TARTU ÜLIKOOL

MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND

Matemaatilise statistika instituut

Madli Rööp

# Mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse parametriseerimisest

Magistritöö

matemaatilise statistika erialal (30 EAP)

Juhendaja: Meelis Käärik, PhD

TARTU 2015

## Mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse parametriseerimisest

Käesoleva magistritöö eesmärk on uurida ja võrrelda mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse parametrisatsioone ja parameetrite omadusi. Selgitatakse millistel tingimustel on alternatiivsed parametrisatsioonid ekvivalentsed üldtuntud parametrisatsioonidega ja tuuakse välja parametrisatsioonide puudused ja eelised. Lisaks uuritakse parameetrite geomeetrilist tõlgendust ja visualiseeritakse $k$-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse moodustumist $k+1$-mõõtmelises ruumis. Aluseks on võetud Azzalini ja Dalla Valle poolt 1996. aastal esitatud mitmemõõtmelise asümmeetriline normaaljaotuse definitsioon, samuti Käärik jt (2015) poolt artiklis „On parametrization of multivariate skew-normal distribution" esitatud tulemused.

**Märksõnad:** *mitmemõõtmeline asümmeetriline normaaljaotus, asümmeetrilise normaaljaotuse parametrisatsioon, geomeetriline interpretatsioon*

## On Parametrization of Multivariate Skew-Normal Distribution

The aim of this master's thesis is to study and compare parametrizations for multivariate skew-normal distribution and the properties of those parameters. The restrictions, under which the alternative parametrizations are equivalent to well-known parametrizations, are explained along with the advantages and disadvantages of each parametrization. The visualization of construction of $k$-variate skew-normal distribution in $k+1$-dimensional space and geometrical interpretation of parameters is also given. In this thesis we refer to the multivariate skew-normal distribution defined by Azzalini and Dalla Valle (1996) and the results introduced by Käärik et al. (2015) in "On parametrization of multivariate skew-normal distribution".

**Keywords:** *multivariate skew-normal distribution, parametrization of skew-normal distribution, geometrical interpretation*

# Sisukord

# Sissejuhatus

Asümmeetriline normaaljaotus on normaaljaotuse üldistus, kus jaotuse asümmeetriat reguleerib lisaparameeter, mida nimetatakse kujuparameetriks (ka asümmeetriaparameetriks). Mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse defineerisid Azzalini ja Dalla Valle (1996). Kuigi antud definitsioon esitati $\{\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\lambda}\}$-parametriseeringus, kasutatakse rohkem $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametriseeringut. Nimelt, on $\boldsymbol{\Psi}$ ja $\boldsymbol{\lambda}$ parameetrite $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\alpha}$ funktsioonid ning Azzalini ja Capitanio (1999) näitasid, et need parametrisatsioonid on ekvivalentsed. $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsiooni kasuks räägib see, et asümmeetrilise normaaljaotuse tihedusfunktsioon on esitatud otseselt $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\alpha}$, mitte $\boldsymbol{\Psi}$ ja $\boldsymbol{\lambda}$ kaudu. Sel parametrisatsioonil on veel teisigi eeliseid.

Peale $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsiooni võiks kaaluda ka $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$- ja $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda}\}$-parametrisatsiooni. Käärik jt (2015) näitasid, et teatud tingimustel on need parametrisatsioonid ekvivalentsed $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$- ja $\{\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\lambda}\}$-parametrisatsiooniga. Paraku ei ole ühest vastust, milline parametrisatsioon on kõige parem. Selle valikul tuleks pigem lähtuda konkreetsest probleemist. Käesoleva magistritöö eesmärgiks on võrrelda erinevate parametrisatsioonide omadusi ja uurida parameetritevahelisi seoseid.

Magistritöö on jagatud neljaks peatükiks. Esimeses peatükis tutvustatakse ühemõõtmelist asümmeetrilist normaaljaotust ja selle mitmemõõtmelist üldistust, mille defineerisid Azzalini ja Dalla Valle (1996). Teises peatükis kirjeldatakse pikemalt parameetreid $\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{\Delta}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\Psi}$ ning tuletatakse nende parameetrite vahel kõik olulised seosed, mille esitasid Käärik jt (2015). Kolmandas peatükis tõestatakse mõned positiivselt määratud maatriksi omadused ja hiljem näidatakse nende abil, et $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$- ja $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda}\}$-

parametrisatsioonid on teatud tingimustel ekvivalentsed $\{\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\lambda}\}$- ja $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsioonidega. Lisaks tuuakse välja $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-, $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$- ja $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda}\}$-parametrisatsioonide eelised ja puudused. Neljandas peatükis tutvustatakse mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega juhusliku suuruse ühte tinglikku esitust mitmemõõtmelise normaaljaotuse kaudu ja püütakse selle abil parameetreid geomeetriliselt interpreteerida. Sellest esitusest lähtuvalt näidatakse, milline sirge, tasand või hüpertasand määrab vastavalt kahemõõtmelises, kolmemõõtmelises või $k$+1-mõõtmelises ruumis vastavalt 1-mõõtmelise, 2-mõõtmelise või $k$-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse.

Magistritöös esitatud illustratsioonide tegemiseks on kasutatud statistikatarkvara R. Lisamooduli *"sn"* rakendamiseks on kasutatud R versiooni 2.14.2, sest uuemate versioonide puhul ilmnes probleeme. Töö on vormistatud tekstitöötlusprogrammiga LaTeX. Tõestuse lõppu tähistatakse siin sümboliga $\square$.

Autor tänab juhendajat Meelis Käärikut asjatundlikke nõuannete ja sujuva koostöö eest.

# 1 Mitmemõõtmeline asümmeetriline normaaljaotus

Asümmeetriline normaaljaotus on normaaljaotuse üldistus, kus jaotuse asümmeetriat reguleerib lisaparameeter, mida kutsutakse kujuparameetriks (*shape parameter*) ja ka asümmeetriaparameetriks (*skewness parameter*). Kuigi ühe- ja mitmemõõtmeliste asümmeetriliste jaotuste definitsioone on mitmeid, vaatame antud töös Azzalini (1985) poolt sõnastatud ühemõõtmelist asümmeetrilist normaaljaotust ja selle mitmemõõtmelist üldistust, mille formuleerisid Azzalini ja Dalla Valle (1996).

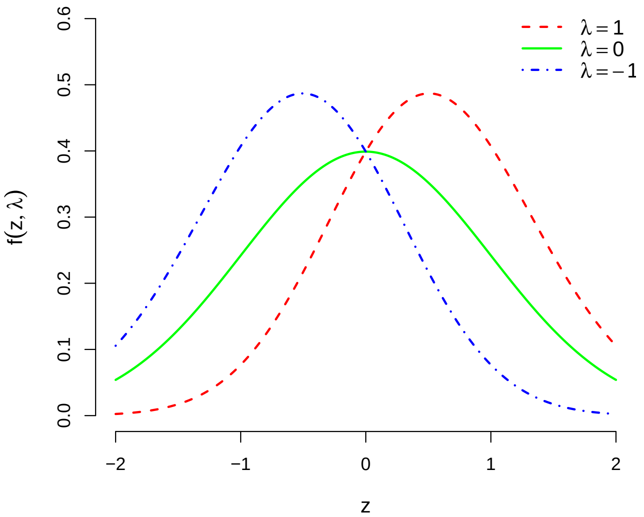
Azzalini (1985) defineeris ühemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse järgmiselt.

**Definitsioon 1.1** (Azzalini (1985))**.** *Me ütleme, et juhuslik suurus* Z *on (ühemõõtmelise) asümmeetrilise normaaljaotusega parameetriga* $\lambda$ *ja kirjutame* $Z \sim SN(\lambda)$*, kui ta tihedusfunktsioon avaldub kujul*

$$f(z;\lambda) = 2\phi(z)\Phi(\lambda z), z \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

*kus* $\phi$ *on standardse normaaljaotuse tihedusfunktsioon ja* $\Phi$ *standardse normaaljaotuse jaotusfunktsioon.*

Parameetrit $\lambda$ nimetatakse asümmeetriaparameetriks. Kui $\lambda > 0$ on jaotus paremale kaldu, kui $\lambda < 0$ on jaotus vasakule kaldu (vaata joonist 1.1).




Joonis 1.1: Ühemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse tihedusfunktsioon erinevate asümmeetriaparameetri väärtuste korral

Mida suurem on $\lambda$ absoluutväärtus, seda ebasümmeetrilisem on tihedusfunktsioon. Kui $\lambda = 0$, siis tihedus (1.1) taandub standardse normaaljaotuse tihedusfunktsiooni kujule:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp{(-\frac{z^2}{2})}.$$

Kui $\lambda = 1$, siis tihedus (1.1) taandub kujule

$$f(z) = 2\phi(z)\Phi(z) = [\Phi^2(z)]',$$

mis on sama, mis juhusliku suuruse $M = \max(X_1, X_2)$ tihedusfunktsioon, kus $X_1$ ja $X_2$ on standardse normaaljaotusega juhuslikud suurused. Ja kui

$\lambda = -1$, siis tiheduse (1.1) võib kirjutada kujul

$$f(z) = 2\phi(z)\Phi(-z) = 2\phi(z)(1 - \Phi(z)) = 2\phi(z) - 2\phi(z)\Phi(z) = 2\phi(z) - [\Phi^2(z)]'.$$

Erijuhul, kui $\lambda \to \infty$, saame nn pool-normaalse jaotuse: $|X|$ on pool-normaalse jaotusega, kui $X \sim N(0, \sigma^2)$ (meil $\sigma = 1$).

## 1.1 $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsioon

Azzalini (1985) laiendas definitsiooni 1.1 ka mitmemõõtmelisele jaotusele, kuid sellel polnud erilist otstarvet, kuna marginaalid jäid sümmeetriliseks. Et huvi pakkus just asümmeetriliste marginaalidega mitmemõõtmeline asümmeetriline normaaljaotus, formuleerisid Azzalini ja Dalla Valle (1996) asümmeetriliste marginaalidega mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse järgmiselt.

**Definitsioon 1.2** (Azzalini ja Dalla Valle (1996))**.** *Me ütleme, et juhuslik vektor $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_k)^T$ on k-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega ja kirjutame $\boldsymbol{Z} \sim SN(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\lambda})$, kui ta tihedusfunktsioon avaldub kujul*

$$f(\boldsymbol{z}; \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\lambda}) = 2\phi_k(\boldsymbol{z}; \boldsymbol{\Omega})\Phi(\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^k, \tag{1.2}$$

*kus*

- *$\phi_k$ on k-mõõtmelise standardsete marginaalidega ja korrelatsioonimaatriksiga $\boldsymbol{\Omega}$ normaaljaotuse tihedusfunktsioon ning $\Phi$ on ühemõõtmelise standardse normaaljaotuse jaotusfunktsioon;*
- *$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)^T$ on marginaalsete asümmeetriaparameetrite vektor ja*

- $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\lambda}^T}{\sqrt{1+\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\lambda}}}$ *on samuti teatav asümmeetriaparameeter,*
  *kus*

  $\boldsymbol{\Delta} = diag(\sqrt{1-\delta_1^2}, \ldots, \sqrt{1-\delta_k^2})$ *on abimaatriks, mis seob asümmeetriaparameetreid* $\boldsymbol{\lambda}$ *ja* $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_k)^T$*,*

  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^T)\boldsymbol{\Delta}$ *on teatud korrelatsioonimaatriks ja*

  $\delta_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{1+\lambda_i^2}}, i = 1, \cdots, k.$

Kuigi Azzalini ja Dalla Valla poolt defineeritud jaotust tuvastatakse parameetrite $\boldsymbol{\Psi}$ ja $\boldsymbol{\lambda}$ järgi, on mõlemad parameetrid tegelikult $\boldsymbol{\alpha}$ ja $\boldsymbol{\Omega}$ funktsioonid. Azzalini ja Capitanio (1999) näitasid, et $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$ ja $\{\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\lambda}\}$ parametrisatsioonid on ekvivalentsed. Kuna tihedus (1.2) on esitatud otse $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\alpha}$ kaudu, eelistatakse sageli pigem $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsiooni. Sel parametrisatsioonil on teisigi eeliseid, näiteks on $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\alpha}$ suurima tõepära hinnangud kergesti leitavad.

Et pisut paremini mõista definitsioonis 1.2 esitatud parameetrite tähendust, tasub teada, kuidas sellise kujuni üldse jõuti. Azzalini ja Dalla Valle (1996) konstrueerisid mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega juhusliku suuruse $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_k)^T$ marginaalide

$$Z_j = \delta_j|X_0| + \sqrt{1-\delta_j^2}X_j, \; j = 1, \ldots, k, \tag{1.3}$$

abil, kus juhuslikud suurused $X_0 \sim N(0,1)$ ja $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\Psi}} = (X_1, \ldots, X_k)^T \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Psi})$ on sõltumatud ja $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ kuuluvad vahemikku $(-1, 1)$. Edasist arvutuskäiku, kuidas jõuda vektori $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_k)^T$ jaotuse tiheduse esituseni kujul (1.2), me siin läbi ei vaata. Lugeja võib selle leida Azzalini ja Dalla Valle (1996) artikli lisast. Antud konstruktsiooni põhjal võime aga öelda, et parameetrid $\boldsymbol{\Psi}$ ja $\boldsymbol{\delta}$ on otseselt seotud mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse tekkemehhanismiga.

Ka korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{\Omega}$ näol on tegu asümmeetrilist normaaljaotust genereeriva jaotuse korrelatsioonimaatriksiga. Azzalini ja Dalla Valle (1996) märkisid, et kui meil on $k$-mõõtmeline juhuslik suurus $\boldsymbol{X} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega})$ ja ühemõõtmeline juhuslik suurus $X_0 \sim N(0,1)$ ja nendevaheliste korrelatsioonide vektor $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_k)^T$ selline, et kehtib

$$\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\delta} < 1,$$

siis juhuslik suurus

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \mid X_0 > 0 \tag{1.4}$$

on asümmeetrilise normaaljaotusega $\boldsymbol{Z} \sim SN(\mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$. Lisaks näeme, et vektorit $\boldsymbol{\delta}$ võib tõlgendada ka kui korrelatsioonivektorit. Antud töö hilisemas osas vaatame veel üht asümmeetrilise normaaljaotusega juhusliku suuruse tinglikku esitust normaaljaotusega juhusliku suuruse kaudu (vaata peatükk 4, lause 4.1 valem (4.1)).

Niisiis, definitsioonist 1.2 tulenevalt pakuvad meile käesolevas töös huvi kolm asümmeetriaparameetrit – $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\alpha}$ ja $\boldsymbol{\delta}$, ja kaks korrelatsioonimaatriksit – $\mathbf{\Omega}$ ja $\mathbf{\Psi}$. Kolmest asümmeetriaparameetrist kõige selgemini mõistetav on asümmeetriaparameeter $\boldsymbol{\lambda}$, mille komponentideks on marginaalsed asümmeetriakordajad $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Asümmeetriaparameeter $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_k)^T$, kus $\delta_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{1+\lambda_i^2}}$, $i = 1, \dots, k$ on tegelikult samuti puhtalt marginaalsete asümmeetriavektorite kaudu leitav. Kolmas kujuparameeter, millega võiks mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse asümmeetriat kirjeldada, on vektor $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T$. Paraku ei sõltu $\boldsymbol{\alpha}$ vaid marginaalsetest asümmeetriakordajatest vaid ka korrelatsioonimaatriksist $\boldsymbol{\Omega}$, mis teeb $\boldsymbol{\alpha}$ tähenduse mõistmise üsna keerukaks.

