EUKLIDES.

Der Druck wird unter den gesetzlichen Bedingungen gestattet.
Riga, am 20 Maerz 1841.
Dr. C. E. Napiersky
Censor.

III pol.

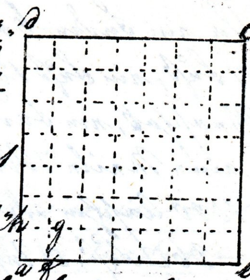
Geometrie.

Dritter Cursus

III.

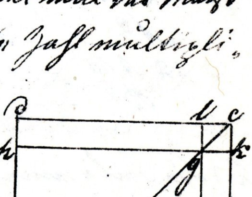
Von Professor Dr. G. Paucker.

Mitau 20 Decbr. 1840.
1 Jan. 1841.



Der Flächeninhalt eines Quadrats ist das Produkt der Seite mit sich selbst.

Den Inhalt einer Figur giebt man durch die Anzahl der in derselben enthaltenen gleichen Quadrate an, deren Seite das Maaß ist, mit welchem die Linien der Figur ausgemessen werden. Diejenigen Figuren, welche durch rechte Winkel begränzt werden, wie das Quadrat und Rechteck, können unmittelbar durch Quadrate ausgefüllt werden. Die übrigen Figuren müssen durch geometrische Sätze in rechtwinklige Figuren verwandelt werden. Wenn man die Seiten eines Quadrats durch das Maaß eintheilt, und durch die Theilpunkte Parallellinien mit den Seiten zieht, so erhält man soviel Quadrate des Maaßes wie a f g h neben und über einander, so viel mal das Maaß in der Seite enthalten ist. Diese Zahl multiplicirt man mit sich selbst.



Wenn die Seite des Quadrats in der Linie a f das Maaß A mal, und in dem Stück b f = B einen Theil des Maaßes enthält, so ziehe man f l = b c, und durch den Punkt g, wo f l die Diagonallinie a c schneidet, h k = a b, so ist (II. 33) h g l d = b f g k, also $abcd = afgh + 2bfgk + gkcl = af^2 + 2af.bf + bf^2$ oder $(A+B)^2 = A^2 + 2A.B + B^2$.

Da ein Faden 6 Fuß, eine Ruthe 12 Fuß, eine Saschen 7 Fuß, ein Fuß 12 Zoll, eine Arschin 28 Zoll oder 16 Werschok, ein Faden 72 Zoll, eine Saschen 84 Zoll, eine Meile 7 Werst, eine Werst 500 Saschen oder 1500 Arschin oder 3500 Fuß hat, so ist ein □ Faden = 36 □ Fuß, □ Saschen = 49 □ Fuß, □ Ruthe = 144 □ Fuß, □ Fuß = 144 □ Zoll, □ Arschin = 784 □ Zoll = 256 □ Werschok, □ Faden = 5184 □ Zoll, □ Saschen = 7056 □ Zoll, □ Meile = 49 □ Werst, □ Werst = 250000 □ Saschen = 12250000 □ Fuß.

Beispiele.

1.) Die Seite eines Quadrats ist 203 Fuß 9 Zoll, wie groß ist der Inhalt?
Man multiplicirt 203 mit sich selbst = A^2, man multiplicirt 203 mit 2 mal 9, und dividirt mit 12 um □ Fuß zu haben. Den Rest multiplicirt man mit 12, um □ Zoll zu haben. Dann multiplicirt man 9 mit sich selbst = B^2.

	□ Fuß	□ Zoll
A^2	41209.	
$2A.B$ ...	304.	72
B^2 ...		81
	41514.	9

2.) Die Seite eines Quadrats ist 15 Saschen 6 Fuß. Wie groß ist der Inhalt?

	□ Saschen	□ Fuß
A^2	225.	
$2A.B$	25	35
B^2		36
	251.	22

3.) Die Seite eines Quadrats ist 9 Faden 3½ Fuß, wie groß ist der Inhalt?

	□ Ruthen	□ Fuß.
A^2	81	—
$2AB$	10	18
B^2		$12\frac{1}{4}$
	91 .	$30\frac{1}{4}$

2.

Die Quadratwurzel aus dem Flächeninhalt gibt die Seite des Quadrats. Die Seite des Quadrats mit $\sqrt{2} = 1,41421356$ multiplicirt, gibt die Diagonallinie; die Diagonallinie mit $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707106781$ multiplicirt, gibt die Seite des Quadrats.

Der erste Theil folgt aus III. 1. der zweite und dritte Theil folgt aus II. 44.

Beispiel.

1.) Der Inhalt eines Quadrats ist 45796 □ Fuß, wie groß ist die Seite? . . $\sqrt{45796} = 214$ Fuß.

2.) Der Inhalt eines Quadrats soll 95 □ Ruthen seyn, wie groß ist die Seite?
$\sqrt{95} = 9,7468$ Ruthen $= 9^{\circ}\, 5'\, 2\frac{3}{4}''$

3.) Die Seite eines Quadrats ist 214 Fuß, wie groß ist die Diagonallinie?
$1,41421356 \times 214 = 302,6417$ Fuß $= 302'\, 7,''7$

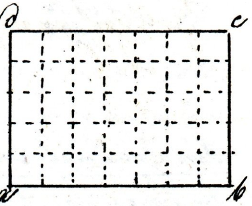
4.) Die Diagonallinie eines Quadrats hat 302 Fuß, wie groß ist die Seite?
$0,70710678 \times 302 = 213,546$ Fuß $= 213'\, 6\frac{1}{2}''$

5.) Die Diagonallinie eines Quadrats hat 18 Fuß 7 Zoll, wie groß ist die Seite?
$18'7'' = 223''$ $\quad 0,707106781 \times 223'' = 157,''68 = 13'\, 1\frac{2}{3}''$

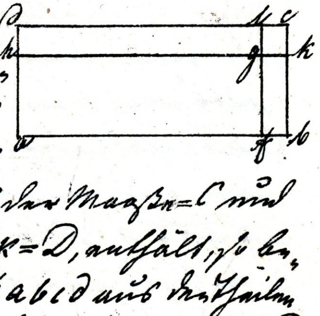
3.

Der Inhalt eines Rechtecks ist das Product der Grundlinie mit der Höhe, oder der Länge mit der Breite.

Die längere Seite ab heißt die Grundlinie oder Länge, die kürzere Seite bc oder ad heißt die Höhe oder Breite. Wenn man diese beiden Seiten durch das Maaß eintheilt und durch die Theilungen Parallellinien zieht, so erhält man an jeder Seite soviel Quadrate neben oder übereinander, so viel mal das Maaß in dieser Seite enthalten ist. diese Zahlen multiplicirt man also mit einander.



Wenn die Länge ab in af eine ganze Anzahl der Maaße = A, und einen Theil des Maaßes bf = B; die Breite bc in bk eine ganze Anzahl der Maaße = C und einen Theil des Maaßes ck = D, enthält, so besteht das ganze Rechteck abcd aus den Theilen afgh = A.C, ghdl = A.D, bfgk = C.B, gkcl = B.D.



<u>Beispielen.</u>

1.) Eine Tafel sey 8 Fuß 9 Zoll lang, 7 Fuß 5 Zoll breit, wie groß ist der Inhalt?
das Product von Fuß mit Zoll, wird mit 12 dividirt, um □ Fuß, und der Rest mit 12 multiplicirt, um □ Zoll zu haben.

	□ Fuß	□ Zoll
A. C.	56	
A. D.	3.	48
C. B.	5.	36
B. D.		45
	64.	129

2.) Eine Wand hat 45 Fuß 8 Zoll lang, 10 Fuß 7 Zoll hoch, wie groß ist der Inhalt?

	□ Fuß	□ Zoll
A.C	450	0
A.D.	26.	36
C.B	6.	96
B.D.		56
	483.	44.

3.) Nach meiner Ausmessung 1836 enthielt eine Mauerfläche vom rhein. □ Faden 268 Ziegel. Hiernach muß 1 □ Saschen 345 Ziegel enthalten, nach der Annahme bei Bauanschlägen aber 480 Ziegel. Eine Mauer, welche nach rhein. Maaß 45'8" lang, 10'7" hoch, nach russischem Maaß 47'0¼" lang, 10'10¾" hoch ist, wie viel Ziegel enthält sie?

45'8" = 7,6111
10'7" = 1,7638
13,425 □ Faden

13,425 □ Faden
268
3598 Ziegel.

47'0¼" = 6,7172
10'10¾ = 1,5565
10,455 □ Saschen

10,455 □ Saschen
345
3607 Ziegel.

10,455 □ Saschen
480
nach den Bauanschlägen .. 5.018 Ziegel.

4.

Aus den Seiten eines Rechtecks die Diagonallinie zu finden.

Nach II. 45. zieht man die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der beiden anliegenden Seiten.

Beispiele.

1.) Das Rechteck hat 8 Fuß 9 Zoll lang, 7 Fuß 5 Zoll breit, wie lang ist die Diagonallinie?

8.

A^2	...	64
$2AB$	...	12
B^2	...	81
A^2	...	49
$2AB$	...	5.120
B^2	...	25
		131. 82

131 □ Fuß 82 □ Zoll
131,5694
Wz. 11,469 Fuß
oder 11 Fuß 5,6 Zoll

2.) Ein Ackerstück ist 45 Fuß 8 Zoll lang, 10 Fuß 7 Zoll hoch, wie lang ist die Diagonallinie?

A^2	..	2025
$2AB$	...	60
B^2	...	64
A^2		100
$2AB$	..	11.96
B^2	...	49
		2197. 65.

2197 □ Fuß 65 □ Zoll
2197,4514
Wz. 46,877
oder 46 Fuß 10,5 Zoll.

5.

Den Inhalt der Äcker und Wiesen nach Desjatinen, Lofstellen und Tonnstellen zu berechnen.

Die Desjatine ist 80 × 30 = 2400 □ Faden oder 560 × 210 = 117600 □ Fuß
Man dividirt also die Anzahl der □ Faden mit 2400, der Quotient giebt die Desjatinen, der Rest die Quadratfaden.
Oder man multiplicirt die Anzahl der □ Faden mit 0,0004, und addirt 4% Procent hinzu.

Beispiel.

Wie viel Desjatinen enthält ein Feld von 529 Faden Länge, 374 Faden Breite?

529 8.			197846
374			0,0004
197846 □8			79,1384
82 D. 1046 □8		4	3,1655
		1/16	1319
		Dessätinen	82,4358

Die Acker und ~~die~~ Wiesen werden nach Latten = 25 Ellen = 50 Fuß = 100 Quartier ausgemessen. Die beiden ersten Decimalstellen der Latten sind also Quartiere.

Eine Lief-Kurländische Lofstelle ist = 16 □ Latten = 10000 □ Ellen = 40000 □ Fuß, ein Lopp ist = 400 □ Ellen = 1600 □ Fuß = 0,64 □ Latten, eine □ Latte ist 1 9/16 Lopp, eine Latte ist 1 1/4 Loppseite.

Eine Lofstelle ist = 25 Lopp, eine Tonnenstelle = 35 Lopp.

Eine estländische Lofstelle ist = 9 □ Latten = 5625 □ Ellen = 22500 □ Fuß = 14 1/16 Lopp. Eine Tonnstelle ist 3 Lofstellen = 27 □ Latten = 16875 □ Ellen = 67500 □ Fuß = 42 3/16 Lopp.

Auch sind nach obigen Bestimmungen

100 Dessätinen = 294 Lief-Kurl. Lofstellen

900 ——— = 4704 estl. Lofstellen.

Man multiplicirt also die Anzahl der Dessätinen mit 3, und zieht vom Produkt 2 Procent ab, so hat man die [illegible], die Anzahl der Lief-Kurländischen Lofstellen. Man multiplicirt die Anzahl der Dessätinen mit 5, und addirt 2 2/3 Procent hinzu, so ergiebt sich die entsprechende Anzahl der estländischen Loofstellen.

Beispiele.

1.) Eine Strasse hat 20 Ruthen 7½ Ellen lang, 5 Ruthen 12 Ellen breit, wie viel liv-kurländische Loof- u. Tonnstellen enthält sie?

20. 7½ = 20,30   111 mit 16 … 6. 15,2440
5. 12 = 5,48   2440 mit 4 … 6. 15. 610
□ Ruthen 111,2440   6 Loofst. 15 □ R. 610 □ [illegible]

Andere Art.

20. 7½ = 507,5   mit 1000 … 6,95275
5. 12   137   95275 mit 16 .. 6. 15,2440
□ Ellen 69527,5.   2440 mit 4. 6. 15.610.

Noch anders.

20. 7½ = 507,5 Ellen = 25,375 [illegible]
5. 12 = 137   —   = 6,85
173,81875 Lagg.

mit 25 div. … 6 Loofst. 23,8 Lagg.
mit 35 div … 4 Tonnst. 33,8 Lagg.

2.) Wie viel estländische Loof- und Tonnstellen enthält dieselbe Strasse?

20. 7½ = 20,30   mit 9 … 12 Lfst. 3,2440 □ R.
5. 12 = 5,48   mit 27   4 Tonst. 3,2440 —
111,2440

3.) Wie viel Loofstellen enthält ein Feld von 720 Dessätinen 450 □ Faden?

720. 450
6   75
4   1875
720,1875
3) 2160,5625
2 .. 43,21125
2117,35125
livl. kurl. Loofst.

5) 720,1875
3600,9375
20 .. 1440375
1440375
480125
3764,18
estl. Loofst.

6.

Ein gleichseitiges dreieck zu berechnen.

diese berechnung beruht auf II. 47. hier nach ist, wenn die Seite = S, die Höhe = h der Flächeninhalt = F.

$h = S \cdot \sqrt{3/4} = S \cdot 0,866025403$

$S = h\sqrt{4/3} = h \cdot 1,154700538$

$F = S^2 \cdot \sqrt{3/16} = S^2 \cdot 0,433012701$

$F = h^2 \cdot \sqrt{1/3} = h^2 \cdot 0,577350269$

$h = \sqrt{F} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt{F} \cdot 1,316074012952$

$S = \sqrt{F} \cdot \sqrt[4]{5\tfrac{1}{3}} = \sqrt{F} \cdot 1,51967137130$

Beispiele.

1.) die Seite sey 28 Zoll, wie groß ist die Höhe?

0,8660254
28
Höhe = 24,2487 Zoll.

2.) die Höhe sey 24¼ Zoll, wie groß ist die Seite?

1,1547
24,25
Seite = 28,0015 Zoll

3.) die Seite sey 28 Zoll, wie groß ist der Inhalt?

0,4330127
28 × 28 = 784
339,48 □ Zoll

4.) die Höhe sey 24¼ Zoll, wie groß der Inhalt?

0,57735
24¼ × 24¼ = 588,0625
339,518 □ Zoll.

5.) der Inhalt sey 339½ □ Zoll, wie groß die Höhe?

1,316074
$\sqrt{339,5}$ = 18,42552
Höhe 24,249 Zoll.

6.) der Inhalt sey 400 □ Fuß, wie groß die Seite?

