EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA FÜÜSIKA
JA ASTRONOOMIA INSTITUUDI UURIMUSED

ТРУДЫ ИНСТИТУТА ФИЗИКИ И АСТРОНОМИИ
АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР

33

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПОЛЕЙ И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

TARTU 1967 ТАРТУ

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA FÜÜSIKA
JA ASTRONOOMIA INSTITUUDI UURIMUSED
ТРУДЫ ИНСТИТУТА ФИЗИКИ И АСТРОНОМИИ
АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР
33

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПОЛЕЙ И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

TARTU 1967 ТАРТУ

Ответственный редактор И. Х. Отс
Редактор Л. Я. Рийвес

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Академии наук Эстонской ССР

РИСО № 581

ВОЛНОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В. Унт

Применяется обычный метод последовательных приближений для исследования волновых решений уравнений Эйнштейна во втором приближении. Коротко обсуждаются некоторые трудности, с которыми сталкиваются исследователи гравитационных волн. Приводятся приближенные уравнения поля в удобном для дальнейшего применения виде. Исследуются плоские гравитационные волны. Доказывается, что невозможно найти регулярное во всем пространстве второе приближение к плоским в первом приближении гравитационным волнам. Не налагая никаких координатных условий находятся соотношения, которым должны удовлетворять поправки $\underset{1}{h}_{\mu\nu}$ к галилеевой метрике, для того чтобы они были волновыми решениями уравнений Эйнштейна. В четвертой части работы эти соотношения рассматриваются как координатные условия для асимптотических значений $\underset{1}{h}_{\mu\nu}$ далеко от источника конечных размеров. При этих координатных условиях получаются во втором приближении асимптотические выражения для компонент метрического тензора, в которые вполне симметричным образом входят две величины M и $(-\Delta M)$, где M — начальная масса гравитирующей системы и ΔM — положительная величина второго порядка, которая при наличии в первом приближении излучения, монотонно возрастает. Это дает основание рассматривать ΔM как массу унесенную гравитационными волнами.

1. Введение

С первых лет создания общей теории относительности стоит на повестке дня вопрос, теряет ли нестационарная материальная система свою энергию за счет гравитационного излучения. Нетрудно найти волновые решения приближенных линеаризованных уравнений Эйнштейна. Пользуясь какимнибудь псевдотензором или комплексом энергии-импульса можно вычислить энергию носимую гравитационными волнами. Но при этом останутся по крайней мере две трудности. Во-первых, не ясно, является ли решение, полученное методом линейной аппроксимации, первым приближением к точным решениям уравнений Эйнштейна, или могут существовать решения линеаризованных уравнений Эйнштейна, которые при рассмотрении больших пространственных областей не соответствуют физически разумным точным решениям. Во-вторых, предлагалось не одно математическое выражение для вычисления энергии, носимой гравитационными волнами. Но недостаточно убедительно, соответствует ли вычисленная таким образом энергия действительной потере энергии источником. Иллюстрацией первой трудности могут быть плоские гравитационные волны. Х. Мёллер [1] своими расчетами в гармонических координатах показал, что если по методу последовательных приближений вычислить второе приближение к плоским гравитационным волнам, то получается странный результат: не существует регулярного всюду решения типа распространяющейся плоской волны. Но вследствие крайней математической сложности уравнений Эйнштейна, полностью избежать приближенных методов решения этих уравнений невозможно, тем более, что все известные нам точные волновые решения уравнений Эйнштейна очень далеки от тех волн, которые могут излучаться интересующими нас физическими системами, т. е. источниками конечных размеров. В данной работе ограничимся вторым приближением, в этом приближении должны уже сказываться эффекты, вытекающие из нелинейного характера уравнений.

Чтобы иметь бо́льшую убедительность в том, что нестационарная материальная система действительно теряет свою энергию за счет гравитационного излучения, можно попытаться найти непосредственно такое (приближенное) решение уравнений Эйнштейна, в котором полная масса излучающейся системы меняется со временем. Полную массу статической системы можно определить по асимптотическому виду линейного элемента при больших значениях радиальной координаты r. Можно рассмотреть материальную систему, которая до некоторого момента времени является статической, затем в течение определенного промежутка времени излучает гравитационные волны, после чего становится опять статической. По асимптотическому виду линейного элемента можно определить, изменилась ли масса системы за счет гравитационного излучения.

В книге В. А. Фока [2] рассматривается асимптотическая форма решений уравнений Эйнштейна в волновой зоне. Но при этом получается не вполне удовлетворительный результат. Во-первых, если обычная масса M встречается в асимптотическом выражении для плотности компоненты метрического тензора $\mathfrak{g}^{00}$ в члене вида $\frac{4\gamma M}{c^3 r}$ (здесь γ — гравитационная постоянная, c — скорость света, r — радиальная координата), то масса ΔM, которая соответствует энергии, унесенной гравитационными волнами, появляется в $\mathfrak{g}^{00}$ в виде $\frac{2\gamma\Delta M}{c^3 r}\ln r$. Последний член остается даже тогда, когда вся система после излучения становится опять статической. Во-вторых, $\frac{4\gamma M}{c^3 r}$ встречается только в $\mathfrak{g}^{00}$, в то время как член $\frac{2\gamma\Delta M}{c^3 r}\ln r$ появляется также в других компонентах плотности метрического тензора. Физически вполне обосновано требование, чтобы начальная масса всей системы и масса, унесенная гравитационными волнами, входили бы в асимптотические выражения для $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ одинаковым образом, по крайней мере тогда, когда вся система стала после определенного промежутка времени, в течение которого она была излучающей, опять статической.

Асимптотический вид решений точных уравнений Эйнштейна в подходящим образом выбранной системе координат рассматривают Х. Бонди, Дж. Ван дер Бург и К. Метцнер [3]. В последней работе ответственным за изменение массы гравитирующей системы является *news function*, которая дается далеко от источников как характеристическое начальное условие. Из работы [3] следует, что можно избежать наличие членов логарифмического типа в асимптотическом выражении для компонент метрического тензора при больших r и что материальная система теряет энергию за счет гравитационного излучения. Но метод Бонди не позволяет связать свойств *news function* со свойствами источника. Кроме того, этот метод математически очень громоздкий, недостаточно удовлетворительно определение массы. Вследствие вышесказанного метод Бонди едва ли может применяться при расчетах с конкретными источниками. Тем не менее, работа Бонди дает самые веские доводы в пользу того, что гравитационные волны несут энергию. На наш взгляд, она показывает и то, что в гармонических координатах $\ln r$ в члене $\frac{2\gamma \Delta M}{c^3 r} \ln r$ в асимптотическом выражении для $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ обусловлен не физической сущностью проблемы, а выбором координатной системы.

Возникает проблема, не обусловлено ли доказанное X. Мёллером [1] существование нерегулярности во втором приближении для плоских гравитационных волн условиями гармоничности, аналогично тому, как эти условия порождают при конечных источниках множитель* $\ln r$. В третьем пункте данной работы мы рассмотрим плоские гравитационные волны и дадим доказательство нерегулярности второго приближения для плоских гравитационных волн, без использования каких-либо координатных условий. Другими словами, мы покажем, что результат Мёллера справедлив независимо от выбора координатной системы. Но основной целью рассмотрения нами плоских гравитационных волн было получение информации, которую можно использовать при изучении гравитационных волн от источников конечных размеров. Мы предположили, что в первом приближении все компоненты метрического тензора удовлетворяют уравнениям для плоских гравитационных волн и нашли, какие соотношения должны существовать между этими компонентами, для того, чтобы были удовлетворены уравнения Эйнштейна. В четвертом пункте, где рассматриваются волны от конечных источников, мы взяли указанные соотношения в виде координатных условий для частей метрического тензора, убывающих на бесконечности как $1/r$. Интуитивные соображения в пользу такого выбора координатных условий связаны с тем обстоятельством, что далеко от источника конечных размеров, испущенную им волну в малой пространственной области можно рассматривать как плоскую, но окончательным доводом в пользу такого выбора

* К заключению о непригодности гармонических координат при исследовании гравитационных волн, по краней мере плоских волн, приходит также X. Такено [4].

координат является результат, который мы получили: начальная масса системы и величина, которую можно интерпретировать как массу унесенную гравитационными волнами, входят в асимптотические выражения для компонент метрического тензора вполне симметричным образом. Это и есть основной результат данной работы.

2. Приближенные уравнения поля

Мы будем пользоваться обычным методом последовательных приближений. Рассмотрим слабые гравитационные поля и напишем компоненты метрического тензора в квазигалилеевых координатах в виде *

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{1}$$

Здесь $\eta_{\mu\nu}$ — значения компонент метрического тензора псевдоэвклидового пространства, а $h_{\mu\nu}$ — малые поправки к галилеевой метрике. Будем искать $h_{\mu\nu}$ в виде малых величин возрастающих порядков

$$h_{\mu\nu} = \underset{1}{h}_{\mu\nu} + \underset{2}{h}_{\mu\nu} + \ldots, \tag{2}$$

где индекс под буквой обозначает порядок величины члена. Контравариантные компоненты $g^{\mu\nu}$ напишем также в виде

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu},$$

где

$$h^{\mu\nu} = \underset{1}{h}^{\mu\nu} + \underset{2}{h}^{\mu\nu} + \ldots$$

Из соотношения $g_{\alpha\mu}\, g^{\alpha\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}$ получим $\underset{1}{h}^{01} = \underset{1}{h}_{01}$, $\underset{1}{h}^{02} = \underset{1}{h}_{02}$, $\underset{1}{h}^{03} = \underset{1}{h}_{03}$ и при других значениях индексов $\underset{1}{h}^{\mu\nu} = -\underset{1}{h}_{\mu\nu}$. Далее, будем рассматривать уравнения Эйнштейна до членов второго

* Греческими буквами будем обозначать индексы, принимающие значения 0, 1, 2, 3. Как обычно, по дважды встречающемуся индексу подразумевается суммирование.

порядка включительно. В гармонических координатах именно некоторые члены второго порядка не являются в случае плоских гравитационных волн регулярными, а в случае волн от конечных источников вносят в асимптотические выражения для компонент метрического тензора нежелательный $\ln r$. Мы не будем налагать заранее координатных условий. Ограничивать произвол в выборе координатной системы будем только тогда, когда это необходимо, чтобы иметь решение интересующего нас типа (волновое решение) или же для устранения расходимости, если это оказывается возможным.

Уравнения Эйнштейна для вакуума $R_{\mu\nu}=0$ можем написать в квазигалилеевых координатах во втором приближении в виде

$$\tfrac{1}{2}\Box \underset{1}{h}_{\mu\nu} + \underset{1}{L}_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\Box \underset{2}{h}_{\mu\nu} + \underset{1+1}{K}_{\mu\nu} + \underset{2}{L}_{\mu\nu} - \underset{1+1}{\sigma}_{\mu\nu} = 0, \tag{3}$$

где $\Box$ — оператор Даламбера в псевдоэвклидовом пространстве, а индексом $1+1$ под буквой подчеркивается то обстоятельство, что данный член второго порядка образован из произведений членов первого порядка.

$$\underset{a}{L}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\underset{a}{h}_{\alpha\beta,\,\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\underset{a}{h}_{\alpha\nu,\,\mu\beta} + \underset{a}{h}_{\alpha\mu,\,\nu\beta}), \tag{4}$$

$$\underset{1+1}{K}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\underset{1}{h}^{\alpha\beta}(\underset{1}{h}_{\mu\nu,\,\alpha\beta} + \underset{1}{h}_{\alpha\beta,\,\mu\nu} - \underset{1}{h}_{\alpha\nu,\,\mu\beta} - \underset{1}{h}_{\alpha\mu,\,\nu\beta}), \tag{5}$$

$$\underset{1+1}{\sigma}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\varrho\sigma}[(\underset{1}{h}_{\mu\varrho,\,\beta} + \underset{1}{h}_{\varrho\beta,\,\mu} - \underset{1}{h}_{\mu\beta,\,\varrho})\cdot$$

$$\cdot(\underset{1}{h}_{\nu\sigma,\,\alpha} + \underset{1}{h}_{\alpha\sigma,\,\nu} - \underset{1}{h}_{\nu\alpha,\,\sigma}) - (\underset{1}{h}_{\mu\varrho,\,\nu} + \underset{1}{h}_{\nu\varrho,\,\mu} -$$

$$- \underset{1}{h}_{\mu\nu,\,\varrho})(2\underset{1}{h}_{\alpha\sigma,\,\beta} - \underset{1}{h}_{\alpha\beta,\,\sigma})]. \tag{6}$$

Приступим к исследованию уравнения (3) в случае, когда $\underset{1}{h}_{\alpha\beta}$ описывают плоские гравитацаионные волны.

3. Плоские гравитационные волны

В данной работе будем подразумевать под плоской гравитационной волной совокупность $h_{\mu\nu}$, являющихся нетривиальными решениями уравнений Эйнштейна и имеющих в соответственно выбранных квазигалилеевых координатах вид* $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(x^1, t)$ с

$$\underset{1}{h}_{\mu\nu} = \underset{1}{h}_{\mu\nu}(t - x^1). \tag{7}$$

Ниже будем пользоваться обозначением

$$\tau \equiv t - x^1. \tag{8}$$

Мы не будем исключать преобразованием координат или координатными условиями некоторые $\underset{1}{h}_{\mu\nu}(\tau)$, а найдем, какие соотношения должны существовать между $h_{\mu\nu}(\tau)$ для того, чтобы они удовлетворяли (в первом приближении) уравнениям Эйнштейна. При условии (7) получаем из (3) для членов первого порядка уравнения $\underset{1}{L}_{\mu\nu} = 0$, откуда следует**

$$\underset{1}{h}_{0N}(\tau) + \underset{1}{h}_{1N}(\tau) = 0, \tag{9}$$

$$\underset{1}{h}_{00}(\tau) + 2\underset{1}{h}_{10}(\tau) + \underset{1}{h}_{11}(\tau) = 0, \tag{10}$$

$$\underset{1}{h}_{22}(\tau) + \underset{1}{h}_{33}(\tau) = 0. \tag{11}$$

Постоянные интегрирования полагаем здесь равными нулю.

Интересно отметить, что условия (9)—(11) достаточны также и для того, чтобы в уравнениях (3) при $\mu = M$ и $\nu = N$ все нелинейные члены равнялись бы нулю. Действительно (точкой будем обозначать производные по τ)

$$\underset{1+1}{K}_{MN} = -\tfrac{1}{2}(\underset{1}{h}_{00} + 2\underset{1}{h}_{01} + \underset{1}{h}_{11})\,\underset{1}{\ddot{h}}_{MN} = 0,$$

$$\underset{1+1}{\sigma}_{MN} = -\tfrac{1}{2}\dot{h}_{MN}(\underset{1}{\dot{h}}_{00} + 2\underset{1}{\dot{h}}_{01} + \underset{1}{\dot{h}}_{11}) + \tfrac{1}{2}(\dot{h}_{M0} + \dot{h}_{M1})(\dot{h}_{N0} + \dot{h}_{N1}) = 0.$$

Производя вычисления и учитывая условия (9)—(11), получаем для величин (5)и (6) следующие значения:

$$\underset{1+1}{K}_{\mu\nu} = 0, \tag{12}$$

---

* Далее полагаем $c = 1$ и $\gamma = 1$.

** Большими латинскими буквами будем обозначать значения индексов 2, 3, а малыми значения 0, 1.

$$\underset{1+1}{\sigma_{\mu\nu}} = \sigma k_\mu k_\nu, \tag{13}$$

где k_μ — компоненты волнового вектора: $k_\mu = (1, -1, 0, 0)$

$$\sigma = -\tfrac{1}{4}(\underset{1}{\dot{h}^{mn}}\underset{1}{\dot{h}_{mn}} + \underset{1}{\dot{h}^{MN}}\underset{1}{\dot{h}_{MN}}). \tag{14}$$

Покажем, что $\sigma \geqslant 0$. Очевидно, что

$$-\underset{1}{\dot{h}^{MN}}\underset{1}{\dot{h}_{MN}} = \underset{1}{\dot{h}^2_{22}} + 2\underset{1}{\dot{h}^2_{23}} + \underset{1}{\dot{h}^2_{33}} \geqslant 0,$$

причем знак равенства получается только в том случае, если все $\underset{1}{\dot{h}_{MN}} = 0$. Остается доказать, что $-\underset{1}{\dot{h}^{mn}}\underset{1}{\dot{h}_{mn}} \geqslant 0$.

Имеем

$$-\underset{1}{\dot{h}^{mn}}\underset{1}{\dot{h}_{mn}} = \underset{1}{\dot{h}^2_{00}} - 2\underset{1}{\dot{h}^2_{01}} + \underset{1}{\dot{h}^2_{11}}. \tag{A}$$

Из условия (10) следует, что $\underset{1}{\dot{h}_{10}} = -\tfrac{1}{2}(\underset{1}{\dot{h}_{00}} + \underset{1}{\dot{h}_{11}})$. Возведя обе стороны последнего соотношения в квадрат и прибавив к правой стороне (А) неотрицательную величину, получим

$$\underset{1}{\dot{h}^2_{10}} \leqslant \tfrac{1}{4}(\underset{1}{\dot{h}_{00}} + \underset{1}{\dot{h}_{11}})^2 + \tfrac{1}{4}(\underset{1}{\dot{h}_{00}} - \underset{1}{\dot{h}_{11}})^2$$

или

$$\underset{1}{\dot{h}^2_{10}} \leqslant \tfrac{1}{2}(\underset{1}{\dot{h}^2_{00}} + \underset{1}{\dot{h}^2_{11}}).$$

Учитывая последнее неравенство, получим $-\underset{1}{\dot{h}^{mn}}\underset{1}{\dot{h}_{mn}} \geqslant 0$, причем знак равенства имеет место тогда, когда $\underset{1}{\dot{h}_{00}} = \underset{1}{\dot{h}_{11}}$. Этим мы доказали, что σ неотрицательная величина.

Приближенные уравнения Эйнштейна (3) напишутся теперь в виде

$$\tfrac{1}{2}\Box(\underset{1}{h_{\mu\nu}} + \underset{2}{h_{\mu\nu}}) + \underset{2}{L_{\mu\nu}} = \sigma k_\mu k_\nu, \tag{15}$$

где σ дано выражением (14), а

$$\underset{2}{L}_{MN}=0,$$

$$\underset{2}{L}_{Mn}=-\tfrac{1}{2}\underset{2}{h}_{0M,\,0n}+\tfrac{1}{2}\underset{2}{h}_{1M,\,1n},$$

$$\underset{2}{L}_{00}=\tfrac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\underset{2}{h}_{\alpha\beta,\,00}-\underset{2}{h}_{00,\,00}+\underset{2}{h}_{01,\,01},$$

$$\underset{2}{L}_{01}=-\tfrac{1}{2}\underset{2}{h}_{01,\,00}+\tfrac{1}{2}\underset{2}{h}_{01,\,11}+\tfrac{1}{2}\eta^{AB}\underset{2}{h}_{AB,\,01},$$

$$\underset{2}{L}_{11}=\tfrac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\underset{2}{h}_{\alpha\beta,11}-\underset{2}{h}_{10,\,10}+\underset{2}{h}_{11,\,11}.$$

Рассмотрим проблему, можно ли найти из уравнений (15) регулярные во всем пространстве $\underset{2}{h}_{\mu\nu}=\underset{2}{h}_{\mu\nu}(x^1,t)$, в случае, когда некоторые* $\underset{1}{h}_{MN}(\tau)\neq 0$ и $\sigma\neq 0$. Покажем, что при этих условиях не существует регулярного во всем пространстве решения для $\underset{2}{h}_{\mu\nu}$. При $\mu=M$, $\nu=N$ и $\mu=1$, $\nu=0$ уравнения (15) соответственно дают

$$\Box\underset{2}{h}_{MN}=0, \tag{16}$$

$$-\tfrac{1}{2}(\underset{2}{h}_{22}+\underset{2}{h}_{33})_{,\,01}=\sigma. \tag{17}$$

Из (16) следует, что $\underset{2}{h}_{MN}=\underset{2}{h}_{MN}(\tau)$. Учитывая это, можем переписать уравнение (17) в виде

$$\ddot{\underset{2}{h}}_{22}+\ddot{\underset{2}{h}}_{33}=2\sigma.$$

Видим что вторая производная от $\underset{2}{h}_{22}+\underset{2}{h}_{33}$ по τ неотрицательна и при некоторых значениях τ отлична от нуля, откуда следует, что $\underset{2}{h}_{22}+\underset{2}{h}_{33}$ не может быть конечной функцией при всех значениях τ (здесь предполагаем, что первые производные $\underset{2}{h}_{\mu\nu}$ — непрерывные функции). Следовательно, $\underset{1}{h}_{\mu\nu}=\underset{1}{h}_{\mu\nu}(\tau)$ не является первым приближением к регулярному во всем пространстве $h_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}\ (x^1,t)$, удовлетворяющему уравнениям Эйнштейна.

---

* При $\underset{1}{h}_{00}=-\underset{1}{h}_{01}=\underset{1}{h}_{11}$ и $\underset{1}{h}_{N\mu}=0$ имеем тривиальный случай плоского пространства.

4. Гравитационное излучение от источников конечных размеров

Попытаемся найти приближенное решение уравнений Эйнштейна, которое описывало бы волны от источника конечных размеров. Будем искать это решение в виде $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(\tau, r, \vartheta, \varphi)$, где $\tau = t - r$, r — радиальная координата, ϑ и φ — полярные углы. Рассмотрим проблему в волновой зоне. Волновое уравнение в плоском пространстве в полярных координатах имеет вид

$$\Box\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Delta^*\Psi = 0,$$

где Δ^* — обычный оператор Лапласа на шаре. Для волновых решений величина $\Delta^*\Psi$ будет на бесконечности убывать быстрее остальных членов и ее можно отбросить, после чего в волновом уравнении независимые переменные будут r и t, а углы ϑ и φ будут входить только как параметры *. Аналогичные результаты относительно членов, содержащих производные по ϑ и φ, мы могли бы получить и для рассматриваемых в этом пункте приближенных уравнений Эйнштейна (3). Далее, будем искать решение уравнений Эйнштейна в волновой зоне при фиксированных значениях полярных координат, направим ось x^1 вдоль радиусвектора и не будем учитывать членов, содержащих множитель $h_{\mu\nu, A}$.

Волны от источников конечных размеров имеют в волновой зоне некоторые общие черты с плоскими гравитационными волнами. Если пренебречь членами $\frac{1}{r} h_{\mu\nu}$ по сравнению с $\dot{h}_{\mu\nu}$, то можно рассматривать волну от источника конечных размеров в малой пространственной области (далеко от источника) как плоскую. Учитывая то обстоятельство, что в случае плоских волн $\underset{1}{h}_{mn}$ и $\underset{1}{h}_{Mn}$ можно исключить преобразованием координат, будем для простоты искать такое решение, где с самого начала эти члены положены равными нулю. Для $\underset{1}{h}_{MN}$ получим из (3) уравнение

* Приведенное здесь рассуждение об асимптотическом виде решения волнового уравнения взято из книги В. А. Фока [2].

$$\underset{1}{\square h}_{MN} = 0 \tag{18}$$

с дополнительным условием $\underset{1}{h}_{MM} = 0$. Решения уравнений (18) следующие:

$$\underset{1}{h}_{MN} = \frac{a_{MN}(\tau)}{r}, \tag{19}$$

где a_{MN} удовлетворяют соотношению $a_{MM} = 0$.

Потребуем, чтобы для волн от конечных источников часть $h_{\mu\nu}$, которая убывает на бесконечности как $1/r$, удовлетворяла бы координатным условиям, аналогичным соотношениям (9)—(11) предыдущего пункта. Будем обозначать индексом (k) справа сверху в скобках у рассматриваемых величин (например, $h^{(k)}_{\mu\nu}$) их часть, которая на бесконечности убывает как $1/r^k$. Теперь можем написать координатные условия в виде

$$h^{(1)}_{0N} + h^{(1)}_{1N} = 0, \tag{20}$$

$$h^{(1)}_{00} + 2h^{(1)}_{01} + h^{(1)}_{11} = 0, \tag{21}$$

$$h^{(1)}_{22} + h^{(1)}_{33} = 0. \tag{22}$$

Найдем асимптотический вид статического решения уравнений Эйнштейна при координатных условиях (20)—(22). На больших расстояниях от статического источника всякое решение описывается приближенно линейным элементом Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^{*2} - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - dr^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2).$$

Не учитывая членов порядка $\frac{M^2}{r^2}$, произведя преобразование координаты времени $t^* = t + 2M \ln r$ и введя прямоугольные координаты указанным выше образом, имеем

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + 4\frac{M}{r} dx^1 dt - \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}.$$

Легко убедиться, что для последнего линейного элемента координатные условия (20)—(22) выполняются.

Приведем все отличные от нуля $\underset{1}{h}_{\mu\nu}$:

$$\underset{1}{h}_{00} = -\underset{1}{h}_{01} = \underset{1}{h}_{11} = -\frac{2M}{r},$$

$$\underset{1}{h}_{22} = -\underset{1}{h}_{33} = \frac{a_{22}(\tau)}{r},$$

$$\underset{1}{h}_{23} = \frac{a_{23}(\tau)}{r}.$$

Далее, рассмотрим уравнения (3) в волновой зоне. Будем искать решение для тех частей $\underset{2}{h}_{\mu\nu}$, которые при возрастании r медленнее всего убывают, т. е. для $\underset{2}{h}^{(1)}_{\mu\nu}$. В самих уравнениях (3) будем учитывать только члены, убывающие на бесконечности не быстрее $1/r^2$. При этих предположениях уравнения (3) для $\underset{2}{h}_{\mu\nu}$ примут следующий вид (ниже будем подразумевать под $\underset{2}{h}_{\mu\nu}$ величины $\underset{2}{h}^{(1)}_{\mu\nu}$):

$$\tfrac{1}{2}\Box \underset{2}{h}_{\mu\nu} + \underset{2}{L}^{(2)}_{\mu\nu} + \underset{1+1}{K}^{(2)}_{\mu\nu} - \underset{1+1}{\sigma}^{(2)}_{\mu\nu} = 0, \tag{23}$$

где $L_{\mu\nu}$, $K_{\mu\nu}$ и $\sigma_{\mu\nu}$ даны соотношениями (4)—(6). Будем обозначать через $h_{\mu\nu,\bar{1}}$ такую производную от $h_{\mu\nu}$ по x^1, где не учтена зависимость $h_{\mu\nu}$ от x^1 через τ. Сразу видно, что $\underset{1}{h}_{\mu\nu,\bar{1}}$ не входят в $\underset{1+1}{K}^{(2)}_{\mu\nu}$ и $\underset{1+1}{\sigma}^{(2)}_{\mu\nu}$, так как в противном случае мы получили бы величины, убывающие на бесконечности не медленнее $1/r^3$. Учитывая это, можем сразу, на основании результатов предыдущего пункта и соотношения (19), написать

$$\underset{1+1}{\sigma}^{(2)}_{\mu\nu} = \frac{\sigma_0(\tau)}{r^2} k_\mu k_\nu,$$

где

$$\sigma_0 = \tfrac{1}{4}\left[\dot{a}^2_{22}(\tau) + 2\dot{a}^2_{23}(\tau) + \dot{a}^2_{33}(\tau)\right]. \tag{24}$$

Мы имеем также

$$\underset{1+1}{K}^{(2)}_{\mu\nu} = 0.$$

Величины $\underset{2}{h}_{mn}$ будем искать в виде $\underset{2}{h}_{mn}=\frac{b_{mn}(\tau)}{r}$. Тогда $\underset{2}{L}{}^{(2)}_{\mu\nu}$ с учетом условий (20)—(22) будут

$$\underset{2}{L}_{MN}=0,$$

$$\underset{2}{L}_{Mn}=-\tfrac{1}{2}\underset{2}{\dot{h}}_{Mn,\,1},$$

$$\underset{2}{L}_{mn}=\frac{1}{r}\dot{h}_{01}k_mk_n$$

и уравнения (23) примут вид

$$\begin{cases}\Box\underset{2}{h}_{MN}=0,\\ \tfrac{1}{2}\Box\underset{2}{h}_{Mn}-\tfrac{1}{2}\underset{2}{\dot{h}}_{Mn,\,1}=0,\\ \tfrac{1}{2}\Box\underset{2}{h}_{mn}-\frac{1}{r}\underset{2}{\dot{h}}_{01}k_mk_n=\frac{\sigma_0}{r^2}k_mk_n.\end{cases}\tag{25}$$

Интегралы уравнений (25) можно представить в виде суммы частного решения неоднородного и общего решения соответствующего однородного уравнения. Последняя часть решения в рассматриваемом приближении при переносе энергии не играет роли и мы ее здесь учитывать не будем. Одно из решений системы (25) можем написать в виде

$$\underset{2}{h}_{10}=-\frac{\Delta M(\tau)}{r},\tag{26}$$

где

$$\Delta M(\tau)=\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\sigma_0(\tau)\,d\tau.\tag{27}$$

Величина $\sigma_0\geqslant 0$, вследствие чего ΔM может только монотонно возрастать. Когда излучения нет $(\underset{1}{h}_{MN}=0)$, величина ΔM — постоянная. На основании соотношений (21) и (26) имеем

$$\underset{2}{h}_{00}+\underset{2}{h}_{11}=\frac{2\Delta M}{r}$$

и можно взять

$$\underset{2}{h}_{00}=\underset{2}{h}_{11}=\frac{\Delta M}{r}. \qquad (28)$$

Отметим, что обычно пользуются такими координатными системами, в которых уравнения для $\underset{2}{h}_{mn}$ приобретают вид

$$\tfrac{1}{2}\Box \underset{2}{h}_{mn}=\frac{\sigma_0(\tau)}{r^2}k_m k_n,$$

при интегрировании которых получаем

$$\underset{2}{h}_{mn}=\frac{\ln r}{r}\Delta M.$$

Напишем теперь асимптотические выражения для $g_{\mu\nu}$ с учетом членов двух первых порядков

$$\left\{\begin{aligned} g_{00}&=1-\frac{2[M-\Delta M(\tau)]}{r},\\ g_{01}&=\frac{2[M-\Delta M(\tau)]}{r},\\ g_{11}&=-1-\frac{2[M-\Delta M(\tau)]}{r},\\ g_{MN}&=-1+\frac{a_{MN}(\tau)}{r},\end{aligned}\right. \qquad (29)$$

где

$$\Delta M(\tau)=\tfrac{1}{4}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}[\dot{a}_{22}^2(\tau')+2\dot{a}_{23}^2(\tau')+\dot{a}_{33}^2(\tau')]\,d\tau'.$$

В этих выражениях естественно интерпретировать величину ΔM, значение которой может со временем только возрастать, как массу унесенную гравитационными волнами. Отметим, что находясь на некоторой шаровой поверхности $r=\mathrm{const}$, мы могли бы констатировать, что испущенная источником в момент времени t волна $\underset{1}{h}_{MN}$ изменила массу находящейся внутри этой поверхности материальной системы после того, когда она прошла через эту поверхность.

Поступило в редакцию
20 мая 1965 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Møller, сборник Max-Planck Festschrift, S. 139, Berlin, 1958.
2. В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, § 87, М., 1961.
3. H. Bondi, M. G. J. van der Burg, A. W. K. Metzner, Proc. Roy. Soc. **269**, № 1336, 21, 1962.
4. H. Takeno, Sci Rep. Res. Inst. Theor. Phys. Hiroshima University № 1, Hiroshima, 1961.

THE WAVE SOLUTIONS OF EINSTEIN'S FIELD EQUATIONS IN THE SECOND APPROXIMATION

V. Unt

In this paper the fast approximation method is used to examine the wave solutions of Einstein's equations in the second approximation. Some difficulties which the research workers are confronted with are considered. In the second part approximate Einstein's equations are given in a form suitable for further application. In the third part of the paper we consider gravitational waves described (in a suitably chosen coordinate system) by the metric tensor of the form $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^1, t)$. It is shown that in the case of such flat gravitational waves no regular second approximation to $g_{\mu\nu}$ exists. We used no coordinate condition; we supposed that the corrections to the Galilean metric $h_{\mu\nu}$ in the first approximation have the form $\underset{1}{h}_{\mu\nu} = \underset{1}{h}_{\mu\nu}\ (x^1 - t)$.

In the fourth part of this paper we consider gravitational waves from sources of finite size. Approximate asymptotic values (29) for $g_{\mu\nu}$ in the wave zone are found. We used the relations we got in the previous part of this paper for $\underset{1}{h}_{\mu\nu}$ in the case of flat gravitational waves for asymptotic values of $h_{\mu\nu}$ as coordinate conditions. The mass of the gravitating system M and the second order quantity — ΔM enter into the expressions (29) for $g_{\mu\nu}$ symmetrically, and we can interpret ΔM as mass carried away by gravitational waves.