Korrelatsioonimaatriksid $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\Psi}$ ei ole küll $\boldsymbol{Z}$ jaotuse korrelatsioonimaatriks, kuid struktuurilt siiski korrelatsioonimaatriksid. Mõlemad on seotud asümmeetrilise normaaljaotuse tekkemehhanismiga. Küll aga on vektori $\boldsymbol{Z}$ korrelatsioonimaatriks $\mathbf{R}$ avaldatav vektori $\boldsymbol{\delta}$ ja maatriksi $\boldsymbol{\Psi}$ või $\boldsymbol{\Omega}$ kaudu järgmiselt (Azzalini ja Dalla Valle, 1996):

$$\rho_{ij} = \frac{\psi_{ij}\sqrt{(1-\delta_i^2)(1-\delta_j^2)} + \delta_i\delta_j(1-\frac{2}{\pi})}{\sqrt{(1-\frac{2\delta_i^2}{\pi})(1-\frac{2\delta_j^2}{\pi})}} = \frac{\omega_{ij} - \frac{2\delta_i\delta_j}{\pi}}{\sqrt{(1-\frac{2\delta_i^2}{\pi})(1-\frac{2\delta_j^2}{\pi})}},$$

kus

- $\rho_{ij} = corr(Z_i, Z_j), i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, k$ on $Z_i$ ja $Z_j$ vaheline korrelatsioon, $\mathbf{R} = (\rho_{ij})$;
- $\boldsymbol{\Psi} = (\psi_{ij})$ ;
- $\boldsymbol{\Omega} = (\omega_{ij})$;
- $\delta_i, i = 1, \ldots, k$ on vektori $\boldsymbol{\delta}$ $i$. komponent;
- $\pi$ on Archimedese konstant, $\pi \approx 3.14159$.

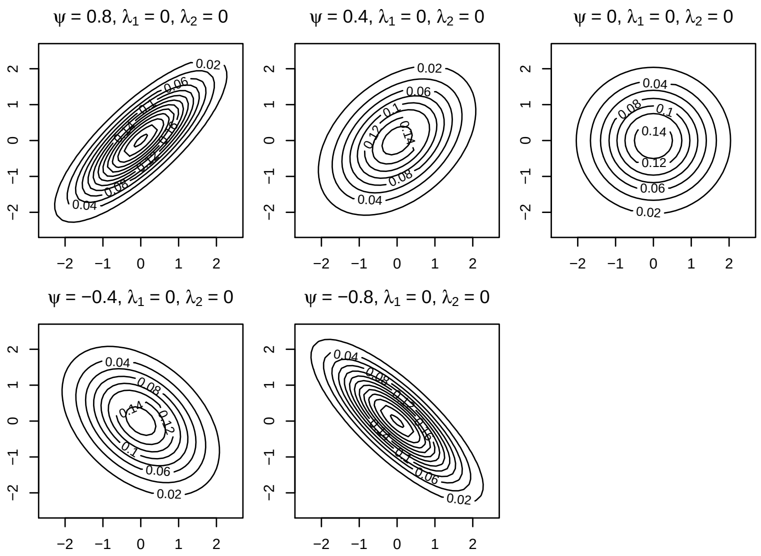
Käesolevas töös korrelatsioonimaatriksit $\mathbf{R}$ lähemalt ei vaadelda.

Järgmises peatükis uurime lähemalt parameetreid $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\Psi}$, $\boldsymbol{\Omega}$ ja nendevahelisi seoseid. Kuigi maatriksit $\boldsymbol{\Delta}$ ei saa üheski asümmeetrilise normaaljaotuse parametrisatsioonis kasutada, uurime ka selle maatriksi omadusi ja seoseid teiste parameetritega, sest see abimaatriks võimaldab meil lihtsalt üle minna parameetrilt $\boldsymbol{\lambda}$ parameetrile $\boldsymbol{\delta}$ ja vastupidi.

## 1.2 Kahemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse näited

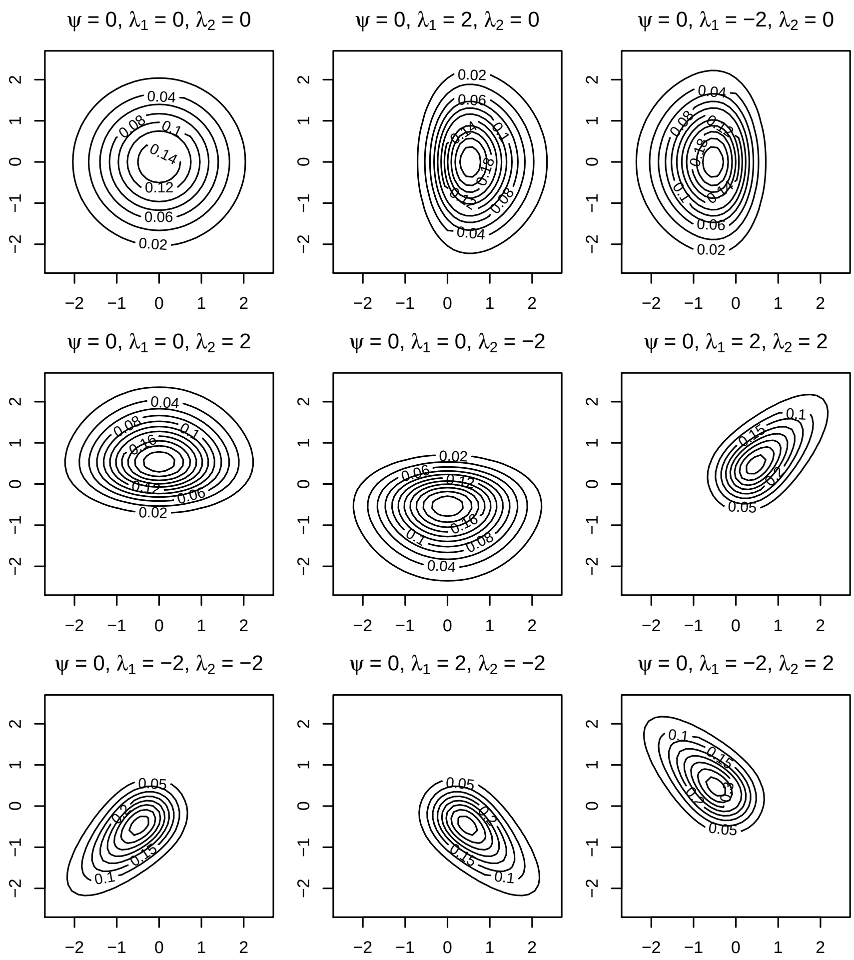
Kahemõõtmelisel juhul ei ole jaotuse ebasümmeetria nii kergesti mõistetav, kui ühemõõtmelisel juhul. Sest lisaks asümmeetriaparameetrile muudab ühisjaotuse kuju ka korrelatsioonimaatriks. Vaatame esmalt, kuidas muutub kahemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse tihedus parameetrite väärtuste muutudes $\{\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\lambda}\}$-parametrisatsiooni korral ja seejärel $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsiooni korral.

Joonisel 1.2 on kujutatud kahemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse tiheduse samakõrgusjooned juhtudel, kui $\boldsymbol{\Psi}$ peadiagonaaliväälise elemendi $\psi$ väärtus on kas 0.8, 0.4, 0, -0.4 või -0.8 ja marginaalsete asümmeetriaparameetrite $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ väärtused on nullid. Ehk me vaatame kahemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse erijuhtu - kahemõõtmelist normaaljaotust. Kui $\psi = 0$, on tegu standardse kahemõõtmelise normaaljaotusega. Nagu jooniselt näha võib, muudab $\psi$ väärtus kahemõõtmelist ühisjaotust nii nagu lineaarne korrelatsioon ikka - korrelatsiooni tugevuse kasvades venitatakse ühisjaotuse tihedust lähemale kas tõusvale või langevale joonele.



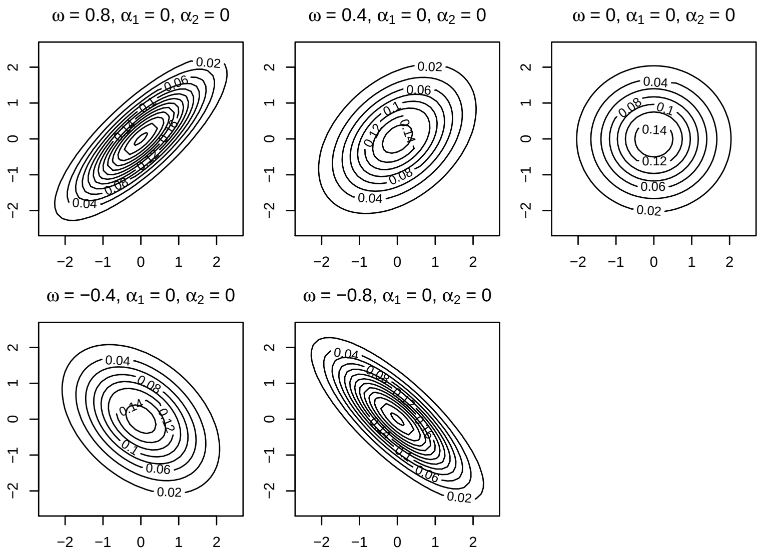

Joonis 1.2: Kahemõõtmelise normaaljaotuse tihedusfunktsioonide näited erineva $\psi$ väärtuse korral korral

Marginaalsete asümmeetriaparameetrite $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ mõju ühisjaotuse kujule erineb $\psi$ omast (vaata joonist 1.3). Kui $\psi$ tugevuse kasvades liigub ühisjaotuse tihedus lähemale kas tõusvale või langevale joonele, siis marginaalsed asümmeetriaparameetrid $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ lükkavad tihedust kas ühele või teisele poole kaldu (vertikaalselt ja/või horisontaalselt).



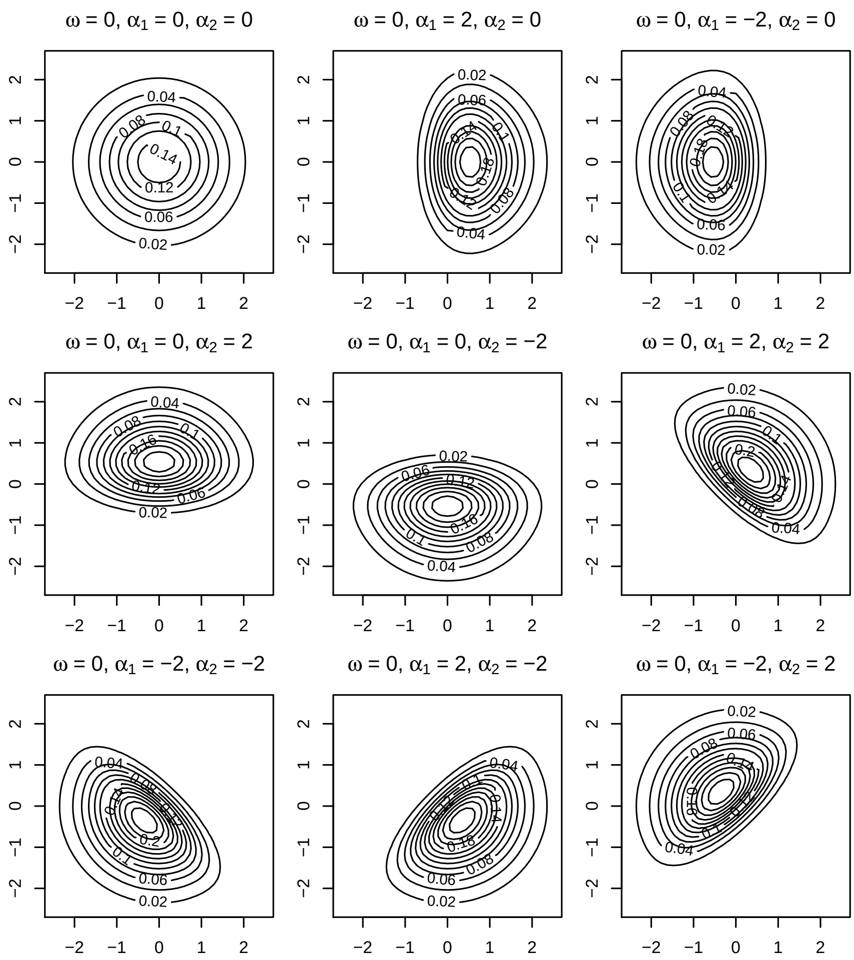

Joonis 1.3: Kahemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse tihedusfunktsioonide näited, kui $\psi = 0$, aga marginaalsete asümmeetriaparameetrite $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ väärtused muutuvad

Vaatame nüüd, kuidas käitub kahemõõtmelise asümmeetriline normaaljaotuse tihedusfunktsioon parameetrite muutudes $\{\mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsiooni korral. Joonisel 1.4 ühisjaotuse tihedusfunktsioon erinevate korrelatsioonimaatriksite $\mathbf{\Omega}$ korral, kui asümmeetriaparameeter $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, st $\alpha_1 = 0$ ja $\alpha_2 = 0$. Näeme, et $\mathbf{\Omega}$ muudab samuti ühisjaotuse tihedust nagu tavaline lineaarne korrelatsioonimaatriks.




Joonis 1.4: Kahemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse tihedusfunktsioonide näited erinevate $\omega$ väärtuste korral, kui $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$

Joonisel 1.5 on toodud tihedusfunktsiooni samakõrgusjooned erinevate $\alpha_1$ ja $\alpha_2$ väärtuste korral, kui $\omega = 0$. Tähelepanu väärib see, et vektori $\boldsymbol{\alpha}$ komponentide väärtused mõjutavad tihedusfunktsiooni kuju erinevalt, kui $\boldsymbol{\lambda}$ komponentide väärtused (võrdle omavahel jooniseid 1.3 ja 1.5).




Joonis 1.5: Kahemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse tihedusfunktsioonide näited erinevate $\boldsymbol{\alpha}$ väärtuste korral, kui $\omega = 0$

Parema ettekujutuse asümmeetrilise normaaljaotuse tiheduse muutumisest parameetrite väärtuste muutudes saab, kui kasutada Lisas A toodud statistikatarkvara R koode. Sealt leiab kahemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse tiheduse (animeeritava) kontuurgraafiku koodi nii $\{\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\lambda}\}$- ja $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsioonide korral, kui ka peatükis 3 esitatud $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$- ja $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsioonide korral.

# 2 Parameetrite vahelised seosed

Käesolevas peatükis vaatleme lähemalt definitsiooni 1.2 juures esitatud parameetreid $\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\Delta}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\Psi}$. Tuletame kõik parameetrite vahelised seosed, mille esitasid Käärik jt (2015).

## 2.1 Vektor $\boldsymbol{\delta}$

Vektor $\boldsymbol{\delta}$ on üks võimalikest parameetritest, mis võiks sobida kirjeldama ebasümmeetriat Azzalini ja Dalla Valle (1996) mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuses. Selle asümmeetriaparameetri $\boldsymbol{\delta}$ üheks heaks omaduseks on see, et ta on otseselt seotud marginaalsete asümmeetriaparameetritega. Nimelt, definitsiooni 1.2 järgi

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \\ \vdots \\ \frac{\lambda_k}{\sqrt{1+\lambda_k^2}} \end{pmatrix}.$$

Paneme tähele, et $\forall\ i = 1, \ldots, k$ korral

$$\delta_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{1+\lambda_i^2}} \Leftrightarrow \delta_i^2 = \frac{\lambda_i^2}{1+\lambda_i^2} = \frac{(1+\lambda_i^2)-1}{1+\lambda_i^2} = 1 - \frac{1}{1+\lambda_i^2}.$$

Kuna $\forall\ i = 1, \ldots, k$ korral

$$0 < \frac{1}{1+\lambda_i^2} \leq 1,$$

siis

$$0 \leq \delta_i^2 = 1 - \frac{1}{1+\lambda_i^2} < 1, \tag{2.1}$$

millest

$$-1 < \delta_i < 1.$$

Seega vektori $\boldsymbol{\delta}$ komponendid jäävad -1 ja 1 vahele. Mis tähendab, et ei teki vastuolu, varem esitatud väitega, et vektorit $\boldsymbol{\delta}$ võib tõlgendada kui korrelatsioonivektorit (vaata alapeatükis 1.1 esitatud juhusliku suuruse $\boldsymbol{Z}$ tingliku esitust (1.4)).

