



TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

E. Tamme, G. Vainikko

MATEMAATILISE FÜÜSIKA
VÕRRANDID

1 II

TARTU 1974

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Arvutusmatemaatika kateeder

E.Tamme, G.Vainikko

MATEMAATILISE FÜÜSIKA
VÕRRANDID

II

TARTU 1974

Kinnitatud Matemaatikateaduskonna nõukogus
28. detsembril 1973.

SISUKORD

	lk.
IV SEGAÜLESANDED	7
§12. Fourier' meetod	7
1. Keele võnkumise võrrandi lahenda- mine	7
2. Fourier' meetodi põhjendamine	14
3. Homogeense hüperboolset tüüpi võr- randi lahendamine	19
4. Mittehomogeense hüperboolset tüüpi võrrandi lahendamine	22
5. Parabolset tüüpi võrrandi lahenda- mine	24
6. Soojuse levimine ristkülikukujuli- ses plaadis	26
§13. Besseli funktsioonid	29
1. Besseli funktsioonide mõiste	29
2. Besseli funktsioonide ortogonaal- suse omadus	31
3. Besseli funktsioonide nullkohad...	33
4. Laplace'i operaatori omavaartus- ülesanne ringikujulise piirkonna korral	35
5. Ringikujulise membraani võnkumine.	40
§14. Parabolset tüüpi võrrandi sega- ülesanne	43
1. Ülesande klassikaline seade	43
2. Maksimumprintsip	44
3. Lahendi aprioorne hinnang	47
4. Lahendi ainsus ja stabiilsus	49
5. Lahendi olemasolust	50

§15. Elliptilist tüüpi võrrandi oma- väärtusülesanne	54
1. Sobolevi ruumid	54
2. Sümmetrilised diferentsiaal- operaatorid	57
3. Diferentsiaaloperaatori oma- väärtused ja omafunktsioonid...	63
§16. Hüperboolset tüüpi võrrandi sega- ülesanne	70
1. Ülesande klassikaline seade ...	70
2. Energiaintegraal	72
3. Lahendi aprioorseid hinnangud...	74
4. Lahendi ainsus ja stabiilsus...	77
5. Üldistatud lahend	78
6. Segäülesande üldistatud seade korrektaus	82
§17. Hüperboolset tüüpi võrrandisüs- mid	87
1. Võrrandisüsteemi kanooniline kuju	87
2. Aküstika võrrandid	89
3. Karakteristikud	92
4. Energiasamasus	94
5. Cauchy ülesanne	96
6. Segäülesanne	102
7. Segäülesande lahendi ainsus ...	105
V. RAJAÜLESANDED	108
§18. Maksimumprintsip	108
1. Maksimumprintsipi välted	108
2. Aprioorne hinnang esimese raja- ülesande lahendi jaoks	117
3. Teise ja kolmanda rajaülesande lahendi ainsus	120

§19. Rajaülesande üldistatud lahend	124
1. Positiivselt määratud diferent- siaaloperaatorid	124
2. Üldistatud lahendi mõiste	126
3. Dirichlet' ülesande üldistatud lahend	129
4. Üldistatud lahendi ligikaudne leidmine	132
§20. Harmoonilised funktsioonid	136
1. Laplace'i operaatori fundamentaal- lahendid	136
2. Funktsiooni integraalne esitus	138
3. Harmooniliste funktsioonide omadusi..	141
§21. Dirichlet' ülesanne Poissoni ja Laplace'i võrrandi jaoks	144
1. Greeni funktsioon	144
2. Dirichlet' ülesande lahendamine keras.	149
3. Dirichlet' ülesande lahendamine rin- gis	153
4. Dirichlet' välisülesanne kolmemõõt- melisel juhul	154
5. Dirichlet' välisülesanne kahemõõtme- lisel juhul	158
§22. Biharmooniline võrrand	161
1. Rajaülesande lahendi ainsus	161
2. Biharmooniliste funktsioonide esita- mine harmooniliste funktsioonide abil.	162
3. Biharmoonilise võrrandi rajaülesande lahendamine ringis	164
TSITEERITUD KIRJANDUS	167
AINEREGISTER	169

IV. SEGAÜLESANDED

§12. F o u r i e r' m e e t o d

1. Keele võnkumise võrrandi lahendamine. Asume vaatlema hüperboolset ja parabolset tüüpi diferentsiaalvõrranditega seotud ülesannete lahendamist tõkestatud ruumilises piirkonnas. Sellisel juhul ülesande lahend peab lisaks algtingimustele veel rahuldama piirkonna rajal rajatingimusi, s.t. meil tuleb lahendada segaülesanne. Segaülesannete üheks kõige efektiivsemaks lahendusmeetodiks on nn. Fourier' meetod ehk muutujate eraldamise meetod. Tutvume selle meetodiga kõigepealt suhteliselt lihtsa näite varal.

Vaatleme keele võnkumise võrrandi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad a > 0, \quad (1)$$

lahendamist algtingimustel *)

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

ja rajatingimustel

$$u(0,t) = u(1,t) = 0. \quad (3)$$

Teatavasti sellise ülesande lahend $u(x,t)$ kirjeldab kohtadel

*) Käesolevas kursuses eeldame, et ülesannete andmed on reaalsed. Kui mõni kasutatav suurus võib olla kompleksne, siis on seda alati märgitud.

$x = 0$ ja $x = 1$ kinnitatud keele võnkumist.

Fourier' meetodi korral otsitakse kõigepealt võrrandi (1) mittetriviaalseid lahendeid korrutise kujul

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad (4)$$

kus $X(x)$ ja $T(t)$ on ühe muutuja funktsioonid. Seejuures nõutakse, et need erilahendid rahuldaksid ka rajatingimusi (3). Seejärel püütakse moodustada nende erilahendite selline lineaarkombinatsioon, mis rahuldab ka algtingimusi (2).

Asendades avaldise (4) võrrandisse (1), saame seose

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

mille jagame läbi korrutisega $a^2 X(x)T(t)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \quad (5)$$

Nende suhete ühise väärtuse tähistasime sümbooliga $-\lambda$. Ilmselt λ peab olema konstant, sest võrduses (5) esimene avaldis ei sõltu muutujast x ja teine muutujast t .

Näeme, et nullist erinev avaldis (4) rahuldab võrrandit (1) parajasti siis, kui ta mingi konstandi λ korral rahuldab seoseid (5). Need seosed võib kirjutada kahe diferentsiaalvõrrandi kujul

$$T'' + \lambda a^2 T = 0, \quad (6)$$

$$X'' + \lambda X = 0.$$

Sellisel teel laguneb osatuletistega võrrand kaheks harilikuks diferentsiaalvõrrandiks.

Avaldis (4) rahuldab rajatingimusi (3), kui $X(0) = X(1) = 0$. Seega samaselt nulliga mittevõrduv funktsioon $X(x)$ peab rahuldama tingimusi

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(1) = 0, \quad (7)$$

kus λ on konstant. Selliseid λ väärtusi, mille korral ülesandel (7) on olemas mittetriviaalne lahend $X(x)$, nimetatakse selle ülesande omaväärtusteks ja vastavaid mittetriviaalseid lahendeid omafunktsioonideks.

Leiame ülesande (7) omaväärtused ja omafunktsioonid. Seejuures vaatleme eraldi 3 juhtu.

a) Olgu $\lambda < 0$. Siis konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandi (7) karakteristliku võrrandi $r^2 + \lambda = 0$ lahendid on

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda}.$$

Seega selle diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on

$$X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Leiame konstandid C_1 ja C_2 nii, et oleksid rahuldatud ka ülesande (7) rajatingimused

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

$$X(1) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0.$$

Esimesest võrrandist $C_2 = -C_1$, mistõttu

$$C_1 (e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}) = 0.$$

Et $e^{\sqrt{-\lambda}} > 1$ ja $e^{-\sqrt{-\lambda}} < 1$, siis selle võrrandi vasakul pool on teine tegur ei võrdu nulliga. Järelikult peab olema $C_1 = 0$ ja $C_2 = -C_1 = 0$, mistõttu $\lambda < 0$ korral ülesandel (7) pole mittetriviaalseid lahendeid, s.t. sellel ülesandel pole negatiivseid omaväärtusi.

b) Olgu $\lambda = 0$. Siis võrrandi (7) üldlahendiks on

$$X = C_1 + C_2 x.$$

Rajatingimustest

$$X(0) = C_1 = 0, \quad X(1) = C_1 + C_2 \cdot 1 = 0$$

leiame, et $C_1 = C_2 = 0$. Seega ka $\lambda = 0$ korral puuduvad ülesandel (7) mittetriviaalsed lahendid.

c) Olgu $\lambda > 0$. Siis võrrandi (7) karakteristikul võrrandil $r^2 + \lambda = 0$ on kompleksed lahendid

$$r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$$

Seega võrrandi (7) üldlahendiks on

$$X = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Rajatingimustest saame

$$X(0) = C_1 = 0,$$

$$X(1) = C_2 \sin \sqrt{\lambda} \cdot 1 = 0.$$

Näeme, et ülesandel (7) on mittetriviaalseid lahendeid ainult siis, kui parameeter λ rahuldab tingimust $\sin \sqrt{\lambda} \cdot 1 = 0$.

Siit

$$\sqrt{\lambda} \cdot 1 = k\pi, \quad \lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{1}\right)^2,$$

kus k on täisarv. Ülesande (7) vastavad lahendid on

$$X_k = C_2 \sin \sqrt{\lambda_k} x = C_2 \sin \frac{k\pi x}{1}.$$

Võttes $C_2 = 1$, saame ülesande (7) omaväärtusteks ja omafunktsioonideks

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{1}\right)^2, \quad X_k = \sin \frac{k\pi x}{1}, \quad k=1,2,\dots \quad (8)$$

Võrrandi (6) üldlahendiks $\lambda = \lambda_k$ korral on

$$T_k = A_k \cos \sqrt{\lambda_k} at + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} at.$$

Nii saame lõpmatu hulga võrrandi (1) lahendeid

$$u_k = X_k T_k = \left(A_k \cos \frac{k\pi at}{l} + B_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k=1,2,\dots,$$

mis kõik rahuldavad ka rajatingimusi (3). Otsime rajaülesande (1) - (3) lahendit nende erilahendite summana

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi at}{l} + B_k \sin \frac{k\pi at}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (9)$$

Selle rea summa u rahuldab suvaliste kordajate A_k ja B_k korral rajatingimusi (3). Rea liikmed rahuldavad võrrandit (1). Seega, kui rida (9) koondub ühtlaselt meid huvitavas xt -tasandi piirkonnas ja seda rida võib liikmeti diferentseerida kaks korda x ja t järgi, siis summa u rahuldab võrrandit (1) selles piirkonnas.

Püüame kordajad A_k ja B_k määrata nii, et oleksid rahuldatud ka algtingimused (2), s. t. et

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} = u_0(x) \quad (10)$$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} B_k \sin \frac{k\pi x}{l} = u_1(x) \quad (11)$$

(Eeldame, et liikmeti diferentseerimine on õigustatud.).

Näeme, et suurusteks A_k ja $\frac{k\pi a}{l} B_k$ tuleb valida funktsioonide $u_0(x)$ ja $u_1(x)$ Fourier' kordajad reaksarenduses ainult siinuste järgi*) lõigus $[0,1]$. Kui eeldada nende funktsioonide

*) Funktsioonide $\sin \frac{k\pi x}{l}$, $k=1,2,\dots$ süsteem on täielik lõigus $[0,1]$ integreeruva ruuduga funktsioonide ruumis $\mathcal{L}_2(0,1)$, s. t. iga funktsioon $v \in \mathcal{L}_2(0,1)$ on esitatav Fourier' reana, mis koondub ruumis $\mathcal{L}_2(0,1)$ (vt. näit. [4], § 22).

arendatavust lõigus $[0,1]$ ühtlaselt koonduvasse Fourier' ritta, siis saab kordajate avaldised leida järgmisel teel.

Trigonomeetria valemite põhjal

$$\int_0^1 \sin \frac{k\pi x}{1} \sin \frac{j\pi x}{1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\cos \frac{(k-j)\pi x}{1} - \cos \frac{(k+j)\pi x}{1} \right] dx,$$

mistõttu

$$\int_0^1 \sin \frac{k\pi x}{1} \sin \frac{j\pi x}{1} dx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kui } j = k > 1, \\ 0, & \text{kui } j \neq k. \end{cases} \quad (12)$$

Viimastest seostest näeme, et omafunktsioonid $X_k = \sin \frac{k\pi x}{1}$ on ortogonaalsed, kuid üldiselt pole normeeritud. (Ortonormeeritud omafunktsioonideks on $\sqrt{\frac{2}{1}} \sin \frac{k\pi x}{1}$). Eeldame, et read (10) ja (11) koonduvad ühtlaselt. Korrutame võrduse (10) omafunktsiooniga $\sin \frac{j\pi x}{1}$ ning integreerime saadud võrdust lõigus $[0,1]$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^1 \sin \frac{k\pi x}{1} \sin \frac{j\pi x}{1} dx = \int_0^1 u_0(x) \sin \frac{j\pi x}{1} dx.$$

Arvestades seoseid (12) jõuame võrduseni

$$\frac{1}{2} A_j = \int_0^1 u_0(x) \sin \frac{j\pi x}{1} dx.$$

Samal teel saame seosest (11) võrduse

$$\frac{1\pi a}{2} B_j = \int_0^1 u_1(x) \sin \frac{j\pi x}{1} dx.$$

Kokkuvõttes oleme tuletanud valemid kordajate A_k ja B_k arvutamiseks:

$$A_k = \frac{2}{1} \int_0^1 u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{1} dx, \quad B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^1 u_1(x) \sin \frac{k\pi x}{1} dx. \quad (13)$$

Ülesande (1) - (3) praktilisel lahendamisel Fourier'

meetodiga arvutatakse viimaste valemite abil kordajad A_k ja B_k , misjärel ülesande lahend moodustatakse valemi (9) abil. Nii saadud lahendit nimetatakse ülesande (1) - (3) formaalseks lahendiks. Tulemus on ülesande (1) - (3) klassikaliseks lahendiks, kui rida (9) koondub ühtlaselt ja kasutatud liikmeti diferentseerimised on õigustatud. Rea (9) koondumise iseloom sõltub aga kordajatest A_k ja B_k ning seega funktsioonide $u_0(x)$ ja $u_1(x)$ omadustest.

Peatume mõne sõnaga ülesande (1) - (3) lahendi füüsikalisel interpretatsioonil. Teisendame rida (9), kasutades tähistusi

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad \varphi_k = \arcsin \frac{A_k}{C_k}.$$

Siis

$$\frac{B_k}{C_k} = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_k} = \cos \varphi_k,$$

$$A_k = C_k \sin \varphi_k, \quad B_k = C_k \cos \varphi_k$$

ning reale (9) saame anda kuju

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left(\sin \varphi_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + \cos \varphi_k \sin \frac{k\pi a t}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left(\frac{k\pi a t}{l} + \varphi_k \right). \end{aligned}$$

Viimane valem avaldab keele võnkumist kirjeldava funktsiooni u , nn. seisvate lainete summana. Seejuures liige indeksiga k kirjeldab keele liikumist, mille korral keele punkt abstsissiga x sooritab harmoonilisi võnkumisi faasiga φ_k , sagedusega $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$ ja amplituudiga $C_k \sin \frac{k\pi x}{l}$. Heli tekitamisel esimene liidetav annab keele põhitooni, järgmised ületoonid.

Ülesanne 1. Näidata, et rajaülesande

$$u'' + \lambda u = 0, \quad u'(0) = u(1) = 0$$

omaväärtused ja omafunktsioonid on vastavalt

$$\lambda_k = \left(\frac{2k-1}{2l}\pi\right)^2, \quad u_k = \cos \frac{2k-1}{2l}\pi x, \quad k=1, 2, \dots$$

Ülesanne 2. Näidata, et ülesande

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0$$

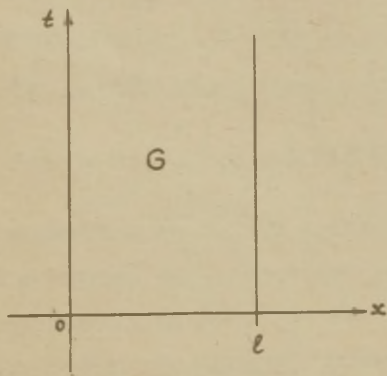
formaalseks lahendiks on

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{2k-1}{2l}\pi x a t + B_k \sin \frac{2k-1}{2l}\pi x a t \right) \cos \frac{2k-1}{2l}\pi x,$$

kus

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^1 u_0(x) \cos \frac{2k-1}{2l}\pi x dx, \quad B_k = \frac{4}{(2k-1)\pi a} \int_0^1 u_1(x) \cos \frac{2k-1}{2l}\pi x dx$$

2. Fourier' meetodi põhjendamise. Täpsustame kõigepealt ülesande (1) - (3) klassikalise lahendi mõistet. Vaatleme se-



Joonis 1.

da ülesannet kinnises piirkonnas

$$\bar{G} = \left\{ (x,t): 0 \leq x \leq l, \right. \\ \left. 0 \leq t < +\infty \right\}$$

ning tähistame vastava lahtise piirkonna

$$G = \left\{ (x,t): 0 < x < l, \right. \\ \left. 0 < t < +\infty \right\}.$$

Sümboliga $C^k(S)$ tähistame funktsioonide hulga, millel piirkonnas S on olemas kõik pidevad osatuletised kuni järguni k .

Ülesande (1) - (3) klassikaliseks lahendiks nimetatakse kahe muutuja funktsiooni $u \in C^1(\bar{G}) \cap C^2(G)$, mis piirkonnas G rahuldab võrrandit (1) ja selle rajal tingimusi (2) ja (3).

Klassikalise lahendi olemasoluks on tarvilik, et $u_0 \in C^1[0,1]$, $u_1 \in C[0,1]$ ning et oleksid rahuldatud alg- ja rajatingimuste kooskõla tingimused

$$u_0(0) = u_0(1) = 0, \quad u_1(0) = u_1(1) = 0.$$

Esitame järgnevas piisavad tingimused, mis kindlustavad ülesande (1) - (3) klassikalise lahendi olemasolu ja rea (9) ühtlase koondumise selleks lahendiks.

Teoreem. Eeldame, et $u_0(x)$ on lõigues $[0,1]$ kaks korda pidevalt diferentseeruv, $u_0''' \in \mathcal{L}_2(0,1)$ ja on rahuldatud tingimused

$$u_0(0) = u_0(1) = 0, \quad u_0''(0) = u_0''(1) = 0$$

ning $u_1(x)$ on samas lõigas pidevalt diferentseeruv, $u_1' \in \mathcal{L}_2(0,1)$ ja

$$u_1(0) = u_1(1) = 0.$$

Siis rida (9) koondub piirkonnas \bar{G} ühtlaselt ja absoluutselt ning tema summa on ülesande (1) - (3) klassikaliseks lahendiks.

Tõestus. Belmises artiklis läbiviidud mõttekäiku arvestades piisab teoreemi tõestamiseks näidata, et rida (9) ning sellest liikmeti diferentseerimisel saadud read

$$u_t = \sum_{k=1}^{\infty} (-A_k \sin \frac{k\pi a t}{l} + B_k \cos \frac{k\pi a t}{l}) \frac{k\pi a}{l} \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$u_{tt} = \sum_{k=1}^{\infty} (-A_k \cos \frac{k\pi a t}{l} - B_k \sin \frac{k\pi a t}{l}) \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \frac{k\pi x}{l} + B_k \sin \frac{k\pi x}{l}) (\frac{k\pi}{l})^2 (-\sin \frac{k\pi x}{l})$$

ja osatuletistele u_x , u_{tx} vastavad read koonduvad ühtlaselt ja absoluutselt kogu xt -tasandil.

Weierstrassi tunnuse põhjal rida (9) koondub ühtlaselt ja absoluutselt kogu xt -tasandil, kui rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|A_k| + |B_k|)$$

koondub. Sama tunnuse põhjal koonduvad ühtlaselt ja absoluutselt ka osatuletistele u_t , u_x , u_{tt} , u_{tx} ja u_{xx} vastavad read, kui arvread

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(|A_k| + |B_k|)$$

ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(|A_k| + |B_k|) \quad (14)$$

koonduvad. Et $1 \leq k \leq k^2$, siis viimase rea koonduvusest järeldub kahe eelmise arvrea koonduvus. Seega teoreemi tõestamiseks tuleb näidata rea (14) koonduvust, milleks hindame valemitega (13) määratud kordajaid A_k ja B_k .

Teisendame ositi integreerimise valemi abil, kasutades teoreemi eeldusi:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{l} \int_0^1 u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = -\frac{2}{l} \frac{1}{k\pi} u_0(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^1 + \\ &+ \frac{2}{l} \frac{1}{k\pi} \int_0^1 u_0'(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \left(\frac{1}{k\pi}\right)^2 u_0'(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^1 - \\ &- \frac{2}{l} \left(\frac{1}{k\pi}\right)^2 \int_0^1 u_0''(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = -\frac{2}{l} \left(\frac{1}{k\pi}\right)^3 \int_0^1 u_0'''(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \end{aligned}$$

Tähistame

$$a_k = \int_0^1 u_0''(x) \sqrt{\frac{2}{I}} \cos \frac{k\pi x}{I} dx.$$

Siis

$$A_k = -\sqrt{\frac{2}{I}} \left(\frac{1}{k\pi}\right)^3 a_k.$$

Suurus a_k on funktsiooni $u_0'' \in \mathcal{L}_2(0,1)$ Fourier' kordaja lõigul $[0,1]$ ortonormeeritud funktsioonide süsteemi $\sqrt{\frac{2}{I}} \cos \frac{k\pi x}{I}$ korral. Besseli võrratusest (vt. [1], lk. 103)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \leq \int_0^1 [u_0''(x)]^2 dx$$

järeldub, et kordajate a_k ruutudest moodustatud rida koondub.

Analoogiliselt

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^1 u_1(x) \sin \frac{k\pi x}{I} dx = -\sqrt{\frac{2}{I}} \left(\frac{1}{k\pi}\right)^3 \frac{b_k}{a},$$

kus

$$b_k = \int_0^1 u_1'(x) \sqrt{\frac{2}{I}} \sin \frac{k\pi x}{I} dx$$

on funktsiooni $u_1' \in \mathcal{L}_2(0,1)$ Fourier' kordaja lõigul $[0,1]$ ortonormeeritud funktsioonide süsteemi $\sqrt{\frac{2}{I}} \sin \frac{k\pi x}{I}$ korral.

Seetõttu rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \leq \int_0^1 [u_1'(x)]^2 dx$$

koondub.

Tuletatud seoste abil hindame rea (14) üldliiget

$$k^2(|A_k| + |B_k|) = \sqrt{\frac{2}{I}} \left(\frac{1}{\pi}\right)^3 \left(\frac{|a_k|}{k} + \frac{|b_k|}{ak}\right).$$

Ilmse võrratuse

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

abil hindame

$$k^2(|A_k| + |B_k|) < \sqrt{\frac{2}{I}} \left(\frac{1}{k}\right)^3 \left(\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2}a_k^2 + \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2a^2}b_k^2\right).$$

Et read

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$$

koonduvad, siis koondub ka rida (14), millega teoreem on tõestatud.

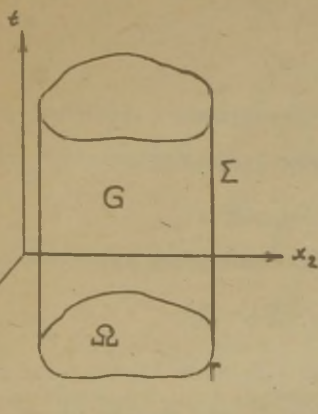
Tõestatud teoreem annab tingimused klassikalise lahendi olemasoluks. Hiljem näitame, et nendel tingimustel on reaga (9) määratud lahend ainus ülesande (1) - (3) lahend. Selles teoreemis seadsime küllaltki ranged tingimused funktsioonide $u_0(x)$ ja $u_1(x)$ sileduse kohta. Need tingimused pole praktikas kerkinud ülesannete korral aga sageli täidetud.

Teoreemi tõestusest näeme, et rea (9) koonduvus on kindlustatud hoopis nõrgematel eeldustel. Nimelt see rida koondub ühtlaselt ja absoluutselt, kui $u_0(x)$ on pidev, omab lõigus $[0,1]$ integreeruva ruuduga tuletise ja rahuldab rajatingimusi $u_0(0) = u_0(1) = 0$ ning $u_1(x)$ on selles lõigus integreeruva ruuduga. Viimastel tingimustel rea (9) summa $u(x,t)$ on pidev funktsioon, mis aga üldiselt ei ole klassikalises mõttes diferentseeruv. Funktsioonil u on aga olemas üldistatud tuletised. Saab näidata, et need (üldistatud mõttes) rahuldavad võrrandit (1). Samuti on rahuldatud algtingimused (2) ja rajatingimused (3). Seega viimatitehtud hoopis nõrgematel eeldustel saab rea (3) summat vaadelda kui ülesande üldistatud lahendit. Täpsemalt defineerime segaülesande üldistatud lahendi hiljem.

3. Homogeense hüperboolset tüüpi võrrandi lahendamine.

Eespool keele võnkumise võrrandi lahendamisel kasutatud Fourier' meetod on üldistatav ka palju üldisemate ülesannete lahendamiseks. Vaatleme järgmist ülesannet.

Olgu n -mõõtmelises ruumis R^n antud tõkestatud lahtine piirkond Ω tükati sileda*) rajaga Γ . Tähistame silindri



$G = \Omega \times (0, +\infty)$ ja selle külgpinna $\Sigma = \Gamma \times [0, +\infty)$. Silindri punktideks on (x, t) , kus $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ja $t > 0$.

Vaatleme võrrandi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Lu, \quad (x, t) \in G \quad (15)$$

lahendamist algtingimustel

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\Omega} \quad (16)$$

ja rajatingimisel

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} = 0, \quad (17)$$

kus

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu$$

on elliptilist tüüpi diferentsiaalavaldis, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ tuleb pinnal Σ välisnormaali suunas ning a_{ij}, b_i, c, α ja β ainult muu-

*) Tükati sileda pinna mõiste täpsustatakse hiljem (vt. § 14, art. 5).

tujate $x = (x_1, \dots, x_n)$ funktsioonid.

Selle ülesande lahendamisel Fourier' meetodiga otsime kõigepealt võrrandi (15) mittetriviaalseid erilahendeid kor-
rutise kujul

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

kus X on n muutuja funktsioon ja T ühe muutuja funktsioon.
Nõuame, et

$$\alpha X + \beta \frac{\partial X}{\partial v} \Big|_r = 0.$$

Siis korrutis u rahuldab rajatingimust (17).

Asetame korrutise u võrrandisse (15):

$$XT'' = -TX$$

ning jagame saadud võrduse funktsiooniga XT :

$$\frac{T''}{T} = -\frac{TX}{X} = -\lambda.$$

Viimaste suhete ühine väärtus $-\lambda$ peab tehtud eeldustel ole-
ma konstant. Nii laguneb lähevõrrand kaheks võrrandiks

$$T'' + \lambda T = 0, \tag{18}$$

$$TX = \lambda X.$$

Viimane võrrand koos rajatingimusega kujutab endast el-
liptilist tüüpi võrrandi omaväärtusülesannet:

$$TX = \lambda X, \quad \alpha X + \beta \frac{\partial X}{\partial v} \Big|_r = 0. \tag{19}$$

Oletame^{*)}, et selle omaväärtused

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$$

on positiivsed ning et vastavad omafunktsioonid

^{*)} Tingimusi, millal need eeldused on täidetud, vaa-
deldakse paragrahvis 15, art. 3.

$$X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$$

moodustavad täieliku ortonormeeritud funktsioonide süsteemi ruumis $\mathcal{L}_2(\Omega)$, s. t. et

$$(X_k, X_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{kui } k = j, \\ 0, & \text{kui } k \neq j \end{cases}$$

ning et suvaline funktsioon $f \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ on esitatav Fourier' rea

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, X_k) X_k(x)$$

abil, mis koondub ruumis $\mathcal{L}_2(\Omega)$. Seejuures reaalsete funktsioonide skalaarkorrutis on defineeritud valemiga

$$(X, Y) = \int X(x)Y(x)dx.$$

Leiame omaväärtusele $\lambda = \lambda_k$ vastava võrrandi (18) lahendi

$$T_k(t) = A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t.$$

Nii saame võrrandi (15) erilahendi

$$u_k(x, t) = (A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x),$$

mis rahuldavad rajatingimust (17). Ülesande (15) - (17) lahendit otsime nende erilahendite summana

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x). \quad (20)$$

Juhul, kui on õigustatud järgnevas kasutatavad ridade liikmeti diferentseerimised ja integreerimised, siis saame järgmisel teel eeskirjad kordajate A_k ja B_k arvutamiseks. Algtingimustest (16) saame seosed

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) = u_0(x),$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} B_k X_k(x) = u_1(x).$$

Korrutades need võrdused skalaarselt omafunktsiooniga X_j ja arvestades omafunktsioonide ortonormeeritust saamegi valemid

$$A_k = (u_0, X_k), \quad B_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} (u_1, X_k).$$

Arvutades viimaste valemite abil A_k ja B_k , moodustame rea (20) kujul ülesande (15) - (17) formaalse lahendi. See osutub ülesande klassikaliseks või teatavas mõttes üldistatud lahendiks, kui rida (20) koondub "küllalt hästi". Rea koonduvuse uurimisel on loomulikult vajalik teha teatavaid eeldusi segaülesandes esinevate funktsioonide kohta.

4. Mittehomogeense hüperboolset tüüpi võrrandi lahendamine. Esitame veel Fourier' meetodi üldisema variandi. Vaatleme mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Lu + F(x, t), \quad (x, t) \in G \quad (21)$$

lahendamist algtingimustel (16) ja rajatingimustel (17). Seejuures tähistused on samad, mis eelmises artiklis.

Märkus. Fourier' meetodi rakendamisel eeldame, et rajatingimus on homogeenne. Mittehomogeense rajatingimuse

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} = \gamma$$

saab asendada homogeenne rajatingimusega, kui on teada küllalt sile funktsioon $v(x, t)$, mis rahuldab seda rajatingimust. Siis $\tilde{u} = u - v$ rahuldab juba homogeenset rajatingimust (17). Asetades $u = \tilde{u} + v$ võrrandisse (21) ja algtingimusse (16) saame \tilde{u} jaoks sama tüüpi võrrandi ja algtingimused.

Olgu rajaülesande (19) omaväärtused λ_k positiivsed ja moodustagu vastavad omafunktsioonid X_k ruumis $\mathcal{L}_2(\Omega)$ täie-

liku ortonormeeritud funktsioonide süsteemi. Otsime ülesande lahendit rea

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) \quad (22)$$

kujul, kus $T_k(t)$ on teatavad ühe muutuja funktsioonid. Need funktsioonid määrame nii, et rida (22) rahuldaks algtingimust (16) ja võrrandit (21). Seejuures eeldame, et järgnevad ridadega teostatavad tehted on õigustatud.

Algtingimustest saame

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = u_0(x),$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) X_k(x) = u_1(x).$$

Korrutades need võrdused skalaarselt funktsiooniga X_j , saame tingimused

$$T_k(0) = (u_0, X_k), \quad T_k'(0) = (u_1, X_k)$$

funktsiooni $T_k(t)$ jaoks. Asetades rea (22) võrrandisse (21), saame

$$u_{tt} + Lu = \sum_{k=1}^{\infty} (T_k'' X_k + T_k' L X_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (T_k'' + T_k' \lambda_k) X_k = F(x, t).$$

Siit

$$T_k'' + \lambda_k T_k' = (F, X_k).$$

Kui tähistame

$$(u_0, X_k) = A_k, \quad (u_1, X_k) = \sqrt{\lambda_k} B_k, \quad (F, X_k) = C_k(t),$$

siis saame funktsiooni $T_k(t)$ määravad tingimused kirjutada kujul

$$T_k'' + \lambda_k T_k' = C_k(t), \quad T_k(0) = A_k, \quad T_k'(0) = \sqrt{\lambda_k} B_k.$$

See on konstantsete kordajatega hariliku diferentsiaalvõrrandi algtingimustega ülesanne, mille lahendamine ei valmista erilisi raskusi. Selle ülesande lahendiks on

$$T_k(t) = A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t C_k(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k} (t - \tau) d\tau,$$

milles võib veenduda vahetu kontrollimise teel. Arendades viimase avaldise ritta (22), saame ülesande (21), (16), (17) formaalse lahendi

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t C_k(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k} (t - \tau) d\tau] X_k(x).$$

Paneme tähele, et homogeense võrrandi korral $F(x, t) = 0$ ja seega ka $C_k(t) = 0$ ning viimane rida ühtib reaga (20).

5. Paraboolset tüüpi võrrandi lahendamine. Fourier' meetod on edukalt kasutatav ka paraboolset tüüpi võrrandi segaülesande lahendamisel. Vaatleme näiteks segaülesannet

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -Lu + F(x, t), \quad (x, t) \in S, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} &= 0, \end{aligned}$$

kusjuures tähistused ja eeldused on samad, mis artiklis 3.

Olgu rajaülesande (19) omaväärtused λ_k positiivsed ja moodustagu vastavad omafunktsioonid X_k ruumis $\mathcal{L}_2(\Omega)$ ortonormeeritud süsteemi. Otsime jällegi ülesande formaalset lahendit kujul (22). Asetades selle rea algtingimusse:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)X_k(x) = u_0(x)$$

ja diferentsiaalvõrrandisse:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = \sum_{k=1}^{\infty} (T_k' + \lambda_k T_k) X_k = F(x,t),$$

saame funktsiooni $T_k(t)$ jaoks tingimused

$$T_k' + \lambda_k T_k = G_k(t), \quad T_k(0) = A_k,$$

kus

$$A_k = (u_0, X_k), \quad G_k(t) = (F, X_k).$$

Lahendades selle esimest järku diferentsiaalvõrrandi algtingimusega ülesande leiame

$$T_k(t) = A_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t G_k(\tau) e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau.$$

Seega vaadeldava segaülesande formaalseks lahendiks on

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t G_k(\tau) e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau \right] X_k(x).$$

Ülesanne 3. Olgu $u_0 \in C[0,1]$, $u_0' \in \mathcal{L}_2(0,1)$ ja $u_0(0) = u_0(1) = 0$. Tõestada, et siis funktsioon

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(k\pi a/1)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{1},$$

kus

$$A_k = \frac{2}{1} \int_0^1 u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{1} dx,$$

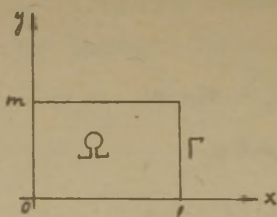
kuulub klassi $C(\bar{G}) \cap C^2(G)$ ning on ülesande

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(x,0) = u_0(x),$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

klassikaliseks lahendiks.

6. Soojuse levimine ristkülikukujulises plaadis. Esitame veel ühe näite Fourier' meetodi rakendamise kohta.



Joonis 3.

Olgu Ω ristkülik:

$$\Omega = \{(x, y): 0 < x < l, 0 < y < m\}$$

rajaga Γ . Vaatleme segaülesande

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega},$$

$$u|_{\Sigma} = 0, \quad \Sigma = \Gamma \times [0, \infty)$$

lahendamist. Märgime, et selle ülesande lahend u kirjeldab soojuse levimist homogeenses ristkülikukujulises plaadis.

Vaadeldava ülesande lahendamisel võiksime kasutada eelmises artiklis tuletatud valemit. Tuletame siiski vajaliku valemi selle erijuhu jaoks uuesti, kasutades paragrahvi algul esitatud meetodikat. Peamised raskused on seotud omaväärtuste ja omafunktsioonide leidmisega.

Otsime võrrandi erilahendit kujul

$$u = v(x, y)T(t).$$

Asetades selle korrutise võrrandisse ja jagades avaldisega $a^2 v T$, saame

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{v_{xx} + v_{yy}}{v} = -\lambda, \quad (23)$$

kus λ on konstant. Kui lisame veel rajatingimusest tuleneva nõude $v|_{\Gamma} = 0$, siis näeme, et λ ja v tuleb leida omaväärtusülesande

$$v_{xx} + v_{yy} = -\lambda v, \quad v|_{\Gamma} = 0 \quad (24)$$

lahendamise teel. Ristkülikukujulise piirkonna korral on moodustatud omaväärtusülesande lahendamisel omakorda edukalt kasutatav Fourier' meetod.

