Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Anett Vähi

# Aproksimatsiooniomaduse iseloomustus kompaktsete operaatorite ruumi kaudu

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad prof. Eve Oja, füüs.-mat. kand.
lektor Indrek Zolk, PhD

Tartu 2017

## Aproksimatsiooniomaduse iseloomustus kompaktsete operaatorite ruumi kaudu

Bakalaureusetöö

Anett Vähi

**Lühikokkuvõte**. Bakalaureusetöös kirjeldatakse aproksimatsiooniomadust perede kaudu ja antakse Grothendiecki teoreemile kaks erinevat üksikasjalikku tõestust. Need tõestused tuginevad J. Lindenstraussi ja L. Tzafriri raamatule *Classical Banach Spaces I* ning Å. Lima, O. Nygaard ja E. Oja artiklile *Isometric factorization of weakly compact operators and the approximation property* (Israel. J. Math., 2000).

Grothendiecki teoreemis on piisav tingimus ruumi $X$ aproksimatsiooniomaduseks antud kõikide Banachi ruumide $Y$ kaudu. Töös uuritakse, kas kõikide Banachi ruumide $Y$ asemel saab siin kasutada ka mingit kindlat Banachi ruumide klassi.

**CERCS teaduseriala:** P140 Read, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.

**Märksõnad:** aproksimatsiooniomadus, Grothendiecki teoreem, faktorisatsioonilemma.

## Characterisation of the Approximation Property through the Space of Compact Operators

Bachelor's thesis

Anett Vähi

**Abstract.** This bachelor's thesis describes the approximation property through families and provides two detailed proofs to Grothendieck's Theorem. The proofs are based on the book *Classical Banach Spaces I* by J. Lindenstrauss and L. Tzafriri and on the article *Isometric factorization of weakly compact operators and the approximation propety* (Israel. J. Math., 2000) by Å. Lima, O. Nygaard and E. Oja.

In Grothendieck's Theorem, the approximation property of a Banach space $X$ is characterised using all Banach spaces $Y$. It is considered whether some specific class of Banach spaces can be used to prove the approximation property of $X$.

**CERCS research specialisation:** P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.

**Key words:** approximation property, Grothendieck's Theorem, Factorization Lemma.

# Sisukord

# Sissejuhatus

Aproksimatsiooniomaduse uurimisega on tegeletud juba 1950. aastatest. Pikalt oli lahendamata probleemiks, kas igal Banachi ruumil on selline omadus. Aastal 1972 anti kontranäide Banachi ruumist, millel seda ei ole. Aproksimatsiooniomaduse osas on aga siiamaani mitmeid lahendamata küsimusi.

Üks olulisemaid tulemusi aproksimatsiooniomaduste vallas on Grothendiecki [1] teoreem, mis iseloomustab aproksimatsiooniomadust kompaktsete operaatorite ruumi kaudu.

Bakalaureusetöö eesmärgiks on uurida aproksimatsiooniomadust perede kaudu ning anda Grothendiecki teoreemile kaks erinevat üksikasjalikku tõestust – klassikaline tõestus ja artiklis [LNO] esitatud faktorisatsioonilemmale tuginev tõestus.

Töö koosneb viiest osast.

Esimeses osas toome sisse aproksimatsiooniomaduse mõiste ning uurime, millistel Banachi ruumidel on aproksimatsiooniomadus.

Teises osas tõestame teoreemi Banachi ruumi aproksimatsiooniomadusest perede keeles ja näitame, et vastava pere ühtlast koonduvust ei saa asendada punktiviisi koonduvusega.

Kolmandas osas anname üksikasjaliku tõestuse Grothendiecki teoreemile toetudes raamatus [LT1] esitatud tõestusele.

Töö neljandas osas tõestame Grothendiecki teoreemi piisavuse osa faktorisatsioonilemma abil. Seda kasutades on teoreemi tõestus oluliselt lühem võrreldes klassikalise versiooniga.

Grothendiecki teoreemis on piisav tingimus ruumi $X$ aproksimatsiooniomaduseks antud kõikide Banachi ruumide $Y$ kaudu. Viiendas osas uurime, kas kõikide Banachi ruumide $Y$ asemel saab siin kasutada ka mingit kindlat Banachi ruumide klassi.

Töös kasutatakse järgmisi tähistusi.

Olgu $X$ ja $Y$ normeeritud ruumid üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K}$ on reaalarvude või kompleksarvude korpus. Ruumist $X$ ruumi $Y$ tegutsevate pidevate lineaarsete operaatorite ruumi tähistame sümboliga $\mathcal{L}(X,Y)$. Ruumi $X$ kaasruumi $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ tähistame sümboliga $X^*$, teist kaasruumi tähistame $X^{**} = \mathcal{L}(X^*,\mathbb{K})$ ning operaatori $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ kaasoperaatorit ruumist $Y^*$ ruumi $X^*$ tähistame sümboliga $T^*$. Alamhulga $A \subset X$ sulundit tähistame $\overline{A}$, lineaarset katet

$$\operatorname{span} A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \colon a_k \in A, \lambda_k \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

[1] Alexander Grothendieck (1928–2014), prantsuse matemaatik.

ja kumerat katet tähistame

$$\mathrm{conv} A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \colon a_k \in A, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \right\}.$$

Ruumi $X$ kinnist ühikkera tähistame $B_X$ ja ühikoperaatorit $I_X \colon X \to X$.

# 1 Aproksimatsiooniomadus

Bakalauerusetöö esimese osa kirjutamisel on põhiliselt tuginetud raamatule [OO] ja artiklile [O]. Defineerime aproksimatsiooniomaduse mõiste ning tõestame, et igal Schauderi baasiga Banachi ruumil on aproksimatsiooniomadus.

Üks kõige kuulsamaid küsimusi *Šoti raamatus* ([S, lk. 231]) oli probleem 153, mille püstitas S. Mazur [2] aastal 1936. See puudutas kahe muutuja funktsioonide lähendamist. Nimelt olgu meil pidev funktsioon $f = f(s,t)$ määratud hulgal $[0,1] \times [0,1]$ ja $\varepsilon > 0$. Kas leiduvad arvud $a_1, \ldots a_n; b_1, \ldots, b_n; c_1, \ldots, c_n$ nii, et

$$\left| f(s,t) - \sum_{k=1}^{n} a_k f(s,b_k) f(c_k,t) \right| < \varepsilon \qquad \forall s,t \in [0,1]?$$

Mazur teadis, et positiivse vastuse korral saab kompaktseid operaatoreid suvaliste Banachi ruumide vahel lähendada lõplikumõõtmeliste operaatoritega. Aastal 1972 andis P. Enflo [3] kontranäite Banachi ruumist, millel ei ole aproksimatsiooniomadust, vt. [E, lk. 310]. See oli ühtlasi ka negatiivne vastus probleemile 153.

**Definitsioon.** Öeldakse, et operaator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ on *lõplikumõõtmeline*, kui tema kujutisruum ran $T = \{Tx\colon x \in X\}$ on lõplikumõõtmeline.

Lõplikumõõtmeliste operaatorite hulka tähistame $\mathcal{F}(X,Y)$ ja $\mathcal{F}(X) := \mathcal{F}(X,X)$.

**Definitsioon.** Öeldakse, et operaator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ on *kompaktne*, kui ta teisendab ruumi $X$ kinnise ühikkera $B_X$ suhteliselt kompaktseks hulgaks ruumis $Y$.

Kompaktsete operaatorite hulka tähistame $\mathcal{K}(X,Y)$, kusjuures $\mathcal{F}(X,Y) \subset \mathcal{K}(X,Y)$.

Järgnev lause on lõplikumõõtmeliste pidevate linaarsete operaatorite üldkujust. See pärineb raamatust [FHHMPZ, lk. 203], üksikasjalikult on see lause ära tõestatud bakalaureusetöös [Õ, lk. 7].

**Lause 1.** *Olgu $X$ ja $Y$ normeeritud ruumid ning olgu $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Järgmised väited on samaväärsed.*

(1) $T \in \mathcal{F}(X,Y)$.

(2) *Leidub $n \in \mathbb{N}$ ning $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ ja $y_1, \ldots, y_n \in Y$ nii, et*

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x) y_k, \quad x \in X.$$

[2] Stanislaw Mazur (1905–1981), poola matemaatik.
[3] Per Enflo (1944), rootsi matemaatik.

*Sellisel juhul kirjutatakse*

$$T = \sum_{k=1}^{n} x_k^* \otimes y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(\cdot) y_k.$$

**Definitsioon.** Öeldakse, et Banachi ruumil $X$ on *aproksimatsiooniomadus*, kui iga kompaktse hulga $K \subset X$ ning iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub operaator $T \in \mathcal{F}(X)$ nii, et

$$\|Tx - x\| \leq \varepsilon \ \ \forall x \in K.$$

**Definitsioon.** Banachi ruumi $X$ elementide jada $(x_k) = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ nimetatakse ruumi $X$ *Schauderi baasiks*, kui iga $x \in X$ esitub üheselt kujul

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k, \ \ \lambda_k \in \mathbb{K}.$$

Kui ruumil on Schauderi baas, siis leiduvad *osasummaoperaatorid* $P_n \colon X \to X$ nii, et

$$P_n x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \qquad \forall x \in X.$$

Need operaatorid on ühtlaselt tõkestatud ja lõplikumõõtmelised (vt. näiteks [FHHMPZ, lk. 161–163]). Seega leidub arv $M \geq 0$ nii, et

$$\|P_n\| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Järelikult on iga $n \in \mathbb{N}$ korral operaator $P_n$ tõkestatud, sest

$$\|P_n x\| \leq \|P_n\| \|x\| \leq M \|x\|.$$

Oleme saanud, et $P_n \in \mathcal{F}(X)$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

**Lause 2.** *Igal Schauderi baasiga Banachi ruumil on aproksimatsiooniomadus.*

*Tõestus.* Olgu $X$ Banachi ruum, $K \subset X$ kompaktne hulk, $\varepsilon > 0$ ja $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset X$ Schauderi baas. Näitame, et leidub $T \in \mathcal{F}(X)$ nii, et

$$\|Tx - x\| \leq \varepsilon, \ x \in K$$

Eelneva põhjal leidub $M \geq 0$ nii, et $\|P_n\| \leq M$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Hulga $K$ suhtelise kompaktsuse tõttu saame moodustada lõpliku $\dfrac{\varepsilon}{2(M+1)}$-võrgu $\{z_1, \ldots, z_m\} \subset X$, $m \in \mathbb{N}$. See tähendab, et iga $x \in K$ korral leidub $z_k \in X$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, nii, et

$$\|x - z_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2(M+1)}.$$

Nüüd iga elemendi $z_k \in \{z_1, \ldots, z_m\}$ korral

$$z_k = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^k x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k x_i = \lim_{n\to\infty} P_n z_k.$$

Seega leidub indeks $N_k \in \mathbb{N}$ nii, et kui $n \geq N_k$, siis

$$\|z_k - P_n z_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Võtame $N = \max\limits_{1\leq k\leq m} N_k$. Selline maksimum leidub, sest tegemist on lõpliku hulgaga. Siis aga

$$\begin{aligned}
\|P_N x - x\| &= \|P_N x - x \pm z_k \pm P_N z_k\| \\
&\leq \|P_N x - P_N z_k\| + \|P_N z_k - z_k\| + \|z_k - x\| \\
&\leq \|P_N\|\|x - z_k\| + \frac{\varepsilon}{2} + \|z_k - x\| \\
&= (\|P_N\| + 1)\|z_k - x\| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq (\|P_N\| + 1)\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq (M+1)\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ x \in K.
\end{aligned}$$

Sellega oleme näidanud, et sobivaks operaatoriks $T \in \mathcal{F}(X)$ saab võtta osasummaoperaatori $P_N$. □

# 2 Aproksimatsiooniomaduse iseloomustus perede kaudu

Töö teises osas defineerime pere ning ühtlase koonduvuse mõiste toetudes raamatule [OO], tõestame teoreemi Banachi ruumi aproksimatsiooniomadusest perede keeles ning näitame, et vastava pere ühtlane koonduvus kompaktsetel hulkadel on oluline ning seda ei saa asendada punktiviisi koonduvusega.