Vektori $\boldsymbol{\delta}$ võib kirja panna kui $\boldsymbol{\Delta}$ ja $\boldsymbol{\lambda}$ funktsiooni:

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\lambda}. \tag{2.2}$$

Antud seos tuleneb definitsioonist 1.2:

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \\ \vdots \\ \frac{\lambda_k}{\sqrt{1+\lambda_k^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{1-\frac{\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\frac{\lambda_2^2}{1+\lambda_2^2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{1-\frac{\lambda_k^2}{1+\lambda_k^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{1-\delta_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\delta_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{1-\delta_k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Delta\lambda}$$

Lisaks avaldub $\boldsymbol{\delta}$ maatriksi $\boldsymbol{\Omega}$ ja vektori $\boldsymbol{\alpha}$ kaudu järgmiselt:

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\boldsymbol{\Omega\alpha}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\alpha^T\Omega a}}} \tag{2.3}$$

Vaatame, miks see nii on. Esiteks definitsiooni 1.2 põhjal

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega\alpha} &= \frac{\boldsymbol{\Delta(\Psi+\lambda\lambda^T)\Delta\Delta^{-1}\Psi^{-1}\lambda}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\lambda^T\Psi^{-1}\lambda}}} = \frac{\boldsymbol{\Delta\Psi\Psi^{-1}\lambda}+\boldsymbol{\Delta\lambda\lambda^T\Psi^{-1}\lambda}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\lambda^T\Psi^{-1}\lambda}}} = \\ &= \frac{\boldsymbol{\Delta\lambda}(1+\boldsymbol{\lambda^T\Psi^{-1}\lambda})}{\sqrt{1+\boldsymbol{\lambda^T\Psi^{-1}\lambda}}} = \boldsymbol{\Delta\lambda}\sqrt{1+\boldsymbol{\lambda^T\Psi^{-1}\lambda}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Seega viimase tulemuse ja definitsiooni 1.2 põhjal

$$\boldsymbol{\alpha^T\Omega\alpha} = \frac{\boldsymbol{\lambda^T\Psi^{-1}\Delta^{-1}\Delta\lambda}\sqrt{1+\boldsymbol{\lambda^T\Psi^{-1}\lambda}}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\lambda^T\Psi^{-1}\lambda}}} = \boldsymbol{\lambda^T\Psi^{-1}\lambda}. \tag{2.5}$$

Kokkuvõttes saame (2.4), (2.5) ja (2.2) järgi, et

$$\frac{\boldsymbol{\Omega\alpha}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\alpha^T\Omega a}}} = \frac{\boldsymbol{\Delta\lambda}\sqrt{1+\boldsymbol{\lambda^T\Psi^{-1}\lambda}}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\lambda^T\Psi^{-1}\lambda}}} = \boldsymbol{\Delta\lambda} = \boldsymbol{\delta}.$$

## 2.2 Maatriks $\boldsymbol{\Delta}$

Maatriksi $\boldsymbol{\Delta}$ näol on tegu abimaatriksiga, mis seob parameetreid $\boldsymbol{\delta}$ ja $\boldsymbol{\lambda}$ (vaata seos (2.2)), võimaldades lihtsalt $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrisatsioonilt üle minna

$\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda}\}$-parametrisatsioonile ja vastupidi. Definitsiooni 1.2 järgi teame, et

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\delta_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\delta_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{1-\delta_k^2} \end{pmatrix}.$$

Eelnevalt näitasime (vaata valemit 2.1), et $\forall\ i = 1, \cdots, k$ korral

$$0 \leq \delta_i^2 < 1.$$

Seega $\forall\ i = 1, \cdots, k$ korral

$$0 < 1 - \delta_i^2 \leq 1$$

ja

$$\sqrt{1-\delta_i^2} \in [-1, 0) \cap (0, 1]$$

Järelikult on $\boldsymbol{\Delta}$ selline diagonaalmaatriks, mille peadiagonaalil olevad elemendid jäävad -1 ja 1 vahele, kuid pole võrdsed nulliga.

Kuna $\delta_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{1+\lambda_i^2}}, i = 1, \cdots, k$, siis

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\frac{\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\frac{\lambda_2^2}{1+\lambda_2^2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{1-\frac{\lambda_k^2}{1+\lambda_k^2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+\lambda_1^2-\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1+\lambda_2^2-\lambda_2^2}{1+\lambda_2^2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\frac{1+\lambda_1^2-\lambda_k^2}{1+\lambda_k^2}} = \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_2^2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k^2}} \end{pmatrix}.$$

Lisaks, kuna $\delta_i = \dfrac{\lambda_i}{\sqrt{1+\lambda_i^2}}, i = 1, \dots, k$, siis viimasest järeldub, et

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\cdot\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_2^2}\cdot\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{\lambda_k}{\sqrt{1+\lambda_k^2}\cdot\lambda_k} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\delta_1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{\delta_2}{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{\delta_k}{\lambda_k} \end{pmatrix}.$$

Ja $\boldsymbol{\Delta}$ pöördmaatriks

$$\boldsymbol{\Delta^{-1}} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{1+\lambda_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{1+\lambda_k^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1}{\delta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{\lambda_2}{\delta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{\lambda_k}{\delta_k} \end{pmatrix}.$$

## 2.3 Vektor $\boldsymbol{\lambda}$

Teine vektor, millega Azzalini ja Dalla Valle (1996) poolt defineeritud mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse ebasümmeetriat kirjeldada võiks, on vektor $\boldsymbol{\lambda}$. Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ on asümmeetriaparameetritest kõige otsesemalt seotud marginaalsete parameetritega. Nimelt, vektori $\boldsymbol{\lambda}$ moodustavadki komponendid $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, mis on marginaalsed asümmeetriaparameetrid. Kusjuures definitsioonist 1.2 järeldub, et iga $\boldsymbol{\lambda}$ komponendi $\lambda_i, i = 1, \ldots, k$ saab avaldada vektori $\boldsymbol{\delta}$ vastava komponendi $\delta_i$ kaudu:

$$\delta_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{1+\lambda_i^2}} \Leftrightarrow \delta_i^2 = \frac{\lambda_i^2}{1+\lambda_i^2} \Leftrightarrow \delta_i^2 = \frac{(1+\lambda_i^2)-1}{1+\lambda_i^2} \Leftrightarrow \delta_i^2 = 1 - \frac{1}{1+\lambda_i^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\lambda_i^2} = 1-\delta_i^2 \Leftrightarrow 1+\lambda_i^2 = \frac{1}{1-\delta_i^2} \Leftrightarrow \lambda_i^2 = \frac{1-1+\delta_i^2}{1-\delta_i^2} \Leftrightarrow \lambda_i = \frac{\delta_i}{\sqrt{1-\delta_i^2}}.$$

Kehtib seos $\boldsymbol{\lambda}$ ja parameetrite $\boldsymbol{\delta}$ ja $\boldsymbol{\Delta}$ vahel:

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\delta},$$

mis järeldub vahetult seosest (2.2):

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\lambda} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\delta}.$$

Viimasest tulemusest ja seosest (2.3) saame:

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\delta} = \frac{\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\alpha}^{T}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\alpha}}}.$$

Seega on $\boldsymbol{\lambda}$ kirja pandav $\boldsymbol{\Delta}$, $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\alpha}$ abil:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\alpha}^{T}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\alpha}}}.$$

## 2.4 Vektor $\boldsymbol{\alpha}$

Kolmas asümmeetriaparameeter, mida võiks mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse parametriseerimisel kasutada, on vektor $\boldsymbol{\alpha}$. Erinevalt vektoritest $\boldsymbol{\delta}$ ja $\boldsymbol{\lambda}$ ei sõltu $\boldsymbol{\alpha}$ vaid marginaalsetest parameetritest, vaid ka korrelatsioonimaatriksisist $\boldsymbol{\Psi}$, mistõttu on $\boldsymbol{\alpha}$ olemust raske interpreteerida.

Definitsiooni 1.2 põhjal

$$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}} = \frac{\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Psi}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\Delta}^{-\mathbf{1}}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Psi}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\lambda}}},$$

seega

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\Delta}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\Psi}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\lambda}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Psi}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\lambda}}}.$$

Lisaks avaldub $\boldsymbol{\alpha}$ maatriksi $\boldsymbol{\Omega}$ ja vektori $\boldsymbol{\delta}$ kaudu järgmiselt:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\Omega}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\delta}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\delta}}}. \tag{2.6}$$

Antud seose tuletamiseks kasutame binomiaalset pöördteoreemi (Piziak ja Odell (2007), lk 27-28).

**Teoreem 2.1** (Binomiaalne pöördteoreem). *Olgu järgnevas võrduses maatriksid* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ *ja* $\mathbf{D}$ *sobivate dimensioonidega ja eksisteerigu seal esinevad pöördmaatriksid. Siis*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{C}^{-1})\mathbf{DA}^{-1}.$$

Paneme nüüd tähele, et kuna (seos (2.3))

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\boldsymbol{\Omega\alpha}}{\sqrt{1+\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Omega\alpha}}}, \text{ siis } \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Omega}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\delta}\sqrt{1+\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Omega\alpha}}.$$

Eelnevalt näitasime (vaata valem (2.5)), et

$$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Psi}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\lambda}.$$

Seosest (2.2)

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\lambda} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Delta}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\delta} \text{ ja } \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Delta}^{-\mathbf{1}},$$

seega

$$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Delta}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\Psi}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\Delta}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\delta}.$$

Kasutades pöördmaatriksi omadusi, saame

$$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Delta})^{-1}\boldsymbol{\delta}.$$

Definitsiooni 1.2 põhjal aga:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega} =& \boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}})\boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \boldsymbol{\Omega} =& \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{T}} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow& \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{T}}.
\end{aligned}$$

Nüüd võime maatriksi $\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Delta}$ pöördmaatriksi $(\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Delta})^{-1}$ avaldada binomiaalse pöördteoreemi abil

$$(\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Delta})^{-1} = \boldsymbol{\Omega}^{-\mathbf{1}} + \frac{\boldsymbol{\Omega}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-\mathbf{1}}}{1 - \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\delta}}.$$

Seega

$$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\delta}^T\left(\boldsymbol{\Omega}^{-1} + \frac{\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}}{1-\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}}\right)\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta} + \frac{\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}}{1-\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}} =$$
$$= \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}\left(1 + \frac{\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}}{1-\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}}\right) = \frac{\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}}{1-\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}}$$

ja

$$1 + \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\alpha} = \frac{1-\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}}{1-\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}} = \frac{1}{1-\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}}.$$

Kokkuvõttes

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}}}.$$

## 2.5 Maatriks $\boldsymbol{\Omega}$

Maatriks $\boldsymbol{\Omega}$ näol ei ole tegu juhusliku suuruse $\boldsymbol{Z}$ jaotuse lineaarse korrelatsioonimaatriksiga, vaid mitmemõõtmelist asümmeetrilist normaaljaotust genereeriva mitmemõõtmelise (sümmeetrilise) normaaljaotuse korrelatsioonimaatriksiga (vaata alapeatükis 1.1 toodud juhusliku suuruse $\boldsymbol{Z}$ tinglikku esitust (1.4)).

Definitsiooni 1.2 järgi:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^T)\boldsymbol{\Delta}.$$

Sisuliselt on $\boldsymbol{\Omega}$ parameetrite $\boldsymbol{\Psi}$ ja $\boldsymbol{\lambda}$ funktsioon, sest $\boldsymbol{\Delta}$ koosneb elementidest, mis on $\boldsymbol{\lambda}$ komponentide funktsioonid. Lisaks võime esitada $\boldsymbol{\Omega}$ ka $\boldsymbol{\Delta}$, $\boldsymbol{\Psi}$ ja $\boldsymbol{\delta}$ kaudu:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T.$$

Viimane järeldub vahetult definitsioonist 1.2 ja seosest (2.2):

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}})\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Delta} + \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{T}}.$$

## 2.6 Maatriks $\boldsymbol{\Psi}$

Ka $\boldsymbol{\Psi}$ pole juhusliku suuruse $\boldsymbol{Z}$ komponentide $Z_1, \ldots, Z_k$ vaheline lineaarne korrelatsioonimaatriks. Korrelatsioonimaatriks $\boldsymbol{\Psi}$ oli korrelatsioonimaatriks, mida Azzalini ja Dalla Valle (1996) kasutasid mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse konstrueerimiseks (vaata valemit (1.3)). Definitsiooni 1.2 põhjal

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}})\boldsymbol{\Delta},$$

seega

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Delta}^{-1} - \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}}.$$

Viimase ja seose (2.2) põhjal:

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Delta}^{-1} - \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Delta}^{-1} - \boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Delta}^{-1} = \boldsymbol{\Delta}^{-1}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{T}})\boldsymbol{\Delta}^{-1}.$$

Seega

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Delta}^{-1}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{T}})\boldsymbol{\Delta}^{-1}.$$

Kuigi Azzalini ja Dalla Valle (1996) kasutasid mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse defineerimisel $\{\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\lambda}\}$-parametriseeringut, kasutatakse korrelatsioonimaatriksi $\boldsymbol{\Psi}$ asemel sageli pigem korrelatsioonimaatriksit $\boldsymbol{\Omega}$, sest $\boldsymbol{\Psi}$ olemus jääb tihedusfunktsiooni valemis 1.2 varjatuks.

## 2.7 Üleminek korrelatsioonimaatriksilt $\mathbf{\Omega}$ maatriksile $\mathbf{\Psi}$

Azzalini ja Dalla Valle (1996) defineerisid mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse $\{\mathbf{\Psi}, \boldsymbol{\lambda}\}$-parametriseeringus, kus $\mathbf{\Psi}$ on korrelatsioonimaatriks, st $\mathbf{\Psi}$ on sümmeetriline ja tema peadiagonaalil asuvad elemendid on ühed ja peadiagonaaliväilised elemendid on absoluutväärtuselt väiksemad ühest. Soovides kasutada mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse parametriseerimisel korrelatsioonimaatriksi $\mathbf{\Psi}$ asemel maatriksit $\mathbf{\Omega}$, on üheks huvipakkuvaks küsimuseks see, et kui me teeme teatavad eeldused $\mathbf{\Omega}$ kohta, siis kas $\mathbf{\Psi}$ säilitab oma omadused. Teeme siin eelduse, et $\mathbf{\Omega}$ on korrelatsioonimaatriks ja vaatame, mis omadused on sel juhul maatriksil $\mathbf{\Psi}$.

