TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ALUSTATUD 1893. a VIHIK № 73 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

MATEMAATIKA-JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

TARTU 1959

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
VIHIK 73 ВЫПУСК

MATEMAATIKA-JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

TARTU 1959

МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ ЧЕЗАРО-СУММИРУЕМЫХ И ЧЕЗАРО-ОГРАНИЧЕННЫХ ДВОЙНЫХ РЯДОВ

Проф., докт. физ.-мат. наук Г. Кангро и С. Барон
Кафедра геометрии

§ 1. Постановка проблемы

Определение. *Комплексные числа* ε_{mn} $(m, n = 0, 1, \ldots)$ *будем называть множителями суммируемости типа* (A, B), *если для каждого ряда*[1]

$$\sum_{m,n} u_{mn} \tag{1}$$

с комплексными членами из класса A *ряд*

$$\sum_{m,n} \varepsilon_{mn} u_{mn} \tag{2}$$

принадлежит классу B.

Класс A мы образуем из всех $C_r^{\alpha,\beta}$-суммируемых, ($C_b^{\alpha,\beta}$-суммируемых, $C^{\alpha,\beta}$-ограниченных) рядов, а класс B — из всех $C^{\gamma,\delta}$-суммируемых ($C_b^{\gamma,\delta}$-суммируемых, $C_r^{\gamma,\delta}$-суммируемых) рядов. При этом в §§ 1—6 предполагаем $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geqslant 0$ произвольными вещественными числами; в остальных параграфах предполагаем $\alpha, \beta \geqslant 0$ целыми числами, а $\gamma, \delta \geqslant 0$ произвольными вещественными числами.

Напомним, что *ряд* (1) *называется* $C^{\alpha,\beta}$-*суммируемым* ($C_b^{\alpha,\beta}$-*суммируемым*, $C_r^{\alpha,\beta}$-*суммируемым*, $C^{\alpha,\beta}$-*ограниченным*), *если двойная последовательность* $\{U'_{mn}\}$, где

$$U'_{mn} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} \frac{A_{m-\mu}^{\alpha} A_{n-\nu}^{\beta}}{A_m^{\alpha} A_n^{\beta}} u_{\mu\nu}, \tag{3}$$

[1] Если пределы суммирования у знака суммы не указаны, то индексы суммирования m, n пробегают все целочисленные значения 0, 1, 2, ...

$$A_n^{\varkappa}=\begin{cases}\binom{n+\varkappa}{n}, & \text{при } n=0, 1,\\ 0, & \text{при } n=-1, -2,\end{cases} \tag{4}$$

сходится (b-сходится, r-сходится, ограничена) [2].

Итак, в настоящей статье будем находить *точные (т. е. необходимые и достаточные)* условия для множителей суммируемости следующих типов:

$$\left(C_r^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta}\right),\ \left(C_r^{\alpha,\beta}, C_b^{\gamma,\delta}\right),\ \left(C_r^{\alpha,\beta}, C_r^{\gamma,\delta}\right),$$
$$\left(C_b^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta}\right),\ \left(C_b^{\alpha,\beta}, C_b^{\gamma,\delta}\right),\ \left(C_b^{\alpha,\beta}, C_r^{\gamma,\delta}\right),$$
$$\left(C_O^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta}\right),\ \left(C_O^{\alpha,\beta}\ C_b^{\gamma,\delta}\right),\ \left(C_O^{\alpha,\beta}, C_r^{\gamma,\delta}\right).$$

Некоторые частные случаи (например $\gamma=\delta=0$ и $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$) изучены в работах [2, 10, 11, 13, 14, 15].

Пусть c, bc, rc и b обозначают соответственно классы всех сходящихся, b-сходящихся, r-сходящихся и ограниченных двойных последовательностей.

Пусть, далее, A' — один из классов rc, bc или b, а B' — один из классов c, bc или rc.

Как явствует из определения множителей суммируемости и выбора классов A и B, нашей задачей является найти точные условия для того, чтобы для каждой последовательности (3) из класса A' последовательность

$$U''_{mn}=\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n}\frac{A_{m-\mu}^{\gamma}A_{n-\nu}^{\delta}}{A_m^{\gamma}A_n^{\delta}}\,\varepsilon_{\mu\nu}u_{\mu\nu} \tag{5}$$

принадлежала классу B'

Учитывая обратную матрицу метода Чезаро, из (3) получаем:

$$u_{mn}=\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n}A_{m-\mu}^{-\alpha-2}A_{\mu}^{\alpha}A_{n-\nu}^{-\beta-2}A_{\nu}^{\beta}U'_{\mu\nu}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует:

$$U''_{mn}=\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n}A_{\mu}^{\alpha}A_{\nu}^{\beta}\mathfrak{D}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu}\,U'_{\mu\nu}, \tag{7}$$

где

$$\mathfrak{D}_{mn}\,\varepsilon_{\mu\nu}=\sum_{k,\,l=\mu,\,\nu}^{m,n}A_{k-\mu}^{-\alpha-2}A_{l-\nu}^{-\beta-2}\,\frac{A_{m-k}^{\gamma}A_{n-l}^{\delta}}{A_m^{\gamma}A_n^{\delta}}\,\varepsilon_{kl}. \tag{8}$$

Нашу проблему мы можем теперь сформулировать так: каким условиям должны удовлетворять числа ε_{mn} для того, чтобы пре-

---

[2] См. [2].

образование (7) переводило все последовательности $\{U'_{\mu\nu}\}$ класса A' в последовательности $\{U''_{mn}\}$ класса B'

Ответ на этот вопрос получаем, применяя соответствующие условия Гамильтона [9], которые приведем в следующем параграфе.

§ 2. Точные условия для преобразований некоторых классов двойных последовательностей

Здесь мы сформулируем необходимые и достаточные условия (найденные в основном Гамильтоном [9] и Робисоном [17]) для того, чтобы преобразование

$$U''_{mn} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} a_{mn\mu\nu} U'_{\mu\nu}$$

переводило класс A' в класс B' (а также $rcrn$ в cn).

Приведем предварительно перечень нужных нам условий, сохраняя обозначения Гамильтона[3] [9]:

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} |a_{mn\mu\nu}| < M \quad (m, n \geqslant N); \tag{b$_1$}$$

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} |a_{mn\mu\nu}| < M \quad (m, n = 0, 1, \ldots); \tag{c$_1$}$$

$$\lim_{m,n} a_{mn\mu\nu} = a_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, \ldots); \tag{d$_1$}$$

$$\lim_{m,n} a_{mn\mu\nu} = 0 \quad (\mu, \nu = 0, 1, \ldots); \tag{$\bar{\text{d}}_1$}$$

существуют пределы

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{m,n} \sum_{\mu=0}^{m} a_{mn\mu\nu} \quad (\nu = 0, 1, \ldots), \\ &\lim_{m,n} \sum_{\nu=0}^{n} a_{mn\mu\nu} \quad (\mu = 0, 1, \ldots); \end{aligned}\right\} \tag{d$_2$}$$

существует предел

$$\lim_{m,n} \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} a_{mn\mu\nu}; \tag{d$_3$}$$

---

[3] Символы $\lim\limits_{m,n} S_{mn}$ и $\lim\limits_{m} S_{mn}$ означают соответственно $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn}$ и $\lim\limits_{m\to\infty} S_{m,n}$.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{m,n}\sum_{\mu=0}^{m}|a_{mn\mu\nu}-a_{\mu\nu}|=0\quad(\nu=0,1,\ \ .),\\&\lim_{m,n}\sum_{\nu=0}^{n}|a_{mn\mu\nu}-a_{\mu\nu}|=0\quad(\mu=0,1,\ \ .);\end{aligned}\right\}\tag{d_4}$$

$$\lim_{m,n}\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n}|a_{mn\mu\nu}-a_{\mu\nu}|=0;\tag{d_5}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{m}a_{mn\mu\nu}=a_{\mu\nu}^{n}\qquad(\mu,\nu,n=0,1,\ \ .),\\&\lim_{n}a_{mn\mu\nu}=a_{m}^{\mu\nu}\qquad(\mu,\nu,m=0,1,\ \ .);\end{aligned}\right\}\tag{f_1}$$

существуют пределы

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{m}\sum_{\mu=0}^{m}a_{mn\mu\nu}\qquad(\nu,n=0,1,\ \ .),\\&\lim_{n}\sum_{\nu=0}^{n}a_{mn\mu\nu}\qquad(\mu,m=0,1,\ \ .);\end{aligned}\right\}\tag{f_2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{m}\sum_{\mu=0}^{m}|a_{mn\mu\nu}-a_{\mu\nu}^{n}|=0\quad(\nu,n=0,1,\ \ .),\\&\lim_{n}\sum_{\nu=0}^{n}|a_{mn\mu\nu}-a_{m}^{\mu\nu}|=0\quad(\mu,m=0,1,\ \ .).\end{aligned}\right\}\tag{f_4}$$

Точные условия для интересующих нас преобразований следующие [4]:

1) для $rc\to c$ (9): (b_1), (d_1),(d_2), (d_3);
2) для $rc\to bc$ (18): (c_1), (d_1), (d_2), (d_3);
3) для $rc\to rc$ (132): (c_1), (d_1), (d_2), (d_3), (f_1), (f_2);
4) для $bc\to c$ (11): (b_1), (d_1), (d_3), (d_4);
5) для $bc\to bc$ (20): (c_1), (d_1), (d_3), (d_4);
6) для $bc\to rc$ (134): (c_1), (d_1), (d_3), (d_4) (f_1), (f_2), (f_4);
7) для $b\to c$ (12): (b_1), (d_1), (d_5);
8) для $b\to bc$ (21): (c_1), (d_1), (d_5);
9) для $b\to rc$ (135): (c_1), (d_1), (d_5), (f_1), (f_4);
10) для $rcrn\to cn$ (25): (b_1), ($\bar{d}_1$).

§ 3. Числа $A_n^\varkappa$ и свойства обобщенных разностей

В дальнейшем будем часто применять следующие известные свойства чисел $A_n^\varkappa$:

$$A_n^\varkappa\sim\frac{(n+1)^\varkappa}{\Gamma(\varkappa+1)},\qquad\text{если } \varkappa\neq-1,-2,\ \ ;$$

[4] Номер в скобках означает номер теоремы в работе Гамильтона [9].

$$
\begin{aligned}
&|A_n^\varkappa| \leqslant M_1 (n+1)^\varkappa; \\
&|A_n^\varkappa| \geqslant M_2 (n+1)^\varkappa, \text{ если } \varkappa \neq -1, -2, \quad ; \\
&\sum_{k=0}^{m} A_k^\varkappa A_{m-k}^\lambda = A_m^{\varkappa+\lambda+1}; \\
&A_m^\varkappa \leqslant A_n^\varkappa \quad \text{при } m \leqslant n \text{ и } \varkappa \geqslant 0; \\
&A_n^\varkappa \geqslant 0 \quad \text{при } \varkappa \geqslant -1; \\
&A_0^\varkappa = 1; \\
&A_n^0 = 1 \quad \text{для всех } n = 0, 1, \quad ; \\
&A_n^{-\varkappa} = 0 \quad \text{при } n \geqslant \varkappa \text{ и } \varkappa = 1, 2,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Определим разности $\Delta_m^\varkappa \varepsilon_m$ и $\Delta_{mn}^{\varkappa\lambda} \varepsilon_{mn}$ формулами

$$
\begin{aligned}
\Delta_m^\varkappa \varepsilon_m &= \sum_{k=m}^{\infty} A_{k-m}^{-\varkappa-1} \varepsilon_k = \sum_k A_k^{-\varkappa-1} \varepsilon_{k+m}, \\
\Delta_{mn}^{\varkappa\lambda} \varepsilon_{mn} &= \sum_{k,l=m,n}^{\infty} A_{k-m}^{-\varkappa-1} A_{l-n}^{-\lambda-1} \varepsilon_{kl} = \sum_{k,l} A_k^{-\varkappa-1} A_l^{-\lambda-1} \varepsilon_{k+m,l+n}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

при условии, что ряды в правых частях сходятся.