О ТОЧНЫХ ПОЛУГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ДВУХПЕРЕМЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ВАКУУМНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

А. Коппель

Отыскиваются при полугеодезической ортогональной двухпеременной метрической форме точные негалилеевые решения вакуумных уравнений Эйнштейна в трех специальных случаях. Выясняется общая структура решений, если одна из компонент g_{11}, g_{22} и g_{33} метрического тензора является постоянной. При разделении переменных в этих компонентах получено четыре типа решений, причем одним из них является решение Нарликара—Кармаркара [1]. При зависимости этих компонент лишь от величины $\xi \equiv t - \frac{x_1}{c}$ получено общее решение с точностью до функции, которая является решением одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Доказывается, что решение Нарликара-Кармаркара является единственным негалилеевым решением, допускающим эвклидово 3-мерное пространство.

Доказано, что если при общей полугеодезической форме метрические коэффициенты зависят от временной координаты лишь через одну определенную функцию, входящую во все коэффициенты в виде одинакового множителя, а зависимость от всех пространственных координат произвольна, то вакуумные уравнения Эйнштейна допускают лишь галилеевые решения. На основе этой теоремы показано, что решение Рэстолла [2], толкуемое как описывающее внешнее гравитационное поле системы изолированных частиц, фактически является галилеевым.

1. Введение

а. Известен ряд точных решений уравнений Эйнштейна в так называемой *полугеодезической* координатной системе, в которых метрическая форма имеет вид * [1—11]

---

* Греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, латинские — 1, 2, 3. По дважды встречающемуся индексу производится суммирование. Для удобства индексы координат записываются внизу.

$$ds^2 = c^2dt^2 - \gamma_{ik}\, dx_i dx_k. \tag{1.1}$$

Особенно рассматривалась метрика (1.1) для *центрально-симметричного* случая. Изучались разные космологические модели [3, 7—11]. При наличии вещества с нулевым давлением получено общее центрально-симметричное решение [5, 10]. Известное статическое центрально-симметричное шварцшильдовское внешнее решение также приводимо к зависящему от времени t виду типа (1.1) [4, 9], причем

$$ds^2 = c^2dt^2 - \frac{a}{R}\, dx_1^2 - R^2 (dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2), \tag{1.2}$$

где

$$R = \left[\frac{3}{2}\, c\sqrt{a}\left(t - \frac{x_1}{c}\right)\right]^{2/3}, \qquad a^2 = \frac{2\gamma M}{c^2} \tag{1.3}$$

(γ — ньютонова гравитационная постоянная, M — масса центрального тела).

В данной работе рассмотрим полугеодезические координатные системы, для которых метрические коэффициенты γ_{ik} являются функциями от временной t и одной пространственной координат, в качестве последней выберем x_1. Кроме того, предположим, что метрическая форма инвариантна относительно преобразований $x_2' = -x_2$, $x_3' = -x_3$. При таких предположениях форма (1.1) обязательно является диагональной

$$ds^2 = c^2dt^2 - A^2dx_1^2 - B^2dx_2^2 - D^2dx_3^2, \tag{1.4}$$

где A, B, D — функции от t и x_1. Согласно общепринятой терминологии форма (1.4) является частным случаем *аксиально-симметричной* метрической формы, если координата $x_3 \equiv \varphi$ (или $x_2 \equiv \varphi$) имеет циклический характер и ее можно толковать как азимут вращения, а координатную ось x_2 (или x_3) можно толковать как ось симметрии (см., например, работу [12], стр. 264). В данной работе не будем делать никаких предположений относительно характера координат в форме (1.4) и назовем форму (1.4) просто *полугеодезической двухпеременной* метрической формой.

б. Если понимать принцип эквивалентности как утверждающий единство природы инерции и тяготения [13], то следует считать описывающими гравитационное поле также галилеевые значения компонент тензора $g_{\mu\nu}$, при которых тензор $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ исчезает, т. е. *галилеевые* решения уравнений Эйнштейна. В противном случае исключается из рассмотрения однородная и изотропная форма гравитационного поля [14]. Решения, при которых тензор кривизны ненулевой, будем называть *негалилеевыми.*

в. Целью данной работы является отыскание точных типа (1.4) негалилеевых решений вакуумных уравнений Эйнштейна в трех случаях*: 1) при $A_{,0}=0$, 2) при разделении переменных t и x_1 в функциях A, B и D и 3) при зависимости функций A, B и D от переменных t и x_1 лишь через комбинацию $\xi \equiv t - \frac{x_1}{c}$. Также ставится цель показать, при каких негалилеевых решениях типа (1.4) вакуумных уравнений Эйнштейна допускается эвклидово 3-мерное пространство — свойство, которое присуще и решению (1.2). Прежде чем приступить к решению поставленных задач докажем теорему об одном классе полугеодезических метрических форм, при котором вакуумные уравнения Эйнштейна допускают лишь галилеевые решения.

2. Теорема об одном классе полугеодезических метрических форм, описывающих только галилеевые вакуумные поля

а. Можно доказать, что *если коэффициенты метрической формы* (1.1) *имеют вид*

$$\gamma_{ik} = F^2 \bar{\gamma}_{ik}, \tag{2.1}$$

где F — функция лишь от временной координаты t, а $\bar{\gamma}_{ik}$ — произвольные функции пространственных координат x_1, x_2 и x_3, то вакуумные уравнения Эйнштейна допускают лишь галилеевые решения.

Для доказательства этой теоремы целесообразно пользоваться вакуумными уравнениями в виде [15]

---

* Запятая с индексом будет означать дифференцирование по соответствующей координате.

$$(\ln \sqrt{\gamma})_{,00} + \Gamma^{s}_{p}\Gamma^{p}_{s} = 0, \tag{2.2}$$

$$(\ln \sqrt{\gamma})_{,0i} + \Gamma^{p}_{is}\Gamma^{s}_{p} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}(\sqrt{\gamma}\,\Gamma^{p}_{i})_{,p}, \tag{2.3}$$

$$P^{k}_{i} = \frac{1}{c^2\sqrt{\gamma}}(\sqrt{\gamma}\,\Gamma^{k}_{i})_{,0} \tag{2.4}$$

и формулами для компонент тензора кривизны [16]

$$R_{0i0k} = \Gamma_{ik,0} - \Gamma^{p}_{i}\Gamma_{kp}, \tag{2.5}$$

$$R_{0ijk} = \Gamma_{ik,\,j} - \Gamma_{ij,\,k} + \Gamma^{s}_{ik}\Gamma_{js} - \Gamma^{s}_{ij}\Gamma_{ks}, \tag{2.6}$$

$$R_{hijk} = -P_{hijk} + \frac{1}{c^2}(\Gamma_{hk}\Gamma_{ij} - \Gamma_{hj}\Gamma_{ik}). \tag{2.7}$$

В этих формулах Γ^{k}_{ij} — символы Кристоффеля, составленные из γ_{ik}, $\Gamma_{ik} = \frac{1}{2}\gamma_{ik,0}$, $\Gamma^{k}_{i} = \gamma^{ks}\Gamma_{is}$, $\gamma = \det(\gamma_{ik})$, а P_{ik} и P_{hijk} — соответственно тензоры Риччи и кривизны 3-пространства с метрическим тензором γ_{ik}. Следует также иметь в виду формулу, выражающую тензор P_{hijk} через P_{ik} (см. работу [10], стр. 319)*

$$P_{hijk} = P_{hk}\gamma_{ij} - P_{hj}\gamma_{ik} + P_{ij}\gamma_{hk} - P_{ik}\gamma_{hj} +$$
$$+ \frac{1}{2}\gamma^{sp}P_{sp}(\gamma_{hj}\gamma_{ik} - \gamma_{hk}\gamma_{ij}). \tag{2.8}$$

Подставляя теперь с учетом (2.2) — (2.4) и (2.8) величины (2.1) в формулы (2.5) — (2.7), после некоторых вычислений получаем $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. Этим теорема доказана.

б. На основе доказанной теоремы можно сделать выводы относительно некоторых известных из литературы конкретных решений уравнений Эйнштейна. Также при отыскании ниже негалилеевых решений определенного типа воспользуемся этой теоремой.

При метрической форме

$$ds^2 = c^2dt^2 - h[\mu(dx_1^2 + dx_2^2) + \nu\, dx_3^2], \tag{2.9}$$

---

* Формула (2.8) отличается знаком от формулы работы [10], поскольку в работе [15] тензор P_{ik} определяется с противоположным знаком.

где h — функция от координаты t; μ и ν — функции от координат x_1 и x_2, решением вакуумных уравнений Эйнштейна занимался Рэстолл [2]. Им даны в этом случае и некоторые точные решения. Не обсуждая характер тензора кривизны, на основе внешней аналогии с внешним решением Шварцшильда Рэстолл толкует одно свое конкретное решение как описывающее аксиально-симметричное гравитационное поле, порожденное системой из N изолированных частиц. Но поскольку форма (2.9) является частным случаем формы (1.1) при условии (2.1), то в силу вышедоказанной теоремы все решения Рэстолла фактически являются галилеевыми, которые могут описывать лишь однородную и изотропную форму гравитационного поля. Поэтому также толкование решений, данное Рэстоллом, приходится считать необоснованными.

Кобушкиным [8] получено для метрической формы (1.1) с условием (2.1) специальное решение уравнений Эйнштейна с ненулевым тензором материи T_{μ}^{ν}, содержащее одну произвольную функцию от t и толкованное как аксиально-симметричное обобщение известного космологического «закрытого» решения Фридмана [3, 10]. Из вышедоказанной теоремы теперь следует, что не представляет физического интереса рассмотрение решения Кобушкина при нулевом тензоре материи, т. е. при $R_{\mu\nu} = 0$.

3. Вакуумные уравнения Эйнштейна при полугеодезической двухпеременной метрической форме

а. При форме (1.4) вакуумные уравнения (2.2) — 2.4) приобретают вид

$$A^{-1}A_{,00} + B^{-1}B_{,00} + D^{-1}D_{,00} = 0, \tag{3.1}$$

$$B^{-1}(A^{-1}B_{,1})_{,0} + D^{-1}(A^{-1}D_{,1})_{,0} = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{c^2}(BDA_{,0})_{,0} - D(A^{-1}B_{,1})_{,1} - B(A^{-1}D_{,1})_{,1} = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{c^2}(DAB_{,0})_{,0} - (A^{-1}DB_{,1})_{,1} = 0, \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{c^2}(BAD_{,0})_{,0} - (A^{-1}BD_{,1})_{,1} = 0. \tag{3.5}$$

С учетом уравнений (3.1) — (3.5) из формул (2.5) — (2.8) для ненулевых компонент тензора кривизны получаем выражения

$$R_{0101} = AA_{,00}, \tag{3.6}$$

$$R_{0202} = BB_{,00}, \tag{3.7}$$

$$R_{0303} = DD_{,00}, \tag{3.8}$$

$$R_{0212} = AB(A^{-1}B_{,1})_{,0}, \tag{3.9}$$

$$R_{0313} = AD(A^{-1}D_{,1})_{,0}, \tag{3.10}$$

$$R_{1212} = -\frac{1}{c^2} A^2B^2D^{-1}D_{,00}, \tag{3.11}$$

$$R_{2323} = \frac{1}{c^2} B^2D^2A^{-1}A_{,00}, \tag{3.12}$$

$$R_{3131} = -\frac{1}{c^2} D^2A^2B^{-1}B_{,00}. \tag{3.13}$$

В общем случае интегрирование уравнений (3.1) — (3.5) и получение общего точного решения вряд ли возможно. Во всяком случае, по данным литературы, сделать это до сих пор никому не удовалось. Приходится ограничиться либо рассмотрением частных случаев метрики (1.4), либо при общем виде этой метрики попытаться найти приближенные решения уравнений поля.

б. С учетом формул (3.6) — (3.13) из уравнений (3.1) и (3.2) непосредственно вытекает, что не существует негалилеевых решений, при которых $A = B = D$. Таким же образом непосредственно следует, что не существует негалилеевых решений, при которых сразу две из величин A, B и D являются постоянными.

Если полагать $D = \text{const}$ (или $B = \text{const}$), то из уравнений поля (3.1) — (3.5) вытекает

$$A_{,00} = 0, \quad B_{,00} = 0 \quad (\text{или } D_{,00} = 0). \tag{3.14}$$

Поскольку в силу (3.6) — (3.14) все компоненты тензора кривизны исчезают, то видим, что не существует негалилеевых решений, при которых хотя бы одна из величин B или D являлась постоянной.

в. На основе формул (3.1) — (3.13) можно также выяснить, каков общий вид галилеевых решений вакуумных уравнений Эйнштейна при форме (1.4). Из формул (3.6) — (3.8) и (3.11) — (3.13) вытекает, что в этом случае величины A, B и D имеют вид

$$A = a_1 t + a_0, \tag{3.15}$$

$$B = b_1 t + b_0, \tag{3.16}$$

$$D = d_1 t + d_0, \tag{3.17}$$

где a_1, b_1, d_1, a_0, b_0 и d_0 могут быть лишь функции от координаты x_1. При этом с учетом формул (3.9) и (3.10) из условия $R_{0ijk} = 0$ следуют соотношения

$$b_{1,1} = la_1, \quad b_{0,1} = la_0, \tag{3.18}$$

$$d_{1,1} = ma_1, \quad d_{0,1} = ma_0. \tag{3.19}$$

Кроме того, при $a_1 \neq 0$ $\quad (A_{,0} \neq 0)$ из уравнений (3.1) — (3.5) получаются соотношения

$$l^2 = \frac{1}{c^2} b_1^2 + \beta, \tag{3.20}$$

$$m^2 = \frac{1}{c^2} d_1^2 + \delta, \tag{3.21}$$

$$\frac{1}{c^2} (\beta d_1^2 + \delta b_1^2) + \beta\delta = 0, \tag{3.22}$$

где l, m — функции от x_1, а β, δ — постоянные. При $a_1 = 0$ $(A_{,0} = 0)$ величины b_1, d_1, l и m должны быть постоянными и кроме соотношений (3.18) — (3.19) имеет еще место

$$lm = \frac{1}{c^2} b_1 d_1. \tag{3.23}$$

4. Решение уравнений поля при условии $A_{,0} = 0$

а. Если $A_{,0} = 0$ при метрической форме (1.4), то с помощью преобразования $x_1' = f(x_1)$ всегда можно привести форму (1.4) к виду

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx_1^2 - B^2dx_2^2 - D^2dx_3^2, \tag{4.1}$$

т. е. к форме (1.4) с $A = 1$.

При форме (4.1) уравнения поля (3.1) — (3.5) приобретают вид

$$DB_{,00} + BD_{,00} = 0, \tag{4.2}$$

$$DB_{,01} + BD_{,01} = 0, \tag{4.3}$$

$$B_{,11} - \frac{1}{c^2} B_{,00} = 0, \tag{4.4}$$

$$D_{,11} - \frac{1}{c^2} D_{,00} = 0, \tag{4.5}$$

$$B_{,1}D_{,1} - \frac{1}{c^2} B_{,0}D_{,0} = 0. \tag{4.6}$$

Теперь можно убедиться, что система уравнений (4.2) — (4.6) допускает лишь такие негалилеевые решения, при которых метрические коэффициенты B и D являются функциями либо от величины $\xi \equiv t - \frac{x_1}{c}$, либо от $\eta \equiv t + \frac{x_1}{c}$. Поскольку с простым преобразованием $x_1' = -x_1$ всегда можно перейти от зависимости от η к зависимости от ξ и, наоборот, то без ограничения общности можно всегда полагать, что B и D являются функциями от $\xi \equiv t - \frac{x_1}{c}$. Для определения этих функнций B и D остается одно уравнение

$$DB'' + BD'' = 0, \tag{4.7}$$

где штрих означает дифференцирование по ξ.

б. В качестве примера нахождения конкретных решений уравнения (4.7) будем рассматривать случай, когда функция D имеет вид

$$D = \xi^n, \tag{4.8}$$

где n — постоянная. Тогда уравнение (4.7) приобретает вид

$$\xi^2 B'' + n(n-1) B = 0. \tag{4.9}$$

Решение этого уравнения определяется формулами (см., например, [17], стр. 447)

$$B = C_1 \xi^{1/2} \cos(b \ln \xi) + C_2 \xi^{1/2} \sin(b \ln \xi) =$$

$$= C \xi^{1/2} \cos(b \ln \xi + d), \qquad \text{при} \qquad b^2 \equiv n^2 - n - \tfrac{1}{4} > 0, \tag{4.10}$$

$$B = C_1 \xi^{1/2} + C_2 \xi^{1/2} \ln \xi, \qquad \text{при} \qquad n^2 - n - \tfrac{1}{4} = 0, \tag{4.11}$$

$$B = C_1 \xi^{1/2+b} + C_2 \xi^{1/2-b}, \qquad \text{при} \qquad b^2 \equiv \tfrac{1}{4} + n - n^2 > 0, \tag{4.12}$$

где C_1, C_2, C и d — постоянные. Таким образом, получаем соответственно три вида метрических форм

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx_1^2 - \left(t - \frac{x_1}{c}\right) C^2 \cos^2\left[b \ln\left(t - \frac{x_1}{c}\right) + \right.$$

$$\left. + d\right] dx_2^2 - \left(t - \frac{x_1}{c}\right)^{2n} dx_3^2, \tag{4.13}$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx_1^2 - \left(t - \frac{x_1}{c}\right)\left\{C_1 + C_2 \ln\left(t - \frac{x_1}{c}\right)\right\}^2 dx_2^2 -$$

$$- \left(t - \frac{x_1}{c}\right)^{1 \pm \sqrt{2}} dx_3^2, \tag{4.14}$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx_1^2 - \left(t - \frac{x_1}{c}\right)\left\{C_1 \left(t - \frac{x_1}{c}\right)^b + \right.$$

$$\left. + C_2 \left(t - \frac{x_1}{c}\right)^{-b}\right\}^2 dx_2^2 - \left(t - \frac{x_1}{c}\right)^{2n} dx_3^2. \tag{4.15}$$

Отметим также, что одно частное решение уравнения (4.7) приводит к метрической форме

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx_1^2 - \operatorname{sh}^2\left(t - \frac{x_1}{c}\right) dx_2^2 - \sin^2\left(t - \frac{x_1}{c}\right) dx_3^2. \tag{4.16}$$

Эта форма приведена Петровым как определяющая метрику пространства-времени максимальной подвижности типа T_2 по классификации Петрова с группой G_6 движения ([11], стр. 433).

5. Решение уравнений поля при разделении переменных в функциях A, B и D

а. Поставим цель выяснить, какие существуют негалилеевые решения уравнений (3.1) — (3.5), при которых функции A, B и D имеют вид

$$A = U(t)\cdot \overline{U}(x_1), \tag{5.1}$$

$$B = T(t)\cdot \overline{T}(x_1), \tag{5.2}$$

$$D = V(t)\cdot \overline{V}(x_1). \tag{5.3}$$

При этом, как непосредственно вытекает из метрической формы, с преобразованием типа $x_1' = f(x_1)$ всегда можно без ограничения общности сделать

$$\overline{U}(x_1) = 1. \tag{5.4}$$

Из результатов п. 4 следует, что в данном случае негалилеевые решения существуют лишь при условии

$$U_{,0} \neq 0. \tag{5.5}$$

Из уравнения поля (3.2) получаем, что для выведения негалилеевых решений должно иметь место

$$\overline{V}^{-1}\overline{V}_{,1} = ah_{,1}, \quad \overline{T}^{-1}\overline{T}_{,1} = bh_{,1}, \tag{5.6}$$

где h — некоторая функция координаты x_1 (при этом $h_{,1} \neq 0$), а a и b — постоянные (включая и нуль). Теперь уравнение (3.2) приобретает вид

$$a[\ln(U^{-1}V)]_{,0} + b[\ln(U^{-1}T)]_{,0} = 0. \tag{5.7}$$

После разделения переменных в уравнениях (3.1) и (3.3) — (3.5) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\overline{T}^{-1}\overline{V}^{-1}(\overline{V}\overline{T}_{,11} + \overline{T}\overline{V}_{,11}) = a_1, \tag{5.8}$$

$$\overline{T}^{-1}\overline{V}^{-1}(\overline{V}\overline{T}_{,1})_{,1} = a_2, \tag{5.9}$$

$$\overline{T}^{-1}\overline{V}^{-1}(\overline{T}\overline{V}_{,1})_{,1} = a_3, \tag{5.10}$$

$$T^{-1}V^{-1}T_{,0}V_{,0} + T^{-1}U^{-1}T_{,0}U_{,0} + V^{-1}U^{-1}V_{,0}U_{,0} =$$

$$= \frac{c^2}{2}(a_1 + a_2 + a_3)U^{-2}, \tag{5.11}$$

$$T^{-1}V^{-1}U(TVU_{,0})_{,0} = c^2 a_1, \tag{5.12}$$

$$T^{-1}V^{-1}U(VUT_{,0})_{,0} = c^2 a_2, \tag{5.13}$$

$$T^{-1}V^{-1}U(UTV_{,0})_{,0} = c^2 a_3. \tag{5.14}$$

В этих формулах a_1, a_2, a_3 — постоянные.

б. Если положим $a = b = 0$, то из уравнений (5.6) — (5.14) получим

$$\overline{V}_{,1} = \overline{T}_{,1} = 0, \tag{5.15}$$

$$U = n_1(mt + n)^{p_1}, \tag{5.16}$$

$$T = n_2(mt + n)^{p_2}, \tag{5.17}$$

$$V = n_3(mt + n)^{p_3}, \tag{5.18}$$

где $m, n, n_1, n_2, n_3, p_1, p_2$ и p_3 — постоянные. При этом имеют место соотношения

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \tag{5.19}$$

$$p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1 = 0. \tag{5.20}$$

Линейными преобразованиями типа

$$x'_\nu = \alpha x_\nu + \beta, \tag{5.21}$$

всегда можно привести метрическую форму, соответствующую решению (5.15) — (5.20) либо к виду

$$ds^2 = c^2dt^2 - t^{2p_1}dx_1^2 - t^{2p_2}dx_2^2 - t^{2p_3}dx_3^2. \tag{5.22}$$

либо к виду

$$ds^2 = c^2dt^2 - (1 + kt)^{2p_1}dx_1^2 - (1 + kt)^{2p_2}dx_2^2 -$$

$$- (1 + kt)^{2p_3}dx_3^2. \tag{5.23}$$

В последнем виде данное решение получено Нарликаром и Қармаркаром [1].

Отметим, что для получения негалилеевых решений все величины p_1, p_2 и p_3 должны быть ненулевыми.

в. Если положим $b=0$, а $a\neq 0$, то из уравнений (5.6) — (5.14) получим соотношения

$$\overline{T}_{,1}=0, \tag{5.24}$$

$$\overline{V}_{,11}-a_1\overline{V}=0, \tag{5.25}$$

$$V=\alpha U, \tag{5.26}$$

$$T=nU_{,0}=n(mU^{-1}+c^2a_1)^{1/2}, \tag{5.27}$$

$$U_{,0}^2=mU^{-1}+c^2a_1. \tag{5.28}$$

Здесь α, n и m — постоянные, причем для получения негалилеевых решений должны иметь место $m\neq 0$. Учитывая, что общее решение уравнения (5.28) определяется формулами

$$a_0\pm t=\frac{1}{c^2a_1}\sqrt{U(c^2a_1U+m)}-$$
$$-\frac{m}{c^3a_1\sqrt{-a_1}}\operatorname{arctan}\sqrt{-1-\frac{m}{c^2a_1}U^{-1}}, \quad \text{при } a_1<0, \tag{5.29}$$

$$a_0\pm t=\frac{1}{c^2a_1}\sqrt{U(c^2a_1U+m)}-$$
$$-\frac{m}{4c^3a_1\sqrt{a_1}}\ln(c\sqrt{a_1U}+\sqrt{c^2a_1U+m}), \quad \text{при } a_1>0, \tag{5.30}$$

$$U=\left[\frac{3}{2}\sqrt{m}(a_0\pm t)\right]^{2/3}, \quad \text{при } a_1=0, \tag{5.31}$$

с помощью формул (5.26) и (5.27) теперь можно найти также функции V и T.

Как видим, при $a_1\neq 0$ невозможно найти функцию U в явном виде. Метрическая форма в этом случае после преобразований типа (5.21) приобретает вид

$$ds^2=c^2dt^2-U^2dx_1^2-(mU^{-1}+c^2a_1)dx_2^2-U^2\overline{V}^2dx_3^2, \tag{5.32}$$

где $\overline{V}$ является решением уравнения (5.25). При $a_1 = 0$ можно задать метрическую форму в замкнутом виде

$$ds^2 = c^2 dt^2 - t^{4/3} dx_1^2 - t^{-2/3} dx_2^2 - t^{4/3} x_1^2 dx_3^2. \tag{5.33}$$

Но форма (5.33) не имеет самостоятельного значения. После преобразований координат

$$x_1 = \sqrt{x_1'^2 + x_3'^2}, \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = \operatorname{arctan} \frac{x_3'}{x_1'} \tag{5.34}$$

форма (5.33) оказывается частным случаем формы (5.22) при $p_1 = p_3 = \frac{2}{3}$, $p_2 = -\frac{1}{3}$. В таком виде решение (5.33) дано также Петровым ([11], стр. 225).

Если в формулах (5.6)—(5.7) положим $a = 0$, а $b \neq 0$, то получим аналогичные результаты как в случае $a \neq 0$ и $b = 0$, только роли функций V и T, а также $\overline{V}$ и $\overline{T}$ поменяются.

г. Если положим $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то из уравнений (5.6), (5.8) — (5.10) получим

$$\overline{V} = b_3 e^{px_1}, \tag{5.35}$$

$$\overline{T} = b_2 e^{qx_1}, \tag{5.36}$$

где b_2, b_3, p и q — постоянные. При $p + q = 0$ из уравнений (5.11)—(5.14) для V и T получаются соотношения

$$V = \alpha T, \tag{5.37}$$

$$T^2 = n[U_{,0} \pm (U_{,0}^2 + c^2p^2)^{1/2}], \tag{5.38}$$

а для функции U вытекает уравнение

$$U(U_{,00} \pm [(U_{,0}^2 + c^2p^2)^{1/2}]_{,0}) - 2c^2p^2 = 0. \tag{5.39}$$

При $p + q \neq 0$ получаются уравнения

$$T^{-1}T_{,0} = q^{-1}U^{-1}(pU_{,0} + M), \tag{5.40}$$

$$V^{-1}V_{,0} = p^{-1}U^{-1}(qU_{,0} - M), \tag{5.41}$$

где

$$M \equiv \pm [(p^2 + pq + q^2)\ (U_{,0}^{\,2} - c^2 pq)]^{1/2}. \tag{5.42}$$

Для негалилеевых решений имеет место $M \neq 0$ и U вычисляется из уравнения

$$UU_{,00} + p^{-1} q^{-1} [(p^2 + q^2)(U_{,0}^{\,2} - c^2 pq) + (p - q)\, U_{,0} M] = 0. \tag{5.43}$$

К сожалению, не удается интегрировать уравнения (5.39) и (5.43) в общем виде. Поэтому оказывается и невозможным получить метрическую форму в замкнутом виде. Мы можем только задать эту форму при $p + q = 0$ в виде

$$ds^2 = c^2 dt^2 - U^2 dx_1^2 - (U_{,0} \pm \sqrt{U_{,0}^{\,2} + c^2 p^2})\,(e^{2px_1} dx_3^2 + e^{-2px_1} dx_2^2), \tag{5.44}$$

а при $p + q \neq 0$ в виде

$$ds^2 = c^2 dt^2 - U^2 dx_1^2 - T^2 e^{2qx_1} dx_2^2 - V^2 e^{2px_1} dx_3^2. \tag{5.45}$$

6. Полугеодезические двухпеременные координатные системы, допускающие эвклидово 3-мерное пространство

а. Можно доказать теорему: *решения, данные метрической формой (5.22), являются при (1.4) единственными негалилеевыми решениями вакуумных уравнений Эйнштейна, при которых 3-мерное пространство с метрическим тензором γ_{ik} является эвклидовым, т. е. при которых удовлетворяются условия*

$$P_{hijk} = 0 \tag{6.1}$$

и эквивалентные им условия

$$P_{ik} = 0. \tag{6.2}$$

В силу (6.2) и (2.4) три вакуумных уравнения (3.3) и (3.5) распадаются на шесть уравнений, из которых получаются соотношения

$$B_{,1}=0, \tag{6.3}$$

$$D_{,1}=kA \tag{6.4}$$

(здесь B и D взаимозаменяемы),

$$A=n_1(mt+n)^{p_1}, \tag{6.5}$$

$$B=n_2(mt+n)^{p_2}, \tag{6.6}$$

$$D=n_3(mt+n)^{p_3}, \tag{6.7}$$

где k — постоянная, а m, n, n_1, n_2, n_3, p_1, p_2 и p_3 могли бы быть в общем случае функциями от координаты x_1. При этом

$$p_1+p_2+p_3=1, \tag{6.8}$$

а для удовлетворения уравнению (3.1) должно также иметь место

$$p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1=0. \tag{6.9}$$

В силу (6.3) и (6.4) удовлетворяется также уравнение (3.2).

Подставляя функции A, B и D в виде (6.5) — (6.7) в уравнения (6.3) — (6.4), а затем также дифференцируя получаемые уравнения два раза по координате t, получим шесть соотношений для величин m, n, n_1, n_2, n_3, p_1, p_2, p_3 и k. С учетом (6.8) и (6.9) из этих соотношений вытекает, что p_1, p_2 и p_3 — постоянные, а

$$n=am, \tag{6.10}$$

$$n_2m^{p_2}=\beta, \tag{6.11}$$

$$k(p_1-p_3)=0, \tag{6.12}$$

где a и β — постоянные. При $k=0$ получается также

$$n_3m^{p_3}=\delta, \tag{6.13}$$

а при $k\neq 0$ —

$$k^{-1}(n_3m^{p_3})_{,1}=n_1m^{p_1}, \tag{6.14}$$

где δ — постоянная.

Теперь при $k=0$ после введения новой координаты $x_1' = \int n_1 m^{p_1} dx_1$ и соответствующих линейных преобразований остальных координат и получаем метрическую форму (5.22). При $k \neq 0$ для получения негалилеевых решений должно иметь место $p_1 = p_3 = \frac{2}{3}$ и $p_2 = -\frac{1}{3}$. При этом после введения новой координаты $x_1' = k^{-1} n_3 m^{p_3}$ и подходящих преобразований остальных координат получаем метрическую форму (5.33), которая как показано в п. 5, также переходит в форму (5.22). Этим теорема доказана.

б. Как известно, при центрально-симметричном решении (1.2) (поле точечной массы) также 3-пространство является эвклидовым, т. е. удовлетворяются условия (6.2). Таким образом, решения типа (5.22) обладают интересным свойством, присущим также самому известному и важному решению уравнений Эйнштейна.

Исходя из различных соображений, многими авторами шварцшильдовское внешнее решение дано в координатной системе метрической формой типа

$$ds^2 = (c^2 - v^2)\, dt^2 + 2v_i d\xi_i dt - dl^2, \qquad (6.15)$$

где $dl^2 = \gamma_{ik} d\xi_i d\xi_k$ — метрическая форма 3-мерного эвклидова пространства R_3, а $v^2 \equiv \overset{*}{\gamma}{}^{ps} v_p v_s$ [18, 19, 15]. Вводя в пространстве R_3 прямоугольные декартовы координаты, имеем $\overset{*}{\gamma}_{ik} = \delta_{ik}$ и шварцшильдовское внешнее решение принимает вид

$$v_i = -\alpha r^{-3/2} \xi_i, \; v^2 = \frac{\alpha^2}{r}, \qquad (6.16)$$

где $r^2 = \xi_p \xi_p$, а α — постоянная.

Поскольку можно убедиться, что именно выполнение условий (6.2) гарантирует возможность преобразования формы (1.2) в форму типа (6.15), то решения (5.22) также должны оказаться приводимыми к виду (6,45). Метрическую форму (5.22) приводят к виду (6.15) преобразования координат *

$$x_i = \pm t^{-p_i} \xi_i + F_i \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (6.17)$$

* В формулах (6.17) и (6.18) по индексу i не суммируем.

