$B = P \frac{a^2(l+2b)}{l^3};$$

$$m_A = P \frac{ab^2}{l^2}; \quad m_B = P \frac{a^2b}{l^2}.$$

Nüüd on kerge konstrueerida paindemomentide ja põikjõudude epüüre. Paindemoment lõikes  $C$ , kus mõjub jõud  $P$ , avaldub:

$$\begin{aligned} M_C &= -m_A + Aa = -P \frac{ab^2}{l^2} + \\ &+ P \frac{ab^2(l+2a)}{l^3} = \frac{2Pa^2b^2}{l^3}. \end{aligned}$$

Momentide ja põikjõudude epüürid on toodud joonisel 162,  $b$  ja  $c$ .

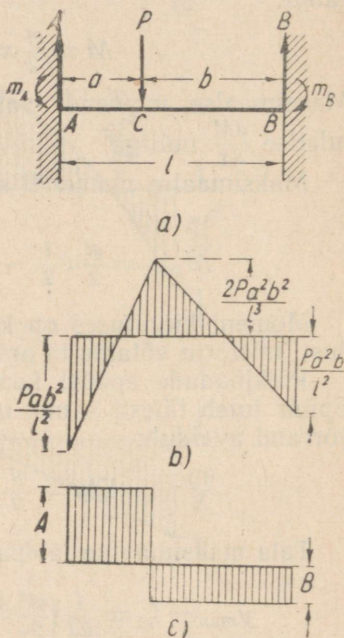
Määrame läbipainde lõikes  $C$ , kus mõjub jõud  $P$ . Elastse joone võrrand tala esimese vahemiku jaoks avaldub:

$$EJy = -m \frac{x^2}{2} + A \frac{x^3}{6}.$$

Asetades väärtused  $m$ ,  $A$  ja  $x$  asemele  $a$ , saame:

$$y_C = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{Pab^2}{l^2} \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{Pa^2b^2(l+2a)}{l^3} \cdot \frac{a^3}{6} \right] = -\frac{Pa^3b^3}{3l^3EJ}.$$

Erijuhul, kui jõud  $P$  mõjub tala keskel, s. o. kui  $a = b = \frac{l}{2}$ , saame:



Joonis 162.

reaktsioonid

$$A = B = \frac{P}{2};$$

kinnitusemomendid

$$m_A = m_B = \frac{Pl}{8}. \quad (218)$$

Joonisel 162, *a* näidatud momentide suundadest järeldub, et momendid on negatiivsed.

Moment tala keskel

$$M_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Pl}{8}.$$

See moment võrdub suuruselt kinnitusemomentidega, kuid on vastupidise märgiga.

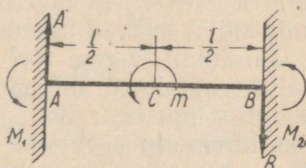
Seega vaadeldaval talal on kolm löiget, milledes paindemomendid absoluutväärtuselt on võrdsed, s. o. talal on kolm ühesuguse ohtlikkusega löiget.

Läbipaine tala keskel

$$y_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{Pl^3}{192EJ}.$$

Kui tala toetub vabalt kahele toele ja on koormatud jõuga  $P$  tala keskel, siis tema maksimaalne paindemoment võrdub

$$M_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Pl}{4}$$



Joonis 163.

(vt. lk. 198), maksimaalne läbipaine aga  $y_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{Pl^3}{48EJ}$

(vt. lk. 250).

Järelikult selle tala võrdlemisel mõlemast otsast jäigalt kinnitatud talaga näeme, et ava keskel esineb kaks korda väiksem paindemoment ja neli korda väiksem läbipaine.

Näide 69. Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud tala  $AB$  paindub ava keskel mõjuva momendi  $m$  mõjul (joon. 163). Määrata kinnitusemomendid.

Lahendus. Lähtudes tingimustest, et toe  $B$  kohal puutuja kalde-  
nurk ja läbipaine võrduvad nulliga, saame võrranditest (197) ja (198):

$$\begin{aligned} -M_1 l + A \frac{l^2}{2} - \frac{ml}{2} &= 0, \\ -M_1 \frac{l^2}{2} + A \frac{l^3}{6} - \frac{ml^2}{8} &= 0. \end{aligned}$$

Lahendades selle võrrandsüsteemi, leiame:

$$A = \frac{3}{2} \frac{m}{l}; \quad M_1 = \frac{m}{4}.$$

Tingimusest  $\Sigma M_B = 0$  saame:

$$-\frac{m}{4} + \frac{3}{2} \frac{m}{l} \cdot l - m + M_2 = 0,$$

millest

$$M_2 = -\frac{m}{4}.$$

## § 79. Kolmel toel asuv tala

Enam kui kahel toel asuvaid talasid nimetatakse *jätkuvateks* ehk *paljutoelisteks taladeks*. Jätkuvatest taladest me vaatleme tähtsaimat ja nimelt kolmel toel asuvat tala.

Kui loeme ühe toe liikumatuks, kaks teist tuge aga rullikutel asuvaks, siis tala paindel teljega ristiasetsevate jõudude mõjul tekivad tuges ainult vertikaalsed reaktsioonid.

Järelikult kolmel toel asuvale talale mõjub kolm tundmatut reaktsiooni, milledest kaks määratakse staatika tasakaalutingimustest, üks aga kujutab liigset tundmatut. Liigseks tundmatuks võtame tala keskmisel toel tekkiva reaktsiooni. Lisatingimus, mis asetatakse liigse tundmatuga tala deformatsioonile seisneb selles, et läbipaine keskmise toe kohal võrdub nulliga. Sellest tingimusest määrame reaktsiooni keskmisel toel. Kui see reaktsioon on leitud, siis ülesanne taandub staatiliselt määratuks ja tema edaspidine lahendamine ei tee mingeid raskusi.

Näitena vaatleme kolmel toel asuvat tala, millele mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega  $q$  (joon. 164, a). Määrame toereaktsioonid.

Jätame kõrvale keskmise toe  $C$ . Siis saame kahele toele  $A$  ja  $B$  vabalt toetuva tala (joon. 164, b). Määrame läbipainde kõrvalejäetud toe kohal. See läbipaine (vt. lk. 253) võrdub:

$$y_C = -\frac{5q(2l)^4}{384EJ}.$$

Tala läbipaine (joon. 164, c) koondatud jõust  $C$ , mis mõjub altpoolt ülespoole, avaldub (vt. lk. 250):

$$y'_C = \frac{C(2l)^3}{48EJ}.$$

## Võrrandist

$$y_c + y'_c =$$

$$= -\frac{5q(2l)^4}{384EJ} + \frac{C(2l)^3}{48EJ} = 0$$

leiame reaktsiooni  $C$ :

$$C = \frac{5}{4} ql. \quad (219)$$

Kui mõlemad avad on ühepikkused, siis sümmeetria tõttu reaktsioonid äärmistes tugedes  $A$  ja  $B$  on võrdsed. Kumbki neist reaktsioonidest võrdub:

$$A = B = \frac{1}{2} \left( 2ql - \frac{5}{4} ql \right) =$$

$$= \frac{3}{8} ql.$$

$M$  ja  $Q$  epüürid on esitatud joonisel 164,  $d$  ja  $e$ .

**Näide 70.** Kolmel toel asuv tala paindub koondatud jõu  $P$  mõjul (joon. 165,  $a$ ). Määrame tala keskmises toes tekkiva reaktsiooni.

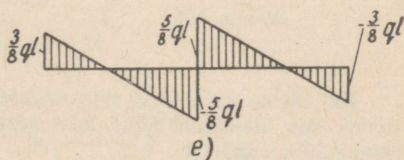
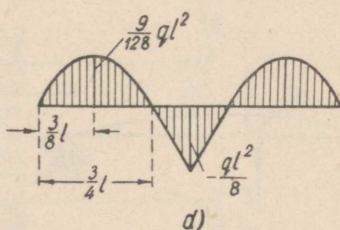
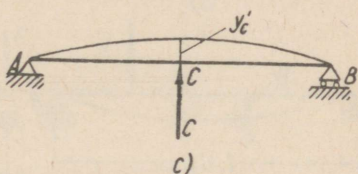
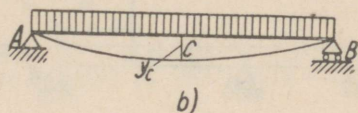
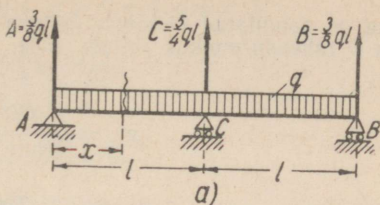
*Lahendus.* Jätame kõrvale keskmise toe  $C$ . Siis saame kahele toele  $A$  ja  $B$  toetuva tala (joon. 165,  $b$ ).

Määrame läbipainde kõrvale jäetud toe kohal. See läbipaine võrdub:

$$EJy_c = -\frac{Pa[(l_1 + l_2)^2 - a^2]l_1}{6(l_1 + l_2)} + \frac{Pal_1^3}{6(l_1 + l_2)},$$

$$y_c = -\frac{Pal_1[(l_1 + l_2)^2 - a^2 - l_1^2]}{6(l_1 + l_2)EJ}.$$

Võtame nüüd tala (joon. 165,  $c$ ), mis asetseb vabalt tugedel  $A$  ja  $B$



Joonis 164.

ning on painutatud ülespoole mõjuva jõuga  $C$ . Määrame läbipainde jõu  $C$  rakenduspunktis (vt. lk. 250):

$$y'_C = \frac{Cl_1^2 l_2^2}{3(l_1 + l_2)EJ}.$$

Tingimusest

$$y_C + y'_C = 0$$

määrame reaktsiooni  $C$ :

$$\frac{Pal_1[(l_1 + l_2)^2 - a^2 - l_1^2]}{6(l_1 + l_2)EJ} + \frac{Cl_1^2 l_2^2}{3(l_1 + l_2)EJ} = 0,$$

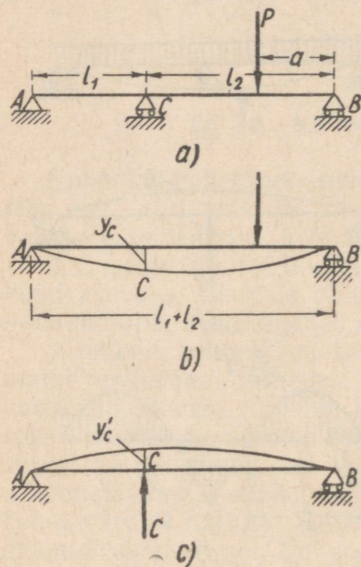
millest

$$C = \frac{Pa[(l_1 + l_2)^2 - a^2 - l_1^2]}{2l_1 l_2^2}. \quad (220)$$

Kui jõud  $P$  mõjub tala vasakpoolses avas, siis keskmise toe reaktsioon määratakse sama valemiga (220), kuid kaugust  $a$  tuleb sel juhul mõõta vasakust toest  $A$  ning avad  $l_1$  ja  $l_2$  omavahel vahetada.

Erijuhul, kui avad on ühepikkused, s. o. kui  $l_1 = l_2 = l$ , valem (220) lihtsustub. Sel juhul reaktsioon  $C$  võrdub

$$C = \frac{Pa(3l^2 - a^2)}{2l^3}. \quad (221)$$



Joonis 165.

Kui oleme määranud tala deformeerumise põhjal keskmise reaktsiooni, siis ülejäänud kaks teist reaktsiooni on kergesti määratavad tasakaaluvõrrandest.

**Näide 71.** Valida kahe avaga jätkuva tala (joon. 166, a) I-ristlõige, kui avadel on võrdne pikkus  $l = 2$  m. Tala on koormatud vasakpoolses ava keskel koondatud momendiga  $m = 2$  tm. Parempoolsele avale mõjub ühtlaselt jaotatud koormus intensiivsusega  $q = 4$  t/m. Lubatav pingeline  $[\sigma] = 1600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ .

*Lahendus.* Jätame kõrvale keskmise toe  $C$  ja määrame läbipainde kõrvalejätetud toe kohal (joon. 166, b). Leiame esiteks kahetoelise tala  $AB$  reaktsioonid:

$$\Sigma M_A = 0; -B' \cdot 2l + ql \left( l + \frac{l}{2} \right) - m = 0;$$

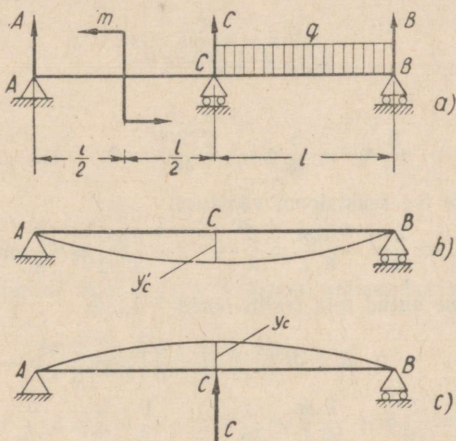
$$B' = \frac{3}{4} ql - \frac{m}{2l};$$

$$\Sigma M_B = 0,$$

$$A' 2l - m - q \frac{l^2}{2} = 0,$$

$$A' = \frac{ql}{4} + \frac{m}{2l}.$$

Koordinaatide alguses (punktis A)  $f_0 = 0$ , aga  $\alpha_0 \neq 0$ . Leiame  $EJ\alpha_0$  tingimusest, et läbipaine toe B kohal on null. Kui  $x = 2l$ , siis võrrandist (198) saame:



Joonis 166.

$$0 = EJ\alpha_0 2l + A' \frac{(2l)^3}{6} - \frac{m \left( 2l - \frac{l}{2} \right)^2}{2} - q \frac{(2l - l)^4}{24},$$

millest

$$EJ\alpha_0 = \frac{9ml}{16} + \frac{ql^3}{48} - A' \frac{2l^2}{3}$$

ehk asetades  $A'$  väärtuse, saame:

$$EJ\alpha_0 = \frac{11}{48} ml - \frac{7}{48} ql^3.$$

Kõrvale jäetud toe  $C$  kohal määrame läbipainde võrrandist (198), kui  $x = l$ :

$$EJy_C = EJ\alpha_0 l + \frac{A'l^3}{6} - \frac{m \left( l - \frac{l}{2} \right)^2}{2}.$$

Asetades väärtused  $EJ\alpha_0$  ja  $A'$ , saame:

$$EJy_C = \frac{11}{48} ml^2 - \frac{7}{48} ql^4 + \frac{ql^4}{24} + \frac{ml^2}{12} - \frac{ml^2}{8} = \frac{9}{48} ml^2 - \frac{5}{48} ql^4.$$

Kirjutame nüüd tala (joon. 166,  $c$ ) läbipainde lõikes  $C$  koondatud jõust  $C$ :

$$EJy'_C = C \frac{(2l)^3}{48}.$$

Võrrandist

$$EJy_C + EJy'_C = 0$$

ehk

$$\frac{9}{48} ml^2 - \frac{5}{48} ql^4 + \frac{C(2l)^3}{48} = 0$$

saame keskmise toe reaktsiooni väärtuse:

$$C = \frac{5}{8} ql - \frac{9}{8} \frac{m}{l} = \frac{5}{8} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{9}{8} \cdot \frac{2}{2} = 3 \frac{7}{8} \text{ tonni.}$$

Nüüd leiame antud tala reaktsioonid  $A$  ja  $B$ :

$$\Sigma M_A = 0, \quad -B \cdot 2l + ql \left( \frac{l}{2} + l \right) - \frac{5}{8} \left( ql - \frac{9}{8} \frac{m}{l} \right) l - m = 0,$$

$$B = \frac{7}{16} ql + \frac{1}{16} \frac{m}{l} = \frac{7}{16} 4 \cdot 2 + \frac{1}{16} \cdot \frac{2}{2} = 3 \frac{9}{16} \text{ tonni.}$$

$$\Sigma M_B = 0, \quad A \cdot 2l - m + \left( \frac{5}{8} ql - \frac{9}{8} \frac{m}{l} \right) l - \frac{ql^2}{2} = 0,$$

$$A = \frac{7}{16} \frac{m}{l} - \frac{1}{16} ql = \frac{17}{16} \cdot \frac{2}{2} - \frac{1}{16} 4 \cdot 2 = \frac{9}{16} \text{ tonni.}$$

Konstrueerime nüüd momentide epüüri: esimeses vahemikus

$$M_1 = \frac{9}{16} x;$$

kui  $x = 0$ , siis  $M_A = 0$ ; kui  $x = \frac{l}{2} = 1$  m, siis  $M = \frac{9}{16}$  tm; teises vahemikus

$$M_2 = \frac{9}{16} x - 2;$$

kui  $x = \frac{l}{2} = 1$  m, siis

$$M = -1 \frac{7}{16} \text{ tm};$$

kui  $x = l = 2$  m, siis

$$M_C = \frac{9}{16} \cdot 2 - 2 = -\frac{7}{8} \text{ tm.}$$

Momendid kolmandas vahemikus määrame, lähtudes tala parempoolsest otsast:

$$M_3 = Bx - \frac{qx^2}{2} = 3 \frac{9}{16} x - 4 \frac{x^2}{2}$$

ehk

$$M_3 = 3 \frac{9}{16} x - 2x^2;$$

kui  $x = 0$ , siis

$$M_B = 0;$$

kui  $x = l = 2$  m, siis

$$M_C = 3 \frac{9}{16} \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 = -\frac{7}{8} \text{ tm.}$$

Leiame momendi maksimaalse väärtuse kolmandas vahemikus

$$\frac{dM_3}{dx} = 0 = 3 \frac{9}{16} - 4x,$$

millest

$$x = \frac{57}{64} \text{ m.}$$

Selle  $x$  väärtuse juures moment võrdub:

$$M_{3 \max} = 3 \frac{9}{16} \cdot \frac{57}{64} - 2 \cdot \left(\frac{57}{64}\right)^2 \approx 1 \frac{3}{5} \text{ tm.}$$

Tala kogupikkuse ulatuses maksimaalne moment  $M_{3 \max} = 1 \frac{3}{5} \text{ tm.}$

Asetades selle momendi väärtuse arvutusvõrrandisse, saame vajaliku suuruse  $W$ :

$$W \geq \frac{M_{3 \max}}{[\sigma]} = \frac{800\,000}{5 \cdot 1600} = 100 \text{ cm}^3.$$

Lähim väärtus saadud suurusele  $W$  on I-profiilil Nr. 14, ja nimelt:  $102 \text{ cm}^3$ .

## § 80. Kontrollküsimusi

Missuguseid talasid nimetatakse staatiliselt määratuiks taladeks?

Missuguste meetodite abil lahendatakse staatiliselt määramatuid talasid?

Kuidas suhtuvad teineteisesse maksimaalsed läbipained ühtlaselt jaotatud koormusega koormatud taladel, kui üks neist toetub vabalt mõlema otsaga, teisel on aga otsad kinnitatud?

Millega võrduvad momendid tala kinnitustes, kui tala on koormatud keskel momendiga?

---

## LIITTUGEVUS

## § 81. Vildakpaine

Seni vaatlesime tasapinnalist painet, mil momendi mõju-  
mise tasapind langes ühte tala pikisümmeetria tasapinnaga  
või üldse ühega tema peatasapindadest. Seejuures painde-  
deformatsioon toimus momentide mõjumise tasapinnas,  
neutraaltelg aga langes ühte ristlõike peainertsteljega ja oli  
risti momentide mõjumise tasapinnaga.

Siiski esineb juhtumeid, kus paindemomentide mõjumise  
tasapind ei lange ühte tala ühegi peatasapinnaga. Neil juh-  
tudel paindedeformatsioon toimub tasapinnas, mis ei lange  
ühte momentide mõjumise tasapinnaga ning neutraaltelg ei  
ole risti paindemomentide mõjumise tasapinnaga. Sellist  
painet nimetatakse *vildakpaineks*.

Vaatleme vildakpainde näidet. Ühe otsaga jäigalt kinni-  
tatud ristkülikukujulise ristlõikega tala (joon. 167, *a*, *b*)  
paindub jõu  $P$  mõjul, mis moodustab peatasapinnaga  $xy$   
nurga  $\alpha$  ning mõjub tala otsal risti teljega. Kuna painde-  
momenti mõjumise tasapind antud juhul ei lange ühte ühe-  
gagi tala peatasapindadest, siis on meil tegemist vildak-  
paindega.

Kinnitusest mingil kaugusel  $x$  olevas lõikes  $mn$  avaldub  
paindemomendi absoluutväärtus kujul

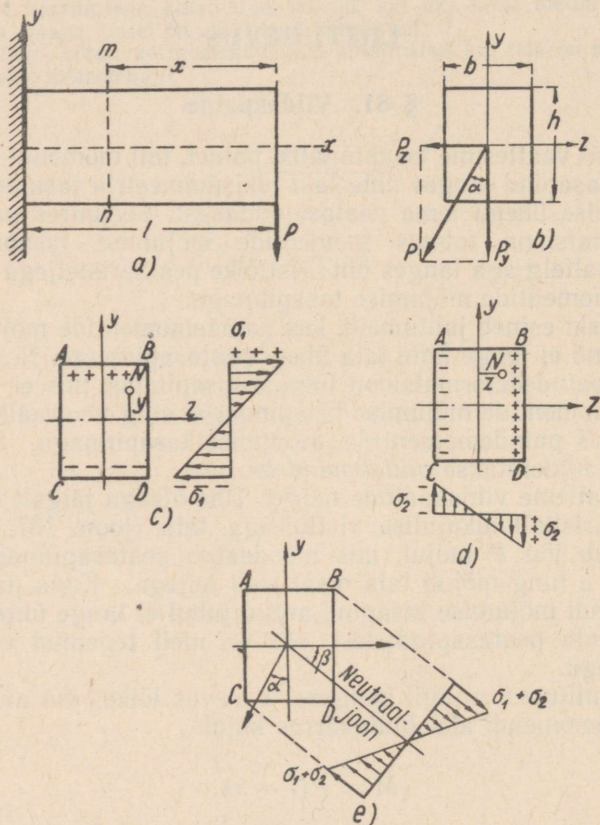
$$M = P(l - x).$$

Lahutame jõu  $P$  kaheks komponendiks  $P_y$  ja  $P_z$ , mis  
mõjuvad ristlõike peatelgedel  $y$  ja  $z$ . Siis komponentide  
momentide absoluutväärtused võrduvad:

$$\begin{aligned} M_z &= P_y(l - x) = P(l - x) \cos \alpha, \\ M_y &= P_z(l - x) = P(l - x) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Momendid  $M_y$  ja  $M_z$  mõjuvad tala peatasapindades. Iga

sellise momendi poolt esilekutsutud pinget ja läbipainet me oskame määrata. Kasutades jõudude mõjumise sõltumatuse seadust, võime leida pinge ja läbipainde, mis saadakse momentide  $M_y$  ja  $M_z$  üheaegsel mõjumisel. Seega võime vil-



Joonis 167.

dakpaine alati taandada kaheks tasapinnaliseks, või nagu räägitakse, lihtpaindeks.

Ainult ühe momendi  $M_z$  mõjumisel on neutraaljooneks z-telg (joon. 167, c). Normaalpinged mingis punktis N

koordinaatidega  $z$ ,  $y$ , mis on võetud lõike  $mn$  esimeses veerandis, määratakse valemiga (174):

$$\sigma_1 = \frac{M_z \cdot y}{J_z}.$$

Ainult momendi  $M_y$  mõjumisest pinge samas punktis (joon. 167,  $d$ ) avaldub:

$$\sigma_2 = \frac{M_y \cdot z}{J_y}.$$

Kahe momendi  $M_y$  ja  $M_z$  üheaegsel mõjumisel lõike meelevaldses punktis pinge võrdub pingete  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  algebralise summaga, s. o.

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{M_z \cdot y}{J_z} + \frac{M_y \cdot z}{J_y}. \quad (222)$$

Sellesse valemisse asetatakse lõike koordinaadid  $y$ ,  $z$  ning paindemomendid  $M_y$  ja  $M_z$  vastavate märkidega. Kui moment mõjub nii, et esimeses veerandis, kus koordinaadid  $z$  ja  $y$  on positiivsed, tekib tõmme, siis momendi märgiks võetakse pluss, kui aga surve, siis miinus. Vaadeldaval juhul mõlemad momendid  $M_y$  ja  $M_z$  on positiivsed, kuna esimeses veerandis nad kutsuvad esile tõmbe. Tulemusena saame:

punkti  $A$  jaoks  $\left(z = -\frac{b}{2}; \quad y = \frac{h}{2}\right)$

$$\sigma = \frac{P(l-x)\cos\alpha \cdot \frac{h}{2}}{J_z} - \frac{P(l-x)\sin\alpha \cdot \frac{b}{2}}{J_y};$$

punkti  $B$  jaoks  $\left(z = \frac{b}{2}; \quad y = \frac{h}{2}\right)$

$$\sigma = \frac{P(l-x)\cos\alpha \cdot \frac{h}{2}}{J_z} + \frac{P(l-x)\sin\alpha \cdot \frac{b}{2}}{J_y};$$

punkti  $C$  jaoks  $\left(z = -\frac{b}{2}; \quad y = -\frac{h}{2}\right)$

$$\sigma = \frac{-P(l-x)\cos\alpha \cdot \frac{h}{2}}{J_z} - \frac{P(l-x)\sin\alpha \cdot \frac{b}{2}}{J_y};$$

punkti  $D$  jaoks  $\left( z = \frac{b}{2}; \quad y = -\frac{h}{2} \right)$

$$\sigma = \frac{-P(l-x) \cos \alpha \cdot \frac{h}{2}}{J_z} + \frac{P(l-x) \sin \alpha \cdot \frac{b}{2}}{J_y}.$$

Maksimaalne summaarne pinge esineb antud juhul punktides  $B$  ja  $C$ ; punktis  $B$  ( $x > 0, y > 0$ ) — tõmbepinge, punktis  $C$  ( $x < 0, y < 0$ ) aga survepinge. Nende pingete absoluutväärtused on võrdsed.