Из этого определения следует, что для любых $\varkappa$ и λ имеют место (если разности справа существуют) следующие соотношения (a и b не зависят от m и n):

$$
\Delta_{mn}^{\varkappa\lambda}(a\varepsilon_{mn} + b\varsigma_{mn}) = a\Delta_{mn}^{\varkappa\lambda}\varepsilon_{mn} + b\Delta_{mn}^{\varkappa\lambda}\varsigma_{mn},
$$

$$
\Delta_{mn}^{\varkappa 0}\varepsilon_{mn} = \Delta_m^\varkappa \varepsilon_{mn},
$$

$$
\Delta_{mn}^{\varkappa\lambda}(\varepsilon'_m \ \varepsilon''_n) = \Delta_m^\varkappa \varepsilon'_m \cdot \Delta_n^\lambda \varepsilon''_n;
$$

а если $\varkappa, \lambda > 0$, или $\varkappa > 0$ и $\lambda = 0$, или $\varkappa = 0$ и $\lambda > 0$, то

$$
\Delta_{mn}^{\varkappa\lambda} a = 0.
$$

Если разности справа абсолютно сходятся (что, в частности, имеет место при $\varkappa, \lambda \geqslant 0$ и $\varepsilon_{mn} = O(1)$), то

$$
\Delta_{mn}^{\varkappa\lambda}\varepsilon_{mn} = \Delta_m^\varkappa(\Delta_n^\lambda \varepsilon_{mn}) = \Delta_n^\lambda(\Delta_m^\varkappa \varepsilon_{mn})
$$

Если же $\varkappa, \lambda = 0, 1,$ то имеем:

$$
\begin{aligned}
\Delta_m^\varkappa \varepsilon_m &= \sum_{k=m}^{m+\varkappa} A_{k-m}^{-\varkappa-1} \varepsilon_k = \sum_{k=0}^{\varkappa} A_k^{-\varkappa-1} \varepsilon_{k+m}, \\
\Delta_{mn}^{\varkappa\lambda} \varepsilon_{mn} &= \sum_{k,l=m,n}^{m+\varkappa, n+\lambda} A_{k-m}^{-\varkappa-1} A_{l-n}^{-\lambda-1} \varepsilon_{kl} = \sum_{k,l=0}^{\varkappa,\lambda} A_k^{-\varkappa-1} A_l^{-\lambda-1} \varepsilon_{k+m,l+n};
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\Delta_m^\varkappa(\varepsilon_m \varsigma_m) = \sum_{k=0}^{\varkappa} \binom{\varkappa}{k} \Delta_m^k \varepsilon_m \cdot \Delta_m^{\varkappa-k} \varsigma_{m+k}, \tag{12}
$$

$$\Delta^{\varkappa\lambda}_{mn}(\varepsilon_{mn}\varsigma_{mn}) = \sum_{k,\,l=0}^{\varkappa,\,\lambda} \binom{\varkappa}{k}\binom{\lambda}{l} \Delta^{kl}_{mn}\varepsilon_{mn}\cdot\Delta^{\varkappa-k\,\lambda-l}_{mn}\varsigma_{m+k,\,n+l}. \tag{13}$$

Кроме того, отметим, что будем употреблять обозначения

$$\Delta_{mn}\varepsilon_{mn} = \Delta^{1\,1}_{mn}\varepsilon_{mn} = \varepsilon_{mn} - \varepsilon_{m+1,\,n} - \varepsilon_{m,\,n+1} + \varepsilon_{m+1,\,n+1},$$

$$\Delta_m\varepsilon_{mn} = \Delta^1_m\varepsilon_{mn} = \varepsilon_{mn} - \varepsilon_{m+1,\,n}.$$

Далее, из формул (10), (4) и (9) вытекает следующая основная формула, имеющая место при любых $\varkappa$ и λ:

$$\Delta^{\lambda}_{\mu}A^{\varkappa}_{j-\mu} = A^{\varkappa-\lambda}_{j-\mu}. \tag{14}$$

Наконец, если

$$\varepsilon_m = O(1), \tag{15}$$

$\alpha \geqslant 0$, $\sigma > -1$ и $\alpha + \sigma \geqslant 0$, то имеет место равенство [5]

$$\Delta^{\sigma}_{m}(\Delta^{\alpha}_{m}\varepsilon_m) = \Delta^{\alpha+\sigma}_{m}\varepsilon_m.$$

§ 4. Неэффективные условия для множителей суммируемости

Здесь будем применять условия § 2 к преобразованию (7) и упрощать некоторые из полученных условий. Этим мы найдем точные условия для множителей суммируемости рассматриваемых нами типов.

Во-первых, заметим, что условие (d_3) в нашем случае можем отбросить, так как

$$\sum_{\mu,\,\nu=0}^{m,\,n} A^{\alpha}_{\mu}A^{\beta}_{\nu}\mathfrak{D}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{k,\,l=0}^{m,\,n} \frac{A^{\gamma}_{m-k}A^{\delta}_{n-l}}{A^{\gamma}_{m}A^{\delta}_{n}}\,\varepsilon_{kl}$$

$$\sum_{\mu,\,\nu=0}^{k,\,l} A^{\alpha}_{\mu}A^{-\alpha-2}_{k-\mu}A^{\beta}_{\nu}A^{-\beta-2}_{l-\nu} = \varepsilon_{00}.$$

Далее, обозначив

$$b_{kn\nu} = A^{\beta}_{\nu}\sum_{l=\nu}^{n} A^{-\beta-2}_{l-\nu}\,\frac{A^{\delta}_{n-l}}{A^{\delta}_{n}}\,\varepsilon_{kl},$$

находим:

$$\sum_{\mu=0}^{m} A^{\alpha}_{\mu}A^{\beta}_{\nu}\mathfrak{D}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^{m} A^{\alpha}_{\mu}\sum_{k=\mu}^{m} A^{-\alpha-2}_{k-\mu}\,\frac{A^{\gamma}_{m-k}}{A^{\gamma}_{m}}\,b_{kn\nu} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\frac{A^{\gamma}_{m-k}}{A^{\gamma}_{m}}\,b_{kn\nu}\sum_{\mu=0}^{k} A^{\alpha}_{\mu}A^{-\alpha-2}_{k-\mu} = b_{0n\nu},$$

---

5 См. [5], стр. 20—21; [6, 7].

т. е.

$$\sum_{\mu=0}^{m} A_{\mu}^{\alpha} A_{\nu}^{\beta} \mathfrak{D}_{mn} \varepsilon_{\mu\nu} = b_{0n\nu}. \tag{16}$$

Аналогично

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_{\mu}^{\alpha} A_{\nu}^{\beta} \mathfrak{D}_{mn} \varepsilon_{\mu\nu} = b'_{0m\mu}, \tag{17}$$

где обозначено

$$b'_{lm\mu} = A_{\mu}^{\alpha} \sum_{k=\mu}^{m} A_{k-\mu}^{-\alpha-2} \frac{A_{m-k}^{\gamma}}{A_{m}^{\gamma}} \varepsilon_{kl}$$

Следовательно, условия ($\mathfrak{f}_2$) выполнены, а условия ($\mathfrak{d}_2$) упрощаются.

Для всего дальнейшего нам нужна следующая лемма, дающая некоторые общие необходимые условия.

Лемма 1. *Пусть метод A сохраняет r-сходимость и $B = (\beta_{mn\mu\nu})$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{m,n} \beta_{mn\mu\nu} = 1 \quad (\mu, \nu = 0, 1, \quad .). \tag{18}$$

Тогда для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа (A_r, B), необходимо выполнение условий

$$\sum_{m,n} |\Delta_{mn} \varepsilon_{mn}| < \infty, \tag{19}$$

$$\sum_{m} |\Delta_m \varepsilon_{m0}| < \infty, \quad \sum_{n} |\Delta_n \varepsilon_{0n}| < \infty, \tag{20}$$

$$\varepsilon_{mn} = O(1). \tag{A}$$

Доказательство. Как известно[6], для того, чтобы преобразование

$$U''_{mn} = \sum_{\mu,\nu} a_{mn\mu\nu} u_{\mu\nu} \tag{21}$$

переводило все r-сходящиеся ряды в сходящиеся последовательности, необходимы и достаточны условия:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\mu,\nu} |\Delta_{\mu\nu} a_{mn\mu\nu}| \leqslant M \ (m, n \geqslant N), \\ &\sum_{\mu} |\Delta_{\mu} a_{mn\mu 0}| \leqslant M, \quad \sum_{\nu} |\Delta_{\nu} a_{mn0\nu}| \leqslant M \ (m, n \geqslant N), \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

существует

$$\lim_{m,n} a_{mn\mu\nu} = a_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1 \quad .). \tag{23}$$

Для доказательства леммы положим

$$a_{mn\mu\nu} = \beta_{mn\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu}.$$

---

[6] См. [16], теорема 1.

Тогда в силу (23) и (18) из (22) получаем искомые условия (19) и (20). Условие (A) следует из тождеств

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{m0} = \varepsilon_{00} - \sum_{\mu=0}^{m-1} \Delta_\mu \varepsilon_{\mu 0} \qquad (m = 1, 2, \ \ ),\\
&\varepsilon_{0n} = \varepsilon_{00} - \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta_\nu \varepsilon_{0\nu} \qquad (n = 1, 2, . \ .),\\
&\varepsilon_{mn} = \varepsilon_{00} + \sum_{\mu,\nu=0}^{m-1, n-1} \Delta_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} - \sum_{\mu=0}^{m-1} \Delta_\mu \varepsilon_{\mu 0} - \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta_\nu \varepsilon_{0\nu}\\
&\qquad\qquad (m, n = 1, 2, \ \ .).
\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Теперь в силу условия (A) из (16) и (17) вытекает условие (d_2) Далее, из условия (A) следует выполнение условий (d_1) и (f_1) причем

$$a_{\mu\nu} = A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \Delta_{\mu\nu}^{\alpha+1\,\beta+1} \varepsilon_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, \ \ .),$$

$$a_{\mu\nu}^n = A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \Delta_\nu^{\beta+1} \left(\frac{A_{n-\nu}^\delta}{A_n^\delta} \Delta_\mu^{\alpha+1} \varepsilon_{\mu\nu} \right) \ (\mu, \nu, n = 0, 1, \ \ .),$$

$$a_m^{\mu\nu} = A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \Delta_\mu^{\alpha+1} \left(\frac{A_{m-\mu}^\gamma}{A_m^\gamma} \Delta_\nu^{\beta+1} \varepsilon_{\mu\nu} \right) \ (\mu, \nu, m = 0, 1, \ \ .).$$

Итак, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа $(C_r^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta})$, необходимы и достаточны условия* (A) *и*

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \left| \mathfrak{D}_{mn} \varepsilon_{\mu\nu} \right| \leqslant M \qquad (m, n \geqslant N), \qquad (b^1)$$

а для типов $(C_r^{\alpha,\beta}, C_b^{\gamma,\delta})$ и $(C_r^{\alpha,\beta}, C_r^{\gamma,\delta})$ — *условия* (A) *и*

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \left| \mathfrak{D}_{mn} \varepsilon_{\mu\nu} \right| \leqslant M \qquad (m, n = 0, 1, \ldots). \qquad (c^1)$$

Теорема 2. *Для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа $(C_b^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta})$, необходимы и достаточны условия* (A), (b^1) *и*

$$\lim_{m,n} \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^\alpha \left| \mathfrak{D}_{mn} \varepsilon_{\mu\nu} - \Delta_{\mu\nu}^{\alpha+1\,\beta+1} \varepsilon_{\mu\nu} \right| = 0 \ \ (\nu = 0, 1, \ \ .,), \qquad (d_1^4)$$

$$\lim_{m,n} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\beta \left| \mathfrak{D}_{mn} \varepsilon_{\mu\nu} - \Delta_{\mu\nu}^{\alpha+1\,\beta+1} \varepsilon_{\mu\nu} \right| = 0 \ \ (\mu = 0, 1, \ldots), \qquad (d_2^4)$$

а для типа $(C_b^{\alpha,\beta},\ C_b^{\gamma,\delta})$ — *условия*[7] (A), (c^1) и (d^4).

