



H. Tammet

**FÜÜSIKA PRAKTIKUM
METROLOOGIA**

H. TAMMET

FÜÜSIKA PRAKTIKUM METROLOOGIA

1

KIRJASTUS «VALGUS» * TALLINN 1971

Kunstiliselt kujundanud T. A r u.

Eesti NSV Kõrgema ja Keskerihariduse Ministeeriumi poolt lubatud kasutada õppevahendina Eesti NSV kõrgemates õppeasutustes.

УДК 531.7(076.5)

Таммст Х.

Практикум по физике. Метрология. 1971.

Учебное пособие для ВУЗ-ов. Рассматривается методика физических измерений и обработки результатов измерения.

Первая глава посвящена общим вопросам физических измерений. Во второй главе представлены справочные данные о важнейших измерительных приборах. Третья глава содержит краткое введение в математическую статистику и теорию случайных ошибок.

Raamatus käsitletakse mõõtmise põhimõtet, mõõtühikuid ja nende süsteeme, mõõtmisvigade hindamist, mõõtevahendite omadusi, katseandmete töötlemist, mõõtmistulemuse vormistamist ning interpreteerimist. Esitatakse teatmelisi andmeid mitmesuguste mõõtühikute ja mõõtevahendite kohta. Antakse lühülevaade matemaatilisest statistikast.

Raamatu otseseks adressaadiks on füüsikalaboratuurimis töötavad üliõpilased. Siit võivad leida üht-teist tarvilikku ka insenerid ja kõik teised, kes tegelevad füüsikaliste mõõtmistega.

EESSONA

Metroloogia on teadus mõõtmisest. Mõõtmisoskuse tähtsus ei vaja üksikasjalikku põhjendamist: ilma mõõtmisteta pole kaasaegne tsivilisatsioon mõeldav.

Mõõtmine on füüsikaga tihedalt seotud ja metroloogia õpetamist keskkoolis või kõrgemas koolis iseseisva ainenä ei peeta õigeks. Metroloogia kuulub tavakohaselt «lahustatud kujul» füüsikakursuse hulka.

Füüsika praktikumis töötamiseks, veel enam aga eksperimentaalseks uurimistööks, füüsikaõpikutes esitatavast metroloogiast ei piisa. Laboratoorsete tööde juhendites on kogu tähelepanu pööratud konkreetsete katsete füüsikalistele iseärasustele, mõõtmise üldküsimusi nendes ei käsitleta. Opekirjandusse jäänud lünka peab aitama täita käesolev raamat.

Praktika poolt esitatavate mitmekesiste, osalt vastuoluliste nõuete arvestamiseks koosneb raamat suhteliselt iseseisvatest peatükkidest. Esimesi praktilisi töid sooritades piisab kolmandas, neljandas ja viiendas paragrahvis esitatud materjali tundmisest. Teine ja kolmas peatükk on teatmiku iseloomuga. Mõõtühikuid ja mõõtevahendeid kirjeldavate andmete valik arvestab lugejat, kelle huvid ulatuvad ka väljapoole füüsikalaboratooriumi. Neljas peatükk sisaldab lühiülevaate matemaatilisest statistikast. See ülevaade on adresseeritud lugejale, kes pole tõenäosusteooriat õppinud, kuid kellele tõenäosuse mõiste pole uudiseks. Matemaatilist statistikat läheb tarvis viiendas peatükis kirjeldatavate katseandmete töötlemismeetodite mõistmiseks. Viiendas peatükis on enamik eeskirju esitatud valmis retseptina ja vajaduse korral võivad neid kasutada ka algajad, kes pole vaevunud neljandat peatükki lugema.

Käesoleva raamatu koostamise eeltöö algatas P Prüller. Palju abi on osutanud autorile E. Tamm. Peale selle on raamatu kirjutamisel kasutatud veel E. Tiidu, L. Lepiku, L. Vöhandu, V. Maa-siku, J. Meitre, J. Elgase ja E. Tari nõuandeid. Kõigile nimetatutele võlgneb autor palju tänu.

I peatükk. SISSEJUHATUS

1. MÕOTMINE

1.1. Füüsikaliste suuruste võrdlemine. Füüsikalisi suurusi mõõdetakse füüsikaliste objektide võrdlemise teel. Objektideks võivad olla füüsikalised kehad, protsessid või muu. Näiteks massi mõõtmise korral võrreldakse kehasid, kiiruse mõõtmise korral aga protsesse.

Kui eksisteeriks vaid üks objekt, poleks võrdlemine ega mõõtmine võimalik.

Korraga saab võrrelda ainult kaht objekti omavahel. Kui objekte on rohkem, võrreldakse neid paarikaupa.

Objekte saab võrrelda mitmeti. Näiteks kahe varda korral võib uurida, kumb neist on pikem, kumb raskem, kummal on suurem elektriline takistus jne. Põhimõtteliselt erinevad võrdlusviisid tähendavad erinevate füüsikaliste suuruste võrdlemist. Võrdlemise eeskiri on samaväärne füüsikalise suuruse defineerimisega.

Võrdlemine võib piirduda võimaliku ekvivalentsuse või mitte-ekvivalentsuse selgitamisega. Võrdluse tulemuseks võib olla näiteks konstateering, et kaks uuritavat keha on elektriliselt ühenimeliselt laetud.

Täiuslikuma võrdlemise korral määratakse objektide järjestus võrreldava suuruse järgi. Näiteks ühe mineraaliga teist kriipides otsustatakse, kumb kahest mineraalst on kõvem.

Veel täiuslikuma võrdlemise korral tehakse kindlaks füüsikaliste suuruste arvuline suhe. Suurusi, mille korral see on võimalik, nimetatakse *divitiivseteks*¹ Tähtsamad füüsikalised suurused, nagu pikkus, mass, ajavahemik, on divitiivsed.

¹ *Divisio* (lad.) — jagamine.

Kahe objekti A ja B kindla reegli kohasel ühendamisel saadud liitobjekti C iseloomustab suurus f_C , mis sõltub ühendatavaid objekte iseloomustavatest suurustest f_A ning f_B . Kui sõltuvuse algebralised omadused langevad kokku arvude liitmise tehte algebraliste omadustega, siis nimetatakse füüsikalist suurust f *aditiivseks*. Aditiivsusest järeldub alati divitiivsus: suhte määramiseks võib kasutada tavalist liitmisel-lahutamisel põhinevat jagamisalgoritmi. On aga olemas füüsikalisi suurusi, näiteks absoluutne temperatuur, mis pole aditiivsed, kuid on siiski divitiivsed. Selleks et kahele objektile A ja B vastavusse seatud arvu s_{AB} võiks nimetada füüsikaliste suuruste suhteks, on tarvis, et kõigi objektide korral $s_{AA}=1$ ja $s_{AB} s_{BC}=s_{AC}$.

1.2. Divitiivse suuruse mõõtmine. Kaht objekti A ja B võrreldes võib saada näiteks tulemuse: objekti A mass on 2,5 korda suurem kui objekti B mass. Arv 2,5 on masside suhe. Objektide masse pole võimalik ainult arvude abil väljendada. Vaadeldud näite korral on massi mõõtmise tulemus järgmine: objekti A massi väärtus m_A on 2,5 m_B , objekti B massi väärtus m_B on 0,4 m_A . See näib olevat tautoloogia, kuid põhimõtteliselt pole enamata võimalik teada saada.

Kui võrdlemisele kuuluvaid objekte on palju, valitakse nende hulgast üks eriline objekt E ning kõiki teisi objekte võrreldakse ainult objektiga E . Kui objekti A mass osutub objekti E massist m_E viis korda suuremaks ja objekti B mass objekti E massist kaks korda suuremaks, siis kirjutatakse $m_A = 5 m_E$ ning $m_B = 2 m_E$. Avaldanud kõik massid massi m_E kaudu, saab nende omavahelisi suhteid leida arvutamise teel. Näiteks objektide A ja B masside suhe arvutatakse nii: $m_A/m_B = 5 m_E/2 m_E = 2,5$.

Ülaltoodud arutlustes võib sõna «mass» asendada ükskõik milise divitiivse füüsikalise suuruse nimetusega.

Erilist objekti, millega kõiki teisi objekte võrreldakse, nimetatakse võrdlemisele kuuluva füüsikalise suuruse *etaloniks*.

Massi etaloniks on valitud spetsiaalselt sel eesmärgil valmistatud, Pariisis säilitatav viht. Sama vihti võiks kasutada ka pikkuse etalonina, mida aga ei tehta. Täpsuse huvides on pikkuse etaloniks valitud teine objekt.

Füüsikalise suuruse etaloni abil fikseeritud väärtust nimetatakse selle füüsikalise suuruse *mõõtühikuks*.

Igale konkreetsele mõõtühikule antakse konkreetne nimi. Pariisis säilitatava vihi massi väärtust nimetatakse kilogrammiks.

Füüsikalise suuruse väärtus väljendatakse mõõtühiku kaudu. Mingi objekti massi väärtust võib väljendada näiteks avaldisega 5 kg.

Arvu, mis näitab füüsikalise suuruse suhet mõõtühikusse, nimetatakse füüsikalise suuruse *mõõtarvuks ehk arvuväärtuseks kasutatud mõõtühiku järgi*.

Eelnimetatud objekti massi mõõtarv kilogrammi järgi on 5, grammi järgi aga 5000. Et mõõtarv oleneb mõõtühikust, ei tohi mõõtarvu esitades unustada nimetamast mõõtühikut.

Mõõtarvu ehk arvuväärtuse tähisena võib kasutada vastava füüsikalise suuruse tähist, lisades sellele kooloniga või kaldsulgudega eraldatult mõõtühiku tähise. Kui $m = 5$ kg, siis võib kirjutada kas $m : \text{kg} = 5$ või $m/\text{kg} = 5$.

1.3. Kuidas kaalutakse heeringat. Praktilised järeldused eelnevast näivad paradoksaalsetena: kui müüja soovib teada müüdava heeringa massi, peab ta heeringat võrdlema Pariisis asuva etaloni. Etalone hoitakse tugevamate lukkude taga kui kulda, ja võib arvata, et müüja ei näe kilogrammi etaloni mitte kunagi. Ometi heeringas kaalutakse ära.

Kilogrammi etaloniga võrreldakse vahetult erilisi, etaloni tunnistajateks nimetatavaid vihte. Etaloni tunnistajatega võrreldakse NSVL algetaloniks nimetatavat vihti. Seni on seda tehtud vaid kaks korda: 1889. a. ja 1950. a. NSVL algetaloniga võrreldakse etaloni koopiaid, nendega omakorda tööetalone. Mõõtmisahela järgmisteks lülideks on järjekorras esimest, teist, kolmandat ja neljandat järku taatelvihid. Neljandat järku taatelvihtidega võrreldakse kaupluses kasutatavat osutikaalu ja vihte. Heeringas on pika mõõtmisahela viimane, üheteistkümnes lüli.

Niiviisi tehaksegi kindlaks heeringa massi ja kilogrammi etaloni massi suhe.

1.4. Otsene ja kaudne mõõtmine. *Otsese mõõtmise* korral määratakse mõõtmisele kuuluva suuruse väärtus muid füüsikalisi suurusi mõõtmata. *Kaudse mõõtmise* korral mõõdetakse otseselt teisi, mõõtmisele kuuluva suurusega tuntud viisil seotud füüsikalisi suurusi. Lõpptulemuseni jõutakse arvutamise teel.

Näited. Ringi pindala määramiseks mõõdetakse mõõtjoonlaua abil otseselt ringi läbimõõt d ja siis arvutatakse valemi $S = \pi d^2/4$ abil pindala. Risttahuka tiheduse määramiseks mõõdetakse kaalu abil otseselt risttahuka mass m ja nihiku abil külgede pikkused a , b , c . Tiheduse kaudse mõõtmise tulemus leitakse valemi $\rho = m/(abc)$ abil.

Üht ja sama füüsikalist suurust on sageli võimalik mõõta mitmel viisil. Näiteks juhtme takistust võib mõõta otseselt oommeetri abil, kaudselt voltmeetri ja ampermeetri abil ($R = U/I$), kaudselt kalorimeetri, ampermeetri ja kella abil ($R = Q/(It)$) jne.

1.5. Mõõtmise üldine käsitus. Kirjeldatud moodused võimaldavad mõõta ainult divitiivseid suurusi. Üldjuhul nimetatakse mõõtmiseks iga katset, mis seab füüsikalise suuruse reaalse objektiga esitatud väärtusele vastavusse konkreetse mõõtarvu.

Füüsikalise suuruse ühele väärtusele on võimalik omistada erinevaid mõõtarve. Ühese mõõtmistulemuse saamiseks on tarvis, et iga väärtuse jaoks oleks kokku lepitud kindel mõõtarv. Füüsikalise suuruse väärtusele mõõtarvu omistamisel moodustub paar, mille esimeseks komponendiks on füüsikalise suuruse väärtus ja teiseks komponendiks mõõtarv. Kõigi niisuguste paaride hulka nimetatakse *füüsikalise suuruse skaalaks*. Mõõtmist võib nüüd tõlgendada skaalaelemendi teise komponendi määramisena esimest komponenti esitava füüsikalise objekti järgi.

Mõõtarv üksi ei fikseeri füüsikalise suuruse väärtust. Füüsikalise suuruse väärtuse näitamiseks on tarvis esitada mõõtarv ja näidata skaala, mille järgi mõõtarv on määratud.

Mineraloogias kasutatavat Mohsi kõvaduse skaalat säilitatakse kümnest mineraalitükist koosneva komplekti abil. Skaala koosneb kümnest elemendist. Iga elemendi esimeseks komponendiks on ühe komplekti kuuluva mineraali kõvadus, teiseks komponendiks on mineraalitükile märgitud arv. Kui arvud mineraalitükkidel ära

segada, saame uue skaala, mis on moodustatud kõvaduse endistest väärtustest ja endistest arvudest, kuid koosneb uutest paaridest. Skaala muutmisel ei muutu ühegi mineraali kõvadus, muutuvad vaid kõvaduse näitarvud.

Füüsikalise suuruse mõõtmisel on tarvis tunda kasutatava skaala matemaatilist struktuuri. Skaalade struktuure käsitletakse järgnevatel punktides.

1.6. Suhteskaala ja vaheskaala. Punktis 1.2 kirjeldatud mõõtmiseeskirja kohaselt divitiivse füüsikalise suuruse jaoks moodustatud skaalat nimetatakse *suhteskaalaks*. Suhteskaala kahe elemendi mõõtarmude suhe võrdub füüsikalise suuruse väärtuste katsetel määratava suhtega. Suhteskaala fikseerimiseks piisab, kui fikseeritakse etaloni abil üksainus skaalaelement.

Füüsikas on kõige olulisemaks skaalatüübiks suhteskaala.

Vaheskaalaks ehk intervallskaalaks nimetatakse niisugust skaalat, mis ise ei ole suhteskaala, kuid mille elementide vahed moodustavad suhteskaala.

Vaheskaala näiteks sobib tavaline ajahetke skaala. Kahest ajahetkest, olgu need kell 11.53 20. sept. 1970 ja kell 12.11 20. sept. 1970, ei saa moodustada suhet, saab aga moodustada vahe, mille väärtus on parajasti 18 minutit. Erinevalt ajahetkest on ajavahe-
mik divitiivne: võib öelda, et ajavahe-
mik 36 minutit on kaks korda suurem, kui ajavahe-
mik 18 minutit. Tavaline ajavahe-
mike skaala on koostatud divitiivsuse omaduse abil ja kuulub suhteskaalade hulka. Ajahetke skaala koostamiseks valitakse kokkuleppeline nullpunkt ning mõõdetakse ajahetke ajavahe-
mikuga selle hetke ja kokkuleppelise nullhetke vahel. Niiviisi saadaksegi ajahetke mõõtmiseks vaheskaala.

Suhteskaalal on loomulik ehk absoluutne nullpunkt, vaheskaala nullpunkt on aga tinglik. Nullpunkti nihutades saab igast suhteskaalast moodustada vaheskaala, vastupidine toiming aga ei pruugi õnnestuda.

Füüsikas on peale ajaskaalade tuntud vaheskaalad näiteks koordinaatide ja potentsiaalide jaoks. Temperatuuri mõõtmisel kasutatakse paralleelselt suhteskaalat (Kelvini skaala) ja vaheskaalat (Celsiuse skaala)

Vaheskaala fikseerimiseks on tarvis fikseerida kaks skaalaelementi. Näiteks Celsiuse skaala korral fikseeritakse jää sulamistemperatuur ja vee keemistemperatuur. Kelvini skaala fikseeritakse aga ainult ühe elemendi abil, selleks on vee kolmikpunkti temperatuur.

1.7. Järjeskaala ja nimeskaala. Neid skaalatüüpe kasutatakse siis, kui mõõdetav suurus pole divitiivne ega võimalda moodustada divitiivseid vahesid, või kui divitiivsuse omadust pole mingil põhjusel võimalik kasutada.

Järjeskaala ehk ordinaalskaala moodustamiseks on tarvis, et

mõõdetava suuruse kõik väärtused oleksid füüsikaliselt järjestatavad. Järjeskaala mõõtarvudeks võetakse enamasti naturaalarvud füüsikalise suuruse väärtuste loomulikus järjekorras. Füüsikalise suuruse väärtuse näitamisel järjeskaala abil lisatakse mõõtarvule tavaliselt sõna «palli».

Järjeskaalade hulka kuuluvad näiteks Mohsi kõvaduse skaala ja Beauforti tuule tugevuse skaala. Beauforti skaala ei kasuta tuule kiiruse divitiivsust ega võimalda öelda, mitu korda on näiteks 8-palline tuul tugevam kui 4-palline tuul.

Järjeskaalade hulka kuulub ka üliõpilaste teadmiste mõõtmisel kasutatav skaala.

Nimeskaala ehk nominaalskaala korral puudub alus mõõdetava suuruse väärtuste järjestamiseks. Väärtuste kunstlikust järjestamisest hoidumiseks tävatakse nimeskaalas mõõtarvude asemel kasutada loomuliku järjestuseta sümbboleid. Nimeskaalade hulka kuulub näiteks kahest elemendist koosnev elektrilaengu polaarsuse skaala, kus mõõtarve asendavad märgid + ja –

Nimeskaala kasutamise korral nimetatakse mõõtmist tavaliselt klassifitseerimiseks.

Järjeskaala või nimeskaala fikseerimiseks on tarvis fikseerida üksahaaval kõik skaalaelemendid.

1.8. Funktsionaalskaalad. Olgu x füüsikalise suuruse mõõtarv suhteskaalas ja $y=f(x)$ tuntud üks-ühene funktsioon. Et arvu y järgi saab alati määrata arvu x , siis võib füüsikalise suuruse väärtuse esitamisel kasutada arvu x asemel arvu y . Seades füüsikalise suuruse iga väärtusega paari vastava arvu y , saame füüsikalise suuruse jaoks suhteskaalal baseeruva *funktsionaalskaala*.

Kui funktsioon $f(x)$ on võrdelisusfunktsioon $y=ax$, siis võrdub arvude y suhe samuti kui arvude x suhe füüsikalise suuruse väärtuste suhtega ja tuletatav funktsionaalskaala osutub samuti suhteskaalaks. Kui funktsioon $f(x)$ on lineaarfunktsioon $y=ax+b$, siis osutub funktsionaalskaala vaheskaalaks. Kui aga $f(x)$ on ebaliineaarne, siis ei sarnane funktsionaalskaala omadused eespool vaadeldud skaalade omadustega.

Funktsionaalskaalaid moodustatakse ka nimeta arvude jaoks. Niisuguse skaala näiteks on punktis 8.5 lähemalt vaadeldav logaritmiline Belli skaala.

Paljud füüsikalised suurused pole üldse otseselt mõõdetavad ja nende väärtusi määratakse arvutamise teel teiste füüsikaliste suuruste väärtuste järgi. Arvutatud mõõtarv on teiste mõõtarvude funktsioon ja kaudselt mõõdetava suuruse skaala on funktsionaalskaala. Enamasti on funktsiooni väärtus võrdeline ühe suhteskaalas avaldatud argumendi väärtusega. Näiteks tiheduse $\rho=m/V$ mõõt- arv on võrdeline massi mõõtarvuga. Kui tiheduste suhe lugeda võrdseks samas ruumalas sisalduvate masside suhtega, siis osutub tiheduse skaala matemaatilise struktuuri poolest suhteskaalaks.

Niiviisi võib enamiku kaudselt mõõdetavate suuruste skaaladest arvata suhteskaalade hulka.

1.9. Metrooloogiline seadusandlus. Vanasti, kui mõõtühikud ei olnud veel seadusandluse objektiks, kasutati igas linnas oma mõõtühikuid. Niisugune mõõtühikute segadus mõjuks kaasaegsele kaubandusele, tööstusele ja teadusele samuti kui kuulus keelte-segadus Paabeli torni ehitamisele.

Nõukogude Liidus on mõõtmisvahenditele esitatavad nõuded ja mõõtühikud ühtlustatud seaduse jõudu omavate riiklike standarditega. NSVL riikliku standardi tähis koosneb lühendist «GOST» ja kahest sidekriipsuga ühendatud numbrist: esimene neist on järjekorranumber, teine näitab standardi väljaandmise aastat. Näiteks elektrimõõteriistadele esitatavaid nõudeid sisaldav standard GOST 1845-52 on tähise järgi otsustades välja antud 1952. aastal. Standardi muutmisel tavaliselt järjekorranumbrit ei muudeta. Kui 1959. a. GOST 1845-52 asendati uuega, siis sai see tähiseks GOST 1845-59.

2. MÕÖTÜHIKUD

2.1. Mõõtühikute ajaloost. Ühtsed riiklikud mõõtühikud olid kasutusel juba vanas Egiptuses ja Babüloonias. Egiptlased oskasid mõõtühikuid tuletada: pindala mõõtsid nad ruutühikutes. Kordsed ühikud võeti kasutusele Babüloonias. Vanast Babülooniast on pärit tänapäevani kasutatavad ajaühikud tund, minut ja sekund.

Keskaegne naturaalmajandus ei vajanud üleriigilisi mõõtühikuid ja mõõduasjandus arenes tagurpidi. Igas linnas oli küünral ise pikkus ja margal ise mass. Esimestena seadsid korra majja inglased: 15. sajandi lõpul kehtestati Inglismaal ametlikud riiklikud mõõtühikud.

Meetermõõdustik sündis Prantsusmaal. 1791. a. kevadel kuulutas Prantsuse Rahvuskogu dekreet seaduslikuks pikkusühikuks ühe kümnemiljondiku Pariisi veerandmeridiaani pikkusest. Meetri definitsiooni on mitu korda muudetud, püüdes alati säilitada mõõtühiku väärtust praktiliselt muutumatuna. Kaua oli meetri etaloniks plaatina ja iriidiumi sulamist valmistatud erilise ristlõikega varras. Nüüd on meetril uuesti looduslik etalon.

Kilogrammi ajalugu on mõneti sarnane meetri ajalooaga. Meetermõõdustiku esimeseks massi etaloniks oli 1 cm³ puhast vett jää sulamistemperatuuril, mõõtühikule anti nimeks gramm. Esimese etaloni iga oli lühike. Etaloni vahetamisel ei soovitud juba tarvitusele võetud grammi väärtust oluliselt muuta ja nii sai uus massi põhiühik endale liitnime: kilogramm.

Uued mõõtühikud juurdusid aeglaselt. Kõige varem võtsid

meetermöödustiku kasutusele teadlased, kes pole taoliste küsimuste korral kunagi riigipiire ega traditsioone arvestanud. Enamik Euroopa riike seadis meetermöödustiku sisse moodunud sajandi seitsmekümnendatel aastatel, Nõukogude Liit 1918–1926. a. Indias alustati meetermöödustikule üleminekut 1956. a., Hiinas 1959. a. Traditsioonidega uhkustavad inglased kasutavad tänaseni kolmsada aastat vanu pikkuse ja massi mõõtühikuid. Ka USA-s on vanad mõõtühikud veel kindlalt tarvitusel.

2.2. Mõõtühikute süsteem. Kui valida mingi varras pikkuse etaloniks ja sellest sõltumatult mingi plaat pindala etaloniks, siis oleks ringi pindala valem

$$S = \text{const}_1 \cdot d^2$$

ja ruudu pindala valem

$$S = \text{const}_2 \cdot a^2.$$

Teise valemi kasutamise hõlbustamiseks kooskõlastatakse tavaliselt pikkuse ja pindala mõõtühikud nii, et $\text{const}_2 = 1$. Ka mõõtühikute säilitamine on siis lihtsam: piisab ühest etalonist.

Valikut $\text{const}_2 = 1$ järeldeb $\text{const}_1 = \pi/4$. Kui ringi pindala valemist kasutatakse ristküliku pindala valemist sagedamini, siis oleks otstarbekas valida $\text{const}_1 = 1$, millest järelduks $\text{const}_2 = 4/\pi$. Ka seda võimalust on praktiliselt proovitud: omal ajal tunti pindalaühikut nimega ringtoll.

Ühtede füüsikaliste suuruste mõõtühikute defineerimine teiste füüsikaliste suuruste mõõtühikute kaudu lihtsustab füüsika valemite ja vähendab tarvilike etalonide arvu.

Kaasajal defineeritakse etalonide abil vaid mõned üksikud mõõtühikud, mida nimetatakse *põhiühikuteks*. Kõik ülejäänud mõõtühikud moodustatakse kokkulepitud valemite abil põhiühikutest. Nii viisi defineeritud mõõtühikute hulka nimetatakse *mõõtühikute süsteemiks*.

Mõõtühikute süsteemi koostamist ja kasutamist analüüsis esimesena C. F. Gauss 1832. a. avaldatud uurimistöös.

Meetermöödustik ei ole mõõtühikute süsteem, sest siin pole kokku lepitud, milliste valemite abil mõõtühikuid tuletada. Teiseks sisaldab iga mõõtühikute süsteem ühe füüsikalise suuruse jaoks ainult ühe mõõtühiku, meetermöödustikus aga võib pikkust mõõta niihästi sentimeetrites kui kilomeetrites.

Kõik järgnevalt käsitlemisele tulevad mõõtühikute süsteemid (välja arvatud naturaalsed süsteemid) kuuluvad meetermöödustikku.

2.3. Mõõtühikute süsteemi koostamine. Mõõtühikute süsteemi aluseks on *füüsika võrrandite hulk*. See hulk peab sisaldama võrrandeid kõigi teatud ülesannete ringi kuuluvate ülesannete, näiteks mehaanikaülesannete lahendamiseks. Mõõtühikute süsteemi koos-

tamisel peetakse silmas ainult neid füüsikalisi suurusi, mis esinevad vaadeldavas hulka kuuluvates võrrandites.

Kuna mõõtühikud on veel fikseerimata, siis esialgu sisaldavad kõik võrrandid fikseerimata võrdetegureid. Näiteks ühtlase liikumise teepikkuse võrrand on $s = kv t$, kus võrdetegur k oleneb mõõtühikutest.

Pärast võrrandite hulga fikseerimist valitakse mõned füüsikalised suurused *põhisuurusteks*. Põhisuuruste hulk peab olema piisav selleks, et iga ülejäänud füüsikalist suurust saaks võrrandite abil avaldada põhisuuruste kaudu.

Iga põhisuuruse jaoks valitakse vabalt etalon (looduslik või kunstlik) ja mõõtühik. Põhisuuruste mõõtühikuid nimetatakse süsteemi *põhiühikuteks*.

Iga ülejäänud füüsikalise suuruse jaoks valitakse *defineeriva võrrand* nende võrrandite hulgast, mis võimaldavad vaadeldavat suurust avaldada põhisuuruste kaudu. Vaadeldava suuruse mõõtühiku defineerimiseks antakse defineeriva võrrandi võrdetegurile kindel kokkuleppeline väärtus. Näiteks, kui ühtlase liikumise teepikkuse võrrandis $s = kv t$ on teepikkus s ja aeg t põhisuurused, siis kiiruse mõõtühiku defineerimiseks võib anda võrdetegurile k kokkuleppeliselt väärtuseks arvu 1. Enamasti antakse kõigi defineerivate võrrandite võrdeteguritele väärtuseks arv 1. Niiviisi koostatud mõõtühikute süsteemi nimetatakse *koherentseks*. Defineerivate võrrandite abil moodustatud mõõtühikuid nimetatakse süsteemi *tuletatud ühikuteks*.

Mõõtühikute süsteemile pannakse nimeks tavaliselt mingi suurte ladina tähtede kombinatsioon: CGS, SI jne.

Lepime kokku, et mõõtühikute süsteemi sümbol koos indeksina kirjutatud füüsikalise suuruse tähisega tähendab märgitud suuruse mõõtühikut selles süsteemis, füüsikalise suuruse tähis koos indeksina kirjutatud süsteemi sümboliga aga füüsikalise suuruse mõõt-arvu selles süsteemis. Näiteks kui $m = 5$ kg, siis võib kirjutada $m_{SI} = 5$ ja $m = 5 SI_m$. Tähistes SI_m ja kg on võrdtäenduslikud, niisamuti tähistes m_{SI} ja m : kg. Üldjuhul võib kirjutada $m = m_{SI} SI_m$.

2.4. CGS. Mõõtühikute süsteem CGS on olnud ligi saja aasta kestel füüsikas eelissüsteemiks. Alles viimasel ajal on ta taandunud SI ees.

CGS põhisuurusteks on *pikkus, mass ja aeg*, põhiühikuteks *sentimeeter gramm ja sekund*. Süsteemi sümbol koosneb põhiühikute esitähedest.

CGS ühese tähendusega osa haarab ainult mehaanikalisi suurusi. Elektriõpetuse osas on süsteemil seitse erinevat varianti. Laiemalt on nendest tuntud kolm.

Elektrostaatilises süsteemis CGSE definceritakse laenguühik Coulombi seaduse võrrandist, mis vaakumi jaoks kirjutatakse kujul $F = q_1 q_2 / r^2$. Vaakumi elektriline läbitavus saab niiviisi väärtuseks arvu 1. CGSE volutugevuse ühik võrdub ligikaudu ühe kolmandiku

nanoampriga. Vaakumi magnetiline läbitavus on CGSE järgi $1/c^2$, kus $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ cm/s. Kahe vaakumis asuva paralleelse sirgjuhtme vahelise jõu valem saab kuju $F/l = 2c^{-2} I_1 I_2/d$.

Elektromagnetilises süsteemis CGSM defineeritakse voolutugevuse ühik nii, et vaakumis asuvate paralleelsete sirgjuhtmete vahelise jõu valem saaks lihtsama kuju $F/l = 2 I_1 I_2/d$. Siis osutub vaakumi magnetiline läbitavus võrdseks arvuga 1, elektrilise läbitavuse väärtuseks aga tuleb $1/c^2$. Coulombi seaduse võrrand vaakumi jaoks muutub keerulisemaks: $F = c^2 q_1 q_2 / r^2$.

CGSE on mugav elektrostaatikas ja ebamugav magnetvälja uurimisel. CGSM omadused on vastupidised. Praktikas on seepärast nimetatud süsteemidest rohkem tarvitav sümmeetriline kompromiss-süsteem, mida nimetatakse ka Gaussi süsteemiks ja mida tähistatakse sümboliga CGS. CGS langeb elektrostaatika ja alalisvooluõpetuse osas kokku CGSE-ga ning magnetismiõpetuse osas CGSM-ga.

Valgustehniliste suuruste mõõtmisel lisatakse CGS põhiühikutele neljanda põhiühikuna luumen.

CGS mõõtühikuid ja võrrandeid kirjeldatakse üksikasjalikumalt raamatu teises peatükis.

2.5. MkGS. Füüsikute poolt soovitatud mõõtühikute süsteem CGS pole tehnikute hulgas kunagi populaarne olnud. Sobib ju näiteks jõuühik düün rohkem sääse jõu kui kraana tõstejõu avaldamiseks.

Tehnikas kasutatud mõõtühikute süsteemidest väärib erilist tähelepanu MkGS, mis haarab ainult mehaanikaühikuid. Erinevalt kõigist teistest tuntud süsteemidest on siin põhisuurusteks *pikkus*, *jõud* ja *aeg*, põhiühikuteks on vastavalt *meeter*, *jõukilogramm* ja *sekund*.

Jõukilogramm on kaasaegse definitsiooni kohaselt täpselt võrdne 9,80665 njuutoniga.

MkGS on mugav ainult staatikas ja sedagi vaid väikese arvutustäpsuse korral. Suurema arvutustäpsuse korral muutub häirivaks asjaolu, et 1 kg massile mõjuv raskusjõud võib olenevalt laiuskraadist erineda jõukilogrammist umbes ühe protsendi võrra. Dünaamikaülesannete lahendamisel tuleb MkGS kasutamise korral mass avaldada massi tehnilistes ühikutes. Massi tehniline ühik võrdub 9,80665 kg ja ei ole üldtarvitatava kilogrammiga täisarvulises suhtes.

Kaasajal mõõtühikute süsteemi MkGS enam ei tarvitata. Mõned MkGS ühikud, eriti aga selle süsteemiga seotud ühik tehniline atmosfäär ($1 \text{ at} = 10\,000 \text{ MkGS}_p$) on «visa hingega» ja nendega võib sageli kokku puutuda.

2.6. SI. Kaasaegse universaalse rahvusvahelise mõõtühikute süsteemi sümbol SI on lühend prantsuskeelsetest sõnadest *Système Internationale* või ingliskeelsetest sõnadest *System Interna-*

tional. On kokku lepitud, et ainult süsteemi SI võib nimetada *rahvusvaheliseks mõõtühikute süsteemiks*.

SI kinnitamine 1960. a. üheteistkümnendal Rahvusvahelisel Kaalude ja Mõõtude Peakonverentsil lõpetas füüsikute ja tehnikute vahelise saja-aastase vaidluse. Seda süsteemi tunnustavad nüüd kõik. Nõukogude Liidus kehtestati SI 1961. aastal. Teisi süsteeme lubatakse tarvitada ainult füüsika ja astronoomia teoreetilistes harudes.

SI hõlmab kõiki füüsikalisi suurusi.

SI põhisuurusteks on *pikkus, mass, aeg, elektrivoolu tugevus, temperatuur ja valgustugevus* ning põhiühikuteks *meeter, kilogramm, sekund, amper, Kelvini kraad ja kandela*. Nurga ja ruuminurga mõõtühikuid *radiaani* ja *steradiaani* nimetatakse *täiendavateks ühikuteks*, neid kasutatakse peaaegu samuti nagu põhiühikuid.

Rahvusvahelise mõõtühikute süsteemi aluseks olevat võrrandite hulka õpitakse tundma füüsika üldkursuses. Mehaanikavõrrandite osas ei erine SI teistest mõõtühikute süsteemidest. Soojusõpetuse osas on SI iseärasuseks kokkulepe lugeda soojuse mehaaniline ekvivalent võrdseks arvuga 1, mis võimaldab avaldada soojushulka ja tööd samades mõõtühikutes. Elektriõpetuse osas on üheks SI iseärasuseks ideseisev elektriline põhiühik — amper. Tänu sellele on tuletatud ühikute avaldised lihtsamad kui süsteemis CGS. Samal põhjusel aga on rahvusvahelises mõõtühikute süsteemis nii vaakumi elektriline läbitavus kui ka magnetiline läbitavus erinevad arvust 1. SI elektriõpetuse võrrandite kuju on ratsionaliseeritud.

SI mõõtühikuid ja võrrandeid kirjeldatakse üksikasjalikumalt raamatu teises peatükis.

2.7. Naturaalsed mõõtühikute süsteemid. Teoreetilises füüsikas kasutatakse universaalsetel füüsikalistel konstantidel rajanevaid *naturaalseid mõõtühikute süsteeme*. On tuntud ka segasüsteemid, mis peale mõne universaalse konstandi rajanevad ühel-kahel tavaliste mõõtühikute hulgast valitud põhiühikul.

Relatiivsusteoorias on tavalistest mõõtühikute süsteemidest mugavam segasüsteem, milles põhisuurusteks valitakse *pikkus, energia* ja *kiirus* ning põhiühikuteks *meeter, džaul* ja *valguse kiirus vaakumis c*. Niisugune kokkulepe lihtsustab kõiki relativistlikke võrrandeid ja ka tavalisi elektrodünaamika võrrandeid.

Relativistlikus kvantteoorias on otstarbekas peale *c* valida põhiühikuks ka *Plancki konstant $\hbar = h/2\pi$* . Kolmandaks põhiühikuks võetakse tavaliselt selle *elementaarosakese mass*, mille käitumist on kavas uurida.

Aatomifüüsikas kasutatava *Hartree süsteemi* põhiühikuteks on *Plancki konstant \hbar , elektroni mass m_e ja elektroni laeng e* . Vahel käsitatakse ka pikkusühikut, milleks on Bohri raadius $\hbar^2/m_e e^2$, nagu põhiühikut. Universaalkonstandi *c* väärtus Hartree süsteemis on $137,036 e^2/\hbar$. Tähtsamaid Hartree süsteemi mõõtühikuid tutvustab tabel 2.7

Hartree süsteemi mõõtühikud

Füüsikaline suurus	Mõõtühiku avaldis põhiühikute kaudu (CGSE valem)	Mõõtühiku väärtus SI kohaselt
pikkus	$\frac{\hbar^2}{m_e e^2}$	$5,292 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
mass	m_e	$9,110 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
aeg	$\frac{\hbar^3}{m_e e^4}$	$2,419 \cdot 10^{-17} \text{ s}$
kiirus	$\frac{e^2}{\hbar}$	$2,188 \cdot 10^6 \text{ m/s}$
energia	$\frac{m_e e^4}{\hbar^2}$	$4,360 \cdot 10^{-18} \text{ J}$
laeng	e	$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
elektrivälja tugevus	$\frac{m_e^2 e^5}{\hbar^4}$	$5,144 \cdot 10^{11} \text{ V/m}$
pinge	$\frac{m_e e^2}{\hbar^2}$	$27,22 \text{ V}$

Tabel 2.8

Kümnendeesliited

Kordsus	Eesliide	Lühend	Venek. lühend
10^{-18}	atto	a	а
10^{-15}	femto	f	ф
10^{-12}	piko	p	п
10^{-9}	nano	n	н
10^{-6}	mikro	μ	мк
10^{-3}	milli	m	м
10^{-2}	senti	s	с
10^{-1}	detsi	d	д
10	deka	da	да
10^2	hekto	h	г
10^3	kilo	k	к
10^6	mega	M	М
10^9	giga	G	Г
10^{12}	tera	T	Т

2.8. Kordsed mõõtühikud. Kordseid mõõtühikuid moodustatakse tabelis 2.8 näidatud *kümnendliidete* abil. Eesliiteid senti, detsi, deka ja hekto on soovitatav vältida.

Kordsed mõõtühikud ei saa kuuluda lähtemõõtühikuga ühisesse mõõtühikute süsteemi. Neid kasutatakse peaaesjalikult praktilist laadi ülesannete korral füüsikaliste suuruste väärtuste mugavamaks kirjutamiseks.

Standard keelab topelteesliidete kasutamise ja eesliite lisamise mõõtühikule, mis on defineeritud teise mõõtühiku kordsena ka siis, kui selle nimetus ei sisalda eesliidet. Näiteks ei tohi tarvitada nimetusi millimikrofarad ja megatonn, õige on nanofarad ja teragramm.

2.9. Meetriliste teisenduste tehnika. Meetriliseks teisendamiseks nimetatakse ühe mõõtühiku kaudu avaldatud füüsikalise suuruse avaldamist teise mõõtühiku kaudu.

Arvutaja, kes ei tunne meetriliste teisenduste tehnikat, kasutab tavaliselt *intuitiivset meetodit*:

a) otsustab, kas antud arvvärtust tuleb mõõtühikute suhtega korrutada või jagada,

b) sooritab siis valitud aritmeetilise tehte.

Intuitiivse meetodi esimene etapp nõuab mõttepingutust ja osutub sageli komistuskiviks, seda eriti siis, kui kasutatakse tuletatud mõõtühikuid.

Mõttepingutust ja eksimäisvõimalust aitab vältida *asendusmeetod*:

a) kõigepealt asendame füüsikalise suuruse avaldises vanade mõõtühikute sümbolid nende avaldistega uute mõõtühikute kaudu,

b) seejärel sooritame tarvilikud aritmeetilised tehted.

Näiteid.

1° Olgu antud $Q=5,5$ cal ja küsitud Q avaldis džauli kaudu, teades, et $1 \text{ cal}=4,2 \text{ J}$. Intuitiivse meetodi korral on kõigepealt tarvis kuidagi otsustada, kas arvu 5,5 on tarvis arvuga 4,2 korrutada või jagada. Asendusmeetodi korral aga talitame nii:

$$Q = 5,5 \text{ cal} = 5,5 (4,2 \text{ J}) = 23 \text{ J}.$$

2° Oletame, et eelmise ülesande korral arv 4,2 pole antud, vaid on antud seos $1 \text{ J}=0,24 \text{ cal}$. Siis arvutame järgmiselt:

$$Q = 5,5 \text{ cal} = 5,5 \left(\frac{\text{J}}{0,24} \right) = 23 \text{ J}.$$

3° Olgu antud soojusvoo tihedus $I=0,3 \frac{\text{cal}}{\text{min cm}^2}$ ja tarvis avaldada see suurus rahvusvahelises mõõtühikute süsteemis. Lahendus:

$$I = 0,3 \frac{\text{cal}}{\text{min cm}^2} = 0,3 \frac{4,2 \text{ J}}{60 \text{ s} \left(\frac{\text{m}}{100} \right)^2} = 210 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

4° Olgu ülesandeks leida, mitu düüni on üks jõukilogramm. Arvutame niiviisi:

$$\begin{aligned} 1 \text{ kgf} &= 9,8 \text{ N} = 9,8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 9,8 \frac{10^3 \text{ g} \cdot 10^2 \text{ cm}}{\text{s}^2} = \\ &= 9,8 \cdot 10^5 \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2} = 9,8 \cdot 10^5 \text{ dyn.} \end{aligned}$$

2.10. Mõõtühikute süsteemi kasutamine. Mõõtühikute süsteemi praktiline kasutamine põhineb kahel omadusel:

a) süsteemi kuuluvate mõõtühikutega füüsika võrrandite kohaselt algebralisi tehteid sooritades saame tulemuseks alati mingisuguse sama süsteemi mõõtühiku,

b) ühes süsteemis on igal füüsikalisel suurusel ainult üks kindel mõõtühik.

Nende omaduste kasutamisel jaguneb füüsikaülesande lahendamine kolmeks etapiks.

1° Leitakse lähtesuuruste mõõtavad kasutatavas mõõtühikute süsteemis.

2° Arvutatakse otsitava suuruse mõõtary.

3° Kirjutatakse vastuseks leitud mõõtary koos otsitava suuruse mõõtühikuga kasutatavas mõõtühikute süsteemis.

N ä i d e. Leida, kui pika maa läbib kiirusega 72 km/h liikuv auto ühe minuti jooksul. SI kasutamisel on arvutusetapid järgmised:

1° $v_{SI} = 20$; $t_{SI} = 60$.

2° $s = vt$; $s_{SI} = 20 \cdot 60 = 1200$.

3° $SI_s = m$; $s = 1200 \text{ m}$.

3. MÕÖTMISVEAD

3.1. Täpsus. Mõõtmistulemuse väärtus oleneb täpsusest. Sõna «väärtus» on siin kasutatud majandusteaduslikus mõttes.

Riist, mis võimaldab mõnekümnesentimeetrilise varda pikkust mõõta poole millimeetri täpsusega, maksab kopikaid. Riist, mis võimaldab sedasama teha tuhat korda täpsemini, on üle tuhande korra kallim. Hinnavahe makstakse täpsuse eest.

On hästi teada, et inimese lend Kuule nõudis tohutuid kulutusi. Halvemini on teada, et lõviosa nendest kulutustest on täpsuse hind.

Kui uurija kavandab eksperimenti, peab ta tegema valiku võimalike katsemeetodite ja mõõtevahendite vahel. Millist meetodit ja aparatuuri eelistada? Loomulikult sellist, mis võimaldab uurija käsutuses olevate ressursside kasutamisel saada täpsemaid tulemusi, või sellist, mis garanteerib etteantud täpsuse minimaalsete kulutuste korral.

Täpsuse hindamise oskus osutub eksperimendikunsti alusmüüriks.

Sageli me hindame täpsust intuiitiivselt, ilma arvutusteta ja isegi täpsusele mõtlemata. See varjab, kuid ei vähenda täpsuse teadliku hindamise oskuse tähtsust. Intuitsioon pole kaasa sündinud, vaid areneb teadmiste baasil. Et kujundada head intuitsiooni, on tarvis häid teadmisi.

3.2. Mõõtmisviga. Olgu mõõdetava suuruse *tõeline väärtus* x ja *mõõtmistulemus* x_0 . Vahet

$$\delta x = x_0 - x \quad (3.2)$$

nimetatakse *mõõtmisveaks*.

Mida väiksem mõõtmisviga, seda parem on mõõtmise täpsus. Täpsust saab kirjeldada mõõtmisvea kaudu.

Konkreetsel mõõtmise korral on ainsaks informatsiooniks suuruse x kohta mõõtmistulemus x_0 . Mõõdetava suuruse tõeline väärtus jääb tundmatuks ja valemit (3.2) pole võimalik kasutada. See valem ongi vaid fiktiivne: kui mõõtmisviga oleks tuntud, võiks teha $x = x_0 - \delta x$ abil leida mõõdetava suuruse absoluutselt täpse väärtuse.

Fiktiivse valemi abil defineeritud suurus on ise ka fiktiivne. Olukorra parandamiseks tõlgendatakse sümbolit x valemis (3.2) kaasaja täpsemate meetodite ja riistade abil saadud (kujutletava) mõõtmistulemusena. Kaasaja täpsemad meetodid võimaldavad leida mõõtmistulemusele 5–8 õiget kümnendkohta. Kui vaadeldava mõõtmise tulemus x_0 ei sisalda üle paari-kolme õige kümnendkoha, siis on niisugune tõlgendus rahuldav.

Täppismõõtmiste korral tõlgendatakse mõõdetava suuruse tõelist väärtust piirväärtusena, millele mõõtmistulemused lähenevad mõõtmistehnika tõkestamatul arenemisel. Tõelise mõõtmisvea väärtuse selgitamiseks on tarvis kannatlikult oodata, kuni tehnika areneb.

3.3. Piirviga. Olgu pliiatsi pikkus mõõdetud korraliku millimeeterjaotistega mõõtjoonlaua abil. Kuigi mõõtmisviga jääb tundmatuks, võib olla kindel, et $|\delta x| \leq 2$ cm, niisamuti $|\delta x| \leq 5$ mm. Võrratuse $|\delta x| \leq 0,2$ mm kehtivuses aga ei või enam kindel olla, võrratuse $|\delta x| \leq 0,01$ mm kehtivuses ammugi mitte.

Kõige väiksemat suurust Δx , mille korral võrratuse

$$|\delta x| \leq \Delta x$$

kehtivuses võib veel kindel olla, nimetatakse mõõtmistulemuse *piirveaks*.

Matemaatilise rangusega ei või 100% kindel olla milleski. Lepime esialgu piirvea definitsioonis väljendi *kindel olla* igapäevase mõttega: võtta vastutus võrratuse kehtivuse eest endale, olles teadlik eksimisega kaasnevatest ebameeldivatest tagajärge-

dest. Selle väljendi mõtet ja piirvea mõistet täpsustatakse käesoleva raamatu kahes viimases peatükis.

Piirviga pole võimalik mõõta ega rangelt välja arvutada, kuid teda on võimalik kord enam, kord vähem põhjendatult hinnata. Piirvea hindamise oskus ongi see eksperimendikunsti alusmüür, millest oli eespool juba juttu.

Rääkides mõõtmisvea hindamisest, mõeldakse piirvea hindamist.

Piirviga on võimalike *mõõtmisvigade absoluutväärtuste ülemmäär*.

Eelmises punktis püüti mõõtmistäpsust kirjeldada mõõtmisvea kaudu. Et mõõtmisviga jääb alati tundmatuks, siis osutub see moodus fiktiivseks. Erinevalt mõõtmisveast saab mõõtmistulemuse piirviga praktiliselt hinnata. Seepärast kirjeldatakse mõõtmistäpsust piirvea abil.

Leidnud mõõtmistulemuse x_0 ja piirvea Δx , võib kirjutada

$$x = x_0 \pm \Delta x,$$

mis tähendab, et mõõdetava suuruse tõeline väärtus x asub väärtuste $x_0 - \Delta x$ ja $x_0 + \Delta x$ vahel:

$$x_0 - \Delta x \leq x \leq x_0 + \Delta x.$$

Mõnel juhul on otstarbekas hinnata eraldi *kaht polaarset piirviga*: võimalike positiivsete vigade ülemmäära $\Delta^+ x$ ja negatiivsete vigade absoluutväärtuste ülemmäära $\Delta^- x$. Mõõtmistulemuseks kirjutatakse siis

$$x = x_0 \begin{matrix} + \Delta^+ x \\ - \Delta^- x \end{matrix},$$

mis tähendab, et

$$x_0 - \Delta^- x \leq x \leq x_0 + \Delta^+ x.$$

3.4. Suhteline piirviga. Pikkus $l_1 = 24\,322,3 \pm 0,2$ m on mõõdetud täpsemini kui pikkus $l_2 = 1,1 \pm 0,1$ m, olgugi et $\Delta l_2 < \Delta l_1$. Tavaliselt loetakse täpsusi võrdseteks siis, kui piirvead on mõõtmistulemustega võrdelised.

Suhtelist täpsust iseloomustavat arvu

$$E_x = \frac{\Delta x}{|x_0|}$$

nimetatakse *suhteliseks ehk relatiivseks piirveaks*.

Kui ühe mõõtmise suhteline piirviga on teise mõõtmise suhtelisest piirveast n korda väiksem, siis öeldakse, et esimese mõõtmise suhteline täpsus on teise mõõtmise täpsusest n korda suurem ehk esinene mõõtmine on teisest n korda täpsem.

Täpsuse mõõduna võib kasutada suhtelise piirvea pöördväärtust. Suhtelist piirviga saab kasutada ainult suhteskaalas mõõdetud suuruste korral. Vahekaala korral ei oma suuruste x ja x_0 arvvärtuste suhe mõtet. Et selles veenduda, võiks teha katset seada mõõtmistulemused $t_1 = 2 \pm 1^\circ \text{C}$, $t_2 = 10 \pm 2^\circ \text{C}$ ja $t_3 = 0 \pm 0,5^\circ \text{C}$ täpsuse järjekorda. Vahekaalas mõõdetud suuruse täpsuse iseloomustamiseks piisab piirveast.

3.5. Mõõtmisvea põhjused. Mõõtmisveal on alati mitu põhjust. Põhjuste uurimisel on otstarbekas lahutada mõõtmisviga tekkepõhjuse järgi komponentideks. Olulisemate komponentide nimetused ja põhjused on järgmised.

1° *Teoreetilise ehk meetodilise vea* põhjuseks on mõõtmismetodi ebatäielikkus ja arvutusvalemite ebatäpsus.

2° *Arvutusvea* põhjuseks on arvutuste ligikaudsus.

3° *Lähtevea* põhjuseks on arvutamisel kasutatavate abisuuruste, näiteks füüsikaliste konstantide ebatäpsus.

4° *Riistavea* põhjuseks on kasutatavate mõõtevahendite ebatäpsus.

5° *Häirevea* põhjuseks on välistingimuste ebasoodne mõju.

6° *Subjektiiuse vea* põhjuseks on mõõtja meelte ebatäiuslikkus, reaktsioonaja ebastabiilsus, silmapetted, vilumuse puudumine ja eksitavad harjumused.

Mõõtmisviga on kõigi loetletud komponentide resultant.

Erilist kohta mõõtmisvea komponentide hulgas omab *ekse*. Ekse põhjuseks on mõõtja hooletusest või asjatundmatusest tingitud jäme eksitus. Eksega mõõtmistulemus on praak, teised mõõtmisvea komponendid ei oma siis enam tähtsust.

3.6. Mõõtmisvigade iseloom. Mõõtmisvigade iseloom avaldub

Tabel 3.6

Näiteid mõõtmisvigade erineva iseloomu kohta

Seeria Nr.	δx		δx		δx		δx	
	x_0	δx	x_0	δx	x_0	δx	x_0	δx
1	7,3	-0,2	7,4	-0,1	7,7	0,2	7,6	0,1
2	7,3	-0,2	7,7	0,2	7,6	0,1	7,7	0,2
3	7,3	-0,2	7,5	0,0	7,5	0,0	7,6	0,1
4	7,3	-0,2	7,6	0,1	7,4	-0,1	7,6	0,1
5	7,3	-0,2	7,3	-0,2	7,3	-0,2	7,8	0,3

ühe ja sama suuruse paljukordsel mõõtmisel. Iseloomu järgi saab mõõtmisvigu lahutada kaheks komponendiks.

1° *Süsteemaatiline komponent*, mis mõõtmise kordamisel ei muutu või muutub mõõtmiselt mõõtmisele kindla seaduspärasuse kohaselt.

2° *Juhuslik komponent*, mis iga järgneva mõõtmise korral saab uue, täiesti juhusliku väärtuse.

Tabelis 3.6 on toodud neli näidet viiest üksikmõõtmisest koosneva seeria kohta. Mõõdetava suuruse tõeline väärtus oli kõigil juhtudel 7,5. Seeriates *a* ja *c* sisaldavad mõõtmisvead ilmselt ainult süstemaatilist komponenti, seerias *b* ainult juhuslikku ja seerias *d* nii süstemaatilist kui ka juhuslikku komponenti. Seeriad *b* ja *c* koosnevad ühtedest ja samadest arvudest, erinev on vaid nende järjekord. Siit on näha, et *vigade iseloomu analüüsimisel ei tohi mõõtmistulemusi ümber järjestada*.

Selleks et süstemaatilist ja juhuslikku komponenti niiviisi identifitseerida, on tarvis määrata mingi täpsema meetodi abil mõõdetava suuruse tõeline väärtus. Siis aga kaotaks analüüsiv mõõtmisseeria praktilise mõtte. Tabelis 3.6 toodud näited osutuvad kunstlikeks.

Praktikas on mõõtmisvea juhuslik komponent alati mõõtmistulemuste järgi äratuntav, süstemaatilise komponendi kohta aga ei ütle mõõtmistulemused tavaliselt midagi. Süstemaatilise komponendi uurimiseks on tarvilik mõõtmisvea võimalike põhjuste analüüs.

Süstemaatilise ja juhusliku vea mõisteid saab täpsustada pärast tõenäosusteooriaga tutvumist.

Kõik eelmises punktis vaadeldud mõõtmisvea komponendid (põhjuse järgi) võivad sisaldada nii süstemaatilist kui ka juhuslikku alakomponenti. Erandiks on vaid lähteviga, mis ei sisalda juhuslikku komponenti.

3.7. Mõõtmisvea kontroll. Mõõtmisvea süstemaatilist komponenti analüüsitakse tekkepõhjuste kaupa.

Süstemaatilise *teoreetilise vea* hindamine ja vähendamine on iga eksperimendi jaoks spetsiifiline füüsikaline probleem, mis nõuab nii teooria kui ka katsetehnika põhjalikku tundmist. Korrektselt põhjendatud valemite ja katseteetodika korral on teoreetiline viga tähtsusetult väike ja resultantvea ülemmäära hindamisel teda ei arvestata.

Teoreetilist viga on võimalik uurida ka empiirilisel. Selleks tuleb üht ja sama suurust mõõta erinevate meetodite abil. Teoreetilise vea tunnuseks on mõõtmistulemuste erinevus, mis pole muude põhjustega seletatav.

Kõik aritmeetilised arvutused tehakse reeglina vähemalt kümne korda väiksema suhtelise veaga kui otsesed mõõtmised. Siis on *arvutusviga* teiste komponentidega võrreldes tähtsusetu ning teda võib resultantvea hindamisel ignoreerida.

Lähtevea hinnang peab sisalduma lähteandmetes. Veahinnangu andmed pole kvaliteetsed. Lähteandmete kasutamisest loobumata pole võimalik lähteviga kõrvaldada. Seetõttu võib lähteviga eksitada ka vilunuimat eksperimentaatorit. Millikan mõõtis elektroni laengut 58 korda. Lähteviga ignoreerides saab Studenti testi (vt. pkt. V) abil nende mõõtmiste tulemuste järgi elektroni laengu väärtuseks $e = (4,7808 \pm 0,0054) 10^{-10}$ CGSEq arvutuste kohaselt 99% kindlusega. Pärast täpsete röntgendifraktsioonvõrede valmistamist ja pikkuse X-ühiku ning Avogadro arvu korrigeerimist leiti Faraday arvu ja Avogadro arvu järgi elementaarlaengu täpsem väärtus. Ilmnes, et Millikani tulemuse tõeline viga on näidatud piirveast neli korda suurem. Hiljem selgus, et Millikan oli lähtunud õhu sisehõõrdeteguri ebatäpsest väärtusest.

Riistaviga, nii süstemaatilist kui ka juhuslikku, hinnatakse kasutatavatele mõõtevahenditele ja nende tunnistustesse märgitud andmete järgi. Kui eksperimentaatoril pole võimalik kasutada etalone, on riistaviga kõrvaldamatu. Erandiks on vaid suhete mõõtmine ning nurga mõõtmine, sest nurgauhikud on defineeritud etaloni abita.

Häirevea hindamise ning kõrvaldamise oskus on eksperimendikunsti tähtsaim koostisosa, üldretsepti selleks ei ole. Häireviga on sageli ebastabiilne ja põhjustab süstemaatilise vea muutlikkust.

Subjektiiivse süstemaatilise vea kahtluse korral lastakse vastavat suurust mõõta mitmel vaotlejal ning võrreldakse tulemusi.

Lähteviga ja riistaviga on kontrollimatud komponendid ja nende resultanti nimetatakse *kontrollimatuks veaks*. Ulejäänud komponendid on kontrollitavad ja nende resultanti nimetatakse *kontrollitavaks veaks*. Kontrollimatu viga ei allu eksperimentaatorile, seda kõrvaldada pole võimalik ning selle hindamisel peab usaldama lähteandmete veahinnanguid ning mõõtevahendite passiandmeid. Kontrollimatu vea ülemmäär on mõõduks kontrollitavate komponentide hindamisel. Maksimaalse täpsuse taotlemisel püütakse muuta kõigi kontrollitavate komponentide ülemmäärad kontrollimatu vea ülemmäärast üks suurusjärk väiksemaks. Siis võib resultantvea hindamisel kontrollitavaid komponente ignoreerida. Kontrollitava vea edasine vähendamine oleks mõttetu.

Mõõtmisvea juhusliku komponendi kontrollimise võtteid käsitletakse viimases peatükis.

4. MÕÖTEVAHENDID

4.1. Mõõtevahendite liigid. Mõõtevahendit, mis reprodutseerib mingi füüsikalise suuruse üht või mitut väärtust, nimetatakse *mõõduks*. Mõõtevahendit, mis näitab mõõdetava suuruse väärtust, nimetatakse *mõõteriistaks*.

Näited: kaaluviht on mõõt, kaal on mõõteriist, mõõltakisti on mõõt, voltmeeter on mõõteriist.

Mõõtmiseks sobivalt koostatud mõõtude kogumit nimetatakse *mõõtude komplektiks*. Näiteks kaaluvihte kasutatakse tavaliselt komplektidena. Konstruktiivselt terviklikku ja mõõtude ühendamise seadmega varustatud mõõtude komplekti nimetatakse *mõõtude salveks*. Mõõtude salve näiteks sobib takistussalv. Mõõtude salv sarnaneb rakendusomadustelt muudetava mõõduga. *Muudetava mõõdu* näitena võib nimetada gradueeritud pöördkondensaatorit. Kui on tarvis rõhutada, et mingi mõõt ei ole muudetav, siis nimetatakse teda püsivaks mõõduks.

Mõõteriistad jagunevad *iseseisvateks mõõteriistadeks* ja *võrdlusriistadeks*. Iseseisval mõõteriistal on kaks funktsiooni. Ta võimaldab mõõdetavat suurust võrrelda mõõtühikuga ja reprodutseerib ise mõõtühikut. Võrdlusriistal on ainult üks funktsioon: ta võimaldab võrrelda füüsikalisi suursi. Võrdlusriistaga mõõtmiseks on tarvis mõõtu või mõõtude komplekti, iseseisvalt on ta kasutuskölbmatu. Näited: osutikaal on iseseisev mõõteriist, kangkaal on võrdlusriist, voltmeeter on iseseisev mõõteriist, potentsiomeeter on võrdlusriist.

Füüsikariista *sisendsuuruseks* nimetatakse riistale mõjuvat välist suurust, *väljundsuuruseks* aga sisendsuurusest sõltuvat riistale omast suurust. Näiteks venitav jõud on vedru sisendsuurus, vedru pikkus — väljundsuurus, rõhk on piesoelemendi sisendsuurus, elektriline pinge — väljundsuurus, sisendpinge on elektronvõimendi sisendsuurus, väljundpinge — väljundsuurus. Riista, mille väljundsuurus on sisendsuuruse tuntud funktsioon ja mida kasutatakse sisendsuuruse mõõtmiseks väljundsuuruse kaudu, nimetatakse *mõõtemuunduriks*. Mõõtemuundurit, mis muudab tülikalt mõõdetava sisendsuuruse mugavalt mõõdetavaks väljundsuuruseks, nimetatakse *mõõteanduriks*. Mõõtemuundurit, mis muudab mõõdetavat suurust kindel arv kordi, nimetatakse *mastaabimuunduriks*. Mõõteandur on näiteks sulatusahju temperatuuri mõõtmisel kasutatav termoelement, mille sisendsuuruseks on temperatuur ja väljundsuuruseks elektromotoorjõud. Mastaabimuundurite hulka kuulub kõrge vahelduvpinge mõõtmisel kasutatav mõõtetransformaator.

Ühiselt kasutatavate mõõtevahendite komplekti nimetatakse *mõõteseadmeks*.

Kasutusotstarbe järgi jagatakse mõõtevahendid *taatelmõõtevahenditeks*, *töömõõtevahenditeks* ja *õppemõõtevahenditeks*. Taatelmõõtevahendeid kasutatakse ainult teiste mõõtevahendite taatlemiseks (vt. p. 4.3), nende kasutamine muuks otstarbeks on keelatud. Töömõõtevahendeid kasutatakse teaduslikeks, praktilisteks ja ka õppemõõtmisteks, nende kasutamine teiste mõõtevahendite taatlemiseks on keelatud. Õppemõõtevahendeid kasutatakse ainult õppeotstarbeks.

4.2. Mõõteriista osad, näit ja mõõtepiirkond. Mõõteriista põhi-
osadeks on *tundlik organ* ehk *tajur* ja *lugemisseade*. Voltmeetri
tundlikuks organiks on magnetvälja paigutatud raam ning vedru.
Lugemisseade koosneb tavaliselt *numbrilauast ja osutist või märk-
joonest*. Numbrilauale on kantud *skaala*. Kui skaalalt saab osuti
asukoha järgi lugeda otse mõõdetava suuruse väärtust, siis räägi-
takse *otsest gradueeritud skaalast* ehk *otsest skaalast*. Kui aga
skaalalt leitud arvu on tarvis korrutada või jagada mingi teguriga,
on tegemist *tinglikult gradueeritud ehk tingskaalaga*.

Järjest rohkem võetakse tarvitusele *numbrilise näiduga mõõte-
riistu* ehk *digitaal mõõteriistu*, millel puudub skaala ning osuti.
Mõõdetava suuruse väärtuse üle otsustatakse niisuguse riista
tabloole ilmuva numbri järgi. Numbrilise näiduga mõõteriist on
näiteks elektriarvesti. Enamasti on numbrite vahetamiseks tablool
tarvis keerulist seadet, mis teeb numbrilise näiduga mõõteriistad
kalliks.

Arvu, mida mõõteriist näitab, nimetatakse *lugemiks*, lugemile
vastavat füüsikalise suuruse väärtust aga mõõteriista *näiduks*. Kui
voltmeetri osuti seisab arvudega 2,4 ja 2,5 tähistatud kriipsude kes-
kel, siis on voltmeetri lugem 2,45, näit aga 2,45 V

Skaala kahe naaberkriipsu vahelist lõiku nimetatakse *jaotiseks*.
Jaotis pole füüsikaline suurus, vaid geomeetiline objekt. Jaotise
geomeetrilist pikkust nimetatakse *jaotise pikkuseks*, jaotise lõpp-
kriipsule ja algkriipsule vastavate näitude vahet aga *jaotise vää-
rtuseks*. Nooniuuse jaotise väärtus on põhiskaala jaotise väärtuse ja
nooniuuse jaotiste arvu suhe.

Mõõteriista *mõõtepiirkond* on kõigi võimalike näitude hulk,
näiteks 0 3 V või -3 3 V *Mõõtepiirkonna tööosa* on see
mõõtepiirkonna osa, milles mõõteriista täpsus on reglementeeritud.
Näiteks mõõtepiirkonna 0 3 V tööosa võib olla 1 3 V Elektri-
mõõteriistade tööosa piirid tähistatakse numbrilaual punktidega.
Enamasti on mõõtepiirkonna tööosa võrdne mõõtepiirkonnaga. Sel
juhul numbrilauale tööosa piiravaid märke ei tehta.

Mõõtepiirkonna äärmisi näite nimetatakse *mõõtepiirideks*. On
kokku lepitud, et ühe mõõtepiiriga kirjeldatud mõõtepiirkonna teine
mõõtepiir on null. Näiteks mõõtepiirkond 3 V tähendab mõõtepiir-
konda 0 3 V

Mõõtepiirkonna haare ehk laius on ülemise ja alumise mõõte-
piiri vahe. Näiteks mõõtepiirkonna 0 3 V haare on 3 V mõõte-
piirkonn -3 3 V haare aga 6 V.

Mõõdu poolt reprodutseeritavat füüsikalise suuruse väärtust
nimetatakse mõõdu tegelikuks väärtuseks. Mõõdu tegelik väärtus
on lähedane mõõdule või mõõdu passi märgitud väärtusele, mida
nimetatakse mõõdu *nimiväärtuseks* ehk *nominaalväärtuseks*.

4.3. Taatlemine. Mõõtmine tähendab mõõdetava objekti võrd-
lemist etaloniga mitmest etapist koosneva ahela kaudu. See ahel
jaguneb etaloni ning töömõõtevahendit siduvaks ja omakorda mit-

mest etapist koosnevaks taatlemisahelaks ning töömõõtevahendit ja mõõdetavat objekti siduvaks mõõtmisetapiks. Igal taatlemisahela etapil võrreldakse mingit ahelasse kuuluvat mõõtevahendit kas etaloniga või eelneva taatlemisahela osa kaudu etaloniga võrreldud täpsema mõõtevahendiga. Võrdlemist, mille juures tehakse kindlaks, kas mõõtevahend vastab standarditele ja ametlike taatlemisjuhendite nõuetele, nimetatakse selle mõõtevahendi *taatlemiseks*. Taatlemisel kõlblikuks tunnistamisega saab riist endale mõõtevahendi õigused.

Mõõtevahendite taatlemise kord on seadusega kindlaks määratud. Esimene taatlemine teostatakse tavaliselt mõõtevahendeid tootvas tehases. Edaspidiseks taatlemiseks on õigus ainult selleks volitatud eriasutustel: riiklikele ja ametkondlikele mõõtude ja mõõteriistade järelevalve kontroll-laboratooriumidel. Taatlemisel kõlblikuks tunnistatud mõõtevahendile tehakse eriline märk või antakse välja *tunnistus*. Keerulisema ehitusega mõõteriistad *plommitakse* või *pitseeritakse* nii, et neid ei saa kõlblikkuse tunnuseks olevat plommi või pitserit rikkumata lahti võtta. Taatlemise märgiks võib olla ka värviga tehtud *templijäljend*. Mõõtevahendi kõlblikkusest tunnustust andev märk kehtib kindla tähtajani. Pärast tähtaja möödumist peab mõõtu või mõõteriista uuesti taatlema, muidu kaotab ta automaatselt mõõtevahendi õigused.

Mõnede mõõtevahendite *taatlemisperioodid* on fikseeritud seadusega [3]. Meditsiinilisi, veterinaar- ja inkubaatoritermomeetreid ning klaasist mõõtkruuse ja jookide müümisel kasutatavaid mensusure on tarvis taadelda ainult üks kord enne tarvitusele võtmist. Gaasiarvesteid taadeldakse ainult pärast valmistamist või remonti. Elukorterites kasutatavate ühefaasiliste elektriarvestite taatlemisperiood on 8 aastat, muude elektriarvestite, vedelikuarvestite, mõõtlattide ja metallist mõõtkruuside taatlemisperiood on 2–4 aastat. Kui töömõõtevahendi taatlemisperiood on seaduses fikseerimata, määrab taatlemisperioodi seda riista kasutava asutuse direktsoon.

Taatlemisel ei tohi taadeldavat mõõtevahendit võrrelda töömõõtevahendiga, ükskõik kui täpne see ka ei oleks, vaid ainult spetsiaalse *taatelmõõtevahendiga*. Kõigi taatelmõõtevahendite taatlemisperioodid on seadusega fikseeritud [3].

Mõnel juhul võib taatlev asutus anda mõõtevahendile *parandite tabeliga* varustatud tunnistuse. Niisugune mõõtevahend on kõlblik ainult tingimusel, et mõõtmistulemuseks loetakse summa

$$x_0 = x_0' + P(x_0')$$

kus x_0' on vahetu näit ja $P(x_0')$ tabelist leitud *parand*.

Mõõtevahendi õigusteta või need õigused kaotanud riistaga ei saa mõõta, vaid ainult mõõtmist imiteerida. Niisuguse tegevuse tulemuste esitamine mõõtmistulemuste pähe on võltsimine.

Oppelaboratooriumis on mõõtmise imiteerimine lubatud. Siin võib kasutada mõõtevahendi õigusteta õppemõõtevahendeid, mis seaduse vaatekohalt on vaid mõõtevahendite mudelid või maketid. Oppemõõtevahenditena võib kasutada ka mõõtevahendi õigused kaotanud riistu, mis on varustatud märgiga «õppeotstarbeks» (lühendatult «õ») või «demonstratsiooniks».

4.4. Mõõtevahendi kasutamistingimused. Mõõtmistulemus sõltub peale mõõdetava suuruse väärtuse vähesel määral ka mõõtmistingimustest. Mõõtevahendi gradueering kehtib ettenähtud täpsusega ainult siis, kui riistale mõjuvad suurused, näiteks temperatuur, niiskus ja mõõtevahendi kaldenurk horisontaalasendist, on kindlaksmääratud piirides.

Mõõtevahendi kasutamistingimusi kirjeldatakse riistale mõjuvate suuruste väärtustega. Mõjuvate suurustena vaadeldakse ainult neid suurusi, mille mõju mõõtmistulemusele on praktiliselt võimalik märgata. Näiteks pikkuse mõõtmisel on temperatuur mõjuv suurus, õhurõhk aga ei ole. Iga mõõtevahendi jaoks on kindlaks määratud neli erilist kasutamistingimuste piirkonda:

normaalingimused — kõige soodsamad mõõtmistingimused;

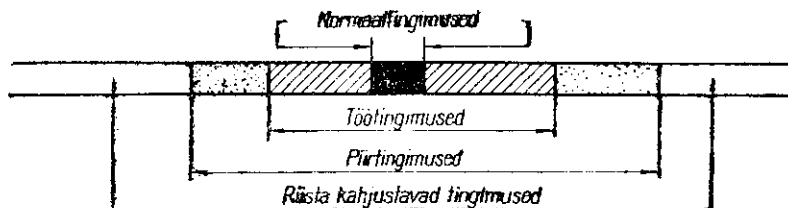
töötingimused — tingimused, mille korral riist on mõõtmiskõlblik;

piirtingimused — tingimused, mille korral riist ei pruugi olla mõõtmiskõlblik, kuid mis lühiajalise mõjumise korral teda ei kahjusta;

säilitamistingimused — tingimused, mis ei kahjusta riista ka pika aja jooksul.

Kolme esimese piirkonna omavahelisi suhteid iseloomustab joonis 4.4. Säilitamistingimused reglementeeritakse töötingimustest sõltumatult. Nad ei ole kunagi piirtingimustest laiemad ega normaalingimustest kitsamad, töötingimustest võivad aga olla kitsamad või laiemad olenevalt konkreetse riista omadustest.

GOST 9249-59 määrab *universaalseks normaaltemperatuuriks* temperatuuri 20° C. Konkreetsete mõõtevahendite normaalingimustega määratud normaalsed temperatuuripiirkonnad sisaldavad reeglina universaalset normaaltemperatuuri (näiteks piirkonnad 18. 22° C ja 15. 25° C).



Joonis 4.4. Mõõtevahendi kasutamistingimusi iseloomustavate piirkondade suhted.

4.5. Mõõtevahendi viga. Mõõteriista viga on mõõteriista näidu ja mõõdetava suuruse tegeliku väärtuse vahe, mõõdu viga on mõõdu tegeliku väärtuse ja nimiväärtuse vahe. Kui mõõtmisel kasutatakse ainult üht mõõtevahendit, siis on mõõtevahendi viga sama mis riistaviga (vt. p. 3.5).

Praktilise mõõtmise juures jääb mõõtevahendi viga tundmatuks. Mõõtevahendi vigu mõõdetakse ja uuritakse mõõtevahendi taatlemisel täpsema mõõtevahendi abil.

Iga mõõtevahendi jaoks on kindlaks määratud absoluutväärtuselt suurim lubatud viga Δx , mida edaspidises nimetatakse lihtsalt *lubatud veaks*. Kui taatlemisel osutub mõõtevahendi viga lubatud veast suuremaks, tunnistatakse riist kõlbmatuks. Mõõtmistulemuse piirvea hindamisel loetakse mõõtevahendi vea ülemmäär võrdseks lubatud veaga.

Lubatud vea sümbolile lisatakse sageli märgid \pm , näiteks teatud tüüpi mõõtjoonlaua lubatud viga tähistatakse $\pm 0,1$ mm. Nii viisi tähistatud lubatud viga $\pm \Delta x$ võib tõlgendada lubatud veapiirkonnana $[-\Delta x, +\Delta x]$. Käesolevas raamatus on lubatud vea mõiste sellisest tõlgendusest ja märkidest \pm loobunud kirjutusviisi lihtsuse huvides.

Mõõtevahendi lubatud viga võib kindlaks määratud viisil oleeda mõõtmistingimustest ja mõõdetava suuruse väärtusest. Normaalingimuste piirkonnas on lubatud viga kõige väiksem ja ei olene mõjuvate suuruste konkreetsetest väärtustest. Lubatud vea väärtust normaalingimuste korral nimetatakse *lubatud põhiveaks*. Kui mõõdetava suuruse tähtsuseks on x , siis mõõtevahendi lubatud põhiviga tähistatakse $\Delta^{\circ}x$.

Väljaspool normaalingimusi on lubatud viga lubatud põhiveast suurem. Lubatud vea ja lubatud põhivea vahet nimetatakse mõõtevahendi *lubatud lisaveaks* ja tähistatakse $\Delta'x$. Mõõtevahendi lubatud viga on järelikult lubatud põhivea ja lubatud lisavea summa:

$$\Delta x = \Delta^{\circ}x + \Delta'x.$$

Reglementeerimisele kuuluvad üksikpõhjustest tingitud lubatud lisavead. Need on lubatud lisavead juhtudel, kui ainult ühe mõjuva suuruse väärtus on väljaspool normaalpiirkonda. Summaarse lubatud lisavea määramiseks leitakse iga üksiku mõjuva suuruse väärtuse järgi kõik üksikpõhjustest tingitud lubatud lisavead ning liidetakse need.

Definitsioonidest järeldub, et normaalingimuste piirides on alati $\Delta'x = 0$.

Lubatud viga on reglementeeritud ainult töötingimuste piirides. Kui kas või üksainus mõjuv suurus on väljaspool töötingimuste piirkonda, siis pole riistal üldse mõõtevahendi õigusi.

Lubatud suhteline põhiviga E_x° ja *lubatud suhteline lisaviga* E_x' defineeritakse valemitega

$$E_x^0 = \frac{\Delta^0 x}{x_0},$$

$$E'_x = \frac{\Delta' x}{x_0}$$

kus x_0 on mõõdetava suuruse väärtus.

Lubatud taandpõhiviga D_x^0 ja lubatud taandlisaviga D'_x defineeritakse valemitega

$$D_x^0 = \frac{\Delta^0 x}{X},$$

$$D'_x = \frac{\Delta' x}{X},$$

kus X on mingi konstantne suurus. Tavaliselt on X mõõtepiirkonna haare. Lubatud taandvea mõistet kasutatakse praktikas palju ja selle mõiste omandamisele tuleb pöörata erilist tähelepanu. Algajad kipuvad taandvea ja suhtelise vea mõisteid segi ajama.