**Definitsioon.** Hulka $\mathcal{A}$ nimetatakse *suunatud hulgaks*, kui temas on antud seos " $\geq$ " (s.t. on antud osahulk $\mathcal{D} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, kus $(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}$ korral kirjutatakse $\alpha \geq \beta$), mis rahuldab tingimusi:

1) kui $\alpha \in \mathcal{A}$, siis $\alpha \geq \alpha$ (refleksiivus),

2) kui $\alpha \geq \beta$ ja $\beta \geq \gamma$, siis $\alpha \geq \gamma$ (transitiivsus),

3) iga $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ korral leidub $\gamma \in \mathcal{A}$ nii, et $\gamma \geq \alpha$ ja $\gamma \geq \beta$ (suunatus).

**Definitsioon.** *Suunatud pereks* ehk *pereks* hulgas $X$ nimetatakse kujutust $x_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$, (lühemalt $(x_\alpha)$ või $x_\alpha$), mille määramispiirkond $\mathcal{A}$ on suunatud hulk ja väärtused $x_\alpha$ kuuluvad hulka $X$.

Kui suunatud hulgaks $\mathcal{A}$ on naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$, siis pere on jada.

**Definitsioon.** Olgu $X$ ja $Y$ normeeritud ruumid ning $K \subset X$. Öeldakse, et $(T_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *koondub ühtlaselt* operaatoriks $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ hulgal $K$, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ nii, et kui $\alpha_0 \geq \alpha$, siis

$$\|T_\alpha x - Tx\| \leq \varepsilon \ \forall x \in K.$$

**Teoreem 1** (vt. [C, lk. 281])**.** *Olgu $X$ Banachi ruum. Järgmised väited on samaväärsed.*

(1) *Ruumil $X$ on aproksimatsiooniomadus.*

(2) *Leidub pere $(T_\alpha) \subset \mathcal{F}(X)$ nii, et $T_\alpha \longrightarrow I_X$ ühtlaselt ruumi $X$ kompaktsetel alamhulkadel.*

*Tõestus.* (1) $\Rightarrow$ (2). Olgu hulga $\mathcal{A}$ elementideks paarid $\alpha = (K, \varepsilon)$, kus $K \subset X$ on kompaktne hulk ja $\varepsilon > 0$. Defineerime hulgas $\mathcal{A}$ seose järgmiselt:

$$(K_1, \varepsilon_1) \geq (K_2, \varepsilon_2) \Longleftrightarrow K_2 \subset K_1, \varepsilon_2 \geq \varepsilon_1.$$

Veendume, et tegemist on suunatud hulgaga.

1) Näitame refleksiivsust. Kui $\alpha = (K, \varepsilon) \in \mathcal{A}$, siis $K \subset K$ ja $\varepsilon \geq \varepsilon$. Seega $\alpha \geq \alpha$.

2) Näitame transitiivsust. Olgu $\alpha_1 = (K_1, \varepsilon_1), \alpha_2 = (K_2, \varepsilon_2), \alpha_3 = (K_3, \alpha_3) \in \mathcal{A}$ sellised, et $\alpha_1 \geq \alpha_2$ ja $\alpha_2 \geq \alpha_3$. Kuna $\alpha_1 \geq \alpha_2$, siis $K_2 \subset K_1$ ning $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$. Kuna

$\alpha_2 \geq \alpha_3$, siis $K_3 \subset K_2$ ning $\varepsilon_3 \geq \varepsilon_2$. Järelikult $K_3 \subset K_2 \subset K_1$ ning $\varepsilon_3 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$, mille tõttu $\alpha_1 \geq \alpha_3$.

3) Olgu $\alpha_1 = (K_1, \varepsilon_1), \alpha_2 = (K_2, \varepsilon_2) \in \mathcal{A}$. Peame näitama, et leidub $\alpha_3 = (K_3, \varepsilon_3) \in \mathcal{A}$ nii, et $\alpha_3 \geq \alpha_1$ ja $\alpha_3 \geq \alpha_2$. Tähistame $K_3 = K_1 \cup K_2$. Kuna hulgad $K_1$ ja $K_2$ on kompaktsed, siis on ka hulk $K_3$ kompaktne. Olgu $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Siis ilmselt on $\varepsilon_3 > 0$. Seega $\alpha_3 = (K_3, \varepsilon_3) \in \mathcal{A}$, kusjuures $K_1 \subset K_3$ ja $K_2 \subset K_3$ ning $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_3$ ja $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$. Järelikult $\alpha_3 \geq \alpha_1$ ja $\alpha_3 \geq \alpha_2$.

Moodustame sellise pere $(T_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, mille määramispiirkond on $\mathcal{A}$. Seame igale indeksile $\alpha \in \mathcal{A}$ vastavusse operaatori $T_\alpha$ nii, et

$$\|T_\alpha x - x\| \leq \varepsilon \ \forall x \in K.$$

Olgu $K_0 \subset X$ kompaktne hulk ja $\varepsilon_0 > 0$. Veendumaks, et $T_\alpha \longrightarrow I_X$ ühtlaselt hulgal $K_0$, on vaja näidata, et leidub $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ nii, et kui $\alpha \geq \alpha_0$, siis

$$\|T_\alpha x - I_X x\| = \|T_\alpha x - x\| \leq \varepsilon_0 \ \forall x \in K_0.$$

Olgu $(K, \varepsilon) = \alpha \geq \alpha_0 = (K_0, \varepsilon_0)$. Siis $K_0 \subset K$ ja $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Kuna $\|T_\alpha x - x\| \leq \varepsilon$ iga $x \in K$ korral, siis $\|T_\alpha x - x\| \leq \varepsilon_0$ iga $x \in K_0$ korral.

(2) $\Rightarrow$ (1). Olgu meil pere $(T_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset \mathcal{F}(X)$ nii, et $T_\alpha \longrightarrow I_X$ ühtlaselt ruumi $X$ kompaktsetel alamhulkadel.

Olgu $K \subset X$ kompaktne alamhulk. Eelduse kohaselt leidub iga $\varepsilon > 0$ korral $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ nii, et kui $\alpha \geq \alpha_0$, siis

$$\|T_\alpha x - I_X x\| \leq \varepsilon \ \forall x \in K.$$

Tähistame $T := T_{\alpha_0}$. Siis

$$\|Tx - x\| = \|T_{\alpha_0} x - I_X x\| \leq \varepsilon \ \forall x \in K. \qquad \square$$

**Definitsioon.** Olgu $X$ ja $Y$ normeeritud ruumid. Öeldakse, et operaatorite pere $(T_\alpha)_{a \in \mathcal{A}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *koondub punktiviisi*, kui $(T_\alpha x)$ koondub iga $x \in X$ korral.

Tekib küsimus, kas ühtlast koonduvust kompaktsetel alamhulkadel aproksimatsiooniomaduse definitsioonis saab asendada punktiviisi koonduvusega? Ei saa. Kui aproksimatsiooniomaduse definitsioonis saaks sellise asenduse teha, siis oleks alloleva teoreemi 3 põhjal igal Banachi ruumil aproksimatsiooniomadus, mis on väär (vt. [E, lk. 310]).

**Definitsioon.** Öeldakse, et lineaarne operaator $P\colon X \to X$ on *projektor*, kui $P^2 = P$, s.t.

$$P(Px) = Px \ \forall x \in X.$$

Projektori $P$ korral on teada, et kehtib samaväärsus (vt. [OO, lk. 259])

$$Px = x \Leftrightarrow x \in \text{ran } P.$$

Järgmiseks sõnastame tuntud Auerbachi teoreemi, mille tõestuse leiab raamatust [FHHMPZ, lk. 139].

**Teoreem 2** (Auerbach)**.** *Olgu $X$ Banachi ruum ning olgu $F \subset X$ $n$-mõõtmeline alamruum. Siis leidub projektor $P \in \mathcal{F}(X)$ alamruumile $F$, s.t.* ran $P = F$*, nii, et*

$$\|P\| \leq n.$$

**Teoreem 3.** *Igas Banachi ruumis $X$ leidub lõplikumõõtmeliste operaatorite pere, mis koondub punktiviisi operaatoriks $I_X$.*

*Tõestus.* Olgu $X$ Banachi ruum. Defineerime ruumi $X$ kõikide lõplike alamhulkade vahel seose:

$$F_1 \geq F_2 \Longleftrightarrow F_2 \subset F_1.$$

Siis $\mathfrak{F} := \{F \colon F \text{ on lõplik}, \ F \subset X\}$ on suunatud hulk.

Tõepoolest, refleksiivsus on ilmne.

Näitame transitiivsust. Olgu $F_1 \geq F_2$ ja $F_2 \geq F_3$. Siis $F_3 \subset F_2 \subset F_1$. Järelikult $F_1 \geq F_3$.

Näitame, et tegemist on suunatud hulgaga. Olgu meil $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$. Vaja on leida selline hulk $F_3 \in \mathfrak{F}$, et $F_3 \geq F_1$ ja $F_3 \geq F_1$. Tähistame $F_3 := F_1 \cup F_2$. Siis hulk $F_3$ on lõplik ning $F_3 \subset X$. Samuti kehtib, et $F_1 \subset F_3$ ja $F_2 \subset F_3$. Seega $F_3 \geq F_1$ ja $F_3 \geq F_2$.