где F_i — произвольные функции лишь от координаты t. При этом после вычислений получаем

$$v_i = p_i t^{-1} \xi_i + t^{p_i} F_{i,0}. \tag{6.18}$$

Выбирая для простоты $F_i \equiv 0$, метрическую форму получаем в виде

$$ds^2 = [c^2 - t^{-2}(p_1^2 \xi_1^2 + p_2^2 \xi_2^2 + p_3^2 \xi_3^2)] dt^2 + 2t^{-1}(p_1 \xi_1 d\xi_1 + p_2 \xi_2 d\xi_2 + p_3 \xi_3 d\xi_3) dt - d\xi_1^2 - d\xi_2^2 - d\xi_3^2. \tag{6.19}$$

При метрической форме типа (6.15) гравитационное поле характеризуется определенным векторным полем v_i в пространстве R_3. Этому векторному полю можно дать по Кересу следующее физическое толкование: совокупность материальных точек, движущихся относительно R_3 со скоростью v_i, является совокупностью свободно падающих материальных точек в данном гравитационном поле [15]. Если величины $\omega_{ik} \equiv \frac{1}{2}(v_{i,k} - v_{k,i})$ все исчезают, то поле скоростей является безвихревым и, следовательно, имеет потенциал φ, так что $\vec{v} = \nabla\varphi$. В таком случае гравитационное поле описывается лишь одной величиной в R_3. Условие $\omega_{ik} = 0$ выполняется как при решении (6.16), так и при решении (6.18). В первом случае

$$\varphi = -2\alpha r^{1/2}, \tag{6.20}$$

во втором случае, если $F_i \equiv 0$

$$\varphi = \frac{1}{2} t^{-1} (p_1 \xi_1^2 + p_2 \xi_2^2 + p_3 \xi_3^2). \tag{6.21}$$

При потенциале (6.20) в пространстве R_3 эквипотенциальными поверхностями являются сферы с радиусами постоянного значения. В этом и выражается центральная симметрия гравитационного поля, описываемого потенциалом (6.20). В силу соотношений (5.19) — (5.20) все три постоянных p_1, p_2 и p_3 никогда не могут быть равными друг другу, а две из них могут быть равными лишь в двух случаях: 1) две равняются нулю, а третья равна единице, и 2) две равняются $\frac{2}{3}$, а третья равна $-\frac{1}{3}$. В первом случае все компоненты кривизны (3.6) — (3.13) исчезают и, следовательно, решение, соответствующее потенциалу (6.21), является галилеевым. При этом галилеевом решении эквипотенциальными поверхностями являются плоскости

$$\xi_1 = \mathrm{const} \cdot \sqrt{t}, \tag{6.22}$$

в чем и выражаются свойства симметрии этого решения. Выбирая во втором случае $p_1 = p_3 = \frac{2}{3}$ и $p_2 = -\frac{1}{3}$ (получаем решение, эквивалентное решению (5.33), получаем уравнения эквипотенциальных поверхностей в виде

$$\xi_1^2 + \xi_3^2 - \tfrac{1}{2}\xi_2^2 = \mathrm{const} \cdot t. \tag{6.23}$$

Уравнение (6.23) дает повод толковать решение (6.21) в этом случае как аксиально-симметричное решение. В общем случае, если постоянные p_1, p_2 и p_3 различны, то в силу (5.19)—(5.20) две из них будут одного знака, а третья обязательно противоположного, и эквипотенциальными поверхностями будут двуполостные или однополостные гиперболоиды, или конусы, но все без симметрии вращения.

7. Решение уравнений поля при зависимости функций A, B и D лишь от величины $\xi \equiv t - \frac{x_1}{c}$

а. Выясним теперь, какие существуют при $A_{,0} \neq 0$ негалилеевые решения уравнений (3.1)—(3.5), при которых A, B и D являются функциями лишь от величины $\xi \equiv t - \frac{x_1}{c}$. Отметим, что такая зависимость от координат t и x_1 имеет место также в случае центрально-симметричного решения (1.2).

При сделанных предположениях интегрирование уравнений (3.1)—(3.5) дает с точностью до несущественного постоянного множителя

$$B = (1 - A^2)^{\frac{p}{2}}, \tag{7.2}$$

$$D = (1 - A^2)^{\frac{q}{2}}, \tag{7.1}$$

где

$$p = a + \varepsilon[a(a+2)]^{1/2}, \tag{7.3}$$

$$q = a - \varepsilon[a(a+2)]^{1/2}, \tag{7.4}$$

(a — постоянная, $\varepsilon = \pm 1$). При этом функция A является решением уравнения

$$A'(1 - A^2)^a = m, \tag{7.5}$$

где $m \neq 0$ — постоянная. Таким образом, метрическую форму получаем в виде

$$ds^2 = c^2dt^2 - A^2dx_1^2 - (1 - A^2)^{a + \varepsilon[a(a+2)]^{1/2}}dx_2^2 -$$

$$- (1 - A^2)^{a - \varepsilon[a(a+2)]^{1/2}}dx_3^2. \tag{7.6}$$

Уравнение (7.5) не интегрируется в общем виде в элементарных функциях.

Из (7.3) и (7.4) следует, что в силу действительности величин p и q должно иметь место либо $a > 0$, либо $a \leqslant -2$. При $a = 0$ решение — галилеево.

б. Одним частным случаем, когда можно задать метрическую форму (7.6) в замкнутом виде, является случай $a = 1$. Тогда решение* уравнения (7.5) определяется кубическим уравнением относительно функции A:

$$A^3 - 3A + 3m\xi = 0. \tag{7.7}$$

В области пространства-времени, для которой удовлетворяется условие

$$\frac{9}{4}m^2\xi^2 \equiv \frac{9}{4}m^2\left(t - \frac{x_1}{c}\right)^2 > 1, \tag{7.8}$$

уравнение (7.7) имеет одно действительное решение

$$A = u + v, \tag{7.10}$$

где

$$u = \left\{-\frac{3m}{2}\left(t - \frac{x_1}{c}\right) + \left[\frac{9}{4}m^2\left(t - \frac{x_1}{c}\right)^2 - 1\right]^{1/2}\right\}^{1/3} \tag{7.11}$$

---

* С точностью до несущественной постоянной интегрирования.

и

$$v=\left\{-\frac{3m}{2}\left(t-\frac{x_1}{c}\right)-\left[\frac{9}{4}m^2\left(t-\frac{x_1}{c}\right)^2-1\right]^{1/2}\right\}^{1/3}. \tag{7.12}$$

Метрическая форма тогда получаетя в виде

$$ds^2=c^2dt^2-(u+v)^2dx_1^2-[(u+v)^2-1]^{1+\varepsilon\sqrt{3}}\,dx_2^2-$$

$$-[(u+v)^2-1]^{1-\varepsilon\sqrt{3}}\,dx_3^2. \tag{7.13}$$

При выполнении условия

$$\frac{9}{4}m^2\left(t-\frac{x_1}{c}\right)^2\leqslant 1, \tag{7.14}$$

уравнение (7.7) имеет три действительных решения. В этом случае метрическая форма имеет вид

$$ds^2=c^2dt^2-4\cos^2\frac{\Psi}{3}\,dx_1^2-\left[4\cos^2\frac{\Psi}{3}-1\right]^{1+\varepsilon\sqrt{3}}dx_2^2-$$

$$-\left[4\cos^2\frac{\Psi}{3}-1\right]^{1-\varepsilon\sqrt{3}}dx_3^2, \tag{7.15}$$

где

$$\Psi=\arccos\frac{3m}{2}\left[t-\frac{x_1}{c}\right]+n\pi, \qquad n=0,\pm 1. \tag{7.27}$$

Видим, что при

$$\frac{3}{2}m\left(t-\frac{x_1}{c}\right)=\pm 1 \tag{7.16}$$

метрики (7.13) и (7.15) имеют сингулярность.

Поступило в редакцию
10 июля 1965 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. V. Narlikar, K. B. Karmarkar, Current. Sci., **15**, 69, 1946.
2. P. Rastall, Canadian J. Phys., **38**, 1661, 1960.
3. A. Friedmann, Zeitschr. J. Phys., **10**, 377, 1922.
4. G. Lemaître, Ann. Soc. Scient. Bruxelles, **A53**, 51, 1933.
5. R. C. Tolman, Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford 1934
6. D. N. Verma, S. R. Roy, Bull. Calcutta Math. Soc., **48**, 129, 1956.

7. N. Kalitzin, Monthly Notices Roy. Astron. Soc., **122**, 41, 1961.
8. П. К. Кобушкин, Тр. общетеор. кафедр. Укр. с.-х. акад., 129, 1963.
9. C. Moller, The Theory of Relativity, Oxford, 1952.
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., 1960.
11. А. З. Петров, Пространства Эйнштейна, М., 1961.
12. Д. Л. Синг, Общая теория относительности, М., 1963.
13. А. Эйнштейн, Сущность теории относительности, М., 1955.
14. Х. Керес, Труды ИФА АН Эст. ССР, № 22, 5, 1963.
15. Х. Керес, Труды ИФА АН Эст. ССР, № 9, 3, 1959.
16. Х. Керес, ЖЭТФ, **46**, 1741, 1964.
17. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., 1961.
18. P. Painlevé, Compt. rend, Acad. Sci., **173**, 667, 1921.
19. R. L. Kirkwood, Phys. Rev., **92**, 1557, 1953.

ON THE EXACT SEMIGEODETIC TWO-VARIABLE SOLUTIONS OF EINSTEIN'S EMPTY SPACE EQUATIONS

A. Koppel

The two-variable semigeodetic orthogonal metric form is studied. The problem of finding exact non-Galilean solutions of Einstein's equations for empty space is discussed in three special cases. The general structure of the solutions has been determined in the case if one of the components g_{11}, g_{22} or g_{33} of the metric tensor is constant. By separating variables in the metric tensor components, four types of solutions have been obtained, one of them being of the Narlikar-Karmarkar type [1]. If the components depend on the quantity $\xi = t - \frac{x_1}{c}$ only, the general solution obtained contains a function satisfying an ordinary differential equation of the first order. It has been shown that the Narlikar-Karmarkar solution is the only non-Galilean one admitting the representation in the three-dimensional Euclidean space.

The investigation of coefficients in their general semigeodetic metrical form shows us that if they all contain a certain common time factor while the dependence on spacial coordinates is arbitrary, the Einstein's empty space equations admit the Galilean solutions only. It follows that the Rastall solution [2], considered as describing the exterior gravitational field of an isolated particles system, is in fact a Galilean one.

ПОЛУГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ДВУХПЕРЕМЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ВАКУУМНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА И ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ

А. Коппель

С помощью принципа соответствия Кереса [1] изучаются вакуумные гравитационные поля, описываемые полугеодегической ортогональной двухпеременной формой. Показано, что существуют два типа предельных ньютоновских метрических форм этих релятивистских гравитационных полей и получаются формулы для потенциала этих ньютоновских образов. На основе анализа эквипотенциальных поверхностей в ньютоновском пределе обсуждаются свойства пространственной симметрии рассматриваемых гравитационных полей. Применяется принцип соответствия к анализу решений уравнений Эйнштейна, данных в работе автора [2]. С применением принципа соответствия показывается, что статическая вакуумная однопеременная метрика описывает в нерелятивистском пределе либо однородное гравитационное поле, либо аксиально-симметричное поле бесконечной нити и, таким образом, подтверждается общепринятая интерпретация этой метрики.

1 Введение

а. Для анализа величин общей теории относительности и облегчения выяснения физического смысла выражений общей теории относительности Кересом [1] сформулирован следующий принцип соответствия: *если в полугеодезической координатной системе релятивистская величина* $\mathfrak{A}$ *имеет при* $c \to \infty$ *предельное значение, отличное от нуля или от бесконечности, то это предельное значение представляет собой величину нерелятивистской теории гравитации, соответствующую величине* $\mathfrak{A}$.

Высказанный выше принцип соответствия позволяет отыскивать ньютоновские образы гравитационных полей, заданных в *полугеодезических* координатных системах, т. е. в системах с метрической формой *

$$ds^2 = c^2dt^2 - \gamma_{ik}\, dx_i dx_k. \qquad (I.1)$$

При этом данная полугеодезическая координатная система должна быть G-системой, т. е. такой полугеодезической системой, при которой при $c \to \infty$ коэффициенты γ_{ik} и их производные имеют конечные предельные значения. С переходом к пределу $c \to \infty$ из формы (I.1) получается 3-мерная метрическая форма

$$dl^2 = \tilde{\gamma}_{ik}\, dx_i dx_k, \qquad (I.2)$$

где **

$$\tilde{\gamma}_{ik} \equiv \lim_{c \to \infty} \gamma_{ik}. \qquad (I.3)$$

Если при таком переходе гравитационное поле обладает свойством, что имеет место

$$\lim_{c \to \infty} R_{0ijk} = 0, \qquad (I.4)$$

то уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right) \qquad (I.5)$$

($T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса вещества, $\varkappa$ — эйнштейнова гравитационная постоянная), записанные в G-системе, перехоядт в уравнения

$$\tilde{R}_{00} \equiv \Delta\Phi = -4\pi G \varrho_0, \qquad (I.6)$$

$$\tilde{R}_{0ijk} = 0, \qquad (I.7)$$

$$\tilde{P}_{ik} = 0 \qquad (I.8)$$

(ϱ_0 — плотность вещества, G — ньютонова гравитационная постоянная, $\tilde{P}_{ik}$ — тензор Риччи в 3-пространстве с формой

---

* В данной работе будем пользоваться обозначениями работы [2].

** Здесь и в дальнейшем тильда означает предельное значение величины при $c \to \infty$.

(I.2)). Этим уравнениям теперь удовлетворяют предельные значения (I.3) и они и являются ньютоновскими уравнениями гравитации. При этом координаты релятивистской G-системы переходят в координаты ньютоновской G-системы и (I.2) является метрической формой ньютоновского образа рассматриваемого релятивистского гравитационного поля.

Ньютоновский потенциал гравитиционного поля Φ вычисляется из уравнения

$$d\,\Phi = X_{i,00}\,dX_i, \tag{I.9}$$

где X_i — прямоугольные декартовые координаты, связанные с координатами x_i в форме (I.2) преобразованиями

$$X_i = X_i(x_k, t), \tag{I.10}$$

удовлетворяющими условиям

$$X_{k,ij} = \tilde{\Gamma}^s_{ij} X_{k,s}, \qquad X_{k,io} = \tilde{\Gamma}^s_i X_{k,s} \tag{I.11}$$

(здесь $\tilde{\Gamma}^s_{ij}$ — символы Кристоффеля, составленные из γ_{ik}, а $\tilde{\Gamma}^s_i = \frac{1}{2}\tilde{\gamma}^{sk}\tilde{\gamma}_{ik,o}$) [1].

Поскольку любое гравитационное поле, описываемое в некоторой координатной системе (в общем не полугеодезической) метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, с преобразованиями координат в принципе приводимо к полугеодезической координатной системе (см. [3], а также [4], стр. 318), то можно при любой метрической форме поставить вопрос о нахождении ньютоновского образа данного гравитационного поля. Однако конкретный переход к полугеодезической координатной системе удается лишь в некоторых частных случаях и поэтому также нахождение ньютоновского образа данного релятивистского поля в общем не является легкой задачей.

б. В данной работе будем предполагать, что *полугеодезическая двухпеременная* метрическая форма

$$ds^2 = c^2dt^2 - A^2dx_1^2 - B^2dx_2^2 - D^2dx_3^2, \tag{I.12}$$

где A, B и D — функции лишь координат t и x_1, представляет вакуумное гравитационное поле в G-системе. Целью работы является: 1) изучение с помощью принципа соответствия Кереса смысла метрических форм типа (I.12) в общем случае; 2) применение этого принципа к анализу решений вакуумных уравнений Эйнштейна, данных в работе автора [2]; 3) изучение статической однопеременной вакуумной метрики с точки зрения этого принципа.

II. Применение принципа соответствия к изучению полугеодезических двухпеременных вакуумных метрических форм в общем случае

а. Согласно сделанным предположениям, в пределе $c \to \infty$ соответствующая форме (I.12) ньютоновская 3-мерная метрическая форма (I.2) получается в виде

$$dl^2 = \tilde{A}^2 dx_1^2 + \tilde{B}^2 dx_2^2 + \tilde{D}^2 dx_3^2. \tag{II.1}$$

При этом из системы вакуумных уравнений Эйнштейна, данной в работе [2] формулами* (3.1) — 3.5), получаются уравнения, которым удовлетворяют эти предельные величины $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ и $\tilde{D}$:

$$\tilde{A}^{-1}\tilde{A}_{,00} + \tilde{B}^{-1}\tilde{B}_{,00} + \tilde{D}^{-1}\tilde{D}_{,00} = 0, \tag{II.2}$$

$$\tilde{D}(\tilde{A}^{-1}\tilde{B}_{,1})_{,0} + \tilde{B}(\tilde{A}^{-1}\tilde{D}_{,1})_{,0} = 0, \tag{II.3}$$

$$\tilde{D}(\tilde{A}^{-1}\tilde{B}_{,1})_{,1} + \tilde{B}(\tilde{A}^{-1}\tilde{D}_{,1})_{,1} = 0, \tag{II.4}$$

$$(\tilde{A}^{-1}\tilde{D}\tilde{B}_{,1})_{,1} = 0, \tag{II.5}$$

$$(\tilde{A}^{-1}\tilde{B}\tilde{D}_{,1})_{,1} = 0. \tag{II.6}$$

Уравнения (II.3) — (II.6) легко интегрируются и вместо их получаем соотношения

$$\tilde{B}_{,1} = 0, \tag{II.7}$$

---

* В настоящей работе часто будем ссылаться на формулы работы [2]. При этом надо учесть, что при нумеровании формул настоящей работы будем обозначать номер параграфа римской цифрой, а при нумеровании формул работы [2] латинской цифрой.

$$\tilde{D}_{,1} = k\tilde{A}, \tag{II.8}$$

где k — постоянная. Роли функции $\tilde{B}$ и $\tilde{D}$ можно здесь заменять. Поскольку в силу (II.7) и (II.8) условие (I.4) автоматически удовлетворяется, то в данном случае эти уравнения вместе с уравнением (II.2) являются предельными ньютоновскими уравнениями гравитации.

б. Полагаем

$$H \equiv \int_a^{x_1} \tilde{A}(t, \xi)\, d\xi + F(t), \tag{II.9}$$

где F — произвольная функция от координаты t. Теперь при $k = 0$ можно задать метрическую форму (II.1) в виде

$$dl^2 = H_{,1}^2 dx_1^2 + \tilde{B}^2 dx_2^2 + \tilde{D}^2 dx_3^2, \tag{II.10}$$

а при $k \neq 0$ без ограничения общности можно положить $k = 1$ и записать форму (II.1) в виде

$$dl^2 = H_{,1}^2 dx_1^2 + \tilde{B}^2 dx_2^2 + H^2 dx_3^2. \tag{II.11}$$

В случае (II.10) из уравнения (II.2) получаем

$$H_{,00} + H(\tilde{B}^{-1}\tilde{B}_{,00} + \tilde{D}^{-1}\tilde{D}_{,00}) = N, \tag{II.12}$$

а в случае (II.11) аналогично получаем

$$HH_{,00} + \tfrac{1}{2}\tilde{B}^{-1}\tilde{B}_{,00}H^2 = N. \tag{II.13}$$

Здесь N — функция от координаты t. Формулами (II.10) и (II.11) теперь определяются всевозможные типы предельных ньютоновских метрических форм рассматриваемых релятивистских полей. Конкретные виды функций H, $\tilde{B}$, $\tilde{D}$ и N, разумеется, удается определить лишь тогда, если известен конкретный вид релятивистской метрической формы (II.12).

При форме (II.10) прямоугольные декартовы координаты X_k связаны с координатами x_k преобразованием

$$X_1 = H, \quad X_2 = \tilde{B}\, x_2, \quad X_3 = \tilde{D} x_3, \tag{II.14}$$

а при форме (II.11) — преобразованием

$$X_1 = H\cos x_3,\quad X_2 = \tilde{B}\, x_2,\quad X_3 = H\sin x_3. \qquad \text{(II.15)}$$

Легко проверить, что оба преобразования удовлетворяют условиям (I.11). С учетом (II.12) и (II.14) интегрирование (I.9) теперь дает формулу для ньютоновского потенциала гравитационного поля Ф с точностью до аддитивной постоянной

$$\Phi = NX_1 - \tfrac{1}{2}(\tilde{B}^{-1}\tilde{B}_{,00} + \tilde{D}^{-1}\tilde{D}_{,00})X_1^2 + \\ + \tfrac{1}{2}\tilde{B}^{-1}\tilde{B}_{,00}X_2^2 + \tfrac{1}{2}\tilde{D}^{-1}\tilde{D}_{,00}X_3^2. \qquad \text{(II.16)}$$

С учетом (II.13) и (II.15) для потенциала Ф получается формула

$$\Phi = \tfrac{1}{2}N\ln(X_1^2 + X_3^2) - \tfrac{1}{4}\tilde{B}^{-1}\tilde{B}_{,00}(X_1^2 + X_3^2 - 2X_2^2). \qquad \text{(II.17)}$$

в. Из формул (II.16) и (II.17) видим, что рассматриваемые здесь гравитационные поля даже в нерелятивистском пределе на бесконечности не исчезают. На основе анализа вида эквипотенциальных поверхностей можно сделать также некоторые выводы относительно пространственной симметрии этих полей в ньютоновском пределе.

Видим, что при $\tilde{B}_{,1} = \tilde{D}_{,1} = 0$ (вид потенциала (II.16)) гравитационное поле обладает аксиальной симметрией лишь при условиях

$$\tilde{B}^{-1}\tilde{B}_{,00} = \tilde{D}^{-1}\tilde{D}_{,00} \neq 0 \qquad \text{(II.18)}$$

или

$$N = 0,\quad \tilde{B}^{-1}\tilde{B}_{,00} = -\tfrac{1}{2}\tilde{D}^{-1}\tilde{D}_{,00} \neq 0. \qquad \text{(II.19)}$$

Если

$$\tilde{B}_{,00} = 0,\quad \tilde{D}_{,00} \neq 0 \qquad \text{(II.20)}$$

(здесь $\tilde{B}$ и $\tilde{D}$ взаимно заменяемы) или

$$N = 0,\quad \tilde{B}^{-1}\tilde{B}_{,00} = -\tilde{D}^{-1}\tilde{D}_{,00} \neq 0, \qquad \text{(II.21)}$$

то имеем случай так называемого плоского поля (потенциал поля не зависит от одной декартовой координаты). Если

$$N \neq 0, \quad \tilde{B}_{,00} = \tilde{D}_{,00} = 0, \tag{II.22}$$

то гравитационное поле является однородным. В этом случае поле является, кроме того, также статическим ($N_{,0} = 0$), если величина $\tilde{A}$ имеет вид

$$\tilde{A} = a_1 t + a_0, \tag{II.23}$$

где a_1 и a_0 — функции лишь от координаты x_1. При этом в формуле (II.9) следует выбирать $F = \frac{1}{2} N t^2$.

При $\tilde{D}_{,1} \neq 0$ (вид потенциала (II.17)) ньютоновский образ гравитационного поля всегда обладает аксиальной симметрией, причем осью симметрии является X_2-ось декартовой координатной системы. Если в этом случае имеет также место

$$N \neq 0, \quad \tilde{B}_{,00} = 0, \tag{II.24}$$

то имеем случай гравитационного поля бесконечной прямой нити с однородным распределением массы. Это поле является, кроме того, и статическим, если величина $\tilde{A}$ имеет такой вид, что с учетом (II.9) из уравнения (II.13) получается $N_{,0} = 0$. При этом функция H должна удовлетворять уравнению

$$H H_{,00} = N, \tag{II.25}$$

интеграл которого определяется формулой (см. [5], стр. 597)

$$t = \int (2N \ln H + S)^{-\frac{1}{2}} dH + V, \tag{II.26}$$

где S и V — произвольные функции координаты x_1.

III. Конкретный анализ некоторых метрических форм с помощью принципа соответствия

а. Ниже проанализируем конкретные случаи метрической формы (I.12), рассмотренные в работе [2]. При этом будем предполагать, что все эти конкретные формы соответствуют G-системам.

б. Общий вид галилеевых решений вакуумных уравнений Эйнштейна при форме (I.12) дан формулами (3.15) — (3.23) работы [2]. В силу соотношений (II.16) — (II.17) из этих формул следует, что в данном случае видом ньютоновского потенциала может быть либо $\Phi = 0$ (отсутствие поля), либо

$$\Phi = NX_1 \tag{III.1}$$

(однородное поле).

в. При решениях, определяемых метрической формой (4.1) и уравнением (4.7) работы [2], т. е. при $A_{,0} = 0$ в вакуумной метрической форме (1.12), предельной ньютоновской формой является (II.10) при $H = x_1$. Поскольку при этом в силу (4.7) и (II.12) выполняется условие (II.21), то имеем дело с так называемым плоским полем, потенциал Φ которого в силу (II.16) выражается формулой

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\tilde{D}^{-1}\tilde{D}_{,00}(X_3^2 - X_2^2). \tag{III.2}$$

Заметим, что эквипотенциальными поверхностями являются гиперболические цилиндры.

В частном случае, если имеет место условие (4.8), формула (III.2) приобретает вид

$$\Phi = \tfrac{1}{2}n(n-1)t^{-2}(X_3^2 - X_2^2), \tag{III.3}$$

где n — постоянная. Поле является нестатическим. Видим также, что формы (4.13)—(4.15) описывают гравитационные поля, свойства которых в ньютоновском приближении совпадают. В случае метрической формы (4.23) ньютоновский потенциал приобретает вид

$$\Phi = \tfrac{1}{2}(X_3^2 - X_2^2), \tag{III.4}$$

т. е. в этом случае поле является статическим.

г. При форме (I.12) и условиях (5.1) — (5.3), т. е. при разделении переменных в функциях A, B и D существуют четыре типа негалилеевых решений вакуумных уравнений Эйнштейна. Эти решения представлены соответственно метрическими формами (5.22), (5.32), (5.44) и (5.45).

При метрической форме (5.22) ньютоновский потенциал Φ дается в виде

$$\Phi = \tfrac{1}{2} t^{-2} [p_1 (p_1 - 1) X_1^2 + p_2 (p_2 - 1) X_2^2 + p_3 (p_3 - 1) X_3^2]. \qquad \text{(III.5)}$$

Как было показано (работа [2], §6), при этом решении целесообразно различать три случая: 1) $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = 0$. 2) $p_1 = p_3 = \frac{2}{3}$, $p_2 = -\frac{1}{3}$ и 3) p_1, p_2 и p_3 все различные и ненулевые. В первом случае из (III.5) получается $\Phi = 0$, т. е. гравитационное поле отсутствует, а во втором случае

$$\Phi = \tfrac{1}{9} t^{-2} (2X_2^2 - X_2^2 - X_3^2), \qquad \text{(III.6)}$$

т. е. поле обладает аксиальной симметрией. В третьем случае все коэффициенты квадратичной формы (III.5) различны. Таким образом, на основе анализа вида эквипотенциальных поверхностей предельного ньютоновского гравитационного поля можно прийти к таким же выводам относительно свойств симметрии решения (5.22) как и на основе анализа этого решения в виде (6.19).

В случае метричсекой формы (5.32) потенциал Φ получается в виде

$$\Phi = \tfrac{1}{4} m \tilde{U}^{-3} (2X_2^2 - X_1^2 - X_3^2). \qquad \text{(III.7)}$$

Таким образом, в данном случае поле всегда обладает аксиальной симметрией.

При метрической форме (5.44) получается вид потенциала

$$\Phi = NX_1 + \tfrac{1}{2} c^2 \tilde{p}^2 \tilde{U}^{-2} (\tilde{U}_{,0}^{\,2} + c^2 \tilde{p}^2)^{-2} [(\tilde{U}_{,0}^{\,2} + c^2 \tilde{p}^2) +$$

$$+ \varepsilon \tilde{U}_{,0}]^{-1} (2X_1^2 - X_2^2 - X_3^2). \qquad \text{(III.8)}$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Если $\lim\limits_{c \to \infty} cp \equiv c\tilde{p} = 0$, то приходится выбирать $\varepsilon = +1$ и, следовательно, $\Phi = NX_1$, т. е. поле однородно. Если величина $c\tilde{p}$ имеет конечное и ненулевое значение, то поле обладает аксиальной симметрией.

При метрической форме (5.45) вычисления показывают, что условия однородного поля (II.22) удовлетворяются, если $\tilde{U}_{,0} = 0$ и $\lim\limits_{c \to \infty} c^2 pq = 0$.

д. Если метрическая форма (7.6) вместе с уравнением (7.5) представляет гравитационное поле в G-системе, то предельная ньютоновская форма имеет вид (II.10). При этом вычисления показывают, что условие (II.18) может удовлетворяться лишь при $\tilde{a}=-2$, а условия (II.19) — (II.21) вообще нельзя удовлетворить. Условия однородного поля (II.22) удовлетворяются при $\tilde{a}=0$. Таким образом, метрическая форма (7.6) лишь при $\tilde{a}=-2$ описывает в ньютоновском пределе поле с аксиальной симметрией. В этом случае потенциал Φ имеет вид

$$\Phi = NX_1 - \tilde{m}^2(1-\tilde{A}^2)^3[2X_1^2 - X_2^2 - X_3^2]. \tag{III.9}$$

IV. Изучение статической вакуумной однопеременной метрики с точки зрения принципа соответствия

а. Как общепринято, гравитационное поле называют *статическим*, если оно допускает координатную систему, в которой все ненулевые компоненты метрического тензора не зависят от временной координаты t, а компоненты g_{0i} тождественно равны нулю (см., например, [4], стр. 302 и [6], стр. 402).

При общем виде *статической однопеременной* метрической формы вакуумные уравнения Эйнштейна интегрируются сравнительно легко (см., например, [7, 8]). Получаемую метрическую форму можно задать в виде

$$ds^2 = \left(\frac{\bar{x}_1}{a}\right)^{2a_0} c^2 d\bar{t}^2 - \left(\frac{\bar{x}_1}{a}\right)^{2a_1} d\bar{x}_1^2 - \left(\frac{\bar{x}_1}{a}\right)^{2a_2} dx_2^2 - \left(\frac{\bar{x}_1}{a}\right)^{2a_3} dx_3^2, \tag{IV.1}$$

где a_0, a_1, a_2 и a_3 — безразмерные постоянные, а α — постоянная размерности длины. Следует, конечно, отметить, что из четырех постоянных a_0, a_1, a_2, a_3 независимое физическое значение можно придавать лишь одной, поскольку, во-первых, они связаны между собой соотношениями

$$a_0 + a_2 + a_3 = a_1 + 1, \tag{IV.2}$$

$$a_0a_2 + a_2a_3 + a_3a_0 = 0 \tag{IV.3}$$

и, во-вторых, одну из них можно фиксировать преобразованием координаты

$$x_1' = x_1'(x_1). \tag{IV.4}$$

Отметим также, что для получения негалилеевых решений уравнений Эйнштейна ни одна из постоянных a_0, a_2, a_3 не может равняться нулю.

В виде (IV.1) при $\alpha = 1$ рассматриваемое вакуумное решение задано Казнером * [9]. Если положить $a_1 = a_2$, то получается это решение в координатной системе, рассмотренной Леви-Чивита [7]. Если положить $a_3 = 1$, то с учетом (IV.2)—(IV.3) получается форма (IV.1) в виде, рассмотренном Уилсоном [8]. В некоторых случаях также целесообразно пользоваться координатной системой, в которой имеет место

$$a_2 + a_3 = a, \qquad a_2 + 2a_2a_3 + a_3 = 0, \tag{IV.5}$$

где a — новая ненулевая постоянная. При этом из соотношений (IV.2) и (IV.3) получаются

$$a_0 = \tfrac{1}{2}, \quad a_1 = a - \tfrac{1}{2}. \tag{IV.6}$$

С точностью до линейных масштабных преобразований типа (5.21) всех координат метрическая форма (IV.1) принимает теперь вид

$$ds^2 = \frac{\bar{x}_1}{a} c^2 dt^2 - \left(\frac{\bar{x}_1}{a}\right)^{2a-1} d\bar{x}_1^2 - \left(\frac{\bar{x}_1}{a}\right)^{a+\varepsilon\sqrt{a(a+2)}} dx_2^2 -$$
$$- \left(\frac{\bar{x}_1}{a}\right)^{a-\varepsilon\sqrt{a(a+2)}} dx_3^2, \tag{IV.7}$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Из требования действительности коэффициентов метрической формы следует, что постоянная a должна удовлетворять соотношениям $a \leqslant -2$ или $a > 0$. При $a = 0$ форма (IV.7) является галилеевой.

