TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

E. TIIT

MATEMAATILISE STATISTIKA TABELID

I

TARTU 1971

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Matemaatilise statistika ja
programmeerimise kateeder

E. TIIT

MATEMAATILISE STATISTIKA TABELID

I

Õppevahend

TARTU 1971

Sissejuhatus.

Käesolev matemaatilise statistika tabelite kogu on üks esimesi eesti keeles (üksikuid tabeleid on avaldatud vaid käsiraamatute ning õpikute lisades, vt. [1-11].

Et ka eestikeelsest statistikaalasest kirjandusest on tõsine nappus, siis on tabelitele lisatud kasutamisjuhendeid ja näpunäiteid rohkem, kui see tavaliselt tabelikogude puhul kombeks on, samuti on lahendatud näiteülesandeid kõige levinumate ülesandetüüpide kohta.

Tabelid on püütud valida selliselt, et neist oleks kasu võimalikult laiale statistika kasutajate ringkonnale. Seetõttu paisus tabelite kogumaht üsnagi suureks, kuigi on piirdutud üksnes kõige klassikalisemate jaotustega: esitatud on binomiaal-, Poissoni ja normaaljaotuse ning neist tuletatud jaotuste tabelid.

Lisaks tabelitele ja nendega seotud teoreetilisele osale ning näidetele on lühidalt esitatud ka tähtsamad reeglid ligikaudsete arvudega arvutamiseks, ümardamiseks, samuti interpoleerimiseks (kahe tabelis antud suuruse "vahel" asuva väärtuse leidmiseks).

Kuna tabelid pärinevad väga mitmetest erinevate autorite erinevatel aegadel kirjutatud ja erinevates keeltes avaldatud teostest, siis on nende välisilme ning esituslaad üsnagi kirju. Tabelites orienteerumise hõlbustamiseks on aga kasutatud ühtset sümboolikat, mis mõnevõrra erineb kõigi algallikate originaalsümboolikast.

Tabelite kasutamise hõlbustamiseks on toodud ära ka mõned "liigsed" tabelid. Nii näiteks on normaaljaotuse tabelid 3.2A , 3.3 ja 3.4 rangelt rääkides "liigsed", sest kõigi nende asemel on võimalik kasutada ainuüksi tabelit 3.2B, arvestades tabeli 3.2A puhul, et $F(x) = P(X<x) = P(X> -x) = 1-F(-x)$; tabeli 3.3 puhul, et $P(|X|>x)=P(X>x)+P(X<-x) = 2P(X>x) = 2 - 2F(x)$, ning tabeli 3.4 kasutamise asemel lugeda tabelis 3.2B argumendiks $F(x)$ ning funktsiooniks (otsitavaks) x.

Iga tabeli eel on lühidalt iseloomustatud neid suurusi, mida vastavas tabelis esitatakse, samuti on näidatud, mis laadi probleemide lahendamiseks neid kasutatakse, ning toodud vajalikud valemid. Seejärel on lahendatud ka arvulisi näiteülesandeid.

Kasutan võimalust avaldada tänu kolleegidele T.Mölsile, K. Soonetsile, S.Veldrele, E.Tammele ja eriti Tiina Veldrele käsikirjaga tutvumise ning sisukate ettepanekute eest , samuti T.Prikole, T.Kollole, L.Mägile ja J.Torokoffile suure abi eest käsikirja vormistamisel.

Tabelites kasutatavad põhimõisted ja sümboolika.

Juhusliku suuruse üldiseks tähiseks on X. Vajaduse korral kasutatakse vahel ka mõningaid teisi suuri tähti tähestiku lõpust (Y,Z,W) või lisatakse indekseid ($X_0, X_1, \ldots$). Üldisemalt tuntud jaotustele omistame eraldi sümbolid:

normaaljaotus (keskväärtus m, standardhälve σ) - $N(m,\sigma)$,

Poissoni jaotus (keskväärtus λ) - $P(\lambda)$,

binomiaaljaotus (katsete arv n, tõenäosus p) - $B(n,p)$,

χ^2 -jaotus vabadusastmete arvuga f - χ^2_f,

t-jaotus vabadusastmete arvuga f - t_f,

F-jaotus vabadusastmete arvudega f_1, f_2 - F_{f_1,f_2}.

Tõsiasja, et juhuslik suurus on mingi ülalmärgitud jaotusega, tähistame märgi $\sim$ abil, näiteks: $X \sim N(m,\sigma)$; $X \sim B(n,p)$ või $X \sim \chi^2_f$.

Juhusliku suuruse X väärtuste seast tehtud väljavõtte mahu tähistame tähega n, väljavõtte üksikväärtused on $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Peale selle kasutame veel järgmisi tähistusi väljavõtte statistikute, s.t. väljavõttest sõltuvate juhuslike suuruste jaoks:

väljavõtte keskväärtus (aritmeetiline keskmine)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

väljavõtte dispersioon ja standardhälve

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2, \quad \tilde{\sigma}=\sqrt{\tilde{\sigma}^2},$$

dispersiooni nihutamata hinnang $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, selle põhjal arvutatud standardhälve $s=\sqrt{s^2}$.

Kui vaadeldakse väljavõtteid mitmest erinevast juhuslikust suurusest, siis on nende mahud n_1 n_2, ... , n_k. Erinevate juhuslike suuruste arv (rühmade arv) on tähistatud tähega k. Kui $n_1 = n_2 (= \ldots = n_k)$, siis tähistame $n_i=n$ ($i= 1,2,\ldots,k$), $n_1+ n_2$ ($+ \ldots + n_k$) $= N$.

Vabadusastmete arvu tähistame sümboliga f (ka f_1 ja f_2). Enamasti (kui pole midagi muud märgitud) on $f=n-1$ ($f_i=n_i-1$).

Binomiaal- ja Poissoni jaotuse vaatlemisel tuleb meil fikseerida mingi sündmus ning loendada selle esinemiste arvu. Selle sündmuse tähistame tähega A, esinemiste arv on aga juhuslik suurus X, mille konkreetse väärtuse tähistame tähega x (antud juhul x on 0 või naturaalarv).

Juhusliku suuruse X suvalise konkreetse väärtuse tähistame alati tähega x.

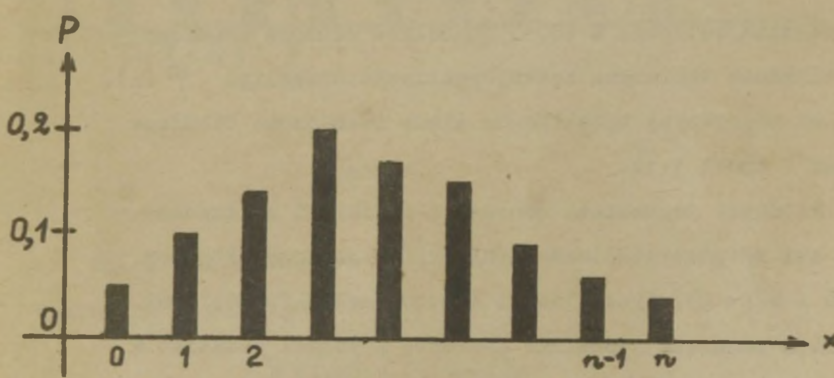
Mingi sündmuse A esinemise tõenäosuse tähistame sümboliga P(A). Nii tähendab sümbol $P(X = x)$ tõenäosust selleks, et juhuslik suurus X omandab väärtuse x; $P(X< x)$ tõenäosust selleks, et juhusliku suuruse X väärtus on väiksem kui x; $P(X\geq a)$, et juhusliku suuruse X väärtus on suurem või võrdne arvuga a jne.

Konkreetseid, juhusest sõltumatuid arve tähistame väiketähtedega. Ka siis, kui x tähistab juhusliku suuruse mingit väärtust, on tema arvuline väärtus fikseeritud, juhusest sõltumatu. Juhuslik on vaid see, kas katsetulemusena just see väärtus esineb.

Diskreetsetel juhuslikel suurustel (binomiaaljaotus, Poissoni jaotus) on tabuleeritud jaotused, s.t. tõenäosused selleks, et juhuslik suurus omandab väärtuse 1,2,...

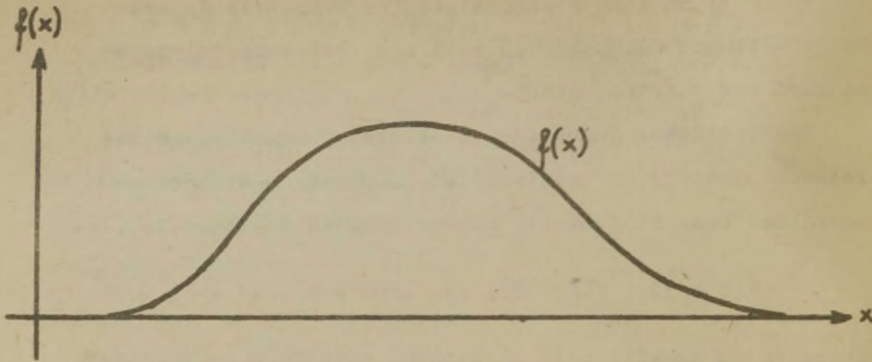
$$P(X = 1),\quad P(X = 2),\ \ldots\ , P(X = x), \ldots\ .$$

Jaotused on graafiliselt esitatavad näiteks tulpdiagrammina:



Joonis 1.

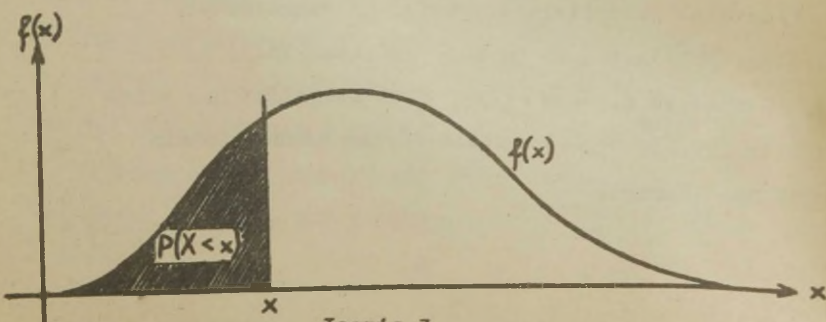
Pidevatel juhuslikel suurustel (normaaljaotus, t-jaotus, χ^2-jaotus, F- jaotus) defineeritakse vastavalt tõenäosuse tihedus f(x), mida kirjeldab nn. tiheduskõver (vt. joonis 2); selle kõvera alune pindala võrdub ühe ühikuga.



Joonis 2.

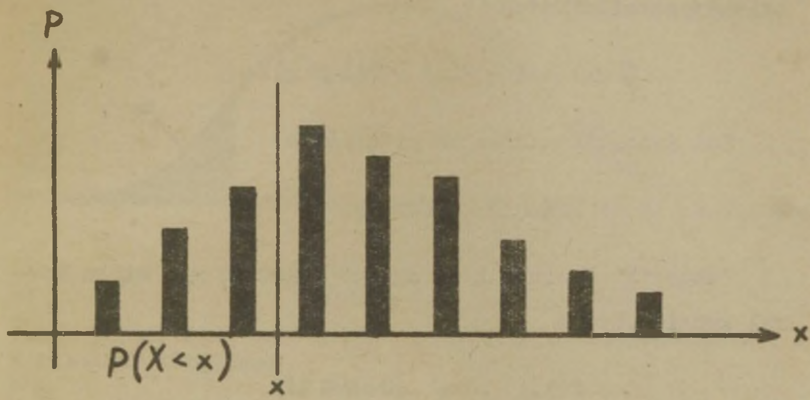
Normaaljaotusega N (0,1) juhusliku suuruse tõenäosu - se tiheduse tähistame kokkuleppeliselt sümboliga $\varphi(x)$. See on käesolevas tabelikogus ainus tõenäosuse tiheduse tabel (tabel 3.1).

Mitmetel juhuslikel suurustel (niihästi diskreetse - tel kui ka pidevatel) on tabuleeritud jaotusfunktsioon $F(x) = P(X< x)$. Graafiliselt kujutab selle funktsiooni väärtus pidevate juhuslike suuruste X korral punktist x vasakule jäävat tõenäosuse tiheduse kõvera alust pindala(vt. viirutatud pindala joonisel 3).



Joonis 3.

Diskreetse juhusliku suuruse korral on jaotusfunktsiooni väärtuseks antud punktist vasakule jäävate tulpade pikkuste summa .



Joonis 4.

Tuleb aga märkida, et kui pideva juhusliku suuruse korral on alati õige võrdus

$$P\ (X<x) = P\ (X \leq x),$$

siis diskreetse juhusliku suuruse korral selline võrdus ei kehti mitte alati ning jaotusfunktsiooni tabelite korral tuleb hoolega jälgida, kas on tabuleeritud tõenäosused

$$P(X< x) = \sum_{x_i=0}^{x-1} P(X=x_i)$$

või

$$P(X \leq x) = \sum_{x_i=0}^{x} P(X=x_i),$$

kus x on mingi naturaalarv.

Samuti leidub tabeleid (vt.tabel 1.4), kus on esitatud mitte juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon, vaid nn. täiendjaotusfunktsioon

$$g(x) = 1 - F(x) = P(X \geq x).$$

Kui juhuslik suurus on pidev, siis

$$P(X \geq x) = P(X > x).$$

Juhusliku suuruse X niisugust väärtust x_α, mille korral kehtib võrdus

$$F(x_\alpha) = \alpha, \quad (0 < \alpha < 1)$$

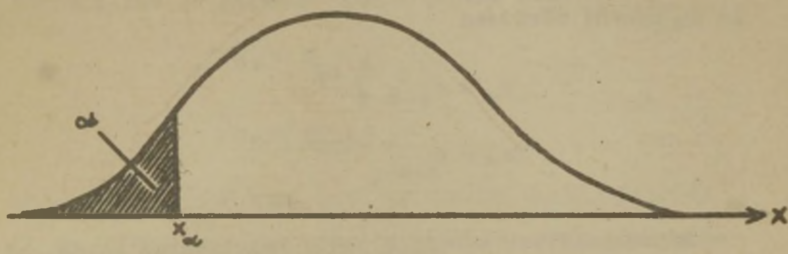
(vt. joon.5) ehk

$$P(X < x_\alpha) = \alpha,$$

nimetatakse α-kvantiiliks. Sageli väljendatakse α ka protsentides, sel korral kõneldakse protsentiilidest. Kvantiil on jaotusfunktsiooni pöördfunktsioon.

Mitmetes tabelites on argumendina antud (tabeli peas) α väärtused (jaotusfunktsiooni väärtused), ning neile vastavad funktsioonid (tabelis eneses) on kvantiilid.

Kui meid huvitab mingi suvalise x korral jaotus-funktsiooni F(x) väärtus, võime selle leida lineaarse interpolatsiooni teel väärtuste α_1 ja α_2 abil, kui



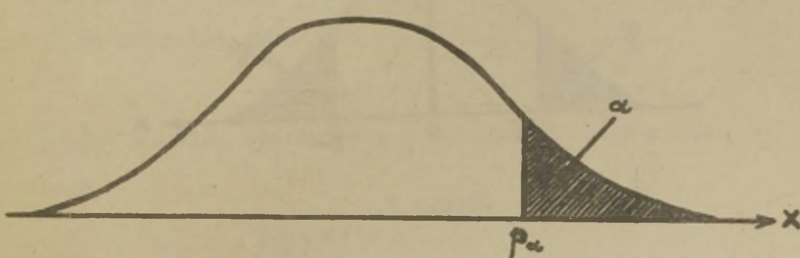
Joonis 5.

x rahuldab tingimust

$$x_{\alpha_1} < x < x_{\alpha_2},$$

(vt. lk. 17-18), kus x_{α_1} ja x_{α_2} on α_1- ja α_2- kvantiilid.

Mõningates tabelites (t, χ^2 jne.) aga kasutatakse



Joonis 6.

mitte kvantiile, vaid selliseid väärtusi p_α, mis rahuldavad tingimust

$$P(X > p_\alpha) = \alpha$$

(vt. joon. 6) ehk

$$1-F(p_\alpha) = \alpha; \quad F(p_\alpha) = 1-\alpha.$$

Nimetame neid täiendkvantiilideks, sest suurusi p_α ja x_α seovad võrdused

$$p_\alpha = x_{1-\alpha},$$

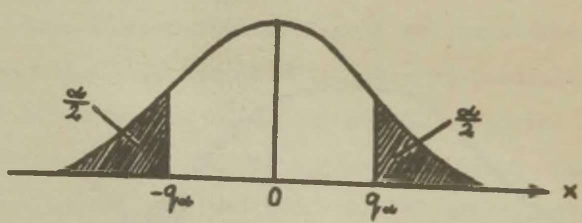
$$x_\alpha = p_{1-\alpha}.$$

Sümmeetriliste tabelite puhul kasutatakse ka nn. hälbeid q_α (vastavalt antud tõenäosusele α; vt. joon. 7):

$$P(|X| > q_\alpha) = \alpha,$$

kui

$$P(X > q_\alpha) = P(X < -q_\alpha) = \frac{\alpha}{2}.$$



Joonis 7.

Ilmselt seob antud tõenäosusega hälvet täiendkvantiiliga seos

$$q_\alpha = p_{\frac{\alpha}{2}},$$

järelikult siis ka

$$p_\alpha = q_{2\alpha}.$$

Kvantiilide ja hälvete vahel kehtib seos

$$q_\alpha = x_{1-\frac{\alpha}{2}};$$

$$x_\alpha = q_{2-2\alpha}.$$

Mitmed tabelid (1.6; 2.4) on toodud usalduspiiride jaoks. Klassikalised jaotused (N,P,B) sõltuvad parameetritest, mille väärtused ei sõltu juhusest, kuid on tundmatud. Väljavõtte põhjal määratakse parameetrile θ kahepoolsed usalduspiirid $\underline{\theta}$, $\bar{\theta}$ vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha$, nii et

$$P(\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}) = 1-\alpha,$$

s.t. juhuslik vahemik $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ katab parameetri θ õiget väärtust tõenäosusega $1-\alpha$.

Ühepoolne ülemine usalduspiir $\bar{\bar{\theta}}$ usaldusnivoo $1-\alpha$ puhul on määratud seosega

$$P(\theta \leq \bar{\bar{\theta}}) = 1-\alpha,$$

ühepoolne alumine usalduspiir $\underline{\underline{\theta}}$ usaldusnivoo $1-\alpha$ puhul - seosega

$$P(\underline{\underline{\theta}} \leq \theta) = 1-\alpha.$$

Mõned tabelid annavad ka kriitilise piirkonna teatava statistilise hüpoteesi kontrollimiseks.

Olgu näiteks tarvis tõestada hüpotees teatava parameetri θ kohta: $\theta \neq \theta_0$ (näiteks kahe normaaljaotuse keskväärtuste vahe $m_1 - m_2 \neq 0$, s.t. keskväärtused on erinevad). Siis saame väljavõtte teatavate statistikute (näiteks väljavõtte keskväärtuste vahe $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$) väärtuste hulgas eristada teatava nn. kriitilise piirkonna, milles me hüpoteesi $\theta \neq \theta_0$ võime vastu võtta. Arusaadavalt sõltub see piirkond sellest, millise kindlusega me tahame hüpoteesi $\theta \neq \theta_0$ tõestada. Selles väites eksimise maksimaalset lubatud tõenäosust nimetatakse vaadeldava kriteeriumi olulisuse nivooks ning tähistatakse sümboliga α. Enamasti kasutatakse α väärtusi 0,05 ja 0,01 .

Arvutamisest ligikaudsete arvudega ning tabelite kasutamisest.

Käesolevas väljaandes puudutame vaid mõningaid kõige üldisemaid põhitõdesid ligikaudsete arvudega arvutamisest, vajaliku täpsuse valikust,ümardamisest ning interpoleerimisest.

Täpsemate juhendite saamiseks soovitame pöörduda spetsiaalsete käsiraamatute ning konspektide poole, mis ka eesti keeles on ilmunud ([12 - 15]).

1. Ümardamine.

Tabelites on antud arvud sageli liiga suure kohtade arvuga, samuti on näiteks elektronarvutist saadud arvutustulemus tihti ülearu "täpne", s.t. kümnendkohtade arv on edasiste arvutuste teostamiseks ülearu suur (seejuures mõnikord viimased numbrid ei tarvitsegi õiged olla).

Vajaliku kohtade arvu saamiseks tuleb sageli arve ümardada. Ümardamise juures tuleb silmas pidada järgmisi reegleid:

1) Kui viimasele ümardamisel säilivale kohale järgneb 0,1,2,3 või 4, siis viimane koht ei muutu.

2) Kui viimasele ümardamisel säilivale kohale järgneb 6,7,8 või 9, siis suurendatakse viimast kohta ühe võrra.

3) Kui viimasele ümardamisel säilivale kohale järgneb 5 veel vähemalt ühe nullist erineva lisakohaga, siis suurendatakse viimast kohta ühe võrra.

4) Kui viimasele kohale järgneb ümardamisel saadud 5, siis tuleb vaadata, milline oli arv enne eelmist ümardamist (kui võimalik) ja toimida vastavalt reeglitele 1) ning 3).

5) Kui viimasele kohale järgneb 5, kusjuures ei ole teada, milline oli arv enne ümardamist, või on kõik järgmised kohad nullid, siis ümardatakse paarisarvu suunas.

Sellisel viisil toimides ei ületa meil tulemuse viga kunagi poolt viimase koha ühikut.

Näiteid.

$5,6672 \approx 5,667 \approx 5,67 \approx 5,7 \approx 6;$

$37203 \approx 37200 \approx 37000 \approx 40000;$

$1,50001 \approx 1,5000 \approx 1,500 \approx 1,50 \approx 1,5 \approx 2;$

$16,849 \approx 16,85 \approx 16,8 \approx 17 \approx 20;$

$2,5 \approx 2.$

Siinjuures tuleb märkida, et kirjutised

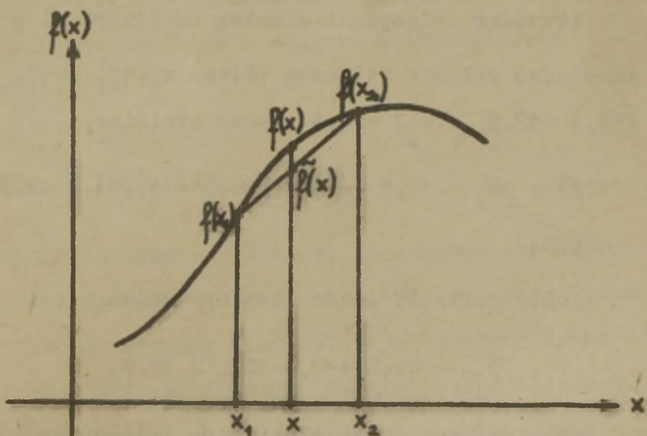
1,5000; 1,500; 1,50 ja 1,5

ei ole samaväärsed. Neist esimene näitab, et tulemuse viga on ülimalt 0,00005; teise, kolmanda ja neljanda puhul on vea ülemmääraks vastavalt 0,0005, 0,005 ja 0,05.

Olgu märgitud, et enamuse statistiliste tabelite puhul on vea ülemmäär $^1/2$ viimase koha ühikut; ainult üksikutes (eriti uuemates) tabelites ulatub viga 1 viimase koha ühikuni.

2. Lineaarne interpolatsioon.

Sageli osutub, et meie käsutuses olevad tabelid ei ole küllalt tihedad: meil oleks tarvis leida funktsiooni f väärtust, mis vastab argumendile x, s.t. suurust f(x), seda aga tabelis ei ole. Küll aga leiduvad tabelis argumendi x mingid naaberväärtused x_1 ja x_2, $x_1 < x < x_2$ ning nendele vastavad funktsiooni väärtused $f(x_1)$ ja $f(x_2)$. Oletades, et uuritav funktsioon muutub ühtlaselt, võime vahepealse väärtuse leida nn. lineaarse interpolatsiooni tulemusel (vt. joon.8).



Joonis 8.

3

Selleks asendame uuritavas vahemikus funktsiooni graafiku punkte $(x_1, f(x_1))$ ja $(x_2, f(x_2))$ ühendava sirglõiguga, millelt on otsitava funktsiooni väärtuse $f(x)$ lähend $\hat{f}(x)$ lihtsalt leitav:

$$\hat{f}(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\left[f(x_2) - f(x_1)\right] . \qquad (1)$$

Näide.

Olgu tehtud $n=50$ katset, mille jooksul sündmus A esines $x=17$ korda. Leida tõenäosuse p 95%-lised usalduspiirid.

Lahendus.

Tabelist 1.68 leiame $x=15$ ja $x=20$ jaoks usalduspiirid:

$$\underline{p}_{15}=17{,}9; \quad \underline{p}_{20}=26{,}4; \quad \bar{p}_{15}=44{,}6; \quad \bar{p}_{20}=54{,}8.$$

Arvutame kõigepealt alumise usalduspiiri $\underline{p}_{17}$, kasutades valemit (1) ning võttes $x_1=15$, $x=17$, $x_2=20$, $f(x_1)=17{,}9$, $f(x_2)=26{,}4$. Saame avaldise

$$f(x) = \underline{p}_{17} \doteq 17{,}9 + \frac{17-15}{20-15}\left[26{,}4 - 17{,}9\right] = 17{,}9+0{,}4\cdot 8{,}5 = $$
$$=21{,}3.$$

Analoogiliselt saame ülemise usalduspiiri

$$\bar{p}_{17} = 44{,}6 + 0{,}4\cdot 10{,}2 = 48{,}7.$$

Märgime, et interpoleerimise tulemus ei ole kunagi täpsem kui tabelis antud tulemus (seega ei oleks õige kirjutada viimast vastust kujul 48,68). Küll aga võib mõnikord interpoleerimisel täpsus väheneda (vt. [13], [14]).

3. Arvutamisel vajalik täpsus.

Sageli tekib arvutamisel probleem, millise täpsusega on otstarbekas arvutusi teostada.

Määravaks on siin lähteandmete täpsus. Reeglina ei saa arvutustulemuste täpsus olla suurem lähteandmete täpsusest. On siiski mõningaid erandeid. Näiteks aritmeetiline keskmine $\bar{x}$ võib olla täpsem kui iga üksikvaatluse tulemus, kusjuures vaatluste arvu suurenedes täpsus suureneb (kui ei ole tehtud süstemaatilist viga). Üldiselt võib aritmeetilise keskmise veaks lugeda $\frac{1}{\sqrt{n}}$-kordset üksikvaatluse tulemuste viga. Järgnevas vaatleme arvutusvigade levimist mõningate aritmeetiliste tehete puhul.

4. Summa ja vahe täpsus.

Ligikaudsete arvude liitmisel ja lahutamisel tuleb silmas pidada liidetavate vigu. Summa ja vahe viga võib olla (suhteliselt väikese liidetavate arvu korral) vähemalt sama suur kui ebatäpseima (suurima veaga) liidetava viga. Seetõttu on oluline leida üles suurima veaga liidetav.

Kui kõik liidetavad sisaldavad koma, siis on suurim viga sellel liidetaval, milles komale järgnevate kümnendkohtade arv on kõige väiksem. Et ka vastuse viga on sel juhul sama suurusjärku, tuleb vastuses säilitada sama palju kümnendkohti, kui on väikseima kümnendkohtade arvuga liidetavas.

Näide.

$$3{,}74 + 0{,}827 - 1{,}7 + 3{,}9583 + 0{,}5 =$$
$$= 3{,}74 + 0{,}83 - 1{,}7 + 3{,}96 + 0{,}5 =$$
$$= 7{,}33 = 7{,}3 \; .$$

Arvudes 1,7 ja 0,5 on ainult üks kümnendkoht, seega säilib ka vastuses üksainus õige kümnendkoht. Et liigseid arvutusi vältida, ümardame enne tehete teostamist teisi arve, jättes neis alles ühe lisakoha, et vältida täpsuse kadu arvutuste käigus. Ka arvutuste käigus tabelitest võetavad arvud tuleb (võimaluse korral) valida nii, et neis sisalduks üks "liigne" kümnendkoht. Vajaduse korral tuleb selleks kasutada ümardamist või interpoleerimist. Lõpptulemuse ümardame nii, et säiliksid ainult õiged kohad.

Kui aga mõnes arvus koma puudub, tuleb selgeks teha, kas tegemist on loendamise tulemusena saadud täpse arvuga (näiteks päevade arv nädalas) või ümardamise või mõõtmise tulemusena saadud arvuga, mis sisaldab viga. Viimasel juhul arvestame, et viga ei ületa poolt viimase nullist erineva koha ühikut. Nii sisaldab inimese pikkus 175 cm tõenäoliselt mõõtmisviga kuni ½ cm, elanike arv linnas 87000 aga on antud veaga ± 500 elanikku.

Näide.

Olgu antud rea asulate elanike arvud:

87000; 300; 25; 4800; 87; 37200.

Leida elanike summaarne arv. Arvutame:

$$87000 + 300 + 25 + 4800 + 87 + 37200 \approx$$
$$\approx 87000 + 300 + 4800 + 100 + 37200 =$$
$$= 129400 \approx 129000.$$

Ümardades liidetavad sajalisteni, saame muuhulgas

$$25 \approx 0; \quad 87 \approx 100.$$

Märgime veel, et toodud reeglid on õiged üksnes liidetavate väikese arvu korral; liidetavate suurema arvu puhul tuleb vea leidmiseks liita üksikliidetavate vead (vt. [4,15]).

5. Korrutise ja jagatise täpsus.

Ligikaudsete arvude korrutise ja jagatise täpsuse juures on määrav õigete tüvikohtade arv.

Tüvikohtadeks nimetatakse arvu õigeid numbreid alates esimesest nullist erinevast numbrist ning lugedes tüvikohtade hulka ainult need lõpus asuvad nullid, mis ei ole saadud ümardamise tulemusena.

Arvul 0,037 on 2 tüvikohta (3 ja 7), kuna arvule 3 eelnevad numbrid näitavad ainult arvu suurusjärku:

$$0,037 = 3,7 \cdot 10^{-2}.$$

Samuti on 2 tüvikohta arvul 83000, kus viimased kolm nulli on saadud ümardamise teel ning näitavad arvu suurusjärku:

$$83000 = 8{,}3 \cdot 10^4.$$

Arvul 402,530 on aga 6 tüvikohta, sest kümnendmurru lõppu lisatud null loetakse tüvikohaks. See null näitab, et viga on väiksem kui $^1/2$ (või 1) viimase koha ühikut, seega antud näites on viga väiksem kui 0,0005 (või 0,001).

Korrutamisel ja jagamisel tuleb säilitada ainult nii palju tüvikohti, kui on väikseima tüvikohtade arvuga teguril (erandiks on jälle täpsed arvud, sealhulgas täisarvud, mille tüvikohtade arvu võime lugeda kuitahes suureks). Siit järeldub, et tabelitest on sobiv valida arvud niisuguse täpsusega, et tüvikohtade arv ületaks ühe võrra väikseima täpsusega teguri tüvikohtade arvu.

Näide.

Olgu tarvis leida korrutis

$$2 \cdot 3{,}7 \cdot 0{,}4276 \cdot 38000.$$

Et arv 2 on täpne ning arvudes 3,7 ja 38000 on 2 tüvikohta, siis võime ka tulemuse saada 2 tüvikohaga. Arvutamisel saame

$$2 \cdot 3{,}7 = 7{,}4$$

$$7{,}4 \cdot 0{,}428 = 3{,}17$$

$$3{,}17 \cdot 38000 = 120400 \approx 120000,$$

I . BINOMIAALJAOTUS.

§1. Binomiaalne juhuslik suurus

1. Definitsioon.

Olgu katsetel kaks võimalikku tulemust A ja B, kusjuures sündmuse A esinemise tõenäosus olgu p, sündmuse B esinemise tõenäosus q (q=1-p). Teostatakse n sõltumatust katsest koosnev katseseeria. Selle seeria vältel võib sündmus A esineda 0,1, ... , n korda, sealjuures on esinemiste arv juhuslik.

> Sündmuse A esinemiste arvu X n sõltumatust katsest koosneva seeria vältel nimetatakse binomiaalseks juhuslikuks suuruseks.

Asjaolu, et juhuslik suurus X on binomiaaljaotusega, märgime sümboolselt

$$X \sim B(n,p).$$

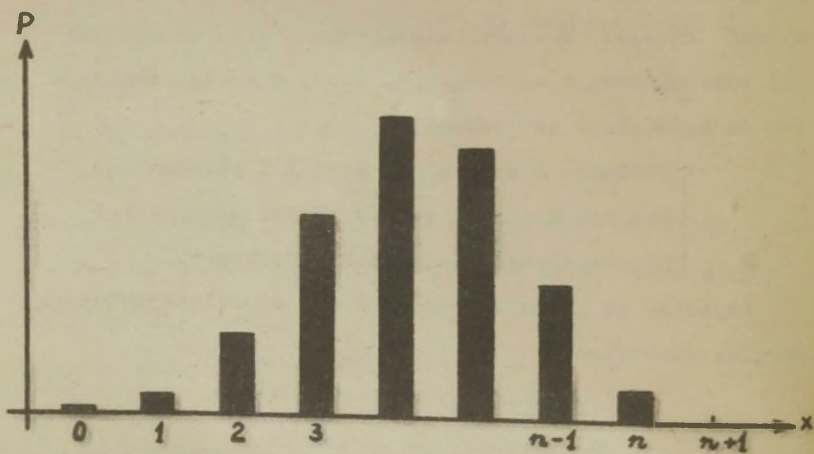
Katsete arv n ja sündmuse A esinemise tõenäosus p on binomiaaljaotuse parameetrid. Praktikas väljendatakse sageli tõenäosus p protsentides (A toimus 100·p %-dil juhtudest).

2. Binomiaaljaotuse valem.

Binomiaalset juhuslikku suurust X iseloomustab jaotus, s.t. väärtuse x (katsetulemuse A esinemise arvu) tõenäosus

$$P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x} ,$$

kus x võib omandada ainult täisarvulisi väärtusi, x=0,1,2, ... , n (vt. joonis 1.1). Kuna juhuslik suurus X omandab alati mingi väärtuse (katsetulemus esineb mingi arv kordi), siis kehtib seos



Joonis 1.1.

$$\sum_{x=0}^{n} P(X = x) = \sum_{x=0}^{n} C_n^x p^x q^{n-x} = 1,$$

kus binoomkordaja $C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ (vt. tabeleid 1.1 ja 1.2).

3. Binomiaaljaotuse arvulised karakteristikud.

Juhusliku suuruse olulisemateks arvulisteks karakteristikuteks on tema keskväärtus EX ja hajuvuse iseloomustajad : dispersioon DX ning ruutjuur sellest - standard - hälve $\sqrt{DX}$. Binomiaaljaotuse puhul avalduvad need karakteristikud järgmiselt:

$$EX = np;$$

$$DX = npq;$$

$$\sqrt{DX} = \sqrt{npq}.$$

4. Binomiaaljaotuse piirjaotused.

Katsete arvu n piiramatul suurenemisel läheneb binomiaalne juhuslik suurus normaalsele juhuslikule suurusele, kusjuures $np \to m$, $\sqrt{npq} \to \sigma$ (vt. III ptk). Seetõttu lähendatakse praktilises töös binomiaalseid juhuslikke suurusi sageli normaalsetega, kui katsete arv n on küllalt suur. Siinjuures tuleb märkida, et lähenduse headus sõltub ka tõenäosusest p. Mõned autorid loevad lähendamist võimalikuks, kui $np \geq 5$, mõned - kui $np \geq 10$ (vt. joonis 1.8).

Kui aga katsete arvu n suurenemisel sündmuse A esinemise tõenäosus p väheneb, siis läheneb binomiaalne juhuslik suurus Poissoni juhuslikule suurusele, kusjuures $np \to \lambda$. Seetõttu lähendatakse väikese p väärtuse puhul binomiaalseid juhuslikke suurusi Poissoni juhuslike suurustega, kui katsete arv n on küllalt suur (vt. pt.II).

5. Binomiaaljaotuse kasutamine.

Sageli võib katse või vaatluse tulemused jaotada kahte kategooriasse, mida tinglikult nimetame positiivseks ja negatiivseks. Positiivsete katse (vaatluse) tulemuste all mõistame tavaliselt uurijaile soodsaid, teda huvitavaid katsetulemusi (haigete tervenemine, sportlike tulemuste paranemine jne.), negatiivsete all aga vastupidiseid (haigete olukorra endiseks jäämine, sportlike tulemuste halvenemine jne.).

Positiivsete katsetulemuste esinemiste arv katseseerias on binomiaalne juhuslik suurus. Selletõttu saab katsetulemuste analüüsimisel edukalt kasutada binomiaaljaotuse omadusi ning nende kohta koostatud tabeleid. Nende küsimuste käsitlemisele ongi pühendatud käesolev peatükk.

Tabel 1.1.

Binoomkordajad[1] $C_n^x = C(n,x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}$

N	$C(N,0)$	$C(N,1)$	$C(N,2)$	$C(N,3)$	$C(N,4)$	$C(N,5)$	$C(N,6)$	$C(N,7)$	$C(N,8)$	$C(N,9)$	$C(N,10)$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

[1] Tabel pärineb teosest [16], lk. 467.

Tabel 1.2.

Faktoriaalid[2] n!

N	N!	N	N!	N	N!	N	N!	N	N!
1	1.0000	21	5.1091(19)	41	3.3453(49)	61	5.0758(83)	81	5.7971(120)
2	2.0000	22	1.1240(21)	42	1.4050(51)	62	3.1470(85)	82	4.7536(122)
3	6.0000	23	2.5852(22)	43	6.0415(52)	63	1.9826(87)	83	3.9455(124)
4	2.4000(1)	24	6.2045(23)	44	2.6583(54)	64	1.2689(89)	84	3.3142(126)
5	1.2000(2)	25	1.5511(25)	45	1.1962(56)	65	8.2477(90)	85	2.8171(128)
6	7.2000(2)	26	4.0329(26)	46	5.5026(57)	66	5.4434(92)	86	2.4227(130)
7	5.0400(3)	27	1.0889(28)	47	2.5862(59)	67	3.6471(94)	87	2.1078(132)
8	4.0320(4)	28	3.0489(29)	48	1.2414(61)	68	2.4800(96)	88	1.8548(134)
9	3.6288(5)	29	8.8418(30)	49	6.0828(62)	69	1.7112(98)	89	1.6508(136)
10	3.6288(6)	30	2.6525(32)	50	3.0414(64)	70	1.1979(100)	90	1.4857(138)
11	3.9917(7)	31	8.2228(33)	51	1.5511(66)	71	8.5048(101)	91	1.3520(140)
12	4.7900(8)	32	2.6313(35)	52	8.0658(67)	72	6.1234(103)	92	1.2438(142)
13	6.2270(9)	33	8.6833(36)	53	4.2749(69)	73	4.4701(105)	93	1.1568(144)
14	8.7178(10)	34	2.9523(38)	54	2.3084(71)	74	3.3079(107)	94	1.0874(146)
15	1.3077(12)	35	1.0333(40)	55	1.2696(73)	75	2.4809(109)	95	1.0330(148)
16	2.0923(13)	36	3.7199(41)	56	7.1100(74)	76	1.8855(111)	96	9.9168(149)
17	3.5569(14)	37	1.3764(43)	57	4.0527(76)	77	1.4518(113)	97	9.6193(151)
18	6.4024(15)	38	5.2302(44)	58	2.3506(78)	78	1.1324(115)	98	9.4269(153)
19	1.2165(17)	39	2.0398(46)	59	1.3868(80)	79	8.9462(116)	99	9.3326(155)
20	2.4329(18)	40	8.1592(47)	60	8.3210(81)	80	7.1569(118)	100	9.3326(157)

---

[2] Faktoriaalid on esitatud nn. normaalkujul

$$n! = a \cdot 10^{b} ,$$

kus a rahuldab tingimust

$$1 \leqslant a \leqslant 10.$$

Tabelis on arv a antud nelja kümnendkohaga, selle järel arv b sulgudes.

Tabel pärineb teosest [16] , lk. 467.

Tabel 1.3.

Binomiaalse juhusliku suuruse $X \sim B(n,p)$ jaotus[3]

$$P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x},$$

kus $n = 2, 3, \ldots, 25$;

$p = 0{,}01;\ 0{,}05,\ 0{,}10,\ \ldots,\ 0{,}90$ (vahe 0,10),

$0{,}95;\ 0{,}99;\ q = 1-p$;

$x = 0, 1, \ldots, n$ (vt. joonis 1.2 lk. 38).

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
2	0	980	902	810	640	490	360	250	160	090	040	010	002	0+	0
	1	020	095	180	320	420	480	500	480	420	320	180	095	020	1
	2	0+	002	010	040	090	160	250	360	490	640	810	902	980	2
3	0	970	857	729	512	343	216	125	064	027	008	001	0+	0+	0
	1	029	135	243	384	441	432	375	288	189	096	027	007	0+	1
	2	0+	007	027	096	189	288	375	432	441	384	243	135	029	2
	3	0+	0+	001	008	027	064	125	216	343	512	729	857	970	3
4	0	961	815	656	410	240	130	062	026	008	002	0+	0+	0+	0
	1	039	171	292	410	412	346	250	154	076	026	004	0+	0+	1
	2	001	014	049	154	265	346	375	346	265	154	049	014	001	2
	3	0+	0+	004	026	076	154	250	346	412	410	292	171	039	3
	4	0+	0+	0+	002	008	026	062	130	240	410	656	815	961	4
5	0	951	774	590	328	168	078	031	010	002	0+	0+	0+	0+	0
	1	048	204	328	410	360	259	156	077	028	006	0+	0+	0+	1
	2	001	021	073	205	309	346	312	230	132	051	008	901	0+	2
	3	0+	001	008	051	132	230	312	346	309	205	073	021	001	3
	4	0+	0+	0+	006	028	077	156	259	360	410	328	204	048	4
	5	0+	0+	0+	0+	002	010	031	078	168	328	590	774	951	5
6	0	941	735	531	262	118	047	016	004	001	0+	0+	0+	0+	0
	1	057	232	354	393	303	187	094	037	010	002	0+	0+	0+	1
	2	001	031	098	246	324	311	234	138	060	015	001	0+	0+	2
	3	0+	002	015	082	185	276	312	276	185	082	015	002	0+	3
	4	0+	0+	001	015	060	138	234	311	324	246	098	031	001	4
	5	0+	0+	0+	002	010	037	094	187	303	393	354	232	057	5
	6	0+	0+	0+	0+	001	004	016	047	118	262	531	735	941	6
7	0	932	698	478	210	082	028	008	002	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	066	257	372	367	247	131	055	017	004	0+	0+	0+	0+	1
	2	002	041	124	275	318	261	164	077	025	004	0+	0+	0+	2
	3	0+	004	023	115	227	290	273	194	097	029	003	0+	0+	3
	4	0+	0+	003	029	097	194	273	290	227	115	023	004	0+	4
	5	0+	0+	0+	004	025	077	164	261	318	275	124	041	002	5
	6	0+	0+	0+	0+	004	017	055	131	247	367	372	257	066	6
	7	0+	0+	0+	0+	0+	002	008	028	082	210	478	698	932	7
8	0	923	663	430	168	058	017	004	001	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	075	279	383	336	198	090	031	008	001	0+	0+	0+	0+	1
	2	003	051	149	294	296	209	109	041	010	001	0+	0+	0+	2
	3	0+	005	033	147	254	[illegible]	219	124	047	009	0+	0+	0+	3
	4	0+	0+	005	046	136	232	273	232	136	046	005	0+	0+	4
	5	0+	0+	0+	009	047	124	219	279	254	147	033	005	0+	5
	6	0+	0+	0+	001	010	041	109	209	296	294	149	051	003	6
	7	0+	0+	0+	0+	001	008	031	090	198	336	383	279	075	7
	8	0+	0+	0+	0+	0+	001	004	017	058	168	430	663	923	8

[3] Tabel pärineb teosest [23], tabel IIIA lisas.

Tabel 1.3 (järg).

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
9	0	914	630	387	134	040	010	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	083	299	387	302	156	060	018	004	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	003	063	172	302	267	161	070	021	004	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	008	045	176	267	251	164	074	021	003	0+	0+	0+	3
	4	0+	001	007	066	172	251	246	167	074	017	001	0+	0+	4
	5	0+	0+	001	017	074	167	246	251	172	066	007	001	0+	5
	6	0+	0+	0+	003	021	074	164	251	267	176	045	008	0+	6
	7	0+	0+	0+	0+	004	021	070	161	267	302	172	063	003	7
	8	0+	0+	0+	0+	0+	004	018	060	156	302	387	299	083	8
	9	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	010	040	134	387	630	914	9
10	0	904	599	349	107	028	006	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	091	315	387	268	121	040	010	002	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	004	075	194	302	233	121	044	011	001	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	010	057	201	267	215	117	042	009	001	0+	0+	0+	3
	4	0+	001	011	088	200	251	205	111	037	006	0+	0+	0+	4
	5	0+	0+	001	026	103	201	246	201	103	026	001	0+	0+	5
	6	0+	0+	0+	006	037	111	205	251	200	088	011	001	0+	6
	7	0+	0+	0+	001	009	042	117	215	267	201	057	010	0+	7
	8	0+	0+	0+	0+	001	011	044	121	233	302	194	075	004	8
	9	0+	0+	0+	0+	0+	002	010	040	121	268	387	315	091	9
	10	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	006	028	107	349	599	904	10
11	0	895	569	314	086	020	004	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	099	329	384	236	093	027	005	001	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	005	087	213	295	200	089	027	005	001	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	014	071	221	257	177	081	023	004	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	001	016	111	220	236	161	070	017	002	0+	0+	0+	4
	5	0+	0+	002	039	132	221	226	147	057	010	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	0+	010	057	147	226	221	132	039	002	0+	0+	6
	7	0+	0+	0+	002	017	070	161	236	220	111	016	001	0+	7
	8	0+	0+	0+	0+	004	023	081	177	257	221	071	014	0+	8
	9	0+	0+	0+	0+	001	005	027	089	200	295	213	087	005	9
	10	0+	0+	0+	0+	0+	001	005	027	093	236	384	329	099	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	020	086	314	569	895	11
12	0	886	540	282	069	014	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	107	341	377	206	071	017	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	006	099	230	283	168	064	016	002	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	017	085	236	240	142	054	012	001	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	002	021	133	231	213	121	042	008	001	0+	0+	0+	4
	5	0+	0+	004	053	158	227	193	101	029	003	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	0+	016	079	177	226	177	079	016	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	0+	003	029	101	193	227	158	053	004	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	001	008	042	121	213	231	133	021	002	0+	8
	9	0+	0+	0+	0+	001	012	054	142	240	236	085	017	0+	9

Tabel 1.3 (järg).

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
12	10	0+	0+	0+	0+	0+	002	016	064	168	283	230	099	006	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	017	071	206	377	341	107	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	014	069	282	540	886	12
13	0	878	513	254	055	010	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	115	351	367	179	054	011	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	007	111	245	268	139	045	010	001	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	021	100	246	218	111	035	006	001	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	003	028	154	234	184	087	024	003	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	0+	006	069	180	221	157	066	014	001	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	001	023	103	197	209	131	044	006	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	0+	006	044	131	209	197	103	023	001	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	001	014	066	157	221	180	069	006	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	0+	003	024	087	184	234	154	028	003	0+	9
	10	0+	0+	0+	0+	001	006	035	111	218	246	100	021	0+	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	045	139	268	245	111	007	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	011	054	179	367	351	115	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	055	254	513	878	13
14	0	869	488	229	044	007	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	123	359	356	154	041	007	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	008	123	257	250	113	032	006	001	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	026	114	250	194	085	022	003	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	004	035	172	229	155	061	014	001	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	0+	008	086	196	207	122	041	007	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	001	032	126	207	183	092	023	002	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	0+	009	062	157	209	157	062	009	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	002	023	092	183	207	126	032	001	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	0+	007	041	122	207	196	086	008	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	0+	001	014	061	155	229	172	035	004	0+	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	003	022	085	194	250	114	026	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	001	006	032	113	250	257	123	008	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	007	041	154	356	359	123	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	007	044	229	488	869	14
15	0	860	463	206	035	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	130	366	343	132	031	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	009	135	267	231	092	022	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	0+	031	129	250	170	063	014	002	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	005	043	188	219	127	042	007	001	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	001	010	103	206	186	092	024	003	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	002	043	147	207	153	061	012	001	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	0+	014	081	177	196	118	035	003	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	003	035	118	196	177	081	014	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	001	012	061	153	207	147	043	002	0+	0+	9

n	r	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	r
15	10	0+	0+	0+	0+	004	034	151	403	722	939	998	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	001	009	059	217	515	836	987	999	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	002	018	091	297	648	944	995	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	027	127	398	816	964	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	035	167	549	829	990	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	035	206	463	860	15
16	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	149	560	815	972	997	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	011	189	485	859	974	997	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	001	043	211	648	901	982	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	007	068	402	754	935	989	999	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	001	017	202	550	833	962	995	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	003	082	340	671	895	981	998	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	001	027	175	473	773	942	993	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	007	074	284	598	858	974	999	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	001	026	142	402	716	926	993	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	0+	007	058	227	527	825	973	999	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	002	019	105	329	660	918	997	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	005	038	167	450	798	983	999	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	001	011	065	246	598	932	993	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	018	099	352	789	957	999	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	026	141	515	811	989	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	028	185	440	851	16
17	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	157	582	833	977	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	012	208	518	882	981	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	001	050	238	690	923	988	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	009	083	451	798	954	994	1−	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	001	022	242	611	874	975	997	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	005	106	403	736	928	989	999	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	001	038	225	552	834	965	997	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	011	105	359	685	908	987	1−	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	003	040	199	500	801	960	997	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	0+	013	092	315	641	895	989	1−	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	003	035	166	448	775	962	999	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	001	011	072	264	597	894	995	1−	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	003	025	126	389	758	978	999	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	046	202	549	917	991	1−	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	077	310	762	950	999	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	019	118	482	792	988	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	023	167	418	843	17

Tabel 1.3 (järg).

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	90	.95	.99	x
18	0	835	397	150	018	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	152	376	300	081	013	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	013	168	284	172	046	007	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	001	047	168	230	105	025	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	009	070	215	168	061	012	001	0+	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	001	022	151	202	115	033	004	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	005	082	187	166	071	015	001	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	001	035	138	189	121	037	005	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	012	081	173	167	077	015	001	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	003	039	128	185	128	039	003	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	001	015	077	167	173	081	012	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	0+	005	037	121	189	138	035	001	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	001	015	071	166	187	082	005	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	004	033	115	202	151	022	001	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	061	168	215	070	009	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	025	105	230	168	047	001	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	007	046	172	284	168	013	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	013	081	300	376	152	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	018	150	397	835	18
19	0	826	377	135	014	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	159	377	285	068	009	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	014	179	285	154	036	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	001	053	180	218	087	017	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	011	080	218	149	047	007	001	0+	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	002	027	164	192	093	022	002	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	007	095	192	145	052	008	001	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	001	044	153	180	096	024	002	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	017	098	180	144	053	008	0+	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	005	051	146	176	098	022	001	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	001	022	098	176	146	051	005	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	0+	008	053	144	180	098	017	0+	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	002	024	096	180	153	044	001	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	001	008	052	145	192	095	007	0+	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	002	022	093	192	164	027	002	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	001	007	047	149	218	080	011	0+	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	017	087	218	180	053	001	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	036	154	285	179	014	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	009	068	285	377	159	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	014	135	377	826	19
20	0	818	358	122	012	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	165	377	270	058	007	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	016	189	285	137	028	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	001	060	190	205	072	012	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	013	090	218	130	035	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	4

Tabel 1.3 (järg).

n	x	.01	.05	10	.20	30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
20	5	0+	002	032	175	179	075	015	001	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	009	109	192	124	037	005	0+	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	002	055	164	166	074	015	001	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	0+	022	114	180	120	035	004	0+	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	007	065	160	160	071	012	0+	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	002	031	117	176	117	031	002	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	0+	012	071	160	160	065	007	0+	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	004	035	120	180	114	022	0+	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	001	015	074	166	164	055	002	0+	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	005	037	124	192	109	009	0+	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	001	015	075	179	175	032	002	0+	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	035	130	218	090	013	0+	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	072	205	190	060	001	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	028	137	285	189	016	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	058	270	377	165	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	122	358	818	20
21	0	810	341	109	009	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	172	376	255	048	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	017	198	284	121	022	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	001	066	200	192	058	009	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	016	100	216	113	026	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	003	038	183	164	059	010	001	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	0+	011	122	188	105	026	003	0+	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	003	065	172	149	055	009	0+	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	001	029	129	174	097	023	002	0+	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	010	080	168	140	050	006	0+	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	003	041	134	168	089	018	001	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	001	018	089	168	134	041	003	0+	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	006	050	140	168	080	010	0+	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	002	023	097	174	129	029	001	0+	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	009	055	149	172	065	003	0+	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	003	026	105	188	122	011	0+	0+	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	059	164	183	038	003	0+	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	026	113	216	100	016	0+	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	009	058	192	200	066	001	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	022	121	284	198	017	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	048	255	376	172	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	009	109	341	810	21
22	0	802	324	098	007	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	178	375	241	041	004	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	019	207	281	107	017	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	001	073	208	178	047	006	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	018	110	211	096	019	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	4

Tabel 1.3 (järg).

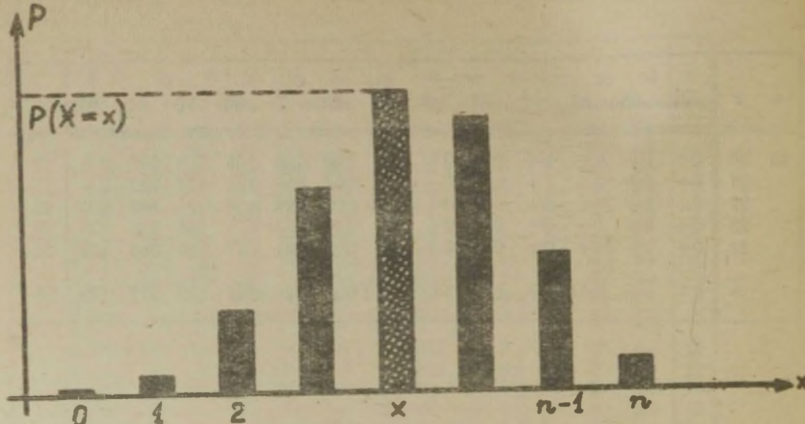
n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
22	5	0+	003	044	180	149	046	006	0+	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	001	014	134	181	086	018	001	0+	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	004	077	177	131	041	005	0+	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	001	036	142	164	076	014	001	0+	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	014	095	170	119	034	003	0+	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	005	053	148	154	066	010	0+	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	001	025	107	168	107	025	001	0+	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	010	066	154	148	053	005	0+	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	003	034	119	170	095	014	0+	0+	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	001	014	076	164	142	036	001	0+	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	005	041	131	177	077	004	0+	0+	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	001	018	086	181	134	014	001	0+	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	046	149	190	044	003	0+	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	019	096	211	110	018	0+	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	047	178	208	073	001	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	017	107	281	207	019	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	041	241	375	178	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	098	324	802	22
23	0	794	307	089	006	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	184	372	226	034	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	020	215	277	093	013	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	001	079	215	163	038	004	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	021	120	204	082	014	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	004	051	194	133	035	004	0+	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	001	017	145	171	070	012	001	0+	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	005	088	178	113	029	003	0+	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	001	044	153	151	058	009	0+	0+	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	018	109	168	097	022	002	0+	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	006	065	157	136	046	005	0+	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	002	033	123	161	082	014	0+	0+	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	0+	014	082	161	123	033	002	0+	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	005	046	136	157	065	006	0+	0+	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	002	022	097	168	109	018	0+	0+	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	009	058	151	153	044	001	0+	0+	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	003	029	113	178	088	005	0+	0+	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	070	171	145	017	001	0+	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	035	133	194	051	004	0+	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	014	082	204	120	021	0+	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	038	163	215	079	001	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	013	093	277	215	020	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	034	226	372	184	22
	23	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	089	307	794	23

Tabel 1.3 (järg).

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
24	0	786	292	080	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	190	369	213	028	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	022	223	272	081	010	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	002	086	221	149	031	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	094	129	196	069	010	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	005	057	196	118	027	003	0+	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	001	020	155	160	056	008	0+	0+	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	006	100	176	096	021	002	0+	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	001	053	160	136	044	005	0+	0+	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	024	122	161	078	014	001	0+	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	009	079	161	117	032	003	0+	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	003	043	137	149	061	008	0+	0+	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	001	020	099	161	099	020	001	0+	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	008	061	149	137	043	003	0+	0+	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	003	032	117	161	079	009	0+	0+	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	001	014	078	161	122	024	0+	0+	0+	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	005	044	136	160	053	001	0+	0+	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	002	021	096	176	100	006	0+	0+	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	008	056	160	155	020	001	0+	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	027	118	196	057	005	0+	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	069	196	129	024	0+	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	031	149	221	086	002	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	081	272	223	022	22
	23	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	028	213	369	190	23
	24	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	080	292	786	24
25	0	778	277	072	004	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0
	1	196	365	199	024	001	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	1
	2	024	231	266	071	007	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	2
	3	002	093	226	136	024	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	3
	4	0+	027	138	187	057	007	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	4
	5	0+	006	065	196	103	020	002	0+	0+	0+	0+	0+	0+	5
	6	0+	001	024	163	147	044	005	0+	0+	0+	0+	0+	0+	6
	7	0+	0+	007	111	171	080	014	001	0+	0+	0+	0+	0+	7
	8	0+	0+	002	062	165	120	032	003	0+	0+	0+	0+	0+	8
	9	0+	0+	0+	029	134	151	061	009	0+	0+	0+	0+	0+	9
	10	0+	0+	0+	012	092	161	097	021	001	0+	0+	0+	0+	10
	11	0+	0+	0+	004	054	147	133	043	004	0+	0+	0+	0+	11
	12	0+	0+	0+	001	027	114	155	076	011	0+	0+	0+	0+	12
	13	0+	0+	0+	0+	011	076	155	114	027	001	0+	0+	0+	13
	14	0+	0+	0+	0+	004	043	133	147	054	004	0+	0+	0+	14
	15	0+	0+	0+	0+	001	021	097	161	092	012	0+	0+	0+	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	009	061	151	134	029	0+	0+	0+	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	003	032	120	165	062	002	0+	0+	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	001	014	080	171	111	007	0+	0+	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	044	147	163	024	001	0+	19

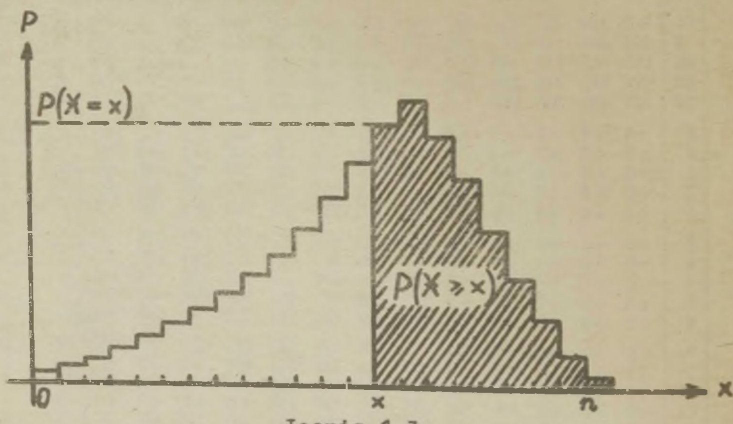
Tabel 1.3 (järg).

n	x	p .01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
25	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	020	103	196	065	006	0+	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	057	187	138	027	0+	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	024	136	226	093	002	22
	23	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	071	266	231	024	23
	24	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	024	199	365	196	24
	25	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	072	277	778	25



Joonis 1.2.

Tõenäosus selleks, et juhuslik suurus X omandab väärtuse x ($\sum_{x=0}^{n} P(X=x) = 1$).



Joonis 1.3.

Tõenäosus selleks, et juhuslik suurus X omandab väärtuse, mis on suurem või võrdne x-ga.

Tabel 1.4.