Näide. Olgu $U=2$ V, $\Delta^0 U=0,05$ V, $\Delta' U=0,025$ V ja mõõtepiirkond 0,5 V. Siis on tavalise kokkuleppe kohaselt $X=5$ V. Arvutame kõik lubatud vea näitarvud: $\Delta U=0,075$ V, $E_U^0=2,5\%$, $E_U'=1,31\%$, $E_U=3,8\%$, $D_U^0=1\%$, $D_U'=0,5\%$, $D_U=1,5\%$.

4.6. Hüsteresi ja variatsioon. Hüsteresiks nimetatakse mõõteriista näidu sõltumist mõõdetava suuruse «ajaloost». Kui mõõdetav suurus enne kindla väärtuse saavutamist kasvab, jääb mõõteriista näit hüsteresi tõttu väiksemaks, kui kahanes, siis suuremaks. Hüsteresi põhjuseks on tavaliselt osutimehhanismi hõõrdumine ja vedru jääkdeformatsioon. Hüsteresi on üks riistavea põhjustest.

Kui mõõtmise kordamisel mõõdetava suuruse muutumine on seaduspärane, põhjustab hüsteresi süstemaatilisi vigu, kui aga mõõdetava suuruse muutumine on juhuslik, siis juhuslikke vigu.

Mõõteriista variatsioon on maksimaalse ja minimaalse näidu vahe kindla väärtusega suuruse korduval mõõtmisel. Variatsioon võrdub sümmeetriliselt jaotatud juhuslike vigade kahekordse ülemmääraga. Mõõteriista variatsioon on hüsteresist.

Hüsteresi mõju kõrvaldamiseks kasutatakse *dubleerimismetodit*. Uhte suurust mõõdetakse kaks korda: üks kord nii, et mõõteriista näit saavutab lõppväärtuse kasvades, teine kord aga kahanedes. Mõõtmistulemuseks loetakse näitude aritmeetiline keskmine.

Kui mõõtmisvahendi kasutamishendis leidub sellekohane ettekirjutus, on dubleerimismetod kohustuslik ja üksiknäidu viga võib olla lubatud veast suurem. Tavaliselt niisugune ettekirjutus puudub, dubleerimismetod pole kohustuslik ja lubatud viga on üksiknäidu vea ülemmäär. Sel juhul võib hüsteresi kõrvaldamine suurendada küll reaalselt mõõtmistäpsust, kuid kahjuks ei mõjuta lubatud viga ja ceskirjade kohaselt leitud piirvea hinnangut.

4.7. Mõõtevahendiga tutvumine. Enne mõõtmist peab mõõtevahenditega tutvuma.

Mõõtevahendiga tutvumisel selgitatakse välja *mõõtepiirkond, selle tööosa, normaaltingimused, töötingimused, piirtingimused, säilitamistingimused ja lubatud vea määramise reeglid*. Eraldi peab uurima, kuidas mõõtevahend võib mõjutada mõõdetavat objekti.

Mõõtepiirkond ja selle tööosa selgub tavaliselt juba numbrilauda uurides. Elektrimõõteriistade korral on olulised ka ümberlülitite ja klemmide juurde tehtud märgid. Riista markeeringut, s. o. riistale ning riista vutlarile kantud märke uurides saab teada standardi numbri, mille kohaselt riist on valmistatud. Olulisemad andmed standarditest on esitatud kolmandas ja neljandas peatükis. Standardi abil saab dešifreerida kõik riistale kantud märgid ning leida normaal- ja töötingimusi iseloomustavad mõjuvate suuruste piirkonnad. Standardis on esitatud ka lubatud põhivea ja lubatud lisavea määramise reeglid.

Kui mõõtevahendi markeeringu ja kasutamishendi ning standardi või taatlemisjuhendi uurimisel saadud informatsioon on puudulik, on tarvis uurida veel mõõtevahendi tunnistust. Mõnel juhul jääb ka siis andmeid puudu. Lünkade täitmiseks peab tundma järgnevalt kirjeldatud kokkuleppeid.

Sageli puuduvad andmed normaaltemperatuuri kohta. Niisugusel puhul on normaaltemperatuuriks alati universaalne normaaltemperatuur 20° C.

Kui normaalne temperatuuripiirkond koosneb ühest punktist (näiteks eelneva kokkuleppe rakendamise korral) ja temperatuurist tingitud lisaviga on määramata, peab alati hindama mõõtevahendi temperatuuri ja normaaltemperatuuri erinevuse mõju mõõtmistulemusele. Kui see mõju pole palju väiksem lubatud veast, võetakse ta mõõtmistulemuse leidmisel arvesse nagu parand.

Kui puuduvad andmed teisi keskkonnatingimusi kirjeldavate suuruste iseloomulike vahemike kohta, loetakse need suurused mittemõjuvaiks.

Mõõtevahendite omadused sõltuvad neile omistatud *täpsusklassist, kategooriast või grupist*. Mõnikord pole mõõtevahendile täpsusklassi, kategooriat või gruppi märgitud. Niisugusel juhul kuulub see mõõtevahend standardis kirjeldatutest kõige halvemate omadustega täpsusklassi, kategooriasse või gruppi.

Kõiki üksikasju pole standardites ja juhendites võimalik kirjeldada. Ka pärast põhjalikku mõõtevahendi, selle dokumentatsiooni ja standardi uurimist võib jääda lahendamata küsimusi. Mõõtevahendi kasutaja peab tundma mõõtmisprotsessi füüsikat ja lahendama need küsimused ise.

Õppemõõtevahendiks muudetud endised mõõtevahendid ei pruugi vastata riistale märgitud standardile. Õppemõõtevahendi kasutamine on «mõõtmise mäng», et see mäng oleks õpetlik, peab

täitma kõiki tavalisi metrooloogilisi reegleid. Füüsika praktikumis lepitakse kokku talitada kõiges nii, nagu oleks tegemist riistale märgitud standardile vastava töömõõtevahendiga. Airsa erinevusena loetakse õppemõõtevahendiks muudetud endise mõõtevahendi täpsusklass ühe astme võrra madalamaks riistale märgitud täpsusklassist.

Vanaaegsetele ja õppevahenditeks valmistatud riistadele omistatakse tinglikud metrooloogilised omadused.

4.8. Mõõtevahendi korrasoleku tunnused. Enne mõõtmist peab kontrollima mõõtevahendite korrasolekut. Mõõtevahenditel ei tohi olla väliseid defekte (rikutud plommid, löögijäljed jne.), kuid ainult välistunnuste järgi korrasolekus kindel olla ei saa. Töömõõtevahendi korrasoleku tunnused on järgmised.

1° Mõõtevahendit pole kahjustatud ülekoormamisega, lubamatutes tingimustes hoidmisega või muul viisil.

2° Mõõtevahendi taatlemistähtaeg pole möödunud.

Mõõtevahendi viimase taatlemise aasta saab teada templijäljendilt või tunnistuselt. Uute mõõtevahendite korral näitab riistale märgitud valmistamisaasta ühtlasi taatlemise aega. Ametlikke taatlemisperioode teab laboratooriumi möödumajanduse eest vastutav isik, taatlemisperioodid tehakse teatavaks ka õppelaboratooriumis töötavatele üliõpilastele.

Kui korrasoleku esimese tunnuse osas tekib kahtlusi, on soovitatav kahtlusalust riista võrrelda teiste täpsemate või samatäpsete riistadega. Elektrimõõteriistadel ja teistel reglementeeritud variatsiooniga riistadel on soovitatav kontrollida variatsiooni vastavust standardi nõuetele. Kui kahtlus jääb püsima, saadetakse riist enne tähtaega kontroll-laboratooriumi taatlemisele.

Õppelaboratooriumis loetakse korrast ära töömõõtevahend õppe-mõõtevahendiks.

Õppemõõtevahendite korrasolek on kokkuleppe küsimus, milles otsustav sõna on praktikumi juhendaval õppejõul.

4.9. Mõõtevahendi vea hindamise reeglid. Võtame eelnevast kokku põhireeglid.

1° Teeme kindlaks, kas tegemist on töömõõtevahendiga või õppemõõtevahendiga.

2° Uurime mõõtevahendi skaalat, markeeringut ja kasutamishendit ning mõõtevahendi kohta kehtivaid standardeid või taatlemisjuhendit, vajaduse korral ka mõõtevahendi tunnistust. Selgitame välja mõõtmistingimuste iseloomulikud piirkonnad ja lubatud põhivea ning lubatud lisavigade arvutamise reeglid.

3° Teeme kindlaks, kas mõõtevahend on korras.

4° Registreerime mõõtevahendi temperatuuri ja teiste mõjuvate suuruste väärtused ja teeme kindlaks, kas mõõtmistingimused vastavad mõõtevahendi töötingimustele ja normaalingimustele.

5° Kui mõõtmistingimused vastavad normaalingimustele,

arvutame lubatud põhivea ja loeme mõõtevahendi vea ülemmäära võrdseks lubatud põhiveaga.

Kui mõõtmistingimused vastavad töötingimustele, kuid ei vasta normaalingimustele, arvutame lubatud põhivea ja väljapoole normaalpiirkonda jäävatest mõjuvatest suurustest tingitud lubatud lisavead ja loeme mõõtevahendi vea ülemmääraks lubatud põhivea ning kõigi lubatud lisavigade summa.

5. MÕÖTMISTULEMUSTE TÖÖTLEMINE

5.1. Vahetud tulemused ja lõpptulemus. Mõõtmise vahetuteks tulemusteks on tavaliselt mõõteriistade näidud. Mõõteriistade näidud ei sobi mõõtmise lõpptulemuseks. Kaudse mõõtmise korral on see ilmne. Otsese mõõtmise lõpptulemuseks peaks olema mõõdetava suuruse väärtus. Teatavasti aga mõõteriista näit ei võrdu mõõdetava suuruse väärtusega, vaid erineb sellest tundmatuks jäänud mõõtmisvea võrra.

Lõpptulemuseni jõudmiseks on tarvis vahetuid mõõtmistulemusi töödelda.

Lõpptulemus peab olema esitatud lühidalt ning sisaldama võimalikult suurt osa mõõtmisprotsessis saadud informatsioonist. Informatsioon oleneb täpsusest. Avaldis $x=3,2\pm 0,1$ sisaldab suuruse x kohta rohkem informatsiooni kui avaldis $x=3,2\pm 0,2$. Kui mõõtmistulemuste töötlemisel täiuslikum meetod viib esimese avaldiseni, lihtsam meetod aga teiseni, siis öeldakse, et lihtsam meetod raiskab informatsiooni.

5.2. Mõõtarvu esitamine. Lõplik kümnendmurd esitab füüsikalise suuruse arvvaartust alati ligikaudselt. Mida rohkem on arvul tähendusega kümnendkohti, seda suurem suhteline täpsus on võimalik. *Tähendusega kümnendkohtadeks* ehk tüvenumbriteks loetakse kõik kümnendkohad peale nullide arvu algul ja ümardamise teel saadud nullide täisarvu lõpus. Nullid kümnendmurru lõpus on tähendusega kümnendkohad.

Näited: 13 001 — viis tähendusega kümnendkohta

13 000 — kaks „ „

0,0027 — kaks „ „

1,0027 — viis „ „

1,2700 — viis „ „

Nullidega lõppeva täisarvu viimane tähendusega kümnendkoht märgistatakse tarviduse korral punktiga arvu kohal. Näiteks $997 \approx 1000$.

Kümnendkohtade arvu saab vähendada *ümardamise* teel. Ümardamisel on soovitatav jälgida reeglit, mille kohaselt numbriga 5 lõppevad arvud ümardatakse nii, et viimane koht jääks paarisarvuks:

$345 \approx 340$

$$73,5 \approx 74$$

$$74,5 \approx 74$$

Väga suured ja väga väikesed arvud, tülrikamate arvutuste korral aga kõik arvud, on soovitatav avaldada kujul:

$$\text{kus } \left. \begin{array}{l} n \cdot 10^m \\ 1 \leq |n| < 10. \end{array} \right\}$$

Näited:

$$173\,200 = 1,732 \cdot 10^5 \text{ — õige}$$

$$120\,000\,000 = 12 \cdot 10^7 \text{ — vormilt väär}$$

$$0,0072 = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ — õige}$$

$$0,00072 = 0,72 \cdot 10^{-3} \text{ — vormilt väär}$$

5.3. Otsese mõõtmise täielik tulemus. Mõõtmise täielikuks tulemuseks peab olema *mõõdetava suuruse tõelise väärtuse hinnang*

$$x = x_0 \pm \Delta x,$$

kus x_0 on vahetu tulemus, tavaliselt mõõteriista näit, ja Δx piirviga. Piirvea määramine on näidu registreerimisest hoopis keerulisem protseduur.

Otsese mõõtmise korral arvutusvalemeid ei kasutata ning mõõtmisviga ei sisalda teoreetilist, arvutus- ega lähtekomponenti.

Häirevea ning subjektiivse vea kvantitatiivne hindamine on äärmiselt komplitseeritud. Algaja suudab korrektselt mõõta ainult siis, kui häireviga ja subjektiivne viga on tähtsusetult väikesed. Sellele on tarvis pöörata maksimaalset tähelepanu.

Füüsika praktikumis on subjektiivse vea vähendamiseks kohustuslik lugeda kõigilt nooniusuga varustamata skaaladelt ka jaotise kümnendosa.

Kõige olulisem mõõtmisvea komponent on tavaliselt riistaviga. Riistavea hindamiseks tuleb p. 4.9 reeglite kohaselt kindlaks teha kõigi mõõtmisprotsessist osavõtnud mõõtevahendite vigade ülemmäärad ning need liita. Näide: kui keha tasakaalustamiseks kaalul, mille lubatud viga on 20 mg, kasutati nelja vihti lubatud vigadega 50 mg, 20 mg, 10 mg ja 10 mg, siis riistavea ülemmäär on $(20 + 50 + 20 + 10 + 10) \text{ mg} = 110 \text{ mg}$. On ilmne, et nii talitades pole ohtu riistaviga alla hinnata. Viimases peatükis näidatakse, et lubatud vigu liites hinnatakse riistaviga tavaliselt üle ja raisatakse informatsiooni.

Mõõtmistulemuse piirveaks loetakse riistavea, häirevea ja subjektiivse vea ülemmäärade summa.

5.4. Mõõtmistulemuse esitamise vorm. Piirvea määramise reaalne täpsus on madal ja leitud arvu pole mõtet mitme tähendusega kümnendkohaga kirjutada. Füüsika praktikumis nõutakse, et piirviga oleks kirjutatud kahe tähendusega kümnendkohaga kõigis tulemustes, mida kasutatakse teiste suuruste arvutamiseks, lõppvastustes aga ainult siis, kui esimene tähendusega kümnendkoht on 1; 2 või 3. Kui lõppvastuses piirvea esimene kümnendkoht on

4 või suurem, ümardatakse piirviga ühe tähendusega kümnendkohani.

Mõõtarv ise peab olema esitatud piirvea viimase kümnendkoha täpsusega. Lisakümnendkohad oleksid tähenduseta. Liigse vormilise täpsuse korral ümardatakse mõõtarv parajaks. Nõutust väiksema täpsusega kirjutatud mõõtarv on kõlbmatu ja mõõtmise tuleb sooritada uuesti.

Näited: $137,82 \pm 3,7$ — vormilt väär

$137,8 \pm 3,7$ — õige

$0,14 \pm 0,012$ — väär

(Tulemuse vormiline parandamine 0,14-le nulli juurdekirjutamise teel oleks võltsimine!)

$0,14 \pm 0,02$ — väär

$12,312 \pm 0,058$ — lõpptulemusena vormilt väär, vahetulemusena õige

$12,31 \pm 0,06$ — lõpptulemusena õige, vahetulemusena väär

Lõppvastusele lisatakse ka suhtelise piirvea väärtus ühe või kahe tähendusega kümnendkohaga olenevalt sellest, kas esimene tähendusega kümnendkoht on kolmest suurem või mitte.

Ei tohi unustada, et piirviga väljendatakse samades mõõtühikutes kui mõõdetav suuruski, suhteline piirviga on aga nimeta arv. Lõppvastuse vormistamise näide:

$$x = 27,31 \pm 0,27 \text{ mm}, \quad E_x = 1,0\%.$$

5.5. Ratsionaalne arvutamine. Aritmeetilisi tehteid füüsikaliste suuruste arväärtustega on otstarbekas teha nii täpselt, et arvutusviga jääks mõõtmisveast üks suurusjärg väiksemaks. Liigne arvutustäpsus tähendaks ainult tööaja raiskamist.

Liitmisel ja lahutamisel piirab tulemuse täpsust kõigepealt suurima piirveaga liidetav. Täpsemaid liidetavaid võib ümardada juba enne tehete sooritamist. Reeglina säilitatakse igas liidetavas paremal kõik ja ainult need kümnendjärgud, mida sisaldab kõige väiksema täpsusega liidetav.

Näited:

$$3,12 + 3,3 \approx 3,1 + 3,3 = 6,4.$$

$$0,278 - 0,1168 + 0,001283 \approx 0,278 - 0,117 + 0,001 = 0,162.$$

Korrutamisel ja jagamisel piirab tulemuse täpsust kõigepealt suurima suhtelise piirveaga tegur. Olgu lähtesuuruste tähendusega kümnendkohtade arvude hulgas kõige väiksem arv n_{\min} . Lähtesuurusi ümardatakse enne arvutamist, säilitades kõigis täpsemini esitatud arvudes parajasti $n_{\min} + 1$ tähendusega kümnendkohta. Niisama palju tähendusega kümnendkohti võetakse matemaatiliste konstantide, näiteks arvu π avaldisse. Vastuse jaoks arvutatakse samuti $n_{\min} + 1$ tähendusega kümnendkohta.

Näited:

$$318\,384 \cdot 0.042 \approx 3.18 \cdot 10^5 \quad 4.2 \cdot 10^{-2} \approx 1.34 \cdot 10^4,$$

$$\frac{12.7}{0.04} \frac{\pi}{1371} \approx \frac{13}{4} \frac{3.1}{14} \approx 0.72.$$

Esitatud ümardamisreeglid on kompromiss informatsiooni säilitamise nõude, arvutustöö kokkuhoiu nõude ja eeskirja lihtsuse nõude vahel. Need reeglid on kokkuleppelised ja ei ole rangelt kohustuslikud.

Korrutamised-jagamised tehakse tavaliselt arvutuslükati abil. Kolme tähendusega kümnendkoha korral nõuab lükati abil arvutamine erilist hoolikust, nelja ja enama tähendusega kümnendkoha korral aga pole lubatav.

Tavalise paberil korrutamise ja jagamise töö kokkuhoidmiseks on tarvis ära õppida lühendatud korrutamise ja lühendatud jagamise võtted [4, lk. 75–79].

5.6. Kaudse mõõtmise piirvea valem. Olgu u ja v otseselt mõõdetud suurused ja w suuruste u ja v kaudu mõõdetav suurus. Vaatleme esialgu kõige lihtsamat arvutusvalemit

$$w = u + v.$$

Kõige halvemal juhul on tõeline mõõtmisviga võrdne piirveaga: $\delta u = \Delta u$ ja $\delta v = \Delta v$. Et tõelised mõõtmisvead liituvad, siis $\delta w = \delta u + \delta v = \Delta u + \Delta v$. Pidades piirvea Δw määramisel silmas kõige halvemat juhtu, leiame siit

$$\Delta w = \Delta u + \Delta v. \quad (5.6.1)$$

Piirvea definitsiooni aluseks oleva mõiste «kindel» ähmasus annab alust valemi (5.6.1) tõsiseks kriitikaks. Nimeit osutub «kõige halvem juhul» nii ebatõenäoliseks, et ta «kindlasti» ei esine.

Mitmes raamatus soovitatakse teistsuguse tuletuskäigu abil saadud valemit

$$\Delta w = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}. \quad (5.6.2)$$

Kahjuks on ka sellel valemil olulisi puudusi.

Siinkohal lahenduseta jäävat probleemi käsitletakse põhjalikumalt viimases peatükis. Algajale võib soovitada valemit (5.6.1), sest selle valemi järgi arvutades pole ohtu piirviga alla hinnata.

Üldisel juhul on kaudse mõõtmise tulemus z otseste mõõtmiste tulemuste x, y, \dots funktsioon

$$z = f(x, y, \dots)$$

Selle funktsiooni avaldiseks on suuruse z arvutusvalem. Diferentsiaal-arvutuse kursuses näidatakse, et eeldusel $E_x \ll 1$, $E_y \ll 1$, järeldeb piirvigade liitmise reeglist (5.6.1) üldine valem:

$$\Delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \dots \quad (5.6.3)$$

5.7. Kaudse mõõtmise piirvea arvutamine. Algajale võib soovitada kaudse mõõtmise piirvea arvutada valemi (5.6.3) järgi. Nende jaoks, kes end diferentsiaalarvutuses koduselt ei tunne, on tabelis 5.7 esitatud nimetatud valemi tähtsamad erikujud. Selles tabelis tähendavad a , b , c ja n täpselt tuntud konstante.

Tabelit uurides võib tähele panna, et liitmise ja lahutamise korral on kasulik opereerida piirvigadega, korrutamise ja jagamise korral aga suhteliste piirvigadega.

Torkab silma, et vahe suhteline piirviga on alati suurem lähtendmete suhtelistest piirvigadest. Kui $x_0=13$, $y_0=12$ ja $E_x=E_y=1\%$, siis $E_{x-y}=25\%$!

Kui iga lähtesuurus esineb otsitava füüsikalise suuruse arvutusvalemis üksainus kord, võib tabeli valemeid omavahel kombineerida. Nii saab lahendada päris keerulisi ülesandeid, näiteks:

$$A = \frac{4\pi(r_2^2 - r_1^2)}{m \ln \frac{x}{y}}$$

$$\Delta(r_2^2) = 2r_2\Delta r_2, \quad \Delta(r_1^2) = 2r_1\Delta r_1, \quad E_{(r_2^2 - r_1^2)} =$$

$$= 2 \frac{r_2\Delta r_2 + r_1\Delta r_1}{r_2^2 - r_1^2}, \quad E_x = E_x + E_y, \quad E_{\ln \frac{x}{y}} = \frac{E_x + E_y}{\ln \frac{x}{y}}$$

$$E_{m \ln \frac{x}{y}} = E_m + E_{\ln \frac{x}{y}}, \quad E_A = E_{(r_2^2 - r_1^2)} + E_{m \ln \frac{x}{y}} =$$

$$= 2 \frac{r_2\Delta r_2 + r_1\Delta r_1}{r_2^2 - r_1^2} + E_m + \frac{E_x + E_y}{\ln \frac{x}{y}}, \quad \Delta A = A E_A.$$

Kui aga üks lähtesuurus esineb arvutusvalemis kahes kohas, peab kasutama üldist valemit (5.6.3) Tabeli valemeid kombineerides võib eksida.

Näide:

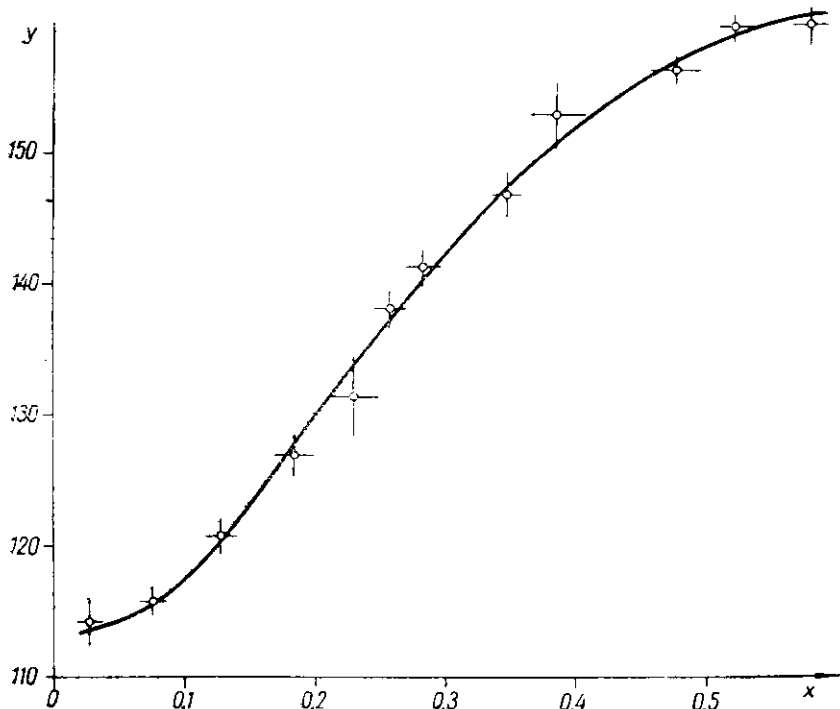
$$z = ax + \frac{b}{x}$$

$$\Delta ax = a\Delta x, \quad E_{\frac{b}{x}} = E_x, \quad \Delta \frac{b}{x} = \frac{b}{x} E_x = \frac{b}{x^2} \Delta x.$$

Tehe $\Delta z = \Delta ax + \Delta \frac{b}{x} = \left(a + \frac{b}{x^2} \right) \Delta x$ oleks väärt Käesoleval juhul õnnestub kasutada viimast tabeli valemit, võttes $y = 1$ ja $\Delta y = 0$. Saame õige tulemuse

Kaudse mõõtmise piirvea valemi erikujud

z	Δz	E_z
ax	$ a \Delta x$	E_x
$1/x$	$\Delta x/x^2$	
x^n	$ nx^{n-1} \Delta x$	$ n E_x$
$1/x^n$	$ n/x^{n+1} \Delta x$	
$\sqrt[n]{x}$	$ \sqrt[n]{x}/nx \Delta x$	$E_x/ n $
$ax+bx^2+cx^3$	$ a+2bx+3cx^2 \Delta x$	$\left \frac{a+2bx+3cx^2}{a+bx+cx^2} \right E_x$
$\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}$	$\left \frac{a}{x^2} + \frac{2b}{x^3} + \frac{3c}{x^4} \right \Delta x$	$\left \frac{ax^2+2bx+3c}{ax^2+bx+c} \right E_x$
$\ln x$	$\Delta x/x$	$E_x/ z $
$\lg x$	$0,43\Delta x/x$	$0,43 E_x/ z $
$\sin x$	$ \cos x \Delta x$	$ x \operatorname{ctg} x E_x$
$\cos x$	$ \sin x \Delta x$	$ x \operatorname{tg} x E_x$
$\operatorname{tg} x$	$\Delta x/\cos^2 x$	$\left \frac{2x}{\sin 2x} \right E_x$
$\operatorname{ctg} x$	$\Delta x/\sin^2 x$	
$x+y$	$\Delta x + \Delta y$	$\left \frac{x}{z} \right E_x + \left \frac{y}{z} \right E_y$
$x-y$		
$x \cdot y$	$ y \Delta x + x \Delta y$	$E_x + E_y$
$\frac{x}{y}$	$\frac{ y \Delta x + x \Delta y}{y^2}$	
$ax + b\frac{y^2}{x}$	$\left a - b\frac{y^2}{x^2} \right \Delta x + 2\left b\frac{y}{x} \right \Delta y$	$\left(\left a - b\frac{y^2}{x^2} \right \frac{x}{z} \Delta x + 2\left \frac{by^2}{xz} \right \Delta y \right)$



Joonis. 5.8. Mõõtmistulemuste järgi koostatud graafik (näide).

$$\Delta z = \left| a - \frac{b}{x^2} \right| \Delta x.$$

Kaudse mõõtmise lõpptulemuse esitamisel peetakse silmas samu reegleid kui otsese mõõtmise lõpptulemuse esitamisel (vt. p. 5.4).

5.8. Graafiku koostamine. Olgu mõõdetud hulk füüsikalise suuruse x ja sellest sõltuva füüsikalise suuruse y väärtusi ning ülesandeks joonistada funktsiooni $y=f(x)$ graafik. See töö jagatakse etappideks.

1° Varume laboratoorse töö protokollile formaadile vastava lehe millimeetripaberit.

2° Teeme kindlaks x -hulga haarde $H_x = x_{\max} - x_{\min}$, y -hulga haarde $H_y = y_{\max} - y_{\min}$ ja minimaalsed piirvead $\Delta_{\min} x$, $\Delta_{\min} y$.

3° Valime kummalgi teljel sõltumatult kujutusühiku pikkuse nii, et see sobiks millimeetervõrguga ja $\Delta_{\min} x$ ning $\Delta_{\min} y$ kujutiste pikkus tuleks 1–3 mm.

4° Arvutame haarete H_x ja H_y kujutiste pikkused. Kui need ei mahu paberilehele, valime uue mastaabi nii, et H_x ja H_y kujutised mahuks parajasti paberilehele.

5° Kui H_y ja H_x kujutiste pikkused erinevad teineteisest üle kahe korra, siis suurendame üht mastaapi nii, et kujutiste pikkuste suhe jääks vahemikku (0,5; 2).

6° Joonistame pliiatsiga abiristküliku, mille küljed võrduvad H_x ja H_y kujutistega. Visandame risküliku kahele küljele pliiatsiga x ja y skaalad nii, et jaotised langeksid kokku millimeetervõrgu jaotistega ning x_{\min} , x_{\max} , y_{\min} ja y_{\max} jääksid risküliku tippude lähedusse.

7° Kui vertikaalsirge $x=0$ jääb riskülikusse või selle vahe- tusse lähedusse, valime selle sirge y -teljeks. Vastasel korral valime y -teljeks niisuguse vertikaalsirge, mis asub risküliku vasaku serva lähedal ja millel x omab ümardatud väärtust. Samal põhimõttel valime x -telje.

8° Joonestame korralikult koordinaatteljed ja skaalad ning kanname joonisele 1 2 mm läbimõõduga ringikestena katse- punktid.

9° Läbi iga katsepunkti joonistame lõike $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ ja $[y_0 - \Delta y, y_0 + \Delta y]$ kujutavad geomeetriselised vealõigud. Horisontaalne ja vertikaalne vealõik moodustavad vearisti.

10° Joonistame funktsiooni $y=f(x)$ kujutava kõvera nii, et see oleks füüsikaliselt usutava kujuga, lõikaks kõiki veariste ja läbiks katsepunkte või mõõduks nendest võimalikult lähedalt.

Joonisel 5.8 on kujutatud ülaltoodud reeglite järgi ehitatud graafik. Abiristkülik on sellelt jooniselt kustutatud.

6. MÕÖTMISE PLANEERIMINE

6.1. Ülesande seade. Mõõtmistulemuse kvaliteedi mõõduks on täpsus. Seepärast on mõõtmise planeerimisel eesmärgiks maksimaalne võimalik mõõtmistäpsus konkreetsetes tingimustes.

Olulisema osa mõõtmise planeerimisest moodustab mõõtmis- meetodi ja mõõtevahendite valimine. Sellest oleneb mõõtmisvea teoreetiline ja häirekomponent. Nimetatud osa mõõtmise planeerimisest on iga töö jaoks spetsiifiline ja vastavaid küsimusi käsitletakse konkreetsetes tööjuhendites. Juhendites toodud eeskirjad fikseerivad suure osa mõõtmistingimustest.

Oletame, et teoreetilise vea ja häirevea allikad on kõrvaldatud, subjektiivne viga on väike ja mõõtmistäpsuse otsustab riistaviga. Mõõtmise planeerimise lõpuleviimiseks on tarvis teada, kuidas sõltub mõõtmistäpsus nendest tingimustest, mida juhend lubab vabalt valida.

Järgnevalt selgitatakse mõõtmise planeerimist füüsika praktiku- mis konkreetsete näidete varal. Keerulisemate ülesannete lahenda- misel kasutatavate süstemaatiliste matemaatiliste meetoditega võib tutvuda raamatute [2; 5] abil.

6.2. Esimene näide: vedeliku tiheduse mõõtmine U-toru ja katetomeetri abil. Tööjuhend ning laboratooriumi sisustus lubavad oma äranägemise järgi valida U-toru kauguse katetomeetrist ja vedelikusamba kõrguse ühes U-toru harus.

Mida kaugemal on U-toru katetomeetrist, seda väiksem on tema kujutis läbi pikksilma vaadates, seda vähem liigub vedeliku meniski kujutis niitristil pikksilma nihutamisel 1 mm võrra üles- või allapoole. Mida kaugemal on U-toru katetomeetrist, seda suurem tuleb katetomeetri lugemi viga. Järeldus: U-toru tuleb asetada katetomeetrite võimalikult lähedale. Päris katetomeetri vastu teda panna ei saa, kaugus peab olema nii suur, et pikksilma oleks võimalik teravustada. Reguleerime okulaari nii, et pikksilm oleks teravustatud minimaalsele kaugusele ja palume kedagi nihutada mingit eset pikksilma ees edasi-tagasi, kuni kujutis muutub teravaks. U-toru asetame leitud kaugusest õige veidi kaugemale, et täpselt teravustamiseks jääks väike tagavara.

Enne vedelikusamba kõrguse valimist uurime valemit

$$d = \frac{h_1}{h_2} d_0,$$

kus h_1 ja h_2 on kõrgused ning d_0 võrdlusvedeliku tihedus. Siit järeldub

$$E_d = E_{h_1} + E_{h_2} + E_{d_0} = \frac{\Delta h}{h_1} + \frac{\Delta h}{h_2} + E_{d_0}.$$

Vaadeldava töö puhul kõrguse piirviga Δh ei olene kõrguse väärtusest. h_1 ja h_2 on teineteisega võrdelised. E_d on seda väiksem, mida suuremad on h_1 ja h_2 . Järeldus: vedelikusammaste kõrgused tuleb valida nii suured, kui seda võimaldab U-toru ja katetomeetri kõrgus.

6.3. Teine näide: kaaluvihtide valimine. Kaaluvihtidest võib 10 g massi moodustada mitmel viisil:

- 5 g + 2 g + 2 g + 1 g,
- 10 g.

Kumb moodus on parem?

Olgu meil kasutada GOST 7328-65 vastavad neljanda täpsusklassi vihid. Arvutame piirvea kummalgi juhul:

- $m = 8 \text{ mg} + 6 \text{ mg} + 6 \text{ mg} + 4 \text{ mg} = 24 \text{ mg}$,
- $m = 12 \text{ mg}$.

Variante b on parem.

6.4. Kolmas näide: kaaluvihtide valimine. Parempoolset kaalukaussi võib koormata massiga 99,9 g mitmel viisil:

- 50 g + 20 g + 20 g + 5 g + 2 g + 2 g +
+ 500 mg + 200 mg + 200 mg,
- parempoolsel kausil 100 g, vasakpoolsel 100 mg.

Neljanda täpsusklassi vihtide korral on

$$a) m = (30 + 20 + 20 + 8 + 6 + 6 + 3 + 2 + 2) \text{ mg} = 97 \text{ mg},$$

$$b) m = (40 + 1) \text{ mg} = 41 \text{ mg}.$$

Variante b on parem.

6.5. Neljas näide: takistuse mõõtmine Wheatstone sillaga.
Tundmatu takistus arvutatakse valemi

$$R = \frac{l_1}{l_2} R_0$$

abil, kus l_1 ja l_2 on reohordi õlgade pikkused ja R_0 võrdlustakistus. Võrdlustakistuse R_0 valimiseks olgu kolm võimalust:

$$100 \Omega \pm 0,1\%$$

$$1 \text{ k}\Omega \pm 0,1\%$$

$$10 \text{ k}\Omega \pm 0,1\%.$$

Suhteline piirviga arvutatakse järgmiselt:

$$E_R = E_{l_1} + E_{l_2} + E_{R_0}; \quad E_{R_0} = \text{const.}$$

Võrdlustakistus R_0 tuleks valida nii, et $E_{l_1/l_2} = E_{l_1} + E_{l_2}$ oleks minimaalne. Võtame arvesse, et summa $l_1 + l_2$ ja pikkuse lugemise piirviga Δl on konstantsed ning uurime valemit

$$E_{l_1/l_2} = \frac{\Delta l}{l_1} + \frac{\Delta l}{l_2}$$

Kui $l_1 \rightarrow 0$, muutub suureks piirvea esimene liidetav, kui $l_2 \rightarrow 0$, muutub suureks teine liidetav. E_{l_1/l_2} on minimaalne siis, kui $l_1 = l_2$.

Järeldus: reohordi liugkontakt peab olema võimalikult lähedal reohordi keskpunktile.

Takistus R ja liugkontakti asend tasakaalustatud silla korral on aga tundmatud.

On tarvis teha orienteeriv eelmõõtmine juhuslikult valitud R_0 -ga. Olgu tulemuseks $R \approx 500 \Omega$.

Liugkontakt oleks keskel, kui $R_0 = R$. See pole võimalik. Kas valida $R_0 = 100 \Omega$ või $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$? Esimesel juhul saaksime $l_1/l_2 = 5$, teisel juhul $l_2/l_1 = 2$. Teisel juhul on liugkontakt keskpunktile lähemal.

Õige valik on $R_0 = 1000 \Omega$. Ei tohi lasta end eksitada ebaolulisest võrratusest

$$500 \Omega - 100 \Omega < 1000 \Omega - 500 \Omega.$$

6.6. Viies näide: takistuse mõõtmine voltmeetri ja ampermeetriga. Talugu takisti eralduvat võimsust kuni $P_{\max} = 2 \text{ W}$. Voltmeetri olgu kaks ümberlülitatavat mõõtepiirkonda 0–7,5 V ja 0–15 V ampermeetri samuti kaks ümberlülitatavat mõõtepiirkonda 0–100 mA ja 0–250 mA. Kummagi mõõteriista korral olgu $D_x = 1\%$. Millised piirkonnad valida?

Ilmselt on tarvis teha orienteeriv eelmõõtmine juhuslikult valitud mõõtepiirkondadega. Jälgime, et $U I < 2 \text{ W}$ Olgu tulemus $R \approx 600 \Omega$.

Arvutame suhtelise piirvea

$$E_R = E_U + E_I = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = \frac{U_0}{U} D_U + \frac{I_0}{I} D_I,$$

kus U_0 ja I_0 on mõõtepiirkondade ülemised piirid. $U_0 D_U$ ja $I_0 D_I$ ei sõltu pingest, I on pingega võrdeline. E_R on pingega pöördvõrdeline. Siit järeldus: pinge tuleb valida nii, et vähemalt ühe mõõteriista näit võrduks mõõtepiirkonna ülemise piiriga. See on nii, kui mõõtmise korral tuleb $P < P_{\max}$. Vastasel juhul arutleme järgnevalt:

$$P = \frac{U^2}{R}; \quad U = \sqrt{PR}, \quad U \leq \sqrt{P_{\max} R}$$

Käesoleval juhul on $U_{\max} > 30$ V ja tingimus $P < P_{\max}$ alati täidetud, sest voltmeetri maksimaalne mõõtepiir on kõigest 15 V

Oigesti korraldatud mõõtmise puhul on

$$E_R = \frac{U_0}{U} D_U + D_I \quad \text{või} \quad E_R = D_U + \frac{I_0}{I} D_I.$$

Siit järeldus: teise mõõteriista näidu ja ülemise mõõtepiiri suhe peab olema võimalikult suur. Analüüsime variante:

a) $U_0 = 7,5$ V; $I_0 = 100$ mA.

$$U \approx 6$$
 V; $I = 100$ mA; $\frac{U}{U_0} \approx 80\%$.

b) $U_0 = 7,5$ V; $I_0 = 250$ mA.

$$U = 7,5$$
 V; $I \approx 125$ mA; $\frac{I}{I_0} \approx 50\%$.

c) $U_0 = 15$ V; $I_0 = 100$ mA.

$$U \approx 6$$
 V; $I = 100$ mA; $\frac{U}{U_0} \approx 40\%$.

d) $U_0 = 15$ V; $I_0 = 250$ mA.

$$U \approx 15$$
 V; $I \approx 250$ mA; $\frac{U}{U_0} \approx \frac{I}{I_0} \approx 100\%$.

Parim on variant d.

Kui tekib kahtlus, kas mõõteriistade kõik mõõtepiirkonnad on korras, võib variandi a järgi läbi viia võrdleva kontrollmõõtmise.

7. MÕÕTMISPROTOKOLLI NÄIDIS

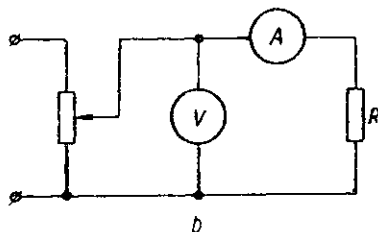
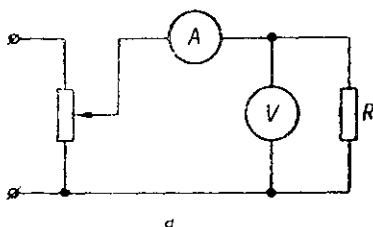
Töö pealkiri. Takistuse mõõtmine voltmeetri ja ampermeetriga.

Uurimisobjekt. Tundmatu takistusega takisti, $P_{\max} = 1$ W

Kasutatud riistade nimetused, numbrid ja andmed.

1. Voltmeeter M00 nr. 0000 15 V kl. 1,0 $R_V = 3 \text{ k}\Omega$.
2. Ampermeeter M00 nr. 0000 0,1 A kl. 0,5 $R_A = 1,5 \Omega$.
3. Reostaat 50Ω 2 A.
4. Pingeallikas 24 V 1 A.

Lülitusskeem.



Teooria.

Tähistused:

- R — mõõdetav takistus
- R_V — voltmeetri takistus
- R_A — ampermeetri takistus
- U — takistil langev pinge
- U_V — voltmeetril langev pinge
- U_A — ampermeetril langev pinge
- I — takistit läbiva voolu tugevus
- I_V — voltmeetril läbiva voolu tugevus
- I_A — ampermeetril läbiva voolu tugevus
- P_{\max} — maksimaalne lubatav takistil eralduv võimsus
- U_{\max} — maksimaalne lubatav takistil langev pinge.

Põhivalem:

$$R = \frac{U}{I}$$

A. Skeemi a korral on

$$U = U_V; \quad I = I_A - I_V; \quad I_V = \frac{U_V}{R_V}$$

$$R = \frac{U_V}{I_A - \frac{U_V}{R_V}}$$

B. Skeemi b korral on

$$U = U_V - U_A; \quad I = I_A; \quad U_A = R_A I_A;$$

$$R = \frac{U_V - R_A I_A}{I_A} = \frac{U_V}{I_A} - R_A.$$

Mõlemal juhul

$$U_{\max} = \sqrt{P_{\max} R}$$

Eel mõõtmise

Koostan skeemi *a*. Jälgin, et $U_V \cdot I_A < 1 \text{ W}$

$$U_V \approx 7,5 \text{ V}; \quad I_A \approx 50 \text{ mA} = 0,05 \text{ A}$$

$$R \approx \frac{U_V}{I_A} \approx \frac{7,5 \text{ V}}{0,05 \text{ A}} = 150 \Omega.$$

Skeemi *a* korral on parandusliige

$$\frac{I_V}{I} \approx \frac{150}{3000} = 5\%.$$

Skeemi *b* korral on parandusliige

$$\frac{U_A}{U} \approx \frac{1,5}{150} = 1\%.$$

$$U_{\max} \approx \sqrt{1 \text{ W} \cdot 150 \Omega} \approx 12,2 \text{ V}$$

Mõõtmise

Laboratooriumi temperatuur on 19°C , see on mõõteriistade normaalses temperatuurivahemikus ($18 \dots 22^\circ \text{C}$).

Koostan skeemi *b*:

$$U_V = (12,00 \pm 15 \cdot 1,0\%) \text{ V} = 12,00 \pm 0,15 \text{ V}$$

$$I_A = (83,70 \pm 100 \cdot 0,5\%) \text{ mA} = 83,70 \pm 0,50 \text{ mA}$$

$$R : \Omega = \frac{12,00}{0,08370} - 1,5 = 143,4 - 1,5 = 141,9.$$

Ampermeetri takistuse viga ignoreerime, sest ta on eeldatavast summaarsest piirveast palju väiksem:

$$E_R = E_U + E_I = \frac{0,15}{12} + \frac{0,50}{84} = 1,25\% + 0,60\% = 1,85\%;$$

$$\Delta R = 142 \Omega \cdot 1,85\% = 2,63 \Omega.$$

Vastus.

12 V pinge ja 19°C välistemperatuuri korral oli mõõdetava takistuse väärtus

$$R = 141,9 \pm 2,6 \Omega; \quad E_R = 1,8\%.$$

II peatükk. MÕÕTÜHIKUD

8. MEHAANIKA- JA AKUSTIKAMÕÕTÜHIKUD

8.1. Põhiühikud. Rahvusvahelise mõõtühikute süsteemi SI mehaanika- ja akustikamõõtühikud on tuletatud kolmest põhiühikust. Need sõltumatud mõõtühikud defineeritakse järgmiselt.

Meeter on pikkusühik, mis võrdub krüpton-86 aatomi nivoode $2 p_{10}$ ja $5 d_5$ vahelisel üleminekul kiirguva valguse 1 650 763,73 lainepikkusega vaakumis.

Kilogramm on massiühik, mis on esindatud kilogrammi rahvusvahelise prototüübi massiga.

Sekund on ajaühik, mis võrdub tseesium-133 aatomi põhioleku kahe ülipeenstruktuurinivoo vahelisele üleminekule vastava kiirguse 9 192 631 770 perioodiga.

CGS põhiühikud defineeritakse SI põhiühikute kordsetena: $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$, $1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$.

MkGS põhiühikute hulgas esineb jõukilogramm.

Jõukilogramm on jõuühik, mis võrdub 9,80665 njuutoniga.

Arv 9,80665 on defineeriv ja seetõttu põhimõtteliselt täpne.

Jõukilogrammi tähis on kgf, varem kasutati ka tähist kG.

8.2. Nurgaühikud. Rahvusvahelises mõõtühikute süsteemis nimetatakse nurgaühikuid radiaan ja steradian täiendavateks ühikuteks.

Radiaan (lühend rad) võrdub raadiusega võrdpikkusele ringjoone kaarele toetuva kesknurgaga tasandil.

Steradian (lühend sr) võrdub raadiuse ruuduga võrdpindsele kerapinna osale toetuva kera keskpunktis paikneva tipuga koonuse ruuminurgaga.

Täiendavaid ühikuid kasutatakse teiste mõõtühikute tuletamisel samuti kui põhiühikuid. Erinevalt põhiühikuist ei arvestata nurgaühikuid mõõtühikute samasuse kontrollimisel ja dimensioonvalemites. Näiteks valemit $T = I\omega^2/2$ kasutades avaldatakse kineetiline energia T džaulides, inertsmoment I kilogramm-ruutmeetrites ja nurkkiirus ω radiaanides sekundi kohta, olgugi et nii tulevad võrrandi vasaku ja parema poole mõõtühikud teineteisest rad^2 korda erinevad.

Nurgaühikute kasutamise reeglite ebameeldiva erandlikkuse väl-

timiseks on tarvis eristada *füüsikalist nurka* ja *matemaatilist nurka*.

Füüsikalist nurka mõõdetakse nagu iga divitiivset füüsikalist suurust etaloniga võrdlemise teel. Tasanurga loomulikuks etaloniks on täispööre. Mõõtühikuks valitakse kokkulepitud osa, näiteks $1/360$ või $1/2\pi$ täispöördest. Füüsikalist nurka ei saa avaldada nimeta arvu abil.

Matemaatiline tasanurk on füüsikalise tasanurga mõõtavaradiaani järgi ehk füüsikalise tasanurga ja radiaani suhe. Matemaatiline nurk on nimeta arv ja teda ei saa avaldada ei kraadides ega radiaanides.

Füüsikalist ja matemaatilist ruuminurka eristatakse samal põhimõttel.

Nurga praktilise mõõtmise korral kasutatakse järjekindlalt füüsikalise nurga mõistet. Matemaatilises analüüsis kasutatakse järjekindlalt matemaatilise nurga mõistet. Füüsikalises teoorias kasutatakse neid mõisteid läbiseigi.

Matemaatilise nurga mõistet teadlikult kasutades peab suurust ω valemis $T = I\omega^2/2$ käsitama matemaatilise nurga tuletisena aja järgi. Siis on see valem tingimusteta korrektne.

Füüsikalise nurga meetrilisel teisendamisel on kasulik teada suhteid

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ = 57,2958^\circ = 57^\circ 17' 45''$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 0,0174533 \text{ rad.}$$

Kui matemaatilise nurga järjekindla tarvitamise korral kasutatakse tähistust 1° , siis tähendab see lihtsalt arvu $\pi/180$.

Süsteemides CGS ja MkGS kasutatakse samu nurgahikuid kui süsteemis SI.

8.3. SI, CGS ja MkGS tuletatud ühikud. Tähtsamad tuletatud mõõtühikud on esitatud tabelis 8.3.1. *Lihttähisega mõõtühikute* nimetused võib leida tähise järgi tabelist 8.3.2. *Koostatud tähisega mõõtühikute*, näiteks kg/m^3 , nimetused koostatakse lihttähisega mõõtühikute nimetustest. Murru lugemisel tarvitatakse sõna «kohta», näiteks «kilogramm kuupmeetri kohta». Korrutise nimetuse koostamisel eraldatakse tegurite nimetused teineteisest sidekriipsuga või sõnaga «korda». Näiteks inertsmomendi mõõtühikut kg m^2 võib lugeda kas «kilogramm-ruutmeeter» või «kilogramm korda ruutmeeter» või «kilogramm korda meeter ruudus». Ülejäänud osas jälgitakse tavalisi algebraliste avaldiste lugemise reegleid.

Arv 9,8 tabeli 8.3.1 viimases veerus on ligikaudne. Täpsemalt peaks 9,8 asemel kirjutama igal pool 9,80665.

Tabelites 8.3 pole esitatud kaaluühikuid. Füüsikud pole seni

Mehaanikaliste ja akustikaliste suuruste mõõtühikud tähtsamates mõõtühikute süsteemides

Füüsikaline suurus	SI		CGS		MKGS		
	Valem või suuruse tähis	Mõõtühiku tähis	Mõõtühiku avaldis põhühikute kaudu	Mõõtühiku tähis	Mõõtühiku arvväärus SI järgi	Mõõtühiku arvväärus SI järgi	
1	2	3	4	5	6	7	
Pikkus	l	m	m	cm	10^{-2}	m	1
Pindala	$S = l^2$	m ²	m ²	cm ²	10^{-4}	m ²	1
Ruumala	$V = l^3$	m ³	m ³	cm ³	10^{-6}	m ³	1
Aeg	t	s	s	s	1	s	1
Sagedus	$f = \frac{1}{t}$	Hz	s ⁻¹	Hz	1	Hz	1
Kiirus	$v = \frac{l}{t}$	$\frac{m}{s}$	m s ⁻¹	$\frac{cm}{s}$	10^{-2}	$\frac{m}{s}$	1
Kiirendus	$a = \frac{v}{t}$	$\frac{m}{s^2}$	m s ⁻²	Gal	10^{-2}	$\frac{m}{s^2}$	1
Kulu	$\Phi = \frac{V}{t}$	$\frac{m^3}{s}$	m ³ s ⁻¹	$\frac{cm^3}{s}$	10^{-6}	$\frac{m^3}{s}$	1
Ruumkiirus		rad	rad	rad	1	rad	1
Tasanurk (füüsikaline)	φ^c	rad	rad	rad	1	rad	1
Tasanurk (matemaatiline)	$\varphi = \frac{\omega_0}{l} \text{ rad}$	l	l	l	1	l	1
Ruuminurk (füüsikaline)	Ω	sr	sr	sr	1	sr	1
Nurksagedus	$\omega_0 = \frac{v_0}{l}$	$\frac{rad}{s}$	s ⁻¹ · rad	$\frac{rad}{s}$	1	$\frac{rad}{s}$	1
Nurkkiirus (füüsikalised)							

Tabel 8.3.1 (järg)

1	2	3	4	5	6	7	8
Nurksagedus Nurkkiirus (matemaatilised) Nurkkiirendus (matemaatiline)	$\omega = \frac{\varphi}{t}$	$\frac{1}{s}$	s^{-1}	$\frac{1}{s}$	1	$\frac{1}{s}$	1
	$\alpha = \frac{\omega}{t}$	$\frac{1}{s^2}$	s^{-2}	$\frac{1}{s^2}$	1	$\frac{1}{s^2}$	1
Mass	m	kg	kg	g	10^{-3}	$\frac{kgf \cdot s^2}{m}$	9,8
Tihedus	$\rho = \frac{m}{v}$	$\frac{kg}{cm^3}$	$m^{-3} \cdot kg$	$\frac{g}{cm^3}$	10^3	$\frac{kgf \cdot s^2}{m^3}$	9,8
Jõud	$F = ma$	N	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$	dyn	10^{-5}	kgf	9,8
Liikumishulk	$p = mv$	$\left. \begin{array}{l} \frac{kg \cdot m}{s} \\ N \cdot s \end{array} \right\}$	$m \cdot kg \cdot s^{-1}$	$\frac{g \cdot cm}{s}$	10^{-5}	kgf · s	9,8
Jõu impulss	$p = Ft$						
Rõhk	$p = \frac{F}{S}$	Pa	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$	$\frac{dyn}{cm^2}$	10^{-1}	$\frac{kgf}{m^2}$	9,8
Pinge							
Helirõhk							
Elastusmoodul	$E = \frac{F}{S} \frac{l}{\Delta l}$						
Nihkemoodul	$G = \frac{F}{S} ctg \phi$						
Dünaamiline viskoossus	$\eta = \frac{Fl}{Sv}$	Pa s	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-1}$	P	10^{-1}	$\frac{kgf \cdot s}{m^2}$	9,8
Kinemaatiline viskoossus	$\nu = \frac{\eta}{\rho}$	$\frac{m^2}{s}$	$m^2 \cdot s^{-1}$	St	10^{-4}	$\frac{m^2}{s}$	1
Pindpinevus	$\alpha = \frac{F}{l}$	$\frac{N}{m}$	$kg \cdot s^{-2}$	$\frac{dyn}{cm}$	10^{-3}	$\frac{kgf}{m}$	9,8
Inertsmoment	$I = mr^2$	kg · m ²	$m^2 \cdot kg$	$g \cdot cm^2$	10^{-7}	kgf s ² · m	9,8

Tabel 8.3.1 (järg)

1	2	3	4	5	6	7	8
Jõu moment	$M=Fr$	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$	dyn cm	10^{-7}	kgf · m	9,8
Pöörlemishulk	$L=I\omega$	$\left. \begin{array}{l} \frac{kg \cdot m^2}{s} \\ N \cdot m \cdot s \end{array} \right\}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-1}$	$\frac{g \cdot cm^2}{s}$	10^{-7}	kgf · m s	9,8
Impulsmoment	$L=Mt$	J	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$	erg	10^{-7}	kgf · m	9,8
Töö	$A=Fl$	W	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$	$\frac{erg}{s}$	10^{-7}	$\frac{kgf \cdot m}{s}$	9,8
Energia	$E=A$						
Võimsus	$P=\frac{E}{t}$	W					
Energia tihedus	$\omega=\frac{E}{V}$	$J \frac{m^3}{m^3}$	$m^{-1} kg \cdot s^{-2}$	$\frac{erg}{cm^3}$	10^{-1}	$\frac{kgf \cdot m}{m^3}$	9,8
Energia voo tihedus	$I=\frac{P}{S}$	$W \frac{m^2}{m^2}$	$kg \cdot s^{-3}$	$\frac{erg}{cm^2 \cdot s}$	10^{-3}	$\frac{kgf \cdot m}{m^2 \cdot s}$	9,8
Heli intensiivsus							
Mõju	$S=At$	$J \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-1}$	erg · s	10^{-7}	kgf · m s	9,8
Massikulu	$M=\frac{m}{t}$	$\frac{kg}{s}$	$kg \cdot s^{-1}$	$\frac{g}{s}$	10^{-3}	$\frac{kgf \cdot s}{m}$	9,8
Mehaaniline takistus	$r=\frac{F}{v}$	$\frac{N \cdot s}{m}$	$kg \cdot s^{-1}$	$\left. \begin{array}{l} \frac{dyn \cdot s}{cm} \\ \frac{cm}{cm^5} \end{array} \right\}$			
Akustiline takistus	$r_a=\frac{p}{(v)}$	$\frac{N \cdot s}{m^5}$	$10^{-4} \cdot kg \cdot s^{-1}$	$\frac{dyn \cdot s}{cm^5}$	10^5	$\frac{kgf \cdot s}{m^5}$	9,8

Erinimetusega mõõtühikud

Mõõtühiku tähis		Mõõtühiku nimetus	Füüsikaline suurus	Süsteem
lad.	vene			
m	м	meeter	pikkus	SI, MkGS
s	с	sekund	aeg	SI, CGS, MkGS
rad	рад	radiaan	tasanurk	SI, CGS, MkGS
sr	ср	steradiaan	ruuminurk	SI, CGS, MkGS
kg	кг	kilogramm	mass	SI
Hz	Гц	herts	sagedus	SI, CGS, MkGS
Gal	Гал	gal	kiirendus	CGS
N	Н	njuuton	jõud	SI
Pa	Па	paskaal	rõhk	SI
J	Дж	džaul	töö	SI
W	Вт	vatt	võimsus	SI
dyn	дин	düün	jõud	CGS
P	П	puaas	dün. viskoossus	CGS
St	Ст	stoks	kin. viskoossus	CGS
erg	эрг	erg	töö	CGS
kgf	кгс	jõekilogramm	jõud	MkGS

üksmeelselt kokku leppinud, millist füüsikalist suurust kaaluks nimetada ja seepärast on rahvusvahelises mõõtühikute süsteemis kaalu mõistest hoopis loobutud. Vajaduse korral tarvitatakse mõistet «raskusjõud», mis ei vaja erilist selgitamist ega erilisi mõõtühikuid. Sõna «kaal» tähenduseks füüsikas jääb «riist massi mõõtmiseks».

Mõnel tabelites 8.3 kirjeldatud mõõtühikutest on paralleelnimetusid ja tähiseid. Näiteks CGS rõhuühikut dyn/cm^2 nimetati, eriti akustikas, *baariks*. Sama nimetust aga tarvitati, eriti meteoroloogias, ka miljon korda suurema rõhuühiku jaoks. Arusaamatuste vältimiseks soovitatakse nimetuse «baar» kasutamisest hoiduda. Jõukilogrammi mitteametlikuks paralleelnimetuseks on *kilopond* (lühend kp). MkGS massiühikut $\text{kgf s}^2/\text{m}$ nimetatakse *massi tehniliseks ühikuks* ja tähistatakse mtü.

8.4. Mitmesuguseid ühikuid. Mõõtühikuid, mis ei kuulu süsteemidesse SI, CGS või MkGS, tutvustab tabel 8.4.

Mõõtühikuid, mida saab hõlpsalt asendada SI kordsete ühikutega (näiteks ongström, mikron, gamma ja baar) ei lubata kasutada.

Alates 1964. a. loetakse ruumalaühik *liiter* täpselt võrdseks ühe kuupdetsimeetriga. Varem loeti liitri väärtuseks ühe kilogrammi puhta vee ruumala suurimale tihedusele vastaval temperatuuril, see on $1,000\,028\text{ dm}^3$.

Kui ajaühikut minut kasutatakse koos ühikutega tund või sekund, võib teda tähistada lühemalt tähega m. Ajavahemikku

Mitmesuguseid mehaanikamõõtühikuid

Füüsikaline suurus	Mõõtühik	Mõõtühiku tähis	Mõõtühiku väärtus SI-s
1	2	3	4
Pikkus	iks	X	$1,002 \cdot 10^{-13}$ m
	ongström*	Å	10^{-10} m
	mikron**	μ	10^{-6} m
	astronoomiline ühik	UA	$1,496 \cdot 10^{11}$ m
	valgusaasta	—	$9,461 \cdot 10^{15}$ m
Pindala	parsek	ps	$3,086 \cdot 10^{16}$ m
	barn	b	10^{-28} m ²
	aar**	a	10^4 m ²
Ruumala	hektar	ha	10^2 m ²
	liiter	l	$1,000 \cdot 10^{-3}$ m ³
Aeg	minut	min	60 s
	tund	h	3600 s
	ööpäev	d	86 400 s
	aasta	a	$3,156 \cdot 10^7$ s
Kiirus	valguse kiirus	c	$2,998 \cdot 10^8$ m · s ⁻¹
	elektronvolt	eV	$1,783 \cdot 10^{-36}$ kg
Mass	elektronimass	m _e	$9,110 \cdot 10^{-31}$ kg
	aatommassi ühik	u	$1,660 \cdot 10^{-27}$ kg
	gamma**	γ	10^{-9} kg
	karaat*	ct	$2 \cdot 10^{-4}$ kg
	tsentner	q	100 kg
	tonn	t	1000 kg
Jõud	sten**	sten	1000 N
	millimeeter		
Rõhk	veesammast*	mm H ₂ O	9,807 Pa
	millimeeter		
	elavhõbedasammast*	mm Hg	133,3 Pa
	torr**		
	jõukilogramm ruutsenti-meetrite*	kgf/cm ²	} $9,807 \cdot 10^4$ Pa
	(lehniline atmosfäär**)	at	
	füüsikaline atmosfäär**	atm	$1,013 \cdot 10^5$ Pa
baar*	bar	10^5 Pa	
pieso**	pieso	1000 Pa	
Töö	elektronvolt	eV	$1,602 \cdot 10^{-19}$ J
Võimsus	kliovatttund	kWh	$3,6 \cdot 10^6$ J
	hobujõud*	hj	735,5 W

* Lubatud kasutada 1975. aastani

** Ei lubata kasutada

tähistatakse näiteks nii: 2 h 17 m 11 s. Ajamomenti mõõdetakse vaheskaalas ning tähised h, m ja s kirjutatakse indeksilena üles: 16h 43m 11s.

Aatommassi ühik u võrdub 1/12 süsiniku isotoobi C₆¹² aatomi massist. Enne ühtse aatommassi ühiku tarvituselevõttu kasutati

keemilist hapnikuühikut (aluseks hapniku isotoopide looduslik segu) väärtusega 0,999957 *u* ja *füüsikalist hapnikuühikut* (aluseks hapniku isotoop O_8^{16}) väärtusega 0,999681 *u*.

Ainest olenev massiühik *kilomool* (kmol) on defineeritud seega

$$1 \text{ kmol} = (M : u) \text{ kg},$$

kus *M* on aine molekuli mass.

8.5. Logaritmilised skaalad. Võnkliikumiste ergutamiseks kuluvate võimsuste suhet on tavaks väljendada Belli skaalas. *Belli skaala* ühikuteks on *bell* (B) ja *detsibell* (dB). Võimsuste P_1 ja P_2 suhe avaldatakse järgmiselt:

$$K = \left(\lg \frac{P_1}{P_2} \right) B = \left(10 \lg \frac{P_1}{P_2} \right) \text{ dB}.$$

Kui võimsuste suhe võrdub amplituudide a_1 ja a_2 suhte ruuduga, siis

$$K = \left(10 \lg \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 \right) \text{ dB} = \left(20 \lg \frac{a_1}{a_2} \right) \text{ dB}.$$

Neperi skaala, mille ühik on *neper* (Np) erineb Belli skaalast ainult selle poolest, et siin kasutatakse kümnendlogaritmi asemel naturaallogaritmi:

$$K = \left(\ln \frac{P_1}{P_2} \right) \text{ Np}.$$

Kuna $\lg x = 0,434 \ln x$, siis

$$1 \text{ Np} = 4,34 \text{ dB}.$$

Akustikas kasutatakse Belli skaalat füüsikalise helinivoo *N* avaldamiseks. Kuna võimsust iseloomustab heli intensiivsus *I* ja amplituudi helirõhk *p*, siis

$$N = \left(10 \lg \frac{I}{I_0} \right) \text{ dB} = \left(20 \lg \frac{p}{p_0} \right) \text{ dB}.$$

Nullnivoo on valitud järgmise kokkuleppe kohaselt:

$$p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}.$$

Läviintensiivsuse I_0 väärtus on ligikaudu 10^{-12} W/m^2 . Suurused p_0 ja I_0 vastavad kuuldelävele sagedusel 1 kHz.

Subjektiiivset helivaljust avaldatakse *foonides*. Heli valjuse arv- väärtus foonide skaalas võrdub niisama valjuna kostva 1 kHz sagedusega võrdlusheli nivoo arv- väärtusega detsibellide skaalas.

Beauforti skaala

Tuule tugevus (palli)	Tuule kiirus (m/s)	Tuule toime kirjeldus
0	0	Vaikus
1	0,9	Suits tõuseb korstnast kaldu
2	2,4	Tuul on näol tuntav
3	4,4	Puude lehed liiguvad
4	6,7	Tolm ja paberitükid maas liiguvad
5	9,3	Puuoksad kõiguvad
6	12,3	Peened puud kiiguvad
7	15,6	Puuoksad koolduvad
8	18,9	Tuul raskendab käimist
9	22,6	Puudelt murdub oksid
10	26,4	Üksikud puud murduvad
11	30,5	Torm viib katuseid ära
12	34,8	Torm laastab metsa

Sageduste suhet iseloomustavat akustilist intervalli mõõdetakse enamasti muusikalises skaalas. Kui kahe tooni sagedused on f_1 ja f_2 , siis intervall on $\left(\log_2 \frac{f_1}{f_2}\right)$ oktaavi ehk $\left(12 \log_2 \frac{f_1}{f_2}\right)$ tempereeritud pooltooni ehk $\left(1200 \log_2 \frac{f_1}{f_2}\right)$ tsendi.

8.6. Mitmesugused funktsionaal- ja järjeskaalad. Mõnede vanemate areomeetrite kaliibrimisel on kasutatud *Baumé skaalat*. Vedeliku tihedus Baumé järgi arvutatakse järgmiselt:

$$n = a \left(1 - \frac{1 \text{ g/cm}^3}{d}\right)^\circ \text{Bé.}$$

See valem on täpne vaid kokkuleppelisel normaaltemperatuuril t_n . Vana Baumé skaala korral on $t_n = 14^\circ \text{R} = 17,5^\circ \text{C}$ ja $a = 146,8$. Ratsionaalse Baumé skaala korral on $t_n = 15^\circ \text{C}$ ja $a = 144,3$. Ameerika Baumé skaala korral on $t_n = 60^\circ \text{F} = 15,56^\circ \text{C}$ ja $a = 145$.

Beauforti tuule tugevuse skaala oli algselt järjeskaala. Kaasajal on see skaala seatud vastavusse tavalise tuule kiiruse skaalaga ja interpolatsioonivalemite abil võib Beauforti skaala muuta funktsionaalskaalaks. Beauforti skaalat kirjeldab tabel 8.6.

Mohsi kõvaduse skaala etalonideks on järgmised mineraalid:

1 — talk	6 — ortoklass
2 — kips	7 — kvarts
3 — kaltsiit	8 — topaas
4 — fluoriit	9 — korund
5 — apatiit	10 — teemant

9. SOOJUS- JA KIIRGUSMÖÖTÜHIKUD

9.1. Põhiühikud. Rahvusvahelise möötühikute süsteemi soojusmöötühikute moodustamisel kasutatakse kolme mehaanika-põhiühikut ja neljanda põhiühikuna kelvinit (lühend K).

Kelvin on niisuguse absoluutse termodünaamilise temperatuuriskaala ühik, milles vee kolmikpunkti temperatuuri arvväärus on 273,16.

Arv 273,16 on defineeriv ja seetõttu põhimõtteliselt täpne. See arv on valitud niiviisi, et vee keemistemperatuuri ja jää sulamistemperatuuri vahe tuleks parajasti 100 kelvinit.

Fotomeetriliste möötühikute moodustamiseks on tarvilik viies põhiühik, selleks on kandela (lühend cd) ehk uus küünal.

Kandela on valgustugevuse ühik, mille väärtus on fikseeritud tingimusega, et absoluutselt musta keha heledus plaatina tahkumistemperatuuril võrdub täpselt 6 10^5 kandelat ruutmeetri kohta.

Soojusemöötühikute tuletamisel on ka soojushulka käsitatud põhisuurusena. Tuntuim sõltumatu soojushulga ühik on kalor (lühend cal).

Kalori väärtus defineeritakse nii, et vee erisoojus oleks parajasti $1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{K}}$. Vee erisoojus sõltub vähesel määral tempe-

ratuurist ja seepärast on kalorile kindla väärtuse andmiseks tarvis fikseerida normaaltemperatuur. Nõukogude Liidus enne SI kehtestamist tarvitatud *kalor* (cal_{20}) defineeriti temperatuuril 20° C. Mujal on tarvitatud ka *viieteistkümnekraadilist kalorit* (cal_{15}) ja mitmesuguseid *keskmisi kaloreid*. Keskmistest kaloritest on tuntumad *rahvusvaheline kalor* ja *termokeemiline kalor*. Kaasajal defineeritakse *rahvusvaheline kalor* avaldisega

$$1 \text{ cal} = 4,1868 \text{ J}.$$

Termokeemiline kalor võrdub ligikaudu 4,1840 džauliga.

1958. a. võeti Nõukogude Liidus tarvitusele uus rahvusvaheline kalor. Sellega kalori väärtus muutus. Vanade andmete kasutamisel peab arvestama ligikaudset seost

$$1 \text{ cal}_{20} = 4,1816 \text{ J} = 0,9988 \text{ cal}.$$

9.2. Termodünaamiline temperatuuriskaala. Kahe soojusreservuaari temperatuuride võrdlemiseks võib nende reservuaaride vahele ühendada pööratava soojusjõumasina. Teatavasti on ühede

ja samade soojusreservuaaride vahele ühendatud erinevate pööratavate soojusjõumasinate kasutegurid võrdsed. Soojema reservuaari soojuskadu hõõrdumissoojusega kompenseerides saab soojusjõumasina kasutegurit η määrata mehaanikaliste mõõtmiste kaudu.

On kokku lepitud, et soojusreservuaaride temperatuuride T_1 ja T_2 suhteks loetakse mehaanikaliselt mõõdetav suurus $1 - \eta$. Selle kokkuleppega defineeritud temperatuuriskaalat nimetatakse *absoluutseks termodünaamiliseks temperatuuriskaalaks* ja kirjeldatud viisil mõõdetud temperatuuri *absoluutseks termodünaamiliseks temperatuuriks*.

Termodünaamika teise seaduse kohaselt on iga soojusjõumasina kasutegur väiksem kui arv üks ja absoluutse termodünaamilise temperatuuriskaala defineerivast valemist

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 - \eta$$

järeldub, et kõigi soojusreservuaaride temperatuurid on ühe määrgiga (kokkuleppeliselt positiivsed). Võimalike temperatuuride alumist raja inf T nimetatakse *absoluutseks nulliks*.

Absoluutne termodünaamiline temperatuuriskaala on suhteskaala ja tema fikseerimiseks piisab ühest etalonist. Kelvini skaala etaloniks on puhas vesi kolmikpunktis.

Termodünaamiline Celsiuse skaala defineeritakse Kelvini skaala abil:

$$t = (T : K - 273,15)^\circ\text{C}.$$

Vee kolmikpunkti temperatuuriks tuleb $0,01^\circ\text{C}$, jää sulamistemperatuuriks normaalrõhul aga parajasti 0°C .

Temperatuure pole võimalik füüsikaliselt liita, küll aga omab füüsikalist mõtet temperatuuride vahe. Erinevalt aditiivsete füüsikaliste suuruste vahedest on temperatuuride vahe iseseisev füüsikaline suurus. Näiteks temperatuuride 300 K ja 290 K vahet ei tohi lugeda võrdseks temperatuuriga 10 K . Seepärast kasutati varem temperatuuride vahe mõõtühiku jaoks iseseisvat nimetust kraad ja tähist deg. Nüüd on aga tähistuste lihtsustamise eesmärgil iseseisvast nimetusest loobutud ja temperatuuride vahe ühikut nimetatakse samuti kui temperatuuri ühikut kelviniks või Celsiuse kraadiks ning tähistatakse K või $^\circ\text{C}$.

Käsitades temperatuuride vahet kui iseseisvat divitiivset füüsikalist suurus, võib Celsiuse skaalat tõlgendada vaheskaalana. Lähedes Celsiuse skaala definitsioonist Kelvini skaala kaudu, võib sama skaalat tõlgendada ka lineaarse funktsionaalskaalana.

9.3. Rahvusvaheline praktiline temperatuuriskaala. Kõiki praktikas tarvitatavaid kaudsetel mõõtmismeetoditel põhinevaid termomeetreid peab kõigepealt gradueerima. Termodünaamilist temperatuuriskaalat saab vahetult realiseerida ainult pööratava

Rahvusvahelise praktilise temperatuuriskaala baaspunktid

Aine	Tasakaalus olevad faasid	$T_{68}:K$	$t_{68}:^{\circ}C$
Vesinik	gaas — vedel — tahke	13,81	—259,34
Vesinik	gaas — vedel**	17,042	—256,108
Vesinik	gaas — vedel*	2028	—252,87
Neon	gaas — vedel*	27,102	—246,048
Hapnik	gaas — vedel — tahke	54,361	—218,789
Hapnik	gaas — vedel*	90,188	—182,962
Vesi	gaas — vedel — tahke	273,16	0,01
Vesi	gaas — vedel*	373,15	100
Tina	vedel — tahke*	505,118	231,968
Tsink	vedel — tahke*	692,73	419,58
Hõbe	vedel — tahke*	1235,08	961,93
Kuid	vedel — tahke*	1337,58	1064,43

* Rõhul 101 325 Pa

** Rõhul 33 330,6 Pa

soojusjõumasina või sellega füüsikaliselt samaväärse seadeldise abil. Termomeetri gradueerimine vahetult termodünaamilise temperatuuriskaala järgi osutub äärmiselt tülikaks ja mitte eriti täpsaks protseduuriks. Seetõttu on võetud tarvitusele rahvusvaheline etalontermomeetrite komplekt, mis on gradueeritud 1968. aastal termodünaamilise temperatuuriskaala järgi. Rahvusvahelise etalontermomeetrite komplekti gradueeringut säilitatakse etalonainete abil ja vastavaid ettekirjutusi jälgides on võimalik sellist termomeetrite komplekti reprodutseerida igas hästi varustatud füüsikalaboratooriumis.

Etalontermomeetrite gradueeringuga defineeritud temperatuuriskaalat nimetatakse *1968. a. rahvusvaheliseks praktiliseks temperatuuriskaalaks*. See skaala erineb termodünaamilisest temperatuuriskaalast ainult etalontermomeetrite gradueerimisvigade võrra.

Rahvusvahelise temperatuuriskaala baaspunktid on näidatud tabelis 9.3. Interpoleerimiseks kasutatakse järgmisi rangete nõuete kohaselt valmistatud termomeetreid:

vahemikus 13,81 630,74[°]C plaatina-takistustermomeeter,

vahemikus 630,74 1064,43[°]C platinaroodium-platina termomeent,

temperatuuril üle 1064,43[°]C Plancki seadusel põhinev kiirgustermomeeter.

9.4. Tuletatud soojusmõõtühikud. Tabelis 9.4 on kirjeldatud SI mõõtühikuid, varem füüsikas kasutamist leidnud süsteemi cm-g-s-cal mõõtühikuid ja tehnikas kasutamist leidnud süsteemi m-kg-h-kcal mõõtühikuid.