Olgu vektor $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)^T$ ja olgu

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1k} \\ \omega_{21} & 1 & \cdots & \omega_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{k1} & \omega_{k2} & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

kus $\forall\ i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, k;\ i \neq j$ korral $|\omega_{ij}| < 1$.
Paneme tähele, et kuna $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Delta}(\mathbf{\Psi} + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^T)\mathbf{\Delta}$, siis $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Delta}^{-1}\mathbf{\Omega}\mathbf{\Delta}^{-1} - \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^T$.
Varasemalt näitasime, et

$$\mathbf{\Delta}^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{1+\lambda_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{1+\lambda_k^2} \end{pmatrix}.$$

Seega $\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\Omega}$ avaldub järgmiselt:

$$\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{1+\lambda_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{1+\lambda_k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1k} \\ \omega_{21} & 1 & \cdots & \omega_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{k1} & \omega_{k2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda_1^2} & \sqrt{1+\lambda_1^2}\omega_{12} & \cdots & \sqrt{1+\lambda_1^2}\omega_{1k} \\ \sqrt{1+\lambda_2^2}\omega_{21} & \sqrt{1+\lambda_2^2} & \cdots & \sqrt{1+\lambda_2^2}\omega_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{1+\lambda_k^2}\omega_{k1} & \sqrt{1+\lambda_k^2}\omega_{k2} & \cdots & \sqrt{1+\lambda_k^2} \end{pmatrix}.$$

Ja

$$\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Delta}^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda_1^2} & \sqrt{1+\lambda_1^2}\omega_{12} & \cdots & \sqrt{1+\lambda_1^2}\omega_{1k} \\ \sqrt{1+\lambda_2^2}\omega_{21} & \sqrt{1+\lambda_2^2} & \cdots & \sqrt{1+\lambda_2^2}\omega_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{1+\lambda_k^2}\omega_{k1} & \sqrt{1+\lambda_k^2}\omega_{k2} & \cdots & \sqrt{1+\lambda_k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{1+\lambda_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{1+\lambda_k^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\lambda_1^2 & \sqrt{(1+\lambda_1^2)(1+\lambda_2^2)}\omega_{12} & \cdots & \sqrt{(1+\lambda_1^2)(1+\lambda_2^2)}\omega_{1k} \\ \sqrt{(1+\lambda_2^2)(1+\lambda_1^2)}\omega_{21} & 1+\lambda_2^2 & \cdots & \sqrt{(1+\lambda_2^2)(1+\lambda_k^2)}\omega_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{(1+\lambda_k^2)(1+\lambda_1^2)}\omega_{k1} & \sqrt{(1+\lambda_k^2)(1+\lambda_2^2)}\omega_{k2} & \cdots & 1+\lambda_k^2 \end{pmatrix}.$$

Kuna

$$\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1\lambda_2 & \cdots & \lambda_1\lambda_k \\ \lambda_2\lambda_1 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2\lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_k\lambda_1 & \lambda_k\lambda_2 & \cdots & \lambda_k^2 \end{pmatrix},$$

siis saame $\boldsymbol{\Psi}$ välja kirjutada järgmiselt:

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{(1+\lambda_1^2)(1+\lambda_2^2)}\omega_{12} - \lambda_1\lambda_2 & \cdots & \sqrt{(1+\lambda_1^2)(1+\lambda_2^2)}\omega_{1k} - \lambda_1\lambda_k \\ \sqrt{(1+\lambda_2^2)(1+\lambda_1^2)}\omega_{21} - \lambda_2\lambda_1 & 1 & \cdots & \sqrt{(1+\lambda_2^2)(1+\lambda_k^2)}\omega_{2k} - \lambda_2\lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{(1+\lambda_k^2)(1+\lambda_1^2)}\omega_{k1} - \lambda_k\lambda_1 & \sqrt{(1+\lambda_k^2)(1+\lambda_2^2)}\omega_{k2} - \lambda_k\lambda_2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Seega maatriksi $\boldsymbol{\Psi}$ elemendid $\psi_{ij}$ avalduvad marginaalsete asümmeetriaparameetrite $\lambda_i$ ja korrelatsioonimaatriksi $\boldsymbol{\Omega}$ elementide $\omega_{ij}$ abil järgmiselt:

$$\psi_{ij} = \begin{cases} \sqrt{(1+\lambda_i^2)(1+\lambda_j^2)}\omega_{ij} - \lambda_i\lambda_j, & \text{kui } i \neq j \\ 1, & \text{kui } i = j \end{cases}$$

Järelikult, kui $\boldsymbol{\Omega}$ on korrelatsioonimaatriks, siis $\boldsymbol{\Psi}$ peadiagonaalil on ühed. Ja kuna $\forall\ i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, k$ korral $\omega_{ij} = \omega_{ji}$, siis ka $\forall\ i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, k$ korral $\psi_{ij} = \psi_{ji}$ ehk maatriks $\boldsymbol{\Psi}$ on sümmeetriline. Hiljem näitame (järeldus 3.1), et teatud tingimustel võime lisaks järeldada, et $\boldsymbol{\Psi}$ peadiagonaaliválised elemendid on absoluutväärtuselt väiksemad ühest. Ehk teatud kitsenduste korral võime öelda, et kui $\boldsymbol{\Omega}$ on korrelatsioonimaatriks, siis ka $\boldsymbol{\Psi}$ on korrelatsioonimaatriks. Selle tulemusega tutvume lähemalt järgmises peatükis.

# 3 $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$- ja $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda}\}$-parametrisatsioon

Azzalini ja Capitanio näitasid(1999), et parametrisatsioonid $\{\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\lambda}\}$ ja $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$ on ekvivalentsed. Näitame, et teatud kitsenduste korral on $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$ ja $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda}\}$ (mõlemad) ekvivalentsed $\{\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\lambda}\}$- ja $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsioonidega. Lisaks esitame abilemma, mille abil seame kriteeriumi parametrisatsioonide ekvivalentsusele ja sobivusele. Kuid enne lemma esitamist tuletame meelde positiivselt määratud maatriksi definitsiooni ja selle mõned omadused, mida meil vaja läheb.

Alapeatükkides 3.2 ja 3.3 toodud tulemused esitasid Käärik jt (2015), toome need siin koos samm-sammuliste tõestustega.

## 3.1 Positiivselt määratud maatriks

**Definitsioon 3.1.** *Me ütleme, et sümmeetriline $k \times k$ maatriks $\mathbf{A}$ on positiivselt määratud (positiivselt poolmääratud), kui iga mittenullilise vektori $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$ korral $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0$ ($\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x} \geq 0$) ja tähistame seda $\mathbf{A} > 0$ ($\mathbf{A} \geq 0$).*

Positiivselt määratud maatrikseid defineeritakse sageli ka omaväärtuste abil. Tuletame meelde, et omaväärtusülesandes $\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, kus $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, nimetatakse maatriksi $\mathbf{A}$ omaväärtuseks arvu $\lambda$ ja (omaväärtusele $\lambda$ vastavaks) omavektoriks vektorit $\boldsymbol{v}$.

Kui sümmeetriline $k \times k$ maatriks $\mathbf{A}$ on definitsiooni 3.1 järgi positiivselt määratud, siis $\forall\ \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^k$ korral

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0.$$

Võttes nüüd $\boldsymbol{x}$ rolli omavektori $\boldsymbol{v}$, saame

$$\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{v} > 0.$$

millest

$$\lambda\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{v} > 0.$$

Kuna $\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{v} > 0$, siis selleks, et kehtiks $\lambda\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{v} > 0$, peab $\lambda > 0$.

**Definitsioon 3.2.** *Sümmeetriline maatriks on positiivselt määratud (positiivselt poolmääratud), kui kõik tema omaväärtused on positiivsed (mittenegatiivsed).*

Definitsioonid 3.2 ja 3.1 on ekvivalentsed.

Esitame mõned positiivselt määratud maatriksi omadused:

1. Kui $\mathbf{A} > 0$, siis $\mathbf{A}$ on pööratav ja $\mathbf{A}^{-1} > 0$.
2. Kui $\mathbf{A} > 0$ ja $\mathbf{B} \geq 0$, siis $\mathbf{A} + \mathbf{B} > 0$.
3. Kui $\mathbf{A} \geq 0$ ja $r > 0$ on mingi reaalarv, siis $r\mathbf{A} \geq 0$.
4. Olgu $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ $k \times k$ mõõtmelised maatriksid. Kui $\mathbf{A} > 0$ ja $r(\mathbf{B}) = k$, siis $\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B} > 0$ (siin $r(\mathbf{B})$ tähistab maatriksi $\mathbf{B}$ astakut).
5. Kui maatriks $\mathbf{A} > 0$, siis $\forall\ i = 1, \cdots, k,\ \ j = 1, \cdots, k,\ \ i \neq j$, korral $|a_{ij}| < \dfrac{a_{ii} + a_{jj}}{2}$, kus $a_{ij}$ on maatriksi $\mathbf{A}$ reas $i$ ja veerus $j$ asuv element.

Need omadused on lineaaralgebras üldtuntud ja palju kasutatud, kuid tõestame need siin siiski ära.

*Tõestused.*

1. Teame, et $\mathbf{A}$ on pööratav ehk regulaarne siis, kui ta determinant ei võrdu nulliga.

Olgu $\mathbf{A} > 0$. Definitsiooni 3.2 järgi on maatriksi $\mathbf{A}$ kõik omaväärtused positiivsed. Kuna maatriksi determinant on võrdne selle kõigi omaväärtuste korrutisega, on maatriksi $\mathbf{A}$ determinant positiivne, mis tähendab, et maatriks $\mathbf{A}$ on regulaarne ehk pööratav.

Kuna pöördmaatriksi omaväärtused on võrdsed esialgse maatriksi omaväärtuste pöördväärtustega, on ka $\mathbf{A}^{-1}$ omaväärtused positiivsed. Seega definitsiooni 3.2 põhjal on ka $\mathbf{A}^{-1} > 0$. $\square$

2. Olgu $\mathbf{A} > 0$ ja $\mathbf{B} \geq 0$. Siis tulenevalt positiivselt määratud (poolmääratud) maatriksi definitsioonist

$$\forall\, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \text{ korral } \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0 \text{ ja } \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{B}\boldsymbol{x} \geq 0.$$

Järelikult

$$\forall\, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \text{ korral } \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{B}\boldsymbol{x} > 0,$$

millest saame maatriksite liitmise omadusi kasutades, et

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{B}\boldsymbol{x} > 0.$$

Seega definitsiooni 3.1 põhjal $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ on positiivselt määratud maatriks.

$\square$

3. Olgu $\mathbf{A} > 0$ ja $r > 0$ mingi reaalarv. Positiivselt määratud maatriksi definitsioonist järeldub, et

$$\forall\, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \text{ korral } \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0\ .$$

Maatriksi skalaariga korrutamise omaduse põhjal saame

$$\forall\ \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \text{ korral } \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}(r\mathbf{A})\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0\ .$$

Seega definitsiooni 3.1 järgi on maatriks $r\mathbf{A}$ positiivselt määratud. □

4. Olgu maatriks $\mathbf{A}_{:k\times k}$ positiivselt määratud ja olgu maatriks $\mathbf{B}_{:k\times k}$ astakuga $k$. Järelikult maatriksil $\mathbf{B}$ on $k$ lineaarselt sõltumatut veergu. Seega iga vektori $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ korral vektor $\mathbf{B}\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. Nüüd kuna $\mathbf{A} > 0$, siis

$$\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \text{ korral } \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}(\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\mathbf{B})^T\mathbf{A}(\mathbf{B}\boldsymbol{x}) > 0.$$

Seega definitsiooni 3.1 järgi on $\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}$ positiivselt määratud. □

5. Olgu maatriks $\mathbf{A}$ sümmeetriline ja positiivselt määratud. Siis iga vektori $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ korral $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x} > 0$. Võttes $\boldsymbol{x}$ rolli vektori $\boldsymbol{x}^*$, mille $i$. ja $j$. komponendid on ühed ja ülejäänud nullid, saame

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{*T}\mathbf{A}\boldsymbol{x}^* = a_{ii} + a_{ji} + a_{ij} + a_{jj} = a_{ii} + a_{jj} + 2a_{ij} > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_{ii} + a_{jj} > -2a_{ij}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Teisalt, võttes $\boldsymbol{x}$ rolli vektori $\boldsymbol{x}^{**}$, mille $i$. komponent on 1, $j$. komponent -1 ja ülejäänud komponendid nullid, saame

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{**T}\mathbf{A}\boldsymbol{x}^{**} = a_{ii} - a_{ji} - a_{ij} + a_{jj} = a_{ii} + a_{jj} - 2a_{ij} > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_{ii} + a_{jj} > 2a_{ij}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Seega valemite (3.1) ja (3.2) põhjal

$$\begin{cases} a_{ij} < \dfrac{a_{ii} + a_{jj}}{2} \\ -a_{ij} < \dfrac{a_{ii} + a_{jj}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \ |a_{ij}| < \frac{a_{ii} + a_{jj}}{2}.$$

□

## 3.2 $\mathbf{\Omega}$ ja $\mathbf{\Psi}$ positiivsest määratusest

Nüüd võime esitada ja tõestada lemma, mis meile parametrisatsioonide ekvivalentsuse ja sobivuse näitamisel abiks on.

**Lemma 3.1.** *Kui $\mathbf{\Omega}$ on positiivselt määratud $k \times k$ maatriks ja ka $\boldsymbol{\delta}$ on $k$-mõõtmeline vektor, siis $\mathbf{\Omega} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T$ on positiivselt määratud, kui $\boldsymbol{\delta}^T\mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta} < 1$.*

Antud lemma tõestuse esitasid Käärik jt (2015), kuid teeme selle siin detailsemalt läbi. Selleks kasutame binomiaalset pöördteoreemi, positiivselt määratud maatriksi omadusi 1.-3. ja maatriksteisendusi.

*Tõestus.* Olgu $\mathbf{\Omega}$ positiivselt määratud. Siis tulenevalt positiivselt määratud maatriksi 1. omadustest on ka $\mathbf{\Omega}^{-1}$ positiivselt määratud. Sarnaselt, kui $\mathbf{\Omega} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T$ on positiivselt määratud, peab leiduma ka pöördmaatriks $(\mathbf{\Omega} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T)^{-1}$, mis on samuti positiivselt määratud.

Kasutame nüüd binomiaalset pöördteoreemi (vaata Teoreemi 2.1) maatriksi $(\mathbf{\Omega} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T)^{-1}$ lahti kirjutamiseks. Võtame antud teoreemis $\mathbf{A}$ rolli $k \times k$ maatriksi $\mathbf{\Omega}$, maatriksi $\mathbf{B}$ rolli $k$-mõõtmelise vektori $\boldsymbol{\delta}$, $\mathbf{C}$ rolli skalaari 1, $\mathbf{D}$ rolli transponeeritud $k$-mõõtmelise vektori $\boldsymbol{\delta}^T$ ja saame:

$$(\mathbf{\Omega} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T)^{-1} = \mathbf{\Omega}^{-1} - \mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta}^T\mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta} - 1)^{-1}\boldsymbol{\delta}^T\mathbf{\Omega}^{-1}.$$

Paneme tähele, et $\boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\delta} - 1$ puhul on tegu skalaariga, mõõtmetega $1 \times 1$, seega võime kirjutada:

$$(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T)^{-1} = \boldsymbol{\Omega}^{-1} + \frac{\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}}{1 - \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}}.$$

Näitame, et võrduse paremal poolel teise liidetava lugejas olev maatriks on positiivselt poolmääratud. Tõepoolest, $\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1} \geq 0$, sest

$$\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \text{ korral } \mathbf{x}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{x} = (\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{x})^T(\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{x}) \geq 0.$$

Tulenevalt eeldustest, teame, et esimene liidetav $\boldsymbol{\Omega}^{-1} > 0$. Seega selleks, et $(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T)^{-1}$ oleks positiivselt määratud, peab (positiivselt määratud maatriksi omaduse 2 põhjal) teine liidetav olema vähemalt positiivselt poolmääratud. Kuid selleks, et teine liidetav oleks positiivselt poolmääratud, st $\dfrac{\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}}{1 - \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}} \geq 0$, peab positiivselt määratud maatriksi omaduse 3 põhjal olema nimetajas positiivne reaalarv. Ehk $1 - \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta} > 0$, teisisõnu $\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta} < 1$.

Kokkuvõttes oleme näidanud, et $\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T > 0$, kui $\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta} < 1$. □

**Järeldus 3.1.** *Kui maatriks* $\boldsymbol{\Omega}$ *on positiivselt määratud, siis maatriks*

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Delta}^{-1}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T)\boldsymbol{\Delta}^{-1},$$

*kus*

$$\boldsymbol{\Delta}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\delta_1^2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\delta_2^2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{1-\delta_k^2}} \end{pmatrix},$$

*on positiivselt määratud, kui* $\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\delta} < 1$*. Lisaks, kui* $\boldsymbol{\Omega}$ *on korrelatsioonimaatriks, on seda ka maatriks* $\boldsymbol{\Psi}$*.*

*Tõestus.* Tulenevalt positiivselt määratud maatriksi omadusest 4, on $\boldsymbol{\Delta}^{-1}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T)\boldsymbol{\Delta}^{-1} > 0$, kui $r(\boldsymbol{\Delta}^{-1}) = k$ ja $\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T > 0$. Eelduste järgi $r(\boldsymbol{\Delta}^{-1}) = k$ ning lemma 3.1 järgi on $\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T > 0$, kui $\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\delta} < 1$. Seega $\boldsymbol{\Psi} > 0$, kui $\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\delta} < 1$.