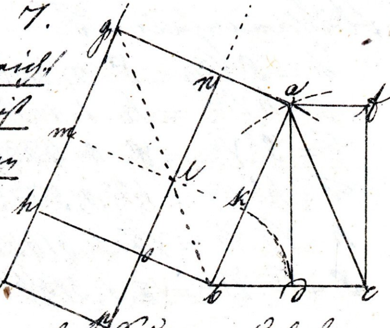
1,519671
$\sqrt{400}$ = 20 Fuß
Seite = 30,393 Fuß

7.) der Inhalt sey 324 □ Lachter, wie groß die Höhe und Seite?

$$\sqrt{324} = \frac{1,316074}{18}\qquad \frac{1,519671}{18}$$

Höhe = 23,689 Lachter; Seite = 27,354 Lachter.

7.



Der Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks ist das Product der halben Grundlinie mit der Höhe. Die Höhe aber ist die Quadratwurzel aus dem Product von der Summe und dem Unterschied des Schenkels und der halben Grundlinie.

Da $ab = ac$, und ad senkrecht auf bc, so ist $bd = cd$. Beschreibt man also über cd das Rechteck $cdaf$, so ist $\Delta\, adb = cfa$, also $\Delta\, abc = cdaf$. Aber (III. 3) $cdaf = cd \cdot ad$, also $\Delta\, abc = cd \cdot ad = bd \cdot ad = \frac{1}{2} bc \cdot ad$. Man beschreibe über ab das Quadrat $abgh$, ziehe die Diagonallinie bg, mache $bk = bd$, ziehe $km \parallel bh$, welche die bg in l schneidet, ziehe durch l die $np \parallel ab$, mache $op = ol = bd$, $pq \parallel = ng$ so ist $bklo = bd^2$; $ab^2 - bd^2 = abgh - bklo = ngho + akln = ngho + hopq = ngqp = np \cdot ng$. Aber $np = ab + bd$, $ng = ak = ab - bd$, und (II. 45.) $ad^2 = ab^2 - bd^2$, also $ad^2 = (ab+bd) \cdot (ab-bd)$.

Beispiele.

1.) die Grundlinie sey 40 Fuß, die Höhe 21 Fuß, was ist der Inhalt?

½ . 40 = 20
21
420 □ Fuß

2.) Die Grundlinie sey 96 Fuß, die Höhe 55 Fuß, was ist der Inhalt?

½ 96 = 48
55
2640 □ Fuß.

3.) Die Grundlinie sey 40 Fuß, die Seite 29 Fuß, was ist der Inhalt? ½ : 40 = 20

29 20 580 400
580 400 980 180
980 180 176400
Wz. 420 □ Fuß

4.) Die Grundlinie sey 96 Fuß, die Seite 73 Fuß, was ist der Inhalt?

48 73 3504 2304
3504 2304 5808 1200
5808 1200 6969600
Wz. 2640 □ Fuß

5.) Die Grundlinie sey 30 Zoll, die Seite 17 Zoll, was ist der Inhalt?

15 17 255 225
255 225 480 30
480 30 14400
Wz. 120 □ Zoll

6.) Die Grundlinie sey 120 Fuß, die Höhe 24 Fuß, wie groß ist die Dachlinie, d.h. die Summe der beiden Schenkel?

120 120 14400
48 48 2304
14400 2304 16704

Dachlinie = 129,24 Fuß.

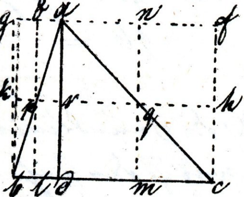
7.) Bei derselben Grundlinie von 120 Fuß, aber den Höhen von 30 u. 35 Fuß, wie viel betragen die Dachlinien?

134,16 und 138,91 Fuß.

8. Bei der Grundlinie von 48 Fuß, und 16 u. 48 Fuß Höhe, wie viel betragen die Dachlinien?

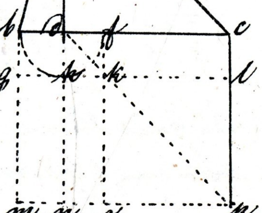
57,68 und 107,33 Fuß.

8.



Der Inhalt eines Dreiecks ist das halbe Produkt der Grundlinie mit der Höhe.

Ziehe ad senkrecht auf bc, und das Rechteck $bcfg$ vollendet, so ist $\Delta\, abd = \frac{1}{2}\, bdag$, $\Delta\, acd = \frac{1}{2}\, adcf$, also $\Delta\, abc = \frac{1}{2}\, bcfg = \frac{1}{2}\, bc \cdot ad$. Theilt man ab, ac, in die Hälfte in p, q, so ist (II. 36) $pq \backsim bc$, $\Delta\, apr = bpk$, $\Delta\, aqr = cqh$, also $\Delta\, abc = bchk = bc \cdot dr$, $dr = \frac{1}{2}\, ad$. $\Delta\, bpl = apo$, $\Delta\, cqm = aqn$, also $\Delta\, abc = lmno = lm \cdot ad$, $lm = \frac{1}{2}\, bc$.



Wenn statt der Höhe ad, die Seiten ab, ac, gegeben sind, so findet man die Höhe auf folgende Art. Nach II. 45. ist $ac^2 = ad^2 + cd^2$, $ab^2 = ad^2 + bd^2$ also $ac^2 - ab^2 = cd^2 - bd^2$. Macht man $df = bd$, so ist $cd^2 - bd^2 = cdnp - bdgh = cdnp - dfhk = hnpl + cfkl = hnpl + gmnh = gmpl = gl \cdot lp = bc \cdot cf$. Also $ac^2 - ab^2 = bc \cdot cf$. Da ab, ac, bc, gegeben sind, so findet man $cf = \frac{ac^2 - ab^2}{bc}$. Da $bc = cd + bd$, $cf = cd - bd$, so ist $cd = \frac{bc + cf}{2}$, und $bd = \frac{bc - cf}{2}$. dann ist $ad^2 = ac^2 - cd^2$, oder $ad^2 = ab^2 - bd^2$.

Beispiele.

1.) Die Grundlinie sey 66 Fuß, die Höhe 40 Fuß, was ist der Inhalt?

$$\begin{array}{r} 66 \\ \underline{20} \\ 1320 \end{array} \;\square\text{ Fuß.}$$

2.) Die Grundlinie sey 28 Fuß, die Höhe 15 Fuß, was ist der Inhalt?

$$\begin{array}{r} 15 \\ \underline{14} \\ 210 \end{array} \;\square\text{ Fuß.}$$

3.) Die Grundlinie sey 66, die Seiten 50 u. 104 Fuß, was ist der Inhalt?

$$\begin{array}{r} 104 \\ \underline{50} \\ 154 \\ 54 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 154 \\ \underline{54} \\ 8316 \\ \text{div. } \underline{66} \end{array} \quad \Big\| \quad \begin{array}{r} 126 \\ \underline{66} \\ 192 \\ \underline{60} \\ 96 \\ \underline{30} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 104 \\ \underline{96} \\ 200 \\ \underline{8} \\ \underline{1600} \\ \text{Qu. } 40 \\ 33 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 50 \\ \underline{30} \\ 80 \\ \underline{20} \\ 1600. \end{array}$$

Inhalt 1320 □ Fuß

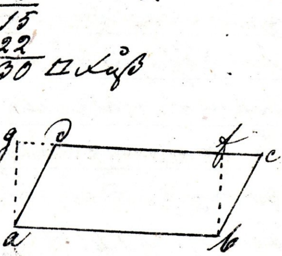
4.) Die Grundlinie sey 44, die Seiten 17 u. 39 Fuß, was ist der Inhalt?

$$\begin{array}{r} 32 \\ \underline{17} \\ 56 \\ 22 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 56 \\ \underline{22} \\ 1232 \\ \text{div. } 44 \end{array} \quad \Big\| \quad \begin{array}{r} 28 \\ \underline{44} \\ 72 \\ \underline{16} \\ 36 \\ \underline{8} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 39 \\ \underline{36} \\ 75 \\ \underline{3} \\ \underline{225} \\ \text{Qu. } 15 \\ \underline{22} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ \underline{8} \\ 25 \\ \underline{9} \\ 225. \end{array}$$

Inhalt = 330 □ Fuß

9.

<u>Der Inhalt eines Parallelogramms ist das Product der Grundlinie in die Höhe</u>



Es ist nämlich, wenn ag, bf senkrecht auf ab sind, abcd = abfg = ab . bf. Wenn die Höhe nicht unmittelbar gegeben ist, so berechnet man sie in III. 8. aus der Grundlinie ab, der Seite ad, oder bc, und der Diagonallinie bd oder ac.

Beispiele.

1.) Die Grundlinie sey 14 Fuß, die Höhe 12 Fuß, was ist der Inhalt?

$$\begin{array}{r} 14 \\ 12 \\ \hline \text{Inhalt} = 168 \end{array}$$ □ Fuß.

2.) Die Grundlinie sey 28 Fuß 9 Zoll, die Höhe 15 Fuß 7 Zoll, was ist der Inhalt?

	□ Fuß	□ Zoll
A.B	420	
A.D	16	48
B.C	11	36
B.D		63
Inhalt	448	3.

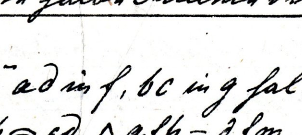
3.) Die Grundlinie sey 14, die Seite 13, die Diagonallinie 15 Fuß, was ist der Inhalt?

15, 13 — 28, 2 | 28, 2 — 56, der. 14 || 4, 14 — 18, 10 — 9, 5 | 15, 9 — 24, 6 — 144, gibt. 12, 14 | 13, 5 — 18, 8 — 144.

Inhalt = 168 □ Fuß.

10.

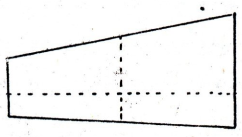
Der Inhalt eines Trapezes ist das Product der Höhe in die mittlere Transversallinie, oder die halbe Summe der beiden Parallelseiten.



Ist ab ∥ cd, und es sey ad in f, bc in g halbirt, so ist (II. 36.) fg ∥ ab ∥ cd, Δ afh = dfm, Δ bgk = cgl, also abcd = hklm = fg.kl. Aber fg = cd + cl + dm, fg = ab − ah − bk, also 2 fg = ab + cd oder fg = $\frac{ab + cd}{2}$.

Beispiele.

1) Eine Wiese hat 20 Rut=
hen 20 Fuß lang, an dem
schmäleren Ende 8 Rut=
hen 9 Fuß, an dem brei=
teren Ende 15 Ruthen 32
Fuß, was ist der Inhalt?



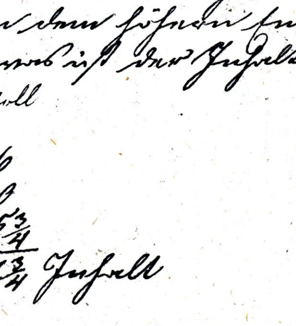
8,18 . 11,91
15,64 . 20,40
23,82 . 242,9640 □ Ruthen
11,91

oder höchst. 15. 2□ Ruthen 2410□ Fuß

2) Eine oben schräge gezogene Mauer hat
42 Fuß 7 Zoll lang, an dem niedrigeren
Ende 8 Fuß 9 Zoll hoch, an dem höheren En=
de 11 Fuß 7½ Zoll hoch, was ist der Inhalt?

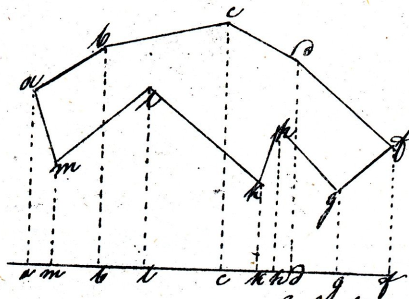
		□Fuß	□Zoll
8.9	A.C. .	420	
11.7½	A.D. .	7.	126
10.2¼	C.B. . .	5.	120
	B.D. . . .		15¾
		433.	117¾ Inhalt

3) Eine Giebelwand hat
42 Fuß lang, an den Seiten=
linien 35 Fuß hoch, die Höhe
der Spitze über der Grund=
linie hat 56 Fuß, wie
groß ist der Inhalt?



ad = bc = 35 Fuß
fg = . . 56
Mittel . 45,5
ab = . 42
Inhalt = 1911 □ Fuß

11.



Der Inhalt einer unregelmäßigen Figur ist gleich der Summe der vorwärtsgehenden Trapezien, weniger der Summe der zurückgehenden Trapezien, wenn man eine beliebige gerade Linie zur Grundlinie wählt.

Man fällt von allen Winkelpunkten senkrechte Linien auf die Grundlinie, und berechnet zwischen den beiden äußersten Ecken a, f, die Summe der vorwärtsgehenden Trapezien aabb, bbcc, ccdd, ddff, wenn man die Summe der zurückgehenden Trapezien ffgg, ggkk, kkKK, KKll, llmm, mmaa, abzieht.

Vorwärtsgehend

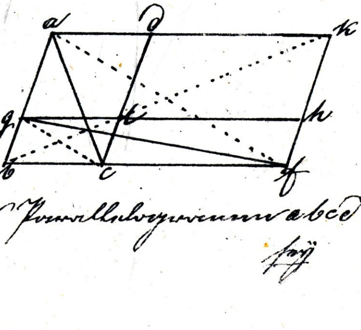
Ecke	Höhe	Mittel	Breite	Produkt
1	15	20½	17	348½
2	26	24½	3	73½
3	23	23½	11	258½
4	24	22	5	110
5	20	19½	4½	87¾
6	19	18¾	2	37½
7	18½			
			42½	915¾

Zurückgehend

Ecke	Höhe	Mittel	Breite	Produkt
7	18½	11¾	7	82¼
8	5	6½	10	65
9	8	6	13	78
10	4	9½	12½	118¾
1	15			
			42½	344
				915¾

Inhalt = 571¾

12.



Ein Dreieck oder Parallelogramm in ein anderes von gleichem Inhalt und gegebener Grundlinie zu verwandeln.

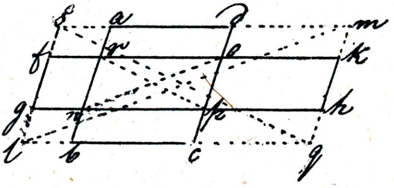
Das Dreieck abc oder das Parallelogramm abcd

sey

sich in ein anderes zu verwandeln, dessen Grundlinie bf seyn soll. Man ziehe af, und $cg \parallel af$, so ist (II. 32) $\triangle\, gbf = abc$, also auch $gbfh = abcd$. Oder man ziehe $fk \parallel ab$ bis an die verlängerte ad, verbinde bk, welche die cd in l schneidet, ziehe durch l die $gk \parallel bf$, so ist (II. 33) $gbkf = abcd$, also auch $\triangle\, gbf = abc$.

13.

