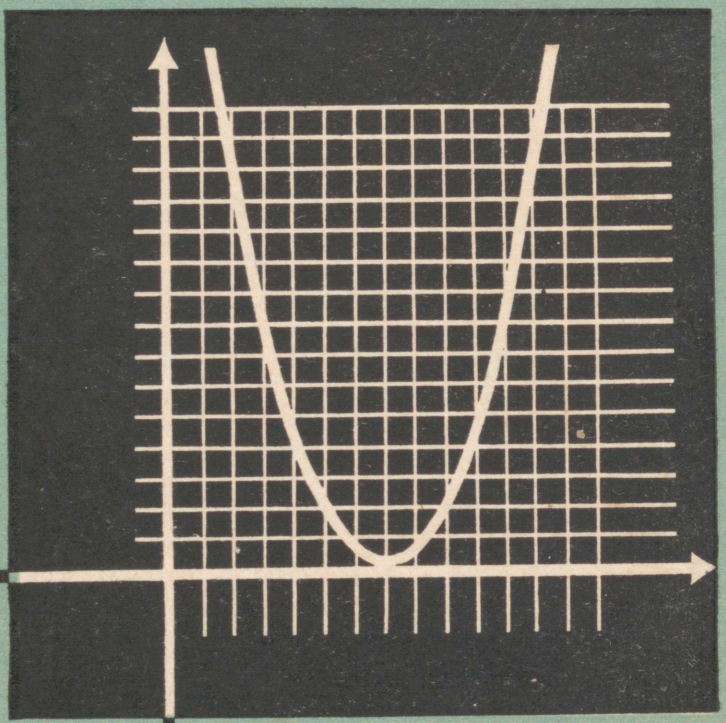
E. ETVERK A. VIHMAN

Matemaatika



VIII

A-28414

E. ETVERK, A. VIHMAN

MATEMAATIKA

VIII KLASSILE

6. trükk

KIRJASTUS «VALGUS» · TALLINN 1967

51
E95

Kunstiliselt kujundanud *S. Liiberg*

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt

TARTU [illegible]
RAAMATUKOGU

6—6

ALGEBRA

1. KORDAMISEKS

1. Teosta järgmised tehted.

a) $\left(4\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot 0{,}9-0{,}3:\frac{3}{7}\right)\cdot 3\frac{3}{4}$

b) $\frac{7}{8}:\left[\left(2{,}25-1\frac{3}{8}\right)\cdot\left(5-\frac{2}{3}\cdot 6{,}375\right)\right]$

c) $\left(6:2\frac{1}{4}-\frac{5}{12}\right)\cdot\left(\frac{2}{7}+0{,}2\right):\frac{9}{70}$

d) $(0{,}78:2{,}6+\frac{2}{3}\cdot 4{,}59):\left(3-1:\frac{7}{9}\right)$

e) $120\cdot 0{,}01+\frac{36}{55}\cdot\left(\frac{7}{48}-\frac{7}{45}:2{,}24\right)$

2. Väljenda protsentides järgmised suhted.

a) $\left(5{,}8-3:1\frac{2}{3}\right):\left(5{,}8+3:1\frac{2}{3}\right)$

b) $\dfrac{13{,}4-4{,}8\cdot\frac{11}{12}}{7{,}2+4{,}4:\frac{11}{12}}$

3. a) Leia 35% avaldise $14{,}7+6{,}3:2\frac{1}{3}$ väärtusest.

b) Leia 72% avaldise $180{,}75-12{,}6\cdot\left(7\frac{2}{3}-4\frac{3}{4}\right)$ väärtusest.

4. a) Leia arv, millest 48% võrdub avaldise

$48{,}6+14{,}4\cdot\left(24\frac{5}{6}-18\frac{7}{8}\right)$

väärtusega.

b) Leia arv, millest 1,5% võrdub avaldise

$\frac{3}{4}\cdot 2{,}5-\frac{5}{8}\cdot 1{,}2$

väärtusega.

5. Lihtsusta järgmised avaldised.

a) $\frac{3}{3a+4}+\frac{4}{4-3a}+\frac{3a+29}{9a^2-16}$

b) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{5x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{3}{x^2-1}$

c) $\frac{(2x+5y)^2-(2x+5y)(2x-5y)}{10y}$

d) $\frac{(3a-2b)^2-(3a+2b)^2}{2a}$

e) $\frac{12}{x^2-4}\cdot\left(\frac{x^2+4}{4x}-1\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)$

f) $\frac{(x+y)^2}{2x-2y}:\frac{3x+3y}{x-y}-\frac{x^2-y^2}{16}\cdot\frac{12}{x+y}$

6. Osteti võid ja juustu, kokku 1 kg 3,26 rbl. eest. Kilogramm võid maksis 3,50 rbl. ja kilogramm juustu 2,90 rbl. Kui palju osteti võid ja kui palju juustu?

7. Ristkülikukujulise põllu pikkus ja laius suhtuvad nagu 5 : 3. Põllu ümbermõõt on 1088 m. Leia põllu pindala.

8. Ristkülikukujulise aiamaa ümbermõõt on 234 m. Kui aiamaa oleks 12 m lühem, siis tema laius oleks pool pikkusest. Leia aiamaa pikkus ja laius.

9. Puksiiril kulus praami vedades ühest sadamast teise sõitmiseks 5 tundi rohkem aega kui sealt tagasi sõitmiseks. Praami vedades liikus puksiir kiirusega 4 km tunnis ja tagasi sõites kiirusega 9 km tunnis. Kui suur on nende sadamate vaheline kaugus?

10. Aurikul kulus pärivoolu mööda jõge ühest sadamast teise sõitmiseks 2 tundi vähem aega kui sama tee sõitmiseks vastuvoolu. Auriku kiirus pärivoolu oli 15 km tunnis ja vastuvoolu 9 km tunnis. Kui suur on nende sadamate vaheline kaugus?

11. Arvuta tõkked, millede vahel asetseb suuruse täpne väärtus, kui suuruse ligikaudne väärtus on

0,98 ($\pm$ 0,08); 307 ($\pm$ 18); 0,023; 1,01; 1650.

12. Leia ligikaudsete arvude 0,7028 ja 0,27 korrutis ja jagatis a) juhtumil, kui see on vahepealne tulemus, b) juhtumil, kui see on lõpptulemus.

13. Ristküliku mõõtmed on ligikaudu 8,7 cm ja 14,2 cm. Missuguste tõkete vahel asetseb ristküliku pindala väärtus? Anna pindala sobivalt ümardatuna.

14. Arvuta trapetsi pindala, kui tema alused on ligikaudu 24,7 m ja 13,5 m ning kõrgus on 12,8 m.

15. Teosta ligikaudsete arvudega järgmised tehted.

a) $2{,}7 \cdot 0{,}38 + 1{,}9 \cdot 7{,}3 - 2{,}9 \cdot 1{,}8$
b) $1{,}49 : 0{,}23 - 3{,}808 : 0{,}61$
c) $3{,}02^3 : 2{,}01^2$

16. a) Avalda suurus b valemist $h = \frac{a - 2b}{3}$.

b) „ „ y „ $x = 2u + \frac{y}{5}$.
c) „ „ x „ $ax = 1 + 2x$.
d) „ „ z „ $az + b = bz + a$.

17. Arvuta rombi pindala, kui tema diagonaalid on 18 cm ja 12 cm.

18. Arvuta risttahuka täispindala, kui tema mõõtmed on 6,4 dm, 4,5 dm ja 2,8 dm.

19. Kraavi sügavus on 0,8 m, laius põhjast 0,2 m ja pealt 1,2 m. Mitu kuupmeetrit mulda on kraavi kaevamisel välja võetud, kui kraavi pikkus on 0,42 km?

20. Lahuta järgnevad hulkliikmed tegureiks.

a) $ax^2 + x - a - a^2x$
b) $ab + 2c - ac - 2b$
c) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$
d) $a^2x^4 - 100$
e) $27a^6z^3 - 8y^3$
f) $x^4 + 0{,}8x^2y + 0{,}16y^2$

21. Leia lükati abil võrde tundmatu liige.

1) $\frac{4{,}20}{3{,}25} = \frac{x}{0{,}15}$
2) $\frac{25{,}5}{8} = \frac{x}{6{,}4}$
3) $\frac{45{,}6}{9} = \frac{x}{12}$
4) $\frac{725}{143} = \frac{9{,}4}{x}$
5) $\frac{126}{13{,}4} = \frac{26{,}8}{x}$
6) $\frac{x}{41{,}2} = \frac{21{,}7}{0{,}07}$
7) $\frac{63{,}1}{20} = \frac{7{,}2}{x}$
8) $\frac{8{,}5}{x} = \frac{22{,}6}{0{,}12}$
9) $\frac{x}{0{,}12} = \frac{72{,}1}{3{,}82}$
10) $\frac{1{,}2}{0{,}442} = \frac{x}{0{,}65}$

Vastused. 1) 0,194. 2) 20,4. 3) 60,8. 4) 1,85. 5) 2,85. 6) 12 770. 7) 2,28. 8) 0,451. 9) 2,26. 10) 1,77.

22. Leia lükati abil võrde tundmatu liige.

1) $\frac{5,1}{31,7} = \frac{3}{x}$ 3) $\frac{x}{15,5} = \frac{31}{40,2}$

2) $\frac{42,5}{27,1} = \frac{31,5}{x}$ 4) $\frac{83,6}{41} = \frac{x}{1,2}$

Otsitava tüvenumbrid. 1) 1-8-6-3. 2) 2-5-1. 3) 1-2-0. 4) 2-4-5.

23. Leia lükati abil võrde tundmatu liige.

1) $\frac{5,1}{x} = \frac{3,62}{22,5}$ 5) $\frac{32,6}{1,46} = \frac{x}{3,75}$ 9) $\frac{x}{2,22} = \frac{8,96}{0,2}$

2) $\frac{3}{x} = \frac{12,7}{79}$ 6) $\frac{0,165}{0,12} = \frac{x}{6,1}$ 10) $\frac{25,3}{12,1} = \frac{4,2}{x}$

3) $\frac{25,1}{1,6} = \frac{55,3}{x}$ 7) $\frac{46,7}{6,3} = \frac{x}{52}$

4) $\frac{15,3}{0,687} = \frac{x}{0,97}$ 8) $\frac{15,5}{7,42} = \frac{x}{5,2}$

24. Leia lükati abil korrutis.

1) 2,4 · 3,5 5) 46,5 · 21,3 9) 32,6 · 865
2) 6,3 · 4,5 6) 5,32 · 0,446 10) 14,6 · 2,26
3) 17,8 · 1,5 7) 36,6 · 118
4) 12,4 · 5,6 8) 39 · 11,8

Vastused. 1) 8,4. 2) 28,4. 3) 26,7. 4) 69,4. 5) 990. 6) 2,37. 7) 4320. 8) 460. 9) 282 000. 10) 33.

25. Leia lükati abil korrutis.

1) 15,2 · 0,3 5) 3,5 · 17,5 9) 3,72 · 6,25
2) 0,0425 · 82,7 6) 1,6 · 6,05 10) 1,93 · 32,6
3) 14,6 · 11,8 7) 0,45 · 0,148
4) 7,74 · 0,56 8) 0,25 · 8,33

Korrutise tüvi on:

1) 456. 2) 351. 3) 172. 4) 433. 5) 613. 6) 968. 7) 666. 8) 208. 9) 232. 10) 629.

26. Arvuta korrutis.

1) $4{,}9 \cdot 23{,}4$
2) $11{,}5 \cdot 6{,}44$
3) $0{,}81 \cdot 0{,}093$
4) $3{,}53 \cdot 12{,}6$
5) $14{,}3 \cdot 12{,}6$
6) $3{,}72 \cdot 13{,}4$
7) $14{,}8 \cdot 5{,}22$
8) $3{,}06 \cdot 2{,}04$
9) $1{,}95 \cdot 0{,}875$
10) $1{,}41 \cdot 2{,}31$

27. Kasutades valemit

$c = \pi d$

arvuta ringjoone pikkus c, kui läbimõõt $d = 1{,}8$ cm, 2,2 cm, 5,75 cm, 8,4 cm, 12,5 cm.

Pane tähele, et arvule π vastav jaotuskriips on lükatil eraldi märgitud.

28. Leia lükati abil

1) 15,5% 45-st;
2) 72,5% 62-st;
3) 35,2% 42-st;
4) 26% 49,5-st;
5) 12,8% 22-st;
6) 58% 95-st;
7) 67,5% 129-st;
8) 87,5% 28,4-st;
9) 13,5% 46,5-st;
10) 92% 336-st.

Näide. 26,8% arvust 54,5 on $26{,}8\% \cdot 54{,}5 = 0{,}268 \cdot 54{,}5 = 14{,}6$.

29. Rakvere rajooni «Vambola» kolhoosis lüpsti lehma kohta 1962. a. keskmiselt 2895 kg piima. 1963. a. saadi lehmalt keskmiselt 18,9% rohkem ja 1964. a. 21,6% rohkem piima kui 1962. a. Mitu kilogrammi piima saadi keskmiselt lehma kohta 1963. a.? 1964. a.?

30. Teravilja keskmine hektarisaak oli «Vambola» kolhoosis 1963. a. 15 ts. 1964. a. oli teravilja keskmine hektarisaak 29,3% suurem kui 1963. a. Mitu tsentnerit teravilja saadi hektarilt keskmiselt 1964. a.?

31. Leia lükati abil jagatis.

1) $83{,}5 : 1{,}34$
2) $6{,}55 : 2{,}48$
3) $124 : 0{,}324$
4) $9{,}45 : 32{,}4$
5) $0{,}965 : 18{,}2$
6) $0{,}605 : 0{,}405$
7) $5{,}15 : 2{,}16$
8) $5{,}45 : 0{,}865$
9) $40{,}5 : 6{,}85$
10) $28{,}5 : 0{,}194$

Vastused. 1) 62,3. 2) 2,64. 3) 383. 4) 0,292. 5) 0,053. 6) 1,5. 7) 2,39. 8) 6,3. 9) 5,9. 10) 147.

32. Arvuta jagatis.

1) 66,5 : 2,24
2) 6,25 : 38
3) 3,75 : 0,105
4) 42,5 : 22,5
5) 0,324 : 0,87
6) 896 : 0,584
7) 72,5 : 96,8
8) 25,7 : 1,12
9) 99,4 : 8,72
10) 7,12 : 1,27

33. Arvuta jagatis.

1) 75,6 : 33
2) 988 : 114
3) 96,6 : 14,5
4) 346 : 8,23
5) 29,5 : 15,1
6) 3,24 : 0,99
7) 0,203 : 42,2
8) 40,4 : 80,6
9) 0,27 : 12,7
10) 3,2 : 1,4

34. Leia lükati abil arv, millest

1) 11,9% on 5,44;
2) 10,5% on 3,75;
3) 87% on 3,24;
4) 58,4% on 896;
5) 96,8% on 0,725;
6) 11,2% on 25,7;
7) 25,6% on 972;
8) 24,8% on 34,4;
9) 56,2% on 854;
10) 15% on 62,5.

Näide. Et leida arv, millest 2,7% on 39,7, jagame 39,7 2,7%-ga. Saame 39,7 : 2,7% = 39,7 : 0,027 = 1470.

35. Viljandi rajooni J. Gagarini nimeline näidissovhoostehnikum suurendas 1964. aastal 1963. aastaga võrreldes teraviljatoodangut 10,5 ts võrra hektarilt ehk 53,2% võrra ja kartulitoodangut 55 ts võrra hektarilt ehk 22,6% võrra. Kui suur oli teravilja hektarisaak 1963. a. ja 1964. a.? Kui suur oli kartuli hektarisaak neil aastatel?

36. Mitu protsenti on

1) arv 7,7 arvust 91?
2) „ 9,69 „ 33,2?
3) „ 9,46 „ 44,6?
4) „ 6,96 „ 65,3?
5) „ 56,8 „ 494?
6) arv 12,4 arvust 35,6?
7) „ 0,235 „ 0,582?
8) „ 91,1 „ 357?
9) „ 67,3 „ 482?
10) „ 67,2 „ 428?

37. 1963. a. oli kartulisaak Rakvere rajooni «Vambola» kolhoosis keskmiselt 154 ts hektarilt, 1964. a. 155 ts hektarilt. Mitu protsenti saadi kartulit hektarilt 1964. a. rohkem kui 1963. a.?

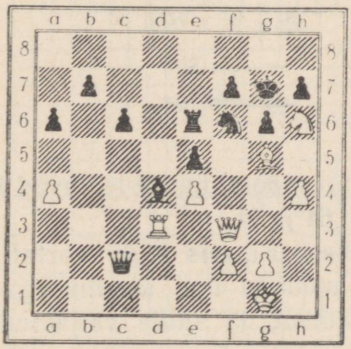
38. 1963. a. oli «Vambola» kolhoosis kolhoosnikute keskmiseks päevapalgaks 2 rbl. 69 kop., 1964. a. 3 rbl. 53 kop. Mitu protsenti tõusis kolhoosniku päevapalk?

2. KOORDINAATIDE MÕISTE

ASUKOHA MÄÄRAMISE ÜLESANDEID

39. a) *Selleks et sideasutused saaksid postisaadetise toimetada õigesse kohta, tuleb sellele kirjutada* a a d r e s s.
Missugustest andmetest koosneb linnas eluneva kodaniku aadress? Kuidas näeks välja aadress, kui linnad oleksid nummerdatud ja linna nimetuse asemel kasutada linna numbrit? Kuidas saaks k õ i k aadressi andmed väljendada ainult numbrite abil?
b) Missuguste andmete abil määratakse kohad teatrisaalis (kinos)?

40. a) *Malelaud on jaotatud* 64-*ks ruudukujuliseks väljaks, mille asukoha määramiseks väljade püstread märgitakse vasakult paremale tähtedega a, b, c, d, e, f, g ja h ning rõhtread altpoolt ülespoole numbritega* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 *ja* 8 *(joon.* 1*). Nii saab iga väli oma «aadressi», mis koosneb tähest ja*



Joon. 1.

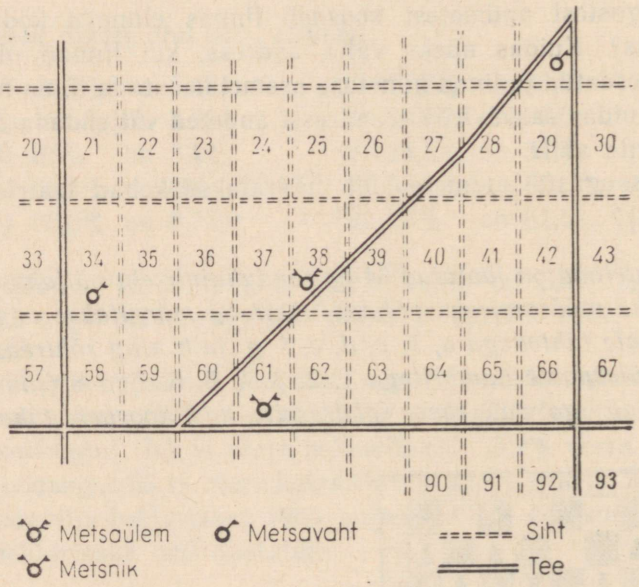
numbrist. Näiteks joonisel 1 asub valge vanker väljal d3 ja must kuningas väljal g7.

b) Määra valgete malendite asukohad joonisel 1.

c) Määra mustade malendite asukohad joonisel 1.

41. a) *Metsa paremaks hooldamiseks ja ka asukoha määramiseks metsas jaotatakse see üksteisega ristuvate sihtide abil* kvartaliteks, *mis järjekorras nummerdatakse.*
Leia metsaplaani (joon. 2) järgi, kus asub metskonna kantselei (metsaülem), kuidas sealt minna raielangile, mis asub kvartalis 33, ja kuidas sealt pääseb metsniku juurest läbi minnes taimeaeda, mis asub kvartalis 63?

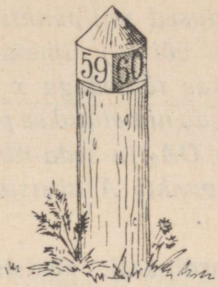
b) *Metsasihtide igasse ristumiskohta paigutatakse kvartalipost, mis kannab seal kokkupuutuva nelja kvartali numbreid (joon. 3).*



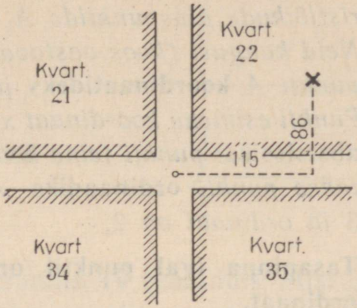
Joon. 2.

Leia jooniselt 2, kus asub kvartalipost, millel leiduvad kvartalinumbrid 36 ja 59; 42 ja 65; 64 ja 91.

c) Lapsed leidsid metsast rebaseuru, mis asub kvartalis 22. Selle asukoha määramiseks mõõtsid nad sammudega uru kauguse sihist, saades 86 sammu, ja sihile väljajõudmise



Joon. 3.



Joon. 4.

koha kauguse kvartalipostist (joon. 4). Viimane kaugus oli 115 sammu. Rebase «aadress» märgiti üles järgmiselt:

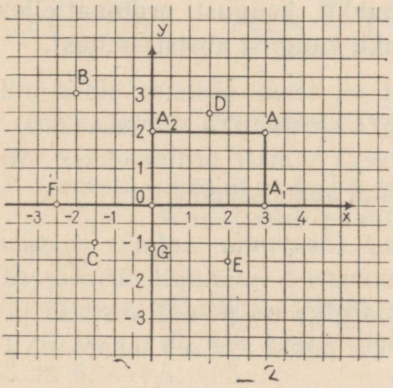
Kv. 22, kv-post 22/34, 115/86

Kuidas nende andmete järgi leida üles rebaseurg?

42. a) Too näiteid, kus tegelikus elus vajatakse asukoha määramist.
b) Missuguste andmetega määratakse laeva asukoht merel?

TASAPINNA PUNKTI KOORDINAADID

43. *Joonis 5 kujutab kaht teineteisega ristuvat arvtelge x ja y, milledel on ühine nullpunkt O ja võrdsed ühikud. Neid telgi kasutatakse punkti asukoha määramiseks tasapinnal. Selleks et määrata mingi punkti A asukoht, tõmmatakse punktist A telgedele ristlõigud AA_1 ja AA_2 ning loetakse telgedelt nende*



Joon. 5.

ristlõikude aluspunktide A_1 *ja* A_2 *kaugused nullpunktist O. Neid kaugusi (koos vastava märgiga + või —) nimetatakse punkti A* **koordinaatideks** *ja tähistatakse tähtedega x ja y. Punkti esimene koordinaat* $x = OA_1$ *ja seda nimetatakse punkti* **abstsissiks**; *punkti teine koordinaat* $y = OA_2$ *ja seda nimetatakse punkti* **ordinaadiks**. *Joonisel 5 punkti A abstsiss on 3 ja ordinaat on 2.*

Tasapinna igal punktil on kaks koordinaati: abstsiss ja ordinaat.

Leia jooniselt 5 punktide *B, C, D, E, F, G,* A_1 ja A_2 abstsiss ja ordinaat. Tulemused kirjuta tabelisse:

Punkt	Punkti	
	abstsiss	ordinaat
A	3	2

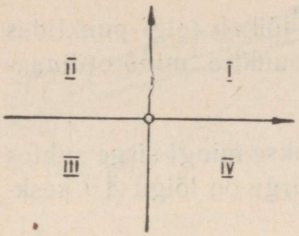
44. *Kaht teineteisega ristuvat sirget x ja y, mille suhtes määratakse punkti asukoht tasapinnal, nimetatakse* **koordinaattelgedeks**; *neist esimene telg on* **abstsisstelg** *ehk x-***telg** *ja teine on* **ordinaattelg** *ehk y-***telg**. *Abstsiss- ja ordinaattelg koos moodustavad* **koordinaatteljestiku** *ehk lihtsalt xy-***teljestiku**. *Telgede lõikepunkt O on koordinaatide* **nullpunkt**.

45. *Lõigud* A_2A *ja* A_1A *joonisel 5 näitavad punkti A kaugust vastavalt x-teljest ja y-teljest. Seejuures punkti kaugus ordinaatteljest* $A_2A = OA_1 = x$ *ja punkti kaugus abstsissteljest* $A_1A = OA_2 = y$. *Nii näeme, et*

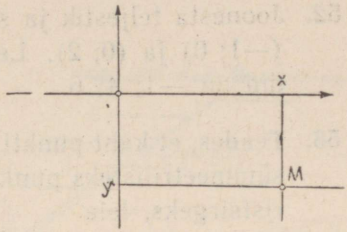
punkti abstsiss näitab punkti kaugust ordinaatteljest ja punkti ordinaat näitab punkti kaugust abstsissteljest.

Kus peab asetsema punkt, et tema abstsiss oleks null; et tema ordinaat oleks null?
Mis on abstsissteljel asetseva punkti ordinaadiks? Mis on ordinaatteljel asetseva punkti abstsissiks?

46. *Koordinaatteljed jaotavad tasapinna neljaks veerandiks. Veerandid nummerdame joonisel 6 näidatud järjekorras.*
Tee kindlaks, missuguse märgiga on punkti abstsiss ja missuguse märgiga ordinaat, kui punkt asetseb tasapinna I vee-



Joon. 6.



Joon. 7.

randis, II veerandis, III veerandis, IV veerandis. Missugustes veerandites on punkti abstsiss negatiivne, missugustes ordinaat negatiivne?

47. *Punkti, mille abstsiss on* 2 *ja ordinaat on* —3, *märgitakse sümboliga* (2; —3). *Lauset «punkti M abstsiss on* 2 *ja ordinaat on* —3» *ehk «punkti M koordinaadid on* 2 *ja* —3» *kirjutatakse lühidalt kujul*

$M(2; -3)$.

Kirjuta sel kujul üles kõik joonisel 5 antud punktid.

48. *Punkti leidmiseks tema koordinaatide x ja y järgi joonestame abstsisstelje punktist x ordinaatteljega paralleelse sirge ja ordinaattelje punktist y abstsissteljega paralleelse sirge (joon. 7). Nende kahe sirge lõikepunkt M ongi otsitav punkt, sest tema koordinaatideks on antud arvud x ja y. Niisuguseid punkte on ainult üks, sest kaks sirget saavad lõikuda ainult ühes punktis.*

49. Joonesta teljestik ja kujuta selles järgmised punktid:

$A(-2; 1)$	$B(1; -2)$	$C(-1; 2{,}5)$	$D(0; 3)$
$E(-3; 0)$	$F(1{,}5; -3)$	$G(0{,}8; 2{,}2)$	$H(2{,}5; 0)$

ÜLESANDEID KOORDINAATIDE KASUTAMISE KOHTA

50. Joonesta teljestik ja selles sirge, mis läbib punkte (—3; —1) ja (2; 4). Missugustes punktides lõikab see sirge koordinaattelgi?

51. Joonesta teljestik ja selles sirge, mis lõikab telgi punktides (3; 0) ja (0; 1). Leia sellel sirgel punktid, mille abstsissid on 6; —1,5; —3.

52. Joonesta teljestik ja selles sirge, mis lõikab telgi punktides (—1; 0) ja (0; 2). Leia sellel sirgel punktid, mille ordinaadid on —1; 4; 6.

53. Teades, et kaht punkti A ja B nimetatakse mingi sirge suhtes sümmeetrilisteks punktideks, kui see sirge on lõigu AB keskristsirgeks, leia
a) punktidele

$P(2; 4)$ $Q(-5; 1)$ $R(-1{,}5; -3)$

x-telje suhtes sümmeetrilised punktid P_1, Q_1, R_1;
b) punktidele

$S(1; 5)$ $T(-3; 4)$ $U(-1; -2)$

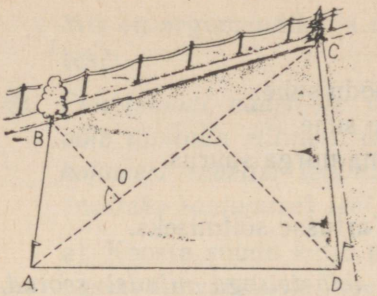
y-telje suhtes sümmeetrilised punktid S_1, T_1, U_1.

54. a) Korrapärase kuusnurga keskpunkt asetseb koordinaatide nullpunktis ja üks tipp punktis (0; 4). Joonesta see kuusnurk ja leia jooniselt tema teiste tippude koordinaadid.
b) Lahenda eelmine ülesanne eeldusel, et kuusnurga keskpunkt on punktis (3; —2) ja üks tipp punktis (3; 2).

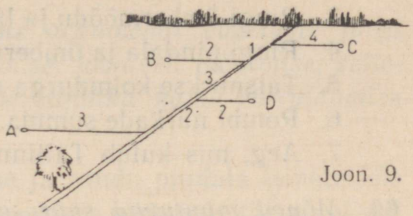
55. a) Joonesta teljestikus ruut, mille keskpunkt on koordinaatide nullpunktis ja üks tipp on punktis (0; —4). Leia teiste tippude koordinaadid ja arvuta ruudu pindala.
b) Lahenda eelmine ülesanne eeldusel, et ruudu keskpunktiks on punkt (1; 3) ja üheks tipuks on punkt (—3; —1).

56. a) Joonesta teljestikus kolmnurk, mille tippudeks on punktid (1; 3), (—3; —2) ja (0; 4). Leia kolmnurga pindala, mõõtes pindala arvutamiseks vajalikkude lõikude pikkused jooniselt.
b) Joonesta teljestikus romb, mille diagonaalide lõikepunkt asetseb koordinaatide nullpunktis, üks tipp punktis (0; 3) ja teine tipp punktis (—5; 0). Leia rombi pindala.

57. Nelinurkse maatüki $ABCD$ plaanistamiseks ja pindala määramiseks võeti diagonaalsirge AC abstsissteljeks ja sellega ristuv sirge läbi tipu B ordinaatteljeks (joon. 8). Koordinaatide mõõtmisel (meetrites) saadi: $A(-198; 0)$, $B(0; 250)$, $C(602; 0)$, $D(202; -246)$.



Joon. 8.



Joon. 9.

a) Valmista maatüki plaan, kujutades 100 m lõiguna 1 cm. Vajaduse korral ümarda mõõtmise tulemusi.
b) Arvuta maatüki pindala, vaadeldes seda kahe kolmnurga pindalade summana.

58. a) Joonis 9 kujutab sirget maanteed, millega ristuvad küladesse *A*, *B*, *C* ja *D* viivad haruteed. Joonesta koordinaatteljestikus külade asetusplaan, võttes abstsisstelje piki maanteed ja ordinaattelje piki küla *A* haruteed. Joonestamiseks vajalikud kaugused on joonisel antud (kilomeetrites).

b) Anna külade asukohad koordinaatide abil.
c) Kui suur on külade *C* ja *D* vaheline kaugus, otsejoones ja kui pikk on neid ühendav tee?

3. FUNKTSIONAALNE SÕLTUVUS

FUNKTSIOON JA ARGUMENT

59. *Suurusi, millel leidub ainult üks väärtus, nimetatakse* **jäävateks** *suurusteks, kuna kõiki teisi suurusi nimetatakse* **muutuvateks** *suurusteks.*

Näiteks on kolmnurga nurkade summa jäav suurus, sest see on alati 180°. *Seevastu kolmnurga pindala on muutuv suurus, sest selle väärtus võib olla mitmesugune.*

Otsusta iga allantud suuruse kohta, kas ta on jääv või muutuv.

1. Ööpäeva pikkus.
2. Kuu pikkus.
3. Ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe.
4. Ringi pindala ja ümbermõõdu suhe.
5. Täisnurkse kolmnurga suurima nurga suurus.
6. Rombi nurkade summa.
7. Aeg, mis kulub Tallinnast Tartusse sõitmiseks.

60. *Mõned muutuvad suurused on teineteisega niiviisi seotud, et ühe suuruse antud väärtuste järgi saab leida teise suuruse vastavaid väärtusi.*
Leia järgnevas tabelis antud ringi läbimõõdu väärtuste järgi ringi pindala väärtused.

Läbimõõt meetrites (m)	2	4	6	8	10
Pindala ruutmeetrites (m^2)					

61. *Kui ühe suuruse iga antud väärtuse järgi (lubatud väärtuste hulgast) on võimalik leida teise suuruse vastavat väärtust, siis öeldakse, et teine suurus on* **sõltuv** *esimesest ehk teine suurus on esimese* **funktsioon.** *Näiteks ruudu pindala on ruudu külje pikkuse funktsioon, sest külje pikkuse järgi on alati võimalik leida ruudu pindala.*

Nimeta mingi suurus, mille funktsiooniks on

a) ruudu ümbermõõt;
b) võrdkülgse kolmnurga pindala;
c) raudtee sõidupileti hind;
d) *n* kaustiku ostusumma, kui kaustiku hind on 14 kop.;
e) ristküliku pindala, kui tema alus on 8 cm.

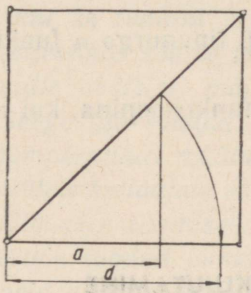
62. *Suurust, mille väärtuste järgi leitakse teise, esimesest sõltuva suuruse väärtusi, nimetatakse* **vabalt muutuvaks suuruseks** *ehk* **argumendiks.** *Näiteks ruudu pindala leidmisel külje pikkuse järgi on argumendiks külje pikkus ja funktsiooniks pindala. Kui aga, ümberpöördult, pindala järgi leitakse külje pikkus, siis on argumendiks pindala ja funktsiooniks külje pikkus.*

Mis on argumendiks ja mis funktsiooniks ülesande 61 näidetes?

63. *Funktsiooni väärtuste leidmine argumendi väärtuste järgi võib toimuda mitmeti: arvutamise, jooniselt mõõtmise, sellekohasest tabelist leidmise või vajaliku katse korraldamise (näiteks kaalumise) teel.*

a) Koosta ruudu külje pikkuse ja ruudu pindala teineteisele vastavate väärtuste tabel, andes külje pikkusele täisarvulised väärtused 1-st kuni 10-ni.

b) Koosta ruudu külje pikkuse ja diagonaali pikkuse teineteisele vastavate väärtuste tabel, andes külje pikkusele täisarvulised väärtused 1-st kuni 10-ni. Ruudu külje pikkusele a vastav diagonaali pikkus d leia graafiliselt, kasutades selleks millimeetripaberil joonestatud ruutu küljega 10 cm (joon. 10).



Joon. 10.

64. *On suurusi, mis sõltuvad mitmest suurusest ehk, teisiti, on mitme argumendi funktsioonid. Nii näiteks on kolmnurga pindala kahe suuruse, nimelt tema aluse ja kõrguse funktsioon.*

Mitme suuruse ja missuguste suuruste funktsiooniks on a) risttahuka ruumala? b) ostetud kauba (üht ja sama liiki) koguhind? c) kuubikujulise eseme kaal?

65. *Mitmest suurusest sõltuva suuruse uurimisel antakse kõikidele argumentidele peale ühe kindlad väärtused ja lastakse muutuda ainult seda üht argumenti. Rakendades seda võtet kordamööda iga argumendi suhtes, saame mitmest suurusest sõltuva suuruse uurimise taandada ühest suurusest sõltuva suuruse uurimisele. Nii näiteks võime kolmnurga pindala*

uurimisel võtta algul aluse võrdseks 10 *cm, siis tema pindala on ainult kõrguse funktsioon, sest kõrguse igale väärtusele vastab üks pindala väärtus. Võttes seejärel kõrguse näiteks võrdseks* 10 *cm, saame kolmnurga pindala ainult aluse funktsioonina.*

Mille funktsiooniks on:

a) ristküliku pindala, kui tema alus on 5 cm? kui tema kõrgus on 5 cm?
b) ruudukujulise põhjaga risttahuka ruumala, kui tema kõrgus on antud? põhiserv on antud?
c) Tallinnast Rakveresse sõitmiseks kuluv aeg?

66. Avalda valemi abil:

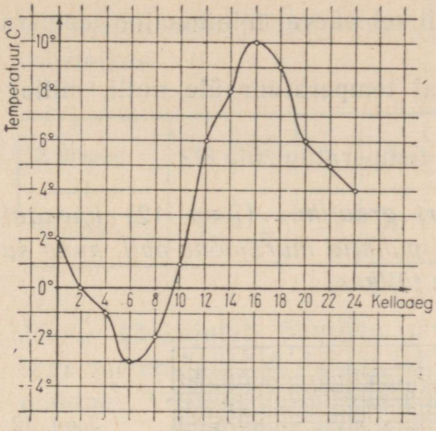
a) kuubi pindala S serva pikkuse a funktsioonina;
b) korrapärase kaheksanurga ümbermõõt u kaheksanurga külje pikkuse a funktsioonina;
c) võrdhaarse kolmnurga alusnurk β tipunurga α funktsioonina;
d) eseme ruumala X tema kaalu P funktsioonina, kui eseme aine erikaal on 2,5.

SUURUSTE SÕLTUVUSE GRAAFILINE KUJUTAMINE

67. *Õhutemperatuuri muutumise jälgimiseks mõõdeti seda ühe ööpäeva vältel iga kahe tunni tagant. Mõõtmise tulemused olid järgmised:*

Kellaaeg	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temp. °C	2	0	—1	—3	—2	1	6	8	10	9	6	5	4

Saadud tabel kujutab vaatluspäeva õhutemperatuuri sõltuvust kellaajast. Selle sõltuvuse kujutamiseks joonise abil võtame kaks teineteisega ristuvat arvtelge (joon. 11*) ja kujutame rõhtteljel kellaaega ning püstteljel temperatuuri.*



Joon. 11.

Ühikud nende suuruste kujutamiseks valime kummagi telje jaoks eraldi ja nimelt nii, et aega saaks kujutada 0 *tunnist kuni* 24 *tunnini ja temperatuuri* —3°*-st kuni* 10°*-ni. Selles teljestikus saame tabeli iga arvupaari kujutiseks ühe punkti, mille abstsissi määrab kellaaeg ja ordinaadi temperatuur. Seega iga saadud punkti kaugus temperatuuriteljest näitab temperatuuri mõõtmise kellaaega ja kaugus ajateljest näitab sellele kellaajale vastavat temperatuuri.*

Ülevaate saamiseks temperatuuri muutumise käigust ühendame saadud punktid sujuva kõverjoonega, mis läbib kõiki neid punkte. Selle kõverjoone tõusmine ja langemine näitab temperatuuri tõusmist ja langemist. Saadud joonist nimetatakse temperatuuri **graafikuks.**

68. a) Kirjelda saadud graafiku põhjal õhutemperatuuri ööpäevast muutumist, jaotades ööpäeva vahemikkudeks, milledes temperatuur ainult langes või ainult tõusis. Alusta nii:

1) Kella 0-st kuni kella 6-ni temperatuur langes ...°-st kuni ...°-ni.

2) Kella 6-st kuni kella ...

b) Lahenda sama graafiku abil veel järgmised küsimused.

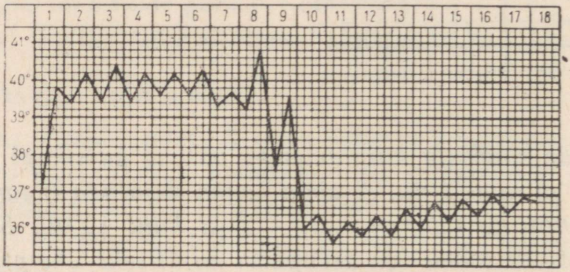
1. Kui kõrge võis olla temperatuur vaatluspäeval kell 1, kell 3, kell 11, kell 15?
2. Millal võis vaatluspäeval temperatuur olla 0°, 3°, 8°, 10°?
3. Missugune oli sel päeval maksimaalne temperatuur ja mis

kellaajal? Missugune oli sel päeval minimaalne temperatuur ja mis kellaajal?

4. Millal oli sel päeval temperatuur üle nulli, millal alla nulli?

5. Millal oli sel päeval temperatuur üle 6°?

69. *Haige kehatemperatuuri graafikus (joon. 12) ühendatakse temperatuuri kujutavad punktid murdjoone abil, kuna sujuva kõvera joonestamine on tülikas.*



Joon. 12.

Joonis 12 kujutab haige temperatuuri muutumise käiku sõltuvalt haiguspäevadest. Vasta selle põhjal järgmistele küsimustele.

1. Mitu korda ööpäevas ja millal mõõdeti haige temperatuuri?
2. Mitu päeva kestis palavik?
3. Millal oli kõrgeim temperatuur ja kui kõrge see oli?
4. Kas haigel esines alatemperatuuri (alla 36°)? Millal?
5. Millal haige temperatuur muutus normaalseks, s. t. jäi püsima 36° ja 37° vahele?

70. a) Valmista joonise 12 eeskujul haige temperatuuri graafik järgmise tabeli andmeil, võttes temperatuuriteljel alguspunktiks 35° ja kujutamisühikuks kummalgi teljel 1 cm.

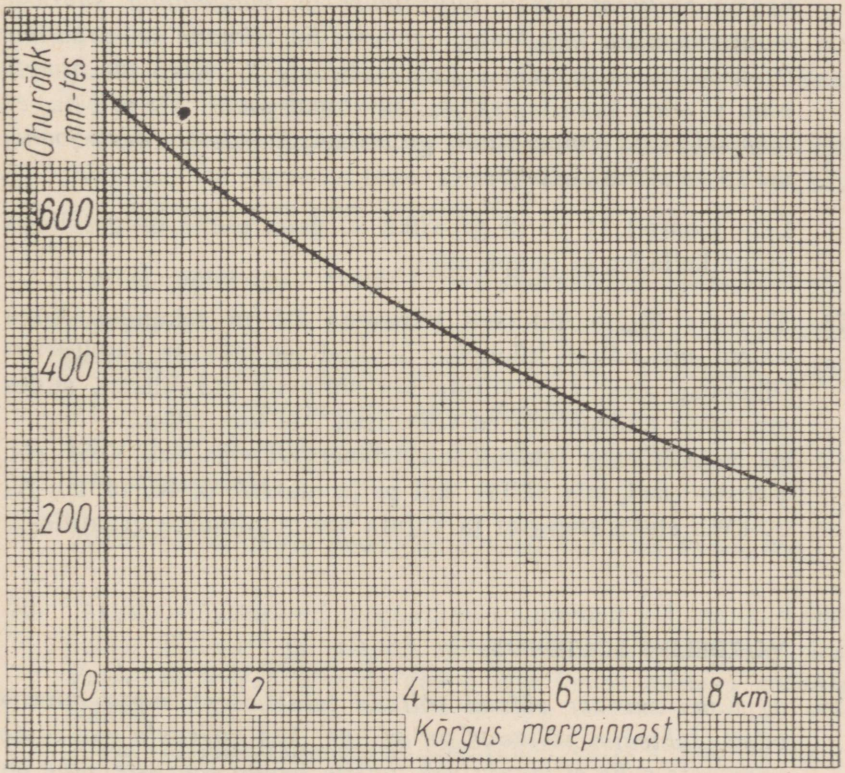
Haiguspäevad		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Temperatuur °C	kell 6	38,3	38,8	38,9	38,7	38,0	37,6	37,4	37,2
	kell 18	38,9	39,4	39,7	39,5	38,4	38,1	37,7	37,5

b) Joonesta järgmise tabeli andmeil õhutemperatuuri graafik

ja kirjelda selle põhjal temperatuuri muutumist antud ajavahemikus.

Kellaaeg	0	3	6	9	12	15	18	21	24
Temper. °C	3	2	—2	—1	4	6	5	5	4

71. Joonis 13 kujutab õhurõhu muutumist sõltuvuses kõrgusega merepinnast (eeldusel, et õhurõhk merepinnal on normaalne). Vasta selle joonise põhjal järgmistele küsimustele.
1. Kui suur on väline õhurõhk lennukil, mille kõrgus merepinnast on 1 km, 2,5 km, 4 km, 7,5 km?



Joon. 13.

2. Kui kõrgel merepinnast on lennuk, mille pardal baromeeter näitab välist õhurõhku 700 mm, 630 mm, 400 mm, 250 mm?

3. Kui suur on õhurõhk järgmiste mägede tipus (sulgudes on antud mäe kõrgus meetrites): Elbrus (5633), Etna (3263), Kilimandžaaro (5895)?

4. Kui kõrgele tuleks tõusta, et õhurõhk väheneks pooleni normaalsest suurusest?

72. *Eelmistes ülesannetes vaatlesime kolme graafikut: õhutemperatuuri graafikut (joon.* 11*), haige kehatemperatuuri graafikut (joon.* 12*) ja õhurõhu graafikut (joon.* 13*). Igaüks neist näitab ühe suuruse (temperatuuri, õhurõhu) muutumist teise suuruse (aja, merepinnast arvatud kõrguse) muutumisel ehk ühe suuruse sõltuvust teisest suurusest. Iga graafik koosneb kahest olulisest osast: teljestikust ja vaadeldava suuruse muutumiskäiku kujutavast joonest. Et viimane on graafiku iseloomustav osa, siis sageli mõistame graafiku all nimelt seda suuruse muutumiskäiku kujutavat joont. Nii ütleme, et joonisel* 11 *on temperatuuri graafikuks murdjoon, kuna joonisel* 10 *on selleks kõverjoon.*

Leia joonisel 11 ja 12 graafiku kõrgeim punkt ning sellega antud kellaaeg ja temperatuur.

73. a) Keha liigub ühtlaselt kiirusega 1,5 m sekundis. Anna valem, mis näitab liikumisel läbitud tee pikkuse s sõltuvust liikumise ajast t ja kujuta see sõltuvus graafiliselt, andes suurusele t täisarvulised väärtused 0-st kuni 10-ni.

b) Kilovatt-tund (kWh) elektrienergiat maksab 0,04 rbl. Koosta tabel, mis näitab, kui palju maksab 5, 10, 15, 20, 25, 30 kWh elektrienergiat ja kujuta see muutumine graafiliselt.

VÕRDELINE SÕLTUVUS

74. *a) Kaks suurust võivad sõltuda teineteisest väga mitmel viisil. Lihtsaim sõltuvus on selline, kus suuruste vastavate väärtuste suhe ei muutu ehk, teisiti, nende suuruste suhe on jääv. Niisuguse omadusega on näiteks võrdkülgse kolmnurga*

ümbermõõt ja külje pikkus: nende suhe on alati võrdne 3-ga.

Kaht suurust, mille vastavate väärtuste suhe on jääv, nimetatakse võrdelisteks suurusteks. Seda jäävat suhet nimetatakse nende suuruste võrdeteguriks.

Näiteks ühtlasel liikumisel käidud tee pikkus on võrdeline liikumisajaga, sest tee pikkuse ja aja suhe on võrdne liikumise kiirusega, mis ühtlase liikumise korral on jääv.
b) Tuletame valemi, mis seob kaht võrdelist suurust. Oletame, et suurus y on võrdeline suurusega x ja nende võrdetegur on a. Siis võrdeliste suuruste definitsiooni järgi $\frac{y}{x} = a$. *Avaldades siit sõltuva suuruse y, saame*

$$y = ax.$$

Saadud valem ütleb, et kui suurused on võrdelised, siis funktsiooni väärtus võrdub argumendi väärtuse ja ühe jääva teguri (võrdeteguri) korrutisega.
Ümberpöördult, kui suurus y sõltub teisest suurusest x valemi järgi $y = ax$, *kus a on jääv, siis suuruste y ja x suhe on jääv, s. t. suurused y ja x on võrdelised.*

Näiteks valemiga $s = 1{,}5t$ *seotud suurused on võrdelised; võrdetegur on* 1,5. *Ka valemiga* $u = -\frac{v}{3}$ *seotud suurused on võrdelised, sest selle valemi saame kirjutada kujul* $u = -\frac{1}{3}v$; *nüüd on näha, et võrdetegur on* $-\frac{1}{3}$.
Võrdeliste suuruste vahelist sõltuvust nimetatakse **võrdeliseks sõltuvuseks.**

Võrdelise sõltuvuse valem on $y = ax$, *kus a on antud arv.*

75. Otsusta, missugused järgmistest valemitest väljendavad võrdelist sõltuvust ja mis on selles sõltuvuses võrdeteguriks. Vajaduse korral lahenda valem ühe temas esineva suuruse suhtes.
(Neis valemeis tähendavad kõik tähed, välja arvatud π, muutuvaid suurusi.)

1) $u = 6a$
2) $c = \pi d$
3) $s = \frac{u}{2}$
4) $y = 2 : x$
5) $a : b = 0{,}8$
6) $xy = 1$
7) $2u + 3v = 0$
8) $3x - 2y = 1$
9) $2S : 3T = 1$
10) $S = \pi r^2$
11) $\alpha + \beta = 90°$
12) $\alpha : \beta = 0{,}5$
13) $a = \frac{3x}{4}$
14) $5a = -3t$
15) $u : 2v = 0{,}6$

Näide. *Kui* $3x : 5a = 0{,}2$, *siis* $3x = 0{,}2 \cdot 5a$
ehk $3x = a$ *ja* $x = \frac{1}{3}\,a$,
seega sõltuvus on võrdeline; võrdetegur on $\frac{1}{3}$.

76. Väljenda iga kahe järgmise suuruse vaheline sõltuvus valemina ja otsusta iga suurusepaari puhul, kas tegemist on võrdelise sõltuvusega või mitte:

1) täisnurkse kolmnurga teravnurkade suurused α ja β;
2) riide koguhind H ja meetrite arv x, kui meetri hind on 14 rbl.;
3) riide meetrite arv x ja riide meetri hind h, kui riide koguhind on 150 rbl.;
4) kuubi pindala S ja serva pikkus a;
5) kolmnurga pindala S ja alus a, kui kolmnurga kõrgus on 8 ühikut;
6) püramiidi ruumala V ja kõrgus h, kui püramiidi põhja pindala on 12 cm^2;
7) korrapärase nelinurkse prisma külgpindala P ja külgserva pikkus s, kui prisma põhiserv on 1,5 m;
8) keha kaal P ja ruumala V, kui erikaal on jääv;
9) korrapärase kuusnurga apoteem m ja külg a;
10) ööpäeva algusest möödunud ajavahemik x ja ööpäeva lõpuni ülejäänud ajavahemik y.

VÕRDELISE SÕLTUVUSE GRAAFIK

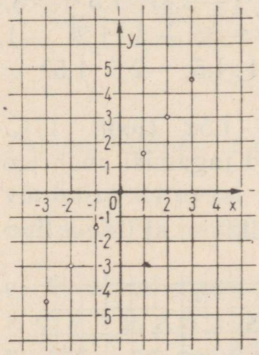
77. Näide. *Kujuta graafiliselt sõltuvus* $y = 1{,}5x$.

Lahendus. *Anname suurusele* x *vabalt rea väärtusi, näiteks täisarvulised väärtused* -3*-st kuni* $+3$*-ni, ja arvutame*

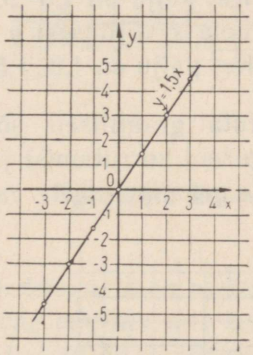
neile vastavad y väärtused. Nii saame järgmise x ja y vastavate väärtuste tabeli:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$-4,5$	$-3,0$	$-1,5$	0	1,5	3	4,5

Võtame nüüd teljestiku ja kujutame selles punktid, mille koordinaatideks on saadud tabeli arvupaarid (joon. 14). *Joonlauaga proovides selgub, et kõik saadud punktid asetsevad ühel ja samal sirgel. Kui kontrolliks anda x-le veel mingi vahepealne, tabelis mitteleiduv väärtus, näiteks väärtus* 1,4, *ja arvutada sellele vastav y väärtus* 2,1, *siis näeme, et ka uus punkt* (1,4; 2,1) *asetseb endiste punktidega ühel ja samal sirgel. Tee see kontroll! Joonestades selle sirge, saame sõltuvuse* $y = 1,5x$ *graafiku* (joon. 15).



Joon. 15.



Joon. 14.

Saab tõestada, et kõik punktid, millede ordinaat $y = ax$, *kus a on jääv, asetsevad tõepoolest ühel ja samal sirgel.*

78. *Saadud graafiku abil saab lahendada kaht liiki ülesandeid, nimelt* 1) *leida y, kui x on antud, ja* 2) *leida x, kui y on antud.*

Kuidas lahendad ühe, kuidas teise ülesande?

Nimetatud ülesandeid saab sõnastada veel teisiti, kui võtta

arvesse, et neis y tähendab korrutist 1,5x. *Nii saame järgmised ülesanded:*

1) *leia korrutis* 1,5x, *kui* x *on antud, näiteks leia korrutis* $1{,}5 \cdot 2$;

2) *leia* x, *kui korrutis* 1,5x *ehk* y *on antud, näiteks leia* x, *kui* $1{,}5x = 3$.

Et viimasest võrdusest $x = 3 : 1{,}5$, *siis seda teist ülesannet saab sõnastada ka veel nii: leida jagatis* $y : 1{,}5$, *kui* y *on antud.*

Seega saadud joonis võimaldab:

1) *korrutada arve graafiliselt* 1,5*-ga;*

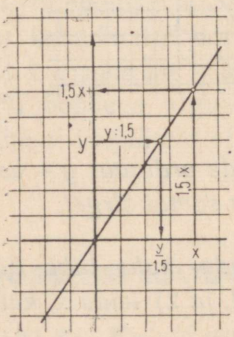
2) *jagada arve graafiliselt* 1,5*-ga.*

Selgita joonise 16 abil, kuidas toimub üks, kuidas teine tehe.

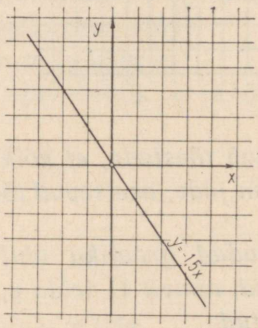
79. Valmista joonis 16 kaks korda suuremas mõõtkavas ja lahenda selle abil järgnevad küsimused.

1) Kui palju on 1,5x, kui $x = 2$; -1; $-0{,}5$; -3?
2) Kui palju on $1{,}5 \cdot 3$; $1{,}5 \cdot 0{,}5$; $1{,}5 \cdot (-2{,}4)$; $1{,}5 \cdot (-3{,}4)$?
3) Leia x võrdusest $y = 1{,}5x$, kui $y = 3$; -3; 1,2; $-1{,}2$.
4) Kui palju on $1{,}8 : 1{,}5$; $3{,}5 : 1{,}5$; $-4 : 1{,}5$; $-2{,}5 : 1{,}5$?

80. Kujuta graafiliselt sõltuvus $y = -1{,}5x$ (joon. 17). Missuguseid korrutamisi ja missuguseid jagamisi saab teostada selle graafiku abil?



Joon. 16.



Joon. 17.

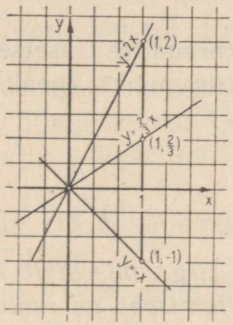
81. Kujuta ühes ja samas teljestikus sõltuvused $y = 0{,}5x$ ja $y = -0{,}5x$. Lahenda graafiliselt järgmised ülesanded.

1) Leia $0{,}5x$, kui $x = 2{,}6$; $-1{,}8$; $-2{,}5$.
2) Leia $-0{,}5 \cdot 3$; $-0{,}5 \cdot (-2{,}8)$; $-0{,}5 \cdot (-4)$.
3) Leia x võrdusest $y = -0{,}5x$, kui $y = 1{,}2$; $-1{,}7$; 3.
4) Leia $2 : 0{,}5$; $-1{,}4 : 0{,}5$; $0{,}8 : (-0{,}5)$.

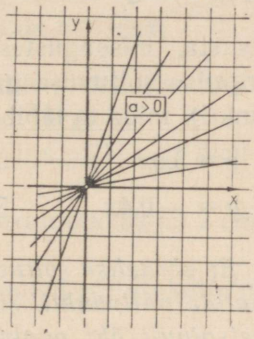
82. a) *Eelmistest ülesannetest selgus, et*

võrdelise sõltuvuse $y = ax$ graafik on sirgjoon.

b) *Anname valemis $y = ax$ suurusele x väärtused 0 ja 1: kui $x = 0$, siis $y = 0$; kui $x = 1$, siis $y = a$.*



Joon. 18.



Joon. 19.

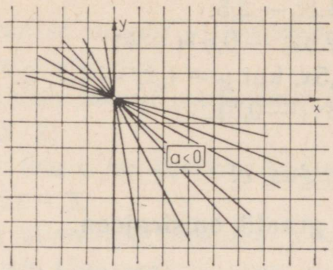
Tulemus näitab, et (joon. 18)

võrdelist sõltuvust $y = ax$ kujutav sirge läbib koordinaatide nullpunkti ja punkti $(1; a)$.

c) *Oletame, et valemis $y = ax$ võrdetegur a on positiivne arv, s. o. $a > 0$. Kui x-le anda positiivne väärtus, siis ka korrutis ax ehk y on positiivne, ja kui x-le anda negatiivne väärtus, siis ka ax ehk y on negatiivne. See näitab, et* (joon. 19)

kui võrdetegur on positiivne arv, siis võrdelist sõltuvust kujutav sirge on tasapinna esimeses ja kolmandas veerandis.

d) *Oletame, et valemis $y = ax$ võrdetegur a on negatiivne arv, s. o. $a < 0$. Kui anda x-le positiivne väärtus, siis korrutis ax ehk y on negatiivne, ja kui anda x-le negatiivne väärtus, siis ax ehk y on positiivne. See näitab, et* (joon. 20)



Joon. 20.

kui võrdetegur on negatiivne arv, siis võrdelist sõltuvust kujutav sirge on tasapinna teises ja neljandas veerandis.

83. Otsusta, missugustes tasapinna veerandites asetseb iga järgmise sõltuvuse graafik ja leia üks punkt (peale nullpunkti), mida ta läbib.

1) $y = 3{,}6x$ 2) $y = -0{,}8x$ 3) $y = -7x$

4) $y = -0{,}4x$ 5) $y = -25x$ 6) $y = 6\frac{1}{3}x$

84. a) *Et võrdelise sõltuvuse graafik on sirge, mis läbib koordinaatide nullpunkti, siis tema joonestamiseks on vaja teada veel ainult üht punkti. Selleks punktiks võib võtta punkti* (1; *a*), *kuid kui see punkt tuleb nullpunktile liiga lähedale, siis ta ei sobi sirge joonestamiseks. Miks? Sel korral teise punkti abstsiss valitakse vabalt, kuid nii, et saadav punkt ei oleks nullpunktile liiga lähedal ega läheks ka joonise piirkonnast välja.*

b) Joonesta kahe punkti abil iga järgmise sõltuvuse graafik.

1) $y = 2x$ 2) $s = -3t$ 3) $u = v$

4) $y = -x$ 5) $s = 1{,}2t$ 6) $u = -v$

7) $y = 1{,}8x$ 8) $s = -t$ 9) $u = -2{,}4v$

85. Temperatuuri mõõdeti varem ka Réaumur'i (loe: reomüüri) kraadides (R). Teades, et 80° R = 100° C ja 0° R = 0° C (joon. 21), näita, et temperatuur Réaumur'i kraadides y ja Celsius'e kraadides x on seotud valemiga $y = 0{,}8x$. Kujuta see sõltuvus millimeetripaberil graafiliselt, võttes 10° kujutamiseks lõigu 1 cm, ja lahenda saadud joonise abil järgmised küsimused.