Olgu nüüd $\boldsymbol{\Omega}$ lisaks ka korrelatsioonimaatriks. Eelneva põhjal teame, et $\boldsymbol{\Psi} > 0$. Seega positiivselt määratud maatriksi omaduse 5 põhjal $\forall\ i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, k;\ i \neq j$ korral

$$|\psi_{ij}| < \frac{\psi_{ii} + \psi_{jj}}{2},$$

kus $\psi_{ij}$ on maatriksi $\boldsymbol{\Psi}$ $i$ reas ja $j$ veerus asuv element. Ehk maatriksi $\boldsymbol{\Psi}$ iga peadiagonaali-väline element on absoluutväärtuselt väiksem kui temaga samas reas ja samas veerus asuvate peadiagonaali elementide summa jagatud kahega. Alapeatükis 2.7 näitasime kuidas $\boldsymbol{\Psi}$ avaldub $\boldsymbol{\Omega}$ kaudu ja nägime, et kui $\boldsymbol{\Omega}$ on korrelatsioonimaatriks, siis $\boldsymbol{\Psi}$ on sümmeetriline ja tema peadiagonaalil on ühed. Seega kahe suvalise $\boldsymbol{\Psi}$ peadiagonaali elemendi summa on 2, st $\forall\ i = 1, \dots, k,\ j = 1, \dots, k$, korral

$$\psi_{ii} + \psi_{jj} = 2.$$

Mistõttu positiivselt määratud maatriksi omaduse 5 põhjal

$$|\psi_{ij}| < \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

st iga $\boldsymbol{\Psi}$ peadiagonaalist väljaspool asetseva elemendi absoluutväärtus on väiksem kui 1. Seega $\boldsymbol{\Psi}$ on korrelatsioonimaatriks. $\square$

Need tulemused lubavad meil formuleerida järgmised laused.

## 3.3 Parametrisatsioonide ekvivalentsusest

**Lause 3.1.** *Kui $\boldsymbol{\Omega}$ on positiivselt määratud korrelatsioonimaatriks ja $\boldsymbol{\delta}$ on vektor, mis rahuldab tingimust $\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta} < 1$, siis $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrisatsioon on ekvivalentne $\{\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\lambda}\}$- ja $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsiooniga.*

Varasemalt näitasime (vaata valem 2.6), et

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\Omega^{-1}\delta}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\delta^T\Omega^{-1}\delta}}}.$$

Seega

$$\boldsymbol{\alpha^T} = \frac{\boldsymbol{\delta^T\Omega^{-1}}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\delta^T\Omega^{-1}\delta}}}$$

Antud seos lubab mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse defineerimisel $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsioonilt lihtsalt üle minna $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrisatsioonile.

Defineerime mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse parameetrite $\mathbf{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\delta}$ abil järgmiselt.

**Definitsioon 3.3.** *Olgu positiivselt määratud $k \times k$-mõõtmeline korrelatsioonimaatriks $\mathbf{\Omega}$ ja $k$-mõõtmeline vektor $\boldsymbol{\delta}$ sellised, et rahuldatud on tingimus $\boldsymbol{\delta^T\Omega^{-1}\delta} < 1$. Me ütleme, et juhuslik vektor $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_k)^T$ on $k$-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega, asümmeetriaparameetriga $\boldsymbol{\delta}$ ja tähistame seda $\boldsymbol{Z} \sim SN(\mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$, kui ta tihedusfunktsioon avaldub kujul*

$$f(\boldsymbol{Z}; \mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\delta}) = 2\phi_k(\boldsymbol{Z}; \mathbf{\Omega})\Phi\left(\frac{\boldsymbol{\delta^T\Omega^{-1}Z}}{\sqrt{1-\boldsymbol{\delta^T\Omega^{-1}\delta}}}\right), \boldsymbol{Z} \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

*kus $\phi_k$ on $k$-mõõtmelise standardsete marginaalidega ja korrelatsioonimaatriksiga $\mathbf{\Omega}$ normaaljaotuse tihedusfunktsioon ning $\Phi$ on ühemõõtmelise standardse normaaljaotuse jaotusfunktsioon.*

**Märkus 3.1.** *On loomulik, tihedusfunktsiooni valemis* (3.3) *on rahuldatud tingimus $\boldsymbol{\delta^T\Omega^{-1}\delta} < 1$. Järelduse 3.1 põhjal on see tingimus piisav, et parameetrid $\mathbf{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\delta}$ defineeriksid mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse.*

Kuna $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\Delta\lambda}$ võime esitada lausele 3.1 analoogse lause.

**Lause 3.2.** *Kui $\boldsymbol{\lambda^T\Delta\Omega^{-1}\Delta\lambda} < 1$, siis $\{\mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\lambda}\}$-parametrisatsioon on sobiv mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse defineerimiseks ja on ekvivalentne $\{\mathbf{\Psi}, \boldsymbol{\lambda}\}$- ja $\{\mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsiooniga.*

Lisaks, kuna

$$\boldsymbol{\Delta^{-1}} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\lambda_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{1+\lambda_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{1+\lambda_k^2} \end{pmatrix},$$

võime definitsioonidega 1.2 ja 3.3 ekvivalentselt defineerida mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\lambda}$ kaudu järgmiselt.

**Definitsioon 3.4.** *Olgu positiivselt määratud $k \times k$-mõõtmeline korrelatsioonimaatriks $\boldsymbol{\Omega}$ ja vektor $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)^T$ sellised, et rahuldavad tingimust $\boldsymbol{\lambda^T \Delta \Omega^{-1} \Delta \lambda} < 1$, kus*

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_2^2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_k^2}} \end{pmatrix}.$$

*Me ütleme, et juhuslik vektor $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_k)^T$ on $k$-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega, asümmeetriaparameetriga $\boldsymbol{\lambda}$ ja tähistame seda $\boldsymbol{Z} \sim SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda})$, kui ta tihedusfunktsioon avaldub kujul*

$$f(\boldsymbol{Z}; \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda}) = 2\phi_k(\boldsymbol{Z}; \boldsymbol{\Omega})\Phi\left(\frac{\boldsymbol{\lambda^T \Delta \Omega^{-1} Z}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\lambda^T \Delta \Omega^{-1} \Delta \lambda}}}\right), \boldsymbol{Z} \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

*kus $\phi_k$ on $k$-mõõtmelise standardsete marginaalidega ja korrelatsioonimaatriksiga $\boldsymbol{\Omega}$ normaaljaotuse tihedusfunktsioon ning $\Phi$ on ühemõõtmelise standardse normaaljaotuse jaotusfunktsioon.*

## 3.4 Parametrisatsioonide võrdlus

Kui parametrisatsioone on mitu, tekib paratamatult küsimus, et millist neist siis eelistada. Paraku pole ühest vastust küsimusele, et milline parametrisatsioon on parim. Sobivaim parametrisatsioon tuleks valida lähtuvalt konkreetsest probleemist.

$\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda}\}$-parametrisatsiooni üheks suureks eeliseks on, et sel on otsene seos marginaalsete parameetritega. Seega jäävad ka dimensiooni muutudes parameetrite komponentide väärtused samaks. Näiteks olgu meil juhuslik suurus $\boldsymbol{Z}_k = (Z_1, \ldots, Z_k)^T$, mis on $k$-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega, $\boldsymbol{Z}_k \sim SN(\boldsymbol{\Omega}_k, \boldsymbol{\lambda}_k), k \geq 2$. Ja olgu meil teine juhuslik suurus $\boldsymbol{Z}_{k-n} = (Z_1, \ldots, Z_{k-n})^T, n < k$. Siis $\boldsymbol{Z}_{k-n} \sim SN(\boldsymbol{\Omega}_{k-n}, \boldsymbol{\lambda}_{k-n})$, kus $\boldsymbol{\Omega}_{k-n}$ koosneb samadest elementidest, mis $\boldsymbol{\Omega}_k$, jättes ära $n$ viimast rida ja veergu ning $\boldsymbol{\lambda}_{k-n}$ koosneb $\boldsymbol{\lambda}_k$ esimesest $k-n$ komponendist. See tähendab, et osa marginaale välja jättes, pole vaja parameetreid uuesti välja arvutada. Küll aga võime näha, et $SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda})$ defineeriva tiheduse valemis (3.4) on kasutatud lisaparameetrit $\boldsymbol{\Delta}$, mis nõuab lisaarvutusi ja teeb $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda}\}$-parametrisatsiooni kasutamise üsna tülikaks.

Ka $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrisatsiooni tasub eelistada juhul, kui oluline on otsene seos marginaalsete parameetritega. Ka $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrisatsiooni puhul ei too dimensiooni vähenemine kaasa parameetrite väärtuste muutust, kuid erinevalt $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda}\}$-parametrisatsioonist ei nõua $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$ kasutamine ühegi lisaparameetri välja arvutamist.

Nii $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda}\}$- kui ka $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrisatsiooni halb omadus on see, et parameetreid ei saa teineteisest sõltumatult valida. Need parametrisatsioonid on ekvivalentsed $\{\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\lambda}\}$-parametrisatsiooniga vaid juhul, kui kehtib (vastavalt) $\boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\delta} < 1$ või $\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\Omega}^{\boldsymbol{-1}} \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\lambda} < 1$. Parametrisastiooni $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$ eelis on, et tal sellist kitsendavat tingimust pole. $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsiooni puhul võib parameetrid $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\alpha}$ valida teineteisest täiesti sõltumatult. Ainus eeldus on, et $\boldsymbol{\Omega}$ on korrelatsioonimaatriks.

Sageli eelistatakse just $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsiooni, sest Azzalini ja Dalla Valle (1996) mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse tihedusfunktsioon on otseselt seotud just parameetritega $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\alpha}$. Sel parametrisatsioonil on teisigi häid omadusi. Crocetta ja Loperfido (2009) soovisid suurima tõepära meetodil hinnata maksimaalse hapnikutarbimise (MHT ehk $VO_2$ $max$) ja 6-minutilise käimistesti vahelist korrelatsiooni. Seejuures märkisid nad, et $SN_2(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda})$ jaotusega sõltumatu juhusliku valimi tõepärafunktsioon

$$L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Omega}) = 2^n \prod_{i=1}^{n} \phi_2(z_i; \boldsymbol{\Omega}) \prod_{i=1}^{n} \Phi(\boldsymbol{\alpha}^T z_i)$$

on võimalik jagada kaheks faktoriks

$$L(\boldsymbol{\Omega}) = 2^n \prod_{i=1}^{n} \phi_2(z_i; \boldsymbol{\Omega}) \text{ ja } L(\boldsymbol{\alpha}) = \prod_{i=1}^{n} \Phi(\boldsymbol{\alpha}^T z_i),$$

mis sõltuvad vastavalt vaid $\boldsymbol{\Omega}$ või $\boldsymbol{\alpha}$ väärtusest. Mistõttu $L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Omega})$ maksimiseerimiseks piisab kui maksimiseerida eraldi $L(\boldsymbol{\Omega})$ ja $L(\boldsymbol{\alpha})$. See tähendab, et suurima tõepära hinnanguid $SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha})$-jaotusega sõltumatule juhuslikule valimile on väga kerge leida.

Teisalt on $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsiooni üheks suureks puuduseks see, et $\boldsymbol{\alpha}$ pole otseselt seotud marginaalsete parameetritega. See avaldab omakorda mõju dimensiooni muutumisel. Nimelt, kui liikuda $k$-mõõtmelisest asümmeetrilisest normaaljaotusest parameetriga $\boldsymbol{\alpha}_k$ $k-1$-mõõtmelisse asümmeetrilisse normaaljaotusesse parameetriga $\boldsymbol{\alpha}_{k-1}$, siis $\boldsymbol{\alpha}_k$ ja $\boldsymbol{\alpha}_{k-1}$ komponendid erinevad teineteisest täielikult (va mõnel üksikul erijuhul).

# 4 Geomeetriline interpretatsioon

Antud peatükis püüame mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse parameetreid geomeetriliselt interpreteerida. Selleks tutvume esmalt mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega juhusliku suuruse ühe tingliku esitusega. Alapeatükkides 4.2–4.4 toodud seosed esitasid Käärik jt (2015), toome need siin koos pikemate selgituste ja samm-sammuliste tõestustega.

## 4.1 Tinglik esitus

Mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega juhuslikku suurust võib esitada normaaljaotusega juhuslike suuruste kaudu mitmel moel. Ühe sellise esituse tõime alapeatükis 1.1 (vaata valem (1.4)). Toome siin ära teise võimaluse, kuidas esitada $SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$ jaotusega juhuslikku suurust mitmemõõtmelise sümmeetrilise normaaljaotusega juhusliku suuruse abil.

**Lause 4.1** (Tinglik esitus)**.** *Olgu meil k-mõõtmeline juhuslik suurus* $\boldsymbol{X} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega})$*, ühemõõtmeline juhuslik suurus* $X_0 \sim N(0, 1)$ *ja vektor* $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_k)$ *sellised, et kehtib* $\boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\delta} < 1$*. Siis võime esitada k-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega juhusliku suuruse* $\boldsymbol{Z} \sim SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$ *järgmiselt:*

$$\boldsymbol{Z} = \begin{cases} \boldsymbol{X}, & \text{kui } \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{X} > \sqrt{1 - \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\Omega}^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{\delta}} X_0 \\ -\boldsymbol{X}, & \text{mujal,} \end{cases} \tag{4.1}$$

*kui* $\boldsymbol{X}$ *ja* $X_0$ *on sõltumatud.*

Selle tulemuse esitasid ja tõestasid Dunajeva jt (2003). Käärik jt (2015) esitasid selle tingliku esituse ekvivalentsel kujul järgmiselt.

**Märkus 4.1** (Käärik jt, 2015). *Olgu $\boldsymbol{X}$, $X_0$, $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\delta}$ defineeritud nii nagu lauses 4.1. Siis k-mõõtmelise juhusliku suuruse $\boldsymbol{Z} \sim SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$ esitus kujul* (4.1) *on ekvivalentne järgmise tingliku definitsiooniga:*

$$\boldsymbol{Z} = \left[ \boldsymbol{X} \middle| \boldsymbol{\delta^T \Omega^{-1} X} > \sqrt{1 - \boldsymbol{\delta^T \Omega^{-1} \delta}} X_0 \right]. \tag{4.2}$$

Mitmemõõtmelisest asümmeetrilisest normaaljaotusest juhuslike arvude genereerimisel eelistatakse kasutada valemit (4.1), sest sellisel juhul ei jäeta osa genereeritud arve lõplikust valimist välja. Valemi (4.2) eeliseks on aga selle kerge interpreteeritavus (Käärik jt, 2015).

Järgmises kolmes alapeatükis näitame, kuidas sirge, tasand või hüpertasand defineerib vastavalt kahe-, kolme- või $k$+1-mõõtmelises ruumis vastavalt ühe-, kahe- või $k$-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega valimi.

## 4.2 Ühemõõtmeline juht

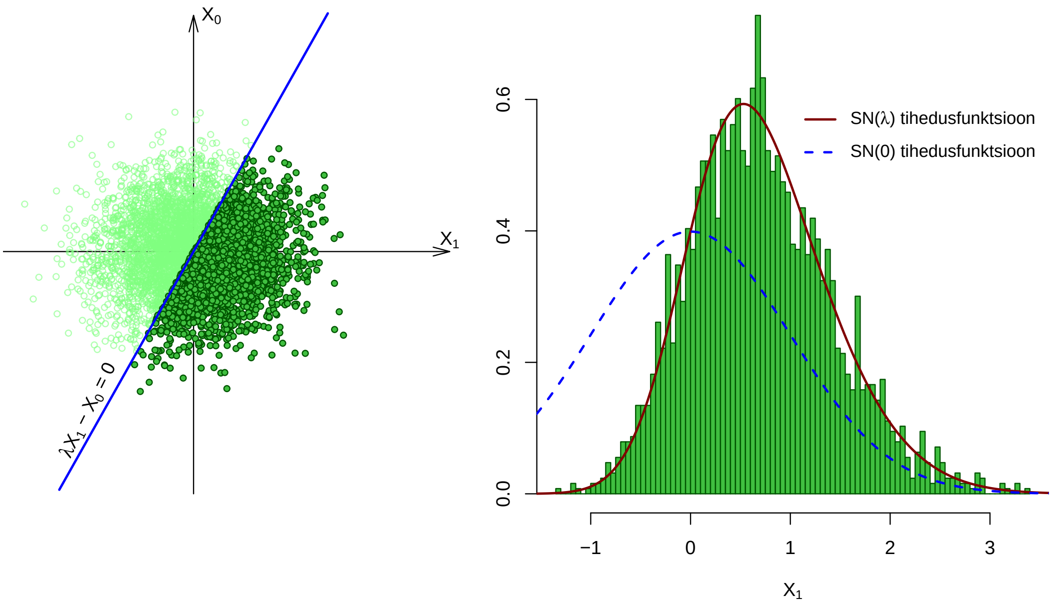
Paneme tähele, et ühemõõtmelisel juhul on asümmeetriaparameetrid $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\delta}$ ja $\boldsymbol{\alpha}$ ühemõõtmelised suurused (vastavalt) $\lambda$, $\delta$ ja $\alpha$ ning $\lambda = \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} = \alpha$. Lisaks, korrelatsioonimaatriksid $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\Psi}$ on võrdsed skalaariga 1.