Iga lõpliku hulga $F := \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ korral on span $F$ lõplikumõõtmeline alamruum. Auerbachi teoreemi (vt. teoreemi 2) kohaselt leidub projektor $P_F$ alamruumile span $F$ nii, et

$$\|P_F\| \leq \dim \operatorname{span} F \leq n.$$

Siis $(P_F)_{F \in \mathfrak{F}} \subset \mathcal{F}(X)$. Teame, et

$$P_F x = x \Leftrightarrow x \in \text{ran } P_F = \operatorname{span} F.$$

Järelikult $P_F \to I_X$ punktiviisi. Tõepoolest, iga elemendi $x \in X$ korral leidub hulk $F_0 = \{x\}$. Siis iga hulga $F \geq F_0$ korral

$$x \in F_0 \subset F \Rightarrow x \in \text{ran } P_{F_0} \subset \text{ran } P_F.$$

Seega $P_F x = x$ ja olemegi saanud, et

$$\lim_F P_F x = I_X x. \qquad \square$$

# 3 Grothendiecki teoreem: klassikaline tõestus

Töö kolmandas peatükis tõestame üksikasjalikult Grothendiecki teoreemi (vt. teoreemi 4), mis pärineb memuaarist [Gro, lause 35, $A_1 \Leftrightarrow A_5$]. Selle teoreemi kohaselt on aproksimatsiooniomadus samaväärne sellega, et iga kompaktne operaator on lõplikumõõtmeliste operaatorite piirväärtus. Seega tähendab aproksimatsiooniomadus seda, et igat kompaktset operaatorit saab lähendada lõplikumõõtmeliste operaatoritega.

Esitame kõigepealt Grothendiecki teoreemi koos tarvilikkuse osa tõestusega, mis on lihtne järeldus definitsioonidest.

**Teoreem 4** (Grothendieck)**.** *Banachi ruumil $X$ on aproksimatsiooniomadus parajasti siis, kui $\overline{\mathcal{F}(Y,X)} = \mathcal{K}(Y,X)$ iga Banachi ruumi $Y$ korral.*

*Tõestus. Tarvilikkus.* Olgu $Y$ Banachi ruum ning $T \in \mathcal{K}(Y,X)$ ja $\varepsilon > 0$. Piisab näidata, et leidub $T_1 \in \mathcal{F}(Y,X)$ nii, et $\|T - T_1\| \leq \varepsilon$.

Tähistame $K := \overline{T(B_Y)}$. Siis hulk $K$ on kompaktne, sest kompaktne operaator viib ruumi $Y$ kinnise ühikkera $B_Y$ suhteliseks kompaktseks hulgaks ruumis $X$.

Eelduse kohaselt on ruumil $X$ aproksimatsiooniomadus, seega leidub operaator $T_0 \in \mathcal{F}(X)$ nii, et

$$\|T_0 x - x\| \leq \varepsilon \ \forall x \in K.$$

Kuna $T(B_Y) \subset K$, siis

$$\|T_0 x - x\| \leq \varepsilon \ \forall x \in T(B_Y).$$

Defineerime operaatori $T_1 := T_0 T$. Siis $T_1 \in \mathcal{F}(Y,X)$. Tõepoolest, kuna

$$\operatorname{ran} T_1 = T_0(T(Y)) \subset T_0(X) = \operatorname{ran} T_0,$$

siis

$$\dim \operatorname{ran} T_1 \leq \dim \operatorname{ran} T_0 < \infty.$$

Seega

$$\|T - T_1\| = \sup_{y \in B_Y} \|Ty - T_1 y\| = \sup_{y \in B_Y} \|Ty - T_0 Ty\| = \sup_{x \in T(B_Y)} \|T_0 x - x\| \leq \varepsilon. \quad \square$$

Grothendiecki teoreemi piisavuse osa tõestus on oluliselt mahukam. Selleks anname kõigepealt vajaminevad mõisted ning sõnastame mõned abitulemused.

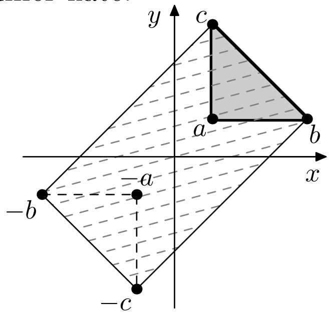
Olgu $X$ vektorruum.

**Definitsioon.** Öeldakse, et $U \subset X$ on *tasakaalus*, kui tingimusest $|\lambda| \leq 1$, kus $\lambda \in \mathbb{K}$, järeldub, et $\lambda U \subset U$. Kui hulk $U$ on kumer ja tasakaalus, siis öeldakse, et $U$ on *absoluutselt kumer*.

**Definitsioon.** Hulga $U \subset X$ *absoluutselt kumeraks katteks* $\mathrm{absconv} U$ nimetatakse hulga $U$ kõikvõimalike absoluutselt kumerate kombinatsioonide hulka, s.t.

$$\mathrm{absconv} U = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \colon u_i \in U, \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Joonisel on halliga näidatud ruumi $\mathbb{R}^2$ punktide $a, b, c$ kumer kate ning viirutatult nende absoluutselt kumer kate.




**Lause 3.** *Olgu $X$ normeeritud ruum ja $U \subset X$. Hulga $U$ kinnine absoluutselt kumer kate on absoluutselt kumer hulk.*

*Tõestus.* Olgu $\lambda \in (0,1)$ ja hulga $\overline{\mathrm{absconv}} U$ elemendid $x$ ja $y$. Leiduvad jadad hulgast $\mathrm{absconv} U$ liikmetega

$$x_n = \sum_{i=1}^{m_n} k_i^n u_i^n, \;\; y_n = \sum_{k=1}^{p_n} l_k^n v_k^n,$$

kus $u_i^n, v_k^n \in U$ $(i = 1, \ldots, m_n;\; k = 1, \ldots, p_n)$ ja $\sum\limits_{i=1}^{m_n} |k_i^n| \leq 1, \sum\limits_{k=1}^{p_n} |l_k^n| \leq 1$, sellised, et $\lambda x_n + (1-\lambda) y_n \to \lambda x + (1-\lambda) y$. Siis $\lambda x_n + (1-\lambda) y_n \in \mathrm{absconv} U \subset \overline{\mathrm{absconv}} U$, sest

$$\lambda x_n + (1-\lambda) y_n = \lambda \sum_{i=1}^{m_n} k_i^n u_i^n + (1-\lambda) \sum_{k=1}^{p_n} l_k^n y_k^n = \sum_{i=1}^{m_n} (\lambda k_i^n) u_i^n + \sum_{k=1}^{p_n} (1-\lambda) l_k^n v_k^n.$$

Kuna $\lambda \in (0,1)$, siis

$$\sum_{i=1}^{m_n} |\lambda k_i| + \sum_{k=1}^{p_n} |(1-\lambda) l_k| \leq \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

Hulga $\overline{\mathrm{absconv}} U$ kinnisuse tõttu $\lambda x + (1-\lambda) y \in \overline{\mathrm{absconv}} U$.

Olgu $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$, ja $x \in \overline{\mathrm{absconv}} U$. Siis leidub jada $(x_n) \in \mathrm{absconv} U$ nii, et $\alpha x_n \to \alpha x$. Jada $\alpha (x_n) \in \mathrm{absconv} U \subset \overline{\mathrm{absconv}} U$. Tõepoolest

$$\alpha x_n = \alpha \sum_{i=1}^{m_n} \lambda_i^n u_i^n = \sum_{i=1}^{m_n} \alpha \lambda_i^n u_i^n,$$

kus $\sum_{i=1}^{m_n} |\alpha\lambda_i^n| = |\alpha| \sum_{i=1}^{m_n} |\lambda_i^n| \leq |\alpha| \leq 1$. Järelikult $\alpha x \in \overline{\operatorname{absconv}} U$. $\square$

**Teoreem 5** (Mazur, vt. nt. [Meg, lk. 254])**.** *Banachi ruumi kompaktse alamhulga kinnine absoluutselt kumer kate on kompaktne.*

**Lause 4** (vt. [FHHMPZ, lk. 22 ja 33])**.** *Olgu $X$ Banachi ruum. Kui jada $(x_n) \subset X$ on selline, et $\|x_n\| \to 0$, siis* $\overline{\operatorname{absconv}}\{x_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \colon \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \leq 1 \right\}$.

**Definitsioon.** Hulka $U \subset X$ nimetatakse *neelavaks*, kui iga elemendi $x \in X$ korral leidub arv $\mu > 0$ nii, et

$$|\lambda| > \mu, \ \ \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow x \in \lambda U.$$

Eeldades, et alamhulk $U \subset X$ on neelav, saame defineerida hulga $U$ *Minkowski funktsionaali* $p_U \colon X \to [0, \infty)$ järgmiselt:

$$p_U(x) = \inf\{\lambda > 0 \colon x \in \lambda U\}, \ \ x \in X.$$

Hulga $U$ neelavus on Minkowski funktsionaali defineerimisel oluline, sest vastasel korral võib hulk $\{\lambda > 0 \colon x \in \lambda U\}$ olla tühi.

Raamatus [OO, lk. 107] näidatakse, et absoluutselt kumera hulga Minkowski funktsionaal on poolnorm. Poolnorm erineb normist selle poolest, et

$$x = 0 \Rightarrow p_U(x) = 0,$$

aga ei pruugi kehtida implikatsioon

$$p_U(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

**Lemma 1.** *Olgu $X$ Banachi ruum ja $U \subset X$ kompaktne absoluutselt kumer hulk. Olgu*

$$Y := \operatorname{span} U = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU$$

*varustatud normiga*

$$|||y||| = p_U = \inf\{\lambda > 0 \colon y \in \lambda U\}, \ \ y \in Y.$$

*Siis kehtivad järgmised väited.*

(1) $B_Y = U$.

(2) *$Y$ on Banachi ruum.*

*Tõestus.* Lemma tõestuseks kontrollime kõigepealt, et absoluutselt kumera hulga $U \subset X$ korral $\operatorname{span} U = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU$ ja, et $|||\cdot|||$ rahuldab normi tingimusi.