б. Метрическая форма (IV.1) переходит в полугеодезическую форму с помощью преобразований

---

* В работе Казнера это решение фактически дано при сигнатуре (+, +, +, +), но оно не меняется и при переходе к сигнатуре (+, —, —, —).

$$\bar{t} = \bar{f}_0(t, x_1), \tag{IV.8}$$

$$\bar{x}_1 = \bar{f}_1(t, x_1), \tag{IV.9}$$

удовлетворяющих условию $\frac{D(\bar{f}_0, \bar{f}_1)}{D(t, x_1)} \neq 0$ и уравнениям

$$\left(\frac{\bar{f}_1}{a}\right)^{2a_0} f_{0,0}^{\,2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\bar{f}_1}{a}\right)^{2a_1} f_{1,0}^{\,2} = 1, \tag{IV.10}$$

$$\left(\frac{\bar{f}_1}{a}\right)^{2a_0} \bar{f}_{0,0}\bar{f}_{0,1} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\bar{f}_1}{a}\right)^{2a_1} \bar{f}_{1,0}\bar{f}_{1,1} = 0. \tag{IV.11}$$

Получаемая форма имеет вид

$$ds^2 = c^2dt^2 - \left(\frac{\bar{f}_1}{a}\right)^{2a_1} f_{1,1}^{\;2}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\bar{f}_1}{a}\right)^{2a_1} f_{1,0}^{\;2}\right]^{-1} dx_1^2 - \\ - \left(\frac{\bar{f}_1}{a}\right)^{2a_2} dx_2^2 - \left(\frac{\bar{f}_1}{a}\right)^{2a_3} dx_3^2. \tag{IV.12}$$

Строгое решение системы (IV.10)—(IV.11) и вместе с тем нахождение формы (IV. 12) в замкнутом виде, однако, являются очень трудными задачами и вряд ли в общем случае вообще удаются. Поэтому приходится ограничиваться, с одной стороны, обсуждением решения уравнений (IV.10)—(IV.11) лишь в некоторых частных случаях (в данной работе эта проблема не затрагивается) и, с другой стороны, анализом формы (IV.12) в общем виде.

в. Предположим, что преобразования (IV.8)—(IV.9) приводят метрическую форму (IV.1) к такой *двухпеременной* метрической форме (IV.12), которая представляет гравитационное поле в G-системе. Хотя мы не можем указать на явный вид таких преобразований и на явный вид соответствующей формы (IV.12), оказывается при этом все-таки возможным сделать некоторые общие заключения.

Теперь из уравнений (IV.10)—(IV.11) следует, что в пределе $c \to \infty$ должны иметь место

$$\tilde{f}_{0,0} = \pm(\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{f}_1)^{-\tilde{a}_0}, \tag{IV.13}$$

$$\tilde{f}_{0,1} = 0. \tag{IV.14}$$

Предельная ньютоновская форма (II.1) получается из (IV.12) в виде

$$dl^2 = (\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{f}_1)^{2\tilde{a}_1}\tilde{f}_{1,1}^{\,2}dx_1^2 + (\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{f}_1)^{2\tilde{a}_2}dx_2^2 + (\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{f}_1)^{2\tilde{a}_3}dx_3^2. \quad \text{(IV.15)}$$

Как было показано в разделе II, эта форма должна теперь иметь либо вид (II.10), либо (II.11). В обоих случаях должно иметь место $\tilde{B}_{,1} = 0$, т. е.

$$\tilde{a}_2(\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{f}_1)^{\tilde{a}_2-1}\tilde{f}_{1,1} = 0. \quad \text{(IV.16)}$$

В силу $\tilde{f}_{1,1} \neq 0$ отсюда получаем

$$\tilde{a}_2 = 0, \quad \text{(IV.17)}$$

а из соотношения (IV.3) — в свою очередь

$$\tilde{a}_0\tilde{a}_3 = 0. \quad \text{(IV.18)}$$

При

$$\tilde{a}_3 = 0 \quad \text{(IV.19)}$$

имеем дело с формой (II.10) и соответствующий ньютоновский потенциал получается в виде

$$\Phi = NX_1, \quad \text{(IV.20)}$$

т. е. поле является однородным.

При

$$\tilde{a}_3 \neq 0, \quad \tilde{a}_0 = 0 \quad \text{(IV.21)}$$

имеем дело с формой (II.11) и получаем из соотношения (IV.2)

$$\tilde{a}_3 = \tilde{a}_1 + 1, \quad \text{(IV.22)}$$

а из формулы (II.17)

$$\Phi = \tfrac{1}{2}N\ln(X_1^2 + X_3^2). \quad \text{(IV.23)}$$

При этом из уравнения (II.13) получается

$$N = (\tilde{a}_1 + 1)^{-1}\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{f}_1)^{2\tilde{a}_1+1}\tilde{f}_{1,00} +$$

$$+ (\tilde{a}_1 + 1)^{-1}\tilde{a}_1 \tilde{f}_{1,0}^{\,2}(\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{f}_1)^{2\tilde{a}_1}. \qquad (IV.24)$$

Видим, что выполняется условие (II.24) и, следовательно, имеем случай гравитационного поля бесконечной прямой нити с однородным распределением массы. Если при форме (IV.1) пользоваться координатными системами Леви-Чивита и Уилсона [7, 8], то должно иметь место также

$$\tilde{a}_1 = 0 \qquad (IV.25)$$

и уравнение (IV.24) примет вид

$$N = \tilde{f}_1\tilde{f}_{1,00}, \qquad (IV.26)$$

аналогичный уравнению (II.25). Поле является статическим, если $\tilde{f}_1$ имеет такой вид, что в силу (IV.26) N является постоянной. При этом интеграл уравнения (IV.26) определяется формулой (II,26).

Обстоятельство, что уравнение (IV.26) даже при $N = \mathrm{const}$ не интегрируется в элементарных функциях, также указывает на то, что, по-видимому, невозможно найти преобразования типа (IV.8)—(IV.9) в элементарных функциях, которое приводило бы статическую метрику (IV.1) в полугеодезическую G-систему.

г. Таким образом, видим, что полугеодезическая двухпеременная метрическая форма (IV.12) вместе с уравнениями (IV.10)—(IV.11) и тем самым однопеременная метрическая форма (IV.1) описывает, по крайней мере в ньютоновском пределе, либо однородное гравитационное поле, либо аксиально-симметричное поле бесконечной нити. Такой результат, полученный на основе применения принципа соответствия Кереса, следует считать подтверждением общепринятой интерпретации вакуумной метрики (IV.1) [6—10].

В заключение выражаю благодарность академику Х. Кересу за внимание к работе и за обсуждение результатов.

Поступило в редакцию
10 июля 1965 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Керес, ЖЭТФ, **46**, 1741, 1964.
2. А. Коппель, Труды ИФА АН ЭССР, № 33, 18, 1967.
3. Х. Керес, Труды ИФА АН ЭССР, № 5, 12, 1957.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, «Теория поля», М., 1960.
5. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., 1961.
6. А. З. Петров, Пространства Эйнштейна, М., 1961.
7. T. Levi-Civita, Rend. Acc. Lincei, **28**, Sem. 1, 101, 1919.
8. W. Wilson, Phil. Mag., **40**, 703, 1920.
9. E. Kasner, Trans. Amer. Math. Soc., **27**, 155, 1925.
10. L. Marder, Proc. Roy. Soc., **244**, 524, 1958.

SEMIGEODETIC TWO-VARIABLE SOLUTIONS OF THE EINSTEIN'S EMPTY SPACE EQUATIONS AND THE CORRESPONDENCE PRINCIPLE

A. Koppel

Gravitational fields in empty space have been investigated on the basis of the correspondence principle formulated by Keres [1]. The metric tensor has been assumed to be of a semigeodetic orthogonal form depending on two variables. In the Newtonian limit, metric forms of two different types exist corresponding to these relativistic fields. The explicit formulas for the Newtonian potentials have been found, and the space symmetry properties of the gravitational fields under consideration are discussed, making use of the shape of equipotential surfaces in the Newtonian limit.

On the basis of the correspondence principle it has been proved that in the nonrelativistic limit, the static one-variable metric in empty space describes either homogeneous gravitational field, or axially symmetric field of an infinite rod, thus maintaining the validity of the commonly accepted interpretation.

The correspondence principle has been also applied to discuss the solutions of Einstein's equations obtained in the previous paper [2].

О ВЫЧИСЛЕНИИ НЬЮТОНОВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

В. Унт

Уравнениям, получающимся из уравнений Эйнштейна путем предельного перехода $c \to \infty$ удовлетворяют такие компоненты метрического тензора, которые можно интерпретировать как поле скоростей в трехмерном эвклидовом пространстве. В безвихревом случае поля скоростей написаны интегралы этих уравнений в виде ряда для потенциала поля скоростей, где l-ый член пропорционален 2^l-польному моменту источника гравитационного поля и найдены рекуррентные формулы для вычисления членов этого ряда.

1. Четырехмерное пространство-время общей теории относительности можно описать линейным элементом в полугеодезических координатах *

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - \gamma_{ik} d\xi^i d\xi^k. \tag{1}$$

Подставляя в линейный элемент (1) вместо γ_{ik} величины $\underset{0}{\gamma_{ik}}$, определенные равенствами $\underset{0}{\gamma_{ik}} = \lim\limits_{c \to \infty} \gamma_{ik}$, имеем

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \underset{0}{\gamma_{ik}} d\xi^i d\xi^k. \tag{2}$$

Х. Керес [1] показал, что $\underset{0}{\gamma_{ik}}$ удовлетворяют уравнениям, получающимся из уравнений Эйнштейна при помощи предельного перехода $c \to \infty$. Из полученных таким образом уравнений вытекает эвклидовость трехмерного пространства, определенного метрическим тензором $\underset{0}{\gamma_{ik}}$. Следовательно, должны существо-

---

* Латинские индексы принимают значения 1, 2, 3; по дважды встречающемуся индексу производится суммирование.

вать такие функции $x^s = x^s(\xi^i, t)$, через которые $\underset{0}{\gamma_{ik}}$ выражаются в виде

$$\underset{0}{\gamma_{ik}} = \frac{\partial x^s}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^s}{\partial \xi^k}.$$

Вводя обозначение $v_i = \frac{\partial x^i}{\partial t}$ и переходя в (2) от ξ^i к новым пространственным координатам x^i, получаем

$$ds^2 = (c^2 - v_i v_i)\, dt^2 - 2v_i dx^i dt - dx^i dx^i. \tag{3}$$

Воспользуясь результатами работы Х. Кереса [2], можем написать уравнения для v_i в виде

$$(v_{i,s} - v_{s,i})_{,s} = 0, \tag{4}$$

$$[v_{s,t} + \tfrac{1}{2} v_p (v_{p,s} + v_{s,p})]_{,s} = -4\pi\gamma\varrho. \tag{5}$$

Здесь ϱ — плотность материи, γ — гравитационная постоянная Ньютона, а v_i — скорость точек отсчета $\xi^i = \mathrm{const}$ относительно трехмерного эвклидового пространства, определенного координатами x^i.

2. Будем рассматривать безвихревое поле скоростей, для которого

$$v_{i,s} - v_{s,i} = 0. \tag{6}$$

Линейный элемент (3) с v_i, удовлетворяющим уравнениям (4)—(6) можно рассматривать как приближение к точному линейному элементу общей теории относительности. Будем называть это приближение ньютоновским приближением. Это приближение обладает тем замечательным свойством, что в случае центрального-симметрического внешнего решения оно совпадает с точным решением Шварцшильда.

В безвихревом случае можно ввести потенциал поля скоростей Ψ

$$v_i \equiv \Psi_{,i}.$$

Имеем следующий интеграл уравнения (5)

$$\Psi_{,t} + \tfrac{1}{2} \Psi_{,s} \Psi_{,s} = -U,$$

где U потенциал Ньютона. В полярных координатах последнее уравнение имеет вид

$$\Psi_{,t} + \frac{1}{2}\Psi_{,r}\Psi_{,r} + \frac{1}{2r^2}\left(\Psi_{,\vartheta}\ \Psi_{,\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\Psi_{,\varphi}\ \Psi_{,\varphi}\right) = -U. \tag{7}$$

Далее, займемся интегрированием уравнения (7).

3. Разложим потенциал U в ряд

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \ldots, \tag{8}$$

где слагаемое $U^{(l)}$ пропорционально 2^l-польному моменту гравитирующей системы.

$$U^{(0)} = -\frac{\gamma M}{r}, \tag{9}$$

где M — масса источника гравитационного поля. Вследствие отсутствия отрицательных масс

$$U^{(1)} = 0. \tag{10}$$

Воспользуясь формулами (41.11) и (41.12) Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [3], заменяя там только заряд массой и суммирование интегрированием, имеем для остальных $U^{(i)}$

$$U^{(l)} = \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\, P_l^{(m)}(\cos\vartheta)\, e^{-im\varphi} D_m^{(l)},$$

$$D_m^{(l)} = \int \varrho(r, \vartheta, \varphi, t) \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\, P_l^{(m)}(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}\, r^{l+2} \sin\vartheta\, dr d\vartheta\, d\varphi.$$

Здесь ϱ плотность массы, а $P_l^{(m)}$ присоединенные полиномы Лежандра.

Грубо выражаясь можем сказать, что $U^{(l)}$ пропорционален $(L/r)^l$, где L величина, определенная размерами источника гравитационного поля. В соответствии с разложением U в ряд (8), будем искать Ψ также в виде ряда, где l-ый член пропорционален $(L/r)^l$

$$\Psi = \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \ldots \tag{11}$$

Если в выражении для U учесть только $U^{(0)}$, имеем следующий интеграл уравнения (7)

$$\Psi^{(0)} = 2\sqrt{2\gamma M r}. \qquad (12)$$

Так как $U^{(1)} = 0$, то и $\Psi^{(1)} = 0$. Для остальных $\Psi^{(l)}$ получаем в статическом случае следующие рекуррентные формулы:

$$\Psi^{(l)} = -\frac{1}{\sqrt{2\gamma M}} \int \left(U^{(l)} + \Lambda^{(l)}\right) \sqrt{r}\, dr, \qquad (13)$$

где

$$\Lambda^{(l)} = \tfrac{1}{2} \sum_{s=2}^{l-2} \left[\Psi,_r^{l-s} \Psi,_r^{(s)} + \frac{1}{r^2} \left(\Psi,_\vartheta^{(l-s)} \Psi,_\vartheta^{(s)} + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \Psi,_\varphi^{(l-s)} \Psi,_\varphi^{(s)} \right) \right]. \qquad (14)$$

Нетрудно убедиться, что $\Psi^{(l)} \sim \dfrac{1}{r^{l-\frac{1}{2}}}$.

4. Рассмотрим случай нестатического поля. Нулевое приближение потенциала поля скоростей $\Psi^{(0)}$ определено теперь также соотношением (12), а $\Psi^{(1)} = 0$. Переходя в уравнении (7) от r и t к новым независимым переменным r^* и t^*

$$r^* = r,$$

$$t^* = t - \int \frac{dr}{\Psi,_r^{(0)}},$$

получаем новое уравнение

$$\Psi,_{t^*} + \tfrac{1}{2} \left(\Psi,_{r^*} - \Psi,_{t^*} \frac{1}{\Psi,_{r^*}^{(0)}} \right)^2 + \frac{1}{2r^2} \left(\Psi,_\vartheta \Psi,_\vartheta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \Psi,_\varphi \Psi,_\varphi \right) = -U. \qquad (15)$$

Ниже будем писать вместо r^* опять r.

Из уравнения (15) выводятся для $\Psi^{(l)}$ следующие рекуррентные формулы:

$$\Psi^{(l)} = -\frac{1}{\sqrt{2\gamma M}} \int \left(U^{(l)*} + \Lambda^{(l)} + H^{(l)}\right) \sqrt{r}\, dr, \qquad (16)$$

где

$$H^{(l)} = \sum_{s=2}^{l-2} \frac{r}{4\gamma M} \left[\Psi_{,t^*}^{(s)} \Psi_{,t^*}^{(l-s)} - 2\sqrt{\frac{2\gamma M}{r}} \Psi_{,r}^{(s)} \Psi_{,t^*}^{(l-s)} \right],$$

слагаемое $\Lambda^{(l)}$ определено соотношением (14), а звездочка у $U^{(l)*}$ означает, что в выражении для ньютоновского потенциала нужно заменить t величиной $t^* - \frac{2}{3} \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\gamma M}}$ и при интегрировании рассматривать t^* как независимый от r параметр. В нестатическом случае специального исследования требует проблема сходимости.

5. Рассмотрим простой пример. Пусть

$$U^{(2)} = \frac{Q}{r^3} (1 - 3\cos^2 \vartheta).$$

В случае постоянного квадрупольного момента Q — постоянно и интеграл (13) дает

$$\Psi^{(2)} = \frac{2Q}{3\sqrt{2\gamma M}\, r^{\frac{3}{2}}} (1 - 3\cos^2 \vartheta).$$

Предположим теперь, что

$$Q = Q_0 \sin \omega t.$$

В этом случае формула (16) дает

$$\Psi^{(2)} = \frac{2\omega Q_0 (1 - 3\cos^2 \vartheta)}{9\gamma M} \left(\frac{\sin(\omega t^* - z)}{z} + \sin \omega t^* \operatorname{si} z + \cos \omega t^* \operatorname{ci} z \right),$$

где

$$z = \frac{2\omega r^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2\gamma M}}.$$

Поступило в редакцию
3 октября 1965 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. П. Керес, ЖЭТФ, 46, 1741, 1964.
2. Х. П. Керес, Труды ИФА АН ЭССР № 9, 3, 1959.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., 1960.

ON THE CALCULATION OF THE NEWTONIAN APPROXIMATION TO THE RELATIVISTIC GRAVITATIONAL FIELD

V. Unt

The equations we get from the Einstein equations by the limiting process $c \to \infty$ are satisfied by such components of the metric tensor which we can interpret as the components of the field of velocities in Eucleidean three-space. The vortex-free case of the field of velocities is considered and the potentials of the field of velocities in the form of linear expansion are found.

ЧЕТЫРЕХЧАСТИЧНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ БОЗОНОВ С ДВУМЯ ФЕРМИОНАМИ В ТЕОРИИ КЕММЕРА-ДЭФФИНА

А. Айнсаар

Построен наиболее общий бозонный ток при спинах 0 и 1. Показана связь между формфакторами в формализмах Кеммера-Дэффина, с одной стороны, и Клейна-Гордона, с другой. Изучено условие сохранения векторного тока. Оказывается, что в принципе бозонный ток в формализме Кеммера-Дэффина не отличается от тока в формализме Клейна-Гордона.

Предположим, что взаимодействие между лептонным и бозонным токами описывается матричным элементом

$$M \sim L_{\alpha} B_{\alpha}, \tag{1}$$

где лептонный ток обыкновенно выбирается в $V - A$-виде

$$L_{\alpha} = \bar{u}_2 \gamma_{\alpha} (1 + \gamma_5) u_1. \tag{2}$$

Бозонный ток содержит формфакторы, отражающие сильное взаимодействие бозонов. Они зависят от скалярного произведения бозонных 4-импульсов $(k_1 \cdot k_2)$.

1. Бозонный ток при спине 0

В формализме Клейна-Гордона [1]

$$B_{\alpha} = \varphi_2^* \, (f_1 k_{1\alpha} + f_2 k_{2\alpha}) \varphi_1, \tag{3}$$

где f_1 и f_2 — формфакторы.

Для построения наиболее общего бозонного тока в формализме Кеммера-Дэффина мы должны иметь релятивистски инвариантный базис 5-рядных β-матриц, которые определяются условиями [2]

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\varrho + \beta_\varrho \beta_\nu \beta_\mu = \delta_{\mu\nu} \beta_\varrho + \delta_{\varrho\nu} \beta_\mu, \tag{4}$$

$$3\beta - \beta_\mu \beta_\mu + 1 = 0, \tag{5}$$

где

$$\beta = \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 \beta_4^2. \tag{6}$$

В качестве базисных матриц выберем следующие [3]:

$$\beta, \quad \beta_\mu, \quad \beta\beta_\mu, \quad \beta_\mu \beta_\nu. \tag{7}$$

Бозонный векторный ток в общем случае имеет вид

$$B_\alpha = \overline{\psi}_2 (h_1 \beta_\alpha + h_2 \beta\beta_\alpha + h_3 \beta_\alpha \hat{k}_1 + h_4 \beta_\alpha \hat{k}_2 + $$

$$+ h_5 \hat{k}_1 \beta_\alpha + h_6 \hat{k}_2 \beta_\alpha + h_7 \beta_\mu \beta_\mu k_{1\alpha} +$$

$$+ h_8 \beta_\mu \beta_\mu k_{2\alpha} + h_9 \beta k_{1\alpha} + h_{10} \beta k_{2\alpha}) \psi_1. \tag{8}$$

В пятирядном представлении невозможно построить псевдовектора. Используя общие соотношения (см. [4])

$$(i\hat{k}_1 + m_1)\psi_1 = 0, \qquad \overline{\psi}_2 (i\hat{k}_2 - m_2) = 0, \tag{9}$$

$$k_{1\mu} \psi_1 = \hat{k}_1 \beta_\mu \psi_1, \qquad \overline{\psi}_2 k_{2\mu} = -\overline{\psi}_2 \beta_\mu \hat{k}_2 \tag{10}$$

и соотношения, действительные только в 5-рядном случае (см. (5)),

$$\psi_1 = \left(1 - \frac{i\hat{k}_1}{m}\right) \beta\psi_1, \qquad \overline{\psi}_2 = \overline{\psi}_2 \beta \left(1 + \frac{i\hat{k}_1}{m}\right), \tag{11}$$

можно (8) выписать в виде

$$B_\alpha = \overline{\psi}_2 (j_1 \beta_\alpha + j_2 \beta\beta_\alpha) \psi_1, \tag{12}$$

где j_1, j_2 являются определенными линейными комбинациями величин $h_1, h_2, \ldots, h_{10}$. Обратим внимание на то, что (12) в отличие от (3) не содержит импульсов в явном виде. Значит, в формализме Кеммера-Дэффина в координатном представлении не надо рассматривать связей с производными.

В десятирядном представлении матрица β, определенная соотношением (6), равняется нулю. Более общее значение имеют матрицы η_+ и η_-, определяемые

$$\eta_+ = \tfrac{1}{2}(1+\eta_5), \qquad \eta_- = \tfrac{1}{2}(1-\eta_5), \tag{13}$$

где

$$\eta_5 = \eta_1\eta_2\eta_3\eta_4, \tag{14}$$

имеющие свойства проекционных операторов состояний с разными спиральностями [6].

В 5-рядном случае

$$\eta_+ = \beta, \qquad \eta_- = 1-\beta. \tag{15}$$

Теперь можно (12) переписать

$$B_a = \overline{\psi}_2 (g_1\,\eta_+ + g_2\,\eta_-)\,\beta_a\,\psi_1. \tag{16}$$

При переходе от одного формализма к другому можно использовать соотношения

$$f_1 = \frac{i}{m_1} g_1, \qquad f_2 = \frac{i}{m_2} g_2. \tag{17}$$

Полученные результаты можно применить, например, при вычислении распада $\pi^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu$, однако надо учесть условие сохранения векторного тока

$$(k_{2a} - k_{1a})\,B_a = 0, \tag{18}$$

что значит

$$f_1 = f_2 \quad \text{или} \quad m_1 g_2 + m_2 g_1 = 0. \tag{19}$$

2. Бозонный ток при спине 1

В этом случае имеем дело с 10-рядным представлением β-матриц, которые определяются кроме (4) еще соотношением [2]

$$\beta_\mu\,\beta_\nu\,\beta_\nu\,\beta_\mu = 6. \tag{20}$$

Учитывая эти соотношения, выберем из всевозможных произведений множество

$$I, \quad \beta_\mu, \quad \beta_\mu \beta_\nu, \quad \beta_\mu \beta_\nu \beta_\varrho, \quad \beta_\mu \beta_\nu \beta_\varrho \beta_\sigma, \quad \beta_\mu \beta_\nu \beta_\varrho \beta_\sigma \beta_\tau, \tag{21}$$

содержащее все 100 базисных матриц.

Построим бозонный ток, аналогично (8), используя матрицы (21), импульсы k_1 и k_2 и еще полностью антисимметричный единичный тензор четвертого ранга $\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}$. После упрощения с помощью уравнений (9) и (10) получаем

$$\begin{aligned} B_\alpha = \overline{\psi}_2 (g_1 \eta_+ k_{1\alpha} + g_2 \eta_+ k_{2\alpha} + g_3 \eta_- k_{1\alpha} + g_4 \eta_- k_{2\alpha} + \\ + g_5 \eta_+ \beta_\alpha + g_6 \eta_- \beta_\alpha + g_7 \beta_5 k_{1\alpha} + g_8 \beta_5 k_{2\alpha} + g_9 \beta_5 \beta_\alpha + \\ + g_{10} \beta_\alpha \beta_5) \psi_1 \end{aligned} \tag{22}$$

(см. (13), (26), 28)).

Результат согласуется со следующим обстоятельством:

Исходя из трансформационных свойств волновых функций при собственных преобразованиях Лоренца

$$\psi' = (1 + \tfrac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} S_{\mu\nu}) \psi, \qquad \overline{\psi}' = \overline{\psi} (1 - \tfrac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} S_{\mu\nu}), \tag{23}$$

где

$$S_{\mu\nu} = \beta_\mu \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\mu \tag{24}$$

и при пространственных отражениях

$$\psi' = \eta_4 \psi, \qquad \overline{\psi}' = \overline{\psi} \eta_4 \tag{25}$$

можно показать, что существуют два независимых скаляра I и $\beta_\mu \beta_\mu$, вместо которых можно использовать также

$$\eta_+ = \tfrac{1}{2}(1 + \eta_5) = 3 - \beta_\mu \beta_\mu$$

и (26)

$$\eta_- = \tfrac{1}{2}(1 - \eta_5) = \beta_\mu \beta_\mu - 2.$$

Кроме того, мы имеем два вектора, например,

$$\eta_+ \beta_\alpha = \beta_\alpha \eta_- \quad \text{и} \quad \eta_- \beta_\alpha = \beta_\alpha \eta_+, \tag{27}$$

один псевдоскаляр [7]

$$\beta_5 = \tfrac{1}{4}\,\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\,\beta_\mu\,\beta_\nu\,\beta_\varrho\,\beta_\sigma \tag{28}$$

и два псевдовектора

$$\beta_5\beta_a \quad \text{и} \quad \beta_a\beta_5. \tag{29}$$

Все величины (26) — (29) содержатся в (22).

Первые шесть слагаемых в выражении тока (22) образуют векторный ток, остальные — псевдовекторный ток

$$B = B^V + B^A.$$

Теперь покажем переход к величинам Клейна-Гордона. Следуя Умедзава [8], можем 10-рядное уравнение Кеммера-Дэффина

$$(\partial_\mu\,\beta_\mu + m)\,\psi = 0$$

привести к виду Клейна-Гордона

$$\left.\begin{aligned} &\partial_\mu F_{\mu\nu} - m^2 U_\nu = 0,\\ &F_{\mu\nu} = \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

определяя

$$\begin{aligned} &U_\mu = \frac{1}{m} R_\mu \psi,\\ &F_{\mu\nu} = \mathrm{R}_{\mu\nu}\psi, \end{aligned} \tag{31}$$

где

$$R_\mu = \begin{cases} -\,\beta_1^2\,\beta_2^2\,\beta_3^2\,\beta_\mu\beta_4 = -\,\eta_-\beta_\mu\beta_4, & \mu = 1,\ 2,\ 3,\\ \beta_1^2\,\beta_2^2\,\beta_3^2\,(1-\beta_4^2) = \eta_-(1-\beta_4^2), & \mu = 4, \end{cases} \tag{32}$$

$$R_{\mu\nu} = R_\mu\,\beta_\nu.$$

Из (32) можно вывести

$$R^*_\mu R_\mu = \eta_-, \qquad R^*_{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 2\eta_+,$$

$$R^*_\mu R_{\alpha\mu} = -\eta_- \beta_\alpha, \qquad R^*_{\alpha\mu} R_\mu = -\eta_+ \beta_\alpha,$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} R^*_{\mu\nu} R_{\varrho\sigma} = -4\beta_5, \qquad \varepsilon_{\alpha\mu\nu\varrho} R^*_{\mu\nu} R_\varrho = 2\beta_5\beta_\alpha,$$

$$\varepsilon_{\alpha\mu\nu\varrho} R^*_\mu R_{\nu\varrho} = 2\beta_\alpha\beta_5. \tag{33}$$

Имея в виду (31) и (33), можем переписать (22) в величинах Клейна-Гордона

$$B_\alpha = F^*_{2\mu\nu}\left(\frac{g_1}{2} k_{1\alpha} + \frac{g_2}{2} k_{2\alpha}\right) F_{1\mu\nu} + U^*_{2\mu}(m_1 m_2 g_3 k_{1\alpha} + $$
$$+ m_1 m_2 g_4 k_{2\alpha}) U_{1\mu} - F^*_{2\alpha\mu} m_1 g_5 U_{1\mu} - U^*_{2\mu} m_2 g_6 F_{1\alpha\mu} -$$
$$- F^*_{2\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\left(\frac{g_7}{4} k_{1\alpha} + \frac{g_8}{4} k_{2\alpha}\right) F_{1\varrho\sigma} + F^*_{2\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\mu\nu\varrho}\frac{g_9}{2} m_1 U_{1\varrho} +$$
$$+ U^*_{2\mu}\varepsilon_{\alpha\mu\nu\varrho}\frac{g_{10}}{2} m_2 F_{1\nu\varrho}. \tag{34}$$

В этом представлении формфакторы несущественно отличаются от тех же в (22) и являются

$$\frac{g_1}{2}, \quad \frac{g_2}{2}, \quad m_1 m_2 g_3, \quad m_1 m_2 g_4, \quad -m_1 g_5,$$
$$-m_2 g_6, \quad -\frac{g_7}{4}, \quad -\frac{g_8}{4}, \quad m_1\frac{g_9}{2}, \quad m_2\frac{g_{10}}{2}. \tag{35}$$

Так как

$$F_{\mu\nu} = ik_\mu U_\nu - ik_\nu U_\mu, \tag{36}$$

то можно (31) выразить и через векторные потенциалы

$$B_\alpha = U^*_{2\mu}[(f_1 k_{1\alpha} + f_2 k_{2\alpha})\delta_{\mu\nu} + (f_3 k_{1\alpha} + f_4 k_{2\alpha}) k_{1\mu} k_{2\nu} +$$
$$+ f_5 k_{2\nu}\delta_{\alpha\mu} + f_6 k_{1\mu}\delta_{\alpha\nu} + \varepsilon_{\mu\varrho\sigma\nu}(f_7 k_{1\alpha} + f_8 k_{2\alpha}) k_{2\varrho} k_{1\sigma} +$$
$$+ \varepsilon_{\alpha\mu\varrho\nu}(f_9 k_{2\varrho} + f_{10} k_{1\varrho})] U_{1\nu}, \tag{37}$$

где

$$
\begin{aligned}
&f_1 = g_1(k_1\cdot k_2) + g_3 m_1 m_2 - i g_6 m_2, \\
&f_2 = g_2(k_1\cdot k_2) + g_4 m_1 m_2 + i g_5 m_1, \\
&f_3 = -g_1, \qquad\qquad f_4 = -g_2, \\
&f_5 = -i g_5 m_1, \qquad f_6 = i g_6 m_2, \\
&f_7 = g_7, \qquad\qquad f_8 = g_8, \\
&f_9 = i g_9 m_1, \qquad f_{10} = i g_{10} m_2.
\end{aligned} \tag{38}
$$

Требование сохранения векторного тока $(k_{2\alpha} - k_{1\alpha}) B^V_\alpha$ гласит

$$
\left.\begin{aligned}
&(f_1 - f_2)(k_1\cdot k_2) + f_1 m_1^2 - f_2 m_2^2 = 0, \\
&(f_3 - f_4)(k_1\cdot k_2) + f_3 m_1^2 - f_4 m_2^2 - f_5 + f_6 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{39}
$$

в формализме Клейна-Гордона и

$$
\left.\begin{aligned}
&g_1((k_1\cdot k_2) + m_1^2) - g_2((k_1\cdot k_2) + m_2^2) - i g_5 m_1 - i g_6 m_2 = 0, \\
&g_3((k_1\cdot k_2) + m_1^2) - g_4((k_1\cdot k_2) + m_2^2) - i g_5 m_2 - i g_6 m_1 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{40}
$$

в формализме Кеммера-Дэффина.

Автор приносит благодарность Х. Ыйглане и М. Кыйву за полезные указания.

Поступило в редакцию
20 мая 1965 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Окунь, Слабое взаимодействие элементарных частиц, ФМ, М., 1963.
2. А. Айнсаар, Труды ИФА № 33, 109, 1967.
3. А. Айнсаар, Х. Ыйглане, Труды ИФА № 19, 132, 1962.
4. В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, М., 1947, стр. 61.
5. М. Кыйв, Л. Палги, Труды ИФА № 24, 67, 1963.
6. Г. Б. Кутузова, Труды ИФА № 16, 106, 1961.
7. H. Høgaasen, Zeitschrift f. Physik **179**, 221, 1964.
8. Х. Умедзава, Квантовая теория поля, ИЛ, М., 1958.

INTERACTION OF TWO BOSONS AND TWO FERMIONS IN THE KEMMER-DUFFIN THEORY

A. Ainsaar

A general consideration of the boson current separate from the cases of spin 0 and 1 is developed. The correlation between formfactors in the Kemmer-Duffin and the Klein-Gordon formulations is shown. The law of conservation of the vector current is investigated. It is deduced that there are no principal differences between the boson currents in the Kemmer-Duffin and the Klein-Gordon theories.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ СПИНОВОЙ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ

М. Кыйв, И. Отс

Обсуждаются вопросы параметризации спиновой матрицы плотности в виде $\varrho = U^{+} \varrho_D U$. Матрицы U найдены при наложении на ϱ требования инвариантности. Дается формула для определения максимального числа параметров.