Теорема 3. *Для того, чтобы числа* ε_{mn} *были множителями суммируемости типа* $(C_b^{\alpha,\beta},\ C_r^{\gamma,\delta})$, *необходимы и достаточны условия* (A), (c^1), (d^4) *и*

$$\lim_m \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^\alpha \left| \mathfrak{D}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu} - \Delta_\nu^{\beta+1}\left(\frac{A_{n-\nu}^\delta}{A_n^\delta}\,\Delta_\mu^{\alpha+1}\varepsilon_{\mu\nu}\right)\right| = 0 \qquad (f_1^4)$$

$$(\nu, n = 0, 1, \ldots),$$

$$\lim_n \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^\beta \left| \mathfrak{D}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu} - \Delta_\mu^{\alpha+1}\left(\frac{A_{m-\mu}^\gamma}{A_m^\gamma}\,\Delta_\nu^{\beta+1}\varepsilon_{\mu\nu}\right)\right| = 0 \qquad (f_2^4)$$

$$(\mu, m = 0, 1, \ldots).$$

Теорема 4. *Для того, чтобы числа* ε_{mn} *были множителями суммируемости типов* а) $(C_O^{\alpha,\beta},\ C^{\gamma,\delta})$, b) $(C_O^{\alpha,\beta},\ C_b^{\gamma,\delta})$, в) $(C_O^{\alpha,\beta}, C_r^{\gamma,\delta})$, *необходимы и достаточны условия* (A),

$$\lim_{m,n} \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \left| \mathfrak{D}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu} - \Delta_{\mu\nu}^{\alpha+1\,\beta+1}\varepsilon_{\mu\nu}\right| = 0, \qquad (d^5)$$

и, кроме них,

а) (b^1);
b) (c^1);
в) (c^1) *и* (f^4).

Теперь может показаться, что теоремами 1—4 наша проблема уже решена. Однако, дело обстоит не так. Условия этих теорем неэффективны: их практически трудно проверять. Поэтому нашей дальнейшей задачей является: используя теоремы 1—4, получить более эффективные точные условия для нашей проблемы. К этому приступим в следующих параграфах.

§ 5. Эффективные необходимые условия

В настоящем параграфе будем находить эффективные необходимые условия для нашей проблемы. Несколько таких условий дано леммой 1. Прежде, чем приступить к нахождению других условий, заметим следующее.

Из определений § 1 следует, что условия, необходимые для множителей суммируемости $(C_r^{\alpha,\beta},\ B)$, подавно необходимы для $(C_b^{\alpha,\beta}\ \ B)$; а условия, необходимые для $(C_b^{\alpha,\beta},\ B)$, в свою очередь, необходимы для $(C_O^{\alpha,\beta},\ B)$.

---

[7] Условия (d^4) означают оба условия (d_1^4) и (d_2^4). Аналогично будем обозначать и в других случаях.

С другой стороны, условия, необходимые для $(A, C^{\gamma,\delta})$, также необходимы для $(A, C_b^{\gamma,\delta})$, а условия, необходимые для $(A, C_b^{\gamma,\delta})$, подавно необходимы для $(A, C_r^{\gamma,\delta})$.

Поэтому в последующих леммах настоящего параграфа мы, как правило, дадим необходимые условия лишь, так сказать, для «крайнего» случая.

1. Лемма 2. *Для множителей суммируемости типа* $(C_r^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta})$ *необходимы условия* [8]

$$\sum_{m,n} (m+1)^{\alpha}(n+1)^{\beta} \,|\, \Delta_{mn}^{\alpha+1\ \beta+1} \varepsilon_{mn} | < \infty, \tag{B}$$

$$\sum_{m} (m+1)^{\alpha} | \Delta_{m}^{\alpha+1} \varepsilon_{mn} | = O\left[(n+1)^{\delta-\beta}\right] \quad (n = 0,1, \ldots), \tag{C$_1$}$$

$$\sum_{n} (n+1)^{\beta} | \Delta_{n}^{\beta+1} \varepsilon_{mn} | = O\left[(m+1)^{\gamma-\alpha}\right] \quad (m = 0,1, \ldots), \tag{C$_2$}$$

$$\sum_{m} (m+1)^{\alpha} | \Delta_{m}^{\alpha+1} \varepsilon_{mn} | \leqslant M \quad (n = 0,1, \ldots), \tag{25}$$

$$\sum_{n} (n+1)^{\beta} | \Delta_{n}^{\beta+1} \varepsilon_{mn} | \leqslant M \quad (m = 0,1, \ldots), \tag{26}$$

$$\varepsilon_{mn} = O\left[(m+1)^{\gamma-\alpha}(n+1)^{\delta-\beta}\right] \quad (m, n = 0,1, \ldots). \tag{D}$$

$$\varepsilon_{mn} = O\left[(n+1)^{\delta-\beta}\right] \quad (m, n = 0,1, \ldots), \tag{27}$$

$$\varepsilon_{mn} = O\left[(m+1)^{\gamma-\alpha}\right] \quad (m, n = 0,1, \ldots). \tag{28}$$

Доказательство. Начнем с условия (B). Просуммировав в условии (b^1) до k, l, где $0 \leqslant k, l \leqslant m, n$, и переходя к пределу при $m, n \to \infty$, получаем условие

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{k,l} A_{\mu}^{\alpha} A_{\nu}^{\beta} \,|\, \Delta_{\mu\nu}^{\alpha+1\ \beta+1} \varepsilon_{\mu\nu} | \leqslant M \qquad (k, l = 0,1, \ldots),$$

равносильное условию (B).

Далее, из условия (b^1) для $0 \leqslant s \leqslant m$ вытекает

$$A_n^{\beta} \sum_{\mu=0}^{s} A_{\mu}^{\alpha} \,|\, \mathfrak{D}_{mn} \varepsilon_{\mu n} | \leqslant M \qquad (m, n \geqslant N),$$

---

[8] Условия (C_1) и (D) при $\delta = \beta$ переходят соответственно в условия (25) и (28). Последние условия применяются в случае $\delta > \beta$.

Условия (C_2) и (D) при $\gamma = \alpha$ переходят соответственно в условия (26) и (27), которые применяются в случае $\gamma > \alpha$.

Аналогичные обстоятельства имеют место и в леммах 5, 7 и 10.

откуда, переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем условие

$$\frac{A_n^\beta}{A_n^\delta} \sum_{\mu=0}^{s} A_\mu^\alpha |\Delta_\mu^{\alpha+1} \varepsilon_{\mu n}| \leqslant M \quad (n \geqslant N,\ s = 0, 1, \quad .),$$

или

$$\sum_\mu A_\mu^\alpha |\Delta_\mu^{\alpha+1} \varepsilon_{\mu n}| = O\,[(n+1)^{\delta-\beta}] \qquad (n \geqslant N). \qquad (29)$$

Для доказательства необходимости условия (C_1) остается доказать, что необходима сходимость ряда в (29) также при $n < N$. Для этого достаточно доказать справедливость условия (25).

Действительно, в силу включения[9] $C_r^{\alpha,0} \subset C_r^{\alpha,\beta}$ условия, необходимые для $(C_r^{\alpha,0},\ C^{\gamma,\delta})$, подавно необходимы и для $(C_r^{\alpha,\beta},\ C^{\gamma,\delta})$, вследствие чего из условия (B) следует

$$\sum_{\mu,\nu} A_\mu^\alpha |\Delta_{\mu\nu}^{\alpha+1\,1} \varepsilon_{\mu\nu}| < \infty \qquad (30)$$

и, тем более,

$$\sum_{\mu=0}^{s} A_\mu^\alpha \left| \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta_\nu (\Delta_\mu^{\alpha+1} \varepsilon_{\mu\nu}) \right| \leqslant M \quad (n, s = 0, 1, \quad .)$$

или

$$\sum_{\mu=0}^{s} A_\mu^\alpha |\Delta_\mu^{\alpha+1} \varepsilon_{\mu n} - a_\mu| \leqslant M \quad (n, s = 0, 1, \quad .),$$

где

$$a_\mu = \lim_\nu \Delta_\mu^{\alpha+1} \varepsilon_{\mu\nu}.$$

Но тогда подавно

$$\left| \sum_{\mu=0}^{s} A_\mu^\alpha |\Delta_\mu^{\alpha+1} \varepsilon_{\mu n}| - \sum_{\mu=0}^{s} A_\mu^\alpha |a_\mu| \right| \leqslant M \ (n, s = 0, 1, \quad .). \qquad (31)$$

Взяв здесь $n = N$, получаем в силу (29), что

$$\sum_\mu A_\mu^\alpha |a_\mu| < \infty,$$

вследствие чего из (31) заключаем, что условие (25) необходимо и в (29) можно взять $N = 0$. Аналогично доказывается необходимость условий (C_2) и (26).

---

[9] См. [1], § 2, теорема 6.

Докажем необходимость условий (D). (27) и (28). Взяв в условии (b^1) член, при котором $\mu = m$ и $\nu = n$, получаем

$$\left| \frac{A_m^\alpha A_n^\beta}{A_m^\gamma A_n^\delta} \varepsilon_{mn} \right| \leqslant M \quad (m, n \geqslant N). \tag{32}$$

Покажем, что в (32) можно взять $N = 0$. Действительно, в силу включения $C_r^{0,\beta} \subset C_r^{\alpha,\beta}$ из (C_1) получаем необходимое условие

$$(n+1)^{\beta-\delta} \sum_\mu |\Delta_\mu \varepsilon_{\mu n}| \leqslant M \qquad (n = 0,1, \ldots).$$

Но тогда тем более

$$(n+1)^{\beta-\delta} |\varepsilon_{0n} - \varepsilon_{mn}| = (n+1)^{\beta-\delta} \left| \sum_{\mu=0}^{m-1} \Delta_\mu \varepsilon_{\mu n} \right| \leqslant M \tag{33}$$

$$(m = 1,2, \ldots; \quad n = 0,1, \ldots).$$

Взяв теперь в (33) $m = N$ и $n \geqslant N$. получаем на основе (32), независимо от соотношения между γ и α,

$$(n+1)^{\beta-\delta} |\varepsilon_{0n}| \leqslant M \qquad (n \geqslant N),$$

или

$$(n+1)^{\beta-\delta} |\varepsilon_{0n}| \leqslant M' \quad (n = 0,1, \ldots).$$

Учитывая последнее соотношение, получаем из (33), что необходимо условие (27).

Аналогично доказывается необходимость условия (28).

Условие (32) вместе с (27) и (28) доказывает необходимость условия (D).

2. Для нахождения необходимых условий для множителей суммируемости типа $(C_b^{\alpha,\beta}, B)$ нам нужны леммы (см. [2]) и 4.

Лемма 3. *Пусть матрица*[10] $\mathfrak{A} = (a_{mn\mu\nu})$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_m a_{mn\mu\nu} = \lim_n a_{mn\mu\nu} = 0, \tag{34}$$

а матрица $B = (\beta_{mn\mu\nu})$ — *условию*

$$\begin{aligned} &\lim_m \beta_{m\nu\mu\nu} = \beta'_\nu \text{ (независимо от } \mu), \\ &\lim_n \beta_{\mu n\mu\nu} = \beta''_\mu \text{ (независимо от } \nu). \end{aligned} \tag{35}$$

Если, сверх того, существуют пределы

$$d'_{\varkappa\lambda} = \lim_m d_{m\lambda\varkappa\lambda} \quad (\lambda \geqslant N), \tag{36}$$

[10] $\mathfrak{A}$ означает матрицу преобразования последовательности в последовательность, определяющую метод A.

$$d''_{\varkappa\lambda} = \lim_n d_{\varkappa n \varkappa \lambda} \quad (\varkappa \geqslant N). \tag{37}$$

то для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа (A_b, B). необходимо выполнение условий

$$\beta'_\nu \Delta_\mu \varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa=\mu}^{\infty} d'_{\varkappa\nu} a_{\varkappa\nu\mu\nu} \quad (\nu \geqslant N), \tag{38}$$

$$\beta''_\mu \Delta_\nu \varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=\nu}^{\infty} d''_{\mu\lambda} a_{\mu\lambda\mu\nu} \quad (\mu \geqslant N), \tag{39}$$

причем [11]

$$\sum_\mu |d'_{\mu\nu}| \leqslant M, \quad \lim_{\nu\to\infty} d'_{\mu\nu} = 0 \quad (\nu \geqslant N), \tag{40}$$

$$\sum_\nu |d''_{\mu\nu}| \leqslant M, \quad \lim_{\mu\to\infty} d''_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \geqslant N). \tag{41}$$

Здесь положено

$$d_{mn\varkappa\lambda} = \sum_{\mu,\nu=\varkappa,\lambda}^{m,n} \beta_{mn\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu\varkappa\lambda},$$

где числа $\eta_{\mu\nu\varkappa\lambda}$ — элементы матрицы $\mathfrak{A}^{-1}$ обратной к $\mathfrak{A}$.

