Euroopa Liit
Euroopa Sotsiaalfond

Eesti tuleviku heaks

E-kursuse "JUHUSLIKUD PROTSESSID" materjalid

Aine maht 6 EAP

Meelis Käärik (Tartu Ülikool), 2012

Juhuslikud protsessid. Lühitutvustus

Aine maht: 6 EAP

Ainekood: MTMS.02.003

Vastutav õppejõud: Meelis Käärik (vanemteadur, Tartu Ülikool, matemaatilise statistika instituut)

Sihtgrupp: matemaatilise statistika bakalaureuseõppe tudengid, finants- ja kindlustusmatemaatika magistriõppe tudengid (tasanduskursusena)

Soovituslikud eeldusained: MTMS.02.004 Tõenäosusteooria II

Kursuse lühikirjeldus: antakse ülevaade põhilistest juhuslikest protsessidest: Markovi ahelad, juhuslik ekslemine, Poissoni protsessid, pideva ajaga Markovi ahelad, tekke ja kao protsessid, teenindussüsteemid, taastumisprotsessid, Browni liikumine, statsionaarsed protsessid. Tutvustatakse protsesside omadusi, protsesside vahelisi seoseid, vaadeldakse ja lahendatakse seotud ülesandeid.

Kursuse eesmärgid:

- anda ülevaatade põhilistest juhuslikest protsessidest
- tutvustada vahendeid juhuslike protsesside analüüsimiseks ning nendega seotud probleemide lahendamiseks

Õpiväljund:

Aine läbinud üliõpilane

- mõistab juhusliku protsessi olemust ja tunneb põhilisi juhuslikke protsesse;
- teab olulisemate juhuslike protsesside põhiomadusi;
- oskab kasutada saadud teadmisi juhuslike protsessidega seotud ülesannete lahendamisel

Lõpphindamine: eristav (A, B, C, D, E, F, mi)

Eksamile pääsemise tingimused: Kontrolltööd sooritatud (mõlema kontrolltöö tulemus peab olema vähemalt 50% maksimumpunktidest ehk vähemalt 15 punkti)

Lõpphinde kujunemine: kontrolltööd (max 30+30 punkti) + eksam (max 40 punkti), võimalik on koguda aktiivsuse eest lisapunkte (kodutööde esitamine, aktiivsus praktikumides), max 10 punkti.

Lõpphinne kujuneb vastavalt kogutud punktidele järgmiselt:

- 90+ punkti: A
- 80 - 89.9 punkti: B
- 70 - 79.9 punkti: C
- 60 - 69.9 punkti: D
- 50 - 59.9 punkti: E
- alla 50 punkti: F

E-õpe: käesoleva kursuse loengukonspekti saab kasutada nii abimaterjalina toetamaks auditoorset õpet kui ka iseseisvaks õppeks. Loengukonspekt sisaldab kogu kursuse jaoks vaja minevat teoreetilist materjali (huvi korral on võimalik lisaks lugeda soovituslikke loengumaterjale, vt allpool). Ülesannete lahendamiseks on kursusel ette nähtud 9 praktikumi, aga soovi korral on võimalik ülesandeid lahendada ka iseseisvalt. Ülesanded on jagatud vastavalt teooria peatükkidele: igale praktikumiülesannete punktile vastab teoreetiline loengupeatükk, mis kirjeldab ära metoodika ja valemid ülesannete lahendamiseks. Tekkivaid küsimusi saab esitada Juhuslike protsesside üldfoorumisse. Lisaks praktikumiülesannetele antakse kursuse jooksul koduseid ülesandeid, mille esitamine on vabatahtlik, kuid mis annavad lisapunkte, mida arvestatakse koondhinde juures. Kodutööde esitamine ja hindamine käib läbi Moodle'i keskkonna (soovi korral võib esitada töid ka paberkandjal praktikumides), samuti on Moodle'i keskkonnas näha koondhinde kujunemine kodutööde, kontrolltööde ja eksamitulemuste põhjal. Kontrolltööd ja eksam tuleb läbida auditoorselt.

Soovituslikud loengumaterjalid:

- S. M. Ross. Introduction to Probability Models. Elsevier/Academic Press, 2009 (10th ed.).
- G. R. Grimmett, D. R. Stirzaker. Probability and Random Processes. Oxford University Press, 2001 (3rd ed.).
- A. A. Borovkov. Kurs teorii verojatnostej. Moskva, 1972, 1976.
- A. N. Shirjajev. Verojatnost. Moskva, 1980.
- D. Kannan. An Introduction to Stochastic Processes. North Holland, 1979.

Lisainfo: Meelis Käärik (meelis.kaarik@ut.ee)

Tartu Ülikool
Matemaatika-informaatikateaduskond

Juhuslikud protsessid (MTMS.02.003)

Loengukonspekt

Õppejõud: Meelis Käärik

Sisukord

Sissejuhatus

Käeseoleva konspekti aluseks on Sheldon M. Rossi õpik "Introduction to Probability Models"(Elsevier/Academic Press, 2009, 10th ed.).

Juhusliku protsessi all mõistetakse juhuslike suuruste peret $\{X(t) : t \in T\}$, mille iga liige $X(t)$ on juhuslik suurus tavalises mõttes. Me eeldame, et kõik juhuslikud suurused $X(t)$ on määratud ühel ja samal tõenäosusruumil $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Parameeter t on reaalarvuline muutuja, mida tavaliselt tõlgendatakse ajana, kuid see võib näidata ka kohta ruumis. Seega juhuslik protsess on reeglina ajast sõltuv juhuslik suurus. Hulka, mille elementideks on $X(t)$ kõikvõimalikud väärtused, nimetatakse protsessi *seisundite ruumiks* ja $X(t)$ on protsessi *seisund* ajamomendil t.

Hulka T nimetatakse juhusliku potsessi *indekshulgaks.* Kui T on loenduv hulk, siis ütleme, et juhuslik protsess on *diskreetse ajaga* protsess. Sel juhul loeme kokkuleppeliselt, et $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$, kuigi see ei pruugi tähendada võrdseid ajavahemikke. Kui T on mingi intervall reaaltelje positiivses osas, näiteks $T = [0, \infty)$, siis ütleme, et juhuslik protsess on *pideva ajaga* protsess.

Näide 1

> Ajamomendil t parklas olevate autode arv $X(t)$ on pideva ajaga protsess, mille seisundite hulk on $\{0, 1, 2, \ldots, M\}$. Võimalik küsimus: kui suur on tõenäosus, et parklas on vabu kohti ajamomendil t_0?

Näide 2

> Olgu $X(t)$ vee tase tammi taga ajamomendil t. See on pideva ajaga juhuslik protsess, mille seisundite hulk on mingi intervall $[0, a]$. Loomulik küsimus: milline peab olema tammi kõrgus L,

et üleujutus oleks praktiliselt välistatud? Kui kaua võib minna aega esimese üleujutuseni antud tammi kõrguse korral?

Näide 3

Olgu $X_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ n-nda nädala lõpuks lattu jäänud toodete A arv. See on diskreetse ajaga protsess. Huvi pakub küsimus: milliste X_n väärtuste korral tuleks järgmiseks nädalaks tooteid juurde tellida?

Juhuslikku protsessi $\{X(t) : t \in T\}$ nimetatakse *sõltumatute juurdekasvudega* protsessiks, kui suvaliste ajamomentide $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ korral juhuslikud suurused $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ on sõltumatud. Öeldakse, et protsess on *statsionaarsete sõltumatute juurdekasvudega*, kui lisaks eeltoodule suvaliste $t_1, t_2 \in T$ ja $s > 0$ korral vahe $X(t_2 + s) - X(t_1 + s)$ on sama jaotusega nagu $X(t_2) - X(t_1)$.

Näide 4 (Üldine juhuslik ekslemine)

Olgu $Y_1, Y_2, \ldots$ sõltumatute sama jaotusega juhuslike suuruste jada. Siis juhuslik protsess

$$\{X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k, \quad k = 1, 2, \ldots\}$$

on statsionaarsete sõltumatute juurdekasvudega ja teda nimetatakse *üldiseks juhuslikuks ekslemiseks*. Kui Y_k on kauplusest k-nda nädala jooksul ostetud teatud esemete arv, siis X_n on n esimese nädala jooksul ostetud esemete koguarv. (Märgime, et erineva jaotusega Y_k korral statsionaarsus ei kehti.)

Näide 5 (Wieneri protsess (ehk Browni liikumine))

Juhuslikku protsessi $\{X(t), t \geq 0\}$ nimetatakse *Wieneri protsessiks*, kui

(1) ta on statsionaarsete, sõltumatute juurdekasvudega,

(2) X(0) = 0,

(3) iga $t > 0$ korral $X(t)$ jaotub normaalselt keskväärtusega 0.

Wieneri protsessiga puutume kokku, kui jälgime aineosakese liikumist vedelikus või gaasis. Osake saab teda ümbritsevatelt molekulidelt pidevalt tõukeid, mille tagajärjel tema asukoht on kaootilises muutumises. Kui me fikseerime mingi sihi ja 0-punkti sellel, siis osakese asukoht $X(t)$ selles sihis on hästi kirjeldatav Wieneri protsessina.

Nii juhuslik ekslemine kui ka Wieneri protsess on näited ühest juhuslike protsesside klassist, mida nimetatakse *Markovi protsessiks*. Markovi protsesside all mõeldakse juhuslikke protsesse, millel on järgmine omadus: kui mingil ajamomendil $X(t)$ väärtus on teada, siis protsessi hilisem kulg st $X(t+s),\ s \geq 0$ ei sõltu enam sellest, kuidas protsess kulges enne ajamomenti t. Seega antud oleviku korral tulevik ei sõltu minevikust. Täpsemalt, protsessi nimetatakse Markovi protsessiks, kui tinglik jaotusfunktsioon

$$\mathbf{P}\{X(t) < x \mid X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \ldots, X(t_n) = x_n\} =$$

$$= \mathbf{P}\{X(t) < x \mid X(t_n) = x_n\}$$

suvaliste $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ korral.

Peatükk 1

Markovi ahelad (diskreetse ajaga)

Järgnevas lubame katsetulemuste sõltuvust üksteisest, st. vaatleme olukorda, kus järgmiste katsete tulemused võivad sõltuda eelmiste katsete tulemustest.

Peame silmas, et vahel ei pruugi katsetulemuste (juhuslike suuruste X) väärtused olla arvulised (nt ilm võib olla pilvine, vihmane, päikeseline, ...).

1.1 Definitsioonid ja näited Markovi ahelate seisundite klassifikatsioon

1.1.1 Definitsioonid, näited

Olgu juhuslikul katsel G ülimalt loenduv arv katsetulemusi $E_1, E_2, E_3, \ldots$. Kui kordame katset G mingi lõplik arv kordi, siis saame katsetulemuste jada $E_1, E_4, E_3, E_7, E_1, E_5 \ldots$, st. indeksid tulevad mingis juhuslikus järjekorras. Tähistame $X_n :=$ *katse nr. n tulemus*, antud juhul seega $X_1 = E_1, X_2 = E_4$ jne.

Kui X_n sõltub $X_{n-1} - st$ ja ei sõltu eelmistest, siis on tegemist Markovi ahelaga. Tähistame lihtsuse mõttes $E_j = j$.

Definitsioon 1.1.1 (Markovi ahel)**.** Juhuslike suuruste jada $\{X_n\}$, kus n võib omada lõpliku või loenduva arvu väärtusi, nimetatakse *Markovi ahelaks*, kui kehtib

$$\mathbf{P}\{X_n = j \,|\, \underbrace{X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_{n-2} = k_{n-2}}_{minevik}, X_{n-1} = k_{n-1}\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\underbrace{X_n = j}_{tulevik} \,|\, \underbrace{X_{n-1} = k_{n-1}}_{olevik}\}$$

st. järgmise seisundi prognoosimiseks on vaja teada ainult praegust seisundit.

Võime definitsioonis toodud tingimuse sõnastada järgnevalt: *fikseeritud oleviku korral tulevik ei sõltu minevikust.*

Võimalikke katsetulemusi, X_n väärtusi $E_1, E_2, \ldots$ nimetatakse Markovi ahela *seisunditeks* ehk *olekuteks.* Tõenäosust

$$\mathbf{P}\{X_n = j | X_{n-1} = i\} =: p_{ij}^{(n)}$$

nimetatakse *üleminekutõenäosuseks* (seisundist i seisundisse j ülemineku tõenäosus sammul n).
Markovi ahela *algseis* antakse tavaliselt ette tõenäosusjaotusega

$$\mathbf{P}\{X_0 = j\} = p_j^0, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad \sum_j p_j^0 = 1,$$

mis näitab ära millise tõenäosusega on mingi seisund lähteseisundiks (süsteemi algolekuks).

Definitsioon 1.1.2 (Homogeenne Markovi ahel)**.** Kui üleminekutõenäosused $p_{ij}^{(n)}$ ei sõltu n-i väärtusest, st. iga n korral $p_{ij}^{(n)} = p_{ij}$, siis Markovi ahelat nimetatakse *homogeenseks.*

Näide 1.1.1 (Mündivisete seeria)**.** Olgu meil sõltumatute katsete jada, mis formaalselt on vaadeldav Markovi ahelana. Juhuslik suurus X võib omandada väärtusi 0 (kiri) või 1 (kull). Sellisel juhul

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{X_n = j | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_{n-2} = k_{n-2}, X_{n-1} = k_{n-1}\} = \\ = \quad &\mathbf{P}\{X_n = j | X_{n-1} = k_{n-1}\} \overset{\substack{\text{sõltumatuse}\\ \text{tõttu}}}{=} \mathbf{P}\{X_n = j\} = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Näide 1.1.2 (Lihtsustatud ilma mudel)**.** Oletame, et homne ilm sõltub tänasest ilmast, mitte varasematest ilmadest: kui täna sajab, siis homme sajab tõenäosusega α, kui täna ei saja, siis homme sajab tõenäosusega β. Eristame kahte seisundit: 0 – sajab, 1 – ei saja.

Definitsioon 1.1.3 (Üleminekumaatriks)**.** Maatriksit

$$P = (p_{ij})$$

nimetatakse Markovi ahela *üleminekumaatriksiks.*

Antud näites

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} & \sum \\ P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

kus $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ ja $\beta + (1 - \beta) = 1$.

Näide 1.1.3 (Kommunikatsioonimudel)**.** Vaatleme digitaalse info (mis on nullidest ja ühtedest koosnev jada) mitme-etapilist ülekannet. Ülekanne toimub paljude etappide kaupa, kus igal etapil võib tekkida viga $0 \to 1$ või $1 \to 0$ tõenäosusega p. Oletame, et igal astmel sümbol säilub tõenäosusega p ja moondub tõenäosusega $1-p$. Sellisel juhul saame üleminekumaatriksiks

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad 0 \quad & \quad 1 \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} \end{array},$$

mis on sümmeetriline maatriks, st. ülekandekanal on sümmeetriline – 0 ja 1 säilimise ja muutumise tõenäosus on sama.

Näide 1.1.4 (Hasartmängu mudel)**.** Vaatleme mängijat, kes igas mängus võib võita 1 krooni tõenäosusega p või kaotada 1 krooni tõenäosusega $1-p$. Mängud on sõltumatud. Mängija lahkub mängust, kui ta on kogu raha ära raisanud või kui ta on võitnud N krooni. Tähistagu X_n mängija rahalist seisu n mängu järel ja olgu võimalikud seisundid $0, 1, 2, \ldots, N$. $\{X_n\}$ on Markovi ahel, kuna

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{X_n = j | \underbrace{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-2} = i_{n-2}}_{minevik}, X_{n-1} = i\} = \\ = \; &\mathbf{P}\{X_n = j | X_{n-1} = i\} \end{aligned}$$

Minevik rolli ei mängi, kuna liidame ainult eelmisele väärtusele $+1$ või -1. Üleminekumaatriksiks saame

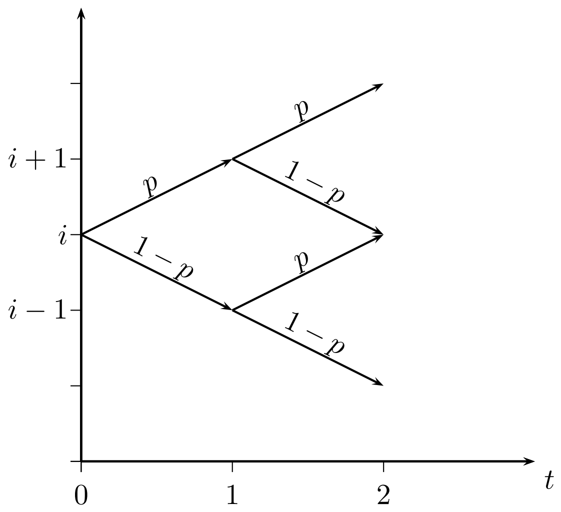
$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & p \\ 0 & 0 & \ldots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \sum \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array},$$

kus üleminekutõenäosused on järgmised: $p_{i,i+1} = p$ (võidab ühe krooni juurde), $p_{i,i-1} = 1-p$ (kaotab ühe krooni), $p_{0,0} = 1$ ja $p_{N,N} = 1$, kusjuures $i = 1, \ldots, N-1$. Samas näiteks $p_{i,i+2} = 0$ (ühe mänguga kahte krooni ei teeni) ja $p_{i,i-3} = 0$ (ühe mänguga kolme krooni ei kaota).

Definitsioon 1.1.4 (Neelav seisund)**.** Seisundit i, mille korral $p_{ii} = 1$, nimetatakse *neelavaks seisundiks.*

Toodud näites on neelavad seisundid 0 ja N, nendest seisunditest ahel enam ei välju.

Näide 1.1.5 (Juhuslik ekslemine)**.**



[Joonis: osakese liikumine ajas]

Osake liigub igal sammul vasakule tõenäosusega $1-p$ ja paremale tõenäosusega p st. $p_{i,i-1} = 1-p$, $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Juhuslik ekslemine on *sümmeetriline* kui $p = 1 - p = \frac{1}{2}$.

Näide 1.1.6 (Juhuslik ekslemine peegeldumisega)**.** Osake liigub igal sammul vasakule tõenäosusega $1-p$ ja paremale tõenäosusega p. Kui $X_n = 0$, siis $X_{n+1} = 1$ ja $X_n = N$, siis $X_{n+1} = N - 1$, kus X_n tähistab osakese asukohta pärast n sammu. Siis üleminekumaatriks moodustub järgnevalt:

$$
P = \begin{array}{c}
\\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & N \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1-p & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1-p & 0 & p & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1-p & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & p \\
0 & 0 & \ldots & & 1 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c}
\sum \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1
\end{array}
$$

Toodud Markovi ahela korral nimetatakse seisundeid 0 ja N peegeldavateks seisunditeks.

Näide 1.1.7 (Realistlikum ilma mudel (*protsessi teisendamine Markovi ahelaks*))**.** Oletame, et homne ilm sõltub nii tänasest kui eilsest ilmast, tähistame sündmused järgnevalt: 0 – sajab, 1 – ei saja. Kuidas saada vastavalt järgnevale tabelile Markovi ahelat?

eile	täna	P(homme sajab)	P(homme ei saja)
0	0	0.7	0.3
1	0	0.5	0.5
0	1	0.4	0.6
1	1	0.2	0.8

Tingimus, et fikseeritud oleviku korral tulevik ei sõltu minevikust, ei ole täidetud, st. kui seisundiks lugeda ühel päeval toimunu (sadas/ei sadanud), siis ei ole tegu Markovi ahelaga.
Loeme protsessi seisundiks kahe järjestikuse päeva ilma, tähistame $E_0 = (0,0), E_1 = (1,0), E_2 = (0,1), E_3 = (1,1)$. Sellisel juhul on juba tegu Markovi ahelaga, sest see mis juhtub edasi kahe päeva kombinatsiooni mõttes, sõltub sellest, mis toimus üks samm tagasi. Kirjutades välja vastava üleminekumaatriksi, saame

$$
P = \begin{array}{c} \\ 00 \\ 10 \\ 01 \\ 11 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 00 & 10 & 01 & 11 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \sum \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}
$$

Siin maatriksis on neli tundmatut parameetrit $(0.7, 0.5, 0.4, 0.2)$.

1.1.2 Üleminek k sammu jooksul. Chapman-Kolmogorovi võrrandid

Olgu meile antud homogeenne Markovi ahel üleminekumaatriksiga $P = (p_{ij})$ ja olgu meie ülesandeks leida

$$\mathbf{P}\{\text{seisundist } i \text{ seisundisse } j\ k \text{ sammu jooksul}\} =: p_{ij}(k).$$

Võime kirjutada

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(k) &= \mathbf{P}\{X_{s+k} = j | X_s = i\} \overset{\text{s on suvaline}}{=} \\
&= \mathbf{P}\{X_k = j | X_0 = i\} = \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{P}\{X_k = j, X_m = l | X_0 = i\} \overset{\text{tõen. korrut. lause}}{=} \dots
\end{aligned}
$$

Tuletame meelde, et $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B)$, millest järeldub $\mathbf{P}(AB|C) = \mathbf{P}(B|C)\mathbf{P}(A|BC)$, seega saame:

$$
\begin{aligned}
\dots &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{P}\{X_m = l | X_0 = i\} \cdot \mathbf{P}\{X_k = j | X_m = l, X_0 = i\} = \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} p_{il}(m) p_{lj}(k-m)
\end{aligned}
$$

ning seega saame valemi

$$\boxed{p_{ij}(k) = \sum_{l=0}^{\infty} p_{il}(m) p_{lj}(k-m)}$$

mida nimetatakse *Chapman-Kolmogorovi valemiks.*

Esitame järgnevas selle võrrandi maatrikskujul. Tähistades $P(k) = (p_{ij}(k))$, võib võrrandi välja kirjutada järgnevalt: $P(k) = P(m) \cdot P(k-m)$. Valides $m = 1$ saame $P(k) = P(1)P(k-1) = P \cdot P(k-1)$. Siis näiteks

$k = 2$ korral $P(2) = P \cdot P(1) = P \cdot P = P^2$,

$k = 3$ korral $P(3) = P \cdot P(2) = P \cdot P^2 = P^3$,

seega ülemineku tõenäosused k sammu jaoks on $\boxed{P(k) = P^k}$.

Näide 1.1.8 (Ilma mudel, järg)**.** Vaatleme näites 2 käsitletud ilma mudelit, kus üleminekutõenäosused olid antud maatriksiga

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

Soovime vastust küsimusele, et kui tänane ilm on teada, siis milline ilm on tõenäoliselt ülehomme? Vastavalt äsjaleitud valemile

$$P(2) = P^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} = \dots$$

ja võttes $\alpha = 0.7$ ning $\beta = 0.4$ saame, et

$$\dots = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix}$$

1.1.3 Markovi ahelate seisundite klassifikatsioon

Definitsioon 1.1.5 (Ebaoluline seisund)**.** Seisundit E_i (ehk i) nimetatakse *ebaoluliseks*, kui leidub täisarv $t_0 > 0$ ja leidub seisund E_j nii, et $p_{ij}(t_0) > 0$ (i-st j-i saab minna positiivse tõenäosusega), kuid $p_{ji}(t) = 0$ $\forall t = 1, 2, \dots$.

Kui $\mathbf{P}(A) > 0$, siis Suurte Arvude Seaduse põhjal $\frac{n_A}{n} \to \mathbf{P}(A) > 0 \Rightarrow n_A$ on mingist kohast alates suurem nullist tõenäosusega 1 (sündmus A toimub varem või hiljem, kuna tema tõenäosus on positiivne).
Ebaoluline seisund saab esineda ainult lõplik arv kordi, varem või hiljem ta "kaob". Vastasel juhul nimetatakse seisundit *oluliseks.*

Definitsioon 1.1.6 (Kaasnevad seisundid)**.** Seisundeid E_i ja E_j nimetatakse *kaasnevateks*, kui mingite $t > 0$ ja $s > 0$ korral $p_{ij}(t) > 0$ ja $p_{ji}(s) > 0$.

Näide 1.1.9. Olgu Markovi ahel nelja seisundiga: E_1, E_2, E_3, E_4 ja üleminekumaatriks olgu

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Mida oskame öelda antud Markovi ahela seisundite kohta?
E_1 on ebaoluline, sest sattudes E_3 (või E_4) pole võimalik jõuda tagasi E_1.
E_2 on ebaoluline, sest sattudes E_4 (või E_3) pole võimalik jõuda tagasi E_2.
E_3, E_4 on olulised ja kaasnevad ($t = s = 1$).

Tuletame meelde, et seisundit E_i nimetatakse *neelavaks*, kui $p_{ii} = 1$ (üleminek ühe sammuga), seega järelikult $p_{ii}(t) = 1, \forall t = 1, 2, \ldots$.

Näide 1.1.10. Vaatleme juhuslikku ekslemist, kus 0 ja N on neelavad seisundid. Vaatleme üleminekumaatriksi

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & p \\ 0 & 0 & \ldots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \sum \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array}$$

seisundeid olulisuse/ebaolulisuse seisukohalt.
Seisundid 0 ja N on neelavad ja olulised seisundid.
Seisund 1 on ebaoluline, kuna $p_{10} > 0$, aga $p_{01}(t) = 0\ \forall t$ korral.
Seisund 2 on ebaoluline, kuna $p_{20}(2) = p_{21} \cdot p_{10} = (1-p)^2 > 0$, aga $p_{02}(t) = 0\ \forall t = 1, 2, \ldots$ jaoks.
Olulisust saab näidata mõlema neelava seisundi jaoks.

Olgu $\{X_n\}$ homogeenne Markovi ahel seisunditega $E_0, E_1, \ldots$.
Tähistame

$S^0 :=$ kõigi ebaoluliste seisundite klass,

$S_{E_i} :=$ E_i-ga kaasnevate seisundite klass.

Kui $E_j \in S_{E_i}$, siis $E_i \in S_{E_j}$ (st. kaasnevus on sümmeetriline suhe). Seega võib öelda, et $S_{E_i} = S_{E_j}$, kui E_i ja E_j on kaasnevad.

Olgu $E_k \notin S_{E_i}$. Siis $S_{E_k} \cap S_{E_j} = \emptyset$ (on mittelõikuvad, sest kui leiduks ühine element, siis oleks E_k ja E_i juba kaasnevad). Seega kõigi oluliste seisundite hulk jaguneb teineteist välistavateks kaasnevate seisundite klassideks $S^1, S^2, S^3, \ldots$.
Kõik seisundid kokku moodustavad klassi $S = S^0 \cup S^1 \cup S^2 \cup S^3 \cup \ldots$.

Lemma 1.1.1. Kui Markovi ahel satub olulisse seisundisse E_i, siis ta ei välju enam kunagi klassist S_{E_i}.

▶
Vaatleme eraldi kahte võimalust klassist S_{E_i} väljumiseks:

a) Süsteem (Markovi ahel) ei saa sattuda ühessegi teise olulisse seisundisse $E_j \notin S_{E_i}$, vastasel juhul

   1) E_j kas kaasneb E_i-ga, st. $E_i \leftrightarrows E_j$, mis on vastuolus sellega, et $E_j \notin S_{E_i}$

   või

   2) E_i on ebaoluline, st. $E_i \to E_j$, aga $E_i \not\leftarrow E_j$, see on aga vastuolus lemma eeldusega, et E_i on oluline seisund.

b) Süsteem ei saa sattuda ühessegi ebaolulisse seisundisse $E_j \in S^0$. Kui ta seda teeks, siis mingi E_r korral tekib variant, kus $E_i \to E_j \to E_r$, aga $E_j \not\leftarrow E_r$. Sellel on kaks alajuhtu:

   (A) $E_i \to E_j \to E_r$, kuid $E_j \not\leftarrow E_r$ ja $E_i \not\leftarrow E_r$ – vastuolu eeldusega, et E_i on oluline,

   (B) $E_i \to E_j \to E_r$, kuid $E_j \not\leftarrow E_r$ ja $E_i \leftarrow E_r$ – vastuolu eeldusega, et E_j on ebaoluline, tekib teekond $E_j \to E_r \to E_i \to E_j$.

◀

Definitsioon 1.1.7 (Mittelahutuv Markovi ahel)**.** Markovi ahelat, millel on ainult üks kaasnevate seisundite klass (S^1), nimetatakse *mittelahutuvaks* Markovi ahelaks. Vastasel juhul nimetatakse Markovi ahelat *lahutuvaks* ($S^1, S^2, S^3, \ldots$ – lõplik või lõpmatu hulk).

Allpool on kujutatud Markovi ahela struktuuri kirjeldav ülevaatlik tabel.