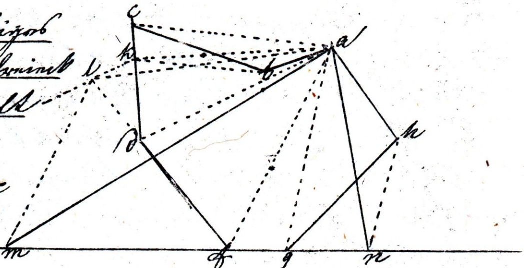
<u>Ein Parallelogramm in ein anderes von gleichem Inhalt zu verwandeln, dessen Grundlinie gegeben, und der gegebenen parallel ist.</u>

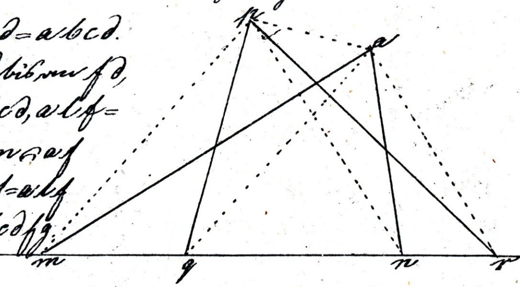


Das Parallelogramm $abcd$ sich in ein anderes zu verwandeln, dessen Grundlinie gh gegeben und der bc parallel sey.
Man ziehe $gl \parallel ab$ bis an bc, und $hm \parallel ab$ bis an ad, verbinde lm, ziehe $no \parallel lm$ bis an cd, dann durch o die $fk \parallel gh$, so ist $fghk = abcd$. Denn wenn gh, cd einander in p, und bc, hk einander in q schneiden, so ist $\triangle\, npo \sim lqm$, also $np : op = lq : qm$, oder $bc : fg = gh : ab$, also $abcd = fghk$.
Man kann auch $gs \parallel ab$ bis an da, und $hq \parallel ab$ bis an bc ziehen, qs verbinden, $pr \parallel qs$ bis an ab ziehen, durch r die $fk \parallel gh$ ziehen.

14.

14.





Ein unregelmäßiges Vieleck in ein Dreieck von gleichem Inhalt zu verwandeln.

Man ziehe bk ∥ ac bis an cd, so ist akc = abc, also acd − akc = acd − abc, also akd = abcd. Man ziehe kl ∥ ad bis an fd, so ist ald = akd = abcd, alf = abcf. Man ziehe lm ∥ af bis an gf, so ist amf = alf = abcf, also amg = abcdfg. Man ziehe hn ∥ ag bis an fg, so ist agn = agh, also △ amn = abcdfgh. Soll zuletzt das △ amn in ein anderes verwandelt werden, dessen Spitze in p ist, so ziehe aq ∥ pm, ar ∥ pn, so ist amq = apq, also amn = apqn, pna = pnr, also pqr = apqn, also amn = pqr.

15.

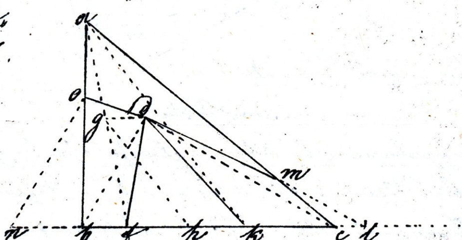
Ein Dreieck aus einem Punkte der Grundlinie in gleiche Theile zu theilen.

Das Dreieck abc sey aus d zu theilen, z. B. in 4 gleiche Theile. Man theile bc in 4 gleiche Theile in g, h, k, ziehe gk, hl, km mit da parallel, und dann dk, dl, dm, so theilen diese auf die verlangte Art. Denn △ kbd = abg, akdl = agh, △ ldm = ahk, △ mdc = akc.

16.

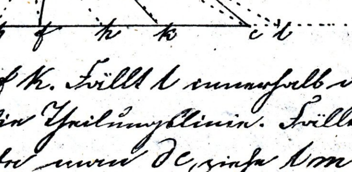
Ein Dreieck aus einem innern Punkte in gleiche Theile zu theilen, so daß die erste Theilungslinie eine vorgeschriebene Richtung hat.

Es sey z. B. abc in 4 gleiche Theile zu theilen, so daß df die erste Linie sey.



Man verbinde af, ziehe dg ∥ bc bis an af. Man nehme fh = $\frac{1}{4}$ bc, verbinde gh, ziehe ak ∥ gh, verbinde dk, so ist △dfk = gfk = afh = $\frac{1}{4}$ abc. Man nehme kl = fk. Fällt l innerhalb des Dreiecks abc, so ist dl die Theilungslinie. Fällt l außerhalb, so verbinde man dc, ziehe lm ∥ dc bis an ac, so ist △dcm = dcl, also dkcm = dkl = dfk = $\frac{1}{4}$ abc. Man nehme fn = fk, und wenn n außerhalb bc liegt, so verbinde man db und ziehe no ∥ db bis an ab, so ist △dnb = dob, also dobf = dnf = dfk = $\frac{1}{4}$ abc.

17.

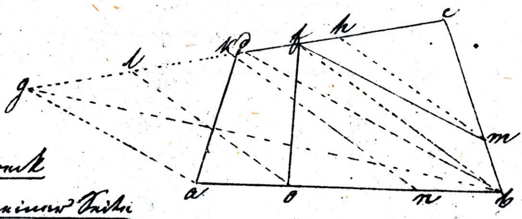


Ein Parallelogramm oder Trapez in gleiche Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien von Punkten ausgehen, die in einer der Parallelseiten liegen.

z. B. abcd soll in 4 gleiche Theile getheilt werden, und die Linien sollen von f ausgehen. Man ziehe die mitt-

lere

mittlern Transversallinie gh, welche die Seiten bc, da, halbirt, und theile diese in 4. gleiche Theile in k, l, m, ziehe fkn, flo, fmp, so ist $fdan = fno = fop = \frac{1}{4} abcd$. Fällt p außerhalb der Figur, so verbindet man fb, ziehe $pr \parallel fb$, und dann die Theilungslinie fr, so ist $\triangle fbr = fbp$, also $fobr = fop = \frac{1}{4} abcd$.

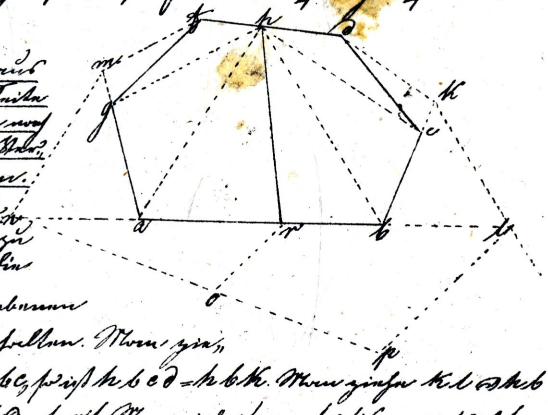


18.

Ein ebenes Viereck aus einem in einer Seite gegebenen Punkte in gleiche Theile zu theilen.

Das Viereck abcd sey aus f in 4 gleiche Theile zu theilen. Man ziehe $ag \parallel bd$, so ist $\triangle bcg = abcd$. Man theile also cg in 4 gleiche Theile in h k l, und ziehe hm, kn, lo, mit bf parallel, so ist $\triangle cfm = bch = \frac{1}{4} bcg = \frac{1}{4} abcd$, $bcfn = bck = \frac{2}{4} bcg = \frac{2}{4} abcd$, $bcfo = bcl = \frac{3}{4} bcg = \frac{3}{4} abcd$.

19.

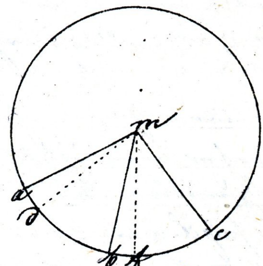


Ein ebenes Vieleck aus einem in einer Seite gegebenen Punkte nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Es sey das Vieleck abcdfg aus h so zu theilen, daß sich die Theile wie die gegebenen Linien no, op verhalten. Man ziehe $dk \parallel hc$ bis an bc, so ist $hbcd = hbk$. Man ziehe $kl \parallel kb$ bis an ab, so ist $hrbcd = hrl$. Man ziehe $fm \parallel hg$ bis an ag, so ist $hagf = ham$. Man ziehe $mn \parallel ha$ bis an ba, so ist $hragf = hrn$. Um also den Punkt r zu bestimmen, wohin die Theilungslinie gezogen werden muß, ziehe man $or \parallel pl$, so ist $\frac{hragf}{hrbcd} = \frac{hrn}{hrl} = \frac{rn}{rl} = \frac{no}{op}$

20.

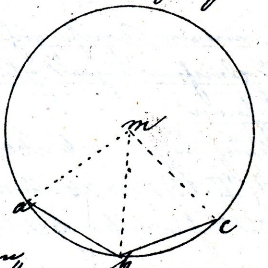
In einem Kreise gehören zu gleichen Mittelpunktswinkeln gleiche Bögen.



Es sey $\angle amb = bmc$, so kann man den $\angle bmc$ so auf amb legen, daß bm auf am, cm auf bm kömmt.
Zieht man zwei Halbmesser md, mf, daß $\angle amd = bmf$, so wird dann auch fm auf dm fallen. Da dieses für alle zwischenliegenden Punkte gilt, so decken die Bögen bc, ab einander, und sind also einander gleich.

21.

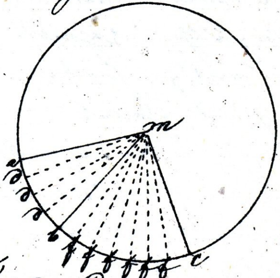
In einem Kreise gehören zu gleichen Sehnen gleiche Bögen.



Wenn die Sehnen $ab = bc$, so decken die $\triangle amb$, bmc einander, also sind die Mittelpunktswinkel $amb = bmc$, also (III. 20) sind die Bögen $ab = bc$.

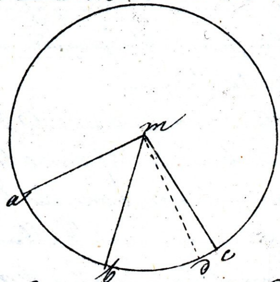
22.

In einem Kreise verhalten sich die Bögen wie die Mittelpunktswinkel.



Denn wenn die Mittelpunktswinkel amb, bmc ein rationales Verhältniß zu einander haben, so giebt es einen kleinen Winkel $dmd = fmf$, welcher sowohl in amb als in bmc eine ganze Anzahl Male enthalten ist. Also sind auch (III 20) die Bögen ad, dd, bd, bf, ff, cf, einander gleich. Also ist jeder derselben das gemeinschaftliche Maaß der Bögen ab, bc. Dieses Gemaaß ist so viel mal in den Bögen ab, bc, enthalten, als das Winkelmaß in den Winkeln amb, bmc, also ist Bog: ab : Bog: bc = ∠ amb : ∠ bmc.

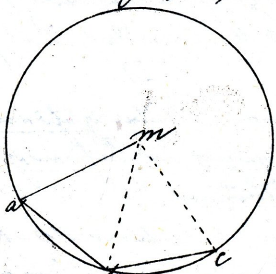
23.



In einem Kreise gehören zu gleichen Bogen gleiche Mittelpunktswinkel.

Es sei Bogen ab = bc. Wäre nun ∠ amb nicht = bmc, so sei ∠ amb = bmd, also (III. 20) Bogen ab = bd, also Bogen bd = bc, was unmöglich ist. Also muß ∠ amb = bmc sein.

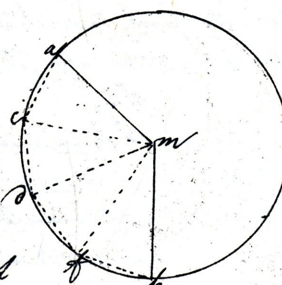
24.



In einem Kreise gehören zu gleichen Bogen gleiche Sehnen.

Es sei Bogen ab = bc, so ist (III. 23) ∠ amb = bmc, also Sehne ab = bc.

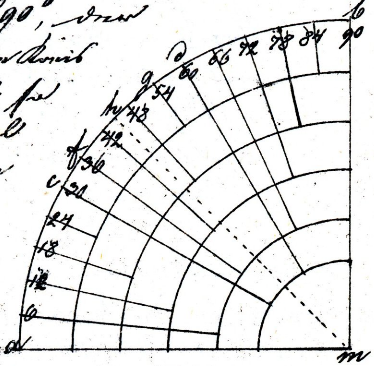
25.



Um einen Winkel in gleiche Theile zu theilen, theilt man den entsprechenden Bogen in gleiche Theile.

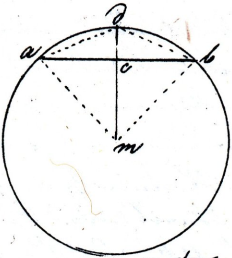
Es sei z. B. der ∠ amb in 4 gleiche Theile zu theilen, so beschreibt man aus der Winkelspitze m als Mittelpunkt, mit einem beliebigen Halbmesser ma einen Kreisbogen zwischen den Winkelseiten, und theilt denselben in 4 gleiche Theile, d. h. man sucht, entweder geometrisch oder durch Versuche, eine Sehne ac, welche sich an den Bogen ab in c, d, f, b, 4 mal eintragen läßt. Dann sind auch die ∠ amc, cmd, dmf, fmb, einander gleich.

Der 90ste Theil eines rechten Winkels heißt ein Grad, und ist das Maaß aller übrigen Winkel. Uneigentlich nennt man auch wohl denjenigen Theil des Kreisumfangs, welcher einem Grad entspricht, ebenfalls einen Grad. Hiernach hat der Viertelkreis oder Quadrant 90°, der Halbkreis 180°, der ganze Kreis 360°, zwei Nebenwinkel so wie die drei Winkel eines Dreiecks machen 180°, die um einen Punkt herum liegenden Winkel 360°. Der Grad wird weiter in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden, die Sekunde in Zehntel u. Hundertel getheilt. Da der Winkel eines gleichseitigen Dreiecks 60° hat, so heißt diese Eintheilung die Sexagesimal-Theilung. Ein Winkelmaaßstab, auf welchem der rechte Winkel in 90°, der Halbkreis in 180° getheilt ist, heißt ein Transporteur.



In dem Quadranten a b trägt man den Halbmesser von b nach c, von a nach d, wodurch man die Punkte von 30° u. 60° erhält. Ferner die Seite des Zehnecks, die sich durch eine leichte Construktion finden läßt, von a nach f, von b nach g, u. s. w. Hierdurch ergeben sich alle Theilpunkte von 6° zu 6°. Theilt man den Quadranten bei k in die Hälfte, so erhält man den Theilpunkt von 45° etc., und dadurch alle Theilpunkte von 3° zu 3°.

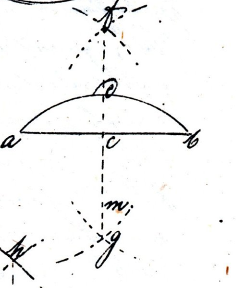
26.



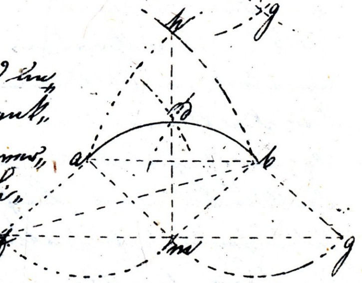
Eine aus dem Mittelpunkte des Kreises auf eine Sehne gefällte senkrechte Linie, theilt sowohl die Sehne als den Bogen in die Hälfte.

Denn es sey c ein rechter Winkel, so ist (I.36) $\Delta\, mca = mcb$, also $ac = bc$ und $\angle\, amd = bmd$, also (III.20) Bogen $ad = bd$.

27.



Einen Kreisbogen in die Hälfte zu theilen.



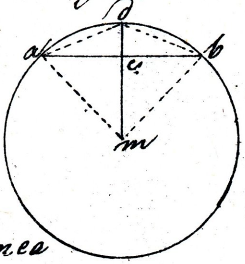
Man beschreibe über und unter die Sehne ab gleichschenklige Dreiecke abf, abg, verbinde fg, so theilt diese Linie die Sehne ab in c senkrecht in die Hälfte, und theilt also auch (III.26) den Bogen ab in d in die Hälfte.

