Tartu Ülikool

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Linnet Puskar

Kindlustusreservide hindamine statistikatarkvara R paketiga ChainLadder

Matemaatilise statistika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja Meelis Käärik

Tartu 2018

Kindlustusreservide hindamine statistikatarkvara R paketiga ChainLadder

Bakalaureusetöö

Linnet Puskar

Lühikokkuvõte. Selles bakalaureusetöös antakse ülevaade statistikatarkvara R paketi ChainLadder funktsioonidest MackChainLadder, MunichChainLadder ja BootChainLadder. Töö esimeses peatükis tutvustatakse nende funktsioonide aluseks olevaid Macki, Müncheni ja *bootstrap* ahel-redel meetodeid. Teises peatükis esitletakse lühidalt ChainLadder paketti ning leitakse eelnevalt nimetatud funktsioone kasutades reaalse andmestiku põhjal reservi hinnangud.

CERCS teaduseriala: P160 Statistika, operatsioonianalüüs, programmeerimine, finants- ja kindlustusmatemaatika.

Märksõnad: reservid, R (programmeerimiskeel), kahjukindlustus, bootstrap-meetod, kindlustusmatemaatika.

Estimation of insurance reserves using the R-package ChainLadder

Bachelor's thesis

Linnet Puskar

Abstract. The purpose of this bachelor's thesis is to provide an overview of the MackChainLadder, MunichChainLadder and BootChainLadder functions from the ChainLadder package in the statistical computing software R. The first chapter focuses on introducing the Mack, Munich and bootstrap chain-ladder methods, which are the basis for these functions. The second chapter presents the ChainLadder package and provides an example of estimating reserves using the afore-mentioned functions.

CERCS research specialisation: P160 Statistics, operations research, programming, actuarial mathematics.

Keywords: reserves, R (programming language), non-life insurance, actuarial mathematics, bootstraping.

Sisukord

Sissejuhatus

Õnnetusi juhtub pidevalt ja suur osa neist toovad kaasa varalise kahju. Selleks, et õnnetusjuhtum ei tooks eraisikule või firmale kaasa suurt rahalist väljaminekut, pakutakse võimalust ennast kindlustada. Kindlustusfirma annab ettemaksu eest lubaduse maksta tulevikus juhtuda võivad kahjud kinni.

Kuna kahjujuhtumite toimumine ja suurus on juhuslikud, ei tea kindlustusfirmad oma väljaminekuid täpselt ette, ometi tuleb kliendile öelda täpne teenuse hind. Teenuse hind ei saa olla madalam kui kindlustusfirma kulu, sest sellisel juhul ootaks firmat pankrot. Samuti ei saa teenuse hind olla liiga suur, sest siis ei sooviks kliendid ennast kindlustada. Seetõttu ongi kindlustusfirma jaoks oluline oma kulusid võimalikult täpselt prognoosida. Nende juhtumite kulude katteks, mille puhul on toimumine teada, kuid avaldust nende hüvitamiseks pole veel esitatud, luuakse *IBNR* ehk toimunud, kuid teatamata juhtumite reserv. Üks toimunud, kuid teatamata juhtumite reservide hindamise meetod on ahel-redel meetod.

Selle töö eesmärk on tutvustada Macki, Müncheni ja *bootstrap* ahel-redel meetodit ning leida statistikatarkvara R paketi ChainLadder abil reaalse andmestiku põhjal kindlustusreservi hinnangud.

Töö põhiosa on jaotatud kaheks peatükiks. Esimeses antakse ülevaade reservi liikidest ning nende loomise vajalikkusest, tutvustatakse arengukolmnurga mõistet ning eelnevalt loetletud ahel-redel meetodite teoreetilist alust. Teises peatükis leitakse reaalsete andmete põhjal statistikatarkvara R paketi ChainLadder funktsioonide MackChainLadder, MunichChainLadder ja BootChainLadder abil hinnangud reservile. Lisades tutvustatakse eelnevalt nimetatud funktsioonide argumente ja tulemusi.

Autor soovib tänada juhendaja Meelis Käärikut teema püstituse, nõuannete ja paranduste eest bakalaureusetöö valmimisel.

1 Ahel-redel meetodi teooria

1.1 Reservid

Selles peatükis on kasutatud allikat Booth jt 2005.

Reservid pakuvad kindlustusfirmadele turvatunnet. Selles töös mõistetakse reservi all summat, mida kindlustusfirma vajab, et täita oodatavaid lepingulisi kohustusi. Neid luuakse selleks, et firma suudaks igal ajahetkel maksta välja kahjutasusid ja muid hüvitisi. Lisaks võidakse luua reserve eesmärgiga tekitada puhver ootamatute katastroofide jaoks, sest see aitab jaotada kasumi kaotamist ühtlaselt pikemale perioodile.

Reservide loomine on ärijuhtimise oluline osa, sest firma maksejõulisus ja kasumlikkus on tugevas sõltuvuses reservide tasemest. Tänu sellele, et reservide loomise protsess annab aimu mineviku lepingute kasumlikkusest, saab see mõjutada tulevikus klientidele pakutavaid tingimusi. Selle põhjal saab leida ka mittekasumlikke lepingutüüpe, mille käendamine tuleks lõpetada. Seega on reservide eelarvestust vaja ärijuhtimisotsuste vastuvõtmiseks ning müügitingimuste ja -hinna paikapanemiseks, samuti lepingutingimuste muutmiseks, edasikindlustuse vajalikkuse üle otsustamiseks ning maksude ja raamatupidamise jaoks.

Kindlustusega seotud reservid saab jagada järgnevalt:

- **Möödumata riskiga seotud või väljateenimata tulu reservid**
  Kuna tihtipeale võib esitada nõudeid ka teatud aja jooksul pärast poliisi kehtivusperioodi, siis ei saa poliisi lõppedes veel kindel olla, et tulevikus ei esitata selle põhjal nõudeid. Selliste juhtude jaoks loodud reservid jaotatakse järgnevalt:
  - **ettemakstud preemiate reserv** (ingl *unearned premium reserve, UPR*);
  - **edasilükatud lepingu sõlmimise kulud** (ingl *deferred acquisition costs, DAC*) - edasilükatud kulud, mida kindlustusfirma peab tasuma selle eest, et leping endale saadi (näiteks kindlustusmaakleri tasud);
  - **möödumata riskiga seotud lisareservid** (ingl *additional unexpired risk reserve, AURR*).

- **Ettenägematute kulude reserv**:
  - **katastroofide reserv** (ingl *catastrophe reserves*);
  - **tasanduseraldis** (ingl *claims equalization reserves, CERs*) - osa tuludest pannakse igal aastal kõrvale, et näiteks juhul, kui pärast mitmeaastast kasumiperioodi tuleb ebaharilikult suur nõue, ei tooks see endaga kaasa tohutut kahjumit tolleks aastaks. Eesmärgiks on finantstulemuste ühtlustamine.
- **Realiseerunud riskiga seotud nõuete reservid**:
  - **teatatud nõuded** (ingl *notified (open) claims*);
  - **taasavatud nõuded** (ingl *reopened claims*);
  - **toimunud, kuid teatamata nõuded** (ingl *incurred but not reported claims, IBNR*) - siia alla kuuluvad juhtumid, mis on toimunud, kuid nende kohta ei ole avaldust esitatud. Näiteks kui on teada, et firma töötajad on tööülesannete täitmisel kokku puutunud mõne kahjuliku ainega, kuid veel ei ole teada, mitu inimest esitavad nõude firma vastu. Seda tüüpi reservide hindamiseks kasutatakse näiteks ahel-redel meetodit.
  - **toimunud, kuid mitte piisavalt täpselt teatatud nõuded** (ingl *incurred but not enough reported claims, IBNER*).
- **Nõuete käsitlemisega seotud kulude reservid** - näiteks töötajate palga reserv.

1.2 Arengukolmnurk

Selleks, et hakata ahel-redel meetodit rakendama, tuleb kõigepealt viia andmed sobivale kujule. Andmete esitamiseks kasutatakse tavaliselt nõuete arengukolmnurka (ehk kahjukolmnurka, ingl *development triangle* või *run-off triangle*), mis jaotab nõuded kahe ajatelje järgi. Vertikaalteljel on kahju toimumise aasta (ingl *accident year, year of occurence*, tähistatakse AY) ja horisontaalteljel on kahju arenguaasta (ingl *development year, development period*, tähistatakse DY). Arenguaasta all mõistetakse aega, mis kulub järgmise etapi saavutamiseks. (Wüthrich ja Merz, 2008)

Toimumise aasta võib tähistada lepingu allkirjastamise aastat, õnnetuse toimumise aastat või õnnetusest teadaandmise aastat. Arenguaasta võib tähistada õnnetuse toimumise aastat, õnnetusest teadaandmise aastat või viimase kahjutasu väljamakse aastat. Tähtis on, et toimumise aasta sündmus oleks varasem arenguaasta sündmusest. (Booth jt, 2005)

Kuna käesolevas töös uuritakse toimunud, kuid teatamata (*IBNR*) reserve, siis mõistetakse siin toimumise aasta all õnnetuse toimumise aastat ja arenguaasta all viimase kahjutasu väljamakse tegemise aastat.

Toimumise aasta tähiseks on i, $i \in \{0, \dots, I\}$. Mõnikord kasutatakse toimumise aastana ka kalendriaastat. Arenguaasta tähiseks on j, $j \in \{0, \dots, J\}$. Arvudest i ja j võib mõelda kui järjekorranumbritest vaadeldava perioodi jooksul: toimumise aasta puhul tähistatakse esimene aasta 0-ga (või jäetaksegi aasta number), arenguaasta puhul tähendab 0 jooksvat perioodi, 1 ühte aastat pärast toimumise aastat jne.

Tabelisse kantakse nõuete arvud. Toimumise aastaga i ja arenguaastaga j lisanduv nõuete kogus tähistatakse $X_{i,j}$. Alati ei pea tabelis olema toimunud ja makstud kahjude arv: tähisega $X_{i,j}$ võib tähistada ka toimunud ja makstud kahjude rahalist kulu. Neid lahtreid, kuhu on kantud teadaolevad andmed, nimetatakse ülemiseks kolmnurgaks (Wüthrich ja Merz, 2008):

$$K_{\text{ü}} = \{X_{i,j} : i + j \leq I, \quad 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J\}.$$

Tabelis 1 on toodud näide arengukolmnurga kohta, millel on neli toimumisaastat ja neli arenguaastat ehk $I = J = 3$. Selles töös vaadeldaksegi selliseid kahjukolmnurki, mille puhul $I = J$ ehk toimumise aastate arv on võrdne arenguaastate arvuga.

Tabel 1: Arengukolmnurga näidis

Toimumise aasta	**Arenguaasta**			
	0	1	2	3
0 (2014)	88	107	38	10
1 (2015)	97	122	29	
2 (2016)	94	131		
3 (2017)	99			

Selle näite puhul maksti 2016. aastal toimunud kahjudest 94 ($X_{2,0} = 94$) välja sama aasta lõpuks ja 131 ($X_{2,1} = 131$) 2017. aasta lõpuks.