Näitame, et kui $U \subset X$ on absoluutselt kumer hulk, siis

$$\operatorname{span} U = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU.$$

Selleks piisab veenduda, et $\operatorname{span} U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nU$, sest vastupidine sisalduvus on ilmne. Olgu $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m \in \operatorname{span} U$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$, $x_1, \ldots, x_m \in U$. Siis

$$x = \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| \frac{\alpha_k}{|\alpha_k|} x_k = \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| z_k,$$

kus $z_k := \frac{\alpha_k}{|\alpha_k|} x_k \in U$, kuna $U$ on tasakaalus hulk. Hulga $U$ kumeruse tõttu

$$x \in r\left(\frac{|\alpha_1|}{r} U + \ldots + \frac{|\alpha_m|}{r} U\right) \subset rU,$$

kus $r := |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_m|$. Valides nüüd $n_0 \in \mathbb{N}$ nii, et $n_0 \geq r$, saame

$$x \in rU \subset n_0 U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nU.$$

Teame juba, et $|||\cdot|||$ on poolnorm ruumil $X$, seega on $|||\cdot|||$ poolnorm ka ruumil $Y$. Näitame, et $|||\cdot|||$ on norm, milleks piisab kontrollida, et elemendi $y \in Y$ korral

$$|||y||| = 0 \Longrightarrow y = 0.$$

Olgu $y \in Y$ selline, et $|||y||| = 0$. Siis leidub jada $(\lambda_n) \subset (0,1)$ nii, et $\lambda_n \to 0$ ja $y \in \lambda_n U$ ehk $\frac{1}{\lambda_n} y \in U$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

Kuna hulk $U$ on tõkestatud, siis leidub $M > 0$ nii, et $\|u\| \leq M$ iga $u \in U$ korral. Seega

$$\left\| \frac{1}{\lambda_n} y \right\| \leq M \quad \text{ehk} \quad \|y\| \leq \lambda_n M \to 0.$$

Järelikult $\|y\| = 0$, mille tõttu $y = 0$.

Tõestuse lõpetuseks näitame, et kehtivad väited (1) ja (2).

(1) Olgu $y \in B_Y$. Kui $|||y||| < 1$, siis leidub $\lambda \in (0,1)$ nii, et $y \in \lambda U \subset U$. Kui $|||y||| = 1$, siis iga $k \in (0,1)$ korral

$$|||ky||| = k|||y||| = k < 1.$$

Eelneva põhjal $ky \in U$. Kuna $ky \to y$ protsessis $k \to 1$, siis hulga $U$ kinnisuse tõttu $y \in U$.

Näitame nüüd, et $U \subset B_Y$, milleks piisab näidata, et iga $y \in U$ korral $|||y||| \leq 1$. Kuna $y \in U = 1U$ , siis ruumi $Y$ normi definitsiooni põhjal $|||y||| \leq 1$.

(2) Olgu $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ Cauchy jada. Teame, et iga Cauchy jada on tõkestatud, seega leidub $M > 0$ nii, et $|||x_n||| \leq M$. Tähistame $z_n := \frac{1}{M}x_n$. Siis $(z_n)$ on Cauchy jada ruumis $(Y, |||\cdot|||)$. Tõepoolest, protsessis $n, m \to \infty$

$$|||z_n - z_m||| = \left|\left|\left| \frac{1}{M}x_n - \frac{1}{M}x_m \right|\right|\right| = \frac{1}{M}|||x_n - x_m||| \to 0.$$

Kuna $|||z_n||| = \frac{1}{M}|||x_n||| \leq 1$, siis $z_n \in B_Y = U$. Nüüd on meil olukord, kus iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et kui $n, m \geq N$, siis

$$|||z_n - z_m||| < \varepsilon.$$

Siis aga leiduvad arvud $\lambda_{nm} \in (0, \varepsilon)$ nii, et $z_n - z_m \in \lambda_{nm}U$ ehk $\frac{1}{\lambda_{nm}}(z_n - z_m) \in U$. Kuna hulk $U$ on tasakaalus ja $\frac{\lambda_{nm}}{\varepsilon} < 1$, siis

$$\frac{1}{\varepsilon}(z_n - z_m) = \frac{\lambda_{nm}}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\lambda_{nm}}(z_n - z_m)\right) \in U$$

ehk $z_n - z_m \in \varepsilon U$. Hulga $U$ kompaktsuse tõttu leidub osajada $(z_{n_i})$ nii, et $z_{n_i} \to z$ normi $\|\cdot\|$ mõttes, kus $z \in U$. Siis $z_{n_i} - z_m \in \varepsilon U$, kui $n_i, m \geq N$.

Kuna $U$ on normi $\|\cdot\|$ suhtes kinnine alamhulk, siis ka hulk $\varepsilon U$ on kinnine. Fikseerime $m$ ja vaatame normi $\|\cdot\|$ mõttes koonduvat jada $(z_{n_i} - z_m)_{i=1}^{\infty}$ kinnises hulgas $\varepsilon U$. Kuna $z_{n_i} \to z$, siis $z_{n_i} - z_m \to z - z_m$ ja hulga $\varepsilon U$ kinnisuse tõttu

$$z - z_m \in \varepsilon U,$$

seega $|||z - z_m||| \leq \varepsilon$. Järelikult iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et kui $m \geq N$, siis $|||z - z_m||| \leq \varepsilon$. Oleme saanud, et $z_m \to z$ ruumis $Y$ ning sellest järeldub, et $x_m \to x := Mz$ ruumis $Y$. □

**Definitsioon.** Topoloogilist ruumi nimetatakse *eralduvaks ruumiks*, kui igal kahel erineval elemendil $x, y \in X$ leiduvad mittelõikuvad ümbrused.

**Teoreem 6** (Kolmogorovi teoreem)**.** *Eralduv topoloogiline ruum on normeeruv parajasti siis, kui temas leidub kumer tõkestatud nulliümbrus.*

Lemma 1 sarnaneb Kolmogorovi teoreemiga (vt. [OO, lk. 109]), aga tõkestatud kumerate hulkade asemel on kompaktsed absoluutselt kumerad hulgad. Seetõttu tekib normeeritud ruumi asemel Banachi ruum. Tõestasime, et $|||\cdot|||$ on norm, seega ruum $Y$ on eralduv topoloogiline ruum (vt. [OO, lk. 113]).

**Definitsioon.** Ruumi $X$ *afiinseks alamruumiks* nimetatakse alamruumi $Y$ mis tahes nihet ruumi $X$ mingi elemendi võrra, s.t. mis tahes $x \in X$ korral hulka

$$x + Y = \{x + y \colon y \in Y\}.$$

**Definitsioon.** Olgu $X$ vektorruum ning $f \colon X \to \mathbb{K}$, $f \neq 0$, lineaarne funktsionaal. Hulka

$$\{x \in X \colon \mathrm{Re} f(x) = \alpha\}$$

nimetatakse *hüpertasandiks.*

Järgmiseks sõnastame veel kaks vajalikku abitulemust. Esiteks Grothendiecki kompaktsuse kriteeriumi (vt. lemma 2), mis pärineb memuaarist [Gro, lemma 12] ja mille tõestuse leiab lugeja raamatust [LT1, lk. 30]. Teiseks Mazuri teoreemi, mis pärineb artiklist [Maz, lk. 73], tõestuse leiab raamatust [Meg, lk. 176].

**Lemma 2** (Grothendiecki kompaktsuse kriteerium)**.** *Olgu $X$ Banachi ruum. Kinnine hulk $K \subset X$ on kompaktne parajasti siis, kui leidub jada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ nii, et*

$$\|x_n\| \to 0 \text{ ja } K \subset \overline{\mathrm{conv}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

**Teoreem 7** (Mazuri eraldamisteoreem)**.** *Olgu $X$ normeeritud ruum. Kui ruumi $X$ mittetühja lahtise kumera alamhulga $A$ ja afiinse alamruumi $L$ korral $A \cap L = \emptyset$, siis leidub selle ruumi niisugune kinnine hüpertasand $H$, et $L \subset H$ ja $A \cap H = \emptyset$.*

Lõpuks saame tõestada Grothendiecki teoreemi piisavuse osa. See tõestus, mis võtab raamatus [LT1] enda alla ligikaudu pool lehekülge, varustatakse alljärgnevas kõigi üksikasjadega.

*Teoreemi 4 tõestus. Piisavus.* Olgu $K \subset X$ kompaktne ja $\varepsilon > 0$. Siis leidub jada $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ nii, et

$$\|z_n\| \searrow 0 \text{ ja } K \subset \overline{\mathrm{conv}}\{z_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Tõepoolest, Grothendiecki kompaktsuse kriteeriumi (vt. lemma 2) põhjal leidub meil selline jada $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, et $z_n \to 0$ ja $K \subset \overline{\mathrm{conv}}\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Saame selle jada $(z_n)$ ümber järjestada nii, et see koonduks normi järgi kahanevalt nulliks, kusjuures jada $(z_n)$ sellisel ümberjärjestusel jääb kehtima sisalduvus $K \subset \overline{\mathrm{conv}}\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Defineerime hulga $K$ ja jada $(z_n)$ uuel kujul järgmiselt:

$$\hat{K} := \frac{K}{\|z_1\|}, \ (x_n) := \left(\frac{z_n}{\|z_1\|}\right).$$

Siis $\|x_1\| = 1$, $\|x_n\| \searrow 0$ ning $\hat{K} \subset \overline{\mathrm{conv}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Nüüd olgu

$$U := \overline{\mathrm{absconv}}\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|^{\frac{1}{2}}}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Hulk $U$ on suhteliselt kompaktne, sest

$$\left\| \frac{x_n}{\|x_n\|^{\frac{1}{2}}} \right\| = \|x_n\|^{\frac{1}{2}} \searrow 0.$$

Hulga $U$ absoluutse kumeruse tõestasime lauses 3. Seega $U$ on kompaktne absoluutselt kumer hulk.

Paneme tähele, et $\hat{K} \subset U$, sest $\hat{K} \subset \overline{\operatorname{conv}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{\operatorname{absconv}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{\operatorname{absconv}}\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|^{\frac{1}{2}}} \right\}_{n=1}^{\infty} = U$. Viimane sisalduvus kehtib, sest iga elemendi $x \in \overline{\operatorname{absconv}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ korral leidub hulgast $\operatorname{absconv}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jada liikmetega $y_n = \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_k^n x_k^n$, kus $\sum_{k=1}^{m_n} |\lambda_k^n| \leq 1$, nii, et $y_n \to x$. Kuna

$$y_n = \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_k^n x_k^n = \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_k^n \|x_k^n\|^{\frac{1}{2}} \frac{x_k^n}{\|x_k^n\|^{\frac{1}{2}}}$$

ja $\sum_{k=1}^{m_n} |\lambda_k^n| \|x_k^n\|^{\frac{1}{2}} \leq 1$, sest $\|x_k^n\| \leq 1$, siis $(y_n) \in \overline{\operatorname{absconv}}\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|^{\frac{1}{2}}} \right\}_{n=1}^{\infty}$, mille tõttu $x \in \overline{\operatorname{absconv}}\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|^{\frac{1}{2}}} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

Lemma 1 põhjal saame moodustada hulga $Y$ normiga $|||\cdot|||$ järgmiselt.

$$Y := \operatorname{span} U = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU, \ |||y||| = \inf\{\lambda > 0 \colon y \in \lambda U\}.$$

Siis $B_Y = U$ ja $Y$ on Banachi ruum.