Wenn man zu dieser Theilung bloß den Zirkel allein ohne Lineal, anwenden will, so beschreibe man aus den Mittelpunkten a, b, mit dem Halbmesser des gegebenen Bogens zwei Bögen, die einander in dem Mittelpunkte m des gegebenen Bogens schneiden, trage aus m die Sehnen $mf = mg = ab$ ein, so ist fmg eine gerade Linie, also (III 8) $fb^2 - bg^2 = fg \cdot fm = 2fm^2$, also $fb^2 - fm^2 = bg^2 + fm^2 = mb^2 + fm^2$.

Man schreibe also über der Grundlinie fg ein gleichschenkliges $\Delta\, fgh$, dessen Schenkel $fh = gh = fb$, so ist $mh^2 = mb^2 + fm^2$. Man beschreibe also über der

Grundlinie fg ein zweites gleichschenkliges Dreieck fdg, dessen Schenkel $fd = gd = mk$, so liegt der Punkt d sowohl in mk als im Bogen ab, und theilt also den Bogen in die Hälfte.

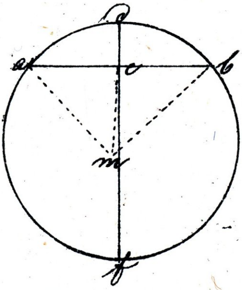
28.



<u>Eine gerade Linie, welche den Mittelpunkt des Kreises mit der Mitte der Sehne oder des Bogens verbindet, ist auf der Sehne senkrecht.</u>

Denn wenn $ac = bc$, so ist (I. 5) $\triangle\, mca = mcb$, also $\angle\, mca = mcb = R$. Wenn $ad = bd$, so ist $\angle\, amc = bmc$, also (I. 1) $\triangle\, mca = mcb$, also $\angle\, mca = mcb = R$.

29.



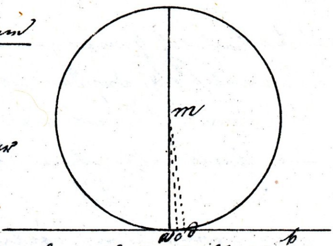
<u>Eine gerade Linie, welche in der Mitte der Sehne senkrecht auf dieselbe in der Ebene des Kreises errichtet wird, theilt den Bogen in die Hälfte und geht durch den Mittelpunkt des Kreises.</u>

Denn wenn $ac = bc$, $cd = cd$, $\angle\, acd = bcd = R$, so ist (I. 1) $\triangle\, acd = bcd$, also $ad = bd$, also (III. 21) Bogen $ad = bd$.

Wenn der Mittelpunkt m nicht in der Senkrechten cf, sondern seitwärts läge, so wären $ac = bc$, $ma = mb$, $mc = mc$, also $\triangle\, mca = mcb$, also (I. 5) $\angle\, mca = mcb = R$, aber auch $\angle\, fca = R$, also $\angle\, mca = fca$, was unmöglich ist.

30.

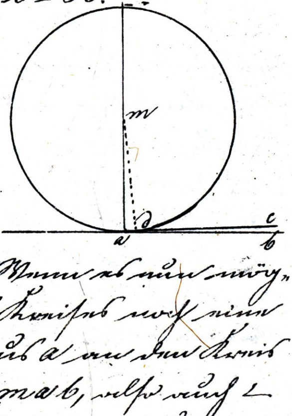
<u>Eine gerade Linie, welche durch irgend einen Punkt des Umfangs senkrecht auf den Halbmesser</u>



oder durchmesser in die Ebene des Kreises gezogen wird, berührt den Kreis.

Eine gerade Linie welche in der Ebene des Kreises nur einen Punkt mit demselben gemein hat, in allen übrigen Punkten aber außerhalb des Kreises liegt, heißt eine Berührungslinie oder Tangente. Wenn nun $\angle mab = R$, so kann ab keinen zweiten Punkt d mit dem Kreise gemein haben. Denn alsdann wäre ad eine Sehne des Kreises, welche sich in c halbiren ließe, also wäre (III. 28) $\angle mcb = R$, aber (I. 22) $\angle mcb >$ als mab was unmöglich ist, weil $\angle mab = R$.

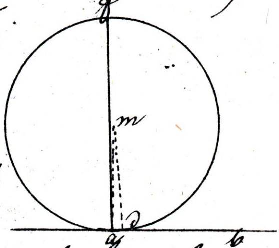
31.



Zu einem Punkte des Umfangs kann nur eine einzige Berührungslinie an den Kreis gezogen werden.

Es sey $\angle mab = R$, so ist (III. 30) ab eine Berührungslinie in a. Wenn es nun möglich wäre, in der Ebene des Kreises noch eine zweite Berührungslinie aus a an den Kreis zu ziehen, so daß $\angle mac < mab$, also auch $\angle mac < R$ wäre, so könnte man aus m auf ac eine Senkrechte md fällen. Da $\angle mad < R$, $\angle mda = R$, so wäre (I. 26) $md < ma$ d. h. ein Punkt von ac läge innerhalb des Kreises, also wäre ac keine Berührungslinie. Würde $\angle mac > mab$ angenommen so ergäbe sich auf der andern Seite von a derselbe Beweis.

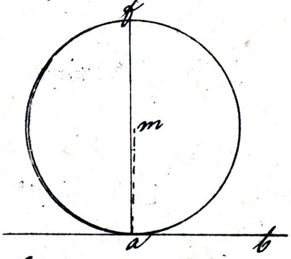
32.



<u>Die Berührungslinie ist im Punkte der Berührung auf dem Halbmesser oder Durchmesser senkrecht.</u>

Wenn ab den Kreis in a berührt, der ∠ fab = R wäre, und der Mittelpunkt m nicht in af läge, so könnte man von m auf ab eine Senkrechte md fällen, dann wäre ∠ mad < mda, also md < ma, also läge ein Punkt von ab innerhalb des Kreises, also wäre ab keine Berührungslinie.

33.



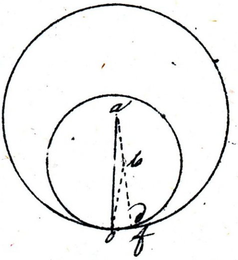
<u>Der Mittelpunkt des Kreises liegt in der geraden Linie welche auf eine Berührungslinie im Berührungspunkte, in der Ebene des Kreises senkrecht errichtet wird.</u>

Die Linie ab berührt den Kreis in a, und fa ist senkrecht auf ab. Läge der Mittelpunkt m nicht in fa, so würde doch (III 32) ∠ mab = R seyn. Es ist aber unmöglich in einer Ebene in einem Punkte auf einer geraden Linie zwei verschiedene senkrechte Linien zu errichten (I. 17.) also liegt m in af.

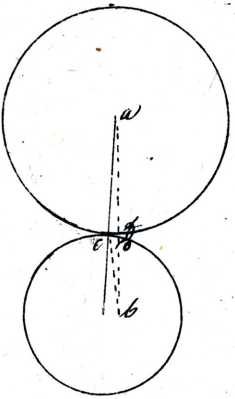
34

<u>Wenn zwei Kreise einander berühren, so liegt der Berührungspunkt in der geraden Linie der Mittelpunkte.</u>

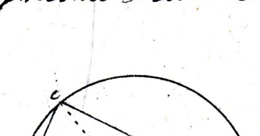
Zwei Kreise berühren einander, wenn sie in einer Ebene liegen, einen Punkt



des Umfangs mit einem der gemein haben, und alle Punkte des kleinern Kreisumfangs innerhalb oder außerhalb des größern Kreisumfangs liegen. Jene Berührung heißt die innere, diese die äußere. Es seyen a, b, die Mittelpunkte des größern und kleinern Kreises, c der Berührungspunkt. Läge b nicht in der geraden Linie a c, so würde die gehörig verlängerte gerade Linie a b die Kreise b, a, in d, f, so schneiden, daß bei der inneren Berührung $ad < af$, bei der äußern $ad > af$ wäre. Es ist aber (I. 27) bei der innern $ab + bc > ac$, d. h. $ab + bd > af$, was unmöglich ist; bei der äußern $ac + bc > ab$, d. h. $af + bd > ab$, was ebenfalls unmöglich ist. Folglich muß in beiden Fällen der Mittelpunkt b in der geraden Linie a c liegen.



35.

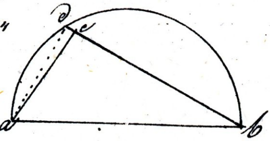


<u>Alle Umfangswinkel, welche im Halbkreise auf dem Durchmesser ruhen, sind rechte Winkel.</u>

Umfangswinkel heißen diejenigen, deren Spitzen am Umfange des Kreises liegen. Der Umfangswinkel a c b ruht auf dem Durch-

durchmesser ab, die Δ amc, bmc, sind gleichschenklig, also (II.9) $\angle amc = 2\, mcb$ $\angle bmc = 2\, mca$; aber $\angle amc + bmc = 2R$, also $\angle mcb + mca = R$, oder $\angle acb = R$.

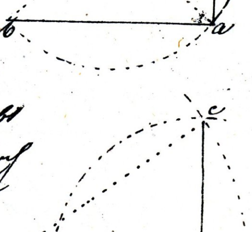
36.



<u>Wenn die Schenkel eines rechten Winkels auf einer geraden Linie ruhen, so ist sie der durchmesser eines Halbkreises, welcher durch die Spitze des rechten Winkels geht.</u>

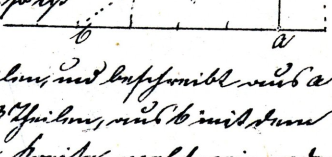
Es sey acb ein rechter Winkel, und über ab ein Halbkreis beschrieben. Würde nun c nicht im Umfange liegen so würde bc den Umfang in d schneiden, und $\angle bca > bda$ seyn. dieß ist aber unmöglich weil $\angle bca = R$, und nach (III.35 auch $\angle bda = R$. Also liegt die Spitze des rechten Winkels c im Halbkreise.

37.



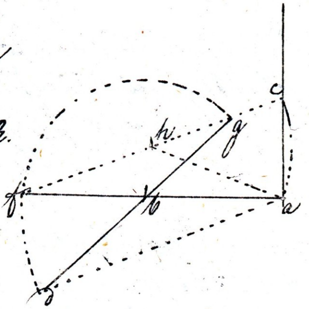
<u>Auf einer geraden Linie einen rechten Winkel zu setzen.</u>

Man beschreibt über ab ein beliebiges gleichschenkliges dreieck abm, aus m mit dem Halbmesser $mb = ma$, beschreibt man einen Halbkreis, welcher durch a geht, und wo der verlängerte bm in c geschnitten wird, so ist (III.35) $\angle bac = R$.



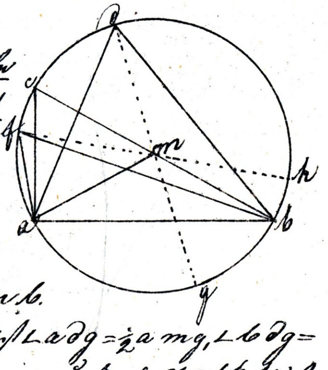
Oder man macht $ab = 4$ Theilen, und beschreibt aus a mit dem Halbmesser $ac = 3$ Theilen, aus b mit dem Halbmesser $bc = 5$ Theilen, Kreise, welche einander

einander in c schneiden. Da nun $3^2+4^2=9+16=25=5^2$, so ist $ab^2 + ac^2 = bc^2$, also (II. 46) $\angle bac = R$.



Wenn aber der rechte Winkel auf dem freien Feldpunkte, ohne Kreisdurchschnitte gemacht werden können, wie oft werden soll, so mißt man auf der Grundlinie ein beliebiges Stück ab aus, steckt eine zweite Linie bd nach beliebiger Richtung ab, macht mit der Kette oder Schnur $bd = ab$, steckt die Linie ad, ab, und mißt sie aus. Den Unterschied der genannten Linien $ad - ab$ oder $ad - bd$, trägt man mit der Kette oder Schnur nach bf und bg, und steckt die Linie fg ab, worauf man $fh = ab$ aufträgt. Da $af = ad$, $fh = ab$, und $\angle hfa = bad$, so ist (I. 1) $\triangle afh = dab$, also $ah = bd$, also $ah = fh$. Man trägt also fh auf hc, so ist (III. 35) $\angle cab = R$.

38.

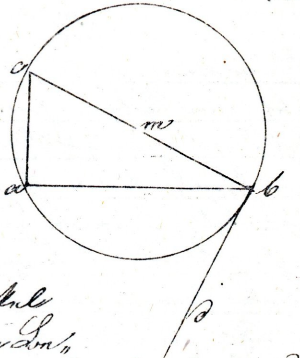


<u>Alle Umfangswinkel, welche im größern Kreisabschnitte auf einer Sehne stehen, sind dem halben Mittelpunktswinkel gleich, daher einander gleich.</u>

Wenn der Mittelpunkt m in bc liegt, so ist (II. 9) $\angle acb = \frac{1}{2} amb$.

Wenn m zwischen ad, bd liegt, so ist $\angle adg = \frac{1}{2} amg$, $\angle bdg = \frac{1}{2} bmg$, also $\angle adb = \frac{1}{2} amb$. Wenn m außerhalb afb, so ist $\angle afh = \frac{1}{2} amh$, $\angle bfh = \frac{1}{2} bmh$, also $\angle afb = \frac{1}{2} amb$. Also $\angle acb = adb = afb$. Da der ganze Bogen ab das Maaß des Mittelpunktswinkels amb, so ist der halbe Bogen ab das Maaß des Umfangswinkels.

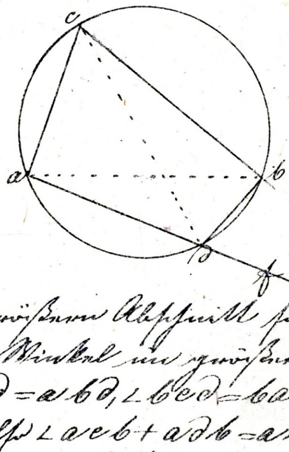
39.



Der Umfangswinkel ist gleich dem Winkel welchen die Berührungslinie mit der Sehne bildet, auf welcher der Umfangswinkel ruht.

Man ziehe einen Durchmesser bc, so sind alle Umfangswinkel auf ab, $= \angle bca$. Es sey bd eine Berührungslinie, so ist (III. 32) $\angle cbd = R$. Aber auch (II. 10) $\angle acb + abc = R$, also $\angle acb + abc = cbd$ also $\angle acb = abd$.

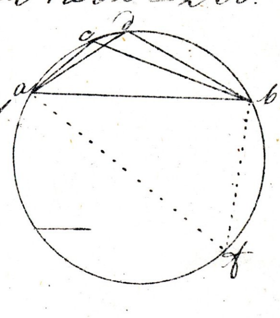
40



Im Kreisviereck machen die beiden Gegenwinkel zusammen zwei rechte, oder der Außenwinkel ist dem Gegenwinkel gleich.

Es sey acb der Winkel im größeren Abschnitt so sind nun so auch acd, bcd, Winkel im größeren Abschnitte, also (III. 38) $\angle acd = abd$, $\angle bcd = bad$, also $\angle acb = abd + bad$, also $\angle acb + adb = abd + bad + adb$, also (II 7) $\angle acb + adb = 2R$.

41.

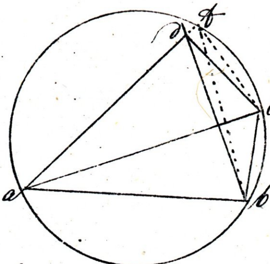


Alle Umfangswinkel welche im kleineren Kreisabschnitt auf einer Sehne ruhen, sind einander gleich.