Selleks, et kasutada ahel-redel meetodit, tuleb viia arengukolmnurk kumulatiivsele kujule. See tähendab, et $X_{i,j}$ ehk juurdekasvude asemel kasutatakse kumulatiivseid koguseid $C_{i,j}$, kus

$$C_{i,j} = \sum_{k=0}^{j} X_{i,k}.$$

Eeldatakse, et kahjunõudeid ei tule juurde pärast J aastat ning arvu $C_{i,J}$ nimetatakse lõplikuks kahjunõuete arvuks i-ndal aastal. (Gisler ja Wüthrich, 2008)

Ahel-redel meetodi kasutamise peamine eesmärk on hinnata tuleviku kahjusid ja kulusid, et teada, kui suur peaks olema reserv. Neid prognoose kujutatakse tabelis 2 alumise kolmnurgana (märgitud halliga) (Wüthrich ja Merz, 2008):

$$K_a = \{X_{i,j} : i + j > I, \quad 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J\}.$$

Tabel 2: Nõuete alumine ja ülemine kolmnurk

Toimumise aasta	**Arenguaasta**						
	0	1	...	j	...	J-1	J
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	...	$C_{0,j}$	...	$C_{0,J-1}$	$C_{0,J}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	...	$C_{1,j}$	...	$C_{1,J-1}$	$\widehat{C}_{1,J}$
...	...	...	...	...	...	...	...
I-j	$C_{I-j,0}$	$C_{I-j,1}$	...	$C_{I-j,j}$	...	$\widehat{C}_{I-j,J-1}$	$\widehat{C}_{I-j,J}$
...	...	...	...	...	...	...	...
I-1	$C_{I-1,0}$	$C_{I-1,1}$	...	$\widehat{C}_{I-1,j}$	...	$\widehat{C}_{I-1,J-1}$	$\widehat{C}_{I-1,J}$
I	$C_{I,0}$	$\widehat{C}_{I,1}$	...	$\widehat{C}_{I,j}$	...	$\widehat{C}_{I,J-1}$	$\widehat{C}_{I,J}$

1.3 Jaotusvaba ahel-redel meetodi eeldused

Selleks, et ahel-redel meetodit saaks kasutada, peavad kehtima kolm eeldust (Mack, 1999):

1. Erinevate aastate i kumulatiivsed nõuded $(C_{i,1}, \ldots, C_{i,J})$ on sõltumatud.

2. Leiduvad konstandid $f_0, \ldots, f_{J-1} > 0$ nii, et kõigi $i \in (0, \ldots, I)$ ja kõigi $j \in (0, \ldots, J-1)$ korral kehtib

$$E(F_{i,j} \mid C_{i,0}, \ldots, C_{i,j}) = f_j, \quad \text{kus} \quad F_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}.$$

   See tähendab, et arengukolmnurga järjestikused veerud on võrdelised.

3. Leiduvad konstandid $\sigma_j^2 > 0$ nii, et kõigi $i \in (0, \ldots, I)$ ja kõigi $j \in (0, \ldots, J-1)$ korral kehtib

$$D(F_{i,j} \mid C_{i,0}, \ldots, C_{i,j}) = \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}}.$$

1.4 Jaotusvaba ahel-redel meetod

Ahel-redel meetodil on mitu erinevat versiooni. Selles peatükis tutvustatakse jaotusvaba ehk Macki ahel-redel meetodit.

Wüthrich'i ja Merzi (2008) sõnul on ahel-redel meetod ilmselt kõige levinum reservide arvutamise tehnika. Selle põhjuseks on meetodi lihtsus ja arusaadavus. Algselt kasutati ahel-redel meetodit ilma, et sel oleks olnud aluseks ühtki stohhastilist mudelit (Gisler ja Wüthrich, 2008).

Nagu eespool öeldud, on ahel-redel meetodi eesmärk hinnata arengukolmnurga alumist kolmnurka, see tähendab tulevikus esitatavate nõuete arvu või nendele kuluvat rahasummat, ja planeerida reserve.

Gisler ja Wüthrich (2008) toovad välja põhilise eelduse ahel-redel meetodi jaoks: järjestikused veerud on enam-vähem proportsionaalsed. Kui see eeldus kehtib, siis leiduvad arengufaktorid $f_j > 0$ (ingl *development factors, age-to-age factors, chain-ladder factors, proportion factors, link ratios*) nii, et

$$C_{i,j+1} \simeq f_j C_{i,j} \quad i \in 0, \dots, I, \quad j \in 0, \dots, J-1.$$

Enamikel reaalse elu juhtudel ei ole aga arengufaktorid teada ja neid tuleb hinnata. Arengufaktori $f_j, j = 0, \dots, J-1$ hinnang avaldub järgnevalt (Wüthrich ja Merz, 2008):

$$\widehat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} = \sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{C_{i,j}}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}} \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}.$$

Ahel-redel meetodi hinnangu kumulatiivsele nõuete arvule või kogusele saab arengufaktorite kaudu kirja panna järgnevalt:

$$\widehat{C}_{i,j}^{CL} = C_{i,I-i} \widehat{f}_{I-i} \dots \widehat{f}_{j-1} = C_{i,I-i} \prod_{k=I-i}^{j-1} \widehat{f}_k.$$

Seega saab esitada alumist kolmnurka tabelis 3 kujutatud viisil.

Tabel 3: Alumise kolmnurga hinnangud avaldatuna arengufaktorite kaudu

AY	**DY**				
	0	...	j	...	J
0	$C_{0,0}$	...	$C_{0,j}$	...	$C_{0,J}$
...	...	...	...	...	...
I-j	$C_{I-j,0}$	...	$C_{I-j,j}$	...	$C_{I-j,j} \cdot \hat{f}_j \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{J-1}$
...	...	...	...	......	...
I	$C_{I,0}$	...	$C_{I,0} \cdot \hat{f}_0 \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{j-1}$	...	$C_{I,0} \cdot \hat{f}_0 \cdot \ldots \cdot \hat{f}_{J-1}$

Reservi suuruse leidmiseks i-nda toimumisaasta jaoks tuleb lahutada viimase arenguperioodi kumulatiivse nõuete arvu hinnangust viimane teadaolev kumulatiivne nõuete arv:

$$R_i^{CL} = \widehat{C}_{i,J}^{CL} - C_{i,I-i}.$$

Selleks, et hinnata reservi rahalist suurust, tuleb korrutada saadud nõuete arv keskmise väljamakstud rahasummaga. Kui arengukolmnurgas olid nõuete koguse asemel summad, siis ongi saadud hinnang R_i^{CL} juba reservi suurus.

1.5 Näide

Järgnevalt tehakse läbi näide jaotusvaba ahel-redel meetodi rakendamise kohta.

1. **Juurdekasvude arengukolmnurk**

   Näite läbiviimisel kasutatakse tabelis 4 kujutatud arengukolmnurka, mille puhul $I = J = 9$.

Tabel 4: Juurdekasvude arengukolmnurk (nõuete eest makstud summad)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 (1988)	8420	7321	4307	2646	2054	788	176	32	22	71
1 (1989)	8766	8790	5510	4392	2031	737	450	41	99	
2 (1990)	10040	9454	7002	3266	2581	977	126	126		
3 (1991)	8812	8588	5334	3729	2333	734	153			
4 (1992)	8546	8130	6123	2971	3076	722				
5 (1993)	8628	8664	6891	5009	1535					
6 (1994)	10574	9580	6208	3305						
7 (1995)	10920	11066	6648							
8 (1996)	10250	6962								
9 (1997)	3621									

2. **Kumulatiivne arengukolmnurk**

Järgmiseks viiakse arengukolmnurk kumulatiivsele kujule (tabel 5). Tabeli alla lisatakse veergude lahtrite summad (Summa) ning veergude lahtrite summad ilma viimase lahtrita (Summa -), et arvutada arengufaktoreid.

Tabel 5: Kumulatiivne arengukolmnurk

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 (1988)	8420	15741	20048	22694	24748	25536	25712	25744	25766	25837
1 (1989)	8766	17556	23066	27458	29489	30226	30676	30717	30816	
2 (1990)	10040	19494	26496	29762	32343	33320	33446	33572		
3 (1991)	8812	17400	22734	26463	28796	29530	29683			
4 (1992)	8546	16676	22799	25770	28846	29568				
5 (1993)	8628	17292	24183	29192	30727					
6 (1994)	10574	20154	26362	29667						
7 (1995)	10920	21986	28634							
8 (1996)	10250	17212								
9 (1997)	3621									
Summa		163511	194322	191006	174949	148180	119517	90033	56582	25837
Summa -	84956	146299	165688	161339	144222	118612	89834	56461	25766	

3. **Arengufaktorid**

Selleks, et leida arengufaktoreid, jagatakse $j+1$-nda veeru summa (Summa) j-nda veeru summaga ilma viimase liikmeta (Summa -). Saadud arengufaktorid on kujutatud tabelis 6.

Tabel 6: Arengufaktorid

$0 \to 1$	$1 \to 2$	$2 \to 3$	$3 \to 4$	$4 \to 5$	$5 \to 6$	$6 \to 7$	$7 \to 8$	$8 \to 9$
1,925	1,328	1,153	1,084	1,027	1,008	1,002	1,002	1,003

4. **Alumise kolmnurga hinnangud**

Selleks, et leida alumise kolmnurga hinnangud (tabel 7), korrutatakse kumulatiivse arengukolmnurga viimast diagonaali vastava(te) arengufaktoriga.

Tabel 7: Alumise kolmnurga hinnangud

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 (1988)										
1 (1989)										30901
2 (1990)									33644	33737
3 (1991)								29749	29813	29895
4 (1992)							29794	29860	29924	30006
5 (1993)						31570	31811	31882	31950	32038
6 (1994)					32170	33052	33305	33378	33450	33542
7 (1995)				33009	35794	36776	37057	37139	37219	37321
8 (1996)			22862	26355	28579	29363	29587	29652	29716	29798
9 (1997)		6969	9257	10671	11572	11889	11980	12006	12032	12065

5. **Reservi hinnang**

   Selleks, et leida iga aasta kohta reservi hinnang (tabel 8), lahutatakse lõplikust kahjunõuete summast viimane teadaolev kahjunõuete summa.

   Tabel 8: Reservi hinnangud

Toimumise aasta	Reservi hinnang
1 (1989)	30901-30816= 85
2 (1990)	33737-33572= 165
3 (1991)	29895-29683= 212
4 (1992)	30006-29568= 438
5 (1993)	32038-30727= 1311
6 (1994)	33543-29667= 3875
7 (1995)	37321-28634= 8687
8 (1996)	29798-17212= 12586
9 (1997)	12065-3621= 844
Summa	35803

   Seega peaks reservis olema 35803 eurot. Kui algandmestikus oleks olnud nõuete arvud, mitte summad, siis oleks reserv pidanud sisaldama vahendeid 35803 nõude väljamaksmiseks. Selleks, et teada saada reservi rahaline suurus, korrutatakse nõuete arv keskmise väljamakstud rahasummaga. Näiteks olgu keskmine väljamakstud summa 1000 eurot. Sel juhul peaks reservis olema $35803 \cdot 1000$ eurot $= 35803000$ eurot.