Soojusmõõtitühikud

Füüsikaline suurus	Valem või suu- ruse tähis	SI mõõt- ühik (lühend)	cm g · s · cal		m kg · h kcal	
			Mõõtitühik (lühend)	Mõõtitühiku arvväärtus SI-s	Mõõtitühik (lühend)	Mõõtitühiku arvväärtus SI-s
1	2	3	4	5	6	7
Temperatuuride vahe	ΔT	K	K	1	K	1
Temperatuuri gradient	grad $T = \frac{\Delta T}{\Delta x}$	$\frac{K}{m}$	$\frac{K}{cm}$	100	$\frac{K}{m}$	1
Soojushulk	Q	J	cal	4,1868	kcal	4186,8
Siseenergia	U					
Vaba energia	F					
Entalpia	H					
Gibbsi potentsiaal	G					
Entroopia	$\Delta S = \frac{Q}{T}$	$\frac{J}{K}$	$\frac{cal}{K}$	4,1868	$\frac{kcal}{K}$	
Soojusmahtuvus	$C = \frac{Q}{\Delta T}$	$\frac{J}{K}$	$\frac{cal}{K}$	4,1868	$\frac{kcal}{K}$	
Erisoojus	$c = \frac{C}{m}$	$\frac{J}{kg \cdot K}$	$\frac{cal}{g \cdot K}$	4186,8	$\frac{kcal}{kg \cdot K}$	4186,8
Entroopia	$s = \frac{S}{m}$	$\frac{J}{kg \cdot K}$	$\frac{cal}{g \cdot K}$	4186,8	$\frac{kcal}{kg \cdot K}$	

Tabel 9.4 (järg)

1	2	3	4	5	6	7
Faasiüleinkusoojus	$r = \frac{Q}{m}$	$\frac{J}{kg}$	$\frac{cal}{g}$	4186,8	$\frac{kcal}{kg}$	4186,8
Reaktioisoojus	$q = \frac{Q}{m}$	W	$\frac{cal}{s}$	4,1868	$\frac{kcal}{h}$	1,1630
Kütteväärtus	$\Phi = \frac{Q}{t}$	$\frac{W}{m^2}$	$\frac{cal}{cm^2 \cdot s}$	4,1868	$\frac{kcal}{m^2 \cdot h}$	
Soojusvoog	$I = \frac{\Phi}{S}$	$\frac{W}{m \cdot K}$	$\frac{sm^2}{s}$	418,68	$\frac{kcal}{m \cdot h \cdot K}$	
Soojusvoo tihedus	$\lambda = \frac{I}{grad \bar{T}}$	$\frac{m^2}{s}$	$\frac{cal}{cm \cdot s \cdot K}$	10^{-4}	$\frac{m^2}{h}$	2,77 10^{-4}
Soojusjuhtivus	$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$	$\frac{W}{m^2 \cdot K}$	$\frac{cal}{cm^2 \cdot s \cdot K}$	41868	$\frac{kcal}{m^2 \cdot h \cdot K}$	1,1630
Temperatuurijuhitus	$k = \frac{\Phi}{\Delta T}$	$\frac{1}{K}$	$\frac{1}{K}$	1	$\frac{1}{K}$	1
Soojusvahetustegur	$\alpha = \frac{\Delta I}{l_0 \Delta T}$	$\frac{1}{K}$	$\frac{1}{K}$	1	$\frac{1}{K}$	1
Joonpaisumistegur	$\beta = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta T}$	$\frac{1}{K}$	$\frac{1}{K}$	1	$\frac{1}{K}$	1

Iseseisva soojushulgäühikuga süsteemides on töö A ja soojushulk Q seotud valemiga

$$A = EQ, \quad Q = \frac{1}{E}A,$$

kus E on soojuse mehaaniline ekvivalent ja $1/E$ töö termiline ekvivalent:

$$E = 4,1868 \frac{\text{J}}{\text{cal}} = 4,1868 \cdot 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{cal}} = 426,935 \frac{\text{kgf m}}{\text{kcal}}$$

$$\frac{1}{E} = 0,238846 \frac{\text{cal}}{\text{J}}$$

Rahvusvahelises mõõtühikute süsteemis ja teistes energeetilistes soojusmõõtühikute süsteemides on $E=1$.

Tabelis 9.4 kasutatakse soojushulga sümbolit Q samuti kui ajavahemiku sümbolit t alati ilma eestähiseta Δ . Kuna soojushulk ei kirjelda termodünaamilise süsteemi olekut, vaid energia muutust, siis on sümbolid ΔQ ja Q samatähenduslikud.

9.5. Energeetilised kiirgusmõõtühikud. SI energeetilised kiirgusmõõtühikud on esitatud tabelis 9.5. Vastavaid CGS mõõtühikuid on kerge tuletada: selleks on tarvis asendada SI mõõtühikuis džaul ergiga, vatt ergiga sekundis, meeter sentimeetriga ja kilogramm grammiga.

Sümbol dS_1 pindkiirgaja erikiirgustugevuse valemis tähistab kiirgava pinna elemendi dS projektsiooni vaadeldava suuna normaaltasandile. Kui kiirgava pinna normaali ja vaadeldava suuna vahel on nurk φ , siis $dS_1 = dS \cos \varphi$. Pindkiirgaja erikiirgustugevuse valem on erandina kirjutatud diferentsiaal kujul, sest kiirgustugevust saab omistada ainult punktikiirgajale.

Tabelis 9.5 vaadeldud füüsikalisi suurusi võib kasutada kas üle kogu spektri või üle kokkulepitud spektraalvahemiku (a, b) integreeritud kiirguse kirjeldamiseks. Esimesel juhul räägitakse *integraalsetest suurustest*, teisel juhul *osasuurustest* ehk *partiaalsetest suurustest*.

Spektrivahemiku ($x, x + \Delta x$) kohta tuleva osasuuruse ja spektrivahemiku laiuse Δx suhte piirväärtust tingimusel $\Delta x \rightarrow 0$ nimetatakse vastava füüsikalise suuruse *spektraaltiheduseks* kohal x . Spektri argumendiks x on tavaliselt lainepikkus, sagedus või kvandi energia. Spektraaltiheduse mõõtühiku tuletamiseks on tarvis tabelis 9.5 näidatud integraalse suuruse mõõtühik jagada spektri argumendi mõõtühikuga.

Rangelt monokromaatsed kiirguse spektraaltihedused on ühes punktis lõpmatud, kõikjal mujal aga nullid. Monokromaatsed kiirgust saab kirjeldada ainult integraalsete või osasuuruste abil.

SI energeetilised kiirgusmõõtühikud

Füüsikaline suurus	Valem või suuruse tähis	Mõõtühik (lühend)
Kiirgusenergia tihedus	$w = \frac{E}{V}$	$\frac{J}{m^3}$
Kiirgusvoog (energeetiline valgusvoog)	$\Phi_e = \frac{E}{t}$	W
Homogeense kiirgusvoo tihedus ehk intensiivsus (energeetiline valgusvoo tihedus)	$\frac{\Phi_e}{S_1}$	$\frac{W}{m^2}$
Pinna kiiritustugevus (energeetiline valgustugevus)	$E_e = \frac{\Phi_e}{S}$	$\frac{W}{m^2}$
Pinna kiiritushulk (energeetiline valgustushulk ehk energeetiline ekspositsioon)	$H_e = E_e \cdot t$	$\frac{J}{m^2}$
Kiirgaja võimsus	P	W
Punktkiirgaja kiirgustugevus (energeetiline valgustugevus)	$I_e = \frac{\Phi_e}{\Omega}$	$\frac{W}{sr}$
Pindkiirgaja erivõimsus (energeetiline valgus)	$R_e = \frac{\Phi_e}{S}$	$\frac{W}{m^2}$
Pindkiirgaja erikiirgustugevus (energeetiline heledus)	$B_e = \frac{dI_e}{dS_1}$	$\frac{W}{sr \cdot m^2}$
Ruumkiirgaja erivõimsus	$\frac{P}{V}$	$\frac{W}{m^3}$
Ruumkiirgaja masserivõimsus	$\frac{P}{m}$	$\frac{W}{kg}$
Neeldumise massierenergia (neeldumiskoost)	$D = \frac{E}{m}$	$\frac{J}{kg}$
Neeldumise masserivõimsus (neeldumiskoost võimsus)	$P = \frac{D_n}{t}$	$\frac{W}{kg}$

Sellest hoolimata nimetatakse vahel spektraaltihedusi kokkuleppeliselt monokromaatseteks suurusteks, näiteks pideva spektriga kiirgusvoo spektraaltihedust nimetatakse monokromaatseks kiirgusvooks.

9.6. Fotomeetrised ühikud. SI visuaalsete fotomeetriseliste mõõtühikute moodustamisel on baasiks meeter, sekund, kandela ja steradiaan. CGS fotomeetriseliseks põhiühikuks valitakse lumen. Tähtsamate fotomeetriseliste suuruste mõõtühikud on esitatud tabelis 9.6.1.

Valgustugevus kirjeldab punktvalgusallika kiirgust ühes vali-

Fotomeetrilised ühikud

Füüsikaline suurus	SI		CGS-luumen (uus)		Mõõtühiku arvvaartus SI-s	
	Valem või suuruse tähis	Mõõtühik		Mõõtühik		
		Lühend	Nimetus	Nimetus		Lühend
Valgustugevus	I	cd	kandela	kandela	1	
Valgushulk	$K = It$	cd · s	kandela- sekund	kandela- sekund	1	
Valgusvoog	$\Phi = I\Omega$	lm	luumen	luumen	1	
Valgustustugevus	$E = \frac{\Phi}{S}$	lx	luks	folt	10^4	
Valgustushulk ehk eks- positsioon	$H = Et$	lx · s	luks-sekund	folt-sekund	10^4	
Valgus	$R = \frac{\Phi}{S}$	$\frac{\text{lm}}{\text{m}^2}$	luumen ruutmeetri kohta (radiuks)	radiott	10^4	
Heledus	$B = \frac{dI}{dS_1}$	nt	nitt	stilb	10^4	

tud suunas. *Valgusvoo* defineerimisel valgustugevuse kaudu eeldatakse, et valgusallika valgustugevus on kõigis ruuminurka Ω kuuluvates suundades ühesugune.

Valgusallikat, mille valgustugevus on kõigis suundades ühesugune, nimetatakse *isotroopseks*. Isotroopse valgusallika kogukiirgusvoog on $\Phi_{\Sigma} = I \cdot 4\pi$ sr. Mitteisotroopse valgusallika kogukiirgust iseloomustab *kogukiirgusvoog* Φ_{Σ} või *keskmise sfääriline valgustugevus*.

$$\bar{I} = \frac{\Phi_{\Sigma}}{4\pi \text{ sr}}$$

Valgsus R näitab pinnaühikult kiirguvat koguvalgusvoogu, *heledus* B aga pinna projektsiooni ühiku valgustugevust. Defineerivas valemis tähendab dS_{\perp} pinnaelemendi projektsiooni $dS_{\perp} = dS \cos \varphi$, kus φ on nurk pinnaelemendi normaali ja vaatesuuna vahel.

Heledus võib sõltuda vaatesuunast nagu valgustugevuski. Kiirgajat, mille heledus on igas suunas ühesugune, nimetatakse *koosinuskiirgajaks*.

Sfäärilise kiirgaja kogukiirgusvoog on $\Phi = S \cdot R = 4\pi r^2 R$, kus r on sfääri raadius ja R pinna valgsus. Sfääri võib kaugelt vaadata punktvalgusallikana, mille valgustugevus on $I = \Phi / (4\pi \text{ sr}) = r^2 R / (1 \text{ sr})$. Kui sfääri pind on koosinuskiirgaja, siis näib see ühtlase kettana, mille heledus $B = I / S_{\perp} = I / \pi r^2 = R / (\pi \text{ sr})$. Siit tuleb praktikas oluline järeldus: *kui koosinuskiirgaja valgsus on 1 lm/m^2 , siis tema heledus on $(1/\pi) \text{ nt}$* .

Teguri $1/\pi$ vältimiseks võeti omal ajal hajusalt peegeldava pinna heleduse kirjeldamiseks kasutusele erilised mõõtühikud:

$$1 \text{ apostilb} = \frac{1}{\pi} \text{ nitti}$$

$$1 \text{ lambert} = 10^4 \text{ apostilbi.}$$

Kaasajal on nende ühikute tarvitamisest loobutud.

Valgustugevuse mõõtühik kandela võeti kasutusele 1948. a. Varem tuletati kõik fotomeetrilised ühikud *rahvusvahelise küünla* baasil ja nad olid praegustest ühikutest parajasti 0,5% suuremad. Mõõtühikute nimetused aga langesid kokku praeguste mõõtühikute nimetustega. Seetõttu peab vanema kirjanduse kasutamisel pidama silmas suhteid:

- 1 vana küünal = 1,005 kandelat,
 - 1 vana luumen = 1,005 luumenit,
 - 1 vana luks = 1,005 luksit,
 - 1 vana nitt = 1,005 nitti,
 - 1 vana stilb = 1,005 stilbit
- jne.

Standardne suhteline nähtavusfunktsioon

λ : nm	v (λ)	λ : nm	v (λ)	λ : nm	v (λ)
420	0,004	520	0,710	620	0,381
440	0,023	540	0,954	640	0,175
460	0,050	560	0,995	660	0,061
480	0,139	580	0,870	680	0,017
500	0,323	600	0,631	700	0,004

Fotomeetrilisi suurusi saab avaldada energieetiliste suuruste kaudu. Näiteks heledus B on seotud energieetilise heleduse spektraaltihedusega $b_e(\lambda)$ järgmiselt:

$$B = K \int_0^{\infty} b_e(\lambda) v(\lambda) d\lambda.$$

Suhteline nähtavusfunktsioon $v(\lambda)$ (vt. tabel 9.6.2) on standardiseeritud [GOST 11 093-64]. Kiirguse valgusekvivalendi K väärtus on 683 lm/W 683 luumenit on 555 nm lainepikkusega kiirguse ühele vatile vastav valgusvoog.

9.7. Radioloogilised mõõtühikud. Röntgenikiirguse ja kuni 0,5 pJ (≈ 3 MeV) kvandi energiaga gammakiirguse ionisatsioonivõimet kirjeldab *ekspositsiooni* ehk *ekspositsioonidoosi võimsus*. SI ekspositsioonivõimsuse mõõtühik *amper kilogrammi kohta* (A/kg) on niisuguse homogeense kiirguse ekspositsioonivõimsus, mis tekitab 1 kg kuiva õhku sisaldavas ideaalses ionisatsioonikambris küllastusvoolu tugevusega 1 A.

Ekspositsioon ehk *ekspositsioonidoos* on konstantse kiirguse ekspositsioonivõimsuse ja mõjumisaja korrutis. SI süsteemi ekspositsiooniühik on C/kg.

Üks *röntgen* (lühend R) on ekspositsioon, mis tekitab $1,293 \cdot 10^{-6}$ kg kuivas õhus (niipalju õhku sisaldab 1 cm³ temperatuuril 0°C ja rõhul 101 325 Pa) nii positiivseid kui ka negatiivseid ioone laenguga 1 CGSE_q.

$$1 \text{ R} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg}$$

$$1 \text{ R/h} = 7,17 \cdot 10^{-8} \text{ A/kg.}$$

Kiirguse energieetilist toimet kirjeldava *neeldumiskoosi* ja selle võimsuse mõõtühikud on esitatud tabelis 9.5. Praktikas on levinud mõõtühik *raad* (rad):

$$1 \text{ rad} = 10^{-2} \text{ J/kg.}$$

Elektromagnetilise kiirguse neeldumisdoos D on võrdeline ekspositsiooniga X :

$$D = f X.$$

Võrdeegur f sõltub ainest ja kiirguse spektrist. Spektraalvahemikus 0,2 . 3,0 MeV on teguri f väärtus õhu jaoks 0,88 rad/R ja bioloogilise koe jaoks 0,9 . 1,0 rad/R.

Ioniseeriva kiirguse bioloogilist toimet iseloomustab *bioloogiline doos*. *Bioloogilise ühikdoosi 1 rem* tekitab 1 rad röntgenkiirgust, mille kvantide lineaarne energiakadu bioloogilises koes on 3 GeV/m. tingimusel, et doosi võimsus on 1/6 rad/s. Bioloogilise doosi ja neeldumisdoosi suhe oleneb kiirguse liigist ja spektrist, vähesel määral ka doosi võimsusest.

Radioaktiivse preparaadi *aktiivsuseks* nimetatakse tuumade lagunemise keskmist sagedust preparaadis. SI süsteemis on aktiivsuse mõõtühikuks 1/s. Seni on rohkem tarvitatud mõõtühikut *kürii* (lühend Ci):

$$1 \text{ Ci} = 3,700 \cdot 10^{10} \text{ 1/s.}$$

Arv $3,7 \cdot 10^{10}$ on valitud nii, et 1 g puhta raadiumi aktiivsus oleks ligikaudu 1 Ci.

γ -kiirgajaid iseloomustatakse tavaliselt *γ -ekvivalendiga*, mille mõõtühikuks on *raadiumi milligramm-ekvivalent* (mg-ekv Ra). *Raadiumi milligramm-ekvivalent* on niisuguse preparaadi γ -ekvivalent, mille γ -kiirgus tekitab sama ekspositsioonivõimsuse kui riikliku raadiumietaloni 1 mg raadiumi γ -kiirgus 0,5 mm paksuse plaatinafiltril kasutamisel.

γ -ekvivalendi M järgi on lihtne arvutada punktpreparaadi γ -kiirguse ekspositsioonivõimsust kaugusel r :

$$X : \frac{\text{R}}{\text{h}} = 0,84 \frac{M : \text{g-ekv Ra}}{(r : \text{m})^2}.$$

10. ELEKTRIMÕÕTÜHIKUD

10.1. Amper, volt ja oom. SI elektrimõõtühikute tuletamisel kasutatakse mehaanika kolme põhiühikut ja neljanda põhiühikuna amprit.

Amper on niisugune muutumatu elektrivoolu tugevus, mis läbi des kaht lõpmata pikka paralleelset teineteisest ühe meetri kaugusel vaakumis asetsevat kaduvvääkese läbimõõduga sirgjuhet, tekitab nende juhtmete vahel jõu $2 \cdot 10^{-7}$ njuutonit meetri kohta.

Volt on pinge juhi otste vahel siis, kui juhis ainult välise energia arvel ühe ampri tugevuse muutumatu voolu tekitamiseks kulub üks vatt võimsust.

Oom on niisugune Ohmi seadusele alluva juhi takistus, mille otstele ühe voldise pinge rakendamisel tekib juhis ühe ampri tugevune vool.

Volt ja oom arvatakse tuletatud ühikute hulka. Amprit võib lugeda soovikohaselt kas vooluga juhtmete vahelise jõu valemi abil mehaanikaühikutest tuletatud ühikuks või iseseisvaks põhiühikuks. Elektriõpetuse suhtelise iseseisvuse tõttu eelistati SI koostamisel teist varianti. Vooluga juhtmete vahelise jõu valemisse jääb seetõttu konstant, mille mõõtühik avaldub ampri ja mehaanikaühikute kombinatsioonina.

Kui mõõtühikud amper, volt ja oom 1881. a. esmakordselt kasutusele võeti, defineeriti nad samuti kui tänapäeval. Varsti aga selgus, et tollaegsed vahendid ei võimaldanud elektrilisi põhisuurusid otse definitsioonidekohaselt küllalt täpselt mõõta. Seepärast võeti 1893. a. tarvitusele kaks uut põhiühikut: *rahvusvaheline oom*, mille etaloniks oli kindla pikkuse ja massiga elavhõbedasammas, ning *rahvusvaheline amper*, mis defineeriti nii, et hõbeda elektrokeemiline ekvivalent saaks kindla väärtuse. Täiustunud tehnika võimaldab mõõta rahvusvaheliste elektrimõõtühikute ja kaasaegsele definitsioonile vastavate absoluutseteks nimetatud elektrimõõtühikute erinevust. Ümberarvutuste tarvis on ametlikult kehtestatud suhted:

$$\begin{aligned} 1 \Omega_{\text{int}} &= 1,00050 \Omega, \\ 1 A_{\text{int}} &= 0,00085 A. \end{aligned}$$

Rahvusvaheline volt defineeriti Ohmi seaduse abil rahvusvahelise oomi ja rahvusvahelise ampri kaudu. Võimsust, mida kulutab vool tugevusega $1 A_{\text{int}}$ pinge korral $1 V_{\text{int}}$, nimetatakse *rahvusvaheliseks vatiks*.

$$\begin{aligned} 1 V_{\text{int}} &= 0,00035 V, \\ 1 W_{\text{int}} &= 1,00020 W. \end{aligned}$$

Absoluutsete mõõtmismeetodite täpsuse suurenemise tõttu loobuti 1948. a. rahvusvahelistest elektrimõõtühikutest ja sellest ajast peale kasutatakse jälle käesoleva punkti algul defineeritud absoluutseid mõõtühikuid.

10.2. Elektrimõõtühikute süsteemi koostamisest. Mehaanikas ja soojusõpetuses sai mõõtühikuid sobivalt valides muuta peaaegu kõigis võrrandites võrdetegur võrdseks arvuga üks. Elektriõpetuses see ei õnnestu. Olenevalt mõõtühikute valikust jäävad kord ühtedes, kord teistes võrrandites võrdetegurid alles. Pole lihtne otsustada, milliseid võrrandeid on kasulikum võrdeteguritest vabastada. Sellest tingitult on elektrimõõtmiste jaoks koostatud hoopis rohkem erinevaid mõõtühikute süsteeme kui mehaanika-, soojus- või kiirgusmõõtmiste jaoks.

Elektrimõõtühikute süsteemi koostamisel on kõige olulisem laengu ja voolutugevuse mõõtühikuid mehaanikamõõtühikutega

siduva võrrandi valik. Elektrostaatiliste süsteemide koostamisel lähtutakse Coulombi seadusest, magnetiliste süsteemide koostamisel aga vooluga juhtmete vahelise jõu valemist.

Elektriõpetuse võrrandites esineb sageli konstandina punkti täisümbruse ja steradiaani suhe 4π . Inglise füüsik ja elektrotehnik Heaviside pani tähele, et see tegur esineb enamasti koos elektrilise läbitavuse või magnetilise läbitavusega. Ta tegi ettepaneku muuta läbitavuste ϵ_a ja μ_a mõõtühikuid niiviisi, et ϵ_a uus arvvärtus võrduks $\frac{\epsilon_a}{4\pi}$ endise arvvärtusega ja μ_a uus arvvärtus võrduks $4\pi\mu_a$ endise arvvärtusega. Kõigis võrrandites tuleb siis $\frac{\epsilon_a}{4\pi}$

asemel kirjutada lihtsalt ϵ_a ja $4\pi\mu_a$ asemel μ_a .

Erandina jäetakse muutmata valemid $D = \epsilon_a E$ ja $B = \mu_a H$, selleks muudetakse koos läbitavuste mõõtühikutega 4π korda ka elektrilise induktsiooni D ja magnetvälja tugevuse H mõõtühikuid. Elektrivälja tugevuse E ning magnetilise induktsiooni B mõõtühikud jäävad seejuures endisteks.

Heaviside ettepaneku kohaselt koostatud elektrimõõtühikute süsteeme nimetatakse ratsionaliseeritud süsteemideks, vanal viisil koostatud süsteeme aga ratsionaliseerimata süsteemideks.

Mõned võrrandid on ratsionaliseeritud süsteemides ebamugavamad kui ratsionaliseerimata süsteemides. Näiteks Coulombi seaduse võrrand:

$$F = \frac{q_1 q_2}{\epsilon_a r^2} \quad (\text{ratsionaliseerimata})$$

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_a r^2} \quad (\text{ratsionaliseeritud})$$

10.3. SI ja MKSA elektrimõõtühikud. SI voolutugevuse mõõtühik amper on defineeritud magnetvälja seaduste abil. Voolutugevuse mõõtühiku magnetiline defineerimine on samaväärne vaakumi magnetilise läbitavuse μ_0 jaoks väärtuse valimisega. Definitsiooni võiks koostada nii, et μ_0 arvvärtus oleks üks. Ampri defineerimisel on selle võimaluse kasutamisest mõõtühiku praktilise sobivuse kasuks teadlikult loobutud. Konstandi μ_0 arvvärtuseks on võetud $4\pi \cdot 10^{-7}$. Nimetatud arv on defineeriv ja seetõttu põhimõtteliselt täpne.

Vaakumi elektriline läbitavus ϵ_0 on SI-s eksperimentaalne konstant. Füüsikakursuses näidatakse, et ϵ_0 mõõtmine on samaväärne valguse kiiruse mõõtmisega vaakumis.

SI on elektriõpetuse osas ratsionaliseeritud süsteem. Seepärast ongi μ_0 arvvärtusesse võetud tegur 4π .

SI elektrimõõtühikud on esitatud tabelis 10.3.

Füüsikaline suurus	Valem või suu- ruse tähtis	Märkus valemite kohta	Mõõtühik		
			Nimetus	Lühend	Avaldis põhi- ühikute kaudu
1	2	3	4	5	6
Voolutugevus	I	—	amper	A	A
Pinge	$U = \frac{P}{I}$	P — alalisvooluvõimsus	volt	V	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Potentsiaal	$R = \frac{U}{I}$	Ohmi seadusele alluv juhe	oom		$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Elektromotoorne jõud	$G = \frac{U}{I}$	„			
Takistus	$S = \frac{dI}{dU}$	neliklemm (näiteks triood)	siemens	S	$m^2 \cdot kg^{-1} \cdot s^9 \cdot A^2$
Juhtivus	$j = \frac{I}{S}$	vool I läbib pinda S , mis on risti homogeense alalisvooluväljaga	amper ruut- meetri kohta	$\frac{A}{m^2}$	$m^{-2} \cdot A$
Voltampertunnusjoone tõus	$E = \frac{U}{I}$	U -pinge homogeense elektriväljaga ühesuunalise lõigu l otste vahel	volt meetri kohta	$\frac{V}{m}$	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Voolutihedus	$Q = \frac{E}{I}$	kõrvaliste energiaallikate alalis- vooluväli	oom-meeter	$\Omega \cdot m$	$m^3 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Elektrivälja tugevus	$\gamma = \frac{j}{E}$	„	siemens meetri kohta	$\frac{S}{m}$	$m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
Eritakistus	$\Phi = UI$	U -magnetvoogu üks kord haaravas juhtmes indutseeritud emf. juhul, kui magnetvoogu kahandatakse aja t vältel ühtlaselt kuni nullini	veeber	Wb	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Erijuhtivus					
Magnetvoogu					

Tabel 10.3 (järg)

1	2	3	4	5	6
Induktiivsus	$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{UI}{\Delta I}$	Φ — magnetvoog läbi voolukontuuri I — magnetvälia põhjustava voolu tugevus kontuuris U — endainduktsiooni emj. voolutugevuse ühtlasele muutmisel ΔI võrra aja t jooksul	henri	H	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Magnetiline induktsioon	$B = \frac{\Phi}{S}$	magnetvoog Φ läbib pinda S , mis on risti homogeense magnetväljaga	tesla	T	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Magnetomotoorne jõud	$V = I$	magnetomotoorne jõud suletud magnetkontuuris, mis haarab voolu I	amper	A	A
Magnetvälja tugevus	$H = \frac{V}{l}$	V — magnetomotoorne jõud lõigul l piki lõiku ühtlases jõugusuunalises statsionaarses magnetväljas	amper meetri kohta	$\frac{A}{m}$	$m^{-1} A$
Absoluutne magnetiline läbitavus	$\mu_0 = \frac{B}{H}$	—	henri meetri kohta		$m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Magnettakistus	$R_m = \frac{V}{\Phi}$	V — magnetomotoorne jõud kinnises magnetahelas Φ — magnetvoog samas ahelas	amper veebri kohta	$\frac{A}{Wb}$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^2 \cdot A^2$
Magnetaeng ehk magnetpooluse tugevus	$q_m = \frac{A}{F}$	A — magnetvälja töö magnetlaengu nihutamisel mööda lõiku, millel magnetomotoorjõud on F	veeber	Wb	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Näivvõimsus	$P_n = UI$	U ja I vahelduvvoolu pinget ja voolutugevuse efektiivväärtused	volt-amper	V · A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Reaktiivvõimsus	$P_r = UI \sin \varphi$	φ — faasnurk pinget ja voolu vahel	varr	var	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$

Tabel 10.3 (järg)

1	2	3	4	5	6
Magnetmoment	$m = IS$	S — tasase voolukontuuri pindala	amper-ruut-meeter	$A \cdot m^2$	$m^2 \cdot A$
Laeng	$q = \frac{A}{U} = It$	A — elektrivälja töölaengu nihutamisel mööda löiku, mille otstevaheline pinge on U ; I — voolutugevus, mille korral laeng q läbib juhi ristlõiget aja t jooksul	amper-ruut-meeter tesla kohta	$\left. \begin{array}{l} A \cdot m^2 \\ \frac{J}{T} \\ C \end{array} \right\}$	$s \cdot A$
Laengu pindtihedus	$\sigma = \frac{q}{S}$	laeng q ühtlaselt jaotatud pindalal S	kulon	C	$m^{-2} \cdot s \cdot A$
Laengutihedus	$\rho = \frac{q}{V}$	laeng q ühtlaselt jaotatud ruumalas V	kulon ruut-meetri kohta	$\frac{C}{m^3}$	$m^{-3} \cdot s \cdot A$
Mahtuvus	$C = \frac{\Delta q}{\Delta U}$	ΔU — juhi potentsiaali muutus laengu muutmisel Δq võrra tingimisel, et teiste juhtide potentsiaalid ei muutu	kulon ruut-meetri kohta	$\frac{C}{m^2}$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Elektrilise induktsooni voog	$N = q$	voog läbi laengut q sisalduva sulatud pinna	farad	F	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Elektriline induktsioon	$D = \frac{N}{S}$	induktsiooni voog N läbib pinda S , vältides ristlõige homogeense elektriväljaga	kulon	C	$s \cdot A$
Absolute elektriline läbitavus	$\epsilon_a = \frac{D}{E}$	E — elektrivälja tugevus	kulon ruut-meetri kohta	$\frac{C}{m^2}$	$m^{-2} \cdot s \cdot A$
Vektorpotentsiaal	A	$\vec{A} = \vec{B}$	farad meetri kohta	$\frac{F}{m}$	$m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
		rot $A = B$	tesla-meeter	$T \cdot m$	$m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$

MKSA põhiühikud on meeter, kilogramm, sekund ja amper. Kõik ratsionaliseeritud MKSA mõõtühikud langevad kokku SI mõõtühikutega, nii et ratsionaliseeritud MKSA süsteem osutub lihtsalt üheks SI osaks.

MKSA ratsionaliseerimata varianti on kasutatud suhteliselt harva. Enamus ratsionaliseerimata MKSA mõõtühikutest langeb kokku SI mõõtühikutega. Tähtsamad erandid on järgmised (vasakul ratsionaliseerimata MKSA mõõtühikud, paremal SI mõõtühikud):

$$1 \text{ MKSA}_{\mu_0} = 4\pi \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

$$1 \text{ MKSA}_{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

$$1 \text{ MKSA}_{q_m} = 4\pi \text{ Wb}$$

$$1 \text{ MKSA}_H = \frac{1}{4\pi} \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$1 \text{ MKSA}_F = \frac{1}{4\pi} \text{ A}$$

$$1 \text{ MKSA}_{R_m} = \frac{1}{4\pi} \frac{\text{A}}{\text{Wb}}$$

$$1 \text{ MKSA}_D = \frac{1}{4\pi} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$1 \text{ MKSA}_N = \frac{1}{4\pi} \text{ C}$$

Sel ajal, kui kasutati veel MKSA mõlemat varianti, eristati neid variante kirjepildis täрни abil. Ratsionaliseeritud süsteemi korral kirjutati süsteemi tähis ja läbitavustest olenevate füüsikaliste suuruste tähised tärniga: MKSA*, ϵ_0^* , H^* jne. Ratsionaliseerimata süsteemi kasutades kirjutati samad tähised ilma tärnita.

10.4. CGSE, CGSM ja CGS elektrimõõtühikud. CGSE laenguühik *franklin* avaldatakse CGS mehaanikaühikute kaudu Coulombi seaduse võrrandi $F = q_1 q_2 / r^2$ (vaakum) abil. CGSE on CGS elektrostaatiline variant. Kõik CGSE mõõtühikud tuletatakse laenguühiku avaldist kasutades võrdetegurita defineerivate võrrandite abil.

CGSE on koostatud nii, et elektrivälja tugevus ja elektriline induksioon vaakumis oleksid võrdsed ja vaakumi elektriline läbitavus ϵ_0 võrduks ühega. Magnetvälja tugevus ja magnetiline induksioon vaakumis osutuvad aga erinevateks ja vaakumi magnetilise läbitavuse μ_0 väärtuseks tuleb $1/c^2$, kus c on elektrodünaamiline konstant. Teatavasti on c võrdne valguse kiirusega vaakumis.

CGSM voolutugevuse ühik *bioo* avaldatakse CGS mehaanikaühikute kaudu vooluga juhtmete vahelise jõu võrrandi $F/l = 2I_1 I_2 / d$ (vaakum) abil. Arv 2 on siia võrrandisse võetud selleks, et teised

CGSE, CGSM ja CGS elektrimõõtühikute arväärtused SI järgi

Füüsikaline suurus	CGSE	CGSM	CGS
1	2	3	4
Voolutugevus I	$\frac{10}{c} \approx 3,33 \cdot 10^{-10}$	10	E
Pinge U	$10^{-8}c \approx 300$	10	E
Takistus R	$10^{-9}c^2 \approx 9 \cdot 10^{11}$	10^{-9}	E
Juhtivus G	$\frac{10^9}{c^2} \approx 1,11 \cdot 10^{-12}$	10^{-9}	E
Voolutihedus j	$\frac{10^5}{c} \approx 3,33 \cdot 10^{-6}$	10^5	E
Elektrivälja tugevus E	$10^{-6}c \approx 3 \cdot 10^4$	10^{-6}	E
Eritakistus ρ	$10^{-11}c^2 \approx 9 \cdot 10^9$	10^{-11}	E
Erijuhtivus γ	$\frac{10^{11}}{c^2} \approx 1,11 \cdot 10^{-10}$	10^{11}	E
Magnetvoog Φ	$10^{-8}c \approx 300$	10^{-8}	M
Induktiivsus L	$10^{-9}c^2 \approx 9 \cdot 10^{11}$	10^{-9}	M
Magnetiline induksioon B	$10^{-4}c \approx 3 \cdot 10^6$	10^{-4}	M
Magnetomotoorne jõud V	$\frac{10}{4\pi c} \approx 2,65 \cdot 10^{-11}$	$\frac{10}{4\pi} \approx 0,796$	M
Magnetvälja tugevus H	$\frac{10^3}{4\pi c} \approx 2,65 \cdot 10^{-9}$	$\frac{10^3}{4\pi} \approx 79,6$	M
Magnetiline läbitavus μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}c^2 \approx 1,13 \cdot 10^{15}$	$4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,26 \cdot 10^{-6}$	M
Magnettakistus R_m	$\frac{10^9}{4\pi c^2} \approx 8,85 \cdot 10^{-14}$	$\frac{10^9}{4\pi} \approx 7,96 \cdot 10^7$	M
Magnetlaeng q_m	$4\pi \cdot 10^{-8}c \approx 3,77 \cdot 10^3$	$4\pi \cdot 10^{-8} \approx 1,26 \cdot 10^{-7}$	M
Magnetmoment m	$\frac{10^{-3}}{c} \approx 3,33 \cdot 10^{-14}$	10^{-3}	M
Laeng q	$\frac{10}{c} \approx 3,33 \cdot 10^{-10}$	10	E
Laengu pindtihedus σ	$\frac{10^5}{c} \approx 3,33 \cdot 10^{-6}$	10^5	E
Laengutihedus ρ	$\frac{10^7}{c} \approx 3,33 \cdot 10^{-4}$	10^7	E
Mahtuvus C	$\frac{10^9}{c^2} \approx 1,11 \cdot 10^{-12}$	10^9	E

Tabel 10.4.1 (järg)

1	2	3	4
Elektrilise induktsiooni voog N	$\frac{10}{4\pi c} \approx 2,65 \cdot 10^{-11}$	$\frac{10}{4\pi} \approx 0,796$	E
Elektriline induktsioon D	$\frac{10^5}{4\pi c} \approx 2,65 \cdot 10^{-7}$	$\frac{10^5}{4\pi} \approx 7,96 \cdot 10^3$	E
Elektriline läbitavus ϵ_a	$\frac{10^{11}}{4\pi c^2} \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$	$\frac{10^{11}}{4\pi} \approx 7,96 \cdot 10^9$	E
Vektorpotentsiaal A	$10^{-2}c \approx 3 \cdot 10^4$	10^{-2}	M

võrrandid oleksid lihtsamad. CGSM on CGS magnetiline variant. Kõik CGSM mõõtühikud tuletatakse voolutugevuse ühiku avaldist kasutades võrdetegurita defineerivate võrrandite abil.

Süsteemis CGSM on magnetvälja tugevus ja magnetiline induktsioon vaakumis teineteisega võrdsed, elektrivälja tugevus ja elektriline induktsioon aga erinevad. Vaakumi läbitavuste väärtused on $\mu_0 = 1$ ja $\epsilon_0 = 1/c^2$.

CGS variantidest kõige kasutatavam on *sümmeetriline* CGS ehk *Gaussi süsteem* (tähis lihtsalt CGS). Sümmeetriline CGS on süsteemide CGSE ja CGSM kompromissühendus. Elektrostaatika ja alalisvoolu osas langevad CGS mõõtühikud kokku CGSE mõõtühikutega, magnetismi osas aga CGSM mõõtühikutega. Laenguühikuks on franklin, voolutugevuse ühikuks franklin sekundis. Kõigi elektrostaatiliste suuruste mõõtühikud tuletatakse võrdetegurita võrrandite abil. Magnetiliste suuruste mõõtühikute defineerivad võrrandid aga sisaldavad võrdetegureid. Need on valitud parajasti nii, et mõõtühikud langeksid kokku CGSM mõõtühikutega.

Sümmeetrilises süsteemis võrduvad vaakumi elektriline läbitavus ja magnetiline läbitavus mõlemad ühega.

Kõiki kolme kirjeldatud mõõtühikute süsteemi kasutatakse ainult ratsionaliseerimata kujul.

CGSE, CGSM ja CGS mõõtühikute suhted SI mõõtühikutega on näidatud tabelis 10.4.1. Täht c tähistab siin elektrodünaamilise konstandi arvvaärtust CGS järgi:

$$c = 2,99793 \cdot 10^{10}$$

CGS mõõtühikud langevad kokku kas CGSE või CGSM mõõtühikutega. Tähed E või M tabeli 10.4.1 viimases veerus näitavad, kumma süsteemi mõõtühik tuleb parajasti võtta.

Iseseisva nimega CGSE, CGSM ja CGS mõõtühikute nimed on esitatud tabelis 10.4.2. Ülejäänud mõõtühikud kannavad nendest nimedest tuletatud liitnimetusi. Kui pidada meeles järgmised suhted:

$$10^8 \text{ Mx} = 1 \text{ Wb}$$

$$10^4 \text{ Gs} = 1 \text{ T}$$

$$4\pi \text{ Gb} = 10 \text{ A}$$

CGSE, CGSM ja CGS lihtnimetusega elektrimõõtühikud

Füüsikaline suurus	Süsteem	Mõõtühik	
		nimetus	lüh.
Voolutugevus	CGSM	bioo	Bi
Magnetvoog	CGSM, CGS	maksvell	Mx
Magnetiline induktsoon	CGSM, CGS	gauss	Gs
Magnetomotoorne jõud	CGSM, CGS	gilbert	Gb
Magnetvälja tugevus	CGSM, CGS	örsted	Oe
Induktiivsus	CGSM, CGS	sentimeeter	cm
Laeng	CGSE, CGS	franklin	Fr
Mahtuvus	CGSE, CGS	sentimeeter	cm

$$4\pi \text{ Oe} = 1 \text{ kA/m}$$

$$1 \text{ cm}_L = 1 \text{ nH}$$

$$1 \text{ Bi} = 10 \text{ A}$$

$$3 \text{ Fr/s} \approx 1 \text{ nA}$$

$$1 \text{ erg/Fr} \approx 300 \text{ V}$$

$$9 \text{ cm}_C \approx 10 \text{ pF,}$$

siis on üsna hõlpus mõõtühikuid teisendada ka tabeli 9.4.1 abita.

10.5. Elektriõpetuse võrrandid. Erinevates mõõtühikute süsteemides sisaldavad elektriõpetuse võrrandid erinevaid võrdetegureid. Tähtsamad elektriõpetuse võrrandid SI ja Gaussi süsteemis on esitatud tabelis 10.5. Erinevalt tabelist 10.4 tähistab c siin elektrodünaamilist konstanti, mille väärtus on $2,99793 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$.

Ratsionaliseerimata MKSA võrrandeid on hõlpus tuletada ratsionaliseeritud MKSA või SI võrranditest. Selleks on tarvis vaadeldavas SI võrrandis teha asendused:

$$\mu_a \rightarrow 4\pi\mu_a$$

$$\epsilon_a \rightarrow \frac{\epsilon_a}{4\pi}$$

$$H \rightarrow \frac{H}{4\pi}$$

$$V \rightarrow \frac{V}{4\pi}$$

$$R_m \rightarrow \frac{R_m}{4\pi}$$

$$D \rightarrow \frac{D}{4\pi}$$

$$N \rightarrow \frac{N}{4\pi}$$

(10.5.1)

Elektriõpetuse võrrandid

SI	CGS	Selgitused
1	2	3
$U = RI$	$U = RI$	Ohmi seadus
$R = \frac{l}{S} \rho$	$R = \frac{l}{S} \rho$	l — juhtme pikkus, S — ristlõike pindala, ρ — aine eritakistus
$V = \int \vec{H} d\vec{l} = \sum_s I$	$V = \int \vec{H} d\vec{l} = 4\pi \sum_s I$	Magnetomotoorne jõud pinda S , mida läbivad voolud I , piiravas kinnises magnetkontuuris
$\vec{dH} = \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$	$\vec{dH} = \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{cr^3}$	Vooluelemendi $Id\vec{l}$ magnetvälja tugevus; vektor \vec{r} algab $d\vec{l}$ asukohast ja lõpeb $d\vec{H}$ asukohas
$H = \frac{I}{2\pi r}$	$H = \frac{2I}{cr}$	Sirgvoolu magnetvälja tugevus (juhtmest kaugusel r)
$H = \frac{I}{2r}$	$H = \frac{2\pi I}{cr}$	Magnetvälja tugevus ringvoolu tsentris; r — raadius
$H = \frac{nI}{l}$	$H = \frac{4\pi nI}{cl}$	Magnetvälja tugevus lõpmatu pikas solenoidis; n — keerdude arv pikkusel l
$\vec{B} = \mu_a \vec{H}$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$	Magnetiline induktsioon; $\mu_a = \mu \mu_0$
$\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$	$\vec{F} = \frac{I d\vec{l} \times \vec{B}}{c}$	Vooluelemendile $I d\vec{l}$ mõjuv jõud
$\frac{F}{l} = \mu_a \frac{I_1 I_2}{2\pi d}$	$\frac{F}{l} = \frac{2I_1 I_2}{c^2 d}$	Paralleelsete sirgjuhtmete vaheline jõud pikkuse l kohta, d — juhtmetevaheline kaugus
$\epsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$	$\epsilon = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$	Indutseeritud emf.; Φ — juhtmekontuuri läbiv magnetvoog

1	2	3
$\Phi = LT$	$\Phi = \frac{LI}{c}$	Magnetvoog läbi pooli, mille induktiivsus on L
$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$	$\varepsilon = -\frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt}$	Endainduktsiooni emj.
$L = \mu_a \frac{\pi r^2 n^2}{l}$	$L = \mu \frac{4\pi^2 r^2 n^2}{l}$	Pika ($l \gg r$) solenoidi induktiivsus; l — solenoidi pikkus, r — raadius, n — keerdude arv
$V = R_m \Phi$	$V = R_m \Phi$	Magnetahela Ohmi seadus; V — magnetomotoorne jõud, R_m — magnetiline takistus, Φ — magnetvoog
$R_m = \frac{l}{\mu_a S}$	$R_m = \frac{l}{\mu S}$	Magnetahela magnetiline takistus; l — pikkus, S — ristlõike pindala
$B = \frac{nI}{SR_m}$	$B = \frac{4\pi nI}{cSR_m}$	Magnetiline induktsioon n keeruga haaratud suletud magnetahelas, mille ristlõike pindala on S ja magnetiline kogutakistus R_m
$L = \frac{n^2}{R_m}$	$L = \frac{4\pi n^2}{R_m}$	Suletud magnetahelaga pooli induktiivsus; n — keerdude arv, R_m — magnetiline kogutakistus
$A = qU$	$A = qU$	Laengu q nihutamise töö; U — pinge lõigu otste vahel
$\vec{F} = q\vec{E}$	$\vec{F} = q\vec{E}$	Seisvale laengule elektriväljas mõjuv jõud
$\vec{E} = -\text{grad } U$	$\vec{E} = -\text{grad } U$	Elektrostaatilise välja tugevuse ja potentsiaali seos
$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$	$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$	Elektriline induktsioon; $\varepsilon_a = \varepsilon \varepsilon_0$
$N = \oiint \vec{D} d\vec{S} = \sum_V q$	$N = \oiint \vec{D} d\vec{S} = 4\pi \sum_V q$	Elektrilise induktsiooni voog läbi kinnise pinna, mis sisaldab laenguid q
$E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_a r^2}$	$E = \frac{q}{\varepsilon r^2}$	Punktlangu elektrivälja tugevus kaugusel r
$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_a}$	$E = \frac{4\pi \sigma}{\varepsilon}$	Väljatugevus juhtiva pinna kohal, mille pindlaengutihedus on σ
$U = \frac{q}{4\pi \varepsilon_a r}$	$U = \frac{q}{\varepsilon r}$	Punktlangu elektrivälja potentsiaal kaugusel r
$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_a r^2}$	$F = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}$	Coulombi seadus

Tabel 10.5 (järg)

1	2	3
$C = 4\pi\epsilon_0 r$	$C = \epsilon r$	Kera mahtuvus
$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$	$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$	Tasakondensaatori mahtuvus; S — pindala, d — katetevaheline kaugus
$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$	$C = \frac{\epsilon l}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}}$	Pika ($l \gg r_2 - r_1$) silinderkondensaatori mahtuvus
$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$	$f = \frac{c}{2\pi\sqrt{LC}}$	Kadudeta vönkeringi omavönkesagedus
$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$c \text{ rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Maxwelli võrrandid
$\text{div } \vec{D} = \rho$	$\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho$	
$\text{div } \vec{B} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$	
$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$c \text{ rot } \vec{H} = 4\pi \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	
$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	Pidevuse võrrand
$\vec{E} = \nabla \varphi$	$\vec{E} = \nabla \varphi$	Ohmi seadus kõrvaliste energiaallikate puudumise korral; φ — erijuhivus
$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{r} \times \vec{j}}{r^3} dV$	$\vec{H} = \frac{1}{C} \int \frac{\vec{r} \times \vec{j}}{r^3} dV$	Staatiline magnetväli homogeenses keskkonnas; \vec{r} on suunatud H punktist dV punkti
$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r} dV$	$U = \frac{1}{\epsilon} \int \frac{\rho}{r} dV$	Staatiline elektriväli homogeenses keskkonnas
$\vec{j} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$	$\vec{j} = \rho \vec{E} + \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{c}$	Elektrodünaamilise jõu ruumtihedus
$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$	$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right)$	Punktlaengule mõjuv jõud (Lorentzi jõud)
$\omega = \frac{\vec{ED} + \vec{BH}}{2}$	$\omega = \frac{\vec{ED} + \vec{BH}}{8\pi}$	Elektromagnetilise välja energia tihedus
$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$	$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$	Energiavoo tihedus (Poyntingi vektor)
$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$	$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$	Elektromagnetiliste lainete faasikiirus

Kui võrrand teisenduse (10.5.1) kohaselt asendamisele kuuluvaid suurusi üldse ei sisalda, siis on võrrandi kuju ratsionaliseerimata süsteemis sama mis ratsionaliseeritud süsteemis.

Ratsionaliseerimata MKSA võrranditest on kerge tuletada CGSE või CGSM võrrandeid. CGSE võrrandi saamiseks on tarvis teha veel järgmised asendused:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_a &\rightarrow \varepsilon \\ \mu_a &\rightarrow \frac{\mu}{c^2} \\ \varepsilon_0 &\rightarrow 1 \\ \mu_0 &\rightarrow \frac{1}{c^2} \end{aligned} \right\} \quad (10.5.2)$$

CGSM võrrandi saamiseks aga järgmised asendused:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_a &\rightarrow \frac{\varepsilon}{c^2} \\ \mu_a &\rightarrow \mu \\ \varepsilon_0 &\rightarrow \frac{1}{c^2} \\ \mu_0 &\rightarrow 1 \end{aligned} \right\} \quad (10.5.3)$$

Leiame näiteks sirgvoolu magnetvälja tugevuse võrrandi ratsionaliseerimata MKSA süsteemis:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \xrightarrow{\text{SI MKSA (ratsionaliseerimata) (10.5.1)}} \frac{H}{4\pi} = \frac{I}{2\pi r}$$

Pärast taandamist saame tulemuseks $H=2I/r$. Viimane võrrand kehtib ka CGSE ja CGSM süsteemis, sest ta ei sisalda ühtki teisenduste (10.5.2) ja (10.5.3) kohaselt asendamisele kuuluvat suurust.

Lorentzi jõu valem $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$ ei sisalda ühtki teisenduste (10.5.1), (10.5.2) ja (10.5.3) kohaselt asendamisele kuuluvat suurust ning tema kuju on süsteemides MKSA, CGSE ja CGSM sama kui süsteemis SI.

Magnetvälja tugevust ja induksiooni siduv võrrand teisendub järgmiselt:

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H} \xrightarrow{(10.5.1)} \vec{B} = 4\pi\mu_a \frac{\vec{H}}{4\pi}$$

ja tema kuju osutub ratsionaliseerimata MKSA-s samaks kui SI-s. Kui soovime üle minna, tuleb läbi teha teisendus (10.5.2):

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H} \xrightarrow{(10.5.2)} \vec{B} = \frac{\mu}{c^2} \vec{H}$$

Süsteemi CGSM üleminekuks kasutatakse teisendust (10.5.3):

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H} \xrightarrow{(10.5.2)} \vec{B} = \mu \vec{H}.$$

Viimase näitena tuletame Coulombi seaduse valemi süsteemis CGSM:

SI \longrightarrow MKSA (ratsionaliseerimata) \longrightarrow CGSM

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_a r^2} \xrightarrow{(10.5.1)} F = \frac{q_1 q_2}{\epsilon_a r^2} \xrightarrow{(10.5.3)} F = c^2 \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}$$

11. VANAD MÕÖTÜHIKUD

11.1. Inglise ja USA mõõtühikutest. Inglise mõõtühikud on mitusada aastat vanad. USA võttis üle enamiku inglise mõõtühikuid. Rahvuslike etalonide juhuslike erinevuste tõttu erinesid USA ja inglise samanimelised mõõtühikud varem teineteisest kuni sajandik protsenti. Mõõtühikute eristamiseks lisati neile tarviduse korral sulgudes tähed UK (United Kingdom) või US (United States). Märksa erinevad inglise mõõtühikutest ainult USA ruumala-mõõtühikud.

1956. a. kinnitas Rahvusvaheline Standardiseerimisorganisatsioon ISO soovitus R 31, kus muu hulgas on esitatud ka üleminekutegurid USA ja inglise mõõtühikute ning meetermöödustiku mõõtühikute vahel. Neid üleminekutegureid käsitatakse kui mõõtühikute definitsioone meetermöödustiku baasil. Soovitus R 31 loetakse USA ja inglise samanimelised mõõtühikud (välja arvatud ruumala-mõõtühikud) võrdseteks.

Nii Inglismaal kui ka USA-s on vanad mõõtühikud veel üldtarvitavad. Ainult teaduses on meetermöödustik suutnud vana moodsüsteemi kõrvale tõrjuda.

Allpool on USA ja inglise mõõtühikute ning meetermöödustiku mõõtühikute suhted esitatud ISO soovitus R 31 järgi, kuid niipalju ümardatult, et esitatud arvud pole vastuolus USA ja inglise mõõtühikute varasemate väärtustega (viimane esitatud kümnenndkoht võib kõikuda mõne ühiku võrra).

11.2. USA ja inglise pikkus- ja pindalaühikud. Pikkuse põhiühikuks on *jalg* (*foot*, lühend *ft*):

$$1 \text{ ft} = 0,3048 \text{ m.}$$

ISO soovitusel R 31 loetakse suhe 0,3048 täpseks. Muud tuntumad pikkusühikud on järgmised:

$$\begin{aligned} \text{jard (yard): } & 1 \text{ yd} = 3 \text{ ft} = 0,9144 \text{ m} \\ \text{rod (= perch = pole): } & 1 \text{ rd} = 5,5 \text{ yd} = 5,029 \text{ m} \\ \text{furlong: } & 1 \text{ fur} = 40 \text{ rd} = 201,2 \text{ m} \\ \text{miil (mile): } & 1 \text{ mile} = 8 \text{ fur} = 1,609 \text{ km} \end{aligned}$$

$$\text{toll (inch): } 1 \text{ in} = \frac{1}{12} \text{ ft} = 25,40 \text{ mm}$$

$$\text{liin (line): } 1 \text{ line} = \frac{1}{12} \text{ in} = 2,117 \text{ mm.}$$

Pindala mõõtmisel kasutatakse ruutühikuid (nimetused moodustatakse eessõna *square* abil):

$$\begin{aligned} 1 \text{ in}^2 &= 645,2 \text{ mm}^2 \\ 1 \text{ ft}^2 &= 0,09290 \text{ m}^2 \\ 1 \text{ yd}^2 &= 0,8361 \text{ m}^2 \\ 1 \text{ rd}^2 &= 25,29 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Maamõõtmisel kasutatakse erilisi pindalaühikuid:

$$\begin{aligned} \text{rood: } & 1 \text{ rood} = 40 \text{ rd}^2 = 0,1012 \text{ ha} = 1012 \text{ m}^2 \\ \text{aaker (acre): } & 1 \text{ A} = 160 \text{ rd}^2 = 0,4047 \text{ ha} = 4047 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

11.3. USA ja inglise massiühikud. Massi mõõtmisel on kõige kasutatavam kaubanduslik süsteem *avoirdupois*. Väärismetallide ja vääriskivide kaalumisel tarvitatakse teist süsteemi, mille nimeks on *troy*. Kolmas süsteem on kasutusel apteegiasjanduses.

Kõik kolm süsteemi on üksteisega seotud ühe ühise ühiku kaudu. Selleks on *graan* (*grain*, lühend *gr*):

$$1 \text{ gr} = 64,80 \text{ mg.}$$

Massi põhiühikuks on *avoirdupois nael* (*pound*, lühend *lb*, tarviduse korral lisatakse ka süsteemi märk *av*):

$$1 \text{ lb} = 7000 \text{ gr} = 0,4536 \text{ kg.}$$

Nii USA-s kui ka Inglismaal on ühtviisi tarvitusel *avoirdupois* mõõtühikud:

$$\text{unts (ounce): } 1 \text{ oz} = \frac{1}{16} \text{ lb} = 28,35 \text{ g}$$

$$\text{drahm (dram): } 1 \text{ dr} = \frac{1}{16} \text{ oz} = 1,772 \text{ g.}$$

USA-s on levinud «lühikesed» massiühikud.

$$\begin{aligned} \text{Lühike tsentner (short hundredweight; cental):} \\ 1 \text{ sh cwt} = 100 \text{ lb} = 45,36 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Lühike tonn (*short ton*):

1 sh tn = 20 sh cwt = 907,2 kg.

Inglismaal tarvitatakse «pikki» massiühikuid, mis on tekkinud 28 naelaga võrduva *quarter*'i (12,70 kg) baasil:

pikk tsentner: 1 long cwt = 112 lb = 50,80 kg

pikk tonn: 1 long tn = 20 long cwt = 1016 kg.

Tähtsamad *troy* mõõtühikud on järgmised:

troy pound 1 lb t = 5760 gr = 0,3732 kg

troy ounce: 1 oz t = $\frac{1}{12}$ lb t = 31,10 g

pennyweight: 1 dwt = $\frac{1}{20}$ oz t = 1,555 g.

USA apteeginael ja apteegiunts on võrdsed samanimeliste *troy* mõõtühikutega.

Inglismaal kasutati apteegimõõtude tuletamisel alusena inglise meditsinaalnaela, mis võrdub *avoirdupois* naelaga.

11.4. USA ruumalaühikud. Ruumala mõõtmisel võib tarvitada pikkusühikutest tuletatud kuupühikuid:

1 in³ = 16,39 cm³

1 ft³ = 28,32 dm³

Rohkem tarvitatakse aga erilisi ruumalaühikuid. Anuma ruumala ja vedelikuhulga mõõtmisel kasutatakse ühikuid:

gallon: 1 gal = 3785 cm³

quart: 1 qt = $\frac{1}{4}$ gal = 946,3 cm³

pint: 1 pt = $\frac{1}{8}$ gal = 473,2 cm³

gill: 1 gi = $\frac{1}{32}$ gal = 118,3 cm³.

Apteegimõõtude hulka kuuluvad veel järgmised vedeliku ruumala mõõtühikud:

fluid ounce: 1 fl. oz = $\frac{1}{16}$ pt = 29,57 cm³

fluid dram: 1 fl. dr = $\frac{1}{8}$ fl. oz = 3,697 cm³

minim: 1 min = $\frac{1}{60}$ fl. dr = 61,61 mm³

Nafta mõõtmiseks on spetsiaalne ühik:

1 barrel = 42 gal = 159,0 dm³.

Muude vedelike mõõtmisel on barreli väärtus 31,5 gal = 119,2 dm³.

Kuivainete mõõtmisel kasutatakse samade nimetustega, aga hoopis teiste väärtustega ruumalaühikuid:

dry pint: 1 dry pt = 550,6 cm³

dry quart: 1 dry qt = 2 dry pt = 1,101 dm³

peck: 1 pk = 16 dry pt = 8,810 dm³
bushel: 1 bu = 64 dry pt = 35,24 dm³
dry barrel: 1 dry bbl = 210 dry pt = 115,6 dm³.

11.5. Inglise ruumalaühikud. Inglise imperiaalgalloon võrdub 10 lb puhta vee ruumalaga temperatuuril $\approx 15^\circ \text{C}$. Tähtsamate mõõtühikute väärtused on järgmised:

imperial gallon: 1 gal = 4,546 dm³

quart: 1 qt = $\frac{1}{4}$ gal = 1137 cm³

pint: 1 pt = $\frac{1}{8}$ gal = 568,3 cm³

gill: 1 gi = $\frac{1}{32}$ gal = 142,1 cm³

peck: 1 pk = 2 gal = 9,092 dm³

bushel: 1 bu = 8 gal = 36,37 dm³

hogshead: 1 hhd = 63 gal = 286,4 dm³

11.6. USA ja inglise mehaanika- ja soojusmõõtühikud. USA ja inglise mehaanikaühikud avaldatakse jala, naela ja sekundi kaudu just samuti nagu SI ühikud meetri, kilogrammi ja sekundi kaudu.

Jõudu, mis annab ühele naelale kiirenduse 1 ft/s², nimetatakse *poundaliks* (*poundal*, lühend pdl) Ühele naelale mõjuvat normaalraskusjõudu nimetatakse *jõunaelaks* (*pound weight*, lühend lbf). Nende mõõtühikute väärtused on järgmised:

1 pdl = 0,1383 N

1 lbf = 4,448 N.

Inglise hobujõud

$$1 \text{ hp} = 550 \frac{\text{lbf ft}}{\text{s}} = 745,7 \text{ W}$$

Temperatuurivahe mõõtühikuks on Fahrenheiti kraad:

$$1 \text{ deg F} = \frac{5}{9} \text{ K}.$$

Jää sulamispunkt on Fahrenheiti skaalas 32°, temperatuuri arv-
väärtused Celsiuse skaala järgi t_C ja Fahrenheiti skaala järgi t_F
on seotud järgmiselt:

$$t_C = \frac{5}{9} (t_F - 32),$$

$$t_F = 32 + \frac{9}{5} t_C.$$

Fahrenheiti skaala tähis on °F

Fahrenheiti skaalaga on kooskõlastatud absoluutne termodünaamiline *Rankine'i skaala* (skaala tähis °R). Rankine'i ja Kelvini skaalad on võrdelised, neid seob suhe

$$9^{\circ} R = 5 K.$$

Briti soojusühik (British thermal unit, lühend Btu) on defineeritud nii, et vee erisoojus tuleks 1 Btu/(lb deg F):

$$1 \text{ Btu} = 1055 \text{ J}.$$

11.7. Meremõõtühikud. Meremiil on maa meridiaani ühe kaareminuti pikkus. ISO soovitus R 31 on meremiil defineeritud seosega

$$1 \text{ meremiil} = 1852 \text{ m (täpselt)}.$$

1 kaabeltau on 0,1 meremiili. 1 faatom on 6 jalga, see on 1,829 m

1 registertonn on ruumala 100 kuupjalga, see on 2,832 m³.

1 sõlm on kiirus 1 meremiil tunnis, see on 0,5144 m/s.

11.8. Trükitehnilised mõõtühikud. Trükitehnilise pikkusühikute süsteemi põhiühikuks on punkt (lühend p) USA-s ja Inglismaal

$$1 \text{ p} = \frac{1}{72} \text{ in} = 0,3528 \text{ mm},$$

meil aga

$$1 \text{ p} = 0,376 \text{ mm}.$$

12 punkti on cic ehk pica. 48 punkti on kvadraat (lühend kv).

11.9. Vanad vene mõõtühikud. Vene pikkusühikud liin, jalg ja toll on võrdsed samanimeliste inglise pikkusühikutega. Tunti veel järgmisi pikkusühikuid:

$$1 \text{ arssin} = 28 \text{ tolli} = 0,7112 \text{ m}$$

$$1 \text{ verssok} = \frac{1}{16} \text{ arssinat} = 44,45 \text{ mm}$$

$$1 \text{ süld} = 3 \text{ arssinat} = 2,134 \text{ m}$$

$$1 \text{ verst} = 500 \text{ sülda} = 1,067 \text{ km}.$$

Maamõõtmisel oli tarvitata vaim pindalaühik tessatin (tiin):

$$1 \text{ tessatin} = 2400 \text{ ruutsülda} = 1,093 \text{ ha}.$$

Vedelike ruumala mõõtmisel tarvitati järgmisi ühikuid:

$$1 \text{ toop} = 1,230 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ pang} = 10 \text{ toopi} = 12,30 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ tünder} = 40 \text{ pange} = 492,0 \text{ dm}^3.$$

Toop võrdub definitsiooni kohaselt kolme vene naela vee ruumalaga.

Kuivainete mõõtmisel tarvitati teisi ruumalaühikuid:

$$1 \text{ karnits} = 3,27 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ setverik} = 8 \text{ karnitsat} = 26,4 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ setvert} = 8 \text{ setverikku} = 210 \text{ dm}^3$$

Massi põhiühik nael võrdub 0,4095 kg.

Teisi massiühikuid:

$$1 \text{ dool} = \frac{1}{96} \text{ solotnikku} = 44,43 \text{ mg}$$

1 solotnik = $\frac{1}{96}$ naela = 4,266 g

1 lood = 3 solotnikku = 12,80 g

1 puud = 40 naela = 16,38 kg

1 perkovits = 10 puuda = 163,8 kg.

11.10. Apteegimõõtühikud. Vene ja Eesti apteegiasjanduses oli möödunud sajandil ja käesoleva sajandi algul põhiühikuks meditsinaalnael:

1 meditsinaalnael (*libra*) = 350,8 g.

Väiksemad massiühikud olid järgmised:

1 unts (*uncia*) = $\frac{1}{12}$ med. naela = 29,23 g

1 drahm (*drachma*) = $\frac{1}{8}$ untsi = 3,652 g

1 skruupel (*scrupulum*) = $\frac{1}{3}$ drahmi = 1,218 g

1 graan (*granum*) = $\frac{1}{20}$ skruuplit = 60,90 mg.

Neid mõõtühikuid võis kasutada koos kordsust tähistavate eesliidete-ga *sesqui* ($\frac{3}{2}$), *semi* ehk *semissis* ($\frac{1}{2}$), *triens* ($\frac{1}{3}$), *quadrans* ($\frac{1}{4}$), *sextans* ($\frac{1}{6}$), *octans* ($\frac{1}{8}$), *decima* ($\frac{1}{10}$).

11.11. Eestis kasutatud vanad mõõtühikud. Keskajal kasutati Eestis väikese levikupiirkonnaga (ühe linna ümbrus) kohalikke mõõtühikuid. 18. sajandil tõrjusid Põhja-Eestis Tallinna ja Lõuna-Eestis (endisel Liivimaal) Riia mõõtühikud teised kõrvale. 1845. a. kehtestati Eestis ametlikult vene mõõtühikud. Vene mõõtühikute kõrval jäi tarvitusele hulk endisi mõõtühikuid, mis enamasti seati täisarvulistesse suhetesse vene mõõtühikutega. Vene mõõtühikud kehtisid Eestis 1929. aastani, seega kauem kui Venemaal.

Vanadel mõõtühikutel polnud seaduslikku alust, eri aegadel ja eri kohtades omistati neile erinevaid väärtusi ja isegi mõõtühikute suhted olid ebastabiilsed. Järgnevalt esitatud ligikaudsed andmed vastavad enam-vähem möödunud sajandi lõpul kasutatud mõõtu-dele.

Vanadest pikkusühikutest on tähtsaim küünar. Põhja-Eestis kujunes küünra väärtuseks 12 verssokit, see on 53 cm. Lõuna-Eestis oli küünar 2 jalga ehk 61 cm pikk. Niisama pikk on maamõõdu-küünar. Preisi tollküünra pikkus on 67 cm.

Sõna «kortel» tähendab veerandit. Pikkusühik kortel on veerand küünart.

Vene sülda nimetati raudsüllaks. Vana süld ehk lihasüld on 6 jalga (183 cm) pikk.

Penikoorma väärtuseks loeti 7 versta, see on 7,5 km.

Põllupinna loomulikuks mõõtühikuks on maatükk, mille täis külvamiseks kulub mahuühik vilja. Vanu pinnatükke nimetataksegi mahuühikute järgi. Vana tallinna tündrimaa oli veidi üle 0,6 ha. Uus tallinna tündrimaa loetakse võrdseks poole tiinuga, see on 0,55 ha.

Tallinna tündrimaa jaguneb kolmeks tallinna vakamaaks à 0,18 ha. Riia vakamaa võrdsustati kolmandiku tiinuga, see on 0,36 ha. Riia vakamaa jagatakse 25-ks kapamaaks à 145 m². Riia tündrimaa on 35 kapamaad ehk 0,51 ha.

Vedelike ruumala tuntumad mõõtühikud on toop, ankur ja aam. Tallinna toobi maht on umbes 1,1 l, riia toobi maht 1,3 l. Tallinna ankur ja riia ankur sisaldasid erineva arvu toope ja olid peaaegu võrdsed: ca 38 l. Nende kõrval tunti ametlikku vene ankrut (3 pange=37 l), preisi ankrut (34 l), hamburgi ankrut (36 l) ja rootsi ankrut (39 l) Tallinna ja riia aam võrdsid ligikaudu 150 liitriga.

Ruumalaühik kortel on veerand toopi.

Kuivainete mõõtmiseks kasutati teisi ruumalaühikuid. Tuntuim nendest on vakk. Tallinna vakk võrdsustati viiendiku setvertiga, see on 42 l. Tallinna vakk jagati kolmeks külimituks à 14 l, külimit kaheks matiks à 7 l. 3 tallinna vakka moodustab tallinna tündri (126 l). Tallinna säilitus ükskõik millist vilja on 24 tündrit (3 m³), tallinna säilitus soola aga 18 tündrit (2,3 m³).

Riia vakk võrdsustati kolmandiku setvertiga, see on 70 l. Riia säilitus rukist on 45 vakka (3,15 m³), riia säilitus nisu või otra — 48 vakka (3,35 m³), riia säilitus linnaseid, kaeru või herneid aga 60 vakka (4,2 m³).

Massiühik leisik võrdub poole puudaga (8 kg). Saad heinu on 10 leisikat (80 kg), koorem heinu — kolm saadu (240 kg)

Enne vene mõõtühikute kasutuselevõttu tunti massiühikuna marka. Rahvusvahelist tähtsust omas pikka aega stabiilsena püsinud kölni mark (234 g). Selle mõõtühiku nimetus on säilinud omal ajal levinud kaalu, margapuu nimes.

12. KONSTANDID

12.1. Matemaatilised konstandid.

$$\pi = 3,14159$$

$$\frac{1}{\pi} = 0,318310$$

$$2\pi = 6,28319$$

$$\frac{1}{2\pi} = 0,159155$$

$$4\pi = 12,5664$$

$$\frac{1}{4\pi} = 0,079577$$

$$\frac{4\pi}{3} = 4,18879$$

$$\frac{3}{4\pi} = 0,238733$$

$$\frac{\pi}{2} = 1,57080$$

$$\frac{2}{\pi} = 0,636620$$

$$\frac{\pi}{3} = 1,04720$$

$$\frac{3}{\pi} = 0,954930$$

$$\frac{\pi}{4} = 0,78540$$

$$\frac{4}{\pi} = 1,273240$$

$$\frac{\pi}{6} = 0,52360$$

$$\frac{6}{\pi} = 1,909859$$

$$\pi^2 = 9,86960$$

$$\frac{1}{\pi^2} = 0,101321$$

$$\sqrt{\pi} = 1,77245$$

$$\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0,564190$$

$$\sqrt[3]{\pi} = 1,46459$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = 0,682784$$

$$\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} = 1,61199$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = 0,620350$$

$$1^\circ = 0,017453 \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = 57,2958^\circ$$

$$1' = 0,000291 \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = 3437,75'$$

$$1'' = 0,000005 \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = 206265''$$

$$e = 2,71828$$

$$e^{-1} = 0,367879$$

$$e^2 = 7,38906$$

$$e^{-2} = 0,135335$$

$$e^{\frac{1}{2}} = 1,64872$$

$$e^{-\frac{1}{2}} = 0,606531$$

$$e^{\frac{\pi}{2}} = 4,81048$$

$$e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,207880$$

$$e^\pi = 23,1407$$

$$e^{-\pi} = 0,043214$$

$$e^{2\pi} = 535,492$$

$$e^{-2\pi} = 0,001867$$

$$\ln 10 = 2,30259$$

$$\lg e = 0,434294$$

12.2. Füüsikaliste konstantide täpsus. Füüsikaliste konstantide mõõtmisele ja arvutamisele pühendatud uurimistöodes kirjeldatakse kasutatud mõõtmis- ja arvutusmeetodeid ning esitatakse

mõõtmistulemus koos mõõtmistäpsuse hinnanguga kujul $x = x_0 \pm \Delta x$. Niisugusest uurimistöö publikatsioonist saab enamasti aru, mida tähendab pärast märki \pm kirjutatud arv Δx . See arv võib tähendada mõõtmistulemuste standardhälvet, mingit standardhälbe kordset või piirviga mingi usaldatavuse korral. Sekundaarsetes publikatsioonides (õpikud, käsiraamatud jne.) esitatakse konstantide väärtusi samuti kujul $x = x_0 \pm \Delta x$, kuid unustatakse tavaliselt nimetamata, mida tähendab Δx . Enamasti tähendab Δx lihtsalt standardhälvet. Kui süstemaatilised vead puuduvad ja juhuslike vigade jaotus on normaalne, on standardhälve ligikaudu võrdne piirveaga 68% usaldatavuse korral. Mõnes raamatus, näiteks füüsika entsüklopeedilises sõnastikus tähendab Δx aga kolmekordset standardhälvet, millele vastab nimetatud eeldustel 99,7% usaldatavus.

Füüsikaliste konstantide mõõtmise ajalugu näitab, et mõõtmisvea süstemaatiline komponent võib olla ootamatult suur ja konstanti väärtuse tegelik viga ületab kolmekordset standardhälvet märksa suurema kui 0,3% tõenäosusega.

Käesolevas paragrahvis tähistab Δx kõikjal kolmekordset standardhälvet. Veahinnanguta esitatud arvud on ümardatud nii viisi, et Δx ei ületa viimase tähendusega kümnendkoha ühikut.

12.3. Füüsikalised konstandid. Tähtsamate füüsikaliste konstantide väärtused on esitatud tabelites 12.3.1 ja 12.3.2. Esitatud andmed on pärit Gruusia NSV TA Teadete 53-nda köite (1969. a.) teises numbris avaldatud L. Tšetšelašvili artiklist, füüsika entsüklopeedilisest sõnastikust ja raamatust [11].

Tabel 12.3.1

Väljakonstandid ja elementaarosakeste konstandid

Nimetus	Väärtus
Gravitatsioonikonstant	$G = (6,670 \pm 0,015) \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$
Vaakumi magnetiline läbitavus	$\mu_0 = 1,25664 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}}$
Vaakumi elektriline läbitavus	$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$
Valguse kiirus vaakumis	$c = 2,99793 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Energia ja massi suhe	$c^2 = 8,98755 \cdot 10^{16} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$
	$c^2 = 931,3 \pm 0,3 \frac{\text{MeV}}{\text{u}}$

Tabel 12.3.1 (järg)

1	2
Plancki konstant	$h = (6,6262 \pm 0,0004) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ $\hbar = (1,0546 \pm 0,0001) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ $\hbar = (6,582 \pm 0,001) \cdot 10^{-16} \text{ eV s}$
Elementaarlaeng	$e = (1,6022 \pm 0,0001) \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Peenstruktuurikonstant	$\alpha = 0,00729736$
	$\frac{1}{\alpha} = 137,036$
Elektroni mass	$m_e = (9,1096 \pm 0,0003) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ $m_e = (5,4860 \pm 0,0001) \cdot 10^{-4} \text{ u}$ $m_e = 0,51100 \pm 0,00005 \text{ MeV}$
Elektroni laengu ja massi suhe	$\frac{e}{m_e} = (1,75880 \pm 0,00002) \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$
Prootoni mass	$m_p = (1,67252 \pm 0,00008) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $m_p = 1,00728 \text{ u}$
Neutroni mass	$m_n = (1,67482 \pm 0,00008) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $m_n = 1,00867 \text{ u}$
Elektroni Comptoni lainepikkus	$\lambda_c = (2,4263 \pm 0,0002) \cdot 10^{-12} \text{ m}$
Bohri magneton	$\mu_B = (9,2732 \pm 0,0006) \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}$
Tuumamagneton	$\mu_N = (5,0505 \pm 0,0004) \cdot 10^{-27} \frac{\text{J}}{\text{T}}$
Elektroni magnetmoment	$\mu_e = (9,2837 \pm 0,0006) \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}$
Prootoni magnetmoment	$\mu_p = (1,4105 \pm 0,0002) \cdot 10^{-26} \frac{\text{J}}{\text{T}}$

Tabel 12.3.2

Aatomifüüsika ja molekulaarfüüsika konstandid

Nimetus	Väärtus
Rydbergi konstant	$R_\infty = 1,09737 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{m}}$ $R_H = 1,09678 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{m}}$
Bohri raadius	$a_0 = (5,2917 \pm 0,0001) \cdot 10^{-11} \text{ m}$
Boltzmanni konstant	$k = (1,3805 \pm 0,0002) \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$

Tabel 12.3.2 (järg)

1	2
Wieni konstant	$b = (2,8978 \pm 0,0004) \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{K}}$
Stefan-Boltzmanni konstant	$\sigma = (5,670 \pm 0,003) \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$
Avogadro arv	$N = (6,0230 \pm 0,0005) \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{kmol}}$
Faraday arv	$F = (9,6490 \pm 0,0003) \cdot 10^7 \frac{\text{C}}{\text{kmol}}$
Ideaalse gaasi kilomooli ruumala 0° C, 101325 Pa	$V = 22,414 \pm 0,002 \text{ m}^3$
Universaalne gaasikonstant	$R_o = 8314 \pm 1 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}$
Protoni güromagnetiline suhe vesiniku aatomis (diamagnetilise paranduseta)	$\gamma = (2,67519 \pm 0,00002) \cdot 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{s} \cdot \text{T}}$

Tabel 12.4

Raskuskiirendus merepinna tasemel

Geogr. laius	$g: \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	Geogr. laius	$g: \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
0°	9,780	50°	9,811
5°	9,781	55°	9,815
10°	9,782	60°	9,819
15°	9,784	65°	9,823
20°	9,786	70°	9,826
25°	9,790	75°	9,829
30°	9,793	80°	9,831
35°	9,797	85°	9,832
40°	9,802	90°	9,832
45°	9,806		

12.4. Raskuskiirendus. *Normaalraskuskiirendus* on 9,80665 m/s². Tartu ja Tallinna füüsikalaboratooriumides on raskuskiirendus $g = 9,818 \text{ m/s}^2$ ja ühekilogrammisele massile mõjub raskusjõud 1,0012 kgf. Tabelis 12.4 on näidatud raskuskiirendus merepinna tasemel mitmesugustel geograafilistel laiustel. Raskuskiirenduse kõrgusel h (merepinnast) võib arvutada valemi

$$a = g_{h=0} - \left(3,1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) h : \text{m}$$

abil. Maapinna kohalikud iseärasused muudavad raskuskiirendust tavaliselt kuni 10^{-3} m/s^2 võrra.