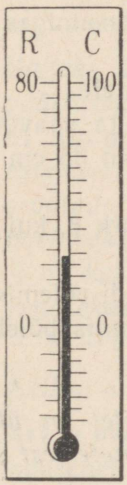
1) Mitu kraadi Réaumur'i järgi on 20°, 50°, 80°, 45°, 72° C järgi?
2) Mitu kraadi Celsius'e järgi on 60°, 20°, 45°, 15°, 61° R järgi?
3) Kui palju on 0,8 · 20; 0,8 · 32; 0,8 · 45; 0,8 · 75?
4) Kui palju on 20 : 0,8; 60 : 0,8; 36 : 0,8; 52 : 0,8?

86. Joonisel 22 on antud seitse võrdelise sõltuvuse graafikut. Leia iga sõltuvuse puhul võrdetegur ja kirjuta sõltuvus valemina.

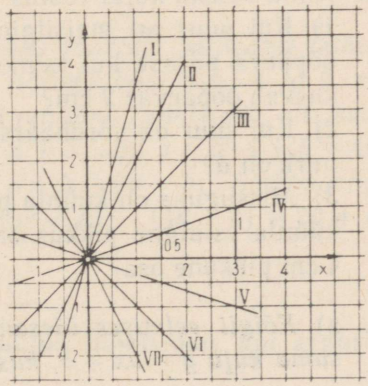
Näide. *Sõltuvuse IV puhul võrdetegur* $a = 1 : 3 = \frac{1}{3}$ *ehk, teisiti,* $a = 0{,}5 : 1{,}5 = \frac{1}{3}$ *ja valem on* $y = \frac{1}{3}x$.

87. Joonis 23 kujutab ruudu diagonaali pikkuse sõltuvust ruudu külje pikkusest. Leia selle graafiku järgi
a) ruudu diagonaali pikkus, kui külje pikkus on 2 cm; 4,5 cm; 5,6 cm;
b) ruudu külje pikkus, kui diagonaali pikkus on 2 cm; 4,5 cm; 7,1 cm;
c) valem, mille järgi ruudu diagonaal sõltub külje pikkusest.

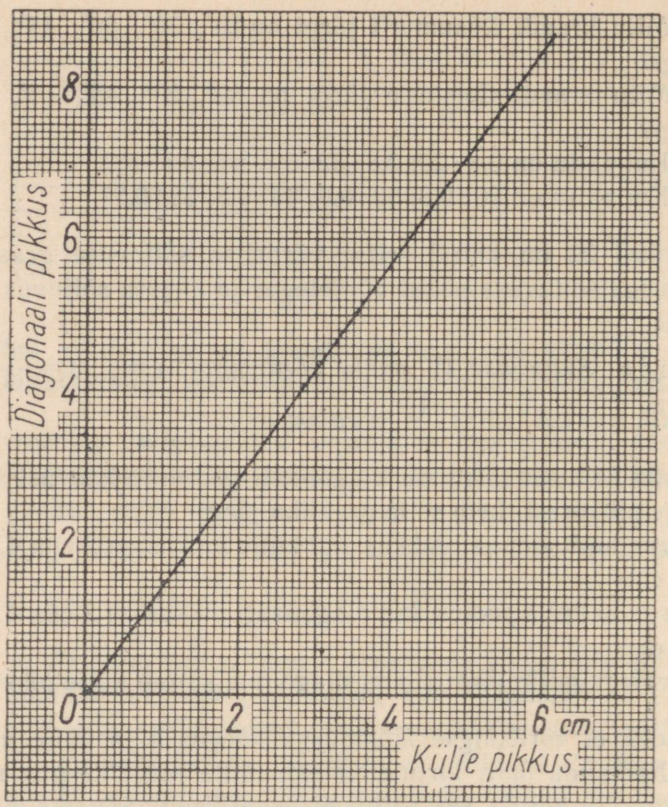
88. Teades, et võrdkülgse kolmnurga kõrgus h ja külje a suhe on ligikaudu 0,87, kirjuta valem, mille järgi kõrgus sõltub küljest, ja kujuta see sõltuvus graafiliselt. Sõnasta ülesanded, mille lahendamine on võimalik selle graafiku abil.



Joon. 21.



Joon. 22.



Joon. 23.

LINEAARNE SÕLTUVUS

89. Anna valemi kujul vastus järgmistele küsimustele.

1) Kui suur on maisitaime kõrgus k, mille ta saavutab p ööpäeva pärast, kui taime praegune kõrgus on 35 cm ja ta kasvab ööpäevas 2 cm?

2) Kui suur on võrdhaarse kolmnurga tipunurk β, kui alusnurk on α?

3) Missugune on küünla pikkus p pärast t tundi põlemist, kui küünla esialgne pikkus on 27 cm ja igas tunnis põleb ära 4 cm pikkune osa?

90. a) *Kõigil eelmises ülesandes saadud valemitel on üks ja sama kuju* $y = ax + b$, *kus* y *ja* x *on kaks teineteisest sõltu-*

vat suurust ning a ja b on kaks antud arvu. Näiteks 1. *küsimuse vastamisel saadud valemis* $k = 2p + 35$ *on suuruse y kohal maisitaime kõrgus k, suuruse x kohal päevade arv p, kuna arvuks a on* 2 *ja arvuks b on* 35.

Mis esineb *y*, *x*, *a* ja *b* asemel küsimuste 2 ja 3 puhul saadud valemites?

b) *Et avaldis* $ax + b$ *on x suhtes lineaarne (x on avaldises esimeses astmes), siis suurust* $y = ax + b$ *nimetatakse x* **lineaarfunktsiooniks** *ja y sõltuvust x-st* **lineaarseks sõltuvuseks.**

Seega

suurust *y* nimetatakse suuruse *x* lineaarfunktsiooniks, kui nendevahelist sõltuvust saab väljendada valemiga $y = ax + b$**, kus *a* ja *b* on antud arvud.**

Lineaarseid sõltuvusi väljendavad näiteks valemid

$y = 3x + 2$, $y = -x + 4$, $s = 1{,}6t + 3$, $T = 240 + 2P$.

91. *Lineaarse sõltuvuse valemis* $y = ax + b$ *on kaks antud arvu: a ja b. Selgitame nende tähendust.*

a) *Kui argumendile x anda väärtus* 0, *siis saame, et*

$y = a \cdot 0 + b = b$.

Sellest näeme, et

arv *b* on funktsiooni algväärtus, s. t. see väärtus, mis vastab argumendi väärtusele 0.

Näiteks sõltuvuse $s = 2{,}5t - 3$ *puhul on funktsiooni s algväärtuseks* -3.

b) *Kui argumendile x anda kaks väärtust, milledest teine on esimesest ühe võrra suurem, näiteks väärtused* 4 *ja* 5, *ning arvutada, kui palju kasvab sel juhtumil funktsioon, siis saame vastuseks a. Tõepoolest, kui* $x = 4$, *siis* $y = a \cdot 4 + b = 4a + b$; *kui* $x = 5$, *siis* $y = a \cdot 5 + b = 5a + b$; *funktsiooni y juurdekasv ehk muut on* $(5a + b) - (4a + b) = 5a + b - 4a - b = a$.

Sellest näeme, et

arv *a* näitab, mille võrra muutub funktsioon, kui argument suureneb ühe võrra.

Näiteks sõltuvuse $y = -2{,}5x + 4$ *puhul funktsioon* y *muutub* $-2{,}5$ *võrra, kui argument* x *suureneb ühe võrra, s. t.* x **suurenedes** 1 *võrra* y **väheneb** 2,5 *võrra.*

92. Ütle iga valemi puhul, kuidas muutub funktsioon, kui argument suureneb 1 võrra.

1) $y = x + 2$ 2) $s = 4{,}5t$ 3) $u = 3 - 2v$
4) $S = 2T + 10$ 5) $\beta = 90° - \alpha$ 6) $s = n \cdot 180° - 360°$

93. *Kui lineaarse sõltuvuse valemis* $y = ax + b$ *võtta funktsiooni* y *algväärtuseks* 0, *s. t. kui* $b = 0$, *siis saame võrdelise sõltuvuse valemi* $y = ax$. *See tähendab, et*

võrdeline sõltuvus on lineaarse sõltuvuse erijuhtum.

LINEAARFUNKTSIOONI GRAAFIK

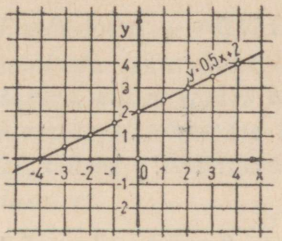
94. Näide. *Kujuta graafiliselt funktsioon* $y = 0{,}5x + 2$.

Lahendus I. *Andes argumendile* x *täisarvulised väärtused* -4*-st kuni* $+4$*-ni ja arvutades funktsiooni* y *vastavad väärtused, saame*

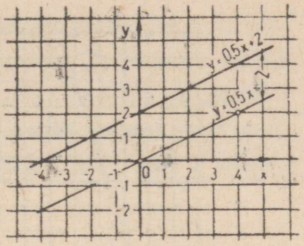
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4

Kujutame nüüd koordinaatteljestikus punktid, millede koordinaatideks on saadud tabeli arvupaarid. Saadud üheksa punkti asetsevad kõik ühel ja samal sirgel, mis ongi antud funktsiooni graafikuks (joon. 24).

Lahendus II. *Joonestame esmalt võrdelise sõltuvuse* $y = 0{,}5x$ *graafiku. Selleks on sirge, mis läbib punkte* (0; 0) *ja* (4; 2). *Et graafiku* $y = 0{,}5x + 2$ *iga punkti ordinaat on* 2 *võrra suurem graafiku* $y = 0{,}5x$ *vastava punkti ordinaadist, siis nihutame saadud sirget paralleelselt tema algasendiga* 2 *ühiku võrra kõrgemale* (*joon.* 25), *saades seega sõltuvuse* $y = 0{,}5x + 2$ *graafiku.*
Kumb lahendusviis on lihtsam?



Joon. 24.



Joon. 25.

95. a) Kujuta graafiliselt ühes ja samas teljestikus funktsioonid $y = 2x$, $y = 2x + 1$ ja $y = 2x - 1$.

b) Kujuta graafiliselt ühes ja samas teljestikus funktsioonid $y = -x$, $y = -x + 3$ ja $y = -x - 3$.

c) Kujuta graafiliselt ühes ja samas teljestikus funktsioonid

$y = -\frac{3}{4}x$, $y = -\frac{3}{4}x + 2{,}5$ ja $y = -\frac{3}{4}x - 2{,}5$.

Võrdle iga sõltuvuse puhul funktsiooni algväärtust (vabaliiget) selle punkti ordinaadiga, kus graafik lõikab y-telge.

96. *Eelmistest ülesannetest selgus, et*

lineaarfunktsiooni $y = ax + b$ graafikuks on sirge, mis on paralleelne sõltuvust $y = ax$ kujutava sirgega ja lõikab y-telge punktis, mille ordinaat on b.

Seega lineaarfunktsiooni graafiku joonestamiseks joonestame esmalt abisirge $y = ax$ ja siis sellele paralleelse sirge läbi punkti $(0; b)$.

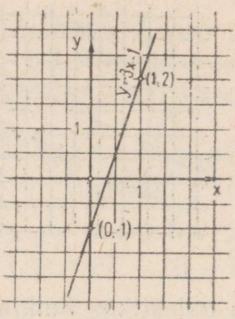
Teda saab aga joonestada ka ilma selle abisirgeta, kui lisaks punktile $(0; b)$ *leida veel üks otsitava sirge punkt, näiteks punkt, mille abstsiss* $x = 1$. *Selle punkti ordinaat* $y = a + b$. *Leiame sel viisil funktsiooni*

$y = 3x - 1$

graafiku (joon. 26). Selleks on sirge, mis läbib punkte $(0; -1)$ *ja* $(1; 2)$.

Niisiis

lineaarfunktsiooni $y = ax + b$ graafikuks on sirge, mis lõikab y-telge punktis ordinaadiga b ja läbib punkti $(1; a + b)$.



Joon. 26.

Kui nimetatud punktid asetsevad lähestikku, siis joonis ei tule küllalt täpne. Sel juhtumil võetakse teine punkt kaugemal, näiteks abstsissiga 5.

97. Joonesta kahe punkti järgi järgmiste sõltuvuste graafikud.

1) $y = x + 1$
2) $y = 2x - 3$
3) $y = -x + 2{,}5$
4) $y = -2x + 4$
5) $y = 0{,}4x - 2$
6) $y = 1{,}2x - 3$
7) $y = -0{,}8x + 4$
8) $y = -0{,}6x - 1$
9) $y = \frac{3}{4}x - 2\frac{1}{4}$
10) $y = -\frac{2}{3}x + 3\frac{1}{3}$

98. Selgita, kuidas asetsevad teineteise suhtes järgmiste funktsioonide graafikud:

a) $y = 4x + 5$ ja $y = 4x + 2$;
b) $y = 2x - 3$ ja $y = 5x - 3$;
c) $y = -3x + 1$ ja $y = -3x - 1$.

N ä i t e i d. 1) *Funktsioone* $y = 8x + 3$ ja $y = 8x - 7$ *kujutavad sirged on paralleelsed, sest nad mõlemad on paralleelsed sirgega* $y = 8x$.
2) *Funktsioone* $y = 2x - 5$ *ja* $y = 6x - 5$ *kujutavad sirged lõikavad y-telge ühes ja samas punktis, nimelt punktis* $(0; -5)$.

Kui kahel lineaarfunktsioonil argumendi kordajad on võrdsed, siis neid funktsioone kujutavad sirged on paralleelsed; kui aga vabaliikmed on võrdsed, siis neid funktsioone kujutavad sirged lõikavad ordinaattelge ühes ja samas punktis.

99. *Funktsiooni* $y = 0{,}75x - 1{,}5$ *graafik võimaldab ilma arvutamiseta leida kahe tehte tulemust, nimelt tulemust, mille saame, kui mistahes arvu x korrutame arvuga* 0,75 *ja sellest korrutisest lahutame* 1,5 *(joon. 27). Näiteks loeme jooniselt* 27, *võttes x väärtuseks* 2,5 *ja leides sellele vastava y väärtuse, et*

$0{,}75 \cdot 2{,}5 - 1{,}5 = 0{,}4.$

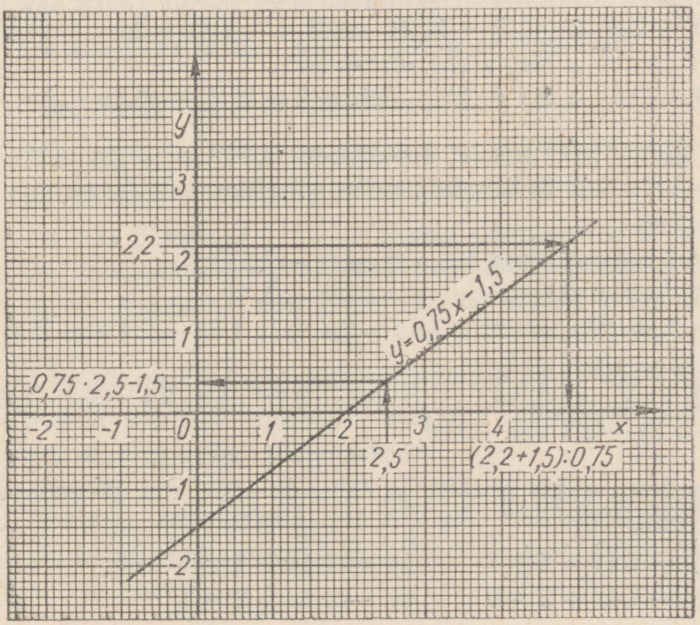
Leia samal viisil:

1) $0{,}75 \cdot 4 - 1{,}5$
2) $0{,}75 \cdot 3{,}3 - 1{,}5$
3) $0{,}75 \cdot 2 - 1{,}5$
4) $0{,}75 \cdot (-0{,}7) - 1{,}5$

100. Kasutades funktsiooni $y = 0{,}75x - 1{,}5$ graafikut (joon. 27), lahenda võrrandid:

1) $0{,}75x - 1{,}5 = 2{,}2$
2) $0{,}75x - 1{,}5 = -2$
3) $0{,}75x - 1{,}5 = 1$
4) $0{,}75x - 1{,}5 = 2$
5) $0{,}75x - 1{,}5 = -1{,}5$
6) $0{,}75x - 1{,}5 = -1$

Näpunäide. *On antud suuruse y väärtus ja leida tuleb sellele vastav x väärtus.*



Joon. 27.

101. a) *Olgu võrduses* $y = 0{,}75x - 1{,}5$ *suurus y antud ja x tundmatu. Lahendades antud võrduse x suhtes, saame*

$0{,}75x = y + 1{,}5$

ehk

$x = (y + 1{,}5) : 0{,}75.$

Selle x väärtuse saame antud y järgi leida jooniselt 27. *Seega vaadeldav graafik võimaldab ilma arvutamiseta leida tulemust, mille saame, kui mingi arvuga y liidame* 1,5 *ja selle summa jagame arvuga* 0,75. *Arv y tuleb võtta y-teljelt ja tulemus lugeda x-teljelt. Nii leiame jooniselt* 27, *et*

$(2{,}2 + 1{,}5) : 0{,}75 = 4{,}9.$

b) Leia samal viisil:

1) $(-2 + 1{,}5) : 0{,}75$ 2) $(-1 + 1{,}5) : 0{,}75$

3) $(2{,}5 + 1{,}5) : 0{,}75$ 4) $(-0{,}5 + 1{,}5) : 0{,}75$

102. Kujuta graafiliselt funktsioon $y = -0{,}6x + 2$ vahemikus $-5 \leqslant x \leqslant 5$ ja lahenda selle graafiku abil järgmised ülesanded.

a) Leia y väärtus, kui $x = 2$; $-2{,}5$; 0,7.

b) Leia x väärtus, kui $y = 1$; $-0{,}7$; 4,2.

c) Leia järgmiste avaldiste väärtused: 1) $-0{,}6 \cdot 2 + 2$; 2) $-0{,}6 \cdot (-2{,}7) + 2$; 3) $-0{,}6 \cdot (-3{,}3) + 2$.

d) Lahenda järgmised võrrandid:

1) $-0{,}6x + 2 = 0$; 2) $-0{,}6x + 2 = 3$; 3) $-0{,}6x + 2 = -0{,}5$.

103. Kujuta graafiliselt funktsioon $y = 1{,}8x - 2{,}4$ vahemikus $-3 \leqslant x \leqslant 3$ ja lahenda selle graafiku abil järgmised ülesanded.

a) Leia y väärtus, kui $x = -1$; $-2{,}5$; 2,2.

b) Leia x väärtus, kui $y = 2$; 0; $-5{,}5$.

c) Lahenda võrrand $1{,}8x - 2{,}4 = 1$; $1{,}8x - 2{,}4 = -3{,}2$; $1{,}8x - 2{,}4 = -1$.

d) Leia avaldiste $1{,}8 \cdot 1{,}7 - 2{,}4$; $1{,}8 \cdot 2{,}4 - 2{,}4$; $1{,}8 \cdot (-2{,}3) - 2{,}4$ väärtused.

104. Joonesta sobiv graafik ja lahenda selle abil järgmised võrrandid.

a) $-1{,}4x + 2 = 1$ b) $-1{,}4x + 2 = -1{,}5$

c) $-1{,}4x + 2 = 0$ d) $-1{,}4x + 2 = 4$

PÖÖRDVÕRDELINE SÕLTUVUS

105. a) *Leidub teineteisest sõltuvaid suurusi, mille vastavate väärtuste korrutis on jääv. Niisugusteks suurusteks on näiteks ühe ja sama tee läbimiseks kuluv aeg ja liikumise kiirus, sest nende korrutis võrdub tee pikkusega, mis antud juhtumil on jääv.*

Suurusi, mille vastavate väärtuste korrutis on jääv, nimetatakse pöördvõrdelisteks suurusteks.

Seega ühe ja sama tee läbimiseks kuluv aeg on pöördvõrdeline liikumise kiirusega. Samuti on ühe ja sama pindalaga ristküliku alus pöördvõrdeline kõrgusega.

b) *Tuletame valemi, mis seob kaht teineteisega pöördvõrdelist suurust x ja y. Nende korrutis peab olema jääv. Tähistame seda jäävat korrutist tähega a. Siis*

$xy = a$

ehk

$y = \frac{a}{x}$.

Kui kaks suurust on pöördvõrdelised, siis nendevaheline seos väljendub valemiga $y = \frac{a}{x}$, kus a on antud arv.

c) *Ümberpöördult: kui kaks suurust x ja y on seotud valemiga $y = \frac{a}{x}$, kus a on antud arv, siis korrutis xy on jääv, tähendab suurused x ja y on pöördvõrdelised.*

Näiteks valemiga $s = 3 : t$ seotud suurused on pöördvõrdelised. Niisamuti on pöördvõrdelised ka valemiga $u = -2 : 3v$ seotud suurused, sest selle valemi saame kirjutada kujul $u = \frac{-\frac{2}{3}}{v}$, millest on näha, et u ja v jääv korrutis $a = -\frac{2}{3}$. Pöördvõrdeliste suuruste vahelist sõltuvust nimetatakse **pöördvõrdeliseks sõltuvuseks.**

106. Otsusta, missugused järgmistest valemitest väljendavad võrdelist, missugused pöördvõrdelist ja missugused lineaarset sõltuvust.

Küsimuse otsustamiseks lahenda valem ühe temas esineva suuruse suhtes (kui ta pole sel kujul juba antud) ja vaata, kas valemile saab anda ühe kujudest

$y = ax$, $y = ax + b$, $y = \frac{a}{x}$.

1) $y = \frac{6x+4}{2}$ 2) $r = \frac{c}{6{,}28}$ 3) $h = 24 : a$

4) $z = 12 : 5x$ 5) $u = 7 - v$ 6) $S = \frac{5a}{2}$

7) $vt = 12$ 8) $V = \frac{3x+1}{2}$ 9) $y = 1 : x^2$

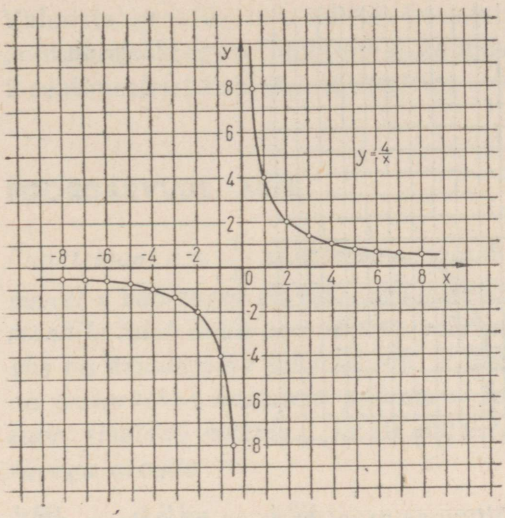
Missugused antud valemitest ei väljenda ühtki ülalnimetatud sõltuvust?

107. Väljenda iga kahe järgmise suuruse vaheline sõltuvus valemina ja otsusta iga suurusepaari puhul, kas tegemist on mõne sulle tuntud sõltuvuseliigiga või mitte:

1) antud rahasumma s (näit. 10 rbl.) eest saadav maiustuste kaal k (kg) ja maiustuste kilogrammi hind h (rbl.);
2) kuubi pindala S ja serva pikkus a;
3) korrapärase kuusnurga ümbermõõt u ja kuusnurga külje pikkus a;
4) päevade arv v, mis kolhoosil kulub vilja koristamiseks, ja hektarite arv h, millelt päevas koristatakse, kui vilja on üldse 186 ha;
5) trapetsi pindala S ja kõrgus h, kui trapetsi alused on 6 cm ja 10 cm;
6) ristküliku alus a ja kõrgus b, kui pindala S on jääv;
7) ristküliku pindala S ja kõrgus b, kui alus a on jääv;
8) ristküliku alus a ja kõrgus b, kui ümbermõõt $ü$ on jääv;
9) käesoleva kuu eelolevate päevade arv y ja möödunud päevade arv x.

PÖÖRDVÕRDELISE SÕLTUVUSE GRAAFIK

108. Kujuta graafiliselt sõltuvus $y = \frac{4}{x}$, andes x-le täisarvulised väärtused — 8-st kuni +8-ni. Missugust täisarvulist väärtust sellest vahemikust x-le anda ei saa? Kas kujutataval graafikul leidub punkt, mille abstsiss on 0? Niisuguse punkti puudumise tõttu öeldakse, et graafik k a t k e b kohas $x = 0$



Joon. 28.

(joon. 28). Graafiku käigu selgitamiseks katkemiskoha ümbruses anna x-le veel väärtused $-0{,}5$, $-0{,}25$, 0,25 ja 0,5. Kõikide saadud punktide ühendamisel sujuva kõverjoonega saad joonisel 28 kujutatud graafiku.

Joonesta endale see graafik kaks korda suuremas mõõtkavas, paigutades telgede lõikepunkt jooniselehe keskele. Kirjelda y muutumist x kasvamisel -8-st kuni $-0{,}25$-ni ja x kasvamisel 0,25-st kuni 8-ni.

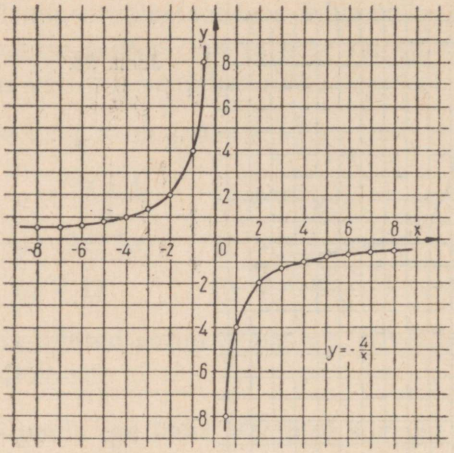
109. Kujuta graafiliselt sõltuvus $y = \frac{1}{x}$. Anna x-le ainult positiivsed väärtused 0,25, 0,5, 1, 2, 3 ja 4. Kujutamisühikuks võta 2 cm.

Missugust arvutamisülesannet saab lahendada saadud joonise abil? Lahenda selle abil järgmised küsimused.

1) Kui suur on ristküliku kõrgus, kui tema pindala on 1 m² ja alus on 2 m; 0,5 m; 1,5 m; 2,5 m; 75 cm?

2) Kui suured on järgmiste arvude pöördarvud: 4; 0,75; 2,5; 2,25?

110. Joonesta ülesande 108 eeskujul sõltuvuse $y = \frac{-4}{x}$ ehk $y = -\frac{4}{x}$ graafik. Missugustes veerandites asetseb saadud kõverjoon nüüd (joon. 29)?



Joon. 29.

111. *Pöördvõrdelise sõltuvuse graafikuks on kõverjoon, mida nimetatakse* **hüperbooliks.** *Hüperbool koosneb kahest eraldi asetsevast harust. Kui pöördvõrdelise sõltuvuse valemis $y = a : x$ arv a on positiivne, siis hüperbooli üks haru on esimeses veerandis ja teine kolmandas veerandis, kui aga a on negatiivne, siis hüperbooli üks haru on teises veerandis ja teine neljandas veerandis.*

112. Kujuta graafiliselt ühes ja samas teljestikus sõltuvused

$y = 2 : x$, $y = 4 : x$ ja $y = 8 : x$,

andes x-le ainult positiivseid väärtusi.

113. Joonesta koordinaattasapinna esimeses veerandis rida ristkülikuid, mille pindala on 12 cm², paigutades ristkülikud nii, et nende üks külg asetseks x-teljel ja teine külg y-teljel. Missugusel joonel asetsevad nende ristkülikute need tipud, mis on väljaspool koordinaattelgi? Joonesta see joon.

114. Kujuta ühes ja samas teljestikus sõltuvused $y = 2 : x$ ja $y = -2 : x$, andes x-le ainult positiivseid väärtusi. Kuidas need graafikud asetsevad x-telje suhtes?

115. Valmista graafik, mis näitab 6 kilomeetri läbimiseks ühtlasel liikumisel kuluva aja muutumist, kui liikumise kiirus kasvab 2 kilomeetrist tunnis kuni 12 kilomeetrini tunnis.

116. Valmista graafik, mis näitab 4-ruutsentimeetrise pindalaga kolmnurga kõrguse muutumist kolmnurga aluse kasvamisel 2 sentimeetrist kuni 8 sentimeetrini.

PÖÖRDARVUDE TABEL

117. *Funktsiooni* $y = \frac{1}{x}$ *väärtuste arvutamine on lihtne, kui argumendi* x *väärtused on näiteks ühekohalised arvud. Kui argumendile tuleb anda aga näiteks väärtused* 3,51, 3,52, ..., 3,60, *siis on arvutamine juba küllalt tülikas. Niisugusel juhtumil on otstarbekas kasutada pöördarvude tabelit (vt. lisa). See tabel sisaldab kõikide* 1 *ja* 10 *vahel leiduvate kolmekohalise tüvega arvude*

1,00, 1,01, 1,02, ..., 9,98, 9,99

pöördarve

1,00, 0,990, 0,980, ..., 0,100, 0,100,

mis on samuti antud kolmekohaliste tüvedega.
Tabel algab järgmiselt:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	990	980	971	962	952	943	935	926	917
1,1	0,909	901	893	885	877	870	862	855	847	840
1,2	0,833	826	820	813	806	800	794	787	781	775

Näiteks tuleb arvu 1,24 *pöördarvu saamiseks leida selle arvu esimese kahe kohaga märgitud rea* 1,2 *ja kolmanda kohaga märgitud veeru* 4 *ristumiskoht. Seal seisev arv* 806 *on otsitava pöördarvu murdosa, kuna täisosa on* 0. *Nii saame, et*

$$\frac{1}{1{,}24} = 0{,}806.$$

Analoogiliselt leiame, et

$$\frac{1}{9{,}78} = 0{,}102.$$

a) Leia arvude 3,51; 3,52; ...; 3,60 pöördarvud.

b) Leia järgmiste arvude pöördarvud: 7; 4,8; 9,4; 6,0; 6,34; 8,39; 6,53; 2,07; 9,38.

118. *Kui arvu tüves on enam kui kolm numbrit, siis tema pöördarvu leidmiseks tabeli abil ümardame arvu nii, et tema tüvi jääks kolmekohaliseks. Näiteks*

$$\frac{1}{6{,}7385} = \frac{1}{6{,}74} = 0{,}148.$$

Leia järgmiste arvude pöördarvud:
8,473; 1,937; 3,3896; 9,745; 6,283719; 2,2738; 4,007; 6,005.

119. *Kui antud arv on 1-st väiksem, siis korrutame ta 10-ga või 100-ga jne. nii, et saame arvu, mis on 1 ja 10 vahel. Saadud arvule leiame tabelis pöördarvu ja korrutame ka selle 10-ga või 100-ga jne., sest arvu korrutamisel 10-ga või 100-ga jne. pöördarv väheneb 10 või 100 jne. korda. Soovides leida näiteks arvu 0,78 pöördarvu võtame 7,8 pöördarvu ja korrutame selle 10-ga:*

$$\frac{1}{0{,}78} = 10 \cdot \frac{1}{7{,}8} = 10 \cdot 0{,}128 = 1{,}28.$$

Kui antud arv on 10-st suurem, siis korrutame ta 0,1-ga või 0,01-ga jne. nii, et saame arvu, mis on 1 ja 10 vahel. Edasi toimime analoogiliselt eelnevaga. Näiteks

$$\frac{1}{78{,}0} = 0{,}1 \cdot \frac{1}{7{,}80} = 0{,}1 \cdot 0{,}128 = 0{,}0128.$$

Leia järgmiste arvude pöördarvud.

a) 0,342; 0,796; 0,2786; 0,0387; 0,0497; 0,083; 0,0074.
b) 0,873; 0,495; 0,7837; 0,0973; 0,0372; 0,00719; 0,003.
c) 18; 234; 74,5; 62,8; 380; 2120; 9020; 78,46; 486,9.
d) 73; 537; 76,8; 49,7; 790; 8130; 9037; 38,77; 428,9.

120. a) Ristküliku pindala on 1 m². Leia ristküliku kõrgus, kui alus on

1,8 m; 0,34 m; 0,87 m; 67 cm; 118 cm.

b) Ristküliku pindala on 1 ha. Leia ristküliku alus, kui kõrgus on

78 m; 148 m; 367 m; 694 m; 1 km.

121. Kasutades pöördarvude tabelit, arvuta järgmised jagatised.

a) 3,7 : 4,79; 7,9 : 5,83; 28 : 8,94; 48 : 375; 4,1 : 0,873.
b) 8,9 : 4,97; 3,7 : 89,6; 38 : 4,73; 73 : 973; 5,8 : 0,637.

Näide. $3 : 5{,}78 = 3 \cdot \frac{1}{5{,}78} = 3 \cdot 0{,}173 = 0{,}519.$

122. Kasutades pöördarvude tabelit, arvuta

a) $\frac{100}{3{,}8 \cdot 6{,}74}$, b) $\frac{32}{8{,}74 \cdot 6{,}98}$, c) $\frac{5.7}{1{,}87 \cdot 4{,}38}$.

Näide. $\frac{48}{3{,}71 \cdot 9{,}48} = 48 \cdot \frac{1}{35{,}2} = 48 \cdot 0{,}0284 = 1{,}36.$

123. Kolmnurga pindala on 4,85 m² ja alus on 2,18 m. Arvuta kolmnurga kõrgus.

124. Keha ruumala on 87,6 cm³ ja kaal on 638 g. Arvuta erikaal.

125. Punkt liikus 3 min. 47 sek. vältel 4 m 36 cm. Arvuta punkti liikumise kiirus.

126. Kujuta graafiliselt sõltuvus $y = \frac{5}{x}$ vahemikus $x = 6{,}5$ kuni $x = 7{,}0$, andes x-le väärtused vahedega 0,1 ja võttes kujutamisühikuks 10 cm (x-telje nullpunkt ei esine joonisel). Kas saadud graafik erineb märgatavalt sirgjoonest?

4. KAHE TUNDMATUGA LINEAARSED VÕRRANDISÜSTEEMID

KAHE TUNDMATUGA VÕRRANDI LAHENDI MÕISTE

127. Näide. *Matemaatikaringis on 8 liiget. Mitu poissi ja mitu tüdrukut on matemaatikaringis?*

Lahendus. *Tähistame poiste arvu tähega x ja tüdrukute arvu tähega y, siis saame võrrandi*

$x + y = 8.$

See on **kahe tundmatuga esimese astme võrrand** *ehk* **kahe tundmatuga lineaarne võrrand.**

Lahendame selle võrrandi proovimise teel. Kui matemaatikaringi liikmed on kõik poisid, siis $x = 8$ *ja* $y = 0$.

Arvupaar

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 0 \end{cases}$$

on antud kahe tundmatuga võrrandi lahend, sest asetades antud võrrandisse x *asemele* 8 *ja* y *asemele* 0, *näeme, et võrrand on rahuldatud.*
Kui matemaatikaringis on 7 *poissi, siis tüdrukuid on* 1, *s. t. arvupaar*

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$$

on samuti võrrandi $x + y = 8$ *lahend.*
Nimeta veel võrrandi

$$x + y = 8$$

lahendeid.
Täida järgnev tabel nii, et iga ülestikku asetsevate arvude paar oleks võrrandi $x + y = 8$ lahendiks.

x	0	1	2		4			7	8
y				5		3	2	1	0

Mitu lahendit on võrrandil $x + y = 8$, mis vastavad antud ülesande tingimusele?

128. Näide. *Reinul ja Jüril on kahe peale kokku* 15 *rubla raha. Kui palju raha on Reinul ja kui palju Jüril?*

Lahendus: *Tähistame rahasummad nii:*

Reinul x *rubla,*
Jüril y *rubla.*

Nüüd võime kirjutada võrrandi

$$x + y = 15.$$

On võimalik, et Reinul ei olegi raha, siis

$x = 0$ ja $y = 15$.

Arvupaar

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 15 \end{cases}$$

on võrrandi $x + y = 15$ *lahend.*
Kui Reinul on 1 *kopikas ehk* 0,01 *rbl., siis Jüril on* 14,99 *rbl.*
Arvupaar

$$\begin{cases} x = 0{,}01 \\ y = 14{,}99 \end{cases}$$

on võrrandi $x + y = 15$ *teine lahend.*
Nimeta veel selle võrrandi mõni lahend.
Mitu lahendit on võrrandil $x + y = 15$, mis vastavad antud ülesande tingimustele?

129. Näide. *Ristküliku ümbermõõt on* 23 *cm. Missugused võivad olla selle ristküliku mõõtmed?*

Lahendus. *Olgu ristküliku pikkus* x *cm ja laius* y *cm. Siis ümbermõõt on* $(2x + 2y)$ *cm. Saame võrrandi*

$2x + 2y = 23.$

Jagades selle võrrandi mõlemad pooled 2*-ga, saame*

$x + y = 11{,}5.$

Leia alljärgnevas tabelis tundmatu puuduv väärtus nõnda, et x ja y vastavate väärtuste paar oleks võrrandi $x + y = 11{,}5$ lahendiks.

x	0,02		1,5	10	11,4
y		11			

Kas saab öelda, mitu lahendit on võrrandil $x + y = 11{,}5$?

130. Võrrandit kujul $ax + by = c$, kus a ja b tähendavad mistahes nullist erinevaid arve ja c mistahes arvu, nimetatakse kahe tundmatuga lineaarseks võrrandiks.

Tähed x *ja* y *tähendavad tundmatuid. Arvud* a *ja* b *on tundmatute kordajad,* c *on vabaliige. Kahe tundmatuga lineaarse võrrandi lahendiks on arvupaar, mis seda võrrandit rahuldab. Kahe tundmatuga lineaarsel võrrandil võib olla lõpmata palju lahendeid.*

131. Missugused allpool antud arvupaarid on võrrandi

$7x - 2y = 14$

lahenditeks, missugused mitte?

$\begin{cases} x = -8 \\ y = -35 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 10 \\ y = 28 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6 \\ y = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -8\frac{3}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2{,}5 \\ y = 1{,}75 \end{cases}$

132. Asenda võrrandis

$7x - 2y = 14$

x arvuga 4 ja arvuta saadud võrrandist y.
Kontrolli, kas vaadeldav x ja y väärtuste paar on võrrandi $7x - 2y = 14$ lahendiks.

133. Asenda võrrandis

$5x - 6y = 7$

y arvuga 8 ja arvuta saadud võrrandist x.
Kontrolli, kas vaadeldav x ja y väärtuste paar rahuldab võrrandit $5x - 6y = 7$.

134. On antud kolm kahe tundmatuga võrrandit ja kolm arvupaari nii, et iga arvupaar on ühe antud võrrandi lahend.
Tee iga arvupaari kohta kindlaks, missuguse võrrandi lahendiks ta on.

1) $2x - 3y = 18$; 2) $x - 5y = 20$; 3) $4x + y = 8$.

a) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 6 \\ y = -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 30 \\ y = 2 \end{cases}$

135. a) *Kui kahe tundmatuga võrrandi lahendi üks arv on antud, siis teise arvu leidmiseks asendame võrrandis vastava tundmatu antud arvuga, mistõttu saame ühe tundmatuga võrrandi. Lahendades saadud võrrandi, saamegi antud kahe tundmatuga võrrandi lahendi teise arvu.*

b) Leia võrrandi

$3x - 2y = 10$

lahend, mille üks arv on antud.

$\begin{cases} x = -6 \\ y = \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8 \\ y = \end{cases}$ $\begin{cases} x = \\ y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \\ y = 7 \end{cases}$

136. Leia võrrandist

$3x - 2y = 7$

x väärtus, kui $y = 4$; 10; 14 $\frac{1}{2}$; 16.

137. On antud võrrand

$x + y = 20$.

Mida võib öelda x väärtuste kohta, kui

$y > 10$?

138. On antud võrrand

$x + y = 0$.

Mida võib öelda x väärtuste kohta, kui

$y > 0$?

139. On antud võrrand

$x - y = 8$.

Mida võid öelda y väärtuste kohta, kui

$x < 8$?

140. *Kui kahe tundmatuga võrrandi lahendi leidmisel pole kummagi tundmatu ühiki väärtust antud, siis ühe tundmatu väärtus võetakse meelevaldselt, teise tundmatu väärtus leitakse nii, nagu juhatatud üiesandes* 135.

Leia võrrandi

$5x - 3y = 12$

lahendite hulgast neli lahendit nii, et igas lahendis oleks

$0 < x < 10$.

141. Leia võrrandi

$2x - 5y = 10$

lahendite hulgast kolm lahendit nii, et igas lahendis oleks

$-8 < y < 0$.

142. *Kui võrrandist*

$2x - y = 3$

avaldada tundmatu y, siis saame:

$-y = -2x + 3;$
$y = 2x - 3.$

Saadud võrdusest võime järeldada, et

y väärtus sõltub x väärtusest.

Mis liiki on see sõltuvus?

143. Joonesta sõltuvuse $y = 2x - 3$ graafik.
Võrdle oma joonist joonisega 30.
Joont, mille said, nimetatakse ka võrrandi $2x - y = 3$ *graafikuks.*

144. *Ülesandeist* 142 *ja* 143 *järeldub, et*

iga kahe tundmatuga lineaarne võrrand väljendab tundmatutevahelist lineaarset sõltuvust. Selle sõltuvuse graafikut nimetatakse kahe tundmatuga lineaarse võrrandi graafikuks.

Sellest järeldub, et

kahe tundmatuga lineaarse võrrandi graafik on sirge.

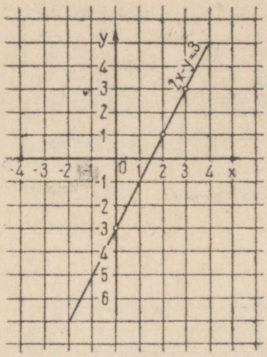
Mitme punkti koordinaate on tarvis teada kahe tundmatuga lineaarse võrrandi graafiku joonestamiseks?

145. *Kahe tundmatuga lineaarse võrrandi graafiku joonestamiseks vajalikud punktid võib kõige kergemini saada nii, et ühe punkti võtame abstsissiga* $x = 0$ *ja teise punkti ordinaadiga* $y = 0$. *Näiteks võrrandi*

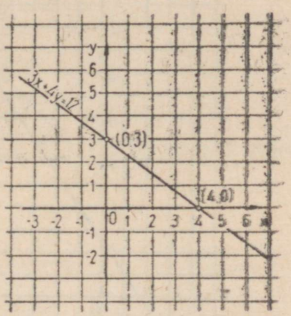
$3x + 4y = 12$

graafiku joonestamiseks kasutame punkte (0; 3) *ja* (4; 0) (*joon.* 31).
Kui antud võrrandis y kordaja on 1 *või* -1, *siis selle võrrandi saab kergesti kirjutada kujus*

$y = ax + b,$



Joon. 30.



Joon. 31.

ning ta graafiliseks kujutamiseks võib kasutada punkte $(0; b)$ *ja* $(1; a + b)$.

Kui niiviisi valitud punktid tulevad joonisel liiga lähestikku või väljapoole joonise piirkonda, siis kasutame sirge joonestamiseks muid punkte.

Joonesta antud võrrandi graafik.

a) $5x + 4y = 20$; b) $y = 2x - 3$; c) $2x + y = 3$.

146. Tee kindlaks, missugune arvupaar

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1{,}5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6 \\ y = -1{,}5 \end{cases}$

rahuldab võrrandit

$3x + 4y = 12$,

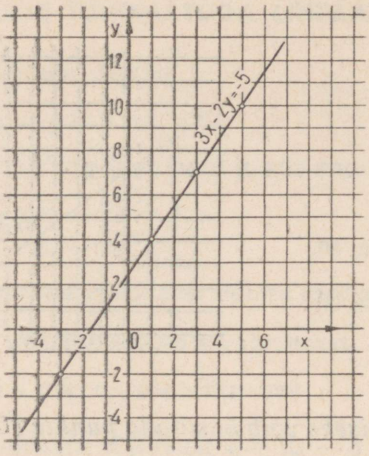
missugune mitte.

Kasutades joonist 31, millel on kujutatud võrrandi $3x + 4y = 12$ graafik, selgita, kus asuvad võrrandi graafiku suhtes need punktid, mille koordinaadid rahuldavad antud võrrandit.

Kui arvupaar rahuldab kahe tundmatuga lineaarset võrrandit, siis arvupaariga määratud punkt asetseb sirgel, mis on selle võrrandi graafikuks.

147. Joonisel 32 on esitatud võrrandi

$3x - 2y = -5$



Joon. 32.

graafik. Tee selle graafiku abil kindlaks, missugused arvupaarid on võrrandi $3x - 2y = -5$ lahenditeks, missugused mitte.

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2{,}5 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 7 \\ y = 13 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

148. Joonisel 33 on kujutatud võrrandi

$x - y = 2$

graafik. Leia joonisel esitatud sirgel punkt, mille abstsiss $x = 5$. Kui suur on selle punkti ordinaat y? Tee kindlaks, kas selle punkti koordinaadid rahuldavad antud võrrandit. Leia samal joonisel sirgel asuv punkt, mille ordinaat $y = 4$. Kui suur on selle punkti abstsiss x? Selgita, kas selle punkti koordinaadid on võrrandi $x - y = 2$ lahendiks.

Kui punkt asetseb antud võrrandi graafikul, siis selle punkti koordinaadid on antud võrrandi lahendiks.

149. Leia joonisel 33 kujutatud võrrandi

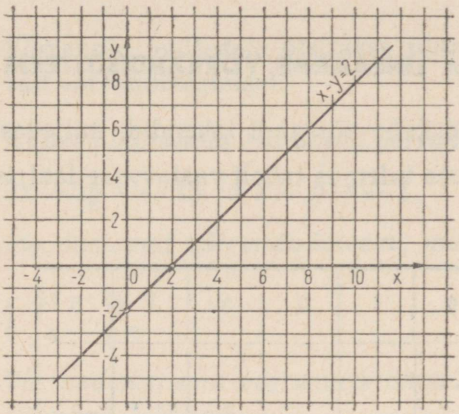
$x - y = 2$

graafiku abil selle võrrandi lahendid, kui üks arv on antud.

$\begin{cases} x = -3 \\ y = \end{cases}$ $\begin{cases} x = \\ y = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = \end{cases}$ $\begin{cases} x = \\ y = 4\frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x = 8 \\ y = \end{cases}$ $\begin{cases} x = 9 \\ y = \end{cases}$ $\begin{cases} x = \\ y = 9 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \\ y = 8 \end{cases}$

Kontrolli, kas graafiku abil leitud lahendid **rahuldavad võrrandit.**



Joon. 33.

150. Joonesta võrrandi

$2y - x = 4$

graafik ja täida saadud graafiku abil alljärgnev **tabel nii,** et iga ülestikku asetsevate arvude paar oleks antud **võrrandi** lahendiks.

x	-3		1	1,5		3	3,5	
y		1			3			4

151. 1) Leia graafiliselt võrrandi

$2x - y = 4$

lahendite hulgast viis lahendit:

a) võttes x väärtused vahemikust

$-1 \leqslant x \leqslant 5$;

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

b) võttes y väärtused vahemikust

$-4 \leqslant y \leqslant 5$.

2) Leia võrrandi

$3x + y = 12$

lahendite hulgast kolm lahendit:

a) võttes x väärtuse vabalt;

b) võttes y väärtuse vabalt.

KAHE TUNDMATUGA LINEAARNE VÕRRANDISÜSTEEM

152. Arvuta allpool antud kahe võrrandi lahendid, milledest üks arv on teada, ja kirjuta tulemus tabeli vastavasse lahtrisse:

$x - y = -1$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y								

$x - 2y = -5$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y								

Kui tabelid on täidetud, siis leia arvupaar, mis esineb mõlemas tabelis. See arvupaar on mõlema võrrandi lahendiks ehk, teisiti öeldes, see arvupaar on võrrandite

$x - y = -1$ *ja* $x - 2y = -5$

ühine lahend.

153. Leia eelmise ülesande eeskujul võrrandite

$x + y = 7$ ja $3x - 2y = -4$

ühine lahend.

154. Tee kindlaks, kas kolme arvupaari

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$$

hulgas leidub võrrandite

$3x - 5y = -15$ ja $x - y = -1$

ühine lahend.

155. Võrrandid, milledele otsitakse ühiseid lahendeid, moodustavad võrrandisüsteemi.

Näiteks ülesandes 154 *antud võrrandid*

$3x - 5y = -15$ *ja* $x - y = -1$

moodustavad võrrandisüsteemi, mida kirjutatakse nii:

$$\begin{cases} 3x - 5y = -15 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Võrrandisüsteemi võrrandite ühist lahendit nimetatakse selle **süsteemi lahendiks.**

Näiteks süsteemi

$$\begin{cases} 3x - 5y = -15 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

lahend on

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 6. \end{cases}$$

Otsusta ülesande 152 lahenduse põhjal, missugune on võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$$

lahend.

Võrrandisüsteemi lahendi leidmist nimetatakse selle **süsteemi lahendamiseks.**

KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÕRRANDISÜSTEEMI GRAAFILINE LAHENDAMINE

156. Joonisel 34 on esitatud võrrandite $x + y = 3$ ja $3x - y = 1$ graafikud. Otsusta joonise põhjal, kumba võrrandit rahuldavad järgmiste punktide koordinaadid: $(-2; 5)$; $(0; 3)$; $(3; 0)$; $(2; 5)$; $(0; -1)$; $(1{,}5; 3{,}5)$.
Leia jooniselt võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

lahend.

157. Joonesta ühes ja samas teljestikus võrrandite $x - y = 5$ ja $2x + y = 1$ graafikud. Leia saadud joonise abil süsteemi

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

lahend.

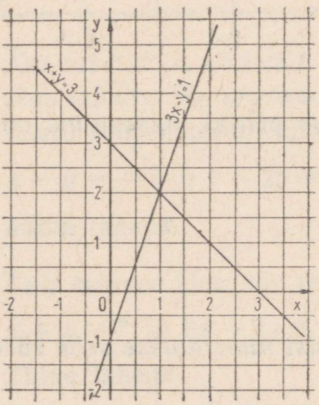
158. Joonisel 35 on kujutatud võrrandite

$105x - 260y = -624$

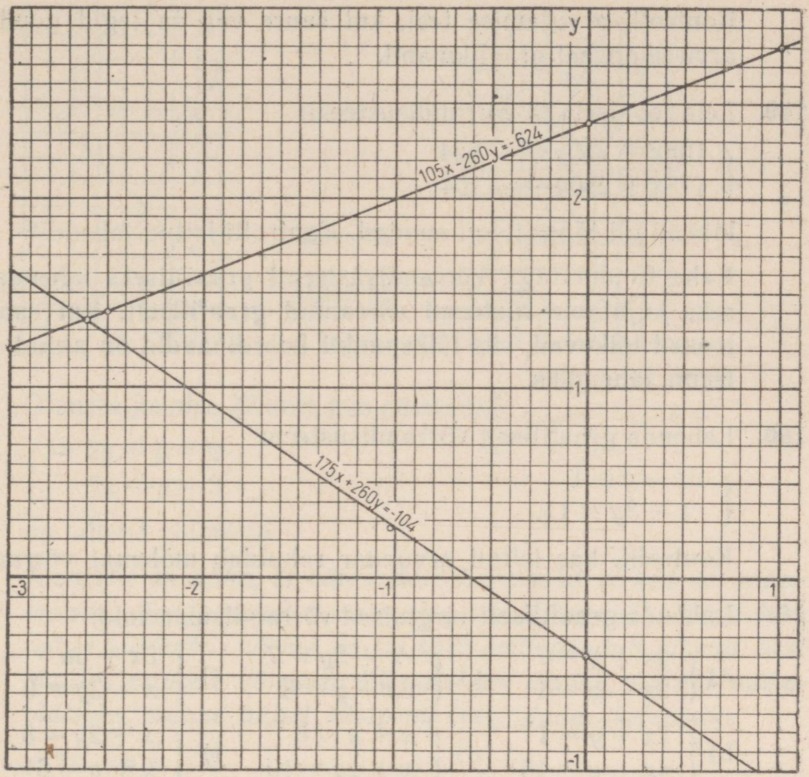
ja

$175x + 260y = -104$

graafikud.



Joon. 34.



Joon. 35.

a) Leia selle joonise abil võrrandi

$105x - 260y = 624$

lahendid, mille üks arv on antud:

$\begin{cases} x = -1 \\ y = \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = \\ y = 2{,}6 \end{cases}$

b) Leia graafiku abil võrrandi

$175x + 260y = -104$

lahendis puuduv arv:

$\begin{cases} x = \\ y = 1 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = \end{cases}$

Kontrolli arvutamise teel, kui suure vea sa tegid puuduva arvu leidmisel graafiku abil.

159. Leia jooniselt 35 võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 105x - 260y = -624 \\ 175x + 260y = -104 \end{cases}$$

lahend nii täpselt, kui suudad. Kontrolli leitud lahendit.

Kahe tundmatuga võrrandisüsteemi graafiliseks lahendamiseks kujutame süsteemi võrrandid graafiliselt. Kui saadud jooned lõikuvad, siis lõikepunkti koordinaadid on antud süsteemi lahendiks.

160. Lahenda graafiliselt võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 11. \end{cases}$$

Kontrolli, kas leitud arvupaar rahuldab mõlemat võrrandit.

161. Lahenda graafiliselt järgmised võrrandisüsteemid:

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 5x - 3y = -18 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x - y = 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$

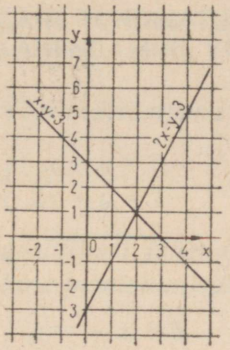
KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÕRRANDISÜSTEEMI LAHENDITE ARV

162. *Ülesannete* 156—161 *lahendamisel nägime, et kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi lahendiks on antud võrrandeid kujutavate sirgete ühise punkti koordinaadid.*

Mitu ühist punkti on kahel lõikuval sirgel? Mitu lahendit on kahe tundmatuga lineaarsel võrrandisüsteemil, kui selle süsteemi võrrandite graafikud lõikuvad?
Otsusta joonise 36 abil, mitu lahendit on süsteemil

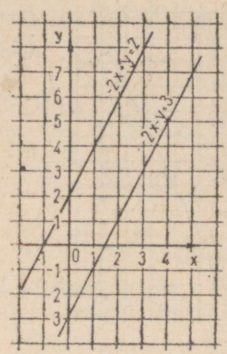
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Kahe tundmatuga lineaarsel võrrandisüsteemil on üks lahend, kui võrrandeid kujutavad sirged lõikuvad.



Joon. 36.

Joon. 37.



163. Otsusta joonise 37 abil, kas süsteemil

$$\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

on lahend või mitte.

Jooniselt on näha, et võrrandeid kujutavad sirged on paralleelsed. Seega puudub neil sirgetel lõikepunkt. Vaadeldes antud süsteemi näeme, et sel süsteemil puudub lahend, sest muutes esimese võrrandi liikmete ees olevad märgid vastupidiseks, saame antud süsteemi teisendada süsteemiks

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

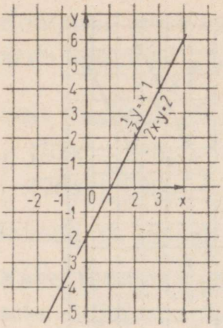
Viimase süsteemi võrrandite nõuded on aga vasturääkivad: esimene võrrand nõuab, et ühe tundmatu kahekordse ja teise tundmatu vahe peab võrduma —2-ga, teine võrrand nõuab aga, et sama vahe peab võrduma 3-ga. Niisugust võrrandisüsteemi nimetatakse **vastuoluliseks.**

Kahe tundmatuga lineaarsel võrrandisüsteemil puudub lahend, kui võrrandeid kujutavad sirged on paralleelsed.

164. *Joonisel 38 on kujutatud võrrandisüsteemi*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y = x - 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

võrrandite graafikud. Need graafikud, nagu jooniselt näha, ühtivad. Nendel sirgetel on lõpmata palju ühiseid punkte. Seega antud võrrandisüsteemil on lõpmata palju lahendeid.



Joon. 38.

See selgub ka süsteemi vaatlemisel: korrutades esimese võrrandi liikmeid — 2-ga ja viies siis tundmatud vasakule poole, saame $2x - y = 2$. *Seega selle süsteemi esimene võrrand on sama mis teine võrrand. Ühe võrrandi kõik lahendid on ka teise võrrandi lahenditeks.*

Kahe tundmatuga lineaarsel võrrandisüsteemil on lõpmata palju lahendeid, kui võrrandite graafikud ühtivad.

Ülesandeist 162—164 *selgub, et*

kahe tundmatuga lineaarsel võrrandisüsteemil on kas üks lahend, mitte ühtegi lahendit või lõpmata palju lahendeid.

Lahenda graafiliselt võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

Antud võrrandite graafiliseks kujutamiseks esita võrrandid kujus $y = ax + b$ ning rakenda ülesandes 76 antud graafilise kujutamise juhist.
Mitu lahendit on sel süsteemil?

KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÕRRANDISÜSTEEMI LAHENDAMINE VÕRDLEMISVÕTTEGA

165. *Võrrandisüsteemi*

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

graafilisel lahendamisel on sobiv antud võrrandite graafikute joonistamiseks need võrrandid esitada kujus

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = 2x - 1. \end{cases}$$

Süsteemi lahendis on mõlemas võrrandis esineva tundmatu y väärtus üks ja seesama. Teisiti öeldes, viimases süsteemis on mõlema võrrandi vasakud pooled võrdsed ja seega ka paremad pooled

$$-x + 5 = 2x - 1.$$

Nii oleme saanud võrrandi, milles esineb ainult tundmatu x. tundmatu y on kõrvaldatud ehk **elimineeritud.**
Lahendades selle võrrandi, saame

$3x = 6$, *millest* $x = 2$.

Asendades antud süsteemi ühes võrrandis, näiteks esimeses, tähe x leitud väärtusega 2, saame y väärtuse

$y = -2 + 5 = 3$.

Leitud arvude õigsust saab kontrollida peast.
Antud süsteemi lahend on

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Võrrandisüsteemi eespool rakendatud lahendamisviisi nimetatakse **võrdlemisvõtteks.**
Lahenda võrdlemisvõtte abil võrrandisüsteemid:

a) $\begin{cases} y = x + 4 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y - x = 7 \\ y + 3x = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = y + 8 \\ x = 3y - 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y = -12 \\ x + y = -7 \end{cases}$

KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÕRRANDISÜSTEEMI LAHENDAMINE LIITMISVÕTTEGA

166. *Kui antud võrrandisüsteemil on üksainus lahend, siis selle süsteemi võrrandites tähendab kumbki tundmatu ühtainust arvu ja seega ka võrrandite pooled tähendavad kindlaid arve.*

Näiteks süsteemi

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$$

esimese võrrandi vasak pool tähendab arvu 12.

Missugust arvu tähendab selle süsteemi teise võrrandi vasak pool?