1.6 Müncheni ahel-redel meetod

Käesolev peatükk põhineb allikal Quarg ja Mack (2004).

Müncheni ahel-redel on meetod, mis vähendab makstud kahjude ja toimunud kahjude (vaadeldava perioodi makstud kahjude ja hinnanguliste maksmata kahjude summa) põhjal loodavate reservide hinnagute vahet.

Tihtipeale arvutatakse reservide hinnanguid nii makstud kahjude kui ka toimunud kahjude põhjal, kuid võib tekkida probleem, et need kaks hinnangut erinevad märgatavalt. Quarg ja Mack näitasid, et makstud ja toimunud kahjude vahel on peaaegu alati korrelatsioon. Seda teadmist ei kasutata makstud kahjudele ja toimunud kahjudele eraldi jaotusvaba ahel-redel meetodit rakendades, kuid Müncheni ahel-redel kannab minevikus esinenud seosed üle tuleviku prognoosidesse.

Selleks kasutatakse makstud (ingl *paid*) ja toimunud (ingl *incurred*) kahjude suhet P/I ning selle pöördväärtust I/P. Täpsemalt, kui $P_{i,j}$ on kumulatiivse makstud kahjude tabeli i-nda rea ja j-nda veeru väärtus ning $I_{i,j}$ on kumulatiivse toimunud kahjude tabeli i-nda rea ja j-nda veeru väärtus, siis P/I suhe i-nda rea ja j-nda veeru jaoks on

$$(P/I)_{i,j} = \frac{P_{i,j}}{I_{i,j}}$$

ning kõikide toimumisaastate keskmine P/I suhe j-nda arenguaasta jaoks avaldub järgnevalt:

$$(P/I)_j = \frac{\sum_{i=0}^{I} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I} I_{i,j}}.$$

Selles peatükis tähistatakse makstud kahjude arengufaktorit perioodide j ja $j+1$ ($j \in 0 \ldots J-1$) vahel

$$\widehat{f_j^P} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} P_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} P_{i,j}}$$

ning toimunud kahjude arengufaktorit perioodide j ja $j+1$ ($j \in 0 \ldots J-1$) vahel

$$\widehat{f_j^I} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} I_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} I_{i,j}}.$$

Jääkide hindamiseks kasutatakse valemit

$$Res(X \mid C) = \frac{X - E(X \mid C)}{\sigma(X \mid C)}, \tag{1}$$

kus X on juhuslik suurus, C on tingimus ja $\sigma(X \mid C) = \sqrt{D(X \mid C)}$.

1.6.1 Müncheni ahel-redel meetodi eeldused

Selleks, et Müncheni ahel-redel meetodit kasutada, peavad kehtima nii makstud kui ka toimunud kahjude kolmnurga korral eeldused, mis on toodud peatükis „Jaotusvaba ahel-redel meetodi eeldused". Lisaks peavad kehtima kaks eeldust jääkide kohta (Quarg ja Mack, 2004):

1. Leidub konstant λ^P nii, et iga $i \in (0, \ldots, I)$ ja iga $j \in (0, \ldots, J-1)$ korral kehtib

$$E\left(Res\left(\frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}} \mid P_{i,0}, \ldots, P_{i,j}\right) \mid P_{i,0}, \ldots, P_{i,j}, I_{i,0}, \ldots, I_{i,j}\right) =$$
$$\lambda^P \cdot Res\left(\frac{I_{i,j}}{P_{i,j}} \mid P_{i,0}, \ldots, P_{i,j}\right)$$

ehk

$$E\left(\frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}} \mid P_{i,0}, \ldots, P_{i,j}, I_{i,0}, \ldots, I_{i,j}\right) =$$
$$f_j^P + \lambda^P \cdot \frac{\sigma\left(\frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}} | P_{i,0}, \ldots, P_{i,j}\right)}{\sigma\left(\frac{I_{i,j}}{P_{i,j}} | P_{i,0}, \ldots, P_{i,j}\right)} \cdot \left(\frac{I_{i,j}}{P_{i,j}} - E\left(\frac{I_{i,j}}{P_{i,j}} \mid P_{i,0}, \ldots, P_{i,j}\right)\right).$$

2. Leidub konstant λ^I nii, et iga $i \in (0, \ldots, I)$ ja iga $j \in (0, \ldots, J-1)$ korral kehtib

$$E\left(Res\left(\frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}} \mid I_{i,0}, \ldots, I_{i,j}\right) \mid P_{i,0}, \ldots, P_{i,j}, I_{i,0}, \ldots, I_{i,j}\right) =$$
$$\lambda^I \cdot Res\left(\frac{P_{i,j}}{I_{i,j}} \mid I_{i,0}, \ldots, I_{i,j}\right)$$

ehk

$$E\left(\frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}} \mid P_{i,0}, \ldots, P_{i,j}, I_{i,0}, \ldots, I_{i,j}\right) =$$
$$f_j^I + \lambda^I \cdot \frac{\sigma\left(\frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}} | I_{i,0}, \ldots, I_{i,j}\right)}{\sigma\left(\frac{P_{i,j}}{I_{i,j}} | I_{i,0}, \ldots, I_{i,j}\right)} \cdot \left(\frac{P_{i,j}}{I_{i,j}} - E\left(\frac{P_{i,j}}{I_{i,j}} \mid I_{i,0}, \ldots, I_{i,j}\right)\right).$$

1.6.2 Müncheni ahel-redel meetodi parameetrite hindamine

Kuna Müncheni ahel-redel meetod kasutab hinnangute leidmiseks kahe kolmnurga vahelist korrelatsiooni, tuleb leida korrelatsioonikordajad. Nende leidmiseks on kõigepealt vaja leida Pearsoni jäägid.

Seega on lisaks eelnevalt esitatud arengufaktorite hinnangule vaja leida ülemineku kordaja standardhälbe hinnangud ($j \in 0, \ldots, J-2$). Eelduse 3 tõttu peatükist „Jaotusvaba ahel-redel meetodi eeldused“ avalduvad need hinnangud kujul $\frac{\sigma_j^P}{\sqrt{P_{i,j}}}$ ja $\frac{\sigma_j^I}{\sqrt{I_{i,j}}}$, kus

$$\sigma_j^P = \sqrt{\frac{1}{I-j-1} \cdot \sum_{i=0}^{I-j-1} P_{i,j} \cdot \left(\frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}} - \widehat{f_j^P}\right)^2}$$

ja

$$\sigma_j^I = \sqrt{\frac{1}{I-j-1} \cdot \sum_{i=0}^{I-j-1} I_{i,j} \cdot \left(\frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}} - \widehat{f_j^I}\right)^2}.$$

Viimast üleminekukordaja standardhälbe hinnangut ei saa selle valemi järgi leida. Selle hindamine sõltub olukorrast, näiteks võib anda hinnangule fikseeritud väärtuse.

Nagu eelnevalt mainitud, kasutatakse Müncheni ahel-redel meetodis makstud ja toimunud kahjude suhet P/I. Selle hinnangut tähistatakse $\widehat{q_j}$, kusjuures

$$\widehat{q_j} = E\left(\frac{P_{i,j}}{I_{i,j}} \mid I_{i,0}, \ldots, I_{i,j}\right) = \frac{\sum_{i=0}^{I-j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I-j} I_{i,j}}.$$

Selle hinnangu standardhälve avaldub kujul

$$\sigma\left(\frac{P_{i,j}}{I_{i,j}} \mid I_{i,0}, \ldots, I_{i,j}\right) = \sqrt{\frac{\widehat{\rho_j^I}^2}{I_{i,j}}},$$

kus

$$\widehat{\rho_j^I}^2 = \frac{1}{I-j} \cdot \sum_{k=0}^{I-j} I_{k,j} \cdot \left(\frac{P_{k,j}}{I_{k,j}} - \widehat{q_j}\right)^2.$$

Analoogselt leitakse ka I/P suhte hinnang $\widehat{q_j}^{-1}$ ja selle standardhälve.

Kasutades peatüki sissejuhatuses esitatud valemit (1), saab avaldada jäägid nii:

$$\widehat{Res}(P_{i,j+1}) := Res\left(\frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}} \mid P_{i,0}, \ldots, P_{i,j}\right) = \frac{\frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}} - \widehat{f_j^P}}{\widehat{\sigma_j^P}} \cdot \sqrt{P_{i,j}},$$

$$\widehat{Res}(I_{i,j+1}) := Res\left(\frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}} \mid I_{i,0}, \ldots, I_{i,j}\right) = \frac{\frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}} - \widehat{f_j^I}}{\widehat{\sigma_j^I}} \cdot \sqrt{I_{i,j}},$$

$$\widehat{Res}\left(\frac{I_{i,j}}{P_{i,j}}\right) := Res\left(\frac{I_{i,j}}{P_{i,j}} \mid P_{i,0}, \ldots, P_{i,j}\right) = \frac{\frac{I_{i,j}}{P_{i,j}} - \widehat{q_j}^{-1}}{\widehat{\rho_j^P}} \cdot \sqrt{P_{i,j}},$$

$$\widehat{Res}\left(\frac{P_{i,j}}{I_{i,j}}\right) := Res\left(\frac{P_{i,j}}{I_{i,j}} \mid I_{i,0}, \ldots, I_{i,j}\right) = \frac{\frac{P_{i,j}}{I_{i,j}} - \widehat{q_j}}{\widehat{\rho_j^I}} \cdot \sqrt{I_{i,j}}.$$

Järgmisena leitakse korrelatsioonikordajad, kasutades vähimruutude meetodit. Vähimruutude meetodi idee seisneb uuritava tunnuse tegeliku väärtuse ja hinnangu erinevuse minimeerimises. Kui on antud lineaarse regressiooni mudel $Y = \alpha + \beta \cdot X + \varepsilon$ (Y on sõltuv tunnus ehk uuritav tunnus, α on vabaliige, β on regressioonikordaja, X on sõltumatu tunnus ja ε on juhuslik viga), siis avaldub β vähimruutude hinnang kujul:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} = \rho(X, Y) \cdot \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}, \tag{2}$$

kus $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ on vastavate tunnuste keskmised, $\rho(X, Y)$ on kahe tunnuse vaheline korrelatsioonikordaja ning $\sigma(X)$ ja $\sigma(Y)$ vastavalt tunnuste X ja Y standardhälbed. Siis $(y_i - \bar{y})$ on sõltuva tunnuse i-nda vaatluse jääk ja $(x_i - \bar{x})$ sõltumatu tunnuse i-nda vaatluse jääk. (Frees, 2010)

