

TARTU ÜLIKOOL  
Loodus- ja täppisteaduste valdkond  
Füüsika instituut

Bert Siimon

**Mittetriviaalsed kosmoloogilised lahendid  $f(Q)$  gravitatsioonis**

Bakalaureusetöö (6 EAP)

Füüsika, keemia ja materjaliteaduse õppekava, füüsika eriala

Juhendaja: María José Guzmán Monsalve, PhD

Tartu 2024

## **Mittetriviaalsed kosmoloogilised lahendid $f(Q)$ gravitatsioonis**

Üldrelatiivsusteooriaga sümmeetriliselt teleparalleelse ekvivalendi gravitatsiooniteoorias, täpsemalt  $f(Q)$  ehk modifitseeritud mittemeetrilises gravitatsiooniteoorias, on seni leitud kolm peamist seostuse kordajate hulka, mis lahendavad universumi kiireneva paisumise probleemi. Seniste lahendite leidmisel on eeldatud ühte sümmeetriatingimust, mida ei pea väljavõrrandite lahendamiseks tagama. Käesolevas töös loobutakse sellest sümmeetriatingimusest ning leitakse üks eelneva seostusega sarnane lahend, mis lahendab väljavõrrandid sfäärilistele koordinaatidele teisendatud McVittie' meetrika puhul. Töös kasutatav meetrika omab mittediagonaalseid elemente, mis tulenevad sfäärilistele koordinaatidele üle minemisest ning ainult universumi kiireneva paisumise probleemi uurimiseks musta augu massi kaotamisest.

**Märksõnad:** Sümmeetriliselt teleparalleelne gravitatsioon, kosmoloogia

**CERCS:** P190 - Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika

## **Nontrivial cosmological solutions in $f(Q)$ gravity**

Thus far three main sets of cosmological solutions have been found in symmetric teleparallel equivalent of general relativity and in particular in  $f(Q)$  or modified non-metric gravity, all of which have assumed a symmetry condition that needn't be satisfied to solve the field equations. In this work the symmetry condition is dropped, which allows to find a connection similar to one solution found earlier, which solves the field equations with a McVittie metric in spherical coordinates. This metric has nondiagonal elements and by vanishing the mass of the black hole we are working only on the problem of accelerating expansion of the universe.

**Keywords:** Symmetric teleparallel gravity, cosmology,

**CERCS:** P190 - Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics

# Sisukord

<b>Sissejuhatus</b>	<b>3</b>
<b>1 Ülevaade teoriast</b>	<b>5</b>
1.1 Üldrelatiivsusteooria . . . . .	5
1.2 Affiinse meetrilisuse teooria ning mittemeetriline gravitatsioon . . . . .	7
1.2.1 Üldrelatiivsusteooria sümmeetriliselt teleparalleelne ekvivalent . . . . .	7
1.2.2 Modifitseeritud mittemeetriline gravitatsiooniteooria . . . . .	10
1.3 Kosmoloogia . . . . .	10
1.3.1 Friedmanni-Lemaître'i-Robertsoni-Walkeri meetrika . . . . .	11
1.3.2 McVittie' meetrika . . . . .	12
1.4 Mittetriviaalsete lahendite otsimine . . . . .	13
<b>2 Seni leitud lahendid</b>	<b>15</b>
2.1 Kolm peamist lahendite komplekti . . . . .	15
2.2 Alternatiivse lähenemisega lahend . . . . .	17
<b>3 Töö käik</b>	<b>19</b>
3.1 Mittehomogeenne lahend . . . . .	19
3.2 Teine lahend . . . . .	21
<b>4 Arutelu ja kokkuvõte</b>	<b>24</b>
<b>Tänuavaldused</b>	<b>26</b>
<b>Kirjandus</b>	<b>27</b>
<b>Lihtlitsents</b>	<b>29</b>

## Sissejuhatus

1915. aastal Albert Einsteini poolt avaldatud üldrelatiivsusteooria eesmärgiks oli seletada gravitatsiooni aegruumi geometriaga. Täpsemalt kasutati esialgu selleks aegruumi kõverust. Kuna ka siiski aegruumi kõverus ei suutnud seletada kõiki universumis toimuvaid nähtuseid, siis üsna kiiresti leiti ka teised aegruumi geometriat kirjeldavad suurused, vääne ja mittemeetrilisus. Nendest gravitatsiooniteooria formuleerimiseks läks siiski rohkem aega, nimelt meetrilise teleparalleelse gravitatsiooniteooria avaldasid C. Pellegrini ja J. Plebansk aastal 1962 [1] ning sümmeetrilise teleparalleelse gravitatsiooniteooria J. M. Nester ja H.-J. Yo alles aastal 1998 [2]. Kuigi erinevaid teooriaid on põhjalikult uuritud, siis siiani pole leitud ühtegi konkreetset teooriat, mis lahendaks kõik olukorrad samaaegselt.

Kuigi meile teadaolev üldrelatiivsusteooria suudab aegruumi kõveruse abil seletada näiteks päikesesüsteemi planeetide liikumist ja sealhulgas algselt anomaalse Merkuuri orbiidi, siis näiteks üheks murekohaks on must auk ehk tugeva gravitatsiooni võimupiirkond, kus üldrelatiivsusteooria järgi peaks tekkima singulaarsus, mis aga rikub Einsteini poolt postuleeritud ekvivalentsprintsipi, mis väidab, et kiirendusega liikuv taustsüsteem on samaväärne gravitatsiooniväljaga. Seetõttu ei saa üldrelatiivsusteooria olla universaalselt kehtiv gravitatsiooniteooria. Seega modifitseeritud gravitatsiooniteooriate, kuhu hulka kuulub ka  $f(Q)$  ehk modifitseeritud mittemeetriline gravitatsioon, eesmärk on leida seoseid üldrelatiivsusteooria äärealadel, mis viiks sammu lähemale välja ühendteooriale. Teiseks ei suuda üldrelatiivsusteooria seletada universumi kiirenevat paisumist ilma eksootilise tumeda energiata. See on üks üldrelatiivsusteoorial põhineva Lambda-CDM (*Lambda cold dark matter*) mudeli probleemidest.[3]