Antud süsteemi lahendamiseks liidame esimese võrrandi pooltega teise võrrandi vastavad pooled, saame

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 12 \\ x - 3y = -3 \\ \hline 3x \qquad = 9; \end{array}$$

siit

$x = 3.$

y väärtuse leidmiseks asendame antud süsteemi ühes võrrandis, näiteks teises, tähe x leitud väärtusega 3, *saame*

$$\begin{aligned} 3 - 3y &= -3; \\ -3y &= -6; \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Kontrollimiseks arvutame süsteemi võrrandite vasakud pooled, asendades neis x ja y leitud väärtustega. Saame

$2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 6 + 6 = 12;$ | $3 - 3 \cdot 2 = 3 - 6 = -3;$
$V_1 = P_1.$ | $V_2 = P_2.$

Seega antud süsteemi lahend on

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$$

Nagu näeme, on antud süsteemi esimeses võrrandis y kordajaks $+3$, *teises võrrandis* -3. *Need kordajad on vastandarvud ja seetõttu võrrandite vasakute poolte liitmisel kaob*

liige tundmatuga y. Nii õnnestus kõrvaldada ehk **elimineerida** *tundmatu y.*

Võrrandisüsteemi eespool kirjeldatud lahendamisviisi nimetatakse **liitmisvõtteks.**

Lahenda peast võrrandisüsteemid:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 5x - 2y = -22 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 7y = 7 \\ -4x + y = -31 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - 4y = 21 \\ 2x + 4y = 51 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x + 2y = 11 \\ 5x - 2y = 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + y = 19 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ -x + y = 4 \end{cases}$

167. Näide. *Lahendame liitmisvõttega võrrandisüsteemi*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 6x - y = 13 \end{cases}$$

Lahendus. *Kui siin teise võrrandi liikmeid korrutame 3-ga, siis saame*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 18x - 3y = 39 \end{cases}$$

Liites nüüd võrrandite vastavad pooled, saame

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 21 \\ 18x - 3y = 39 \\ \hline 20x \qquad = 60; \end{array}$$

siit

$x = 3.$

Asendades antud süsteemi ühes võrrandis, näiteks esimeses, tähe x leitud väärtusega 3, saame leida tundmatu y.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 3y &= 21; \\ 3y &= 21 - 6; \\ 3y &= 15; \\ y &= 5. \end{aligned}$$

Eespool toodud arvutused kirjutame lühemalt nõnda:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 6x - y = 13 \end{cases} \quad \Big| \cdot 3 \quad \Big| \quad \begin{array}{r} 2x + 3y = 21 \\ 18x - 3y = 39 \\ \hline 20x \qquad = 60; \\ x = 3. \end{array}$$

$6 + 3y = 21;$
$3y = 15;\ y = 5.$

Kontroll.

$2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 6 + 15 = 21;$ $V_1 = P_1.$ | $6 \cdot 3 - 5 = 18 - 5 = 13;$ $V_2 = P_2.$

Vastus. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5. \end{cases}$

168. Lahenda võrrandisüsteemid.

a) $\begin{cases} 3x - 4y = -20 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x - 3y = 1 \\ 5x - 2y = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 15x + 23y = -10 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}$

169. *Võrrandisüsteemi lahendamisel liitmisvõttega tuleb aga enamasti korrutada* **mõlema** *võrrandi pooli selliste arvudega, et ühe tundmatu kordajad tuleksid vastandarvud.*

Näide.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5x + 6y = 17 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot \quad 5 \\ \cdot (-3) \end{array} \quad \Big| \quad \begin{array}{r} 15x + 20y = 55 \\ -15x - 18y = -51 \\ \hline 2y = 4; \\ y = 2. \end{array}$$

$3x + 4 \cdot 2 = 11;$
$3x = 3;$
$x = 1.$

Kontroll.

$3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 3 + 8 = 11;$ $V_1 = P_1.$ | $5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 5 + 12 = 17;$ $V_2 = P_2.$

Vastus. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$

170. Lahenda süsteemid:

a) $\begin{cases} 6x + 7y = -8 \\ 8x + 9y = -10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = -10 \\ 4x - 5y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x + 4y = 78 \\ 5x + 7y = 64 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 14y = 47 \\ 2x - 21y = 1 \end{cases}$

171. *Võrrandisüsteeme, mille võrrandites tundmatuga liikmed on vasakul poolel ja vabaliikmed paremal poolel, nimetatakse* **normaalkujulisteks.**

Teisenda võrrandisüsteemid normaalkujulisteks ja lahenda need.

a) $\begin{cases} 6x = 18 - 5y \\ 4x = y - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x = 127 - 3y \\ 3y = 97 - 4x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 20 + y = 3x \\ 7x - 100 + 3y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2 - y = -3x \\ 3y = 10 - 12x \end{cases}$

KAHE TUNDMATUGA LINEAARSE VÕRRANDISÜSTEEMI LAHENDAMINE ASENDUSVÕTTEGA

172. *Ühe tundmatu saame võrrandisüsteemist elimineerida ka sel teel, kui lahendame süsteemi ühe võrrandi ükskõik kumma tundmatu suhtes ning asetame siis saadud avaldise süsteemi teise võrrandisse vastava tundmatu asemele.*

Näide.

$\begin{cases} 7x - 3y = 29 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$

Lahendus. *Avaldame teisest võrrandist tundmatu y.*

$y = 12 - 2x.$

Asendame nüüd esimeses võrrandis tundmatu y avaldisega $12-2x$, *saame*

$7x - 3(12 - 2x) = 29.$

Asendamise tulemusena saame ühe tundmatuga võrrandi, milles y enam ei esine. Lahendame selle võrrandi:

$7x - 36 + 6x = 29;$

$13x = 65;$

$x = 5.$

Võrduse

$y = 12 - 2x$

abil leiame nüüd y väärtuse:

$y = 12 - 2 \cdot 5 = 12 - 10 = 2.$

Kontroll.

$7 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 35 - 6 = 29;$ $V_1 = P_1.$ | $2 \cdot 5 + 2 = 10 + 2 = 12;$ $V_2 = P_2.$

Vastus. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2. \end{cases}$

Asendusvõtte rakendamisel on tarvis silmas pidada, et kui me lahendasime ühe *võrrandi mingi tundmatu suhtes, siis asendamine peab toimuma* teises *võrrandis. Tundmatu avaldamist ja asendamist ei saa teostada ühe ja sama võrrandi abil, sest siis saame samasuse, millest sarnaste liikmete koondamisel tundmatu kaob.*

Kontrolli seda võrrandiga

$2x + y = 12,$

lahendades selle y suhtes ja asendades nüüd tundmatu y samas võrrandis saadud avaldisega.
Asendusvõtte kasutamine on eriti sobiv siis, kui ühe tundmatu kordajaks on arv 1 *või* —1, *sest siis on selle otsitava suhtes võrrandi lahendamine eriti hõlpus.*

173. Lahenda asendusvõtte abil järgmised võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} 5x + 8y = 91 \\ 11x + y = 18 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 13x + y = 27 \\ 12x + 3y = 27 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x + y = 17 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 9x - y = 81 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 14x - y = 38 \\ 7x + 2y = 29 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x - 5y = 5 \\ 3x - 2y = 54 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + 17y = 49 \\ 3x - y = 43 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 16x - 5y = -3 \\ x + 4y = 30 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x = 37 - y \\ 3y + 6 = 4x \end{cases}$

10) $\begin{cases} x = 5y - 13 \\ 7y - 25 = 2x \end{cases}$

174. Lahenda võrrandisüsteemid.

1) $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x + 2y = 47 \\ -7x + 3y = -17 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + 5y = 110 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 9x - 2y = 6 \\ 7x + y = 20 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x + 2y = 23 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x + 6y = 39 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 8x - 3y = 17 \\ 9x - 2y = 26 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x + y = 25 \\ 5x - y = 23 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x + 4y = 16 \\ 3x - 4y = 16 \end{cases}$

175. *Võrrandisüsteemide lahendamiseks tuleb kõigepealt lihtsustada süsteemi kuuluvad võrrandid, lihtsustades algul ühe, siis teise võrrandi.*

Näide.

$$\begin{cases} \frac{x+y}{8} + \frac{x-y}{6} = 5 \\ 3(x+y) - 4(x-y) = 120 \end{cases}$$

Lahendus.

1) $\frac{\overset{3}{\smile}}{\frac{x+y}{8}} + \frac{\overset{4}{\smile}}{\frac{x-y}{6}} = \overset{24}{\overbrace{5}}$

$3(x + y) + 4(x - y) = 120;$
$3x + 3y + 4x - 4y = 120;$
$7x - y = 120;$

2) $3(x + y) - 4(x - y) = 120;$
$3x + 3y - 4x + 4y = 120;$
$-x + 7y = 120;$

3) $\begin{cases} 7x - y = 120 \\ -x + 7y = 120 \end{cases} \Big| \cdot 7 \Big| \begin{array}{r} 49x - 7y = 840 \\ -x + 7y = 120 \\ \hline 48x = 960; \\ x = 20. \end{array}$

$7 \cdot 20 - y = 120;$
$y = 140 - 120;$
$y = 20.$

Kontroll.

$\frac{20+20}{8}+\frac{20-20}{6}=\frac{40}{8}=5;$ $V_1=P_1.$

$3(20+20)-4(20-20)=$
$=3\cdot 40-4\cdot 0=120;$
$V_2=P_2.$

Vastus.

$\begin{cases} x=20 \\ y=20. \end{cases}$

176. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} 2(7x+3y)-4(6x-5y)=280 \\ 5(11x+7y)-2(15x+9y)=1760 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2(3x-5y)-3(x-5)=56-4(6+2y) \\ 2(4x-3)-33=5(x-2y)+2(3y-5) \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-4)(y+7)=(x-3)(y+4) \\ (x+5)(y-2)=(x+2)(y-1) \end{cases}$

4) $\begin{cases} (x+4)(y+5)=(x+1)(y+8) \\ (2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1) \end{cases}$

5) $\begin{cases} (3x+4)^2+(3y-8)^2-18xy=9(x-y)^2 \\ (x+y)^2-(x+3)^2+2x(9-y)=(y+7)^2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} (2x+1)^2+(y+2)^2=4(x+1)^2+(y+1)^2 \\ 9x^2+4y^2=(3x+1)^2+(2y-1)^2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} (8x+y)(8x-y)+26=x(64x+1)-y(y-1) \\ (x+y)^3-(x-y)+8=x^3+y^3+3xy(x+y) \end{cases}$

8) $\begin{cases} (x-y)^3+12=x^3-y^3-3xy(x-y)+x+y \\ (x+2y)(x-2y)+8=x(x+1)-y(4y+1) \end{cases}$

9) $\begin{cases} 8\{x+2[y-2(x+3)]\}=29 \\ 2\{2y-2[y-2(x+1)]\}=9 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2\{x+3[y-2(x-1)]\}=5 \\ 5\left\{6\left[\frac{1}{2}(x+1)-y\right]-x\right\}=6 \end{cases}$

177. Lahenda võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 2 \\ \frac{2x+1}{3} - \frac{3y+1}{5} = \frac{47}{15} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{2}{3}y + 2 = 3x - 2{,}5y \\ 10 - \frac{1}{4}(2x - y) = \frac{4}{7}x + \frac{2}{3}y \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x-y}{2} + 3 = \frac{2x+y}{5} \\ 8 - \frac{x-2y}{4} = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 8 \\ \frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{4} = 11 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{3x+4y}{5} - \frac{14x-3y}{15} = \frac{7y-x}{10} + \frac{y-x}{2} \\ \frac{4x+3y-3}{7} + \frac{5x-2y+7}{14} = \frac{9y-5x}{21} + \frac{3y}{4} \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{8x-y}{9} - \frac{7x+y}{12} = \frac{13x-3y}{16} - \frac{5x+8}{18} - \frac{1}{144} \\ \frac{11x-4y}{15} + \frac{11x+4y}{20} = \frac{17x+2y}{30} + \frac{24x+y}{30} \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{5} \\ \frac{x+4}{y+4} = \frac{2}{5} \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \frac{5}{y-1} = \frac{4}{x-1} \\ \frac{1}{2y-1} = \frac{1}{2x+1} \end{cases}$

178. Lahenda võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} \frac{1-9x}{1-y} = -4 \\ \frac{x}{2x-10} - \frac{5y}{6x-30} = \frac{1}{20-4x} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2 = \frac{xy+13}{y+6} \\ y - 2 = \frac{xy-13}{x+4} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{y-6}{x-4} + \frac{10}{x^2-16} = \frac{y+6}{x+4} \\ \frac{5}{x^2-3x} - \frac{3}{xy-3y} = \frac{10}{xy} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = m \\ x - y = n \end{cases}$

5) $\begin{cases} y + 3(y+3{,}5) = 6(y-1) + x \\ \frac{y+6}{y-4} = \frac{x+3}{x-5} - \frac{49}{xy-5y-4x+20} \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = py + q \\ y = ax + b \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{1}{2x+1} + \frac{8x^3+3y}{8x^3+1} = \frac{4x^2}{4x^2-2x+1} \\ \frac{18}{x^3+2x^2+x} - \frac{1}{xy-x^2} = \frac{x}{x^3-(y-2)x^2-(2y-1)x-y} \end{cases}$

179. *Ülesande lahendamisel kahe tundmatu abil tuleb koostada kahest võrrandist koosnev süsteem. Lahendame näitena võrrandisüsteemi abil järgmise ülesande.*

Ülesanne. *Töökoda sai tähtajalise tellimuse valmistada suveniirmärke. Kui töökoda valmistaks iga päev* 180 *märki, siis jääks tähtpäevaks* 600 *märki puudu. Kui aga töökoda valmistaks iga päev* 210 *märki, siis võiks tähtpäevaks valmistada* 300 *märki rohkem kui tellitud. Mitu märki telliti ja mitmepäevane oli tähtaeg?*

Lahendus. *Telliti* x *märki. Tähtaeg oli* y *päeva. Valmistades* 180 *märki päevas, saaks tähtajaks valmis* $180y$ *märki, mis on* 600 *võrra vähem kui tellitud märkide arv, seega* 600 *võrra vähem kui* x *ehk* $x - 600$.

Saame võrrandi

$$x - 600 = 180y.$$

Valmistades aga 210 *märki päevas, saaks tähtajaks valmis* $210y$ *märki, mis on andmete põhjal* 300 *võrra suurem kui* x, *seega*

$$x + 300 = 210y.$$

Nii oleme saanud võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x - 600 = 180y \\ x + 300 = 210y. \end{cases}$$

Lahendame selle võrrandisüsteemi, teisendades ta esmalt normaalkujuliseks:

$$\begin{cases} x - 180y = 600 \\ x - 210y = -300 \end{cases} \quad \left| \cdot (-1) \right. \quad \left| \begin{array}{r} x - 180y = 600 \\ -x + 210y = 300 \end{array} \right.$$

$$30y = 900;$$

$$y = 30 \text{ (päeva)}.$$

$x - 180 \cdot 30 = 600$; $x - 5400 = 600$; $x = 6000$ (*märki*).

Kontroll. *Kui töökoda valmistaks päevas* 180 *märki, siis* 30 *päevaga valmiks* $30 \cdot 180 = 5400$ *märki. Vajalikust märkide arvust* 6000 *jääks seega puudu* $6000 - 5400 = 600$ *märki.*

Kui töökoda valmistaks päevas aga 210 *märki, siis* 30 *päevaga valmiks* $30 \cdot 210 = 6300$ *märki, mis on* $6300 - 6000 = 300$ *märgi võrra rohkem, kui vajati. Ülesanne on lahendatud õigesti.*

Vastus. *Töökojalt telliti* 6000 *suveniirmärki tähtajaga* 30 *päeva.*

180. Sookurg lendas pärituult kiirusega 63 km tunnis, vastutuult aga kiirusega 37 km tunnis. Leia sookure lennukiirus tuulevaikse ilmaga ja tuule kiirus.

181. Aerutaja liikus jõel pärivoolu kiirusega 15 km tunnis ja vastuvoolu kiirusega 10 km tunnis. Arvuta aerutaja liikumise kiirus seisvas vees ja jõe voolu kiirus.

182. Klassis on 32 õpilase jaoks 25 pinki. Osa neist on kaheistmelised, osa üheistmelised. Vabu kohti pole. Kui palju on kaheistmelisi ja kui palju üheistmelisi pinke?

183. Rahakotis on 16 metallraha, 20- ja 5-kopikalised, kokku 185 kopikat. Mitu 20- ja mitu 5-kopikalist on rahakotis?

184. Õe ja venna vanus on kokku 50 aastat, 10 aastat tagasi oli vend 2 korda nii vana kui õde. Kui vanad on nad praegu?

185. Isa ja ema vanus on kokku 67 aastat. 16 aasta eest oli isa 1,5 korda vanem kui ema. Arvuta isa ja ema vanus.

186. Kahekohalise arvu ristsumma on 11. Kui numbrite järjekorda muuta, tekib arv, mis on eelmisest 63 võrra väiksem. Mis arv see on?

187. Kahekohalise arvu ristsumma on 12. Kui selle arvu numbrite kohad vahetada, siis saame arvu, mis on eelmisest 18 võrra suurem. Leia see arv.

188. Postkaardid margistatakse 3-kopikase ja kirjad 4-kopikase postmargiga. Asutus saatis välja kokku 15 postkaarti ja kirja, millele tuli postmarke panna 57 kopika eest. Mitu postkaarti ja mitu kirja asutus saatis?

189. Sulepea on 1 kop. kallim kui pliiats. 14 kopika eest saab osta 5 sulepead ja 4 pliiatsit. Kui kallis on sulepea ja kui kallis on pliiats?

190. 3 hõõglambi ja 8 meetri juhtmetraadi eest maksti 1,15 rubla, 5 hõõglambi ja 12 meetri juhtmetraadi eest maksti aga 1,85 rubla. Leia hõõglambi ja juhtmetraadi meetri hind.

191. Kolme aasta pärast on ema 3 korda vanem tütrest, seitsme aasta eest oli ema aga 7 korda vanem tütrest. Kui vana on ema ja kui vana on tütar?

192. 2 kg peensuhkrut ja 4 kg tükksuhkrut maksab 5,4 rubla, kuid 4 kg peensuhkrut ja 2 kg tükksuhkrut maksab 5,1 rubla. Arvuta peensuhkru ja tükksuhkru kilogrammi hind.

193. 1 kg riisi ja 2 kg jahu maksab 1,25 rbl. Kui aga osta 2 kg riisi ja 3 kg jahu, siis tuleb maksta 2,23 rbl. Arvuta riisi ja jahu kilogrammi hind.

194. 1 kg makarone ja 3 kg odratangu maksab 0,86 rbl. Ema ostis 2 kg makarone ja 8 kg odratangu ja maksis 2,02 rbl. Kui palju maksis kilogramm makarone ja kui palju kilogramm odratangu?

195. Kilogramm juustu maksab 0,12 rbl. rohkem kui kilogramm võid. Kilogramm juustu ja kilogramm võid maksab kokku 5,68 rbl. Arvuta juustu ja või kilogrammi hind.

196. Kui ristkülikukujulise aia pikkust vähendada 10 m võrra ja laiust suurendada 5 m võrra, siis aia pindala väheneb 350 m^2 võrra. Kui aga laius jätta muutmata ja pikkust suurendada 10 m võrra, siis aia pindala suureneb 800 m^2 võrra. Leia aia pikkus ja laius.

197. Elamu põhiplaanil on ristküliku kuju. Kui maja pikkust vähendada 1 m võrra ja laiust suurendada 1 m võrra, siis elamu põhipindala suureneb 24 m^2 võrra. Kui pikkust suurendada aga 1 m võrra ja laiust niisama palju, siis see pindala suureneb 56 m^2 võrra. Arvuta plaanis ette nähtud elamu pikkus ja laius.

198. Poisil on 2 korda rohkem õdesid kui vendi, igal õel aga on niisama palju vendi kui õdesid. Mitu last on perekonnas?

199. Kolmnurgas ABC tipu C juures olev välisnurk on 111°. Nurk A on nurgast B 10° võrra suurem. Arvuta kolmnurga ABC nurgad.

200. Trapetsi kesklõigu pikkus on 8 cm, üks alus on teisest 2 cm võrra pikem. Leia trapetsi alused.

201. Meres ujuvast jääpangast ulatub välja 2000-kuupmeetrine osa. Jää erikaal on 0,9 ja merevee erikaal 1,03. Leia jäätüki ruumala ja kaal.

202. Kivi külge seoti nii suur korgitükk, et nad vees üheskoos ei vaju põhja ega kerki ka pinnale. Kivi erikaal on 3 ja korgi erikaal 0,24. Kui palju kaalub kivi ja kui palju kaalub kork, kui kokku kaaluvad nad 11,5 kg?

203. Kui otsitavat arvu jagada 7-ga, siis jääk on 6. Kui otsitavat arvu jagada 11-ga, siis jääk on 1, kuid jagatis on eelmisest jagatisest 5 võrra väiksem. Leia see arv.

204. Kui murru lugejat suurendada 1 võrra ja nimetajat vähendada 1 võrra, siis murd saab võrdseks 1-ga. Kui lugejat vähendada 1 võrra ja nimetajat suurendada 1 võrra, siis murd saab võrdseks $\frac{1}{2}$-ga. Mis murd see on?

205. Tükk hõbeda ja tina sulamit kaalub 10 g. Selle sulami erikaal on 9. Hõbeda erikaal on 10,2 ja tina erikaal 7,3. Kui palju hõbedat ja kui palju tina on selles sulamis?

206. Ühel riiulil oli 7 korda rohkem raamatuid kui teisel. Esimeselt riiulilt võeti 12 raamatut ära ja teisele riiulile pandi 8 raamatut juurde, mistõttu nüüd esimesel riiulil on 3 korda rohkem raamatuid kui teisel. Mitu raamatut oli enne kummalgi riiulil?

207. Kahest sadamast, mille vahemaa on 660 km, väljusid samaaegselt teineteisele vastu kaks aurikut. 8 tunni pärast oli aurikute vahemaa 396 km. Leia kummagi auriku liikumise kiirus, teades, et üks aurik liikus tunnis 3 km rohkem kui teine.

208. Tallinnast väljus kaubarong Tartu poole, samaaegselt väljus reisirong Tartust Tallinna poole. Need rongid kohtusid 2 tunni pärast. Leia kummagi rongi keskmine kiirus, teades, et Tallinnast Tartusse on raudteed mööda 200 km ja et reisirong läbis tunnis 40 km võrra rohkem kui kaubarong.

209. Lahenda alljärgnevad ülesanded kahel viisil: kahe tundmatu abil ja ühe tundmatu abil.

a) Kahe arvu summa on 183, nende arvude vahe on 9. Leia need arvud.
b) Leia kaks niisugust arvu, mille summa on 63 ja vahe 11.
c) Kahe arvu summa on 44. Kahekordse suurema arvu ja kolmekordse väiksema arvu summa on 109. Leia need arvud.
d) Kahe arvu summa on 45. Kui suurendaksime ühte neist 2 korda ja teist 5 korda, siis oleks nende summa 165. Mis arvud need on?

210. Tugitool ja diivan maksavad kokku 208,1 rbl. Diivan on tugitoolist 4 korda kallim. Kui palju maksab diivan ja kui palju tugitool?

211. Ühes klassis müüdi teatrietendusele 20 kallimat ja 16 odavamat piletit, kokku 23 rubla eest. Teises klassis müüdi aga 18 kallimat ja 24 odavamat piletit, kokku 25,5 rubla eest. Arvuta piletite hinnad.

212. On olemas 90-protsendilist ja 70-protsendilist hapet. Kui palju tuleb võtta ühte ja kui palju teist, et saada 1 kg a) 75-protsendilist hapet? b) 80-protsendilist hapet?

213. Taheti osta 3 vaipa ja 2 põrandariiet, mis maksid kõik kokku 117 rubla. Kuid vaiba hinda alandati 10% ja põrandariide hinda 15% ning sama ostu eest tuli maksta 104,7 rbl. Kui palju maksis vaip ja kui palju põrandariie enne hinnaalandamist? Kui palju maksid need esemed pärast hinnaalandamist?

214. On hõbedat prooviga 850 ja prooviga 720. Kui palju tuleb võtta hõbedat kummastki liigist, et saada 1 kg 40 g hõbedat prooviga 800?

215. Keldrist pumbatakse vett välja kahe pumbaga. Kui üks pump oli töötanud 2 tundi ja teine 3 tundi, siis oli vee hulk keldris vähenenud 1020 m³ võrra. Pärast seda kui esimene pump oli töötanud veel 1 tund ja teine 2 $\frac{1}{2}$ tundi, oli vee hulk keldris vähenenud veel 690 m³ võrra. Mitu kuupmeetrit vett pumpab välja kumbki pump tunnis?

216. Gaasiarve järgi tuli ühel kuul maksta 173 m³ gaasi eest koos mõõtja üüriga kokku 3,56 rbl., teisel kuul aga 121 m³ gaasi eest koos mõõtja üüriga 2,52 rbl. Arvuta ühe kuupmeetri gaasi hind ja mõõtja ühe kuu üür.

217. a) Arvuta x ja y, teades, et

$(x + y) : (x + 1) : (9 - y) = 3 : 2 : 1.$

Näpunäide. *Võrrete reast* $a : b : c = k : m : n$

saab kirjutada välja võrded, nagu

$a : b = k : m$ ja $b : c = m : n.$

b) Leia x ja y väärtused, kui

$(3x - 7) : (y + 7) : (x - y) = 5 : 3 : 1.$

218. Üks traktorist künnab vahetuses 2 hektarit rohkem kui teine. Töötades koos 5 vahetust, kündsid nad 80 hektarit. Mitu hektarit kündis kumbki traktorist ühes vahetuses?

219. Noortepargi basseini täidetakse veega kahe kraani kaudu. Ühest kraanist voolab tunnis 4 m³ vett rohkem kui teisest. Kui mõlemad kraanid avada 4-ks tunniks, siis voolab basseini 400 m³ vett. Mitu kuupmeetrit vett voolab kummastki kraanist ühes tunnis?

220. Leia õpiku lisas esitatud joonise abil

a) 5 m³ betooni kaal tonnides;
b) 8 tihumeetri kuivade kuuselaudade raskus;
c) mitu tihumeetrit kuivi tammelaudu on autokoormas, mis kaalub 3,5 tonni?
d) mitu kuupmeetrit märga liiva on autokoormas, mis kaalub 5 tonni?

5. RUUTFUNKTSIOON JA RUUTVÕRRAND

FUNKTSIOON $y=x^2$

221. *Korrutustabeli kõige otstarbekohasem kuju on järgmine:*

	1	2	3	4	5	6	...
1	1	2	3	4	5	6	...
2	2	4	6	8	10	12	...
3	3	6	9	12	15	18	...
4	4	8	12	16	20	24	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...

«Väikeses» korrutustabelis on esimeses reas ja esimeses veerus tegurid 1 *kuni* 10, *«suures» korrutustabelis aga* 1 *kuni* 20.

Valmista endale niisugune «suur» korrutustabel.
Mitu korrutist on «väikeses» korrutustabelis ja mitu «suures»?
Mitu korda on korrutisi «suures» tabelis rohkem kui «väikeses»?

222. Raamatu leheküljel on n rida, igas reas n tähte. Mitu tähte on raamatu leheküljel?

223. Kolhoosi aiandis on x rida õunapuid, igas reas x õunapuud? Mitu õunapuud on kolhoosi aiandis?

224. Millega võrdub ruudu pindala y, kui ruudu külg on x?
Mitu korda suureneb ruudu pindala, kui külje pikkust suurendada 2 korda? 3 korda? 4 korda?

225. Koosta x ja x^2 vastavate väärtuste tabel:

x	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
x^2													

Selgita tabeli andmete põhjal, mitu korda suureneb x^2, kui arvu x suurendada 2 korda, 3 korda, 4 korda, 10 korda, 100 korda.

Mitu korda x^2 väheneb, kui arvu x vähendada 2 korda, 3 korda, 10 korda?

226. Leia arvutamise teel, mitu korda on

a) 30^2 suurem kui 3^2 c) 200^2 suurem kui 2^2

b) 40^2 „ „ 4^2 d) 600^2 „ „ 6^2

227. Leia, mitu korda on

a) $0{,}8^2$ väiksem kui 8^2 c) $0{,}86^2$ väiksem kui 86^2

b) $1{,}5^2$ „ „ 15^2 d) $0{,}92^2$ „ „ 92^2

228. *Tõestame, et*

kui arvu suurendada k korda, siis arvu ruut suureneb k^2 korda.

Tõestus. *Olgu antud sõltuvus*

$y = x^2$.

Anname argumendile x mingi väärtuse x_1, siis vastavalt $y_1 = x_1^2$, kui aga $x = kx_1$, siis $y = (kx_1)^2 = k^2x_1^2$. Siit näeme, et funktsiooni y teine väärtus y_2 on k^2 korda suurem kui esimene väärtus y_1. Seda oligi tarvis tõestada.

229. *Eelmisest ülesandest järeldub, et*

kui suurendame arvu 10, 100, ... korda, siis arvu ruut suureneb 100, 10 000, ... korda.

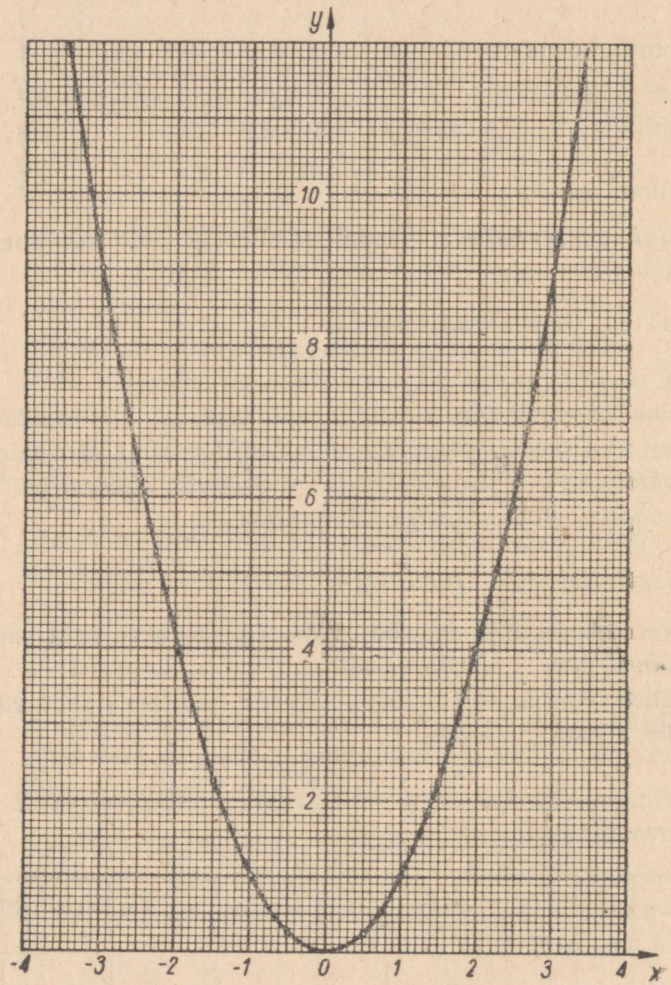
kui vähendame arvu 10, 100, ... korda, siis arvu ruut väheneb 100, 10 000, ... korda.

230. a) Valmista funktsiooni $y = x^2$ graafik, täites eelnevalt alljärgneva tabeli.

x	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}8$	$-0{,}4$	0	0,4	0,8	1	1,5	2	3
x^2													

Konstrueerides punktid, mis kujutavad tabelis antud väärtusi, ning tõmmates läbi nende punktide sujuva kõvera, saame funktsiooni graafiku.
Graafiku joonestamiseks võib kasutada kõverjoonlaudu ehk **lekaale.**

Funktsiooni $y = x^2$ *graafikut nimetatakse* **paraboliks.** *Joonistelt* 39 *näed, et parabool, mis on funktsiooni* $y = x^2$ *graafikuks, on y-telje suhtes sümmeetriline. Sümmeetrilisus järel-*



Joon. 39.

dub ka sellest, et abstsissidele x ja $-x$ vastavad ordinaadid on võrdsed, sest $x^2 = (-x)^2$.

Parabooli sümmeetriatelge nimetatakse lühidalt **parabooli teljeks.** *Parabooli ja tema telje ühist punkti nimetatakse* **parabooli haripunktiks.**

Nimeta joonisel 39 esitatud parabooli haripunkti koordinaadid.

Kuidas saab funktsiooni $y = x^2$ graafiku järgi joonestada funktsiooni $y = -x^2$ graafikut?

Pane tähele, et iga nullist erineva x väärtuse korral on x^2 positiivne ja $-x^2$ negatiivne, kuid nende absoluutväärtused on võrdsed.

Leia funktsiooni $y = x^2$ graafiku abil ruudu pindala, kui ruudu külje pikkus on 2,7 cm.

Leia funktsiooni $y = x^2$ graafiku abil ruudu külje pikkus, kui ruudu pindala on 7 cm^2.

231. Leia $y = x^2$ graafiku abil ruudu pindala, kui ruudu külje pikkus on

a) 1,4 cm; 1,8 cm; 2,6 cm; 2,8 cm; 2,9 cm;
b) 0,6 cm; 0,9 cm; 1,5 cm; 2,4 cm; 2,5 cm.

232. Leia funktsiooni $y = x^2$ graafiku abil järgmiste arvude ruudud:

a) 1,3; 1,5; 2,2; 2,6; 2,4; b) 0,7; 0,8; 1,6; 2,1; 2,3.

RUUTUDE TABEL

233. *Ruutude tabel võimaldab leida arvude ruutusid suurema täpsusega, kui seda võimaldab graafik. Selle raamatu lisas on toodud ruutude tabel pealkirjaga «Ruudud». Sellest tabelist saab leida kolme tüvenumbriga arvu ruudu, milles on samuti kolm tüvenumbrit.*

Et tabel võtaks võimalikult vähe ruumi, on ta koostatud nii, et antud arvu kaks esimest tüvenumbrit asetsevad tabeli esimeses vasakpoolses veerus ja kolmas tüvenumber tabeli esimeses reas. Arvu ruudu leiad vastava rea ja veeru ristumiskohast.

Siin näed selle tabeli algust:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,00	1,02	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,14	1,17	1,19
1,1	1,21	1,23	1,25	1,28	1,30	1,32	1,35	1,37	1,39	1,42
1,2	1,44	1,46	1,49	1,51	1,54	1,56	1,59	1,61	1,64	1,66

Näide. *Arvu* 1,13 *ruudu leiad rea* 1,1 *ja veeru* 3 *ristumiskohast.*

$1{,}13^2 = 1{,}28$.

Samal viisil leiad tabelist ruudud kõikidele arvudele 1,00-*st kuni* 9,99-*ni.*

Leia tabelist järgmiste arvude ruudud:

a) 3,30; 4,52; 5,27; 6,69; 8,41;

b) 2,70; 3,88; 4,62; 7,15; 9,48.

234. *Kui antud arv on* 1-*st väiksem või* 9,99-*st suurem, s. o. kui antud arv ei kuulu vahemikku* 1 *kuni* 9,99, *siis* **suurendame** (*või* **vähendame**) *teda* **10, 100,...** *korda, nii et saame arvu, mis kuulub sellesse vahemikku. Leiame siis tabelist* **suurendatud** (*või* **vähendatud**) *arvu ruudu ja* **vähendame** (*või* **suurendame**) *seda vastavalt* **100, 10 000,...** *korda.*

Kui antud arvus on rohkem kui kolm tüvenumbrit, siis ümardame ta eelnevalt kolme tüvenumbriga arvuks.

Näited. 1) $0{,}752^2 = (0{,}1 \cdot 7{,}52)^2 = 0{,}01 \cdot 7{,}52^2 = 0{,}01 \cdot 56{,}6 = 0{,}566$.

2) $(27{,}3)^2 = (10 \cdot 2{,}73)^2 = 100 \cdot 2{,}73^2 = 100 \cdot 7{,}45 = 745$.

3) $34{,}56^2 \approx 34{,}6^2 = (10 \cdot 3{,}46)^2 = 100 \cdot 3{,}46^2 = 100 \cdot 12{,}0 = 1200$.

235. 1) Leia tabelist järgmiste arvude ruudud:

a) 0,851; 0,7521; 0,06383; 52,2; 78,4;

b) 0,322; 0,546; 0,07548; 67,52; 84,511.

2) Kasutades pöördarvude ja ruutude tabelit, leia

a) $\frac{1}{3{,}87^2}$; $\frac{10}{8{,}47^2}$; $\frac{100}{38{,}1^2}$; $\frac{5}{0{,}764^2}$; $\frac{4}{0{,}034^2}$;

b) $\frac{1}{0{,}982^2}$; $\frac{10}{5{,}46^2}$; $\frac{100}{24{,}8^2}$; $\frac{1000}{72{,}1^2}$; $\frac{0{,}01}{0{,}17^2}$.

236. Arvu ruudu leidmisel kasutame lükati korpuse esikülje ülemise poole alumisel serval olevat skaalat *A* või keele ülemisel serval asuvat skaalat *B* koos põhiskaalaga *D*. Skaalad *A* ja *B* on ühesugused, nii et kui keel on algasendis, siis nende skaalade kõik jaotuskriipsud on kohakuti. Neil mõlemal on kujutatud arvud 1-st 100-ni. Esimesel poolel on neil skaaladel kujutatud arvud 1-st 10-ni, teisel poolel arvud 10-st 100-ni.

Olgu lükati keel algasendis, nii et kõikide skaalade alguskriipsud ja samuti ka lõppkriipsud on kohakuti. Märkides põhiskaalal *D* näiteks arvu 2, jääb märkija niidi alla skaalal *A* arv 4, s. o. 2^2.

Joon. 40.

Märkides samal viisil skaalal *D* arvu 3, jääb märkija niidi alla skaalal *A* arv 9, s. o. 3^2. Skaalad *A* ja *D* koos kujutavad ruutude tabelit: niit märgib igas asendis skaalal *D* mingit arvu ja sellega kohakuti skaalal *A* selle arvu ruutu. Näiteks kui soovime leida $2{,}45^2$, siis märgime skaalal *D* arvu 2,45 ja skaalalt *A* loeme selle arvu ruudu 6.

Samuti leiame, et

$9{,}22^2 = 85$,
$1{,}27^2 = 1{,}6$.

Leia lükati abil järgmiste arvude ruudud:

a) 2,24; 2,83; 4,47; 5,48; 6,32; 5,1;
b) 7,07; 7,75; 8,37; 8,94; 9,49; 2,74;
c) 2,55; 8,06; 1,22; 3,87; 4,24; 8,66;
d) 3,32; 3,46; 2,68; 1,87; 5,92; 1,73;
e) 2,12; 6,71; 2,34; 7,42; 1,414; 1,58.

237. Skaalad *A* ja *B* on tehtud kaks korda väiksemas mõõdus kui põhiskaalad *C* ja *D*, mistõttu jaotuskriipsude paigutused skaaladel *A* ja *B* ning *C* ja *D* on erinevad.

Vahemikus 1 kuni 2 on skaaladel *C* ja *D* jaotuskriipsud iga 0,01 tagant, skaaladel *A* ja *B* aga samas vahemikus iga 0,02 tagant, s. t. iga kõige lühem kriipsuvahe tähendab siin arvu 0,02. Skaalade *A* ja *B* teisel poolel — vahemikus 10 kuni 20 — on jaotuskriipsud iga 0,2 tagant, nii et väikseim kriipsuvahe väljendab siin arvu 0,2. Vahemikus 2 kuni 5 on skaaladel *A* ja *B* jaotuskriipsud iga 0,05 tagant; seega tähendab siin väikseim kriipsuvahe arvu 0,05. Nende skaalade teisel poolel vahemikus 20 kuni 50 on jaotuskriipsud vastavalt iga 0,5 tagant.

Vahemikus 5 kuni 10 on jaotuskriipsud skaaladel *A* ja *B* iga 0,1 tagant, vahemikus 50 kuni 100 iga 1 (ühelise) tagant. Skaalal *D* märgitud kolme tüvenumbriga arvu ruudu kolme tüvenumbri lugemiseks skaalal *A* on tarvilik vilumus, mida saab omandada harjutamise teel.

Kasuta harjutamiseks alljärgnevat tabelit.

D	*C*	*B*	*A*
1,43	1-3-1	1-7-1	2-0-5
1,56	1-4-2	2-0-2	2-4-3
1,70	1-5-5	2-4-0	2-8-9
1,77	1-6-2	2-6-2	3-1-3
1,89	1-7-2	2-9-6	3-5-7
20,1	1-8-4	3-3-9	4-0-4
21,9	2-0-0	4-0-0	4-8-0
24,8	1-1-5	1-3-2	6-1-5
26,1	2-3-8	5-6-6	6-8-1
30,6	2-7-9	7-7-8	9-3-6
319	2-9-2	8-5-0	1-0-2
359	3-2-8	1-0-8	1-2-9
442	4-0-3	1-6-2	1-9-5
474	4-3-3	1-8-8	2-2-5
548	5-0-0	2-5-0	3-0-0
6,70	6-1-3	3-7-5	4-4-9

D	*C*	*B*	*A*
7,68	7-0-2	4-9-3	5-9-0
8,22	7-5-0	5-6-2	6-7-6
8,45	7-7-1	5-9-4	7-3-0
8,95	8-1-6	6-6-6	8-0-1
9,15	8-3-5	6-9-7	8-3-7
9,45	6-6-5	4-4-2	8-9-3
9,50	1-6-7	2-7-9	9-0-2
9,65	2-1-8	4-7-5	9-3-1
9,75	4-3-5	1-8-9	9-5-0

Selgitame tabeli esimese rea abil, kuidas seda tabelit harjutamisel kasutada:

1) märgime niidiga põhiskaalal *D* arvu 1,43;

2) tõmbame skaalal *C* asuva arvu, mille tüvenumbrid on 1-3-1, märkija niidi alla;

3) loeme niidi alt skaalal *B* asuva arvu tüvenumbrid 1-7-1;

4) skaalal *A* on siis niidiga märgitud arv, mille tüvenumbrid on 2-0-5.

238. Märgi lükatil, mille keel on normaalasendis (s. o. skaalade *C* ja *D* algkriipsud on kohakuti), arvud, mis on antud järgmiste tüvenumbritega:

a) 1-1-0; 1-2-0; 1-3-0; 1-7-0; 1-8-0; 1-9-0;
b) 1-0-5; 1-1-5; 1-2-5; 1-7-5; 1-8-5; 1-9-5;
c) 1-0-1; 1-0-2; 1-0-3; 1-0-4; 1-7-1; 1-8-3;
d) 2-0-0; 3-0-0; 4-0-0; 2-1-0; 2-2-0; 3-8-0;
e) 2-0-2; 2-0-4; 2-0-6; 2-0-8; 3-0-2; 3-0-4;
f) 2-0-1; 2-0-3; 2-0-7; 2-0-9; 2-1-1; 2-6-5;
g) 3-0-0; 3-1-0; 3-2-0; 3-3-0; 3-8-0; 3-9-0;
h) 3-0-2; 3-0-4; 3-0-6; 3-0-8; 3-5-2; 3-9-6;
i) 2-3-1; 2-6-5; 2-9-7; 3-2-1; 3-7-1; 3-8-3;
j) 4-1-0; 4-2-0; 4-5-0; 5-1-0; 6-3-0; 8-2-0;
k) 4-0-5; 4-1-5; 5-2-5; 5-4-5; 7-1-5; 9-4-5;
l) 6-0-5; 6-1-0; 6-1-5; 6-2-0; 6-2-5; 6-3-0.

239. Märgi lükatil järgmised arvud:

a) 4,15; 4,16; 4,17; 4,18; 4,19; 4,20;
b) 4,51; 4,52; 4,53; 4,54; 4,55; 4,56;

c) 5,01; 5,02; 5,03; 5,04; 5,05; 5,06;
d) 5,07; 5,08; 5,09; 5,10; 5,11; 5,12.

240. Märgi lükatil arv, mille tüvenumbrid on:

a) 5-2-1; 5-2-2; 5-2-3; 5-2-4; 5-2-5; 5-2-6;
b) 5-2-7; 5-2-8; 5-2-9; 5-3-0; 5-3-1; 5-3-2;
c) 7-5-0; 7-5-1; 7-5-2; 7-5-3; 7-5-4; 7-5-5;
d) 8-7-0; 8-7-1; 8-7-2; 8-7-3; 8-7-4; 8-7-5.

241. Märgi skaala *A* vasakul poolel arvud:

c) 2,31; 2,65; 2,97; 3,21; 3,71; 3,83;
f) 750; 751; 752; 753; 754; 755.
a) 110; 120; 130; 170; 180; 190.

242. Märgi skaala *A* paremal poolel arvud:

d) 60,5; 61,0; 61,5; 62,0; 62,5; 63,0;
e) 52,1; 52,2; 52,3; 52,4; 52,5; 52,6;
b) 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7.

243. Kontrolli lükati abil järgmiste võrduste õigsust.

1) $13{,}5^2 = 182$
$4{,}35^2 = 18{,}9$
$0{,}222^2 = 0{,}0493$
$0{,}038^2 = 0{,}00094$

2) $417^2 = 174000$
$670^2 = 449000$
$1{,}09^2 = 1{,}19$
$0{,}0193^2 = 0{,}000372$

3) $7{,}48^2 = 56$
$1{,}7^2 = 2{,}89$
$5{,}14^2 = 26{,}4$
$2{,}57^2 = 6{,}6$

4) $2{,}5^2 = 6{,}25$
$21{,}5^2 = 462$
$3{,}1^2 = 9{,}61$
$1{,}65^2 = 2{,}72$

5) $\pi^2 = 9{,}87$
$16^2 = 256$
$105^2 = 11000$
$195^2 = 38000$

6) $0{,}369^2 = 0{,}136$
$0{,}125^2 = 0{,}0156$
$88^2 = 7740$
$41{,}5^2 = 1720$

244. Arvuta järgmised ruudud. Kontrolliks on antud tulemuse tüvenumbrid.

1) $1{,}06^2 = 1\text{-}1\text{-}2$
$0{,}4^2 = 1\text{-}6\text{-}0$
$1{,}1^2 = 1\text{-}2\text{-}1$
$32{,}5^2 = 1\text{-}0\text{-}6$

2) $0{,}5^2 = 2\text{-}5\text{-}0$
$8{,}55^2 = 7\text{-}3\text{-}1$
$0{,}75^2 = 5\text{-}6\text{-}2$
$0{,}35^2 = 1\text{-}2\text{-}2$

3) $2{,}3^2 = 5\text{-}2\text{-}9$
$87{,}1^2 = 7\text{-}5\text{-}9$
$6{,}8^2 = 4\text{-}6\text{-}2$
$1{,}7^2 = 2\text{-}8\text{-}9$

4) $0{,}24^2 = 5\text{-}7\text{-}6$
$3{,}62^2 = 1\text{-}3\text{-}1$
$42{,}5^2 = 1\text{-}8\text{-}1$
$0{,}454^2 = 2\text{-}0\text{-}6$

Koma asukoha võib määrata järgmiselt: nihutame antud arvus koma enne ruudu leidmist nii, et saame arvu, mis on 1 ja 10 vahel, ning korrutame või jagame seda vastavalt 10-ga või kümne astmega.

Näiteid:

1) $0{,}282^2 = (2{,}82 : 10)^2 = 2{,}82^2 : 100 = 7{,}95 : 100 = 0{,}795$;
2) $0{,}0405^2 = (4{,}05 : 100)^2 = 16{,}4 : 10\,000 = 0{,}00164$;
3) $420^2 = (4{,}2 \cdot 100)^2 = 17{,}6 \cdot 10\,000 = 176\,000$.

Koma asukoha määramine võib toimuda ka tulemuse ligikaudse hindamise teel. Näiteks kui soovime leida $4{,}65^2$, siis märgime skaalal *D* arvu 4,65 ja skaalalt *A* loeme antud arvu ruudu tüvenumbrid 2-1-6.
Et

$4{,}65^2 \approx 5^2 = 25$, siis $4{,}65^2 = 21{,}6$.

Leiame veel näitena $0{,}282^2$.

Märkinud skaalal *D* arvu 0,282 tüvenumbrid 2-8-2, leiame niidi alt skaalal *A* otsitava ruudu tüvenumbrid 7-9-5. Ligikaudne hinnang annab

$0{,}282^2 \approx 0{,}3^2 = 0{,}09$.

Seega

$0{,}282^2 = 0{,}0795$.

ARVU RUUTJUUR

245. Leia joonise 39 abil niisugune negatiivne arv, mille ruut on 9. Leia niisugune positiivne arv, mille ruut on 9.
Positiivset arvu, mille ruut on 9, *nimetatakse arvu* 9 **ruutjuureks** *ja märgitakse sümboliga* $\sqrt{9}$ (*loe «ruutjuur üheksast»*).
Seega $\sqrt{9} = 3$. *Niisamuti* $\sqrt{64} = 8$, *sest* $8^2 = 64$;
$\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$, *sest* $0{,}1^2 = 0{,}01$.

246. Leia joonise 39 abil järgmiste arvude ruutjuured:

a) 6,25; 7; 8,5; 8,7; 8,9; b) 2,25; 4,5; 6,8; 7,2; 8,3.

Antud positiivse arvu ruutjuureks nimetatakse niisugust positiivset arvu, mille ruut võrdub antud arvuga.

Missuguse arvu ruut on null?

Nulli ruutjuur võrdub nulliga.
Ruutjuurt negatiivsest arvust pole olemas, sest pole niisugust arvu, mille ruut on negatiivne.

Ruutjuure definitsioonist järeldub, et

kui $a \geqslant 0$, siis $\sqrt{a^2} = a$,
kui $a < 0$, siis $\sqrt{a^2} = -a$.

Üldiselt

$\sqrt{a^2} = |a|$.

Leia arvud

$(\sqrt{5})^2$; $(-\sqrt{3})^2$; $(-\sqrt{12})^2$; $-(\sqrt{2})^2$; $\sqrt{(-5)^2}$; $[\sqrt{(-2)^2}]^2$.

Kirjuta ruutudena järgmised arvud:

2; 7; 11; 20; 34; 76.

247. Teisenda järgmised vahed korrutisteks:

a) $x^2 - 9$ b) $x^2 - 16$
$x^2 - 7$ $x^2 - 8$
$x^2 - b^2$ $x^2 - n^2$
$x^2 - a$ $x^2 - b$

248. Täida alljärgnev tabel, kus $a > 0$.

a	24	21	23	41	80	29	30	76	27	78
a^2	576	441	529	1680	6400	841	900	5780	729	6080

249. *Mõnikord on võimalik arvu ruutjuurt leida proovimise teel täpselt.*

Leia proovimise teel järgmised ruutjuured:

a) $\sqrt{121} =$ b) $\sqrt{196} =$ c) $\sqrt{289} =$

$\sqrt{144} =$ $\sqrt{225} =$ $\sqrt{324} =$

$\sqrt{169} =$ $\sqrt{256} =$ $\sqrt{361} =$

250. Leia proovimise teel järgmiste arvude ruutjuured:

a) 400; 441; 625; 12,25; 900; 0,04;

b) $\frac{4}{9}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{16}{25}$; $\frac{1}{36}$; $\frac{25}{36}$; $\frac{49}{81}$.

251. *Kui antud arvust täpset ruutjuurt pole võimalik leida, siis piirdume ruutjuure ligikaudse väärtusega kas täpsusega* 0,1; 0,01 *või* 0,001, *nii kuidas on nõutud.*

Olgu näiteks tarvis leida $\sqrt{40}$ *täpsusega* 0,1.

Proovides leiame, et $6^2 < 40$, *kuid* $7^2 > 40$, *seega*

$6 < \sqrt{40} < 7$.

On näha, et $\sqrt{40}$ *on* 6*-le lähemal kui* 7*-le, seepärast*

$\sqrt{40} \approx 6$, *täpsusega* 1.

Proovides edasi, näeme, et $6{,}3^2 = 39{,}69$, kuid $6{,}4^2 = 40{,}96$. *Võime kirjutada:*

$6{,}3 < \sqrt{40} < 6{,}4$,

kusjuures 6,3 *erineb* $\sqrt{40}$ *väärtusest vähem kui* 6,4, *sest* $40 - 39{,}69 = 0{,}31$, *aga* $40{,}96 - 40 = 0{,}96$.
Seetõttu

$\sqrt{40} \approx 6{,}3$, *täpsusega* 0,1.

Arvuta $\sqrt{40}$ ligikaudne väärtus täpsusega 0,01, kasutades ruutude tabelit.

252. Leia ruutude tabeli abil:

1) $\sqrt{30}$, täpsusega 0,01; 2) $\sqrt{65}$, täpsusega 0,01.

RUUTJUURTE TABEL

253. *Selle raamatu lisas olevas ruutjuurte tabelis on antud kolmekohaliste tüvedega ruutjuured arvudest* 1,00 *kuni* 99,9. *Tabeli ehitus ja kasutamine on samasugune nagu pöördarvude tabeli puhulgi.*
Selgituseks toome siin selle tabeli alguse.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,00	00	01	01	02	02	03	03	04	04
1,1	1,05	05	06	06	07	07	08	08	09	09
1,2	1,10	10	10	11	11	12	12	13	13	14

Näiteid.

1) $\sqrt{1{,}25} = 1{,}12$.
2) $\sqrt{16} = \sqrt{16{,}0} = 4{,}00$.
3) $\sqrt{17{,}8} = 4{,}22$.

254. Leia tabelist järgmiste arvude ruutjuured:
1) 1,96; 2,56; 3,24; 4,41; 5,29.
2) 1,69; 1,21; 0,64; 0,49; 6,76.

255. Leia tabelist järgmiste arvude ruutjuured:
1) 12; 15; 19; 37; 44 2) 47; 54; 59; 73; 87.

256. Leia tabeli abil järgmiste arvude ruutjuured:
1) 5,2; 8,4; 9,5; 12,5; 22,4. 2) 36,8; 42,5; 56,7; 84,2; 95,5.

257. Arvuta ruudu külje pikkus, kui ruudu pindala on
1) 5,4 cm²; 8,6 cm²; 9,8 cm²; 14,5 cm²; 16,8 cm²;
2) 20,5 cm²; 48,5 cm²; 59,6 cm²; 62,4 cm²; 84,8 cm².

258. Ülesanne. *Võrdkülgse kolmnurga pindala on* 22,5 *cm². Kui suur on selle kolmnurga külg?*

Lahendus. *Kasutame võrdkülgse kolmnurga pindala valemit* $S = 0{,}433\ a^2$.

$0{,}433a^2 = 22{,}5$; $a^2 = 22{,}5 : 0{,}433 \approx 52{,}0$; $a = \sqrt{52{,}0} = 7{,}21$.

Vastus. *Kolmnurga külg on* 7,21 *cm.*

259. Kolmnurga alus on 4,2 cm ja kõrgus on 6 cm. Kui pikk on selle kolmnurgaga pindvõrdse ruudu külg?

260. Rööpküliku alus on 12 cm ja kõrgus on 5,8 cm. Kui suur külg on ruudul, mille pindala on võrdne selle rööpküliku pindalaga?

261. Trapetsi alused on $a = 8{,}4$ cm, $b = 5{,}8$ cm ja kõrgus $h = 6$ cm. Arvuta selle trapetsiga pindvõrdse ruudu ümbermõõt.

262. a) Arvuta avaldise $\sqrt{4 \cdot 9}$ ja $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$ väärtused ja võrdle tulemusi.

b) Arvuta avaldiste $\sqrt{5 \cdot 7{,}2}$ ja $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7{,}2}$ väärtused. Ümarda viimane tulemus kolme tüvenumbriga arvuks ja võrdle seda eelmise tulemusega.

c) *Tõestame, et kui a ja b on positiivsed arvud, siis* $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Tõestuseks võrdleme avaldiste $\sqrt{a \cdot b}$ *ja* $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ *ruutusid:*

$(\sqrt{a \cdot b})^2 = a \cdot b,$

$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b.$

Kui positiivsete arvude ruudud on võrdsed, siis on ka need arvud võrdsed.

Seega tõesti

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Korrutise ruutjuur võrdub tegurite ruutjuurte korrutisega.

d) Arvuta

$\sqrt{25 \cdot 64}$; $\sqrt{100 \cdot 49}$; $\sqrt{0{,}01 \cdot 0{,}25}$; $\sqrt{16a^2}$; $\sqrt{4a}$.

263. a) Arvuta avaldise

$$\sqrt{\frac{7{,}2}{5}}$$

väärtus, teostades esmalt jagamise ja leides siis ruutjuure saadud jagatisest. Seejärel arvuta avaldise

$\frac{\sqrt{7{,}2}}{\sqrt{5}}$

väärtus kolme tüvenumbriga. Võrdle tulemusi.

b) *Tõestame, et kui a ja b on positiivsed arvud, siis*

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Tõestuseks võrdleme avaldiste

$\sqrt{\frac{a}{b}}$ *ja* $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

ruutusid.

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b};$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Seega tõesti

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.}$$

Jagatise ruutjuur võrdub jagatava ja jagaja ruutjuurte jagatisega.

c) Arvuta.

$$\sqrt{\frac{36}{100}};\ \sqrt{\frac{49}{0{,}01}};\ \sqrt{\frac{a^2}{4}};\ \sqrt{\frac{m}{16}}.$$

264. Arvutades ruutjuured proovimise teel, leia, mitu korda on

1) $\sqrt{400}$ suurem kui $\sqrt{4}$;
2) $\sqrt{900}$ „ „ $\sqrt{9}$;
3) $\sqrt{2500}$ „ „ $\sqrt{25}$;
4) $\sqrt{640\,000}$ „ „ $\sqrt{64}$;
5) $\sqrt{490\,000}$ „ „ $\sqrt{49}$.

Mis selgub siin?

265. Arvutades ruutjuured proovimise teel, leia, mitu korda on

1) $\sqrt{16}$ väiksem kui $\sqrt{1600}$;
2) $\sqrt{9}$ „ „ $\sqrt{900}$;
3) $\sqrt{0{,}04}$ „ „ $\sqrt{4}$;
4) $\sqrt{0{,}09}$ „ „ $\sqrt{900}$;
5) $\sqrt{1}$ „ „ $\sqrt{10\,000}$.

Kahe viimase ülesande lahendamisel näeme, et
kui suurendame arvu 100, 10 000, ... *korda, siis selle arvu ruutjuur suureneb vastavalt* 10, 100, ... *korda;*
kui vähendame arvu 100, 10 000, ... *korda, siis tema ruutjuur väheneb* 10, 100, ... *korda.*

Tõestame, et

kui suurendame arvu k^2 korda, siis arvu ruutjuur suureneb k korda.

Tõestus. *Olgu antud positiivne arv a. Selle ruutjuur on* $\sqrt{a}$. *Suurendades antud arvu* k^2 *korda, saame uueks arvuks* k^2a, *ruutjuur sellest on* $\sqrt{k^2a} = \sqrt{k^2} \cdot \sqrt{a} = k\sqrt{a}$. *Seda aga oligi tarvis tõestada.*

266. *Raamatu lisas on antud ruutjuured arvudest* 1,00 *kuni* 99,9. *Et leida ühest väiksemate või sajast suuremate arvude ruutjuuri, tuleb rakendada eelmises ülesandes tähele pandud arvu ruutjuure omadust.*
Seega, kui antud arv ei kuulu vahemikku 1,00 *kuni* 99,9, *siis ruutjuure leidmiseks* **suurendame** (*või* **vähendame**) *seda arvu* **100, 10 000,** ... *korda, nii et ta kuuluks sellesse vahemikku, leiame siis* **suurendatud** (*või* **vähendatud**) *arvust ruutjuure ja* **vähendame** (*või* **suurendame**) *leitud arvu vastavalt* **10, 100,** ... *korda. Nii saame ruutjuure antud arvust.*

Näiteid.