Лемма 4. *Пусть A — метод, сохраняющий b-сходимость,* и $B = (\beta_{mn\mu\nu})$ — *треугольный метод, удовлетворяющий условию* (18). *Тогда для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа (A_b, B), необходимо выполнение условий*

$$\lim_n \Delta_m \varepsilon_{mn} = 0 \quad (m = 0, 1, \ldots),$$

$$\lim_m \Delta_n \varepsilon_{mn} = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Доказательство. Преобразование (21) (с $a_{mn\mu\nu} = \beta_{mn\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}$) должно перевести все b-сходящиеся ряды в сходящиеся последовательности. Как показал Нигам [12], для этого необходимо (23) и

$$\lim_{m,n} \sum_\nu \Delta_{\mu\nu}(a_{mn\mu\nu} - a_{\mu\nu}) = 0 \quad (\mu = 0, 1, \ldots),$$

откуда в силу треугольности $(\beta_{mn\mu\nu})$ и (18) следует

$$\lim_\nu \Delta_\mu \varepsilon_{\mu\nu} = \lim_{m,n} \Delta_\mu a_{mn\mu 0} - \Delta_\mu a_{\mu 0} + \lim_\nu \Delta_\mu a_{\mu\nu} = 0.$$

Необходимость второго условия доказывается аналогично.

---

[11] Символ $\lim\limits_{\substack{\nu\to\infty \\ \nu \geqslant N}} S_\nu = 0$ означает, что S_ν существует при всех $\nu \geqslant N$ и $\lim\limits_\nu S_\nu = 0$.

[12] См. [16], теорема 3, условие (3, 42).

Основываясь на леммах 3 и 4, легко доказывается

Лемма 5. *Для множителей суммируемости типа* $(C_b^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta})$ *необходимы условия*

$$\lim_n (n+1)^{\beta-\delta} \Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn} = 0 \quad (m = 0, 1, \ldots), \tag{E$_1$}$$

$$\lim_m (m+1)^{\alpha-\gamma} \Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn} = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{E$_2$}$$

$$\lim_n \Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn} = 0 \qquad (m = 0, 1, \ldots), \tag{42}$$

$$\lim_m \Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn} = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{43}$$

Доказательство. В нашем случае все предположения леммы 3 выполнены, причем

$$d_{mn\varkappa\lambda} = A_\varkappa^\alpha A_\lambda^\beta \sum_{\mu, \nu = \varkappa, \lambda}^{m, n} \frac{A_{m-\mu}^\gamma A_{n-\nu}^\delta}{A_m^\gamma A_n^\delta} \varepsilon_{\mu\nu} A_{\mu-\varkappa}^{-\alpha-2} A_{\nu-\lambda}^{-\beta-2} \tag{44}$$

Следовательно,

$$d_{m\lambda\varkappa\lambda} = \frac{A_\varkappa^\alpha A_\lambda^\beta}{A_\lambda^\delta} \sum_{\mu=\varkappa}^{m} A_{\mu-\varkappa}^{-\alpha-2} \frac{A_{m-\mu}^\gamma}{A_m^\gamma} \varepsilon_{\mu\lambda},$$

откуда по условию (A) имеем

$$d_{\varkappa\lambda} = \frac{A_\varkappa^\alpha A_\lambda^\beta}{A_\lambda^\delta} \Delta_\varkappa^{\alpha+1} \varepsilon_{\varkappa\lambda}. \tag{45}$$

Аналогично

$$d''_{\varkappa\lambda} = \frac{A_\varkappa^\alpha A_\lambda^\beta}{A_\varkappa^\gamma} \Delta_\lambda^{\beta+1} \varepsilon_{\varkappa\lambda}. \tag{46}$$

Вставляя выражения (45) и (46) в (40) и (41) и учитывая условие (A) получаем условия (E).

Необходимость условий (42) и (43) следует из леммы 4 в силу условия (A).

Замечание 1. Из доказательства леммы 5 снова следует необходимость условий (C) для нашего случая.

3. Лемма 6. *Пусть A — метод, сохраняющий b-сходимость, и B =* $(\beta_{mn\mu\nu})$ *— такой нормальный метод, что* $\beta_{mn\mu\nu} = \beta'_{m\mu} \beta''_{n\nu}$ *и* $\lim_m \beta'_{m\mu} = \lim_n \beta''_{n\nu} = 1$. *Тогда для того, чтобы числа* ε_{mn} *были множителями суммируемости типа* (A, B_r), *необходимо*

выполнение условий

$$\lim_n \varepsilon_{mn} = 0 \quad (m = 0, 1, \quad .), \tag{47}$$

$$\lim_m \varepsilon_{mn} = 0 \quad (n = 0, 1, \ ..). \tag{48}$$

Доказательство. Преобразование (21) (с $a_{mn_{\mu\nu}} = \beta_{mn_{\mu\nu}}\varepsilon_{\mu\nu}$) должно перевести все b-сходящиеся ряды в r-сходящиеся последовательности. Как показал Нигам [13], для этого необходимо

$$\lim_n \sum_\nu \varDelta_{\mu\nu}(a_{mn_{\mu\nu}} - a_m^{\mu\nu}) = 0 \quad (\mu, m = 0, 1, \quad .),$$

где

$$a_m^{\mu\nu} = \lim_n a_{mn_{\mu\nu}} \qquad (\mu, \nu, m = 0, 1, . \ .).$$

Отсюда, в силу треугольности $(\beta_{mn_{\mu\nu}})$,

$$\lim_n \varDelta_\mu a_{mn_{\mu 0}} - \varDelta_\mu a_m^{\mu 0} + \lim_\nu \varDelta_\mu a_m^{\mu\nu} = 0.$$

Взяв здесь $\mu = m$, в силу треугольности $(\beta'_{m\mu})$ получаем

$$\lim_\nu \beta'_{mm}\varepsilon_{m\nu} = 0 \quad (m = 0, 1, \quad .),$$

откуда в силу нормальности $(\beta'_{m\mu})$ следует условие (47).

Аналогично доказывается необходимость условия (48).

Лемма 7 *Для множителей суммируемости типа* $(C_b^{\alpha,\beta}, \ C_r^{\gamma,\delta})$ *необходимы условия* (47), (48),

$$\lim_n (n+1)^{\beta-\delta}\varepsilon_{mn} = 0 \quad (m = 0, 1, \ldots), \tag{F$_1$}$$

$$\lim_m (m+1)^{\alpha-\gamma}\varepsilon_{mn} = 0 \quad (n = 0, 1, \quad .). \tag{F$_2$}$$

Доказательство. По формуле (43-с) статьи [2] для множителей суммируемости типа (A_b, B_r) необходимы условия

$$\lim_\mu d_{\mu\nu\mu\nu} = \lim_\nu d_{\mu\nu\mu\nu} = 0,$$

из которых, учитывая (44), следуют условия (F)

Необходимость условий (47) и (48) следует из леммы 6.

4. Для нахождения необходимых условий для множителей суммируемости типа $(C_0^{\alpha,\beta}, B)$ нам нужны леммы 8 (См. [2]) и 9.

Лемма 8. *Пусть матрица* $\mathfrak{A} = (a_{mn_{\mu\nu}})$ *удовлетворяет условию* (34), *а матрица* $B = (\beta_{mn_{\mu\nu}})$ — *условию* (35). *Если, сверх*

---

[13] См. [16], теорема 23, условие (23. 41).

того, существуют пределы (36) *и* (37), *то для того, чтобы числа* ε_{mn} *были множителями суммируемости типа* (A_O, B), *необходимо выполнение условий* (38) *и* (39), *причем*

$$\lim_{\substack{\nu\to\infty \\ \nu\geqslant N}} \sum_{\mu} |d'_{\mu\nu}| = \lim_{\substack{\mu\to\infty \\ \mu\geqslant N}} \sum_{\nu} |d''_{\mu\nu}| = 0. \tag{49}$$

Кроме этих условий необходимо и следующее

$$\lim_{\mu,\nu} d_{\mu\nu\mu\nu} = 0. \tag{50}$$

Лемма 9. *Пусть A — метод, сохраняющий ограниченность, и* $B = (\beta_{mn\mu\nu})$ — *треугольный метод, удовлетворяющий условию* (18). *Тогда для того, чтобы числа* ε_{mn} *были множителями суммируемости типа* (A_O, B), *необходимо выполнение условий* (47), (48) *и*

$$\lim_{m,n} \varepsilon_{mn} = 0. \tag{51}$$

Доказательство. Преобразование (21) (с $a_{mn\mu\nu} = \beta_{mn\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}$) теперь должно перевести все ряды с ограниченными частными суммами в сходящиеся последовательности. Для этого необходимо [14] (23) и

$$\lim_{m,n} \sum_{\mu,\nu=k,l}^{m,n} \Delta_{\mu\nu}(a_{mn\mu\nu} - a_{\mu\nu}) = 0 \quad (k, l = 0, 1, . \ .),$$

откуда в силу треугольности $(\beta_{mn\mu\nu})$

$$\lim_{\mu,\nu} (a_{k\nu} + a_{\mu l} - a_{\mu\nu}) = 0 \quad (k, l = 0, 1, \quad .),$$
$$\lim_{\mu,\nu} (a_{k\nu} + a_{\mu\lambda} - a_{\mu\nu}) = 0 \quad (\lambda, k = 0, 1, \ ..). \tag{52}$$

Следовательно,

$$\lim_{\mu} (a_{\mu l} - a_{\mu\lambda}) = 0 \quad (\lambda, l = 0, 1, \ldots),$$

или, что то же самое,

$$\lim_{\mu} (a_{k\nu} + a_{\mu l} - a_{\mu\nu}) = a_{k\nu} \quad (\nu, k, l = 0, 1, \ ..).$$

Отсюда и из (52) по теореме о двойном и повторных пределах

$$\lim_{\nu} \varepsilon_{k\nu} = \lim_{\nu} a_{k\nu} = 0 \quad (k = 0, 1, \quad .).$$

Аналогично доказывается необходимость условия (48).

---

[14] См. условие (d_5) с $a_{mn\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu} a_{mn\mu\nu}$ ([2], стр. 8).

Наконец, из необходимости условий (19), (47) и (48) следует существование предела в (51), ибо

$$\lim_{m,n} \varepsilon_{mn} + \varepsilon_{00} = \lim_{m,n} (\varepsilon_{00} - \varepsilon_{0n} - \varepsilon_{m0} + \varepsilon_{mn}) = \lim_{m,n} \sum_{\mu,\nu=0}^{m-1,n-1} \Delta_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu},$$

и, следовательно,

$$\lim_{m,n} \varepsilon_{mn} = \lim_{m} \lim_{n} \varepsilon_{mn} = 0.$$

Теперь легко доказывается

Лемма 10. *Для множителей суммируемости типа* $(C_O^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta})$ *необходимы условия*

$$\lim_{n} (n+1)^{\beta-\delta} \sum_{m} (m+1)^{\alpha} |\Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn}| = 0, \tag{G$_1$}$$

$$\lim_{m} (m+1)^{\alpha-\gamma} \sum_{n} (n+1)^{\beta} |\Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn}| = 0, \tag{G$_2$}$$

$$\lim_{n} \sum_{m} (m+1)^{\alpha} |\Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn}| = 0, \tag{53}$$

$$\lim_{m} \sum_{n} (n+1)^{\beta} |\Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn}| = 0, \tag{54}$$

$$\lim_{m,n} (m+1)^{\alpha-\gamma} (n+1)^{\beta-\delta} \varepsilon_{mn} = 0, \tag{H}$$

$$\lim_{m,n} (n+1)^{\beta-\delta} \varepsilon_{mn} = 0, \tag{55}$$

$$\lim_{m,n} (m+1)^{\alpha-\gamma} \varepsilon_{mn} = 0, \tag{56}$$

а также условия (47), (48) *и* (51).

Доказательство. Вставляя выражения (45) и (46) в условие (49), в котором вследствие необходимости условий (C) можем взять $N = 0$, непосредственно получаем условия (G).

Далее, из (44) и (50) непосредственно вытекает условие (H), а из леммы 9 — необходимость условий (47). (48) и (51).

Докажем необходимость условия (53).

Как при доказательстве леммы 2, так и в нашем случае необходимо условие (30). В силу необходимости условия (42), имеем

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta_\nu (\Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{m\nu}) = \Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn} - \lim_{\nu} \Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{m\nu} = \Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn}. \tag{57}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{m} A_m^{\alpha} |\Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn}| &= \sum_{m} A_m^{\alpha} \Big| \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta_{m\nu}^{\alpha+1\,1} \varepsilon_{m\nu} \Big| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{\nu=n}^{\infty} \sum_{m} A_m^{\alpha} |\Delta_{m\nu}^{\alpha+1\,1} \varepsilon_{m\nu}|, \end{aligned} \tag{58}$$

откуда, в силу (30), следует необходимость условия (53).

Необходимость условия (54) доказывается аналогично.