Neutraaljoone võrrandi saame, võrrutades valemi (222) parempoolse osa nulliga:

$$\frac{M_z \cdot y}{J_z} + \frac{M_y \cdot z}{J_y} = 0.$$

ehk

$$\frac{M \cdot y \cos \alpha}{J_z} + \frac{M \cdot z \sin \alpha}{J_y} = 0,$$

millest

$$\frac{y \cos \alpha}{J_z} + \frac{z \sin \alpha}{J_y} = 0.$$

Seda võrrandit otseselt rahuldavad väärtused  $y = 0$  ja  $z = 0$ . Järelikult *neutraaljoon läbib ristlõike raskuskeset*.

Määrates viimasest avaldisest suhte  $\frac{y}{z}$ , leiame neutraaljoone ja  $z$ -telje positiivse suuna vahelise nurga ( $\beta$ ) tangensi (joon. 167, e):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{z} = -\operatorname{tg} \alpha \frac{J_z}{J_y}. \quad (223)$$

Valemist (223) näeme, et ristlõigetel, millel  $J_z = J_y$  (ruut, ring ja teised), on neutraaljoon alati risti paindemomendi mõjumise tagaspinnaga, milles ka toimub painde-deformatsioon. Järelikult talades, millel ristlõike kõik neutraalteljed on peateldigedeks, ei saa esineda vildakpainet.

Juhul, kui  $J_z \neq J_y$  ja  $\alpha \neq 0$  või  $\alpha \neq 90^\circ$ , siis neutraaljoon ei ole risti paindemomendi tasapinnaga ja selles tasapinnas painet ei toimu.

**Näide 72.** Uhe otsaga jäigalt kinnitatud ristkülikukujulise ristlõikega  $b \cdot h$  tala (joon. 168) paindub jõu  $P = 1200$  kg mõjul, mis on

rakendatud vabale otsale ja moodustab peatasapinnaga  $xy$  nurga  $\alpha = 30^\circ$ . Määrata ristlõike mõõted, kui tala pikkus  $l = 1$  m,  $b = 0,6$  h ja lubatav pinge  $[\sigma] = 1200$  kg/cm<sup>2</sup>.

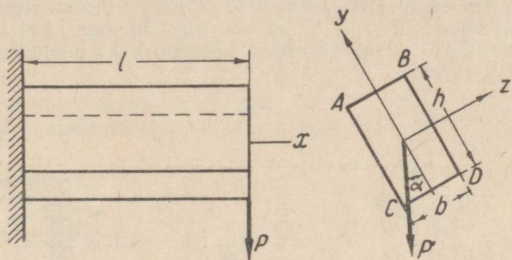
Lahendus. Suurim paindemoment kinnituses

$$M_{max} = P \cdot l = 1200 \cdot 100 = 120\,000 \text{ kgcm.}$$

Lahutame selle vertikaaltasapinnas mõjuva momendi ristlõike peatelgedele  $y$  ja  $z$ :

$$M_z = 120\,000 \cdot \cos 30^\circ = 120\,000 \cdot 0,886 = 104\,000 \text{ kgcm.}$$

$$M_y = 120\,000 \cdot \sin 30^\circ = 120\,000 \cdot 0,5 = 60\,000 \text{ kgcm.}$$



Joonis 168.

Valemi (222) abil määratavad suurimad pinged mõjuvad punkti- des  $B$  ja  $C$ . Absoluutväärtuselt nad on võrdsed. Määrame pinge punktis  $B$

$$\left(y = \frac{h}{2}; z = \frac{b}{2}\right):$$

$$\sigma = \frac{M_z \cdot \frac{h}{2}}{J_z} + \frac{M_y \cdot \frac{b}{2}}{J_y} = \frac{6M_z}{bh^2} + \frac{6M_y}{hb^2}.$$

Asetades momentide  $M_y$  ja  $M_z$  väärtused ja võttes maksimaalse pinge absoluutväärtuse võrdseks lubatavaga, saame:

$$1200 = \frac{6 \cdot 104\,000}{bh^2} + \frac{6 \cdot 60\,000}{hb^2}$$

ehk

$$1 = \frac{520}{bh^2} + \frac{300}{hb^2}.$$

Asetades siia  $b = 0,6$  h, saame ristlõike kõrguse  $h$  määramiseks võrrandi:

$$1 = \frac{520}{0,6h^3} + \frac{300}{0,36h^3},$$

millest

$$h = \sqrt[3]{\frac{520}{0,6} + \frac{300}{0,36}} = \sqrt[3]{1700} = 11,9 \text{ cm.}$$

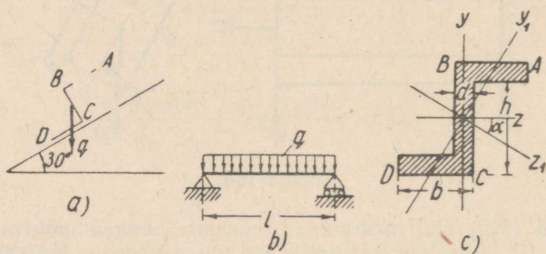
Ümardame saadud väärtuse, võttes  $h = 12$  cm; siis

$$b = 0,6 \cdot 12 = 7,2 \text{ cm.}$$

Suurim pinge talas on ristlõike nende möödede korral:

$$\sigma = \frac{104\,000}{7,2 \cdot 12^2} + \frac{60\,000}{12 \cdot 7,2^2} = 600 + 580 = 1180 \text{ kg/cm}^2 < [\sigma].$$

**Näide 73.** Kahele sõrestikule toetub vabalt Z-profiiliga Nr. 14 roov, millele mõjub ühtlaselt jaotatud vertikaalne koormus intensiivsusega  $q = 400$  kg/m (joon. 169, a, b). Määrata normaalpinged ohtliku lõike punktides A, B, C ja D ja suurim läbipaine, kui sõrestikkude vaheline kaugus  $l = 2$  m, sõrestiku kaldenurk horisondiga võrdub  $30^\circ$  ja  $E = 2 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>.



Joonis 169.

*Lahendus.* Normaalse sortimendi tabelist leiame Z-profiili Nr. 14 jaoks: peainertsmoment  $J_{z_1} = 759$  cm<sup>4</sup>,  $J_{y_1} = 130,7$  cm<sup>4</sup> ja peatelgede kaldenurk  $\alpha = 14^\circ 27'$  (joon. 169, c).

Suurim paindemoment roovis on keskel (170):

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{400 \cdot 2^2}{8} = 200 \text{ kgm} = 20\,000 \text{ kgcm.}$$

Lahutades vertikaaltasapinnas mõjuva momendi  $M_{max}$  ristlõike peatelgedele, leiame:

$$\begin{aligned} M_{z_1} &= -M_{max} \cos(30^\circ - 14^\circ 27') = \\ &= -20\,000 \cdot 0,9634 = -19\,268 \text{ kgcm,} \\ M_{y_1} &= -M_{max} \sin(30^\circ - 14^\circ 27') = \\ &= -20\,000 \cdot 0,2681 = -5362 \text{ kgcm.} \end{aligned}$$

Momendid  $M_{y_1}$  ja  $M_{z_1}$  on negatiivsed, kuna esimeses veerandis nad kutsuvad esile surve.

Punktides A, B, C ja D pingete määramiseks arvutame nende kaugused peatelgedest  $z_1$  ja  $y_1$ .

Rakendades koordinaatide teisendamise valemeid telgede pöörämisel, leiame punkti  $A$  koordinaadid peatelgede  $z_1$  ja  $y_1$  suhtes:

$$\begin{aligned} z_1 &= y \sin (-14^\circ 27') + z \cos (-14^\circ 27') = \\ &= 7(-0,2495) + 6,1 \cdot 0,9684 = 4,15 \text{ cm.} \\ y_1 &= y \cos (-14^\circ 27') - z \sin (-14^\circ 27') = \\ &= 7 \cdot 0,9684 - 6,1(-0,2495) = 8,29 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Punkti  $D$  koordinaadid telgede  $z_1$  ja  $y_1$  suhtes avalduvad:

$$z_1 = -4,15 \text{ cm; } y_1 = -8,29 \text{ cm.}$$

Punkti  $B$  koordinaadid telgede  $z$  ja  $y$  suhtes võrduvad:

$$z = -\frac{d}{2} = -\frac{0,8}{2} = -0,4 \text{ cm; } y = \frac{h}{2} = 7 \text{ cm.}$$

Punkti  $B$  koordinaadid peatelgede  $z_1$  ja  $y_1$  suhtes määrame, rakendades koordinaatide teisendamise valemeid telgede pöörämisel:

$$\begin{aligned} z_1 &= 7 \sin (-14^\circ 27') + (-0,4) \cos (-14^\circ 27') = \\ &= -7 \cdot 0,2495 - 0,4 \cdot 0,9684 = -2,14 \text{ cm,} \\ y_1 &= 7 \cos (-14^\circ 27') - (-0,4) \sin (-14^\circ 27') = \\ &= 7 \cdot 0,9684 - 0,4 \cdot 0,2495 = 6,67 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Punkti  $C$  koordinaadid telgede  $z_1$  ja  $y_1$  suhtes avalduvad:

$$z_1 = 2,14; \quad y_1 = -6,67.$$

Nüüd määrame pinged punktides  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ja  $D$ . Pinge punktis  $A$

$$\sigma_A = \frac{-19\,268 \cdot 8,29}{759} + \frac{-5366 \cdot 4,15}{130,7} = 380 \text{ kg/cm}^2.$$

Pinge punktis  $D$

$$\sigma_D = \frac{-19\,268(-8,29)}{759} + \frac{-5366(-4,15)}{130,7} = -380 \text{ kg/cm}^2.$$

Pinge punktis  $B$

$$\sigma_B = \frac{-19\,268 \cdot 6,67}{759} + \frac{-5366(-2,14)}{130,7} = -81 \text{ kg/cm}^2.$$

Pinge punktis  $C$

$$\sigma_C = \frac{-19\,268(-6,67)}{759} + \frac{-5366 \cdot 2,14}{130,7} = 81 \text{ kg/cm}^2.$$

Suurimad pinged, tõmbel punktis  $A$  ja survepunktis  $D$ , võrduvad  $380 \text{ kg/cm}^2$ .

Roovi maksimaalne läbipaine on keskel. Selle arvutamiseks lahutame vertikaaltasapinnas mõjuva ühtlaselt jaotatud koormuse ristlõike peatelgedele:

$$\begin{aligned} q_y &= q \cos (30^\circ - 14^\circ 27') = 400 \cdot 0,9634 = 385 \text{ kg/m} = 3,85 \text{ kg/cm,} \\ q_z &= q \sin (30^\circ - 14^\circ 27') = 400 \cdot 0,2681 = 107 \text{ kg/m} = 1,07 \text{ kg/cm.} \end{aligned}$$

Läbipainede peatasapindades vastavalt valemile (210) avalduvad:

$$yx\text{-tasapinnas} \quad \check{f}_y = - \frac{5q_y l^4}{384EJ_z};$$

$$zx\text{-tasapinnas} \quad \check{f}_z = - \frac{5q_z l^4}{384EJ_y}.$$

Täielik läbipaine võrdub läbipainete  $\check{f}_y$  ja  $\check{f}_z$  geomeetrilise sumмага, s. o.

$$f = \sqrt{\check{f}_y^2 + \check{f}_z^2} = \frac{5 \cdot 200^4}{384 \cdot 2 \cdot 10^6} \sqrt{\left(\frac{3,85}{759}\right)^2 + \left(\frac{1,07}{130,7}\right)^2} = \\ = 10,4 \cdot 0,00965 = 0,1 \text{ cm.}$$

ehk

$$f = 1 \text{ mm.}$$

## § 82. Paine koos tõmbe või survega

Talade painde vaatlemisel seni eeldasime, et talale mõjuvad välisjõud on risti tema teljega. Vaatleme nüüd üldisemat juhtu, mil painutav jõud mõjub talale kaldu selle teljega. Mõjugu näiteks ühe otsaga jäigalt kinnitatud talale (joon. 170, a) jõud  $P$  tala pikisümmeetria tasapinnas tala teljega nurga  $\alpha$  all.

Lahutame jõu  $P$  kaheks komponendiks  $N$  ja  $H$ . Tala teljega risti mõjuv jõud  $N$  kutsub esile painde, telge mööda mõjuv jõud  $H$  aga tõmbe. Jõudude mõjumise sõltumatuse printsiibi alusel võime väita, et jõud  $N$  ja  $H$  avaldavad talale sama mõju, mis üks jõud  $P$ .

Tõmbejõu  $H$  poolt esile kutsutud normaalpinge tala kõikides ristlõigetes on ühesugune ning jaotub ristlõike ulatuses ühtlaselt. Selle pinge suurus määratakse valemiga

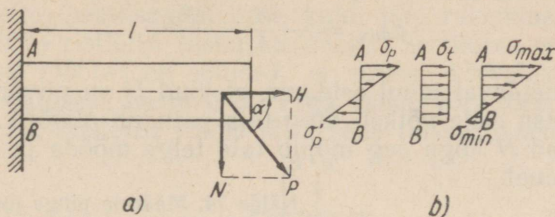
$$\sigma_t = \frac{H}{F},$$

kus  $F$  on tala ristlõikepindala.

Paindepinged sõltuvad momendi suurusest. Suurim paindemoment on kinnituses; seetõttu ohtlikuimaks lõikeks on kinnituslõige. Selles lõikes neutraalkihist kõige kaugemal asetsevates kiududes maksimaalsed pinged avalduvad:

$$\sigma_p = \frac{N \cdot l \cdot h_1}{J}; \quad \sigma'_p = - \frac{N \cdot l \cdot h_2}{J}, \quad (224)$$

kus  $\sigma_p$  on tõmbepinge ülemistes äärmistes kiududes,  $\sigma'_p$  — survepinge alumistes äärmistes kiududes,  $h_1$  ja  $h_2$  — äärmiste kiudude kaugused neutraaljoonest,  $J$  — kogu ristlõike inertsmoment neutraaltelje suhtes.



Joonis 170.

Summaarne pinge paindest ja tõmbest punkti A jaoks võrdub:

$$\sigma_{max} = \frac{H}{F} + \frac{Nlh_1}{J}; \quad (225)$$

punkti B jaoks:

$$\sigma_{min} = \frac{H}{F} - \frac{Nlh_2}{J}. \quad (226)$$

Pinge  $\sigma_{min}$  võib osutada tõmbepingeks, kui  $\frac{H}{F} > \frac{Nlh_2}{J}$ ; survepingeks, kui  $\frac{H}{F} < \frac{Nlh_2}{J}$ ,  $\sigma_{min}$  võrdub nulliga kui  $\frac{H}{F} = \frac{Nlh_2}{J}$ . Seega pinge  $\sigma_{min}$  märk sõltub pingete  $\frac{H}{F}$  ja  $\frac{Nlh_2}{J}$  vahekorrast.

Erijuhul, kui  $h_1 = h_2$ , saame:

$$\sigma_{max} = \frac{H}{F} + \frac{Nl}{W}, \quad (227)$$

$$\sigma_{min} = \frac{H}{F} - \frac{Nl}{W}. \quad (228)$$

Pingete epüürid, kui  $\sigma'_p > \sigma_t$  on toodud joonisel 170, b. Kui jõud  $H$  ei tõmba, vaid surub tala, siis analoogilistel

kaalutlustel tuleme summaarsete pingete määramiseks järgmistele valemitele:

$$\sigma_{max} = -\frac{H}{F} + \frac{Nlh_1}{J}, \quad (229)$$

$$\sigma_{min} = -\frac{H}{F} - \frac{Nlh_2}{J}. \quad (230)$$

Vaadeldaval juhul eeldame, et jõud  $H$  on niivõrd väike, et ei kutsu esile nõtket, ning tala paindub niivõrd vähe, et survejõud  $H$  kogu aeg mõjub tala telge mööda ja ei kutsu esile painet.

**Näide 74.** Määrata pinge joonisel 171 näidatud poldis, kui poldi keeme sise-läbimõõt  $d_1 = 25,138$  mm, polti eel-pingestav jõud  $P = 400$  kg ja koormuse ekstsentrisus  $a = 50$  mm.

*Lahendus.* Poldi pea ebasümmeetrilise tõttu ei mõju eelpingestava jõu reaktsioon  $P$  poldi pea keskel, vaid pea tugipinna keskel, punktis  $E$ . Reaktsioonijõu  $P$  mõju määramiseks rakendame piki poldi telge kaks vastassuunalist ja suuruselt võrdset jõudu reaktsiooniga  $P$ . Punktis  $E$  mõjuv reaktsioonijõud ja üks piki poldi telge mõjuvatest jõududest, nimelt ülespoole suunatud jõud, moodustavad jõupaari

õlaga  $a$ . Selle paari moment  $Pa$  painutab polti, piki poldi telge mõjuv teine jõud  $P$  aga tõmbab teda.

Paindepinge poldis

$$\sigma_p = \frac{M}{W} = \frac{P \cdot a}{\frac{\pi d_1^3}{32}} = \frac{32P \cdot a}{\pi d_1^3}.$$

Poldi tõmbepinge

$$\sigma_t = \frac{P}{F} = \frac{P}{\frac{\pi d_1^2}{4}} = \frac{4P}{\pi d_1^2}.$$

Summaarne pingepaindest ja tõmbest ohtlikuimas punktis avaldub:

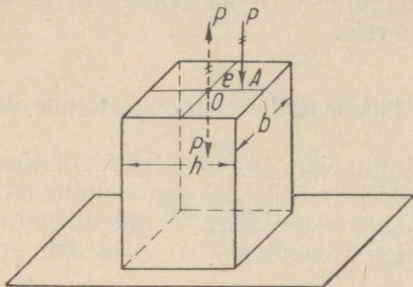
$$\sigma_{max} = \frac{32P \cdot a}{\pi d_1^3} + \frac{4P}{\pi d_1^2} = \frac{4P}{\pi d_1^2} \left( \frac{8a}{d_1} + 1 \right).$$

Asetades  $P$ ,  $a$  ja  $d_1$  väärtused, saame:

$$\sigma_{max} = \frac{4 \cdot 400}{3,14 \cdot 2,5138^2} \left( \frac{8 \cdot 5}{2,5138} + 1 \right) \approx 1360 \text{ kg/cm}^2.$$

### § 83. Ekstsentriline surve

Ekstsentriliseks surveks nimetatakse sellist survet, kus prussi suruv jõud on paralleelne prussi teljega ning asub ühes selle peatasapindadest, kuid jõu rakenduspunkt ei lange ühte ristlõike raskuskeskmega. Seejuures eeldatakse, et prussi mõõted on sellised, et prussi kõrvalekaldumine tema esialgsest asendist on väga väike, võrreldes ekstsentrilisusega, mistõttu võime jätta selle tähele panemata.



Joonis 172.

Selline surve juhtum on esitatud joonisel 172. Suruv pikijõud mõjub prussile punktis  $A$  ekstsentrilisusega  $e$ . Rakendame ülemise ristlõike raskuskeskmesse  $O$  kaks võrdvastupidist jõudu  $P$ . Siis punktis  $A$  mõjuv jõud  $P$  ja punktis  $O$  mõjuv ülespoole suunatud jõud  $\bar{P}$ , annavad jõupaari momendiga  $P \cdot e$ . See moment mõjub prussi peatasapinnas ja jääb konstantseks prussi kogu pikkuse ulatuses. Selle poolt esile kutsutud pinge võrdub:

$$\sigma_p = \pm \frac{P \cdot e}{W}.$$

Piki prussi telge mõjuv allesjäänud jõud  $P$  kutsub esile survepinge, mis võrdub:

$$\sigma_s = - \frac{P}{F}.$$

Summaarne pinge võrdub pingete  $\sigma_p$  ja  $\sigma_s$  algebralise summaga,

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_p,$$

või asetades  $\sigma_s$  ja  $\sigma_p$  väärtused, saame:

$$\sigma_{max} = -\frac{P}{F} + \frac{Pe}{W}, \quad (231)$$

$$\sigma_{min} = -\frac{P}{F} - \frac{Pe}{W}. \quad (232)$$

Absoluutväärtuselt  $\sigma_{min}$  on suurem kui  $\sigma_{max}$ . Valemid  $\sigma_{max}$  ja  $\sigma_{min}$  arvutamiseks saame ekstsentrilisel survel samasugused, nagu eelmises paragrahvis vaadeldud painde ja surve koosmõjumisel, kuna ekstsentriline surve taandub paindeks ja surveks.

## § 84. Ekstsentrilise surve ja tõmbe üldjuht

Vaatleme juhtu, kus prussi süruv või tõmbav pikijõud ei asu kummaski prussi kahest peatasapinnast. Joonisel 173 toodud prussi surutakse jõuga  $P$ , mis on paralleelne prussi teljega. Selle jõu rakenduspunkt  $A$  ei asu prussi peatasapindades  $zOx$  ja  $yOx$ .

Rakendame ülemise aluse raskuskeskmesse  $O$  kaks võrdvastupidist jõudu  $P$ , mis on suunatud mööda  $x$  telge. Siis punktis  $A$  mõjuv jõud  $P$  ja punktis  $O$  mõjuv ülespoole suunatud jõud  $P$  annavad jõupaari momendiga  $P \cdot \overline{AO}$ , mis painutab prussi tasapinnas  $AOx$ .

Punktis  $O$  mõjuv allapoole suunatud jõud  $P$  kutsub esile prussis survepinge  $-\frac{P}{F}$ , kus  $F$  on ristlõike pindala. Seega ekstsentrilise surve (tõmbe) üldjuht taandub vildakpainde ja lihtsurve (tõmbe) koosmõjumiseks. Olgu punkti  $A$  koordinaadid  $m$  ja  $n$ . Leiame pinged mingis punktis  $B$  koordinaatidega  $y$  ja  $z$ . Lahutame tasapinnas  $AOx$  mõjuva momendi  $P \cdot \overline{AO}$  kaheks peatasapindades  $zOx$  ja  $yOx$  mõjuvaks momendiks. Siis saame momendi  $P \cdot n$  tasapinnas  $zOx$  ja momendi  $P \cdot m$  tasapinnas  $yOx$ . Mõlemad need momendid tekitavad esimeses veerandis, kus asub punkt  $B$ , survepinged:

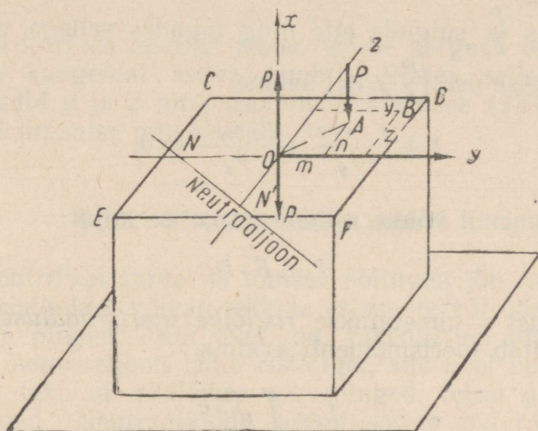
$$-\frac{P \cdot n \cdot z}{J_y} \text{ ja } -\frac{P \cdot m \cdot y}{J_z}.$$

Liites kõik kolm pinget, leiame summaarse pinget punktis  $B$ :

$$\sigma = -\left(\frac{P}{F} + \frac{P \cdot n \cdot z}{J_y} + \frac{P \cdot m \cdot y}{J_z}\right). \quad (233)$$

Kui näiteks väljaulatavate nurkadega ristlõigetel mõlemad peateljed on sümmeetriatelgedeks (ristkülik, I-profiil ja teised), siis võime kergesti määrata sellise punkti, kus pinge on maksimaalne. Vaadeldaval juhul maksimaalne pinge on punktis  $D$ . Pinge punktis  $D$  võrdub:

$$\sigma = - \left( \frac{P}{F} + \frac{Pn}{W_y} + \frac{Pm}{W_z} \right). \quad (234)$$



Joonis 173.

Pinged ristküliku teiste tippude jaoks on vastavalt: punkti  $C$  jaoks:

$$\sigma = - \frac{P}{F} - \frac{Pn}{W_y} + \frac{Pm}{W_z};$$

punkti  $E$  jaoks:

$$\sigma = - \frac{P}{F} + \frac{Pn}{W_y} + \frac{Pm}{W_z};$$

punkti  $F$  jaoks:

$$\sigma = - \frac{P}{F} + \frac{Pn}{W_y} - \frac{Pm}{W_z}.$$

Kui prussi ristlõige on meelevaldse kujuga, siis enam-pingestatud punkti määramiseks peab teadma neutraal-, või nagu sel juhul nimetatakse, nulljoont.

Neutraaljoon kujutab enesest nullpingetega punktide geomeetrilisi asukohti. Nulljoone võrrandi saame valemist (233), võrrutades selles pinge  $\sigma$  nulliga. Siis saame:

$$\frac{P}{F} + \frac{P \cdot n \cdot z}{J_y} + \frac{P \cdot m \cdot y}{J_z} = 0,$$

ehk tuues  $\frac{P}{F}$  sulgude ette ning jagades sellega vasak- ja parempoolse osa ( $\frac{P}{F} \neq 0$ ), saame:

$$1 + \frac{F \cdot n \cdot z}{J_y} + \frac{F \cdot m \cdot y}{J_z} = 0. \quad (235)$$

Inertsmomendi võime esitada korrutise kujul:

$$J = F \cdot i^2. \quad (236)$$

Suurust  $i$  nimetatakse *ristlõike inertsraadiuseks*. Üldkujul esitab inertsmomenti avaldis

$$J = \int_F y^2 dF,$$

kus  $F$  on kujundi pindala,  $y$  — kujundi pinnaelemendikeste kaugus teljest, mille suhtes arvutatakse inertsmomenti.

Valemist (236) leiame:

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}; \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}. \quad (237)$$

Valemiga (237) võime alati arvutada kujundi inertsraadiuse meelevaldse telje suhtes, kui on teada kujundi inertsmoment selle telje suhtes ja kujundi pindala.