1) $\sqrt{0{,}0169} = \sqrt{\frac{1{,}69}{100}} = \frac{\sqrt{1{,}69}}{\sqrt{100}} = \frac{1{,}3}{10} = 0{,}13.$

2) $\sqrt{0{,}00072} = \sqrt{\frac{7{,}2}{10\,000}} = \frac{\sqrt{7{,}2}}{\sqrt{10\,000}} = \frac{2{,}68}{100} = 0{,}0268.$

3) $\sqrt{841} = \sqrt{100 \cdot 8{,}41} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{8{,}41} = 10 \cdot 2{,}90 = 29.$

267. Leia tabeli abil järgmiste arvude ruutjuured:

1)	2)	3)	4)
0,441	0,676	0,256	0,0042
0,841	0,324	0,289	0,016
0,0081	0,0121	0,0144	0,0007
0,0196	0,0049	0,0036	0,0006

268. Leia tabeli abil järgmiste arvude ruutjuured:

1)	2)	3)	4)
62 500	78 400	123 000	725 000
3 600	2 500	4 900	186 000
16 900	72 900	18 500	491 000
336 000	24 000	12 000	225 000

269. *Kui juuritavas arvus on rohkem kui kolm tüvenumbrit, siis ümardame ta kolme tüvenumbriga arvuks ja leiame saadud arvu ruutjuure.*

Näiteid.

1) $\sqrt{7056} \approx \sqrt{7060} = \sqrt{100 \cdot 70{,}6} = 10 \cdot 8{,}4 = 84.$

2) $\sqrt{0{,}2704} = \sqrt{\frac{27{,}04}{100}} = \frac{5{,}2}{10} = 0{,}52$

270.

1)	2)	3)
7385	6212	50,41
4234	560	38,24
12,46	4,896	0,9612
576,9	0,2859	4876
0,5842	43,66	9,428

271. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga pindala on 120 cm². Kui pikk on selle kolmnurga kaatet?

272. Täida järgmine tabel, kus $a > 0$.

a			17			24		96		
a^2	1600			7056			9025		7744	
$\sqrt{a}$		8			2					3

273. 1) Leia joonise 41 abil järgmiste arvude ruudud:

1) 3,7; 4,6; 5,5; 6,5; 9,2;
2) 4,2; 4,4; 5,1; 6,3; 9,7.

2) *Joonise* 41 *abil saab leida ka* 1-*st väiksemate ja* 10-*st suuremate arvude ruutusid.*

Näiteid. 1) $0{,}35^2 = 0{,}01 \cdot 3{,}5^2 = 0{,}01 \cdot 12 = 0{,}12$;

2) $0{,}065^2 = 0{,}0001 \cdot 6{,}5^2 = 0{,}0001 \cdot 42 = 0{,}0042$;
3) $57^2 = 100 \cdot 5{,}7^2 = 100 \cdot 32 = 3200$;
4) $920^2 = 10\,000 \cdot 9{,}2^2 = 10\,000 \cdot 85 = 850\,000$.

Leia graafiku abil järgmiste arvude ruudud:
a) 0,45; 0,82; 0,042; 0,036; 0,055; b) 52; 65; 94; 460; 710.

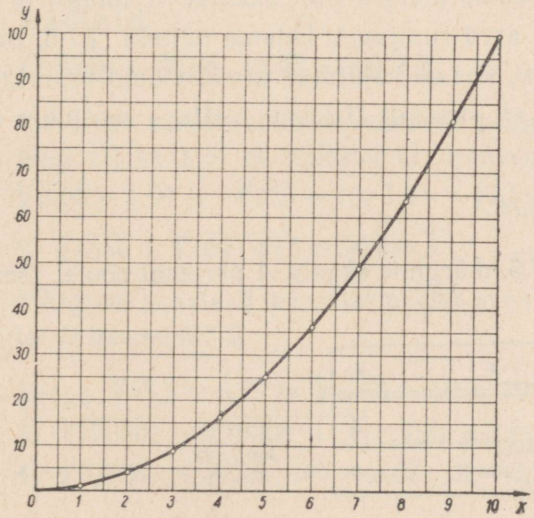
274. Leia joonise 41 abil arv, mille ruut on

a) 15; 20; 30; 35; 50; b) 5; 13; 60; 70; 90.

275. Leia joonise 41 abil järgmised ruutjuured:

a) $\sqrt{20}$; $\sqrt{30}$; $\sqrt{45}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{62}$;
b) $\sqrt{90}$; $\sqrt{85}$; $\sqrt{79}$; $\sqrt{68}$; $\sqrt{10}$.

276. Lahenda graafiku abil (joon. 41) järgmised ülesanded.



Joon. 41.

Ruudu pindala on

a) 18 cm²; 22 cm²; 50 cm²; 72 cm²; 92 cm²;
b) 98 cm²; 82 cm²; 60 cm²; 55 cm²; 32 cm².

Kui pikk on ruudu külg?

277. Leia joonise 41 abil järgmised ruutjuured:

a) $\sqrt{5600}$; $\sqrt{7800}$; $\sqrt{8200}$; $\sqrt{9500}$;
b) $\sqrt{4500}$; $\sqrt{4750}$; $\sqrt{7000}$; $\sqrt{7750}$.

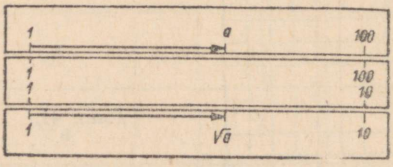
Näide. $\sqrt{8500} = \sqrt{100 \cdot 85} = 10 \cdot \sqrt{85} = 10 \cdot 9{,}2 = 92$.

RUUTJUURE LEIDMINE LÜKATIL

278. Arvu ruudu leidmisel nägime, et kui skaalal D on märgitud arv a, siis skaalal A on ühtlasi märgitud ka arv a^2, s. t. arv a skaalal D ja a^2 skaalal A on kohakuti. Sellest nähtub, et arv b skaalal A ja $\sqrt{b}$ skaalal D on kohakuti. Näiteks märkides skaalal A arvu 4, on märkija niidi all skaalal D arv $2 = \sqrt{4}$, samuti arv 9 skaalal A on kohakuti arvuga $3 = \sqrt{9}$ skaalal D jne. Skaalad A ja D kujutavad niisiis ruutjuurte tabelit: igas asendis märgib niit skaalal A mingit arvu ja skaalal D selle arvu ruutjuurt. Leiame näiteks $\sqrt{7{,}6}$. Skaala A vasakul poolel, kus on kujutatud arvud 1 kuni 10, märgime arvu 7,6. Niidi alt skaalalt D loeme otsitava ruutjuure tüvenumbrid 2-7-6.

Seega $\sqrt{7{,}6} = 2{,}76$.

Arvutades $\sqrt{27{,}5}$, märgime skaala A paremal poolel (seal on



Joon. 42.

kujutatud arvud 10 kuni 100) arvu 27,5. Niidi alt skaalalt *D* loeme otsitava ruutjuure tüvenumbrid 5-2-4. Seega

$\sqrt{27{,}5} = 5{,}24.$

1) Kontrolli lükati abil järgmiste võrduste õigsust.

$\sqrt{2} = 1{,}41$ $\quad \sqrt{14{,}6} = 3{,}82$ $\quad \sqrt{6{,}1} = 2{,}47$

$\sqrt{20} = 4{,}47$ $\quad \sqrt{6} = 2{,}45$ $\quad \sqrt{34} = 5{,}83$

$\sqrt{3{,}4} = 1{,}84$ $\quad \sqrt{60} = 7{,}75$

2) Kontrolli, kas alljärgnevate ruutjuurte tüvenumbrid on õiged. Leia need ruutjuured.

$\sqrt{5{,}5} = 2\text{-}3\text{-}4$ $\quad \sqrt{6{,}9} = 2\text{-}6\text{-}2$ $\quad \sqrt{76{,}2} = 8\text{-}7\text{-}3$

$\sqrt{44} = 6\text{-}6\text{-}3$ $\quad \sqrt{10{,}8} = 3\text{-}2\text{-}9$ $\quad \sqrt{1{,}48} = 1\text{-}2\text{-}2$

$\sqrt{2{,}65} = 1\text{-}6\text{-}3$ $\quad \sqrt{39{,}5} = 6\text{-}2\text{-}8$

279. Kui antud arv, millest vaja leida ruutjuurt, on 1-st väiksem või 100-st suurem, siis nihutame koma antud arvus nii, et saame arvu, mis on 1 ja 100 vahel, ehk arvu, mille täisosa on kas ühe- või kahekohaline.
Koma nihutamisel saadud arvu peame vastavalt korrutama või jagama 100-ga või 10 000-ga, s. o. niisuguse 10 astmega, mis on täisruut.

Näiteid.

1) $\sqrt{365} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{3{,}65} = 10\sqrt{3{,}65}.$

Märkides nüüd skaala *A* vasakul poolel arvu 3,65, leiame niidi alt skaalal *D* otsitava arvu tüvenumbrid 1-9-1. Seega $\sqrt{3{,}65} = 1{,}91$ ja $\sqrt{365} = 10 \cdot 1{,}91 = 19{,}1.$

2) $\sqrt{4550} = \sqrt{100 \cdot 45{,}5} = 10\sqrt{45{,}5}.$

Märgime skaala *A* paremal poolel arvu 45,5. Niidi alt skaalal *D* leiame 6-7-5.

Seega $\sqrt{45{,}5} = 6{,}75$ ja $\sqrt{4550} = 10 \cdot 6{,}75 = 67{,}5.$

3) $\sqrt{176000} = \sqrt{10000 \cdot 17{,}6} = 100 \cdot 4{,}2 = 420.$

4) $\sqrt{0{,}0795} = \sqrt{7{,}95} : \sqrt{100} = 2{,}82 : 10 = 0{,}282.$

5) $\sqrt{0{,}325} = \sqrt{32{,}5 : 100} = 5{,}7 : 10 = 0{,}57.$

6) $\sqrt{0{,}0085} = \sqrt{85 : 10\,000} = 9{,}22 : 100 = 0{,}0922.$

Kui antud arv sisaldab enam kui kolm tüvenumbrit, siis ümardame ta kolme tüvenumbriga arvuks ja leiame sellest ruutjuure.

Näiteks $\sqrt{1723} \approx \sqrt{1720} = \sqrt{100 \cdot 17{,}2} = 10 \cdot 4{,}15 = 41{,}5.$

Leia ruutjuur. Sulgudes on antud vastus.

$\sqrt{200}$	(14,1)	$\sqrt{2000}$	(44,7)
$\sqrt{230}$	(15,2)	$\sqrt{5200}$	(72,1)
$\sqrt{870}$	(29,5)	$\sqrt{137}$	(11,7)
$\sqrt{130}$	(11,4)	$\sqrt{37564}$	(194)
$\sqrt{0{,}17}$	(0,412)	$\sqrt{0{,}0789}$	(0,281)
$\sqrt{0{,}017}$	(0,13)	$\sqrt{0{,}905}$	(0,951)
$\sqrt{0{,}0215}$	(0,147)	$\sqrt{0{,}0028}$	(0,0529)
$\sqrt{0{,}042}$	(0,205)	$\sqrt{0{,}5}$	(0,707)

280. Ruudukujulise mänguplatsi suurus on 1840 m². Kui pikk on selle ruudu külg?

RUUTVÕRRAND $x^2 = b$

281. Ülesanne. *Arvu ja vastandarvu korrutis on* -9. *Leia see arv ja ta vastandarv.*

Lahendus. *Tähistame otsitava arvu tähega* x, *siis vastandarv on* $-x$ *ja nende korrutis on* $x \cdot (-x) = -x^2$. *Saame võrrandi*

$-x^2 = -9$ *ehk* $x^2 = 9$.

Leiame otsitava x *väärtuse graafikust joonisel* 43. *Näeme, et selliseid* x *väärtusi, mille puhul* $y = 9$, *on kaks:* -3 *ja* 3. *Seega on sellel võrrandil kaks lahendit:*

$x_1 = -3;$
$x_2 = 3.$

Vastus: *Otsitav arv on* -3 *ja vastandarv* 3 *või otsitav arv on* 3 *ja vastandarv* -3.

Võrrandis $x^2 = 9$ *esineb tundmatu teises astmes.*

Võrrandit, milles tundmatu kõrgeimaks astmeks on kaks, nimetatakse teise astme võrrandiks ehk ruutvõrrandiks.

Arvutamise teel saab ruutvõrrandi $x^2 = 9$ *lahendada järgmiselt:*

$x^2 = 9$; $\qquad x^2 - 3^2 = 0$;

$x^2 - 9 = 0$; $\qquad (x + 3)(x - 3) = 0$.

Korrutis võrdub aga nulliga ainult siis, kui vähemalt üks tegur on null. Seepärast võime öelda, et meie võrrand on rahuldatud, kui ta vasaku poole esimene tegur on null või kui vasaku poole teine tegur on null. Seega meie võrrand on rahuldatud, kui

$x + 3 = 0$, *millest* $x_1 = -3$,

ja kui

$x - 3 = 0$, *millest* $x_2 = 3$.

Seega taandus meie ruutvõrrandi lahendamine kahe lineaarse võrrandi lahendamiseks.

Lahenda esmalt graafiku (joon. 41) abil ja siis arvutamise teel ruutvõrrandid

1) $x^2 = 12{,}25$;
2) $x^2 = 6{,}25$.

282. Ülesanne. *Lahenda ruutvõrrand*

$x^2 = m$, *kus* $m > 0$.

Lahendus. *Viime vabaliikme vasakule poolele:*

$x^2 - m = 0$.

Kirjutame arvu m ruudu kujul:

$m = (\sqrt{m})^2$.

Saame

$x^2 - (\sqrt{m})^2 = 0$.

Siit

$(x + \sqrt{m})(x - \sqrt{m}) = 0.$

Viimane võrrand on rahuldatud, kui vasaku poole esimene tegur on null või kui teine tegur on null. Seega saame

$x + \sqrt{m} = 0,$

$x - \sqrt{m} = 0.$

Neist võrrandeist saame

$x_1 = -\sqrt{m},$

$x_2 = \sqrt{m}.$

Sageli kirjutatakse need kaks lahendit ühe võrduse abil nõnda:

$x_{1,2} = \pm \sqrt{m}.$

Nagu näeme, taandub võrrandi

$x^2 = m$ *(kus* $m > 0$*)*

lahendamine kahe lineaarse võrrandi lahendamiseks, mistõttu saame kaks lahendit.

Näide. *Lahenda võrrand*

$x^2 = 0{,}578.$

Lahendus.

$x = \pm \sqrt{0{,}578}.$

Tabelist leiame, et

$\sqrt{0{,}578} = 0{,}760.$

Vastus. $x_1 = -0{,}760; \quad x_2 = 0{,}760.$

283. a) Lahenda võrrandid:

1) $x^2 = 5{,}29$
$x^2 = 3{,}43$
$x^2 = 363$

2) $x^2 = 0{,}64$
$x^2 = 0{,}0275$
$x^2 = 0{,}8464$

b) Lahenda võrrandi abil järgmised ülesanded.

1) Ristküliku alus on 5 korda pikem kui kõrgus. Arvuta ristküliku mõõtmed, teades, et ristküliku pindala on 320 cm².

2) Kolmnurga kõrgus on $\frac{1}{3}$ alusest. Kolmnurga pindala on 24 cm². Kui pikk on kolmnurga alus?
3) Ristküliku küljed suhtuvad nagu 3:5. Ristküliku pindala on 240 cm². Arvuta ristküliku küljed.
4) Rombi üks diagonaal on teisest 2 korda pikem. Rombi pindala on 18 cm². Arvuta rombi diagonaalide pikkused.
5) Ruudukujulist õhukest kummitükki venitati nii, et ta ühtpidi pikenes 3 cm võrra ja teistpidi kitsenes 3 cm võrra. Venitatud kummitüki pindala oli 112 cm². Kui pikk oli kummitüki serv enne venitamist?

FUNKTSIOON $y = ax^2$

284. Millega võrdub täisnurkse võrdhaarse kolmnurga pindala y, kui kolmnurga kaateti pikkus on x?
Mitu korda suureneb selle kolmnurga pindala, kui kaatetit suurendada 3 korda?

285. *Ruudu diagonaali pikkus on* $2x$ *cm. Kui suur on selle ruudu pindala* y*? Mitu korda suureneb ruudu pindala, kui ta diagonaali suurendada* 5 *korda?*

Lahendus. *Diagonaalid jaotavad ruudu* 4 *võrdseks täisnurkseks võrdhaarseks kolmnurgaks kaateti pikkusega* x *cm. Ühe kolmnurga pindala on* $\frac{1}{2}x^2$ *cm² ja ruudu pindala* $4 \cdot \frac{1}{2}x^2 = 2x^2$ *cm², s. t.*

$y = 2x^2$.

Kuna diagonaali esialgne pikkus on $2x$ *cm, siis* 5 *korda pikem diagonaal on* $10x$ *cm. Kolmnurga kaateti pikkus on siis* $5x$ *cm ja kolmnurga pindala* $12{,}5x^2$ *cm². Ruudu pindala on sel korral* $4 \cdot 12{,}5x^2 = 50x^2$ *cm².*

$50x^2 : 2x^2 = 25$.

Vastus. *Kui ruudu diagonaali suurendada* 5 *korda, siis ruudu pindala suureneb* 25 *korda.*
Mitu korda suureneb ruudu pindala, kui diagonaali suurendada 6 korda? 7 korda? 10 korda?

286. Võrdkülgse kolmnurga pindala valem on

$S = 0{,}433a^2$,

kus a tähendab kolmnurga külje pikkust.

Mitu korda suureneb võrdkülgse kolmnurga pindala, kui tema külje pikkust suurendada 2 korda? 3 korda? 4 korda?

287. Avalda kuubi täispindala S kuubi serva pikkuse a kaudu. Mitu korda suureneb kuubi täispindala, kui kuubi serva pikkust suurendada 2, 3, 4, 5, 6, 20 korda?

288. *Ülesannetes* 284—287 *esinevate sõltuvuste üldkuju on*

$y = ax^2$.

Selle sõltuvuse iseloomustavaks omaduseks on, et

kui argument x kasvab k korda, siis funktsioon ax^2 kasvab k^2 korda.

Olgu esmalt $x = x_1$, *siis* $y_1 = ax_1^2$; *kui argument* x *kasvab* k *kordseks, siis* $x = kx_1$ *ja* $y_2 = a(kx_1)^2 = ak^2x_1^2$, *millest näemegi, et funktsioon on kasvanud* k^2 *kordseks.*

Funktsioon $y = ax^2$ *on* **ruutfunktsioon.**

289. Joonesta ühes ja samas teljestikus funktsioonide

$y = x^2$, $y = 2x^2$ ja $y = \frac{1}{2}x^2$

graafikud.

Kui funktsiooni $y = x^2$ *graafik on joonestatud, siis funktsiooni* $y = 2x^2$ *graafiku saad nii, et eelmise kõvera iga punkti ordinaadi korrutad* 2*-ga.*

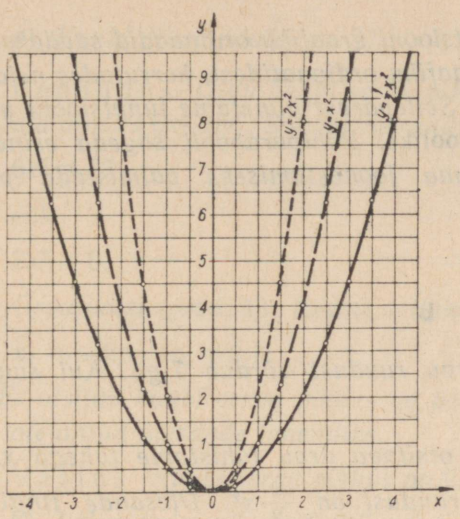
Kuidas on funktsiooni $y = x^2$ graafiku järgi võimalik saada funktsiooni $y = \frac{1}{2}x^2$ graafikut?

Võrdle oma joonist joonisega 43.

Kõik kolm kõverjoont joonisel 43 *on* **paraboolid.**

Mis on joonisel 43 kujutatud iga parabooli teljeks ja kus asub iga parabooli haripunkt?

Kuidas asub funktsiooni $y = ax^2$ graafik x-telje suhtes, kui $a > 0$?



Joon. 43.

Leia jooniselt 43,

a) millega võrdub $2x^2$, x^2 ja $\frac{1}{2}x^2$, kui $x = -2{,}5;\ 1{,}2;\ 2{,}8$;

b) missuguste x väärtuste korral

$2x^2 = 7$; $x^2 = 8$; $\frac{1}{2}x^2 = 4{,}5$.

290. Joonesta funktsioonide $y = 2x^2$ ja $y = \frac{1}{2}x^2$ graafikute järgi funktsioonide $y = -2x^2$ ja $y = -\frac{1}{2}x^2$ graafikud.

Kuidas asuvad x-telje suhtes funktsioonide

a) $y = 2x^2$ ja $y = -2x^2$ graafikud?

b) $y = \frac{1}{2}x^2$ ja $y = -\frac{1}{2}x^2$ graafikud?

Kui $a \neq 0$, siis funktsioonide $y = ax^2$ ja $y = -ax^2$ graafikud on x-telje suhtes sümmeetrilised, seega on ka teise funktsiooni graafik parabool. Niisiis, iga nullist erineva a korral

funktsiooni $y = ax^2$ graafik on parabool.

Mille poolest erinevad funktsioonide

$y = ax^2$ ja $y = -ax^2$

graafikud?

Vaadeldes funktsioone

$y = x^2$ ja $y = ax^2$

näeme, et teise funktsiooni graafiku ordinaadid saadakse esimese funktsiooni graafiku ordinaatidest, korrutades neid ühe ja sama teguriga a. Sellepärast nimetame funktsiooni $y = x^2$ *graafikut* **põhiparabooliks.** *Põhiparabooli sageda esinemise tõttu on kasulik tema joonestamiseks valmistada papist šabloon.*

RUUTVÕRRAND $ax^2 = b$

291. a) *Pool otsitava arvu ruudust võrdub 7-ga. Kui suur on otsitav arv?*

Lahendus. *Kui otsitava arvu tähistame tähega x, siis pool otsitava arvu ruudust on* $\frac{1}{2}x^2$. *Ülesande tingimuse kohaselt võrdub see avaldis 7-ga. Saame ruutvõrrandi*

$\frac{1}{2}x^2 = 7.$

Saadud ruutvõrrandi lahendamiseks võime kasutada graafikut joonisel 43. *Graafikust näeme, et* $\frac{1}{2}x^2$ *on võrdne 7-ga siis, kui* $x_1 = -3{,}75$ *või kui* $x_2 = 3{,}75$. *Antud võrrandil on seega kaks lahendit. Kontrollides neid lahendeid ruutude tabeli abil, näeme, et mõlemad leitud arvud rahuldavad ülesande tingimust. Seega on otsitav ligikaudu kas* $-3{,}75$ *või* $3{,}75$.

Võrrandi $\frac{1}{2}x^2 = 7$ *võime lahendada ka arvutamise teel, kasutades ruutjuurte tabelit. Jagades selle võrrandi mõlemad pooled tundmatu ruudu kordajaga, s. o. arvuga* $\frac{1}{2}$, *saame*

$x^2 = 14;$
$x = \pm\sqrt{14} = \pm 3{,}74;$
$x_1 = -3{,}74;\ x_2 = 3{,}74.$

Ruutvõrrandi lahendid, mis on leitud tabeli abil, on täpsemad kui graafikust leitud arvud.

b) Leia graafiku abil järgmiste ruutvõrrandite lahendid ja kontrolli neid arvutamise teel.

$\frac{1}{2}x^2 = 1\frac{1}{2}$: $\quad 0{,}5x^2 = 3{,}5;\quad 0{,}5x^2 = 9.$

292. a) *Kuubi täispindala on 27 dm². Kui pikk on kuubi serv?*

Lahendus. *Olgu kuubi serva pikkus x dm. Kuubi täispindala on siis* $6x^2$ *dm². Saame võrrandi*

$6x^2 = 27$

ehk

$2x^2 = 9.$

Graafikust (joon. 43) leiame selle võrrandi lahendid:

$x_1 = -2{,}1;\ x_2 = 2{,}1.$

Et otsitav kuubi serva pikkus on positiivne, siis $x_1 = -2{,}1$ *ei ole antud ülesande lahendiks.*

Vastus. *Kuubi serva pikkus on 2,1 dm.*

b) *Lahendades võrrandi* $2x^2 = 9$ *arvutamise teel, jagame esiteks ta mõlemad pooled 2-ga:*

$x^2 = 4{,}5.$

Siit saame

$x = \pm\sqrt{4{,}5} = \pm 2{,}12.$

Üldiselt, kui a ja b on ühe ja sama märgiga arvud, siis ruutvõrrandi

$ax^2 = b$

lahendamisel saame

$x^2 = \frac{b}{a}; \qquad x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$

Kui a ja b on erimärgilised, siis võrrandil lahendit ei ole.

c) Lahenda graafiliselt järgmised ruutvõrrandid ja kontrolli saadud lahendeid arvutamise teel.

$2x^2 = 9{,}5; \qquad 2x^2 = 5; \qquad 2x^2 = 4{,}3.$

293. Lahenda ruutvõrrandid.

a)	b)	c)
$3x^2 = 363$	$0{,}5x^2 = 40{,}5$	$5x^2 = 0{,}0716$
$5x^2 = 720$	$1{,}2x^2 = 172{,}8$	$6x^2 = 25{,}1$
$6x^2 = 294$	$0{,}07x^2 = 51{,}03$	$1{,}3x^2 = 2{,}873$
$2x^2 = 1568$	$1{,}02x^2 = 294{,}78$	$0{,}16x^2 = 0{,}261$
$4x^2 = 1444$	$0{,}17x^2 = 33{,}32$	$0{,}75x^2 = 0{,}111$

294. Kui pikk tuleb võtta võrdhaarse täisnurkse kolmnurga kaatet, et kolmnurga pindala oleks 100 cm²?

295. Kui pikk peab olema võrdkülgse kolmnurga külg, et kolmnurga pindala oleks 50 cm²?

FUNKTSIOON $y = ax^2 + bx$

296. a) *Tasapinnal on x sirget, milledest ükski paar ei ole paralleelsed. Kui suur on nende sirgete lõikepunktide arv y? Vastuse sellele küsimusele saame järgmise arutluse teel. Üks neist sirgetest lõikub iga ülejäänud sirgega, s. t. $x - 1$ sirgega $x - 1$ punktis, teine jälle $x - 1$ punktis jne., seega saaksime $x(x - 1)$ lõikepunkti. Kuid nüüd on iga lõikepunkt kaks korda arvesse võetud. Tõeline lõikepunktide arv* $y = \frac{1}{2}x(x - 1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$.

Niisiis

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x.$$

Kontrolli valemi õigsust 3 sirge puhul, 4 sirge puhul, 5 sirge puhul.

b) Klassis on x õpilast. Tulnud sügisel kooli, tahavad nad kõik üksteist kättpidi teretada. Leida teretuste arv y.

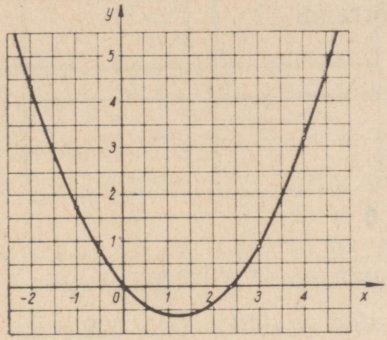
297. a) Kujuta graafiliselt funktsioon

$$y = 0{,}5x^2 - 1{,}2x,$$

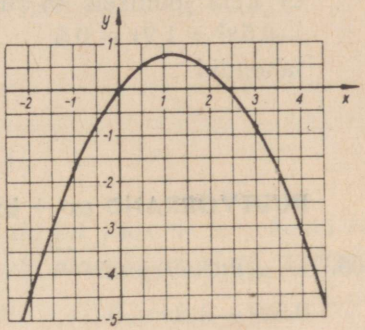
võttes x väärtusteks täisarvud —2-st kuni 4-ni. Võrdle saadud graafikut joonisega 44.

Ka funktsiooni $y = 0{,}5x^2 - 1{,}2x$ graafik on parabool, mille telg on paralleelne y-teljega. Leia see telg ja parabooli haripunkt. Kui argument suureneb k korda, siis antud funktsiooni avaldise esimene liige $0{,}5x^2$ kasvab k^2 korda, kuid teine liige $-1{,}2x$ on võrdeline x-ga, seega vahe $0{,}5x^2 - 1{,}2x$ ei kasva k^2 korda.

Et selle funktsiooni avaldises argumendi kõrgeim aste on teine aste, siis ka seda funktsiooni nimetatakse **ruutfunktsiooniks.**



Joon. 44.



Joon. 45.

b) Leia jooniselt 44, millega võrdub avaldis $0{,}5x^2 - 1{,}2x$, kui x väärtus on $-1{,}5$; $-0{,}5$; 1,5; 3,6.

c) Leia jooniselt 44, missuguste x väärtuste korral avaldise $0{,}5x^2 - 1{,}2x$ väärtus on 4,5; 3; 2; 1.

298. a) Kuidas saab funktsiooni $y = 0{,}5x^2 - 1{,}2x$ graafiku järgi hõlpsasti joonestada funktsiooni $y = -0{,}5x^2 + 1{,}2x$ graafikut. Valmista see graafik (joon. 45). Leia saadud parabooli telg ja haripunkt.

b) Leia jooniselt 45

1) millega võrdub avaldis $-0{,}5x^2 + 1{,}2x$, kui x väärtus on $-1{,}2$; $-0{,}5$; 0,6; 3,3;

2) missuguste x väärtuste korral avaldise $-0{,}5x^2 + 1{,}2x$ väärtus on -4; -2; 0,5; 0,25.

299. a) Leia jooniselt 44, missuguste x väärtuste korral funktsioon

$y = 0{,}5x^2 - 1{,}2x$

on null ehk, teisiti, missugused on ruutvõrrandi

$0{,}5x^2 - 1{,}2x = 0$

lahendid.

b) Leia jooniselt 44 ruutvõrrandi

$0{,}5x^2 - 1{,}2x = 2$

lahendid.

c) Leia jooniselt 45 ruutvõrrandi
$-0{,}5x^2 + 1{,}2x = 0{,}5$
lahendid.

RUUTVÕRRAND $ax^2 + bx = 0$

300. a) *Ruutvõrrandi*

$0{,}5x^2 - 1{,}2x = 0$

lahendamiseks arvutamise teel kasutame korrutise nulliga võrdumise tingimust, kuna x sulgude ette toomisega saab selle võrrandi vasaku poole teisendada korrutiseks:

$x(0{,}5x - 1{,}2) = 0.$

Siit

$x = 0;\ 0{,}5x - 1{,}2 = 0,$

millest

$x_1 = 0;\ x_2 = 2{,}4.$

b) Lahenda ruutvõrrand

$ax^2 + bx = 0.$

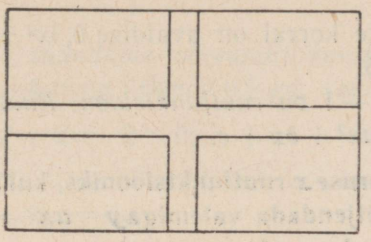
301. Lahenda ruutvõrrandid

a) $x(x + 2) = 0$
$(x - 4)(x + 5) = 0$
$(x - 3)(x - 7) = 0$
$7x^2 - 8x = 0$
$5x^2 + 5x = 0$

b) $x^2 - 13x = 0$
$6x^2 + 8x = 0$
$1{,}2x^2 - 3x = 0$
$ax^2 + 3bx = bx$
$ax(x - b) = 2cx$

FUNKTSIOON $y = ax^2 + bx + c$

302. *Ristkülikukujulisele kooliõuele rajati 2 võrdse laiusega teed nii, nagu näidatud joonisel 46.*
Õue pikkus on 200 m ja laius 150 m. Avalda muru pindala y, kui tee laius on x meetrit.



Joon. 46.

Lahendus. *Lühema tee pindala on* $150x\ m^2$ *ja pikema tee pindala* $200x\ m^2$. *Teede ristumisala pindala on* $x^2\ m^2$. *Seega*

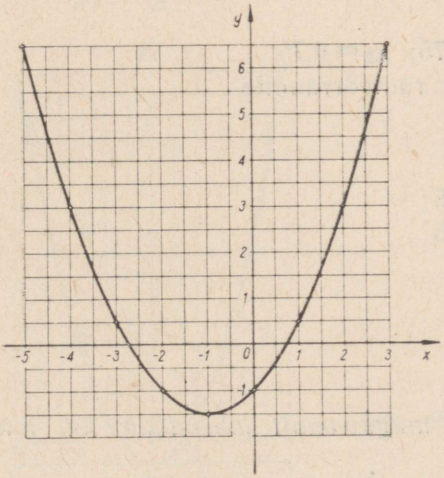
$y = 200 \cdot 150 - 150x - 200x + x^2$

ehk

$y = x^2 - 350x + 30\,000.$

Arvuta y, kui $x = 3$.

303. a) Joonesta funktsiooni $y = 0{,}5x^2 + x - 1$ graafik, võttes argumendi x väärtusteks täisarvud -5-st kuni $+3$-ni. Võrdle oma graafikut joonisega 47.
Mis joon on selle funktsiooni graafikuks?
Missugused on selle parabooli haripunkti koordinaadid?
Kuskohal parabooli telg lõikab x-telge?
b) Leia saadud graafiku abil:
1) avaldise $0{,}5x^2 + x - 1$ väärtus, kui x väärtus on $-4{,}5$; $-3{,}5$; $-2{,}5$; 0; 1,5;



Joon 47.

2) missuguste x väärtuste korral on avaldise $0{,}5x^2 + x - 1$ väärtus 4,5; 3,5; 2; 1; —0,5;

c) *Sõltuvus* $y = 0{,}5x^2 + x - 1$ *on ruutfunktsioon. Ruutfunktsiooni üldine kuju on* $y = ax^2 + bx + c$.

Suurust y nimetatakse suuruse x ruutfunktsiooniks, kui nendevahelist sõltuvust saab väljendada valemiga $y = ax^2 + bx + c$, kus a, b ja c on antud arvud.

Kui $c = 0$, *siis ruutfunktsioonil on kuju* $y = ax^2 + bx$.
Kui $b = 0$ *ja* $c = 0$, *siis ruutfunktsioonil on kuju* $y = ax^2$.
Kui $a = 1$, $b = 0$ *ja* $c = 0$, *siis ruutfunktsioonil on kuju* $y = x^2$.
Seega funktsioonid $y = x^2$, $y = ax^2$ *ja* $y = ax^2 + bx$ *on ruutfunktsiooni erijuhtumid.*

Iga ruutfunktsiooni graafikuks on parabool.

RUUTVÕRRAND $ax^2 + bx + c = 0$

304. *Jooniselt 47 näed, et avaldis*

$0{,}5x^2 + x - 1$

võrdub nulliga siis, kui

$x = -2{,}75$ *ja kui* $x = 0{,}75$.

Seega ruutvõrrandi

$0{,}5x^2 + x - 1 = 0$

lahendid on $x_1 = -2{,}75$; $x_2 = 0{,}75$.
Leia samalt jooniselt ruutvõrrandite

a) $0{,}5x^2 + x - 1 = 6$
b) $0{,}5x^2 + x - 1 = 4$
c) $0{,}5x^2 + x - 1 = 2{,}5$
d) $0{,}5x^2 + x - 1 = 1{,}5$

lahendid.

305. *Võrrandit*

$0{,}5x^2 + x - 1 = 0$

saab graafilisel teel mugavamalt lahendada, kui toimime järgmiselt:

1) *taandame võrrandit ruutliikme kordajaga, s.o. jagame kõik tema liikmed* 0,5-ga, *saame*

$x^2 + 2x - 2 = 0$;

2) *viime liikmed, mis ei sisalda tundmatu ruutu, paremale poolele, saame*

$x^2 = -2x + 2$.

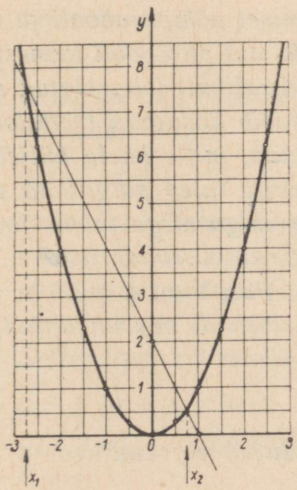
Nüüd on antud võrrandi lahendamine taandunud niisuguste x väärtuste leidmisele, mille korral funktsioonide x^2 *ja* $-2x + 2$ *väärtused on võrdsed. Esimese funktsiooni graafikuks on põhiparabool, mille joonestamine on kerge (eriti veel siis, kui selleks on valmistatud šabloon); teine on lineaarne funktsioon, mille graafikuks on sirge. Joonestades mõlemad graafikud ühises teljestikus (joon.* 48), *leiame, missugustel x väärtustel funktsioonide väärtused on võrdsed, s. t. leiame nende graafikute lõikepunktide abstsissid.*
Lõikepunktide abstsissid on

$x_1 = -2{,}75$; $x_2 = 0{,}75$.

Need ongi võrrandi lahendid.

Ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ graafilisel lahendamisel:
1) taandame võrrandit ruutliikme kordajaga a, saades taandatud ruutvõrrandi:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$



Joon. 48.

2) **viime lineaarse liikme ja vabaliikme paremale poolele:**

$$x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}.$$

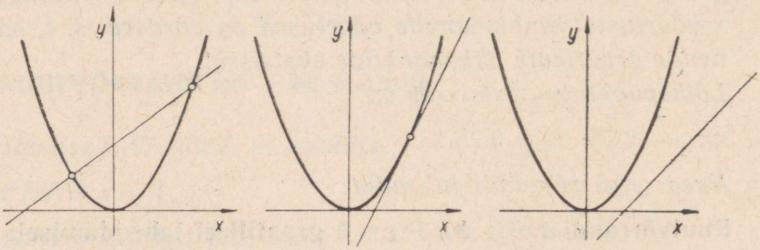
3) **leiame funktsioonide $y = x^2$ ja $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$ graafikute lõikepunktide abstsissid, mis ongi antud võrrandi lahendid.**

Kui sirge puudutab parabooli, siis on tegemist kokkulangenud lõikepunktidega. Sel korral

$x_1 = x_2$,

s. t. antud ruutvõrrandi lahendid on võrdsed.

Kui sirge ja parabool ei lõiku, siis antud ruutvõrrandil lahendid puuduvad.



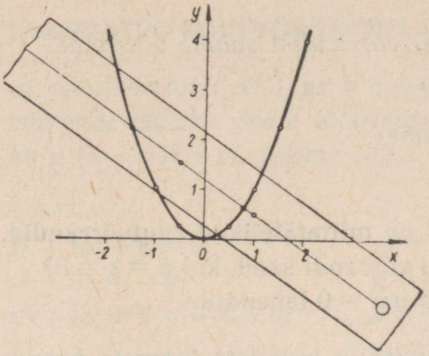
Kaks erinevat lahendit *Kaks võrdset lahendit* *Lahendid puuduvad*

Joon. 49.

306. *Ruutvõrrandi graafilisel lahendamisel põhiparabooli ja sirge abil ei ole tarvis iga võrrandi jaoks uut parabooli joonestada, vaid võib kasutada üht ja sama korralikult joonestatud parabooli. Sirge joonestamise asemel võib kasutada tselluloidist, pleksiklaasist või klaasist joonlauda, mille ühele küljele on tõmmatud peenike kriips. See kriips tuleb paigutada paraboolile iga võrrandi puhul nõnda, nagu sirge tuleks joonestada. Joonisel 50 on näidatud ruutvõrrandi* $10x^2 + 7x - 12 = 0$ *graafiline lahendamine. Parabooli* $y = x^2$ *ja sirge* $y = -0{,}7x + 1{,}2$ *lõikepunktide abstsissid, mis on antud võrrandi lahenditeks, on*

$x_1 = -1{,}5$ *ja* $x_2 = +0{,}8$.

Kontrolli, kas arvud rahuldavad antud võrrandit.



Joon. 50.

307. Leia põhiparabooli ja sirge abil järgmiste võrrandite lahendid.

1) $x^2 - x - 3 = 0$
2) $2x^2 - x - 4 = 0$
3) $6x^2 - 10x - 15 = 0$
4) $8x^2 - 7x - 28 = 0$
5) $9x^2 + 10x - 27 = 0$
6) $x^2 + x - 4 = 0$
7) $2x^2 + 3x - 6 = 0$
8) $x^2 - 2x + 1 = 0$
9) $5x^2 + 4x - 10 = 0$
10) $8x^2 + 9x - 36 = 0$

TÄIELIK JA MITTETÄIELIK RUUTVÕRRAND

308. *Seni oleme arvutamise teel õppinud lahendama ruutvõrrandeid kujul*

$x^2 = m$,
$ax^2 = b$,
$ax^2 + bx = 0$.

Graafiku abil oskame lahendada neidsamu võrrandeid ja veel võrrandit kujul

$ax^2 + bx + c = 0$.

Viimasel võrrandil on kolm liiget: liige, mis sisaldab tundmatu ruutu (ax^2), liige, mis sisaldab tundmatu esimest astet, ehk lineaarne liige (bx) ja vabaliige (c), mis ei sisalda tundmatut. Muid liikmeid ruutvõrrandis ei saagi esineda. Sellepärast võrrandit kujul

$ax^2 + bx + c = 0$

nimetatakse **täielikuks ruutvõrrandiks.**

Kui $b = 0$, *siis täielikust võrrandist saame võrrandi*

$ax^2 + c = 0$;

kui aga $c = 0$, *siis saame*

$ax^2 + bx = 0$.

Kaks viimast võrrandit on **mittetäielikud ruutvõrrandid.**
Missuguse mittetäieliku võrrandi saad, kui $b = c = 0$?
Missugused on võrrandi $ax^2 = 0$ lahendid?

309. a) *Pärast sulgude avamist ja sarnaste liikmete koondamist saab iga ruutvõrrandi kirjutada kujul*

$ax^2 + bx + c = 0$, *kus* $a > 0$.

Kordaja a ei või olla null, sest siis ei oleks võrrand ruutvõrrand. Kui a peaks tulema negatiivne, siis pärast kõikide liikmete korrutamist arvuga -1 *saame ruutliikme kordajaks positiivse arvu. Võrrand* $ax^2 + bx + c = 0$ *on* **üldkujuline ruutvõrrand.**
Ruutvõrrandit, milles esikohal on kirjutatud positiivse kordajaga ruutliige, teisel kohal lineaarne liige, kolmandal kohal vabaliige ja paremal poolel null, nimetatakse **normaalkujuliseks ruutvõrrandiks.**
b) Teisenda võrrand

$x^2 = 3(x + 2)(x - 1)$

normaalkujuliseks ja leia ta lahendid graafilisel teel.

310. *Üldkujulise ruutvõrrandi*

$ax^2 + bx + c = 0$

liikmete jagamisel ruutliikme kordajaga a, s. o. võrrandi taandamisel a-ga, saame võrrandi

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

ehk, tähistades arvud $\frac{b}{a}$ *ja* $\frac{c}{a}$ *vastavalt tähtedega p ja q,*

$x^2 + px + q = 0$,

mida nimetame **taandatud ruutvõrrandiks.**
Kui suur on taandatud ruutvõrrandi ruutliikme kordaja?
Normaalkujulist ruutvõrrandit, milles ruutliikme kordaja ei ole 1, *nimetame* **taandamata ruutvõrrandiks.**

TAANDATUD RUUTVÕRRANDI LAHENDAMINE

311. a) *Ruutvõrrandi* $x^2 + px + q = 0$ *lahendamiseks teisendame võrrandi vasaku poole täisruuduks, s. t. anname võrrandile kuju* $(x + b)^2 = m$, *leiame siit* $x + b$ *ja lõpuks* x.

Näide.

$x^2 + 6x + 8 = 0;$ $\quad (x + 3)^2 = 1;$

$x^2 + 6x = -8;$ $\quad x + 3 = \pm 1;$

$x^2 + 6x + 9 = -8 + 9;$ $\quad x = -3 \pm 1;$

$x_1 = -2;\ x_2 = -4.$

Kirjelda lahenduskäiku. Kontrolli lahendeid.

b) Lahenda võrrandid:

1) $(x - 2)^2 = 16$

$(x + 5)^2 = 9$

$(x - 9)^2 = 529$

$(x - 0{,}3)^2 = 1{,}41$

$(x - 1{,}2)^2 = 1{,}44$

2) $(x - 1{,}4)^2 = 33{,}6$

$(x + 0{,}2)^2 = 0{,}444$

$\left(x - \frac{6}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}$

$\left(x - 8\frac{1}{2}\right)^2 = 56\frac{1}{4}$

$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = 30\frac{1}{4}$

312. Kirjuta iga ruutvõrrandi vasak pool kaksliikme ruuduna ning leia seejärel ta lahendid.

1) $x^2 + 14x + 49 = 25$
2) $x^2 - 12x + 36 = 144$
3) $x^2 - 100x + 2500 = 1$
4) $x^2 - 0{,}8x + 0{,}16 = 0{,}04$
5) $x^2 - 5x + 6{,}25 = 12{,}25$
6) $x^2 + 8x + 16 = 169$
7) $x^2 - 18x + 81 = 225$
8) $x^2 - 80x + 1600 = 4$
9) $x^2 + 1{,}4x + 0{,}49 = 0{,}81$
10) $x^2 + x + 0{,}25 = 2{,}25$

313. Liida antud ruutvõrrandi mõlema poolega niisugune arv, et võrrandi vasak pool oleks kaksliikme ruut ja lahenda siis saadud võrrand.

1) $x^2 - 4x = 21$
2) $x^2 + 6x = -5$
3) $x^2 - 2x = 1{,}25$
4) $x^2 - 3x = 10$
5) $x^2 - 5x = 14$
6) $x^2 - 4x = 45$
7) $x^2 + 10x = -9$
8) $x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{8}{9}$
9) $x^2 + 3x = 4$
10) $x^2 - 7x = 18$

314. Vii antud ruutvõrrandis vabaliige paremale poolele, seejärel liida võrrandi mõlema poolega niisugune arv, et vasak pool oleks täisruut, s. o. täienda vasak pool täisruuduks, ning lahenda saadud võrrand.

1) $x^2 - 4x - 12 = 0$
2) $x^2 + 6x + 5 = 0$
3) $x^2 - 2x - 3 = 0$
4) $x^2 - 10x - 11 = 0$
5) $x^2 - 7x + 10 = 0$
6) $x^2 - 4x - 60 = 0$
7) $x^2 + 8x + 15 = 0$
8) $x^2 + 4x - 5 = 0$
9) $x^2 + 3x - 18 = 0$
10) $x^2 - x - 12 = 0$

315. a) *Taandatud ruutvõrrandi*

$x^2 + px + q = 0$

lahendite leidmiseks saame tuletada valemi. Selleks

1) *viime vabaliikme q vastupidise märgiga paremale poolele:*

$x^2 + px = -q$ *ehk* $x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x = -q;$

2) *täiendame vasaku poole täisruuduks, liites võrrandi mõlema poolega* $\left(\frac{p}{2}\right)^2$:

$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q;$

3) *kirjutame vasaku poole ruudu kujul:*

$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q;$

4) *viimane võrrand on kujuga* (*vt. üles.* 311)

$(x + b)^2 = m$, *kus* $m = \left(\frac{p}{2}\right) - q,$

siit saame kaks l i n e a a r s e t võrrandit:

$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q};$

5) *avaldades x, saame valemi*

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Kirjutades lahendid eraldi välja, saame:

$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q};\quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$

Taandatud ruutvõrrandi lahendivalemi võib sõnastada nii:

taandatud ruutvõrrandi lahendeiks on pool lineaarliikme kordaja vastandarvust ± ruutjuur selle poole kordaja ruudu ja vabaliikme vahest.

b) Näide. *Lahenda võrrand* $x^2 - x - 20 = 0$.

Lahendus.

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-20)};$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20};$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}.$$

Seega

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5 \text{ ja } x_2 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4.$$

Kontrollides võime veenduda, et need arvud on tõesti antud võrrandi lahendid.

c) Lahenda võrrandid.

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$
2) $x^2 - 2x - 3 = 0$
3) $x^2 - x - 6 = 0$
4) $x^2 + 5x + 6 = 0$
5) $x^2 + 8x + 15 = 0$
6) $x^2 - 7x + 12 = 0$
7) $x^2 + 3x - 4 = 0$
8) $x^2 - 3x - 10 = 0$
9) $x^2 + 8x + 7 = 0$
10) $x^2 + 15x + 56 = 0$

316. a) *Kui taandatud ruutvõrrandi*

$x^2 + px + q = 0$

lahendite

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

arvutamisel ilmneb, et

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0,$$

siis sellel ruutvõrrandil lahendid puuduvad. Miks?
Kui

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0,$$

siis $x_1 = -\frac{p}{2}$ *ja* $x_2 = -\frac{p}{2}$, *mis ütleb, et lahendid on teineteisega võrdsed.*
Kui aga

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0,$$

siis on võrrandil kaks erinevat lahendit.

b) Otsusta võrrandeid lahendamata, missugusel ruutvõrrandil lahendid puuduvad, missugusel on lahendid võrdsed ja missugusel erinevad.

1) $x^2 - 4x - 12 = 0$
$x^2 + 6x + 9 = 0$
$x^2 - 2x + 3 = 0$

2) $x^2 - 4x - 60 = 0$
$x^2 + 8x + 17 = 0$
$x^2 - 12x + 36 = 0$

317. Lahenda järgmised ruutvõrrandid, leides lahendid täpsusega 0,1.

1) $x^2 - 6x + 4 = 0$
2) $x^2 + 8x + 13 = 0$
3) $x^2 - 5x + 3 = 0$
4) $x^2 - x - 50 = 0$
5) $x^2 + 7x - 5 = 0$
6) $x^2 + 5x + 4 = 0$
7) $x^2 - 9x - 1 = 0$
8) $x^2 + 2x + 0{,}7 = 0$
9) $x^2 + 0{,}8x - 1 = 0$
10) $x^2 + 5x + 5 = 0$

318. Lahenda järgmised ruutvõrrandid. Kui lahendeid pole võimalik täpselt leida, arvuta nad kolme tüvenumbriga.

1) $x^2 - 9x - 36 = 0$
2) $x^2 + 7x - 7 = 0$
3) $x^2 - x - 20 = 0$
4) $x^2 + 2x - 2 = 0$
5) $x^2 - 20x + 91 = 0$
6) $x^2 + 3x - 19 = 0$
7) $x^2 - 11x + 10 = 0$
8) $y^2 + 4y + 6 = 0$
9) $y^2 + 9y + 12 = 0$
10) $z^2 - 7z - 8 = 0$
11) $x^2 - 8x + 9 = 0$
12) $x^2 + 5x - 66 = 0$
13) $x^2 + 4x + 4 = 0$
14) $x^2 + 7x - 120 = 0$
15) $x^2 - 3x - 5\frac{2}{5} = 0$
16) $u^2 - 6u + 4 = 0$
17) $u^2 + 13u - 14 = 0$
18) $v^2 - v + 42 = 0$
19) $v^2 - 9v + 7 = 0$
20) $w^2 + 15w - 1 = 0$

319. Kahe järjestikuse täisarvu korrutis on 156. Mis arvud need on?

320. Kahe teineteisele järgneva täisarvu ruutude summa on 85. Mis arvud need on?

321. Kahe järjestikuse paarisarvu korrutis on 288. Mis arvud need on?

322. Jaotada arv 19 kahte niisugusesse ossa, et nende osade ruutude summa oleks 181.

323. Jaotada lõik, mille pikkus on 30 cm, kahte ossa nii, et suurema osa jagatis kogu lõiguga oleks sama mis väiksema osa jagatis suurema osaga.

324. Kahe arvu vahe on 6. Nende arvude ruutude summa on 260. Leia need arvud.

325. Kahe järjestikuse paarisarvu korrutis on 6888. Missugused arvud need on?

TAANDAMATA RUUTVÕRRANDI LAHENDAMINE

326. a) *Normaalkujulise taandamata ruutvõrrandi lahendamisel võib toimida nii, nagu taandatud ruutvõrrandi lahendamiselgi, täiendades võrrandi vasaku poole täisruuduks. Lahendame täisruuduks täiendamise võttega võrrandi*

$2x^2 - 5x + 2 = 0.$

Viime esiteks vabaliikme paremale poolele, saame

$2x^2 - 5x = -2.$

Et vasaku poole täisruuduks täiendamisel vältida murdarve, selleks korrutame kõik liikmed ruutliikme kordaja neljakordsega, *antud juhul arvuga* 8, *saame*

$16x^2 - 40x = -16$

ehk

$(4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 5 = -16.$

Nüüd liidame võrrandi mõlema poolega 25, *saame*

$(4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 5 + 25 = 9.$

Võrrandi vasak pool ongi nüüd täisruut. Ta on nimelt võrdne avaldisega $(4x - 5)^2$. *Seepärast võime võrrandi kirjutada kujul*

$(4x - 5)^2 = 9.$

Siit saame kaks lineaarset võrrandit

$4x - 5 = \pm 3.$

Lahendades need lineaarsed võrrandid, saame

$4x = 5 \pm 3,$

millest

$$x = \frac{5 \pm 3}{4}$$

ehk

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2; \qquad x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Kontrollides võime veenduda, et need arvud on tõesti selle võrrandi lahenditeks.

b) Lahenda eelmise näite eeskujul võrrandid

1) $3x^2 - 10x + 3 = 0;$
2) $2x^2 - 3x - 20 = 0;$
3) $4x^2 + 17x + 4 = 0.$

327. a) *Taandamata ruutvõrrandi lahendamisel võime toimida aga ka nii, et taandame ta esmalt ruutliikme kordajaga, sest siis saame taandatud ruutvõrrandi, mida saab lahendada juba valemi abil.*

Näide. *Lahendame niiviisi ruutvõrrandi*

$4x^2 + 7x - 2 = 0.$

Lahendus. *Taandades antud võrrandit ruutliikme kordajaga* 4, *saame taandatud ruutvõrrandi*

$x^2 + 1{,}75x - 0{,}5 = 0.$

Lahendades selle valemi abil, saame

$x = -0{,}875 \pm \sqrt{0{,}766 - (-0{,}5)} = -0{,}875 \pm$
$+ \sqrt{0{,}766 + 0{,}5} = -0{,}875 \pm \sqrt{1{,}266}$

ehk, ümardades kolme tüvenumbrini:

$x = -0{,}875 \pm \sqrt{1{,}27} = -0{,}875 \pm 1{,}13;$
$x_1 = -0{,}875 + 1{,}13 = 0{,}255;$
$x_2 = -0{,}875 - 1{,}13 = -2{,}005.$

b) Lahenda taandamata ruutvõrrand taandatud ruutvõrrandi lahendivalemi abil.

1) $9x^2 - 54x + 32 = 0$ 2) $5x^2 + 18x - 8 = 0$
3) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ 4) $2x^2 - 7x - 4 = 0$

328. a) *Taandamata ruutvõrrandi*

$ax^2 + bx + c = 0$

lahendamiseks saame tuletada valemi järgmiselt.

Taandame võrrandit ruutliikme kordajaga a. Saame

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Nüüd rakendame taandatud ruutvõrrandi lahendivalemit

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}.$$

Teisendame lahendi teist liiget

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Seega

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ehk

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

See on ruutvõrrandi üldine lahendivalem. Selle võib sõnastada järgmiselt:

ruutvõrrandi lahend võrdub murruga, mille nimetajaks on ruutliikme kordaja kahekordne ja lugejaks on lineaarliikme kordaja vastandarv ± ruutjuur vahest, mille saame, kui lineaarliikme kordaja ruudust lahutame ruutliikme kordaja ja vabaliikme neljakordse korrutise.

b) Näide. *Lahenda valemi abil võrrand*

$5x^2 + 13x - 6 = 0.$

Lahendus.

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-6)}}{10}$$

ehk

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 120}}{10} = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{10} = \frac{-13 \pm 17}{10}.$$

Seega

$$x_1 = \frac{-13 + 17}{10} = 0{,}4 \quad \textit{ja} \quad x_2 = \frac{-13 - 17}{10} = -3.$$

Kontrollimine näitab, et leitud arvud on antud võrrandi lahendid.

c) Lahenda valemi abil võrrandid

1) $3x^2 - 2x - 8 = 0$
2) $2x^2 + 9x + 10 = 0$
3) $4x^2 + 7x - 2 = 0$
4) $2x^2 - 5x + 2 = 0$
5) $3x^2 - 8x - 3 = 0$
6) $13x^2 - 11x - 2 = 0$
7) $9x^2 + 12x - 5 = 0$
8) $4x^2 - 4x - 3 = 0$
9) $8 + 11x - 10x^2 = 0$
10) $2 + 3x - 2x^2 = 0$

329. a) *Kui ilmneb, et ruutvõrrandi*

$ax^2 + bx + c = 0$

lahendamisel juuritav avaldis

$b^2 - 4ac < 0,$

siis võrrandil lahendid puuduvad. Miks?

Kui aga

$b^2 - 4ac = 0,$

siis

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a},$$

siit

$$x_1 = -\frac{b}{2a} \text{ ja } x_2 = -\frac{b}{2a},$$

s. t. lahendid on võrdsed.

Juhul kui

$b^2 - 4ac > 0,$

on võrrandil kaks erinevat lahendit. Miks?

b) *Juuritavat avaldist ruutvõrrandi lahendis nimetatakse võrrandi* **diskriminandiks** *ja seda tähistatakse tähega D. Seega on taandatud ruutvõrrandi diskriminant*

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

ja taandamata ruutvõrrandi diskriminant

$D = b^2 - 4ac.$

Kokkuvõttes võime ruutvõrrandi lahendite kohta ütelda:

ruutvõrrandil on kaks erinevat lahendit, kui ta diskriminant on positiivne arv; lahendid on võrdsed, kui diskriminant võrdub nulliga; lahendid puuduvad, kui diskriminant on negatiivne arv.

c) Otsusta võrrandit lahendamata, kas tal on lahendeid või mitte. Kui on, siis kas lahendid on erinevad või võrdsed?

1) $6x^2 + 7x - 3 = 0$
2) $5x^2 - 4x + 7 = 0$
3) $x^2 + 8x + 18 = 0$
4) $x^2 - 12x + 35 = 0$
5) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
6) $x^2 - 4x + 4 = 0$

330. a) *Ruutvõrrandi üldine lahendivalem on rakendatav ka kõigi erikujuliste ruutvõrrandite lahendamisel. Näiteks, kui* $a = 1$, *siis võrrand osutub taandatud ruutvõrrandiks* $x^2 + bx + c = 0$.

Üldise lahendivalemi järgi saame lahenditeks

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Rakendades aga taandatud ruutvõrrandi lahendivalemit, saame

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Teisendades lahendi teist liiget, saame

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Seega

$$x = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Näeme, et mõlemad lahendivalemid annavad ühe ja sama tulemuse.

Näiteks võrrandi $x^2 - 2x - 35 = 0$ *lahendamisel taandatud ruutvõrrandi lahendivalemi abil saame*

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + 35} = 1 \pm \sqrt{36} = 1 \pm 6;$$
$$x_1 = 1 + 6 = 7; \qquad x_2 = 1 - 6 = -5.$$

Ruutvõrrandi üldine lahendivalem annab

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \frac{2 \pm 12}{2};$$

$$x_1 = \frac{2 + 12}{2} = 7; \quad x_2 = \frac{2 - 12}{2} = -5.$$

Nagu näeme, tulemused on samad.

Kui antud taandatud ruutvõrrandis lineaarliikme kordaja p on paaritu arv, siis on seda võrrandit lihtsam lahendada taandamata ruutvõrrandi lahendivalemi abil, kuna sellega väldime arvutusi murdarvudega.

b) Lahenda võrrand kahel viisil.