Binomiaalse juhusliku suuruse $X \sim B(n,p)$ täiendjaotusfunktsioon[4]

$$P(X \geq x) = \sum_{k=x}^{n} C_n^k \, p^k q^{n-k},$$

kus $n = 2, 3, \ldots, 25$;

$p = 0{,}01$; $0{,}05$, $0{,}10$, ... $0{,}90$ (vahe $0{,}05$); $0{,}95$, $0{,}99$;

$q = 1-p$;

$x = 0, 1, \ldots, n$ (vt. joonis 1.3 lk. 38).

n	r	p = .01	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	r
2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	020	098	190	360	510	640	750	840	910	960	990	998	1—	1
	2	0+	002	010	040	090	160	250	360	490	640	810	902	980	2
3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	030	143	271	488	657	784	875	936	973	992	999	1—	1—	1
	2	0+	007	028	104	216	352	500	648	784	896	972	993	1—	2
	3	0+	0+	001	008	027	064	125	216	343	512	729	857	970	3
4	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	039	185	344	590	760	870	938	974	992	998	1—	1—	1—	1
	2	001	014	052	181	348	525	688	821	916	973	996	1—	1—	2
	3	0+	0+	004	027	084	179	312	475	652	819	948	986	999	3
	4	0+	0+	0+	002	008	026	062	130	240	410	656	815	961	4
5	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	049	226	410	672	832	922	969	990	998	1—	1—	1—	1—	1
	2	001	023	081	263	472	663	812	913	969	993	1—	1—	1—	2
	3	0+	001	009	058	163	317	500	683	837	942	991	999	1—	3
	4	0+	0+	0+	007	031	087	188	337	528	737	919	977	999	4
	5	0+	0+	0+	0+	002	010	031	078	168	328	590	774	951	5
6	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	059	265	469	738	882	953	984	996	999	1—	1—	1—	1—	1
	2	001	033	114	345	580	767	891	959	989	998	1—	1—	1—	2
	3	0+	002	016	099	256	456	656	821	930	983	999	1—	1—	3
	4	0+	0+	001	017	070	179	344	544	744	901	984	998	1—	4
	5	0+	0+	0+	002	011	041	109	233	420	655	886	967	999	5
	6	0+	0+	0+	0+	001	004	016	047	118	262	531	735	941	6
7	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	068	302	522	790	918	972	992	998	1—	1—	1—	1—	1—	1
	2	002	044	150	423	671	841	938	981	996	1—	1—	1—	1—	2
	3	0+	004	026	148	353	580	773	904	971	996	1—	1—	1—	3
	4	0+	0+	003	033	126	290	500	710	874	967	997	1—	1—	4
	5	0+	0+	0+	005	029	096	227	420	647	852	974	996	1—	5
	6	0+	0+	0+	0+	004	019	062	159	329	577	850	956	998	6
	7	0+	0+	0+	0+	0+	002	008	028	082	210	478	698	932	7
8	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	077	337	570	832	942	983	996	999	1—	1—	1—	1—	1—	1
	2	003	057	187	497	745	894	965	991	999	1—	1—	1—	1—	2
	3	0+	006	038	203	448	685	855	950	989	999	1—	1—	1—	3
	4	0+	0+	005	056	194	406	637	826	942	990	1—	1—	1—	4
	5	0+	0+	0+	010	058	174	363	594	806	944	995	1—	1—	5
	6	0+	0+	0+	001	011	050	145	315	552	797	962	994	1—	6
	7	0+	0+	0+	0+	001	009	035	106	255	503	813	943	997	7
	8	0+	0+	0+	0+	0+	001	004	017	058	168	430	663	923	8

[4] Tabel pärineb teosest [23], tabel III B lisas.

Tabel 1.4 (järg).

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
9	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	086	370	613	866	960	990	998	1—	1—	1—	1—	1—	1—	1
	2	003	071	225	564	804	929	980	996	1—	1—	1—	1—	1—	2
	3	0+	008	053	262	537	768	910	975	996	1—	1—	1—	1—	3
	4	0+	001	008	086	270	517	746	901	975	997	1—	1—	1—	4
	5	0+	0+	001	020	099	267	500	733	901	980	999	1—	1—	5
	6	0+	0+	0+	003	025	099	254	483	730	914	992	999	1—	5
	7	0+	0+	0+	0+	004	025	090	232	463	738	947	992	1—	7
	8	0+	0+	0+	0+	0+	004	020	071	196	436	775	929	997	8
	9	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	010	040	134	387	630	914	9
10	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	096	401	651	893	972	994	999	1—	1—	1—	1—	1—	1—	1
	2	004	086	264	624	851	954	989	998	1—	1—	1—	1—	1—	2
	3	0+	012	070	322	617	833	945	988	998	1—	1—	1—	1—	3
	4	0+	001	013	121	350	618	828	945	989	999	1—	1—	1—	4
	5	0+	0+	002	033	150	367	623	834	953	994	1—	1—	1—	5
	6	0+	0+	0+	006	047	166	377	633	850	967	998	1—	1—	6
	7	0+	0+	0+	001	011	055	172	382	650	879	987	999	1—	7
	8	0+	0+	0+	0+	002	012	055	167	383	678	930	988	1—	8
	9	0+	0+	0+	0+	0+	002	011	046	149	376	736	914	996	9
	10	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	006	028	107	349	599	904	10
11	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	105	431	686	914	980	996	1—	1—	1—	1—	1—	1—	1—	1
	2	005	102	303	678	887	970	994	999	1—	1—	1—	1—	1—	2
	3	0+	015	090	383	687	881	967	994	999	1—	1—	1—	1—	3
	4	0+	002	019	161	430	704	887	971	996	1—	1—	1—	1—	4
	5	0+	0+	003	050	210	467	726	901	978	998	1—	1—	1—	5
	6	0+	0+	0+	012	078	247	500	753	922	988	1—	1—	1—	6
	7	0+	0+	0+	002	022	099	274	533	790	950	997	1—	1—	7
	8	0+	0+	0+	0+	004	029	113	296	570	839	981	998	1—	8
	9	0+	0+	0+	0+	001	006	033	119	313	617	910	985	1—	9
	10	0+	0+	0+	0+	0+	001	006	030	113	322	697	898	995	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	020	086	314	569	895	11
12	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	114	460	718	931	986	998	1—	1—	1—	1—	1—	1—	1—	1
	2	006	118	341	725	915	980	997	1—	1—	1—	1—	1—	1—	2
	3	0+	020	111	442	747	917	981	997	1—	1—	1—	1—	1—	3
	4	0+	002	026	205	507	775	927	985	998	1—	1—	1—	1—	4
	5	0+	0+	004	073	276	562	806	943	991	999	1—	1—	1—	5
	6	0+	0+	001	019	118	335	613	842	961	996	1—	1—	1—	6
	7	0+	0+	0+	004	039	158	387	665	882	981	999	1—	1—	7
	8	0+	0+	0+	001	009	057	194	438	724	927	996	1—	1—	8
	9	0+	0+	0+	0+	002	015	073	225	493	795	974	998	1—	9

Tabel 1.4 (järg).

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
12	10	0+	0+	0+	0+	0+	003	019	083	253	558	889	980	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	020	085	275	659	882	994	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	014	069	282	540	886	12
13	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	122	487	746	945	990	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	007	135	379	766	936	987	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	0+	025	134	498	798	942	989	999	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	003	034	253	579	831	954	992	999	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	0+	006	099	346	647	867	968	996	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	001	030	165	426	709	902	982	999	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	0+	007	062	229	500	771	938	993	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	001	018	098	291	574	835	970	999	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	0+	004	032	133	353	654	901	994	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	0+	001	008	046	169	421	747	966	997	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	001	011	058	202	502	866	975	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	013	064	234	621	865	993	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	055	254	513	878	13
14	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	131	512	771	956	993	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	008	153	415	802	953	992	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	0+	030	158	552	839	960	994	999	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	004	044	302	645	876	971	996	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	0+	009	130	416	721	910	982	998	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	001	044	219	514	788	942	992	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	0+	012	093	308	605	850	969	998	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	002	031	150	395	692	907	988	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	0+	008	058	212	486	781	956	999	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	0+	002	018	090	279	584	870	991	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	0+	004	029	124	355	698	956	996	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	001	006	040	161	448	842	970	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	008	047	198	585	847	992	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	007	044	229	488	869	14
15	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	140	537	794	965	995	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	010	171	451	833	965	995	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	0+	036	184	602	873	973	996	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	005	056	352	703	909	982	998	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	001	013	164	485	783	941	991	999	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	002	061	278	597	849	966	996	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	0+	018	131	390	696	905	985	999	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	004	050	213	500	787	950	996	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	001	015	095	304	610	869	982	1−	1−	1−	9

Tabel 1.4 (jätk).

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
15	10	0+	0+	0+	0+	004	034	151	403	722	939	998	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	001	009	059	217	515	838	987	999	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	002	018	091	297	648	944	995	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	027	127	398	816	964	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	035	167	549	829	990	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	035	206	463	860	15
16	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	149	560	815	972	997	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	011	189	485	859	974	997	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	001	043	211	648	901	982	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	007	068	402	754	935	989	999	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	001	017	202	550	833	962	995	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	003	082	340	671	895	981	998	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	001	027	175	473	773	942	993	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	007	074	284	598	858	974	999	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	001	026	142	402	716	926	993	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	0+	007	058	227	527	825	973	999	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	002	019	105	329	660	918	997	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	0+	005	038	167	450	798	983	999	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	001	011	065	246	598	932	993	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	018	099	352	789	957	999	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	026	141	515	811	989	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	028	185	440	851	16
17	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	157	582	833	977	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	012	208	518	882	981	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	001	050	238	690	923	988	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	009	083	451	798	954	994	1−	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	001	022	242	611	874	975	997	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	005	106	403	736	928	989	999	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	001	038	225	552	834	965	997	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	011	105	359	685	908	987	1−	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	003	040	199	500	801	960	997	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	0+	013	092	315	641	895	989	1−	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	003	035	166	448	775	962	999	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	001	011	072	264	597	894	995	1−	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	003	025	126	389	758	978	999	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	046	202	549	917	991	1−	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	077	310	762	950	999	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	019	118	482	792	988	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	023	167	418	843	17

Tabel 1.4 (järg).

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
18	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	165	603	850	982	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	014	226	550	901	986	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	001	058	266	729	940	992	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	011	098	499	835	967	996	1−	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	002	028	284	667	906	985	999	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	006	133	466	791	952	994	1−	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	001	051	278	626	881	980	999	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	016	141	437	760	942	994	1−	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	004	060	263	593	865	979	999	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	001	021	135	407	737	940	996	1−	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	006	058	240	563	859	984	1−	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	001	020	119	374	722	949	999	1−	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	0+	006	048	209	534	867	994	1−	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	001	015	094	333	716	972	998	1−	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	033	165	501	902	989	1−	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	008	060	271	734	942	999	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	014	099	450	774	986	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	018	150	397	835	18
19	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	174	623	865	986	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	015	245	580	917	990	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	001	067	295	763	954	995	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	013	115	545	867	977	996	1−	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	002	035	327	718	930	990	999	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	009	163	526	837	968	997	1−	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	002	068	334	692	916	988	999	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	023	182	512	820	965	997	1−	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	007	084	333	676	912	989	1−	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	002	033	186	500	814	967	998	1−	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	0+	011	088	324	667	916	993	1−	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	003	035	180	488	818	977	1−	1−	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	001	012	084	308	666	932	998	1−	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	003	032	163	474	837	991	1−	1−	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	070	282	673	965	998	1−	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	023	133	455	885	987	1−	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	046	237	705	933	999	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	010	083	420	755	985	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	014	135	377	826	19
20	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	182	642	878	988	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	017	264	608	931	992	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	001	075	323	794	965	996	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	016	133	589	893	984	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	4

Tabel 1.4 (järg).

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
20	5	0+	003	043	370	762	949	994	1−	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	011	196	584	874	979	998	1−	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	002	087	392	750	942	994	1−	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	0+	032	228	584	868	979	999	1−	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	010	113	404	748	943	995	1−	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	003	048	245	588	872	983	999	1−	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	001	017	128	412	755	952	997	1−	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	005	057	252	596	887	990	1−	1−	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	001	021	132	416	772	968	1−	1−	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	0+	006	058	250	608	913	998	1−	1−?	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	002	021	126	416	804	989	1−	1−	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	051	238	630	957	997	1−	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	016	107	411	867	984	1−	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	035	206	677	925	999	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	008	069	392	736	983	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	122	358	818	20
21	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	190	659	891	991	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	019	283	635	942	994	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	001	085	352	821	973	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	019	152	630	914	939	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	003	052	414	802	963	996	1−	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	0+	014	231	637	904	987	999	1−	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	003	109	449	800	961	996	1−	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	001	043	277	650	905	988	999	1−	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	014	148	476	808	965	998	1−	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	004	068	309	668	915	991	1−	1−	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	001	026	174	500	826	974	999	1−	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	009	085	332	691	932	996	1−	1−	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	002	035	192	524	852	986	1−	1−	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	001	012	095	350	723	957	999	1−	1−	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	004	039	200	551	891	997	1−	1−	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	001	013	096	363	769	986	1−	1−	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	037	198	586	948	997	1−	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	011	086	370	848	981	1−	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	027	179	648	915	999	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	058	365	717	981	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	009	109	341	810	21
22	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	198	676	902	993	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	020	302	661	952	996	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	001	095	380	846	979	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	022	172	668	932	992	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	4

Tabel 1.4 (järg).

n	x	01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
22	5	0+	004	062	457	835	973	998	1−	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	001	018	267	687	928	992	1−	1−	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	004	133	506	842	974	998	1−	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	001	056	329	710	933	993	1−	1−	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	020	186	546	857	979	999	1−	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	006	092	376	738	945	996	1−	1−	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	002	039	228	584	879	986	1−	1−	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	0+	014	121	416	772	961	998	1−	1−	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	004	055	262	624	908	994	1−	1−	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	001	021	143	454	814	980	1−	1−	1−	14
	15	0+	0+	0+	0+	0+	007	067	290	671	944	999	1−	1−	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	002	026	158	494	867	996	1−	1−	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	0+	008	072	313	733	982	999	1−	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	027	165	543	938	996	1−	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	008	068	332	828	978	1−	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	021	154	620	905	999	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	048	339	698	980	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	098	324	802	22
23	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	206	693	911	994	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1
	2	022	321	685	960	997	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	2
	3	002	105	408	867	984	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	3
	4	0+	026	193	703	946	995	1−	1−	1−	1−	1−	1−	1−	4
	5	0+	005	073	499	864	981	999	1−	1−	1−	1−	1−	1−	5
	6	0+	001	023	305	731	946	995	1−	1−	1−	1−	1−	1−	6
	7	0+	0+	006	160	560	876	983	999	1−	1−	1−	1−	1−	7
	8	0+	0+	001	072	382	763	953	996	1−	1−	1−	1−	1−	8
	9	0+	0+	0+	027	229	612	895	987	999	1−	1−	1−	1−	9
	10	0+	0+	0+	009	120	444	798	965	998	1−	1−	1−	1−	10
	11	0+	0+	0+	003	055	287	661	919	993	1−	1−	1−	1−	11
	12	0+	0+	0+	001	021	164	500	836	979	999	1−	1−	1−	12
	13	0+	0+	0+	0+	007	081	339	713	945	997	1−	1−	1−	13
	14	0+	0+	0+	0+	002	035	202	556	880	991	1−	1−	1−	14
	15	0+	0+	0+	0+	001	013	105	388	771	973	1−	1−	1−	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	004	047	237	618	928	999	1−	1−	19
	17	0+	0+	0+	0+	0+	001	017	124	440	840	994	1−	1−	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	064	269	695	977	999	1−	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	019	136	501	927	995	1−	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	054	297	807	974	1−	30
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	016	133	592	885	998	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	040	315	679	978	22
	23	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	006	089	307	794	23

Tabel 1.4 (järg).

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
24	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	214	708	920	995	1–	1–	1–	1–	1–	1–	1–	1–	1–	1
	2	024	339	708	967	998	1–	1–	1–	1–	1–	1–	1–	1–	2
	3	002	116	436	885	968	999	1–	1–	1–	1–	1–	1–	1–	3
	4	0+	030	214	736	958	996	1–	1–	1–	1–	1–	1–	1–	4
	5	0+	006	085	540	889	987	999	1–	1–	1–	1–	1–	1–	5
	6	0+	001	028	344	771	960	997	1–	1–	1–	1–	1–	1–	6
	7	0+	0+	007	189	611	904	989	999	1–	1–	1–	1–	1–	7
	8	0+	0+	002	089	435	808	968	998	1–	1–	1–	1–	1–	8
	9	0+	0+	0+	036	275	672	924	992	1–	1–	1–	1–	1–	9
	10	0+	0+	0+	013	153	511	846	978	999	1–	1–	1–	1–	10
	11	0+	0+	0+	004	074	350	729	947	996	1–	1–	1–	1–	11
	12	0+	0+	0+	001	031	213	581	886	988	1–	1–	1–	1–	12
	13	0+	0+	0+	0+	012	114	419	787	969	999	1–	1–	1–	13
	14	0+	0+	0+	0+	004	053	271	650	926	996	1–	1–	1–	14
	15	0+	0+	0+	0+	001	022	154	489	847	987	1–	1–	1–	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	008	076	328	725	964	1–	1–	1–	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	002	032	192	565	911	998	1–	1–	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	001	011	096	389	811	993	1–	1–	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	003	040	229	656	972	999	1–	19
	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	013	111	460	915	994	1–	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	042	264	786	970	1–	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	001	012	115	564	884	998	22
	23	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	033	292	661	976	23
	24	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	005	080	292	786	24
25	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	1	222	723	928	996	1–	1–	1–	1–	1–	1–	1–	1–	1–	1
	2	026	358	729	973	998	1–	1–	1–	1–	1–	1–	1–	1–	2
	3	002	127	463	902	991	1–	1–	1–	1–	1–	1–	1–	1–	3
	4	0+	034	236	766	967	998	1–	1–	1–	1–	1–	1–	1–	4
	5	0+	007	098	579	910	991	1–	1–	1–	1–	1–	1–	1–	5
	6	0+	001	033	383	807	971	998	1–	1–	1–	1–	1–	1–	6
	7	0+	0+	009	220	659	926	993	1–	1–	1–	1–	1–	1–	7
	8	0+	0+	002	109	488	846	978	999	1–	1–	1–	1–	1–	8
	9	0+	0+	0+	047	323	726	946	996	1–	1–	1–	1–	1–	9
	10	0+	0+	0+	017	189	575	885	987	1–	1–	1–	1–	1–	10
	11	0+	0+	0+	006	098	414	788	966	998	1–	1–	1–	1–	11
	12	0+	0+	0+	002	044	268	655	922	994	1–	1–	1–	1–	12
	13	0+	0+	0+	0+	017	154	500	846	983	1–	1–	1–	1–	13
	14	0+	0+	0+	0+	006	078	345	732	956	998	1–	1–	1–	14
	15	0+	0+	0+	0+	002	034	212	586	902	994	1–	1–	1–	15
	16	0+	0+	0+	0+	0+	013	115	425	811	983	1–	1–	1–	16
	17	0+	0+	0+	0+	0+	004	054	274	677	953	1–	1–	1–	17
	18	0+	0+	0+	0+	0+	001	022	154	512	891	998	1–	1–	18
	19	0+	0+	0+	0+	0+	0+	007	074	341	780	991	1–	1–	19

Tabel 1.4 (järg).

n	x	.01	.05	.10	.20	.30	.40	p .50	.60	.70	.80	.90	.95	.99	x
25	20	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	029	193	617	967	999	1—	20
	21	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	009	090	421	902	993	1—	21
	22	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	033	234	764	966	1—	22
	23	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	009	098	537	873	998	23
	24	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	002	027	271	642	974	24
	25	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	0+	004	072	277	778	25

Näide 1.1 (binomiaaljaotuse abil lahendatavaid ülesandeid).

Loeme poeg-ja tütarlapse sündimise võrdtõenäoseks (tegelikult on poeglapse sündimise tõenäosus $\approx 0,516$). Ühel päeval sündis linna sünnitusmajas 20 last.

a) Leida tõenäosus, selleks et nendest olid täpselt pooled poisid.

b) Leida tõenäosus selleks, et sündis vähemalt 15 poissi.

c) Leida tõenäosus selleks, et sündis mitte üle 8 poisi.

Lahendus.

a) $n = 20$, $p = 0,5$, $x = {}^1/2 \cdot 20 = 10$. Tabelist 1.3 leiame

$$P(X = 10) = 0,176.$$

b) $n = 20$, $p = 0,5$, $x = 15$. Tabelist 1.4 leiame

$$P(X \geq 15) = 0,021.$$

c) $n = 20$, $p = 0,5$. Küsitakse tõenäosust

$$P(X \leq 8) = 1-P(X > 8) = 1-P(X \geq 9).$$

Tabelist 1.4 leiame

$$P(X \geq 9) = 0,748; \text{ siis } P(X \leq 8) = 1-0,748 =$$
$$= 0,252.$$

6. Binomiaaljaotus $B(n, {}^1/2)$.

Et mitmes ülesandes kasutatakse binomiaaljaotuse erijuhtu, kus $p = q = {}^1/2$, esitame ka kompaktse tabeli binomiaalse juhusliku suuruse $B(n,\frac{1}{2})$ jaotusfunktsiooni jaoks.

Tabel 1.5.

Binomiaalse juhusliku suuruse $X \sim B(n, \frac{1}{2})$ jaotusfunktsioon [5]

$$P(X \leqslant x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=0}^{x} C_n^i$$

n	x															
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	.031	.188	.500	.812	.969											
6	.016	.109	.344	.656	.891	.984										
7	.008	.062	.227	.500	.773	.938	.992									
8	.004	.035	.145	.363	.637	.855	.965	.996								
9	.002	.020	.090	.254	.500	.746	.910	.980	.998							
10	.001	.011	.055	.172	.377	.623	.828	.945	.989	.999						
11		.006	.033	.113	.274	.500	.726	.887	.967	.994						
12		.003	.019	.073	.194	.387	.613	.806	.927	.981	.997					
13		.002	.011	.046	.133	.291	.500	.709	.867	.954	.989	.998				
14		.001	.006	.029	.090	.212	.395	.605	.788	.910	.971	.994	.999			
15			.004	.018	.059	.151	.304	.500	.696	.849	.941	.892	.996			
16			.002	.011	.038	.105	.227	.402	.598	.773	.895	.962	.989	.998		
17			.001	.006	.025	.072	.166	.315	.500	.685	.834	.928	.975	.994	.999	
18			.001	.004	.015	.048	.119	.240	.407	.593	.760	.881	.952	.985	.996	.999
19				.002	.010	.032	.084	.180	.324	.500	.676	.820	.916	.968	.990	.998
20				.001	.006	.021	.058	.132	.252	.412	.588	.748	.868	.942	.979	.994
21				.001	.004	.013	.039	.095	.192	.332	.500	.668	.808	.905	.961	.987
22					.002	.008	.026	.067	.143	.262	.416	.584	.738	.857	.933	.974
23					.001	.005	.017	.047	.105	.202	.339	.500	.661	.798	.895	.953
24					.001	.003	.011	.032	.076	.154	.271	.419	.581	.729	.846	.924
25						.002	.007	.022	.054	.115	.212	.345	.500	.655	.788	.885

[5] Tabel pârineb teosest [19], lk. 646.

Näide 1.2.

Nimekirja järgi valiti juhuslikult 2 rühma V klassi õpilasi, ühes rühmas 10, teises 16 last. Olgu teada, et V klassi õpilaste seas on poeglapsi ja tütarlapsi võrdselt.

Mis on tõenäosem, kas see, et I rühmas on vähemalt 5 poeglast, või see, et II rühmas on vähemalt 8 poeg - last?

Lahendus.

Vähemalt 5 poeglast on I rühmas siis, kui õpilaste arvud jagunevad järgmiselt:

Poeglapsi	10	9	8	7	6	5
Tütarlapsi	0	1	2	3	4	5

Seega tuleb leida tõenäosus $P_I = P_{10}(X \geqslant 5)$. Tabelist 1.5 saame

$$P_I = P_{10}(X \geqslant 5) = 1 - P_{10}(X \leqslant 4) = 1 - 0{,}377 = 0{,}623.$$

Samal viisil leiame II rühma jaoks:

$$P_{II} = P_{16}(X \geqslant 8) = 1 - P_{16}(X \leqslant 7) = 1 - 0{,}402 = 0{,}598,$$

järelikult $P_I > P_{II}$.

§2. B i n o m i a a l j a o t u s e p a r a m e e t r i p (p r o t s e n t i d e) u s a l d u s p i i r i d.

1. Tõenäosuse p (protsendi) hinnang väljavõtte põhjal.

Praktikas (matemaatilise statistika ülesannete puhul) ei ole tavaliselt tõenäosus p teada, selle asemel on teada, et n katsest koosneva seeria vältel esines meid huvitav sündmus A x korda (x on nn. väljavõtte väärtus). Osutub, et parimaks hinnanguks on

$$p \approx \tilde{p} = \frac{x}{n};$$

see hinnang on nihutamata (keskmiselt õige, puudub süstemaatiline viga), minimaalse hajuvusega ja läheneb n kasvamisel (peaaegu kindlasti) p õigele väärtusele.

2. Tõenäosuse p usalduspiirid.

Et parameetri p hinnang $\tilde{p}$ ei ole täpne, pakub huvi ka p usalduspiiride leidmine.

Usaldusnivoole $1-\alpha$ vastavateks usalduspiirideks (ehk $(1-\alpha).100\%$-listeks usalduspiirideks) nimetatakse kaht katsetulemuste põhjal määratud arvu $\underline{p}$ ja $\bar{p}$, mis rahuldavad tingimust

$$P(\underline{p} \leq p \leq \bar{p}) = 1 - \alpha,$$

s.t. hinnatava parameetri õige väärtus p jääb usalduspiiride $\underline{p}$ ja $\bar{\bar{p}}$ vahele tõenäosusega $1-\alpha$.

Kõige sagedamini kasutatakse usaldusnivoosid 0,95 (ehk 95%), s.t. $\alpha=0,05$ ja 0,99 (ehk 99%), siis $\alpha=0,01$. Nende usaldusnivoode väärtuste jaoks on antud ka järgnevad tabelid(vt. 1.6A ja 1.6B).

Mõnikord kasutatakse ka parameetri p ühepoolseid usalduspiire $\underline{\underline{p}}$ ja $\bar{\bar{p}}$, mis rahuldavad tingimusi

$$P(p \geqslant \underline{\underline{p}}) = 1-\alpha,$$

$$P(p \leqslant \bar{\bar{p}}) = 1-\alpha.$$

Suurused $\underline{\underline{p}}$ ja $\bar{\bar{p}}$ on arvutatavad F-jaotuse abil (vt. [24], lk.273). Kasutame selleks valemeid

$$\underline{\underline{p}}=\underline{\underline{p}}(n,x)=\frac{x}{x+(n-x+1)F_{2n-2x+2,2x}(1-\alpha)},$$

$$\bar{\bar{p}}=\bar{\bar{p}}(n,x)=1-\underline{\underline{p}}(n,n-x),$$

kus n on katseseeria pikkus, x - katsetulemuse A esinemiste arv, $F_{f_1,f_2}(\alpha)$ F-jaotusega juhusliku suuruse α-kvantiil. Kui $\underline{\underline{p}}$ ja $\bar{\bar{p}}$ on ühepoolsed usalduspiirid usaldusnivooga $1-\alpha$, siis moodustavad nad koos usalduspiirkonna vastavalt usaldusnivoole $1-2\alpha$:

$$P(\underline{\underline{p}} \leq p \leq \bar{\bar{p}}) = 1-2\alpha.$$

Tabel 1.6A.

Binomiaaljaotuse B(n,p) parameetri p (sündmuse A esinemise tõenäosuse) 99%-lised kahepoolsed usalduspiirid [6] (protsentides)

$$P(\underline{p} \leq p \leq \bar{p}) = 1 - \alpha = 0,99.$$

n = 5,6, ... , 50 (vahe 1); 60, ... , 100 (vahe 10), 150,200,300,500.

x = 0,1, ... ,n (x on uuritava sündmuse A esinemiste arv katseseerias, mille pikkus on n).

x	$n = 5$		$n = 6$		$n = 7$		$n = 8$		$n = 9$	
	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$
0	0,0	60,2	0,0	53,6	0,0	50,0	0,0	45,0	0,0	41,5
1	0,2	77,5	0,2	70,6	0,1	64,4	0,1	59,0	0,1	55,5
2	3,2	89,5	2,6	82,7	2,2	76,4	2,0	70,7	1,7	65,6
3	10,5	96,8	8,4	91,6	7,1	85,8	6,1	80.2	5,3	75,0
4	22,5	99,8	17,3	97,4	14,2	92,9	12,1	87,9	10,5	82,9
5	39,8	100,0	29,4	99,8	23,6	97,8	19,8	93,9	17,1	89,5
6			46,4	100,0	35,6	99,9	29,3	98,0	25,0	94,7
7					51,8	100,0	41,0	99,9	34,4	98.3
8							55,0	100,0	44,5	99,9
9									58,5	100,0

x	$n = 10$		$n = 11$		$n = 12$		$n = 13$		$n = 14$	
	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$
0	0,0	37,6	0,0	35,9	0,0	32,1	0,0	30,2	0,0	30,8
1	0,1	51,3	0,1	50,0	0,1	44,5	0,1	42,9	0,1	41,1
2	1,5	61,2	1,3	59,4	1,2	55,5	1,1	52,3	1,1	50,0
3	4,7	70,3	4,3	66,0	3,9	64,3	3,5	60,4	3,3	58,9
4	9,3	78,2	8,3	73.8	7,5	69,8	6,9	66,5	6,4	63,2
5	15,1	84,9	13,4	80,6	12,1	76,5	11,1	72,7	10,2	69,2
6	21,8	90,7	19,4	86,6	17,4	82,6	15,9	78,7	14,5	75,1
7	29,7	95,3	26,2	91,7	23,5	87,9	21,3	84,1	19,4	80,6
8	38,8	98,5	34,0	95,7	30,2	92,5	27,3	88,9	24,9	85,5
9	48,7	99,9	40,6	98,7	35,7	96,1	33,5	93,1	30,8	89,8
10	62,4	100,0	50,0	99.9	44,5	98,8	39,6	96,5	36,8	93,6
11			64,1	100,0	55,5	99,9	47,7	98,9	41,1	96,7
12					67,9	100,0	57,1	99,9	50,0	98,9
13							69,8	100,0	58,9	99,9
14									69,2	100,0

x	$n = 15$		$n = 16$		$n = 17$		$n = 18$		$n = 19$	
	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$
0	0,0	28,2	0,0	26,5	0,0	26,8	0,0	25,5	0,0	24,3
1	0,1	37,3	0,1	35,8	0,1	34,7	0,1	34,2	0,1	31,9
2	1,0	46,2	0,9	45,3	0,8	42,7	0,7	39,7	0,6	38,4
3	3,1	53,8	2,9	52,8	2,7	50,0	2,5	46,6	2,3	45,6
4	6,0	62,7	5,5	58,1	5,2	57,3	4,9	53,4	4.5	51,5
5	9,4	67,2	8,8	64,0	8,2	61,9	7,7	60,3	7,2	56,5
6	13,4	71,8	12,5	70,6	11,7	66,2	11,0	65,8	10,3	61,1
7	18,0	77,1	16,6	73,9	15,5	73,2	14,5	68,7	13,4	68,1
8	22,9	82,0	21,2	78,8	19,7	75,8	18,4	74,5	17,3	70,7
9	28,2	86,6	26,1	83,4	24,2	80,2	22,6	77,4	21,2	75,7
10	32,8	90,6	29,4	87,5	26,8	84,5	25,5	81,6	24.3	78,8
11	37.3	94,6	36,0	91,2	33,8	88,3	31,3	85,5	29,2	82,7
12	46,2	96,9	41,9	94,5	38,1	91,8	34,2	89,0	31,9	86,6
13	53,8	99,0	47,2	97,1	42,7	94,8	39,7	92,3	38,9	89.7
14	62,7	99,9	54,7	99,1	50,0	97,3	46,6	95,1	43.5	92.7
15	71.8	100,0	64,2	99,9	57,3	99,2	53,4	97,5	48,5	95,5
16			73.5	100,0	65,3	99,9	60,3	99,3	54,4	97,7
17					73,2	100,0	65,8	99,9	61,6	99,4
18							74,5	100,0	68,1	99,9
19									75,7	100,0

[6] Tabel pärineb teosest [19] , lk.604-610.

Tabel 1.6A (järg).

x	$n = 20$		$n = 21$		$n = 22$		$n = 23$		$n = 24$	
	$\underline{p}_x$	$\overline{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\overline{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\overline{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\overline{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\overline{p}_x$
0	0,0	23,3	0,0	22,3	0,0	21,4	0,0	20,3	0,0	19,3
1	0,1	29,9	0,1	28,4	0,1	27,4	0,0	26,4	0,0	25,9
2	0,6	37,5	0,5	36,6	0,5	34,5	0,4	32,6	0,4	31,4
3	2,2	44,0	2,1	41,2	2,0	39,7	1,9	38,8	1,8	38,6
4	4,3	50,0	4,1	46,6	3,9	45,4	3,7	45.2	3,5	42,7
5	6,9	56,0	6,5	53,4	6,2	50,5	5,9	50,0	5,6	46,9
6	9,7	60,1	9,2	58,8	8,8	54,9	8,3	54,8	8,0	53,1
7	12,9	64,0	12,2	63,4	11,6	60,3	11,1	59,3	10,5	57,3
8	16,3	70,1	15,4	66,2	14,6	65,5	14,0	62,2	13,3	61,4
9	20,0	72,7	18,9	71,0	17,9	68,3	17,1	67,4	16,2	63,9
10	23,3	76,7	22,3	74,4	21,4	72,6	20,3	71,1	19,3	68,6
11	27,3	80,0	25,6	77,7	24,2	75,8	22,9	73,4	21,4	72,0
12	29,9	83,7	29,0	81,1	27,4	78,6	26,6	77,1	25,7	74,3
13	36,0	87,1	33,8	84,6	31,7	82,1	28,9	79,7	28,0	78,6
14	39,9	90,3	36,6	89,7	34,5	85,4	32,6	82,9	31,4	80,7
15	44,0	93,1	41,2	90,8	39,7	88,4	37,8	86,0	36,1	83,8
16	50,0	95,7	46,6	93,5	45,1	91,2	41,7	88,9	38,6	86,7
17	56,0	97,8	53,4	95,9	49,5	93,8	45,2	91,7	42,7	89,5
18	62,5	99,4	58,8	97,9	54,6	96,1	50,0	94.1	46.9	92,0
19	70,1	99,9	63,4	99,5	60,3	98,0	54,8	96.3	53,1	94,4
20	76,7	100,0	71,6	99,9	65,5	99.5	61,2	98,1	57,3	96,5
21			77,7	100,0	72,6	99,9	67,4	99.6	61,4	98,2
22					78,6	100,0	73,6	100.0	68,6	99,6
23							79,7	100,0	74,1	100,0
24									80,7	100,0

x	$n = 25$		$n = 26$		$n = 27$		$n = 28$		$n = 29$	
	$\underline{p}_x$	$\overline{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\overline{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\overline{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\overline{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\overline{p}_x$
0	0,0	18.4	0,0	17,6	0,0	16,9	0,0	16,4	0,0	16,0
1	0,0	26,1	0,0	24,9	0,0	23,8	0,0	22,8	0,0	21,9
2	0,4	30,5	0.4	29,8	0,3	30,0	0,3	28,7	0,3	27,6
3	1,7	36,6	1,7	34,9	1,6	33,3	1,6	32,5	1,4	31,7
4	3,4	40,5	3,2	39,4	3,1	38,5	3,0	38,3	2,9	36,8
5	5,4	45,2	5,2	44,2	5,0	43,9	4,8	41,9	4,6	40,1
6	7,6	50,0	7,3	48,7	7,0	47,8	6,7	45,4	6,5	43.9
7	10,1	54,8	9,6	52,7	9,3	52,2	8,9	50,0	8,6	47,8
8	12,7	59,5	12,3	56,4	11,7	56,1	11.2	54,6	10,8	52,2
9	15,5	63.4	14,9	59,8	14.2	58,8	13,7	58,1	13,2	56,1
10	18,4	65,6	17,6	65,1	16.9	61,9	16,3	61,7	15,6	59.9
11	20,4	69,5	19,4	67,8	18.4	66,7	17,3	63,7	16,7	63,2
12	24,4	73.9	23,3	70,3	22,3	70,0	21,4	66,5	20,6	65,7
13	26,1	75,6	24,9	75,1	23.8	71,7	22,8	71,3	21,9	67,9
14	30.5	79,6	29,7	76,7	28,3	76,2	27,1	72,9	26,0	72,4
15	34,4	81,6	32,2	80,6	30,0	77,7	28,7	77,2	27,6	74,0
16	36,6	84.5	34,9	82,4	33,3	81,6	33,5	78,6	32,1	78,1
17	40,5	87,3	40,2	85.1	38,1	83,1	36,3	82,7	34,3	79,4
18	45,2	89,9	43.6	87,7	41,2	85,8	38,3	83,7	36,8	83,3
19	50,0	92,4	47,3	90,4	43,9	88,3	41,9	86,3	40,1	84,4
20	54.8	94,6	51,3	92,7	47,8	90,7	45,4	88,8	43,9	86,8
21	59,5	96,6	55,8	94,8	53,2	93,0	50,0	91,1	47.8	89,2
22	63,4	98,3	60,6	96,8	56,1	95,0	54,6	93,3	52,2	91,4
23	69,5	99,6	65,1	98,3	61,5	96,9	58,1	95,2	56,1	93,5

Tabel 1.6A (järg).

x	$n = 25$ $\underline{p}_x$	$n = 25$ $\overline{p}_x$	$n = 26$ $\underline{p}_x$	$n = 26$ $\overline{p}_x$	$n = 27$ $\underline{p}_x$	$n = 27$ $\overline{p}_x$	$n = 28$ $\underline{p}_x$	$n = 28$ $\overline{p}_x$	$n = 29$ $\underline{p}_x$	$n = 29$ $\overline{p}_x$
24	73,9	100,0	70,2	99,6	66,7	98,4	61,7	97,0	59,9	95,4
25	91,6	100,0	75,1	100,0	70,0	99,7	67,5	98,4	63,2	97,1
26			82,4	100,0	76,2	100,0	71,3	99,7	68,3	98,6
27					83,1	100,0	77,2	100,0	72,4	99,4
28							83,6	100,0	78,1	100,0
29									80,4	100,0

x	$n = 30$ $\underline{p}_x$	$n = 30$ $\overline{p}_x$	$n = 31$ $\underline{p}_x$	$n = 31$ $\overline{p}_x$	$n = 32$ $\underline{p}_x$	$n = 32$ $\overline{p}_x$	$n = 33$ $\underline{p}_x$	$n = 33$ $\overline{p}_x$	$n = 34$ $\underline{p}_x$	$n = 34$ $\overline{p}_x$
0	0,0	16,2	0,0	15,8	0,0	15,3	0,0	14,8	0,0	14,5
1	0,0	21,1	0,0	20,3	0,0	19,7	0,0	19,0	0,0	18,7
2	0,3	26,5	0,3	25,5	0,2	24,6	0,2	23,8	0,2	23,1
3	1,4	31,0	1,3	30,9	1,3	29,8	1,2	28,8	1,2	27,8
4	2,8	35,3	2,7	33,9	2,5	32,6	2,5	32,8	2,4	31,6
5	4,4	38,7	4,3	38,0	4,2	37,4	4,0	37,0	3,9	35,7
6	6,2	43,0	6,1	43,1	5,9	41,5	5,6	39,9	5,4	38,4
7	8,3	46,9	8,0	46,4	7,7	44,5	7,4	42,9	7,2	41,9
8	10,4	50,4	10,1	50,0	9,7	47,8	9,4	46,2	9,1	45,0
9	12,7	53,8	12,2	53,6	11,8	52,2	11,4	50,0	11,1	48,6
10	15,1	57,0	14,5	56,9	14,0	55,5	13,4	53,8	13,1	51,8
11	16,2	61,3	15,8	58,9	15,3	58,5	14,8	57,1	14,5	55,0
12	19,7	64,7	19,0	62,0	18,3	61,0	17,6	60,1	17,0	58,1
13	21,1	67,1	20,3	66,1	20,0	63,3	19,6	63,0	18,7	61,6
14	24,9	69,3	24,0	69,1	23,0	67,4	22,1	64,8	21,2	64,3
15	26,5	73,5	25,5	70,5	24,6	70,2	23,8	67,2	23,1	66,3
16	30,7	75,1	29,5	74,5	28,3	71,7	27,2	71,2	26,2	68,4
17	32,9	78,9	30,9	76,0	29,8	75,4	28,8	72,8	27,0	73,0
18	35,3	80,3	33,9	79,7	32,6	77,0	32,8	77,2	31,6	73,8
19	38,7	83,8	38,0	81,0	36,7	80,0	35,2	77,9	33,7	76,9
20	43,0	84,9	41,1	84,2	39,0	81,7	37,0	80,4	35,7	78,8
21	46,2	87,3	43,1	85,5	41,5	84,7	39,9	82,4	38,4	81,3
22	49,6	89,6	46,4	87,8	44,5	86,0	42,9	85,2	41,9	83,0
23	53,1	91,7	50,0	89,9	47,8	88,2	46,2	86,6	45,0	85,5
24	57,0	93,8	53,6	92,0	52,2	90,3	50,0	88,6	48,2	86,9
25	61,3	95,6	56,9	93,9	55,5	92,3	53,8	90,6	51,4	88,9
26	64,7	97,2	62,0	95,7	58,5	94,1	57,1	92,6	55,0	90,9
27	69,0	98,6	66,1	97,3	62,6	95,8	60,1	94,4	58,1	92,8
28	73,5	99,7	69,1	98,7	67,4	97,5	63,0	96,0	61,6	94,6
29	78,9	100,0	74,5	99,7	70,2	98,7	67,2	97,5	64,3	96,1
30	83,8	100,0	79,7	100,0	75,4	99,8	71,2	98,8	68,4	97,6
31			84,2	100,0	80,3	100,0	76,2	99,8	72,2	98,8
32					84,7	100,0	81,0	100,0	76,9	99,8
33							85,2	100,0	81,3	100,0
34									85,5	100,0

Tabel 1.6A (järg).

x	$n = 35$		$n = 36$		$n = 37$		$n = 38$		$n = 39$	
	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$	$\underline{p}_x$	$\bar{p}_x$
0	0,0	14,0	0,0	13,7	0,0	13,4	0,0	13,0	0,0	12,7
1	0,0	18,3	0,0	17,9	0,0	17,6	0,0	17,1	0,0	17,6
2	0,2	22,7	0,2	22,2	0,2	21,8	0,2	21,5	0,2	21,6
3	1,2	26,9	1,1	26,0	1,1	25,3	1,1	24,8	1,1	24,4
4	2,3	31,1	2,3	30,8	2,2	29,9	2,2	28,9	2,1	28,1
5	3,7	34,5	3,6	33,4	3,5	32,5	3,4	31,8	3,3	31,3
6	5,3	37,6	5,2	36,8	5,0	36,1	4,9	36,1	4,7	35,0
7	7,0	41,1	6,8	41,2	6,6	39,8	6,4	38,6	6,2	37,3
8	8,8	44,9	8,5	43,9	8,3	42,4	8,1	41,0	7,9	40,3
9	10,7	48,4	10,4	46,7	10,1	45,2	9,8	43,9	9,5	43,2
10	12,7	51,6	12,3	50,0	12,0	47,9	11,6	47,0	11,3	46,1
11	14,0	54,0	13,7	53,3	13,4	52,1	13,0	50,0	12,7	49.0
12	16,4	56,6	16,0	56,1	15,4	54,8	15,0	53,0	14,5	51,8
13	19,0	58,9	18,3	58,8	17,9	57,6	17.3	56,1	16,8	54,1
14	20,5	62,4	19,7	60,6	19,1	60,2	18,3	59,0	17,6	56,8
15	22,7	65,5	22,2	63,2	21,8	62,1	21,3	61,4	20,7	59,7
16	25,2	67,9	24,3	66,6	23,5	64,2	22,3	63,9	21,6	62,7
17	26,9	69,2	26,0	69,2	25,3	67.5	24,8	65,5	24,4	65,0
18	30,8	73,1	29,4	70,6	28,4	70,1	27,5	68,2	26,4	66,7
19	32,1	74,8	30,8	74,0	29,9	71,6	28,9	71,1	28,1	68,7
20	34,5	77,3	33,4	75,7	32,5	74,7	31,8	72,5	31,3	71,9
21	37,6	79,5	36,8	77,8	35,8	76,5	34,5	75,2	33,3	73,6
22	41,1	81,0	39,4	80,3	37,9	78,2	36,1	77,7	35,0	75,6
23	43,4	83,6	41,2	81,7	39,8	80,9	38,6	78,7	37,3	78,4
24	46,0	86,0	43,9	84,0	42,4	82,1	41,0	81,7	40,3	79,3
25	48,4	87,3	46,7	86,3	45,2	84,6	43,9	82,7	43,2	82,3
26	51,6	89,3	50,0	87,7	47,9	86,6	47,0	85,0	45,9	83,2
27	55,1	91,2	53,3	89,6	52,1	88,0	50,0	87,0	48,2	85,5
28	58,9	93,0	56,1	91,5	54,8	89,9	53,0	88,4	51,0	87,3
29	62,4	94,7	58,8	93,2	57,6	91,7	56,1	90,2	53,9	88,7
30	65,5	96,3	63,2	94,8	60,2	93,4	59,0	91,9	56,8	90,5
31	68,9	97,7	66,6	96,3	63,9	95,0	61,4	93,6	59,7	92,1
32	73,1	98,8	69,2	97,7	67,5	96,5	63,9	95,1	62,7	93.8
33	77,3	99,8	74,0	98,9	70,1	97,8	68,2	96,6	65,0	95,3
34	81,7	100,0	77,8	99,8	74,7	98,9	71,1	97.8	68,7	96,7
35	86,0	100,0	82,1	100,0	78,2	99,8	75,2	98,9	71,9	97,9
36			86,3	100,0	82,4	100,0	78,5	99,8	75,6	98,9
37					86,6	100,0	82,9	100,0	78,4	99,8
38							87,0	100,0	82,4	100,0
39									87,3	100,0

Tabel 1.6A (järg).

x	$n = 40$ $\underline{p}_x$	$n = 40$ $\bar{p}_x$	$n = 41$ $\underline{p}_x$	$n = 41$ $\bar{p}_x$	$n = 42$ $\underline{p}_x$	$n = 42$ $\bar{p}_x$	$n = 43$ $\underline{p}_x$	$n = 43$ $\bar{p}_x$	$n = 44$ $\underline{p}_x$	$n = 44$ $\bar{p}_x$	$n = 45$ $\underline{p}_x$	$n = 45$ $\bar{p}_x$
0	0,0	12,4	0,0	12,2	0,0	11,9	0,0	11,7	0,0	11,4	0,0	11,1
1	0,0	17,1	0,0	16,6	0,0	16,2	0,0	15,8	0,0	15,4	0,0	15,0
2	0,2	21,1	0,2	20,4	0,2	20,0	0,1	19,4	0,1	18,9	0,1	18,4
3	1,1	24,0	1,1	23,7	1,0	23,8	1,0	23,2	1,0	22,6	1,0	22,0
4	2,1	27,3	2,0	26,5	2,0	25,8	1,9	25,4	1,9	25,0	1,8	24,1
5	3,2	31,0	3,2	30,8	3,1	29,9	3,1	29,1	3,0	28,3	2,9	27,6
6	4,6	33,9	4,4	33,0	4,4	32,1	4,2	31,3	4,2	30,9	4,1	30,4
7	6,1	36,4	6,0	35,8	5,8	35,1	5,6	35,4	5,4	34,5	5,3	33,6
8	7,6	39,6	7,4	39,0	7,2	38,6	7,1	37,6	6,9	36,6	6,7	35,6
9	9,3	43,4	9,1	42,2	8,8	41,0	8,6	39,8	8,4	38,8	8,2	38,0
10	11,0	46,0	10,7	44,6	10,4	43,3	10,2	42,1	10,0	41,5	9,7	40,9
11	12,4	48,5	12,2	47,1	11,9	45,7	11,7	44,4	11,4	44,1	11,1	44,2
12	14,1	51,5	13,7	50,0	13,3	48,1	13,0	47,4	12,6	46,8	12,3	46,6
13	16,3	54,0	15,8	52,9	15,4	51,9	15,1	50,0	14,7	49,1	14,3	48,8
14	17,1	56,6	16,6	55,4	16,2	54,3	15,8	52,6	15,4	51,7	15,0	51,2
15	20,6	58,1	19,5	57,8	19,0	56,7	18,5	55,6	18,0	53,8	17,5	53,6
16	21,1	60,4	20,4	59,9	20,0	59,0	19,4	57,9	18,9	55,9	18,4	55,8
17	24,0	63,6	23,5	61,6	22,9	61,4	22,2	60,2	21,6	59,0	21,1	56,7
18	25,6	66,1	24,9	64,2	23,8	62,9	23,2	62,4	22,6	61,2	22,0	59,2
19	27,3	67.9	26,5	67,0	25,8	64,9	25,4	64,6	25,0	63,4	24,1	62,0
20	30,5	69,5	29,6	69,2	28,7	67,9	27,9	65,8	27,0	65,5	26,2	64,4
21	32,1	72,7	30,8	70,4	29,9	70,1	29,1	68,7	28,3	66,8	27,6	66,4
22	33,9	74,4	33,0	73,5	32,1	71,3	31,3	70,9	30,9	69,1	30,4	67,8
23	36,4	76,0	35,8	75,1	35,1	74,2	34,2	72,1	33,2	71,7	32,2	69,6
24	39.6	78,9	38,4	76,5	37,1	76,2	35,4	74,6	34,5	73,0	33,6	72,4
25	41,9	79,4	40,1	79,6	38,6	77,1	37,6	76,8	36,6	75,0	35,6	73,8
26	43,4	82,9	42,2	80,5	41,0	80,0	39,8	77,8	38,8	77,4	38,0	75,9
27	46,0	83,7	44,6	83,4	43,3	81,0	42,1	80,6	41,0	78,4	40,8	78,0
28	48,5	85,9	47,1	84,2	45,7	83,8	44,4	81,5	44,1	81,1	43,3	78,9
29	51,5	87,6	50,0	86,3	48,1	84,6	47,4	84,2	46,2	82,0	44,2	81,6
30	54,0	89,0	52,9	87,8	51,9	86,7	50,0	84,9	48,3	84,6	46,4	82,5
31	56,6	90,7	55,4	89,3	54,3	88,1	52,6	87,0	50,9	85,3	48,8	85,0
32	60,4	92,4	57,8	90,9	56,7	89,6	55,6	88,3	53,2	87,4	51,2	85,7
33	63,6	93,9	61,0	92,6	59,0	91,2	57,9	89,8	55,9	88,6	53,4	87,7
34	66,1	95,4	64,2	94,0	61,4	92,9	60,2	91,4	58,5	90,0	55,8	88,9
35	69,0	96,8	67,0	95,6	64,9	94,2	62,4	92,9	61,2	91,6	59,1	90,3
36	72,7	97,9	69,2	96.8	67,9	95,6	64,6	94,4	63,4	93,1	62,0	91,8
37	76,0	98,9	73,5	98,0	70,1	96,9	68,7	95,8	65,5	94,6	64,4	93,3
38	78,9	99,8	76,3	98,9	74,2	98,0	70,9	96,9	69,1	95,8	66,4	94,3
39	82,9	100,0	79,6	99,8	76,2	99,0	74,6	98,1	71,7	97,0	69,6	95,9
40	87,6	100,0	83,4	100,0	80,0	99,8	76,8	99,0	75,0	98,1	72,4	97,1
41			87,8	100,0	83,8	100,0	80,6	99,9	77,4	99,0	75,9	98,2
42					88,1	100,0	84,2	100,0	81,1	99,9	78,0	99,0
43							88,3	100,0	84,6	100,0	81,6	99,9
44									88,0	100,0	85,0	100,0
45											88,9	100,0

Tabel 1.6A(järg).

x	$n = 46$		$n = 47$		$n = 48$		$n = 49$	
	p_x	$\bar{p}_x$	p_x	$\bar{p}_x$	p_x	$\bar{p}_x$	p_x	$\bar{p}_x$
0	0,0	10,9	0,0	10,7	0,0	10,5	0,0	10,3
1	0,0	14,6	0,0	14,3	0,0	14,0	0,0	13,7
2	0,1	18,0	0,1	17,5	0,1	17,2	0,1	16,8
3	0,9	21,5	0,8	21,0	0,8	20,5	0,8	20,0
4	1,7	24,1	1,7	24,5	1,6	23,9	1,6	23,3
5	2,8	27,0	2,7	26,3	2,7	25,7	2,6	25,3
6	4,0	29,9	3,9	30,0	3.8	29,3	3,7	28,6
7	5,2	32,7	5,1	31,9	5,1	31,2	4,9	30,4
8	6,6	34,8	6,4	34,2	6,3	33,7	6 2	33,2
9	8,0	37,6	7,8	37,8	7,6	36.9	7,4	36,0
10	9,4	40,9	9,2	39,9	9,1	38,9	8,9	38,0
11	10,9	43,1	10,7	42,0	10,5	40,9	10,3	39,9
12	12,0	45,2	11,7	44,1	11,4	43,0	11,3	42,3
13	14.0	47,4	13,2	46,2	13,4	45,3	13,1	44,8
14	14,6	50,0	14,3	48,3	14,0	47.5	13,7	46,9
15	17,1	52,6	16,7	51,7	16,4	50,0	16,0	49,1
16	18,0	54,8	17,5	53,8	17,2	52,5	16,8	51,2
17	20,5	56,9	20,1	55,9	19,6	54.7	19,1	52,3
18	21,5	59,1	21.0	58,0	20,5	57,0	20,0	55,2
19	24,1	60,5	23,6	60.1	23,2	59,1	22,5	57,7
20	25,2	62,4	24,5	62,2	23,9	61,1	23,3	60,1
21	27,0	65.2	26,3	63,6	25.7	63,1	25,3	62,0
22	29,8	67,3	29,1	65,8	28,2	64,3	27,5	64,0
23	31,1	68,9	30,0	68,1	29,3	66,3	28,6	65,5
24	32,7	70,2	31,9	70.0	31,2	68.8	30,4	66,8
25	34,8	73,0	34.2	70,9	33,7	70,7	33,2	69,6
26	37,6	74,8	36,4	73,7	35,6	71.8	34,5	71,4
27	39,5	75,9	37,8	75,5	36,9	74,2	36,0	72,5
28	40,9	78,5	39,9	76,4	38,9	76,1	38,0	74,7
29	43,1	79,5	42,0	79,0	40,9	76,8	39,9	76,7
30	45,2	82,0	44,1	79,9	43,0	79,5	42,3	77,5
31	47,4	82,9	46,2	82,5	45,3	80,4	44,8	80,0
32	50,0	85,4	48,3	83,3	47,5	82,9	47,7	80,9
33	52,6	86,0	51,7	85,7	50,0	83,6	48,8	83,2
34	54,7	88,0	53,8	86,8	52,5	86,0	50,9	84,0
35	56,8	89,1	55,9	88,3	54,7	86,6	53,1	86,3
36	59,1	90.6	58,0	89,3	57,0	88,6	55,2	86,9
37	62,4	92,0	60,1	90,8	59,1	89,5	57,7	88,7
38	65,2	93,4	62,2	92,2	61,1	90,9	60,1	89,7
39	67,3	94.8	65,8	93,6	63,1	92,4	62,0	91,1
40	70,1	96.0	68,1	94.9	66,3	93,7	64,0	92,6
41	73,0	97,2	70,0	96,1	68,8	94,9	66,8	93,8
42	75,9	98,3	73,7	97,3	70,7	96,2	69,6	95,1
43	78,5	99,1	75,5	98,3	74,2	97,3	71,4	96,3
44	82,0	99,9	79,0	99,2	76,1	98,4	74,7	97,4
45	85,4	100,0	82,5	99,9	79,5	99,2	76,7	98,4
46	89,1	100,0	85,7	100,0	82,8	99,9	80,0	99,7
47			89,3	100.0	86,0	100,0	83,2	99,9
48					89,5	100,0	86.3	100,0
49							89,7	100,0

Tabel 1.6A (järg).

x	$n = 50$ $\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$n = 60$ $\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$n = 70$ $\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$n = 80$ $\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$n = 90$ $\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$
0	0,0	10,1	0,0	8,5	0,0	7,3	0,0	6,4	0,0	5,7
1	0,0	14,0	0,0	11,8	0,0	10,2	0,0	9,0	0,0	8,0
2	0,3	17,2	0,3	14,5	0,2	12,6	0,2	11,1	0,2	9,9
3	0,9	20,3	0,7	17,2	0,6	14,9	0,5	13,1	0,5	11,7
4	1,7	23,1	1,4	19,6	1,2	16,9	1,0	14,9	0,9	13,4
5	2,6	25,8	2,2	21,9	1,9	18,9	1,6	16,7	1,5	14,9
10	8,8	38,1	7,4	32,4	6,2	28,1	5,4	24,9	4,8	22,4
15	14,9	49,0	12,3	41,8	10,4	36,4	9,0	32,3	8,0	29,0
20	22,9	59,1	18,7	50,7	15,8	44,3	13,7	39,4	12,1	35,3
25	31,5	68,5	25,6	59,0	21,7	51,8	18,8	46,1	16,5	41,5
30	40,9	77,1	33,1	66,9	27,8	58,9	24,1	52,5	21,2	47,3
35	51,0	85,1	41,0	74,4	34,3	65,7	29,6	58,7	26,0	53,0
40	61,9	92,1	49,3	81,3	41,4	72,2	35,4	64,6	31,0	58,5
45	74,2	97,8	58,2	87,8	48,2	78,3	41,3	70,4	36,2	63,8
50	89,9	100,0	67,6	93,5	55,7	84,2	47,5	75,9	41,5	69,0
55			78,1	97,8	63,6	89,6	53,9	81,2	47,0	74,0
60			91,5	100,0	71,9	93,8	60,6	86,3	52,7	78,8
65					81,1	98,1	67,7	91,0	58,5	83,5
70					92,7	100,0	75,1	94,6	64,7	87,9
75							83,3	98,4	71,0	92,0
80							93,6	100,0	77,6	95,2
85									85,1	98,5
90									94,3	100,0

x	$n = 100$ $\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$n = 150$ $\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$n = 200$ $\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$n = 300$ $\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$n = 500$ $\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$
0	0,0	5,2	0,0	3,5	0,0	2,6	0,0	1,8	0,0	1,1
1	0,0	7,2	0,0	4,9	0,0	3,7	0,0	2,5	0,0	1,5
2	0,1	8,9	0,1	6,0	0,1	4,6	0,0	3,1	0,0	1,8
3	0,4	10,6	0,3	7,1	0,2	5,4	0,1	3,6	0,1	2,2
4	0,8	12,1	0,6	8,2	0,4	6,2	0,3	4,1	0,2	2,5
5	1,3	13,5	0,9	9,2	0,6	6,9	0,4	4,6	0,3	2,8
10	4,3	20,3	2,8	13,7	2,1	10,4	1,4	7,0	0,8	4,2
15	7,2	26,3	4,7	18,0	3,5	13,7	2,3	9,2	1,4	5,5
20	10,9	32,1	7,1	21,9	5,3	16,7	3,5	11,3	2,1	6,8
25	14,8	37,6	9,7	25,9	7,2	19,7	4,7	13,4	2,8	8,1
30	18,9	43,0	12,3	29,6	9,1	22,5	6,0	15,3	3,6	9,3
35	23,2	48,2	15,1	33,2	11,2	25,3	7,3	17,2	4,4	10,4
40	27,6	53,4	17,9	36,9	13,3	28,2	8,7	19,1	5,2	11,6
45	32,3	58,3	20,9	40,4	15,4	30,3	10,1	21,1	6,0	12,8
50	36,9	63,1	23,9	44,0	17,5	33,8	11,5	23,4	6,8	13,9
60	46,6	72,4	29,8	50,7	22,0	39,0	14,3	26,5	8,5	16,3
70	57,0	81,1	36,2	57,4	26,5	44,2	17,4	30,2	10,3	18,5
80	67,9	89,1	42,6	63,8	31,2	49,3	20,4	33,9	12,1	20,7
90	79,7	96,2	49,3	70,2	35,9	54,4	23,5	37,3	13,8	22,8
100	94,8	100,0	56,0	76,2	40,7	59,3	26,5	40,7	15,5	25,0
150			96,5	100,0	66,2	82,5	42,6	57,4	24,9	35,6
200					97,4	100,0	59,3	73,5	34,4	46,0
250							77,7	88,5	44,2	55,8
300							98,2	100,0	54,0	65,6

Tabel 1.6B.