Vähimruutude meetodi abil korrelatsioonikordaja λ^P leidmiseks (λ^P on korrelatsioonikordaja makstud kahjude üleminekukordaja $\frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}}$ ja I/P-suhte $\frac{I_{i,j}}{P_{i,j}}$ vahel) kasutatakse leitud β hinnangu võrdust (2). Kuna kõik eelnevalt leitud jäägid on standardiseeritud (see tähendab, et nende standardhälve on 1), siis praegusel juhul võrrandis (2) oleva $\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}$ väärtus on 1. Seega regressioonikordaja ja korrelatsioonikordaja hinnangud on võrdsed ja

λ^P hinnang avaldub järgnevalt:

$$\widehat{\lambda^P} = \frac{\sum_{i,j} \widehat{Res}\left(\frac{I_{i,j}}{P_{i,j}}\right) \cdot \widehat{Res}(P_{i,j+1})}{\sum_{i,j} \widehat{Res}\left(\frac{I_{i,j}}{P_{i,j}}\right)^2}.$$

Analoogselt saab leida λ^I hinnangu:

$$\widehat{\lambda^I} = \frac{\sum_{i,j} \widehat{Res}\left(\frac{P_{i,j}}{I_{i,j}}\right) \cdot \widehat{Res}(I_{i,j+1})}{\sum_{i,j} \widehat{Res}\left(\frac{P_{i,j}}{I_{i,j}}\right)^2}.$$

Võttes arvesse kõike eelnevat ja alapeatükis „Müncheni ahel-redel meetodi eeldused“ toodud eeldusi 1 ja 2, saab avaldada rekursioonhinnangud kõikide $j \geq J - i$ jaoks :

$$\widehat{P_{i,j+1}} = \widehat{P_{i,j}} \cdot \left(\widehat{f_j^P} + \widehat{\lambda^P} \cdot \frac{\widehat{\sigma_j^P}}{\widehat{\rho_j^P}} \cdot \left(\frac{\widehat{I_{i,j}}}{\widehat{P_{i,j}}} - \widehat{q_j}^{-1}\right)\right)$$

ja

$$\widehat{I_{i,j+1}} = \widehat{I_{i,j}} \cdot \left(\widehat{f_j^I} + \widehat{\lambda^I} \cdot \frac{\widehat{\sigma_j^I}}{\widehat{\rho_j^I}} \cdot \left(\frac{\widehat{P_{i,j}}}{\widehat{I_{i,j}}} - \widehat{q_j}\right)\right),$$

kusjuures algväärtustena kasutatakse $\widehat{P}_{i,J-i} = P_{i,J-i}$ ja $\widehat{I}_{i,J-i} = I_{i,J-i}$.

1.7 *Bootstrap* ahel-redel meetod

Selle peatüki jaoks kasutatati allikat Efron ja Tibshirani (1993).

Bootstrap on arvutile tuginev meetod, mille abil saab hinnata huvipakkuva parameetri standardviga. Seda tutvustati esimest korda 1979. aastal.

Bootstrap meetod sai oma nime fraasi „*to pull oneself up by one's bootstrap*“ ehk iseenda saapapaelte abiga üles sikutamise järgi. Nimelt oli Rudolph Erich Raspe raamatu tegelane parun Münchhausen kukkunud sügavasse järve ning päästis ennast sealt iseenda saapapaelu üles tõmmates.

Meetodi idee seisneb selles, et olemasoleva valimi põhjal genereeritakse arvuti abil tagasipanekuga taasvalimismeetodit kasutades uued pseudovalimid, mis pärinevad samast jaotusest. Nende valimite põhjal arvutatakse soovitud argumendid, millest omakorda saab tuletada hinnangu parameetri hajuvusele. Täpsemalt, pseudovalimite põhjal arvutatud parameetrite standardhälve on hinnanguks algse valimi parameetri standardhälbele.

Bootstrap meetodi eeliseks on see, et järelduste tegemine ei nõua teoreetilisi arvutusi, mis tähendab, et selle abil saab hinnata ka keerulisi parameetreid.

1.7.1 *Bootstrap* ahel-redel meetodi sammud

Selle peatüki jaoks kasutatakse allikat England ja Verrall (2002).

Ahel-redel meetodi puhul kasutatakse *bootstrap*-i, et genereerida uusi Pearsoni jääkidega ülemisi kolmnurki, millest tuletatakse reservide hinnangud.

Järgnevalt esitatakse *bootstrap* ahel-redel meetodi algoritm:

1. Ettevalmistus *bootstrap* tsükliks

   1.1. Leitakse kumulatiivse arengukolmnurga põhjal tavalise ahel-redel meetodiga arengufaktorid.

   1.2. Leitakse tagurpidise rekursiooni abil kohandatud kumulatiivsed väärtused ülemisele kolmnurgale. Alustatakse digonaalist, kus olid kõige viimased teadaolevad nõuded, kasutades teadmisi, et $\widehat{C}_{i,J-i} = C_{i,J-i}$ ja $\widehat{C}_{i,j-1} = C_{i,j} \cdot f_j^{-1}$.

   1.3. Leitakse ülemise kolmnurga juurdekasvud $\widehat{m}_{i,j}$, kasutades lahutamist: $\widehat{m}_{i,j} = \widehat{C}_{i,j} - \widehat{C}_{i,j-1}$.

   1.4. Arvutatakse Pearsoni jäägid ülemisele kolmnurgale:
$$r^P_{i,j} = \frac{X_{i,j} - \widehat{m}_{i,j}}{\sqrt{\widehat{m}_{i,j}}}.$$

   1.5. Arvutatakse Pearsoni skaala parameeter ϕ: Pearsoni jääkide summa jagatakse vabadusastmete arvuga läbi. Vabadusastmete arv saadakse, kui vaatluste arvust lahutatakse hinnatavate parameetrite arv:

$$\phi = \frac{\sum\limits_{i,j} \sum\limits_{i+j \leq J} (r^P_{i,j})^2}{\frac{1}{2} \cdot (J+1) \cdot (J+2) - 2 \cdot J + 1}.$$

1.6. Korrigeeritakse Pearsoni jääke:

$$r^{kor}_{i,j} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot (J+1) \cdot (J+2)}{\frac{1}{2} \cdot (J+1) \cdot (J+2) - 2 \cdot J + 1}} \cdot r^P_{i,j}.$$

2. *Bootstrap* tsükkel

2.1. Valitakse järgnevate sammude korduste arv, näiteks N=1000.

2.2. Tekitatakse uued jääkide ülemised kolmnurgad, kasutades tagasipanekuga taasvalimist.

2.3. Iga ülemise kolmnurga lahtri jaoks lahendatakse võrrand

$$X_{i,j} = r^P_{i,j} \cdot \sqrt{\widehat{m}_{i,j}} + \widehat{m}_{i,j},$$

et saada uued pseudo-lisanduvad väärtused.

2.4. Arvutatakse uus pseudo-kumulatiivne ülemine kolmnurk.

2.5. Kasutatakse tavalist ahel-redel meetodit pseudo-kumulatiivsel ülemisel kolmnurgal, et saada kumulatiivset hinnangut alumisele kolnurgale.

2.6. Kasutades lahutamist, leitakse lisanduvate väärtuste $\widehat{m}_{i,j}$ alumine kolmnurk.

2.7. Iga alumise kolmnurga lahtri jaoks simuleeritakse nõuete arv ülehajuvusega Poissoni jaotusest, mille keskmiseks on eelmises punktis leitud juurdekasv $\widehat{m}_{i,j}$ ja dispersiooniks $\phi \cdot \widehat{m}_{i,j}$, kusjuures ϕ on juba eelnevalt punktis 1.5 leitud.

2.8. Liidetakse alumises kolmnurgas simuleeritud maksed toimumise aasta kaupa kokku, et saada toimumise aasta järgi reserv ning leitakse ka üldsumma, et saada kogureserv.

2.9. Saadud tulemused salvestatakse ja alustatakse uuesti sammust 2.2.

3. Kokkuvõte

Salvestatud tulemused moodustavad hinnatava jaotuse ja tulemuste standardhälve on hinnang prognoosiveale. Tulemust soovitatakse võrrelda tavalise ahel-redel meetodi reservide hinnagutega, et kontrollida, kas on tehtud vigu.

2 Reaalse kindlustusandmestiku reservide hindamine statistikatarkvara R paketiga ChainLadder

Kui vanasti arvutati reservide hinnanguid käsitsi, siis tänapäeval saab selleks kasutada arvuti abi. Selles peatükis näidatakse, kuidas eelmises peatükis tutvustatud meetodeid rakendades ja statistikatarkvara R paketti ChainLadder kasutades hinnata reserve.

Uuritav andmestik pärineb rahvusvahelise kindlustusvolinike liidu (NAIC - *National Association of Insurance Commissioners*) Schedule P nõuete ja kulude andmebaasist. Andmestikus on antud eraisikute sõiduautode kohta tehtud nõuded aastatel 1988-1997. Kasutades lisas 1 olevat koodi, tekitatakse alamandmestik kindlustusfirmale Secura esitatud nõuete kohta, mille põhjal saadakse makstud (tabel 9) ja toimunud (tabel 10) kahjude arengukolmnurgad .

Tabel 9: Makstud kahjude kumulatiivne kolmnurk

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 (1988)	8420	15741	20048	22694	24748	25536	25712	25744	25766	25837
1 (1989)	8766	17556	23066	27458	29489	30226	30676	30717	30816	
2 (1990)	10040	19494	26496	29762	32343	33320	33446	33572		
3 (1991)	8812	17400	22734	26463	28796	29530	29683			
4 (1992)	8546	16676	22799	25770	28846	29568				
5 (1993)	8628	17292	24183	29192	30727					
6 (1994)	10574	20154	26362	29667						
7 (1995)	10920	21986	28634							
8 (1996)	10250	17212								
9 (1997)	3621									

Tabel 10: Toimunud kahjude kolmnurk

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 (1988)	25324	27042	26834	25799	26127	26153	25910	25933	26006	25989
1 (1989)	29441	31206	30829	31048	31617	30999	31014	30974	30979	
2 (1990)	31631	33300	33971	34427	33868	33677	33753	33772		
3 (1991)	28407	28826	29661	30062	29790	30086	30075			
4 (1992)	30183	29592	30349	30321	30332	30182				
5 (1993)	31646	32586	32428	31813	30968					
6 (1994)	36800	34554	32754	32243						
7 (1995)	36426	35706	35436							
8 (1996)	27289	26955								
9 (1997)	12936									

Nende kolmnurkade põhjal leitakse hinnangud reservile, kasutades paketti ChainLadder. Paketi kasutamiseks tuleb see eelnevalt installeerida. Selleks tuleb käsureale sisestada installeerimiskäsk

```
install.packages("ChainLadder")
```

ning seejärel

```
library(ChainLadder)
```

ehk paketi laadimiskäsk. Pakett tuleb installeerida ainult esimesel korral, edaspidi piisab vaid laadimiskäsu kasutamisest. Pakett on kasutusvalmis, kui kuvatakse joonisel 1 olev tekst, mis annab teada laetud paketi versiooni ning näpunäiteid paketi kasutamise kohta:

- Käsk `vignette("ChainLadder", package="ChainLadder")` avab paketi dokumentatsiooni.
- Käsu `demo(package="ChainLadder")` abil saab avada nimekirja võimalikest demodest.
- Rohkem informatsiooni ChainLadder projekti kohta leiab internetiaadressilt https://github.com/mages/ChainLadder.
- Kasutades käsku `suppressPackageStartupMessages(library(ChainLadder))`, ei kuvata enam seda sõnumit paketi laadimisel.

```
> library(ChainLadder)

Welcome to ChainLadder version 0.2.5

Type vignette('ChainLadder', package='ChainLadder') to access
the overall package documentation.

See demo(package='ChainLadder') for a list of demos.

More information is available on the ChainLadder project web-site:
https://github.com/mages/ChainLadder

To suppress this message use:
suppressPackageStartupMessages(library(ChainLadder))
```

Joonis 1: Tervitustekst pärast käsu `library(ChainLadder)` sisestamist

Järgnevalt leitakse toimunud, kuid teatamata (*IBNR*) reservi hinnangud, kasutades ChainLadder paketi kolme funktsiooni: MackChainLadder, MunichChainLadder ja BootChainLadder. Lisaks neile sisaldab ChainLadder pakett veel funktsioone, näiteks tweedieReserve ja MultiChainLadder, mida selles töös ei tutvustata.