Asetades neutraaljoone saadud võrrandisse (235)  $\frac{F}{J_y}$  ja

$\frac{F}{J_z}$  asemele  $\frac{1}{i_y^2}$  ja  $\frac{1}{i_z^2}$ , saame

$$1 + \frac{nz}{i_y^2} + \frac{my}{i_z^2} = 0.$$

Võttes selles võrrandis kordamööda  $z = 0$  ja  $y = 0$ , leiame joonlõigud, mille neutraaljoon lõikab ära  $y$ - ja  $z$ -teljest. Lõigud telgedel  $y$  ja  $z$  (vt. joon. 173) avalduvad:

$$\left. \begin{aligned} ON = y_0 &= -\frac{i_z^2}{m}, \\ ON' = z_0 &= -\frac{i_y^2}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (238)$$

Konstrueerides neutraaljoone, võime kergesti leida sellest kõige kaugemal asuva punkti. Võttes selle punkti koordinaadid  $y$  ja  $z$  ning asetanud valemisse (233), määrame maksimaalse pinge lõikes.

### § 85. Ristlõike tuuma mõiste

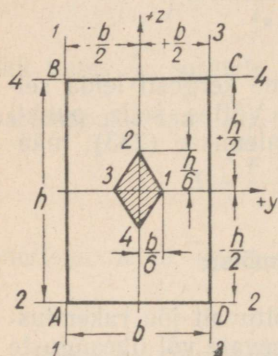
Ekstsentrilisel surveel ja tõmbel, sõltuvalt jõu rakenduspunktist ristlõikes, võivad tekkida erinevate või ühesuguste märkidega pinged. Kui jõud on rakendatud niisuguses kohas, et neutraaljoon läbib ristlõiget, siis ühel pool neutraaljoont tekivad ristlõikes survepinged, teisel pool aga tõmbepinged. Neutraaljoone asend sõltub jõu rakenduskohast.

Neil juhtudel, kui ekstsentriliselt surutav varras on valmistatud materjalist, mis avaldab halba vastupanu tõmbele, nagu näiteks malm, siis on soovitatav, et ristlõikes ei tekiks tõmbepingeid. Sellega tuleb arvestada ka tellis- või kivi-müüride projekteerimisel, kuna tellis ja kivi avaldavad tõmbele nõrka vastupanu, ning peale selle võib nende töötamisel tõmbele tekkida üksikuid telliseid või kive siduva vuugi lahtirebimine.

Et lõikes ei tekiks tõmbepingeid, ei tohi antud ristlõike puhul survejõu rakenduspunkti kaugus ristlõike raskuskeskmest ületada mingit piirväärtust, s. o. ekstsentrilisuse suurus peab olema piiratud.

Jõu rakenduspunkti piirkaugus lõike raskuskeskmest peab vastama neutraaljoone sellisele asendile, mille puhul ta ei lõiku ristlõike kontuuriga, vaid ainult puudutab seda. Sel juhul mõjuvad ristlõikes ainult ühemärgilised pinged. Nii näiteks, kui meil on tegemist ristkülikukujulise ristlõikega  $ABCD$  (joon. 174), siis neutraaljoone piirasenditeks on

ristlõike kontuuripuutujad, s. o. jooned 1—1, 2—2, 3—3, 4—4. Neutraaljoone iga saadud nelja asendi jaoks võime kergesti leida jõu vastavad rakenduspunktid. Olgu nendeks punktideks: 1, 2, 3, 4. Ühendades need punktid, saame viirutatud nelinurga. Kui näiteks survejõu rakenduspunkt asub nelinurga sees, siis kogu ristlõikes  $ABCD$  esinevad ainult survepinged.



Joonis 174.

Sellist ristlõike raskuskeset ümbritsevat piirkonda (meie näites nelinurk 1—2—3—4), mille meelevaldsesse punkti rakendatuna tekitab jõud kogu ristlõikes ainult ühemärgilisi pingeid, nimetatakse *ristlõike tuumaks*.

Asume ristlõike tuuma kontuuri konstrueerimise meetodi käsitlemisele. See meetod seisneb rakenduspunktide leidmises, mis vastavad ristlõike kontuuri puudutavatele neutraaljoontele.

Leiame näiteks joonisel 174 näidatud ristkülikukujulise ristlõike  $ABCD$  ristlõike tuuma. Neutraaljoonte poolt nende piirasendis koordinaattelgedest ära lõigatud joonlõigud avalduvad:

Neutraaljoon	1—1	lõikab ära $y$ -teljest	joonlõigu	$-\frac{b}{2}$
„	2—2	„ „ $z$ -	„ „	$-\frac{h}{2}$
„	3—3	„ „ $y$ -	„ „	$+\frac{b}{2}$
„	4—4	„ „ $z$ -	„ „	$+\frac{h}{2}$

Jõu rakenduspunkti  $y$ -teljel, mis vastab neutraaljoonele 1—1, määrame valemiga (238):

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{m};$$

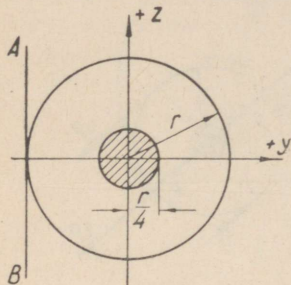
kuna  $y_0 = -\frac{b}{2}$ , ning

$$i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{hb^3}{12h \cdot b} = \frac{b^3}{12},$$

siis

$$m = \frac{b^2}{12} : \frac{b}{2} = \frac{b}{6}.$$

Jõu see rakenduspunkt — ristlõike tuuma kontuuri üks tippudest — on tähistatud joonisel 174 numbriga 1. Sümmeetría tõttu järeldame, et neutraaljoon 3—3 vastab ristlõike tuuma kontuuri tipule, mis joonisel on tähistatud numbriga 3. Analoogiliselt on kerge leida ka ristlõike tuuma kontuuri kaks teist tippu 2 ja 4. Ühendades leitud tipud sirgetega, saame rombi 1—2—3—4, mis kujutab nelinurga ristlõike tuuma kontuuri.



Joonis 175.

**Näide 75.** Leida joonisel 175 näidatud ringi, mille raadius on  $r$ , ristlõike tuum.

*Lahendus.* Sümmeetría tõttu on ringi ristlõike tuuma kontuuriks ringjoon. Selle raadiuse määramiseks võtame neutraaltelje mingi asendi, näiteks puuteasendi  $AB$ , mis on risti  $y$ -teljega (joon. 175). See neutraaljoon lõikab  $y$ -teljest ära joonlõigu  $y_0 = -r$ .

Asetades leitud  $y_0$  väärtuse valemisse (238), saame

$$-r = -\frac{i^2}{m},$$

millest jõu rakenduspunkti kaugus  $m$  ringi tsentrist, s. o. ristlõike tuuma raadius, avaldub:

$$m = \frac{i^2}{r} = \frac{J}{Fr}.$$

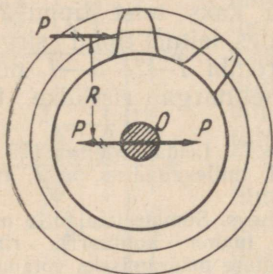
Kuna  $J = \frac{\pi r^4}{4}$ , ning  $F = \pi r^2$ , siis  $m = \frac{\pi r^4}{4\pi r^2} = \frac{r}{4}$ .

## § 86. Paine koos väändega

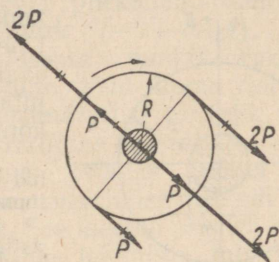
Sageli praktikas vääne esineb koos paindega. Sellise liitdeformatsiooniga tuleb kokku puutada näiteks võllide arvutamisel, kui võllile ülekantavad jõud ei läbi selle telge. Olgu näiteks võllile (joon. 176) asetatud hammasratas, mis kannab üle teiselt vedavalt hammasrattalt ringjõu  $P$ . Kanname jõu  $P$  võlli tsentrisse  $O$ . Selleks rakendame punktis  $O$  jõuga  $P$  paralleelset sirget mööda kaks võrdvastupidist jõudu  $P$ . Tulemusena saame jõupaari momendiga  $PR$  (jõud, mis moo-

dustavad selle paari, on joonisel märgitud kahe kriipsukesega), mis vääneb võlli, ja võlli tsentrisse rakendatud jõu  $P$ , mis kutsub esile võlli painde.

Selline painde ja väände koosmõju esineb võllis ka väändemomendi ülekandmisel rihmaajamiga. Võtame võlli koos selle otsa asetatud rihmarattaga (joon. 177), Mõjugu rihma vedavas (rihmarattale pealejooksvas) harus jõud  $2P$ , veetavas aga  $P$ . Kanname jõu  $P$  võlli tsentrisse, nagu seda



Joonis 176.



Joonis 177.

tegime ülalpool hammasratta ringjõu ülekandmisel. Siis saame jõupaari momendiga  $PR$ , mis mõjub vastu kellaosuti liikumissuunda ja painutava jõu  $P$ . Tehes sedasama jõuga  $2P$ , saame võlli kellaosuti liikumise suunas väänava jõupaari momendiga  $2PR$ , ja painutava jõu  $2P$ . Liites väänavad momendid  $PR$  ja  $2PR$ , mis on vastassuunalised, saame võlli kellaosuti liikumise suunas väänava momendi  $PR$ , mis kutsub esile võllis väändepinge. Võlli tsentrisse rakendatud ühesuunalised jõud  $P$  ja  $2P$  annavad painutava jõu, mis on võrdne  $3P$ .

Varemalt tuletatud valemite (178) ja (99)

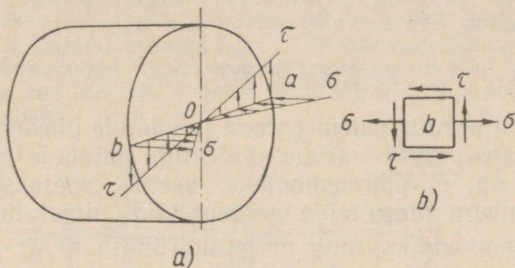
$$\sigma = \frac{M}{W}, \quad (178)$$

$$\tau = \frac{M_v}{W_p}; \quad (99)$$

põhjal on kerge määrata võlli meelevaldses lõikes tekkivat normaalpinget paindest ja tangentsiaalpinget väändest. Põikjõust tekkinud tangentsiaalpinged jäetakse võllide arvutusel tavaliselt tähele panemata, kuna need on tunduvalt väiksemad väändest põhjustatud tangentsiaalpingetest.

Suurimad pinged väändest ja suurimad pinged paindest tekivad võlli pinnal (joon. 178, a). Nendest pingetest võib igaüks eraldi võetuna olla väiksem vastavale deformatsiooniliigile lubatavast pingest. Siiski nende üheaegne mõjumine võib osutuda võllile ohtlikuks.

Paindepinge  $\sigma$  ja väändepinge  $\tau$  üheaegse mõjumise hindamiseks eraldame ohtlikuima lõike ohtlikuimas punktis



Joonis 178.

(punktid  $a$  ja  $b$  joonisel 178, a) materjali elemendi (joon. 178, b).

Selle elemendi neljal tahul mõjuvad tangentsiaalpinged, neist tahkudest kahele aga ka veel normaalpinged. See element on tasapinnalises pingeolukorras, mida me vaatlesime § 68. Selle elemendi kolme peapinge väärtused avalduvad:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Teades peapingete väärtusi, võime kirjutada tugevustingimused kas ühe või teise tugevusteooria järgi. Nii maksimaalsete tangentsiaalpingete teooria põhjal (kolmas tugevusteooria)

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Asetades  $\sigma_1$  ja  $\sigma_3$  väärtused, saame järgmise tugevustingimuse:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (239)$$

Pinget  $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$  nimetatakse redutseeritud või ekvivalentseks pingeks. Asetades valemisse (239) valemitega (178) ja (99) määratud  $\sigma$  ja  $\tau$  väärtused, saame:

$$\sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_v}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (240)$$

Kuna ringi- ja rõngakujuliste ristlõigete puhul  $W_p = 2W$ , siis saame:

$$\frac{1}{W} \sqrt{M^2 + M_v^2} \leq [\sigma]. \quad (241)$$

Seega võlli arvutusvalem painde ja väände üheaegsel mõjumisel on analoogiline arvutusvalemiga paindele (178). Eriuvuseks on, et paindemomendi asemel võetakse paindel koos väändega mingi teine moment, mida nimetatakse redutseeritud momendiks ning mille suurus on  $\sqrt{M^2 + M_v^2}$ .

Võlli ohtlikumaks lõikeks on lõige, milles redutseeritud moment on maksiaalne. Seetõttu ohtlikuma lõike määramiseks juhtudel, kui seda kohe on raske teha, konstrueeritakse redutseeritud momentide epüür.

Kui võlli painutavad jõud ei asetse ühes tasapinnas, siis lahutatakse iga jõud kaheks komponendiks: vertikaalseks ja horisontaalseks. Edasi konstrueeritakse vertikaaltasapinnas mõjuvate jõudude paindemomentide  $M_V$  ja horisontaaltasapinnas mõjuvate jõudude momentide  $M_H$  epüürid. Leitud momentide  $M_V$  ja  $M_H$  järgi konstrueeritakse summaarsete paindemomentide epüür. Summaarsed momendid määratakse valemiga

$$M = \sqrt{M_V^2 + M_H^2}. \quad (242)$$

Asetades paindemomendi selle avaldise arvutusvalemisse (241), saame:

$$\frac{1}{W} \sqrt{M_V^2 + M_H^2 + M_v^2} \leq [\sigma]. \quad (243)$$

Sel juhul redutseeritud moment on võrdne  $\sqrt{M_V^2 + M_H^2 + M_v^2}$ .

Painde ja väände üheaegsel mõjumisel saame energieetilise tugevusteooria järgi arvutusvalemi, kui asetame tugevustingimusse (71) pingete  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ja  $\sigma_3$  väärtused. Pärast arendamist saame:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (244)$$

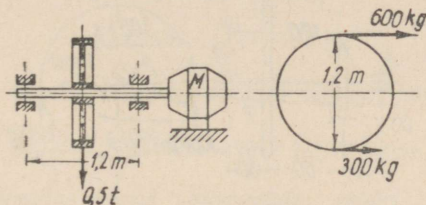
Asetades sellesse valemisse  $\sigma$  ja  $\tau$  väärtused, saame:

$$\sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{M_v}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma],$$

ehk silmas pidades, et  $W_p = 2W$ , saame:

$$\frac{1}{W} \sqrt{M^2 + 0,75 M_v^2} \leq [\sigma]. \quad (245)$$

**Näide 76.** Mootoriga  $M$  pannakse pöörlema võlli, mille keskele on kinnitatud rihmaratas kaaluga 0,5 t ja läbimõõduga 1,2 m (joon. 179). Rihmarattale asetatud rihma vedavas harus mõjub jõud 600 kg, veetavas harus aga 300 kg. Määrata võlli läbimõõt, kui lubatav pinge  $[\sigma] = 500 \text{ kg/cm}^2$ .



Joonis 179.

*Lahendus.* Kandes rihmaharudes mõjuvad jõud võlli tsentrisse, leiame võllile mõjuva horisontaalse jõu

$$P_H = 600 + 300 = 900 \text{ kg}$$

ja väändemomendi

$$M_v = 600 \cdot 60 - 300 \cdot 60 = 1800 \text{ kgcm.}$$

Horisontaalne jõud  $P_H = 900 \text{ kg}$  ja vertikaalne jõud, mis esitab rihmaratta kaalu,  $P_V = 500 \text{ kg}$ , mõjuvad võlli ühes löikes ning nende resultant avaldub:

$$P = \sqrt{P_H^2 + P_V^2} = \sqrt{900^2 + 500^2} = 1030 \text{ kg.}$$

Sellest resultandist põhjustatud maksimaalne pindmoment esineb võlli keskel ja selle suurus on:

$$M = \frac{P \cdot l}{4} = \frac{1030 \cdot 120}{4} = 30\,900 \text{ kgcm.}$$

Asetades arvutusvalemisse (241)  $M$  ja  $M_v$  väärtused, saame:

$$500 \geq \frac{1}{W} \sqrt{30\,900^2 + 18\,000^2},$$



vertikaalne jõud  $P_V = 450$  kg. Võlli keskosas mõjub väändemoment

$$M_V = 600 \cdot 40 - 300 \cdot 40 = 12\,000 \text{ kgcm.}$$

Ohtlikuima löike määramiseks konstrueerime vertikaaltasapinnas mõjuvatest jõududest ning horisontaaltasapinnas mõjuvatest jõududest pändemomentide epüürid ning momentide summaarse epüüri.

a) *Vertikaaltasapinnas momentide epüüri konstrueerimine* (joon. 180, b).

Toereaktsioonid määrame võrranditest  $\sum M_A = 0$  ja  $\sum M_B = 0$ :

$$B_V \cdot 120 - 450 \cdot 90 = 0;$$

$$B_V = 450 \cdot \frac{90}{120} = 337 \text{ kg.}$$

$$A_V \cdot 120 - 450 \cdot 30 = 0;$$

$$A_V = 450 \cdot \frac{30}{120} = 113 \text{ kg.}$$

Momendid tugede kohal on võrdsed nulliga; moment jõu kohal on võrdne:

$$M_V = A_V \cdot 90 = 113 \cdot 90 = 10\,170 \text{ kgcm.}$$

b) *Horisontaaltasapinnas momentide epüüri konstrueerimine* (joon. 180, c).

Toereaktsioonid:

$$\sum M_A = 0; \quad B_H \cdot 120 - 900 \cdot 30 = 0; \quad B_H = 900 \cdot \frac{30}{120} = 225 \text{ kg;}$$

$$\sum M_B = 0; \quad A_H \cdot 120 - 900 \cdot 90 = 0; \quad A_H = 900 \cdot \frac{90}{120} = 675 \text{ kg.}$$

Tugede kohal momendid võrduvad nulliga. Moment jõu kohal:

$$M_H = A_H \cdot 30 = 675 \cdot 30 = 20\,250 \text{ kgcm.}$$

c) *Momentide summaarse epüüri konstrueerimine* (joon. 180, d). Kui teame mingis löikes vertikaaljõudude momenti  $M_V$  ja horisontaaljõudude momenti  $M_H$ , siis valemiga

$$M = \sqrt{M_V^2 + M_H^2}$$

saame kergesti määrata selle löike jaoks summaarse pändemomendi. Joonisel 180, d on konstrueeritud summaarsete momentide epüür. Eri-nevates löigetes summaarsed momendid asuvad üldiselt võlli telge- läbivates erinevates tasapindades. Arvutamisel on olulised ainult summaarsete momentide absoluutväärtused, mistõttu nende momentide epüür konstrueeritakse kokkuleppeliselt, nagu asuksid kõik momendid ühel tasapinnal.

Väändemoment mõjub ainult võlli keskmises vahemikus. Momentide epüür kujutab teljega paralleelset sirget (joon. 180, e).

Summaarsete painde- ja väändemomentide epüüri vaatlemisel selgub, et pingestatuumaks lõikeks on lõige, mis langeb ühte vasakpoolse rihmaratta kesktasapinnaga. Selles lõikes

$$M = 20\,500 \text{ kgcm}; \quad M_v = 12\,000 \text{ kgcm}.$$

Asetades väärtused  $M$ ,  $M_v$  ja  $[\sigma]$  valemisse (241), saame:

$$600 \geq \frac{1}{W} \sqrt{20\,500^2 + 12\,000^2},$$

millest

$$W \geq \frac{\sqrt{20\,500^2 + 12\,000^2}}{600} = 39,6 \text{ cm}^3.$$

Kuna  $W = 0,1 d^3$ , siis

$$d = \sqrt[3]{\frac{W}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{39,6}{0,1}} = 7,34 \text{ cm}.$$

Võlli lähim suurim läbimõõt OCT järgi võrdub 7,5 cm, mille valimegi.

## § 87. Vääne koos tõmbe või survega.

Vääne koos tõmbe või survega esineb peamiselt kruvide ja poltide arvutamisel. Pingete jaotumine väänatava ja tõmmatava või surutava võlli pinnal võetud mingis punktis ei erine millegagi pingete jaotumisest väändel koos paindega, sest painde juures saadakse samuti tõmbe ja surve normaalpinged. Seetõttu arvutusvalemid (239) ja (244)

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (239)$$

$$\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \leq [\sigma] \quad (244)$$

on kehtivad ka väändel koos tõmbe või survega. Kui ümarprussile mõjub tõmbe- või survejõud  $P$  ja väändemoment  $M_v$ , siis

$$\sigma = \frac{P}{F}; \quad \tau = \frac{M_v}{W_p}.$$

Valem (239) kirjutatakse kujul

$$\sqrt{\left(\frac{P}{F}\right)^2 + 4\left(\frac{M_v}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma], \quad (246)$$

valem (244) aga kujul

$$\sqrt{\left(\frac{P}{F}\right)^2 + 3\left(\frac{M_v}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (247)$$

Näide 78. Leida  $P = 9000$  kg kandejõuga tungraua kruvi siseläbimõõt  $d_1$ , kui kruvi ja kruvi edasinihutava mutri vahel hõõrdejõust kruvile mõjuv väändemoment  $M_v = 6000$  kgcm. Lubatav pinge  $[\sigma] = 600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ .

Lahendus. Asetades andmed arvutusvalemisse (246), saame:

$$600 \geq \sqrt{\left(\frac{9000}{\frac{\pi}{4} d_1^2}\right)^2 + 4\left(\frac{6000}{\frac{\pi}{16} d_1^3}\right)^2}.$$

Võtame saadud avaldise vasak- ja parempoolse osa ruutu:

$$36 \cdot 10^4 \geq \frac{81 \cdot 10^6}{\frac{\pi^2}{16} d_1^4} + \frac{4 \cdot 36 \cdot 10^6}{\frac{\pi^2}{256} d_1^6}.$$

Võtame  $\pi^2 \approx 10$  ja vabaneme nimetajatest:

$$36 \cdot 10^5 d_1^6 = 16 \cdot 81 \cdot 10^6 d_1^2 + 256 \cdot 4 \cdot 36 \cdot 10^6$$

ehk

$$d_1^6 - 360 d_1^2 - 10\,240 = 0.$$

Tähistades  $d_1^2 = x$ , saame võrrandi

$$x^3 - 360x - 10\,240 = 0.$$

Lahendame selle kolmanda astme võrrandi katseliselt. Asetame  $x = 25$ ; siis saame:

$$15\,625 - 9000 - 10\,240 \neq 0.$$

Asetame  $x = 27$ :

$$19\,680 - 9720 - 10\,240 \neq 0.$$

Asetame  $x = 27,2$ :

$$20\,120 - 9790 - 10\,240 \approx 0.$$

Seega võime võtta  $x = 27,2$ . Sel juhul  $d_1 = \sqrt{27,2} = 5,22$  cm.

## § 88. Kontrollküsimusi

Missugusel juhul nimetatakse painet vildakpaindeks? Millisel viisil vildakpaine taandub kaheks «lihtsaks» paindeks?

Kas neutraaljoon vildakpaindel langeb ühte ühega ristlõike peatelgedest?

Kuidas määratakse pinget talas, kui jõud mõjub tala teljega kaldu?  
Kas läbib neutraaljoon vildakpindel ristlõike raskuskeset?

Missuguse deformatsiooni kutsub esile talas selle teljega kaldu mõjuv jõud?

Mida nimetatakse ekstsentriliseks surveks?

Kuidas määratakse suurim pinge ristlõikes ekstsentrilise surve või tõmbe üldjuhul?

Kuidas määratakse ristlõike inertsraadius?

Millistel juhtudel on vaja määrata ristlõike tuuma?

Kuidas avaldub tugevustingimus painde ja väände koosmõjumisel?

## NÕTKE

## § 89. Nõtke nähtuse olemus

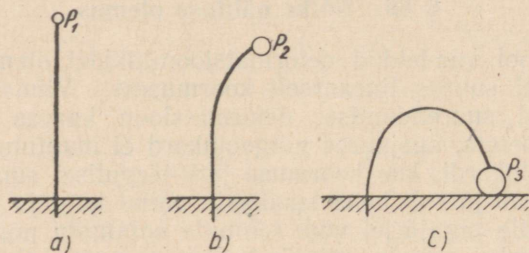
Eespool vaadeldud deformatsiooniliikidel olenes deformatsiooni suurus lineaarselt koormusest. Viimase järkjärgulisel suurendamisel deformatsioon kasvas pidevalt, ilma hüpeteta, kusjuures pingeolukord ei muutunud. Siiski esineb olukordi, kus koormuse järkjärgulisel suurendamisel muutub järsult keha tasakaalu antud kuju ja pingeolukord, mille tagajärjel võib toimuda ootamatu purunemine. Kui näiteks suruda pikijõududega varrast, mille pikkus, võrreldes ristlõike mõõdetega, on küllalt suur, siis sel juhul kui survejõud mõjuvad täpselt piki varda telge ning nende suurus ei ületa mingit varda pikkusest ja ristlõike jäikusest sõltuvat piirsuurust, töötab varras harilikule survele ja tema telg jääb sirgjooneliseks. Kui aga suruvad jõud ületavad nimetatud piirsuuruse, siis varras äkki nõtkub ja tema telg kõverdub.

Varda painde tõttu tekib lisapingeid tekitav paindemoment ja varras võib ootamatult puruneda. Pikijõududega surutavate pikkade varraste kõverdumist nimetatakse nõtkeks.

Vaatleme seda nähet veidi lähemalt. Võtame peene pika terasvarda (joon. 181, a). Kinnitame selle alumise otsa jäigalt, ülemisele otsale aga rakendame täpselt piki varda telge mõjuva survejõu. Viimase toimel surutakse varras algul ainult kokku, kusjuures varda telg jääb sirgjooneliseks. Kui viime varda välja sirgjoonelisest seisust, kallutades teda ristjõuga, siis pärast selle jõu eemaldamist elastsusjõud uuesti viivad varda esialgsesse sirgjoonelisse asendisse. See toimub seni, kuni suruv jõud  $P$  ei ületa mingit piirsuurust  $P_1$ . Nõtke esimeses staadiumis sirgjooneline var-

ras on stabiilses tasakaalus. Esineb täielik analoogia mehaanikas vaadeldava stabiilses tasakaaluga.