Olgu $Z$ ühemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega juhuslik suurus, st $Z \sim SN(\lambda)$. Siis märkuse 4.1 abil võime ta esitada kahe sõltumatu standardse normaaljaotusega juhusliku suuruse $X_0$ ja $X_1$ abil järgmiselt:

$$Z \stackrel{d}{=} X_1 \mid \delta X_1 > \sqrt{1 - \delta^2} X_0,$$

kus asümmeetriaparameeter $\delta$ on selline, et $\delta^2 < 1$. Seega tinglik osa on määratud lõikava sirgega $X_0 = \dfrac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} = \lambda X_1$. See tähendab, et kui genereerida valim kahemõõtmelisest standardsest normaaljaotusest, siis on selle põhjal võimalik saada valim ühemõõtmelisest asümmeetrilisest normaaljaotusest, jättes alles vaid punktid, mis rahuldavad tingimust $X_0 < \lambda X_1$.

Joonise 4.1 vasakpoolsel graafikul kujutatud punktid on kahemõõtmelise standardse normaaljaotusega juhusliku suuruse $(X_0, X_1)$ realisatsioonid. Punkte läbiva (sinise) sirge võrrand on $X_0 = \lambda X_1$. Kõik punktid (tumedamad), mis jäävad sellest sirgest allapoole rahuldavad tingimust $X_0 < \lambda X_1$ ja neist moodustub $X_1$ telje suhtes asümmeetriline normaaljaotus parameetriga $\lambda$.




Joonis 4.1: Ühemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse moodustamine

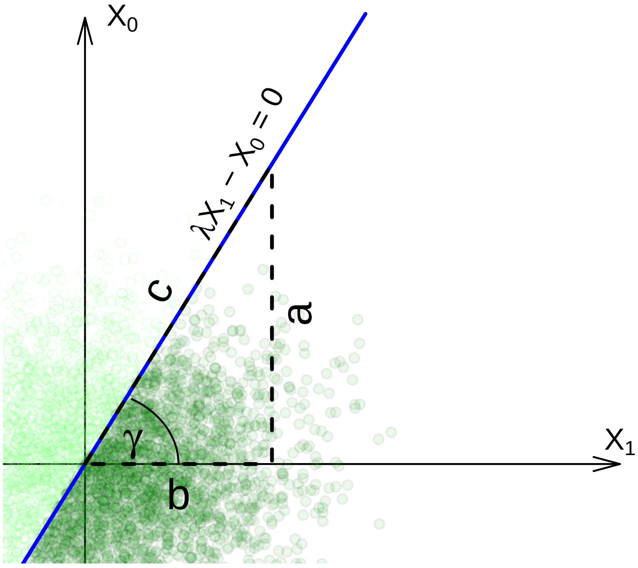
Joonise 4.1 parempoolsel graafikul on toodud tingimust $X_0 < \lambda X_1$ rahuldavate punktide histogramm $X_1$ suhtes koos teoreetilise jaotuse $SN(\lambda)$ tihedusega (punane, katkematu joon). Juurde on lisatud kõigi simuleeritud punktide teoreetilise jaotuse $SN(0)$ tihedus (sinine, katkendlik joon).

Olgu ühemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse määrava sirge ja $X_0$-telje vaheline nurk $\gamma$ (vaata joonist 4.2). Kujutame mõtteliselt selle sirge ja $X_0$ vahel täisnurkse kolmnurga. Olgu selle kolmnurga küljed tähistatud vastavalt joonisele $a$, $b$ ja $c$ ja olgu külje $b$ pikkus 1 pikkusühikut. Siis tulenevalt sirge võrrandist $X_0 = \lambda X_1$ saame, et külje $a$ pikkus on $\lambda$ pikkusühikut. Ning Pythagorase teoreemi järgi külje $c$ pikkus on

$$\sqrt{1^2 + \lambda^2} = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{1 - \delta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} \text{ pikkusühikut.}$$

Kasutades täisnurkse kolmnurga nurkade trigonomeetrilisi omadusi, saame

$$\begin{aligned}
\tan \gamma =& \frac{\lambda}{1} = \lambda = \alpha, \\
\sin \gamma =& \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \delta, \\
\cos \gamma =& \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \sqrt{1 - \delta^2}.
\end{aligned}$$




Joonis 4.2: Nurk asümmeetrilise normaaljaotuse määrava sirge ja $X_1$-telje vahel

## 4.3 Kahemõõtmeline juht

Vaatame nüüd kahemõõtmelist juhuslikku suurust $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2)^T$. Eeldame nüüd lihtsuse mõttes, et see on standardse asümmeetrilise normaaljaotusega, st $\boldsymbol{Z} \sim SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}) = SN(\mathbf{I}, \boldsymbol{\delta})$ (seda tähistatakse ka $SSN(\boldsymbol{\delta})$). Kahemõõtmelisel juhul $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2)^T$.

Nüüd, olgu meil kahemõõtmelisest standardsest normaaljaotusest juhuslik suurus $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^T \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}) = N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ ja ühemõõtmelisest standardsest normaaljaotusest juhuslik suurus $X_0 \sim N(0, 1)$, mis on sõltumatu juhuslikust suurusest $\boldsymbol{X}$. Kuna tegime eelduse, et

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

siis

$$\boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2$$

ja

$$\boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \delta_1^2 + \delta_2^2.$$

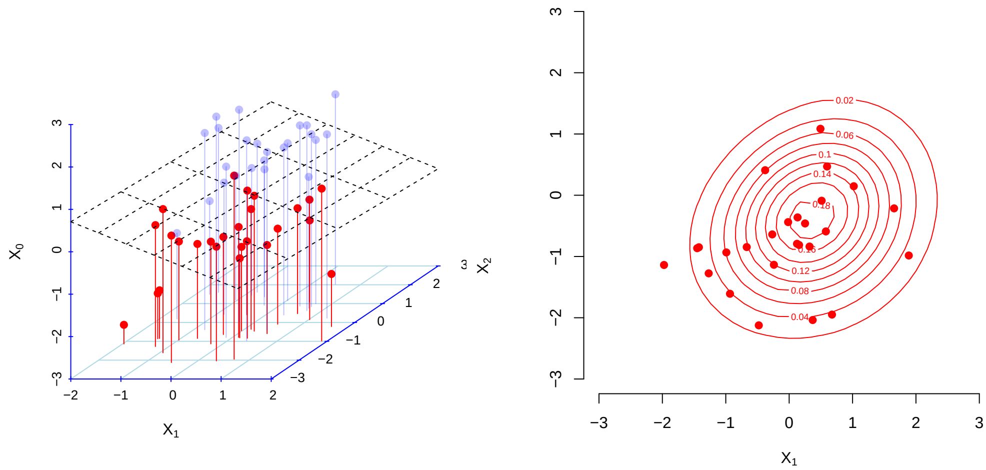
Seega lause 4.1 ja märkuse 4.1 põhjal võime juhusliku suuruse $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2)^T$ esitada kujul:

$$\boldsymbol{Z} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{X} \mid \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2 > \sqrt{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2} X_0.$$

Seega vastava kahemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse määrava lõiketasandi võrrand on

$$\delta_1 X_1 + \delta_2 X_2 - \sqrt{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2} X_0 = 0. \tag{4.3}$$

Joonise 4.3 vasakpoolsel graafikul kujutatud punktid on realisatsioonid kolmemõõtmelise standardse normaaljaotusega juhuslikust suurusest $(X_1, X_2, X_3)^T$. Tumedamad (punased) punktid on need, mis rahuldavad tingimust $\delta_1 X_1 + \delta_2 X_2 > \sqrt{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2} X_0$ ja heledamad (sinised) punktid need, mis ei rahulda antud tingimust. Sama joonise parempoolsel graafikul on kujutatud välja valitud punktid kahemõõtmelises ruumis koos vastava teoreetilise jaotuse (kahemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse) tiheduse samakõrgusjoontega. Antud näite puhul oli $\delta_1 = 0.5$, $\delta_2 = -0.5$, genereeritud punktide arv 50 ja välja valitud punktide arv 26.



Joonis 4.3: Kahemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse moodustamine

Uurime lähemalt lõiketasandi (4.3) ja telgede $X_o$, $X_1$ ja $X_2$ vahelisi nurki. Tuletame meelde, et kui $a$, $b$, $c$ ja $d$ on konstandid ja $a$, $b$ ja $c$ pole kõik korraga nullid, siis tasandi $ax + by + cz + d = 0$ normaalvektor on $\boldsymbol{m} = (a, b, c)^T$ (Anton ja Rorres (2005), lk 156-157). Seega lõiketasandi (4.3) normaalvektor on $\boldsymbol{n} = (-\sqrt{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2}, \delta_1, \delta_2)^T$. Lisaks paneme tähele, et $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \left(-\sqrt{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2}\right)^2 = 1$, seega meie poolt vaadeldava tasandi (4.3) võrrandi koefitsiendid on normaliseeritud ja $\boldsymbol{n}$ näol on tegu ühiknormaalvektoriga. Koordinaattelgede $X_0$, $X_1$ ja $X_2$ ühiknormaalvektorid on vastavalt $\boldsymbol{e}_{X_0} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_{X_1} = (0, 1, 0)$ ja $\boldsymbol{e}_{X_2} = (0, 0, 1)$.

Nüüd, kasutame teadmist (Anton ja Rorres (2005), lk 137), et kui $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ ja $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ on vektorid kolmemõõtmelises ruumis ja nendevaheline nurk on $\beta$, siis

$$\cos(\beta) = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|},$$

kus

- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ on vektorite $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ skalaarkorrutis;
- $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ ja $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ on vastavalt vektorite $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ normid.

Seega vektori $\boldsymbol{n}$ ja vektori $\boldsymbol{e}_{X_0}$ vahelise nurga $\gamma_0$ koosinus on

$$\begin{aligned}\cos\gamma_0 =& \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_{X_0}}{\|\boldsymbol{n}\|\|\boldsymbol{e}_{X_0}\|} = \frac{-\sqrt{1-\delta_1^2-\delta_2^2}+0+0}{\sqrt{1-\delta_1^2-\delta_2^2+\delta_1^2+\delta_2^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \\ =& \frac{-\sqrt{1-\delta_1^2-\delta_2^2}}{\sqrt{1^2}} = -\sqrt{1-\delta_1^2-\delta_2^2}.\end{aligned}$$

Vektori $\boldsymbol{n}$ ja vektori $\boldsymbol{e}_{X_1}$ vahelise nurga $\gamma_1$ koosinus on

$$\cos\gamma_1 = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_{X_1}}{\|\boldsymbol{n}\|\|\boldsymbol{e}_{X_1}\|} = \frac{0+\delta_1+0}{\sqrt{1-\delta_1^2-\delta_2^2+\delta_1^2+\delta_2^2}\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = \delta_1.$$

Ja vektori $\boldsymbol{n}$ ja vektori $\boldsymbol{e}_{X_2}$ vahelise nurga $\gamma_2$ koosinus on

$$\cos\gamma_2 = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_{X_2}}{\|\boldsymbol{n}\|\|\boldsymbol{e}_{X_2}\|} = \frac{0+0+\delta_2}{\sqrt{1-\delta_1^2-\delta_2^2+\delta_1^2+\delta_2^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \delta_2.$$

Seega lõiketasandi (4.3) võib defineerida võrdusega

$$X_0\cos\gamma_0 + X_1\cos\gamma_1 + X_2\cos\gamma_2 = 0,$$

kus $\gamma_i$ on selle lõiketasandi ühiknormaalvektori $\boldsymbol{n} = (\cos\gamma_0, \cos\gamma_1, \cos\gamma_2)^T$ ja $X_i$-telje vaheline nurk, $i = 1, 2, 3$.

Lisaks kehtib seos parameetri $\boldsymbol{\alpha}$ ja nurga $\gamma_0$ vahel:

$$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} = \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2}{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2} = \tan^2\gamma_0,$$

kus $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)^T$. Vaatame, miks see nii on. Nimelt kuna $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{I}$, siis

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\delta}}} = \frac{\boldsymbol{\delta}}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\delta}}},$$

millest saame, et

$$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{pmatrix} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \frac{\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\delta}}{1 - \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\delta}} = \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2}{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2}.$$

Teisalt, kasutades tuntud trigonomeetriavalemit, saame

$$1 + \tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow \tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta} - 1,$$

mistõttu

$$\tan^2\gamma_0 = \frac{1}{\cos^2\gamma_0} - 1 = \frac{1}{(-\sqrt{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2})^2} - 1 = \frac{1 - 1 + \delta_1^2 + \delta_2^2}{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2} = \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2}{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2}.$$

Kokkuvõttes

$$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} = \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2}{1 - \delta_1^2 - \delta_2^2} = \tan^2\gamma_0.$$

Seega parameetri $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)^T$ ruut $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$ on võrdne kahemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse määrava tasandi ja abikoordinaattelje $X_0$ vahelise nurga tangensi ruuduga. Antud tulemust on aga üpris raske interpreteerida.

Lisaks, paneme tähele, et $(X_0, X_1)$-koordinaattasandi ja tasandi (4.3) lõikesirge on

$$-\sqrt{1-\delta_1^2-\delta_2^2}X_0+\delta_1 X_1=0, \tag{4.4}$$

mille võib teisel kujul kirjutada

$$X_0=\frac{\delta_1}{\sqrt{1-\delta_1^2-\delta_2^2}}X_1=\alpha_1 X_1.$$

Ning analoogselt ühemõõtmelisele juhule $\alpha_1=\tan\gamma_{1*}$ kus $\gamma_{1*}$ on sirge (4.4) ja $X_1$-telje vaheline nurk. Sarnaselt võib esitada $(X_0,X_1)$-koordinaattasandi ja tasandi (4.3) lõikesirge

$$-\sqrt{1-\delta_1^2-\delta_2^2}X_0+\delta_2 X_2=0 \tag{4.5}$$

teisel kujul

$$X_0=\frac{\delta_2}{\sqrt{1-\delta_1^2-\delta_2^2}}X_2=\alpha_2 X_1$$

ja $\alpha_2=\tan\gamma_{2*}$, kus $\gamma_{2*}$ on sirge (4.5) ja $X_2$-teje vaheline nurk.

## 4.4 $k$-mõõtmeline juht

Olgu meil nüüd $k$-mõõtmeline juhuslik suurus $\boldsymbol{Z}$ standardse $k$-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotusega, st $\boldsymbol{Z}\sim SN(\mathbf{I},\boldsymbol{\delta})=SSN(\boldsymbol{\delta})$. Siis selle juhusliku suuruse võime tinglikult esitada (vaata valemit (4.2)):

$$\boldsymbol{Z}\overset{d}{=}\left[\boldsymbol{X}\middle|\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}>\sqrt{1-\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\delta}}X_0\right],$$

kus $k$-mõõtmeline juhuslik suurus $\boldsymbol{X} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ ja ühemõõtmeline juhuslik suurus $X_0 \sim N(0,1)$ on sõltumatud.

Nüüd saame $k$-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse määrava hüpertasandi kirja panna kui

$$\delta_1 X_1 + \ldots + \delta_k X_k - \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{k} \delta_i^2} X_0 = 0. \tag{4.6}$$

Analoogselt kahemõõtmelisele juhule, saame selle tasandi ühiknormaalvektoriks

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{k} \delta_i^2} \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma_0 \\ \cos\gamma_0 \\ \vdots \\ \cos\gamma_k \end{pmatrix}$$

ja tasandi (4.6) võrrandi esitada kujul

$$X_0 \cos\gamma_0 + X_1 \cos\gamma_1 + \ldots + X_k \cos\gamma_k = 0,$$

kus $\gamma_i$ on ühiknormaalvektori $\boldsymbol{n}$ ja $X_i$-telje vaheline nurk, $i = 1, \ldots, k$.