2.1 Funktsioon MackChainLadder

Üks võimalus reservi hinnangu leidmiseks on funktsiooni MackChainLadder kasutamine. MackChainLadder on R-i funktsioon, mis vastab peatükis „Jaotusvaba ahel-redel meetod“ kirjeldatud algoritmile. Funktsiooni välja kutsumiseks tuleb R-i konsooli sisestada käsk kujul

```
MackChainLadder(Triangle, weights = 1, alpha=1, est.sigma="log-linear",
tail=FALSE, tail.se=NULL, tail.sigma=NULL, mse.method="Mack"),
```

kus vajadusel on argumentide väärtusi muudetud. Argumentide tähendusi on seletatud täpsemalt lisas 2.

Kõigepealt leitakse reservi hinnang makstud kolmnurga (tabel 9) põhjal. Selleks kasutatakse makstud kahjude kolmnurka funktsiooni MackChainLadder argumendi `Triangle` väärtusena. Ülejäänud argumentidele jäetakse vaikeväärtused. Tulemusena kuvatakse R-i konsoolis joonisel 2 esitatud väljund.

```
MackChainLadder(Triangle = Makstud)

     Latest Dev.To.Date Ultimate      IBNR Mack.S.E CV(IBNR)
1988 25,837       1.000   25,837       0.0      0.0      NaN
1989 30,816       0.997   30,901      84.9     31.2    0.367
1990 33,572       0.995   33,737     164.7     73.1    0.444
1991 29,683       0.993   29,895     211.7     84.1    0.397
1992 29,568       0.985   30,006     438.0    188.5    0.430
1993 30,727       0.959   32,038   1,311.0    223.3    0.170
1994 29,667       0.884   33,542   3,875.1    743.2    0.192
1995 28,634       0.767   37,321   8,687.1  1,357.4    0.156
1996 17,212       0.578   29,798  12,585.9  1,552.3    0.123
1997  3,621       0.300   12,065   8,444.2  1,462.5    0.173

              Totals
Latest:   259,337.00
Dev:            0.88
Ultimate: 295,139.60
IBNR:      35,802.60
Mack.S.E    2,927.68
CV(IBNR):       0.08
```

Joonis 2: Funktsiooni MackChainLadder tulemus makstud kahjude põhjal

Väljundi esimeses tulbas (`Latest` ehk viimane) on esitatud iga aasta kohta viimane teadaolev kumulatiivne nõuete summa ehk funktsiooni argumendina antud kolmnurga viimane täidetud diagonaal.

Väljundi teises tulbas (`Dev. To. Date` - *development to date* ehk areng praeguseni) on toodud iga aasta kohta osakaal, mille viimane teadaolev kumulatiivne nõuete summa (esimene tulp) moodustab viimase arenguperioodi lõpuks ennustatud kumulatiivsest nõuete summast (kolmandast tulbast).

Väljundi kolmandas tulbas (`Ultimate` ehk lõplik) on esitatud iga aasta kohta kumulatiivne nõuete summa viimase arenguperioodi lõpuks.

Väljundi neljandas tulbas (`IBNR` ehk toimunud, kuid teatamata) on esitatud lõplike hinnangute (kolmas tulp) ja viimaste teadaolevate kumulatiivsete nõuete (esimene tulp) vahe. Kui funktsiooni argumendiks anda makstud kahjude kolmnurk, on siin tulbas realiseerunud riskiga seotud reservi hinnang iga aasta kohta. Kui argumendiks anda toimunud kahjude kolmnurk, on siin toimunud, kuid teatamata (*IBNR*) reservi hinnang.

Väljundi viiendas tulbas (`Mack.S.E` ehk Macki standardhälve) on toodud reservi hinnangu standardhälve iga aasta kohta. See tulp vastab eelmises osas kirjeldatud tulemuslisti elementide nimekirjas oleva Mack.S.E viimasele tulbale.

Väljundi kuuendas tulbas (`CV(IBNR) - Coefficient of variation` ehk variatsioonikordaja) on esitatud iga aasta kohta, kui suure osa moodustab reservi hinnangu standardhälve (viies tulp) reservi hinnangust (neljas tulp).

Väljundi alumises osas (`Totals`) on samad hinnangud kõikide perioodide kohta kokku:

- esimeses reas (`Latest`) on viimaste teadaolevate kumulatiivsete nõuete summa;
- teises reas (`Dev`) on toodud osakaal, mille esimene rida moodustab kolmandast;
- kolmandas reas (`Ultimate`) on viimase arenguperioodi lõpuks leitud kumulatiivsete nõuete summa;
- neljandas reas (`IBNR`) on makstud kahjude korral realiseerunud riski kogureservi hinnang ja toimunud kahjude korral toimunud, kuid teatamata kogureservi hinnang (kolmanda ja esimese rea vahe);
- viiendas reas (`Mack.S.E`) on kogureservi hinnangu standardhälve (mitte iga aasta kohta leitud standardhälvete summa);
- kuuendas reas (`CV(IBNR)`) on toodud osakaal, mille viies rida moodustab neljandast.

Seega on makstud kahjude põhjal kogukahjud prognoos 295140 eurot. Realiseerunud riski reservi suurus on 35803 eurot.

Järgmiseks leitakse reservi hinnang toimunud kahjude kolmnurga (tabel 10) põhjal. Saadud tulemus on näidatud joonisel 3.

```
MackChainLadder(Triangle = Toimunud)

     Latest Dev.To.Date Ultimate   IBNR Mack.S.E CV(IBNR)
1988 25,989       1.000   25,989    0.0      0.0      NaN
1989 30,979       1.001   30,959  -20.3     41.6    -2.06
1990 33,772       0.999   33,796   24.2     85.6     3.54
1991 30,075       0.999   30,097   22.2     88.8     4.00
1992 30,182       1.001   30,164  -18.4    189.4   -10.27
1993 30,968       1.005   30,819 -148.8    411.1    -2.76
1994 32,243       1.009   31,954 -289.3    719.1    -2.49
1995 35,436       1.014   34,938 -498.2  1,012.9    -2.03
1996 26,955       1.016   26,518 -436.8  1,185.6    -2.71
1997 12,936       1.007   12,847  -89.3  1,199.5   -13.43

                 Totals
Latest:    289,535.00
Dev:             1.01
Ultimate:  288,080.24
IBNR:       -1,454.76
Mack.S.E     2,429.20
CV(IBNR):       -1.67
```

Joonis 3: Funktsiooni MackChainLadder tulemus toimunud kahjude põhjal

Seega on toimunud kahjude põhjal kogukahju progoos 288080 eurot. Kuna väljundi alumise osa neljandas reas on negatiivne arv, siis toimunud, kuid teatamata reservi hinnanguks on 0 eurot. See tähendab, et kõik kahjujuhtumid on juba teatatud, aga mõned on veel välja maksmata.

2.2 Funktsioon MunichChainLadder

Järgmine võimalus reservi leidmiseks on kasutada funktsiooni MunichChainLadder. MunichChainLadder on R-i funktsioon, mis vastab peatükis „Müncheni ahel-redel meetod“ kirjeldatud algoritmile. See funktsioon eeldab, et nii makstud kui ka toimunud kahjude kolmnurgale saab rakendada MackChainLadder funktsiooni. Funktsiooni väljakutsumiseks tuleb R-i konsooli sisestada käsk kujul

```
MunichChainLadder(Paid, Incurred, est.sigmaP = "log-linear",
est.sigmaI = "log-linear", tailP=FALSE, tailI=FALSE),
```

kus vajadusel on argumentide väärtusi muudetud. Argumentide tähendused on selgitatud lisas 3.

Funktsiooni MunichChainLadder argumendi `Paid` väärtuseks antakse makstud kahjude kolmnurk ja argumendi `Incurred` väärtuseks toimunud kahjude kolmnurk. Ülejäänud argumentidele jäetakse vaikeväärtused. Tulemusena kuvatakse R-i konsoolis joonisel 4 esitatud väljund.

```
MunichChainLadder(Paid = Makstud, Incurred = Toimunud)

     Latest Paid Latest Incurred Latest P/I Ratio Ult. Paid Ult. Incurred Ult. P/I Ratio
1988      25,837          25,989            0.994    25,837        25,989          0.994
1989      30,816          30,979            0.995    30,891        30,963          0.998
1990      33,572          33,772            0.994    33,699        33,811          0.997
1991      29,683          30,075            0.987    29,983        30,068          0.997
1992      29,568          30,182            0.980    30,057        30,146          0.997
1993      30,727          30,968            0.992    31,104        31,215          0.996
1994      29,667          32,243            0.920    32,288        32,398          0.997
1995      28,634          35,436            0.808    35,369        35,486          0.997
1996      17,212          26,955            0.639    27,167        27,258          0.997
1997       3,621          12,936            0.280    12,672        12,713          0.997

Totals
             Paid Incurred P/I Ratio
Latest:   259,337  289,535       0.9
Ultimate: 289,066  290,048       1.0
```

Joonis 4: Funktsiooni MunichChainLadder tulemus

Väljundi esimeses tulbas (`Latest Paid` ehk viimati makstud) on esitatud iga toimumisaasta kohta makstud kahjude kolmnurga viimane teadaolev kumulatiivne nõuete summa ehk argumendi `Paid` väärtuseks antud kolmnurga viimane täidetud diagonaal.

Väljundi teises tulbas (`Latest Incurred` ehk viimati toimunud) on esitatud iga toimumisaasta kohta toimunud kahjude kolmnurga viimane teadaolev kumulatiivne nõuete summa ehk argumendi `Incurred` väärtuseks antud kolmnurga viimane täidetud diagonaal.

Väljundi kolmandas tulbas (`Latest P/I Ratio` ehk viimane P/I suhe) on iga toimumisaasta kohta esitatud viimase teadaoleva kumulatiivse makstud kahjude summa (esimene tulp) ja viimase teadaoleva kumulatiivse toimunud kahjude summa (teine tulp) suhe.