	S^0	S^1	S^2	S^3	S^4	$\cdots$
S^0	$\maltese$	$\maltese$	$\maltese$	$\maltese$	$\maltese$	$\cdots$
S^1	0	SM	0	0	0	$\cdots$
S^2	0	0	SM	0	0	$\cdots$
S^3	0	0	0	SM	0	$\cdots$
S^4	0	0	0	0	SM	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Toodud Markovi ahelate seisundite lahutuse puhul on tähistused järgmised:

$$
\begin{aligned}
S^0 &\ \text{– ebaoluliste seisundite klass,}\\
S^1, S^2, S^3, \ldots &\ \text{– oluliste seisundite klassid,}\\
0 &\ \text{– nullidest koosnev maatriks,}\\
\maltese &\ \text{– maatriks, mis võib sisaldada ka mittenullilisi elemente,}\\
\text{SM} &\ \text{– stohhastiline maatriks, st. ridade summad on võrdsed ühega.}
\end{aligned}
$$

Tähistame tõenäosuse, et lähtudes seisundist j jõutakse sinna esimest korda uuesti tagasi täpselt n sammuga, järgnevalt:

$$f_j(n) := \mathbf{P}\{X_n = j, X_{n-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j | X_0 = j\}.$$

Märgime veel, et $f_j(n) \leq p_{jj}(n)$, kuna tõenäosus $p_{jj}(n)$ lubab seisundis j käia ka enne n-ndat sammu. Seisundisse tagasipöördumise tõenäosuse saame, liites kõik $f_j(n)$-id üle võimalike n väärtuste, st.

$$F_j := \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n) = \mathbf{P}\{\text{lähtudes seisundist } j \text{ jõutakse kunagi seisu } j \text{ tagasi}\}.$$

Definitsioon 1.1.8 (Korduv seisund)**.** Seisundit E_j nimetatakse *korduvaks (rekurrentseks)*, kui $F_j = 1$. Kui $F_j < 1$, siis seisundit E_j nimetatakse *mööduvaks (i.k. transient)*(st. me ei saa olla kindlad, et jõuame sinna seisundisse tagasi).

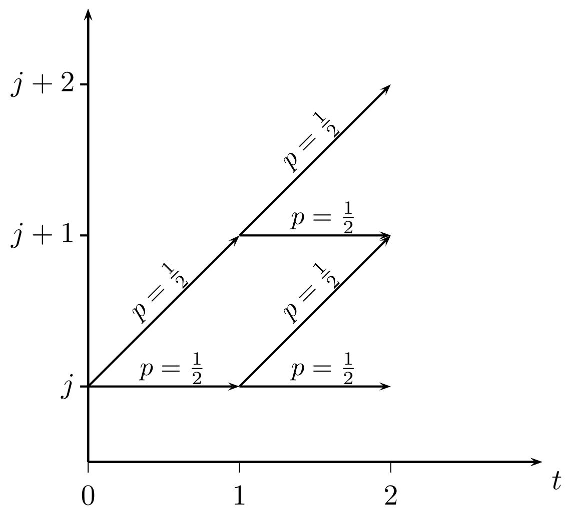
Definitsioon 1.1.9 (Nulliline seisund)**.** Seisundit E_j nimetatakse nulliliseks, kui $p_{jj}(n) \to 0, n \to \infty$ (seisundisse tagasipöördumise šansid ajas kahanevad). Vastasel korral nimetatakse seisundit *mittenulliliseks.*

Definitsioon 1.1.10 (Perioodiline seisund)**.** Seisundit E_j nimetatakse *perioodiliseks* (perioodiga d_j), kui seisundisse E_j tagasipöördumine on positiivse tõenäosusega, mis on võimalik ainult $d_j > 1$ (või selle kordse) sammu jooksul; d_j on seejuures suurim sellise omadusega arv.

Näiteks $E_j \underbrace{-E_j}_{\text{2 sammu}} \underbrace{-\,-\,-\,-\,-E_j}_{\text{6 sammu}} \underbrace{-E_j}_{\text{2 sammu}} \underbrace{-\,-\,-E_j}_{\text{4 sammu}} - \ldots$

Periood $d_j = 2$ on suurim ühistegur arvuhulgale $\{n : p_{jj}(n) > 0\}$.

Näide 1.1.11.



[Joonis: paremale liikumise ja paigale jäämise tõenäosus on $\frac{1}{2}$]

Antud juhul on tegu juhusliku ekslemisega koos paigaltammumisega. Paremale liikumise ja kohalejäämise tõenäosus on $\frac{1}{2}$. Paneme tähele, et

$f_j(1) = \frac{1}{2}$ (paigaltammumise tõenäosus),

$f_j(n) = 0, n > 1$(vasakule tagasi ei saa minna)

ja

$$F_j := \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n) = \frac{1}{2} < 1,$$

st. tõenäosus jõuda seisundist j tagasi (üldse kunagi) on $\frac{1}{2}$, seega j on mööduv seisund.
Kuna

$$p_{jj}(n) = \mathbf{P}\{\text{teha } n \text{ paigaltammumist}\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

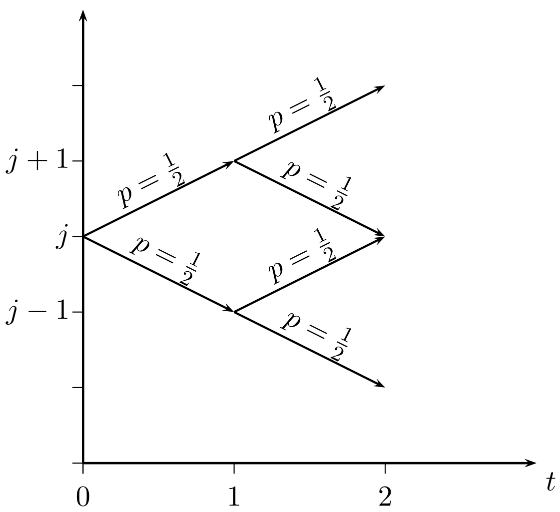
siis võib öelda, et j on nulliline seisund ($\forall j$ korral). Perioodilisusest rääkida ei saa, sest $d_j = 1$, aga peaks olema $d_j > 1$ (arvuhulk $\{n : p_{jj}(n) > 0\}$ on antud juhul naturaalarvude hulk).

Näide 1.1.12 (Sümmeetriline juhuslik ekslemine)**.** Tähistame liikumist sammul n

$$Y_n = \begin{cases} +1, \text{paremale liikumine tõenäosusega } \frac{1}{2} \\ \\ -1, \text{vasakule liikumine tõenäosusega } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Olgu X_n – asukoht pärast sammu n, siis

$$X_n = X_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n.$$



[Joonis: paremale ja vasakule liikumise tõen. on $\frac{1}{2}$]

Paigaltammumise tõenäosus on null, st. see on välistatud. Iga seisund j on perioodiline perioodiga $d_j = 2$. Kas seisund j on korduv (st. kas F_j=1) ?

$f_j(1) = 0$ (ühe sammuga tagasi ei tule, tammumist ei ole),
$f_j(2) = \mathbf{P}\{+- \text{ või } -+\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,
$f_j(3) = 0$,
$f_j(4) = \mathbf{P}\{++-- \text{ või } --++\} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$,
$f_j(5) = 0$,
$f_j(6) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{16}$,
$f_j(7) = 0$,
$f_j(8) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{5}{128}$.

Tekib ebareeglipärane tõenäosuste jada (vähemalt lihtsat reeglit ei ole), ei ole selge, kas $F_j = 1$ või $F_j < 1$. Selle küsimuse lahendame hiljem teiste võtetega.

1.2 Tarvilikud ja piisavad tingimused seisundi korduvuseks. Solidaarsusteoreem

Tuletame mugavama kriteeriumi seisundi korduvuse kontrollimiseks. Kasutame sellist matemaatilist vahendit nagu genereeriv funktsioon.

Definitsioon 1.2.1 (Genereeriv funktsioon)**.** Arvujada $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ genereerivaks funktisooniks nimetatakse funktsiooni $a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. [1]

Teoreem 1.2.1. *E_j on korduv seisund parajasti siis, kui*

$$P_j := \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = \infty.$$

Mööduva (mittekorduva) seisundi korral kehtib valem $F_j = \frac{P_j}{1+P_j}$, kus P_j on lõplik arv.

▶
Täistõenäosuse valemit $\mathbf{P}(A) = \sum \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i)$ rakendades (B_i-d on teineteist välistavad) saame, et

$$p_{jj}(n) = f_j(1)p_{jj}(n-1) + f_j(2)p_{jj}(n-2) + \ldots + f_j(n-1)p_{jj}(1) + f_j(n) \cdot 1. \tag{1.1}$$

Märgime, et jadade $\{p_{jj}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ ja $\{f_j(n)\}_{n=1}^{\infty}$ genereerivad funktsioonid on

$$P_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) \cdot z^n$$

ja

$$F_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n) \cdot z^n.$$

Korrutades valemit (1.1) z^n-ga ja seejärel summeerides saame, et

$$\begin{aligned} P_j(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) z^n = \\ &= z f_j(1) \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n-1) z^{n-1} + z^2 f_j(2) \sum_{n=2}^{\infty} p_{jj}(n-2) z^{n-2} + \ldots \\ &= F_j(z)(1 + P_j(z)), \end{aligned}$$

millest suurused $P_j(z)$ ja $F_j(z)$ avalduvad järgmisel kujul:

[1] Kui jada $\{a_n\}$ on tõkestatud ($|a_n| < M$), siis astmerida $a(z)$ koondub $\forall |z| < 1$ korral, sest

$$|a(z)| \leq \sum |a_n||z|^n < M \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = M \cdot \frac{1}{1-|z|} < \infty.$$

(A) $P_j(z) = \frac{F_j(z)}{1-F_j(z)}$,

(B) $F_j(z) = \frac{P_j(z)}{1+P_j(z)} = \frac{1}{\frac{1}{P_j(z)}+1}$.

Vaatleme nüüd teoreemi väidet. Korduvus tähendab, et $F_j = 1$. Seega peame näitama, et $P_j = \infty \Leftrightarrow F_j = 1$.
Piisavus.
Kui $P_j = \infty$, siis $\lim_{z\uparrow 1} P_j(z) = P_j = \infty$. (B) põhjal saame nüüd, et $\lim_{z\uparrow 1} F_j(z) = 1$.

Tarvilikkus.
Kui $F_j = 1$, siis ka $\lim_{z\uparrow 1} F_j(z) = 1$ ning (A) põhjal saame, et $\lim_{z\uparrow 1} P_j(z) = \infty$ ehk $P_j = \infty$.

Mööduva seisundi E_j korral on $P_j < \infty$ (lõplik) ja kui võtta $z = 1$, siis $P_j(1) = P_j < \infty$ ning $F_j = F_j(1) \overset{(B)}{=} \frac{P_j(1)}{1+P_j(1)} = \frac{P_j}{1+P_j}$.

◀

Näide 1.2.1 (Sümmeetriline juhuslik ekslemine: järg)**.** Jätkame eelmist näidet ja vaatleme sümmeetrilist juhuslikku ekslemist.
Tähistasime liikumist sammul n

$$Y_n = \begin{cases} +1, \text{paremale liikumine tõenäosusega } \frac{1}{2} \\ \\ -1, \text{vasakule liikumine tõenäosusega } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Leiame

$$p_{jj}(1) = 0,$$

$$p_{jj}(2) = \frac{1}{2} \ = C_2^1(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}),$$

$$p_{jj}(3) = 0, \text{ kuna oli perioodiline,}$$

$$p_{jj}(4) = \mathbf{P}\{2 \text{ paremale ja } 2 \text{ vasakule}\} = C_4^2(\tfrac{1}{2})^2(\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{3}{8}.$$

Üldjuhul saame siit, et

$$p_{jj}(n) = C_n^{\frac{n}{2}}(\tfrac{1}{2})^{\frac{n}{2}}(\tfrac{1}{2})^{\frac{n}{2}}.$$

Kas seisund j on korduv ?
Teame, et kui

$$P_j = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) \begin{array}{ll} = & \infty \Leftrightarrow \text{ j on korduv ,} \\ < & \infty \Leftrightarrow \text{ j on mööduv .} \end{array}$$

Teame nüüd, et kui

n paaritu, siis $p_{jj}(n) = 0$,

n paaris, siis $p_{jj}(n) = p_{jj}(2k) = C_{2k}^k (\frac{1}{2})^k (\frac{1}{2})^k = C_{2k}^k \cdot \frac{1}{2^{2k}}$,
$k = 1, 2, 3, \ldots;\quad C_{2k}^k = \frac{(2k)!}{k!\ k!}$.

Rea koonduvuse kontrollimiseks kasutame Stirlingi valemit: [2]

$$k! \sim \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k.$$

Stirlingi valemi kohaselt

$$C_{2k}^k = \frac{(2k)!}{k!\ k!} \sim \frac{\sqrt{2\pi 2k} \cdot (2k)^{2k} \cdot e^k \cdot e^k}{e^{2k} \cdot \sqrt{2\pi k} \cdot k^k \cdot \sqrt{2\pi k} \cdot k^k} = \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}}.$$

Seega saame, et $p_{jj}(2k) = C_{2k}^k \cdot \frac{1}{2^{2k}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$.
Saame harmoonilise rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty, \text{ millest } \sum_k p_{jj}(2k) = \infty$$

ja sellest tulenevalt on seisund j korduv (tõenäosusega 1 jõuame sellesse seisu tagasi). Sümmeetrilise juhusliku ekslemise kõik seisundid $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ on korduvad.

Milline sisu on summal $\sum_n p_{jj}(n)$?

Tähistame N_{jj}-ga seisundisse j tagasijõudmiste koguarvu lähtudes seisundist j. Defineerime indikaatori:

$$I_{\{X_n = j\}} = \begin{cases} 1, & \text{kui } X_n = j, \\ 0, & \text{kui } X_n \neq j. \end{cases}$$

Indikaatorite summa üle kõigi n väärtuste annabki N_{jj}. Leiame mitu korda keskmiselt jõutakse seisundisse j tagasi:

$$EN_{jj} = E(\sum_{n=1}^{\infty} I_{\{X_n = j\}} | X_0 = j) = \ldots$$

Kui on tegu mittenegatiivsete juhuslike suurustega, siis võib keskväärtuse võtta igast liikmest eraldi (üldjuhul võib lõpmatust arvust liikmetest keskväärtuse võtmisega tekkida probleeme).

$$\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} E(I_{\{X_n = j\}} | X_0 = j) =$$

[2] Märgiga '$\sim$' tähistame asümptootilist ekvivalentsi, st. $a_n \sim b_n$ parajasti siis, kui $\frac{a_n}{b_n} \to 1,\ n \to \infty$. Samal ajal ei pea vahe $(a_n - b_n) \to 0$. Näiteks $2n \sim 2(n-3)$. Rea koonduvuse määramiseks ei ole vaja suuremat täpsust kui asümptootiline ekvivalents. On teada, et kui $a_n \sim b_n$, siis $\Sigma_n a_n < \infty \Leftrightarrow \Sigma_n b_n < \infty$ ja samuti on read koos hajuvad.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (1 \cdot \mathbf{P}\{X_n = j | X_0 = j\} + 0 \cdot \mathbf{P}\{X_n \neq j | X_0 = j\}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n).$$

Meenutame, et seisundit j nimetatakse nulliliseks, kui $p_{jj}(n) \to 0$ (protsessis $n \to \infty$).

Järeldame, et mööduv seisund on alati nulliline st. kui rida koondub, siis rea üldliige läheneb nullile. Teisiti kirjapanduna:

$$\text{Kui } j \text{ on mööduv } \Leftrightarrow \sum_n p_{jj}(n) < \infty \Rightarrow p_{jj}(n) \to 0, \text{ kui } n \to \infty.$$

Võtame kokku erinevad klassifikatsioonid:

1) korduv – mööduv,
2) perioodiline – mitteperioodiline,
3) nulliline – mittenulliline.

Seega saab kõik seisundid jagada $2^3 = 8$ klassiks alljärgnevalt.

perioodilised

	nulliline +	mittenulliline -
korduv +		
mööduv -		★

mitteperioodilised

	nulliline +	mittenulliline -
korduv +		
mööduv -		★

★ - mööduv seisund ei saa olla mittenulliline. Seega jääb järgi kuus seisundite klassi/tüüpi.

Teoreem 1.2.2 (Solidaarsusteoreem)**.** *Mittelahutuvas Markovi ahelas on kõik seisundid üht ja sama tüüpi, st. kui vähemalt üks seisund on perioodiline, siis ka kõik teised seisundid on perioodilised; kui vähemalt üks seisund on korduv, siis kõik seisundid on korduvad; kui vähemalt üks seisund on nulliline, siis kõik seisundid on nullilised.*

▶
<u>Nullilisus</u>
Teame, et kõik seisundid mittelahutuvas Markovi ahelas kaasnevad teineteisega. Vaatleme kahte suvalist erinevat seisundit E_k ja E_j. Kuna nad on kaasnevad, siis kaasnevuse definitsiooni kohaselt $\exists\ M, N : p_{kj}(N) > 0$ ja $p_{jk}(M) > 0$. Vaatleme lisaks tõenäosust $p_{kk}(N + M + n) = \ldots$, rakendame Chapman-Kolmogorovi võrrandit, saame, et $\ldots = \sum\sum p_{kl}(N)p_{ls}(n)p_{sk}(M)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Hindame

$$p_{kk}(N + M + n) \geq \underbrace{p_{kj}(N)}_{\alpha>0} p_{jj}(n) \underbrace{p_{jk}(M)}_{\beta>0} = \alpha \cdot \beta \cdot p_{jj}(n),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Analoogiliselt saame, et $p_{jj}(N + M + n) \geq \alpha \cdot \beta \cdot p_{kk}(n),\ n = 0, 1, 2, \ldots$ Kokkuvõttes saame võrratuste paari

$$\frac{1}{\alpha \cdot \beta} \cdot p_{kk}(n + M + N) \geq p_{jj}(n) \geq \alpha \cdot \beta \cdot p_{kk}(n - M - N). \qquad (1.2)$$

Sellest järeldub, et E_j on nulliline ($p_{jj}(n) \to 0$) parajasti siis, kui $p_{kk}(n) \to 0,\ n \to \infty$, st. E_k on nulliline.

<u>Korduvus</u>
Oletame, et E_k on korduv, st. $P_k := \sum_{n=1}^{\infty} p_{kk}(n) = \infty$, siis

$$P_j \geq \sum_{n=N+M}^{\infty} p_{jj}(n) \overset{(1.2)}{\geq} \alpha\beta \sum_{n=N+M}^{\infty} p_{kk}(n - M - N) = \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} p_{kk}(n) = \infty$$

ja seega E_j on korduv.

<u>Perioodilisus</u>
Oletame, et E_k on perioodiline perioodiga d_k, st. kui $p_{kk}(n) > 0$ mingi n korral, siis $n \ \vdots\ d_k$, n on d_k mingi täisarvkordne. Kuna aga $p_{kk}(M + N) \geq p_{kj}(N) \cdot p_{jk}(M) = \alpha \cdot \beta \geq 0$ ja kuna E_k on peroodiline, siis sammude arv peab jaguma perioodiga, st. $N + M \ \vdots\ d_k$.
Vaatleme nüüd seisundit E_j ja näitame, et E_j on samuti perioodiline, kusjuures $d_j = d_k$. Kui $p_{jj}(n) > 0$, siis (1.2) tõttu $p_{kk}(n + M + N) > 0$. Kuna E_k on perioodiline, siis sellest järeldub, et $n + M + N \ \vdots\ d_k$ ja sellest, et $N + M \ \vdots\ d_k$ järeldub, et $n \ \vdots\ d_k$, millest tuleneb, et E_j on perioodiline ja tema periood $d_j \geq d_k$. Kui nüüd lähtuda seisundi E_j perioodilisusest, siis saaksime $d_j \leq d_k$. Seega kokkuvõttes saime sümmeetrilist arutelu kasutades, et $d_k = d_j$.

◀

Definitsioon 1.2.2. Mittelahutuvat Markovi ahelat nimetatakse perioodiliseks (korduvaks, nulliliseks), kui tema seisundid on perioodilised (korduvad, nullilised).

Oletame, et Markovi ahel on perioodiline. Siis Markovi ahela seisundid jagunevad alamklassidesse.

Teoreem 1.2.3. *Kui Markovi ahel on perioodiline perioodiga d, siis tema seisundite hulk jaguneb d alamklassiks $R_0, R_1, R_2, \ldots, R_{d-1}$ nii, et igal sammul toimub tõenäosusega 1 üleminek klassist R_k klassi R_{k+1} ning klassist R_{d-1} tagasi klassi R_0.*

1.3 Juhuslikud ekslemised võrel

1.3.1 Juhuslik ekslemine sirge täisarvulistel punktidel

Vaatleme osakest, mis liigub võrel punktist k punkti $k+1$ tõenäosusega $p>0$ ja punktist k punkti $k-1$ tõenäosusega $q=1-p>0$, kusjuures $p+q=1$ ning üleminekud on sõltumatud.

Olgu X_0 algseisund, seisund hetkel n (tehtud on n sammu) aga

$$X_n = X_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n,$$

kus

$$Y_i = \begin{cases} +1, & \text{tõenäosusega } p, \\ -1, & \text{tõenäosusega } q. \end{cases}$$

Meile on teada, et seisundid (seega ka kogu ahel) on korduvad, kui $p=q=\frac{1}{2}$.

Teoreem 1.3.1 (Korduv Markovi ahel)**.** *Ülalkirjeldatud juhuslik ekslemine on korduv Markovi ahel parajasti siis, kui $p=q=\frac{1}{2}$.*

▶
Kuna $0<p<1$, siis saame järeldada, et kõik seisundid on kaasnevad, seega on ahel mittelahutuv. Sellisele ahelale saame rakendada solidaarsusteoreemi, piisab näidata ühe seisundi korduvust. Rakendades teoreemi 1.2.1 näitame seisundi j korduvust.

$$\text{Seisund } j \text{ on korduv } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = \infty.$$

$$\text{Seisund } j \text{ on mööduv } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) < \infty.$$

On selge, et paaritu arvu sammudega ei jõua tagasi samasse seisu:

- $p_{jj}(2k+1)=0,\ k\geq 0,$
- $p_{jj}(2k)=C_{2k}^k p^k q^k$ (binoomjaotus).

Kasutame Stirlingi valemit $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Kuna

$$C_{2k}^k = \frac{(2k)!}{k!\ k!} \sim \frac{4^k}{\sqrt{\pi k}},$$

siis

$$p_{jj}(2k) \sim \frac{(4pq)^k}{\sqrt{\pi k}}.$$

Vaatleme lugejat:

$$4pq = 4p(1-p) = \begin{cases} = 1, & \text{kui } p = q = \frac{1}{2}, \\ < 1, & \text{kui } p \neq q. \end{cases}$$

$p = q = \frac{1}{2}$ korral $\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}(2k) = \infty$, sest $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} = \infty$, st. ahel on korduv (kuna k aste on $\frac{1}{2} < 1$).

$p \neq q$ korral

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4pq)^k}{\sqrt{\pi k}} < \dots$$

kuna $\sqrt{\pi k} > 1 \ \forall \ k$ korral, seega asendades $\sqrt{\pi k}$ ühega, avaldis kasvab,

$$\dots < \sum_{k=1}^{\infty} (4pq)^k = \dots$$

ja kasutades nüüd geomeetrilise jada summa valemit, saame

$$\dots = \frac{4pq}{1-4pq} < \infty,$$

st. rida koondub. Järelikult koondub ka ekvivalentne rida $\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}(2k)$ ning seega on mittesümmeetriline ekslemine mööduv.

◀

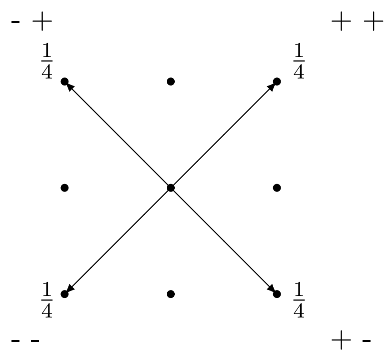
Intuitiivne põhjendus toodud teoreemile oleks järgmine.

Kui ekslemine on sümmeetriline, siis "keskeltläbi tammume paigal". Kui $p > q$, siis toimub "triiv" – iga Y läheb keskeltläbi paremale, $EY_i = 1 \cdot p - 1 \cdot q > 0$.

1.3.2 Sümmeetrilised juhuslikud ekslemised ruumis $\mathbb{R}^k, k \geq 2$

Vaatleme osakest, mis liigub ruumi $\mathbb{R}^k$ täisarvulistel punktidel. Tähistame seisundit antud hetkel järgmiselt: $m_1, m_2, \dots, m_k$. Järgmisesse seisundisse minekul toimub muutus (kas $+1$ või -1) iga koordinaadiga, seega on kokku 2^k erinevat võimalust uue seisundi saamiseks. Selline juhuslik ekslemine on sümmeetriline, kui iga võimaliku uue seisundi tõenäosus on $\frac{1}{2^k}$.

Vaatleme juhtu, kui $k = 2$.



Toodud jooniselt on näha, et on võimalik liikuda nelja erinevasse punkti tõenäosusega $\frac{1}{4}$ ja mujale rohkem liikuda ei saa.

Näitame, et korduvuse omadus jääb kehtima tasandil, aga mitte kõrgema-dimensonaalses ruumis.

Teoreem 1.3.2. *Sümmeetriline juhuslik ekslemine on korduv ühe- ja kahemõõtmelises ruumis, kuid on mööduv kõrgemadimensionaalses ruumis ($k \geq 3$).*

▶
Vaatleme juhtu $k = 2$.
Tähistagu $X_n = (X_n^1, X_n^2)$ ahela seisundit hetkel n . Tahame teada, kas

$$\sum p_{00}(n) \begin{cases} = \infty \text{ (st. seisund null on korduv) },\\ < \infty \text{ (st. seisund null on mööduv) }. \end{cases}$$

Saame, et

$$p_{00}(2n) = \mathbf{P}\{X_{2n} = 0 | X_0 = 0\} =$$
$$= \mathbf{P}\{X_{2n}^1 = 0 | X_0^1 = 0\} \cdot \mathbf{P}\{X_{2n}^2 = 0 | X_0^2 = 0\} = \ldots$$

ning tuginedes eelmise teoreemi tõestusele võime jätkata, et

$$\ldots = \left[C_{2n}^n \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} \right]^2 \sim \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \right)^2 = \frac{1}{\pi n}.$$

Kuna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} = \infty$, siis ka $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(2n) = \infty$ (sest ekvivalentsed read hajuvad korraga). Järelikult $k = 2$ korral on seisund null korduv ja solidaarsusteoreemi põhjal on kõik seisundid korduvad, st. Markovi ahel on korduv.

Vaatleme nüüd juhtu $k = 3$.
Eelnevaga analoogilisele arutelule toetudes saame, et

$$p_{00}(2n) = \left[C_{2n}^n \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} \right]^3 \sim \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \right)^3 = \frac{1}{(\pi n)^{3/2}}.$$

Kuna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)^{3/2}} < \infty$, siis seisund null on mööduv ja kõik teised seisundid on mööduvad.

Kui $k > 3$, siis n aste kasvab ja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)^{k/2}}$ ja kõik seisundid on mööduvad.

◀

1.4 Mängija laostumise probleem

Käesolevas peatükis vaatleme järgmist olukorda :
mängija võidab igas mängus tõenäosusega p ühe ühiku ja kaotab tõenäosusega q ühe ühiku, kusjuures $p+q=1$, $p,q>0$ ja mängud on sõltumatud.

Probleem: kui suur on tõenäosus, et mängija, kes alustab mängu i ühikuga, kogub N ühikut enne laostumist.
Olgu $X_n =$ mängija seis pärast mängu n, $n=0,1,2,\ldots$ ning eelduse kohaselt $X_0=i$. $X_1, X_2, X_, \ldots$ on Markovi ahel üleminekumaatriksiga

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & N \end{array} & \sum \\
P = \begin{array}{c} 0\\ 1\\ 2\\ 3\\ \vdots\\ N \end{array} & \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0\\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0\\ 0 & 0 & q & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & & \ddots & p\\ 0 & 0 & \ldots & & 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} 1\\ 1\\ 1\\ 1\\ \vdots\\ 1 \end{array}
\end{array},
$$

kus seisundid $0, N$ on neelavad ja korduvad seisundid. Seisundid { 1, 2, ..., N-1 } on mööduvad seisundid, sest kõigist neist võib positiivse tõenäosusega jõuda kas seisundisse 0 või N, millest enam tagasi ei saa.