# Kokkuvõte

Käesolevas magistritöös uuriti mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse erinevaid parametrisatsioone ja parameetrite vahelisi seoseid. Selgus, et teatud tingimustel sobib ekvivalentselt $\{\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\lambda}\}$- ja $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsiooniga mitmemõõtmelist asümmeetrilist normaaljaotust kirjeldama ka $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$- ja $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda}\}$-parametrisatsioon.

Paraku pole ühest vastust küsimusele, milline parametrisatsioon on kõige parem. Parametrisatsiooni valikul tuleks eelkõige lähtuda konkreetsest probleemist. Kui uurija jaoks on oluline otsene seos marginaalsete parameetritega, tuleks eelistada $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda}\}$- või $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrisatsiooni. Kui ta seejuures soovib end säästa lisaparameetri $\boldsymbol{\Delta}$ tülikast arvutamisest, oleks sobilik valik $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$-parametrisatsioon. $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$- ja $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda}\}$-parametrisatsiooni eeliseks on ka see, et dimensiooni vähenemisega pole vaja parameetreid uuesti välja arvutada nagu $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsiooni puhul.

Samas, erinevalt $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta}\}$- ja $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda}\}$-parametrisatsioonist võib $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsiooni korral parameetrid teineteisest sõltumatult valida. Lisaks on parameetritel $\boldsymbol{\Omega}$ ja $\boldsymbol{\alpha}$ otsene seos asümmeetrilise normaaljaotuse tihedusfunktsiooniga, mistõttu on $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha}\}$-parametrisatsiooni vaadeldavatest ka kõige rohkem kasutatud. Lisaks on $SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha})$ juhusliku valimi korral on suurima tõepära hinnangud kergesti leitavad.

# Kirjandus


[1] Anton, H., Rorres, C. (2005) *Elementary Linear Algebra: Applications Version* (9th ed.). Drexel Univeristy.

[2] Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavial Journal of Statistics*, 12: 171-178.

[3] Azzalini, A., Capitanio, A. (1999). Statistical applications of the multivariate skew-normal distribution. *J. Roy. Statist. Soc. series B*, 61(3): 579-602.

[4] Azzalini, A., Dalla Valle, A. (1996). The multivariate skew-normal distribution. *Biometrika*, 83(4): 715-726.

[5] Crocetta, C., Loperfido, N. (2009). Maximum likelihood estimation of correlation between maximal oxygen consumption and the 6-min walk test in patients with chronic heart failure. *Journal of Applied Statistics*, 36(10): 1101-1108

[6] Dunajeva, O., Kollo, T., Traat, I. (2003). Bias correction for the shape parameter of the skew normal distribution. *Tatra Mt. Math. Publ.*, 26: 281-289.

[7] Käärik, M., Selart, A., Käärik, E. (2015). On parametrization of multivariate skew-normal distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*. (ilmumas)

[8] Piziak, R., Odell, P. L. (2007). *Matrix Theory: From Generalized Inverses to Jordan Form*, Chapman and Hall/CRC

# A Animeeritavad tihedused R-is

## A.1 $SN(\lambda)$ tihedus

```
install.packages('rpanel')        # Installime lisamooduli "rpanel",
# mis lubab joonisel parameetreid muuta (animeerida)
library(tcltk)        # "rpanel" kasutab lisamoodulit "tcltk"
library(rpanel)
# Funktsioon ühemõõmelise asümeetrilise normaaljaotuse
# tiheduse arvutamiseks:
skewnormal_pdf <- function(x,lambda){
        phi <- dnorm(x)
        Phi <- pnorm(lambda*x)
        f <- 2*phi*Phi
        return(f)
}
# Määrame akna laiuse, kuhu joonistama hakkame:
x11(width=8,height=8)
# Anname ette x väärtused:
x <- seq(-3,3,0.001)
joonis <- function(panel){
        # Kasutame funktsiooni skewnormal_pdf ühemõõtmelise
        # asümmeetrilise normaaljaotuse tiheduse joonistamiseks
        plot(x,skewnormal_pdf(x,panel$lambda),ylim=c(0,0.9),
        bty="n",type="l", col="red",lty=1, lwd=2,
        ylab=expression(f(z,lambda)),
        xlab=expression(z),
        main = bquote(paste(lambda," = ",.(round(panel$lambda, 2)))))
        panel
        }
# Lisame paneeli ja määrame lambda kontrolloleku (null):
panel <- rp.control(lambda = 0)
# Lisame lambda muutmiseks liuguri (vahemik -8st 8ni):
rp.slider(panel, lambda, -8, 8, joonis,showvalue = TRUE)
```

```
# Joonis tekib aknasse kohe, kui liigutada lambda liugurit.
```

## A.2 $SN(\mathbf{\Psi}, \boldsymbol{\lambda})$ kahemõõtmeline tihedus

```
# Antud koodilõik ei pruugi töötada (dsn2.plot funktsiooni ei saa
# kasutada) R3 versioonide puhul. Proovi varasemaid R versioone
# (mina kasutasin R 2.14.2-te)
install.packages('rpanel')       # Installime lisamooduli "rpanel",
# mis lubab joonisel parameetreid muuta (animeerida)
library(tcltk)
library(rpanel)
install.packages('sn')       # Installime lisamooduli "sn", mille abil
# saame 2-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse tiheduse joonistada
install.packages('mnormt')       # Installime ka abimooduli "mnormt",
# mida lisamoodul "sn" kasutab
library(mnormt)
library(sn)
# Määrame akna laiuse, kuhu joonistama hakkame:
x11(width=8,height=8)
# Anname ette x ja y väärtused:
x <- y <- seq(-3, 3, length=35)
joonis <- function(panel){
        # dsn2.plot joonistab kahemõõtmelise asümmeetrilise
        # normaaljaotuse tiheduse
        # Marginaalsete asümmeetriaparameetrite vektor:
        lambda <-rbind(panel$lambda1,panel$lambda2)
        Delta1 <- 1/sqrt(1+(panel$lambda1)**2)
        Delta2<-1/sqrt(1+(panel$lambda2)**2)
        # Abimaatriks Delta:
        Delta <- diag(c(Delta1,Delta2),2,2)
        # Korrelatsioonimaatriks Psi:
        Psi <- matrix(c(1,panel$psi,panel$psi,1),2,2)
        alpha_lugeja <- solve(Delta)%*%solve(Psi)%*%lambda
        alpha_nimetaja <-sqrt(1+t(lambda)%*%solve(Psi)%*%lambda)
        # Asümmeetriaparameeter alpha:
```

```
        alpha <- alpha_lugeja/alpha_nimetaja[1,1]
        # Korrelatsioonimaatriks Omega
        Omega <- Delta%*%(Psi+lambda%*%t(lambda))%*%Delta
        dsn2.plot(x, y, c(0,0), Omega=Omega, alpha=alpha,
        col=2,main = bquote(paste(psi," = ",.(round(panel$psi, 2)),
        ", ", lambda[1], " = ",.(round(panel$lambda1, 2)),
        ", ", lambda[2], " = ",.(round(panel$lambda2, 2)))))
        panel
        }
# Määrame parameetritele kontrolloleku (kõik nullid):
panel <- rp.control(lambda1=0,lambda2=0, psi = 0)
# Lisame korrelatsioonikordaja muutmiseks liuguri,
# mille liikumisvahemik on -0.99st 0.99ni:
rp.slider(panel, psi, -0.99, 0.99, joonis,showvalue = TRUE)
# Lisame lambda1 muutmiseks liuguri (vahemik -5st 5ni):
rp.slider(panel, lambda1, -5, 5, joonis,showvalue = TRUE)
# Lisame lambda2 muutmiseks liuguri (vahemik -5st 5ni):
rp.slider(panel, lambda2, -5, 5, joonis,showvalue = TRUE)
# Joonis tekib aknasse siis, kui liigutada ükskõik millist liugurit
```

## A.3 $SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\alpha})$ kahemõõtmeline tihedus

```
# Antud koodilõik ei pruugi töötada (dsn2.plot funktsiooni
# ei saa kasutada) R3 versioonide puhul. Proovi varasemaid
# R versioone (mina kasutasin R 2.14.2-te)
install.packages('rpanel')       # Installime lisamooduli "rpanel",
# mis lubab joonisel parameetreid muuta (animeerida)
library(tcltk)
library(rpanel)
install.packages('sn')       # Installime lisamooduli "sn", millega
# saame 2-mõõmelise asümmeetrilise normaaljaotuse tiheduse joonistada
install.packages('mnormt')       # Installime ka abimooduli "mnormt",
# mida lisamoodul "sn" kasutab
library(mnormt)
library(sn)
```

```
# Määrame akna laiuse, kuhu joonistama hakkame:
x11(width=8,height=8)
# Anname ette x ja y väärtused
x <- y <- seq(-3, 3, length=35)
joonis <- function(panel){
        # dsn2.plot joonistab kahemõõmelise asümmeetrilise
        # normaaljaotuse tiheduse
        dsn2.plot(x, y, c(0,0),
        Omega=matrix(c(1,panel$omega, panel$omega,1),2,2),
        alpha=c(panel$alpha1,panel$alpha2),
        col=2,main = bquote(paste(omega," = ",
        .(round(panel$omega, 2)),", ",
        alpha[1], " = ",.(round(panel$alpha1, 2)),", ",
        alpha[2], " = ",.(round(panel$alpha2, 2)))))
        panel
        }
# Määrame parameetritele kontrolloleku (kõik nullid):
panel <- rp.control(alpha1=0,alpha2=0, omega = 0)
# Lisame omega muutmiseks liuguri, liikumisvahemikuga -0.99st 0.99ni:
rp.slider(panel, omega, -0.99, 0.99, joonis,showvalue = TRUE)
# Lisame alpha1 muutmiseks liuguri (vahemik -5st 5ni):
rp.slider(panel, alpha1, -5, 5, joonis,showvalue = TRUE)
# Lisame alpha2 muutmiseks liuguri (vahemik -5st 5ni):
rp.slider(panel, alpha2, -5, 5, joonis,showvalue = TRUE)
# Joonis tekib aknasse siis, kui liigutada ükskõik millist liugurit.
```

## A.4 $SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\delta})$ kahemõõtmeline tihedus

```
# Antud koodilõik ei pruugi töötada (dsn2.plot funktsiooni
# ei saa kasutada) R3 versioonide puhul. Proovi varasemaid
# R versioone (mina kasutasin R 2.14.2-te)
install.packages('rpanel')        # Installime lisamooduli "rpanel",
# mis lubab joonisel parameetreid muuta (animeerida)
library(tcltk)
library(rpanel)
```

```
install.packages('sn')        # Installime lisamooduli "sn", millega
# saame lihtsalt 2-mõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse
# tiheduse joonistada
install.packages('mnormt')        # Installime ka abimooduli "mnormt",
# mida lisamoodul "sn" kasutab
library(mnormt)
library(sn)
# Määrame akna laiuse, kuhu joonistama hakkame:
x11(width=8,height=8)
# Anname ette x ja y väärtused:
x <- y <- seq(-3, 3, length=35)
joonis <- function(panel){
        # dsn2.plot joonistab kahemõõtmelise asümmeetrilise
        # normaaljaotuse tiheduse kontuurgraafiku
        Omega <- matrix(c(1,panel$omega,panel$omega,1),2,2)
        # Asümmeetriaparameeter delta:
        delta <-rbind(panel$delta1,panel$delta2)
        alpha_lugeja <- solve(Omega)%*%delta
        alpha_nimetaja <-sqrt(1-t(delta)%*%solve(Omega)%*%delta)
        # Asümmeetriaparameeter alpha:
        alpha <- alpha_lugeja/alpha_nimetaja[1,1]
        if(t(delta)%*%solve(Omega)%*%delta<1){        # Kui see kehtib,
        # on Psi positiivselt määratud
        dsn2.plot(x, y, c(0,0), Omega=Omega, alpha=alpha, col=2,
        main = bquote(paste(omega," = ",.(round(panel$omega, 2)),
        ", ", delta[1], " = ",.(round(panel$delta1, 2)),
        ", ", delta[2], " = ",.(round(panel$delta2, 2)))))}
        # Kui Psi pole positiivselt määratud, anname sellest märku
        else{plot(-3:3, -3:3, type = "n", xlab = " ", ylab = "",
        main = bquote(paste(omega," = ",
        .(round(panel$omega, 2)),", ",
        delta[1], " = ",.(round(panel$delta1, 2)),", ",
        delta[2], " = ",.(round(panel$delta2, 2)))))
        text(0, 0, bquote(paste("Tingimus   ",
        delta^T,Omega^-1,delta,
        "  < 1  pole täidetud.")))}
        panel
```

```
        }
# Määrame parameetritele kontrolloleku (kõik nullid):
panel <- rp.control(delta1=0,delta2=0, omega = 0)
# Lisame omega muutmiseks liuguri, liikumisvahemikuga -0.99st 0.99ni:
rp.slider(panel, omega, -0.99, 0.99, joonis,showvalue = TRUE)
# Lisame delta1 muutmiseks liuguri (vahemik -0-.99st 0.99ni):
rp.slider(panel, delta1, -0.99, 0.99, joonis,showvalue = TRUE)
# Lisame delta2 muutmiseks liuguri (vahemik -0.99st 0-99ni)
rp.slider(panel, delta2, -0.99, 0.99, joonis,showvalue = TRUE)
```

## A.5 $SN(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\lambda})$ kahemõõtmeline tihedus

```
# Antud koodilõik ei pruugi töötada (dsn2.plot funktsiooni
# ei saa kasutada) R3 versioonide puhul. Proovi varasemaid
# R versioone (mina kasutasin R 2.14.2-te)
install.packages('rpanel')       # Installime lisamooduli "rpanel",
# mis lubab joonisel parameetreid muuta (animeerida)
library(tcltk)
library(rpanel)
install.packages('sn')       # Installime lisamooduli "sn", mille abil
# joonistame 2-mõõmelise asümmeetrilise normaaljaotuse kontuurgraafiku
install.packages('mnormt')       # Installime ka abimooduli "mnormt",
# mida lisamoodul "sn" kasutab
library(mnormt)
library(sn)
# Määrame akna laiuse, kuhu joonistama hakkame:
x11(width=8,height=8)
x <- y <- seq(-3, 3, length=35)       # Anname ette x ja y väärtused
joonis <- function(panel){
        # dsn2.plot joonistab kahemõõtmelise asümmeetrilise
        # normaaljaotuse kontuurgraafiku
        Omega <- matrix(c(1,panel$omega,panel$omega,1),2,2)
        # Marginaalsete asümmeetriaparameetrite vektor:
        lambda <-rbind(panel$lambda1,panel$lambda2)
        Delta1 <- 1/sqrt(1+(panel$lambda1)**2)
```

```
        Delta2<-1/sqrt(1+(panel$lambda2)**2)
        Delta <- diag(c(Delta1,Delta2),2,2)        # Abimaatriks Delta
        delta <- Delta%*%lambda        # Asümmeetriaparameeter delta
        alpha_lugeja <- solve(Omega)%*%delta
        alpha_nimetaja <-sqrt(1-t(delta)%*%solve(Omega)%*%delta)
        # Asümmeetriaparameeter alpha:
        alpha <- alpha_lugeja/alpha_nimetaja[1,1]
        # Et Omega oleks positiivselt määratud, peab kehtima:
        if(t(lambda)%*%Delta%*%solve(Omega)%*%Delta%*%lambda<1){
        dsn2.plot(x, y, c(0,0), Omega=Omega, alpha=alpha, col=2,
        main = bquote(paste(omega," = ",.(round(panel$omega, 2)),", ",
        lambda[1], " = ",.(round(panel$lambda1, 2)),", ",
        lambda[2], " = ",.(round(panel$lambda2, 2)))))}
        # Kui Psi pole positiivselt määratud, anname sellest märku:
        else{plot(-3:3, -3:3, type = "n", xlab = " ", ylab = "",
        main = bquote(paste(omega," = ",.(round(panel$omega, 2)),", ",
        lambda[1], " = ",.(round(panel$lambda1, 2)),", ",
        lambda[2], " = ",.(round(panel$lambda2, 2)))))
        text(0, 0, bquote(paste("Tingimus   ",
        lambda^T,Delta,Omega^-1,Delta,lambda,"  < 1  pole täidetud.")))}
        panel
        }
# Määrame parameetritele kontrolloleku (kõik nullid):
panel <- rp.control(lambda1=0,lambda2=0, omega = 0)
# Lisame liuguri omega muutmiseks, liikumisvahemikuga -0.99st 0.99ni:
rp.slider(panel, omega, -0.99, 0.99, joonis,showvalue = TRUE)
# Lisame lambda1 muutmiseks liuguri (vahemik -3st 3ni):
rp.slider(panel, lambda1, -3, 3, joonis,showvalue = TRUE)
# Lisame lambda2 muutmiseks liuguri (vahemik -3st 3ni):
rp.slider(panel, lambda2, -3, 3, joonis,showvalue = TRUE)
```