Väljundi neljandas tulbas (`Ult. Paid` - *Ultimate Paid* ehk lõplik makstud) on toodud iga toimumisaasta kohta kumulatiivne makstud kahjude summa viimase arenguperioodi lõpuks.

Väljundi viiendas tulbas (`Ult. Incurred` - *Ultimate Incurred* ehk lõplik toimunud) on toodud iga toimumisaasta kohta kumulatiivne toimunud kahjude summa viimase arenguperioodi lõpuks.

Väljundi kuuendas tulbas (`Ult. P/I Ratio` - *Ultimate P/I Ratio* ehk lõplik P/I suhe) on iga toimumisaasta kohta toodud viimase arenguperioodi lõpuks kumulatiivselt makstud kahjude summa (neljas tulp) ja viimase arenguperioodi lõpuks kumulatiivselt toimunud kahjude summa (viies tulp) suhe.

Väljundi alumise osa (`Totals`) esimeses reas on:

- esimeses tulbas toodud viimati teada olevate makstud kahjude summa;
- teises tulbas viimati teada olevate toimunud kahjude summa;
- kolmandas tulbas kahe eelmise arvu suhe.

Väljundi alumise osa (`Totals`) teises reas on:

- esimeses tulbas viimase arenguperioodi lõpuks ennustatud makstud kumulatiivsete kahjude summa;
- teises tulbas viimase arenguperioodi lõpuks ennustatud toimunud kumulatiivsete kahjude summa;
- kolmandas tulbas kahe eelmise arvu suhe.

Seega saadakse makstud kogukahju suuruseks 289066 eurot ja toimunud kogukahju suuruseks 290048 eurot. Selleks, et leida toimunud, kuid teatamata reservi, tuleb lahutada toimunud kahjude lõplikust väärtusest viimane teadaolev toimunud kahjude väärtus: $290048 - 289535 = 513$ eurot.

2.3 Funktsioon BootChainLadder

Veel üks võimalus reservi hindamiseks on kasutada funktsiooni BootChainLadder. BootChainLadder on R-i funktsioon, mis vastab peatükis „*Bootstrap* ahel-redel meetod" kirjeldatud algoritmile. Funktsiooni välja kutsumiseks tuleb R-i konsooli sisestada käsk kujul

`BootChainLadder(Triangle, R = 999, process.distr=c("gamma", "od.pois")),`

kus vajadusel on argumentide väärtusi muudetud. Argumentide tähendused on seletatud lisas 4.

Kõigepealt leitakse reservi suurus makstud kahjude kolmnurga põhjal. Funktsiooni argumendi `Triangle` väärtuseks antakse makstud kahjude kolmnurk. Ülejäänud argumentidele jäetakse vaikeväärtused. Tulemusena kuvatakse R-i konsoolis joonisel 5 esitatud väljund.

```
BootChainLadder(Triangle = Makstud)

     Latest Mean Ultimate Mean IBNR IBNR.S.E IBNR 75% IBNR 95%
1988 25,837        25,837       0.0        0        0        0
1989 30,816        30,899      83.3      133      144      335
1990 33,572        33,737     164.6      171      248      475
1991 29,683        29,895     212.2      181      289      571
1992 29,568        30,003     434.5      246      567      896
1993 30,727        32,059   1,331.7      392    1,562    2,024
1994 29,667        33,566   3,898.9      686    4,319    5,103
1995 28,634        37,367   8,733.1    1,100    9,488   10,532
1996 17,212        29,791  12,579.4    1,460   13,510   15,109
1997  3,621        12,037   8,416.3    1,601    9,438   11,141

                   Totals
Latest:           259,337
Mean Ultimate:    295,191
Mean IBNR:         35,854
IBNR.S.E            2,902
Total IBNR 75%:    37,649
Total IBNR 95%:    41,017
```

Joonis 5: Funktsiooni BootChainLadder tulemus makstud kahjude põhjal

Väljundi esimeses tulbas (`Latest` ehk viimane) on esitatud iga aasta kohta viimane teadaolev kumulatiivne nõuete summa ehk funktsiooni argumendina antud kolmnurga viimane täidetud diagonaal.

Väljundi teises tulbas (`Mean Ultimate` ehk keskmine lõplik) on iga toimumisaasta kohta esitatud kõikide genereeritud kolmnurkade lõplike kumulatiivsete nõuete summa keskmine.

Väljundi kolmandas tulbas (`Mean IBNR` ehk toimunud, kuid teatamata reservi keskmine) on esitatud genereeritud kolmnurkade põhjal leitud keskmine reservi suurus iga toimumisaasta kohta (kui argumendiks antakse makstud kahjude kolmnurk, saadakse tulemuseks realiseerunud riski reservi hinnang ning kui argumendiks antakse toimunud kahjude kolmnurk, siis saadakse tulemuseks toimunud, kuid teatamata reservi hinnang).

Väljundi neljandas tulbas (`IBNR.S.E` ehk toimunud, kuid teatamata reservi standardhälve) on toodud reservi hinnangu standardhälve iga toimumisaasta kohta.

Väljundi viiendas tulbas (`IBNR 75%`) on toodud reservi hinnangu 75% kvantiil. See tähendab, et 75% genereeritud kolmnurkade põhjal leitud reservidest on kas sama suured või väiksemad sellest arvust.

Väljundi kuuendas tulbas (`IBNR 95%`) on toodud reservi hinnangu 95% kvantiil. See tähendab, et 95% genereeritud kolmnurkade põhjal leitud reservidest on kas sama suured või väiksemad sellest arvust.

Väljundi alumises osas (*Totals*) on samad hinnangud kõikide perioodide kohta kokku:

- esimeses reas (`Latest`) on viimaste teadaolevate kumulatiivsete nõuete summa;
- teises reas (`Mean Ultimate`) on keskmine lõplike kumulatiivsete nõuete summa;
- kolmandas reas (`IBNR`) on keskmise kogureservi suurus (makstud kahjude puhul realiseerunud riski kogureservi suurus ning toimunud kahjude puhul toimunud, kuid teatamata kogureservi suurus);
- neljandas reas (`IBNR.S.E`) on kogureservi hinnangu standardhälve (mitte iga aasta kohta leitud standardhälvete summa);
- viiendas reas (`Total IBNR 75%`) on toodud kogureservi 75% kvantiil;
- kuuendas reas (`Total IBNR 95%`) on toodud kogureservi 95% kvantiil.

Seega on makstud kogukahjude summa 295191 eurot ning realiseerunud riski reservi hinnang on 35854 eurot.

Lõpuks leitakse reservi hinnang ka toimunud kahjude põhjal. Saadud tulemus on kuvatud joonisel 6.

```
BootChainLadder(Triangle = Toimunud)

     Latest Mean Ultimate Mean IBNR IBNR.S.E IBNR 75% IBNR 95%
1988 25,989        25,989       0.0        0 0.00e+00        0
1989 30,979        31,041      62.1    1,526 8.00e-06      423
1990 33,772        33,872     100.4    2,717 5.38e+00    1,713
1991 30,075        30,250     174.9    2,259 3.02e+00    1,711
1992 30,182        30,283     100.7    2,324 1.64e+01    2,433
1993 30,968        30,867    -101.0    2,926 4.49e+01    2,533
1994 32,243        31,881    -361.8    3,745 2.36e+01    2,705
1995 35,436        34,786    -650.4    3,954 2.15e+01    3,062
1996 26,955        26,579    -376.2    3,183 4.09e+01    2,978
1997 12,936        12,958      22.4    2,277 3.74e+01    2,600

                   Totals
Latest:           289,535
Mean Ultimate:    288,506
Mean IBNR:         -1,029
IBNR.S.E           15,354
Total IBNR 75%:     2,159
Total IBNR 95%:    13,214
```

Joonis 6: Funktsiooni BootChainLadder tulemus toimunud kahjude põhjal

Seega on toimunud kogukahjude summa 288506 eurot. Kuna taaskord on toimunud, kuid teatamata reservi hinnang negatiivne, siis järelikult on kõik kahjud juba teatatud.

2.4 Meetodite võrdlus

Kuna praegusel juhul leitakse reservi suurust sellise andmestiku põhjal, kus on olemas ka need nõuete summad, mida siin hinnatakse, siis on võimalik võrrelda saadud tulemusi tegelikkusega.

Üldjuhul eeldatakse, et makstud ja toimunud kahjude kumulatiivsed nõuete summad on viimase arenguperioodi lõpuks võrdsed, kuid praegusel juhul on jäänud siiski mõned nõuded välja maksmata. Seega koostatakse kaks tabelit: tabelis 11 on makstud kahjude hinnangute võrdlus ning tabelis 12 on toimunud kahjude hinnangute võrdlus.

Mõlema tabeli teises tulbas on toodud tegelikult esitatud nõuete summad, kolmandas tulbas Macki hinnangud nõuete summale ja neljandas Macki hinnangu ja tegelikult esitatud nõuete summa vahe. Samuti on toodud Müncheni ja *Bootstrap* ahel-redel meetodi hinnangud ja nende erinevused tegelikkusest.

Tabel 11: Saadud hinnangute võrdlus makstud kahjude jaoks

Arenguaasta	Tegelik	Mack	Mack-Tegelik	München	München-Tegelik	Bootstrap	Bootstrap-Tegelik
0	25837	25837	0	25837	0	25837	0
1	30920	30901	-19	30891	-29	30899	-21
2	33625	33737	112	33699	74	33737	112
3	29892	29895	3	29983	91	29895	3
4	30100	30006	-94	30057	-43	30003	-97
5	31662	32038	376	31104	-558	32059	397
6	33399	33542	143	32288	-1111	33566	167
7	36935	37321	386	35369	-1566	37367	432
8	25991	29798	3807	27167	1176	29791	3800
9	11078	12065	987	12672	1594	12037	959
Summa	289439	295140	5701	289066	-373	295191	5752

Tabel 12: Saadud hinnangute võrdlus toimunud kahjude jaoks

Arenguaasta	Tegelik	Mack	Mack-Tegelik	München	München-Tegelik	Bootstrap	Bootstrap-Tegelik
0	25989	25989	0	25989	0	25989	0
1	30993	30959	-34	30963	-30	31041	48
2	33759	33796	37	33811	52	33872	113
3	29983	30097	114	30068	85	30250	267
4	30271	30164	-107	30146	-125	30283	12
5	31863	30819	-1044	31215	-648	30867	-996
6	33553	31954	-1599	32398	-1155	31881	-1672
7	37072	34938	-2134	35486	-1586	34786	-2286
8	26147	26518	371	27258	1111	26579	432
9	11101	12847	1746	12713	1612	12958	1857
Summa	290731	288080	-2651	290,048	-683	288506	-2225

Tabelitest 11 ja 12 on näha, et nii makstud kui ka toimunud kahjude põhjal andis täpsema hinnangu Müncheni ahel-redel meetod. Parema hinnangu üheks põhjuseks on see, et Müncheni ahel-redel kasutab hinnangu andmiseks nii makstud kui ka toimunud kahjude kolmnurka. Samas ei too iga kolmnurga puhul keerulise Müncheni meetodi kasutamine piisavalt palju paremat hinnangut võrreldes Macki hinnanguga (näiteks juhul kui makstud ja toimunud kahjude põhjal Macki meetodit kasutades leitud hinnangud ei erine väga palju üksteisest). Macki meetodi eeliseks on olnud selle lihtsus, kuid paketi ChainLadder kasutamine vähendab meetodite rakendamise keerukuste erinevust. Praegusel juhul jäid Macki ja *bootstrap* ahel-redel meetodi hinnangud makstud kahjude puhul samasse suurusjärku, aga toimunud kahjusid hindas *bootstrap* meetod veidi täpsemalt. Macki ja *bootstrap* meetodid ülehindasid makstud kahjude puhul nõuete summat, aga Müncheni meetod alahindas mõlemal juhul. Praktikas eelistatakse pigem ülehindamisi.