При описании процессов с поляризованными частицами полезно воспользоваться техникой матрицы плотности. При этом определенное значение имеет способ параметризации спиновой матрицы плотности в конкретных задачах.

При построении спиновой матрицы плотности мы исходим из следующей задачи. В некотором базисе φ_i даны векторы состояния $\Psi_i = U_{ik} \varphi_k$ с весами λ_i. При этом матрица плотности может быть представлена в виде

$$\varrho = U^{+} \varrho_D U, \tag{1}$$

где U — унитарная матрица с элементами U_{ik}, а ϱ_D — диагональная матрица с неотрицательными элементами λ_i, сумма которых равна единице.

Для практического применения обычно используют разложение спиновой матрицы плотности по неприводимым тензорным операторам

$$\varrho_{mm'} = \frac{1}{2I+1} \sum_{kq} \langle \tilde{T}_{kq} \rangle (m \,|\, T_{kq} \,|\, m'), \tag{2}$$

где

$$(m \,|\, T_{kq} \,|\, m') = (-1)^{m'} C^{Im}_{kqIm'} .$$

Легко можно показать, что коэффициенты $<\tilde{T}_{kq}>$ связаны с весами λ_i и матрицами регулярного представления U. Действительно, соотношение (1) может быть представлено в виде

$$\varrho_{ij} = \sum_l \varrho_l^D U_{lj} U^*_{li},$$

а в обозначениях предствлений

$$\varrho_{ij} = \sum_l \varrho_l^D D_{lj}^{(100\ldots)} D_{li}^{(\ldots 001)}.$$

Используя коэффициенты Вигнера для U_n группы, получим

$$\varrho_{ij} = \sum_{\mu,\, l} \begin{pmatrix} 100\ldots & \ldots 001 & \mu \\ l & l & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100\ldots & \ldots 001 & \mu \\ i & j & \lambda \end{pmatrix} D^{\mu}_{\nu\lambda},$$

где сумма берется по всем представлениям, которые имеются в разложении

$$D^{(100\ldots)} \times D^{(\ldots 001)} = \sum_{\mu} D^{\mu}.$$

Но в данном случае имеются только скалярное и регулярное представления унимодулярной группы. Так как представления по $(\ldots 001)$ определяются только при помощи одного значения $\mu = I$ (в отношении подгруппы R_3 представления $D^{(\ldots 001)}$, $D^{(100\ldots)}$ не распадаются), коэффициенты $\begin{pmatrix} 100\ldots & \ldots 001 & \mu \\ i & j & \nu \end{pmatrix}$ совпадают с коэффициентами Вигнера для R_3. Отсюда следует, что

$$\varrho_{ij} = \sum_{l(kq)(k'q')} \varrho_l^D \begin{pmatrix} I & I & k' \\ -e & l & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & k \\ -i & j & q \end{pmatrix} D_{(kq)(k'q')},$$

$$\varrho_{ij} = \sum_{l(kq)(k'q')} \varrho_l^D \begin{pmatrix} I & I & k' \\ -e & l & q' \end{pmatrix} \frac{(-1)^{I-q}}{\sqrt{2I+1}} D^{(R0)}_{(k'q')(kq)} (-1)^j C^{Ii}_{kq\,Ij}, \qquad (3)$$

где сумма берется по всем значениям (kq), $k = 0$ (скалярное представление), $k = 1,\ 2\ \ldots\ 2I$ (регулярное представление).

Используя теперь соотношения (2) и (3), получим связь между коэффициентами $<\tilde{T}_{kq}>$ и регулярными представлениями группы U_n

$$<\tilde{T}_{kq}> = \sum_{l(k'q')} \varrho_l^D (-1)^{I-q} \sqrt{2I+1}\; D^{(R0)}_{(k'q')(kq)} \begin{pmatrix} I & I & k' \\ -e & l & q' \end{pmatrix}. \qquad (3')$$

Если спин квантован в определенном направлении $\vec{P}$ (U совпадут с матрицами представления R_3), иногда полезно воспользоваться следующей формой разложения матрицы плотности:

$$\varrho = \sum_{n=0}^{2I} B_n (\vec{S}\vec{P})^n, \qquad (4)$$

где $\vec{P}$ определяется

$$U^+ S_z U = \vec{S}\vec{P}. \qquad (5)$$

Коэффициент $B_n = \lambda_i A_i^n$, а A_i можно получить из рассуждения. Пусть $\varrho_D = \lambda_i \varrho_i$, где ϱ_i — проективные операторы. Тогда $S_z = m_i \varrho_i$, где $m_i = -I, -I+1, \ldots, I$ и A_i — коффициенты в разложении $\varrho_i = A_i^{(p)} S_z^{(p)}$, которые определяются из системы уравнений

$$\varrho_i = A_i^{(p)} (m_i \varrho_i)^p \qquad (6)$$

или

$$\delta_{ik} = A_i^{(p)} m_k^p \qquad (7)$$

и

$$A_i^{(p)} = \frac{D_i^{(p)}}{D}, \qquad (8)$$

где в знаменателе и в определителе следующие детерминанты:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & m_1 & m_1^2 \ldots & m_1^{n-1} \\ 1 & m_2 & m_2^2 \ldots & m_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots & \cdot \\ 1 & m_n & m_n^2 \ldots & m_n^{n-1} \end{vmatrix} = 2I!\;(2I-1)!\ldots 1!,$$

$$D_i^{(p)} = \begin{vmatrix} 1 & m_1 & m_1^2 \ldots & m_1^{p-1} & 0 & m_1^{p+1} \ldots & m_1^{n-1} \\ 1 & m_2 & m_2^2 \ldots & m_2^{p-1} & 0 & m_2^{p+1} \ldots & m_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \;\cdots & \cdot & 0 & \cdot \;\cdots & \cdot \\ 1 & m_i & m_i^2 \ldots & m_i^{p-1} & 1 & m_i^{p+1} \ldots & m_i^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \;\cdots & \cdot & 0 & \cdot \;\cdots & \cdot \\ 1 & m_n & m_n^2 \ldots & m_n^{p-1} & 0 & m_n^{p+1} \ldots & m_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+p} \sum m_{x_1} m_{x_2} \ldots m_{x_{n-1-p}} \prod_{\substack{n \geqslant l > k \geqslant 1 \\ l, k \neq i, p}} (m_l - m_k).$$

Здесь сумма берется по всем сочетаниям $n-1-p$ чисел и $n = 2l+1$.

Определение $\varrho = U^+ \varrho_D U$ несколько неудобно, так как при такой параметризации U содержит лишние параметры не входящие в ϱ. Действительно, матрица ϱ имеет в общем случае $n^2 - 1$ параметр, в то время как ϱ_D содержит $n-1$ и U — n^2 параметров. Отсюда получается, что U имеет n лишних параметров не входящих в ϱ.

В работе Цванцигера [1] предложена схема параметризации спиновой матрицы плотности при помощи комплексной ортогональной группы O

$$\varrho = OEO^+, \tag{9}$$

где E — диагональная матрица с положительными элементами. Так как O $n^2 - n$-параметровая группа, здесь нет лишних параметров, но этот метод имеет другой недостаток, который состоит в том, что числа E_i не являются собственными значениями матрицы ϱ и поэтому не имеют никакого прямого физического значения. Числа E_i — положительные корни собственных значений матрицы $\varrho\tilde{\varrho}$ ($\tilde{\varrho}$ — транспонированная матрица). Действительно,

$$\varrho\tilde{\varrho} = OEO^+\tilde{O}^+E\tilde{O} = OE^2\tilde{O} = OE^2O^{-1}. \tag{10}$$

Это соотношение дает и связь между обоими методами.

Нам кажется, что неудобство, связанное с лишними параметрами, можно преодолеть, если матрицу U параметризовать так, что лишние параметры явно выделятся. Удобный в этом онтошении метод дан Мурнаганом [2], где

$$U = D\, J^n. \tag{11}$$

Здесь D — диагональная матрица с элементами $\exp(i\,\delta_l)$, а

$$J^n = \prod_{k=2}^{n} \prod_{j=1}^{k-1} U^n_{jk}(\Theta_{jk}, \sigma_{jk}). \tag{12}$$

Все диагональные элементы U^n_{jk} равны единице кроме U^n_{jj} и U^n_{kk}, которые равны $\cos\Theta_{jk}$, все недиагональные элементы равны нулю кроме элементов U^n_{jk} и U^n_{kj}, кторые равны соответственно $-\sin\Theta_{jk}\exp(-i\,\sigma_{jk})$ и $\sin\Theta_{jk}\exp(i\,\sigma_{jk})$.

Ясно, что при такой параметризации уравнение (1) имеет вид

$$\varrho = J^+_n \varrho_D\, J_n, \tag{13}$$

т. е. параметризация определяется матрицами содержащими $n^2 - n$ параметров.

Такой метод параметризации может оказаться полезным и в тех случаях, где на ϱ наложены некоторые правила отбора или требования инвариантности относительно каких-либо операций, которые уменьшают число параметров.

Рассмотрим случай, в котором ограничения наложены на ϱ в виде требования инвариантности относительно некоторой операции R, т. е.

$$\varrho = R\,\varrho\,R^{-1}. \tag{14}$$

Это равносильно требованию

$$URU^+\,\varrho_D\,UR^{-1}U^+ = \varrho_D. \tag{15}$$

из которого следует, что при виде

$$\varrho_D = \begin{pmatrix} a_1 I_1 & & & \\ & a_2 I_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n I_n \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где I_i — единичные матрицы, а a_i — неотрицательные числа, матрица $URU^+ = T$ должна иметь вид

$$T = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где A_i — матрицы, размерность которых равна размерности матриц I_i, т. е. требуется, чтобы матрица U привела матрицу R к виду T. Допустим, что R можно привести к диагональному виду при помощи унитарного преобразования. Пусть это можно сделать при помощи одной конкретной матрицы U_R

$$U_R R U_R^+ = D \tag{18}$$

и пусть D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} b_1 E_1 & & & \\ & b_2 E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n E_n \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где E_i — единичные матрицы, а b_i — числа.

Если матрица R имеет такой диагональный вид, то ее можно диагонализировать и при помощи всех матриц вида $S_R U_R$, входящих в левый смежный класс по подгруппе S_R группы U, где S_R имеет вид

$$S_R = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_n \end{pmatrix}, \tag{20}$$

а B_i матрицы размерности E_i. Матрицу R не нужно приводить к диагональному виду, а к виду T. При этом все допустимые матрицы имеют вид $S_T S_R U_R$. Но матрица S_T не дает вклада в матрицу ϱ, так как $S_T^+ \varrho_D S_T = \varrho_D$. Но и в матрицах $S_R U_R$ имеются лишние параметры. Параметризацию, в которой лишние параметры выделяются, получим, если группу S_R

представим со всеми ее левыми смежными классами по подгруппе S_{RT}

$$S_R = S_{RT} N, \tag{21}$$

где

$$S_{RT} \subset S_R \quad \text{и} \quad S_{RT} \subset S_T \tag{22}$$

и N — один из представителей всех смежных классов S_R по подгруппе S_{RT}. Так как $S_{RT} \subset S_T$, то $S^+_{RT} \varrho_D S_{RT} = \varrho_D$ и

$$\varrho = N^+ \varrho_D N. \tag{23}$$

Мы увидим, что в случае диагонализуемости R при помощи унитарного преобразования, максимальное число допустимых параметров определяется элементами диагональной матрицы ϱ_D и смежным классом $S_R U_R$ по подгруппе S_R. Это значит, что требование инвариантности относительно R ведет нас к матрицам B_i прямая сумма которых дает матрицу S_R размерности $2I+1$. Чтобы определить число параметров представим матрицы B_i в виде (11). Максимальное число параметров получается

$$n = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + \ldots + n_n^2 - 1, \tag{24}$$

где n_i размерность матриц B_i.

Возьмем, например, очень часто рассматриваемую реакцию рассеяния двух неполяризованных частиц. Число параметров матрицы плотности одного из продуктов реакции при требовании сохранения четности (этот вопрос обсуждается в работе Инопина [3]) получается сразу, так как требование сохранения четности равносильно здесь требованию инвариантности относительно поворота на π в плоскости реакции. Но диагональный вид оператора $R(\pi)$ имеет элементы, которые принимают только два различных значения. Это дает для матриц B_1, B_2 размерности $n_1 = I+1$, $n_2 = I$ (I — целое) или $n_1 = n_2 = I + {}^1/_2$ (I — полуцелое).

Используя соотношение (24), получим число параметров

$$n = \begin{cases} 2I(I+1), & \text{при } I \text{ целом}, \\ 2I(I+1) - {}^1/_2, & \text{при } I \text{ полуцелом}. \end{cases} \tag{25}$$

Отсюда видно, что при $I=1$, один из продуктов такой реакции может быть описан матрицей плотности, имеющей только четыре параметра

$$\varrho = U_{13}^{3+} \varrho_D U_{13}^3 =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos^2\Theta + \lambda_3 \sin^2\Theta & 0 & (\lambda_3 - \lambda_1)\dfrac{\sin 2\Theta}{2}\exp(-i\delta) \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ (\lambda_3-\lambda_1)\dfrac{\sin 2\Theta}{2}\exp(i\delta) & 0 & \lambda_1\sin^2\Theta + \lambda_3\cos^2\Theta \end{pmatrix},$$

где U_{13}^3 — унитарная матрица, которая определена в (12). Этот случай обсуждался уже Лакиным [4].

Если R нельзя приводить при помощи унитарного преобразования к диагональному виду, а лишь к квазидиагональному виду

$$T = \begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_n \end{pmatrix}, \tag{26}$$

то максимальное число параметров получается, если ϱ_0 имеет вид

$$\varrho_0 = \begin{pmatrix} a_1 I_{C_1} & & & \\ & a_2 I_{C_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n I_{C_n} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

где I_{C_i} — единичные матрицы размерности C_i. Если среди подматриц C_i нет совпадающих, то матрица U не дает свободных параметров в матрицу плотности ϱ. Если среди C_i имеются одинаковые, то матрица U дает в ϱ свободные параметры, откуда лишние параметры выделяются аналогично выше данным методам.

Авторы благодарны Я. Лыхмусу за обсуждение.

Поступило в редакцию
3 октября 1965 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Zwanziger, Phys. Rev., 136, 558, 1964.
2. F. D. Murnaghan, The Unitary and Rotation Groups Spartan Books, Washington, D. C., 1962.
3. E. V. Inopin, Nucl. Phys., 48, 517, 1963.
4. W. Lakin, Phys. Rev., 98, 139, 1955.

ON THE PARAMETRIZATION OF THE SPIN DENSITY MATRIX

M. Kõiv, I. Ots

Problems of the parametrization of the density matrix given in the form $\varrho = U^{+}\varrho_{D}U$ are examined. The matrices U are found if ϱ is invariant under certain transformation. A formula for the maximal number of parameters is given.

УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЯДЕР ОТДАЧИ ПРИ ЗАХВАТЕ ЧАСТИЧНО ПОЛЯРИЗОВАННЫХ МЮ-МЕЗОНОВ ЯДРАМИ СО СПИНОМ

М. Кыйв, Л. Палги

Рассматривается асимметрия ядра отдачи при мю-захвате ядрами, имеющими спин. В отношении определения псевдоскалярной константы мю-захвата может быть интересным измерение асимметрии ядра отдачи при мю-захвате в Li^6.

1. Введение

Теоретические значения констант взаимодействия мю-захвата даны в работе Гольдбергера и Треймана [1]. Учет сильных взаимодействий вызывает константу «слабого магнетизма» и псевдоскалярную константу взаимодействия. Величина константы «слабого магнетизма» прямо вытекает из гипотезы «сохраняющегося векторного тока». Псевдоскалярная константа появляется в связи с перенормировкой теории и теоретическая оценка ее дает $C_P \approx 8G_A$.

Вообще экспериментальные данные о константах связи находятся в согласии со значениями Гольдбергера и Треймана. Наибольший интерес в данный момент представляет псевдоскалярная константа, так как имеющиеся экспериментальные измерения позволяют колебание C_P в довольно широких пределах. Кроме того, к теоретическому соотношению $C_P \approx 8G_A$ следует прибегать с некоторой осмотрительностью.

В отношении псевдоскалярной константы являются чувствительными парциальные переходы при мю-захвате в O^{16} и асимметрия нейтрона, вылетающего после захвата мю-мезона. Следует отметить, что теоретическое описание этих процессов сильно зависит от выбора ядерной модели, что вносит свою неопределенность.

От значения псевдоскалярной константы сильно зависит также асимметрия ядра отдачи при мю-захвате. Как показано в работах Коренмана и Эрамжяна параметр асимметрии практически не зависит от ядерных матричных элементов при уникальных переходах $0 \to J$ [2] (с изменением четности $\Delta\pi = (-1)^{J+1}$) и при ядерных переходах $^1/_2 \to {}^1/_2$ без изменения четности [3]. Соответствующие экспериментальные работы пока отсутствуют. В настоящей работе рассматриваются уникальные переходы $J \to 0$. Асимметрия ядра отдачи чувствительна к величине C_P и практически не зависит от ядерных матричных элементов.

Если спин ядра J в мезоатоме отличен от нуля, то мю-мезон, находящийся на K-оболочке, может быть поглощен из двух состояний сверхтонкой структуры, характеризуемых значениями полного момента $J+\frac{1}{2}$ или $J-\frac{1}{2}$. Асимметрия ядра отдачи, как и вероятность мю-захвата из этих двух состояний сверхтонкой структуры различны.

При отсутствии спонтанных конверсионных переходов между состояниями сверхтонкой структуры начальная система, состоящая из ядра со спином J и частично поляризованного мю-мезона на K-орбите, описывается матрицей плотности

$$\varrho = \frac{J+1}{2J+1}\varrho_+ + \frac{J}{2J+1}\varrho_-, \tag{1}$$

где

$$\varrho_+ = \frac{1}{2(J+1)}\left(1 + \frac{2P}{2J+1}(\vec{j}\vec{F})\right)\frac{J+1+2\vec{J}\vec{s}}{2J+1}, \tag{2}$$

$$\varrho_- = \frac{1}{2J}\left(1 - \frac{2P}{2J+1}(\vec{j}\vec{F})\right)\frac{J-2\vec{J}\vec{s}}{2J+1}. \tag{3}$$

Здесь $\vec{s}$ — спин мю-мезона, $\vec{J}$ — спин ядра мезоатома, $\vec{F} =$

$=\vec{j}+\vec{s}$ и P — величина поляризации мю-мезона на K-орбите мезоатома. В мезоатомах с ядерным зарядом $Z > 5$ происходят конверсионные переходы [4] и мю-мезон захватывается из состояния $J+\frac{1}{2}$ или $J-\frac{1}{2}$ в зависимости от того, какое состояние энергетически более низкое.

При наличии конверсионных переходов матрица плотности начальной системы дана в работе [5]. Обыкновенно состояние F^+ энергетически выше и происходит конверсия $F^+ \rightarrow F^-$. Матрица плотности в таком случае имеет вид

$$\varrho^k_- = \frac{J - 2\vec{J}\vec{s}}{2(2J+1)^2}\left\{\left(1+\frac{J+1}{J}\right)+2P\left[\frac{(J+1)(2J+3)}{J(2J+1)^2}-\frac{1}{2J+1}\right](\vec{j}\vec{F})\right\}. \tag{4}$$

2. Угловое распределение ядер отдачи

Угловое распределение ядер отдачи выражается при помощи матрицы плотности следующим образом:

$$\frac{dW}{d\Omega} = 2\pi q^2 \frac{dq}{dE_f} \sum \langle M_f \nu | H | M' \mu' \rangle \langle M' \mu' | \varrho | M \mu \rangle \langle M \mu | H^* | M_f \nu \rangle. \tag{5}$$

Матричный элемент гамильтониана слабого взаимодействия для мю-захвата запишем в таком же виде, как в работе Мориты и Фуджи [6]

$$\langle M_f \nu | H | M \mu \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\alpha Z m'_\mu)^{3/2} \sum_{\varkappa \lambda m u v} i^{-l} Y^*_{lm}(\Omega) M_{vu}(\varkappa) \cdot$$

$$\cdot (-1)^{\lambda + 3/2} (l \tfrac{1}{2} m \nu | j \lambda)(j s - \lambda \mu | u \, \mu - \lambda)(J u M \, \mu - \lambda | J_f M_f), \tag{6}$$

где $(l_1 l_2 m_1 m_2 | l m)$ — коэффициенты Клебша-Гордана, l, j — орбитальный и полный момент вылетающего нейтрино, s — спин мю-мезона, $M_{vu}(\varkappa)$ содержит ядерные матричные элементы и константы мю-захвата

$$M_{0u}(\varkappa)=C_V[0vu](S_{0u}(\varkappa)+iS'_{0u}(-\varkappa))-$$
$$-\left(C_A[1vu]-\frac{iC_V}{M}[1vup]\right)(S_{1u}(\varkappa)+iS'_{1u}(-\varkappa))+$$
$$+\frac{C_V}{2M}\sqrt{3}q\left(\sqrt{\frac{v+1}{2v+3}}\,\delta_{v+1,u}[0v+1u+]+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{v}{2v-1}}\,\delta_{v-1,u}[0\,v-1\,u-]\right)(S'_{1u}(-\varkappa)-iS_{1u}(\varkappa))+$$
$$+\frac{C_V}{2M}\sqrt{6}q(1+\mu_p-\mu_n)\,(\sqrt{v+1}\,W(1\,1uv,1v+1)\cdot$$
$$\cdot[1v+1u+]+\sqrt{v}\,W(1\,1\,uv,1\,v-1)[1\,v-1\,u-])\cdot$$
$$\cdot(S'_{1u}(-\varkappa)-iS_{1u}(\varkappa))+\left\{\frac{C_A}{M}[0vup]+\frac{(C_A-C_P)q}{2\sqrt{3}M}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\sqrt{\frac{v+1}{2v+1}}[1\,v+1\,u+]+\sqrt{\frac{v}{2v+1}}[1\,v-1\,u-]\right)\right\}\cdot$$
$$\cdot(S'_{0u}(-\varkappa)-iS_{0u}(\varkappa)).\tag{7}$$

В формуле (7) $[0vu]$, $[1vu]$ и т. д. — ядерные матричные элементы и

$$\left.\begin{aligned}
S_{0u}(\varkappa)&=\sqrt{\frac{2j+1}{2l+1}}\,\delta_{lv}\delta_{vu},\\
S_{1u}(\varkappa)&=\sqrt{2(2j+1)}\,W(\tfrac{1}{2}1\,jl,\tfrac{1}{2}u)\,\delta_{lv},\\
S'_{0u}(-\varkappa)&=(\operatorname{sign}\varkappa)\sqrt{\frac{2\bar{j}+1}{2\bar{l}+1}}\,\delta_{\bar{l}v}\,\delta_{vu},\\
S'_{1u}(-\varkappa)&=(\operatorname{sign}\varkappa)\sqrt{2(2\bar{j}+1)}\,W(\tfrac{1}{2}1\bar{j}\bar{l},\tfrac{1}{2}u)\,\delta_{\bar{l}v},
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

где при помощи $\varkappa$ определяются орбитальный и полный моменты вылетающего нейтрино

$$\begin{aligned}
l&=\varkappa, & j&=l+\tfrac{1}{2}\quad\text{при }\varkappa>0,\\
l&=-\varkappa-1, & j&=l-\tfrac{1}{2}\quad\text{при }\varkappa<0
\end{aligned}\tag{9}$$

и

$$\begin{aligned}
\bar{l}&=\varkappa-1, & \bar{j}&=\bar{l}-\tfrac{1}{2}\quad\text{при }\varkappa<0.\\
\bar{l}&=-\varkappa, & \bar{j}&=\bar{l}+\tfrac{1}{2}\quad\text{при }\varkappa>0,
\end{aligned}\tag{9'}$$

Используя формулы (1) — (9′), вычисляем угловое распределение ядер отдачи. Для этого надо найти следующие матричные элементы:

$$\langle M_f\nu|H|M'\mu'\rangle\langle M'\mu'|\varrho_k|M\mu\rangle\langle M\mu|H^*|M_f\nu\rangle=$$

$$=\frac{4}{\pi}\,(\alpha Z m_{\mu}^{*})^3\,Y_{b0}A_k, \tag{10}$$

где

$$A_k=\sum_{\substack{\text{по проекциям}\\ \text{моментов}}}\ \sum_{\varkappa\varkappa' u u' v v'} i^{l'-l}(-1)^{1+l+j+l'}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2u+1)(2u'+1)(2l+1)}{4\pi}}\langle M'\mu'|\varrho_k|M\mu\rangle\cdot$$

$$\cdot(ll'00|b0)\,(bl\,m'-m\,m|l'm')\,(l\tfrac{1}{2}m\nu|j\lambda)\,(l'\tfrac{1}{2}m'\nu|j'\lambda')\,\cdot$$

$$\cdot\,(uj\,\mu'-\lambda\,\lambda|s\mu')\,(u'j'\mu-\lambda'\lambda'|s\mu)\,(JuM'\mu'-\lambda|J_fM_f)\,\cdot$$

$$\cdot\,(Ju'M\mu-\lambda'|J_fM_f), \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\varrho_1=I,\\
&\varrho_2=\vec{j}\vec{s},\\
&\varrho_3=\vec{J}\vec{s},\\
&\varrho_4=\vec{J}\vec{j},\\
&\varrho_5=(\vec{J}\vec{s})\,(\vec{J}\vec{j}),\\
&\varrho_6=(\vec{J}\vec{s})\,(\vec{j}\vec{s}).
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Выбирая ось z вдоль поляризации мю-мезона $\vec{j}$ и суммируя по проекциям моментов, пользуясь графической техникой суммирования коэффициентов Клебша-Гордана [7], получаем

$$A_1=\sum_{\varkappa v u}\frac{(2J_f+1)}{\sqrt{4\pi}}M_{vu}(\varkappa)M^*_{v'u'}(\varkappa)\,\delta_{uu'}\delta_{b0}, \tag{13}$$

$$A_2=\sum_{\substack{\varkappa v u\\ \varkappa' v' u'}}\delta_{uu'}(-1)^{u-j-j'}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{Bmatrix}1 & j' & j\\ u & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1 & l' & l\\ \frac{1}{2} & j & j'\end{Bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\,Q(v,v',\varkappa,\varkappa',u,u'), \tag{14}$$

$$A_3 = \sum_{\varkappa v u v' u'} (-1)^{J_f + J - j + \frac{1}{2}} \frac{(2J_f+1)}{\sqrt{4\pi}} M_{vu}(\varkappa) M^*_{v'u'}(\varkappa)\, \delta_{b0} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}} \sqrt{(2u+1)(2u'+1) J(J+1)(2J+1)} \cdot$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} J & 1 & J \\ u & J_f & u' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & u & u' \\ j & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix}, \tag{15}$$

$$A_4 = \sum_{\substack{\varkappa v u \\ \varkappa' v' u'}} (-1)^{u + u' - J - J_f} \tfrac{1}{3} \sqrt{(2u+1)(2u'+1)} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{J(J+1)(2J+1)} \begin{Bmatrix} J & 1 & J \\ u' & J_f & u \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & j' & j \\ \frac{1}{2} & u & u' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & l' & l \\ \frac{1}{2} & j & j' \end{Bmatrix} \cdot$$

$$\cdot Q(v, v', \varkappa, \varkappa', u, u'), \tag{16}$$

$$A_5 = \sum_{\substack{\varkappa v u \\ \varkappa' v' u'}} (-1)^{j' - \frac{1}{2} + J - J_f + u} \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(2u+1)(2u'+1)} \cdot$$

$$\cdot J(J+1)(2J+1) \begin{Bmatrix} 1 & l' & l \\ \frac{1}{2} & j & j' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & u' & J_f \\ \frac{1}{2} & j' & J & J \\ u & j & 1 & J \end{Bmatrix} \cdot$$

$$\cdot Q(v, v', \varkappa, \varkappa', u, u'), \tag{17}$$

$$A_6 = \sum_{\substack{\varkappa v u \\ \varkappa' v' u'}} (-1)^{3/2 - J - J_f - j' + u'} \tfrac{1}{2} \sqrt{(2u+1)(2u'+1)} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{J(J+1)(2J+1)} \begin{Bmatrix} J & 1 & J \\ u & J_f & u' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & u & u' \\ j & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & j' & j \\ u' & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & l' & l \\ \frac{1}{2} & j & j' \end{Bmatrix} \cdot$$

$$\cdot Q(v, v', \varkappa, \varkappa', u, u'), \tag{18}$$

где

$$Q(v, v', \varkappa, \varkappa', u, u') = i^{l' - l} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{b1} (l'l00/10) \cdot$$

$$\cdot (2J_f + 1) \sqrt{(2l+1)(2l'+1)(2j+1)(2j'+1)} \cdot$$

$$\cdot M_{vu}(\varkappa) M^*_{v'u'}(\varkappa'). \tag{19}$$

Отсюда получаем угловое распределение ядер отдачи для переходов $J \to J_f$

$$\frac{dW}{d\Omega} \sim 1 + \alpha P \cos \Theta. \tag{20}$$

Если конверсионные переходы отсутствуют, то получаем при статическом распределении по сверхтонким состояниям

$$\alpha = \frac{2\sqrt{3}(A_2 + A_4 + 4A_5 + 4A_6)}{(2J+1)^2 A_1} \tag{21}$$

и при захвате из отдельных состояний сверхтонкой структуры F^+ и F^-

$$\alpha_+ = \frac{2\sqrt{3}[(J+1)(A_2 + A_4) + 2(A_5 + A_6)]}{(2J+1)[(J+1)A_1 + 2A_3]}, \tag{22}$$

$$\alpha_- = -\frac{2\sqrt{3}[J(A_2 + A_4) - 2(A_5 + A_6)]}{(2J+1)[JA_1 - 2A_3]}. \tag{23}$$

При конверсионных переходах $F^+ \to F^-$ получаем

$$\alpha_-^k = \frac{2\sqrt{3}[(J+1)(2J+3) - J(2J+1)][J(A_2 + A_4) - 2(A_5 + A_6)]}{(2J+1)^3 [JA_1 - 2A_3]}. \tag{24}$$

3. Уникальные переходы $J \to 0$

Наиболее простой вид имеет угловое распределение ядер отдачи для переходов $J \to J_f = 0$, где конечное ядро не имеет спина. По аналогии с β-распадом назовем такие переходы с изменением четности $\Delta\pi = (-1)^{J+1}$ уникальными и переходы с изменением четности $\Delta\pi = (-1)^J$ неуникальными.

Для неуникальных переходов $M_{vu}(\varkappa)$ не содержит псевдоскалярной константы взаимодействия и, кроме того, асимметрия ядра отдачи может сильно зависеть от выбора ядерных волновых функций. Поэтому это представляет меньший интерес и здесь не рассматривается.