Antud töös kasutatakse eelmainitud modifitseeritud mittemeetrilist gravitatsiooniteooriat (edaspidi  $f(Q)$  gravitatsioon), mis kuulub üldrelatiivsusteooria sümmeetriliselt teleparalleelsete ekvivalentide (ÜRTSTE) hulka. Seda teooriat kasutatakse, et otsida lahendeid universumi

kiireneva paisumise probleemile. Seni on leitud  $f(Q)$  gravitatsioonis vaid diagonaalse meetrikaga lahendeid universumi kiireneva paisumise probleemile [4]. Töö hüpotees on, et  $f(Q)$  gravitatsioonis leidub ka mittetriviaalseid kosmoloogilisi lahendeid, milles võivad avalduda uued gravitatsiooni geomeetrilised või füüsikalised omadused. Mittetriviaalsed lahendid selle töö kontekstis tähendavad, et lahendi aluseks olev meetrika sisaldab mittediagonaalseid nullist erinevaid elemente ning lahendi seostus ei rahulda seostusest Lie tuletise nulliks võtmist, ehk ühte teooriat kirjeldavat sümmeetriatingimust, mille rakendamine ei ole väljavõrrandite lahendamiseks nõutud [5]. Need lahendid võivad viia lähemale esiteks aegruumi gravitatsiooniteooriale, mis lahendab kõik olukorrad üheaegselt, ning teiseks välja ühendteooriale, mis suudaks seletada gravitatsiooni igas suurusjärgus alates elementaarosakestest universumi suuruseni.

Töös tehtud arvutuste tegemiseks ja lahendite leidmiseks kirjutatati arvutiprogrammi kood Wolfram programmeerimiskeeles, mis lihtsustab pikkade ja keerukate arvutuste teostust. Koodiks kasutatakse xAct paketti, mis sisaldab gravitatsiooniteooriaga tegelemiseks vajalikke funktsioone, ning xCoba laiendust, mis võimaldab sisestada konkreetsete tensorite, nagu meetrika ja seostus, elemente ning seekaudu kontrollida lahendeid.

# 1 Ülevaade teoriast

Käesolevas peatükis tutvustatakse teooriat, mida on vaja, et otsida mittetriviaalseid lahendeid universumi kiireneva paisumise probleemile  $f(Q)$  gravitatsioonis. Kõikides allolevates valemites on kasutatud Einsteini summeerimiskokkulepet.

## 1.1 Üldrelatiivsusteooria

Üldrelatiivsusteooria, ehk esimene väljapakutud aegruumil põhinev gravitatsiooniteooria, seletab gravitatsiooni aegruumi kõveruse kaudu. Esmalt tuleb luua suurused, millega on võimalik kirjeldada neljadimensionaalset (kolm ruumidimensiooni ning aeg ehk aegruum) ruumi. Kõikide gravitatsiooniteooriate puhul (sealhulgas  $f(Q)$ ) on tehtud eeldus, et teooria on invariantne koordinaatide muutusel. Esiteks defineerime meetrika elemendid

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1)$$

kus  $g_{\alpha\beta}$  on meetrika,  $dx$  on infinitesimaalne koordinaadi muutus ning  $ds$  on infinitesimaalne nihe. Meetrika komponentide teisenemisvalem:

$$g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_{\alpha'}} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_{\beta'}} g_{\alpha\beta}. \quad (2)$$

Seejärel defineerime seostuse, mis kirjeldab koordinaadistiku muutust ruumi eri punktides:

$$\Gamma^{\alpha'}_{\mu'\nu'} := \frac{\partial^2 \xi^\nu}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial \xi^{\nu'}}, \quad (3)$$

kus  $\Gamma^{\alpha'}_{\mu'\nu'}$  on seostus,  $x$  on koordinaat ning  $\xi$  on baasivektor. Seostuse kordajate teisenemisvalem on vastavalt:

$$\Gamma^{\alpha'}_{\mu'\nu'} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\nu}. \quad (4)$$

Üldrelatiivsuse puhul kehtib lisaks võrdus

$$\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\sigma\mu}(g_{\beta\mu,\alpha} + g_{\mu\alpha,\beta} + g_{\alpha\beta,\mu}), \quad (5)$$

kus on osatuletise jaoks kasutatud tähistust

$$g_{\alpha\beta,\mu} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = \partial_\mu g_{\alpha\beta}, \quad (6)$$

mida nimetatakse Levi-Civita seostuseks. Rääkides selles peatükis edasi konkreetsemalt aegruumi kõverusest, on vaja defineerida Riemanni kõverustensor:

$$R^\sigma_{\lambda\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\lambda\nu,\mu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\mu} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\Gamma^\sigma_{\rho\nu}, \quad (7)$$

kus  $R^\sigma_{\lambda\mu\nu}$  on Riemanni kõverustensor. Selleks, et leida üldrelatiivsusteoorias väljavõrrandid, millega lahendada gravitatsioonilisi probleeme on vaja defineerida Ricci tensor

$$R_{\alpha\beta} := R^\mu_{\alpha\beta\mu} \quad (8)$$

ning Ricci skalaar

$$\mathbf{R} := R^\alpha_{\alpha} \equiv g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}. \quad (9)$$

Väljavõrrandid leitakse Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaali

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{V_4} d^4x \sqrt{-g} \mathbf{R} + S_m \quad (10)$$

kaudu, kus  $\kappa^2 = 8\pi G_N$ ,  $G_N$  on Newtoni gravitatsioonikonstant ning ja  $d^4x \sqrt{-g}$  on invariantne ruumielement. Einsteini tensor on defineeritud kui

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \mathbf{R} \quad (11)$$

ning sellest tulenevalt väljavõrrandid on kujul [6]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \mathbf{R} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (12)$$

kus  $T_{\mu\nu}$  on mateeriatensor ehk energia-impulsi tensor, mis avaldub kujul [5]

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (13)$$

kus  $S_m$  on mateeria mõjufunktsionaal.

## 1.2 Affinse meetrilisuse teooria ning mittemeetriline gravitatsioon

Nagu eespool mainitud, siis üldrelatiivsusteooria eelduseks on, et seostus sõltub ainult meetrikast, vaata valem (5). Üldise affinse seostuse puhul, mis hõlmab nii kõverust, väänet ja mittemeetrilisust, kehtib laiendatud valem

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + K^\lambda_{\mu\nu} + L^\lambda_{\mu\nu}, \quad (14)$$

kus  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  on kõverust kirjeldav Levi-Civita seostus,  $K^\lambda_{\mu\nu}$  kirjeldab väänet ning  $L^\lambda_{\mu\nu}$  on disformatsiooni tensor, mis kirjeldab mittemeetrilisust. Eeltoodud valemi järgi on näha, et gravitatsioon võib sõltuda kõigist kolmest aegruumi geomeetrisest omadusest korraga või valikuliselt osadest neist. Lihtsaim on uurida siiski ühte omadust korraga, valides ülejäänud kaks selliselt, et need hajuvad väljavõrrandite leidmisel. Sellise summa kirjutamise võimalikkus näitab, et teooriad on vektori teleparalleelsel transpordil ekvivalentsed, sellest tulenevad ka teooriate nimetused. Käesolevas töös uuritakse aegruumi mittemeetrilisust, mistõttu võetakse väänet kirjeldav tensor eelnevas valemis võrdseks nulliga ning valitakse selline Levi-Civita seostus, mille puhul affinne seostus on tasane.