Kokkuvõttes võib öelda, et nende andmete puhul annab kõige täpsema hinnangu Müncheni ahel-redel meetod, kuid see ei ole kõikide kolmnurkade puhul nii.

Kokkuvõte

Kindlustusfirmad pakuvad klientidele võimalust ennast kindlustada tulevikus toimuda võivate õnnetuste vastu. Kliendi makstavad kindlustusmaksed peavad olema piisavalt suured, et tagada kindlustusfirma maksejõulisus, kuid samas piisavalt väikesed, et kliendil oleks soov ennast kindlustada. Kindlustusmaksete suuruse määramiseks on vaja prognoosida tulevikus väljamakstavaid kahjusummasid.

Käesoleva töö eesmärk oli tutvustada ühe kindlustusreservide prognoosimise viisi, ahel-redel meetodi kolme erinevat versiooni ning hinnata reaalse andmestiku põhjal reserve, kasutades statistikatarkvara R paketti ChainLadder.

Töö põhiosa esimeses peatükis põhjendati reservide loomise vajalikkust ning esitleti erinevaid reservide liike. Lisaks tutvustati arengukolmnurga, toimumisaasta, arenguaasta ja kumulatiivse kolmnurga mõisteid. Lõpetuseks anti ülevaade ühe populaarseima kindlustusreservide hindamise meetodi erinevatest versioonidest. Esimesena esitleti Macki ahel-redel meetodit ning tehti läbi näide, kuidas meetodit kasutada arvuti abita. Järgmisena tutvustati Müncheni ahel-redel meetodit ning viimasena *bootstrap* ahel-redel meetodit.

Töö põhiosa teises peatükis anti ülevaade statistikatarkvara R paketi ChainLadder funktsioonidest MackChainLadder, MunichChainLadder ja BootChainLadder. Iga funktsiooni kasutades tehti läbi näide reservi hindamise kohta. Hindamiseks kasutati rahvusvahelise kindlustusvolinike liidu (NAIC - *National Association of Insurance Commissioners*) Schedule P nõuete ja kulude andmebaasist pärit andmestikku, kus olid eraisikute sõiduautode kohta aastatel 1988-1997 tehtud nõuete andmed.

Pakett ChainLadder sisaldab lisaks töös tutvustatud MackChainLadder, MunichChainLadder ja BootChainLadder funktsioonidele ka näiteks tweedieReserve ja MultiChainLadder funktsioone, mis sobivad aineseks järgnevatele lõputöödele.

Kasutatud kirjandus

1. Booth, P., Chadburn, R., Haberman, S., James, D., Khorasanee, Z., Plumb, R. H., Rickayzen, B. (2005). *Modern Actuarial Theory and Practice*. Florida: Chapman & Hall/CRC.

2. Wüthrich, M. V., Merz, M. (2008). *Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.

3. Mack, T. (1999). *The Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates: Recursive Calculation and Inclusion of a Tail Factor*. *Astin Bulletin*, 29(2), 361-366. doi:10.2143/AST.29.2.504622

4. Gisler, A., Wüthrich, M. (2008). *Credibility for the Chain Ladder Reserving Method*. *Astin Bulletin*, 38(2), 565-600. doi:10.1017/S0515036100015294

5. Quarg, G., Mack, T. (2008). *Munich Chain Ladder: A Reserving Method that Reduces the Gap between IBNR Projections Based on Paid Losses and IBNR Projections Based on Incurred Losses*. *Variance*, 2(2), 266-299. Vaadatud 03.04.2018. http://www.variancejournal.org/issues/02-02/266.pdf

6. Frees, E. W. (2010). *Regression Modeling with Actuarial and Financial Applications*. New York: Cambridge University Press.

7. Efron, B., Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. New York: Chapman & Hall.

8. England, P., Verrall, R. (2002). *Stochastic Claims Reserving in General Insurance*. *British Actuarial Journal*, 8(3), 443-518, doi:10.1017/S1357321700003809

9. Gesmann, M. (2017). *MackChainLadder*. Vaadatud 20.04.2018 https://www.rdocumentation.org/packages/ChainLadder/versions/0.2.5/ topics/ MackChainLadder

10. Gesmann, M. (2017). *MunichChainLadder*. Vaadatud 21.04.2018 https://www.rdocumentation.org/packages/ChainLadder/versions/0.2.5/topics/ MunichChainLadder

11. Gesmann, M. (2017). *BootChainLadder*. Vaadatud 22.04.2018
https://www.rdocumentation.org/packages/ChainLadder/versions/0.2.5/topics/BootChainLadder

Lisa 1: kasutatud kood

```
#Antakse ette andmestiku fail
fail=read.csv(choose.files(),header=TRUE)

#Tekitatakse alamandmestik ühe kindlustusfirma jaoks
#See osa koodist on pärit internetileheküljelt
http://www.casact.org/research/reserve_data/ReadData_SingleLine_12May2011.txt
grp.code=unique(fail$GRCODE)

ins.line.data=function(g.code){
  b=subset(fail,fail$GRCODE==g.code)
  name=b$GRNAME
  grpcode=b$GRCODE
  ay=b$AccidentYear
  dev=b$DevelopmentLag

  cum_incloss=b[,6]
  cum_pdloss=b[,7]
  bulk_loss=b[,8]
  dir_premium=b[,9]
  ced_premium=b[,10]
  net_premium=b[,11]
  single=b[,12]
  posted_reserve97=b[,13]

  # tekitatakse uus tunnus nõuete juurdekasvudega
  inc_pdloss=numeric(0)
  for (i in unique(ay)){
    s=(ay==i)
    pl=c(0,cum_pdloss[s])
```

```
    ndev=length(pl)-1
    il=rep(0,ndev)
    for (j in 1:ndev){
      il[j]=pl[j+1]-pl[j]
    }
    inc_pdloss=c(inc_pdloss,il)
  }
  data.out=data.frame(name,grpcode,ay,dev,net_premium,dir_premium,ced_premium,
  cum_pdloss,cum_incloss,bulk_loss,inc_pdloss,single,posted_reserve97)
  return(data.out)
}

Secura=ins.line.data(grp.code[10])

#Alamandmestikku jäetakse alles read, mis kuuluvad ülemisse kolmnurka
SecuraYlemine=subset(Secura,ay+dev<=1998)

#Loetakse sisse vajalikud paketid
#install.packages('ChainLadder')
#install.packages('tidyr')
library(ChainLadder)
library(tidyr)


#Andmestik muudetakse makstud kahjude kolmnurgaks
MakstudYlemineKolmnurk<-spread(SecuraYlemine[,c(3,4,11)], key=dev,
value=inc_pdloss)
rownames(MakstudYlemineKolmnurk)<-MakstudYlemineKolmnurk[,1]
MakstudYlemineKolmnurk<-MakstudYlemineKolmnurk[,2:11]
Makstud<-as.triangle(as.matrix(MakstudYlemineKolmnurk))
```

```
#Makstud kahjude kolmnurk viiakse kumulatiivsele kujule
Makstud<-incr2cum(Makstud)

#Analoogselt leitakse ka toimunud kahjude kolmnurk
ToimunudYlemineKolmnurk<-spread(SecuraYlemine[,c(3,4,9)], key=dev,
value=cum_incloss)
rownames(ToimunudYlemineKolmnurk)<-ToimunudYlemineKolmnurk[,1]
ToimunudYlemineKolmnurk<-ToimunudYlemineKolmnurk[,2:11]
Toimunud<-as.triangle(as.matrix(ToimunudYlemineKolmnurk))

#Leitakse Macki ahel-redel meetodi hinnang makstud kahjude põhjal
MackMakstud<-MackChainLadder(Makstud)

#Leitakse Macki ahel-redel meetodi hinnang toimunud kahjude põhjal
MackToimunud<-MackChainLadder(Toimunud)

#Leitakse Müncheni ahel-redel meetodi hinnang makstud ja toimunud
kahjude kolmnurga põhjal
Munchen<-MunichChainLadder(Makstud, Toimunud)

#Leitakse Bootstrap ahel-redel meetodi hinnang makstud kahjude
kolmnurga põhjal
BootstrapMakstud<-BootChainLadder(Makstud)

#Leitakse Bootstrap ahel-redel meetodi hinnang toimunud kahjude
kolmnurga põhjal
BootstrapToimunud<-BootChainLadder(Toimunud)
```

Lisa 2: funktsiooni MackChainLadder dokumentatsioon

Selle lisa jaoks kasutati allikat Gesmann (2017).

Funktsiooni MackChainLadder kuju on

```
MackChainLadder(Triangle, weights = 1, alpha=1, est.sigma="log-linear",
tail=FALSE, tail.se=NULL, tail.sigma=NULL, mse.method="Mack"),
```

kus vajadusel tuleb muuta argumentide väärtusi. Argumentide tähendused on järgnevad:

1. Argumendi `Triangle` väärtuseks tuleb anda kumulatiivne nõuete arengukolmnurk, kus veerud on arenguperioodid (vajadusel tuleb kasutada transponeerimist).

2. Argument `weights` määrab kaalusid. MackChainLadder eeldab peatüki „Jaotusvaba ahel-redel meetodi eeldused" kolmanda eelduse asemel, et seal toodud dispersioon avaldub hoopis kujul $\frac{\sigma_j^2}{w_{i,j} \cdot C_{i,j}^{\alpha}}$. Kaaludeks nimetataksegi parameetrit $w_{i,j}$, parameetri α tähendus on selgitatud järgmises punktis. Vaikimisi on kõik kolmnurga väärtuste kaalud seatud üheks. Kui on soov seda muuta, tuleb ette anda maatriks, mille elemendid on arvud lõigust [0; 1] ja mis on samade mõõtmetega, kui argument `Triangle`.