Otsime ülesande (24) omafunktsiooni kujul

$$v(x,y) = X(x)Y(y).$$

Asetame selle korrutatise võrrandisse:

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0$$

ja eraldame muutujad:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda - \frac{Y''}{Y} = -\mu.$$

Seejuures μ peab olema konstant. Viimasest seosest ja ülesande (24) rajatingimusest saame kaks omaväärtusülesannet

$$X'' + \mu X = 0, \quad X(0) = X(1) = 0,$$

$$Y'' + \nu Y = 0, \quad Y(0) = Y(m) = 0,$$

kus $\nu = \lambda - \mu$. Valemite (8) põhjal saame välja kirjutada nende ülesannete omaväärtused ja omafunktsioonid

$$\mu_k = \left(\frac{k\pi}{1}\right)^2, \quad X_k = \sin \frac{k\pi x}{1}, \quad k=1,2,\dots,$$

$$\nu_j = \left(\frac{j\pi}{m}\right)^2, \quad Y_j = \sin \frac{j\pi y}{m}, \quad j=1,2,\dots$$

Et $\lambda = \mu + \nu$, siis ülesande (24) omaväärtusteks ja omafunktsioonideks on

$$\lambda_{kj} = \left(\frac{k\pi}{1}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{m}\right)^2, \quad v_{kj} = \sin \frac{k\pi x}{1} \sin \frac{j\pi y}{m}, \quad k,j=1,2,\dots$$

Saab näidata, et nii leitud omafunktsioonid moodustavad ruumis $\mathcal{L}_2(\Omega)$ täieliku süsteemi.

Seosest (23) saame $T(t)$ jaoks võrrandi

$$T' + \lambda_{kj} a^2 T = 0,$$

mille lahendamise teel leiame

$$T_{kj}(t) = A_{kj} e^{-\lambda_{kj} a^2 t}$$

Vaadeldava segaülesande lahendit otsime lõpmata rea kujul

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_{k,j=1}^{\infty} v_{kj}(x,y) T_{kj}(t) = \\ &= \sum_{k,j=1}^{\infty} A_{kj} e^{-\lambda_{kj} a^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{m}. \end{aligned}$$

Saadud rea summa rahuldab rajatingimust. Kui on õigustatud rea liikmeti diferentseerimine üks kord t ning kaks korda x ja y järgi, siis rahuldab rea summa ka võrrandit. Algtingimusest saame tingimuse

$$u(x,y,0) = \sum_{k,j=1}^{\infty} A_{kj} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{m} = u_0(x,y).$$

Kordajate A_{kj} leidmiseks korrutame viimase võrduse läbi avaldisega $\sin \frac{k'\pi x}{l} \sin \frac{j'\pi y}{m}$ ning integreerime üle ristküliku Ω :

$$\begin{aligned} \sum_{k,j=1}^{\infty} A_{kj} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k'\pi x}{l} dx \int_0^m \sin \frac{j\pi y}{m} \sin \frac{j'\pi y}{m} dy = \\ = \int_0^l \int_0^m u_0(x,y) \sin \frac{k'\pi x}{l} \sin \frac{j'\pi y}{m} dy dx. \end{aligned}$$

Võrduste (12) põhjal saame siit

$$A_{kj} = \frac{4}{lm} \int_0^l \int_0^m u_0(x,y) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi y}{m} dy dx.$$

Nii oleme leidnud vaadeldava ülesande formaalse lahendi. Teatavatel lisaeldustel funktsiooni $u_0(x,y)$ kohta osutub see ka klassikaliseks lahendiks.

§ 13. Besseli funktsioonid

1. Besseli funktsioonide mõiste. Fourier' meetodi praktilisel rakendamisel on vaja teada elliptilist tüüpi võrrandite rajaülesannete omafunktsioone. Ainult lihtsamatel juhtudel avalduvad need matemaatilises analüüsis käsitletud funktsioonide kaudu, sageli kujutavad aga uusi transtsendentseid funktsioone. Rakendustes on olulise tähtsusega nn. Besseli funktsioonid, mille kaudu avalduvad näiteks Laplace'i operaatori omafunktsioonid ringikujulise piirkonna korral.

Besseli funktsioonid kuuluvad silindriliste funktsioonide hulka. Silindrilisteks funktsioonideks nimetatakse nn.

Besseli võrrandi

$$x^2 u'' + xu' + (x^2 - \nu^2)u = 0 \quad (1)$$

mittetriviaalseid lahendeid.

Vaatleme astmerea kujul antud funktsiooni

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = x^\nu f_\nu(x^2), \quad (2)$$

kus $-\infty < \nu < +\infty$. Kasutades gammafunktsiooni omadusi

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(-k) = \infty$, $k=0,1,\dots$ (vt.

näit. [1]), saab d'Alembert'i tunnuse abil näidata, et astme-

rida $f_\nu(z)$ koondub absoluutselt iga kompleksarvu z korral

(näidata seda!) ning kujutab seega täisfunktsiooni. Järelikult

funktsioon $J_\nu(x)$ on täisarvulise ν korral ühene ja mitte-

täisarvulise ν korral mitmene analüütiline funktsioon.

Eraldame välja selle haru, mille korral $x^\nu > 0$, kui $\nu > 0$.
 Nii saadud ühest funktsiooni $J_\nu(x)$ nimetatakse ν -järku Besseli funktsiooniks.

Kontrollime, et $J_\nu(x)$ rahuldab Besseli võrrandit. Tõepoolest, moodustades ridadest

$$J'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1) \Gamma(k+1)} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}$$

$$J''_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu)(2k+\nu-1)}{\Gamma(k+\nu+1) \Gamma(k+1)} \frac{1}{2^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-2}$$

kombinatsiooni

$$\begin{aligned} x^2 J''_\nu(x) + x J'_\nu(x) - \nu^2 J_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4k(k+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1) \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \\ &= -x^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(j+\nu+1) \Gamma(j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu} = -x^2 J_\nu(x) \quad (j=k-1), \end{aligned}$$

näeme, et $J_\nu(x)$ on võrrandi (1) lahendiks.

Ülesanne 1. Näidata, et

$$J_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Seega Besseli funktsioone võib vaadelda kui trigonomeetriliste funktsioonide üldistusi.

Ülesanne 2. Näidata, et täisarvu ν korral

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x).$$

Ülesanne 3. Näidata, et Besseli funktsioonid on omavahel seotud valemitega

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x), \quad J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x),$$

$$\left(\frac{d}{x dx}\right)^m [x^\nu J_\nu(x)] = x^{\nu-m} J_{\nu-m}(x), \quad \left(\frac{d}{x dx}\right)^m \left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = (-1)^m \frac{J_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}},$$

$m=0, 1, \dots$

Ülesanne 4. Näidata, et Besseli funktsioonid rahuldavad rekurrentseid seost

$$J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) = 0.$$

2. Besseli funktsioonide ortogonaalsuse omadus. Besseli funktsioonide rakendamisel Fourier' meetodi korral on oluline järgmine ortogonaalsuse omadus.

Teoreem 1. Kui μ_1 ja μ_2 on Besseli funktsiooni $J_\nu(x)$ nullkohad, siis $\nu > -1$ korral

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx = 0, \text{ kui } \mu_1^2 \neq \mu_2^2, \quad (3)$$

ja

$$\int_0^1 x [J'_\nu(\mu_1 x)]^2 dx = \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 \quad (4)$$

Tõestus. Eelmises artiklis näitasime, et $J_\nu(x)$ rahuldab võrrandit (1), s.t.

$$x^2 J''_\nu(x) + x J'_\nu(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0.$$

Asendades selles samasuses argumendi x korrutisega μx ja kasutades seoseid

$$\frac{d J_\nu(\mu x)}{dx} = \mu J'_\nu(\mu x), \quad \frac{d^2 J_\nu(\mu x)}{dx^2} = \mu^2 J''_\nu(\mu x),$$

saame

$$x^2 \frac{d^2 J_\nu(\mu x)}{dx^2} + x \frac{dJ_\nu(\mu x)}{dx} + (\mu^2 x^2 - \nu^2) J_\nu(\mu x) = 0$$

ehk

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_\nu(\mu x)}{dx} \right] + (\mu^2 x - \frac{\nu^2}{x}) J_\nu(\mu x) = 0. \quad (5)$$

Võtame viimases võrduses $\mu = \mu_1$:

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx} \right] + (\mu_1^2 x - \frac{\nu^2}{x}) J_\nu(\mu_1 x) = 0. \quad (6)$$

Korrutades võrduse (5) suurusega $J_\nu(\mu_1 x)$, võrduse (6) suurusega $J_\nu(\mu x)$, lahutades tulemused ning integreerides lõigus $[0, 1]$, saame

$$\begin{aligned} & (\mu^2 - \mu_1^2) \int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu x) dx = \\ & = \int_0^1 \frac{d}{dx} \left[x J_\nu(\mu x) \frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx} - x J_\nu(\mu_1 x) \frac{dJ_\nu(\mu x)}{dx} \right] dx = \\ & = \left[\mu_1 x J_\nu(\mu x) J_\nu'(\mu_1 x) - \mu x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu'(\mu x) \right]_0^1. \end{aligned}$$

Et avaldisest (2)

$$J_\nu(\mu x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\mu x}{2} \right)^\nu + O(x^{\nu+2})$$

ja

$$\mu x J_\nu'(\mu x) = \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\mu x}{2} \right)^\nu + O(x^{\nu+2}),$$

siis

$$\begin{aligned} & \mu_1 x J_\nu(\mu x) J_\nu'(\mu_1 x) - \mu x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu'(\mu x) = \\ & = O(x^{2\nu+2}) \rightarrow 0, \text{ kui } x \rightarrow 0+ \text{ ja } \nu > -1. \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu x) dx & = \frac{1}{\mu^2 - \mu_1^2} \left[\mu_1 J_\nu(\mu) J_\nu'(\mu_1) - \right. \\ & \left. - \mu J_\nu(\mu_1) J_\nu'(\mu) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Olgu $J_\nu(\mu_1) = 0$ ja lähenege μ suurusele μ_1 . Siis l'Hospitali reegli põhjal

$$\int_0^1 x [J_\nu(\mu_1 x)]^2 dx = \frac{1}{2\mu_1} \mu_1 [J'_\nu(\mu_1)]^2,$$

millega elemegi tõestanud valemi (4). Kui aga valemis (7) võtame $\mu = \mu_2$, kus suurused $\mu_2 \neq \mu_1$ ja $J(\mu_2) = J(\mu_1) = 0$, siis jõuame teoreemi väiteni (3), millega teoreem ongi tõestatud.

3. Besseli funktsioonide nullkohad. Tõestame, et Besseli funktsioonide nullkohtadel on järgmised omadused.

Teoreem 2. Kui $\nu > -1$, siis funktsiooni $J_\nu(x)$ nullkohad on kõik reaalsed, paiknevad sümmeetriliselt nullpunkti suhtes ja ei saa omada lõplikku kuhjumispunkti, seejuures nullist erinevad nullkohad on ühekordsed.

Tõestus. Tõestame kõigepealt võrrandi $J_\nu(x) = 0$ lahendite reaalsuse. Oletame vastupidiselt vaitele, et sellel võrrandil on kompleksne lahend μ . Siis oleks selle võrrandi lahendiks ka kaaskompleks $\bar{\mu}$, sest $J_\nu(\bar{\mu}) = \overline{J_\nu(\mu)} = 0$. Kui $\mu^2 \neq \bar{\mu}^2$, siis võttes $\mu_1 = \mu$ ja $\mu_2 = \bar{\mu}$ saame valemi (3) põhjal vastuolu

$$0 = \int_0^1 x J_\nu(\mu x) J_\nu(\bar{\mu} x) dx = \int_0^1 x |J_\nu(\mu x)|^2 dx > 0.$$

Järelikult peab olema $\mu^2 = \bar{\mu}^2$, mis on võimalik ainult siis, kui μ on kas reaalne või puhtimaginaarne. Näitame, et ka viimane võimalus viib vastuoluni. Olgu $\mu = ia$, kus a on nullist erinev reaalarv. Siis valemi (2) põhjal

$$J_\nu(1a) = \left(\frac{1a}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \neq 0,$$

sest $\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1) > 0$, kui $k \geq 0$ ja $\nu > -1$. Järelikult kõik Besseli funktsiooni $J_\nu(x)$ nullkohad peavad olema $\nu > -1$ korral reaalsed.

Et valemi (2) põhjal $J_\nu(x) = x^\nu f_\nu(x^2)$, kus $f_\nu(z)$ on täisfunktsioon, siis funktsiooni $J_\nu(x)$ nullist erinevad nullkohad peavad olema ka täisfunktsiooni $f_\nu(x^2)$ nullkohtadeks, millest järeldubki, et nad paiknevad sümmeetriliselt nullpunkti suhtes ning et neil ei saa olla lõplikku kuhjamispunkti.

Näitame lõpuks, et $J_\nu(x)$ nullist erinevad nullkohad on ühekerdsed. Tõepoolest, kui oletada, et sellel funktsioonil on vähemalt kahekordne nullkoht^{*)} $\mu \neq 0$, mille korral $J_\nu(\mu) = J'_\nu(\mu) = 0$, siis viimased tingimused kui algtingimused määraksid diferentsiaalvõrrandi (1) kaks erinevat lahendit $u = 0$ ja $u = J_\nu(x)$. See on aga vastuolus teoreemiga diferentsiaalvõrrandi lahendi ainsusest (vt. näit. [2], lk. 259). Teoreem on tõestatud.

Besseli funktsioonide jaoks kehtib asümptootiline valem (vt. näit. [16], lk. 664)

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \text{ kui } x \rightarrow \infty,$$

millest järeldub, et funktsiooni $J_\nu(x)$ nullkohad

*) See arutelu pole läbiviidav $\mu = 0$ korral, sest siis on võrrandile (1) kõrgeimat järku tuletise u'' kordaja võrdne nulliga.

$$\mu_k^{(\nu)} \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \nu + k\pi.$$

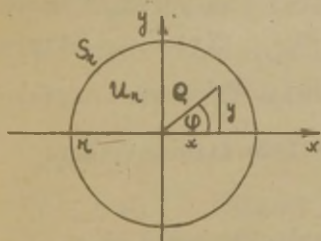
Besseli funktsioonide graafikuid ja nullkehtade tabeleid võib leida näiteks teatmikust [17].

4. Laplace'i operaatori omaväärtusülesanne ringküulilise piirkonna korral. Vaatleme omaväärtusülesannet

$$-\Delta u = \lambda u, \quad (x, y) \in \bar{U}_r, \quad u|_{S_r} = 0, \quad (8)$$

kus $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ on kahemõõtmeline Laplace'i operaator, $S_r = \{(x, y): x^2 + y^2 = r^2\}$ ringjoon raadiusega r ja $\bar{U}_r = \{(x, y): x^2 + y^2 < r^2\}$ ringjoonega S_r piiratud ring.

Belmise paragrahvi artiklis 6 leidsime Fourier' meetodi abil Laplace'i operaatori omaväärtused ja omafunktsioonid juhul, kui piirkonnaks Ω on ristkülik. Ka vaadeldava omaväärtusülesande lahendamisel saab rakendada Fourier' meetodit, kui ristkoordinaatidelt (x, y) üle minna polaarkoordinaatidele (ρ, φ) . Tehes Laplace'i operaatori avaldises argumentide teisenduse



Joonis 4.

$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$
saame (läbi teha!) Laplace'i operaatori avaldise polaarkoordinaatides

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Polaarkoordinaatides

omandab ülesanne (8) kuju

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \lambda u = 0, \quad u|_{\rho=r} = 0. \quad (9)$$

Seejuures ringile U_r vastab (Q, φ) -tasandil ristkülik $0 \leq Q < r$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ (vt. joon. 4). Ringi keskpunktis peab lahendi u väärtus olema lõplik konstant, s.t. $u|_{Q=0} = \text{const}$. Nõndest, et $u(Q, \varphi)$ peab φ suhtes olema perioodiline perioodiga 2π , saame nn. perioodilisuse rajatingimused

$$u(Q, 0) = u(Q, 2\pi), \quad u_{\varphi}(Q, 0) = u_{\varphi}(Q, 2\pi).$$

Otsime ülesande (9) mittetriviaalset lahendit korrutise kujul

$$u(Q, \varphi) = R(Q)\Phi(\varphi).$$

Asetades selle korrutise võrrandisse (9), saame tingimuse

$$\frac{1}{Q} (QR')'\Phi + \frac{1}{Q^2} R\Phi'' + \lambda R\Phi = 0$$

ehk peale teisendamist

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = - \frac{Q(QR')' + \lambda Q^2 R}{R} = - \mu,$$

kus μ on konstant. Kui peame veel silmas ülesande rajatingimusi, siis näeme, et funktsioonid $R(Q)$ ja $\Phi(\varphi)$ peavad rahuldama tingimusi

$$Q(QR')' + (\lambda Q^2 - \mu)R = 0, \quad |R(0)| < \infty, \quad R(r) = 0, \quad (10)$$

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi). \quad (11)$$

Saadud ülesanded kujutavad endast harilike diferentsiaalvõrrandite omaväärtusülesandeid.

Ülesande (11) omaväärtused ja omafunktsioonid saame leida samati nagu leidsime eelmise paragrahvi artiklis 1 sama võrrandi omaväärtused ja omafunktsioonid teistel rajatingimustel (lahendada omaväärtusülesanne (11)!). Tulemuseks saame, et $\mu_0 = 0$ on ülesande (11) ühekordseks omaväärtuseks

ning temale vastab omafunktsioon $\Phi_0 = 1$, $\mu_k = k^2$ ($k=1,2,\dots$) on aga selle ülesande kahekordseks omaväärtuseks ning vastavateks lineaarselt sõltumatuteks omafunktsioonideks on

$$\Phi_{k1} = \cos k\varphi, \quad \Phi_{k2} = \sin k\varphi.$$

Märgime, et viimast omafunktsioonide paari esitatakse sageli ka kompleksse omafunktsioonina

$$\Phi_k = e^{ik\varphi} = \cos k\varphi + i \sin k\varphi.$$

Vaatleme nüüd ülesannet (10). See võrrand $\mu = \mu_k = k^2$ korral

$$Q^2 R'' + Q R' + (\lambda Q^2 - k^2) R = 0$$

on lähedane Besseli võrrandile. Asendusega $Q = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \xi$,

$R(Q) = J(\sqrt{\lambda} Q) = J(\xi)$ saame Besseli võrrandi

$$\xi^2 J'' + \xi J' + (\xi^2 - k^2) J = 0.$$

Selle lahendiks on Besseli funktsioon

$$J = J_k(\xi) \quad (k=0,1,\dots).$$

Ilmselt $|J_k(0)| < \infty$. Parameetri λ leiame nii, et oleks

rahuldatud ka teine rajatingimustest (10). Olgu $\mu_j^{(k)}$

($j=1,2,\dots$) võrrandi $J_k(\mu) = 0$ positiivsed lahendid. Siis

$$R(r) = J_k(\sqrt{\lambda} r) = 0,$$

kui $\sqrt{\lambda} r = \mu_j^{(k)}$, millest

$$\lambda = \left(\frac{\mu_j^{(k)}}{r} \right)^2 = \lambda_{kj}.$$

Seega $\mu = k^2$ ja $\lambda = \lambda_{kj}$ korral on ülesandel (10) olemas mit-tetriviaalne lahend

$$R(\varphi) = c_{kj} J_k\left(\mu_j^{(k)} \frac{\varrho}{r}\right), \quad c_{kj} \neq 0.$$

Järelikult ülesande (8) omaväärtusteks ja omafunktsioonideks on

$$\lambda_{0j} = \left(\frac{\mu_j^{(0)}}{r}\right)^2, \quad u_{0j} = c_{0j} J_0\left(\mu_j^{(0)} \frac{\rho}{r}\right),$$

$$\lambda_{kj} = \left(\frac{\mu_j^{(k)}}{r}\right)^2, \quad u_{kj1} = c_{kj1} J_k\left(\mu_j^{(k)} \frac{\rho}{r}\right) \cos k\varphi,$$

$$u_{kj2} = c_{kj2} J_k\left(\mu_j^{(k)} \frac{\rho}{r}\right) \sin k\varphi, \quad j, k=1, 2, \dots$$

Näitame, et need omafunktsioonid on ortogonaalsed skaalarkorrutises

$$(u, v) = \int_{\mathbb{U}_R} uv dx dy = \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho uv d\varphi d\rho$$

korral. Viimase võrduse tuletamisel kasutasime teisendust

$x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ Jakobiaani

$$\begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Muutuja vahetuse $\rho = r \rho'$ ja teoreemi 1 abil saame

$$\begin{aligned} (u_{0j}, k_{0j'}) &= c_{0j} c_{0j'} \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho J_0\left(\mu_j^{(0)} \frac{\rho}{r}\right) J_0\left(\mu_{j'}^{(0)} \frac{\rho}{r}\right) d\varphi d\rho \\ &= 2\pi r^2 c_{0j} c_{0j'} \int_0^1 \rho' J_0(\mu_j^{(0)} \rho') J_0(\mu_{j'}^{(0)} \rho') d\rho' \\ &= \begin{cases} 0, & \text{kui } j' \neq j, \\ 2\pi r^2 c_{0j}^2 \frac{1}{2} [J_0'(\mu_j^{(0)})]^2, & \text{kui } j' = j. \end{cases} \end{aligned}$$

Seega funktsioonid u_{0j} moodustavad ortonormeeritud funktsioonide süsteemi, kui

$$c_{0j} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} r |J_0'(\mu_j^{(0)})|}.$$

Analoogiliselt saame muutuja vahetuse $\varrho = r \varrho'$ ja teoreemi 1 abil

$$\begin{aligned}
 (u_{kj1}, u_{k',j',1}) &= \\
 &= C_{kj1} C_{k',j',1} \int_0^r \int_0^{2\pi} \varrho J_k(\mu_j \frac{\varrho}{r}) \cos k\varphi J_{k'}(\mu_{j'} \frac{\varrho}{r}) \cos k'\varphi d\varphi d\varrho = \\
 &= r^2 C_{kj1} C_{k',j',1} \int_0^1 \varrho' J_k(\mu_j \varrho') J_{k'}(\mu_{j'} \varrho') d\varrho' \int_0^{2\pi} \cos k\varphi \cos k'\varphi d\varphi = \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{kui } k' \neq k \text{ või } j' \neq j, \\ r^2 C_{kj1}^2 \frac{1}{2} [J_k'(\mu_j^{(k)})]^2 \delta_{kj}, & \text{kui } k' = k \text{ ja } j' = j. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Samuti saab näidata, et

$$(u_{kj1}, u_{k',j',2}) = 0$$

ja

$$(u_{kj2}, u_{k',j',2}) = (u_{kj1}, u_{k',j',1}).$$

Seega ülesande (8) ortonormeeritud omafunktsioonideks on

$$\begin{aligned}
 u_{0j} &= \frac{1}{\sqrt{\pi} r |J_0'(\mu_j^{(0)})|} J_0(\mu_j^{(0)} \frac{\varrho}{r}), \\
 u_{kj1} &= \frac{2}{\sqrt{\pi} r |J_k'(\mu_j^{(k)})|} J_k(\mu_j^{(k)} \frac{\varrho}{r}) \cos k\varphi, \\
 u_{kj2} &= \frac{2}{\sqrt{\pi} r |J_k'(\mu_j^{(k)})|} J_k(\mu_j^{(k)} \frac{\varrho}{r}) \sin k\varphi, \quad k, j=1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{12}$$

Saab tõestada (vt. näit. [4]), et need omafunktsioonid moodustavad ruumis $\mathcal{L}_2(U_r)$ täieliku süsteemi, s.t. et iga $f \in \mathcal{L}_2(U_r)$ avaldub Fourier' rea summana

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (f, u_{0j}) u_{0j} + \sum_{k,j=1}^{\infty} [(f, u_{kj1}) u_{kj1} + (f, u_{kj2}) u_{kj2}].$$

5. Ringikujulise membraani võnkumine. Ringikujulise membraani võnkumist kirjeldab ülesande

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$$

$$u|_{t=0} = u_0(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad u_t|_{t=0} = u_1(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad u|_{\Sigma} = 0$$

lahend, kus $\Sigma = S_R \times [0, \infty)$. Seejuures lihtsuseks eeldasime, et algtingimustes funktsioonid u_0 ja u_1 sõltuvad ainult raadiusest $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ning ei sõltu nurgast φ . Osutub, et sellisel juhul ka lahend u ei sõltu nurgast φ .

Ülesande lahendamisel Fourier' meetodiga saame kasutada eelmise paragrahvi artiklis 3 esitatud skeemi. Et vaadeldaval juhul

$$\Delta u = -a^2 \Delta u = -a^2(u_{xx} + u_{yy}),$$

siis tuleb kõigepealt lahendada omaväärtusülesanne

$$\Delta X + \frac{\lambda}{a^2} X = 0, \quad X|_{S_R} = 0.$$

Eelmise artikli tulemusi arvestades on viimase ülesande omaväärtusteks

$$\lambda = \left(\frac{a \mu_j^{(k)}}{r} \right)^2, \quad k=0,1,\dots; j=1,2,\dots,$$

kus $\mu_j^{(k)}$ on võrrandi $J_k(\mu) = 0$ positiivsed lahendid. Vastavad omafunktsioonid avalduvad kujul (12).

Et vaadeldaval juhul u_0 ja u_1 ei sõltu nurgast φ , siis ilmselt võrduvad nende skalaarkorrutised omafunktsioonidega u_{kj1} ja u_{kj2} nulliga. Seega eelmise paragrahvi valemi (20) põhjal avaldub vaadeldava ülesande formaalne lahend kujul

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos \sqrt{\lambda_j} t + B_j \sin \sqrt{\lambda_j} t) X_j(\rho)$$

kus

$$\lambda_j = \left(\frac{a \mu_j^{(0)}}{r} \right)^2, \quad X_j(\varrho) = u_{0j} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} r |J'_0(\mu_j^{(0)})|} J_0(\mu_j^{(0)} \frac{\varrho}{r})$$

ning

$$A_j = (u_0, X_j) = \int_{\Sigma} u_0 X_j dx dy = 2\pi \int_0^r \varrho u_0(\varrho) X_j(\varrho) d\varrho,$$

$$B_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} (u_1, X_j) = \frac{2\pi r}{a \mu_j^{(0)}} \int_0^r \varrho u_1(\varrho) X_j(\varrho) d\varrho.$$

Näeme, et tõsposlest ülesande lahend sõltub ainult muutuja test ϱ ja t ning ei sõltu murgast φ .

Ülesanne 5. Näidata, et soojuste levimist ringikujulises plaadis kirjeldava ülesande

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad u|_{t=0} = u_0(x, y), \quad u|_{\Sigma} = 0, \quad \Sigma = S_r \times [0, \infty)$$

formaalne lahend avaldub kujul

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi r^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{kj} e^{-\lambda_{kj} t} \frac{J_k(\mu_j^{(k)} \frac{\varrho}{r})}{[J'_k(\mu_j^{(k)})]^2} e^{ik\varphi},$$

kus

$$\lambda_{kj} = \left(\frac{a \mu_j^{(k)}}{r} \right)^2, \quad A_{kj} = \int_0^r \int_0^{2\pi} \varrho u_0(x, y) J_k(\mu_j^{(k)} \frac{\varrho}{r}) e^{-ik\varphi} d\varphi d\varrho.$$

Ülesanne 6. Näidata, et kolmemõõtmeline Laplace'i operaator

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

avaldub sfäärkoordinaatides

$$x = \varrho \sin \varphi \cos \Theta, \quad y = \varrho \sin \varphi \sin \Theta, \quad z = \varrho \cos \Theta$$

kujul

$$\Delta u = \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho^2 \frac{\partial u}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\varrho^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2}.$$

Ülesanne 6. Näidata, et ülesande

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \lambda u = 0, \quad u|_{\varrho^2=r^2} = 0$$

omavaärtusteks ja ainult raadiusest $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sõltuvateks omafunktsioonideks on *)

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{r} \right)^2, \quad u_k = \frac{1}{\varrho} \sin \frac{k\pi\varrho}{r}, \quad k=1,2,\dots$$

Ülesanne 7. Näidata, et soojuste levimist kerakujulises kehas kirjeldava ülesande

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$$

$$u|_{t=0} = u_0(\varrho), \quad u|_{\varrho^2=r^2} = 0, \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

formaalseks lahendiks on

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\lambda_k t} \frac{1}{\varrho} \sin \frac{k\pi\varrho}{r},$$

kus

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{r} \right)^2, \quad A_k = \frac{2}{r} \int_0^r \varrho u_0(\varrho) \sin \frac{k\pi\varrho}{r} d\varrho.$$

*) Lisaks nendele omavaärtustele on kolmemõõtmelisel Laplace'i operaatoril veel omavaärtusi, millele vastavad omafunktsioonid sõltuvad nurkadest φ ja Θ (vt. näit. [4], lk. 395).

§14. Parabolset tüüpi
võrrandi segaülesanne

1. Ülesande klassikaline seade. Asume vaatlema parabolset tüüpi võrrandi segaülesannet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Lu + F(x,t), \quad (x,t) \in G, \quad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$u|_{\Sigma} = \gamma(x,t), \quad (3)$$

kus

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \quad (4)$$

ning Ω on n -mõõtmelise ruumi tõkestatud lahtine piirkond tükati sileda rajaga Γ ja $G = \Omega \times (0, +\infty)$, $\Sigma = \Gamma \times [0, +\infty)$ (vt. joonis 2). Järgnevas kasutame veel tähistusi

$G_T = \Omega \times (0, T]$, $\bar{G}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$, $\Sigma_T = \Gamma \times [0, T]$, $T > 0$
lõpliku silindri ja selle külgpinna jaoks.

Selles paragrahvis eeldame, et diferentsiaalavaldise (4) kordajad $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ ja $c(x,t)$ on määratud ja tõkestatud kinnises silindris \bar{G}_T iga $T > 0$ korral ning et

$a_{ij} = a_{ji}$ ja

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j \geq 0 \quad (5)$$

iga $(x,t) \in G$ ja iga reaalse $y = (y_1, \dots, y_n)$ korral. Paneme tähele, et ruutvormi positiivsuse nõue (5) on veidi nõrgem diferentsiaalavaldise (4) elliptilisuse nõudest. Diferentsiaalavaldise (4) oluliseks erijuhuks on $Lu = -\Delta u$, mille

saame, kui $a_{11} = 1$ ning ülejäänud kordajad $a_{1j} = b_1 = c = 0$.

Täpsemustame vaadeldava ülesande klassikalise lahendi mõiste.

Ülesande (1) - (3) klassikaliseks lahendiks nimetatakse $n+1$ muutuja funktsiooni*) $u \in C(\bar{G}) \cap C^{2,1}(G)$, mis silindris G rahuldab võrrandit (1), selle põhjal algtingimust (2) ja külgpinnal rajatingimust (3).

Kui ülesandel (1) - (3) eksisteerib klassikaline lahend, siis

$$u_0 \in C(\bar{\Omega}), \quad \gamma \in C(\Sigma)$$

ning on rahuldatud alg- ja rajatingimuse kooskõla tingimus $u_0|_{\Gamma} = \gamma(x, 0)$. Need on tarvilikud, kuid üldiselt mitte veel piisavad tingimused klassikalise lahendi olemasoluks.

Järgnevas püüame selgitada seotud ülesande korrektsust, s.t. lahendi olemasolu, ainsust ja pidevat sõltuvust lähteandmetest. Kõige komplitseeritum nendest probleemidest on esimene, kahe viimase lahendamine õnneatub suhteliselt lihtsalt nn. maksimumprintsipi abil.

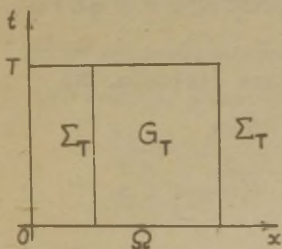
2. Maksimumprintsip. Tõestame järgmise tulemuse, mida küllaltki laialdaselt kasutatakse parabolset tüüpi võrranditega seotud ülesannete uurimisel.

*) Sümboliga $C^{2,1}(G)$ tähistame pidevate funktsioonide $u(x, t)$ hulka, millel piirkonnas G on olemas kõik esimest ja teist järku pidevad osatuletised vektori x koordinaatide järgi ja pidev osatuletis muutuja t järgi.

Teoreem 1 (maksimprintsip). Eksisteerigu ülesandel

(1) - (3) klassikaline lahend $u(x,t)$ ning kehtigu silindri G_T ($T > 0$) võrratused $F(x,t) < 0$ ja $c(x,t) \geq 0$. Siis selle lahendi jaoks kehtib hinnang

$$\max_{(x,t) \in \bar{G}_T} u(x,t) \leq \max [0, \max_{x \in \bar{\Omega}} u_0(x), \max_{(x,t) \in \Sigma_T} \gamma(x,t)] = M. \quad (6)$$



Joonis 5.

Tõestus. Teoreem väidab, et kui ülesande (1) - (3) klassikalisel lahendil on positiivseid väärtusi, siis tehtud eeldustel ta saavutab oma positiivse maksimumi kas silindri G_T põhjal või külgpinnal, s.t. hulgal $\bar{G}_T \setminus G_T$.

Tõestamiseks kasutame vastuväitelist meetodit. Oletame, et võrratus (6) ei kehti. Siis peab leiduma selline punkt $(x', t') \in G_T$, mille korral

$$u(x', t') > M \geq 0.$$

Näitame, et sellise punkti olemasolu viib vastuollu teoreemi eeldustega.

Tähistame $\varepsilon = u(x', t') - M > 0$ ja moodustame abifunktsiooni

$$v = u + \frac{\varepsilon}{2} \frac{T-t}{T}.$$

Ilmselt

$$u \leq v \leq u + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ kui } (x,t) \in \bar{G}_T.$$

Seega

$$\max_{(x,t) \in \bar{G}_T \setminus G_T} v(x,t) \leq M + \frac{\varepsilon}{2}$$

ning

$$v(x',t') \geq u(x',t') = M + \varepsilon.$$

Et $v \in C(\bar{G}_T) \cap C^{2,1}(G_T)$, siis peab $v(x,t)$ saavutama maksimumi teatavas punktis $(x'',t'') \in G_T$, kusjuures

$$v(x'',t'') = \max_{(x,t) \in \bar{G}_T} v(x,t) \geq v(x',t') \geq M + \varepsilon \geq \varepsilon.$$

Näitame, et punktis (x'',t'') saame vastuolu. Et $(x'',t'') \in G_T$, siis selles punktis

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geq 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0. \quad (7)$$

Seejuures viimane võrratus järeldub ruutvormi positiivsusest

(5). Tõepoolest, regulaarse lineaartelsenduse

$$x_1 = \sum_{k=1}^n \alpha_{1k} \xi_k, \quad \det|\alpha_{1k}| \neq 0$$

abil saab siis diferentsiaalavaldise (4) punktis (x'',t'') teisendada kanoonilisele kujule

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i^2}$$

ning maksimumpunktis $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} \leq 0$.

Asenduse $u = v - \frac{\varepsilon}{2} \frac{T-t}{T}$ ja seoste (7) abil saame punktis (x'',t'')

$$F(x'',t'') = \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{2T} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + c(v - \frac{\varepsilon}{2} \frac{T-t''}{T}) \geq \frac{\varepsilon}{2T} + c(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \frac{T-t''}{T}) > 0,$$

mis on vastuolus eeldusega, et $F(x,t) \leq 0$, kui $(x,t) \in G_T$.

Sellel on teoreem tõestatud.

Tõestatud tulemusest järeldub järgmine temaga samaväärne väide.

Järeldus (miinimumprintsip). Kui $F(x,t) \geq 0$ ja $c(x,t) \geq 0$ silindris G_T , siis ülesande (1) - (3) klassikalise lahendi jaoks kehtib hinnang

$$\min_{(x,t) \in \bar{G}_T} u(x,t) \geq \min [0, \min_{x \in \Omega} u_0(x), \min_{(x,t) \in \Sigma} \gamma(x,t)].$$

Väite põhjendamiseks arvestame, et kui u on ülesande (1) - (3) lahend, siis $-u$ rahuldab seoseid

$$\begin{aligned} \frac{\partial(-u)}{\partial t} &= -L(-u) - F(x,t), \\ -u(x,0) &= -u_0(x), \quad u|_{\Sigma} = -\gamma(x,t), \end{aligned}$$

kusjuures $-F(x,t) \leq 0$. Rakendades selle ülesande korral teoreemi 1 ja arvestades seost $\max[-f(x)] = -\min f(x)$, saamegi väidetud hinnangu.