Puhta vee omadused normaalarõhul

Temperatuur °C	Tihedus / $10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ /	Viskoossus / 10^{-6} Pa s /	Erisoojus / $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ /	Küllastatud auru rõhk / 10^2 Pa /	Küllastatud auru tihedus / $10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ /
0	99 984	1 797	4 217	6,11	4,8
5	99 997	1 518	4 202	8,72	6,8
10	99 970	1 307	4 192	12,27	9,4
15	99 910	1 140	4 186	17,04	12,8
16	99 894	1 110	4 185	18,17	13,6
17	99 878	1 082	4 184	19,37	14,5
18	99 860	1 055	4 183	20,63	15,4
19	99 841	1 029	4 182	21,96	16,3
20	99 821	1 004	4 182	23,37	17,3
21	99 799	980	4 181	24,86	18,3
22	99 777	957	4 181	26,43	19,4
23	99 754	936	4 180	28,09	20,6
24	99 730	915	4 180	29,83	21,8
25	99 705	895	4 179	31,67	23,0
30	99 565	803	4 178	42,43	30,3
35	99 403	721	4 178	56,24	39,6
40	99 224	655	4 178	73,76	51,2
45	99 025	600	4 179	95,84	65,4
50	98 807	551	4 180	123,4	83,0
55	98 573	508	4 182	157,4	104
60	98 324	470	4 184	199,2	130
65	98 059	437	4 187	250,0	161
70	97 781	407	4 189	311,6	198
75	97 489	381	4 193	385,4	242
80	97 183	357	4 196	473,4	293
85	96 865	336	4 200	578,1	354
90	96 534	317	4 205	701,0	424
95	96 192	300	4 210	845,1	505
100	95 838	284	4 216	1013	598

12.5. Vee ja õhu omadused. Puhta vee metrooloogilise tähtsusega füüsikalisi omadusi kirjeldab tabel 12.5.1.

Vee tahkumistemperatuur, mis normaalarõhul on $273,15 \text{ K} = 0^\circ \text{C}$, sõltub rõhust vähe, umbes $0,01$ kraadi atmosfääri kohta. *Vee keemistemperatuuri* vahemikus $960 \text{ mb} < p < 1030 \text{ mb}$ võib arvutada valemi

$$t = (71,63 + 0,029 p \text{ mb})^\circ \text{C}$$

või valemi

$$t = (100,00 + 0,037(p : \text{mmHg} - 760))^\circ \text{C}$$

abil.

Tabel 12.5.2

Kuiva õhu tihedus ja tiheduse niiskustegur $/g \cdot m^{-3}/$ olenevalt temperatuurist $/^{\circ}C/$ ja õhurõhust $/mb/$

t \ P	970	980	990	1000	1010	1020	1030	k
12	1186	1198	1210	1222	1235	1247	1259	6
14	1177	1190	1202	1214	1226	1238	1250	7
16	1169	1181	1193	1205	1217	1230	1242	8
18	1161	1173	1185	1197	1209	1221	1233	9
20	1153	1165	1177	1189	1201	1213	1225	10
22	1145	1157	1169	1181	1193	1204	1216	12
24	1138	1149	1161	1173	1185	1196	1208	13
26	1130	1142	1153	1165	1177	1188	1200	15
28	1123	1134	1146	1157	1169	1181	1192	17
30	1115	1127	1138	1150	1161	1173	1184	18

Õhu tiheduse arvutamiseks võib kasutada valemit

$$\rho = \rho_k - k\eta,$$

kus ρ_k on kuiva õhu tihedus, η — suhteline niiskus ($0 < \eta < 1$) ja k tiheduse niiskustegur. Kuiva õhu tiheduse ja tiheduse niiskusteguri väärtused erinevatel rõhkudel ja temperatuuridel on esitatud tabelis 12.5.2.

Normaaltingimustel on kuiva õhu murdumisnäitaja $n = 1,00029$ ja suhteline staatiline elektriline läbitavus $\epsilon = 1,000059$.

III peatükk. MÕÕTEVAHENDID

13. SISSEJUHATAVAD MÄRKUSED

13.1. Mõõtevahendi täpsuse praktilise hinnangu aluseks on tavaliselt mõõtevahendi ametlikke valmistamisnõudeid ja taatlemisnõudeid sisaldavad dokumendid.

Mõõtevahendite olulisemad valmistamisnõuded fikseeritakse *riiklikes standardites*. Vaid mõne erandliku mõõtevahendilliigi kohta pole standardit välja antud. Niisugusel juhul on valmistamisnõuded fikseeritud ametlikes tehnilistes tingimustes.

Mõõtevahendite taatlemiseeskirju vormistati varem *NSVL MN juures asuva Standardite, Mõõtude ja Mõõteriistade Komitee ametlike taatlemisjuhenditena*. Osa nendest taatlemisjuhenditest kehtib ka praegu. Viimastel aastatel antakse taatlemisjuhendeid välja riiklike standarditena.

Mõõtevahendi täpsuse hindamiseks tarvilikke andmeid sisaldab kõigepealt valmistamisnõuete standard. Taatlemisstandardis või -juhendis kirjeldatakse peasjalikult taatlemise meetodeid. Mõnikord leidub seal olulisi täiendavaid andmeid mõõtevahendi täpsuse kohta. Näiteks võib taatlemisel parandite määramise teel suurendada mõõtevahendi täpsust. Mõni taatlemiseeskiri aga lubab alandada tarvitamisel kulunud mõõtevahendite täpsusele esitatavaid nõudeid.

Käesolevas raamatus esitatud andmed on pärit viimastest, enne 1. jaanuari 1970. a. väljaantud ning hiljemalt 1. jaanuaril 1971. a. jõustunud standarditest. Vanemate, kehtivuse kaotanud standardite ja eeskirjade kohaselt valmistatud või taadeldud riistade andmeid võib leida nende riistade kasutamisjuhendeist ning mõõtmisvahendite taatlemisega tegelevates laboratooriumides leiduvast erialakirjandusest.

13.2. Mõõtetehniline terminoloogia on eesti keeles alles kujunemisjärgus. Nii mõnelgi väga levinud mõõteriistal pole üldtunnustatud nimetust. Näiteks tuntud pikkusemõõteriista kolmest nimetusest — *supler*, *varbsirkel* ja *nihkkaliiber* — pole ükski suutnud teisi kõrvalc tõrjuda. Käesolevas raamatus kasutatakse sama riista neljandat nime — *nihik*. Ka mitme teise mõõtevahendi nimetamiseks

kasutatakse järgnevas uusi, seni vähe tuntud termineid. Kuivõrd need terminid end õigustavad, otsustab aeg.

Raamatu kasutamise hõlbustamiseks on registrisse võetud ka mõõtevahendite kõik tuntumad vanad nimetused.

13.3. Erielistest tähistest kasutatakse käesolevas peatükis ilma täiendavate selgitusteta järgmisi:

η — suhteline niiskus

kl. — täpsusklass

K — mõõtevahendi täpsusklassi näitav arv

Δx , E_x ja D_x — suuruse x mõõtmise tulemuse piirviga, suhteline piirviga ja taandpiirviga

$\Delta^\circ x$, E_x^0 , D_x^0 , $\Delta'x$, E'_x , D'_x — mõõtevahendi lubatud põhiviga, lubatud suhteline põhiviga, lubatud taandpõhiviga, lubatud lisaviga, lubatud suhteline lisaviga ja lubatud taandlisaviga suuruse x mõõtmise korral.

Kui tähiseid D_x , D_x^0 , D'_x või eesliidet «taand-» on kasutatud reservatsioonideta, siis on mõeldud alati vastava piirvea ja mõõtepiirkonna laiuse suhet.

[] — sulud viidete eraldamiseks. «Mõõteriist [GOST . . . — .]» tähendab ainult viidatud standardi nõue-tele vastavat mõõteriista. «Mõõteriist [Taatlemisjuhend . . . — .]» tähendab ainult NSVL MN juures asuva Standardite, Mõõtude ja Mõõteriistade Komitee vastava juhendi kohaselt taadeldud riista.

t — indeks t standardi numbri juures tähendab, et nimetatud standard sisaldab ainult taatlemiseeskirju.

/ / — kaldsulgudesse suletud mõõtühiku tähis näitab, et tabelis esitatud arvud on füüsikalise suuruse arv-
väärtused nimetatud mõõtühiku järgi.

< > — sulud normaalingimustele viitamiseks. Näiteks viide <15 . 25°C> tähendab, et normaalne temperatuurivahemik on 15°C kuni 25°C.

14. NURGAMÕÖTEVAHENDID JA NIVELLIIRID

14.1. Risthaarse nurgiku [GOST 3749-65] pikema haara ühegi punkti hälve lühemale haarale tõmmatud ristsirgest ei tohi ületada reglementeeritud suurust $\Delta^\circ x$. Nurgikud jaotatakse kolme täpsusklassi. Tabelis 14.1 on näidatud $\Delta^\circ x$: μm olenevalt täpsusklassist ja pikema haara pikkusest l . Varem valmistati ka kolmanda täpsusklassi nurgikuid [GOST 3749-47], nende lubatud viga on kaks korda suurem kui teise täpsusklassi nurgikutel.

14.2. Prismakujulise nurgamõõdu [GOST 2875-62] töönurga

Tabel 14.1

1:mm	40	60	100	160	250	400	630	1000	1600
0. kl.	2,5	2,5	3	3,5	4,5	6,0	8,0	—	—
1. kl.	5	5	6	7	9	12	17	24	—
2. kl.	—	13	15	18	22	30	42	60	90

Tabel 14.6

Siinuslaua tüüp	1. kl.	2. kl.
Alusplaadita	6"	10"
Ühe alusplaadiga	8"	12"
Kahe alusplaadiga	10"	15"

Tabel 14.8

Riista tüüp	ГС-1	ГС-2	ГС-5	ГС-10	ГС-30
Nooniuse jaotise väärtus	1"	2"	5"	10"	30"
Pikksilma lahutusvõime	2"	2,5"	3"	4"	4"
Laua kandevõime /kg/	7	7	7	5	5

Tabel 14.9

Tüüp	T 05	T 1	T 2	T 5	T 10	T 15	T 20	T 30
$\sigma_0(\alpha)$	1"	1,5"	3"	7"	10"	15"	20"	30"
$\Delta^\circ\alpha$	0,1"	0,1"	0,1"	6"	12"	15"	30"	60"
n_0	60	40	25	25	25	25	20	18

Tabel 14.10

Nivelliiri tüüp	H1	H2 HC2	H3 HC3	HC4	HT HTC	HJC
$\sigma: \frac{\text{mm}}{\text{km}}$	0,5	1,0	4,0	8,0	15	30

lubatud põhiviga on 0. kl. korral 3" (kuue- ja enamatahulisel prismal 5") 1. kl. korral 10" ja 2. kl. korral 30".

14.3. Geodeetilisele mallile [GOST 13494-68] jaotiskriipsude märkimisel on lubatud viga kuni 3' läbipaistmatu ja kuni 4' läbipaistva malli korral.

14.4. Nurgamõõturite [GOST 5378-66] lubatud põhiviga võrdub nooniuuse jaotise väärtusega (2' 5' või 15')

14.5. Optilise skaalaga nurgamõõturite [GOST 11197-65] lubatud põhiviga on 2'30" Silindriliste ja kooniliste pindade toetamiseks ettenähtud erilise aluse kasutamise korral on lubatud viga 5'.

14.6. Siinuslaudade [GOST 4046-61] lubatud põhivead 45° nurga mõõtmisel on näidatud tabelis 14.6.

14.7. Vesiloodide eksaminaatorite [GOST 13012-67] limbi üksikjaotiste väärtused võivad erineda nominaalväärtusest kuni 5%. Eksaminaatori mõõtekruvi surnud käik ei tohi 2" jaotiste korral ületada ühte jaotist, 5" 10" jaotiste korral poolt jaotist ja >10" jaotiste korral veerandit jaotist.

14.8. Goniomeetrite-spektrometrite [GOST 10021-62] andmed on esitatud tabelis 14.8. Kolme sõltumatu viseerimise korral saadud lugemite keskmise järgi leitud näidu lubatud põhiviga võrdub nooniuuse jaotise väärtusega.

14.9. Teodoliidiga [GOST 10529-63] mõõtmisel ei tohi juhuslikke vigu ignoreerida. Tabelis 14.9 on näidatud:

$\sigma_0(\alpha)$ — üksiklugemite maksimaalne lubatud standardhälve;

$\Delta^\circ\alpha$ — limbide lubatud põhiviga tingimusel, et T 05, T 1, T 2 näidud on leitud optiliste seadmete abil kahelt poolt võetud lugemite järgi ja T 5 T 30 näidud on leitud ühelt poolt võetud lugemite järgi;

n_0 — pikksilma maksimaalne suurendus.

Kahe lugemi järgi nurga mõõtmise tulemuste standardhälve on $\sqrt{2} \sigma_0(\alpha)$

Erivõtete abil võib teodoliitide T 5 T 30 korral limbi näidu leida väiksema piirveaga kui $\Delta^\circ\alpha$.

Teodoliidi loodide jaotise väärtus on olenevalt teodoliidi tüübist ja loodi asukohast 4" .. 60"

14.10. Nivelliiride [GOST 10528-69] täpsust kirjeldab tabel 14.10. σ tähistab siin nivelleerimise maksimaalset lubatud standard-

hälvet millimeetrites kilomeetri kohta ($1 \text{ mm/km} \approx 0,2''$). Kirjeldatud täpsus on garanteeritud nivelliiri kasutamisel juhendis toodud eeskirjade täitmise korral.

15. PIKKUSEMÕÕTEVAHENDID

15.1. Joonpaisumisteguri väärtused pikkusemõõtevahendite valmistamisel kasutatavate ainete jaoks on esitatud tabelis 15.1.

Tabel 15.1

Aine	$\alpha : K^{-1}$
Süsinikteras	$(1,05 \dots 1,25) \cdot 10^{-5}$
Invar (roostevaba teras 36% Ni)	$1,2 \cdot 10^{-6}$
Valgevask	$(1,8 \dots 2) \cdot 10^{-5}$
Klaas	$(8 \dots 9) \cdot 10^{-6}$
Sulatatud kvarts	$6 \cdot 10^{-7}$

15.2. Metallmõõtjoonlaudade [GOST 427-56] lubatud põhiviga on ≤ 300 mm mõõtjoonlaua korral 0,1 mm, 300–500 mm mõõtjoonlaua korral 0,1 mm ja 500–1000 mm mõõtjoonlaua korral 0,2 mm. Üksikute millimeeterjaotiste lubatud põhiviga on 0,05 mm, sentimeeterjaotiste lubatud põhiviga — 0,1 mm. Mõõtjoonlaua külgede hälve sirgjoonest ei tohi ületada 0,1 mm 100 mm kohta ega 0,3 mm terve mõõtjoonlaua kohta (≤ 500 mm mõõtjoonlaud) või 0,4 mm terve mõõtjoonlaua kohta (500–1000 mm mõõtjoonlaud).

15.3. 250-mm arvutuslükati [GOST 5161-57] millimeetriskaala lubatud põhiviga on 0,2 mm. Üksikute millimeeterjaotiste ja sentimeeterjaotiste lubatud põhivead on 0,05 ja 0,1 mm.

Lükatiga arvutamisel võrdub üksiktehte lubatud põhiviga poolega skaalakriipsu jämedusele vastavast väärtusest. See teeb 0,1 mm jämedusega kriipsudega 25 cm pikkuse lükati põhiskaaladega arvutamisel ühe tehte lubatud suhteliseks põhiveaks 0,05% (lugeda tuleks 4–5 kehtivat kohta). Niisugust täpsust praktiliselt realiseerida ei õnnestu: arvutaja subjektiivsed vead on lükati vigadest suuremad.

15.4. Kümnejätkuliste metallist liigendmõõtjoonlaudade [GOST 7253-54] lubatud põhiviga on 1 mm. Üksikute millimeeter-, senti-

Lati tüüp	PH1	PH2	PH3	PH4	PHT
Väikseim jaotise $\Delta^\circ l$: mm	0,02	0,05	0,2	0,3	0,5
Meeterjaotise $\Delta^\circ l$: mm	0,03	0,1	0,5	0,75	1,0

meeter- ja detsimeeterjaotiste lubatud põhivead on 0,2; 0,3 ja 0,5 mm.

15.5. Nivellimislattide [GOST 11158-65] lubatud põhivead on näidatud tabelis 15.5.

15.6. Metallmõõtlindid P3, PK ja PB [GOST 7502-69] jaotatakse kolme täpsusklassi. Esimese täpsusklassi lindid valmistatakse invarist või sulamist ЭП-197 Linte PC, PЖ ja ПЛ valmistatakse ainult kolmanda klassi täpsusega. Lindid ПГЖ arvatakse samuti kolmandasse täpsusklassi, kuid nende täpsus on teiste kolmanda klassi lintide täpsusest mitu korda halvem. Metallmõõtlintide lubatud põhivead on näidatud koondtabelis 15.6.8.

15.7. Geodeetiliste mõõtlintide [GOST 10815-64] ЛЗIII ja ЛЗ lubatud põhivead $<F=98 \quad 100 \text{ N}>$ on näidatud koondtabelis 15.6.8.

15.8. Tekstiilmõõtlintide [GOST 11900-66] ПП (rätsepatöödeks) ja PT lubatud põhivead on näidatud koondtabelis 15.6.8.

15.9. Mõõtluubid [GOST 8309-57] ЛИ-3 ja ЛИ-4 on varustatud 15 mm klaasskaalaga. Üksiku 0,1 mm jaotise lubatud põhiviga on 0,01 mm, 5 mm pikkuse lõigu lubatud põhiviga on 0,015 mm ja 7,5 mm pikkuse lõigu lubatud põhiviga on 0,02 mm.

15.10. Mikrokaala (objektmikromeeter) [GOST 7513-55] mõõt-skaala pikkus on 1 mm ja jaotise väärtus 0,01 mm. Ühe jaotise lubatud põhiviga on 1 μm , kümne jaotise lubatud põhiviga on 2 μm , suurim lubatud põhiviga skaala piirides on 3 μm . Läbipaistvate skaalade ОМII katteklaasi paksus on 0,17 mm, kroomitud klaasist läbipaistmatutel skaaladel ОМО katteklaasi ei ole.

15.11. Nihikute [GOST 166-63] (ülemine mõõtepiir kuni 1 m) lubatud põhiviga võrdub nooniusse jaotise väärtusega (kas 0,05 või 0,1 mm). Sisemõõtmiste korral arvesse minev nullpikkuse lubatud põhiviga on 0,05 mm nooniusse korral 0,02 mm ja 0,1 mm nooniusse korral 0,03 mm.

15.12. Sügavusnihikute [GOST 162-64] ja **kõrgusnihikute** [GOST 164-64] lubatud põhiviga võrdub nooniusse jaotise väärtusega (0,05 või 0,1 mm)

15.13. Horisontaalsete komparaatorite [Taotlemissjuhend 70-59] (skaala pikkus $l=200$ mm) lubatud põhiviga on 1 $\mu\text{m} + 5 \cdot 10^{-6} l$.

Tabel 15.6.8

Lindi tüüp	Lubatud põhiõiga /mm/																
	mm jaotis	cm jaotis	dm jaotis	m jaotis	Näidatud pikkusega /m/ lindi ulatuses												
					1,5	2	3	5	10	20	24	30	50	75	100		
Metall 1. kl.	0,05	0,1	—	0,2	—	—	—	—	—	0,5	1,0	—	—	—	—	—	—
Metall 2. kl.	0,1	0,2	—	0,3	—	—	—	—	1,0	1,0	2,0	—	—	3,0	5,0	7,5	10
Metall 3. kl.	0,2	0,3	—	0,4	—	—	—	—	2,0	2,5	4,0	—	—	5,0	7,0	10	14
Geod. J13III	0,1	0,2	—	0,3	—	—	—	—	—	—	1,0	2,0	—	—	3,0	—	—
Geod. J13	—	—	—	0,5	—	—	—	—	—	—	2,0	2,0	—	—	3,0	—	—
Tekstiil	—	1,0	1,0	—	—	3,0	3,0	5,0	10	15	—	—	—	—	—	—	—

15.14. Katetomeetrite [15] KM-6, KM-8 ja KM-9 andmed on esitatud tabelis 15.14. Lubatud põhiviga $\Delta^{\circ}h$ ei sõltu mõõdetava kõrguse väärtusest ja sõltub katetomeetri ning objekti vahelisest kaugusest a .

15.15. Kruvikud [GOST 6507-60] MK, MЛ ja MT arvatakse esimesse täpsusklassi. Normaalsurveks on kärsti poolt tekitatav mõõtesurve. Kruvikute lubatud põhivead $\Delta^{\circ}l$ olenevalt lõppnäidust l_{max} on näidatud tabelis 15.15.

Eritellimisel valmistatavate nullklassi kruvikute mõõtepiirkond on 0 25 mm ja lubatud põhiviga 2 μm .

50 mm ja suurema lõppnäiduga kruvikute algnäit on nullist erinev ja nad varustatakse algnäidu kontrollimiseks seademööduga. Seademöödtude lubatud põhivead $\Delta^{\circ}l_s$ on näidatud tabelis 15.15.

15.16. Indikaatoriga kruvikute [GOST 4381-68] MP lubatud põhiviga on 0 25 mm mõõtepiirkonna korral 3 μm , 50 100 mm ülemise mõõtepiiri korral 4 μm . Indikaatori lubatud põhiviga fikseeritud kruvi korral on 1 μm . 25 mm seademöödu lubatud põhiviga on 0,5 μm , 50 ja 75 mm seademöödu lubatud põhiviga on 0,75 μm .

15.17. Okulaarkruvikute (okulaarmikromeetrite) [GOST 7865-56] MOB ja MOBY lubatud põhiviga on ≤ 1 mm pikkuse korral 5 μm , > 1 mm pikkuse korral kuni 10 μm .

15.18. Kruvikmikroskoopide (instrumentaalmikroskoopide) [GOST 8074-56] ММИ ja МБИ objektilaud on mõõtekruvide abil kahes ristsuunas nihutatav. Kui vahemiku otspunktidele läheneda ühest suunast, on lubatud põhiviga 3 μm , vastasel korral aga 5 μm (surnud käik kuni 2 μm) Pöördskaalaga nurgamööduri lubatud põhiviga on 1 $^{\circ}$.

15.19. Sfäromeetritel [GOST 11194-65] CCO ja CHO on optiline, sfäromeetril CHM — mehaaniline mõõteseade. Paksuse näidu variatsioon ei tohi riistal CCO ületada 0,3 mm, riistadel CHO ja CHM — 0,5 μm . Kerapinna raadiuse mõõtmisel sõltub lubatud põhiviga raadiuse väärtusest. $\Delta^{\circ}r$ mm väärtused on esitatud tabelis 15.19.

Sfäromeetreid CCO, CHO ja CHM markeeriti varem tähistega ИЗС-7, ИЗС-8 ja ИЗС-9.

15.20. Ringskaalaga indikaatorite [GOST 577-68] jaotise väärtus on 0,01 mm ja mõõtepiirkond 0 2 mm, 0 5 mm või 0 10 mm. Indikaatori näidu variatsioon ei tohi ületada 3 μm . Täpsuse järgi jaotatakse indikaatorid kahte klassi. Piirvea reglementeerimisel peetakse silmas kahe näidu järgi määratud nihke vigu. Hüsteresi kõrvaldamise võimalust pole seejuures arvesse võetud. Tabelis 15.20 on näidatud indikaatorite lubatud põhivead $\mu\text{m}/$ olenevalt mõõdetava nihke väärtusest $/\text{mm}/$.

15.21. Ringskaalaga indikaatorite [GOST 9696-61] andmed on esitatud tabelis 15.21. Põhiviga määratakse p. 15.20 kirjeldatud viisil.

15.22. Minikaatorite (kang — vedru — mõõtepeade) [GOST

Tabel 15.14

Kateto- meetri tüüp	Ülemine mõõte- piir /cm/	Vesiloe jaotise väärtus	$\Delta^{\circ}h : \mu\text{m}$ olenevalt kaugusest $a : \text{cm}$						
			14 15	34 35	50 62	73 97	47 67	61 100	89 200
KM-6	20	17" .. 25"	6	10	14	21	—	—	—
KM-8	50	14" 15'	—	—	—	—	19	28	36
KM-9	100	4"	—	—	—	—	25	30	35

Tabel 15.15

$l_{max} : \text{mm}$	100	125 ... 200	225 ... 300	400	500	600
$\Delta^{\circ}l : \mu\text{m}$	4	5	6	8		10
$\Delta^{\circ}l_s : \mu\text{m}$	1,5	2,0	2,5	3,5		4,0

Tabel 15.19

$r : \text{m}$	0,01 ... 0,0375	0,0375 ... 0,08	0,08 0,75	0,75 1	1 5	5 40
CCO	0,07	0,04	0,04	0,04	—	—
CHO	—	—	0,04	0,05	0,15	0,5
CHM	—	—	0,08	0,10	0,30	2,0

Tabel 15.20

Nihe /nm/	0 ... 0,1	0,1 1	Mõõtepiirkonna ulatuses		
			0 .. 2	0 .. 5	0 10
0. kl.	4	8	10	12	15
1. kl.	6	10	12	16	20

Tabel 15.21

Jaotise väärtus / μm /	Mõõtepiirkond /mm/	Lubatud põhiviga / μm /		
		Esimese täispöörde ulatuses	Esimese millimeetri ulatuses	Terves mõõtepiirkonnas
1	1	3	4	4
2	2	4	5	8

Tabel 15.23

Jaotise väärtus / μm /	Lubatud põhiviga / μm /	
	30 jaotise ulatuses	60 jaotise ulatuses
0,2	0,15	0,3
0,5	0,30	0,5
1,0	0,50	1,0
2,0	1,00	2,0

14711-69] lubatud põhiviga võrdub 20 skaalajaotise piires poole jaotise väärtusega, 40 skaalajaotise piires aga ühe skaalajaotise väärtusega.

15.23. Mikaatorite (väikesegabariidiliste vedrumõõtepeade) [GOST 14712-69] ИЛМ ja ИЛМУ andmed on esitatud tabelis 15.23.

Mikaator või minikaator peab täpsust kaotamata taluma 94% töökindlusega 500 000 töötsükli.

Teistlaadsete mõõtepeade (mikrokaatorid, optikaatorid) kirjeldusi võib leida raamatust [8].

15.24. Tasaparalleelseid otsmõõte [GOST 9038-59, GOST 13581-68, taatlemisjuhend 100-60] tarvitatakse eriti täpsete mõõtmiste korral ja teiste mõõtevahendite taatlemisel. Vajalik pikkus koostatakse ahelaks liidetud otsmõõtetest samal põhimõttel kui vajalik mass kaaluvihtidest. Otsmõõdetud valmistatakse süsinikterasest [GOST 9038-59] või kõvasulamist [GOST 13581-68], viimasest materjalist mõõtude pikkus on kuni 100 mm.

Tasaparalleelse otsmõõdu keskpikkus on ühe tööpinna keskpunkti teise tööpinnani ulatuva ristlõigu pikkus.

l : min	Normaaltingimustel lubatud hälve / μm /					Normaaltingimustel lubatud viga / μm /					
	0. kl.	1. kl.	2. kl.	3. kl.	4. kl.	5. kl.	1. järk	2. järk	3. järk	4. järk	5. järk
0,1 10	0,10	0,20	0,4	0,8	2,0	4	0,05	0,07	0,10	0,20	0,40
10 .. 18	0,12	0,25	0,5	1,0	2,5	5	0,06	0,08	0,12	0,25	0,50
18. 30	0,15	0,3	0,5	1,0	3,0	6	0,06	0,09	0,15	0,30	0,50
30 ... 50	0,20	0,3	0,5	1,2	3,5	8	0,07	0,10	0,20	0,30	0,50
50 . . 80	0,25	0,4	0,6	1,5	4,0	9	0,08	0,12	0,25	0,40	0,60
80 120	0,3	0,5	0,8	2,0	5,0	11	0,10	0,15	0,30	0,50	0,80
120 180	0,4	0,75	1,0	2,5	6,0	12	0,12	0,20	0,40	0,75	1,0
180 .. 250	0,5	1,0	1,5	3,0	7,0	14	0,15	0,30	0,50	1,0	1,5
250 .. 500	0,6	1,25	2,0	3,5	8,0	16	0,20	0,35	0,60	1,25	2,0
300 ... 400	0,8	1,5	2,5	4,0	9,0	18	0,25	0,45	0,80	1,5	2,5
400 . 500	1,0	1,8	3,0	5,0	10,0	20	0,30	0,50	1,0	1,8	3,0
500 .. 600	1,2	2,2	3,5	6,0	12,0	22	0,35	0,60	1,2	2,2	3,5
600 . . 700	1,4	2,6	4,0	7,0	13,0	24	0,40	0,70	1,4	2,6	4,0
700 800	1,6	3,0	4,5	8,0	14,0	26	0,45	0,80	1,6	3,0	4,5
800 900	1,8	3,5	5,0	9,5	15,0	28	0,50	0,90	1,8	3,5	5,0
900 1000	2,0	4,0	6,0	11,0	16,0	30	0,60	1,0	2,0	4,0	6,0
2000	4,0	8,0	12,0	20,0	32,0	60	1,2	2,0	4,0	8,0	12,0

Otsmõõte valmistatakse ettenähtud nomenklatuurpikkustega. Taatlemisel tehakse kindlaks mõõdu täpsustatud nimipikkus ja selle erinevus nomenklatuurpikkusest, s. o. parand. Otsmõõdu tõelise pikkuse ja nomenklatuurpikkuse vahet nimetatakse edaspidi mõõdu hälbeks, tõelise pikkuse ja nimipikkuse vahet aga mõõdu veaks.

Hälbe väärtuste järgi jaotatakse otsmõõdud kuude täpsusklassi (4. ja 5. täpsusklassi otsmõõte ei valmistata, nendesse klassidesse arvatakse tarvitamisel kulunud mõõdud). Vea väärtuste järgi jaotatakse otsmõõdud eelmisest jaotusest sõltumatult viide järku. Otsmõõtude hälbe ja vea absoluutväärtuste maksimaalsed lubatud väärtused normaalingimustel $<20^{\circ}\text{C}>$ on näidatud tabelis 15.24.

Otsmõõtude lubatud põhiviga on ligikaudselt esitatav ka valemite abil:

1. järk $0,05 \mu\text{m} + 0,5 \cdot 10^{-6} l$
2. järk $0,07 \mu\text{m} + 1 \cdot 10^{-6} l$
3. järk $0,1 \mu\text{m} + 2 \cdot 10^{-6} l$
4. järk $0,2 \mu\text{m} + 3,5 \cdot 10^{-6} l$
5. järk $0,4 \mu\text{m} + 5 \cdot 10^{-6} l$

Kuni 100 mm otsmõõte kasutatakse vertikaalasendis, pikemaid otsmõõte aga horisontaalasendis. Horisontaalasendi korral peavad toed asuma 0,21 l kaugusel mõõdu otstest.

15.25. Külgmikud [GOST 4119-66] kuuluvad otsmõõtude kasutamise abivahendite komplekti. Nad võimaldavad otsmõõtude kasutamisel rakendada samu võtteid kui nihikuga mõõtmisel. Külgmike kasutamisel peab arvestama ka külgmike ebatäpsusest tingitud mõõtmisviga. Välismõõtmistel kasutatavate tasaparalleelsete külgmike paralleelsuse lubatud põhiviga on 0,3 μm . Sisemõõtmistel kasutatavate kumerate külgmike paari paksuse lubatud põhiviga on 1 μm . Otsmõõte puutuvate pindade hälve tasandist on kuni 10 mm paksuse korral 0,15 μm , 15 mm paksuse korral aga 0,3 μm . Otsmõõtu puutuva pinna ja mõõtepinna paralleelsuse lubatud põhiviga on vastavalt 0,5 μm või 1 μm (ühe külgmiku kohta). Kumerate külgmike raadius võrdub nende paksusega. Märkimistöödel kasutatavate tsenterkülgmike tipu asendi lubatud põhiviga on 10 μm .

15.26. Optimeetreid [GOST 5405-64] saab kasutada kuni 500 mm pikkuste otsmõõtude võrdlemiseks. Optimeetrite lubatud põhiviga on 0,2 μm .

15.27. Mõõtemasinate [GOST 10875-64] ИЗМ mõõtepiirkond on 0,1 m, 0,2 m, 0,4 m, 0,6 m, 0,8 m või 0,12 m. Meeterskaala joonpaisumistegur on $(1,05 \dots 1,25) \cdot 10^{-5} \text{ deg}^{-1}$. Pärast parandite arvessevõtmist ei tohi jääkviga ületada $0,4 \mu\text{m} + 4 \cdot 10^{-6} l$. Taatlemiseeskiri [GOST 13008-67] lubab tarvitamisel kulunud masinate täpsusele esitatavaid nõudeid paar korda nõrgendada.

15.28. Interferomeetrite [GOST 8290-57] lubatud põhiviga on valguse lainepikkuse täpse teadmise korral 0,03 μm .

15.29. Kaliibreid kasutatakse tehnikas seeriamõõtmiste hõlbus-

tamiseks. Kaliibrite kohta kehtestatud standardid on standardite näitajas [23] koondatud klassi Γ — 28. Kaliibrite kohta leidub andmeid ka raamatus [8].

16. AJA JA KIIRUSE MÕÕTEVAHENDID

16.1. Kella täpsuse kirjeldamisel peetakse tavaliselt silmas ühe ööpäeva, ühe nädala või ühe kuu pikkuse ajavahemiku mõõtmist.

Kella kaliibriks nimetatakse kella mehhanismi läbimõõtu.

Kellade (välja arvatud kronomeetrid) normaalne temperatuurivahemik on 15 — 25° C.

Raadiotehnilisi aja ja sageduse mõõtevahendeid kirjeldatakse 26-ndas paragrahvis.

16.2. Kronomeetriga [GOST 8916-58] mõõtmisel võetakse temperatuuriparand alati arvesse. I klassi kronomeetri ööpäevane lubatud põhiviga on 3 s, II klassi kronomeetri ööpäevane lubatud põhiviga on 4 s.

16.3. Elektrikellavõrgu juhtkella [GOST 7412-68] lubatud põhiviga ühe kuu kohta on I. kl. korral 10 s, 2. kl. korral 30 s, 3. kl. korral 60 s ja 4. kl. korral 120 s.

16.4. Balanssiiriga seinakellade ja lauakellade [GOST 3309-65] üleskeeramisperioodiga võrduva ajavahemiku lubatud põhiviga on I. kl. korral 30 sekundit ööpäeva kohta ja 2. kl. korral 60 sekundit ööpäeva kohta. Löögimehhanismi rakendumise lubatud viga on 2 min.

16.5. Malekella [GOST 6979-67] ööpäevane lubatud põhiviga on tüübil III-1 1 minut ja tüübil III-2 2 minutit.

16.6. Äratuskellade [GOST 3145-67] lubatud põhivead $\Delta^{\circ}t$ ja signaali rakendumise lubatud vead $\Delta_s t$ on näidatud tabelis 16.6.

16.7. Taskukella [GOST 918-66] ööpäevane lubatud põhiviga on kõrgendatud täpsusega klassi korral 25 s, I kl. korral 40 s, II kl. korral 60 s.

16.8. Käekellade [GOST 10733-66] ööpäevased lubatud põhivead ja suhtelised põhivead on näidatud tabelis 16.8.

Signaalseadisega kella signaali lubatud viga on 6 min.

Magnetkindel kell peab käima õigesti magnetväljas tugevusega 15915 A/m = 200 Oc. Kaks korda tugevamas väljas ei tohi kell seisma jääda ja õige käik peab olema demagneetimise teel taastatav.

16.9. Stoppkellade [GOST 5072-67] täpsust kirjeldavad andmed on esitatud tabelis 16.9. $\Delta^{\circ}t$ on lubatud põhiviga näidatud ajavahemiku ühekordse mõõtmisel. Δt on paljukordse mõõtmise tulemuste aritmeetilise keskmise lubatud põhiviga. $\Delta^1 t$ on üksiktulemuse lubatud hälve korduvate mõõtmiste keskmisest.

Stoppkella ehitusest tingitud käivitamise ja seiskamise vead on lubatud põhivea määramisel arvesse võetud. Käivitamise ja seiskamise isiklik viga tuleb liita tabelist 16.9 leitud väärtusele. Isiklikku

Tabel 16.6

Kella tüüp	БМ-1	БМ-2	БМ-8	Б-1	Б-2
Ajavahemik /õöp./	7	1	1	1	1
$\Delta^{\circ}t : s$	210	90	120	120	150
$\Delta.t : min$	3	6	6	6	6

Tabel 16.8

Kaliiber	Täpsusklass	$\Delta^{\circ}t : s$	$\Delta^{\circ}t/24 h$
Normaalne (21...30 mm)	Kõrg. täpsusega	35	0,04%
	I	45	0,05%
	II	60	0,07%
Väike (13...20 mm)	I	60	0,07%
	II	90	0,1%

viga peab mõõtja oskama ise hinnata. Uhesuguse algus- ja lõpp-signaali korral on vilunud mõõtja isiklik viga mõni sajandik sekundit, erinevate signaalide korral aga võib see ulatuda kümnendiksekunditeni.

16.10. Kronoskoopide [GOST 5072-67] kohta kehtib kõik eelmises punktis öeldu. Lubatud põhivea $\Delta^{\circ}t$ väärtused on näidatud tabelis 16.10.

16.11. Liivakellade [GOST 10576-63] tsüklid t ja tsükli lubatud põhivead $\Delta^{\circ}t$ on näidatud tabelis 16.11.

16.12. Ajasignaale [GOST 13645-68] annavad edasi NSVL ajateenistuse spetsiaalsed lühilaine ja pikklaine raadiosaatjad. Ajamärgiks on signaalimpulsi esifrondi mähisjoone iseloomulik punkt, mille täpne asend mähisjoonel tehakse teatavaks ajasignaali saatekavas. Ajasignaali hälve NSVL riikliku aja ja sageduse etaloni signaalidest ei tohi raadiosaatja asukohas ületada 0,1 ms. Saatja kandevasageduse suhteline viga ei tohi olla suurem kui 10^{-10} .

16.13. Spidomeetrite [GOST 1578-65] (painduva võlliga ülekanne (ja [GOST 12936-67] (elektriline ülekanne) põhiviga ei tohi olla negatiivne. Kiirustel kuni 60 km/h peab põhiviga jääma

Tabel 16.9

Kaliber /mm/	Kl.	Osuti hüpe /s/	$\Delta T : s$				$\Delta V : s$					
			1 min	15 min	30 min	60 min	15 min	30 min	60 min	15 min		
42	1	0,1	0,2	0,4	0,7	—	0,2	0,4	—	0,2	0,3	—
		0,1	0,2	0,6	0,9	—	0,3	0,5	—	0,3	0,4	—
	2	0,2	0,3 sm	0,8	1,2	2,2	0,4	0,7	1,2	0,4	0,5	1,0
		0,1	0,2	0,9	1,4	—	0,5	0,8	—	0,4	0,6	—
	3	0,2	0,3	1,1	1,8	3,1	0,6	1,0	1,8	0,5	0,8	1,3
		0,1	0,1	0,4	0,6	—	0,2	0,3	—	0,2	0,3	—
54	1	0,1	0,2	0,6	0,8	—	0,3	0,4	—	0,3	0,4	—
		0,2	0,2	0,6	0,8	1,6	0,3	0,4	0,8	0,3	0,4	0,8
	2	0,1	0,2	0,6	0,8	—	0,3	0,4	—	0,3	0,4	—
		0,2	0,2	0,6	0,8	1,6	0,3	0,4	0,8	0,3	0,4	0,8

Tabel 16.10

Kaliiber /mm/	Kl.	\varnothing suti hüppe /s/	Δt : s	
			1 min	3 min
42	1	0,01	0,08	0,15
	2	0,02	0,10	0,20
54	1	0,01	0,05	0,12
	2	0,02	0,08	0,15

Tabel 16.11

t : min	0,5	1	2	3	5	10	15	30
Δt : s	3	4	7	10	15	20	25	30

Tabel 16.14

Tüüp	Töötamp.	$v/m \cdot s^{-1}/$	$\Delta v/m \cdot s^{-1}/$
Tiivikanemomeeter	-10 .. 50° C	0,3 ... 1	0,05
		1 .. 5	0,1
Kaissanemomeeter	-45 .. 50° C	1 .. 5	0,05
		5 .. 20	0,1

vahemikku 0 .. 3 km/h, kiirustel üle 60 km/h peab suhteline põhiviga jääma vahemikku 0 .. 5%.

16.14. Tiirudelugejaga anemomeetri [GOST 6376-52] näit leitakse gradueerimiskõvera abil. Tööt temperatuur ja lubatud põhivigid $<15 .. 20^{\circ}C>$ on näidatud tabelis 16.14.

16.15. Induktsioonanemomeetri [GOST 7193-54] API-49 mõõtepiirkond on 2 .. 30 m/s ja tööt temperatuur $-40 .. 45^{\circ}C$. Lubatud põhiviga $<-15 .. 45^{\circ}C>$ on 0,5 m/s+0,05 v.

17. MÕÖTANUMAD, AREOMEETRID JA KULUARVESTID

17.1. Vedeliku nivooks mõõtanumas loetakse vedeliku meniskikujulise vaba pinna puutetasand. Nivoo lugemiseks asetatakse mõõtanum horisontaalsele lauale. Vedeliku pinna vaatlemisel peab silm asuma vedeliku nivooaga samas tasandis, nii et meniski tasane osa paistab kriipsuna.

17.2. Kaliibrimise ja kasutamise viisi järgi jaotatakse mõõtanumad [GOST 1770-64] täitmismõõtanumateks ja tühjendamismõõtanumateks. Täitmisanuma nimiruumala võrdub anuma ettenähtud nivooni täitmiseks kuluva vedeliku ruumalaga. Tühjendamisanuma nimiruumala võrdub ettenähtud nivooni täidetud anumast tühjendamisel väljavoolava vedeliku ruumalaga. Võrdsete nimiruumalade korral on tühjendamisanuma maht täitmisanuma mahust seinte külge jääva vedeliku ruumala võrra suurem.

Täitmisanum peab olema mõõtmise algul seest kuiv. Kui anumad pole võimalik enne iga mõõtmist kuivatada, tuleb anumasse valatava vedeliku hulga mõõtmisel kasutada eelnevalt õigesti märjaks tehtud seintega tühjendamismõõtanumat.

Tühjendamismõõtkolbe, tühjendamismõõtsilindreid, mensuure, bürette ja mikrobürette peab pärast vedeliku väljavoolamist laskma järeltilkuda 30 s (kaheliitrist anumad 60 s) jooksul. Pipettide järeltilkumisaeg on esimese täpsusklassi korral 15 s, teise täpsusklassi korral 3 s. Pipette ei tohi tühjaks puhuda.

Täitmis- ja tühjendamismõõtanumate eristamise tarvis on kõigile mõõtkolbidele ja mõõtsilindritele märgitud täht «Н» (наливной — täitmismõõtanum) või täht «О» (отливной — tühjendamismõõtanum). Kõik koonilised mensuurid, büretid, mikrobüretid, pipetid ja mikropipetid kuuluvad tühjendamismõõtanumate hulka.

17.3. Klaasist mõõtanumate täpsust kirjeldab tabel 17.3, milles on esitatud 2. täpsusklassi mõõtanumate [GOST 1770-64] lubatud põhivead /ml/.

Tabelist 17.3 väljajäetud tühjendamismõõtkolbide ja -mõõtsilindrite lubatud põhivead on vastavate täitmismõõtanumate lubatud põhivigadest parajasti kaks korda suuremad.

Kõiki tühjendamismõõtanumaid tohib kasutada ainult vee või veega võrdse viskoossuse, märgavuse ja pindpinevusega vedelike mõõtmiseks.

1. täpsusklassi mõõtanumate lubatud põhivead on 2. täpsusklassi mõõtanumate lubatud põhivigadest kaks korda väiksemad.

Mõõtsilindreid ja mensuure valmistatakse ainult 2. täpsusklassi nõuete kohaselt.

0,1 ja 0,2 ml mikropipette valmistatakse ainult 1. täpsusklassi nõuete kohaselt, mikropipettide lubatud põhivead on vastavalt 0,001 või 0,002 ml.

17.4. Vihmamõõtuuri ja sademetemõõtuuri mõõtsilindrite [GOST 6800-68] mahud on 500 ja 200 cm³ ja nad kuuluvad täitmismõõt-

Tabel 17.3

Nimi- ruumala /ml/	Täitmis- mõõtkolvid	Täitmis- mõõt- silindrid	Koonilised mensuurid	Büretid	Mikro- büretid	Ühe märgiga pipetid	Kahe märgi või jaotis- tega pipetid
2000	1,0	5,0	—	—	—	—	—
1000	0,6	5,0	25,0	—	—	—	—
500	0,3	2,5	12,5	—	—	—	—
250	0,2	1,25	5,0	—	—	—	—
200	0,2	—	—	—	—	0,20	—
100	0,2	0,50	5,0	0,2	—	0,16	0,20
50	0,1	0,25	2,5	0,1	—	0,10	0,16
25	0,06	0,25	—	0,1	—	0,08	0,10
20	—	—	—	—	—	0,06	0,10
15	—	—	—	—	—	0,06	0,10
10	0,04	0,1	—	0,05	0,02	0,04	0,10
5	0,02	0,1	—	—	0,02	0,02	0,05
3	—	—	—	—	0,01	—	—
2	—	—	—	—	0,01	0,01	0,02
1	—	—	—	—	0,01	0,01	0,01
0,5	—	—	—	—	—	0,01	0,01

anumate hulka. Mõõtsilindritel on 100 jaotist, põhiviga on 0 0,5 jaotist (viga ei tohi olla negatiivne).

17.5. Vedelikutilga ruumala võib hinnata tilgatabeli abil. Tabelis 17.5 on näidatud normaaltilgutiga saadud tilkade arv kuupsentimeetri või grammi kohta 20°C temperatuuril.

17.6. Areomeetrite ja densimeetrite (vedeliku tiheduse ühiku-

Tabel 17.5

Vedelik	$n : \text{cm}^{-3}$	$n : \text{g}^{-1}$
Vesi	20	20
40% piiritus	45	47
70% piiritus	50	56
95% piiritus	52	65
Eeter	61	85

tes gradueeritud areomeetrid) [GOST 1290-41 ja GOST 2900-45] lubatud põhiviga võrdub ühe jaotise väärtusega.

Densimeetritesse ehitatud termomeetrite põhiviga on $0,5^\circ \text{C}$.

Merevee tiheduse mõõtmise densimeetril on erandlikult $t_{\text{norm.}} = 17,5^\circ \text{C}$.

17.7. Veearvestite [GOST 6019-66] lubatud suhteline põhiviga 10–100% koormuse korral on 2%.

17.8. Turbiinveearvestite [GOST 14167-69] lubatud suhteline põhiviga on tööpiirkonna alguses 5%, 25% ja suurema koormuse korral aga 2%.

17.9. Ovaalsete hammasratastega vedelikuarvestite [GOST 12671-67] lubatud suhteline põhiviga $<15 \text{ } 25^\circ \text{C}>$ on 0,5%. Temperatuurist sõltuv suhteline lisaviga ei ületa 0,1% 10 K hälbe kohta.

17.10. Trummelgaasiarvestite [GOST 6463-53] ГСВ täpsusklass $K=0,5$ või $K=1,0$ $<10 \text{ } 35^\circ \text{C}>$. $E_V^0 = K\%$. Parandi arvesse võtmise korral saab 0,5 klassi arvestiga mõõta 0,25% piirveega. Maksimaalne kulu on 6 m³/h, rõhu langus arvestil ei ületa 8 mm H₂O.

17.11. Rootorgaasiarvestid [GOST 8700-65] PC-40 kuni PC-40 000 võimaldavad mõõta kuni 48 000 m³/h kulu korral. K on 1,0; 1,6 või 2,5 $<15 \text{ } 25^\circ \text{C}>$ 20–100% koormusel on $E_V^0 = K\%$. 10–20% koormusel 2% (2,5 klassi arvestitel 3%) Rõhukadu ei ületa 30 mm H₂O.

17.12. Tarbegaasiarvestid [GOST 5364-57] ГКФ võimaldavad mõõta 0,03–6 m³/h kulu korral. 10–100% koormusel on $E_V^0 = 2\%$ $<15 \text{ } 25^\circ \text{C}>$. 5–10% koormusel 3%. Tundlikkuse lävi ei ületa 1,5% nominaalkulust, rõhukadu on kuni 10 mm H₂O.

17.13. Rotameetrid [GOST 13045-67] näitavad otse gaasi- või

vedelikukulu. Täpsusklass K on $1,0 < 18 \quad 22^\circ\text{C}, 735 \quad 785$
 $\text{mm Hg} >$. $1,5; 2,5$ või $4,0 < 15 \quad 25^\circ\text{C}, 735 \quad 785 \text{ mm Hg} >$.
 $D_\Phi^0 = K\%$.

18. KAALUD JA VIHID

18.1. Võrdõlgsetel kaaludel [taatlemisjuhend 57-56] on normeeritud maksimaalne lubatud variatsioon $\Delta^v m$, maksimaalne lubatud skaalajaotise väärtus m_0 ja mittevõrdõlgisusest tingitud piirviga $\Delta^k m$ vastavalt kaalu tüübile, täpsusklassile, lubatud maksimumkoormusele m_{max} ja koormamisuuhtele m/m_{max} .

Täpsemat liiki kaaludele $m/m_{max} = 0,1$ 1 korral esitatavaid nõudeid kirjeldab tabel 18.1.1. Mikroskaalaga kaaludel $m_0 = \Delta^v m$, tavalise skaalaga kaaludel $m_0 = \Delta^k m$.

Tabel 18.1.1

	Tüüp ja klass	m_{max}	$\Delta^v m : \text{mg}$	$\Delta^k m : \text{mg}$
Mikroskaalaga	Mikroanalüütilised	20 g	0,01	0,03
	Analüütilised 1. kl.	200 g	0,1	0,4
	Analüütilised 2. kl.	200 g	0,2	1,0
Tavalise skaalaga	Proovikaalud	0,5 g	0,03	0,03
	Mikroanalüütilised	20 g	0,05	0,1
	Analüütilised 1. kl.	200 g	0,2	0,4
	Analüütilised 2. kl.	200 g	0,5	1,0
	Tehnilised 1. kl.	20 g	0,2	0,4
		200 g	2	4
		1 kg	10	20
		5 kg	25	50
		10 kg	50	100
20 kg		100	200	
50 kg		125	250	

Tabel 18.1.2

$m_{max} : g$		1	5	10	20	50	100	200
$\Delta^k m : mg$	$m/m_{max}=0,1$	3	4	5	6	10	10	25
	$m/m_{max}=1$	5	10	10	20	40	50	50
$m_{max} : kg$		0,5	1	5	10	20	50	
$\Delta^* m : g$	$m/m_{max}=0,1$	0,04	0,06	0,15	0,2	0,5	0,6	
	$m/m_{max}=1$	0,08	0,1	0,3	0,5	1	3	

Tehniliste 2. kl. kaalude $\Delta^k m = m_0$ on näidatud tabelis 18.1.2. Samadele nõuetele peavad vastama võrdõlgised käsikaalud [GOST 359-54] BP-1, BP-5, BP-20 ja BP-100.

Tehniliste 3. kl. kaalude m_0 ja $\Delta^k m$ on koormamata kaalude korral $m_{max}/10\,000$, 10% koormatud kaalude korral $m_{max}/5000$ ja täiskoormuse korral $m_{max}/1000$.

Mõnele kaalutüübile, näiteks АДВ-200, esitatavad nõuded pole üldiste eeskirjadega kooskõlas. Seepärast on alati soovitatav kontrollida kaalu garanteeritud täpsust kasutamishendi järgi.

18.2. Täpse kaalu kasutamine nõuab ettevaatlikkust. Kaalu rikkumiseks võib osutuda piisavaks

- arretiiri järsk vabastamine;
- vihlide või objekti asetamine arreteerimata kaalule;
- kaalu ülekoormamine;
- arreteerimata kaalu põrutamine.

Kaalu rikkumine ilmneb tavaliselt alles taatlemisel.

18.3. Tasakaalutäpi määramisel võib asuda amplituudlugemeid registreerima alles pärast kahte täisvõnget. Võnkeamplituud ei tohi ületada paarikümmet protsenti skaala ulatusest.

Summutiga kaalu osuti võnkumist ei registreerita.

18.4. Kaalu viga oleneb kaalumismeetodist. Kui nii tasakaalutäpid kui ka nulltäpp on määratud ühekordse lugemi järgi, on kaalu lubatud põhiviga $\Delta^o m = \Delta^o m + \Delta^k m$. Kui nulltäpp on määratud korduvate lugemite keskmise järgi, siis on $\Delta^o m = 0,5\Delta^o m + \Delta^k m$. Kui ka tasakaalutäpid on määratud paljude lugemite keskmise järgi, on

m_{max} : kg	2	5	10	15	20	30
Jaotise väärtus /g/	1	2	5	5	10	10

$\Delta^{\circ}m = \Delta^k m$. Asendusmeetodi või vahetusmeetodi korral kõrvaldatakse ka $\Delta^k m$ ja järele jääb väike jääkviga, mida hinnatakse katsetulemuste põhjal.

Mõõtmistulemuse piirvea leidmiseks tuleb kaalu lubatud veale liita vihtide lubatud vead.

18.5. Lauakaalud [GOST 13882-68, GOST 14 004-68] leiavad kasutamist kõige rohkem kaubanduses. Kui kaalutav mass ei ületa 500 jaotise väärtust, on uue kaalu lubatud põhiviga 0,5 jaotise väärtust; kui mass on 500–2000 jaotise väärtust, siis on põhiviga 1,0 jaotise väärtust; kui mass ületab 2000 jaotise väärtust, on põhiviga juba 1,5 jaotise väärtust. Tarvitamisel kulunud kaalu lubatud põhiviga on 0,5 jaotise väärtuse võrra suurem.

Vihtidega tasakaalustatavatele numbrilauata kaaludele omistatakse tinglik jaotise väärtus tabeli 18.5 kohaselt.

Kaalu lubatud variatsioon võrdub lubatud põhiveaga.

18.6. Vihtide kasutamise reeglid olenevad vihtide täpsusklassist. 1. ja 2. kl. vihte kasutatakse peamiselt teaduslikus uurimistöös, 3. ja 4. kl. vihte tehnikas ja 5. kl. vihte majanduses ning kaubanduses. 1., 2. ja 3. kl. vihte ja $m \leq 100$ g 4. kl. vihte ei tohi käega puudutada. Vihte, mille $m \leq 100$ g, tõstetakse 1. ja 2. kl. korral luuotstega pintsettidega ja 3. ja 4. kl. korral plastmassotstega pintsettidega. Suuremaid 1., 2. ja 3. kl. vihte tõstetakse erilise hargi ja flannelrätiga abil.

18.7. Vihi taandatud mass võrdub täpselt 8000 kg/m^3 tihedusega kujuteldava vihi tegeliku massiga tingimusel, et see kujuteldav viht tasakaalustab tõelise vihi keskkonnas tihedusega $1,2 \text{ kg/m}^3$. Roostevabast terasest vihtide taandatud mass on tegelikust massist 0,0002% väiksem, alumiiniumvihtide taandatud mass on tegelikust massist 0,0303% väiksem ja valgevask- ning pronksvihtide taandatud mass on tegelikust massist 0,0007% suurem.

Aerostaatilise parandi arvestamisel tuleb seetõttu kõigi vihtide (ka alumiiniumvihtide) tiheduseks lugeda 8000 kg/m^3 Viga, mida põhjustab õhu tiheduse mõneprotsendiline erinevus väärtusest $1,2 \text{ kg/m}^3$, on ka 1. kl. vihtide korral tähtsusetult väike.

18.8. Vihi viga on vihi tõelise taandatud massi ja vihi nimimassi vahe. Tavaliste vihtide [GOST 7328-65] lubatud vead /mg/ on näidatud tabelis 18.8.


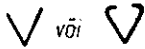

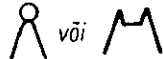
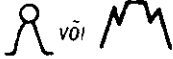
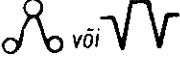
<i>m</i>	1. kl.	2. kl.	3. kl.	4. kl.	5. kl.
20 kg	—	—	160	1600	—
10 kg	—	16	80	800	8000
5 kg	—	8	40	400	4000
2 kg	—	3	16	160	1600
1 kg	—	2,5	12	120	1200
500 g	0,32	1,6	8	80	800
200 g	0,24	1,2	6	60	600
100 g	0,16	0,8	4	40	400
50 g	0,12	0,6	3	30	300
20 g	0,08	0,4	2	20	200
10 g	0,05	0,25	1,2	12	120
5 g	0,03	0,16	0,8	8	80
2 g	0,025	0,12	0,6	6	—
1 g	0,015	0,08	0,4	4	—
500 mg	0,010	0,06	0,3	3	—
200 mg	0,008	0,04	0,2	2	—
100 mg	0,005	0,02	0,1	1*	—

* 1 ja 2 mg raskusi vihte ei valmistata.

Uute 3., 4. ja 5. kl gramm- ning kilogrammvihtide viga ei tohi olla negatiivne.

18.9. Ratsurite [GOST 12377-66] lubatud viga on 1. kl. korral 5 μg , 1 a. kl. korral 10 μg , 2. kl. korral 20 μg ja 3. kl. korral 100 μg .

18.10. Traadist vihtide ja ratsurite kuju näitab nende nominaalmassi:

	— 1, 10 või 100 mg;
	— 2, 20 või 200 mg;
	— 5, 50 või 500 mg;
	— 1 mg;
	— 5 mg;
	— 10 mg.

18.11. Sisseehitatud vihtidega analüütilise kaalu [Taatlemisjuhend 57-56] lubatud põhiviga on:

üksiku milligrammvihi kasutamisel	— 0,2 mg;
üksiku 1 10 g vihi kasutamisel	— 0,3 mg;
üksiku 20 100 g vihi kasutamisel	— 0,5 mg;
vihtide kombinatsiooni kasutamisel	— $\leq 1,2$ mg.

19. DÜNAMOMEETRID, MANOMEETRID, BAROMEETRID, MÕÕTEMIKROFONID JA VISKOSIMEETRID

19.1. Dünamomeetrite [GOST 9409-60, GOST 13 837-68] ülemine mõõtepiir on 10 kgf 50 Mgf. Mõõtepiirkonna tööosa alumine piir on 10% ülemisest. 1. klassi dünamomeetrite $D_F^0=1\%$, 2. kl. dünamomeetrite $D_F^0=2\%$.

19.2. Torsioonkaalude [GOST 13718-68] ülemine mõõtepiir on 0,5 5 mgf (MB-1) või 0,01 5 gf (BT). Kaaludel MB-1 on 500 jaotist, kaaludel BT olenevalt mõõtepiirkonnast 400 1000 jaotist. Lubatud põhiviga võrdub ühe jaotise väärtusega.

19.3. Manomeetrid [GOST 2405-63] jaotatakse viide täpsusklassi. K on kas 0,6; 1,0 $<17\ 23^\circ\text{C}>$; 1,6; 2,5 või 4,0 $<15\ 25^\circ\text{C}>$. Arv K on märgitud numbrilauale. $D_p^0=K\%$. Väljaspool normaalset temperatuurivahemikku tuleb arvesse võtta parand $\delta p = -p\kappa$ ($t - 20^\circ\text{C}$), kus κ on suhteline temperatuuritegur. Kui temperatuur on töötingimustega määratud piirides, on lubatud jääklisaviga peale parandi arvestamist võrdne poolega parandi absoluutväärtusest ($E_{\delta p}=50\%$).

Temperatuuritundlikkuse järgi jagatakse manomeetrid nelja gruppi:

$$a - \kappa \leq 0,025\% \text{ K}^{-1}$$

$\delta - 0,025\% K^{-1} < \alpha \leq 0,04\% K^{-1}$

β — temperatuuriparandid esitatud tabeli või graafikuna,

z — temperatuuritundlikkus määratud erieeskirjadega.

Töötingimuste järgi jaotatakse manomeetrid gruppidesse kolmel erineval viisil.

Temperatuuri- ja niiskuskindluse järgi on kolm gruppi:

A — $10^{\circ}C \leq t \leq 35^{\circ}C$, suhteline niiskus $\eta = 80\%$,

B — $0^{\circ}C \leq t \leq 60^{\circ}C$, $\eta = 80\%$,

B — $-50^{\circ}C \leq t \leq 60^{\circ}C$, $\eta = 80\%$, $t \leq 35^{\circ}C$ korral $\eta = 95\%$.

Keemilise vastupidavuse järgi on samuti kolm gruppi:

O — tavalised manomeetrid,

K — korrosioonikindlad manomeetrid,

BC — korrosioonikindlad manomeetrid viskoosse töökeskkonna jaoks.

Mehaanilise vastupidavuse järgi on kuus gruppi:

O — tavalised,

BП — vibratsioonikindlad (möödukas vibratsioon ei kahjusta riista, kuid mõjub näidule),

BY — vibratsioonipüsivad (vibratsioon ei mõju näidule),

TП — raputuskindlad,

TY — raputuspüsivad,

УП — löögikindlad.

Manomeetri normaalne tööasend on numbrilaual näidatud samade tingmärkide abil, kui elektrimõõteriistade tööasend (vt. p. 22.14)

19.4. Laboratoorsete manomeetrite, vaakummeetrite ja miano-vaakummeetrite [GOST 6400-69] MЛ, BЛ ja MBЛ K on 0,4; 0,6 <18 22°C> või 1,0 <17 23°C>. Töötingimused on $t = 10 \dots 35^{\circ}C$, $\eta = 30 \dots 80\%$. Temperatuuriparand määratakse GOST 2405-63 (vt. eelmine punkt) järgi. Lubatud taandpõhiviga ja tõrketa töö tõenäosus $P(t)$ tellija riski $\beta = 0,2$ korral on näidatud tabe-

Tabel 19.4

K	$D0_p$	t : h	P(t)
0,4	0,4%	500	0,60
	0,6%	500	0,90
0,6	0,6%	1000	0,55
	1%	1000	0,85
1,0	1%	1000	0,70

Tüüp	Mark	p_0 : mb	$\delta_{\max}^s p$: mb	$\Delta^o p$: mb
Kontrollbaromeeter	KP	0,05	0,4	0,2
Inspektorbaromeeter	IP	0,05	0,4	0,3
Jaamabaromeeter	CP-A	0,1	0,7	0,5
	CP-B	0,1	0,9	0,5

lis 19.4. Tõrketa töö tõenäosus $P(t)$ tellija riski $\beta=0,2$ korral tähendab seda, et $1-\beta=80\%$ riistade korral ei ületa ajavahe-
mikku t kestel esinevate tõrgete suhteline sagedus suurust $1-P$

19.5. Kolbmanomeetrite [GOST 8291-57] täpsusklass K on 0,05 või 0,2. 10 100% koormuse juures on $E_p^0 = K\%$, väiksema rõhu korral aga $D_p^0 = 0,1 K\%$.

19.6. Elavhõbebaromeetrite [GOST 4863-55] näidule tuleb juurde arvata baromeetri tunnistusel näidatud skaalaparand ja temperatuuriparand. Nooniuuse jaotise väärtus p_0 , skaalaparandi maksimaalne lubatud väärtus $\delta_{\max}^s p$ ja lubatud põhiviga $\Delta^o p$ on näidatud tabelis 19.6.

Maksimaalne lubatud variatsioon võrdub nooniuuse jaotise väärtusega.

19.7. Aneroidbaromeetrite [GOST 6466-53] kasutamisel tuleb arvesse võtta skaalaparand ja temperatuuriparand. Korrigeeritud tulemuse lubatud põhiviga $<-10 \quad 40^\circ C>$ on 2 mb. Baromeetri koputamisel tohib osuti nihkuda kuni pool jaotist.

19.8. Barograafide [GOST 6359-63] lugem leitakse lindilt. Kui skaalaparand on arvesse võetud, siis $\Delta^o p = 1 \text{ mb } <20^\circ C>$. Temperatuurist sõltuv lisaviga ei tohi ületada 1 mb 10 deg hälbe kohta. Kellamehhanismi ööpäevane lubatud põhiviga $<15 \quad 25^\circ C>$ on 3 min.

19.9. Mõõtemikrofonide [GOST 13761-68] täpsusklassid on 0,5 ja 1,0. Gradueerimisviga $<t=15 \quad 25^\circ C, p=960..1040 \text{ mb}, \eta=50 \quad 80\%, U_{\text{toide}}=198 \quad 242 \text{ V}>$ ei tohi ületada K dB.

19.10. Viskosimeetrite [GOST 13368-67] täpsusklassid on 0,6; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0 ja 6,0. $E_\eta^0 = K\%$. Normaalingimusteks on temperatuur $15 \quad 25^\circ C$, suhteline niiskus 30 80%, õhurõhk 735 ,785 mm Hg, toitepinge, toitesageduse ja toiterõhu suhtelised erinevused nimiväärtusest vastavalt kuni 2%, 2% ja 3%.

20. TERMOMEETRID, PÜROMEETRID JA HÜGROMEETRID

20.1. Termomeeter sukeldatakse mõõdetava temperatuuriga keskkonda sukeldusmärgini. Termomeetri ülejäänud osa peab asuma 20° C temperatuuriga ruumis.

Numbrilauda sisaldavast jämedast torust ja reservuaariga lõpevast peenest torust koosnevate termomeetrite sukeldusmärgiks loetakse peene ja jämeda osa vaheline kael.

Sukeldusmärgita ühtlase jämedusega termomeetrid sukeldatakse mõõdetava temperatuuriga keskkonda lugemile vastava skaalakriipsuni või üleni.

20.2. Täppistermomeetrid [GOST 13646-68] kasutatakse koos parandite tabeliga. Termomeetrite jaotise väärtus ja suurim lubatud parand on näidatud tabelis 20.2.

Tabel 20.2

Temperatuur	Jaotise väärtus	Lubatud parand
0 ... 60° C	0,01 K	0,05 K
55 155° C	0,02 K	0,1 K
140 300° C	0,05 K	0,3 K
300 ... 500° C	0,1 K	1,2 K

Tabel 20.3

Jaotise väärtus /K/	0,1	0,5	1	2
—30 ... —1° C	0,3	1	1	—
0 .. 100° C	0,2	1	1	2
101 .. 200° C	0,4	1	2	2
201 .. 300° C	0,8	1,5	3	4
301 .. 400° C	1,0	3	4	4
401 .. 500° C	—	—	—	5

Jaotise väärtus /K/	0,2	0,5	1	2	5
-190 -81° C	—	—	3	4	5
-80 -41° C	1	2	3	4	5
-40 -21° C	0,8	1	2	4	5
-20... 100° C	0,4	1	1	2	5

20.3. Laboratoorsete elavhõbetermomeetrite [GOST 215-57] lubatud põhivead $\Delta^{\circ}t$: K erinevais temperatuurivahemikes on näidatud tabelis 20.3. Laia mõõtepiirkonnaga termomeetrite lubatud põhivead muutuvad 0° C, 100° C jne. juures hüppeliselt.

20.4. Elavhõbetermomeetrite [GOST 2045-43] täpsus on sama mis GOST 215-57 kohaselt valmistatud termomeetritel. 0,05 K jaotiste korral on lubatud põhiviga 0,1 K.

20.5. Tehniliste elavhõbetermomeetrite [GOST 2823-59] lubatud põhiviga võrdub ühe jaotise väärtusega.

20.6. Elavhõbekontakttermomeetrite [GOST 9871-61] näidu lubatud põhiviga on võrdne ühe jaotise väärtusega. Ühe kontaktiga termomeetri T3K kontakti rakendumistemperatuuri lubatud põhiviga on piirkonnas 0 - 100° C 1 K, piirkonnas 100 - 200° C - 2 K ja piirkonnas 200 - 300° C - 3 K. Mitme kontaktiga termomeetrite T3K rakendumistemperatuuride lubatud põhiviga on nimetatud piirkondades vastavalt 3; 3 ja 5 K.

20.7. Orgaanilise vedelikuga termomeetrite [GOST 9177-59] lubatud põhivead $\Delta^{\circ}t$: K on näidatud tabelis 20.7

20.8. Meditsiiniliste [GOST 302-68] ja **veterinaarsete** [GOST 2888-68] maksimumtermomeetrite lubatud põhiviga on 0,1 K.

20.9. Psührometrite elavhõbetermomeetrite [GOST 6080-51, GOST 6084-51 ja GOST 15055-69] jaotise väärtus on 0,2 K. Lubatud põhiviga $t \geq 0^{\circ}C$ korral on 0,2 K, $t < 0^{\circ}C$ korral 0,3 K. Ühe termomeetriga kuni 10 K temperatuurivahe mõõtmise lubatud põhiviga on $t \geq -20^{\circ}C$ korral 0,25 K (uutel jaamapsührometritel 0,2 K) ja $t < -20^{\circ}C$ korral 0,4 K.

20.10. Meteoroloogiliste piiritustermomeetrite [GOST 4497-52] lubatud põhiviga on näidatud tabelis 20.10.

20.11. Meteoroloogiliste lingtermomeetrite [GOST 381-69] lubatud põhiviga on -10 - 50° C korral 0,5 K, -20° C korral 0,6 K ja -30° C korral 0,8 K.

20.12. Meteoroloogiliste miinimumtermomeetrite [GOST 6085-

Tabel 20.10

$t: ^\circ\text{C}$	-70	-60	-50	-40	-30	-20 .. 20
$\Delta t: \text{K}$	2,5	2	1,5	1	0,8	0,5

Tabel 20.18

Kl.	Aine	$t: ^\circ\text{C}$	Δt
I	Pt	-200 .. 0	$0,15 \text{ K} + 4,5 \cdot 10^{-3} t $
		0 .. 650	$0,15 \text{ K} + 3 \cdot 10^{-3} t$
II	Pt	-200 .. 0	$0,3 \text{ K} + 6 \cdot 10^{-3} t $
		0 .. 650	$0,3 \text{ K} + 4,5 \cdot 10^{-3} t$
	Cu	-50 .. 180	$0,3 \text{ K} + 3,5 \cdot 10^{-3} t $
III	Cu	-50 .. 180	$0,3 \text{ K} + 6 \cdot 10^{-3} t $

51] lubatud põhiviga $-60 \dots 40^\circ \text{C}$ korral on sama mis tabelis 20.10 näidatud piiritustermomeetrite põhiviga.

20.13. Meteoroloogiliste maksimumtermomeetrite [GOST 630-69] lubatud põhiviga on $-10 \dots 50^\circ \text{C}$ korral 0,4 K, -20°C ja 60 70°C korral 0,5 K ning -30°C korral 0,8 K.

20.14. Meteoroloogiliste nullatermomeetrite [GOST 6079-69] lubatud põhiviga on $-20 \dots 80^\circ \text{C}$ korral 0,5 K, madalama temperatuuri korral aga 0,7 K.

20.15. Põlvtermomeetrite (Savinovi termomeetrite) [GOST 112-51] lubatud põhiviga on 0,5 K.

20.16. Bimetalltermograafide [GOST 6416-62] lubatud põhiviga on 1 K. Kellamehhanismi ööpäevane lubatud põhiviga on 3 min $< 15 \dots 25^\circ \text{C} >$

20.17. Manomeetriliste termomeetrite ja termograafide [GOST 8624-64] täpsusklass K võib olla 0,6; 1; 1,6; 2,5 või 4,0. $D_t^0 = K\%$.

20.18. Takistustermomeetrite [GOST 6651-59] lubatud põhivead (temperatuuri määramisel standardis toodud tabelite kohaselt) on näidatud tabelis 20.18. Normaalne mõõtevõimsus on kuni 2,5 mW (vool kuni 5 mA) Sulavasse jäässe asetatud termomeetrite soojus-ülekanDETAKISTUS ei tohi ületada plaatinatermomeetritel 20 K/W ja vasktermomeetritel 40 K/W

20.19. Termopaaride [GOST 3044-61] elektromotoorse jõu suu-
rim lubatud hälve standardis tabuleeritud funktsioonist $\varepsilon = \varepsilon(t)$ on
näidatud tabelis 20.19.

300°C temperatuuril vastab elektromotoorjõu põhiveale ПП-1
korral 1 K, ПП-30/6 korral 3 K, XA korral 4 K ja XK korral 2,5 K.

Standardis tabuleeritud funktsioon $\varepsilon = \varepsilon(t)$ ja tabel 20.19 kehti-
vad siis, kui termopaari vabade otste temperatuur on 0°C. Termo-
paariga varustatud tehnilistes mõõteriistades on vabad otsad tava-
liselt toatemperatuuril ja õige lugemi saamiseks kasutatakse elekt-
riliisi kompensatsioonimeetodeid. Niisuguse võttega seotud lisavead
peavad olema näidatud konkreetse mõõteriista tunnistusel.

20.20. Optilisi püromeetreid [GOST 8335-67] on nelja tüüpi:

1. tüüp — kõrgendatud täpsusega püromeetrid (pikksilmast
eraldatud);
2. tüüp — tööstuslikud püromeetrid (pikksilmaga kokku ehi-
tatud);
3. tüüp — lühendatud skaalaga püromeetrid (pikksilmaga
kokku ehitatud);
4. tüüp — püromeetrid väikeste pindade temperatuuri mõõt-
miseks.

Püromeetrite lubatud põhiviga Δt : K <15 25°C> on näidatud
tabelis 20.20.

Temperatuurivahemikus 5 50°C (1. tüübil 10 40°C) võr-
dub keskkonnatemperatuurist sõltuv lubatud lisaviga poole lubatud
põhiviga iga 10 deg hälbe kohta normaaltemperatuurist. 45° kalle
riistale märgitud normaalasendist põhjustab lisavea kuni 0,5 Δ%.

20.21. Baromeetritele kinnitatud termomeetrite põhiviga on

Tabel 20.19

Tüüp	$t: ^\circ\text{C}$	$\Delta^\circ\varepsilon: \mu\text{V}$
ПП-1	-20 ... 300	10
	300 ... 1600	$10 + 0,025 (t: ^\circ\text{C} - 300)$
ПП-30/6	300 1800	$10 + 0,033 (t: ^\circ\text{C} - 300)$
XA	-50 ... 300	160
	300 .. 1300	$160 + 0,2 (t: ^\circ\text{C} - 300)$
XK	-50 . . 300	200
	300 .. 800	$200 + 0,06 (t: ^\circ\text{C} - 300)$

Tabel 20.20

Liitnõõtepiirkond /°C/	Alapiirkond nr.	Tüüp			
		1	2	3	4
700 ... 2000 või 800 ... 2000	1	8	12	20	14
	2	13	20	30	20
1200 ... 3200	1	13	20	30	20
	2	40	50	80	50
1500 ... 6000	1	30	35	60	35
	2	130	160	250	160

Tabel 20.22

$t \backslash \eta$	10%	20%	60%	100%
-10° C	70%	35%	12%	7%
-5° C	50%	25%	9%	5%
0° C	35%	17%	6%	4%
10° C	20%	11%	4%	3%
20° C	14%	7%	3%	2%
30° C	9%	5%	2%	1,5%

elavhõbebaromeetrite termomeetritel [GOST 6082-69] 0,5 K ja ane-roidbaromeetrite [GOST 6466-53] termomeetritel 1,5 K.

20.22. Aspiratsioonspührometrites [GOST 6353-52] (suur mudel) kasutatakse GOST 6080-51 kohaselt valmistatud termomeet- reid. Relatiivse niiskuse põhivea reglementeerimisel loetakse tem- peratuuride piirveaks 0,1 K. Nii viisi leitud E_η väärtused on esitatud tabelis 20.22.

20.23. Juushügrometrite [OST 40115] näidu viga piirkonnas $\eta = 30$ 100% võib olla -5 +10%.

21. MÕÕTLAMPID, LUKSMEETRID, POLARIMEETRID JA REFRAKTOMEETRID

21.1. Mõõtlampide [GOST 10771-64] valgustugevuse või valgusvoo lubatud suhteline põhiviga on 12%. Mõõtlampide СИС markeeringu esimene arv näitab toitepinget voltides, teine arv valgustugevust küünaldes. Lampide СИС 10—5 kuni СИС 107—1500 toitevõimsus on 8,6 915 W, värvustemperatuur 2360 2854° K. Lampide СИП korral näitab markeeringu teine arv valgusvoogu luumenites. СИП 3,5—10 kuni СИП 107—3500 toitevõimsus on 1,9 260 W, värvustemperatuur 2360 2800° K.

21.2. Fotoelektriliste luksmeetrite [GOST 14841-69] täpsusklass K on 5; 10 või 15. Põhimõõtepiirkondade (luksmeetrit kasutatakse ilma neelava filtrita) tööosas on $E_E^0 = K\%$. Normaaltemperatuur on 20° C. I grupi luksmeetrite töötemperatuur on 10 35° C, II grupi luksmeetrite töötemperatuur on -10 35° C. Temperatuurist tingitud suhteline lisaviga ei tohi ületada $K\%$ 10 K kohta.

Tavaliste luksmeetrite lubatud suhteline koosinusviga on 60° langemisnurga korral 10%. Koosinusvea parandusseadmega luksmeetrite lubatud suhteline koosinusviga on 60° langemisnurga korral 7% ja 80° langemisnurga korral 15%.

Luksmeetrid taluvad 120% valguskoormust 5 min jooksul ja 200% valguskoormust 1 s jooksul.

Tavalised luksmeetrid on kaliibritud hõõglambile iseloomuliku spektriga valguse jaoks. Teistsuguste spektraalkosseisude juures tuleb luksmeetri näitu korrutada parandusteguriga. Seleenfotolemendiga luksmeetrite parandustegur on päevavalguse ja erinevate luminescentsvalgusallikate korral vahemikus 0,8 1,2.