Kui nüüd suurendada vardale mõjuvat survejõudu kuni väärtuseni  $P_2$ , mis natuke ületab piirijõu  $P_1$ , siis varras kõverdub ning ilmub läbipainde nool. Läbipainde noole ilmumise tõttu vardale mõjuv jõud mitte ainult surub seda, vaid ka painutab. Nõtkes selles teises staadiumis põhjustab jõu isegi väike suurendamine varda tunduvalt läbipaindumist (joon. 181, *b*). Varda painutatud telg on seejuures tasakaalus (siseelastsusjõud tasakaalustavad välispaindemomendi), kuid tasakaal on ebastabiilne.



Joonis 181.

Kui nüüd veelgi suurendada jõudu  $P_2$ , ütleme väärtuseni  $P_3$ , siis sisejõud ei suuda enam tasakaalustada väliskoormust ja selle tagajärjel vardas toimub täiendav kõverdumine. Seejuures varras kas murdub, kui ta on tehtud haprast materjalist, või paindub ülemise otsaga vastu tugipinda, nagu see on näidatud joonisel 181, *c*, kui materjal on sitke.

Jõu piirväärtust, mille juures toimub üleminek stabiilsest kujust mittestabiilsesse, nimetatakse *kriitiliseks jõuks*. Kui koormus on väiksem kriitilisest suurusel, siis on võimalik ainult üks stabiilses tasakaalu kuju. Varemalt meie poolt uuritud deformatsiooniliikides eeldasime üht stabiilses tasakaalu kuju. Neil juhtudel, kui konstruktsioonil võib olla enam kui üks tasakaalu kuju, esitatakse sellele peale § 1 loetletud põhiliste nõuete veel tasakaalu stabiilses kuju säilitamise nõue.

See on väga tähtis asjaolu. Praktikas on esinenud tähelepanuväärseid katastroofe (suurte raudteesildade ja

teiste inseneriehituste purunemine) stabiilsuse kadumise tagajärjel ühel konstruktsiooni elementidest.

Kriitiline jõud nõtkel on see minimaalne jõud, mis viib varda sirgjoonelisest seisundist kõverjoonelisse. Kriitilise jõu ületamisel paindemoment pikijõududest kasvab öla suurenemise tõttu kiiremini, kui sisejõudude moment. Seetõttu kriitilist jõudu võib samastada purustava jõuga. Nõtkele töötaval prussidel peavad ristlõikemõõted olema antud loomulikult sellised, millede puhul kriitiline jõud oleks tunduvalt suurem prussile faktiliselt mõjuvast jõust.

Kui tähistada kriitiline jõud  $P_{kr}$ , lubatav jõud  $[P_n]$ , siis suhet  $\frac{P_{kr}}{[P_n]} = k > 1$  nimetatakse stabiilsuse varuks. Stabiilsuse varu nagu tugevusvarugi, võetakse vähem homogeensetel materjalidel suurem, kui homogeensetel. Nii võetakse stabiilsuse varu puitkonstruktsioonidel 2,5 ja enam, malmkonstruktsioonidel 5—6, teraskonstruktsioonidel aga 1,8—3.

## § 90. Euleri valemid

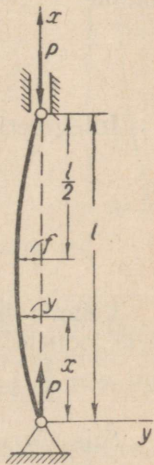
Varraste arvutamisel nõtkele on vaja osata määrata kriitilise jõu suurust. Esmakordselt tuletas valemi selle jõu määramiseks kuulus matemaatik, Peterburi Teaduste Akadeemia liige L. Euler. Kriitiline jõud oleb varda otste kinnitusest. Praktikas esineb nõtkele töötava varda otste kinnituse neli juhtu.

**Juhus 1** (põhiline). Šarniirselt kinnitatud otstega varras (joon. 182). Kriitilise jõuga võrdsete või sellest natuke suuremate suruvate jõudude mõjul varras kõverdub. Paindemoment varda mingis lõikes võrdub:

$$M = -Py, \quad (a)$$

s. o. koormus (paindemoment) sõltub ise varda deformatsioonist (paindest). Sellega kriitilise jõu määramise ülesanne erinebki põhimõtteliselt kõikidest meie poolt varem vaadeldud ülesannetest.

Euleri valemite täpne tuletamine kriitilise jõu määramiseks nõuab matemaatika põhjalikumat tundmist, kui seda näeb ette tehnikumi programm. Euleri valemite rangelt tule-



Joonis 182.

tamisel ei anta ette varda kõverdunud elastse joone kuju, vaid see määratakse. Meie aga selle valemi tuletamisel eeldame, et varda paindunud elastne joon kujutab enesest sinusoidi.

Tähistades varda keskel läbipainde suuruse  $f$ , siis elastse joone võrrand avaldub:

$$y = f \sin \frac{\pi}{l} x. \quad (248)$$

Varda otstes, kus  $x = 0$  ja  $x = l$ ,  $y = 0$ , s. o. läbipainet ei ole. Varda keskel, kus  $x = \frac{l}{2}$ , on läbipaine võrrandi (248) põhjal  $f$ .

Asetades  $y$  väärtuse võrrandist (248) paindemomendi avaldisse (a), saame:

$$M = -Pf \sin \frac{\pi}{l} x. \quad (b)$$

Asetades momendi selle avaldise elastse joone üldvõrrandisse (196)

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M, \quad (196)$$

saame:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -Pf \sin \frac{\pi}{l} x.$$

Integreerime seda avaldist kaks korda:

$$EJ \frac{dy}{dx} = Pf \frac{l}{\pi} \cos \frac{\pi}{l} x + C, \quad (c)$$

$$EJy = Pf \frac{l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{l} x + Cx + D. \quad (d)$$

Leiame integreerimise konstandid  $C$  ja  $D$ . Puutuja elastsele joonele varda keskel on paralleelne  $x$ -teljega; seetõttu kui  $x = \frac{l}{2}$ , peab tuletis  $\frac{dy}{dx}$  võrduma nulliga.

Siis võrrandist (c) saame:

$$C = 0.$$

Kui  $x = 0$ , siis läbipaine  $y = 0$ . Võrrandist (d) saame:

$$D = 0.$$

Nüüd võime võrrandi (d) kirjutada kujul:

$$EJy = Pf \frac{l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{l} x.$$

Kui  $x = \frac{l}{2}$  ja  $y = f$ , siis

$$EJf = Pf \frac{l^2}{\pi^2}$$

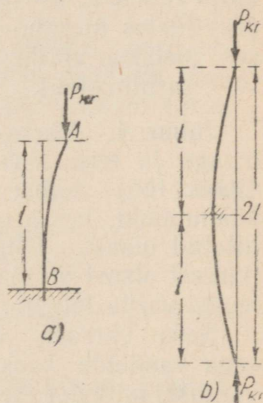
ehk

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (249)$$

Euleri valemiks nimetatakse sellist avaldist, mis määrab šarniirselt kinnitatud otstega varda kriitilise jõu suuruse.

**Juhus 2.** Varras ühe jäigalt kinnitatud otsaga ja teise täiesti vaba otsaga (joon. 183, a). Kriitilise jõu leiame antud juhul, kui võrdleme seda varrast esimese juhu vardaga. Tõepoolest, kui jätkata varda telgjoont, nagu näidatud joonisel 183, b, siis näeme, et ühe jäigalt kinnitatud otsaga ja teise vaba otsaga varras asub samades tingimustes, kui pool kaks korda pikemast šarniirselt kinnitatud otstega vardast. Järelikult, ühe jäigalt kinnitatud otsaga ja teise vaba otsaga varda kriitilise jõu saamiseks tuleb esimese juhu valemis (249) kirjutada  $l$  asemel  $2l$ . Tehes sellise asenduse, saame:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}. \quad (250)$$



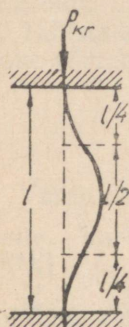
Joonis 183.

**Juhus 3.** Vardal on mõlemad otsad jäigalt kinnitatud (joon. 184). Sel juhul eeldatakse otste absoluutselt jäika kinnitust, s. o. sellist, kus otsad on täiesti liikumatud ja puutuvad elastsele joonele varda otstes langevad ühte varda teljega.

Sellise varda elastne joon koosneb neljast võrdsest osast. Iga selline osa pikkusega  $\frac{l}{4}$  asub samades tingi-

mustes, mis ühe otsaga jäigalt kinnitatud varraski (juhus 2).

Seetõttu võib jäigalt kinnitatud otstega varda kriitilise jõu määrata valemiga (250), kui asendada selles  $l$  asemele  $\frac{l}{4}$ . Tehes selle asenduse, saame:



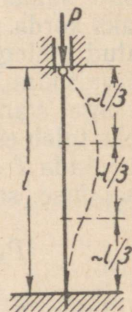
$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{\left(2 \cdot \frac{l}{4}\right)^2} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (251)$$

Järelikult kriitiline jõud jäigalt kinnitatud otstega vardal on 4 korda suurem, kui šarniirsel kinnitatud otstega vardal.

Praktiliselt on otste absoluutselt jäika kinnitust realiseerida väga raske. Varda otste väiksemagi pöördumisvõimaluse korral kriitiline jõud on palju väiksem, kui valemiga (251) määratav. Seetõttu sageli praktilistes ülesannetes, kui ei olda kindel kinnituse jäikus, loetakse varda otsad mitte absoluutselt kinnitatuteks, vaid šarniirseteks.

**Juhus 4.** Varras ühe jäigalt kinnitatud otsaga ja teise šarniirsel kinnitatud otsaga (joon. 185). Sellise varda elastsel joonel on käänupunkt, kaugusel umbes  $l/3$  jäigalt kinnitatud otsast. Umbes samal kaugusel šarniirsel otsast on elastse joone puutuja paralleelne varda teljega.

Seda varrast võime mõninga lähendusega vaadelda koosnevana kolmest üksikust vardast, millel üks ots on kinnitatud jäigalt — teine aga on vaba (juhus 2). Kriitilise jõu iga sellise osa, järelikult aga ka kogu varda jaoks, võime määrata, kui asendame valemis (250)  $l \frac{l}{3}$ -ga. Tehes selle asenduse, saame:



Joonis 185.

$$P_{kr} \approx \frac{\pi^2 EJ}{\left(2 \cdot \frac{l}{3}\right)^2} \approx \frac{2\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (252)$$

Varda otste kinnituste neljal vaadeldud juhul võime valemid (249), (250), (251) ja (252) kriitiliste jõudude määramiseks ühendada üheks valemiks:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}. \quad (253)$$

Nimetajas esineva suuruse  $\mu$ , mida nimetatakse *pikkuse redutseerimise teguriks*, väärtuse võime kergesti määrata varda otste kinnituse nelja juhu vastavate valemite võrdlemisest üldise valemiga (253).

Esimesel juhul	$\mu = 1,$
teisel	„ $\mu = 2,$
kolmandal	„ $\mu = \frac{1}{2},$
neljandal	„ $\mu \approx \frac{2}{3}.$

Varda tegeliku pikkuse  $l$  korrutist pikkuse redutseerimise teguriga  $\mu$  nimetatakse varda redutseeritud või arvutuslikuks pikkuseks. Tähistades varda redutseeritud (arvutusliku) pikkuse tähega  $l_r$ :

$$l_r = \mu l, \quad (254)$$

kirjutame üldvalemi (253) järgmisel kujul:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_r^2}. \quad (255)$$

Kriitilise jõu varda otste kinnituse kõikidel juhtudel määrame valemiga (255). Tuleb mees pidada, et selles valemis  $l_r$  kujutab enesest mitte varda tegelikku pikkust, vaid arvutuslikku ehk redutseeritud pikkust.

Redutseeritud pikkuse mõiste võttis esmakordselt kasutusele Põeterburi Raudtee Instituudi professor F. S. Jassinski 1892. a.

Kriitilist jõudu määravasse valemisse tuleb asetada varda ristlõike tsentraalse telginertsmomendi minimaalne väärtus (kui need lõikel ei ole ühesugused), kuna varras alati paindub väikseima jääkuse tasapinnas.

Sisse tuues valemisse (255) stabiilsuse varuteguri, saame lubatava jõu määramiseks nõtkel üldvalemi:

$$[P_n] = \frac{P_{kr}}{k} = \frac{\pi^2 EJ}{kl_r^2}. \quad (256)$$

Edaspidi nimetame valemid (255) ja (256) Euleri valemiteks.

Kui tähistame ristlõikepindala tähega  $F$ , siis võime kergesti saada avaldised kriitilisele jõule vastava kriitilise pinge ja lubatavale jõule vastava lubatava pinge määramiseks:

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{F} = \frac{\pi^2 EJ}{Fl_r^2}, \quad (257)$$

$$[\sigma_n] = \frac{[P_n]}{F}, \quad (258)$$

kus  $[\sigma_n]$  on lubatav pinge nõtkel. Tavaliselt valemid (257) teisendatakse ristlõike inertsraadiuse sissetoomisega. Kuna

$$J = F \cdot i^2,$$

siis

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E F i^2}{F l_r^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l_r}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (259)$$

Suhet  $\frac{l_r}{i}$  nimetatakse *varda saleduseks* ja tähistatakse tähega  $\lambda$ . Valemist (259) järgneb, et nõtkel vardas kriitiline pinge on pöördvõrdeline arvutusliku pikkuse ja inertsraadiuse suhte ruuduga.

## § 91. Euleri valemite rakendatavuse piirid. Tabel nõtkete arvutamiseks

Euler oma valemi tuletamisel kriitilise jõu määramiseks surutud vardale eeldas, et varda materjal on küllaldaselt elastne ja allub Hooke'i seadusele.

Teame aga, et materjal allub Hooke'i seadusele ainult seni, kuni pinge temas ei ületa proportsionaalsuse piiri. Järelikult Euleri valemil peab erinevate materjalide korral

samuti olema oma kindel rakendatavuse piir. Valem on kehtiv ainult seni, kuni kriitiline pinge vardas ei ületa materjali proportsionaalsuse piiri. Lühikeste varraste korral annab Euleri valem aga proportsionaalsuse piirist suurema kriitilise pinge, seetõttu lühikeste varraste puhul Euleri valemid ei ole rakendatavad.

Euleri valemite rakendatavuse piiriks on need juhud, kus kriitiline pinge võrdub proportsionaalsuse piiriga. Sel alusel võib määrata meelevaldselt materjalist posti geomeetriaalsete mõõdete suhte need piirväärtused, millede puhul Euleri valem on rakendatav.

Asetades valemisse (254) kriitilise pinge ( $\sigma_{kr}$ ) asemele proportsionaalsuse piiri ( $\sigma_{pr}$ ) ja määrates temast saleduse  $\lambda$ , saame:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} \quad (260)$$

Määrame näiteks Euleri valemite rakendatavuse ulatuse terasele 30, mille elastsusmoodul  $E = 2,0 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup> ja proportsionaalsuse piir  $\sigma_{pr} = 2000$  kg/cm<sup>2</sup>.

Asetades valemisse (260)  $E$  ja  $\sigma_{pr}$  väärtused, saame:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2,0 \cdot 10^6}{2000}} = 100.$$

Kui sellest terasest posti saledus  $\lambda$  on alla 100, siis ilmselt kriitiline pinge on suurem proportsionaalsuse piirist ja Euleri valemid sel juhul pole kehtivad.

Analoogiliselt võime arvutada Euleri valemite rakendatavuse piirid ka iga teise materjali jaoks, kui asetame valemisse (260) antud materjali elastsusmooduli ja proportsionaalsuse piiri väärtused. Nii on malmi puhul Euleri valem rakendatav saledustel  $\lambda \geq 80$ , männipuidu puhul aga saledustel  $\lambda \geq 110$  jne.

Kui varda saledus on väiksem antud materjali jaoks kehtivast piirväärtusest, s. o. kui Euleri valemiga määratud kriitiline pinge on suurem proportsionaalsuse piirist, siis kriitilise pinge määramiseks soovitatakse empiirilisi valemid.

Jassinski, kogudes ja töötades ümber suure hulga katseid materjali, näitas, et väikese saledusega varrastes (mil-

lede jaoks Euleri valem pole rakendatav) võib kriitilise pinge määrata võrrandiga:

$$\sigma_{kr} = a - b\lambda, \quad (261)$$

kus  $a$  ja  $b$  on materjalist olenevad suurused. Nende kordajate väärtused erinevate materjalide jaoks on antud käsi- raamatutes.

Lubatav pinge  $[\sigma]$  nõtkel proportsionaalsuse piirini ja üle proportsionaalsuse piiri on materjalist ja varda saledusest, s. o. suurusest  $\lambda$ , kusjuures teda võib vaadelda, kui teatavat osa  $\varphi$  lubatavast pingest lihtsurvel  $[\sigma_s]$ , s. o.

$$[\sigma_n] = \varphi [\sigma_s]. \quad (262)$$

Tegur  $\varphi$  on alati väiksem ühest. Teda nimetatakse *lubatava lihtsurvepinge vähendusteguriks nõtkel*. Tegur  $\varphi$  on lehti saledusest  $\lambda$  ja materjalist.

Seega tuues sisse vähendusteguri  $\varphi$ , võime nõtkel kontrolli teha samuti nagu lihtsurvel, kasutades ainult väiksemat lubatavat survepinget.

Tabelis 10 on antud lubatava survepinge vähendustegurid  $\varphi$  nõtkel põhiliste ehitusmaterjalide jaoks šarniirselt kinnitatud otstega posti juhul.

Tabel 10

Tegurid  $\varphi$

Saledus $\lambda$	Väärtused				
	teras 40, 30, 20	teras 50	teras $\sigma_T > 3200$ kg/cm <sup>2</sup>	malm	puut
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25

Tabel 10 (järg)

Saledus $\lambda$	Väärtused				
	teras 40, 30, 20	teras 50	teras $\sigma_T > 3200$ kg/cm <sup>2</sup>	malm	puit
120	0,45	0,37	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

Eespooltoodu põhjal kasutame saleduse määramiseks posti otste teistsuguste kinnitusjuhtumite korral redutseeritud pikkust.

Tegurid  $\varphi$  tabelis 10 esitamata saleduse vahepealsete väärtuste jaoks määratakse lineaarse interpoleerimisega.

## § 92. Nõtkete arvutamise näiteid

Nõtkete arvutamine jaotatakse kahte rühma: olemasolevale sambale või postile lubatava koormuse määramine ja samba või posti ristlõike valik, kui on antud tingimused otstes, materjal, koormus ja samba pikkus.

### a) Lubatavate koormuste määramine.

**Näide 79.** Määrata lubatav koormus malmist õõnessambale pikkusega  $l = 6$  m, kui samba ristlõike välisläbimõõt  $D = 20$  cm, sise-läbimõõt  $d = 18$  cm,  $E = 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>. Samba mõlemad otsad on šarniirselt kinnitatud. Stabiilsuse varu  $k = 5$ .

*Lahendus.* Samba ristlõike inertsmoment

$$J = \frac{\pi}{64} D^4 - \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi}{64} 20^4 - \frac{\pi}{64} 18^4 = 7854 - 5153 = 2701 \text{ cm}^4.$$

Samba ristlõike pindala

$$F = \frac{\pi}{4} D^2 - \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} 20^2 - \frac{\pi}{4} 18^2 = 314 - 254 = 60 \text{ cm}^2$$

Ristlõike inertsraadius

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{2701}{60}} = 6,71 \text{ cm.}$$

Samba arvutuslik pikkus (juhus 1,  $\mu = 1$ )

$$l_r = \mu l = 1 \cdot 6 = 6 \text{ m.}$$

Samba saledus

$$\lambda = \frac{l_r}{i} = \frac{600}{6,71} \approx 90 > 80.$$

Järelikult antud samba võib arvutada Euleri valemiga (256):

$$[P_n] = \frac{\pi^2 EJ \min}{k \cdot l_r^2} = \frac{\pi^2 \cdot 10^6 \cdot 2701}{5 \cdot 600^2} = 14\,800 \text{ kg.}$$

**Näide 80.** Määrata lubatav koormus terasest 30 valmistatud vardale, kui selle pikkus  $l = 30$  cm, ristlõike läbimõõt  $d = 1$  cm ning varda ülemine ots on kinnitatud šarniirselt, alumine aga jäigalt.

*Lahendus.* Ümarlõike inertsraadius

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 \cdot 4}{64 \pi d^2}} = \frac{d}{4},$$

$$i = \frac{d}{4} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ cm.}$$

Varda arvutuslik pikkus (juhus 4,  $\mu = \frac{2}{3}$ )

$$l_r = \mu l = \frac{2}{3} \cdot 30 = 20 \text{ cm.}$$

Varda saledus

$$\lambda = \frac{l_r}{i} = \frac{20}{0,25} = 80 < 100.$$

Järelikult lubatavat koormust sellele vardale ei saa määrata Euleri valemiga. Määrame selle tegurite  $\varphi$  tabeli abil.

Antud saleduse  $\lambda = 80$  puhul vähendustegur  $\varphi = 0,75$ .

Terasele 30 võtame lubatava lihtsurvepinge  $[\sigma_s] = 1600 \text{ kg/cm}^2$ .

Sel juhul lubatav pinge nõtkel avaldub:

$$[\sigma_n] = \varphi [\sigma_s] = 0,75 \cdot 1600 = 1200 \text{ kg/cm}^2.$$

Lubatav jõud

$$[P_n] = [\sigma_n] \cdot F = [\sigma_n] \frac{\pi d^2}{4} = 1200 \cdot 0,785 \cdot 1 = 942 \text{ kg.}$$

b) *Ristlõigete valik.* Kuna nõtkete tekib alati väikseima jäikuse tasapinnas, siis ristlõike valikul on kasulik materjali kokkuhoiu mõttes valida tsentraaltelgede suhtes võrd-

sete inertsmomentidega ristlõiked, s. o. sellised, millel  $J_x = J_y$ .

Tabelist 10 on näha, et lubatav pinge nõtkel oleneb posti saledusest, s. o. suhtest  $\frac{l_r}{i} = \lambda$ . Mida väiksem on see suhe,

seda suurem on lubatav pinge. Järelikult antud pikkusega ja antud ristlõikepinnaga sambal osutub kasulikumaks selline ristlõige, mille puhul materjal on jaotatud võimalikult kaugele peatsentraaltelgedest. Seetõttu rõngakujuline ristlõige on tunduvalt kasulikum täispinnalisest ristlõikest.

Näiteks täispinnalisel ristlõikel läbimõõduga  $d = 9$  cm on pindala  $F = 63,6$  cm<sup>2</sup> ja inertsraadius  $i = 2,25$  cm. Peaaegu sama pindalaga rõngakujulisel ristlõikel ( $F = 62,9$  cm<sup>2</sup>, välisläbimõõt 21 cm ja seinapaksus 1 cm) on aga inertsraadius

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{3150}{62,9}} = 7,07 \text{ cm},$$

s. o. enam kui kolm korda suurem täispinnalise ristlõike inertsraadiusest. Ühe ja sama pikkusega postil (näiteks  $l = 4$  m) on vähendustegur täispinnalise ristlõike puhul  $\varphi = 0,243$ , rõngakujulise ristlõike puhul aga  $\varphi = 0,815$ . Lubatav pinge rõngakujulisel ristlõikel on järelikult ligi 3,3 korda suurem kui täispinnalisel.

Ristlõike mõõted pärast selle kuju valikut määratakse proovimise teel. Etteantud stabiilsuse varu  $k$  puhul määratakse Euleri valemiga  $J$ :

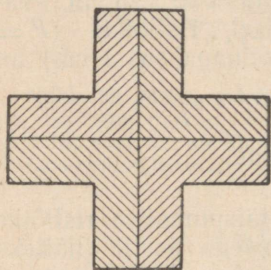
$$J = \frac{[P_n] \cdot k \cdot l_r^2}{\pi^2 \cdot E}.$$

Leitud  $J$  väärtuse järgi valitakse normaalsortimendi tabelitest sobiv ristlõige ja määratakse minimaalne inertsraadius  $i$ . Edasi leitakse posti saledus  $\lambda$ . Kui saledus ei ole väiksem kehtivast piirväärtusest, siis ristlõike valik sellega lõpebki. Vastasel juhul võetakse saadud saleduse jaoks tabelist 10 vähendustegur  $\varphi$  ja leitakse lubatav pinge. Kui leitud lubatav pinge on väiksem valitud ristlõikes esinevast pingest, siis ristlõiget suurendatakse silma järgi. Suurendatud ristlõike jaoks määratakse uuesti inertsraadius ja seejärel saledus. Leitud saleduse uue väärtuse järgi määratakse lubatav pinge. Kui lubatav pinge erineb vähe uute

mõõdetega ristlõikes esinevast pingest, siis on ristlõike valik lõplik. Vastasel korral tuleb ristlõiget suurendada, kui lubatav pinge on väiksem esinevast pingest, või vähendada, kui lubatav pinge on suurem ristlõikes esinevast pingest.

Kirjeldatud viisil ristlõike mõõdete valikul antakse ette stabiilsuse varu ja ristlõige määratakse esimesel proovil Euleri valemiga.

Alati pole vaja anda ette stabiilsuse varu, küll aga tegur  $\varphi$  esimeses lähenduses. Selgitame seda meetodit alljärgnevate näidetega.



Joonis 186.

**Näide 81.** Valida neljast võrdkülgsest nurkterasest (joon. 186) koosneva varda ristlõige, kui suruv telgjõud  $P = 20\,000$  kg, varda pikkus  $l = 3$  m. Varda mõlemad otsad on kinnitatud jäigalt, lubatav survepinge  $[\sigma_s] = 1000$  kg/cm<sup>2</sup>.