1) $x^2 - 6x - 7 = 0$ 2) $x^2 - 5x - 6 = 0$
3) $7x^2 + x = 0$ 4) $3x^2 - 2x = 0$
5) $2x^2 - 9 = 0$ 6) $4x^2 - 81 = 0$

331. Lahenda ruutvõrrandid:

1) $x^2 + 9x - 5 = 0$
$2y^2 + y - 7 = 0$
$3z^2 - 8z + 4 = 0$
$2u^2 + 3u - 1 = 0$
$3v^2 - 10v - 10 = 0$

2) $5a^2 - 11a + 3 = 0$
$3b^2 + 12b - 17 = 0$
$6c^2 - 13c - 15 = 0$
$d^2 - 14d + 4 = 0$
$e^2 - 16e + 11 = 0$

3) $3x^2 + 5x - 2 = 0$
$2u^2 + 5u + 2 = 0$
$s + 6 = 2s^2$
$6a^2 - 17a - 14 = 0$
$10p - 21 = 6p^2 - 13p$

4) $4m^2 + 45m - 36 = 0$
$10n^2 + 21n - 10 = 0$
$9q^2 + 30q - 24 = 0$
$1{,}4z^2 + 5z = 2{,}4$
$w^2 - 1{,}6w + 0{,}3 = 0$

5) $2x^2 - 7x + 5 = 0$
$x^2 + 23x - 10 = 0$
$6x^2 + 4x - 3 = 0$
$3x^2 + 18x - 8 = 0$
$4x^2 - 13x - 17 = 0$

6) $7x^2 - 42x + 36 = 0$
$69x^2 - x - 55 = 0$
$9x^2 + 50x - 121 = 0$
$1{,}2x^2 + 8{,}3x - 23{,}6 = 0$
$3{,}4x^2 - 2{,}5x - 6 = 0$

332. Teisenda võrrand normaalkujuliseks ja lahenda see.

1) $x(x + 2) = 35$
2) $x^2 = 3(2x - 3)$
3) $2(x^2 - 9) = 5(x - 4)$
4) $(x - 1)^2 = x + 1$
5) $(1 + 2x)(1 - 2x) = 3x$
6) $(x + 7)^2 = 28x$
7) $4 = (x - 5)^2$
8) $(x - 5)(7 - x) = 1$
9) $x^2 = 2(x + 8)(x - 6)$
10) $(2x - 7)(x - 3) = 4x$
11) $9x(x + 1) = 2(6x + 1)$
12) $(1 + x)^2 = (1 - 2x)^2$
13) $(3x - 2)(2x - 1) = x$
14) $(3 - x)^2 = (1 + 3x)(9 - x)$
15) $(2x + 3)^2 = (3x - 2)(x + 8)$
16) $(3x - 1)(x - 2) = (x + 2)(x - 1)$
17) $(4x - 1)^2 = (4x + 1)(8x - 5)$
18) $(5x + 7)^2 - (2x + 1)^2 = 0$
19) $2(x - 1)(2x + 1) = (4x - 1)(2x - 3)$
20) $(8x + 3)(4x + 1) = 2(x + 1)(4x + 3)$
21) $ax^2 + (a - b)x = b$
22) $ax^2 + (a + 1)x = -1$

333. *Võrrandit, mis sisaldab tundmatut murru nimetajas, nimetatakse* **murdvõrrandiks.**

Näiteks võrrand

$$\frac{15x}{2(x-3)} - \frac{x}{2(x+3)} + \frac{9}{x^2-9} = 0$$

on murdvõrrand.

Selle võrrandi lahendiks ei saa olla arvud 3 *ja* -3. *Miks? Lahendame selle võrrandi.*
Võrrandis esinevate murdude ühine nimetaja on $2(x^2-9)$, *seega vastavad laiendajad on* $x+3$, $x-3$ *ja* 2.

Niistis

$$\frac{\overbrace{15x}^{x+3}}{2(x-3)} - \frac{\overbrace{x}^{x-3}}{2(x+3)} + \frac{\overbrace{9}^{2}}{x^2-9} = 0;$$

$$15x(x+3) - x(x-3) + 18 = 0;$$
$$15x^2 + 45x - x^2 + 3x + 18 = 0;$$
$$14x^2 + 48x + 18 = 0;$$
$$7x^2 + 24x + 9 = 0;$$

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{576-252}}{14} = \frac{-24 \pm \sqrt{324}}{14} = \frac{-24 \pm 18}{14};$$

$$x_1 = \frac{-24+18}{14} = -\frac{3}{7}; \quad x_2 = \frac{-24-18}{14} = -3.$$

Et -3 *ei saa olla antud võrrandi lahendiks, siis on tarvis ainult seda kontrollida, kas* $-\frac{3}{7}$ *on lahend.*

Kontroll. *Asetame esimese leitud lahendi algvõrrandi vasakusse poolde* x *asemele, siis saame*

$$\frac{15 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)}{2 \cdot \left(-\frac{3}{7}-3\right)} - \frac{-\frac{3}{7}}{2 \cdot \left(-\frac{3}{7}+3\right)} + \frac{9}{\frac{9}{49}-9} = \frac{-\frac{45}{7}}{-\frac{48}{7}} + \frac{\frac{3}{7}}{\frac{36}{7}} + \frac{9}{\frac{9-441}{49}} =$$

$$= \frac{45}{48} + \frac{3}{36} + \frac{9 \cdot 49}{-432} = \frac{15}{16} + \frac{1}{12} - \frac{49}{48} = \frac{45+4-49}{48} = 0.$$

Näeme, et arv $-\frac{3}{7}$ *on antud võrrandi lahend.*

Antud murdvõrrandi teisendamisel saadud ruutvõrrandil on küll kaks lahendit, kuid antud võrrandil on ainult üks lahend. Et on murdvõrrandeid, mille teisendamisel saadud võrrandi kõik lahendid ei ole algvõrrandi lahenditeks, siis tuleb murdvõrrandi lahendeid alati kontrollida.

334. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{19x}{x+1} + \frac{11x}{x-1} = \frac{9}{x^2-1}$

2) $\frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x(1-x)} = \frac{x-2}{x(x+1)}$

3) $\frac{1}{12-5x} + \frac{1}{5x-12} = 1 - \frac{120}{(12-5x)^2}$

4) $3(2x-3) - \frac{22}{x} = \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot 5$

5) $\frac{9-x}{2} + \frac{4}{x-2} = \frac{3(x-1)}{2}$

6) $11x^2 + 7x - \frac{3}{7} = 4x(x+1) + 1$

7) $\frac{x-3}{x+4} + \frac{x-4}{2(x-1)} = \frac{1}{2}$

8) $\frac{3x+2}{2x-1} + \frac{7-x}{2x+1} = \frac{7x-1}{4x^2-1} + 5$

9) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 0$

10) $\frac{3}{5(x^2-1)} + \frac{1}{10(x+1)} = \frac{23}{238}$

11) $\frac{8}{3x-5} + \frac{9}{5x-8} = \frac{20}{7x-25}$

12) $\frac{2x+1}{7-x} + \frac{4x+1}{7+x} = \frac{45}{49-x^2} + 1$

13) $\frac{2(x+7)}{x+1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+11}{x^2-1} + 4$

14) $7 + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$

15) $\frac{x}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)^2}$

16) $\frac{4x^2-1}{4x+2} = \frac{9(2x+1)}{22} + \frac{8x^2-2}{2x+1}$

17) $\frac{x-2}{x^2+2x+1} + \frac{4x-8}{x+2x^2+x^3} = \frac{5x-10}{2x+2x^2}$

18) $\frac{3x^2+2}{x^2-1}+\frac{2(x-2)}{x+2}=\frac{5(x^2-x-1)}{x^2-1}$

19) $\frac{4x-1}{x+2}+2=\frac{4x+(4x+1)(2x-1)}{x^2+4x+4}$

20) $\frac{x^2+x}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{2x^2+2x}=\frac{3(x^2+2x+1)}{2x^2-2x}$

21) $\frac{7x+14}{x^2-1}+\frac{8x+16}{x^2-2x+1}=\frac{74+19x-9x^2}{x^3-x^2-x+1}$

22) $\frac{x+1}{x^3+x^2+x+1}+\frac{2x}{x^3-x^2+x-1}=\frac{15}{x^4-1}$

RUUTVÕRRANDI ABIL LAHENDUVAID ÜLESANDEID

335. a) Ülesanne. *Ristkülikukujulise spordiväljaku pindala on 88 aari. Kui üht tema külge vähendada 2 m võrra, teist aga suurendada 10 m võrra, siis saame ruudukujulise väljaku. Kui suur on selle ruudu külg?*

Lahendus. *Olgu ruudu külg x meetrit. Siis ristküliku küljed on* $x+2$ *ja* $x-10$ *meetrit. Seega ristküliku pindala on ruutmeetrites*

$(x+2)(x-10)$

ehk

$x^2-8x-20.$

Teiselt poolt on see pindala 88 aari ehk 8800 ruutmeetrit. Järelikult

$x^2-8x-20=8800$

ehk

$x^2-8x-8820=0.$

Võrrandi lahendusvalem annab:

$x=4\pm\sqrt{8836}$

ehk

$x=4\pm 94;$

seega

$x_1=4+94=98$ *ja* $x_2=4-94=-90.$

Et ruudu külg on positiivne suurus, siis x_2 *meie ülesande lahendina ei tule arvesse. Ainsaks lahendiks jääb arv* 98; *see tähendab, et otsitav ruudu külg on* 98 *m.*

Kontroll. *Väljaku küljed on meetrites* $98 + 2 = 100$ *ja* $98 - 10 = 88$; *seega väljaku pindala on* $100 \cdot 88$ *ehk* 8800 *ruutmeetrit ehk* 88 *aari, nagu peab olema.*

b) Ülesanne. *Linnade A ja B vaheline kaugus on* 349 *km. Linnast A lahkub sõiduk linna B suunas. Üks tund hiljem lahkub linnast B teine sõiduk linna A suunas. Teise sõiduki kiirus on* 8 *km võrra tunnis väiksem kui esimese kiirus. Sõidukid kohtuvad* 216 *km kaugusel linnast A. Kui suure kiirusega liigub kumbki sõiduk?*

Lahendus. *Olgu esimese sõiduki kiirus* v *kilomeetrit tunnis; siis on teise kiirus* $v - 8$ *kilomeetrit tunnis. Kuni kohtumiseni tuli esimesel sõidukil katta* 216 *km, teisel* 349—216 *ehk* 133 *km. Kohtumiseni sõiduks kulus esimesel*

$\frac{216}{v}$ *tundi,*

teisel

$\frac{133}{v-8}$ *tundi.*

Esimese aeg on teisest ühe tunni võrra pikem, seega

$$\frac{216}{v} - \frac{133}{v-8} = 1.$$

Selle võrrandi lahenditeks ei või olla 0 *ja* 8. *Kuidas see nähtub ülesande tekstist?*
Saadud võrrandi lahendamiseks vabaneme murdudest:

$$216(v-8) - 133v = v(v-8);$$

avame sulud:

$$216v - 1728 - 133v = v^2 - 8v;$$

viime liikmed vasakule poolele, koondame ja korrutame -1*-ga:*

$$v^2 - 91v + 1728 = 0.$$

Võrrandi diskriminant on

$$91^2 - 4 \cdot 1728 = 1369;$$

et see diskriminant on positiivne, siis on võrrandil 2 erinevat lahendit. Lahendivalem annab:

$v = \frac{91 \pm \sqrt{1369}}{2}$ *ehk* $v = \frac{91 \pm 37}{2}$;

seega

$v_1 = 64$ *ja* $v_2 = 27$.

Niisiis on esimese sõiduki kiirus kas 64 *või* 27 *km tunnis ning teise sõiduki kiirus sellele vastavalt kas* 56 *või* 19 *km tunnis.*

Kontrollime tulemusi ülesande teksti varal.

Esimese lahendipaari puhul esimene sõiduk tarvitab kohtumiseni aega $\frac{216}{64}$ *ehk* $3\frac{3}{8}$ *tundi, teine seevastu* $\frac{133}{56}$ *ehk* $2\frac{3}{8}$ *tundi, aegade vahe on* $3\frac{3}{8} - 2\frac{3}{8}$ *ehk* 1 *tund, nagu peab olema.*

Teise lahendipaari puhul esimene sõiduk tarvitab kohtumiseni aega $\frac{216}{27}$ *ehk* 8 *tundi, teine seevastu* $\frac{133}{19}$ *ehk* 7 *tundi; aegade vahe on* 8 — 7 *ehk* 1 *tund, nagu peab olema. Mõlemad lahendipaarid rahuldavad ülesande tingimusi.*

c) Lahenda võrrandi abil ülesanne.
Ruudukujulise plastikaaditüki ühes sihis venitamisel see pikenes 3 cm võrra ja kitsenes 1 cm võrra. Venitatud tüki pindala oli 60 cm². Kui pikk oli plastikaaditüki serv enne venitamist?

336. Nõukogude skreeperite D-213 ja D-188 kaevamislaiused meetrites on vastavalt võrdsed ruutvõrrandi

$400x^2 - 2400x + 3591 = 0$

lahenditega. Arvuta nende skreeperite kaevamislaiused.

337. Arvu ja tema ruudu summa on 30. Mis arv see on?

338. Arvu ruudu ja arvu enda vahe on 650. Leia see arv.

339. Kahe järjestikuse täisarvu ruutude summa on 545. Mis arvud need on?

340. Kahe järjestikuse paarisarvu ruutude summa on 100. Mis arvud need on?

341. Kahe arvu vahe on 7. Samade arvude korrutis on 368. Leia need arvud.

342. Kahest arvust üks on teisest 8 võrra suurem. Nende arvude korrutis on 425. Leia need arvud.

343. Kas on olemas kolm niisugust järjestikust täisarvu, et kahe väiksema ruutude summa võrdub suurema ruuduga?

344. Leia kolm niisugust järjestikust paarisarvu, et kahe väiksema ruutude summa oleks võrdne kolmanda ruuduga.

345. Leia 5 järjestikust naturaalarvu nõnda, et esimese kolme arvu ruutude summa võrdub järgneva kahe arvu ruutude summaga.

346. Leia 7 järjestikust naturaalarvu, milledest esimese nelja arvu ruutude summa võrdub järgneva kolme arvu ruutude summaga.

347. Ristküliku pikkus ületab laiuse ühe meetri võrra. Ristküliku pindala on 56 ruutmeetrit. Leia ristküliku mõõtmed.

348. Ristküliku ümbermõõt on 68 cm ja pindala on 204 cm^2. Leia ristküliku pikkus ja laius.

349. Kui ruudu üht külge suurendada 3 korda ja teist vähendada 2 m võrra, siis ruudu pindala suureneb 2 korda. Kui pikk on ruudu külg?

350. Ristkülikukujulise mänguväljaku mõõtmed on 8 m ja 4 m. Mänguväljaku pindala tehakse kaks korda suuremaks, suurendades võrdselt nii pikkust kui ka laiust. Kui palju tuleb pikendada kumbagi külge?

351. Ruudukujulisest papitükist valmistatakse karp mahuga 8 cm^3. Selleks lõigatakse nurkadest välja ruudud küljepikkusega 5 cm. Missuguse küljepikkusega on papitükk?

352. Ristkülikukujulisel papitükil, mille pikkus on 1,5 korda suurem laiusest, lõigatakse nurkadest ära ruudud küljega 3 cm. Murdes ülejääva osa sobivalt kokku, saadakse karp ruumalaga 216 cm^3. Kui suured on papitüki mõõtmed?

353. Klubiruumi põrandat, millel on ristküliku kuju ja mille mõõtmed on 4,8 ja 5,5 m, tahetakse katta vaibaga nõnda, et vaiba ümber jääks igast küljest ühelaiune riba põrandat vabaks, vaip aga kataks parajasti $\frac{1}{2}$ põranda pindalast. Kui suur peab vaip olema?

354. Aia suurus on 160 korda 240 ruutmeetrit. Pikuti ja risti minevate teede alla (vt. joon. 44) tahetakse võtta 2% kogu aia maa-alast. Kui suur tuleb valida tee laius?

355. Raamatukappi võib mahutada 640 ühesuurust raamatut, igale riiulile ühepalju raamatuid. Kui igale riiulile panna 8 raamatut rohkem, kui esialgu määratud, siis jääb 4 riiulit tühjaks. Mitu riiulit on raamatukapil?

356. Albumisse kavatseti kleepida 240 pilti, igale albumilehele ühepalju pilte. Kui aga lehele mahutada 2 pilti rohkem, kui esialgu otsustatud, siis jääb 6 lehte tühjaks. Mitu lehte on albumis?

357. Kaks autobussi sõidavad ühest linnast teise, millede vahemaa on 72 km. Et esimene autobuss sõidab tunnis 4 km rohkem kui teine, siis läbib ta nimetatud vahemaa 15 minuti võrra lühema ajaga. Kui suure kiirusega liiguvad autobussid?

358. Kahe aleviku vaheline kaugus on sillutatud maantee kaudu 26 km, halva külatee kaudu 18 km. Autobuss ja hobusõiduk asuvad ühel ja samal ajal teele: esimene valib pikema, kuid parema tee, teine lühema, kuid halvema. Et autobuss läbib tunnis 15 km võrra rohkem kui hobusõiduk, siis jõuab ta sihtkohta viimasest 55 minutit varem. Kui suure kiirusega liigub autobuss?

359. Aiand vajab 378 õuna pakkimiseks kaste. Kui igasse kasti panna 9 õuna rohkem kui kavatsetud, siis vajatakse üks kast vähem. Mitu kasti on vaja?

360. Turist kavatses matkata 252 km. Et ta matkas iga päev 3 km rohkem kui kavatsetud, siis kestis matk 2 päeva vähem. Mitu päeva kestis matk?

361. Raudteejaama veetorni paak täitub peapumba abil 2,5 tunni võrra kiiremini kui tagavarapumba abil. Kui töötavad mõlemad pumbad, siis täitub paak 3 tunni jooksul. Leida aeg, mis on tarvilik paagi täitmiseks peapumba abil.

362. Kahe erineva jõudlusega traktori koostöötamisel künti kolhoosi põld üles 8 päevaga. Esimene neist jõuaks selle põllu üles künda 12 päeva lühema ajaga kui teine, kui nad töötavad üksi. Kui palju aega kulub kummalgi selle maatüki ülestkündmiseks?

363. Kaks töölist lõpetavad töö koos töötades $6\frac{2}{3}$ tunniga. Mitme tunniga lõpetaks esimene tööline selle töö üksi töötades, kui selle töö tegemiseks kulub tal teisest 3 tundi vähem?

364. Ujula basseini täitmiseks kulub ühe toru kaudu 20 minutit vähem aega kui teise kaudu. Kui mõlemad torud avada üheaegselt, siis täitub bassein 24 minutiga. Mitme minutiga täituks bassein, kui avada ainult esimene toru?

365. Hoone ehitamisel oli tarvis kindlaks tähtajaks välja kaevata 8000 m^3 mulda. Töö lõpetati 8 päeva enne tähtaega, sest mullatööliste brigaad ületas plaani iga päev 50 m^3 võrra. Arvuta, mitmepäevane oli mullatööde tähtaeg?

366. Tee remontimisel oli tööl kaks brigaadi. Kumbki brigaad parandas teed 10 km ulatuses, kusjuures teine brigaad töötas üks päev vähem kui esimene. Mitu kilomeetrit teed parandas kumbki brigaad päevas, kui mõlemad brigaadid kokku parandasid päevas 4,5 km teed?

367. Paberitükist, mille mõõtmed on 24 ja 18 cm, lõigatakse igast neljast küljest ära võrdse laiusega ribad. Ülejäänud ristkülikukujuline paber on pindalalt just pool paberitüki algpindalast. Kui laiad on äralõigatud ribad?

368. Pilt, mille nähtava osa mõõtmed on 20 ja 16 cm, on raamis, mille esipindala on 352 cm^2. Kui lai on pildi raam?

369. Mootorpaat sõitis jõel 28 km pärivoolu ning pöördus siis kohe tagasi, kulutades edasi-tagasi teekonnaks 7 tundi. Leia mootorpaadi kiirus seisvas vees, teades, et vee voolu kiirus jões on 3 km tunnis.

370. Kahe linna vaheline kaugus mööda jõge on 80 km. Aurikul kulub edasi-tagasi sõiduks 8 tundi 20 minutit. Arvuta auriku kiirus seisvas vees, kui jõe voolu kiirus on 4 km tunnis.

371. Õmblusvabrik pidi tähtajaks õmblema 810 ülikonda. Teine vabrik pidi samaks tähtajaks õmblema 900 ülikonda. Esimene täitis tellimise 3 päeva, teine 6 päeva enne tähtaega. Mitu ülikonda õmmeldi kummaski vabrikus päevas, kui teises õmmeldi päevas 4 ülikonda rohkem kui esimeses?

372. Rong läbiks 180 km pikkuse vahemaa $\frac{2}{3}$ tunni võrra lühema ajaga, kui ta kiirus oleks 9 km võrra tunnis suurem. Mitu tundi sõidab rong seda vahemaad?

373. Kui jalgrattur sõidaks tunnis 2 km rohkem, siis kuluks tal 72 km läbimiseks $\frac{1}{2}$ tundi vähem aega. Kui suure kiirusega sõitis jalgrattur?

374. Kui kuubi serva pikendada n cm võrra, siis ruumala suureneb v cm³ võrra.
Arvuta kuubi serva pikkus järgmistel andmetel:

a) $n = 2$; $v = 98$; b) $n = 1{,}4$; $v = 46{,}424$.

375. Risttahuka põhja pikkus on laiusest 2 cm võrra suurem. Risttahuka kõrgus on 5 cm ja ta kaalub 882 g. Arvuta põhja mõõtmed, kui risttahukas on klaasist, mille erikaal on 2,8.

376. Leia korrapärase nelinurkse püstprisma põhiserva pikkus, kui täispindala on S cm² ja prisma kõrgus on h cm.

Arvuta, kui:

a) $S = 170$; $h = 10$; b) $S = 58{,}32$; $h = 7{,}2$.

377. Õõnsa kuubi seina paksus on 1 cm ja ta kaalub 189,7 g. Leia välimise serva pikkus, kui kuup on tehtud ainest, mille erikaal on 0,7.

378. Kaks hoiust, milledest üks on 300 rbl. võrra suurem kui teine, olid hoiul 2%-ga. Mõlemad hoiused tõid 120 rbl. intresse, sest väiksem hoius oli 1 aasta kauem hoiul. Mitu aastat oli hoiul suurem hoius?

379. Kahest metallist valmistatakse sulamit. Esimese metalli erikaal on teise omast 1,5 võrra suurem. Kui esimest metalli võetakse 20 g ja teist 40 g, siis sulami erikaal tuleb 9,4. Arvuta mõlema metalli erikaal.

TAANDATUD RUUTVÕRRANDI LAHENDITE OMADUSED

380. Lahenda alljärgnevas tabelis antud võrrandid. Arvuta iga võrrandi puhul lahendite summa ja lahendite korrutis, ümardades ligikaudsed tulemused kolme tüvenumbrini, ning täida tabel.

$x^2 + px + q = 0$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	p	$x_1 \cdot x_2$	q
$x^2 - 8x + 15 = 0$						
$x^2 + 4x - 21 = 0$						
$x^2 + 10x + 24 = 0$						
$x^2 + 10x + 20 = 0$						
$x^2 - 10x + 18 = 0$						

Võrdle lahendite summat võrrandi lineaarliikme kordajaga p ja lahendite korrutist vabaliikmega q. Mida paned tähele?

381. *Tõestame teoreemi:*

taandatud ruutvõrrandi lahendite summa võrdub tundmatu esimese astme kordaja vastandarvuga ja lahendite korrutis võrdub vabaliikmega.

Tõestus. *Taandatud ruutvõrrandi*

$x^2 + px + q = 0$

lahendid on

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

ja

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Leiame esiteks lahendite summa. Et liitmisel juured koonduvad, siis saame:

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \left(-\frac{p}{2}\right) = -p.$$

Leiame nüüd lahendite korrutise:

$$x_1 \cdot x_2 = \left[-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right] \cdot \left[-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right].$$

Rakendades summa ja vahe korrutise valemit, leiame:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q.$$

Niisiis

$x_1 + x_2 = -p$

ja

$x_1 \cdot x_2 = q.$

See ruutvõrrandi kordajate ja lahendite vaheline seos kannab **Viëta** *(vietaa)** **teoreemi** *nime.*

382. Otsusta iga võrrandi puhul:
1) millega võrdub lahendite summa;
2) millega võrdub lahendite korrutis;
3) kas lahendid on positiivsed või negatiivsed või on üks lahend positiivne ja teine negatiivne;
4) kui üks lahend on positiivne ja teine negatiivne, siis kumb on suurema absoluutväärtusega.

a) $x^2 - 11x + 28 = 0$
$x^2 + 4x - 227 = 0$
$x^2 + 13x + 59 = 0$
$x^2 - 13x + 36 = 0$
$x^2 + 8x - 105 = 0$

b) $x^2 - 12x - 61 = 0$
$x^2 + 14x + 48 = 0$
$x^2 - 16x + 63 = 0$
$x^2 - 17x - 38 = 0$
$x^2 - 19x - 92 = 0$

383. a) Missugused on taandamata ruutvõrrandi

$ax^2 + bx + c = 0$

lahendite ja kordajate vahelised seosed?

---

* Prantsuse matemaatik 1540—1603.

b) Otsusta iga alljärgneva võrrandi puhul:
1) millega võrdub lahendite summa;
2) millega võrdub lahendite korrutis;
3) missugused on lahendite märgid.

$2x^2 - x - 4 = 0$ $\quad$ $8x^2 - 7x - 28 = 0$
$3x^2 + 10x + 6 = 0$ $\quad$ $2x^2 - 6x + 3 = 0$
$5x^2 + 7x - 17{,}5 = 0$ $\quad$ $4x^2 - 3x - 12 = 0$

RUUTVÕRRANDI KOOSTAMINE LAHENDITE JÄRGI

384. a) Ülesanne. *Koosta ruutvõrrand, mille lahendid on* x_1 *ja* x_2.

Lahendus. *Viëta teoreemi järgi*

$x_1 + x_2 = -p$
$x_1 \cdot x_2 = q$

ehk teisiti

$p = -(x_1 + x_2)$ *ja* $q = x_1 \cdot x_2$.

Seega nõutud ruutvõrrand on

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$

b) *Koostame ruutvõrrandi, mille lahendid on* 10 *ja* -8. *Lahendite summa on* $10 + (-8) = 2$. *Lahendite korrutis on* $10 \cdot (-8) = -80$.
Seega $p = -2$ *ja* $q = -80$ *ning otsitav ruutvõrrand on*

$x^2 - 2x - 80 = 0$.

c) *Koostame ruutvõrrandi, mille lahendid on* $-\frac{1}{2}$ *ja* $\frac{1}{6}$.
Antud lahendite summa on

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{-3+1}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3};$$

lahendite korrutis $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}$.

Järelikult $p = \frac{1}{3}$ *ja* $q = -\frac{1}{12}$ *ning seega otsitav ruutvõrrand on*

$x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{12} = 0$.

Korrutades saadud võrrandi kumbagi poolt 12-ga, *saame samade lahenditega taandamata ruutvõrrandi*

$12x^2 + 4x - 1 = 0.$

Kirjuta ruutvõrrandid, mille lahenditeks on:

a)	b)	c)
3 ja 4	$\frac{1}{2}$ ja 0	$-2{,}1$ ja $-0{,}1$
-5 ja 10	$\frac{5}{8}$ ja $-\frac{2}{3}$	0,3 ja 0,2
-2 ja -6	2,3 ja $-1{,}1$	$-0{,}8$ ja 0,5
-9 ja 7	4,5 ja $-0{,}9$	$\frac{5}{6}$ ja $-\frac{2}{3}$
2 ja -2	3 ja $-\frac{1}{3}$	0,4 ja $-\frac{1}{5}$

385. Koosta ruutvõrrand, mille lahenditeks on:

a) $1 + \sqrt{2}$ ja $1 - \sqrt{2}$

b) $2 + \sqrt{3}$ ja $-\sqrt{3}$

386. Leia kaks niisugust arvu, millede

a) summa on 14 ja korrutis on 45;

b) „ „ -15 „ „ „ 56;

c) „ „ $4\frac{1}{2}$ „ „ „ 2;

d) „ „ $\frac{1}{3}$ „ „ „ $-\frac{5}{12}$;

e) „ „ 0,5 „ „ „ $-0{,}14$.

Näide. *Kahe arvu summa on* $\frac{1}{3}$ *ja nende korrutis* $-\frac{5}{12}$. *Missugused arvud need on?*

Lahendus. *Otsitavad arvud on niisuguse taandatud ruutvõrrandi lahenditeks, milles lineaarse liikme kordaja on* $-\frac{1}{3}$ *ja vabaliige on* $-\frac{5}{12}$; *otsitavad arvud on seega lahendid ruutvõrrandile*

$x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{12} = 0$ *ehk* $12x^2 - 4x - 5 = 0.$

Lahendades selle ruutvõrrandi, saame

$x_1 = \frac{5}{6}$ *ja* $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Otsitavad arvud on $\frac{5}{6}$ *ja* $-\frac{1}{2}$.

TEISE ASTME KOLMLIIKME LAHUTAMINE LINEAARSEIKS TEGUREIKS

387. a) Korruta lineaarsed kaksliikmed ja koonda tulemus.

1) $(x + 3)(x + 9)$ 3) $(3n + 4)(n - 7)$
2) $(m + 5)(m - 4)$ 4) $(5y - 2)(y - 8)$

b) *Avaldisi, nagu* $x^2 + 12x + 27$, $3m^2 + 10m - 8$ *jne. nimetatakse* **teise astme kolmliikmeteks** *ehk* **ruutkolmliikmeteks.** *Esimene neist on tähe x ruutkolmliige, teine tähe m ruutkolmliige. Teise astme kolmliikme üldkuju on* $ax^2 + bx + c$, *kus a, b ja c on antud arvud ja x on kolmliikme argument.*

c) *Mis on ruutkolmliikme graafiliseks kujutiseks? Kujuta graafiliselt ruutkolmliige* $x^2 - x - 2$.

388. *Eelmises ülesandes nägime, et kahe lineaarse kaksliikme korrutamisel tekib ruutkolmliige. Küsime nüüd, kas, ümberpöördult, iga ruutkolmliiget saab esitada kahe lineaarse kaksliikme korrutisena, ehk teisiti öeldes, kas iga antud ruutkolmliiget saab lahutada lineaarseiks tegureiks.*
Lahendame küsimuse esmalt **taandatud ruutkolmliikme**

$x^2 + px + q$

kohta. Oletame, et leidub kaks lineaarset kaksliiget $x - m$ *ja* $x - n$, *millede korrutis võrdub antud ruutkolmliikmega, s. t.* $(x - m)(x - n) = x^2 + px + q$.

Arvutades võrduse vasakul poolel seisva korrutise, saame

$x^2 - (m + n)x + mn = x^2 + px + q$.

Siit näeme, et otsitavate kaksliikmete $x - m$ *ja* $x - n$ *vabaliikmed m ja n peavad olema niisugused arvud, millede korrutis võrdub antud ruutkolmliikme vabaliikmega ja summa võrdub antud ruutkolmliikme lineaarliikme kordaja vastandarvuga:*

$mn = q$ *ja* $m + n = -p$.

Kuid niisuguste omadustega arve juba tunneme: need on ruutvõrrandi

$x^2 + px + q = 0$

lahendid x_1 *ja* x_2. *Tähendab*

taandatud ruutkolmliige x^2+px+q lahutub teguriteks kujul $(x-x_1)(x-x_2)$, kus x_1 ja x_2 on ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$ lahendid.

Kui võrrandil $x^2+px+q=0$ lahendid puuduvad, siis see tähendab, et ei leidu kaht niisugust arvu m ja n, millede korrutis oleks q ja summa $-p$; järelikult sel korral antud ruutkolmliige ei ole esitatav kahe lineaarse kaksliikme korrutisena.

Näiteid. 1) *Lahuta tegureiks ruutkolmliige x^2-7x+6.*

Lahendus. *Võrrandi $x^2-7x+6=0$ lahendamisel saame:*

$$x=3{,}5\pm\sqrt{12{,}25-6}=3{,}5\pm\sqrt{6{,}25}=3{,}5\pm2{,}5;$$

$x_1=3{,}5+2{,}5=6;$
$x_2=3{,}5-2{,}5=1.$

Seega

$$x^2-7x+6=(x-6)(x-1).$$

Tulemuse kontrollimiseks korruta saadud tegurid.

2) *Lahuta tegureiks ruutkolmliige*

$u^2+4u+5.$

Lahendus. *Võrrandi $u^2+4u+5=0$ lahendamisel saame:*

$$u=-2\pm\sqrt{4-5}=-2\pm\sqrt{-1}.$$

Et negatiivsest arvust ei saa leida ruutjuurt, siis võrrandil lahendid puuduvad ja seega antud ruutkolmliiget ei saa lahutada lineaarseiks tegureiks.

389. Lahuta järgmised ruutkolmliikmed tegureiks.

1) x^2-x-30
2) $y^2-3y-40$
3) $z^2-10z-24$
4) $u^2-5u-24$
5) $v^2-17v+70$
6) $p^2+5p-66$
7) $q^2-8q-20$
8) r^2+8r-9
9) n^2-n-72
10) m^2-m-12

390. a) *Üldkujulise ruutkolmliikme ax^2+bx+c lahutamiseks lineaarseiks tegureiks viime esmalt arvu a sulgude ette:*

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right).$$

Sulgudes oleva taandatud ruutkolmliikme teguriteks lahutamiseks tuleks lahendada ruutvõrrand

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Sel võrrandil on aga samad lahendid, mis on võrrandil

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Leides selle võrrandi lahendid x_1 *ja* x_2, *saame antud ruutkolmliikme lahutada tegureiks järgmiselt:*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Seega

ruutkolmliige $ax^2 + bx + c$ **lahutub teguriteks kujul** $a(x - x_1)(x - x_2)$, **kus** x_1 **ja** x_2 **on ruutvõrrandi** $ax^2 + bx + c = 0$ **lahendid.**

Kui võrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ *lahendid puuduvad, siis ruutkolmliiget* $ax^2 + bx + c$ *ei saa lahutada lineaarseiks tegureiks.*

Näide. *Lahuta tegureiks ruutkolmliige*

$$5u^2 + u - 4.$$

Lahendus. *Võrrandi*

$$5u^2 + u - 4 = 0$$

lahendamine annab:

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{10} = \frac{-1 \pm 9}{10};$$

seega

$$u_1 = \frac{-1 + 9}{10} = \frac{4}{5} \quad ja \quad u_2 = \frac{-1 - 9}{10} = -1.$$

Järelikult

$$5u^2 + u - 4 = 5\left(u - \frac{4}{5}\right)(u + 1)$$

ehk

$$5u^2 + u - 4 = (5u - 4)(u + 1).$$

b) Lahuta järgmised ruutkolmliikmed tegureiks.

1) $a^2 - 20a + 36$
2) $c^2 + 14c + 48$
3) $2f^2 - 7f - 4$
4) $3h^2 + 5h - 2$

5) $5l^2 - 14l + 8$
6) $k^2 + k - 132$
7) $m^2 + 11m - 42$
8) $12n^2 + 5n - 3$
9) $4p^2 - 16p + 15$
10) $6r^2 + 5r - 1$

391. Taanda murrud.

1) $\frac{6x^2 - 6}{6x^2 - 5x - 1}$ 2) $\frac{a^2 - 49}{a^2 - 5a - 14}$ 3) $\frac{a^2 + 3a - 4}{a^2 - 3a + 2}$ 4) $\frac{a^3 - 8}{a^2 + a - 6}$

392. Lihtsusta avaldisi.

1) $\frac{3a^2 + 7a - 6}{3a^2 - 7a - 6} \cdot \frac{3a^2 - 11a + 6}{3a^2 + 11a + 6}$
2) $\frac{a^2 - 3a - 28}{a^2 - 25} : \frac{a^2 + 3a - 4}{a^2 + 2a - 35}$
3) $\frac{a^2 - a - 2}{a^2 + 6a - 27} : \frac{3a - 6}{2a - 6}$
4) $\frac{3a + 1}{3a - 1} : \frac{3a^2 - 11a - 4}{3a^2 + 5a - 2}$
5) $\frac{3x - 1}{3x^2 + 8x - 3} \cdot \frac{3x^2 - 20x - 7}{3x + 1}$
6) $\frac{2am + m^2}{4a^2 - m^2} \cdot \left(\frac{2a}{2a - m} - 1 \right)$

RUUTVÕRRANDISÜSTEEM

393. 2) *Täisnurkse kolmnurga kaatetite summa on 17 cm ja hüpotenuus on 13 cm. Leia kaatetite pikkused.*

Lahendus. *Olgu ühe kaateti pikkus x cm, teise pikkus y cm.*
Ülesande tingimuste ja Pütagorase teoreemi põhjal saame süsteemi

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x^2 + y^2 = 169, \end{cases}$$

milles üks võrrand on lineaarne, teine ruutvõrrand. Niisuguse süsteemi lahendamiseks avaldame lineaarvõrrandist ühe tundmatu

$y = 17 - x$

ja asetame leitud avaldise ruutvõrrandisse selle tundmatu asemele; saame ühe tundmatuga ruutvõrrandi:

$x^2 + (17 - x)^2 = 169,$
$x^2 - 17x + 60 = 0.$
$x_1 = 12; \quad x_2 = 5.$

Arvestades võrdust $y = 17 - x$, *saame* $y_1 = 5; \; y_2 = 12.$

Süsteemi lahendid on seega

$$\begin{cases} x_1 = 12 \\ y_1 = 5 \end{cases} \quad ja \quad \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 12. \end{cases}$$

Otsitavad kaatetid on 12 cm ja 5 cm. Lahendatud süsteemil on küll kaks lahendit, kuid meie ülesandele saime ühe lahendi.

b) *Ristkülikukujulise aknaava ümbermõõt on 26 dm ja pindala 40 dm². Leia aknaava mõõtmed.*

Lahendus. *Olgu akna laius x dm ja kõrgus y dm. Ülesande tingimuste põhjal saame võrrandisüsteemi*

$$\begin{aligned} &2x + 2y = 26 \\ &xy = 40 \end{aligned} \quad ehk \quad \begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 40. \end{cases}$$

Avaldades esimesest võrrandist tundmatu y, saame

$y = 13 - x.$

Asetades avaldise $13 - x$ *teise võrrandisse y asemele, saame*

$x(13 - x) = 40$

ehk

$x^2 - 13x + 40 = 0.$

Siit

$x_1 = 8, \quad x_2 = 5.$

Arvestades leitud võrdust $y = 13 - x$, *saame*

$y_1 = 5$ *ja* $y_2 = 8.$

Süsteemil on kaks lahendit

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ y_1 = 5 \end{cases} \quad ja \quad \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 8 \end{cases}$$

Akna mõõtmed on seega järgmised:
laius 8 dm ja kõrgus 5 dm või laius 5 dm ja kõrgus 8 dm.
Sel ülesandel on kaks lahendit.

c) **Kui kahe tundmatuga võrrandisüsteemis üks võrrandeist on ruutvõrrand, teine aga kas ruutvõrrand või lineaarvõrrand, siis nimetame süsteemi ruutvõrrandisüsteemiks.**

Näiteks on süsteemid

$$\begin{cases} x^2 - 2xy = 32 \\ 3x + y = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

ruutvõrrandisüsteemid.

Süsteemi nimetame ka siis ruutvõrrandisüsteemiks, kui tema võrrandeis ei esine kummagi tundmatu ruuduga liiget, küll aga liige tundmatute korrutisega. Näiteks on süsteem

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 5 \end{cases}$$

ruutvõrrandisüsteem.

d) *Ruutvõrrandisüsteemi, milles üks võrrandeist on lineaarne, saab alati nii lahendada, et lineaarsest võrrandist avaldame ühe tundmatu ja paneme saadud avaldise ruutvõrrandisse selle tundmatu asemele. Sel teel saame ühe tundmatuga ruutvõrrandi. Kui saadud ruutvõrrandil on lahendid olemas, siis leiame need. Kui leitud tundmatu väärtused, enne ühe, siis teise, paneme lineaarvõrrandisse selle tundmatu asemele, siis saame vastavalt teise tundmatu kaks väärtust. Mõne ruutvõrrandisüsteemi lahendamisel saab rakendada ka liitmisvõtet.*

Näide. *Lahendame süsteemi*

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 37 \\ 6x - 2y = 18. \end{cases}$$

Näeme, et kui võrrandite pooled liidame, siis kaob otsitav y; saame

$$\begin{array}{l} x^2 + 2y = 37 \\ 6x - 2y = 18 \\ \hline x^2 + 6x = 55; \end{array}$$

siit

$$x^2 + 6x - 55 = 0,$$

millest

$$x_1 = 5 \text{ ja } x_2 = -11.$$

Asendades x teises võrrandis esiteks väärtusega 5 ja pärast väärtusega —11, saame:

$$y_1 = 6 \text{ ja } y_2 = -42.$$

Meie süsteemi lahendid on:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 6 \end{cases} \quad \textit{ja} \quad \begin{cases} x_2 = -11. \\ y_2 = -42. \end{cases}$$

394. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} x^2 = y \\ x + y = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 + 7x = 11 \\ 7x - 3y = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 2x = 7y + 50 \\ 6x = 7y + 5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x^2 + 2y = 12 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 = y + 26 \\ 2x = y + 2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x^2 + 13 = 21y \\ 2x - 1 = 3y \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5y^2 = 8x \\ 5y - 2 = 5x \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 = 4y \\ x + 3 = 2y \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x = 2y^2 \\ 2x = 4y + 9 \end{cases}$

10) $\begin{cases} y^2 = 14x + 79 \\ 5y = 7x + 4 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x - y = 3 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y - x = 1 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ y + x = 2 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x + y = 12 \end{cases}$

16) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 63 \\ x + y = 9 \end{cases}$

17) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 96 \\ x - y = 8 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - 4x + y = 176 \\ 2y - x = 2 \end{cases}$

19) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x - y = 4 \end{cases}$

20) $\begin{cases} 4x^2 - 3xy - 3y^2 + 4y = 136 \\ 2x + y = 26 \end{cases}$

395. a) *Kahe tundmatuga süsteemi, mille ühe võrrandiga on antud tundmatute summa, teisega korrutis, saab lahendada taandatud ruutvõrrandi lahendite omaduste rakendamisega.*

Näide. *Lahendame süsteemi*

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = 56. \end{cases}$$

Lahendus. *Koostame ruutvõrrandi tema lahendite summa ja korrutise põhjal:*

$z^2 - 18z + 56 = 0.$

Selle ruutvõrrandi lahendamisel saame:

$z_1 = 14$ ja $z_2 = 4$.

Kui $z_1 = x$, *siis* $z_2 = y$, *kui aga* $z_2 = x$, *siis* $z_1 = y$:

$$\begin{cases} x_1 = 14 \\ y_1 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 14. \end{cases}$$

b) Lahenda võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} x + y = 15 \\ xy = 36 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 35 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ xy = 6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 6 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y = 9 \\ xy = -36 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x - xy + y = 1\frac{5}{6} \\ 3xy = 7 \end{cases}$

396. a) *Lahenda võrrandisüsteem*

$$\begin{cases} \dfrac{y+3}{(3x-y)(3y-x)} = 0{,}5 \\ \dfrac{x-y}{x+y} = 0{,}4. \end{cases}$$

Lahendus. *Lihtsustame esimest võrrandit. Korrutame esmalt kummagi poole 2-ga, et vabaneda murrust, saame*

$$\frac{2y+6}{(3x-y)(3y-x)} = 1.$$

Siit

$$2y + 6 = (3x - y)(3y - x),$$

millest

$$3x^2 + 3y^2 - 10xy + 2y = -6.$$

Lihtsustame nüüd teise võrrandi.

Korrutame 5-ga:

$$\frac{5x-5y}{x+y} = 2.$$

Siit

$$5x - 5y = 2x + 2y$$

ehk

$$3x - 7y = 0.$$

Nüüd lahendame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 10xy + 2y = -6 \\ 3x - 7y = 0. \end{cases}$$

Rakendame asendusvõtet. Teisest võrrandist saame

$3x = 7y,$

siit

$x = \frac{7y}{3}.$

Asendame esimeses võrrandis x avaldisega $\frac{7y}{3}$, *saame*

$3 \cdot \left(\frac{7y}{3}\right)^2 + 3y^2 - 10 \cdot \frac{7y}{3} \cdot y + 2y = -6;$

$3 \cdot \frac{49y^2}{9} + 3y^2 - \frac{70y^2}{3} + 2y = -6;$

$\frac{49y^2}{3} + 3y^2 - \frac{70y^2}{3} + 2y = -6;$

$49y^2 + 9y^2 - 70y^2 + 6y = -18;$

$-12y^2 + 6y = -18;$

$2y^2 - y - 3 = 0.$

Siit

$y_1 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ *ja* $y_2 = -1.$

Seega

$x_1 = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ *ja* $x_2 = \frac{7}{3} \cdot (-1) = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}$,

$$\begin{cases} x_1 = 3\frac{1}{2} \\ y_1 = 1\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -2\frac{1}{3} \\ y_2 = -1. \end{cases}$$

b) Lahenda võrrandisüsteemid.

1) $\begin{cases} xy = 32 \\ \frac{x}{y} = 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{1}{xy} = 5 \\ \frac{x}{y} = 20 \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy = 32 \\ \frac{x+y}{x-y} = 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy = 30 \\ \frac{x+y}{x} = \frac{11}{5} \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 68 \\ \frac{11x - 3y}{x - 1} = -2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 48 \\ \frac{x - 2y}{y + 1} = 2\frac{1}{2} \end{cases}$

7) $\begin{cases} (x-2)(y-3)=1 \\ \frac{x-2}{y-3}=1 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \frac{(x+y+1)(x+y-1)}{xy+57}=3 \\ \frac{1}{2x}-\frac{1}{2y}=-\frac{1}{xy} \end{cases}$

9) $\begin{cases} x-y=2b \\ \frac{x}{a-b}=\frac{a+b}{y} \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \frac{x-y}{a+1}=a \\ x-y^2=0 \end{cases}$

397. Täisnurkse kolmnurga ümbermõõt on 70 cm ja hüpotenuus 29 cm. Leia kaatetite pikkused.

398. Arvuta kaatetite pikkused täisnurkses kolmnurgas, mille hüpotenuus on 37 cm ja kaatetite summa on 47 cm.

399. Leia ristküliku küljed, kui ta ümbermõõt on 20,6 dm ja diagonaali pikkus on 7,3 dm.

400. Ristküliku ümbermõõt on 20 cm ja pindala on 20,6 cm^2. Arvuta ristküliku külgede pikkused.

401. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 50 cm ja ta alusele tõmmatud kõrgus on haarast 2 cm võrra lühem. Arvuta kolmnurga küljed.

402. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 14,4 dm ning ta haara ja alusele tõmmatud kõrguse vahe on 2,5 dm. Leia kolmnurga külgede pikkused.

403. Arvuta rombi diagonaalide pikkused, teades, et nende vahe on 14 cm ja rombi külje pikkus on 17 cm.

404. Leia rombi diagonaalide pikkused, teades, et nende summa on 98 cm ja rombi külje pikkus on 35 cm.

405. Kaks töölist koos töötades ehitasid silohoidla valmis 12 tunniga. Mitu tundi oleks kulunud silohoidla ehitamiseks kummalgi töölisel üksi, kui üks neist oleks võinud selle töö teha 10 tundi lühema ajaga kui teine?

406. Ajakirjanduses tehti ettepanek Tallinna linna toidujäätmete ärakasutamiseks ehitada linna lähedale sigade nuumamiseks suurte sulgudega farm, kuhu mahuks 8000 nuumikut. Kui kavatsetud sulgude arvu suurendada 10 võrra, siis võiks

igasse sulgu paigutada 40 nuumikut vähem. Mitu sulgu on kavatsetud ehitada selles farmis ja mitu nuumikut on mõeldud paigutada ühte sulgu?

407. Kui mehhaniseeritud suures seafarmis, milles on 8000 siga, ühe inimese talitada oleks 400 siga rohkem, siis talitajate arv väheneks 1 võrra. Mitu talitajat töötab farmis ja mitu siga on talitada igal töötajal?

408. Rajoonidevahelises sotsialistlikus võistluses sai 1960. aastal esimese preemia Paide rajoon, teise preemia Märjamaa rajoon. Teravilja keskmine hektarisaak oli Paide rajoonis 1,8 tsentneri võrra suurem kui Märjamaa rajoonis. Arvuta need hektarisaagid, teades, et maa-ala, millelt Märjamaa rajoon sai saagi 1 ts, on 0,00825 ha võrra suurem kui maa-ala, millelt Paide rajoon sai 1 ts.

409. Paide rajoonis valmistati 1960. aastal iga lehma kohta 0,7 tonni silo rohkem kui Märjamaa rajoonis. Kui silo anda lehmadele 100 päeva jooksul, siis peab Märjamaa rajoonis 1 tonnist silost jätkuma lehmale 1 päeva võrra pikemaks ajaks kui Paide rajoonis. Mitu tonni silo valmistati lehma kohta kummaski rajoonis? Tulemused anna täpsusega 0,1 tonni.

410. 100-kilomeetrise vahemaa sõitmisel kulutab 4,5-tonnise kandejõuga veoauto ZIL-151 bensiini 16 liitrit rohkem kui 2-tonnise kandejõuga GAZ-63. Mitu liitrit bensiini kulutab kumbki veoauto 100 kilomeetri sõitmiseks, kui veoauto GAZ-63 sõidab ühe liitri bensiiniga 1,16 km rohkem kui ZIL-151?

411. Laeva lastimisel töötasid algul 2 tundi 4 ühesuguse võimsusega kraanat, seejärel liitusid neile veel 2 väiksema võimsusega kraanat. Kui kõik kraanad olid koos töötanud 3 tundi, oli laev lastitud. Kui kõik kraanad oleksid algusest peale koos töötanud, siis oleks lastimine lõpetatud 4,5 tunniga. Mitme tunniga oleks lastimise lõpetanud üks suurema võimsusega kraana ja mitme tunniga üks väiksema võimsusega kraana?

6. KORDAMISEKS

412. Joonesta teljestikus kolmnurk, mille tipud on $A(-7; -1)$, $B(8; 2)$ ja $C(2; 8)$. Konstrueeri selle kolmnurga mediaanid ja leia jooniselt kolmnurga raskuskeskme koordinaadid.

413. Joonesta teljestikus rööpkülik, mille kolm tippu on antud: $A(-4; -4)$; $B(11; 3)$; $C(8; 6)$. Leia jooniselt selle rööpküliku diagonaalide lõikepunkti koordinaadid.

414. Lahenda graafiliselt võrrandisüsteem.

a) $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy = 6 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} xy = 4 \\ x - y = 3 \end{cases}$

415. Lahenda graafiliselt ruutvõrrand.

a) $3x^2 + 10x + 6 = 0$ b) $2x^2 + 5x + 2 = 0$

c) $3x^2 + 2x - 6 = 0$ d) $4x^2 - 3x - 12 = 0$

416. Avalda x võrdest.

a) $\frac{a+b}{a-b} : \frac{a^2-b^2}{ab} = x : \frac{(a-b)^2}{ab}$

b) $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} : x = \frac{a-b}{a^2-2ab+b^2} : \frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$

417. Liida murrud.

a) $\frac{1}{a^2+3a+2} + \frac{2a}{a^2+4a+3} + \frac{1}{a^2+5a+6}$

b) $\frac{a+b}{a^2+4a-5} + \frac{a+5}{a^2-7a+6} - \frac{2(a+1)}{a^2-a-30}$

418. Arvuta avaldise väärtus tähe antud väärtuse korral.

a) $\frac{a^2-2a+4}{a^2+2a+4} \cdot \frac{a^3-8}{a^3+8}$, kui $a = 98$.

b) $\frac{x^2-7x+12}{x+4} : \frac{x^2-9}{x^2-16}$, kui $x = 7$.

419. Lahenda võrrand täpsusega 0,01.

a) $\frac{x}{2x+4} - \frac{3}{x} + \frac{x+1,7}{x^2+2x} + \frac{2}{x+2} = 0.$

b) $\frac{x+2}{2x} + \frac{7x}{2x-4} - \frac{4x^2-3,5x+3}{x^2-2x} = 0.$

420. Lihtsusta avaldist.

a) $\frac{2n}{n^2-1} - \frac{n^3+3n^2+3n+1}{8n^2-8n} \cdot \left[1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\right] + 1 : \frac{n+1}{n}$

b) $\frac{4a^2-1}{a^3-a^2-a+1} : \left(\frac{a}{a^2-2a+1} - \frac{1}{1-a} \cdot \frac{a}{a+1} - \frac{2}{a+1}\right)$

421. Lahenda võrrandisüsteem.

a) $\begin{cases} \frac{y+3}{(3x-y)(3y-x)} = 0{,}5 \\ \frac{x-y}{x+y} = 0{,}4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x-3y-1}{6x-11y-3} = \frac{1}{2} \\ 3xy - (x^2+y^2) = 11 \end{cases}$

422. Kaks rajooni olid 1960. aastal sotsialistlikus võistluses. Ühes neist oli kartulisaak hektarilt 1,07 korda suurem kui teises, kusjuures ühes rajoonis saadi hektarilt 8,8 tsentnerit kartuleid rohkem kui teises. Arvuta kartulisaagid hektarilt kummaski rajoonis.

423. Kaks hoiust, milledest üks on 375 rbl. võrra suurem kui teine, tõid $2\frac{1}{2}$%-ga ühepalju tulu, kumbki 125 rbl., sest väiksem hoius oli 3 aastat kauem hoiul. Mitu aastat oli kumbki hoius hoiukassas?

424. Kaks müürseppa, kelledest teine alustab tööd $1\frac{1}{2}$ päeva hiljem kui esimene, jõuavad müüri valmis laduda 7 päevaga. Kui see töö oleks antud teha kummalegi eraldi, siis oleks selle müüri ehitamiseks vajanud esimene 3 päeva rohkem kui teine. Mitme päevaga oleks kumbki müürsepp ehitanud müüri valmis üksi töötades?

425. Kaks autot väljusid ühest punktist ühes ja samas suunas, üks kiirusega 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, teine kiirusega 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Pool tundi hiljem väljus samast punktist kolmas auto eelmistele järele, möödudes esimesest poolteist tundi hiljem kui teisest. Leia kolmanda auto liikumise kiirus.

426. Kaks töölist koos töötades lõpetasid töö 12 tunniga. Kui esimene neist oleks alguses teinud pool sellest tööst üksi ja seejärel teine ülejäänud osa, siis oleks töö algusest lõpuni kulunud 25 tundi. Mitme tunniga oleks kumbki tööline jõudnud selle töö teha üksi töötades?

427. Foto-negatiivide pesemiseks kasutatakse risttahukakujulist vanni, mille seesmised mõõtmed on 20 cm, 90 cm ja 25 cm. Vee pideva voolavuse saavutamiseks voolab vesi ühe kraani kaudu sisse, teise kaudu välja. Selleks et täis vann tühjendada teise kraani kaudu, mil esimene on suletud, kulub 5 minutit vähem aega kui selleks, et tühi vann täita esimese kraani kaudu, mil teine on suletud. Kui aga mõlemad kraanid on avatud, siis täis vann tühjeneb 1 tunniga. Arvuta vee hulk, mille kumbki kraan laseb läbi 1 minutis.

428. Karusloomafarmis kasvatatakse hõberebaseid. Praegu on seal loomi nii palju, et kui igasse sulgu paigutada 2 looma rohkem, siis jääks 50 sulgu tühjaks. Kui aga igasse sulgu paigutada 1 loom vähem, siis tuleks viiskümmend sulgu puudu. Mitu hõberebast ja mitu sulgu on farmis?

429. Rong pidi sõiduplaanis ettenähtud ajaga läbima 840 km. Poolel teel peatati ta semafori juures $\frac{1}{2}$ tundi. Selleks et ettenähtud kellaajaks pärale jõuda, suurendati kiirust 2 km võrra tunnis. Kui kaua oli rong teel?

430. Kui kuubi serva pikkust suurendada 5,6 cm võrra, siis ta ruumala suureneb 915 cm^3 võrra. Arvuta kuubi serva pikkus.

431. Vaskpleki tükil on ristküliku kuju, mille pikkus ületab laiuse 5 cm võrra. Pleki paksus on 2 mm ja ta kaalub 264 g. Arvuta plekitüki mõõtmed, teades, et vase erikaal on 8,8.

432. Arvuta ruudukujulise põhjaga risttahuka põhja serva pikkus, teades, et risttahuka täispindala on 170 cm^2 ja kõrgus 7,2 cm.

433. Tinast valmistatud õõnsa kuubi seina paksus on 2 cm ja ta kaalub 1107,4 g. Leia kuubi välimise serva pikkus, teades, et tina erikaal on 11,3.

434. Kahest metallist, mille erikaalud erinevad teineteisest 9 võrra, kavatsetakse valmistada sulam. Kui esimest metalli võtta 120 g ja teist 300 g, siis sulami erikaal tuleb 11,56. Arvuta mõlema metalli erikaalud.

435. Joonesta millimeetripaberil funktsiooni
$y = 1{,}3x + 0{,}8$
graafik.

a) Leia selle graafiku abil y väärtus, kui $x = 4; -3{,}5; -2{,}5; -2; -1; 1{,}5; 3; 3{,}5; 4$.

b) Leia x väärtus, kui $y = 5; 4{,}2; 1{,}4; 0{,}7; -1$.

c) Lahenda selle graafiku abil võrrandid:

1) $1{,}3x + 0{,}8 = 2{,}5$;

2) $1{,}3x + 0{,}8 = -0{,}75$.

436. Joonesta millimeetripaberil funktsiooni

$y = 2{,}1x - 1{,}4$

graafik.

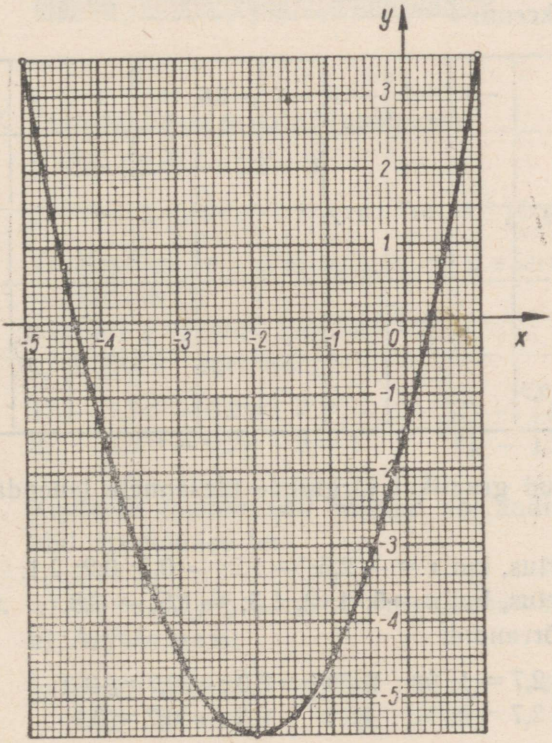
a) Leia selle graafiku abil y väärtus, kui $x = -1{,}2; -1; -0{,}5; 0{,}7; 1{,}8; 2{,}6; 3; 3{,}6$.

b) Leia x väärtus, kui $y = -4; -0{,}5; 1; 1{,}5; 2{,}3; 4; 4{,}5$.

c) Lahenda graafiliselt võrrandid:

1) $2{,}1x - 1{,}4 = -2{,}5$;

2) $2{,}1x - 1{,}4 = 3{,}8$.



Joon. 51.

437. Joonisel 51 on esitatud funktsiooni

$y = x^2 + 4x - 1{,}5$

graafik. Kasutades seda graafikut, lahenda järgmised ülesanded.

a) Leia y väärtus, kui $x = -5;\ -4;\ -3{,}5;\ -2;\ -1;\ 0;\ 0{,}5;\ 1$.

b) Leia x väärtus, kui $y = 3;\ 2;\ 1{,}5;\ -1;\ -3;\ -4{,}8$.

c) Lahenda võrrandid:

1) $x^2 + 4x - 1{,}5 = 2{,}5$;
2) $x^2 + 4x - 1{,}5 = 1$;
3) $x^2 + 4x - 1{,}5 = -2$;
4) $x^2 + 4x - 1{,}5 = 0$.