Denn (III. 40) $\angle acb + afb = 2R$
$\angle adb + afb = 2R$, also $\angle acb = adb$.

42.

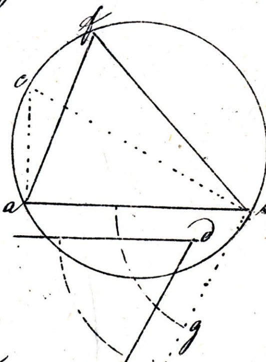
Wenn in einem Viereck die auf einer Seite nach einerlei Richtung liegenden Winkel gleich sind, oder die Gegenwinkel zusammen zwei rechte Winkel betragen, so ist das Viereck ein Kreisviereck.



Im Viereck abcd sey $\angle acb = adb$, oder $\angle adc + abc = 2R$. Man beschreibe um das $\triangle abc$ einen Kreis (I. 21). Wenn nun d nicht im Umfange dieses Kreises läge, und ad den Umfang in f schnitte, so würden (III. 38. 41) $\angle afb = acb$, und (III 40) $\angle afc + abc = 2R$ seyn, also würden $\angle adb = afb$ und $\angle adc = afc$ seyn, was unmöglich ist, weil (I. 22) $\angle adb > afb$ $\angle adc > afc$ ist.

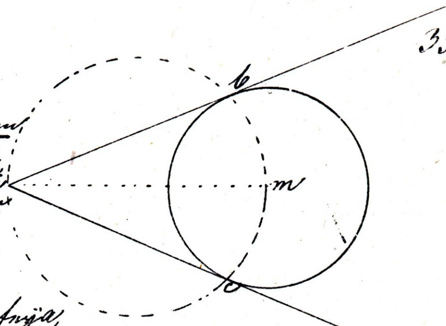
43.

Ueber einer geraden Linie einen Kreisbogen zu beschreiben, welcher einen gegebenen Winkel in sich faßt.



Die gegebene gerade Linie sey ab, der gegebene Winkel sey d. Man setze (I. 8.) an ab den $\angle abg = d$, errichte in b auf bg, in a auf ab senkrechte Linien, welche einander in c schneiden, beschreibe über bc als Durchmesser einen Kreis, so ist dieser der verlangte. Denn wenn f ein beliebiger Punkt des Umfangs ist, so ist (III. 38. 41), $\angle afb = acb$. Aber (III. 35) $\angle bac = R$. Da nun auch $\angle cbg = R$, so ist $\angle acb = abg$, also $\angle afb = abg = d$.

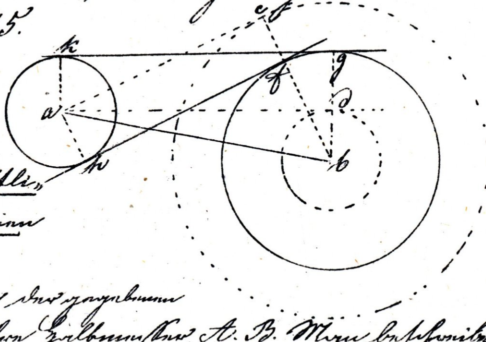
44.



Aus einem gegebenen Punkte an einen gegebenen Kreis die beiden Berührungslinien zu ziehen.

Der gegebene Punkt heiße a, der Mittelpunkt des Kreises heiße m. Man beschreibe über a m als Durchmesser einen Kreis, welcher den gegebenen in b, c schneidet und ziehe a b, a c, so berühren sie den Kreis m. Denn (III. 35) $\angle abm = acm = R$, also (III 30) sind a b, a c Berührungslinien.

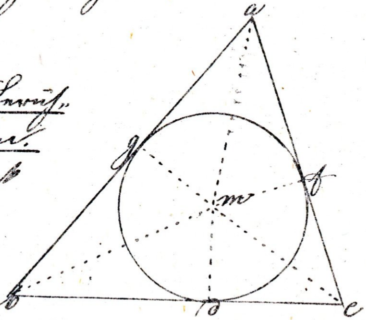
45.



An zwei Kreise, welche in einer Ebene liegen, die beiden gemeinschaftlichen Berührungslinien zu ziehen.

Die Mittelpunkte der gegebenen Kreise heißen a, b, ihre Halbmesser A. B. Man beschreibe aus b mit den Halbmessern $bc = B + A$, $bd = B - A$ concentrische Kreise, ziehe aus a an diese concentrische Kreise die Berührungslinien (III. 44) a c, a d, so ist (III 32) $\angle acb = adb = R$. Man verbinde b c, b d, welche den gegebenen Kreis in f, g schneiden, ziehe $fh \parallel ac$, $gk \parallel ad$, fälle aus a auf f h, g k, die Senkrechten a h, a k, so ist (II. 18) $ah = cf$, $ak = dg$; aber $cf = dg = A$, also $ah = ak = A$, also liegen die Punkte h. k. im Umfange des Kreises a, also sind, wegen der rechten Winkel f g, h, k, die Linien f h, g k (III. 30) gemeinschaftliche Berührungslinien beider Kreise.

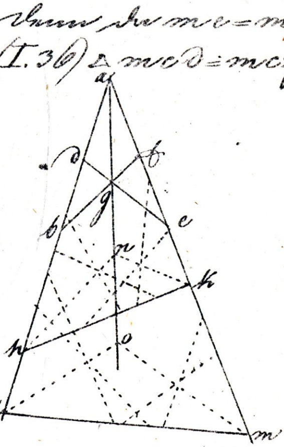
46.



In ein Dreieck einen Berührungskreis zu beschreiben.

In dem gegebenen Dreieck abc theile man zwei Winkel a, b, in die Hälfte (I. 10) durch gerade Linien am, bm, welche einander in m schneiden, so ist m der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Denn wenn man aus m auf die Seiten bc, ca, ab, die senkrechten Linien md, mf, mg, fällt, so ist $ma = ma$, $\angle mag = maf$, $\angle g = f = R$ also (I. 23) $mg = mf$. Ferner $mb = mb$, $\angle mbd = mbg$, $\angle d = g = R$, also (I. 23) $md = mg$. Also sind md, mf, mg, Halbmesser eines Kreises, und wegen der rechten Winkel d, f, g, wird dieser Kreis (III. 30) von den Seiten bc, ca, ab, berührt. Der dritte Winkel c wird durch die Linie mc ebenfalls in die Hälfte getheilt. Denn da $mc = mc$, $md = mf$, $\angle d = f = R$, so ist (I. 36) $\triangle mcd = mcf$, also $\angle mcd = mcf$.

47.

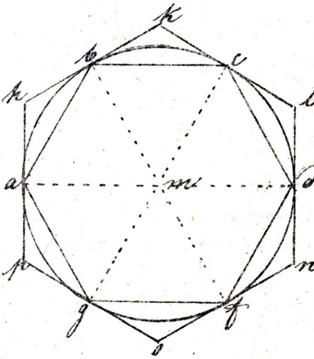


Einen Winkel auf einem Felde wo keine Kreisdurchschnitte gemacht werden können, in die Hälfte zu theilen.

Wenn es unmöglich ist, die Spitze a des Winkels zu erreichen, so stecke man auf den Winkel l-seiten mit der Kette oder Schnur gleiche Stücke $ab=ac$, $ad=af$ ab, zieht die geraden Linien bf, cd, welche einander in g schneiden, und zieht ag, welche den Winkel a in die Hälfte theilt. Denn da $ab=ac$, $af=ad$, $\angle a=a$, so ist (I.1) $\triangle abf=acd$, also $\angle b=c$, und $\angle d=f$, aber auch $bd=cf$, also (I.2) $\triangle bdg=cfg$, also $dg=fg$, $bg=cg$, also (I.5) $\triangle adg=afg$, $\triangle abg=acg$, also $\angle bag=cag$.

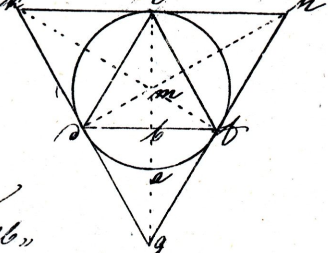
Wenn es nicht möglich ist, die Spitze a zu erreichen, so ziehe man zwischen den Winkelschenkeln zwei beliebige gerade Linien, kk, lm, theilen auf die angezeigte Art die Winkel k, k, und l, m, in die Hälfte durch gerade Linien, welche einander in n, o, schneiden, so muß (III.46) sowohl an, als ao den Winkel a in die Hälfte theilen, also muß die gerade Linie on gehörig verlängert durch den Punkt a gehen, und den Winkel in die Hälfte theilen.

48.



In und um einen Kreis ein regelmäßiges Sechseck zu beschreiben.

Die Seite des eingeschriebenen Sechsecks ist dem Halbmesser gleich. Denn wenn man $ab=ma=mb$ macht, so ist $\angle amb=\frac{2}{3}R$ also $3.amb=2R$, $6.amb=4R$. In den Winkelpuncten des eingeschriebenen Sechsecks a b, c d. f g. errichtet man Senkrechte pk, kk, kl u.s.w. welche (III 38) den Kreis berühren. Da $mk=mk$, $ma=mb$ $\angle a=b=R$, so ist (I.36) $\triangle mak=mbk$, also $\angle bmk=\frac{1}{3}R$. Eben so beweist man, daß $\angle bmk = \frac{1}{3} R$. Also $\Delta bmk = bmk$, also $ak = bk = bk$ u. s. w.

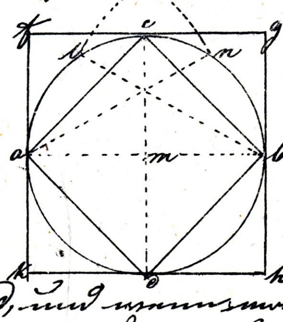


49.

<u>In und um einen Kreis ein regelmäßiges Dreieck zu beschreiben.</u>

Man zieht einen beliebigen Durchmesser, theilt den Halbmesser ma in b in die Hälfte, errichtet in b auf ma einen Senkrechten df, so ist sie die Seite des eingeschriebenen Dreiecks. Denn da $mb = ab$, $bd = bd$, $b = R$, so ist $\Delta abd = mbd$, also $ad = md = ma$, also $\angle bmd = \frac{2}{3} R$, ebenso $\angle bmf = \frac{2}{3} R$, also $\angle cmd = cmf = \frac{4}{3} R = dmf$, also $cd = df = fc$. Errichtet man in c, d, f, auf den Halbmessern mc, md, mf, Senkrechten, so bilden sie das umschriebene Dreieck. Denn da $\angle bmd = \frac{2}{3} R$, so ist $\angle mdb = mfb = \frac{1}{3} R$, also $\angle bdg = bfg = \frac{2}{3} R$ also $dg = fg = df$ u. s. w.

50.

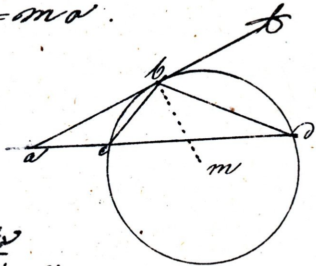


<u>In und um einen Kreis ein Quadrat zu beschreiben.</u>

Man zieht zwei auf einander senkrechte Durchmesser, ab, cd, so erhält man das eingeschriebene Quadrat $abcd$, und wenn man in den Ecken desselben senkrechte Linien auf die Durchmesser errichtet, so ergiebt sich das umschriebene Quadrat $fghk$. Um die Seite des eingeschriebenen Quadrats ohne Anwendung des Lineals zu erhalten, trägt man den Halbmesser in al, ln, nb, wodurch sich b

ergiebt. Ueber ab beschreibt man mit der Oeffnung $ao = ad$, $bo = bd$, ein gleichschenkliges Dreieck aob, wodurch sich der Punkt o ergiebt. Dann ist $ac = mo$. Denn da $ad^2 = bd^2 = 3ma^2$ (II. 47), so ist $ao^2 = bo^2 = 3ma^2$. Da $ao = bo$, und $am = bm$, so ist (I. 5) $\triangle amo = bmo$, also $\angle amo = R$, also $mo^2 = ao^2 - ma^2 = 2ma^2$. Also (II. 44) $ac = mo$.

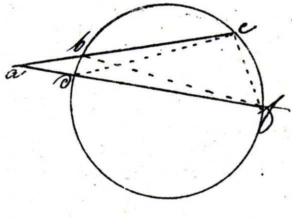
51.



Wenn aus einem Punkte an den Kreis eine Berührungslinie und eine Transversallinie gezogen wird, so ist das Quadrat der Berührenden gleich dem Rechteck der Abschnitte auf der Transversallinie.

Die Berührende sei ab, die Transversallinie acd, so ist (III. 39) $\angle abc = adb$, $\angle dbf = bcd$, also $\angle dba = bca$, also $\triangle abc \sim adb$, also (II. 59) $ac : ab = ab : ad$, oder $ab^2 = ca \cdot ad$.

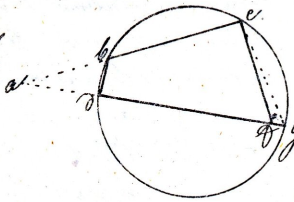
52.



Wenn aus einem äußern Punkte zwei Transversallinien an den Kreis gezogen werden, so sind die Rechtecke der Abschnitte auf denselben einander gleich.

Denn (III. 38) $\angle acd = afb$, $\angle cdf = cbf$, also $\angle cda = fba$, also $\triangle acd \sim afb$. Ferner (III 40) $\angle abd = afc$, $\angle adb = acf$, also $\triangle abd \sim afc$. Aus beiden folgt (II. 58. 59) $ac : af = ad : ab$, also $ca \cdot ab = da \cdot af$.

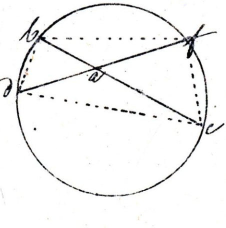
53.



Wenn an dem Durchschnittspunkt der Gegenseiten eines Vierecks die Rechtecke der Abschnitte einander gleich sind, so ist es ein Kreisviereck.

Es sey $ba.ac = da.af$. Man beschreibe um das $\Delta\, bcd$ einen Kreis. Wenn derselbe nicht durch f gehen, sondern die Seite df in g schneiden würde, so müßte (III. 52) $ba.ac = da.ag$, also $da.af = da.ag$, also $af = ag$ seyn, was unmöglich ist. Also geht der Kreis auch durch den Punkt f.

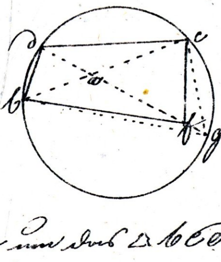
54.



Wenn durch einen innern Punkt zwei Durchschnittslinien des Kreises gehen, so sind die Rechtecke der Abschnitte auch derselben einander gleich.

Denn (III 38) $\angle acd = afb$, $\angle cda = fba$, also $\Delta acd \sim afb$. Ferner (III. 38) $\angle abd = afc$, $\angle adb = acf$, also $\Delta abd \sim afc$. Aus beiden folgt (II. 58. 59) $ac : af = ad : ab$, also $ca.ab = da.af$.

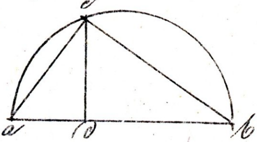
55.