В силу легко доказываемого включения $C_O^{0,\beta} \subset C_O^{\alpha,\beta}$ из (G_1) вытекает необходимое условие

$$\lim_n (n+1)^{\beta-\delta} \sum_\mu |\Delta_\mu \varepsilon_{\mu n}| = 0. \tag{59}$$

Воспользовавшись (33) (48) и (59), находим

$$\lim_n (n+1)^{\beta-\delta} \varepsilon_{0n} = \lim_n (n+1)^{\beta-\delta} (\varepsilon_{0n} - \lim_m \varepsilon_{mn}) = 0. \tag{60}$$

Учитывая (60), (33) и (59), мы вправе писать

$$\lim_{m,n} (n+1)^{\beta-\delta} |\varepsilon_{mn}| = \lim_{m,n} (n+1)^{\beta-\delta} |\varepsilon_{0n} - \varepsilon_{mn}| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m,n} (n+1)^{\beta-\delta} \sum_\mu |\Delta_\mu \varepsilon_{\mu n}| = 0.$$

Необходимость условия (56) доказывается аналогично.

§ 6. Некоторые следствия из необходимых условий

В § 5 найдены эффективные необходимые условия для множителей суммируемости рассматриваемых нами типов. Нашей дальнейшей задачей является доказать, что найденные эффективные необходимые условия влекут за собой соответственно условия теорем 1—4, т. е. что они являются и достаточными для исследуемых типов множителей суммируемости. Однако, прежде чем приступить к решению этой задачи, мы должны установить ряд лемм, из которых первые два, как известные, сформулируем без доказательства, а остальные докажем, основываясь на первых двух.

Лемма 11. *Если выполнено* (15) *и при* $\alpha \geqslant 0$

$$\sum_m A_m^\alpha |\Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_m| < \infty, \tag{61}$$

то для любого $0 < k \leqslant \alpha + 1$ *имеет место неравенство*

$$\sum_m A_m^{k-1} |\Delta_m^k \varepsilon_m| \leqslant \sum_m A_m^\alpha |\Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_m|.$$

Лемма 11 в слегка отличной форме принадлежит Андерсену ([5], стр. 31) и полностью передоказана Бозанкет [6].

Лемма 12. ([5], стр. 34; [6, 7].) *Из условий* (15) *и* (61) *следует*

$$\Delta_m^k \varepsilon_m = o(m^{-k})$$

для всех $0 < k \leqslant \alpha$.

Лемма 13. *Если $\alpha, \beta \geqslant 0$ и выполнены условия* (A) *и* (B), *то для любых $0 < k, l \leqslant \alpha + 1, \beta + 1$ имеем*[15]

$$\sum_{m,n} (m+1)^{k-1} (n+1)^{l-1} \left| \Delta_{mn}^{kl} \varepsilon_{mn} \right| < \infty.$$

Доказательство. Поскольку в силу (A) имеем $\Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn} = O(1)$, то из леммы 11 для всех $0 < k \leqslant \alpha + 1$ и $n = 0, 1, \ldots$ заключаем

$$\sum_m A_m^{k-1} \left| \Delta_m^k (\Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn}) \right| \leqslant \sum_m A_m^\alpha \left| \Delta_m^{\alpha+1} (\Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn}) \right|,$$

или

$$\sum_m A_m^{k-1} \left| \Delta_{mn}^{k\,\beta+1} \varepsilon_{mn} \right| \leqslant \sum_m A_m^\alpha \left| \Delta_{mn}^{\alpha+1\,\beta+1} \varepsilon_{mn} \right|. \tag{62}$$

Аналогично для всех $0 < l \leqslant \beta + 1$ и $m = 0, 1, \ldots$ находим

$$\sum_n A_n^{l-1} \left| \Delta_{mn}^{kl} \varepsilon_{mn} \right| \leqslant \sum_n A_n^\beta \left| \Delta_{mn}^{k\,\beta+1} \varepsilon_{mn} \right|, \tag{63}$$

так как ряд в правой части (63), ввиду вытекающего из (62) неравенства

$$\sum_n A_n^\beta \sum_m A_m^{k-1} \left| \Delta_{mn}^{k\,\beta+1} \varepsilon_{mn} \right| \leqslant \sum_n A_n^\beta \sum_m A_m^\alpha \left| \Delta_{mn}^{\alpha+1\,\beta+1} \varepsilon_{mn} \right| \tag{64}$$

и условия (B), сходится.

Утверждение леммы 13 следует теперь из неравенства

$$\sum_{m,n} A_m^{k-1} A_n^{l-1} \left| \Delta_{mn}^{kl} \varepsilon_{mn} \right| \leqslant \sum_m A_m^{k-1} \sum_n A_n^\beta \left| \Delta_{mn}^{k\,\beta+1} \varepsilon_{mn} \right|,$$

справедливого в силу (63), и из (64).

Лемма 14. *Из условий* (A) *и* (B) *вытекает для всех $0 < k \leqslant \alpha + 1$ и $0 < l \leqslant \beta$*

$$\sum_m (m+1)^{k-1} \left| \Delta_{mn}^{kl} \varepsilon_{mn} \right| = O[(n+1)^{-l}] \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

а для всех $0 < k \leqslant \alpha$ и $0 < l \leqslant \beta + 1$

$$\sum_n (n+1)^{l-1} \left| \Delta_{mn}^{kl} \varepsilon_{mn} \right| = O[(m+1)^{-k}] \quad (m = 0, 1, \ldots).$$

Доказательство. Из (12) и (9) имеем

$$\Delta_\nu (A_\nu^l \Delta_{m\nu}^{kl} \varepsilon_{m\nu}) = A_\nu^l \Delta_{m\nu}^{k\,l+1} \varepsilon_{m\nu} - A_{\nu+1}^{l-1} \Delta_{m\nu}^{kl} \varepsilon_{m,\nu+1} \tag{65}$$

Просуммировав (65) по ν от 0 до $n-1$, легко установить тождество

$$A_n^l \Delta_{mn}^{kl} \varepsilon_{mn} = \Delta_{m0}^{kl} \varepsilon_{m0} - \sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu^l \Delta_{m\nu}^{k\,l+1} \varepsilon_{m\nu} + \sum_{\nu=0}^{n-1} A_{\nu+1}^{l-1} \Delta_{m\nu}^{kl} \varepsilon_{m,\nu+1},$$

---

[15] Леммы 13, 14, 15, 17 и 18 опубликованы без доказательств в [3].

откуда

$$A_n^l \sum_m A_m^{k-1} \,|\, \Delta_{mn}^{kl}\,\varepsilon_{mn} \,| \leqslant \sum_m A_m^{k-1} \,|\, \Delta_{m0}^{kl}\,\varepsilon_{m0} \,| +$$

$$+ \sum_m A_m^{k-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} A_{\nu+1}^{l-1} \,|\, \Delta_{m\nu}^{kl}\,\varepsilon_{m,\,\nu+1} \,| + \sum_m A_m^{k-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu^l \,|\, \Delta_{m\nu}^{k\,l+1}\,\varepsilon_{m\nu} \,|.$$

По лемме 13 ряды правой части последнего неравенства сходятся при $0 < k \leqslant \alpha + 1$ и $0 < l \leqslant \beta$, и поэтому первая часть леммы доказана.

Аналогично доказывается вторая часть.

Л е м м а 15. *Из условий* (A) *и* (B) *для любых* $0 < k, l \leqslant \alpha, \beta$ *следует*

$$\Delta_{mn}^{kl}\,\varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-k}(n+1)^{-l}] \quad (m, n = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь формулой (13), аналогично формуле (65) получаем

$$\Delta_{mn}(A_m^k A_n^l \Delta_{mn}^{kl}\,\varepsilon_{mn}) = A_m^k A_n^l \Delta_{mn}^{k+1\,l+1}\,\varepsilon_{mn} -$$

$$- A_m^k A_{n+1}^{l-1} \Delta_{mn}^{k+1\,l}\,\varepsilon_{m,\,n+1} - A_{m+1}^{k-1} A_n^l \Delta_{mn}^{k\,l+1}\,\varepsilon_{m+1,\,n} +$$

$$+ A_{m+1}^{k-1} A_{n+1}^{l-1} \Delta_{mn}^{kl}\,\varepsilon_{m+1,\,n+1}.$$

По лемме 13 при $0 < k, l \leqslant \alpha, \beta$ отсюда имеем

$$\sum_{m,\,n} |\, \Delta_{mn}(A_m^k A_n^l \Delta_{mn}^{kl}\,\varepsilon_{mn}) \,| < \infty.$$

С другой стороны,

$$\sum_{\mu,\,\nu=0}^{m-1,\,n-1} \Delta_{\mu\nu}(A_\mu^k A_\nu^l \Delta_{\mu\nu}^{kl}\,\varepsilon_{\mu\nu}) = \Delta_{00}^{kl}\,\varepsilon_{00} - A_n^l \Delta_{0n}^{kl}\,\varepsilon_{0n} -$$

$$- A_m^k \Delta_{m0}^{kl}\,\varepsilon_{m0} + A_m^k A_n^l \Delta_{mn}^{kl}\,\varepsilon_{mn} = O(1) \quad (m,\ n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Принимая во внимание условие (A) и вытекающие из леммы 14 условия

$$A_n^l \,|\, \Delta_{0n}^{kl}\,\varepsilon_{0n} \,| \leqslant M \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots),$$

$$A_m^k \,|\, \Delta_{m0}^{kl}\,\varepsilon_{m0} \,| \leqslant M \quad (m = 0,\ 1,\ \ldots),$$

получаем требуемое.

Л е м м а 16. *Из условий* (C_1) *и* (27) *следует для* $0 \leqslant k \leqslant \alpha$

$$\Delta_m^k\,\varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-k}(n+1)^{\delta-\beta}] \quad (m,\ n = 0,\ 1,\ \ldots).$$

а из условий (C_2) *и* (28) *для* $0 \leqslant l \leqslant \beta$

$$\Delta_n^l\,\varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{\gamma-\alpha}(n+1)^{-l}] \quad (m,\ n = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначив

$$h_{mn} = (n+1)^{\beta-\delta}\,\varepsilon_{mn},$$

по условиям (C_1) и (27) на основе лемм 12 и 11 для $0 < k \leqslant \alpha$ имеем

$$|\overset{k}{\Delta}_m h_{mn}| = \lim_p |\overset{k}{\Delta}_m h_{mn} - \overset{k}{\Delta}_m h_{m+p,n}| =$$

$$= \lim_p |\sum_{\mu=m}^{m+p-1} \Delta_\mu (\overset{k}{\Delta}_\mu h_{\mu n})| \leqslant (m+1)^{-k} \sum_{\mu=m}^{\infty} (\mu+1)^k |\overset{k+1}{\Delta}_\mu h_{\mu n}|,$$

$$(m+1)^k |\overset{k}{\Delta}_m h_{mn}| \leqslant \sum_{\mu=m}^{\infty} (\mu+1)^k |\overset{k+1}{\Delta}_\mu h_{\mu n}|. \tag{66}$$

Из (66) и (27) следует утверждение первой части леммы. Вторая часть леммы доказывается аналогично.

Для изучения множителей суммируемости типов $(C_O^{\alpha,\beta}, B)$ соответственно леммам 14, 15 и 16 докажем следующие леммы.

Лемма 17 *Из условий* (A), (B), (47) *и* (48) *для* $-1 < k \leqslant \alpha$ *и* $0 \leqslant l \leqslant \beta$ *следует*

$$\lim_n (n+1)^l \sum_m (m+1)^k |\overset{k+1\,l}{\Delta}_{mn} \varepsilon_{mn}| = 0,$$

а для $0 \leqslant k \leqslant \alpha$ *и* $-1 < l \leqslant \beta$

$$\lim_m (m+1)^k \sum_n (n+1)^l |\overset{k\,l+1}{\Delta}_{mn} \varepsilon_{mn}| = 0.$$

Доказательство. Из условий (A) и (B) по лемме 13 следует условие (19), а из (19), (47) и (48), как явствует из доказательства леммы 9, — условие (51). Следовательно, имеем [16]

$$r\text{-}\lim_{m,n} \varepsilon_{mn} = 0,$$

откуда для $k, l \geqslant 0$ заключаем

$$r\text{-}\lim_{m,n} \overset{kl}{\Delta}_{mn} \varepsilon_{mn} = 0. \tag{67}$$

Далее, учитывая (67) и

$$|\overset{k+1\,l}{\Delta}_{mn} \varepsilon_{mn} - \overset{k+1\,l}{\Delta}_{mn} \varepsilon_{m,n+q}| \leqslant \sum_{\nu=n}^{n+q-1} |\overset{k+1\,l+1}{\Delta}_{m\nu} \varepsilon_{m\nu}| \leqslant$$

$$\leqslant (n+1)^{-l} \sum_{\nu=n}^{n+q-1} (\nu+1)^l |\overset{k+1\,l+1}{\Delta}_{m\nu} \varepsilon_{m\nu}|,$$

---

[16] Под символом $r\text{-}\lim_{m,n} S_{mn} = S$ мы подразумеваем $\lim_{m,n} S_{mn} = \lim_m S_{mn} = \lim_n S_{mn} = S$.