438. Joonesta millimeetripaberil funktsiooni

$y = x^2 + 0{,}3x - 2{,}7$

graafik. Graafiku punktide ordinaatide arvutamiseks kasuta alljärgnevat skeemi:

x	-3	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	1	2	$2{,}5$
x^2									
$0{,}3x$									
$x^2 + 0{,}3x$									
$y = x^2 + 0{,}3x - 2{,}7$									

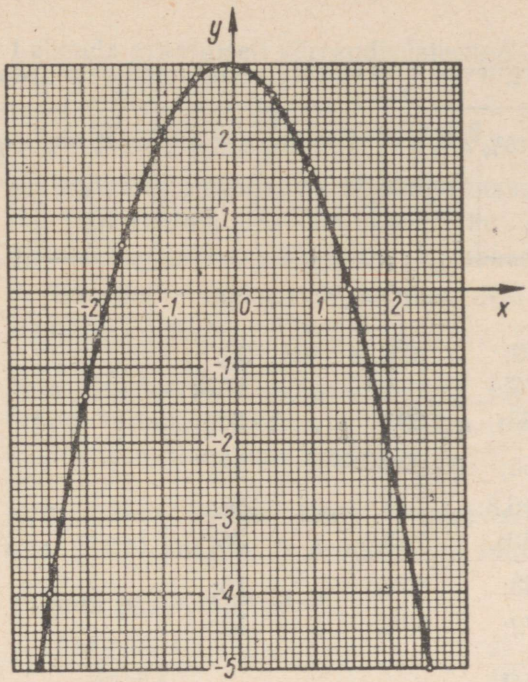
Rakenda saadud graafikut järgmiste ülesannete lahendamiseks.

a) Leia y väärtus, kui $x = -2{,}5;\ -1{,}2;\ -0{,}8;\ 0{,}2;\ 2{,}1$.

b) Leia x väärtus, kui $y = 5;\ 4;\ 2;\ 1{,}5;\ -1{,}5;\ -1{,}8$.

c) Lahenda võrrandid:

1) $x^2 + 0{,}3x - 2{,}7 = 1$;
2) $x^2 + 0{,}3x - 2{,}7 = -1$;
3) $x^2 + 0{,}3x - 2{,}7 = 0$;
4) $x^2 + 0{,}3x - 0{,}7 = 0$.



Joon. 52.

439. Joonisel 52 on esitatud funktsiooni

$y = -1{,}2x^2 - 0{,}2x + 3$

graafik. Lahenda selle graafiku abil järgmised ülesanded.

a) Missuguste x väärtuste korral y väärtused on positiivsed? negatiivsed?

b) Leia y väärtus, kui $x = -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 2{,}2$.

c) Lahenda võrrandid:

1) $-1{,}2x^2 - 0{,}2x + 3 = -2$
2) $-1{,}2x^2 - 0{,}2x + 3 = 1$
3) $-1{,}2x^2 - 0{,}2x + 3 = 2$
4) $-1{,}2x^2 - 0{,}2x + 3 = 0$.

Kontrolli joonise abil saadud võrrandite lahendeid valemi abil arvutamise teel.

440. a) Näita, et $p\%$ arvust a on niisama palju kui $a\%$ arvust p.

b) Arvuta peast

1) 50% 88-st; 44% 50-st;
2) 25% 80-st; 72% 25-st;
3) 75% 24-st; 48% 75-st.

441. Väljenda alljärgnevad protsentide arvud harilike murdudena.

Protsendid	5%	10%	15%	20%	25%	30%	$33\frac{1}{3}$%	40%	50%	60%	$66\frac{2}{3}$%	70%	75%	80%
Harilik murd														

442. Arvuta peast

5%	arvust	240;	40%	arvust	26;
10%	„	370;	50%	„	17,8;
15%	„	32;	60%	„	50;
20%	„	55;	$66\frac{2}{3}$%	„	33;
25%	„	16,8;	70%	„	150;
30%	„	42;	75%	„	36;
$33\frac{1}{3}$%	„	63;	80%	„	15;
33,3%	„	72;	90%	„	12.

443. Leia arv, millest

2%	on	36;	0,5%	on	2,4;	52%	on	1040;
15%	„	27;	3,6%	„	2,4;	5,5%	„	110;
4%	„	28;	1,5%	„	1,8;	38%	„	7600;
12%	„	3,6;	1,8%	„	7,2;	3,4%	„	680.

444. Meeter ülikonnariiet maksis varemalt 9,80 rbl. Nüüd müüakse seda riiet 9,25 rbl. meeter. Mitu protsenti on selle riide hind alanenud?

445. Kast kaubaga kaalub 55 kg (brutokaal), kusjuures tühja kasti kaal on 7 kg (taara kaal). Mitu protsenti moodustab netokaal (kauba kaal ilma taarata) brutokaalust?

446. Õunte kuivatamisel saadi 9 kg tooreist õuntest 1 kg kuivatatud õunu. Mitu protsenti kahanes õunte kaal kuivatamisel?

447. Meeter riiet müüdi väljamüügi puhul 20%-lise hinnaalandusega 9,60 rbl. eest. Arvuta selle riide hind enne hinnaalandamist.

448. Kaup müüdi 15%-lise juurdehindlusega 3,45 rbl. eest. Leia kauba omahind.

449. Lahenda graafiliselt võrrandisüsteemid.

1) $\begin{cases} y = x^2 \\ 2y - x = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 4 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy = 1 \\ y = x^2 - 2x - 8 \end{cases}$

450. a) NSV Liidu Ministrite Nõukogu otsusel tõsteti 1. jaanuarist 1961 rubla kullasisaldus puhta kulla 0,987412 grammini. Mitu rubla maksab selle järgi 1 kg puhast kulda?

b) Üks dollar maksab 90 kopikat. Kui palju puhast kulda sisaldab dollar?

451. Maa tehiskaaslase tiirlemisperiood oli 89,8 minutit ja ta orbiidi keskmine raadius on 6650 km. Kui suure kiirusega liikus tehiskaaslane oma orbiidil?

452. Mitu päeva kuluks linnul lendamiseks ümber maakera, s. o. 40 000 km, kui ta lendab 3 m sekundis?

453. Taanda peast murrud:

1) $\frac{9m^2 + 6m + 1}{3m + 1}$

2) $\frac{4x^2 + 4xy + y^2}{2x + y}$

3) $\frac{a^2 + 10ab + 25b^2}{a + 5b}$

4) $\frac{a - 4}{a^2 - 8a + 16}$

5) $\frac{2a + 3b}{4a^2 - 9b^2}$

6) $\frac{x^2 - 16a^2}{x - 4a}$

7) $\frac{4a^2 - 9b^2}{2a + 3b}$

8) $\frac{5x - 1}{25x^2 - 1}$

454. Taanda peast murrud:

1) $\frac{16x^2 - 12xy + 9y^2}{64x^3 + 27y^3}$

2) $\frac{4a^2 + 6ab + 9b^2}{8a^3 - 27b^3}$

3) $\frac{9a^2 - 24ab + 16b^2}{(3a - 4b)^3}$

4) $\frac{8x^3 - 27y^3}{2x - 3y}$

5) $\frac{a^3 + 64b^3}{a + 4b}$

6) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

7) $\frac{(2a + 3b)^2}{8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3}$

8) $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}$

9) $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

10) $\frac{a^3 - 1}{a^2 + a + 1}$

455. Taanda murrud:

1) $\frac{a^2 - 5a + 6}{a^2 - 3a + 2}$

2) $\frac{a^2 + 4a + 4}{a^2 - a - 6}$

3) $\frac{2a^2 - 5a - 3}{2a^2 - 3a - 2}$

456. Arvuta peast avaldise väärtus tähe antud väärtusel.

1) $\frac{x^2-8x+16}{x-4}$, kui $x=2$. 2) $\frac{3a-1}{9a^2-6a+1}$, kui $a=\frac{1}{2}$.

457. Arvuta avaldise väärtus tähtede antud väärtustel.

1) $\frac{a^2-4}{ac+2c-a-2}$, kui $a=2$ ja $c=1$.

2) $\frac{5a^2-10ax}{a^3-2a^2x+ax-2x^2}$, kui $a=7$ ja $x=3$.

3) $\frac{6x^2-11x-10}{8x^2+6x-9}\cdot\frac{12x^2-x-6}{4x^2-4x-15}$, kui $x=-2$.

4) $\frac{6x^2+7x-20}{20x^2-7x-6}\cdot\frac{12x^2-25x+12}{10x^2+29x+10}$, kui $x=2$.

5) $\frac{x^2-2x-15}{x^2-16}:\frac{x^2-x-12}{x^2+9x+20}$, kui $x=5$.

6) $\frac{x^2-6x-7}{x^2-25}:\frac{x^2-12x+35}{x^2+4x-5}$, kui $x=10$.

458. Lahenda võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} x^2+y^2-8x-6y=25 \\ x+2y=15 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2-10x+6y-66=0 \\ x-2y+9=0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2y^2=9x \\ 3x-5y+9=0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-10x-6y+15=0 \\ 3x+4y=12 \end{cases}$

459. Rombi diagonaalide pikkused on 14 cm ja 48 cm. Arvuta rombi kõrgus.

460. Ühest ja samast punktist on ringile joonestatud kaks puutujat. Puutuja pikkus on 156 mm ja puutepunktide-vaheline kaugus on 120 mm. Arvuta ringi raadius.

461. Lihtsusta avaldist.

a) $\left[\frac{a-2}{a^3+1}+\frac{1}{a^3-a^2+a}\right]\cdot\frac{a^3-a}{a^2+1}+\frac{2}{a^3+a^2+a+1}$

b) $\left[\frac{a^2-2a+1}{a^3+2a^2+a}+\frac{1}{a+1}-\frac{a^2-a-2}{(a+1)^3}\right]\cdot\frac{a}{a-1}-\frac{2a}{a^2-1}$

c) $\left[\frac{1}{a+1} - \frac{a}{a^2-2a+1} + \frac{2a}{(a^2-1)(a-1)}\right] \cdot \frac{a^2-1}{a+2} - \frac{2}{a^2+2a}$

d) $\frac{(a+b)^2}{a-b} \cdot \frac{a(a-b)+b^2}{a^2-b^2} : \frac{a^3+b^3}{(a-b)^3}$

462. Lahuta hulkliige tegureiks.

1) $a^8 + a^5 - a^4 - a$
2) $x^6 - x^4 + 4x^2 - 4$
3) $16y^4 + 8y^3 - 2y - 1$
4) $a^8 - a^6 - a^2 + 1$
5) $a^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1$
6) $x^6 - x^4 + 27x^3 - 27x$
7) $a^5 - 4a^3 - 8a^2 + 32$
8) $n^4 - 2n^3 - 8n + 16$
9) $a^3 - 25a + a^6 - 25a^4$
10) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

463. Arvuta.

1) $2 : \frac{3}{5} + \frac{3}{5} : 2 + 1\frac{1}{2} : 6 + 6 : 1\frac{1}{2}$

2) $6\frac{1}{4} \cdot 8 - 3\frac{2}{3} \cdot 5\frac{1}{2} + 2\frac{2}{5} \cdot 4\frac{7}{12}$

3) $13\frac{1}{2} : 1\frac{1}{3} + 16\frac{1}{2} \cdot 1\frac{5}{11} + 19\frac{1}{4} : \frac{4}{25}$

4) $\left(\frac{5}{7} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} - 1\right) : \left(1 - \frac{7}{8} \cdot 1\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{14}\right)$

5) $\left[7\frac{1}{2} - \left(8\frac{5}{24} - 4\frac{17}{18}\right) \cdot \frac{47}{72}\right] \cdot \left(5\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$

6) $66{,}6 : \left(5 + 3{,}2 : \frac{0{,}8 - \frac{2}{15}}{0{,}5}\right) - 7{,}15$

7) $\frac{3\frac{4}{15}}{\left(4\frac{1}{2} + 2 \cdot 2{,}75\right) : 21\frac{3}{7}} - 1{,}375$

8) $\left(7\frac{14}{45} : 7 - \frac{39}{40}\right) \cdot 7{,}2 + 0{,}8 : (2 : 0{,}25 - 3{,}125 \cdot 2{,}4)$

9) $\left(\frac{13}{44} - \frac{2}{11} + \frac{5}{66} \times 2\frac{1}{5}\right) \cdot 1\frac{1}{2} + 0{,}05 : (0{,}1 : 0{,}125 -$
$- 5{,}73 : 19{,}1)$

10) $\left[8{,}9 : 1{,}78 - 4{,}8 \cdot \left(1\frac{1}{17} + \frac{5}{68} - \frac{7}{51} : 0{,}25\right)\right] : 4{,}4$

464. Lahenda võrrandisüsteem.

1) $\begin{cases} x - \dfrac{7{,}5x + 2y}{3y - x} = \dfrac{5x^2 + 4y^2 + 105}{5x - 6y^2 + 2xy - 15y} + \dfrac{2xy}{2y + 5} \\ \dfrac{1{,}4x + 0{,}4y}{x} - \dfrac{5y + 9}{3x} = -2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{11{,}4 + 10x}{12x^2 - 3y - 6x + 6xy} - \dfrac{1}{2x - 1} = \dfrac{x - y}{y - 4x^2 + 2x - 2xy} \\ \dfrac{y}{7 - 4x} = 2 \end{cases}$

465. Kahel automaatmasinal valmistati teatav arv detaile, kusjuures teine automaat alustas tööd 3 tundi hiljem kui esimene. Pärast seda, kui teine automaat oli töötanud 6 tundi, oli töö lõpetatud, kusjuures teine automaat valmistas 25% kõigist detailidest. Leia, mitu detaili valmistas kumbki automaat, teades, et teine valmistas 5 detaili vähem kui esimene.

466. Kolhoosi üks brigaad, töötades käsitsi, koristas oma kartulipõllu 16 tunniga; teine brigaad, kes kasutas kartulivõtmismasinat, koristas 5 korda suurema põllu 12 tunniga. Arvuta, mitu hektarit oli kummagi brigaadi kartulipõld, teades, et teine brigaad koristas tunnis 0,85 ha võrra rohkem kui esimene brigaad.

467. Leia õpiku lisas esitatud jooniselt järgmiste ehitusmaterjalide erikaalud:

1) kuiv kuusk
2) kuiv tamm
3) bituumen
4) kustutatud lubi
5) tsement
6) kuiv liiv
7) märg liiv
8) betoon
9) kips
10) marmor

468. Kuivast kuusepuust servatud laua paksus on 5 cm, laius 20 cm ja pikkus 5,8 m. Arvuta selle laua ruumala ja leia õpiku lisas olevalt jooniselt laua kaal.

469. Risttahukakujulise marmorplaadi mõõtmed on 50 cm, 70 cm ja 4 cm. Arvuta plaadi ruumala ja leia õpiku lisas antud jooniselt plaadi kaal.

470. Autokoorem kuiva liiva kaalub 4 tonni. Leia õpiku lisas olevalt jooniselt selle liiva ruumala.

471. Leia õpiku lisas olevalt jooniselt 6 tonni kustutatud lubja ruumala.

472. Lahenda x suhtes võrrandid:

1) $\frac{x}{m-n}+\frac{x}{m+n}=\frac{2mn}{m^2-n^2}$

2) $\frac{m^2-x}{n}=\frac{n^2-x}{m}$

3) $\frac{n+x}{m}+\frac{m-x}{n}=2$

4) $\frac{a+b}{a+2b}+\frac{x}{b}=1+\frac{b(b-x)}{a^2+2ab}$

5) $\frac{a}{ax-b}=\frac{bx-a}{b}$

6) $abx^2-b^2x=a^2x-ab,\ a\geqslant b$

7) $(a-1)x^2-x=a,\ a\leqslant\frac{1}{2}$

8) $2nx-\frac{a}{x}=2nb-\frac{a}{b},\ a\geqslant 0,\ n\geqslant 0$

473. Lahenda x ja y suhtes võrrandisüsteemid:

1) $\begin{cases} ax+y=a^2 \\ y=x+1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} ax+by=c \\ x+y=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} a^2x+y=a^3 \\ (a+1)x+1=y \end{cases}$

4) $\begin{cases} nx+my=0 \\ x+y=m-n \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{x+y}{y}=a \\ 1+\frac{xy}{a+1}=a^2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x-y=\frac{2a}{a^2-1} \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{2}{a}, \end{cases}\ a>1$

474. Marmoritüki kaal on k tonni ja ruumala V m³. Avalda k ja V vaheline seos valemina, kasutades õpiku lisas antud joonist.

475. Kuivast tammepuust laud kaalub k kg ja ta ruumala on V dm³. Avalda k ja V vaheline seos valemina, kasutades õpiku lisas antud joonist.

476. Et skaalad A ja B on oma ehituselt sarnased skaaladega C ja D, siis saab nendega teha kõiki neidsamu arvutusi.

1. Leia skaalade A ja B abil korrutised:

$1{,}85 \cdot 3{,}38$	$23 \cdot 1{,}4$	$17{,}6 \cdot 4{,}3$
$2{,}70 \cdot 3{,}26$	$1{,}8 \cdot 2{,}2$	$36{,}1 \cdot 12{,}6$
$\pi \cdot 1{,}80$	$5{,}6 \cdot 2{,}5$	$466 \cdot 0{,}8$

2. Leia skaalade A ja B abil jagatised:

$675 : 2{,}7$	$68 : 29$	$30{,}4 : 0{,}75$
$55 : \pi$	$104 : \pi$	$8{,}6 : 9{,}1$
$88{,}5 : 25{,}2$	$15 : 35$	$238 : 596$

477. Lahenda lükati abil võrrandid:

$x^2 = 5{,}4$	$x^2 = 385$	$x^2 = 6200$
$x^2 = 3{,}65$	$x^2 = 0{,}64$	$x^2 = 0{,}846$
$x^2 = 5{,}2$	$x^2 = 0{,}0275$	

478. Kiht pingpongipalle katab karbi ruudukujulise põhja. Pärast ühe pallirea väljavõtmist jääb karpi veel 20 palli. Mitu palli on reas?

479. Kiht kanamune asetseb ruudukujulises sõrestikus. Pärast kahe munarea väljavõtmist jääb sõrestikku veel 48 muna. Mitu muna on reas?

GEOMEETRIA

1. SARNASED HULKNURGAD

PÜTAGORASE TEOREEM

1. *Kui täisnurkse kolmnurga kaks külge on antud, siis kolmnurk on määratud. Joonestades antud külgede järgi kolmnurga, saame jooniselt mõõtmise teel leida tema kolmanda külje ja nurgad. Sellist kolmnurga tundmatute elementide leidmise viisi nimetame kolmnurga* **graafiliseks lahendamiseks.**

Lahenda graafiliselt täisnurkne kolmnurk, mille

a) kaatetid on 7,2 cm ja 5,4 cm;

b) üks kaatet on 4,5 cm ja hüpotenuus 8 cm.

Arvuta joonestatud kolmnurga külgede pikkuste ruudud ja võrdle hüpotenuusi pikkuse ruutu kaatetite pikkuste ruutude summaga.

2. *Täisnurkse kolmnurga kahe külje põhjal on kolmandat külge võimalik leida ka arvutamise teel. Selleks peab tundma seost täisnurkse kolmnurga külgede vahel, mida väljendab Pütagorase teoreem.*

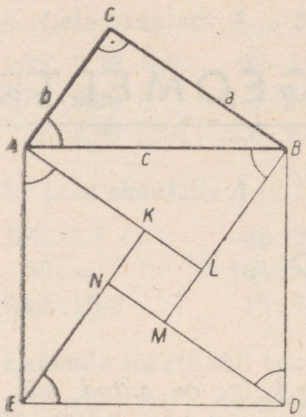
Täisnurkse kolmnurga kaatetite ruutude summa võrdub hüpotenuusi ruuduga.

Olgu ühtedes ja samades ühikutes täisnurkse kolmnurga kaatetite pikkused a ja b ning hüpotenuusi pikkus c. Teoreemi sõnastuses esinevad «kaatetite ruudud» ja «hüpotenuusi ruut» tähendavad siis nende külgede pikkuste ruute a^2, b^2 *ja* c^2. *Teoreemi väide on seega:*

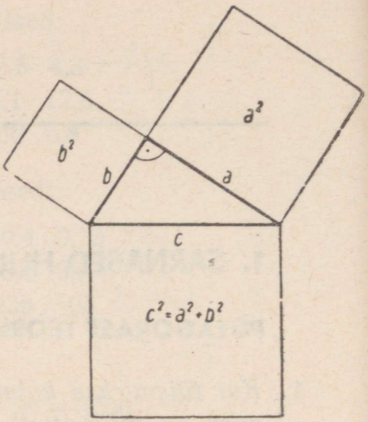
$a^2 + b^2 = c^2$.

---

[1] Pütagoras, kreeka matemaatik, elas u. 580–500 e. m. a.



Joon. 53.



Joon. 54.

Tõestuseks ehitame täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusile AB = c ruudu ABDE (joon. 53). Selle ruudu pindala on siis c^2 pindalaühikut. Joonestame ruudu ABDE tippudest A ja D sirged, mis on paralleelsed kaatetiga BC, ja tippudest B ja E sirged, mis on paralleelsed kaatetiga AC. Ruut ABDE tükeldub sellega neljaks kolmnurgaks ABL, BDM, DEN ja EAK, ning ruuduks KLMN, mille külg võrdub vahega a — b (miks?). Need kolmnurgad on kõik võrdsed antud kolmnurgaga ABC, sest igal neist on üks külg ja selle kaks lähisnurka vastavalt võrdsed kolmnurga ABC küljega AB ja selle kahe lähisnurgaga (põhjenda seda!).

Arvutame ruudu ABDE tükeldamisel saadud kujundite pindalade summa. See on

$$4 \cdot \frac{ab}{2} + (a - b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2.$$

Et tükeldatava ruudu pindala oli c^2, siis

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

mida oligi tarvis tõestada.

3. *Kui arvesse võtta, et kaateti ruut väljendab kaatetile ehitatud ruudu pindala ja hüpotenuusi ruut hüpotenuusile ehitatud ruudu pindala, siis Pütagorase teoreem ütleb, et täisnurkse kolmnurga kaatetitele ehitatud ruutude pindalade summa võrdub sama kolmnurga hüpotenuusile ehitatud ruudu pindalaga. Seega Pütagorase teoreem annab võimaluse ehitada ruutu, mille pindala võrdub kahe antud ruudu pind-*

alade summaga (joon. 54). Selleks joonestame täisnurkse kolmnurga, mille kaatetiteks on antud ruutude küljed. Otsitava ruudu küljeks on siis selle kolmnurga hüpotenuus. Kui antud ruutude küljed on a ja b, otsitava ruudu külg c, siis otsitava ruudu pindala

$c^2 = a^2 + b^2$

ja külg

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Pütagorase teoreem võimaldab ehitada ka ruutu, mille pindala võrdub kahe antud ruudu pindalade vahega. Olgu antud ruut küljega c ja ruut küljega b < c. Et saada ruutu, mille pindala võrdub $c^2 - b^2$, joonestame täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuus on c ja üks kaatet b. Siis teise kaateti a ruut

$a^2 = c^2 - b^2$

ja kaatet

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$.

See ongi otsitava ruudu külg.

4. Võttes ühikuks 1 cm, leia graafiliselt lõik pikkusega, $x = \sqrt{5^2 + 4^2}$, $y = \sqrt{4{,}7^2 + 6{,}5^2}$, $z = \sqrt{3{,}5^2 + 6{,}8^2}$.

5. Võttes ühikuks 1 cm, leia graafiliselt lõik pikkusega $x = \sqrt{6^2 - 5^2}$, $y = \sqrt{8{,}5^2 - 5{,}2^2}$, $z = \sqrt{7{,}4^2 - 3{,}4^2}$.

6. On antud lõigud a ja b, kus $a > b$. Konstrueeri lõik $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ ja $y = \sqrt{a^2 - b^2}$.

7. a) Joonisel on antud ristkülik külgedega a ja b. Kuidas saada lõiku pikkusega $\sqrt{a^2 + b^2}$?

   b) Joonisel on antud võrdhaarne kolmnurk, mille haar on b ja alus on $2a$. Kuidas saada lõiku pikkusega $\sqrt{b^2 - a^2}$?

8. a) Lahenda Pütagorase teoreemi väljendav seos $a^2 + b^2 = c^2$

   1) hüpotenuusi c suhtes; 2) kaateti a suhtes; 3) kaateti b suhtes.

Arvuta peast c, kui $a = 3$ ja $b = 4$.
Arvuta peast a, kui $c = 10$ ja $b = 6$.
Arvuta peast b, kui $c = 13$ ja $a = 12$.

b) Täisnurkse kolmnurga külgede kirjalikul arvutamisel Pütagorase teoreemi põhjal kasuta (vajaduse korral) nii ruutude kui ka ruutjuurte tabelit, samuti arvutuslükatit.

Näide. *Kui nõutakse leida kaatet b hüpotenuusi $c = 7{,}2$ m ja kaateti $a = 5{,}4$ m järgi, siis avaldades b, saame*

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Asendades c ja b antud väärtustega ning kasutades ruutude tabelit, saame

$$b = \sqrt{7{,}3^2 - 5{,}4^2};$$
$$b = \sqrt{53{,}3 - 29{,}2};$$
$$b = \sqrt{24{,}1}.$$

Ruutjuurte tabelist saame nüüd, et

$$b = 4{,}91 \approx 4{,}9 \text{ m}.$$

9. Kui pikk on täisnurkse kolmnurga hüpotenuus, kui kaatet $a = 2{,}8$ cm ja kaatet $b = 4{,}5$ cm?

10. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 0{,}39$ m ja hüpotenuus $c = 0{,}89$ m. Kui pikk on kaatet b?

11. Võrdhaarse kolmnurga alus on 8,6 cm ja kõrgus 7,2 cm. Arvuta kolmnurga haar.

12. Võrdhaarse kolmnurga haar on 1 m, alus on 1,6 m. Leia kõrgus.

13. Võrdhaarse kolmnurga haar on 14 cm ja kõrgus 10 cm. Kui pikk on alus?

14. Võrdhaarse kolmnurga alus on 90 mm ja ümbermõõt 196 mm. Arvuta kõrgus.

15. Võrdhaarse kolmnurga alus on 12 cm ja haar 8 cm. Arvuta kolmnurga pindala.

16. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 196 m ja haar 65 m. Arvuta kolmnurga pindala.

17. Ristkülikukujulise maatüki üks külg on 70 m ja diagonaal 74 m. Mitu aari on maatüki pindala?

18. Jalgtee läbi pargi lõikab sellest ära täisnurkse kolmnurga kujulise tüki, mille kaks lühemat külge on 68 m ja 117 m. Kui palju on jalgtee lühem teest ümber pargi nurga?

19. Avaldada ruudu diagonaal d külje a funktsioonina.

20. Avaldada võrdkülgse kolmnurga kõrgus h ja pindala S külje a funktsioonina.

21. Ristküliku alus on 10 pikkusühikut. Avalda diagonaal d kõrguse x funktsioonina.

22. Rombi üks diagonaal on $4x$ pikkusühikut ja teine diagonaal $6x$ ühikut. Avalda rombi külg a ja pindala S suuruse x funktsioonina.

23. Täisnurkse trapetsi alused on 24 m ja 14 m, kõrgus 17 m. Arvuta trapetsi ümbermõõt.

24. Võrdhaarse trapetsi alused on 8 cm ja 5,2 cm, kõrgus 4,8 cm. Kui suur on trapetsi ümbermõõt?

25. Võrdhaarse trapetsi alused on 1,80 m ja 1,30 m, haar on 0,78 m. Arvuta trapetsi pindala.

26. Ringi raadius on 78 cm. Kui kaugel keskpunktist asetseb kõõl, mille pikkus on 60 cm?

27. Kõõl, mille pikkus on 7 cm, asetseb ringi keskpunktist 8,4 cm kaugusel. Kui pikk on ringi raadius?

28. Ruudu diagonaali pikkus on 2,4 m. Arvuta ruudu ümbermõõt ja pindala.

29. Võrdkülgse kolmnurga kõrgus on 15 cm. Kui pikk on selle kolmnurga külg?

30. Korrapärase kuusnurga külg on 7,4 cm. Arvuta apoteem ja pindala.

31. Korrapärase kuusnurga apoteem on 4 cm. Arvuta külg ja pindala.

KAHE PUNKTI VAHELINE KAUGUS

32. a) *Tutvume kõigepealt punkti ja lõigu* **projektsiooni** *mõistega.*

Punkti projektsiooniks sirgel nimetatakse punktist sirgele tõmmatud ristlõigu aluspunkti.

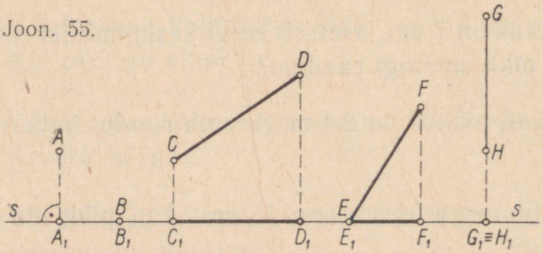
Näiteks (joon. 55), kui punktist A on sirgele s tõmmatud ristlõik AA_1, siis selle ristlõigu aluspunkt A_1 on punkti A projektsioon sirgel s. Kui punkt asetseb sirgel s, siis tema projektsioon sirgel s langeb ühte punkti endaga (nagu B ja B_1 joonisel 55).

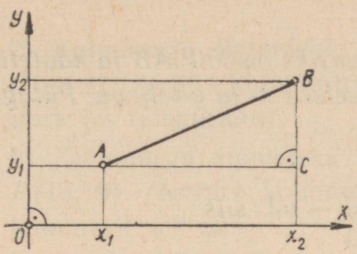
Lõigu projektsiooniks sirgel nimetatakse kujundit, mille moodustavad lõigu kõikide punktide projektsioonid sirgel.

Näiteks on joonisel 55 lõigu CD projektsiooniks sirgel s lõik C_1D_1, lõigu EF projektsiooniks on lõik E_1F_1, kuid lõigu GH projektsiooniks on üksainus punkt G_1 (ehk H_1). Jättes selle erandi kõrvale, võime öelda, et lõigu projektsiooniks on lõigu otspunktide projektsioonide vaheline lõik.

b) Koordinaatteljestikus on antud lõik oma otspunktidega $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$. Kui pikad on selle lõigu projektsioonid koordinaattelgedel?

Joon. 55.





Joon. 56.

Punkti A projektsioon x-teljel on (joon. 56) punkt $(x_1; 0)$ *ja punkti B projektsioon x-teljel on punkt* $(x_2; 0)$, *seega lõigu AB projektsioon x-teljel on lõik otspunktideĝa* $(x_1; 0)$ *ja* $(x_2; 0)$. *Selle projektsiooni pikkus on* $|x_2 - x_1|$.
Analoogiliselt saame, et AB projektsiooniks y-teljel on lõik otspunktidega $(0; y_1)$ *ja* $(0; y_2)$, *selle projektsiooni pikkus aga on* $|y_2 - y_1|$ *(joon. 56).*

Näide. *Kui lõigu otspunktid on* $A(3; -4)$ *ja* $B(-2, 2)$, *siis lõigu projektsioon x-teljel on pikkusega*

$$|-2-3| = |-5| = 5$$

ja lõigu projektsioon y-teljel on pikkusega

$$|2-(-4)| = |2+4| = 6.$$

Esita see lõik ja tema projektsioonid joonisel.
Kui lõik on paralleelne x-teljega, näiteks lõik AC joonisel 56, siis tema projektsioon x-teljel on pikkuselt võrdne lõigu enda pikkusega ja projektsioon y-teljel on pikkuselt 0 (on punkt). Analoogiliselt, kui lõik on paralleelne y-teljega, näiteks lõik CB joonisel 56, siis tema projektsioon y-teljel on pikkuselt võrdne lõigu enda pikkusega ja projektsioon x-teljel on pikkuselt 0.
c) Leida koordinaatteljestikus antud lõigu pikkus, kui lõigu otspunktid on $A(x_1; y_1)$ ja $B(x_2; y_2)$.
Kui lõik AB on paralleelne x-teljega, siis eelneva põhjal tema pikkus

$$AB = |x_2 - x_1|$$

ja kui ta on paralleelne y teljega, siis tema pikkus

$$AB = |y_2 - y_1|.$$

Olgu lõik AB koordinaattelgede suhtes kaldu (joon. 56). Joonestame täisnurkse kolmnurga ABC, milles täisnurga tipuks

on punkt $C(x_2; y_1)$, *hüpotenuusiks on lõik* AB *ja kaatetid* AC *ning* CB *on vastavalt paralleelsed* x- *ja* y-*teljega. Pütagorase teoreemi põhjal*

$AB^2 = AC^2 + CB^2$.

Et $AC = |x_2 - x_1|$ *ja* $CB = |y_2 - y_1|$, *siis*

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

ja

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Kahe punkti vaheline kaugus võrdub ruutjuurega nende punktide ühenimeliste koordinaatide vahede ruutude summast.

See valem annab õige tulemuse ka siis, kui lõik on paralleelne ühe või teise koordinaatteljega. Näiteks, kui lõik on paralleelne x-*teljega, siis* $y_2 = y_1$, *ja valem annab:*

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|,$$

nagu peab olema.

N ä i d e. *Kui lõigu otspunktideks on* $A(4; -3)$ *ja* $B(-1; 5)$, *siis lõigu pikkus*

$$AB = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (5 + 3)^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89} = 9{,}43.$$

33. 1) Mis on punkti $(-7; 3)$ projektsiooniks x-teljel, mis y-teljel?

2) Lõigu otspunktid on $M(2; -4{,}8)$ ja $N(-5; 6)$. Kui pikad on lõigu MN projektsioonid telgedel?

3) Leia iga järgneva punkti kaugus koordinaatide nullpunktist:

a) $A(4; -3)$, b) $B(-7; -24)$, c) $C(3{,}5; 5)$.

4) Anna valem punkti $M(x; y)$ ja koordinaatide nullpunkti vahelise kauguse arvutamiseks.

5) Ringjoon, mille keskpunkt on koordinaatide nullpunktis, läbib punkti $P(8; -15)$. Kui pikk on selle ringjoone raadius?

6) Kui pikk raadius on ringjoonel, mille keskpunkt on punktis $K(-5; 10)$ ja mis läbib punkti $L(0; -2)$?

7) Kolmnurga tippudeks on punktid $A(3; 0)$, $B(7; 3)$ ja $C(4; 8)$. Arvuta kolmnurga külgede pikkused. Kas see kolmnurk on täisnurkne?

8) Kolmnurga tippudeks on punktid $P(2; 3)$, $Q(4; 7)$ ja $R(13; 0)$. Arvuta kolmnurga külgede pikkused. Mis liiki kolmnurk see on?

9) Leia x-teljel punkt, mille kaugus punktist $(3; -8)$ on võrdne 15.

10) Leia punktidest $(-1; 2)$ ja $(5; 4)$ võrdsetel kaugustel asetsev punkt,

a) kui see punkt on x-teljel;

b) kui see punkt on y-teljel.

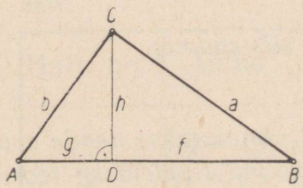
EUKLEIDESE TEOREEM

34. *Joonestame täisnurkses kolmnurgas ABC hüpotenuusile* $AB = c$ *kõrguse* $CD = h$ *(joon. 57). Kõrgus jaotab hüpotenuusi kaheks lõiguks* $BD = f$ *ja* $AD = g$. *Need lõigud on* **kaatetite projektsioonid** *hüpotenuusil:* f *on kaateti a projektsioon ja g on kaateti b projektsioon. On ilmne, et*

$$f + g = c.$$

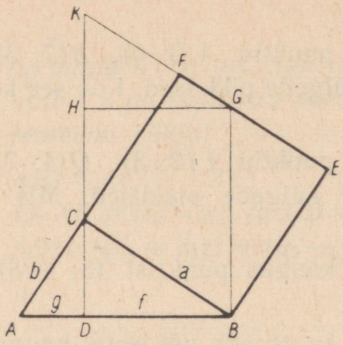
Tõestame, et kaatetit, tema projektsiooni ja hüpotenuusi seob järgmine nn. **Eukleidese**[1] **teoreem:**

täisnurkse kolmnurga kaateti ruut võrdub selle kaateti projektsiooni ja hüpotenuusi korrutisega.



Joon. 57.

[1] Eukleides, kreeka matemaatik, elas u. 315—255 e. m. a., andis esimesena geomeetria süstemaatilise ülesehituse.



Joon. 58.

Tõestuseks joonestame täisnurkse kolmnurga ABC ühele kaatetile, näiteks kaatetile BC ruudu BEFC ja teisendame selle ristkülikuks BGHD (joon. 58). Selleks tõmbame abisirge $BG \perp AB$ *ja eraldame ruudust BEFC täisnurkse kolmnurga BEG, mis on võrdne antud kolmnurgaga BCA (põhjenda seda!). Sellest järeldub, et* $BG = BA$. *Paigutades kolmnurga BEG asendisse CFK, saame ruudust BEFC rööpküliku BGKC. Eraldades sellest sirgega* $GH \parallel BD$ *kolmnurga GHK ja viies selle asendisse BCD, saame ristküliku BGHD. Selle ristküliku üks külg* $BD = f$ *on kaateti a projektsioon ja teine külg* $BG = AB = c$; *tähendab, ristküliku BGHD pindala on* fc. *Et ruudu BEFC pindala on* a^2 *ja tema teisendamisel ristkülikuks pindala ei muutu, siis*

$$a^2 = fc,$$

millega väide on kaateti a kohta tõestatud. Analoogiliselt saame selle tõestada teise kaateti kohta:

$$b^2 = gc.$$

35. *Kui Eukleidese teoreemi väljendavad seosed*

$a^2 = cf$ *ja* $b^2 = cg$

lahendada vastavalt a ja b suhtes, siis saame:

$a = \sqrt{cf}$ *ja* $b = \sqrt{cg}$.

Et ruutjuurt kahe arvu korrutisest nimetatakse nende arvude **geomeetriliseks keskmiseks**, *siis võime Eukleidese teoreemi sõnastada ka nii:*

täisnurkse kolmnurga kaatet on oma projektsiooni ja hüpotenuusi geomeetriline keskmine.

36. 1) Leia peast järgmiste arvude geomeetriline keskmine: 4 ja 9; 16 ja 4; 25 ja 16; 0,5 ja 8; 0,9 ja 0,4.
2) Leia ruutjuurte tabeli abil järgmiste arvude geomeetriline keskmine: 12 ja 25; 27 ja 38; 2,4 ja 8,5; 0,14 ja 0,3; 0,52 ja 1,2.

37. *Eukleidese teoreem seob kolme suurust: kaatetit, selle projektsiooni ja hüpotenuusi. Kui neist kaks suurust on antud, siis kolmanda saame arvutada.*

Näiteid.

1. *Kui* $c = 12$ *ja* $f = 3$, *siis valemi* $a^2 = cf$ *järgi* $a^2 = 12 \cdot 3 = 36$ *ja* $a = \sqrt{36} = 6$.

2. *Kui* $b = 8$ *ja* $c = 12$, *siis valemi* $b^2 = cg$ *põhjal* $g = b^2 : c = 8^2 : 12 = 64 : 12 = 5\frac{1}{3}$.

3. *Kui* $a = 6$ *ja* $f = 3$, *siis valemi* $a^2 = cf$ *põhjal* $c = a^2 : f = 6^2 : 3 = 36 : 3 = 12$.

38. Täisnurkse kolmnurga kaatet $b = 16$ m ja hüpotenuus $c = 24$ m. Arvuta kaatetite projektsioonid.

39. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 8$ cm ja hüpotenuus $c = 15$ cm. Kui pikad on kaatetite projektsioonid?

40. Täisnurkse kolmnurga kaatetite projektsioonid on 4,8 dm ja 2,6 dm. Kui pikad on kaatetid?

41. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus $c = 9{,}45$ m ja kaateti a projektsioon $f = 4{,}2$ m. Kui pikk on kaatet a?

42. Täisnurkse kolmnurga kaateti a projektsioon on 32 cm ja kaateti b projektsioon 40 cm. Kui pikad on kaatetid?

43. Arvuta täisnurkse kolmnurga kohta tabelis nõutud suurused.

Harj. nr.	Antud	Leida
1	$a = 18$; $c = 30$	f; g; b
2	$c = 9{,}2$; $g = 3{,}5$	f; a; b
3	$f = 0{,}15$; $g = 0{,}09$	c; a; b
4	$a = 6{,}5$; $f = 4{,}4$	c; g; b
5	$b = 1{,}0$; $c = 1{,}5$	g; f; a

44. Tõesta Eukleidese teoreemi põhjal Pütagorase teoreem.

Näpunäide. *Liida Eukleidese teoreemi väljendavate võrduste vastavad pooled.*

TEOREEM TÄISNURKSE KOLMNURGA KÕRGUSEST

45. *Tõestame, et*

täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrgus on kaatetite projektsioonide geomeetriline keskmine.

Tõestuseks avaldame kolmnurgast BCD Pütagorase teoreemi põhjal kõrguse ruudu (joon. 57):

$h^2 = a^2 - f^2$.

Et Eukleidese teoreemi järgi $a^2 = cf$, *siis asendades ja viies teguri* f *sulgude ette, saame:*

$h^2 = cf - f^2 = f(c - f)$.

Sulgudes olev tegur võrdub kaateti b projektsiooniga g. Tähendab

$h^2 = fg$,

mis näitab, et väide on õige.

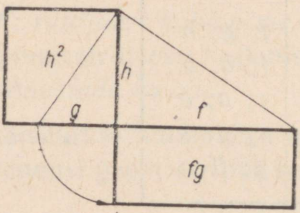
Teoreemi võib sõnastada ka nii: täisnurkse kolmnurga kõrgusele ehitatud ruut on pindvõrdne kaatetite projektsioonidele ehitatud ristkülikuga (joon. 59).

Missuguseid suurusi ja missugustel andmetel saab arvutada selle valemi põhjal?

46. Arvuta täisnurkse kolmnurga kõrgus, kui kaatetite projektsioonid on järgmised:

a) 4 m ja 9 m; b) 3 m ja $8\frac{1}{3}$ m;

c) 12 cm ja 18 cm; d) 27 cm ja 48 cm.



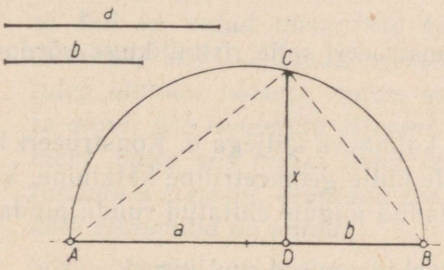
Joon. 59.

47. Täisnurkse kolmnurga kõrgus on 18 cm ja ühe kaateti projektsioon 13,5 cm. Kui pikk on hüpotenuus?

48. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 15 cm ja hüpotenuus 25 cm. Arvuta hüpotenuusile joonestatud kõrgus.

49. *Ruutjuurt kahe arvu korrutisest nimetasime nende arvude geomeetriliseks keskmiseks* (*üles.* 35). *Olgu need arvud antud graafiliselt — lõikudena a ja b — ja olgu nõutud leida nende geomeetrilist keskmist niisamuti lõiguna. Ülesande lahendamiseks pole vaja neid lõike mõõta, otsitavat geomeetrilist keskmist arvutada ja tulemust lõiguna kujutada, sest lõikude geomeetrilist keskmist saab konstruktsiooni teel leida otsekohe lõiguna, nagu nähtub järgmisest ülesandest.*

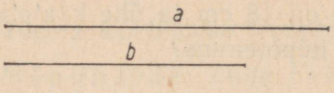
Antud on lõigud *a* ja *b*. Konstrueeri nende lõikude geomeetriline keskmine $x = \sqrt{ab}$.



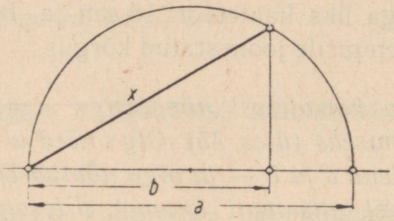
Joon. 60

Lahendus. *Kui* $x = \sqrt{ab}$, *siis* $x^2 = ab$, *millest nähtub, et lõik x on täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrguseks, kui kaatetite projektsioonid on võrdsed antud lõikudega a ja b. Sellise kolmnurga saamiseks joonestame lõigu* $a + b$ (*kolmnurga hüpotenuusi*), *poolitame selle ja joonestame poolringjoone, millele lõik* $AB = a + b$ *on diameetriks* (*joon.* 60). *Lõikude a ja b ühisest otspunktist D ringjooneni tõmmatud lõik* $DC \perp AB$ *ongi otsitav geomeetriline keskmine. Tõepoolest, kui punkt C ühendada punktidega A ja B, siis Thalese teoreemi järgi saame täisnurkse kolmnurga ABC, kusjuures kaatetite projektsioonid on võrdsed antud lõikudega a ja b.*

50. Leia kahe vabalt võetud lõigu geomeetriline keskmine.



Joon. 61.



51. Joonis 61 näitab lõikude a ja b geomeetrilise keskmise leidmist Eukleidese teoreemi alusel. Kirjelda konstruktsiooni ja põhjenda väidet, et $x = \sqrt{ab}$.

52. Võta kaks lõiku ja leia nende geomeetriline keskmine kahel viisil. Võrdle tulemusi.

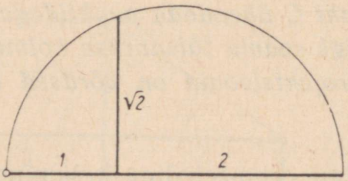
53. Joonesta ristkülik. Konstrueeri selle ristkülikuga võrdpindne ruut.

54. On antud võrdkülgne kolmnurk küljega a. Konstrueeri kolmnurga kõrguse ja poole külje geomeetriline keskmine. Võrdle kolmnurga pindala saadud lõigule ehitatud ruudu pindalaga.

55. Leia konstruktsiooni teel järgmised ruutjuured:

a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{5}$; c) $\sqrt{6}$; d) $\sqrt{8}$.

Näpunäide. *$\sqrt{a}$ konstrueerimiseks, kus a on antud arv, kirjuta juuritav korrutisena* $1 \cdot a$ *(või* $2 \cdot \frac{a}{2}$ *jne.), võta vabalt ühiklõik ja ehita lõikude* 1 *ja* a *(*2 *ja* $\frac{a}{2}$*) geomeetriline keskmine (joon.* 62*).*



Joon. 62.

SEOSED TÄISNURKSE KOLMNURGA JOONELEMENTIDE VAHEL

56. *Täisnurkse kolmnurga joonelementideks nimetame kõiki selles kolmnurgas esinevaid lõike. Oleme vaadelnud kuut elementi: kolmnurga külgi a, b ja c, kaatetite projektsioone f ja g ning kõrgust h. Nende elementide vahel kehtivad järgmised seosed:*

$$a^2+b^2=c^2$$
$$a^2=cf;\ b^2=cg$$
$$h^2=fg$$
$$c=f+g$$
$$ab=ch$$
$$a^2=h^2+f^2;\ b^2=h^2+g^2$$

Sõnasta iga seos. Põhjenda viimase kolme võrduse õigsust.

57. a) *Kui on antud täisnurkse kolmnurga kaks mingit joonelementi, siis ülejäänud elemente saab arvutada. Selleks tuleb lähtuda seosest, milles esinevad antud kaks elementi ja ainult üks tundmatu element, arvutada sellest kolmas element, võtta siis mingi teine seos, milles esineb ainult üks tundmatu element, arvutada see, ja niiviisi jätkata tööd, kuni kõik elemendid on leitud.*

Näide. *Olgu antud, et* $a = 8$ *cm ja* $h = 5$ *cm. Arvutame ülejäänud elemendid, s. o. b, c, f ja g.*

1) *Pütagorase teoreemi põhjal*

$f^2 = a^2 - h^2$

ja seega

$f = \sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39} = 6{,}24.$

2) *Eukleidese teoreemi järgi*

$a^2 = fc,$

seega

$c = a^2 : f = 64 : 6{,}24 = 0{,}160 \cdot 64 = 10{,}24.$

3) *Et* $f + g = c$, *siis*

$g = c - f = 10{,}24 - 6{,}24 = 4{,}0.$

4) *Pütagorase teoreemi järgi*

$b^2 = h^2 + g^2$,

seega

$b = \sqrt{h^2 + g^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41} = 6{,}4$.

Vastus. $b = 6{,}4$ cm, $c = 10{,}2$ cm, $f = 6{,}2$ cm, $g = 4{,}0$ cm.

b) *Mõnede andmete puhul ei leidu seost, milles esineks ainult üks tundmatu element. Niisugusel juhtumil tuleb vajalik seos tuletada kahest valemist.*

Näide. *Olgu antud, et kaatet $b = 8$ cm ja teise kaateti projektsioon $f = 12$ cm. Leida hüpotenuus.*

Eukleidese teoreemi järgi

$b^2 = cg$.

Selles valemis on kaks tundmatut: c ja g. Avaldame g valemist $f + g = c$ ja asetame valemisse $b^2 = cg$:

$b^2 = c(c - f)$.

Oleme saanud ühe tundmatuga võrrandi:

$c^2 - fc - b^2 = 0$;
$c^2 - 12c - 64 = 0$;
$c = 6 \pm \sqrt{36 + 64} = 6 \pm 10$;
$c = 16$ (*sest* $c > 0$).

Vastus. *Otsitav hüpotenuus on* 16 *cm.*

58. Täisnurkse kolmnurga kaatet $b = 15$ cm ja kõrgus $h = 12$ cm. Arvuta teised joonelemendid.

59. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus $c = 25$ cm ja kaateti projektsioon $f = 4$ cm. Arvuta teised joonelemendid.

60. Täisnurkse kolmnurga kaatetite projektsioonid on 2 m ja 3 m. Arvuta teised joonelemendid.

61. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 3 dm ja 4 dm. Arvuta teised joonelemendid.

62. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 20 m ja kõrgus 8 m. Arvuta teised joonelemendid.

63. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 12$ dm ja kaateti b projektsioon $g = 9$ dm. Arvuta teised joonelemendid.

64. Täisnurkse kolmnurga pindala on 26,46 m² ja üks kaatet on 6,3 m. Kui pikk on kolmnurga hüpotenuus?

65. Kolmnurga külgede pikkused on 5,3 cm, 9,0 cm ja 5,3 cm. Arvuta kolmnurga pindala.

66. Korrapärase nelinurga ümberringjoone raadius on 10 cm. Arvuta nelinurga külg, apoteem ja pindala.

67. Korrapärase kolmnurga ümberringjoone raadius on 12 cm. Arvuta kolmnurga külg, apoteem ja pindala.

68. Korrapärase kuusnurga ümberringjoone raadius on 8 cm. Arvuta kuusnurga külg, apoteem ja pindala.

69. Väljaspool ringjoont antud punktist on ringjoonele tõmmatud puutuja. Arvuta antud punkti kaugus puutepunktist. kui on teada, et ringjoone raadius on 5 cm ja antud punkt on ringjoone keskpunktist 1 cm võrra kaugemal kui puutepunktist.

70. Ringjoonele, mille raadius võrdub 3 cm, on tõmmatud puutuja punktist, mis asetseb 8 cm kaugusel ringjoone keskpunktist. Arvuta puutepunkti kaugus sirgest, mis ühendab antud punkti ringjoone keskpunktiga.

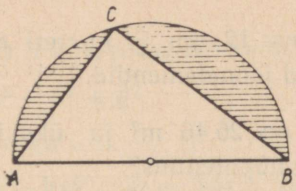
71. Joonesta kahe mittevõrdse lõigu aritmeetiline keskmine ja geomeetriline keskmine. Kumb neist on pikem?

72. Joonesta lõik pikkusega $\sqrt{8}$ cm Pütagorase teoreemi, Eukleidese teoreemi ja täisnurkse kolmnurga kõrguse kohta käiva teoreemi põhjal.

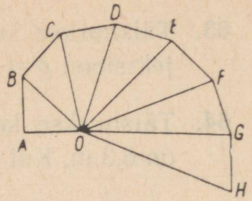
73. Joonesta lõik pikkusega $\sqrt{13}$ cm.

74. Joonesta lõik pikkusega $\sqrt{20}$ cm.

75. Poolringi, mille läbimõõt $AB = 10$ cm, on joonestatud kolmnurk ABC (joon. 63). Arvuta joonisel viirutatud kujundi pindala, kui kolmnurga külg $AC = 6$ cm.

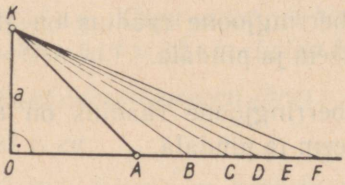


Joon. 63.



Joon. 64.

76. Joonis 64 on valmistatud nõnda, et $OA = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = 1$, ja nurgad OAB, OBC, OCD, ..., OGH on täisnurgad. Arvuta OB, OC, OD, OE, OF, OG ja OH.



Joon. 65.

77. Joonis 65 on valmistatud nõnda, et $OA = OK = a$ ja $OK \perp OA$ ning $OB = AK$, $OC = BK$ jne. Avalda lõigud OB, OC jne. lõigu a kaudu.

VÕRDELISED LÕIGUD

78. *Täisnurkse kolmnurga joonelementide arvutamisel puutusime kokku valemitega, mis rakendasid lõikude korrutise ja lõigu ruudu mõistet. Edasi vaatleme küsimusi, mis rakendavad lõikude jagatise ehk suhte mõistet.*

Kahe lõigu suhteks nimetatakse nende mõõtarvude suhet, kui lõigud on mõõdetud ühe ja sama ühikuga.

Näiteks lõikude $a = 0{,}8$ m ja $b = 12$ dm suhe

$$a : b = \frac{0{,}8\ m}{12\ dm} = \frac{8\ dm}{12\ dm} = \frac{2}{3}.$$

Mida näitab kahe lõigu suhe, kui see on suurem kui 1? kui see on väiksem kui 1? kui see on võrdne 1-ga?

79. Täisnurkse kolmnurga kaatetite projektsioonid hüpotenuusil on $f = 2$ cm ja $g = 8$ cm. Arvuta hüpotenuusile joonestatud

kõrgus h ja leia suhted $f:h$ ja $h:g$. Tõesta, et need suhted on alati võrdsed.

80. Missugune valem seob täisnurkse kolmnurga kaatetit a, selle projektsiooni f ja hüpotenuusi c? Järelda sellest, et $a:c = f:a$.

81. Põhjenda, et $ab = ch$, kus a ja b on täisnurkse kolmnurga kaatetid, c on hüpotenuus ja h on kõrgus. Tuleta siit võrre $a:c = h:b$.

82. *Varem võtsime tarvitusele võrdeliste suuruste mõiste, nimetades kaht suurust võrdelisteks, kui nende vastavate väärtuste suhted on võrdsed. Laiendame seda mõistet nüüd kahele lõikude reale*

$a, b, c, d, e, \ldots$

$a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, \ldots$

Ühe rea lõike nimetame võrdelisteks teise rea lõikudega, kui vastavate lõikude suhted on võrdsed.

Väikseim lõikude arv, mille kohta saab tarvitada mõistet «võrdelised», on neli: lõigud a ja b on võrdelised lõikudega a_1 ja b_1, kui

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1},$$

s. t. kui neist lõikudest saab koostada võrde.

Kahe võrdeliste lõikude rea vastavate lõikude jäävat suhet $k = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \ldots$ *nimetatakse* **võrdeteguriks.** *Teades võrdetegurit ja ühe rea mingit lõiku, saab leida temale vastavat teise rea lõiku:*

$a = ka_1,\ b = kb_1, \ldots$

Ümberpöördult,

$$a_1 = \frac{1}{k}\,a, \qquad b_1 = \frac{1}{k}\,b, \ldots$$

Tähistades esimese rea mistahes lõigu tähega y ja teise rea vastava lõigu tähega x, saame lõikude võrdelisuse kirjutada tuntud kujul

$y = kx.$

Millega on võrdelised täisnurkse kolmnurga kaatet ja hüpotenuusile tõmmatud kõrgus ülesandes 81 antud võrde põhjal?

83. Ühe kolmnurga küljed on 12,4 cm, 8,6 cm ja 14,8 cm, teise küljed aga 31 cm, 37 cm ja 21,6 cm. Lugedes vastavateks külgedeks kolmnurkade kõige pikemad küljed, keskmised küljed ja kõige lühemad küljed, selgita, kas nende kolmnurkade küljed on võrdelised.

84. Antud on lõigud pikkusega 2 cm, 5 cm, 7,5 cm ja 12,4 cm. Leia nendega võrdelised lõigud nii, et antud lõigu ja temale vastava lõigu suhe oleks 2,5.

85. Täida lüngad järgnevates ridades nii, et tekiks kaks rida võrdelisi pikkusi:

4 cm, 2,4 dm, 6 ..., 5,4 m, 6,8 ..., 18,5 km, 58 ...,
6 cm, 3,6 ..., 9 dm, 8,1 ..., 10,2 m, 24,3 ..., 78 km.

NURGA HAARADE LÕIKAMINE PARALLEELSETE SIRGETEGA

86. a) *Antud lõikudega võrdelisi lõike on võimalik saada ka graafiliselt vastava konstruktsiooni teel. See konstruktsioon põhineb järgmisel teoreemil* (**I kiirteteoreem**):

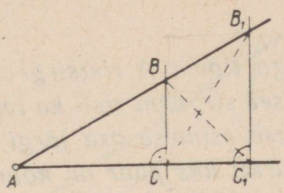
nurga haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega tekivad võrdeliste külgedega kolmnurgad.

Teoreemi tõestame kahes osas: esmalt sel juhtumil, kui lõikajad on risti nurga ühe haaraga, ja teiseks sel juhtumil, kui nad ei ole risti nurga haaraga.

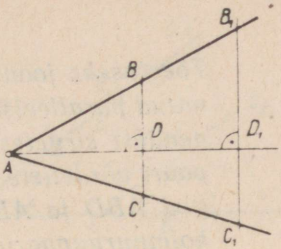
b) *Olgu* (joon. 66) $BC \parallel B_1C_1$ *ja* $BC \perp AC$, *mistõttu ka* $B_1C_1 \perp AC_1$.

Tõestada tuleb, et

$$\frac{AC}{AC_1} = \frac{CB}{C_1B_1} = \frac{AB}{AB_1}.$$



Joon. 66.



Joon. 67.

Tõestuseks ühendame punkti B punktiga C_1 ja punkti C punktiga B_1 ning vaatleme kolmnurki ACB_1 ja ABC_1. Kumbki neist kolmnurkadest koosneb kahest osast: esimene kolmnurgast ACB ja kolmnurgast CBB_1, teine samašt kolmnurgast ACB ja kolmnurgast CBC_1. Kolmnurgad CBB_1 ja CBC_1 on võrdsete pindaladega, sest kui neis aluseks võtta ühine külg CB, siis ka kõrgused on võrdsed (miks?). Sellest järeldub, et vaadeldavad kolmnurgad ACB_1 ja ABC_1 on võrdsete pindaladega. Avaldades need pindalad, saame

$$\frac{AC \cdot C_1B_1}{2} = \frac{AC_1 \cdot CB}{2},$$

millest järeldub, et

$$\frac{AC}{AC_1} = \frac{CB}{C_1B_1}.$$

Tähistame saadud võrdsete suhete väärtust tähega k. Siis $AC = k \cdot AC_1$ ja $CB = k \cdot C_1B_1$. Arvutame nüüd täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusi Pütagorase teoreemi põhjal:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = (k \cdot AC_1)^2 + (k \cdot C_1B_1)^2 = k^2 \cdot (AC_1^2 + C_1B_1^2).$$

Et sulgudes olev avaldis võrdub kolmnurga AC_1B_1 hüpotenuusi ruuduga, siis

$$AB^2 = k^2 \cdot AB_1^2$$

ja

$$AB = k \cdot AB_1.$$

Sellega on tõestatud, et kolmnurkade ABC ja AB_1C_1 kõik vastavate külgede suhted on võrdsed ühe ja sama arvuga k.