Wenn an dem Durchschnittspunkte der Diagonallinien eines Vierecks die Rechtecke der Abschnitte einander gleich sind, so ist es ein Kreisviereck.

Es sey $ba.ac = da.af$. Man beschreibe um das $\Delta\, bcd$ einen Kreis. Wenn derselbe nicht durch f gehen, sondern die Diagonallinie df in g schneiden würde, so müßten (III. 54) $ba \cdot ac = da \cdot ag$, also $da \cdot af = da \cdot ag$, also $af = ag$ seyn, was unmöglich ist. Also geht der Kreis auch durch den Punkt f.

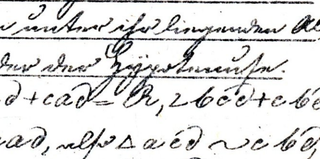
56.



Wenn aus einem Punkte des Umfangs auf den Durchmesser oder aus der Spitze eines recht-winkligen Dreiecks auf die Hypotenuse eine senkrechte Linie gefällt wird, so ist sie die mittlere Proportionallinie zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers oder der Hypotenuse. Auch ist jede Sehne oder Kathete die mittlere Proportionallinie zwischen dem unter ihr liegenden Abschnitte und dem Durchmesser oder der Hypotenuse.

Denn da $\angle acd + bcd = R$, $\angle acd + cad = R$, $\angle bcd + cbd = R$, so ist $\angle acd = cbd$, $\angle bcd = cad$, also $\triangle acd \sim cbd$, $\triangle acd \sim abc$, $\triangle cbd \sim abc$, also $\frac{ad}{cd} = \frac{cd}{bd}$, $\frac{ad}{ac} = \frac{ac}{ab}$, $\frac{bd}{bc} = \frac{bc}{ab}$ oder $cd^2 = ad \cdot db$, $ac^2 = da \cdot ab$, $bc^2 = ab \cdot bd$ die beiden letzten Gleichungen enthalten auch den Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes (II. 45) denn ihre Addition giebt $ac^2 + bc^2 = da \cdot ab + ab \cdot bd = ab^2$

57.



Wenn aus einem äußeren Punkte des Durchmessers eine Berührende an den Halbkreis gezogen wird, so ist sie die mittlere Proportionallinie zwischen den Abschnitten des Durchmessers.

Denn (III. 39) $\angle dca = dbc$, $\angle bcf = bac$, also $\angle bcd = cad$ also $\triangle dca \sim dbc$, also $\frac{ad}{cd} = \frac{cd}{bd}$ oder $cd^2 = ad \cdot db$

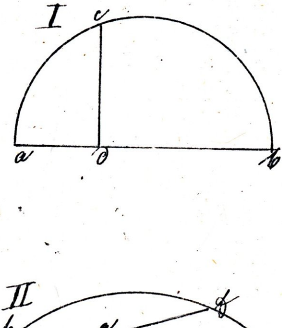
58.

Wenn eine Linie die mittlere Proportionallinie zwischen zwei anderen ist, so verhält sich das Quadrat der kleineren zum Quadrat der mittleren, oder das Quadrat der mittleren zum Quadrat der größeren, wie die kleinere zur größeren.

Denn wenn $\frac{A}{C} = \frac{C}{B}$ ist, so ist $C^2 = A.B$, also $\frac{A^2}{C^2} = \frac{A^2}{A.B} = \frac{A}{B}$ und $\frac{C^2}{B^2} = \frac{A.B}{B^2} = \frac{A}{B}$.

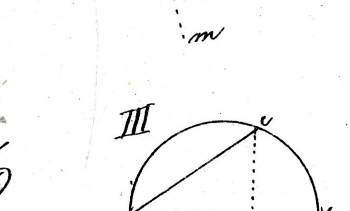
Daher ist auch III. 56. 57 $\frac{ad^2}{cd^2} = \frac{ad}{bd}$, $\frac{cd^2}{bd^2} = \frac{ad}{bd}$ und III 56. $\frac{ad^2}{ac^2} = \frac{ac^2}{ab^2} = \frac{ad}{ab}$, $\frac{bd^2}{bc^2} = \frac{bc^2}{ab^2} = \frac{bd}{ab}$

59.

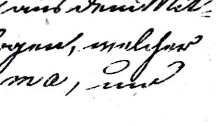


Zwischen zwei Linien die mittlere Proportionallinie zu finden, oder ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Die gegebenen Linien seyen die kleinere $= A$, die größere $= B$; die gesuchte mittlere $= C$, so daß $A : C = C : B$, oder $C^2 = A.B$



I. Mache $ad = A$, $bd = B$, beschreibe über $ab = A + B$ einen Halbkreis, errichte in d auf ab einen Perpendikel cd bis an den Halbkreis, so ist (III. 56) $cd = C$

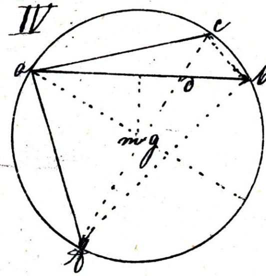


II Mache $ab = A$, $ac = B$, beschreibe aus dem Mittelpunkt m einen beliebigen Kreisbogen, welcher durch die Punkte b, c geht, ziehe ma, und darauf df senkrecht, so ist (III. 54) $da . af = ba : ac$ und (III 26), $da = af$, also $da = af = C$

III. Mache $ad = A$, $ab = B$, beschreibe über ab einen Halbkreis, errichte in d einen Senkrechten dc auf ab bis an den Halbkreis, so ist (III. 56) $ac = C$.

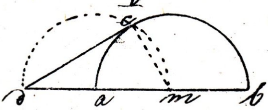
IV Mache $ad = A$, $ab = B$, beschreibe aus dem Mittelpunkte m einen beliebigen Kreisbogen, welcher durch die Punkte a, b geht, fälle aus d auf am die Senkrechte dg, welche den Kreis in c, f schneidet, so ist $ac = af = C$. denn (III. 26) $cg = fg$, $ac = af$ und (III. 38. 41) $\angle abc = afc = acf$, $\angle abf = acf = afc$, also $\angle acd \sim abc$, $\Delta afd \sim abf$, also $ac^2 = da . ab$, und $af^2 = da : ab$.

IV



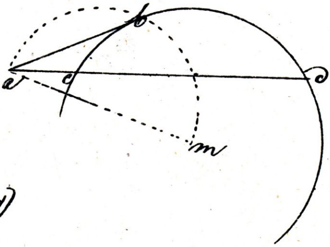
V. Mache $da = A$, $db = B$, beschreibe über ab einen Halbkreis, ziehe daran (III. 44) die Berührende dc, so ist (III. 57) $dc = C$.

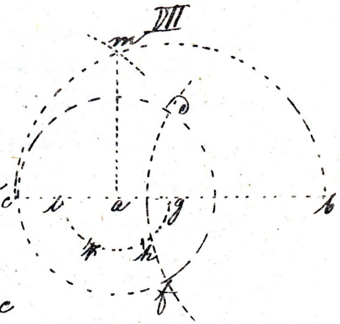
V



VI. Mache $ac = A$, $ad = B$, beschreibe einen beliebigen Kreisbogen, welcher durch die Punkte c, d, geht, ziehe daran (III. 44) die Berührende ab, so ist (III. 51) $ab = C$.

VI



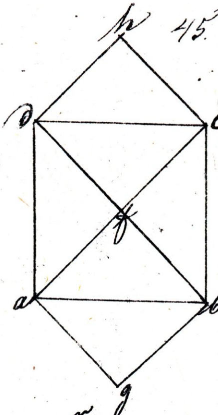


VII Die mittlere Proportionallinie läßt sich ganz ohne Anwendung des Lineals bloß durch Kreisdurchschnitte auf folgende Art finden. Gegeben sind die Punkte a b, so daß ab = B, aus a beschreibt man einen Kreis mit dem Halbmesser ac = A. Aus b beschreibt man mit einem beliebigen Halbmesser einen Bogen welcher den Kreis a in d, f schneidet. Man theilt den Bogen df in die Hälfte (III. 27) in c, so liegen die Punkte b, a, c, in gerader Linie. Man theilt die Entfernung bc in die Hälfte (III 67) in g, beschreibt aus a mit dem Halbmesser ag einen Halbkreis, und trägt in denselben den Halbmesser nach h, k, l, so ist (III. 48) l in der geraden Linie a c. Man beschreibt aus g mit dem Halbmesser $bg = \frac{1}{2}\, bc$ einen Halbkreis und aus l mit demselben Halbmesser einen Bogen, welcher jenen in m schneidet, so ist l m g ein gleichschenkliges Dreieck, also steht a m senkrecht auf bc, also (III 56) $am^2 = ca \cdot ab$, $am = C$.

VIII. Arithmetisch. Man multiplicirt die Maaße der Linien A, B, mit einander (III. 3) und zieht aus dem Producte die Quadratwurzel, wodurch man die mittlere Proportionallinie C erhält. Z. B. die Grundlinie eines Rechtecks sey 78 Fuß = B, die Höhe 24 Fuß = A, wie groß ist die Seite C eines Quadrats von gleichem Inhalt?

$$B = 78 \text{ Fuß}$$
$$A = 24$$
$$A \cdot B = 1872 \,\square\, \text{Fuß}$$
$$\sqrt{A \cdot B} = C = 43{,}26 \text{ Fuß}$$

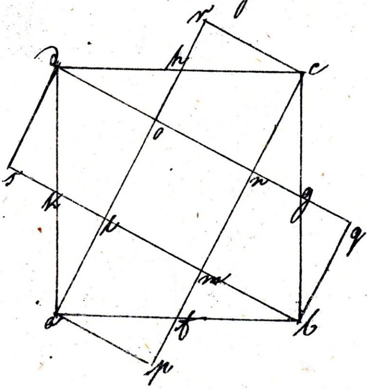
60.



Ein Quadrat in zwei gleiche Quadrate zu theilen.

In dem gegebenen Quadrat $abcd$ ziehe man die Diagonallinien ac, bd, welche einander in f schneiden, beschreibe über af, cf die Quadrate $afbg$, $cfdh$, so ist (II. 43) $afbg = cfdh = abd = bcd$.

61.



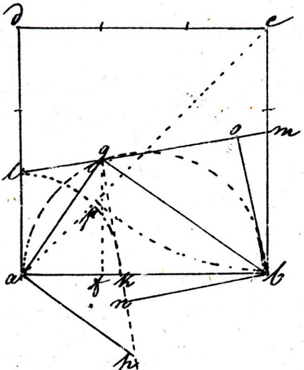
Ein Quadrat in fünf gleiche Quadrate zu theilen.

Die Seiten des gegebenen Quadrats $abcd$ theile man in die Hälfte in f, g, h, k, so sind die $\triangle\, abk = bcf = cdg = dah$, also $\angle\, bka = dha$; aber $\angle\, dah + dha = R$, also $\angle\, dah + bka = R$, oder $\angle\, kal + akl = R$, also $\angle\, l = R$. Eben so $m = n = o = R$. Da $af = \frac{1}{2}\, ab$, so ist $lm = \frac{1}{2}\, bl$, eben so $mn = \frac{1}{2}\, cm$, aber $bl = cm$; also $lm = mn$, also $lmno$ ein Quadrat. Beschreibt man über lm, mn u. s. w. die Quadrate $almp$, $bmnq$ u. s. w. so ist $\triangle\, afp = bfm$, also $\triangle\, abl = almp$, $\triangle\, bcm = bmnq$ u. s. w.

62.

Ein Quadrat in drei gleiche Quadrate zu theilen.

Man theile die Seite des gegebenen Quadrats $abcd$ in 3 gleiche Theile, so daß $af = \frac{1}{3}\, ab$, errichte in f auf ab eine Senkrechte, welche den über ab beschriebenen Halbkreis in g schneidet, so ist (III 58)



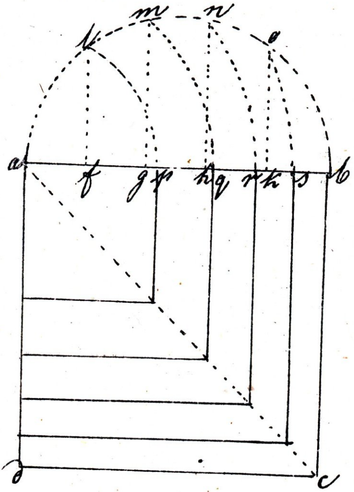
$ag^2 = \frac{1}{3} ab^2$, $bg^2 = \frac{2}{3} ab^2$. Man errichte auf ag in a die Senkrechte $ah = ag$, ziehe gh, welche die ab in k schneidet, so ist $\angle agh = ahg = \frac{1}{2} R$. Man errichte auf gk in g eine Senkrechte lm, so ist $\angle agl = bgm = ahg = \frac{1}{2} R$, und da auch $\angle kah = lag$, so ist $\Delta kah = lag$, also $al = ak$. Man macht also aus dem Viereck $algk$ das halbe Quadrat gah. Man fälle bn, bo, auf gh, lm, senkrecht, so ist $\Delta bgn = bgo$, also $bn = bo$, und da auch $\angle kbn = mbo$, so ist $\Delta kbn = mbo$, also $bm = bk$, $cm = ak = al$. Man macht also aus dem Viereck $bkgm$, das Quadrat $bngo$. Da $bf = 2af$, so ist $bg^2 = 2ag^2$, also $\Delta gah = gnb = gob$, das Viereck $cmld$ ist dem Viereck $almb$ gleich, und man kann also $cmld$ eben so in drei gleiche halbe Quadrate theilen wie $almb$.

Man kann auch unmittelbar die Punkte k, l, m, finden, indem man auf der Diagonallinie ac den Abschnitt $cp = cb$ nimmt, und $ak = al = cm = ap$ nimmt. Denn da $\Delta akh \sim bkg$, so ist $\frac{ak}{bk} = \frac{ah}{bg} = \frac{ag}{bg} = \frac{bc}{ac}$, also $ak.ac = bk.bc$. Addirt man zu beiden $ak.bc$, so ist $ak.(ac+bc) = ab.bc = ab^2$. Aber (III.7.8) $ab^2 = ac^2 - bc^2 = (ac+bc)(ac-bc)$ also $ak = ac - bc$.

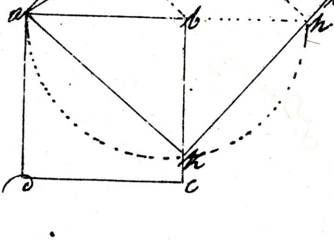
63.

Quadrate zu bilden, welche zu einem gegebenen Quadrat ein gegebenes Verhältniß haben.

z. B. die zu bestimmenden Quadrate sollen $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ des gegebenen Quadrats abcd seyn. Man theilt ab in 5 gleiche Theile in f, g, h, k, errichtet in diesen Punkten Senkrechte auf ab, welche den über ab beschriebenen Halbkreis in l, m, n, o, schneiden, so ist (III 58) $al^2 = af \cdot ab = \frac{1}{5} ab^2$, $am^2 = ag \cdot ab = \frac{2}{5} ab^2$, $an^2 = ah \cdot ab = \frac{3}{5} ab^2$, $ao^2 = ak \cdot ab = \frac{4}{5} ab^2$. Man macht also ap = al, aq = am, ar = an, as = ao, und beschreibt über ap, aq, ar, as Quadrate, deren Ecken in der Diagonallinie ac liegen.