Edasi näitame, et kehtivad järgmised väited.

(1) Iga $y \in Y$ korral $\|y\| \leq |||y|||$.

(2) Iga $n \in \mathbb{N}$ korral $|||x_n||| \leq \|x_n\|^{\frac{1}{2}}$.

1) Üldisust kitsendamata võime valida sellise elemendi $y \in B_Y$, et $|||y||| = 1$. Siis $y \in U = \overline{\operatorname{absconv}}\left\{ \frac{x_k}{\|x_k\|^{\frac{1}{2}}} \right\}$. Meenutame, et meil on tegemist jadaga, mille korral

$$1 = \|x_1\| \geq \|x_2\| \geq \|x_3\| \geq \dots$$

Järelikult ka $\|x_n\|^{\frac{1}{2}} \leq 1$ ja

$$\begin{aligned}
\|y\| &= \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_k^n \frac{x_k^n}{\|x_k^n\|^{\frac{1}{2}}} \right\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} |\lambda_k^n| \left\| \frac{x_k^n}{\|x_k^n\|^{\frac{1}{2}}} \right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} |\lambda_k^n| \|x_k^n\|^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} |\lambda_k^n| \leq 1 = |||y|||.
\end{aligned}$$

2) Piisab näidata, et $x_n \in \|x_n\|^{\frac{1}{2}} U$, sest sellisel juhul

$$|||x_n||| = \inf\{\lambda > 0 \colon x_n \in \lambda U\} \leq \|x_n\|^{\frac{1}{2}}.$$

See aga kehtib, sest

$$x_n \in \|x_n\|^{\frac{1}{2}} U \iff \frac{x_n}{\|x_n\|^{\frac{1}{2}}} \in U.$$

Defineerime operaatori $j \colon (Y, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|)$ nii, et

$$jx = x, \ x \in Y.$$

Siis $j \in \mathcal{K}(Y, X)$. Tõepoolest, ilmselt on operaator $j$ lineaarne. Paneme tähele, et $|||y||| < \infty$, kuna $y \in Y$ ning seega leidub $n \in \mathbb{N}$, et $y \in nU$. Järelikult on $j$ tõkestatud, sest $\|jy\| = \|y\| \leq |||y|||$ iga $y \in Y$ korral. Operaatori $j$ kompaktsuseks meenutame, et $U$ on suhteliselt kompaktne hulk ja paneme tähele, et

$$U = B_Y = j(B_Y).$$

Eelduse kohaselt $\mathcal{K}(Y, X) = \overline{\mathcal{F}(Y, X)}$, seega leidub operaator $T \in \mathcal{F}(Y, X)$ nii, et

$$\|T - j\| < \frac{\varepsilon}{2\|z_1\|},$$

kus $z_1$ on esialgse jada $(z_n)$ esimene liige. Kuna $T$ on lõplikumõõtmeline operaator, siis saame kirjutada, et

$$T = \sum_{k=1}^{m} y_k^* \otimes u_k,$$

kus $y_k^* \in (Y, |||\cdot|||)^*$ ja $u_k \in (X, \|\cdot\|)$. Nüüd

$$\sup_{x\in U} \left\| \sum_{k=1}^{m} y_k^*(x) u_k - x \right\| = \sup_{x\in B_Y} \|Tx - jx\| = \|T - j\| < \frac{\varepsilon}{2\|z_1\|}.$$

Kuna $\hat{K} \subset U$, siis

$$\sup_{x \in \hat{K}} \left\| \sum_{k=1}^{m} y_k^*(x) u_k - x \right\| < \frac{\varepsilon}{2\|z_1\|}.$$

Vaatame järgmisi väiteid.

(A) Iga $y^* \in Y^*$ ja iga $\delta > 0$ korral leidub $x^* \in X^*$ nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$|x^*(x_n) - y^*(x_n)| < \delta.$$

(B) Iga $y^* \in Y^*$ ja iga $\delta > 0$ korral leidub $x^* \in X^*$ nii, et iga $x \in \hat{K}$ korral

$$|x^*(x) - y^*(x)| < \delta.$$

Teoreemi tõestuse lõpetamiseks näitame, et

1) väide $(A)$ kehtib;

2) $(A) \Rightarrow (B)$;

3) väide $(B)$ lõpetab tõestuse.

1) Fikseerime suvalise elemendi $y^* \in Y^*$ ja olgu $\delta > 0$.

Kuna $|||x_n||| \leq \|x_n\|^{\frac{1}{2}}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral ja $\|x_n\| \to 0$, siis $|||x_n||| \to 0$. Seega, kuna $y^* \in Y^*$, siis

$$|||y^*(x_n)||| \leq |||y^*||| |||x_n||| \to 0 \implies y^*(x_n) \to 0.$$

Järelikult leidub indeks $n_0 \in \mathbb{N}$ nii, et kui $n > n_0$, siis

$$|y^*(x_n)| < \frac{\delta}{2}.$$

Vaatleme juhtu, kus leidub $n_1 < n_0$ nii, et $y^*(x_{n_1}) \neq 0$ (kui sellist indeksit $n_1$ ei leidu, siis saame võtta $x^* = 0$ ja väite $(A)$ kehtivus on ilmne).

Olgu

$$K_0 := \frac{2}{\delta} \, \overline{\text{absconv}}^{|||\cdot|||} \{x_k\}_{k=n_0+1}^{\infty}.$$

Veendume, et kehtib võrdus

$$\overline{\text{absconv}}^{\|\cdot\|} \{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \overline{\text{absconv}}^{|||\cdot|||} \{x_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Olgu $x \in \overline{\text{absconv}}^{|||\cdot|||} \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Siis leidub jada $(y_n) \in \text{absconv}^{|||\cdot|||} \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ nii, et $y_n \to x$. Ruumis $Y$ kehtib võrratus

$$\|x - y_n\| \leq |||x - y_n||| \to 0.$$

Järelikult $x \to y_n$ ka normi $\|\cdot\|$ suhtes ja $x \in \overline{\text{absconv}}^{\|\cdot\|}\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Olgu $x \in \overline{\text{absconv}}^{\|\cdot\|}\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Lause 4 põhjal leidub jada $(y_n)$ liikmetega

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

nii, et $y_n \to x$, kus

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k.$$

Kuna rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |||\lambda_k x_k||| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| |||x_k|||$ koondub, sest

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| |||x_k||| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \|x_k\|^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \leq 1,$$

siis ruumi $Y$ täielikkuse tõttu koondub rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ ka normi $|||\cdot|||$ suhtes.

Kui oletada, et osasummade jada $(y_n)$ koondub normi $|||\cdot|||$ suhtes ka elemendiks $w$, s.t. $|||y_n - w||| \to 0$, siis

$$\|x - w\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - w\| \leq \|x - y_n\| + |||y_n - w||| \to 0,$$

mistõttu $x = w$ ning $x \in \overline{\text{absconv}}^{|||\cdot|||}\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Oleme saanud, et

$$K_0 = \frac{2}{\delta}\, \overline{\text{absconv}}^{|||\cdot|||}\{x_k\}_{k=n_0+1}^{\infty} = \frac{2}{\delta}\, \overline{\text{absconv}}^{\|\cdot\|}\{x_k\}_{k=n_0+1}^{\infty}.$$

Teame, et $\text{absconv}\{x_k\} \subset \text{absconv}\,\text{conv}\{x_k\} \subset \text{absconv}\,\overline{\text{conv}}\{x_k\} \subset \overline{\text{absconv}\,\overline{\text{conv}}}\{x_k\}$. Kuna normi $\|\cdot\|$ suhtes on hulk $\overline{\text{conv}}\{x_k\}$ on kompaktne, siis Mazuri teoreemi (vt. teoreemi 5) kohaselt on ka $\overline{\text{absconv}\,\overline{\text{conv}}}\{x_k\}$ kompaktne. Kuna $\text{absconv}\{x_k\} \subset \overline{\text{absconv}\,\overline{\text{conv}}}\{x_k\}$, siis $K_0$ on kompaktne hulk.

Olgu

$$F := \{x \colon x \in \text{span}\{x_n\}_{n=1}^{n_0}, y^*(x) = 1\}.$$

Eelduse kohaselt saame leida elemendi $x \in \text{span}\{x_n\}_{n=1}^{n_0}$ nii, et $y^*(x) \neq 0$. Olgu $z := (1/y^*(x))x$. Siis $z \in \text{span}\{x_n\}_{n=1}^{n_0}$ ja $y^*(z) = y^*(x/y^*(x)) = 1$. Seega $F$ ei ole tühi hulk.

$F$ on kumer ja kinnine normi $\|\cdot\|$ suhtes. Olgu $x, y \in F$ ja $\lambda \in (0,1)$. Siis

$$y^*(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda y^*(x) + (1-\lambda)y^*(y) = 1.$$

Olgu jada $(x_n) \in F$ selline, et $x_n \to x$. Näitame, et $x \in F$. Kuna $y^*$ on pidev, siis

$$x_n \to x \Rightarrow 1 = y^*(x_n) \to y^*(x).$$

Järelikult $x \in F$.

$F$ on alamruumi $\{x \colon x \in \operatorname{span}\{x_n\}_{n=1}^{n_0}, y^*(x) = 0\}$ nihe. Selleks näitame, et

$$F = \{z\} + \{x \colon x \in \operatorname{span}\{x_n\}_{n=1}^{n_0}, y^*(x) = 0\},$$

kus $z \in \operatorname{span}\{x_n\}_{n=1}^{n_0}$ nii, et $y^*(z) = 1$.

Olgu $x \in F$ ja $z \in \operatorname{span}\{x_n\}_{n=1}^{n_0}$ selline, et $y^*(z) = 1$. Siis $y^*(x) = 1$ ja $x = z + (x - z)$. Sellisel juhul $x - z \in \operatorname{span}\{x_n\}_{n=1}^{n_0}$, sest lineaarne kate on alamruum. Samuti $y^*(x - z) = y^*(x) - y^*(z) = 1 - 1 = 0$. Seega $x - z \in \{x \colon x \in \operatorname{span}\{x_n\}_{n=1}^{n_0}, y^*(x) = 0\}$. Järelikult $x \in \{z\} + \{x \colon x \in \operatorname{span}\{x_n\}_{n=1}^{n_0}, y^*(x) = 0\}$.