Tõestame teoreemi nüüd üldjuhtumil. Olgu (joon. 67) *endiselt $BC \parallel B_1C_1$. Tõestada tuleb, et ka nüüd*

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{AC_1}.$$

Tõestuseks joonestame antud nurga tipust A ristsirge ühele antud paralleelsetest sirgetest. Et see sirge on risti ka teisega nendest sirgetest, siis tekib tõestuse esimese osa järgi kaks paari võrdeliste külgedega kolmnurki: üks paar on kolmnurgad ABD ja AB_1D_1, teine paar on ACD ja AC_1D_1. Et neil kolmnurgapaaridel on üks paar ühiseid külgi, nimelt AD ja AD_1, siis kõik nende vastavate külgede suhted on võrdsed:

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AD}{AD_1} = \frac{DC}{D_1C_1} = \frac{AC}{AC_1} = k.$$

Sellega on väitest tõestatud esimese ja viimase suhte võrdsus. Keskmise suhte väärtuse saamiseks avaldame saadud suhete reast BD ja DC ning liidame need: $BD = k \cdot B_1D_1$, $DC = k \cdot D_1C_1$, *seega*

$$BD + DC = k \cdot B_1D_1 + k \cdot D_1C_1 = k \cdot (B_1D_1 + D_1C_1)$$

ehk, et $BD + DC = BC$ *ja* $B_1D_1 + D_1C_1 = B_1C_1$,

$BC = k \cdot B_1C_1$.

Sellest nähtub, et ka kolmas väites esinev suhe $\frac{BC}{B_1C_1}$ *on teistega võrdne, s. t. väide on täielikult tõestatud.*

87. *Oletame nüüd ümberpöördult, et joonisel* 67

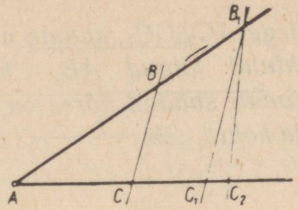
$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$$

ja tõestame, et siis $BC \parallel B_1C_1$.

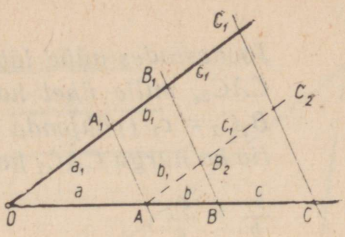
Tõestame **vastuväiteliselt**, *s. t. oletame, et BC ei ole paralleelne* B_1C_1*-ga. Tõmmates siis punktist* B_1 *sirge* B_1C_2 *nii, et ta oleks paralleelne sirgega BC, saaksime juba tõestatud teoreemi põhjal järgmise võrde (joon.* 63):

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_2}.$$

Võrreldes seda võrret antud võrdega, näeme, et neis kolm liiget on samad. Sellest järeldub, et $AC_1 = AC_2$, *millest nähtub, et* C_1 *ja* C_2 *langevad ühte. Kuid siis ka* B_1C_1 *on paralleelne BC-ga, nagu seda oli* B_1C_2. *Nii oleme tõestanud järgmise teoreemi* (**II kiirteteoreem**):



Joon. 68.



Joon. 69.

kui kaks sirget lõikavad nurga haarasid nii, et lõigud nurga tipust ühe lõikajani on võrdelised lõikudega nurga tipust teise lõikajani, siis need lõikajad on paralleelsed.

Selle teoreemi põhjal saab antud sirgele joonestada paralleelse sirge, kasutades ainult lõikude mõõtmist.

88. *Lõigates nurga haarasid mitme paralleeliga ja vaadeldes haarade lõike paralleelide vahel, võime tõestada järgmise teoreemi* (**III kiirteteoreem**):

lõigud, milledeks paralleelid jaotavad nurga ühe haara, on võrdelised teise haara vastavate lõikudega.

Olgu nurga O haarad lõigatud paralleelidega $AA_1 \| BB_1 \| \| CC_1 \| \ldots$ *Tähistame lõigud, milledeks need sirged jaotavad nurga haarad, vastavalt* $a, b, c, \ldots$ *ja* $a_1, b_1, c_1 \ldots$ (joon. 69). *Tõestada tuleb, et*

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \ldots$$

Tõestuseks kasutame tõsiasja, et nurga O haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega AA_1 *ja* BB_1 *tekkisid võrdeliste külgedega kolmnurgad:*

$$\frac{a_1 + b_1}{a_1} = \frac{a + b}{a}.$$

Kui kummagi murru lugeja jagada nimetajaga, siis saame

$$1 + \frac{b_1}{a_1} = 1 + \frac{b}{a},$$

millest

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b}{a}.$$

ehk, vahetades võrde siseliikmed ja siis võrde pooled,

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}.$$

Joonestades nüüd läbi punkti A sirge $AC_2 \| OC_1$, saame nurga CAC_2, mille ühel haaral on tekkinud lõigud $AB_2 = b_1$ ja $B_2C_2 = c_1$ (põhjenda seda!). Et viimati saadud võrre on kehtiv ka nurga CAC_2 haarade lõikude kohta, siis

$$\frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}.$$

Ühendades kaks viimast võrret, saame

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}.$$

Enam kui kolme paralleeli puhul saab tõestust analoogiliselt jätkata.

89. Nurga O haarad on lõigatud paralleelsete sirgetega nii, et ühel haaral (joon. 69) on tekkinud võrdsed lõigud: $a = b = c = \ldots$ Mis võib öelda nurga teise haara lõikude kohta? Kuidas seda tõsiasja kasutada selleks, et antud lõiku AB jaotada näiteks viieks võrdseks osaks (joon. 70)?

90. On antud kolm lõiku: a, b ja c. Konstrueeri neljas lõik x nii, et

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

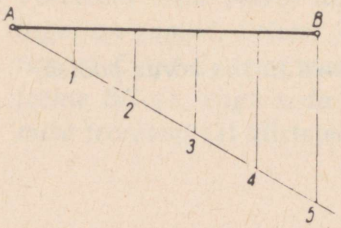
Otsitavat lõiku x nimetatakse antud kolme lõigu a, b ja c **neljandaks võrdeliseks.** *Neljanda võrdelise leidmine võib toimuda kahel viisil: kas ülesandes* 86 *antud teoreemi põhjal (joon.* 71) *või ülesandes* 88 *antud teoreemi põhjal (joon.* 72).

Kirjelda kumbagi lahendusviisi.

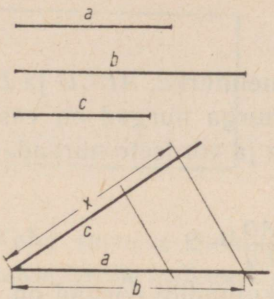
91. Leia neljas võrdeline lõikudele $a = 3{,}2$ cm, $b = 4{,}8$ cm ja $c = 4{,}2$ cm nii arvutamise kui ka joonestamise teel.

92. On antud kolm lõiku: a, b ja c. Konstrueeri lõigud:

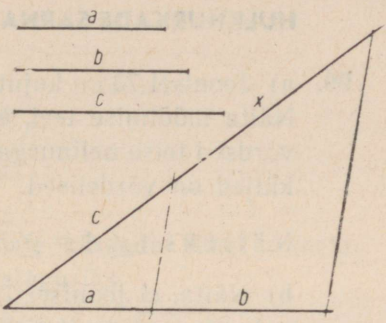
1) $x = \frac{ab}{c}$, 2) $y = \frac{bc}{a}$, 3) $z = \frac{ac}{b}$.



Joon. 70.



Joon. 71.



Joon. 72.

Näpunäide. *Vajaliku konstruktsiooni leidmiseks koosta võrre. Kui näiteks* $x = \frac{m \cdot n}{p}$, *siis* $px = mn$ *ja* $\frac{p}{m} = \frac{n}{x}$, *tähendab, lõik x on lõikude p, m ja n neljas võrdeline.*

93. Näita, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrgus on hüpotenuusi ja kaatetite neljas võrdeline.

94. Võrdhaarse trapetsi alused on 14 cm ja 9 cm, haarad on 7 cm. Kui palju tuleb haarasid pikendada, et nad lõikuksid?

95. Trapetsi alused on 6 cm ja 3,2 cm, haarad on 3 cm ja 2,5 cm. Kui palju tuleb kumbagi haara pikendada, et nad lõikuksid?

96. Kolmnurgas, mille küljed on 8 cm, 12 cm ja 16 cm, on joonestatud kõige lühema küljega paralleelne sirge nii, et tekkinud uue kolmnurga kõige pikem külg on 12 cm. Arvuta uue kolmnurga teiste külgede pikkused.

97. Kolmnurk, mille küljed on 32 mm, 48 mm ja 56 mm, on lõigatud kõige pikema küljega paralleelse sirgega nii, et tekkinud trapetsi teine alus on 35 mm. Arvuta selle trapetsi haarade pikkused.

98. Kolmnurga küljed on 12 m, 18 m ja 20 m. Kolmnurk on lõigatud kõige pikema küljega paralleelse sirgega nii, et tekkinud trapetsi lühem haar on 4 m. Kui pikk on selle trapetsi teine alus?

HULKNURKADE SARNASUS

99. a) Joonisel 73 on kujutatud kaks nelinurka: $ABCD$ ja $EFGH$. Näita mõõtmise teel, et ühe nelinurga nurgad on vastavalt võrdsed teise nelinurga nurkadega ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised.

Näiteks. $\angle A = \angle E$ ja $\frac{AB}{EF} = \frac{AD}{EH} = 2$.

b) Näita, et joonisel 74 esitatud kujundite nurgad on vastavalt võrdsed, kuid nende nurkade lähisküljed ei ole võrdelised.

c) Näita, et joonisel 75 kujutatud ristküliku küljed on võrdelised rööpküliku külgedega, kuid võrdeliste külgede vahelised nurgad ei ole võrdsed.

d) **Kui ühe hulknurga nurgad on vastavalt võrdsed teise hulknurga nurkadega ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised, siis hulknurki nimetatakse sarnasteks.**

Näiteks nelinurgad ABCD ja EFGH joonisel 73 on sarnased, sest

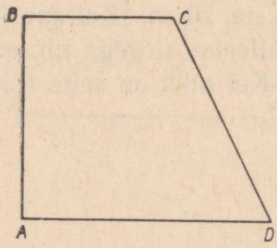
$\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle F$,
$\angle C = \angle G$, $\angle D = \angle H$

ja

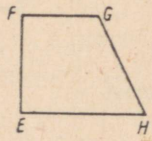
$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{AD}{EH}.$$

Kahe sarnase hulknurga vastavalt võrdsete nurkade tippe nimetatakse nende vastavateks tippudeks ja vastavaid tippe ühendavaid külgi vastavateks külgedeks.

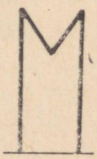
Näiteks AB ja EF on sarnaste nelinurkade ABCD ja EFGH üks paar vastavaid külgi.

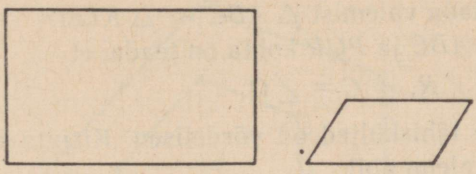


Joon. 73.



Joon. 74.





Joon. 75.

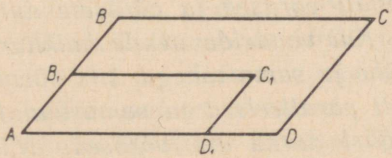
Kahe sarnase hulknurga vastavate külgede suhet nimetatakse nende hulknurkade sarnasusteguriks.

Näiteks hulknurkade ABCD ja EFGH sarnasustegur (joon. 73) on 2 (ABCD sarnasustegur EFGH suhtes) või $\frac{1}{2}$ *(EFGH sarnasustegur ABCD suhtes).*

e) Selgita, kas joonisel 76 kujutatud rööpkülikud *ABCD* ja $AB_1C_1D_1$ on sarnased või mitte. Miks?

f) Põhjenda väidet, et kolmnurgad *ABD* ja AB_1D_1 joonisel 67 on sarnased. Nimeta sellelt jooniselt veel sarnaseid kolmnurki.

g) Põhjenda väidet, et kaks võrdset hulknurka on ka sarnased.



Joon. 76.

100. *Kahe hulknurga ABCD ja EFGH sarnasust märgitakse kujul* $ABCD \sim EFGH$.

Sarnaste hulknurkade nimetused tuleb seejuures kirjutada nii, et vastavate tippude tähised on mõlema hulknurga nimetuses ühel ja samal kohal. Märkides nii hulknurkade sarnasust, saame valemist $ABCD \sim EFGH$ *välja lugeda järgmist:*

$$\angle A = \angle E,\ \angle B = \angle F,$$
$$\angle C = \angle G,\ \angle D = \angle H$$

ja

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{AD}{EH}.$$

a) Mida saab järeldada valemist $\triangle ABC \sim \triangle KLM$?

b) Kahe kolmnurga ABC ja PQR kohta on teada, et

$\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle R$, $\angle C = \angle Q$

ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised. Kirjuta need tõsiasjad üheainsa valemi abil.

c) On antud, et $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ja $\triangle DEF \sim \triangle KLM$. Mis saab öelda kolmnurkade ABC ja KLM kohta?

101. *Antud hulknurgaga sarnase hulknurga joonestamine põhineb järgmisel teoreemil:*

kui ühe hulknurga küljed on vastavalt paralleelsed teise hulknurga külgedega ja nende hulknurkade vastavaid tippe ühendavad sirged lõikuvad ühes ja samas punktis, siis need hulknurgad on sarnased.

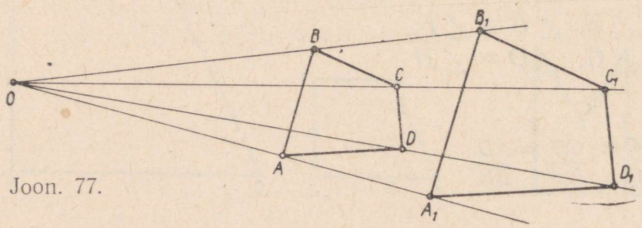
Eeldus. $AB \| A_1B_1$, $BC \| B_1C_1$, $CD \| C_1D_1$, $AD \| A_1D_1$; sirged AA_1, BB_1, CC_1 *ja* DD_1 *lõikuvad ühes ja samas punktis* O (*joon.* 77).

Väide. $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$.

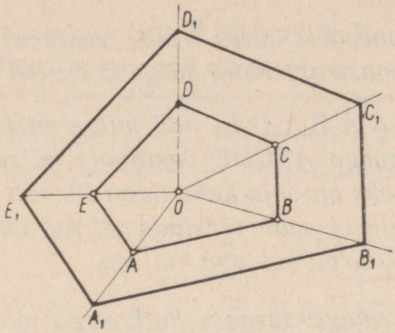
Tõestus. *Väite tõestamiseks tuleb näidata, et nende hulknurkade nurgad on vastavalt võrdsed ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised. Kui vaadelda nende hulknurkade nurki, mis on tähistatud ühe ja sama tähega, siis näeme, et nende haarad on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised, järelikult iga kaks niisugust nurka on võrdsed. Näiteks* $\angle A = \angle A_1$, *sest eelduse järgi* $AB \| A_1B_1$, $AD \| A_1D_1$ *ja joonise järgi need haarad on samasuunalised.*

Tõestame nüüd, et neis hulknurkades võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised. Eelduse järgi $AB \| A_1B_1$ *ja* $BC \| B_1C_1$. *Sellest järeldub I kiirteteoreemi põhjal, et*

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OB}{OB_1} \text{ ja } \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{OB}{OB_1}.$$



Joon. 77.



Joon. 78.

Et nende võrrete paremad pooled on võrdsed, siis on võrdsed ka vasakud pooled:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Sellega on väide nurga B ja B_1 haarade kohta tõestatud. Samal viisil tõestust jätkates saame:

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1}, \quad \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DA}{D_1A_1}$$

ehk kokkuvõetult

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DA}{D_1A_1}.$$

Niisiis, hulknurkade ABCD ja $A_1B_1C_1D_1$ nurgad on vastavalt võrdsed ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised, s. t. hulknurgad on sarnased.

Punkti O, milles joonisel 77 lõikuvad sarnaste hulknurkade vastavaid tippe ühendavad sirged, nimetatakse nende hulknurkade **sarnasuskeskpunktiks.** *See punkt võib asetseda ka hulknurga sees, teoreemi tõestus selle tõttu ei muutu (joon. 78).*

102. *Joonesta antud viisnurgaga ABCDE sarnane viisnurk nii, et selle küljed on* 1,5 *korda pikemad antud viisnurga külgedest.*

Ülesande lahendamiseks joonestame mingist punktist O (joon. 78) kiired läbi antud hulknurga tippude, võtame ühel kiirel, näiteks OA, punkti A_1 nii, et $OA_1 = 1{,}5 \cdot OA$, ja lähtudes punktist A_1 joonestame hulknurga $A_1B_1C_1D_1E_1$ nii, et selle küljed on vastavalt paralleelsed antud hulknurga külgedega. Eelmises ülesandes tõestatud teoreemi järgi on uus

hulknurk endisega sarnane, kusjuures nende vastavate külgede suhe on 1,5, *sest konstruktsiooni järgi* $OA_1 : OA = 1{,}5$.

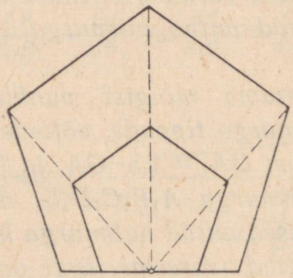
Märkus. *Kui hulknurga* $A_1B_1C_1D_1E_1$ *neli külge on joonestatud paralleelselt hulknurga* $ABCDE$ *vastavate külgedega, siis viimase külje saamiseks on vaja kaks tippu lihtsalt ühendada. Kiirteteoreemide alusel saab tõestada, et ka see külg on paralleelne antud hulknurga vastava küljega.*

103. *Antud hulknurga järgi temaga sarnase hulknurga joonestamist nimetatakse antud hulknurga* **sarnasusteisenduseks.** *Sarnasusteisendus on kas hulknurga* suurendamine *või* vähendamine *vastavalt sellele, kas uue hulknurga küljed on suuremad või väiksemad antud hulknurga külgedest. Sarnasusteisendus on määratud, kui on antud* **sarnasustegur,** *s. o. teisendatud hulknurga ja antud hulknurga vastavate külgede suhe* k. *Kui* $k > 1$, *siis öeldakse, et hulknurk on* k *korda suurendatud.*
Hulknurga teisendamiseks kasutatav sarnasuskeskpunkt võib asetseda ka hulknurga küljel (*joon.* 79) *või ühes tipus* (*joon.* 80).

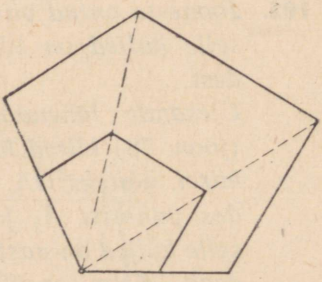
104. Filmilindi kaadri laius on ligikaudu 22 mm ja sellest saadud pildi laius 3,3 m. Mitu korda on pilti suurendatud?

105. a) Suurenda mingi viisnurk 2 korda.
b) Vähenda mingi kuusnurk 3 korda.

106. Joonesta ristkülik mõõtmetega 6 cm ja 4 cm ning selle sisse teine ristkülik nii, et nende külgede vahele jääks igale poole 1 cm laiune riba. Selgita, kas need ristkülikud on sarnased.



Joon. 79.



Joon. 80.

107. Tabelis on antud kõrvuti kaks ristkülikut oma mõõtmetega. Otsusta, kas nad on sarnased.

Harj. nr.	I ristkülik	II ristkülik
1	5 m ja 9 m	45 m ja 25 m
2	0,6 m ja 0,8 m	0,18 m ja 0,32 m
3	18 cm ja 20 cm	60 cm ja 54 cm
4	8,1 cm ja 4,5 cm	15 cm ja 27 cm
5	$6\frac{2}{5}$ dm ja $4\frac{1}{3}$ dm	$5\frac{1}{3}$ dm ja $3\frac{1}{4}$ dm

108. Risttahuka mõõtmed on 2 cm, 4 cm ja 8 cm. Missuguste mõõtmetega tahud on sellel risttahukal sarnased?

109. Ristkülikut suurendati 2, 3, ..., k korda. Mitu korda suurenes ristküliku pindala?

110. Suurenda mingit viisnurka 3 korda, võttes sarnasuskeskpunktiks viisnurga ühe tipu.

111. Kirjutuspaberi lehtede standard-formaadid on üksteisega sarnased, kusjuures iga järgmine väiksem formaat saadakse eelmise formaadi poolitamise teel. Näita, et niisuguse formaadi mõõtmete suhe on võrdne ruudu külje ja diagonaali suhtega.

112. a) Millal on kaks ruutu sarnased?
b) Millal on kaks korrapärast kuusnurka sarnased?
c) Millal on kaks rombi sarnased?

113. Näita, et kujundite võrdsus on sarnasuse erijuhtum.

KOLMNURKADE SARNASUSE TUNNUSED

114. a) *Huiknurkade sarnasuse definitsiooni järgi*

kaht kolmnurka nimetatakse sarnasteks, kui ühe kolmnurga nurgad on vastavalt võrdsed teise kolmnurga nurkadega ja võrdsete nurkade lähisküljed on võrdelised.

b) On antud, et $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Mida võib öelda nende kolmnurkade nurkadest ja külgedest?

c) *Näita, et I kiirteteoreemi võib sõnastada nüüd nii:*

nurga haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega tekivad sarnased kolmnurgad.

115. *Kolmnurkade sarnasuse* I *tunnus:*

kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks külge on võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ja nende külgede vahelised nurgad on võrdsed.

Eeldus. $\angle A = \angle D$; $AB : DE = AC : DF$ (*joon.* 81).

Väide. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Tõestus. *Märgime* $\triangle ABC$ *küljel* AB *lõigu* $AK = DE$ *ja joonestame punktist* K *sirge* $KL \| BC$. *Siis I kiirteteoreemi põhjal* $\triangle ABC \sim \triangle AKL$

ja

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AL}.$$

Saadud võrde esimesed kolm liiget on vastavalt võrdsed eelduses antud võrde esimese kolme liikmega. Sellest järeldub, et ka nende neljandad liikmed on võrdsed:

$AL = DF$.

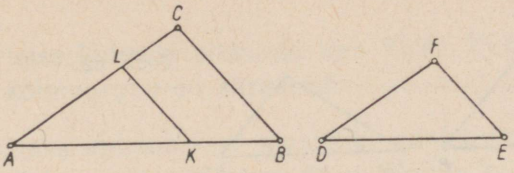
Toetudes kolmnurkade võrdsuse tunnusele KNK saame nüüd (põhjenda seda!), et $\triangle AKL = \triangle DEF$. *Et* $\triangle ABC$ *oli esimesega neist sarnane, siis ta on sarnane ka teisega:*

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

116. a) Näita, et kaks täisnurkset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaatetid on võrdelised teise kolmnurga kaatetitega.

b) Näita, et kaks võrdhaarset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga tipunurk on võrdne teise kolmnurga tipunurgaga.

117. a) Ühe kolmnurga üks nurk on 70° ja selle lähisküljed on 16 cm ja 35 cm, teise kolmnurga kahe nurga summa on 110° ja nende nurkade vastasküljed on 2,1 m ja 0,96 m. Kas need kolmnurgad on sarnased?



Joon. 81.

b) Ühe kolmnurga üks nurk on 60° ja selle lähisküljed on 10 cm ja 15 cm, teise kolmnurga kaks nurka on 55° ja 65°, nende vastasküljed 15 cm ja 20 cm. Kas need kolmnurgad on sarnased?

118. *Kolmnurkade sarnasuse* II *tunnus:*

kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga.

Eeldus. $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle E$ (*joon.* 81).

Väide. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Tõestus. *Märgime* $\triangle ABC$ *küljel AB lõigu* $AK = DE$ *ja joonestame punktist K sirge* $KL \parallel BC$. *Nii saadud kolmnurk AKL on sarnane kolmnurgaga ABC, sest nurga A haarad on lõigatud kahe paralleeliga. Ühtlasi tunnuse NKN järgi*

$\triangle AKL = \triangle DEF$,

sest $\angle A = \angle D$, $AK = DE$ *ja* $\angle K = \angle B = \angle E$ *(miks?). Et kolmnurk ABC oli sarnane kolmnurgaga AKL, siis on ta sarnane ka sellega võrdse kolmnurgaga DEF:*

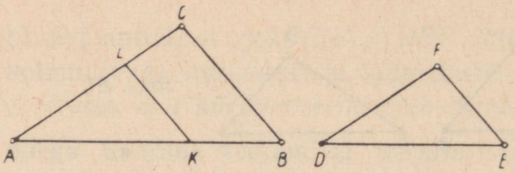
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

119. a) Näita, et kaks täisnurkset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga üks teravnurk on võrdne teise kolmnurga teravnurgaga.

b) Näita, et kaks võrdhaarset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga alusnurk on võrdne teise kolmnurga alusnurgaga.

120. Ühe kolmnurga kaks nurka on 50° ja 60°, teise kaks nurka aga 60° ja 70°. Kas need kolmnurgad on sarnased?

121. Tõesta, et täisnurkse kolmnurga kõrgus jaotab kolmnurga kaheks sarnaseks kolmnurgaks, ja tuleta sellest valem $h^2 = fg$.



Joon. 82.

122. Tõesta, et täisnurkse kolmnurga kõrgus jaotab antud kolmnurga kaheks kolmnurgaks, mis on sarnased antud kolmnurgaga. Järelda sellest Eukleidese teoreem.

123. *Kolmnurkade sarnasuse* III *tunnus:*

kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga küljed on võrdelised teise kolmnurga külgedega.

Eeldus. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ *(joon.* 82).

Väide. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Tõestus. *Märgime* $\triangle ABC$ *küljel* AB *lõigu* $AK = DE$ *ja joonestame selle lõpp-punktist* K *sirge* $KL \parallel BC$. *Siis I kiirteteoreemi põhjal*

$\triangle ABC \sim \triangle AKL$,

nii et

$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AL} = \frac{BC}{KL}$.

Saadud võrdsete suhete esimesed liikmed on samad eelduses antud suhete esimeste liikmetega ja esimeste suhete teised liikmed AK *ja* DE *on võrdsed. Sellest saab järeldada (kuidas?), et ka ülejäänud suhete teised liikmed on vastavalt võrdsed:*

$AL = DF$ *ja* $KL = EF$.

Kolmnurkade võrdsuse tunnuse KKK põhjal saame nüüd, et $\triangle AKL = \triangle DEF$. *Et kolmnurk* ABC *on sarnane kolmnurgaga* AKL, *siis on ta sarnane ka sellega võrdse kolmnurgaga* DEF:

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

124. a) Ühe kolmnurga külgede pikkused on 4 cm, 6 cm ja 8 cm, teise külgede pikkused aga 18 cm, 24 cm ja 12 cm. Kas need kolmnurgad on sarnased?

b) Ühe kolmnurga külgede pikkused on 0,3 m, 0,5 m ja 0,7 m,

teise külgede pikkused aga 21 m, 15 m ja 10 m. Kas need kolmnurgad on sarnased?

125. Kaks kolmnurkset maatükki on kujult sarnased, kusjuures ühe maatüki küljed on 64 m, 80 m ja 46 m ning teise maatüki kõige pikem külg on 360 m. Arvuta teise maatüki ümbermõõt.

126. Kahe sarnase kolmnurkse karjakopli piiramiseks kahetraadise aiaga kulus kokku 600 m okastraati. Ühe kopli külgede pikkused olid 45 m, 60 m ja 75 m. Kui pikad olid teise kopli küljed?

127. *Kolmnurkade sarnasuse IV tunnus:*

kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks külge on võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ja nurk, mis ühes kolmnurgas asetseb nimetatud küljepaari suurema külje vastas, on võrdne vastava nurgaga teises kolmnurgas.

Eeldus. $AB : DE = AC : DF$; $AB > AC$; $\angle C = \angle F$ (joon. 82).

Väide. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Tõestus. *Märgime* $\triangle ABC$ *küljel* AB *lõigu* $AK = DE$ *ja joonestame punktist* K *sirge* $KL \parallel BC$. *Siis* I *kiirteteoreemi põhjal*

$\triangle ABC \sim \triangle AKL$

ja

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AL}.$$

Saadud võrde esimesed kolm liiget on vastavalt võrdsed eelduses antud võrde esimese kolme liikmega. Sellest järeldub, et ka nende neljandad liikmed on võrdsed:

$AL = DF$.

Rakendades kolmnurkade võrdsuse tunnust KkN, saame nüüd (põhjenda seda!), et $\triangle AKL = \triangle DEF$. *Edasi järeldub kergesti (kuidas?), et*

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

128. a) Põhjenda väidet, et kaks täisnurkset kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga üks kaatet ja hüpotenuus on võrdelised teise kolmnurga vastavate külgedega.
b) Põhjenda väidet, et kaks võrdhaarset kolmnurka on sarna-

sed, kui ühe kolmnurga alus ja haar on võrdelised teise kolmnurga aluse ja haaraga.

129. Põhjenda väidet, et kolmnurga suurendamisel k korda tema kõrgus suureneb niisamuti k korda.

130. Kolmnurkade ABC ja DEF kohta on teada, et $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle E$, $AB = 10$ cm, $DF = 7{,}5$ cm ja $BC + EF = 8{,}4$ cm. Leia BC ja EF.

131. Kolmnurkade ABC ja DEF kohta on teada, et $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle D$, $AC = 11{,}4$ cm, $EF = 7{,}6$ cm ja $AB - DE = 2{,}4$ cm. Leia AB ja DE.

132. Võrdhaarses kolmnurgas, mille alus on 6 cm ja haar on 10 cm, on joonestatud alusega paralleelne lõik, mille pikkus on 4 cm. Kui pikk on tekkinud trapetsi haar?

133. Võrdhaarse trapetsi alused on 3 dm ja 8 dm, haar on 4 dm. Kui palju tuleb haarasid pikendada, et nad lõikuksid?

134. Kolmnurgas ABC külg $AB = 6$ cm ja külg $AC = 9$ cm. Küljel AB on võetud punkt D nii, et $AD = 4{,}5$ cm, ja küljel AC punkt E nii, et $AE = 3$ cm. Punktid D ja E on ühendatud. Tõesta, et $\angle ADE = \angle ACB$.

135. Nurga haarad on lõigatud kolme paralleelse sirgega nii, et ühel haaral on tekkinud lõigud pikkusega 4,2 cm, 5,7 cm ja 7,2 cm. Teise haara vastavatest lõikudest iga järgnev on eelnevast 1 cm võrra pikem. Kui pikad on teise haara lõigud?

136. Nurga haarad on lõigatud kahe paralleelse sirgega nii, et ühel haaral on tekkinud lõigud 7,8 cm ja 12,4 cm ning teise haara vastavate lõikude vahe on 8,05 cm. Leia teise haara lõikude pikkused.

137. Kolmnurga lõikamisel sirgega, mis on ühe küljega paralleelne, tekkis trapets, mille alused on 5,2 cm ja 8,4 cm ning haarad on 3,6 cm ja 2,8 cm. Kui pikad on antud kolmnurga küljed?

138. Trapetsi alused on 15 cm ja 9 cm. Kui üht haara pikendada 6 cm võrra, siis ta lõikub teise haara pikendusega. Leia esimese haara pikkus.

139. Trapetsi $ABCD$ alus $AB = 18$ cm, haar $AD = 12$ cm, diagonaal $BD = 15$ cm ja $\angle ADB = \angle BCD$. Leia BC ja CD.

140. Trapetsi alused on 16 cm ja 24 cm, haarad on 15 cm ja 11 cm. Kui palju tuleb pikendada üht ja kui palju teist haara, et nad lõikuksid?

141. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu arvud 4, 7 ja 5. Sellega sarnase kolmnurga ümbermõõt on 3,2 m. Arvuta viimase kolmnurga külgede pikkused.

142. Kolmnurga küljed on 34 m, 62 m ja 78 m. Sellega sarnase kolmnurga ümbermõõt on 261 m. Arvuta viimase kolmnurga külgede pikkused.

SARNASTE HULKNURKADE ÜMBERMÕÕTUDE SUHE JA PINDALADE SUHE

143. *Tõestame, et*

kahe sarnase hulknurga ümbermõõtude suhe võrdub vastavate külgede suhtega.

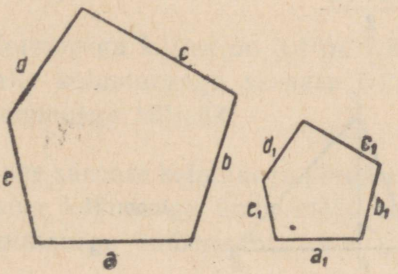
Olgu ühe hulknurga külgede pikkused $a, b, \ldots, e$ *ja teise, esimesega sarnase hulknurga vastavate külgede pikkused* $a_1, b_1, \ldots, e_1$ (*joon.* 83).

Hulknurkade sarnasuse definitsiooni põhjal

$$a_1 = ka, \quad b_1 = kb, \quad \ldots, \quad e_1 = ke,$$

kus k *on nende hulknurkade sarnasustegur. Avaldades teise hulknurga ümbermõõdu* u_1, *saame*

$$u_1 = a_1 + b_1 + \ldots + e_1 = ka + kb + \ldots + ke$$



Joon. 83.

ehk, viies liikmete ühise teguri k sulgude ette ja tähistades esimese hulknurga ümbermõõdu tähega u,

$u_1 = k(a + b + \ldots + e) = ku.$

Siit järeldubki, et $u_1 : u = k$, *s.t. hulknurkade ümbermõõtude suhe võrdub vastavate külgede suhtega.*

144. Kahe sarnase hulknurga üks paar vastavaid külgi on pikkusega 1,2 dm ja 1,5 dm. Arvuta teise hulknurga ümbermõõt, kui esimese hulknurga ümbermõõt on 7,8 dm.

145. Nelinurga küljed on 3,6 cm, 2,8 cm, 4,8 cm ja 3,2 cm. Leia sellega sarnase nelinurga küljed, kui viimase ümbermõõt on 21,6 cm.

146. Kahe hulknurga sarnasustegur on 1,25 ja nende ümbermõõtude vahe on 20,6 m. Arvuta kummagi hulknurga ümbermõõt.

147. Kahe sarnase hulknurga ümbermõõtude summa on 7,8 m ja väikseim külg ühes hulknurgas on pikkusega 1,2 dm, teises pikkusega 1,4 dm. Leia hulknurkade ümbermõõdud.

148. *Tõestame, et*

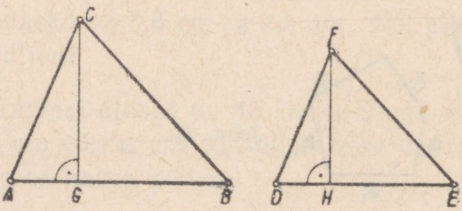
kahe sarnase kolmnurga pindalade suhe võrdub vastavate külgede suhte ruuduga.

Eeldus. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ *(joon. 84).*

Väide. $S_1 : S_2 = (AB : DE)^2$, *kus* S_1 *on kolmnurga ABC pindala ja* S_2 *on kolmnurga DEF pindala.*

Tõestus. *Võtame kolmnurkades alusteks vastavad küljed AB ja DE, tõmbame neile kõrgused CG ja FH ning avaldame kolmnurkade pindalad:*

$$S_1 = \frac{AB \cdot CG}{2} \quad ja \quad S_2 = \frac{DE \cdot FH}{2}.$$



Joon. 84.

Seega

$$S_1 : S_2 = \frac{AB \cdot CG}{2} : \frac{DE \cdot FH}{2} = \frac{AB \cdot CG}{DE \cdot FH} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{CG}{FH}.$$

Et II sarnasustunnuse järgi $\triangle ACG \sim \triangle DFH$ *(põhjenda seda!), siis* $\frac{CG}{FH} = \frac{AC}{DF}$. *Kuid antud kolmnurkade sarnasuse tõttu viimane suhe on võrdne nende kolmnurkade aluste suhtega.*

Seega

$$\frac{CG}{FH} = \frac{AB}{DE},$$

mistõttu

$$S_1 : S_2 = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{AB}{DE} \text{ ehk } S_1 : S_2 = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2.$$

Kui kolmnurkade ABC ja DEF vastavate külgede suhe on k, siis nende pindalade suhe

$S_1 : S_2 = k^2$ *ehk* $S_1 = k^2 S_2$.

Seega

kui kolmnurka suurendada k korda, siis tema pindala suureneb k^2 korda.

149. Kahe sarnase kolmnurga sarnasustegur on 2,5. Väiksema kolmnurga pindala on 18,4 dm². Arvuta suurema kolmnurga pindala.

150. Kolmnurga alus on 5 dm ja sellele joonestatud kõrgus 3,5 dm. Antud alusele vastav külg eelmise kolmnurgaga sarnases kolmnurgas on 3 dm. Arvuta kolmnurkade pindalad.

151. Kahe sarnase kolmnurga pindalade vahe on 60 cm² ja nende kolmnurkade sarnasustegur on 1,5. Arvuta nende kolmnurkade pindalad.

152. Kolmnurga küljed on 5,4 m, 7,2 m ja 8,6 m. Kui suured on selle kolmnurgaga sarnase 6,25 korda suurema pindalaga kolmnurga küljed?

153. Kahe sarnase kolmnurga pindalad suhtuvad nagu 9 : 25. Väiksema kolmnurga ümbermõõt on 0,48 km. Arvuta suurema kolmnurga ümbermõõt.

154. *Üldistame nüüd eelmist teoreemi, tõestades, et*

kui hulknurka suurendada k korda, siis tema pindala suureneb k^2 korda.

Eeldus. *Hulknurk $A_1B_1C_1D_1$ on hulknurga $ABCD$ k-kordne suurendus (joon. 85).*

Väide. *$S_1 = k^2S$, kus S_1 on hulknurga $A_1B_1C_1D_1$ pindala ja S on hulknurga $ABCD$ pindala.*

Tõestus. *Kasutame hulknurga $ABCD$ suurendamiseks tema sees asetsevat sarnasuskeskpunkti O (joon. 85). Siis kiired $OA, OB, \ldots, OD$ jaotavad hulknurgad paarikaupa sarnasteks kolmnurkadeks, millede sarnasustegur on k. Tähistades esimese hulknurga jaotamisel saadud kolmnurkade pindalad tähtedega $P, Q, \ldots, T$ ja teise hulknurga jaotamisel saadud kolmnurkade pindalad vastavalt $P_1, Q_1, \ldots, T_1$, saame eelmise teoreemi põhjal:*

$P_1 = k^2P,\ Q_1 = k^2Q, \ldots, T_1 = k^2T.$

Avaldades suurendatud hulknurga pindala, saame

$S_1 = P_1 + Q_1 + \ldots + T_1 = k^2P + k^2Q + \ldots + k^2T =$
$= k^2(P + Q + \ldots + T).$

Et sulgudesse jäänud avaldis on hulknurga $ABCD$ pindala S, siis

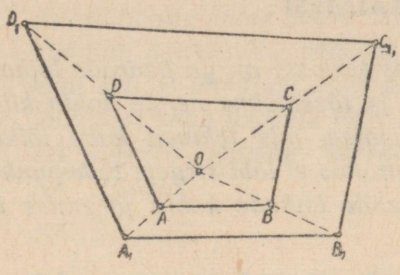
$S_1 = k^2S,$

mida oligi tarvis tõestada.
Lugedes ilma tõestuseta õigeks, et iga kaht sarnast hulknurka saab paigutada niisugusesse asendisse, et üks on teise k-kordne suurendus, saame tõestatud teoreemist järgmise järelduse:

kahe sarnase hulknurga pindalade suhe võrdub vastavate külgede suhte ruuduga.

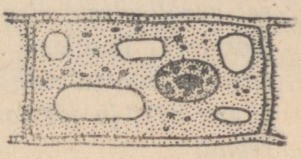
155. Mitu korda suureneb hulknurga pindala, kui hulknurka suurendada 2, 3, 4, 5 korda?

156. Mitu korda tuleb suurendada hulknurka, et selle pindala suureneks 4, 10, 16, 50, 100 korda?



Joon. 85.

Joon. 86.



157. Joonis 86 kujutab taimerakukese 300-kordset suurendust. Mitu niisugust rakukest katavad 10 cm^2-se pindala?

158. Veretilgakese joonises on punased verelibled kujutatud ringikestena, mille läbimõõt on 4 mm. Kui suur on punaste vereliblede läbimõõt, kui joonise suurendus on 500?

159. Kahe sarnase ristküliku pindalade suhe on 13,69. Väiksema ristküliku mõõtmed on 2,9 cm ja 5,5 cm. Arvuta suurema ristküliku mõõtmed.

160. Kahe sarnase hulknurga pindalad on 180 cm^2 ja 80 cm^2. Arvuta suurema hulknurga ümbermõõt, kui väiksema hulknurga ümbermõõt on 48 cm.

161. Kahe ruudu pindalade vahe on 1 m^2 ja pindalade suhe on 2. Kui pikad on nende ruutude küljed?

162. Plaanil on kujutatud hulknurgakujuline maatükk mõõdus 1 : 1000. Mitu korda on maatüki tõeline pindala suurem selle maatüki plaani pindalast? Kui suur on see tõeline pindala, kui maatüki pindala plaanil on 158 cm^2?

163. Ühe risttahuka mõõtmed on 4 korda suuremad teise risttahuka vastavatest mõõtmetest. Mitu korda on esimese risttahuka pindala suurem teise risttahuka pindalast?

164. Kaks nisupõldu on sarnased nelinurgad, millede sarnasustegur on 2,5. Mitu korda saab ühelt põllult vilja rohkem kui teiselt (eeldades, et keskmine saak hektarilt on põldudel üks ja sama)?

165. *Varem vaatlesime lõike, mis tekkisid nurga haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega ja tõestasime nende kohta kiirteteoreemi. Vaatleme nüüd lõike, mis tekivad kahe lõikuva sirge lõikumisel ringjoonega, mis ei läbi sirgete lõikepunkti S (joon. 87), ja tõestame nende lõikude kohta järgmise teoreemi:*

ringjoone lõikajate lõigud lõikajate ühise punkti ja ringjoone vahel on pöördvõrdelised,

s. t. ühe lõikaja lõikude korrutis on võrdne teise lõikaja lõikude korrutisega.

Lõikajate ühine punkt S võib asetseda kas seespool ringjoont (joon. 87, a) või väljaspool seda (joon. 87, b). Tõestus on kehtiv mõlemal juhtumil.

Olgu ringjoone ja ühe lõikaja ühised punktid A ja B, ringjoone ja teise lõikaja ühised punktid aga C ja D. Tõestada tuleb, et

$SA \cdot SB = SC \cdot SD.$

Väite tõestamiseks ühendame punktid A ja D, samuti ka C ja B. Saame kaks sarnast kolmnurka:

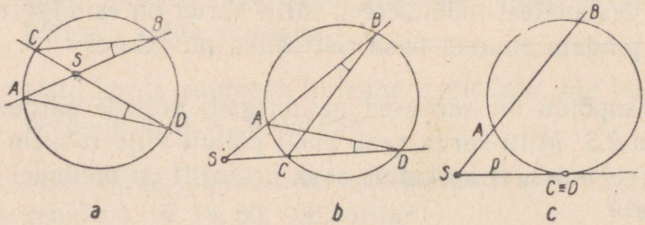
$\triangle SAD \sim \triangle SCB,$

sest ühe kolmnurga nurgad S ja D on vastavalt võrdsed teise kolmnurga nurkadega S ja B (nurgad D ja B on võrdsed, kui ühele ja samale kaarele AC toetuvad piirdenurgad). Et vaadeldavad kolmnurgad on sarnased, siis nende vastavate külgede suhted on võrdsed:

$SA : SC = SD : SB.$

Võrde põhiomaduse põhjal järeldub sellest, et

$SA \cdot SB = SC \cdot SD.$



Joon. 87.

Kui lõikajate ühine punkt asetseb väljaspool ringjoont ja üht lõikajat, näiteks SD pöörata lõikajate ühise punkti S ümber, kuni sellest lõikajast saab puutuja (joon. 87, c), siis lõikaja lõikudest saab puutuja lõik: SC = SD = p. Et seltsel pööramisel lõikaja lõikude korrutis jääb võrdseks korrutisega SA · SB, siis

$SA \cdot SB = p^2$.

Lõikaja lõikude korrutis võrdub puutuja lõigu ruuduga.

166. Olgu *ABCD* kõõlnelinurk ja *P* selle diagonaalide lõikepunkt. Tõesta, et $AP \cdot CP = BP \cdot DP$.

167. Kahest lõikuvast kõõlust ühe pikkus on 28 cm ja teine on kõõlude ühise punkti poolt jaotatud lõikudeks pikkusega 12 cm ja 15 cm. Kui pikkadeks lõikudeks on jaotunud esimene kõõl?

168. Kahest lõikuvast kõõlust ühe pikkus on 32 cm ja teine on kõõlude ühise punktiga jaotatud lõikudeks pikkusega 12 cm ja 16 cm. Kui pikkadeks lõikudeks on jaotunud esimene kõõl?

169. Diameeter lõikub kõõluga 8 cm kaugusel ringjoone keskpunktist ja jaotab kõõlu lõikudeks pikkusega 4 cm ja 9 cm. Kui pikk on ringjoone raadius?

170. Diameeter, mille pikkus on 12 m, jaotab kõõlu lõikudeks, mille pikkused on 2 m ja 8 m. Kui kaugel on kõõlu ja diameetri lõikepunkt ringjoone keskpunktist?

171. Väljaspool ringjoont olevast punktist on ringjoonele tõmmatud keskpunkti läbiv lõikaja ja puutuja. Ringjoone raadius on 2,5 cm ja puutuja lõik 6 cm. Arvuta lõikaja lõikude pikkused.

172. Punktist, mille kaugus ringjoone lähimast punktist on 6 cm, on tõmmatud ringjoone lõikaja, mille lõigud on 9 cm ja 16 cm. Kui pikk on ringjoone raadius?

173. Kui ringi diameetrit pikendada 4 cm võrra, siis selle pikenduse otspunktist joonestatud puutuja lõik osutub võrdseks diameetriga. Kui pikk on diameeter?

PIKKUSTE KAUDNE MÕÕTMINE SARNASTE KOLMNURKADE ABIL

174. *Kolmnurkade sarnasuse üheks rakendusalaks on kauguste ja kõrguste kaudne mõõtmine.*

Punktid, milledevahelist kaugust mõõdetakse, võivad olla ligipääsetavad või üks neist on ligipääsmatu või koguni mõlemad on ligipääsmatud. Vaatleme iga nimetatud juhtumit eraldi.

1. *Olgu A ja B kaks ligipääsetavat punkti, milledevahelise kauguse otsene mõõtmine on võimatu (joon. 88). Need punktid võivad näiteks olla järve kaldal. Valime kaldast veidi eemal punkti O nii, et saab mõõta selle kaugust punktidest A ja B. Olles mõõtnud lõigud AO ja BO, pikendame neid üle punkti O nii, et AO pikendus OD = AO : n ja BO pikendus OC = BO : n, kus n on üks ja sama vabalt võetud täisarv. Mõõtes nüüd punktide C ja D vahelise kauguse ja korrutades tulemuse arvuga n, saamegi otsitava pikkuse AB.*

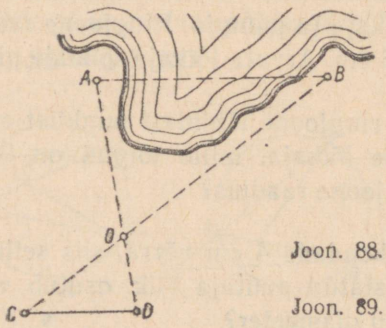
Tõepoolest, kolmnurkade sarnasuse I tunnuse järgi $\triangle AOB \sim \triangle DOC$ *(põhjenda seda!), millest järeldub, et*

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{OD}.$$

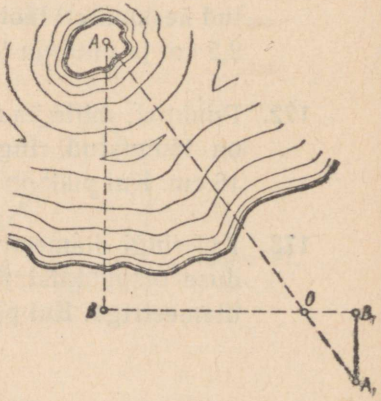
ET $AO : OD = n$, *siis ka* $AB : CD = n$, *millest järeldubki, et* $AB = n \cdot CD$.

2. *Vaatleme kauguse mõõtmist kahe punkti vahel juhtumil, kui üks neist punktidest on ligipääsmatu (joon. 89).*

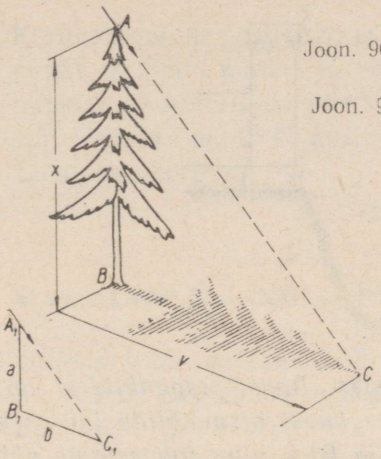
Tähistagu punkt A saarel olevat tuletorni, mille kaugust tahetakse mõõta merekaldal olevast punktist B.



Joon. 88.

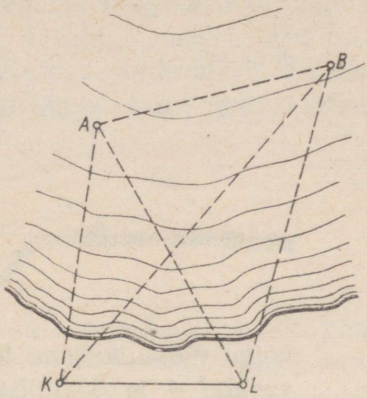


Joon. 89.



Joon. 90.

Joon. 91.



Selleks märgime maapinnal lõigu AB ristsirge ja valime sellel punkti O ja punkti B_1 nii, et lõik OB_1 on täisarv n korda väiksem lõigust OB. Lõigaku punktist B_1 tõmmatud sirge BB_1 ristsirge sirget AO punktis A_1. Mõõdame kauguse punktide A_1 ja B_1 vahel. Selle kauguse n-kordne ongi punktide A ja B vaheline kaugus.

Põhjenda seda väidet kolmnurkade sarnasuse abil.

Ka kõrguse mõõtmisel on sageli üks punkt ligipääsmatu. Vaatleme näitena puu kõrguse kaudset mõõtmist tema varju abil (joon. 90): kui puu kõrgus on x m, puu varju pikkus tasasel maapinnal v m, kepi pikkus on a m ja kepi varju pikkus b m, siis sarnastest kolmnurkadest ABC ja $A_1B_1C_1$ saab, et

$$x : a = v : b,$$

millest

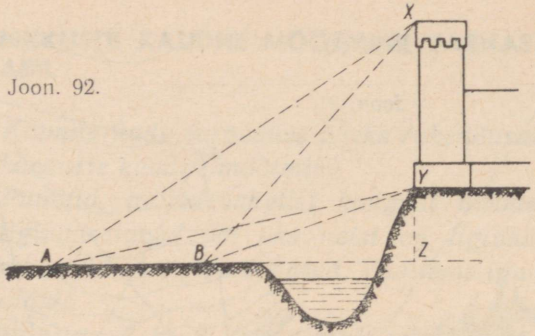
$$x = \frac{av}{b}.$$

Miks kolmnurgad *ABC* ja $A_1B_1C_1$ on sarnased?

3. *Sarnaste kolmnurkade abil on võimalik mõõta kaugusi ja kõrgusi ka sel juhtumil, kui mõlemad punktid on ligipääsmatud. Näitena vaatleme kahe laeva vahelise kauguse mõõtmist merekaldal oleva vaatleja poolt.*

Olgu A ja B kaks ankrus seisvat laeva (joon. 91). Nendevahelise kauguse mõõtmiseks märgime merekaldal kaks punkti K ja L, milledevahelise kauguse mõõdame võimalikult täpselt.

Joon. 92.



Lõiku KL nimetame **baasiks.** *Baasi otspunktidest on näha punktid A ja B. Mõõdame baasi otspunktide juures olevad nurgad AKL, BKL, ALK ja BLK ning joonestame vähendatud mõõdus nelinurga ABLK. Kui seejuures mõõduks on 1 : n, siis tõeline kaugus AB on n korda suurem joonisel esinevast kaugusest AB.*

175. Telefoniposti varju pikkus on 4,9 m, samal ajal kui 1,7 m pikkuse kepi varju pikkus on 1,4 m. Kui kõrge on telefonipost?

176. Metallraha, mille läbimõõt on 2,5 cm ja mida hoitakse 50 cm kaugusel silmast, varjab parajasti õhupalli, mille läbimõõt on 16 m. Kui kaugel on õhupall vaatlejast?

177. Leia vähendatud joonise abil joonisel 92 kujutatud torni kõrgus, kui torni suunas mineva baasi *AB* pikkus on 60 m ja torni tipu *X* ning torni jalami *Y* kõrgusnurgad baasi otspunktide juures on järgmised:

$\angle XAZ = 32°$; $\angle YAZ = 10°$; $\angle XBZ = 57°$; $\angle YBZ = 23°$.

Kui palju on *Y* kõrgemal rõhtsirgest *AB*?

178. Maapinna punktist *A* paistab kalju äär 45°-se nurga all, aga punktist *B*, mis on punktist *A* 50 m kalju pool, 30°-se nurga all. Leia kalju ääre kõrgus kalju jalamilt.

179. Vabrikukorsten paistab 100 m kaugusel korstnajalast 30°-se nurga all. Kui kõrge on korsten?

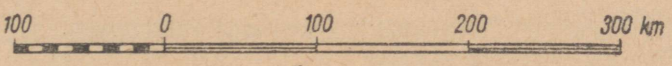
180. Kui päikese kõrgus silmapiirilt oli 35°, siis lipuvarda varju pikkus oli 17,1 m. Kui kõrge oli lipuvarras?

181. Kõrgepingeliini postist 20 m kaugusel märgitakse maapinnal punkt *O*. Selle punkti ja posti vahele 4 meetri kaugusele punktist *O* asetatakse püsti mõõdupuu, mille pikkus on 3 m. Nüüd asuvad punkt *O*, mõõdupuu ots ja posti tipp ühel sirgel. Leia posti kõrgus.

MAA-ALADE PLAANISTAMINE

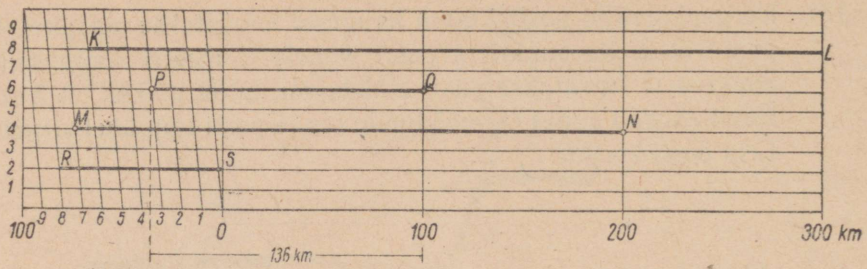
182. *Hulknurkade sarnasuse rakendusalaks on ka maa-alade plaanistamine. Suuremate maa-alade (näiteks maailmajao) kaardistamisel tuleb arvestada maapinna kui kerapinna kumerust, kuid väiksemaid maa-alasid võib ilma suurema veata vaadelda kui tasapinnalisi kujundeid. Maa-ala plaanistada tähendab sel juhtumil maatükiga sarnase vähendatud kujundi joonestamist. Plaani sarnasustegurit kujutava maatüki suhtes nimetatakse plaani (kaardi)* **arvmõõduks** *ja kirjutatakse tavaliselt kujul* $1 : n$ *ehk* $\frac{1}{n}$ *, kus n on täisarv, mis näitab, mitu korda pikkused plaani (kaardi) valmistamisel on vähendatud. Tavaliselt on plaanil mõõt* 1 : 10 000 *või suurem sellest, kaardil aga* 1 : 10 000 *või väiksem sellest.*

Peale arvmõõdu on plaan või kaart harilikult varustatud veel **joonmõõduga.** *Joonis* 93 *kujutab joonmõõtu, mille vastav arvmõõt on* 1 : 5 000 000. *Kaardi joonmõõt näitab vastavust kaardilt võetud pikkuse ja vastava loodusliku pikkuse vahel.*



Joon. 93.

Kaardilt võetud pikkuse täpsemaks määramiseks joonmõõdu abil varustatakse see mõnikord **põikmastaabiga** *ehk* **põikmõõtkavaga** *(joon.* 94). *Viimane koosneb mitmest kõrvutiasetsevast ruudust, mis on läbi lõigatud üheksa võrdsel kaugusel asetseva paralleeliga. Peale selle on esimene ruut läbi lõigatud kümne kaldlõiguga, milledest igaüks lõikab varem nimetatud paralleele* 1, 2, ..., 9 *punktides, milledest*



Joon. 94.

iga järgnev on eelnevast 0,01 *ruudu külje pikkusest vasakul. Seega näiteks kaldlõigu* 3 *ja paralleelide*

1, 2, 3, ..., 9

lõikepunktid on ruudu paremast küljest kaugusel, mis moodustavad ruudu küljest vastavalt

0,31, 0,32, 0,33, ..., 0,39.

Et antud joonmõõdu puhul ruudu külg kujutab pikkust 100 *km, siis näiteks lõik PQ kujutab pikkust* 136 *km.*

Paigutades kaardilt sirkli abil võetud lõigu põikmastaabi sobivale paralleelile, saame leida mõõdetava pikkuse kolme tüvenumbriga.

Määra pikkused, mida kujutavad lõigud *KL*, *MN* ja *RS* joonisel 94.

Tuntakse mitmeid plaanistamisvõtteid. Järgnevalt on toodud mõned näited neist mõõtmistest, mille teostamisel on võimalik plaani joonestamine.

1. *Käies ümber plaanistatava maa-ala, mõõdetakse selle kui hulknurga küljed ja nurgad.*

2. *Asutakse plaanistatava maatüki sisse niisugusesse punkti, millest on näha maatüki kui hulknurga kõik tipud ja saab mõõta kaugust igasse tippu. On selline punkt leitud, siis mõõdetakse iga tipu kaugus sellest ja samuti ka valitud punktist maatüki tippudesse minevate sirgete vahelised nurgad (joon.* 78).

3. *Tähistatakse maatüki üks diagonaal ja ülejäänud tippudest sellele diagonaalile ehitatud ristlõigud ning mõõdetakse need ristlõigud ja diagonaali lõigud ristlõikude vahel (joon.* 8).