Binomiaaljaotuse B(n,p) tõenäosuse p 95%-lised kahepoolsed usalduspiirid[7] (protsentides)

$$P(\underline{p} \leq p \leq \bar{p}) = 1-\alpha = 0{,}95,$$

$n = 5, 6, \ldots, 50$ (vahe 1); $60, \ldots, 100$ (vahe 10), $150, 200, 300, 500$

$x = 0, 1, \ldots, n.$

x	$n=5$ $\underline{p}_x$	$n=5$ $\bar{p}_x$	$n=6$ $\underline{p}_x$	$n=6$ $\bar{p}_x$	$n=7$ $\underline{p}_x$	$n=7$ $\bar{p}_x$	$n=8$ $\underline{p}_x$	$n=8$ $\bar{p}_x$	$n=9$ $\underline{p}_x$	$n=9$ $\bar{p}_x$
0	0.0	48.5	0,0	40,6	0.0	35,6	0,0	32,5	0,0	29,3
1	2,0	66.5	1,7	59,4	1,4	53,0	1,3	48,1	1,1	43,9
2	10,6	76.5	8,7	73.8	7,3	66,9	6,4	61,2	5,7	65,2
3	23.5	89.4	18,9	81,1	15,9	73,6	13,7	72,2	12,0	66,7
4	33,5	98,0	26,2	91,3	26,4	84,1	22,5	77,5	19,7	71,6
5	51,5	100,0	40,6	98,3	33,1	92,7	27,8	86.3	28,4	80,3
6			59.4	100,0	47,0	98,6	38,8	93,6	33,3	88,0
7					64,4	100,0	51,9	98,7	43,8	94,3
8							67,5	100,0	56,1	98,9
9									76,7	100,0

x	$n=10$ $\underline{p}_x$	$n=10$ $\bar{p}_x$	$n=11$ $\underline{p}_x$	$n=11$ $\bar{p}_x$	$n=12$ $\underline{p}_x$	$n=12$ $\bar{p}_x$	$n=13$ $\underline{p}_x$	$n=13$ $\bar{p}_x$	$n=14$ $\underline{p}_x$	$n=14$ $\bar{p}_x$
0	0,0	26.8	0.0	24.7	0,0	23,4	0.0	21,5	0,0	20,0
1	1,0	40.4	0.9	37.4	0.8	34,8	0,8	32,5	0,8	30,8
2	5,1	51,9	4.5	48.3	4.2	45.4	3,9	42.3	3,6	39.7
3	10.8	62,0	9.7	57.8	8.9	54,5	8,1	50,9	7,5	48,0
4	17.5	70.9	15.8	66.4	14,3	62,3	13,1	57,7	12,2	55,6
5	25.2	74.8	22.5	70,0	20,5	69,8	18,7	65.9	17,3	62,4
6	29.1	82.5	30,0	77.5	23.4	76.6	21,5	72.6	20,0	69,2
7	38.0	89.2	33.6	84,2	31.2	79.5	27,4	78.5	25,1	74,9
8	48,1	94.9	42,2	90,3	37.7	85.7	34,1	81,2	30,8	80,0
9	59.6	99,0	51.7	95.5	45.4	91,1	42,3	86,9	37,6	82,7
10	73,2	100,0	62.6	99.1	54.5	95,8	49,1	91,9	44,4	87,8
11			75,3	100,0	65.2	99.2	57.7	96,1	52,0	92,5
12					76.6	100.0	67,5	99,2	60,3	96,4
13							78.5	100.0	69,2	99,2
14									80,0	100,0

x	$n=15$ $\underline{p}_x$	$n=15$ $\bar{p}_x$	$n=16$ $\underline{p}_x$	$n=16$ $\bar{p}_x$	$n=17$ $\underline{p}_x$	$n=17$ $\bar{p}_x$	$n=18$ $\underline{p}_x$	$n=18$ $\bar{p}_x$	$n=19$ $\underline{p}_x$	$n=19$ $\bar{p}_x$
0	0,0	18.9	0,0	17.7	0.0	16.9	0,0	16,0	0,0	15,2
1	0.8	28.5	0,7	27.1	0.6	25.7	0.6	24.5	0,5	23.3
2	3.3	37.5	3.2	35.5	2.8	33.8	2.8	32,3	2,6	30,7
3	7.0	45.4	6.5	43.3	6.1	40.9	5.8	39.0	5,5	37,5
4	11.3	52.6	10.5	49.9	9.8	47.5	9.3	45,3	8.6	43.4
5	16,0	59.2	14.8	56.7	13.9	53.7	13.1	51.4	12,3	49,1
6	18.9	65.5	17.7	62.4	16.9	59.5	16.0	56.9	15.2	54.5
7	23.2	61.3	21.5	68.1	20.2	65,1	18.8	62.3	17.8	59.7
8	38.7	76.7	26.6	73,4	24.8	70.3	22.4	67.7	21.8	64,6
9	34.5	81.1	31.9	78.5	29.7	75.2	27.8	72.2	26.1	69.4
10	40.8	84.0	37.6	82.3	34.9	79.8	32.3	77.6	30,6	73.9
11	47.4	88.7	43.3	85.2	40.5	83.1	37.7	81.2	35.4	78.2
12	54.6	93.0	50.1	89.5	46.3	86.1	43.1	84.0	40.3	82.2
13	62.5	96.7	56.7	93.5	52.5	90.2	48.6	86.9	45.5	84.8
14	71.5	99.2	64.5	96.8	59.1	93.9	54.7	90.7	50.9	87.7
15	81.1	100.0	72.9	99.3	66.2	97.2	61.0	94.2	56.6	91.4
16			82.3	100.0	74.3	99.4	67.7	97.2	62.5	94.5
17					83.1	100.0	75.5	99.4	69.3	97.4
18							84.0	100.0	76.7	99.5
19									84.8	100.0

[7] Tabel pärineb teosest [19], lk. 611-617.

Tabel 1.6B (järg).

z	$n = 20$		$n = 21$		$n = 22$		$n = 23$		$n = 24$	
	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$
0	0,0	14,5	0,0	13,9	0,0	13,4	0,0	12,8	0,0	12,4
1	0,5	22,3	0,5	21,4	0,5	20,5	0,5	19,7	0,4	18,9
2	2,5	29,3	2,3	28,1	2,3	26,9	2,2	25,9	2,1	25,0
3	5,3	35,6	4,9	34,1	4,7	32,8	4,5	31,8	4,3	30,5
4	8,3	41,5	7,9	39,8	7,5	38,6	7,2	36,8	6,8	35,5
5	11,6	47,4	11,1	45,2	10,6	43,5	10,1	41,8	9,7	40,3
6	14,5	52,6	13,9	50,0	13,4	48,3	12,8	46,6	12,4	44,9
7	16,8	57,3	15,9	55,1	15,2	53,1	14,4	51,1	13,8	49,4
8	20,6	62,1	19,5	59,8	18,6	57,6	17,7	55,6	16,7	53,7
9	24.6	66,7	23,4	64,6	22,1	61,4	21,1	59,8	20,1	57,8
10	28,9	71,1	27,3	68,6	25,9	66,1	24,6	63,9	23,5	61,8
11	33,3	75,4	31,4	72,7	29,8	70,2	28,3	68,2	27,0	65,7
12	37,9	79,4	35,4	76,6	33,9	74,1	31,8	71,7	30,5	69.5
13	42,7	83,2	41,2	80,5	38,6	77,9	36,1	75,4	34,3	73,0
14	47,4	85,5	44,9	84,1	42,4	81,4	40,2	78,9	38.1	76,5
15	52,6	88,3	50,0	86,1	46,9	84,8	44,4	82,3	42,2	79,9
16	58,5	91,7	54,8	88,9	51,7	86,6	48,9	85,6	46,3	83,3
17	64,4	94,7	60,2	92,1	56,5	89,4	53,4	87,2	50,6	86,2
18	70,7	97,5	65,9	95,1	61,4	92,5	58,2	89,9	55,1	87,6
19	77,7	99,5	71,9	97,7	67,2	95,3	63,2	92,8	59,7	90,3
20	85,5	100,0	78,6	99,5	73,1	97,7	68,2	95,5	64,5	93,2
21			86,1	100,0	79,5	99,5	74,1	97,8	69.5	95,7
22					86,6	100,0	80,2	99.5	75,0	97,7
23							87,2	100,0	81,1	99,6
24									87,6	100,0

z	$n = 25$		$n = 26$		$n = 27$		$n = 28$		$n = 29$	
	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$
0	0.0	11,9	0,0	11,5	0,0	11,0	0,0	10,7	0,0	10,4
1	0,4	18,3	0.4	18,1	0,4	17,3	0,4	16,7	0,3	16,1
2	1,9	24,0	1,9	23,2	1,8	22,4	1,7	21,7	1,7	21,4
3	4,1	29,3	3,9	28,3	3,8	27,4	3,6	26,5	3,5	25,7
4	6.6	34,3	6,3	33,1	6,1	32,0	5,8	30,9	5,6	30,3
5	9.2	38,9	8,9	38,0	8,5	36,5	8,2	35,3	7,9	34.2
6	11,8	43,4	11,5	42.0	11,0	40,6	10,7	39,4	10,4	38,2
7	13.2	47,9	12,6	46,2	12,1	44,7	11,6	43,4	11.2	42,0
8	16,1	52,1	15,4	50,2	14,8	48,6	14,3	47,2	13,7	45,7
9	19,2	55,1	18.1	54,1	17,3	52,5	16,7	49,1	16,1	49,4
10	22,4	59,8	21,5	58,0	20,6	56,1	19,8	55,6	19,1	51,7
11	25,7	63,6	24,6	62,0	23,6	59,8	22,7	58,0	21,4	56,4
12	29,2	66,8	27,9	65,2	26,7	63,5	25,7	61,5	24,7	59,7
13	33,2	70,8	31,3	68,7	30,8	66,7	28,8	64,8	27,6	63,0
14	36,4	74,3	34,8	72,1	33,3	69,2	31,9	68,1	30,3	66,2
15	40,2	77,6	38,0	75,4	36,5	73,3	35,2	71,2	33,8	69,6
16	44,9	80,8	42,0	78,5	40,2	76,4	38,5	74,3	37,0	72,4
17	47,9	83,9	45,9	81,9	43,9	79,4	42,0	77,3	40,3	75,3
18	52,1	86,8	49,8	84,6	47,5	82,7	44,4	80,2	43,6	78,6
19	56,6	88,2	53,8	87,4	51,4	85,2	50,9	83,3	48,3	80,9
20	61,1	90,8	58,0	88,5	55,3	87,9	52,8	85,7	50,6	83,9
21	65,7	93,4	62,0	91,1	59,4	89,0	56,6	88,4	54.3	86,3
22	70,7	95,9	66,9	93,7	63,5	91,5	60,6	89,3	58,0	88,8
23	76,0	98,1	71,7	96,1	68,0	93,9	64,7	91,8	61,8	89,6

Tabel 1.6B (järg).

z	$n = 25$		$n = 26$		$n = 27$		$n = 28$		$n = 29$	
	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$
24	81,7	99,6	76,8	98,1	72,6	96,2	69,1	94,2	65,8	92,1
25	88.1	100.0	81,9	99,6	77,6	98,2	73,5	96.4	69,6	94,4
26			88,5	100,0	82,7	99,6	78.3	98,3	74,3	96,5
27					89,0	100,0	83,3	99.6	78,6	98,3
28							89,3	100,0	83,9	99,7
29									89,6	100,0

z	$n = 30$		$n = 31$		$n = 32$		$n = 33$		$n = 34$	
	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$
0	0.0	10,0	0,0	9,7	0,0	9,6	0,0	9,1	0,0	8,9
1	0,3	15,6	0,3	15,0	0,3	14,6	0.3	14,1	0,3	13,7
2	1,6	20.7	1,6	20,0	1.5	19,4	1,4	18,8	1,4	18,3
3	3.4	24,9	3,3	24,2	3,2	23.5	3,1	22,8	3,0	22,2
4	5,4	29.3	5,3	28,4	5,1	27.5	4,9	26,7	4,8	26.0
5	7,7	33,2	7,4	32,2	7,2	31,3	6,9	30,5	6,7	29,7
6	10,0	37,0	9,7	36,0	9,4	35,4	9,1	34,3	8,7	33,4
7	10,8	40,8	10,4	40,0	10,1	38.7	9,8	37,5	9,4	36,6
8	13.2	44.8	12,8	43,2	12,3	42,0	11,9	40,9	11,5	39,9
9	15.6	48.1	15,0	46.7	14,6	45,4	14,1	44,2	13,7	43,1
10	18.3	51,9	17,4	50,0	17,1	48,7	16,5	47,4	16,0	46,2
11	20,7	55,2	20,0	53,3	19,4	51,9	18,8	49,4	18,3	49,3
12	23,8	58,2	22,9	56,7	22,2	55,0	21.4	53,6	20,7	52,3
13	26,7	61,3	25,6	59,6	24,8	58,1	23,9	56.6	23.2	55.2
14	29,3	64.4	28,4	62,7	27,5	61,3	26,5	59,6	25,7	58,1
15	32,5	67,5	31,4	65,8	30,2	64,6	29,3	62,5	28,3	60,9
16	35,6	70.7	34,3	68,6	33.1	66,9	31,9	65,7	30,9	63,7
17	38,7	73.3	37,3	71,6	35,4	69,8	34,3	68,1	33,4	66,6
18	42,0	76,2	40,0	73,4	38,7	72,5	37,5	70,7	36,3	69,1
19	44,8	79,3	43,2	77,1	41,9	75,2	40,4	73,5	39,1	71,7
20	48,1	81,7	46,7	80.0	45,0	77,8	43,4	76,1	41,9	74,3
21	51,9	84,3	50,0	82,6	48,1	80,4	46,4	78,6	44,8	76,8
22	55.2	86,8	53,3	85,0	51,3	82,9	50,6	81.2	47,7	79,3
23	59,2	89,2	56,8	87,2	54,6	85,4	52,6	83,5	50,7	81,7
24	63,0	90,0	60,3	89,6	58,0	87,7	55,8	85,9	53,8	84,0
25	66,8	92,3	64,0	90,3	61,3	89,9	59,1	88,1	56,9	86,3
26	70,7	94,6	67,8	92,6	64,6	90,6	62,5	90,2	60,1	88,5
27	75,1	96,6	71,6	94,7	68,7	92,8	65,7	90,9	63,4	90,6
28	79,3	98,4	75,8	96,7	72,5	94,9	69,5	93,1	66,6	91,3
29	84,3	99,7	80,0	98,4	76,5	96,8	73,3	95,1	70,3	93,3
30	90,0	100,0	85,0	99,7	80,8	98,5	77,2	96,9	74,0	95,2
31			90,2	100,0	85,4	99,7	81,2	98,6	77,8	97,0
32					90,4	100,0	85,9	99,7	81,7	98,6
33							90,9	100,0	86,3	99,7
34									91,1	100,0

Tabel 1.6B (järg).

z	n = 35		n = 36		n = 37		n = 38		n = 39	
	p_z	$\bar{p}_z$	p_z	$\bar{p}_z$	p_z	$\bar{p}_z$	p_z	$\bar{p}_z$	p_z	$\bar{p}_z$
0	0,0	8,6	0,0	8.5	0,0	8,2	0,0	8,0	0,0	7,8
1	0,3	13,4	0,3	13,0	0,3	12.7	0,3	12,4	0,3	12,0
2	1,4	17,7	1,4	17,2	1,4	16,7	1,3	16,4	1,3	16,0
3	2,9	22.0	2,8	21,4	2.7	20,8	2,6	20,2	2,6	19,8
4	4,6	25,4	4,5	24,8	4.3	24,0	4,2	23,5	4,1	23,0
5	6,5	28,9	6,3	28,6	6,1	27,7	6,0	27,0	5,8	26,3
6	8,5	32,4	8,3	31,6	8,1	30,8	7,8	30,0	7,6	29,4
7	9,2	35,7	8,8	34,7	8,7	33,9	8,4	33,1	8.2	32,3
8	11,2	38,9	10,9	37.9	10,6	37,0	10,3	36,5	10,0	35,5
9	13,3	42,0	12,9	41,4	12,5	40,3	12,2	39,2	11,9	38,2
10	15,5	45,1	15,1	44.3	14,6	43.0	14,2	41,9	13,8	41,0
11	17,7	48,5	17.2	47,1	16,7	45,9	16,3	44,8	15,8	43,8
12	20,1	51,5	19,5	50,0	18,9	48,7	18,4	47,5	17.9	46.5
13	22.0	53,7	21,4	52,9	20,8	51,4	20,2	50,2	19,8	49,1
14	24,9	56,7	24,1	55,7	23,5	54,1	22,7	52,9	22,1	51,7
15	27,4	59,5	26,5	58,6	25,7	57,0	25.0	55,5	24.3	54,3
16	29,9	62,2	28,6	60.8	27,7	59,7	27,0	59,1	26,3	56.8
17	32,4	64,9	31,5	63.4	30,5	61,0	29,6	60,8	28,8	59.3
18	35,1	67,6	34,0	66,0	33,0	64,6	32,0	63,5	31,1	61,8
19	37,8	70,1	36,6	68.5	35,4	67,0	34,4	65,6	33.4	64,5
20	40,5	72,6	39,2	71,4	39.0	69,5	36,5	68,0	35.5	66.6
21	43,3	75,1	41,4	73,5	40.3	72,3	39,2	70,4	38,2	68,9
22	46,3	77,6	44,3	75,9	43,0	74,3	40,9	73,0	40,7	71.2
23	48,5	79,9	47,1	78,6	45,9	76,5	44,5	75,0	43.2	73.7
24	51,5	82,3	50,0	80,5	48,6	79,2	47,1	77,3	45,7	75,7
25	54,9	84,5	52,9	82,8	51,3	81,1	49,8	79,8	48,3	77,9
26	58,0	86,7	55,7	84,9	54,1	83,3	52.5	81,6	50,9	80.2
27	61,1	88,8	58,6	87,1	57,0	85,4	55,2	83.7	53,5	82,1
28	64,3	90,8	62,1	89,1	59,7	87,5	58,1	85,8	56,2	84.2
29	67,6	91,5	65,3	91.2	63,0	89,4	60,8	87,8	59,0	86,2
30	71,1	93,5	68,4	91,7	66,1	91.3	63,5	89,7	61,8	88,1
31	74,6	95,4	71,4	93,7	69,2	91,9	66,9	91,6	64,5	90,0
32	78,3	97,1	75,2	95,5	72,3	93,9	70,0	92,2	67,7	91,8
33	82,3	98,6	78,6	97,2	76,0	95,7	73,0	94,0	70,6	92,4
34	86,6	99,7	82,8	98,6	79,2	97,3	76,5	95,8	73,7	94.2
35	91,4	100,0	87,0	99,7	83,3	98,6	79,8	97,4	77,0	95,9
36			91,5	100,0	87,3	99,7	83,6	98,7	80,2	97,4
37					91,8	100,0	87,6	99,7	84,0	98,7
38							92,0	100,0	88,0	99,7
39									92,2	100,0

Tabel 1.6B (järg).

z	n = 40		n = 41		n = 42		n = 43		n = 44	
	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$
0	0,0	7,6	0,0	7,5	0,0	7,3	0,0	7,1	0,0	6,9
1	0,2	11,8	0,2	11,5	0,2	11,2	0,2	11,0	0,2	10,8
2	1,2	15,6	1,2	15,3	1,2	14,9	1,1	14,6	1,1	14,3
3	2,5	19,2	2,4	18,8	2,4	18,3	2,3	17,9	2,3	17,5
4	4,1	22,4	3,9	21,9	3,8	21,4	3,7	20,9	3,6	20,6
5	5,7	25,7	5,5	25,0	5,4	24,5	5,3	23,9	5,1	23,6
6	7,4	28,7	7,2	28,0	7,1	27,4	7,0	26,8	6,7	25,3
7	8,0	32,0	7,8	30,9	7,6	30,5	7,4	29,7	7,2	29,1
8	9,7	34,8	9,5	33,8	9,2	33,0	9,1	32,4	8,8	31,7
9	11,5	37,3	11,3	36,5	11,0	35,7	10,7	35,0	10,5	34,3
10	13,4	40,1	13,1	39,2	12,8	38,4	12,4	37,6	12,2	37,2
11	15,4	42,8	15,0	41,8	14,6	41,4	14,3	40,4	13,9	39,5
12	17,4	45,5	16,9	44,5	16,5	43,9	16,1	42,9	15,7	41,9
13	19,2	48,0	18,8	47,0	18,4	46,3	17,9	45,2	17,5	44,2
14	21,5	50,6	20,9	50,0	20,4	48,8	19,8	47,6	19,4	46,6
15	23,6	53,1	23,0	52,0	22,4	51,2	21,8	50,0	21,3	48,9
16	25,7	55,6	25,0	54,5	24,4	53,7	23,8	52,4	23,3	51,2
17	28,0	58,1	27,2	56,8	26,5	56,1	25,8	54,8	25,3	53,5
18	30,2	60,5	29,4	59,3	28,6	58,6	27,9	57,1	27,2	55,8
19	32,0	62,9	31,6	61,5	30,5	60,4	29,7	59,6	29,1	58,1
20	34,8	65,2	33,8	63,9	32,9	62,6	32,1	61,4	31,3	60,5
21	37,1	68.0	36,1	66,2	35,1	64,9	34,3	63,6	33,3	62,8
22	39,5	69,7	38,5	68,4	37,4	67,1	36,4	65,7	35,5	64,5
23	41,9	72,0	40,7	70,6	39,6	69,5	38,6	67,9	37,2	66,7
24	44.4	74,3	43,2	72,8	41,4	71,4	40,4	70,3	39,5	68,7
25	46,9	76,4	45,5	75,0	43,9	73,5	42,9	72,1	41,9	70,9
26	49,4	78,5	48,0	77,0	46,3	75,6	45,2	74,2	44,2	72,8
27	52,0	80,8	50,0	79,1	48,8	77,6	47,6	76,2	46,5	74,7
28	54,5	82,6	53,0	81,2	51,2	79,6	50,0	78,2	48,8	76,7
29	57,2	84,6	55,5	83,1	53,7	81,7	52,4	80,2	51,1	78,7
30	59,9	86,6	58,2	85,0	56,1	83,5	54,8	82,1	53,4	80,6
31	62,7	88,5	60,8	86,9	58,6	85,4	57,1	83,9	55,8	82,5
32	65,2	90,3	63,5	88,7	61,0	87,2	59,6	85,7	58,1	84,3
33	68,0	92,0	66,2	90,5	64,3	89,0	62,4	87,6	60,5	86,1
34	71,3	92,6	69,1	92,2	67,0	90,8	65,0	89,3	62,8	87,8
35	74,3	94,3	72,0	92,8	69,5	92,4	67,6	90,9	65,7	89,5
36	77,6	95,9	75,0	94,5	72,6	92,9	70,3	92,6	68,3	91,2
37	80,8	97,5	78,1	96,1	75,5	94,6	73,2	93,0	70,9	92,8
38	84,4	98,8	81,2	97,6	78,6	96,2	76,1	94,8	74,7	93,3
39	88,2	99,8	84,7	98,8	81,7	97,6	79,1	96,3	76,4	94,9
40	92,4	100,0	88,5	99,8	85,1	98,8	82,1	97,7	79,4	96,4
41			92,5	100,0	88,8	99,8	85,4	98,9	82,5	97,7
42					92,7	100,0	89,0	99,8	85,7	98,9
43							92,9	100,0	89,2	99,8
44									93,1	100,0

Tabel 1.6B (järg).

z	$n = 45$		$n = 46$		$n = 47$		$n = 48$		$n = 49$	
	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$	$\underline{p}_z$	$\bar{p}_z$
0	0,0	6,8	0,0	6,7	0,0	6,6	0,0	6,4	0,0	6,3
1	0,2	10,6	0,2	10,3	0,2	10,1	0,2	9,9	0,2	9,7
2	1,1	14,0	1.1	13,7	1,1	13,4	1,1	13,1	1,0	12,9
3	2,2	17,1	2,2	16.8	2,2	16,5	2,1	16,1	2,1	15,8
4	3,5	20,5	3,5	20,0	3,4	19,5	3,3	19,1	3,3	18,7
5	5,1	22,9	4,9	22,5	4,8	21,8	4,7	21.6	4.5	21,2
6	6,5	25,4	6,4	25,5	6,3	25,0	6,1	24,5	6,1	24,0
7	7,1	28.4	6,9	27,9	6,7	27,3	6,6	26,8	6,4	26,2
8	8,6	31,0	8,4	30,4	8,2	29,8	8,1	29,3	7.9	29,3
9	10,2	33,6	10,0	33,3	9,8	32,6	9,5	31,9	9,3	31,3
10	11,9	36,3	11,6	35,6	11,5	34,8	11,1	34,0	10,8	33,5
11	13,6	38,7	13,3	37,8	13,0	37,1	12,6	36,4	12,4	35,7
12	15,3	41,0	15,0	40,1	14,6	39,4	14,3	38,7	14,0	37,9
13	17,1	43,4	16,7	42,5	16,3	41,7	15,9	40,9	15,6	40,6
14	18,9	45,7	18,4	44,9	18.1	44,0	17,7	43,8	17,3	42,7
15	20,5	48,0	20,0	47,1	19,5	46,2	19,1	45,7	18,7	44,8
16	22,7	50,3	22,1	49,3	21,8	48,4	21,1	47,9	20,7	47,0
17	24,6	52.5	24,0	51,5	23,4	50,6	22,9	50,0	22,4	48,8
18	26,6	54.7	25,5	53,7	25,0	52,7	24,5	52,1	24,0	49,2
19	28,4	56.9	27,8	55,8	27,2	54,8	26,6	54,3	26,0	53,0
20	30,5	59,1	29,8	58,0	29.1	56,8	28,5	56,2	27,7	55,2
21	32,5	61,3	31,7	60,1	31,0	59,0	30,3	57,9	29,2	57,3
22	34,6	63,7	33,3	62,2	32.6	61,1	31,9	59,9	31,3	59,4
23	36,3	65,4	35,6	64,4	34,8	62,9	34,0	61,9	33,3	60,9
24	38,7	67,5	37,8	66,7	37,1	65,2	36,1	63,9	35,3	62,8
25	40,9	69,5	39,9	68,3	38.9	67,3	38,1	66,0	37,2	64,7
26	43,1	71,6	42,0	70,2	41,0	69,0	40,1	68,1	39,1	66,7
27	45,3	73,4	44,2	72,2	43,2	70,9	42,1	69,7	40.6	68,7
28	47,5	75,4	46,3	74,5	45,2	72,8	43,8	71.5	42,7	70,8
29	49,7	77,3	48.5	76;0	47,3	75,0	45,7	73,4	44,8	72,3
30	52,0	79,5	50,7	77,9	49,4	76,6	47,9	75,5	47,0	74,0
31	54,3	81,1	52,9	80,0	51,6	78,2	50,0	77,1	50,8	76,0
32	56,6	82,9	55,1	81,6	53,8	80,5	52,1	78,9	51,2	77,6
33	59,0	84,7	57,5	83,3	56,0	81,9	54,3	80,9	53,0	79,3
34	61,3	86.4	59,9	85,0	58,3	83,7	56,2	82,3	55,2	81,3
35	63,7	88,1	62,2	86,7	60,6	85,4	59,1	84,1	57,3	82,7
36	66,4	89,8	64.4	88,4	62,9	87,0	61,3	85,7	59,4	84,4
37	69,0	91,4	66,7	90,0	65,2	88,5	63,6	87,4	62,1	86,0
38	71,6	92,9	69,6	91,6	67,3	90,2	66,0	88,9	64,3	87,6
39	74,6	93,5	72,1	93,1	70,2	91,8	68,1	90,5	66,5	89,2
40	77,1	94,9	74,5	93,6	72,7	93,3	70,7	91,9	68,7	90,7
41	79,5	96,5	77,5	95,1	75,0	93,7	73,2	93,4	70,8	92,1
42	82,9	97,8	80,0	96,5	78,2	95,2	75,5	93,9	73,7	93,6
43	86,0	98,9	83,2	97,8	80,5	96,6	78,4	95,3	76,0	93,9
44	89,4	99,8	86,3	98,9	83,5	97,8	80,9	96,7	78,8	95,5
45	93,2	100,0	89,7	99,8	86,6	98,9	83,9	97,9	81,3	96,7
46			93,3	100,0	89,9	99,8	86,9	98,9	84,2	97,9
47					93,4	100,0	90,1	99,8	87,1	99,0
48							93,6	100,0	90,3	99,8
49									93,7	100,0

Tabel 1.6B (järg).

z	n = 50 p_z	n = 50 $\bar{p}_z$	n = 60 p_z	n = 60 $\bar{p}_z$	n = 70 p_z	n = 70 $\bar{p}_z$	n = 80 p_z	n = 80 $\bar{p}_z$	n = 90 p_z	n = 90 $\bar{p}_z$
0	0,0	7,1	0,0	6,0	0.0	5,1	0,0	4,5	0,0	4,0
1	0,1	10,7	0,1	9,0	0,1	7,7	0,1	6,8	0,1	6,0
2	0,7	13,7	0,6	11,5	0,5	11,0	0,4	8,7	0,4	7,8
3	1,7	16,6	1,4	13,9	1,2	12,0	1,0	10,6	0,9	9,4
4	2,8	19,2	2,3	16,2	2,0	14,0	1,7	12,3	1,5	11,0
5	4,0	21,8	3.3	18,4	2,9	15,9	2,5	14,0	2,2	12,5
10	10,0	33,8	8,3	28,6	7,1	24,8	6,2	21,8	5,5	19,6
15	17,9	44,6	14,7	37,9	12,5	32,8	10,9	29,0	9,6	26,0
20	26,4	54,8	21,7	46,7	18,4	40,6	16,0	35,9	14,1	32,3
25	35,6	64,4	29,1	55,1	24,6	48,0	21,3	42,6	18,9	38,3
30	45,2	73,6	36,8	63,2	31,1	55,2	26,9	49,0	23,7	44,1
35	55,4	82,1	44,9	70,9	37,8	62,2	32,7	55,3	28,7	49,7
40	66.2	90,0	53,3	78,3	44,8	68,9	38,6	61,4	34,0	55,3
45	78,2	96,7	62,1	85,3	52,0	75,4	44,7	67,3	39,3	60,7
50	92,9	100,0	71,4	91,7	59,4	81,6	51,0	73,1	44,7	66,0
55			81,6	96,7	67,2	87,5	57,4	78,7	50,3	71,3
60			94,0	100,0	76,2	92,9	64,1	84,0	55.9	76,3
65					84,1	97,1	71,0	89,1	61,7	81,1
70					94,9	100,0	78,2	93,8	67,7	86,9
75							86,0	97,5	74.6	90,4
80							95,5	100,0	80,4	94,5
85									87,5	97,8
90									96,0	100,0

z	n = 100 p_z	n = 100 $\bar{p}_z$	n = 150 p_z	n = 150 $\bar{p}_z$	n = 200 p_z	n = 200 $\bar{p}_z$	n = 300 p_z	n = 300 $\bar{p}_z$	n = 500 p_z	n = 500 $\bar{p}_z$
0	0,0	3,6	0,0	2,4	0,0	1,8	0,0	1,2	0,0	0,7
1	0,1	5,4	0,0	3,7	0,0	2,8	0,0	1,8	0,0	1,1
2	0,4	7,0	0,2	4,7	0.2	3,6	0,1	2,4	0,1	1,4
3	0,8	8,5	0,5	5,7	0,4	4,3	0,3	2,9	0,2	1,7
4	1,4	9,9	0,9	6,7	0,7	5,0	0.5	3,4	0.3	2,0
5	2,0	11,3	1,3	7,6	1.0	5,7	0,7	3,8	0,4	2,3
10	4,9	17,6	3,1	11,9	2,4	9,0	1,6	6,0	1,0	3,6
15	8,6	23,6	5,7	15,9	4,2	12,1	2,8	8,2	1,7	4,9
20	12,6	29,2	8,3	19,9	6,2	15,1	4,1	10,1	2,5	6,1
25	16,9	34,7	11.1	23,5	8,2	17,8	5,5	12,1	3,3	7,3
30	21,3	39,9	13,9	27,2	10,3	20,7	6,8	13,9	4,1	8,5
35	25,7	44,9	16,8	30.9	12,5	23,5	8,3	15,9	4.9	9,5
40	30,3	50,3	19,8	34,4	14,7	26,3	9,7	17,8	5,8	10,7
45	35,0	55,3	22,8	38,0	16,9	28,9	11,2	19,6	6,6	11,9
50	39,8	60,2	25,9	41,5	19,1	31,6	12,6	21,5	7,5	13,0
60	49,7	69,7	32,5	48,1	23,7	36,7	15,6	25,0	9,3	15,2
70	60,1	78,7	38,5	54,9	28,5	41,9	18,7	28,5	11,1	17,3
80	70,8	87,4	45,1	61,5	33,2	47,1	21,8	32,0	12,9	19,4
90	82,4	95,1	51,9	67,5	38,1	52,2	25,0	35,5	14,7	21,6
100	96,4	100,0	58,5	74,1	42,9	57,1	28,0	39,5	16,5	23,8
150			97,6	100,0	68,4	80,9	44.3	55,7	25,9	34,1
200					98,2	100,0	60,5	72,0	35,5	44,6
250							78,5	87,4	45,6	54,4
300							98,8	100,0	55,4	64,5

Näide 1.3 (tõenäosuse p hindamine; p usalduspiirid).

Uuritakse mingi asula elanike silmade värvust. Juhuslikult valitud vaatlusrühma 44 isiku seas on 8 pruunisilmalist. Küsitakse:

a) Kui suur on tõenäosus selleks, et asulast juhuslikult valitud elanik on pruunisilmaline?

b) Leida pruunisilmaliste inimeste esinemise tõenäosuse 99%-lised usalduspiirid.

c) Leida pruunisilmaliste inimeste esinemise tõenäosuse 95%-lised usalduspiirid.

Lahendus.

$n = 44$.

$x = 8$.

a) Parim hinnang tõenäosusele p on $\tilde{p} = \frac{8}{44} = 18{,}2\ \%$.

b) Tabelist 1.6A leiame 99%-lised usalduspiirid:

$$\underline{p} = 6{,}9\%;\ \bar{p} = 36{,}6\ \%.$$

c) Tabelist 1.6B leiame 95%-lised usalduspiirid:

$$\underline{p} = 8{,}8\%;\ \bar{p} = 31{,}7\%.$$

Seega võime kinnitada (riskides eksida keskmiselt 5-l juhul 100-st), et pruunisilmaliste inimeste protsent on ümmarguselt 9 ja 32 vahel. Öeldes, et pruunisilmaliste inimeste protsent on ümmarguselt 7 ja 37 vahel, riskime eksida vaid ühel juhul 100 sellelaadse väite puhul.

3. Hüpoteeside kontrollimine p kohta.

Usalduspiire saab kasutada ka tõenäosuse p kohta käivate hüpoteeside kontrollimiseks.

Sageli esineb järgmine ülesanne. On tehtud n katset.

Katsetulemus A esines x korda. Nõutakse tõestust (olulisuse nivooga α), et sündmuse A esinemise tõenäosus p erineb mingist antud arvust p_0.

Olulisuse nivoo tähendab siin maksimaalset lubatud eksimise tõenäosust hüpoteesi $p \neq p_0$ vastuvõtmisel.

Ülesande lahendamiseks leiame antud x ja n põhjal $(1-\alpha) \cdot 100\%$-lised usalduspiirid $\underline{p}$ ja $\bar{p}$.

Kui $p_0 < \underline{p}$ või $p_0 > \bar{p}$, siis loeme tõestatuks, et $p \neq p_0$.

Kui $\underline{p} \leq p_0 \leq \bar{p}$, siis tuleb arvestada võimalust $p = p_0$; on aga võimalik, et katseseeria pikendamisel saab tõestada ka hüpoteesi $p \neq p_0$. Seega jääb sel juhul küsimus lahtiseks.

Näide 1.4.

Uuritakse teatava elukutse esindajaid; 100 inimese hulgas on 25 meest ja 75 naist. Küsitakse, kas meeste esinemise tõenäosus p selle elukutse esindajate seas erineb meeste keskmisest osast elanikkonnas $p_0 = 0,4$. Olulisuse nivoo $\alpha = 0,05$.

Lahendus.

Tabelist 1.6B leiame 95%-lised usalduspiirid

$$\underline{p} = 16,9 \; ; \; \bar{p} = 34,7.$$

Et $40 > 34,7$, tuleb olulisuse nivooga 0,05 õigeks lugeda, et $p \neq 0,4$. Sellisel juhul vaatame, kas õnnestub nõutavat hüpoteesi tõestada ka olulisuse nivooga 0,01. Tabelist 1.6A saame

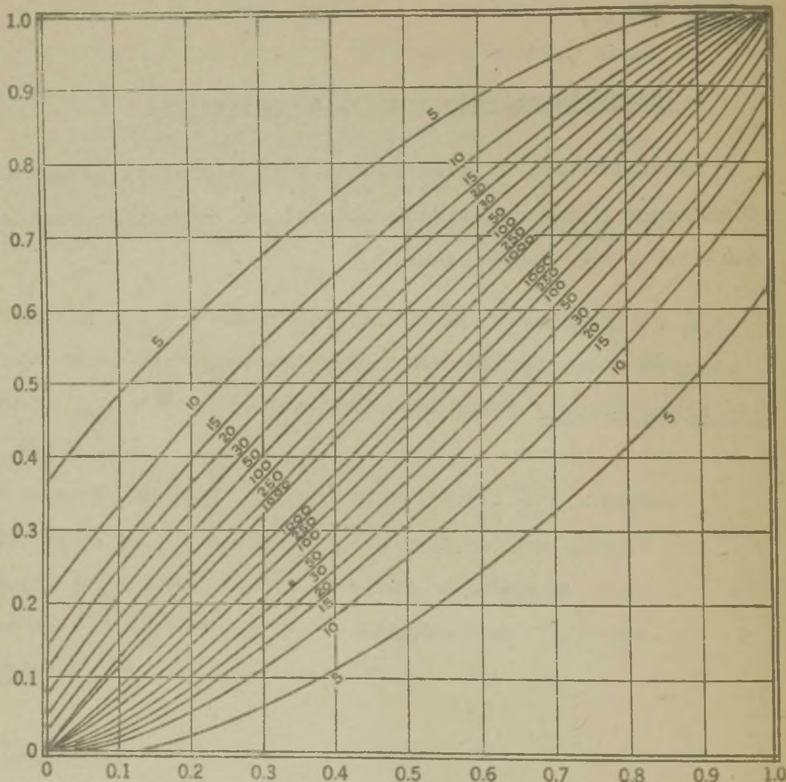
$$\bar{p} = 37,6 < 40.$$

Seega väites, et antud elukutse esindajate seas on meeste protsent keskmisest madalam, riskime eksida vaid tõenäosusega 1/100.

4. p usalduspiiride graafiline määramine.

Tabelite 1.6A ja 1.6B asemel võib binomiaaljaotuse tõenäosuse p usalduspiiride määramiseks kasutada jooniseid 1.4 – 1.7, nn. nomogramme.

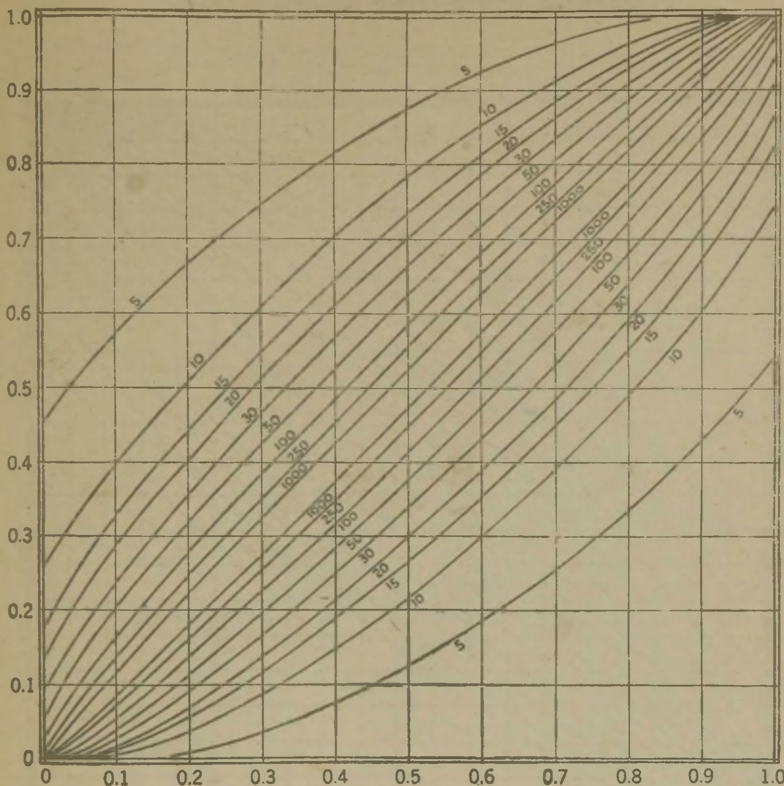
Tõenäosuse p 80%-lised usalduspiirid.[8]



Joonis 1.4.

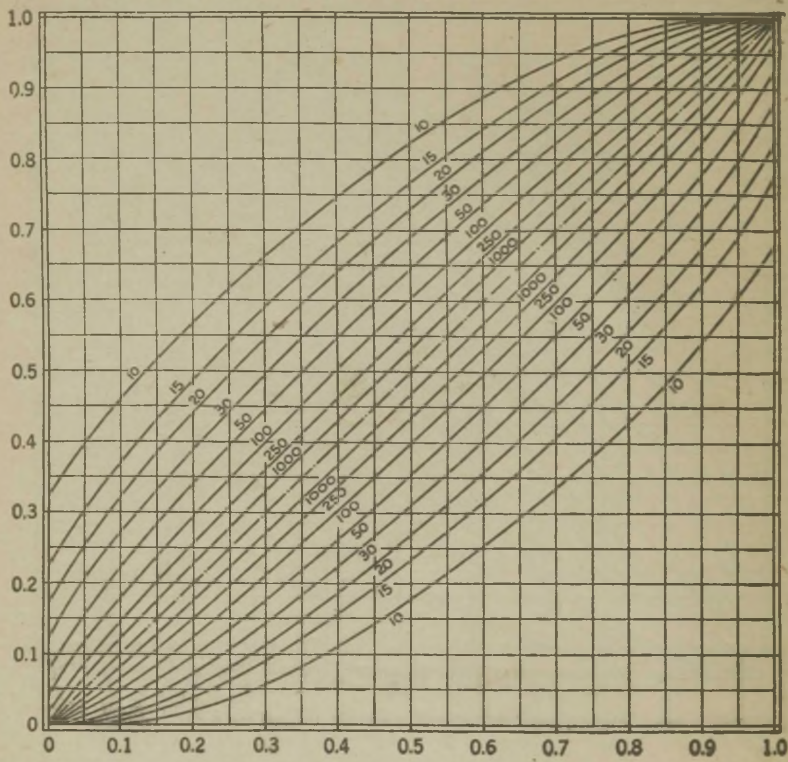
[8] Nomogrammid pärinevad teosest [16], lk.-d 413-416.

Tõenäosuse p 90%-lised usalduspiirid.



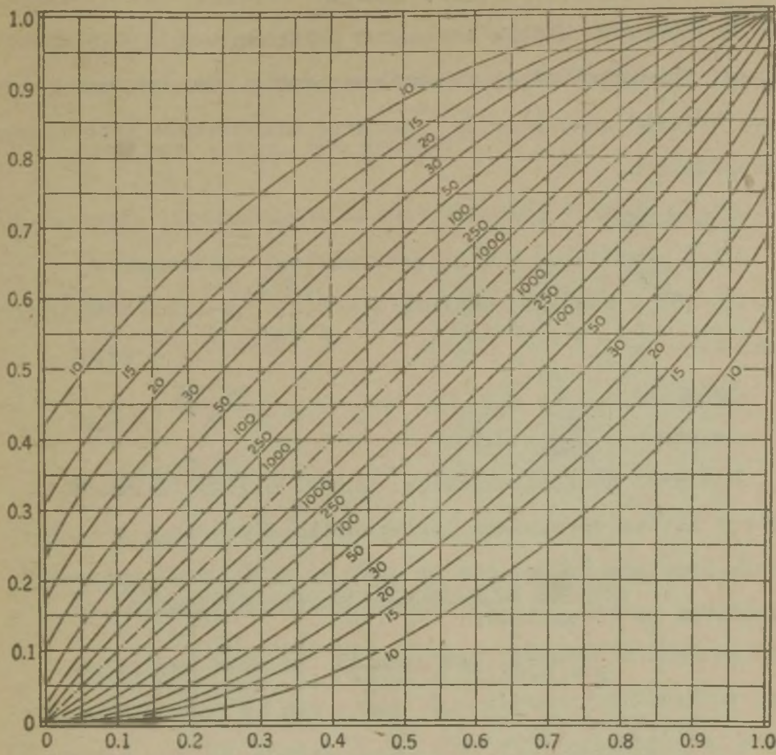
Joonis 1.5.

Tõenäosuse p 95%-lised usalduspiirid.



Joonis 1.6.

Tõenäosuse p 99%-lised usaldusspiirid.



Joonis 1.7.

10

Nende eeliseks tabelite ees on suurem kompaktsus ja võimalus hinnata usalduspiire ka vahepealsete (tabelis puuduvate) n ja x väärtuste puhul.

Horisontaalteljele on kantud p hinnangu $\tilde{p} = \frac{x}{n}$ väärtused. Vertikaalteljel leiame vastavad $\underline{p}$ ja $\bar{p}$ väärtused. Kõverad nomogrammidel vastavad erinevatele katseseeria pikkustele n.

<u>Näide 1.5.</u>

Olgu sooritatud 250 katset, millest tulemusega A lõppes 183. Nõutakse määrata p = P(A) 95%-lised usalduspiirid.

<u>Lahendus.</u>

Leiame $\tilde{p} = \frac{183}{250} = 0,732$.

Määranud horisontaalteljel punkti 0,732, leiame seda punkti läbiva vertikaali lõikepunktid kõveratega n = 250; nende punktide ordinaadid on 0,67 ja 0,78, mis annavadki otsitavad usalduspiirid:

$$\underline{p} = 0,67; \ \bar{p} = 0,78.$$

5. <u>p usalduspiiride ligikaudne määramine (normaaljaotuse abil).</u>

Binomiaaljaotuse usalduspiiride täpne leidmine tabelite 1.6A ja 1.6B abil on võimalik vaid suhteliselt väikeste n ja x väärtuste korral. Suuremate n ja x väärtuste puhul tuleb binomiaaljaotust lähendada tema nn. piirjaotusega. Tuntuim on binomiaaljaotuse lähendamine normaaljaotusega. (Normaaljaotust kirjeldatakse lühidalt käesoleva kogumiku

III peatükis). Kui n on küllalt suur ning p ei ole väga väike (orienteeruvalt $x \approx np \geq 10$), siis on võimalik binomiaaljaotuse tõenäosuse p usalduspiiride arvutamisel kasutada normaaljaotuse keskväärtuse usalduspiire:

arvutame $m \approx x$; $\sigma \approx \sqrt{x\left(\frac{n-x}{n}\right)}$;

(arvutuste lihtsustamiseks võib kasutada tabeli 1.9 abi).

$\underline{m}_{0,95} = x - 1,96\sigma$; $\qquad \bar{m}_{0,95} = x + 1,96\sigma$;

$\underline{m}_{0,99} = x - 2,58\sigma$; $\qquad \bar{m}_{0,99} = x + 2,58\sigma$;

$\underline{p}_{0,95} = \frac{\underline{m}_{0,95}}{n}$; $\qquad \bar{p}_{0,95} = \frac{\bar{m}_{0,95}}{n}$;

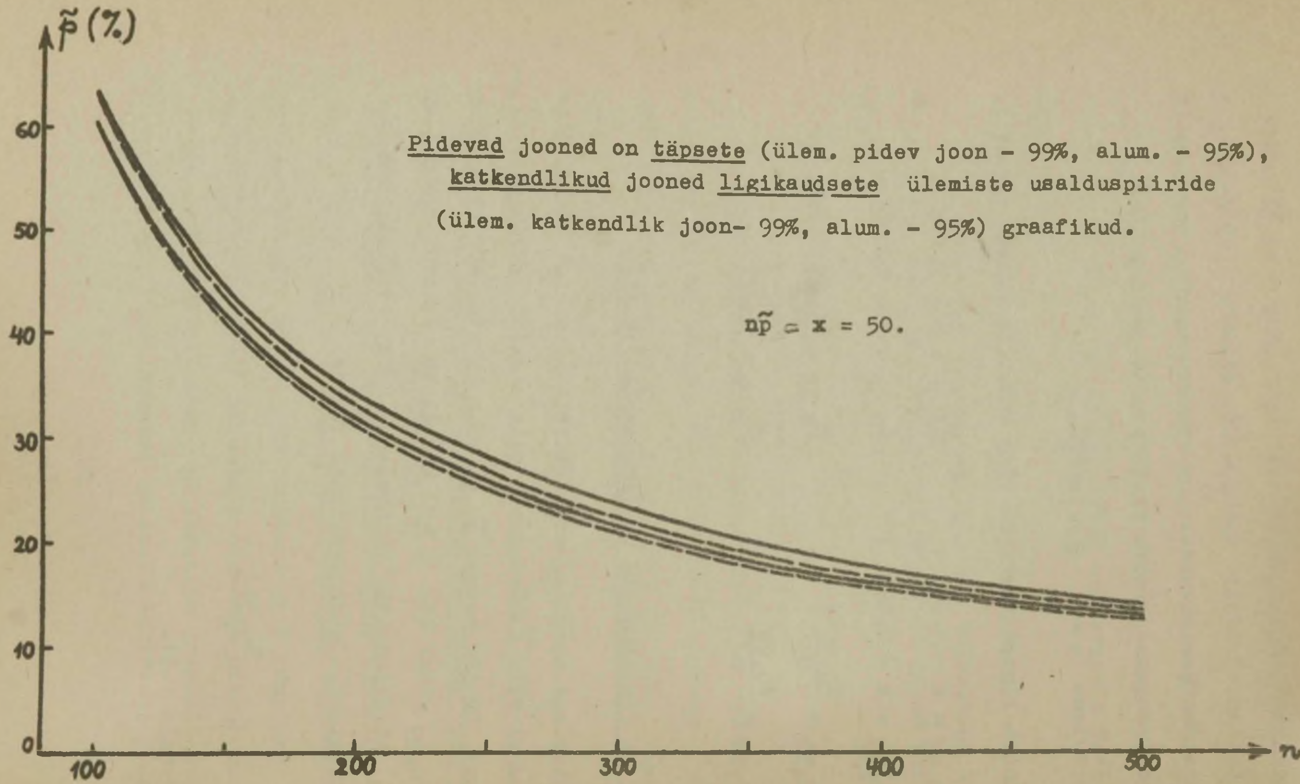
$\underline{p}_{0,99} = \frac{\underline{m}_{0,99}}{n}$; $\qquad \bar{p}_{0,99} = \frac{\bar{m}_{0,99}}{n}$.

6. <u>p ligikaudsete usalduspiiride täpsus.</u>

Tuleb aga märkida, et selliselt arvutatud usalduspiiride puhul võib $\tilde{p} < 0,5$ puhul olla ülemine usalduspiir allahinnatud, ($x < 20$ korral $\bar{p}_{0,95}$ võib olla allahinnatud kuni 2%, $\bar{p}_{0,99}$ kuni 4%; $x > 20$ korral on vastavad arvud 1,5% ja 2%). Allahindamise vältimiseks võib soovitada 95%-liseks ülemiseks usalduspiiriks lugeda

$$\frac{\bar{m}_{0,99}}{n}$$

(vt. joonis 1.8).



Joonis 18.

Binomiaaljaotuse parameetri p ligikaudsete usalduspiiride täpsus (ülemised usalduspiirid).

Näide 1.6.

Teostati 65 katset. Sündmus A esines 17 korda. Leida tõenäosuse p 95%-lised usalduspiirid.

Lahendus.

$n = 65, \ x = 17;$

$m \approx 17;$

$\sigma \approx \sqrt{17 \cdot \frac{48}{65}} = 3{,}54;$

$1{,}96 \cdot 3{,}54 = 6{,}94;$

$2{,}58 \cdot 3{,}54 = 9{,}13;$

$\underline{m} = 17 - 6{,}94 = 10{,}06, \qquad \underline{p} = 15{,}5\%$

$\overline{m} = 17 + 9{,}13 = 26{,}13, \qquad \overline{p} = 40{,}2\%.$

7. p usalduspiiride ligikaudne määramine Fischeri φ-teisenduse abil.

Juhul kui p hinnang $\frac{x}{n}$ on väike, annab normaaljaotus binomiaaljaotusele suhteliselt halva lähendi ning teda ei ole otstarbekas binomiaaljaotuse usalduspiiride arvutamisel kasutada. Sel juhul on sobivam tõenäosuse hinnang teisendada nn. Fischeri φ-teisendusega juhuslikuks suuruseks X, mis on ligikaudu normaaljaotusega:

$$X = \varphi\left(\frac{x}{n}\right) = 2 \arcsin\sqrt{\frac{x}{n}}\ ;$$

$$X \sim N\left(\varphi(p), \sqrt{\frac{1}{n}}\right),$$

kus p on hinnatava tõenäosuse õige väärtus.

Teisendatud suuruse keskväärtuse $\varphi(p)$ usalduspiirid arvutame samuti,nagu punktis 5 normaaljaotuse keskväärtuse usalduspiiride leidmise eeskirja järgi:

$$\underline{\varphi(p)} = \varphi\left(\frac{x}{n}\right) - q_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}}\ , \quad \overline{\varphi(p)} = \varphi\left(\frac{x}{n}\right) + q_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}}\ ,$$

kus $q_{\frac{\alpha}{2}}$ leiame normaaljaotuse N(0,1) jaotusfunktsiooni tabelist; 95%-liste usalduspiiride puhul $q_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$; 99%-liste usalduspiiride puhul $q_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58$.

Tabel 1.7.

Fischeri φ-teisendus.[9]

Funktsiooni $\varphi(p) = 2 \arcsin \sqrt{p}$ väärtused vastavalt protsentides avaldatud p väärtustele.

%	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0,020	0,028	0,035	0,040	0,045	0,049	0,053	0,057	0,060
6,1	0,063	0,066	0,069	0,072	0,075	0,077	0,080	0,082	0,085	0,087
0,2	0,089	0,092	0,094	0,096	0,098	0,100	0,102	0,104	0,106	0,108
0,3	0,110	0,111	0,113	0,115	0,117	0,118	0,120	0,122	0,123	0,125
0,4	0,127	0,128	0,130	0,131	0,133	0,134	0,136	0,137	0,139	0,140
0,5	0,142	0,143	0,144	0,146	0,147	1,148	0,150	0,151	0,153	0,154
0,6	0,155	0,156	0,158	0,159	0,160	0,161	0,163	0,164	0,164	0,166
0,7	0,168	0,169	0,170	0,171	0,172	0,173	0,175	0,176	0,177	0,178
0,8	0,179	1,180	0,182	0,183	0,184	0,185	0,186	0,187	0,188	0,189
0,9	0,190	0,191	0,192	0,193	0,194	0,195	0,196	0,197	0,198	0,199
1	0,200	0,210	0,220	0,229	0,237	0,246	0,254	0,262	0,269	0,277
2	0,284	0,291	0,298	0,304	0,311	0,318	0,324	0,330	0,336	0,342
3	0,348	0,354	0,360	0,363	0,371	0,376	0,382	0,387	0,392	0,398
4	0,403	0,408	0,413	0,418	0,423	0,428	0,432	0,437	0,442	0,448
5	0,451	0,456	0,460	0,465	0,469	0,473	0,478	0,482	0,486	0,491
6	0,495	0,499	0,503	0,507	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532
7	0,536	0,539	0,543	0,546	0,551	0,555	0,559	0,562	0,566	0,570
8	0,574	0,577	0,581	0,584	0,588	0,592	0,595	0,599	0,602	0,606
9	0,609	0,613	0,616	0,620	0,623	0,627	0,630	0,633	0,637	0,640
10	0,644	0,647	0,650	0,653	0,657	0,660	0,663	0,666	0,670	0,673
11	0,676	0,679	0,682	0,686	0,689	0,692	0,695	0,698	0,701	0,704
12	0,707	0,711	0,714	0,717	0,720	0,723	0,726	0,729	0,732	0,735
13	0,738	0,741	0,744	0,747	0,750	0,752	0,755	0,758	0,761	0,764
14	0,767	0,770	0,773	0,776	0,778	0,781	0,784	0,787	0,790	0,793
15	0,795	0,798	0,801	0,804	0,807	0,809	0,812	0,815	0,818	0,820
16	0,823	0,826	0,828	0,831	0,834	0,837	0,839	0,842	0,845	0,847
17	0,850	0,853	0,855	0,858	0,861	0,863	0,866	0,868	0,871	0,874
18	0,876	0,879	0,881	0,884	0,887	0,889	0,892	0,894	0,897	0,900
19	0,902	0,905	0,907	0,910	0,912	0,915	0,917	0,920	0,922	0,925
20	0,927	0,930	0,932	0,935	0,937	0,940	0,941	0,945	0,947	0,950
21	0,952	0,955	0,957	0,959	0,962	0,964	0,967	0,969	0,972	0,974
22	0,976	0,979	0,981	0,984	0,986	0,988	0,991	0,993	0,996	0,998
23	1,000	1,003	1,005	1,007	1,010	1,012	1,015	1,017	1,019	1,022
24	1,024	1,026	1,029	1,031	1,033	1,036	1,038	1,040	1,043	1,045
25	1,047	1,050	1,052	1,054	1,056	1,059	1,061	1,063	1,066	1,068
26	1,070	1,072	1,075	1,077	1,079	1,082	1,084	1,086	1,088	1,091
27	1,093	1,095	1,097	1,100	1,102	1,104	1,106	1,109	1,111	1,113
28	1,115	1,117	1,120	1,122	1,124	1,126	1,129	1,131	1,133	1,135
29	1,137	1,140	1,142	1,144	1,146	1,148	1,151	1,153	1,155	1,157
30	1,159	1,161	1,164	1,166	1,168	1,170	1,172	1,174	1,177	1,179
31	1,182	1,183	1,185	1,187	1,190	1,192	1,194	1,196	1,198	1,200
32	1,203	1,205	1,207	1,209	1,211	1,213	1,215	1,217	1,220	1,222
33	1,224	1,226	1,228	1,230	1,232	1,234	1,237	1,239	1,241	1,243
34	1,245	1,247	1,249	1,251	1,254	1,256	1,258	1,260	1,262	1,264
35	1,266	1,268	1,270	1,272	1,274	1,277	1,279	1,281	1,283	1,285
36	1,287	1,289	1,291	1,293	1,295	1,297	1,299	1,302	1,304	1,306
37	1,308	1,310	1,312	1,314	1,316	1,318	1,320	1,322	1,324	1,326
38	1,328	1,330	1,333	1,335	1,337	1,339	1,341	1,343	1,345	1,347
39	1,349	1,351	1,353	1,355	1,357	1,359	1,361	1,363	1,365	1,367
40	1,369	1,371	1,374	1,376	1,378	1,380	1,382	1,384	1,386	1,388
41	1,390	1,392	1,394	1,396	1,398	1,400	1,402	1,404	1,406	1,408
42	1,410	1,412	1,414	1,416	1,418	1,420	1,422	1,424	1,426	1,428

[9] Tabel pärineb teosest [26], lk. 391-393.

Tabel 1.7 (järg).