*Lahendus.* Määrame esialgu nurkteraste numbri Euleri valemiga, võttes stabiilsuse varu  $k = 5$ . Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud vardal  $\mu = 0,5$ ; seetõttu varda arvutus pikkus avaldub

$$l_r = \mu \cdot l = 3 \cdot 0,5 = 1,5 \text{ m.}$$

Valemist (256) leiame inertsmomenti väärtuse

$$J = \frac{[P_n] \cdot k \cdot l_r^2}{\pi^2 \cdot E} = \frac{20\,000 \cdot 5 \cdot 150^2}{9,87 \cdot 2 \cdot 10^6} = 114 \text{ cm}^4.$$

Järelikult ühe võrdkülgse nurkterase inertsmoment oma aluse suhtes võrdub:

$$J^L = 114 : 4 \approx 28,5 \text{ cm}^4.$$

Valtsterase sortimendi OCT 10014-39 järgi on sobivam nurkteras № 5 seinte paksusega 6 mm; seejuures  $J^L = 25,2 \text{ cm}^4$  ja pindala  $F^L = 5,69 \text{ cm}^2$ .

Määrame sõrestiku varda ristlõike inertsraadiuse;

$$i = \sqrt{\frac{4J^L}{4F^L}} = \sqrt{\frac{25,2}{5,69}} = 2,04 \text{ cm.}$$

Varda saledus

$$\lambda = \frac{l_r}{i} = \frac{150}{2,04} = 74 < 100.$$

Järelikult Euleri valem ei ole rakendatav. Võtame saadud saledusele vastava vähendusteguri  $\varphi$  tabelist 10.  $\lambda = 74$  puhul tegur

$$\varphi = 0,81 - \frac{(0,81 - 0,75) \cdot 4}{10} = 0,79.$$

Lubatav pinge

$$[\sigma_n] = [\sigma_s] \varphi = 1000 \cdot 0,79 = 790 \text{ kg/cm}^2.$$

Kontrollime, missugune pinge esineb vardas, kui nurkteraseks on № 5:

$$\sigma = \frac{20\,000}{4 \cdot 5,69} = 880 \text{ kg/cm}^2 > 790 \text{ kg/cm}^2.$$

Ülepinge moodustab  $\frac{880 - 790}{790} = 14\%$ . Järelikult tuleb varda ristlõiget suurendada. Võtame nurkterase № 6 seinte paksusega 5 mm,  $J^L = 35,9 \text{ cm}^4$  ja millel  $F^L = 5,82 \text{ cm}^2$ . Ristlõike inertsraadius avaldub:

$$i = \sqrt{\frac{4 \cdot J^L}{4 \cdot F^L}} = \sqrt{\frac{35,9}{5,82}} = 2,48.$$

Varda saledus

$$\lambda = \frac{l_r}{i} = \frac{150}{2,48} \approx 60.$$

Vastav vähendustegur  $\varphi = 0,86$ . Lubatav pinge

$$[\sigma_n] = 1000 \cdot 0,86 = 860 \text{ kg/cm}^2.$$

Kontrollime postis esinevat pinget:

$$\sigma = \frac{20\,000}{4 \cdot 5,82} = 860 \text{ kg/cm}^2.$$

See pinge langes ühte lubatavaga; seetõttu valime profiili № 6 seinte paksusega 5 mm.

Näide 82. Määrata terasvarda (teras 50) läbimõõt, kui varda pikkus  $l = 70 \text{ cm}$ , suruv jõud 12 t ning varda otsad on kinnitatud šarniirselt. Lubatav lihtsurvepinge  $[\sigma_s] = 1500 \text{ kg/cm}^2$ .

Lahendus. Võtame esimeses lähenduses  $\varphi = 0,5$ ; siis vajalik ristlõikepindala avaldub:

$$F \geq \frac{P}{\varphi[\sigma_s]} = \frac{12\,000}{0,5 \cdot 1500} = 16 \text{ cm}^2.$$

Varda ristlõike raadius

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = \sqrt{\frac{16}{3,14}} = 2,26 \text{ cm.}$$

Varda ristlõike inertsraadius

$$i = \frac{r}{2} = \frac{2,26}{2} = 1,13 \text{ cm.}$$

Varda saledus

$$\lambda = \frac{l_r}{i} = \frac{70}{1,13} = 62.$$

Terasel 50 vastab saledusele  $\lambda = 60$  tegur  $\varphi = 0,82$ , saledusele  $\lambda = 70$  aga tegur  $\varphi = 0,76$ . Järelikult saledusele  $\lambda = 62$  vastab tegur

$$\varphi = 0,82 - \frac{(0,82 - 0,76) 2}{10} = 0,81.$$

Sellele  $\varphi$  väärtusele vastav lubatav pinge stabiilsusele (nõtkele) võrdub:

$$[\sigma_n] = \varphi [\sigma_s] = 0,81 \cdot 1500 = 1215 \text{ kg/cm}^2.$$

Kontrollime vardas esinevat pinget, kui ristlõikepindala  $F = 16 \text{ cm}^2$ :

$$\sigma = \frac{12000}{16} = 750 \text{ kg/cm}^2 < 1215 \text{ kg/cm}^2,$$

s. o. pinge on tunduvalt väiksem lubatavast ( $1215 \text{ kg/cm}^2$ ), mistõttu ristlõikepindala tuleb vähendada. Proovime võtta  $F = 10 \text{ cm}^2$ . Ristlõike inertsraadius avaldub:

$$i = \frac{r}{2} = \frac{\sqrt{\frac{10}{3,14}}}{2} = 0,89 \text{ cm.}$$

Varda saledus

$$\lambda = \frac{l_r}{i} = \frac{70}{0,89} = 79.$$

Teguri  $\varphi$  vastava väärtuse saame interpoleerimise teel:

$$\varphi = 0,76 - \frac{(0,76 - 0,70) 9}{10} = 0,71.$$

Lubatav pinge stabiilsusele

$$[\sigma_n] = \varphi [\sigma_s] = 0,71 \cdot 1500 = 1065 \text{ kg/cm}^2.$$

Kui varda ristlõige  $F = 10$  cm, siis esinev pinget võrdub:

$$\sigma = \frac{12\,000}{10} = 1200 \text{ kg/cm}^2 > 1065 \text{ kg/cm}^2.$$

Kuna sel juhul saime ülepinge, siis tuleb ristlõiget veidi suurendada.

Võtame  $F = 11$  cm<sup>2</sup>. Sel juhul  $i$ ,  $\lambda$  ja  $\varphi$  võrduvad vastavalt:

$$i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{3,14}} = 0,93, \quad \lambda = \frac{70}{0,93} = 75, \quad \varphi = 0,73.$$

Lubata pinget stabiilsusele

$$[\sigma_n] = 0,73 \cdot 1500 = 1095 \text{ kg/cm}^2.$$

Kontrollime pinget vardas

$$\sigma = \frac{12\,000}{11} = 1090 \text{ kg/cm}^2.$$

See pinget peaaegu ei erine lubatavast pingest  $[\sigma_n]$ . Järelikult ristlõige  $F = 11$  cm<sup>2</sup> rahuldab stabiilsuse tingimust.

Ülalpool esitasime kõige elementaarsemad mõisted surutud varraste stabiilsusest. Praktikas aga esineb tunduvalt komplitseeritumaid stabiilsuse kao juhtumeid, nagu näiteks surutud vardad, samuti aga ka teised elemendid, millel üks mõõde on väiksem, võrreldes teistega, nagu näiteks õhukeseseinalised talad, torud, surutud õhukesed plaadid.

Palju teoreetilisi ja eksperimentaalseid uurimusi on avaldatud stabiilsuse küsimuste kohta

Palju on tehtud vene ja nõukogude teadlaste poolt selle suurt praktilist väärtust omava komplitseeritud küsimuse uurimise alal. Jassinski tööde alusel töötati välja surutud varraste kaasaegsed arvutusmeetodid, mida kasutatakse kogu maailmas. Palju tähtsaid ülesandeid lahendati S. P. Timošenko ja I. G. Bubnovi poolt. Eriti suure panuse on andnud stabiilsuse arvutuse alal nõukogude teadlased akad. A. N. Dinnik, akad. B. G. Galjorkin, akad. A. N. Krõlov, prof. V. Z. Vlassov ja teised.

Võib julgesti öelda, et stabiilsuse küsimuste uurimisel kuulub juhtiv osa nõukogude teadlastele.

### § 93. Kontrollküsimusi

Milles seisab nõlke nähtuse olemus?

Missugust jõudu nimetatakse kriitiliseks jõuks?

Mida nimetatakse stabiilsuse varuteguriks?

Millised on varutegurid puit-, teras- ja malmkonstruktsioonidel?  
Kuidas avaldub üldkujul Euleri valem?

Mida nimetatakse pikkuse teguriks ja millega see võrdub varda otste neljal kinnitusjuhul?

Milline inertsmoment tuleb asetada Euleri valemisse? Miks?

Millisel juhul on tõenäoline varda võrdne nõtkumine igas suunas?

Mida nimetatakse varda saleduseks?

Kuidas arvutatakse varras nõtketele, kui varda saledus on selline, et Euleri valem pole kehtiv?

Mida määrab lubatava survepinge vähendustegur  $\varphi$ ?

Millest sõltub tegur  $\varphi$ ?



## XIV peatükk.

### TUGEVUS DÜNAAMILISTEL JA VAHELDUVATEL KOORMUSTEL

#### § 94. Dünaamilise ja vahelduva koormuse mõiste

Seni kõigis meie poolt vaadeldud ülesannetes eeldasime, et koormused mõjuvad staatiliselt, s. o. nad ei muutu ajas. Kuid masinate projekteerimisel me sageli kohtume ebaühtlaselt liikuvate detailidega. Nii näiteks jõumasina kolb silindris liigub ebaühtlaselt ja suuruselt ning suunalt muutuva kiirendusega, konstantse pöörete arvuga pöörleva rõnga osakesed liiguvad suuruselt konstantse, suunalt aga muutuva kiirendusega. Ebaühtlaselt liikuva detaili osakestele mõjuvad inertsjõud, mida võib määrata, kui on teada osakeste mass ja nende kiirendus.

Staatilise koormuse või staatilise koormuse mõju näiteks on ketil rippuv koormus. Viimase mõju jääb staatiliseks, kui seda tõstetakse konstantse kiirusega keti abil, s. o. nulliga võrduva kiirendusega. Sama koormus, tõstetuna keti abil kiirendatult, mõjub ketile dünaamiliselt. Sel juhul peame keti arvutamisel silmas pidama mitte ainult koormuse kaalu, vaid ka koormuse inertsjõudu, mis võib olla tunduvalt suurem koormuse omakaalust.

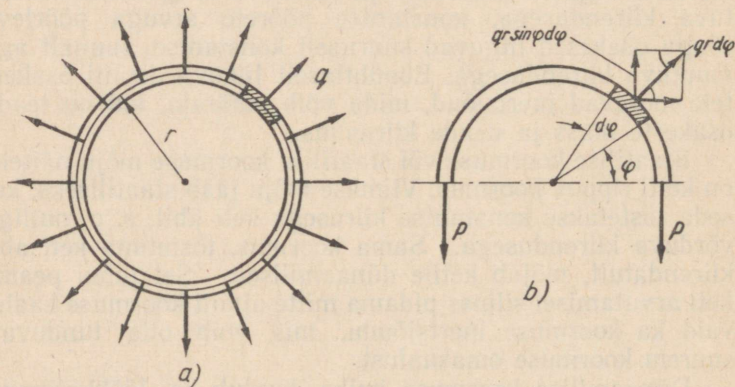
Dünaamilise koormuse hulka kuulub ka löökoormus. Löögiliselt mõjuvateks koormusteks on näiteks langeva rammimisnuia mõju rammitavale vaiale, vasara mõju sepi-tatavale detailile või alasile, püssirohu mõju plahvatusel relva torus jne. Peale selle võivad masinate detailidele mõjuda löökoormused lõtkude tõttu detailide kokkupuutekohtades. Viimasel juhul löökoormus on kahjulik ja seda püütakse igati vähendada.

Masinate detailide arvutusmeetodid löökoormusele on väga komplitseeritud ja veel vähe läbi töötatud. Masinate ja üksikute ehituste projekteerimisel tuleb sageli peale

dünaamiliste koormuste kokku puutuda ka vahelduvate koormustega, mis kutsuvad esile ajas perioodiliselt vahelduvaid pingeid. Nii näiteks kolvi poolt jõumasina kepsule ja väntvõllile avaldatavad koormused muutuvad pidevalt ning korduvad iga täispöörde järel (kahetaktiline jõumasin) või iga kahe täispöörde järel (neljaktiline jõumasin). Väsimusarvutuse meetodeid hakati välja töötama alles hiljuti. Suure töö sel alal tegi ära S. V. Serensen. Vaatleme siin dünaamilise mõjuga koormuse lihtsamaid arvutusnäiteid ning täpsemalt detailide arvutusmeetodeid vahelduvatel koormustel.

### § 95. Ühtlaselt pöörleva rõnga arvutus

Inertsjõududega «koormatud» detaili arvutusnäitena vaatleme ühtlaselt pöörlevat õhukest rõngast. Tähistame:  $r$  — rõnga keskmine raadius;  $F$  — ristlõikepindala;  $\gamma$  — materjali erikaal;  $v$  — rõnga joonkiirus;  $g$  — raskuskiiendus.



Joonis 187.

Pöörlev rõngas on «koormatud» rõngale ühtlaselt jaotuvate tsentrifugaalsete inertsjõududega (joon. 187, a). Rõnga ühele pikkuseühikule tulev tsentrifugaaljõud võrdub rõnga ühikpikkusega elemendi massi ( $m$ ) ja tsentrifugaalkiirenduse  $\left(\frac{v^2}{r}\right)$  korrutisega, s. o.

$$q = m \frac{v^2}{r};$$

rõnga ühikpikkusega elemendi massi võime avaldada nii:

$$m = \frac{F \cdot l \cdot \gamma}{g}.$$

Järelikult

$$q = \frac{F\gamma v^2}{g r}. \quad (a)$$

Kahe tasapinnaga, mis omavahel moodustavad kesk-  
nurga  $d\varphi$  (joon. 187, *b*), lõigatud rõnga lõpmatü väikese  
elemendi inertsjõud avaldub —  $qrd\varphi$ .

Leiame rõnga ristlõikes mõjuva tõmbejõu  $P$ . Selleks  
lõikame rõnga pooleks ja kirjutame tasakaalutingimuse,  
võttes rõnga poolele mõjuvate kõikide jõudude  $qrd\varphi$  verti-  
kaalsete komponentide  $qr \sin \varphi d\varphi$  summa:

$$2P = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} qr \sin \varphi d\varphi = 2qr,$$

millest

$$P = qr.$$

Eeldades, et õhukeses rõngas kõik kiud venivad ühtla-  
selt, leiame tõmbepinged rõnga lõikes:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{qr}{F}$$

ehk asetades  $q$  väärtuse võrrandist (a), saame:

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} v^2. \quad (263)$$

Kuna

$$v = \frac{2\pi r n}{60},$$

siis

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} \left( \frac{\pi r n}{30} \right)^2 \quad (264)$$

Määrame nüüd pöörleva rõnga raadiuse pikenemise.  
Rõnga kiudude suhtelised pikenemised võrduvad:

$$\varepsilon = \frac{2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}.$$

Teiselt poolt suhteline pikenemine

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}.$$

Järelikult

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\sigma}{E},$$

millest

$$\Delta r = \frac{\sigma}{E} r \quad (265)$$

ehk asetades sellesse avaldisse  $\sigma$  väärtuse, saame:

$$\Delta r = \frac{\gamma}{g} \frac{v^2 r}{E}. \quad (266)$$

**Näide 83.** Määrata hooratta (kodarate mõju arvestamata) pinge ja raadiuse pikenemine, kui keskmine raadius  $r = 1,5$  m, pöörete arv  $n = 100$  p/min. materjali erikaal  $\gamma = 0,0075$  kg/cm<sup>3</sup>, elastsusmoodul  $E = 2 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>. Asetades arvulised väärtused, leiame valemi (264) järgi pinge:

$$\sigma = \frac{0,0075}{981} \left( \frac{3,14 \cdot 150 \cdot 100}{30} \right)^2 = 1890 \text{ kg/cm}^2.$$

Hooratta raadiuse pikenemise tuntud pinge järgi määrame valemiga (265):

$$\Delta r = \frac{1890}{2 \cdot 10^6} \cdot 150 = 0,142 \text{ cm.}$$

## § 96. Pinge ja deformatsioon prussis telglöögil

Vaatleme telglöögil prussis pinge ja deformatsiooni määramise lihtsaimat näidet.

Võtame varda  $AB$  (joon. 188), millel on alumises otsas aste  $CD$ . Asetame astmele koormuse  $Q$  ja kinnitame varda ülemise otsa liikumatult. Kui tõstame koormuse  $Q$  mingile kõrgusele  $h$  ja laseme lahti, siis langeb see astmele. Toimub löök, mille tagajärjel varras  $AB$  pikeneb. See pikenemine on suurem, kui koormus oleks rakendatud vardale staatiliselt. Vardal saadud pikenemist nimetatakse dünaamiliseks pikenemiseks ja tähistatakse  $\Delta l_d$ . Seda pikenemist võib määrata eeldusel, et varda pinge ei ületa elastsuspiiri.

Kõrguselt  $h$  kuni varda astmega kokkupuuteni langev koormus  $Q$  teeb tööd  $Qh$ . Pärast kokkupuudet langeb koormus koos astmega varda tõmbe tagajärjel veel allapoole

pikkuse  $\Delta l_a$  võrra. Koos astmega allapoole liikuva koormuse poolt tehtud töö avaldub  $Q\Delta l_a$ .

Seega koormuse poolt tehtud kogutöö võrdub:

$$Qh + Q\Delta l_a \text{ ehk } Q(h + \Delta l_a).$$

Kogu see töö, jättes arvestamata varda massi ja löögi juures esineva energia hajumise, kulub varda venitamiseks. Varda deformatsioonitöö, vastavalt valemile (10) võrdub  $\frac{^2dEF}{2l}$ . Järelikult  $\Delta l_a$  määramiseks võime koostada võrrandi

$$Q(h + \Delta l_a) = \frac{\Delta l_a^2 EF}{2l}. \quad (a)$$

Avades sulud ja jagades kõik liikmed  $\frac{EF}{2l}$ , saame:

$$\Delta l_a^2 - \frac{2Ql}{EF} \Delta l_a - \frac{2Qhl}{EF} = 0. \quad (b)$$

Kuna suurus  $\frac{Ql}{EF}$  vastavalt valemile (7) kujutab varda pikenemist  $\Delta l_{st}$  koormuse  $Q$  staatilisel mõjumisel, siis võime avaldise (b) kirjutada kujul:

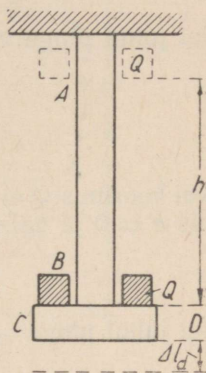
$$\Delta l_a^2 - 2\Delta l_{st}\Delta l_a - 2\Delta l_{st}h = 0, \quad (c)$$

millest

$$\Delta l_a = \Delta l_{st} + \sqrt{\Delta l_{st}^2 + 2\Delta l_{st}h}. \quad (267)$$

Olgu tähendatud, et valemiga (267) arvatud pikenemine esines vardas pärast lööki koormuse madalaimasse asendisse jõudmise hetkel. Löögi tõttu varras hakkab pikisihis võnkuma. Need võnkumised on kustuvad ning teatud ajavahemiku pärast jääb varras paigale. Sel momendil on varda pikenemine selline, nagu mõjuks talle rakendatud koormus  $Q$  staatiliselt, s. o. pikenemine on võrdne:

$$\Delta l_{st} = \frac{Ql}{EF}.$$



Joonis 188.

Pärast lööki koormuse madalaimasse asendisse jõudmise hetkel avaldub pinge vardas vastavalt Hooke'i seadusele kujul:

$$\sigma_d = E\varepsilon_d = E \frac{\Delta l_{st} + \sqrt{\Delta l_{st}^2 + 2\Delta l_{st}h}}{l}. \quad (268)$$

Kui kõrgus  $h$  on väga väike, võrreldes  $\Delta l_{st}$ -ga, siis valemist (267) saame:

$$\Delta l_d \approx \sqrt{2\Delta l_{st}h}. \quad (269)$$

Sel juhul pinge võrdub:

$$\sigma_d = E \frac{\sqrt{2\Delta l_{st}h}}{l}. \quad (270)$$

Kui koormus  $Q$  ei lange kõrguselt, vaid rakendatakse järsku, siis  $h = 0$  ja valemist (267) saame:

$$\Delta l_d = 2\Delta l_{st}. \quad (271)$$

Sel juhul pinge

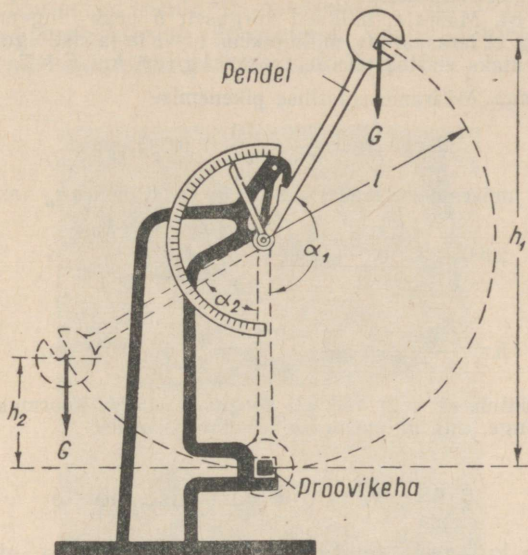
$$\sigma_d = E \frac{2\Delta l_{st}}{l} = 2\sigma_{st}. \quad (272)$$

Järelikult koormuse järsul rakendamisel saame kaks korda suurema pikenemise ja pinge, kui koormuse staatilisel mõju-misel.

Löökkoomusel mitte ainult pinged ja deformatsioonid ei erine staatiliselt rakendatud koormuste poolt esile kutsutud pingetest ja deformatsioonidest, vaid ka materjalid ise käituvad löökkoomusel teisiti kui staatilisel koormusel. Seejuures, nagu on näidanud uurimised, ei võimalda staatiliste katsete teel saadud materjalide mehaanilised karakteristikud otsustada materjali käitumise üle löökkoomusel. Isegi staatilisel katsel esinev materjali suur plastilisus ei kinnita, et see materjal on hästi vastupidav löökkoomusele. Seetõttu eksploatatsioonis löökkoomusele töötavate konstruktsiooni-osade projekteerimisel on vaja teada materjali võimet taluda koormuse hetkelist mõju. Materjali selle võime määrame eriliste proovimistega löögile.

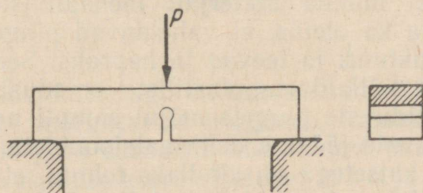
## § 97. Metallide löögiproov

Käesoleval ajal levinenuimaks löögiprooviks on väljalõikega proovikeha löögiga purustamine erilise pendelvasara abil. Joonisel 189 on näidatud sellise vasara skeem,



Joonis 189.

joonisel 190 aga sisselõikega proovikeha löögile proovimiseks. Metallide vastupanu mõõduks löögile loetakse proovikeha purustamiseks kulutatud töö hulka, mis on arvestatud proovikeha ristlõike pinnauhiku kohta. Seega, kui tähistada



Joonis 190.

proovikeha purustamiseks kulutatud töö  $A$ -ga, proovikeha ristlõikepindala  $F$ -iga, siis väärtus

$$a_k = \frac{A}{F} \frac{\text{kgm}}{\text{cm}^2}$$

on vastupanu mõõduks löögile ning seda nimetatakse materjali löögitugevuseks.

Näide 84. Määrata, milliselt kõrguselt  $h$  peab langema koormus  $Q = 100$  kg, et terasvardas, mille pikkus  $l = 1$  m ja ristlõige  $F = 1$  cm<sup>2</sup>, pinge saavutaks elastsuspiiri  $\sigma_y = 2000$  kg/cm<sup>2</sup>, kui  $E = 2 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>.

*Lahendus.* Määrame staatilise pikennemise

$$\Delta l_{st} = \frac{Ql}{EF} = \frac{100 \cdot 100}{2 \cdot 10^6 \cdot 1} = 0,005 \text{ cm.}$$

Kõrguse  $h$  määrame valemist (268), asetades selles  $\sigma_d$  asemele  $\sigma_y$ :

$$2000 = 2 \cdot 10^6 \frac{0,005 + \sqrt{0,005^2 + 2 \cdot 0,005h}}{100},$$

millest

$$h = \frac{0,009025 - 0,000025}{0,01} = \frac{0,009}{0,01} = 0,9 \text{ cm.}$$

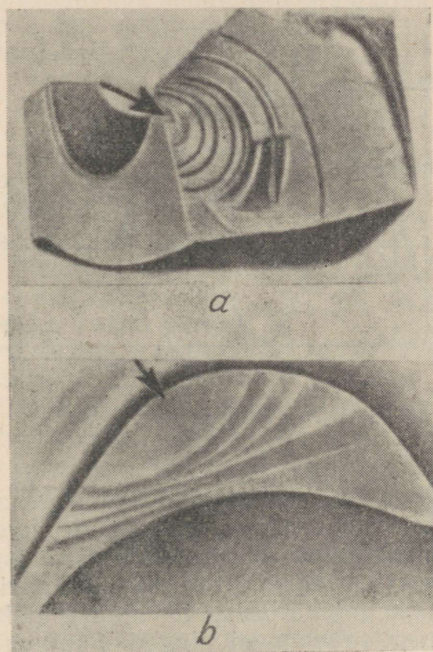
Siit nähtub, et isegi väiksel kõrguselt langev koormus võib esile kutsuda pinge, mis mitmekordselt ületab staatilise.