21.3. Polarimeetrite ja saharimeetrite [GOST 13363-67] nurgalugemi lubatud põhiviga võrdub nooniuse jaotise väärtusega. Küveti pikkuse lubatud põhiviga on 0,1 mm (400 mm küvetid) või 0,05 mm (lühemad küvetid)

21.4. Refraktomeetrite [Taatlemisjuhend 279-66] lubatud põhi-vead on näidatud tabelis 21.4.

Tabel 21.4

Tüübid	РЛУ	РЛ РЛ-2	РП	РДУ ИРФ-22	ИРФ-23	РЖ РПЛ-2	ИРФ-1
Δn_D	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$

Dispersiooni ($n_F - n_C$) mõõtmise lubatud põhiviga on refraktomeetri РДУ korral $2 \cdot 10^{-4}$, ИРФ-22 korral $1,5 \cdot 10^{-4}$

22. ELEKTRIMÕÖTERIISTADE LIIGITUS JA MARKEERING

22.1. Elektrimõõteriistadele esitatavad nõuded on fikseeritud üldstandardis GOST 1845-59 ja eristandardites. Elektrimõõteriistade üldstandard ei kehti raadiotehniliste mõõteriistade, võrdlusmõõteriistade, numbrilise näiduga (osutita) mõõteriistade, kontakt- ja telemõõteriistade, mehaanilise tasakaalustamisega riistade ja mõnede spetsiaalsete riistade kohta.

Eristandardi või üldstandardi number märgitakse mõõteriistale. Kui riistale, mis ei kuulu ülalloeletud erandite hulka, on märgitud ainult eristandardi number, siis peab ta vastama ka üldstandardi GOST 1845-59 nõuetele.

22.2. Mõõdetava suuruse järgi liigitatakse elektrimõõteriistad *ampermeetriteks, voltmeetriteks, vattmeetriteks* jne. Ampermeetrite, voltmeetrite jne. hulka arvatakse ka *kiloampermeetrid, mikroampermeetrid, millivoltmeetrid* jne. Mõõteriista numbrilauale kantakse mõõtühiku tähis: kA, A, mA, μ A, kV, V, mV, MW, kW, W, MVAR, kVAR, VAR, MHz, kHz, Hz, φ° (nurgakraad), $\cos \varphi$, $\sin \varphi$, T Ω , M Ω , k Ω , Ω , m Ω , $\mu\Omega$, mWb (fluksmeetritel), μ F, pF, H, mH või μ H.

Ampermeetrid lülitatakse ahelasse järjestikku, voltmeetrid paralleelselt. Paralleelselt lülitatud ampermeeter näitaks pinget (mõõtepiirkond tavaliselt 0 ... 75 mV), järjestikku lülitatud voltmeeter — voolutugevust (mõõtepiirkond tavaliselt 0 ... 3 mA, tihti aga märksa väiksem või suurem). On olemas riistu, mida saab vajaduse korral kasutada milliampermeetrina, vajaduse korral aga (riista juures ümberlülitusi tegemata) millivoltmeetrina.

Sagedusmõõtur (hertsmeeter) lülitatakse ahelasse nagu voltmeeter, vattmeeter ja fasomeeter aga nagu voltmeetrist ja ampermeetrist koosnev riistade paar.

Oommeetri ja faradmeetri kasutamise korral ei tohi ahelas olla elektromootorjõude (skeem tuleb toiteallikatest eraldada)

22.3. Mõõteriista süsteemi (tööpõhimõtet) tähistavaid tingmärke selgitab tabel 22.3.

22.4. Sisseehitatud muundurite tingmärgid on näidatud tabelis 22.4. Muunduri tingmärk kantakse mõõteriista süsteemi tingmärgi alla.

22.5. Väliste muunduritele ja erinõuetele viitavad tingmärgid tähendavad, et riist on kasutatav ainult koos viidatud muunduriga või viidatud nõude täitmise korral. Nende märkide tähendused on järgmised (konkreetsed arvud on toodud näidetena):



















DC — eeltakistus;

DC 300 k Ω 5 mA — kaliibritud 300-k Ω eeltakistus nimivooluga 5 mA;









HШ — väline šunt;

HШ 75 mV — kaliibritud väline šunt nimipingega 75 mV;

TT — voolutrafo;

	Magnetelektriline pöördpoolriist		Ferrodünaamiline riist
	Magnetelektriline pöördpoollogomeeter		Ferrodünaamiline logomeeter
	Magnetelektriline pöördmagnetriist		Induktsioonsüsteemiga riist
	Magnetelektriline pöördmagnetlogomeeter		Induktsioonsüsteemiga logomeeter
	Elektromagnetiline riist		Magnetinduktsioonsüsteemiga riist
	Elektromagnetiline logomeeter		Elektrostaatiline riist
	Polariseeritud elektromagnetiline riist		Vibratsioonsüsteemiga riist
	Elektrodünaamiline riist		Soojusliku süsteemiga riist
	Elektrodünaamiline logomeeter		Bimetallsüsteemiga riist

Tabel 22.4

	Isoleeritud termomuundur		Elektronmuundur
	Isoleerimata termomuundur		Vibromuundur
	Pooljuht-detektor		Kompensatsioonimuundur
	Elektromehaaniline detektor		Märkide kombinatsiooni näide

ТТ $\frac{400}{5}$ — mõõtetrafo 400 A/5 A;

ТН — pingetrafo;

ТН $\frac{6000}{100}$ — mõõtetrafo 6000 V/100 V;

ДУ — lisaseade;


ТП — termomuundur;

ТП 10 mV — kaliibritud termomuundur nimipingega 10 mV;

СП 0,14 Ω — 0,14 Ω takistusega ühendusjuhtmed;

КП — kaliibritud juhtmed (35 m Ω);

$r_{\text{внш}} = 100\text{--}500 \Omega$ — välisahela takistus 100 500 Ω .

22.6. Klemmimärkide tähendused on järgmised: + ja – polaarsus, ~ vahelduvvoolu klemm, * üldklemm või generaator-klemm (vattmeetrite ja fasomeetrite voolu ja pinge generaator-klemmid ühendatakse skeemi koostamisel tavaliselt kokku)  pooliga ühendatud klemm, \exists ekraaniga ühendatud klemm, korpuse või maanduse märk näitab korpusega ühendatud või maandamisele kuuluvat klemmi.

Kombineeritud riistade (ТЛ-4 jne.) järestikuse oommeetri emj. polaarsus on klemmidele märgitud polaarsusega vastupidine.

22.7. Täpsusklasse on kaheksa: $K=0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5$ või $4,0$. Abimõõtevahendite (eeltakistid jne.) K võib olla $0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5$ või $1,0$.

Täpsusklassi näitav arv kantakse riista numbrilauale tavaliselt ilma lisamärkideta. Mõnel juhul tehakse arvu K alla märk \surd (näiteks 1,5 \surd), mille tähendust selgitatakse järgmises paragrahvis.

22.8. Normaalkäärtust või normaalvahemikku näitavad riista numbrilauale allakriipsutatud arvud (näiteks 500 Hz või 45—500 Hz)

Allakriipsutatamata arvud normaalväärtust või normaalset vahemikku näitavate arvude kõrval näitavad laiendatud vahemiku rajasid

(näiteks 20 — 50 — 120 Hz, 15 — 45 — 65 Hz,

40 — 60 — 120 Hz, 10 — 40 — 60 — 120 Hz).

22.9. Mõõteriistade grupe töötingimuste järgi iseloomustab tabel 22.9. A- ja B-grupi piirniiskused on lubatud ainult pakendis riistade jaoks. A-grupi mõõteriistadele ei tehta erilisi tunnusmärke. B- ja B-grupi mõõteriistadele märgitakse grupi tähis.

22.10. Troopikatingimustele kohandatud mõõteriista tähise lõpus on täht T (näiteks mõõteriist Д 506 T)

22.11. Mehaanilise tugevuse tingmärgid on järgmised:

ОП — tavaline tugevdatud,

ТП — raputuskindel,

ВП — vibratsioonikindel,

Grupp		A	B	B ₁	B ₂	B ₃
Töö- tingi- mused	$t: ^\circ\text{C}$	10 35	-30 40	-40 .. 50	-50 ... 60	-50 .. 80
	Suht. niiskus (temp.)	80% (30° C)	90% (30° C)	95% (35° C)	95% (35° C)	98% (40° C)
Piir- tingi- mused	$t: ^\circ\text{C}$	-40 60	-40 ... 60	-50 60	-60 .. 65	-60 .. 80
	Suht. niiskus (temp.)	95% (30° C)	95% (35° C)	95% (60° C)	95% (60° C)	98% (60° C)

TH — raputuspüsiv,
 BH — vibratsioonipüsiv,
 УП — põrutuskindel,
 märk puudub — tavaline.

22.12. Korpuse tiheduse tingmärgid on järgmised:

B₃ — pritsmekindel,
 B₃ — veekindel,
 ГМ — hermeetiline,
 Г₃ — gaasikindel,
 П₃ — tolmuindel,
 B₆ — plahvatusohutu,
 märk puudub — tavaline.

22.13. Erandlik piirrežiim märgitakse riistale: $U_{\max} = 1.5 U_H$,
 $U_{\max} = 350 \text{ V}$ $I_{\max} = 10 \text{ A}$ jne. Füüsikalise suuruse tähis indeksiga *H*
 tähendab siin nimiväärtust.

22.14. Normaalasendi tähistamiseks kasutatakse järgmisi tingmärke.

▭ horisontaalse numbrilauaga normaalasend.
 ⊥ vertikaalse numbrilauaga normaalasend.
 ∠60° numbrilaua ja horisontaaltasandi vahelise nurga norma-
 alväärtus on 60°

Kui riistal pole ühtki kirjeldatud märkidest, siis ei ole riista
 asend mõõtmisel oluline.

22.15. Elektrilise ja magnetilise varjestatuse kateegooriaid on
 kaks. I kateegooria magnetvarjega riistade süsteemi tingmärk ümbri-
 ritsetakse riskülikukujulise pideva raamiga. I kateegooria elektro-
 staatilise varjega riistade süsteemi tingmärk ümbritsetakse risküli-
 kukujulise punktiirraamiga.

Riistad, mille süsteemi tingmärgi ümber ei ole riskülikukujulist raami, kuuluvad II kategooriasse.

I kategooriat tähistava raamjoone alla kirjutatud sagedus on f_k (vt. p. 23.12).

22.16. Normaalsel orientatsiooni maa magnetvälja suhtes näitab nool tähtedega *N* ja *S*. See märk puudub mõõteriistadel, millele maa magnetväli ei avalda häirivat mõju.

22.17. Isolatsiooni proovipinge arvvaärtust kilovoltides näitab viisnurksesse tähte suletud arv. Garanteerimata isolatsiooniga riistadel on see arv 0.

Punane välgukujuline märk näitab, et mõõteahela isolatsioon on reeglikohasest nõrgem.

22.18. Korrektorit ja arretiiri näitavad märgid \curvearrowright ja App. Nool või punkt arretiiri juures näitab arreteerimise suunda.

22.19. Hüüumärgiga kolmnurk kohustab vaatama täiendavaid märkusi mõõteriista kasutamisesjuhendis.

22.20. Tähiste paigutuse kohta mõõteriistal näeb üldstandard ette järgmist:

mõõtühiku tähis või mõõdetava suuruse nimetus, klassi tähis, riista süsteemi tingmärk ja kaitstuse kategooria märk, tööasendi tingmärk, isolatsiooni proovipinge märk, väljalaske aasta ja vabrikunumber (väikese täpsusega riistadel puudub) peavad olema kantud numbrilauale või riista esiplaadile.

Ülejäänud märgid võivad olla kantud kas numbrilauale, esipaneelile, riista põhjale või küljele.

22.21. Lubatud ülekoormus on kõigi üldstandardile vastavate elektrimõõteriistade korral vähemalt 20%. Kiilbiriistad (välja arvatud registreerivad riistad ja detektori või elektronmuunduriga riistad) peavad taluma lühiajaliselt (1 s) kümnekordset ülekoormust.

22.22. Elektrimõõteriistade säilitamistingimusteks on suhteline niiskus kuni 80% (tolmuvaba, agressiivsete lisanditeta õhk) ja temperatuur 10–35°C A-grupi riistade ning 10–50°C ülejäänud riistade jaoks.

23. ELEKTRIMÕÕTERIISTADE TÄPSUS

23.1. Elektrimõõteriistade lubatud vead on fikseeritud standardites esitatud nõuetega.

Käesolevas paragrahvis vaadeldakse lubatud vea määramist üldstandardi GOST 1845-59 nõuetele vastavate mõõteriistade jaoks.

23.2. Elektrimõõteriista lubatud põhiviga oleneb täpsusklassist *K*.

Kui klass on mõõteriistal tähistatud lisamärkideta arvuga, siis on elektrimõõteriista lubatud taandpõhiviga $K\%$.

Kui klassi tähistava arvu all on märk \sphericalangle , siis on mõõteriista

Tabel 23.3

Mõjuv suurus	Riistale märgitud normaalväärtus	$K \leq 0,5$	$1,0 \leq K$
Temperatuur	t_0	$t_0 \pm 2^\circ \text{C}$	$t_0 \pm 5^\circ \text{C}$
	—	18 ... 22° C	15 ... 25° C
Vahelduvkomponent (alalisvoolu korral)	—	0 ... 1%	0 ... 3%
Kaldenurk	\square, \perp või $\angle \alpha$	$\alpha \pm 1^{\circ*}$	$\alpha \pm 2^\circ$
	—	suvaline	
Sagedus (vahelduvvoolu korral)	f_0	$f_0 \pm 0,02f_0$	
	—	49 ... 51 Hz	
Pinge	U_0	$U_0 \pm 0,02U_0$	
Klirrfaktor	—	0 ... 5% **	

* Rippuva süsteemi korral $\alpha \pm 12'$.

** Detektori või elektronmuunduriga riistade korral 0 ... 1% ($K \leq 0,5$) või 0 ... 2% ($1,0 \leq K$).

lubatud põhiveaks näitude vahe, mis vastab K protsendile skaala geomeetrilisest pikkusest.

Abimõõtevahendite (eeltakistid, šundid jne.) lubatud suhteline põhiviga on $K\%$.

Vahetatava abimõõtevahendi kasutamise korral tuleb mõõteriista ja abimõõtevahendi lubatud suhtelised põhivead liita.

23.3. Normaalingimusi kirjeldab tabel 23.3. Kõik erandid tabelis esitatud andmetest märgitakse riistale.

23.4. Hüsteresi kompenseerimist pole põhivea reglementeerimisel silmas peetud. Seetõttu on variatsioon põhimõtteliselt väiksem kahekordsest lubatud põhiveast. Standardis nõutakse, et variatsioon ei oleks suurem lubatud põhiveast (0,05 ja 0,1 klassi riistadel poolteisekordsest lubatud põhiveast).

Lubatust suurem variatsioon on üks riista mittekorrasoleku tunnustest.

23.5. Elektrimõõteriista lubatud lisaviga on erinevatest mõjuvatest suurustest põhjustatud lubatud lisavigade summa.

Normaalsesse vahemikku kuuluvast mõjuvast suurusest põhjustatud lubatud lisaviga on null.

Lisaviga on tõkestatud ainult töötingimustes.

23.6. Riista asendist sõltuv lisaviga ei ületa lubatud põhiviga, kui kõrvalekalle normaalasendist on:

1° — riputatud süsteemiga riistadel;

5° — kõigil 0,05 0,2 klassi riistadel ja muudel valgusosutiga, tõmmitsate süsteemiga, kompensatsioonisüsteemiga või tindiga registreerivatel tavalistel ning tavalistel tugevdatud (ОП) riistadel;

10° — ülejäänud tavalistel ja tavalistel tugevdatud riistadel;

20° — kantavatel mehaaniliselt tugevdatud (välja arvatud ОП) 0,5 või 1,0 klassi riistadel;

30° — mehaaniliselt tugevdatud (välja arvatud ОП) 0,5 või 1,0 klassi kilbiriistadel ja 1,5 4,0 klassi kantavatel riistadel;

45° — mehaaniliselt tugevdatud (välja arvatud ОП) 1,5 4,0 klassi kilbiriistadel.

23.7. Temperatuurist sõltuv lisaviga ei tohi A-grupi riistade korral ületada lubatud põhiviga 10 K hälbe kohta. Teiste gruppide lubatud lisavead 10 K hälbe korral normaaltemperatuurist on näidatud tabelis 23.7

Abimõõtevahendite temperatuurist sõltuv lisaviga ei tohi ületada poolt lubatud põhiveast ($K=0,02$ korral kolmveerandit lubatud põhiveast) 10 K hälbe kohta.

23.8. Mõõdetava voolu sagedusest sõltuv lisaviga ei ületa laiendatud sagedusvahemiku piirides lubatud põhiviga. Kui mõõte-riistale pole laiendatud sagedusvahemikku märgitud, siis ulatub see normaalsest sagedusvahemikust 10% mõlemale poole.

23.9. Mõõteahela toitepingest sõltuv lisaviga ei ületa lubatud põhiviga, kui pinge erineb normaalpingest kuni 10%.

Tabel 23.7

K	0,2	0,5	1,0	1,5	2,5	4,0
gr. Б	0,15%	0,4%	0,8%	1,2%	2,0%	3,0%
gr. B ₁ , B ₂	0,15%	0,3%	0,5%	0,8%	1,2%	2,0%
gr. B ₃	—	0,3%	0,4%	0,6%	0,8%	1,2%

K	a-tüüpi mõju		b-tüüpi mõju	
	I kat.	II kat.	I kat.	II kat.
0,05 0,5	0,5	1,0	0,25	0,5
1,0; 1,5	1,0	2,5	0,5	1,0
2,5; 4,0	2,5	5,0	0,5	1,0

23.10. Abiahelate toitepingest sõltuv lisaviga ei ületa poolt lubatud põhiveast, kui pinge erineb normaalpingest kuni 10%.

23.11. Abiahelate toitesagedusest sõltuv lisaviga ei ületa poolt lubatud põhiveast, kui sagedus erineb normaalsagedusest kuni 2%.

23.12. Magnetväljast või elektriväljast sõltuva lisavea arvessevõtmiseks on tarvis arvu K suurendada tabelis 23.12 näidatud arvu võrra.

a -tüüpi mõju on:

— alalisvooluriistade korral 400 A/m tugevune konstantne homogeenne magnetväli;

— vahelduvvooluriistade korral 400 A/m efektiivtugevusega mõõdetava voolu sagedusega vahelduv magnetväli (kui sagedus on suurem mõõteriistale märgitud f_k -st või märgi puudumise korral ühest kilohertsist, siis muudetakse väljatugevust sellest sagedusest alates pöördvõrdeliselt sagedusega);

— elektrostaatiliste riistade korral mõõdetava pinge sagedusega elektriväli, mille efektiivtugevus on 10 kV/m + U /m (riista nimipinge $U \leq 40$ kV) või 50 kV/m (riista nimipinge $U \geq 40$ kV).

b -tüüpi mõju on ferromagnetilise kilbi või vahetult vaheldava mõõteriista vastu asetatud teise mõõteriista mõju.

23.13. Registreerivate mõõteriistade [GOST 9999-62] diagrammi nihke lubatud põhiviga on $0,01 K_m l + 1$ mm, kus K_m on diagrammi veomehhanismi täpsusklass (märgitakse riistale) ja l — nihke väärtus.

Pärast mõõdetava suuruse järsku muutmist nullist väärtuseni x võib riista näit tõusta hetkeks väärtuseni $1,1 x$.

23.14. Ampermeetri [GOST 8711-60] takistuse ja induktiivsuse lubatud suhteline põhiviga tingimusel $K \leq 0,5$ on 10% (alalisvooluriistad) või 20% (vahelduvvooluriistad).

23.15. Voltmeetri [GOST 8711-60] nimivoolu lubatud suhteline põhiviga on $K\%$, vahetatavate või piiratult vahetatavate eeltakistitega komplekteeritud voltmeetri korral aga $0,5 K\%$.

23.16. Kaliibritud juhtmed [GOST 1609-67] jaotatakse kahte täpsusklassi. 0. klassi juhtmete paari $<18 \text{ } 22^{\circ}\text{C}>$ takistus on $(35 \pm 1) \text{ m}\Omega$, 1. klassi juhtmete paari $<15 \text{ } 25^{\circ}\text{C}>$ takistus on $(35 \pm 2) \text{ m}\Omega$.

Kaliibritud juhtmetega millivoltmeeter näitab pinget juhtmete vabade otste vahel (pinge riista klemmidel on näidust väiksem)

Tavalised kaliibritud juhtmed ei ole individuaalsed ja neid võib vahetada.

23.17. Induktoriga oommeetri [GOST 8038-60] emj. lubatud suhteline põhiviga on 10%.

23.18. Elektriarvestite [GOST 6570-60] lubatud suhteline põhiviga 10–150% koormuse ja $\cos \varphi = 1$ (reaktiivenergia arvestite puhul $\sin \varphi = 1$) korral on $K\%$ (2,0 ja 2,5 klassi aktiivenergia arvestite korral 200% koormuseni). Aktiivenergia arvestite klassid on 1,0; 2,0 ja 2,5; reaktiivenergia arvestite klassid on 2,0 ja 3,0.

Ühefaasiliste 2,0 ja 2,5 klassi arvestite maksimaalne töövool on nimivoolust vähemalt 2 korda suurem. Arvestid peavad taluma 0,5 s jooksul 30-kordset ($I_{\text{nom}} \leq 10 \text{ A}$) või 20-kordset ($I_{\text{nom}} > 10 \text{ A}$) nimivoolu.

Üldstandard GOST 1845-59 elektriarvestite kohta ei kehti.

24. ELEKTRILISED MÖÖDUD

24.1. Normaalelementide [GOST 1954-64] emj. on 1,0185.

1,0194 V Elementide normaaltemperatuurile laandatud emj. muutus ühe aasta jooksul ei tohi ületada $K\%$. Normaalelementide andmed on esitatud tabelis 24.1.

24.2. Mõõttakistite [GOST 6864-69] nimiväärtused on 10^{-5} – $10^9 \Omega$. Täpsusklass K võib olla 0,0005; 0,001; 0,002; 0,005 $<19,9 \text{ } 20,1^{\circ}\text{C}>$; 0,01; 0,02 või 0,05 $<19,8 \text{ } 20,2^{\circ}\text{C}>$. Täpsusklassiga 0,0005 valmistatakse ainult 1 Ω nimiväärtusega mõõttakistiteid. Mõõttakistite lubatud suhteline põhiviga on $K\%$.

Töötemperatuur on $K \leq 0,005$ korral $18 \text{ } 24^{\circ}\text{C}$, ülejäänud mõõttakistitel $15 \text{ } 30^{\circ}\text{C}$. Suhteline niiskus ei tohi ületada 80%. Temperatuuriparandi määramiseks tarvilike kordajate väärtused on näidatud mõõttakisti tunnistusel. Lubatud suhteline jääklisaviga töötemperatuurivahemikus pärast temperatuuriparandi arvessevõtmist on näidatud tabelis 24.2. Mõõttakisti takistuse aastane muutus ei tohi ületada samas tabelis näidatud väärtust $E(a)$.

Nelja klemmiga mõõttakisti takistus on pingeklemmidevahelise pinge ja vooluklemme läbiva voolu tugevuse suhe tingimusel, et pingeklemme läbiva voolu tugevus on null.

Tavalisi mõõttakistiteid kasutatakse alalisvooluahelais, mõõttakistiteid КСИБ aga nii alalis- kui ka vahelduvvooluahelais. 10 Ω

Tabel 24.1

Tüüp	K	I_{max}	Töötemperatuur
Küllastatud	0,001	1 μ A	19,5 . 20,5° C
„	0,002	1 μ A	18 . 22° C
„	0,005	1 μ A	10 . 40° C
Küllastamata	0,02	10 μ A	5 . 55° C

Tabel 24.2

K	0,0005	0,001	0,002	0,005	0,01	0,02	0,05
E'_R	0,0002%	0,0004%	0,0005%	0,001%	0,002%	0,005%	0,02%
$E(a)$	0,0003%	0,0005%	0,001%	0,002%	0,002%	0,005%	0,02%

takisti КСИБ ajategur on kõigest 10^{-8} s; 1; 100 või 1000 Ω korral 10^{-7} s, teiste nominaalide korral võib ajategur olla suurem.

24.3. Takistussalved [GOST 7003-64] võivad olla nelja tüüpi: MCP — pöördlülititega, MCT — pistikutega, MC3 — paljuklemmilised, lülitita, MCB — kahvellülititega. Takistussalvesid valmistakse kogutakistusega kuni 10^{10} Ω .

Normaaltemperatuur t_n ja lubatud põhiviga $\Delta R < \eta \leq 80\% >$ olenevalt dekaadide üldarvust m ja salve näidust R on näidatud tabelis 24.3.1. Kui m on tabelis 24.3.1 näidatust väiksem, siis on lubatud suhteline põhiviga $K\%$.

Takistussalve nulltakistus R_0 reglementeeritakse põhiveast sõltumatult. R_0 ei tohi ületada korrutist ma . Teguri a väärtused on näidatud tabelis 24.3.2.

Töötemperatuur on $K \leq 0,05$ korral 15 . 30° C, $K \geq 0,1$ korral 10 . 35° C. Lisavea reglementeerimisel pole temperatuuriparandi arvessevõtmist eeldatud. Temperatuurist sõltuv lisaviga ei tohi ületada lubatud põhiviga $K \leq 0,5$ korral 5 K hälbe ja $K \geq 0,1$ korral 10 K hälbe kohta.

Termoelektromotoorjõud $\leq 10^5$ Ω nimiväärtusega koormamata salve klemmide vahel on $K \leq 0,05$ korral kuni 5 μ V; $K \geq 0,1$ korral kuni 10 μ V

Tabel 24.3.1

K	t_n	m	$\Delta^\circ R$
0,01	19 .. 21° C	≥ 4	$R \cdot K\% + m \cdot 0,2 \text{ m}\Omega$
0,02; 0,05	18 .. 22° C		
0,1	15. . 25° C	≥ 3	$R \cdot K\% + m \cdot 0,4 \text{ m}\Omega$
0,2			$R \cdot K\% + m \cdot 1 \text{ m}\Omega$
0,5; 1,0	10.. 35° C		

Tabel 24.3.2

K	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	1,0
$a : \text{m}\Omega$	2	3	5	6	10	20	40

Tabel 24.3.3

$R : \Omega$	0.. 10	10. 10 ²	10 ² ...10 ⁴	10 ⁴ . 10 ⁵	10 ⁵ ...10 ⁸	10 ⁸ 10 ⁷
$\tau : \text{s}$	10 ⁻⁷	5 · 10 ⁻⁸	10 ⁻⁷	3 · 10 ⁻⁷	3 · 10 ⁻⁶	3 · 10 ⁻⁵

Takistussalved on ette nähtud kas ainult alalisvooluahelates tarvitamiseks või vahelduv- ja alalisvooluahelates tarvitamiseks. Vahelduvvoolu-takistussalve ajategur ei tohi ületada tabelis 24.3.3 näidatud väärtust. Kui $f \leq \sqrt{K}/7\tau$, siis sagedusest sõltuv lisaviga ei ületa lubatud põhiviga. $R \leq 3 \Omega$ korral on vahelduvvoolu takistus-salve induktiivsus $\leq 0,3 \mu\text{H}$.

Sagedamaks hooletusveaks takistussalvede kasutamisel on pistiksalve pistikute halb kontakt. Kõik pistikud on vaja enne mõõtmist pöörava liigutusega korralikult pesadesse suruda.

24.4. Induktiivsussalvede [GOST 10770-64] täpsusklassid on 0,05; 0,1 <18 22° C> 0,2; 0,5 ja 1,0 <15 25° C> (vanemate mudelite klass võib olla ka 0,3) Normaalne sagedusvahemik on 20 . 20 000 Hz. Ühe dekaadiga salvede lubatud suhteline põhiviga on $K\%$, mitme dekaadiga salvede korral aga $(1 + m L_d/L) K\%$, kus

m on dekaadide arv. L_d — salvede МІС ja МВІС korral väikseima dekaadi astme väärtus, ülejäänud salvede korral variomeetri nimi-induktiivsus, L — salve näit.

Naaberdekaadidevahelisest mõjust tingitud lubatud lisaviga on $0,3 \Delta^\circ L$. See lisaviga puudub vaid siis, kui kõige kõrgema sisselülitatud dekaadi naaberdekaadi näit on null.

Sagedusest sõltuv lisaviga ei ületa $\Delta^\circ L$, kui sagedus on laiendatud sagedusvahemiku piirides.

Temperatuurist sõltuv lisaviga ei tohi töötemperatuurivahemiku ($10 \dots 35^\circ \text{C}$) piirides ületada lubatud põhiviga 10 K hälbe kohta.

Täielikult sisselülitatud dekaadidega induktiivsussalve hüvetegur laiendatud sagedusvahemiku maksimaalsel sagedusel on vähemalt 30.

24.5. Mahtvussalvede [GOST 6746-65] täpsusklassid on 0,05; 0,1 <18 22° C>; 0,2; 0,5 ja 1,0 <15 25° C>. < $\eta \leq 80\%$ >. Salvede МЕП lubatud taandpõhiviga on $K\%$. Uhe dekaadiga salvede МЕС ja mitme dekaadiga salvede МЕС, mille madalaima dekaadi aste on $\geq 0,1 \mu\text{F}$, lubatud suhteline põhiviga on $K\%$. Ülejäänud salvede lubatud suhteline põhiviga on $(1 + 0,8m C_d/C) K\%$, kus m on dekaadide arv, C_d — salve МЕС korral madalaima dekaadi aste, salve МЕСП korral pöördkondensaatori nimimahtuvus, C — salve näit.

Temperatuurist sõltuv lubatud suhteline lisaviga on töötemperatuurivahemikus ($10 \dots 35^\circ \text{C}$) $K=0,05$ ja $K=0,1$ korral $5 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$, $K=0,1$ korral 10^{-4}K^{-1} , $K=0,2$ ja $K=0,5$ korral $2 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}$ ja $K=1$ korral $5 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}$.

Maksimaalne kaonurga tangens on salvedel МЕП $K \leq 0,5$ korral $5 \cdot 10^{-5}$, $K=1$ korral $1,2 \cdot 10^{-4}$, salvedel МЕС ja МЕСП aga $0,5 E_c^0$.

Salve takistus peab rahuldama võrratust $R \geq 4s/K(C + mC_d)$

25. MÕOTESILLAD JA -POTENSIOMEETRID

25.1. Alalisvoolu mõotesildade [GOST 7165-66] täpsusklassid on 0,005; 0,01 <19 21° C>; 0,02; 0,05 <18 22° C>; 0,1; 0,2; 0,5 <15 25° C>; 1; 2; 5; 10 <10 35° C>. < $\eta \leq 80\%$ > Lubatud suhteline põhiviga on mõõtepiirkonna tööosas $K\%$, väljaspool tööosa leitakse lubatud viga riistale märgitud valemi järgi.

Töötemperatuurivahemik on $K \leq 0,05$ korral $15 \dots 30^\circ \text{C}$, $K \geq 0,1$ korral $10 \dots 35^\circ \text{C}$. Temperatuurist sõltuv suhteline lisaviga ei tohi ületada $K \leq 0,05$ korral kahekordset lubatud põhiviga ja $K \geq 0,1$ korral lubatud põhiviga 10 K hälbe kohta.

25.2. Vahelduvvoolu mõotesildade [GOST 9486-69] täpsusklassid on 0,01, 0,02 <19,5 20,5° C>; 0,05 <19 21° C>; 0,1; 0,2; 0,5; 1 <15 25° C>; 2 ja 5 <10 35° C>. Teiste mõjuvate suu-

Tabel 25.2.1

Silla tüüp	K	Möödetav suurus	Lubatud suhteline põhiviga %/
МЕП	$\leq 0,05$	tg δ	0,4 K/tg $\delta+1$
	0,1; 0,2		0,2 K/tg $\delta+2$
	$\geq 0,5$		0,2 K/tg $\delta+5$
МИП	$\leq 0,2$		0,8 K/tg $\delta+2,5$
	$\geq 0,5$		0,5 K/tg $\delta+5$
МИЕП	$\leq 0,2$		Q
	$\geq 0,5$	0,5 K/tg $\delta+10$	
	$\leq 0,2$	0,8 KQ+5	
МНП	$\geq 0,5$	0,5 KQ+10	
	$\leq 0,2$	0,8 KQ+2,5	
	$\geq 0,5$	0,5 KQ+5	

Tabel 25.2.2

K	0,01; 0,02	0,05	0,1 ... 2	5
$[t] : ^\circ\text{C}$	17 ... 23	15 ... 25	10 ... 35	-10 ... 40
Δ'_{1K}	0,2 Δ°	0,1 Δ°	0,05 Δ°	
$\Delta'_{80A/m}$	Δ°		0,5 Δ°	

ruste normaalvahemikud on järgmised: $p=960 \dots 1040$ mb, $\eta=50 \dots 80\%$, $U_{\text{toide}}=205 \dots 230$ V $f_{\text{toide}}=49,5 \dots 50,5$ Hz. Lubatud suhteline põhiviga mõõtepiirkonna töösas on mahtuvuse mõõtmisel $[K+(K+1) 10 \text{ pF/C}] \%$, kus C on möödetav mahtuvus, induktiivsuse mõõtmisel $[K+(K+1) 3 \mu\text{H/L}] \%$, kus L on möödetav induktiivsus. Elektrilise kaonurga tangensi tg δ ja hüveteguri Q mõõtmise lubatud suhteline põhiviga on näidatud tabelis 25.2.1.

Töötemperatuurivahemik [I], lubatud lisaviga temperatuuri 1 K hälbe kohta normaalingimustest Δ'_{1K} ja lubatud lisaviga 50 Hz 80 A/m välises magnetväljas $\Delta'_{80A/m}$ on näidatud tabelis 25.2, kus Δ° tähistab lubatud põhiviga. Juhul kui töösagedus on alla 200 Hz või sujuvalt reguleeritav, tuleb magnetvälja tugevuse 80 A/m asemele võtta 16 A/m, $f > 1$ kHz korral aga $\frac{16}{f : \text{kHz}}$ A/m.

25.3. Alalisvoolu mõõtepotsiomeetrite [GOST 9245-68] täpsusklassid ja olulisemad andmed on näidatud tabelis 25.3, kus U tähistab potsiomeetri näitu ja U_d madalaima dekaadi astme või reohordi jaotise väärtust. Δ'_{5K} tähistab lubatud lisaviga temperatuuri 5 K hälbe kohta normaalvahemikust ja ε inversioonlülitita potsiomeetri lubatud termoelektromotoorjõudu.

Umberlülitamisel võib ühekantuurilise potsiomeetri üldtakistus muutuda kuni $(K/6)\%$.

Potsiomeetrile sisseehitatud nullindikaatori hälve pinge muutmisel $\Delta^\circ U$ võrra on vähemalt üks jaotis (valgusosutiga indikaatori korral vähemalt kaks jaotist). Hoolika mõõtmise korral lubab see tasakaalustamise viga ignoreerida.

Tabel 25.3

K	Normaaltemp. [°C]	Töötemp. [°C]	Põhiviga	Δ'_{5K}	ε
0,0005	19...21	15...30	$E^\circ_v = K\% + \frac{2U_d}{5U}$	$\Delta^\circ U$	$\frac{U_d}{10}$
0,001					
0,002					
0,005					
0,01	18...22			$\frac{\Delta^\circ U}{2}$	$\frac{U_d}{5}$
0,015					
0,02	15...25	10...35	$E^\circ_v = K\% + \frac{U_d}{2U}$		
0,05					
0,1					
0,2	10...40		$D^\circ_v = K\%$	$\frac{\Delta^\circ U}{4}$	$\frac{U_d}{2}$

Potentsiomeetrid võimaldavad vahetult mõõta aimult pinget. Voolutugevuse mõõtmiseks kasutatakse šuntidena mõõttakisteid.

Mõõtmistulemuse täpsuse hindamisel on tarvis potentsiomeetri lubatud suhtelisele veale liita normaalelemendi lubatud suhteline viga.

25.4. Pingejagureid [GOST 11282-65] kasutatakse potentsiomeetrite mõõtepiirkonna laiendamiseks. Pingejagurite täpsusklassid on 0,001; 0,002 <19,5 20,5°C>; 0,005 <19 21°C>; 0,01 <18 22°C>; 0,02 (vanematel mudelitel ka 0,03) <17 .. 25°C>; 0,05; 0,1 <15 30°C> ja 0,2 <10 40°C>. < $\eta \leq 80\%$ >. Töötemperatuur on $K \leq 0,03$ korral 15 .. 30°C, $K \geq 0,05$ korral 10 40°C. Jagamissuhte lubatud suhteline põhiviga on $K\%$.

Temperatuurist sõltuv lisaviga ei ületa $K \leq 0,03$ korral lubatud põhiviga, $K \geq 0,05$ korral aga poolt lubatud põhiveast 10 K hälbe kohta.

26. RAADIOTEHNILISED MÕÖTERIISTAD

26.1. Raadiotehnilistele mõõteriistadele esitatavad nõuded on fikseeritud üldstandardis GOST 9763-67 ja konkreetsemates eristandardites.

Standardid ei kirjelda raadiotehnilisi mõõteriistu nii täielikult kui elektrimõõteriistu ning raadiotehnilisi mõõtmisi sooritades peab alati tundma tarvilusel olevate riistade kasutamisingimuste.

26.2. Normaalingimused on: temperatuur 15 25°C (kõrgendatud täpsusega riistadel 19 20°C), suhteline niiskus 50 80%, õhurõhk 960 1040 mb, toitepinge ja toitesageduse suhteline viga kuni 2%, koormus ja eelsoojendusaeg riista kasutamisingimuste kohased.

26.3. Lubatud kasutamisingimuste järgi jaotatakse raadiotehnilised mõõteriistad viide gruppi. Neid gruppe kirjeldab tabel 26.3. Äärmisi töötemperatuure ja piirtemperatuure peavad riistad taluma vähemalt 4 tundi, maksimaalset tööniiskust ja piirniiskust aga 48 tundi (IV ja V grupi riistad peavad piirniiskust taluma 96 tundi).

Temperatuurist sõltuv lisaviga ei tohi ületada poolt lubatud põhiveast 10 K hälbe kohta.

Toitepingest sõltuv lisaviga ei tohi ületada poolt lubatud põhiveast 10% hälbe kohta.

Lisavigade reglementeerimisel on silmas peetud riista nulli ja tundlikkuse võimalikku korrigeerimist kooskõlas kasutamisingimustega.

26.4. Elektronvoltmeetrite [GOST 9781-67] täpsusklassid on 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0 ja 6,0. Pingejagurite täpsusklass võib olla ka 0,05. Lubatud põhiviga võib olla skaala ulatuses konstantne nagu elektrimõõteriistadel, võib aga sõltuda ka efektiivsetest reegli

Grupp	Töötingimused		Piirtingimused		Vastupidavus meh. mõjudele
	$t: ^\circ\text{C}$	$\eta_{max}(t)$	$t: ^\circ\text{C}$	$\eta_{max}(t)$	
I	10 ... 35	80% (20°C)	-40 ... 50	95% (20°C)	—
II			-40 ... 60		
III	-10 ... 40	90% (25°C)		95% (25°C)	vibratsioonikindlad
IV	-30 ... 50	95% (25°C)	-40 ... 65	95% (30°C)	
V	-40 ... 50	95% (30°C)	-50 ... 65		

kohaselt riista näidust. Ühelgi juhul aga ei tohi taandpõhiviga ületada $K\%$.

Nulli nihe toitepinge muutmisel 10% võrra ei tohi ületada $K\%$ skaala pikkusest. Nulli triiv ühe tunni jooksul ei tohi ületada $2K\%$ skaala pikkusest.

Voltmeetrid nimipingega kuni 10 V peavad taluma minutilist koormamist viiekordse nimipingega, $U_{nom} = 10 \dots 100$ V korral kolmekordse nimipingega ja kõrgema nimipingega korral poolteisekordse nimipingega. Termomuunduri või spetsiaaldetektoriga voltmeetrid ülekoormust ei talu.

26.5. Elektronostsillograafide [GOST 9810-69] täpsust iseloomustavad andmed on esitatud tabelis 26.5.

26.6. Madalsagedusgeneraatorite [GOST 10501-63] sageduspiirkond on vahemikus 20 ... 300 000 Hz. Generaatori täpsust iseloomustavad klass ja kategooria. Sageduse lubatud suhteline põhiviga ja lisavead on näidatud tabelis 26.6.1. Selle tabeli viimane rida kehtib ainult mittehäälestatava nulliga generaatorite kohta. Tuikesagedusgeneraatorite lisavead võivad olla märksa suuremad. Kategooriast sõltuvad suurused on näidatud tabelis 26.6.2.

26.7. Raadiosageduslike signaalgeneraatorite [GOST 10622-63] täpsust iseloomustavad andmed on esitatud tabelis 26.7

26.8. Heterodüün-sagedusmõõtluri [GOST 13306-67] Ч4-1 lubatud põhiviga on 1. diapsoonis 50 Hz ja 2. diapsoonis 400 Hz. Sagedusmõõtlurite Ч4-3, Ч4-5, Ч4-8А ja Ч4-25 lubatud suhteline põhiviga on $5 \cdot 10^{-5}$ sagedusmõõtluri Ч4-9 lubatud suhteline põhiviga on $5 \cdot 10^{-6}$.

Tabel 26.5

Täpsusklass	I	II	III	IV
Amplituudi ja laotuse lubatud ebalineaarsus	3%	5%	10%	20%
Amplituudi ja aja lubatud taandpõhiviga	3%	5%	10%	—
Kiire lubatud ülevõnge nelinurkimpulsi platoost, kui impulsi tõusuaeg võrdub poolteisekordse 90% tasakaalustumise ajaga	2%	3%	5%	10%
Joone jämeduse ja ekraani tööosa laiusel lubatud suhe	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{30}$

Tabel 26.6.1

Täpsusklass	I	II	III	IV
E°_j	0,1%	$0,3\% + \frac{1 \text{ Hz}}{f}$	$1\% + \frac{2 \text{ Hz}}{f}$	$3\% + \frac{2 \text{ Hz}}{f}$
E'_t temperatuuri 10 K hälbe või toitepinge 10% hälbe kohta	0,03%	0,1%	0,3%	1%

Tabel 26.6.2

Kategooria	1	2	3	4
Väljundpinge lubatud suhteline põhiviga	1,5%	2,5%	4%	6%
≤ 70 dB attenuaatori lubatud põhiviga	0,1 dB	0,3 dB	0,5 dB	0,8 dB
> 70 dB attenuaatori lubatud põhiviga	0,2 dB	0,5 dB	0,8 dB	1 dB
Maksimaalne klirrfaktor	0,1%	0,5%	1%	2%
Maksimaalne foon nimipingest	0,003%	0,01%	0,03%	0,1%

Klass	I	II	III
Sageduse lubatud suht. põhiviga E'_f	0,5%	1%	2%
E'_f $t=5^\circ\text{C}$ ja $t=35^\circ\text{C}$ korral	0,15%	0,3%	0,75%
E'_f toitepinge 10% hälbe korral	0,03%	0,1%	0,3%
E'_f attenuaatori sisselülimisel	0,005%	0,01%	0,03%
f maks. lühiajaline muutus	$3 \cdot 10^{-5} f +$ $+10 \text{ Hz}$	$2 \cdot 10^{-4} f +$ $+50 \text{ Hz}$	$3 \cdot 10^{-4} f +$ $+50 \text{ Hz}$
Väljundpinge lubatud põhiviga $\Delta^\circ U$	$0,08 U +$ $+0,05 \mu\text{V}$	$0,13 U +$ $+0,5 \mu\text{V}$	$0,22 U +$ $+5 \mu\text{V}$
Mõdulatsiooniprotsendi m lubatud põhiviga	$0,05 m +$ $+2\%$	$0,05 m +$ $+4\%$	—
Modul. maks. klirrfaktor $m=30\%$)	2%	4%	8%

26.9. Loendur-sagedusmõõturite [GOST 13305-67_i] viga on diskreetsusest tingitud vea ja generaatori ebatäpsusest tingitud vea summa. Diskreetsusest tingitud lubatud viga on määratud ühe loendamisühikuga. Generaatori ebatäpsusest tingitud lubatud suhteline põhiviga on sagedusmõõturil Ч3-3 $5 \cdot 10^{-6}$, sagedusmõõturitel Ч3-1 ja Ч3-4 $2 \cdot 10^{-6}$, sagedusmõõturitel Ч3-9 ja Ч3-14 $5 \cdot 10^{-7}$ ning sagedusmõõturil Ч3-12 10^{-7} .

26.10. Raadiotehnilise mõõteriista tüübitähis koosneb kolmest osast; esimesel kohal seisev täht näitab rühma, tähele järgnev number — alarühma, sidekriipsuga eraldatud number on tüübi number (tähenduseta)

Rühmad on järgmised:

A — voolutugevuse mõõteriistad;

B — pinge mõõteriistad (alarühmad on: 1 — taatelmõõteriistad, 2 — alalisvooluriistad, 3 — vahelduvvooluriistad, 4 — impulssmõõteriistad, 5 — faasitundlikud riistad, 6 — selektiivsed riistad, 7 — universaalsed riistad);

Г — mõõtegeneraatorid;

Д — attenuaatorid ja pingejagurid;

- E — takistuse, mahtuvuse, induktiivsuse ja teiste koondatud parameetrite mõõtmise riistad;
- И — impulssmõõteriistad;
- Л — riistad vaakum- ja pooljuhtseadmete parameetrite mõõtmiseks;
- М — võimsuse mõõteriistad;
- Π — väljatugevuse mõõteriistad;
- P — riistad jaotatud parameetritega seadmeid iseloomustavate suuruste mõõtmiseks;
- C — riistad signaalide kuju ja spektri mõõtmiseks;
- У — mõõtevõimendid;
- φ — faasimõõteriistad;
- X — riistad sageduskarakteristikute mõõtmiseks;
- Ч — sageduse mõõteriistad.

IV peatükk. MATEMAATILINE STATISTIKA

27. TÕENÄOSUSTEORIA ALGMÕISTED

27.1. Juhuslik sündmus ja juhuslik suurus. *Juhuslikuks sündmuseks* nimetatakse sündmust, mille toimumist või mittetoimumist pole võimalik kindlalt ennustada. Niisugune on näiteks sündmus: «veereva täringu peatumisel jääb peale kuus silma».

Tähistame sooritatud katsete arvu tähega n ja sündmuse toimumiskordade arvu tähega k . Suhet k/n nimetatakse sündmuse *suhteliseks sageduseks*. Täringu kümnekordisel veeretamisel on kuue silma saamise suhteline sagedus kord 0,1, kord 0,4, kord 0,2 jne. Kui täringut rohkem kordi veeretada, siis on sama sündmuse suhteline sagedus tõenäoliselt ligemal arvule $1/6$. See arv on vaadeldava sündmuse *tõenäosus*. Sündmuse A tõenäosust tähistatakse $P\{A\}$.

Juhuslike sündmuste hulka võib võtta ka *võimatud ja kindlad sündmused*, omistades neile tõenäosused 0 ja 1.

Juhuslikuks nimetatakse suurust, mis sõltub juhuslikust sündmusest ja mille väärtust pole seetõttu võimalik enne sündmuse toimumist kindlalt ennustada. Näiteks täringu veeretamisel saadav silmade arv on juhuslik suurus.

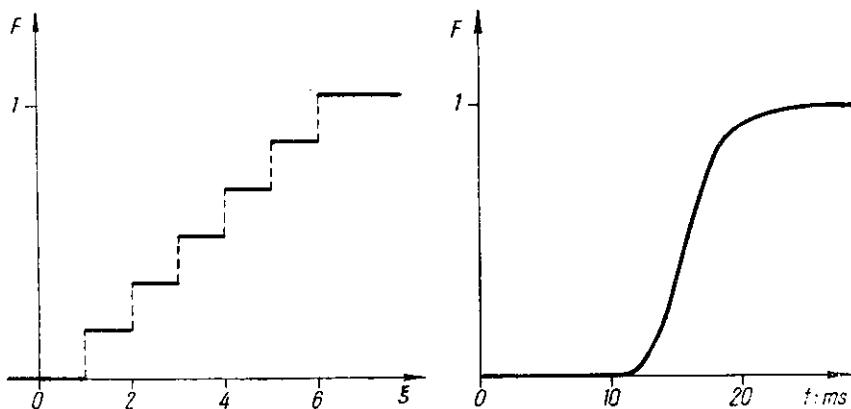
27.2. Jaotusfunktsioon. Sündmuse «juhuslik suurus x osutub väiksemaks etteantud kindlast suurusel ξ » tõenäosus $P\{x < \xi\}$ sõltub kindla suuruse ξ valikust.

Funktsiooni

$$F(\xi) = P\{x < \xi\}$$

nimetatakse juhusliku suuruse x *jaotusfunktsiooniks* ehk *kumulatiivseks jaotusfunktsiooniks*. Jaotusfunktsiooni tähisele võib tarvide korral lisada indeksina vaadeldava juhusliku suuruse tähise: $F_x(\xi)$

Juhuslikku suurust, mille võimalike väärtuste hulk on diskreetne, nimetatakse *diskreetseks*. Diskreetse juhusliku suuruse jaotusfunktsiooni graafik on trepikujuline. Juhuslikku suurust, mille jaotusfunktsioon on pidev, nimetatakse *pidevaks*. Joonisel 27.2 on ühe diskreetse juhusliku suuruse (täringu silmade arv) ja ühe pideva juhusliku suuruse (relee viiteaeg) jaotusfunktsioonide graafikud.



Joonis 27. 2. Täringu silmade arvu ning relee viiteaja jaotusfunktsioonide graafik.

27.3. Suhteline sagedusfunktsioon. Sündmuse «juhuslik suurus x omandab etteantud väärtuse ξ » tõenäosus $P\{x=\xi\}$ sõltub ξ valikust.

Funktsiooni

$$p(\xi) = P\{x = \xi\}$$

nimetatakse juhusliku suuruse x suhteliseks sagedusfunktsiooniks.

Täringu silmade arvu suhtelise sagedusfunktsiooni väärtus $\xi=1$, $\xi=2$, ..., $\xi=6$ korral on $1/6$, kõigi ülejäänud väärtuste (0,12; 10 jne.) korral aga null.

Diskreetse juhusliku suuruse suhtelist sagedusfunktsiooni võib defineerida määratuna ainult juhusliku suuruse võimalike väärtuste hulgal.

27.4. Tihedusfunktsioon. Sündmuse «pidev juhuslik suurus x satub kitsasse vahemikku $[\xi, \xi + \Delta\xi)$ kindla suuruse ξ naabruses» tõenäosus $P\{\xi \leq x < \xi + \Delta\xi\}$ võib osutada ligikaudu võrdeliseks vahemiku laiusel $\Delta\xi$. Täpse võrduse $x=\xi$ korral on $\Delta\xi=0$, mistõttu pideva juhusliku suuruse sagedusfunktsiooni väärtus on kõikjal null. Pideva juhusliku suuruse käitumist väärtuse ξ naabruses iseloomustab suhe $P\{\xi \leq x < \xi + \Delta\xi\}/\Delta\xi$. Selle suhte piirväärtust

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{P\{\xi \leq x < \xi + \Delta\xi\}}{\Delta\xi} \quad (27.4)$$

* Siin ja edaspidi nimetatakse kõiki sidusaid piirkondi arvuhulkades vahemikeks, olenemata sellest, kas nad sisaldavad rajasid või mitte. Lahtise vahemiku, poollahkse vahemiku (poollõigu) ja kinnise vahemiku (lõigu) eristamiseks kasutatakse tavakohaselt kumer- ja nurksulge.

nimetatakse juhusliku suuruse *tõenäosustiheduseks* punktis ξ . Funktsiooni $f(\xi)$, mis seab suuruse ξ igale väärtusele vastavusse valemiga (27.4) defineeritud tõenäosustiheduse väärtuse, nimetatakse juhusliku suuruse *tihedusfunktsiooniks*. Tihedusfunktsiooni tähisele võib samuti kui jaotusfunktsiooni tähisele lisada tarviduse korral indeksina vaadeldava juhusliku suuruse tähise: $f_x(\xi)$

Diskreetsel juhuslikul suurusel ei ole lõplikku tihedusfunktsiooni: piirväärtus (27.4) on juhusliku suuruse võimalike väärtuste kohal lõpmatu.

27.5. Tihedusfunktsiooni või suhtelise sagedusfunktsiooni ja jaotusfunktsiooni omadused. Pidevat juhuslikku suurust sobib kirjeldada tihedusfunktsiooni, diskreetsel juhuslikku suurust aga suhtelise sagedusfunktsiooni abil. Jaotusfunktsioon on universaalne ja sobib igasuguse juhusliku suuruse kirjeldamiseks. Nende funktsioonide tähtsamaid omadusi väljendavad valemid:

$$f(\xi) = \frac{dF(\xi)}{d\xi} \geq 0$$

$$F(a) = \int_{-\infty}^a f(\xi) d\xi$$

$$P\{a \leq x < b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(\xi) d\xi$$

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi = 1$$

$$F(-\infty) = 0$$

$$p(\xi_i) = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} (F(\xi_i + \Delta\xi) - F(\xi_i))$$

$$F(a) = \sum_{\xi_i < a} p(\xi_i)$$

$$P\{a \leq x < b\} = \sum_{a \leq \xi_i < b} p(\xi_i)$$

$$\sum p(\xi_i) = 1.$$

Valemite põhjendamine ja lahtimõtestamine jääb lugeja ülesandeks. See ülesanne on järgneva mõistmiseks äärmiselt oluline.

Ülesande lahendamisel on soovitatav pöörata tähelepanu funktsioonide graafikutele ning pidada silmas tuletise ja integraali geomeetrilist tõlgendust.

27.6. Kvantiilid. Juhusliku suuruse x p -kvantiiliks ehk *protsentpunktiks* nimetatakse niisugust väärtust ξ_p , mille korral

$$F_x(\xi_p) = p.$$

Funktsiooni $\xi_p = \xi_p(p)$ nimetatakse *pöördjaotusfunktsiooniks* ehk *kvantiilfunktsiooniks*. Tähtsaim kvantiil on *mediaan* λ :

$$\lambda = \xi_{0,5}.$$

Mediaan jagab x võimalike väärtuste hulga kaheks võrdtõenäoiseks pooleks:

$$P\{x < \lambda\} = P\{\lambda \leq x\} = \frac{1}{2}$$

27.7. Vahemiku moodustamine vahemikku sattumise tõenäosuse järgi. Olgu tarvis leida vahemik, millesse juhuslik suurus x satuks etteantud tõenäosusega p . Kuna

$$P\{\xi_a \leq x < \xi_b\} = b - a,$$

siis otsitava vahemiku rajadeks on kvantiilid, mis rahuldavad tingimust $b - a = p$. Niisuguseid kvantiilide paare on lõpmata palju. Eriline koht nende hulgas on teatud mõttes sümmeetrilisel paaril, mis rahuldab tingimust $a + b = 1$. See paar piirab vahemikku

$$[\xi_{0,5(1-p)}, \xi_{0,5(1+p)}].$$

Metrooloogias kirjutatakse tõsiasi, et x satub nimetatud vahemikku tõenäosusega p , lühendatud leppekujul

$$x = x_0 \pm \Delta_p x,$$

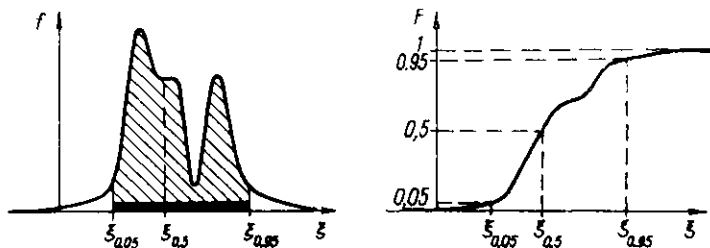
kus x_0 on vahemiku keskpunkt

$$x_0 = \frac{\xi_{0,5(1-p)} + \xi_{0,5(1+p)}}{2}$$

ja $\Delta_p x$ vahemiku poollaius

$$\Delta_p x = \frac{\xi_{0,5(1+p)} - \xi_{0,5(1-p)}}{2}$$

Joonisel 27.7 on kujutatud ebakorrapärane tihedusfunktsioon ja jaotusfunktsioon ning näidatud 5%, 50% ja 95% kvantiilid ning



Joonis 27. 7. Juhusliku suuruse tihedusfunktsioon ja jaotusfunktsioon (näide).

vahemik, millesse x satub 90% tõenäosusega. Viirutatud osasse jääb 90% kõvera $f(\xi)$ alusest pindalast.

27.8. Momendid. Lõpliku tihedusfunktsiooniga juhusliku suuruse n -järku momendiks punkti a suhtes nimetatakse integraali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - a)^n f(\xi) d\xi.$$

Diskreetse jaotuse korral asendatakse tihedusfunktsioon suhtelise sagedusfunktsiooniga ja integraal summaga.

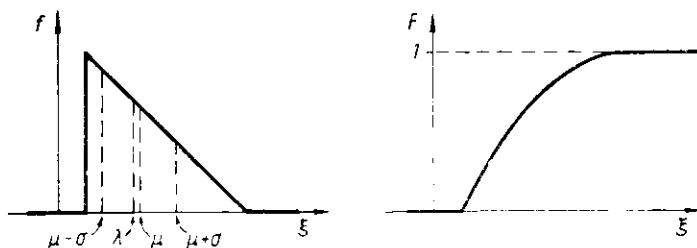
Momentidest on tähtsaimad *esimene algmoment*

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f(\xi) d\xi,$$

mida nimetatakse *keskväärtuseks* ehk *matemaatiliseks ooteväärtuseks*, ja *teine tsentraalmoment*

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \mu)^2 f(\xi) d\xi,$$

mida nimetatakse *dispersiooniks*.



Joonis 27. 8. Juhusliku suuruse tihedusfunktsioon ja jaotusfunktsioon (näide).

Suurus $(x - \mu)^2$ iseloomustab juhusliku suuruse hälvet kesk-
väärtusest. Dispersioon on selle suuruse keskvärtus ja iseloomus-
tab keskmist hälvet keskvärtusest. Ruutjuurt dispersioonist σ
nimetatakse *standardhälbeks* ehk *ruutkeskmiseks hälbeks*.

Tarviduse korral lisatakse sümbolitele λ , μ ja σ vaadeldava
juhusliku suuruse tähis sulgudes: $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\sigma(x)$

Joonisel 27.8 on kujutatud ebasümmeetriline tihedusfunktsioon
ja jaotusfunktsioon ning näidatud μ , λ , $\mu + \sigma$ ja $\mu - \sigma$.

Mõnel juhuslikul suurusel ei ole momente, sest päratud integraalid
ja lõpmatud summad võivad olla hajuvad.

27.9. Juhuslik vektor. Mitut samast juhusest sõltuvat juhus-
likku suurust x_1, x_2, \dots, x_n käsitletakse tavaliselt n -mõõtmelise

vektori \vec{x} koordinaatidena. Tõenäosus dP juhusliku vektori koordi-
naatide üheaegseks sattumiseks vahemikesse $[\xi_1, \xi_1 + d\xi_1]$, $[\xi_2, \xi_2 +$
 $+ d\xi_2]$, \dots , $[\xi_n, \xi_n + d\xi_n]$ on diferentseeruva jaotuse korral võrde-
line iga vahemiku laiusega

$$dP = f_{\vec{x}}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

Võrdetegurit $f_{\vec{x}}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ nimetatakse vektori \vec{x} tõenäosus-
tiheduseks punktis $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, tõenäosustiheduse sõltuvust

vektorist \vec{x} aga juhusliku vektori tihedusfunktsiooniks ehk koordi-
naatide ühiseks tihedusfunktsiooniks.

Juhusliku vektori funktsiooni $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ keskvärtuse
arvutamiseks on tarvis integreerida keskmistatava suuruse ja tihe-
dusfunktsiooni korrutist üle kogu n -mõõtmelise ruumi. Kahe-
mõõtmelisel juhul avaldub see nii:

$$\mu(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi_1, \xi_2) f_{\vec{x}}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

27.10. Juhuslike suuruste sõltuvus. Kaht juhuslikku suurust
nimetatakse teineteisest sõltumatuteks siis, kui ühe suuruse jaotus-
funktsioon ei olene teise suuruse väärtusest ning vastupidi. Vasta-
sel korral on suurused teineteisest sõltuvad. Sõltuvuse uurimisel
käsitletakse suurusi x_1 ja x_2 juhusliku vektori koordinaatidena ning
vaadeldakse korrutist $[x_1 - \mu(x_1)][x_2 - \mu(x_2)]$ ja selle keskvärtust
 $\text{cov}(x_1, x_2) = \mu([x_1 - \mu(x_1)][x_2 - \mu(x_2)])$, mida nimetatakse kovariat-
siooniks.

Sõltumatute suuruste puhul on vaadeldav korrutis kord nega-
tiivne, kord positiivne ning kovariatsioon null. Kui suurustel on
tendents olla ühtaegu keskvärtustest suuremad ja ühtaegu väik-
semad, siis on korrutis valdavalt positiivne ning ka kovariatsioon
positiivne. Vastupidise sõltuvuse korral on kovariatsioon nega-
tiivne.

Suhtelist kovariatsiooni $\rho(x_1, x_2) = \frac{\text{COV}(x_1, x_2)}{\sigma(x_2)\sigma(x_2)}$ nimetatakse

korrelatsioonikordajaks. Korrelatsioonikordaja väärtus on vahemikus $[-1, 1]$. Rajaväärtused -1 ja $+1$ esinevad ainult lineaarse funktsionaalse sõltuvuse ($ax_1 + bx_2 + c = 0$) korral.

Sõltumatute sündmuste koosinemise tõenäosus võrdub sündmuste tõenäosuste korrutisega ja seepärast on sõltumatute koordinaatidega juhusliku vektori tihedusfunktsioon võrdne koordinaatide tihedusfunktsioonide korrutisega: $f_{\vec{x}}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f_{x_1}(\xi_1) f_{x_2}(\xi_2) \dots f_{x_n}(\xi_n)$

27.11. Keskväärtuse ja dispersiooni omadused.

1° Konstandi c keskväärtsus võrdub sama konstandiga: $\mu(c) = c$.

2° Konstandi dispersioon on null: $\sigma^2(c) = 0$.

3° Konstantse kordaja võib tuua keskväärtsuse märgi ette: $\mu(cx) = c \mu(x)$.

4° Konstantse kordaja võib tuua dispersiooni märgi ette ruudus: $\sigma^2(cx) = c^2 \sigma^2(x)$.

5° Juhuslike suuruste summa keskväärtsus võrdub liidetavate keskväärtsuste summaga olenemata sellest, kas liidetavad on üksteisest sõltumatud või sõltuvad:

$$\mu\left(\sum_i x_i\right) = \sum_i \mu(x_i)$$

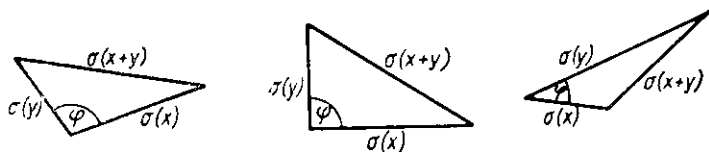
6₁°. Kahe juhusliku suuruse summa (vahe) dispersioon võrdub liidetavate dispersioonide ja kahekordse kovariatsiooni summaga (vahe korral kahekordne kovariatsioon lahutatakse): $\sigma^2(x \pm y) = \sigma^2(x) + \sigma^2(y) \pm 2\rho(x, y) \sigma(x) \sigma(y)$.

6₂°. Sõltumatute juhuslike suuruste summa või vahe dispersioon võrdub liidetavate dispersioonide summaga:

$$\sigma^2\left(\sum_i x_i\right) = \sum_i \sigma^2(x_i)$$

7₁°. Kahe juhusliku suuruse korrutise keskväärtsus võrdub tegurite keskväärtsuste korrutise ja kovariatsiooni summaga: $\mu(x \cdot y) = \mu(x) \mu(y) + \rho(x, y) \sigma(x) \sigma(y)$

7₂°. Sõltumatute juhuslike suuruste korrutise keskväärtsus võrdub tegurite keskväärtsuste korrutisega:



Joonis 27.10. Standardhälvete geomeetriline liitmine (näited).

$$\mu\left(\prod_i x_i\right) = \prod_i \mu(x_i).$$

Omaduse 6^o formaalne sarnasus koosinuslausega võimaldab standardhälbeid geomeetriliselt liita. Selleks tuleb võtta

$$\cos \varphi = -\varrho(x, y)$$

ja talitada nii, nagu näidatud joonisel 27.10. Sõltumatute suuruste korral on kolmnurk täisnurkne.

Seitsmendast omadusest järeldub, et juhuslike suuruste suhte keskvärtus ei võrdu keskvärtuste suhtega, kuna jagatis ja nimetaja pole sõltumatud. Juhuslike suuruste suhetel sageli polegi momente.

27.12. Tšebõšovi võrratus. Tõenäosus, et juhuslik suurus langeb keskvärtust ümbritsevasse vahemikku $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$, on seda suurem, mida suurem on valitud tegur k . See tõenäosus oleneb jaotusfunktsiooni iseloomust. Tšebõšov tõestas, et kõikvõimalikke momente omavate jaotusfunktsioonide korral on

$$P\{\mu - k\sigma \leq x \leq \mu + k\sigma\} > 1 - \frac{1}{k^2}$$

Tšebõšovi võrratusel on tavaliste jaotuste korral suur tagavara ja tegelik tõenäosus osutub vahest $1 - 1/k^2$ oluliselt suuremaks. Näiteks $1 - 1/3^2 = 0,889$, aga normaaljaotuse (vt. p. 28.5) korral on

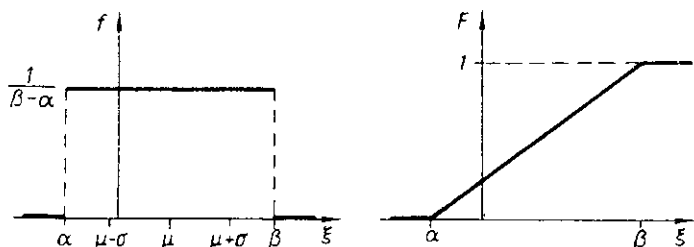
$$P\{\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma\} = 0,997$$

28. JAOTUSSEADUSED

28.1. Diskreetne ühtlane jaotus. Täringu silmade arvu suhtelisel sagedusfunktsioonil on kuus nullist erinevat isoleeritud punkti. Kõigis neis punktides on suhtelise sagedusfunktsiooni väärtus ühesugune ja kõigi naaberpunktide vahed on võrdsed. Niisugust jaotust nimetatakse *diskreetseks ühtlaseks jaotuseks*.

Hüsteresisiga mõõteriista osuti võib ühe ja sama väärtuse mõõtmisel peatuda punktis x_1 või punktis x_2 , olenevalt mõõdetava suuruse eelnevast käitumisest. Kui teistlaadseid häirivaid tegureid pole ja kummaski punktis peatumise tõenäosused on ühesugused, siis on tegu kõige lihtsama diskreetse ühtlase jaotusega. Mõõteriista näidu keskvärtus on sel juhul $(x_1 + x_2)/2$ ja standardhälve $|x_1 - x_2|/2$.

28.2. Pidev ühtlane jaotus. Pideva ühtlase jaotuse ehk *ristkülikjaotuse* korral on juhusliku suuruse tõenäosustihedus kõigis vahemiku (α, β) punktides ühesugune, väljaspool vahemikku aga null. Pideva ühtlase jaotuse tihedusfunktsiooni ja jaotusfunktsiooni graafikud on kujutatud joonisel 28.2.



Joonis 28.2. Ühtlase jaotuse tihedusfunktsioon ja jaotusfunktsioon.

Ühtlasest jaotusest rääkides mõeldakse tavaliselt ainult pidevat ühtlast jaotust. Seepärast on edaspidises selle jaotuse nimetusest sõna «pidev» ära jäetud.

Ühtlase jaotuse korral on $\mu = \lambda = (\alpha + \beta)/2$ ja $\sigma^2 = (\alpha - \beta)^2/12$.

28.3. Binomiaaljaotus. Olgu katse tulemus tõenäosusega p positiivne ja tõenäosusega $1-p$ negatiivne. Katset n korda (eelmistest katsetest sõltumatult) korrates võib saada k positiivset ja $n-k$ negatiivset tulemust. Positiivsete tulemuste arv k on diskreetne juhuslik suurus, mille suhteline sagedusfunktsioon naturaalarvude hulgal on järgmine:

$$p_k(\xi) = \binom{\xi}{n} p^\xi (1-p)^{n-\xi} = \frac{n!}{\xi!(n-\xi)!} p^\xi (1-p)^{n-\xi} \quad (28.3)$$

Selles valemis on olulisel kohal binomiaalkordaja $\binom{\xi}{n}$ mistõttu kirjeldatud jaotust nimetataksegi *binomiaaljaotuseks*. Kõige paremini on binomiaaljaotuse nimi õigustatud erijuhul $p=0,5$. Siis on $p_k(\xi) = \binom{\xi}{n} / 2^n$.

Binomiaaljaotuse korral on $\mu = np$ ja $\sigma^2 = np(1-p)$.

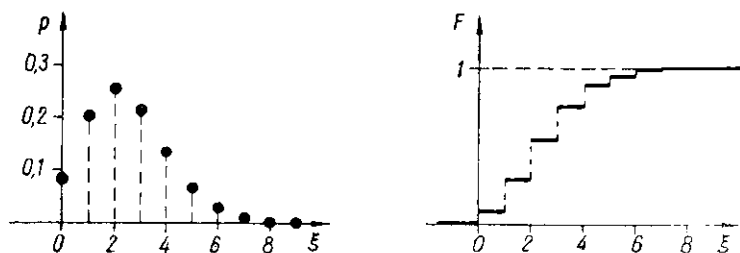
28.4. Poissoni jaotus. Positiivse tulemuse tõenäosuse p vähenedes võib katsete arvu n niiviisi suurendada, et binomiaaljaotuse keskväertus $\mu = np$ jääks muutumatuks. Valemi (28.3) kasutamine on suure n korral väga tülikas. Kui $p \rightarrow 0$ ja $n \rightarrow \infty$, siis valemi (28.3) järgi arvutatud tõenäosused lähenevad valemile

$$p_k(\xi) = \frac{\mu^\xi}{\xi!} e^{-\mu} \quad (28.4)$$

järgi arvutatud tõenäosustele.

Jaotust, mida valem (28.4) kirjeldab täpselt, nimetatakse *Poissoni jaotuseks*.

Poissoni jaotuse keskväertus μ esineb suhtelise sagedusfunktsiooni



Joonis 28.4. Poissoni jaotuse ($\mu=2,5$) suhteline sagedusfunktsioon ja jaotusfunktsioon.

siooni valemis parameetrimina. Kuna ülalkirjeldatud piirprotsessis $(1-p) \rightarrow 1$, siis Poissoni jaotuse dispersioon võrdub keskväärtsusega $\sigma^2 = \mu$.

Poissoni jaotuse suhtelise sagedusfunktsiooni ja jaotusfunktsiooni graafikud erijuhul $\mu=2,5$ on esitatud joonisel 28.4.

Olgu radioaktiivses preparaadis n aktiivset aatomit. Üksik aatomituum laguneb fikseeritud ajavahemikus tõenäosusega p . Lugesdes iga üksiku aatomi jälgimise üksikkatseks, saab näidata, et ajavahemikus lagunevate aatomituumade arv on binomiaalselt jaotatud juhuslik suurus. Praktikas on n tavaliselt väga suur ning p väike. Ajavahemikus lagunevate aatomituumade arvu kirjeldatakse seetõttu Poissoni jaotusseaduse abil.

28.5. Normaaljaotus. Kui binomiaaljaotuse korral katsete arvu suurendada positiivse tulemuse tõenäosust vähendamata, siis kasvab standardhälbelaiusesse vahemikku mahtuvate juhusliku suuruse võimalike väärtuste arv tõkestamatult. Jaotus muutub sarnaseks pideva jaotusega, mille tihedusfunktsioon on järgmine:

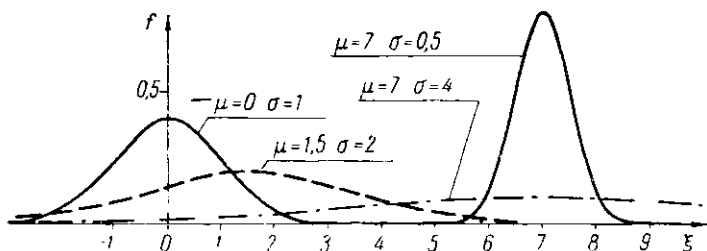
$$f(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Seda jaotust nimetatakse *normaaljaotuseks* ehk *Gaussi jaotuseks*.

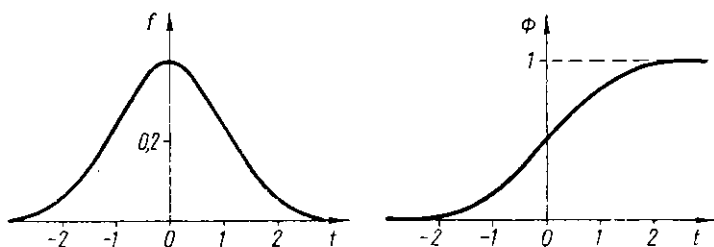
Normaaljaotuse keskväärtsus μ ja dispersioon σ^2 esinevad tihedusfunktsiooni valemis parameetritena. Normaaljaotuse mediaan võrdub keskväärtsusega.

Joonisel 28.5.1 on esitatud näitena mõned normaaltihedusfunktsiooni graafikud. Graafiku maksimum asub kohal μ ja käänupunktid kohtadel $\mu - \sigma$ ning $\mu + \sigma$.

Normaaljaotust, mille keskväärtsus on null ja dispersioon üks, nimetatakse *standardiseeritud normaaljaotuseks*. Standardiseerimata normaaljaotust saab standardiseeritud jaotusega siduda muutujate vahetuse $t = (\xi - \mu) / \sigma$ abil. Standardiseeritud normaaljaotuse tihedusfunktsiooni



Joonis 28.5.1 Normaaljaotuse tihedusfunktsioonide graafikud (näited).



Joonis 28.5.2. Standardiseeritud normaaljaotuse tihedusfunktsioon ja jaotusfunktsioon.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

ja jaotusfunktsiooni

$$F(t) = \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau$$

väärtuste tabelleid võib leida tõenäosusteooria õpikutest, matemaatika teatmikest ja tabelite kogudest. Joonisel 28.5.2 on näidatud nende funktsioonide graafikud.

Spetsiaalfunktsiooni $\Phi(t)$ nimetatakse *tõenäosusintegraaliks* ehk *Laplace'i funktsiooniks*.

Normaalselt jaotatud juhuslike suuruste summa jaotus on samuti normaaljaotus.

28.6. Cauchy jaotus. *Cauchy jaotuse* tihedusfunktsiooni

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi(1 + \xi^2)}$$

graafik (vt. joonis 31.2) on üsna sarnane normaaltihedusfunktsiooni graafikuga. Cauchy jaotusel momente ei ole (integraalid hajuvad). Cauchy jaotustega juhuslike liidetavate summa jaotus on samuti Cauchy jaotus.

28.7. Tsentraalne piirteoreem. Olgu $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ lõplike dispersioonidega sõltumatud juhuslikud suurused. Tähistame

$$X = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Tsentraalne piirteoreem väidab, et liidetavate arvu n tõkestamatu suurendamisel ja nende samaaegsel ühtlasel vähendamisel läheneb summa X jaotus liidetavate jaotustest sõltumatult normaaljaotusele.

Liidetavate vähendamise ühtluse nõue tähendab kõigepealt seda, et piirprotsessis peab iga liidetava dispersiooni ja dispersioonide summa suhe lähenema nullile. Muude ühtluse nõudes sisalduvate tingimuste tähtsus on käesoleva raamatu seisukohalt teisejärguline. Neid tingimusi on võimalik konkretiseerida mitmel rohkem või vähem kitsendaval viisil. Seetõttu on tsentraalsel piirteoreemil palju erinevaid variante. Aegade jooksul on neid variante uurinud ja tõestanud mitmed tuntud matemaatikud, nende hulgas ka Laplace, Gauss, Tšebõšov ja Ljapunov. Kõige üldisemal juhul tõestas tsentraalse piirteoreemi 1922. a. soome matemaatik Lindeberg.

Tsentraalse piirteoreemi kasutamisel on tarvis kõigepealt kontrollida liidetavate dispersioonide olemasolu. Kui liidetavad alluvad näiteks Cauchy jaotusele, siis on summa jaotus alati Cauchy jaotus ja tsentraalne piirteoreem ei kehti.