%	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	1,430	1,432	1,475	1,436	1,438	1,440	1,442	1,444	1,446	1,448
44	1,451	1,453	1,434	1,457	1,459	1,461	1,463	1,465	1,467	1,469
45	1,471	1,473	1,455	1,477	1,479	1,481	1,483	1,485	1,487	1,489
46	1,491	1,493	1,495	1,497	1,499	1,501	1,503	1,505	1,507	1,509
47	1,511	1,513	1,515	1,517	1,519	1,521	1,523	1,525	1,527	1,529
48	1,531	1,533	1,535	1,537	1,539	1,541	1,543	1,545	1,547	1,549
49	1.551	1,553	1,555	1,557	1,559	1,561	1,563	1.565	1,567	1,569
50	1,571	1,573	1,575	1,577	1,579	1,581	1,583	1,585	1,587	1,589
51	1,591	1,593	1,595	1,597	1,599	1,601	1,603	1,705	1,607	1,609
52	1,611	1,613	1,615	1,617	1,619	1,621	1,623	1,725	1,627	1,629
53	1,631	1,633	1,635	1,637	1,639	1,641	1,643	1,645	1,647	1,649
54	1,651	1,653	1,655	1,657	1,659	1,661	1,663	1,665	1,667	1,669
55	1,671	1,673	1,675	1,677	1,679	1,681	1,683	1,685	1,687	1,689
56	1,691	1,693	1,795	1,697	1,699	1,701	1,703	1,705	1,707	1,709
57	1,711	1,713	1,715	1,717	1,719	1,721	1,723	1,725	1,727	1,729
58	1,731	1,734	1,736	1,738	1,740	1,742	1,744	1,746	1,748	1,750
59	1,752	1,754	1,756	1,758	1,760	1,762	1,764	1,766	1,768	1,770
60	1,772	1,774	1,776	1,778	1,780	1,782	1,784	1,786	1,789	1,791
61	1,793	1,795	1,797	1,799	1.801	1,803	1,805	1,807	1,809	1,811
62	1,813	1,815	1,817	1,819	1,821	1,823	1,826	1,828	1,830	1,832
63	1,834	1,836	1,838	1,840	1,842	1,844	1,846	1,848	1,850	1,853
64	1,855	1,857	1,859	1,861	1,863	1,865	1,867	1,869	1.871	1,873
65	1,875	1,878	1,880	1,882	1,884	1,886	1,888	1,890	1,892	1,894
66	1,897	1,899	1,901	1,903	1,905	1,907	1,909	1,911	1,913	1,916
67	1,918	1,920	1,922	1,924	1,926	1,928	1,930	1,933	1,935	1,937
68	1,939	1,941	1,943	1,946	1,948	1,950	1.952	1,954	1,956	1,958
69	1,961	1,963	1,965	1,967	1,959	1,971	1,974	1,976	1,978	1,980
70	1,982	1,984	1,987	1,989	1,991	1,993	1,995	1,998	2,000	2,002
71	2,004	2,006	2,009	2,011	2,013	2,015	2,018	2,020	2,022	2,024
72	2,026	2,029	2,031	2,033	2,035	2.038	2,040	2,042	2,044	2,047
73	2,049	2,051	2,053	2,056	2,057	2,060	2,062	2,065	2,067	2,069
74	2,071	0,074	2,076	2,078	2,081	2,083	2,085	2,087	2,090	2,092
75	2,094	2,097	2,099	2,101	2,104	2,106	2,108	2,111	2,113	2,115
76	2,118	2,120	2,122	2,125	2,127	2,129	2,132	2,134	2,136	2,139
77	2,141	2,144	2,146	2,148	2,151	2,153	2,156	2,158	2,160	2,163
78	2,165	2,168	2,170	2,172	2,175	2,177	2,180	2,182	2,185	2,187
79	2,190	2,192	2,194	2,197	2,199	2,202	2.204	2,207	2,209	2,212
80	2,214	2,217	2,219	2,222	2,224	2,227	2,229	2,231	2,234	2,237
81	2,240	2,242	2,245	2,247	2,250	2,252	2,255	2,258	2,260	2,263
82	2,265	2,268	2,271	2,273	2,276	2,278	2,281	2,284	2,286	2,289
83	2,292	2,294	2,297	2,300	2,302	2,305	2,308	2,310	2,313	2,316
84	2,319	2,321	2,324	2,327	2,330	2,332	2,335	2,338	2,341	2.343
85	2,346	2,349	2,352	2,355	2,357	2,360	2,363	2,366	2,369	2,372
86	2,375	2,377	2,380	2,383	2,386	2,389	2,392	2,395	2,398	2,402
87	2,404	2,407	2,410	2,413	2,416	2,419	2,422	2,425	2,428	2,431
88	2,434	2,437	2,440	2,443	2,447	2,550	2,453	2,456	2,459	2,462
89	2,465	2,469	2,472	2,475	2,478	2,482	2,485	2,488	2,491	2,495
90	2,498	2,501	2,505	2,50[illegible]	2,512	2,515	2,518	2,522	2,525	2,529
91	2,532	2,536	2,539	2,543	2,546	2,450	2,554	2,557	2,561	2,564
92	2,568	2,572	2,575	2,579	2,583	2,587	2,591	2,594	2,598	2,602
93	2,606	2,610	2,614	2,618	2,622	2,626	2,630	2,634	2,638	2,642
94	2,647	2,651	2,655	2.659	2,664	2,668	2,673	2,677	2,681	2,686
95	2,691	2,695	2,700	2,705	2,709	2,714	2,719	2,724	2,729	2,734
96	2,739	2,744	2,749	2,754	2,760	2,765	2,771	2,776	2,782	2,788

Tabel 1.7 (järg).

%	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
97	2,793	2,799	2,805	2,811	2,818	2,824	2,830	2,837	2,844	2,851
98	2,858	2,865	2,872	2,880	2,888	2,896	2,904	2,913	2,922	2,931
99,0	2,941	2,942	2,943	2,944	2,945	2,946	2,948	2,949	2,950	2,951
99,1	2,952	2,953	2,954	2,955	2,956	2,957	2,958	2,959	2,960	2,961
99,2	2,963	2,964	2,965	2,966	2,967	2,968	2,959	2,971	2,972	2,973
99,3	2,974	2,975	2,976	2,978	2,979	2,980	2,981	2,983	2,984	2,985
99,4	2,987	2,988	2,989	2,990	2,992	2,993	2,995	2,996	2,997	2,999
99,5	3,000	3,002	3,003	3,004	3,006	3,007	3,009	3,010	3,012	3,013
99,6	3,015	3,017	3,018	3,020	3,022	3,023	4,025	3,027	3,028	3,030
99,7	3,032	3,034	3,036	3,038	3,040	3,041	3,044	3,046	3,048	3,050
99,8	3,052	3,004	3,057	3,059	3,062	3,064	3,067	3,069	3,072	3,075
99,9	3,078	3,082	3,085	3,089	3,093	3,097	3,101	3,107	3,113	3,122
100	3,142									

11

Näide 1.7.

Olgu antud vaatlusseeria pikkusega $n = 85$, $x = 7$. Leida tõenäosuse p 95%-lised usaldusspiirid.

Lahendus.

$\tilde{p} = \frac{x}{n} = \frac{7}{85} = 0,0824 = 8,24\%$. Tabelist 1.7 saame (teostades lineaarse interpolatsiooni)

$$\varphi(0,0824) = 0,582.$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}} = 0,1085; \ 1,96 \cdot 0,1085 = 0,213$$

$$\underline{\varphi}(0,0824) = 0,582 - 0,213 = 0,369,$$

$$\overline{\varphi}(0,0824) = 0,582 + 0,213 = 0,795.$$

Leiame nüüd tabelist 1.7 vastavalt $\varphi(p)$ väärtustele $\underline{\varphi}$ ja $\overline{\varphi}$ väärtused, mis ongi p usalduspiirideks. Kuna φ väärtuste seas puudub 0,369, leiame sellele lähima, milleks on 0,371; sellele vastab

$$p = 3,4\%,$$

seega saame

$$\underline{p} = 3,4\% = 0,034.$$

Väärtusele $\overline{\varphi} = 0,795$ vastab p väärtus 15,0 ; seega saame

$$\overline{p} = 15,0\% = 0,150.$$

8. p usalduspiiride ligikaudne määramine Poissoni jaotuse abil.

Kui x on väike, n aga suur, siis on binomiaaljaotus hästi lähendatav Poissoni jaotusega (Poissoni jaotuse kohta vt.II ptk.)ning p usalduspiiride arvutamiseks saab kasutada Poissoni jaotuse parameetri λ usalduspiire (vt. tabel 2.4 A ja 2.4 B).

Selleks leiame vastavalt antud α ja x väärtusele λ usalduspiirid $\underline{\lambda}$ ja $\overline{\lambda}$; p usalduspiirid saame siis järgmiselt:

$$\underline{p} = \frac{\underline{\lambda}}{n}; \quad \overline{p} = \frac{\overline{\lambda}}{n}.$$

<u>Näide 1.8.</u>

8000 uuritud inimese hulgas oli 20 inimest, kes olid kolm või enam korda abiellunud. Leida vähemalt kolm korda abiellunud inimeste tõenäoline protsent ja selle 99%-lised usalduspiirid (protsentides).

<u>Lahendus.</u>

$$\tilde{p} = \frac{20}{8000} = 0{,}0025 = 0{,}25\%.$$

Usalduspiirid leiame tabeli 2.4A abil:

$$\underline{\lambda} = 10{,}35; \quad \overline{\lambda} = 34{,}67;$$

siit

$$\underline{p} = \frac{10{,}35}{8000} = 0{,}0013 \approx 0{,}13\%;$$

$$\overline{p} = \frac{34{,}67}{8000} = 0{,}0043 \approx 0{,}43\%.$$

Võrdluseks märgime, et lähendades normaaljaotusega saaksime usalduspiiridele väärtused

$$\underline{p} = 0{,}00106 \approx 0{,}0011 \approx 0{,}11\% ;$$

$$\overline{p} = 0{,}00394 \approx 0{,}0039 \approx 0{,}39\%.$$

§ 3. K a h e b i n o m i a a l s e j u h u s l i k u s u u r u s e v õ r d l e m i n e.

1. Hüpoteesid p_1 ja p_2 kohta.

Olgu teostatud kaks katseseeriat. Ühe pikkus olgu n_1, katsetulemus A esinegu x_1 korda. Teise pikkus olgu n_2, katsetulemus esinegu x_2 korda. Tähistame katsetulemuse A esinemise tõenäosuse esimese ja teise katseseeria vältel vastavalt sümbolitega p_1 ja p_2.

Olgu antud olulisuse nivoo α, kontrollitagu üht järgmisest kolmest hüpoteesist:

$$H_1 : p_1 \neq p_2;$$

$$H_2 : p_1 < p_2;$$

$$H_3 : p_1 > p_2.$$

Hüpoteese H_3 ja H_2 nimetatakse ühepoolseteks, hüpoteesi H_1 kahepoolseks.

2. Tabeli kasutamine p_1 ja p_2 võrdlemiseks ($n_1, n_2 \leq 15$).

Hüpoteesi H_3 kontrollimiseks väikeste n_1 ja n_2 väärtuste korral ($n_1, n_2 \leq 15$),(olulisuse nivood 0,005, 0,01, 0,025 ja 0,05) on koostatud täpne tabel (vt. tabel 1.8).

Selles on antud hüpoteesi H_3 kriitiline piirkond, s.t. vastavalt α, n_1, n_2 ja x_1 väärtustele on antud maksimaalne x_2 väärtus C, mille korral H_3 saab (olulisuse nivooga α) vastu võtta; s.t. kui $x_2 \leq C$, siis $P_1 > P_2$.

Tabeli 1.8 kasutamiseks tuleb katseseeriad nummerdada nii, et $n_1 \geq n_2$, ning sündmus A valida selliselt, et x_1 rahuldab võrratust $x_1 \geq \frac{n_1}{2}$.

Sellisele kujule on võimalik alati teisendada ka hüpotees H_2.

Ka hüpoteesi H_3 kontrollimiseks saame kasutada tabelit 1.8, lugedes vaid olulisuse nivooks $\alpha' = 2\alpha$.

Tabel 1.8.

Hüpoteesi $p_1 > p_2$ kriitiline piirkond [10]

$$X_1 \sim B(n_1, p_1), \quad X_2 \sim B(n_2, p_2), \quad n_2 \leqslant n_1 \leqslant 15.$$

Hüpotees $p_1 > p_2$ võetakse vastu siis, kui katsel saadud x_2 ei ole suurem tabelis antud x_2 väärtusest (vastavalt n_1, n_2, x_1 ja α väärtusele). Samal tingimusel võetakse vastu ka hüpotees $p_1 \neq p_2$, kuid olulisuse nivooks tuleb siis võtta $\alpha' = 2\alpha$.

	x_1	0·05	0·025	0·01	0·005
$n_1 = 3$ $n_2 = 3$	3	0	—	—	—
$n_1 = 4$ $n_2 = 4$	4	0	0	—	—
3	4	0	—	—	—
$n_1 = 5$ $n_2 = 5$	5	1	1	0	0
	4	0	0	—	—
4	5	1	0	0	—
	4	0	—	—	—
3	5	0	0	—	—
2	5	0	—	—	—
$n_1 = 6$ $n_2 = 6$	6	2	1	1	0
	5	1	0	0	—
	4	0	—	—	—
5	6	1	0	0	0
	5	0	0	—	—
	4	0	—	—	—
4	6	1	0	0	0
	5	0	0	—	—
3	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
2	6	0	—	—	—
$n_1 = 7$ $n_2 = 7$	7	3	2	1	1
	6	1	1	0	0
	5	0	0	—	—
	4	0	—	—	—
$n_1 = 7$ $n_2 = 6$	7	2	2	1	1
	6	1	0	0	0
	5	0	0	—	—
	4	0	—	—	—
5	7	2	1	0	0
	6	1	0	0	—
	5	0	—	—	—
4	7	1	1	0	0
	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
3	7	0	0	0	—
	6	0	—	—	—
2	7	0	—	—	—
$n_1 = 8$ $n_2 = 8$	8	4	3	2	2
	7	2	2	1	0
	6	1	1	0	0
	5	0	0	—	—
	4	0	—	—	—
7	8	3	2	2	1
	7	2	1	1	0
	6	1	0	0	—
	5	0	0	—	—
6	8	2	2	1	1
	7	1	1	0	0
	6	0	0	0	—
	5	0	—	—	—
5	8	2	1	1	0
	7	1	0	0	0

[10] Tabel pärineb teosest [17], lk.442-449.

Tabel 1.8 (järg).

	x_1	0·05	0·025	0·01	0·005
$n_1 = 8$ $n_2 = 5$	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
4	8	1	1	0	0
	7	0	0	—	—
	6	0	—	—	—
3	8	0	0	0	—
	7	0	0	—	—
2	8	0	0	—	—
$n_1 = 9$ $n_2 = 9$	9	5	4	3	3
	8	3	3	2	1
	7	2	1	1	0
	6	1	1	0	0
	5	0	0	—	—
	4	0	—	—	—
8	9	4	3	3	2
	8	3	2	1	1
	7	2	1	0	0
	6	1	0	0	—
	5	0	0	—	—
7	9	3	3	2	2
	8	2	2	1	0
	7	1	1	0	0
	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
6	9	3	2	1	1
	8	2	1	0	0
	7	1	0	0	—
	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
5	9	2	1	1	1
	8	1	1	0	0
	7	0	0	—	—
	6	0	—	—	—
4	9	1	1	0	0
	8	0	0	0	—
	7	0	0	—	—
	6	0	—	—	—
$n_1 = 9$ $n_2 = 3$	9	1	0	0	0
	8	0	0	—	—
	7	0	—	—	—
2	9	0	0	—	—
$n_1 = 10$ $n_2 = 10$	10	6	5	4	3
	9	4	3	3	2
	8	3	2	1	1
	7	2	1	1	0
	6	1	0	0	—
	5	0	0	—	—
	4	0	—	—	—
9	10	5	4	3	3
	9	4	3	2	2
	8	2	2	1	1
	7	1	1	0	0
	6	1	0	0	—
	5	0	0	—	—
8	10	4	4	3	2
	9	3	2	2	1
	8	2	1	1	0
	7	1	1	0	0
	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
7	10	3	3	2	2
	9	2	2	1	1
	8	1	1	0	0
	7	1	0	0	—
	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
6	10	3	2	2	1
	9	2	1	1	0
	8	1	1	0	0
	7	0	0	—	—
	6	0	—	—	—
5	10	2	2	1	1
	9	1	1	0	0
	8	1	0	0	—

Tabel 1.8 (järg).

	x_1	0·05	0·025	0·01	0·005
$n_1 = 10$ $n_2 = 5$	7	0	0	—	—
	6	0	—	—	—
4	10	1	1	0	0
	9	1	0	0	0
	8	0	0	—	—
	7	0	—	—	—
3	10	1	0	0	0
	9	0	0	—	—
	8	0	—	—	—
2	10	0	0	—	—
	9	0	—	—	—
$n_1 = 11$ $n_2 = 11$	11	7	6	5	4
	10	5	4	3	3
	9	4	3	2	2
	8	3	2	1	1
	7	2	1	0	0
	6	1	0	0	—
	5	0	0	—	—
	4	0	—	—	—
10	11	6	5	4	4
	10	4	4	3	2
	9	3	3	2	1
	8	2	2	1	0
	7	1	1	0	0
	6	1	0	0	—
	5	0	0	—	—
9	11	5	4	4	3
	10	4	3	2	2
	9	3	2	1	1
	8	2	1	1	0
	7	1	1	0	0
	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
8	11	4	4	3	3
	10	3	3	2	1
	9	2	2	1	1
	8	1	1	0	0

	x_1	0·05	0·025	0·01	0·005
$n_1 = 11$ $n_2 = 8$	7	1	0	0	—
	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
7	11	4	3	2	2
	10	3	2	1	1
	9	2	1	1	0
	8	1	1	0	0
	7	0	0	—	—
	6	0	0	—	—
6	11	3	2	2	1
	10	2	1	1	0
	9	1	1	0	0
	8	1	0	0	—
	7	0	0	—	—
	6	0	—	—	—
5	11	2	2	1	1
	10	1	1	0	0
	9	1	0	0	0
	8	0	0	—	—
	7	0	—	—	—
4	11	1	1	1	0
	10	1	0	0	0
	9	0	0	—	—
	8	0	—	—	—
3	11	1	0	0	0
	10	0	0	—	—
	9	0	—	—	—
2	11	0	0	—	—
	10	0	—	—	—
$n_1 = 12$ $n_2 = 12$	12	8	7	6	5
	11	6	5	4	4
	10	5	4	3	2
	9	4	3	2	1
	8	3	2	1	1
	7	2	1	0	0
	6	1	0	0	—

Tabel 1.8 (järg).

	x_1	0·05	0·025	0·01	0·005
$n_1 = 12$ $n_2 = 12$	5	0	0	—	—
	4	0	—	—	—
11	12	7	6	5	5
	11	5	5	4	3
	10	4	3	2	2
	9	3	2	2	1
	8	2	1	1	0
	7	1	1	0	0
	6	1	0	0	—
	5	0	0	—	—
10	12	6	5	5	4
	11	5	4	3	3
	10	4	3	2	2
	9	3	2	1	1
	8	2	1	0	0
	7	1	0	0	0
	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
9	12	5	5	4	3
	11	4	3	3	2
	10	3	2	2	1
	9	2	2	1	0
	8	1	1	0	0
	7	1	0	0	—
	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
8	12	5	4	3	3
	11	3	3	2	2
	10	2	2	1	1
	9	2	1	1	0
	8	1	1	0	0
	7	0	0	—	—
	6	0	0	—	—
7	12	4	3	3	2
	11	3	2	2	1
	10	2	1	1	0
	9	1	1	0	0

	x_1	0·05	0·025	0·01	0·005
$n_1 = 12$ $n_2 = 7$	8	1	0	0	—
	7	0	0	—	—
	6	0	—	—	—
6	12	3	3	2	2
	11	2	2	1	1
	10	1	1	0	0
	9	1	0	0	0
	8	0	0	—	—
	7	0	0	—	—
	6	0	—	—	—
5	12	2	2	1	1
	11	1	1	1	0
	10	1	0	0	0
	9	0	0	0	—
	8	0	0	—	—
	7	0	—	—	—
4	12	2	1	1	0
	11	1	0	0	0
	10	0	0	0	—
	9	0	0	—	—
	8	0	—	—	—
3	12	1	0	0	0
	11	0	0	0	—
	10	0	0	—	—
	9	0	—	—	—
2	12	0	0	—	—
	11	0	—	—	—
$n_1 = 13$ $n_2 = 13$	13	9	8	7	6
	12	7	6	5	4
	11	6	5	4	3
	10	4	4	3	2
	9	3	3	2	1
	8	2	2	1	0
	7	2	1	0	0
	6	1	0	0	—
	5	0	0	—	—
	4	0	—	—	—

Tabel 1.8. (järg).

	x_1	0·05	0·025	0·01	0·005
$n_1 = 13$ $n_2 = 12$	13	8	7	6	5
	12	6	5	5	4
	11	5	4	3	3
	10	4	3	2	2
	9	3	2	1	1
	8	2	1	1	0
	7	1	1	0	0
	6	1	0	0	—
	5	0	0	—	—
11	13	7	6	5	5
	12	6	5	4	3
	11	4	4	3	2
	10	3	3	2	1
	9	3	2	1	1
	8	2	1	0	0
	7	1	0	0	0
	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
10	13	6	6	5	4
	12	5	4	3	3
	11	4	3	2	2
	10	3	2	1	1
	9	2	1	1	0
	8	1	1	0	0
	7	1	0	0	—
	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
9	13	5	5	4	4
	12	4	4	3	3
	11	3	3	2	1
	10	2	2	1	1
	9	2	1	0	0
	8	1	1	0	0
	7	0	0	—	—
	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
8	13	5	4	3	3
	12	4	3	2	2

	x_1	0·05	0·025	0·01	0·005
$n_1 = 13$ $n_2 = 8$	11	3	2	1	1
	10	2	1	1	0
	9	1	1	0	0
	8	1	0	0	—
	7	0	0	—	—
	6	0	—	—	—
7	13	4	3	3	2
	12	3	2	2	1
	11	2	2	1	1
	10	1	1	0	0
	9	1	0	0	0
	8	0	0	—	—
	7	0	0	—	—
	6	0	—	—	—
6	13	3	3	2	2
	12	2	2	1	1
	11	2	1	1	0
	10	1	1	0	0
	9	1	0	0	—
	8	0	0	—	—
	7	0	—	—	—
5	13	2	2	1	1
	12	2	1	1	0
	11	1	1	0	0
	10	1	0	0	—
	9	0	0	—	—
	8	0	—	—	—
4	13	2	1	1	0
	12	1	1	0	0
	11	0	0	0	—
	10	0	0	—	—
	9	0	—	—	—
3	13	1	1	0	0
	12	0	0	0	—
	11	0	0	—	—
	10	0	—	—	—
2	13	0	0	0	—
	12	0	—	—	—

Tabel 1.8 (järg).

	x_1	0·05	0·025	0·01	0·005
$n_1 = 14$ $n_2 = 14$	14	10	9	8	7
	13	8	7	6	5
	12	6	6	5	4
	11	5	4	3	3
	10	4	3	2	2
	9	3	2	2	1
	8	2	2	1	0
	7	1	1	0	0
	6	1	0	0	—
	5	0	0	—	—
	4	0	—	—	—
13	14	9	8	7	6
	13	7	6	5	5
	12	6	5	4	3
	11	5	4	3	2
	10	4	3	2	2
	9	3	2	1	1
	8	2	1	1	0
	7	1	1	0	0
	6	1	0	—	—
	5	0	0	—	—
12	14	8	7	6	6
	13	6	6	5	4
	12	5	4	4	3
	11	4	3	3	2
	10	3	3	2	1
	9	2	2	1	1
	8	2	1	0	0
	7	1	0	0	—
	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
11	14	7	6	6	5
	13	6	5	4	4
	12	5	4	3	3
	11	4	3	2	2
	10	3	2	1	1
	9	2	1	1	0
	8	1	1	0	0

	x_1	0·05	0·025	0·01	0·005
$n_1 = 14$ $n_2 = 11$	7	1	0	0	—
	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
10	14	6	6	5	4
	13	5	4	4	3
	12	4	3	3	2
	11	3	3	2	1
	10	2	2	1	1
	9	2	1	0	0
	8	1	1	0	0
	7	0	0	0	—
	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
9	14	6	5	4	4
	13	4	4	3	3
	12	3	3	2	2
	11	3	2	1	1
	10	2	1	1	0
	9	1	1	0	0
	8	1	0	0	—
	7	0	0	—	—
	6	0	—	—	—
8	14	5	4	4	3
	13	4	3	2	2
	12	3	2	2	1
	11	2	2	1	1
	10	2	1	0	0
	9	1	0	0	0
	8	0	0	0	—
	7	0	0	—	—
	6	0	—	—	—
7	14	4	3	3	2
	13	3	2	2	1
	12	2	2	1	1
	11	2	1	1	0
	10	1	1	0	0
	9	1	0	0	—
	8	0	0	—	—

Tabel 1.8 (järg).

	x_1	0·05	0·025	0·01	0·005
$n_1 = 14$ $n_2 = 7$	7	0	—	—	—
6	14	3	3	2	2
	13	2	2	1	1
	12	2	1	1	0
	11	1	1	0	0
	10	1	0	0	—
	9	0	0	—	—
	8	0	0	—	—
	7	0	—	—	—
5	14	2	2	1	1
	13	2	1	1	0
	12	1	1	0	0
	11	1	0	0	0
	10	0	0	—	—
	9	0	0	—	—
	8	0	—	—	—
4	14	2	1	1	1
	13	1	1	0	0
	12	1	0	0	0
	11	0	0	—	—
	10	0	0	—	—
	9	0	—	—	—
3	14	1	1	0	0
	13	0	0	0	—
	12	0	0	—	—
	11	0	—	—	—
2	14	0	0	0	—
	13	0	0	—	—
	12	0	—	—	—
$n_1 = 15$ $n_2 = 15$	15	11	10	9	8
	14	9	8	7	6
	13	7	6	5	5
	12	6	5	4	4
	11	5	4	3	3
	10	4	3	2	2
	9	3	2	1	1
	8	2	1	1	0

	x_1	0·05	0·025	0·01	0·005
$n_1 = 15$ $n_2 = 15$	7	1	1	0	0
	6	1	0	0	—
	5	0	0	—	—
	4	0	—	—	—
14	15	10	9	8	7
	14	8	7	6	6
	13	7	6	5	4
	12	6	5	4	3
	11	5	4	3	2
	10	4	3	2	1
	9	3	2	1	1
	8	2	1	1	0
	7	1	1	0	0
	6	1	0	—	—
	5	0	—	—	—
13	15	9	8	7	7
	14	7	7	6	5
	13	6	5	4	4
	12	5	4	3	3
	11	4	3	2	2
	10	3	2	2	1
	9	2	2	1	0
	8	2	1	0	0
	7	1	0	0	—
	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
12	15	8	7	7	6
	14	7	6	5	4
	13	6	5	4	3
	12	5	4	3	2
	11	4	3	2	2
	10	3	2	1	1
	9	2	1	1	0
	8	1	1	0	0
	7	1	0	0	—
	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
11	15	7	7	6	5

Tabel 1.8 (järg).

	x_1	0·05	0·025	0·01	0·005
$n_1 = 15$ $n_2 = 11$	14	6	5	4	4
	13	5	4	3	3
	12	4	3	2	2
	11	3	2	2	1
	10	2	2	1	1
	9	2	1	0	0
	8	1	1	0	0
	7	1	0	0	—
	6	0	0	—	—
	5	0	—	—	—
10	15	6	6	5	5
	14	5	5	4	3
	13	4	4	3	2
	12	3	3	2	2
	11	3	2	1	1
	10	2	1	1	0
	9	1	1	0	0
	8	1	0	0	—
	7	0	0	—	—
	6	0	—	—	—
9	15	6	5	4	4
	14	5	4	3	3
	13	4	3	2	2
	12	3	2	2	1
	11	2	2	1	1
	10	2	1	0	0
	9	1	1	0	0
	8	1	0	0	—
	7	0	0	—	—
	6	0	—	—	—
8	15	5	4	4	3
	14	4	3	3	2
	13	3	2	2	1
	12	2	2	1	1
	11	2	1	1	0
	10	1	1	0	0
	9	1	0	0	—
	8	0	0	—	—
	7	0	—	—	—
$n_1 = 15$ $n_2 = 8$	6	0	—	—	—
7	15	4	4	3	3
	14	3	3	2	2
	13	2	2	1	1
	12	2	1	1	0
	11	1	1	0	0
	10	1	0	0	0
	9	0	0	—	—
	8	0	0	—	—
	7	0	—	—	—
6	15	3	3	2	2
	14	2	2	1	1
	13	2	1	1	0
	12	1	1	0	0
	11	1	0	0	0
	10	0	0	0	—
	9	0	0	—	—
	8	0	—	—	—
5	15	2	2	2	1
	14	2	1	1	1
	13	1	1	0	0
	12	1	0	0	0
	11	0	0	0	—
	10	0	0	—	—
	9	0	—	—	—
4	15	2	1	1	1
	14	1	1	0	0
	13	1	0	0	0
	12	0	0	0	—
	11	0	0	—	—
	10	0	—	—	—
3	15	1	1	0	0
	14	0	0	0	0
	13	0	0	—	—
	12	0	0	—	—
	11	0	—	—	—
2	15	0	0	0	—
	14	0	0	—	—
	13	0	—	—	—

Näide 1.9.

Kahel sportlaste rühmal rakendati erinevat treeningumetoodikat.

Esimeses rühmas on 15 sportlast, neist täitis meistersportlase normi 4; teises rühmas on 12 sportlast, kusjuures meistersportlase normi täitis neist 8. Kas võime öelda, et esimesel meetodil treenides on meistersportlase normi täitmine vähem tõenäone?

Lahendus.

Et kasutada antud tabeleid, võtame $n_1 = 15$, $x_1 = 11$ (normi mittetäitmine), $n_2 = 12$ ning $x_2 = 4$. Kontrollimist vajab ühepoolne hüpotees

$$p_1 > p_2 ,$$

kus p_1 on meistersportlase normi mittetäitmise tõenäosus esimesse rühma (n_1=15) kuuluvate sportlaste puhul, p_2 - sama tõenäosus teise rühma (n_2=12) kuuluvate sportlaste puhul. Tabelist 1.8 näme, et x_2 kriitiline väärtus on 4 olulisuse nivoo 0,05 korral, järelikult võime olulisuse nivooga 0,05 kinnitada, et teine treeningumeetod on efektiivsem (tõenäosus meistersportlase normi täitmiseks on suurem).

Näide 1.10.

Kahest õpperühmast ühes on 9 üliõpilast, neist kukkus eksamil läbi 1; teises 10 üliõpilast, eksamil kukkus läbi 6. Kas võime kinnitada (5%-lise olulisuse nivooga), et rühmad on erinevad?

Lahendus.

Võtame $n_1 = 10$, $x_1 = 6$; $n_2 = 9$, $x_2 = 1$.

Et kontrollimist vajab kahepoolne hüpotees, tuleb 5%lise olulisuse nivoo saamiseks valida tabelist x_2 kriitiline väärtus kohalt $\alpha = 0,025$. See on antud juhul 0. Seega ei saa me kontrollitavat hüpoteesi õigeks lugeda (eksimise tõenäosus on suurem kui 5%).

3. p_1 ja p_2 võrdlemine usalduspiiride abil.

Kõige lihtsam, kuid vähe tundlik (väikese võimsusega) meetod tõenäosuste p_1 ja p_2 võrdlemiseks tugineb kummagi jaotuse tõenäosuse usalduspiiride leidmisele.

Olgu esimese katseseeria pikkus n_1, sündmuse A esinemiste arv x_1; teisel katseseerial olgu samad suurused vastavalt n_2 ja x_2. Hüpoteesi H_1 kontrollimiseks olulisuse nivooga α moodustame p_1 ja p_2 $(1-\alpha)$-usalduspiirid:

$$(\underline{p}_1, \bar{p}_1) \text{ ja } (\underline{p}_2, \bar{p}_2).$$

Kui need vahemikud ei lõiku, s.t. $\bar{p}_1 < \underline{p}_2$ või $\bar{p}_2 < \underline{p}_1$, siis võime hüpoteesi H_1 õigeks lugeda. Samadel tingimustel saame tõestada ka vastavalt hüpoteesid H_2 ja H_3, kusjuures olulisuse nivooks on $\frac{\alpha}{2}$.

Tuleb aga märkida, et usalduspiirkondade lõikumisest ei järeldu alati, et vaadeldava materjali põhjal ei saa ühtki hüpoteesidest $H_1 - H_3$ tõestada. Ühtki hüpoteesidest $H_1 - H_3$ ei saa tõestada juhul, kui

$$\underline{p}_2 \leq \frac{x_1}{n_1} \leq \bar{p}_2 \quad \text{või} \quad \underline{p}_1 \leq \frac{x_2}{n_2} \leq \bar{p}_1.$$

Ülejäänud juhtudel võib kasutada tundlikumaid meetodeid, mis tuginevad binomiaaljaotuse lähendamisele normaaljaotusega.

Näide 1.11.

Olgu tehtud kaks katseseeriat tulemustega

$n_1 = 50$; $x_1 = 10$;

$n_2 = 60$; $x_2 = 35$.

Nõutakse kontrollida hüpoteesi $p_1 < p_2$ olulisuse nivooga $\alpha = 0,05$.

Lahendus.

Tabelist 1.6B leiame usalduspiirid

$$\bar{p}_1 = 33,8\%; \quad \underline{p}_2 = 44,9\%;$$

et tegemist on ühepoolse hüpoteesiga, siis saame väite $p_1 < p_2$ lugeda tõestatuks olulisuse nivooga $\frac{0,05}{2} = 0,025$.

Kuna $\bar{p}_1$ ja $\underline{p}_2$ erinevus on üsna suur, siis võime proovida väidet tõestada ka olulisuse nivooga 0,005. Tabelist 1.6A leiame

$$\bar{p}_1 = 38,1\%; \quad \underline{p}_2 = 41,0\%,$$

järelikult saab väite $p_1 < p_2$ tõestada ka olulisuse nivooga

$\frac{0,01}{2} = 0,005.$

4. p_1 ja p_2 võrdlemine normaaljaotuse abil.

Olgu antud katseseeriad pikkustega n_1 ja n_2, kusjuures sündmuse A esinemiste arvud ning tõenäosused olgu vastavalt x_1 ja x_2 ning p_1 ja p_2. Kontrollida tuleb hüpoteese

$$H_1 : p_1 \neq p_2,$$
$$H_2 : p_1 < p_2,$$
või
$$H_3 : p_1 > p_2$$

Arvutame tõenäosuste hinnangud $\tilde{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}$, $\tilde{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$ ning nende põhjal suuruse

$$X = \frac{\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2}{\sqrt{\frac{\tilde{p}_1\tilde{q}_1}{n_1} + \frac{\tilde{p}_2\tilde{q}_2}{n_2}}},$$

mis on ligikaudu normaaljaotusega $N(0,1)$.

Et kontrollida hüpoteesi H_1 olulisuse nivooga α, võrdleme suurust X normaaljaotuse $N(0,1)$ hälbega q_α (s.o. arvuga q_α, mis on määratud võrdusega $P(|X| > q_\alpha) = \alpha$, kui $X \sim N(0,1)$). Kui $X > q_\alpha$, siis võtame H_1 vastu.
Hüpoteeside H_3 ja H_2 kontrollimiseks võrdleme suurust X α-täiendkvantiiliga p_α (jaotuse $N(0,1)$ puhul):

kui $X > 0$ ja $X > p_\alpha$, siis võtame vastu H_3,

kui $X < 0$ ja $|X| > p_\alpha$, siis võtame vastu H_2.

Näide 1.12.

Olgu $n_1 = 50$, $x_1 = 10$; $n_2 = 28$, $x_2 = 15$.

Kontrollida hüpoteesi $p_1 \neq p_2$ olulisuse nivooga $\alpha = 0,05$.

Lahendus.

Arvutame hinnangud tõenäosustele p_1 ja p_2, samuti suurustele q_1 ja q_2:

$$\tilde{p}_1 = 0,200; \quad \tilde{p}_2 = 0,536; \quad \tilde{q}_1 = 0,800;$$

$$\tilde{q}_2 = 0,464.$$

Saadud tulemuste põhjal leiame suhte:

$$\frac{|\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2|}{\sqrt{\frac{\tilde{p}_1\tilde{q}_1}{n_1} + \frac{\tilde{p}_2\tilde{q}_2}{n_2}}} = \frac{0,336}{\sqrt{0,01207}} = 3,06.$$

Saadud tulemust võrdleme normaaljaotuse kvantiilidega. Arvestades märkust punktis 2.6, on nõutava väite tõestamiseks 5%-lise täpsusega piisav, kui suurus X on suurem kui 2,58 (see vastab normaaljaotuse 0,005-kvantiilile). Et see käesoleval juhul tõepoolest nii on, loeme väite tõestatuks.

5. p_1 ja p_2 võrdlemine φ-teisenduse abil.

Juhul kui $\tilde{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}$ ja $\tilde{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$ on suhteliselt väikesed, kasutame ka binomiaaljaotuste võrdlemiseks tõenäosushinnangute φ-teisendust, mis taandab ülesande kahe normaaljaotuse keskväärtuste võrdlemisele.

Olgu tarvis võrrelda (olulisuse nivooga α) tõenäosusi p_1 ja p_2 väljavõtete n_1 ja n_2 põhjal; sündmuse A esinemiste arvud olgu x_1 ja x_2.

Arvutame ligikaudselt normaaljaotusega suurused

$$y_1 = \varphi(\frac{x_1}{n_1}), \quad y_2 = \varphi(\frac{x_2}{n_2})$$

ning nende vahe

$$X = \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = (y_1 - y_2)\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}},$$

mis on samuti ligikaudselt normaaljaotusega (täpsemaks lähendiks on t-jaotus vabadusastmete arvuga $n_1 + n_2 - 2$).

Hüpoteesi $H_1 : p_1 \neq p_2$ võtame vastu siis, kui $|X| > q_\alpha$, kus q_α on tõenäosusega α esinev hälve jaotuse $N(0,1)$ puhul.

Hüpoteesi H_2: $p_1 > p_2$ võtame vastu siis, kui $X > p_\alpha$, kus p_α on α-täiendkvantiil jaotuse $N(0,1)$ puhul.

Hüpoteesi H_3: $p_1 < p_2$ võtame vastu siis, kui $X < 0$ ja $|X| > p_\alpha$, kus p_α on α-täiendkvantiil jaotuse $N(0,1)$ puhul.

Märkus. Väikeste n väärtuste korral ($n<50$) on sobivam normaaljaotuse asemel kasutada t-tabeleid.

Näide 1.13.

Olgu antud vaatlusseeriad $n_1 = 20$; $x_1 = 4$; $n_2 = 50$; $x_2 = 3$. Kontrollida hüpoteesi $p_1 > p_2$ (olulisuse nivooga 0,05).

Lahendus.

Et $x_1 \approx n_1 p_1$, $x_2 \approx n_2 p_2 < 5$, tuleb kasutada φ-teisendust.

$$p_1 \approx \frac{x_1}{n_1} = 20\%, \quad p_2 \approx \frac{x_2}{n_2} = 6\%.$$

Vastavad φ väärtused leiame tabelist:

$$\varphi_1 = 0,927; \quad \varphi_2 = 0,495.$$

Arvutame

$$(\varphi_1 - \varphi_2)\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} = 0,432\sqrt{\frac{20 \cdot 50}{70}} = 1,63.$$

Normaaljaotuse tabelist näeme, et $q_{0,05} = 1,65$, seega tuleb jääda seisukohale, et ei ole tegemist erinevate tõenäosustega.

Tabel 1.9.

Mõningad p funktsioonid.[11]

p	$1-p$	$p(1-p)$	$\sqrt{p(1-p)}$	$1-p^2$	$1-(1-p)^2$	$2 \arcsin \sqrt{p}$	$2 \arcsin \sqrt{1-p}$
.01	.99	.0099	.09950	.9999	.0199	.2003	2.9413
.02	.98	.0196	.14000	.9996	.0396	.2838	2.8578
.03	.97	.0291	.17059	.9991	.0591	.3482	2.7934
.04	.96	.0384	.19596	.9984	.0784	.4027	2.7389
.05	.95	.0475	.21794	.9975	.0975	.4510	2.6906
.06	.94	.0564	.23749	.9964	.1164	.4949	2.6467
.07	.93	.0651	.25515	.9951	.1351	.5355	2.6062
.08	.92	.0736	.27129	.9936	.1536	.5735	2.5681
.09	.91	.0819	.28618	.9919	.1719	.6094	2.5319
.10	.90	.0900	.30000	.9900	.1900	.6435	2.4981
.11	.89	.0979	.31289	.9879	.2079	.6761	2.4655
.12	.88	.1056	.32496	.9856	.2256	.7075	2.4341
.13	.87	.1131	.33630	.9831	.2431	.7377	2.4037
.14	.86	.1204	.34699	.9804	.2604	.7670	2.3746
.15	.85	.1275	.35707	.9775	.2775	.7954	2.3462
.16	.84	.1344	.36661	.9744	.2944	.8230	2.3186
.17	.83	.1411	.37563	.9711	.3111	.8500	2.2916
.18	.82	.1476	.38419	.9676	.3276	.8763	2.2653
.19	.81	.1539	.39230	.9639	.3439	.9021	2.2395
.20	.80	.1600	.40000	.9600	.3600	.9273	2.2143
.21	.79	.1659	.40731	.9559	.3759	.9521	2.1895
.22	.78	.1716	.41425	.9516	.3916	.9764	2.1652
.23	.77	.1771	.42083	.9471	.4071	1.0004	2.1412
.24	.76	.1824	.42708	.9424	.4224	1.0239	2.1177
.25	.75	.1875	.43301	.9375	.4375	1.0472	2.0944
.26	.74	.1924	.43863	.9324	.4524	1.0701	2.0715
.27	.73	.1971	.44396	.9271	.4671	1.0928	2.0488
.28	.72	.2016	.44900	.9216	.4816	1.1152	2.0264
.29	.71	.2059	.45376	.9159	.4959	1.1374	2.0042
.30	.70	.2100	.45826	.9100	.5100	1.1593	1.9823
.31	.69	.2139	.46249	.9039	.5239	1.1810	1.9606
.32	.68	.2176	.46648	.8976	.5376	1.2025	1.9391
.33	.67	.2211	.47021	.8911	.5511	1.2239	1.9177
.34	.66	.2244	.47371	.8844	.5644	1.2451	1.8965
.35	.65	.2275	.47697	.8775	.5775	1.2661	1.8755
.36	.64	.2304	.48000	.8704	.5904	1.2870	1.8546
.37	.63	.2331	.48280	.8631	.6031	1.3078	1.8338
.38	.62	.2356	.48539	.8556	.6156	1.3284	1.8132
.39	.61	.2379	.48775	.8479	.6279	1.3490	1.7926
.40	.60	.2400	.48990	.8400	.6400	1.3694	1.7722
.41	.59	.2419	.49183	.8319	.6519	1.3898	1.7518
.42	.58	.2436	.49356	.8236	.6636	1.4101	1.7315
.43	.57	.2451	.49508	.8151	.6751	1.4303	1.7113
.44	.56	.2464	.49639	.8064	.6864	1.4505	1.6911
.45	.55	.2475	.49749	.7975	.6975	1.4706	1.6710
.46	.54	.2484	.49840	.7884	.7084	1.4907	1.6509
.47	.53	.2491	.49910	.7791	.7191	1.5108	1.6308
.48	.52	.2496	.49960	.7696	.7296	1.5308	1.6108
.49	.51	.2499	.49990	.7599	.7399	1.5508	1.5908
.50	.50	.2500	.50000	.7500	.7500	1.5708	1.5708

[11] Tabel pärineb teosest [16], lk. 465.

II. POISSONI JUHUSLIK SUURUS.

1. Poissoni jaotuse valem.

Poissoni juhuslik suurus on diskreetne juhuslik suurus, mis võib omandada väärtusi 0,1,2, ... , seega tema väärtuste hulk on (erinevalt binomiaalsest juhuslikust suurusest) lõpmatu.

Poissoni juhusliku suuruse X jaotus (ehk Poissoni jaotus) on esitatav valemiga

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},$$

kus x on juhusliku suuruse X väärtus, x = 0,1,2, ... ; sümbol P(X = x) tähistab tõenäosust selleks, et juhuslik suurus X omandab väärtuse x. Valemis esinev suurus λ on Poissoni jaotuse parameeter, e on naturaallogaritmide alus (vt. tabel 1.2), x! tähistab naturaalarvu x faktoriaali 1.2.3.....x.

Asjaolu, et juhuslik suurus X on Poissoni jaotusega parameetriga λ , tähistame sümboolselt:

$$X \sim P(\lambda).$$

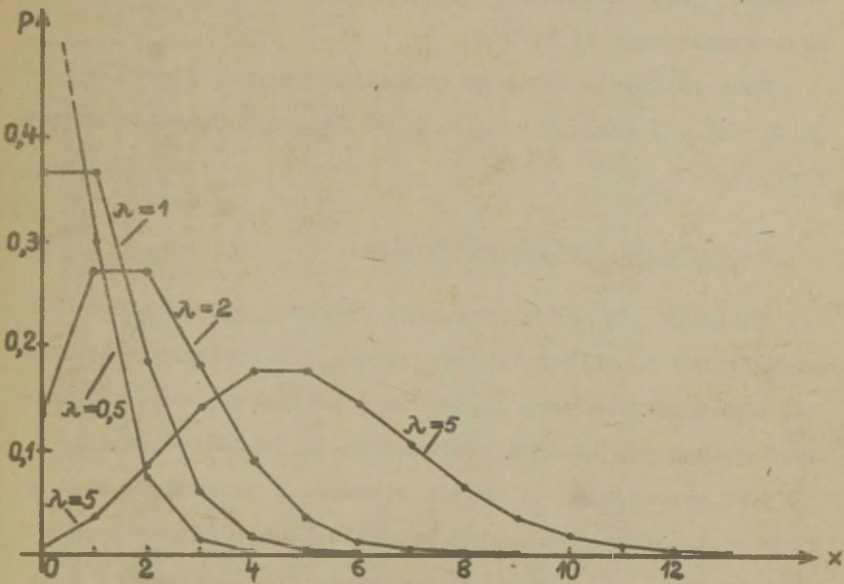
2. Poissoni jaotuse arvulised karakteristikud.

Poissoni jaotuse keskväärtus ja dispersioon võrduvad parameetriga λ :

$$EX = \lambda,$$

$$DX = \lambda,$$

$$\sqrt{DX} = \sqrt{\lambda}.$$



Joonis 2.1.
Poissoni jaotuse graafik λ väärtuste puhul
λ = 0,5; 1; 2; 5.

3. Poissoni jaotuse seos teiste jaotustega.

Poissoni jaotus on binomiaaljaotuse piirväärtuseks katsete arvu n suurenemisel, kui keskväärtus np läheneb konstandile λ (sel korral p läheneb nullile, sest $p = \frac{\lambda}{n}$).

Seetõttu nimetatakse Poissoni jaotust ka <u>harva esinevate sündmuste jaotuseks</u>.

Kui aga Poissoni jaotuse puhul λ suureneb, läheneb Poissoni jaotus normaaljaotusele $N(\lambda, \sqrt{\lambda})$. Seega võime Poissoni jaotust suurte λ väärtuste korral lähendada normaaljaotusega $N(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Kahe sõltumatu Poissoni juhusliku suuruse $X_1 \sim P(\lambda_1)$ ja $X_2 \sim P(\lambda_2)$ summa $Y = X_1 + X_2$ on Poissoni juhuslik suurus, $Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

4. <u>Poissoni jaotuse kasutamine</u>.

Poissoni juhusliku suurusega võib kirjeldada mingi ajavahemiku t_0 vältel teatava sündmuse A (telefoniväljakutse, elementaarosakeste lagunemine) esinemiste arvu. Keskmiselt esineb see sündmus ajavahemiku t_0 jooksul λ korda.

Kui ajavahemiku t_0 vältel sündmuse A esinemiste arv $X \sim P(\lambda_0)$, siis ajavahemiku kt_0 vältel on sündmuse A esinemiste arv Y Poissoni jaotusega $P(\lambda)$, kus $\lambda = k\lambda_0$.

Tabel 2.1.

Funktsiooni $e^{-\lambda}$ väärtused, $0 \leq \lambda \leq 2$.[12]

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,00	1,0900	0,51	0,6005	1,02	0,3606	1,53	0,2165
0,01	0,9900	0,52	0,5945	1,03	0,3570	1,54	0,2144
0,02	0,9802	0,53	0,5886	1,04	0,3535	1,55	0,2122
0,03	0,9704	0,54	0,5827	1,05	0,3499	1,56	0,2101
0,04	0,9608	0,55	0,5769	1,06	0,3465	1,57	0,2080
0,05	0,9512	0,56	0,5712	1,07	0,3430	1,58	0,2060
0,06	0,9418	0,57	0,5655	1,08	0,3396	1,59	0,2039
0,07	0,9324	0,58	0,5599	1,09	0,3362	1,60	0,2019
0,08	0,9231	0,59	0,5543	1,10	0,3329	1,61	0,1999
0,09	0,9139	0,60	0,5488	1,11	0,3296	1,62	0,1979
0,10	0,9048	0,61	0,5434	1,12	0,3263	1,63	0,1959
0,11	0,8958	0,62	0,5379	1,13	0,3230	1,64	0,1940
0,12	0,8869	0,63	0,5326	1,14	0,3198	1,65	0,1920
0,13	0,8781	0,64	0,5273	1,15	0,3166	1,66	0,1901
0,14	0,8694	0,65	0,5220	1,16	0,3135	1,67	0,1882
0,15	0,8607	0,66	0,5169	1,17	0,3104	1,68	0,1864
0,16	0,8521	0,67	0,5117	1,18	0,3073	1,69	0,1845
0,17	0,8437	0,68	0,5066	1,19	0,3043	1,70	0,1827
0,18	0,8353	0,69	0,5016	1,20	0,3012	1,71	0,1809
0,19	0,8270	0,70	0,4966	1,21	0,2982	1,72	0,1791
0,20	0,8187	0,71	0,4916	1,22	0,2952	1,73	0,1773
0,21	0,8106	0,72	0,4868	1,23	0,2923	1,74	0,1755
0,22	0,8025	0,73	0,4819	1,24	0,2894	1,75	0,1738
0,23	0,7945	0,74	0,4771	1,25	0,2865	1,76	0,1720
0,24	0,7866	0,75	0,4724	1,26	0,2837	1,77	0,1703
0,25	0,7788	0,76	0,4677	1,27	0,2808	1,78	0,1686
0,26	0,7711	0,77	0,4630	1,28	0,2780	1,79	0,1670
0,27	0,7634	0,78	0,4584	1,29	0,2753	1,80	0,1653
0,28	0,7558	0,79	0,4538	1,30	0,2725	1,81	0,1637
0,29	0,7483	0,80	0,4493	1,31	0,2698	1,82	0,1620
0,30	0,7408	0,81	0,4449	1,32	0,2671	1,83	0,1604
0,31	0,7334	0,82	0,4404	1,33	0,2645	1,84	0,1588
0,32	0,7261	0,83	0,4360	1,34	0,2618	1,85	0,1572
0,33	0,7189	0,84	0,4317	1,35	0,2592	1,86	0,1541
0,34	0,7118	0,85	0,4274	1,36	0,2567	1,87	0,1557
0,35	0,7047	0,86	0,4232	1,37	0,2541	1,88	0,1526
0,36	0,6977	0,87	0,4190	1,38	0,2516	1,89	0,1511
0,37	0,6907	0,88	0,4148	1,39	0,2491	1,90	0,1496
0,38	0,6839	0,89	0,4107	1,40	0,2466	1,91	0,1481
0,39	0,6771	0,90	0,4066	1,41	0,2441	1,92	0,1466
0,40	0,6703	0,91	0,4025	1,42	0,2417	1,93	0,1451
0,41	0,6637	0,92	0,3985	1,43	0,2393	1,94	0,1437
0,42	0,6570	0,93	0,3946	1,44	0,2369	1,95	0,1423
0,43	0,6505	0,94	0,3906	1,45	0,2346	1,96	0,1409
0,44	0,6440	0,95	0,3867	1,46	0,2322	1,97	0,1395
0,45	0,6376	0,96	0,3829	1,47	0,2299	1,98	0,1381
0,46	0,6313	0,97	0,3791	1,48	0,2276	1,99	0,1367
0,47	0,6250	0,98	0,3753	1,49	0,2254	2,00	0,1353
0,48	0,6188	0,99	0,3716	1,50	0,2231		
0,49	0,6126	1,00	0,3679	1,51	0,2209		
0,50	0,6065	1,01	0,3542	1,52	0,2187		

[12] Tabel pärineb teosest [26], lk. 409.

Tabel 2.2.

Poissoni juhusliku suuruse $P(\lambda)$ jaotus.[13]

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05362	0,07581
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01263
4		0,00005	0,00025	0,00071	0,00158
5			0,00001	0,00006	0,00016
6					0,00001

k \ λ	0,6	0,7	0,8	0,9	
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657	
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591	
2	0,09878	0,12166	0,14379	0,16466	
3	0,01976	0,02838	0,03834	0,04939	
4	0,00296	0,00496	0,00766	0,01111	
5	0,00035	0,00069	0,00123	0,00200	
6	0,00003	0,00008	0,00016	0,00030	
7			0,00001	0,00003	

k \ λ	1	2	3	4	5
0	0,36788	0,13534	0,04978	0,01831	0,00673
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,01532	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00306	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05040	0,10420	0,14622
7	0,00007	0,00343	0,02160	0,05954	0,10444
8		0,00085	0,00810	0,02977	0,06527
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03626
10		0,00003	0,00081	0,00529	0,01813
11			0,00022	0,00192	0,00824
12			0,00005	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00019	0,00132
14				0,00005	0,00047
15				0,00001	0,00015
16					0,00004
17					0,00001

[13] Tabel pärineb teosest [18], lk. 502-505.

Tabel 2.2 (järg).

k \ λ	6	7	8	9	10
0	0,00247	0,00091	0,00033	0,00012	0,00004
1	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111	0,00045
2	0,04461	0,02234	0,01073	0,00499	0,00227
3	0,08923	0,05212	0,02862	0,01499	0,00756
4	0,13385	0,09122	0,05725	0,03373	0,01891
5	0,16062	0,12772	0,09160	0,06072	0,03783
6	0,16062	0,14900	0,12214	0,09109	0,06305
7	0,13768	0,14900	0,13959	0,11712	0,09007
8	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176	0,11260
9	0,06883	0,10140	0,12408	0,13176	0,12511
10	0,04130	0,07098	0,09926	0,11858	0,12511
11	0,02252	0,04517	0,07219	0,09702	0,11374
12	0,01126	0,02635	0,04812	0,07276	0,09478
13	0,00519	0,01418	0,02961	0,05037	0,07290
14	0,00222	0,00709	0,01692	0,03238	0,05207
15	0,00089	0,00331	0,00902	0,01943	0,03471
16	0,00033	0,00144	0,00451	0,01093	0,02169
17	0,00011	0,00059	0,00212	0,00578	0,01276
18	0,00003	0,00023	0,00094	0,00289	0,00709
19	0,00001	0,00008	0,00039	0,00137	0,00373
20		0,00003	0,00015	0,00061	0,00186
21			0,00006	0,00026	0,00088
22			0,00002	0,00010	0,00040
23				0,00004	0,00017
24				0,00001	0,00007
25					0,00002
26					0,00001

Tabel 2.2 (järg).

k \ λ	11	12	13	14	15
0	0,00001				
1	0,00018	0,00007	0,00002	0,00001	
2	0,00101	0,00044	0,00019	0,00008	0,00003
3	0,00370	0,00177	0,00082	0,00038	0,00017
4	0,01018	0,00530	0,00269	0,00133	0,00064
5	0,02241	0,01274	0,00699	0,00373	0,00193
6	0,04109	0,02548	0,01515	0,00869	0,00483
7	0,06457	0,04368	0,02814	0,01739	0,01037
8	0,08879	0,06552	0,04573	0,03043	0,01944
9	0,10853	0,08736	0,06605	0,04734	0,03240
10	0,11938	0,10484	0,08587	0,06628	0,04861
11	0,11938	0,11437	0,10148	0,08435	0,06628
12	0,10943	0,11437	0,10994	0,09841	0,08285
13	0,09259	0,10557	0,10994	0,10599	0,09560
14	0,07275	0,09048	0,10209	0,10599	0,10244
15	0,05335	0,07239	0,08847	0,09892	0,10244
16	0,03668	0,05429	0,07188	0,08655	0,09603
17	0,02373	0,03832	0,05497	0,07128	0,08473
18	0,01450	0,02555	0,03970	0,05544	0,07061
19	0,00839	0,01613	0,02716	0,04085	0,05574
20	0,00461	0,00968	0,01765	0,02859	0,04181
21	0,00241	0,00553	0,01093	0,01906	0,02986
22	0,00121	0,00301	0,00645	0,01213	0,02036
23	0,00057	0,00157	0,00365	0,00738	0,01328
24	0,00026	0,00078	0,00197	0,00430	0,00830
25	0,00011	0,00037	0,00102	0,00241	0,00498
26	0,00004	0,00017	0,00051	0,00129	0,00287
27	0,00002	0,00007	0,00024	0,00067	0,00159
28		0,00003	0,00011	0,00033	0,00085
29		0,00001	0,00005	0,00016	0,00044
30			0,00002	0,00007	0,00022
31				0,00003	0,00010
32				0,00001	0,00005
33					0,00002
34					0,00001

Tabel 2.2 (järg).

k \ λ	16	17	18	19	20
0					
1					
2	0,00001				
3	0,00007	0,00003			
4	0,00030	0,00014	0,00006	0,00003	0,00001
5	0,00098	0,00049	0,00024	0,00011	0,00005
6	0,00262	0,00138	0,00071	0,00036	0,00018
7	0,00599	0,00337	0,00185	0,00099	0,00052
8	0,01198	0,00718	0,00416	0,00236	0,00130
9	0,02131	0,01352	0,00832	0,00498	0,00290
10	0,03409	0,02300	0,01498	0,00946	0,00581
11	0,04959	0,03554	0,02452	0,01635	0,01057
12	0,06612	0,05035	0,03678	0,02588	0,01762
13	0,08138	0,06584	0,05092	0,03783	0,02711
14	0,09301	0,07996	0,06548	0,05135	0,03874
15	0,09921	0,09062	0,07857	0,06504	0,05165
16	0,09921	0,09628	0,08839	0,07724	0,06456
17	0,09338	0,09628	0,09359	0,08632	0,07595
18	0,08300	0,09093	0,09359	0,09112	0,08439
19	0,06989	0,08136	0,08867	0,09112	0,08883
20	0,05592	0,06915	0,07980	0,08656	0,08883
21	0,04260	0,05598	0,06840	0,07832	0,08460
22	0,03098	0,04326	0,05596.	0,06764	0,07691
23	0,02155	0,03197	0,04380	0,05587	0,06688
24	0,01437	0,02265	0,03285	0,04423	0,05573
25	0,00919	0,01540	0,02365	0,03362	0,04458
26	0,00566	0,01007	0,01637	0,02456	0,03429
27	0,00335	0,00634	0,01091	0,01728	0,02540
28	0,00191	0,00385	0,00701	0,01173	0,01814
29	0,00105	0,00225	0,00435	0,00768	0,01251
30	0,00056	0,00127	0,00261	0,00486	0,00834
31	0,00029	0,00070	0,00151	0,00298	0,00538
32	0,00014	0,00037	0,00085	0,00177	0,00336
33	0,00007	0,00019	0,00046	0,00102	0,00203
34	0,00003	0,00009	0,00024	0,00057	0,00119
35	0,00001	0,00004	0,00012	0,00030	0,00068
36		0,00002	0,00006	0,00016	0,00038
37		0,00001	0,00003	0,00008	0,00020
38			0,00001	0,00004	0,00010
39				0,00002	0,00005
40					0,00002
41					0,00001

Tabel 2.3.