Näitame teistpidi sisalduvust. Olgu $y \in \{z\} + \{x \colon x \in \operatorname{span}\{x_n\}_{n=1}^{n_0}, y^*(x) = 0\}$, siis leidub $x \in \{x \colon x \in \operatorname{span}\{x_n\}_{n=1}^{n_0}, y^*(x) = 0\}$ nii, et $y = z + x$. Kuna $y^*(y) = y^*(z) + y^*(x) = 1 + 0 = 1$, siis $y \in F$. Sellega oleme saanud, et $F$ on afiinne alamhulk.

Näitame, et $K_0 \cap F = \emptyset$. Tõepoolest, kui $x \in F$, siis $y^*(x) = 1$. Kui $x \in K_0$, siis leidub jada $(y_n) \in \frac{2}{\delta}\operatorname{absconv}\{x_k\}_{k=n_0+1}^{\infty}$ nii, et $y_n \to x$. Siis

$$y^*(y_n) = y^*\left(\sum_{k=1}^{m_n} \lambda_k^n x_k^n\right) = \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_k^n y^*(x_k^n) \to 0,$$

sest eelduse kohaselt $y^*(x_k^n) \to 0$. Seega

$$y^*(y_n) \to 0 = y^*(x).$$

Moodustame uue hulga

$$M = K_0 + B(0, \sigma),$$

kus

$$B(0, \sigma) = \{y \in X \colon \|y\| < \sigma\}$$

ja $\sigma < \dfrac{1}{\|y^*\|}$. Sellise $\sigma > 0$ saame valida, sest eelduse kohaselt $\|y^*\| \neq 0$.

Siis $M \cap F = \emptyset$. See kehtib, sest iga $x \in F$ korral $y^*(x) = 1$. Samas iga $x \in M$ korral

$$y^*(x) = y^*(y + w) = y^*(y) + y^*(w) \leq 0 + \|y^*\|\|w\| < \|y^*\|\sigma < \frac{1}{\|y^*\|}\|y^*\| = 1,$$

kus $y \in K_0$ ja $w \in B(0, \sigma)$.

Veendume, et $M$ on lahtine hulk. Selleks paneme tähele, et

$$M = \bigcup_{x \in K_0} B(x, \sigma).$$

Tõepoolest, $B(x,\sigma) \subset M$. Iga elemendi $y \in B(x,\sigma)$ saame esitada kujul $y = x + w$, kus $x \in K_0$ ja $w \in B(0,\sigma)$, sest $\|y - x\| = \|x + w - x\| < \sigma$. Teisalt, olgu $y \in M$. Siis $y = x + w$, kus $x \in K_0$ ja $w \in B(0,\sigma)$. Siis aga $y \in B(x,\sigma)$, sest $\|y - x\| = \|x + w - x\| < \sigma$. Kuna $B(x,\sigma)$ on lahtine hulk iga elemendi $x \in K_0$ korral, siis ka hulk $M$ on lahtine.

Hulgad $F$ ja $M$ rahuldavad Mazuri eraldamisteoreemi (vt. teoreemi 7) eeldusi. Järelikult leidub kinnine hüpertasand

$$\hat{F} = \{x \in X : x^*(x) = 1\}$$

nii, et $M \cap \hat{F} = \emptyset$ ja $F \subset \hat{F}$. Kuna $M \cap \hat{F} = \emptyset$, siis ka $K_0 \cap \hat{F} = \emptyset$.

Oleme saanud, et iga $n \leq n_0$ korral

$$x^*(x_n) = y^*(x_n) = 1.$$

Iga $n > n_0$ korral

$$x^*(x_n) = \frac{\delta}{2} x^*(2x_n/\delta),$$

kus $2x_n/\delta \in K_0$ ja kehtib

$$x^*(2x_n/\delta) < 1.$$

Kui leiduks $w \in K_0$, mille korral $x^*(w) \geq 1$, siis $\dfrac{w}{x^*(w)} \in K_0$ ning $x^*\left(\dfrac{w}{x^*(w)}\right) = 1$. Seega $\dfrac{w}{x^*(w)} \in \hat{F}$, mis on aga vastuolus eeldusega, et $K_0 \cap \hat{F} = \emptyset$. Sellega oleme näidanud, et iga $n > n_0$ korral $x^*(x_n) < \dfrac{\delta}{2}$. Eelduse kohaselt iga $n > n_0$ korral ka $|y^*(x_n)| < \dfrac{\delta}{2}$.

Järelikult iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$|x^*(x_n) - y^*(x_n)| < \delta.$$

2) Tõestame, et väitest (A) järeldub väide (B). Kuna $\hat{K} \subset \overline{\operatorname{conv}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, siis iga elemendi $x \in \hat{K}$ korral leidub hulgast $\operatorname{conv}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jada liikmetega $y_n = \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_k^n x_k^n$ nii, et $y_n \to x$. Väite (A) põhjal leidub iga $y^* \in Y^*$ korral $x^* \in X^*$ nii, et

$$|x^*(x_k^n) - y^*(x_k^n)| < \delta/3.$$

Kuna $y_n \to x$, siis

$$|x^*(y_n) - x^*(x)| < \frac{\delta}{3} \text{ ja } |y^*(y_n) - y^*(x)| < \frac{\delta}{3}.$$

Seega

$$\begin{aligned}
|x^*(x) - y^*(x)| &\le |x^*(x) - x^*(y_n)| + |x^*(y_n) - y^*(y_n)| + |y^*(y_n) - y^*(x)| \\
&< \frac{\delta}{3} + \left| \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_k^n x^*\big(x_k^n\big) - \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_k^n y^*\big(x_k^n\big) \right| + \frac{\delta}{3} \\
&< \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.
\end{aligned}$$

3) Näitame, et väide (B) lõpetab tõestuse. Eelnevalt defineerisime operaatori $T \in \mathcal{F}(Y, X)$ nii, et $T = \sum\limits_{k=1}^{m} y_k^* \otimes u_k$, kus $y_k^* \in (Y, |||\cdot|||)^*$ ja $u_k \in (X, \|\cdot\|)$ (vt. lk. 20). Väite (B) põhjal leidub iga funktsionaali $y_k^* \in Y^*$ korral $x_k^* \in X^*$ $(k = 1, \ldots, m)$, nii, et iga $x \in \hat{K}$ korral

$$|x_k^*(x) - y_k^*(x)| < \frac{\varepsilon}{2m \max_k \|u_k\| \|z_1\|},$$

kus $z_1$ on esialgse jada $(z_n)$ esimene liige. Siis

$$\|(x_k^* - y_k^*)(x) u_k\| \le \|u_k\| \frac{\varepsilon}{2m \max_k \|u_k\| \|z_1\|} \le \frac{\varepsilon}{2m\|z_1\|}.$$

Kui $\max\limits_k \|u_k\| = 0$, siis ilmselt võrratus

$$\|(x_k^* - y_k^*)(x) u_k\| \le \frac{\varepsilon}{2m\|z_1\|}$$

kehtib. Veendume, et $R := \sum\limits_{k=1}^{m} x_k^* \otimes u_k$ sobib operaatoriks, mis demonstreerib, et Banachi ruumil $X$ on aproksimatsiooniomadus. See operaator $R$ erineb eelnevalt defineeritud operaatorist $T$ ainult selle poolest, et elementide $y_k^*$ asemel on elemendid $x_k^*$.

Olgu $x \in \hat{K}$ suvaline. Siis

$$\begin{aligned}
\|Rx - x\| &= \left\| \sum_{k=1}^{m} x_k^*(x) u_k - x \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} (x_k^*(x) u_k - y_k^*(x) u_k + y_k^*(x) u_k) - x \right\| \\
&\le \left\| \sum_{k=1}^{m} x_k^*(x) u_k - y_k^*(x) u_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{m} y_k^*(x) u_k - x \right\| \\
&\le m \frac{\varepsilon}{2m\|z_1\|} + \frac{\varepsilon}{2\|z_1\|} = \frac{\varepsilon}{\|z_1\|}.
\end{aligned}$$

Sellega saime, et iga kompaktse hulga $\hat{K} = \dfrac{K}{\|z_1\|}$ korral leidub operaator $R \in \mathcal{F}(X)$ nii, et $\|Rx - x\| \leq \dfrac{\varepsilon}{\|z_1\|}$ iga $x \in \hat{K}$ korral. Iga hulga $K$ element $y$ on esitatav kujul $y = \|z_1\|x$, kus $x \in \hat{K}$. Järelikult iga $y \in K$ korral

$$\|Ry - y\| = \|R(\|z_1\|x) - \|z_1\|x\| = \|z_1\|\|Rx - x\| \leq \|z_1\|\frac{\varepsilon}{\|z_1\|} = \varepsilon. \qquad \square$$

# 4 Grothendiecki teoreem: faktorisatsioonilemmale tuginev tõestus

Selles osas tõestame Grothendiecki teoreemi (vt. teoreemi 4) piisavuse osa faktorisatsioonilemma (vt. lemma 4) abil. Tegemist on kuulsa Davis–Figiel–Johnson–Pełczyński faktorisatsioonilemma (vt. [DFJP, lk. 313]) isomeetrilise versiooniga, mis pärineb artiklist [LNO].

Kõigepealt aga näitame, et aproksimatsiooniomaduse definitsioonis saame kompaktsete hulkade asemel vaadelda üksnes ühikkera $B_X$ kompaktseid absoluutselt kumeraid alamhulki (vt. lemma 3). Selle tõestuseks kasutame eelmises osas sõnastatud Mazuri teoreemi (vt. teoreemi 5).

**Lemma 3.** *Banachi ruumil $X$ on aproksimatsiooniomadus parajasti siis, kui ühikkera $B_X$ iga kompaktse absoluutselt kumera alamhulga $H$ ning iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub operaator $T \in \mathcal{F}(X)$ nii, et*

$$\|Tx - x\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in H.$$

*Tõestus. Tarvilikkus.* Ilmne.