Tähistame otsitava tõenäosuse

$$\Pi_i = \mathbf{P}\{ \text{ mängija } i \text{ ühikuga kogub } N \text{ ühikut enne laostumist } \}.$$

Π_i leidmiseks kasutame "tinglikustamist"ehk "lahkamist". Lahkame tulemuse suhtes avamängu, kasutades täistõenäosuse valemit $\mathbf{P}(A) = \sum \mathbf{P}(B_i)\mathbf{P}(A|B_i)$. Rekursiivse seose

$$\Pi_i = p\cdot\Pi_{i+1} + q\cdot\Pi_{i-1},\ i=1,\ldots,N-1,$$

abil ongi võimalik leida Π_i. Et $p+q=1$, siis ülaltoodust järeldub, et $q\Pi_i + p\Pi_i = p\Pi_{i+1} + q\Pi_{i-1}$ ehk $\Pi_{i+1}-\Pi_i = \frac{q}{p}(\Pi_i - \Pi_{i-1})$, kus $i=1,2,\ldots,N-1$. Suurust $\Pi_{i+1}-\Pi_i$ nimetame diferentsiks ja suurust $\Pi_i - \Pi_{i-1}$ seega eelmiseks diferentsiks.
Kuna $\Pi_0 = 0$, st. algkapitali 0 korral oleme kohe laostunud, siis vaatleme

diferentse, mille korral $i > 0$.

$$
\begin{array}{rl}
& \Pi_2 - \Pi_1 = \frac{q}{p}(\Pi_1 - \Pi_0) = \frac{q}{p}\Pi_1 \\
& \Pi_3 - \Pi_2 = \frac{q}{p}(\Pi_2 - \Pi_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 \Pi_1 \\
& \vdots \\
& \Pi_i - \Pi_{i-1} = \frac{q}{p}(\Pi_{i-1} - \Pi_{i-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} \Pi_1 \\
& \vdots \\
+ & \Pi_N - \Pi_{N-1} = \frac{q}{p}(\Pi_{N-1} - \Pi_{N-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} \Pi_1 \\
\hline
& 1 - \Pi_1 = \left[\frac{q}{p} + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}\right] \Pi_1
\end{array}
$$

Nüüd saame, et

$$1 = \left[1 + \frac{q}{p} + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}\right] \Pi_1$$

millest järeldub, et

$$\Pi_1 = \left[1 + \frac{q}{p} + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}\right]^{-1} = \ldots$$

ja kasutades geomeetrilise jada N esimese liikme summa valemit saame, et

$$\ldots = \begin{cases} \left(\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\frac{q}{p}}\right)^{-1} = \frac{1-\frac{q}{p}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} & \text{, kui } q \neq p, \\ \frac{1}{N} & \text{, kui } q = p. \end{cases}$$

Π_i leidmiseks liidame i esimest seost:

$$\Pi_i - \Pi_1 = \left[\frac{q}{p} + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right] \Pi_1,$$

millest järeldub, et

$$\Pi_i = \left[1 + \frac{q}{p} + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right] \Pi_1 = \begin{cases} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} & \text{, kui } q \neq p, \\ \frac{i}{N} & \text{, kui } q = p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Sümmeetrilise ekslemise korral on otsitav tõenäosus seega $\frac{i}{N}$ (võrdeline esialgse kapitaliga).
Kui vaatleme juhtu, kus $N \to \infty$, siis

$$\Pi_i = \begin{cases} 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i & \text{, kui } p > \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{, kui } q = p = \frac{1}{2} \text{ või } p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1.5 Ergoodiline teoreem

Vaatleme olukorda, kus Markovi ahel on juba kaua toiminud (n on suur). Osutub, et teatud tingimustel Markovi ahelate seisundite tõenäosused (samuti üleminekutõenäosused $p_{ij}(n)$) stabiliseeruvad st. muutuvad konstantseteks.

Tähistame tõenäosuse, et n sammu läbimisel oleme olnud seisundis j

$$\mathbf{P}\{X_n = j\} =: p_j(n).$$

Sellisel juhul

$$p_j(n+1) = \sum_i p_i(n) \cdot p_{ij}(1). \tag{1.3}$$

Maatrikskujul kirjutades saame, et $\pi_n = (p_1(n), p_2(n), \ldots); P = (p_{ij})$ ning $\pi_{n+1} = \pi_n P = \pi_{n-1} P^2 = \ldots = \pi_0 P^{n+1}$, kus $\pi_0 = (p_1(0), p_2(0), \ldots)$ on algjaotus. Võib juhtuda, et $p_i(n+1) = p_i(n)$. Kui see on nii, siis on ka kõik järgmised tõenäosused ühesugused.

Näide 1.5.1 (Ilmaennustus)**.** Vaatleme juba eelpool käsitletud ilma mudelit, kus üleminekutõenäosused olid antud maatriksiga

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

Olgu tähistatud seisundid järgmiselt: 0 – sajab, 1 – ei saja, siis võttes $\alpha = 0.7$ ning $\beta = 0.4$ saame, et

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix},$$

$$P^4 = P^2 \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 0.57\ldots & 0.42\ldots \\ 0.56\ldots & 0.43\ldots \end{pmatrix},$$

$$P^9 = \begin{pmatrix} 0.571\ldots & 0.429\ldots \\ 0.571\ldots & 0.429\ldots \end{pmatrix},$$

st veerud muutuvad konstantseteks.

Olgu $\pi_0 = (0.2, 0.8)$.
Siis $\pi_{n+1} = \pi_0 \cdot P^{n+1}$ ja järelikult $\pi_0 \cdot P^9 = (0.571\ldots, 0.429\ldots)$.
Kui $\pi_0 = (0.3, 0.7)$, siis saame samuti, et $\pi_0 \cdot P^9 = (0.571\ldots, 0.429\ldots)$, st. tulemus ei sõltu algjaotusest – ikka on 57% päevadest sajused ja 43% päevadest kuivad.

Defineerime Markovi ahelat iseloomustava suuruse.

Definitsioon 1.5.1.

$$K(n_0) = 1 - \frac{1}{2} \sup_{i,j} \sum_m |p_{im}(n_0) - p_{jm}(n_0)|,$$

kus m tähistab veergu ja $p_{im}(n_0) = \mathbf{P}\{X_{n_0} = m | X_0 = i\}$. Suurust $K(n_0)$ nimetame ergoodilisuse kordajaks.

Siin summa $\sum_m |p_{im}(n_0) - p_{jm}(n_0)|$ kirjeldab üleminekumaatriksi P^{n_0} i-nda ja j-nda rea erinevust. Kui suurim erinevus maatriksi P^{n_0} ridade vahel on väike, siis suurus $K(n_0)$ on suur. Oluline on see, kas $K(n_0)$ on positiivne või võrdne nulliga.

Vaatleme juhtu, kus $K(n_0) > 0$. Lihtne on näha, et see kehtib näiteks juhul, kui leidub vähemalt üks seisund E_m, kuhu võib jõuda positiivse tõenäosusega igast seisundist ühe ja sama sammude arvuga n_0:

$$\exists m : \forall i \; p_{im}(n_0) \geq \delta > 0,$$

ehk, teisisõnu, üleminekumaatriksi P^{n_0} m-nda veeru kõik elemendid on suuremad kui $\delta > 0$.

Selles väite tõestuseks piisab tähele panna, et

$$K(n_0) = 0 \Leftrightarrow \sum_m |p_{im}(n_0) - p_{jm}(n_0)| = 2 \Leftrightarrow \begin{array}{c} i \\ j \end{array} \begin{pmatrix} * & 0 & * & * & \dots \\ 0 & * & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix},$$

st. leiduvad read i ja j, kus null on kohakuti mittenulliga. Meil aga on juht, kus

$$\begin{array}{c} i \\ j \end{array} \begin{pmatrix} \dots & * & \dots \\ \dots & * & \dots \end{pmatrix},$$

järelikult summa ei saa olla kaks, vaid on väiksem kui kaks.

Osutub, et ergoodilisuse kordaja $K(n_0)$ positiivsus on piisav tingimus, et tõenäosused stabiliseeruksid.

Näide 1.5.2. Olgu meil perioodiline ahel kahe seisundiga E_1 ja E_2. Sellisel juhul $K(n_0) = 0$,

$$P(2n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja

$$P(2n+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stabiliseerumist ei toimu, kuna $E_1 \to E_2$ tõenäosusega 1 ja ka $E_2 \to E_1$ tõenäosusega 1; $K(n_0) = 1 - \frac{1}{2}(|1-0| + |0-1|) = 0 \; \forall \; n_0$ korral.

Teoreem 1.5.1 (Ergoodiline teoreem)**.** *Kui $K(n_0) > 0$ mingi n_0 korral, siis leiab aset koondumine $\forall\ i = 1, 2, \ldots\ \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \lim_{n\to\infty} p_j(n) =: p_j^*, j = 1, 2, \ldots$, kus tõenäosused p_j^* moodustavad nn. statsionaase jaotuse, st. nad rahuldavad võrrandisüsteemi $p_j^* = \sum_i p_i^* p_{ij}$ ning nad ei sõltu algjaotusest.*

▶
Tähistame
$m_j(n) = \inf_i p_{ij}(n)$ (maatriksi P^n j-nda veeru inf) ja
$M_j(n) = \sup_i p_{ij}(n)$ (maatriksi P^n j-nda veeru sup).
Leiame

$$m_j(n+1) = \inf_i p_{ij}(n+1) \overset{\text{C.-K. valem}}{=} \inf_i \sum_k p_{ik} p_{kj}(n) \geq \ldots$$

ja kuna $p_{kj}(n) \geq m_j(n)$, siis

$$\ldots \geq m_j(n) \inf_i \sum_k p_{ik} = m_j(n).$$

Seega $m_j(n+1) \geq m_j(n)$ (infiimumite jada on kasvav jada).

Analoogiliselt $M_j(n+1) = \sup_i p_{ij}(n+1) = \ldots \leq M_j(n)$ (supreemumite jada on kahanev jada). Seega

$$m_j(1) \leq m_j(2) \leq \ldots m_j(n) \leq \ldots \leq M_j(n) \leq M_j(n-1) \leq \ldots \leq M_j(1),$$

st. monotoonselt kasvav (kahanev) tõkestatud jada on koonduv. Sellest järeldub, et leiduvad piirväärtused. Kas nende piirväärtuste vahe on null?
Olgu α ja β kaks suvalist seisundit.

Hindame

$$0 = 1 - 1 = \sum_k p_{\alpha k}(n_0) - \sum_k p_{\beta k}(n_0) =$$

$$\sum_k{}^{+} \underbrace{[p_{\alpha k}(n_0) - p_{\beta k}(n_0)]}_{\geq 0} + \sum_k{}^{-} \underbrace{[p_{\alpha k}(n_0) - p_{\beta k}(n_0)]}_{<0}.$$

Järelikult on need summad absoluutväärtuselt võrdsed ja ergoodilisuse kordaja võime kirjutada järgmiselt:

$$K(n_0) = 1 - \sup_{\alpha,\beta} \sum_j{}^{+} [p_{\alpha j}(n_0) - p_{\beta j}(n_0)].$$

Hindame vahet

$$M_j(n_0) - m_j(n_0) = \sup_\alpha p_{\alpha j}(n_0) - \inf_\beta p_{\beta j}(n_0) =$$

$$= \sup_{\alpha,\beta}[p_{\alpha j}(n_0) - p_{\beta j}(n_0)] \leq \dots$$

Kui vaatame kõiki võimalikke paare, siis saame hinnata, et

$$\dots \leq \sup_{\alpha,\beta} \sum_k{}^+ [p_{\alpha k}(n_0) - p_{\beta k}(n_0)] = 1 - K(n_0).$$

Hindame vaadeldud vahet ka sammude arvu n_0+n korral, kus n on suvaline:

$$M_j(n_0+n) - m_j(n_0+n) = \sup_{\alpha,\beta}[p_{\alpha j}(n_0+n) - p_{\beta j}(n_0+n)] =$$

$$= \sup_{\alpha,\beta}\left[\sum_k p_{\alpha k}(n_0)p_{kj}(n) - \sum_k p_{\beta k}(n_0)p_{kj}(n)\right] =$$

$$= \sup_{\alpha,\beta}\sum_k [p_{\alpha k}(n_0) - p_{\beta k}(n_0)]p_{kj}(n) \leq$$

$$\leq \sup_{\alpha,\beta}\sum_k{}^+ [p_{\alpha k}(n_0) - p_{\beta k}(n_0)]M_j(n) + \sup_{\alpha,\beta}\sum_k{}^- [p_{\alpha k}(n_0) - p_{\beta k}(n_0)]m_j(n) = \dots$$

ja kuna need kaks summat on absoluutväärtuselt võrdsed, siis

$$\dots = \sup_{\alpha,\beta}\sum_k{}^+ (p_{\alpha k}(n_0) - p_{\beta k}(n_0))[M_j(n) - m_j(n)] =$$

$$= (1 - K(n_0))(M_j(n) - m_j(n)).$$

Võttes $n = n_0$, saame

$$M_j(2n_0) - m_j(2n_0) \leq (1 - K(n_0))(M_j(n_0) - m_j(n_0)) \leq [1 - K(n_0)]^2.$$

Kui $n = (N-1)n_0$, siis

$$M_j(Nn_0) - m_j(Nn_0) \leq [1 - K(n_0)]^N \to 0, \text{ kui } N \to \infty.$$

Seega N kasvades tulemus väheneb!
Tõestasime tulemuse n_0-kordsete väärtuste korral. Kuid monotoonsuse tõttu kehtib see ka n_0 mittekordsete vääruste korral. Seega, arvestades $M_j(n)$ ja $m_j(n)$ monotoonsust, oleme näidanud, et

$$M_j(n) - m_j(n) \to 0, \text{ kui } n \to \infty.$$

Järelikult

$$\lim_n M_j(n) = \lim_n m_j(n) =: p_j^*$$

ja seega on nende piirväärtuste vahe tõepoolest null.
Lisaks, eelduse põhjal $m_j(n) \leq p_{ij}(n) \leq M_j(n)$, ja kuna $m_j(n)$ ja $M_j(n)$ piirväärtused on samad, siis

$$\lim_n p_{ij}(n) = p_j^*,$$

st. maatriksi $P^n = (p_{ij}(n))$ veerud muutuvad konstantseteks.

Tähistame

$$p_j(n) = \mathbf{P}\{X_n = j\} = \sum_k p_k^0 p_{kj}(n), \ \sum_k p_k^0 = 1.$$

Vaatleme vahet

$$|p_j(n) - p_j^*| = \left|\sum p_k^0 p_{kj}(n) - p_j^*\right| = \ldots$$

Kuna $\sum_k p_k^0 = 1$, siis

$$\ldots = \left|\sum p_k^0 (p_{kj}(n) - p_j^*)\right| \leq \sum_k p_k^0 |p_{kj}(n) - p_j^*| \leq \ldots$$

ning kuna $\quad M_j(n) \geq p_{kj}(n) \geq m_j(n) \quad$ ja $\quad M_j(n) \geq p_j^* \geq m_j(n), \quad$ siis

$$\ldots \leq (M_j(n) - m_j(n)) \sum_k p_k^0 = M_j(n) - m_j(n) \to 0.$$

Seega siis $p_j(n) \to p_j^*$.

Jääb üle näidata, et p_j^* rahuldavad teoreemi väites toodud süsteemi. Chapman-Kolmogorovi võrrandist saame, et $p_{kj}(n+1) = \sum_i p_{ki}(n) \cdot p_{ij}(1)$. Minnes n-iga piirile saame, et

$$\lim_{n\to\infty} p_{kj}(n+1) = \sum_i \lim_{n\to\infty} p_{ki}(n) p_{ij}(1).$$

NB! Selline piirväärtuse ja summa vahetus eeldab lõplikku summat; loenduva summa korral – ühtlasi koondumisi. Oletame, et üks neist eeldustest on täidetud. Siis

$$p_j^* = \sum_i p_i^* \cdot p_{ij}.$$

◀

Näide 1.5.3 (Ilmaennustus, järg)**.** Meid huvitab endiselt see, mitu protsenti päevadest on sajused ja mitu protsenti kuivad. Üleminekutõenäosused olid antud maatriksiga

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Vastavalt äsjatõestatud teoreemile saame, et

$$\begin{cases} p_0^* &= p_0^* \cdot 0.7 + p_1^* \cdot 0.4 \ , \\ p_1^* &= p_0^* \cdot 0.3 + p_1^* \cdot 0.6 \ . \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.3p_0^* & = & 0.4p_1^*, \\ p_0^* + p_1^* & = & 1\ . \end{cases}$$

Siit saame, et $p_0^* = \frac{0.4}{0.3}p_1^* = \frac{4}{3}p_1^*$ ja

$$p_0^* = \frac{4}{7} = 0.5714\ ,\quad p_1^* = \frac{3}{7} = 0.4285\ .$$

Näide 1.5.4. Vaatleme kahte maletajat:

A Esimene maletaja on "külma kõhuga- temal tuju ja partiide tulemused ei sõltu eelmistest mängudest.

B Teine maletaja on emotsionaalne – partiid mängima minnes sõltub ta tuju (ja uue partii tulemus) eelmise partii tulemusest.

Vaatleme pikka partiide jada, mille korral iga mängu võib vaadelda Markovi ahela sammuna, st. mängijale mõjub ainult eelmine mäng. Üleminekumaatriksid (1 – võit, 2 – viik, 3 – kaotus) avalduvad järgmisel kujul:

$$P_A = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} p & r & q \\ p & r & q \\ p & r & q \end{pmatrix} \begin{array}{c} \sum \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}$$

ja

$$P_B = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} p+\varepsilon & r & q-\varepsilon \\ p & r & q \\ p-\varepsilon & r & q+\varepsilon \end{pmatrix} \begin{array}{c} \sum \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\ .$$

Kumb mängija kogub pika turniiri jooksul rohkem punkte? Kummal juhul on võidu statsionaarne tõenäosus suurem?

$$P_A{}^2 = P_A \cdot P_A = \begin{pmatrix} pp+pr+pq = p & r & q \\ p & r & q \\ p & r & q \end{pmatrix}$$

Iga n korral seega $P_A{}^n = P_A$, millest järeldub, et

$$\lim_n p_{ij}(n) = p_{ij} = \begin{cases} p, & \text{kui } j = 1 \\ r, & \text{kui } j = 2 \\ q, & \text{kui } j = 3 \end{cases}\ .$$

Seega $p_1^* = p$, $p_2^* = r$ ja $p_3^* = q$ (see on stabiilne protsess).

Ergoodiline teoreem ütles, et $p_j^* = \sum_i p_i^* p_{ij}$. Vaatleme nüüd olukorda, kus p_{ij} on P_B elemendid. Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} p_1^*(p+\varepsilon) + p_2^* p + p_3^*(p-\varepsilon) = p_1^* \\ p_1^* r + p_2^* r + p_3^* r = p_2^* \\ p_1^*(q-\varepsilon) + p_2^* q + p_3^*(q+\varepsilon) = p_3^* \\ p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1 \end{cases}.$$

Võrrandisüsteemist saame, et $r = p_2^*$, järelikult viikide statsionaarne tõenäosus on mõlemal mängijal sama suur.

Peatükk 2

Poissoni protsessid

2.1 Eksponentjaotus kui mäluta jaotus. Eksponentjaotuse omadused

Et eksponentjaotus on juhuslike protsesside teoorias (ja eriti Poissoni protsesside juures) olulisel kohal, vaatleme siin paragrahvis lähemalt mõningaid eksponentjaotuse kasulikke omadusi. Esmalt tuletame meelde, et pidev (ja mittenegatiivsete väärtustega) juhuslik suurus T on eksponentjaotusega ($T \sim \mathcal{E}(\lambda)$), kui tema tihedusfunktsioon f_T avaldub kujul $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ ja jaotusfunktsioon kujul $F_T(t) := \mathbf{P}\{T \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}$.

Eksponentjaotuse karakteristlik omadus: eksponentjaotus on "mäluta" jaotus.

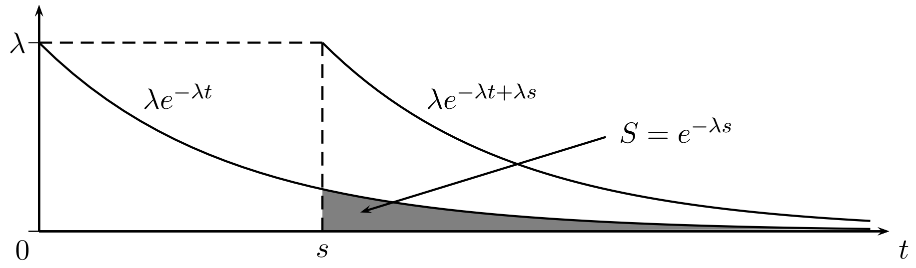
Näide 2.1.1 (Lambi töötamise aeg)**.** Tähistagu T lambi tööiga, $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$, ja olgu meil teada fakt, et lamp on töötanud juba vähemalt aja s, st. $T \geq s$. Leiame, kui suur on tõenäosus, et lamp töötab veel vähemalt aja t, kui on teada, et ta on juba töötanud aja s:

$$\mathbf{P}\{T \geq t + s |\ T \geq s\} = \frac{\mathbf{P}\{T \geq t + s\}}{\mathbf{P}\{T \geq s\}} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}.$$

Osutub, et otsitav tõenäosus ei sõltu s väärtusest!

Seega, kui lampide tööiga on antud eksponentjaotusega $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$, siis need lambid, mis on juba töötanud aja s, on täpselt sama head kui uued lambid.

Graafiliselt väljendudes tähendab see omadus, et eksponentjaotuse tingliku tihedusfunktsiooni graafik alates suvalisest punktist s on sama kujuga kui graafik, mis algab punktist 0:



[Joonis: (tinglik) eksponentjaotus alates hetkest s käitub täpselt nagu esialgne jaotus alates hetkest 0]

Lemma 2.1.1 (Eksponentjaotuse karakteristlik omadus)**.** (Pidev) juhuslik suurus T on eksponentjaotusega $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$ parajasti siis, kui $\mathbf{P}\{T \geq t+s|T \geq s\} = \mathbf{P}\{T \geq t\}$.

▶

(⇒) Tõestatud näites 2.1.1.

(⇐) Oletame, et kehtib $\mathbf{P}\{T \geq t+s|T \geq s\} = \mathbf{P}\{T \geq t\}$. Sellest seosest ja tingliku tõenäosuse valemist $\mathbf{P}\{T \geq t+s|T \geq s\} = \frac{\mathbf{P}\{T \geq t+s\}}{\mathbf{P}\{T \geq s\}}$ saame, et kehtib $\mathbf{P}\{T \geq t+s\} = \mathbf{P}\{T \geq t\}\mathbf{P}\{T \geq s\}$. Lahutame viimase võrduse mõlemad pooled suurusest $\mathbf{P}\{T \geq s\}$ ja jagame läbi t-ga, saame

$$\frac{\mathbf{P}\{T \geq s\} - \mathbf{P}\{T \geq s+t\}}{t} = \mathbf{P}\{T \geq s\} \cdot \frac{1 - \mathbf{P}\{T \geq t\}}{t}. \tag{2.1}$$

Arvestades jaotusfunktsiooni definitsiooni ja T pidevust, saame $F_T(s) := \mathbf{P}\{T \leq s\} = 1 - \mathbf{P}\{T > s\} = 1 - \mathbf{P}\{T \geq s\}$, mis koos seosega (2.1) annab

$$\frac{F_T(s+t) - F_T(s)}{t} = [1 - F_T(s)] \cdot \frac{F_T(t)}{t}.$$

Protsessis $t \to 0$ saame siit omakorda seose $F_T^{'}(s) = [1 - F_T(s)]F_T^{'}(0)$. Tähistame $\lambda = F_T^{'}(0)$, siis $F_T^{'}(s) = [1 - F_T(s)]\lambda$, millest

$$\frac{[1 - F_T(s)]^{'}}{1 - F_T(s)} = -\lambda \quad \text{ehk} \quad (\ln[1 - F_T(s)])^{'} = -\lambda.$$

Seega $1 - F_T(s) = e^{-\lambda s + c}$ ja tingimusest $F_T(0) = 0$ saame $c = 0$, millega olemegi näidanud, et $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

◀

Lemma 2.1.2. Olgu $T_1, \dots, T_n$ sõltumatud juhuslikud suurused, $T_k \sim \mathcal{E}(\lambda_k)$, $k = 1, \dots, n$. Siis juhuslik suurus $T = \min\{T_1, \dots, T_n\} \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

▶
Arvutame

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{T > x\} &= \mathbf{P}\{\min\{T_1, \dots, T_n\} > x\} \overset{\text{kui} \min T_k > x,\ \text{siis}\ \forall T_k > x}{=} \\
&= \mathbf{P}\{\bigcap_{k=1}^{n} (T_k > x)\} \overset{\text{sõltumatus}}{=} \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{T_k > x\} \overset{\text{eksponentjaotuse eeldus}}{=} \\
&= \prod_{k=1}^{n} e^{-\lambda_k x} = e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x}.
\end{aligned}$$

Seega $T \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.

◀

Erijuhul, kui $T_k \sim \mathcal{E}(\lambda)$, järeldub eelmisest lemmast, et $T \sim \mathcal{E}(n\lambda)$.

2.2 Poissoni protsessi mõiste

Definitsioon 2.2.1. Juhuslikku protsessi $\{N(t), t \geq 0\}$ nimetatakse *loendavaks protsessiks*, kui $N(t)$ on mingite sündmuste (ütleme sündmuse A) toimumiste koguarv ajavahemikus [0, t].

Eriti tähtis loendav protsess on Poissoni protsess.

Definitsioon 2.2.2. Loendavat protsessi $\{N(t), t \geq 0\}$ nimetatakse *Poissoni protsessiks*, kui

(1) $N(0) = 0$,

(2) protsessi juurdekasvud on sõltumatud (st. iga $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ korral $N(t_4) - N(t_3)$ ja $N(t_2) - N(t_1)$ on sõltumatud juhuslikud suurused),

(3) sündmuste arv mistahes lõigul pikkusega t on Poissoni jaotusega juhuslik suurus keskväärtusega λt, st suvalise $s, t \geq 0$ korral

$$\mathbf{P}\{N(t+s) - N(s) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Tingimusest (3) järeldub, et $EN(t) = E[N(t) - N(0)] = \lambda t$ ja λ nimetatakse protsessi *intensiivsuseks.* Et tingimuses (3) toodud tõenäosus ei sõltu hetkest s, siis protsess on ajaliselt homogeenne.

Näide 2.2.1.

- $N(t)$ on ajahetkeks t lõhustunud aatomite arv radioaktiivse aine puhul.
- Kindlustuses: $N(t)$ on liiklusõnnetuste arv ajahetkeks t.
- $N(t)$ on telefonijaama saabunud väljakutsete arv ajahetkeks t.

Poissoni protsessi on võimalik defineerida ka teisiti. Selleks tuletame meelde, et sümbol $o(t)$ tähistab kõrgemat järku lõpmata väikest suurust võrreldes suurusega t vaadeldavas protsessis.

Definitsioon 2.2.3. Loendav protsess $\{N(t), t \geq 0\}$ on Poissoni protsess, kui

(1') $N(0) = 0$,

(2') $\{N(t), t \geq 0\}$ juurdekasvud on statsionaarsed ja sõltumatud,

(3') $\mathbf{P}\{N(t) = 1\} = \lambda t + o(t)$, kui $t \to 0$, (4') $\mathbf{P}\{N(t) \geq 2\} = o(t)$, kui $t \to 0$.

Seega ütleb omadus (3'), et täpselt ühe sündmuse toimumise tõenäosus lühikese ajavahemiku jooksul on ligikaudu võrdeline selle ajavahemiku pikkusega. Omaduse (4') järgi aga on rohkem kui ühe sündmuse toimumine sama lühikese ajavahemiku jooksul praktiliselt võimatu (sündmused ei toimu mitmekaupa). Paneme veel tähele, et omaduse (1') tõttu on tõenäosus, et sündmus A toimub mingil etteantud ajamomendil t_0 võrdne nulliga. Seega ajavahemike otspunktide sisse- või väljaarvamine ei muuda ajavahemikku sattumise tõenäosusi.

Teoreem 2.2.1. *Definitsioonid 2.2.2 ja 2.2.3 on ekvivalentsed.*

▶
($\Rightarrow$) Veendume esmalt, et definitsioonist 2.2.2 järeldub definitsioon 2.2.3. Nõuded (1') ja (1) on identsed. Juurdekasvude statsionaarsus (2') tuleneb sellest, et (3) põhjal on protsessi juurdekasvud sõltumata ajaintervalli asukohast Poissoni jaotusega, mille parameeter λt sõltub ainult ajaintervalli pikkusest. Tähistame lühiduse mõttes

$$P_n(t) = \mathbf{P}\{N(t) = n\}.$$

Võttes eelduses (3) $s = 0$ ja $n = 1$ ja arvestades seost $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ saame, et

$$P_1(t) = \mathbf{P}\{N(t) = 1\} = \frac{(\lambda t)^1}{1!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t =$$

$$= [1 - \lambda t + o(t)] \cdot \lambda t = \lambda t + o(t), \text{ kui } t \to 0,$$

millega on näidatud, et kehtib ka (3').