3. Lahendi aprioorne hinnang. Maksimumprintsipi abil saab suhteliselt lihtsalt hinnata ülesande (1) - (3) lahendit. Olgu $u(x,t)$ ülesande (1) - (3) klassikaline lahend ja olgu $F \in C(\bar{G})$. Fikseerime $T > 0$ ja tähistame normid

$$\|u\|_{\bar{G}_T} = \max_{(x,t) \in \bar{G}_T} |u(x,t)|, \quad M = \|F\|_{\bar{G}_T},$$

$$M_0 = \|u_0\|_{\bar{\Omega}} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u_0(x)|, \quad M_1 = \|\gamma\|_{\Sigma_T} = \max_{(x,t) \in \Sigma_T} |\gamma(x,t)|.$$

Olgu esialgu $c(x,t) \geq 0$ silindris G_T . Tähistame

$$v = u - Mt.$$

Siis silindris G_T

$$v_t + Lv = u_t - M + Lu - cMt = F - M - cMt \leq 0.$$

Alg- ja rajatingimustest saame

$$v(x,0) = u(x,0) = u_0(x) < M_0, \text{ kui } x \in \bar{\Omega},$$

$$v|_{\Sigma_T} = \gamma - Mt < M_1.$$

Järelikult maksimumprintsibi põhjal

$$v(x,t) \leq \max(M_0, M_1)$$

ja

$$u(x,t) \leq \max(M_0, M_1) + MT, \text{ kui } (x,t) \in \bar{G}_T.$$

Võttes

$$v = u + Mt$$

saame analoogiliselt

$$v_t + Lv = F + M + cMt > 0,$$

$$v(x,0) = u_0(x) \geq -M_0,$$

$$v|_{\Sigma_T} = \gamma + Mt \geq -M_1$$

ning miinimumprintsibi põhjal

$$v(x,t) \geq \min(-M_0, -M_1) = -\max(M_0, M_1)$$

ja

$$u(x,t) \geq -\max(M_0, M_1) - MT, \text{ kui } (x,t) \in \bar{G}_T.$$

Nendest võrratustest järeldub apriorne hinnang

$$\max_{(x,t) \in \bar{G}_T} |u(x,t)| \leq \max(M_0, M_1) + MT$$

ehk

$$\|u\|_{\bar{G}_T} \leq \max(\|u_0\|_{\bar{\Omega}}, \|\gamma\|_{\Sigma_T}) + T\|F\|_{\bar{G}_T}. \quad (8)$$

Viimane hinnang on üldistatav ka juhule, kui tingimus $c(x,t) \geq 0$ pole täidetud. Sellisel juhul kasutame muutuja vahetust

$$u = ve^{\lambda t}, \text{ kus } \lambda = \text{const} \geq 0.$$

Asendades selle avaldise ülesandesse (1) - (3), saame v leidmiseks ülesande

$$v_t = -Lv - \lambda v + e^{-\lambda t} F,$$

$$v(x, 0) = u_0(x), \quad v|_{\Sigma} = e^{-\lambda t} \gamma.$$

Moodustatud võrrandis on v kordajaks $c + \lambda$. Valime $\lambda > 0$ nii, et

$$c(x, t) + \lambda \geq 0, \quad (x, t) \in G_T$$

ehk

$$\inf_{(x, t) \in G_T} c(x, t) \geq -\lambda. \quad (9)$$

Siis, rakendades v hindamiseks hinnangut (8), saame

$$\begin{aligned} \|u\|_{\bar{G}_T} &\leq e^{\lambda T} \|v\|_{\bar{G}_T} < \\ &\leq e^{\lambda T} [\max(\|u_0\|_{\bar{\Omega}}, \|\gamma\|_{\Sigma_T}) + T \|F\|_{\bar{G}_T}], \end{aligned}$$

millest järeldub

$$\|u\|_{\bar{G}_T} \leq e^{\lambda T} [\max(\|u_0\|_{\bar{\Omega}}, \|\gamma\|_{\Sigma_T}) + T \|F\|_{\bar{G}_T}]. \quad (10)$$

Sellega oleme tõestanud järgmise tulemuse.

Teoreem 2. Kui $F \in C(\bar{G}_T)$, siis ülesande (1) - (3) klassikalise lahendi u jaoks kehtib aprioorne hinnang (10), milles $\lambda > 0$ on määratud tingimusega (9).

4. Lahendi ainsus ja stabiilsus. Tuletatud aprioorse hinnangu abil on lihtsalt tõestatav vaadeldava ülesande lahendi ainsus ja stabiilsus.

Teoreem 3. Kui ülesandel (1) - (3) on olemas klassikaline lahend u ja $F \in C(\bar{G})$, siis artiklis 1 tehtud eeldustel see lahend on ainsus ja sõltub pidevalt algandmetest selles mõttes, et iga $T > 0$ puhul

$$\|u - \tilde{u}\|_{\bar{G}_T} \leq e^{\lambda T} [\max(\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{\bar{Q}}, \|\gamma - \tilde{\gamma}\|_{\Sigma_T}) + T\|F - \tilde{F}\|_{\bar{G}_T}],$$

kus konstant $\lambda > 0$ on määratud tingimusega (9) ning \tilde{u} on ülesande

$$\tilde{u}_t = -L\tilde{u} + \tilde{F}, \quad \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_0, \quad \tilde{u}|_{\Sigma} = \tilde{\gamma} \quad (11)$$

klassikaline lahend.

Tõestus. Kui oletada, et ülesandel (1) - (3) on kaks lahendit u ja u^* , siis nende vahe $u - u^*$ rahuldab seda ülesannet $F = 0$, $u_0 = 0$ ja $\gamma = 0$ korral, millest hinnangu (10) abil saame

$$\|u - u^*\|_{\bar{G}_T} = 0 \text{ iga } T > 0 \text{ korral.}$$

Järelikult $u^* = u$, s.t. ülesandel (1) - (3) ei saa olla kahte erinevat lahendit.

Kui u on ülesande (1) - (3) ja \tilde{u} ülesande (11) lahend, siis vahe $u - \tilde{u}$ rahuldab tingimusi

$$\begin{aligned} (u - \tilde{u})_t &= -L(u - \tilde{u}) + F - \tilde{F}, \\ u - \tilde{u}|_{t=0} &= u_0 - \tilde{u}_0, \quad u - \tilde{u}|_{\Sigma} = \gamma - \tilde{\gamma}, \end{aligned}$$

millest hinnangu (10) abil saamegi teoreemi sõnastuses väidetud stabiilsuse hinnangu.

5. Lahendi olemasolust. Ülesande (1) - (3) klassikalise lahendi olemasolu kindlustamiseks tuleb teha täiendavaid eeldusi võrrandi (1) kordajate ja piirkonna Ω rajapinna Γ sileduse kohta. Järgnevas sõnastame selle ülesande lahendi olemasoluteoreemi, eeldades võrrandi (1) kordajate ja vabaliikme kuulumist teatavatesse Hölderite ruumidesse ja rajapinna Γ kuulumist teatavasse Hölderite klassi.

Toome kõigepealt sisse vajalikud mõisted. Vaatleme n muutuja funktsiooni $v(x) = v(x_1, x_2, \dots, x_n)$, mis on määratud ja pidev kinnises tõkestatud piirkonnas $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$. Piirkonnas $\bar{\Omega}$ m korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulk $C^m(\bar{\Omega})$ moodustab Banachi ruumi, kui selles norm defineerida näiteks võrduse

$$\|v\|_{C^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_C$$

abil, kus $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$,

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{ja} \quad \|v\|_C = \max_{x \in \bar{\Omega}} |v(x)|.$$

Vaatleme piirkonnas $\bar{\Omega}$ pidevaid funktsioone v , mis selles piirkonnas rahuldavad Hölder tingimust^{*)}

$$|v(x) - v(y)| \leq H \|x - y\|^\beta$$

astendajaga $0 < \beta < 1$. Kõigi selliste funktsioonide hulk $C^\beta(\bar{\Omega})$ moodustab Banachi ruumi (vt. näit. [11], lk. 56), kui selles defineerida norm

$$\|v\|_{C^\beta} = \|v\|_C + \sup_{\substack{x, y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|v(x) - v(y)|}{\|x - y\|^\beta}.$$

Saadud ruumi nimetatakse Hölder ruumiks. Hölder ruum $C^{m+\beta}(\bar{\Omega})$ defineeritakse kui piirkonnas $\bar{\Omega}$ m korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulk, mille kõik m järku osatuletised rahuldavad Hölder tingimust astendajaga $0 < \beta < 1$. Kui ruumis $C^{m+\beta}(\bar{\Omega})$ defineerida norm

*) Siin ja järgnevas vektori norm

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

$$\|v\|_{C^{m+\beta}} = \|v\|_{C^m} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{C^\beta},$$

siis see ruum esutub Banachi ruumiks. Ilmselt

$$C^m(\bar{\Omega}) \supset C^{m+\beta}(\bar{\Omega}) \supset C^{m+1}(\bar{\Omega}).$$

Toome sisse vastavad sileduse nõuded ka piirkonna Ω rajapinna Γ kohta. Eeldame, et selle igas punktis eksisteerib üheselt määratud punitjatasand ja seega ka välisnormaal ν . Edasi eeldame, et leidub arv $Q > 0$ nii, et iga punkti $x \in \Gamma$ ümber kujundatud kera (raadiusega Q) sisemuses saab pinnal Γ esitada lokaalsetes ristkoordinaatides ühese funktsiooni

$$y_n = \omega(y_1, \dots, y_{n-1})$$

abil, kus y_n -telg on suunatud normaali ν sihis ning ülejäamad teljed asuvad punitjatasandis. Kui seejuures iga punkti $x \in \Gamma$ korral $\omega \in C^m$ või $\omega \in C^{m+\beta}$ seda punkti ümbriteevas kera raadiusega $\frac{Q}{2}$ ning vastavad normid on tõkestatud punktist x sõltumatu konstandiga, siis kõneldakse, et pind Γ kuulub vastavalt klassi C^m või $C^{m+\beta}$, kus $m > 1$ ja $0 < \beta < 1$. Pinda $\Gamma \in C^{1+\beta}$ nimetatakse ka Ljapunovi pinnaks. Ilmselt $C^1 \supset C^{1+\beta} \supset C^2$. Pinda, mis koosneb lõplikult arvust klassi C^1 kuuluvatest pindadest, nimetatakse tükati siledaks.

Sõnastame ülesande (1) - (3) lahendi olemasoluteoreemi, kusjuures lihtsuseks eeldame, et võrrandi kordajad a_{1j} , b_1 ja c ei sõltu muutujast t .

Teoreem 4. Eeldame, et võrrandi (1) kordajad rahuldavad tingimusi $a_{1j} = a_{j1} \in C^{1+\beta}(\bar{\Omega})$, $b_1 \in C^\beta(\bar{\Omega})$, $c \in C^\beta(\bar{\Omega})$ ($0 < \beta < 1$) ja ühtlase elliptilisuse nõuet

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)y_i y_j \geq a^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \text{ iga } x \in \Omega \text{ korral,}$$

kus konstant $a^2 > 0$. Kui $T > 0$ korral $F \in C^{\beta}(\bar{G}_T)$, $u_0 \in C(\bar{\Omega})$, $\gamma \in C(\Sigma_T)$, $u_0|_{\Gamma} = \gamma(x, 0)$ ning tõkestatud piirkonna Ω rajapiin $\Gamma \in C^{1+\beta}$, siis ülesandel (1) - (3) on silindris \bar{G}_T olemas klassikaline lahend.

Teoreemi tõestuse võib leida raamatust [9], ptk. 4, §16, kus vastav tulemus on sõnastatud ja tõestatud juhu jaoks, kus kordajad a_{ij} , b_i ja c võivad sõltuda ka muutujast t .

§15. Elliptilist tüüpi
võrrandi omaväärtusülesanne

1. Sobolevi ruumid. Matemaatilise füüsika ülesannete uurimisel kasutatakse nn. Sobolevi ruume $H^k(\Omega)$.

Olgu Ω lahtine piirkond n -mõõtmelises ruumis R^n . Defineerime

$$H^k(\Omega) = \{u: D^\alpha u \in \mathcal{L}_2(\Omega), |\alpha| \leq k\}, \quad k=0,1,\dots,$$

s. t. ruumi $H^k(\Omega)$ elementideks on integreeruva ruuduga funktsioonid, mille kõik üldistatud tuletised kuni järguni k on integreeruva ruuduga piirkonnas Ω .

Defineerime ruumis $H^k(\Omega)$ skalaarkorrutise

$$(u, v)_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v),$$

kus

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

on skalaarkorrutis ruumis $\mathcal{L}_2(\Omega)$. Vastavaks normiks on

$$\|u\|_{H^k} = \sqrt{(u, u)_{H^k}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{kus } \|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

Nii moodustatud Sobolevi ruum $H^k(\Omega)$ osutub Hilberti ruumiks. Tõepoolest, selles defineeritud skalaarkorrutis rahuldab skalaarkorrutise omadusi (veenduda selles!). Näitame, et ruum $H^k(\Omega)$ on täielik. Olgu u_m fundamentaaljada ruumis $H^k(\Omega)$, s. t. selline jada, mille korral $\|u_m - u_p\|_{H^k} \rightarrow 0$, kui $m, p \rightarrow \infty$. Siis $\|D^\alpha(u_m - u_p)\| \rightarrow 0$, kui $m, p \rightarrow \infty$ ja

$|\alpha| \leq k$, ning ruumi $\mathcal{L}_2(\Omega)$ täielikkuse tõttu

$u_m \xrightarrow{\mathcal{L}_2} u \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ ja $D^\alpha u_m \xrightarrow{\mathcal{L}_2} w^\alpha \in \mathcal{L}_2(\Omega)$, kui $|\alpha| \leq k$.

Funktsioon u_m määrab regulaarse distributsiooni

$$\langle u_m, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u_m(x) \varphi(x) dx, \text{ kus } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Kui $u_m \xrightarrow{\mathcal{L}_2} u$, siis iga $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ korral

$$|\langle u_m, \varphi \rangle - \langle u, \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} (u_m - u) \varphi dx \right| \leq \|u_m - u\| \|\varphi\| \rightarrow 0,$$

kui $m \rightarrow \infty$, s.t. $u_m \xrightarrow{\mathcal{D}} u$. Diferentseerimisoperaatori pide-

vuse tõttu ruumis \mathcal{D}' ka $D^\alpha u_m \xrightarrow{\mathcal{D}'} D^\alpha u$. Et $D^\alpha u_m \xrightarrow{\mathcal{D}'} w^\alpha$, kui

$|\alpha| \leq k$, siis $D^\alpha u = w^\alpha \in \mathcal{L}_2(\Omega)$, kui $|\alpha| \leq k$. Seega $u_m \xrightarrow{H^k} u \in H^k(\Omega)$, millega ruumi $H^k(\Omega)$ täielikkus on tõestatud.

Ruumi $H^k(\Omega)$ definitsioonist järeldub vahetult, et

$$\mathcal{L}_2(\Omega) = H^0(\Omega) \supset H^k(\Omega) \supset H^m(\Omega)$$

ja

$$\|u\| \leq \|u\|_{H^k} \leq \|u\|_{H^m},$$

kui $0 < k < m$.

Põhjalikult on uurinud ruumide $H^k(\Omega)$ omadusi ning näidanud nende rakendusi matemaatilise füüsika võrrandite teoorias S.L.Sobolev töös [15]. Oluline koht Sobolevi ruumide teoorias on nn. sisalduvusteoreemidel, mis näitavad, millal ruumi $H^k(\Omega)$ kuuluvad funktsioonid on pidevad ja omavad pidevaid osatuletisi kuni teatud järguni ning millal saab kõnelda nende jälgedest pindadel. Esitame järgnevas kaks sisalduvusteoreemi. Nende tõestamisel tuleb teha lisaeeldusi piirkonna Ω kohta.

Eeldame, et piirkond Ω on tõkestatud ja nn. koonuse

omadusega, s.t. et leidub kindla kõrgase ja tipunurgaga ringkoonus, mille tippu saab paigutada piirkonna Ω igasse rajapunkti nii, et koonuse sisemas asub piirkonnas Ω . Koonuse omadusega on näiteks iga kumer piirkond. Tehtud eeldustel on järgmised sisalduvusteoreemid tõestatud artiklis [5]. S.L.Sobolevi töös [15] on need tõestatud mõnevõrra rangematel eeldustel piirkonna Ω kohta.

Teoreem 1. Kui $u \in H^k(\Omega)$ ja $k > \frac{n}{2} + m$, siis funktsioon u (vajaduse korral muudetuna hulgal mõõduga null) kuulub ruumi $C^m(\bar{\Omega})$ ning leidub funktsioonist u mittesõltuv konstant M nii, et

$$\|u\|_{C^m} \leq M \|u\|_{H^k}.$$

Kui $k > \frac{n}{2} + m$, siis ruumis $H^k(\Omega)$ tõkestatud hulk on ruumis $C^m(\bar{\Omega})$ kompaktne.

Sõnastatud teoreemist näeme, et kui $k > \frac{n}{2}$, siis saab kõnelda funktsiooni $u \in H^k(\Omega)$ väärtustest kinnise piirkonna $\bar{\Omega}$ punktides. Teise sisalduvusteoreemi sõnastame selle kohta, millal saab kõnelda funktsiooni u jäljest s -mõõtmelisel küllalt siledal pinnal $\Gamma_s \subset \bar{\Omega}$.

Teoreem 2. Kui $u \in H^k(\Omega)$, $\Gamma_s \in C^k$, $\Gamma_s \subset \bar{\Omega}$ ja $s > n - 2k > 0$, siis u on määratud peaaegu kõikjal s -mõõtmelisel pinnal Γ_s ning leidub konstant M nii, et

$$\|u\|_{L_2(\Gamma_s)} = \left(\int_{\Gamma_s} u^2 d\Gamma_s \right)^{1/2} \leq M \|u\|_{H^k}.$$

Järgnevas kasutame selle teoreemi erijuhtu, et funktsioon $u \in H^1(\Omega)$ on määratud peaaegu kõikjal piirkonna

(n-1)-mõõtmelisel rajapinnal $\Gamma \in C^1$ või selle tükil.

Ülesanne 1. Olgu $u(x)$ selline lõigus $[0,1]$ pidev ühe muutuja funktsioon, mille tuletis $u' \in \mathcal{C}_2(0,1)$ ning mis rahuldab tingimust $u(0) = 0$. Näidata, et siis

$$\|u\|_C = \max_{0 < x < 1} |u(x)| \leq \sqrt{1} \|u'\| = \sqrt{1} \left(\int_0^1 |u'(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \sqrt{1} \|u'\|_{H^1}.$$

2. Sümmeetrilised diferentsiaaloperaatorid. Diferentsiaalavaldis ja rajatingimused määravad diferentsiaaloperaatori. Selgitame, kuidas avaldub diferentsiaaloperaatori kaasoperaator ning millal diferentsiaaloperaator on sümmeetriline.

Võtame kõigepealt vaatluse alla teist järku elliptilist tüüpi diferentsiaalavaldise

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu$$

tõkestatud piirkonnas Ω tükati sileda rajaga Γ . Diferentsiaalavaldise Lu kaasdiferentsiaalavaldise leidmisel on otsustavkohane Lu teisendada kujule

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) - \sum_{i=1}^n d_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu,$$

kus $d_i = b_i - \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}$. Eeldame, et Lu kordajad rahuldavad tingimusi $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $d_i \in C^1(\bar{\Omega})$, $c \in C(\bar{\Omega})$.

Teisendame skalaarkorrutist

$$(Lu, v) = \int_{\Omega} Lu \cdot v \, dx$$

eeldades, et $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$.

Seejuures kasutame ositi integreerimise valemit

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_1} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} g dx + \int_{\Gamma} fg \cos \hat{\nu} x_1 d\Gamma.$$

kus $\hat{\nu} x_1$ on nurk pinna Γ välisnormaali ja x_1 -telje positiivse suuna vahel. See valem kehtib iga $f, g \in C^1(\bar{\Omega})$ korral.

Märgime, et ositi integreerimise valem järeldab otseselt Gauss-Ostrogradski valemit

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x_1} = \int_{\Gamma} F \cos \hat{\nu} x_1 d\Gamma, \quad F \in C^1(\bar{\Omega}),$$

kui selles võtta $F = fg$.

Kasutades ositi integreerimise valemit, teisendame

$$\begin{aligned} (Lu, v) &= - \sum_{1, j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} (a_{1j} \frac{\partial u}{\partial x_j}) v dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} d_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \\ &+ \int_{\Omega} cuv dx = - \sum_{1, j=1}^n \int_{\Omega} a_{1j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_1} dx - \\ &- \sum_{1, j=1}^n \int_{\Gamma} a_{1j} \frac{\partial u}{\partial x_j} v \cos \hat{\nu} x_1 d\Gamma - \\ &- \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} d_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} cuv dx. \end{aligned}$$

Tähistame

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum_{1, j=1}^n a_{1j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos \hat{\nu} x_1$$

ja kasutame veel kord ositi integreerimise valemit:

$$\begin{aligned} (Lu, v) &= - \sum_{1, j=1}^n \int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{1j} \frac{\partial v}{\partial x_1}) dx - \int_{\Gamma} (v \frac{\partial u}{\partial \nu_A} - u \frac{\partial v}{\partial \nu_A}) d\Gamma + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial x_i} (d_i v) dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma} d_i uv \cos \hat{\nu} x_1 d\Gamma + \int_{\Omega} cuv dx. \end{aligned}$$

Saadud seose kirjutame kujul

$$(Lu, v) = (u, L^*v) - \int_{\Gamma} (v \frac{\partial u}{\partial \nu_A} - u \frac{\partial v}{\partial \nu_A}) d\Gamma -$$

$$- \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma} d_i u v \cos \hat{\nu} x_i d\Gamma,$$

kus

$$L^*u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (d_i u) + cu.$$

Diferentsiaalavaldist L^*u nimetatakse Lu kaudiferentsiaalavaldiseks. Kui $L^*u = Lu$, siis diferentsiaalavaldist Lu nimetatakse enesekaasneks. Et $a_{ij} = a_{ji}$, siis Lu on enesekaasne parajasti siis, kui

$$- \sum_{i=1}^n d_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (d_i u). \quad (1)$$

Viimane võrdus aga kehtib iga $u \in C^2(\bar{\Omega})$ korral parajasti siis, kui $d_i = 0$, $i=1,2,\dots,n$. Tõepoolest, kui $u = x_i$, siis võrdus (1) omandab kuju

$$- d_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (x_i d_i).$$

Lahendame selle võrrandi:

$$\frac{\partial d_i}{\partial x_i} = -2 \frac{d_i}{x_i},$$

$$d_i = \frac{C}{x_i^2}, \text{ kus } C = C(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Asetades võrdusse (1) viimase d_i avaldise ja $u = x_i^2$, saame

$$- \frac{C}{x_i^2} 2x_i = \frac{\partial}{\partial x_i} C = 0,$$

millest $C = 0$ ja $d_i = 0$.

Seega vaadeldav diferentsiaalavaldie on enesekaasne parajasti siis, kui ta avaldub kujul

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}) + cu. \quad (2)$$

Järgnevas vaatlemegi ainult selliseid diferentsiaalavaldisi.

Diferentsiaalavaldise (2) korral omadavad ülaltuletatud seadused kujul

$$(Lu, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + cuv \right) dx - \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \nu_A} d\Gamma, \quad (3)$$

$$(Lu, v) - (u, Lv) = - \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu_A} - u \frac{\partial v}{\partial \nu_A} \right) d\Gamma, \quad (4)$$

mida nimetatakse vastavalt I ja II Greeni valemiks.

Lisaks diferentsiaalavaldisele on matemaatilise füüsika ülesannete korral antud veel rajatingimused, mida peab rahuldama funktsioon u , näiteks $u|_{\Gamma} = 0$. Mõuame, et ka v rahuldaks testitud rajatingimusi nii, et kui u rahuldab lähterajatingimusi ja v neid rajatingimusi, et siis pindintegraal II Greeni valemis võrduks nulliga. Nii funktsioonile v seatud rajatingimusi nimetatakse lähterajatingimuste kaasrajatingimusteks diferentsiaalavaldise L korral. Juhul, kui kaasrajatingimusteks sobivad lähterajatingimused, siis vastavaid rajatingimusi nimetatakse enesekaaseteks.

Teisest Greeni valemist (4) näeme, et enesekaasete diferentsiaalavaldise (2) korral on enesekaaseteks rajatingimusteks

- 1) esimest liiki ehk Dirichlet' rajatingimus $u|_{\Gamma} = 0$,
- 2) teist liiki ehk Neumanni rajatingimus $\frac{\partial u}{\partial \nu_A} |_{\Gamma} = 0$,
- 3) kolmandat liiki rajatingimus $\frac{\partial u}{\partial \nu_A} + \alpha u |_{\Gamma} = 0$,

kus $\alpha(x)$ on rajal Γ pidev funktsioon.

Tõepoolest, näiteks viimasel juhul, kui

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} + \alpha u|_{\Gamma} = 0 \text{ ja } \frac{\partial v}{\partial \nu_A} + \alpha v|_{\Gamma} = 0,$$

siis

$$v \frac{\partial u}{\partial \nu_A} - u \frac{\partial v}{\partial \nu_A} |_{\Gamma} = -\alpha v u + \alpha u v |_{\Gamma} = 0.$$

Diferentsiaalavaldise (2) oluliseks erijuhuks on diferentsiaalavaldis

$$Lu = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + cu,$$

mille saame võttes $a_{11} = p$ ja $a_{1j} = 0$, kui $i \neq j$. Eeldame, et $p(x) > 0$, kui $x \in \bar{\Omega}$. Vaadeldaval juhul

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = p \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos \widehat{\nu} x_i = p \frac{\partial u}{\partial \nu},$$

kus $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ on tuletis pinna Γ välisnormaali suunas. Seega teist ja kolmandat liiki rajatingimused saab kirjutada vastavalt kujul

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} |_{\Gamma} = 0 \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\alpha}{p} u |_{\Gamma} = 0.$$

Diferentsiaaloperaatori defineerime diferentsiaalavaldise ja rajatingimuste abil. Diferentsiaaloperaatori määramispiirkonda $M(L)$ loeme kuuluvaks küllalt eiledad funktsioonid, mis rahuldavad vaadeldava ülesande rajatingimusi. Näiteks Dirichlet' rajatingimuse korral võime määramispiirkonnaks võtta

$$M(L) = \{ u: u \in C^2(\bar{\Omega}), u|_{\Gamma} = 0 \}.$$

Vastavuse korraldame aga diferentsiaalavaldise abil, seades igale funktsioonile $u \in M(L)$ vastavusse funktsiooni Lu . Seetõttu kasutame ka vastava diferentsiaaloperaatori tähistamiseks sümboolit L . Teise Greeni valemi põhjal rahuldab nii

defineeritud diferentsiaaloperaator seost

$$(Lu, v) = (u, Lv), \text{ kui } u, v \in M(L),$$

s.t. on sümmeetriline operaator. Enesekaasne diferentsiaalavaldis koos enesekaasete rajatingimustega määravad sümmeetrilise, kuid üldiselt veel mitte enesekaasne diferentsiaaloperaatori. Enesekaasne diferentsiaaloperaatorini võib jõuda alles operaatori määramispiirkonna laiendamise teel lisades sellele teatavasse Sobolevi ruumi kuuluvaid funktsioone, mis on rajaülesannete üldistatud lahenditeks.

Ka rajaülesande klassikalise lahendi käsitlemisel on sageli otstarbekohane diferentsiaaloperaatori määramispiirkonda laiendada nõudes sellesse kuuluvatelt funktsioonidelt väiksemat siledust rajapinnal Γ . Näiteks Greeni valemid kehtivad ka siis, kui $u, v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Sellel juhul saab neid valemid põhjendada järgmisel teel. Võtame tükati sileda rajaga piirkonna Ω' , mille sulund $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Siis $u, v \in C^2(\bar{\Omega}')$ ning Greeni valemid kehtivad piirkonnas Ω' . Piirprotsessi $\Omega' \rightarrow \Omega$ abil saame põhjendada I Greeni valemi piirkonna Ω jaoks, sest $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ korral on valemi paremal poolel olemas piirväärtus. Järelikult eksisteerib ka selle võrduse vasemal poolel esinev integraal kui päratu integraal. Teine Greeni valem järeldub lihtsalt esimesest. Seetõttu diferentsiaalavaldis (2) määrab sümmeetrilise diferentsiaaloperaatori ka siis, kui selle määramispiirkonnaks lugeda

$$M(L) = \left\{ u: u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial \nu_A} + \alpha u \Big|_{\Gamma} = 0 \right\}.$$

Dirichlet' rajatingimuse korral saame sümmeetrilise diferent-

siaaloperaatori ka siis, kui määramispiirkonnaks võtta

$$M(L) = \{u: u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \cap H^1(\Omega), u|_{\Gamma} = 0\}.$$

3. Diferentsiaaloperaatori omaväärtused ja omafunktsioonid. Vaatleme operaatori L omaväärtusülesannet. Operaatori L omaväärtusteks nimetatakse parameetri λ selliseid väärtusi, mille korral võrrandil

$$Lu = \lambda u$$

on olemas mittetriviaalseid lahendeid. Vastavaid mittetriviaalseid lahendeid nimetatakse operaatori L omafunktsioonideks.

Omaväärtusülesannet on üldiselt loomulik vaadelda komplekssete suuruste vallas. Komplekssete väärtustega funktsioonide korral defineeritakse ruumis $\mathcal{L}_2(\Omega)$ skalaarkorrutis avaldisega

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx,$$

kus $\overline{v(x)}$ on suuruse $v(x)$ kaaskompleks. Selle skalaarkorrutise omadused on üldiselt samad, mis skalaarkorrutisel reaalses ruumis $\mathcal{L}_2(\Omega)$, ainult kommutatiivsus asendub omadusega

$$(u, v) = \overline{(v, u)}.$$

Ka kompleksses ruumis nimetatakse operaatorit sümmeetriliseks siis, kui

$$(Lu, v) = (u, Lv) \text{ iga } u, v \in M(L) \text{ korral.}$$

Sümmeetrilise operaatori omaväärtustel ja omafunktsioonidel on rida huvitavaid omadusi.

Lemma 1. Sümmeetrilise operaatori omaväärtused on reaalsed.

Tõestus. Olgu λ_k sümmeetrilise operaatori L omaväärtus ja u_k temale vastav omafunktsioon, s.t.

$$Lu_k = \lambda_k u_k, \quad u_k \neq 0.$$

Korrutades seda võrdust skalaarselt funktsiooniga u_k , saame

$$(Lu_k, u_k) = \lambda_k (u_k, u_k),$$

millest

$$\lambda_k = \frac{(Lu_k, u_k)}{(u_k, u_k)}. \quad (5)$$

Viimase võrduse parem pool on aga reaalne, sest $(u_k, u_k) > 0$ ja

$$(Lu_k, u_k) = (u_k, Lu_k) = \overline{(Lu_k, u_k)}.$$

Sellega on lemma tõestatud.

Reaalsete kordajatega diferentsiaalavaldise (2) korral on Lu reaalne iga reaalse u korral. Sellisel juhul võib ka sümmeetrilise operaatori omafunktsioonid lugeda reaalisteks. Tõepoolest olgu omaväärtusele λ_k vastavaks omafunktsiooniks $u_k = v_k + i w_k$, kus v_k ja w_k on reaalsed ja i imaginaarühik. Siis

$$Lv_k + iLw_k = \lambda_k v_k + i \lambda_k w_k;$$

millest näeme, et omaväärtusele λ_k vastavad ka reaalsed omafunktsioonid v_k ja w_k . Neid tulemusi arvestades võib reaalsete kordajatega sümmeetrilise diferentsiaaloperaatori omaväärtusülesande käsitlemisel piirduda ainult reaalsete suurustega, mida järgnevas ka teeme.

Lemma 2. Sümmeetrilise operaatori erinevatele omaväärtustele vastavad omafunktsioonid on ortogonaalsed.

Tõestus. Olgu λ_k ja λ_j sümmeetrilise operaatori L erinevad omaväärtused ning u_k ja u_j neile vastavad omafunktsioonid, s.t.

$$Lu_k = \lambda_k u_k, \quad Lu_j = \lambda_j u_j.$$

Korrutame esimese võrduse paremalt funktsiooniga u_j ja teise vasakult funktsiooniga u_k :

$$(Lu_k, u_j) = \lambda_k (u_k, u_j), \quad (u_k, Lu_j) = \lambda_j (u_k, u_j).$$

Lahutades esimesest võrdusest teise, saame operaatori L sümmeetrilisuse tõttu

$$0 = (\lambda_k - \lambda_j)(u_k, u_j).$$

Et $\lambda_k \neq \lambda_j$, siis $(u_k, u_j) = 0$, mida oligi tarvis tõestada.

Kui omaväärtusele vastab mitu lineaarselt sõltumatut omafunktsiooni, siis saab neid ortogonaliseerida. Seega alati võime lugeda, et sümmeetrilise operaatori omafunktsioonid moodustavad ortonormeeritud süsteemi, s.t. rahuldavad tingimust

$$(u_k, u_j) = \begin{cases} 1, & \text{kui } k = j, \\ 0, & \text{kui } k \neq j. \end{cases}$$

Kõik need tulemused on rakendatavad reaalsete kordajatega diferentsiaalavaldise (2) abil määratud sümmeetrilise diferentsiaaloperaatori L korral. Tõepoolest, Greeni valemite põhjal on selline diferentsiaaloperaator sümmeetriline ka kompleksses ruumis $\mathcal{L}_2(\Omega)$.

Selgitame veel, millal sümmeetrilise diferentsiaaloperaatori kõik omaväärtused on positiivsed.

Eeldame, et piirkonnas Ω $c(x) \geq 0$ ning diferentsiaal-

avaldis (2) on ühtlaselt elliptiline, s.t. et leidub konstant $a^2 > 0$, et

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) y_i y_j \geq a^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \text{ iga reaalse } y_i \text{ korral,}$$

ning et rajatingimuses $\alpha(x) \geq 0$ rajal Γ . Siis I Greeni valemi (3) põhjal

$$\begin{aligned} (Lu, u) &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu^2 \right) dx - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial \nu_A} d\Gamma \geq \\ &\geq a^2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial \nu_A} d\Gamma \geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

iga reaalse funktsiooni $u \in M(L)$ korral nii esimest, teist kui ka kolmandat liiki rajatingimuse juhul. Tõepoolest, esimest ja teist liiki rajatingimuse puhul pindintegraal võrdub nulliga, kolmandat liiki rajatingimuse korral aga

$$- \int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial \nu_A} d\Gamma = \int_{\Gamma} \alpha u^2 d\Gamma \geq 0.$$

Operaatorit L nimetatakse positiivseks, kui

$$(Lu, u) \geq 0 \text{ iga } u \in M(L) \text{ korral.}$$

Seega tehtud eeldustel on diferentsiaaloperaator L positiivne. Valemi (5) põhjal sümmeetrilise positiivse operaatori kõik omaväärtused on mittenegatiivsed.

Selgitame, millal $\lambda_0 = 0$ on operaatori L omaväärtuseks. Olgu u_0 temale vastav normeeritud omafunktsioon. Siis seose (5) põhjal

$$\lambda_0 = (Lu_0, u_0) = 0.$$

Seostest (6) järeldub, et sellisel juhul

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_i} = 0, \quad i=1, 2, \dots, n$$

ning seega $u_0(x) = \text{const}$. Dirichlet rajatingimuse korral $u_0|_{\Gamma} = 0$, millest $u_0(x) = 0$. Ka kolmandast rajatingimusest saame, et $u_0(x) = 0$, kui $\alpha(x) \neq 0$. Sellistel juhtudel $\lambda_0 = 0$ ei ole operaatore L omaväärtuseks. Neumanni rajatingimuse korral saame seostest (6)

$$\lambda_0 = (Lu_0, u_0) = \int_{\Omega} cu_0^2 dx = 0,$$

mistõttu $\lambda_0 = 0$ saab olla operaatore L omaväärtuseks ainult siis, kui $c(x) \equiv 0$. Vahetult saab kontrollida, et Neumanni rajatingimuse ja $c(x) \equiv 0$ korral on $\lambda_0 = 0$ operaatore L omaväärtuseks ning talle vastab omafunktsioon $u_0(x) = \text{const} \neq 0$. Kokkuvõttes võib väita, et $\lambda_0 = 0$ on tehtud eeldustel operaatore L omaväärtuseks parajasti siis, kui $c(x) \equiv 0$ ning operatoor on määratud Neumanni rajatingimuse abil. Järgnevas eeldame lihtsuseks, et $\lambda_0 = 0$ ei ole operaatore L omaväärtuseks, s.t. et ei ole tegemist mainitud juhuga.

Kerkib küsimus omaväärtuste olemasolust ja omafunktsioonide süsteemi täielikkusest. Sõnastame selle kohta teoreemi 3 küllaltki üldise tulemuse, mille tõestuse võib leida tööst [7]. See tulemus on kasutatav vägagi üldise piirkonna Ω korral. Eeldatakse vaid, et piirkond Ω on regulaarne, s.t. et Laplace'i võrrandi Dirichlet' ülesandel

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \quad u|_{\Gamma} = \gamma$$

on iga $\gamma \in C(\Gamma)$ korral olemas klassikaline lahend $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Regulaarseks piirkonnaks on kahemõõtmelisel juhul iga sirgestuva kõveraga piiratud tõkestatud

piirkond, kolme- ja enamanoõtmelisel juhul aga iga piirkond, mille rajapinda saab väljastpoolt puudutada kindla ringkõnnuse tipuga nii, et koonus jääb väljapoole piirkonnast Ω (vt. näit. [13], lk. 324-325). Näiteks iga kumer lahtine piirkond on regulaarne.