### 1.2.1 Üldrelatiivsusteooria sümmeetriliselt teleparalleelne ekvivalent

Mittemeetrilisust kirjeldab mittemeetrilisuse tensor, mis on kovariantne tuletis meetrikast, ehk avaldub kujul

$$Q_{\rho\mu\nu} \equiv \nabla_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^\beta_{\mu\rho} g_{\beta\nu} - \tilde{\Gamma}^\beta_{\nu\rho} g_{\mu\beta} \quad (15)$$

, kus tasane ja väändevaba seostus on kirjeldatav valemiga [7]

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\beta} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\rho}} \partial_{\mu} \partial_{\beta} \xi^{\rho}, \quad (16)$$

kus  $\xi^{\rho} = (f_1(t, x, y, z), f_2(t, x, y, z), f_3(t, x, y, z), f_4(t, x, y, z))$  on tasast seostust genereerivad funktsioonid, ning disformatsiooni tensor kujul [8]

$$L^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(Q^{\lambda}_{\mu\nu} - 2Q_{(\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu)}) = \frac{1}{2}g^{\lambda\beta}(-Q_{\mu\beta\nu} - Q_{\nu\beta\mu} + Q_{\beta\mu\nu}) = L^{\lambda}_{\nu\mu}. \quad (17)$$

Lisaks on tarvis sisse tuua superpotentsiaal ehk mittemeetrilise tensori kaaskompleks  $P^{\alpha\beta}_{\mu}$  [4]:

$$P^{\alpha\beta}_{\mu} = \frac{1}{4}(-Q^{\alpha\beta}_{\mu} + 2g^{\beta\nu}Q_{(\nu}{}^{\alpha}{}_{\mu)}) + \delta^{\beta}_{\mu}(Q^{\alpha} - \tilde{Q}^{\alpha}) - \delta^{\alpha}_{(\rho}Q_{\mu)}g^{\beta\rho}, \quad (18)$$

kus  $\delta^{\alpha}_{\beta}$  on Kroeneckeri delta ning mittemeetrilise tensori jäljed on vastavalt [7]

$$\tilde{Q}^{\alpha} = g^{\alpha\beta}\tilde{Q}_{\beta} = g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}Q_{\mu\beta\nu}, \quad (19)$$

$$Q^{\alpha} = g^{\alpha\beta}Q_{\beta} = g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}Q_{\beta\mu\nu}. \quad (20)$$

Seega,

$$P^{\alpha\beta}_{\mu} = \frac{1}{4}(-Q^{\alpha\beta}_{\mu} + Q^{\beta\alpha}_{\mu} + Q_{\mu}{}^{\alpha\beta} + \delta^{\beta}_{\mu}g^{\alpha\rho}g^{\nu\lambda}(Q_{\rho\nu\lambda} - Q_{\nu\rho\lambda}) - \frac{1}{2}(g^{\alpha\beta}g^{\nu\lambda}Q_{\mu\nu\lambda} + \delta^{\alpha}_{\mu}g^{\beta\sigma}g^{\nu\lambda}Q_{\sigma\nu\lambda})). \quad (21)$$

Nüüd on võimalik avaldada Ricci skalaariga ekvivalentne mittemeetrilise skalaar  $Q$  [7]:

$$Q = -Q_{\alpha\mu}{}^{\nu}P^{\alpha\mu}_{\nu}. \quad (22)$$

Kuna valemities esineb mittemeetrilise tensor erinevates indeksite asetus, tuleb kasutada

vastavaid valemeid:

$$\begin{aligned}
Q^\alpha{}_{\mu\nu} &= g^{\alpha\beta} Q_{\beta\mu\nu} = \nabla^\alpha g_{\mu\nu}, \\
Q_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\nu} &= g^{\mu\rho} Q_{\alpha\rho\nu} = g^{\mu\rho} \nabla_\alpha g_{\rho\nu} = -g_{\rho\nu} \nabla_\alpha g^{\mu\rho}, \\
Q_{\alpha\mu}{}^{\nu} &= g^{\nu\rho} Q_{\alpha\mu\rho} = g^{\nu\rho} \nabla_\alpha g_{\mu\rho} = -g_{\mu\rho} \nabla_\alpha g^{\nu\rho}, \\
Q^{\alpha\mu}{}_{\nu} &= g^{\alpha\beta} g^{\mu\rho} \nabla_\beta g_{\rho\nu} = g^{\mu\rho} \nabla^\alpha g_{\rho\nu} = -g_{\rho\nu} \nabla^\alpha g^{\mu\rho}, \\
Q^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\nu} &= g^{\alpha\beta} g^{\nu\rho} \nabla_\beta g_{\mu\rho} = g^{\nu\rho} \nabla^\alpha g_{\mu\rho} = -g_{\mu\rho} \nabla^\alpha g^{\nu\rho}, \\
Q_{\alpha}{}^{\mu\nu} &= g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \nabla_\alpha g_{\rho\sigma} = -g^{\mu\rho} g_{\rho\sigma} \nabla_\alpha g^{\nu\sigma} = -\nabla_\alpha g^{\mu\nu}, \\
Q^{\alpha\mu\nu} &= -\nabla^\alpha g^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Mittemeetrilise gravitatsiooni mõjufunktsionaal on ekvivalentne Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaaliga valemis (10), kus on tarvis asendada kõveruse skalaar  $R$  mittemeetrilisuse skalaariga  $Q$  [4]:

$$S_{\ddot{U}RTSTE} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{V_4} d^4x \sqrt{-g} Q + S_m. \tag{24}$$

Eelnev valem on võimalik ümber kirjutada Ricci skalaarile valemi [9]

$$R = Q + \overset{\circ}{\nabla}_\mu (\hat{Q}^\mu - Q^\mu) \tag{25}$$

abil, kus  $\overset{\circ}{\nabla}_\mu$  on Levi-Civita kovariantne tuletis ning kus summa teine liige on äärelige ning ei mõjuta väljavõrrandeid. Sellele vastavad meetrilised väljavõrrandid on [5]:

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \nabla_\alpha (\sqrt{-g} P^\alpha{}_{\mu\nu}) + q_{\mu\nu} - \frac{1}{2} Q g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{26}$$

kus sümmeetriline tensor  $q_{\mu\nu}$  on [5]

$$q_{\mu\nu} := \frac{\partial Q}{\partial g^{\mu\nu}} = P_{(\mu|\alpha\beta} Q_{\nu)}{}^{\alpha\beta} - 2P^{\alpha\beta}{}_{(\nu} Q_{\alpha\beta|\mu)}. \tag{27}$$

Seostuse väljavõrrandid avalduvad lihtsustatud kujul [5]

$$\nabla_\mu \nabla_\nu (\sqrt{-g} P^{\mu\nu}{}_\alpha) = 0. \tag{28}$$

Kolmes eelnevas valemis on tehtud muudatus allikast  $\sqrt{|g|} = \sqrt{-g}$  eeldusel, et  $Det(g)$  on negatiivne.

### 1.2.2 Modifitseeritud mittemeetriline gravitatsiooniteooria

Eelmises alapeatükis kirjeldatud teooriat on võimalik laiendada, kui mõjufunktsionaalis (24) asendada mittemeetrilisuse skalaar vabalt valitud funktsiooniga  $Q \rightarrow f(Q)$ , mis on edaspidi tähistatud kujul  $f$ . Seega uus mõjufunktsionaal on [10]

$$S_{f(Q)} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{V_4} d^4x \sqrt{-g} f + S_m, \quad (29)$$

kusjuures kui  $f_Q = \frac{\partial f}{\partial Q} = 1$  või  $f_{QQ} = \frac{\partial^2 f}{\partial Q^2} = 0$ , on tegu jällegi üldrelatiivsusteooria sümmeetrilise teleparalleelse ekvivalendi gravitatsiooni mõjufunktsionaaliga valemis (24). Sellele mõjufunktsionaalile vastavad lihtsustatud meetrilised väljavõrrandid, mis saadakse mõjufunktsionaali varieerimisel meetrika järgi, on [7]

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \nabla_\alpha (\sqrt{-g} f_Q P^{\alpha\mu}{}_\nu) + \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu f + f_Q P^{\mu\alpha\beta} Q_{\nu\alpha\beta} = \kappa^2 T^\mu_\nu. \quad (30)$$

Need väljavõrrandid võib ka kirjutada sõltuvana Einsteini tensorist järgmiselt:

$$f_Q G_{\mu\nu} + 2f_{QQ} P^\lambda{}_{\mu\nu} \partial_\lambda Q + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (Q f_Q - f) = \kappa^2 \mathcal{T}_{\mu\nu}. \quad (31)$$

Seostuse väljavõrrandid on leitud vastavalt mõjufunktsionaali varieerimisel seostuse järgi [7]:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu (\sqrt{-g} f_Q P^{\mu\nu}{}_\alpha) = 0. \quad (32)$$

Siinkohal on võimalik tõestada, et kui meetrilised väljavõrrandid lahenevad, siis automaatselt lahenevad ka seostuse väljavõrrandid.

## 1.3 Kosmoloogia

Üks üldrelatiivsusteooria probleeme on Lambda-CDM mudel, mille üks osa on universumi kiirenev paisumine. Seda on püütud seletada tumeda energiaga, ehk millegagi, mida ei ole võimalik kättesaadava tehnoloogiaga näha ega tuvastada. Kehtiva teooria kohaselt peaks tume energia omama negatiivset rõhku, mille võimalikkust pole seni täheldatud ühegi vaatluse või

eksperimentidiga. Seevastu kui oleks võimalik ka universumi kiirenevat paisumist seletada gravitatsiooniga, oleksime jälle sammu lähemal kõikehõlmavale teooriale. Universumi kiireneva paisumise probleemi eeldus on, et koordinaatide muutusel ehk igas ruumipunktis peab paisumine olema sama ning lahend kehtiv.

### 1.3.1 Friedmanni-Lemaître'i-Robertsoni-Walkeri meetrika

Universumi kiireneva paisumise geometriat kirjeldatakse tavaliselt Friedmanni-Lemaître'i-Robertsoni-Walkeri meetrikaga (edaspidi FLRW) [9]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (33)$$

kus  $a(t)$  on paisumise tegur. Universumi kiireneva paisumise probleemi võib kirjeldada sellisel kujul, kui arvestada, et universum on suures mastaabis homogeenne ja isotroopne. Neid kahte tingimust tagavad antud meetrikale vastavad Killingi vektorid, mis on tuletatud meetrika Lie tuletisest: [11]

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^\sigma g_{\sigma\nu} + \partial_\nu \xi^\sigma g_{\mu\sigma}, \quad (34)$$

kus  $\xi^\sigma$  on Killingi vektorid ja  $\mathcal{L}_\xi$  tähistab Lie tuletist mööda Killingi vektoreid, võttes selle tuletise võrdseks nulliga:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0. \quad (35)$$

FLRW meetrikale vastavad Killingi vektorid on [9]:

$$\xi_{T_x}^\mu = \left( 0, \chi \sin(\theta) \cos(\phi), \frac{\chi}{r} \cos(\theta) \cos(\phi), -\frac{\chi}{r} \frac{\sin(\phi)}{\sin(\theta)} \right), \quad (36a)$$

$$\xi_{T_y}^\mu = \left( 0, \chi \sin(\theta) \sin(\phi), \frac{\chi}{r} \cos(\theta) \sin(\phi), -\frac{\chi}{r} \frac{\cos(\phi)}{\sin(\theta)} \right), \quad (36b)$$

$$\xi_{T_z}^\mu = \left( 0, \chi \cos(\theta), -\frac{\chi}{r} \sin(\theta), 0 \right), \quad (36c)$$

$$\xi_{R_x}^\mu = \left( 0, 0, \sin(\phi), \frac{\cos(\phi)}{\tan(\theta)} \right), \quad (36d)$$

$$\xi_{R_y}^\mu = \left( 0, 0, -\cos(\phi), \frac{\sin(\phi)}{\tan(\theta)} \right), \quad (36e)$$

$$\xi_{R_z}^\mu = (0, 0, 0, -1), \quad (36f)$$

$$(36g)$$

kus  $\chi = \sqrt{1 - kr^2}$  ning  $k$  on kõverust kirjeldav tegur, ehk tasase aegruumi puhul  $k = 0$  ning  $\chi = 1$ .