Poissoni juhusliku suuruse P(λ) täiendjaotusfunktsioon[14]

$$P(X > x) = 1 - \sum_{k=0}^{x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=x+1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

x / m	a=0,1	a=0,2	a=0,3	a=0,4	a=0,5
0	$9{,}5163^{-2}$	$1{,}8127^{-1}$	$2{,}5918^{-1}$	$3{,}2968^{-1}$	$8{,}9347^{-1}$
1	$4{,}6788^{-3}$	$1{,}7523^{-2}$	$3{,}6936^{-2}$	$6{,}1552^{-2}$	$9{,}0204^{-2}$
2	$1{,}5465^{-4}$	$1{,}1485^{-3}$	$3{,}5995^{-3}$	$7{,}9263^{-3}$	$1{,}4388$
3	$3{,}8468^{-6}$	$5{,}6840^{-5}$	$2{,}6581^{-4}$	$7{,}7625^{-4}$	$1{,}7516^{-3}$
4		$2{,}2592^{-6}$	$1{,}5785^{-5}$	$6{,}1243^{-5}$	$1{,}7212^{-4}$
5				$4{,}0427^{-6}$	$1{,}4165^{-5}$
6					$1{,}0024^{-6}$

m	a=0,6	a=0,7	a=0,8	a=0,9	
0	$4{,}5119^{-1}$	$5{,}0341^{-1}$	$5{,}5067^{-1}$	$5{,}9343^{-1}$	
1	$1{,}2190$	$1{,}5580$	$1{,}9121$	$2{,}2752$	
2	$2{,}3115^{-2}$	$3{,}4142^{-2}$	$4{,}7423^{-2}$	$6{,}2857^{-2}$	
3	$3{,}3581^{-3}$	$5{,}7535^{-3}$	$9{,}0799^{-3}$	$1{,}3459$	
4	$3{,}9449^{-4}$	$7{,}8554^{-4}$	$1{,}4113$	$2{,}3441^{-3}$	
5	$3{,}8856^{-5}$	$9{,}0026^{-5}$	$1{,}8434^{-4}$	$3{,}4349^{-4}$	
6	$3{,}2931^{-6}$	$8{,}8836^{-6}$	$2{,}0747^{-5}$	$4{,}3401^{-5}$	
7			$2{,}0502^{-6}$	$4{,}8172^{-6}$	

Markus. **Toodud tabelis astendaja näitab 10. astet. Nii tähendab** $9{,}5163^{-2} = 9{,}5163 \cdot 10^{-2} = 9{,}5163 \cdot 0{,}01 = 0{,}095163$, $2{,}0502^{-6} = 2{,}0502 \cdot 10^{-6} = 2{,}0502 \cdot 0{,}000001 \approx 0{,}00000205$.

[14] Tabel pärineb teosest [21], lk. 356–360.

Tabel 2.3 (järg).

m	$a=1$	$a=2$	$a=3$	$a=4$	$a=5$
0	6,3212^{-1}	8,6466^{-1}	9,5021^{-1}	9,8168^{-1}	9,9326^{-1}
1	2,6424	5,9399	8,0085	9,0842	9,5957
2	8,0301^{-2}	3,2332	5,7681	7,6190	8,7535
3	1,8988	1,4288	3,5277	5,6653	7,3497
4	3,6598^{-3}	5,2653^{-2}	1,8474	3,7116	5,5951
5	5,9418^{-4}	1,6564	8,3918^{-2}	2,1487	3,8404
6	8,3241^{-5}	4,5338^{-3}	3,3509	1,1067	2,3782
7	1,0249	1,0967	1,1905	5,1134^{-2}	1,3337
8	1,1252^{-6}	2,3745^{-4}	3,8030^{-3}	2,1363	6,8094^{-2}
9		4,6498^{-5}	1,1025	8,1322^{-3}	3,1828
10		8,3082^{-6}	2,9234^{-4}	2,8398	1,3695
11		1,3646	7,1387^{-5}	9,1523^{-4}	5,4531^{-3}
12			1,6149	2,7372	2,0189
13			3,4019^{-6}	7,6328^{-5}	6,9799^{-4}
14				1,9932	2,2625
15				4,8926^{-6}	6,9008^{-5}
16				1,1328	1,9869
17					5,4163^{-6}
18					1,4017
m	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$	$a=10$
0	9,9752^{-1}	9,9909^{-1}	9,9966^{-1}	9,9988^{-1}	9,9995^{-1}
1	9,8265	9,9270	9,9698	9,9877	9,9950
2	9,3803	9,7036	9,8625	9,9377	9,9723
3	8,4880	9,1823	9,5762	9,7877	9,8966
4	7,1494	8,2701	9,0037	9,4504	9,7075
5	5,5432	6,9929	8,0876	8,8431	9,3291
6	3,9370	5,5029	6,8663	7,9322	8,6985
7	2,5602	4,0129	5,4704	6,7610	7,7978
8	1,5276	2,7091	4,0745	5,4435	6,6718
9	8,3924^{-2}	1,6950^{-1}	2,8338^{-1}	4,1259^{-1}	5,4207^{-1}
10	4,2621	9,8521^{-2}	1,8411	2,9401	4,1696
11	2,0092	5,3350	1,1192	1,9699	3,0322
12	8,8275^{-3}	2,7000	6,3797^{-2}	1,2423	2,0844
13	3,6285	1,2811	3,4181	7,3851^{-2}	1,3554
14	1,4004	5,7172^{-3}	1,7257	4,1466	8,3458^{-2}
15	5,0910^{-4}	2,4066	8,2310^{-3}	2,2036	4,8740
16	1,7488	9,5818^{-4}	3,7180	1,1106	2,7042
17	5,6917^{-5}	3,6178	1,5943	5,3196^{-3}	1,4278
18	1,7597	1,2985	6,5037^{-4}	2,4264	7,1865^{-3}

Tabel 2.3 (järg).

m	$a=6$	$a=7$	$a=8$	$a=9$	$a=10$
19	$5,1802^{-6}$	$4,4402^{-5}$	2,5294	1,0560	3,4543
20	1,4551	1,4495	$9,3968^{-5}$	$4,3925^{-4}$	1,5883
21		$4,5263^{-6}$	3,3407	1,7495	$6,9965^{-4}$
22		1,3543	1,1385	$6,6828^{-5}$	2,9574
23			$3,7255^{-6}$	2,4519	1,2012
24			1,1722	$8,6531^{-6}$	$4,6949^{-5}$
25				2,9414	1,7680
26					$6,4229^{-6}$
27					2,2535
m	$a=11$	$a=12$	$a=13$	$a=14$	$a=15$
0	$9,9998^{-1}$	$9,9999^{-1}$			
1	9,9980	9,9992	$9,9997^{-1}$	$9,9999^{-1}$	
2	9,9879	9,9948	9,9978	9,9991	$9,9996^{-1}$
3	9,9508	9,9771	9,9895	9,9953	9,9979
4	9,8490	9,9240	9,9626	9,9819	9,9914
5	9,6248	9,7966	9,8927	9,9447	9,9721
6	9,2139	9,5418	9,7411	9,8577	9,9237
7	8,5681	9,1050	9,4597	9,6838	9,8200
8	7,6801	8,4497	9,0024	9,3794	9,6255
9	6,5949	7,5761	8,3419	8,9060	9,3015
10	5,4011	6,5277	7,4832	8,2432	8,8154
11	4,2073	5,3840	6.4684	7,3996	8,1525
12	3,1130	4,2403	5,3690	6,4154	7,3239
13	2,1871	3,1846	4,2696	5,3555	6,3678
14	1,4596	2,2798	3,2487	4,2956	5.3435
15	$9,2604^{-2}$	1,5558	2,3639	3,3064	4,3191
16	5,5924	1,0129	1,6451	2,4408	3,3588
17	3,2191	$6,2966^{-2}$	1,0954	1,7280	2,5114
18	1,7687	3,7416	$6,9833^{-2}$	1,1736	1.8053
19	$9,2895^{-3}$	2,1280	4,2669	$7,6505^{-3}$	1,2478
20	4,6711	1,1598	2,5012	4,7908	$8,2972^{-3}$
21	2,2519	$6,0651^{-3}$	1,4081	2,8844	5,3106
22	1,0423	3,0474	$7,6225^{-3}$	1,6712	3,2744
23	$4,6386^{-4}$	1,4729	3,9718	$9,3276^{-3}$	1,9465
24	1,9871	$6,8563^{-4}$	1,9943	5,0199	1,1165
25	$8,2050^{-5}$	3,0776	$9,6603^{-4}$	2,6076	$6,1849^{-3}$
26	3,2693	1,3335	4,5190	1,3087	3,3119
27	1,2584	$5,5836^{-5}$	2,0435	$6,3513^{-4}$	1,7158
28	$4,6847^{-6}$	2,2616	$8,9416^{-5}$	2,9837	$8,6072^{-4}$

Tabel 2.3 (järg).

m	a=11	a=12	a=13	a=14	a=15
29	1,6882	$8,8701^{-6}$	3,7894	1,3580	4,1845
30		3,3716	1,5568	$5,9928^{-5}$	1,9731
31		1,2432	$6,2052^{-6}$	2,5665	$9,0312^{-5}$
32			2,4017	1,0675	4,0155
33				$4,3154^{-6}$	1,7356
34				1,6968	$7,2978^{-6}$
35					2,9871
36					1,1910

m	a=16	a=17	a=18	a=19	a=20
0					
1					
2	$9,9998^{-1}$	$9,9999^{-1}$			
3	9,9991	9,9996	$9,9998^{-1}$	$9,9999^{-1}$	
4	9,9960	9,9982	9,9992	9,9996	$9,9998^{-1}$
5	9,9862	9,9933	9,9968	9,9985	9,9993
6	9,9599	9,9794	9,9896	9,9948	9,9974
7	9,9000	9,9457	9,9711	9,9849	9,9922
8	9,7801	9,8740	9,9294	9,9613	9,9791
9	9,5670	9,7388	9,8462	9,9114	9,9500
10	9,2260	9,5088	9,6963	9,8168	9,8919
11	8,7301	9,1533	9,4511	9,6533	9,7861
12	8,0688	8,6498	9,0833	9,3944	9,6099
13	7,2545	7,9913	8,5740	9,0160	9,3387
14	6,3247	7,1917	7,9192	8,5025	8,9514
15	5,3326	6,2855	7,1335	7,8521	8,4349
16	4,3404	5,3226	6,2495	7,0797	7,7893
17	3,4066	4,3598	5,3135	6,2164	7,0297
18	2,5765	3,4504	4,3776	5,3052	6,1858
19	1,8775	2,6368	3,4908	4,3939	5,2974
20	1,3183	1,9452	2,6928	3,5283	4,4091
21	$8,9227^{-2}$	1,3853	2,0088	2,7450	3,5630
22	5,8241	$9,5272^{-2}$	1,4491	2,0687	2,7939
23	3,6686	6,3296	1,0111	1,5098	2,1251
24	2,2315	4,0646	$6,8260^{-2}$	1,0675	1,5677
25	1,3119	2,5245	4,4608	$7,3126^{-2}$	1,1218
26	$7,4589^{-3}$	1,5174	2,8234	4,8557	$7,7887^{-2}$
27	4,1051	$8,8335^{-3}$	1,7318	3,1268	5,2481
28	2,1886	4,9838	1,0300	1,9536	3,4334

Tabel 2.3 (järg).

m	$a=16$	$a=17$	$a=18$	$a=19$	$a=20$
29	1,1312	2,7272	$5,9443^{-3}$	1,1850	2,1818
30	$5,6726^{-4}$	1,4484	3,3308	$6,9819^{-3}$	1,3475
31	2,7620	$7,4708^{-4}$	1,8133	3,9982	$8,0918^{-3}$
32	1,3067	3,7453	$9,5975^{-4}$	2,2267	4,7274
33	$6,0108^{-5}$	1,8260	4,9416	1,2067	2,6884
34	2,6903	$8,6644^{-5}$	2,4767	$6,3674^{-4}$	1,4890
35	1,1724	4,0035	1,2090	3,2732	$8,0366^{-4}$
36	$4,9772^{-6}$	1,8025	$5,7519^{-5}$	1,6401	4,2290
37	2,0599	$7,9123^{-6}$	2,6684	$8,0154^{-5}$	2,1708
38		3,3882	1,2078	3,8224	1,0875
39		1,4162	$5,3365^{-6}$	1,7797	$5,3202^{-5}$
40			2,3030	$8,0940^{-6}$	2,5426
41				3,5975	1,1877
42				1,5634	$5,4252^{-6}$
43					2,4243
44					1,0603

Näide 2.1.

Oletame, et õpilase koolist puudutud päevade arv on Poissoni jaotusega. Olgu teada, et mingis klassis puudus iga õpilane semestris keskmiselt 5 päeva. Leida, kui suur on tõenäosus selleks, et õpilane puudus 0,1,2,... jne. päeva.

Lahendus.

Tabelist 2.2 leiame juhul $\lambda = 5$:

$$P(X = 0) = 0{,}00673,$$

$$P(X = 1) = 0{,}03369,$$

$$P(X = 2) = 0{,}08422$$

jne., mis ongi otsitavad tõenäosused.

Näide 2.2.

Näites 2.1 kirjeldatud klassis käib 40 õpilast. Leida, mitu õpilast puudusid 0,1,2,... päeva.

Lahendus.

Vastused saame anda ainult keskmiselt. Selleks arvutame suurused

$$nP(X = i) \quad (i = 0,1,2,\dots).$$

0 päeva puudus $40 \cdot 0{,}007 \approx 0{,}3 \approx 0$ õpilast;

1 päeva puudus $40 \cdot 0{,}0337 \approx 1{,}3 \approx 1$ õpilane

jne.

Näide 2.3.

Leida tõenäosus selleks, et näites 2.1 kirjeldatud klassi juhuslik õpilane on koolist puudunud rohkem kui 6 päeva. Määrata, kui palju on klassis (keskmiselt) niisuguseid õpilasi, kes on üle 6 päeva puudunud.

Lahendus.

Tabelist 2.3 leiame (võttes $\lambda = 5$)

$$P(X > 6) = 0{,}238.$$

Saadud arv ongi vastuseks esimesele küsimusele. Üle 6 päeva puudunud õpilaste keskmise arvu saame korrutisena

$$nP(X > 6),$$

mis võrdub

$$40 \cdot 0{,}238 = 9{,}52 \approx 10.$$

Näide 2.4.

Olgu teada, et mingi sõna esineb tekstis sagedusega 0,0002, teine sõna sagedusega 0,0001. Võeti tekst pikkusega 10000 sõna. Mis on tõenäosem, kas esimese sõna esinemine vähemalt kahel korral või teise sõna esinemine vähemalt ühel korral?

Lahendus.

Lahendame ülesande, lähendades sõnade jaotusi Poissoni jaotusega.

Selleks saame:

$$\lambda_1 = np_1 = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2,$$
$$\lambda_2 = np_2 = 10000 \cdot 0{,}0001 = 1;$$
$$P(X_1 \geqslant 2) = 1 - \left[P(X_1 = 1) + P(X_1 = 0)\right];$$
$$P(X_2 \geqslant 1) = 1 - P(X_2 = 0).$$

Tabelist leiame, võttes $\lambda_1 = 2$

$$P(X_1 = 0) \approx 0{,}135;$$
$$P(X_1 = 1) \approx 0{,}271, \text{ seega}$$
$$P(X_1 \geqslant 2) = 1 - 0{,}406 = 0{,}594;$$

võttes $\lambda_2 = 1$, leiame

$$P(X_2 = 0) \approx 0{,}368;$$
$$P(X_2 \geqslant 1) = 0{,}632,$$

seega teise sõna vähemalt ühekordne esinemine on tõenäosem.

5. Poissoni jaotuse parameetri λ (keskväärtuse) hinnang katsetulemuste põhjal.

Parameetri λ määramiseks loendame mingi ajavahemiku t vältel sündmuse A esinemiste arvu x ning loeme

$$\lambda \approx x.$$

Kui meid huvitab sündmuse A esinemiste arv X mingi ajavahemiku $t_o = \frac{t}{k}$ vältel, siis $X \sim P(\lambda_o)$, kus $\lambda_o = \frac{\lambda}{k} \approx \frac{x}{k}$.

Mida pikem on ajavahemik t, mille vältel loendame sündmuse A esinemise arvu, seda täpsema hinnangu saame parameetrile λ_0 (sest $D(\tilde{\lambda}_0) = \frac{1}{k^2} D(x) = \frac{\lambda}{k^2} = \frac{\lambda_0}{k}$).

Kui λ_0 hindamiseks oleme teinud mitu katset pikkustega $t_1 = k_1 t_0$, $t_2 = k_2 t_0$, ... , $t_h = k_h t_0$ ning tulemustega $x_1, x_2, \ldots, x_h$, siis saame λ_0 jaoks hinnangu

$$\lambda_0 \approx \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_h}{k_1 + k_2 + \ldots + k_h} .$$

6. λ usalduspiirid.

Et parameetri λ hinnang x on enamasti ebatäpne, siis pakub huvi ka λ usalduspiiride määramine.

Usaldusnivoole $1-\alpha$ vastavateks (ehk $(1-\alpha)\cdot 100\%$-listeks) usalduspiirideks nimetatakse kahte katsetulemuste põhjal määratud arvu $\underline{\lambda}$ ja $\bar{\lambda}$, mis rahuldavad tingimust:

$$P(\underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda}) = 1 - \alpha,$$

s.t. hinnatava parameetri õige väärtus λ jääb tõenäosusega $1-\alpha$ usalduspiiride $\underline{\lambda}$ ja $\bar{\lambda}$ vahele.

Kõige sagedamini kasutatakse usaldusnivoosid 0,95 (ehk 95%) ja 0,99 (ehk 99%), s.t. vastavalt $\alpha = 0{,}05$ ja $\alpha = 0{,}01$. Nende usaldusnivoode väärtuste jaoks on antud ka tabelid (2.4A ja 2.4B).

Juhul kui nõutakse usalduspiiride määramist parameetrile λ_0, mille jaoks on saadud hinnang

$$\lambda_0 \approx \frac{x}{k}$$

(siin võib olla ka $x = \sum_{i=1}^{h} x_i \qquad k = \sum_{i=1}^{h} k_i$),

siis leiame kõigepealt suuruse $\lambda = k\lambda_o$ usalduspiirid vaatlustulemuse x alusel:

$$\underline{\lambda}, \overline{\lambda},$$

seejärel aga $\underline{\lambda}_o = \frac{\underline{\lambda}}{k}$; $\overline{\lambda}_o = \frac{\overline{\lambda}}{k}$.

Tabel 2.4A.

Poissoni jaotuse keskväärtuse λ 99%-lised usalduspiirid[15]

$\alpha = 1\%$

x	$\underline{\lambda}$	$\bar{\lambda}$	x	$\underline{\lambda}$	$\bar{\lambda}$
0	0,00	5,30	26	14,74	42,25
1	0,01	7,43	27	15,49	43,35
2	0,15	9,27	28	16,24	44,74
3	0,43	10,98	29	17,00	45,98
4	0,82	12,59	30	17,77	47,21
5	1,28	14,15	31	18,55	48,45
6	1,79	15,66	32	19,30	49,69
7	2,33	17,13	33	20,10	50,90
8	2,91	18,53	34	20,85	52,10
9	3,51	20,00	35	21,64	53,33
10	4,13	21,40	36	22,40	54,55
11	4,77	22,78	37	23,20	55,75
12	5,30	24,14	38	24,00	56,95
13	5,58	25,50	39	24,80	58,15
14	6,23	26,84	40	25,59	59,36
15	6,89	28,16	41	26,40	60,55
16	7,57	29,48	42	27,20	61,75
17	8,25	30,79	43	28,00	62,95
18	8,94	32,09	44	28,80	64,15
19	9,64	33,38	45	29,60	65,34
20	10,35	34,67	46	30,40	66,55
21	11,07	35,95	47	31,20	67,70
22	11,79	37,22	48	32,05	68,90
23	12,52	38,48	49	32,85	70,10
24	13,25	39,74	50	33,66	71,27
25	14,00	41,00			

x on uuritava sündmuse esinemiste arv katseseeria (ajaühiku)vältel, $\underline{\lambda}$ ja $\bar{\lambda}$ on keskväärtuse λ kahepoolsed usalduspiirid vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha = 1-0,01=0,99$. Seega paikneb keskväärtuse λ õige väärtus tõenäosusega 0,99 väärtuste $\underline{\lambda}$ ja $\bar{\lambda}$ vahel:

$$P(\underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda}) = 1-\alpha = 0,99.$$

[15] Tabel pärineb teosest [19], lk. 618.

Tabel 2.4B.

Poissoni jaotuse keskväärtuse λ 95%-lised usalduspiirid[16]

x	$\underline{\lambda}_x$	$\bar{\lambda}_x$	x	$\underline{\lambda}_x$	$\bar{\lambda}_x$
0	0,00	3,69	26	16,98	38,10
1	0,05	5,57	27	17,79	39,28
2	0,36	7,22	28	18,01	40,47
3	0,82	8,77	29	19,42	41,65
4	1,37	10,24	30	20,24	42,83
5	1;97	11,67	31	21,05	44,00
6	2,61	13,06	32	21,90	45,15
7	3,29	14,42	33	22,70	46,35
8	3,69	15,76	34	23,55	47,50
9	4,12	17,08	35	24,38	48,68
10	4,80	18,39	36	25,20	49,85
11	5,49	19,68	37	26,05	51,00
12	6,20	20,96	38	26,90	52,15
13	6,92	22,23	39	27,75	53,30
14	7,65	23,49	40	28,58	54,47
15	8,40	24,74	41	29,40	55,60
16	9,15	25,98	42	30,25	56,75
17	9,90	27,22	43	31,10	57,90
18	10,67	28,45	44	31,95	59,05
19	11,44	29,67	45	32,82	60,21
20	12,22	30,86	46	33,70	61,35
21	13,00	32,10	47	34,55	62,50
22	13,79	33,31	48	35,40	63,65
23	14,58	34,51	49	36,25	64,80
24	15,38	35,71	50	37,11	65,92
25	16,18	36,90			

x on uuritava sündmuse esinemiste arv katseseeria (ajaühiku) vältel, $\underline{\lambda}$ ja $\bar{\lambda}$ on keskväärtuse λ kahepoolsed usalduspiirid vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha = 1-0,05=0,95$. Seega paikneb keskväärtuse λ õige väärtus tõenäosusega 0,95 väärtuse $\underline{\lambda}$ ja $\bar{\lambda}$ vahel:

$$P(\underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda}) = 1-\alpha = 0,95.$$

[16] Tabel pärineb teosest [19] , lk. 619.

Näide 2.5.

Radioaktiivse aine lagunemisel ajaühikus lõhestunud aatomite arv on Poissoni jaotusega juhuslik suurus.

1 sekundi jooksul registeeriti 8 lagunemist. Leida sekundis lagunevate aatomite arvu keskväärtuse λ 95- ja 99%-lised usalduspiirid.

Lahendus.

Tabelitest 2.4A ja 2.4B saame, võttes $x = 8$:

99%: $\underline{\lambda} = 2{,}91$; $\overline{\lambda} = 18{,}53$;

95%: $\underline{\lambda} = 3{,}69$; $\overline{\lambda} = 15{,}76$.

Näide 2.6.

Näites 2.5 kirjeldatud aine täpsemaks uurimiseks korraldati veel teine vaatlus, kusjuures 5 sekundi vältel loendati 41 lagunemist.

Leida sekundis lagunevate aatomite arvu keskväärtuse λ 95- ja 99%-lised usalduspiirid.

Lahendus.

Võtame $x = x_1 + x_2 = 8 + 41 = 49$;

$k = k_1 + k_2 = 1 + 5 = 6$.

Tabelitest 2.4A ja 2.4B saame, võttes $x = 49$:

99% $\underline{\lambda} = 32{,}85$; $\overline{\lambda} = 70{,}10$;

95% $\underline{\lambda} = 36{,}25$; $\overline{\lambda} = 64{,}80$.

Ühe sekundi jaoks saame usalduspiirid

99% $\underline{\lambda} = 5{,}48$; $\overline{\lambda} = 11{,}68$;

95% $\underline{\lambda} = 6{,}04$; $\overline{\lambda} = 10{,}80$.

7. λ usalduspiiride ligikaudne määramine.

Suurte x väärtuste korral tuleb λ usalduspiiride määramiseks kasutada lähendamist normaaljaotusega; 95%-lised usalduspiirid λ jaoks määrame järgmiselt:

$$\underline{\lambda} \approx x - 1,96\sqrt{x}\,; \qquad \overline{\lambda} \approx x + 1,96\sqrt{x}\,;$$

99%-lised usalduspiirid vastavalt

$$\underline{\lambda} \approx x - 2,58\sqrt{x}\,; \qquad \overline{\lambda} \approx x + 2,58\sqrt{x}\,.$$

Kui λ_0 määramiseks on hinnang

$$\lambda_0 \approx \frac{x}{k},$$

siis saame λ_0 jaoks usalduspiirid

$$95\%: \quad \underline{\lambda}_0 \approx \frac{x - 1,96\sqrt{x}}{k}; \quad \overline{\lambda}_0 \approx \frac{x + 1,96\sqrt{x}}{k};$$

$$99\%: \quad \underline{\lambda}_0 \approx \frac{x - 2,58\sqrt{x}}{k}; \quad \overline{\lambda}_0 \approx \frac{x + 2,58\sqrt{x}}{k}.$$

Näide 2.7.

Olgu 10 minuti vältel loendatud 253 telefoniväljakutset. Leida keskmine väljakutsete arv minutis λ_0 ning selle 99%-lised usalduspiirid.

Lahendus.

$x = 253, \quad \sqrt{x} = 15,9; \quad 2,58\sqrt{x} = 41,02;$

$$\lambda_0 \approx \frac{253}{10} = 25,3;$$

$$\underline{\lambda} = 253 - 41,02 = 211,98; \qquad \overline{\lambda} = 253 + 41,02 = 294,02;$$

$$\underline{\lambda}_0 = \frac{211,98}{10} = 21,2; \qquad \overline{\lambda}_0 = 29,4.$$

8. Kahe Poissoni juhusliku suuruse võrdlemine usaldus-piiride abil.

Olgu X_1 ja X_2 Poissoni juhuslikud suurused, $X_1 \sim P(\lambda_1)$, $X_2 \sim P(\lambda_2)$. Kontrollida (olulisuse nivooga α) üht hüpoteesidest:

$$H_1 : \lambda_1 \neq \lambda_2 ,$$
$$H_2 : \lambda_1 < \lambda_2 ,$$
$$H_3 : \lambda_1 > \lambda_2 .$$

Lihtsaim võimalus selle ülesande lahendamiseks on kasutada usalduspiire.

Hüpoteesi H_1 saame vastu võtta siis, kui $\underline{\lambda}_1 > \overline{\lambda}_2$ või $\overline{\lambda}_1 < \underline{\lambda}_2$, kusjuures usalduspiirid vastavad usaldusnivoole $1-\alpha$.

Hüpoteesi H_2 saame vastu võtta siis, kui $\overline{\lambda}_1 < \underline{\lambda}_2$. Kui $\overline{\lambda}_1$ ja $\underline{\lambda}_2$ vastavad usaldusnivoole $1-\alpha$, siis hüpoteesi H_2 saame tõestada olulisuse nivooga $\frac{\alpha}{2}$.

Hüpoteesi H_3 saame vastu võtta siis, kui $\underline{\lambda}_1 > \overline{\lambda}_2$. Kui $\underline{\lambda}_1$ ja $\overline{\lambda}_2$ vastavad usaldusnivoole $1-\alpha$, siis saame hüpoteesi H_3 tõestada olulisuse nivooga $\frac{\alpha}{2}$.

Näide 2.8.

Ühel nädalapäeval registeeriti kiirabijaamas 39 õnnetusjuhtumit, teisel 17. Kas võib öelda, et keskmine õnnetusjuhtude arv on erinevatel nädalapäevadel erinev (kasutada 5%-list olulisuse nivood)?

Lahendus.

$x_1 = 39$; leiame tabelist 2.4B $\underline{\lambda}_1 = 27,75$;
$x_2 = 17$; $\bar{\lambda}_2 = 27,22$.
Et $27,22 < 27,75$, tuleb õigeks lugeda hüpotees H_3 :
$\lambda_1 > \lambda_2$.

9. Kahe Poissoni jaotuse võrdlemine normaaljaotuse abil.

Suurte λ_1 ja λ_2 väärtuste korral (siis on vastavalt suured ka vaatlustulemused x_1 ja x_2) võib hüpoteeside

$$H_1 : \lambda_1 \neq \lambda_2,$$
$$H_2 : \lambda_1 < \lambda_2,$$
$$H_3 : \lambda_1 > \lambda_2$$

kontrollimiseks kasutada ka lähendamist normaaljaotusega. Selleks arvutame suuruse

$$X = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1 + x_2}} .$$

Hüpoteesi H_1 saame olulisuse nivooga α võtta vastu, kui $X > q_\alpha$, kus q_α on normaaljaotusel N(0,1) tõenäosusega α esinev hälve.

Hüpoteesid H_2 ja H_3 saame olulisuse nivooga α võtta vastu siis, kui $|X| > p_\alpha$, kus p_α on normaaljaotuse $N(0,1)$ α-täiendkvantiil, kusjuures H_2 võtame vastu siis, kui $X < 0$, H_3 siis, kui $X > 0$.

Tuleb aga märkida, et kuna normaaljaotusega lähendamine põhjustab süstemaatilist viga usalduspiiride kitsenemise suunas, siis on soovitav ta vigade vältimiseks järeldustes valida hüpoteeside tõestamiseks madal olulisuse nivoo ($\alpha = 0{,}01$).

Näide 2.9.

Liiklussagedust loendati kahel teelõigul. Ühel neist registeeriti 279, teisel 327 sõidukit. Kas võib kinnitada, et keskmised liiklussagedused nendel teelõikudel on erinevad? Olulisuse nivooks lugeda $\alpha = 0{,}01$.

Lahendus.

Arvutame

$$X = \frac{327 - 279}{\sqrt{606}} = 1{,}95 < 2{,}58,$$

järelikult ei saa me nõutava olulisuse nivooga väita, et teelõikudel liiklussagedused erineksid. Et $1{,}95 < 1{,}96$, ei saa me oma väidet tõestada ka olulisuse nivooga 0,05.

III. NORMAALNE JUHUSLIK SUURUS.

§1. N o r m a a l n e   j u h u s l i k   s u u r u s.

1. Normaaljaotus, selle arvulised karakteristikud.

Normaalne juhuslik suurus on pidev. Seda iseloomustab tõenäosuse tihedus

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

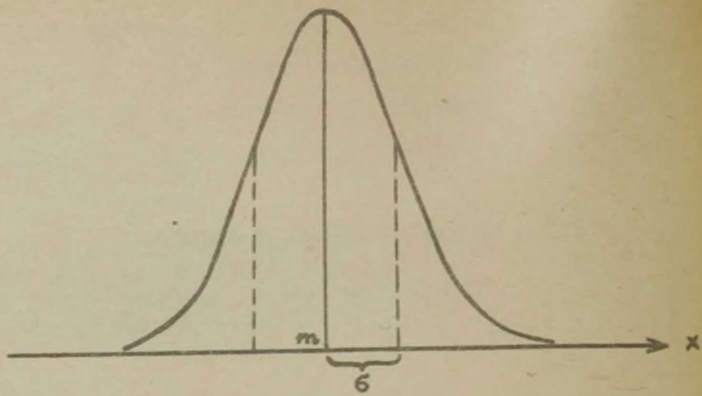
kus $m = EX$ on keskväärtus,

$\sigma^2 = DX$ on dispersioon ja

$\sigma = \sqrt{DX}$ on standardhälve (vt. joonis 3.1).

Ilmselt on normaaljaotus sümmeetriline, kusjuures sümmeetriatelg läbib keskväärtust m, mis on samaaegselt moodiks (tõenäosuse tiheduse kõvera maksimumpunkt) ning mediaaniks (jagab kõvera-aluse pindala kaheks pindvõrdseks osaks).

Asjaolu, et juhuslik suurus X on normaaljaotusega,



Joonis 3.1.

parameetritega m ja σ , tähistame sümboolselt: $X \sim N(m, \sigma)$.

2. Normaaljaotus kui sõltumatute liidetavate summa jaotus.

Nagu nägime peatükis I, läheneb binomiaalsete juhuslike suuruste jada $X_n \sim B(n,p)$ n kasvamisel normaaljaotusega juhuslikule suurusele. Samuti läheneb ka Poissoni jaotus λ suurenemisel normaaljaotusele (vt. pt. II). Edaspidi näeme, et ka t-, χ^2- ja F- jaotused lähenevad normaaljaotusele. Piirteoreemides tõestatakse, et väga paljudel juhtudel sõltumatute või ka nõrgalt sõltuvate juhuslike liidetavate summa läheneb normaalsele juhuslikule suurusele. Selleks on piisav, kui näiteks kõigi liidetavate dispersioonid on tõkestatud (või iga üksiku liidetava dispersiooni ja summa dispersiooni suhe läheneb nullile).

See asjaolu ongi põhjuseks, miks normaaljaotus on looduses levinuimaks jaotuseks.

3. Normaaljaotuse kasutamine.

Hulk bioloogilisi objekte iseloomustavaid suurusi (kaal, kasv jne.) kujuneb paljude juhuslike mõjutuste summana ning on seetõttu ligilähedaselt normaaljaotusega. Samuti on ligikaudu normaaljaotusega mõõtmisvead ning seetõttu ka mingi ajas muutumatu suuruse mõõtmistulemused. Kuna suur osa nn. klassikalisi matemaatilise statistika meetodeid töötab nimelt normaalsete juhuslike suuruste puhul, püütakse sageli tundmatu jaotusega juhuslikke suurusi lähendada normaalsete juhuslike suurustega, s.t. leida selline sobivate parameetritega normaaljaotus, millega antud materjal (väljavõte) on kõige paremini kooskõlas.

4. Normaaljaotus N(0,1).

Olgu juhuslik suurus X normaaljaotusega $N(m,\sigma)$. Nihutame seda juhuslikku suurust keskväärtuse m võrra. Siis saame juhusliku suuruse $X' = X - m$, mille keskväärtuseks on 0. Jagame saadud juhusliku suuruse X' standardhälbega σ (see tähendab juhusliku suuruse "kokkusurumist" x-telje suunas, kui $\sigma > 1$ ja "väljavenitamist", kui $\sigma < 1$). Saadud juhuslik suurus $Y = \frac{X - m}{\sigma}$ on endiselt normaaljaotusega, kuid tema keskväärtus on 0 ja standardhälve 1, s.t.

$$\frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1).$$

17

Kuna iga normaalse juhusliku suuruse võib teisendada normaalseks juhuslikuks suuruseks N(0,1), siis on kõik käesolevas peatükis tabuleeritud normaalsed juhuslikud suurused jaotusega N(0,1).

5. Tõenäosuse tihedus.

Tabelis 3.1 esitame normaaljaotuse N(0,1) tõenäosuse tiheduse

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Suvalise normaalse juhusliku suuruse $X \sim N(m,\sigma)$ tõenäosuse tiheduse f(x) saame funktsiooni $\varphi(x)$ kaudu avaldada:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma} \right),$$

$$\varphi(x) = \sigma \cdot f(m+\sigma x).$$

Paneme tähele ühtlasi seda, et kuna $\varphi(x)$ on sümmeetriline, siis

$$\varphi(x) = \varphi(-x)$$

ning

$$f(m+x) = f(m-x).$$

Selletõttu ongi tabelis 3.1 esitatud $\varphi(x)$ väärtused ainult positiivsete argumentide jaoks.

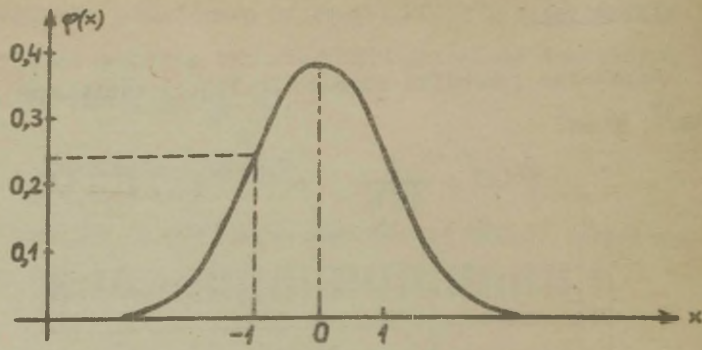
Tabel 3.1.

Normaalse juhusliku suuruse $X \sim N(0,1)$ tõenäosuse tihedus[17] $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (0 \leq x \leq 3,9).$$

x	0.00	0.01	0,02	0,03	0,04	0,05	0.06	0,07	0,08	0,09
0.0	.39894	.39892	.39886	.39870	.39862	.39844	.39822	.39797	.39767	.39733
0.1	.39695	.39654	.39608	.39559	.39505	.39448	.39387	.39322	.39253	.39181
0.2	.39104	.39024	.38940	.38853	.38762	.38667	.38568	.38466	.38361	.38251
0.3	.38139	.38023	.37903	.37780	.37654	.37524	.37391	.37255	.37115	.36973
0.4	.36827	.36678	.36526	.36371	.36213	.36053	.25889	.35723	.35553	.35381
0.5	.35207	.35029	.34849	.34667	.34482	.34294	.34105	.33912	.33718	.33521
0.6	.33322	.33121	.32918	.32713	.32506	.32297	.32086	.31874	.31659	.31443
0.7	.31225	.31006	.30785	.30563	.30339	.30114	.29887	.29659	.29431	.29200
0.8	.28969	.28737	.28504	.28269	.28034	.27798	.27562	.27324	.27086	.26848
0.9	.26609	.26369	.26129	.25888	.25647	.25406	.25164	.24923	.24681	.24439
1.0	.24197	.23955	.23713	.23471	.23230	.22988	.22747	.22506	.22265	.22025
1.1	.21785	.21546	.21307	.21069	.20831	.20594	.20357	.20121	.19886	.19652
1.2	.19419	.19186	.18954	.18724	.18494	.18265	.18037	.17810	.17585	.17360
1,3	.17137	.16915	.16694	.16474	.16256	.16038	.15822	.15608	.15395	.15183
1,4	.14937	.14764	.14556	.14350	.14146	.13943	.13742	.13542	.13344	.13147
1.5	.12952	.12758	.12566	.12376	.12188	.12051	.11816	.11632	.11450	.11270
1.6	.11092	.10915	.10741	.10567	.10396	.10226	.10059	.09893	.09728	.09566
1.7	.00405	.09246	.00089	.08933	.08780	.08628	.08478	.08329	.08183	.08038
1.8	.07895	.07754	.07614	.07477	.07341	.07206	.07074	.06943	.06814	.06687
1,9	.06562	.06438	.06316	.06195	.06077	.05959	.05844	.05730	.05618	.05508
2.0	.05399	.05292	.05186	.05082	.04980	.04879	.04780	.04682	.04586	.04491
2.1	.04398	.04307	.04217	.04128	.04041	.03955	.03871	.03788	.03706	.03626
2.2	.03547	.03470	.03394	.03319	.03246	.03174	.03100	.03034	.02965	.02898
2,3	.02833	.02768	.02705	.02643	.02582	.02522	.02463	.02406	.02349	.02294
2.4	.02239	.02186	.02134	.02083	.02033	.01984	.01936	.01889	.01842	.01797
2.5	.01753	.01709	.01667	.01625	.01585	.01545	.01506	.01458	.01431	.01394
2.6	.01358	.01323	.01289	.01256	.01223	.01191	.01160	.01130	.01100	.01071
2.7	.01042	.01014	.00987	.00961	.00935	.00909	.00885	.00861	.00837	.00814
2,8	.00792	.00770	.00748	.00727	.00707	.00687	.00668	.00649	.00631	.00613
2,9	.00595	.00578	.00562	.00545	.00530	.00514	.00499	.00485	.00471	.00457
	0.0	0,1	0,2	0.3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3.0	.00443	.00327	.00238	.00172	.00123	.00087	.00061	.00042	.00029	.00020

[17] Tabel pärineb teosest [19] , lk.586.



Joonis 3.2.

Näide 3.1.

Leida normaaljaotuse N(0,1) tõenäosuse tihedus $\varphi(x)$ argumendi väärtusel x=0,32.

Lahendus.

Leiame tabelist 3.1:

$$\varphi(0{,}32) = 0{,}37903 \approx 0{,}379.$$

Näide 3.2.

Leida normaaljaotuse N(0,1) tõenäosuse tihedus $\varphi(x)$ argumendi väärtusel x = -1,27.

Lahendus.

Et normaaljaotus on sümmeetriline, siis

$$\varphi(-x) = \varphi(x).$$

Leiame tabelist 3.1:

$$\varphi(-1,27) = \varphi(1,27) = 0,17810 \approx 0,178.$$

Näide 3.3.

Leida normaaljaotuse N(0,1) tõenäosuse tihedusele $\varphi(x) = 0,35$ vastav argument x.

Lahendus.

Tabelist 3.1 näeme, et

$$\varphi(0,51) = 0,35029 \approx 0,350,$$

$$\varphi(0,52) = 0,34849 \approx 0,348,$$

seega sobib otsitavaks väärtuseks 0,51, sümmeetria tõttu aga ka

$$\varphi(-0,51) \approx 0,350.$$

Lahenditeks on $x=0,51$ ja $x=-0,51$.

Näide 3.4.

Leida normaaljaotuse N(3;5) tõenäosuse tihedus argumendi väärtusel $x=4,5$.

Lahendus.

Arvutame vaadeldava juhusliku suuruse tõenäosuse tiheduse valemist

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\cdot\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Et antud juhul keskväärtus $m=3$, standardhälve $\sigma=5$, siis

$$f(4,5) = \frac{1}{5} \varphi\left(\frac{4,5-3}{5}\right) = \frac{1}{5}\varphi(0,3) = 0,38139 : 5 =$$

$= 0,0763.$

Näide 3.5.

Leida normaaljaotuse $N(2,\frac{1}{3})$ tõenäosuse tihedus argumendi väärtusel $x=0,5$.

Lahendus.

Arvutame

$$f(0,5) = 3\varphi\left(\frac{0,5-2}{\frac{1}{3}}\right) = 3\varphi(-4,5) = 3\varphi(4,5) = 0.000.$$

Paneme tähele, et alati, kui $x > 3,9$, siis $\varphi(x) < 0,0002$, mis praktilistes arvutustes tähendab, et $\varphi(x)=0$.

Näide 3.6.

Leida normaaljaotuse $N(2,\frac{1}{3})$ puhul punktid x_1 ja x_2, millele vastavad tõenäosuse tihedused $f(x_1)=2,0$; $f(x_2)=1,0$.

Lahendus.

Valemist

$$f(x) = \frac{1}{6} \varphi\left(\frac{x-m}{6}\right)$$

näeme, et meil tuleb leida selline x_1^*, mille korral

$$\frac{1}{6}\varphi(x_1^*) = 2,0; \quad \varphi(x_1^*) = 2,0\cdot 6$$

ja

$$\varphi(x_2^*) = 1{,}03.$$

Et $2{,}0 \cdot \sigma = \frac{2}{3} \approx 0{,}667 > 0{,}399$, siis nõutavat punkti x_1 normaaljaotuse $N(2,\frac{1}{3})$ puhul üldse ei leidu.

Punkti x_2 saame aga leida

$$\varphi(x_2^*) = 0{,}333;$$

$$x_2^* \approx 0{,}60; \quad x_2^* = \frac{x_2 - m}{\sigma}; \quad x_2 = m + \sigma x_2^* = 2 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}60 = 2{,}20.$$

Võrrandil on aga ka teine lahend, mis vastab x_2^* negatiivsele väärtusele $x_2^* = -0{,}60$:

$$x_2 = 2 - \frac{1}{3} \cdot 0{,}6 = 1{,}80.$$

Seega saime x_2-le kaks väärtust: $x_2' = 1{,}80$ ja $x_2'' = 2{,}20$.

6. Jaotusfunktsioon.

Tõenäosust selleks, et juhusliku suuruse X väärtus on väiksem mingist argumendi väärtusest x, väljendab jaotusfunktsioon $F(x) = P(X < x)$ (vt. joonis 3.3).

Normaalse juhusliku suuruse $X \sim N(m, \sigma)$ jaotusfunktsioon avaldub tõenäosuse tiheduse kaudu:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\, dt.$$

Kui $X \sim N(0,1)$, siis tähistatakse tema jaotusfunktsiooni sümboliga $\Phi(x)$:

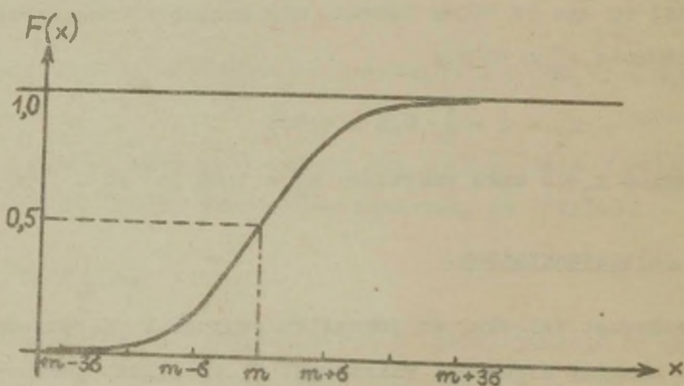
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Funktsiooni $\Phi(x)$ nimetatakse ka Laplace'i funktsiooniks ehk tõenäosuse integraaliks. Tabelites 3.2A ja 3.2B on toodud funktsiooni $\Phi(x)$ väärtused.

Suvalise normaalse juhusliku suuruse $X \sim N(m, \sigma)$ jaotusfunktsioon F(x) avaldub funktsiooni $\Phi(x)$ kaudu järgmiselt:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) ;$$

$$\Phi(x) = F(m + \sigma x).$$



Joonis 3.3.

Tabel 3.2A.

Normaalse juhusliku suuruse $X \sim N(0,1)$ jaotusfunktsioon

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt. = P(X < x)$$

$(-3,9 \leq x \leq 0)$.[18]

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
−0.0	.500000	.496011	.492022	.488034	.484047	.480062	.476078	.472097	.468119	.464144
−0,1	.460172	.456205	.452242	.448283	.444330	.440382	.436440	.432505	.428576	.424655
−0,2	.420740	.416834	.412936	.409046	.405165	.401294	397432	.393580	.389739	385906
−0,3	.382089	.378280	.374384	.370700	.366928	.363169	.359424	.355691	.351973	.348268
−0,4	.344578	.340903	.337243	.333598	.329969	.326969	.322758	.319178	.315614	.312067
−0,5	.308538	.305026	301532	.297056	.294598	.291160	.287740	.284839	.280957	.277595
−0,6	.274253	.270931	.267629	.364347	.261086	.257846	.254027	251429	.248252	.245097
−0,7	.241964	.238852	.235762	.232695	.229650	.226627	.223627	.220650	.217695	.214764
−0.8	.211855	.208970	.206108	.203269	.200454	.197602	.194894	192150	186430	.186733
−0,9	.184060	.181411	.178786	.176186	.173609	.171056	.168528	166023	.163543	.161087
−1.0	.158655	.156248	.153864	.151505	.149170	.146859	.144572	.142310	.140071	.137857
−1.1	.135666	.133500	.131357	.129238	.127143	.125072	.123024	.121000	.119000	.117023
−1.2	.115070	.113139	.111232	.109349	.107488	.106450	.103835	.102042	.100273	.098525
−1.3	.096800	.095098	.093418	.091759	.090123	.088508	.086915	.085344	.083793	.082264
−1,4	.080757	.079270	.077804	.076358	.074934	.073529	.072145	.070781	.069437	.068111
−1.5	.066807	.065522	064256	.063008	.061780	.060571	.059380	.058208	.057053	.055917
−1.6	.054799	.053699	.052616	.051551	.050503	.049472	.048457	.047460	.046479	.045514
−1,7	.044566	.043633	.042716	.041815	.040930	.040059	.039204	.038364	.037538	.036727
−1.8	.035930	.035148	.034380	.033625	.032884	.032157	.031443	.030742	.030054	.029379
−1,9	0.28717	.028067	.027429	.026803	.026190	.025588	.024998	.024419	.023852	.023296
−2,0	.022750	.022216	.021692	.021178	.020675	.020182	.019699	.019226	.018763	.018309
−2,1	.017864	.017429	.017003	.016586	.016177	.015778	.015386	.015003	.014629	.014262
−2,2	.013903	.013553	.013209	.012874	.012546	.012224	.011911	.011604	.011304	.011011
−2,3	.010724	.010444	.010170	.009903	.009642	.009387	.009138	.008894	.008656	.008424
−2,4	.008198	.007976	.007760	.007549	.007344	.007143	.006947	.006756	.006569	.006387
−2,5	.006210	.006037	.005868	.005703	.005543	.005386	.005234	.005085	.004940	.004799
−2,6	.004661	.004527	.004396	.004269	.004145	.004025	.003907	.003793	.003681	.003573
−2,7	.003467	.003364	.003264	.003167	.003078	.002980	.002890	.002803	.002718	.002635
−2,8	.002555	.002477	.002401	.002327	.002256	.002186	.002118	.002052	.001988	.001926
−2,9	.001866	.001807	.001750	.001695	.001641	.001589	.001538	.001489	.001441	.001395
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
−3,0	00.01350	.000968	.000687	.000483	.000337	.000243	.000159	.000108	.000072	.000048

[18] Tabel pärineb teosest [19], lk. 588.

18

Tabel 3.2B.

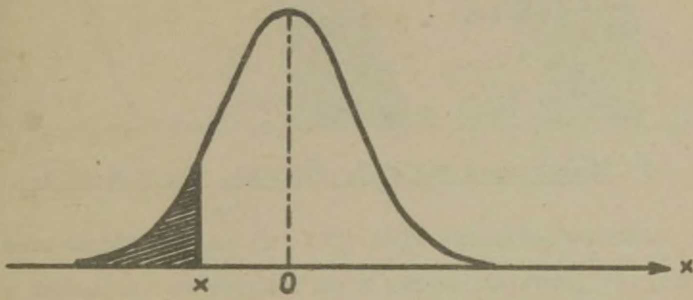
Normaalse juhusliku suuruse $X \sim N(0,1)$ jaotusfunktsioon

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = P(X < x)$$

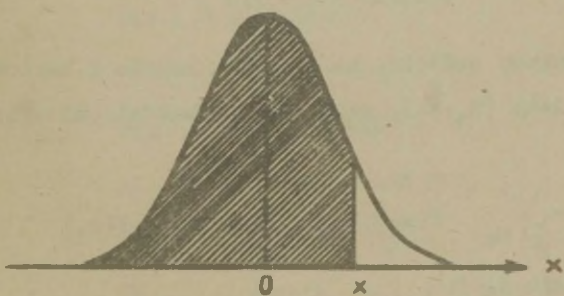
$(0 \leq x \leq 3{,}9)$.[19]

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	.500000	.503989	.507978	.511966	.515953	.519938	.523922	.527903	.531881	.535856
0,1	.539828	.543795	.547758	.551717	.555670	.559618	.563560	.567495	.571424	.575345
0,2	.579260	.583166	.587064	.590954	.594835	.598706	.602568	.606420	.610261	.614092
0,3	.617911	.621720	.625616	.629300	.633072	.636831	.640576	.644309	.648027	.651732
0,4	.655422	.659097	.662757	.666402	.670031	.673645	.677242	.680822	.684386	.687933
0,5	.691462	.694974	.698468	.702944	.705402	.708840	.712260	.715661	.719043	.722405
0,6	.725747	.729069	.732371	.735653	.738914	.742154	.745373	.748571	.751748	.754903
0,7	.758036	.761148	.764238	.767305	.770350	.773373	.776373	.779350	.782305	.785236
0,8	.788145	.791030	.793892	.796731	.799546	.802338	.805106	.807850	.810570	.813267
0,9	.815940	.818589	.821214	.823814	.826391	.828944	.831472	.833977	.836457	.838913
1,0	.841345	.843752	.846136	.848495	.850830	.853141	.855428	.857690	.859929	.862143
1,1	.864334	.866500	.868643	.870762	.872857	.874928	.876976	.879000	.881000	.882977
1,2	.884930	.886861	.888768	.890651	.892512	.894350	.896165	.897958	.899727	.901475
1,3	.903200	.904902	.906582	.908241	.909877	.911492	.913085	.914656	.916207	.917736
1,4	.919243	.920730	.922196	.923642	.925066	.926471	.927855	.929219	.930563	.931889
1,5	.933193	.934478	.935744	.936922	.938220	.939429	.940620	.941792	.942947	.944083
1,6	.945201	.946301	.947384	.948449	.949497	.950528	.951543	.952540	.953521	.954486
1,7	.955434	.956367	.957284	.958185	.959070	.959941	.960796	.961636	.962462	.963273
1,8	.964070	.964852	.965620	.966375	.967116	.967843	.968557	.969258	.969946	.970621
1,9	.971283	.971933	.972571	.973197	.973810	.974412	.975002	.975581	.976138	.976704
2,0	.977250	.977784	.978308	.978822	.979325	.979818	.980301	.980774	.981237	.981691
2,1	.982136	.982571	.982997	.983414	.983823	.984222	.984614	.984997	.985371	.985738
2,2	.986097	.986447	.986791	.987126	.987454	.987776	.988089	.988396	.988696	.988989
2,3	.989276	.989556	.989830	.990097	.990358	.990613	.990862	.991106	.991344	.991576
2,4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2,5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2,6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2,7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2,8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2,9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3,0	.998650	.999032	.999313	.999517	.999663	.999767	.999841	.999892	.999928	.999952

[19] Tabel pärineb teosest [19] , lk. 590.



Joonis 3.4.



Joonis 3.5.

Märkus.

Tabelid 3.2A ja 3.2B on vastastikku asendatavad ning paljudes käsiraamatutes piirdutakse neist ainult ühe esitamisega. Kehtivad nimelt seosed:

$$P(X < -x) = P(X > x) = 1 - P(X < x),$$

seega

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x),$$

ja

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x).$$

7. Tõenäosused $P(X < x)$, $P(X > x)$, $P(x_1 < X < x_2)$.

Jaotusfunktsioon $F(x) = P(X < x)$ näitab tõenäosust selleks, et juhuslik suurus X on väiksem kui argument x. Tõenäosuse selleks, et juhuslik suurus X on mingist arvust x suurem, leiame samuti jaotusfunktsiooni[20] abil:

$$P(X > x) = 1 - F(x).$$

Tõenäosuse selleks, et juhuslik suurus X kuuluks mingisse vahemikku (x_1, x_2), saame jaotusfunktsiooni väärtuste vahena:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

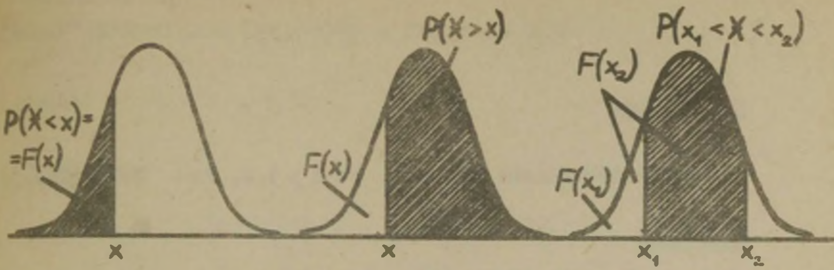
(vt. joonis 3.6).

Paneme tähele, et tabelites 3.2A ja 3.2B on esitatud funktsiooni $\Phi(x)$ väärtused ainult absoluutselt küllalt väikeste argumendi x väärtuste juhuks: $|x| \leq 3,9$. Argumendi x ülejäänud väärtuste jaoks kehtib reegel:

Kui $x < -3,9$, siis $\Phi(x) \approx 0$;

kui $x > 3,9$, siis $\Phi(x) \approx 1$.

[20] Peame siin silmas üksnes pidevaid juhuslikke suurusi, sealhulgas ka normaalseid.



Joonis 3.6.

Kui $X \sim N(m, \sigma)$, siis saame kõik ülaltoodud tõenäosused avaldada $X \sim N(0,1)$ jaotusfunktsiooni $\Phi(x)$ kaudu, arvestades ka punkti 6 tulemusi:

$$P(X < x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right);$$

$$\Phi(x) = P(X < m + \sigma x);$$

$$P(X > x) = 1 - \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right);$$

$$1 - \Phi(x) = P(X > m + \sigma x);$$

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-m}{\sigma}\right);$$

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = P(m + \sigma x_1 < X < m + \sigma x_2).$$

Näide 3.7.

On antud $X \sim N(0,1)$. Leida tõenäosus, et $X < -1{,}53$.

Lahendus.

Et $x < 0$, kasutame tabelit 3.2A. Leiame

$$P(X < -1{,}53) = \Phi(-1{,}53) = 0{,}063008 \approx 0{,}063.$$

Näide 3.8.

Leida tõenäosus selleks, et $X > 3{,}2$, kui $X \sim N(2;2{,}5)$.

Lahendus.

$$P(X > 3{,}2) = 1 - \Phi\left(\frac{3{,}2-2}{2{,}5}\right) = 1 - \Phi(0{,}48).$$

Et $0{,}48 > 0$, tuleb kasutada tabelit 3.2B;

$$\Phi(0{,}48) = 0{,}684386 \approx 0{,}684;$$
$$P(X > 3{,}2) = 1 - 0{,}684 = 0{,}316.$$

Näide 3.9.

Leida tõenäosus selleks, et normaaljaotusega $N(0{,}7;\ 0{,}5)$ juhusliku suuruse X väärtused kuuluvad vahemikku $(0{,}4;\ 1{,}3)$.

Lahendus.

$$P(0{,}4 \leq X \leq 1{,}3) = \Phi\left(\frac{1{,}3-0{,}7}{0{,}5}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}4-0{,}7}{0{,}5}\right) = \Phi(1{,}2) - \Phi(-0{,}6).$$

Et üks argumentidest on positiivne, teine negatiivne, tuleb kasutada mõlemaid tabeleid 3.2A ja 3.2B. Saame

$$\Phi(1{,}2) = 0{,}884930 \approx 0{,}8849,$$
$$\Phi(-0{,}6) = 0{,}274253 \approx 0{,}2743.$$
$$\Phi(1{,}2) - \Phi(-0{,}6) = 0{,}6106 \approx 0{,}611.$$

Seega $P(0{,}4 \leq X \leq 1{,}3) = 0{,}611$.

Näide 3.10.

$X \sim N(2, \frac{1}{2})$.

Leida $P(-1 \leq X \leq 1{,}5)$.

Lahendus.

$P(-1 \leq X \leq 1{,}5) = \Phi(\frac{1{,}5-2}{0{,}5}) - \Phi(\frac{-1-2}{0{,}5}) = \Phi(-1) - \Phi(-6)$.

Tabelist 3.2A leiame $\Phi(-1) \approx 0{,}159$. Kuna $-6 < -3{,}9$, siis $\Phi(-6) = 0$.

Seega on antud ülesande vastuseks

$$P(-1 \leq X \leq 1{,}5) = 0{,}159 - 0 = 0{,}159.$$

8. Hälbe tõenäosused $P(|X| > x)$.

Reas ülesannetes nõutakse juhusliku suuruse $X \sim N(m, \sigma)$ hälbe $|X-m|$ jaotust, s.t. tõenäosusi

$$P(|X-m| > x)$$

mitmesugustel argumendi väärtustel. Kuigi need tõenäosused on leitavad ka tabelite 3.2A ja 3.2B abil

$$P(|X-m| > x) = P(X-m > x) + P(X-m < -x) =$$
$$= P(\frac{X-m}{\sigma} < -\frac{x}{\sigma}) + P(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{x}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{-x}{\sigma}) = 2 - 2\Phi(\frac{x}{\sigma}),$$

on siiski otstarbekas kasutada spetsiaalseid hälbe tõenäosuse tabeleid, kus on tabuleeritud juhusliku suuruse $X \sim N(0,1)$ jaoks tõenäosused

$$P(|X| > x)$$

vastavalt argumendi x väärtustele.

Juhusliku suuruse $X \sim N(m, \sigma)$ jaoks saame siit:

$$P(|X-m| > x) = P(|Y| > \frac{x}{\sigma}), \quad \text{kus } Y \sim N(0,1);$$

$$P(|Y| > x) = P(|X-m| > \sigma x), \quad \text{kus } X \sim N(m,\sigma).$$

Tabel 3.3.