Более интересны уникальные переходы. Для уникальных переходов A_k в выражении углового распределения следующие:

$$A_1 = (4\pi)^{-1/2}(2M^{-J}M^{-J} + 2M^{J+1}M^{J+1}), \tag{25}$$

$$A_2=(3\cdot 4\pi)^{-1/2}(2J+1)^{-1}(M^{-J}M^{-J}+$$
$$+4\sqrt{J(J+1)}M^{-J}M^{J+1}-M^{J+1}M^{J+1}), \tag{26}$$
$$A_3=(4\pi)^{-1/2}(-(J+1)M^{-J}M^{-J}+JM^{J+1}M^{J+1}), \tag{27}$$
$$A_4=(3\cdot 4\pi)^{-1/2}(2J+1)^{-1}(-2(J+1)M^{-J}M^{-J}-$$
$$-4\sqrt{J(J+1)}M^{-J}M^{J+1}-JM^{J+1}M^{J+1}), \tag{28}$$
$$A_5=(3\cdot 4\pi)^{-1/2}(2J+1)^{-1}((J+1)^2M^{-J}M^{-J}+$$
$$+\sqrt{J(J+1)}M^{-J}M^{J+1}-\tfrac{1}{2}J^2M^{J+1}M^{J+1}), \tag{29}$$
$$A_6=(3\cdot 4\pi)^{-1/2}(2J+1)^{-1}\ (-\tfrac{1}{2}(J+1)M^{-J}M^{-J}-$$
$$-\sqrt{J(J+1)}M^{-J}M^{J+1}-\tfrac{1}{2}JM^{J+1}M^{J+1}). \tag{30}$$

Здесь

$$M^{-J}=Re\,M_J(-J)=ImM_J(J),$$
$$M^{J+1}=Re\,M_J(J+1)=-ImM_J(-J-1).$$

и они имеют такой вид

$$M^{-J}=\frac{1}{(2J+1)}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\{-C_A(2J+1)[1J-1J]+$$
$$+\frac{C_V}{M}\sqrt{(2J+1)(J+1)}[1JJp]-\frac{C_V}{2M}q(1+\mu_p-\mu_n)\cdot$$
$$\cdot(\sqrt{J(J+1)}[1J+1J+]-(J+1)[1J-1J-])-$$
$$-\sqrt{3}\,\frac{C_A}{M}\sqrt{J}[0JJp]-\frac{(C_A-C_P)}{2M}q(\sqrt{J(J+1)}[1J+1J+]+$$
$$+J[1J-1J-])\}, \tag{31}$$

$$M^{J+1}=\frac{1}{(2J+1)}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\{C_A[1J+1J](2J+1)+$$
$$+\frac{C_V}{M}\sqrt{J(2J+1)}[1JJp]-\frac{C_V}{2M}q(1+\mu_p-\mu_n)(J[1J+1J+]-$$
$$-\sqrt{J(J+1)}[1J-1J-])+\sqrt{3}\,\frac{C_A}{M}\sqrt{J+1}[0JJp]+$$
$$+\frac{(C_A-C_P)}{2M}q((J+1)[1J+1J+]+$$
$$+\sqrt{J(J+1)}[1J-1J-])\}. \tag{32}$$

При отсутствии конверсии получаем коэффициент асимметрии

$$\alpha = \frac{[(2J+1)^2 M^{-J} M^{-J} - (2J+1)(J+1) M^{J+1} M^{J+1}]}{(2J+1)^3 (M^{-J} M^{-J} + M^{J+1} M^{J+1})}. \tag{33}$$

При мю-захвате из отдельных состояний сверхтонкой структуры и также при наличии конверсии коэффициенты асимметрии не зависят ни от ядерных матричных элементов, ни от констант взаимодействия

$$\alpha_- = \frac{1}{2J+1}, \quad \alpha_+ = -\frac{J+1}{(2J+1)^2} \tag{34}$$

и, например,

$$\alpha_-^k = -\frac{4J+3}{(2J+1)^3}. \tag{35}$$

В работе Мориты и Фуджи [7] показано, что $[1\ J-1\ J-] \approx$ $\approx [1\ J-1\ J]$, а остальные матричные элементы $[0\ JJ\ p]$, $[1\ JJ\ p]$, $[1\ J+1\ J]$ и $[1\ J+1\ J+]$ на один-два порядка меньше и ими мы можем для приближенной оценки пренебречь. В таком приближении получаем

$$M^{-J} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \frac{[1\ J-1\ J]}{2J+1} \Big(-C_A(2J+1) + C_V \frac{q}{2M} \cdot$$

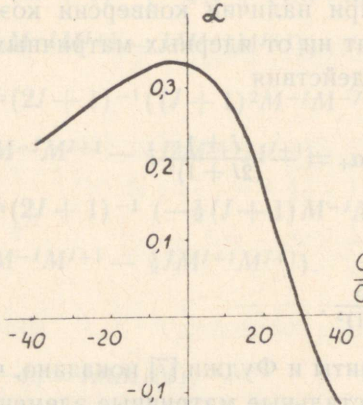
$$\cdot (1 + \mu_p - \mu_n)(J+1) + \frac{C_A - C_P}{2M} q J\Big), \tag{36}$$

$$M^{J+1} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \frac{[1\ J-1\ J]}{2J+1} \Big(C_V \frac{q}{2M} (1 + \mu_p - \mu_n) \sqrt{J(J+1)} +$$

$$+ \frac{C_A - C_P}{2M} q \sqrt{J(J+1)}\Big). \tag{37}$$

Коэффициент асимметрии α для уникальных переходов в приближении (36), (37) не зависит от ядерных матричных элементов. Естественно, что точная α будет только слабо зависеть от конкретного вида ядерных волновых функций. Это дает возможность по соответствующим экспериментальным данным определить C_P сравнительно независимо от модели ядра. Как было показано Коренманом и Эрамжяном [2], такая же ситуация имеет место при уникальных переходах $0 \to J$.

Экспериментально легче определить асимметрию ядер отдачи в случае легких ядер. Из-за конверсионных переходов, происходящих в тяжелых ядрах, там коэффициент асимметрии не зависит от констант связи. Из легких ядер конверсии не происходит в мезоатоме Li^6. На рисунке приведена зависимость коэффициента асимметрии от величины псевдоскалярной константы при мю-захвате в Li^6 ($Li^6 + \mu^- \to He^6 + \nu$, $\Delta J = -1$, без изменения четности). Коэффициент асимметрии α сильно зависит от величины C_P и когда ее экспериментальное определение станет возможным (пробеги He^6 достаточные для экспериментального наблюдения и достаточная поляризация P), то можно будет определить псевдоскалярную константу мю-захвата почти независимо от конкретной ядерной модели.



Зависимость коэффициента асимметрии ядра отдачи α от псевдоскалярной константы ваимодействия C_P при мю-захвате в Li^6 $\left(\frac{q}{2M} = 0{,}05, \frac{C_A}{C_V} = -1{,}20\right)$.

Поступило в редакцию
29 сентября 1965 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. L. Goldberger, S. B. Treiman, Phys. Rev., **111**, 354, 1958.
2. Г. Я. Коренман, Р. А. Эрамжян, Препринт ОИЯИ, Р-1160, 1962.
3. Г. Я. Коренман, Р. А. Эрамжян, ЖЭТФ, **45**, 1111, 1963.
4. R. Winston, Phys. Rev., 129, 2766, 1962.
5. М. Кыйв, Труды ИФА АН ЭССР, № 25, 102, 1964.
6. M. Morita, A. Fujii, Phys. Rev., **118**, 606, 1960.
7. А. П. Юцис, А. А. Бандзайтис, Я. И. Визбарайте, Литовский физический сборник, № 1—2, 75, 91, 109, 1962.

ANGULAR DISTRIBUTION OF RECOIL NUCLEUS FROM PARTIALLY POLARIZED MUON CAPTURE BY THE NUCLEUS OF NONZERO SPIN

M. Kõiv, L. Palgi

General formulae for the asymmetry coefficient are presented. Unique transformations are considered in detail. Experimental study of recoils from muon capture in Li^6 ought to give a new possibility to detect the pseudoscalar constant of muon capture almost independently from the nuclear model.

ОБ ОБРАЗОВАНИИ МЕЗОМОЛЕКУЛЯРНОГО ИОНА $(dd\mu)^+$

Э. Весман

Между теоретическими оценками и экспериментальными данными выхода ядерной реакции в $(dd\mu)^+$ существует разногласие, которое, по-видимому, связано с ролью уровня системы $(dd\mu)^+$ с $K=1$, $v=1$. Грубая оценка дает для этого уровня $E_1 \approx -7$ eV. Рассмотрен случай, когда этот уровень $E_1 \lesssim 4{,}5$ eV и освобождающаяся при образовании $(dd\mu)^+$ энергия достаточна для диссоциации молекулы дейтерия. При таком механизме скорость образования $(dd\mu)^+$ $\lambda_{dd} \lesssim 10^2$ $сек^{-1}$. Сделана грубая оценка для случая, если $E_1 \approx -16$ eV. Найдено $\lambda_{dd} \approx 10^6$ $сек^{-1}$.

Между экспериментальными данными образования мезомолекулярного иона $(dd\mu)^+$ (для плотности жидкого дейтерия $\lambda_{dd} = (6{,}7 \pm 1{,}2) \cdot 10^5$ $сек^{-1}$, см. [1]) и теоретическими оценками ($\lambda_{dd} \leqslant 3{,}4 \cdot 10^4$ $сек^{-1}$ см. [2]) существует большое расхождение, которого нет, например, между теоретическими оценками и экспериментальными данными образования $(pp\mu)^+$ (см. [1—3]).

В имеющихся работах рассматриваются 2 механизма образования $(dd\mu)^+$: 1) электрический дипольный переход из S-волны сплошного спектра на вращательный уровень $K=1$ с конверсией на электроне и 2) электрический монопольный переход на уровень $K=0$ с конверсией на электроне.

Нам кажется, что причиной разногласия между теорией и экспериментом образования $(dd\mu)^+$ является то, что недостаточно изучен возбужденный колебательный уровень с $K=1$. Вполне возможно, что существует уровень с $K=1$, $v=1$ (см. [4]). В связи с этим интересно заметить, что значения уровней энергии, вычисленные Герштейном для $(pp\mu)^+$, $(dd\mu)^+$ и $(tt\mu)^+$ в работе [4] были подтверждены позже вычислениями по вариационному методу (см. [5, 6]). Но вычисления Герштейна дали уровень $(dd\mu)^+$ с $K=1$, $v=1$ с энергией связи $E_1 \approx -7\ eV$. По поводу этого уровня есть сомнения и его надо уточнить вариационно. При этом может осуществляться несколько возможностей: 1. Если этот уровень лежит глубже и величина энергии связи достигает, скажем, $E_1 \approx \approx -16\ eV$, то вероятность электрического дипольного перехода на этот уровень резко возрастает. Грубая оценка показала, что в таком случае $\lambda_{dd} \approx 10^6$ $сек^{-1}$. 2. Если уровень виртуальный, то возрастает вероятность ядерной реакции налету за счет резонанса. Этот вопрос требует дальнейшего рассмотрения. 3. Если уровень порядка энергии диссоциации молекулы дейтерия (4,56 eV), то возникает возможность, что при образовании $(dd\mu)^+$ играет роль механизм, в котором освобождающаяся энергия диссоциирует молекулу дейтерия. Такой процесс рассматривается в настоящей статье.

Сечение этого процесса —

$$\sigma = \frac{2\pi}{3\hbar} \sum \int |J|^2 k^2 dk d\,\Omega_k \delta(E_1 - E_2 + E), \tag{1}$$

где $E_2 = -4{,}56\ eV$ — энергия основного уровня молекулы D_2, E и k — энергия и импульс дейтрона в конечном состоянии, J после интегрирования по мезонным координатам

$$J = -i\frac{3}{2}\frac{e^2}{k\sqrt{v}}\frac{1}{(4\pi)^{3/2}}\int\frac{f(R)\,g(R)}{R^2}Y_{1m}(\Theta,\varphi)\frac{\vec{R}\vec{\varrho}}{\varrho^3}\cdot$$

$$\cdot\frac{g_1(\varrho)\,g_2(\varrho)}{\varrho^2}P_1\left(\frac{\vec{k}\vec{\varrho}}{k\varrho}\right)d\vec{R}\,d\vec{\varrho}, \tag{2}$$

где $g(R)$ — радиальная часть волновой функции дискретного спектра мезомолекулы в состоянии притяжения, $f(R)$ — то же для сплошного спектра в состоянии отталкивания, $g_1(\varrho)$ и $g_2(\varrho)$ — радиальные части волновых функций дискретного и непрерывного спектров молекулы D_2, v — скорость мезоатома $d\mu$. Суммирование в (1) производится по всем конечным состояниям. Окончательно из (1) получим

$$\lambda_{dd} = \frac{4\pi}{9}\frac{M_1 e^4}{\hbar^3}(\mathrm{N}a_e^3)\left(\frac{a_\mu}{a_e}\right)^5 |J_1|^2 |J_2|^2\ сек^{-1}, \tag{3}$$

где $N = 4 \cdot 10^{22}$ число ядер в $см^3$, a_μ и a_e — боровские радиусы μ-мезона и электрона, $M_1 = \frac{2}{3} M_d$, где M_d — масса дейтерона, J_1 записано в мезоатомных единицах ($e = 1$, $\hbar = 1$, $M_\mu = 1$), J_2 в атомных ($e = 1$, $\hbar = 1$, $M_e = 1$)

$$J_1 = \int g(R) f(R) R dR. \tag{4}$$

Для грубой оценки берем (см. [2]):

$$g(R) = \left[\frac{\alpha(2s+1)}{\Gamma(2s)}\right]^{1/2} \xi^s \left[1 - \frac{\xi}{2s+1}\right], \tag{5а}$$

$$f(R) = R - a_u, \tag{5б}$$

где $\xi = 2\delta\, e^{-\alpha(R - R_0)}$, $s = \frac{\sqrt{M_d |E_1|}}{\alpha}$, $\delta = \frac{\sqrt{M_d D}}{\alpha}$,

а $\alpha = 0{,}69$, $R_0 = 2{,}34$ и $D = 0{,}08$ — параметры потенциала Морза; $a_u = 5{,}73$ — длина рассеяния. Интегрирование в (4) было проведено от a_u до ∞. Для уровная $E_1 = -4{,}56$ eV $J_1 \approx 8. \cdot 10^2$,

$$J_2 = \int\limits_0^\infty \frac{g_1(\varrho)\, g_2(\varrho)}{\varrho^2} d\varrho. \tag{6}$$

Основная трудность вычисления этого интеграла заключается в том, что волновая функция конечного состояния g_2 быстро осциллирует и при вычислении (6) может возникнуть большая погрешность. Для оценки интеграла (6) мы взяли для $g_1(\varrho)$ и $g_2(\varrho)$ квазиклассические выражения. По правилам вычисления квазиклассических матричных элементов (см. [7]) известно, что основной вклад в интеграл (6) дает окрестность точки ϱ_a, где ϱ_a определяется из уравнения

$$\frac{1}{4M_d \varrho_a^2} + |E_2| = \frac{9}{4M_d \varrho_a^2} - E. \tag{7}$$

Так как ϱ_a лежит в подбарьерной области, нам надо знать $g_1(\varrho)$ и $g_2(\varrho)$ только под барьером

$$g_1(\varrho) = \frac{\sqrt{M_d}\,\omega}{2\pi^{1/4} e^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{p_1(\varrho)}} \exp\left[-\int\limits_{\varrho_1}^{\varrho} p_1(\varrho)\, d\varrho\right], \tag{8а}$$

$$g_2(\varrho) = \frac{1}{2\sqrt{p_2(\varrho)}} \exp\left[\int\limits_{\varrho_2}^{\varrho} p_2(\varrho)\, d\varrho\right], \tag{8б}$$

где

$$p_1(\varrho) = \sqrt{[U(\varrho) + \frac{1}{4M_d\,\varrho^2} - E_2] M_d},$$

$$p_2(\varrho) = \sqrt{[U(\varrho) + \frac{9}{4M_d\,\varrho^2} - E] M_d},$$

а $\omega = 1{,}43 \cdot 10^{-2}$ *ат. ед.* — частота ядерных колебаний на основном уровне молекулы D_2, ϱ_1 и ϱ_2 — точки остановки. В (8а) e — основание натурального логарифма.

$$J_2 \sim \frac{\sqrt{M_d}\,\omega}{8e^{1/4}\,\pi^{1/4}} \frac{1}{\varrho_\alpha^2\, p_2(\varrho_\alpha)} \exp\{-\sqrt{M_d}\,\cdot$$

$$\cdot \left| \int\limits_{\varrho_\alpha}^{\varrho_1} \sqrt{U(\varrho) + \frac{1}{4M_d\,\varrho^2} - E_2}\, d\varrho - \int\limits_{\varrho_\alpha}^{\varrho} \sqrt{U(\varrho) + \frac{9}{4M_d\,\varrho^2} - E}\, d\varrho \right| \}. \tag{9}$$

Интегралы в экспоненте можно вычислить, зная потенциальную функцию U. Мы использовали разложение Дэнгема [8]

$$U(x) = a_0 x^2 (1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots) - 1{,}175, \tag{10}$$

где $x = \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0}$, $\varrho_0 = 1{,}402$ *ат. ед.* — равновесное расстояние ядер в молекуле D_2. (За ноль энергии принята энергия такого состояния, в котором ядра молекулы разведены в бесконечность и электроны находятся от ядер и друг от друга на бесконечном расстоянии.) Константы a_0, a_1 ... можно определить из спектроскопических данных [9]: $a_0 = 0{,}364$ *ат. ед.* $a_1 = -1{,}591$, $a_2 = 1{,}76$, $a_3 = -1{,}8$. Выражение (10) аппроксимирует потенциальную кривую хорошо вблизи равновесия, но оно недостаточно точно на малых расстояниях, так как в нем мало термов для описания резкого увеличения энергии отталкивания ядер. Поэтому (10) надо модифицировать. Вычитаем из $U(x)$ потенциальную энергию отталкивания двух ядер $\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_0(x+1)}$ до членов пятого порядка. Оставшаяся часть есть электронная потенциальная энергия

$$U_{el}=-1{,}889+0{,}714\ x-0{,}349\ x^2+0{,}133\ x^3-0{,}071\ x^4-\\-0{,}075\ x^5. \tag{11}$$

Нужная нам потенциальная энергия получается в виде

$$U(\varrho)=\frac{1}{\varrho}+U_{el}. \tag{12}$$

Интегралы в экспоненте выражения (9) были вычислены численно при нескольких значениях E. В результате мы получили, что $\lambda_{dd}\leq 10^2$ *сек*$^{-1}$, т. е. рассматриваемым механизмом трудно объяснить разногласия между экспериментом и теоретическими оценками.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность С. С. Герштейну за предложение темы и внимание к работе.

Поступило в редакцию
10 февраля 1965 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Джелепов и др., Доклад на Международной конференции по физике высоких энергий, Дубна, 1964.
2. Я. Б. Зельдович, С. С. Герштейн, УФН, 71, 581, 1960.
3. E. L. Bleser et al., Phys. Rev., 132, 2679, 1963.
4. С. С. Герштейн, Диссертация, ИФП, 1958.
5. A. Halpern, Phys. Rev. Lett., 13, 660, 1964.
6. W. R. Wessel, P. Phillipson, Phys. Rev. Lett., 13, 23, 1964.
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, 1963.
8. J. L. Dunham, Phys. Rev., 41, 721, 1932.
9. B. Rosen, Données spectroscopiques consernant les molecules diatomiques, Hermann et Cie, Paris, 1951.

ON THE FORMATION OF $(dd\mu)^+$, A MESONIC MOLECULAR ION

E. Vesman

There is a discrepancy between the calculations and the experimental data on the rate of the fusion reaction in $(dd\mu)^+$. We think this discrepancy is due to the excited state of $(dd\mu)^+$ with K = 1, v = 1. A rough estimation gives the binding energy $E_1 \approx -7$ eV for this state. If this state has the binding energy $E_1 \lesssim -4,6$ eV, the formation of $(dd\mu)^+$ associated with the dissociation of a deuterium molecule is possible. The rate of the formation of $(dd\mu)^+$ by this mode is found to be $\lambda_{dd} \lesssim 10^2\ \mathrm{sec}^{-1}$. If this state has the binding energy $E_1 \approx -16$ eV, $\lambda_{dd} \approx 10^6\ \mathrm{sec}^{-1}$.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВЕКТОРНОГО БОЗОНА ПО ТЕОРИЯМ КЛЕЙНА-ГОРДОНА И КЕММЕРА-ДЭФФИНА

А. Айнсаар

В наиболее общем виде приведены формулы соответствия между операторами полей в формализмах Клейна-Гордона и Кеммера-Дэффина в представлениях взаимодействия и Гейзенберга соответственно. Аналогичная проблема для скалярных бозонов изучена в работе [1].

Обсужден вопрос соответствия между лагранжианами взаимодействия. В качестве примеров изучены случаи однобозонного и двухбозонного взаимодействий.

Известно, что теории Клейна-Гордона (КГ) и Кеммера-Дэффина (КД) эквивалентны [2]. Поэтому представляет интерес получить формулы перехода от одной теории к другой при разных взаимодействиях и рассмотреть, какие особенности имеет та или другая.

В настоящей работе ограничимся случаем спина 1 и соответственно 10-рядными матрицами КД с алгеброй [3]

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\varrho + \beta_\varrho \beta_\nu \beta_\mu = \delta_{\mu\nu} \beta_\varrho + \delta_{\varrho\nu} \beta_\mu,$$

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\nu \beta_\mu = 6, \tag{1}$$

поскольку случай спина 0 изучен в работе [1]. Там же более подробно изложены вопросы методики.

Представление взаимодействия

Величины в представлении взаимодействия будем писать без дополнительного индекса. Разумеется, соотношения для них можно считать также соотношениями для гайзенберговских величин при отсутствии взаимодействия.

Запишем уравнения поля КД

$$(\beta_\mu \partial_\mu + m)\psi = 0,$$
$$\overline{\psi}(\partial_\mu \beta_\mu - m) = 0 \tag{2}$$

и КГ

$$[\partial_\mu \partial_\nu - (\Box - m^2)\delta_{\mu\nu}]U_\nu = 0. \tag{3}$$

С целью установить связь между полевыми операторами ψ и U сравним соответствующие c-числа в обеих теориях. Таковыми являются коммутаторы и ваакумные средние T-произведений операторов полей. Из [4] найдем общие формулы

$$[Q_\alpha(x), \overline{Q}_\beta(x')] = id_{\alpha\beta}(\partial)\Delta(x - x'), \tag{4}$$

$$<TQ_\alpha(x), \overline{Q}_\beta(x')>_0 = \overline{d}_{\alpha\beta}(\partial)\Delta^c(x - x'). \tag{5}$$

Здесь

$$\Delta^c(x) = \tfrac{1}{2}(-\Delta_1(x) + i\varepsilon(x)\Delta(x)), \tag{6}$$

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases} \tag{7}$$

где $\overline{d}_{\alpha\beta}(\partial)$ обозначает $d_{\alpha\beta}(\partial)$, который не действует на величину $\varepsilon(x)$ в определении (6). Операторы d имеют вид

$$d^{KD}(\partial) = -\left[\frac{1}{m}(\Box - m^2) + \beta_\mu \partial_\mu - \frac{1}{m}\beta_\mu \beta_\nu \partial_\mu \partial_\nu\right], \tag{8}$$

$$d^{KG}_{\alpha\beta}(\partial) = \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{m^2}\partial_\alpha \partial_\beta. \tag{9}$$

Кеммеровские операторы разлагаем по определенным таким образом частям:

$$\psi_\mu = R_\mu \psi, \qquad \overline{\psi}_\mu = \overline{\psi} R^+_\mu,$$
$$\psi_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}\psi, \qquad \overline{\psi}_{\mu\nu} = \overline{\psi} R^+_{\mu\nu}, \tag{10}$$

где R — матрицы Умедзава [4] (см. также [3, 5] в этом же сб.), причем

$$\psi = R^+_\mu \psi_\mu + \tfrac{1}{2} R^+_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu},$$
$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_\mu R_\mu + \tfrac{1}{2} \bar{\psi}_{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{11}$$

Вычислим коммутаторы для них *

$$[\psi(x), \bar{\psi}(x')] = i d^{KD} \Delta(x - x') = \frac{i}{m} \beta_\mu \partial_\mu (\beta_\nu \partial_\nu - m) \Delta(x - x'),$$

$$[\psi_\mu(x), \bar{\psi}_\varrho(x')] = \frac{i}{m} R_4 (\delta_{\mu\varrho} m^2 - \partial_\mu \partial_\varrho) \Delta(x - x'),$$

$$[\psi_\mu(x), \bar{\psi}_{\varrho\sigma}(x')] = -i R_4 \delta_{\mu[\varrho} \partial_{\sigma]} \Delta(x - x'),$$

$$[\psi_{\mu\nu}(x), \bar{\psi}_\varrho(x')] = -i R_4 \delta_{\varrho[\mu} \partial_{\nu]} \Delta(x - x'),$$

$$[\psi_{\mu\nu}(x), \bar{\psi}_{\varrho\sigma}(x')] = \frac{i}{m} R_4 \partial_{[\nu} \delta_{\mu][\varrho} \partial_{\sigma]} \Delta(x - x'), \tag{12}$$

Следует заметить, что в коммутаторе подразумеваются прямые произведения 10-векторов, дающие 10×10-матрицы КД.

Для величин КГ получим

$$[U_\mu(x), U^*_\varrho(x')] = i\left(\delta_{\mu\varrho} - \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial_\varrho\right) \Delta(x - x'),$$

$$[U_\mu(x), F^*_{\varrho\sigma}(x')] = i(\delta_{\mu[\varrho} \partial_{\sigma]} \Delta(x - x'),$$

$$[F_{\mu\nu}(x), U^*_\varrho(x')] = i(\delta_{\varrho[\nu} \partial_{\mu]} \Delta(x - x'), \tag{13}$$

$$[F_{\mu\nu}(x), F^*_{\varrho\sigma}(x')] = i \partial_{[\mu} \delta_{\nu][\varrho} \partial_{\sigma]} \Delta(x - x'),$$

где $F_{\mu\nu} \equiv \partial_{[\mu} U_{\nu]}$ является напреженностью поля.

Вычислим также вакуумные средние хронологических произведений операторов полей по формуле (5)

$$\langle T\psi(x), \bar{\psi}(x') \rangle_0 = d^{KD}(\partial) \Delta^c(x - x') - \frac{i}{m}(1 + N) \delta^4(x - x'), \tag{14}$$

---

* Символом [ ] обозначено антисимметрирование

$$A_{[\mu\nu]} = A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}$$

где [1]

$$N \equiv (n_\mu \beta_\mu)^2. \tag{15}$$

Четырехвектор n является нормалью к произвольно выбранной пространственно-подобной поверхности σ, которая необходима для ковариантного определения T-произведений [4]

$$n_\mu n_\mu = -1. \tag{16}$$

Из (14) и (10) получаем

$$\begin{aligned}
&< T\psi_\mu(x), \overline{\psi}_\varrho(x') >_0 = \frac{1}{m} R_4 [(m^2 \delta_{\mu\varrho} - \partial_\mu \partial_\varrho) \Delta^c (x - x') - \\
&- i n_\mu n_\varrho \delta^4 (x - x')], \\
&< T\psi_\mu(x), \overline{\psi}_{\varrho\sigma}(x') >_0 = -R_4 \delta_{\mu[\varrho} \partial_{\sigma]} \Delta^c (x - x'), \\
&< T\psi_{\mu\nu}(x), \overline{\psi}_\varrho(x') >_0 = -R_4 \delta_{\varrho[\mu} \partial_{\nu]} \Delta^c (x - x'), \\
&< T\psi_{\mu\nu}(x), \overline{\psi}_{\varrho\sigma}(x') >_0 = \frac{1}{m} R_4 [\partial_{[\nu} \delta_{\mu][\varrho} \partial_{\sigma]} \Delta^c (x - x') + \\
&+ i n_{[\nu} \delta_{\mu][\varrho} n_{\sigma]} \delta^4 (x - x')],
\end{aligned} \tag{17}$$

а из (5), (6) и (9):

$$\begin{aligned}
&< TU_\mu(x), U^*_\varrho(x') >_0 = \delta_{\mu\varrho} \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial_\varrho) \Delta^c (x - x') - \\
&- \frac{i}{m^2} n_\mu n_\varrho \delta^4 (x - x'), \\
&< TU_\mu(x), F^*_{\varrho\sigma}(x') >_0 = (\delta_{\mu[\varrho} \partial_{\sigma]} \Delta^c (x - x'), \\
&< TF_{\mu\nu}(x), U^*_\varrho(x') >_0 = \delta_{\varrho[\nu} \partial_{\mu]} \Delta^c (x - x'), \\
&< TF_{\mu\nu}(x), F^*_{\varrho\sigma}(x') >_0 = \partial_{[\mu} \delta_{\nu][\varrho} \partial_{\sigma]} \Delta^c (x - x') \\
&+ i n_{[\mu} \delta_{\nu][\varrho} n_{\sigma]} \delta^4 (x - x').
\end{aligned} \tag{18}$$

Сравнивая между собой (12) и (13) или (17) и (18), получим переходные соотношения между полевыми операторами в формализмах КД и КГ *

$$U_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{m}} \bar{\varrho} \psi_{\mu}, \qquad U_{\mu}^{*} = \frac{1}{\sqrt{m}} \bar{\psi}_{\mu} \varrho,$$
$$F_{\mu\nu} = \sqrt{m} \bar{\varrho} \psi_{\mu\nu}, \qquad F_{\mu\nu}^{*} = -\sqrt{m} \bar{\psi}_{\mu\nu} \varrho, \tag{19}$$

$$\psi = \sqrt{m} R_{\mu}^{+} \varrho U_{\mu} + \frac{1}{2\sqrt{m}} R_{\mu\nu}^{+} \varrho F_{\mu\nu},$$
$$\bar{\psi} = \sqrt{m} U_{\mu}^{*} \bar{\varrho} R_{\mu} - \frac{1}{2\sqrt{m}} F_{\mu\nu}^{*} \bar{\varrho} R_{\mu\nu}. \tag{20}$$

Десятивектор ϱ является собственным вектором матрицы R_4 и служит для установления точной связи между однокомпонентными U и F и 10-компонентными ** ψ, $\bar{\psi}$

$$R_4 \varrho = \varrho, \quad \bar{\varrho} \varrho = 1. \tag{21}$$

Представление Гейзенберга

В присутствии взаимодействия волновые уравнения приобретают вид

$$(\beta_{\mu} \partial_{\mu} + m)\, {}^{H}\psi = -{}^{H}J^{\psi},$$
$${}^{H}\bar{\psi} (\partial_{\mu} \beta_{\mu} - m) = {}^{H}J^{\bar{\psi}}, \tag{22}$$

и

$$[\partial_{\mu} \partial_{\nu} - (\Box - m^2) \delta_{\mu\nu}]\, {}^{H}U_{\nu} = -{}^{H}J_{\mu}^{U}, \tag{23}$$

а для любого другого участвующего во взаимодействии поля A

$$\Lambda^{A}\, {}^{H}A = -{}^{H}J^{A}, \tag{24}$$

* Различие коэффициентов в (19) и в соответствующих формулах Умедзава ([4], стр. 100) обусловлено тем, что в последних учтено только соответствие между уравнениями полей, позволяющее определить соотношения с точностью до коэффициентов. У нас такого произвола нет.

** См. [5]; вместо $R_A \equiv R_A^4$ можно использовать любую систему R_A^B (B-фиксировано). В этом случае ϱ является собственным вектором матрицы R_B^B.

где

$$
\begin{aligned}
{}^{H}J^{Q} &= -\frac{\partial\, {}^{H}L_{int}}{\partial\, {}^{H}\bar{Q}} + \partial_{\mu}\frac{\partial\, {}^{H}L_{int}}{\partial\, \partial_{\mu}{}^{H}Q} \equiv {}^{H}j^{Q} - \partial_{\mu}\, {}^{H}j^{Q}_{,\mu}, \\
{}^{H}J^{\bar{Q}} &= -\frac{\partial\, {}^{H}L_{int}}{\partial\, {}^{H}Q} + \partial_{\mu}\frac{\partial\, {}^{H}L_{int}}{\partial\, \partial_{\mu}{}^{H}Q} \equiv {}^{H}j^{\bar{Q}} - \partial_{\mu}\, {}^{H}j^{\bar{Q}}_{,\mu}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Индексом H обозначим величины гейзенбергского представления.

Как видно из (25), мы предполагаем, что лагранжиан взаимодействия не содержит производных высшего порядка полевых операторов.

Изучая выводы предыдущего параграфа в пределе бесконечно малого взаимодействия, можно из (22) и (23) получить переходные соотношения для гейзенберговских полевых операторов *

$$
\begin{aligned}
{}^{H}\psi(x) &= \sqrt{m}\, R_{\mu}^{+}\, \varrho\, {}^{H}U_{\mu}(x) + \frac{1}{2\sqrt{m}} R_{\mu\nu}^{+}\, \varrho\, {}^{H}F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{m}\eta_{+}\, {}^{H}J^{\psi}(x), \\
{}^{H}\bar{\psi}(x) &= \sqrt{m}\, {}^{H}U^{*}_{\mu}(x)\, \bar{\varrho} R_{\mu} - \frac{1}{2\sqrt{m}}\, {}^{H}F^{*}_{\mu\nu}(x)\, \bar{\varrho} R_{\mu\nu} - \frac{1}{m}\, {}^{H}J^{\bar{\psi}}(x)\, \eta_{+},
\end{aligned}
\tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{H}U_{\mu}(x) &= \frac{1}{\sqrt{m}}\bar{\varrho}\, {}^{H}\psi_{\mu}(x), \quad {}^{H}F_{\mu\nu}(x) = \sqrt{m}\, \bar{\varrho} R_{\mu\nu}\, {}^{H}\psi(x) + \tfrac{1}{2}\, {}^{H}j^{U}_{[\mu,\nu]}(x), \\
{}^{H}U^{*}_{\mu}(x) &= \frac{1}{\sqrt{m}}\, {}^{H}\bar{\psi}_{\mu}(x)\, \varrho, \quad {}^{H}F^{*}_{\mu\nu}(x) = -\sqrt{m}\, \bar{\psi}(x) R^{+}_{\mu\nu}\varrho + \tfrac{1}{2}\, {}^{H}j^{U^{*}}_{[\mu,\nu]}(x)
\end{aligned}
\tag{27}
$$

и также для токов **

$$
\begin{aligned}
R_{\mu}\, {}^{H}j^{\psi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{m}}\, {}^{H}j^{U}_{\mu}(x)\, \varrho, & {}^{H}j^{\bar{\psi}}(x) R^{+}_{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{m}}\, {}^{H}j^{U^{*}}_{\mu}(x)\, \bar{\varrho}, \\
R_{\mu\nu}\, {}^{H}j^{\psi}(x) &= \frac{\sqrt{m}}{2}\, {}^{H}j^{U}_{[\mu,\nu]}(x)\, \varrho, & {}^{H}j^{\bar{\psi}}(x) R^{+}_{\mu\varrho} &= -\frac{\sqrt{m}}{2}\, {}^{H}j^{U^{*}}_{[\mu,\varrho]}(x)\, \bar{\varrho}, \\
R_{\{\varrho}\, {}^{H}j^{\psi}_{,\tau\}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{m}}\, {}^{H}j^{U}_{\{\varrho,\tau\}}(x)\, \varrho, & {}^{H}j^{\bar{\psi}}_{,\{\tau} R^{+}_{\varrho\}} &= \frac{1}{\sqrt{m}}\, {}^{H}j^{U^{*}}_{\{\varrho,\tau\}}\, \bar{\varrho}, \\
R_{\mu\varrho}\, {}^{H}j^{\psi}_{,\tau}(x) &= 0, & {}^{H}j^{\bar{\psi}}_{,\tau} R^{+}_{\mu\varrho} &= 0.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

---

* См. [5], $\eta_{+} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu} R_{\mu\nu}$

** Символ { } значит симметрирование: $A_{\{\mu\nu\}} = A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}$.

Для устранения некоторого произвола при выводе (26)—(28) мы учитывали, как это сделано в работе [1], требование, что оба формализмы давали неотличающие при использовании замены (19) или (20) гамильтонианы взаимодействия.