### 1.3.2 McVittie' meetrika

Eelmises peatükis kirjeldatud FLRW meetrika on algselt tuletatud Cartesiuse koordinaatsüsteemis McVittie' meetrikast [12]

$$ds^2 = \left( \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right)^2 dt^2 - (1 - \mu)^4 a^2(t) d\mathbf{x}^2, \quad (37)$$

mis kirjeldab korruga nii musta auku kui universumi kiireneva paisumise probleemi, kus  $\mu = m(2a(t)|\mathbf{x}|)^{-1}$ ,  $d\mathbf{x}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  ning  $m$  tähistab musta augu massi. Kaotades antud meetrikast musta augu ning viies selle üle sfäärilistele koordinaatidele saadaksegi eeltoodud FLRW meetrika, valem (33).

Viies McVittie' meetrikaga läbi koordinaatteisendus  $R = (1 + \mu)^2 a(t) \mathbf{x}$ , ehk viies üle sfäärilistele koordinaatidele, kus  $R$  sisaldab sõltuvust ajafunktsioonist  $a(t)$ , saame mittediagonaalse musta augu ja kosmoloogia geometriat iseloomustava meetrika [12]

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2m}{R} - H(t)^2 R^2 \right) dt^2 + \frac{2H(t)R}{\sqrt{1 - 2m/R}} dR dt - \frac{dR^2}{1 - 2m/R} - R^2 d\Omega^2, \quad (38)$$

kus  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  ning  $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$  on Hubble' funktsioon. Universumi kiireneva paisumise probleemi uurimiseks kaotame taaskord musta augu, seega alles jääb:

$$ds^2 = (1 - H(t)^2 R^2) dt^2 + 2H(t)RdRdt - dR^2 - R^2 d\Omega^2. \quad (39)$$

Viies Killingi vektoriga läbi sama koordinaatteisenduse saame sellele meetrikale vastavad Killingi vektorid:

$$\xi_{T_x}^\mu = \left( 0, a(t) \sin\theta \cos\phi, \frac{a(t) \cos\theta \cos\phi}{R}, \frac{a(t) \sin\phi}{R \sin\theta} \right), \quad (40a)$$

$$\xi_{T_y}^\mu = \left( 0, a(t) \sin\theta \sin\phi, \frac{a(t) \cos\theta \sin\phi}{R}, \frac{a(t) \cos\phi}{R \sin\theta} \right), \quad (40b)$$

$$\xi_{T_z}^\mu = \left( 0, a(t) \cos\theta, -\frac{a(t) \sin\theta}{R}, 0 \right), \quad (40c)$$

$$\xi_{R_x}^\mu = \left( 0, 0, \sin\phi, \frac{\cos\phi}{\tan\theta} \right), \quad (40d)$$

$$\xi_{R_y}^\mu = \left( 0, 0, \sin\phi, \frac{\sin\phi}{\tan\theta} \right), \quad (40e)$$

$$\xi_{R_z}^\mu = (0, 0, 0, -1). \quad (40f)$$

Lie tuletis ka McVittie' meetrikast peab olema null sõltumata koordinaatsüsteemist, kuna see on otseselt seotud FLRW meetrikaga, ning arvutus kinnitab seda.

## 1.4 Mittetriviaalsete lahendite otsimine

Lisaks meetrika Lie tuletise nulliks võtmisele on sageli rakendatud lahendite otsimisel ka seostusele Lie tuletist [11]

$$\mathcal{L}_\xi \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho} = \xi^\sigma \partial_\sigma \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho} - \partial_\sigma \xi^\mu \tilde{\Gamma}^\sigma{}_{\nu\rho} + \partial_\nu \xi^\sigma \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\sigma\rho} + \partial_\rho \xi^\sigma \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\nu\sigma} + \partial_\nu \partial_\rho \xi^\mu \quad (41)$$

ning võetud see võrdseks nulliga

$$\mathcal{L}_\xi \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho} = 0. \quad (42)$$

See tingimus on teooriat kirjeldav sümmeetriatingimus, mis ei ole nõutud väljavõrrandite (valemid (31) ja (32)) lahendamisel. Käesoleva töö kontekstis nimetatakse mittetriviaalseks lahendit, mille aluseks olev meetrika sisaldab mittediagonaalseid nullist erinevaid elemente ning mille seostus ei rahulda eeltoodud tingimust, ehk Lie tuletist sellest mööda Killingi vektoreid ei ole null. [5]

## 2 Seni leitud lahendid

Selles peatükis on välja toodud avaldamise ajale eelnevalt leitud kosmoloogilised lahendid  $f(Q)$  gravitatsioonis.

### 2.1 Kolm peamist lahendite komplekti

See alapeatükk põhineb täielikult allikal [9], millest osad elemendid on algselt allikast [13]. Kolme lahendite komplekti leidmisel on kasutatud eelmises peatükis mainitud eeldust, et Lie tuletis seostusest mööda Killingi vektoreid on samuti null. Nende lahendite leidmisel on kasutatud sfäärilistes koordinaatides FLRW meetrikat valemi (33) kujul. Lahendites on kasutusel funktsioon  $\gamma = \gamma(t)$ , mis on määratlemata ajafunktsioon ja  $\bar{\gamma} = \frac{\gamma(t)}{a(t)^2}$  ehk ümber skaleeritud ajafunktsioon. Need lahendite komplektid on:

#### Esimene lahendite komplekt:

Seostuse kordajad:

$$\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{cccc} \gamma(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r \sin^2 \theta \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \cot \theta \\ 0 & \frac{1}{r} & \cot \theta & 0 \end{array} \right] \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Mittemeetrilisuse skalaar:

$$Q = -6H^2. \quad (44)$$

Väljavõrrandid:

$$(6H^2 - Q)f_Q + f = 2\kappa^2\rho, \quad (45a)$$

$$-4H\dot{Q}f_{QQ} + (Q - 4\dot{H} - 6H^2)f_Q - f = 2\kappa^2 p, \quad (45b)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (45c)$$