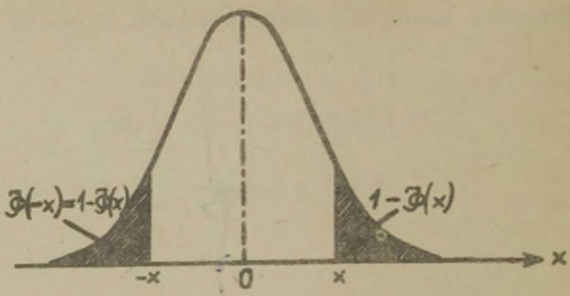
Normaalse juhusliku suuruse $X \sim N(0,1)$ hälbe tõenäosus[21]

$$P(|X| > x) = 2 - 2\Phi(x), \quad (x = 0, \ldots, 3{,}9)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	1.000000	.992022	.984044	.976069	.968094	.960124	.952156	.944156	.936238	.928288
0,1	.920344	.912410	.904484	.896564	.888660	.880764	.872880	.865010	.857152	.849310
0,2	.841480	.833668	.825872	.818092	.810330	.802588	.794864	.787160	.779478	.771816
0,3	.764178	.756560	.748968	.741400	.733856	.726338	.718848	.711382	.703944	.696536
0,4	.689156	.681806	.674486	.667196	.659938	.652710	.645516	.638356	.631228	.624134
0,5	.617076	.610052	.603064	.596112	.589196	.582320	.575480	.568678	.561914	.555190
0,6	.548506	.541862	.535258	.528694	.522172	.515692	.509254	.502858	.496504	.490194
0,7	.483928	.477704	.471524	.465390	.459300	.453254	.447254	.441300	.435390	.429528
0,8	.423710	.417940	.412216	.406538	.400908	.395324	.389788	.384300	.378860	.373466
0,9	.368120	.362822	.357572	.352372	.347218	.342112	.337056	.332046	.327086	.322174
1,0	.317310	.312496	.307728	.303010	.298340	.293718	.289144	.284620	.280142	.275714
1,1	.271332	.267000	.262714	.258476	.254286	.250144	.246048	.242000	.236000	.234046
1,2	.230140	.226278	.222464	.218698	.214976	.211300	.207670	.204084	.202546	.197050
1,3	.193600	.190196	.186836	.183516	.180246	.177016	.173830	.170688	.167586	.164528
1,4	.161514	.158540	.155608	.152716	.149888	.147058	.144288	.141562	.138874	.136222
1,5	.133614	.131044	.128512	.126016	.123560	.121142	.118760	.116416	.114106	.111834
1,6	.109598	.107398	.105232	.103102	.101006	.098944	.096914	.094920	.092958	.091028
1,7	.089132	.087266	.085432	.083630	.081860	.080118	.078408	.076728	.075076	.073454
1,8	.071860	.070298	.068760	.067250	.065768	.064314	.062886	.061484	.060108	.058758
1,9	.057434	.056134	.054858	.053606	.052380	.051176	.049996	.048838	.047704	.046592
2,0	.045500	.044432	.043384	.042356	.041350	.040364	.039398	.038452	.037526	.036618
2,1	.035728	.034858	.034006	.033172	.032354	.031556	.030772	.030006	.029258	.028524
2,2	.027806	.027106	.026418	.025748	.025092	.024448	.023822	.023208	.022608	.022022
2,3	.021446	.020888	.020340	.019806	.019284	.018774	.018276	.017788	.017312	.016848
2,4	.016396	.015952	.015520	.015098	.014688	.014286	.013894	.013512	.013138	.012774
2,5	.012420	.012074	.011736	.011406	.011086	.010772	.010468	.010170	.009880	.009598
2,6	.009322	.009054	.008792	.008538	.008290	.008050	.007814	.007586	.007361	.007146
2,7	.006934	.006728	.006528	.006334	.006144	.005960	.005780	.005606	.005436	.005270
2,8	.005110	.004954	.004802	.004654	.004512	.004372	.004236	.004104	.003976	.003852
2,9	.003732	.003614	.003500	.003390	.003282	.003178	.003076	.002978	.002882	.002790
	0,0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0,7	0.8	0,9
3,0	.002700	.001936	.001374	.000966	.000674	.000466	.000318	.000216	.000144	.000096

[21] Tabel pärineb teosest [19], lk.592.



Joonis 3.7.

Näide 3.11.

Leida tõenäosus, et normaaljaotusega N(0,1) juhuslik suurus omandaks väärtuse, mille absoluutväärtus on üle 2.

Lahendus.

Leiame tabelist 3.3:

$$P(|X|>2) = 0{,}045500 \approx 0{,}046.$$

Näide 3.12.

Leida tõenäosus, et normaaljaotusega $N(3, 2\frac{1}{3})$ juhuslik suurus X erineks oma keskväärtusest rohkem kui 3 võrra.

Lahendus.

$$P(|X-3|>3) = P(|Y|>\frac{9}{7}),$$

kus $Y \sim N(0,1)$. Leiame otsitava tõenäosuse tabelist 3.3:

$$P(|Y| > \frac{9}{7}) = P(|Y| > 1{,}29) = 0{,}197050 \approx 0{,}197.$$

9. Kvantiilid.

Mõningate ülesannete lahendamisel on antud jaotusfunktsiooni väärtus $F(x) = \alpha$ ning tuleb leida selline x väärtus x_α, mis toodud seost rahuldab, s.t. niisugune juhusliku suuruse X väärtus x_α, millest väiksemaid väärtusi esineb tõenäosusega α:

$$P(X < x_\alpha) = \alpha .$$

Niisugust arvu x_α nimetatakse α-kvantiiliks. Kui uuritav juhuslik suurus $X \sim N(0,1)$, siis võime toodud seose kirjutada ka kujul

$$\Phi(x_\alpha) = \alpha$$

(x_α on siis leitav kui jaotusfunktsiooni pöördfunktsioon

$$x_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)).$$

Tabelis 3.4 on esitatud juhusliku suuruse $X \sim N(0,1)$ kvantiilid x_α vastavalt antud α väärtustele $(0 \leq \alpha \leq 1)$. Suvalise normaalse juhusliku suuruse $X \sim N(m, \sigma)$ kvantiilid x'_α leiame seostest

$$x_\alpha = \frac{x'_\alpha - m}{\sigma},$$

$$x'_\alpha = m + \sigma x_\alpha,$$

kus x_α on $X \sim N(0,1)$ α-kvantiil, x'_α aga $X \sim N(m,\sigma)$ α-kvantiil, s.t.

$$P(X < x_\alpha) = \alpha, \quad X \sim N(0,1);$$

$$P(X < x'_\alpha) = \alpha, \quad X \sim N(m,\sigma).$$

<u>**Märkus.**</u>

Kvantiile on võimalik leida ka tabelitest 3.2A ja 3.2B, lugedes vaid vastavalt antud $\Phi(x)$ väärtustele argumendi x väärtused. Vajaduse korral tuleb interpoleerida.

Tabel 3.4.

Normaalse juhusliku suuruse $X \sim N(0,1)$ kvantiilid[22]. Normaaljaotuse $N(0,1)$ jaotusfunktsiooni $\Phi(x) = $

$$=: \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

pöördfunktsioon.

Argumendiks on $\Phi(x)$; selle kaks esimest kümnendkohta määravad tabeli rea, kolmas kümnendkoht (0,000 → 0,009) tabeli veeru, kust leiame antud $\Phi(x)$ väärtusele x väärtuse.

→↓	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	—∞	—3,09	—2,88	—2,75	—2,65	—2,58	—2,51	—2,46	—2,41	—2,37
0,01	—2,33	—2,29	—2,26	—2,23	—2,20	—2,17	—2,14	—2,12	—2,10	—2,07
0,02	—2,05	—2,03	—2,01	—2,00	—1,98	—1,96	—1,94	—1,93	—1,91	—1,90
0,03	—1,88	—1,87	—1,85	—1,84	—1,83	—1,81	—1,80	—1,79	—1,77	—1,76
0,04	—1,75	—1,74	—1,73	—1,72	—1,71	—1,70	—1,68	—1,67	—1,66	—1,65
0,05	—1,64	—1,64	—1,63	—1,62	—1,61	—1,60	—1,59	—1,58	—1,57	—1,56
0,06	—1,55	—1,55	—1,54	—1,53	—1,52	—1,51	—1,51	—1,50	—1,49	—1,48
0,07	—1,48	—1,47	—1,46	—1,45	—1,45	—1,44	—1,43	—1,43	—1,42	—1,41
0,08	—1,41	—1,40	—1,39	—1,39	—1,38	—1,37	—1,37	—1,36	—1,35	—1,35
0,09	—1,34	—1,33	—1,33	—1,32	—1,32	—1,31	—1,30	—1,30	—1,29	—1,29
0.10	—1,28	—1,28	—1,27	—1,26	—1,26	—1,25	—1,25	—1,24	—1,24	—1,23
0,11	—1,23	—1,22	—1,22	—1,21	—1,21	—1,20	—1,20	—1,19	—1,19	—1,18
0,12	—1,18	—1,17	—1,17	—1,16	—1,16	—1,15	—1,15	—1,14	—1,14	—1,13
0,13	—1,13	—1,12	—1,12	—1,11	—1,11	—1,10	—1,10	—1,09	—1,09	—1,09
0,14	—1,08	—1,08	—1,07	—1,07	—1,06	—1,06	—1,05	—1,05	—1,05	—1.04
0,15	—1.04	—1,03	—1,03	—1,02	—1,02	—1,02	—1,01	—1,01	—1,00	—1,00
0,16	—0,99	—0,99	—0,99	—0,98	—0,98	—0,97	—0,97	—0,97	—0,96	—0,96
0,17	—0,95	—0,95	—0,95	—0,94	—0,94	—0,93	—0,93	—0,93	—0,92	—0,92
0,18	—0,92	—0,91	—0,91	—0,90	—0,90	—0,90	—0,89	—0,89	—0,89	—0,88
0,19	—0,88	—0,87	—0,87	—0,87	—0,86	—0,86	—0,86	—0,85	—0,85	—0,85
0,20	—0,84	—0,84	—0,83	—0,83	—0,83	—0,82	—0,82	—0,82	—0,81	—0,81
0,21	—0,81	—0,80	—0,80	—0,80	—0,79	—0,79	—0,79	—0,78	—0,78	—0,78
0,22	—0,77	—0,77	—0,77	—0,76	—0,76	—0,76	—0,75	—0,75	—0,75	—0,74
0,23	—0,74	—0,74	—0,73	—0,73	—0,73	—0,72	—0,72	—0,72	—0,71	—0,71
0,24	—0,71	—0,70	—0,70	—0,70	—0,69	—0,69	—0,69	—0,68	—0,68	—0,68
0,25	—0,67	—0,67	—0,67	—0,67	—0,66	—0,66	—0,66	—0,65	—0,65	—0,65
0,26	—0,64	—0,64	—0,64	—0,63	—0,63	—0,63	—0,63	—0,62	—0,62	—0,62
0,27	—0,61	—0,61	—0,61	—0,60	—0,60	—0,60	—0,59	—0,59	—0,59	—0,59
0,28	—0,58	—0,58	—0,58	—0,57	—0,57	—0,57	—0,57	—0,56	—0,56	—0,56
0,29	—0,55	—0,55	—0,55	—0,54	—0,54	—0,54	—0,54	—0,53	—0,53	—0,53
0,30	—0,52	—0,52	—0,52	—0,52	—0,51	—0,51	—0,51	—0,50	—0,50	—0,50
0,31	—0,50	—0,49	—0,49	—0,49	—0,48	—0,48	—0,48	—0,48	—0,47	—0,47

[22] Tabel pärineb teosest [20], lk. 403–405.

Tabel 3.4 (järg).

x→ ↓	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,32	—0,47	—0,46	—0,46	—0,46	—0,46	—0,45	—0,45	—0,45	—0,45	—0,44
0,33	—0,44	—0,44	—0,43	—0,43	—0,43	—0,43	—0,42	—0,42	—0,42	—0,42
0,34	—0,41	—0,41	—0,41	—0,40	—0,40	—0,40	—0,40	—0,39	—0,39	—0,39
0,35	—0,39	—0,38	—0,38	—0,38	—0,37	—0,37	—0,37	—0,37	—0,36	—0,36
0,36	—0,36	—0,36	—0,35	—0,35	—0,35	—0,35	—0,34	—0,34	—0,34	—0,33
0,37	—0,33	—0,33	—0,33	—0,32	—0,32	—0,32	—0,32	—0,31	—0,31	—0,31
0,38	—0,31	—0,30	—0,30	—0,30	—0,30	—0,29	—0,29	—0,29	—0,28	—0,28
0,39	—0,28	—0,28	—0,27	—0,27	—0,27	—0,27	—0,26	—0,26	—0,26	—0,26
0,40	—0,25	—0,25	—0,25	—0,25	—0,24	—0,24	—0,24	—0,24	—0,23	—0,23
0,41	—0,23	—0,23	—0,22	—0,22	—0,22	—0,21	—0,21	—0,21	—0,21	—0,20
0,42	—0,20	—0,20	—0,20	—0,19	—0,19	—0,19	—0,19	—0,18	—0,18	—0,18
0,43	—0,18	—0,17	—0,17	—0,17	—0,17	—0,16	—0,16	—0,16	—0,16	—0,15
0,44	—0,15	—0,15	—0,15	—0,14	—0,14	—0,14	—0,14	—0,13	—0,13	—0,13
0,45	—0,13	—0,12	—0,12	—0,12	—0,12	—0,11	—0,11	—0,11	—0,11	—0,10
0,46	—0,10	—0,10	—0,10	—0,09	—0,09	—0,09	—0,09	—0,08	—0,08	—0,08
0,47	—0,08	—0,07	—0,07	—0,07	—0,07	—0,06	—0,06	—0,06	—0,06	—0,05
0,48	—0,05	—0,05	—0,05	—0,04	—0,04	—0,04	—0,04	—0,03	—0,03	—0,03
0,49	—0,03	—0,02	—0,02	—0,02	—0,02	—0,01	—0,01	—0,01	—0,01	—0,00
0,50	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02
0,51	0,03	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05
0,52	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07
0,53	0,08	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09	0,09	0,10	0,10
0,54	0,10	0,10	0,11	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12
0,55	0,13	0,13	0,13	0,13	0,14	0,14	0,14	0,14	0,15	0,15
0,56	0,15	0,15	0,16	0,16	0,16	0,16	0,17	0,17	0,17	0,17
0,57	0,18	0,18	0,18	0,18	0,19	0,19	0,19	0,19	0,20	0,20
0,58	0,20	0,20	0,21	0,21	0,21	0,21	0,22	0,22	0,22	0,23
0,59	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,25
0,60	0,25	0,26	0,26	0,26	0,26	0,27	0,27	0,27	0,27	0,28
0,61	0,28	0,28	0,28	0,29	0,29	0,29	0,30	0,30	0,30	0,30
0,62	0,31	0,31	0,31	0,31	0,32	0,32	0,32	0,32	0,33	0,33
0,63	0,33	0,33	0,34	0,34	0,34	0,35	0,35	0,35	0,35	0,36
0,64	0,36	0,36	0,36	0,37	0,37	0,37	0,37	0,38	0,38	0,38
0,65	0,39	0,39	0,39	0,39	0,40	0,40	0,40	0,40	0,41	0,41

Tabel 3.4 (järg).

X→ ↓	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,66	0,41	0,42	0,42	0,42	0,42	0,43	0,43	0,43	0,43	0,44
0,67	0,44	0,44	0,45	0,45	0,45	0,45	0,46	0,46	0,46	0,46
0,68	0,47	0,47	0,47	0,48	0,48	0,48	0,48	0,49	0,49	0,49
0,69	0,50	0,50	0,50	0,50	0,51	0,51	0,51	0,52	0,52	0,52
0,70	0,52	0,53	0,53	0,53	0,54	0,54	0,54	0,54	0,55	0,55
0,71	0,55	0,56	0,56	0,56	0,57	0,57	0,57	0,57	0,58	0,58
0,72	0,58	0,59	0,59	0,59	0,59	0,60	0,60	0,60	0,61	0,61
0,73	0,61	0,62	0,62	0,62	0,63	0,63	0,63	0,63	0,64	0,64
0,74	0,64	0,65	0,65	0,65	0,66	0,66	0,66	0,67	0,67	0,67
0,75	0,67	0,68	0,68	0,68	0,69	0,69	0,69	0,70	0,70	0,70
0,76	0,71	0,71	0,71	0,72	0,72	0,72	0,73	0,73	0,73	0,74
0,77	0,74	0,74	0,75	0,75	0,75	0,76	0,76	0,76	0,77	0,77
0,78	0,77	0,78	0,78	0,78	0,79	0,79	0,79	0,80	0,80	0,80
0,79	0,81	0,81	0,81	0,82	0,82	0,82	0,83	0,83	0,83	0,84
0,80	0,84	0,85	0,85	0,85	0,86	0,86	0,86	0,87	0,87	0,87
0,81	0,88	0,88	0,89	0,89	0,89	0,90	0,90	0,90	0,91	0,91
0,82	0,92	0,92	0,92	0,93	0,93	0,93	0,94	0,94	0,95	0,95
0,83	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99
0,84	0,99	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03
0,85	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08
0,86	1,08	1,09	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	1,11	1,12	1,12
0,87	1,13	1,13	1,14	1,14	1,15	1,15	1,16	1,16	1,17	1,17
0,88	1,18	1,18	1,19	1,19	1,20	1,20	1,21	1,21	1,22	1,22
0,89	1,23	1,23	1,24	1,24	1,25	1,25	1,26	1,26	1,27	1,28
0,90	1,28	1,29	1,29	1,30	1,30	1,31	1,32	1,32	1,33	1,33
0,91	1,34	1,35	1,35	1,36	1,37	1,37	1,38	1,39	1,39	1,40
0,92	1,41	1,41	1,42	1,43	1,43	1,44	1,45	1,45	1,46	1,47
0,93	1,48	1,48	1,49	1,50	1,51	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55
0,94	1,55	1,56	1,57	1,58	1,59	1,60	1,61	1,62	1,63	1,64
0,95	1,64	1,65	1,66	1,67	1,68	1,70	1,71	1,72	1,73	1,74
0,96	1,75	1,76	1,77	1,79	1,80	1,81	1,83	1,84	1,85	1,87
0,97	1,88	1,90	1,91	1,93	1,94	1,96	1,98	2,00	2,01	2,03
0,98	2,05	2,07	2,10	2,12	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29
0,99	2,33	2,37	2,41	2,46	2,51	2,58	2,65	2,75	2,88	3,09

Näide 3.13.

Leida niisugune x väärtus, millest juhuslik suurus $X \sim N(0,1)$ tõenäosusega 0,95 oleks väiksem

$$P(X < x) = 0,95.$$

Lahendus.

$P(X < x) = \Phi(x) = 0,95$; leiame tabelist 3.4 vastava x väärtuse $x = 1,64$.

Näide 3.14.

Leida niisugune x väärtus, millest juhuslik suurus $Y \sim N(3;1,4)$ tõenäosusega 0,975 oleks väiksem.

Lahendus.

Tabelist 3.4 on võimalik leida niisugune väärtus x_0, et $P(X < x_0) = 0,975$, kui $X \sim N(0,1)$.

Suvalise $Y \sim N(m, \sigma)$ jaoks saame otsitava väärtuse x tabelist leitud x_0 kaudu seosest:

$$x = m + \sigma x_0.$$

Käesoleval juhul leiame tabelist 3.4

$x_0 = 1,96$; $x = 3 + 1,96 \cdot 1,4 = 3 + 2,74 = 5,74.$

Näide 3.15.

Leida niisugune x väärtus, millest juhuslik suurus

$Y \sim N(3;\ 1{,}4)$ tõenäosusega 0,995 oleks suurem.

Lahendus.

$$P(X > x_0) = 1 - \Phi(x_0) = 0{,}995;$$

järelikult

$$\Phi(x_0) = 0{,}005;$$
$$x_0 = -2{,}58$$
$$x = 3 - 2{,}58 \cdot 1{,}4 = 3 - 3{,}61 = -0{,}61.$$

Näide 3.16.

Leida niisugused x väärtused x_1 ja x_2, et juhuslik suurus $Y \sim N(3;1{,}4)$ tõenäosusega 0,90 paikneks nende vahel.

Lahendus.

Leiame kõigepealt vastavad suurused normaaljaotusega $N(0,1)$ juhusliku suuruse jaoks. Sobivaim on määrata need sümmeetriliselt: leida x_0 nii, et

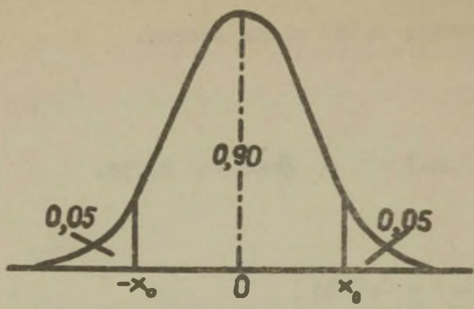
$$P(-x_0 < X < x_0) = 0{,}90.$$

Siit ilmselt

$$P(X < -x_0) = 0{,}05;$$
$$P(X > x_0) = 0{,}05$$

(vt. joonis 3.8).

Et $\Phi(-x_0) = 0{,}05$, leiame tabelist 3.4:



Joonis 3.8.

$$-x_0 = -1{,}64; \quad x_0 = 1{,}64.$$

Juhusliku suuruse Y jaoks saame:

$$x_1 = m - x_0\sigma ; \quad x_2 = m + x_0\sigma ;$$

seega $x_1 = 3 - 1{,}64 \cdot 1{,}4 = 3 - 2{,}3 = 0{,}7,$

$x_2 = 3 + 1{,}64 \cdot 1{,}4 = 3 + 2{,}3 = 5{,}3.$

§2. Normaaljaotusest tuletatud põhijaotused.

1. Põhijaotuste mõiste.

Väga oluline osa klassikalisest matemaatilisest statistikast rajaneb eeldusel, et uuritav juhuslik suurus X on normaalne. Normaalsete juhuslike suuruste sügavamaks statistiliseks uurimiseks on tarvis rakendada tervet rida teisi, normaaljaotuste abil tuletatud jaotusi, mida me nende ulatusliku rakendatavuse tõttu mitmetes erinevates matemaatilise statistika valdkondades nimetame põhijaotusteks. Põhijaotuste hulka loeme χ^2-, t- ja F-jaotuse, mida käesolevas paragrahvis iseloomustame ning esitame ka vastavad tabelid. Kuna neid jaotusi rakendatakse mitmel pool, ei too me käesolevas paragrahvis rakenduslikke näiteid, vaid ainult viitame punktidele, kus näited on esitatud .

2. χ^2-jaotusega juhuslik suurus.

Olgu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sõltumatud normaaljaotusega N(0,1) juhuslikud suurused.

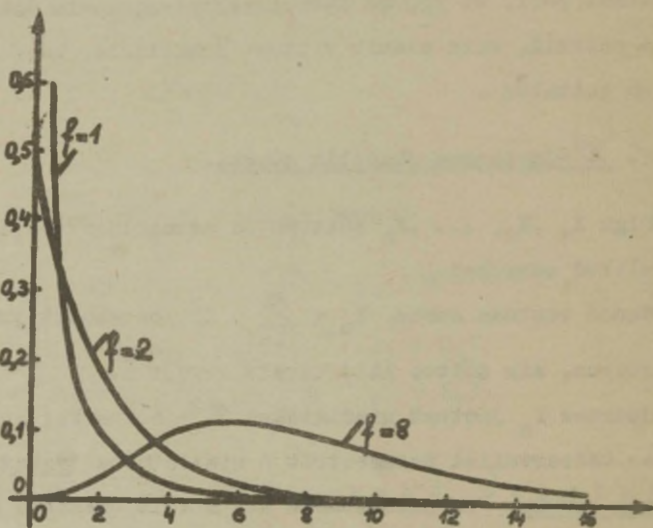
Nende ruutude summa $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ on samuti juhuslik suurus, mis sõltub liidetavate arvust n.

Suuruse Y_n jaotust nimetatakse χ^2-jaotuseks, kusjuures täisarvulist parameetrit n nimetatakse vabadusastmete arvuks. Vabadusastmete arv n võib omandada mistahes naturaalarvulise väärtuse: n = 1,2, ... , kusjuures vastavalt sellele muutub ka χ^2-jaotusega juhusliku suuruse kuju (vt. joonis 3.9).

Ilmselt kõigi n väärtuste korral on χ^2-jaotusega juhuslikul suurusel ainult mittenegatiivseid väärtusi; samuti on iga χ^2-jaotusega juhuslik suurus pidev. Keskväärtus ja dispersioon avalduvad vabadusastmete arvu kaudu:

$$EY_n = n, \quad DY_n = 2n.$$

Siinjuures paneme tähele, et χ^2-jaotus ei ole sümmeetriline. Kuid n suurenemisel muutub χ^2-jaotus järjest sümmeetrilisemaks, lähenedes normaaljaotusele parameetritega m=n, $\sigma = \sqrt{2n}$.



Joonis 3.9.

Tabel 3.5.

χ^2-jaotus.

Juhusliku suuruse $X \sim \chi^2_f$ täiendkvantiilid $p_{f,\alpha}$ (α on esitatud %-des).[23]

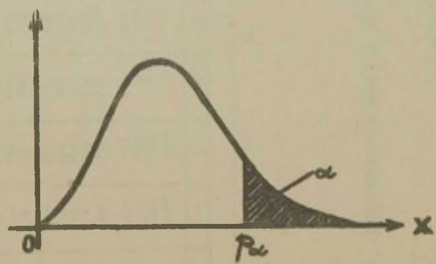
$$P(X > p_{f,\alpha}) = \alpha$$

f on vabadusastmete arv.

f	α											
	99.0	97.5	95	90	70	50	30	10	5	2,5	I	0,1
1	$.0^{3}157$	$.0^{3}982$	$.0^{2}393$	.0158	.148	.455	1.07	2,71	3,84	5,02	6,62	10.8
2	.0201	.0506	,103	,211	,713	1.39	2.41	4.61	5,99	7,38	9,21	13,8
3	.115	.216	,352	.584	1,42	2.37	3,67	6.25	7,81	9.35	11.3	16,3
4	.297	.484	,711	1.06	2.19	3.36	4.88	7,78	9.49	11,1	13,3	18,5
5	.554	.831	1,15	1,61	3.00	4.35	6,06	9,24	11,1	12,8	15,1	20,5
6	.872	1,24	1,64	2,20	3,83	5.35	7,23	10,6	12,6	14.4	16,8	22,5
7	1.24	1,69	2.17	2,83	4,67	6,35	8,38	12,0	14,1	16,0	18,5	24.3
8	1.65	2.18	2.73	3,49	5,53	7,34	9,52	13,4	15,5	17,5	20,1	26,1
9	2.09	2,70	3,33	4,17	6,39	8,34	10,7	14,7	16,9	19,0	21,7	27,9
10	2.56	3.25	3,94	4,87	7,27	9,34	11,8	16,0	18,3	20,5	23,2	29,6
11	3,05	3.82	4,57	5,58	8,15	10,3	12,9	17,3	19,7	21,9	24,7	31,3
12	3.57	4,40	5,23	6,30	9,03	11,3	14,0	18,5	21,0	23,3	26,2	32,9
13	4.11	5,01	5,89	7,04	9,93	12,3	15,1	19,8	22,4	24,7	27,7	34,5
14	4,66	5,63	6,57	7,79	10,8	13,3	16,2	21,1	23,7	26,1	29,1	36,1
15	5.23	6,26	7,26	8.55	11,7	14,3	17,3	22,3	25,0	27,5	30,6	37,7
16	5.81	6,91	7.96	9,31	12,6	15,3	18,4	23,5	26,3	28,8	32,0	39,3
17	6.41	7,56	8,67	10,1	13,5	16,3	19,5	24,8	27,6	30,2	33,4	40,8
18	7,01	8.23	9,39	10,9	14.4	17,3	20,6	26,0	28.9	31,5	34.8	42,3
19	7,63	8.91	10,1	11,7	15,4	18,3	21,7	27,2	30,1	32.9	36.2	43,8
20	8,26	9,59	10,9	12.4	16,3	19,3	22,8	28,4	31,4	34,2	37,6	45,3
21	8.90	10,3	11,6	13,2	17,2	20,3	23.9	29,6	32,7	35,5	38,9	46,8
22	9.54	11,0	12,3	14.0	18,1	21,3	24.9	30,8	33,9	36,8	40,3	48,3
23	10.2	11.7	13,1	14,8	19.0	22,3	26,0	32,0	35,2	38.1	41,6	49,7
24	10,9	12,4	13,8	15,7	19,9	23,3	27,1	33,2	36,4	39,4	43,0	51,2
25	11,5	13,1	14,6	16,5	20,9	24,3	28,2	34,4	37,7	40,6	44,3	52,6
26	12.2	13.8	15,4	17,3	21,8	25,3	29,2	35,6	38,9	41.9	45,6	54,1
27	12.9	14,6	16,2	18,1	22,7	26,3	30,3	36,7	40,1	43,2	47,0	55,5
28	13,6	15,3	16,9	18,9	23,6	27,3	31,4	37,9	41,3	44,5	48,3	56,9
29	14.3	16,0	17.7	19,8	24,6	28,3	32,5	39,1	42,6	45,7	49,6	58,3

[23] Tabel pärineb teosest [19], lk. 594-595.

f	α											
	99,0	97,5	95	90	70	50	30	10	5	2,5	1	0,1
30	15,0	16,8	18,5	20,6	25,5	29,3	33,5	40,3	43,8	47,0	50,9	59,7
40	22,2	24,4	26,5	29,1	34,9	39,3	44,2	51,8	55,8	59,3	63,7	73,4
50	29,7	32,4	34,8	37,7	44,3	49,3	54,7	63,2	67,5	71,4	76,2	86,7
60	37,5	40,5	43,2	46,5	53,8	59,3	65,2	74,4	79,1	83,3	88,4	99,6
70	45,4	48,8	51,7	55,3	63,3	69,3	75,1	85,5	90,5	95,0	100,4	112,3
80	53,5	57,2	60,4	64,3	72,9	79,3	86,1	96,6	101,9	106,6	112,3	124,8
90	61,8	65,6	69,1	73,3	82,5	89,3	96,5	107,6	113,1	118,1	124,1	137,2
100	70,1	74,2	77,9	82,4	92,1	99,3	106,9	118,5	124,3	129,6	135,8	149,4



Joonis 3.10.

3. t-jaotusega juhuslik suurus.

Olgu X_0 ja $X_1, \ldots, X_n$ sõltumatud normaaljaotusega $N(0,1)$ juhuslikud suurused.

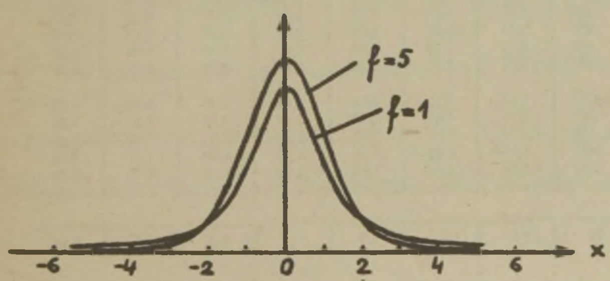
Juhuslikku suurust

$$T_n = \frac{X_0}{\sqrt{\dfrac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}{n}}}$$

nimetatakse t-jaotusega juhuslikuks suuruseks vabadusastmete arvuga n; t-jaotuse võib defineerida ka χ^2-jaotuse abil:

$$T_n = \frac{X_0}{\sqrt{\dfrac{Y_n}{n}}},$$

kus Y_n on χ^2-jaotusega juhuslik suurus vabadusastmete arvuga n. t-jaotus on pidev, sümmeetriline jaotus, kusjuures vabadusastmete arvu suurenemisel läheneb t-jaotus normaaljaotusele $N(0,1)$.



Joonis 3.11.

Tabel 3.6.

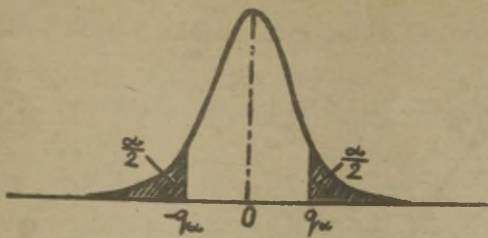
t-jaotuse täiendkvantiilid ja hälbed.[24]

$$P(|X| > p_{\alpha}) = \alpha \text{ (kahepoolne hüpotees)}$$

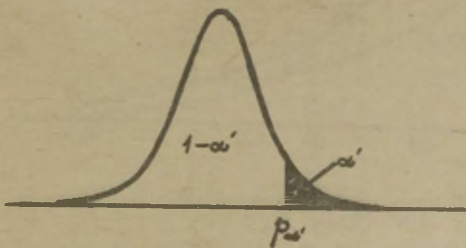
$$P(X > q_{\alpha'}) = \alpha' \text{(ühepoolne hüpotees).}$$

f	α							
	50	25	10	5	2	1	0,2	0,1
1	1,00	2,41	6,31	12,71	31,82	63,66	318,31	636,62
2	.816	1,60	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,60
3	.765	1,42	2,35	3,18	4,54	5,84	10,21	12,92
4	.741	1,34	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	.727	1,30	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,87
6	.718	1,27	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	.711	1,25	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,41
8	.706	1,24	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	.703	1,23	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	.700	1,22	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	.697	1,21	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	.695	1,21	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	.694	1,20	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	.692	1,20	1,76	2,14	2,62	2.98	3,79	4,14
15	.691	1.20	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	.690	1,19	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	.689	1,19	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	.688	1,19	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	.688	1,19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	.687	1,18	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	.686	1,18	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	.686	1,18	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	.685	1,18	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	.685	1,18	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	.684	1,18	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	.684	1,18	1.71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	.684	1,18	1,70	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	.683	1,17	1,70	2,05	2,47	2,76	3,41	3,67
29	.683	1,17	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	.683	1,17	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	.681	1,17	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	.679	1,16	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	.677	1,16	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	.674	1,15	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
f	α'							
	25	12,5	5	2,5	1	0,5	0,1	0,05

[24] Tabel pärineb teosest [19], lk. 596.



Kahepoolne hüpotees.



Ühepoolne hüpotees.

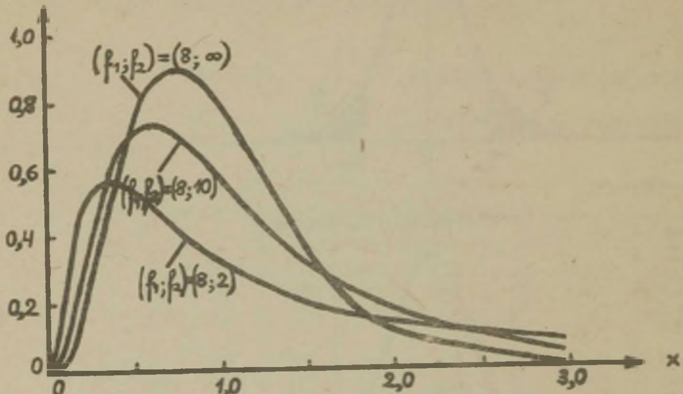
Joonis 3.12.

4. F-jaotusega juhuslik suurus.

Olgu juhuslik suurus X_1 χ^2-jaotusega vabadusastmete arvuga f_1, temast sõltumatu juhuslik suurus X_2 - χ^2 -jaotusega vabadusastmete arvuga f_2. Siis on jagatis $\frac{X_1 \cdot f_2}{f_1 \cdot X_2}$ omakorda juhuslik suurus, mis sõltub kahest naturaalarvulisest parameetrist f_1 ja f_2. Seda juhuslikku suurust nimetatakse F-jaotusega juhuslikuks suuruseks

$$\frac{X_1 \cdot f_2}{X_2 \cdot f_1} \sim F_{k_1,k_2}.$$

F-jaotus võib omandada ainult mittenegatiivseid väärtusi ning ei ole sümmeetriline (vt. joonis 3.13).



Joonis 3.13.

F-jaotus on seotud ka teiste varem vaadeldud jaotustega. Nii on F-jaotusega juhuslik suurus vabadusastmete arvudega 1 ja f t-jaotusega juhusliku suuruse ruut (vabaduastmete arv f). Kui $f_2 \to \infty$, siis läheneb f_1-kordne F-jaotus χ^2-jaotusele vabadusastmete arvuga f_1. Kui aga ka $f_1 \to \infty$, siis läheneb F-jaotus konstandile 1.

Tabel 3.7A.

F-jaotus. Juhusliku suuruse $X^{(f_1 f_2)}$ täiendkvantiilid p_α [25], f_1-lugeja vabadusastmete arv; f_2- nimetaja vabadusastmete arv[26].

$$P(X > p_{0,05}) = 0{,}05 \text{ (harilik kiri)}$$

$$P(X > p_{0,01}) = 0{,}01 \text{ (poolpaks kiri)}$$

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161 **4052**	200 **4999**	216 **5403**	225 **5625**	230 **5764**	234 **5859**	237 **5928**	239 **5981**	241 **6022**	242 **6056**	243 **6082**	244 **6106**
2	18,51 **98,49**	19,00 **99,00**	19,16 **99,17**	19,25 **99,25**	19,30 **99,30**	19,33 **99,33**	19,36 **99,34**	19,37 **99,36**	19,38 **99,38**	19,39 **99,40**	19,40 **99,41**	19,41 **99,42**
3	10,13 **34,12**	9,55 **30,82**	9,28 **29,46**	9,12 **28,71**	9,01 **28,24**	8,94 **27,91**	8,88 **27,67**	8,84 **27,49**	8,81 **27,34**	8,78 **27,23**	8,76 **27,13**	8,74 **27,05**
4	7,71 **21,20**	6,94 **18,00**	6,59 **16,69**	6,39 **15,98**	6,26 **15,52**	6,16 **15,21**	6,09 **14,98**	6,04 **14,80**	6,00 **14,66**	5,96 **14,54**	5,93 **14,45**	5,91 **14,37**
5	6,61 **16,26**	5,79 **13,27**	5,41 **12,06**	5,19 **11,39**	5,05 **10,97**	4,95 **10,67**	4,88 **10,45**	4,82 **10,27**	4,78 **10,15**	4,74 **10,05**	4,70 **9,96**	4,68 **9,89**
6	5,99 **13,74**	5,14 **10,92**	4,76 **9,78**	4,53 **9,15**	4,39 **8,75**	4,28 **8,47**	4,21 **8,26**	4,15 **8,10**	4,10 **7,98**	4,06 **7,87**	4,03 **7,79**	4,00 **7,72**
7	5,59 **12,25**	4,74 **9,55**	4,35 **8,45**	4,12 **7,85**	3,97 **7,46**	3,87 **7,19**	3,79 **7,00**	3,73 **6,84**	3,68 **6,71**	3,63 **6,62**	3,60 **6,54**	3,57 **6,47**
8	5,32 **11,26**	4,46 **8,65**	4,07 **7,59**	3,84 **7,01**	3,69 **6,63**	3,58 **6,37**	3,50 **6,19**	3,44 **6,03**	3,39 **5,91**	3,34 **5,82**	3,31 **5,74**	3,28 **5,67**
9	5,12 **10,56**	4,26 **8,02**	3,86 **6,99**	3,63 **6,42**	3,48 **6,06**	3,37 **5,80**	3,29 **5,62**	3,23 **5,47**	3,18 **5,35**	3,13 **5,26**	3,10 **5,18**	3,07 **5,11**
10	4,96 **10,04**	4,10 **7,56**	3,71 **6,55**	3,48 **5,99**	3,33 **5,64**	3,22 **5,39**	3,14 **5,21**	3,07 **5,06**	3,02 **4,95**	2,97 **4,85**	2,94 **4,78**	2,91 **4,71**
11	4,84 **9,65**	3,98 **7,20**	3,59 **6,22**	3,36 **5,67**	3,20 **5,32**	3,09 **5,07**	3,01 **4,88**	2,95 **4,74**	2,90 **4,63**	2,86 **4,54**	2,82 **4,46**	2,79 **4,40**
12	4,75 **9,33**	3,88 **6,93**	3,49 **5,95**	3,26 **5,41**	3,11 **5,06**	3,00 **4,82**	2,92 **4,65**	2,85 **4,50**	2,80 **4,39**	2,76 **4,30**	2,72 **4,22**	2,69 **4,16**
13	4,67 **9,07**	3,80 **6,70**	3,41 **5,74**	3,18 **5,20**	3,02 **4,86**	2,92 **4,62**	2,84 **4,44**	2,77 **4,30**	2,72 **4,19**	2,67 **4,10**	2,63 **4,02**	2,60 **3,96**
14	4,60 **8,86**	3,74 **6,51**	3,34 **5,56**	3,11 **5,03**	2,96 **4,69**	2,85 **4,46**	2,77 **4,28**	2,70 **4,14**	2,65 **4,03**	2,60 **3,94**	2,56 **3,86**	2,53 **3,80**
15	4,54 **8,68**	3,68 **6,36**	3,29 **5,42**	3,06 **4,89**	2,90 **4,56**	2,79 **4,32**	2,70 **4,14**	2,64 **4,00**	2,59 **3,89**	2,55 **3,80**	2,51 **3,73**	2,48 **3,67**

f_2 \ f_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	f_2
1	245 **6142**	246 **6169**	248 **6208**	249 **6234**	250 **6258**	251 **6286**	252 **6302**	253 **6323**	253 **6334**	254 **6352**	254 **6361**	254 **6366**	1
2	19,42 **99,43**	19,43 **99,44**	19,44 **99,45**	19,45 **99,46**	19,46 **99,47**	19,47 **99,48**	19,47 **99,48**	19,48 **99,49**	19,49 **99,49**	19,49 **99,49**	19,50 **99,50**	19,50 **99,50**	2
3	8,71 **26,92**	8,69 **26,83**	8,66 **26,69**	8,64 **26,60**	8,62 **26,50**	8,60 **26,41**	8,58 **26,35**	8,57 **26,27**	8,56 **26,23**	8,54 **26,18**	8,54 **26,14**	8,53 **26,12**	3
4	5,87 **14,24**	5,84 **14,15**	5,80 **14,02**	5,77 **13,93**	5,74 **13,83**	5,71 **13,74**	5,70 **13,69**	5,68 **13,61**	5,66 **13,57**	5,65 **13,52**	5,64 **13,48**	5,63 **13,46**	4
5	4,64 **9,77**	4,60 **9,68**	4,56 **9,55**	4,53 **9,47**	4,50 **9,38**	4,46 **9,29**	4,44 **9,24**	4,42 **9,17**	4,40 **9,13**	4,38 **9,07**	4,37 **9,04**	4,36 **9,02**	5
6	3,96 **7,60**	3,92 **7,52**	3,87 **7,39**	3,84 **7,31**	3,81 **7,23**	3,77 **7,14**	3,75 **7,09**	3,72 **7,02**	3,71 **6,99**	3,69 **6,94**	3,68 **6,90**	3,67 **6,88**	6
7	3,52 **6,35**	3,49 **6,27**	3,44 **6,15**	3,41 **6,07**	3,38 **5,98**	3,34 **5,90**	3,32 **5,85**	3,29 **5,78**	3,28 **5,75**	3,25 **5,70**	3,24 **5,67**	3,23 **5,65**	7
8	3,23 **5,56**	3,20 **5,48**	3,15 **5,36**	3,12 **5,28**	3,08 **5,20**	3,05 **5,11**	3,03 **5,06**	3,00 **5,00**	2,98 **4,96**	2,96 **4,91**	2,94 **4,88**	2,93 **4,86**	8
9	3,02 **5,00**	2,98 **4,92**	2,93 **4,80**	2,90 **4,73**	2,86 **4,64**	2,82 **4,56**	2,80 **4,51**	2,77 **4,45**	2,76 **4,41**	2,73 **4,36**	2,72 **4,33**	2,71 **4,31**	9
10	2,86 **4,60**	2,82 **4,52**	2,77 **4,41**	2,74 **4,33**	2,70 **4,25**	2,67 **4,17**	2,64 **4,12**	2,61 **4,05**	2,59 **4,01**	2,56 **3,96**	2,55 **3,93**	2,54 **3,91**	10
11	2,74 **4,29**	2,70 **4,21**	2,65 **4,10**	2,61 **4,02**	2,57 **3,94**	2,53 **3,86**	2,50 **3,80**	2,47 **3,74**	2,45 **3,70**	2,42 **3,66**	2,41 **3,62**	2,40 **3,60**	11
12	2,64 **4,05**	2,60 **3,98**	2,54 **3,86**	2,50 **3,78**	2,46 **3,70**	2,42 **3,61**	2,40 **3,56**	2,36 **3,49**	2,35 **3,46**	2,32 **3,41**	2,31 **3,38**	2,30 **3,36**	12
13	2,55 **3,85**	2,51 **3,78**	2,46 **3,67**	2,42 **3,59**	2,38 **3,51**	2,34 **3,42**	2,32 **3,37**	2,28 **3,30**	2,26 **3,27**	2,24 **3,21**	2,22 **3,18**	2,21 **3,16**	13
14	2,48 **3,70**	2,44 **3,62**	2,39 **3,51**	2,35 **3,43**	2,31 **3,34**	2,27 **3,26**	2,24 **3,21**	2,21 **3,14**	2,19 **3,11**	2,16 **3,06**	2,14 **3,02**	2,13 **3,00**	14
15	2,43 **3,56**	2,39 **3,48**	2,33 **3,36**	2,29 **3,29**	2,25 **3,20**	2,21 **3,12**	2,18 **3,07**	2,15 **3,00**	2,12 **2,97**	2,10 **2,92**	2,08 **2,89**	2,07 **2,87**	15

25 Tabel pärineb teosest [19], lk. 598-601.

26 Lugejaks tuleb alati valida suurem dispersioonihinnangutest.

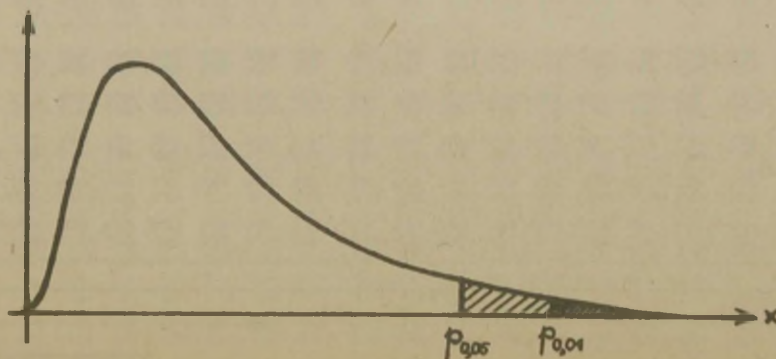
Tabel 3.7A (järg).

f_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	f_2
16	4,49 8,53	3,63 6,23	3,24 5,29	3,01 4,77	2,85 4,44	2,74 4,20	2,66 4,03	2,59 3,89	2,54 3,78	2,49 3,69	2,45 3,61	2,42 3,55	2,37 3,45	2,33 3,37	2,28 3,25	2,24 3,18	2,20 3,10	2,16 3,01	2,13 2,96	2,09 2,89	2,07 2,86	2,04 2,80	2,02 2,77	2,01 2,75	16
17	4,45 8,40	3,59 6,11	3,20 5,18	2,96 4,67	2,81 4,34	2,70 4,10	2,62 3,93	2,55 3,79	2,50 3,68	2,45 3,59	2,41 3,52	2,38 3,45	2,33 3,35	2,29 3,27	2,23 3,16	2,19 3,08	2,15 3,00	2,11 2,92	2,08 2,86	2,04 2,79	2,02 2,76	1,99 2,70	1,97 2,67	1,96 2,65	17
18	4,41 8,28	3,55 6,01	3,16 5,09	2,93 4,58	2,77 4,25	2,66 4,01	2,58 3,85	2,51 3,71	2,46 3,60	2,41 3,51	2,37 3,44	2,34 3,37	2,29 3,27	2,25 3,19	2,19 3,07	2,15 3,00	2,11 2,91	2,07 2,83	2,04 2,78	2,00 2,71	1,98 2,68	1,95 2,62	1,93 2,59	1,92 2,57	18
19	4,38 8,18	3,52 5,93	3,13 5,01	2,90 4,50	2,74 4,17	2,63 3,94	2,55 3,77	2,48 3,63	2,43 3,52	2,38 3,43	2,34 3,36	2,31 3,30	2,26 3,19	2,21 3,12	2,15 3,00	2,11 2,92	2,07 2,84	2,02 2,76	2,00 2,70	1,96 2,63	1,94 2,60	1,91 2,54	1,90 2,51	1,88 2,49	19
20	4,35 8,10	3,49 5,85	3,10 4,94	2,87 4,43	2,71 4,10	2,60 3,87	2,52 3,71	2,45 3,56	2,40 3,45	2,35 3,37	2,31 3,30	2,28 3,23	2,23 3,13	2,18 3,05	2,12 2,94	2,08 2,86	2,04 2,77	1,99 2,69	1,96 2,63	1,92 2,56	1,90 2,53	1,87 2,47	1,85 2,44	1,84 2,42	20
21	4,32 8,02	3,47 5,78	3,07 4,87	2,84 4,37	2,68 4,04	2,57 3,81	2,49 3,65	2,42 3,51	2,37 3,40	2,32 3,31	2,28 3,24	2,25 3,17	2,20 3,07	2,15 2,99	2,09 2,88	2,05 2,80	2,00 2,72	1,96 2,63	1,93 2,58	1,89 2,51	1,87 2,47	1,84 2,42	1,82 2,38	1,81 2,36	21
22	4,30 7,94	3,44 5,72	3,05 4,82	2,82 4,31	2,66 3,99	2,55 3,76	2,47 3,59	2,40 3,45	2,35 3,35	2,30 3,26	2,26 3,18	2,23 3,12	2,18 3,02	2,13 2,94	2,07 2,83	2,03 2,75	1,98 2,67	1,93 2,58	1,91 2,53	1,87 2,46	1,84 2,42	1,81 2,37	1,80 2,33	1,78 2,31	22
23	4,28 7,88	3,42 5,66	3,03 4,76	2,80 4,26	2,64 3,94	2,53 3,71	2,45 3,54	2,38 3,41	2,32 3,30	2,28 3,21	2,24 3,14	2,20 3,07	2,14 2,97	2,10 2,89	2,05 2,78	2,00 2,70	1,96 2,62	1,91 2,53	1,88 2,48	1,84 2,41	1,82 2,37	1,79 2,32	1,77 2,28	1,76 2,26	23
24	4,26 7,82	3,40 5,61	3,01 4,72	2,78 4,22	2,62 3,90	2,51 3,67	2,43 3,50	2,36 3,36	2,30 3,25	2,26 3,17	2,22 3,00	2,18 3,03	2,13 2,93	2,09 2,85	2,02 2,74	1,98 2,66	1,94 2,58	1,89 2,49	1,86 2,44	1,82 2,36	1,80 2,33	1,76 2,27	1,74 2,23	1,73 2,21	24
25	4,24 7,77	3,38 5,57	2,99 4,68	2,76 4,18	2,60 3,86	2,49 3,63	2,41 3,46	2,34 3,32	2,28 3,21	2,24 3,13	2,20 3,05	2,16 2,99	2,11 2,89	2,06 2,81	2,00 2,70	1,96 2,62	1,92 2,54	1,87 2,45	1,84 2,40	1,80 2,32	1,77 2,29	1,74 2,23	1,72 2,19	1,71 2,17	25
26	4,22 7,72	3,37 5,53	2,98 4,64	2,74 4,14	2,59 3,82	2,47 3,59	2,39 3,42	2,32 3,29	2,27 3,17	2,22 3,09	2,18 3,02	2,15 2,96	2,10 2,86	2,05 2,77	1,99 2,66	1,95 2,58	1,90 2,50	1,85 2,41	1,82 2,36	1,78 2,28	1,76 2,25	1,72 2,19	1,70 2,15	1,69 2,13	26
27	4,21 7,68	3,35 5,49	2,96 4,60	2,73 4,11	2,57 3,79	2,46 3,56	2,37 3,39	2,30 3,26	2,25 3,14	2,20 3,06	2,16 2,98	2,13 2,93	2,08 2,83	2,03 2,74	1,97 2,63	1,93 2,55	1,88 2,47	1,84 2,38	1,80 2,33	1,76 2,25	1,74 2,21	1,71 2,16	1,68 2,12	1,67 2,10	27
28	4,20 7,64	3,34 5,45	2,95 4,57	2,71 4,07	2,56 3,76	2,44 3,53	2,36 3,36	2,29 3,23	2,24 3,11	2,19 3,03	2,15 2,95	2,12 2,90	2,06 2,80	2,02 2,71	1,96 2,60	1,91 2,52	1,87 2,44	1,81 2,35	1,78 2,30	1,75 2,22	1,72 2,18	1,69 2,13	1,67 2,09	1,65 2,06	28
29	4,18 7,60	3,33 5,42	2,93 4,54	2,70 4,04	2,54 3,73	2,43 3,50	2,35 3,33	2,28 3,20	2,22 3,08	2,18 3,00	2,14 2,92	2,10 2,87	2,05 2,77	2.00 2,68	1,94 2,57	1,90 2,49	1,85 2,41	1,80 2,32	1,77 2,27	1,73 2,19	1,71 2,15	1,68 2,10	1,65 2,06	1,64 2,03	29
30	4,17 7,56	3,32 5,39	2,92 4,51	2,69 4,02	2,53 3,70	2,42 3,47	2,34 3,30	2,27 3,17	2,21 3,06	2,16 2,98	2,12 2,90	2,09 2,84	2,04 2,74	1,99 2,66	1,93 2,55	1,89 2,47	1,84 2,38	1,79 2,29	1,76 2,24	1,72 2,16	1,69 2,13	1,66 2,07	1,64 2,03	1,62 2,01	30

Tabel 3.7A (järg).

f_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	f_2
32	4,15 7,50	3,30 5,34	2,90 4,46	2,67 3,97	2,51 3,66	2,40 3,42	2,32 3,25	2,25 3,12	2,19 3,01	2,14 2,94	2,10 2,86	2,07 2,80	2,02 2,70	1,97 2,62	1,91 2,51	1,86 2,42	1,82 2,34	1,76 2,25	1,74 2,20	1,69 2,12	1,67 2,08	1,64 2,02	1,61 1,98	1,59 1,96	32
34	4,13 7,44	3,28 5,29	2,88 4,42	2,65 3,93	2,49 3,61	2,38 3,38	2,30 3,21	2,23 3,08	2,17 2,97	2,12 2,89	2,08 2,82	2,05 2,76	2,00 2,66	1,95 2,58	1,89 2,47	1,84 2,38	1,80 2,30	1,74 2,21	1,71 2,15	1,67 2,08	1,64 2,04	1,61 1,98	1,59 1,94	1,57 1,91	34
36	4,11 7,39	3,26 5,25	2,86 4,38	2,63 3,89	2,48 3,58	2,36 3,35	2,28 3,18	2,21 3,04	2,15 2,94	2,10 2,86	2,06 2,78	2,03 2,72	1,98 2,62	1,93 2,54	1,87 2,43	1,82 2,35	1,78 2,26	1,72 2,17	1,69 2,12	1,65 2,04	1,62 2,00	1,59 1,94	1,56 1,90	1,55 1,87	36
38	4,10 7,35	3,25 5,21	2,85 4,34	2,62 3,86	2,46 3,54	2,35 3,32	2,26 3,15	2,19 3,02	2,14 2,91	2,09 2,82	2,05 2,75	2,02 2,69	1,96 2,59	1,92 2,51	1,85 2,40	1,80 2,32	1,76 2,22	1,71 2,14	1,67 2,08	1,63 2,00	1,60 1,97	1,57 1,90	1,54 1,86	1,53 1,84	38
40	4,08 7,31	3,23 5,18	2,84 4,31	2,61 3,83	2,45 3,51	2,34 3,29	2,25 3,12	2,18 2,99	2,12 2,88	2,07 2,80	2,04 2,73	2,00 2,66	1,95 2,56	1,90 2,49	1,84 2,37	1,79 2,29	1,74 2,20	1,69 2,11	1,66 2,05	1,61 1,97	1,59 1,94	1,55 1,88	1,53 1,84	1,51 1,81	40
42	4,07 7,27	3,22 5,15	2,83 4,29	2,59 3,80	2,44 3,49	2,32 3,26	2,24 3,10	2,17 2,96	2,11 2,86	2,06 2,77	2,02 2,70	1,99 2,64	1,94 2,54	1,89 2,46	1,82 2,35	1,78 2,26	1,73 2,17	1,68 2,08	1,64 2,02	1,60 1,94	1,57 1,91	1,64 1,85	1,51 1,80	1,49 1,78	42
44	4,06 7,24	3,21 5,12	2,82 4,26	2,58 3,78	2,43 3,46	2,31 3,24	2,23 3,07	2,10 2,94	2,10 2,84	2,05 2,75	2,01 2,68	1,98 2,62	1,92 2,52	1,88 2,44	1,81 2,32	1,76 2,24	1,72 2,15	1,66 2,06	1,63 2,00	1,58 1,92	1,56 1,88	1,52 1,82	1,50 1,78	1,48 1,75	44
46	4,05 7,21	3,20 5,10	2,81 4,24	2,57 3,76	2,42 3,44	2,30 3,22	2,22 3,05	2,14 2,92	2,09 2,82	2,04 2,73	2,00 2,66	1,97 2,60	1,91 2,50	1,87 2,42	1,80 2,30	1,75 2,22	1,71 2,13	1,65 2,04	1,62 1,98	1,57 1,90	1,54 1,66	1,51 1,80	1,48 1,76	1,46 1,72	46
48	4,04 7,19	3,19 5,08	2,80 4,22	2,56 3,74	2,41 3,42	2,30 3,20	2,21 3,04	2,14 2,90	2,08 2,80	2,03 2,71	1,99 2,64	1,96 2,58	1,90 2,48	1,86 2,40	1,70 2,28	1,74 2,20	1,70 2,11	1,64 2,02	1,61 1,96	1,56 1,88	1,53 1,84	1,50 1,78	1,47 1,78	1,45 1,70	48
50	4,03 7,17	3,18 5,06	2,79 4,20	2,56 3,72	2,40 3,41	2,29 3,18	2,20 3,02	2,13 2,88	2,07 2,78	2,02 2,70	1,98 2,62	1,95 2,56	1,90 2,46	1,85 2,39	1,78 2,26	1,74 2,18	1,69 2,10	1,68 2,00	1,60 1,94	1,55 1,86	1,52 1,82	1,48 1,76	1,46 1,71	1,44 1,68	50
55	4,02 7,12	3,17 5,01	2,78 4,16	2,54 3,68	2,38 3,37	2,27 3,15	2,18 2,98	2,11 2,85	2,05 2,75	2,00 2,66	1,97 2,59	1,93 2,53	1,88 2,43	1,83 2,35	1,76 2,23	1,72 2,15	1,67 2,06	1,61 1,96	1,58 1,90	1,52 1,82	1,50 1,78	1,46 1,71	1,43 1,66	1,41 1,64	55
60	4,00 7,08	3,15 4,98	2,76 4,13	2,52 3,65	2,37 3,34	2,25 3,12	2,17 2,95	2,10 2,82	2,04 2,72	1,99 2,63	1,95 2,56	1,92 2,50	1,86 2,40	1,81 2,32	1,75 2,20	1,70 2,12	1,65 2,03	1,59 1,93	1,56 1,87	1,50 1,79	1,48 1,74	1,44 1,68	1,41 1,63	1,39 1,60	60
65	3,99 7,04	3,14 4,95	2,75 4,10	2,51 3,62	2,36 3,31	2,24 3,09	2,15 2,93	2,08 2,79	2,02 2,70	1,98 2,61	1,94 2,54	1,90 2,47	1,85 2,37	1,80 2,30	1,73 2,18	1,68 2,09	1,63 2,00	1,57 1,90	1,54 1,84	1,49 1,76	1,46 1,71	1,42 1,64	1,39 1,60	1,37 1,56	65
70	3,98 7,01	3,13 4,92	2,74 4,08	2,50 3,60	2,35 3,29	2 23 3,07	2,14 2,91	2,07 2,77	2,01 2,67	1,97 2,59	1,93 2,51	1,89 2,45	1,84 2,35	1,79 2,28	1,72 2,15	1,67 2,07	1,62 1,08	1,56 1,86	1,53 1,82	1,47 1,74	1,45 1,69	1,40 1,62	1,37 1,56	1,35 1,53	70
80	3,96 6,96	3,11 4,88	2,72 4,04	2,48 3,56	2,33 3,25	2,21 3,04	2,12 2,87	2,05 2,74	1,99 2,64	1,95 2,55	1,91 2,48	1,88 2,41	1,82 2,32	1,77 2,24	1,70 2,11	1,65 2,03	1,60 1,94	1,54 1,84	1,51 1,78	1,45 1,70	1,42 1,65	1,38 1,57	1,35 1,52	1,32 1,49	80

f_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	f_2
100	3,94 **6,90**	3,09 **4,82**	2,70 **3,98**	2,46 **3,51**	2,30 **3,20**	2,19 **2,99**	2,10 **2,82**	2,03 **2,60**	1,97 **2,59**	1,92 **2,51**	1,88 **2,48**	1,85 **2,36**	1,79 **2,26**	1,75 **2,19**	1,68 **2,06**	1,63 **1,98**	1,57 **1,89**	1,51 **1,79**	1,48 **1,73**	1,42 **1,64**	1,39 **1,59**	1,34 **1,51**	1,30 **1,46**	1,28 **1,48**	100
125	3,92 **6,84**	3,07 **4,78**	2,68 **3,94**	2,44 **3,47**	2,29 **3,17**	2,17 **2,95**	2,08 **2,79**	2,01 **2,65**	1,95 **2,56**	1,90 **2,47**	1,86 **2,40**	1,83 **2,33**	1,77 **2,23**	1,72 **2,15**	1,65 **2,08**	1,60 **1,94**	1,55 **1,85**	1,49 **1,75**	1,45 **1,68**	1,39 **1,59**	1,36 **1,54**	1,31 **1,46**	1,27 **1,40**	1,25 **1,37**	125
150	3,91 **6,81**	3,06 **4,75**	2,67 **3,91**	2,43 **3,44**	2,27 **3,14**	2,16 **2,92**	2,07 **2,76**	2,00 **2,62**	1,94 **2,58**	1,89 **2,44**	1,85 **2,37**	1,82 **2,30**	1,76 **2,20**	1,71 **2,12**	1,64 **2,00**	1,59 **1,91**	1,54 **1,83**	1,47 **1,72**	1,44 **1,66**	1,37 **1,56**	1,34 **1,51**	1,29 **1,48**	1,25 **1,37**	1,22 **1,33**	150
200	3,89 **6,76**	3,04 **4,71**	2,65 **3,88**	2,41 **3,41**	2,26 **3,11**	2,14 **2,00**	2,05 **2,78**	1,98 **2,60**	1,92 **2,50**	1,87 **2,41**	1,83 **2,34**	1,80 **2,28**	1,74 **2,17**	1,69 **2,09**	1,62 **1,97**	1,57 **1,88**	1,52 **1,79**	1,45 **1,69**	1,42 **1,62**	1,35 **1,58**	1,32 **1,48**	1,26 **1,39**	1,22 **1,33**	1,19 **1,28**	200
400	3,86 **6,70**	3,02 **4,66**	2,62 **3,83**	2,39 **3,36**	2,23 **3,06**	2,12 **2,85**	2,03 **2,69**	1,96 **2,55**	1,90 **2,46**	1,85 **2,37**	1,81 **2,29**	1,78 **2,23**	1,72 **2,12**	1,67 **2,04**	1,60 **1,92**	1,54 **1,84**	1,40 **1,74**	1,42 **1,64**	1,38 **1,57**	1,32 **1,47**	1,28 **1,42**	1,22 **1,32**	1,16 **1,24**	1,13 **1,19**	400
1000	3,85 **6,66**	3,00 **4,62**	2,61 **3,80**	2,38 **3,34**	2,22 **3,04**	2,10 **2,82**	2,02 **2,66**	1,95 **2,53**	1,89 **2,43**	1,84 **2,34**	1,80 **2,26**	1,76 **2,20**	1,70 **2,09**	1,65 **2,01**	1,58 **1,89**	1,53 **1,81**	1,47 **1,71**	1,41 **1,61**	1,36 **1,54**	1,30 **1,44**	1,26 **1,38**	1,19 **1,28**	1,13 **1,10**	1,08 **1,11**	1000
∞	3,84 **6,64**	2,99 **4,60**	2,60 **3,78**	2,37 **3,32**	2,21 **3,02**	2,09 **2,80**	2,01 **2,64**	1,94 **2,51**	1,88 **2,41**	1,83 **2,32**	1,79 **2,24**	1,75 **2,18**	1,69 **2,07**	1,64 **1,99**	1,57 **1,87**	1,52 **1,79**	1,46 **1,69**	1,40 **1,59**	1,35 **1,52**	1,28 **1,41**	1,24 **1,36**	1,17 **1,25**	1,11 **1,15**	1,00 **1,00**	∞



Joonis 3.14.