183. 1) Kaardil mõõduga 1 : 100 000 on järve pikkus 48 mm. Kui pikk on see järv tõeliselt?
2) Kaardil mõõduga 1 : 1 500 000 on kahe linna vahe 43 mm. Kui kaugel asetseb üks linn teisest?
3) Kaarti, mille mõõt oli 1 : 100 000, suurendati 4 korda. Kui suur on uue kaardi mõõt?

184. Musta mere pikkus kaardil mõõduga 1 : 18 000 000 on 6,7 cm. Kui pikk on sama meri kaardil mõõduga 1 : 3 000 000?

185. Järve pikkus kaardil mõõduga 1 : 100 000 on 2 cm. Kui suur on kaardi mõõt, mille puhul sama järve pikkus on 0,8 cm?

186. Kaardil mõõduga 1 : 500 000 on järve pindala 36,8 cm^2. Kui suur on see järv tõeliselt?

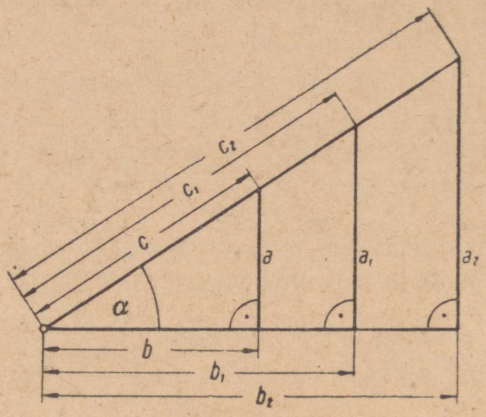
187. Koordinaatteljestikus antud maatüki plaani kaks punkti on $P(4; 5)$ ja $Q(16; 10)$. Leia punktide P ja Q vaheline kaugus looduses, kui teljestiku ühik kujutab pikkust 5 m.

188. Koordinaatteljestikus on antud kolmnurkse maatüki plaan oma tippudega $A(0; 0)$, $B(15; 0)$ ja $C(9; 12)$. Arvuta maatüki pindala ja ümbermõõt, kui plaani pikkusühikule vastab looduses 8 m.

2. TERAVNURGA TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID

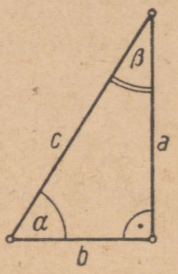
TERAVNURGA SIINUS JA KOOSINUS

189. *Varem leidsime* (*üles.* 57), *kuidas täisnurkse kolmnurga kahe joonelemendi järgi arvutada tema teisi joonelemente. Et samade elementide järgi leida kolmnurga nurka, tuli rakendada kolmnurga graafilise lahendamise võtet* (*üles.* 1). *Küsime nüüd, kuidas arvutamise teel leida täisnurkse kolmnurga mistahes elementide järgi tema ülejäänud elemente. Seatud ülesande lahendamiseks on vaja teada, kuidas täisnurkse kolmnurga küljed on seotud tema nurkadega. Nende*



Joon. 95.

Joon. 96.



seoste leidmiseks vaatleme täisnurkseid kolmnurki, milledel on üks ja sama teravnurk α (joon. 95). Need kolmnurgad on sarnased (põhjenda seda!). Kolmnurkade sarnasuse tõttu iga kolmnurga küljed on võrdelised mistahes teise kolmnurga külgedega, näiteks

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Kui see suhete rida kirjutada kolme võrdena (missugused need on?) ja neis võrdeis siseliikmed ümber paigutada, siis saame järgmised võrded:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}; \quad \frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}; \quad \frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}.$$

Samal viisil võime saada, et $a : b = a_2 : b_2$ *jne. Siit näeme, et*

kui täisnurksetel kolmnurkadel on üks ja sama teravnurk, siis ühe kolmnurga mistahes kahe külje suhe on võrdne teise kolmnurga vastavate külgede suhtega.

190. a) Joonesta täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus $c = 10$ cm ja teravnurk $\alpha = 25°$, mõõda jooniselt kaatetid ja arvuta

1) nurga α vastaskaateti ja hüpotenuusi suhe,
2) nurga α lähiskaateti ja hüpotenuusi suhe.

Kasutades saadud suhteid, arvuta täisnurkse kolmnurga kaatetite pikkused, kui üks teravnurk on 25° ja hüpotenuus on 3,5 m.

191. *Täisnurkse kolmnurga külgede mõnele suhtele on antud erinimetus ja hakatud tähistama eritähisega. Tutvume praegu kahega neist:*

nurga α vastaskaateti ja hüpotenuusi suhet nimetatakse nurga α siinuseks ja tähistatakse sümboliga $\sin\alpha$; nurga α lähiskaateti ja hüpotenuusi suhet nimetatakse nurga α koosinuseks ja tähistatakse sümboliga $\cos\alpha$.

Seega täisnurkses kolmnurgas (joon. 96)

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ *ja* $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

Näiteks ülesandest 189 *leiame, et* $\sin 35° = 0{,}57$ *ja* $\cos 35° = 0{,}82$.

192. Olgu täisnurkse kolmnurga teine teravnurk β (joon. 96). Millega võrdub nurga β siinus, millega nurga β koosinus? Võrdle neid nurga α siinuse ja koosinusega ja veendu, et täisnurkse kolmnurga ühe teravnurga siinus on teise teravnurga koosinus.

Et $\alpha + \beta = 90°$, *siis nurk* $\beta = 90° - \alpha$ *on nurga* α *täiendusnurk* (90°-*ni*). *Seetõttu võime eelmist tulemust sõnastada ka nii:*

teravnurga koosinus on võrdne tema täiendusnurga siinusega.

Sümbolites:

$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ ja $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$.

Näiteks $\cos 20° = \sin(90° - 20°) = \sin 70°$ *ja* $\sin 20° = \cos(90° - 20°) = \cos 70°$.

Nimetus koosinus tähendabki täiendusnurga siinust, sest ta on tuletatud ladinakeelsest väljendist «sinus complementi», mis tähendab täiendusnurga siinust ja mida lühendatult kirjutati kujul co.sinus.

193. a) Missuguse nurga koosinus on niisama suur kui sin 15°? sin 49°?

b) Missuguse nurga siinus on niisama suur kui cos 3°? cos 19°? cos 58°?

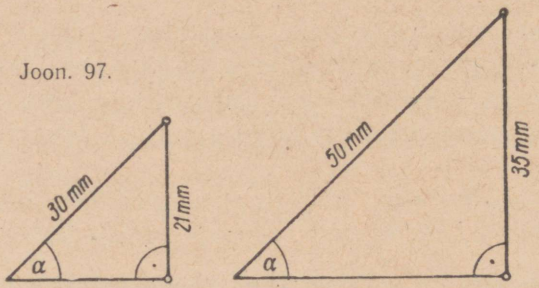
c) Missuguse nurga koosinus on niisama suur kui sin 7°? sin 28°? sin 45°?

d) Missuguse nurga siinus on niisama suur kui cos 30°? cos 69°? cos 88°?

194. a) Joonesta mingi täisnurkne kolmnurk, mille üks teravnurk on 40°, mõõda jooniselt tarvilikud lõigud ja arvuta sin 40°, cos 40°, sin 50°, cos 50°.
b) Joonesta mingi täisnurkne kolmnurk, mille üks teravnurk on 75°, mõõda jooniselt tarvilikud lõigud ja arvuta sin 75°, cos 75°, sin 15°, cos 15°.

195. a) Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 5$ cm ja kaatet $b = 12$ cm. Arvuta kummagi teravnurga siinus ja koosinus.

Joon. 97.



b) Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 4$ cm ja hüpotenuus $c = 5$ cm. Arvuta kummagi teravnurga siinus ja koosinus.
c) Täisnurkse kolmnurga kaatet $b = 6$ cm ja hüpotenuus $c = 9$ cm. Arvuta kummagi teravnurga siinus ja koosinus.

Näpunäide. *Kolmnurga kolmas külg arvuta Pütagorase teoreemi põhjal.*

196. Tõesta, et teravnurga siinuse (koosinuse) väärtusega on teravnurga suurus üheselt määratud.

Tõestuseks võta mingi siinuse väärtus, näiteks $\sin \alpha = 0{,}7$. *joonesta kaks kolmnurka, mille ühe kaateti ja hüpotenuusi suhe oleks* 0,7, *ja näita, et selle kaateti vastas on neis kolmnurkades võrdsed nurgad (joon.* 97). *Kolmnurkade joonestamisel võta hüpotenuusi pikkused vabalt, näiteks* 30 *mm ja* 50 *mm. Kuidas arvutada siis nurga* α *vastaskaateti pikkust?*

197. a) Joonesta nurk, mille siinus on 0,8.

b) Joonesta nurk, mille siinus on $\frac{2}{3}$.

c) Joonesta nurk, mille siinus on 0,36.

d) Joonesta nurk, mille koosinus on 0,25.

e) Joonesta nurk, mille koosinus on $\frac{5}{7}$.

f) Joonesta nurk, mille koosinus on 0,5.

198. Miks teravnurga siinus (samuti ka koosinus) on alati väiksem kui 1?

MÕNEDE NURKADE SIINUSE JA KOOSINUSE ARVUTAMINE

199. *Nurga suuruse järgi tema siinuse või koosinuse arvutamine on üldiselt palju aega võttev ja küllaltki keerukas. Mõnede nurkade puhul on siinuse ja koosinuse leidmine siiski lihtne, näiteks nurkade puhul* 45°, 30° *ja* 60°.

Et saada sin 45°, *võtame abiks võrdhaarse täisnurkse kolmnurga (joon.* 98). *Kui selle kaateti pikkus on a mm, siis hüpotenuusi pikkus samades ühikutes on*

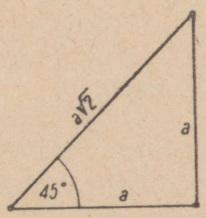
$$c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Seega

$$\sin 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707.$$

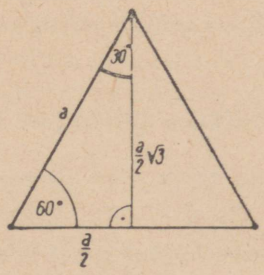
Niisama suur on ka cos 45°, *sest* cos 45° = sin 45°.

200. *Nurkade* 30° *ja* 60° *siinuse ja koosinuse arvutamiseks võtame abiks võrdkülgse kolmnurga (joon.* 99). *Kõrgus poolitab*



Joon. 98.

Joon. 99.



selle kolmnurga kaheks täisnurkseks kolmnurgaks, mille teravnurgad on 30° *ja* 60°. *Jooniselt näeme, et*

$$\sin 30° = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2}.$$

Niisamuti ka

$$\cos 60° = \frac{1}{2}.$$

Et arvutada sin 60° *ja* cos 30°, *avaldame kolmnurga kõrguse h kolmnurga külje kaudu:*

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Joonise põhjal saame nüüd, et

$$\sin 60° = \frac{a}{2}\sqrt{3} : a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 0{,}866.$$

Sellest järeldub, et ka

$$\cos 30° = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 0{,}866.$$

201. Kuidas teoreemist 30°-se nurga vastaskaateti kohta saab tuletada sin 30° väärtuse?

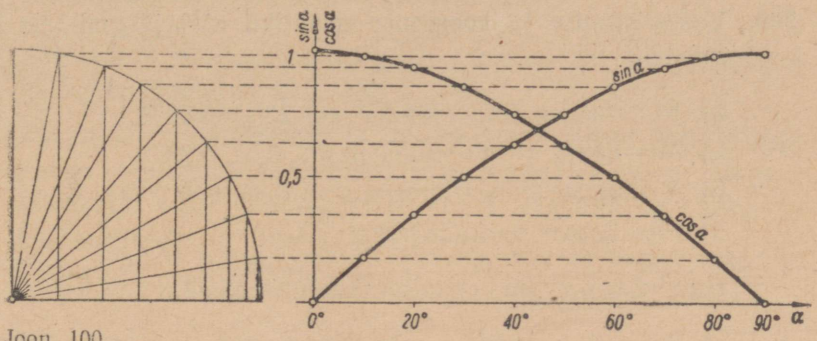
202. Kas teravnurga siinus suureneb või väheneb teravnurga suurenemisel? Võrdle sin 30° väärtust kaks korda suurema nurga siinuse väärtusega ja otsusta, kas nurga siinus on võrdeline nurga suurusega.

203. Kas teravnurga koosinus suureneb või väheneb selle nurga suurenemisel? Võrdle cos 30° väärtust kaks korda suurema nurga koosinuse väärtusega ja otsusta, kas nurga koosinus on pöördvõrdeline nurga suurusega.

204. Kummas vahemikus nurga siinus kasvab kiiremini, kas nurga kasvamisel 30°-st 45°-ni või 45°-st 60°-ni?

TERAVNURGA SIINUSE JA KOOSINUSE GRAAFIK

205. *Ülevaate saamiseks nurga siinuse ja koosinuse muutumisest nurga muutumisel joonestame nende suuruste graafikud. Seda saab teha graafiliselt saadud andmeil. Selleks joones-*



Joon. 100.

tame millimeetripaberile 90°*-ne kaar raadiusega* 100 *mm ja jaotame kaare üheksaks võrdseks osaks (joon.* 100*). Kaare jaotamist saab teha kas malliga või proovimise teel sirkliga. Saadud jaotuspunktide ühendamisel ringjoone keskpunktiga saame nurgad* 10°, 20°, 30°, ..., 80°. *Joonestades kaare jaotuspunktidest ristlõigud rõhtraadiusele, saame lõigud, mis kujutavad* sin 10°, sin 20°, ..., sin 80° *väärtusi, kui ringjoone raadius võtta pikkusühikuks.*

Siinuse graafiku saamiseks kujutame rõhtraadiuse pikendusel nurkade suurused

0°, 10°, 20°, ..., 90°,

võttes 10° *kujutamiseks lõigu, mille pikkus võrdub (ligikaudu)* 10°*-se kaare pikkusega. Edasi kanname siinuse väärtusi kujutavad lõigud rööplükke abil neile vastavasse kohta üle.*

Vaadeldes 10°*-st väiksemaid nurki, näeme, et nurga suuruse lähenemisel* 0°*-le ka tema siinus läheneb* 0*-le. Analoogiliselt saame, et nurga suuruse lähenemisel* 90°*-le tema siinus läheneb arvule* 1. *Seepärast täiendame joonist veel kahe punktiga, nimelt punktidega, mis kujutavad siinuse väärtusi*

$\sin 0° = 0$ *ja* $\sin 90° = 1$.

Saadud punktide ühendamisel sujuva kõverjoonega saame siinuse graafiku vahemikus 0° *kuni* 90°.

Joonise täiendamiseks koosinuse graafikuga võtame arvesse, et nurga koosinus on võrdne tema täiendusnurga siinusega: $\cos 0° = \sin 90°$, $\cos 10° = \sin 80°$ *jne.*

206. Vasta siinuse ja koosinuse graafiku abil järgmistele küsimustele.

a) Kui suur on sin 5°, sin 55°, cos 28°, cos 65°?

b) Missuguse nurga siinus on 0,3, 0,57, 0,9?

c) Missuguse nurga koosinus on 0,95, 0,8, 0,24?

d) Missuguste nurkade puhul

$\sin\alpha < \cos\alpha$, $\sin\alpha = \cos\alpha$, $\sin\alpha > \cos\alpha$?

e) Kas vahe cos 25° — sin 25°, cos 25° — sin 50°, sin 25° — — cos 50°, sin 35° — cos 55°, sin 70° — cos 60° on positiivne, negatiivne või null?

207. Leia siinuse ja koosinuse graafiku abil, kui suur on täisnurkse kolmnurga nurk, mille

a) vastaskaatet on 8 cm ja hüpotenuus on 16 cm;

b) vastaskaatet on 12 cm ja hüpotenuus on 20 cm;

c) lähiskaatet on 7 dm ja hüpotenuus on 10 dm;

d) lähiskaatet on 9 m ja hüpotenuus on 15 m.

Näpunäide. *Arvuta selle nurga siinus või koosinus ja leia graafikult sellele siinuse või koosinuse väärtusele vastav nurk.*

208. Mõõda ülesande 205 lahendamisel tehtud jooniselt tarvilikud lõigud ja arvuta järgnevas tabelis nõutud siinuse ja koosinuse väärtused.

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\sin\alpha$	0									1
$\cos\alpha$	1									0

Nurga kasvamisel 0°-st 90°-ni nurga siinus kasvab 0-st 1-ni ja koosinus kahaneb 1-st 0-ni.

TERAVNURGA TANGENS JA KOOTANGENS

209. *Täisnurkse kolmnurga külgede suhetest on eri nimetused antud ka kaatetite suhetele:*

nurga α vastaskaateti ja lähiskaateti suhet nimetatakse nurga α tangensiks ja tähistatakse sümboliga tan α; nurga α lähiskaateti ja vastaskaateti suhet nimetatakse nurga α kootangensiks ja tähistatakse sümboliga cot α.

Seega täisnurkses kolmnurgas (joon. 96)

$\tan \alpha = \frac{a}{b}$ *ja* $\cot \alpha = \frac{b}{a}$.

Näiteks, kui nurga α vastaskaatet on 6 cm ja lähiskaatet on 2 cm, siis $\tan \alpha = \frac{6}{2} = 3$ *ja* $\cot \alpha = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Nurga tangens ja kootangens on teineteise pöördväärtused, *s. t. kui mingi nurga tangens on näiteks* $\frac{3}{7}$, *siis sama nurga kootangens on* $\frac{7}{3}$.

210. Olgu täisnurkse kolmnurga üks teravnurk α ja teine β. Avalda jooniselt 96 $\tan \beta$ ja $\cot \beta$ ning näita, et

$\tan \beta = \cot \alpha$ ja $\cot \beta = \tan \alpha$.

Kirjuta need valemid teisiti, asendades nurga β tema avaldisega nurga α kaudu.

Teravnurga kootangens on võrdne tema täiendusnurga tangensiga.

Näiteks $\cot 15° = \tan 75°$, $\cot 20° = \tan 70°$ *jne.*

Nimetuse kootangens tekkimine on analoogiline koosinuse nimetuse tekkimisega: ta tähendab täiendusnurga tangensit (tangens complementi).

211. a) Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 6$ dm ja hüpotenuus $c = 10$ dm. Arvuta kummagi teravnurga siinus, koosinus, tangens ja kootangens.

b) Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 15$ cm ja kaatet $b = 8$ cm. Arvuta kummagi teravnurga siinus, koosinus, tangens ja kootangens.

c) Ristküliku mõõtmed on 8 cm ja 5 cm. Arvuta pikema külje ja diagonaali vahelise nurga siinus ja tangens.
d) Võrdhaarse kolmnurga alus on 1,2 m ja kõrgus on 0,8 m. Arvuta kolmnurga alusnurga siinus ja tangens.

212. a) Joonesta nurk, mille tangens on 1,5.
b) Joonesta nurk, mille tangens on 0,75.
c) Joonesta nurk, mille kootangens on 3.
d) Joonesta nurk, mille kootangens on 0,3.

213. Leia tan 45° ja cot 45° väärtused (joon. 98).

214. Kasutades võrdkülgset kolmnurka (joon. 99) näita, et

$$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577$$

ja

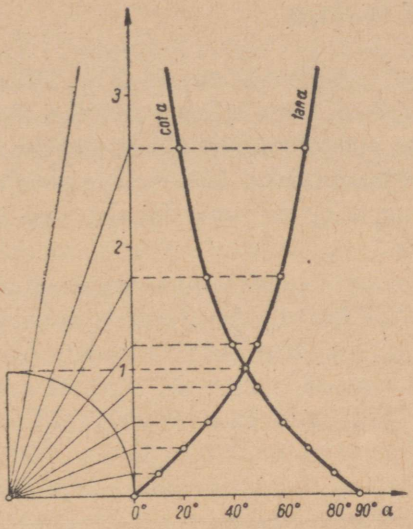
$$\tan 60° = \sqrt{3} \approx 1{,}73.$$

Tuleta neist cot 30° ja cot 60° väärtused.

215. Kas leidub nurk, mille tangens on 10? tangens on 100? tangens on 1000? Kuidas neid nurki joonestada?

TERAVNURGA TANGENSI JA KOOTANGENSI GRAAFIK

216. *Teravnurga tangensi ja kootangensi graafiku saamiseks joonestame millimeetripaberile* 90°-ne *kaar raadiusega* 50 *mm ja jaotame selle endisel viisil üheksaks võrdseks osaks. Saadud jaotuspunktid ühendame ringjoone keskpunktiga ja pikendame neid ühendussirgeid kuni ringjoone puutujani, mis on tõmmatud rõhtraadiuse otspunktist (joon.* 101). *Nii tekib rida täisnurkseid kolmnurki, milledel ringjoone raadius on ühiseks kaatetiks ja millede teravnurgad ringjoone keskpunkti juures on vastavalt* 10°, 20°, ..., 80°. *Kui ringjoone raadius võtta pikkusühikuks, siis nende nurkade vastaskaatetid puutujal kujutavadki nimetatud nurkade tangenseid valitud mõõdus.*
Tangensi graafiku saamiseks võtame α-telje endisel viisil ja jätkame tööd nagu nurga siinuse graafiku joonestamisel.



Joon. 101.

Nurga tangensi muutumist kujutav joon algab telgede nullpunktist, sest kui täisnurkse kolmnurga teravnurk läheneb 0°-le, siis vastaskaateti pikkus ja ühes sellega ka nurga tangens läheneb nullile. Seetõttu $\tan 0° = 0$.
Et nurga kootangens on võrdne täiendusnurga tangensiga, siis kootangensi graafiku saab joonestada tangensi graafiku järgi.

217. Vasta tangensi ja kootangensi graafiku abil järgmistele küsimustele.

a) Kui suur on tan 35°, tan 54°, cot 26°, cot 65°?
b) Missuguse nurga tangens on 1; 2; 0,5; 1,2?
c) Missuguse nurga kootangens on 2; 0,2; 1,4; 1,9?
d) Missuguste nurkade puhul

$\tan \alpha < 1$, $\tan \alpha > 1$, $\cot \alpha < 1$, $\cot \alpha > 1$?

218. Kuidas muutub nurga tangens, kuidas nurga kootangens, kui nurk kasvab 0°-st kuni 90°-ni?

219. *Eespool selgus, et nurga* α *igale väärtusele* 0° *ja* 90° *vahelt vastab oma kindel* $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ *ja* $\cot\alpha$ *väärtus. Seetõttu neid suurusi nimetatakse* **nurgafunktsioonideks** *ehk ka nurga* **trigonomeetrilisteks funktsioonideks,** *kuna trigonomeetria on matemaatika haru, mis uurib nende funktsioonide omadusi ja kolmnurkade lahendamist nende abil. Nurgafunktsioonide kasutamiseks ülesannete lahendamisel on koostatud mitmesuguseid tabeleid. Ühe õige lihtsa tabeli leiad käesoleva raamatu lisas. Selles on antud nurga siinuse, koosinuse, tangensi ja kootangensi kolmekohalised väärtused iga teravnurga jaoks, mis sisaldab täisarv kraade. Et nurkade* 1°, 2°, . . ., 45° *siinused on vastavalt võrdsed nurkade* 89°, 88°, . . ., 45° *koosinustega, siis siinuste tabel on ühtlasi ka koosinuste tabeliks. Tabeli teist tähendust näidatakse sel teel, et teise funktsiooni nimetus kirjutatakse tabeli alla ja kraadide arvud paremale:*

$\alpha°$	$\sin\alpha$	
0	0,000	90
1	017	89
2	035	88
. . . . .	. . . . .	. . . . .
28	469	62
. . . . .	. . . . .	. . . . .
45	707	45
	$\cos\alpha$	$\alpha°$

Sellest tabelist leiame näiteks, et $\sin 28° = 0{,}469 = \cos 62°$. *Niisamuti on ka nurkade* 1° *kuni* 45° *koosinuste, tangensite ja kootangensite tabelil kahene tähendus; näiteks*

$\cos 28° = 0{,}883 = \sin 62°$,
$\tan 28° = 0{,}532 = \cot 62°$,
$\cot 28° = 1{,}88 = \tan 62°$.

Nurgafunktsioonide tabel võimaldab lahendada kaht liiki ülesandeid:

a) *leida antud nurga suuruse järgi selle nurga siinus, koosinus, tangens või kootangens;*
b) *leida antud siinuse, koosinuse, tangensi või kootangensi väärtuse järgi vastav nurk.*
Esimese ülesande lahendamisel tuleb silmas pidada, et kui antud nurga suuruse leiame tabeli esimesest veerust, siis funktsiooni nimetust tuleb vaadata tabeli ülevalt äärelt; kui aga nurga suuruse leiame tabeli viimasest veerust, siis funktsiooni nimetust tuleb vaadata tabeli alt äärelt. Kui nurk sisaldab peale kraadide ka minuteid, siis ümardame selle kraadideks ja nimelt puuduga, kui minuteid on vähem kui 30, *ja liiaga, kui minuteid on* 30 *või üle selle.*
Kui tabelis antud nurgafunktsiooni väärtust ei leidu, siis leiame lähima tabeliväärtuse ja võtame viimasele vastava nurga. Näiteks, kui $\sin\alpha = 0{,}89$, *siis* $\alpha = 63°$.

220. Leia tabeli abil iga järgneva nurga kõik neli funktsiooni.
a) 27°; 38°; 47°; 62°; 18°34′; 59°27′; 48°30′.
b) 17°; 41°52′; 51°; 63°13′; 79°48′; 84°30′; 46°.

N ä i d e. $\cot 47°38' \approx \cot 48° = 0{,}900$.

221. Leia nurgafunktsioonide tabeli abil antud funktsiooni väärtusele vastav nurk ja selle teised funktsioonid.
a) $\sin\alpha = 0{,}309$; $\cos\alpha = 0{,}766$; $\tan\alpha = 0{,}231$; $\cot\alpha = 3{,}73$.
b) $\sin\alpha = 0{,}423$; $\cos\alpha = 0{,}956$; $\tan\alpha = 1{,}88$; $\cot\alpha = 0{,}07$.
c) $\sin\alpha = 0{,}218$; $\cos\alpha = 0{,}64$; $\tan\alpha = 0{,}5$; $\cot\alpha = 7{,}5$.
d) $\sin\alpha = 0{,}917$; $\cos\alpha = 0{,}347$; $\tan\alpha = 1{,}39$; $\cot\alpha = 0{,}637$.

222. Leia nurgafunktsioonide tabeli abil nurga suurus, kui tema a) siinus on $\frac{5}{8}$; b) siinus on $\frac{27}{35}$; c) koosinus on $\frac{3}{4}$; d) koosinus on $\frac{36}{47}$; e) tangens on $1\frac{2}{7}$; f) tangens on $\frac{13}{15}$; g) kootangens on 17 : 4; h) kootangens on 2 : 3.

223. Leia täisnurkse kolmnurga nurga suurus, kui
1) nurga lähiskaatet on 24 cm ja vastaskaatet on 18 cm;
2) nurga lähiskaatet on 18 mm ja hüpotenuus on 24 mm;
3) nurga vastaskaatet on 0,67 m ja lähiskaatet on 1,6 m;
4) nurga vastaskaatet on 3,2 km ja hüpotenuus on 5,2 km.

224. Leia täisnurkse kolmnurga teravnurgad, kui
1) kaatetid on 5,8 dm ja 8,5 dm;
2) kaatetid on 0,82 m ja 1,45 m;
3) üks kaatet on 12 m ja hüpotenuus on 15,6 m;
4) üks kaatet on 0,3 m ja hüpotenuus on 0,75 m.

TÄISNURKSE KOLMNURGA LAHENDAMINE

225. *Täisnurkse kolmnurga elementide all mõistame praegu ainult tema külgi ja nurki. Kui muutuvatest elementidest, s. o. külgedest a, b, c ja teravnurkadest* α, β *(joon. 102) mingi kaks elementi on antud (nende hulgas vähemalt üks külg), siis kolmnurk on määratud ja tema teisi elemente saab arvutada. Seega antud elementideks saavad olla*
1. *teravnurk ja hüpotenuus,*
2. *teravnurk ja kaatet,*
3. *kaks kaatetit,*
4. *kaatet ja hüpotenuus.*

Mis saab öelda kahe täisnurkse kolmnurga kohta, kui ühe kolmnurga ülalnimetatud elemendid on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega?

226. *Lahendame täisnurkse kolmnurga, kui on antud teravnurk ja hüpotenuus, näiteks kui* $\alpha = 27°$ *ja* $c = 8{,}4$ *cm.*

Lahendus.

1) $\beta = 90° - \alpha = 90° - 27° = 63°$.

2) $\frac{a}{c} = \sin\alpha$;

$a = c \cdot \sin\alpha = 8{,}4 \cdot \sin 27° = 8{,}4 \cdot 0{,}454 \approx 3{,}8$ *(cm)*.

3) $\frac{b}{c} = \cos\alpha$;

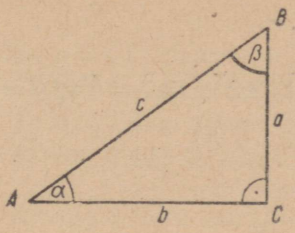
$b = c \cdot \cos\alpha = 8{,}4 \cdot \cos 27° = 8{,}4 \cdot 0{,}891 \approx 7{,}5$ *(cm)*.

Kontroll. *Arvutame hüpotenuusi Pütagorase teoreemi põhjal ja võrdleme tulemust antud hüpotenuusiga:*

$c = \sqrt{3{,}8^2 + 7{,}5^2} = \sqrt{14{,}4 + 56{,}2} = \sqrt{70{,}6} = 8{,}4$,

nagu oli antud.

Vastus. $a = 3{,}8$ cm; $b = 7{,}5$ cm; $\beta = 63°$.



Joon. 102.

227. Lahenda täisnurkne kolmnurk, kui on antud:

1) $\alpha = 39°$ ja $c = 15$ cm;
2) $\alpha = 68°$ ja $c = 0{,}58$ m;
3) $\beta = 14°$ ja $c = 6{,}5$ dm;
4) $\beta = 53°$ ja $c = 0{,}087$ km.

228. *Lahendame täisnurkse kolmnurga, kui on antud teravnurk ja kaatet, näiteks kui* $\alpha = 61°$ *ja* $a = 8{,}7$ *cm.*

Lahendus.

1) $\beta = 90° - 61° = 29°$.

2) $\frac{b}{a} = \cot \alpha$;

$b = a \cdot \cot \alpha = 8{,}7 \cdot \cot 61° = 8{,}7 \cdot 0{,}554 \approx 4{,}8$ *(cm).*

3) $\sin \alpha = \frac{a}{c}$;

$c \cdot \sin \alpha = a$;

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{8{,}7}{\sin 61°} = \frac{8{,}7}{0{,}875} = 8{,}7 \cdot 1{,}14 \approx 9{,}9 \ (cm).$$

Kontroll. *Arvutame hüpotenuusi ka Pütagorase teoreemi põhjal ja võrdleme tulemusi:*

$$c = \sqrt{8{,}7^2 + 4{,}8^2} = \sqrt{75{,}7 + 23{,}0} = \sqrt{98{,}7} = 9{,}93 \approx 9{,}9,$$

nii nagu varem saime.

Vastus. $b = 4{,}8$ cm; $c = 9{,}9$ cm; $\beta = 29°$.

229. Lahenda täisnurkne kolmnurk, kui on antud:

1) $\alpha = 25°$ ja $a = 43$ mm;
2) $\alpha = 71°$ ja $b = 10{,}5$ cm;
3) $\beta = 33°$ ja $b = 180$ m;
4) $\beta = 59°$ ja $a = 6{,}04$ km.

230. Telefoniposti tugi toetub postile 5,4 m kõrgusel maapinnast. Toe ja posti vaheline kaugus maapinnal on 3,7 m. Leia toe pikkus ja nurgad, mis ta moodustab maapinna ning postiga.

Lahendus. *Täisnurksest kolmnurgast on antud (joon. 102) kaatetid* $a = 5{,}4$ *m ja* $b = 3{,}7$ *m. Leida tuleb hüpotenuus* c *ja nurgad* α *ning* β.

1) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5{,}4^2 + 3{,}7^2} = \sqrt{29{,}2 + 13{,}7} = \sqrt{42{,}9} =$
$= 6{,}55 \approx 6{,}6.$

2) $\tan\alpha = \frac{5{,}4}{3{,}7} = 1{,}46;\ \alpha = 56°.$

3) $\beta = 90° - 56° = 34°.$

Kontroll. *Arvutame leitud* β *ja* c *järgi kaateti* b*:*

$b = c \cdot \sin\beta = 6{,}6 \cdot \sin 34° = 6{,}6 \cdot 0{,}559 \approx 3{,}7.$

Vastus. *Posti toe pikkus on* 6,6 *m ja ta moodustab maapinnaga nurga* 56° *ning postiga nurga* 34°.

231. Lahenda täisnurkne kolmnurk, kui on antud:

1) $a = 15$ cm ja $b = 36$ cm;
2) $a = 0{,}8$ dm ja $b = 4{,}5$ dm;
3) $a = 320$ m ja $b = 180$ m;
4) $a = 4{,}7$ km ja $b = 1{,}7$ km.

232. Vaheloleva takistuse tõttu saab tuletõrjeredeli paigutada mitte lähemale kui 2,8 m maja seinast. Redeli pikkus on 9,2 m. Kui kõrgele ulatub redel ja kui suure nurga moodustab ta kõrgeimas asendis maapinnaga ning maja seinaga?

Lahendus. *Täisnurksest kolmnurgast on antud kaatet* $b = 2{,}8$ *m ja hüpotenuus* $c = 9{,}2$ *m (joon.* 102*), leida tuleb kaatet* a *ja nurgad* α *ning* β.

1) $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{9{,}2^2 - 2{,}8^2} = \sqrt{84{,}6 - 7{,}84} = \sqrt{76{,}76} =$
$= 8{,}76 \approx 8{,}8.$

2) $\sin\beta = \frac{2{,}8}{9{,}2} = 2{,}8 \cdot 0{,}109 = 0{,}305;\ \beta = 18°.$

3) $\alpha = 90° - 18° = 72°.$

Kontroll. *Arvutame kaateti* a *nurga* α *ja hüpotenuusi* c *järgi:*

$a = c \cdot \sin\alpha = 9{,}2 \cdot \sin 72° = 9{,}2 \cdot 0{,}951 = 8{,}75.$

Vastus. *Redel ulatub* 8,8 *m kõrgusele ja ta moodustab siis maapinnaga nurga* 72° *ning maja seinaga nurga* 18°.

233. Lahenda täisnurkne kolmnurk, kui on antud:

1) $a = 14$ cm ja $c = 24$ cm;
2) $a = 0{,}9$ m ja $c = 1{,}2$ m;
3) $b = 7{,}8$ m ja $c = 8{,}0$ m;
4) $b = 0{,}004$ km ja $c = 0{,}08$ km.

234. Arvuta täisnurkse kolmnurga teised küljed ja nurgad, kui on antud:
1) $a = 5{,}2$ cm ja $c = 7{,}5$ cm;
2) $a = 28$ m ja $b = 34$ m;
3) $b = 0{,}64$ m ja $\alpha = 51°$;
4) $\beta = 72°$ ja $c = 0{,}286$ dm.

235. Arvuta täisnurkse kolmnurga teised küljed ja nurgad, kui on antud:
1) $c = 0{,}85$ m ja $\alpha = 38°$;
2) $a = 0{,}70$ dm ja $b = 1{,}25$ dm;
3) $\alpha = 57°$ ja $b = 0{,}64$ m;
4) $b = 0{,}65$ m ja $c = 0{,}95$ m.

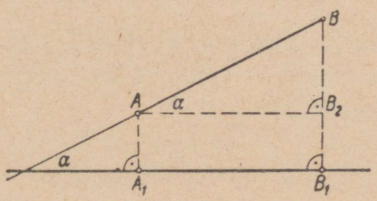
NURGAFUNKTSIOONIDE RAKENDUSI

236. Tuletorni tipp, mille kõrgus on 19 m üle merepinna, paistab merel asetsevast paadist 7° kõrgusel. Kui kaugel on paat tuletornist?

237. Päikese kõrgus silmapiirilt on 32°. Kui kõrge on puu, mille varju pikkus rõhtsal maapinnal on sel momendil 22,4 m?

238. Kaldlõik AB moodustab sirgega nurga α (joon. 103). Avalda kaldlõigu AB projektsiooni A_1B_1 pikkus ja arvuta see, kui $AB = 6{,}4$ m ja $\alpha = 38°$.

239. Sirge maantee tõuseb 70 meetri ulatuses ja moodustab rõhtsa maapinnaga nurga 16°. Mitu meetrit tõuseb maantee selles ulatuses?



Joon. 103.

240. Raadiosaatejaama mast paistab 180 m kauguselt 26°-se nurga all. Kui kõrge on see mast?

241. 2,5 m pikkuse teiba varju pikkus on 3,2 m. Kui kõrgel on päike silmapiirilt?

242. Ristküliku alus on 14,5 m, nurk aluse ja diagonaali vahel on 38°. Arvuta ristküliku pindala.

243. Rombi diagonaalide pikkused on 10,2 cm ja 6,8 cm. Kui suured on selle rombi nurgad?

244. Olgu võrdhaarse kolmnurga alus a, haar b ja kõrgus h. Avalda alusnurga β siinus, koosinus, tangens ja kootangens. Avalda poole tipunurga $\frac{\alpha}{2}$ siinus, koosinus, tangens ja kootangens (joon. 104).

245. Võrdhaarsest kolmnurgast on antud haar $b = 8{,}0$ cm ja alusnurk $\beta = 53°$. Arvuta tipunurk α, kõrgus h, alus a ja pindala S.

246. Arvuta võrdhaarse kolmnurga teised küljed ja nurgad, kui on antud:

1) alus $a = 10$ cm ja haar $b = 13$ cm;
2) alus $a = 24$ m ja tipunurk $\alpha = 126°$;
3) haar $b = 0{,}86$ m ja tipunurk $\alpha = 46°$;
4) haar $b = 16{,}4$ cm ja alusnurk $\alpha = 51°$.

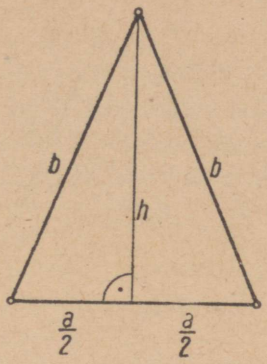
247. Kui suur kesknurk toetub 7 cm pikkusele kõõlule ringjoones, mille raadius $r = 12$ cm?

248. Ringi kõõl, mille pikkus on 42 mm, toetub kaarele, mis sisaldab 70°. Kui pikk on ringi raadius?

249. Ringi raadiusega 11,2 cm on joonestatud kõõl, millele vastav kaar sisaldab 132°. Arvuta selle kõõlu pikkus.

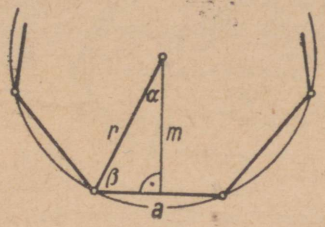
250. Olgu korrapärase n-nurga külje pikkus a, apoteemi pikkus m ja ümberringjoone raadiuse pikkus r (joon. 105). Näita, et apoteemi ja raadiuse vaheline nurk

$$\alpha = \frac{180°}{n}$$



Joon. 104.

Joon. 105.



ja külje ning raadiuse vaheline nurk

$\beta = 90° - \frac{180°}{n}$.

Tuleta külje a ja apoteemi m arvutamiseks valemid

$a = 2r \cdot \sin\frac{180°}{n}$ ja $m = r \cdot \cos\frac{180°}{n}$.

251. Korrapärase viisnurga ümber joonestatud ringjoone raadius on 6,4 cm. Arvuta selle viisnurga külg, apoteem ja pindala.

252. Korrapärase üheksanurga ümber joonestatud ringjoone raadius on 12 cm. Arvuta üheksanurga külg, apoteem ja pindala.

253. Korrapärase kaksteistnurga ümber joonestatud ringjoone raadius on 6,8 m. Arvuta kaksteistnurga külg, apoteem ja pindala.

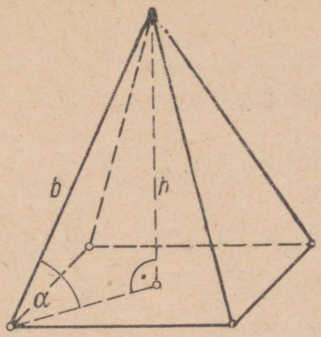
254. Korrapärase viisnurga külg on 1 m. Arvuta viisnurga apoteem ja pindala.

255. Korrapärase kümmenurga külg on 5,8 cm. Arvuta kümmenurga apoteem ja pindala.

256. Näita, et korrapärase n-nurga apoteem m avaldub külje a ja tippude arvu n kaudu järgmiselt:

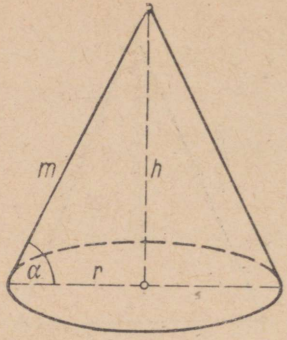
$m = \frac{a}{2} \cdot \cot\frac{180°}{n}$.

Avalda sellest valemist apoteemi ja külje suhe $m : a$ ja arvuta see suhe, kui $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$.



Joon. 106.

Joon. 107.



257. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus $h = 18$ cm ja külgserv $b = 25$ cm (joon. 106). Kui suur on püramiidi külgserva kaldenurk põhja suhtes (nurk α joonisel 106)?

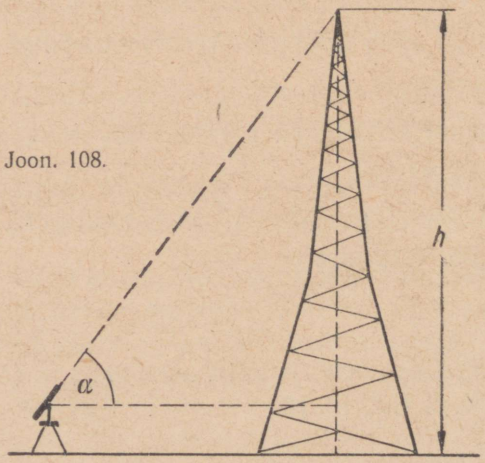
258. Arvuta korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus h, kui külgserv $b = 4{,}4$ dm ja külgserva kaldenurk põhja suhtes (nurk α joonisel 106) on 67°.

259. Koonuse moodustaja $m = 1{,}8$ m ja moodustaja kaldenurk koonuse põhja suhtes (nurk α joonisel 107) on 38°. Arvuta koonuse kõrgus ja põhja raadius.

260. Koonusekujulise liivahunniku kõrgus on 2 m ja läbimõõt 3 m. Kui suur on tipunurk sellel võrdhaarsel kolmnurgal, mis tekib, kui koonust lõigata mööda kõrgust?

261. Arvuta koonuse ruumala, kui koonuse põhja raadius $r = 6{,}2$ dm ja nurk moodustaja ning kõrguse vahel $\beta = 33°$.

Joon. 108.



262. Televisioonimasti kõrguse mõõtmiseks asetati nurgamõõtmise riist 68 m kaugusele masti aluse keskpunktist (joon. 108). Mõõtmisel saadi, et masti tipu kõrgusnurk $\alpha = 63°50'$. Arvuta masti kõrgus, kui nurgamõõtmise riist oli masti aluse tasemest 1,8 m kõrgemal.

263. Arvuta nurgamõõtmise riista kaugus masti aluse keskpunktist (joon. 108), kui masti kõrgus $h = 120$ m ja kõrgusnurk $\alpha = 48°10'$.

3. KORDAMISEKS

264. Joonesta jõesängi ristlõige ja arvuta selle pindala järgmise tabeli andmeil.

Kaugus kaldast meetrites	0	1	2	3	4	5	6
Sügavus meetrites	0,4	1,2	2,3	2,9	2,1	0,7	0

265. Kevadisel lumesulamisel tõusis järve veepind nädalaga 34,5 cm. Kui palju suurenes järve veehulk keskmiselt päevas, kui järve pindala on 18,45 km²?

266. Ristkülikukujulise platsi katmiseks liivaga on veetud koonusekujuline hunnik liiva. Selle koonuse kõrgus on 1,8 m ja põhja läbimõõt 4 m. Kui paksu korraga saab sellest liivast katta platsi, kui viimase mõõtmed on 24 m ja 15 m?

267. Joonesta pinnalaotus ja arvuta pindala silindril, mille kõrgus on 4,6 cm ja põhja läbimõõt 3,9 cm.

268. Kraavi ristlõige on võrdhaarne trapets, mille alused on 1 m ja 2,5 m. Trapetsi haara kaldenurk aluste suhtes on 60°. Kraav on poole sügavuseni täidetud veega, mis voolab kiirusega 0,3 m sekundis. Kui palju vett voolab ööpäeva vältel läbi selle kraavi?

269. Merel seisab paat. Paadisilla kohal on nurk sirge rannajoone ja paadi sihi vahel täisnurk, kuid 50 m rannajoont mööda edasi on see nurk 38°. Kui kaugel on paat rannast?

270. Kahe sarnase kolmnurga pindalade suhe on 3,24 ja suurema kolmnurga küljed on 5,76 m, 4,50 m ja 8,28 m. Kui pikad on väiksema kolmnurga küljed?

271. Täisnurkse kolmnurga pindala on 2,7 m^2 ja üks kaatet on 3,6 m. Arvuta kolmnurga hüpotenuusi pikkus.

272. Kuuse varju pikkus oli 24 m. Arvuta kuuse kõrgus, kui 1,5 m pikkuse teiba vari oli samal ajal 2,1 m.

273. Euroopa kaardil mõõduga 1 : 25 000 000 on Moskva kujutatud ruudukesena, mille külg on 1,5 mm. Kui suurt pindala kujutab see ruut?

274. Mitu tonni kartuleid on koonusekujulises kuhjas, mille kõrgus on 2,2 m ja põhja läbimõõt on 5 m, kui 1 hl kartuleid kaalub 70 kg?

275. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on 6 cm ja ruumala on 72,8 cm^3. Arvuta püramiidi kõrgus.

276. Kuubi pindala on 73,5 cm^2. Arvuta kuubi ruumala.

277. Koonuse põhja pindala on 50,3 cm^2 ja kõrgus on 5 cm. Joonesta ja arvuta moodustaja kaldenurk põhja suhtes.

278. Heinakoppel on oma kujult kolmnurk, mille alus ja kõrgus on plaanil vastavalt 6,2 cm ja 5,5 cm. Mitu hektarit on kopli pindala, kui plaani mõõt on 1 : 2500?

279. Ristkülikukujulise maatüki pindala on 4,48 ha ja pikkus on 50% võrra laiusest suurem. Leia maatüki mõõtmed.

280. Ristküliku alus on 5,4 m. Arvuta ristküliku pindala, kui alus moodustab 36% kõrgusest.

281. Sovhoosi noored traktoristid otsustasid tänavu välja vedada 13 000 tonni orgaanilisi väetisi. Kui kõrge risttahukakujulise virna moodustaks see väetiste kogus, kui virna põhjaks võtta ristkülik mõõtmetega 20 m ja 50 m ning 1 m^3 väetise kaaluks arvata 0,5 tonni?

282. Rajooni noored mehhanisaatorid lubasid tänavu valmistada vähemalt 20 000 t silo. Olgu see silo paigutatud virna, mille ristlõige on võrdhaarne trapets alustega 10 m ja 2 m ning kõrgusega 4 m. Arvuta selle virna pikkus, kui 1 m^3 silo kaalub 600 kg.

283. Maja laius on 10 m. Kui pikad on maja katuse sarikad, kui nad ulatuvad 40 cm üle seina ja moodustavad laega nurga 45°.

284. Leia päikesekiirte kaldenurk maapinna suhtes, kui 1,8 m pikkuse teiba varju pikkus on 1,5 m.

285. Redel, mille pikkus on 2,5 m, on pandud seina najale nii, et redeli alumine ots on seinast 1,3 m kaugusel. Kui kõrgele ulatub redel ja kui suure nurga moodustab ta maapinnaga?

286. Mis on
a) antud punktist antud kaugusel asetseva punkti geomeetriliseks kohaks tasapinnal? ruumis?
b) antud sirgest antud kaugusel asetseva punkti geomeetriliseks kohaks tasapinnal? ruumis?
c) kahest antud punktist võrdsetel kaugustel asetseva punkti geomeetriliseks kohaks tasapinnal?
d) antud nurga haaradest võrdsetel kaugustel asetseva punkti geomeetriliseks kohaks tasapinnal?

287. a) On antud silindri kõrgus h ja põhja läbimõõt d. Avalda silindri külgpindala K, täispindala T ja ruumala V.
b) On antud koonuse kõrgus h ja põhja läbimõõt d. Avalda koonuse külgpindala K, täispindala T ja ruumala V.
c) On antud kera läbimõõt d. Avalda kera pindala S ja ruumala V.

288. Joonesta mingi isekülgne kolmnurk ja leia selle kõrguste lõikepunkt, mediaanide lõikepunkt ja nurgapoolitajate lõikepunkt.

289. On antud mingi lõik. Jaota see ilma mõõtmiseta osadeks, mis suhtuvad nagu 2 : 3. Kontrolli mõõtmise teel.

290. Ringi raadius on 18 cm. Kui suur pindala on selle ringi sektoril, mille nurk on 24°?

291. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile joonestatud kõrgus $h = 3$ ja kaateti a projektsioon hüpotenuusil $f = 2$. Leida kolmnurga küljed ja nurgad.

292. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 5$ dm ja selle projektsioon hüpotenuusil $f = 3$ dm. Arvuta kolmnurga küljed ja nurgad.

293. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk $\alpha = 50°$ ja hüpotenuusile joonestatud kõrgus $h = 6$ cm. Kui pikad on kolmnurga küljed?

294. Ringjoonele, mille raadius $r = 18$ cm, on joonestatud punktist A kaks puutujat. Puutujatevaheline nurk on 74°. Kui kaugel on punkt A ringjoone keskpunktist?

295. Mitu korda on võrdkülgse kolmnurga ümber joonestatud ringi pindala suurem sama kolmnurga sisse joonestatud ringi pindalast?

296. Rööpküliku $ABCD$ külje CD punkt F on ühendatud vastasküljе AB otspunktidega. Leia kolmnurga ABF pindala, kui rööpküliku $ABCD$ pindala on m ruutühikut.

297. Trapetsi $ABCD$ haara BC keskpunkt E on ühendatud haara AD otspunktidega. Tõesta, et kolmnurga AED pindala on pool trapetsi pindalast.

298. a) Tõesta, et kolmnurga mediaan jaotab kolmnurga kaheks pindvõrdseks kolmnurgaks.
b) Tõesta, et kolmnurga kolm mediaani jaotavad kolmnurga kuueks pindvõrdseks osaks.

299. Arvuta täisnurkse kolmnurga pindala, kui selle külgede pikkused väljenduvad teineteisele järgnevate paarisarvudena.

300. Täisnurkse kolmnurga pindala on 720 m² ja kaatetid suhtuvad nagu 9 : 40. Leia hüpotenuus.

301. Ehita ruut, mille pindala on võrdne kahe ruudu pindalade summaga, kui nende küljed on 12 cm ja 15 cm.

302. Täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on 12 cm ja 5 cm, pöörleb ümber hüpotenuusi. Arvuta saadud pöördkeha pindala ja ruumala.

303. Võrdhaarne kolmnurk, mille haar on 10 cm ja alus on 16 cm, pöörleb ümber aluse. Arvuta saadud pöördkeha pindala ja ruumala.

304. Ringjoonel on võetud punkt P, mis asetseb läbimõõdu otspunktidest A ja B vastavalt 7 cm ja 24 cm kaugusel. Kui suur on kaugus AP, kui punkti P liikudes mööda ringjoont kaugus BP saab võrdseks 20 cm-ga?

305. Leia veorihmaga ühendatud kahe pöörleva ratta läbimõõtude suhe, kui esimene ratas teeb minutis 1000 ja teine 375 pööret.

306. Raudplaadist lõigatakse kaks rida ümmargusi seibe nii, et iga teises reas olev lõikeringjoon puudutab kaht esimeses reas olevat ringjoont. Seibi raadiuseks on 8,5 mm. Kui kaugel teineteisest on mõlema seibirea keskkohti läbivad sirged?

307. a) Ümmargusest raudvarvast tuleb freesida võimalikult suure ruudukujulise ristlõikega varras. Antud varda läbimõõt on 2,6 cm. Kui suur on uue varda ristlõike külg?
b) Ruudukujulise ristlõikega raudvardast tuleb treida võimalikult suure ristlõikega ümmargune varras. Mitu protsenti materjalist läheb kaotsi?

308. Ümmargusest raudvardast tuleb freesida varras, mille ristlõige on võimalikult suur korrapärane kuusnurk. Mitu protsenti materjali läheb kaotsi?

309. Mansardkorra viisnurkne aken on kujult pool korrapärast kaheksanurka. Leida akna pindala, kui akna raami alumise ääre pikkus on 2 m.

310. Kaevukoogu pikem õlg on 3,25 m ja lühem õlg on 1,5 m. Kui palju vajub koogu lühema õla ots, kui pikema õla ots tõuseb 2,5 m?

311. Pendli pikkus on 60 cm. Võnkumisel tasakaalu seisust äärmisesse seisu tõuseb pendli ots 12 cm võrra tasakaaluseisust kõrgemale. Kui kaugel on nüüd pendli ots vertikaalsirgest,

mis läbib pendli kinnituspunkti? Kui suur on nurk pendli tasakaaluseisu ja äärmise seisu vahel?

312. Kasutades õpiku lisas antud joonist, lahenda järgmised ülesanded.

a) Kuiv liiv on koonusekujulises kuhjas, mille põhja läbimõõt on 4 m ja kõrgus on 1,5 m.
Mitu tonni on selles kuhjas liiva?
b) Kuivast kuusepuust silindri põhja läbimõõt on 12 cm ja kõrgus 15 cm. Kui palju kaalub see silinder?
c) Kuivast tammepuust kera kaalub 2,5 kg. Leia kera ruumala.
d) 2 tonni kustutatud lupja on silindrikujulises tünnis 1,2 m kõrguselt. Leia tünni seesmine läbimõõt.

313. Sirgel on antud järjestikku punktid X, P, Q ja Y, kusjuures $XP = QY$. Lõigule PQ on joonestatud rööpkülik $PQRS$ nii, et $\angle PQR = 130°$ ja $QR = QY$. Lõikude XS ja YR pikendused vastavalt üle punktide S ja R lõikuvad punktis Z. Kui suur on nurk SZR?

314. Ristküliku $ABCD$ küljele AD kui diameetrile on joonestatud poolringjoon, mis lõikab diagonaali DB punktis X. Arvuta lõikude BD ja BX pikkused, kui $AB = 12$ cm ja $AD = 9$ cm.

315. Kõõlnelinurga $ABCD$ külg AB läbib ringi keskpunkti O ja $BC = CD$. Tõesta, et

1) $\angle BDC = \angle CAD$;
2) $\angle BOD = 4 \cdot \angle CAD$;
3) $\angle ABD = 90° - 2 \cdot \angle DBC$.

SISUKORD

I OSA

ALGEBRA

1. KORDAMISEKS 3

2. KOORDINAATIDE MÕISTE 9

Asukoha määramise ülesandeid 9
Tasapinna punkti koordinaadid 11
Ülesandeid koordinaatide kasutamise kohta 13

3. FUNKTSIONAALNE SÕLTUVUS 15

Funktsioon ja argument 15
Suuruste sõltuvuse graafiline kujutamine 18
Võrdeline sõltuvus 22
Võrdelise sõltuvuse graafik 24
Lineaarne sõltuvus 30
Lineaarfunktsiooni graafik 32
Pöördvõrdeline sõltuvus 37
Pöördvõrdelise sõltuvuse graafik 38
Pöördarvude tabel 41

4. KAHE TUNDMATUGA LINEAARSED VÕRRANDISÜSTEEMID 43

Kahe tundmatuga võrrandi lahendi mõiste 43
Kahe tundmatuga lineaarse võrrandi graafik 48
Kahe tundmatuga lineaarne võrrandisüsteem 52
Kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi graafiline lahendamine 54
Kahe tundmatuga võrrandisüsteemi lahendite arv 56
Kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine võrdlemisvõttega 59

Kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine liitmisvõttega 60
Kahe tundmatuga lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine asendusvõttega 63
Ülesannete lahendamine võrrandisüsteemide abil 68

5. RUUTFUNKTSIOON JA RUUTVÕRRAND 74

Funktsioon $y = x^2$ 74
Ruutude tabel 77
Arvu ruudu leidmine arvutuslükatil 79
Arvu ruutjuur 83
Ruutjuurte tabel 86
Ruutjuure leidmine lükatil 92
Ruutvõrrand $x^2 = b$ 94
Funktsioon $y = ax^2$ 97
Ruutvõrrand $ax^2 = b$ 100
Funktsioon $y = ax^2 + bx$ 102
Ruutvõrrand $ax^2 + bx = 0$ 104
Funktsioon $y = ax^2 + bx + c$ 104
Ruutvõrrand $ax^2 + bx + c = 0$ 106
Täielik ja mittetäielik ruutvõrrand 109
Taandatud ruutvõrrandi lahendamine 111
Taandamata ruutvõrrandi lahendamine 115
Murdvõrrandite lahendamine 122
Ruutvõrrandi abil lahenduvaid ülesandeid 124
Taandatud ruutvõrrandi lahendite omadused 131
Ruutvõrrandi koostamine lahendite järgi 133
Teise astme kolmliikme lahutamine lineaarseiks teguriteks . . . 135
Ruutvõrrandisüsteem 138

6. KORDAMISEKS 146

II OSA

GEOMEETRIA

1. SARNASED HULKNURGAD 159

Pütagorase teoreem 159
Kahe punkti vaheline kaugus 164
Eukleidese teoreem 167

Teoreem täisnurkse kolmnurga kõrgusest 170
Seosed täisnurkse kolmnurga joonelementide vahel 173
Võrdelised lõigud 176
Nurga haarade lõikamine paralleelsete sirgetega 178
Hulknurkade sarnasus 184
Kolmnurkade sarnasuse tunnused 189
Sarnaste hulknurkade ümbermõõtude suhe ja pindalade suhe . . 195
Teoreem ringjoone lõikajatest 200
Pikkuste kaudne mõõtmine sarnaste kolmnurkade abil 202
Maa-alade plaanistamine 205

2 TERAVNURGA TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID . . 207
Teravnurga siinus ja koosinus 207
Mõnede nurkade siinuse ja koosinuse arvutamine 211
Teravnurga siinuse ja koosinuse graafik 212
Teravnurga tangens ja kootangens 215
Teravnurga tangensi ja kootangensi graafik 216
Nurgafunktsioonide tabelid 218
Täisnurkse kolmnurga lahendamine 220
Nurgafunktsioonide rakendusi 223

3. KORDAMISEKS 227
Lisa. Tabelid.

Эльмар Этверк. Арнольд Вихман. МАТЕМАТИКА ДЛЯ VIII КЛ. На эстонском языке. Издательство «Валгус». Таллин, Пярнуское шоссе 10.
Toimetaja K Kallaste Kunstiline toimetaja H Keigo. Tehniline toimetaja L. Maidla. Korrektor A. Nurmoja
Laduda antud 6 I 1967. Trükkida antud 7. III 1967 Paber 60×90/16. Trükipaber nr. 2 — Kohila Paberivabrik. Trükipoognaid 14,75 + 0,75 (1 lisa). Arvestuspoognaid 11,82. Trükiarv 10 000. Tell mise nr. 813. Trükikoda «Kommunist», Tallinn, Pikk tänav 2. Hind 23 kop.

23 kop.

A
28449
7148499