**Teine lahendite komplekt:**

Seostuse kordajad:

$$\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{cccc} \gamma(t) + \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} 0 & \gamma(t) & 0 & 0 \\ \gamma(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r \sin^2 \theta \end{array} \right] \\ & \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \gamma(t) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \gamma(t) & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \gamma(t) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \cot \theta \\ \gamma(t) & \frac{1}{r} & \cot \theta & 0 \end{array} \right] \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Mittemeetrilisuse skalaar:

$$Q = -6H^2 + 9H\gamma + 3\dot{\gamma}. \quad (47)$$

Väljavõrrandid:

$$3\dot{Q}\gamma f_{QQ} + (6H^2 - Q) f_Q + f = 2\kappa^2 \rho, \quad (48a)$$

$$(3\dot{Q}\gamma - 4H\dot{Q})f_{QQ} + (Q - 4\dot{H} - 6H^2)f_Q - f = 2\kappa^2 w \rho, \quad (48b)$$

$$3\gamma \left( \dot{Q}^2 f_{QQQ} + (\ddot{Q} + 3H\dot{Q}) f_{QQ} \right) = 0, \quad (48c)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (48d)$$

**Kolmas lahendite komplekt:**

Seostuse kordajad:

$$\tilde{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\gamma(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\gamma(t)\sin^2\theta \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r\sin^2\theta \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \cot\theta \\ 0 & \frac{1}{r} & \cot\theta & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Mittemeetrilisuse skalaar:

$$\mathcal{Q} = -6H^2 + 9H\bar{\gamma} + 3\dot{\bar{\gamma}}. \quad (50)$$

Väljavõrrandid:

$$-3\bar{\gamma}\dot{\mathcal{Q}}f_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}} + (6H^2 - \mathcal{Q})f_{\mathcal{Q}} + f = 2\kappa^2\rho, \quad (51a)$$

$$(\dot{\mathcal{Q}}\bar{\gamma} - 4H\dot{\mathcal{Q}})f_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}} + (\mathcal{Q} - 4\dot{H} - 6H^2)f_{\mathcal{Q}} - f = 2\kappa^2 p, \quad (51b)$$

$$-3\bar{\gamma}\dot{\mathcal{Q}}^2 f_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}\mathcal{Q}} - 3(\bar{\gamma}\ddot{\mathcal{Q}} + 5H\bar{\gamma}\dot{\mathcal{Q}} + 2\dot{\mathcal{Q}}\dot{\bar{\gamma}})f_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}} = 0, \quad (51c)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (51d)$$

## 2.2 Alternatiivse lähenemisega lahend

Käesoleva töö kirjutamise jooksul, 29. aprill 2024 avaldati artikkel [14], kus esitleti lahendust, mille tulemusel kasutati Cartesiuse koordinaatsüsteemis FLRW meetrikat kujul

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \sum_{i=1,2,3} (dx^i)^2. \quad (52)$$

Seostuse leidmiseks kasutati valemit (16), kus genereerivateks funktsioonideks valiti  $\xi^0 = b(t)$ ,  $\xi^i = x^i$  ning tekkiv seostus oli kujul

$$\tilde{\Gamma}^0{}_{00} = \gamma(t) \equiv \frac{\ddot{b}(t)}{b(t)}, \text{ ülejäänud} = 0. \quad (53)$$

Mittemeetrilisuse skalaar:

$$Q = -6H^2 \quad (54)$$

Väljavõrrandid:

$$\frac{f}{2} + Qf_Q = 2\kappa^2\rho, \quad (55a)$$

$$\frac{f}{2} - Qf_Q + 2\dot{H}f_Q + 4Q\dot{H}f_{QQ} = 2\kappa^2p, \quad (55b)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (55c)$$

## 3 Töö käik

### 3.1 Mittehomogeenne lahend

Lahendit hakati otsima alustades mittediagonaalsest meetrikast, nagu on näidatud valemis (39).

Sellele vastav energia-impulsi tensor on:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} H^2 p R^2 + \rho & -H p R & 0 & 0 \\ -H p R & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Seostust hakati otsima eesmärgiga, et Lie tuletis sellest mööda Killingi vektoreid ei oleks null. Enne väljavõrrandite arvutamist kontrolliti koodiga, et meetrikale ja seostusele vastava Riemanni tensori kõik elemendid oleksid nullid. Esiialgu katsetati olemasolevate lahendite seostustega, lisades ja eemaldades nendest elemente, aga väljavõrrandid viisid järeldustele, et juurde lisatud funktsioonid peavad olema võrdsed nulliga ning ära võetud funktsioonid ei võimaldanud lahendada väljavõrrandeid. Seejärel prooviti tuletada seostuse kordajad valemist (16) genereerivatest funktsioonidest, võtteks nendeks algselt abstraktsed funktsioonid, millel igal oli üks argument:

$$\xi^\mu = (f_1(t), f_2(R), f_3(\theta), f_4(\phi)) \quad (57)$$

ning nendest moodustus seostus elementidega

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^0_{00} = \gamma(t) &\equiv \frac{\ddot{f}_1(t)}{\dot{f}_1(t)}, \quad \tilde{\Gamma}^1_{11} = \alpha(R) \equiv \frac{\ddot{f}_2(R)}{\dot{f}_2(R)}, \\ \tilde{\Gamma}^2_{22} = \beta(\theta) &\equiv \frac{\ddot{f}_3(\theta)}{\dot{f}_3(\theta)}, \quad \tilde{\Gamma}^3_{33} = \delta(\phi) \equiv \frac{\ddot{f}_4(\phi)}{\dot{f}_4(\phi)}, \quad \text{ülejäänud} = 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Proovides lahendada väljavõrrandeid on näha, et sellise seostuse puhul peab  $\delta(\phi) = 0$ ,  $\beta(\theta) = \cot \theta$ . Selliste abstraktsete funktsioonide puhul tuli skalaari  $Q$  kujuks

$$Q = 3\gamma H - 6H^2 + \frac{2}{R^2} - 2\dot{H} + \alpha R \dot{H}. \quad (59)$$

Kuna universum on suures mastaabis homogeenne, nagu kinnitavad vaatlused, peab ka mittemeetrilisuse skalaar  $Q$  olema ainult aja, mitte radiaalse suuruse funktsioon (et vältida olukorda, kus igas punktis käitub teooria erinevalt). Eeltoodud skalaar aga sisaldab mainitud radiaalset komponenti, mistõttu selline lahend on mittehomogeenne, ehk selliste konkreetsete genereerivate funktsioonidega lähenemine ei toimi adekvaatse lahendi leidmiseks.