3. Argument `alpha`, mille võimalikud väärtused on 0, 1 ja 2 määrab, kuidas leitakse arengufaktoreid. Vaikimisi on antud kõikide arenguperioodide jaoks väärtus 1. Kui alpha=0, siis kasutatakse arengufaktorina individuaalsete arengufaktorite keskmist. Kui alpha=1, siis kasutatakse arengufaktorite leidmiseks esimeses peatükis antud arengufaktorite valemit. Kui alpha=2, siis kasutatakse arengufaktorina hinnangut β-le, lineaarregressiooni mudeli $C_{i,j+1} = \beta \cdot C_{i,j}$ kaudu, kus vabaliige on 0.

4. Argument `est.sigma` määrab, kuidas hinnata arenguperioodi $J-1$ individuaalsete arengufaktorite hajuvust. Vaikimisi on väärtuseks „log-linear", mis tähistab loglineaarset mudelit. Kui argumendi väärtuseks anda „Mack", siis kasutatakse Macki lähendit, mille kohta saab täpsemalt lugeda allikast Mack (1999). Argumendi väärtuseks võib anda ka arvu.

5. Argumendi `tail` väärtuseks võib olla arv või TRUE (Tõene) või FALSE (Väär). Kui argumendi väärtuseks on FALSE, siis ei kasutata sabafaktorit. Kui argumendi väärtuseks on TRUE, siis hinnatakse faktor log(arengufaktorid $-$ 1)-le lineaarset mudelit koostades. Kui argumendi väärtuseks on arv, siis kasutatakse tegurina hoopis seda.

6. Argument `tail.se` määrab, kuidas hinnatakse sabafaktori standardviga (seda on vaja vaid siis, kui sabafaktor on suurem ühest). Vaikimisi on väärtuseks NULL, sellisel juhul hinnatakse sabafaktor standardhälvet log-lineaarset mudelit kasutades. Kui argumendi väärtuseks on arv, siis kasutatakse hinnanguna hoopis seda.

7. Argument `tail.sigma` määrab, kuidas hinnata individuaalset sabafaktori hajuvust (ka seda on vaja vaid siis, kui sabafaktor on suurem kui üks). Vaikimisi on väärtuseks NULL. Sellisel juhul hinnatakse individuaalse sabafaktori standardhälvet log-lineaarset mudelit kasutades. Kui argumendi väärtuseks on arv, siis kasutatakse hinnanguna hoopis seda.

8. Argument `mse.method` määrab, mis meetodit kasutatakse ruutkeskmise vea hindamiseks, võimalikud väärtused on „Mack“ ja „Independence“.

Funktsioon MackChainLadder annab tulemuseks listi elementidega, mida saab välja kutsuda kujul funktsioon$elemendi nimi, näiteks MackChainLadder(Kolmnurk)$FullTriangle.

1. Element `call` tagastab käsu, millega see tulemus saadi.

2. Element `Triangle` tagastab funktsiooni sisendina antud kumulatiivse kolmnurga.

3. Element `FullTriangle` tagastab algse ülemise kolmnurga koos alumise kolmnurga hinnangutega.

4. Element `Models` tagastab iga arenguperioodi jaoks lineaarregressiooni mudeli.

5. Element `f` tagastab arengufaktorite hinnangud.

6. Element `f.se` tagastab arengufaktorite hinnangute standardvead.

7. Element `F.se` tagastab tegelike arengufaktorite standardvea (ruutjuure peatüki „Jaotusvaba ahel-redel meetodi eeldused“ loetelu kolmandas punktis esitatud dispersioonist) .

8. Element `sigma` tagastab sigma parameetri, mida on kasutatud peatükis "Jaotusvaba ahel-redel meetodi eeldused".
9. Element `Mack.ProcessRisk` tagastab alumise kolmnurga hinnangute varieeruvuse, mida ei seleta arengufaktorite varieeruvus (protsessi risk).
10. Element `Mack.ParameterRisk` tagastab alumise kolmnurga hinnangute varieeruvuse, mida seletab arengufaktorite varieeruvus (parameetri risk).
11. Element `Mack.S.E` tagastab alumise kolmnurga hinnangute koguvarieeruvuse:

$$\text{Mack.S.E}^2 = \text{Mack.ProcessRisk}^2 + \text{Mack.ParameterRisk}^2.$$

12. Element `Total.Mack.S.E` tagastab alumise kolmnurga hinnangute koguvarieeruvuse kõikide toimumisaastate peale kokku.
13. Element `Total.ProcessRisk` tagastab vektori, kus on protsessi riski hinnangud arenguperioodide kaupa.
14. Element `Total.ParameterRisk` tagastab vektori, kus on parameetri riski hinnangud arenguperioodide kaupa.
15. Element `weights` tagastab kasutatud kaalud.
16. Element `alpha` tagastab kasutatud alfa parameetrid.
17. Element `tail` tagastab kasutatud sabafaktori. Kui funktsiooni argumentides oli antud „tail=TRUE“, siis tagastatakse ka lineaarne mudel, mille abil sabafaktorit hinnati.

Lisa 3: funktsiooni MunichChainLadder dokumentatsioon

Selle lisa jaoks kasutati allikat Gesmann (2017).

Funktisooni MunichChainLadder kuju on

```
MunichChainLadder(Paid, Incurred, est.sigmaP = "log-linear",
est.sigmaI = "log-linear", tailP=FALSE, tailI=FALSE),
```

kus vajadusel tuleb muuta argumentide väärtusi. Argumentide tähendused on järgnevad:

1. Argumendi `Paid` väärtuseks tuleb anda kumulatiivne makstud kahjude arengukolmnurk, kus veerud on arenguperioodid (vajadusel tuleb kasutada transponeerimist).

2. Argumendi `Incurred` väärtuseks tuleb anda kumulatiivne toimunud kahjude arengukolmnurk, kus veerud on arenguperioodid (vajadusel tuleb kasutada transponeerimist).

3. Argument `est.sigmaP` määrab, kuidas hinnata makstud kahjude puhul arenguperioodi J-1 individuaalsete arengufaktorite hajuvust. See väärtus antakse edasi MackChainLadder funktsioonile.

4. Argument `est.sigmaI` määrab, kuidas hinnata toimunud kahjude puhul arenguperioodi J-1 individuaalsete arengufaktorite hajuvust. See väärtus antakse edasi MackChainLadder funktsioonile.

5. Argument `tailP` määrab, kuidas hinnatakse makstud kahjude sabafaktorit. See väärtus antakse edasi MackChainLadder funktsioonile.

6. Argument `tailI` määrab, kuidas hinnatakse toimunud kahjude sabafaktorit. See väärtus antakse edasi MackChainLadder funktsioonile.

Funktsioon MunichChainLadder annab tulemuseks listi elementidega, mida saab välja kutsuda kujul funktsioon$elemendi nimi, näiteks
MunichChainLadder(Makstud, Toimunud)$MCLPaid.

1. Element `call` tagastab käsu, millega see tulemus saadi.
2. Element `Paid` tagastab funktsiooni sisendina antud makstud kahjude kumulatiivse kolmnurga.
3. Element `Incurred` tagastab funktsiooni sisendina antud toimunud kahjude kumulatiivse kolmnurga.
4. Element `MCLPaid` tagastab makstud kahjude algse ülemise kolmnurga koos alumise kolmnurga Müncheni ahel-redel meetodi hinnangutega.
5. Element `MCLIncurred` tagastab toimunud kahjude algse ülemise kolmnurga koos alumise kolmnurga Müncheni ahel-redel meetodi hinnangutega.
6. Element `MackPaid` tagastab makstud kahjude kolmnurga MackChainLadder funktsiooni väljundi.
7. ELement `MackIncurred` tagastab toimunud kahjude kolmnurga MackChainLadder funktsiooni väljundi.
8. Element `PaidResiduals` tagastab makstud kahjude jäägid $\widehat{Res}(P_{i,j})$.
9. Element `IncurredResiduals` tagastab toimunud kahjude jäägid $\widehat{Res}(I_{i,j})$.
10. Element `QResiduals` tagastab P/I suhte jäägid $\widehat{Res}(\frac{P_{i,j}}{I_{i,j}})$.
11. Element `QinverseResiduals` tagastab I/P suhte jäägid $\widehat{Res}(\frac{I_{i,j}}{P_{i,j}})$.
12. Element `lambdaP` tagastab makstud kahjude kolmnurga jaoks korrelatsioonikordaja $\widehat{\lambda^P}$.
13. Element `lambdaI` tagastab toimunud kahjude kolmnurga jaoks korrelatsioonikordaja $\widehat{\lambda^I}$.
14. Element `qinverse.f` tagastab I/P suhte kolmnurga arengufaktorid.
15. Element `rhoP.sigma` tagastab esimeses peatükis avaldatud $\widehat{\rho^P}$.
16. Element `q.f` tagastab P/I suhte kolmnurga arengufaktorid.
17. Element `rhoI.sigma` tagastab esimeses peatükis avaldatud $\widehat{\rho^I}$.

Lisa 4: funktsiooni BootChainLadder dokumentatsioon

Selle lisa jaoks kasutati allikat Gesmann (2017).

Funktsiooni BootChainLadder kuju on

```
BootChainLadder(Triangle, R = 999, process.distr=c("gamma", "od.pois")),
```

kus vajadusel tuleb muuta argumentide väärtusi. Argumentide tähendused on järgnevad:

1. Argumendi `Triangle` väärtuseks tuleb anda kumulatiivne nõuete arengukolmnurk, kus veerud on arenguperioodid (vajadusel tuleb kasutada transponeerimist).

2. Argument `R` määrab *bootstrap* tsükli korduste arvu.

3. Argument `process.distr` määrab, millist protsessi jaotust eeldatakse. Vaikimisi on väärtuseks "gamma", mis tähistab gammajaotust, teine võimalus on "od.pois", mis tähistab ülehajuvusega Poissoni mudelit.

Funktsioon BootChainLadder annab tulemuseks listi elementidega, mida saab välja kutsuda kujul funktsioon$elemendi nimi, näiteks BootChainLadder(Makstud)$IBNR.Totals.

1. Element `call` tagastab käsu, millega see tulemus saadi.

2. Element `Triangle` tagastab funktsiooni sisendina antud kumulatiivse kolmnurga.

3. Element `f` tagastab arengufaktorid.

4. Element `simClaims` tagastab simuleeritud nõuete massiivi mõõtmetega $I \times J \times R$.

5. Element `IBNR.ByOrigin` tagastab massiivi mõõtmetega $I \times 1 \times R$, kus on simulatsioonide põhjal arvutatud reservide hinnangud toimumisaastate kaupa.

6. Element `IBNR.Triangles` tagastab massiivi mõõtmetega $I \times J \times R$, kus on simulatsioonide põhjal arvutatud alumiste kolmnurkade hinnangud.

7. Element `IBNR.Totals` tagastab vektori kogureservide hinnangutega.

8. Element `ChainLadder.Residuals` tagastab korrigeeritud Pearsoni jäägid.

9. Element `process.distr` tagastab eeldatud protsessi jaotuse.

10. Element `R` tagastab *bootstrap* tsükli korduste arvu.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Linnet Puskar,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Kindlustusreservide hindamine statistikatarkvara R paketiga ChainLadder", mille juhendaja on Meelis Käärik,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 08.05.2018