Teoreem 3. Eeldame, et piirkond Ω on regulaarne ning valemiga (2) antud diferentsiaalavaldis Lu ühtlaselt elliptiline lahtises piirkonnas $\Omega' \supset \bar{\Omega}$ ja

$$a_{1j} = a_{j1} \in C^{1+\beta}(\bar{\Omega}'), \quad c \in C^\beta(\bar{\Omega}') \quad (0 < \beta < 1),$$

$c(x) \geq 0$, kui $x \in \bar{\Omega}'$. Siis omaväärtusülesandel

$$Lu = \lambda u, \quad x \in \Omega, \quad u|_\Gamma = 0$$

on elemas loenduv hulk positiivseid omaväärtusi λ_k ($k = 1, 2, \dots$), millel pole lõplikku kuhjumispunkti (siis $\lambda_k \rightarrow \infty$) ja millele vastavad omafunktsioonid $u_k \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ võib lugeda reaalsseteks ja ortonormeerituteks.

Omafunktsioonid moodustavad ruumis $\mathcal{L}_2(\Omega)$ täieliku süsteemi, s.t. iga funktsioon $v \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ on esitatav Fourier' reaabil

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} (v, u_k) u_k,$$

mis koondub ruumis $\mathcal{L}_2(\Omega)$.

Märkus 1. Kui $\Gamma \in C^{1+\beta}$, siis võib teoreemi tingimustes piirkonna Ω' asendada piirkonnaga Ω .

Märkus 2. Teoreem 3 jääb kehtima ka kolmandat liiki rajatingimuse

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} + \alpha u|_\Gamma = 0$$

korral, kui $\Gamma \in C^{1+\beta}$ ning $\alpha(x)$ on rajapinnal Γ pidev ja mittenegatiivne. Sellisel juhul omafunktsioonid $u_k \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Ülesanne 2. Tõestada, et kompleksses Hilberti ruumis positiivne operaator on sümmeetriline.

§16. Hüperboolset tüüpi võrrandi segaülesanne

1. Ülesande klassikaline esade. Vaatleme hüperboolset tüüpi võrrandi segaülesannet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Lu + F(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (1)$$

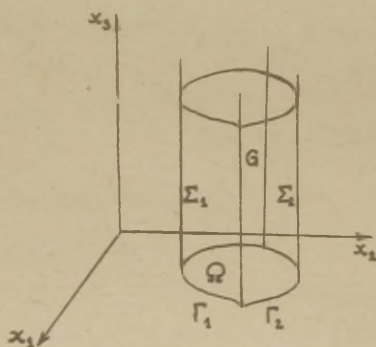
$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$u|_{\Sigma_1} = 0 \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u|_{\Sigma_2} = 0, \quad (3)$$

kus

$$Lu = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + cu$$

ning Ω on n -mõõtmelise ruumi tõkestatud lahtine piirkond



Joonis 6.

tükati sileda rajaga $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (Γ_1 ja Γ_2 on ühisosata $(n-1)$ -mõõtmelised pinnad, kusjuures Γ_1 või Γ_2 võib ka ühida rajaga Γ), $G = \Omega \times (0, +\infty)$, $\Sigma_k = \Gamma_k \times [0, +\infty)$ ($k=1, 2$) ja $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ on tuletis pinna Σ_2 välisnormaali suunas. Selles paragrahvis

eseldame, et funktsioonid p , c ja α ei sõltu muutujast t ning rahuldavad tingimusi

$$p \in C^1(\bar{\Omega}), \quad c \in C(\bar{\Omega}), \quad p(x) > 0, \quad c(x) \geq 0, \quad \text{kui } x \in \bar{\Omega}, \\ \alpha \in C(\Gamma_2), \quad \alpha(x) \geq 0, \quad \text{kui } x \in \Gamma_2.$$

Ülesande (1)-(3) klassikaliseks lahendiks nimetatakse $n+1$ muutuja funktsiooni $u \in C^1(\bar{G}) \cap C^2(G)$, mis silindris G rahuldab võrrandit (1), selle põhjal algtingimusi (2) ja külgpinnal rajatingimusi (3).

Kui sellel ülesandel eksisteerib klassikaline lahend, siis

$$F \in C(G), \quad u_0 \in C^1(\bar{\Omega}), \quad u_1 \in C(\bar{\Omega})$$

ja

$$u_0|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \alpha u_0|_{\Gamma_2} = 0.$$

Asume käsitlema ülesande korrektsusega seotud küsimusi. Vaadeldava ülesande korral pole rakendatav maksimumprintsip. Seetõttu tuleb lahendi aprioorsed hinnangud nn. energiateegraali abil. Märgime, et energiateegraali kasutatakse ka parabolset tüüpi võrrandi segaülesande uurimisel, eriti juhul, kui on tegemist teist või kolmandat liiki rajatingimusega.

Märkus. Rakendustes esineb segaülesandeid, milles võrrandi (1) asemel on üldisem võrrand

$$\rho(x)u_{tt} = -Lu + F(x,t),$$

kus $\rho(x)$ on antud positiivne funktsioon. Selles paragrahvis esitatud tulemused on üldistatavad ka selliste ülesannete juhuks (vt. näit. [4], §33).

2. Energiaintegraal. Olgu $u(x, t)$ ülesande (1)-(3) klassikaline lahend. Selle ülesande energiaintegraaliks nimetatakse suurust

$$J^2(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + p \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + cu^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} p \alpha u^2 d\Gamma.$$

Nimetus energiaintegraal tuleneb sellest, et füüsikalistes interpretatsioonides see suurus võrdub võnkuva süsteemi kiineetilise ja potentsiaalse energia summaga.

Tuletame järgnevas avaldise $J^2(t)$ jaoks, mis erijuhul, kui $F \equiv 0$ taandub seosele $J^2(t) = J^2(0)$ ning füüsikalistes interpretatsioonides väljendab võnkuva süsteemi koguenergia jäävust välisjõudude puudumisel.

Paneme tähele, et esimest ja teist liiki rajatingimuse korral pindintegraal energiaintegraali avaldises puudub (võrdub nulliga).

Teoreem 1. Kui u on ülesande (1)-(3) klassikaline lahend ja $F \in C(\bar{G})$, siis kehtib seos

$$J^2(t) = J^2(0) + \int_0^t \int_{\Omega} F(x, \tau) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} dx d\tau, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

kus

$$J^2(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[u_0^2 + p \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right)^2 + cu_0^2 \right] + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} p \alpha u_0^2 d\Gamma.$$

Tõestus. Valime konstandid T ja ε ning piirkonna Ω' tükati sileda rajaga Γ' nii, et $T > \varepsilon > 0$ ja $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Moodustame silindri $G_T' = \Omega' \times (\varepsilon, T]$. Siis $u \in C^2(\bar{G}_T')$ ning on õigustatud järgnevad teisendused.

Korrutame võrduse (1) funktsiooniga $\frac{\partial u}{\partial t}$ ja integreerime

üle silindri G_T^* :

$$\int_{\varepsilon}^T \int_{\Omega'} \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \int_{\varepsilon}^T \int_{\Omega'} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu \right) \frac{\partial u}{\partial t} dx dt.$$

Teisendame viimase võrduse paremat poolt, kasutades I Greeni valemit (3) eelmisest paragrahvist (vaadeldaval juhul $\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = p \frac{\partial u}{\partial \nu}$)

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^T \int_{\Omega'} \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt &= \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^T \int_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_{\varepsilon}^T \int_{\Omega'} \left[p \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \right. \\ &+ \left. q \frac{\partial u}{\partial t} u \right] dx dt - \int_{\varepsilon}^T \int_{\Gamma'} p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma' = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \Big|_{t=\varepsilon}^T dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \int_{\varepsilon}^T \frac{\partial}{\partial t} \left[p \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. q u^2 \right] dt dx - \int_{\varepsilon}^T \int_{\Gamma'} p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma' = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega'} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + p \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + q u^2 \right] \Big|_{t=\varepsilon}^T dx - \\ &- \int_{\varepsilon}^T \int_{\Gamma'} p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma' dt. \end{aligned}$$

Et $u \in C^1(\bar{G})$, siis saame teostada piirprotsessi $\varepsilon \rightarrow 0$, $\Omega' \rightarrow \Omega$, mille abil jõuame seoseni

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial t} dx dt &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + p \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + q u^2 \right] \Big|_{t=0}^T dx - \\ &- \int_0^T \int_{\Gamma} p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma dt. \end{aligned}$$

Rajatingimuse (3) abil teisendame viimast integraali:

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Gamma} p \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma dt &= \int_{\Gamma_2} \int_0^T p \alpha \frac{\partial u}{\partial t} u dt d\Gamma = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} \int_0^T p \alpha \frac{\partial u^2}{\partial t} dt d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} p \alpha u^2 \Big|_{t=0}^T d\Gamma. \end{aligned}$$

Nii saame seose

$$\int_0^T \int_{\Omega} F \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = J^2(T) - J^2(0),$$

nie peale T asendamist suurusega t on identne teoreemi väit-
tega (4).

3. Lahendi aprioersed hinnangud. Olgu u ülesande (1)-
(3) klassikaline lahend ja $F \in C(\bar{G})$. Teoreemis 1 tõestatud
seose abil energiantegraali kohta tuletame aprioersed hin-
nangud selle ülesande lahendi jaoks. Kasutame skalaarkorrut-
tist ruumis $\mathcal{L}_2(\Omega)$

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x, t)v(x, t) dx$$

ja vastavat normi

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \left(\int_{\Omega} u^2(x, t) dx \right)^{1/2}.$$

Paneme tähele, et juhul, kui u ja v sõltuvad ka muutujast t ,
siis skalaarkorrutis ja norm on selle muutuja funktsioonid.

Järgnevas loeme, et $t \geq 0$.

Energiantegraali avaldist arvestades

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \leq 2J^2(t)$$

ehk

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \leq \sqrt{2} J(t).$$

Diferentseerides võrdust (4) saame Cauchy-Bunjakovski võrra-
tuse abil

$$2J(t)J'(t) = \int_{\Omega} F \frac{\partial u}{\partial t} dx \leq \|F\| \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \leq \sqrt{2} \|F\| J(t),$$

millest järeldub, et

$$J'(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|F\|.$$

Tõepoolest, kui $J(t) > 0$, siis võime eelmised võrratused lä-
bi jagada suurusega $2J(t)$. Kui mingil lõigul $J(t) \equiv 0$, siis
sellel lõigul ka $J'(t) \equiv 0$ ning võrratus on ilmselt õige.

Kui aga $J(t) = 0$ mingis isoleeritud punktis, siis võime selle võrratuse põhjendamiseel kasutada võrratuse mõlemata poolte pidevust.

Integreerime tuletatud võrratust:

$$\int_0^t J^+(\tau) d\tau \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \|F(x, \tau)\| d\tau,$$

millest

$$J(t) \leq J(0) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \|F\| d\tau.$$

Olgu $p(x) \geq p_0 > 0$, kui $x \in \bar{\Omega}$. Siis energiantegraali avaldist arvestades saame hinnangud lahendi tuletiste jaoks

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \leq \sqrt{2} J(0) + \int_0^t \|F\| d\tau, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 \leq \frac{2}{p_0} J(0) + \frac{1}{p_0} \int_0^t \|F\| d\tau. \quad (6)$$

Lahendi u normi hindamiseks diferentseerime võrdust

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} u^2(x, t) dx$$

ja kasutame Cauchy-Bunjakovski võrratust:

$$2\|u\| \frac{d}{dt} \|u\| = 2 \int_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial t} dx \leq 2\|u\| \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|.$$

Hinnangu (5) abil saame

$$\frac{d}{dt} \|u\| \leq \sqrt{2} J(0) + \int_0^t \|F\| d\tau.$$

Integreerime viimast võrratust ja seejärel muudame integreerimise järjskorda kahekordses integraalis:

$$\begin{aligned} \|u(x, t)\| - \|u(x, 0)\| &\leq \sqrt{2} J(0)t + \int_0^t \int_0^s \|F(x, \tau)\| d\tau ds = \\ &= \sqrt{2} J(0)t + \int_0^t \|F(x, \tau)\| \int_{\tau}^t ds d\tau. \end{aligned}$$

Mii saame hinnangu

$$\|u\| \leq \|u_0\| + \sqrt{2} J(0)t + \int_0^t (t-\tau) \|F(x, \tau)\| d\tau. \quad (7)$$

Hinnangud (5) - (7) on ülesande (1) - (3) lahendi ja selle tuletiste aprioorsed hinnangud, sest $J(0)$ avaldub selles ülesandes antud funktsioonide kaudu. Nendest hinnangutest järeldub ka hinnang normi

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|^2 + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2)^{1/2}$$

jaoks. Et § 15 sõnastatud teoreemi 2 põhjal *)

$$\left(\int_{\Gamma} p \alpha u_0^2 d\Gamma \right)^{1/2} \leq M \|u_0\|_{H^1},$$

siis

$$\begin{aligned} \sqrt{2} J(0) &= \left[\int_{\Omega} [u_1^2 + p \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right)^2 + cu_0^2] dx + \int_{\Gamma} p \alpha u_0^2 d\Gamma \right]^{1/2} \leq \\ &\leq C (\|u_0\|_{H^1}^2 + \|u_1\|^2)^{1/2} \leq C (\|u_0\|_{H^1} + \|u_1\|). \end{aligned}$$

Seega võrratusest (5) järeldub hinnang

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \leq C_1 (\|u_0\|_{H^1} + \|u_1\| + T \max_{0 \leq t \leq T} \|F\|) \quad (8)$$

ning võrratustest (6) ja (7) hinnang

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{H^1} \leq C_2 (1+T) (\|u_0\|_{H^1} + \|u_1\| + T \max_{0 \leq t \leq T} \|F\|), \quad (9)$$

kus konstandid C_1 ja C_2 ei sõltu ei suurusest T ega funktsioonidest u_0 , u_1 ja F .

*) Selle teoreemi kasutamisel tuleb eeldada, et piirkond Ω on koonuse omadusega. Esimest ja teist liiki rajaingimuse korral pindintegraal võrdub nulliga ning nimetatud teoreemi pole vaja rakendada.

Ülesanne 1. Tõestada, et mistahes positiivsete arvude a, b ja ε korral kehtib võrratus

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2.$$

Ülesanne 2. Tuletada ülesande

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (p \frac{\partial u}{\partial x_i}) - cu + F(x, t), \quad (x, t) \in G,$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad u|_{\Sigma_1} = 0 \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial \nu} + au|_{\Sigma_2} = 0$$

klassikalise lahendi jaoks aprioorne hinnang

$$\|u(x, t)\|^2 \leq 2\|u_0\|^2 + 4t \int_0^t \|F(x, \tau)\|^2 d\tau,$$

kui $t > 0$ ning on rahuldatud artiklites 1 ja 3 tehtud eeldused. (Selleks kõigepealt korrutada võrrand lahendiga u ning seejärel integreerida üle silindri $G_T = \Omega \times (0, T]$.)

4. Lahendi ainsus ja stabiilsus. Tuletatud aprioorsest hinnangutest järeldub järgmine tulemus klassikalise lahendi ainsuse ja stabiilsuse kohta.

Teoreem 2. Kui ülesandel (1) - (3) on olemas klassikaline lahend u ja $F \in C(\bar{G})$, siis artiklis 1 tehtud eeldustel see lahend on ainus ja sõltub pidevalt algandmetest selles mõttes, et iga $T > 0$ korral

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u - \tilde{u}\|_{H^1} &\leq C_2(1+T)(\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^1} + \|u_1 - \tilde{u}_1\| + \\ &+ T \max_{0 \leq t \leq T} \|F - \tilde{F}\|), \end{aligned}$$

kus C_2 on konstant ja \tilde{u} ülesande

$$\tilde{u}_{tt} = -L\tilde{u} + \tilde{F}, \quad \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_0, \quad \tilde{u}_t|_{t=0} = \tilde{u}_1 \quad (10)$$

klassikaline lahend rajatingimustel (3).

Tõestus. Kui oletada, et ülesandel (1) - (3) on kaks klassikalist lahendit u ja u^* , siis nende vahe rahuldab seda ülesannet $F = 0$, $u_0 = u_1 = 0$ korral, millest hinnangu (9) abil saame $\|u - u^*\|_{H_1} = 0$, kui $t > 0$. Järelikult $u^* = u$, s.t. ülesandel (1) - (3) ei saa olla kahte erinevat lahendit.

Kui u on ülesande (1) - (3) ja \tilde{u} ülesande (10), (3) klassikaline lahend, siis vahe $u - \tilde{u}$ rahuldab tingimisi $(u - \tilde{u})_{tt} = -L(u - \tilde{u}) + F - \tilde{F}$, $u - \tilde{u} \Big|_{t=0} = u_0 - \tilde{u}_0$, $(u - \tilde{u})_t \Big|_{t=0} = u_1 - \tilde{u}_1$ ja rajatingimusi (3). Rakendades viimase ülesande korral hinnangut (9), saamegi teoreemi sõnastuse väidetud stabiilsuse hinnangu.

5. Üldistatud lahend. Märksa komplitseeritum on ülesande (1) - (3) lahendi olemasolu tõestus. Üheks teeks lahendi olemasolu tõestamisel on näidata, et Fourier' meetodiga saadud formaalne lahend osutub tegelikult lahendiks. Sellega ühtlasi tõestatakse ka Fourier' meetodi koonduvus. Lahendi olemasolu tõestust saab lihtsustada, kui lahendi mõistet sobivalt üldistada. Lahendi mõiste üldistamisel tugine me aprioorsele hinnangule (9). Vastavalt sellele kasutame lieaks eespool sissetoodud ruumidele veel järgmisi Banachi ruume.

Vaatleme $n+1$ muutuja funktsioone $u(x,t)$, mis iga fikseeritud $t \in [0, T]$ korral kuuluvad ruumi $\mathcal{L}_2(\Omega)$ ning on lõigus $[0, T]$ muutuja t suhtes pidevad ruumis $\mathcal{L}_2(\mathcal{B}\Omega)$, s.t. mille korral

$$\|u(x, t') - u(x, t)\| \rightarrow 0, \text{ kui } t' \rightarrow t, \quad t, t' \in [0, T].$$

Tähistame sümbooliga $C(0, T; \mathcal{L}_2)$ kõigi selliste funktsioonide hulga. Võrratusest

$$|\|u(x, t')\| - \|u(x, t)\|| \leq \|u(x, t') - u(x, t)\|$$

järeldub, et kui $u \in C(0, T; \mathcal{L}_2)$, siis norm $\|u(x, t)\|$ on muutuja t pidev funktsioon lõigus $[0, T]$. Defineerime ruumis $C(0, T; \mathcal{L}_2)$ normi

$$\|u\|_{C(0, T; \mathcal{L}_2)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|.$$

Lihtne on veenduda, et see rahuldab normi omadusi. Raske pole ka tõestada, et saame täieliku normeeritud ruumi (vt. [4], lk. 491), s.t. Banachi ruumi.

Analoogiliselt loeme ruumi $C(0, T; H^1)$ kuuluvaks kõik funktsioonid $u(x, t)$, mis fikseeritud $t \in [0, T]$ korral kuuluvad ruumi $H^1(\Omega)$ ning on lõigus $[0, T]$ muutuja t suhtes pidevad ruumis $H^1(\Omega)$, s.t. mille korral

$$\|u(x, t') - u(x, t)\|_{H^1} \rightarrow 0, \text{ kui } t' \rightarrow t, \quad t, t' \in [0, T].$$

Defineerides selles ruumis normi

$$\|u\|_{C(0, T; H^1)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{H^1}$$

saame Banachi ruumi.

Defineerime ülesande (1) - (3) üldistatud lahendi järgmisel viisil. Oletame, et eksisteerivad sellised jadad

$$F_k \in C(\bar{G}), \quad u_{0k} \in C(\bar{\Omega}_D) \cap H^1(\Omega) \text{ ja } u_{1k} \in C(\bar{\Omega}),$$

et

$$F_k \xrightarrow{C(0, T; \mathcal{L}_2)} F \text{ iga } T > 0 \text{ korral,}$$

$$u_{0k} \xrightarrow{H^1} u_0 \text{ ja } u_{1k} \xrightarrow{\mathcal{L}_2} u,$$

ning et iga $k=1,2,\dots$ korral eksisteerib ülesande

$$u_{tt} = -Lu + F_k, \quad u|_{t=0} = u_{0k}, \quad u_t|_{t=0} = u_{1k}$$

klassikaline lahend $u_k(x,t)$, mis rahuldab rajatingimusi (3).

Siis $u_k - u_m$ rahuldab seoseid

$$(u_k - u_m)_{tt} = -L(u_k - u_m) + F_k - F_m,$$

$$u_k - u_m|_{t=0} = u_{0k} - u_{0m}, \quad (u_k - u_m)_t|_{t=0} = u_{1k} - u_{1m}$$

ja rajatingimusi (3), mistõttu hinnangu (9) põhjal

$$\begin{aligned} \|u_k - u_m\|_{C(O,T;H^1)} &< C_2(1+T)(\|u_{0k} - u_{0m}\|_{H^1} + \\ &+ \|u_{1k} - u_{1m}\| + T\|F_k - F_m\|_{C(O,T;\mathcal{L}^2)}). \end{aligned}$$

Seega u_k moodustab fundamentaaljada ruumis $C(O,T;H^1)$ ning järelikult koondub selles ruumis:

$$u_k \xrightarrow{C(O,T;H^1)} u \text{ iga } T > 0 \text{ korral.}$$

Piirfunktsiooni $u(x,t)$ nimetatakse ülesande (1) - (3) üldistatud lahendiks.

Kui $F \in C(\bar{Q})$ ning ülesandel (1) - (3) on olemas klassikaline lahend u , siis see lahend osutub üldistatud lahendiks. Tõepoolest, sellisel juhul võime üldistatud lahendi definitsioonis võtta $F_k = F$, $u_{0k} = u_0$ ja $u_{1k} = u_1$, millisel juhul $u_k = u$.

Üldistatud lahendi olemasoluks on tarvilik, et $F \in C(O,T;\mathcal{L}_2)$ iga $T > 0$ korral ning $u_0 \in H^1(\Omega)$ ja $u_1 \in \mathcal{L}_1(\bar{\Omega})$.

Tutvume üldistatud lahendi mõningate omadustega. Vastavalt definitsioonile üldistatud lahend $u \in C(O,T;H^1)$ iga $T > 0$

korral. Seega üldistatud lahend ja tema esimene järku üldistatud tuletised on iga $t > 0$ korral integreeruva ruunduga piirkonnas Ω .

Üldistatud lahend osutub võrrandi (1) üldistatud lahendiks piirkonnas G , s.t. iga põhifunktsiooni $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ korral

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu, \varphi \right\rangle = \langle F, \varphi \rangle. \quad (11)$$

Selle väite saab põhjendada järgmisel teel. Iga põhifunktsiooni $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ korral leidub konstant $T > 0$ nii, et $\text{supp } \varphi \subset G_T = \Omega \times (0, T]$. Korrutame u_k korral kehtiva võrduse

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + Lu_k = F_k$$

põhifunktsiooniga $\varphi(x, t)$ ja integreerime üle silindri G_T :

$$\int_{G_T} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + Lu_k \right) \varphi \, dx dt = \int_{G_T} F_k \varphi \, dx dt.$$

Ositi integreerimise abil saame siit

$$\int_{G_T} u_k \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + L\varphi \right) \, dx dt = \int_{G_T} F_k \varphi \, dx dt.$$

Et $u_k \xrightarrow{C(0, T; H^1)} u$ ja $F_k \xrightarrow{C(0, T; \mathcal{L}_2)} F$, siis need koondumised leiavad aset ruumis $\mathcal{L}_2(G_T)$ ning järelikult ka distributsioonide ruumis $\mathcal{D}'(G_T)$. Minnes üle piirile $k \rightarrow \infty$, saame

$$\langle u, \varphi_{tt} + L\varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle,$$

mis distributsiooni tuletise definitsiooni arvestades annabki väidetud võrduse (11).

Üldistatud lahend u rahuldab algtingimusi (2) selles mõttes, et

$\|u(x,t) - u_0(x)\| \rightarrow 0$ ja $\|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - u_1(x)\| \rightarrow 0$, kui $t \rightarrow 0$.
Tõepoolest, need väited järelduvad võrratusest

$$\|u(x,t) - u_0(x)\| \leq \|u(x,t) - u_k(x,t)\| + \|u_k(x,t) - u_{0k}(x)\| + \|u_{0k}(x) - u_0(x)\| \rightarrow 0, \text{ kui } t \rightarrow 0 \text{ ja } k \rightarrow \infty$$

ja analoogilisest võrratusest $\frac{\partial u}{\partial t}$ jaoks, kui arvestame veel hinnangut (8) (veenduda selles!).

Jääb veel küsimus, mis mõttes üldistatud lahend rahuldab rajatingimusi (3). Erijuhul, kui $\Sigma_1 = \Sigma$, s.t. kui on tegemist Dirichlet' rajatingimusega, järeldub seostest

$$u_k \xrightarrow{C(0,T;H^1)} u, \quad u_k|_{\Sigma} = 0$$

ja §15 teoreemist 2, et üldistatud lahend rahuldab Dirichlet' rajatingimust $u|_{\Sigma} = 0$ peaaegu kõikjal rajapinnal Σ . Üldisemate rajatingimuste korral on olukord komplitseeritum.

6. Segaülesande üldistatud seade korrektsus. Oletame kõigepealt, et ülesandel (1) - (3) on olemas üldistatud lahend u . Siis on järgmisel teel lihtne näidata, et see lahend on ainus ja stabiilne. Seda lahendit aproksimeeriva klassikalise lahendi u_k korral kehtib aprioorne hinnang (9):

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_k\|_{H^1} \leq C(1+T)(\|u_{0k}\|_{H^1} + \|u_{1k}\| + T \max_{0 \leq t \leq T} \|F_k\|).$$

Minnes üle piirile $k \rightarrow \infty$ näeme, et ka üldistatud lahendi korral jääb kehtima aprioorne hinnang (9). Sellest hinnangust aga järeldub, et ka üldistatud lahendi korral kehtivad teoreemi 2 väited lahendi ainsuse ja stabiilsuse kohta.

Tõestame üldistatud lahendi olemasolu. Lihtsuseks vaat-

leme juhtu, millal rajatingimus (3) on kujul

$$u|_{\Sigma} = 0. \quad (3')$$

Teoreem 3. Eeldame, et ülesandes (1), (2), (3')

$$\Gamma \in C^{1+\beta}, p \in C^{1+\beta}(\bar{\Omega}), c \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}) \quad (0 < \beta < 1), F \in C(0, T; \mathcal{L}_2)$$

iga $T > 0$ korral, $p(x) > 0$ ja $c(x) \geq 0$, kui $x \in \bar{\Omega}$ ning $u_0 \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$, $u_0|_{\Gamma} = 0$ ja $u_1 \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Siis sellel ülesandel on olemas ainus üldistatud lahend $u \in C(0, T; H^1)$.

Tõestus. Lahendi ainsuse näitasime juba eespool.

Lahendi olemasolu tõestamiseks kasutame Fourier' meetodit. Eelmise paragrahvi teoreemi 3 ja märkuse 1 põhjal on käesoleva teoreemi eeldustel omaväärtusülesandel

$$LX = \lambda X, \quad X|_{\Gamma} = 0$$

olemas loenduv hulk omaväärtusi $\lambda_j > 0$ ($\lambda_j \rightarrow \infty, j=1, 2, \dots$) ning neile vastavad omafunktsioonid $X_j \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ moodustavad ruumis $\mathcal{L}_2(\Omega)$ täieliku süsteemi. Seejuures leeme omafunktsioonid ortonormeerituteks.

Otsime ülesande (1), (2), (3') lahendit Fourier' rea kujul

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(t) X_j(x). \quad (12)$$

Eespool (vt. §12, art. 4) nägime, et vaadeldava ülesande formaalse lahendi saame, kui

$$T_j(t) = A_j \cos \sqrt{\lambda_j} t + B_j \sin \sqrt{\lambda_j} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \int_0^t C_j(\tau) \sin \sqrt{\lambda_j} (t-\tau) d\tau,$$

kus

$$A_j = (u_0, X_j), \quad B_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} (u_1, X_j) \text{ ja } C_j(t) = (F, X_j).$$

Näitame, et moodustatud Fourier' rida (12) koondub ja kuju-

tab ülesande (1), (2), (3') üldistatud lahendit.

Selleks valime

$$F_k = \sum_{j=1}^k C_j X_j, \quad u_{0k} = \sum_{j=1}^k A_j X_j, \quad u_{1k} = \sum_{j=1}^k \sqrt{\lambda_j} B_j X_j.$$

Siis $F_k \in C(\bar{\Omega})$, $u_{0k} \in C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ ja $u_{1k} \in C(\bar{\Omega})$, sest $X_j \in C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ ja $C_j(t) \in C[0, +\infty)$. Viimane väide järgeldub seostest

$$|C_j(t) - C_j(t')| = |(F(x, t) - F(x, t'), X_j)| < \\ < \|F(x, t) - F(x, t')\| \|X_j\| \rightarrow 0, \text{ kui } t' \rightarrow t \text{ ja } t, t' \geq 0.$$

Ülesande

$$u_{tt} = -Lu + F_k, \quad u|_{t=0} = u_{0k}, \quad u_t|_{t=0} = u_{1k}, \quad u|_{\Sigma} = 0$$

klassikaliseks lahendiks on (veenduda selles!)

$$u_k = \sum_{j=1}^k T_j X_j.$$

Ülesande (1), (2), (3') üldistatud lahendi olemasolu tõestamiseks tuleb veel näidata, et

$$F_k \xrightarrow{C(0, T; \mathcal{L}_2)} F \text{ iga } T > 0 \text{ korral,} \quad (13)$$

$$u_{0k} \xrightarrow{H^1} u_0 \text{ ja } u_{1k} \xrightarrow{\mathcal{L}_2} u_1. \quad (14)$$

Siis eelmise artikli tulemusi arvestades eksisteerib vaadeldaval ülesandel üldistatud lahend $u \in C(0, T; H^1)$ ning rida (12) koondub selleks lahendiks ruumis $C(0, T; H^1)$ iga $T > 0$ korral. Sellega oleme ühtlasi põhjendanud Fourier' meetodi.

Et omafunktsioonid X_j moodustavad ruumis $\mathcal{L}_2(\Omega)$ täieliku ortonormeeritud süsteemi, siis

$$u_{1k} = \sum_{j=1}^k \sqrt{\lambda_j} B_j X_j = \sum_{j=1}^k (u_{1, X_j}) X_j \xrightarrow{\mathcal{L}_2} u_1,$$

mis ongi viimaseks väidetest (14).

Samal põhjusel ka

$$u_{ok} = \sum_{j=1}^k A_j X_j \xrightarrow{\mathcal{L}_2} u_0,$$

s.t. jääkliige

$$\eta_k = u_0 - u_{ok} = \sum_{j=k+1}^{\infty} A_j X_j \xrightarrow{\mathcal{L}_2} 0, \text{ kui } k \rightarrow \infty.$$

Koondumise $u_{ok} \xrightarrow{H^1} u_0$ põhjendamiseks tuleb veel näidata, et ka

$$\frac{\partial u_{ok}}{\partial x_1} \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \frac{\partial u_0}{\partial x_1}, \text{ kui } i=1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Seda saab teha järgmiselt. Et $\eta_k|_{\Gamma} = u_0 - u_{ok}|_{\Gamma} = 0$, siis I Greeni valemi põhjal

$$(L\eta_k, \eta_k) = \int_{\Omega} \left[p \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} \right)^2 + c \eta_k^2 \right] dx \geq 0.$$

Seostest

$$\begin{aligned} (L\eta_k, \eta_k) &= (Lu_0 - Lu_{ok}, u_0 - u_{ok}) = \\ &= (Lu_0, u_0) - 2 \sum_{j=1}^k A_j (LX_j, u_0) + \sum_{j=1}^k \lambda_j A_j^2 = \\ &= (Lu_0, u_0) - \sum_{j=1}^k \lambda_j A_j^2 \geq 0 \end{aligned}$$

järeldub positiivsete liikmetega rea $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A_j^2$ koondumus.

Olgu $p(x) \geq p_0 > 0$, kui $x \in \Omega$. Siis

$$\left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_1} - \frac{\partial u_{ok}}{\partial x_1} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \eta_k}{\partial x_1} \right\|^2 \leq \frac{1}{p_0} (L\eta_k, \eta_k) = \frac{1}{p_0} \sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda_j A_j^2.$$

Et viimane avaldis kui koonduva rea jääkliige läheneb nulli-

le, kui $k \rightarrow \infty$, siis ongi põhjendatud koonduvus (15) ning järelikult ka koonduvused (14).

Jääb veel näidata, et teoreemi eeldustel leiab aset koonduvus (13). Omafunktsioonide süsteemi täielikkuse tõttu ruumis $\mathcal{L}_2(\Omega)$ iga fikseeritud $t > 0$ korral

$$F_k(x, t) \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F(x, t)$$

ning järelikult

$$\|F - F_k\| = \left\| \sum_{j=k+1}^{\infty} C_j(t) X_j(x) \right\|^2 = \sum_{j=k+1}^{\infty} C_j^2(t) \rightarrow 0.$$

Viimane summa on rea

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_j^2(t) = |F|^2$$

jääkliige. Et nii $C_j(t)$ kui ka $\|F(x, t)\|$ on pidevad igas lõplikus lõigus $0 \leq t \leq T$, siis Dini teoreemi (vt. [1], lk. 60) põhjal see rida koondub ühtlaselt lõigus $[0, T]$. Järelikult

$$\|F - F_k\|_{C(0, T; \mathcal{L}_2)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|F - F_k\| \rightarrow 0,$$

kui $k \rightarrow \infty$, mis ongi väiteks (13). Sellega on teoreem tõestatud.

§ 17. Hüperboolset tüüpi võrrandisüsteemid

1. Võrrandisüsteemi kanooniline kuj. Senini vaatlesime teist järku osatuletisi sisaldavaid võrrandeid. Üldisemaks ülesandeks on esimest järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteem, mille võib kirjutada kujul

$$C \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Bu = f,$$

kus $u = (u_1, \dots, u_m)$ on otsitavate funktsioonide vektor, A_j , B ja C n -järku ruutmatriksid ning $f = (f_1, \dots, f_m)$ vabaliikmete vektor. Kui A_j , B , C ja f sõltuvad ainult argumentidest $x = (x_1, \dots, x_n)$ ja t , siis võrrandisüsteemi nimetatakse lineaarseks, kui aga lisaks veel otsitavatest funktsioonidest u , aga mitte nende osatuletistest, siis kvaasilineaarseks. Sellise võrrandisüsteemi kujul saab esitada eespool vaadeldud teist järku võrrandid. Tarvitseb vaid esimest järku osatuletised võtta uuteks otsitavateks. Üldise võrrandisüsteemiga seotud ülesannete käsitlemine on aga küllaltki komplitseeritud.

Käsitluse lihtsustamiseks oletame järgnevas, et $n=1$ ning C on ühikmatriks, s.t. et võrrandisüsteem on kujul

$$u_t + Au_x + Bu = f. \quad (1)$$

Selliseid lineaarseid ja kvaasilineaarseid võrrandisüsteeme esineb küllaltki sageli rakendustes, näiteks hüdro- ja aerodünaamikas, koorikute teoorias jm. Märgime, et suur osa S.K. Godunovi matemaatilise füüsika võrrandite õpikust [6] on pühen-

datud selliste võrrandisüsteemide uurimisele. Lihtsuseks eeldame järgnevas veel, et võrrandisüsteem (1) on lineaarne, s.t. et $A = A(x,t)$, $B = B(x,t)$ ja $f = f(x,t)$ ei sõltu otsitavast u . Tulemused on üldistatavad aga ka kvaasilineaarse võrrandisüsteemi juhule.

Kujul (1) antud võrrandisüsteemide klassifikatsioon on esitatud käesoleva konsepti esimeses osas §2, art. 5. Eeldame, et võrrandisüsteem (1) on vaadeldavas piirkonnas G hüperboolset tüüpi, s.t. et selle piirkonna igas punktis on matriksi A kõik omaväärtused $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ reaalsed ning nendele vastavad omavektorid z^1, z^2, \dots, z^m moodustavad vektorruumi baasi. Need omaväärtused ja omavektorid muidugi sõltuvad punktist (x,t) , s.t. $\lambda_1 = \lambda_1(x,t)$ ja $z^1 = z^1(x,t)$. Eeldame, et vaadeldavas piirkonnas G funktsioonid $\lambda_1(x,t)$ ja $z^1(x,t)$ on pidevad ning neil on olemas ka pidevad osatuletised.