28.8. Normaaljaotushüpotees metrooloogias. Mitmest põhjustest tingitud juhuslikku mõõtmisviga saab lahutada põhjuste järgi komponentideks. Kui komponendid on väikesed ja nende koguarv suur, võib tsentraalse piirteoreemi alusel arvata, et juhusliku vea jaotus on ligilähedane normaaljaotusele.

Aritmeetilise keskmise viga on võrdeline üksikväärtuste vigade summaga. Seetõttu peaks aritmeetilise keskmise juhusliku vea jaotus olema alati lähedane normaaljaotusele.

Juhusliku vea normaaljaotushüpoteesi kasutas esimesena Gauss. Gauss tegeles geodeesia ja astronoomiaga. Geodeetiliste ja astronoomiliste mõõtmiste korral on tavaliselt kõik ülalkirjeldatud tingimused täidetud ja normaaljaotushüpotees näib olevat hästi põhjendatud. Normaaljaotushüpoteesi toetavad ka geodeetiliste mõõtmiste vigade eksperimentaalse uurimise tulemused.

Mõõtmised füüsikalaboratooriumis erinevad paljuski geodeetilistest ja astronoomilistest mõõtmistest ja siin pole normaaljaotushüpotees sageli vastuvõetav. Katsed näitavad, et mõõteriista ebataiuslikkusest tingitud juhusliku vea jaotus on tavaliselt normaaljaotusest hoopis erinev.

Shannon (1948) ja Halfin (1958) näitasid, et normaalne jaotusseadus sisaldab juhusliku suuruse kohta vähem informatsiooni kui mistahes teine sama dispersiooniga jaotusseadus. Informatsiooni mõõduks võetakse integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \log f(\xi) d\xi + \text{const.}$$

Nimetatud omadus vabandab vähesel määral normaaljaotushüpoteesi kasutamist tundmatu jaotuse korral.

Normaaljaotushüpoteesi vastuvõetavuse üle otsustamisel on tänaseni jäänud viimane sõna intuitsioonile. See on juhuslike mõõtmisvigade hindamise teooria ja praktika kõige nõrgem koht.

29. MATEMAATILISE STATISTIKA ALGMÕISTED

29.1. Matemaatilise statistika ja tõenäosusteooria vaherkord. Klassikalist tõenäosusteooriat saab metrooloogias kasutada ainult teoreetilisteks arutlusteks. Realse juhusliku suuruse jaotusfunktsiooni pole võimalik otseselt mõõta. Eksperimentaatori käsutuses on vaid lõplik hulk juhuslikke katsetulemusi. Tõenäosusteooria seisukohalt on peaaegu kõik tulemused peaaegu igas olukorras võimalikud (olguigi tühise tõenäosusega) Tõenäosusteooria (kitsas mõttes) ei õpeta üksikutest tulemustest järeldusi tegema.

Juhuslike suuruste empiirilise uurimise teooriat nimetatakse *matemaatiliseks statistikaks*. Matemaatilisel statistikal on kaks teineteisega tihedalt seotud põhiülesannet.

1° Juhuslike suuruste jaotusi iseloomustavate arvude hindamine.

2° Juhuslike suuruste kohta püstitatud hüpoteeside kontrollimine.

Statistikaprobleemide uurimisel kasutatakse tõenäosusteooria meetodeid. Seepärast võib tõenäosusteooria ainet laiendada, käsitledes matemaatilist statistikat kui tõenäosusteooria (laias mõttes) koostisosa.

29.2. Üldkogum ja võend. Juhusliku suuruse x kohta täieliku informatsiooni saamiseks oleks tarvis selle suuruse väärtust mõõta lõpmatu arv kordi. Juhusliku suuruse kujutletava lõpmatukordse mõõtmise tulemuste hulka nimetatakse juhusliku suuruse väärtuste

üldkogumiks. Lõpmatu üldkogum on fiktiivne objekt. Konkreetsetes arutlustes on soovitatav seda mõistet vältida.

Juhusliku suuruse x n -kordsel mõõtmisel leitud väärtuste lõplikku kogumit x_1, x_2, \dots, x_n nimetatakse *võendiks* ehk *väljavõtteks* (üldkogumist). Väärtused x_1, x_2, \dots on *võendi komponendid*, komponentide arv n on *võendi maht*.

29.3. Võendi järjestamine. Võendi komponente võib järjestada mitmel viisil. Kõikvõimalike järjestuste hulgast omavad erilist tähtsust kaks. *Kronoloogilise* ehk *algjärjestuse* korral kirjutatakse komponendid nende mõõtmise või muul viisil määramise järjekorras:

$$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n.$$

Kasvujärjestuse korral kirjutatakse komponendid suuruse järgi kasvavas järjekorras:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(i)} \leq \dots \leq x_{(n)}.$$

Kasvujärjestuses kirjutatud komponentide hulka nimetatakse *võendi variatsioonreaks*.

Sulgudeta kirjutatud indeks võendi komponendi juures tähistab komponendi *kronoloogilist järjekorranumbrit*, sulgudega indeks aga *komponendi järjekorranumbrit kasvujärjestuses*. Kasvujärjestuse järjekorranumbrit nimetatakse lühemalt võendi komponendi *järjeks*.

Juhusliku suuruse x kronoloogiliselt järjestatud võendi (3,7; 3,3; 4,1; 3,6; 3,1; 3,2) maht on kuus. Komponenti 3,3 kronoloogiline järjekorranumber on 2: $x_2=3,3$. Sama komponendi järg on 3. Kasvujärjestuses teisel kohal on komponent 3,2; mistõttu $x_{(2)}=3,2$ ja $x_{(3)}=3,3$.

29.4. Empiiriline jaotusfunktsioon ja Glivenko teoreem. *Empiiriliseks jaotusfunktsiooniks* nimetatakse treppfunktsiooni

$$F_x^{(n)}(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{kui } \xi \leq x_{(1)}, \\ \frac{i}{n} & \text{kui } x_{(i)} < \xi \leq x_{(i+1)}, \\ 1, & \text{kui } x_n < \xi. \end{cases} \quad (29.4)$$

Mõõtmisseeria kordamisel saavad võendi komponendid uued juhuslikud väärtused ja võend uue juhusliku empiirilise jaotusfunktsiooni.

Glivenko tõestas 1933. a., et võendi mahu tõkestamatu suurendamise korral muutub juhuslik empiiriline jaotusfunktsioon 100% tõenäosusega kuitahes lähedaseks juhusliku suuruse x tõenäosusteoreetilisele jaotusfunktsioonile $F_x(\xi)$:

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\xi} |F_x^{(n)}(\xi) - F_x(\xi)| = 0\right\} = 1.$$

29.5. Statistikud. *Statistikuteks* nimetatakse kõiki võendist sõltuvaid võendi komponentidega üheselt määratud arve. Nagu võendki, on statistikud juhuslikud suurused.

Statistikut

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

nimetatakse võendi *aritmeetiliseks keskmiseks*. Aritmeetilist keskmist ei tohi segi ajada keskväärtusega. Juhusliku suuruse keskväärtus on kindel suurus, juhusliku võendi aritmeetiline keskmine aga juhuslik suurus.

Kindla järjega i komponenti nimetatakse i -ndaks *järjestatistikuks*. Järjestatistikute hulka kuulub ka võendi *väikseim komponent* min $x_i = x_{(1)}$ ja *suurim komponent* max $x_i = x_{(n)}$.

Võendi haardeks nimetatakse statistikut

$$w = \max x_i - \min x_i.$$

Empiiriliseks mediaaniks on paaritumahulise võendi korral keskmine järjestatistik

$$l = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

paarismahulise võendi korral aga mingi kahe keskmise järjestatistiku vahel asuv arv, tavaliselt nende aritmeetiline keskmine

$$l = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$$

Statistikute moodustamise võimalusi on lõpmata palju.

Tarviduse korral märgitakse statistiku tähise juurde indeksina võendi maht, näiteks \bar{x}_n , w_n , l_n .

29.6. Punkthinnangud. Juhuslike suuruste jaotuste näitarve (keskväärtus, mediaan, dispersioon jne.) pole võimalik vahetult mõõta. Näitarvu *punkthinnang* on sobivalt valitud statistik, mille väärtus on tõenäoliselt hindamisele kuuluva näitarvu väärtusele lähedane.

Ühe ja sama näitarvu jaoks võib kasutada mitut erinevat hinnangut. Näiteks keskväärtuse hinnanguks võib valida võendi aritmeetilise keskmise, empiirilise mediaani, statistiku $(x_{(1)} + x_{(2)})/2$ (üldjuhul ilmselt ebaõnnestunud valik) või mõne muu statistiku.

Hinnangu sobivus oleneb hinnangu kui juhusliku suuruse jaotuse omadustest.

Statistikut g_n nimetatakse juhusliku suuruse x näitarvu γ

konsistentseks hinnanguks siis, kui kuitahes väikese positiivse arvu ε korral on sündmuse $|g_n - \gamma| > \varepsilon$ tõenäosuse piirväärtus protsessis $n \rightarrow \infty$ null.

Keskväertust omav statistik g_n on näitarvu *nihutamata* hinnang siis, kui statistiku g_n keskväertus $\mu(g_n)$ võrdub hindamisele kuuluva näitarvuga. Vastasel korral on hinnang *nihutatud*.

Nihutatus ja mittekonsistentsus on hinnangu silmatorkavad puudused. Enamus tarvitataavaid hinnanguid on nihutamata ja konsistentsed.

Püsavaks nimetatakse niisugust hinnangut, millesse on kadudeta kokku võetud võendis hinnatava näitarvu kohta leiduv informatsioon. Pärast püsava hinnangu arvutamist ei ole tarvis võendi komponentide väärtusi säilitada.

Nihutamata hinnangu ebatäpsuse mõõduks sobib hinnangu dispersioon $\sigma^2(g_n)$. Hinnangu täpsusele seab piiri ühe ja sama näitarvu erinevate hinnangute dispersioonide hulga teoreetiline alumine raja σ_{inf}^2 . Fréchet näitas 1943. a., et teatud tingimuste täitmise korral on σ_{inf}^2 pöördvõrdeline võendi mahuga n .

Suhet $\varepsilon(g_n) = \sigma^2(g_n) / \sigma_{\text{inf}}^2$ nimetatakse hinnangu *efektiivsuseks*. Kui $\varepsilon(g_n) = 1$, siis on hinnang *efektiivne*, kui $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(g_n) = 1$, siis *asümptootiliselt efektiivne*.

29.7. Vahemikhinnangud. Punkthinnang ei kirjelda iseenese täpsust. Kui hinnangu täpsuse hindamiseks kasutada teist punkthinnangut, siis jääb tundmatuks veel hinnangu täpsuse hinnangu täpsus jne. lõpmatuseni. Nõiaringist aitab välja *vahemikhinnangute meetod*. Püstitame *hüpoteesi*: hindamisele kuuluv näitarv γ asub mingite statistikute g_- ja g_+ poolt piiratud vahemikus. Konkreetsetes võendis sisalduvat informatsiooni kasutades saab hinnata eksimise tõenäosust

$$2q = P\{\gamma < g_-\} + P\{g_+ \leq \gamma\}.$$

Hüpotees

$$g_- \leq \gamma < g_+$$

kuulutatakse usaldatavaks tõenäosusega

$$p = 1 - 2q.$$

Praktikas talitatakse enamasti vastupidises järjekorras: tõenäosus $2q$ ehk p antakse ette ja ülesandeks jääb leida sobivad statistikud g_- ja g_+ . Selle ülesande vastus ongi vahemikhinnang.

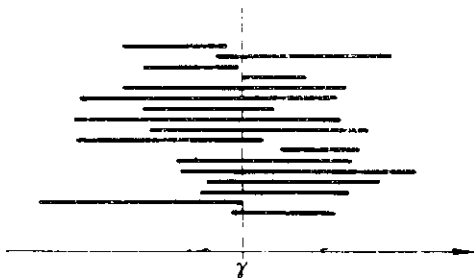
Vahemikhinnangu koostamisel tarvitataavaid hüpoteeside kontrollimise eeskirju nimetatakse *testideks*, vahemikku (g_- , g_+) ennast *usaldusvahemikuks* ehk *usalduspiirkonnaks*, lubatud eksimise tõenäosust $2q$ hüpoteesi *olulisuse* nivooks ja tõenäosust $p = 1 - 2q$ hinnangu *usaldatavuseks*.

Metrooloogias kirjutatakse vahemikhinnang järgmisel kujul:

$$\gamma = \gamma_0 \pm \Delta_p \gamma,$$

kus

Joonis 29.7. Uhe ja sama suuruse γ jaoks seitsmeteistkümne sõltumatu katseseeria tulemuste järgi koostatud 80% usaldatavusega hinnanguvahemikud.



$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{g_+ + g_-}{2} \\ \Delta_p \gamma &= \frac{g_+ - g_-}{2} \end{aligned} \right\}$$

Vahemikhinnangu statistikuid g_- ja g_+ on võimalik valida mitmeti (vt. p. 27.7). Tavaliselt eelistatakse moodust, mille korral γ_0 on näitarvu nihutamata punkthinnang.

Punktis 27.7 käsitletud juhul olid vahemiku otspunktid kindlad ja vahemikku sattuv suurus juhuslik, vahemikhinnangu korral on aga vahemikus asuv suurus kindel ja vahemiku otspunktid juhuslikud. Kui märkiviskaja tabab väikese palliga põrandal asuvat karpitõenäosusega p , siis on olukord analoogiline p. 27.7 kirjeldatuga. Kui p on tõenäosus katta põrandal asuvat palli visatava karbiga, siis on olukord analoogiline vahemikhinnangu koostamisega. Seetõttu peab käesolevas peatükis esitatud valemeid sõnastama järgnevalt: vahemik $[g_-, g_+)$ katab suuruse γ usaldatavusega p . Õeldud illustreerib joonis 29.7.

Vahemikhinnangus ei pruugi säilida kogu võendis leitud informatsioon. Seepärast on vahemikhinnangu kasutamisel soovitatav hoolitseda alginformatsiooni otsese säilimise eest.

Kaasaegses metroloogias on vahemikhinnangud punkthinnangud tagaplaanile tõrjunud.

29.8. Parameetrilised ja mitteparameetrilised meetodid. Juhusliku suuruse võendi alusel pole kunagi võimalik tõestada, et uuritav suurus allub mingile täpselt teadaolevale jaotusseadusele. Juhuslike suuruste jaotusseaduste tüüpe põhjendatakse mittestatistiliste (näiteks füüsikaliste) kaalutlustega.

Parameetriliste meetodite rakendamisel eeldatakse, et juhuslik suurus allub mingile tuntud tüüpjaotusseadusele. Võendi järgi hinnatakse selle jaotusseaduse parameetreid (normaaljaotuse korral näiteks keskvaartust ja dispersiooni).

Mitteparameetriliste meetodite rakendamisel loobutakse jaotusseaduse kohta käivatest eeldustest. Seetõttu ei eeldata ka momen-

tide olemasolu. Võendi järgi hinnatakse jaotuse kvantiile või harvem jaotusfunktsiooni.

Mitteparameetrilised meetodid on parameetrilistest meetoditest täielikumalt põhjendatud. Puuduseks on jaotusseaduse kohta teada oleva eelinformatsiooni raiskamine. Praktikas kaalub see puudus sageli mitteparameetriliste meetodite head küljed üles.

Matemaatiliselt rangeid vahemikhinnanguid hakati füüsika praktikumis kasutama viiskümmend aastat pärast nende väljatöötamist. Mitteparameetrilisi statistilisi meetodeid hakati uurima alles käesoleva sajandi kolmekümnendate aastate lõpupoole. Mitme tuntud testi teooria pärineb viiekümnendatest aastatest. Seepärast on üsna loomulik, et füüsika praktikumi käsiraamatutes ja isegi erialases metrooloogilises kirjanduses pole seni mitteparameetrilistest meetoditest enamasti üldse juttu.

30. PUNKTHINNANGUD

30.1. Võendi tõenäosusteoreetiline kirjeldamine. Võendit käsitletakse nagu n -mõõtmelise ruumi punkti või vektorit, mille koordinaatideks on võendi komponendid mingis kokkulepitud (näiteks kronoloogilises) järjestuses. Tõenäosus, et juhuslikku võendit kirjeldav punkt $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ satub vahemikega $[\xi_1, \xi_1 + d\xi_1)$, $[\xi_2, \xi_2 + d\xi_2)$, $[\xi_n, \xi_n + d\xi_n)$ piiratud ruumielementi, on $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n$. Funktsioon $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, lühemalt $f(\xi_i)$, on võendi kui juhusliku vektori tihedusfunktsioon.

Kui võendi komponendid on üksteisest sõltumatud, on *võendi tihedusfunktsioon* komponentide tihedusfunktsioonide korrutis: $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f(\xi_1) f(\xi_2) \dots f(\xi_n)$.

30.2. Tõepärasusfunktsioon. Hinnangute teoorias tähistatakse juhusliku suuruse x tihedusfunktsiooni nii:

$$f(\xi | \mathbf{v}_j).$$

Püstkriipsust vasakule kirjutatakse argument, paremale aga jaotuse parameetrid. Normaalkaotusel on näiteks kaks parameetrit: $\mathbf{v}_1 = \mu$, $\mathbf{v}_2 = \sigma^2$

Mõõtnud üks kord juhuslikku suurust, võib leitud väärtuse x_1 kirjutada tihedusfunktsiooni valemisse

$$f(x_1 | \mathbf{v}_j)$$

Asendades saadud konstantse tõenäosustiheduse avaldises parameetrite tähised nende hüpoteetiliste hinnangute tähistega t_j , saame hinnangute *tõepärasusfunktsiooni* ühekomponendilise võendi korral

$$L(t_j) = f(x_1 | t_j).$$

Tõepärasusfunktsioon näitab hüpoteetilise tõenäosustiheduse sõltuvust punktis x_1 parameetrite hinnangutest t_j .

Tõepärasusfunktsioon avaldub samasuguse valemi abil kui tihedusfunktsioon. Normaalkaotuse korral on näiteks juhusliku suuruse x tihedusfunktsiooni ja ühekomponendilisele võendile vastava tõepärasusfunktsiooni avaldised järgmised:

$$f(\xi | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}};$$

$$L(x_1 | m, s^2) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-m)^2}{2s^2}}$$

Esimeses avaldises on argumentiks ξ ja fikseeritud parameetriteks μ ning σ^2 , teises avaldises on argumentideks hinnangud m ja s ning fikseeritud parameetriks katseline väärtus x_1 .

Mitmekomponendilise võendi $x_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ korral koostatakse tõepärasusfunktsioon võendi tihedusfunktsiooni $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n | v_j)$ ehk lühemalt tähistatult

$$f(\xi_i | v_j)$$

baasil täpselt samuti kui ühekomponendilise võendi korral. Kui võendi komponendid on sõltumatud, siis on võendi tihedusfunktsioon komponentide tihedusfunktsioonide korrutis ja ka hinnangute tõepärasusfunktsioon avaldub korrutisena:

$$L(x_i | t_j) = L(x_1 | t_j) L(x_2 | t_j) \dots L(x_n | t_j).$$

30.3. Suurima tõepärasuse meetod. Halbade hinnangute korral on tõepärasusfunktsiooni väärtus ilmselt väiksem kui heade hinnangute korral. *Suurima tõepärasuse meetod* tähendab hinnangustatistikute valimist niiviisi, et tõepärasusfunktsioon omandaks maksimaalse võimaliku väärtuse. Tõepärasusfunktsiooni maksimumkoha koordinaate \hat{t}_j nimetatakse *tõepäraseimateks hinnanguteks*.

Tõepäraseimate hinnangute leidmiseks on tarvis lahendada (üldjuhul mitme muutuja t_j funktsiooni) ekstreemumülesanne. Tõepärasusfunktsiooni osatuletiste avaldamine on tavaliselt tülikas. Hoopis lihtsam on avaldada tõepärasusfunktsiooni logaritmi tuletisi. Logaritmifunktsioon on monotoonne ja tema maksimumkoht langeb kokku argumenti maksimumkohaga. Maksimumkoha tingimuseks on süsteem

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial[\log L(x_i|t_j)]}{\partial t_1} &= 0 \\ \frac{\partial[\log L(x_i|t_j)]}{\partial t_2} &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial[\log L(x_i|t_j)]}{\partial t_r} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

mis koosneb nii mitmest võrrandist, kui mitu on juhusliku suuruse tihedusfunktsiooni avaldises erinevaid parameetreid.

Maksimumtingimuse võrrandeid nimetatakse *tõepärasusvõrranditeks*. Tõepäraseimad hinnangud on tõepärasusvõrrandite lahendid.

Normaaljaotuse korral kasutas tõepäraseimaid hinnanguid juba Gauss. Meetodi üldpõhimõtte ja teooria alused avaldas inglise matemaatik Fisher 1912. a.

30.4. Tõepäraseimate hinnangute omadused. Teatud tingimustel on tõepäraseimad hinnangud konsistentsed, piisavad ja vähemalt asümptootiliselt efektiivsed. Tarvilikke tingimusi pole õnnestunud lühidalt sõnastada. Kui hinnatavate parameetrite arv r on võendi mahust n palju väiksem, siis on need tingimused tavaliselt täidetud.

Nimetatud omaduste tõttu on suurima tõepärasuse meetod kõige tarvitavam meetod punkthinnangute tuletamiseks.

Tõepäraseimad hinnangud osutuvad kahjaks üsna tihti nihutatuiks. Seda viga on konkreetse ülesande korral kerge avastada ja soovi korral kõrvaldada parandusteguri abil.

30.5. Ühtlase jaotuse parameetrite tõepäraseimad hinnangud. Vahemikus $[\alpha, \beta]$ ühtlaselt jaotatud suuruse tihedusfunktsioon on

$$f(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{kui } \xi \text{ ei kuulu vahemikku } [\alpha, \beta], \\ \frac{1}{\beta - \alpha}, & \text{kui } \xi \text{ kuulub vahemikku } [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

Ühekomponendilise võendi tõepärasusfunktsiooni saamiseks on tarvis asendada ξ mõõtmistulemusega x_i , α hinnanguga a ja β hinnanguga b . n -komponendilise võendi tõepärasusfunktsioon on n ühekomponendilise võendi tõepärasusfunktsioonide korrutis. Kui kas või üks võendi komponent ei asu vahemikus $[a, b]$, siis sisaldab see korrutis nulliga võrduvat tegurit. Seepärast

$$L(x_i|a, b) = \begin{cases} 0, & \text{kui vahemik } [a, b] \text{ ei sisalda kõiki } x_i\text{-sid,} \\ \frac{1}{(b - a)^n}, & \text{kui vahemik } [a, b] \text{ sisaldab kõiki } x_i\text{-sid.} \end{cases}$$

Tõepärasusfunktsiooni väärtuse suurendamiseks on tarvis vähendada hinnangut b ja suurendada hinnangut a piirini, millest edasi vahemik $[a, b]$ ei sisaldaks enam kõiki võendi komponente. Tõepäraseimad hinnangud on

$$\hat{a} = \min x_i$$

$$\hat{b} = \max x_i$$

Need hinnangud on nihutatud: \hat{a} veidi ülespoole ja \hat{b} veidi alla-poole. Rajade hinnangutest tulenev keskvaertuse hinnang

$$\bar{x} = \frac{\min x_i + \max x_i}{2}$$

on efektiivne ja nihutamata. Keskvaertuse enam tuntud hinnangu $\bar{x} = \sum x_i/n$ efektiivsus on kõigest $6n/[(n+1)(n+2)]$.

30.6. Normaaljaotuse parameetrite tõepäraseimad hinnangud.

Normaaljaotuse korral on tõepärasusfunktsioon järgmine:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n | m, s) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-m)^2}{2s^2}} \times$$

$$\times \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-m)^2}{2s^2}} \dots \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n-m)^2}{2s^2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2s^2} \sum_{i=1}^n (x_i-m)^2}$$

Arvutades tõepärasusfunktsiooni logaritmi ja selle osatuletised m ja s järgi, saame tõepärasusvõrrandid

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{s^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m) &= 0 \\ -\frac{n}{2s^2} + \frac{1}{2s^4} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Esimesest võrrandist järeldub

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

ja teisest

$$\hat{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

30.7. Aritmeetilise keskmise omadused. Aritmeetilise keskmise keskvärtuse ja dispersiooni saab arvutada jaotusfunktsioonist sõltumatult omaduste 27.11. 3. 6 abil:

$$\begin{aligned}\mu(\bar{x}) &= \mu\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \mu\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu(x_i) = \\ &= \frac{1}{n} n\mu(x) = \mu(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2(\bar{x}) &= \sigma^2\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sigma^2\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2(x_i) = \\ &= \frac{1}{n^2} n\sigma^2(x) = \frac{\sigma^2(x)}{n}\end{aligned}$$

Kuna $\mu(\bar{x}) = \mu(x)$, siis aritmeetiline keskmine on alati keskvärtuse nihutamata hinnang. Võendi mahu n suurendamisel muutub $\sigma^2(\bar{x})$ ja sündmuse $|\bar{x} - \mu| > \varepsilon$ tõenäosus kuitahes väikeseks (vt. p. 27.12), mistõttu \bar{x} on juhusliku suuruse x konsistentne hinnang. Normaalfaotuse korral on \bar{x} keskvärtuse tõepäraneim hinnang. Teiste jaotuste korral ei pruugi \bar{x} sugugi olla keskvärtuse parim hinnang (vt. p. 30.5).

Kui juhuslikul suurusel keskvärtust ja dispersiooni ei ole, kaotavad eelnevad järeldused mõtte. Näiteks Cauchy jaotuse korral ei olene aritmeetilise keskmise jaotus üldse võendi mahust ja (ükskõik kui palju katsete arvu ka ei suurendataks) aritmeetilise keskmise täpsus jaotuse keskpunkti hinnanguna jääb samaks mis üksiktulemuse täpsus.

30.8. Dispersiooni hinnangu omadused. Statistiku s^2 keskvärtust saab samuti kui aritmeetilise keskmise keskvärtustki arvutada jaotusseadusest sõltumatult. Enne keskvärtuse võtmist on kasulik s^2 avaldist teisendada:

$$\begin{aligned} \hat{s}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(x_i - \mu) - (\bar{x} - \mu)]^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - \frac{2}{n} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \right] (\bar{x} - \mu) + \\ &+ \frac{1}{n} n (\bar{x} - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - 2(\bar{x} - \mu) (\bar{x} - \mu) + \\ &+ (\bar{x} - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - (\bar{x} - \mu)^2 \end{aligned}$$

Kasutades nüüd p. 27.10 kirjeldatud omadusi, võib arvutada nii:

$$\begin{aligned} \mu(\hat{s}^2) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu(x_i - \mu)^2 - \mu(\bar{x} - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2(x_i) - \\ &- \sigma^2(\bar{x}) = \sigma^2(x) - \frac{\sigma^2(x)}{n} = \frac{n-1}{n} \sigma^2(x). \end{aligned}$$

Tulemus näitab, et dispersiooni hinnang \hat{s}^2 on veidi nihutatud. Tõepoolest, suuruse $\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2/n$ keskvärtus on ilmselt $\sigma^2(x)$, hinnangus \hat{s}^2 on aga suurus μ asendatud x_i -dele keskmiselt lähema suurusega \bar{x} .

Nihke kõrvaldamiseks võib statistikut \hat{s}^2 korrutada teguri $(n-1)/n$ pöördväärtusega. Uus statistik

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

on normaaljaotuse korral dispersiooni parim nihutamata hinnang.

30.9. Vähimruutude meetod. Uuritava juhusliku suuruse keskvärtus ei pruugi olla konstantne, vaid võib sõltuda mingist tuntud argumentidest. Kui uuritava suuruse seost argumentidega saab kirjeldada mingeid konstante $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r$ sisaldava teoreetilise seosevõrrandi abil, siis tuleb katseandmete töötlemisel leida nende konstantide hinnanguid a_0, a_1, \dots, a_r sisaldav praktiline seosevõrrand.

Katsetulemuse hälbeks nimetatakse katsetulemuse ja praktilise seosevõrrandi järgi arvutatud väärtuse vahet. *Vähimruutude mee-*

todi korral valitakse tundmatutele konstantidele niisugused väärtused, mis muudavad hälvete ruutude summa vähimaks võimalikuks.

Konstantne keskvärtus on muutuva keskvärtuse erijuht. Seosevõrrand on siis $\mu = m = \text{const}$ ja hälbed $x_i - m$.

Normaalselt jaotatud hälvete korral on vähimruutude meetodil leitud hinnangud ühtaegu tõepäraseimad ja vähimruutude meetodit võib käsitada suurima tõepärasuse meetodi erijuhuna. Näiteks p. 30.6 esitatud tõepärasusfunktsiooni avaldisest järeldub, et keskvärtuse hinnangu m tõepärasemaks muutmiseks on tarvis vähendada normaalselt jaotatud hälvete ($x_i - m$) ruutude summat. Suurima tõepärasuse meetodist tulenev ülesanne langeb siin kokku vähimruutude meetodi korral otseselt püstitatava ülesandega.

Vähimruutude meetod on küllaltki hästi õigustatud ka normaaljaotusest vähe erinevate jaotuste korral. Normaalkaotusest oluliselt erinevate jaotuste korral võib vähimruutude meetod anda ebarahuldavaid tulemusi. Näiteks keskvärtuse hinnanguks tuleb vähimruutude meetodi korral alati aritmeetiline keskmine, ühtlase jaotuse korral on see hinnang aga ebaratsionaalne.

30.10. Lineaarne regressioonülesanne. Sõltugu juhusliku suuruse y keskvärtus lineaarselt ühest argumendist x :

$$\mu(y) = ax + \beta.$$

Kui katsetulemused (y_i, x_i) kanda punktidenähtisena Cartesiuse ristkoordinaadistikuga varustatud tasandile, siis ei lange nad suuruse y juhuslike hälvete tõttu sugugi ühele sirgele (vt. joonis 30.10).

Sirget $y = ax + \beta$ nimetatakse *regressioonsirgeks*. Regressioonülesande lahendamiseks on tarvis leida konstantide a ja β jaoks põhjendatud hinnangud a ja b . Selleks kasutatakse tavaliselt vähimruutude meetodit. Avaldatakse hälbed

$$\Delta_i = y_i - (ax_i + b)$$

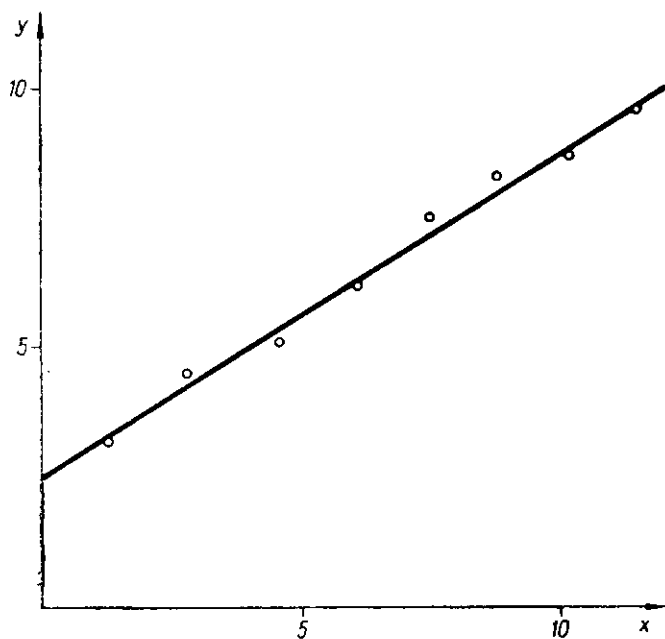
ja nende ruutude summa

$$Q = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2$$

Ruutude summa miinimumi tingimust

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

nimetatakse *normaalvõrrandisüsteemiks*. Normaalvõrrandid osutuvad lineaarseteks. Pärast tuletiste avaldamist saavad nad kuju



Joonis 30.10. Katsetulemused ja vähimruutude meetodi järgi leitud lähendussirge.

$$\left. \begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + nb &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned} \right\}$$

Hinnangute a ja b leidmiseks on tarvis see võrrandisüsteem lahendada. Arvutustöö hõlbustamiseks võib seejuures kasutada p. 39.3 kirjeldatavat võtet.

Joonisel 30.10 on näidatud katsetulemuse (y_i, x_i) kirjeldavad punktid ja vähimruutude meetodil leitud regressioonsirge hinnang.

30.11. Polünoomregressioonülesanne. Erinevalt eelmises punktis käsitletud ülesandest on siin otsitava regressioonkõvera võrrandiks polünoom

$$y = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Samuti kui lineaarse regressioonülesande korral, avaldatakse ka siin hälbed

$$\Delta_i = y_i - (a_r x_i^r + \dots + a_0)$$

ja nende ruutude summa Q . Normaalkõrvandite koostamiseks arvutatakse tuletised $\frac{\partial Q}{\partial a_r}$, $\frac{\partial Q}{\partial a_{r-1}}$, $\frac{\partial Q}{\partial a_0}$ ja võrrutatakse need nulliga. Nii saadakse $r+1$ lineaarkõrvandist koosnev süsteem:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^{2r} \right) a_r + \left(\sum_{i=1}^n x_i^{2r-1} \right) a_{r-1} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n x_i^r \right) a_0 = \sum_{i=1}^n x_i^r y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^{2r-1} \right) a_r + \left(\sum_{i=1}^n x_i^{2r-2} \right) a_{r-1} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n x_i^{r-1} \right) a_0 = \sum_{i=1}^n x_i^{r-1} y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^r \right) a_r + \left(\sum_{i=1}^n x_i^{r-1} \right) a_{r-1} + \dots + n a_0 = \sum_{i=1}^n y_i$$

Kui polünoomi aste $r=n-1$, siis on tulemuseks *Lagrange'i interpolatsioonpolünoom*. Praktikas püütakse piirduda võimalikult madala astmega, sest kõrge astme korral on normaalvõrvandite lahendamise töömaht suur ning regressioonkõver ei tasanda küllaldaselt juhuslikke vigu.

31. TESTID JA VAHEMIKHINNANGUD NORMAALJAO-TUSE KORRAL

31.1. Vabadusastmed. Olgu ülesandeks hinnata juhusliku suuruse x keskvaartust võendi x_1, x_2, \dots, x_n järgi. Kui $n=1$, siis keskvaartuse hinnang sõltub võendi ainsast komponendist üheselt. Öeldakse, et niisugusel juhul vabadusastmeid pole ehk *vabadusastmete arv* on null. Kui $n=2$, siis on keskvaartuse hindamisel võimalik vabalt valida komponentide x_1 ja x_2 osatähtsuste suhet. Niisugusel juhul on vabadusastmete arv üks. Kui $n=3$, siis on valida x_3 ja x_1 ning x_2 ja x_1 osatähtsuste suhe ning vabadusastmete arv on kaks. Üldiselt on vabadusastmete arv keskvaartuse hindamisel $n-1$.

Kui n katsetulemuse järgi on tarvis hinnata m parameetrit, siis on vabadusastmete arv $n-m$. Lineaarse regressioonülesande korral on näiteks $n-2$ vabadusastet, polünoomregressioonülesande korral aga $n-(r+1)$. Juhul $r=n-1$ vabadusastmeid pole ja reg-

ressioonülesanne kaotab statistilise ülesande iseloomu: regressioonpolünoom muutub Lagrange'i interpolatsioonpolünoomiks.

31.2. Studenti suhe. Olgu juhuslik suurus x jaotatud normaalselt. Võendi aritmeetilise keskmise suhteline hälve keskväärtusest

$$\frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma(\bar{x})} \quad (31.2.1)$$

allub standardiseeritud normaaljaotusele. Praktikas pole standardhälve $\sigma(\bar{x})$ tuntud. Standardhälbe lihtsaim hinnang on ruutjuur dispersiooni hinnangust. Kuna $\sigma^2(\bar{x}) = \sigma^2(x)/n$, siis aritmeetilise keskmise standardhälve hinnanguks võib võtta statistiku

$$s_n = \sqrt{\frac{s_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (31.2.2)$$

Studenti suhe

$$t = \frac{\bar{x}_n - \mu}{s_n} \quad (31.2.3)$$

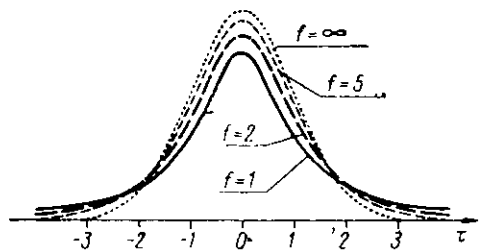
on samuti aritmeetilise keskmise suhteline hälve keskväärtusest, kuid siin on standardhälve asendatud selle hinnanguga (31.2.2) n katsetulemuse järgi.

Studenti suhte jaotust (vt. joonis 31.2) nimetatakse $n-1$ vabadusastmega *Studenti jaotuseks*. Vabadusastmete arvu suurendamisel läheneb Studenti jaotus standardiseeritud normaaljaotusele.

Studenti jaotuse sümmeetriat väljendab jaotusfunktsiooni $S_{n-1}(\tau)$ omadus

$$S_{n-1}(-\tau) + S_{n-1}(\tau) = 1. \quad (31.2.4)$$

Joonis 31.2. Studenti jaotuse tihedusfunktsioone: f — vabadusastmete arv. Kõver $f = \infty$ langeb kokku standardiseeritud normaaltihedusfunktsiooni graafikuga. Kõver $f = 1$ langeb kokku Cauchy jaotuse tihedusfunktsiooni graafikuga.



Studenti jaotusfunktsiooni valemi ja Studenti testi teooria avaldas inglise matemaatik Gosset 1908. a. varjunime «Student» all.

31.3. Studenti test. *Studenti testi* abil kontrollitakse hüpoteesi «juhusliku suuruse x keskvärtus μ asub vahemikus (x^-, x^+) ».

Hüpoteesi kontrollimiseks arvutatakse võendi järgi statistikut \bar{x}_n ja \bar{s}_n väärtused. Seejärel arvutatakse valemit (31.2.3) kasutades Studenti suhte hüpoteetilised väärtused t^- ja t^+ oletuste $\mu = x^-$ ja $\mu = x^+$ korral. Studenti jaotusfunktsiooni tabelist leitakse arvud $S_{n-1}(t^-)$ ja $S_{n-1}(t^+)$. Jaotusfunktsiooni definitsiooni kohaselt on $S_{n-1}(t^-)$ sündmuse $t \leq t^-$ tõenäosus. Tingimusest $t \leq t^-$ järeldub $\bar{x}_n - \mu \leq \bar{x}_n - x^-$ ja $\mu \geq x^-$. Arv $S_{n-1}(t^+)$ on sündmuse $\mu \geq x^+$ tõenäosus. Sündmuse « μ asub vahemikus (x^-, x^+) » tõenäosus on seega $S_{n-1}(t^-) - S_{n-1}(t^+)$.

Aritmeetilise keskmise \bar{x}_n suhtes sümmeetrilise vahemiku puhul on $t^- + t^+ = 0$ ja $S_{n-1}(t^-) = 1 - S_{n-1}(t^+)$. Otsitav tõenäosus on siis $1 - 2S_{n-1}(t^+)$.

31.4. Keskvärtuse vahemikhinnang. Studenti testi saab kasutada keskvärtuse vahemikhinnangu koostamiseks. Tõenäosus p , et hinnanguvahemik katab keskvärtuse μ , on sel juhul tuntud ja seepärast tuleb toimida eelmise punktiga võrreldes vastupidises järjekorras. Aritmeetilise keskmise suhtes sümmeetrilise vahemiku otsimiseks arvutatakse eelmise punkti tulemusele $p = 1 - 2S_{n-1}(t^+)$ tuginedes suuruse t jaotusfunktsiooni väärtus $S_{n-1}(t^+) = \frac{1-p}{2} = q$.

Studenti jaotuse kvantiilide absoluutväärtuste tabelist (tabel 35.2.2) saab q või p ja n väärtuste järele leida t^+ ja t^- ühise absoluutväärtuse $t_{p, n-1}$. Kasutades suuruse t ja keskvärtuse μ seost (31.2.3), saab avaldada keskvärtuse hinnanguvahemiku rajad $\bar{x}_n - t_{p, n-1}\bar{s}_n$ ja $\bar{x}_n + t_{p, n-1}\bar{s}_n$.

Kirjeldatud viisil koostatud hinnangu võib kirjutada nii:

$$P\{\bar{x}_n - t_{p, n-1}\bar{s}_n \leq \mu \leq \bar{x}_n + t_{p, n-1}\bar{s}_n\} = p.$$

Metroloogias kasutatakse veel lühemat kirjutusviisi

$$\mu = \bar{x}_n \pm (t_{p, n-1}\bar{s}_n)_p.$$

Keskvärtuse vahemikhinnangu koostamine Studenti testi abil on rangelt põhjendatud ainult normaaljaotuse korral. Kuna statistiku \bar{x}_n jaotus on enamasti normaaljaotusele lähedane, siis võib Studenti testi tingimisi kasutada ka teistlaadsete lõpliku dispersiooniga jaotuste korral.

31.5. Regressioonsirge konstantide vahemikhinnangud. Regressioonsirge konstantide vahemikhinnangute koostamiseks on tarvis arvutada statistikud

$$\bar{s}_a^2 = \frac{Q}{(n-2) \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n} \right)^2}$$

$$\bar{s}_b^2 = \frac{Q}{n(n-2)}$$

Sümboli Q tähendus on selgitatud punktis 30.10. Usaldatavuse p korral on konstantide α ja β vahemikhinnangud järgmised:

$$\alpha = a \pm t_{p, n-2} \bar{s}_a,$$

$$\beta = b \pm t_{p, n-2} \bar{s}_b,$$

kus a ja b on p. 30.10 kohaselt arvatud punkthinnangud.

Regressioonivalemi järgi arvatud suuruse y väärtuse piirviga on $t_{p, n-2} \sqrt{\bar{s}_a^2 x^2 + \bar{s}_b^2}$.

31.6. Student-Lordi test. Statistiku \bar{s}_n arvutamine on tülikas. 1947. a. avaldas Lord modifitseeritud Studenti testi kirjelduse ja tarviliku tabeli. Modifitseeritud testi abil koostatud keskvaartuse vahemikhinnang on järgmine:

$$\mu(x) = \bar{x}_n \pm t_{p, n}^{(w)} \omega_n.$$

Statistiku $\omega_n = \max x_i - \min x_i$ arvutamine on äärmiselt lihtne. Kor-daja $t_{p, n}^{(w)}$ väärtused on usaldatavuste 90%, 95% ning 99% ja võendi mahu $n=2 \dots 20$ korral näidatud tabelis 35.3.

Võendi haarde järgi määratud dispersiooni hinnangu efektiivsus on väiksem, kui statistiku \bar{s}_n^2 efektiivsus. Seepärast raiskab Student-Lordi test informatsiooni. Piirkonnas $n=3 \dots 8$ on informatsiooni-kadu kompenseeritav võendi mahu suurendamisega ühe võrra. Suure mahu korral on informatsioonikadu olulisem.

Student-Lordi test on Studenti testist märksa tundlikum nor-maaljaotustest kõrvalekaldumiste suhtes.

31.7. Fisheri F-test. Olgu tuntud kaks võendit $x_1 \dots x_n$ ja $y_1 \dots y_m$ ning tarvis kontrollida, kas suuruste x ja y dispersioonid on võrdsed. Selleks arvutatakse statistikud

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2}{m - 1}$$

ja nende suhe

$$F = \frac{s_x^2}{s_y^2}$$

Kui x ja y alluvad võrdsete dispersioonidega normaaljaotustele, siis allub statistik F $n-1$ ja $m-1$ vabadusastmega *Snedecori jaotusele*. Snedecori jaotusfunktsiooni abil võib määrata tõenäosuse statistiku F sattumiseks mingisse vahemikku (F^- , F^+). F -testi praktilisel kasutamisel valitakse tähistused x ja y nii, et $F \geq 1$. Kui võendite järgi arvutatud statistik F rahuldabtingimust $F > F_{p, n-1, m-1}$, kus $F_{p, n-1, m-1}$ on Snedecori jaotuse kvantiil (vt. tabel 36.2.2), siis on dispersioonide võrdsuse hüpotees usaldatavusega p ümber lükatud. Kui $F \leq F_{p, n-1, m-1}$, siis dispersioonide võrdsuse hüpoteesi nii suure usaldatavusega kõrvale heita ei saa. Väiksema usaldatavuse korral võib see aga osutuda võimalikuks. Nagu teisisi statistilisi hüpoteese, pole ka dispersioonide võrdsuse hüpoteesi võimalik kunagi tõestada.

31.8. Võendite hulga statistikud. Olgu ühe ja sama juhusliku suuruse jaoks r võendit:

$$x_{1I}, x_{2I}, \dots, x_{n_1I}$$

$$x_{1II}, x_{2II}, \dots, x_{n_2II}$$

$$x_{1(r)}, x_{2(r)}, \dots, x_{n_r(r)}$$

Kõik need r võendit võib ühendada üheks suureks *liitvõendiks* mahuga $N = \sum_{j=1}^r n_j$. Üksikuid *osavõendeid* nimetatakse *liitvõendi klassideks*.

Klasside aritmeetiliste keskmiste

$$\bar{x}^{(j)} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} x_i^{(j)}}{n_j}$$

järgi võib arvutada liitvõendi aritmeetilise keskmise

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^r n_j \bar{x}^{(j)}}{N}$$

Klassidevaheliseks empiiriliseks dispersiooniks nimetatakse statistikut

$$s_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^r n_j (\bar{x}^{(j)} - \bar{x})^2}{r - 1}$$

Klassidesiseseks empiiriliseks dispersiooniks nimetatakse statistikut

$$s_2^2 = \frac{\sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^{n_j} (x_i^{(j)} - \bar{x}^{(j)})^2 \right)}{N - r}$$

Nende statistikute järgi saab tarviduse korral välja arvutada ka liitvõendi *üldise empiirilise dispersiooni*

$$s^2 = \frac{\sum_{i,j} (x_i^{(j)} - \bar{x})^2}{N - 1} = \frac{(r - 1)s_1^2 + (N - r)s_2^2}{N - 1}$$

31.9. Ühefaktoriline dispersioonanalüüs. Ühiste parameetritega normaaljaotusele alluvate komponentidega liitvõendi statistikute s_1^2 ja s_2^2 keskvaärtused võrduvad juhusliku suuruse x dispersiooniga ja statistik

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

allub $r-1$ ja $N-r$ vabadusastmega Snedecori jaotusele.

Kui kõigi komponentide dispersioonid on küll võrdsed, kuid eri klassidesse kuuluvate komponentide keskvaärtused on erinevad, on statistiku s_2^2 keskvaärtus endine, statistiku s_1^2 keskvaärtus aga statistiku s_2^2 keskvaärtusest suurem. Statistiku F oodatust suurem

väärtus võib olla eri klassidesse kuuluvate komponentide kesk-
väärtuste erinevuse tunnuseks. Seda tunnust kasutabki *dispersioon-*
analüüs klasside süstemaatilise erinevuse avastamiseks. Selleks et
süstemaatilise erinevuse usaldatavus oleks p , peab statistiku F
väärtus ületama kriitilist väärtust $F_{p, r-1, N-1}$.

Dispersioonanalüüsi meetodid on kasutatavad ka kahe võendi
võrdlemiseks ($r=2$). Sel juhul langeb F -test kokku kahe võendi
võrdlemiseks kohandatud Studenti testiga.

32. MITTEPARAMETRILISED TESTID JA VAHEMIKHIN- NANGUD

32.1. Mediaani ja võendi komponentide järjestus. Olgu x pidev
juhuslik suurus ja x_1, \dots, x_n juhuslik võend. Mediaani λ definitsiooni
kohaselt on ühe võrratusega $x_i < \lambda$ või $x_i > \lambda$ määratud sündmuse,
näiteks sündmuse $x_1 < \lambda$ tõenäosus $1/2$. Tõenäosus selleks, et kõik
 n komponenti rahuldaksid mingeid kirjeldatud tüüpi võrratusi (näi-
teks $x_1 < \lambda, x_2 > \lambda, \dots, x_n > \lambda$) üheaegselt, on $(1/2)^n$.

Sündmuse «kõik võendi komponendid on mediaanist suuremad»
tõenäosus on öeldu kohaselt $(1/2)^n$. Sündmuse «üks komponent on
mediaanist väiksem ja ülejäänud suuremad» tõenäosuse määrami-
sel on tarvis tähele panna, et väiksemaks komponendiks võib olla
ükskõik milline n komponendi hulgast. Seetõttu on niisuguse
sündmuse tõenäosus $n(1/2)^n$. Sündmuse « m komponenti on mediaa-
nist väiksemad ja $n-m$ suuremad» esinemiseks on nii mitu tõe-
näosusega $(1/2)^n$ võimalust, kui mitut erinevat moodi võib valida m
komponenti n komponendi hulgast. Valikuvõimaluste arvu nimeta-
takse kombinatsioonide arvuks n elemendist m kaupa, see arv
võrdub binomiaalkordjaga $\binom{n}{m}$. Binomiaalkordajaid võib arvutada
valemi

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

abil. Binomiaalkordaja tähise abil saab sündmuse « m komponenti
on mediaanist väiksemad ja ülejäänud suuremad» tõenäosuse
avaldada nii:

$$\binom{n}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Mediaani hindamiseks on tarvis teada liitsündmuse «mediaanist

väiksemate komponentide arv on väiksem kui k » tõenäosust. See tõenäosus $q_{n,k}$ on uuritud tüüpi sündmuste ($m=0$, $m=1$, $m=k-1$) tõenäosuste summa:

$$q_{n,k} = \left[1 + \binom{1}{n} + \binom{2}{n} + \dots + \binom{k-1}{n} \right] \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad (32.1)$$

Sündmuse «mediaanist suuremate komponentide arv on väiksem kui k » tõenäosus on ilmselt sama.

32.2. Mediaani hinnang. Eelmises punktis vaadeldud võendi $x_1 \dots x_n$ võib järjestada kasvujärjekorras

$$x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(i)} < \dots < x_{(n)}.$$

Kasvujärjestust kasutades saab sündmust «mediaanist väiksemate komponentide arv on väiksem kui k » avaldada lühemalt võrratuse $\lambda < x_{(k)}$ abil ja sündmust «mediaanist suuremate komponentide arv on väiksem kui k » võrratuse $\lambda > x_{(n+1-k)}$ abil. Eelmises punktis sõnastatud väite aga saab kirja panna valemiga

$$P\{\lambda > x_{(n+1-k)}\} = P\{\lambda < x_{(k)}\} = q_{n,k}, \quad (32.2.1)$$

kus $q_{n,k}$ arvutatakse valemi (31.1) järgi.

Tingimusel $k \leq n/2$ võib mediaan paikneda järjestatud võendis kolmel üksteist välistaval viisil:

$$\begin{aligned} \lambda &< x_{(k)} \\ x_{(k)} &\leq \lambda \leq x_{(n+1-k)} \\ x_{(n+1-k)} &< \lambda. \end{aligned}$$

Kuna esimese ja kolmanda sündmuse tõenäosused on kummalgi $q_{n,k}$, siis teise sündmuse tõenäosus on $1 - 2q_{n,k}$. Tähistades $1 - 2q_{n,k} = p$, võib kirjutada

$$P\{x_{(k)} \leq \lambda \leq x_{(n+1-k)}\} = p. \quad (32.2.2)$$

Mediaani hinnanguvahemiku $[x_{(n)}, x_{(n+1-k)}]$ usaldatavus on $p = 1 - 2q_{n,k}$.

Mediaani ja võendi komponentide järjestuse kontrollimise testi nimetatakse *märgitestiks*. Seepärast öeldakse, et hinnang (32.2.2) on koostatud märgitesti abil.

Kirjeldatud hinnangu kasutamisel pole juhusliku suuruse jaotuse tüüp oluline. Pole nõutav isegi keskvärtuse olemasolu.

Märgitesti lihtsusele vaatamata avaldati mediaani praktiliseks hindamiseks tarvilik valemi (32.1) järgi koostatud tabel esmakordselt alles 1939. a.

Käesolevas raamatus esitatud tabelist 35.4 võib arvu k järgi leida väikseima võendi mahu n , mille korral usaldatavus on vähemalt 90%, 95% või 99%.

32.3. Kahe võendi ühine järjestus. Olgu kaks võendit $x_1 \dots x_g$ ja $y_1 \dots y_h$ ning tarvis kontrollida hüpoteesi, mille kohaselt suuruste x ja y mediaanid on võrdsed. Järgnevas kahes punktis käsitletavate testide korral on oluline nende võendite *ühise järjestuse struktuur*. Selle kindlakstegemiseks on tarvis valida võendite $x_1 \dots x_g$ ja $y_1 \dots y_h$ hulgast arve kasvamise järjekorras ja iga arvu valimisel kirjutada tähis x või tähis y , olenevalt kummast võendist arv võeti. Kui võendid on näiteks järgmised

x : 3,7; 2,1; 4,2; 2,6

y : 2,3; 2,9; 2,1; 2,5; 3,3,

siis kirjeldatakse ühise järjestuse struktuuri nii:

$x y y x y y y x x$
1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Tähiste x ja y alla on kirjutatud ühise järjestuse järjed.

Kui arvude ümardatuse tõttu mingi x väärtus langeb kokku mingi y väärtusega, siis on tülivate rangete protseduuride vältimiseks soovitatav need kokkulangevad väärtused lihtsalt maha tõmata, vähendades vastavalt võendite mahte g ja h .

32.4. Wilcoxon'i test. Wilcoxon'i poolt 1945. a. esitatud ja Manni ning Whitney poolt 1947. a. täiendatud testi statistikuks on *inversioonide arv* u kahe võendi ühises kasvujärjestuses. Statistiku u kriitiliste väärtuste $U_{p, g, h}$ tabeli 36.3 kasutamiseks on tarvis x -ga tähistada väiksema mahuga ja y -ga suurema mahuga võend. Parempoolse inversioonide arvu u_a (vasakpoolse inversioonide arvu u_v) määramiseks loetakse ära, mitu x -i jääb ühises järjestuses igast y -st paremale (vasakule) ja liidetakse leitud arvud kõigi y -te jaoks.

Kui $U_a \leq U_{p, g, h}$ ($U_v \leq U_{p, g, h}$) siis on x -de jaotuse keskpunkt y -te jaotuse keskpunktist väiksem (suurem) usaldatavusega vähemalt $(p+1)/2$. Kui ükskõik kumb arvudest U_a ja U_v rahuldab tingimust $U \leq U_{p, g, h}$, siis on jaotuste keskpunktid erinevad usaldatavusega vähemalt p .

Normaaljaotuse korral on Wilcoxon'i test F -testist veidi vähem tundlik.

32.5. Van der Waerdeni X-test. Van der Waerdeni testi (Van der Waerden, 1953) statistikuks on summa

$$X = \sum_r \Psi \left(\frac{r}{n+1} \right),$$

kus r on suuruse x väärtuse järg x ja y ühises järjestuses, n — võendite mahtude summa ja Ψ tähistab standardiseeritud normaaljaotuse kvantiilfunktsiooni (vt. tabel 34.6.1). Summeerida tuleb üle

Kolmogorovi testi statistiku kriitilised väärtused $D_{p, n}$

n	$p=90\%$	$p=95\%$	$p=99\%$	n	$p=90\%$	$p=95\%$	$p=99\%$
6	0,468	0,519	0,617	40	0,189	0,210	0,252
7	0,436	0,483	0,576	45	0,179	0,198	0,238
8	0,410	0,454	0,542	50	0,170	0,188	0,226
10	0,369	0,409	0,489	50	0,155	0,172	0,207
12	0,338	0,375	0,449	70	0,144	0,160	0,192
15	0,304	0,338	0,404	80	0,135	0,150	0,179
20	0,265	0,294	0,352	90	0,127	0,141	0,169
25	0,238	0,264	0,317	100	0,121	0,134	0,161
30	0,218	0,242	0,290	>100	$\frac{1,22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{n}}$
35	0,202	0,224	0,269				

kõigi x komponentide. Punktis 32.3 esitatud näite korral on $X = \Psi(0,1) + \Psi(0,4) + \Psi(0,8) + \Psi(0,9)$. Kui $-X$ on suurem tabelist 36.4 leitud kriitilisest väärtusest $X_{p, n, g-h}$, siis on x -jaotuse keskpunkt y -jaotuse keskpunktiist väiksem usaldatavusega vähemalt $(p+1)/2$. Kui $X > X_{p, n, g-h}$, siis on x -jaotuse keskpunkt suurem usaldatavusega vähemalt $(p+1)/2$. Kui $|X| > X_{p, n, g-h}$, siis on jaotuse keskpunktid erinevad usaldatavusega vähemalt p .

X -test on normaaljaotuse korral niisama tundlik kui F -test.

32.6. Jaotusfunktsiooni vahemikhinnang. 1933. a. esitas Kolmogorov testi, mis võimaldab koostada vahemikhinnangu jaotusfunktsiooni jaoks. Selleks on tarvis:

— leida empiiriline jaotusfunktsioon $F_x^{(n)}(\xi)$ (valem 29.4),

— leida tabelist 32.6 suuruse $D_{p, n}$ väärtus,

— moodustada funktsioonid $F_-(\xi) = F_x^{(n)}(\xi) - D_{p, n}$ ja $F_+(\xi) = F_x^{(n)}(\xi) + D_{p, n}$.

Funktsioonide $F_-(\xi)$ ja $F_+(\xi)$ vahele jääv riba katab tundmatu tõelise jaotusfunktsiooni graafiku üleni tõenäosusega p .

33. ÜLESANDED

33.1. Määrake katseliselt «kirja» suhteline sagedus «kulli ja kirja» mängus 1, 3, 5, 10 ja 20 viske korral. Kas kihlvedu selle peale, et tunni aja jooksul 10-viskelisi seeriaid korrates tuleb kunagi 10 «kirja» järjest, on kasulik?

33.2. Tõenäosus, et tänaval 30 esimest vastutulijat on kõik meessoost, näib olevat $(0,5)^{30} \approx 10^{-9}$. Miks kirjeldatud sündmus ei ole nii haruldane?

33.3. Millise täringu omaduse tõttu on tõenäosus täringu lan-

gemiseks kindlale tahule täpselt $1/6$? Kuidas ehitada väliselt õige täringuga sarnast valetäringut, mis garanteeriks täringumängus maksimaalse edu (niisuguseid täringuid tunti juba vanas Egiptuses)?

33.4. Jaotusfunktsiooni tabelis on andmed $F(-\infty)=0,2$; $F(0)=-0,1$; $F(1)=0,5$; $F(2)=0,4$; $F(\infty)=1,5$. Milliseid vigu võib nendes andmetes märgata?

33.5. Olgu «kulli ja kirja» mängus «kulli» korral $x=0$, «kirja» korral $x=1$. Koostage jaotusfunktsiooni graafik kahe viske tulemuste summa jaoks.

33.6. Kui suur on joonisel 28.4 kirjeldatud jaotuse korral sündmuse $x=\mu$ tõenäosus ja suuruse x tõenäosustihedus punktis $x=\mu$? Kui suur on pideva jaotuse korral sündmuse $x=\lambda$ tõenäosus?

33.7. $\sigma^2(x+x)=\sigma^2(x)+\sigma^2(x)=2\sigma^2(x)$; $\sigma^2(x+x)=\sigma^2(2x)=4\sigma^2(x)$; $2=4$; kus on viga?

33.8. Avaldage $\sigma^2(x-x)$ ja $\sigma^2(x-y)$ sõltumatute suuruste x ja y dispersioonide kaudu.

33.9. Kui suur on $\rho(x, y)$ joonisel 27.10 esitatud näidete korral? Leidke ise näiteid negatiivselt ja positiivselt korreleeritud juhuslike suuruste kohta.

33.10. Millisele jaotusseadusele allub:

— 4-kohalisest logaritmidest tabelist huupi valitud arvu ümardamisviga;

— poiste arv juhuslikult komplekteeritud klassis;

— ühe minuti jooksul stsintilloskoobis registreeritud sähvatuste arv;

— rosinade arv rosinakuklis;

— 100 kuni 110 grammise kartuli mass?

33.11. Millistel tingimustel kirjeldaks tee ääres seisjast kindlas ajavahemikus mööduvate autode arvu Poissoni jaotus? Mis põhjustab tegeliku jaotuse erinevusi Poissoni jaotusest?

33.12. Bussipeatusse, kus liiklusintervall peaks olema 10 min, tuleb juhuslikult momendiks $t=0$ reisija ja jääb bussi ootama. Reisija hindab ootamise ajal pidevalt veel oodata jääva aja t' keskväärtust μ ja tõenäosust $P\{t < 5 \text{ min}\}$. Mida otsustab ootaja kriitilistel momentidel $t=n$ 10 min? Joonistage graafik, kus on näidatud reisija poolt hinnatud keskväärtuse ja tõenäosuse sõltuvus oodatud ajast, kui reisija lahkus peatuselt 30 minuti pärast jalgsi.

Märkus. Ülesande lahendus sõltub reisija mõtlemisviisist. Seetõttu tuleb ülesannet käsitada kõigepealt kui psühholoogia ülesannet.

33.13. Tuletage ühtlase jaotuse dispersiooni valem ja arvutage ühtlase jaotuse keskvärtus, mediaan, dispersioon ja standardhälve juhul $\alpha=-1$, $\beta=1$.

33.14. Juhuslik suurus x on jaotatud normaalselt, $\mu=0$ ja $\sigma=10$. Hinnake ilma tabelleid kasutamata sündmuse $|x| < 1$ tõenäosust.

33.15. Leidke sündmuse $|x-\mu| \leq 3\sigma$ tõenäosus ühtlase jaotuse

ja normaaljaotuse korral. Mida võib öelda selle sündmuse kohta siis, kui jaotusseadus pole teada?

33.16. Järjestage võend (0,33; 0,65; -1,21; 0,57; -0,07; -0,80; 0,16; -2,36; 0,22; 1,36; -1,54; -2,47; -1,13; 0,54; -0,82) suuruse järgi ja koostage empiirilise jaotusfunktsiooni graafik. Võrrelge seda standardiseeritud normaaljaotusfunktsiooni graafikuga. (Kirjeldatud võend on leitud nimetatud jaotusega juhuslike arvude tabelist.)

Arvutage võendi statistikud \bar{x} , l ja $(x_{(3)} + x_{(n-2)})/2$ ja võrrelge neid keskväärtuse ning mediaaniga.

33.17. Leidke Glivenko teoreemi kasutades kvantiili ξ_p jaoks konsistentne hinnang.

33.18. Sõnastage ja tõestage Tšebõšovi teoreem (suurte arvude seadus)

$$P\{|\bar{x}_n - \mu| < \varepsilon\} > 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

kus ε on kuidahes väike positiivne arv.

Näpunäide. Ülesande lahendamisel saab kasutada dispersioonide liitmise reeglit ja Tšebõšovi võrratust.

33.19. Leidke regressioonsirge ja regressioonparabool kolme katsepunkti (2; 1) (3; 2) ja (4; 4) järgi. Lahendage ülesanne tingimusel, et neljas katsepunkt on (5; 4). Illustreerige tulemusi graafiliselt.

33.20. Olgu kolm võendit järgmised:

x : 1,18; -0,27; 0,10; -2,30; -0,97; -1,21; 0,21; -0,16; -0,20; 1,22;

y : -0,41; 0,00; 0,42; 0,13; -0,33; 0,81; -0,01; 0,39;

z : -1,12; -0,67; 0,18; -0,91; -0,13; 0,27.

Leidke suuruse x keskväärtuse vahemikhinnang

— Studenti testi abil,

— Student-Lordi testi abil,

— märgitesti abil.

Võrrelge suuruste x ja y dispersioone F -testi abil.

Kas kolme suuruse keskväärtused on teineteisest erinevad (kasutage dispersioonanalüüsi meetodit)?

Võrrelge suuruste y ja z jaotuste keskpunkte

— dispersioonanalüüsi kasutades ($r=2$),

— Wilcoxon testi abil,

— X -testi abil.

33.21. Koostage ülesandes 33.16 esitatud võendi jaoks jaotusfunktsiooni vahemikhinnangud 90%, 95% ja 99% usaldatavuse korral. Kandke leitud piirfunktsioonide graafikud ülesande 33.16 lahendamisel koostatud joonisele.

V peatükk. KATSEANDMETE STATISTILINE TÖÖTLEMINE

34. STATISTILISE MEETODI VALIMINE

34.1. Katse tõenäosusteoreetiline mudel. Mida teha juhuslikke vigu sisaldavate katseandmetega? Kas lugeda kõige õigemaks esimene mõõtmistulemus, viimane mõõtmistulemus või hoopis kõigi mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine? Kui suur võib olla lõpptulemuse juhuslik viga? Nendele küsimustele vastamiseks on tarvis kvantitatiivset teooriat ehk, teiste sõnadega, katse matemaatilist mudelit.

Igal matemaatilisel mudelil on kaks olulist külge. Esimene nendest, *mudeli sisemine struktuur*, põhineb loogikareeglitel ja siin pole tavaliselt midagi vaieldavat. Struktuur peab olema küllalt täiuslik, et oleks võimalik lahendada praktikast pärit ülesandeid. Teine külg, *mudeli suhe tegelikkusega*, on paljuski esimesele vastandlik. Mudeli sidumisel tegelikkusega on oluline katse intuiitiivne tõlgendamine ja mitmesugused, sageli hüpoteesidena käsitletavat kokkulepped.

Tuntud tegelikkusest palju vaesema struktuuriga mudelit võib nimetada *primitiivseks*. Niisugune on näiteks üliõpilaste teadmiste taseme neljapalline mudel.

Tuntud tegelikkusega hästi sobivat mudelit võib nimetada *konformseks*. Konformse mudeli näiteks sobib teoreetiline mehaanika. Massi, jõu jne. omadused teoreetilises mehaanikas on reaalsete objektide tuntud omadustega nii sarnased, et neid mudeli elemente kiputakse reaalsete objektide ja nende omadustega samastama. Primitiivse mudeli korral taolist eksitust ei juhtu: eksamihinnet ei samasta keegi teadmiste tasemega.

Konformse mudeli rakendusi piiravad kokkulepped on kindlad ja selged. Mudeli struktuuris pole kokkulepete piires midagi olulist puudu ega ülearu.

Häiretest mõjustatud katse matemaatilise mudeli aluseks on tõenäosusteooria. Tõenäosusteooria on suures osas just selle mudeli tarbeks rajatud. Reaalsele mõõtmistulemusele seatakse vastavusse mudeli element: juhuslik suurus.

Katse tõenäosusteoreetiline mudel pole primitiivne. Tõenäosusteooria struktuur on rikas. Tegelikkusega vastandamise võimalusi arvestades sisaldab ta isegi palju ülearust. See mudel pole aga sugugi konformne. Mudeli nõrgaks küljeks on suhe tegelikkusega. Kasutatavad hüpoteesid ja kokkulepped on enamasti tinglikud ning ebarahuldavalt põhjendatud.

Katse matemaatilist mudelit täiustatakse pidevalt. Erilist huvi tuntakse viimasel ajal *informatsiooniteooria* ja *juhuslike funktsioonide teooria* kasutamise võimaluste vastu. Mõnede uute suundade tulemused hakkavad juba jõudma elementaarsete rakendusteni [20].

34.2. Jaotusseaduse eelhinnang. Katseandmete statistilise töötlemise meetodit on kasulik ette näha juba mõõtmise planeerimisel. Enne statistilise meetodi valimist hinnatakse mõõtmistulemuste jaotuse võimalikku tüüpi füüsikalise intuitsiooni alusel. Selleks on tarvis tunda tähtsamate jaotuste esinemistingimusi.

Normaaljaotus esineb siis, kui juhuslik mõõtmisviga on põhjustatud valdavalt soojusliikumisest või turbulentsist.

Ligikaudu normaalne jaotus esineb siis, kui juhuslikul mõõtmisveal on mitu, üksikult võttes väikest põhjust.

Poissoni jaotusele allub kindlas ajavahemikus Geigeri loenduri abil registreeritud kiirguskvantide arv. Selleks et ajas juhuslikult jaotatud impulsside arvu ajavahemikus või ruumis juhuslikult jaotatud osakeste arvu kindlas ruumalas kirjeldaks Poissoni jaotus, on tarvis, et impulsside või osakeste koguarv oleks palju suurem registreeritud arvust.

Kahepunktiline diskreetne jaotus on iseloomulik mõõteriistas esinevast mehaanilisest lõtkust tingitud juhuslikele vigadele

Pidevale ühtlasele jaotusele on lähedane mõõteriistas esinevast kuivast hõõrdumisest tingitud juhusliku vea jaotus.

Seekansjaotusele allub sinusoidaalse vahelduvvoolu juhuslikul katkestamisel tekkiv laenguhäire.

Kui füüsikalised kaalutlused ei luba eeldada ühtki nimetatud jaotustest, siis on jaotusseaduse kohta käiva hüpoteesi püstitamiseks tarvis uurida katseandmeid. Enamasti on aga õigem leppida katseandmete töötlemisel jaotusest sõltumatute mitteparameetrislike meetoditega.

34.3. Ümardamisest tingitud diskreetus. Andmete ümardatuse tõttu on nende jaotus alati diskreetne ja tekib küsimus, kas üldse on õige kasutada mõnd pidevat jaotust eeldavat hüpoteesi.

Kui suurima ja väikseima mõõtmistulemuse vahe on vähemalt viis korda suurem viimase tähendusega kümnendkoha ühikust h , siis saab ümardatud arvude järgi veel küllalt täpselt hinnata kujutletava pideva suuruse võendi statistikuid ning pideva jaotuse hüpotees on lubatud. Ümardamise mõju aritmeetilisele keskmisele on tähtsusetu. Dispersiooni hinnangu korrigeerimiseks võib ümardatud arvude järgi leitud statistiku s_n^2 väärtusest lahutada *Shepard'i parandi* $h^2/12$. Enamasti on see parand tähtsusetu.

34.4. Mõõtmisvea juhuslik ja süstemaatiline komponent. Olgu mõõdetava suuruse kindel tõeline väärtus X , juhuslik mõõtmistulemus x ja mõõtmistulemuse jaotuse keskpunkt (keskväärtus või mediaan, vt. järgmine punkt) x_0 . Mõõtmisvea $\delta x = x - X$ süstemaatiliseks komponendiks nimetatakse kindlat vahet $x_0 - X$, juhuslikuks komponendiks juhuslikku vahet $x - x_0$. Juhusliku mõõtmisvea jaotuse keskpunkt on definitsiooni kohaselt null.

34.5. Mõõtmistulemuse jaotuse keskpunkt. Mõõtmistulemuse jaotuse keskpunktiks loetakse keskväärtus või mediaan.

Enamasti on mõõtmistulemuse jaotus sümmeetriline ning keskväärtus ja mediaan langevad kokku.

Ebasümmeetrilise jaotuse korral oleneb valik mediaani ja keskväärtuse vahel konkreetsetest asjaoludest.

Mõnel juhul on mõõdetav füüsikaline suurus (näiteks radioaktiivsete lagunemiste keskmine sagedus, tolmuterade keskmine kontsentratsioon) defineeritud keskväärtusena. Siis on keskpunktiks kindlasti keskväärtus.

Tundmatute omadustega jaotuse keskpunktiks on õigem lugeda mediaan. Mediaani valimine keskpunktiks on samaväärne hüpoteesiga, et süstemaatilise vea puudumisel on tõelisest väärtusest suurema mõõtmistulemuse ja väiksema mõõtmistulemuse tõenäosused võrdsed. Keskväärtuse valimist keskpunktiks nii loomuliku hüpoteesiga põhjendada ei saa. Pealegi võib keskväärtus hoopiski puududa. Ka siis, kui keskväärtus eksisteerib, võib ta osutada keskpunktiks täiesti sobimatuks. Olgu näiteks juhuslik suurus x jaotatud niiviisi, et tema pöördväärtuse $1/x$ tihedusfunktsioon oleks piirkonnas $\xi \leq \varepsilon$ identselt null ja piirkonnas $\xi > \varepsilon$ võrdne parameetritega $\mu = 1$, $\sigma = 0,01$ normaaltihedusfunktsiooniga. Kui ε on ühest palju väiksem positiivne arv, siis on suuruse x tihedusfunktsiooni graafik praktiliselt eristamatu normaaltihedusfunktsiooni ($\mu = 1$, $\sigma = 0,01$) graafikust, kuid keskväärtus $\mu(x)$ võib olla sõltuvalt arvu ε valikust kuitahes suur, näiteks 1000.

34.6. Empiirilise jaotusfunktsiooni graafiline uurimine. Lineaarses koordinaatvõrgus joonistatud empiirilise jaotusfunktsiooni graafikust on raske silma järgi midagi välja lugeda. Hoopis ülevaatlikuma graafiku saab, kui ordinaatideks võtta empiirilise jaotusfunktsiooni väärtuste standardsed normaaljaotuskvantiilid $\Psi(F)$. Kui empiirilise jaotusfunktsiooni asemel oleks mingi normaaljaotusfunktsioon, saaksime niiviisi talitades graafikuks sirgjoone, mis lõikab nullhorisontaali keskväärtuse kohal ja mille tõus võrdub standardhälbe pöördväärtusega.

Kirjelatud viisil koostatud graafiku hea lähendatavus sirgjoonega võib olla normaaljaotushüpoteesi aluseks. Kui sirgjoon lähenduskõveraks ei sobi, tuleb normaaljaotushüpotees kõrvale heita.

Näide. Olgu kasvujärjestuses kirjutatud mõõtmistulemused 8,3; 8,8; 9,4; 9,7; 9,8; 10,1; 10,4; 10,9; 11,3 ja 11,4. Mõõtmistulemuste

Tabel 34.6.1

Standardiseeritud normaalfjaotuse kvantiliid $\Psi(y)$

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	$-\infty$	-2,33	-2,05	-1,88	-1,75	-1,64	-1,55	-1,48	-1,41	-1,34
0,1	-1,28	-1,23	-1,17	-1,13	-1,08	-1,04	-0,99	-0,95	-0,92	-0,88
0,2	-0,84	-0,81	-0,77	-0,74	-0,71	-0,67	-0,64	-0,61	-0,58	-0,55
0,3	-0,52	-0,50	-0,47	-0,44	-0,41	-0,39	-0,36	-0,33	-0,31	-0,28
0,4	-0,25	-0,23	-0,20	-0,18	-0,15	-0,13	-0,10	-0,08	-0,05	-0,03
0,5	0,00	0,03	0,05	0,08	0,10	0,13	0,15	0,18	0,20	0,23
0,6	0,25	0,28	0,31	0,33	0,36	0,39	0,41	0,44	0,47	0,50
0,7	0,52	0,55	0,58	0,61	0,64	0,67	0,71	0,74	0,77	0,81
0,8	0,84	0,88	0,92	0,95	0,99	1,04	1,08	1,13	1,17	1,23
0,9	1,28	1,34	1,41	1,48	1,55	1,64	1,75	1,88	2,05	2,33

arv $n=10$. Empiiriline jaotusfunktsioon on treppfunktsioon, mille väärtused on üheksas mõõtmistulemuste vahele jäävas vahemikus järjekorras $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ käesoleval juhul 0,1; 0,2; ...;

0,9. Tabelist 34.6.1 saab leida vastavad kvantiilid $-1,28; -0,84; \dots; 1,28$. Kõik vaadeldava näite puhul olulised arvud on koondatud tabelisse 34.6.2. Selle tabeli järgi koostatud joonisel 34.6 on näidatud ka silma järgi tõmmatud lähendussirge. Normaalkvaadatushüpotees on siin ilmselt vastuvõetav. Lähendussirge ja nullhorisontaali löikepunkti järgi võib leida keskvaertuse hinnangu $m=10,0$ ning lähendussirge ja horisontaali $\Psi=1$ löikepunkti järgi väärtuse $m+s=11,1$. Standardhälbe hinnang on $s=11,1-10,0=1,1$.

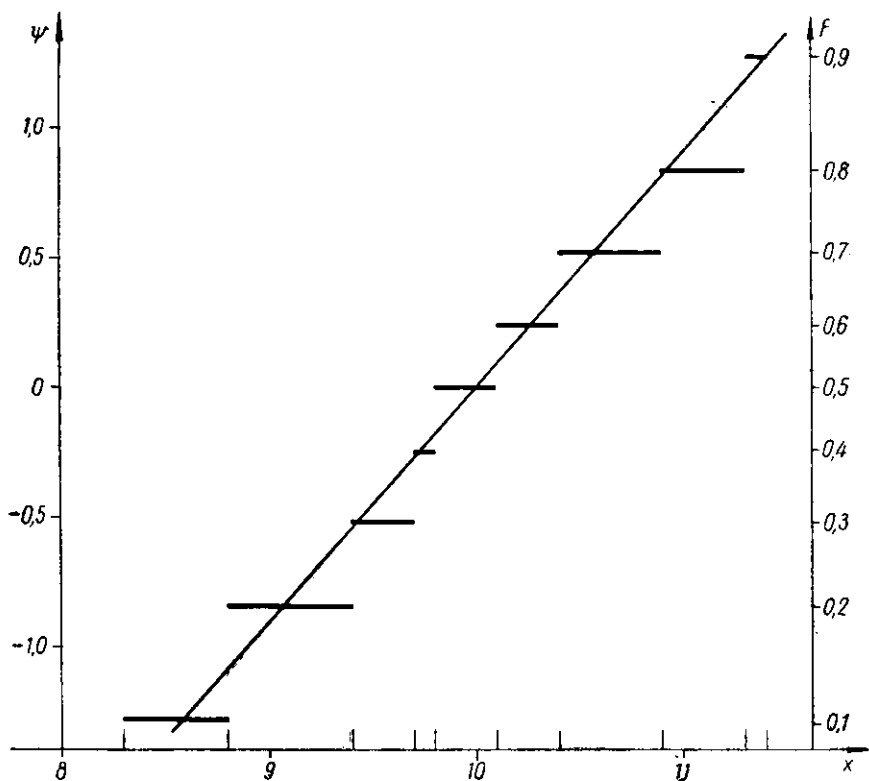
Negatiivsete arvude vältimiseks liidetakse kvantiilile Ψ mõnikord arv 5. Summat $\Psi(F)+5$ nimetatakse *probitiks*.