получаем при $q \to \infty$:

$$(n+1)^l \left| \Delta_{mn}^{k+1\,l} \varepsilon_{mn} \right| \leqslant \sum_{\nu=n}^{\infty} (\nu+1)^l \left| \Delta_{m\nu}^{k+1\,l+1} \varepsilon_{m\nu} \right|,$$

$$(n+1)^l \sum_m (m+1)^k \left| \Delta_{mn}^{k+1\,l} \varepsilon_{mn} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_m (m+1)^k \sum_{\nu=n}^{\infty} (\nu+1)^l \left| \Delta_{m\nu}^{k+1\,l+1} \varepsilon_{m\nu} \right| =$$

$$= \sum_{\nu=n}^{\infty} (\nu+1)^l \sum_m (m+1)^k \left| \Delta_{m\nu}^{k+1\,l+1} \varepsilon_{m\nu} \right|$$

Ввиду леммы 13 убеждаемся, что первая часть леммы доказана. Вторая часть доказывается аналогично.

Лемма 18. *Из условий* (A), (B), (47) *и* (48) *для* $0 \leqslant k, l \leqslant \alpha, \beta$ *следует*

$$r\text{-}\lim_{m,n} (m+1)^k (n+1)^l \Delta_{mn}^{kl} \varepsilon_{mn} = 0.$$

Доказательство. Учитывая (67), имеем

$$\left| \Delta_{mn}^{kl} \varepsilon_{mn} \right| = \lim_{p,q} \left| \Delta_{mn}^{kl} \varepsilon_{m+p,\,n+q} - \Delta_{mn}^{kl} \varepsilon_{m+p,\,n} - \right.$$

$$\left. - \Delta_{mn}^{kl} \varepsilon_{m,\,n+q} + \Delta_{mn}^{kl} \varepsilon_{mn} \right| = \lim_{p,q} \left| \sum_{\mu,\nu=m,n}^{m+p-1,\,n+q-1} \Delta_{\mu\nu} (\Delta_{\mu\nu}^{kl} \varepsilon_{\mu\nu}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant (m+1)^{-k} (n+1)^{-l} \sum_{\mu,\nu=m,n}^{\infty} (\mu+1)^k (\nu+1)^l \left| \Delta_{\mu\nu}^{k+1\,l+1} \varepsilon_{\mu\nu} \right|.$$

Отсюда

$$(m+1)^k (n+1)^l \left| \Delta_{mn}^{kl} \varepsilon_{mn} \right| \leqslant \sum_{\mu,\nu=m,n}^{\infty} (\mu+1)^k (\nu+1)^l \left| \Delta_{\mu\nu}^{k+1\,l+1} \varepsilon_{\mu\nu} \right|,$$

и утверждение леммы 18 следует из леммы 13.

Лемма 19. *Из условий* (G_1) *и* (48) *для* $0 \leqslant k \leqslant \alpha$ следует

$$r\text{-}\lim_{m,n} (m+1)^k (n+1)^{\beta-\delta} \Delta_m^k \varepsilon_{mn} = 0,$$

а из условий (G_2) *и* (47) *для* $0 \leqslant l \leqslant \beta$

$$r\text{-}\lim_{m,n} (m+1)^{\alpha-\gamma} (n+1)^l \Delta_n^l \varepsilon_{mn} = 0.$$

Доказательство. В силу условий (G_1) и (48) для $0 \leqslant k \leqslant \alpha$ на основе леммы 11 справедливо соотношение (66).

Но по лемме 11 из условий (G_1) и (48) для $-1 < k \leqslant \alpha$ следует

$$\lim_{m,n} \sum_{\mu} (\mu+1)^k |\Delta_\mu^{k+1} h_{\mu n}| = \lim_{n} \sum_{\mu} (\mu+1)^k |\Delta_\mu^{k+1} h_{\mu n}| = 0;$$

и так как для $0 \leqslant k \leqslant \alpha$ из (66) и (48) вытекает также, что

$$\lim_{m} (m+1)^k \Delta_m^k h_{mn} = 0 \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots),$$

то первая часть леммы доказана. Вторая часть доказывается аналогично.

§ 7. Множители суммируемости типов $(C_r^{\alpha,\beta}, B)$

Теоремой 1 даны точные условия для множителей суммируемости типов $(C_r^{\alpha,\beta}, B)$; однако, как было уже отмечено, эти условия неэффективны. Леммой 2 даны эффективные необходимые условия для множителей суммируемости названных типов. Задачей настоящего параграфа является: доказать, что условия леммы 2 также достаточны для множителей суммируемости типов $(C_r^{\alpha,\beta},\ B)$. т. е. доказать, что условия леммы 2 влекут за собой условия теоремы 1. Но так как условия, достаточные для множителей суммируемости типов $(C_r^{\alpha,\beta},\ C_r^{\gamma,\delta})$ и $(C_r^{\alpha,\beta},\ C_b^{\gamma,\delta})$, подавно достаточны для типа $(C_r^{\alpha,\beta}\ C^{\gamma,\delta})$. то, согласно теореме 1, нам остается доказать, что из условий леммы 2 следуют условия (A) и (c^1).

Во-первых, заметим, что из (8), (4) и (10) следует

$$\mathfrak{D}_{mn}\,\varepsilon_{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu}^{\alpha+1,\,\beta+1} \frac{A_{m-\mu}^{\gamma}\,A_{n-\nu}^{\delta}}{A_m^{\gamma}\,A_n^{\delta}}\,\varepsilon_{\mu\nu}. \tag{68}$$

Начиная с настоящего параграфа будем предполагать $\alpha, \beta \geqslant 0$ целыми числами, а $\gamma, \delta \geqslant 0$ — любыми вещественными числами.

Из (68), (13) и (14) получаем теперь

$$\mathfrak{D}_{mn}\,\varepsilon_{\mu\nu} = \sum_{k,\,l=0}^{\alpha+1,\,\beta+1} x_{kl}\,,$$

где

$$x_{kl} = \binom{\alpha+1}{k}\binom{\beta+1}{l} \frac{A_{m-\mu-k}^{k+\gamma-\alpha-1}\,A_{n-\nu-l}^{l+\delta-\beta-1}}{A_m^{\gamma}\,A_n^{\delta}}\,\Delta_{\mu\nu}^{kl}\,\varepsilon_{\mu\nu}. \tag{69}$$

Будем рассматривать отдельно четыре случая.

1) Пусть $0 \leqslant \gamma,\ \delta \leqslant \alpha, \beta$. Условие (A) следует из условия (D). Условие (c[1]) выведем из (B), (C) и (D).

Обозначив $p = [\alpha - \gamma]$ и $q = [\beta - \delta]$ и учитывая, что

$$\sum_{k, l=0}^{\alpha+1, \beta+1} x_{kl} = \sum_{k, l=0}^{p, q} x_{kl} + \sum_{k, l=0, q+1}^{p, \beta+1} x_{kl} + \\ + \sum_{k, l=p+1, 0}^{\alpha+1, q} x_{kl} + \sum_{k, l=p+1, q+1}^{\alpha+1, \beta+1} x_{kl}, \tag{70}$$

получаем

$$\sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \,|\, \mathfrak{D}_{mn} \varepsilon_{\mu\nu} \,| \leqslant A_{mn} + B_{mn} + C_{mn} + D_{mn},$$

$$A_{mn} = \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \,\Big|\sum_{k, l=0}^{p, q} x_{kl}\,\Big|,$$

$$B_{mn} = \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \,\Big|\sum_{k, l=0, q+1}^{p, \beta+1} x_{kl}\,\Big|,$$

$$C_{mn} = \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \,\Big|\sum_{k, l=p+1, 0}^{\alpha+1, q} x_{kl}\,\Big|,$$

$$D_{mn} = \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \,\Big|\sum_{k, l=p+1, q+1}^{\alpha+1, \beta+1} x_{kl}\,\Big|$$

В дальнейшем будем всегда применять обозначения

$$c_\mu^k = |\, A_\mu^{k+\gamma-\alpha-1} \,| \quad \text{и} \quad d_\nu^l = |\, A_\nu^{l+\delta-\beta-1} \,| \tag{71}$$

в случаях, когда $\sum\limits_\mu c_\mu^k < \infty$, $\sum\limits_\nu d_\nu^l < \infty$.

Рассмотрим выражение A_{mn}. В нем $k, l \leqslant p, q$, вследствие чего, учитывая (71), ряды $\sum\limits_\mu c_\mu^k$ и $\sum\limits_\nu d_\nu^l$ сходятся. Следовательно, по условию (D), имеем [17]:

$$A_{mn} = O(1) \sum_{k, l=0}^{p, q} \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \,|\, \Delta_{\mu\nu}^{kl} \varepsilon_{\mu\nu} \,|\, \frac{c_{m-\mu}^k d_{n-\nu}^l}{A_m^\gamma A_n^\delta} =$$

$$= \sum_{k, l=0}^{p, q} \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} \frac{A_\mu^\alpha A_\nu^\beta}{A_\mu^\gamma A_\nu^\delta} O\,[(\mu+1)^{\gamma-\alpha} (\nu+1)^{\delta-\beta}]\, c_{m-\mu}^k d_{n-\nu}^l = O(1).$$

---

[17] Здесь и в дальнейшем мы заменяем $m - \mu - k$, $n - \nu - l$ на $m - \mu$, $n - \nu$, что допустимо, поскольку $0 \leqslant k, l \leqslant \alpha + 1,\ \beta + 1$.

Рассмотрим выражение B_{mn}. Учитывая формулы (11) и то, что $k \leqslant p$ и $l+\delta-\beta-1>-1$, получаем

$$B_{mn}=O(1)\sum_{k,l=0,q+1}^{p,\beta}\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n}A_\mu^\alpha A_\nu^\beta\frac{c_{m-\mu}^k A_{n-\nu}^{l+\delta-\beta-1}}{A_m^\gamma A_n^\delta}\sum_{s=0}^{k}|\Delta_\nu^l\varepsilon_{\mu+s,\nu}|+$$

$$+O(1)\sum_{k=0}^{p}\sum_{s=0}^{k}\sum_{\mu=0}^{m}c_{m-\mu}^k\frac{A_\mu^\alpha}{A_\mu^\gamma}\sum_{\nu=0}^{n}A_\nu^\beta|\Delta_\nu^{\beta+1}\varepsilon_{\mu+s,\nu}|=$$

$$=\sum_{k,l=0,q+1}^{p,\beta}\sum_{s=0}^{k}\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n}c_{m-\mu}^k\frac{A_\mu^\alpha}{A_\mu^\gamma}\frac{A_\nu^\beta A_{n-\nu}^{l+\delta-\beta-1}}{A_n^\delta}\cdot$$

$$\cdot O[(\mu+1)^{\gamma-\alpha}(\nu+1)^{-l}]+O(1)\sum_{k=0}^{p}\sum_{\mu=0}^{m}c_{m-\mu}^k=$$

$$=O(1)\sum_{k,l=0,q+1}^{p,\beta}\sum_{\mu=0}^{m}c_{m-\mu}^k\frac{1}{A_n^\delta}\sum_{\nu=0}^{n}A_\nu^{\beta-l}A_{n-\nu}^{l+\delta-\beta-1}+O(1)=O(1),$$

где для $l=q+1, \quad ,\beta$ мы применяли лемму 16, а для $l=\beta+1$ — лишь условие (C_2). Следовательно, ограниченность выражения B_{mn} вытекает из условий (C_2) и (D).

Аналогично из условий (C_1) и (D) вытекает ограниченность выражения C_{mn}.