Tabel 3.7B.

F-jaotus. Juhusliku suuruse $X^{(f_1,f_2)} \sim F_{f_1,f_2}$ täiendkvantiilid $p_{0,005}$[27]

$$P(X > p_{0,005}) = 0,005.$$

f_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	∞
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	24426	24630	24836	24940	25044	25148	25253	25465
2	198	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	200
3	55,6	49.8	47,5	46,2	45.4	44.8	44,4	44,1	43.9	43,7	43,4	43,1	42,8	42,6	42,5	42,3	42,1	41,8
4	31.3	26,3	24,3	23,2	22,5	22,0	21,6	21,4	21.1	21,0	20,7	20,4	20.2	20.0	19.9	19,8	19,6	19,3
5	22,8	18,3	16,5	15,6	14,9	14,5	14,2	14,0	13,8	13,6	13,4	13,1	12,9	12,8	12,7	12,5	12,4	12,1
6	18,6	14,5	12,9	12,0	11,5	11,1	10,8	10,6	10,4	10,3	10,0	9,81	9,59	9,47	9,36	9,24	9,12	8,98
7	16,2	12,4	10,9	10,1	9,52	9,16	8,89	8,68	8,51	8,38	8,18	7,97	7,75	7,65	7,53	7,42	7,31	7,08
8	14,7	11,0	9,60	8,81	8,30	7,95	7,69	7,50	7,43	7,21	7,01	6,81	6,61	6,50	6,40	6,29	6,18	5,95
9	13,6	10,1	8,72	7,96	7,47	7,13	6,88	6,69	6,54	6,42	6,23	6,03	5,83	5,73	5,62	5,52	5,41	5,19
10	12,8	9,43	8,08	7,34	6,87	6,54	6,30	6,12	5,97	5.85	5,66	5,47	5,27	5,17	5,07	4,97	4,86	4,64
11	12,2	8,91	7,60	6,88	6,42	6,10	5,86	5,68	5,54	5,42	5,24	5,05	4,86	4,76	4,65	4,55	4,45	4,23
12	11,8	8,51	7,23	6,52	6,07	5,76	5,52	5,35	5,20	5.09	4,91	4,72	4,53	4,43	4,33	4,23	4,12	3,90
13	11,4	8,19	6,93	6,23	5,79	5,48	5,25	5,08	4,94	4,82	4,64	4,46	4,27	4,17	4,07	3.97	3,87	3,65
14	11,1	7,92	6,68	6,00	5,56	5,26	5,03	4,86	4,72	4,60	4,43	4.25	4,06	3,96	3,86	3,76	3,66	3,44
15	10,8	7,70	6,48	5,80	5,37	5,07	4,85	4,67	4,54	4,42	4,25	4,07	3,88	3,79	3,69	3,58	3,48	3,26
16	10,6	7,51	6,30	5,64	5,21	4,91	4,69	4,52	4,38	4,27	4,10	3,92	3,73	3,64	3,54	3,44	3,33	3,11
17	10,4	7,35	6.16	5,50	5,07	4,78	4,56	4,39	4,25	4.14	3,97	3,79	3,61	3,51	3,41	3,31	3,21	2,98
18	10.2	7,21	6,03	5,37	4,96	4,66	4,44	4,28	4,14	4,03	3,86	3,68	3,50	3,40	3,30	3,20	3,10	2,87
19	10,1	7,09	5,92	5,27	4,85	4,56	4,34	4,18	4,04	3,93	3,76	3,59	3.40	3,31	3,21	3,11	3,00	2,78
20	9,94	6,99	5,82	5,17	4,76	4,47	4,26	4,09	3,96	3,85	3,68	3,50	3,32	3,22	3,12	3,02	2,92	2,69
21	9,83	6,89	5,73	5,09	4,68	4,39	4,18	4,01	3,88	3,77	3,60	3,43	3,24	3,15	3,05	2,95	2,84	2,61
22	9,73	6,81	5,65	5,02	4,61	4,32	4,11	3,94	3,81	3,70	3,54	3,36	3,18	3,08	2.98	2,88	2,77	2,55
23	9.63	6,73	5.58	4,95	4.54	4,26	4,05	3,88	3,75	3,64	3,47	3,30	3,12	3,02	2,92	2,82	2,71	2,48
24	9,55	6,66	5,52	4,89	4.49	4,20	3,99	3,83	3,69	3,59	3,42	3,25	3,06	2,97	2,87	2,77	2,66	2,43
25	9,48	6,60	5,46	4,84	4,43	4,15	3,94	3,78	3,64	3,54	3,37	3,20	3,01	2,92	2,82	2,72	2,61	2,38
30	9,18	6,35	5,24	4,62	4,23	3,95	3,74	3,58	3,45	3,34	3,18	3,01	2,82	2,73	2,63	2,52	2,42	2,18
40	8,83	6,07	4,98	4,37	3,99	3,71	3,51	3,35	3,22	3,12	2,95	2,78	2,60	2,50	2.40	2.30	2,18	1,93
60	8,49	5,80	4,73	4,14	3,76	3,49	3,29	3,13	3,01	2,90	2,74	2,57	2,39	2,29	2,19	2,08	1,96	1,69
120	8,18	5,54	4,50	3,92	3,55	3,28	3,09	2,93	2,81	2,71	2,54	2,37	2,19	2,09	1,98	1,87	1,75	1,43
∞	7,88	5,30	4,28	3,72	3,35	3,09	2,90	2,74	2,62	2,52	2,36	2,19	2,00	1,90	1,79	1,67	1,53	1,00

[27] Tabel parineb teosest [19], lk.602.

Tabel 3.7 C.

F-jaotus. Juhusliku suuruse $X^{(f_1,f_2)} \sim F_{f_1,f_2}$ täiendkvantiilid $p_{0,025}$ [28]

$$P(X > p_{0,025}) = 0,025$$

f_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	977	985	993	997	1001	1006	1010	1014	1018
2	38,5	39,0	39.2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5	39.5	39,5	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,6	14,5	14,5	14.4	14,3	14.3	14,2	14,1	14,1	14.0	14,0	13,9	13,9
4	12.2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31	8,26
5	10,0	8.43	7.76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6.43	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07	6,02
6	8.81	7.26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4.82	4,76	4,67	4,57	4,47	4,42	4,30	4,31	4,25	4,20	4,14
8	7.57	6.06	5.42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4.30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73	3,67
9	7.21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4.10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3.45	3,39	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14	3,08
11	6.72	5.26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3.53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2.94	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3.77	3,60	3,48	3.39	3,31	3,25	3,15	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,06	2,60
14	6,30	4,86	4.24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,28	3,21	3.15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67	2.61	2,55	2,49
15	6.20	4.77	4.15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2.96	2,86	2,76	2,70	2,64	2,59	2,52	2,46	2,40
16	6,12	4.69	4.08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,89	2,79	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,38	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2.92	2,82	2,72	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,25
18	5,98	4.56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,77	2,67	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26	2,19
19	5,92	4,51	3.90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,72	2,62	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,20	2,13
20	5,87	4.46	3,86	3,51	3.29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,68	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,16	2,09
21	5,83	4.42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80	2,73	2,64	2,53	2,42	2,37	2,31	2,25	2,18	2,11	2,04
22	5,79	4.38	3.78	3,44	3,22	3,05	2.93	2,84	2,76	2,70	2,60	2,50	2,39	2,33	2,27	2,21	2,14	2,08	2,00
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3.18	3,02	2,90	2,81	2,73	2,67	2,57	2,47	2,36	2,30	2.24	2,18	2,11	2,04	1,97
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2.78	2,70	2,64	2,54	2,44	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,01	1,94
25	5.69	4.29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2.75	2,68	2,61	2,51	2,41	2,30	2,24	2,18	2,12	2,05	1,98	1,91
30	5,57	4.18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2.65	2.57	2,51	2,41	2,31	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1.87	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2.39	2,29	2,18	2,07	2,01	1,94	1,88	1.80	1,72	1,64
60	5,29	3,93	3.34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,17	2,06	1.94	1,88	1.82	1,74	1.67	1,58	1,48
120	5,15	3.80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22	2,16	2,05	1.95	1,82	1,76	1,69	1,61	1.53	1,43	1,31
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,94	1,83	1,71	1,64	1,57	1,48	1,39	1,27	1,00

[28] Tabel pärineb teosest [19], lk.603.

§3. Normaalse juhusliku suuruse parameetrite hinnangud ja usalduspiirid.

1. Normaaljaotuse keskväärtuse m hinnang väljavõtte alusel.

Normaaljaotust iseloomustavad kaks parameetrit:

$$EX = m,$$
$$\sqrt{DX} = \sigma.$$

Keskväärtuse jaoks on kõige levinumaks hinnanguks väljavõtte keskmine ehk aritmeetiline keskmine

$$m \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

See hinnang on nihutamata ($E\bar{x} = m$), ta on samuti normaaljaotusega, kusjuures hinnangu $\bar{x}$ dispersioon on pöördvõrdeline väljavõtte mahuga

$$D(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n},$$

kus σ^2 on lähtejaotuse dispersioon. Aritmeetilise keskmise standarhälve $\sigma_{\bar{x}}$ on pöördvõrdeline $\sqrt{n}$-ga:

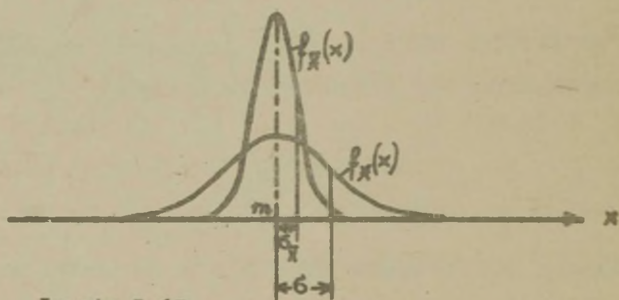
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} .$$

Seega

$$\bar{x} \sim N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}), \quad \text{kui} \quad X \sim N(m, \sigma)$$

(vt. joonis 3.15).

Kuigi $\bar{x}$ on m jaoks parim hinnang (efektiivne, kasutab täielikult ära väljavõttes sisalduva informatsiooni), kasutatakse mõnikord keskväärtuse hinnangutena veel mediaani või variatsioonrea mõningate liikmete lineaarkombinatsiooni, mis on arvuliselt lihtsamad leida. Nende hinnangute jaotusi me käesolevas tabelikogus aga ei esita.



Joonis 3.15.

2. <u>Normaaljaotuse dispersiooni ja standardhälbe hinnang väljavõtte alusel.</u>

Normaaljaotuse dispersiooni σ^2 hinnangut on lihtne leida, kui keskväärtus m on teada; siis

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2.$$

Kahjuks enamasti ei ole m teada. Asendades m tema hinnanguga $\bar{x}$, saame dispersioonihinnangu

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2,$$

mis aga dispersiooni süstemaatiliselt alahindab, s.t., hinnang $\tilde{\sigma}^2$ on nihutatud. Nihutamata hinnanguks dispersioonile on üldlevinud s^2:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

Ilmselt n suurte väärtuste puhul erinevad $\tilde{\sigma}^2$ ja s^2 teineteisest küllalt vähe, mistõttu võib juhul $n \geqslant 100$ kasutada ka dispersioonihinnangut $\tilde{\sigma}^2$ (vt. tabel 3.8B).

Sageli on aga tarvis teada mitte dispersiooni, vaid standardhälbe hinnanguid. Selleks tuleb leida ruutjuur dispersioonihinnangust:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{\sigma}^2},$$

$$s = \sqrt{s^2}.$$

Tuleb aga märkida, et kuigi s^2 on nihutamata hinnang dispersiooni jaoks, ei ole s standardhälbe jaoks nihutamata hinnang (kuigi ta n kasvamisel läheneb nihutamata hinnangule).

Praktiliste ülesannete jaoks on s nihutamata hinnangule küllalt lähedane.

Et aga soovi korral leida standardhälbe nihutamata hinnangut σ^*, tuleb kasutada tabelit 3.8A, kus on antud teisenduskordajad H_n, mille järgi leiame nihutamata hinnangu hinnangust $\tilde{\sigma}$:

$$\sigma^* = \frac{\tilde{\sigma}}{H_n},$$

kus n on väljavõtte maht.

Tabel 3.8A.

Normaalse juhusliku suuruse $X \sim N(m, \sigma)$ standardhälbe nihutamata hinnangu ja väljavõtte standardhälbe suhe.[29] Nihutamata hinnang

$$\sigma^* = \frac{\tilde{\sigma}_n}{H_n}, \text{ kus } \tilde{\sigma}_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}.$$

n	H_n	n	H_n	n	H_n	n	H_n
4	0,7979	13	0,9410	30	0,9748	75	0,9900
5	0,8407	14	0,9453	35	0,9784	80	0,9906
6	0,8686	15	0,9490	40	0,9811	85	0,9911
7	0,8882	16	0,9523	45	0,9832	90	0,9916
8	0,9027	17	0,9551	50	0,9849	95	0,9921
9	0,9139	18	0,9576	55	0,9863	100	0,9925
10	0,9227	19	0,9599	60	0,9874		
11	0,9300	20	0,9619	65	0,9884		
12	0,9359	25	0,9696	70	0,9892		

Näide 3.17.

Olgu $n = 10$, $\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 25{,}8$. Leida nihuta-

[29] Tabel pärineb teosest [22], lk.267.

mata hinnang standardhälbele σ :

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{2,58} = 1,606; \ \sigma^{*} = \frac{1,606}{0,9227} = 1,741.$$

Tabel 3.8B [30]

n	$\sqrt{\frac{n}{n-1}}$	n	$\sqrt{\frac{n}{n-1}}$	n	$\sqrt{\frac{n}{n-1}}$
2	1,414	9	1,061	25	1,021
3	1,225	10	1,054	30	1,017
4	1,155	12	1,044	40	1,013
5	1,118	14	1,038	60	1,008
6	1,095	16	1,033	80	1,006
7	1,080	18	1,029	100	1,005
8	1,069	20	1,026	500	1,002

Tabelis 3.8B on toodud standardhälbe σ hinnangute

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

ja

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

suhe.

3. Normaaljaotuse dispersiooni usalduspiirid.

Normaaljaotusega juhusliku suuruse X dispersiooni σ^2 jaoks on nihutamata hinnanguks

---

[30] Tabel pärineb teosest [26], lk. 399.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

Suurus $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ on χ^2-jaotusega vabadusastmete arvuga n-1.

Seda arvestades saame leida normaaljaotusega juhusliku suuruse dispersiooni jaoks usalduspiirid χ^2-jaotuse abil järgnevalt :

ühepoolne ülemine usalduspiir $\bar{\bar{\sigma}}^2$ vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha$:

$$P(\sigma^2 \leq \bar{\bar{\sigma}}^2) = 1 - \alpha$$

seosest

$$\bar{\bar{\sigma}}^2 = \frac{(n-1)s^2}{p_{1-\alpha}};$$

ühepoolne alumine usalduspiir $\underline{\underline{\sigma}}^2$ vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha$:

$$P(\underline{\underline{\sigma}}^2 \leq \sigma^2) = 1 - \alpha$$

seosest

$$\underline{\underline{\sigma}}^2 = \frac{(n-1)\,s^2}{p_{\alpha}}.$$

Kahepoolsed usalduspiirid $\underline{\underline{\sigma}}^2$ ja $\bar{\bar{\sigma}}^2$ vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha$:

$$P(\underline{\sigma}^2 \leq \sigma^2 \leq \bar{\sigma}^2) = 1 - \alpha$$

leiame seostest

$$\underline{\sigma}^2 = \frac{(n-1)\,s^2}{p_{\frac{\alpha}{2}}} ;$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{(n-1)\,s^2}{p_{1-\frac{\alpha}{2}}} .$$

Siin p_β on χ^2_{n-1}-jaotuse β-täiendkvantiil, vt. tabel 3.5.

Näide 3.18.

Olgu 10 vaatluse põhjal saadud normaaljaotuse dispersiooni σ^2 hinnanguks suurus $s^2 = 2{,}83$. Leida:

1) ühepoolne ülemine 95%-line usalduspiir;

2) ühepoolne alumine 99%-line usalduspiir;

3) kahepoolsed 95%-lised usalduspiirid

dispersioonile σ^2.

Lahendus.

$$(n-1)s^2 = 9 \cdot 2{,}83 = 25{,}47.$$

Tabelist 3.5 leiame:

$$p_{9;0,95} = 3{,}33; \qquad p_{9;0,025} = 19{,}0;$$

$$p_{9;0,01} = 21{,}7; \qquad p_{9;0,975} = 2{,}70;$$

millest järeldub:

$$\bar{\sigma}^2_{(0,95)} = \frac{25,47}{3,33} = 7,65;$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^2_{(0,99)} = \frac{25,47}{21,7} = 1,17;$$

$$\underline{\sigma}^2_{(0,95)} = \frac{25,47}{19,0} = 1,34;$$

$$\bar{\sigma}^2_{(0,95)} = \frac{25,47}{2,70} = 9,43.$$

4. <u>Normaaljaotuse standardhälbe usalduspiirid.</u>

Teades normaaljaotuse dispersiooni σ^2 usalduspiire $\underline{\sigma}^2$, $\bar{\sigma}^2$, mille puhul

$$P(\underline{\sigma}^2 \leq \sigma^2 \leq \bar{\sigma}^2) = 1 - \alpha,$$

on lihtne leida ka normaaljaotuse standardhälbe σ usalduspiire $\underline{\sigma}$, $\bar{\sigma}$:

$$\underline{\sigma} = \sqrt{\underline{\sigma}^2} \quad ; \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}^2}$$

ning

$$P(\underline{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma}) = 1 - \alpha.$$

Et see on seotud mõnesuguse arvutustööga, on konstrueeritud juhusliku suuruse

$$X^{(f)} = \sqrt{\frac{f}{Y_f}}$$

jaotus, kus $Y_f \sim \chi^2_f$.

Tabelis 3.9 on esitatud selle juhusliku suuruse $X^{(f)}$ kvantiilid x_α. Standardhälbe σ ühe- ja kahepoolsed usalduspiirid $\underline{\underline{\sigma}}, \bar{\bar{\sigma}}$ ning $\underline{\sigma}, \bar{\sigma}$ leiame hinnangu s järgi vastavalt seosest

$$\underline{\underline{\sigma}} = sx_\alpha; \qquad \bar{\bar{\sigma}} = sx_{1-\alpha};$$

$$P(\sigma > \underline{\underline{\sigma}}) = 1-\alpha; \qquad P(\sigma < \bar{\bar{\sigma}}) \geq 1-\alpha;$$

$$\underline{\sigma} = sx_{\frac{\alpha}{2}}; \qquad \bar{\sigma} = sx_{1-\frac{\alpha}{2}};$$

$$P(\underline{\sigma} < \sigma < \bar{\sigma}) = 1-\alpha,$$

kus f=n-1 (n - väljavõtte maht) (vt. joonis 3.16).

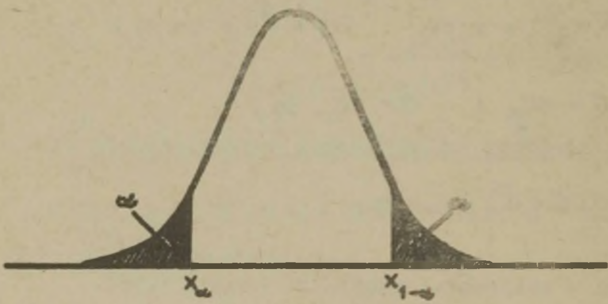
5. Standardhälbe (dispersiooni) võrdlemine konstandiga.

Leitud usalduspiire võime kasutada ka standardhälbe (dispersiooni) kohta käivate hüpoteeside kontrollimiseks.

Hüpoteesi H_1 : $\sigma \neq \sigma_0$ ehk $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$, kus σ_0 on mingi antud konstant, võtame vastu (olulisuse nivooga α), siis, kui σ_0 ei kuulu usalduspiirkonda $(\underline{\sigma}, \bar{\sigma})$ (mis vastab usaldusnivoole $1-\alpha$).

Hüpoteesi H_2 : $\sigma < \sigma_0$ $(\sigma^2 < \sigma_0^2)$ kus σ_0 on mingi antud konstant, võtame vastu (olulisuse nivooga α) siis, kui $\sigma_0 > \bar{\bar{\sigma}}$, kus $\bar{\bar{\sigma}}$ on σ ühepoolne ülemine usalduspiir vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha$.

Hüpoteesi H_3 : $\sigma > \sigma_0$ ($\sigma^2 > \sigma_0^2$) , kus σ_0 on mingi antud konstant, võtame vastu (olulisuse nivooga α) siis, kui $\sigma_0 < \underline{\underline{\sigma}}$, kus $\underline{\underline{\sigma}}$ on σ ühepoolne alumine usalduspiir vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha$.



Joonis 3.16.

Tabel 3.9.

Normaaljaotusega N(m,1) juhusliku suuruse standardhälbe hinnangu s jaotuse kvantiilid.[31]

$$x^{(f)} = \sqrt{\frac{f}{Y_f}}\,, \quad Y_f \sim \chi^2_f;$$

$$P(x^{(f)} < x_\alpha) = \alpha.$$

f	0.995	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.30
1	160	79	41	16	7,9	3,9	2,6	0,97
2	14	10	7,1	4,4	3.1	2.1	1,7	0,91
3	6,5	5,1	4,0	2,9	2.3	1,7	1.4	0,91
4	4,4	3,7	3,1	2,4	1,9	1,6	1,4	0,90
5	3,5	3,0	2,6	2,1	1,8	1,5	1,3	0,91
6	3,0	2,6	2,3	1,9	1,6	1,4	1,3	0,91
7	2,7	2,4	2,1	1,8	1,6	1,4	1,2	0,91
8	2,4	2,2	2,0	1,7	1,5	1,3	1,2	0,92
9	2,3	2,1	1,9	1.6	1,5	1.3	1,2	0,92
10	2,2	2,0	1,8	1,6	1,4	1,3	1,2	0,92
11	2,1	1,9	1,7	1,5	1,4	1,3	1,2	0,92
12	2,0	1,8	1,7	1,5	1,4	1,2	1,2	0,92
13	1,9	1,8	1,6	1,5	1,4	1,2	1,1	0,93
14	1,9	1,7	1,6	1,5	1,3	1,2	1,1	0,93
15	1,8	1,7	1.6	1,4	1,3	1,2	1,1	0,93
16	1,8	1,7	1,6	1,4	1.3	1.2	1,1	0,93
17	1,7	1,6	1,5	1.4	1,3	1,2	1,1	0,93
18	1,7	1,6	1.5	1,4	1.3	1,2	1,1	0,94
19	1,7	1,6	1,5	1.4	1,3	1,2	1,1	0,94
20	1,6	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	0,94
21	1,6	1,5	1,5	1,3	1,3	1,2	1,1	0,94
22	1,6	1,5	1,4	1,3	1,3	1,2	1,1	0,94
23	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,2	1,1	0,94
24	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,2	1,1	0,94
25	1,5	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	0,94
26	1,5	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	0,94
27	1,5	1,4	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	0,94
28	1,5	1,4	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	0,94
29	1,5	1,4	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	0,94
30	1,5	1,4	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1	0,94

[31] Tabel pärineb teosest [25], lk. 275-276.

Tabel 3.9 (järg).

	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	0,78	0,61	0,51	0,43	0,39	0,36	0,32	0,30
2	0,79	0,66	0,58	0,51	0,47	0,43	0,40	0,38
3	0,80	0,69	0,62	0,55	0,51	0,48	0,45	0,43
4	0,82	0,72	0,64	0,59	0,56	0,52	0,49	0,46
5	0,83	0,74	0,67	0,61	0,58	0,55	0,52	0,49
6	0,84	0,75	0,69	0,63	0,60	0,57	0,54	0,52
7	0,84	0,76	0,71	0,65	0,62	0,59	0,56	0,54
8	0,85	0,77	0,72	0,66	0,63	0,60	0,57	0,55
9	0,86	0,78	0,73	0,68	0,64	0,62	0,59	0,57
10	0,86	0,79	0,74	0,69	0,66	0,63	0,60	0,58
11	0,87	0,80	0,75	0,70	0,67	0,64	0,61	0,59
12	0,87	0,81	0,76	0,71	0,68	0,65	0,62	0,60
13	0,87	0,81	0,76	0,71	0,68	0,66	0,63	0,61
14	0,88	0,81	0,77	0,72	0,69	0,67	0,64	0,62
15	0,88	0,82	0,77	0,73	0,70	0,68	0,65	0,63
16	0,88	0,82	0,78	0,74	0,71	0,68	0,66	0,64
17	0,89	0,83	0,79	0,74	0,71	0,69	0,66	0,65
18	0,89	0,83	0,79	0,75	0,72	0,69	0,67	0,65
19	0,89	0,84	0,80	0,75	0,72	0,70	0,68	0,66
20	0,89	0,84	0,80	0,76	0,73	0,71	0,68	0,66
21	0,89	0,84	0,80	0,76	0,74	0,71	0,69	0,67
22	0,90	0,84	0,81	0,76	0,74	0,72	0,69	0,67
23	0,90	0,85	0,81	0,77	0,74	0,72	0,69	0,68
24	0,90	0,85	0,81	0,77	0,75	0,73	0,70	0,68
25	0,90	0,85	0,81	0,78	0,75	0,73	0,71	0,69
26	0,91	0,85	0,82	0,78	0,76	0,73	0,71	0,69
27	0,91	0,86	0,82	0,78	0,76	0,74	0,71	0,70
28	0,91	0,86	0,82	0,79	0,76	0,74	0,72	0,70
29	0,91	0,86	0,82	0,79	0,76	0,75	0,72	0,71
30	0,91	0,86	0,83	0,79	0,77	0,75	0,72	0,71

Näide 3.19.

Vaatleme näites 3.18 esitatud ülesannet. Leida antud andmete järgi standardhälbele usalduspiirid:

1) ühepoolne ülemine 95%-line;

2) ühepoolne alumine 99%-line ;

3) kahepoolsed 95%-lised.

Lahendus.

Arvutame $s = \sqrt{s^2} = 1{,}68$.

Leiame usalduspiirid seostest

$$\underline{\underline{\sigma}}_{1-\alpha} = x_{\alpha} \cdot s, \qquad \bar{\bar{\sigma}}_{1-\alpha} = x_{1-\alpha} \cdot s;$$

$$\underline{\sigma}_{1-\alpha} = \underline{\underline{\sigma}}_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{\frac{\alpha}{2}} \cdot s,$$

$$\bar{\sigma}_{1-\alpha} = \bar{\bar{\sigma}}_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s.$$

Käesoleval juhul

$$\underline{\underline{\sigma}}(99) = x_{0,01} \cdot s = 0{,}64 \cdot 1{,}68 = 1{,}08,$$

$$\bar{\bar{\sigma}}(95) = x_{0,95} \cdot s = 1{,}6 \cdot 1{,}68 = 2{,}69,$$

$$\underline{\sigma}(95) = x_{0,02} \cdot s = 0{,}68 \cdot 1{,}68 = 1{,}14,$$

$$\bar{\sigma}(95) = x_{0,98} \cdot s = 1{,}9 \cdot 1{,}68 = 3{,}19 .$$

6. Kahe normaaljaotuse dispersioonide (standardhälvete) võrdlemine usalduspiiride abil.

Olgu antud kaks normaalset juhuslikku suurust $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1)$ $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2)$. Kontrollida (antud olulisuse nivooga α)

üht järgnevatest hüpoteesidest:

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 ,$$

$$H_2 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 ,$$

$$H_3 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 .$$

Paneme tähele, et toodud hüpoteesid on samaväärsed analoogiliste hüpoteesidega standardhälvete jaoks:

$$H_1' : \sigma_1 \neq \sigma_2 ;$$

$$H_2' : \sigma_1 > \sigma_2 ;$$

$$H_3' : \sigma_1 < \sigma_2 .$$

Üks võimalus toodud hüpoteeside kontrollimiseks on usalduspiiride kasutamine.

Hüpoteesi H_1 (või H_1') kontrollimiseks leiame kahepoolsed usalduspiirid vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha$ σ_1 ja σ_2 jaoks, vt. punkt 4 (või σ_1^2 ja σ_2^2 jaoks, vt. punkt 3). Kui kehtib üks seostest

$$\underline{\sigma}_1^2 > \bar{\sigma}_2^2 \quad \text{või} \quad \underline{\sigma}_2^2 > \bar{\sigma}_1^2 ,$$

s.t usalduspiirkonnad ei lõiku, siis võtame vastu hüpoteesi H_1.

Hüpoteesi H_2 kontrollimiseks leiame ühepoolsed usalduspiirid $\underline{\sigma}_1$ ja $\bar{\sigma}_2$ vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha$, ning loeme H_2 õigeks, kui

$$\underline{\sigma}_1 > \bar{\sigma}_2 .$$

Hüpoteesi H_3 loeme õigeks siis, kui

$$\underline{\sigma}_2 > \bar{\sigma}_1 ,$$

kus $\underline{\sigma}_2$ ja $\bar{\sigma}_1$ on ühepoolsed usalduspiirid vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha$.

Ülalkirjeldatud meetodit on mõtet kasutada sel juhul, kui σ_1 ja σ_2 usalduspiiride leidmine pakub ka iseseisvat huvi või kui nad on juba niikuinii leitud. Tuleb aga märkida, et kui usalduspiirid osaliselt kattuvad (kuid s_1 ja s_2 ei kuulu vastavalt teise usalduspiirkonda), siis on mõnikord võimalik tõestada dispersioonide erinevust F-jaotuse abil.

7. Kahe normaaljaotuse dispersioonide (standardhälvete) võrdlemine F-jaotuse abil.

Olgu antud kaks normaalset juhuslikku suurust $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1)$ ja $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2)$ vastavalt väljavõtetega $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$ ning $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}$. Kontrollida (antud olulisuse nivooga α) üht järgmistest hüpoteesidest:

$$H_1 : \ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \ \text{ehk} \ \sigma_1 \neq \sigma_2 ;$$

$H_2: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ehk $\sigma_1 > \sigma_2$;

$H_3: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ ehk $\sigma_1 < \sigma_2$.

Teisendame hüpoteesid nendega samaväärseteks:

$$H_1': \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1, \text{ s.t. kas } \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 \text{ või}$$

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > 1;$$

$$H_2': \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1;$$

$$H_3': \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > 1.$$

Vaatleme jagatiste $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ ja $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ hinnanguid

$\frac{s_1^2}{s_2^2}$ ja $\frac{s_2^2}{s_1^2}$. Kui õige on hüpotees H_0:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2,$$

siis on hinnangud

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \quad \text{ja} \quad \frac{s_2^2}{s_1^2}$$

F-jaotusega:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{n_1-1,\, n_2-1}; \quad \frac{s_2^2}{s_1^2} \sim F_{n_2-1,\, n_1-1}\,.$$

Seda arvestades saame hüpoteeside H_1, H_2 ja H_3 kontrollimiseks järgmise eeskirja.

Kui $\frac{s_1^2}{s_2^2} > p_{\frac{\alpha}{2}}$, kus $p_{\frac{\alpha}{2}}$ on $F_{n_1-1,\, n_2-1}$ - jaotuse $\frac{\alpha}{2}$- täiendkvantiil, või $\frac{s_2^2}{s_1^2} > p_{\frac{\alpha}{2}}$, kus $p_{\frac{\alpha}{2}}$ on F_{n_2-1,n_1-1}-jaotuse $\frac{\alpha}{2}$ -täiendkvantiil, siis võtame vastu hüpoteesi H_1.

Kui $\frac{s_1^2}{s_2^2} > p_{\alpha}$, kus p_{α} on $F_{n_1-1,\, n_2-1}$ -jaotuse α - täiendkvantiil, siis võtame vastu hüpoteesi H_2.

Kui $\frac{s_2^2}{s_1^2} > p_{\alpha}$, kus p_{α} on $F_{n_2-1,\, n_1-1}$-jaotuse α -täiendkvantiil, siis võtame vastu hüpoteesi H_3.

Meenutame siin veel, et hüpoteese H_2 või H_3 kontrollime sel juhul, kui ette on teada, et üks dispersioonidest peaks olema suurem(niisugune on näiteks olukord dispersioonanalüüsi korral).

Kui hüpoteese H_1, H_2 või H_3 vastu võtta ei saa, siis tuleb vastu võtta hüpotees H_0: dispersioonid on võrdsed (või ka: materjal ei ole piisav nende erinevuse tõestamiseks).

Näide 3.20.

Olgu tarvis võrrelda kahe normaaljaotusega juhusliku suuruse dispersiooni, kusjuures on antud väljavõtted mahtudega $n_1 = 13$, $n_2 = 8$; arvutatud on dispersioonihinnangud $s_1^2 = 5,6$; $s_2^2 = 1,4$. Nõutakse kontrollida hüpoteesi (olulisuse nivooga 0,05) nende erinevuse kohta.

Lahendus.

Et meil pole võimalik oletada, kumb dispersioonidest peaks olema suurem, kasutame kahepoolset hüpoteesi, seega tuleb kasutada tabelit 3.7C ($\frac{\alpha}{2} = 0,025$).

Et $s_1^2 > s_2^2$, leiame suhte $\frac{5,6}{1,4} = 4$; võrdlemiseks peame leidma tabelist suuruse vastavalt vabadusastmete arvudele $f_1 = 12$, $f_2 = 7$; näeme, et $F_{12;7;0,025} = 4,67$, kuid $4 < 4,67$, ning me peame vastu võtma hüpoteesi, et dispersioonid on võrdsed.

Näide 3.21.

Oletame, et dispersioonianalüüsi tulemuseks saame $k=5$ rühma ja $n=35$ vaatluse tulemuse puhul suurused:

rühmadevaheline varieeruvus $Q_1 = 20,68$,

rühmasisene varieeruvus $Q_2 = 33,00$.

Siin vastavad erinevad rühmad kontrollitava faktori eri-

...evatele nn. nivoodele; tuleb kontrollida hüpoteesi faktori mõju kohta.

Lahendus.

Vaatlusmaterjali põhjal saame dispersiooni jaoks hinnangud:

$$s_1^2 = \frac{Q_1}{k-1} = \frac{20,68}{4} = 5,17, \quad s_2^2 = \frac{Q_2}{n-k} = \frac{33,00}{30} = 1,10.$$

On vaja kontrollida hüpoteesi $s_1^2 > s_2^2$, sest sel juhul tuleks oletada faktori olulist mõju. Seetõttu leiame suhte $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ ja võrdleme seda F-jaotusega vabadusastmete arvudega k-1, n-k. Kui leidub arv $p_{k-1,\, n-k;\alpha}$ nii, et

$\frac{s_1^2}{s_2^2} > p_{k-1,\, n-k;\alpha}$ siis saame väite $s_1^2 > s_2^2$ õigsust kinnitada olulisuse nivooga α. Antud juhul $\frac{s_1^2}{s_2^2} = 4,7 >$

$> p_{4;30;0,01} = 4,02$, seega võime kinnitada faktori mõju olulisuse nivooga 0,01; veelgi enam, tabelist 3.7B näeme, et $\frac{s_1^2}{s_2^2} > p_{4;30;0,005} = 4,62$, seega faktori mõju on tõestatud eksimise võimalusega vaid 1 juht 200-st.

8. Normaaljaotuse keskväärtuse usalduspiirid.

Olgu $X \sim N(m, \sigma)$. Nagu nägime punktis 1, on keskväärtuse hinnang $\bar{x}$ samuti normaaljaotusega $\bar{x} \sim N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Kui juhusliku suuruse X standardhälve σ on (varasematest töödest või teoreetilistel kaalutlustel) teada, saame keskväärtusele m usalduspiirid leida normaaljaotuse N(0,1) tabeli abil.

Kahepoolsed usalduspiirid $\underline{m}$, $\bar{m}$ vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha$ saame

$$\underline{m} = \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_\alpha ; \qquad \bar{m} = \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_\alpha ,$$

kus q_α on normaaljaotuse N(0,1) hälve tõenäosusega α (vt. tabel 3.3)

$$P(\underline{m} < m < \bar{m}) = 1 - \alpha .$$

Ühepoolse ülemise ning ühepoolse alumise usalduspiiri vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha$ saame

$$\underline{\underline{m}} = \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} p_\alpha ; \qquad P(m > \underline{\underline{m}}) = 1 - \alpha ;$$

$$\bar{\bar{m}} = \underline{\underline{x}} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} p_\alpha ; \qquad P(m < \bar{\bar{m}}) = 1 - \alpha ,$$

kus p_α on normaaljaotuse N(0,1) α-täiendkvantiil ($p_\alpha = x_{1-\alpha}$; vt. tabel 3.4).

Kui aga σ ei ole teada, siis tuleb kasutada standardhälbe hinnangut s ning t-jaotuse tabeleid. Selline olukord on hoopiski tüüpilisem. Saame siis kahepoolsed usalduspiirid:

$$\underline{m} = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} q_{\alpha}; \qquad \bar{m} = \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} q_{\alpha},$$

$$P(\underline{m} < m < \bar{m}) = 1-\alpha.$$

Siin q_{α} on t-jaotuse hälve tõenäosusega α vabadusastmete arvu $n-1$ korral (vt. tabel 3.6, α valida tabelist ülevalt 1. reast).

Ühepoolsed usalduspiirid

$$\underline{m} = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} p_{\alpha'}, \qquad P(\underline{m} < m) = 1-\alpha',$$

ja

$$\bar{m} = \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} p_{\alpha'}, \qquad P(m < \bar{m}) = 1-\alpha',$$

saame t-jaotuse α'-täiendkvantiili abil vastavalt vabadusastmete arvule $n-1$ (vt. tabel 3.6, α' valida tabeli alt, viimasest reast).

See, kas kasutame ühepoolset või kahepoolseid usalduspiire, sõltub konkreetsest ülesande sisust ning tuleb määrata ette enne arvutuste teostamist.

Märgime veel, et kuna t-jaotus läheneb väljavõtte mahu n kasvamisel normaaljaotusele, võime suurte väljavõtete korral ($n > 100$) t-jaotuse asemel normaaljaotust kasutada, s.t. m usalduspiiride määramisel toimida nii, nagu σ oleks täpselt teada.

Näide 3.22.

Leida normaaljaotuse keskväärtuse m 95%-lised usalduspiirid, kui $n=15$, $\bar{x}=2,32$ ja $s=1,17$.

<u>Lahendus.</u>

Keskväärtuse usalduspiirid arvutame:

$$\underline{m},\ \overline{m} = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}}\, q_{n-1;\,\alpha}.$$

Ühepoolse ülemise või ühepoolse alumise usalduspiiri arvutame aga ühepoolsele hüpoteesile vastava t-jaotuse väärtuse abil:

$$\underline{m} = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}}\, t_{n-1;\,\alpha}.$$

$$\overline{m} = \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}}\, t_{n-1;\,\alpha}.$$

Käesoleval juhul saame

$$t_{n-1,} = t_{14;\,0,05} = 2,14,$$
$$t_{n-1,} = t_{14;\,0,05} = 1,76,$$

järelikult

$$\underline{m},\ \overline{m} = 2,32 \pm \frac{1,17}{\sqrt{15}} \cdot 2,14 = 2,32 \pm 0,651,$$

$$\underline{\underline{m}},\ \overline{\overline{m}} = 2,32 \pm \frac{1,17}{\sqrt{15}} \cdot 1,76 = 2,32 \pm 0,53.$$

9. <u>Keskväärtuse võrdlemine konstandiga.</u>

Keskväärtuse usalduspiiride abil saab võrrelda keskväärtust mingi etteantud konstandiga m_0. Vaatleme järgmisi hüpoteese:

$$H_1 : m \neq m_0;$$

$$H_2 : m > m_0;$$

$$H_3 : m < m_0.$$

Selleks, et tõestada hüpoteesi H_1 olulisuse nivooga α, leiame kahepoolsed usalduspiirid $\underline{m}$, $\overline{m}$ vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha$. Kui $m_0 < \underline{m}$ või $m_0 > \overline{m}$, s.t. m_0 ei kuulu usalduspiirkonda, loeme H_1 õigeks.

H_2 tõestamiseks leiame ühepoolse alumise usalduspiiri $\underline{m}$ vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha$. Kui $m_0 < \underline{m}$, loeme hüpoteesi H_2 õigeks (olulisuse nivooga α).

H_3 tõestamiseks leiame ühepoolse ülemise usalduspiiri $\overline{m}$ vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha$. Kui $m_0 > \overline{m}$, loeme hüpoteesi H_3 õigeks (olulisuse nivooga α).

10. Kahe normaaljaotuse keskväärtuste võrdlemine usalduspiiride abil.

Olgu antud kaks normaaljaotusega juhuslikku suurust $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1)$, $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2)$ vastavalt väljavõtetega $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}$; $x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}$. Kontrollida üht hüpoteesidest

$$H_1 : m_1 \neq m_2;$$

$$H_2 : m_1 > m_2;$$

$$H_3 : m_1 < m_2$$

olulisuse nivooga α.

Kui keskväärtuste m jaoks on leitud kahe- ja ühepoolsed usalduspiirid vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha$, siis on võimalik nende abil kontrollida hüpoteese H_1-H_3.

H_1 kontrollimiseks on tarvis kasutada kahepoolseid usalduspiire $\underline{m}_1$, $\overline{m}_1$ ja $\underline{m}_2$, $\overline{m}_2$ (vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha$). Kui

$$\underline{m}_1 > \overline{m}_2 \quad \text{või} \quad \underline{m}_2 > \overline{m}_1,$$

s.t. usalduspiirkonnad ei kattu, võime võtta vastu hüpoteesi H_1.

H_2 ja H_3 kontrollimiseks kasutame ühepoolseid usalduspiire. Et aga $\underline{m} < \underline{\underline{m}}$ ja $\overline{m} > \overline{\overline{m}}$, võib neid kontrollida ka kahepoolsete usalduspiiride abil, kuid siis saame kriteeriumi olulisuse nivooga $\frac{\alpha}{2}$.

Kui $\underline{\underline{m}}_2 > \overline{\overline{m}}_1$, võtame vastu hüpoteesi H_3; kui $\underline{\underline{m}}_1 > \overline{\overline{m}}_2$, võtame vastu hüpoteesi H_2. Kui usalduspiirkonnad osaliselt kattuvad, kuid $\bar{x}_1$ ja $\bar{x}_2$ ei kuulu vastavalt usalduspiirkondadesse $(\underline{m}_2, \overline{m}_2)$ ning $(\underline{m}_1, \overline{m}_1)$, on mõnel juhul võimalik hüpoteese $H_1 - H_3$ võtta vastu, kasutades kontrollimiseks t-testi (vt. punktid 11 ja 12).

11. Kahe normaaljaotuse keskväärtuste võrdlemine (võrdse mahuga väljavõtteid, $n_1=n_2=n$).

Olgu antud kaks normaaljaotusega juhuslikku suurust $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1)$, $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2)$, kummastki väljavõte mahuga n:

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n};$$

$$x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}.$$

Kontrollida üht hüpoteesidest

$$H_1 : m_1 \neq m_2;$$

$$H_2 : m_1 > m_2;$$

$$H_3 : m_1 < m_2$$

olulisuse nivooga α.

Oletame, et vaatluse tulemused on juhuslikus järjestuses (ei ole järjestatud variatsiooniritta). Kui see nii ei ole, siis järjestame ühe väljavõtte ümber, kasutades juhuslike arvude tabelit.

Arvutame suurused

$$d_1 = x_{11} - x_{21}, \quad d_2 = x_{12} - x_{22}, \ldots, d_n = x_{1n} - x_{2n},$$

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_i, \quad s_d^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (d_i - \bar{d})^2,$$

ning

$$X = \frac{\bar{d}}{s_d} \sqrt{n}.$$

Kui $|X| > q_\alpha$, kus q_α on t-jaotuse hälve tõenäosusega α (vabadusastmete arv $f=n-1$), siis võtame vastu hüpoteesi H_1.

Kui $X > p_{\alpha'}$, kus $p_{\alpha'}$ on t-jaotuse α'-täiendkvantiil (vabadusastmete arv $f=n-1$), siis võtame vastu hüpoteesi H_2.

Kui $X < 0$, kuid $|X| > p_{\alpha'}$, kus $p_{\alpha'}$ on t-jaotuse α'-täiendkvantiil (vabadusastmete arv $f=n-1$), siis võtame vastu hüpoteesi H_3.

12. Kahe normaaljaotuse võrdlemine (lähedased dispersioonid).

Olgu antud kaks normaaljaotusega juhuslikku suurust $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1)$ ja $X_2 \sim N(m_2\ \sigma_2)$ vastavalt väljavõtetega $x_{11}, \ldots, x_{1n_1}; x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}$. Vaatleme juhtu, kus dispersioonid σ_1^2 ja σ_2^2 on lähedased, s.t. meil ei ole õnnestunud tõestada hüpoteesi

$$H_1 \ : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

küllalt suure olulisuse nivooga α. (Mida suurema α korral tuleb nullhüpotees $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vastu võtta, seda tõenäosem on, et dispersioonid on praktiliselt võrdsed.) Rangeks võrdsuse $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ tõestamiseks tuleks võtta $\alpha = 0{,}95$; praktikas aga loetakse ühtelangevuseks juba juhtu, kui $\alpha = 0{,}05$ või $\alpha = 0{,}10$ - s.t. tõestatud erinevust ei ole.

Sel juhul saame hüpoteeside

$$H_1 \ : m_1 \neq m_2;$$

$$H_2 \ : m_1 > m_2;$$

$$H_3 \ : m_1 < m_2$$

kontrollimiseks kasutada suurust

$$X = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} =$$

$$= \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2 (n_1 - 1) + s_2^2 (n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} .$$

Kui $|X| > q_\alpha$, kus q_α on t-jaotuse hälve tõenäosusega α (vabadusastmete arvuga $f = n_1 + n_2 - 2$), siis võtame vastu H_1.

Kui $X > p_{\alpha'}$, kus $p_{\alpha'}$ on t-jaotuse α'-täiendkvantiil (vabadusatmete arv $f = n_1 + n_2 - 2$), siis võtame vastu H_2.

Kui $X < 0$, kuid $|X| > p_{\alpha'}$, kus $p_{\alpha'}$ on t-jaotuse α'-täiendkvantiil (vabadusastmete arv $f = n_1 + n_2 - 2$), siis võtame vastu H_3.

Näide 3.23.

Kontrollida hüpoteesi 2 normaaljaotuse erinevuse kohta olulisuse nivooga $\alpha = 0,05$.

Olgu $n_1 = 7$, $n_2 = 11$; $s_1^2 = 1,2$; $s_2^2 = 1,5$.

$$\bar{x}_1 = 2,7; \quad \bar{x}_2 = 1.$$

Lahendus.

Leiame

$$s = \sqrt{\frac{6 \cdot 1,2 + 10 \cdot 1,5}{16}} = 1,18;$$

$$t = \frac{2,7 - 1,3}{1,18}\sqrt{\frac{77}{18}} = 2,46 > 2,12.$$

Seega võime kinnitada, et $m_1 \neq m_2$ olulisuse nivooga 0,05. Ühepoolse hüpoteesi (kui meid huvitab ainult kontrollida $m_1 > m_2$) saaksime tõestada koguni olulisuse nivooga 0,025.

Märkus.

Enam kui kahe normaaljaotuse keskväärtuste üheaegseks võrdlemiseks kasutatakse dispersioonanalüüsi , mille arvutusskeemiga võib tutvuda näiteks teostest [19-22,25,26].

13. Mitme normaaljaotusega juhusliku suuruse dispersioonide võrdlemine (võrdsete mahtudega väljavõtted)

Olgu antud k normaaljaotusega juhuslikku suurust

$$X_1 \sim N(m_1, \sigma_1),\quad X_2 \sim N(m_2, \sigma_2),\ \dots,\ X_k \sim N(m_k, \sigma_k),$$

kusjuures igaühe väärtustest on antud väljavõte mahuga n:

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n};\ x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n};\ \dots;\ x_{k1},$$

$$x_{k2}, \dots, x_{kn}.$$

Kontrollida hüpoteesi

H: Kõik juhuslike suuruste dispersioonid $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$ ei ole võrdsed.

Arvutame dispersioonihinnangud

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2, \dots,\ s_k^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ki} - \bar{x}_k)^2 .$$

ning suhte

$$X = \frac{\max\limits_{1 \le i \le k} s_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} s_i^2} .$$

Juhusliku suuruse X jaotuse (nn. G-jaotuse) 0,05- ja 0,01-täiendkvantiilid $p_{0,05}$; $p_{0,01}$ on trükitud tabelis 3.10. Nende abil on võimalik püstitatud hüpoteesi H kontrollida olulisuse nivoodega $\alpha = 0,05$ ja 0,01. Hüpoteesi H võtame vastu, kui

$$\frac{\max\limits_{1 \le i \le k} s_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} s_i^2} > p_\alpha ,$$

Tabel 3. 10A (Cochrani test).

Juhusliku suuruse $X = \dfrac{\max\limits_{1 \le i \le k} s_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} s_i^2}$ 0,05 -täiendkvantiilid.[32]

k \ ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	0.9985	0.9750	0.9392	0.9057	0.8772	0.8534	0.8332	0.8159	0.8010	0.7880	0.7341	0.6602	0.5813	0.5000
3	0.9669	0.8709	0.7977	0.7457	0.7071	0.6771	0.6530	0.6333	0.6167	0.6025	0.5466	0.4748	0.4031	0.3333
4	0.9065	0.7679	0.6841	0.6287	0.5895	0.5598	0.5365	0.5175	0.5017	0.4884	0.4366	0.3720	0.3093	0.2500
5	0.8412	0.6838	0.5981	0.5441	0.5065	0.4783	0.4564	0.4387	0.4241	0.4118	0.3645	0.3066	0.2513	0.2000
6	0.7808	0.6161	0.5321	0.4803	0.4447	0.4184	0.3980	0.3817	0.3682	0.3568	0.3135	0.2612	0.2119	0.1667
7	0.7271	0.5612	0.4800	0.4307	0.3974	0.3726	0.3535	0.3384	0.3259	0.3154	0.2756	0.2278	0.1833	0.1429
8	0.6798	0.5157	0.4377	0.3910	0.3595	0.3362	0.3185	0.3043	0.2926	0.2829	0.2462	0.2022	0.1616	0.1250
9	0.6385	0.4775	0.4027	0.3584	0.3286	0.3067	0.2901	0.2768	0.2659	0.2568	0.2226	0.1820	0.1446	0.1111
10	0.6020	0.4450	0.3733	0.3311	0.3029	0.2823	0.2666	0.2541	0.2439	0.2353	0.2032	0.1655	0.1308	0.1000
12	0.5410	0.3924	0.3264	0.2880	0.2624	0.2439	0.2299	0.2187	0.2098	0.2020	0.1737	0.1403	0.1100	0.0833
15	0.4709	0.3346	0.2758	0.2419	0.2195	0.2034	0.1911	0.1815	0.1736	0.1671	0.1429	0.1144	0.0889	0.0667
20	0.3894	0.2705	0.2205	0.1921	0.1735	0.1602	0.1501	0.1422	0.1357	0.1303	0.1108	0.0879	0.0675	0.0500
24	0.3434	0.2354	0.1907	0.1656	0.1493	0.1374	0.1286	0.1216	0.1160	0.1113	0.0942	0.0743	0.0567	0.0417
30	0.2929	0.1980	0.1593	0.1377	0.1237	0.1137	0.1061	0.1002	0.0958	0.0921	0.0771	0.0604	0.0457	0.0333
40	0.2370	0.1576	0.1259	0.1082	0.0968	0.0887	0.0827	0.0780	0.0745	0.0713	0.0595	0.0462	0.0347	0.0250
60	0.1737	0.1131	0.0895	0.0765	0.0682	0.0623	0.0583	0.0552	0.0520	0.0497	0.0411	0.0316	0.0234	0.0167
120	0.0998	0.0632	0.0495	0.0419	0.0371	0.0337	0.0312	0.0292	0.0279	0.0266	0.0218	0.0165	0.0120	0.0083
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$P(X > p_{0,05}) = 0{,}05 \quad X_i \sim N(m_i, \sigma_i)$.

kus p_α on valitud tabelist 3.10 vastavalt $n-1$ ja k väärtustele (n - väljavõtete mahud, k - võrreldavate juhuslike suuruste arv).

32 Tabel pärineb teosest [16], lk. 438.

Näide 3.24.

Oletame, et mingist materjalist on järjest tehtud 5 väljavõtet, kusjuures igaüks koosnes 10-st vaatlusest. Dispersioonihinnanguteks s_i^2 on saadud:

$$3{,}2;\quad 2{,}5;\quad 5{,}9;\quad 2{,}3;\quad 2{,}0.$$

Kas võib oletada, et saadud materjal on homogeenne selles mõttes, et dispersioon on konstantne?

Lahendus.

Arvutame $X = \dfrac{5{,}9}{15{,}9} = 0{,}3710.$

Tabelist leiame:

$$ps,\ 9;0{,}05 = 0{,}4241 > 0{,}3710.$$

Kuna antud juhul ei ületa arvutatud väärtus kriitilist nivood, tuleb vastu võtta hüpotees, et materjal on homogeenne.

14. Mitme normaaljaotusega juhusliku suuruse dispersioonide võrdlemine (erinevate mahtudega väljavõtted).

Olgu antud k normaaljaotusega juhuslikku suurust:

$$X_1 \sim N(m_1, \sigma_1),\quad X_2 \sim N(m_2, \sigma_2),\ \ldots,\ X_k \sim N(m_k, \sigma_k)$$

kusjuures igaühe väärtustest on antud väljavõte

$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1};\ x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}; \ldots;\ x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn_k}.$

Kontrollida hüpoteesi

H: Kôik dispersioonid $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2$ ei ole vôrdsed.

Arvutame dispersioonihinnangud

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1-1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{\bar{x}}_1)^2, \ldots, s_k^2 = \frac{1}{n_k-1} \sum_{i=1}^{n_k} (x_{ki} - \bar{\bar{x}}_k)^2$$

ning nn. M-testi suuruse

$$X = 2{,}3026\left[(n-k)\log \frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\, s_i^2}{n-k} - \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\log s_i^2\right],$$

kus

$$n = \sum_{i=1}^{k_i} n_i.$$

Tabelis 3.11 on esitatud juhusliku suuruse X 0,05-täiendkvantiilide $p_{0,05}$ jaoks kaks tôket $p_{0,05}(a)$ ja $p_{0,05}(b)$, mille vahel vastav $p_{0,05}$ paikneb.

Hüpoteesi H vôtame vastu, kui

$$X > p_{0,05}(a),$$

kus $p_{0,05}(a)$ on valitud vastavalt leitud k ja c väärtustele

$$c = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i-1} - \frac{1}{n-k}.$$

Kui

$$X < p_{0,05}(b),$$

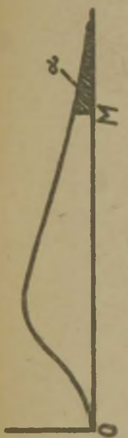
ei ole materjal hüpoteesi H vastuvôtmiseks piisav. Juhul

$$p_{0,05}(b) < X < p_{0,05}(a)$$

jääb vastus kahjuks lahtiseks.

Tabel 3.11 A.

M-testi kriitilised väärtused[33] olulisuse nivoo $\alpha = 0,05$ korral (vt. joon. 3.17).