Moodustame matriksi $P = P(x,t)$, mille veergudeks on omavektorid z^1, z^2, \dots, z^m . Asenduse $u = Pv$ ning pöördmatriksi P^{-1} rakendamise teel teisendame võrrandisüsteemi (1) kanoonilisele kujule

$$v_t + Jv_x + Dv = g, \quad (2)$$

kus

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

on diagonaalmaatriks ning

$$D = P^{-1}P_t + P^{-1}AP_x + P^{-1}BP \text{ ja } g = P^{-1}f.$$

Kirjutades võrrandisüsteemi (2) välja koordinaatkujul:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^m d_{1k} v_k = g_1, \quad 1=1,2,\dots,m$$

näeme, et selles iga võrrand sisaldab ainult ühe funktsiooni osatuletisi.

Võrrandisüsteemi kanoonilisele kujule teisendamine võimaldab mõnikord jõuda ülesande lahendini. Vaatleme selle kohta ühte lihtsat näidet.

2. Akustika võrrandid. Keele võnkumise võrrand

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad a > 0$$

kirjeldab ka häälelainete levimist ühemõõtmelise homogeenses keskkonnas. Sageli kirjeldatakse võnkumisprotsessi esimest järku võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + a^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

abil. Elimineerides süsteemist (3) ühe otsitava, on lihtne veenduda, et nii u_1 kui ka u_2 rahuldavad keele võnkumise võrrandit. Võrrandeid (3) võib tõlgitseda akustika võrranditena, milles u_1 tähendab kiirust ja u_2 rõhku häiritud keskkonnas.

Võrrandisüsteem (3) on süsteem kujul (1), kusjuures

$$u = (u_1, u_2), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = 0 \text{ ja } f = 0.$$

Teisendame selle süsteemi kanoonilisele kujule.

Algebraalse võrrandisüsteemi

$$Ax = \lambda x, \quad x = (x_1, x_2)$$

determinandi

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a^2$$

nulikohtadeks on $\lambda_1 = a$ ja $\lambda_2 = -a$. Võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} x_2 &= \lambda x_1, \\ a^2 x_1 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

lahendamise teel leiame vastavad omavektorid

$$s^1 = (1, a), \quad s^2 = (1, -a).$$

Järelikult teisendusmaatriks

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -a \end{pmatrix}$$

ning selle pöördmaatriks

$$P^{-1} = \frac{1}{2a} \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix}.$$

Seega süsteemi (3) kanooniliseks kujuks on

$$v_t + Jv_x = 0$$

ehk

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + a \frac{\partial v_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} - a \frac{\partial v_2}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

kus

$$v = P^{-1}u = \frac{1}{2a}(au_1 + u_2, au_1 - u_2),$$

s.t.

$$v_1 = \frac{1}{2}(u_1 + \frac{1}{a}u_2), \quad v_2 = \frac{1}{2}(u_1 - \frac{1}{a}u_2).$$

Vaadeldaval juhul kanoonilisel kujul olev võrrandisüsteem koosneb kahest iseseisvast võrrandist, mida on lihtne lahendada. Tõepoolest sirgel $x = at + c$ otsitav funktsioon

$v_1(x, t) = v_1(at + c, t)$ ning seega

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + a \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0.$$

Järelikult sellel sirgel

$$v_1 = p = \text{const.}$$

Erinevatele sirgetele vastab aga üldiselt erinev konstant, mistõttu

$$p = p(c) = p(x - at).$$

Seega

$$v_1 = p(x - at),$$

kus p on suvaline diferentseeruv ühe muutuja funktsioon.

Analoogiliselt sirgel $x = -at + c$ saame süsteemi (4) teisest võrrandist

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{\partial v_2}{\partial t} - a \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0,$$

mistõttu $v_2 = q(x + at)$, kus q on suvaline diferentseeruv funktsioon. Seega oleme leidnud võrrandisüsteemi (4) üldlahendi

$$v_1 = p(x - at), \quad v_2 = q(x + at).$$

Sirgeid $x - at = c$ ja $x + at = c$ nimetatakse selle võrrandisüsteemi karakteristikuteks.

Võrrandisüsteemi (3) lahend

$$u = Pv = (v_1 + v_2, av_1 - av_2).$$

Seega süsteemi (3) üldlahendiks on

$$\begin{aligned} u_1 &= p(x - at) + q(x + at) \\ u_2 &= a[p(x - at) - q(x + at)]. \end{aligned}$$

Funktsioone p ja q saab leida vaid siis, kui ülesande lahendi jaoks on antud teatavad lisatingimused. Kui näiteks ülesande

lahend peab rahuldama algtingimusi

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_2(x,0) = \varphi_2(x),$$

siis nendest saame seosed

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= \varphi_1(x), \\ a[p(x) - q(x)] &= \varphi_2(x), \end{aligned}$$

millest leiame

$$p(x) = \frac{1}{2} \varphi_1(x) + \frac{1}{2a} \varphi_2(x), \quad q(x) = \frac{1}{2} \varphi_1(x) - \frac{1}{2a} \varphi_2(x).$$

Järelikult algtingimustega ülesande lahendiks on

$$u_1 = \frac{1}{2} [\varphi_1(x-at) + \varphi_1(x+at)] + \frac{1}{2a} [\varphi_2(x-at) - \varphi_2(x+at)],$$

$$u_2 = \frac{a}{2} [\varphi_1(x-at) - \varphi_1(x+at)] + \frac{1}{2} [\varphi_2(x-at) + \varphi_2(x+at)].$$

3. Karakteristikud. Ka üldise hüperboolset tüüpi võrrandisüsteemi käsitlemisel etendavad olulist osa karakteristikud. Olgu $\lambda_1(x,t)$, $i=1,2,\dots,m$ matriksi $A(x,t)$ omaväärtused. Võrrandisüsteemi (1) karakteristikuteks nimetatakse hariliku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1(x,t), \quad i=1,2,\dots,m$$

integraalkõveraid. Kui matriksil A on vaadeldavas piirkonnas m erinevat omaväärtust, siis iga selle piirkonna punkti läbib võrrandisüsteemi (1) m erinevat karakteristikut. Paneme tähele, et võrrandisüsteemi kanoonilisele kujule viimisel kasutatud teisendus ei muuda võrrandisüsteemi karakteristikuid.

Ilmselt võime ka eelmises artiklis vaadeldud akustika võrrandite karakteristikud

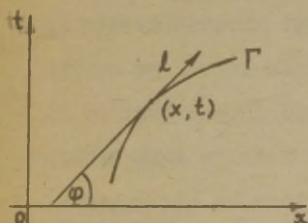
$$x - at = c \text{ ja } x + at = c$$

leida kui diferentsiaalvõrrandite

$$\frac{dx}{dt} = a \text{ ja } \frac{dy}{dt} = -a$$

integraalkõverad.

Tutvume karakteristikute ühe olulise omadusega. Olgu Γ sile iseärase punktideta kõver xt -tasandil. Oletame, et kõveral Γ on antud võrrandisüsteemi (1) lahend u . Sellega on määratud ka lahendi tuletis piki kõverat Γ



Joonis 7.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial l},$$

kus l on kõvera Γ puutuja sihiline vektor punktis (x, t) ning φ nurk vektori l ja x -telje positiivse suuna vahel (vt. joonis 7). Püüame leida lahendi osatuletised

$\frac{\partial u}{\partial x}$ ja $\frac{\partial u}{\partial t}$ kõvera Γ punktis (x, t) . Selleks avaldame

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial u}{\partial l} - \cot \varphi \frac{\partial u}{\partial x}$$

ning asetame viimase avaldise võrrandisüsteemi (1):

$$(A - \cot \varphi E) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial u}{\partial l} + Bu = f.$$

Viimasest seosest saame leida $\frac{\partial u}{\partial x}$ parajasti siis, kui determinant

$$|A - \cot \varphi E| \neq 0,$$

s.t. kui $\cot \varphi \neq \lambda_1$. Seega lahendi osatuletised u_x ja u_t saame kõvera Γ punktis (x, t) leida parajasti siis, kui kõvera Γ siht punktis (x, t) ei ühti võrrandisüsteemi (1) ühegi karakteristiku sihiga selles punktis. Sellisel juhul la-

hendi väärtused kõveral Γ määravad lahendi üheselt ka teatavas punkti (x, t) ümbruses. Kui aga kõver kulgeb punkti (x, t) ümbruses mingi karakteristiku sihis, siis lahendi väärtused kõveral Γ ei määra lahendit üheselt punkti (x, t) ümbruses.

Võrrandisüsteemi (1) Cauchy ülesanne seisneb järgnevas: leida süsteemi lahend, mis rahuldab tingimust

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, t)$$

kõveral Γ , kusjuures Γ on sile ja iseärase punktidega kõver, mis üheski punktis ei kulge ühegi karakteristiku sihis. Võrrandisüsteemi (1) Cauchy ülesande korral on sageli kõveraks Γ sirge $t = 0$, s.t. x -telg, mis üheski punktis ei kulge ühegi karakteristiku sihis, sest x -telje igas punktis $\cos \varphi = \infty$. Sellisel juhul on lisatingimuseks algtingimus

$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

ehk koordinaatkujul

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad 1=1, 2, \dots, m.$$

Kui lisaks algtingimusele esineb veel rajatingimusi, siis saame nn. segaülesande. Järgnevas uurime võrrandisüsteemi (1) algtingimusega ülesande ja segaülesande korrektsust. Seejuures kasutame energiantegraali meetodit.

4. Energiasamasus. Tuletame hüperboolset tüüpi võrrandisüsteemi lahendi jaoks integraalse samasuse, mida kasutame nii Cauchy ülesande kui ka segaülesande lahendi ainsuse ja stabiilsuse selgitamisel.

Vaatleme võrrandisüsteemi kanoonilisel kujul (2) teatud tõkestatud piirkonnas σ tükati sileda rajajoonega γ . Eeldame, et võrrandisüsteemil (2) on piirkonnas $\bar{\sigma}$ olemas lahend

$v \in C^1(\bar{G})$ ning et $J \in C^1(\bar{G})$, $D \in C(\bar{G})$ ja $g \in C(\bar{G})$.

Lähtume samasusest (2):

$$v_t + Jv_x + Dv = g$$

ning korrtame eelle skalaarselt

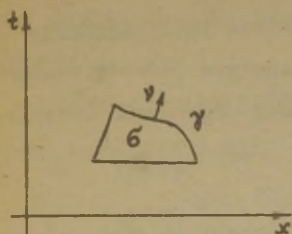
vektoriga $2v$:

$$2(v_t, v) + 2(Jv_x, v) + 2(Dv, v) = 2(g, v).$$

Viimase võrduse teisendamisel

kasutatakse seoseid

Joonis 8.



$$2(v_t, v) = \frac{\partial}{\partial t} (v, v),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (Jv, v) &= (J_x v, v) + (Jv_x, v) + (Jv, v_x) = \\ &= (J_x v, v) + 2(Jv_x, v), \end{aligned}$$

millest

$$2(Jv_x, v) = \frac{\partial}{\partial x} (Jv, v) - (J_x v, v),$$

ning seost

$$2(Dv, v) = ((D + D^*)v, v),$$

kus D^* on D transposeeritud maatriks ning järelikult $D + D^*$ sümmeetriline maatriks. Nii jõuame võrduseni

$$\frac{\partial}{\partial t} (v, v) + \frac{\partial}{\partial x} (Jv, v) = (Qv, v) + 2(g, v),$$

milles $Q = J_x - (D + D^*)$ on sümmeetriline maatriks. Integreerime tuletatud samasuse üle piirkonna G :

$$\int_G \left[\frac{\partial}{\partial t} (v, v) + \frac{\partial}{\partial x} (Jv, v) \right] dx dt = \int_G [(Qv, v) + 2(g, v)] dx dt$$

ning kasutame Gauss-Ostrogradski valemit:

$$\begin{aligned} \int_\gamma [(v, v) \cos \hat{v}_t + (Jv, v) \cos \hat{v}_x] d\gamma &= \\ &= \int_G [(Qv, v) + 2(g, v)] dx dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Seejuures $\hat{v}t$ ja $\hat{v}x$ on nurgad rajajoone γ välisnormaali ν ning vastavalt t - ja x -telje positiivse suuna vahel. Tuletatud integraaleest samasust (5) nimetatakse energiaasasuseks, sest rakendustes väljendab ta energia jäävuse seadust. Selle samasuse abil tuletame aprioorsed hinnangud ülesande lahendi jaoks.

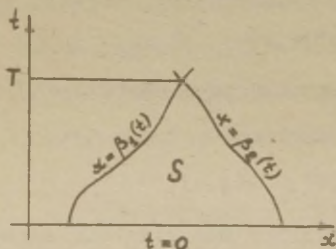
5. Cauchy ülesanne. Vaatleme hüperboolset tüüpi võrrandisüsteemi Cauchy ülesannet. Oletame, et võrrandisüsteem on juba teisendatud kanoonilisele kujule (2):

$$v_t + Jv_x + Dv = g,$$

kus J on diagonaalmaatriks. Olgu nõutud leida selle süsteemi lahend, mis rahuldab algtingimust

$$v(x,0) = \varphi(x). \quad (6)$$

Vaatleme järgnevas selle Cauchy ülesande lahendamist xt -tasandi tõkestatud piirkonnas S , mis on piiratud sirgega $t=0$ ning kõveratega $x = \beta_1(t)$ ja $x = \beta_2(t)$, $0 \leq t \leq T$ (vt. joonis 9), kus β_1 ja β_2 on lõigus $t \in [0, T]$ diferentseeruvad funktsioonid.



Joonis 9.

Eeldame, et ülesandel (2), (6) on piirkonnas S olemas klassikaline lahend $v \in C^1(\bar{S})$ ning et $J \in C^1(\bar{S})$,

$D \in C(\bar{S})$ ja $g \in C(\bar{S})$. Piirkonna S kohta eeldame, et teda piiravad kõverad rahuldavad tingimusi

$$\beta_1^i(t) \geq \lambda_1(\beta_1(t), t), \quad \beta_2^i(t) \leq \lambda_1(\beta_2(t), t), \quad (7)$$

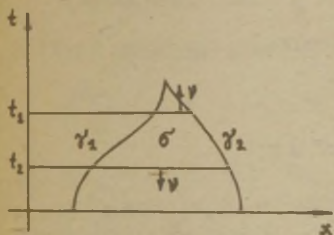
$$0 \leq t \leq T, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

kus $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ on diagonaalmaatriksi J peadiagonaali elemendid.

Tuletame vaadeldava ülesande lahendi v aprioorsel hinnangu kasutades normi

$$J(t) = \left(\int_{\beta_1(t)}^{\beta_2(t)} (v, v) dx \right)^{1/2} = \left(\int_{\beta_1(t)}^{\beta_2(t)} \sum_{i=1}^m v_i^2(x, t) dx \right)^{1/2}.$$

Lõikame piirkonda S suvaliste sirgetega $t = t_1$ ja $t = t_2$, kus $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, ning tähistame nende sirgete



Joonis 10.

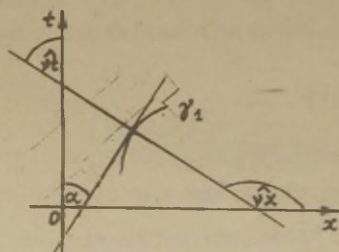
vahel jääva piirkonna S osa sümbooliga σ . Rakendame piirkonnas σ integraalset samasust (5). Kui seejuures arvestame, et piirkonna σ rajajoon γ koosneb 4 osast (vt. joonis 10) ning et sirgetel $t = t_2$ ja $t = t_1$ osadel rajajoonel välisnormaal on suuna-

tud vastavalt t -telje suunas ja selle vastassuunas, siis saame

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\beta_1(t)}^{\beta_2(t)} [(Qv, v) + 2(g, v)] dx dt = \\ & = \int_{\beta_1(t_2)}^{\beta_2(t_2)} (v, v) \Big|_{t=t_2} dx - \int_{\beta_1(t_1)}^{\beta_2(t_1)} (v, v) \Big|_{t=t_1} dx + \\ & \quad + \int_{\gamma_1} [(v, v) \cos \hat{v}t + (\bar{J}v, v) \cos \hat{v}x] d\gamma + \\ & \quad + \int_{\gamma_2} [(v, v) \cos \hat{v}t + (\bar{J}v, v) \cos \hat{v}x] d\gamma, \quad (8) \end{aligned}$$

kus $Q = J_x - (D + D^*)$ ning γ_1 ja γ_2 on vastavalt kõverad $x = \beta_1(t)$ ja $x = \beta_2(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$.

Mäitame, et võrduses (8) viimaste joonintegraalide all olevad avaldised ja seega ka need joonintegraalid on mitte-



Joonis 11.

negatiivsed. Vaatleme joonintegraali üle kõvera γ_1 . Tähistame nurga kõvera γ_1 puutuja ja t -telje positiivse suuna vahel tähega α .

Siis (vt. joonis 11)

$$\hat{\nu}t = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \hat{\nu}x = \pi - \alpha,$$

$$\beta'(t) = \tan \alpha.$$

Seega kõveral γ_1

$$\begin{aligned} & (\nu, \nu) \cos \hat{\nu}t + (J\nu, \nu) \cos \hat{\nu}x = \\ & = \sum_{i=1}^m [\nu_i^2 \sin \alpha - \lambda_i \nu_i^2 \cos \alpha] = \\ & = \sum_{i=1}^m \nu_i^2 \cos \alpha (\beta_i' - \lambda_i). \end{aligned}$$

Et $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, siis tingimuse (7) põhjal viimane avaldis ja seega ka joonintegraal üle γ_1 on mittenegatiivne. Analoogiliselt saab näidata ka üle γ_2 võetud joonintegraali mittenegatiivsuse (näidata seda!). Seega seosest (8) järeldub võrratus

$$J^2(t_2) \leq J^2(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\beta_1(t)}^{\beta_2(t)} [(Q\nu, \nu) + 2(g, \nu)] dx dt.$$

Hindame veel kahekordset integraali viimases võrratuses. Eespool tehtud eelduste põhjal on maatriksi Q elemendid

ja vektori g koordinaadid pidevad kinnises piirkonnas \bar{S} .
Seetõttu leiduvad mittenegatiivsed konstandid M ja N_1 nii,
et piirkonnas \bar{S} kehtivad võrratused

$$(Qv, v) \leq M(v, v)$$

$$(g, v) \leq \sqrt{(g, g)} \sqrt{(v, v)} \leq N_1 \sqrt{(v, v)}.$$

Seega

$$J^2(t_2) \leq J^2(t_1) + M \int_{t_1}^{t_2} \int_{\beta_1(t)}^{\beta_2(t)} (v, \bar{v}) dx dt + \\ + 2N_1 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\beta_1(t)}^{\beta_2(t)} \sqrt{(v, \bar{v})} dx dt,$$

millest omakorda järeldub võrratus

$$J^2(t_2) \leq J^2(t_1) + M \int_{t_1}^{t_2} J^2(t) dt + N \int_{t_1}^{t_2} J(t) dt, \quad (9)$$

kus $N = 2qN_1$ ja $q = \max_{0 \leq t \leq T} [\beta_2(t) - \beta_1(t)]^{1/2}$.

Seejuures konstandid M ja N ei sõltu suurustest t_1 ja t_2 ning $N = 0$, kui $g = 0$.

Võrratusest (9) lahendi apriorse hinnangu tuletamisel kasutame järgmist lemmat, mida vajame ka edaspidi.

Lemma. Olgu funktsioon $J(t)$ lõigus $t \in [0, T]$ mittenegatiivne, pidev ja diferentseeruv. Kui see funktsioon iga $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ korral rahuldab võrratust (9), milles M on positiivne ja N mittenegatiivne konstant, siis

$$J(t) \leq J(0)e^{Mt/2} + \frac{N}{M} (e^{Mt/2} - 1), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (10)$$

Tõestus. Vastavalt lemma eeldustele kehtib $t_1 < t_2$ korral võrratus

$$\frac{J^2(t_2) - J^2(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [MJ^2(t) + NJ(t)] dt = MJ^2(\tau) + NJ(\tau),$$

kus $t_1 < \tau < t_2$. Piirprotsessi $t_2 \rightarrow t_1$ abil saame difereentsiaalvõrratuse

$$\frac{dJ^2(t)}{dt} \leq MJ^2(t) + NJ(t), \quad 0 < t < T. \quad (11)$$

Valime suvalise $t' \in (0, T]$ ning näitame, et $t = t'$ korral kehtib võrratus (10). Kui $J(t') = 0$, siis võrratus (10) ilmselt kehtib t' korral. Olgu $J(t') > 0$. Tähistame sümbooliga t_1 suurima t väärtuse, mille korral $J(t_1) = 0$ ja $t_1 < t'$. Kui aga sellist t väärtust ei leidu, siis loeme $t_1 = 0$. Nii saavutame, et $J(t) > 0$ vahemikus $t \in (t_1, t')$. Jagame selles vahemikus võrrandi (11) suurusega $2J(t)$:

$$\frac{dJ(t)}{dt} \leq \frac{M}{2} J(t) + \frac{N}{2}.$$

Korrutades viimase võrratuse teguriga $e^{-Mt/2}$, saame

$$\frac{dJ(t)}{dt} e^{-Mt/2} - \frac{M}{2} J(t) e^{-Mt/2} \leq \frac{N}{2} e^{-Mt/2}$$

ehk

$$\frac{d}{dt} [e^{-Mt/2} J(t)] \leq \frac{N}{2} e^{-Mt/2}.$$

Integreerime tuletatud võrratuse vahemikus (t_1, t') :

$$e^{-Mt'/2} J(t') - e^{-Mt_1/2} J(t_1) \leq -\frac{N}{M} (e^{-Mt'/2} - e^{-Mt_1/2}).$$

Siit

$$J(t') \leq J(t_1) e^{M(t'-t_1)/2} + \frac{N}{M} [e^{M(t'-t_1)/2} - 1].$$

Et $t' - t_1 \leq t'$ ja kas $J(t_1) = J(0)$ või $J(t_1) = 0$, siis on võrratus (10) põhjendatud ning sellega lemma tõestatud.

Arvestades $J(t)$ tähendust saame võrratusest (10) apriorse hinnangu ülesande (2), (6) lahendi jaoks

$$\left(\int_{\beta_1(t)}^{\beta_2(t)} (v, v) dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_{\beta_1(0)}^{\beta_2(0)} (\varphi, \varphi) dx \right)^{1/2} e^{Mt/2} + \frac{N}{M} (e^{Mt/2} - 1), \quad 0 \leq t \leq T,$$

milles M ja N on teatavad konstandid, mis sõltuvad piirkonnast S ning võrrandisüsteemi (2) kordajatest ja vabaliikmetest. Sellest aprioorsest hinnangust järeldub lihtsalt Cauchy ülesande (2), (6) lahendi ainsus ning pidev sõltuvus algtingimusest ja võrrandisüsteemi vabaliikmetest.

Lahendi ainsuse saame näidata järgmiselt. Olgu v ja v^* kaks suvalist ülesande (2), (6) lahendit. Siis nende vahe $w = v - v^*$ rahuldab võrrandisüsteemi

$$w_t + Jw_x + Dw = 0$$

ja algtingimust $w(x, 0) = 0$. Rakendades sellele ülesandele tuletatud aprioorset hinnangut saamegi, et $w(x, t) = 0$ ehk $v(x, t) = v^*(x, t)$ piirkonnas S , sest konstant $N = 0$, kui võrrandisüsteemi vabaliikmed võrduvad nulliga. Analoogiliselt saab näidata lahendi pidevat sõltuvust algtingimusest ja võrrandisüsteemi vabaliikmetest (teha seda!).

Paneme tähele, et Cauchy ülesande lahendi ainsuse näitamisel piirkonnas S kasutame algtingimust ainult kõverate $x = \beta_1(t)$ ja $x = \beta_2(t)$ vahele jääval x -telje lõigul. Tingimuse (7) kohaselt tuleb piirkond S valida nii, et kõik nende kõverate lõikepunkti läbivad võrrandisüsteemi (1) või (2) karakteristikud lõikaksid x -telge nimetatud lõigul (piirkonna S rajajoonel). Tavaliselt piirkonna S moodustamisel võetakse kõverateks $x = \beta_1(t)$ ja $x = \beta_2(t)$ teatavat xt -tasandi

punkti läbivad võrrandisüsteemi äärmised karakteristikud.

6. Segaülesanne. Vaatleme hüperboolset tüüpi võrrandisüsteemi lahendamist piirkonnas

$$G_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}.$$

Sellisel juhul tuleb lahendi üheseks määramiseks lisaks algtingimusele veel anda tingimused piirkonna rajal.

Oletame, et hüperboolset tüüpi võrrandisüsteem on juba teisendatud kanoonilisele kujule (2) ning nõutakse leida selle lahend v , mis rahuldab algtingimust

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (12)$$

ja teatavaid rajatingimusi.

Et saada korrektselt seatud ülesannet, tuleb rajatingimused anda sõltuvalt maatriksi J peadiagonaali elementide λ_1 märkidest. Oletame, et piirkonnas G_T

$$\lambda_1(x, t) > 0, \text{ kui } i=1, 2, \dots, m_0; \text{ ja}$$

$$\lambda_1(x, t) < 0, \text{ kui } i=m_0+1, \dots, m,$$

kus $0 \leq m_0 \leq m$. Sellisel juhul olgu rajatingimused antud kujul

$$v_i = \sum_{j=m_0+1}^m \alpha_{ij} v_j, \text{ kui } x = 0 \text{ ja } i=1, 2, \dots, m_0, \quad (13)$$

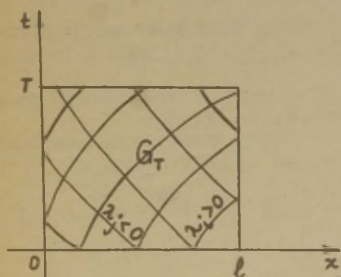
$$v_i = \sum_{j=1}^{m_0} \alpha_{ij} v_j, \text{ kui } x = 1 \text{ ja } i=m_0+1, \dots, m,$$

kus $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(t)$ on lõigus $t \in [0, T]$ pidevad funktsioonid. Lihtsuseks eeldasime, et rajatingimused on homogeenised, sest mittehomoogeensed rajatingimused saab teisendada homogeenseteks.

Rajatingimuste (13) struktuur muutub arusaadavaks, kui peame silmas, et võrrandi

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} = \varepsilon_1$$

lahend omaväärtusele λ_1 vastaval karakteristikul sõltub alg-



Joonis 12.

tingimusest selle karakteristiku lõikepunktis x -teljega. Joonisel 12 on kujutatud kaks karakteristikute parve, millest üks vastab omaväärtusele $\lambda_1 > 0$ ja teine omaväärtusele $\lambda_1 < 0$. Näiteks sirgel $x = 0$ on vaja anda omaväärtusele $\lambda_1 > 0$ vastava lahendi v_1 väärtus

kas otseselt või funktsioonina lahendi komponentidest, mis vastavad negatiivsetele omaväärtustele λ_j .

Järgnevas eeldame veel, et rajatingimused (13) on dissipatiivsed, s.t. et iga rajatingimusi rahuldava vektori v korral

$$(Jv, v) \cos \hat{\nu}x \geq 0, \text{ kui } x = 0 \text{ ja } x = 1, \quad (14)$$

kus $\hat{\nu}x$ on nurk raja välisnormaali ν ja x -telje positiivse suuna vahel. Tingimuse (14) võib kirjutada ka kujul

$$-\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i^2 \geq 0, \text{ kui } x = 0, \text{ ja}$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i^2 \geq 0, \text{ kui } x = 1.$$

Näiteks rajatingimused (13) on dissipatiivsed sageli esineval erijuhul, kui kõik kordajad $\alpha_{1j} = 0$.

Näitame, et eespool tehtud eeldustel saab ülesannet

(2), (12), (13) alati nii teisendada, et dissipatiivsuse nõue oleks rahuldatud. Selleks kasutame ära asjaolu, et hüperbooleet tüüpi võrrandisüsteemi kanooniline kuju pole üheselt määratud. Valime kinnises piirkonnas \bar{U}_T siledad ja positiivsed funktsioonid $\mu_1(x, t)$ ning teostame muutuja vahetuse

$$v_i = \mu_i w_i, \quad i=1, 2, \dots, m$$

ehk

$$v = Pw,$$

kus

$$P = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \dots \\ & & & \mu_m \end{pmatrix}$$

on diagonaalmaatriks. Asetame $v = Pw$ võrrandisüsteemi (2) ning rakendame saadud võrdusele seejärel pöördmaatriksit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} & & 0 \\ & \frac{1}{\mu_2} & \\ 0 & & \dots \\ & & & \frac{1}{\mu_m} \end{pmatrix}$$

Tulemuseks saame

$$P^{-1}P_t w + P^{-1}P w_t + P^{-1}JP_x w + P^{-1}JP w_x + P^{-1}D P w = P^{-1}g.$$

Et diagonaalmaatriksite korrutamine on kommutatiivne, siis $P^{-1}JP = J$ ning võrrandisüsteem omandab uue kanoonilise kuju

$$w_t + Jw_x + D' w = g',$$

kus $D' = P^{-1}P_t + P^{-1}JP_x + P^{-1}D P$ ja $g' = P^{-1}g$. Rajatingimused (13) teisenevad kujule

$$w_1 = \sum_{j=m_0+1}^m \alpha_{1j} \frac{\mu_1}{\mu_1} w_j, \text{ kui } x = 0 \text{ ja } i=1,2,\dots,m_0.$$

$$w_1 = \sum_{j=1}^{m_0} \alpha_{1j} \frac{\mu_1}{\mu_1} w_j, \text{ kui } x = 1 \text{ ja } i=m_0+1,\dots,m.$$

Funktsioonide $\mu_1(x,t)$ sobiva valiku abil võib saavutada, et dissipatiivsuse tingimus on rahuldatud. Tõepoolest dissipatiivsuse tingimuse rajal $x = 0$ võime kirjutada kujul

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^m \lambda_1 w_1^2 &= -\sum_{i=1}^{m_0} \lambda_1 \left(\sum_{j=m_0+1}^m \alpha_{1j} \frac{\mu_1}{\mu_1} w_j \right)^2 - \\ &- \sum_{i=m_0+1}^m \lambda_1 w_1^2 \geq 0, \text{ kui } x = 0. \end{aligned}$$

Et $\lambda_1(0,t) < 0$, kui $i=m_0+1,\dots,m$, siis viimane tingimus osutub rahuldatuks, kui $\mu_1(0,t), \mu_2(0,t), \dots, \mu_{m_0}(0,t)$ valida küllalt suured võrreldes $\mu_{m_0+1}(0,t), \dots, \mu_m(0,t)$ väärtustega. Analoogiliselt saab rahuldada dissipatiivsuse tingimust ka teisel rajal.

Järgnevas eeldame, et hüperboolset tüüpi võrrandisüsteem on teisendatud sellisele kanoonilisele kujule, mille korral rajatingimused (13) on dissipatiivsed.

7. Segaülesande lahendi ainsus. Kasutame energiasamsust hüperboolset tüüpi võrrandisüsteemi segaülesande lahendi ainsuse uurimisel. Olgu võrrandisüsteem teisendatud kanoonilisele kujule (2) nii, et on rahuldatud dissipatiivsuse tingimus (14). Eeldame, et ülesandel (2), (12), (13) on olemas klassikaline lahend $v \in C^1(\bar{G}_T)$ ning et $J \in C^1(\bar{G}_T)$, $D \in C(\bar{G}_T)$ ja $g \in C(\bar{G}_T)$.

Valime suvalised t_1 ja t_2 nii, et $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, ning rakendame samasust (5) ristkülikus (vt. joonis 13).

$$G = \{(x, t) : 0 < x < 1, t_1 < t < t_2\} :$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 [(Qv, v) + 2(g, v)] dx dt = \int_0^1 (v, v) |_{t=t_2} dx - \int_0^1 (v, v) |_{t=t_1} dx + \\ + \int_{t_1}^{t_2} (Jv, v) \cos \hat{v}x |_{x=0} dt + \int_{t_1}^{t_2} (Jv, v) \cos \hat{v}x |_{x=1} dt.$$

Et tingimuse (14) põhjal kaks viimast integraali on mitte-negatiivsed, siis saame võrratuse

$$J^2(t_2) \leq J^2(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 [(Qv, v) + 2(g, v)] dx dt,$$

milles tähistasime

$$J(t) = \left(\int_0^1 (v, v) dx \right)^{1/2}.$$

Hinnates kahekordset integraali samuti nagu artiklis 5, jõuame võrratuseni

$$J^2(t_2) \leq J^2(t_1) + M \int_{t_1}^{t_2} J^2(t) dt + N \int_{t_1}^{t_2} J(t) dt,$$

kus $M > 0$ ja $N \geq 0$ on konstandid, mis ei sõltu suurustest t_1 ja t_2 , ning $N = 0$, kui $g = 0$. Samas artiklis tõestatud lema põhjal saame ülesande (2), (12), (13) lahendi jaoks aprioorse hinnangu

$$\left(\int_0^1 (v, v) dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 (\varphi, \varphi) dx \right)^{1/2} e^{Mt/2} + \frac{N}{M} (e^{Mt/2} - 1), \quad 0 \leq t \leq T$$

Sellest järeldub samuti nagu artiklis 5, et vaadeldaval segaülesandel ei saa piirkonnas G_T olla kahte erinevat lahendit.

Märgime, et vaadeldava ülesande lahendi olemasolu tõestamine on märksa komplitseeritum (vt. näit. [6], ptk. 2).

V. RAJAÜLESANDED

§ 18. M a k s i m u m p r i n t s i i p

1. Maksimumprintsibi väited. Vaatleme lineaarset teist järku elliptilist tüüpi diferentsiaalvõrrandit

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \quad (1)$$

teatavas tõkestatud, sidusas ja lahtises piirkonnas Ω . Seejuures eeldame, et $a_{ij} = a_{ji}$ ning et $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ ja $f(x)$ on selles piirkonnas määratud n muutuja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ funktsioonid. Selliste võrranditega on tavaliselt seotud rajaülesanded, mille korral nõutakse leida selle võrrandi lahend, mis piirkonna Ω rajal Γ rahuldab teatavat rajatingimust, näiteks Dirichlet' rajatingimust $u|_{\Gamma} = \gamma(x)$.

Selles paragrahvis vaatleme rajaülesannete klassikalise lahendiga seotud küsimusi. Rajaülesande klassikaliseks lahendiks nimetatakse võrrandi (1) lahendit $u \in C^2(\Omega)$, mis rahuldab ülesande rajatingimusi ja on vastava siledusega kinnises piirkonnas $\bar{\Omega}$, näiteks Dirichlet rajatingimuse korral on pidev piirkonnas $\bar{\Omega}$.

Rajaülesannete uurimisel on suhteliselt lihtsaks ja efektiivseks vahendiks maksimumprintsip, millega tutvusime juba parabolset tüüpi võrrandi segaülesande käsitlemisel. Mainitud ülesanded on omavahel seotud. Nimelt olgu $u(x, t)$

segaülesande

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Lu + f(x)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{\Gamma} = \gamma(x)$$

lahend juhul, kui diferentsiaalavaldise Lu kordajad ning funktsioonid f ja γ ei sõltu muutujast t . Siis teatavatel loomulikel eeldustel saab tõestada, et eksisteerib piirfunktsioon

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u(x),$$

mis on rajaülesande $Lu = f$, $u|_{\Gamma} = \gamma$ lahendiks. Nii kandub segaülesande juhul tõestatud maksimumprintsipi üle ka rajaülesande juhule. Märgime, et rajaülesande lahendamiseks võib moodustada iteratsioonimeetodeid, kui rakendada ligikaudseid meetodeid vastava segaülesande lahendamiseks.

Järgnevas sõnastame ja tõestame maksimumprintsipi 2 teoreemina mõnevõrra täpsemal kujul kui eespool parabolset tüüpi võrrandi segaülesande korral. Täpsem kuju võimaldab seda printsipi rakendada ka teist ja kolmandat liiki rajaülesande uurimisel.

Järgnevate lausete korral eeldame, et diferentsiaalavaldise Lu kordajad $a_{1j} = a_{j1}$, b_1 ja c on tõestatud piirkonnas Ω ning et selles piirkonnas Lu on ühtlaselt elliptiline, s.t. leidub selline positiivne konstant a^2 , et iga $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$ korral

$$\sum_{1, j=1}^n a_{1j}(x) y_1 y_j \geq a^2 \sum_{i=1}^n y_i^2, \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

Kõigepealt tõestame 2 lemmat maksimumprintsipi erijuhtul, kui $c = 0$, s.t. kui on tegemist diferentsiaalavaldisega

$$\Delta u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Lemma 1. Olgu $\Delta u < 0$ piirkonnas $x \in \Omega$ ning saavutagu funktsioon $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ maksimumi punktis $x^* \in \Gamma$.