## § 98. Metallide väsimuse mõiste

Enam kui sada aastat tagasi pandi tähele, et kestvalt vahelduvatele koormustele allutatud masina- ja konstruktsiooniosad võivad järsku puruneda ilma märgatavate jäävate deformatsioonideta pingetel, mis on tunduvalt väiksemad materjali tugevuspiirist. Seda nähtust nimetati metallide väsimuseks. Selliste purunemiste põhjuste väljaselgitamiseks hakati eelkõige kontrollima, kas mitte materjali tugevuspiir ei väheene vahelduvate pingete kestval mõju misel. Kuid katsed näitasid, et kestvalt mõjuvad vahelduvad pinged ei muuda materjali mehaanilisi omadusi. Ei pidanud paika ka oletus, et vahelduvad pinged muudavad materjali struktuuri ja teevad ta hapraks. See oletus põhines sellel, et küllaldaste plastiliste omadustega materjal puruneb vahelduvate pingete mõjul samuti nagu habraski, ilma märgatavate jäävate deformatsioonideta.

Arvukate katsetega on kindlaks tehtud, et kui vahelduvad pinged ületavad antud materjali puhul teatud suuruse, siis pärast mingi arvu pingete vaheldumist materjalis teki-

vad praod. Need praod tekivad tavaliselt materjali pinnal kas enampingestatud või siis defektsetes kohtades. Kujunev pragu, mis on algul väga väike, palja silmaga nähtamatu, suureneb järk-järgult ning haarab materjali üha sügavamaid kihte. Plastiline deformatsioon kontsentreerub ainult prao juurde, mistõttu märgatavaid jäävaid deformatsioone ei ilmne. Materjali osad, mis asetsevad mõlemal pool pragu, hõõrduvad vahelduval koormusel vastu teineteist ning tasanduvad kokkupuutepinnas järk-järgult.

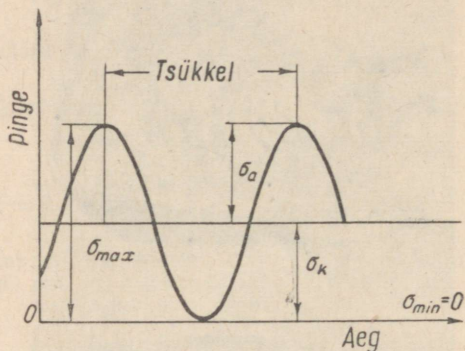


Joonis 191.

Pärast seda, kui pragu on saavutanud sellise suuruse, et keha ristlõige märgatavalt nõrgeneb, toimub järsk murre. Sellise murde pind sarnaneb alati hapra murdega, mis on iseloomulik väsimuse korral. Fotodel 191 *a* ja *b* on näidatud taoline murre. Näeme kaht tsooni: siledaks lihvitud pinnaga esimene tsoon ja hapra lõpliku murde tsoon. Esialgse prao

tekkimise koht on näidatud noolega. Sellest kohast lähtuvad kontsentrilised jooned ja vööd viitavad prao järk-järgulisele levikule.

Masina-elementide murdumise põhjuseks enamikel juhtudel on materjali väsimus, s. o. materjali järsk purunemine vahelduvate koormuste mõjul tugevuspiirist madalamatel pingetel. Staatiliste proovide ja löögiproovide tulemused võimaldavad ainult teatud määraneni otsustada materjali omaduse üle taluda pikemat aega vahelduvaid koormusi. Materjali selle tähtsa karakteristiku määramiseks, mis on



Joonis 192.

vajalik vahelduvate pingetega töötavate masinate ja konstruktsioonide tugevusarvutusel, teostatakse materjali eriline proov, mida nimetatakse kestvus- ehk väsimusprooviks.

Enne kui asuda väsimus- (kestvus-) proovi kirjeldamisele, peatume mõningate edaspidi vajalike mõistete juures.

Masinaosades vahelduvad pinged muutuvad kahe äärmise väärtuse vahel, suurima pinge  $\sigma_{max}$  ja vähima pinge  $\sigma_{min}$  vahel. Joonisel 192 on näidatud pingeperioodiline muutus ajas. Pingete muutumiste tsüklite arvu ühes sekundis nimetatakse pingete muutumise sageduseks. Tsükli suurima ja vähima pinge algebralist poolsummat nimetatakse tsükli keskmiseks pingeks ja tähistatakse  $\sigma_k$ , tangentsiaalpingete korral aga  $\tau_k$ , s. o.

$$\sigma_k = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}; \quad \tau_k = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2}. \quad (273)$$

Tsükli suurima ja vähima pinge algebralise vahe absoluutväärtust nimetatakse tsükli pingete vaheks (hälbeks). Pool pingete vahest ehk tsükli suurima ja vähima pinge algebralist poolvahet, nimetatakse tsükli amplituudiks ja tähistatakse  $\sigma_a$ , tangentsiaalpingete puhul aga —  $\tau_a$ :

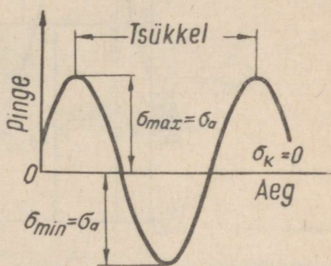
$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2};$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2}. \quad (274)$$

Tsükli amplituudi ehk asümmeetria teguriks nimetatakse suurima pinge suhet vähimasse, võetuna algebralise märgiga:

$$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}; \quad r = \frac{\tau_{min}}{\tau_{max}}. \quad (275)$$

Kui suurim ja vähim pinge on võrdvastupidised, s. o. kui  $r = -1$ , siis pingete muutumise tsükleid nimetatakse sümmeetrilisteks (joon. 193). Sümmeetrilise tsükli korral keskmine pinge võrdub nulliga ( $\sigma_k = 0$ ;  $\tau_k = 0$ ). Kui vähim pinge võrdub nulliga, s. o. kui  $r = 0$ , siis tsükli nimetatakse pulsseeruvaks (joon. 192). Kui suurim ja vähim pinge ei võrdu suuruselt, siis tsükli nimetatakse asümmeetriliseks; joonisel 194 on näidatud asümmeetriline tsükkel positiivse keskmise pingega.



Joonis 193.

On tavaks saanud lugeda tõmbepinget positiivseks, survepinget aga negatiivseks. Tangentsiaalpingete puhul pingete märk võetakse kokkuleppeliselt: ühele poole suunatud pinge loetakse positiivseks, vastassuunaline pinge aga negatiivseks. Vahelduvate pingete iga tsükli, nagu seda kergesti on näha, võib saada konstandi lisamisega sümmeetrilise tsükli keskmisele pingele. Maksimaalne ja minimaalne pinge avalduvad sel juhul valemitega

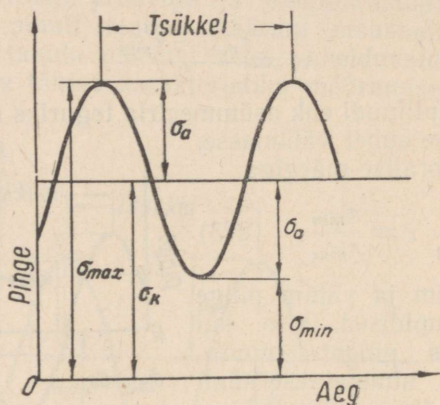
$$\sigma_{max} = \sigma_k + \sigma_a;$$

$$\tau_{max} = \tau_k + \tau_a;$$

$$\sigma_{min} = \sigma_k - \sigma_a;$$

$$\tau_{min} = \tau_k - \tau_a. \quad (276)$$

Masina-elementide ja konstruktsioonide arvutamisel, millele mõjuvad vahelduvad pinged, on materjali tugevuse põhiliseks karakteristikuks väsimuspiir ehk kestvustugevus. Väsimuspiiriks (kestvustugevuseks) nimetatakse suurimat pinget, mille puhul materjal on suuteline välja kannatama antud asümmeetrilise tsükli  $r$  juures lõpmatu suure arvu



Joonis 194.

tsükleid. Kui räägitakse väsimuspiirist, ilma seejuures andmata tegurit  $r$ , siis sel juhul mõeldakse pingete sümmeetrilist tsükli.

Materjalide väsimusproovide eesmärgiks on väsimuspiiri (kestvustugevuse) määramine ja sellele mitmesuguste faktorite mõju esiletoomine.

## § 99. Materjalide väsimusproov

Materjali väsimuspiiri (kestvustugevuse) suurused, mis vastavad erinevatele keskmise pinge väärtustele, on erinevad. Sümmeetrilise tsükli korral ( $\sigma_k = 0$ ), s. o. kui pinge muutub kahe äärmise võrdvastupidise väärtuse vahel, on materjali väsimuspiiril vähim väärtus. Väsimuspiiri määramine sümmeetrilise kui kõige ohtlikuma tsükli jaoks pakub suurimat praktilist huvi. Seetõttu määrataksegi väsimuspiir (kestvustugevus) kõige sagedamini just selle ohtlikema tsükli jaoks.

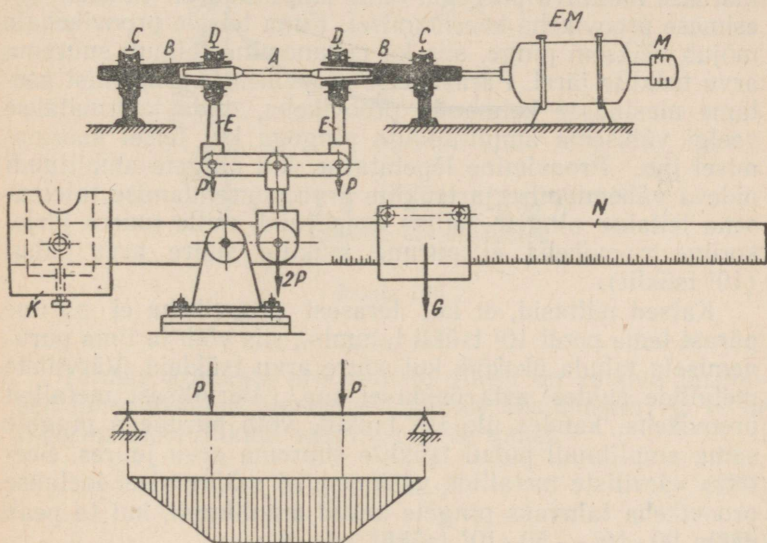
Materjalide väsimuspiiri määramine toimub erilistel proovimismasinatel, mis võimaldavad proovikehasid koor-

mata vahelduvate koormustega sagedusel 2000—3000 tsükli minutis.

Mõnikord kasutatakse masinaid tunduvalt kõrgema koormamise sagedusega, järguga kümneid tuhandeid tsükleid minutis.

Ühe kõige levinuma masina skeem proovikehade väsimuse proovimiseks paindele on näidatud joonisel 195.

Proovitav proovikeha *A* koos kooniliste klambritega *B* kujutab tala, mis vabalt toetub liikumatutele veerelaagritele *C*.



Joonis 195.

Kaks vaba veerelaagrit *D* tõmbitsatega *E* on seotud kangsüsteemiga. Raskust *G* võib nihutada mööda õlga *N* ja muuta seega proovikehale mõjuvat koormust.

Raskus *K* tasakaalustab süsteemi raskuse *G* nullseisus olles. Momentide epüürist näeme, et proovikehale mõjub puhas paine. Elektrimootori *EM* abil pannakse proovikeha koos klambritega pöörlema. Pöörlemise tagajärjel tekivad proovikehas vahelduvad pinged, kuigi koormus jääb konstantseks. Pöörete arvu loetakse lugejaga *M*. Proovikeha

murdamisel õlg  $N$  laskub alla ja automaatselt lülitab välja elektrimootori ja pööretelugeja.

Väsimuspiiri määramiseks pingete sümmeetrilise tsükli korral valmistatakse antud materjalist 6—8 hoolikalt töödeldud täiesti ühesugust proovikeha. Seejärel asetatakse esimene proovikeha masinasse ja koormatakse sümmeetriliselt muutuva vahelduva pingega. Esimese proovikeha pingete amplituudiks võetakse tavaliselt 0,5—0,6 antud materjali tugevuspiirist. Pärast lugejaga registreeritud teatud arvu tsükleid esimene proovikeha puruneb ning masin lülitatakse automaatselt välja. Nüüd võetakse teine proovikeha ja koormatakse muutuva pingega, mille amplituud on väiksem kui esimese proovikeha koormamisel. Kuna teisele proovikehale mõjub väiksem pinge, siis ka purunemine toimub suurema arvu tsüklite järel. Pärast teise proovikeha purunemist asetame masinasse kolmanda proovikeha, mida koormatakse veelgi väiksema amplituudiga pingega kui teisel koormamisel jne. Proovimine lõpetatakse, kui pingete amplituudi pideva vähendamise ja tsüklite arvu suurendamise tulemusena leitakse pingete selline amplituud, mille juures järjekordne proovikeha ei purune tsüklite suure arvu puhul ( $10^7$  tsükli).

Katsed näitasid, et kui terasest proovikeha ei purune pärast tema poolt  $10^7$  tsükli talumist, siis võib ta ilma purunemiseta taluda ükskõik kui suure arvu tsükleid. Värviliste metallide suhtes seda öelda ei saa. Värvilisest metallist proovikeha, kandes üle  $10^7$  tsükli, võib puruneda pingete sama amplituudi puhul tsüklite suurema arvu juures. Seetõttu värviliste metallide väsimuspiiri määramisel loetakse proovikeha taluvaks pingete antud amplituudi, kui ta peab vastu  $20 \cdot 10^7$  —  $50 \cdot 10^7$  tsükli.

Pärast kirjeldatud proovimiste läbiviimist kestvustugevuse arvulise väärtuse määramiseks antakse proovimise tulemused graafiliselt kõvera kujul.

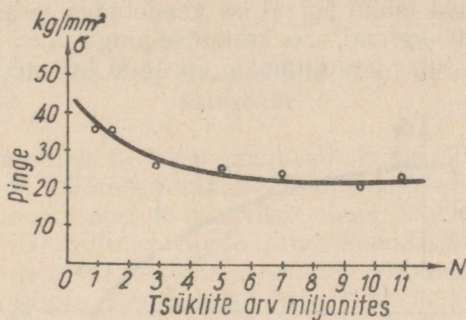
Selline kõver on näidatud jonisel 196. Kõvera punktide ordinaadid kujutavad proovikehadele mõjunud pingete amplituude, abstsissid aga proovikehade poolt talutud tsüklite arvu, mis vastavad nendele amplituudidele. Selliseid kõveraid nimetatakse materjalide väsimusõpetuse ühe rajaja Wöhleri nime järgi Wöhleri kõverateks. Kestvustugevus määratakse abstsisssteljega paralleelse kõveravahemiku konstantse ordinaadi järgi.

Pingeid üle kestvustugevuse, mida materjal võib taluda

ainult piiratud arv tsükleid kordi, nimetatakse piirkestvus-tugevuseks.

Määratakse mitmesuguste deformatsiooniliikide väsimus-piirid: tõmme-surve, vahelduv paine ja vahelduv vääne.

Vahelduva painde proovimismasinade suure lihtsuse tõttu on need kõige enam levinud ning proovimist vahelduvale paindele kasutatakse sagedamini kui tõmbele-survele või väände.



Joonis 196.

Teraste arvukate proovimiste alusel on saadud järgmised lähenduslikud olenevused painde väsimuspiiri ja teiste deformatsiooniliikide väsimuspiiride vahel:

$$\sigma_{-1t} = 0,7\sigma_{-1}, \quad (277)$$

$$\tau_{-1} = 0,58\sigma_{-1}, \quad (278)$$

kus  $\sigma_{-1t}$  on väsimuspiir tõmbe-surve sümmeetrilisel tsüklil,  $\tau_{-1}$  — väsimuspiir väände sümmeetrilisel tsüklil,  $\sigma_{-1}$  — väsimuspiir painde sümmeetrilisel tsüklil.

Teraste väsimuspiiride lähenduslikuks hindamiseks sümmeetrilisel tsüklil nende tuntud tugevuspiiride järgi võib kasutada alljärgnevaid empiirilisi olenevusi:

$$\sigma_{-1t} = 0,28\sigma_b, \quad (279)$$

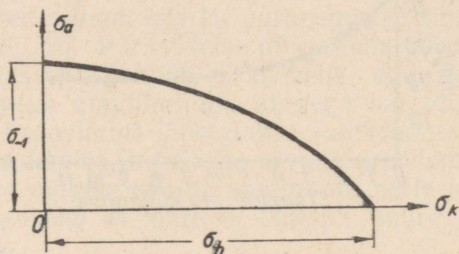
$$\sigma_{-1} = 0,4\sigma_b, \quad (280)$$

$$\tau_{-1} = 0,22\sigma_b. \quad (281)$$

## § 100. Kestvustugevus asümmeetrilisel tsüklil

Keskmise pinge suurendamisel materjali väsimuspiir kasvab, pingete amplituud, mille juures ei toimu materjali purunemist, aga väheneb. Selgitame seda näite varal. Vaatleme pingete kahte tsüklit — sümmeetrilist ja pulseeruvat — 0,45% süsinikku sisaldavale terasele. Tõmbe-surve sümmeetrilisel tsüklil, kui  $\sigma_k = 0$ , on selle terase väsimuspiir  $\sigma_{-1t} = 2000 \text{ kg/cm}^2$ .

Pulseeruva tsükli korral on vaadeldava terase väsimuspiir  $\sigma_0 = 3600 \text{ kg/cm}^2$ , s. o. keskmise pinge  $\sigma_k = 1800 \text{ kg/cm}^2$  korral on talutav amplituud  $\sigma_a = 1800 \text{ kg/cm}^2$ . Järelikult



Joonis 197.

keskmise pinge suurendamisel  $1800 \text{ kg/cm}^2$  võrra väsimuspiir tõusis 2000-lt kuni  $3600 \text{ kg/cm}^2$ , s. o.  $1600 \text{ kg/cm}^2$  võrra, kuid pingete amplituud alanes 2000 kuni  $1800 \text{ kg/cm}^2$ , s. o.  $200 \text{ kg/cm}^2$  võrra. Seega keskmise pinge suurendamine  $1800 \text{ kg/cm}^2$  võrra saavutatakse antud juhul pingete amplituudi vähendamise arvel  $200 \text{ kg/cm}^2$  võrra.

Ei ole üldist olenevust, mis lubaks määrata, kuidas keskmise pinge suurendamisega suureneb väsimuspiir ja väheneb pingete piiramplituud.

Seetõttu vahelduvatele pingetele töötava materjali käitumise täielikuks kujutamiseks määratakse tema väsimuspiir erinevatel keskmistel pingetel. Proovimise tulemused antakse erinevatel meetoditel konstrueeritud diagrammidega.

Joonisel 197 on toodud selline diagramm, mis on konstrueeritud kõige sagedamini rakendatava meetodi abil. Abstsissiteljele on kantud tsüklite keskmine pinge ( $\sigma_k$ ), ordinaatteljele aga tsüklite piiramplituud ( $\sigma_a$ ). Kõver esitab pin-

gete piiramplituudide olenevust tsükli keskmistest pingetest. Pingete meelevaldset tsükli võib iseloomustada kõvera punkti koordinaatidega ( $\sigma_k$ ,  $\sigma_a$ ). Tugevuse piirkõvera meelevaldse punkti koordinaatide summa  $\sigma_k + \sigma_a$  annab kestvustugevuse suuruse antud keskmise pinge puhul. Abstsisstelje, ordinaattelje ja tugevuse piirkõveraga piiratud ala punktidega kujutatavad pingete tsüklid esitavad pingete ohutuid tsükleid. Sellisest diagrammist näeme, millist pingete amplituudi materjal võib taluda purunemata antud keskmise pinge juures.

### § 101. Detaili absoluutsete mōōdete mōju kestvustugevuse suurusele

Käsiraamatutes antakse tavaliselt materjalide väsimuspiirid, mis on määratud väikeseläbimōōduliste, 5—12-millimeetriliste laboratoorsete proovikehadega. Suuremaläbimōōduliste, 40—50-millimeetriliste proovikehadega tehtud katsed kui ka suuremamōōteliste detailide proovimised näitavad, et väsimuspiir on olemas proovikehade absoluutsetest mōōdetest. Mōōdete suurendamisega alaneb väsimuspiir. Tunduvat alanemist pandi tähele 100 mm väiksemate läbimōōtudega proovikehadel.

Proovikehade mōōdete edaspidine suurendamine mōjub väsimuspiiri alanemisele vähe.

Tabelis 11 on toodud andmed teraste väsimuspiiri alanemise kohta proovikeha absoluutsete mōōdete suurenemisel. Selles tabelis on 10-millimeetrilise läbimōōduga proovikeha väsimuspiir võetud ühikuks, tegur  $\varepsilon$  näitab antud läbimōōduga proovikeha väsimuspiiri suhet väsimuspiiriga proovikehal läbimōōduga 10 mm.

Tabel 11

Tegurid  $\varepsilon$

Proovikeha läbimōōt mm-tes	10	20	30	40	50	60	80	100	150	200
Tegur $\varepsilon$	1	0,93	0,87	0,82	0,78	0,75	0,70	0,65	0,58	0,55

Väsimuspiiri alanemine proovikeha või detaili mōōdete suurenemisel seletub rea põhjustega. Me ei peatu nendel

põhjustel, küll aga märgime, et konstruktsioonide elementide arvutamisel tuleb sellega arvestada.

Arvukad katsed ja vaatlused näitasid, et ristlõike järsust muutumisest (sisselõiked, väljatreitid sooned, üleminekud, kiilusooned, puuritid augud ja muud) või pealiskihi vigastamisest (kriimustused, joonekesed, jämedad töötlemisjäljed) tingitud kohalikud pinged alandavad tunduvalt terase väsimuspiiri. Selle asjaolu mitteküllaldane arvestamine on paljudel juhtudel järsult muutuva ristlõikega mitmesuguste masinaosade purunemise põhjuseks, tingituna pingete kontsentratsioonist.

Mida kõrgem on terase tugevuspiir, seda tunduavam on kohalike pingete mõju, s. o. seda enam väheneb väsimuspiir. Näiteks kui terasest, kestvustugevusega  $5000 \text{ kg/cm}^2$  jämedalt töödeldud pinnaga proovikeha väsimuspiir on 20% väiksem kui poleeritud pinnaga proovikehal, siis tugevuspiiriga  $10\,000 \text{ kg/cm}^2$  terasest proovikehal see alanemine küünib 40%.

Pingete kontsentratsiooniga väikestel, pehmest terasest hoolikalt valmistatud laboratoorsetel proovikehadel on väsimuspiiri alanemine väiksem, kui seda oleks võinud oodata pingete kontsentratsiooni teguri suuruse järgi otsustades. Selgitame seda näite varal.

Olgu meil kaks tavaliste mõõdetega (läbimõõduga 8—12 mm) laboratoorset proovikeha samast materjalist. Esimene proovikeha on sile, teine aga väljatreitid soonega, millele vastab kontsentratsiooni tegur  $\alpha = 2$ . Kui esimesel proovikehal väsimuspiir  $\sigma_{-1} = 2000 \text{ kg/cm}^2$ , siis teisel see ei ole mitte kaks korda väiksem, s. o. mitte  $\cdot 1000 \text{ kg/cm}^2$ , vaid natuke suurem, ütleme  $1200 \text{ kg/cm}^2$ .

Teise proovikeha mõõdete suurendamisel väsimuspiir väheneb. Sileda laboratoorse proovikeha väsimuspiiri suhet sümmeetrilisel tsükli suurema, pingete kontsentratsiooniga proovikeha (või detaili) väsimuspiiriga sümmeetrilisel tsükli, nimetatakse efektiivseks pingete kontsentratsiooni teguriks ja tähistatakse  $\alpha_{ef}$ . Efektiivse kontsentratsiooni teguri suurus sõltub mitte ainult kontsentratsiooni teguri suuruselt  $\alpha$ , vaid ka materjalist ja proovikeha või detaili absoluutmõõdetest. Kõrgema tugevusega terastel detaili absoluutsete mõõdete suurendamine suurendab efektiivse kontsentratsiooni suurus. Suurte mõõdetega detailidel, mis on valmistatud vastupidavast terasest (legeeritud või süsinik-

teras termilise töötlemisega), efektiivne pingete kontsentratsiooni tegur on lähedane teoreetilisele pingete kontsentratsiooni tegurile, s. o. kui väsimuspiir väikese läbimõõduga, siledast vastupidavast terasest proovikeha sümmeetrilisel tsükliil võrdub  $\sigma_{-1} = 5100 \text{ kg/cm}^2$ , siis samast materjalist suurte mõõdetega väikese ristavaga proovikehi kontsentratsiooni teguriga  $\alpha = 3$  on väsimuspiir lähedane  $1700 \text{ kg/cm}^2$ . Seega vahelduvatele koormustele töötava detaili materjali valikul tuleb silmas pidada, et mida vastupidavam on teras, seda tundlikum on ta pingete kontsentratsioonile. Seetõttu nõuavad kõrge tugevuspiiriga terased pinna hoolikat töötlemist.

Tähendame, et malm on väga vähe tundlik pingete kontsentratsioonile. Seda malmi positiivset omadust kasutatakse niisugustes detailides, nagu malmvalust väntvõllid, millel nende konstruktiivsete iseärasuste tõttu on palju pingete kontsentratsiooni esilekutsuvaid põhjusi.

Käesoleval ajal on praktikas kõige sagedamini esinevatele juhtudele määratud efektiivse pingete kontsentratsiooni teguri väärtused detailide kui ka erineva pingete kontsentratsiooniga proovikehade väsimusproovide põhjal. Efektiivse pingete kontsentratsiooni teguri suurused on toodud § 104.