Joonis 3.17.

k \ c		0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	12.0	14.0
3	(a)	5.99	6.47	6.89	7.20	7.38	7.39	7.22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	(b)	5.99	6.22	6.43	6.64	6.84	7.03	7.22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	(a)	7.81	8.24	8.63	8.96	9.21	9.38	9.43	9.37	9.18	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	(b)	7.81	8.00	8.17	8.35	8.52	8.69	8.85	9.02	9.18	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	(a)	9.49	9.88	10.24	10.57	10.86	11.08	11.24	11.32	11.31	11.21	11.02	—	—	—	—	—	—	—
	(b)	9.49	9.65	9.80	9.96	10.11	10.27	10.42	10.57	10.72	10.87	11.02	—	—	—	—	—	—	—
6	(a)	11.07	11.43	11.78	12.11	12.40	12.65	12.86	13.01	13.11	13.14	13.10	12.78	—	—	—	—	—	—
	(b)	11.07	11.22	11.36	11.51	11.65	11.79	11.94	12.08	12.22	12.36	12.50	12.78	—	—	—	—	—	—
7	(a)	12.59	12.94	13.27	13.59	13.88	14.15	14.38	14.58	14.73	14.83	14.88	14.81	14.49	—	—	—	—	—
	(b)	12.59	12.73	12.87	13.00	13.14	13.27	13.41	13.55	13.68	13.82	13.95	14.22	14.49	—	—	—	—	—
8	(a)	14.07	14.40	14.72	15.03	15.32	15.60	15.84	16.06	16.25	16.40	16.51	16.60	16.49	16.16	—	—	—	—
	(b)	14.07	14.20	14.33	14.46	14.59	14.72	14.85	14.98	15.11	15.25	15.38	15.64	15.90	16.16	—	—	—	—
9	(a)	15.51	15.83	16.14	16.44	16.73	17.01	17.26	17.49	17.70	17.88	18.03	18.22	18.26	18.12	17.79	—	—	—
	(b)	15.51	15.63	15.76	15.89	16.02	16.14	16.27	16.49	16.52	16.65	16.78	17.03	17.29	17.54	17.79	—	—	—

[33] Tabel pärineb teosest [17], lk. 435-436.

Tabel 3.11 A (järg).

k \ c		0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	12.0	14.0
10	(*a*)	16.92	17.23	17.54	17.83	18.12	18.39	18.65	18.89	19.11	19.31	19.48	19.75	19.89	19.89	19.73	19.40	—	—
	(*b*)	16.92	17.04	17.17	17.29	17.41	17.54	17.66	17.79	17.91	18.04	18.16	18.41	18.66	18.91	19.16	19.40	—	—
11	(*a*)	18.31	18.61	18.91	19.20	19.48	19.76	20.02	20.26	20.49	20.70	20.89	21.21	21.42	21.52	21.49	21.32	—	—
	(*b*)	18.31	18.43	18.55	18.67	18.79	18.91	19.04	19.16	19.28	19.40	19.52	19.77	20.01	20.26	20.50	20.75	—	—
12	(*a*)	19.68	19.97	20.26	20.55	20.83	21.10	21.36	21.61	21.84	22.06	22.27	22.62	22.88	23.06	23.12	23.07	22.56	—
	(*b*)	19.68	19.79	19.91	20.03	20.15	20.27	20.39	20.51	20.63	20.75	20.87	21.12	21.36	21.60	21.84	22.08	22.56	—
13	(*a*)	21.03	21.32	21.60	21.89	22.16	22.43	22.69	22.94	23.18	23.40	23.62	23.99	24.30	24.53	24.66	24.70	24.44	—
	(*b*)	21.03	21.14	21.26	21.38	21.50	21.62	21.74	21.85	21.97	22.09	22.21	22.45	22.69	22.92	23.16	23.40	23.88	···
14	(*a*)	22.36	22.65	22.93	23.21	23.48	23.75	24.01	24.26	24.50	24.73	24.95	25.34	25.68	25.95	26.14	26.25	26.17	25.66
	(*b*)	22.36	22.48	22.60	22.71	22.83	22.95	23.06	23.18	23.30	23.42	23.53	23.77	24.00	24.24	24.48	24.71	25.19	25.66
15	(*a*)	23.68	23.97	24.24	24.52	24.79	25.05	25.31	25.56	25.80	26.04	26.26	26.67	27.03	27.33	27.56	27.73	27.80	27.50
	(*b*)	23.68	23.80	23.92	24.03	24.15	24.26	24.38	24.50	24.61	24.73	24.85	25.08	25.31	25.55	25.78	26.01	26.48	26.95

Tabel 3.11 B.

M-testi kriitilised väärtused[34] olulisuse nivoo $\alpha = 0{,}01$ korral.

k \ c		0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	12.0	14.0
3	(a)	9.21	9.92	10.47	10.78	10.81	10.50	9.83	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	(b)	9.21	9.29	9.38	9.48	9.59	9.71	9.83	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	(a)	11.34	11.95	12.46	12.86	13.11	13.18	13.03	12.65	12.03	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	(b)	11.34	11.40	11.46	11.54	11.63	11.72	11.82	11.92	12.03	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	(a)	13.28	13.81	14.30	14.71	15.03	15.25	15.34	15.28	15.06	14.66	14.07	—	—	—	—	—	—	—
	(b)	13.28	13.33	13.39	13.45	13.53	13.61	13.69	13.78	13.87	13.97	14.07	—	—	—	—	—	—	—
6	(a)	15.09	15.58	16.03	16.44	16.79	17.07	17.27	17.37	17.37	17.24	16.98	16.03	—	—	—	—	—	—
	(b)	15.09	15.14	15.20	15.26	15.33	15.41	15.48	15.57	15.65	15.74	15.84	16.03	—	—	—	—	—	—
7	(a)	16.81	17.27	17.70	18.10	18.46	18.77	19.02	19.21	19.32	19.35	19.28	18.84	17.92	—	—	—	—	—
	(b)	16.81	16.87	16.93	16.99	17.06	17.14	17.21	17.29	17.37	17.46	17.55	17.73	17.92	—	—	—	—	—
8	(a)	18.48	18.91	19.32	19.71	20.07	20.39	20.67	20.90	21.08	21.20	21.25	21.13	20.64	19.76	—	—	—	—
	(b)	18.48	18.54	18.60	18.67	18.74	18.81	18.88	18.96	19.04	19.13	19.21	19.39	19.57	19.76	—	—	—	—
9	(a)	20.09	20.50	20.90	21.28	21.64	21.97	22.26	22.52	22.74	22.91	23.03	23.10	22.91	22.41	21.56	—	—	—
	(b)	20.09	20.15	20.22	20.29	20.36	20.44	20.51	20.59	20.67	20.75	20.84	21.01	21.19	21.37	21.56	—	—	—

[34] Tabel pärineb teosest [17], lk. 437-438.

Tabel 3.11 B (järg).

k \ c		0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	12.0	14.0
10	(*a*)	21.67	22.06	22.45	22.82	23.17	23.50	23.80	24.08	24.32	24.52	24.69	24.90	24.90	24.66	24.15	23.33	—	—
	(*b*)	21.67	21.73	21.80	21.88	21.95	22.02	22.10	22.18	22.26	22.34	22.42	22.60	22.77	22.95	23.14	23.33	—	—
11	(*a*)	23.21	23.59	23.97	24.33	24.67	25.00	25.31	25.59	25.85	26.08	26.28	26.57	26.70	26.65	26.38	25.86	—	—
	(*b*)	23.21	23.28	23.35	23.43	23.50	23.58	23.66	23.74	23.82	23.90	23.98	24.15	24.33	24.51	24.69	24.88	—	—
12	(*a*)	24.72	25.10	25.46	25.81	26.15	26.48	26.79	27.08	27.35	27.59	27.81	28.16	28.39	28.46	28.37	28.07	26.79	—
	(*b*)	24.72	24.80	24.87	24.95	25.03	25.11	25.18	25.27	25.35	25.43	25.51	25.68	25.86	26.04	26.22	26.41	26.79	—
13	(*a*)	26.22	26.58	26.93	27.28	27.62	27.94	28.25	28.54	28.81	29.07	29.30	29.70	29.99	30.16	30.19	30.06	29.22	—
	(*b*)	26.22	26.29	26.37	26.45	26.53	26.61	26.69	26.77	26.85	26.94	27.02	27.19	27.37	27.55	27.73	27.91	28.29	—
14	(*a*)	27.69	28.04	28.39	28.73	29.06	29.38	29.69	29.98	30.26	30.52	30.77	31.19	31.53	31.77	31.89	31.88	31.39	30.16
	(*b*)	27.69	27.77	27.85	27.93	28.01	28.09	28.17	28.25	28.34	28.42	28.51	28.68	28.86	29.03	29.22	29.40	29.77	30.16
15	(*a*)	29.14	29.49	29.83	30.16	30.49	30.80	31.11	31.40	31.68	31.95	32.20	32.66	33.03	33.32	33.51	33.59	33.37	32.52
	(*b*)	29.14	29.22	29.30	29.38	29.47	29.55	29.63	29.72	29.80	29.89	29.97	30.15	30.32	30.50	30.69	30.87	31.24	31.62

Näide 3.25.

Olgu antud 4 väljavõtet vastavalt mahtudega $n_1=190$, $n_2=312$, $n_3=411$, $n_4=452$, mille jaoks on arvutatud dispersioonihinnangud s_1^2, s_2^2, s_3^2 ja s_4^2 (vt. tabel). Kontrollida, kas vaadeldavatel juhuslikel suurustel on sama dispersioon.

Lahendus.

Arvutame M-statistiku. Selleks koondame arvutustulemused järgnevasse tabelisse:

Rühm i	$n_i - 1$	s_i^2	$\log s_i^2$	$(n_i-1)s_i^2$	$(n_i-1)\log s_i^2$
1	189	16,24	1,211	3070	228,9
2	311	33,74	1,528	10490	475,2
3	410	29,53	1,570	12110	602,7
4	451	31,02	1,492	13990	672,9
Σ	1361			39660	$1979{,}7 \approx 1980$

$$\begin{array}{r} \log 39660 = 4{,}598 \\ -\ \log 1361 = 3{,}134 \\ \hline 1{,}464 \end{array}$$

$$1{,}464 \cdot 1361 = 1993$$
$$1993 - 1980 = 13$$
$$2{,}303 \cdot 13 = 29{,}9.$$

Et $k = 4$, võrdleme saadud M väärtust tabelis antud $p_{4,\alpha}$ väärtustega; kuna 29,9 on kõigist neist oluliselt suurem, ei ei ole tarvidust c väärtust arvutada, vaid võime kinnitada: dispersioonid on oluliselt erinevad ($\alpha = 0{,}01$).

§4. Mõningaid abitabeleid.

Järgnevalt lisame veel mõningad arvutamist hõlbustavad ning statistilises töös kasulikud tabelid, milledest enamus ei ole küll vahetult seotud käesoleva peatüki materjaliga, kuid nende eraldamine iseseisvasse peatükki ei ole vähese arvu tõttu õigustatud.

Tabel 3.12.

Ühtlase jaotusega juhuslikud arvud.[35]

10	09	73	25	33	76	52	01	35	86	34	67	35	48	76	80	95	90	91	17	39	29	27	49	45
37	54	20	48	05	64	89	47	42	96	24	80	52	40	37	20	63	61	04	02	00	82	29	16	65
08	42	26	89	53	19	64	50	93	03	23	20	90	25	60	15	95	33	47	64	35	08	03	36	06
99	01	90	25	29	09	37	67	07	15	38	31	13	11	65	88	67	67	43	97	04	43	62	76	59
12	80	79	99	70	80	15	73	61	47	64	03	23	66	53	98	95	11	68	77	12	17	17	68	33
66	06	57	47	17	34	07	27	65	50	36	69	73	61	70	65	81	33	98	85	11	19	92	91	70
31	06	01	08	05	45	57	18	24	06	35	30	34	26	14	86	79	90	74	39	23	40	30	97	32
85	26	97	76	02	02	05	16	56	92	68	66	57	48	18	73	05	38	52	47	18	62	38	85	79
63	57	33	21	35	05	32	54	70	48	90	55	35	75	48	28	46	82	87	09	83	49	12	56	24
73	79	64	57	53	03	52	96	47	78	35	80	83	42	82	60	93	52	03	44	35	27	38	84	35
98	52	01	77	67	14	90	56	86	07	22	10	94	05	58	60	97	09	34	33	50	50	07	39	98
11	80	50	54	31	39	80	82	77	32	50	72	56	82	48	29	40	52	42	01	52	77	56	78	51
83	45	29	96	34	06	28	89	80	83	13	74	67	00	78	18	47	54	06	10	68	71	17	78	17
88	68	54	02	00	86	50	75	84	01	36	76	66	79	51	90	36	47	64	93	29	60	91	10	62
99	59	46	73	48	87	51	76	49	69	91	82	60	89	28	93	78	56	13	68	23	47	83	41	13
65	48	11	76	74	17	46	85	09	50	58	04	77	69	74	73	03	95	71	86	40	21	81	65	44
80	12	43	56	35	17	72	70	80	15	45	31	82	23	74	21	11	57	82	53	14	38	55	37	63
74	35	09	98	17	77	40	27	72	14	43	23	60	02	10	45	52	16	42	37	96	28	60	26	55
69	91	62	68	03	66	25	22	91	48	36	93	68	72	03	76	62	11	39	90	94	40	05	64	18
09	89	32	05	05	14	22	56	85	14	46	42	75	67	88	96	29	77	88	22	54	38	21	45	98
91	49	91	45	23	68	47	92	76	86	46	16	28	35	54	94	75	08	99	23	37	08	92	00	48
80	33	69	45	98	26	94	03	68	58	70	29	73	41	35	53	14	03	33	40	42	05	08	23	41
44	10	48	19	49	85	15	74	79	54	32	97	92	65	75	57	60	04	08	81	22	22	20	64	13
12	55	07	37	42	11	10	00	20	40	12	86	07	46	97	96	64	48	94	39	28	70	72	58	15
63	60	64	93	29	16	50	53	44	84	40	21	95	25	63	43	65	17	70	82	07	20	73	17	90
61	19	69	04	46	26	45	74	77	74	51	92	43	37	29	65	39	45	95	93	42	58	26	05	27
15	47	44	52	66	95	27	07	99	53	59	36	78	38	48	82	39	61	01	18	33	21	15	94	66
94	55	72	85	73	67	89	75	43	87	54	62	24	44	31	91	19	04	25	92	92	92	74	5	73
42	48	11	62	13	97	34	40	87	21	16	86	84	87	67	03	07	11	20	59	25	70	14	66	70
23	52	37	83	17	73	20	88	98	37	68	93	59	14	16	26	25	22	96	63	05	52	28	25	62
04	49	35	24	94	75	24	63	38	24	45	86	25	10	25	61	96	27	93	35	65	33	71	24	72
00	54	99	76	54	64	05	18	81	59	96	11	96	38	96	54	69	28	23	91	23	28	72	95	29
35	96	31	53	07	26	89	80	93	54	33	35	13	54	62	77	97	45	00	24	90	10	33	93	33
59	80	80	83	91	45	42	72	68	42	83	60	94	97	00	13	02	12	48	92	78	56	52	01	06
46	05	88	52	36	01	39	09	22	86	77	28	14	40	77	93	91	08	36	47	70	61	74	29	41
32	17	90	05	97	87	37	92	52	41	05	56	70	70	07	86	74	31	71	57	85	39	41	18	38
69	23	46	14	06	20	11	74	52	04	15	95	66	00	00	18	74	39	24	23	97	11	89	63	38
19	56	54	14	30	01	75	87	53	79	40	41	92	15	85	66	67	43	68	06	84	96	28	52	07
45	15	51	49	38	19	47	60	72	46	43	66	79	45	43	59	04	79	00	33	20	82	66	95	41
94	86	43	19	94	36	16	81	08	51	34	88	88	15	53	01	54	03	54	56	05	01	45	11	76
98	08	62	48	26	45	24	02	84	04	44	99	90	88	96	39	09	47	34	07	35	44	13	18	80
33	18	51	62	32	41	94	15	09	49	89	43	54	85	81	88	69	54	19	94	37	54	87	30	43
80	95	10	04	06	96	38	27	07	74	20	15	12	33	87	25	01	62	52	98	94	62	46	11	71
79	75	24	91	40	71	96	12	82	96	69	86	10	25	91	74	85	22	05	39	00	38	75	95	79
18	63	33	25	37	98	14	50	65	71	31	01	02	46	74	05	45	56	14	27	77	93	89	19	36
74	02	94	39	02	77	55	73	22	70	97	79	01	71	19	52	52	75	80	21	80	81	45	17	48
54	17	84	56	11	80	99	33	71	43	05	33	51	29	69	56	12	71	92	55	36	04	09	03	24
11	66	44	98	83	52	07	98	48	27	59	38	17	15	39	09	97	33	34	40	88	46	12	33	56
48	32	47	79	28	31	24	96	47	10	02	29	53	68	70	32	30	75	75	46	15	02	00	99	94
69	07	49	41	38	87	63	79	19	76	35	58	40	44	01	10	51	82	16	15	01	84	87	69	38

[35] Tabel pärineb teosest [16], lk. 366-367.

Tabel 3.12 (järg).

09 18 82 00 97	32 82 53 95 27	04 22 08 63 04	83 38 98 73 74	64 27 85 80 44
90 04 58 54 97	51 98 15 06 54	94 93 88 19 97	91 87 07 61 50	68 47 66 46 59
73 18 95 02 07	47 67 72 62 69	62 29 06 44 64	27 12 46 70 18	41 36 18 27 60
75 76 87 64 90	20 97 18 17 49	90 42 91 22 72	95 37 50 58 71	93 82 34 31 78
54 01 64 40 56	66 28 13 10 03	00 68 22 73 98	20 71 45 32 95	07 70 61 78 13
08 35 86 99 10	78 54 24 27 85	13 66 15 88 73	04 61 89 75 53	31 22 30 84 20
28 30 60 32 64	81 33 31 05 91	40 51 00 78 93	32 60 46 04 75	94 11 90 18 40
53 84 08 62 33	81 59 41 36 28	51 21 59 02 90	28 46 66 87 95	77 76 22 07 91
91 75 75 37 41	61 61 36 22 69	50 26 39 02 12	55 78 17 65 14	83 48 34 70 55
89 41 59 26 94	00 39 75 83 91	12 60 71 76 46	48 94 97 23 06	94 54 13 74 08
77 51 30 38 20	86 83 42 99 01	68 41 48 27 74	51 90 81 39 80	72 89 35 55 07
19 50 23 71 74	69 97 92 02 88	55 21 02 97 73	74 28 77 52 51	65 34 46 74 15
21 81 85 93 13	93 27 88 17 57	05 68 67 31 56	07 08 28 50 46	31 85 33 84 52
51 47 46 64 99	68 10 72 36 21	94 04 99 13 45	42 83 60 91 91	08 00 74 54 49
99 55 96 83 31	62 53 52 41 70	69 77 71 28 30	74 81 97 81 42	43 86 07 28 34
33 71 34 80 07	93 58 47 28 69	51 92 66 47 21	58 30 32 98 22	93 17 49 39 72
85 27 48 68 93	11 30 32 92 70	28 83 43 41 37	73 51 59 04 00	71 14 84 36 43
84 13 38 96 40	44 03 55 21 66	73 85 27 00 91	61 22 26 05 61	62 32 71 84 23
56 73 21 62 34	17 39 59 61 31	10 12 39 16 22	85 49 65 75 60	81 60 41 88 80
65 13 85 68 06	87 64 88 52 61	34 31 36 58 61	45 87 52 10 69	85 64 44 72 77
38 00 10 21 76	81 71 91 17 11	71 60 29 29 37	74 21 96 40 49	65 58 44 96 98
37 40 29 63 97	01 30 47 75 86	56 27 11 00 86	47 32 46 26 05	40 03 03 74 38
97 12 54 03 48	87 08 33 14 17	21 81 53 92 50	75 23 76 20 47	15 50 12 95 78
21 82 64 11 34	47 14 33 40 72	64 63 88 59 02	49 13 90 64 41	03 85 65 45 52
73 13 54 27 42	95 71 90 90 35	85 79 47 42 96	08 78 98 81 56	64 69 11 92 02
07 63 87 79 29	03 06 11 80 72	96 20 74 41 56	23 82 19 95 38	04 71 36 69 94
60 52 88 34 41	07 95 41 98 14	59 17 52 06 95	05 53 35 21 39	61 21 20 64 55
83 59 63 56 55	06 95 89 29 83	05 12 80 97 19	77 43 35 37 83	92 30 15 04 98
10 85 06 27 46	99 59 91 05 07	13 49 90 63 19	53 07 57 18 39	06 41 01 93 62
39 82 09 89 52	43 62 26 31 47	64 42 18 08 14	43 80 00 93 51	31 02 47 31 67
59 58 00 64 78	75 56 97 88 00	88 83 55 44 86	23 76 80 61 56	04 11 10 84 08
38 50 80 73 41	23 79 34 87 63	90 82 29 70 22	17 71 90 42 07	95 95 44 99 53
30 69 27 06 68	94 68 81 61 27	56 19 68 00 91	82 06 76 34 00	05 46 26 92 00
65 44 39 56 59	18 28 82 74 37	49 63 22 40 41	08 33 76 56 76	96 29 99 08 36
27 26 75 02 64	13 19 27 22 94	07 47 74 46 06	17 98 54 89 11	97 34 13 03 58
91 30 70 69 91	19 07 22 42 10	36 69 95 37 28	28 82 53 57 93	28 97 66 62 52
68 43 49 46 88	84 47 31 36 22	62 12 69 84 08	12 84 38 25 90	09 81 59 31 46
48 90 81 58 77	54 74 52 45 91	35 70 00 47 54	83 82 45 26 92	54 13 05 51 60
06 91 34 51 97	42 67 27 86 01	11 88 30 95 28	63 01 19 89 01	14 97 44 03 44
10 45 51 60 19	14 21 03 37 12	91 34 23 78 21	88 32 58 08 51	43 66 77 08 83
12 88 39 73 43	65 02 76 11 84	04 28 50 13 92	17 97 41 50 77	90 71 22 67 69
21 77 83 09 76	38 80 73 69 61	31 64 94 20 96	63 28 10 20 23	08 81 64 74 49
19 52 35 95 15	65 12 25 96 59	86 28 36 82 58	69 57 21 37 98	16 43 59 15 29
67 24 55 26 70	35 58 31 65 63	79 24 68 66 86	76 46 33 42 22	26 65 59 08 02
60 58 44 73 77	07 50 03 79 92	45 13 42 65 29	26 76 08 36 37	41 32 64 43 44
53 85 34 13 77	36 06 69 48 50	58 83 87 38 59	49 36 47 33 31	96 24 04 36 42
24 63 73 87 36	74 38 48 93 42	52 62 30 79 92	12 36 91 86 01	03 74 28 38 73
83 08 01 24 51	38 99 22 28 15	07 75 95 17 77	97 37 72 75 85	51 97 23 78 67
16 44 42 43 34	36 15 19 90 73	27 49 37 09 39	85 13 03 25 52	54 84 65 47 59
60 79 01 81 57	57 17 86 57 62	11 16 17 85 76	45 81 95 29 79	65 13 00 48 60

Tabel 3.13.

Normaaljaotusega N(0,1) juhuslikud arvud.[36]

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
0.464	0.137	2.455	−0.323	−0.068	0.296	−0.288	1.298	0.241	−0.957
0.060	−2.826	−0.531	−0.194	0.543	−1.558	0.187	−1.190	0.022	0.525
1.486	−0.354	−0.634	0.697	0.926	1.375	0.785	−0.963	−0.853	−1.865
1.022	−0.472	1.279	3.521	0.571	−1.851	0.194	1.192	−0.501	−0.273
1.394	−0.555	0.046	0.321	2.945	1.974	−0.258	0.412	0.439	−0.035
0.906	−0.513	−0.525	0.595	0.881	−0.934	1.579	0.161	−1.885	0.371
1.179	−1.055	0.007	0.769	0.971	0.712	1.090	−0.631	−0.255	−0.702
−1.501	−0.488	−0.162	−0.136	1.033	0.203	0.448	0.748	−0.423	−0.432
−0.690	0.756	−1.618	−0.345	−0.511	−2.051	−0.457	−0.218	0.857	−0.465
1.372	0.225	0.378	0.761	0.181	−0.736	0.960	−1.530	−0.260	0.120
−0.482	1.678	−0.057	−1.229	−0.486	0.856	−0.491	−1.983	−2.830	−0.238
−1.376	−0.150	1.356	−0.561	−0.256	−0.212	0.219	0.779	0.953	−0.869
−1.010	0.598	−0.918	1.598	0.065	0.415	−0.169	0.313	−0.973	−1.016
−0.005	−0.899	0.012	−0.725	1.147	−0.121	1.096	0.481	−1.691	0.417
1.393	−1.163	−0.911	1.231	−0.199	−0.246	1.239	−2.574	−0.558	0.056
−1.787	−0.261	1.237	1.046	−0.508	−1.630	−0.146	−0.392	−0.627	0.561
−0.105	−0.357	−1.384	0.360	−0.992	−0.116	−1.698	−2.832	−1.108	−2.357
−1.339	1.827	−0.959	0.424	0.969	−1.141	−1.041	0.362	−1.726	1.956
1.041	0.535	0.731	1.377	0.983	−1.330	1.620	−1.040	0.524	−0.281
0.279	−2.056	0.717	−0.873	−1.096	−1.396	1.047	0.089	−0.573	0.932
−1.805	−2.008	−1.633	0.542	0.250	−0.166	0.032	0.079	0.471	−1.029
−1.186	1.180	1.114	0.882	1.265	−0.202	0.151	−0.376	−0.310	0.479
0.658	−1.141	1.151	−1.210	−0.927	0.425	0.290	−0.902	0.610	2.709
−0.439	0.358	−1.939	0.891	−0.227	0.602	0.873	−0.437	−0.220	−0.057
−1.399	−0.230	0.385	−0.649	−0.577	0.237	−0.289	0.513	0.738	−0.300
0.199	0.208	−1.083	−0.219	−0.291	1.221	1.119	0.004	−2.015	−0.594
0.159	0.272	−0.313	0.084	−2.828	−0.439	−0.792	−1.275	−0.623	−1.047
2.273	0.606	0.606	−0.747	0.247	1.291	0.063	−1.793	−0.699	−1.347
0.041	−0.307	0.121	0.790	−0.584	0.541	0.484	−0.986	0.481	0.996
−1.132	−2.098	0.921	0.145	0.446	−1.661	1.045	−1.363	−0.586	−1.023
0.768	0.079	−1.473	0.034	−2.127	0.665	0.084	−0.880	−0.579	0.551
0.375	−1.658	−0.851	0.234	−0.656	0.340	−0.086	−0.158	−0.120	0.418
−0.513	−0.344	0.210	−0.736	1.041	0.008	0.427	−0.831	0.191	0.074
0.292	−0.521	1.266	−1.206	−0.899	0.110	−0.528	−0.813	0.071	0.524
1.026	2.990	−0.574	−0.491	−1.114	1.297	−1.433	−1.345	−3.001	0.479
−1.334	1.278	−0.568	−0.109	−0.515	−0.566	2.923	0.500	0.359	0.326
−0.287	−0.144	−0.254	0.574	−0.451	−1.181	−1.190	−0.318	−0.094	1.114
0.161	−0.886	−0.921	−0.509	1.410	−0.518	0.192	−0.432	1.501	1.068
−1.346	0.193	−1.202	0.394	−1.045	0.843	−0.942	1.045	0.031	0.772
1.250	−0.199	−0.288	1.810	1.378	0.584	−1.216	0.733	0.402	0.226
0.630	−0.537	0.782	0.060	0.499	−0.431	1.705	1.164	0.884	−0.298
0.375	−1.941	0.247	−0.491	0.665	−0.135	−0.145	−0.498	0.457	1.064
−1.420	0.489	−1.711	−1.186	0.754	−0.732	−0.066	1.006	−0.798	0.162
−0.151	−0.243	−0.430	−0.762	0.298	1.049	1.810	2.885	−0.768	−0.129
−0.309	0.531	0.416	−1.541	1.456	2.040	−0.124	0.196	0.023	−1.204
0.424	−0.444	0.593	0.993	−0.106	0.116	0.484	−1.272	1.066	1.097
0.593	0.658	−1.127	−1.407	−1.579	−1.616	1.458	1.262	0.736	−0.916
0.862	−0.885	−0.142	−0.504	0.532	1.381	0.022	−0.281	−0.342	1.222
0.235	−0.628	−0.023	−0.463	−0.899	−0.394	−0.538	1.707	−0.188	−1.153
−0.853	0.402	0.777	0.833	0.410	−0.349	−1.094	0.580	1.395	1.298

[36] Tabel pärineb teosest [16], lk.371-372.

Tabel 3.13 (järg).

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
−1.329	−0.238	−0.838	−0.988	−0.445	0.964	−0.266	−0.322	−1.726	2.252
1.284	−0.229	1.058	0.090	0.050	0.523	0.016	0.277	1.639	0.554
0.619	0.628	0.005	0.973	−0.058	0.150	−0.635	−0.917	0.313	−1.203
0.699	−0.269	0.722	−0.994	−0.807	−1.203	1.163	1.244	1.306	−1.210
0.101	0.202	−0.150	0.731	0.420	0.116	−0.496	−0.037	−2.466	0.794
−1.381	0.301	0.522	0.233	0.791	−1.017	−0.182	0.926	−1.096	1.001
−0.574	1.366	−1.843	0.746	0.890	0.824	−1.249	−0.806	−0.240	0.217
0.096	0.210	1.091	0.990	0.900	−0.837	−1.097	−1.238	0.030	−0.311
1.389	−0.236	0.094	3.282	0.295	−0.416	0.313	0.720	0.007	0.354
1.249	0.706	1.453	0.366	−2.654	−1.400	0.212	0.307	−1.145	0.639
0.756	−0.397	−1.772	−0.257	1.120	1.188	−0.527	0.709	0.479	0.317
−0.860	0.412	−0.327	0.178	0.524	−0.672	−0.831	0.758	0.131	0.771
−0.778	−0.979	0.236	−1.033	1.497	−0.661	0.906	1.169	−1.582	1.303
0.037	0.062	0.426	1.220	0.471	0.784	−0.719	0.465	1.559	−1.326
2.619	−0.440	0.477	1.063	0.320	1.406	−0.701	−0.128	0.518	−0.676
−0.420	−0.287	−0.050	−0.481	1.521	−1.367	0.609	0.292	0.048	0.592
1.048	0.220	1.121	−1.789	−1.211	−0.871	−0.740	0.513	−0.558	−0.395
1.000	−0.638	1.261	0.510	−0.150	0.034	0.054	−0.055	0.639	−0.825
0.170	−1.131	−0.985	0.102	−0.939	−1.457	1.766	1.087	−1.275	2.362
0.389	−0.435	0.171	0.891	1.158	1.041	1.048	−0.324	−0.404	1.060
−0.305	0.838	−2.019	−0.540	0.905	1.195	−1.190	0.106	0.571	0.298
−0.321	−0.039	1.799	−1.032	−2.225	−0.148	0.758	−0.862	0.158	−0.726
1.900	1.572	−0.244	−1.721	1.130	0.495	−0.484	0.014	−0.778	−1.483
−0.778	−0.288	−0.224	−1.324	−0.072	0.890	−0.410	0.752	0.376	−0.224
0.617	−1.718	−0.183	−0.100	1.719	0.696	−1.339	−0.614	1.071	−0.386
−1.430	−0.953	0.770	−0.007	−1.872	1.075	−0.913	−1.168	1.775	0.238
0.267	−0.048	0.972	0.734	−1.408	−1.955	−0.848	2.002	0.232	−1.273
0.978	−0.520	−0.368	1.690	−1.479	0.985	1.475	−0.098	−1.633	2.399
−1.235	−1.168	0.325	1.421	2.652	−0.486	−1.253	0.270	−1.103	0.118
−0.258	0.638	2.309	0.741	−0.161	−0.679	0.336	1.973	0.370	−2.277
0.243	0.629	−1.516	−0.157	0.693	1.710	0.800	−0.265	1.218	0.655
−0.292	−1.455	−1.451	1.492	−0.713	0.821	−0.031	−0.780	1.330	0.977
−0.505	0.389	0.544	−0.042	1.615	−1.440	−0.989	−0.580	0.156	0.052
0.397	−0.287	1.712	0.289	−0.904	0.259	−0.600	−1.635	−0.009	−0.799
−0.605	−0.470	0.007	0.721	−1.117	0.635	0.592	−1.362	−1.441	0.672
1.360	0.182	−1.476	−0.599	−0.875	0.292	−0.700	0.058	−0.340	−0.639
0.480	−0.699	1.615	−0.225	1.014	−1.370	−1.097	0.294	0.309	−1.389
−0.027	−0.487	−1.000	−0.015	0.119	−1.990	−0.687	−1.964	−0.366	1.759
−1.482	−0.815	−0.121	1.884	−0.185	0.601	0.793	0.430	−1.181	0.426
−1.256	−0.567	−0.994	1.011	−1.071	−0.623	−0.420	−0.309	1.362	0.863
−1.132	2.039	1.934	−0.222	0.386	1.100	0.284	1.597	−1.718	−0.560
−0.780	−0.239	−0.497	−0.434	−0.284	−0.241	−0.333	1.348	−0.478	−0.169
−0.859	−0.215	0.241	1.471	0.389	−0.952	0.245	0.781	1.093	−0.240
0.447	1.479	0.067	0.426	−0.370	−0.675	−0.972	0.225	0.815	0.389
0.269	0.735	−0.066	−0.271	−1.439	1.036	−0.306	−1.439	−0.122	−0.336
0.097	−1.883	−0.218	0.202	−0.357	0.019	1.631	1.400	0.223	−0.793
−0.686	1.596	−0.286	0.722	0.655	−0.275	1.245	−1.504	0.066	−1.280
0.957	0.057	−1.153	0.701	−0.280	1.747	−0.745	1.338	−1.421	0.386
−0.976	−1.789	−0.696	−1.799	−0.354	0.071	2.355	0.135	−0.598	1.883
0.274	0.226	−0.909	−0.572	0.181	1.115	0.406	0.453	−1.218	−0.115

Tabel 3.14.

Ruudud ja ruutjuured.[37]

N	N^2	N	N^2	N	N^2	N	N^2
1,00	1,0000	1,50	2.2500	2,00	4,0000	2,50	6,2500
1,01	0201	1,51	2801	2,01	0401	2,51	3001
1,02	0404	1,52	3104	2,02	0804	2,52	3504
1,03	0609	1,53	3409	2,03	1209	2,53	4009
1,04	0816	1,54	3716	2,04	1616	2,54	4516
1,05	1025	1,55	4025	2,05	2025	2,55	5025
1,06	1236	1,56	4336	2,06	2436	2,56	5536
1,07	1449	1,57	4649	2,07	2849	2,57	6049
1,08	1664	1,58	4964	2,08	3264	2,58	6564
1,09	1881	1,59	5281	2,09	3681	2,59	7081
1,10	2100	1,60	5600	2,10	4100	2,60	7600
1,11	2321	1,61	5921	2,11	4521	2,61	8121
1,12	2544	1,62	6244	2,12	4944	2,62	8644
1,13	2769	1,63	6569	2,13	5369	2,63	9169
1,14	2996	1,64	6896	2,14	5796	2,64	9696
1,15	3225	1,65	7225	2,15	6225	2,65	7,0225
1,16	3456	1,66	7556	2,16	6656	2,66	0756
1,17	3689	1,67	7889	2,17	7089	2,67	1289
1,18	3924	1,68	8224	2,18	7524	2,68	1824
1,19	4161	1,69	8561	2,19	7961	2,69	2361
1,20	4400	1,70	8900	2,20	8400	2,70	2900
1,21	4641	1,71	9241	2,21	8841	2,71	3441
1,22	4884	1,72	9584	2,22	9284	2,72	3984
1,23	5129	1,73	9929	2,23	9729	2,73	4529
1,24	5376	1,74	3,0276	2,24	5,0176	2,74	5076
1,25	5625	1,75	0625	2,25	0625	2,75	5625
1,26	5876	1,76	0976	2,26	1076	2,76	6176
1,27	6129	1,77	1329	2,27	1529	2,77	6729
1,28	6384	1,78	1684	2,28	1984	2,78	7284
1,29	6641	1,79	2041	2,29	2441	2,79	7841
1,30	6900	1,80	2400	2,30	2900	2,80	8400
1,31	7161	1,81	2761	2,31	3361	2,81	8961
1,32	7424	1,82	3124	2,32	3824	2,82	9524
1,33	7689	1,83	3489	2,33	4289	2,83	8,0089
1,34	7956	1,84	3856	2,34	4756	2,84	0656
1,35	8225	1,85	4225	2,35	5225	2,85	1225
1,36	8496	1,86	4596	2,36	5696	2,86	1796
1,37	8769	1,87	4969	2,37	6169	2,87	2369
1,38	9044	1,88	5344	2,38	6644	2,88	2944
1,39	9321	1,89	5721	2,39	7121	2,89	3521
1,40	9600	1,90	6100	2,40	7600	2,90	4100
1,41	9881	1,91	6481	2,41	8081	2,91	4681
1,42	2,0164	1,92	6864	2,42	8564	2,92	5264
1,43	0449	1,93	7249	2,43	9049	2,93	5849
1,44	0736	1,94	7636	2,44	9536	2,94	6436
1,45	1025	1,95	8025	2,45	6,0025	2,95	7025
1,46	1316	1,96	8416	2,46	0516	2,96	7616
1,47	1609	1,97	8809	2,47	1009	2,97	8209
1,48	1904	1,98	9204	2,48	1504	2,98	8804
1,49	2201	1,99	9601	2,49	2001	2,99	9401
1,50	2500	2,00	4,0000	2,50	2500	3,00	9,0000

[37] Tabel pärineb teosest [19], lk. 661-665.

Tabel 3.14 (järg).

N	N^2	N	N^2	N	N^2	N	N^2
3,00	9,0000	3,50	12,2500	4,00	16,0000	4,50	20,2500
3,01	0601	3,51	3201	4,01	0810	4,51	3401
3,02	1204	3,52	3904	4,02	1604	4,52	4304
3,03	1809	3,53	4609	4,03	2409	4,53	5209
3,04	2416	3,54	5316	4,04	3216	4,54	6116
3,05	3025	3,55	6025	4,05	4025	4,55	7025
3,06	3636	3,56	6736	4,06	4836	4,56	7936
3,07	4249	3,57	7449	4,07	5649	4,57	8849
3,08	4864	3,58	8164	4,08	6464	4,58	9764
3,09	5481	3,59	8881	4,09	7281	4,59	21,0681
3,10	6100	3,60	9600	4,10	8100	4,60	1600
3,11	6721	3,61	13,0321	4,11	8921	4,61	2521
3,12	7344	3,62	1044	4,12	9744	4,62	3444
3,13	7969	3,63	1769	4,13	17,0569	4,63	4369
3,14	8596	3,64	2496	4,14	1396	4,64	5296
3,15	9225	3,65	3225	4,15	2225	4,65	6225
3,16	9856	3,66	3956	4,16	3056	4,66	7156
3,17	10,0489	3,67	4689	4,17	3889	4,67	8089
3,18	1124	3,68	5424	4,18	4724	4,68	9024
3,19	1761	3,69	6161	4,19	5561	4,69	9961
3,20	2400	3,70	6900	4,20	6400	4,70	22,0900
3,21	3041	3,71	7641	4,21	7241	4,71	1841
3,22	3684	3,72	8384	4,22	8084	4,72	2784
3,23	4329	3,73	9129	4,23	8929	4,73	3729
3,24	4976	3,74	9876	4,24	9776	4,74	4676
3,25	5625	3,75	14,0625	4,25	18,0625	4,75	5625
3,26	6276	3,76	1376	4,26	1476	4,76	6576
3,27	6929	3,77	2129	4,27	2329	4,77	7529
3,28	7584	3,78	2884	4,28	3184	4,78	8484
3,29	8241	3,79	3641	4,29	4041	4,79	9441
3,30	8900	3,80	4400	4,30	4900	4,80	23,0400
3,31	9561	3,81	5161	4,31	5761	4,81	1361
3,32	11,0224	3,82	5924	4,32	6624	4,82	2324
3,33	0889	3,83	6689	4,33	7489	4,83	3289
3,34	1556	3,84	7456	4,34	8356	4,84	4256
3,35	2225	3,85	8225	4,35	9225	4,85	5225
3,36	2896	3,86	8996	4,36	19,0096	4,86	6196
3,37	3569	3,87	9769	4,37	0969	4,87	7169
3,38	4244	3,88	15,0544	4,38	1844	4,88	8144
3,39	4921	3,89	1321	4,39	2721	4,89	9121
3,40	5600	3,90	2100	4,40	3600	4,90	24,0100
3,41	6281	3,91	2881	4,41	4481	4,91	1081
3,42	6964	3,92	3664	4,42	5364	4,92	2064
3,43	7649	3,93	4449	4,43	6249	4,93	3049
3,44	8336	3,94	5236	4,44	7136	4,94	4036
3,45	9025	3,95	6025	4,45	8025	4,95	5025
3,46	9716	3,96	6816	4,46	8916	4,96	6016
3,47	12,0409	3,97	7609	4,47	9809	4,97	7009
3,48	1104	3,98	8404	4,48	20,0704	4,98	8004
3,49	1801	3,99	9201	4,49	1601	4,99	9001
3,50	2500	4,00	16,0000	4,50	2500	5,00	25,0000

Tabel 3.14 (järg).

N	N²	N	N²	N	N²	N	N²
5,00	25,0000	5,50	30,2500	6,00	36,0000	6,50	42,2500
5,01	1001	5,51	3601	6,01	1201	6,51	3801
5,02	2004	5,52	4704	6,02	2404	6,52	5104
5,03	3009	5,53	5809	6,03	3609	6,53	6409
5,04	4016	5,54	6916	6,04	4816	6,54	7716
5,05	5025	5,55	8025	6,05	6025	6,55	9025
5,06	6036	5,56	9136	6,06	7236	6,56	43,0336
5,07	7049	5,57	31,0249	6,07	8449	6,57	1649
5,08	8064	5,58	1364	6,08	9664	6,58	2964
5,09	9081	5,59	2481	6,09	37,0881	6,59	4281
5,10	26,0100	5,60	3600	6,10	2100	6,60	5600
5,11	1121	5,61	4721	6,11	3321	6,61	6921
5,12	2144	5,62	5844	6,12	4544	6,62	8244
5,13	3169	5,63	6969	6,13	5769	6,63	9569
5,14	4196	5,64	8096	6,14	6996	6,64	44,0896
5,15	5225	5,65	9225	6,15	8225	6,65	2225
5,16	6256	5,66	32,0356	6,16	9456	6,66	3556
5,17	7289	5,67	1489	6,17	38,0689	6,67	4889
5,18	8324	5,68	2624	6,18	1924	6,68	6224
5,19	9361	5,69	3761	6,19	3161	6,69	7561
5,20	27,0400	5,70	4900	6,20	4400	6,70	8900
5,21	1441	5,71	6041	6,21	5641	6,71	45,0241
5,22	2484	5,72	7184	6,22	6884	6,72	1584
5,23	3529	5,73	8329	6,23	8129	6,73	2929
4,24	4576	5,74	9476	6,24	9376	6,74	4276
5,25	5625	5,75	33,0625	6,25	39,0625	6,75	5625
5,26	6676	5,76	1776	6,26	1876	6,76	6976
5,27	7729	5,77	2929	6,27	3129	6,77	8329
5,28	8784	5,78	4084	6,28	4384	6,78	9684
5,29	9841	5,79	5241	6,29	5641	6,79	46,1041
5,30	28,0900	5,80	6400	6,30	6900	6,80	2400
5,31	1961	5,81	7561	6,31	8161	6,81	3761
5,32	3024	5,82	8724	6,32	9424	6,82	5124
5,33	4089	5,83	9889	6,33	40,0689	6,83	6489
5,34	5156	5,84	34,1056	6,34	1956	6,84	7856
5,35	6225	5,85	2225	6,35	3225	6,85	9225
5,36	7296	5,86	3396	6,36	4496	6,86	47,0596
5,37	8369	5,87	4569	6,37	5769	6,87	1969
5,38	9444	5,88	5744	6,38	7044	6,88	3344
5,39	29,0521	5,89	6921	6,39	8321	6,89	4721
5,40	1600	5,90	8100	6,40	9600	6,90	6100
5,41	2681	5,91	9281	6,41	41,0881	6,91	7481
5,42	3764	5,92	35,0464	6,42	2164	6,92	8864
5,43	4849	5,93	1649	6,43	3449	6,93	48,0249
5,44	5936	5,94	2836	6,44	4736	6,94	1636
5,45	7025	5,95	4025	6,45	6025	6,95	3025
5,46	8116	5,96	5216	6,46	7316	6,96	4416
5,47	9209	5,97	6409	6,47	8609	6,97	5809
5,48	30,0304	5,98	7604	6,48	9904	6,98	7204
5,49	1401	5,99	8801	6,49	42,1201	6,99	8601
5,50	2500	6,00	36,0000	6,50	2500	7,00	49,0000

Tabel 3.14 (järg).

N	N^2	N	N^2	N	N^2	N	N^2
7,00	49,0000	7,50	56,2500	8,00	64,0000	8,50	72,2500
7,01	1401	7,51	4001	8,01	1601	8,51	4201
7,02	2804	7,52	5504	8,02	3204	8,52	5904
7,03	4209	7,53	7009	8,03	4809	8,53	7609
7,04	5616	7,54	8516	8,04	6416	8,54	9316
7,05	7025	7,55	57,0025	8,05	8025	8,55	73,1025
7,06	8436	7,56	1536	8,06	9636	8,56	2736
7,07	9849	7,57	3049	8,07	65,1249	8,57	4449
7,08	50,1264	7,58	4564	8,08	2864	8,58	6164
7,09	2681	7,59	6081	8,09	4481	8,59	7881
7,10	4100	7,60	7600	8,10	6100	8,60	9600
7,11	5521	7,61	9121	8,11	7721	8,61	74,1321
7,12	6944	7,62	58,0644	8,12	9344	8,62	3044
7,13	8369	7,63	2169	8,13	66,0969	8,63	4769
7,14	9796	7,64	3696	8,14	2596	8,64	6496
7,15	51,1225	7,65	5225	8,15	4225	8,65	8225
7,16	2656	7,66	6756	8,16	5856	8,66	9956
7,17	4089	7,67	8289	8,17	7489	8,67	75,1689
7,18	5524	7,68	9824	8,18	9124	8,68	3424
7,19	6961	7,69	59,1361	8,19	67,0761	8,69	5161
7,20	8400	7,70	2900	8,20	2400	8,70	6900
7,21	9841	7,71	4441	8,21	4041	8,71	8641
7,22	52,1284	7,72	5984	8,22	5684	8,72	76,0384
7,23	2729	7,73	7529	8,23	7329	8,73	2129
7,24	4176	7,74	9076	8,24	8976	8,74	3876
7,25	5625	7,75	60,0625	8,25	68,0625	8,75	5625
7,26	7076	7,76	2176	8,26	2276	8,76	7376
7,27	8529	7,77	3729	8,27	3929	8,77	9129
7,28	9984	7,78	5284	8,28	5584	8,78	77,0884
7,29	53,1441	7,79	6841	8,29	7241	,879	2641
7,30	2900	7,80	8400	8,30	8900	8,80	4400
7,31	4361	7,81	9961	8,31	69,0561	8,81	6161
7,32	5824	7,82	61,1524	8,32	2224	8,82	7924
7,33	7289	7,83	3089	8,33	3889	8,83	9689
7,34	8756	7,84	4656	8,34	5556	8,84	78,1456
7,35	54,0225	7,85	6225	8,35	7225	8,85	3225
7,36	1696	7,86	7796	8,36	8896	8,86	4996
7,37	3169	7,87	9369	8,37	70,0569	8,87	6769
7,38	4644	7,88	62,0944	8,38	2244	8,88	8544
7,39	6121	7,89	2521	8,39	3921	8,89	79,0321
7,40	7600	7,90	4100	8,40	5600	8,90	2100
7,41	9081	7,91	5681	8,41	7281	8,91	3881
7,42	55,0564	7,92	7264	8,42	8964	8,92	5664
7,43	2049	7,93	8849	8,43	71,0649	8,93	7449
7,44	3536	7,94	63,0436	8,44	2336	8,94	9236
7,45	5025	7,95	2025	8,45	4025	8,95	80,1025
7,46	6516	7,96	3616	8,46	5716	8,96	2816
7,47	8009	7,97	5209	8,47	7409	9,87	4609
7,48	9504	7,98	6804	8,48	9104	8,98	6404
7,49	56,1001	7,99	8401	8,49	72,0801	8,99	8201
7,50	2500	8,00	64,0000	8,50	2500	9,00	81,0000

Tabel 3.14 (järg).

N	N²	N	N²	N	N²	N	N²
9,00	81,0000	9,25	5625	9,51	4401	9,77	4529
		9,26	7476	9,52	6304	9,78	6484
9,01	1801	9,27	9329	9,53	8209	9,79	8441
9,02	3604	9,28	86,1184	9,54	91,0116		
9,03	5409	9,29	3041	9,55	2025	9,80	96,0400
9,04	7216			9.56	3936		
9,05	9025	9,30	4900	9,57	5849	9,81	2361
9,06	82,0836			9,58	7764	9,82	4324
9,07	2649	9.31	6761	9,59	9681	9,83	6289
9,08	4464	9.32	8624			9,84	8256
9,09	6281	9,33	87,0489	9,60	92,1600	9,85	97,0225
		9.34	2356			9,86	2196
9,10	8100	9,35	4225	9,61	3521	9,87	4169
		9,36	6096	9,62	5444	9,88	6144
9.11	9921	9,37	7969	9,63	7369	9,89	8121
9,12	83,1744	9,38	9844	9,64	9296		
9.13	3569	9,39	88.1721	9,65	93,1225	9,90	98,0100
9,14	5396			9,66	3156		
9,15	7225	9,40	3600	9,67	5089	9,91	2081
9,16	9056			9,68	7024	9,92	4064
9,17	84,0889	9,41	5481	9,69	8961	9,93	6049
9,18	2724	9,42	7364			9,94	8036
9,19	4561	9,43	9249	9,70	94,0900	9.95	99.0025
		9,44	89,1136			9,96	2016
9,20	6400	9,45	3025	9,71	2841	9,97	4009
		9,46	4916	9,72	4784	9,98	6004
9,21	8241	9,47	6809	9,73	6729	9,99	8001
9,22	85,0084	9,48	8704	9,74	8676		
9,23	1929	9,49	90,0601			10,00	100,0000
9,24	3776			9,75	95,0625		
		9,50	90,2500	9,76	2576		

Tabel 3.15.

Mõningate sageli esinevate funktsioonide väärtused.[38]

в статистических вычислениях

x	x^2	x^3	x^4	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\frac{1}{x}$	lg x
1,0	1,00	1,000	1,000	1,000	3,162	1,0000	0,0000
1,1	1,21	1,331	1,464	1,049	3,317	0,9091	0414
1,2	1,44	1,728	2,074	1,095	3,464	8333	0792
1,3	1,69	2,197	2,856	1,140	3,606	7692	1139
1,4	1,96	2,744	3,842	1,183	3,742	7143	1461
1,5	2,25	3,375	5,063	1,225	3,873	6667	1761
1,6	2,56	4,096	6,554	1,265	4,000	6250	2041
1,7	2,89	4,913	8,352	1,304	4,123	5882	2304
1,8	3,24	5,832	10,50	1,342	4,243	5556	2553
1,9	3,61	6,859	13,03	1,378	4,359	5263	2788
2,0	4,00	8,000	16,00	1,414	4,472	5000	3010
2,1	4,41	9,261	19,45	1,449	4,583	4762	3222
2,2	4,84	10,65	23,43	1,483	4,690	4546	3424
2,3	5,29	12,17	27,98	1,517	4,796	4348	3617
2,4	5,76	13,82	33,18	1,549	4,899	4167	3802
2,5	6,25	15,63	39,06	1,581	5,000	4000	3979
2,6	6,76	17,58	45,70	1,612	5,099	3846	4150
2,7	7,29	19,68	53,14	1,643	5,196	3704	4314
2,8	7,84	21,95	61,47	1,673	5,292	3571	4472
2,9	8,41	24,39	70,73	1,703	5,385	3448	4624
3,0	9,00	27,00	81,00	1,732	5,477	3333	4771
3,1	9,61	29,79	92,35	1,761	5,568	3226	4914
3,2	10,24	32,77	104,9	1,789	5,657	3125	5051
3,3	10,89	35,94	118,6	1,817	5,745	3030	5185
3,4	11,56	39,30	133,6	1,844	5,831	2941	5315
3,5	12,25	42,88	150,1	1,871	5,916	2857	5441
3,6	12,96	46,66	168,0	1,897	6,000	2778	5563
3,7	13,69	50,65	187,4	1,924	6,083	2703	5682
3,8	14,44	54,87	208,5	1,949	6,164	2632	5798
3,9	15,21	59,32	231,3	1,975	6,245	2564	5911
4,0	16,00	64,00	256,0	2,000	6,325	2500	6021
4,1	16,81	68,92	282,6	2,025	6,403	2439	6128
4,2	17,64	74,09	311,2	2,049	6,481	2381	6232
4,3	18,49	79,51	341,9	2,074	6,557	2326	6335
4,4	19,36	85,18	374,8	2,098	6,633	2273	6435
4,5	20,25	91,13	410,1	2,121	6,708	2222	6532
4,6	21,16	97,34	447,7	2,145	6,782	2174	6628
4,7	22,09	103,8	488,0	2,168	6,856	2128	6721
4,8	23,04	110,6	530,8	2,191	6,928	2083	6812
4,9	24,01	117,6	576,5	2,214	7,000	2041	6902
5,0	25,00	125,0	625,0	2,236	7,071	2000	6990
5,1	26,01	132,7	676,5	2,258	7,141	1961	7076
5,2	27,04	140,6	731,2	2,280	7,211	0,1923	7160

[38] Tabel pärineb teosest [25], lk. 287-288.

Tabel 3.15 (järg).

x	x^2	x^3	x^4	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\frac{1}{x}$	lg x
5,3	28,09	148,9	789,0	2,302	7,280	0,1887	0,7243
5,4	29,16	157,5	850,3	2,324	7,348	1852	7324
5,5	30,25	166,4	915,1	2,345	7,416	1818	7404
5,6	31,36	175,6	983,4	2,366	7,483	1786	7482
5,7	32,49	185,2	1056	2,387	7,550	1754	7559
5,8	33,64	195,1	1132	2,408	7,616	1724	7634
5,9	34,81	205,4	1212	2,429	7,681	1695	7709
6,0	36,00	216,0	1296	2,449	7,746	1667	7782
6,1	37,21	227,0	1385	2,470	7,810	1639	7853
6,2	38,44	238,3	1478	2,490	7,874	1613	7924
6,3	39,69	250,0	1575	2,510	7,937	1587	7993
6,4	40,96	262,1	1678	2,530	8,000	1563	8062
6,5	42,25	274,6	1785	2,550	8,062	1539	8129
6,6	43,56	287,5	1897	2,569	8,124	1515	8195
6,7	44,89	300,8	2015	2,588	8,185	1493	8261
6,8	46,24	314,4	2138	2,608	8,246	1471	8325
6,9	47,61	328,5	2267	2,627	8,307	1449	8388
7,0	49,00	343,0	2401	2,646	8,367	1429	8451
7,1	50,41	357,9	2541	2,665	8,426	1409	8513
7,2	51,84	373,2	2687	2,683	8,485	1389	8573
7,3	53,29	389,0	2840	2,702	8,544	1370	8633
7,4	54,76	405,2	2999	2,720	8,602	1351	8692
7,5	56,25	421,9	3164	2,739	8,660	1333	8751
7,6	57,76	439,0	3336	2,757	8,718	1316	8808
7,7	59,29	456,5	3515	2,775	8,775	1299	8865
7,8	60,84	474,6	3702	2,793	8,832	1282	8921
7,9	62,41	493,0	3895	2,811	8,888	1266	8976
8,0	64,00	512,0	4096	2,828	8,944	1250	9031
8,1	65,61	531,4	4305	2,846	9,000	1235	9085
8,2	67,24	551,4	4521	2,864	9,055	1220	9138
8,3	68,89	571,8	4746	2,881	9,110	1205	9191
8,4	70,56	592,7	4979	2,898	9,165	1191	9243
8,5	72,25	614,1	5220	2,915	9,220	1177	9294
8,6	73,96	636,1	5470	2,933	9,274	1163	9345
8,7	75,69	658,5	5729	2,950	9,327	1149	9395
8,8	77,44	681,5	5997	2,966	9,381	1136	9445
8,9	79,21	705,0	6274	2,983	9,434	1124	9494
9,0	81,00	729,0	6561	3,000	9,487	1111	9542
9,1	82,81	753,6	6857	3,017	9,539	1099	9590
9,2	84,64	778,7	7164	3,033	9,592	1087	9638
9,3	86,49	804,4	7481	3,050	9,644	1075	9685
9,4	88,36	830,6	7807	3,066	9,695	1064	9731
9,5	90,25	857,4	8145	3,082	9,747	1053	9777
9,6	92,16	884,7	8493	3,098	9,798	1042	9823
9,7	94,09	912,7	8853	3,114	9,849	1031	9868
9,8	96,04	941,2	9224	3,131	9,899	1020	9912
9,9	98,01	970,3	9606	3,146	9,950	0,1010	0,9956

Kirjanduse loetelu.

A. Eestikeelne kirjandus matemaatilise statistika ja tõenäosusteooria ning nende rakenduste kohta.

1. P.Greig-Smith. Kvantitatiivne taimeökoloogia. Tartu, 1969.
2. A.Lepamaa. Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika põhijooni. Tallinn, 1967.
3. J.Petersen. Katsete planeerimine. Tallinn, 1966.
4. P.Prüller, H.Tammet. Mõõtmisvigade arvutamine. Tartu, 1971.
5. K.Soonets. Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika. Tartu, 1968.
6. E.Tiit. Tõenäosusteooria I. Tartu, 1968.
7. E.Tiit. Matemaatiline statistika I. Tartu, 1971.
8. V.Tšervjakov. Matemaatilise statistika alused. Tartu, 1970.
9. J.Tuldava. Statistiline väljavõttemeetod keeleteaduses. Linguistica I. Tartu, 1969.
10. J.Tuldava. Statistilised testid keeleteaduses. Linguistica II. Tartu, 1970.
11. J.Tuldava. Sõnavara statistilisest struktuurist. Linguistica III. Tartu, 1971.

B. Eestikeelne kirjandus ligikaudse arvutamise meetodite kohta.

12. M.Levin, S.Ulm. Arvutusmeetodite käsiraamat. Tallinn, 1966.
13. L.Luht. Arvutusmeetodid II. Tartu, 1963.
14. E.Tamme. Arvutusmeetodid. Tallinn, 1971.
15. L.Võhandu. Arvutusmeetodid I. Tartu, 1962.

Tabelite allikmaterjal.
16. W.J.Dixon, J.F.Massey. Introduction to Statistical Analysis. N.York, 1959.
17. D.Rasch. Elementare Einführung in die Mathematische Statistik. Berlin, 1968.
18. Renyi,A. Wahrscheinlishkeitsrechnung. Berlin, 1962.
19. Weber,E. Grundriss der Biologischen Statistik. Jena, 1967.
20. Б.Л.Ван дер Варден. Математическая статистика. Москва, 1960.
21. Е.С.Венцель, Л.А.Овчаров. Теория вероятностей. Москва, 1961.
22. И.В.Дунин-Барковский, Н.В.Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика. Москва, 1955.
23. Ф.Мостеллер, Р.Рурке, Дж.Томас. Вероятность. Москва, 1966.
24. Д.Б.Оуэн. Сборник статистических таблиц. Москва, 1966.
25. Е.И.Пустыльник. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. Москва, 1968.
26. Д.Сепетлиев. Статистические методы в научных медицинских исследованиях. Москва, 1968.

S i s u k o r d.

Э.Тийт

ТАБЛИЦЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

I

На эстонском языке

Тартуский государственный университет
ЭССР, г.Тарту, ул.Юликооли, 18

Vastutav toimetaja T. Veldre
Korrektor E. Oja

- -

TRÜ rotaprint 1971. Paljundamisele antud 27.IX 1971. Trükipoognaid 14,0. Tingtrükipoognaid 13,02. Arvestuspoognaid 8.4. Trükiarv 1000. Paber 30x42. 1/4. MB 08687.
Tell. nr. 787.

Hind 50 kop.

Hind 50 kop.