Analoogiliselt saame, et

$$P_0(t) = 1 - \lambda t + o(t).$$

Lihtsast võrdusest $P_{\geq 2}(t) = 1 - P_0(t) - P_1(t)$ järeldubki nüüd omadus (4').

($\Leftarrow$) Näitame, et definitsioonist 2.2.3 tuleneb 2.2.2. Sisuliselt on vaja näidata, et definitsioonist 2.2.3 järeldub (3), sest (1) ja (2) on ilmsed. Juurdekasvude statsionaarsust arvestades piisab vaadelda üksnes juhtu $s = 0$, st. näidata üksnes valemi

$$\mathbf{P}\{N(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

kehtivust. Tuletame $P_0(t)$ jaoks diferentsiaalvõrrandi järgmisel teel:

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= \mathbf{P}\{N(t+h)=0\} = \mathbf{P}\{N(t)=0, N(t+h)-N(t)=0\} \\ &= \mathbf{P}\{N(t)=0\}\cdot\mathbf{P}\{N(t+h)-N(t)=0\} = P_0(t)\cdot P_0(h), \end{aligned}$$

kus kahe viimase võrduse saamisel on kasutatud vastavalt juurdekasvudse sõltumatust ja statsionaarsust. Seega

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h} = P_0(t)\frac{P_0(h)-1}{h}.$$

Lastes nüüd $h \to 0$ ja arvestades, et (3') ja (4') tõttu $P_0(h) = 1 - \lambda h + o(h)$, saame võrrandi

$$P_0^{'}(t) = -\lambda P_0(t) \text{ ehk teisiti } [\ln P_0(t)]^{'} = -\lambda,$$

millest

$$\ln P_0(t) = -\lambda t + c \quad \text{ehk} \quad P_0(t) = e^{-\lambda t + c}.$$

Kuna aga $P_0(0) = 1$, siis jõuame valemini

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}, \tag{2.3}$$

mis ongi nõutud tõenäosus $n = 0$ korral.

Analoogiliselt $n > 0$ korral

$$\begin{aligned} P_n(t+h) &= \mathbf{P}\{N(t+h)=n\} \\ &= \mathbf{P}\{N(t)=n, N(t+h)-N(t)=0\} \\ &\quad + \mathbf{P}\{N(t)=n-1, N(t+h)-N(t)=1\} \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n}\mathbf{P}\{N(t)=n-k, N(t+h)-N(t)=k\}. \end{aligned}$$

Sõltumatuse tõttu avalduvad kõik viimases summas toodud tõenäosused üksiktõenäosuste korrutiseks, misjärel viimast summat saab ülalt hinnata suurusega

$$\sum_{k=2}^{n}\mathbf{P}\{N(t+h)-N(t)=k\} \le \mathbf{P}\{N(h)\ge 2\} = o(h),$$

kui $h \to 0$. Seetõttu saame, et

$$\begin{aligned} P_n(t+h) &= P_n(t)P_0(h) + P_{n-1}(t)P_1(h) + o(h) = \\ &= (1-\lambda h)P_n(t) + (\lambda h)P_{n-1}(t) + o(h), \end{aligned}$$

millest
$$\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}.$$
Lastes $h \to 0$, jõuame võrrandini
$$P_n^{'}(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t).$$
Selle mugavamaks lahendamiseks tähistame $Q_n(t) = e^{\lambda t} P_n(t)$. Diferentseerides selle seose mõlemaid pooli ning asedades seejärel $P_n^{'}(t)$ saame hõlpsasti seose
$$Q_n^{'}(t) = \lambda Q_{n-1}(t). \tag{2.4}$$
Lahendame selle erijuhul $n = 1$:
$$Q_1^{'}(t) = \lambda Q_0(t) = \lambda e^{\lambda t} \cdot P_0(t) = \lambda$$
seose (2.3) tõttu. Järelikult
$$Q_1(t) = \lambda t + c$$
millest
$$P_1(t) = e^{-\lambda t}(\lambda t + c),$$
kus tingimuse $P_1(0) = 0$ tõttu peab konstant c olema 0. Seega
$$P_1(t) = e^{-\lambda t}(\lambda t).$$

Saadud tulemusest järeldub üsna lihtsalt ka valemi (2.2) kehtivus üldjuhul (kasuta matemaatilise induktsiooni meetodit).

◀

2.3 Sündmustevaheline aeg Poissoni protsessis

Olgu $\{N(t), t \geq 0\}$ Poissoni protsess intensiivsusega λ. Tähistame $S_1 \leq S_2 \leq \ldots$ sündmuste toimumise momendid selles protsessis ning olgu $T_1 = S_1$, $T_2 = S_2 - S_1, T_3 = S_3 - S_2, \ldots$ ajavahemike pikkused järjestikuste sündmuste vahel ehk nn. *tühemikud*. Selgitame välja tühemike kui juhuslike suuruste jaotuse.

Esmalt paneme tähele, et sündmus $\{T_1 > t\}$ on samaväärne sündmusega $\{N(t) = 0\}$, millest

$$\mathbf{P}\{T_1 > t\} = \mathbf{P}\{N(t) = 0\} = P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Seega T_1 on eksponentjaotusega parameetriga λ ehk $T_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Tühemiku T_2 jaotuse saamiseks leiame kõigepealt tema tingliku jaotuse tingimusel, et $T_1 = s$:

$$\mathbf{P}\{T_2 > t | T_1 = s\} = \mathbf{P}\{0 \text{ sündmust vahemikus } (s, s+t] \mid T_1 = s\} =$$

ja kuna juurdekasvud on sõltumatud juhuslikud suurused, siis

$$= \mathbf{P}\{0 \text{ sündmust vahemikus } (s, s+t]\} =$$

ning statsionaarsuse tõttu

$$= \mathbf{P}\{0 \text{ sündmust vahemikus } (0, t]\} = P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Näeme, et T_2 tinglik jaotus ei sõltu T_1 väärtusest, mistõttu T_2 ja T_1 on sõltumatud. Keskmistame nüüd T_2 tinglikud tõenäosused üle T_1 kõikvõimalike väärtuste:

$$\mathbf{P}\{T_2 > t\} = E(\mathbf{P}\{T_2 > t \mid T_1\}) =$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{P}\{T_2 > t \mid T_1 = s\} f_{T_1}(s) ds = e^{-\lambda t} \int_0^\infty f_{T_1}(s) ds = e^{-\lambda t}.$$

Analoogiliselt jätkates saame järgmise teoreemi.

Teoreem 2.3.1. *Tühemikud $T_1, T_2, \ldots$ on sõltumatud sama eksponentjaotusega juhuslikud suurused, $T_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$.*

Märkus. Teoreem ei tohiks olla üllatav. Juurdekasvude sõltumatuse ja statsionaarsuse eeldus on tegelikult samaväärne väitega, et mistahes ajahetkel protsess algab *tõenäosuslikult* uuesti ("taastub"). See tähendab, et sellest hetkest edasi protsessi käik ei sõltu tema eelnevast kulust (juurdekasvude sõltumatus) ning on sama jaotusega kui esialgne protsess (juurdekasvude statsionaarsus). Teiste sõnadega, protsessil puudub *mälu* ja seetõttu oligi oodata tühemike eksponentjaotust.

Raske pole leida ka sündmuste toimumise ajahetkede $S_1, S_2, \ldots$ jaotust. Kuna $S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$, siis on siin tegemist eksponentjaotuse n-kordse konvolutsiooniga, mis on teatavasti gammajaotus. Võib aga arutleda ka otseselt: sündmus $S_n > t$ on samaväärne sündmusega $N(t) < n$, järelikult

$$\mathbf{P}\{S_n > t\} = \mathbf{P}\{N(t) < n\} = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Siit saame avaldada ka jaotusfunktsiooni

$$F_{S_n}(t) = \mathbf{P}\{S_n \leq t\} = 1 - \mathbf{P}\{S_n > t\} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \tag{2.5}$$

mille tuletis on gamma-jaotuse tihedus (näita!). Seega on tõestatud

Lemma 2.3.1. Poissoni protsessis on n-nda sündmuse toimumise hetk S_n gamma-jaotusega (parameetritega n ja λ) juhuslik suurus.

2.4 Sündmuste toimumishetkede tinglik jaotus

Oletame, et me teame, et ajavahemikus [0, t) on toimunud täpselt üks sündmus. Millal see võis toimuda? Juurdekasvude statsionaarsuse põhjal ei oma ükski sama pikkusega ajaintervallidest eeliseid teiste ees – järelikult on loota toimumishetkede ühtlast jaotust lõigul [0, t].

Seda pole tõesti raske kontrollida: iga $s \le t$ korral

$$\mathbf{P}\{S_1 \le s \mid N(t) = 1\} = \frac{\mathbf{P}\{S_1 \le s, N(t) = 1\}}{\mathbf{P}\{N(t) = 1\}} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}\{1 \text{ sündmus } [0, s] \text{ kestel ja } 0 \text{ sündmust } (s, t] \text{ kestel }\}}{\mathbf{P}\{N(t) = 1\}} =$$

$$= \frac{P_1(s) \cdot P_0(t-s)}{P_1(t)} = \frac{\lambda s e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t},$$

mis tähendabki S_1 ühtlast jaotust lõigul $[0, t)$. Tulemust saab üldistada juhule, kus meil on teada, et ajavahemikus $[0, t]$ on toimunud n sündmust. Selleks tuletame meelde mõned järkstatistikutega seotud faktid.

Olgu $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ juhuslikud suurused. Järjestame nad kasvavalt, tähistades $Y_{(1)} \le Y_{(2)} \le \ldots \le Y_{(n)}$. Suurusi $Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}$ nimetatakse *järkstatistikuteks.* (Paneme tähele, et pidevate juhuslike suuruste korral on võrduste $Y_{(i)} = Y_{(j)}$ tõenäosused nullid). Kui Y_i, $i = 1, \ldots, n$ on sõltumatud ja sama jaotusega pidevad juhuslikud suurused tihedusega $f(x)$, siis järkstatistikute ühistihedus on

$$f_{Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(n)}}(y_1, y_2, \ldots, y_n) =$$

$$= \sum_{\delta(y_1, \ldots, y_n)} f_{Y_1, \ldots, Y_n}(y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= n!\ f(y_1) \cdot \ldots \cdot f(y_n), \quad y_1 < y_2 < \ldots < y_n.$$

Tegur $n!$ tuleneb siin sellest, et lähtesuuruste $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ kõik $n!$ permutatsiooni annavad järkstatistikutele ühe ja sama väärtuskomplekti. Näiteks lõigul $[0, t]$ ühtlase jaotusega sõltumatute juhuslike suuruste, mille üksiktihedused on $f(y) = \frac{1}{t}$, järkstatistikute ühistiheduseks on $\frac{n!}{t^n}$ (piirkonnas $0 \le y_1 < y_2 \ldots < y_n \le t$, st n-mõõtmelise kuubi ühes "nurgas").

Teoreem 2.4.1. *Tingimusel, et ajamomendiks t on Poissoni protsessis toimunud n sündmust, on nende toimumishetkede* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *ühisjaotus sama nagu lõigul* $[0, t]$ *ühtlase jaotusega sõltumatutest juhuslikest suurustest saadud järkstatistikutel.*

Märkus. Teoreemi intuitiivne tähendus on selles, et kui me jälgime sündmuse A toimumise hetki Poissoni protsessis teatud aja vältel, siis näivad nad jaotuvat ajateljel ühtlaselt, ilma et tekiks olulisi kuhjumisi.

▶
Vaatleme $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} \equiv t$ ja olgu h_i piisavalt väike selleks, et $t_i + h_i < t_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots, n$. Leiame nüüd tingliku tõenäosuse

$$\mathbf{P}\{t_i \leq S_i < t_i + h_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \mid N(t) = n\} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}\{1 \text{ sündmus igas } [t_i, t_i + h_i) \text{ ja } 0 \text{ sündmust mujal } [0, t] \text{ sees }\}}{\mathbf{P}\{N(t) = n\}} =$$

$$= \frac{P_1(h_1) \cdots P_1(h_n) \cdot P_0(t - h_1 - h_2 - \ldots - h_n)}{P_n(t)} =$$

$$= \frac{\lambda h_1 e^{-\lambda h_1} \cdots \lambda h_n e^{-\lambda h_n} \cdot e^{-\lambda(t - h_1 - h_2 - \ldots - h_n)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} = \frac{n!}{t^n}\ h_1 \cdot h_2 \cdots h_n.$$

Seega

$$\frac{\mathbf{P}\{t_i \leq S_i < t_i + h_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \mid N(t) = n\}}{h_1 \cdot h_2 \cdots h_n} = \frac{n!}{t^n}$$

ja lastes $h_i \to 0$ saamegi (tinglikuks) tiheduseks nõutava

$$f_{S_1, S_2, \ldots, S_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n \mid N(t) = n) = \frac{n!}{t^n}.$$

◀

2.5 Poissoni protsessi omadusi

2.5.1 Osaprotsessideks lahutamine

Vaatleme Poissoni protsessi $\{N(t),\ t \geq 0)\}$ intensiivsusega λ. Oletame, et selles protsessis esineb kahte tüüpi sündmusi, kusjuures iga sündmus on I tüüpi tõenäosusega p ja II tüüpi tõenäosusega $1 - p$. Eeldame veel, et üksiksündmuste tüübid on üksteisest sõltumatud. Näiteks, kui kauplusse saabuvad ostjad Poissoni protsessi kohaselt (intensiivsusega λ), siis võib nad jagada kahte tüüpi vastavalt soole: I tüüpi sündmus tähendaks naiskliendi saabumist (tõenäosus 0.6) ja II tüüpi sündmus tähendaks meeskliendi saabumist (tõenäosus 0.4). Seejuures järjekordse kliendi tüüp ei sõltu eelnevate klientide tüübist.

Olgu $\{N_1(t),\ t \geq 0\}$ ja $\{N_2(t),\ t \geq 0\}$ vastavalt I ja II tüüpi sündmuste arv ajavahemikus $[0, t]$, $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$.

Teoreem 2.5.1. *Protsessid $\{N_1(t),\ t \geq 0\}$ ja $\{N_2(t),\ t \geq 0\}$ on sõltumatud Poissoni protsessid intensiivsusega vastavalt λp ja $\lambda(1 - p)$.*

▶
Olgu $n, m \geq 0$ ja tähistame sündmused $A = \{N_1(t) = n, N_2(t) = m\}$ ja $B = \{N(t) = n + m\}$. Kuna $\{N(t), t \geq 0\}$ on Poissoni protsess, siis

$$\mathbf{P}(B) = \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} e^{-\lambda t}.$$

Nüüd paneme tähele, et fikseeritud summa $N(t) = n + m$ korral I tüüpi sündmuste arv $N_1(t)$ on binoomjaotusega juhuslik suurus, mistõttu

$$\mathbf{P}(A|B) = C_{n+m}^{n} p^n (1-p)^m.$$

Korrutame saadud avaldised:

$$\mathbf{P}\{N_1(t) = n, N_2(t) = m\} = C_{n+m}^{n} p^n (1-p)^m \cdot \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} e^{-\lambda t} =$$

$$= \frac{(\lambda t p)^n}{n!} e^{-\lambda t p} \cdot \frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!} e^{-\lambda t(1-p)}.$$

Seega avaldub $N_1(t)$ ja $N_2(t)$ ühisjaotus on kahe Poissoni jaotusega juhusliku suuruse tõenäosusfunktsioonide korrutisena. Leiame $N_1(t)$ marginaaljaotuse summeerides üle $N_2(t)$ kõigi väärtuste:

$$\mathbf{P}\{N_1(t) = n\} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}\{N_1(t) = n, N_2(t) = m\} =$$

$$= \frac{(\lambda tp)^n}{n!} e^{-\lambda tp} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!} e^{-\lambda t(1-p)} = \frac{(\lambda tp)^n}{n!} e^{-\lambda tp}.$$

Siit järeldubki, et protsess $\{N_1(t), t \geq 0\}$ on Poissoni protsess intensiivsusega λp. Analoogiliselt saame, et $\{N_2(t), t \geq 0\}$ on Poissoni protsess intensiivsusega $\lambda(1-p)$.

◀

Vaatleme nüüd veidi üldisemat olukorda, kus I ja II tüübi tõenäosused ei ole konstantsed, vaid sõltuvad ajast. Täpsemalt: olgu tõenäosus, et ajamomendil s toimuv sündmus on I tüüpi, võrdne $p(s)$. Tõenäosus, et ta on II tüüpi on seega $1 - p(s)$. Tõestame eelmise teoreemiga analoogilise väite:

Teoreem 2.5.2. *Protsessid $\{N_1(t), t \geq 0\}$ ja $\{N_1(t), t \geq 0\}$ on sõltumatud Poissoni protsessid intensiivsusega vastavalt λp_t ja $\lambda(1-p_t)$, kus*

$$p_t = \frac{1}{t} \int_0^t p(s) ds.$$

▶

Tõestuskäik kordab eelmise teoreemi tõestust. Ainus erinevus seisneb selles, et fikseeritud summa $N(t) = n+m$ korral I tüüpi sündmuste arvu $N_1(t)$ jaotus on küll binoomjaotus, kuid teistsuguse parameetriga. Täpsemalt, vaatleme suvalist sündmust, mis toimub ajaintervallis $[0, t]$. Juhul, kui ta toimuks momendil s, siis oleks tema I tüüpi kuuluvuse tinglik tõenäosus $p(s)$. Teame aga, et sündmuse toimumise hetk s jaotub ühtlaselt lõigul $[0, t]$, st tema tihedus on $\frac{1}{t}$. Seega (täis-)tõenäosus, et suvaline lõigul $[0, t]$ toimunud sündmus on I tüüpi, võrdub

$$p_t = \frac{1}{t} \int_0^t p(s) ds$$

sõltumata sellest, mis tüüpi on teised sündmused. Nüüd jääb üle korrata eelmise teoreemi tõestus kuni lõpuni.

◀

2.5.2 Poissoni protsesside kompositsioon

Eelnevad kaks teoreemi käsitlesid Poissoni protsessi lahutamist kaheks "osaprotsessiks". Huvi pakub aga ka vastupidine olukord, kus on antud kaks Poissoni protsessi $\{N_1(t), t \geq 0\}$ ja $\{N_2(t), t \geq 0\}$ ning me summeerime nad loomulikul viisil, defineerides $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$.

Näitena võiksime tuua juhu, kus $N_1(t)$ ja $N_2(t)$ loendavad linnasiseste ja linnade vaheliste kutsungite arvu telefonikeskjaamas. Siis $N(t)$ on kutsungite koguarv ajavahemikus $[0, t)$.

Sellist summat nimetatakse *kompositsiooniks*. Enne alapunkti põhitulemuse fikseerimist tuletame meelde, et kehtib järgmine lemma.

Lemma 2.5.1. Kahe sõltumatu Poissoni jaotusega juhusliku suuruse summa on ka Poissoni jaotusega, kusjuures parameetrid liituvad.

Näitame, et kehtib ka järgmine tulemus.

Teoreem 2.5.3. *Kui* $\{N_1(t), t \geq 0\}$ *ja* $\{N_2(t), t \geq 0\}$ *on* sõltumatud *Poissoni protsessid intensiivsusega vastavalt* λ_1 *ja* λ_2*, siis nende kompositsioon* $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ *on Poissoni protsess intensiivsusega* $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

▶
On lihtne näha, et definitsiooni 2.2.2 kaks esimest nõuet on $N(t)$ puhul täidetud. Tingimus (3) osutub täidetuks aga seetõttu, et kahe sõltumatu Poissoni jaotusega juhusliku suuruse summa $N(t+s) - N(t) = N_1(t+s) - N_1(t) + N_2(t+s) - N_2(t)$ on ka Poissoni jaotusega vastavalt eeltoodud lemmale.

◀

Kui näiteks büroo kaks masinakirjutajat teevad teineteisest sõltumatult vigu Poissoni protsessi kohaselt intensiivsusega 1 ja 2 viga 5 minuti kohta, siis ajamomendiks t tehtud vigade koguarv $N(t)$ on Poissoni protsess intensiivsusega 3 viga (5 minuti kohta).

2.6 Poissoni protsessi üldistused

Vaatleme Poissoni protsessi kahte üldistust. Esimene neist on mittehomogenne ehk mittestatsionaarne Poissoni protsess, kus lubame protsessi intensiivsusel λ sõltuda ajast t.

2.6.1 Mittehomogeenne Poissoni protsess

Definitsioon 2.6.1. Loendavat protsessi $\{N(t), t \geq 0\}$ nimetatakse mittehomogeenseks Poissoni protsessiks intensiivsusfunktsiooniga $\lambda(t),\ t \geq 0$, kui

(1) $N(0) = 0$,

(2) $\{N(t), t \geq 0\}$ juurdekasvud on sõltumatud,

(3) $\mathbf{P}\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h),\ h \to 0\ \ \forall\, t$ korral,

(4) $\mathbf{P}\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h),\ h \to 0\ \ \forall\, t$ korral.

Olulist rolli mängib nüüd suurus $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$. Nimelt näitame, et protsessi juurdekasv ajavahemikus $[t, t+s)$ on Poissoni jaotusega keskväärtusega $m(t+s) - m(t)$:

$$\mathbf{P}\{N(t+s) - N(t) = n\} = \frac{(m(t+s) - m(t))^n}{n!} e^{-[m(t+s)-m(t)]},\ n \geq 0. \quad (2.6)$$

Erijuhuna saaksime siis muidugi, et $N(t) \sim \mathcal{P}(m(t))$, millest $EN(t) = m(t)$ ja mistõttu funktsiooni $m(t)$ nimetatakse protsessi *keskväärtusfunktiooniks*. Paneme lisaks tähele, et tavalise Poissoni protsessi korral kehtib $\lambda(t) \equiv \lambda$ ja sel juhul $m(t) = \lambda \cdot t$.

Valemi (2.6) tõestuse idee on sama, mis homogeeense protsessi korral. Fikseerime t ja tähistame

$$P_n(s) = \mathbf{P}\{N(t+s) - N(t) = n\}.$$

Tuletame diferentsiaalvõrrandi $P_0(s)$ jaoks. Selleks arvutame

$$\begin{aligned} P_0(s+h) &= \mathbf{P}\{N(t+s+h) - N(t) = 0\} \\ &= \mathbf{P}\{0 \text{ sündmust } [t, t+s) \text{ sees},\ 0 \text{ sündmust } [t+s, t+s+h) \text{ sees}\} \\ &= \mathbf{P}\{0 \text{ sündmust } [t, t+s) \text{ sees}\} \cdot \mathbf{P}\{0 \text{ sündmust } [t+s, t+s+h) \text{ sees}\} \\ &= P_0(s)[1 - \lambda(t+s)h + o(h)], \end{aligned}$$

kus kaks viimast võrdust järelduvad juurdekasvude sõltumatusest ja sellest, et tingimused (3) ja (4) annavad seose $\mathbf{P}\{N(t+s+h)-N(t+s)=0\} = 1-\lambda(t+s)h+o(h)$. Seega

$$\frac{P_0(s+h)-P_0(s)}{h} = -\lambda(t+s)P_0(s) + \frac{o(h)}{h},$$

mis $h \to 0$ korral annab võrrandi

$$P_0^{'}(s) = -\lambda(t+s)P_0(s).$$

Selle lahendamiseks leiame esmalt, et $[\ln P_0(s)]^{'} = -\lambda(t+s)$ ning siit

$$\ln P_0(s) = -\int_0^s \lambda(t+u)du + C = -\int_t^{t+s} \lambda(y)dy + C = -[m(t+s)-m(t)]+C,$$

millest

$$P_0(s) = e^{-[m(t+s)-m(t)]+C}.$$

Tingimusest $P_0(0)=1$ saame $C=0$. Ülejäänud tõenäosuste $P_1(t), P_2(t), \ldots$ leidmine toimub analoogiliselt teoreemi 2.2.1 tõestusega.

Näide 2.6.1 (Mittehomogeenne Poissoni protsess)**.** Olgu hamburgerikiosk avatud $8-22$ ja sõltugu külastajate voo intensiivsus ajast järgmiselt

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5+5t, & 0 \le t \le 3, \\ 20, & 3 \le t \le 8, \\ 20-3(t-8), & 8 \le t \le 14, \end{cases}$$

kus t on aeg alates kioski avamisest (st. $t=0$ kell 8 hommikul).

Leiame, kui suur on tõenäosus, et ajavahemikus 10-11 saabub vähem kui 3 klienti ehk $\mathbf{P}\{N(3)-N(2)<3\}$. Selleks leiame kõigepealt Poissoni jaotuse parameetri:

$$m(3)-m(2) = \int_2^3 \lambda(s)ds = \int_2^3 (5+5s)ds = (5s+2.5s^2)\Big|_2^3 = 17.5,$$

seega $N(3)-N(2) \sim \mathcal{P}(17.5)$. Nüüd otsitav tõenäosus avaldub

$$\mathbf{P}\{N(3)-N(2)<3\} = \sum_{k=0}^{2} \frac{17.5^k}{k!}e^{-17.5} = \ldots \approx 0.$$

2.6.2 Poissoni liitprotsess

Definitsioon 2.6.2. Juhuslikku protsessi $\{X(t), t \geq 0\}$ nimetatakse *Poissoni liitprotsessiks*, kui ta avaldub kujul

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad t > 0,$$

kus $\{N(t),\ t \geq 0\}$ on Poissoni protsess ja $\{Y_n,\ n \geq 0\}$ on sõltumatud sama jaotusega juhuslikud suurused, mis on sõltumatud ka protsessist $\{N(t), t \geq 0\}$.

Erijuhul kui $Y \equiv 1,\ i = 1, 2, \ldots$, siis Poissoni liitprotsess taandub harilikule Poissoni protsessile $N(t)$.

Näide 2.6.2. Saabugu ostjad kauplusesse Poissoni protsessi kohaselt ja olgu Y_i i-nda ostja poolt kaupluses kulutatud raha. Me võime lugeda Y_i sõltumatuteks juhuslikeks suurusteks (kui mitte arvestada seda, et mõni ostja kaldub teinekord valima sedasama kaupa, mida teisedki ostjad). Siis ajamomendiks t kaupluse kassasse kogunenud raha $X(t)$ on Poissoni liitprotsess.

Arvutame juhusliku suuruse $X(t)$ keskväärtuse ja dispersiooni Poissoni liitprotsessis. Keskväärtuse leiame $N(t)$ suhtes võetud tinglike keskväärtuste keskmistamise teel ("lahkame"$N(t)$ järgi):

$$EX(t) = E\{E[X(t) \mid N(t)]\}.$$

Arvutame

$$E[X(t) \mid N(t) = n] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \mid N(t) = n\right] =$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i \mid N(t) = n\right] = \sum_{i=1}^{n} E[Y_i \mid N(t) = n] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} EY_i = n \cdot EY_1,$$

kus eelviimane võrdus tuleneb Y_i ja $\{N(t), t \geq 0\}$ sõltumatusest. Järelikult

$$E[X(t) \mid N(t)] = N(t)EY_1,$$

millest keskmistamisega üle $N(t)$ saame $EX(t) = \lambda t EY_1$, so üksik keskväärtus korrutatud keskmise liidetavate arvuga. Dispersiooni korral on tulemus teistsugune. Lähtume sellest, et

$$DX(t) = EX^2(t) - [EX(t)]^2 = EX^2(t) - \lambda^2 t^2 (EY_1)^2.$$

Jääb üle arvutada

$$EX^2(t) = E\{E[X^2(t) \mid N(t)]\}.$$

Leiame esmalt

$$E[X^2(t) \mid N(t) = n] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right)^2 \mid N(t) = n\right] =$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 \mid N(t) = n\right] = E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 =$$

$$= E\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + E\left(\sum_{i \neq j} Y_i Y_j\right) = n \cdot EY_1^2 + \sum_{i \neq j} EY_i EY_j =$$

$$= n \cdot EY_1^2 + n(n-1)(EY_1)^2.$$

Seega

$$E[X^2(t) \mid N(t)] = N(t) \cdot EY_1^2 + N(t)(N(t)-1)(EY_1)^2,$$

millest

$$EX^2(t) = EN(t) \cdot EY_1^2 + E[N(t)(N(t)-1)](EY_1)^2.$$

Arvestades, et $EN(t) = \lambda t$ ja $EN^2(t) = DN(t) + [EN(t)]^2 = \lambda t + \lambda^2 t^2$, saame pärast lihtsustusi valemi

$$DX(t) = \lambda t E{Y_1}^2.$$

Seega on tulemus suurem kui üksikdispersioonide "keskmine"summa

$$\lambda t DY_1 = \lambda t[EY_1^2 - (EY_1)^2].$$

Tuletame meelde, et fikseeritud arvu sõltumatute juhuslike suuruste korral kehtib $D(\sum_{i=1}^n Y_i) = \sum_{i=1}^n DY_i$. Seega liidetavate juhuslik arv suurendab summaarset dispersiooni.