Eeldame, et leidub selline kinnine kera $\bar{U} \subset \bar{\Omega}$, mille pinnal asub x^* . Siis kas u on konstantne piirkonnas Ω või

$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{x=x^*} > 0$, kus $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ on tuletis kera U pinna välisnormaali suunas.

Tõestus. Kui funktsioon $u(x)$ saavutab maksimumi piirkonnas $\bar{\Omega}$ rajapunktis $x^* \in \Gamma$, siis ilmselt $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{x=x^*} \geq 0$.

Lemma väiteks on, et tehtud eeldusel kas $u = \text{const}$, siis

midugi $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{x=x^*} = 0$, või $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{x=x^*} > 0$. Tõestada tuleb, et mittekonstantse u korral tingimata $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{x=x^*} > 0$.

Tõestuskäigus kasutame veel lisaeldust, et $u(x) < u(x^*)$, kui $x \in \Omega$. Lemma 2 tõestamisel rakendame lemmat 1 juhul, kui see lisaeldus on rahuldatud. Lemmast 2 aga järeldub

juba, et see lisaeldus on lemma 1 eeldustel alati rahuldatud. Tähistame sümboliga $S(x^0, r) = \{x: \|x - x^0\| = r\}$ kerapinna

keskpunktiga x^0 ja raadiusega r .

Vastavalt lemma eeldusele leidub selline kera $\bar{U} \subset \Omega$, mille pinnal

$S_0 = S(x^0, r_0)$ asub x^* . Valime

veel r_1 nii, et $0 < r_1 < r_0$, ning

moodustame vastava kerapinna

$S_1 = S(x^0, r_1)$. Tähistame sümboli-



Joonis 14.

ga \bar{G} kerapindade S_0 ja S_1 vahele jääva lahtise piirkonna, mille sulund $\bar{G} = G \cup S_0 \cup S_1$.

Lemma tõestamisel kasutame funktsiooni

$$g(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha r_0^2},$$

kus $r^2 = \|x - x^0\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2$ ning $\alpha > 0$ on valitud nii, et

$$Mg < 0, \text{ kui } x \in G. \quad (3)$$

Veendume, et konstandi α valikuga on võimalik tingimust (3) rahuldada. Et

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = -2\alpha(x_1 - x_1^0) e^{-\alpha r^2},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = -2\alpha e^{-\alpha r^2} + 4\alpha^2(x_1 - x_1^0)^2 e^{-\alpha r^2}$$

ja

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = 4\alpha^2(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) e^{-\alpha r^2}, \text{ kui } i \neq j,$$

siis

$$Mg = \left[-4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + 2\alpha \sum_{i=1}^n a_{ii} + 2\alpha \sum_{i=1}^n b_i(x_i - x_i^0) \right] e^{-\alpha r^2}.$$

Tingimuse (2) abil hindame piirkonnas G

$$Mg \leq \left[-4\alpha^2 a^2 r_0^2 + 2\alpha \sum_{i=1}^n |a_{ii}| + 2\alpha \sum_{i=1}^n |b_i| r_0 \right] e^{-\alpha r^2},$$

millest näeme, et küllalt suure α korral on rahuldatud tingimus (3).

Ilmselt moodustatud funktsioon

$$g \in C^2(\bar{G}) \text{ ja } g|_{S_0} = 0 \quad (4)$$

ning

$$\left. \frac{\partial g}{\partial v} \right|_{x=x^*} = \left. \frac{\partial g}{\partial r} \right|_{x=x^*} = -2\alpha r_0 e^{-\alpha r_0^2} < 0. \quad (5)$$

Moodustane nüüd abifunktsiooni

$$v = u + \varepsilon g,$$

kus u rahuldab lemma eeldusi ja ülaltehtud lisaeldust ning $\varepsilon > 0$ on valitud sedavõrd väike, et

$$v(x) < u(x^*), \text{ kui } x \in S_1.$$

Lemma eelduste ning funktsiooni g omaduste (3) ja (4) tõttu

$$v \in C^2(\bar{G}) \text{ ja } Mv = Mu + \varepsilon Mg < 0.$$

Veendume, et funktsioon v saavutab piirkonnas \bar{G} maksimumi punktis x^* . Tõepoolest, kerapinnal S_0 $v(x) = u(x) < u(x^*) = v(x^*)$, kerapinnal S_1 aga $v(x) < u(x^*)$. Kui oletada, et $v(x)$ saavutab maksimumi piirkonna G sisepunktis x^1 , siis sellel punktis

$$Mv = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} > 0,$$

mis on vastuolus piirkonnas G kehtiva võrratusega $Mv < 0$.

Seega

$$\max_{x \in \bar{G}} v(x) = v(x^*).$$

Maksimumpunktis aga

$$\left. \frac{\partial v}{\partial v} \right|_{x=x^*} = \left. \frac{\partial u}{\partial v} \right|_{x=x^*} + \varepsilon \left. \frac{\partial g}{\partial v} \right|_{x=x^*} \geq 0.$$

Võrratust (5) arvestades saame siit

$$\left. \frac{\partial u}{\partial v} \right|_{x=x^*} \geq -\varepsilon \left. \frac{\partial g}{\partial v} \right|_{x=x^*} > 0,$$

millega lemma ongi tõestatud eespool tehtud lisaeldusel.

Lemma 2. Kui $Mu \leq 0$ piirkonnas Ω ja funktsioon $u \in C^2(\Omega)$ saavutab maksimumi selle piirkonna sisepunktis

$x^0 \in \Omega$, siis u on konstantne piirkonnas Ω .

Tõestus. Eeldusteks on, et

$$\max_{x \in \Omega} u(x) = u(x^0) \text{ ja } x^0 \in \Omega.$$

Tähistame

$$\Omega_0 = \{x : x \in \Omega, u(x) = u(x^0)\} \subset \Omega.$$

Lemma tõestamiseks tuleb näidata, et $\Omega_0 = \Omega$.

Kõigepealt veendume, et Ω_0 on kinnine hulgas Ω , s.t. et kui $x^k \rightarrow x^* \in \Omega$ ja $x^k \in \Omega_0$, siis ka $x^* \in \Omega_0$. See on tõepoolest nii, sest kui $u(x^k) = u(x^0)$, siis $u(x)$ pidevuse tõttu ka $u(x^*) = u(x^0)$.

Edasi näitame, et Ω_0 on lahtine hulk. Meist kahest väitest järeldubki, et $\Omega_0 = \Omega$, sest Ω on sidus lahtine hulk.

Seega lemma tõestuse lõpuleviimiseks tuleb näidata, et Ω_0 on lahtine. Selleks võtame suvalise $x^0 \in \Omega_0$ ning valime

δ nii, et $U(x^0, 2\delta) \in \Omega$,

kus $U(x^0, r) =$

$= \{x : |x - x^0| < r\}$ on

kera keskpunktiga x^0 ja

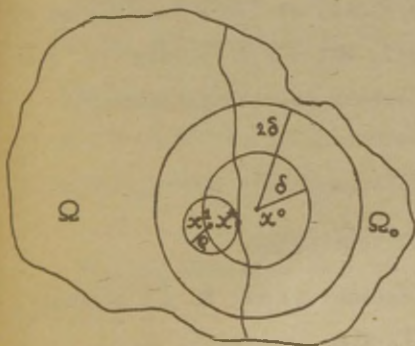
raadiusega r . Näitame,

et siis $U(x^0, \delta) \subset \Omega_0$,

millest järeldubki Ω_0

lahtisus.

Viimase väite põhjendamisel kasutame vastuväitelist tõestusmeetodit. Oletame, et



Joonis 15.

$U(x^0, \delta)$ ei kuulu tervikuna hulka Ω_0 . Siis leidub punkt $x^1 \in U(x^0, \delta)$ nii, et $u(x^1) < u(x^0)$. Et $\Omega \setminus \Omega_0$ on lahtine hulk, siis leidub selline kera $U(x^1, \rho)$, et $u(x) < u(x^0)$, kui $x \in U(x^1, \rho)$, ning et vähemalt ühes selle kera pinna punktis x^* saavutab $u(x)$ maksimumi

$$\max_{x \in \overline{U(x^1, \rho)}} u(x) = u(x^*) = u(x^0).$$

Et $\rho < \delta$ ja $|x^1 - x^0| < \delta$, siis $U(x^1, \rho) \subset U(x^0, 2\delta) \subset \Omega$. Seega keras $U(x^1, \rho)$ on rahuldatud kõik lemma 1 eeldused koos lisaeldusega $u(x) < u(x^*)$, kui $x \in U(x^1, \rho)$. Järelikult lemma 1 põhjal $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{x=x^*} > 0$. Teiselt poolt aga maksimumpunkt x^* on piirkonna Ω sisepunkt, mistõttu

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x=x^*} = 0 \text{ ja seega ka } \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{x=x^*} = 0.$$

See vastuolu tõestabki, et $U(x^0, \delta) \subset \Omega_0$, millest omakorda järeldub lemma väide.

Järeldus 1. Lemmast 2 järeldub, et lemma 1 eeldustel on õige ka lisaeldus $u(x) < u(x^*)$, kui $x \in \Omega$ ja $u(x)$ ei ole konstantne. Tõepoolest, kui leiduks selline piirkonna Ω sisepunkt x^0 , milles

$$u(x^0) = u(x^*) = \max_{x \in \Omega} u(x),$$

siis lemma 2 põhjal $u(x)$ oleks konstantne.

Järeldus 2. Lemmast 2 järeldub, et kui $Mu \leq 0$ piirkonnas Ω ja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, siis

$$u(x) \leq \max_{y \in \Gamma} u(y), \quad x \in \Omega.$$

Sageli formuleeritakse maksimumprintsip just sellisel kujul.

Kui aga

$Mu \geq 0$ piirkonnas Ω ja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$,

siis $M(-u) \leq 0$ ning lemma 2 põhjal

$$-u(x) \leq \max_{y \in \Gamma} [-u(y)] = -\min_{y \in \Gamma} u(y).$$

Mii saame nn. miinimumprintsibi väite

$$u(x) \geq \min_{y \in \Gamma} u(y), \quad x \in \Omega.$$

Juhul kui $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ on homogeense võrrandi $Mu = 0$ lahend, siis saame kasutada nii maksimum- kui ka miinimumprintsibi hinnanguid:

$$\min_{y \in \Gamma} u(y) \leq u(x) \leq \max_{y \in \Gamma} u(y), \quad x \in \Omega.$$

Viimased võrratused näitavad, et homogeense võrrandi $Mu = 0$ lahend saavutab oma minimaalse ja maksimaalse väärtuse piirkonna Ω rajal Γ . Seejuures võrratustes esineb võrdus ainult siis, kui u on konstantne.

Kanname lemmade 1 ja 2 väited üle diferentsiaalavaldise Lu juhule, milles üldiselt $c(x) \neq 0$.

Teoreem 1. Kui $Lu \leq 0$ ja $c \geq 0$ piirkonnas Ω ning funktsioon $u \in C^2(\Omega)$ saavutab positiivse maksimumi selle piirkonna sisepunktis $x^0 \in \Omega$, siis u on konstantne piirkonnas Ω .

Tõestus. Kasutame sama ideed, mis lemma 2 tõestamisel.

Tähistame

$$\Omega_0 = \{x : x \in \Omega, u(x) = u(x^0)\} \subset \Omega.$$

Samuti nagu lemma 2 tõestamisel veendume, et Ω_0 on kinnine hulgas Ω .

Näitame, et Ω_0 on lahtine. Võtame suvalise punkti $x^0 \in \Omega_0$. Siis $u(x^0) > 0$ ja u pidevuse tõttu leidub selline punkti x^0 ümbrus $U(x^0, \delta) \subset \Omega$, milles $u(x) > 0$. Selles ümbruses teoreemi eeldustel

$$Mu = Lu - cu < 0,$$

mistõttu lemma 2 põhjal $u(x) = u(x^0)$, kui $x \in U(x^0, \delta)$. Järelikult $U(x^0, \delta) \subset \Omega_0$. Seega Ω_0 on lahtine ja $\Omega_0 = \Omega$, millega teoreem on tõestatud.

Teoreem 2. Olgu $Lu \leq 0$ ja $c > 0$ piirkonnas Ω ning saavutagu funktsioon $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ positiivse maksimumi punktis $x^* \in \Gamma$. Eeldame, et leidub selline kinnine kera $\bar{U} \subset \bar{\Omega}$, mille pinnal asub x^* . Siis kas u on konstantne piirkonnas Ω või $\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{x=x^*} > 0$, kus $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ on tuletis kera U pinna välisnormaali suunas.

Tõestus. Teoreemis eeldame, et

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = u(x^*) > 0.$$

Siis leidub punkti x^* ümbrus $U(x^*, \delta)$ nii, et piirkonnas $V = \Omega \cap U(x^*, \delta) \neq \emptyset$ $u(x) > 0$ ja seega

$$Mu = Lu - cu \leq 0.$$

Piirkonnas V on rahuldatud lemma 1 eeldused ning seega kas u on konstantne piirkonnas V või $\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{x=x^*} > 0$. Esimesel juhul aga teoreemi 1 põhjal on u konstantne kogu piirkonnas Ω . Sellega on ka teoreem 2 tõestatud.

Märkus. Teoreemidest 1 ja 2 järelduvad erijuhul ka lemmad 2 ja 1. Tõepoolest, kui $c = 0$, siis $Mu = Lu$ ning $M(u + C) = Mu$, kus C on suvaline konstant. Konstandi C saab

aga alati nii valida, et u maksimum oleks positiivne.

2. Aprioorne hinnang esimese rajasülesande lahendi jaoks. Vaatleme diferentsiaalvõrrandi (1) lahendamist Dirichlet' rajatingimisel $u|_{\Gamma} = \gamma(x)$. Eeldame, et sellel sülesandel on olemas klassikaline lahend $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, ning tuletame maksimumprintsibi abil selle lahendi jaoks aprioorse hinnangu, millest järeldub lahendi ainsus ja stabiilsus.

Eeldame, et $a_{ij} = a_{ji}$, b_i , c ja f on pidevad piirkonnas $\bar{\Omega}$ ning γ selle rajal Γ . Samuti eeldame, et diferentsiaalavaldis L rahuldab ühtlase elliptilisuse nõuet (2).

Järgnevas teoreemis anname aprioorse hinnangu vaadeldava sülesande lahendi jaoks kasutades norme

$$\|u\|_{\bar{\Omega}} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|, \quad \|\gamma\|_{\Gamma} = \max_{x \in \Gamma} |\gamma(x)|.$$

Teoreem 3. Kui $c \geq 0$ piirkonnas Ω , siis Dirichlet' sülesande $Lu = f$, $u|_{\Gamma} = \gamma$ klassikalise lahendi jaoks kehtib hinnang

$$\|u\|_{\bar{\Omega}} \leq \|\gamma\|_{\Gamma} + (e^{\beta d} - 1) \|f\|_{\bar{\Omega}}, \quad (6)$$

kus $d = \max_{x, y \in \bar{\Omega}} |x - y|$ on piirkonna $\bar{\Omega}$ diameeter ja

$$\beta = \frac{K + \sqrt{K^2 + 4a^2}}{2a^2}, \quad K = \max_{x \in \bar{\Omega}} |b_1(x)|.$$

Tõestus. Kasutame teoreemi 1. Muutuja vahetusega $v = u - w$ püüame saavutada olukorra, et $Lv \leq 0$. Selleks valime

$$w(x) = \|\gamma\|_{\Gamma} + g(x) \|f\|_{\bar{\Omega}},$$

kus g rahuldab tingimusi

$$g \in C^2(\bar{\Omega}), \quad g(x) > 0, \quad Lg > 1, \quad \text{kui } x \in \Omega. \quad (7)$$

Siis

$$Lv = Lu - Lw = f - c \|\gamma\|_{\Gamma} - Lg \|f\|_{\bar{\Omega}} < 0, \text{ kui } x \in \Omega,$$

ja

$$v = u - w \leq 0, \text{ kui } x \in \Gamma.$$

Teoreemi 1 põhjal järeldub nendest võrratustest, et

$$v = u - w \leq 0 \text{ kogu piirkonnas } \bar{\Omega}.$$

Muutuja vahetusega $v = -u - w$, kus w on sama, mis eespeelgi, saame analoogiliselt, et

$$Lv \leq 0, \text{ kui } x \in \Omega, \text{ ja } v \leq 0, \text{ kui } x \in \Gamma,$$

ning teoreemi 1 põhjal $v = -u - w \leq 0$ kogu piirkonnas $\bar{\Omega}$.

Nii saame hinnangud $-w \leq u \leq w$ ehk

$$|u(x)| \leq w(x) = \|\gamma\|_{\Gamma} + g(x) \|f\|_{\bar{\Omega}}. \quad (8)$$

Konkreetses aprioorse hinnangu saamiseks tuleb moodustada konkreetne tingimusi (7) rahuldav funktsioon g . Seda võib teha näiteks järgmiselt. Asugu piirkond $\bar{\Omega}$ kihilis $b < x_1 < b + d$, kus x_1 on vektori x esimene koordinaat ja d piirkonna $\bar{\Omega}$ diameeter. Võtame

$$g(x) = e^{\beta d} - e^{\beta(x_1 - b)}, \text{ kus } \beta > 0.$$

Siis ilmselt $g \in C^2(\bar{\Omega})$ ja $g(x) \geq 0$, kui $x \in \bar{\Omega}$. Näitame, et konstandi β valikuga saab rahuldada ka viimast tingimustest (7). Et

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = -\beta e^{\beta(x_1 - b)} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} = -\beta^2 e^{\beta(x_1 - b)},$$

siis

$$Lg = (a_{11}\beta^2 + b_1\beta) e^{\beta(x_1 - b)} + cg \geq a^2\beta^2 - K\beta = 1,$$

kui

$$\beta = \frac{K + \sqrt{K^2 + 4a^2}}{2a^2} > 0.$$

Et

$$g(x) < e^{Ad} - 1, \text{ kui } x \in \bar{\Omega},$$

siis hinnangust (8) järeldub hinnang (6), millega teoreem ongi tõestatud.

Märkus. Teoreemi eeldust $c(x) > 0$ võib mõnevõrra nõrgendada. Olgu

$$c(x) > -\delta, \text{ kui } x \in \bar{\Omega},$$

kus $\delta > 0$ on konstant. Tähistame

$$c^+ = \frac{c + |c|}{2} \text{ ja } c^- = \frac{c - |c|}{2}.$$

Siis $c^+ \geq 0$ ja $0 \geq c^- > -\delta$ ning

$$Lu = Mu + cu = Mu + c^+ u + c^- u.$$

Seega Dirichlet' ülesande $Lu = f, u|_{\Gamma} = \gamma$ lahend rahuldab seost

$$Mu + c^+ u = f - c^- u,$$

millest hinnangu (6) abil saame

$$\|u\|_{\bar{\Omega}} \leq \|\gamma\|_{\Gamma} + (e^{Ad} - 1)(\|f\|_{\bar{\Omega}} + \delta\|u\|_{\bar{\Omega}}).$$

Kui $(e^{Ad} - 1)\delta < 1$, siis siit järeldub hinnang

$$\|u\|_{\bar{\Omega}} \leq \frac{\|\gamma\|_{\Gamma} + (e^d - 1)\|f\|_{\bar{\Omega}}}{1 - (e^{Ad} - 1)\delta}.$$

Hinnangust (6) järeldub Dirichlet' rajaülesande lahendi ainsus ja stabiilsus.

Tõepoolest, kui u ja u^* on suvalised ülesande $Lu = f, u|_{\Gamma} = \gamma$ klassikalised lahendid, siis nende vahe rahuldab seoseid

$$L(u - u^*) = 0, \quad u - u^*|_{\Gamma} = 0,$$

millest hinnangu (6) abil saame

$$\|u - u^*\|_{\Omega} = 0, \text{ s.t. } u(x) = u^*(x), \text{ kui } x \in \Omega.$$

Lahendi stabiilsuse näitamiseks moodustame lähteülesandele lähedase ülesande

$$Lu = \tilde{f}, \quad \tilde{u}|_{\Gamma} = \tilde{\gamma}.$$

Kui u on lähteülesande ning \tilde{u} viimase ülesande klassikaline lahend, siis

$$L(u - \tilde{u}) = f - \tilde{f}, \quad u - \tilde{u}|_{\Gamma} = \gamma - \tilde{\gamma},$$

mistõttu hinnangu (6) põhjal

$$\|u - \tilde{u}\|_{\Omega} < \|\gamma - \tilde{\gamma}\|_{\Gamma} + (e^{\beta d} - 1)\|f - \tilde{f}\|_{\Omega}.$$

Paneme tähele, et selles paragrahvis me ei teinud mingeid eeldusi raja Γ sileduse kohta.

3. Teise ja kolmanda rajaülesande lahendi ainsus. Vaatleme võrrandi (1) kolmandat rajaülesannet

$$Lu = f, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u|_{\Gamma} = \gamma(x), \quad (9)$$

kus $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ on tuletis rajapinna Γ välisnormaali suunas. Eeldame, et piirkonna Ω rajapind Γ on sile, s.t. $\Gamma \in C^1$. Siis saab pinna Γ iga punkti jaoks kujundada kera, mille olemasolu eeldasime teoreemis 2, ning pinnal Γ tuletis kera välisnormaali suunas ühtib tuletisega Γ välisnormaali suunas.

Olgu rahuldatud ka teised eeldused, mida tegime teoreemide 1 ja 2 tõestamisel (diferentsiaalavaldis L on ühtlaselt elliptiline ning tema kordajad tõkestatud piirkonnas Ω). Erijuhul, kui $\alpha(x) \equiv 0$, on ülesanne (9) nn. teine rajaülesanne.

Vaatleme esialgu kolmandat rajaülesannet. Olgu $\alpha(x) \neq 0$ ja $\alpha(x) \geq 0$, kui $x \in \Gamma$. Eeldame, et ülesandel (9) on olemas

klassikaline lahend $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Siis see lahend on ainus, kui $c(x) > 0$ piirkonnas Ω .

Väite põhjendamisel tähistame sümbooliga u^* ülesande (9) suvalise klassikalise lahendi. Siis $z = u - u^*$ on ülesande

$$Lz = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu} + \alpha z|_{\Gamma} = 0 \quad (10)$$

klassikaliseks lahendiks. Näitame, et viimasel ülesandel on olemas ainult triviaalne lahend $z(x) = 0$, millest otseselt järeldub ülesande (9) lahendi ainusus.

Viimase väite tõestamisel kasutame vastuväiteliet meetodit. Oletame, et ülesandel (10) leidub mittetriviaalne lahend $z(x)$. Siis kas z või $-z$ peab saavutama piirkonnas $\bar{\Omega}$ positiivse maksimumi. Näitame, et selline oletus viib vastuoluni. Et homogeense ülesande (10) lahendiks on koos funktsiooniga $-z$ alati ka funktsioon z , siis piisab jahu vaatlemisest, kus z saavutab positiivse maksimumi. Vaatleme eraldi kahte võimalust.

a) Kui ülesande (10) lahend z saavutab positiivse maksimumi piirkonna Ω sisepunktis, siis teoreemi 1 põhjal $z(x) = \text{const}$ ning $\alpha z|_{\Gamma} = 0$. Et $\alpha(x) \neq 0$, siis $z(x) = 0$, mis annabki vastuolu.

b) Kui z saavutab positiivse maksimumi piirkonna $\bar{\Omega}$ rajapunktis $x^* \in \Gamma$, siis teoreemi 2 põhjal kas $z(x) = \text{const}$ või $\frac{\partial z}{\partial \nu}|_{x=x^*} > 0$. Esimesel juhul samuti nagu juhul a) $z(x) = 0$. Teisel juhul

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} + \alpha z|_{x=x^*} > \alpha z|_{x=x^*} > 0,$$

mistõttu z ei saa rahuldada ülesande (10) rajatingimust.

Seega ka sellel juhul saame vastuolu, millega kolmanda raja-
 ülesande lahendi ainsus on tõestatud.

Vaatleme nüüd teist rajaülesannet

$$Lu = f, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = \gamma \quad (11)$$

artikli algul tehtud eeldustel. Eeldame, et sellel ülesandel
 on olemas klassikaline lahend $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Kui u^* on
 selle ülesande suvaline klassikaline lahend, siis vahe $z =$
 $z = u - u^*$ on ülesande

$$Lz = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (12)$$

lahendiks. Viimase ülesande lahendiks saab olla ainult
 konstantne funktsioon

$$z(x) \equiv A = \text{const.}$$

Tõepoolest, kui z saavutaks positiivse maksimumi piirkonna
 Ω sisepunktis, siis ta oleks konstantne teoreemi 1 põhjal,
 kui aga selle piirkonna rajapunktis, siis oleks ta konstant-
 ne teoreemi 2 põhjal, sest $\frac{\partial z}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0$.

Kontrollime, millal konstantne funktsioon $z = A$ rahul-
 dab ülesannet (12). Rajatingimus on iga A korral rahuldatud.
 Võrrand

$$Lz \equiv cA = 0$$

on $c(x) \neq 0$ korral rahuldatud ainult siis, kui $A = 0$. Sellisel
 juhul teisel rajaülesande lahend on ainus. Kui aga
 $c(x) \equiv 0$, siis on ülesande (12) lahendiks suvaline konstant
 $z = A$. Sellisel juhul ülesande (11) lahend pole ainus. Ni-
 melt kui ülesande (11) lahendiks on u^* , siis selle ülesande
 lahendiks on ka

$$u = u^* + A$$

suvalise konstandi A korral. Viimane avaldis kujutab vaa-
deldaval juhul teise rajaülesande lahendi üldavaldiet. Me
saame ülesande muuta üheselt lahenduvaks, kui mingi lisa-
tingimuse, näiteks tingimuse

$$\int_{\Gamma} u d\Gamma = 0$$

abil määrame konstandi A .

Rajaülesannete klassikalise lahendi olemasolu tõesta-
mine on küllaltki komplitseeritud. See lihtsustub, kui so-
bival viisil üldistada lahendi mõistet, mida me järgnevas
ka teeme.

§19. Rajaülesande
üldistatud lahend

1. Positiivselt määratud diferentsiaaloperaatorid. Rajaülesande üldistatud lahendi defineerimisel ja olemasolu tõestamisel saab edukalt kasutada funktsionaalanalüüsi vahendeid. Selleks vaatleme rajaülesannet kui operaatorvõrrandit

$$Lu = f$$

ruumis $\mathcal{L}_2(\Omega)$. Järgnevas eeldame, et diferentsiaaloperaator L on sümmeetriline ja positiivselt määratud.

Konkreetsuseks käsitleme juhtu, kus L on määratud teist järku enesekaasse diferentsiaalavaldisega

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}) + cu \quad (1)$$

ning Dirichlet' rajatingimusega

$$u|_{\Gamma} = 0.$$

Sellisel juhul loeme operaatori L määramispiirkonnaks funktsioonide hulga

$$M(L) = \{u : u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \cap H^1(\Omega), u|_{\Gamma} = 0\}. \quad (2)$$

Eeldame, et $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\bar{\Omega})$, $c \in C(\bar{\Omega})$ ning et rajapind Γ on tükati sile. Siis ülaldefineeritud teist järku diferentsiaaloperaator L on sümmeetriline (vt. §15, art. 2), s.t. rahuldab tingimust

$$(Lu, v) = (u, Lv), \text{ kui } u, v \in M(L).$$

Selgitame, millal operaator L on positiivselt määratud, s.t. millal leidub selline konstant $\mu > 0$, et

$$(Lu, u) \geq \mu^2(u, u), \quad u \in M(L). \quad (3)$$

Lähtume I Greeni valemist (vt. § 15, art. 2)

$$(Lu, u) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu^2 \right] dx - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial \nu_A} d\Gamma.$$

Eeldame, et $c(x) \geq 0$, kui $x \in \Omega$, ja et diferentsiaalvalemis L on ühtlaselt elliptiline piirkonnas Ω , s.t. et leidub selline konstant $a^2 > 0$, et

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j \geq a^2 \sum_{i=1}^n y_i^2, \text{ kui } x \in \Omega.$$

Siis

$$(Lu, u) \geq a^2 \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx + \int_{\Omega} cu^2 dx. \quad (4)$$

Siit näeme, et $c(x) \geq \mu^2 > 0$ korral operaator L on positiivselt määratud. Näitame, et L on positiivselt määratud ka nõrgema nõude $c(x) \geq 0$ korral. Selleks hindame funktsiooni u normi tema osatuletiste normide kaudu.

Olgu piirkonna Ω diameeter d . Sulgeme selle piirkonna kuupi

$$K = \{x : \alpha_1 < x_1 < \alpha_1 + d, \quad i=1,2,\dots,n\} \supset \Omega$$

ning jätkame funktsiooni $u \in M(L)$ kogu kuupi lugedes $u(x) = 0$, kui $x \in K \setminus \Omega$. Sellisel teel saame kuubis K pideva funktsiooni u . Newton-Leibnizi valemi põhjal

$$u(x) = \int_{\alpha_1}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1,$$

millest Cauchy-Bunjakovski valemi abil saame

$$|u(x)|^2 = \left| \int_{\alpha_1}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot 1 dx_1 \right|^2 \leq (x_1 - \alpha_1) \int_{\alpha_1}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 dx_1.$$

Siit

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_1+d} |u(x)|^2 dx_1 \leq \frac{d^2}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_1+d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 dx_1.$$

Integreerides iga muutuja x_j , $j \neq i$, järgi lõigul $[\alpha_j, \alpha_j+d]$, saame

$$\int_K |u(x)|^2 dx \leq \frac{d^2}{2} \int_K \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 dx.$$

Et $u(x) = 0$, kui $x \in \mathbb{K} \setminus \Omega$, siis võime kuubi K asemel võtta integreerimispiirkonnaks Ω . Kui veel summeerime i järgi, siis jõuame võrratuseni

$$n \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq \frac{d^2}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 dx.$$

Selle abil saame võrratusest (4)

$$(Lu, u) \geq \mu^2 (u, u), \quad u \in M(L),$$

kus $\mu^2 = \frac{2na^2}{d^2}$, s.t. operaator L on positiivselt määratud.

Tuletame veel ühe võrratuse, mida kasutame järgmises artiklis. Võrratusest (4) ja positiivse määratuse nõudest (3) saame

$$\frac{1}{a^2} (Lu, u) \geq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2, \quad \frac{1}{\mu^2} (Lu, u) \geq \|u\|^2.$$

Nendest võrratustest järeldub, et

$$(Lu, u) \geq \mu_1^2 \|u\|_{H_1}^2, \quad u \in M(L), \quad (5)$$

kus

$$\|u\|_{H_1}^2 = \|u\|^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2, \quad \mu_1 = \frac{a\mu}{\sqrt{a^2 + \mu^2}}.$$

2. Üldistatud lahendi mõiste. Vaatleme esialgu veidi üldisemat probleemi. Olgu antud Hilberti ruum H ja selles lineaarne sümmeetriline positiivselt määratud operaator L , mille määramispiirkond $M(L)$ on kõikjal tihe ruumis H . Ope-

raatori positiivselt määratus tähendab sellise konstandi $\mu > 0$ leidumist, et

$$(Lu, u) \geq \mu^2 \|u\|^2, \quad u \in M(L).$$

Hulgas $M(L)$ defineerime uue skalaarkorrutise

$$(u, v)_L = (Lu, v),$$

millele vastab norm $\|u\|_L = \sqrt{(u, u)_L}$. Vahetult saab kontrollida, et $(u, v)_L$ rahuldab skalaarkorrutise omadusi:

- 1° $(u, v)_L = (v, u)_L$,
- 2° $(\alpha u + \beta v, w)_L = \alpha(u, w)_L + \beta(v, w)_L$,
- 3° $(u, u)_L \geq 0$ ning $(u, u)_L = 0$ siis ja ainult siis, kui $u = 0$.

Lineaarne hulk $M(L)$ varustatuna uue meetrikaga pole üldiselt täielik. Muutes selle tavalise täielikustamise protsessi abil täielikuks, saame uue Hilberti ruumi H_L , mida nimetatakse Friedrichsi ruumiks.

Positiivse määratuse nõue annab seose ruumi H normi ja Friedrichsi normi $\|u\|_L$ vahel:

$$\|u\| \leq \frac{1}{\mu} \|u\|_L, \quad u \in M(L).$$

Sellest seosest näeme, et koonduvusest ruumis H_L järeldub koonduvus ruumis H . Ruumi H_L täielikustamisel kasutatavad fundamentaaljadad osutuvad fundamentaaljadadeks ka ruumis H . Seetõttu hulgale $M(L)$ lisatavad elemendid võib samastada ruumi H elementidega, milleks vastavad fundamentaaljadad koonduvad ruumis H . (Näidata, et nii saame üksühese vastavuse ruumi H_L juurdetoodud elementide ja ruumi H teatavate elementide vahel!)

Seega $\mathbb{N}(L) \subset H_L \subset H$. Piirprotsessi abil saame laiendada normidevahelise seose kogu ruumile H_L :

$$\|u\| \leq \frac{1}{\mu} \|u\|_L, \quad u \in H_L.$$

Vaatleme nüüd võrrandit

$$Lu = f, \quad f \in H, \quad (6)$$

kus L on lineaarne sümmeetriline positiivselt määratud operaator ruumis H kõikjal tiheda määramispiirkonnaga. Kui sellel võrrandil on olemas lahend u^* , siis mistahes $v \in H_L$ korral

$$(v, f) = (v, Lu^*)$$

ehk

$$(v, f) = (v, u^*)_L.$$

Osutub, et viimane seos määrab iga $f \in H$ korral üheselt elemendi u^* . Tõepoolest,

$$|(v, f)| \leq \|f\| \|v\| \leq \frac{\|f\|}{\mu} \|v\|_L.$$

Seega (v, f) kujutab iga $f \in H$ korral pidevat lineaarset funktsionaali ruumis H_L . Järelikult saab selle esitada kujul (vt. näit. [8], lk. 177)

$$(v, f) = (v, u^*)_L, \quad v \in H_L. \quad (7)$$

Viimase seose abil üheselt määratud elementi $u^* \in H_L$ nimetatakse võrrandi (6) üldistatud lahendiks. Tõestatu põhjal on sellel võrrandil iga $f \in H$ korral olemas üheselt määratud üldistatud lahend. Juhul kui üldistatud lahend $u^* \in \mathbb{N}(L)$, siis osutub ta võrrandi (6) tavaliseks lahendiks.

Paneme tähele, et võrrandi (6) üldistatud lahendite u^* ja ruumi H elementide f vahel on üksühene vastavus. Kui seda vastavust kasutada operaatori L laiendamiseks, siis jõuame operaatori L enesekaasse laiendini \bar{L} , mille määramispiirkonnaks on üldistatud lahendite hulk ning väärtuste hulgaks kogu ruum H . Võrrandi (6) üldistatud lahendid on parajasti võr-

randi $\bar{L}u = f$ lahenditeks.

Definitsioonist (7) on lihtne saada aprioorseid hinnanguid võrrandi (6) (üldistatud) lahendi u^* jaoks. Selleks võtame $v = u^*$;

$$(u^*, f) = \|u^*\|_L^2$$

ning hindame

$$\|u^*\|_L^2 \leq \|f\| \|u^*\| \leq \frac{1}{\mu} \|f\| \|u^*\|_L.$$

Mil saame aprioorseid hinnanguid

$$\mu \|u^*\| \leq \|u^*\|_L \leq \frac{1}{\mu} \|f\|. \quad (8)$$

Hendest hinnangutest järeldub ka ülesande (6) lahendi stabiilsus. Tõepoolest, kui u^* on selle ülesande lahend ja \tilde{u}^* ülesande $L\tilde{u} = \tilde{f}$ lahend, siis

$$L(u^* - \tilde{u}^*) = f - \tilde{f}$$

ning (8) põhjal

$$\|u^* - \tilde{u}^*\| \leq \frac{1}{\mu} \|f - \tilde{f}\|.$$

Ülesanne 1. Tõestada, et linearsel sümmeetrilisel positiivselt määratud operaatoril L on olemas tõkestatud pöördoperaator L^{-1} ning

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu^2} \text{ ja } \|L^{-1}\|_L \leq \frac{1}{\mu^2}.$$

Ülesanne 2. Näidata, et üldistatud lahendi definitsiooniga (7) on samaväärne järgmine. Olgu $f_k \xrightarrow{H} f$ ning eksisteerigu võrrandil $L u = f_k$ iga $k=1, 2, \dots$ korral lahend $u_k \in M(L)$. Võrrandi (6) üldistatud lahendiks nimetatakse ja da u_k piirelementi ruumis H_L .