Гамильтониан взаимодействия определяется коммутатором [3]

$$[Q_\alpha(x), H_{int}[x', n]] = iS[\sigma]\{{}^H j_\beta(x')[d_{\alpha\beta}(\partial)\Delta(x-x')] +$$

$$+ {}^H j_{\beta,\mu}(x')[\partial'_\mu d_{\beta\alpha}(\partial)\Delta(x-x')]\}S^{-1}[\sigma]. \tag{29}$$

Далее сделаем ограничение

$${}^H j^\psi_\mu = {}^H j^{\overline{\psi}}_\mu = 0. \tag{30}$$

В таком случае, как это видно из (25) и (28), в формализме КГ останутся только связи с потенциалами и напряженностями бозонного поля. Теперь в (28) существенны только две первые пары соотношений.

Переход от гейзенберговского представления к представлению взаимодействия осуществим с помощью промежуточной величины [4]

$$Q_\alpha[x, \sigma] = S^{-1}[\sigma]\, Q_\alpha(x)\, S[\sigma]. \tag{31}$$

При этом

$$M(\partial)\, {}^H Q_\alpha(x) = [M(\partial)\, Q_\alpha[x, \sigma]]_{\sigma \leftarrow x} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int d^4x' \{{}^H j_\beta(x')[M(0)\, d_{\alpha\beta}(\partial),\ \varepsilon(x-x')]\,\Delta(x-x') +$$

$$+ {}^H j_{\beta,\mu}(x')[M(\partial)\,\partial'_\mu d_{\alpha\beta}(\partial),\ \varepsilon(x-x')]\,\Delta(x-x')\}, \tag{32}$$

где $M(\partial)$ — любой дифференциальный оператор, в частном случае 1. Последнее дает в предположении * (30)

---

* Как и в [4] и [1], $Q\left[\frac{x}{\sigma}\right]$ обозначает, что точка x лежит на поверхности σ.

$$ {}^{H}\psi(x) = \psi\left[\frac{x}{\sigma}\right] - \frac{1}{m}(1+N)\,{}^{H}j^{\psi}(x), $$

$$ {}^{H}\overline{\psi}(x) = \overline{\psi}\left[\frac{x}{\sigma}\right] - \frac{1}{m}\,{}^{H}j^{\overline{\psi}}(x)\,(1+N), \tag{33} $$

$$ {}^{H}U_{\mu}(x) = U_{\mu}\left[\frac{x}{\sigma}\right] + \frac{1}{m^2} n_{\mu} n_{\nu}\,{}^{H}j^{U}_{\nu}(x), $$

$$ {}^{H}F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}\left[\frac{x}{\sigma}\right] + n_{\varrho} n_{[\mu}\,{}^{H}j^{U}_{\nu],\,\varrho}(x). $$

$$ {}^{H}U^{*}_{\mu}(x) = U^{*}_{\mu}\left[\frac{x}{\sigma}\right] + \frac{1}{m^2} n_{\mu} n_{\nu}\,{}^{H}j^{U*}_{\nu}(x), $$

$$ {}^{H}F^{*}_{\mu\nu}(x) = F^{*}_{\mu\nu}\left[\frac{x}{\sigma}\right] + n_{\varrho} n_{[\mu}\,{}^{H}j^{U*}_{\nu],\,\varrho}(x). \tag{34} $$

Ниже мы приведем некоторые структуры лагранжианов взаимодействия и вычислим соответствующие им лагрианжианы в другом формализме и гамильтонианы взаимодействия. Последние вместе с выражениями сверток (17) и (18) определяют S-матрицу. При этом ради простоты мы ограничиваем остальные взаимодействующие поля требованиями

$$ [d^{A,\,B,\,C\ldots}_{\alpha\beta}(\partial),\ \varepsilon(x-x')]\,\Delta(x-x') = 0, \tag{35} $$

действительными для полей со спинами 0 (в формализме КГ), $\frac{1}{2}$ и для электромагнитного поля. Из (32) видно, что это эквивалентно

$$ {}^{H}A_{\alpha}(x) = A_{\alpha}\left[\frac{x}{\sigma}\right]. \tag{36} $$

и т. д.

Однобозонное взаимодействие

Возьмем лагранжиан КД вида

$$ {}^{H}L^{KD}_{int} = -{}^{H}\overline{\psi}\,{}^{H}J^{\psi}[{}^{H}A,\,{}^{H}B,\ldots] - {}^{H}J^{\overline{\psi}}\,[{}^{H}A,\,{}^{H}B,\ldots]\,{}^{H}\psi. \tag{37} $$

Чтобы найти соответствующий лагранжиан КГ, исходим из (28) и (26). Преобразование КД-КГ не касается остальных полей A, B..., поэтому в выражениях $J^{A,\cdots}$ сделаем только подстановку (26). Последнее требование определяет не зависящие от $\psi, \overline{\psi}$ члены в лагранжиане или в гамильтониане. Соответствующий (37) лагранжиан КГ есть

$$
{}^{H}L^{KG}_{int}(x) = -\sqrt{m}\left({}^{H}U^{*}_{\mu}(x)\bar{\varrho}R_{\mu}{}^{H}J^{\psi}(x) + {}^{H}J^{\bar{\psi}}(x)R^{+}_{\mu}\varrho{}^{H}U_{\mu}(x)\right) +
$$

$$
+ \frac{1}{2\sqrt{m}}\left({}^{H}F^{*}_{\mu\sigma}(x)\bar{\varrho}R_{\mu\sigma}{}^{H}J^{\psi}(x) - {}^{H}J^{\bar{\psi}}(x)R^{+}_{\mu\sigma}\varrho{}^{H}F_{\mu\sigma}(x)\right) +
$$

$$
+ \frac{1}{m}{}^{H}J^{\bar{\psi}}(x)\eta_{+}{}^{H}J^{\psi}(x), \tag{38}
$$

Гамильтонианы взаимодействия в обоих формализмах связаны друг с другом просто соотношениями (19) или (20). Они вычисляются из коммутаторов (29) с учетом * (4), (25), (29), (39) и (33)

$$
H_{int}[x, n] = \bar{\psi}(x)J^{\psi}(x) + J^{\bar{\psi}}(x)\psi(x) - \frac{1}{m}J^{\bar{\psi}}(x)(1+N)J^{\psi}(x). \tag{39}
$$

В выражениях (38) и (39) появились члены, соответствующие локальным взаимодействиям остальных полей. От них можно формально освободиться, переходя к эффективной связи [6, 7]

$$
\langle T\psi(x), \bar{\psi}(x')\rangle_{0}^{eff} = d^{KD}(\partial)\,\Delta^{c}(x-x') \equiv T^{c}(x-x') \tag{40}
$$

и соответственно изменяя гамильтониан

$$
H^{eff\,KD}_{int}[x,] = \bar{\psi}(x)J^{\psi}(x) + J^{\bar{\psi}}(x)\psi(x). \tag{41}
$$

Подчеркнем, что на основе выражения гамильтониана мы не можем сказать, имеются при данном лагранжиане локальные взаимодействия, приводящие к графикам «ежа» [1], или нет. Выражения сверток могут включать локальные взаимодействия при любом «нелокальном» гамильтониане. В действительности, эффективная связь (40) содержит сингулярность в точке $x = 0$ и графики «ежа» здесь, как и в скалярном случае [1], не исключены.

Для перехода КГ—КД выбираем лагранжиан

$$
{}^{H}L^{KG}_{int} = -{}^{H}U^{*}_{\mu}\,{}^{H}j^{U}_{\mu}[{}^{H}A, {}^{H}B, \ldots] - {}^{H}j^{U*}_{\mu}[{}^{H}A, {}^{H}B\ldots]\,{}^{H}U_{\mu} -
$$

$$
- \tfrac{1}{2}\,{}^{H}F^{*}_{\mu\nu}\,{}^{H}J^{U}_{\nu,\mu}[{}^{H}A, {}^{H}B, \ldots] - \tfrac{1}{2}\,{}^{H}j^{U*}_{\nu,\mu}[{}^{H}A, {}^{H}B, \ldots]\,{}^{H}F_{\mu\nu}. \tag{42}
$$

* Символом J обозначено ${}^{H}J$, в котором операторы Гейзенберга заменены на операторы в представлении взаимодействия.

Выражения (27) и (28) указывают на вид лагранжиана КД

$$L_{int}^{KD}(x) = -\frac{1}{\sqrt{m}}\, {}^{H}\overline{\psi}(x) R_{\mu}^{+} \varrho\, j_{\mu}^{U}(x) - \frac{1}{\sqrt{m}} \overline{\varrho}\, j_{\mu}^{U*}(x) R_{\mu} \psi(x) +$$

$$+ \frac{\sqrt{m}}{2} \overline{\psi}(x) R_{\mu\nu}^{+} \varrho\, j_{\nu,\mu}^{U*}(x) - j_{\nu,\mu}(x) \overline{\varrho} R_{\mu\nu}\, {}^{H}\psi(x) + \tfrac{1}{2} j_{\mu,\nu}^{U*}(x)\, j_{\mu,\nu}^{U}(x). \tag{43}$$

Так же, как и в предыдущем случае, найдем только один гамильтониан, так как гамильтониан другого формализма от него существенно не отличается

$$H_{int}^{KG}[x, n] = U_{\mu}^{*}(x)\, j_{\mu}^{U}(x) + j_{\mu}^{U*}(x) U_{\mu}(x) + \tfrac{1}{2} F_{\mu\nu}^{*}(x)\, j_{\nu,\mu}^{U}(x) +$$

$$+ \tfrac{1}{2} j_{\nu,\mu}^{U*}(x) F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{m^2} n_{\mu} n_{\nu} j_{\mu}^{U*}(x)\, j_{\nu}^{U}(x) + n_{\sigma} n_{\mu} j_{\nu\sigma}^{U*}(x)\, j_{\nu,\mu}^{U}(x). \tag{44}$$

При образовании S-матрицы удобнее использовать связи (18) без членов с δ-функциями и соответствующий эффективный гамильтониан будет

$$H_{int}^{eff\,KG}[x,] = U_{\mu}^{*}(x)\, j_{\mu}^{U}(x) + j_{\mu}^{U*}(x) U_{\mu}(x) +$$

$$+ \tfrac{1}{2} F_{\mu\nu}^{*}(x)\, j_{\nu,\mu}^{U}(x) + \tfrac{1}{2} j_{\mu,\nu}^{U*}(x) F_{\mu\nu}(x). \tag{45}$$

Двухбозонное взаимодействие

Участие во взаимодействие двух неодинаковых бозонных полей можно рассмотреть как однобозонное взаимодействие, но при невыполнении требований (35) или (36). Последнее, однако, приводит к осложнениям при общем виде лагранжиана.

Рассмотрим случай непрерывности направленной линии одного бозонного поля. В общем лагранжиане

$${}^{H}L_{int}^{KD}(x) = {}^{H}\overline{\psi}(x) O_i\, {}^{H}\psi(x)\, {}^{H}M_i(x) \tag{46}$$

остальные поля, включенные в M, удовлетворяют (35) и (36), O_i — некоторая матрица КД.

Лагранжиан КГ и гамильтонианы получаем в виде бесконечных рядов

$${}^{H}L^{KG}_{int}(x) = \bar{\varrho}(\sqrt{m}\,{}^{H}U^{*}_{\mu}(x)R_{\mu} - \frac{1}{2\sqrt{m}}\,{}^{H}F^{*}_{\mu\nu}(x)R_{\mu\nu}) \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\,O_k\eta_{+}\,{}^{H}M_k(x)\right)^{n} O_i M_i(x)\,(\sqrt{m}R^{+}_{\mu}\,{}^{H}U_{\mu}(x) +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{m}}R^{+}_{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x))\,\varrho, \tag{47}$$

$$H^{KD}_{int}[x,n] = -\bar{\psi}(x)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{m}O_k(1+N)M_k(x)\right)^{n} O_i M_i(x)\,\psi(x). \tag{48}$$

Из таблицы видно, что во многих практических случаях в этих рядах остаются только первые слагаемые ($n=0$ или $n=0, 1$), в большинстве других случаев 10-рядные матрицы в каждом слагаемом одинаковые

Характер матрицы O		O	$O\eta_{+}O$	$(O\eta_{+}O)^n$, $n>1$	$O(1+N)O$	$(O(1+N)O)^n$, $n>1$
Скаляры		1	η_{+}	η_{+}	$1+N$	$1+N$
		η_{+}	η_{+}	η_{+}	$\eta_{+}(1+N)$	$\eta_{+}(1+N)$
		η_{-}	0	0	$\eta_{-}(1+N)$	$\eta_{-}(1+N)$
Векторы		β_μ	$\beta_\mu\eta_{+}\beta_\nu$	0	$\beta_\mu(1+N)\beta_\nu$	0
		$\eta_{\pm}\beta_\mu$	0	0	$\eta_{\pm}\beta_\mu(1+N)\beta_\nu$	0
Псевдоскаляр		β_5	β_5	β_5	$\beta_5(1+N)\beta_5$	0
Псевдовекторы		$\beta_5\beta_\mu$	0	0	0	0
		$\beta_\mu\beta_5$	0	0	0	0

Для иллюстрации перехода КГ—КД выберем случай наименьших тензорных порядков величин M:

$${}^{H}L^{KG}_{int} = {}^{H}U^{*}_{\mu}\,{}^{H}M_{\mathrm{I}}\,{}^{H}U_{\mu} + {}^{H}F^{*}_{\mu\nu}\,{}^{H}M_{\nu}\,{}^{H}U_{\mu} + {}^{H}U^{*}_{\mu}\,{}^{H}M^{*}_{\nu}\,{}^{H}F_{\mu\nu} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\,{}^{H}F^{*}_{\mu\nu}\,{}^{H}M_{\mathrm{II}}\,{}^{H}F_{\mu\nu}. \tag{49}$$

Этому соответствует

$${}^{H}L^{KD}_{int} = {}^{H}\bar{\psi}\,{}^{H}M^{(KD)}\,{}^{H}\psi, \tag{50}$$

где

$$^{H}M^{(KD)} = \frac{1}{m}\eta_{-}{}^{H}M_{\text{I}} + (-m\eta_{+} - \eta_{+}\beta_{\nu}{}^{H}M_{\nu} + \eta_{-}\beta_{\nu}{}^{H}M_{\nu}^{*} +$$

$$+ \frac{1}{m}\eta_{-}\beta_{\mu}\beta_{\nu}{}^{H}M_{\mu}^{*}{}^{H}M_{\nu}) \sum_{n=0}^{\infty} M_{\text{II}}^{n}. \quad (52)$$

Гамильтониан взаимодействия удобнее написать в формализме КД:

$$H_{int}^{KD}[x, n] = -\overline{\psi}(x) M^{(KD)}(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m}(1+N) M^{(KD)}(x)]^{n} \psi(x). \quad (51)$$

В заключение выношу благодарность Х. Ыйглане и М. Кыйву за существенную помощь при выполнении данной работы.

Поступило в редакцию
25 октября 1966 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Кыйв, Л. Палги, Труды ИФА АН ЭССР, № 24, 67, 1964.
2. I. Bialynicki-Birula, Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci. math. astron. et phys. **10**, 385, 1962.
3. А. Айнсаар, Труды ИФА АН ЭССР, № 33, 115, 1967.
4. Х. Умедзава, Квантовая теория поля, 1958.
5. А. Айнсаар, Труды ИФА АН ЭССР, № 33, 60, 1967.
6. Н. Н. Боголонов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, М., 1957.
7. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, М., 1959.

INTERACTIONS OF VECTOR BOSON IN THE KLEIN-GORDON AND KEMMER-DUFFIN THEORIES

A. Ainsaar

The general equations of correspondence between the Klein-Gordon and Kemmer-Duffin field operators in the interaction and Heisenberg representations are given. The analogical problem of scalar boson is solved in [1]. The question of correspondence of the interaction Lagrangians is discussed. The cases of one-boson and two-boson interactions are studied as examples.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Вид решения и координатные условия в общей теории относительности

В. Унт

The form of Solutions and Coordinate Conditions

V. Unt

Общеизвестно, что внешний вид решений уравнений Эйнштейна зависит от координатной системы, в которой они найдены. Произвол в выборе координатной системы можно исключить наложением четырех координатных условий. Последние выбираются часто с целью упрощения уравнений Эйнштейна. С математической точки зрения особенно удобными являются, например, условия гармоничности. Но, с другой стороны, координатные условия, удобные с точки зрения упрощения уравнений Эйнштейна, могут дать решение в физически и математически неудовлетворительном виде, где в выражении для компонент метрического тензора встречаются члены, убывающие на бесконечности медленнее чем k/r, где r радиальная координата и k любая постоянная. Возникает проблема, не искажают ли иногда координатные условия естественного вида решения и нельзя ли попытаться искать в некоторых случаях решение в определенном, довольно общем виде, т. е. воспользоваться вместо априорных координатных условий некоторыми априорными предположениями о виде решения уравнений Эйнштейна. Ниже мы покажем, что эти два метода могут дать взаимоисключающие результаты: определенный вид решения может исключать некоторые координатные условия.

Рассмотрим уравнения Эйнштейна.*

---

* Вид тензора Риччи взят из добавления Г (в первом издании добавление Б) книги В. А. Фока [1], там же приведены значения применяемых здесь символов. Запятой мы будем обозначать обычное дифференцирование. Греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3; по дважды встречающемуся индексу подразумевается суммирование.

$$-\tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}-\Gamma^{\mu\nu}+\Gamma^{\mu,\,\alpha\beta}\,\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}=-\varkappa\left(T^{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}T\right),$$

где (1)

$$\Gamma^{\mu\nu}=\tfrac{1}{2}\left(g^{\mu\alpha}\,\Gamma^{\nu,}{}_{\alpha}+g^{\nu\alpha}\,\Gamma^{\mu,}{}_{\alpha}-g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}\Gamma^{\alpha}\right).$$

$$\Gamma^{\alpha}=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-\mathrm{g}}\;\mathrm{g}^{\alpha\beta}\right)_{,\beta}.$$

Будем искать решение уравнений (1) методом последовательных приближений в виде

$$g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}+\underset{1}{h}^{\mu\nu}+\underset{2}{h}^{\mu\nu}+\ldots.$$

Здесь $\eta^{\mu\nu}$ — галилеевы значения $g^{\mu\nu}$, $\underset{n}{h}^{\mu\nu}\sim\alpha^n$, где α некоторый малый параметр, например, гравитационная постоянная Эйнштейна $\varkappa$. Известно, что внешнее решение для $\underset{1}{h}^{\mu\nu}$ можно представить в квазигалилеевых координатах в виде

$$\underset{n}{h}^{\mu\nu}=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\underset{1}{a}{}^{\mu\nu}_{(l)}\,(\tau,\vartheta,\varphi)}{r^l},\tag{2}$$

где $\tau\equiv r-\frac{t}{c}$, ϑ и φ — полярные углы, t — координата времени, c — скорость света. Будем искать остальные $\underset{n}{h}^{\mu\nu}$ также в виде (2) (ниже будем рассматривать только внешнее решение)

$$\underset{1}{h}^{\mu\nu}=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\underset{n}{a}{}^{\mu\nu}_{(l)}\,(\tau,\vartheta,\varphi)}{r^l}.\tag{3}$$

Предположим, что решение в виде (3) для $\underset{n}{h}^{\mu\nu}$ найдено. Перейдем к новым координаатам $x^{\alpha *}=x^{\alpha}+\underset{n}{\Psi}^{\alpha}$. В новых координатах $\underset{n}{h}^{\mu\nu *}=\underset{n}{h}^{\mu\nu}+\underset{n}{\Psi}^{\mu,\nu}+\underset{n}{\Psi}^{\nu,\mu}$, где $\Psi^{\alpha,\beta}\equiv\eta^{\beta\gamma}\,\Psi^{\alpha}{}_{,\gamma}$. Потребуем, чтобы новые координаты были бы гармоническими. Условие $\Gamma^{\alpha *}=0$ дает

$$\Box \underset{n}{\Psi^{\alpha}} = -\underset{n}{h^{\alpha\beta}}{}_{,\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\underset{n}{h^{\mu\nu,\alpha}}. \tag{4}$$

Если в правой стороне уравнения (4) остаются члены вида $\frac{b^{\alpha}(\tau,\vartheta,\varphi)}{r^2}$, то в новых координатах вид решения (3) искажается. Действительно, это имеет место уже для второго приближения.

С другой стороны, глядя на уравнения (1), видим, что координатные условия $\Gamma^{\nu}=0$ являются особенно «заманчивыми», так как тогда $\Gamma^{\mu\nu}=0$ и мы получаем для всех искомых $\underset{n}{h^{\mu\nu}}$ уравнения вида

$$\Box \underset{n}{h^{\mu\nu}} = -4\pi\sigma^{\mu\nu},$$

где $\sigma^{\mu\nu}$ легко вычисляется, зная $\underset{k}{h^{\mu\nu}}$ при $k<n$. Но уже во втором приближении некоторые $\sigma^{\mu\nu}=0\left(\frac{1}{r^2}\right)$, что дает для соответствующих $\underset{2}{h^{\mu\nu}}$ в гармонических координатах асимптотические значения

$$\underset{2}{h^{\mu\nu}} = 0\left(\frac{\ln r}{r}\right).$$

Более детальный анализ показывает, что из предположения о виде решения и из уравнений Эйнштейна следует, что условия гармоничности должны выполняться асимптотически, т. е. в выражении для Γ^{ν} члены вида $\frac{f^{\nu}(\tau,\vartheta,\varphi)}{r}$ отсутствуют и $\Gamma^{\nu}=0\left(\frac{1}{r^2}\right)$. Требование же строгого выполнения условий $\Gamma^{\nu}=0$ вносит для $\underset{2}{h^{\mu\nu}}$ асимптотическое поведение вида $\underset{2}{h^{\mu\nu}}=0\left(\frac{\ln r}{r}\right)$.

Поступило в редакцию
5 октября 1965 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, М., 1961.

Дополнительные условия для определения неприводимых представлений алгебры Кеммера-Дэффина

А. Айнсаар

Supplementary Conditions for Determining the Irreducible Representations of the Kemmer-Duffin Algebra

A. Ainsaar

Из соотношений для матриц Кеммера-Дэффина

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\beta \beta_\varrho + \beta_\varrho \beta_\nu \beta_\mu = \delta_{\mu\nu} \beta_\varrho + \delta_{\nu\varrho} \beta_\mu \tag{1}$$

следует, что из всех произведений β-матриц можно выделить 126 линейно независимых [1]. Его удовлетворяют 16-рядные приводимые β-матрицы.

При непрерывных представлениях имеются еще дополнительные соотношения, ограничивающие число независимых произведений на 100, 25 или 1 [2].

Например:

В 10-рядном представлении

$$\beta \equiv \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 \beta_4^2 = 0, \tag{2}$$

$$\beta_\mu \beta_\mu \beta_\nu \beta_\nu - 5 \beta_\mu \beta_\mu + 6 = 0, \tag{3}$$

$$\beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 + \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_4^2 + \beta_1^2 \beta_3^2 \beta_4^2 + \beta_2^2 \beta_3^2 \beta_4^2 - \beta_\mu \beta_\mu + 2 = 0. \tag{4}$$

В 5-рядном представлении

$$3\beta - \beta_\mu \beta_\mu + 1 = 0, \tag{5}$$

$$\beta_\mu \beta_\varrho^2 = \beta_\mu \beta_\sigma^2, \qquad (\mu \neq \varrho \neq \sigma \neq \mu), \tag{6}$$

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\varrho = 0, \qquad (\mu \neq \nu \neq \varrho \neq \mu). \tag{7}$$

В 1-рядном представлении

$$\beta_\mu = 0. \tag{8}$$

Соотношения (2—8) можно писать в виде

$$P \equiv \tfrac{1}{2}\, \beta_\mu \beta_\nu \beta_\nu \beta_\mu = p. \tag{9}$$

Константа p имеет значения:

$$\left.\begin{array}{l} \text{в 10-рядном представлении } p = 3, \\ \text{в 5-рядном представлении } p = 2, \\ \text{в 1-рядном представлении } p = 0. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Резкая зависимость алгебры от p видна, если умножить (9) на $\beta_\varrho^2 \beta_\sigma^2$ $(\varrho \neq \sigma)$:

$$\beta \equiv \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 \beta_4^2 = (3 - p)\, \beta_\varrho^2\, \beta_\sigma^2. \tag{11}$$

При помощи оператора P можем построить операторы, проектирующие от 16-рядного представления β-матриц отдельные неприводимые части:

$$\begin{aligned} \Pi_{(10)} &= \tfrac{1}{3} P (P - 2), \\ \Pi_{(5)} &= \tfrac{1}{2} P (3 - P), \\ \Pi_{(1)} &= \tfrac{1}{6} (2 - P)(3 - P). \end{aligned} \tag{12}$$

Автор признателен Х. Ыйглане за обсуждение и полезные указания.

Поступило в редакцию
24 июня 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Айнсаар, Х. Ыйглане, Труды ИФА, № 19, 132, 1962.
2. Х. Ыйглане, Труды ИФА, № 20, 138, 1963.

Кратности весов представлений групп A_2 и B_2

М. Кыйв

Weight Multiplicity for Representations of Groups A_2 and B_2

M. Kõiv

Исходя из работы Тарского [1] даем простую схему для определения кратности весов представлений групп A_2 и B_2.

Группа A_2. Возьмем представление $D(j_\alpha, j_\beta)$ со старшим весом $\vec{\Lambda}^K = (j_\alpha + j_\beta;\ \frac{1}{\sqrt{3}}(j_\alpha - j_\beta))$ (j_α, j_β — в обеих рассматриваемых группах положительные целые или полуцелые числа). Для любого представления $D(j_\alpha, j_\beta)$ компоненты весов имеют значения:

$$\Lambda_1 = j_\alpha + j_\beta,\ j_\alpha + j_\beta - \tfrac{1}{2},\ \ldots - j_\alpha - j_\beta;$$

$$\sqrt{3}\,\Lambda_2 = 2j_\beta + j_\alpha,\ 2j_\beta + j_\alpha - \tfrac{3}{2}.\ \ldots - 2j_\alpha - j_\beta;$$

$$(\vec{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2)\ \text{— вес}),$$

но всегда такие, что Λ_1 и $\sqrt{3}\Lambda_2$ — одновременно целые или полуцелые числа и что $\vec{\Lambda}$ остается внутри шестиугольника, приведенного на рис. 1, *a*.

Кратности весов, принадлежащие боковым линиям, равны единице. Остальные кратности определяются из соотношений, которые зависят от приведенных на рис. 1, *b* и *c* областей

Различаем две возможности: $j_\alpha \geqslant j_\beta$ и $j_\alpha \leqslant j_\beta$.

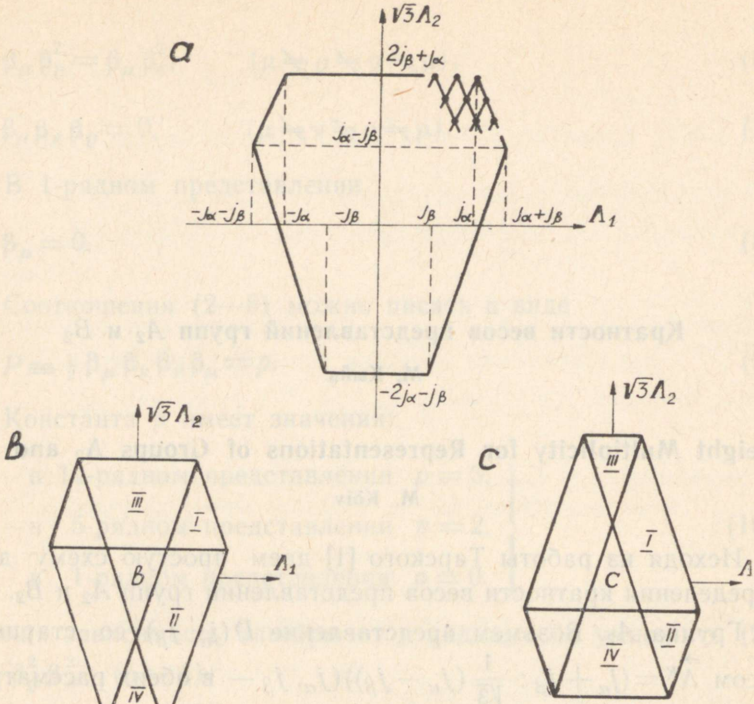


Рис. 1.

Кратности:

$$K(I)=\tfrac{4}{3}j_\alpha+\tfrac{2}{3}j_\beta-\left(\Lambda_1+\frac{\sqrt{3\Lambda_2}}{3}\right)+1,$$

$$K(II)=\tfrac{4}{3}j_\beta+\tfrac{2}{3}j_\alpha-\left(\Lambda_1-\frac{\sqrt{3\Lambda_2}}{3}\right)+1, \qquad K(b)=2j_\beta+1,$$

$$K(III)=\tfrac{4}{3}j_\beta+\tfrac{2}{3}j_\alpha-2\frac{\sqrt{3\Lambda_2}}{3}+1, \qquad K(c)=2j_\alpha+1. \tag{1}$$

$$K(IV)=\tfrac{4}{3}j_\alpha+\tfrac{2}{3}j_\beta+2\frac{\sqrt{3\Lambda_2}}{3}+1,$$

В остальных областях кратности определяются симметрией относительно оси Λ_2.

Соотношения (1) определяют линии одинаковой кратности весов (рис. 2).

Группа B_2. Возьмем представление $D(j_\alpha, j_\beta)$ со старшим весом $\vec{\Lambda}^K=(2j_\alpha+j_\beta, j_\beta)$. Компоненты любого веса $\vec{\Lambda}=(\Lambda_1, \Lambda_2)$

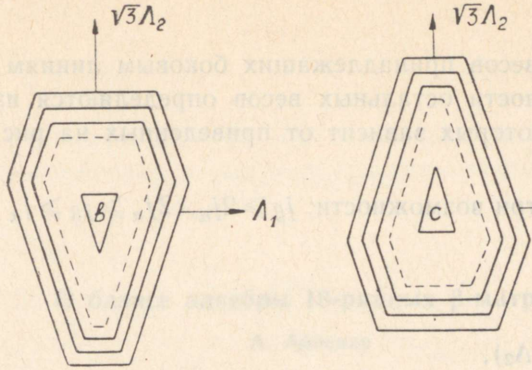


Рис. 2.

имеют значения: $\Lambda_1 = 2j_\alpha + j_\beta,\ 2j_\alpha + j_\beta - 1, \ldots, -2j_\alpha - j_\beta$; $\Lambda_2 = 2j_\alpha + j_\beta,\ 2j_\alpha + j_\beta - 1, \ldots, -2j_\alpha - j_\beta$, но всегда такие, что $\vec{\Lambda}$ находится внутри восьмиугольника, приведенного на рис. 3, *a*.