Peatükk 3

Pideva ajaga Markovi ahelad

3.1 Mõiste. Chapman-Kolmogorovi võrrandid

Selles alajaotuses käsitleme juhuslike protsesside klassi, millel on palju erinevaid rakendusi ja mis on tuntud pideva ajaga Markovi ahelate nime all. Vaadeldav klass on üldisem kui seni käsitletud Poissoni protsesside klass, sisaldades viimast juba erijuhuna. Alltoodust selgub, et me saame pideva ajaga Markovi ahela kui lähtume mingist diskreetse ajaga Markovi ahelast ja iga üleminekuaja (mis diskreetse aja korral võrdub 1 ajaühikuga) asendame eksponentjaotusega juhusliku suurusega. Osutub, et eksponentjaotus on ainus jaotus, mis sellises olukorras säilitab protsessi Markovi omaduse.

Nagu dikreetse ajaga Markovi ahelate korral, nii eeldame ka siin, et juhusliku protsessi väärtuste hulk on ülimalt loenduv ning võimalike olekute hulk on $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Definitsioon 3.1.1 (Pideva ajaga Markovi ahel)**.** Öeldakse, et juhuslik protsess $\{X(t),\ t \geq 0\}$ on *pideva ajaga Markovi ahel*, kui suvaliste $s,\ t \geq 0$ ja suvaliste mittenegatiivsete täisarvude $i,\ j,\ x(u),\ 0 \leq u < s$ korral kehtib võrdus

$$\mathbf{P}\{X(t+s) = j | X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s\} = \mathbf{P}\{X(t+s) = j | X(s) = i\}.$$

Teiste sõnadega, pideva ajaga Markovi ahel on juhuslik protsess, millel on see tuntud omadus, et tuleviku $X(t+s)$ jaotus antud oleviku $X(s)$ ja mineviku $X(u) = x(u),\ 0 \leq u < s$ korral sõltub ainult olevikust ja mitte minevikust. (Kui protsessi seisund mingil ajahetkel on teada, siis mineviku uurimine ei anna tuleviku kohta mitte mingit lisainformatsiooni.)

Definitsioon 3.1.2 (Statsionaarsed üleminekutõenäosused)**.** Kui tõenäosus $\mathbf{P}\{X(t+s) = j | X(s) = i\}$ ei sõltu s väärtusest, siis öeldakse, et pideva ajaga Markovi ahelal on *statsionaarsed (e homogeensed) üleminekutõenäosused.*

Edaspidi käsitlemegi ainult selliseid ahelaid.

Näitame kõigepealt, et pideva ajaga Markovi ahela korral on aeg T_i, mille vältel seisundisse i sattunud protsess seal püsib, eksponentjaotusega juhuslik suurus. Selleks oletame näiteks, et ajamomendil 0 on protsess seisundis i ja ta ei ole väljunud sealt 5 minuti jooksul. Kui suur on tõenäosus, et protsess püsib seisundis i veel 3 minutit? Formaalselt otsime tõenäosust, et $\mathbf{P}\{T_i \geq 8|T_i \geq 5\}$. Markovi omaduse tõttu on ajahetkel 5 kogu info tuleviku kohta selles, et hetkeseisund on i ja info "eelnevad 5 minutit seisundis i" ei oma mingit tähtsust. Seega on otsitav tõenäosus võrdne tõenäosusega, et $T_i \geq 3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{T_i \geq 8|T_i \geq 5\} &= \mathbf{P}\{X(s) = i,\ 0 \leq s \leq 8|X(s) = i,\ 0 \leq s \leq 5\}\\ &= \mathbf{P}\{X(s) = i,\ 5 < s \leq 8|X(s) = i,\ 0 \leq s \leq 5\}\\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\{X(s) = i,\ 5 < s \leq 8|X(5) = i\}\\ &= \mathbf{P}\{X(s) = i,\ 0 < s \leq 3|X(0) = i\} = \mathbf{P}\{T_i \geq 3\}.\end{aligned}$$

Üldjuhul saame sama argumentatsiooni kasutades, et iga $s,\ t \geq 0$ korral

$$\mathbf{P}\{T_i \geq s + t|T_i \geq s\} = \mathbf{P}\{T_i \geq t\}.$$

Järelikult (vt. lemma 2.1.1) on tegemist mäluta (mittevananeva) jaotusega, mis saab olla ainult eksponentjaotus.

Ülaltoodu annab võimaluse defineerida pideva ajaga Markovi ahel teisel viisil.

Definitsioon 3.1.3 (Pideva ajaga Markovi ahel)**.** *Pideva ajaga Markovi ahel* on juhuslik protsess, mis

1) sattudes seisundisse i jääb sinna ajaks $T_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$, kusjuures seisundites viibimise ajad on sõltumatud juhuslikud suurused.

2) väljudes seisundist i, siseneb ta teatava tõenäosusega P_{ij} seisundisse j, kusjuures üleminekutõenäosused P_{ij} rahuldavad tingimusi $P_{ii} = 0$ ja $\sum_j P_{ij} = 1$ iga i korral.

Seega tõepoolest, pideva ajaga Markovi ahel on juhuslik protsess, kust ühest olekust teise liikumine toimub nagu (diskreetse ajaga) Markovi ahelas, kuid igas olekus viibimise aeg on eksponentjaotusega juhuslik suurus.

Tähistame tõenäosuse, et protsess, mis hetkel s on olekus i, on aja t möödudes olekus j, järgmiselt:

$$P_{ij}(t) = \mathbf{P}\{X(t + s) = j|X(s) = i\}$$

Püüame taoliste tõenäosuste leidmiseks tuletada diferentsiaalvõrrandid.

Markovi omadusele tuginedes tõestame kõigepealt järgmised lemmad.

Lemma 3.1.1. Kehtivad seosed

$$(a) \quad \lim_{h\to 0} \frac{1-P_{ii}(h)}{h} = \lambda_i \tag{3.1}$$

$$(b) \quad \lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = \lambda_i P_{ij}, \text{ kui } i \neq j \tag{3.2}$$

►

(a) Sisenedes seisundisse i käivitub (arvestades T_i eksponentsiaalset jaotust) Poissoni protsess intensiivsusega λ_i mis lõpeb koos üleminekuga teise seisundisse. Poissoni protsessi korral on aga aja h jooksul sündmuse toimumise tõenäosus (milleks antud juhul on aja h jooksul seisundist i lahkumise tõenäosus $1-P_{ii}(h)$) ligikaudu võrdeline ajaintervalli pikkusega: $1-P_{ii}(h) = \lambda_i h + o(h)$. Sellest järeldubki (a).

(b) Kuna $P_{ij}(h)$ on tõenäosus, et protsess läheb aja h jooksul seisundist i seisundisse j, siis me saame ta esitada kahe tõenäosuse korrutisena:

$$\begin{aligned} P_{ij}(h) &= \mathbf{P}\{\text{aja } h \text{ jooksul lahkutakse olekust } i\}\cdot \\ &\quad \mathbf{P}\{\text{üleminek toimub olekust } i \text{ olekusse } j\} \\ &= [1-P_{ii}(h)]\cdot P_{ij} = [\lambda_i h + o(h)]\cdot P_{ij}. \end{aligned}$$

Siit järeldub seos (b).

◄

Lemma 3.1.2 (Chapman-Kolmogorovi võrrand)**.** Suvaliste $s,\ t \geq 0$ korral

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)\cdot P_{kj}(s) \tag{3.3}$$

►

Et aja $t+s$ jooksul jõuda seisundist i seisundisse j, peab protsess pärast aja t möödumist olema mingis seisundis k, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Summeerimine üle kõikvõimalike k väärtuste annabki otsitava tõenäosuse:

$$\begin{aligned}
P_{ij}(t+s) &\equiv \mathbf{P}\{X(t+s)=j|X(0)=i\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{X(t+s)=j, X(t)=k|X(0)=i\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{X(t)=k|X(0)=i\} \cdot \mathbf{P}\{X(t+s)=j|X(t)=k, X(0)=i\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{X(t)=k|X(0)=i\} \cdot \mathbf{P}\{X(t+s)=j|X(t)=k\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) \cdot P_{kj}(s).
\end{aligned}$$

◀

Seos (3.3) on Chapman-Kolmogorovi võrrandi analoog pideva aja jaoks.

3.2 Kolmogorovi taha- ja ettesuunatud võrrandid

Tuletame nüüd tõenäosuste $P_{ij}(t)$ leidmiseks diferentsiaalvõrrandid. Lemmast 3.1.2 saame kõigepealt

$$\begin{aligned} P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(h)P_{kj}(t) - P_{ij}(t) = \\ &= \textstyle\sum_{k\neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t) - [1 - P_{ii}(h)]P_{ij}(t). \end{aligned}$$

Jagades läbi suurusega h ja arvestades lemmat 3.1.1 näeme, et

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \sum_{k\neq i} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) - \lambda_i P_{ij}(t) \tag{3.4}$$

Näitame nüüd, et võrduse paremal poolel võib piirilemineku ja summeerimise järjekorra ära vahetada. Selleks piisab veenduda, et seal asuv rida on iga fikseeritud N korral hinnatav

$$\liminf_{h\to 0} \sum_{k\neq i} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) \geq \liminf_{h\to 0} \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{N} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) = \lambda_i \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{N} P_{ik}P_{kj}(t). \tag{3.5}$$

Teiselt poolt, suurte N korral ($N \geq i$)

$$\begin{aligned} &\limsup_{h\to 0} \sum_{k\neq i} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) \\ &\quad \leq \limsup_{h\to 0} \left[\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{N} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{P_{ik}(h)}{h} \right] \\ &\quad = \limsup_{h\to 0} \left[\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{N} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) + \frac{1}{h}\left(1 - \sum_{k=0}^{N} P_{ik}(h)\right) \right] \\ &\quad = \lambda_i \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{N} P_{ik}P_{kj}(t) + \lambda_i - \lambda_i \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{N} P_{ik}, \end{aligned}$$

kus viimase võrduse jaoks kasutasime lemmat 3.1.1.

Lastes nüüd $N \to \infty$ (ja arvestades, et $P_{ii} = 0$) saame, et

$$\limsup_{h\to 0} \sum_{k\neq i} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) \leq \lambda_i \sum_{k\neq i} P_{ik}P_{kj}(t), \tag{3.6}$$

mis koos võrratusega (3.5) annab vajaliku

$$\lim_{h\to 0}\sum_{k\neq i}\frac{P_{ik}(h)}{h}P_{kj}(t)=\lambda_i\sum_{k\neq i}P_{ik}P_{kj}(t). \tag{3.7}$$

Asendades viimase avaldise võrduse (3.4) paremasse poolde, võime lugeda tõestatuks järgmise teoreemi.

Teoreem 3.2.1. *Iga* $i, j,\quad t \geq 0$ *korral*

$$P_{ij}^{'}(t)=\lambda_i\sum_{k\neq i}P_{ik}P_{kj}(t)-\lambda_i P_{ij}(t). \tag{3.8}$$

Võrrandsüsteem (3.8) on tuntud kui *Kolmogorovi tahasuunatud võrrandid.* Taolise võrrandi lahendamist vaatleme konkreetsetel juhtudel (üldjuhul ei saa).

Saab tuletada veel teistsuguse võrrandisüsteemi $P_{ij}(t)$ määramiseks. Selleks lähtume jälle Chapman-Kolmogorovi võrrandist (lemma 3.1.2):

$$\begin{aligned} P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}P_{ik}(t)P_{kj}(h)-P_{ij}(t)= \\ &= \sum_{k\neq j}P_{ik}(t)P_{kj}(h)-[1-P_{jj}(h)]P_{ij}(t). \end{aligned}$$

Seega

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{\sum_{k\neq j}P_{ik}(t)\frac{P_{kj}(h)}{h}-\left[\frac{1-P_{jj}(h)}{h}\right]P_{ij}(t)\right\}.$$

Eeldades, et piirile mineku ja summeerimise järjekorra võib ära vahetada, saame lemmat 3.1.1 kasutades võrrandid

$$P_{ij}^{'}(t)=\sum_{k\neq j}\lambda_k P_{kj}P_{ik}(t)-\lambda_j P_{ij}(t).$$

Kahjuks ei ole mainitud vahetus alati õigustatud. Osutub aga, et see on lubatav, kui on täidetud vähemalt üks tingimustest:

1) vaadeldaval protsessil on ainult lõplik arv seisundeid;

2) iga i korral nende j hulk, mille korral $P_{ij}>0$, on lõplik;

3) lemmas 3.1.1 (b) näidatud koondumine $\frac{P_{ij}(h)}{h}\to\lambda_i P_{ij}$ on ühtlane üle kõigi i, $(i\neq j)$.

Tulemuse võtame kokku järgmise teoreemina.

Teoreem 3.2.2 (Kolmogorovi ettesuunatud võrrandid). *Kui on täidetud mõni tingimustest 1) - 3), siis iga* $i, j, \quad t \geq 0$ *korral*

$$P_{ij}^{'}(t) = \sum_{k \neq j} \lambda_k P_{kj} P_{ik}(t) - \lambda_j P_{ij}(t). \tag{3.9}$$

Teoreemides 3.2.1 ja 3.2.2 toodud võrrandeid on mõnikord võimalik lahendada analüütiliselt, enamasti aga mitte. Sageli piisab aga asümptootilisest lahendist, kus $t \to \infty$.

Järgnevalt uurime lähemalt ühte pideva ajaga Markovi ahelate erijuhtu.

3.3 Näiteid Kolmogorovi võrrandi lahendamise kohta. Süsteemi tasakaalu seisund

Vaatleme probleemi, mida võib käsitleda kahe seisundiga pideva ajaga Markovi ahelana.

Olgu meil seade (masin), mis töötab tõrgeteta eksponentsiaalse aja $\mathcal{E}(\lambda_0)$ ning rikkis olek (remondiaeg) kestab samuti eksponentsiaalse aja – $\mathcal{E}(\lambda_1)$. Eeldame, et ajahetkel 0 on seade korras (seisund 0) ja ajahetkel 1 on seade rikkis (seisund 1). Tahame näiteks teada, kui suur on tõenäosus, et hetkel $t = 10$ on seade töökorras (kusjuures vahepeal võib seade olla ka rikkis).

Markovi ahela üleminekumaatriks on kujul

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

siit loeme välja, et $P_{00} = 0, P_{01} = 1, P_{10} = 1, P_{11} = 0$.

Kirjutame välja Kolmogorovi tahasuunatud võrrandid kujul

$$P'_{ij}(t) = \lambda_i \sum_{k \neq i} P_{ik} P_{kj}(t) - \lambda_i P_{ij}(t).$$

$$\begin{cases} P'_{00}(t) = \lambda_0 P_{01} P_{10}(t) - \lambda_0 P_{00}(t) & (1) \\ P'_{10}(t) = \lambda_1 P_{10} P_{00}(t) - \lambda_1 P_{10}(t) & (2) \end{cases}$$

Rohkem pole vaja välja kirjutada, kuna $P_{01}(t) = 1 - P_{00}(t)$ ja $P_{11}(t) = 1 - P_{10}(t)$. Korrutades võrrandid (1) ja (2) vastavalt läbi λ_1 ja λ_0-iga ning võttes arvesse, et $P_{01} = 1$ ja $P_{10} = 1$ saame, et

$$+\begin{cases} \lambda_1 P'_{00}(t) = \lambda_0 \lambda_1 P_{10}(t) - \lambda_0 \lambda_1 P_{00}(t) \\ \lambda_0 P'_{10}(t) = \lambda_0 \lambda_1 P_{00}(t) - \lambda_0 \lambda_1 P_{10}(t) \end{cases}$$

ning seega kehtib, et

$$\lambda_1 P'_{00}(t) + \lambda_0 P'_{10}(t) = 0$$

Integreerime: $\lambda_1 P_{00}(t) + \lambda_0 P_{10}(t) = c$. Määrame c: $P_{00}(0) = 1; P_{10}(0) = 0$ (ilma ajakuluta ei saa seisund muutuda). Tehes asenduse saame, et $\lambda_1 = c$, $\lambda_0 P_{10}(t) = \lambda_1(1 - P_{00}(t))$. Asendame $P_{10}(t)$ võrrandisse (1):

$$P'_{00}(t) = \lambda_1(1 - P_{00}(t)) - \lambda_0 P_{00}(t) = \lambda_1 - (\lambda_0 + \lambda_1) P_{00}(t).$$

Tähistame võrrandi lahendamiseks:

$$g(t) = P_{00}(t) - \frac{\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1} \Rightarrow g'(t) = P'_{00}(t)$$

$$g'(t) = \lambda_1 - (\lambda_0+\lambda_1)\left[g(t) + \frac{\lambda_1}{\lambda_0+\lambda_1}\right] = -(\lambda_0+\lambda_1)g(t) \Rightarrow g(t) = c\cdot e^{-(\lambda_0+\lambda_1)t}$$

$$g(0) = P_{00} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0+\lambda_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0+\lambda_1} = c \Rightarrow P_{00}(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0+\lambda_1}e^{-(\lambda_0+\lambda_1)t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_0+\lambda_1}$$

Asendades saadud $P_{00}(t)$ eelpool toodud võrrandisse $\lambda_0 P_{10}(t) = \lambda_1(1 - P_{00}(t))$ saame, et

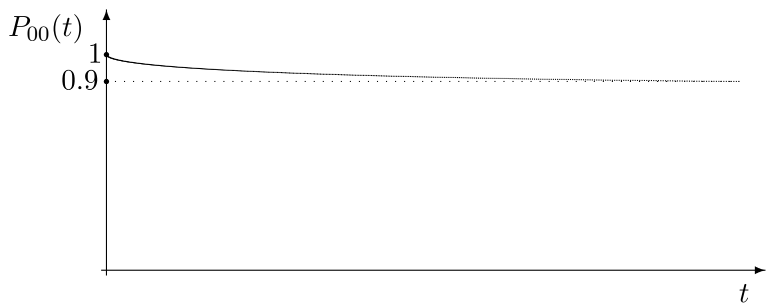
$$P_{10}(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\left[1 - P_{00}(t)\right] = \ldots = \frac{\lambda_1}{\lambda_0+\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0+\lambda_1}e^{-(\lambda_0+\lambda_1)t}.$$

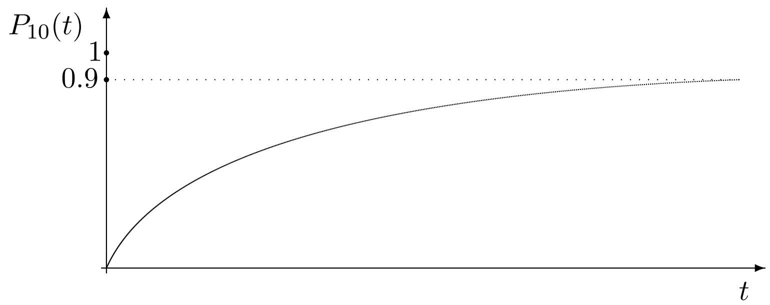
Joonistame selle funktsiooni graafiku, määrates $\lambda_0 = 1$ ja $\lambda_1 = 9$, st. korrasoleku keskmine aeg on $\frac{1}{\lambda_0} = 1$ ja rikkisoleku keskmine aeg on $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{9}$. Seega korrasoleku aeg on keskmiselt 9 korda pikem.

Asendame λ_0 ja λ_1 väärtused valemitesse:

$$P_{00}(t) = \frac{1}{10}e^{-10t} + \frac{9}{10}, \text{ ja kuna } \; e^{-10t} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0, \;\; \text{siis } \; P_{00}(t) \to 0.9$$

Analoogiliselt saame, et $P_{10}(t) \to 0.9$.





Seda olukorda, kus mõlemad tõenäosused on ära stabiliseerunud nimetatakse süsteemi tasakaalu seisundiks. Nähtub, et pika aja jooksul pole oluline, millisest seisundist süsteem startis.

Uurime süsteemi tasakaaluseisundit.

Arvestades, et suure t korral tõenäosused stabiliseeruvad, siis lihtsustuvad ka Kolmogorovi võrrandid. Kui $t \to \infty$, siis $P'_{ij}(t) \approx 0$.
Tähistame $\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = p_j$ (ei sõltu i väärtusest). Tahasuunatud võrrandid annavad meile samasuse:

$$0 = \lambda_0 p_0 - \lambda_0 p_0$$

$$0 = \lambda_1 p_0 - \lambda_1 p_0$$

Tasakaaluseisundi väljaselgitamiseks kasutatakse Kolmogorovi ettesuunatud võrrandeid

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} \lambda_k P_{kj} P_{ik}(t) - \lambda_j P_{ij}(t),$$

tasakaaluseisundis: $0 = \sum_{k\neq j} \lambda_k P_{kj} p_k - \lambda_j p_j,\ j = 0, 1, 2, \ldots$.
Meie näites (kahe olekuga) avalduvad need seisundid järgmiselt:

$$0 = \lambda_1 P_{10} p_1 - \lambda_0 p_0$$
$$0 = \lambda_1 P_{10} p_1 - \lambda_0 p_0,$$

millest saame, et $\lambda_1 p_1 = \lambda_0 p_0$. Teiselt poolt $p_0 + p_1 = 1$ st $p_0 = 1 - p_1$. Saame:

$$\lambda_1 p_1 = \lambda_0 (1 - p_1) = \lambda_0 - \lambda_0 p_1 \Rightarrow$$

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1} = \frac{1}{10} \quad \text{(rikkisoleku tõenäosus)},$$

$$p_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1} = \frac{9}{10} \quad \text{(korrasoleku tõenäosus)}.$$

3.4 Tekke ja kao protsessid

Definitsioon 3.4.1 (Tekke ja kao protsess)**.** Pideva ajaga Markovi ahelat $\{X(t), t \geq 0\}$ seisundite hulgaga $\{0, 1, 2, \dots\}$ nimetatakse *tekke ja kao (ka sünni ja surma) protsessiks*, kui seisundist n on võimalik üle minna üksnes naaberseisunditesse $n-1$ ja $n+1$.

Tõlgendus: üleminekut	$n \to n+1$	nim. tekkeks,	μ_n- tekke intensiivsus
	$n \to n-1$	nim. kaoks,	ν_n- kao intensiivsus

Seega tekke ja kao protsessi korral $P_{ij} = 0$ kui $|i-j| \geq 2$. Olgu seisundis n viibimise aeg $T_n \sim \mathcal{E}(\lambda_n)$ ning olgu tõenäosused, et ülemineku korral süsteem läheb just nimelt seisundisse $n-1$ või $n+1$ vastavalt $P_{n,n-1}$ ja $P_{n,n+1}$. Kuna eelduse kohaselt $P_{nn} = 0$ ja üleminekud kaugemale on välistatud, siis $P_{n,n-1} + P_{n,n+1} = 1$.

Definitsioon 3.4.2 (Puhas kao/tekke protsess)**.** Kui on võimalikud ainult üleminekud $n \to n-1$, siis tekke ja kao protsessi nimetatakse *puhtaks kao protsessiks*($\mu = 0$). Kui on võimalikud ainult üleminekud $n \to n+1$, siis tekke ja kao protsessi nimetatakse *puhtaks tekke protsessiks* ($\nu = 0$).

Edaspidi on mugav kasutada suurusi

$$\nu_0 = 0,$$
$$\nu_n = \lambda_n P_{n,n-1}, n \geq 1,$$
$$\mu_n = \lambda_n P_{n,n+1}, n \geq 0,$$

kusjuures $\mu_n + \nu_n = \lambda_n$.

Lemma 3.1.1 põhjal võib siis ühtlasi kirjutada, et iga $n \geq 0$ korral

$$\lim_{h\to 0} \frac{1 - P_{nn}(h)}{h} = \lambda_n = \mu_n + \nu_n,$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{P_{n,n-1}(h)}{h} = \nu_n,$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{P_{n,n+1}(h)}{h} = \mu_n.$$

Ülalkirjeldatud protsessi korral on suurust X loomulik tõlgendada teatava populatsiooni arvukusena ajahetkel t, üleminekut $n \to n+1$ *sünnina* ning üleminekut $n \to n-1$ *surmana*. Seose $\lambda_n = \mu_n + \nu_n$ tõttu jaguneb intensiivsus λ_n kaheks liidetavaks, millest μ_n on sobiv nimetada *sünni intensiivsuseks* ja ν_n *surma intensiivsuseks*.

3.4.1 Tekke ja kao protsessi modelleerimine

Näide 3.4.1. Sünni ja surma protsessi on lihtne modelleerida. Oletame, et populatsiooni arvukus on parajasti n. Seda arvukust hoiame juhusliku aja $T_n \sim \mathcal{E}(\lambda_n)$ vältel. Seejärel toimub kas sünd või surm, mille otsustamiseks viskame "kulli ja kirja", kus "kulli"(sünd) tõenäosus on $\frac{\mu_n}{(\nu_n+\mu_n)} \equiv \frac{\mu_n}{\lambda_n}$ ja "kirja"(surm) tõenäosus on $\frac{\nu_n}{(\nu_n+\mu_n)} \equiv \frac{\nu_n}{\lambda_n}$. Kui tulemuseks on "kull", siis suurendame populatsiooni ühe võrra (sünd), "kirja"puhul aga vähendame populatsiooni ühe võrra (surm). Edasi ootame vastavalt juhusliku aja $T_{n-1} \sim \mathcal{E}(\lambda_{n-1})$ või $T_{n+1} \sim \mathcal{E}(\lambda_{n+1})$ ja kordame skeemi.

Parameetrite μ_n ja ν_n üks võimalik tõlgendus on järgmine: kui mingil hetkel populatsiooni arvukus on n, siis aeg järgmise sünnini on eksponentjaotusega keskväärtusega $\frac{1}{\nu_n}$ ja aeg järgmise surmani on ekponentjaotusega keskväärtusega $\frac{1}{\mu_n}$.

Näide 3.4.2. Seisundis n käivitatakse kaks "eksponentsiaalset kella".
1. kell hakkab tirisema eksponentsiaalse aja T_1 järel (parameetriga μ_n).
2. kell hakkab tirisema eksponentsiaalse aja T_2 järel (parameetriga ν_n).
Tirisevad täiesti juhuslikult, me ei tea kumb tiriseb varem. Kui 1. tiriseb varem, on tegu tekkega, kui 2. tiriseb varem, on tegu kaoga.

Näide 3.4.3 (Telefonikeskjaam)**.** Olgu telefonikeskjaamas n väljaminevat liini (st korraga saab sinna sisse helistada maksimaalselt n abonenti). Telefoniomanikud helistavad juhuslikel ajamomentidel (see on Poissoni protsess) intensiivsusega μ. Kui kõik liinid on kinni, siis lähevad kõned kaduma (kadudega süsteem, ei saa järjekorda jääda). Olgu süsteemi seisundiks hõivatud liinide arv ja olgu kõnede pikkused eksponentsiaalse jaotusega juhuslikud suurused parameetriga ν.

Määrame μ_k ja ν_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$:

> $\nu_k = k\nu, k = 0, 2, \ldots, n$ (kasutame lemmat 2.1.2 eksponentjaotusega juhuslike suuruste miinimumi kohta),
>
> $\mu_k = \mu, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ (helistajate arv ei sõltu sellest, mitu liini on hõivatud).

Näide 3.4.4 (Lineaarne kasvumudel)**.** Populatsiooni iga liige võib surra intensiivsusega ν ja paljuneb intensiivsusega μ. Kui meil on populatsioonis n liiget, siis populatsiooni paljunemise koguintensiivsus on $\mu_n = n\mu, n \geq 0$ ja surmaintensiivsus on $\nu_n = n\nu, n \geq 1$.

Näide 3.4.5 (Järjekorrasüsteem M/M/1)**.** Tähistatakse M/M/1 (sisendvoog Markovi protsessi kohaselt / väljundvoog Markovi protsessi kohaselt (teenindusajad on eksponentsiaalsed ja sõltumatud) / teenindajate arv).
Kliendid saabuvad teeninduspunkti, kus on üks teenindaja, Poissoni protsessi järgi intensiivsusega μ, st kahe üksteisele järgneva sündmuse (saabumise) vaheline aeg on eksponentjaotusega $\mathcal{E}(\mu)$. Saabudes läheb klient teenindaja juurde, kui too on vaba, või järjekorda, kui teenindaja pole vaba. Kui klient on ära teenindatud, siis ta lahkub ja järjekorrast tuleb uus klient teenindaja juurde. Teenindusaeg on eksponentjaotusega $\mathcal{E}(\nu)$.
Olgu $X(\mathrm{t})$ süsteemis momendil t viibivate indiviidide arv, st. järjekorras viibivate klientide arv + teenindatav, $X \geq 0$. Parameetrid: $\mu_n = \mu, n \geq 0$; $\nu_n = \nu, n \geq 1$.