Для доказательства ограниченности выражения D_{mn} нужна следующая

Л е м м а 20. *Если в выражении*

$$D_{mn}^{\varkappa\lambda}=\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n}A_\mu^\alpha A_\nu^\beta\left|\sum_{k,l=\varkappa,\lambda}^{\alpha+1,\beta+1}x_{kl}\right|$$

для всех рассматриваемых k, l *числа* $\varkappa,\lambda\geqslant 1$ *и* $k+\gamma-\alpha-1$, $l+\delta-\beta-1\geqslant 0$, *то из условий* (A) *и* (B) *следует равномерная сходимость относительно* m, n *ряда*

$$\sum_{\mu,\nu}A_\mu^\alpha A_\nu^\beta\left|\sum_{k,l=\varkappa,\lambda}^{\alpha+1,\beta+1}x_{kl}\right|. \tag{72}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 13

$$\sum_{\mu,\nu}\sum_{k,l=\varkappa,\lambda}^{\alpha+1,\beta+1}\binom{\alpha+1}{k}\binom{\beta+1}{l}(\mu+1)^{k-1}(\nu+1)^{l-1}|\Delta_{\mu\nu}^{kl}\varepsilon_{\mu\nu}|<\infty$$

для всех $\varkappa,\lambda\geqslant 1$. Покажем, что последний ряд, умноженный на соответствующую постоянную, служит мажорантным для ряда

(72). Действительно:

$$A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \Big| \sum_{k,\,l=\varkappa,\,\lambda}^{\alpha+1,\,\beta+1} x_{kl} \Big| = O(1) \sum_{k,\,l=\varkappa,\,\lambda}^{\alpha+1,\,\beta+1} \binom{\alpha+1}{k}\binom{\alpha+1}{l} \left(\frac{m+1-\mu}{m+1}\right)^{k+\gamma-\alpha-1}$$

$$\left(\frac{n+1-\nu}{n+1}\right)^{l+\delta-\beta-1} \left(\frac{\mu+1}{m+1}\right)^{\alpha+1-k} \left(\frac{\nu+1}{n+1}\right)^{\beta+1-l} (\mu+1)^{k-1}\cdot$$

$$\cdot(\nu+1)^{l-1} |\Delta_{\mu\nu}^{kl} \varepsilon_{\mu\nu}| =$$

$$= O(1) \sum_{k,\,l=\varkappa,\,\lambda}^{\alpha+1,\,\beta+1} \binom{\alpha+1}{k}\binom{\beta+1}{l} (\mu+1)^{k-1} (\nu+1)^{l-1} |\Delta_{\mu\nu}^{kl} \varepsilon_{\mu\nu}|$$

для всех $\mu, \nu = 0, 1, \ldots$ Лемма доказана.

Если теперь γ, δ — целые, то, положив в лемме 20 $\varkappa = p+1$ и $\lambda = q+1$, получаем, что $D_{mn} = O(1)$.

Если γ, δ — не целые числа, то имеем

$$D_{mn} \leqslant K(E_{mn} + F_{mn} + G_{mn} + H_{mn}),$$

где

$$E_{mn} = \sum_{\mu,\,\nu=0}^{m,\,n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \frac{A_{m-\mu}^{p+\gamma-\alpha} A_{n-\nu}^{q+\delta-\beta}}{A_m^\gamma A_n^\delta} |\Delta_{\mu\nu}^{p+1\,q+1} \varepsilon_{\mu\nu}|,$$

$$F_{mn} = \sum_{\mu,\,\nu=0}^{m,\,n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \sum_{k=p+2}^{\alpha+1} \frac{A_{m-\mu}^{k+\gamma-\alpha-1} A_{n-\nu}^{q+\delta-\beta}}{A_m^\gamma A_n^\delta} |\Delta_{\mu\nu}^{k\,q+1} \varepsilon_{\mu\nu}|,$$

$$G_{mn} = \sum_{\mu,\,\nu=0}^{m,\,n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \sum_{l=q+2}^{\beta+1} \frac{A_{m-\mu}^{p+\gamma-\alpha} A_{n-\nu}^{l+\delta-\beta-1}}{A_m^\gamma A_n^\delta} |\Delta_{\mu\nu}^{p+1\,l} \varepsilon_{\mu\nu}|,$$

$$H_{mn} = \sum_{\mu,\,\nu=0}^{m,\,n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \Big| \sum_{k,\,l=p+2,\,q+2}^{\alpha+1,\,\beta+1} x_{kl} \Big|$$

Теперь по лемме 15 находим:

$$E_{mn} = \sum_{\mu,\,\nu=0}^{m,\,n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \frac{A_{m-\mu}^{p+\gamma-\alpha} A_{n-\nu}^{q+\delta-\beta}}{A_m^\gamma A_n^\delta} O[(\mu+1)^{-p-1}(\nu+1)^{-q-1}] =$$

$$= \frac{O(1)}{A_m^\gamma A_n^\delta} \sum_{\mu,\,\nu=0}^{m,\,n} A_{m-\mu}^{p+\gamma-\alpha} A_\mu^{\alpha-p-1} A_{n-\nu}^{q+\delta-\beta} A_\nu^{\beta-q-1} = O(1).$$

По лемме 14 находим:

$$F_{mn}=\frac{O(1)}{A_n^\delta}\sum_{\nu=0}^{n}A_\nu^\beta A_{n-\nu}^{q+\delta-\beta}\sum_{k=p+2}^{\alpha+1}\sum_{\mu=0}^{m}\left(\frac{m+1-\mu}{m+1}\right)^{k+\gamma-\alpha-1}\left(\frac{\mu+1}{m+1}\right)^{\alpha+1-k}(\mu+1)^{k-1}\left|\Delta_{\mu\nu}^{k\,q+1}\varepsilon_{\mu\nu}\right|=$$

$$=\frac{O(1)}{A_n^\delta}\sum_{\nu=0}^{n}A_\nu^\beta A_{n-\nu}^{q+\delta-\beta}\sum_{k=p+2}^{\alpha+1}\sum_{\mu=0}^{m}(\mu+1)^{k-1}\left|\Delta_{\mu\nu}^{k\,q+1}\varepsilon_{\mu\nu}\right|=$$

$$=\frac{1}{A_n^\delta}\sum_{\nu=0}^{n}A_\nu^\beta A_{n-\nu}^{q+\delta-\beta}\,O[(\nu+1)^{-q-1}]=O(1).$$

Аналогично по лемме 14 находим, что и $G_{mn}=O(1)$.

Далее, положив в лемме 20 $\varkappa=p+2$ и $\lambda=q+2$, находим, что и $H_{mn}=O(1)$.

Легко сообразить, как провести доказательство ограниченности D_{mn}, если одно из чисел γ или δ целое, другое нет.

Итак, во всех случаях ограниченность D_{mn} вытекает из условий (A) и (B).

Замечание 2. Из хода предыдущего рассуждения мы видим, что в случае $0\leqslant\gamma,\ \delta\leqslant\alpha,\beta$ условие (c^1) следует из условий (B), (C) и (D).

2) Пусть $\gamma>\alpha$, $\delta\leqslant\beta$. По доказанному в случае 1) для множителей суммируемости типа $(C_r^{\alpha,\beta},\ C_r^{\alpha,\delta})$ достаточны условия (B). (C_1). (26) и (27). В силу включения $C_r^{\alpha,\delta}\subset C_r^{\gamma,\delta}$ эти условия достаточны и для типа $(C_r^{\alpha,\beta},\ C_r^{\gamma,\delta})$. а по лемме 2 также необходимы.

3) Пусть $\gamma\leqslant\alpha$, $\delta>\beta$. Аналогично случаю 2) здесь необходимы и достаточны условия (B), (25), (C_2) и (28).

4) Пусть $\gamma,\delta>\alpha,\beta$. Аналогично случаям 2) и 3) теперь необходимы и достаточны условия (B), (25), (26) и (A).

Итак, доказана

Теорема 5. *Если* $0\leqslant\gamma,\ \delta\leqslant\alpha,\ \beta$, *то для того, чтобы числа* ε_{mn} *были множителями суммируемости типов* а) $(C_r^{\alpha,\beta},\ C^{\gamma,\delta})$, б) $(C_r^{\alpha,\beta},\ C_b^{\gamma,\delta})$, в) $(C_r^{\alpha,\beta},\ C_r^{\gamma,\delta})$, *необходимы и достаточны условия* (B), (C) *и* (D) [18].

Если $\gamma>\alpha$, *то необходимы и достаточны те же условия, что и при* $\gamma=\alpha$.

---

[18] Теоремы 5, 6 и 7 при $0\leqslant\gamma,\delta\leqslant\alpha,\beta$ опубликованы без доказательств в [3].

Если $\delta > \beta$, то необходимы и достаточны те же условия, что и при $\delta = \beta$.

Дополнение к теореме 5. *Если $\delta = \beta$, то в условии* (C_1) *теоремы 5 достаточно положить $n = 0$, а если $\gamma = \alpha$ — в условии* (C_2) *положить $m = 0$.*

Если $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, то можно отбросить условие (D).

Доказательство. По лемме 13 из (A) и (B) следует (30). откуда

$$\sum_{\mu} A_{\mu}^{\alpha} \left| \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta_{\nu} (\Delta_{\mu}^{\alpha+1} \varepsilon_{\mu\nu}) \right| \leqslant M \qquad (n = 1, 2, \quad .).$$

Но

$$\Delta_{\mu}^{\alpha+1} \varepsilon_{\mu n} = \Delta_{\mu}^{\alpha+1} \varepsilon_{\mu 0} - \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta_{\nu} (\Delta_{\mu}^{\alpha+1} \varepsilon_{\mu\nu}),$$

и поэтому

$$\sum_{m} A_{m}^{\alpha} | \Delta_{m}^{\alpha+1} \varepsilon_{mn} | \leqslant \sum_{m} A_{m}^{\alpha} | \Delta_{m}^{\alpha+1} \varepsilon_{m0} | +$$

$$+ \sum_{m} A_{m}^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{n-1} | \Delta_{m\nu}^{\alpha+1\, 1} \varepsilon_{m\nu} | \leqslant 2M$$

для всех $n = 1, 2,$

Аналогично доказывается вторая часть этого дополнения, а третья часть следует из (24).

Замечание 3. При $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ случай в) теоремы 5 впервые доказал Харди [11] и передоказал Мур [15], а случаи а) и б) — Гамильтон [10]. Эти результаты непосредственно вытекают из дополнения к теореме 5.

§ 8. Множители суммируемости типов $(C_b^{\alpha, \beta}, B)$

Учитывая замечание 2 и все сказанное в начале § 7, согласно теоремам 2 и 3 нам остается доказать, что условия (d^4) и (f^4) следуют из условий лемм 2, 5 и 7

1. Множители суммируемости типа $(C_b^{\alpha, \beta}, C_b^{\gamma, \delta})$

1) Пусть $0 \leqslant \gamma, \delta \leqslant \alpha, \beta$. Ограничимся доказательством выполнения условия (d_1^4) для чего, используя (69), перепишем его в виде:

$$\lim_{m, n} \sum_{\mu=0}^{m} A_{\mu}^{\alpha} \left| \sum_{k, l=0}^{\alpha+1, \beta+1} \binom{\alpha+1}{k} \binom{\beta+1}{l} \left(\Delta_{\mu\nu}^{\alpha+1-k\, \beta+1-l} 1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{A_{m-\mu-k}^{k+\gamma-\alpha-1} A_{n-\nu-l}^{l+\delta-\beta-1}}{A_m^{\gamma} A_n^{\delta}} \right) \Delta_{\mu\nu}^{kl} \varepsilon_{\mu\nu} \right| = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \quad .).$$

Вместо последнего выражения достаточно, согласно формуле (70), рассматривать стремление к нулю при m, $n \to \infty$ следующих четырех выражений:

$$J_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} A_{\mu}^{\alpha} \left| \sum_{k,\, l=0}^{p,\, q} x_{kl} \right|,$$

$$K_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} A_{\mu}^{\alpha} \left| \sum_{k,\, l=0,\, q+1}^{p,\, \beta+1} x_{kl} \right|,$$

$$L_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} A_{\mu}^{\alpha} \left| \sum_{k,\, l=p+1,\, 0}^{\alpha+1,\, q} x_{kl} \right|,$$

$$M_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} A_{\mu}^{\alpha} \left| \sum_{k,\, l=p+1,\, q+1}^{\alpha+1,\, \beta+1} \binom{\alpha+1}{k} \binom{\beta+1}{l} \left(\Delta_{\mu\nu}^{\alpha+1-k\, \beta+1-l} 1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{A_{m-\mu-k}^{k+\gamma-\alpha-1} A_{n-\nu-l}^{l+\delta-\beta-1}}{A_m^{\gamma} A_n^{\delta}} \right) \Delta_{\mu\nu}^{kl} \varepsilon_{\mu\nu} \right|$$

Докажем стремление к нулю при m, $n \to \infty$ каждого из этих выражений в отдельности.