3. Dirichlet' ülesande üldistatud lahend. Rakendame eelmises artiklis esitatud üldisi tulemusi Dirichlet'

ülesande juhul. Olgu operaator L defineeritud diferentsiaal-avaldisega (1) ning tema määramispiirkonnaks olgu valeliga (2) antud hulk $M(L)$. Olgu ruum $H = \mathcal{L}_2(\Omega)$. Eeldame, et on rahuldatud artiklis 1 tehtud eeldused. Siis L on sümmeetriline positiivselt määratud operaator ruumis $\mathcal{L}_2(\Omega)$ kõikjal tiheda määramispiirkonnaga. Võrrandi (6) tavaline lahend on Dirichlet' ülesande klassikaliseks lahendiks. Klassikalise lahendi olemasolu selgitamine on küllaltki komplitseeritud probleem. Iga $f \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ korral on sellel ülesandel olemas aga ainus üldistatud lahend $u^* \in H_L$.

Uurime pisut lähemalt normi ruumis H_L . I Greeni valemi põhjal

$$|u|_L^2 = (Lu, u) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu^2 \right] dx.$$

Kordajate a_{ij} ja c tõkestatuse tõttu leidub selline konstant $\alpha > 0$, et

$$|u|_L^2 \leq \alpha^2 |u|_{H^1}^2.$$

Et hinnangust (5)

$$|u|_L^2 \geq \mu_1^2 |u|_{H^1}^2,$$

siis

$$\mu_1 |u|_{H^1} \leq |u|_L \leq \alpha |u|_{H^1},$$

s.t. ruumide H_L ja $H^1(\Omega)$ normid on ekvivalentsed. Järelikult $H_L = H^1(\Omega)$. Et $u^* \in H^1(\Omega)$, siis üldistatud lahend u^* ning tema esimest järku üldistatud osatuletised $\frac{\partial u^*}{\partial x_i}$ kuuluvad ruumi $\mathcal{L}_2(\Omega)$. §15 teoreemi 2 põhjal rahuldab üldistatud lahend peaaegu kõikjal rajatingimust $u^*|_{\Gamma} = 0$.

Veel saab näidata, et kui diferentsiaalavaldise L kordajad a_{1j} ja c on lõpmatukordselt diferentseeruvad, siis Dirichlet' ülesande üldistatud lahend on diferentsiaalvõrrandi $Lu = f$ üldistatud lahendiks piirkonnas Ω distributsioonide teooria mõttes. Tõepoolest seose (7) põhjal iga $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ korral

$$\langle f, \varphi \rangle = (\varphi, f) = (\varphi, u^*)_{\mathbb{L}} = (u^*, L\varphi) = \langle Lu^*, \varphi \rangle.$$

Kui teha lisaeldusi võrrandi kordajate a_{1j} , c , vabaliikme f ning rajapinna Γ sileduse kohta, siis saab näidata üldistatud lahendi suuremat siledust. Näiteks töös [12], ptk. 2 tõestatud üldisematest tulemustest saame erijuhul, et kui a_{1j} , $c \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\Gamma \in C^\infty$ ning $f \in H^k$, kus $k \geq 0$, siis Dirichlet' ülesande üldistatud lahend $u^* \in H^{k+2}$. See tulemus kehtib ka nõrgematel eeldustel kordajate a_{1j} ja c ning rajapinna Γ kohta.

Kui üldistatud lahend $u^* \in M(L)$, siis ta osutub selle ülesande klassikaliseks lahendiks. Dirichlet' ülesande klassikalise lahendi olemasolu ja kuuluvuse kohta teatavasse Höldereri ruumi (vt. § 14, art. 5) tõestas J.Schauder 1934.a. järgmise tulemuse (vt. näit. [10], lk. 145).

Teoreem. Kui $a_{1j} \in C^{k+1+\beta}(\bar{\Omega})$, $c \in C^{k+\beta}(\bar{\Omega})$, $f \in C^{k+\beta}(\bar{\Omega})$ ja rajapind $\Gamma \in C^{k+2+\beta}$, kus $k \geq 0$ ja $0 < \beta < 1$, siis ülesandel $Lu = f$, $u|_{\Gamma} = 0$ on olemas klassikaline lahend $u^* \in C^{k+2+\beta}(\bar{\Omega})$.

4. Üldistatud lahendi ligikaudne leidmine. Me defineerime rajaülesande üldistatud lahendi mittekonstruktiivsel teel. Rajaülesande lahendi ligikaudsel leidmisel kasutatakse sageli variatsioonmeetodeid, mis põhinevad asjaolul, et liineaarse sümmeetrilise positiivselt määratud operaatori L korral annab funktsionaalile

$$F(u) = (Lu, u) - 2(f, u), \quad u \in M(L)$$

minimaalse väärtuse parajasti võrrandi $Lu = f$ lahend. Selle väite õigsuses võime veenduda järgmisel teel. Kirjutame funktsionaali $F(u)$ kujul

$$F(u) = (u, u)_L - 2(f, u)$$

ja laiendame ta kogu ruumile H_L . Arvestades võrrandi (6) üldistatud lahendit u^* defineerivad seost (7), saame selle funktsionaali kirjutada kujul

$$F(u) = \|u\|_L^2 - 2(u, u^*) = \|u - u^*\|_L^2 - \|u^*\|_L^2,$$

millest näeme, et

$$\min_{u \in H_L} F(u) = F(u^*) = - \|u^*\|_L^2,$$

s.t. funktsionaalile $F(u)$ annab minimaalse väärtuse parajasti võrrandi (6) üldistatud lahend. Juhul, kui minimeeriv element $u^* \in M(L)$, siis on ta selle võrrandi tavaliseks lahendiks.

Ülalesitatust näeme veel ühte võimalust rajaülesande üldistatud lahendi defineerimiseks. Nimelt võime selle defineerida kui funktsionaali $F(u)$ minimeeriva elemendi.

Variatsioonmeetodid annavad teatavad eeskirjad funktsionaali $F(u)$ minimeeriva jada konstrueerimiseks, s.t.

sellise jada u_k moodustamiseks, mille korral

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(u_k) = F(u^*).$$

Et

$$F(u_k) - F(u^*) = \|u_k - u^*\|_L^2,$$

siis iga minimiseeriv jada koondub võrrandi (6) üldistatud lahendiks u^* ruumi H_L ning järelikult ka ruumi H meetrika mõttes.

Funktsionaali $F(u)$ minimiseeriva jada saab moodustada järgmisel teel. Valime lõpmatu jada elemente $\varphi_i \in M(L)$, $i=1,2,\dots$ nii, et nad moodustaksid ruumis H_L täieliku orto- normeeritud süsteemi. Siis avaldub võrrandi (6) üldistatud lahend ruumis H_L koonduva Fourier' reana

$$u^* = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i, u^*)_L \varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i, f) \varphi_i.$$

Fourier' rea osasummad

$$u_k = \sum_{i=1}^k (\varphi_i, f) \varphi_i$$

kujutavad funktsionaali $F(u)$ minimiseerivat jada, sest

$$\|u_k - u^*\|_L \rightarrow 0, \text{ kui } k \rightarrow \infty.$$

Sageli on tülikas moodustada ruumis H_L ortonormeeritud süsteemi. Sellisel juhul võib moodustada lõpmatu jada $\varphi_i \in H_L$, $i=1,2,\dots$ nii, et iga lõplik hulk selle jada elemente oleksid lineaarselt sõltumatud ning et see jada oleks täielik ruumis H_L , s.t. et vastavalt igale $\varepsilon > 0$ ja $u \in H_L$ leiduksid naturaalarv k ja konstandid c_1, c_2, \dots, c_k nii, et

$$\|u - \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i\|_L < \varepsilon.$$

Ülesande (6) lähislahendi võime leida järgmisel teel.

Moodustame fikseeritud k korral lineaarse kombinatsiooni

$$u_k = \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i \quad (9)$$

ning leiame kordajad c_1 tingimusest, et $F(u_k)$ omandaks minimaalse väärtuse. Viimane k -muutuja funktsiooni minimumväärtus on lihtsalt lahenduv. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} F(u_k) &= \sum_{i,j=1}^k c_i c_j (L\varphi_i, \varphi_j) - 2 \sum_{i=1}^k c_i (\varphi_i, f), \\ \frac{\partial F(u_k)}{\partial c_j} &= 2 \sum_{j=1}^k c_j (L\varphi_j, \varphi_j) - 2(\varphi_j, f), \\ \frac{\partial^2 F(u_k)}{\partial c_j \partial c_\mu} &= 2(L\varphi_j, \varphi_\mu). \end{aligned}$$

Et minimumpunktis esimest järku osatuletised võrduvad nulliga, siis kordajad c_j peavad rahuldama seoseid

$$\sum_{j=1}^k c_j (L\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i=1,2,\dots,k. \quad (10)$$

Ruutvormi

$$\begin{aligned} \sum_{\nu,\mu=1}^k \frac{\partial^2 F(u_k)}{\partial c_\nu \partial c_\mu} h_\nu h_\mu &= 2 \sum_{\nu,\mu=1}^k (L\varphi_\mu, \varphi_\nu) h_\nu h_\mu = \\ &= 2(L \sum_{\mu=1}^k h_\mu \varphi_\mu, \sum_{\nu=1}^k h_\nu \varphi_\nu) \geq 2\mu^2 \left\| \sum_{\mu=1}^k h_\mu \varphi_\mu \right\|^2 \end{aligned}$$

positiivselt määratusest järeldub (vt. näit. [1], lk. 220), et võrrandisüsteemi (10) lahend annab funktsioonile $F(u_k)$ minimaalse väärtuse.

Viimasena esitatud variatsioonmeetodit nimetatakse

Ritzi meetodiks. Ritzi meetodi koonduvus ruumis H_L (järelilikult ka ruumis H) järeldub asjaolust, et koordinaatfunktsioonide φ_i ortonormeerimise korral ruumis H_L selle meetodi abil leitud lähislahendid ei muutu, avaldis (9) aga kujutab

lahendi Fourier' rea osasummat, sest ruumis H_L ortonormeeritud koordinaatfunktsioonide korral saame võrrandisüsteemist (10)

$$c_1 = (f, \varphi_1) = (\varphi_1, u^*)_L.$$

Märgime lõpuks, et algoritm, mille korral võrrandi (6) lähislahend leitakse kujul (9), kusjuures viimase avaldise kordajad arvutatakse võrrandisüsteemi (10) lahendamise teel, on rakendatav ka mittesümmeetrilise operaatori L korral. Vastavat Ritsi meetodi üldistust nimetatakse Galjorkini meetodiks.

§20. Harmoonilised funktsioonid

1. Laplace'i operaatori fundamentaallahendid. Kõige lihtsamaks elliptilist tüüpi võrrandiks on Laplace'i võrrand

$$\Delta u = 0,$$

kus $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ on Laplace'i operaator. Selle võrrandi lahendamisele taanduvad väga mitmesugused füüsika probleemid. Näiteks Laplace'i võrrandit rahuldab statsionaarne temperatuurijaotus homogeenses isotroopses kehas, samuti gravitatsioonivälja ja statsionaarse elektrivälja potentsiaalid piirkonnas, kus puuduvad vastavalt massid või elektrilaengud.

Laplace'i võrrandi lahendeid nimetatakse harmoonilisteks funktsioonideks. Täpsemalt, funktsiooni u nimetatakse harmooniliseks tõkestatud piirkonnas Ω , kui $u \in C^2(\Omega)$ ja $\Delta u = 0$, $x \in \Omega$. Praktikas pakuvad huvi Laplace'i võrrandi lahendid eeskätt $n = 2$ ja $n = 3$ korral, millistel juhtudel järgnevas peatume gi.

Eriline tähtsus järgnevas on Laplace'i võrrandi lahenditel $\ln \frac{1}{\|x-y\|}$ ja $\frac{1}{\|x-y\|^2}$ vastavalt $n = 2$ ja $n = 3$ korral, kus $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ on fikseeritud punkt. Neid lahendeid nimetatakse Laplace'i operaatori fundamentaallahenditeks. Nendel lahenditel on iseärane punkt $x = y$, milles nad tõkestamatult kasvavad. Näitame, et mainitud funktsioonid rahuldavad Laplace'i võrrandit.

Teoreem 1. Funktsioonid $\ln \frac{1}{\|x-y\|}$ ja $\frac{1}{\|x-y\|^2}$ on vastavalt $n = 2$ ja $n = 3$ korral harmoonilised igas tõkestatud piirkon-

nas, mis ei sisalda punkti y .

Tõestus. Kirjutiste lühendamiseks tähistame siin ja edaspidi

$$r = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Kontrollime vahetult teoreemi väidete õigsust.

$n = 2$ korral $u = \ln \frac{1}{r}$ ning

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln r^2}{\partial x_1} = -\frac{x_1 - y_1}{r^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = -\frac{r^2 - 2(x_1 - y_1)^2}{r^4}.$$

Seega tõepoolest

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -\frac{2r^2 - 2(x_1 - y_1)^2 - 2(x_2 - y_2)^2}{r^4} = 0, \text{ kui } r \neq 0.$$

$n = 3$ korral $u = \frac{1}{r}$ ning

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{x_1 - y_1}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = -\frac{r^2 - 3(x_1 - y_1)^2}{r^5}.$$

Seega

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0, \text{ kui } r \neq 0.$$

millega teoreem on tõestatud.

Märkus. Laplace'i operaatori fundamentaallahend defineeritakse ka kui distributsioon $\varepsilon_n \in \mathcal{D}'$, mis rahuldab võrrandit $\Delta \varepsilon_n = \delta(x)$, võib näidata (vt. näit. [4], lk. 203), et viimase võrrandi (üldistatud) lahenditeks on

$$\varepsilon_2(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|x\|}, \quad \varepsilon_3(x) = -\frac{1}{4\pi \|x\|}.$$

$$\varepsilon_n(x) = -\frac{1}{(n-2) \sigma_n \|x\|^{n-2}}, \quad n > 3,$$

kus $\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ on n -mõõtmelise ühikkera pindala. Seega

kuni konstantse kordajani langevad need ühte ülalesitatud

fundamentaallahendi mõistega $y = 0$ korral.

2. Funktsiooni integraalne esitus. Harmooniliste funktsioonide uurimisel on oluline tähtsus valemitel, mis esitavad suvalise sileda funktsiooni nn. potentsiaalide kaudu. Sõnastame vastava teoreemi. Seejuures eeldame, et Ω on tõkestatud lahtine piirkond tükati sileda rajaga Γ . Teoreemi tõestamisel ning ka korduvalt edaspidi kasutame II Greeni valemit (vt. § 15, art. 2), millel $\Delta u = -\Delta v$ korral on kuju

$$\int_{\Omega} (\nabla \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\Gamma} (v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}) d\Gamma,$$

kus $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ on tuletis raja Γ välisnormaali suunas. See valem kehtib, kui $u, v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Teoreem 2. Olgu $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Siis $n = 2$ korral kehtib valem

$$u(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \Delta u(x) \ln \frac{1}{|x-y|} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\ln \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} - u(x) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{|x-y|} \right] d\Gamma \quad (1)$$

ja $n = 3$ korral valem

$$u(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta u(x)}{|x-y|} dx + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} - u(x) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|x-y|} \right] d\Gamma, \quad (2)$$

kus $y \in \Omega$ ning $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ on tuletis rajapinna Γ välisnormaali suunas.

Märkus. Need valemid esitavad funktsiooni u kolme liikme summana, mida nimetatakse potentsiaalideks ja mis kujutavad endast konvolutsioone fundamentaallahendiga. Neid võib

tõlgendada füüsikaliselt kui elektrivälja potentsiaali. Niimelt kolmedimensionaalses ruumis tihedusega $\varphi(x)$ paiknevad elektrilaengud tekitavad elektrivälja potentsiaaliga

$\int_{\Omega} \frac{\varphi(x)}{\|x-y\|} dx$. Pindintegraalidena väljenduvaid viimaseid liidetavaid võib aga tõlgendada vastaval pinnal paiknevate elektrilaengute poolt tekitatud välja potentsiaalidena. Seetõttu integraalina üle Ω avalduvat potentsiaali nimetatakse ruumiliseks potentsiaaliks, pindintegraalidena väljenduvaid potentsiaale aga pinnalisteks potentsiaalideks. Kolmemõõtmelisel juhul nimetatakse vastavaid potentsiaale Newtoni potentsiaalideks, kahemõõtmelisel juhul aga logaritmilisteks potentsiaalideks.

Teoreemi 2 tõestus. Olgu $y \in \Omega$ ning $r = \|x - y\|$. Lõikame piirkonnast Ω välja punkti $x = y$ keraga (kahemõõtmelisel juhul ringiga)

$$U_{\varepsilon} = U(y, \varepsilon) = \{x: \|x - y\| < \varepsilon\},$$

mille raadiuse $\varepsilon > 0$ valime sedavõrd väikese, et kerapind

$$(ringjoon) S_{\varepsilon} = S(y, \varepsilon) \subset \Omega.$$

Tähistame ülejäänud piirkonna

$$\Omega_{\varepsilon} = \Omega \setminus \bar{U}_{\varepsilon} \text{ ja selle raja } \Gamma_{\varepsilon} = \Gamma \cup S_{\varepsilon}.$$

$$\text{Olgu } v \in C^1(\bar{\Omega}_{\varepsilon}) \cap C^2(\Omega_{\varepsilon}).$$

Siis II Greeni valemi põhjal

$$\int_{\Omega_{\varepsilon}} (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\Gamma_{\varepsilon}} (v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}) d\Gamma. \quad (3)$$

Teoreemis väidetud valemite tuletamiseks võtame viimases sees funktsiooniks v Laplace'i operaatori fundamentaallahendi



Joonis 16.

ning teostame piirprotsessi $\varepsilon \rightarrow 0$. Et fundamentaallahendi avaldised $n = 2$ ja $n = 3$ korral on erinevad, siis vaatleme neid juhte eraldi.

Juhul $n = 2$ võtame $v = \ln \frac{1}{r}$. Siis teoreemi 1 põhjal $\Delta v = 0$ piirkonnas Ω_ε ning valemi (3) võime kirjutada kujul

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u \ln \frac{1}{r} dx = \int_{\Gamma} \left[\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} \left[\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \right] d\Gamma.$$

Näitame, et piiril $\varepsilon \rightarrow 0+$ viimane integraal läheneb piirväärtusele $-2\pi u(y)$, millega olemegi tõestanud valemi (1).

Tõepoolest, integraalarvutuse keskväertusteoreemi põhjal

$$\int_{S_\varepsilon} \ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = \ln \frac{1}{\varepsilon} \cdot 2\pi\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{x=\bar{x}}, \text{ kus } \bar{x} \in S_\varepsilon.$$

Viimase võrduse parem pool aga läheneb nullile, kui $\varepsilon \rightarrow 0+$, sest $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ on tõkestatud ning l'Hospitali reegli põhjal

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln \frac{1}{\varepsilon} 2\pi\varepsilon = -2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = -2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = 0.$$

Seega

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{S_\varepsilon} \ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = 0.$$

Et ringjoonel S_ε

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} = \frac{\partial \ln r}{\partial r} = \frac{1}{r},$$

siis

$$\int_{S_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} d\Gamma = \int_{S_\varepsilon} u \frac{1}{r} d\Gamma = \frac{1}{\varepsilon} 2\pi\varepsilon u(\bar{x}), \text{ kus } \bar{x} \in S_\varepsilon$$

ja järelikult

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{S_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} d\Gamma = 2\pi u(y).$$

Sellega oleme tõestanud teoreemi väite $n = 2$ korral.

Juhul $n = 3$ toimime analoogiliselt. Asetades valemisse (3) $v = \frac{1}{r}$, saame

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{r} \Delta u \, dx = \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r} \right] d\Gamma + \int_{S_\varepsilon} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r} \right] d\Gamma.$$

Et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{S_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\varepsilon} 4\pi \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{x=\bar{x}} = 0, \quad \bar{x} \in S_\varepsilon,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{S_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r} \, d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi \varepsilon^2 u(\bar{x}) = 4\pi u(y), \quad \bar{x} \in S_\varepsilon,$$

siis piiril $\varepsilon \rightarrow 0+$ jõuame valemieni (2), millega kõik teoreemi väited on põhjendatud.

3. Harmooniliste funktsioonide omadusi a) Lineaarne funktsioon

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \beta_1$$

on harmooniline igas tõkestatud piirkonnas. (Veenduda selles!) Teoreemist 1 näeme, et leidub ka mittelineaarseid harmoonilisi funktsioone. Tutvume harmooniliste funktsioonide mõningate huvitavate omadustega.

Olgu piirkonnas Ω harmooniline funktsioon $u \in C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega)$. Teoreemi 2 põhjal saab selle funktsiooni $n = 2$ korral esitada kujul

$$u(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \right) d\Gamma \quad (4)$$

ja $n = 3$ korral kujul

$$u(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r} \right) d\Gamma, \quad (5)$$

kus $y \in \Omega$ ja $r = \|x - y\|$. Neist valemitest näeme, et harmooniline funktsioon u on üheselt määratud kogu piirkonnas Ω oma ja oma tuletise $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ väärtustega piirkonna rajal Γ . Edasi järeldub neist valemitest, et harmooniline funktsioon $u \in C^\infty(\Omega)$. Tõepoolest, kui $y \in \Omega$ ja $x \in \Gamma$, siis $r = \|x - y\| \neq 0$ ning valemites (4) ja (5) integraali all olev funktsioonil on olemas rajal Γ mistahes järku pidevad osatuletised vektori y koordinaatide järgi. Järelikult ka funktsioonil u on piirkonnas Ω olemas kõik pidevad osatuletised.

6) Harmooniliste funktsioonide uurimisel saab kasutada maksimumprintsipi. Diferentsiaalavaldise $Mu = -\Delta u$ korral on rahuldatud kõik § 18 artiklis 1 tehtud eeldused, kusjuures ühtlase elliptilisuse nõudes $a^2 = 1$. Seega näiteks järeldus 2 samast artiklist annab harmoonilise funktsiooni $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ jaoks võrratused

$$\min_{x \in \Gamma} u(x) \leq u(y) \leq \max_{x \in \Gamma} u(x), \quad y \in \Omega, \quad (6)$$

milles võrdus saab esineda ainult siis, kui u on konstantne. Näeme, et harmooniline funktsioon saavutab oma suurima ja vähima väärtuse piirkonna rajal. Nendest võrratustest järeldub harmoonilise funktsiooni jaoks hinnang (veenduda selles!)

$$|u(y)| \leq \max_{x \in \Gamma} |u(x)|, \quad y \in \Omega. \quad (7)$$

Harmoonilise funktsiooni väärtused piirkonna rajal võib küllaltki avaratel eeldustel vabalt ette anda. Harmoonilise funktsiooni tuletist $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ ei saa aga rajal üldiselt vabalt ette anda. Nimelt võttes II Greeni valemis

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\Gamma} (v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}) d\Gamma$$

funktsiooniks u suvalise harmoonilise funktsiooni ja $v = 1$, saame võrduse

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = 0, \quad (8)$$

mida peab rahuldama igä harmooniline funktsioon $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

c) Huvitavat harmooniliste funktsioonide omadust väljendab nn. teoreem aritmeetilisest keskmisest, mis väidab, et harmoonilise funktsiooni väärtus kera keskpunktis võrdub aritmeetilise keskmisega tema väärtustest kera pinnal. Täpsemalt võib selle väite sõnastada järgmiselt.

Teoreem 3. Kui funktsioon u on harmooniline keras

$U_R = U(y, R)$ ja pidev kinnises keras \bar{U}_R , siis

$$u(y) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{S_R} u(x) dS,$$

kus S_R on kera \bar{U}_R pind ja σ_n n -mõõtmelise ühikkera pindala (teatavasti $\sigma_2 = 2\pi$ ja $\sigma_3 = 4\pi$).

Tõestus. Tõestame teoreemi $n = 2$ ja $n = 3$ korral. Võtame $0 < \varrho < R$. Siis $u \in C^2(\bar{U}_\varrho)$. Juhul $n = 2$ saame valemite (4) ja (8) abil

$$u(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_\varrho} (\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r}) dS = \frac{1}{2\pi \varrho} \int_{S_\varrho} u(x) dS.$$

Analoogiliselt saame $n = 3$ korral valemite (5) ja (8) abil

$$u(y) = \frac{1}{4\pi \varrho^2} \int_{S_\varrho} u(x) dS.$$

Minnes üle piirile $\varrho \rightarrow R$ jõuamegi $n = 2$ ja $n = 3$ korral teoreemis väidetud valemieni.

21. Dirichlet' ülesanne
Poissoni ja Laplace'i
võrrandi jaoks

1. Greeni funktsioon. Olgu Ω tõkestatud piirkond tükati sileda rajaga Γ . Vaatleme Dirichlet' ülesannet

$$\Delta u = -f(x), \quad x \in \Omega, \quad u|_{\Gamma} = \gamma(x) \quad (1)$$

selle klassikalises seades. Ülesandes (1) esinevat võrrandit nimetatakse Poissoni võrrandiks. Erijuhul, kui $f(x) = 0$, saame Laplace'i võrrandi. Täpsemalt nimetatakse ülesannet

(1) Dirichlet' siseülesandeks. Paragrahvi viimastes artiklites vaatleme ka nn. Dirichlet' välisülesannet, mille korral nõutakse leida võrrandi lahend väljaspool pinda Γ paiknevas piirkonnas Ω' ni, et ta rahuldaks Dirichlet' rajatingimust.

Olgu $y \in \Omega$ fikseeritud punkt ja tähistame $r = |x - y|$. Eeldame, et ülesandel (1) on olemas lahend $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Siis eelmises paragrahvis tõestatud teoreemi 2 põhjal saab selle lahendi $n = 2$ korral esitada kujul

$$u(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \Delta u \ln \frac{1}{r} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \right) d\Gamma. \quad (2)$$

ja $n = 3$ korral kujul

$$u(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta u}{r} dx + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r} \right) d\Gamma. \quad (3)$$

Et u on ülesande (1) lahend, siis $\Delta u = -f$ ning piirkonna rajal $u = \gamma$. Selle ülesande lahendivalemi saamiseks tuleb seoste (2) ja (3) parematest pooltest kõrvaldada $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ väärtused piirkonna rajal Γ . Seda saab teha järgmiselt.

Olgu $g \in C^1(\bar{\Omega})$ piirkonnas Ω harmooniline funktsioon.

Rakendame funktsioonidele u ja g teist Greeni valemit

$$\int_{\Omega} (g \Delta u - u \Delta g) dx = \int_{\Gamma} \left(g \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial g}{\partial \nu} \right) d\Gamma.$$

Et $\Delta u = -f$ ja $\Delta g = 0$, kui $x \in \Omega$, siis saame

$$0 = \int_{\Omega} g f dx + \int_{\Gamma} \left(g \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial g}{\partial \nu} \right) d\Gamma.$$

Viimase võrduse liidame $n = 2$ korral võrdusele (2) ja $n = 3$ korral võrdusele (3). Olgu konkreetselt $n = 3$. Siis jõuame võrduseni

$$u(y) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{4\pi r} + g \right) f dx + \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{4\pi r} + g \right) \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma - \int_{\Gamma} \gamma \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{4\pi r} + g \right) d\Gamma. \quad (4)$$

Valime nüüd harmoonilise funktsiooni g nii, et ta rahuldaks rajatingimust

$$g|_{\Gamma} = -\frac{1}{4\pi r}.$$

Siis valemis (4) esimene pindintegraal võrdub nulliga ning me saame ülesande (1) lahendi jaoks valemi. Et $r = \|x - y\|$, siis funktsioon g sõltub üldiselt ka punktist y , mistõttu me kirjutame ta kujul $g(y, x)$. Tähistame

$$G(y, x) = \frac{1}{4\pi \|x - y\|} + g(y, x). \quad (5)$$

Siis saame valemi (4) kirjutada kujul

$$u(y) = \int_{\Omega} G(y, x) f(x) dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(y, x)}{\partial \nu} \gamma(x) d\Gamma. \quad (6)$$

Funktsiooni $G(y, x)$ nimetatakse ülesande (1) Greeni funktsiooniks. Analoogiliselt saab näidata, et ka $n = 2$ korral ülesande (1) lahend avaldub kujul (6), kusjuures ainult Greeni funktsiooni avaldiseks on

$$G(y, x) = \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{1}{\|x - y\|} + g(y, x). \quad (7)$$

Täpsemalt defineeritakse Greeni funktsioon järgmiselt. Ülesande (1) Greeni funktsioonika nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni $G(y, x)$.

1) See funktsioon avaldub $n = 2$ korral kujul (7) ja $n = 3$ korral kujul (5), kusjuures iga $y \in \Omega$ korral $g(y, x)$ kui x funktsioon on harmooniline piirkonnas Ω ning kuulub klassi $C^1(\bar{\Omega})$.

2) Iga $y \in \Omega$ korral $G(y, x)$ rahuldab rajatingimust

$$G(y, x) \Big|_{x \in \Gamma} = 0.$$

Homogeense rajatingimuse korral, s.t. juhul $\gamma = 0$ võib ülesannet (1) vaadelda kui operaatorvõrrandit $Lu = f$, milles L on lineaarne diferentsiaaloperaator. Valemist (6) näeme, et selle operaatori pöördoperaator on integraaloperaator, mille tuumaks on Greeni funktsioon.

Greeni funktsiooni kasutatakse Poissoni võrrandi, aga ka üldisemate elliptilist tüüpi võrrandite uurimisel. Näiteks Helmholtzi võrrandi Dirichlet' ülesande

$$\Delta u + k^2 u = -f, \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad -k^2 = \text{const}$$

saab ülesande (1) Greeni funktsiooni abil asendada integraalvõrrandiga

$$u(y) = k^2 \int_{\Omega} G(y, x) u(x) dx + \int_{\Omega} G(y, x) f(x) dx.$$

Tutvume mõningate Greeni funktsiooni omadustega, mida sageli kasutatakse.

Teoreem 1. Ülesande (1) Greeni funktsioon $G(y, x)$ on positiivne, kui $x, y \in \Omega$.

Tõestus. Eelmise paragrahvi teoreemi 1 põhjal on Greeni

funktsioon kui x funktsioon harmooniline piirkonnas $\Omega \setminus \{y\}$.
 Kui aga $x \rightarrow y$, siis $G(y, x) \rightarrow +\infty$. Seetõttu võime punkti y ümbritseda sedavõrd väikese keraga $U_\varepsilon = U(y, \varepsilon) \in \Omega$, et $G(y, x) > 0$, kui $x \in \bar{U}_\varepsilon$ (vt. joonis 16). Et $G|_{x \in \Gamma} = 0$ ja $G(y, x)$ on harmooniline, kui $x \in G \setminus \bar{U}_\varepsilon$, siis võrratuse (6) põhjal paragrahvist 20 (vt. lk. 142) $G(y, x) > 0$, millega teoreem on tõestatud.

Teoreem 2. Ülesande (1) Greeni funktsioon on sümmeetriline, s. t.

$$G(y, x) = G(x, y), \text{ kui } x, y \in \Omega.$$

Märkus. Me defineerisime Greeni funktsiooni kui muutuja x funktsiooni fikseeritud y korral. Sõnastatud teoreemist näeme, et Greeni funktsiooni võib vaadelda ka muutuja y funktsioonina, kusjuures $G(y, x)|_{y \in \Gamma} = 0$ ning $G(y, x)$ kui y funktsioon on iga $x \in \Omega$ korral harmooniline piirkonnas $\Omega \setminus \{x\}$.

Teoreemi 2 tõestus. Fikseerime kaks suvalist erinevat punkti $y^1, y^2 \in \Omega$ ning näitame, et

$$G(y^1, y^2) = G(y^2, y^1), \quad (8)$$

millega teoreem olekski tõestatud.

Seose (8) saame põhjendada järgmisel teel. Ümbritseme punktid y^1 ja y^2 keradega $U_1 = U(y^1, \varepsilon)$ ja $U_2 = U(y^2, \varepsilon)$, valides nende raadiuse $\varepsilon > 0$ sedavõrd väikese, et $\bar{U}_1 \subset \Omega$, $\bar{U}_2 \subset \Omega$ ja $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \emptyset$. Funktsioonid $v_1(x) = G(y^1, x)$ ja $v_2(x) = G(y^2, x)$ kui x funktsioonid on harmoonilised piirkonnas $\Omega_{12} = \Omega \setminus (\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2)$, mille rajaks on $\Gamma_{12} = \Gamma \cup S_1 \cup S_2$. Rakendame funktsioonidele v_1 ja v_2 II Greeni valemit piir-

konnas Ω_{12} :

$$\int_{\Omega_{12}} (v_1 \Delta v_2 - v_2 \Delta v_1) dx = \int_{\Gamma_{12}} (v_1 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} - v_2 \frac{\partial v_1}{\partial \nu}) d\Gamma.$$



Joonis 17.

Et $\Delta v_1 = \Delta v_2 = 0$ piirkonnas Ω_{12} ja $v_1 = v_2 = 0$ rajal Γ , siis jõuame seoseni

$$0 = \int_{S_1} [G(y^1, x) \frac{\partial G(y^2, x)}{\partial \nu} - G(y^2, x) \frac{\partial G(y^1, x)}{\partial \nu}] ds + \int_{S_2} [G(y^1, x) \frac{\partial G(y^2, x)}{\partial \nu} - G(y^2, x) \frac{\partial G(y^1, x)}{\partial \nu}] ds. \quad (9)$$

Viimases võrduses läheme üle piirile $\varepsilon \rightarrow 0+$ ning näitame, et siis esimene integraal läheneb suurusele $-G(y^2, y^1)$ ja teine integraal suurusele $G(y^1, y^2)$, mis annabki seose (8). Et Greeni funktsiooni avaldised $n = 2$ ja $n = 3$ korral on erinevad, siis tuleb kumbagi juhtu eraldi vaadelda.

Vaatleme juhtu $n = 3$. Siis Greeni funktsioon avaldub kujul (5). Et kerapinnal S_1 tuletis $\frac{\partial G(y^2, x)}{\partial \nu}$ on pidev ja tõkestatud, kui $\varepsilon \rightarrow 0+$, siis

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_1} G(y^1, x) \frac{\partial G(y^2, x)}{\partial \nu} ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{4\pi \varepsilon^2}{4\pi \varepsilon} \frac{\partial G(y^2, \bar{x})}{\partial \nu} + 4\pi \varepsilon^2 g(y^1, \bar{x}) \frac{\partial G(y^2, \bar{x})}{\partial \nu} \right] = 0,$$

kus $\bar{x}, \bar{x} \in S_1$. Tähistame $r_1 = \|x - y^1\|$. Et kerapinnal S_1

$$\frac{\partial G(y^1, x)}{\partial \nu} = -\frac{\partial G(y^1, x)}{\partial r_1} = \frac{1}{4\pi r_1^2} - \frac{\partial G(y^1, x)}{\partial r_1},$$

siis

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_1} G(y^2, x) \frac{\partial G(y^1, x)}{\partial \nu} dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon^2} G(y^2, \bar{x}) = G(y^2, y^1),$$

kus $\bar{x} \in S_1$. Rakendades samu valemeid kerapinna S_2 juhul, saame

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_2} G(y^1, x) \frac{\partial G(y^2, x)}{\partial \nu} dS = G(y^1, y^2),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_2} G(y^2, x) \frac{\partial G(y^1, x)}{\partial \nu} dS = 0.$$

Nii jõuamegi $n = 3$ korral piiril $\varepsilon \rightarrow 0$ seosest (9) seoseni (8). Analoogilisel teel saame seose (8) põhjendada ka $n = 2$ korral.

Ülesanne 1. Näidata, et Poissoni võrrandi Neumanni si-seülesande

$$\Delta u = -f(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = \gamma(x)$$

klassikalise lahendi $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ olemasoluks on tarvilik, et funktsioonid f ja γ rahuldaksid seost

$$\int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\Gamma} \gamma(x) d\Gamma = 0.$$

2. Dirichlet' ülesande lahendamise kera. Lihtsamate piirkondade korral saab anda Greeni funktsiooni avaldise ning seega välja kirjutada valemi vastava ülesande lahendi jaoks. Suhteliselt lihtsalt õnnestub see juhul, kui piirkonnaks Ω on kera või ring. Vaatleme juhtu, kui $n = 3$ ja piirkonnaks Ω on kera $U = U(0, R) = \{x: \|x\| < R\}$, mille pinnaks on $S = S(0, R) = \{x: \|x\| = R\}$. Rõhutame, et selles artiklis $x = (x_1, x_2, x_3)$ ja $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

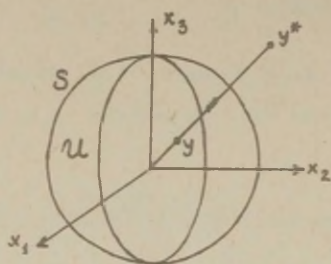
Vaadeldaval juhul avaldub ülesande (1) Greeni funktsioon kujul

$$G(y, x) = \frac{1}{4\pi \|x-y\|} + g(y, x),$$

kus g kui x funktsioon on keras U harmooniline funktsioon, mis on määratud rajatingimusega

$$G|_{x \in S} = 0.$$

Funktsiooni g konstrueerimisel kasutame nn. inversioonimeetodit. Olgu $y \in U$. Moodustame selle punkti kaaspunkti



Joonis 18.

kerapinna S suhtes

$$y^* = y \frac{R^2}{\|y\|^2}.$$

Siis $\|y\| \|y^*\| = R^2$.