Leiame siiski selle mittehomogeense lahendi lineaarselt sõltumatud väljavõrrandid ning materia pidevuse võrrandi:

$$f + 6f_Q H^2 - f_Q Q = 2\kappa\rho, \quad (60a)$$

$$-f - 6f_Q H^2 + f_Q Q - 4f_Q \dot{H} = 2\kappa p, \quad (60b)$$

$$\dot{\rho} + 3H(p + \rho) = 0. \quad (60c)$$

Nagu näha võrdlusest kõigi eelnevate lahendite väljavõrranditega siis need ei kattu ning veel enam ei sisalda teist tuletist modifitseerivast funktsioonist  $f$ . Töös leitud seostus võib paista sarnane seostusega (53), aga seostuse (58) elementi 3, 3, 3 ei ole võimalik nulliks sundida. Kahte esimest neist on võimalik lihtsustada, saades uued kolm väljavõrrandit:

$$f + 6f_Q H^2 - f_Q Q = 2\kappa\rho, \quad (61a)$$

$$-4f_Q \dot{H} = 2\kappa(p + \rho), \quad (61b)$$

$$\dot{\rho} + 3H(p + \rho) = 0, \quad (61c)$$

millest on võimalik avaldada  $f_Q$  kujul

$$f_Q = -\frac{\kappa(p + \rho)}{2\dot{H}} \quad (62)$$

ning asendada valemisse (60a), andes kahe võrrandiga süsteemi:

$$f - (6H^2 - Q) \frac{\kappa(p + \rho)}{2\dot{H}} = 2\kappa p, \quad (63a)$$

$$\dot{\rho} + 3H(p + \rho) = 0, \quad (63b)$$

millest saab omakorda avaldada  $f$  kujul:

$$f = \kappa \left( 2p + (6H^2 - Q) \frac{p + \rho}{2\dot{H}} \right). \quad (64)$$

Nüüd on võimalik avaldisse tagasi asendada mittemeetrilisuse skalaar  $Q$ :

$$f = \kappa \left( 2p + \left( 12H^2 - 3\gamma H - \frac{2}{R^2} + 2\dot{H} - \alpha R\dot{H} \right) \frac{p + \rho}{2\dot{H}} \right). \quad (65)$$

Sellest valemist on näha, et funktsioon  $f$  sõltub Hubble funktsioonist, selle ajalisest tuletisest, vabalt valitud gammafunktsioonist, radiaalkoordinaadist  $R$  ning selle abstraktses funktsioonist  $\alpha(R)$ .

### 3.2 Teine lahend

Kuna kirja pandud koodi peab esmalt katsetama teadaolevate lahenditega, siis kerkis esile üks teistmoodi lahend. Katsetusel valiti meetrikaks McVittie' meetrika kujul (39) ning esimene seostuse kordajate komplekt kujul (43), millele rakendati koordinaatteisendust  $r = \frac{R}{\alpha(t)}$  (siin  $\alpha(t)$  ei ole sama funktsioon mis  $a(t)$ , mis esineb meetrikas peidetud kujul  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ ) valesi, asendades selle otse seostusesse, mitte läbides seostuse koordinaatteisendust kujul (4). Seega seostus võeti kujul

$$\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{cccc} \gamma(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R/\alpha(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R \sin^2 \theta / \alpha(t) \end{array} \right] \\ & \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha(t)}{R} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha(t)}{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha(t)}{R} \\ 0 & 0 & 0 & \cot \theta \\ 0 & \frac{\alpha(t)}{R} & \cot \theta & 0 \end{array} \right] \end{bmatrix}. \quad (66)$$

Seostusest võeti Lie tuletis valemi (41) järgi ning leiti, et see on null vaid Killingi vektorite (40d-f) puhul, seega ka see meetrika ja seostuse kombinatsioon on selle töö kontekstis mittetriviaalne.

Selle meetrika ja seostuse kombinatsiooni Riemanni tensori arvutusest (7) oli näha, et tasase seostuse saamiseks tuleb seostuses võtta  $\alpha(t) = 1$ . Sellisel juhul mittemeetrilisuse skalaariks sai

$$\mathbf{Q} = 3H\gamma. \quad (67)$$

Et saada sellest teoriast üldrelatiivsusteooria ekvivalent, peab skalaar sisaldama liiget  $-6H^2$ , ehk vaba gammafunktsioon  $\gamma(t)$  on siinkohal võimalik fikseerida:

$$\gamma(t) = -2H(t), \quad (68)$$

seega mittemeetrilisuse skalaariks sai tõepoolest

$$\mathbf{Q} = -6H^2 \quad (69)$$

ning väljavõrrandid

$$6f_Q H^2 - f_Q \mathbf{Q} = 2\kappa\rho, \quad (70a)$$

$$-f - 6f_Q H^2 + f_Q \mathbf{Q} - 4f_Q \dot{H} = 2\kappa p, \quad (70b)$$

$$\dot{\rho} + 3H(p + \rho) = 0, \quad (70c)$$

mida saab lihtsustada kujule

$$-f - 4f_Q \dot{H} = 2\kappa(p + \rho), \quad (71a)$$

$$6f_Q H^2 - f_Q \mathbf{Q} = 2\kappa\rho, \quad (71b)$$

$$\dot{\rho} + 3H(p + \rho) = 0. \quad (71c)$$

Jällegi on näha, et leitud väljavõrrandid ei kattu ühegi eelnevalt leitud lahendi väljavõrranditega ning mitte ka eelmises alapeatükis toodud mittehomogeense lahendi väljavõrranditega. Uurime

võrrandisüsteemi edasi, avaldades võrrandist (71b)  $f_Q$

$$f_Q = \frac{2\kappa\rho}{6H^2 - Q} \quad (72)$$

ning asendades selle võrrandisse (71a):

$$-f - \frac{8\kappa\rho}{6H^2 - Q}\dot{H} = 2\kappa(p + \rho), \quad (73a)$$

$$\dot{\rho} + 3H(p + \rho) = 0. \quad (73b)$$

Viimaks asendame võrrandisüsteemi mittemeetrilisuse skalaari (69):

$$-f - \frac{2\kappa\rho}{3H^2}\dot{H} = 2\kappa(p + \rho), \quad (74a)$$

$$\dot{\rho} + 3H(p + \rho) = 0, \quad (74b)$$

ning leiame modifitseeriva funktsiooni  $f$  kuju:

$$f = -2\kappa \left( p + \rho \left( 1 + \frac{\dot{H}}{3H^2} \right) \right). \quad (75)$$

Kuigi lahend on leitud kogemata, tehes valesid eelduseid, siis seostus antud meetrika puhul on tasane ning väljavõrrandid lahenevad. Veelgi enam, see on uus lahend, kuna ei ole otseselt tuletatav ühestki teisest eelnevalt leitud lahendist, ning lisaks . Sellel põhjusel on kasulik antud lahendit ka edasises teadustöös uurida.