3.4.2 Tasakaaluvõrrandid ja nende lahendamine tekke ja kao protsesside korral

Järgnevas pakub meile huvi stabiilseks muutunud süsteem.
Kolmogorovi ettesuunatud võrrandid avaldusid kujul

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} \lambda_k P_{kj} P_{ik}(t) - \lambda_j P_{ij}(t).$$

Tasakaaluoleku puhul (t suur):

$$P_{ij}(t) \to p_j, \ \forall i,$$
$$P'_{ij}(t) \to 0.$$

Teeme asendused ka Kolmogorovi võrrandisse, saame, et

$$0 = \sum_{k \neq j} \lambda_k P_{kj} p_k - \lambda_j p_j, \ j = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$\lambda_j p_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k P_{kj} p_k, \ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Viimane võrrand ongi tasakaaluvõrrandi (*steady state*) üldine kuju. Märgime veel, et $P_{kj} = 0$, kui $|k - j| \geq 2$ või $k = j$.
Tähistustest võrrandis:

p_j	–	tõenäosus, et süsteem on seisundis j (eeldusel, et süsteem on tasakaalus),
P_{kj}	–	tõenäosus, et süsteem läheb seisundist k seisundisse j (eeldusel, et toimub muutus),
λ_j	–	olekus j viibimise eksponentsiaalse aja parameeter,
$\lambda_j p_j$	–	seisundist j väljumise intensiivsus,
$\lambda_k P_{kj}$	–	seisundist k seisundisse j ülemineku intensiivsus,
$\sum_{k \neq j} \lambda_k P_{kj} p_k$	–	seisundisse j jõudmise intensiivsus.

Tekke ja kao korral saame minna ainult naaberseisundeisse (mitte kaugemale!), samasse seisundisse ei saa jääda. Kirjutame välja tasakaaluvõrrandi tekke ja kao protsessi korral:

$$j = 0\text{: } \lambda_0 p_0 = \lambda_1 P_{10} p_1,,$$

$$j = 1\text{: } \lambda_1 p_1 = \lambda_0 P_{01} p_0 + \lambda_2 P_{21} p_2,$$

$$j = 2\text{: } \lambda_2 p_2 = \lambda_1 P_{12} p_1 + \lambda_3 P_{32} p_3,$$

üldkujul siis

$$\lambda_j p_j = \lambda_{j-1} P_{j-1,j} \cdot p_{j-1} + \lambda_{j+1} P_{j+1,j} \cdot p_{j+1}.$$

Tekke ja kao protsessi korral kehtib $\lambda_j = \mu_j + \nu_j$, samuti kehtivad asendused $\lambda_j P_{j,j+1} = \mu_j$ ja $\lambda_j P_{j,j-1} = \nu_j$. Paneme tähele, et hetkel $j = 0$ jääb ainult tekke komponent ($\lambda_0 = \mu_0$), ära kaduda ei saa midagi ($\nu_0 = 0$).

Seda arvestades saame, et

$$j = 0\text{: } (\mu_0 + \nu_0) p_0 = \nu_1 p_1,$$

$j = 1$: $(\mu_1 + \nu_1)p_1 = \mu_0 p_0 + \nu_2 p_2$,

üldjuhul siis

$$(\mu_j + \nu_j)p_j = \mu_{j-1}p_{j-1} + \nu_{j+1}p_{j+1},\ j = 1, 2, \ldots.$$

Kirjutades eelneva tabelina üles:

seisund	lahkumise intensiivsus	=	saabumise intensiivsus	
0	$\mu_0 p_0$	=	$\nu_1 p_1$	(0)
1	$(\mu_1 + \nu_1)p_1$	=	$\mu_0 p_0 + \nu_2 p_2$	(1)
2	$(\mu_2 + \nu_2)p_2$	=	$\mu_1 p_1 + \nu_3 p_3$	(2)
$\vdots$				
n	$(\mu_n + \nu_n)p_n$	=	$\mu_{n-1}p_{n-1} + \nu_{n+1}p_{n+1}$	(n)

Meie eesmärgiks on lahendada need võrrandsüsteemid tõenäosuse suhtes. Vastavaid võrrandeid liites saame, et

$$\begin{array}{lcrcl}
(0) & \Rightarrow & \mu_0 p_0 & = & \nu_1 p_1 \\
(0) + (1) & \Rightarrow & \mu_1 p_1 & = & \nu_2 p_2 \\
(0) + (1) + (2) & \Rightarrow & \mu_2 p_2 & = & \nu_3 p_3 \\
\vdots & & & & \\
(0) + (1) + \ldots + (n) & \Rightarrow & \mu_n p_n & = & \nu_{n+1} p_{n+1}
\end{array}$$

Avaldades kõik p_0 kaudu, saame, et

$$p_1 = \frac{\mu_0 p_0}{\nu_1},$$

$$p_2 = \frac{\mu_1 p_1}{\nu_2} = \frac{\mu_0 \mu_1 p_0}{\nu_1 \nu_2},$$

$$p_3 = \frac{\mu_0 \mu_1 \mu_2}{\nu_1 \nu_2 \nu_3} p_0,$$

üldvalem seega

$$p_n = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\mu_{i-1}}{\nu_i} \right) p_0. \tag{3.10}$$

Meile ei ole teada p_0, kuid teame, et $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Asendades p_k saame, et

$$p_0 + \frac{\mu_0}{\nu_1} p_0 + \frac{\mu_1 \mu_0}{\nu_2 \nu_1} p_0 + \ldots = 1$$

ja seega p_0 avaldub kujul

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu_{i-1}}{\nu_i}}. \tag{3.11}$$

3.5 Näiteid tekke ja kao protsesside uurimise kohta

3.5.1 Kadudega teenindussüsteem. Erlangi valemid

Vaatleme veel näites 3.4.3 kirjeldatud situatsiooni: oletame, et telefonikeskjaama tulevad kutsungid Poissoni protsessi kohaselt, intensiivsusega μ. Kõnede pikkused on sõltumatud juhuslikud suurused eksponentjaotusega $\mathcal{E}(\nu)$. Telefonikeskjaamas on n liini. Abonent saab rääkida, kui vähemalt üks liin on vaba, ühendus toimub silmapilkselt. Kõikide liinide hõivatuse korral läheb kutsung kaduma st järjekorda ei eksisteeri.

Telefonikompaniid huvitab kao tõenäosus.

Olgu $X(t) :=$ ajahetkel t hõivatud liinide arv ($X(t) = 0, 1, 2, \ldots, n$).
$\mathbf{P}\{$kutsung läheb kaduma$\} = p_n$ (n liini on hõivatud, $n+1$ kutsung läheb kaduma).
Tekkeintensiivsus (kutsungi tuleku intensiivsus) seisundis k (hõivatud on k liini) on $\mu_k = \mu$ (helistajate arv ei sõltu sellest, mitu liini on hõivatud), $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Kui $k = n$, siis süsteemi juurde tulla ei saa ($\mu_n = 0$).
Kaointensiivsus (kõne pikkuse intensiivsus) seisundis k on $\nu_k = k\nu$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Tähistame süsteemi koormust (tekke ja kao intensiivsuse jagatist) järgnevalt: $\rho = \frac{\mu}{\nu}$. Teisendades valemit (3.10) saame, et

$$p_k = \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\mu_{i-1}}{\nu_i}\right) p_0 = \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\mu}{i\nu}\right) p_0 = \rho^k \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{i}\right) p_0 = \frac{\rho^k}{k!} p_0.$$

Arvestades, et $X(t)$ võimalikud olekud on $0, 1, \ldots, n$, saame

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu_{i-1}}{\nu_i}} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}},$$

seega kao tõenäosus avaldub järgmiste valemite kaudu:

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \tag{3.12}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}. \tag{3.13}$$

Ülalsaadud valemeid nimetatakse *Erlangi valemiteks.*

Näide 3.5.1. Olgu infotelefonid kahe või nelja vastuvõtjaga ($n = 2$ või $n = 4$), järjekorda ei eksisteeri. Vaatleme kõne saamise tõenäosusi:
Kui $n = 2$, siis

ρ	0.1	0.3	0.5	1	2	3	4	$\to \infty$
p_n	0.0045	0.335	0.0769	0.2	0.4	0.5294	0.6054	$\to 1$

Kui $n = 4$, siis

ρ	0.2	0.6	1	2	4	6	8	$\to \infty$
p_n	0.0001	0.003	0.0154	0.095	0.311	0.470	0.575	$\to 1$

Järeldus: üks nelja vastuvõtjaga infotelefon on kasulikum, kui kaks kahe vastuvõtjaga infotelefoni – kao tõenäosus võrreldavate koormuste korral on väiksem.

3.5.2 Teenindamine järjekorraga (järjekorrasüsteem M/M/n)

Olgu meil süsteemis n teenindajat (teenindusseadet) ja saabugu tellimused Poissoni protsessi kohaselt intensiivsusega μ. Tellimuse täitmiseks kulub eksponentsiaalne aeg parameertriga ν. Kui tellimuse saabumise momendil on üks masin vaba, siis hakkab see silmapilkselt teenindama, vastasel korral läheb tellimus järjekorda. Järjekorrast võetakse täitmiseks esimene tellimus.

Probleem: leida tellimuste arvu tõenäosus selles süsteemis (arvestades ka järjekorda).

Olgu $X :=$ süsteemis viibivate tellimuste arv = teeninduses olevate tellimuste arv + järjekorras olevate tellimuste arv, $X = 0, 1, 2, \ldots$. Meid huvitavad üksikute seisundite tõenäosused $p_0, p_1, p_2, \ldots$. Tunneme huvi stabiilse seisundi vastu. Eeldame, et süsteem on töötanud juba pikka aega ja on tasakaalus.

Vaatleme intensiivsusi:

tekkeintensiivsus: $\mu_k = \mu, \quad \forall k > 0$ (saabumise intensiivsus);

kaointensiivsus: $\nu_k = \begin{cases} k\nu, & \text{kui } 0 \le k \le n, \\ n\nu, & \text{kui } k > n \text{ (süsteemis on järjekord).} \end{cases}$

Valemite (3.10) ja (3.11) põhjal saame, et

$$p_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} p_0, & 1 \le k \le n, \\ \frac{\rho^k}{n! n^{k-n}} p_0, & k > n \end{cases}$$

ja

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} (\frac{\rho}{n})^{k-n}}.$$

Siin summa $\sum_{k=n+1}^{\infty} (\frac{\rho}{n})^{k-n}$ on geomeetriline rida teguriga $\frac{\rho}{n}$. Võimalikud on kaks varianti:

- Kui $\frac{\rho}{n} \ge 1$, st. $\rho \ge n$, siis summa on lõpmatu (koormus on suurem kui seadmete arv). Järjekord kasvab ($X \to \infty$), tasakaaluseisundit ei teki ja stabiilset olukorda ei saabu.

- Kui aga $\frac{\rho}{n} < 1 \Leftrightarrow \rho < n$, siis summa on lõplik, süsteem stabiliseerub ja leiduvad positiivsed tõenäosused $p_0, p_1, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ (süsteemi koormus ei ole liiga suur).

3.5.3 Masinate teenindamine

Vaatleme n automaati (masinat, arvutit, ...), mis normaalse töö juures ei nõua operaatori vahelesegamist ehk teenindamist. Olgu operaatorite (tehnikute) arv r, $r < n$. Eeldame, et iga automaat töötab tõrgeteta eksponentsiaalse aja parameetriga μ ja automaadi parandamise aeg on eksponentsiaalne parameetriga ν. Rikkisolevat aparaati parandab parajasti üks tehnik.

Kui suure tõenäosusega on korraga rikkis k automaati?

Seisundiks loeme rikkis automaatide arvu, teke – automaat läheb rikki, kadu – automaat parandatakse ära. Tõenäosus $\mathbf{P}\{\text{rikkis on } k \text{ automaati}\} = p_k$. Tähistame X:= rikkis olevate automaatide arv, $X = 0, 1, 2, \ldots$, n.

Tekkeintensiivsused:

$$\mu_k = (n-k)\mu, \quad 0 \le k \le n \quad \text{(hetkel on rikkis } k \text{ automaati ja töötavaid seadmeid } n-k \text{ tükki).}$$

Kaointensiivsused:

$$\nu_k = \begin{cases} k\nu, & \text{kui } 0 \le k \le r, \\ r\nu, & \text{kui } k > r \text{ (rikkis on rohkem kui parandajaid).} \end{cases}$$

Tuginedes valemitele (3.10) ja (3.11) saame, et

$$p_k = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}\rho^k p_0, & 1 \le k \le r \\ \frac{n!}{r!r^{k-r}(n-k)!}\rho^k p_0, & r < k \le n \end{cases}$$

ja

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{r} \frac{n!}{k!(n-k)!}\rho^k + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{n!}{r^{k-r}r!(n-k)!}\rho^k}.$$

Näide 3.5.2. Olgu antud, et $\rho = 0.2,\ n = 8,\ r = 2$. Kui palju on ühel tehnikul keskmiselt vaba aega?

Rikkis olevate automaatide arv ($X = k$)	Teenindamist ootavate automaatide arv (Y)	Vabade tehnikute arv (Z)	Tõenäosus p_k
0	0	2	0.2036
1	0	1	0.3258
2	0	0	0.2280
3	1	0	0.1368
4	2	0	0.0684
5	3	0	0.0274
6	4	0	0.0082
7	5	0	0.0016
8	6	0	0.0002
$EX = \sum_{i=1}^{8} kp_k = $ $= 1.6648$	$EY = 0.3978$	$EZ = 0.7330$	$\sum = 1$

Üks tehnik on seega keskmiselt vaba $\frac{0.7330}{2} = 0.3665 \approx 37\%$ ajast.

Peatükk 4

Taastuvad protsessid

4.1 Taastuva protsessi mõiste

Poissoni protsesside ja pideva ajaga Markovi ahelate korral eeldasime, et järjestikuste sündmuste vahelised ajad ehk tühemikud on sõltumatud eksponentjaotusega juhuslikud suurused. Üheks loomulikuks üldistuseks oleks siin lubada eksponentjaotuse asemel suvalist jaotust. Nii jõuamegi *taastuvate protsessideni.*

Vaatleme mingi sündmuse A toimumise ajahetki. Olgu T_i i-nda ja $(i-1)$ sündmuse toimumise vaheline aeg – tühemik. Täpsemalt, olgu $T_1, T_2, \ldots$ mittenegatiivsed, sõltumatud ja sama jaotusega juhuslikud suurused jaotusfunktsiooniga $F(x)$, kusjuures eeldame, et $\mathbf{P}\{T_i > 0\} > 0$. Suuruste T_i mittenegatiivsusest järeldub, et eksisteerib keskväärtus $\mu = ET_i = \int_0^\infty x dF(x) > 0$ (kusjuures μ võib olla lõpmatu). Tähistame nagu varemgi sündmuse n-nda toimumise aja

$$S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n, \quad n \geq 1, \quad S_0 = 0,$$

ning olgu $N(t)$ sündmuste koguarv ajavahemikus $[0, t]$, seega

$$N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\}.$$

Definitsioon 4.1.1 (Taastuv protsess)**.** Loendavat protsessi $N(t)$ nimetatakse *taastuvaks protsessiks*, kui tühemikud $T_1, T_2, \ldots$ on mittenegatiivsed, sõltumatud ja sama jaotusega juhuslikud suurused (mingi ühise jaotusfunktsiooniga $F(x)$, $T_i \sim F$), kusjuures $\mathbf{P}\{T_i > 0\} > 0$.

Kui ajamomendil t toimub sündmus, st. mingi n korral $S_n = t$, siis ütleme, et toimub protsessi taastumine. Termin on õigustatud: kuna tühemikud on sõltumatud ja sama jaotusega juhuslikud suurused, siis pärast iga taastumist algab protsess tõenäosuslikult uuesti.

Näide 4.1.1 (Pideva ajaga taastuv protsess)**.** Olgu meie käsutuses sama tüüpi seadmete lõpmatu tagavara. Oletame, et korraga on töös üksainus seade ja selle rikki mineku korral asendatakse ta silmapilkselt uuega. Kui $N(t)$ on ajamomendiks t rikki läinud seadmete arv, siis $\{N(t), t \geq 0\}$ on taastuv protsess.

Vaatleme $N(t)$ lõplikkuse küsimust.

- Tugeva suurte arvude seaduse põhjal $\frac{S_n}{n} \to \mu > 0$ tõenäosusega 1. Järelikult $n \to \infty$ korral ka $S_n \to \infty$. Järelikult $S_n \leq t$ ainult lõplik arv kordi, mistõttu iga lõpliku t korral kehtib $N(t) < \infty$ tõenäosusega 1.
- Samal ajal pole raske näha, et tõenäosusega 1 leiab aset $N(\infty) := \lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$ (eeldades, et T_n ei võta lõpmatut väärtust positiivse tõenäosusega). Tõepoolest, ainus võimalus selleks, et taastumiste koguarv $N(\infty)$ oleks lõplik, on see, et leidub lõpmata pikk tühemik T_n, millest aga saame

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{N(\infty) < \infty\} &= \mathbf{P}\{\text{mingi } n \text{ korral } T_n = \infty\} \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{T_n = \infty\}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{T_n = \infty\} = 0.\end{aligned}$$

Tuletame nüüd ühe lihtsa seose juhusliku suuruse $N(t)$ jaotuse ja lähtejaotuse F vahel. Lähtume jälle faktist, et sündmused $\{N(t) \geq n\}$ ja $\{S_n \leq t\}$ on ekvivalentsed. Seejuures on S_n kui sõltumatute ja sama jaotusega juhuslike suuruste summa jaotuseks jaotuse F n-kordne konvolutsioon[1] iseendaga, mille tähistame $F_n(t) = \mathbf{P}\{S_n < t\} = F * F * \ldots * F(t)$. Seetõttu võib hõlpsasti arvutada $N(t)$ jaotuse:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{N(t) = n\} &= \mathbf{P}\{N(t) \geq n\} - \mathbf{P}\{N(t) \geq n+1\} \\ &= \mathbf{P}\{S_n \leq t\} - \mathbf{P}\{S_{n+1} \leq t\} = F_n(t) - F_{n+1}(t). \quad (4.1)\end{aligned}$$

Näide 4.1.2 (Diskreetse ajaga taastuv protsess)**.** Olgu $\mathbf{P}\{T_n = i\} = p(1-p)^{i-1}, i \geq 1$. See tähendab, et me eeldame tühemike geomeetrilist jaotust: T_n on täisarvuline juhuslik suurus, mida võib tõlgendada kui katsete arvu, mis

[1] Jaotuste konvolutsioon. Olgu antud kaks sõltumatut juhuslikku suurust $X \sim F$ ja $Y \sim G$. Leiame $X + Y$ jaotuse F_{X+Y}:

$$\begin{aligned}F_{X+Y}(t) = \mathbf{P}\{X + Y \leq t\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\{X + Y \leq t | Y = y\} dG(y) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\{X + y \leq t\} dG(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t-y) dG(y) =: F * G(t)\end{aligned}$$

Jaotust $F_{X+Y} = F * G$ nimetame jaotuste F ja G konvolutsiooniks.

on vajalik sündmuse A esimeseks toimumiseks sõltumatute katsete seerias, kus igal üksikkatsel on A tõenäosus p. Siis S_n on katsete arv, mis on vajalik n-nda A saamiseks katseseerias. Sellise suuruse jaotus on nn. negatiivne binoomjaotus:

$$\mathbf{P}\{S_n = k\} = C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{(k-n)}, \ k \geq n.$$

4.2 Taastuva protsessi keskväärtusfunktsioon

Defineerime taastuva protsessi $\{N(t), t \geq 0\}$ *keskväärtusfunktsiooni* $m(t)$:

$$m(t) = EN(t).$$

Selle funktsiooni omaduste väljaselgitamisel on taastumisteoorias oluline osa. Näitame esmalt, et funktsioon $m(t)$ on lõplik (mis muide ei järeldu automaatselt sellest, et iga t korral $N(t) < \infty$ tõenäosusega 1).

Lemma 4.2.1. Iga $t \geq 0$ korral $m(t) < \infty$.

▶
Kuna $\mathbf{P}\{T_n = 0\} < 1$, siis leidub arv $a > 0$, mille korral $p_a := \mathbf{P}\{T_n \geq a\} > 0$. (Tõepoolest, vastasel juhul saaksime valida jada $a_k \to 0$ nii, et $\mathbf{P}\{T_n \geq a_k\} = 0$ ehk, teisiti, $\mathbf{P}\{T_n < a_k\} = 1$, millest tõenäosuse pidevuse tõttu $\mathbf{P}\{T_n = 0\} = 1$ – vastuolu.) Defineerime nüüd esialgsete tühemike kaudu uued (lühemad) tühemikud, millel on ainult kaks võimalikku väärtust:

$$T_n^* = \begin{cases} 0, & \text{kui } T_n < a \\ a, & \text{kui } T_n \geq a. \end{cases}$$

Olgu vastav loendav protsess $N^*(t) = \sup\{n : T_1^* + T_2^* + \ldots + T_n^* \leq t\}$. Ilmselt $N^*(t) \geq N(t)$, mistõttu piisab näidata, et $EN^*(t) < \infty$. Selleks paneme esmalt tähele, et uue protsessi taastumised saavad toimuda ainult ajamomentidel $0, a, 2a, 3a, \ldots$, kusjuures igal sellisel ajahetkel võib taastumisi olla kas 1 või enam. Olgu n_i taastumiste arv ajamomendil ia. See on geomeetrilise jaotusega juhuslik suurus: $\mathbf{P}\{n_i = k\} = q_a^{k-1} p_a$, kus $q_a = 1 - p_a$. Seetõttu iga $i = 0, 1, 2, \ldots$ korral $En_i = \frac{1}{p_a}$. Et aga ajamomendini t on taolisi a-kordseid hetki kõige enam $[\frac{t}{a}] + 1$ tükki, siis taastumiste keskmine koguarv kuni momendini t on

$$EN^*(t) \leq \frac{[\frac{t}{a}] + 1}{p_a} < \infty.$$

◀

Tuletame nüüd seose keskväärtusfunktsiooni $m(t)$ ja tühemike jaotuse F vahel:

$$m(t) = EN(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{N(t) \geq n\} = \ldots$$

$\{N(t) \geq n\} = \{$ajamomendiks t on toimunud vähemalt n sündmust$\} = \{S_n \leq t\}$

$$\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{S_n \leq t\} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t),$$

kus me kasutame fakti, et mittenegatiivse täisarvulise juhusliku suuruse X korral alati

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}\{X=k\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\mathbf{P}\{X=n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\mathbf{P}\{X=k\} = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{X\geq n\}. \end{aligned}$$

Seega saab $m(t)$ leida, kui on teada jaotus F. Osutub aga, et keskväärtusfunktsioon $m(t)$ omakorda määrab üheselt jaotuse F (ja seega kogu protsessi tõenäosusliku käitumise).

Teoreem 4.2.1. *Keskväärtusfunktsiooni $m(t)$ ja tühemike jaotuse F vahel on üksühene vastavus.*

▶
Rakendame võrduse $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$ mõlemale poolele Laplace'i teisendust[2]:

$$\tilde{m}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{F}_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty}[\tilde{F}(t)]^n = \frac{\tilde{F}(t)}{1-\tilde{F}(t)}.$$

Siit saame avaldada

$$\tilde{F}(t) = \frac{\tilde{m}(t)}{1+\tilde{m}(t)}.$$

◀

Näide 4.2.1. Oletame, et meil on taastuv protsess keskväärtusfunktsiooniga $m(t) = 3t, t \geq 0$. Me teame, et selline lineaarne keskväärtusfunktsioon on Poissoni protsessil ja teoreemi 4.2.1 põhjal on see ühtlasi ka ainus võimalus. Nüüd võib leida näiteks tõenäosuse, et ajamomendiks 5 on toimunud 2 sündmust. Selleks tuvastame esmalt, et intensiivsus $\lambda = 3$, millest $N(5) \sim \mathcal{P}(15)$ ja seega

$$\mathbf{P}\{N(5)=2\} = \frac{15^2}{2!}e^{-15}.$$

[2]Funktsiooni $f(t)$ Laplace'i teisenduseks nimetatakse funktsiooni $\tilde{f}(t) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-ts}ds$. Oluline on teada, et jaotuste konvolutsiooni $F_n(t)$ Laplace'i teisendus avaldub $\tilde{F}_n(t) = [\tilde{F}(t)]^n$.

4.3 Piirteoreemid

4.3.1 Taastuva protsessi intensiivsus

Eespool nägime, et $N(t) \to \infty$ kui $t \to \infty$. Mida võib öelda suhte $\frac{N(t)}{t}$ kohta? Avaldist $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\int_0^\infty x dF(x)}$ nimetatakse taastuva protsessi *intensiivsuseks.* (Poissoni protsessi korral saame $\frac{1}{\mu} = \lambda$.) Näitame, et selline nimetus on õigustatud.

Teoreem 4.3.1. *Tõenäosusega* 1 *leiab aset koondumine*

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}, \text{ kui } t \to \infty.$$

▶
Vaatleme juhuslikku suurust $S_{N(t)}$, mis on viimase taastumise hetk enne ajamomenti t või täpselt momendil t. Analoogselt on $S_{N(t)+1}$ esimene taastumismoment pärast ajahetke t. Seega $S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$, millest

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}. \tag{4.2}$$

Tugeva suurte arvude seaduse kohaselt $\frac{S_n}{n} \equiv \frac{T_1+\ldots+T_n}{n} \stackrel{p.k.}{\to} \mu$, kui $n \to \infty$. Samal ajal teame, et $N(t) \stackrel{p.k.}{\to} \infty$, kui $t \to \infty$. Kokku seega tõenäosusega 1

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu, \text{ kui } t \to \infty.$$

Samal põhjusel tõenäosusega 1

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)} \to \mu \cdot 1 = \mu, \text{ kui } t \to \infty.$$

Arvestades võrratust (4.2), ongi teoreem tõestatud.

◀

Seega taastumiste arv ühe ajaühiku kohta läheneb suurusele $\frac{1}{\mu}$. Kas sama võib öelda ka suhte $\frac{m(t)}{t}$ kohta? Esimesel pilgul näib see olevat lihtne järeldus eelnevast teoreemist ("piisab"võtta keskväärtus mõlemast poolest!). Kuid keskväärtuste kui integraalide jada koondumist on vaja eraldi põhjendada. Seda nüüd teemegi, tutvudes esmalt ühe huvitava mõistega.

4.3.2 Waldi võrdus

Olgu $X_1, X_2, \ldots$ sõltumatute juhuslike suuruste jada.

Definitsioon 4.3.1. Juhuslikku suurust N, mille võimalikeks väärtusteks on $1, 2, \ldots$, nimetatakse jada $X_1, X_2, \ldots$ *peatumishetkeks*, kui sündmuse {N = n} toimumine sõltub üksnes juhuslikest suurustest $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (ja on seega sõltumatu juhuslikest suurustest $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$).

Näide 4.3.1. Viskame kulli ja kirja. Olgu $X_n = 1$ või 0 vastavalt sellele, kas n-ndal viskel saadakse kull või kiri. Defineerime juhusliku suuruse N järgmiselt: $N = n$, kui kull saadi esimest korda n-dal viskel. Siis N on jada $X_1, X_2, \ldots$ peatumishetk.

Järgnev lemma käsitleb juhuslike suuruste summa keskväärtust juhul, kus liidetavate arv ise on ka juhuslik, olles aga seejuures peatumishetk.

Lemma 4.3.1 (Waldi võrdus)**.** Olgu $X_1, X_2, \ldots$ sõltumatute sama jaotusega ning ühise keskväärtusega juhuslike suuruste jada, $EX_i = \mu$, kusjuures $E|X_i| < \infty$. Kui N on selle jada peatumishetk, mille korral $EN < \infty$, siis

$$E\left(\sum_{n=1}^{N} X_n\right) = EN \cdot \mu. \tag{4.3}$$

Märkus. Kui N on kõikidest X_n-dest sõltumatu, siis kehtib alati $E(\sum_{n=1}^{N} X_n) = EN \cdot EX_1$.