Wenn sich das gesuchte Quadrat zu dem gegebenen abcd wie af : ag verhalten soll, so trägt man agf in beliebiger Richtung an ab, verbindet gb, zieht fh ∥ gb, beschreibt über ah einen Halbkreis welcher die Seite bc in k schneidet, so ist ak die Seite des gesuchten Quadrats aklm denn (III. 58)



$$\frac{ab^2}{ak^2} = \frac{ab}{ah} = \frac{ag}{af}$$

Arithmetisch. Man multiplicirt die Seite des gegebenen Quadrats mit der Quadratwurzel aus der Verhältnißzahl.

Beispiele.

1, Ein Quadrat zu bestimmen, welches $\frac{4}{5}$ eines Quadrats von 450 Fuß Seite sey

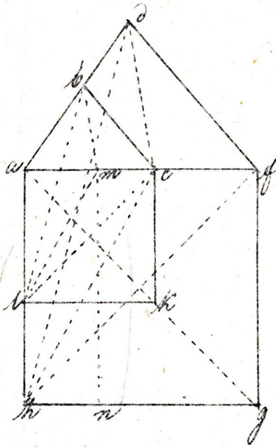
$$\sqrt{\tfrac{4}{5}} = 0,8944271$$
$$450$$
Seite $=$ 402,49 Fuß

2, Ein Quadrat zu bestimmen, welches das $3\frac{1}{2}$ fache eines Quadrats von 450 Fuß Seite sey

$$\sqrt{3\tfrac{1}{2}} = 1,8708287$$
$$450$$
Seite $=$ 841,87 Fuß

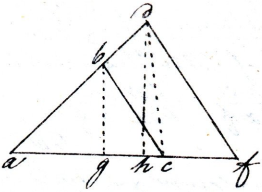
64.

Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.



Es sey △ bac ∼ daf, so ist bc ∥ df. Beschreibt man über ac, af, die Quadrate ackl, afgh, so ist cl ∥ fh, also (II 49) bl ∥ dh. Man ziehe bm ∥ dc, so ist (II. 49) auch ml ∥ ch, also (II. 55) amnh = ackl. Aber (II. 32) △ bac = dam.

Also △ bac : daf = dam : daf = am : af = amnh : afgh = ackl : afgh = $ac^2 : af^2$

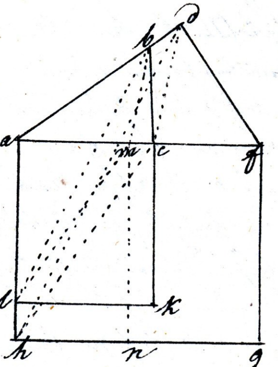


Arithmetisch. Man fället die Höhen bg, dh, so ist $\frac{ac}{af} = \frac{ab}{ad}$, $\frac{ab}{ad} = \frac{bg}{dh}$, also (II. 57) $\frac{ac}{af} = \frac{bg}{dh}$. Multiplicirt man auf beiden Seiten mit dem Verhältniss von $\frac{ac}{af} = \frac{\frac{1}{2}ac}{\frac{1}{2}af}$, und bemerkt man, daß (III δ) $\frac{1}{2}ac \cdot bg = \Delta bac$, $\frac{1}{2}af \cdot dh = \Delta daf$, so ist $\frac{ac^2}{af^2} = \frac{\Delta bac}{\Delta daf}$.

Oder man zieht cd, so ist (II. 52) $\frac{\Delta bac}{\Delta dac} = \frac{ab}{ad}$, $\frac{ab}{ad} = \frac{ac}{af}$, also (II. 57) $\frac{\Delta bac}{\Delta dac} = \frac{ac}{af}$. Aber auch (II. 52) $\frac{\Delta dac}{\Delta daf} = \frac{ac}{af}$. Multiplicirt man beide Verhältnisse, so ist $\frac{\Delta bac}{\Delta daf} = \frac{ac^2}{af^2}$.

65.

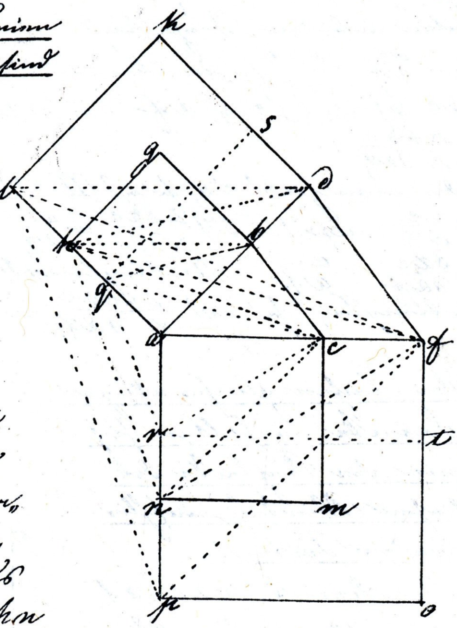
<u>Die Flächen gleichwinkliger Dreiecke verhalten sich wie die Rechtecke der diesen Winkel einschließenden Seiten.</u>



Die Dreiecke bac, daf, sind in a gleichwinklig. Man errichte auf ac, af, die Rechtecke ackl, afgh, so daß al = ab, ah = ad sey, und ziehe bm $\parallel$ dc, so ist $\Delta bac = dam$ (II. 32) also $\frac{\Delta bac}{\Delta daf} = \frac{\Delta dam}{\Delta daf} = \frac{am}{af}$. Da ab = al, ad = ah, so ist bl $\parallel$ dh. Aber auch bm $\parallel$ dc, also (II. 49) ml $\parallel$ ch, also (II 55) amnh = ackl. Aber $\frac{amnh}{afgh} = \frac{am}{af}$ also $\frac{ackl}{afgh} = \frac{am}{af}$. Also (II. 57) $\frac{\Delta bac}{\Delta daf} = \frac{ackl}{afgh}$ oder $\frac{\Delta bac}{\Delta daf} = \frac{ba \cdot ac}{da \cdot af}$

Arithmetisch: $\frac{\Delta bac}{\Delta dac} = \frac{ba}{da}$; $\frac{\Delta dac}{\Delta daf} = \frac{ac}{af}$ also durch Multiplication, wo sich Δ dac aufhebt: $\frac{\Delta bac}{\Delta daf} = \frac{ba.ac}{da.af}$

66.

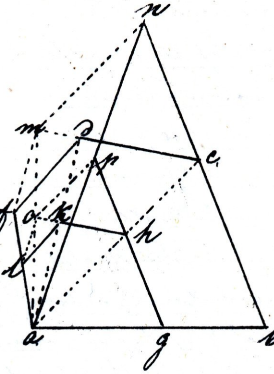


Wenn vier gerade Linien proportionirt sind so sind auch ihre Quadrate proportionirt.

Es sey $\frac{ab}{ad} = \frac{ac}{af}$, so ist (II.56) bc $\parallel$ df. Man beschreibe über ab, ad, die Quadrate abgh, adkl, so ist bh $\parallel$ dl. Aus beiden folgt (II.49) ch $\parallel$ fl. Man beschreibe über ac, af, die Quadrate acmn, afop, so ist cn $\parallel$ fp. Aus beiden folgt (II.49) hn $\parallel$ lp. Man ziehe bq $\parallel$ dk. Da auch bc $\parallel$ df, so folgt (II.49) cq $\parallel$ fk. Man ziehe cr $\parallel$ fn. Aus beiden folgt (II.49) qr $\parallel$ kn. Da auch kn $\parallel$ lp, so ist (II.5) qr $\parallel$ lp. Also (II.53) $\frac{aq}{al} = \frac{ar}{ap}$. Aber (II.52) $\frac{aq}{al} = \frac{adsq}{adkl}$, $\frac{ar}{ap} = \frac{aftr}{afop}$, also (II.57) $\frac{adsq}{adkl} = \frac{aftr}{afop}$. Da bq $\parallel$ dk, und cr $\parallel$ fn, so ist (II.55) adsq = abgh, und aftr = acmn. Also ist $\frac{abgh}{adkl} = \frac{acmn}{afop}$, oder $\frac{ab^2}{ad^2} = \frac{ac^2}{af^2}$.

67

Die Flächen ähnlicher ebener Vielecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.

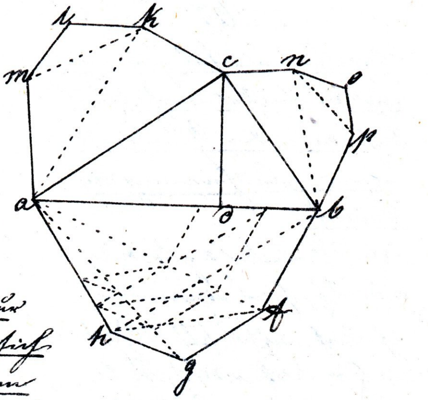


Die Vielecke $aghkl$, $abcdf$, sind einander ähnlich, also (II. 70) $gh \parallel bc$, $hk \parallel cd$, $kl \parallel df$ u.s.w. und ahc, akd, alf u.s.w. gerade Linien. Ziehe $fm \parallel ad$ bis an cd, $mn \parallel ac$ bis an bc, so ist (III. 14) $abcdf = \Delta abn$. Ziehe $lo \parallel fm$ bis an am. Da $kl \parallel df$, so ist (II. 49) $ko \parallel dm$, und da auch $hk \parallel cm$, so liegt o in hk. Ziehe $op \parallel mn$ bis an an. Da $gl \parallel bf$, $lo \parallel fm$, so ist (II. 49) $go \parallel bm$. Da auch $op \parallel mn$, so ist (II. 49 $gp \parallel bn$. Da auch $gh \parallel bn$, so liegt der Punkt p in gh. Also ist (III. 14) $aghkl = \Delta agp$ also $\frac{aghkl}{abcdf} = \frac{\Delta agp}{\Delta abn}$.
Aber $\Delta agp \sim abn$, also (II. 64) $\frac{\Delta agp}{\Delta abn} = \frac{ag^2}{ab^2}$, also (II. 57) $\frac{aghkl}{abcdf} = \frac{ag^2}{ab^2}$.

Arithmetisch. (III 64) $\frac{\Delta akl}{\Delta adf} = \frac{ak^2}{ad^2}$, $\frac{\Delta ahk}{\Delta acd} = \frac{ah^2}{ac^2}$, $\frac{\Delta agh}{\Delta abc} = \frac{ag^2}{ab^2}$. Aber (II. 55) $\frac{ak}{ad} = \frac{ah}{ac} = \frac{ag}{ab}$ also (III. 66) $\frac{ak^2}{ad^2} = \frac{ah^2}{ac^2} = \frac{ag^2}{ab^2}$. Bezeichnet man diese einander gleichen Verhältnisse durch A, so ist $\Delta akl = A . adf$, $\Delta ahk = A . acd$, $\Delta agh = A . abc$, also durch Addition $aghkl = A . abcdf$, oder

$$\frac{aghkl}{abcdf} = \frac{ag^2}{ab^2}.$$

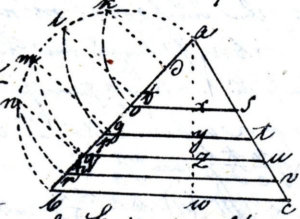
68.



Wenn auf den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche ebene Vielecke beschrieben werden, so verhalten sich die Figuren auf den Katheten zu einander und zu der Figur auf der Hypotenuse, wie sich die durch das Loth des rechten Winkels auf der Hypotenuse gebildeten entsprechenden Abschnitte zu einander und zu der ganzen Hypotenuse verhalten.

Denn (III. 67) $\frac{acklm}{bcnop} = \frac{ac^2}{bc^2}$, $\frac{acklm}{abfgh} = \frac{ac^2}{ab^2}$, $\frac{bcnop}{abfgh} = \frac{bc^2}{ab^2}$. Aber (III. 53) $\frac{ac^2}{bc^2} = \frac{ad}{bd}$, $\frac{ac^2}{ab^2} = \frac{ad}{ab}$, $\frac{bc^2}{ab^2} = \frac{bd}{ab}$, also (II. 57) $\frac{acklm}{bcnop} = \frac{ad}{bd}$, $\frac{acklm}{abfgh} = \frac{ad}{ab}$, $\frac{bcnop}{abfgh} = \frac{bd}{ab}$. Also ist auch $acklm + bcnop = abfgh$.

69.



Ein Dreieck durch gerade Linien, welche mit einer Seite parallel sind, in gleiche Theile zu theilen.

Das $\Delta\, abc$ sey z. B. durch gerade Linien welche mit bc parallel sind, in 5 gleiche Theile zu theilen. Man theile einer der anliegenden Seiten, z. B. ab in eben soviel, also in 5 gleiche Theile in d, f, g, h, errichte in diesen Theilungspunkten auf ab senkrechte Linien, welche den über ab beschriebenen Halbkreis in k, l, m, n, schneiden. Man trage die Sehnen ak, al, am, an, auf ab auf, nach ao, ap, aq, ar, ziehe $os, pt, qu,$

rv mit bc parallel, so sind sie die verlangten Theilungslinien. Denn da die Dreiecke welche sie in a bilden, dem Dreieck abc ähnlich sind, so ist (III. 64) $\frac{\Delta aos}{\Delta abc} = \frac{ao^2}{ab^2} = \frac{ak^2}{ab^2}$, $\frac{\Delta apt}{\Delta abc} = \frac{ap^2}{ab^2} = \frac{al^2}{ab^2}$, $\frac{\Delta aqu}{\Delta abc} = \frac{aq^2}{ab^2} = \frac{am^2}{ab^2}$, $\frac{\Delta arv}{\Delta abc} = \frac{ar^2}{ab^2} = \frac{an^2}{ab^2}$. Aber (III 58) $\frac{ak^2}{ab^2}\ \frac{ad}{ab} = \frac{1}{5}$, $\frac{al^2}{ab^2} = \frac{af}{ab} = \frac{2}{5}$, $\frac{am^2}{ab^2} = \frac{ag}{ab} = \frac{3}{5}$, also (II. 57) $\frac{\Delta aos}{\Delta abc} = \frac{1}{5}$, $\frac{\Delta apt}{\Delta abc} = \frac{2}{5}$, $\frac{\Delta aqu}{\Delta abc} = \frac{3}{5}$, $\frac{\Delta arv}{\Delta abc} = \frac{4}{5}$

Arithmetisch. Des Δ abc Grundlinie sey bc = 450 Fuß, Höhe aw = 375 Fuß, und es sey in 5 gleiche Theile zu theilen. Man ziehe die Quadratwurzel aus den Brüchen $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, nämlich:

$\sqrt{\frac{1}{5}} = 0,4472136$ $\quad \sqrt{\frac{2}{5}} = 0,6324555$

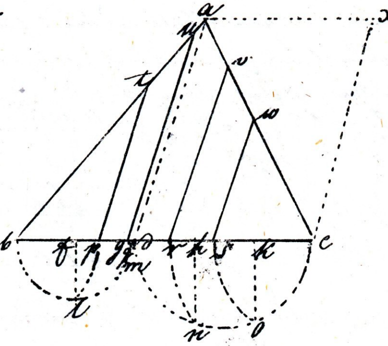
$\sqrt{\frac{3}{5}} = 0,7745966$ $\quad \sqrt{\frac{4}{5}} = 0,8944271$

Mit diesen Quadratwurzeln multiplicirt man die Grundlinie und Höhe, und erhält dadurch die Parallellinien os, pt u. s. w. und die Abstände ax, ay u. s. w. Um die Probe zu machen, multiplicirt man die Unterschiede der Abstände, mit dem Mittel der Parallellinien, die Producte müssen einander gleich seyn, hier = 16875 □ Fuß

Parallellinien	Abstände	Unterschied der Abst.	Mittel der Parallellinien	Product
201,2461	167,7051	167,7051	100,6230	16875
284,6050	237,1708	69,4657	242,9255	16875
348,5685	290,4737	53,3029	316,5867	16875
402,4922	335,4102	44,9365	375,5303	16875
450,	375,	39,5898	426,2461	16875

70.