Spetsiaalse funktsionaalse koordinaatvõrguga *tõenäosuspaberi* ordinaattelg on jaotatud nii nagu joonisel 34.6 parempoolne ordinaattelg. Sellist paberit kasutades pole kvantiilide või probitite tabeli abi tarvis.

Tabel 34.6.2

Mõõtmistulemused x , empiirilise jaotusfunktsiooni väärtused F ja nende standardsed normaaljaotuskvantiilid $\Psi(F)$

x	F	$\Psi(F)$
8,3	0,1	-1,28
8,8		
9,4	0,2	-0,84
9,7	0,3	-0,52
9,8	0,4	-0,25
10,1	0,5	0,00
10,4	0,6	0,25
10,9	0,7	0,52
11,3	0,8	0,84
11,4	0,9	1,28



Joonis 34.6. Empiirilise jaotusfunktsiooni graafiline uurimine (näide).

Jaotusfunktsiooni rangemaks hindamiseks kasutatakse Kolmogorovi testi (vt. p. 32.6)

34.7. Normaaljaotushüpoteesi kontrollimine. Normaaljaotushüpoteesi kontrollimiseks võib arvutada statistikute

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$q = \sqrt{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$d = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$$

Tabel 34.7.1

Statistiku d 90% usaldusvahemiku rajad
normaaljaotuse korral

n	11	16	21	31	41	51	101	201
d_{min}	0,715	0,724	0,730	0,740	0,747	0,752	0,764	0,774
d_{max}	0,907	0,888	0,877	0,862	0,854	0,848	0,834	0,823

Tabel 34.7.2

Statistiku g 90% usaldusvahemiku rajade
ühine absoluutväärtus normaaljaotuse korral

n	25	30	35	40	50	80	100	200
g_{max}	0,771	0,661	0,621	0,587	0,533	0,432	0,389	0,280

$$g = \frac{n^2}{q^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$$

väärtused. Normaaljaotuse korral läheneb statistik d protsessis $n \rightarrow \infty$ väärtusele $\sqrt{2/\pi}$ ja statistik g väärtusele 0. Kui statistiku d väärtus on väljaspool tabelis 34.7.1 näidatud kriitiliste väärtustega d_{min} ja d_{max} piiratud vahemikku või g absoluutväärtus suurem tabelis 34.7.2 näidatud arvust, siis on normaaljaotushüpotees vähemalt 90% tõenäosusega ekslik.

Kui statistiline analüüs normaaljaotushüpoteesi ekslikuks ei tunnista, jääb küsimus lahtiseks. Normaaljaotushüpoteesi statistiliselt tõestada pole võimalik.

34.8. Keskpunkti hindamise testide võrdlus. Normaaljaotusele või tundmatule jaotusele alluvate mõõtmistulemuste keskpunkti vahemikhinnangu koostamiseks tuleb valida üks kolmest eelmises peatükis kirjeldatud testist: *Studenti test*, *Student-Lordi test* või *märgitest*. Valik sõltub kõigepealt jaotuse tüübist.

Normaaljaotuse korral on kõik kolm testi lubatud.

Ligikaudu normaalse jaotuse korral on märgitest ja Studenti test lubatud. Student-Lordi test on tingimisi lubatud ainult siis, kui jaotusseaduse erinevus normaalsest on väike ja keskmistamisele kuuluvate mõõtmistulemuste arv pole suur.

Tundmatu jaotuse korral on tingimusteta lubatud vaid märgi-

Tabel 34.8

Ligikaudu samaväärne üksikmõõtmiste arv normaaljaotuse korral Studenti testi kasutades n_S , Student-Lordi testi kasutades n_L ja märgitesti kasutades n_{90} (usaldatavus 90%), n_{95} (usaldatavus 95%) ning n_{99} (usaldatavus 99%)

n_S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_L	2	4	5	6	7	8	9	11	12	14	16	18	20
n_{90}	—	—	5	8	8	11	13	13	16	16	18	18	21
n_{95}	—	—	—	6	9	9	12	12	15	15	17	17	20
n_{99}	—	—	—	—	8	8	12	12	12	15	15	18	21

test. Student-Lordi test on keelatud. Studenti test on tingimisi lubatud, kui jaotusel on keskvärtus ja dispersioon ning mõõtmistulemuste arv on suur.

Mitme lubatud testi hulgast eelistatakse sellist, mis tagab etteantud täpsuse väikseima arvutusaja ja mõõtmisaja summaga.

Studenti testi kasutades on tarvis arvutada statistikud \bar{x}_n ja \bar{s}_n . Statistiku \bar{s}_n arvutustöö maht on suhteliselt suur.

Student-Lordi testi arvutustöö mahust langeb suurem osa statistiku \bar{x}_n arvutamisele. Studenti testiga võrreldes hoitakse arvutusaega mitu korda kokku.

Märgitesti arvutustöö on tühine: üks liitmine, üks lahutamine ja üks kahega jagamine.

Arvutustöö konkreetset mahtu ühe füüsika praktikumi jaoks iseloomuliku ülesande lahendamisel demonstreerivad järgmises paragrahvis esitatud näited.

Mõõtmisaeg sõltub üksikmõõtmiste arvust. Kui jaotus on normaalne ja üksikmõõtmiste arv kindel, siis annab Studenti test tõenäoliselt kõige täpsema tulemuse, Student-Lordi test veidi vähem täpse ja märgitest veel vähem täpse tulemuse. Oodatavate täpsuste võrdseteks muutmiseks on tarvis Student-Lordi testi ja märgitesti korral üksikmõõtmiste arvu suurendada. Täpsuse seisukohalt enam-vähem samaväärsed üksikmõõtmiste arvud on näidatud tabelis 34.8. Märgitesti puhul on leitud esitatud arv hinnangult nõutavast usaldatavusest. Enam kui 20 üksikmõõtmise korral Student-Lordi testi ei kasutata ning märgitesti ja Studenti testi võrdlemise aluseks võib võtta üksikmõõtmiste arvude suhte piirväärtuse $\lim_{n \rightarrow \infty} (n_m/n_s) = \pi/2$.

Kui arvutusaja kokkuhoid Studenti testi asendamisel näiteks märgitestiga kompenseerib mõõtmisaja kasvu, tuleb eelistada märgitesti, kui aga ei kompenseeri, siis Studenti testi.

Lihtsate mõõtmiste korral on enamasti kõige ratsionaalsem märgitest. Keerukate mõõtmiste ja arvutustöö mehhaniseerimisvõimaluse korral võib osutada parimaks Studenti test. Student-Lordi testi kasutatakse suhteliselt harva.

35. MÕÖTMISTULEMUSTE KESKPUNKTI HINDAMINE

35.1. Eksete tsensuur. Tõkestamata jaotusele alluvat juluslikku viga sisaldav mõõtmistulemus võib osutada keskväärtusest kuitahes palju erinevaks.

Katseandmete intuiitiivne sorteerimine edasiseks töötlemiseks kõlblikeks andmeteks ja ekseteks teeb lõpptulemuse sõltuvaks eksperimentaatori subjektiivsetest eelarvamustest. Niiviisi võib eksperimentaator teadmatult osutada petturiks, kes katseandmeid suvaliselt interpreteerides «tõestab» vaid iseenese eelarvamusi.

Hoolikus muudab ekse tõenäosuse väikeseks, mitte kunagi aga täpselt nulliks. Avastamata ekse tõenäosus peab olema vähemalt suurusjärg väärtusest $1-p$, kus p on hinnangute juurde märgitav usaldatavus. Vastasel juhul vähendaksid ekсед reaalset usaldatavust märgatavalt.

Olgu mõõtmistulemuste x_i hulgas üks avastamata jäänud ekse. Üksik oluline ekse on alati mõõtmistulemuste kasvujärjestuse äärmine element $x_{(1)}$ või $x_{(n)}$. Ekse empiiriliseks tunnuseks on ebatavaliselt suur hälve kasvujärjestuse naaberelemendist $x_{(2)}-x_{(1)}$ või $x_{(n)}-x_{(n-1)}$. Suhtelise hälbe mõõduks sobivad statistikud

$$f_+ = \frac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}$$

$$f_- = \frac{x_{(2)} - x_{(1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}$$

Tabelis 35.1 on näidatud nende statistikute kriitilised väärtused normaaljaotuse korral. Kui statistik f on kriitilisest väärtusest suurem, siis on vastav äärmine mõõtmistulemus tõenäosusega p ekse. Ekseks tunnustatud mõõtmistulemus tõmmatakse mõõtmisprotokollist enne katseandmete edasist töötlemist maha.

Teistlaadsete eksetestide kirjeldusi võib leida tabelite kogumikust [10]. Kõik tuntud testid tuginevad normaaljaotushüpooteesile.

Eksete tsenseerimisel praagitakse tõenäosusega $1-p$ ka õigeid mõõtmistulemusi. See pole eriti ohtlik. Kui normaaljaotusest veidi erineva jaotuse korral kavatsetakse katseandmeid töödelda normaaljaotushüpooteesi alusel, on suurte hälvetega õigete üksiktulemuste praakimine isegi soodus: eksetesti abil korrigeeritud jaotus omab alati mediaanile lähedast keskväärtust ja p . 34.5 kirjeldatud kurioosumi võimalus on likvideeritud.

Eksetesti statistikute kriitilised väärtused normaaljaotuse korral

n	$p=90\%$	$p=95\%$	$p=99\%$	n	$p=90\%$	$p=95\%$	$p=99\%$
3	0,89	0,94	0,99	10	0,35	0,41	0,53
4	0,68	0,77	0,89	11	0,33	0,39	0,50
5	0,56	0,64	0,78	12	0,32	0,38	0,48
6	0,48	0,56	0,70	15	0,29	0,34	0,44
7	0,43	0,51	0,64	20	0,25	0,30	0,39
8	0,40	0,47	0,59	24	0,23	0,28	0,37
9	0,37	0,44	0,56	30	0,22	0,26	0,34

Tsensuuri positiivsete omaduste tõttu kasutatakse vahel *üldist tsensuuri*: mõõtmistulemuste hulgast tõmmatakse kõige väiksemad ja kõige suuremad hälvetest sõltumatult maha. Vastavalt täpsustatud punkthinnanguvalemeid võib leida tabelite kogumikust [10].

35.2. Studenti test. Keskpunkti vahemikhinnangu koostamiseks Studenti testi abil on tarvis arvutada statistikud \bar{x}_n ja \bar{s}_n . Aritmeetilise keskmise arvutamise lihtsustamiseks on soovitatav valida mingi kõigest üksiktulemustest veidi väiksem arv a , leida vahed $x_i - a$, nende aritmeetiline keskmine ja alles siis mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine. Konkreetne arvutusnäide 12 üksiktulemuse korral on esitatud tabelis 35.2.1. Esimeses veerus on üksiktulemu-

Tabel 35.2.1

Statistikute \bar{x}_n ja \bar{s}_n arvutamine (näide)

x_i	$x_i - a$	$ x_i - \bar{x}_n $	$[x_i - \bar{x}_n]^2$
122,42	0,42	0,76	0,58
122,96	0,96	0,22	0,05
123,43	1,43	0,25	0,06
123,09	1,09	0,09	0,01
122,19	0,19	0,99	0,98
124,01	2,01	0,83	0,69
122,81	0,81	0,63	0,40
123,38	1,38	0,20	0,04
123,00	1,00	0,18	0,03
123,47	1,47	0,29	0,08
124,08	2,08	0,90	0,81
123,29	1,29	0,11	0,01
Σ	14,13		3,74

$n=12$
 $a=122,0$
 $\bar{x}_n - a = \frac{14,13}{12} = 1,18$
 $\bar{x}_n = 122,0 + 1,18 = 123,18$
 $\bar{s}_n^2 = \frac{3,74}{12 \cdot 11} = 0,0283$
 $\bar{s}_n = \sqrt{0,0283} = 0,17$

Tabel 35.2.2

Studenti jaotuse kriitilised kvantilid $t_{p,f}$ (p on vahemikhüpeteesi usaldatavus, q — ühepoolse hüpeteesi olulisuse nivoo ja f — vabadusastmete arv. Keskväärtuse hindamisel on $f = n - 1$)

f	p			f	p		
	90%	95%	99%		90%	95%	99%
1	6,31	12,7	63,7	13	1,77	2,16	3,01
2	2,92	4,30	9,92	14	1,76	2,14	2,98
3	2,35	3,18	5,84	15	1,75	2,13	2,95
4	2,13	2,78	4,60	17	1,74	2,11	2,90
5	2,02	2,57	4,03	19	1,73	2,09	2,86
6	1,94	2,45	3,71	21	1,72	2,08	2,83
7	1,89	2,36	3,50	24	1,71	2,06	2,80
8	1,86	2,31	3,36	29	1,70	2,05	2,76
9	1,83	2,26	3,25	39	1,68	2,02	2,71
10	1,81	2,23	3,17	49	1,68	2,01	2,68
11	1,80	2,20	3,11	99	1,66	1,98	2,63
12	1,78	2,18	3,05	∞	1,64	1,96	2,58
	5%	2,5%	0,5%		5%	2,5% -	0,5%
	q				q		

sed, teises vahed ($x_i - a$) Vahede aritmeetilise keskmise leidmiseks jagatakse nende summa üksiktulemuste arvuga n . Üksiktulemuste aritmeetiline keskmine on vahede aritmeetilise keskmise ja arvu a summa.

Pärast aritmeetilise keskmise arvutamist täidetakse tabeli kolmas ja neljas veerg. Kolmanda veeru täitmisel on kasulik silmas pidada tõsiasja $x_i - \bar{x}_n = (x_i - a) - \overline{(x_i - a)}$ Statistiku \bar{s}_n^2 leidmiseks jagatakse neljanda veeru summa korrutisega $n(n-1)$. Kui statistikud on arvutatud, leitakse tabelist 35.2.2 kordaja $t_{p, n-1}$ nõutud usaldatavuse p korral. Olgu nõutud näiteks $p=95\%$, siis on $t_{95\%, 11} = 2,2$. Lõpuks arvutatakse keskpunkti piirviga $\Delta_p x = t_{p, n-1} s_n$:

$$\Delta_{95\%} x = 2,2 \cdot 0,17 = 0,37$$

Mõõtmistulemuste keskpunkti hinnangu $x = \bar{x}_n \pm t_{p, n-1} \bar{s}_n$ võib kirjutada nii

$$x = 123,18 \pm 0,37_{95\%}$$

35.3. Student-Lordi test. Keskpunkti vahemikhinnangu koostamiseks Student-Lordi testi abil on tarvis arvutada kõigepealt aritmeetiline keskmine \bar{x}_n . Seda tehakse nii, nagu eelmises punktis kirjeldatud. Tabeli 35.2.1 kolmandat ja neljandat veergu täita pole

Suhte $(\bar{x}_n - \mu)/w_n$ ülemised kriitilised väärtused $t_{p,n}^{(w)}$ normaaljaotuse korral (p on vahemikhüpoteesi usaldatavus ja n võendi maht)

n	p			n	p		
	90%	95%	99%		90%	95%	99%
2	3,157	6,353	31,83	11	0,170	0,210	0,302
3	0,885	1,304	3,008	12	0,158	0,194	0,277
4	0,529	0,717	1,316	13	0,147	0,181	0,256
5	0,388	0,507	0,843	14	0,138	0,170	0,239
6	0,312	0,399	0,628	15	0,131	0,160	0,224
7	0,263	0,333	0,507	16	0,124	0,151	0,212
8	0,230	0,288	0,429	17	0,118	0,144	0,201
9	0,205	0,255	0,374	18	0,113	0,137	0,191
10	0,186	0,230	0,333	20	0,104	0,126	0,175

tarvis. Selle asemel tehakse kindlaks suurima ja väikseima üksiktulemuse vahe w_n , leitakse tabelist 35.3 nõutud usaldatavuse p ja üksikmõõtmiste arvu järgi kriitiline väärtus $t_{p,n}^{(w)}$ ning arvutatakse keskpunkti piirviga $\Delta_p x = t_{p,n}^{(w)} w_n$.

Tabeli 35.2.1 esimeses veerus esitatud andmeid Student-Lordi testi abil töödeldes leitakse $w_n = 124,08 - 122,19 = 1,89$, $t_{95\%, 12}^{(w)} = 0,194$ ja $\Delta_{95\%} x = 0,194 \cdot 1,89 = 0,37$ Keskpunkti hinnang $x = 123,18 \pm 0,37_{95\%}$ tuleb tänu juhusele just sama, kui Studenti testi abil koostatud hinnang.

35.4. Märgitest. Märgitesti kasutades on soovitatav talitada järgmiselt.

1° Valitakse usaldatavus $p = 90\%$, 95% või 99% .

2° Sooritatakse mõõtmised. Üksikmõõtmiste arv n valitakse tabeli 35.4 vastavas veerus esitatud arvude hulgast. Eksete mõju kõrvaldamise eesmärgil pole soovitatav seda arvu valida esimesest reast, kus $k = 1$.

3° Leitakse tabelist 35.4 usaldatavuse p ja üksikmõõtmiste arvu järgi kriitiline arv k .

4° Otsitakse üksiktulemuste hulgast kasvujärjekorras $k-s$ arv $x_- = x_{(k)}$ ja kahanemisjärjekorras $k-s$ arv $x_+ = x_{(n+1-k)}$. Soovi korral võib x_- ja x_+ otsimiseks seada kõik mõõtmistulemused kasvujärjekorda.

5° Arvutatakse

$$\Delta_p x = \frac{x_+ - x_-}{2}$$

$$x_0 = \frac{x_+ + x_-}{2} = x_- + \Delta_p x.$$

Vähkeim võendi maht n , mille korral vahemik $[x_{(k)}, x_{(n+1-k)}]$ katab mediaani jaotusseadusest sõltumatult tõenäosusega vähemalt p

k	n			k	n		
	$p=90\%$	$p=95\%$	$p=99\%$		$p=90\%$	$p=95\%$	$p=99\%$
1	5	6	8	19	49	51	57
2	8	9	12	20	51	54	59
3	11	12	15	21	53	56	61
4	13	15	18	22	56	58	64
5	16	17	21	23	58	61	66
6	18	20	24	24	60	63	69
7	21	23	26	25	62	65	71
8	23	25	29	26	65	67	73
9	26	28	32	27	67	70	76
10	28	30	34	28	69	72	78
11	30	33	37	29	71	74	80
12	33	35	39	30	74	77	83
13	35	37	42	31	76	79	85
14	37	40	44	32	78	81	87
15	40	42	47	33	80	83	90
16	42	44	49	34	82	86	92
17	44	47	52	35	85	88	94
18	47	49	54	36	87	90	97

6° Kirjutatakse keskpunkti (mediaani) hinnang

$$x = x_0 \pm \Delta_p x.$$

Näide. Olgu nõutav $p=95\%$. Tabeli 35.4 vastavas veerus kolmas arv on 12. Olgu 12 üksiktulemust samad mis tabeli 32.2.1 esimeses veerus esitatud arvud. Tabelis 35.4 vastab $p=95\%$ ja $n=12$ kriitiline arv $n=3$. Katseandmete hulgas on kasvujärjekorras kolmas $x_- = 122,81$ ning kahanemisjärjekorras kolmas $x_+ = 123,47$. See on hästi näha kasvujärjestusest $122,19 < 122,42 < \mathbf{122,81} < 122,96 < 123,00 < 123,09 < 123,29 < 123,38 < 123,43 < \mathbf{123,47} < 124,01 < 124,08$. Arvutada on tarvis

$$\Delta_{95\%} x = \frac{123,47 - 122,81}{2} = 0,33$$

$$x_0 = 122,81 + 0,33 = 123,14.$$

Keskpunkti hinnang $x = 123,14 \pm 0,33_{95\%}$ on Studenti testi abil koostatud hinnangust kitsam vaid tänu märgitesti jaoks soodsale juhusele. Sagedamini on olukord vastupidine.

35.5. Ligikaudu ühtlase jaotuse ja seekansjaotuse keskpunkt. Ligikaudu ühtlase või seekansjaotuse keskpunkti parim punkthin-

ning on suurima üksiktulemuse x_{\max} ja vähima üksiktulemuse x_{\min} aritmeetiline keskmine

$$x_n^{\circ} = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}$$

Kui x_{\max} ja x_{\min} on leitud küllalt suure arvu n (8–10 või rohkem) üksiktulemuste hulgast, võib keskpunkti piirviga hinnata Studenti testi abil. Statistlik \bar{s}_n asendatakse dispersiooni täpsema hinnanguga

$$s_n^{\circ} = \sqrt{\frac{n+1}{2(n+2)} \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n-1}},$$

keskpunkti ligikaudne hinnang on siis

$$x = x_n^{\circ} \pm t_{p, n-1} s_n^{\circ}.$$

Kirjeldatud meetodil koostatud hinnang on enam-vähem õige järevalt piiratud ühtlase jaotuse korral. Tihedusfunktsiooni «ümardatud nurgad» muudavad tegeliku usaldatavuse arvutuslikust suurusel p väiksemaks. Seekantsjaotuse korral on tegelik usaldatavus arvutuslikust suurem.

35.6. Poissoni jaotuse keskväertus. Impulsside või osakeste arvu keskväertuse x parimaks punkthinnanguks on kogu mõõtmiseeria summaarne tulemus x_0 . Mõõtmiseeria jagamine osadeks ei oma mõtet, sest standardhälve võrdub ruutjuurega keskväertusest ja standardhälbe hindamiseks pole statistilisi arvutusi üldse tarvis teha.

Mõõtmistäpsuse huvides peab loendatud impulsside või osakeste arv x_0 olema võimalikult suur, sest suhteline standardhälve $\sigma/x = 1/\sqrt{x}$. Kui $x = 100$, siis $\sigma/x = 10\%$, kui $x = 1000$, siis $3,2\%$.

Poissoni jaotuse asümmeetria tõttu on optimaalne usaldusvahemik punkthinnangu suhtes veidi asümmeetriline. Asümmeetriline vahemikhinnang $\bar{P}\{x_- < x < x_+\} = p$ kirjutatakse nii

$$x = x_0 + \Delta_p^+ x - \Delta_p^- x \quad (35.6.1)$$

Polaarsed piirvead on näidatud tabelis 35.6.

Mõõtmistulemuse suurenemisel asümmeetria tasandub ja Poissoni jaotus läheneb normaaljaotusele. Siis võib kasutada vahemikhinnangu tavalist sümmeetrilist vormi ja arvutada $\Delta_{p,x}$ normaaljaotusfunktsiooni abil:

Poissoni jaotuse keskvärtuse hinnanguvahemikku (x_- , x_+) iseloomustavad polaarsed piirvead $\Delta_p^- = x_0 - x_-$ ja $\Delta_p^+ = x_+ - x_0$

x_0	$p=90\%$		$p=95\%$		$p=99\%$		x_0	$p=90\%$		$p=95\%$		$p=99\%$	
	Δ_p^+	Δ_p^-	Δ_p^+	Δ_p^-	Δ_p^+	Δ_p^-		Δ_p^+	Δ_p^-	Δ_p^+	Δ_p^-	Δ_p^+	Δ_p^-
0	3,0	0	3,7	0	5,3	0	16	8,3	6,0	10,0	6,8	13,5	8,4
1	3,7	0,9	4,6	1,0	6,4	1,0	18	8,7	6,4	10,5	7,3	14,1	9,1
2	4,3	1,6	5,2	1,8	7,3	1,9	20	9,1	6,7	10,9	7,8	14,7	9,6
3	4,8	2,2	5,8	2,4	8,0	2,7	22	9,4	7,1	11,3	8,2	15,2	10,2
4	5,2	2,6	6,2	2,9	8,6	3,3	24	9,8	7,4	11,7	8,6	15,7	10,7
5	5,5	3,0	6,7	3,4	9,2	3,9	26	10,1	7,8	12,1	9,0	16,3	11,3
6	5,8	3,4	7,1	3,8	9,7	4,5	28	10,4	8,1	12,5	9,4	16,7	11,8
7	6,2	3,7	7,4	4,2	10,1	5,0	30	10,7	8,4	12,8	9,8	17,2	12,2
8	6,4	4,0	7,7	4,5	10,6	5,4	35	11,4	9,1	13,7	10,6	18,3	13,4
10	7,0	4,6	8,4	5,2	11,4	6,3	40	12,1	9,8	14,5	11,4	19,4	14,4
12	7,4	5,1	9,0	5,8	12,1	7,4	45	12,7	10,4	15,2	12,2	20,3	15,4
14	7,9	5,5	9,5	6,3	12,8	7,8	50	13,3	11,0	15,9	12,9	21,3	16,3

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{90\%} x &= 1,65\sqrt{x_0} \\ \Delta_{95\%} x &= 1,96\sqrt{x_0} \\ \Delta_{99\%} x &= 2,58\sqrt{x_0} \end{aligned} \right\} \quad (35.6.2)$$

Näide. Uhes ruumalaühikus õhus loendati 42 tolmutera. Tabeli 35.6 järgi on $\Delta_{95\%}^+ = 15$ ja $\Delta_{95\%}^- = 12$. 95% usaldatavusega võib väita, et keskmine tihedus on $42 \pm_{12}^{15}$ tolmutera ruumalaühikus.

Näide. Geigeri loendur loendas 10 minuti jooksul 231 impulssi, järgneva 16 minuti jooksul 357 impulssi ja edasise 15 minuti jooksul veel 339 impulssi. Et vajalik on ainult üks x väärtus, mis peab aga olema võimalikult suur, siis liidetakse lähteandmed, saades 41 minuti kohta 927 impulssi. Valem (35.6.2) kohaselt on 41 minuti impulsside arvu keskvärtus $927 \pm (1,96\sqrt{927})_{95\%} = 927 \pm 60_{95\%}$. Sageduse leidmiseks jagatakse impulsside arv ajavahemiku pikkusega, mis annab tulemuseks $22,6 \pm 1,5_{95\%}$ imp/min.

35.7. Standardhälbe punkthinnang. Normaalselt jaotatud suurse dispersiooni parimaks nihutamata punkthinnanguks on statistik s_n^2 . Kuigi standardhälve võrdub ruutjuurega dispersioonist, ei ole dispersiooni hinnangu s_n^2 ruutjuure s_n keskvärtus sugugi võrdne standardhällbega ja standardhällbe hinnang s_n osutub nihutatuks. Studenti testi puhul pole see tähtis, sest vahemikhinnangu koostamisel ei omistata statistikutele s_n ja \bar{s}_n üldse mingit konkreetset tähendust.

Kui standardhällbe hinnangut on tarvis esitada lõpptulemuste hulgas, siis on parem kasutada nihutamata hinnanguid

Tabel 35.7.1

Normaaljaotuse standardhälbe hinnangu parandustegur

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	25	100
k_n	1,25	1,13	1,09	1,06	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,01	1,00

Tabel 35.7.2

Kordajad standardhälbe hindamiseks võendi haarde järgi

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_n	1,13	1,69	2,06	2,33	2,53	2,70	2,85	2,97	3,08
$\sqrt{nd_n}$	1,6	2,9	4,1	5,2	6,2	7,2	8,1	8,9	9,7

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d_n	3,17	3,26	3,34	3,41	3,47	3,53	3,59	3,64	3,69	3,73
$\sqrt{nd_n}$	10,5	11,3	12,1	12,8	13,4	14,1	14,8	15,4	16,1	16,7

$$s'_n = k_n s_n$$

$$\overline{s'_n} = k_n \overline{s_n}$$

Kordaja k_n väärtused on esitatud tabelis 35.7.1.Rangelt normaalse jaotuse standardhälvet võib hinnata võendi haarde $w_n = x_{\max} - x_{\min}$ järgi:

$$s_n^w = \frac{w_n}{d_n}$$

$$\overline{s_n^w} = \frac{w_n}{\sqrt{nd_n}}$$

Kordajate d_n ja $\sqrt{nd_n}$ väärtused on esitatud tabelis 35.7.2.

Hinnang s_n^w on nihutamata, kuid hinnangust s'_n vähem efektiivne. Efektiivsuse kadu kompenseerib üksikmõõtmiste arvu suurendamine tabelis 34.8 näidatud väärtuselt n_S väärtuseni n_L .

36. SÜSTEMAATILISE VEA KATSELINE UURIMINE

36.1. Süstemaatilise vea uurimise iseärasused. Muutumatuses tingimustes sooritatud mõõtmiste tulemuste järgi pole süstemaatilise vea kohta võimalik midagi järeldada. Katsemeetodist tingitud viga saab mõõtmistulemuste järgi avastada ainult siis, kui katset korrata teisel meetodil. Mõõtevahendite ebaõigest gradueeringust tingitud vea avastamiseks on tarvis vahetada mõõtevahendeid. Pole tõenäoline, et täiesti iseseisvate sõltumatute mõõtmismeetodite korral süstemaatiline viga oleks täpselt ühesugune. *Seepärast on tulemuste sõltumatus katsetingimustest süstemaatilise vea puudumise tunnus ja tulemuste sõltuvus katsetingimustest süstemaatilise vea esinemise tunnus.*

Süstemaatilised vead ja nende vahed on kindlad suurused ja esimesel pilgul näib, nagu poleks süstemaatiliste vigade uurimine üldse statistiline ülesanne. Nii on see tõesti siis, kui mõõtmisvea juhuslik komponent on tähtsusetu. Kui aga kõrvuti süstemaatilise veaga esinevad märgatavad juhuslikud vead, võib mõõtmistulemuste süstemaatiline erinevus jääda juhuslike vigade varju ja seda aitab avastada ainult katseandmete vastav statistiline loottimine.

Olgu näiteks kolme liiki tingimustes sooritatud mõõtmiste tulemused järgmised:

x : 7,4; 8,1; 7,8; 7,3; 8,5; 8,2

y : 8,7; 7,6; 7,9; 8,9; 7,7; 8,4

z : 7,5; 8,3; 8,8; 9,0; 8,0; 8,6.

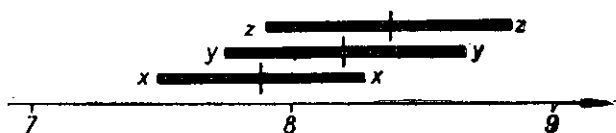
Nende kolme klassi aritmeetilised keskmised $\bar{x}=7,88$, $\bar{y}=8,20$ ja $\bar{z}=8,37$ on teineteisest erinevad. Asja lähemalt uurimata ei või öelda, kas erinevus on põhjustatud süstemaatiliselt mõjuvatest teguritest või lihtsalt juhusest.

Suurt süstemaatilist erinevust on lihtne tõestada vahemikhindangute abil. Kui keskpunktide hinnanguvahemikud teineteist ei kata, on süstemaatiline erinevus ilmne. Studenti test annab vaadeldava näite puhul tulemuse

$$x = 7,88 \pm 0,39_{90\%}$$

$$y = 8,20 \pm 0,45_{90\%}$$

$$z = 8,37 \pm 0,46_{90\%}$$



Joonis 36.1. Kolme mõõtmistulemuste klassi järgi koostatud 90% usaldatavusega hinnanguvahemikud (näide).

Nende vahemike suhet illustreerib joonis 36.1. Siit ei saa sugugi selgust, kas näiteks suuruste x ja z aritmeetiliste keskmiste erinevus on oluline või mitte. Selgema vastuse saamiseks kasutatakse spetsiaalseid keskpunktide võrdlemise teste.

36.2. Dispersioonanalüüs. Süstemaatilise erinevuse uurimisel dispersioonanalüüsi abil on soovitatav talitada järgmiselt.

1° Arvutatakse kõigi klasside aritmeetilised keskmised \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} ,

2° Arvutatakse üldine aritmeetiline keskmine

$$M = \frac{n_x \bar{x} + n_y \bar{y} + n_z \bar{z} + \dots}{N}$$

kus n_x , n_y , n_z , ... on üksiktulemuste arvud igas klassis ja N on üksiktulemuste koguarv $N = n_x + n_y + n_z + \dots$

3° Arvutatakse klassidevaheliste hälvete ruutude summa

$$Q_1 = n_x (\bar{x} - M)^2 + n_y (\bar{y} - M)^2 + n_z (\bar{z} - M)^2 + \dots$$

4° Arvutatakse klassidesisesed ruutude osasummad:

$$Q_x = \sum_{i=1}^{n_x} (x_i - \bar{x})^2$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^{n_y} (y_i - \bar{y})^2$$

$$Q_z = \sum_{i=1}^{n_z} (z_i - \bar{z})^2$$

ja üldsumma

$$Q_2 = Q_x + Q_y + Q_z + \dots$$

Dispersioonanalüüsi statistikute tabel

	Ruutude summa	Vabadusastmete arv	Dispersiooni hinnang
Klassidevaheline	Q_1	$f_1 = r - 1$	$Q_1/f_1 = s_1^2$
Klassidesisene	Q_2	$f_2 = N - r$	$Q_2/f_2 = s_2^2$
Üldine	$Q = Q_1 + Q_2$	$N - 1$	$Q/(N - 1) = s^2$

Tabel 36.2.2

Statistiku $F = s_1^2/s_2^2$ kvantiilid F_{p, f_1, f_2} normaaljaotuse korral
 $p = P\{F < F_{p, f_1, f_2}\}$, f_1 on lugeja ja f_2 nimetaja vabadusastmete arv)
 $p = 90\%$

$f_1 \backslash f_2$	1	2	3	4	5	6	8	10	15
1	39,9	49,5	53,6	55,8	57,2	58,2	59,4	60,2	61,2
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,37	9,39	9,42
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,25	5,23	5,20
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,95	3,92	3,87
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,34	3,30	3,24
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	2,98	2,94	2,87
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,75	2,70	2,63
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,59	2,54	2,46
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,47	2,42	2,34
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,38	2,32	2,24
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,24	2,19	2,10
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,12	2,06	1,97
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,00	1,94	1,84
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,88	1,82	1,72
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,77	1,71	1,60
∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,67	1,60	1,49

5° Koostatakse tabeli tabeli 36.2.1 eeskujul ja täidetakse see konkreetsete arvudega. r tähistab klasside arvu. Tabeli viimast rida võib tarvis minna andmete edasisel kasutamisel. Süstemaatilise erinevuse uurimisel ei pruugi seda rida täita.

6° Arvutatakse statistik

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Tabel 36.2.2 (järg)

 $p = 95\%$

$f_2 \backslash j_1$	1	2	3	4	5	6	8	10	15
1	161	200	216	225	230	234	239	242	246
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,86
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,75	2,62
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,40
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,20
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,01
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,84
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,83	1,67

 $p = 99\%$

$f_2 \backslash j_1$	1	2	3	4	5	6	8	10	15
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5981	6056	6157
2	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,5	27,2	26,9
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	14,8	14,5	14,2
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,3	10,1	9,72
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,87	7,56
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,62	6,31
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,81	5,52
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,26	4,96
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,85	4,56
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,30	4,01
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,80	3,52
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,37	3,09
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,98	2,70
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,63	2,35
∞	6,63	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,32	2,04

Tabel 36.2.3

Dispersioonanalüüsi statistikute tabel kolme klassi x , y ja z võrdlemisel (näide p. 36.1 andmete järgi)

	Ruutude summa	Vabadusastmete arv	Dispersiooni hinnang
Klassidevaheline	0,74	2	0,37
Klassisesisene	4,12	15	0,27
Üldine	4,86	17	0,29

Tabel 36.2.4

Dispersioonanalüüsi statistikute tabel kahe klassi x ja z võrdlemisel (näide p. 36.1 andmete järgi)

	Ruutude summa	Vabadusastme arv	Dispersiooni hinnang
Klassidevaheline	0,75	1	0,75
Klassisesisene	2,64	10	0,26
Üldine	3,39	11	0,31

7° Leitakse tabelist 36.2.2 usaldatavuse p ning vabadusastmete arvude $f_1=r-1$ ning $f_2=N-r$ järgi statistiku F kriitiline väärtus $F_{p, r-1, N-r}$.

Kui $F > F_{p, r-1, N-r}$, siis on klasside keskpunktid usaldatavusega p erinevad ja süstemaatilise vea esinemine tõestatud. Kui $F < F_{p, r-1, N-r}$, siis dispersioonanalüüs ei võimalda usaldatavust p nõudes aritmeetiliste keskmiste erinevuste olulisust tõestada ja need erinevused võivad olla juhuslikud.

Klasside aritmeetiliste keskmiste ja summade Q_x , Q_y , Q_z arvutamist on soovitatav korraldada tabeli 35.2.1 eeskujul.

Punktis 36.1 esitatud andmete järgi on tabeli 36.2.1 eeskujul koostatud tabelid 36.2.3 ja 36.2.4. Kolme klassi võrdlemisel on $F=1,4$ ja $F_{90\%, 2, 15}=2,7$. Kuna $1,4 < 2,7$, siis dispersioonanalüüs ei võimalda 90% usaldatavuse nõude korral aritmeetiliste keskmiste \bar{x} , \bar{y} ja \bar{z} erinevuse olulisust tõestada. Klasside x ja z võrdlemisel (oletame, et klass y puudub) on $F=2,9$ ja $F_{90\%, 1, 10}=3,3$. Ka siin ei õnnestu \bar{x} ning \bar{z} erinevuse olulisust tõestada, kuigi F ja $F_{90\%, 1, 10}$ erinevus on väike. Võib arvata, et nõutavat usaldatavust natuke vähendades võiks \bar{x} ja \bar{z} erinevuse lugeda oluliseks.

Tabel 36.3

Kriitiline inversioonide arv $U_{p,g,h}$ (p — kahepoolse hüpoteesi usaldatavus
 q — ühepoolse hüpoteesi olulisuse nivoo, g ja h võendite mahud)

$p=90\%$

$q=5\%$

$h \backslash g$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	0	0	1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5
3	1	1	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	10
4		3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	15	16
5			5	7	8	10	12	13	15	17	18	20	22
6				9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
7					13	16	18	21	23	26	28	31	33
8						19	22	24	27	30	33	36	39
9							25	28	31	35	38	41	45
10								32	36	39	43	47	51
11									40	44	48	52	57
12										49	53	58	63
13											58	63	68
14												69	74
15													80

Dispersioonanalüüs on rangelt põhjendatud juhul, kui mõõtmisvead alluvad normaaljaotusele ja kõigi klasside dispersioonid on võrdsed.

36.3. Wilcoxon'i test. Kahe klassi keskpunktide erinevust võib uurida jaotusseadusest sõltumatu Wilcoxon'i testi abil. Wilcoxon'i testi on soovitatav kasutada järgmiselt.

1° Tehakse kindlaks üksiktulemuste arvud kummaski klassis. Suuremat üksiktulemuste arvu tähistatakse g ja väiksemat h , vastavaid klasse nimetatakse edaspidi g -klassiks ja h -klassiks.

2°. Võrreldakse silma järgi klasside keskpunkte.

3° Võrreldakse kõiki h -klassi elemente järgemööda kõigi g -klassi elementidega, lugedes ära, mitu g -klassi elementi on igast

h -klassi elemendist suuremad (juhul kui g -klassi keskpunkt on h -klassi keskpunktist väiksem) või väiksemad (juhul kui g -klassi keskpunkt on h -klassi keskpunktist suurem) Kõik loendamisel saadud arvud liidetakse, nende summa on inversioonide arv u .

Märkus: kui mõni g -klassi element on h -klassi elemendiga võrdne, siis tõmmatakse need elemendid kummastki klassist maha, vähendatakse vastavalt arve g ja h ning alustatakse inversioonide loendamist uuesti.

4°. Leitakse tabelist 36.3 nõutud usaldatavuse p ja üksiktulemuste arvude g ning h järgi kriitiline inversioonide arv $U_{p, g, h}$.

Kui $u \leq U_{p, g, h}$, siis on klasside keskpunktid usaldatavusega vähemalt p erinevad, kui aga $u > U_{p, g, h}$, siis ei võimalda Wilcoxonit test klasside erinevuse süstemaatilisust nõutud usaldatavusega tõestada.

Tabel 36.3 (järg)

/ $p=95\%$

$q = 2.5\%$

$g \backslash h$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	—	—	0	0	0	1	1	1	1	2	2	3	3
3	0	0	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7	7
4		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5			4	5	6	8	9	11	12	13	15	16	18
6				7	8	10	12	14	16	17	19	21	23
7					11	13	15	17	19	21	24	26	28
8						15	18	20	23	26	28	31	33
9							21	24	27	30	33	36	39
10								27	31	34	37	41	44
11									34	38	42	46	50
12										42	47	51	55
13											51	56	61
14												61	66
15													72

Tabel 36.3 (järg)

 $p=99\%$ $q=0.5\%$

$h \backslash g$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	—	—	—	—	—	—	—	—	0	0	0
3	—	—	0	0	1	1	1	2	2	2	3
4	0	1	1	2	3	3	4	5	5	6	7
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6		3	4	6	7	8	9	11	12	13	15
7			6	7	9	11	12	14	16	17	19
8				9	11	13	15	17	20	22	24
9					14	16	18	21	23	26	28
10						19	22	24	27	30	33
11							25	28	31	34	37
12								31	35	38	42
13									39	43	47
14										47	51
15											56

Näide. Klasside x ja z (p. 36.1) võrdlemisel on $g=h=6$. z -klassi keskpunkt on ilmselt x -klassi keskpunktist suurem. x -klassis on arvust 7,5 suuremaid elemente 4, arvust 8,0 suuremaid elemente 3, arvust 8,3 suuremaid elemente 1 ja arvudest 8,8 või 9,0 suuremaid elemente 0. Kokku on inversioonide arv $u=8$. Tabelist 36.3 võib leida $U_{90\%, 6, 6}=9$. Kuna $8 \leq 9$, siis on klasside x ja z keskpunktid vähemalt 90% usaldatavusega erinevad ja süstemaatilise vea olemasolu on sama usaldatavusega tõestatud. 95% usaldatavust nõudes erinevust tõestada aga ei saaks, sest $U_{95\%, 6, 6}=7$.

Punktis 36.1 näitena esitatud arvude jaotusseadus on lähedasem ühtlasele jaotusele kui normaaljaotusele. Niisugusel juhul on mitteparameetriliste testide suurem tundlikkus ootuspärane.

36.4. Van der Waerdeni X-test. Kahe klassi keskpunktide erinevuse uurimiseks X -testi abil on tarvis teha järgmist.

Tabel 36.4

Van der Waerdeni statistiku X kriitilised väärtused $X_{p,n,d}$ (p — kahepoolse hüpoteesi usaldatavus, q — ühepoolse hüpoteesi olulisuse nivoo, n ja d võõndite mahtude summa ning vahe)

$n \backslash d$	$p=95\%$ $q=2,5\%$			$p=99\%$ $q=0,5\%$		
	0; 1	2; 3	4; 5	0; 1	2; 3	4; 5
8	2,40	2,30	∞	∞	∞	∞
9	2,38	2,20	∞	∞	∞	∞
10	2,60	2,49	2,30	3,20	3,10	∞
11	2,72	2,58	2,40	3,40	3,40	∞
12	2,86	2,79	2,68	3,60	3,58	3,40
13	2,96	2,91	2,78	3,71	3,68	3,50
14	3,11	3,06	3,00	3,94	3,88	3,76
15	3,24	3,19	3,06	4,07	4,05	3,88
16	3,39	3,36	3,28	4,26	4,25	4,12
17	3,49	3,44	3,36	4,44	4,37	4,23
18	3,63	3,60	3,53	4,60	4,58	4,50
19	3,73	3,69	3,61	4,77	4,71	4,62
20	3,86	3,84	3,78	4,94	4,92	4,85
21	3,96	3,92	3,85	5,10	5,05	4,96
22	4,08	4,06	4,01	5,26	5,24	5,17
23	4,18	4,15	4,08	5,40	5,36	5,27
24	4,29	4,27	4,23	5,55	5,53	5,48
25	4,39	4,36	4,30	5,68	5,65	5,58
26	4,50	4,48	4,44	5,83	5,81	5,76
27	4,59	4,56	4,51	5,95	5,92	5,85
28	4,69	4,68	4,64	6,09	6,07	6,03
29	4,78	4,76	4,72	6,22	6,19	6,13
30	4,88	4,87	4,84	6,35	6,34	6,30
31	4,97	4,95	4,91	6,47	6,44	6,39
32	5,07	5,06	5,03	6,60	6,58	6,55
33	5,15	5,13	5,10	6,71	6,69	6,64
34	5,25	5,24	5,21	6,84	6,82	6,79
35	5,33	5,31	5,28	6,95	6,92	6,88
36	5,42	5,41	5,38	7,06	7,05	7,02
37	5,50	5,48	5,45	7,17	7,15	7,11
38	5,59	5,58	5,55	7,28	7,27	7,25
39	5,67	5,65	5,62	7,39	7,37	7,33
40	5,75	5,74	5,72	7,50	7,49	7,47
41	5,83	5,81	5,79	7,62	7,60	7,56
42	5,91	5,90	5,88	7,72	7,71	7,69
43	5,99	5,97	5,95	7,82	7,81	7,77
44	6,06	6,06	6,04	7,93	7,92	7,90
45	6,14	6,12	6,10	8,02	8,01	7,98
46	6,21	6,21	6,19	8,13	8,12	8,10
47	6,29	6,27	6,25	8,22	8,21	8,18
48	6,36	6,35	6,34	8,32	8,31	8,29
49	6,43	6,42	6,39	8,41	8,40	8,37
50	6,50	6,50	6,48	8,51	8,50	8,48

1° Leitakse üksiktulemuste arvud kummaski klassis, nende summa n ja vahe d .

2° Tehakse kindlaks, mitmendal kohal on iga x -klassi element kummassegi klassi kuuluvate n elemendi ühises kasvujärjestuses. Nende järjekorranumbrite tähised on allpool r_1, r_2, \dots, r_{n_x}

3° Arvutatakse suhted $\frac{r_1}{n+1}, \frac{r_2}{n+1}, \dots, \frac{r_{n_x}}{n+1}$ ja leitakse tabelist 34.6.1 normaalkvantiilid $\Psi\left(\frac{r_1}{n+1}\right), \Psi\left(\frac{r_2}{n+1}\right), \dots, \Psi\left(\frac{r_{n_x}}{n+1}\right)$.

4° Arvutatakse summa

$$X = \Psi\left(\frac{r_1}{n+1}\right) + \Psi\left(\frac{r_2}{n+1}\right) + \dots + \Psi\left(\frac{r_{n_x}}{n+1}\right)$$

5° Leitakse tabelist 36.4 statistiku X kriitiline väärtus $X_{p, n, d}$ nõutud usaldatavuse p , üksiktulemuste arvude summa n ja vahe d järgi.

Kui $|X| > X_{p, n, d}$, siis on klasside keskpunktid usaldatavusega vähemalt p erinevad, kui aga $|X| \leq X_{p, n, d}$, siis ei võimalda X -test nõutud usaldatavusega otsust langetada.

Näide. Klasside x ja z (p. 36.1) võrdlemisel on $n=12$ ja $d=0$. x -klassi elementide järjekorranumbrid ühises kasvujärjestuses on 1; 2; 4; 6; 8 ja 9. Need järjekorranumbrid jagatakse arvuga $n+1=13$. Statistik

$$\begin{aligned} X &= \Psi\left(\frac{1}{13}\right) + \Psi\left(\frac{2}{13}\right) + \Psi\left(\frac{4}{13}\right) + \Psi\left(\frac{6}{13}\right) + \Psi\left(\frac{8}{13}\right) + \\ &+ \Psi\left(\frac{9}{13}\right) = -1,43 - 1,02 - 0,50 - 0,10 + 0,30 + 0,50 = \\ &= -2,25. \end{aligned}$$

Tabeli 36.4 järgi $X_{95\%, 12, 0} = 2,86$. Kuna $2,25 \leq 2,86$, siis ei võimalda X -test 95% usaldatavuse nõude korral klasside x ja z süstemaatilist erinevust tõestada. 90% usaldatavuse jaoks pole tabelis 36.4 andmeid esitatud.

36.5. Muutuva süstemaatilise vea uurimine. Ajas muutuvat süstemaatilist viga on võimalik uurida mõõtmismeetodit tahtlikult

Seeriaste arvu kriitilised väärtused V_{p, n_+} (p — usaldatavus, n_+ — ühenneliste märkide arv)

n_+		4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
V_{p, n_+}	$p=95\%$	2	3	3	4	5	6	6	7	8	9	10	11	11	12	13	14	15
	$p=99\%$	—	2	2	3	4	4	5	6	7	7	8	9	10	10	11	12	13

muutmata. Keskpunktide erinevuste kontrollimise testide rakendamiseks on tarvis mõõtmistulemuste kronoloogiline jada jagada klassideks. Dispersioonanalüüsi kasutades võib klasse olla kaks või rohkem, Wilcoxon'i testi ja X -testi kasutades ainult kaks. Oigem on aga kasutada erilisi süstemaatilise muutumise uurimiseks ettenähtud teste. Kui juhuslikud vead on normaalselt jaotatud, võib kasutada *Abbe testi* [10], mille arvutustöö maht on suhteliselt suur. Abbe testist märksa lihtsam on jaotusseadusest sõltumatu *seeriastest* (Stevens, 1939; Wald, Wolfowitz, 1940) Seeriastesti rakendatakse järgmiselt.

1° Määratakse mõõtmistulemuste empiiriline mediaan l .

2° Mõõtmistulemuste kronoloogilises järjestuses tehakse iga empiirilise mediaanist väiksema arvu alla märk «—» ja suurema arvu alla märk «+». Empiirilise mediaaniga võrdne arv jääb märgita.

Erinevate märkide arvud n_+ ja n_- peavad olema võrdsed.

3° Määratakse seeriaste arv v . Seeriaks nimetatakse kõrvuti asuvate ühesuguste märkide gruppi. Näiteks jadas + + + + — — — — on kaks seeriat, jadas + — + — + + — — aga kuus seeriat.

4° Leitakse tabelist 36.5 kriitiline seeriaste arv V_{p, n_+}

Kui $v \leq V_{p, n_+}$ siis on katseandmete hetkjaotuse keskpunkti süstemaatiline muutumine tõestatud usaldatavusega p . Vastasel korral võib andmete näiv muutumine olla juhusest tingitud.

Näide. Olgu kronoloogiliselt järjestatud mõõtmistulemused 7,5; 7,3; 8,0; 7,8; 8,2; 8,1; 7,9; 8,3; 7,4; 7,7; 7,6. Empiiriline mediaan on 7,8. Mõõtmistulemuste alla märke tehes saadakse jada — — + + + + — — — milles on kolm seeriat. Tabelist 36.5 võib leida $V_{95\%, 5} = 3$ ja $V_{99\%, 5} = 2$. Järelikult 95% usaldatavust nõudes võib ebastabiilse süstemaatilise vea esinemise lugeda tõestatuks, 99%-list usaldatavust nõudes aga mitte.

37. MÕÖTMISTULEMUSTE SUMMA VEA HINDAMINE

37.1. Ülesande seade. Olgu tarvis kahe suuruse hinnangute $x = x_0 \pm \Delta_{px}x$ ja $y = y_0 \pm \Delta_{py}y$ järgi leida nende summa $z = x + y$ hinnang kujul $z = z_0 \pm \Delta_{pz}z$. Indeksid px , py ja pz tähistavad hinnangute usaldatavusi. See praktikas igal sammul esinev elementaar-sena näiv ülesanne pole lihtsate hulgas.

Piirvead $\Delta_{px}x$ ja $\Delta_{py}y$ võivad olla määratud kas mõõtmisvea juhuslikku, süstemaatilist või mõlemat komponenti arvesse võttes.

Mõõtmisvigu saab liigitada juhuslikeks ja süstemaatilisteks vaid teiste mõõtmisvigade hulgas. Lõpptulemusel x_0 või y_0 on üks-ainus mõõtmisviga ja selle nimetamine juhuslikuks või süstemaatiliseks omab mõtet ainult siis, kui tõelist mõõtmisviga käsitatakse mingi kujutletava vigade hulga elemendina. Valemi $x = x_0 \pm \Delta_{px}x$ tõlgendamisel käsitatakse tõelist mõõtmisviga selle päritolust olenemata tsentreeritud juhusliku suurusena kõigkvõimalike kujutletavate mõõtmisvigade hulgas (tsentreerituks nimetatakse juhuslikku suurust, mille jaotuse keskpunkt on null). See käsitlus on järgnevate arutluste aluseks.

Kuna summa keskväärtus võrdub alati liidetavate keskväärtuste summaga, siis summa hinnanguvahemiku keskpunktiks võetakse liidetavate hinnanguvahemike keskpunktide summa.

$$z_0 = x_0 + y_0.$$

Ülesande keeruliseks osaks on piirvea $\Delta_{pz}z$ määramine. Kaht üldtuntud summa piirvea määramise eeskirja kirjeldatakse kahes järgnevas punktis. Need eeskirjad annavad praktikas erinevaid tulemusi. Kumbki neist on kahtlust äratavalt lihtsustatud. Kirjeldatavate eeskirjade head ja halvad küljed selguvad konkreetsemate ülesannete lahendamisel (punktid 37.4. 7)

Kõigis käesoleva paragrahvi punktides eeldatakse liidetavate x ja y sõltumatust.

37.2. Ruuteeskiri. Sõltumatute suuruste summa dispersioon $\sigma^2(z)$ võrdub liidetavate dispersioonide summaga $\sigma^2(x) + \sigma^2(y)$ ning summa standardhälvet võib arvutada «täisnurkse kolmnurga reegli»

$$\sigma(z) = \sqrt{\sigma^2(x) + \sigma^2(y)} \quad (37.2.1)$$

järgi. Oletades, et

$$\begin{aligned} \Delta_{px} &= \alpha_p \sigma(x) \\ \Delta_{py} &= \alpha_p \sigma(y) \\ \Delta_{pz} &= \alpha_p \sigma(z). \end{aligned} \quad (37.2.2)$$

kus α_p on üks ja sama usaldatavusest sõltuv tegur, võib kirjutada

$$\Delta_p z = \sqrt{\Delta_p^2 x + \Delta_p^2 y} \quad (37.2.3)$$

Valemiga (37.2.3) väljendatud *piirvigade liitmise ruuteeskirja* esitatakse paljudes katseandmete töötlemise juhendites, näiteks juhendis [13], vaieldamatu universaalse eeskirjana. See pole õige. Ruuteeskiri põhineb dispersioonide olemasolu eeldusel ja oletusel (37.2.2) ning need kaks tingimust pole sugugi alati täidetud.

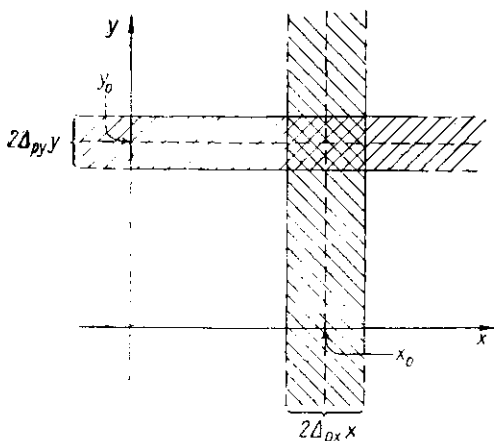
Ruuteeskirja saab üldistada suurema arvu liidetavate summa $z = x_1 + x_2 + x_3 + \dots$ jaoks:

$$\Delta_p z = \sqrt{\Delta_p^2 x_1 + \Delta_p^2 x_2 + \Delta_p^2 x_3 + \dots} \quad (37.2.3a)$$

37.3. Absoluutväärtuseeskiri. Liidetavate x ja y paari võib kujutada punktina koordinaadistikuga varustatud tasandil (vt. joonis 37.3). Tõenäosus, et vertikaalne viirutatud riba katab punkti (x, y) , on px . Tõenäosus, et horisontaalne viirutatud riba katab punkti (x, y) , on py . Tõenäosus, et ristviirutusega kaetud ristkülik katab punkti (x, y) , on järelikult $px \cdot py$. Selle ristküliku punktide koordinaatide summa suurim erinevus ristküliku keskpunkti (x_0, y_0) koordinaatide summast z_0 on $\Delta_{px}x + \Delta_{py}y$. Sünnimusest, mille tõenäosus on $px \cdot py$, järeldeb $\delta z \leq \Delta_{px}x + \Delta_{py}y$, seetõttu $\Delta_{pz}z \leq \Delta_{px}x + \Delta_{py}y$. *Ranget absoluutväärtuseeskirja*

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{pz}z &= \Delta_{px}x + \Delta_{py}y \\ pz &= px \cdot py \end{aligned} \right\} \quad (37.3.1)$$

kasutades pole võimalik eksida vahinnangu kitsendamise suunas.



Joonis 37.3. Mõõtmistulemuste liitmine: absoluutväärtuseeskirja geomeetiline tõlgendus.

Eeskirja (37.3.1) üldistus suurema liidetavate arvu jaoks on järgmine:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_p z &= \Delta_{p1} x_1 + \Delta_{p2} x_2 + \Delta_{p3} x_3 + \\ p z &= p_1 \quad p_2 \quad p_3 \end{aligned} \right\} \quad (37.3.1a)$$

Üheksa võrdse liidetava korral annab eeskiri (37.3.1a) kolm korda suurema piirvea kui valem (37.2.3a) ning seejuures märksa väiksema usaldatavuse. Absoluutväärtuseeskirja praktilist erinevust ruuteeskirjast ei tohi ignoreerida.

Absoluutväärtuseeskirja nõrgendatud varianti

$$\Delta_p z = \Delta_p x_1 + \Delta_p x_2 + \Delta_p x_3 + \quad (37.3.2)$$

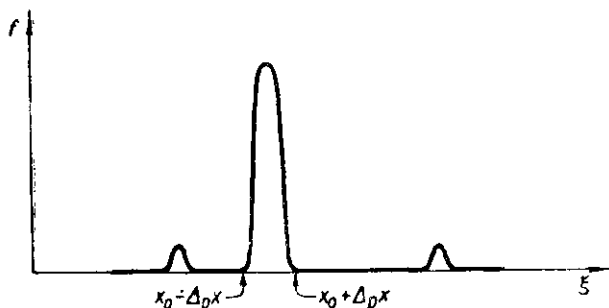
ei saa nii lihtsalt põhjendada ja tõlgendada kui ranget varianti (37.3.1).

37.4. Normaaljaotus. Normaalet jaotatud liidetavate summa on samuti normaalselt jaotatud. Piirvead võrduvad suuruse $t_{p, n-1}$ ja statistiku s_n korruutisega. Kui üksiktulemuste arvud n_x ja n_y on suured, siis on tegur $t_{p, n-1}$ arvust n praktiliselt sõltumatu ja $s_n \approx \sigma$. Tingimus (37.2.2) on seega enam-vähem täidetud ning vigade liitnuise ruuteeskiri põhjendatud. Absoluutväärtuseeskiri tähendaks normaaljaotuse korral mõttetut informatsiooni raiskamist.

Suhteliselt väikeste ning teineteisest erinevate üksiktulemuste arvude korral on ruuteeskiri vähem täpne. Et aga eeskirja lihtsalt täpsustada pole õnnestunud, lepitakse praktikas alati tavalise ruuteeskirjaga (37.2.3)

37.5. Cauchy jaotus. Tihedusfunktsiooni graafiku poolest normaaljaotusega sarnanevale Cauchy jaotusele alluvate liidetavate summa on jaotatud samuti Cauchy järgi. Cauchy jaotusel pole dispersiooni ning ruuteeskiri osutub lubamatuks: summa tegelik piirviga on ruuteeskirja järgi arvatust suurem. Saab näidata, et Cauchy jaotuse korral kehtib nõrgendatud absoluutväärtuseeskiri (37.3.2).

37.6. Ebasoodsaim jaotus. Range absoluutväärtuseeskirja (37.3.1) järgi määratud summa piirvea tõke on ka Cauchy jaotuse puhul tarbetult kõrge. Tekib küsimus, kas on üldse olemas jaotust, mille korral nõrgendatud absoluutväärtuseeskiri (37.3.2) annaks õigesti väiksema tulemuse? Vastus on jaatav. Geomeetrilise või abstraktse loogilise arutluse teel on kerge näidata, et joonisel 37.6 kujutatud tihedusfunktsiooniga jaotuse puhul annab range absoluutväärtuseeskiri (37.3.1) parajasti õige tulemuse ning teiste eeskirjade järgi arvatud piirviga oleks tegelikust piirveast märksa väiksem.



Joonis 37.6. Mõõtmistulemuste summa vea hindamisel ebasoodsa jaotuse tihedusfunktsioon (näide).

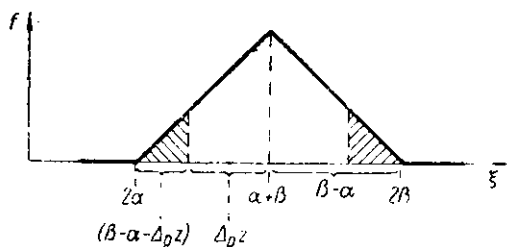
37.7. Ühtlane jaotus. Olgu x ja y jaotatud ühtlaselt ühes ja samas vahemikus (α, β) . Summa $z = x + y$ allub siis Simpsoni jaotusele, mille tihedusfunktsiooni graafik on näidatud joonisel 37.7.1. Summa jaotusvahemik on $(2\alpha, 2\beta)$.

Suuruste x ja y usaldusvahemike poollaiused on usaldatavusega p seotud lihtsalt:

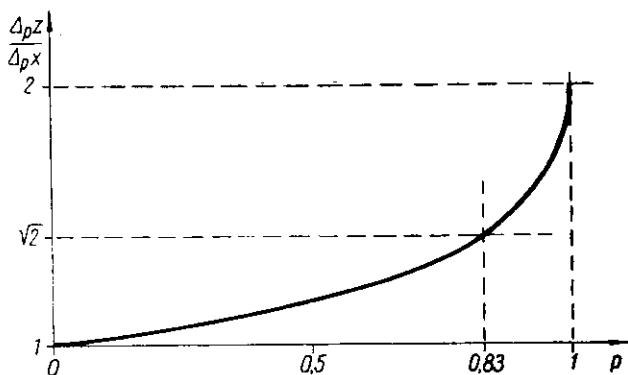
$$\Delta_p x = \Delta_p y = p \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Suuruse z usaldusvahemiku poollaiust on hõlpus arvutada graafiliselt. Joonisel 37.7.1 viirutatud pindala suhe kolmnurga üldpindalasse on $1 - p$. Geomeetriliste arvutuste teel saab sama suhte jaoks avaldise

$$[(\beta - \alpha - \Delta_p z) / (\beta - \alpha)]^2$$



Joonis 37.7.1. Simpsoni jaotuse tihedusfunktsioon.



Joonis 37.7.2. Piirvigade suhte sõltuvus usaldatavusest.

Võrrandi $[(\beta - \alpha - \Delta_p z) / (\beta - \alpha)]^2 = 1 - p$ lahend on

$$\Delta_p z = (1 + \sqrt{1 - p}) (\beta - \alpha)$$

Joonisel 37.7.2 on kujutatud suhte $\Delta_p z / \Delta_p x$ graafik. Absoluutväärtuseeskirja järgi arvatades saaks selle suhte väärtuseks 2, ruuteeskirja järgi arvatades $\sqrt{2}$. Nagu jooniselt näha, on absoluutväärtuseeskiri õigustatud tingimusel $p \approx 1$, ruuteeskiri aga tingimusel $p \approx 0.83$. Kui $p < 0.83$, siis osutub summa piirviga isegi väiksemaks, kui seda ruuteeskirja järgi võiks arvata.

37.8. Kokkuvõte. Ei ruuteeskiri ega kumbki absoluutväärtuseeskirja variant ei kõlba summa piirvea arvutamise universaalseks eeskirjaks. Kolm vaadeldud eeskirja võib järjestada summa piirvea hinnangu kasvamise järjekorras nii:

- 1) ruuteeskiri,
- 2) nõrgendatud absoluutväärtuseeskiri,
- 3) range absoluutväärtuseeskiri.

Summa tegelik piirviga on vaid praktikas ebatõenäolistel erandjuhtumel ruuteeskirja järgi leitud hinnangust väiksem või nõrgendatud absoluutväärtuseeskirja järgi leitud hinnangust suurem ning pole kunagi suurem range absoluutväärtuseeskirja järgi leitud hinnangust. Kuna ruuteeskirja ja nõrgendatud absoluutväärtuseeskirja vahepealseid eeskirju pole, tuleb praktikas valida üks nendest kahest.

Ruuteeskirja (37.2.3) kasutamist õigustavad asjaolud.

1° Liidetavate vead alluvad ligikaudu normaaljaotusele.
 2° Liidetavate piirvead on arvatatud tegelikku jaotusseadust ignoreerides normaaljaotushüpoteesi alusel ning liidetavaid on küllalt palju selleks, et summa oleks jaotatud ligikaudu normaalselt.

3° Nõutud usaldatavus on madal ($\leq 90\%$)

Absoluutväärtuseeskirja (37.3.2) kasutamist õigustavad asjaolud.

1° Liidetavate vigade jaotus võib normaaljaotusest märksa erineda.

2° Liidetavate arv on väike (2 või 3)

3° Nõutud usaldatavus on kõrge ($\geq 99\%$)

Ebaschivates tingimustes ruuteeskirja kasutades hinnatakse piirviga väiksemaks kui õigus, absoluutväärtuseeskirja kasutades aga suuremaks kui õigus.

Eespool on kõikjal eeldatud liidetavate vigade sõltumatust. Vigade sõltuvus muudaks kõik arutlused märksa keerulisemaks, sest sõltuvate suuruste summa dispersiooni (p. 27.10.6^o) arvutamisel tuleb liidetavate dispersioonide summale liita veel kahekordne kovariatsioon. Positiivne korrelatsioon suurendab summa ja vähendab vahe viga, negatiivne korrelatsioon mõjub vastupidi. Sõltuvate juhuslike suuruste omadustega lähemaks tutvumiseks võib soovitada raamatuid [21, 12].

38. MÕÖTMISTULEMUSE PIIRVEA HINDAMINE

38.1. Üldmärkused. Eespool on mõõtmisvea juhuslikku ja süstemaatilist komponenti käsitletud eraldi. Juhusliku komponendi hindamise reeglid on suhteliselt hästi põhjendatud ning annavad selgelt interpreteeritavaid tulemusi. Süstemaatilise komponendi hindamine on lihtne vaid jämedate mõõtevahendite korral. Mida täpsemad on mõõtevahendid, seda enam oleneb süstemaatiline viga katsemeetodist ja lähtevigadest ning seda ebamäärasem on süstemaatilise vea hinnang. Täppismõõtmiste süstemaatilise vea hindamine on pigem kunst kui teadus. Süstemaatilise vea hindamisel on tõsiselt eksinud isegi maailmakuulsad füüsikud-eksperimentaatorid.

Otseste mõõtmise lõpptulemuse esitamisel on tarvis mõõtmisvea juhusliku ja süstemaatilise komponendi hinnangud ühendada ühiseks piirvea hinnanguks.

Kaudse mõõtmise viga sõltub otseste mõõtmiste vigadest ning kaudse mõõtmise piirviga hinnatakse otseste mõõtmiste piirvigade järgi. Kaudse mõõtmise piirvea lihtsustatud arvutamist on puudutatud juba viiendas paragrahvis. Allpool analüüsitakse piirvea hindamise reegleid põhjalikumalt.

38.2. Otseste mõõtmise tulemuse piirviga. Katseandmete esialgsel töötlemisel hinnatakse kokkulepitud usaldatavust silmas pidades ükshaaval igast üksikpõhjusest tingitud süstemaatilise vea ülemmäära ja juhusliku vea ülemmäära.

Olgu mõõtmistulemuste keskpunkt x_0 , juhuslike vigade ülemmäär $\Delta_p^{(j)}x$, ühest põhjusest tingitud süstemaatilise vea ülemmäär $\Delta_p^{(s1)}x$ ja teisest põhjusest tingitud süstemaatilise vea ülemmäär

$\Delta_p^{(s^2)}x$. Mõõdetava suuruse tõeline väärtus võrdub $x_0 - (\delta^{(i)}x + \delta^{(s^1)}x + \delta^{(s^2)}x)$, kus suurused δx on tõelise mõõtmisvea komponendid. Kõikvõimalike kujutletavate mõõtmiste hulgas on tõelise mõõtmisvea kõik komponendid juhuslikud ja nende hinnangud võib kirjutada $\delta^{(i)}x = 0 \pm \Delta_p^{(i)}x$, $\delta^{(s^1)}x = 0 \pm \Delta_p^{(s^1)}x$, $\delta^{(s^2)}x = 0 \pm \Delta_p^{(s^2)}x$. Üldine piirviga $\Delta_p x$ võrdub nende suuruste summa piirveaga.

Mõõtevahendite võimalike vigade jaotus ei pruugi olla normaalne. Kui mõõtevahendeid on vähe, siis peab nende piirvigu liitma absoluutväärtuseeskirja järgi. Valdavalt ühest mõõtevahendist tingitud süstemaatilise vea ning juhusliku vea liitmisel on samuti õigem absoluutväärtuseeskiri. Mitmest mõõtevahendist tingitud süstemaatilise vea ja juhusliku vea liitmisel võib tarvitada ruuteeskirja.

Praktilised reeglid võib sõnastada järgmiselt.

1° Neid mõõtmisvea komponente, mille ülemmäär on kõige suurema komponendi ülemmäärast kümme või enam korda väiksem, ei võeta üldse arvesse.

2° Kui ruuteeskirja pole võimalik põhjendada või kui eksperimentaator ei oska seda teha, ühendatakse vah hinnangud absoluutväärtuseeskirja järgi:

$$\Delta_p^{(s)}x = \Delta_p^{(s^1)}x + \Delta_p^{(s^2)}x +$$

$$\Delta_p x = \Delta_p^{(s)}x + \Delta_p^{(j)}x.$$

3° Põhjendatud juhtudel asendatakse viimane valem ruuteeskirja valemiga

$$\Delta_p x = \sqrt{\Delta_p^{(s)}x + \Delta_p^{(j)}x}$$

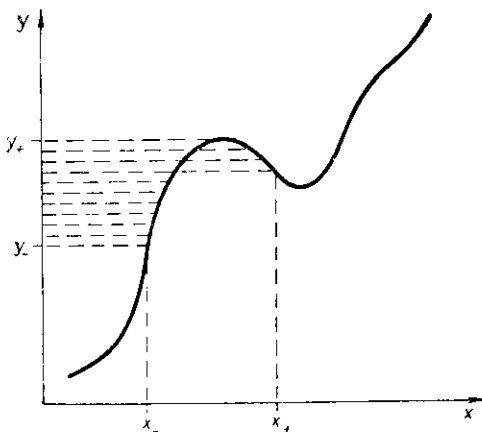
Ruuteeskirja järgi arvatud piirviga ümardatakse ainult ülespoole, näiteks $0,43 \approx 0,5$.

38.3. Ühe muutuja funktsiooni väärtuse vahemikhinnang. Kui funktsiooni $y=f(x)$ argument x asub tõenäosusega p vahemikus (x_-, x_+) , siis funktsiooni väärtus asub sama tõenäosusega vahemiku (y_-, y_+) kujutises (y_-, y_+) . Joonisel 38.3 on näha, kuidas vahemiku kujutist moodustatakse.

Monotoonse funktsiooni väärtuse hinnanguvahemiku rajadeks on funktsiooni väärtused argumenti hinnanguvahemiku rajade kohal.

Hinnangu $x = x_0 \pm \Delta_p x$ järgi võib funktsiooni väärtuse vahemikhinnangut koostada kahel viisil.

1° Väärtuseks y_0 valitakse $f(x_0)$. Hinnanguvahemik (y_-, y_+) võib osutada väärtuse $f(x_0)$ suhtes asümmeetriliseks, mispuhul võe-



Joonis 38.3. Argumendi muutumisvahemik ja selle kujutis.

takse tarvitusele polaarsed piirvead. Asümmeetrilist hinnangut avaldatakse järgmiselt:

$$y = y_0 + \Delta_p^+ y - \Delta_p^- y$$

2° Väärtuseks y_0 valitakse vahemiku (y_-, y_+) keskpunkt, mis ei pruugi langeda kokku väärtusega $f(x_0)$. Nii viisi saadakse tavaline sümmeetriline vahemikhinnang

Tabel 38.3

Funktsiooni $y = \sin x$ väärtuse sümmeetrilise vahemikhinnangu näited

	I	II	III	IV
x_0	2,90	2,90	7,90	322
Δx	0,01	1,00	0,20	25
$\sin x_-$	0,249	0,946	0,988	0,993
$\sin x_0$	0,239	0,239	0,999	1,000
$\sin x_+$	0,229	-0,688	0,970	0,989
y_-	0,229	-0,688	0,970	-1,000
y_+	0,249	0,946	1,000	1,000
y_0	0,239	0,129	0,985	0,000
Δy	0,010	0,817	0,015	1,000

$$y = y_0 \pm \Delta_p y.$$

Monotoonse funktsiooni korral on

$$y_0 = \frac{f(x_0 - \Delta_p x) + f(x_0 + \Delta_p x)}{2}$$

$$\Delta_{py} = \frac{|f(x_0 - \Delta_p x) - f(x_0 + \Delta_p x)|}{2}$$

Mõlemal meetodil on omad head ja halvad küljed ning üldreegiks ei või neist valida kumbagi.

Tabelis 38.3 on esitatud neli näidet funktsiooni $y = \sin x$ väärtuse sümmeetrilise hinnanguvahemiku koostamisest. Näidete analüüsimine ning järelduste tegemine jääb lugeja ülesandeks.

38.4. Funktsiooni lineariseerimine. Eelmises punktis kirjeldatud otsene funktsiooni väärtuse hindamise meetod on arvutustehniliselt tülikas. Praktikas kasutatakse enamasti teist, *funktsiooni lineariseerimisel* põhinevat meetodit, mis on küll ligikaudne, kuid märksa mugavam. Lineariseerimine võimaldab hinnata ka mitme muutuja funktsiooni väärtust.

Funktsiooni $z = f(x, y)$ lineariseerimine tähendab funktsiooni juurdekasvu asendamist täisdiferentsiaaliga:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0)$$

Üldistatud Lagrange'i keskväertusteoreemi kohaselt annaks lineariseeritud valem täpse tulemuse siis, kui osatuletised arvutada mitte punktis (x_0, y_0) , vaid mingis teises punktis, mille koordinaadid on sobivalt valitud vahemikust (x_0, x) ning (y_0, y) . Siit järeldus:

funktsiooni lineariseerimine on lubatav siis, kui funktsiooni osatuletised on argumentide muutumisvahemikus rahuldava täpsusega konstantsed.

Funktsiooni vea hindamisel on argumentide muutumisvahemikeks nende hinnanguvahemikud. Küllalt kitsaste hinnanguvahemike korral on lineariseerimise lubatavuse tingimus täidetud.

Kolme ja enam muutuja funktsiooni lineariseerimine on kirjeldatuga analoogiline.

38.5. Kaudselt mõõdetava suuruse vahemikhinnang. Kaudselt mõõdetav suurus y on otseselt mõõdetavate suurustega $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ seotud võrrandiga

$$y = f(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots)$$

Otseselt mõõdetavate suuruste vahemikhinnangud

$$x^{(1)} = x_0^{(1)} \pm \Delta_p x^{(1)}$$

$$x^{(2)} = x_0^{(2)} \pm \Delta_p x^{(2)}$$

$$x^{(3)} = x_0^{(3)} \pm \Delta_p x^{(3)}$$

on kaudselt mõõdetava suuruse hindamisel tuntud.

Kui argumentide vead on sõltumatud ja funktsiooni lineariseerimine lubatav, siis koostatakse kaudselt mõõdetava suuruse vahemikhinnang järgmiselt.