▶
Defineerides

$$I_n = \begin{cases} 1, & \text{kui } N \geq n, \\ 0, & \text{kui } N < n. \end{cases}$$

võime kirjutada, et

$$\sum_{n=1}^{N} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} I_n X_n.$$

Seega

$$E\left(\sum_{n=1}^{N} X_n\right) = E\left(\sum_{n=1}^{\infty} I_n X_n\right) \overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} E(I_n X_n).$$

Näitame, et X_n ja I_n on sõltumatud. Definitsiooni kohaselt

$$\begin{aligned} \{I_n = 1\} &= \{N \geq n\} = \overline{\{N < n\}} \equiv \overline{\{N \leq n-1\}} \\ &= \overline{\{N = 0\} \cup \ldots \cup \{N = n-1\}}. \end{aligned}$$

Seega $\{I_n = 1\}$ ei sõltu X_n-st, millest järeldub, et ka $\{I_n = 0\} = \overline{\{I_n = 1\}}$ ei sõltu X_n-st. See aga tähendabki, et I_n on määratud juhuslike suuruste $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ poolt ning on sõltumatu juhuslikust suurusest X_n. See annab aga võrduse $E(I_n X_n) = EI_n \cdot EX_n$, mida kasutades näemegi, et

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{n=1}^{N} X_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} EI_n EX_n = \mu \cdot \sum_{n=1}^{\infty} EI_n \\
&= \mu \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{N \geq n\} = \mu \cdot EN.
\end{aligned}
$$

Jääb veel üle põhjendada võrdust (*):

- (MON) Monotoonse koondumise teoreem: kui $0 \leq X_n \uparrow X$, $\forall n$, siis ka $EX_n \uparrow EX$.
- (DOM) Lebesgue domineeritud koondumise teoreem: kui $X_n \to X$ ja $|X_n| < Y$, $\forall n$, kus $EY < \infty$, siis $EX_n \to EX$.
- Hindame:

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{n=1}^{\infty} |I_n X_n|\right) &= E\left(\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |I_n X_n|\right) \stackrel{\text{(MON)}}{=} \lim_{m\to\infty} E\left(\sum_{n=1}^{m} |I_n X_n|\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} E|I_n X_n| = \sum_{n=1}^{\infty} E|I_n X_n| < \infty.
\end{aligned}
$$

Teisest küljest, kuna $|\sum_{n=1}^{m} I_n X_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n X_n|$, siis saame

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{n=1}^{\infty} I_n X_n\right) &= E\left(\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} I_n X_n\right) \stackrel{\text{(DOM)}}{=} \lim_{m\to\infty} E\left(\sum_{n=1}^{m} I_n X_n\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} E(I_n X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(I_n X_n).
\end{aligned}
$$

◀

4.3.3 Elementaarne taastumisteoreem

Waldi võrrandi kasutamiseks taastumisteoorias peame esmalt leidma peatumishetke. Kahjuks ei ole selleks suurus $N(t)$, sest sündmus $N(t) = n$ tähendab seda, et $T_1 + T_2 + \ldots + T_n \leq t$ ja samal ajal $T_1 + T_2 + \ldots + T_{n+1} > t$. Seega nimetatud sündmus sõltub ka tühemikust T_{n+1}, mistõttu $N(t)$ ei ole peatumishetk. Küll on seda aga suurus $N(t)+1$. Tõesti, sündmus $\{N(t)+1 =$

$n\} \Leftrightarrow \{N(t) = n-1\} \Leftrightarrow \{T_1+T_2+\ldots+T_{n-1} \le t$ ja $T_1+T_2+\ldots+T_n > t\}$. Seega sündmus $\{N(t)+1 = n\}$ sõltub ainult tühemikest $T_1, T_2, \ldots, T_n$ ja mitte enam järgmistest ning on seetõttu jada $T_1, T_2, \ldots$ suhtes peatumishetk.

Samal ajal ka $E(N(t)+1) = m(t)+1 < \infty$, mistõttu rakendub Waldi võrdus.

$$E[T_1 + T_2 + \ldots + T_{N(t)+1}] = \mu \cdot E(N(t)+1) = \mu \cdot (m(t)+1)$$

ehk

$$E[S_{N(t)+1}] = \mu(m(t)+1), \tag{4.4}$$

kus eeldame, et $\mu \equiv ET_1 < \infty$.

Nüüd võime tõestada nn *elementaarse taastumisteoreemi.*

Teoreem 4.3.2. *Kui $t \to \infty$, siis*

$$\frac{m(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}.$$

▶
Vaatleme esialgu juhtu $\mu < \infty$. Et teatavasti $S_{N(t)+1} > t$, siis (4.4) tõttu ka $\mu(m(t)+1) \ge t$, millest

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \ge \frac{1}{\mu}. \tag{4.5}$$

Teiselt poolt fikseerime konstandi $M > 0$ ja defineerime uue nn lõigatud taastuva protsessi, mille tühemikud on tõkestatud arvuga M:

$$T_n^* = \begin{cases} T_n, & \text{kui } T_n \le M, \\ M, & \text{kui } T_n > M, \end{cases} \Rightarrow T_n^* \le T_n \Rightarrow \mu_M := ET_n^* \le \mu.$$

Tähistame nüüd $S_n^* := T_1^* + \ldots + T_n^*$ ja $N^*(t) = \sup\{n : S_n^* \le t\} \ge N(t)$. Kuna alati $S^*_{N^*(t)} \le t$ ja lõigatud protsessi tühemikud ei ületa arvu M, siis lisades 1 tühemiku, saame $S^*_{N^*(t)+1} \le t + M$. Waldi võrduse (4.3) põhjal siis ka $\mu_M(m^*(t)+1) \le t + M$, kus $\mu_M = ET_1^*$. Seega võime kirjutada, et

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{m^*(t)}{t} \le \frac{1}{\mu_M} \quad \forall M \text{ jaoks.}$$

Arvestades seda, et lõigatud protsessi tühemikud on lühemad, kehtib $N^*(t) \ge N(t)$ ja seega ka $m^*(t) \ge m(t)$, mistõttu

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \le \frac{1}{\mu_M} \ \forall M \text{ korral.} \tag{4.6}$$

Lastes $M \to \infty$, saame $\mu_M \to \mu$ tõttu

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \le \frac{1}{\mu}, \tag{4.7}$$

mis koos seosega (4.5) annabki soovitud tulemuse.

Kui $\mu = \infty$, siis kasutame sama lõigatud protsessi. Kuna $\mu_M \to \infty$, siis (4.6) paremal poolel saame piiril 0, kuid siis ka vasak pool $\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = 0$.

◀

4.4 Taastumisvõrrand ja selle üldistused

Käesoleva paragrahvi eesmärk on tuletada uusi võimalusi keskväärtusfunktsiooni $m(t)$ leidmiseks peale juba tuttava valemi $m(t) = \sum F_n(t)$. Selgub, et on lihtne tuletada integraalvõrrand $m(t)$ jaoks, kasutades tinglikustamist esimese taastumisaja suhtes:

$$m(t) \equiv E[N(t)] = E[E(N(t))|T_1] \equiv \int_0^\infty E[N(t)|T_1 = x]dF(x).$$

Tinglik keskväärtus aga on

$$E[N(t)|T_1 = x] = \begin{cases} 0, & \text{kui } t < x, \\ 1 + m(t-x), & \text{kui } t \geq x, \end{cases}$$

sest kui hetkel x, $x \leq t$, toimub taastumine, siis alates sellest momendist protsess on tõenäosuslikult sama, mis esialgne protsess, ja seega esialgse protsessi taastumiste arvu keskväärtus ajahetkeni t on 1 (juba toimunud taastumine hetkel x) pluss uue, aja x võrra hiljem alanud ekvivalentse protsessi taastumiste arvu keskväärtus $m(t-x)$.

Asendades selle tingliku keskväärtuse esialgsesse võrrandisse, saame

$$m(t) = \int_0^t [1 + m(t-x)]dF(x) = F(t) + \int_0^t m(t-x)dF(x). \tag{4.8}$$

See võrrand on tuntud *taastumisvõrrandi* nime all ja mõnikord on ta $m(t)$ suhtes üpris lihtsalt lahenduv.

Järgnevat silmas pidades on kasulikum vaadelda veidi üldisemat võrrandit

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x)dF(x), \tag{4.9}$$

kus h ja F on teada ja g otsitav. Sellist võrrandit nimetame *taastumistüüpi võrrandiks* ja tema lahend on toodud järgnevas lemmas.

Lemma 4.4.1. Võrrandi (4.9) lahendiks on funktsioon

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-x)dm(x), \text{ kus } m(t) = \sum_{n=1}^\infty F_n(t). \tag{4.10}$$

▶
Võrrandi (4.9) võib esitada ka kujul $g = h + g * F$, kus $*$ tähendab konvolutsiooni. Tehes mõlema poolega Laplace'i teisenduse, saame,

$$\tilde{g}(s) = \tilde{h}(s) + \tilde{g}(s) \cdot \tilde{F}(s),$$

millest

$$\begin{aligned}\tilde{g}(s) &= \frac{\tilde{h}(s)}{1-\tilde{F}(s)} = \tilde{h}(s) + \tilde{h}(s)\frac{\tilde{F}(s)}{1-\tilde{F}(s)} \\ &= \tilde{h}(s) + \tilde{h}(s)[\tilde{F}(s) + \tilde{F}^2(s) + \tilde{F}^3(s) + \ldots] = \tilde{h}(s) + \tilde{h}(s)\tilde{m}(s).\end{aligned}$$

Viimane avaldis on aga funktsiooni $h(t) + h * m(t)$ (mis on ühtlasi valemi (4.10) parem pool), Laplace'i teisendus. Et Laplace'i teisenduste võrdsusest järeldub funktsioonide eneste võrdsus, siis on lemma tõestatud.

◀

Ülaltoodud lemmas esineva integraali $\int_0^t h(t-x)dm(x)$ leidmine on reeglina siiski raske. Osutub, et märgatavalt lihtsam on leida selle integraali piirväärtust, kui $t \to \infty$. Sellest aga on küllalt, kui huviobjektiks on funktsiooni $g(t)$ käitumine t suurte väärtuste korral (st vaadeldav protsess on käinud kaua aega). Järgnev teoreem näitabki, kuidas leida mainitud integraali piirväärtust. Enne aga tutvume ühe vajaliku mõistega. Öeldakse, et juhuslik suurus X on *võre-tüüpi* jaotusega, kui leidub konstant $d \geq 0$, mille korral $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{X = nd\} = 1$. Seega võretüüpi jaotusega X võtab ainult arvu d täiskordseid väärtusi. Suurimat taolist d nimetatakse X perioodiks. Samuti ütleme, et X jaotus F on võre-tüüpi perioodiga d.

Näide 4.4.1. Teatud mootori õlisüsteemi lisatakse õli vastavalt sellele, kas õlinivoo on allapoole lubatud miinimumtaset või veel mitte. Kontrolli ja võimalikku juurdevalamist (kuni lubatud maksimumnivooni) tehakse ainult hommikuti kell 8. Olgu T_n päevade arv, mis jääb kahe juurdevalamise vahele. Siis T_n on täisarvuline juhuslik suurus ja järelikult võre-tüüpi perioodiga 1.

Teoreem 4.4.1 (Taastumisteooria "võtmeteoreem"). *Kui F ei ole võre-tüüpi ja funktsioon $h(t), t \geq 0$, on mittenegatiivne, mittekasvav ja $\int_0^{\infty} h(t)dt < \infty$, siis*

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t h(t-x)dm(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} h(t)dt,$$

kus $\mu = \int_0^{\infty} xdF(x)$ on jaotuse F keskväärtus.

Juhime lugeja tähelepanu sellele, et paremal pool ei esine enam funktsiooni $m(t)$, lisandunud on aga suhteliselt lihtsalt leitav jaotuse F keskväärtus μ. Selle väga kasuliku teoreemi tõestust me siin ei esita (jättes ta "võtmega mustaks kastiks"). Küll aga vaatleme mõningaid ülesandeid, mille lahendamisel on teoreemil oluline osa.

4.5 Vahelduv taastumisprotsess

Vaatleme näitena kahe võimaliku seisundiga süsteemi, mida tinglikult nimetame ”korras” ja ”rikkis” (näiteks pall on kas oma meeskonna valduses või vastasmeeskonna valduses). Süsteem lähtub korras-seisundist, kuhu ta jääb ajaperioodiks pikkusega T_1, siis on ta aja U_1 rikkis, edasi aja T_2 vältel jälle korras, U_2 vältel jälle rikkis jne.

Oletame, et kõik vaadeldavad juhuslikud suurused on sõltumatud, kusjuures kõik T_n olgu jaotusega F ja kõik U_n jaotusega G. Olgu summa T_n+U_n jaotus H st $H = F * G$. Huvi pakub tõenäosus

$$P(t) := \mathbf{P}\{\text{ajamomendil } t \text{ on süsteem korras}\}.$$

Teoreem 4.5.1. *Kui $E(T+U) < \infty$ ja H ei ole võre-tüüpi, siis*

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{ET}{ET+EU}.$$

▶
Kasutame tinglikustamise võtet $T_1 + U_1$ suhtes:

$$P(t) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{\text{korras hetkel } t \mid T_1 + U_1 = x\} dH(x).$$

Kuna ajamomendil $T_1 + U_1 = x$ protsess taastub, siis $t > x$ korral vaadeldav tinglik tõenäosus on $P(t-x)$ ja siis

$$\mathbf{P}\{\text{korras hetkel } t \mid T_1 + U_1 = x\} = \begin{cases} P(t-x), & \text{kui } x \le t, \\ \mathbf{P}\{T_1 > t \mid T_1 + U_1 = x\}, & \text{kui } x > t. \end{cases}$$

Järelikult

$$P(t) = \int_0^t P(t-x)dH(x) + \int_t^\infty \mathbf{P}\{T_1 > t \mid T_1 + U_1 = x\} dH(x).$$

Viimases integraalis võib aga alumise integreerimisraja asendada 0-ga, sest juurdelisanduvas piirkonnas on integraalialune tõenäosus 0 ($U_1 \ge 0$ tõttu):

$$P(t) = \int_0^t P(t-x)dH(x) + \int_0^\infty \mathbf{P}\{T_1 > t \mid T_1 + U_1 = x\} dH(x) =$$

$$= \int_0^t P(t-x)dH(x) + \mathbf{P}\{T_1 > t\}.$$

Seega saame taastumistüüpi võrrandi

$$P(t) = 1 - F(t) + \int_0^t P(t-x)dH(x).$$

Lemma 4.4.1 põhjal on selle võrrandi täpne lahend järgmine:

$$P(t) = 1 - F(t) + \int_0^t [1 - F(t-x)]dm_H(x),$$

kus $m_H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x)$. Rakendades lõpuks taastumisteooria võtmeteoreemi võttes $h(t) = 1 - F(t)$, saame $1 - F(t) \to 0$ tõttu

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{\int_0^\infty [1 - F(t)]dt}{\int_0^\infty x dH(x)} = \frac{ET}{ET + EU}.$$

◄

Defineerides $Q(t) := \mathbf{P}\{\text{süsteem on rikkis hetkel } t\} = 1 - P(t)$, näeme, et $Q(t) \to \frac{EU}{ET+EU}$. Märgime, et me jõuaks samadele tulemustele ka siis, kui süsteemi algseisund oleks "rikkis". Ajas kauged tõenäosused ei sõltu sellise süsteemi algolekust.

Märkus Vaatleme süsteemi korrasoleku suhtelist aega $R(t)$ ajavahemikus $[0, t]$. Suure t korral on see ligikaudu

$$R(t) \approx \frac{\sum_{i=1}^{N(t)} T_i}{t} \approx \frac{\sum_{i=1}^{N(t)} T_i}{\sum_{i=1}^{N(t)} (T_i + U_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{N(t)} \frac{T_i}{N(t)}}{\sum_{i=1}^{N(t)} \frac{(T_i+U_i)}{N(t)}} \xrightarrow[t\to\infty]{p.k.} \frac{ET}{ET + EU},$$

kus $N(t)$ on "korras" perioodide arv kuni ajahetkeni t ja koondumine järeldub tugevast suurte arvude seadusest. Seega näeme, et asümptootiliselt on suurused $P(t)$ ja $R(t)$ võrdsed, kuigi nende vahel on sisuline erinevus: $P(t)$ on korrasoleku tõenäosus kindlal ajahetkel t (üle kõikide võimalike süsteemi trajektooride) ja $R(t)$ on süsteemi korrasoleku suhteline aeg $[0, t]$ vältel üle üksiku fikseeritud trajektoori.

4.6 Vanus ja jääkvanus

Taastumisteooria võtmeteoreemi teise rakendusena vaatleme kahe erilise ajaperioodi – nn. vanuse ja jääkvanuse – jaotust. *Vanuseks* hetkel t nimetatakse aega hetke t ja sellele eelneva või sellega võrdse viimase taastumismomendi vahel:

$$V(t) = t - S_{N(t)} \geq 0.$$

Jääkvanus on aga aeg momendist t kuni järgmise taastumiseni:

$$J(t) = S_{N(t)+1} - t \geq 0.$$

Vanus ja jääkvanus kokku annavad momenti t sisaldava tühemiku st $V(t) + J(t) = T_{N(t)+1}$. Kui ajamomendil t toimub taastumine, siis $S_{N(t)} = t$ ja $V(t) = 0$, $J(t) = T_{N(t)+1} > 0$.

Tuletame esmalt jääkvanuse jaotuse. Oluline on siin silmas pidada järgmist seost:

$$\forall t \geq 0,\ x > 0 \text{ korral } J(t) > x \Leftrightarrow \text{ ajavahemikus } (t, t+x] \text{ ei toimu taastumisi.} \tag{4.11}$$

Teoreem 4.6.1. *Kehtib seos* $\mathbf{P}\{J(t) \leq x\} = F(t+x) - \int_0^t [1 - F(t+x-y)]dm(y)$ *ning kui* F *ei ole võre-tüüpi, siis* $\forall x > 0$ *korral*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{J(t) \leq x\} = \frac{1}{\mu}\int_0^x [1 - F(y)]dy.$$

▶
Tähistame lihtsuse mõttes $P(t) := \mathbf{P}\{J(t) > x\}$. Kasutades tinglikustamist T_1 suhtes, saame

$$P(t) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{J(t) > x \mid T_1 = s\}dF(s).$$

Arvestades seost (4.11) ja seda, et momendil $T_1 = s$ protsess taastub, saame võrduse

$$\mathbf{P}\{J(t) > x \mid T_1 = s\} = \begin{cases} P(t-s), & \text{kui } s \leq t, \\ 0, & \text{kui } t < s \leq t+x, \\ 1, & \text{kui } s > t+x. \end{cases}$$

Integreerimise teel saame siit

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_0^t P(t-s)dF(s) + \int_{t+x}^\infty dF(s) \\ &= 1 - F(t+x) + \int_0^t P(t-s)dF(s). \end{aligned}$$

Lemma 4.4.1 põhjal ongi selle taastumistüüpi võrrandi lahendiks

$$P(t) = 1 - F(t+x) + \int_0^t [1 - F(t+x-y)]dm(y).$$

Kui F ei ole võre-tüüpi, siis saab rakendada veel taastumisteooria võtmeteoreemi, valides seal $h(t) = 1 - F(t+x)$. Nii jõuame seoseni

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty [1 - F(t+x)]dt = \frac{1}{\mu}\int_x^\infty [1 - F(y)]dy. \tag{4.12}$$

Läheme üle vastandtõenäosusele ja saamegi vajaliku tulemuse:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{J(t) \le x\} = 1 - \frac{1}{\mu}\int_x^\infty [1 - F(y)]dy = \frac{1}{\mu}\int_0^x [1 - F(y)]dy,$$

sest $\int_0^\infty [1 - F(y)]dy = \mu$.

◀

Vanuse $V(t)$ jaotuse leidmine on lihtne. Piisab arvestada, et $V(t) > x \Leftrightarrow$ $\{$ajavahemikus $(t-x, t]$ ei toimu ühtki taastumist$\}$ $\Leftrightarrow J(t-x) > x$. Seega $\mathbf{P}\{V(t) > x\} = \mathbf{P}\{J(t-x) > x\}$, millest ka $\mathbf{P}\{V(t) \le x\} = \mathbf{P}\{J(t-x) \le x\}$. Eelneva teoreemi põhjal saame järgmise tulemuse.

Järeldus

$$\mathbf{P}\{V(t) \le x\} = \begin{cases} F(t) - \int_0^t [1 - F(t-y)]dm(y), & \text{kui } x \le t, \\ 1, & \text{kui } x > t, \end{cases}$$

ning kui F ei ole võre-tüüpi, siis valemi (4.12) põhjal

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{V(t) \le x\} = \frac{1}{\mu}\int_0^x [1 - F(y)]dy.$$

Huvitav on tähele panna, et viimane avaldis on sama mis jääkvanuse korral: suure t korral vanus ja jääkvanus on ligikaudu sama jaotusega.

4.7 Tasustatud taastuvad protsessid

Paljud juhuslikud protsessid on erijuhtudeks järgmisest üldisemast mudelist. Vaatleme taastuvat protsessi tühemikega $T_1, T_2, \ldots$. Oletame lisaks, et iga taastumisega kaasneb teatav "tasu", mis olgu Y_n n-dal taastumise korral. Seejuures Y_n võib olla tühemiku pikkusest T_n sõltuv. Küll aga eeldame, et paarid (T_n, Y_n), $n \geq 1$ on sõltumatud ja sama jaotusega. Tähistame $Y(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$ – ajahetkeks t kogunenud tasu.

Näide 4.7.1. Eespool vaadeldud vahelduvaid taastumisprotsesse võib vaadelda tasustatud protsesside erijuhuna. Tühemikeks T_n loeme sel juhul "korrasperioode ja "tasuks" Y_n võtame "rikkis" seisundi pikkuse U_n.

Vaatleme näitena keskmist tasu ühe ajaühiku kohta pika aja vältel.

Teoreem 4.7.1. *Kui $EY_n = EY$ ja $ET_n = ET$ on lõplikud , siis $t \to \infty$ korral*

1) peaaegu kindlasti $\frac{Y(t)}{t} \to \frac{EY}{ET}$,

2) $\frac{EY(t)}{t} \to \frac{EY}{ET}$.

►
Väide 1) on lihtsalt tõestatav: esitame $\frac{Y(t)}{t} = \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n}{N(t)} \cdot \frac{N(t)}{t}$, kus suurte arvude seaduse põhjal $\frac{\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n}{N(t)} \to EY$ ja samal ajal teoreemi 4.3.1 järgi $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{ET}$ tõenäosusega 1.

Seose 2) saamiseks meenutame, et $N(t)+1$ on jada $T_1, T_2, \ldots$ peatumishetk, st sündmus $\{N(t)+1 = n\}$ sõltub üksnes suurustest $T_1, \ldots, T_n$. Et aga tasud $Y_{n+1}, Y_{n+2}, \ldots$ on viimastest sõltumatud, siis $N(t)+1$ on ka jada $Y_1, Y_2, \ldots$ peatumishetk. Waldi võrduse põhjal siis

$$EY(t) = E\sum_{n=1}^{N(t)+1} Y_n - E[Y_{N(t)+1}] = E[N(t)+1] \cdot EY_n - E[Y_{N(t)+1}] =$$

$$= [m(t)+1] \cdot EY - E[Y_{N(t)+1}]$$

ja seega

$$\frac{EY(t)}{t} = \frac{m(t)+1}{t} \cdot EY - \frac{E[Y_{N(t)+1}]}{t}.$$

Et elementaarse taastumisteoreemi tõttu $\frac{m(t)+1}{t} \to \frac{1}{ET}$, siis jääb üle näidata, et $\frac{E[Y_{N(t)+1}]}{t} \to 0$. Üllatuseks polegi see triviaalne probleem[3]. Tähistame

[3]Ülaltoodud teoreemi 2) väite tõestus oleks olnud lihtne, kui saanuks kirjutada, et $E[Y_{N(t)+1}] = EY_1$, sest siis $\frac{E[Y_{N(t)+1}]}{t} \to 0$ vahetult. Kahjuks pole see õige: tasu $Y_N(t)+1$ sõltub tühemikust $T_{N(t)+1}$, mis pole aga sama jaotusega nagu kindla indeksiga (tavaline) tühemik T_n, vaid on sellest keskmiselt pikem(!). Seda "paradoksi"käsitleme lähemalt järgnevas alajaotuses.

$g(t) = E[Y_{N(t)+1}]$. Tinglikustamine T_1 suhtes annab

$$g(t) = \int_0^\infty E[Y_{N(t)+1} \mid T_1 = x]dF(x).$$

Kuna momendil $T_1 = x$ protsess taastub, siis tinglik keskväärtus on:

$$E[Y_{N(t)+1} \mid T_1 = x] = \begin{cases} g(t-x), & \text{kui } x < t, \\ E[Y_1 \mid T_1 = x], & \text{kui } x \geq t. \end{cases}$$

Seega saame taastumistüüpi võrrandi

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x)dF(x),$$

kus $h(t) = \int_t^\infty E[Y_1 \mid T_1 = x]dF(x)$. Et eelduse kohaselt

$$E|Y_1| = \int_0^\infty E\big[|Y_1|\big|T_1 = x\big]dF(x) < \infty,$$

siis

$$h(t) \to 0, \text{ kui } t \to \infty \text{ ja } |h(t)| \leq E|Y_1| \ \forall t \text{ korral.} \tag{4.13}$$

Lemma 4.4.1 põhjal on ülaltoodud võrrandi lahendiks

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-x)dm(x).$$

Seose (4.13) tõttu leidub suvalise $\varepsilon > 0$ korral t^* nii, et $|h(t)| < \varepsilon$, kui $t > t^*$. Järelikult kõigi $t > t^*$ korral

$$\begin{aligned} \frac{|g(t)|}{t} &\leq \frac{|h(t)|}{t} + \\ + \int_0^{t-t^*} \frac{|h(t-x)|dm(x)}{t} &+ \int_{t-t^*}^t \frac{|h(t-x)|dm(x)}{t} \leq \\ \leq \frac{\varepsilon}{t} + \frac{\varepsilon \cdot m(t-t^*)}{t} &+ E|Y_1|\frac{m(t) - m(t-t^*)}{t} \to \\ &\to \frac{\varepsilon}{ET}, \text{ kui } t \to \infty, \end{aligned}$$

kus teise ja kolmanda liidetava puhul on rakendatud elementaarset taastumisteoreemi. Et aga ε on suvaline, siis saamegi, et $\frac{g(t)}{t} \to 0$.

◀

4.8 Valiku paradoks

Vaatleme taastuvat protsessi, mille tühemike T_n jaotus F pole teada, kuid me soovime seda hinnata vaatlustulemuste põhjal. Üks mõeldav idee oleks, et me fikseerime mingi ajamomendi t ja mõõdame seda hetke katva tühemiku pikkuse. Kuna see tühemik on üks antud protsessi tühemike hulgast, siis tema jaotus peaks olema sama mis kõigil teistelgi, st F. Kuid osutub, et ta on teistest keskmiselt pikem!

Et seda paradoksi lahendada, märgime esmalt, et punkti t katva tühemiku pikkus on $T_{N(t)+1} = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$. Selle jaotuse arvutamiseks tinglikustame ta hetkele t eelneva viimase taastumismomendi $S_{N(t)}$ suhtes:

$$\mathbf{P}\{T_{N(t)+1} \geq x\} = E[\mathbf{P}\{T_{N(t)+1} \geq x \mid S_{N(t)} = t - s\}].$$

Et ajavahemikus $(t-s, t]$ taastumisi ei toimu, siis tingimusel $S_{N(t)} = t-s$ on järgmine tühemik $T_{N(t)+1}$ vähemalt pikkusega s, $T_{N(t)+1} \geq s$. Seega juhul, kui $s > x$, kehtib

$$\mathbf{P}\{T_{N(t)+1} \geq x \mid S_{N(t)} = t - s\} = 1.$$

Oletame nüüd, et $s \leq x$. Me teame, et hetkel $t - s$ toimus taastumine ja et järgneva ajaintervalli $(t-s, t]$ jooksul taastumisi ei toimunud ning samal ajal otsime tõenäosust, et taastumisi ei toimu ka pikema ajavahemiku $(t - s, x]$ jooksul. Seega me otsime tõenäosust, et tühemik on pikem kui x, kui on teada, et ta on pikem kui s. Järelikult $s \leq x$ korral

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{T_{N(t)+1} \geq x \mid S_{N(t)} = t - s\} &= \mathbf{P}\{\text{tühemik on } \geq x \mid \text{tühemik on } \geq s\} \\ &= \frac{\mathbf{P}\{\text{tühemik on } \geq x\}}{\mathbf{P}\{\text{tühemik on } \geq s\}} \\ &= \frac{1 - F(x)}{1 - F(s)} \geq 1 - F(x).\end{aligned}$$

Seega iga s korral kehtib

$$\mathbf{P}\{T_{N(t)+1} > x \mid S_{N(t)} = t - s\} \geq 1 - F(x).$$

Sama võrratus jääb muidugi kehtima ka pärast keskmistamist üle kõigi s väärtuste:

$$\mathbf{P}\{T_{N(t)+1} \geq x\} = E[\mathbf{P}\{T_{N(t)+1} \geq x \mid S_{N(t)} = t - s\}] \geq 1 - F(x).$$

NB! Mittejuhusliku tühemiku puhul kehtib täpne võrdus.

Paremal olev suurus on tõenäosus, et tavalise tühemiku pikkus on vähemalt x. Seega näeme, et tühemik, mis sisaldab etteantud punkti t, on tõenäosuslikult pikem kui tavaline tühemik.