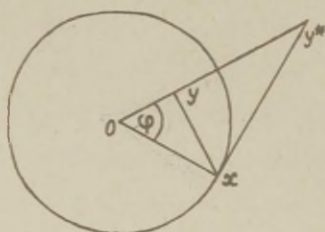
Otsime funktsiooni g kujul

$$g(y, x) = \frac{\alpha}{4\pi \|x-y^*\|},$$

kus α on konstant. Et y^*

asub väljaspool kera U , siis

§ 20 teoreemi 1 põhjal on g kui x funktsioon harmooniline keras U . Konstandi α püüame valida nii, et oleks rahuldatud rajatingimus



Joonis 19.

$$G(y, x) \equiv \frac{1}{4\pi \|x-y\|} + \frac{\alpha}{4\pi \|x-y^*\|} = 0,$$

kui $x \in S$.

Siit

$$\alpha = -\frac{\|x-y^*\|}{\|x-y\|}, \text{ kui } \|x\| = R.$$

Veendume, et α jaoks saadud

avaldis kujutab tõepoolest

konstanti, kui x liigub kera-

pinnal. Selleks vaatleme kolmnurki (vt. joonis 19)

$$\triangle Oyx \text{ ja } \triangle Oxy^*,$$

kus $\|x\| = R$. Et nendel kolmnurkadel on ühine nurk φ ning selle lähisküljed on võrdelised:

$$\frac{\|y\|}{R} = \frac{R}{\|y^*\|},$$

siis need kolmurgad on sarnased, mistõttu

$$\frac{\|y\|}{R} = \frac{R}{\|y^*\|} = \frac{\|x-y\|}{\|x-y^*\|}, \text{ kui } \|x\| = R. \quad (10)$$

Seega

$$\alpha = -\frac{R}{\|y\|}$$

ning otsitav Greeni funktsioon avaldub kujul

$$G(y, x) = \frac{1}{4\pi\|x-y\|} - \frac{R}{4\pi\|y\|\|x-y^*\|}.$$

Greeni funktsiooni kaudu avaldub ülesande (1) lahend $\Omega = U$ korral kujul

$$u(y) = \int_U G(y, x) f(x) dx - \int_S \frac{\partial G(y, x)}{\partial \nu} \gamma(x) dS. \quad (11)$$

Lihtsustame veel $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ avaldist. Tähistame $\|x\| = \varrho$. Siis tuletis välisnormaali suunas

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} = \frac{\partial G}{\partial \varrho} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{1}{\|x-y\|} - \frac{R}{4\pi\|y\|} \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{1}{\|x-y^*\|}.$$

Et

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 &= (x-y, x-y) = \|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2 = \\ &= \varrho^2 - 2\varrho\|y\| \cos \varphi + \|y\|^2, \end{aligned}$$

kus φ on nurk vektorite x ja y vahel (vt. joonis 19), siis

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{1}{\|x-y\|} &= \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{1}{(\varrho^2 - 2\varrho\|y\| \cos \varphi + \|y\|^2)^{1/2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{2\varphi - 2\|y\| \cos \varphi}{(\varrho^2 - 2\varrho\|y\| \cos \varphi + \|y\|^2)^{3/2}} = -\frac{\varphi - \|y\| \cos \varphi}{\|x-y\|^3}. \end{aligned}$$

Asendades siin punkti y kaaspunktiga y^* , saame

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\|x-y^*\|} = - \frac{\varrho - \|y^*\| \cos \varphi}{\|x-y^*\|^3}.$$

Kasutame neid avaldiseid ja seost (10) $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ avaldise lihtsustamisel:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial \nu} \right|_{x \in S} &= - \frac{R - \|y\| \cos \varphi}{4\pi \|x-y\|^3} + \frac{R}{4\pi \|y\|} \frac{R - \frac{R^2}{\|y\|} \cos \varphi}{\frac{R^3}{\|y\|^3} \|x-y\|^3} = \\ &= - \frac{R^2 + R\|y\| \cos \varphi + \|y\|^2 - R\|y\| \cos \varphi}{4\pi R \|x-y\|^3} = - \frac{R^2 - \|y\|^2}{4\pi R \|x-y\|^3}. \end{aligned}$$

Nii saame ülesande (1) lahendivalemile (11) anda kuju

$$\begin{aligned} u(y) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\bar{U}} \left(\frac{1}{\|x-y\|} - \frac{R}{\|y\| \|x-y^*\|} \right) f(x) dx + \\ &+ \frac{1}{4\pi R} \int_S \frac{R^2 - \|y\|^2}{\|x-y\|^3} \gamma(x) dS, \end{aligned}$$

viimast valemit nimetatakse Poissoni valemiks.

Ülesande (1) tähtsaks erijuhuks on Laplace'i võrrandi Dirichlet' ülesanne

$$\Delta u = 0, \quad x \in U, \quad u|_S = \gamma(x). \quad (12)$$

Selle ülesande lahend avaldub Poissoni valemi põhjal kujul

$$u(y) = \frac{1}{4\pi R} \int_S \frac{R^2 - \|y\|^2}{\|x-y\|^3} \gamma(x) dS. \quad (13)$$

Esitatud mõttekäigud näitavad, et kui ülesandel (12) on olemas klassikaline lahend $u \in C^1(\bar{U}) \cap C^2(U)$, siis see lahend avaldub kujul (13). Vahetult saab kontrollida (vt. näit. [14], § 22), et iga kerapinnal S pideva funktsiooni γ korral avaldis (13) on ülesande (12) klassikaliseks lahendiks $u \in C(\bar{U}) \cap C^2(U)$, millega on ühtlasi näidatud vaadeldava ülesande lahendi olemasolu.

Ülesanne 2. Olgu funktsioon u harmooniline kolmemõõtmelises piirkonnas Ω , mis sisaldab kinnise kera $\bar{U} = \bar{U}(y^0, R)$ pinnaga $S = S(y^0, R)$. Näidata, et siis

$$u(y) = \frac{1}{4\pi R} \int_S \frac{R^2 - |y - y^0|^2}{|x - y|^3} u(x) dS, \quad y \in U.$$

Ülesanne 3. Olgu u harmooniline kolmemõõtmelises piirkonnas Ω , mis sisaldab kinnise kera $\bar{U} = \bar{U}(y^0, R)$, ning mittenegatiivne kera U . Näidata, et siis selle funktsiooni väärtused kera U rahuldavad nn. Harnacki võrratust

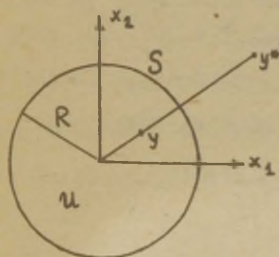
$$\frac{R(R-\varrho)}{(R+\varrho)^2} u(y^0) < u(y) < \frac{R(R+\varrho)}{(R-\varrho)^2} u(y^0),$$

kus $\varrho = \|y - y^0\| < R$.

3. Dirichlet' ülesande lahendamise ringis. Inversiooni-meetodi abil saab lihtsalt tuletada ka valemi kahemõõtmelise Dirichlet' ülesande

$$\Delta u = -f(x), \quad x \in U, \quad u|_S = \gamma(x) \quad (14)$$

lahendi jaoks ringis $U = U(0, R)$, mille rajaks on ringjoon $S = S(0, R)$.



Joonis 20.

Sellisel juhul avaldub Greeni funktsioon kujul

$$G(y, x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} + g(y, x),$$

kus g kui x funktsioon on harmooniline ringis U ning rahuldab rajatingimust

$$G|_{x \in S} = 0.$$

Otsime funktsiooni g kujul

$$g(y, x) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{a}{|x - y^*|},$$

kus α on positiivne konstant ning $y^* = y \frac{R^2}{|y|^2}$ punkti $y \in U$ kaaspunkt. Siis

$$G(y, x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\|x - y^*\|}{\alpha \|x - y\|}.$$

Rajatingimus $G|_{x \in S} = 0$ on rahuldatud, kui

$$\frac{\|x - y^*\|}{\alpha \|x - y\|} = 1 \text{ ringjoonel } \|x\| = R.$$

Seose (10) põhjal

$$\alpha = \frac{\|x - y^*\|}{\|x - y\|} = \frac{R}{|y|}.$$

Seega

$$G(y, x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|y| \|x - y^*\|}{R \|x - y\|}.$$

Analoogiliselt eelmisele artiklile saame arvutada

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \nu} \right|_{x \in S} = \left. \frac{\partial G}{\partial \|x\|} \right|_{\|x\|=R} = -\frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - |y|^2}{\|x - y\|^2}.$$

Nii saame Poissoni valemi

$$u(y) = \frac{1}{2\pi} \int_U \ln \frac{\|y\| \|x - y^*\|}{R \|x - y\|} f(x) dx + \frac{1}{2\pi R} \int_S \frac{R^2 - |y|^2}{\|x - y\|^2} \varphi(x) dS$$

ülesande (14) lahendi jaoks.

Ülesanne 4. Olgu u harmooniline kahemõõtmelises piirkonnas Ω , mis sisaldab kinnise ringi $\bar{U} = \overline{U(y^0, R)}$, ning mittenegatiivne ringis U . Näidata, et siis selle funktsiooni väärtused ringis rahuldavad nn. Harnacki võrratust

$$\frac{R-\varrho}{R+\varrho} u(y^0) < u(y) < \frac{R+\varrho}{R-\varrho} u(y^0),$$

kus $\varrho = |y - y^0| < R$.

4. Dirichlet' välisülesanne kolmemõõtmelisel juhul.

Olgu Ω tõkestatud sidos piirkond, mida piirab kinnine pind

Γ , ning Ω' piirkond, mis jääb sellest pinnast väljapoole. Matemaatilise füüsika välisrajaülesannete korral nõutakse võrrandi lahendamist välispiirkonnas Ω' , kui rajatingimus on antud rajal Γ . Vaatleme järgnevas Laplace'i võrrandi Dirichlet' välisülesannet, mille korral on rajal Γ antud lahendi väärtused. Selle ülesande seade on mõnevõrra erinev kahe- ja kolmemõõtmelisel juhul, mistõttu vaatleme neid juhte eraldi.

Kolmemõõtmelisel juhul ($n = 3$) nimetatakse Laplace'i võrrandi Dirichlet' välisülesandeks järgmist ülesannet. Leida funktsioon $u \in C(\bar{\Omega}') \cap C^2(\Omega')$, mis piirkonnas Ω' rahuldab võrrandit $\Delta u = 0$, selle rajal rajatingimust $u|_{\Gamma} = \gamma(x)$ ning läheneb ühtlaselt nullile, kui $\|x\| \rightarrow \infty$, s.t. et vastavalt igale $\varepsilon > 0$ leidub R nii, et $|u(x)| < \varepsilon$ alati, kui $\|x\| > R$.

Laplace'i võrrandi Dirichlet' välisülesande lahend kirjeldab näiteks statsionaarset temperatuurijaotust väljaspool mingit keha, mille pinnal on etteantud temperatuuri- jaotus.

Nõue lõpmatuses on oluline ülesande lahendi ainsuse kindlustamiseks. Järgmine lihtne näide näitab, et ilma selle tingimusega välisülesande lahend üldiselt poleks üheselt määratud. Olgu pinnaks Γ kerapind $S = S(0, R)$ ning sellel antud rajatingimus

$$u|_S = \gamma_0 = \text{const.}$$

Seda tingimust ja Laplace'i võrrandit $\Delta u = 0$ rahuldavad välispiirkonnas Ω' funktsioonid $u_1(x) = \gamma_0$ ja $u_2(x) =$

$= \frac{R}{|x|}$ (viimane § 20 teoreemi 1 põhjal), aga ka iga funktsioon kujul

$$u = \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2, \text{ kus } \alpha = \text{const.}$$

Nendest funktsioonidest ainult u_2 läheneb ühtlaselt nullile, kui $|x| \rightarrow \infty$.

Märgime, et funktsiooni nimetatakse harmoniliseks tõkestamata piirkonnas, kui ta selles piirkonnas rahuldab Laplace'i võrrandit ning läheneb ühtlaselt nullile, kui $|x| \rightarrow \infty$.

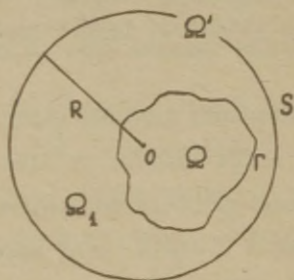
Tuletame aprioorse hinnangu vaadeldava ülesande lahendi jaoks.

Teoreem 3. Dirichlet' välisülesande

$\Delta u = 0, x \in \Omega', u|_{\Gamma} = \gamma(x), u(x) \xrightarrow{\text{ühtl.}} 0$, kui $\|x\| \rightarrow \infty$ lahendi jaoks kehtib aprioorne hinnang

$$|u(y)| \leq \max_{x \in \Gamma} |\gamma(x)|, y \in \Omega'.$$

Tõestus. Olgu $u \in C(\bar{\Omega}') \cap C^2(\Omega')$ vaadeldava ülesande la-



Joonis 21.

hend ja ε suvaline positiivne konstant. Ümbritseva piirkonna $\bar{\Omega}$ sellise kerapinnaga $S = S(0, R)$, et $|u(x)| < \varepsilon$, kui $\|x\| > R$. Tähistame pindade Γ ja S vahele jääva lahtise piirkonna Ω_1 . Et $\Delta u = 0$ piirkonnas Ω_1 , siis võrratuse (7) põhjal para-

grahvist 20 (vt. lk. 142)

$$|u(y)| \leq \max_{x \in \Gamma} (\max_{x \in \Gamma} |\gamma(x)|, \varepsilon), \text{ kui } y \in \Omega_1.$$

Et aga ε on suvaline positiivne konstant ning kerapinna S raadiust võib soovi korral suurendada, siis

$$|u(y)| < \max_{x \in \Gamma} |\gamma(x)|, \quad y \in \Omega',$$

mis ongi teoreemi väiteks.

Tõestatud teoreemist järeldub Laplace'i võrrandi Dirichlet' välisülesande lahendi ainsus ja stabiilsus.

Tõepoolest, kui u ja u^* on selle ülesande kaks suvalist lahendit, siis nende vahe $u - u^*$ rahuldab seoseid $\Delta(u - u^*) = 0$, $x \in \Omega'$, $u - u^*|_{\Gamma} = 0$, $u - u^* \xrightarrow{\text{ühtl}} 0$, kui $\|x\| \rightarrow \infty$.

Seega teoreemi 3 põhjal

$$|u(y) - u^*(y)| \leq 0 \quad \text{ehk} \quad u(y) \equiv u^*(y), \quad \text{kui} \quad y \in \Omega',$$

mis näitabki ülesande lahendi ainsust.

Lahendi stabiilsuse näitamisel oletame, et u ja \tilde{u} on Laplace'i võrrandi Dirichlet' välisülesande lahendid vastavalt rajatingimuste $u|_{\Gamma} = \gamma(x)$ ja $\tilde{u}|_{\Gamma} = \tilde{\gamma}(x)$ korral. Siis nende vahe $u - \tilde{u}$ on selle ülesande lahendiks rajatingimuse $u - \tilde{u}|_{\Gamma} = \gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)$ korral, mistõttu teoreemi 3 põhjal

$$\max_{y \in \Omega'} |u(y) - \tilde{u}(y)| < \max_{x \in \Gamma} |\gamma(x) - \tilde{\gamma}(x)|.$$

Viimane võrratus näitab, et vaadeldava ülesande lahend sõltub pidevalt rajatingimusest.

Ülesanne 5. Näidata, et juhul, kui Ω' on väljaspool kerapinda $S = S(0, R)$ asuv piirkond, avaldub Dirichlet' välisülesande

$\Delta u = 0$, $x \in \Omega'$, $u|_S = \gamma(x)$, $u(x) \xrightarrow{\text{ühtl}} 0$, kui $\|x\| \rightarrow \infty$ lahend kujul

$$u(y) = \frac{1}{4\pi R} \int_S \frac{|y|^2 - R^2}{|x-y|^3} \gamma(x) dS.$$

Ülesanne 6. Tõestada Liouville'i teoreem, mis väidab, et kogu ruumis harmooniline funktsioon (Laplace'i võrrandi lahend, mis läheneb ühtlaselt nullile, kui $|x| \rightarrow \infty$) võrdub samaselt nulliga.

5. Dirichlet' välisülesanne kahemõõtmelisel juhul.

Vaatleme nüüd juhtu, kui $n = 2$. Siis nimetatakse Laplace'i võrrandi Dirichlet' välisülesandeks järgmist ülesannet. Lei-
da funktsioon $u \in C(\bar{\Omega}') \cap C^2(\Omega')$, mis väljaspool kinnist pinda Γ paiknevas piirkonnas Ω' rahuldab võrrandit $\Delta u = 0$, selle rajal rajatingimust $u|_{\Gamma} = \gamma(x)$ ning on ühtlaselt tõkestatud, s.t. leidub konstant N nii, et $|u(x)| \leq N$, kui $x \in \Omega'$.

Nagu näeme, on viimases ülesande seades tingimus lõpmatuses erinev võrreldes kolmemõõtmelise juhuga. Kui kolmemõõtmelisel juhul nõutakse lahendi ühtlast lähenemist nullile, siis kahemõõtmelisel juhul nõutakse ainult lahendi tõkestatust lõpmatuses. Eelmises artiklis toodud näitest näeme, et kolmemõõtmelisel juhul lahendi tõkestatuse nõue ei kindlusta veel lahendi ainsust. Kahemõõtmelisel juhul osutuks aga ühtlaselt nullile lähenemise nõue lõpmatuses liialt kitsendavaks nagu seda näeme artikli lõpul toodud näitest.

Näitame, et kahemõõtmelisel juhul kindlustab lahendi tõkestatuse nõue lahendi ainsuse.

Teoreem 4. Dirichlet' välisülesandel

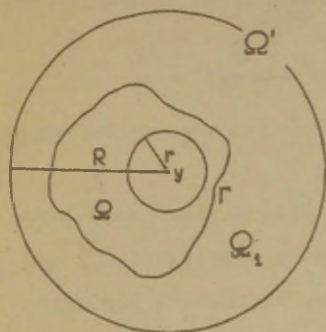
$$\Delta u = 0, x \in \Omega', \quad u|_{\Gamma} = \gamma(x), \quad u(x) \text{ on tõkestatud}$$

ei saa olla kahte erinevat lahendit klassis $C(\bar{\Omega}') \cap C^2(\Omega')$.

Tõestus. Olgu u ja u^* vaadeldava ülesande suvalised lahendid. Teoreemi tõestamiseks näitame, et need lahendid peavad ühtima. Tähistame nende lahendite vahe $z = u - u^*$. Siis

$$\Delta z = 0, \quad x \in \Omega', \quad z|_{\Gamma} = 0$$

ning leidub konstant N nii, et $|z(x)| \leq N$, kui $x \in \Omega'$. Näitame, et neid tingimusi rahuldav funktsioon $z(x)$ peab samaselt võrduma nulliga.



Joonis 22.

Fikseerime punkti $y \in \Omega$ ning valime raadiused r ja R ($0 < r < R$) nii, et

$$\overline{U(y, r)} \subset \bar{\Omega} \subset \overline{U(y, R)}.$$

Tähistame joonte Γ ja $S = S(y, R)$ vahele jääva piirkonna Ω_1 (vt. joonis 22). Moodustame funktsiooni

$$v_R(x) = N \frac{\ln \frac{|x-y|}{r}}{\ln \frac{R}{r}}.$$

Ilmselt $v_R \in C^2(\bar{\Omega}')$. Teoreemi 1 põhjal paragrahvist 20 on v_R harmooniline piirkonnas Ω_1 . Et

$$|z(x)| = 0 \leq v_R(x), \quad \text{kui } x \in \Gamma,$$

ja

$$|z(x)| \leq N = v_R(x), \quad \text{kui } x \in S,$$

siis

$$v_R(x) \pm z(x) \geq 0, \text{ kui } x \in \Gamma \text{ ja } x \in S.$$

Kui veel arvestame, et $v_R \pm z$ on harmooniline piirkonnas Ω_1 , siis võrratuse (6) põhjal paragrahvist 20

$$v_R(x) \pm z(x) \geq 0, \quad x \in \Omega_1.$$

Seega

$$-v_R(x) \leq z(x) \leq v_R(x)$$

ehk

$$|z(x)| \leq v_R(x), \quad x \in \Omega_1.$$

Viimase võrratuse abil pole enam raske teoreemi tõestada. Olgu $x \in \Omega'$ suvaline punkt. Siis

$$|z(x)| \leq v_R(x), \text{ kui } R \geq \|x\|.$$

Minnes üle piirile $R \rightarrow \infty$, saame

$$|z(x)| \leq 0.$$

Seega $z(x) \leq 0$ ning järelikult ka $u(x) = u^*(x)$ kogu piirkonnas Ω' , millega teoreemi väide on tõestatud.

Tõestatud teoreemist järeldub, et näiteks Dirichlet' välisülesandel

$$\Delta u = 0, \quad u \in \Omega', \quad u|_{\Gamma} = \gamma_0 = \text{const}$$

on kahemõõtmelisel juhul olemas ainus lahend $u(x) = \gamma_0$, kui $x \in \Omega$. Kui ka kahemõõtmelisel juhul nõuaksime, et Dirichlet' välisülesande lahend läheneks ühtlaselt nullile lõpmatuses, siis $\gamma_0 \neq 0$ korral juba sellel ülesandel puuduks lahend.

22. Biharmooniline võrrand

1. Rajaülesande lahendi ainsus. Senini oleme käsitlenud 2. järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandeid. Eakendustes esineb aga ka probleeme, mis taanduivad kõrgemat järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandite lahendamisele. Näiteks õhukese koormatud plaadi läbipaine rahuldab nn.

biharmoonilist võrrandit

$$\Delta^2 u = f(x),$$

milles kahemõõtmelisel juhul

$$\Delta^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}.$$

Seejuures rajatingimused näitavad plaadi kinnitusviisi servades.

Olgu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tõkestatud piirkond tükati sileda rajaga Γ .

Vaatleme rajaülesannet

$$\Delta^2 u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad u|_{\Gamma} = \gamma(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma} = \delta(x), \quad (1)$$

kus $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ on tuletis rajapinna Γ välisnormaali suunas. Selle ülesande klassikaliseks lahendiks nimetame funktsiooni $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^4(\Omega)$, mis rahuldab ülesande (1) võrrandit ja rajatingimusi.

Näitame, et ülesandel (1) ei saa olla kahte erinevat lahendit hulgas $C^3(\bar{\Omega}) \cap C^4(\Omega)$. Olgu u ja u^* selle ülesande suvalised lahendid. Siis nende vahe $z = u - u^*$ rahuldab seoseid

$$\Delta^2 z = 0, \quad z|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0.$$

Kõltsame, et viimaseid seoseid rahuldab ainult funktsioon $z(x) \equiv 0$, kui $x \in \Omega$. Selleks rakendame funktsioonidele z ja $v = \Delta z$ teist Greeni valemit

$$\int_{\Omega} (z \Delta v - v \Delta z) dx = \int_{\Gamma} (z \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial z}{\partial \nu}) d\Gamma.$$

Et $\Delta v = \Delta^2 z = 0$, kui $x \in \Omega$ ning $z|_{\Gamma} = 0$ ja $\frac{\partial z}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0$, siis

$$\int_{\Omega} (\Delta z)^2 dx = 0,$$

millest $\Delta z = 0$, kui $x \in \Omega$. Et aga Laplace'i võrrandi Dirichlet' ülesandel $\Delta z = 0$, $z|_{\Gamma} = 0$ on olemas ainult triviaalne lahend $z(x) \equiv 0$ (vt. § 18, art. 2), siis $u(x) \equiv u^*(x)$, kui $x \in \Omega$, millega ülesande (1) lahendi ainsus ongi tõestatud.

2. Biharmooniliste funktsioonide esitamine harmooniliste funktsioonide abil. Järgnevas vaatleme homogeenet biharmoonilist võrrandit

$$\Delta^2 u = 0$$

tõkestatud piirkonnas Ω kahemõõtmelisel juhul ($n = 2$). Selle võrrandi lahendeid $u \in C^4(\Omega)$ nimetatakse piirkonnas Ω biharmoonilisteks funktsioonideks. Osutub, et biharmoonilised funktsioonid on tihedalt seotud harmooniliste funktsioonidega.

Teoreem 1. Kui $u_1(x_1, x_2)$ ja $u_2(x_1, x_2)$ on piirkonnas Ω harmoonilised funktsioonid, siis funktsioon

$$u = x_1 u_1 + u_2$$

on biharmooniline piirkonnas Ω .

Tõestus. Arvutame kõigepealt

$$\Delta(x_1 u_1) = \frac{\partial^2(x_1 u_1)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(x_1 u_2)}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + x_1 \Delta u_1.$$

Seega, kui u_1 ja u_2 on harmoonilised, siis

$$\Delta(x_1 u_1) = 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (2)$$

ja

$$\Delta^2(x_1 u_1 + u_2) = 2 \Delta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta u_1 = 0,$$

millega teoreem ongi tõestatud.

Kui piirkond Ω on selline, et iga x_1 -teljega paralleelne sirge lõikab selle rajajoont Γ mitte enam kui kahes punktis, siis kehtib ka teoreemi 1 pöördteoreem.

Teoreem 2. Iga piirkonnas Ω biharmooniline funktsioon u avaldub kujul $u = x_1 u_1 + u_2$, kus u_1 ja u_2 on piirkonnas Ω harmoonilised funktsioonid.

Tõestus. Teoreemi tõestamiseks tuleb näidata, et biharmoonilise funktsiooni u korral leidub funktsioon u_1 , mis rahuldab tingimusi

$$\Delta u_1 = 0, \quad \Delta(u - x_1 u_1) = 0. \quad (3)$$

Nendest tingimustest ja võrdusest (2) järeldub, et u_1 peab rahuldama seoseid

$$\Delta u = \Delta(x_1 u_1) = 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}.$$

Seda arvestades moodustame kõigepealt funktsiooni

$$\bar{u}_1(x_1, x_2) = \int_a^{x_1} \frac{1}{2} \Delta u(\xi, x_2) d\xi, \quad \text{kus } (a, x_2) \in \Omega.$$

Et

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta \bar{u}_1 = \Delta \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{u}_1 = \frac{1}{2} \Delta \Delta u = 0,$$

siis $\Delta \bar{u}_1$ võib sõltuda ainult muutujast x_2 :

$$\Delta \bar{u}_1 = v(x_2).$$

Moodustame veel funktsiooni $\bar{u}_1(x_2)$ nii, et

$$\Delta \bar{u}_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = -v(x_2)$$

ja valime

$$u_1 = \bar{u}_1 + \bar{u}_1.$$

Siis selline u_1 rahuldab tingimusi (3). Tõepoolest,

$$\Delta u_1 = \Delta \bar{u}_1 + \Delta \bar{u}_1 = v(x_2) - v(x_2) = 0, \quad .$$

$$\Delta(u - x_1 u_1) = \Delta u - 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0.$$

Sellel on teoreem tõestatud.

Tõestatud teoreemides võib muidugi muutuja x_1 asendada muutujaga x_2 . Polaarkoordinaatides kasutatakse veel kolmandat võimalust biharmoonilise funktsiooni esitamiseks. Nimelt analoogiliselt teoreemi 1 tõestusele saab näidata (teha seda!), et funktsioon

$$u = (\varrho^2 - R^2)u_1 + u_2$$

on biharmooniline piirkonnas Ω , kui u_1 ja u_2 on harmoonilised selles piirkonnas ning $\varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ja $R = \text{const}$. Juhul, kui piirkond Ω sisaldab nullpunkti ning iga nullpunktist lähtuv kiir lõikab selle piirkonna rajajoont Γ ühes punktis, saab näidata, et iga biharmooniline funktsioon avaldub sellisel kujul.

3. Biharmoonilise võrrandi rajaülesande lahendamine ringis. Olgu $\Omega = U = U(0, R)$ ring ja $\Gamma = S = S(0, R)$ ringjoon. Vaatleme rajaülesannet

$$\Delta^2 u = 0, \quad x \in U, \quad u|_S = \gamma(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma = \delta(x), \quad (4)$$

milles $x = (x_1, x_2)$. Otsime selle ülesande lahendit kujul

$$u(y) = (\varrho^2 - R^2)u_1(y) + u_2(y),$$

kus $y = (y_1, y_2)$, $\varrho = |y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ ning u_1 ja u_2 on ringis U harmoonilised funktsioonid.

Et

$$\Delta u_2 = 0 \text{ ja } u_2|_S = u|_S = \gamma,$$

siis saame funktsiooni u_2 esitada Poissoni valemi (vt. § 21, art. 3) abil

$$u_2(y) = \frac{1}{2\pi R} \int_S \frac{R^2 - \varrho^2}{|x-y|^2} \gamma(x) dS.$$

T teisest rajatingimusest

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_S = \frac{\partial u}{\partial \varrho} \Big|_S = 2\varrho u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial \varrho} \Big|_S = \delta$$

saame nõude

$$2Ru_1 + \frac{\partial u_2}{\partial \varrho} \Big|_S = \delta.$$

Otsime funktsiooni

$$v = 2Ru_1 + \frac{\varrho}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \varrho},$$

mis rahuldab seda rajatingimust $v|_S = \delta$. Vahetult saab kontrollida, et funktsioon v on harmooniline, kui u_1 ja u_2 on harmoonilised. Tõepoolest, kasutades Laplace'i operaatori avaldist polaarkoordinaatides (vt. § 13, art. 4), arvutame

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial v}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = \\ &= 2R\Delta u_1 + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{\varrho}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \varrho} \right) \right] + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\varrho}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \varrho} \right) = \\ &= \frac{1}{R\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left\{ \varrho^2 \left[\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial u_2}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} \right] \right\} = \frac{1}{R\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho^2 \Delta u_2) = 0. \end{aligned}$$

Seega ka funktsiooni v saame esitada Poissoni valemi abil

$$v(y) = \frac{1}{2\kappa R} \int_S \frac{R^2 - \varrho^2}{\|x-y\|^2} \delta(x) dS.$$

Avaldame nüüd

$$\begin{aligned} u_1(y) &= \frac{1}{2R} \left(v - \frac{\varrho}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \varrho} \right) = \\ &= \frac{1}{2R} \left[\frac{1}{2\kappa R} \int_S \frac{R^2 - \varrho^2}{\|x-y\|^2} \delta(x) dS - \frac{\varrho}{2\kappa R^2} \int_S \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{R^2 - \varrho^2}{\|x-y\|^2} \right) \gamma(x) dS \right]. \end{aligned}$$

Nii jõuame ülesande (4) lahendivalemini

$$\begin{aligned} u(y) &= - \frac{(R^2 - \varrho^2)^2}{4\kappa R^2} \int_S \frac{\delta(x)}{\|x-y\|^2} dS + \\ &+ \frac{R^2 - \varrho^2}{2\kappa R} \int_S \left[\frac{1}{\|x-y\|^2} + \frac{\varrho}{2R^2} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{R^2 - \varrho^2}{\|x-y\|^2} \right) \right] \gamma(x) dS, \end{aligned}$$

kus $y \in \Omega$.

TSITEERITUD KIRJANDUS

1. G.Kangro. *Matemaatiline analüüs II*. Tallinn, 1968.
2. T.Sõrmas, G.Vainikko. *Narilikud diferentsiaalvõrrandid*. Tallinn, 1972.
3. Л.Берс, Ф.Джон, И.Нехтер. *Уравнения с частными производными*. Москва, 1966.
4. В.С.Владимиров. *Уравнения математической физики*. Москва, 1971.
5. Э.Гальяро. *Свойства некоторых классов функций многих переменных*. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1961, т. 5, № 4, стр. 87-116.
6. С.К.Годунов. *Уравнения математической физики*. Москва, 1971.
7. В.А.Ильин, И.А.Пикарев. *Об эквивалентности систем обобщенных и классических собственных функций*. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1960, т. 24, № 5, стр. 767-774.
8. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. *Элементы теории функции и функционального анализа*. Москва, 1972.
9. О.А.Ладженская, В.А.Солонников, И.И.Уральцева. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. Москва, 1967.
10. О.А.Ладженская, И.И.Уральцева. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*. Москва, 1973.
11. Е.М.Ландис. *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов*. Москва, 1971.
12. В.-И.Лions, Э.Мадево. *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. Москва, 1971.

13. И.Т.Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. Москва, 1961.-
14. М.М.Смирнов. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Москва, 1964.
15. С.Л.Соболев. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. Ленинград, 1950.
16. А.Н.Тихонов,
А.А.Самарский. Уравнения математической физики. Москва, 1972.
17. Е.Янке, Ф.Эмде. Таблицы функций с формулами и кривыми. Москва, 1959.

AINEREGISTER

- akustika võrrandid 89
 algtingimused 7, 19, 94
- Besseli funktsioonid 30
 - võrrand 29
 - võrratus 17
- biharmooniline funktsioon 162
 - võrrand 161
- Cauchy ülesanne 94
- diferentsiaaloperaator 61
- Dirichlet' rajatingimus 60
 - siseülesanne 144
 - välisülesanne 155, 158
- dissipatiivsed rajatingimused 103
- energiaintegraal 72
- energiasamasus 96
- enesekaasne diferentsiaalavaldis 59
- enesekaasned rajatingimused 60
- formaalne lahend 13, 22
- Fourier' meetod 7
- Friedrichsi ruum 127
- Galjorkini meetod 135
- Gauss-Ostrogradski valem 58
- Greeni funktsioon 146
 - valemid 60, 138
- harmooniline funktsioon 136, 156
- Harnacki võrratused 153, 154
- Helmholtzi võrrand 146
- Hölder'i ruum 51
 - tingimus 51
- hüperboolset tüüpi võrrandisüsteem 88
- inversioonimeetod 150
- kaasdiferentsiaalavaldis 59
- kaaspunkt 150
- kaasrajatingimused 60
- karakteristikud 92
- keele võnkumise võrrand 7
- klassikaline lahend 15, 44, 71, 108
- koonuse omadus 55
- kvaagilineaarne võrrandisüsteem 87
- Laplace'i operaator 136
 - - polaarkoordinaatides 35
 - - sfäärkoordinaatides 41
 - operaatori omaväärtusülesanne 35, 42
 - võrrand 136
- lineaarne võrrandisüsteem 87
- Liouville'i teoreem 158
- Ljapunovi pind 52
- logaritmilised potentsiaalid 139

- maksimumprintsip 45, 108, 114 ruum $C^m(\bar{\Omega})$ 51
 minimumprintsip 47, 115 - $C(O,T; \mathcal{L}_2)$ 79
 muutujate eraldamise meetod 7 - $C(O,T;H^1)$ 79
- Neumanni rajatingimus 60
 - siseülesanne 149
 Newtoni potentsiaalid 139
- omafunktsioon 9, 63
 omaväärtus 9, 63
 ositi integreerimise valem 57
- Poissoni valemid 152, 154
 - võrrand 144
 positiivne diferentsiaalope-
 raator 66
 positiivselt määratud dife-
 rentsiaaloperaator 124
 potentsiaalid 138
- rajatingimused 7, 19
 regulaarne piirkond 67
 Ritsi meetod 134
- segaülesanne 7, 94
 silindrilised funktsioonid
 29
 sisalduvusteoreemid 55
 skalaarkorrutis 127
 Sobolevi ruumid 54
 sümmeetriline diferentsiaal-
 operaator 62
- tuletis välisnormaali suu-
 nas 61
 täielik süsteem 68
 tükati sile pind 52
- variatsioonmeetodid 132
- ühtlane elliptilisus 52, 109
 üldistatud lahend 80, 128

Э. Тамме и Г. Вайникко
УРАВНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

II

На эстонском языке

Тартуский государственный университет

ЭССР, г. Тарту, ул. Пякколи, 18

Vastutav toimetaja I.Saarniit

Korrektor L. Jago

Faljumdamiseks antud 27.II 74. Rotaatoripaber
30x42.1/4. Trükipoognaid 10,75. Ringtrükipoog-
naid 10,0. Arvestuspoognaid 8,0. Trükiarv 600.
NB 02559. Tell. nr. 269.
TRÜ rotaprint, ENSV, Tartu, Pälsoni tn. 14.

Hind 28 kop.