1° Arvutatakse hinnanguvahemiku keskpunkt

$$y_0 = f(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, x_0^{(3)}, \dots)$$

2° Arvutatakse funktsiooni osatuletiste väärtused kohal

$$(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, x_0^{(3)}, \dots) : \frac{\partial f_0}{\partial x^{(1)}}, \quad \frac{\partial f_0}{\partial x^{(2)}}, \quad \frac{\partial f_0}{\partial x^{(3)}},$$

3° Arvutatakse funktsiooni väärtuse *osapiirvead*

$$\Delta_p^{(1)} y = \left| \frac{\partial f_0}{\partial x^{(1)}} \right| \Delta_p x^{(1)},$$

$$\Delta_p^{(2)} y = \left| \frac{\partial f_0}{\partial x^{(2)}} \right| \Delta_p x^{(2)}$$

$$\Delta_p^{(3)} y = \left| \frac{\partial f_0}{\partial x^{(3)}} \right| \Delta_p x^{(3)}$$

4° Funktsiooni väärtuse piirvea leidmiseks ühendatakse osapiirvead ruuteskirja järgi

$$\Delta_p y = \sqrt{(\Delta_p^{(1)} y)^2 + (\Delta_p^{(2)} y)^2 + (\Delta_p^{(3)} y)^2 + \dots}$$

või absoluutväärtuseeskirja järgi

$$\Delta_p y = \Delta_p^{(1)} y + \Delta_p^{(2)} y + \Delta_p^{(3)} (y) + \dots$$

Astmefunktsiooni $y = a(x^{(1)})^{n_1}(x^{(2)})^{n_2}$ osatuletised on $n_1 y/x^{(1)}$, $n_2 y/x^{(2)}$, ... siit järeldub ainult astmefunktsiooni korral kehtiv suheteliste piirvigade reegel:

$$\frac{\Delta_p^{(i)} y}{y_0} = n_i \frac{\Delta_p x^{(i)}}{x_0^{(i)}}$$

38.6. Näide. Olgu antud mõõtmistulemused (kõik 95% usaldatavuse juures):

$$u_0 = 3,71, \quad \Delta^{(j)}u = 0,03, \quad \Delta^{(s1)}u = 0,02, \quad \Delta^{(s2)}u = 0,04;$$

$$v_0 = 1,12, \quad \Delta^{(j)}v < 0,001, \quad \Delta^{(s1)}v = 0,02, \quad \Delta^{(s2)}v = 0,03;$$

$$t_0 = 0,112, \quad \Delta^{(j)}t = 0,004, \quad \Delta^{(s)}t = 0,001$$

ning tarvis leida

$$x = \frac{u^2 + v^2}{u - v} \sin 2\pi t.$$

Ruuteskirja või absoluutväärtuseeskirja kasutamine oleneb konkreetsetest asjaoludest. Olgu Δu arvutamisel ruuteskiri lubatud, Δv ja Δt arvutamisel aga mitte. Siis on

$$\Delta u = \sqrt{0,03^2 + 0,02^2 + 0,04^2} = 0,06,$$

$$\Delta v = 0,02 + 0,03 = 0,05,$$

$$\Delta t = 0,004 + 0,001 = 0,005.$$

Järgmiseks avaldatakse osatuletised

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{u^2 - 2uv - v^2}{(u - v)^2} \sin 2\pi t,$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{u^2 + 2uv - v^2}{(u - v)^2} \sin 2\pi t,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2\pi \frac{u^2 + v^2}{u - v} \cos 2\pi t$$

ja arvutatakse $u_0^2 = 13,76$, $v_0^2 = 1,25$, $2u_0v_0 = 8,31$, $u_0 - v_0 = 2,59$,
 $(u_0 - v_0)^2 = 6,71$, $2\pi t_0 = 40^\circ 20'$ ning seejärel

$$x_0 = 3,75,$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial u} = 0,40,$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial v} = 2,0,$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = 28.$$

Otsitava suuruse x piirvea arvutamisel on ruuteskiri ilmselt lubatud:

$$\Delta x = \sqrt{(0,40 \cdot 0,06)^2 + (2,0 \cdot 0,05)^2 + (28 \cdot 0,005)^2} = \\ = 0,174 \approx 0,18.$$

Ülesande vastus on

$$x = 3,75 \pm 0,18_{95\%}$$

39. EMPIIRILISTE VALEMITE KOOSTAMINE

39.1. Sissejuhatus. Füüsikalise sõltuvuse katselise uurimise vahetuks tulemuseks on katseandmete tabel, näiteks tabel 39.1. Empiirilise valemi koostamisel on tarvis katseandmete tabeli järgi leida niisugune funktsioon $y = f(x)$, mis kirjeldaks uuritud sõltuvust võimalikult hästi.

Kui katseandmed oleksid vaieldamatult täpsed, võiks empiiriliseks funktsiooniks valida Lagrange'i interpolatsioonpolünoomi, mille sõlmpunktideks on parajasti katseandmete tabelis esitatud punktid. Tabeli 39.1 järgi koostatud Lagrange'i polünoomi

$$y = \frac{x}{3840} (x-4)(x-6)(x-8)(x-10) - \frac{x}{192} \times \\ \times (x-2)(x-6)(x-8)(x-10) - \frac{x}{120} (x-2)(x-4) \times \\ \times (x-8)(x-10) - \frac{3x}{320} (x-2)(x-4)(x-6)(x-10) + \\ + \frac{x}{400} (x-2)(x-4)(x-6)(x-8)$$

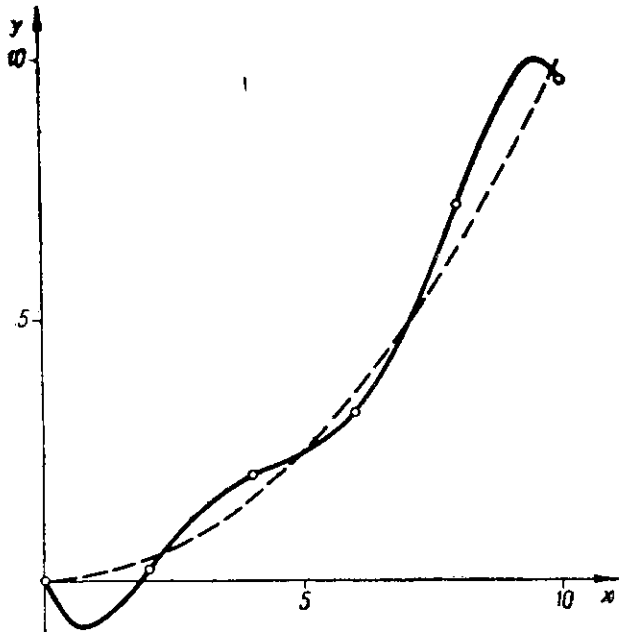
Füüsikalist sõltuvust kirjeldavad katseandmed

x	0	2	4	6	8	10
y	0,0	0,2	2,0	3,2	7,2	9,6

graafik on esitatud joonisel 39.1. See rahutult võnkuv kõver pole füüsikaliselt usutav. Hoopis loomulikumana näib samal joonisel kujutatud lähendusfunktsiooni

$$y = \frac{x^2}{10}$$

sujuv graafik. Katsepunktide võnkumine sujuva kõvera ümber võib olla tingitud lihtsalt juhuslikest mõõtmisvigadest.



Joonis 39.1. Katseandmete järgi koostatud viienda astme interpolatsioonpolünoomi (pidev joon) ja paraboolse lähendusfunktsiooni (punktiir) graafikud.

Empiirilise valemi koostamiseks juhuslikke vigu sisaldavate katseandmete järgi Lagrange'i polünoom ei sobi.

Funktsiooni, mis kirjeldab juhusliku suuruse y keskvärtuse sõltuvust argumentidest x , nimetatakse *regressioonfunktsiooniks*. Regressioonfunktsiooni avaldis oleks ideaalne empiiriline valem. Regressioonfunktsiooni statistilise hindamise teooriaga ning arvutuseeskirjadega võib tutvuda raamatu [14] abil. Käesolevas paragrahvis kirjeldatakse empiiriliste valemite koostamise lihtsustatud eeskirju, mis põhinevad regressioonfunktsiooni tüübi intuiitiivsel hindamisel.

Katseandmetest parema ülevaate saamiseks on soovitatav kõigepealt kanda katsepunktid koordinaadistikuga varustatud paberile ning joonistada silma järgi ligikaudne graafik. Kõvera kuju järgi püstitatakse edaspidiste arutluste aluseks jääv hüpotees, millega regressioonfunktsioon loetakse kas *linearseks*, *paraboolseks*, *logaritmiliseks* või mõnda muud tuntud tüüpi funktsiooniks. Hüpoteesi püstitamisel on tarvis tunda hästi tähtsamate funktsioonide omadusi.

Pärast funktsiooni tüübi valimist määratakse funktsiooni konkretiseerivad parameetrid.

39.2. Lineaarne regressioon: graafiline meetod. Lineaarvõrandi

$$y = ax + b \quad (39.2)$$

parameetrite a ja b graafiliseks määramiseks kantakse katsepunktid millimeetripaberile. Joonise mastaap peab olema valitud nii, et piirvigadele vastavad lõigud oleksid vähemalt 1–2 mm pikad. Katsepunktid varustatakse p. 5.8 kohaselt vearistidega.

Lähendussirge valimiseks kasutatakse läbipaistvat joonlauda. Läbipaistva joonlaua asemel võib kasutada pingutatud niiti.

Kui lähendussirge lõikab peaaegu kõiki veariste, siis on lineaarne regressioonhüpotees õigustatud.

Lähendussirge parameetrid a ja b leitakse joonise järgi analüütilisest geometriast tuntud võtete abil.

39.3. Lineaarne regressioon: vähimruutude meetod. Meetodi põhimõtet on kirjeldatud p. 30.10. Praktiliste ülesannete lahendamisel on soovitatav talitada järgmiselt.

1° Arvutatakse argumentide väärtuste summa ja aritmeetiline keskmine

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n.$$

2° Arvutatakse abisuurused $z_i = x_i - \bar{x}$.

3° Arvutatakse korrutised $y_i z_i$ ja ruudud z_i^2 .

4° Leitakse arvude y_i summa, korrutiste $y_i z_i$ summa ja ruutude z_i^2 summa.

5° Arvutatakse empiirilise valemi $y = a_0x + b_0$ parameetrite väärtused

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i z_i}{\sum_{i=1}^n z_i^2}$$

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - a_0 \bar{x}.$$

Arvutuste vahetulemused on soovitatav korrastada järgmises punktis esitatud näite eeskujul tabelisse (tabeli 39.4 esimesed viis veergu).

Juhul kui graafiline kontroll näitab lineaarse regressioonhüpooteesi õigustatust, võib arvutustabelit näite p. 39.4 eeskujul veel kolme veeruga täiendada arvutada p. 31.5 reeglite järgi parameetrite a ja b juhuslike vigade ülemmäärad $\Delta_p a$ ja $\Delta_p b$. Süstemaatiliste vigade hindamiseks üldreeglit ei ole.

39.4. Näide. Olgu katsest leitud kaheksa suuruste x ja y väärtuste paari, mille esialgne uurimine lubab püstitada lineaarse regressioonhüpooteesi. Empiirilise valemi

$$y = ax + b$$

parameetrite a ja b hinnangute leidmiseks kasutatakse vähimruutude meetodit.

Arvutustöö käigus täidetakse tabel 39.4. Kõigepealt kantakse kahte esimesse veergu katseandmed, leitakse nende summad ning argumentide aritmeetiline keskmine $\bar{x} = 52,8/8 = 6,6$. Seejärel täidetakse kolm järgmist veergu. Veergude summade järgi arvutatakse

$$a_0 = 56,1/89,2 = 0,629$$

$$b_0 = 53,1/8 - 0,629 \cdot 6,6 = 2,48.$$

Sellega on empiirilise valemi parameetrite punkthinnangud leitud.

Katsepunktid ja sirge $y = 0,63x + 2,48$ graafik on kujutatud joonisel 30.10.

Enne arvutustöö jätkamist on tarvis uurida, kas mõõtmistulemuste hälbed empiirilise valemi järgi arvutatutest on juhusliku või süstemaatilise iseloomuga. Kui hälbed süstemaatilist komponenti ei sisalda, võib täita tabeli kolm viimast veergu ($\Delta_i = y_i - a_0 x_i - b_0$) ja koostada regressioonsirge parameetrite jaoks p. 31.5 kohaselt vahemikhinnangud:

Empiirilise sirge parameetrite arvutamine

x	y	z	yz	z^2	$a_0x + b_0$	$ \Delta $	Δ^2
1,3	3,2	-5,3	-17,0	28,1	3,30	0,10	0,01
2,8	4,5	-3,8	-17,1	14,4	4,24	0,26	0,07
4,6	5,1	-2,0	-10,2	4,0	5,37	0,27	0,07
6,1	6,2	-0,5	-3,1	0,3	6,32	0,12	0,01
7,5	7,5	0,9	6,8	0,8	7,20	0,30	0,09
8,8	8,3	2,2	18,3	4,8	8,02	0,28	0,08
10,2	8,7	3,6	31,3	12,9	8,90	0,20	0,04
11,5	9,6	4,9	47,0	23,9	9,71	0,11	0,01
Σ	52,8	53,1	+103,4 -47,3	89,2			0,38
			56,1				

$$s_a^2 = \frac{0,38}{6 \cdot 89} = 7,1 \cdot 10^{-4}; \quad s_b^2 = \frac{0,38}{6 \cdot 8} = 7,9 \cdot 10^{-3};$$

$$s_a = 0,027; \quad s_b = 0,09; \quad \Delta_{95\%} a = 2,6 \cdot 0,027 = 0,07;$$

$$\Delta_{95\%} b = 2,6 \cdot 0,09 = 0,23.$$

$$a = 0,63 \pm 0,07_{95\%},$$

$$b = 2,48 \pm 0,23_{95\%}.$$

39.5. Kinnispunktiga regressioonsirge. Eelkirjeldatud reeglite järgi leitud empiiriline sirge ei pruugi läbida ühtki katsepunkti. Mõnel juhul on aga tarvis, et sirge läbiks ühte katseandmetest sõltumatut tuntud punkti täpselt, näiteks punkti (0; 0). Sellist punkti nimetatakse edaspidi lähendussirge *kinnispunktiks*.

Kinnispunkt (x_0, y_0) muudab empiirilise valemi koostamise märksa lihtsamaks, sest fikseeritud punktiga sirge võrrandis

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

on üksainus vaba parameeter. Vähimruutude meetodi järgi on selle parameetri parim punkthinnang

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_0)(x_i - x_0)}{\sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2}$$

Suhete $(y_i - y_0)/(x_i - x_0)$ aritmeetiline keskmine oleks parameetri a jaoks halvem hinnang.

Näide. Olgu andmete tabelis suuruste x ja y väärtuste paarid $(0; 0)$, $(1; 1,3)$, $(2; 2,1)$, $(3; 2,8)$, $(4; 3,8)$, $(5; 5,0)$, $(6; 5,9)$. Käsitledes punkti $(0; 0)$ tavalise, juhuslikest vigadest mõjustatud katsepunktina, annab vähimruutude meetod tulemuse $y = 0,9x + 0,3$. Lugesdes punkti $(0; 0)$ kinnispunktiks, saadakse tulemuseks $y = 0,92x$. Mõõtmistulemuste suhete aritmeetiline keskmine on 1,04. Joonise abil võib veenduda, et avaldis $y = 1,04x$ sobib empiiriliseks valemiks märksa halvemini kui avaldis $y = 0,92x$.

39.6. Paraboolregressioon. Ruutparaboolse empiirilise valemi üldkuju

$$y = ax^2 + bx + c$$

sisaldab kolme tundmatut parameetrit. Kui on antud üks kinnispunkt (x_0, y_0) , siis saab paraboolse valemi teisenduse $z = (y - y_0)/(x - x_0)$ abil muuta lineaarseks:

$$z = ax + d.$$

Pärast abisuuruse z väärtuste z_i arvutamist saab paaride (x_i, z_i) järgi määrata graafilise või vähimruutude meetodi abil lineaarvalemi parameetrid a ning d . Kordaja a võrdub paraboolse valemi ruutliikme kordajaga. Paraboolse valemi teised parameetrid on

$$b = d - ax_0$$

$$c = -dx_0.$$

Kirjeldataud lineariseerimisvõte muudab erinevate katsepunktide osatähtsuse erinevaks. Vasutatavate arvutuste juures on soovitatav igasuguseid ebalineaarseid teisendusi vältida ning jälgida polünoomregressioonülesande lahendamise eeskirja (vt. p. 30.11).

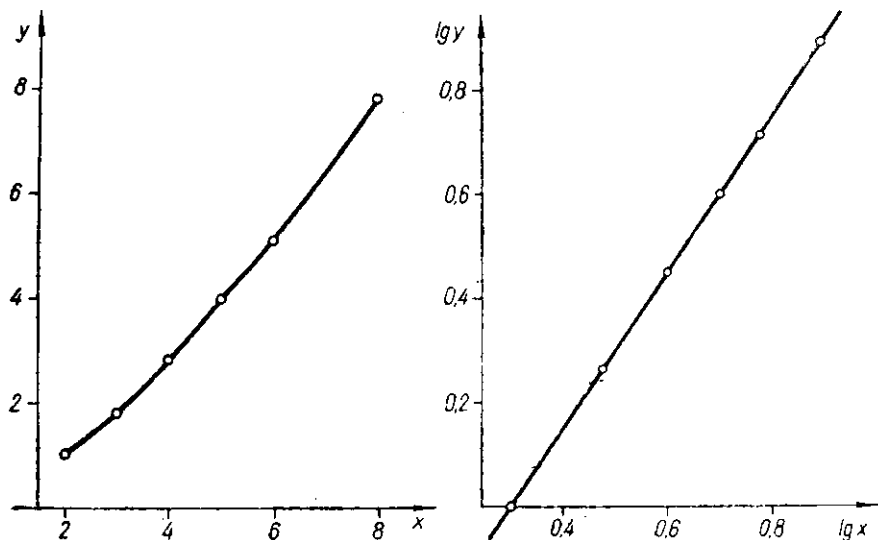
39.7. Astmeregreesioon. Astmefunktsiooni $y = kx^a$ avaldist saab lihtsustada logaritmilise teisenduse $Y = \lg y$ ja $X = \lg x$ abil.

Logaritmade seos

$$Y = aX + \lg k$$

on lineaarne. Pärast logaritmade väärtuste X_i ja Y_i arvutamist saab paaride (X_i, Y_i) järgi graafilise või vähimruutude meetodi abil määrata parameetrid a ning $\lg k$.

Andmete graafilist töötlemist hõlbustab *logaritm-logaritmilise koordinaatvõrguga paber* Sellisele paberile kantakse vahetult



Joonis 39.7. Katseandmete graafiline kujutamine lineaarse ja logaritmilise mastaabi korral.

punktid (x_i, y_i) , pikkused paberil osutuvad aga võrdelisteks logaritmidega. Astmefunktsiooni korral paiknevad punktid ühel sirgel, mille algordinaat on k ja tõus a .

Näide. Katsepunktide $(2; 1,0)$, $(3; 1,8)$, $(4; 2,8)$, $(5; 4,0)$, $(6; 5,1)$, $(8; 7,8)$ järgi lineaarses koordinaadistikus koostatud graafik on silmale väheütlev. Samade andmete logaritmid graafiku (joonis 39.7) abil võib aga hõlpsalt põhjendada astmeregreesiooni hüpoteesi ning koostada empiirilise valemi

$$y = 0,35x^{1,5}.$$

39.8. Logaritm- ja eksponentregressioon. Kui esimene suurus sõltub teisest logaritmiliselt, siis teine suurus sõltub esimesest eksponentsiaalselt ning vastupidi. Seepärast võib logaritm- ja eksponentsõltuvust käsitleda koos.

Logaritm sõltuvuse tunnuseks on see, et ühe suuruse muutmisel kindla sammu võrra muutub teine suurus alati ühe ja sama teguri kordselt. Empiirilise valemi üldkuju võib kirjutada nii:

$$y = a \lg x + b.$$

Sama seose eksponentkuju on

$$x = ke^{cy},$$

kus

$$k = e^{-\frac{2,3b}{a}},$$

$$c = \frac{2,3}{a}$$

Teisenduse $X = \lg x$ abil antakse empiirilisele valemile lineaarne kuju

$$y = aX + b.$$

Parameetrite a ja b leidmiseks arvutatakse väärtused $X_i = \lg x_i$ ja edasi talitatakse samuti kui lineaarse empiirilise valemiga koostamisel.

Katseandmete töötlemise hõlbustamiseks trükitakse erilist *lineaar-logaritmilise koordinaatvõrguga paberit*, millele saab katsepunkte kanda logaritmade tabeli abita.

39.9. Empiirilise valemiga parandamine. Kui katsepunktide halded empiirilise valemiga järgi joonistatud graafikust on süstemaatilise iseloomuga, siis on esialgne regressioonihüpotees ebarahuldav. Regressioonihüpoteesi täpsustamiseks koostatakse vahe $\Delta = y_{\text{katse}} - y_{\text{valem}}$ graafik. Sõltuvuse $\Delta = \Delta(x)$ jaoks leitakse uus empiiriline valem, mis on esialgsele empiirilisele valemile parandiks.

Empiirilise valemiga parandamise võimalust võib katseandmete töötlemisel juba algul ette näha.

Näide. Olgu ülesandeks leida empiiriline valem, mis kirjeldaks tabeli 39.9 kahes esimeses reas esitatud andmeid. Tabeli algosa kirjeldab hästi funktsioon $y = x$. Valides avaldise $y = x$ esialgseks empiiriliseks valemiks, arvutatakse vahed Δ (tabeli 39.9 kolmas rida). Sõltuvust $\Delta = \Delta(x)$ võiks kirjeldada suure astmenäitajaga

Tabel 39.9

Katseandmed ja esialgse empiirilise valemiga parandid

x	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
y	1,0	2,0	3,0	4,0	5,1	6,2	7,4	8,8	10,3	12,0
Δ	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,2	0,4	0,8	1,3	2,0

astmefunktsioon. Punktid (x_i, Δ_i) paiknevadki logaritmi-logaritmilisel paberil kaunis hästi ühel sirgel tõusuga 4,3 ja algordinaadiga 10^{-4} . Parandatud empiiriline valem on

$$y = x + 10^{-4}x^{4,3}$$

40. MITTEVÖRDTÄPSETE ANDMETE TÖÖTLEMINE

40.1. Kaalutud keskmine. Kaalutud keskmise nimetus pärineb segamisülesannetest. Olgu vee temperatuur ühes anumast T_1 , teises T_2 . Kui segada kummaski anumast võrdsed portsjonid vett, siis segu temperatuur T on temperatuuride T_1 ja T_2 aritmeetiline keskmine:

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Kui segatavate portsjonite kaalud g_1 ja g_2 on erinevad, siis segu temperatuuri

$$T = \frac{g_1T_1 + g_2T_2}{g_1 + g_2}$$

nimetatakse temperatuuride *kaalutud keskmiseks*. Mitme portsjoni vee segamisel kirjeldab segu temperatuuri kaalutud keskmise üldvalem

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n g_i T_i}{\sum_{i=1}^n g_i},$$

kus g_i on i -nda portsjoni *kaal*.

Sõna *kaal* tarvitatakse siin selle sõna tavalisest tähendusest sõltumatu terminina. Segamisülesannetes on kaaluks mass või ruumala.

Kõikide kaalude korrutamine ühe ja sama teguriga ei muuda kaalutud keskmise väärtust. Keskmise arvutamisel on olulised vaid kaalude suhted.

Kaalutud keskmise valemi teiseks tuntud rakenduseks on masskeskme arvutamine. Ühel sirgel asuvate masspunktide masskeskme koordinaat x_0 on üksikute masspunktide koordinaatide x_i kaalutud keskmine

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

kaaludeks on masspunktide massid m_i .

40.2. Aritmeetilise keskmise arvutamine osakeskmete järgi. Olgu ühe ja sama suuruse x mõõtmistulemuste hulk jagatud täiesti juhuslikult k klassiks:

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)},$$

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_{n_2}^{(2)},$$

$$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)}.$$

Klasside aritmeetilised keskmised ehk osakeskmised on

$$\bar{x}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n_1} x_i^{(1)} / n_1, \quad \bar{x}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_2} x_i^{(2)} / n_2, \quad \bar{x}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n_k} x_i^{(k)} / n_k$$

ja üldine aritmeetiline keskmine $\bar{x} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} x_i^{(j)} / \sum_{j=1}^k n_j$. Asendades

viimases avaldises osasummad $\sum_{i=1}^{n_j} x_j^{(j)}$ osakeskmete $\bar{x}^{(j)}$ ja arvude n_j korrutisega, võib üldise aritmeetilise keskmise avaldada osakeskmete kaalutud keskmisena.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^k n_j \bar{x}^{(j)}}{\sum_{j=1}^k n_j} \quad (40.2.1)$$

Kaaludeks on klasside mahud n_j .

Võrdsete klasside korral langeb kaalutud keskmine kokku osakeskmete aritmeetilise keskmisega.

Nii osakeskmete kui ka üldkeskmise dispersioonid avalduvad üksiktulemuse dispersiooni $\sigma^2(x)$ kaudu: $\sigma^2(\bar{x}^{(1)}) = \sigma^2(x) / n_1$, $\sigma^2(\bar{x}^{(2)}) = \sigma^2(x) / n_2$, $\sigma^2(\bar{x}^{(k)}) = \sigma^2(x) / n_k$, $\sigma^2(\bar{x}) = \sigma^2(x) / \sum_{j=1}^k n_j$. Üldkeskmise dispersiooni pöördväärtuse avaldises võib viia nimetaja

$\sigma^2(x)$ summamärgi alla. Niiviisi tuletatakse üldkeskmise ja osakeskmete dispersioone siduv valem

$$\frac{1}{\sigma^2(\bar{x})} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sigma^2(\bar{x}^{(j)})} \quad (40.2.2)$$

40.3. Mittevõrdtäpsete andmete keskmine. Üht ja sama füüsilist suurust mitmel erineval viisil mõõtes saadud tulemuste (punkthinnangute) x_1, x_2, \dots, x_k piirvead $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k$ ja dispersioonid $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2$ võivad teineteisest erineda. On ilmne, et mõõtmistulemuste keskvärtuse hindamisel peab täpsemaid üksiktulemusi arvestama rohkem kui vähemtäpseid.

Keskvärtuse hindamise reegli tuletamiseks käsitletakse suurusi x_1, x_2, \dots, x_n mingisuguste kujutletava juhusliku suuruse väärtuse klasside osakeskmetena. Kujutletavate klasside osakeskmete dispersioonid peavad võrduma tegelike dispersioonidega $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$, seepärast peavad nende klasside mahud olema dispersioonidega $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ pöördvõrdelised: $n_1 = c/\sigma_1^2, n_2 = c/\sigma_2^2, \dots, n_k = c/\sigma_k^2$. Valemi (40.2.1) järgi arvutatud osasuuste kaalutud keskmine ei olene konstandi c väärtusest. Konstandi väärtuse võib valida suvaliselt. Seetõttu ei pruugi kaalud n_i üldse olla täisarvud ja tähise n asemel on sobivam kasutada kaalu üldist tähist g .

Valemi (40.2.2) järgi on kaalutud keskmise dispersiooni pöördväärtus võrdne suuruste x_1, x_2, \dots, x_n dispersioonide pöördväärtuste summaga.

Kokkuvõtte. Mittevõrdtäpsete andmete ühise keskvärtuse hinnanguks sobib kaalutud keskmine

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n g_i x_i}{\sum_{i=1}^n g_i}$$

kus kaalud on pöördvõrdelised dispersioonidega. Kui piirvead Δx_i on ligikaudu võrdelised standardhälvetega, siis võib kaaludeks valida piirvigade ruutude pöördväärtused:

$$g_i = \frac{1}{\Delta^2 x_i}$$

Kaalutud keskmise piirvea arvutamiseks kasutatakse valemit

$$\frac{1}{\Delta^2 x_0} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\Delta^2 x_i}$$

Kui kaaludeks on piirvigade ruutude pöördväärtused, siis

$$\Delta x_0 = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n g_i}}$$

40.4. Esimene näide. Olgu kahe erineva meetodi abil saadud ühe ja sama füüsikalise suuruse mõõtmisel tulemused

$$x_1 = 2,30 \pm 0,10_{95\%},$$

$$x_2 = 2,50 \pm 0,20_{95\%}$$

Eelmises punktis esitatud reeglite järgi arvutatakse

$$g_1 = \frac{1}{0,10^2} = 100; \quad g_2 = \frac{1}{0,20^2} = 25$$

$$x_0 = \frac{100 \cdot 2,30 + 25 \cdot 2,50}{125} = 2,34$$

$$\Delta_{95\%} x = \frac{1}{\sqrt{100 + 25}} = 0,09.$$

Ühise keskväärtuse hinnang on

$$x = 2,34 \pm 0,09_{95\%}$$

Nagu siit näha, ei mõjuta vähetäpsed lähteandmed (x_2) tulemust kuigi palju. Lihtne aritmeetiline keskmine 2,40 oleks käesoleval juhul märksa halvem keskväärtuse hinnang kui täpsem tulemus (x_1) üksinda.

40.5. Teine näide. Kaalutud keskmise arvutamise hõlbustamiseks on kasulik korraldada kõik vahetulemused tabelisse. Aritmeetiliste tehete lihtsustamiseks valitakse arv a , mida kasutatakse täpselt samuti kui aritmeetilise keskmise arvutamisel (vt. p. 35.2). Konkreetne arvutusnäide on esitatud tabelis 40.5. Näite üksikasjalik analüüsimine jääb lugeja hooleks.

40.6. Regressioonsirge hindamine mittevõrdtäpsete andmete järgi. Mittevõrdtäpsetele katsepunktidele lähendussirget valides peab täpsemalt mõõdetud punkte arvestama enam kui vähemtäpsed. Graafilist meetodit (p. 39.2) kasutades on selline talitusviis loomulik. Vähimruutude meetodit (p. 39.3) kasutades tuleb aga katsepunktide erineva täpsuse arvessevõtmiseks arvutusvalemeid täiendada.

Mõõtmistulemuste olulisuse matemaatiliseks väljendamiseks

Kaalutud keskmise arvutamine (näide)

x	Δx	$\Delta^2 x$ 10^{-8}	g 10^4	$x-a$ 10^{-4}	$g(x-a)$ 1
0,1281	0,0025	625	16	31	500
0,1252	0,0020	400	25	2	50
0,1260	0,0010	100	100	10	1000
0,1270	0,0015	225	45	20	900
0,1250	0,0020	400	25	0	0
0,1265	0,0020	400	25	15	380
Σ			236		2830

$$a = 0,1250$$

$$\frac{2830}{236 \cdot 10^4} = 0,0012$$

$$x_0 = 0,1262$$

$$\sqrt{236 \cdot 10^4} = 1540$$

$$\Delta x = 0,0007$$

valitakse kõigile katsepunktidele kaalud g_i nii, et need oleksid enam-vähem pöördvõrdelised piirvigade ruutudega. Lähendussirge

$$y = ax + b$$

parameetrite a ja b arvutamisel kujutletakse, et katsepunkt esineb mõttelises lähteandmete tabelis parajasti g_i korda. Niiviisi saadakse katsepunkte ühekordselt sisaldava tegeliku lähteandmete tabeli järgi arvutamiseks valemid

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i x_i}{\sum_{i=1}^n g_i}$$

$$z_i = x_i - \bar{x},$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n g_i y_i z_i}{\sum_{i=1}^n g_i z_i^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n g_i y_i}{\sum_{i=1}^n g_i} - a\bar{x}.$$

TAIENDAV KIRJANDUS

1. Elgas, J. Elektrimõõtmiste käsiraamat. Tallinn, ERK, 1963, 212 lk. Raamat sisaldab konkreetseid juhiseid elektrimõõtmisteks. Lisas on esitatud mitmesuguste elektriliste mõõtevahendite andmeid. Bibliograafia 20 nimetust.
2. Kaasik, U. Matemaatiline planeerimine. Tallinn, «Valgus», 1967, 319 lk. Selles raamatus ei puudutata otseselt metroloogiaküsimusi, kuid siin käsitletavat üldised matemaatilised meetodid on kasutatavad ka mõõtmiste planeerimisel. Bibliograafia 54 nimetust.
3. NSVL MN juures asuva Standardite, Mõõtude ja Mõõteriistade Komitee. Juhend 12-58 mõõtude ja mõõteriistade kontrollimiseks ja mõõtmistehnika seisundi ning standardite ja tehniliste tingimuste täitmise kontrollimiseks. Tallinn, ENSV RMN Tehn. Inf. Büroo, 1961, lk. 3...29.
4. Rāgo, G. Kõrgem matemaatika I. Tallinn, ERK, 1962, 739 lk. Traditsioonilise matemaatikakursuse kõrval käsitletakse ka mõõtmistulemuste töötlemist ja empiiriliste valemite koostamist.
5. Petersen, I. Katsete planeerimine. Tallinn, «Valgus», 1966, 90 lk. Sissejuhatus kaasaegsesse matemaatilisele statistikale tuginevasse katsete planeerimise üldteooriasse. Esitatakse ka konkreetseid katse planeerimise näiteid. Bibliograafia 15 nimetust.
6. Tiit, E. Töenäosusteooria I. Tartu, TRÜ, 1968, 320 lk. Õpiku esimesed 141 lk. sisaldavad töenäosusteooria algmete kergelt jälgitava esituse koos materjali omendamist soodustavate ülesannetega.
7. Võhanda, L. Arvutusmeetodid I. Tartu, TRÜ, 1962, 142 lk. Hea õpik igapäevase arvutamisoskuse täiendamiseks. Käsitletakse täpse ja ligikaudse arvutamise ratsionaalseid võtteid, arvutuslükati kasutamist, võrandite lahendamist. Lehekülgedelt 105—130 võib leida ülevaate matemaatilise statistika algmõistetest.
8. Zuraavl'ov, A. Tolerantsid ja tehniline mõõtmine. Tallinn, ERK, 1965, 159 lk. Konspektiivne õpik-käsiraamat, milles leidub kaunis põhjalik ülevaade pikkuse ja nurga mõõtevahendeist koos näpunäidetega riistade kasutamiseks. Bibliograafia 8 nimetust.
9. Б о л ь ш е в Л. Н. Наименьших квадратов метод. Оценки статистические. Физический энциклопедический словарь III. Москва 1963, стр. 350—352 и 572—577. Lühiduse kohta üllatavalt täielikud ülevaated vähimruutude meetodist ja statistiliste hinnangute teooriast.
10. Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В. Таблицы математической статистики. Москва. «Наука», 1965, 464 стр. Kõige universaalsem Nõukogude Liidus ilmunud statistiliste tabelite kogumik. Raamat sisaldab põhjalikke teoreetilisi selgitusi (nõutav hea matemaatiline ettevalmistus) ja tabelite kasutamishüendeid (158 leheküljel). Bibliograafia 56 nimetust tabelite kogumikke ja 149 nimetust artikleid ning raamatuid. (1968. a. ilmus sama raamatu teine trükk.)
11. Б у р д у н Г. Д. Единицы физических величин. Москва, Изд. комитета стандартом, мер и изм. приборов при СМ СССР, 1967, 216 стр. Põhjalik ülevaade mõõtühikuist ja rahvusvahelisest mõõtühikute süsteemist. Bibliograafia 37 nimetust.

12. Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика. Москва, ИЛ, 1960, 434 стр.
Sobiv raamat matemaatilise statistikaga põhjalikumaks tutvumiseks. Autoril on õnnestunud rangust ohverdamata esitada kogu materjal nii, et see on mõistetav spetsiaalsete matemaatiliste eelteadmisteta.
13. Зайдель А. Н. Элементарные оценки ошибок измерений. Москва, «Наука», 1967, 89 стр.
Juhend algajatele.
14. Клепиков Н. П., Соколов С. Н. Анализ и планирование экспериментов методом максимума правоподобия. Москва, «Наука», 1964, 184 стр.
Sisaldab regressioon- ja konfluentanalüüsi põhjaliku teoreetilise käsitluse ja detailsed programmid füüsikaliste katsete tulemuste töötlemiseks. Viimane peatükk on pühendatud mõõtmiste täpsuse ja mahu planeerimisele. Kirjeldatavad arvutusmeetodid on töömahukad ja nõuavad elektronarvutite kasutamist. Raamatus vaadeldakse ka süstemaatiliste vigade olemasolu arvestavaid meetodeid. Lisana on esitatud v^2 jaotuse tabel.
15. Колосийцов Ю. В. и др. Оптические приборы для измерения линейных и угловых величин в машиностроении. Москва, «Машиностроение», 1964, 255 стр.
Lk. 215—222 on kirjeldatud katetomeetreid, mille kohta standardites ja ametlikes taatlemisjuhendites andmed puuduvad. Bibliograafia 89 nimetust.
16. Коротков В. П., Тайц Б. А. Основы метрологии и точности механизмов приборов. Москва, Машгиз, 1961, 400 стр.
Klassikalise metroloogiakursuse kõrval on esitatud põhjalik ülevaade mõõteriistade täpsuse teooriast. Bibliograafia 121 nimetust.
17. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. Москва, Физматгиз, 1962, 349 стр.
Tuntud nõukogude statistiku kirjutatud käsiraamatus vaadeldakse vähimruutude meetodit kaasaegse matemaatilise statistika seisukohalt. Autor pöörab palju tähelepanu põhimõttelisele küsimustele, toob aga samal ajal hulgaliselt praktilisi näiteid ja esitab iga meetodi jaoks rakenduslike valemite ja arvutusreeglite kokkuvõtte. Bibliograafia 58 nimetust.
18. Маликов, С. Ф., Тюрин Н. И. Введение в метрологию. Москва, Изд. гос. комитета стандартов, мер и измерительных приборов СССР, 1965, 240 стр.
Kergelt jälgitava esituslaadiga õpik. Käsitletakse metroloogia üldküsimusi, mõõtühikuid, süstemaatiliste juhuslike mõõtmisvigade analüüsimise meetodeid, mõõtevahendite taatlemise reegleid. Bibliograafia 48 nimetust.
19. Нейман Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики. Москва, «Наука», 1968, 448 стр.
Kaasaegse matemaatilise statistika õpik, mis ei nõua lugejalt matemaatilist ettevalmistust. Jõukohane ka bioloogia- ja meditsiiniüliõpilastele.
20. Новичкий, П. В. Основы информационной теории измерительных устройств. Ленинград, «Энергия», 1968, 248 стр.
Esimene ülevaade uutest seisukohtadest metroloogias, mille kohaselt mõõtmistäpsust iseloomustab entroopia muut. Huvi pakuvad mõõtmisvigade jaotusseaduste katselise uurimise tulemused ja nendest tulenevad järeldused vigade liitumisseaduse kohta. Raamatule iseloomulik insener-tehniline lähenuvõtte ei vähenda esitatavate seisukohtade põhimõttelist tähtsust.
21. Смирнов Н. В., Душин Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. «Наука», Москва, 1965, 511 стр.
Tehnikaüliõpilastele adresseeritud õpik, mis sobib ka füüsikutele tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika süstemaatiliseks õppimiseks. Sama raamatu teine trükk ilmus 1969. a.
22. СССР Государственные стандарты. Электроизмерительные приборы. Москва, Изд. стандартов, 1968, 291+227 стр.

- Kogumik sisaldab peaaegu kõiki elektrimõõtmisi reglementeerivaid standardeid. Puuduvad raadiotehniliste mõõtmiste standardid.
23. Указатель государственных стандартов. Москва, Изд. стандартов, 1969, 799 стр.
Põhiosa moodustab kõigi NSVL riiklike standardite (GOST-id ja OST-id) süstemaatiline loetelu. Sisaldab ka standardite alfabeetilise näitaja ja numbritele vastavalt järjestatud näitaja. Igal aastal ilmub selle raamatu uus, täiendatud väljaanne.
 24. Указатель инструкций, методических указаний и правил по проверке мер и измерительных приборов. Москва, Изд. стандартов, 1966.
Eelmisega analoogiline teatmik, mis sisaldab andmeid kõigi taatlemisjuhendite kohta.
 25. Уорсинг А., Геффнер Дж. Методы обработки экспериментальных данных. Москва, ИЛ, 1949, 363 стр.
Algajale eksperimentaatorile väga kasulik kitsalt praktilise suunaga raamat. Matemaatilist ettevalmistust lugejalt ei nõua. Autorid pööravad palju tähelepanu tabelite ja graafikute otstarbeka vormistamise reeglitele, arvutustöö lihtsustamise võtetele jne. Üks peatükk on pühendatud periodogrammanalüüsile.
 26. Чертов А. Г. Международная система единиц измерений. Москва, «Высшая школа», 1967, 287 стр.
Peale rahvusvahelise mõõtühikute süsteemi kirjelduse on raamatus esitatud süstemaatiliselt kõigi tähtsamate füüsikaliste suuruste definitsioonid.
 27. Шкурин Г. П. Справочник по новым электроизмерительным приборам. Москва, Воениздат, 1964, 415 стр.
Põhjalik teatmik, sisaldab riistade lühikirjeldusi, tehnilisi andmeid, fotosid ja jooniseid, riistade hinnakirja.
 28. Шкурин Г. П. Справочник по новым радиоизмерительным приборам. Москва, Воениздат, 1966, 359 стр.
Analoogiline teatmik raadiotehniliste mõõteriistade kohta.
 29. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений. Москва, «Мир». 1965, 462 стр.
Raamatu autor on tuntud ungari füüsik. Esimene peatükk sisaldab tõenäosusteooria omapärase esituse, teine peatükk on pühendatud matemaatilise statistika meetoditele, kolmas peatükk sisaldab näiteid tuumafüüsika-alaste mõõtmiste tulemuste töötlemisest. Bibliograafia 51 nimetust. (Sama raamatu teine trükk ilmus 1968. a.)
 30. Плохинский, Н. А. Биометрия. Москва, Изд. МГУ. 1970, 367 стр.
Hea praktilise statistika käsiraamat, mida võivad kasutada ka füüsikud. Raamatu eriliseks väärtuseks on näidetega varustatud üksikasjalik arvutuseeskirjade kogu.

REGISTER

(Märksõna järel esitatud arvud on punktide numbrid.)

1. Üldosa

- absoluutväärtuseeskiri summa piirvea määramiseks 37.3, 37.8
aditiivne suurus 1.1
algmoment 27.8
aritmeetiline keskmine 29.5, 30.7
arvutusviga 3.5, 3.7
arvväärtus 1.2
astmeregreesioon 39.7
binomiaaljaotus 28.3
Cauchy jaotus 28.6
CGS 2.4, 10.4
diskreetne juhuslik suurus 27.2
diskreetne ühtlane jaotus 28.1
dispersioon 27.8, 27.11, 30.8
dispersioonanalüüs 31.9, 36.2
divitiivne suurus 1.1, 1.2
efektiivne hinnang 29.6
efektiivsus 29.6
ekse 3.5, 35.1
eksponentregreesioon 39.8
empiiriline jaotusfunktsioon 29.4, 34.6
empiiriline mediaan 29.5
empiiriline valem 39.1 9
etalon 1.2
Fisher'i F -test 31.7, 36.2
funktsionaalskaala 1.8
funktsiooni piirviga 38.3
füüsikaline ja matemaatiline nurk 8.2
füüsikalised konstandid 12.3
Gaussi jaotus vt. normaaljaotus
Glivenko teoreem 29.4
haare 29.5
Hartree mõõtühikute süsteem 2.7
häireviga 3.5, 3.7
hüsterees 4.6
intervalliskaala vt. vaheskaala
inversioonide arv 32.4, 36.3
jaotis 4.2
jaotusfunktsioon 27.2
jaotusseaduse hindamine 34.2
joonpaisumistegur 15.1
juhuslik suurus 27.1
juhuslik sündmus 27.1
juhuslik vektor 27.9
juhuslik viga 3.6, 34.4
järg 29.3
järjeskaala 1.7
järjestatistik 29.5
kaal 40.1
kaalutud keskmine 40.1 .3
kasvujärjestus 29.3
kaudne mõõtmine 1.4
kaudse mõõtmise tulemuse piirviga 38.5
keskpunkt (mõõtmistulemuste jaotusel) 34.5
keskväärtus 27.8, 27.11
kiirguse valgusekviivalent 9.6
kinnispunkt 39.5
klassid 31.8
klassidesisene ja klassidevaheline em-
piiriline dispersioon 31.8
Kolmogorovi test 32.6
konsistentne hinnang 29.6
kordsed mõõtühikud 2.8
korrelatsioonikordaja 27.10
kovariatsioon 27.10
kronoloogiline järjestus 29.3
kvantiil 27.6
kvantiilfunktsioon 27.6
Lagrange'i polünoom 39.1
Laplace'i funktsioon 28.5
lineariseerimine 38.4
lisaviga 4.5
logaritmiline paber 39.7, 39.8
logaritmregreesioon 39.8
lubatud viga 4.5
lugem 4.2
lähtevinga 3.5, 3.7
matemaatilised konstandid 11.1
matemaatiline ooteväärtus vt. keskväär-
tus
mediaan 27.6
mediaani vahemikhinnang 32.2, 34.8,
35.4
MkGS 2.5
MKSA 10.3
modifitseeritud Studenti test vt. Stu-
dent-Lordi test
moment 27.8
mõõt 4.1
mõõtarv 1.2
mõõtemuundur 4.1, 22.4, 22.5
mõõtepiirkond 4.2
mõõteriist 4.1
mõõtmisviga 3.2
mõõtühik 1.2
märgitest 32.2, 34.8, 35.4
naturaalsed mõõtühikute süsteemid 2.7
nihutamata ja nihutatud hinnang 29.6
nimeskaala ehk nominaalskaala 1.7
normaaljaotus 28.5, 28.7
normaaljaotushüpotees 28.8, 34.6, 34.7
normaaltingimused 4.4
normaalvõrrandid 30.10, 30.11
nähtavusfunktsioon 9.6
näit 4.2
olulisuse nivoo 29.7
ordinaalskaala vt. järjeskaala
osavõendid ja liitvõend 31.8
otsene mõõtmine 1.4
paraboolregreesioon 39.6

parameetrilised ja mitteparameetrilised meetodid 29.8
 parand 4.3
 pidev juhuslik suurus 27.2
 piirtingimused 4.4
 piirviga 3.3, 5.6, 5.7, 39.2
 piisav hinnang 29.6
 Poissoni jaotus 28.4, 35.6
 polaarsed piirvead 3.3
 probit 34.6
 protsentpunkt 27.6
 punkthinnang 29.6
 põhiviga 4.5
 pöördjaotusfunktsioon 27.6
 rahvusvaheline mõõtühikute süsteem 2.6
 raskuskiirendus 12.4
 ratsionaliseeritud mõõtühikute süsteemid 10.2
 regressioonfunktsioon 39.1
 regressioonpolünoom 30.11
 regressioonsirge 30.10, 31.5, 39.2 ..5, 40.6
 riistaviga 3.5, 3.7, 4.5, 4.9
 ristkülikjaotus vt. ühtlane jaotus
 ruuteeskiri summa piirvea määramiseks 37.2, 37.8
 ruutkeskmine hälve vt. standardhälve
 seekansjaotus 34.2, 35.5
 seeriatest 36.5
 Sheppardi parand 34.3
 SI 2.6, 10.3
 Simpsoni jaotus 37.7
 Snedecori jaotus 31.7
 soojuse mehaaniline ekvivalent 9.4
 standardhälve 27.8, 35.7
 standardid 1.9
 standardiseeritud normaaljaotus 28.5
 statistik 29.5
 Studenti jaotus 31.2
 Studenti suhe 31.2
 Studenti test 31.3, 31.4, 34.8, 35.2
 Student-Lordi test 31.6, 34.8, 35.3
 subjektiivne viga 3.5, 3.7
 suhteline piirviga 3.4
 suhteline sagedus 27.1
 suhteline sagedusfunktsioon 27.3
 suhteskaala 1.6
 suurima tõepärasuse meetod 30.3
 sõltuvad ja sõltumatud suurused 27.10
 süstemaatiline viga 3.6, 34.4
 taandviga 4.5
 taatlemine 4.3
 teoreetiline viga 3.5, 3.7
 test 29.7
 tihedusfunktsioon 27.4
 tilgatabel 17.5
 tsentraalmoment 27.8
 tsentraalne piirteoreem 28.7
 Tšebõšovi võrratus 27.12

tõenäosus 27.1
 tõenäosusintegraal 28.5
 tõenäosuspaber 34.6
 tõenäosustihedus 27.4
 tõepäraseim hinnang 30.3
 tõepärasusfunktsioon 29.2
 tõepärasusvõrrandid 30.3
 tähendusega kümnendkohad 5.2
 töö terminine ekvivalent 9.4
 töötingimused 4.4
 usaldatavus 29.7
 vabadusastmed 31.1
 vahemik 27.4
 vahemikhinnang 29.7
 vaheskaala 1.6
 Van der Waerdeni test 32.5, 36.4
 variatsioon 4.6
 variatsioonrida 29.3
 vee omadused 12.5
 võend 29.2
 võendi tihedusfunktsioon 30.1
 väljavõte vt. võend
 Wilcoxon'i test 32.4, 36.4
 vähimruutude meetod 30.9 ..11, 39.3 ..5, 40.6
 õhu omadused 12.5
 ühtlane jaotus 28.2, 35.5
 ümardamine 5.2, 5.4, 5.5
 X-test 32.5, 36.4

2. Mõõtühikud ja -skaalad

aaker 11.2
 aam 11.1
 aar 8.4
 aasta 8.4
 aatommassi ühik 8.4
 amper 10.1
 ankur 11.11
 apostilb 9.6
 arssin 11.9
 astronoomiline ühik 8.4
 atmosfäär 8.4
 atto... 2.8
 baar 8.3, 8.4
 barn 8.4
 barrel 11.4
 Baumé skaala 8.6
 Beauforti skaala 8.6
 Belli skaala 8.5
 bioo 10.4
 Briti soojusühik 11.6
 bushel 11.4, 11.5
 Celsiuse skaala 9.2, 9.3
 deka .. 2.8
 detsi .. 2.8
 detsibell 8.5
 dool 11.9

drahm 11.3, 11.4, 11.10
džaul 8.3
dүүн 8.3
elektronimass 8.4, 12.3
elektronvolt 8.4
erg 8.3
faatom 11.7
Fahrenheiti skaala 11.6
femto... 2.8
foon 8.5
fott 9.6
franklin 10.4
furlong 11.2
gal 8.3
gallon 11.4, 11.5
gamma 8.4
gauss 10.4
giga 2.8
gilbert 10.4
gill 11.4, 11.5
graan 11.3, 11.10
gramm 8.1
hapnikühik 8.4
hektar 8.4
hekte... 2.8
herts 8.3
hobujõud 8.4, 11.6
hogshead 11.5
jalg 11.2, 11.9
jard 11.2
jõukilogramm 8.1, 8.3
jõunael 11.6
kaabeltau 11.7
kalor 9.1
kandela 9.1
kapamaa 11.11
karaat 8.4
karnits 11.9
kelvin 9.1, 9.2
Kelvini skaala 9.2
kilo... 2.8
kilogramm 8.1
kilomool 8.4
kilopond 8.3
kilovatt-tund 8.4
kortel 11.11
kvadraat 11.8
külimit 11.11
kürrij 9.7
küünal 9.6
küünar 11.11
lamBERT 9.6
leisikas 11.11
liin 11.2, 11.9
liiter 8.4
lood 11.9
luks 9.6
luumen 9.6
maksveil 10.4

mark 11.11
massi tehniline ühik 8.3
matt 11.11
meeter 8.1
mega . 2.8
meremiil 11.7
miil 11.2, 11.7
mikro . 2.8
mikron 8.4
milli 2.8
millimeeter elavhõbedasammast 8.4
millimeeter veesammast 8.4
minim 11.4
minut 8.4
Mohsi skaala 8.6
nael 11.3, 11.9, 11.10
nano . 2.8
neeper 8.6
nitt 9.6
njuuton 8.3
oktaav 8.5
ongström 8.4
oom 10.1
pang 11.9
parsek 8.4
paskaal 8.3
paundal 11.6
peck 11.4, 11.5
penikoorem 11.11
pennyweight 11.3
perkovits 11.9
pica 11.8
pieso 8.4
piko . 2.8
pint 11.4, 11.5
puaas 8.3
punkt 11.8
puud 11.9
quart 11.4, 11.5
raad 9.7
raadumi milligramm-ekvivalent 9.7
radfott 9.6
radiaan 8.2
radluks 9.6
Rankine'i skaala 11.6
registertonn 11.7
rem 9.7
rod 11.2
rood 11.2
röntgen 9.7
sekund 8.1
senti . . 2.8
sentimeeter 10.4
setverik 11.9
setvert 11.9
skruupel 11.10
solotnik 11.9
sten 8.4
steradian 8.2

stilb 9.6
 stoks 8.3
 sõlm 11.3
 säilitus 11.11
 süld 11.9
 tera . 2.8
 tessatin 11.9
 toll 11.2, 11.9
 torn 8.4, 11.3
 toop 11.9, 11.11
 torr 8.4
 tsent 8.5
 tseritner 11.3
 tsiitsero 11.8
 tund 8.4
 tünder 11.9, 11.11
 tündrimaa 11.11
 unts 11.3, 11.4, 11.10
 vakamaa 11.11
 vakk 11.11
 valgusaasta 8.4
 valguse kiirus 8.4, 12.3
 vatt 8.3
 verssok 11.9
 verst 11.9
 volt 10.1
 örsted 10.4
 õöpäev 8.4
 X 8.4

3. Mõõtevahendid

ajasignaaliid 16.2
 alalisvoolu mõõtepotsiomeeter 25.3
 alalisvoolu mõõtesild 25.1
 ampermeeter (vt. ka elektrimõõteriis-
 tad) 23.14
 analüütiline kaal 18.1, 18.2, 18.4, 18.11
 anemomeeter 16.14, 16.15
 areomeeter 17.6
 arvutuslükati 15.3
 barograaf 19.8
 baromeeter 19.6, 19.7
 bürett 17.2, 17.3
 densimeeter 17.6
 dünamomeeter 19.1
 eksaminaator 14.7
 elektriarvesti 23.18
 elektrikellavõrgu juhtkell 16.3
 elektrimõõteriistad 22.1...22, 23.1 18
 elektronostsillograaf 26.5
 elektronvoltmeeter 26.4
 gaasiarvesti 17.10, 17.11, 17.12
 geodeetiline mall 14.3
 goniomeeter 14.8
 helisagedusgeneraator vt. madalsage-
 dusgeneraator
 heterodüün-sagedusmõõtur 26.8
 hügromeeter 20.23

indikaator 15.16, 15.20, 15.21
 induktiivsussalv 24.4
 induktiivsussild vt. vahelduvvoolu
 mõõtesild
 instrumentaalmikroskoop vt. kruvik-
 mikroskoop
 interferomeeter 15.28
 Johanssoni pilaat vt. otsmõõt
 joonlaud vt. mõõtjoonlaud
 kaal 18.1, 18.4, 18.5, 18.11
 kaaluviht vt. viht
 kaliibrid 15.29
 kaliibritud juhtmed 23.16
 katetomeeter 15.14
 keerdkaal vt. torsioonkaal
 kell 16.1 . 11
 kellindikaator vt. indikaator
 kiirusemõõtur vt. spidomeeter
 kolbmanomeeter 19.5
 komparaator 15.13
 kontaktermomeeter 20.6
 kronomeeter 16.2
 kronoskoop 16.10
 kruvik 15.15, 15.16
 kruvikaliiber vt. kruvik
 kruvikmikroskoop 15.18
 kvartskell vt. sagedusmõõtur
 kõrgsagedusgeneraator vt. signaal-
 generaator
 kõrgusnihik 15.12
 käekell 16.8
 käsikaal 18.1
 külgmikud 15.25
 lampvoltmeeter vt. elektronvoltmeeter
 lauakaal 18.5
 lauakell 16.4
 liigendmõõtjoonlaud 15.4
 liivakell 16.11
 lingtermomeeter 20.11
 loendur-sagedusmõõtur 26.9
 luksmeeter 21.2
 madalsagedusgeneraator 26.6
 mahtuvussalv 24.5
 mahtuvussild vt. vahelduvvoolu mõõ-
 tesild
 maksimumtermomeeter 20.8, 20.13
 malekell 16.5
 mall vt. geodeetiline mall
 manomeeter 19.3 5
 manomeetriline termomeeter 20.17
 meditsiiniline termomeeter 20.8
 meger vt. oommeeter
 mensuur 17.2, 17.3
 miinimumtermomeeter 20.12
 mikaator 15.23
 mikrobürett 17.2, 17.3
 mikromeeter vt. kruvik
 mikropipett 17.2, 17.3
 mikroskaala 15.10

minikaator 15.22
 mullatermomeeter 20.14
 mõõtemasin 15.27
 mõõtemikrofon 19.9
 mõõtemikroskoop vt. krüvistikroskoop
 mõõtepead 15.20 .22
 mõõtepotentsiomeeter 25.3
 mõõtesild 25.1, 25.2
 mõõtjoonlaud 15.2, 15.4
 mõõtkolb 17.2, 17.3
 mõõtlamp 21.1
 mõõtlint 15.6 8
 mõõtluup 15.9
 mõõtsilinder 17.2 4
 mõõttakisti 24.2
 nihik 15.11
 nihkkaliiber vt. nihik
 nivelliir 14.10
 nivellimislat 15.5
 normaalelement 24.1
 nurgamõõt 14.2
 nurgamõõtur 14.4, 14.5
 nurgik 14.1
 objektmikromeeter vt. mikroskaala
 okulaarkrüvik 15.17
 okulaarkromomeeter vt. okulaarkrüvik
 oommeeter (vt. ka elektrimõõteriistad)
 23.17
 optimeeter 15.26
 ostsillograaf vt. elektronostsillograaf
 otsmõõt 15.24
 pikkusplaat vt. otsmõõt
 pingejagur 25.4
 pipett 17.2, 17.3
 polarimeeter 21.3
 potentsiomeeter vt. mõõtepotentsio-
 meeter
 probiirkaal vt. proovikaal
 proovikaal 18.1
 psühromeeter 20.9, 20.22
 põlvtermomeeter 20.15
 püromeeter 20.20
 püstnihik vt. kõrgusnihik
 raadiosageduslik signaalgeneraator 26.7
 ratsur 18.9, 18.10
 refraktomeeter 21.4
 registreerivad elektrimõõteriistad (vt.
 ka elektrimõõteriistad) 23.13
 reismass vt. kõrgusnihik
 rotameeter 17.13
 sademetemõõtur 17.4
 sagedusmõõtur 26.8, 26.9
 sahharimeeter 21.3
 seinakell 16.3, 16.4
 sekundomeeter vt. stoppkell
 sfäromeeter 15.19
 signaalgeneraator 26.7
 siinuslaud 14.6
 spektromeeter 14.8
 spidomeeter 16.13
 stopper vt. stoppkell
 stoppkell 16.9
 supler vt. nihik
 sügavusnihik 15.12
 takistuskast vt. takistussalv
 takistusmagasin vt. takistussalv
 takistuspool vt. mõõttakisti
 takistussalv 24.3
 takistussild vt. alalisvoolu mõõtesild
 takistustermomeeter 20.18
 taskukell 16.7
 tehniline kaal 18.1, 18.4
 teodoliit 14.9
 termograaf 20.16, 20.17
 termomeeter 20.1 .22
 termopaar 20.19
 torsioonkaal 19.2
 transistorvoltmeeter vt. elektronvolt-
 meeter
 vaakummeeter 19.4
 vahelduvvoolu mõõtesild 25.2
 varbsirkel vt. nihik
 vedelikuarvesti 17.7 ..9
 vedrukaal vt. dünamomeeter
 veterinaartermomeeter 20.8
 vihid 18.6. 10
 vihrnamõõtur 17.4
 vinkel vt. nurgik
 viskosimeeter 19.10
 voltmeeter (vt. ka elektrimõõteriistad)
 23.15
 voolumõõtja vt. elektriarvesti
 Westoni element vt. normaalelement
 Wheatstone'i sild vt. mõõtesild
 äratuskell 16.6

4. Standardid

GOST ...

112-51	20.15	
162-64	15.12	
164-64	15.12	
166-63	15.11	
215-57	20.3	
302-68	20.8	
359-54	18.1	
381-69	20.11	
427-56	15.2	
577-68	15.20	
630-69	20.13	
918-66	16.7	
1290-41	17.6	
1578-65	16.13	
1609-67	23.16	
1770-64	17.2, 17.3	
1845-59	22.1 ... 22, 23.1	15
1954-64	24.1	
2045-43	20.4	

2405-63	19.3	8711-60	23.14, 23.15
2823-59	20.5	8916-58	16.2
2875-62	14.2	9038-59	15.24
2888-68	20.8	9177-59	20.7
2900-45	17.6	9245-68	25.3
3044-61	20.19	9249-59	4.4
3145-67	16.6	9409-60	19.1
3309-65	16.4	9486-69	25.2
3749-65	14.1	9696-61	15.21
4046-61	14.6	9763-67	26.1 . . . 10
4119-66	15.25	9781-67	26.4
4381-68	15.16	9810-69	26.5
4497-52	20.10	9871-61	20.6
4863-55	19.6	9999-62	23.13
5072-67	16.9, 16.10	10021-62	14.8
5161-57	15.3	10501-63	26.6
5364-57	17.12	10528-69	14.10
5378-66	14.4	10529-63	14.9
5405-64	15.26	10576-63	16.11
6019-66	17.7	10622-63	26.7
6079-69	20.14	10733-66	16.8
6080-51	20.9	10770-64	24.4
6082-69	20.21	10771-64	21.1
6084-51	20.9	10815-64	15.7
6085-51	20.12	10875-64	15.27
6353-52	20.22	11093-64	9.6
6359-63	19.8	11158-65	15.5
6376-52	16.14	11179-65	14.5
6400-69	19.4	11194-65	15.19
6416-62	20.16	11282-65	25.4
6463-53	17.10	11900-66	15.8
6466-53	19.7, 20.21	12377-66	18.9
6507-60	15.15	12671-67	17.9
6570-60	23.18	12936-67	16.13
6651-59	20.18	13008-67	15.27
6746-65	24.5	13012-67	14.7
6800-68	17.4	13045-67	17.13
6864-69	24.2	13305-67	26.9
6979-67	16.5	13306-67	26.8
7003-64	24.3	13363-67	21.3
7165-66	25.1	13368-67	19.10
7193-54	16.15	13494-68	14.3
7253-54	15.4	13581-68	15.24
7328-65	18.8	13645-68	16.12
7412-68	16.3	13646-68	20.2
7502-69	15.6	13718-68	19.2
7513-55	15.10	13761-68	19.9
7865-56	15.17	13837-68	19.1
8038-60	23.17	13882-68	18.5
8074-56	15.18	14004-68	18.5
8290-57	15.28	14167-69	17.8
8291-57	19.5	14711-69	15.22
8309-57	15.9	14712-69	15.23
8335-67	20.20	14841-69	21.2
8624-64	20.17	15055-69	20.9
8700-65	17.11	OST 40115	20.23

SISUKORD

Eessõna	3
I p e a t ü k k. Sissejuhatus	
1. Mõõtmine	5
1.1. Füüsikaliste suuruste võrdlemine — 5. 1.2. Divitiivse suuruse mõõtmine — 6. 1.3. Kuidas kaalutakse heeringat — 6. 1.4. Otsene ja kaudne mõõtmine — 7. 1.5. Mõõtmise üldine käsitlus — 7. 1.6. Suhteskaala ja vaheskaala — 8. 1.7. Järjeskaala ja nimeskaala — 8. 1.8. Funktsionaalskaalad — 9. 1.9. Metrooloogiline seadusandlus — 10.	
2. Mõõtühikud	10
2.1. Mõõtühikute ajaloost — 10. 2.2. Mõõtühikute süsteem — 11. 2.3. Mõõtühikute süsteemi koostamine — 11. 2.4. CGS — 12. 2.5. MkGS — 13. 2.6. SI — 13. 2.7. Naturaalsed mõõtühikute süsteemid — 14. 2.8. Kõrdsed mõõtühikud — 16. 2.9. Meetriliste teisenduste tehnika — 16. 2.10. Mõõtühikute süsteemi kasutamine — 17.	
3. Mõõtmisvead	17
3.1. Täpsus — 17. 3.2. Mõõtmisviga — 18. 3.3. Piirviga — 18. 3.4. Suhteline piirviga — 19. 3.5. Mõõtmisvea põhjused — 20. 3.6. Mõõtmisvigade iseloom — 20. 3.7. Mõõtmisvea kontroll — 21.	
4. Mõõtevahendid	22
4.1. Mõõtevahendite liigid — 22. 4.2. Mõõteriista osad, näit ja mõõtepiirkond — 24. 4.3. Taatlemine — 24. 4.4. Mõõtevahendi kasutamistingimused — 26. 4.5. Mõõtevahendi viga — 27. 4.6. Hüsterees ja variatsioon — 28. 4.7. Mõõtevahendiga tutvumine — 29. 4.8. Mõõtevahendi korrasoleku tunnused — 30. 4.9. Mõõtevahendi vea hindamise reeglid — 30.	
5. Mõõtmistulemuste töötlemine	31
5.1. Vahetud tulemused ja lõpptulemus — 31. 5.2. Mõõtarvu esitamine — 31. 5.3. Otsese mõõtmise täielik tulemus — 32. 5.4. Mõõtmistulemuse esitamise vorm — 32. 5.5. Ratsionaalne arvutamine — 33. 5.6. Kaudse mõõtmise piirvea valem — 34. 5.7. Kaudse mõõtmise piirvea arvutamine — 35. 5.8. Graafiku koostamine — 37.	
6. Mõõtmise planeerimine	38
6.1. Olesande seade — 38. 6.2. Esimene näide: vedeliku tiheduse mõõtmine U-teru ja katetomeetri abil — 38. 6.3. Teine näide: kaaluvihide valimine — 39. 6.4. Kolmas näide: kaaluvihide valimine — 39. 6.5. Neljas näide: takistuse mõõtmine Wheatstone'i sillaga — 40. 6.6. Viies näide: takistuse mõõtmine voltmeetri ja ampermeetri abil — 40.	
7. Mõõtmisprotokolli näidis	41
II p e a t ü k k. Mõõtühikud	
8. Mehaanika- ja akustikamõõtühikud	44
8.1. Põhiühikud — 44. 8.2. Nurgaühikud — 44. 8.3. SI, CGS ja MkGS tuletatud ühikud — 45. 8.4. Mitmesuguseid ühikuid — 49. 8.5. Logaritmilised skaalad — 51. 8.6. Mitmesugused funktsionaal- ja järjeskaalad — 52.	
9. Soojus- ja kiirgusmõõtühikud	53
9.1. Põhiühikud — 53. 9.2. Termodünaamiline temperatuuriskaala — 53. 9.3. Rahvusvaheline praktiline temperatuuriskaala — 54. 9.4. Tuletatud soojusmõõtühikud — 55. 9.5. Energeetilised kiirgusmõõtühikud — 58. 9.6. Fotomeetriselised ühikud — 59. 9.7. Radioloogilised mõõtühikud — 62.	
10. Elektrimõõtühikud	63
10.1. Amper, volt ja oom — 63. 10.2. Elektrimõõtühikute süsteemi koostamisest — 64. 10.3. SI ja MkSA elektrimõõtühikud — 65. 10.4. CGSE, CGSM ja CGS elektrimõõtühikud — 69. 10.5. Elektriõpetuse võrrandid — 72.	
11. Vanad mõõtühikud	77
11.1. Inglise ja USA mõõtühikutest — 77. 11.2. USA ja inglise pikkusühikud ja pindalaühikud — 78. 11.3. USA ja inglise massiühikud — 78. 11.4. USA ruumalaühikud — 79. 11.5. Inglise ruumalaühikud — 80. 11.6. USA ja inglise mehaanika- ja soojusmõõtühikud — 80. 11.7. Meremõõtühikud — 81. 11.8. Trükitehnilised mõõtühikud — 81. 11.9. Vanad vene mõõtühikud — 81. 11.10. Apteegimõõtühikud — 82. 11.11. Eestis kasutatud vanad mõõtühikud — 82.	

12. Konstandid	83
12.1. Matemaatilised konstandid — 83. 12.2. Füüsikaliste konstantide täpsus — 84. 12.3. Füüsikalised konstandid — 85. 12.4. Raskuskiirendus — 87. 12.5. Vee ja õhu omadused — 88.	
III peatük k. Mõõtevahendid	
13. Sissejuhatavad märkused	90
14. Nurgamõõtevahendid ja nivelliirid	91
15. Pikkusemõõtevahendid	94
16. Aja ja kiiruse mõõtevahendid	102
17. Mõõtanumad, areomeetrid ja kuluarvestid	106
18. Kaalud ja vihid	109
19. Dünamomeetrid, manomeetrid, baromeetrid, mõõtemikrofonid ja viskosimeetrid	113
20. Termomeetrid, püromeetrid ja hügromeetrid	116
21. Mõõtlambid, luksmeetrid, polarimeetrid ja refraktomeetrid	121
22. Elektrimõõteriistade liigitus ja markeering	122
23. Elektrimõõteriistade täpsus	125
24. Elektrilised mõödud	130
25. Mõõtesillad ja -potentsiomeetrid	133
26. Raadiotehnilised mõõteriistad	136
IV peatük k. Matemaatiline statistika	
27. Tõenäosusteooria algmõisted	141
27.1. Juhuslik sündmus ja juhuslik suurus — 141. 27.2. Jaotusfunktsioon — 141. 27.3. Suhteline sagedusfunktsioon — 142. 27.4. Tihedusfunktsioon — 142. 27.5. Tihedusfunktsiooni või suhtelise sagedusfunktsiooni ja jaotusfunktsiooni omadused — 143. 27.6. Kvantiilid — 144. 27.7. Vahemiku moodustamine vahemikku sattumise tõenäosuse järgi — 144. 27.8. Momendid — 145. 27.9. Juhuslik vektor — 146. 27.10. Juhuslike suuruste sõltuvus — 146. 27.11. Keskväärtuse ja dispersiooni omadused — 147. 27.12. Tšebõšovi võrratus — 148.	
28. Jaotusseadused	148
28.1. Diskreetne ühtlane jaotus — 148. 28.2. Pidev ühtlane jaotus — 148. 28.3. Binomiaaljaotus — 149. 28.4. Poissoni jaotus — 149. 28.5. Normaalfaotus — 150. 28.6. Cauchy jaotus — 151. 28.7. Tsentraalne piirteoreem — 152. 28.8. Normaaljaotushüpotees metroloogias — 152.	
29. Matemaatilise statistika algmõisted	153
29.1. Matemaatilise statistika ja tõenäosusteooria vahekord — 153. 29.2. Üldkogum ja võend — 153. 29.3. Võendi järjestamine — 154. 29.4. Empiiriline jaotusfunktsioon ja Glivenko teoreem — 154. 29.5. Statistikud — 155. 29.6. Punkthinnangud — 155. 29.7. Vahemikhinnangud — 156. 29.8. Parameetrilised ja mitteparameetrilised meetodid — 157.	
30. Punkthinnangud	158
30.1. Võendi tõenäosusteoreetiline kirjeldamine — 158. 30.2. Tõepärasusfunktsioon — 158. 30.3. Suurima tõepärasuse meetod — 159. 30.4. Tõepäraseimate hinnangute omadused — 160. 30.5. Ühtlase jaotuse parameetrite tõepärasemad hinnangud — 160. 30.6. Normaaljaotuse parameetrite tõepärasemad hinnangud — 161. 30.7. Aritmeetilise keskmise omadused — 162. 30.8. Dispersiooni hinnangu omadused — 162. 30.9. Vähihinnangute meetod — 163. 30.10. Lineaarne regressioonülesanne — 164. 30.11. Polünoomregressioonülesanne — 165.	
31. Testid ja vahemikhinnangud normaalfaotuse korral	166
31.1. Vabadusastmed — 166. 31.2. Studenti suhe — 167. 31.3. Studenti test — 168. 31.4. Keskväärtuse vahemikhinnang — 168. 31.5. Regressioonsirge konstantide vahemikhinnangud — 168. 31.6. Student-Lordi test — 169. 31.7. Fisheri F -test — 169. 31.8. Võendite hulga statistikud — 170. 31.9. Ühefaktoriline dispersioonanalüüs — 171.	
32. Mitteparameetrilised testid ja vahemikhinnangud	172
32.1. Mediaani ja võendi komponentide järjestus — 172. 32.2. Mediaani hinnang — 173. 32.3. Kahe võendi ühine järjestus — 174. 32.4. Wilcoxon'i test — 174. 32.5. Van der Waerdeni X -test — 174. 32.6. Jaotusfunktsiooni vahemikhinnang — 175.	
33. Ülesanded	175

V p e a t ü k k. Katseandmete statistiline töötlemine

34. Statistilise meetodi valimine	178
34.1. Katse lõenäosuste greetiline mudel 178. 34.2. Jaotusseaduse eelhinnang — 179.	
34.3. Umardamisest tingitud diskreesus — 179. 34.4. Mõõtmisvea juhuslik ja süste-	
maatiline komponent — 180. 34.5. Mõõtmistulemuse jaotuse keskpunkt — 180.	
34.6. Empiirilise jaotusfunktsiooni graafiline uurimine — 180. 34.7. Normaalsushüpo-	
teesi kontrollimine — 183. 34.8. Keskpunkti hindamise testide võrdlus — 184.	
35. Mõõtmistulemuste keskpunkti hindamine	186
35.1. Eksete tsensuur — 186. 35.2. Studenti test — 187. 35.3. Student-Lordi test — 188.	
35.4. Märgitest — 189. 35.5. Ligikaudu ühtlase jaotuse ja seekansjaotuse keskpunkt —	
190. 35.6. Poissoni jaotuse keskvaartus — 191. 35.7. Standardhälbe punkthinnang — 192.	
36. Süstemaatilise vea katseline uurimine	194
36.1. Süstemaatilise vea uurimise iseärasused — 194. 36.2. Dispersioonanalüüs — 195.	
36.3. Wilcoxon'i test — 199. 36.4. Van der Waerdeni X-test — 201. 36.5. Muutuva süs-	
temaatilise vea uurimine — 203.	
37. Mõõtmistulemuste summa vea hindamine	205
37.1. Ülesande seade — 205. 37.2. Ruuteeskiri — 205. 37.3. Absoluutväärtuseeskiri — 206.	
37.4. Normaaliajaotus — 207. 37.5. Cauchy jaotus — 207. 37.6. Ebasoodsaim jaotus — 207.	
37.7. Ühtlane jaotus — 208. 37.8. Kokkuvõte — 209.	
38. Mõõtmistulemuse piirvea hindamine	210
38.1. Üldmärkused — 210. 38.2. Otsese mõõtmise tulemuse piirviga — 210. 38.3. Ühe	
muutuva funktsiooni väärtuse vahemikhinnang — 211. 38.4. Funktsiooni lineariseeri-	
mine — 213. 38.5. Kaudselt mõõdetava suuruse vahemikhinnang — 213. 38.6. Näide	
— 215.	
39. Empiiriliste valemite koostamine	216
39.1. Sissejuhatus — 216. 39.2. Lineaarne regressioon: graafiline meetod — 218.	
39.3. Lineaarne regressioon: vähimruutude meetod — 218. 39.4. Näide — 219. 39.5. Kin-	
nispunktiga regressioonsirge — 220. 39.6. Paraboolregressioon — 221. 39.7. Astmereg-	
ressioon — 221. 39.8. Logaritm- ja eksponentregressioon — 222. 39.9. Empiirilise valemi	
parandamine — 223.	
40. Mittevõrdtäpsete andmete töötlemine	224
40.1. Kaalutud keskmine — 224. 40.2. Aritmeetilise keskmise arvutamine osakeskmiste	
järgi — 225. 40.3. Mittevõrdtäpsete andmete keskmine — 226. 40.4. Esimene näide — 227.	
40.5. Teine näide — 227. 40.6. Regressioonsirge hindamine mittevõrdtäpsete andmete	
järgi — 227.	
Täiendav kirjandus	229
Register	232
1. Üldosa — 232. 2. Mõõtehikud ja -skaalad — 233. 3. Mõõtevahendid — 235. 4. Stan-	
dardid — 236.	

Ханнес Т а м м е т. ПРАКТИКУМ ПО ФИЗИКЕ. МЕТРОЛОГИЯ. На эстонском языке. Художественное оформление Т. Ару. Издательство «Валгус». Таллин, Пярнуское шоссе, 10.

Toimetaja E. Randma. Kunstiline toimetaja A. Sæde. Tehniline toimetaja E. Ainla. Korrek-
torid H. Kull ja U. Karu. Laduda antud 12. XI 1970. Trükkida antud 22. VI 1971. Kohila
Paberivabriku trükipaber nr. 2, 60×90/16. Trükipoognaid 15. Arvestuspooignaid 15,57. Trüki-
arv 5000. MB-05363. Tellimuse nr. 6864. Hans Heidemanni nim. Trükkikoda, Tartu, Üli-
kooli 17/19. I. Hind 68 kop.