Märkus
Intuitiivne selgitus sellele paradoksile võiks olla järgmine. Kui me anname ette ajamomendi t, siis pikkadel tühemikel on paremad võimalused selle punkti t katmiseks kui lühikestel tühemikel. Teisiti öeldes, etteantud ajahetk "valib" omale katja pigem pikemate tühemike hulgast.

Erijuhul, kui taastuvaks protsessiks on Poissoni protsess, on lihtne $T_{N(t)+1}$ jaotust vahetult välja arvutada. Selleks esitame ta vanuse ja jääkvanuse summana: $T_{N(t)+1} = V(t) + J(t)$. Poissoni protsessi korral on jääkvanus ehk aeg momendist t kuni järgmise taastumiseni eksponentjaotusega sõltumata sellest, mis on toimunud varem (sealhulgas vanusest $V(t)$). Seega kui protsessi intensiivsus on λ, siis $J(t)$ jaotusfunktsioon on

$$\mathbf{P}\{J(t) \leq x\} = 1 - e^{\lambda x}.$$

Vanuse $V(t)$ jaotuse saame aga sellest, et

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{V(t) > x\} &= \begin{cases}\mathbf{P}\{\text{ühtki taastumist intervallis } (t-x, t]\}, & \text{kui } x < t,\\ 0, & \text{kui } x \geq t,\end{cases}\\ &= \begin{cases} e^{-\lambda x}, & \text{kui } x < t,\\ 0, & \text{kui } x \geq t,\end{cases}\end{aligned}$$

mis on samaväärne järgmisega:

$$\mathbf{P}\{V(t) \leq x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{kui } x < t,\\ 1, & \text{kui } x \geq t.\end{cases}$$

On ilmne, et $t \to \infty$ korral viimane jaotusfunktsioon läheneb samuti eksponentjaotuse omale ja seega $T_{N(t)+1}$ on suure t korral ligikaudu võrdne kahe sõltumatu sama eksponentjaotusega juhusliku suuruse summaga, mis teatavasti on gamma-jaotusega. Siit tuleneb ühtlasi, et suure t korral etteantud ajamomenti kattev tühemik on keskmiselt peaaegu *kaks korda* pikem kui tavaline tühemik.

Peatükk 5

Browni liikumine

5.1 Browni liikumise definitsioon

Siiani vaatlesime juhusliku ekslemise puhul diskreetset protsessi. Browni liikumise korral muudetakse nii samm kui ajaintervall väiksemaks. Tähistame $X(t) = \Delta x(X_1 + X_2 + \ldots + X_{[\frac{t}{\Delta t}]})$, kus

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{tõenäosusega } \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{tõenäosusega } \frac{1}{2}, \end{cases}$$

Δx – ühe sammu pikkus,

Δt – sammu ajaline kestvus,

$[\frac{t}{\Delta t}]$ – sammude arv ajavahemikus $[0, t]$.

Laseme $\Delta t \to 0, \Delta x \to 0$, siis sellest järeldub, et $[\frac{t}{\Delta t}]$ kasvab (sammude arv suureneb). $X_1, X_2, \ldots, X_{[\frac{t}{\Delta t}]}$ on sõltumatud sama jaotusega juhuslikud suurused, mille korral $EX_i = 0, DX_i = 1, EX(t) = 0, DX(t) = (\Delta x)^2[\frac{t}{\Delta t}]$. Meenutame, et tsentraalse piiriteoreemi põhjal on summa jaotus $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1)$, kus $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ ning $EX_i = \mu$, $DX_i = \sigma^2$. Sellest saame, et kui $\Delta t \to 0$, siis

$$\frac{X(t)}{\Delta x\sqrt{[\frac{t}{\Delta t}]}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1)$$

ehk

$$X(t) \sim N(0, \sqrt{[\frac{t}{\Delta t}]}\Delta x).$$

Valime Δx sellise, et $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \text{ const } = c^2$. Sel juhul $X(t) \sim N(0, c\sqrt{t})$, $DX(t) = c^2 \cdot t$. Saadava protsessi omadused:

(i) $EX(t) = 0, DX(t) = c^2 t, X(t)$ on normaaljaotusega.

(ii) Protsessi $X(t)$ juurdekasvud mittelõikuvates ajavahemikes on sõltumatud, st. $0 \leq s \leq t \leq u \leq v$ ning $X(t) - X(s)$ ja $X(v) - X(u)$ on sõltumatud (kehtib ka n intervalli korral).

(iii) Juurdekasvud on statsionaarsed, st. $X(t+a) - X(s+a)$ jaotus ei sõltu a väärtusest.

Definitsioon 5.1.1 (Browni liikumine)**.** Juhuslikku protsessi $\{X(t), t \geq 0\}$ nimetatakse Browni liikumiseks (ehk Wieneri protsessiks), kui

(i) $X(0) = 0$,

(ii) $X(t)$ juurdekasvud on statsionaarsed ja sõltumatud,

(iii) $\forall\ t > 0$ korral $X(t) \sim N(0, c\sqrt{t})$, kus $c > 0$ on konstant.

Browni liikumisel on rakendusi nii füüsikas (difusiooniteooria) kui majanduses (aktsiate tulusus).

Kui $c \equiv 1$, siis Browni liikumist nimetatakse standardseks Browni liikumiseks. Kuna me saame protsessi $X(t)$ alati standardiseerida ja uurida protsessi $\frac{X(t)}{c}$, siis edasises vaatlemegi just standardset Browni liikumist.

Vaatleme järgnevalt Browni liikumisega seotud tõenäosuslikke probleeme. Üheks Browni liikumise oluliseks omaduseks on tema trajektooride pidevus: saab tõestada, et Browni liikumise trajektoorid, st. funktsioonid $X^\omega(t)$ on peaaegu kõikide ω korral pidevad, st. $\mathbf{P}\{\omega : X^\omega(t) \text{ on pidev } \forall t \geq 0\} = 1$.

Vaatleme Browni liikumise "lõplikumõõtmelist"jaotust, st. juhusliku vektori $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ jaotust $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Iga t_i korral kehtib, et

$$f_{X(t_i)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_i}} e^{-\frac{x^2}{2t_i}}.$$

Arvestame seda, et võrdused

$$\begin{cases} X(t_1) = x_1 \\ X(t_2) = x_2 \\ \ldots \\ X(t_n) = x_n \end{cases}$$

ja võrdused

$$\begin{cases} X(t_1) = x_1 \\ X(t_2) - X(t_1) = x_2 - x_1 \\ \ldots \\ X(t_n) - X(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1} \end{cases}$$

on ekvivalentsed, komponendid $X(t_1) = X(t_1) - X(0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ on aga sõltumatud. Saame, et

$$f_{X(t_1),\dots,X(t_n)}(x_1,\dots,x_n) \overset{ekvivalents}{=}$$

$$= f_{X(t_1),X(t_2)-X(t_1),\dots,X(t_n)-X(t_{n-1})}(x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}) = \dots$$

ning juurdekasvude sõltumatuse põhjal võime olemasoleva esitada tiheduste korrutisena, st

$$\dots = f_{X(t_1)}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X(t_n)-X(t_{n-1})}(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{{x_1}^2}{2t_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_n - t_{n-1})}} e^{-\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2(t_n - t_{n-1})}}.$$

Kasutame saadud tulemust järgmise probleemi lahendamisel: olgu teada, et Browni liikumine võtab hetkel t väärtuse b ehk $X(t) = b$, ning olgu vaja leida $X(s)$ (kus $s < t$) tinglik jaotus tingimusel, et $X(t) = b$. Otsime tihedust

$$f_{(X(s)|X(t)=b)}(x) \overset{\mathbf{P}(A|B)=\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}}{=} \frac{f_{X(s),X(t)}(x,b)}{f_{X(t)}(b)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \cdot e^{-\frac{(b-x)^2}{2(t-s)}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{b^2}{2t}}} = \dots = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{s}{t}(t-s)}} \cdot e^{-\frac{t(x - b\frac{s}{t})^2}{2s(t-s)}}.$$

Seega näeme, et $X(s)$ tinglik jaotus tingimusel $X(t) = b$ on normaaljaotus $N(\frac{s}{t}b, \sqrt{\frac{s}{t}(t-s)})$,

$$E[X(s)|X(t) = b] = \frac{s}{t}b \text{ ja } D[X(s)|X(t) = b] = \frac{s}{t}(t-s). \tag{5.1}$$

5.2 Mõned Browni liikumisega seotud jaotused

Vaatleme mõningaid Browni liikumisega seotud juhuslikke suurusi ja nende jaotusi. Olgu $\{X(t), t \geq 0\}$ Browni liikumine.

1) Aeg, millal Browni liikumine saavutab nivoo a.

Olgu $X(0) = 0$ ja olgu $a > 0$. Tähistame $T_a := \inf\{t : X(t) = a\}$, kus T_a on esimene hetk, millal Browni liikumine saavutab nivoo a. T_a on juhuslik suurus, sest T_a väärtus sõltub trajektoorist, trajektoori määrab aga ω. Leiame T_a jaotuse: $\mathbf{P}\{T_a \leq x\}$. Vaatleme tõenäosust $\mathbf{P}\{X(t) \geq a\}$ ja kasutame lahkamise võtet (täistõenäosuse valemi näol).

$$\mathbf{P}\{X(t) \geq a\} = \mathbf{P}\{X(t) \geq a | T_a \leq t\} \cdot \mathbf{P}\{T_a \leq t\} + \mathbf{P}\{X(t) \geq a | T_a > t\} \cdot \mathbf{P}\{T_a > t\},$$

kus viimane liidetav on 0, sest $a > 0$. Seega jääb üle vaid uurida situatsiooni, kus $T_a \leq t$. Meenutame, et Browni liikumise juurdekasvud on statsionaarsed, st. $X(t) - X(T_a)$ on sama jaotusega kui $X(t - T_a) - X(0) \sim N(0, \sqrt{t - T_a})$, millest järeldub, et tingimusel $T_a \leq t$ on $X(t)$ jaotus $N(a, \sqrt{t - T_a})$. Tõenäosus, et juurdekasv on positiivne ehk üleval pool a-d, on $\frac{1}{2}$. Seega sümmeetria tõttu $\mathbf{P}\{X(t) \geq a | T_a \leq t\} = \frac{1}{2}$ ning $\mathbf{P}\{X(t) \geq a\} = \frac{1}{2}\mathbf{P}\{T_a \leq t\}$. Saime, et

$$\mathbf{P}\{T_a \leq t\} = 2\mathbf{P}\{X(t) \geq a\} = 2(1 - F_{X(t)}(a)) = \dots$$

ja kuna $X(t) \sim N(0, \sqrt{t})$

$$\dots = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right].$$

Kui $a < 0$, siis sümmeetria põhjal $\mathbf{P}\{T_a \leq t\} = 2\left[1 - \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right]$.
Kui $a = 0$, siis $T_0 = 0$ ja iga $t \geq 0$ korral $\mathbf{P}\{T_a \leq t\} = 1$.

Seega kokkuvõttes saame suvalise a jaoks: $\mathbf{P}\{T_a \leq t\} = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{|a|}{\sqrt{t}}\right)\right]$.

2) Vaatleme lõigul $[0, t]$ maksimumi jaotust.

Kui $a > 0$, siis $\mathbf{P}\{\max_{0 \leq s \leq t} X(s) \geq a\} = \mathbf{P}\{T_a \leq t\} \overset{1)}{=} 2\left[1 - \Phi\left(\frac{|a|}{\sqrt{t}}\right)\right]$.
Kui $a < 0$, siis $\mathbf{P}\{\max_{0 \leq s \leq t} X(s) \geq a\} = 1$.

3) Fikseerime kaks nivood ja leiame tõenäosuse, et protsess $X(t)$ saavutab ühe nivoo enne teist.
Olgu $A > 0, B > 0$.
Otsime tõenäosust, et protsess jõuab nivoole A enne kui nivoole $-B$. Leiame kõigepealt tõenäosuse, et protsess üldse kunagi väljub lõigust $[-B, A]$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{X(t) \text{ väljub lõigust } [-B, A] \text{ mingi } t \text{ korral}\} \\
&\quad = 1 - \mathbf{P}\{X(t) \in [-B, A], \forall t \text{ korral}\} \\
&\quad \geq 1 - \mathbf{P}\{X(n) \in [-B, A],\ n = 1, 2, 3, \dots\}
\end{aligned}$$

ja kuna

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{X(n) \in [-B, A], n = 1, 2, \ldots\} \\
&\quad = \mathbf{P}\{X(1) \in [-B, A]\} \cdot \mathbf{P}\{X(2) \in [-B, A] | X(1) \in [-B, A]\} \cdot \\
&\qquad \cdot \mathbf{P}\{X(3) \in [-B, A] | X(i) \in [-B, A], i = 1, 2\} \cdot \ldots \\
&\quad \leq [\Phi(A) - \Phi(-B)] \cdot \underbrace{\mathbf{P}\{|\overbrace{X(2) - X(1)}^{N(0,1)}| < A + B\}}_{p<1} \cdot \underbrace{\mathbf{P}\{|\overbrace{X(3) - X(2)}^{N(0,1)}| < A + B\}}_{p<1} \cdot \ldots \\
&\quad = [\Phi(A) - \Phi(-B)] \prod_{n=1}^{\infty} p = 0,
\end{aligned}$$

siis

$$\mathbf{P}\{X(t) \text{ väljub lõigust } [-B, A]\} = 1 - 0 = 1.$$

Vaatleme nüüd probleemipüstituses mainitud tõenäosust. Selgub, et

$$\mathbf{P}\{X(t) \text{ jõuab nivoole } A \text{ enne kui nivoole } -B\} = \mathbf{P}\{T_A < T_B\} = \frac{B}{A + B}.$$

Meenutame sümmeetrilise juhusliku ekslemise korral laostumise probleemi: $\mathbf{P}\{$ Mängija, kes stardib algkapitaliga i, kogub N ühikut $(N > i)$ enne kui ta laostub $\} = \frac{i}{N}$. Meie nivoode korral omandab see tõenäosus järgmise kuju:

$$\mathbf{P}\{\text{ Startides seisust 0 jõuame nivoole } \underbrace{N - i}_{A} \text{ enne kui nivoole } \underbrace{-i}_{-B}\} = \frac{i}{N}.$$

Seega, mida kaugemal on $-B$, seda suurem on tõenäosus, et jõuame enne A-le ja kui kaugused on võrdsed, siis tõenäosused on võrdsed.

Näide 5.2.1. Olgu $X(t)$ Browni liikumine. Olgu teada, et $X(1) = 2$. Leida tõenäosus, et siis $X(5) < 0$.

Kuidas seda lahendada?
Kui tingimust ei oleks, siis $P\{X(5) < 0\} = \frac{1}{2}$, sest $X(t) \sim N(0, \sqrt{t})$.

Tingimust arvestades on juurdekasv $X(5) - X(1) \sim N(0, \sqrt{4})$ – see jaotus sõltub lõigu pikkusest, mitte asukohast. Saame, et

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{X(5) < 0 | X(1) = 2\} &= \mathbf{P}\{X(5) - X(1) < -2 | X(1) = 2\} \\
&= \mathbf{P}\{X(5) - X(1) < -2\} = \mathbf{P}\{X(4) < -2\} \\
&= F_{X(4)}(-2) \overset{X(4) \sim N(0,2)}{=} \Phi\left(\frac{-2}{2}\right) = \Phi(-1) = 0.16 \ .
\end{aligned}$$

5.3 Gaussi protsessid. Browni sild

Definitsioon 5.3.1. Juhuslikku protsessi $\{X(t), t \geq 0\}$ nimetatakse Gaussi protsessiks, kui suvaliste $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ korral $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ on mitmemõõtmelise normaaljaotusega.

Lihtne on näha, et Browni liikumine on Gaussi protsess. Tõepoolest, olgu $\{X(t), t \geq 0\}$ Browni liikumine, siis suvaliste $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ korral saame kõik juhuslikud suurused $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ avaldada järgmiste sõltumatute normaaljaotusega juhuslike suuruste lineaarkombinatsioonina: $X(t_1),\ X(t_2) - X(t_1),\ X(t_3) - X(t_2),\ \ldots,\ X(t_n) - X(t_{n-1})$.

Paneme tähele, et Browni liikumise võib defineerida kui Gaussi protsessi, mille korral $E[X(t)] = 0$ ja $Cov(X(s), X(t)) = \min(s, t)$.

Kontrollime seda väidet.

A. Näitame, et sellised tingimused on tõesti Browni liikumise korral täidetud: $E[X(t)] = 0$ järeldub otse definitsioonist, hindame $s \leq t$ korral

$$\begin{aligned} Cov(X(s), X(t)) &= Cov(X(s), X(s) + X(t) - X(s)) \\ &= Cov(X(s), X(s)) + Cov(X(s), X(t) - X(s)) \\ &\overset{(*)}{=} Cov(X(s), X(s)) = DX(s) = s, \end{aligned} \tag{5.2}$$

kus võrdus (*) on põhjendatud sõltumatute juurdekasvudega.

B. Teame, et normaaljaotusega juhuslike suuruste $X_1, \ldots, X_n$ korral on nende ühisjaotus üheselt määratud $E[X_i]$ ja $Cov(X_i, X_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$ poolt. Seega tingimused $E[X(t)] = 0$ ja $Cov(X(s), X(t)) = \min(s, t)$ määravad Gaussi protsessi $\{X(t), t \geq 0\}$ üheselt. Kuna Browni liikumine neid tingimusi rahuldas, siis järelikult protsess $\{X(t), t \geq 0\}$ ongi Browni liikumine.

Uurime nüüd Browni liikumise käitumist $\{X(t), t \geq 0\}$ ajavahemikus $[0, 1]$ tingimusel, et $X(1) = 0$.

Definitsioon 5.3.2. Tinglikku juhuslikku protsessi $\{X(t), 0 \leq t \leq 1 | X(1) = 0\}$, kus $\{X(t), t \geq 0\}$ on Browni liikumine, nimetatakse Browni sillaks.

Kuna Browni liikumine on Gaussi protsess, siis $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ tinglik jaotus on mitmemõõtmeline normaaljaotus, mistõttu ka Browni sild on Gaussi protsess.

Valemi (5.1) põhjal saame $0 \leq s < 1$ korral:

$$E[X(s)|X(1) = 0] = \frac{s}{1} \cdot 0 = 0$$

ja $0 \leq s < t < 1$ korral:

$$\begin{aligned}
Cov[(X(s), X(t))|X(1) = 0] &= E[(X(s)X(t) - EX(s)EX(t))|X(1) = 0] \\
&\overset{\text{B.l. def}}{=} E[X(s)X(t)|X(1) = 0] \\
&= E[E\{X(s)X(t)|X(t), X(1) = 0\}|X(1) = 0] \\
&= E[X(t)E\{X(s)|X(t)\}|X(1) = 0] \\
&\overset{(5.1)}{=} E[X(t)\frac{s}{t}X(t)|X(1) = 0] \\
&= \frac{s}{t}E[X^2(t)|X(1) = 0] \overset{(5.1)}{=} \frac{s}{t}t(1-t) = s(1-t).
\end{aligned}$$

Seega võime Browni silla defineerida kui Gaussi protsessi, mille korral $E[X(t)] = 0$ ja $Cov(X(s), X(t)) = s(1-t)$.

Lemma 5.3.1. Kui $\{X(t), t \geq 0\}$ on Browni liikumine, siis $\{Z(t), 0 \leq t \leq 1\}$ on Browni sild parajasti siis, kui $Z(t) = X(t) - tX(1)$.

▶
Kuna $X(t)$ on Gaussi protsess, siis ka $Z(t)$ on Gaussi protsess. Jääb üle näidata, et $E[Z(t)] = 0$ ja $Cov(Z(s), Z(t)) = s(1-t)$. Leiame

$$E[Z(t)] = E[X(t) - tX(1)] = 0 - t \cdot 0 = 0$$

ja

$$\begin{aligned}
Cov(Z(s), Z(t)) &= Cov(X(s) - sX(1), X(t) - tX(1)) \\
&= Cov(X(s), X(t)) - tCov(X(s), X(1)) \\
&\quad - sCov(X(1), X(t)) + stCov(X(1), X(1)) \\
&= s - ts - st + st = s(1-t).
\end{aligned}$$

◀

Peatükk 6

Statsionaarsed ja nõrgalt statsionaarsed protsessid

6.1 Definitsioon. Näited

Definitsioon 6.1.1. Juhuslikku protsessi $\{X(t), t \geq 0\}$ nimetatakse statsionaarseks protsessiks, kui suvaliste $n,\ s,\ t_1,\ \dots,\ t_n$ korral juhusliku vektori $X(t_1), \dots, X(t_n)$ ühisjaotus on sama, mis juhuslikul vektoril $X(t_1 + s), \dots, X(t_n + s)$.

Näide 6.1.1. Ergoodiline pideva ajaga Markovi ahel $\{X(t), t \geq 0\}$, mille algjaotuseks on valitud tasakaaluoleku jaotus – statsionaarsus järeldub sellest, et protsessi käitumine on tõenäosuslikult sama, mis juba tasakaaluolekusse jõudnud Markovi ahelal.

Näide 6.1.2. Protsess $\{X(t) = N(t + L) - N(t), t \geq 0\}$, kus $L > 0$ on konstant ja $\{N(t), t \geq 0\}$ on Poissoni protsess – statsionaarsus järeldub Poissoni protsessi definitsioonist.

Näide 6.1.3 (Juhuslik telegraafisignaal)**.** Olgu $\{N(t), t \geq 0\}$ Poissoni protsess ja olgu X_0 protsessist $N(t)$ sõltumatu juhuslik suurus, mille korral $\mathbf{P}\{X_0 = 1\} = \mathbf{P}\{X_0 = -1\} = \frac{1}{2}$. Protsessi $X(t) = X_0 \cdot (-1)^{N(t)},\ t \geq 0$ nimetatakse juhusliku telegraafisignaali protsessiks. Selle protsessi statsionaarsuse tõestamiseks piisab tähelepanekust, et algjaotuse X_0 konstruktsiooni tõttu on suvalise ajahetke t korral $X(t)$ väärtus kas $+1$ (tõenäosusega $\frac{1}{2}$) või -1 (tõenäosusega $\frac{1}{2}$), kusjuures $X(t)$ väärtus ei sõltu $N(t)$ väärtusest. Et aga $N(t)$ on Poissoni protsess, mis suvalisel ajahetkel t "taastub", siis $X(t)$ on sama jaotusega, mis $X(0)$, seega $X(t)$ on statsionaarne protsess.

Arvutame viimases näites toodud protsessi jaoks keskväärtus- ja kovariatsiooni-funktsiooni:

$$E[X(t)] = E[X_0 \cdot (-1)^{N(t)}] \overset{\text{sõltumatus}}{=} E[X_0]E[(-1)^{N(t)}] = 0,$$

$$\begin{aligned}
Cov[X(t), X(t+s)] &= E[X(t)X(t+s)] = E[X_0^2(-1)^{N(t)+N(t+s)}] \\
&= E[(-1)^{2N(t)}(-1)^{N(t+s)-N(t)}] = E[(-1)^{N(t+s)-N(t)}] \\
&= E[(-1)^{N(s)}] = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^i}{i!} = e^{-2\lambda s}.
\end{aligned}$$

Järgnevas defineerime statsionaarsuset üldisema tingimuse: protsessi nõrga statsionaarsuse.

Definitsioon 6.1.2. Juhuslikku protsessi $\{X(t), t \geq 0\}$ nimetatakse nõrgalt statsionaarseks, kui $E[X(t)] = c$ ja $Cov[X(t), X(t+s)]$ ei sõltu t-st.

Seega, protsess $\{X(t), t \geq 0\}$ on nõrgalt statsionaarne, kui tema kaks esimest momenti on iga t korral samad ja kui kovariatsioon $X(s)$ ja $X(t)$ vahel sõltub ainult vahemiku pikkusest $|t-s|$.

Näeme, et iga statsionaarne protsess on nõrgalt statsionaarne, vastupidine üldjuhul ei kehti. Samas, näiteks Gaussi protsesside korral on protsessi iga lõplikumõõtmeline jaotus määratud keskmiste ja kovariatsioonide poolt (sest tegu on mitmemõõtmelise normaaljaotusega), mistõttu iga nõrgalt statsionaarne Gaussi protsess on statsionaarne.

Näide 6.1.4 (Ornstein-Uhlenbecki protsess)**.** Olgu $\{X(t), t \geq 0\}$ Browni liikumine, defineerime $\alpha > 0$ jaoks

$$V(t) := e^{-\frac{\alpha t}{2}} X(e^{\alpha t}).$$

Sellist protsessi nimetatakse Ornstein-Uhlenbecki protsessiks (kasutusel näiteks statistilises mehhaanikas vedelikku või gaasi sattunud osakese kiiruse kirjeldamisel). Leiame

$$\begin{aligned}
E[(V(t)] &= 0, \\
Cov[V(t), V(t+s)] &= e^{-\frac{\alpha t}{2}} e^{-\frac{\alpha(t+s)}{2}} Cov[X(e^{\alpha t}), Xe^{\alpha(t+s)}] \\
&\overset{(5.2)}{=} e^{-\alpha t} e^{-\frac{\alpha s}{2}} e^{\alpha t} = e^{-\frac{\alpha s}{2}}.
\end{aligned}$$

Seega, $\{V(t), t \geq 0\}$ on nõrgalt statsionaarne protsess, aga samas on ta ka Gaussi protsess, sest Browni liikumine on Gaussi protsess. Siit omakorda järeldub, et $\{V(t), t \geq 0\}$ on statsionaarne.

Näide 6.1.5 (Autoregressiivne protsess)**.** Olgu $Z_0,\ Z_1,\ Z_2,\ \ldots$ mittekorreleeritud juhuslikud suurused, mille korral $EZ_n = 0,\ n \geq 0$ ja

$$DZ_n = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{1-\lambda^2}, & n = 0 \\ \sigma^2, & n \geq 1, \end{cases}$$

kus $\lambda^2 < 1$. Defineerime diskreetse ajaga juhusliku protsessi järgmiselt: $X_0 = Z_0$ ja $X_n = \lambda X_{n-1} + Z_n$, $n \geq 1$. Sellist protsessi $\{X_n, n \geq 0\}$ nimetatakse esimest järku autoregressiivseks protsessiks. Arvutame:

$$\begin{aligned} X_n &= \lambda X_{n-1} + Z_n \\ &= \lambda(\lambda X_{n-2} + Z_{n-1}) + Z_n \\ &= \lambda^2 X_{n-2} + \lambda Z_{n-1} + Z_n \\ &\ldots \\ &= \sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-i} Z_i. \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned} Cov(X_n, X_{n+m}) &= Cov\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-i} Z_i, \sum_{i=0}^{n+m} \lambda^{n+m-i} Z_i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-i} \lambda^{n+m-i} Cov(Z_i, Z_i) \\ &= \sigma^2 \lambda^{2n+m} \left(\frac{1}{1-\lambda^2} + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{-2i}\right) \\ &= \frac{\sigma^2 \lambda^m}{1-\lambda^2}, \end{aligned}$$

kus teise võrduse juures kasutasime Z_i ja Z_j mittekorreleeritust, kui $i \neq j$. Kuna $EX_n = 0$, siis tegemist on nõrgalt statsionaarse protsessiga.

Näide 6.1.6 (Juhuslik telegraafisignaal, järg)**.** Vaatame uuesti näites 6.1.3 defineeritud protsessi, aga jätame ära eelduse $\mathbf{P}\{X_0 = 1\} = \mathbf{P}\{X_0 = -1\} = \frac{1}{2}$, eeldame ainult, et $E[X(t)] = 0$. Selline protsess ei pruugi enam olla statsionaarne (tegelikult jääb protsess statsionaarseks ainult siis, kui X_0 on sümmeetrilise jaotusega), aga lihtne on näidata, et tegu on nõrgalt statsionaarse protsessiga:

$$\begin{aligned} Cov[X(t), X(t+s)] &= E[X(t)X(t+s)] = E[X_0^2(-1)^{N(t)+N(t+s)}] \\ &= E[X_0^2] e^{-2\lambda s}. \end{aligned}$$

Näide 6.1.7 (Liikuva keskmise protsess)**.** Olgu $W_0,\ W_1,\ W_2,\ \ldots$ mittekorrelleeritud juhuslikud suurused, mille korral $EW_n = \mu$ ja $DW_n = \sigma^2$, $n \geq 0$. Suvalise täisarvu $0 \leq k \leq n$ korral defineerime

$$X_n = \frac{W_n + W_{n-1} + \ldots + W_{n-k}}{k+1}.$$

Et eelduse põhjal juhuslikud suurused W_n on mittekorreleeritud, siis

$$Cov(X_n, X_{n+m}) = \begin{cases} \frac{(k+1-m)\sigma^2}{(k+1)^2}, & 0 \leq m \leq k, \\ 0, & m > k. \end{cases}$$

Seega $\{X_n, n \geq 0\}$ on nõrgalt statsionaarne protsess.