# B Töös esitatud jooniste koodid R-is

## B.1 Joonis 1.1

```
# Funktsioon, mis arvutab ühemõõtmeline asümmeetriline
# normaaljaotuse tiheduse:
skewnormal_pdf <- function(z,lambda){
        phi <- dnorm(x)
        Phi <- pnorm(lambda*x)
        f <- 2*phi*Phi
        return(f)
}
# Anneme ette x väärtused:
x <- seq(-2,2,0.001)
# Joonistame SN(1) tiheduse joone:
plot(x,skewnormal_pdf(x,1), bty="n",type="l",col="red",
        ylim=c(0,0.6),lty=2, lwd=2,        # lambda = 1
        # Lisame telgedele nimetused
        ylab=expression(f(z,lambda)), xlab=expression(z))
# Lisame SN(0) tiheduse joone:
lines(x,skewnormal_pdf(x,0),col="green",lty=1,lwd=2)
# Lisame SN(-1) tiheduse joone:
lines(x,skewnormal_pdf(x,-1),col="blue",lty=3,lwd=2)
# Lisame joonisele legendi:
legend(1.1,0.62, legend=c(expression(lambda==1),
        expression(lambda==0),expression(lambda==-1)),
        col=c("red","green","blue"),lwd=2, lty=c(2,1,3),bty="n")
```

## B.2 Joonised 1.2 ja 1.3

```
install.packages("sn")        # Lisamoodul, mille abil saame
# joonistada kahemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse tiheduse
```

```
install.packages('mnormt')
library(mnormt)
library(sn)
Psilambda2dim=function(psi,lambda1,lambda2){
        # Marginaalsete asümmeetriaparameetrite vektor:
        lambda <-rbind(lambda1,lambda2)
        Delta1 <- 1/sqrt(1+(lambda1)**2);Delta2<-1/sqrt(1+(lambda2)**2)
        # Abimaatriks Delta:
        Delta <- diag(c(Delta1,Delta2),2,2)
        # Korrelatsioonimaatriks Psi:
        Psi <- matrix(c(1,psi,psi,1),2,2)
        alpha_lugeja <- solve(Delta)%*%solve(Psi)%*%lambda
        alpha_nimetaja <-sqrt(1+t(lambda)%*%solve(Psi)%*%lambda)
        # Asümmeetriaparameeter alpha:
        alpha <- alpha_lugeja/alpha_nimetaja[1,1]
        # Korrelatsioonimaatriks Omega:
        Omega <- Delta%*%(Psi+lambda%*%t(lambda))%*%Delta
        # R-i enda funktsioon (Omega, alpha)-parameetritega:
        dsn2.plot(x, y, c(0,0), cex.lab=1.5,Omega=Omega, alpha=alpha,
        main = bquote(paste(psi," = ",.(round(psi, 2)),", ",
        lambda[1], " = ",.(round(lambda1, 2)),", ",lambda[2], " = ",
        .(round(lambda2, 2)))))
}
# Määrame piirkonna, kuhu tihedus joonistada:
x <- y <- seq(-2.5, 2.5, length=35)
# Vaatame erinevaid psi, lambda1 ja lambda2 kombinatsioone
## Kui lambda1=lambda2=0, aga korrelatsioon muutub:
par(mar=c(2,2,3,1))
# Määrame koos kujutatavate graafikute arvu:
op=par(mfrow=c(2,3),pty="m")
Psilambda2dim(0.8,0,0);Psilambda2dim(0.4,0,0);Psilambda2dim(0,0,0);
Psilambda2dim(-0.4,0,0);Psilambda2dim(-0.8,0,0)
## Kui psi=0, aga lambda1 ja lambda2 muutuvad:
op=par(mfrow=c(3,3),pty="m")
Psilambda2dim(0,0,0);Psilambda2dim(0,2,0);Psilambda2dim(0,-2,0);
Psilambda2dim(0,0,2);Psilambda2dim(0,0,-2);Psilambda2dim(0,2,2);
Psilambda2dim(0,-2,-2);Psilambda2dim(0,2,-2);Psilambda2dim(0,-2,2)
```

## B.3 Joonised 1.4 ja 1.5

```
install.packages("sn")        # Lisamoodul, mille abil saame
# joonistada kahemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse tiheduse
install.packages('mnormt')
library(mnormt)
library(sn)
Omegaalpha2dim=function(omega,alpha1,alpha2){
        # Asümmeetriaparameeter alpha:
        alpha <- rbind(alpha1,alpha2)
        # Korrelatsioonimaatriks Omega:
        Omega <- matrix(c(1,omega,omega,1),2,2)
        # R-i enda funktsioon (Omega, alpha)-parameetritega
        dsn2.plot(x, y, c(0,0),cex.lab=1.5, Omega=Omega, alpha=alpha,
        main = bquote(paste(omega," = ",.(round(omega, 2)),", ",
        alpha[1], " = ",.(round(alpha1, 2)),", ",alpha[2], " = ",
        .(round(alpha2, 2)))))
}
# Määrame piirkonna, kuhu tihedus joonistada:
x <- y <- seq(-2.5, 2.5, length=35)
# Vaatame erinevaid omega, alpha1 ja alpha2 kombinatsioone
## Kui alpha1=alpha2=0, aga korrelatsioon muutub:
# Määrame koos kujutatavate graafikute arvu:
op=par(mfrow=c(2,3),pty="m")
# par(mfrow=c(1,1)) # Graafikute arv taas üheks
Omegaalpha2dim(0.8,0,0);Omegaalpha2dim(0.4,0,0);Omegaalpha2dim(0,0,0);
Omegaalpha2dim(-0.4,0,0);Omegaalpha2dim(-0.8,0,0)
## Kui omega=0, aga alpha1 ja alpha2 muutuvad:
op=par(mfrow=c(3,3),pty="m")
Omegaalpha2dim(0,0,0);Omegaalpha2dim(0,2,0);Omegaalpha2dim(0,-2,0);
Omegaalpha2dim(0,0,2);Omegaalpha2dim(0,0,-2);Omegaalpha2dim(0,2,2);
Omegaalpha2dim(0,-2,-2);Omegaalpha2dim(0,2,-2);Omegaalpha2dim(0,-2,2)
```

## B.4 Joonised 4.1 ja 4.2

```
## Esimene joonis
# Teeme kaks graafikut ühte aknasse:
op <- par(mfrow = c(1, 2))
par(oma=c(1,0,0,0),mar=c(4,0.5,1,1.5))
# Genereerime andmed standardsest kahemõõtmelisest normaaljaotusest:
# X_1 ja X_0 keskväärtuste vektor:
mU <- rbind(0,0)
# X_1 ja X_0 vaheline kovariatsioonimaatriks:
SigmA <- matrix(c(1,0,0,1),2,2)
library(MASS)
andmed <- mvrnorm(5000, mU, SigmA)
X_1 <- andmed[,1];X_0 <- andmed[,2]
# Valime asümmeetriaparameetri väärtuse:
lambda <- 2
# Seega lõikav sirge on X_0 = 2X_1.
# Punktid, mis välja valiti:
andmed2 <- andmed[lambda*andmed[,1] > andmed[,2],]
# Punktid, mis ei sobinud:
andmed3 <- andmed[2*andmed[,1] <= andmed[,2],]
# Genereerime abiandmed laiema graafiku jaoks:
abiandmed <- mvrnorm(1000, rbind(0,0), matrix(c(3,0,0,3),2,2))
# Joonistame laiema graafiku:
plot(abiandmed[,1],abiandmed[,2],frame.plot=FALSE,
axes=FALSE,xlab='',ylab='', col="white")
# Joonistame teljed:
arrows(min(abiandmed[,1]), 0, max(abiandmed[,1]), 0,
 length=0.15, angle=15)
arrows(0, min(abiandmed[,2]), 0, max(abiandmed[,2]),
 length=0.15, angle=15)
# Lisame telgedele nimetused:
text(max(abiandmed[,1]),0.3,expression(X[1]))
text(0.4,max(abiandmed[,2]),expression(X[0]))
# Lisame nüüd valimi punktid, mis ei vasta kriteeriumile:
points(andmed3[,1],andmed3[,2], col=rgb(0.5,1,0.5,alpha=0.6),
```

```
 cex=0.7)
# Lisame välja valitud punktid:
points(andmed2[,1],andmed2[,2],bg=rgb(0.25,0.75,0.25,alpha=1),
 pch=21,col=rgb(0,0.33,0,alpha=1),cex=0.7)
# Lisame lõikava joone:
segments(-3,-6,3, 6,col='blue1', lwd=2)
# Lisame sirge võrrandi:
text(-2.35,-4,labels=bquote(paste(lambda,X[1],' - ',X[0],' = 0')),
 srt=63.5)
# Teeme kõrvale ühemõõtmelise jaotuse joonise valitud punktidest:
par(mar=c(4,1.5,1,0.5))
hist(andmed2[,1], prob=T, breaks=100, main='',
 col=rgb(0.25,0.75,0.25,alpha=1),border=rgb(0,0.33,0,alpha=1),
xlab=expression(X[1]), ylab='')
skewnormal_pdf <- function(z,lambda){
        phi <- dnorm(x)
        Phi <- pnorm(lambda*x)
        f <- 2*phi*Phi
        return(f)
}
x <- seq(-3,4,0.001)
# Lisame valitud punktide teoreetilise tiheduse - SN(2) tiheduse:
lines(x,skewnormal_pdf(x,2),col=rgb(0.5,0,0,1),lty=1,lwd=2)
# Lisame kõigi punktide teoreetilise tiheduse - SN(0) tiheduse:
lines(x,skewnormal_pdf(x,0),col="blue",lty=2,lwd=2)
legend(1.15,0.6,
legend=bquote(paste('SN(',lambda,') tihedusfunktsioon')),
col=rgb(0.5,0,0,1),lwd=2,lty=1,bty='n', cex=0.88)
legend(1.15,0.55,legend=bquote(paste('SN(0) tihedusfunktsioon')),
col='blue',lwd=2,lty=2,bty='n', cex=0.88)
par(op)

## Teine joonis
# Joonistame laiema graafiku
op <- par(mfrow = c(1, 1))
par(oma=c(0,0,0,0),mar=c(1,0.5,1,0.5))
plot(abiandmed[,1],abiandmed[,2],frame.plot=FALSE,
```

```
axes=FALSE,xlab='',ylab='', col="white")
# Joonistame teljed:
arrows(min(abiandmed[,1]), 0, max(abiandmed[,1]), 0,
 length=0.15, angle=15)
arrows(0, min(abiandmed[,2]), 0, max(abiandmed[,2]),
 length=0.15, angle=15)
# Lisame telgedele nimetused:
text(max(abiandmed[,1]),0.3,expression(X[1]))
text(0.4,max(abiandmed[,2]),expression(X[0]))
# Lisame punktid, mis ei vasta krieteeriumile:
points(andmed3[,1],andmed3[,2], col=rgb(0.5,1,0.5,alpha=0.1),
 cex=0.7)
# Lisame välja valitud punktid:
points(andmed2[,1],andmed2[,2],bg=rgb(0.25,0.75,0.25,alpha=0.1),
 pch=21,col=rgb(0,0.33,0,alpha=0.1),cex=0.7)
# Lisame lõikava sirge:
segments(-3,-6,3, 6,col='blue1', lwd=2)
# Lisame sirge võrrandi:
text(1.65,4,labels=bquote(paste(lambda,X[1],' - ',X[0],' = 0')),
 srt=62.5)
# Kolmnurga joonistamine:
polygon(x=rbind(0,2,2,0), y=rbind(0,4,0,0),density=NULL, lty = 2,
 lwd = 2, border = "black")
# Lisame nurgale kaare:
xx=seq(0.5,1,by=0.001)
yy=sqrt(1-xx^2)
lines(xx,yy,type='l', col='black')
# Lisame nurga tähise gamma:
text(0.5,0.26, expression(bold(gamma)), col='black',cex=1.3)
# Lisame kolmnurga külgede tähised:
text(2.3,2, expression(a), col='black',srt=90, cex=1.4)
text(1,-0.4, expression(b), col='black', cex=1.4)
text(0.8,2.3, expression(c), col='black',srt=63, cex=1.4)
```

## B.5 Joonis 4.3

```
# Teeme kaks joonist ühte aknasse:
op <- par(mfrow = c(1, 2))
par(oma=c(0,0,0,0),cex.axis=0.7, cex.lab=0.7,xpd=NA)
library(MASS)
mu=rbind(0,0,0)
Sigma=matrix(c(1,0,0,0,1,0,0,0,1),3,3)
# Genereerime valimi kolmemõõtmelisest standardsest normaaljaotusest:
andmed=mvrnorm(n = 50, mu, Sigma)
X1=andmed[,1];X2=andmed[,2];X0=andmed[,3]
install.packages("scatterplot3d", dependencies = TRUE)
# Valime delta komponentide väärtused:
delta1=0.25; delta2=-0.16
# Punktid, mis rahuldavad tingimust:
andmed1=andmed[delta1*X1+delta2*X2>sqrt(1-delta1^2-delta2^2)*X0,]
# Punktid, mis ei rahulda tingimust:
andmed2=andmed[delta1*X1+delta2*X2<=sqrt(1-delta1^2-delta2^2)*X0,]
library(scatterplot3d)
# Märgime tingimust rahuldavad punktid:
par(mar=c(3,0,0,0))
s3d <- scatterplot3d(andmed1[,1], andmed1[,2], andmed1[,3],
         zlim=range(X0), xlim=range(X1), ylim=range(X2),
         type='h',color='red',col.axis="blue",col.grid="lightblue",
         pch=19, box=F, xlab=expression(X[1]),ylab=expression(X[2]),
         zlab=expression(X[0]))
# Märgime tingimust mitterahuldavad punktid:
s3d$points3d(andmed2[,1],andmed2[,2],andmed2[,3],type='h',
 pch=19,col=rgb(0,0,1,0.25))
# Tasandi määravad kordajad:
kordaja1=delta1/sqrt(1-delta1^2-delta2^2)
kordaja2=delta2/sqrt(1-delta1^2-delta2^2)
# Joonistame tasandi:
s3d$plane3d(Intercept=0,x.coef=kordaja1,y.coef=kordaja2, lwd=0.7)
# Joonistame kõrvale välja valitud punktid 2-mõõtmelises ruumis:
# Anname ette x ja y väärtused:
```

```
x <- y <- seq(-3, 3, length=35)
Omega <- diag(2)        # Korrelatsioonimaatriks Omega
delta <- rbind(delta1,delta2)        # Asümmeetriaparameeter delta
alpha_lugeja <- solve(Omega)%*%delta
alpha_nimetaja <-sqrt(1-t(delta)%*%solve(Omega)%*%delta)
# Asümmeetriaparameeter alpha:
alpha <- alpha_lugeja/alpha_nimetaja[1,1]
install.packages('sn')
library(sn)
par(mar=c(5,2,5,5))
# Joonistame valitud punktide kahemõõtmelise teoreetilise tiheduse:
dsn2.plot(x, y, c(0,0), Omega=Omega, alpha=alpha,col=2,
xlab=expression(X[1]),ylab=expression(X[2]) )
# Lisame valitud punktid:
points(andmed1[,1], andmed1[,2], col='red',pch=19)
par(op)
```

**Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Madli Rööp,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Mitmemõõtmelise asümmeetrilise normaaljaotuse parametriseerimisest", mille juhendaja on Meelis Käärik,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpacei kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 13.05.2015