*Piisavus.* Olgu $K \subset X$ kompaktne hulk ja $\varepsilon > 0$. Kompaktne hulk on tõkestatud, seega leidub kera, mis sisaldab hulga $K$. Järelikult leidub $r > 0$ nii, et $rK \subset B_X$. Olgu nüüd $H$ hulga $rK$ absoluutselt kumer kate, siis $rK \subset H$. Kuna $rK \subset B_X$, siis ka $H \subset B_X$. Tõepoolest, olgu elemendid $x_1, \ldots, x_n \in rK \subset B_X$ ja olgu arvud $\lambda_i \in \mathbb{K}$ sellised, et $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1$. Siis

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i x_i\| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1.$$

Mazuri teoreemi (vt. teoreemi 5) põhjal on iga kompaktse hulga absoluutselt kumer kate ise ka kompaktne. Seega $H$ on kompaktne hulk. Eelduse kohaselt leidub operaator $T \in \mathcal{F}(X)$ nii, et

$$\|Ty - y\| \leq r\varepsilon \ \forall y \in H.$$

Siis ka

$$\|Ty - y\| \leq r\varepsilon \ \forall y \in rK.$$

Iga element $x \in K$ esitub kujul $x = \frac{1}{r} y$, kus $y \in rK$. Seega

$$\|Tx - x\| = \frac{1}{r} \|Ty - y\| \leq \frac{1}{r} r\varepsilon = \varepsilon \ \forall x \in K. \qquad \square$$

Järgmine osa tugineb artiklile [LNO] (vt. ka [O]). Vaatame pidevat rangelt kahanevat funktsiooni $f\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$, kus

$$f(a) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(a^n+1)^2} \right)^{1/2}, \ a > 1.$$

Leidub üheselt määratud $\mathbf{a} \in (1,\infty)$ nii, et $f(\mathbf{a}) = 1$, kusjuures $\mathbf{a}$ ligikaudne väärtus on $e^{4/9} \approx 1.56$ (selle funktsiooni kohta on täpsemalt kirjutatud Kristel Mikkori magistritöös [M, lk. 15–17]).

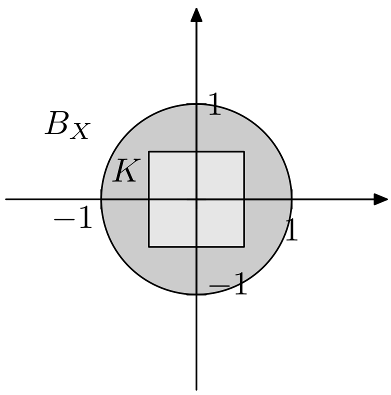
Olgu $X$ Banachi ruum ja $K \subset B_X$ kinnine absoluutselt kumer alamhulk.

Moodustame iga $n \in \mathbb{N}$ korral hulga

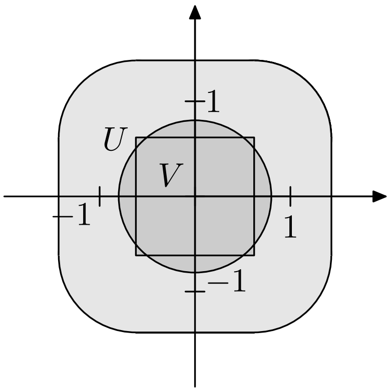
$$B_n = \mathbf{a}^{\frac{n}{2}} K + \mathbf{a}^{\frac{-n}{2}} B_X.$$

Selline hulk $B_n$ on neelav iga $n \in \mathbb{N}$ korral (vt. tõestust magistritööst [M, lk. 13]).

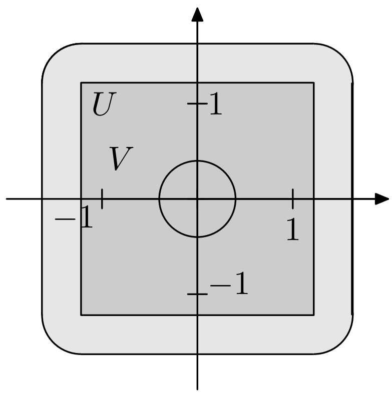
Näiteks, olgu antud esialgsed hulgad $B_X$ ja $K$ joonisel (a). Siis hulgad $B_1$ ja $B_4$ on toodud joonistel (b) ja (c).




(a)




(b) hulk $B_1$, kus $U = \mathbf{a}^{1/2}K$ ja $V = \mathbf{a}^{-1/2}B_X$




(c) hulk $B_4$, kus $U = \mathbf{a}^{2}K$ ja $V = \mathbf{a}^{-2}B_X$

Vaatleme hulga $B_n$ Minkowski funktsionaali $\|\cdot\|_n\colon X \to [0,\infty)$, mis on defineeritud võrdusega

$$\|x\|_n = \inf\{r > 0\colon x \in rB_n\}.$$

Olgu $\|x\|_K = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Defineerime

$$X_K = \{x \in X\colon \|x\|_K < \infty\}$$

ning olgu $J_K\colon X_K \to X$ loomulik sisestus, s.t. $J_K x = x$ iga $x \in X_K$ korral.

**Definitsioon.** Olgu $X$ normeeritud ruum. Kujutust $\pi\colon X \to X^{**}$, kus

$$(\pi x)(f) = f(x) \quad f \in X^*, x \in X,$$

nimetatakse ruumi $X$ *kanooniliseks sisestuseks*. Kui ruumi $X$ kanooniline sisestus on sürjektsioon, siis öeldakse, et ruum $X$ on *refleksiivne*.

Alloleva lemma 4 abil tõestatakse artiklis [LNO], et iga nõrgalt kompaktne operaator faktoriseerub isomeetriliselt läbi refleksiivse ruumi. See, kas iga nõrgalt kompaktne operaator faktoriseerub läbi refleksiivse ruumi, oli pikka aega päevakorras faktorisatsiooniprobleemi nime all. Selle lahendasid positiivselt Davis, Figiel, Johnson ja Pełczyński (vt. [DFJP]). Faktorisatsiooniprobleemist on täpsemalt kirjutatud magistritöös [M].

**Lemma 4** (Faktorisatsioonilemma, [LNO, lk. 329] ja [O, lk. 224])**.** *Olgu $X$ Banachi ruum, olgu $K \subset B_X$ kinnine absoluutselt kumer hulk, olgu $J_K\colon X_K \to X$ loomulik sisestus. Siis kehtivad järgmised väited.*

(i) $X_K = (X_K, \|\cdot\|_K)$ *on Banachi ruum,* $J_K \in \mathcal{L}(X_K, X)$ *ja* $\|J_K\| \leq 1$.

(ii) $K \subset B_{X_K} \subset B_X$.

(iii) $\overline{J_K^*(X^*)} = X_K^*$.

(iv) *Operaator $J_K$ on kompaktne parajasti siis, kui $K$ on kompaktne; sel juhul ruum $X_K$ on separaabel ja refleksiivne.*

Olgu $X$ ja $Y$ normeeritud ruumid ning olgu elemendid $x^* \in X^*$ ja $y \in Y$. Defineerime operaatori

$$x^* \otimes y\colon X \to Y,\ x \mapsto x^*(x)y,\ x \in X.$$

Vahetult on kontrollitav operaatori $x^* \otimes y$ lineaarsus. Pidevuseks näitame, et $x^* \otimes y$ on tõkestatud. Paneme tähele, et kui $x^* \in X^*$ ja $y \in Y$, siis

$$\|x^* \otimes y\| = \|x^*\|\|y\|.$$

Tõepoolest,

$$\|x^* \otimes y\| = \sup_{x \in B_X} \|x^*(x)y\| = \sup_{x \in B_X} |x^*(x)|\|y\| = \|x^*\|\|y\|.$$

Järelikult $x^* \otimes y \in \mathcal{L}(X, Y)$. Märgmine, et operaatorit $x^* \otimes y$ kasutasime juba tähistusena lauses 1 (vt. lk. 6).

Töö neljanda osa lõpetuseks esitame Grothendiecki teoreemi (vt. teoreemi 4) piisavuse osa tõestuse faktorisatsioonilemma abil. Seega näitame, et kui $\mathcal{F}(Y, X) = \mathcal{K}(Y, X)$ iga Banachi ruumi $Y$ korral, siis Banachi ruumil $X$ on aproksimatsiooniomadus.

*Teoreemi 4 tõestus. Piisavus.* Olgu $K \subset X$ kompaktne alamhulk ning $\varepsilon > 0$. Üldisust kitsendamata võime lause 3 põhjal eeldada, et $K \subset B_X$ on kompaktne absoluutselt kumer hulk. Kompaktne hulk on kinnine, järelikult on $K \subset B_X$ kinnine absoluutselt kumer alamhulk.

Faktorisatsioonilemma (vt. lemma 4) põhjal on $X_K$ Banachi ruum ning hulga $K$ kompaktsuse tõttu on operaator $J_K$ kompaktne, s.t. $J_K \in \mathcal{K}(X_K, X)$. Eelduse ja lause 1 kohaselt leidub operaator $A \in \mathcal{F}(X_K, X)$ kujul

$$A = \sum_{i=1}^{n} y_i^* \otimes x_i,$$

kus $y_i^* \in X_k^*$ ja $x_i \in X$, selliselt, et

$$\|A - J_K\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Samuti on faktorisatsioonilemma põhjal $J_K^*(X^*)$ kõikjal tihe ruumis $X_K^*$. Seega iga $y_i^* \in X_K^*$ korral leidub $x_i^* \in X^*$ nii, et

$$\|y_i^* - J_K^* x_i^*\| \leq \frac{\varepsilon}{2 \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|}.$$

Olgu $T = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes x_i \in \mathcal{F}(X)$. Paneme tähele, et iga $x \in X_K$ korral $Tx = TJ_K x$. Faktorisatsioonilemma põhjal $K \subset B_{X_K} \subset X_K$, seega iga $x \in K$ korral

$$\begin{aligned}
\|Tx - x\| &= \|TJ_K x - J_K x\| \\
&= \|TJ_K x - Ax + Ax - J_K x\| \\
&\leq \|TJ_K - A\|\|x\|_K + \|A - J_K\|\|x\|_K \\
&\leq \|TJ_K - A\| + \|A - J_K\|.
\end{aligned}$$

Näitame, et

$$TJ_K - A = \sum_{i=1}^{n} (J_K^* x_i^* - y_i^*) \otimes x_i.$$

Tõepoolest, see operaatorite võrdus kehtib. Olgu $x \in X_K$ suvaline. Siis ühelt poolt

$$(TJ_K - A)(x) = TJ_K x - Ax = T(J_K x) - \sum_{i=1}^{n} y_i^*(x)x_i =$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^*(J_K x)x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i^*(x)x_i = \sum_{i=1}^{n} \big(J_K^* x_i^*\big)(x)x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i^*(x)x_i.$$

Teiselt poolt aga

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(J_K^* x_i^* - y_i^*) \otimes x_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{n}(J_K^* x_i^* - y_i^*)(x)x_i = \sum_{i=1}^{n} \big(J_K^* x_i^*\big)(x)x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i^*(x)x_i.$$

Eelneva põhjal saame, et

$$\|TJ_K - A\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}(J_K^* x_i^* - y_i^*) \otimes x_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|(J_K^* x_i^* - y_i^*) \otimes x_i\| =$$
$$\sum_{i=1}^{n} \|J_K^* x_i^* - y_i^*\|\|x_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \frac{\varepsilon}{2\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et iga $x \in K$ korral

$$\|Tx - x\| \leq \|TJ_K - A\| + \|A - J_K\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

# 5 Aproksimatsiooniomaduse seni lahendamata probleem

Grothendiecki teoreemi (vt. teoreemi 4) kohaselt on Banachi ruumil $X$ aproksimatsiooniomadus, kui $\overline{\mathcal{F}(Y,X)} = \mathcal{K}(Y,X)$ iga Banachi ruumi $Y$ korral. Tekib küsimus, kas kõikide Banachi ruumide $Y$ asemel saab vaadelda ka mingit kindlat Banachi ruumide klassi. Tuleb välja, et saab (vt. teoreemi 9). Selle tõestuseks toome kõigepealt sisse ideaali mõiste. See peatükk tugineb artiklile [LNO].