## § 102. Tugevusarvutus sümmeetrilise tsükli järgi vahelduvatel pingetel

Vahelduvate pingete juhul võetakse lähte-piirpingeks materjali väsimuspiir, mis on määratud laboratoorsete proovikehadega. Materjali väsimuspiir oleneb tsükli asümmeetriast. Seetõttu alustame erijuhtudega, kus pinged muutuvad sümmeetrilise tsükli järgi. Sel lihtsaimal juhul määratakse lubatav pinge (lubatav pingete amplituud) pingete kontsentratsioonita detailile valemiga

$$[\sigma_a] = \frac{\sigma_{-1}^\varepsilon}{k}, \quad (282)$$

kus  $\sigma_{-1}$  on materjali väsimuspiir sümmeetrilisel tsükliil; väsimuspiir on määratud tavaliste laboratoorsete proovikehadega,  $\varepsilon$  — tegur, mis arvestab detaili absoluutseid mõõde; selle teguri arvulise väärtuse võtame tabelist 11,  $k$  — tugevusvaru.

Kui pingete muutumise sümmeetrilise tsükli puhul esineb pingete kontsentratsioon, siis lubatav pinge arvutatakse valemiga

$$[\sigma_a] = \frac{\sigma_{-1}}{\alpha_{ef} k}, \quad (283)$$

kus  $\alpha_{ef}$  on efektiivne pingete kontsentratsiooni tegur.

Toome mõne tugevusarvutuse näite pingete muutumisel sümmeetrilise tsükli järgi.

**Näide 85.** Määrata siledade varraste läbimõõtude suhe, kui esimesele vardale mõjub staatiine tõmbejõud  $P$ , teisele vardale aga sama suurusega kord tõmbejõud, kord survejõud. Materjali voolavuspiir  $\sigma_T = 3600 \text{ kg/cm}^2$ , väsimuspiir  $\sigma_{-1} = 2000 \text{ kg/cm}^2$ . Varraste tugevusvaru  $k$  on ühesugune.

*Lahendus.* Esimese varda läbimõõt

$$d_1 = \sqrt{\frac{4Pk}{\pi\sigma_T}}$$

Teise varda läbimõõt

$$d_2 = \sqrt{\frac{4Pk}{\pi\sigma_{-1}}}$$

Otsitav läbimõõtude suhe

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_T}} = \sqrt{\frac{2000}{3600}} \approx 0,75.$$

**Näide 86.** Määrame kepsule mõjuva lubatava jõu suuruse, kui see muutub sümmeetrilise tsükli järgi  $+P$  kuni  $-P$ . Kepsu varda ristlõige on ring läbimõõduga 40 mm, materjali väsimuspiir  $\sigma_{-1} = 2000 \text{ kg/cm}^2$ . Tugevusvaru võtame võrdseks  $k = 2$ .

*Lahendus.* Kui väsimuspiir  $\sigma_{-1} = 2000 \text{ kg/cm}^2$ , siis detailil läbimõõduga 40 mm väsimuspiir tabel 11 järgi on:

$$\sigma_{-1}^d = \varepsilon\sigma_{-1} = 0,82 \cdot 2000 = 1640 \text{ kg/cm}^2.$$

Pingete lubatav amplituud

$$[\sigma_a] = \frac{1640}{2} = 820 \text{ kg/cm}^2.$$

Jõu lubatav amplituud

$$[P_a] = [\sigma_a] F = 820 \cdot \frac{3,14}{4} \cdot 4^2 = 10\,170 \text{ kg}.$$

**Näide 87.** Määrata, millise nurga võrra võib lubada terasest ümarvardal väändumist ühele ja teisele poole lõpmata suur arv kordi, kui varda läbimõõt  $d = 12 \text{ mm}$ , pikkus  $l = 1,5 \text{ m}$ , materjali nihkemoodul  $G = 0,8 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ , materjali väsimuspiir  $\tau_{-1} = 1500 \text{ kg/cm}^2$ , tugevusvaru  $k = 1,8$ .

*Lahendus.* Pingete lubatav amplituud avaldub:

$$[\tau_a] = \frac{\tau_{-1}}{k}.$$

Kuna varda läbimõõt on väike, siis absoluutsete mõõdetete mõju  $\tau_{-1}$  ei arvestata.

Väändemomendi lubatav amplituud võrdub:

$$M_{va} = [\tau_a] W_p = \frac{\tau_{-1}}{k} W_p.$$

Asetades väändemomendi selle väärtuse valemisse (95), leiame väändenurga lubatava amplituudi

$$\varphi_a^{\circ} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \frac{\tau_{-1}}{k G J_p} W_p l = \frac{180^{\circ}}{3,14} \frac{1500 \cdot 3,14 \cdot 1,2^3 \cdot 150 \cdot 32}{1,8 \cdot 16 \cdot 0,8 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 1,2^4} \cong 15^{\circ}.$$

**Näide 88.** Määrata puhvri silindrilise kruvivedru paksus ( $d$ ), kui vedrule mõjub kord tõmbe-, kord survejõud  $P = 0,4$  t. Vedru keskmine raadius  $R = 80$  mm, materjali väsimuspiir väändel  $\tau_{-1} = 3600$  kg/cm<sup>2</sup>, vedru tugevusvaru väsimusele  $k = 2$ .

*Lahendus.* Antud juhul vedru töötab pingete sümmeetrilisel tsükliil. Leiame pingete lubatava amplituudi:

$$[\tau_a] = \frac{\tau_{-1}}{k} = \frac{3600}{2} = 1800 \text{ kg/cm}^2.$$

Kuna pingete sümmeetrilise tsükli puhul  $\tau_{max} = \tau_a$ , siis  $d$  määramiseks asetame valemis  $\tau_{max}$  asemele amplituudi  $\tau_a$ ;

$$[\tau_a] = \frac{16 \cdot PR}{\pi d^3},$$

millest

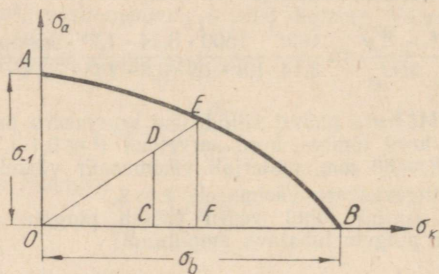
$$d = \sqrt[3]{\frac{16P \cdot R}{\pi [\tau_a]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 400 \cdot 8}{3,14 \cdot 1800}} \cong 2,09 \text{ cm}.$$

Võtame  $d = 21$  mm.

### § 103. Tugevusvaru määramine pingete asümmeetrilisel tsükliil

Vaatleme nüüd detaili pingete muutumist asümmeetrilisel tsükliil. Sel juhul tugevusvaru või lubatavate pingete määramine muutub keerulisemaks selle tõttu, et piirulukorra määramiseks tuleb ühe suuruse asemel, nagu see oli konstantsete pingete või sümmeetrilise tsükli puhul, võtta

kaks suurust. Konstantse pinge puhul võetakse piirpingeks tugevuspiir või voolavuspiir, sümmeetriliselt muutuva pinge puhul aga väsimuspiir sümmeetrilisel tsüklil ( $\sigma_{-1}$ ). Asümmeetrilise tsükli puhul iseloomustame aga piirlokorda kahe suurusega: keskmise pingega ja vastava piiramplituudiga. Seetõttu pingete muutumisel detailis asümmeetrilise tsükli järgi tugevusvaru ja lubatavate pingete määramine kannab mõnevõrra tinglikku iseloomu. Tavaliselt loetakse purustavaks piirtsüklik tsükliit amplituudi teguriga  $r$ , mis võrdub detaili tsükli amplituudi teguriga. Selliseid tsük-



Joonis 198.

leid, s. o. tsükleid võrdsete amplituudi teguritega, nimetatakse sarnasteks.

Selgitamiseks vaatleme täielikku väsimusdiagrammi (joon. 198), mis annab tsükli pingete piiramplituudi olemise keskmistest pingetest. Pingete meelevaldset tsükliit diagrammil iseloomustab punkt, mille koordinaadid on ( $\sigma_k$ ,  $\sigma_a$ ).

Sirgetega  $OA$ ,  $OB$  ja kõveraga  $AB$  piiratud pinna sees punktid kujutavad pingete tsükleid, mis on ohutud. Kõveral  $AB$  asetsevad punktid kujutavad piirtsükleid. Kujutagu detaili pingete tsükliit punkt  $D$ , s. o. detailis keskmine pinge võrdub  $\sigma_k = \overline{OC}$  ja pingete amplituud  $\sigma_a = \overline{DC}$ . Piirtsükliit sel juhul esitab punkt  $E$  kui kiire  $OD$  ja kõvera  $AB$  lõikepunkt. Punkt  $E$  kujutab tsükliit sama asümmeetriaga, kui punkti  $D$  kujutav tsükkel. Tõepoolest, tsükli asümmeetriat iseloomustab suhe  $r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$ , mida nimetasime tsükli amplituudi teguriks. Punktiga  $D$  kujutatud tsükli

jaoks minimaalne ja maksimaalne pinge vastavalt võrduvad:

$$\sigma_{min} = \overline{OC} - \overline{CD},$$

$$\sigma_{max} = \overline{OC} + \overline{CD}.$$

Järelikult

$$r_D = \frac{\overline{OC} - \overline{CD}}{\overline{OC} + \overline{CD}}.$$

Punktiga  $E$  kujutatud tsükli jaoks samad suurused võrduvad vastavalt:

$$\sigma_{min} = \overline{OF} - \overline{FE}, \quad \sigma_{max} = \overline{OF} + \overline{FE},$$

$$r_E = \frac{\overline{OF} - \overline{FE}}{\overline{OF} + \overline{FE}}.$$

Kolmnurkade  $ODC$  ja  $OEF$  sarnasusest järgneb, et

$$\frac{OC}{\overline{CD}} = \frac{OF}{\overline{FE}}$$

ehk

$$\frac{\overline{OC} - \overline{CD}}{\overline{OC} + \overline{CD}} = \frac{\overline{OF} - \overline{FE}}{\overline{OF} + \overline{FE}}.$$

Järelikult  $r_D = r_E$ , s. o. punktiga  $E$  kujutatud piirtsükliil on sama tsükli asümmeetria, mis punktiga  $D$  kujutatud tsükliil, s. o. need tsükliid on sarnased. Üldiselt koordinaatide algusest lähtuval meelevaldsel kiirel asetsevad punktid kujutavad sarnaseid tsükleid.

Asümmeetrilise tsükli järgi muutuvate vahelduvate pingetega töötavate detailide tugevusarvutusel tavaliselt antakse ette detailide mõõted. Seejärel määratakse nende mõõdede ja koormuste järgi pinged ning tegelik tugevusvaru. Mitteküllaldase tugevusvaru puhul suurendatakse detailide mõõteid ja määratakse uuesti tugevusvaru. Seega sümmeetriliselt muutuvate vahelduvate pingete korral arvutus kannab tavaliselt kontrollivat iseloomu, sest detaili mõõdede määramiseks lubatava pinge järgi (keskmine pinge ja pingete amplituudid) peab teadma lubatavate pingete suurusi, mis aga ise olenevad pingete tsükli asümmeetriast, s. o.  $r$ -st.

Järelikult sel juhul tuleb anda ette tsükli asümmeetria,

mida aga alati pole kerge teha. Üldiselt kujutab tugevusvaru piirulukorra pinge suhet detaili pingesse. Asümmeetrilise tsükli korral võime täielikust väsimusdiagrammist kergesti määrata tugevusvaru kui tsükli piirpingete suhte detaili pingetesse. Kui piirtsüklik on võetud säärane tsükkel, siis tugevusvaru määramisel on ükskõik, milliseid nende kahe tsükli pingeid võrreldakse. Tugevusvaru tuleb üks ja seesama: kas võtame piirtsükli maksimaalse pinge suhte detaili maksimaalsesse pingesse või nende kahe tsükli amplituudide suhte või nende keskmiste pingete suhte, s. o. tugevusvaru  $k$  võrdub:

$$k = \frac{\overline{OF} + \overline{FE}}{\overline{OC} + \overline{CD}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OC}}.$$

Nii määratakse tugevusvaru, kui on olemas detaili väsimusdiagramm.

#### § 104. Väsimusdiagrammi lähenduslik konstrueerimine ja tugevusvaru määramine selle järgi

Praktikas on harva detaili väsimusdiagramm meie käsutuses arvutatava detaili tugevusvaru määramisel. Enamikul juhtudel aga puudub materjali täielik väsimusdiagramm, mis on saadud erinevate asümmeetriliste tsüklite puhul laboratoorsete proovikehadega proovimisel. Seda tingib katsete pikk kestus ja masinate vähesus, milledega neid katseid tehakse. Seetõttu kasutatakse praktikas arvutamisel sageli lähenduslikke väsimusdiagramme.

Lähenduslike diagrammide konstrueerimisel kasutatakse üht või teist oletatavat seost piiramplituudi ja tsükli keskmise pinge vahel. Neis seostes avaldatakse piiramplituud sümmeetrilisel tsükliil väsimuspiiri  $\sigma_{-1}$  ja  $\sigma_b$  või  $\sigma_T$  kaudu.

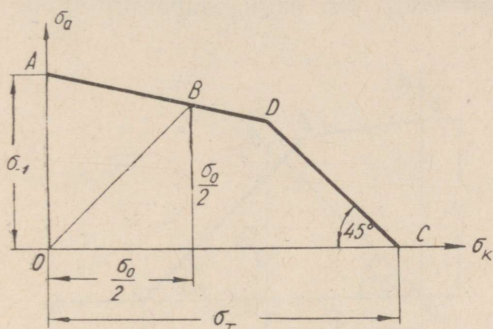
Eksperimentaalsete diagrammide võrdlemine lähenduslike, tsükli piiramplituudi ja keskmise pinge vahelise oletatava seose järgi konstrueeritud diagrammidega, milledes piiramplituud väljendub ühe väsimuse karakteristikuga ( $\sigma_{-1}$ ), näitas, et mitte ükski neist seostest ei ole vastu võetav erinevate teraste laias mastaabis.

Küllalt täpse lähendusliku diagrammi konstrueerimiseks ei piisa ainult ühest väsimuse karakteristikust  $\sigma_{-1}$ .

Lähenduslike diagrammide konstrueerimiseks ja

nende järgi tugevusvarude määramiseks on autori poolt esitatud seos piiramplituudi määramiseks keskmisest pingest, kusjuures seosesse on toodud ( $\sigma_{-1}$ ) ning materjali teine väsimuse karakteristik, ja nimelt, väsimuspiir pulseeruvall tsüklil  $\sigma_0$ .

Selle seose baasil konstrueeritud diagrammid on küllalt lähedased eksperimentaalsetele diagrammidele. Puuduseks on aga asjaolu, et nende konstrueerimiseks on vaja teada teist eksperimentaalset väsimuse karakteristikut  $\sigma_0$ . Kuid vaatamata sellele on lähenduslikkude diagrammide konst-



Joonis 199.

rueerimise nimetatud meetod ja nende järgi tugevusvarude määramise meetod meil laialdaselt levinud. Seetõttu esitameme nad ka siin.

Antud terase jaoks teame järgmisi tugevuse karakteristikuid: väsimuspiir sümmeetrilisel tsüklil  $\sigma_{-1}$ , väsimuspiir pulseeruvall tsüklil  $\sigma_0$  ja voolavuspiir  $\sigma_T$ . Vaatleme kahte juhtu, kui  $\sigma_0 < \sigma_T$  ja kui  $\sigma_0 > \sigma_T$ .

1. Lähendusliku diagrammi konstrueerimine, kui  $\sigma_0 < \sigma_T$  (joon. 199).

Ordinaatteljele kanname sümmeetrilist tsüklit kujutava punkti A koordinaatidega  $\sigma_\kappa = 0$ ,  $\sigma_a = \sigma_{-1}$ . Kanname pulseeruvat tsüklit kujutava punkti B. Pulseeruvall tsüklil  $\sigma_{min} = 0$ ,  $\sigma_{max} = \sigma_0$ . Järelikult punkti B koordinaadid on:

$$\sigma_\kappa = \frac{\sigma_0}{2}, \quad \sigma_a = \frac{\sigma_0}{2}.$$

Leiame punkti C koordinaatidega  $\sigma_\kappa = \sigma_T$ ,  $\sigma_a = 0$ , mis kujutab voolavuspiiriga võrduvat konstantset pinget. Läbi





Märgime, et määrates selle valemi järgi tugevusvaru pingete kõikide tsüklite jaoks, siis mõningate tsüklite jaoks saame suurema tugevusvaru kui voolavuspiiri ja maksimumpinge suhtega, s. o. valemiga

$$k = \frac{\sigma_T}{\sigma'_a + \sigma'_k}, \quad (289)$$

määratav.

See tähendab, et ühtede režiimide puhul tugevust piiravaks tingimuseks on väsimuspiir, teiste puhul aga voolavuspiir.

Seetõttu tuleb minimaalse tugevusvaru leidmiseks see määrata valemitega (288) ja (289).

Võime ka ette lahendada küsimuse, milline valemitest annab minimaalse tugevusvaru, kuid selle juures me ei peatu, sest nimetatud küsimuse lahendamine nõuab rohkem aega, kui kahe valemiga (288) ja (289) määratud tugevusvarude suuruste võrdlemine.

Pingete kontsentratsioonita detailidele, millede mõõdet on suuremad kui  $\sigma_{-1}$  ja  $\sigma_0$  määramiseks kasutatud laboratoorsetel proovikehadel, määratakse väsimuse tugevusvaru absoluutsete mõõdete mõju arvestades valemiga

$$k = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{\sigma'_a}{\varepsilon} + \varphi_\sigma \sigma'_k}, \quad (290)$$

kus  $\varepsilon$  on tegur, mis arvestab väsimuspiiri alanemist mõõdete suurenemisel. See tegur võetakse tabelist 11, lk 341, s. o. absoluutsete mõõdete mõju kantakse ainult pinge vahelduvale osale. Pingete kontsentratsiooniga detailidele määratakse väsimuse tugevusvaru laboratoorsete siledete proovikehadega leitud  $\sigma_{-1}$  ja  $\sigma_0$  järgi valemiga

$$k = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma'_a a_{ef} + \varphi_\sigma \sigma'_k}, \quad (291)$$

kus  $a_{ef}$  on efektiivne pingete kontsentratsiooni tegur. Teame, et efektiivseks pingete kontsentratsiooni teguriks on materjali sümmeetrilisel tsükliil laboratoorse proovikehaga leitud väsimuspiiri suhe väsimuspiiris detaili sümmeetrilisel tsükliil.

Tähendame, et kõikidesse tugevusvaru määravatesse valemitesse on asetatud keskmise pinge absoluutväärtus ( $\sigma_k$ ).

Andes ette tugevusvaru, võime valemi (291) abil ker-  
gesti leida lubatava pinge suhte  $\frac{\sigma'_a}{\sigma'_k}$  erinevatel väärtustel.

Lubatav nimipinge:

$$[\sigma_k] = \frac{\sigma_{-1}}{k} \cdot \frac{1}{\frac{\sigma'_a \alpha_{ef}}{\sigma'_k} + \varphi_\sigma}, \quad (292)$$

$$[\sigma_a] = \frac{\sigma_{-1}}{k} \cdot \frac{1}{\alpha_{ef} + \varphi_\sigma \cdot \frac{\sigma'_k}{\sigma'_a}}. \quad (293)$$

Kõik normaalpingete juhtude jaoks toodud valemid keh-  
tivad ka tangentsiaalpingete juhtudel. Valemid tangen-  
tsiaalpingete jaoks võime kirjutada analoogilistena ülaltoo-  
dutega; selleks tuleb  $\sigma_{-1}$ ,  $\sigma_0$ ,  $\sigma'_k$ ,  $\sigma'_a$ ,  $\varphi_\sigma$  asendada vastavalt  
 $\tau_{-1}$ ,  $\tau_0$ ,  $\tau'_k$ ,  $\tau'_a$ ,  $\varphi_\tau$ , kus

$$\varphi_\tau = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}. \quad (294)$$

Tabelis 12 on toodud  $\sigma_{-1}$ ,  $\tau_{-1}$ ,  $\varphi_0$  ja  $\varphi_\tau$  väärtused erinevatel  
deformatsioonidel rea teraste jaoks.

Tabel 12

Terased	$\frac{\sigma_b}{\text{mm}^2}$ kg	Paine			Tõmme, surve			Vääne		
		$\sigma_\tau$	$\sigma_{-1}$	$\varphi_\sigma$	$\sigma_\tau$	$\sigma_{-1}$	$\varphi_\sigma$	$\tau_\tau$	$\tau_{-1}$	$\varphi_\tau$
		$\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$		$\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$		$\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$	
Süsinik-teras	37	26	17	0,13	22	12	0,09	14	10	0
	45	30	19	0,06	25	14	0,08	17	12	0
	55	37	24	0,09	31	18	0,06	19	14	0,08
	65	43	28	0,17	36	20	0,11	22	15	0
	75	50	33	0,25	42	23	0,12	26	19	0
Kroomnikkel- teras	83	69	36	0,31	62	28	0,30	38	20	0,08
	98	81	41	0,23	73	30	0,13	42	24	0,14
	115	101	51	0,22	92	35	0,17	54	29	0,16
Kroomnikkel- volframteras	120	109	53	0,22	100	37	0,14	61	30	0,05

Alltoodud tabelites on antud efektiivse pingete kontsentratsiooni teguri mõningad väärtused.

1. Astmeline võll.  $D$  — suurem läbimõõt,  $d$  — väiksem läbimõõt,  $r$  — üleminekuraadius.

Nimipinged:

$$\sigma = \frac{M_p}{0,1 d^3}; \tau = \frac{M_v}{0,2 d^3}; D : d = 1,2; d = 30 \div 50 \text{ mm}$$

$\frac{r}{d}$	Paine		Vääne	
	$\sigma_b \leq 50$ kg/mm <sup>2</sup>	$\sigma_b \leq 120$ kg/mm <sup>2</sup>	$\sigma_b \leq 50$ kg/mm <sup>2</sup>	$\sigma_b \leq 120$ kg/mm <sup>2</sup>
0,05	1,8	1,9	1,5	1,6
0,10	1,4	1,5	1,3	1,4
0,15	1,3	1,4	1,2	1,3
0,20	1,2	1,3	1,1	1,2

2. Võlli ristavaga.  $d$  — võlli läbimõõt,  $a$  — ava läbimõõt.

$$\sigma = \frac{M_p}{W_{netto}} \approx \frac{M_p}{0,1 d^3 \left(1 - 1,5 \frac{a}{d}\right)};$$

$$\tau = \frac{M_v}{W_{p \text{ netto}}} \approx \frac{M_v}{0,2 d^3 \left(1 - \frac{a}{d}\right)}; d = 40 \div 50 \text{ mm.}$$

$\frac{a}{d}$	Paine		Vääne	
	$\sigma_b \leq 50$ kg/mm <sup>2</sup>	$\sigma_b \leq 120$ kg/mm <sup>2</sup>	$\sigma_b \leq 50$ kg/mm <sup>2</sup>	$\sigma_b \leq 120$ kg/mm <sup>2</sup>
0,05	2,2	2,5	1,8	2,0
0,10	1,9	2,3	1,8	2,0
0,20	1,7	2,0	1,8	2,0

3. Tasane riba ristavaga.  $B$  — riba laius,  $a$  — ava läbimõõt.

Nimipinged:

$$\sigma = \frac{P}{F_{\text{netto}}}; \quad \sigma = \frac{M_p}{W_{\text{netto}}};$$

$$\frac{a}{B} = 0,05 \div 0,30.$$

$\sigma_b$ kg/mm <sup>2</sup>	Tõmme	Paine
40	1,4	1,3
80	1,8	1,6
120	2,0	1,8

4. Võlli kiilusoonega.  $d$  — võlli läbimõõt,  $b$  — soone laius,  $t$  — soone sügavus.

Nimipinged:

$$\sigma \approx \frac{M_p}{0,1d^3 - \frac{bt(d-t)^2}{2d}}; \quad \tau \approx \frac{M_v}{0,2d^3 - \frac{bt(d-t)^2}{2d}};$$

$$d = 100 \text{ mm.}$$

$\sigma_b$ kg/mm <sup>2</sup>	Paine	Vääne
40	1,6	1,3
80	2,2	1,9
100	2,5	2,2

5. Võlli sissetreitud ringsoonega.  $d$  — võlli läbimõõt,  $r$  — ringsoone raadius.

Nimipinged:

$$\sigma = \frac{M_p}{0,1d^3}; \quad \tau = \frac{M_v}{0,2d^3}.$$

$\frac{r}{d}$	Paine		Vääne	
	$\sigma_b \leq 50$ kg/mm <sup>2</sup>	$\sigma_b \leq 120$ kg/mm <sup>2</sup>	$\sigma_b \leq 50$ kg/mm <sup>2</sup>	$\sigma_b \leq 120$ kg/mm <sup>2</sup>
0,05	1,8	2,2	1,7	2,1
0,10	1,7	1,8	1,5	1,7
0,20	1,4	1,5	1,4	1,5
0,30	1,3	1,3	1,3	1,3

6. Võllpealepressitud puksiga, mis kannab üle põikjõu völli. Puksi istu surve —  $p$  kg/mm<sup>2</sup>. Völli läbimõõt  $d = 50$  mm.

$\sigma_b$ kg/mm <sup>2</sup>	$p = 1$ kg/mm <sup>2</sup>	$p \geq 3$ kg/mm <sup>2</sup>
40	1,3	1,6
80	2,1	2,6
100	2,6	3,2

7. Keermega liide tüüp «polt-mutter».

Keeme tüüp	Süsinikteras	Legeeritud teras
Meeterkeere	3—4	4—5
Tollkeere	3—4,5	4—5,5

### § 105. Tugevusvaru määramine vahelduvate pingetega liitpingeolukorra puhul

Kõige sagedamini esineb praktikas liitpingeolukord, mil vääne mõjub koos painde või tõmbega (survega). Samuti sageli esineb juhul, kus tõmme-(surve) esineb koos paindega, taandub ülalvaadeldud asümmeetrilise tsükli juhtumile.