## 4 Arutelu ja kokkuvõte

Käesolevas töös loobuti seostusest Lie tuletise nulliks võtmisest mööda Killingi vektoreid, mille kohta töö alustamise hetkel polnud veel ühtegi artiklit avaldatud. Kuigi veidi enne käesoleva töö lõpetamist avaldati artikkel, kus kasutati ühe lahendiga väga sarnast lähenemist lahendite otsimisele, siis mõlema töö tulemused olid siiski erinevad, mis näitab, et suure tõenäosusega leidub  $f(Q)$  gravitatsioonis veel kosmoloogiliste lahendite komplekte. Esimese, mittehomogeense lahendi aluseks võeti mittediagonaalseid elemente omav McVittie' meetrika. Seostus moodustati tasast seostust genereerivatest funktsioonidest  $\xi^\mu$  ning saadi kolme diagonaalset elementi omav seostus, mida ei ole võimalik tuletada ühestki eelnevast lahendist. Lisaks leiti selline mittemeetrilisuse skalaar ning väljavõrrandid, mis ei kattunud ühegi eelneva lahendiga, kuid sisaldasid radiaalset komponenti, mis rikub universumi homogeensust. Kuigi antud lahend osutus valeks, siis tasub edaspidi uurida võimalusi selle lahendi kehtivaks muutmiseks.

Teises, tõseks osutunud lahendis kasutati samuti mittediagonaalsete elementidega McVittie meetrikat sfäärilistes koordinaatides. Seostus tuletati eelnevalt leitud esimesest seostuse kordajate hulgast ning Lie tuletis sellest mööda vastava koordinaatteisenduse läbinud Killingi vektoreid oli samuti null, seega tegemist oli mittetriviaalse lahendiga. Leiti sellele meetrika ja seostuse komplektile vastav mittemeetrilisuse skalaar ja väljavõrrandid, mis ei kattunud ühegi eelneva lahendiga ega ka eeltoodud mittehomogeense lahendiga, seega töö hüpotees, et leidub mittetriviaalseid kosmoloogilisi lahendeid, osutus tõseks. Ka seda lahendit tasub kindlasti tulevases teadustöös edasi uurida, ehk mis on selle füüsikaline tähendus ning millised on selle implementatsioonid meile teadaolevale gravitatsiooniteooriale.

Töös tehtud arvutustel oli tohutult suureks abiks pikki ja keerulisi arvutusi arvutav programm, mis põhineb Wolfram programmeerimiskeelel, ning xAct pakett, mis sisaldas pea kõike vajalikku aegruumi koordinaadistiku konstrueerimiseks ning nii abstraktseteks kui

konkreetseteks tensorarvutusteks. Selle programmeerimiskeele tundmaõppimine oli ka üks tähtsamaid eesmärke selle töö käigus.

Kokkuvõtteks, modifitseeritud mittemeetriline gravitatsioon on küll üks paljudest affiinse meetrilisuse teooria osadest, aga kuna võrreldes aegruumi kõveruse ja väändega on tegu suhteliselt uue ja vähem uuritud teooriaga, siis avab see palju võimalusi saada samm lähemale välja ühendteooriale. Käesolev töö on ehtne näide sellest, et uurida on veel küllaga ja lahendite leidmisel oleks tarvis arvesse võtta kõik võimalikud valemite tõlgendused, mitte ainult lihtsaimad. Käesolevas töös leitud tulemused on plaanis avaldada ka artiklina, kus võib lisaks olemasolevale lahendile leida kirjutamise käigus veel mõne huvipakkuva lahendi või seose.

## **Tänuavaldused**

Soovin avaldada suurt tänu oma juhendajale María José Guzmán Monsalvele, kes oli kogu töö tegemise perioodil väga motiveeriv ja abivalmis. Lisaks soovin tänada Eesti Teadusagentuuri, kes on finantseerinud uurimistööd läbi projekti PSG910 "Numbrilise modifitseeritud gravitatsiooni teoreetilised raamistikud."

Bert Siimon

## Kirjandus

- [1] C. Pellegrini and J. and Plebanski. “Tetrad fields and gravitational fields”. *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr. 2, No. 2* (1962).
- [2] J. M. Nester and H.-J. Yo. “Symmetric teleparallel general relativity”. *arXiv:gr-qc/9809049v1* (1998).
- [3] S. Shankaranarayanan and J. P. Johnson. “Modified theories of Gravity: Why, How and What?” *arXiv:2204.06533v1 [gr-qc]* (2022).
- [4] S. Bahamonde et al. “Black hole solutions in scalar-tensor symmetric teleparallel gravity”. *arXiv:2206.02725v2 [gr-qc]* (2022).
- [5] L. Heisenberg. “Review on  $f(Q)$  gravity”. *arXiv:2309.15958v1 [gr-qc]* (2023).
- [6] M. Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford, New York: Oxford University Press, 2008.
- [7] J. B. Jiménez et al. “Cosmology in  $f(Q)$  geometry”. *arXiv:1906.10027v2 [gr-qc]* (2021).
- [8] S. Bahamonde and L. Järv. “Coincident gauge for static spherical field configurations in symmetric teleparallel gravity”. *arXiv:2208.01872v2 [gr-qc]* (2022).
- [9] L. Järv and L. Pati. “Stability of symmetric teleparallel scalar-tensor cosmologies with alternative connections”. *arXiv:2309.04262v1 [gr-qc]* (2023).
- [10] J. B. Jiménez, L. Heisenberg, and T. Koivisto. “Coincident General Relativity”. *arXiv:1710.03116v2 [gr-qc]* (2018).
- [11] M. Hohmann et al. “Modified teleparallel theories of gravity in symmetric spacetimes”. *Physical Review D* 100, 084002 (2019).
- [12] C. Bejarano, R. Ferraro, and M. J. Guzmán. “McVittie solution in  $f(T)$  gravity”. *arXiv:1707.06637v3 [gr-qc]* (2018).

- [13] M. Hohmann. “General covariant symmetric teleparallel cosmology”. *Physical Review D* 104, 0124077 (2021).
- [14] S. Nojiri and S.D. Odintsov. “Well-defined  $f(Q)$  Gravity, Reconstruction of FLRW Spacetime and Unification of Inflation with Dark Energy Epoch”. *arXiv:2404.18427v1 [gr-qc]* (2024).

# Litsents

## Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, **Bert Siimon**,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose **Mittetriviaalsed kosmoloogilised lahendid  $f(Q)$  gravitatsioonis**, mille juhendaja on María José Guzmán Monsalve, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Bert Siimon

**02.06.2024**