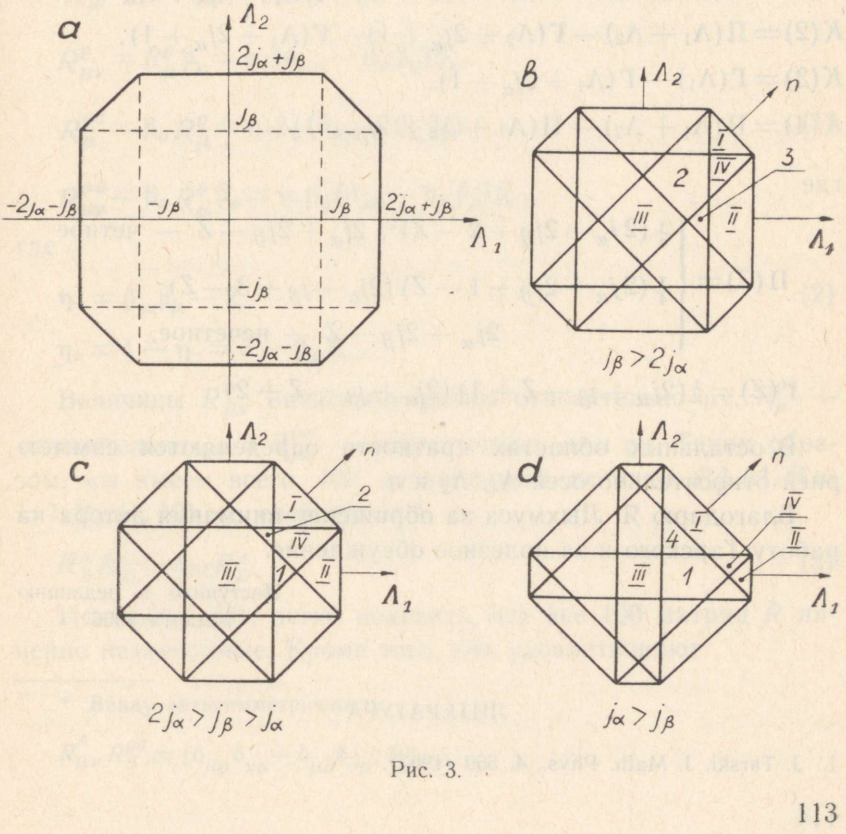


Рис. 3.

Кратности весов принадлежащих боковым линиям равны единице. Кратности остальных весов определяются из соотношений вид которых зависит от приведенных на рис. 3, b, c и d областей.

Различаем три возможности: $j_\beta \geqslant 2j_\alpha$, $2j_\alpha \geqslant j_\beta \geqslant j_\alpha$ и $j_\alpha \geqslant j_\beta$.

Кратности:

$$K(I) = \Pi(\Lambda_1 + \Lambda_2),$$

$$K(II) = \Gamma(\Lambda_1),$$

$$K(III) = \Pi(\Lambda_1 + \Lambda_2) - \Pi(\Lambda_1 + \Lambda_2 + 2j_\beta + 1) - \\ - \Gamma(\Lambda_2 + 2j_\alpha + 1) - \Gamma(\Lambda_1 + 2j_\alpha + 1),$$

$$K(IV) = \Pi(\Lambda_1 + \Lambda_2) - \Gamma(\Lambda_2 + 2j_\alpha + 1),$$

$$K(1) = \Pi(\Lambda_1 + \Lambda_2) - \Pi(\Lambda_1 + \Lambda_2 + 2j_\beta + 1) - \Gamma(\Lambda_2 + 2j_\alpha + 1),$$

$$K(2) = \Pi(\Lambda_1 + \Lambda_2) - \Gamma(\Lambda_2 + 2j_\alpha + 1) - \Gamma(\Lambda_1 + 2j_\alpha + 1),$$

$$K(3) = \Gamma(\Lambda_1) - \Gamma(\Lambda_1 + 2j_\alpha + 1),$$

$$K(4) = \Pi(\Lambda_1 + \Lambda_2) - \Pi(\Lambda_1 + \Lambda_2 + 2j_\beta + 1),$$

где

$$\Pi(Z) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2j_\alpha + 2j_\beta + 2 - Z)^2, & 2j_\alpha + 2j_\beta - Z \text{ — четное} \\ \frac{1}{4}(2j_\alpha + 2j_\beta + 1 - Z)(2j_\alpha + j_\beta + 3 - Z), & \\ & 2j_\alpha + 2j_\beta - Z \text{ — нечетное,} \end{cases}$$

$$\Gamma(Z) = \tfrac{1}{2}(2j_\alpha + j_\beta - Z + 1)(2j_\alpha + j_\beta - Z + 2).$$

В остальных областях кратности определяются симметрией относительно осей Λ_1, Λ_2 и n.

Благодарю Я. Лыхмуса за обращение внимания автора на работу Тарского и за полезное обсуждение.

Поступило в редакцию
1 марта 1966 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Tarski, J. Math. Phys., 4, 569 (1963).

О базисе алгебры 10-рядных β-матриц

А. Айнсаар

On a Base of the Algebra of 10-Row β-Matrices

A. Ainsaar

Обобщая матрицы R_μ, $R_{\mu\nu}$ Умедзава [1] (см. также [2] в этом же сборнике), можно получить следующие величины:

$$R^\varrho_\mu = \eta_-(\delta_{\mu\varrho} - \beta_\mu\beta_\varrho),$$

$$R^\varrho_{\mu\nu} = R^\varrho_\mu\beta_\nu = \eta_-(\delta_{\mu\varrho} - \beta_\mu\beta_\varrho)\beta_\nu,$$

$$R^{\varrho\sigma}_\mu = \beta_\sigma R^\varrho_\mu = \eta_+\beta_\sigma(\delta_{\mu\varrho} - \beta_\mu\beta_\varrho), \tag{1}$$

$$R^{\varrho\sigma}_{\mu\nu} = \beta_\sigma R^\varrho_\mu\beta_\nu = \eta_+\beta_\sigma(\delta_{\mu\varrho} - \beta_\mu\beta_\varrho)\beta_\nu,$$

где

$$\eta_- = \beta_\mu\beta_\mu - 2, \tag{2}$$

$$\eta_+ = 1 - \eta_- = 3 - \beta_\mu\beta_\mu.$$

Величины $R^\varrho_{\mu\nu}$ антисимметричны относительно $\mu\nu$, $R^{\varrho\sigma}_\mu$ — относительно $\varrho\sigma$ и $R^{\varrho\sigma}_{\mu\nu}$ — относительно $\mu\nu$ и $\varrho\sigma$. Таким образом, мы имеем всего 100 независимых величин R^A_B $(A, B = 1, 2, \ldots, 10)$ со свойствами *

$$R^A_B R^C_D = \delta_{BC} R^A_D. \tag{3}$$

Используя (3), легко показать, что все 100 матриц R линейно независимые. Кроме того, они удовлетворяют

---

* Ввиду антисимметричности

$$R^A_{\mu\nu} R^{\varrho\sigma}_B = (\delta_{\mu\varrho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\varrho}) R^A_B.$$

$$\mathrm{Sp}\, R_B^{A+} R_D^C = \delta_{AC}\delta_{BD}. \tag{4}$$

Значит, (1) есть ковариантный ортонормированный базис 10-рядных β-матриц, который заметно не отличается от базиса Ыйглане [3]

$$B_{\nu\sigma\varrho} = R_{\sigma}^{\nu\varrho}, \quad B'_{\nu\sigma\varrho} = R_{\varrho\nu}^{\sigma}, \quad B_{\nu\sigma\varrho\lambda} = R_{\sigma\lambda}^{\nu\varrho},$$

$$B_{\nu\sigma\varrho\lambda\varepsilon\omega} = \varepsilon_{\nu\varrho\varepsilon\tau}\, \varepsilon_{\sigma\lambda\omega\mu} R_{\mu}^{\tau}. \tag{5}$$

В представлении Умедзава [1] они выглядят очень просто

$$(R_B^A)_{ik} = \delta_{Ai}\delta_{Bk}. \tag{6}$$

Наши базисные матрицы близко связаны с величинами типа Клейна-Гордона в теории Кеммера-Дэффина. Например, когда верхний индекс равняется 4 (в принципе это безразлично), мы получаем матрицы Умедзава

$$R_A \equiv R_A^4. \tag{7}$$

Предполагая, что β-матрицы эрмитовые, имеем

$$R_B^A = R_A^+ R_B, \qquad R_B^{A+} = R_A^B. \tag{8}$$

Скалярные проективные операторы (2) выражаются

$$\eta_+ = \tfrac{1}{2} R_{\mu\nu}^{\mu\nu}, \qquad \eta_- = R_{\mu}^{\mu}, \tag{9}$$

отсюда

$$\sum_A R_A^A = 1. \tag{10}$$

Связь с другими базисами, например, в работе [4] и с базисом Умедзава [1], можно установить

$$\beta_a = R_{\mu}^{\mu a} + R_{\mu a}^{\mu}. \tag{11}$$

Когда имеем дело с 16-рядными β-матрицами, тогда надо выражения базисов умножать на соответствующие проекционные операторы [5], которые можно написать и в виде

$$\Pi_{(10)} = 2\alpha_5 - 2\alpha_4 + \alpha_3,$$
$$\Pi_{(5)} = -3\alpha_5 + 3\alpha_4 - 2\alpha_3 + \alpha_2. \tag{12}$$

Скалярные матрицы α приведены в [3]

$$\alpha_2 = \beta_\mu \beta_\mu,$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} (\beta_\mu \beta_\mu \beta_\gamma \beta_\gamma - \alpha_2),$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{6} (\beta_\mu \beta_\mu \beta_\nu \beta_\nu \beta_\varrho \beta_\varrho - 6\alpha_3 - \alpha_2) \tag{13}$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{24} (\beta_\mu \beta_\mu \beta_\nu \beta_\nu \beta_\varrho \beta_\varrho \beta_\sigma \beta_\sigma - 36\alpha_4 - 14\alpha_3 - \alpha_2).$$

Благодарю Х. Ыйглане за обсуждение.

Поступило в редакцию
18 апреля 1966 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Умедзава. Квантовая теория поля. ИЛ. М. 1958.
2. А. Айнсаар, Труды ИФА АН ЭССР, № 33, 60, 1967.
3. Х. Ыйглане, Труды ИФА АН ЭССР, № 20, 138, 1963.
4. А. Айнсаар, Х. Ыйглане, Труды ИФА АН ЭССР, № 19, 132, 1962.
5. А. Айнсаар, Труды ИФА АН ЭССР, № 33, 109, 1967.

О преобразовании статической вакуумной однопеременной метрики в полугеодезическую координатную систему

А. Коппель

On the Transformation of Static Empty Space One-variable Metric to Semigeodetic Coordinate System

A. Koppel

Рассмотрим решение системы уравнений (IV.10) — (IV.11) (см. работу [1]), приводящей статическую однопеременную метрику (IV.1) в полугеодезическую форму (IV.12), для одного специального случая. Обсудим вопрос, можно ли рассматривать негалилееву форму (IV.12) как частный случай полугеодезической двухпеременной метрической формы (1.4) (см. работу [2]), для которой имеют место условия (5.1) — (5.3), т. е. переменные в функциях A, B и D разделяются.

При сделанных предположениях из (IV.10) — (IV.11) непосредственно вытекает, что должны иметь место уравнения

$$f_1 = \alpha y \bar{y} \tag{1}$$

и

$$f_0 = \bar{z}(z+m), \tag{2}$$

где y, z — функции лишь от координаты t; $\bar{y}$, $\bar{z}$ — функции от x_1; m — постоянная. При этом (IV.10) и (IV.11) приобретают вид

$$(y\bar{y})^{2a_0}\bar{z}^2 z,_t^{\,2} - \frac{\alpha^2}{c^2}(y\bar{y})^{2a_1}\bar{y}^2 y,_t^{\,2} = 1, \tag{3}$$

$$(y\bar{y})^{2a_0}\bar{z}\bar{z}_{,1}(z+m)z_{,t}-\frac{\alpha^2}{c^2}(y\bar{y})^{2a_1}\bar{y}\bar{y}_{,1}yy_{,t}=0. \qquad (4)$$

Ясно, что $y_{,t}\neq 0$, $\bar{y}_{,1}\neq 0$, $z_{,t}\neq 0$ и $\bar{z}_{,1}\neq 0$. Из уравнения (4) получаем

$$\bar{y}^{2a_0}\bar{z}\bar{z}_{,1}=n\,\frac{\alpha^2}{c^2}\,\bar{y}^{2a_1+1}\bar{y}_{,1}, \qquad (5)$$

$$y^{2a_1+1}y_{,t}=ny^{2a_0}(z+m)\,z_{,t}, \qquad (6)$$

где $n\neq 0$ — постоянная. Интегрирование этих соотношений дает

$$\bar{z}^2=\frac{\alpha^2}{c^2}n\,(a_1-a_0+1)^{-1}\bar{y}^{2(a_1-a_0+1)}+s, \qquad (7)$$

$$(z+m)^2=n^{-1}(a_1-a_0+1)^{-1}y^{2(a_1-a_0+1)}+\bar{s}. \qquad (8)$$

Здесь s, $\bar{s}$ — постоянные (при $a_0=a_1+1$ в силу (IV.2)—(IV.3) получается $a_2=a_3=0$, но этот галилеев случай сейчас нас не интересует). С учетом (7) теперь из уравнения (3) следует, что должно иметь место уравнение

$$p\bar{y}^{2a_0}\left[\frac{\alpha^2}{c^2}n\,(a_1-a_0+1)^{-1}\bar{y}^{2(a_1-a_0+1)}+s\right]+q\bar{y}^{2(a_1+1)}=1. \qquad (9)$$

Но поскольку имеет место $a_1+1\neq 0$, то при $a_0\neq 0$, $a_0\neq a_1+1$ уравнение не удовлетворяется ни при каких значениях постоянных p и q. Таким образом, метрическая форма (IV.12) работы [1] не может быть частным случаем формы (1.4) работы [2] при условиях (5.1)—(5.3) и, следовательно, упрощающие предположения (1) и (2) также ничего не могут дать при решении системы (IV.10)—(IV.11) работы [1]. Из вышесказанного явствует тоже, что метрические формы (5.22), (5.32), (5.44) и (5.45) работы [2] не могут описывать гравистатическое поле, задаваемое формой (IV.1) работы [1].

Поступило в редакцию
10 апреля 1967 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Коппель, Труды ИФА АН ЭССР, № 33, 39, 1967.
2. А. Коппель, Труды ИФА АН ЭССР, № 33, 18, 1967.

Об одном точном полугеодезическом решении Лифшица—Халатникова вакуумных уравнений Эйнштейна

А. Коппель

On an Exact Semigeodetic Lifshitz—Khalatnikov Solution of the Einstein's Empty Space Equations

A. Koppel

Лифшицем и Халатниковым дана следующая вакуумная полугеодезическая двухпеременная метрическая форма

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 \mathrm{d}t^2 - \frac{ct}{x_1} \mathrm{d}x_1^2 - \left(\frac{ct}{x_1}\right)^{2s} \mathrm{d}x_2^2 - \left(\frac{ct}{x_1}\right)^{2r} \mathrm{d}x_3^2\,, \tag{1}$$

играющая роль в их космологических исследованиях [1]. В метрической форме (1) постоянные s и r связаны соотношением

$$s + r = s^2 + r^2. \tag{2}$$

Если при форме (5.45) работы [2] положить $U_{,tt} = 0$, то без ограничения общности получим

$$U = \alpha t, \tag{3}$$

где α — ненулевая постоянная. В силу (3) из уравнения (5.43) вытекает

$$M = \alpha^{-1} (q - p)^{-1} (p^2 + q^2) (\alpha^2 - c^2 pq) = \text{const.}, \quad q \neq p, \tag{4}$$

(при $q = p$ имеем случай галилеевых решений). Соотношения (5.42) и (4) совместимы, если только имеет место

$$p^2 + q^2 = \frac{\varepsilon\alpha}{c}(p+q), \tag{5}$$

где $\varepsilon = \pm 1$. В силу (3)—(4) интегрирование уравнений (5.41)—(5.42) дает

$$T = \beta_2 t^s, \qquad V = \beta_3 t^r. \tag{6}$$

Здесь

$$s = \frac{p}{q} + \frac{M}{q\alpha}, \qquad r = \frac{q}{p} - \frac{M}{p\alpha}. \tag{7}$$

С учетом (4)—(5) из (7) вытекает

$$q = \frac{\varepsilon\alpha}{c} s, \qquad p = \frac{\varepsilon\alpha}{c} r. \tag{8}$$

После преобразований координат x_1, x_2 и x_3, причем $x_1 = \frac{\varepsilon}{\alpha} \overset{1}{x_1}$, получаем теперь формулу (5.45) работы [2] в виде

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 \mathrm{d}t^2 - t^2 \mathrm{d}x_1^2 - (te^{\frac{x_1}{c}})^{2s} \mathrm{d}x_2^2 - (te^{\frac{x_1}{c}})^{2r} \mathrm{d}x_3^2, \tag{9}$$

при этом соотношение (5) переходит в соотношение (2). С помощью преобразований $x'_1 = e^{-\frac{x_1}{c}}$, $x'_2 = c^{-s} x_2$, $x'_3 = c^{-r} x_3$ метрическая форма (9) переходит в форму (1). Таким образом, форма (1) содержится как частный случай в более общем решении, данном нами формулами (5.40), (5.41), (5.43) и (5.45) в работе [2].

На основе формул (II. 10) работы [3] можно вычислить предельную нерелятивистскую метрическую форму для релятивистского гравитационного поля, описываемого формой (9). В силу (II. 16) получим потенциал этого ньютоновского образа:

$$\Phi = \frac{1}{2} s(s-1) t^{-2} (X_2^2 - X_3^2), \tag{10}$$

где X_2, X_3 — декартовые координаты, введенные в предельном эвклидовом 3-пространстве. Вид потенциала (10) эквивалентен потенциалу (III. 3) в работе [3]. Таким образом, метрическая форма (9), являющаяся эквивалентной форме (1), а также формы (4.13)—(4.15) работы [2] описывают гравитационные поля, свойства которых в ньютоновском приближении совпадают.

Поступило в редакцию
10 апреля 1967 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, Успехи физических наук, 80, 391—438, 1963.
2. А. Коппель, Труды ИФА АН ЭССР, № 33, 18, 1967.
3. А. Коппель, Труды ИФА АН ЭССР, № 33, 39, 1967.

Об ортогональных аксиально-симметричных $\overset{*}{\Sigma}$- и Σ-системах

А. Коппель

On Orthogonal Axially Symmetric $\overset{*}{\Sigma}$-and Σ-systems

A. Koppel

Определим ортогональные аксиально-симметричные $\overset{*}{\Sigma}$-системы, как системы координат, введенные в галилеевом пространстве-времени, при которых метрическая форма имеет вид

$$d\overset{*}{s}{}^2 = dx_0^2 - k^2(dx_1^2 + dx_2^2) - r^2 dx_3^2, \qquad (1)$$

где k и r — функции координат x_1 и x_2, удовлетворяющие условиям

$$r_{,11} + r_{,22} = 0, \qquad r_{,1} \neq 0, \qquad (2)$$

$$k^2 = r_{,1}{}^2 + r_{,2}{}^2. \qquad (3)$$

Любая конкретная гармоническая функция r дает некоторую конкретную ортогональную аксиально-симметричную $\overset{*}{\Sigma}$-систему. К числу этих систем относятся как частные случаи все виды ортогональных аксиально-симметричных эвклидовых координатных систем, обычно используемых на практике: круговые цилиндрические координаты ($\overset{*}{\Sigma}{}^{\mathrm{I}}$-система $r = x_1$), сферические координаты ($\overset{*}{\Sigma}{}^{\mathrm{II}}$-система $r = e^{x_1} \sin x_2$), параболические координаты вращения ($\overset{*}{\Sigma}{}^{\mathrm{III}}$-система $r = x_1 x_2$), координаты вытянутого эллипсоида вращения ($\overset{*}{\Sigma}{}^{\mathrm{IV}}$-система $r = l \,\mathrm{sh}\, x_1 \sin x_2$), координаты сплющенного эллипсоида вращения ($\overset{*}{\Sigma}{}^{\mathrm{V}}$-система

$r = l \operatorname{ch} x_1 \sin x_2$), тороидальные координаты ($\overset{*}{\Sigma}{}^{\mathrm{VI}}$-система $r = l \operatorname{sh} x_1 (\operatorname{ch} x_1 + \cos x_2)^{-1}$) и биполярные координаты ($\overset{*}{\Sigma}{}^{\mathrm{VII}}$-система $r = l \sin x_1 (\cos x_1 + \operatorname{ch} x_2)^{-1}$) [1, 2]. Таким образом, путем введения понятия ортогональной аксиально-симметричной $\overset{*}{\Sigma}$-системы дан метод, позволяющий в общей теории относительности (ОТО) с единой и более общей точки зрения рассматривать различные псевдо-эвклидовые аксиально-симметричные координатные системы, введенные в галилеевом пространстве-времени.

Определим ортогональные аксиально-симметричные Σ-системы, как системы координат, введенные в искривленном пространстве-времени, при которых метрическая форма имеет вид

$$ds^2 = f dx_0^2 - f^{-1}[A^2 k^2 dx_1^2 + B^2 k^2 dx_2^2 + D^2 r^2 dx_3^2]. \tag{4}$$

Здесь координаты x_1, x_2, x_3, а также функции k и r имеют тот же смысл, что и при форме (1). Функции f, A, B и D содержат кроме координат еще некоторые ненулевые параметры, входящие также в компоненты тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, причем при стремлении этих параметров к нулю имеют место $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ и $f = A = B = D = 1$. Соответственно конкретному виду предельной $\overset{*}{\Sigma}$-системы, в которую переходит данная Σ-система при таком переходе, для ортогональных аксиально-симметричных Σ-систем приняты обозначения Σ^{I}, Σ^{II}, . . . , Σ^{VII}.

Введение понятия Σ-системы позволяет дать новый метод применения вспомогательных эвклидовых координатных систем для нахождения новых конкретных негалилеевых решений уравнений Эйнштейна. Путем применения этого понятия найден ряд новых конкретных аксиально-симметричных точных решений в работах [3—6]. Исследован также вопрос, существуют ли вообще точные решения некоторых определенных типов.

Определим обобщенные вейлевы координатные системы (ОВК-системы), как координатные системы с метрической формой (4) при $A = B$ и $D = 1$. Вейлева каноническая координатная система ($r = x_1$, $k = 1$) [7] является частным случаем ОВК-систем. Обобщение формул ОТО, записанных разными авторами в вейлевой системе, позволяет достигнуть большей общности применения этих формул.

При ОВК-системах уравнениям Эйнштейна для гравистатического поля можно придать вид

$$\Delta\Phi = \frac{\varkappa}{2} k^2 e^{2(\lambda-\Phi)} (T^0_0 - T^3_3), \tag{5}$$

$$\lambda_{,11} + \lambda_{,22} + \Phi_{,1}{}^2 + \Phi_{,2}{}^2 = -\varkappa k^2 e^{2(\lambda-\Phi)} T^3_3, \tag{6}$$

$$\lambda_{,1} = [(\ln r)_{,1}{}^2 + (\ln r)_{,2}{}^2]^{-1} [(\ln r)_{,2} (2\Phi_{,1}\Phi_{,2} + \varkappa T_{12}) - (\ln r)_{,1} (\Phi_{,2}{}^2 - \Phi_{,1}{}^2 + \varkappa T_{22})], \tag{7}$$

$$\lambda_{,2} = [(\ln r)_{,1}{}^2 + (\ln r)_{,2}{}^2]^{-1} [(\ln r)_{,1} (2\Phi_{,1}\Phi_{,2} + \varkappa T_{12}) + (\ln r)_{,2} (\Phi_{,2}{}^2 - \Phi_{,1}{}^2 + \varkappa T_{22})], \tag{8}$$

$$T^1_1 + T^2_2 = 0, \tag{9}$$

где

$$e^{\lambda} = A, \qquad e^{2\Phi} = f,$$

а

$$\Delta\Phi \equiv \Phi_{,11} + (\ln r)_{,1} \Phi_{,1} + \Phi_{,22} + (\ln r)_{,2} \Phi_{,2}. \tag{10}$$

Отметим, что уравнение (5) является уравнением Пуассона для функции Φ в эвклидовом 3-пространстве определенной $\overset{*}{\Sigma}$-системы.

Поступило в редакцию
10 апреля 1967 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Маделунг, Математический аппарат физики, М., 1960.
2. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. I, М., 1958.
3. А. Коппель, Тезисы I Советской гравитационной конференции 27—30 июня 1961 г., М., 1961, стр. 10.
4. А. Коппель, Труды ИФА АН ЭССР, № 20, 50, 1963.
5. А. Коппель, Труды ИФА АН ЭССР, № 22, 36, 1963.
6. А. А. Коппель, сб. Проблемы гравитации, Тбилиси, 1965, стр. 121.
7. H. Weyl, Ann. d. Phys., **54**, 117, 1917.

О физическом толковании некоторых новых точных аксиально-симметричных решений уравнений Эйнштейна

А. Коппель

On the Physical Interpretation of Some New Exact Axially Symmetric Solutions of the Einstein's Equations

A. Koppel

Нами использован принцип соответствия Кереса [1, 2] для изучения ньютоновских приближений гравитационных полей, описываемых метрической формой

$$ds^2 = f dx_0^2 - f^{-1}[e^{2\lambda}(dx_1^2 + dx_2^2) + e^{2\nu} dx_3^2], \tag{1}$$

где f, λ, ν — функции координат x_1 и x_2. С помощью метода Кереса [2] получена формула соответствующего ньютоновского потенциала для общего вида формы (1). Этот потенциал равен половине множителя (взятого с противоположным знаком) члена, пропорционального c^{-2}, в разложении функции f по степеням c^{-1}. Таким образом, полученный результат обобщает известное положение для шварцшильдовской внешней метрики.

Вычислены ньютоновские потенциалы предельных нерелятивистских гравитационных полей, соответствующих новым точным двухпараметрическим аксиально-симметричным вакуумным решениям (3.1)—(3.4) работы [3] и точным электровакуумным решениям (4.10)—(4.14) с конформно-эвклидовым 3-пространством работы [4]. Вычислены также ньютоновские потенциалы для двух новых конкретных точных ортогональных аксиально-симметричных решений, полученных с помощью функции Макдональда в работе [5]. Эти решения соответствуют гравитационным полям, порожденным материей, распределенной неограниченно вдоль оси симметрии, и переходят в галилеевы на бесконенчом расстоянии от оси симметрии. На основе анализа вида ньютоновских потенциалов дано физическое толкование всех вышеупомянутых точных решений и выяснен физический смысл содержащихся в них параметров.

Показано, что метрические формы (3.1) и (3.2) работы [3] описывают суперпозицию вакуумных гравитационных полей, порождаемых распределением массы в виде бесконечной плоскости и перпендикулярной к ней бесконечной нити. Метрическая форма (3.3) описывает суперпозицию полей, порождаемых распределением массы в виде шара и бесконечной прямой нити, проходящей сквозь центр этого шара (распределение массы в виде «нити с узлом»). Решение (3.4) можно толковать как обобщение известного однопеременного статического аксиально-симметричного решения, причем это новое решение также описывает вакуумное гравитационное поле порождаемое бесконечной прямой нитью, только одна половина нити имеет теперь одну постоянную погонную плотность массы, а вторая — другую, независимую от первой.

На основе изучения ньютоновского приближения решения (4.10)—(4.14) работы [4] можно толковать как описывающие внешнее гравитационное поле электростатически заряженных бесконечной нити или бесконечного цилиндра (4.10), точки или шара (4.11), полубесконечной нити или параболоида вращения (4.12), отрезка или вытянутого эллипсоида вращения (4.13) и диска или сплющенного эллипсоида вращения (4.14).

Новые конкретные точные ортогональные решения, полученные при помощи функции Макдональда, можно толковать как описывающие гравистатическое поле, порождаемое линейным распределением вещества вдоль бесконечной прямой линии, причем масса положительного знака периодически чередуется с массой отрицательного знака.

Для выяснения физических особенностей метрик вычислены инвариант $I = R_{\alpha\beta\gamma\delta}\ R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ в однопараметрических случаях вакуумных решений (3.1)—(3.4) работы [3] и инварианты I и $I_G = R_{\mu\nu}\ R^{\nu\mu}$ для электровакумных решений (4.10)—(4.14) работы [4]. Инварианты I и I_G вычислены также при новом электровакуумном решении, полученном с помощью функции Макдональда. Показано, что в рассматриваемых случаях оба инварианта I и I_G в равной мере дают информацию о физических особенностях.

Изучение местонахождений физических особенностей метрик при помощи инвариантов I и I_G дает в общем ту же самую информацию о местонахождениях источников гравитационного поля что и анализ ньютоновских приближений. Но при этом проявляются также некоторые явно релятивистские эффекты, порядок величины которых выходит за рамки точности метода Кереса [2].

Поступило в редакцию
10 апреля 1967 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Керес, ЖЭТФ, 46, 1741, 1964.
2. Х. Керес, ЖЭТФ, 52, 768, 1967.
3. А. Коппель, Труды ИФА АН ЭССР, № 20, 50, 1963.
4. А. Коппель, Труды ИФА АН ЭССР, № 22, 36, 1963.
5. А. А. Коппель, сб. Проблемы гравитации, Тбилиси, 1965, стр. 121.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Содержание предыдущих сборников «Труды ФИАН»

1. Исследования по [illegible], 1955.
2. Исследования по теоретической физике, 1955.
3. Ч. Б. Лущик. Исследование центров захвата в щелочно-галоидных кристаллофосфорах, [illegible]
4. Исследования по [illegible]
5. Исследования по [illegible]
6. Исследования по [illegible]
7. Исследования по [illegible]
8. Исследования по [illegible]
9. Исследования по [illegible]
10. Исследования по [illegible]
11. Исследования по [illegible]
12. Исследования по [illegible]
13. Исследования по [illegible]
14. Исследования по [illegible]
15. Исследования по [illegible]
16. Исследования по теоретической физике, [illegible]
17. Исследования по [illegible]
18. Исследования по [illegible]
19. Исследования по [illegible], 1962.
19. Исследования по теоретической физике, [illegible]
20. Исследования по теоретической физике, [illegible]
21. Исследования по [illegible]
22. Исследования по теоретической физике, [illegible]
23. Исследования по [illegible]
24. Исследования по теоретической [illegible]
25. Исследования по теории полей и [illegible]
26. Исследования по [illegible]
27. Исследования по теории [illegible]
28. Исследования по люминесценции, [illegible]
29. Теория локальных центров кристаллов, [illegible]
30. Исследования по люминесценции, [illegible]
31. Люминесценция ионных кристаллов, [illegible]
32. Некоторые вопросы теории [illegible] стояния, 1967.
33. Исследования по теории полей и [illegible]
34. [illegible] в кристаллах, [illegible]

ТРУДЫ ИНСТИТУТА ФИЗИКИ
И АСТРОНОМИИ № 33

На русском и английском языках
Редакционно-издательский совет
Академии наук Эстонской ССР
Таллин, ул. Кохту, 6

Редактор Л. Рийвес
Технический редактор К. Сирк

Сдано в набор 3. XII 1965. Подписано к печати 23. XI 1967. Бумага 60×90, 1/16. Печатных листов 8,25. Учетно-издательских листов 6,38. Тираж 900 экз. МВ-06097. Заказ № 9178.
Типография имени Ханса Хейдеманна, г. Тарту, ул. Юликооли, 17/19. I.

Цена 50 коп.

Содержание предыдущих выпусков «Трудов ИФА»

1. Исследования по люминесценции, 1955.
2. Исследования по теоретической физике, 1955.
3. Ч. Б. Лущик, Исследования центров захвата в щелочногалоидных кристаллофосфорах, 1955.
4. Исследования по люминесценции, 1956.
5. Исследования по теоретической физике, 1957.
6. Исследования по люминесценции, 1957.
7. Исследования по люминесценции, 1958.
8. Исследования по люминесценции, 1958.
9. Исследования по теоретической физике, 1959.
10. Исследования по люминесценции, 1959.
11. Исследования по люминесценции, 1960.
12. Исследования по люминесценции, 1960.
13. Исследования по теоретической физике, 1961.
14. Исследования по люминесценции, 1961.
15. Исследования по люминесценции, 1961.
16. Исследования по теоретической физике, 1961.
17. Исследования по люминесценции, 1961,
18. Исследования по люминесценции, 1962.
19. Исследования по люминесценции, 1962.
19. Исследования по теоретической физике, 1962.
20. Исследования по теоретической физике, 1963.
21. Исследования по люминесценции, 1962.
22. Исследования по теоретической физике, 1963.
23. Исследования по люминесценции, 1963.
24. Исследования по теоретической физике и математике, 1964.
25. Исследования по теории полей и элементарных частиц, 1964.
26. Исследования по люминесценции, 1964.
27. Исследования по теории твердого тела, 1964.
28. Исследования по люминесценции, 1964.
29. Теория локальных центров кристалла, 1964.
30. Исследования по люминесценции, 1964.
31. Люминесценция ионных кристаллов, 1966.
32. Некоторые вопросы теории центров люминесценции и колебаний кристалла, 1967.
33. Исследования по теории полей и элементарных частиц, 1967.
34. Фотонное умножение в кристаллах, 1966.

Цена 50 коп.