Liitpingeolukorral tugevusvaru määratakse valemiga

$$\left(\frac{\sigma'_a + \varphi_\sigma \sigma'_k}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau'_a + \varphi_\tau \tau'_k}{\tau_{-1}}\right)^2 = \frac{1}{k^2}, \quad (295)$$

kus  $\sigma'_a$ ,  $\sigma'_k$ ,  $\tau'_a$  ja  $\tau'_k$  on tööpinged detailsis.

Tähistades tugevusvaru normaalpingete järgi tähega  $k_\sigma$ , tangentsiaalpingete järgi aga tähega  $k_\tau$ , siis võime valemi (295) kirjutada kujul:

$$\left(\frac{1}{k_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{1}{k_\tau}\right)^2 = \left(\frac{1}{k}\right)^2$$

ehk

$$k = \frac{k_\sigma k_\tau}{\sqrt{k_\sigma^2 + k_\tau^2}}. \quad (296)$$

Tugevusvarud normaal- ja tangentsiaalpingete järgi määratakse eelnevas paragrahvis toodud valemitega.

Minimaalse üldise tugevusvaru määramiseks tuleb asetada valemisse (296)  $k_\sigma$  ja  $k_\tau$  minimaalsed väärtused. Tuleta meelde, et mõningatel pingete tsüklitel voolavuspiiri suhtega maksimaalpingesse määratud tugevusvaru võib osutada väiksemaks, kui tugevusvaru väsimuse suhtes.

## § 106. Tugevusarvutuse näiteid vahelduvate pingete puhul

**Näide 89.** Määrata mootori kepsu tugevusvaru. Kepsu läbimõõt  $d = 60$  mm. Süütemomendil mõjub silindris piki kepsu telge 52 tonnine suruv jõud, sisselaske algmomendil aga 12 tonnine tõmbav jõud. Materjali väsimuspiir sümmeetrilisel tsüklil  $\sigma_{-1t} = 2900$  kg/cm<sup>2</sup>, voolavuspiir  $\sigma_\tau = 5000$  kg/cm<sup>2</sup>,  $\varphi_\sigma = 0,16$ .

*Lahendus.* Leiame minimaalse ja maksimaalse pinge:

$$\sigma_{min} = -\frac{52\,000}{3,14 \cdot 6^2} = -1840 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_{max} = \frac{12\,000 \cdot 4}{3,14 \cdot 6^2} = 425 \text{ kg/cm}^2.$$

Leiame keskmise pinge ja pingete amplituudi:

$$\sigma'_k = \frac{425 + (-1840)}{2} = -708 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma'_a = \frac{425 - (-1840)}{2} = 1132 \text{ kg/cm}^2.$$

Määrame valemiga (290) tugevusvaru:

$$k = \frac{\sigma_{-1t}}{\frac{\sigma'_a}{\varepsilon} + \varphi_\sigma \sigma'_k} \quad (290)$$

Tabelist 11 läbimõõdule 60 mm võtame teguri väärtuse  $\varepsilon = 0,75$ .

Asetame valemisse viimases esinevate suuruste väärtused, mees pidades, et  $\sigma'_k$  asemele kirjutame selle absoluutväärtuse:

$$k = \frac{2900}{\frac{1132}{0,75} + 0,16 \cdot 708} = 1,8.$$

Lähtudes voolavuspiirist leiame tugevusvaru valemiga (289):

$$k = \frac{5000}{1132 + 608} = 2,7.$$

Saadud tugevusvarude võrdlemisel näeme, et väsimusest kepsu murdumise oht on tunduvalt suurem kui temas plastiliste deformatsioonide tekkimise oht.

**Näide 90.** Määrata lubatav pinge võllis, millele mõjub vahelduv paindemoment. Efektiivne kontsentratsiooni tegur võlli õndlas  $\alpha_{ef} = 1,5$ , materjali voolavuspiir  $\sigma_T = 5000 \text{ kg/cm}^2$ , väsimuspiir  $\sigma_{-1} = 3300 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\varphi_\sigma = 0,25$ . Suhe  $\frac{\sigma'_k}{\sigma'_a} = 42$ ; võlli tugevusvaru peab võrduma  $k = 2$ .

*Lahendus.* Valemitega (292) ja (293) määrame lubatavad pinged:

$$\sigma_k = \frac{\sigma_{-1}}{k} \frac{1}{\frac{\sigma'_a}{\sigma'_k} \alpha_{ef} + \varphi_\sigma} = \frac{3300}{2} \frac{1}{2 \cdot 1,5 + 0,25} = 510 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{-1}}{k} \frac{1}{\alpha_{ef} + \varphi_\sigma \frac{\sigma'_k}{\sigma'_a}} = \frac{3300}{2} \frac{1}{1,5 + 0,25 \cdot 0,5} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

**Näide 91.** Väikeseläbimõõdulise ristavaga (õli jaoks) õõnesvõllile, välisläbimõõduga  $D = 80 \text{ mm}$  ja siseläbimõõduga  $d = 40 \text{ mm}$ , mõjuvad vahelduv väändmoment ja vahelduv paindemoment. Nende momentide maksimaalsed ja minimaalsed väärtused on alljärgnevad:  $M_{v \max} = 24\,000 \text{ kgcm}$ ,  $M_{v \min} = -6000 \text{ kgcm}$ ,  $M_p \max = 20\,500 \text{ kgcm}$ ,  $M_p \min = -10\,500 \text{ kgcm}$ ,

Efektiivne pingete kontsentratsiooni tegur ristava puhul  $\alpha_{ef} = 3$ . Materjali voolavuspiir paindel  $\sigma_T = 4300 \text{ kg/cm}^2$ , voolavuspiir väändel  $\tau_T = 2200 \text{ kg/cm}^2$ , väsimuspiir paindel  $\sigma_{-1} = 2700 \text{ kg/cm}^2$ , väsimuspiir väändel  $\tau_{-1} = 1500 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\varphi_\sigma = 0,17$ ,  $\varphi_\tau = 0$ .

Lahendus. Leiame völli ristlõike vastupidavusmomendid:

$$W = \frac{\pi}{32} 8^3 \left[ 1 - \left( \frac{4}{8} \right)^4 \right] = 46,1 \text{ cm}^3,$$

$$W_p = 2W = 2 \cdot 46,1 = 92,2 \text{ cm}^3.$$

Leiame pinged:

$$\tau_{max} = \frac{24\,000}{92,2} = 260 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2};$$

$$\tau_{min} = -\frac{6000}{92,2} = -65 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2};$$

$$\sigma_{max} = \frac{20\,500}{46,1} = 445 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2};$$

$$\sigma_{min} = -\frac{10\,500}{46,1} = -228 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2};$$

$$\tau'_k = \frac{260 - 65}{2} = 98 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2};$$

$$\tau'_a = \frac{260 + 65}{2} = 163 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2};$$

$$\sigma'_k = \frac{445 - 228}{2} = 108 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2};$$

$$\sigma'_a = \frac{445 + 228}{2} = 336 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Tugevusvaru tangentsiaalpingete järgi määrame valemitega, mis on analoogilised normaalpingete valemitega, s. o. valemitega (291) ja (289):

$$k_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau'_a \alpha_{ef} + \varphi_\tau \tau'_k} = \frac{1500}{163 \cdot 3} = 3,1.$$

Staatiline tugevusvaru väändel:

$$k_\tau = \frac{\tau_T}{\tau'_a + \tau'_k} = \frac{2200}{163 + 98} = 8,4.$$

Tugevusvaru normaalpingete järgi:

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma'_a \alpha_{ef} + \varphi_\sigma \sigma'_k} = \frac{2700}{336 \cdot 3 + 0,17 \cdot 108} = 2,6.$$

Staatiline tugevusvaru:

$$k_\sigma = \frac{\sigma_T}{\sigma'_a + \sigma'_k} = \frac{4300}{336 + 108} = 9,7.$$

Määrame üldise tugevusvaru, asetades valemisse (296)  $K_\sigma$  ja  $K_\tau$  minimaalsed väärtused:

$$k = \frac{k_\sigma k_\tau}{\sqrt{k_\sigma^2 + k_\tau^2}} = \frac{2,6 \cdot 3,1}{\sqrt{2,6^2 + 3,1^2}} = 2.$$

## § 107 Kontrollküsimusi

Tooge näiteid staatilisest ja dünaamilisest koormusest.

Kuidas määratakse õhukese pöörleva rõnga pinge?

Milline seos kehtib pingete vahel, mis on esile kutsutud järsku rakendatud venitavast jõust ja sama suurest staatiliselt rakendatud jõust?

Kuidas toimub löögiproov?

Mida nimetatakse materjali löögitugevuseks?

Kuidas proovitakse materjali väsimusele (kestvustugevusele)?

Mida nimetatakse keskmiseks pingeks ja tsükli pinge amplituudiks vahelduvate pingete puhul?

Millist pingete tsükli nimetatakse sümmeetriliseks?

Mida nimetatakse materjali kestvustugevuseks?

Millised empiirilised lähenduslikud seosed on sümmeetriliste tsükli väsimuspiiri hindamiseks teraste jaoks tugevuspiiri järgi?

Kuidas mõjuvad detaili absoluutmõõted ja materjali pinna seisund materjali kestvustugevusele?

Mida nimetatakse efektiivseks pingete kontsentratsiooni teguriks?

Kuidas määratakse tugevusvaru pingete sümmeetrilise tsükli puhul?

Kuidas konstrueeritakse lähenduslik väsimusdiagramm?

Kuidas määratakse detaili tugevusvaru lähendusliku väsimusdiagrammi abil?

Kuidas määratakse tugevusvaru vahelduvate pingetega liitpingeolukorra puhul?

## AINEREGISTER

- Amplituud, piir-, tsükli 348  
 — tsükli 335
- Arvutus lubatava koormuse järgi  
     67, 149, 234  
 — — pinge — 47 ja edasi
- Deformatsioon 6  
 — elastne 6  
 — jääv (plastiline) 6, 13  
 — liit- 11, 281 ja edasi  
 — piki- 17 ja edasi  
 — — suhteline 18  
 — rist-, tõmbel ja survel 22
- Deformatsioonitöö väändel 145  
 — tõmbel 36
- Diagramm, surve- 41  
 — tõmbe- 26  
 — väsimus-, (lähenduslik) 348
- Elastne joon, tala 237
- Elastsus 6
- Elastsusmoodul, nihkel (teise liigi) 103  
 — tõmbel (esimese liigi) 19
- Elastsuspiir 28
- Energia, potentsiaalne, väändel 145  
 — — tõmbel 37
- Epüür, paindemomentide 190  
 — põikjõudude 190  
 — väändemomentide 121
- Eritöö, deformatsiooni 38  
 — — tasapinnalise pingelulukorra puhul 87, 94
- Euleri valemid 309 ja edasi, 314
- Gagarini press 26
- Haprus 31, 41, 47, 88
- Hooke'i seadus 19, 27  
 — — nihkel 103
- Hälve, tsükli pingete 335
- Hüpotees, tasapinnaliste lõigete 17
- Inertsmoment, polaar- 129  
 — tsentrifugaal- 156  
 — — ringi 131  
 — — rõnga 132
- Inertsraadius, ristlõike 294
- Intensiivsus, jaotatud koormuse 184
- Jooned, Tšernovi 30, 76
- Jõud, elastsus- 6  
 — koondatud 10  
 — kriitiline 309  
 — põik- (lõike-) 187  
 — sise- 6  
 — välis- 6, 10
- Jäikus, paindel 212  
 — tõmbel (survel) 20  
 — väändel 129
- Järelmõju 34
- Kalestus 36
- Keha, absoluutselt kõva 6  
 — täiesti (absoluutselt) elastne 6  
 — täiesti mitteelastne 6
- Kiht, neutraal- 209
- Kiirus, proovimise 34
- Kinnitus, jäik 181
- Kontsentratsioon, pingete 47, 342
- Koorik, õhukeseseinaline 12, 95
- Koormus 10  
 — ajutine 10  
 — alaline 10  
 — dünaamiline 10  
 — inertsjõudude 325, 326  
 — konstantne 10  
 — löök- 10, 325  
 — perioodiline 10  
 — staatiline 10, 325
- Koosmõju, painde ja väände 297  
 — painde ja tõmbe 288  
 — väände ja tõmbe 304
- Kruvivedru, silindriline 146
- Kõvadus 43  
 — Brinelli 43
- Kõver, Wöhleri 338
- Kõverusraadius, tala elastse joone 237
- Liide, ülekatte- 115



- Reservuaar, õhukeseseinaline 95  
 Roomavus 33, 34  
 Rõngas, ühtlaselt pöörlev 326  
 Sagedus, pingete muutumise 335  
 Saledus, varda 314  
 Seadus, Hooke'i 19, 27  
 — — nihkele 103  
 — koormusest vabastamise 32  
 Seadus, tangentsiaalpingete paa-  
 riti esinemise 77  
 Surve (vt. samuti Tõmme) 11, 40,  
 52  
 Surve, ekstsentriline 291, 292 ja  
 edasi  
 — liht-, nõtkel 316  
 Surve koos väändega 304  
 Zuravski valem 229  
 Tala 180 ja edasi  
 — jätkuv (paljutoeline) 274  
 — kolmel toel 274 ja edasi  
 — staatiliselt määramata 183,  
 263  
 — — määratud 183  
 — võrdvastupidav paindele  
 255  
 Tegur, efektiivne pingete kont-  
 sentratsiooni 342, 352, 353  
 — pikkuse redutseerimise 313  
 — pingete kontsentratsiooni  
 46, 342  
 — Poisson'i 22, 23, 107  
 — tsükli amplituudi (asüm-  
 meetria) 335, 346  
 Telglöök, prussi 328  
 Telg, neutraal- 179  
 — väände- 126  
 Teoreetiline mehaanika 5  
 Teooria, elastsus- 13  
 — Mohri tugevus- 94  
 — plastilisuse 13  
 — suurimate lineaarsete defor-  
 matsioonide 90  
 — — normaalpingete 89  
 — — tangentsiaalpingete 92  
 — tugevus- 88  
 Toereaktsioon 182  
 — liigne 263  
 Tsükkel, asümmeetriline 335, 340,  
 345  
 — piir- 346  
 Tsükkel, pulseeriv 335  
 — sümmeetriline 335  
 Tsükliid, sarnased 346  
 Tšernovi jooned 30, 76  
 Tugevus, materjali 5  
 Tugevuspiir 42  
 Tugevusvaru 48  
 — asümmeetrilise tsükli kor-  
 ral 345  
 — vahelduvate pingetega liit-  
 pingeolukorra puhul 356  
 Tugevusõpetus 5  
 Tugi, jäigalt kinnitatud 180  
 — šarniirne, liikumatu 180  
 — šarniirne, liikuv 180  
 Tuum, ristlõike 295  
 Tõmbemasin 25  
 Tõmme 11, 17 ja edasi, 45 ja  
 edasi, 73  
 — kahes teineteisega risti-  
 asetsevas suunas 79, 85  
 — koos paindega 288  
 — koos väändega 304  
 Valem, Zuravski 229  
 Valemid, Euleri 309 ja edasi, 314  
 Vastupidavusmoment, paindele  
 213  
 — — ringil 217  
 — — riskülikul 216  
 — — rõngal 218  
 — väändele 130  
 — — ringil 132  
 — — rõngal 132  
 Voolavus 29  
 Voolavuspiir 29  
 Võrrand, elastse joone 238  
 — — — üldistatud (univer-  
 saalne) 245  
 Väsimus, materjalide 332  
 Väsimuspiir 336  
 Vääne 11, 120 ja edasi, 125  
 — koos paindega 297  
 — riskülikukujulise ristlõi-  
 kega prussi 142  
 — tõmbega või survega 304  
 Wöhleri kõver 338  
 Ömblus, nurk- 115  
 — kald- 115  
 Ülesanne, staatiliselt määramata  
 58

## SISUKORD

	Lk.
Eessõna neljandale väljaandele . . . . .	3
I peatükk. Sissejuhatus . . . . .	5
§ 1. Tugevusõpetus kui teadus. Deformatsiooni ja elastse keha mõiste . . . . .	5
§ 2. Välisjõudude klassifikatsioon . . . . .	10
§ 3. Deformatsioonide põhiliigid . . . . .	11
§ 4. Lõigete meetod. Pinge . . . . .	14
§ 5. Kontrollküsimusi . . . . .	16
II peatükk. Tõmme ja surve . . . . .	17
§ 6. Pikideformatsioon. Pinge. Hooke'i seadus . . . . .	17
§ 7. Ristdeformatsioon tõmbel ja surve . . . . .	22
§ 8. Materjalide tõmbe katseline uurimine . . . . .	24
§ 9. Tõmbediagramm ja selle iseloomulikud punktid . . . . .	26
§ 10. Järelmõju ja kaalustus . . . . .	34
§ 11. Deformatsioonitöö tõmbel . . . . .	36
§ 12. Surveproov . . . . .	40
§ 13. Kõvadus . . . . .	43
§ 14. Kontrollküsimusi . . . . .	44
III peatükk. Tugevusarvutused tõmbel ja surve . . . . .	45
§ 15. Lubatav pinge ja ristlõigete valik . . . . .	45
§ 16. Omakaalu mõju tõmbel ja surve . . . . .	52
§ 17. Astmeline pruss . . . . .	55
§ 18. Staatiliselt määramatud ülesanded tõmbel ja surve . . . . .	58
§ 19. Temperatuuri muutumisest tekkivad pinged . . . . .	64
§ 20. Staatiliselt määramatute süsteemide arvutus lubatavate koormuste järgi . . . . .	67
§ 21. Kontrollküsimusi . . . . .	72
IV peatükk. Liitpingeolukord . . . . .	73
§ 22. Pinged tasapinnalistes kaldlõigetes telgtõmbe või -surve puhul . . . . .	73
§ 23. Peapingete mõiste . . . . .	78
§ 24. Pinged tasapinnalistes kaldlõigetes kahes teineteisega risti asetsevas suunas mõjuva tõmbe (surve) puhul . . . . .	79
§ 25. Peapingete määramine . . . . .	81
§ 26. Deformatsioonid kahes teineteisega risti asetsevas suunas mõjuva tõmbe (surve) puhul. Deformatsiooni eritöö . . . . .	85

§ 27. Tugevusteooriad	88
§ 28. Ohukeseseinaliste reservuaaride arvutus	95
§ 29. Kontrollküsimusi	100
<b>V peatükk. Nihe</b>	101
§ 30. Lõike ja nihke mõiste. Nihkepinged. Hooke'i seadus nihkel	101
§ 31. Puhas nihe tõmbel ja survel kahes teineteisega risti asetsevas suunas	104
§ 32. Elastsusmoodulite $E$ ja $G$ vaheline seos	105
§ 33. Lubatav nihkepinge	107
§ 34. Pindsurve	109
§ 35. Nihke (lõike) ja pindsurve arvutusnäiteid	110
§ 36. Keevisliidete arvutus	115
§ 37. Kontrollküsimusi	119
<b>VI peatükk. Vääne</b>	120
§ 38. Väändemomentide epüüride konstrueerimine. Väändemomendi seos võimsuse ja pöörete arvuga	120
§ 39. Pingete ja deformatsioonide määramine ümarprussi väändel	125
§ 40. Ringi ja rõnga polaarinertermoment ning polaarvastupidavusmoment	131
§ 41. Väände arvutusvõrrandid	133
§ 42. Mõisteid ristkülikukujulise ristlõikega prusside arvutusest väände	142
§ 43. Potentsiaalne energia väändel	145
§ 44. Väikese sammuga silindriliste kruvivedrude arvutus	146
§ 45. Võllide arvutus lubatava koormuse järgi	149
§ 46. Kontrollküsimusi	150
<b>VII. peatükk. Tasapinnaliste kujundite staatilised momendid, raskuskeskmed ja inertsmomentid</b>	152
§ 47. Tasapinnaliste kujundite staatilised momendid	152
§ 48. Tasapinnaliste kujundite inertsmomentid	155
§ 49. Inertsmomentide arvutusvalemid telje paralleelkülkel	157
§ 50. Mõningate lihtkujundite inertsmomentid	159
§ 51. Lihtsamaist kujundeist koostatud kujundite inertsmomentide määramine	163
§ 52. Inertsmomentide arvutusvalemid telgede pööramisel mingi nurga $\alpha$ võrra	166
§ 53. Peainertstelgede mõiste ja nende asendi määramine	169
§ 54. Peainertsmomentide määramine	172
§ 55. Kontrollküsimusi	175
<b>VIII peatükk. Sirge prussi paine, paindemoment ja põikjõud</b>	177
§ 56. Painde üldmõiste	177
§ 57. Talade toed ja toereaktsioonid	180
§ 58. Talade toereaktsioonide määramine	182
§ 59. Põikjõud ja paindemoment	185

§ 60.	Jaotatud koormuse intensiivsuse, põikjõu ja paindemomendi vaheline seos . . . . .	188
§ 61.	Paindemomentide ja põikjõudude epüüride konstrueerimine . . . . .	190
§ 62.	Kontrollküsimusi . . . . .	208
<b>IX peatükk. Pinged paindel. Talade tugevusarvutus . . . . .</b>		<b>209</b>
§ 63.	Normaalpingete määramine paindel . . . . .	209
§ 64.	Sagedamini esinevate ristlõigete vastupidavusmomendid . . . . .	216
§ 65.	Painde arvutusvalemid. Talade arvutuse näiteid . . . . .	220
§ 66.	Tangentsiaalpinged ristkülikukujulise ristlõikega tala paindel. Zuravski valem . . . . .	223
§ 67.	Tangentsiaalpinged I-talas . . . . .	229
§ 68.	Tala tugevuse kontroll peapingete järgi . . . . .	231
§ 69.	Talade arvutus lubatava koormuse järgi . . . . .	234
§ 70.	Kontrollküsimusi . . . . .	236
<b>X peatükk. Tala elastne joon . . . . .</b>		<b>237</b>
§ 71.	Tala elastne joon . . . . .	237
§ 72.	Elastse joone üldistatud võrrandi tuletamine . . . . .	242
§ 73.	Tala paigutuste määramise erijuhud elastse joone üldistatud võrrandi abil . . . . .	246
§ 74.	Võrdvastupidavad talad paindele . . . . .	255
§ 75.	Kontrollküsimusi . . . . .	262
<b>XI peatükk. Staatiliselt määramatud talad . . . . .</b>		<b>263</b>
§ 76.	Staatiliselt määramatute talade mõiste . . . . .	263
§ 77.	Ühest otsast jäigalt kinnitatud ja teise otsaga toel vabalt asetsev tala . . . . .	263
§ 78.	Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud tala . . . . .	269
§ 79.	Kolmel toel asuv tala . . . . .	274
§ 80.	Kontrollküsimusi . . . . .	280
<b>XII peatükk. Liittugevus . . . . .</b>		<b>281</b>
§ 81.	Vildakpaine . . . . .	281
§ 82.	Paine koos tõmbe ja survega . . . . .	288
§ 83.	Ekstsentriline surve . . . . .	291
§ 84.	Ekstsentrilise surve ja tõmbe üldjuht . . . . .	292
§ 85.	Ristlõike tuuma mõiste . . . . .	295
§ 86.	Paine koos väändega . . . . .	297
§ 87.	Vääne koos tõmbe või survega . . . . .	304
§ 88.	Kontrollküsimusi . . . . .	305
<b>XIII peatükk. Nõtke . . . . .</b>		<b>307</b>
§ 89.	Nõtke nähtuse olemus . . . . .	307
§ 90.	Euleri valemid . . . . .	309
§ 91.	Euleri valemite rakendatavuse piirid. Tabel nõtke arvutamiseks . . . . .	314
§ 92.	Nõtke arvutamise näited . . . . .	317
§ 93.	Kontrollküsimusi . . . . .	323
<b>XIV peatükk. Tugevus dünaamilistel ja vahelduvatel koormustel . . . . .</b>		<b>325</b>
§ 94.	Dünaamilise ja vahelduva koormuse mõiste . . . . .	325
§ 95.	Ühtlaselt pöörleva rõnga arvutus . . . . .	326

§ 96.	Pinge ja deformatsioon prussis telglöögil . . . . .	328
§ 97.	Metallide löögiproov . . . . .	331
§ 98.	Metallide väsimuse mõiste . . . . .	332
§ 99.	Materjalide väsimusproov . . . . .	336
§ 100.	Kestvustugevus asümmeetrilisel tsükliil . . . . .	340
§ 101.	Detaili absoluutsete mōōdete mõju kestvustugevusele . . . . .	341
§ 102.	Tugevusarvutus sümmeetrilise tsükli järgi vahelduvatel pingetel . . . . .	343
§ 103.	Tugevusvaru määramine pingete asümmeetrilisel tsükliil . . . . .	345
§ 104.	Väsimusdiagrammi lähenduslik konstrueerimine ja tugevusvaru määramine selle järgi . . . . .	348
§ 105.	Tugevusvaru määramine vahelduvate pingetega liitpingeolukorra puhul . . . . .	356
§ 106.	Tugevusarvutuse näiteid vahelduvate pingete puhul . . . . .	357
§ 107.	Kontrollküsimusi . . . . .	360
<b>Aineregister</b>	. . . . .	<b>361</b>

---

Р. С. Кинашвили  
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ  
ТЕХНИКУМОВ

На эстонском языке

Эстонское Государственное Издательство  
Таллин, Пярну маантэ 10

\*

Toimetaja A. Kõrba

Tehniline toimetaja L. Uuspõld

Korrektor S. Kõiv

Ladumisele antud 25. IX 1956. Trükkimisele antud  
14. XI 1956. Paber 54×84, 1/16. Trükipoognaid  
23. Formaadile 60×92 kohaldatud trükipoognaid  
18,86. Arvutuspoognaid 16,71. Trükiarv 3000. Tellimise  
nr. 2262. Trükikoda «Tartu Kommunist», Tartu,  
Olikooli 17/19.

Hind rbl. 7.20

Rbl. 7.20

A-21346

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00354030 1