**Definitsioon.** Olgu $E$ Banachi ruum. Siis alamruumi $F \subset E$ nimetatakse *ideaaliks* ruumis $E$, kui leidub projektor $P \in \mathcal{L}(E^*)$ normiga $\|P\| = 1$ nii, et

$$\ker P = F^{\perp},$$

kus

$$\ker P := \{f \in E^* \colon P(f) = 0\}$$

ja

$$F^{\perp} := \{f \in E^* \colon f|_F = 0\}.$$

**Näide 1.** Olgu $E$ Banachi ruum. Siis $E$ on ideaal ruumis $E$.

*Põhjendus.* Olgu $P := I_{E^*} \colon E^* \to E^*$. Siis $\ker P = \{0\}$ ja seega iga funktsionaali $f \in E^*$ korral

$$f \in E^{\perp} \Leftrightarrow f|_E = 0 \Leftrightarrow f = 0 \Leftrightarrow f \in \ker P.$$

$\square$

**Näide 2.** Olgu $F = \{(x,0) \colon x \in \mathbb{R}\}$. Siis $F$ on ideaal ruumis $E = \mathbb{R}^2$.

*Põhjendus.* Teame, et $(\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}^2$, s.t. iga funktsionaal $f \in (\mathbb{R}^2)^*$ esitub kujul $f = (a,b)$, kus $a, b \in \mathbb{R}$, kusjuures $f(x,y) = (a,b)(x,y) = ax + by$ iga $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ korral (vt. [OO, lk. 163]).

Defineerime operaatori $P \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nii, et $(a,b) \mapsto (a,0)$ iga $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ korral. Sellisel juhul

$$P(P(a,b)) = P(a,0) = (a,0) = P(a,b) \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

ehk $P$ on projektor. Kehtib ka

$$\|P\| = \sup_{(a,b) \in B_{\mathbb{R}^2}} \|P(a,b)\| = \sup_{(a,b) \in B_{\mathbb{R}^2}} \|(a,0)| = 1.$$

Tõestame, et $\ker P = \{(0,b) \colon b \in \mathbb{R}\}$. Tõepoolest, olgu $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, siis

$$(a,b) \in \ker P \Leftrightarrow P(a,b) = 0 \Leftrightarrow (a,0) = 0 \Leftrightarrow a = 0,$$

mis näitabki, et $\ker P$ koosneb parajasti elementidest $(0, b),\ b \in \mathbb{R}$. Lõpetuseks peame veenduma, et

$$F^{\perp} = \{f \in \mathbb{R}^2 \colon f(x, 0) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}\} = \{(0, b) \colon b \in \mathbb{R}\} = \ker P.$$

Olgu $f = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Siis

$$f(x, 0) = (a, b)(x, 0) = ax = 0 \Leftrightarrow a = 0\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Oleme näidanud, et $f \in F^{\perp} \Leftrightarrow f = (0, b),\ b \in \mathbb{R}$. □

**Näide 3.** Leidub separaabel Banachi ruum $X$ nii, et $\mathcal{K}(X, X)$ ei ole ideaal ruumis $\mathcal{L}(X, X)$ (vt. [LO, lk. 92]).

**Teoreem 8** (vt. [LNO, lk. 339])**.** *Olgu $X$ Banachi ruum. Järgmised väited on samaväärsed.*

(i) *Ruumil $X$ on aproksimatsiooniomadus.*

(ii) *$\mathcal{F}(Y, X)$ on ideaal ruumis $\mathcal{K}(Y, X)$ iga Banachi ruumi $Y$ korral.*

(iii) *$\mathcal{F}(Y, X)$ on ideaal ruumis $\mathcal{K}(Y, X)$ iga kinnise alamruumi $Y \subset c_0$ korral.*

(iv) *$\mathcal{F}(Y, X)$ on ideaal ruumis $\mathcal{K}(Y, X)$ iga refleksiivse separaabli Banachi ruumi $Y$ korral.*

**Lause 5.** *Olgu $E$ Banachi ruum. Alamruum $F \subset E$ on ideaal ruumis $E$ parajasti siis, kui $\overline{F}$ on ideaal ruumis $E$.*

*Tõestus.* Olgu $P \colon E^* \to E^*$, $\|P\| = 1$, projektor ideaali definitsioonist. Lause tõestuseks piisab näidata, et $\overline{F}^{\perp} = F^{\perp}$, sest sellisel juhul esmalt $\ker P = F^{\perp} = \overline{F}^{\perp}$ (tarvilikkus) ja teisalt $\ker P = \overline{F}^{\perp} = F^{\perp}$ (piisavus).

Näitame, et $F^{\perp} \subset \overline{F}^{\perp}$. Olgu $f \in F^{\perp}$. Siis $f(x) = 0$ iga $x \in F$ korral. Olgu $x \in \overline{F}$. Siis leidub $y_n \in F$ nii, et $y_n \to x$. Kuna $f \in F^{\perp} \subset E^*$, siis $0 = f(y_n) \to f(x)$, millest järeldub, et $f(x) = 0$.

Näitame, et $\overline{F}^{\perp} \subset F^{\perp}$. Olgu $f \in \overline{F}^{\perp}$. Siis $f(x) = 0$ iga $x \in \overline{F}$ korral. Järelikult $f(x) = 0$ iga $x \in F$ korral, sest $F \subset \overline{F}$. □

Teoreemist 8 ja lausest 5 järeldub järgmine teoreem.

**Teoreem 9.** *Olgu $X$ Banachi ruum. Järgmised väited on samaväärsed.*

(1) *Ruumil $X$ on aproksimatsiooniomadus.*

(2) *$\overline{\mathcal{F}(Y, X)} = \mathcal{K}(Y, X)$ iga Banachi ruumi $Y$ korral.*

(3) *$\overline{\mathcal{F}(Y, X)} = \mathcal{K}(Y, X)$ iga kinnise alamruumi $Y \subset c_0$ korral.*

(4) $\overline{\mathcal{F}(Y,X)} = \mathcal{K}(Y,X)$ *iga refleksiivse separaabli Banachi ruumi $Y$ korral.*

*Tõestus.* Samaväärsuse (1) $\Leftrightarrow$ (2) tõestasime ära teoreemis 4. Implikatsioonid (2) $\Rightarrow$ (3) ja (2) $\Rightarrow$ (4) on ilmsed.

(3) $\Rightarrow$ (1). Olgu $Y \subset c_0$ kinnine alamruum. Kuna $\overline{\mathcal{F}(Y,X)} = \mathcal{K}(Y,X)$, siis on $\overline{\mathcal{F}(Y,X)}$ ideaal ruumis $\mathcal{K}(Y,X)$ (vt. näidet 1). Seega on lause 5 kohaselt $\mathcal{F}(Y,X)$ ideaal ruumis $\mathcal{K}(Y,X)$. Teoreemi 8 implikatsiooni (iii)$\Rightarrow$ (i) põhjal on ruumil $X$ aproksimatsiooniomadus.

(4) $\Rightarrow$ (1). Järeldub analoogiliselt lausest 5 ja teoreemi 8 implikatsioonist (iv)$\Rightarrow$ (i). $\square$

*Märkus.* Implikatsioon (4) $\Rightarrow$ (1) on meil sisuliselt tõestatud peatükis 4 teoreemi 4 piisavuse tõestuse käigus. Tõepoolest, seal tõestuses kasutasime mitte kõiki Banachi ruume, vaid üksnes ruume $Y = X_K$, kus $K \subset X$ on kinnine absoluutselt kumer alamhulk. Kuid faktorisatsioonilemma (vt. lemma 4) põhjal on ruumid $X_K$ separaablid ja refleksiivsed.

Aproksimatsiooniomaduse juures on palju seni lahendamata probleeme. Alltoodud kuulus vana probeleem on vaid üks neist.

**Probleem** (vt. nt. [LT1, 1.e.9])**.** Olgu $X$ Banachi ruum. Kas tingimusest $\overline{\mathcal{F}(X)} = \mathcal{K}(X)$ järeldub, et ruumil $X$ on aproksimatsiooniomadus?

# Kirjandus


[C] P. G. Casazza, *Approximation properties*, Handbook of the Geometry of Banach spaces, Vol. 1, Elsevier, Amsterdam, 2001, lk. 271–316.

[DFJP] W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson, A. Pełczyński, *Factoring weakly compact operators*, J. Funct. Anal. **17** (1974), 311–327.

[E] P. Enflo, *A counterexample to the approximation property in Banach spaces*, Acta Math. **130** (1973), 309–317.

[FHHMPZ] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, J. Pelant, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Canad. Math. Soc. Books in Mathematics, Springer, New York, 2001.

[Gro] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955).

[LNO] Å. Lima, O. Nygaard, E. Oja, *Isometric factorization of weakly compact operators and the approximation property*, Israel J. Math. **119** (2000), 325–348.

[LO] Å. Lima, E. Oja, *Ideals of compact operators*, J. Aust. Math. Soc. **77** (2004), 91–110.

[LT1] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri *Classical Banach Spaces I* . Springer, New York, 1996.

[S] R. D. Mauldin, *The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Café*, Birkhäuser, Boston, 1981.

[Maz] S. Mazur, *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*, Studia Math. **4** (1933), 70–84.

[Meg] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 183, Springer–Verlag, New York, 1998.

[M] K. Mikkor, *Nõrgalt kompaktsete operaatorite faktoriseerimine*, magistritöö, Tartu Ülikool, matemaatika-informaatikateaduskond, 2002.

[O] E. Oja, *On bounded approximation properties of Banach spaces*, Banach Centre Publications **91** (2010), 219–231.

[OO] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, Tartu 1991.

[Õ] M. Õunap, *Kompaktsed operaatorid Banachi ruumides*, bakalaureusetöö, Tartu Ülikool, matemaatika-informaatikateaduskond, 2007.

**Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Anett Vähi (sünnikuupäev: 18.07.1995),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose "Aproksimatsiooniomaduse iseloomustus kompaktsete operaatorite ruumi kaudu", mille juhendajad on Eve Oja ja Indrek Zolk,

    1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

    1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **11.05.2017**