Ein Dreieck durch gerade Linien welche einer gegebenen Linie parallel sind, in gleiche Theile zu theilen.



Durch die Spitze des Δ abc ist eine gegebene gerade Linie ad gezogen. Durch Linien, welche derselben parallel sind, soll das Dreieck z. B. in 5 gleiche Theile getheilt werden.

Man theile die Grundlinie bc in 5 gleiche Theile in f, g, h, k, und errichte in diesen Theilungspunkten auf bc senkrechte Linien, welche den über die Abschnitte bd, cd, beschriebenen Halbkreise in l, m, n, o, schneiden. Man trage die Sehnen bl, bm, des einen Halbkreises nach bp, bq, und die Sehnen cn, co, des andern Halbkreises nach cr, cs, ziehe durch p, q, r, s, Parallellinien mit ad, so sind sie die gesuchten Theilungslinien. Denn $\frac{\Delta\, bpt}{\Delta\, bda} = \frac{bp^2}{bd^2} = \frac{bl^2}{bd^2} = \frac{bf}{bd}$, $\frac{\Delta\, bda}{\Delta\, bca} = \frac{bd}{bc}$, also $\frac{\Delta\, bpt}{\Delta\, bca} = \frac{bf}{bc} = \frac{1}{5}$. Eben so wird der Beweis für die übrigen Dreiecke geführt.

Beispiel. Das Δ abc. Grundlinie bc sey = 450 Fuß, die gegebene Linie ad = 375 Fuß, die Abschnitte bd = 140 Fuß, cd = 310 Fuß. Der 5te Theil von bc ist 90 Fuß. Also kommt auf bd ein Abschnitt bf = 90, auf cd drei Abschnitte, ck = 90, ch = 180, cg = 270 Fuß. Man zieht nun die

Quadratwurzeln aus den Verhältniß=
zahlen dieser Abschnitte zu ihrem entspre=
chenden Durchmessern, nämlich

$$\sqrt{\frac{bq}{bd}} = \sqrt{\frac{90}{140}} = 0,8017837$$

$$\sqrt{\frac{ck}{cd}} = \sqrt{\frac{90}{310}} = 0,5388159$$

$$\sqrt{\frac{ch}{cd}} = \sqrt{\frac{180}{310}} = 0,7620007$$

$$\sqrt{\frac{cg}{cd}} - \sqrt{\frac{270}{310}} = 0,9332564$$

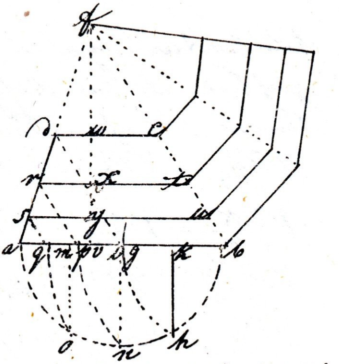
Mit diesen Quadratwurzeln multiplicirt man die Abschnitte bd, cd, und die Linie ad, wodurch man die Linien bp, pt; cs, sw, u.s.w. erhält. Wenn man mit ad eine Linie cx = ad zieht, so ist $\triangle abc = xbc$, welche muß sich verhalten (III. 65) $\frac{\triangle bpt}{\triangle xbc} = \frac{bp.pt}{bc.cx}$, oder $\frac{\triangle bpt}{\triangle abc} = \frac{bp.pt}{bc.ad}$. Eben so $\frac{\triangle csw}{\triangle abc} = \frac{cs.sw}{bc.ad}$ u.s.w.

Hier ist $bc.ad = 450.375 = 168750$

0,8017837	0,5388159	0,7620007	0,9332564
140	310	310	310
375	375	375	375
112,2497	167,0329	236,2202	289,3095
300,6689	202,0560	285,7503	349,9712
33750	33750	67500	101250

71.

Ein Trapezium, oder eine ebene Trapezoidische Figur, deren Diagonallinien in einem Punkt zusammentreffen, durch gerade Linien die den beiden parallelen Seiten parallel sind, in gleiche Theile zu theilen.



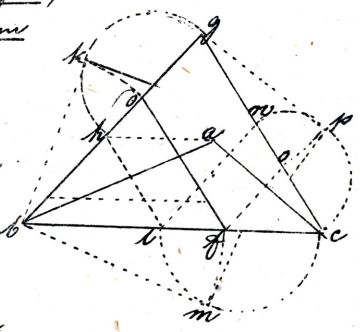
Wenn ab, cd, die parallelen Seiten sind, und ad, bc, in f zusammentreffen, so beschreibe man über der größeren Parallelseite ab einen Halbkreis, trage in denselben die kleinere Parallelseite $cd = bg = bh$, fälle aus h auf ab die senkrechte Linie hk. Daß nun z. B. die Figur in 3 gleiche Theile zu theilen, so theile man ak in eben so viel gleiche Theile in l, m, errichte in den Theilungspunkten senkrechte Linien bis an den Halbkreis ln, mo, trage die Sehnen bn, bo auf ba nach bp, bq, ziehe durch diese Punkte Parallellinien mit bc bis an ad, nämlich pr, qs, und durch diese letzten Punkte $rt \backsim su \backsim ab$, so theilen sie das Trapezium auf die verlangte Art. denn $\frac{\Delta fcd}{\Delta fab} = \frac{cd^2}{ab^2} = \frac{bh^2}{ab^2} = \frac{bk}{ab}$; $\frac{\Delta frt}{\Delta fab} = \frac{rt^2}{ab^2} = \frac{bn^2}{ab^2} = \frac{bl}{ab}$; $\frac{\Delta fsu}{\Delta fab} = \frac{su^2}{ab^2} = \frac{bo^2}{ab^2} = \frac{bm}{ab}$ aber $\Delta fab - fcd = abcd$, $\Delta frt - fcd = cdrt$, $\Delta fsu - fcd = cdsu$, also $\frac{abcd}{\Delta fab} = \frac{ak}{ab}$, $\frac{cdrt}{\Delta fab} = \frac{kl}{ab}$, $\frac{cdsu}{\Delta fab} = \frac{km}{ab}$, also $\frac{cdrt}{abcd} = \frac{kl}{ak}$, $\frac{cdsu}{abcd} = \frac{km}{ak}$

Arithmetisch. Es sey $ab = 450$, $cd = 400$, so ist $ab^2 - cd^2 = 42500$, $= ah^2 = ab.ak$, also $ak = \frac{42500}{450} = 94\frac{4}{9}$, $bk = 355\frac{5}{9}$, $\frac{1}{3}ak = 31\frac{13}{27}$, $bl = 387\frac{1}{27}$ $bm = 418\frac{14}{27}$, also $rt^2 = ab.bl = 174166\frac{2}{3}$, $su^2 = ab.bm = 188333\frac{1}{3}$. Kürzer findet man $rt^2 = \frac{2}{3}cd^2 + \frac{1}{3}ab^2$, $su^2 = \frac{1}{3}cd^2 + \frac{2}{3}ab^2$. Hieraus durch Quadratwurzelausziehung $rt = 417{,}3328$, $su = 433{,}9738$. die mittleren arithmetischen Parallellinien sind also $408{,}6664$; $425{,}6533$;

441,9869. Eben so berechnet man die Höhen. Es sey die Höhe des Trapeziums $abcd$ gegeben, nämlich $vw = 375$, so ist $\frac{fw}{fv} = \frac{cd}{ab} = \frac{400}{450}$, also $\frac{fw}{vw} = \frac{400}{50}$, $\frac{fv}{vw} = \frac{450}{50}$ also $fw = 3000$, $fv = 3375$; hieraus wie oben $fx^2 = \frac{2}{3} fw^2 + \frac{1}{3} fv^2 = 9'796875$; $fy^2 = \frac{1}{3} fw^2 + \frac{2}{3} fv^2 = 10'593750$; $fx = 3129,996$; $fy = 3254,804$. Hieraus die Höhen der Trapezien $wx = 129,996$, $xy = 124,808$, $yv = 120,196$. Die Producte der mittlern Parallellinien mit den Höhen geben für alle drei Trapezien (III. 16) den Inhalt 53125

72.

Ein Dreieck zu machen, welches einem gegebenen Dreieck ähnlich sey, und einen gegebenen Inhalt habe.



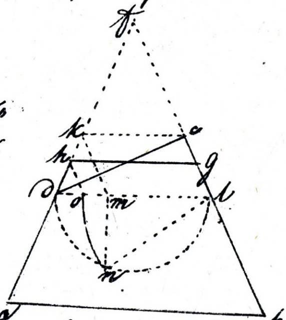
Es sey ein Dreieck dbf zu machen, welches dem $\Delta\, gbc$ ähnlich, und dem $\Delta\, abc$ an Inhalt gleich sey. Man ziehe $ah \parallel bc$, und bestimme (III. 59) zwischen bg, bh, die mittlere Proportionallinie bd, ziehe $df \parallel gc$, so ist $\Delta\, dbf = abc$. Denn $\frac{\Delta\, dbf}{\Delta\, gbc} = \frac{bd^2}{bg^2} = \frac{bh}{bg} = \frac{\Delta\, hbc}{\Delta\, gbc} = \frac{\Delta\, abc}{\Delta\, gbc}$ also $\Delta\, dbf = abc$. Oder man ziehe $hl \parallel gc$, und bestimme zwischen bl, bc, die mittlere Proportionallinie bf, ziehe $fd \parallel cg$. Denn $\frac{\Delta\, dbf}{\Delta\, gbc} = \frac{bf^2}{bc^2} = \frac{bl}{bc} = \frac{\Delta\, gbl}{\Delta\, gbc} = \frac{\Delta\, hbc}{\Delta\, gbc} = \frac{\Delta\, abc}{\Delta\, gbc}$, also $\Delta\, dbf = abc$. Oder man ziehe

$lm \parallel bg$, bestimme zwischen gn, gc, die mittlere Proportionallinie go, ziehe $of \parallel gb$, $fd \parallel cg$. denn $\frac{\Delta dbf}{\Delta gbc} = \frac{df^2}{gc^2} = \frac{go^2}{gc^2} = \frac{gn}{gc} = \frac{\Delta gbn}{\Delta gbc} = \frac{\Delta gbl}{\Delta gbc} = \frac{\Delta hbc}{\Delta gbc} = \frac{\Delta abc}{\Delta gbc}$

also $\Delta dbf = abc$.

Arithmetisch. Es sey $bc = 450$, $bh = 250$, und es soll seyn $\frac{bd}{bf} = \frac{bg}{bc} = \frac{5}{4}$. demnach ist $bg = \frac{5}{4} bc = 562{,}5$, $bd^2 = 250 . 562{,}5 = 140625$, $bl = \frac{4}{5} bh = 200$, $bf^2 = 450 . 200 = 90000$. Also ist $bd = 375$, $bf = 300$. die Probe geschieht nach III. 45, nämlich $bd . bf = 112500$, und $bh . bc = 112500$, also $bd . bf = bh . bc$.

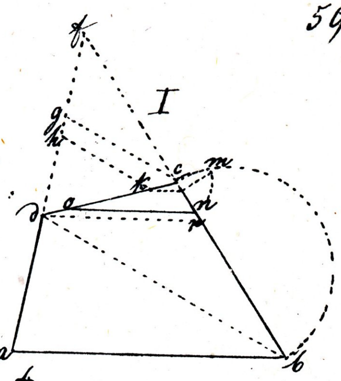
73.

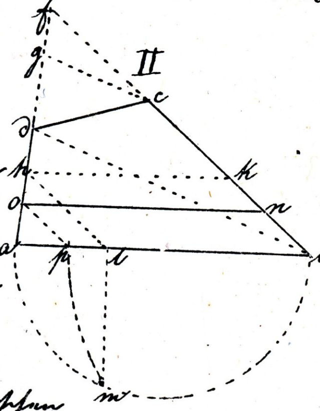


Ein unregelmäßiges ebenes Viereck in ein Trapezium von gleichem Inhalt und gleicher Grundlinie zu verwandeln.

Es sey das Viereck $abcd$ in ein Trapezium $abgh$ zu verwandeln. Man ziehe $ck \parallel dl \parallel ab$, und $km \parallel bc$, so daß $lm = ck$ sey. Man bestimme zwischen lm, ld (III. 59) die mittlere Proportionallinie lo, ziehe $oh \parallel bc$, $hg \parallel ab$, so ist $gh = lo$, und $abgh = abcd$. denn $\frac{\Delta fgh}{\Delta fld} = \frac{gh^2}{ld^2} = \frac{lo^2}{ld^2} = \frac{lm}{ld} = \frac{ck}{ld} = \frac{fc}{fl} = \frac{\Delta fdc}{\Delta fld}$, also $\Delta fgh = fdc$. Zieht man beider vom Δfab ab, so ist $abgh = abcd$.

74.





<u>Von einem unregelmäßigen ebenen Viereck durch eine mit der Grundlinie parallele Transversallinie ein gegebenes Stück abzuschneiden.</u>

Vom Viereck abcd soll durch die Linie no $\parallel$ ab ein Stück abgeschnitten werden. Man ziehe cg $\parallel$ bd, und nehme gh so, daß $\frac{gh}{ga}$ sich verhält, wie das abzuschneidende Stück zum ganzen Viereck. Wenn nun no die Seite cd schneiden wird (I), so ziehe man hk $\parallel$ bd, kl $\parallel$ ab, bestimme zwischen cl, cb, die mittlere Proportionallinie cn, ziehe no $\parallel$ ab. Denn wenn man dr $\parallel$ ab zieht, so ist $\frac{\Delta cno}{\Delta crd} = \frac{cn^2}{cr^2} = \frac{cl.cb}{cr^2}$, $\frac{\Delta crd}{\Delta cbd} = \frac{cr}{cb} = \frac{cr^2}{cr.cb}$, also $\frac{\Delta cno}{\Delta cbd} = \frac{cl.cb}{cr.cb} = \frac{cl}{cr} = \frac{ck}{cd} = \frac{gh}{gd}$. Aber $\Delta cbd = gbd$, $abcd = \Delta gab$, also $\frac{\Delta cbd}{abcd} = \frac{\Delta gbd}{\Delta gab} = \frac{gd}{ga}$, also $\frac{\Delta cno}{abcd} = \frac{gh}{ga}$. Wenn no die Seite da schneiden wird (II) so ziehe man hk $\parallel$ ab, hl $\parallel$ bc, bestimme zwischen ab, bl, die mittlere Proportionallinie bp, ziehe po $\parallel$ bc, on $\parallel$ ab. Da $\frac{\Delta fno}{\Delta fba} = \frac{no^2}{ab^2} = \frac{bp^2}{ab^2} = \frac{bl}{ab} = \frac{hk}{ab} = \frac{fh}{fa} = \frac{\Delta fhb}{\Delta fba}$, also $\Delta fno = fhb$ also $cdno = cdhb = \Delta ghb$, also $\frac{cdno}{abcd} = \frac{ghb}{gab} = \frac{gh}{ga}$

ep. 1.-