На основе условия (D) имеем:

$$J_{mn} = \sum_{k,\, l=0}^{p,\, q} \frac{d_{n-\nu}^{l}}{A_n^{\delta}} \sum_{\mu=0}^{m} \frac{A_{\mu}^{\alpha}}{A_{\mu}^{\gamma}} O\left[(\mu+1)^{\gamma-\alpha} (\nu+1)^{\delta-\beta}\right] c_{m-\mu}^{k} =$$

$$= O(1) \sum_{l=0}^{q} \frac{d_{n-\nu}^{l}}{A_n^{\delta}} \to 0 \quad \text{при } m,\ n \to \infty.$$

Выражение K_{mn} разделим на 2 части:

$$K_{mn} \leqslant K'_{mn} + K''_{mn},$$

где

$$K'_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} A_{\mu}^{\alpha} \left| \sum_{k,\, l=0,\, q+1}^{p,\, \beta} x_{k,\, l} \right|,$$

$$K''_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} A_{\mu}^{\alpha} \left| \sum_{k=0}^{p} x_{k,\, \beta+1} \right|$$

По условию (D) имеем:

$$K'_{mn}=\sum_{k,\,l=0,\,q+1}^{p,\beta}\frac{A_{n-\nu}^{l+\delta-\beta-1}}{A_n^{\delta}}\sum_{\mu=0}^{m}\frac{A_{\mu}^{\alpha}}{A_{\mu}^{\gamma}}O[(\mu+1)^{\gamma-\alpha}]\,c_{m-\mu}^{k}=$$

$$=O(1)\sum_{l=q+1}^{\beta}\frac{A_{n-\nu}^{l+\delta-\beta-1}}{A_n^{\delta}}\to 0\quad \text{при } m,\ n\to\infty.$$

Далее, учитывая (11), имеем:

$$K''_{mn}=O(1)\sum_{k=0}^{p}\sum_{\mu=0}^{m}A_{\mu}^{\alpha}\frac{c_{m-\mu}^{k}}{A_m^{\gamma}}\sum_{s=0}^{k}|\Delta_{\nu}^{\beta+1}\varepsilon_{\mu+s,\nu}|=$$

$$=O(1)\sum_{k=0}^{p}\sum_{s=0}^{k}\sum_{\mu=0}^{m}c_{\mu}^{k}\frac{A_{m+s-\mu}^{\alpha}}{A_m^{\gamma}}|\Delta_{\nu}^{\beta+1}\varepsilon_{m+s-\mu,\nu}|,$$

и, в силу неравенства

$$\frac{A_{m+s-\mu}^{\alpha}}{A_m^{\gamma}}|\Delta_{\nu}^{\beta+1}\varepsilon_{m+s-\mu,\nu}|\leqslant M,$$

справедливого по условию (28) можем, учитывая (E_2), писать:

$$\lim_{m,\,n}K''_{mn}=O(1)\sum_{k=0}^{p}\sum_{s=0}^{k}\sum_{\mu}c_{\mu}^{k}\lim_{m}\frac{A_{m+s-\mu}^{\alpha}}{A_m^{\gamma}}|\Delta_{\nu}^{\beta+1}\varepsilon_{m+s-\mu,\nu}|=0.$$

По лемме 12 на основе условий (A) и (25) находим:

$$L_{mn}=\sum_{l=0}^{q}\frac{d_{n-\nu}^{l}}{A_n^{\delta}}\left\{\sum_{k=p+1}^{\alpha}\sum_{\mu=0}^{m}A_{\mu}^{\alpha}\frac{A_{m-\mu}^{k+\gamma-\alpha-1}}{A_m^{\gamma}}O[(\mu+1)^{-k}]+\right.$$

$$\left.+O(1)\sum_{t=0}^{l}\sum_{\mu=0}^{m}A_{\mu}^{\alpha}|\Delta_{\mu}^{\alpha+1}\varepsilon_{\mu,\nu+t}|\right\}=$$

$$=\sum_{l=0}^{q}\frac{d_{n-\nu}^{l}}{A_n^{\delta}}\left\{\frac{O(1)}{A_m^{\gamma}}\sum_{k=p+1}^{\alpha}\sum_{\mu=0}^{m}A_{\mu}^{\alpha-k}A_{m-\mu}^{k+\gamma-\alpha-1}+O(1)\right\}\to 0$$

при $m,\ n\to\infty$.

Для оценки выражения M_{mn} рассмотрим отдельно случаи, когда γ, δ — целые числа и когда нет.

Если γ, δ — целые числа, то по лемме 20 из условий (А) и (В) следует:

$$\lim_{m,n} M_{mn} = \sum_{\mu,\nu} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \Big| \sum_{k,\,l=p+1,\,q+1}^{\alpha+1,\,\beta+1} \binom{\alpha+1}{k}\binom{\beta+1}{l} \Bigg(\Delta_{\mu\nu}^{\alpha+1-k\;\beta+1-l} 1 -$$

$$- \lim_{m,n} \frac{A_{m-\mu-k}^{k+\gamma-\alpha-1} A_{n-\nu-l}^{l+\delta-\beta-1}}{A_m^\gamma A_n^\delta} \Bigg) \Delta_{\mu\nu}^{kl} \varepsilon_{\mu\nu} \Big| = 0.$$

Если γ, δ — не целые числа, то, аналогично выражению D_{mn}, имеем:

$$M_{mn} \leqslant K(N_{mn} + P_{mn} + Q_{mn} + R_{mn}),$$

где

$$N_{mn} = \frac{A_{n-\nu}^{q+\delta-\beta}}{A_n^\delta} \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^\alpha \frac{A_{m-\mu}^{p+\gamma-\alpha}}{A_m^\gamma} | \Delta_{\mu\nu}^{p+1\;q+1} \varepsilon_{\mu\nu} |,$$

$$P_{mn} = \frac{A_{n-\nu}^{q+\delta-\beta}}{A_n^\delta} \sum_{k=p+2}^{\alpha+1} \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^\alpha \frac{A_{m-\mu}^{k+\gamma-\alpha-1}}{A_m^\gamma} | \Delta_{\mu\nu}^{k\;q+1} \varepsilon_{\mu\nu} |,$$

$$Q_{mn} = \sum_{l=q+2}^{\beta+1} \frac{A_{n-\nu}^{l+\delta-\beta-1}}{A_n^\delta} \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^\alpha \frac{A_{m-\mu}^{p+\gamma-\alpha}}{A_m^\gamma} | \Delta_{\mu\nu}^{p+1\;l} \varepsilon_{\mu\nu} |,$$

$$R_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^\alpha \Big| \sum_{k,\,l=p+2,\,q+2}^{\alpha+1,\,\beta+1} \binom{\alpha+1}{k}\binom{\beta+1}{l} \Bigg(\Delta_{\mu\nu}^{\alpha+1-k\;\beta+1-l} 1 -$$

$$- \frac{A_{m-\mu-k}^{k+\gamma-\alpha-1} A_{n-\nu-l}^{l+\delta-\beta-1}}{A_m^\gamma A_n^\delta} \Bigg) \Delta_{\mu\nu}^{kl} \varepsilon_{\mu\nu} \Big|$$

По лемме 15 имеем:

$$N_{mn} = \frac{A_{n-\nu}^{q+\delta-\beta}}{A_n^\delta} \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^\alpha \frac{A_{m-\mu}^{p+\gamma-\alpha}}{A_m^\gamma} O[(\mu+1)^{-p-1}] = O(1) \frac{A_{n-\nu}^{q+\delta-\beta}}{A_n^\delta} \to 0$$

при $m, n \to \infty$.

Далее по лемме 14, применяя уже известные преобразования, находим:

$$P_{mn}=O(1)\frac{A_{n-\nu}^{q+\delta-\beta}}{A_n^{\delta}}\sum_{k=p+2}^{\alpha+1}\sum_{\mu=0}^{m}(\mu+1)^{k-1}|\Delta_{\mu\nu}^{k\,q+1}\varepsilon_{\mu\nu}|=$$

$$=O[(\nu+1)^{-q-1}]\frac{A_{n-\nu}^{q+\delta-\beta}}{A_n^{\delta}}\to 0 \quad \text{при } m,\, n\to\infty.$$

Покажем стремление к нулю при $m,\, n\to\infty$ выражения Q_{mn}, для чего разделим ее на две части:

$$Q_{mn}\leqslant K(Q'_{mn}+Q''_{mn}),$$

где

$$Q'_{mn}=\sum_{l=q+2}^{\beta}\frac{A_{n-\nu}^{l+\delta-\beta-1}}{A_n^{\delta}}\sum_{\mu=0}^{m}A_{\mu}^{\alpha}\frac{A_{m-\mu}^{p+\gamma-\alpha}}{A_m^{\gamma}}|\Delta_{\mu\nu}^{p+1\,l}\varepsilon_{\mu\nu}|,$$

$$Q''_{mn}=\sum_{\mu=0}^{m}A_{\mu}^{\alpha}\frac{A_{m-\mu}^{p+\gamma-\alpha}}{A_m^{\gamma}}|\Delta_{\mu\nu}^{p+1\,\beta+1}\varepsilon_{\mu\nu}|$$

По лемме 15 имеем:

$$Q'_{mn}=\sum_{l=q+2}^{\beta}\frac{A_{n-\nu}^{l+\delta-\beta-1}}{A_n^{\delta}}\sum_{\mu=0}^{m}A_{\mu}^{\alpha}\frac{A_{m-\mu}^{p+\gamma-\alpha}}{A_m^{\gamma}}O[(\mu+1)^{-p-1}]=$$

$$=O(1)\sum_{l=q+2}^{\beta}\frac{A_{n-\nu}^{l+\delta-\beta-1}}{A_n^{\delta}}\to 0 \quad \text{при } m,\, n\to\infty.$$

Далее, учитывая (11), имеем:

$$Q''_{mn}=O(1)\sum_{t=0}^{\beta+1}\sum_{\mu=0}^{m}A_{\mu}^{\alpha-p-1}\frac{A_{m-\mu}^{p+\gamma-\alpha}}{A_m^{\gamma}}(\mu+1)^{p+1}|\Delta_{\mu}^{p+1}\varepsilon_{\mu,\,\nu+t}|$$

По лемме 12 для произвольного $\varepsilon>0$ можно найти такое $N=N(\varepsilon,\nu)$, что для всех $\mu>N$ будем иметь:

$$O(1)\sum_{t=0}^{\beta+1}(\mu+1)^{p+1}|\Delta_{\mu}^{p+1}\varepsilon_{\mu,\,\nu+t}|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$Q''_{mn} = O(1) \sum_{t=0}^{\beta+1} \sum_{\mu=0}^{N} A_{\mu}^{\alpha-p-1} \frac{A_{m-\mu}^{p+\gamma-\alpha}}{A_m^{\gamma}} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\mu=N+1}^{m} A_{\mu}^{\alpha-p-1} \frac{A_{m-\mu}^{p+\gamma-\alpha}}{A_m^{\gamma}} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{A_m^{\gamma}} \sum_{\mu=0}^{m} A_{\mu}^{\alpha-p-1} A_{m-\mu}^{p+\gamma-\alpha} = \varepsilon,$$

ибо в первой сумме можем взять m как угодно большим, а $p+\gamma-\alpha<\gamma$.

Стремление к нулю при $m, n \to \infty$ выражения R_{mn} доказывается при помощи леммы 20.

Легко сообразить, как провести доказательство, если одно из чисел γ, δ — целое, другое нет.

Замечание 4. Из хода предыдущего рассуждения мы видим, что при $0 \leqslant \gamma, \delta \leqslant \alpha, \beta$ условие (d_1^4) следует из условий (B), (25), (D) и (E_2). Аналогично условие (d_2^4) следует из условий (B), (26), (D) и (E_1).

2) Пусть $\gamma > \alpha$, $\delta \leqslant \beta$. Из замечаний 2 и 4 вытекает, что для множителей суммируемости типа $(C_b^{\alpha,\beta}\ \ C_b^{\alpha,\delta})$ достаточны условия (B), (C_1), (26), (27), (E_1) и (43). В силу включения $C_b^{\alpha,\delta} \subset C_b^{\gamma,\delta}$ эти условия достаточны и для типа $(C_b^{\alpha,\beta}, C_b^{\gamma,\delta})$, а по леммам 2 и 5 также необходимы.

3) Пусть $\gamma \leqslant \alpha, \delta > \beta$. Аналогично случаю 2) теперь необходимы и достаточны условия (B), (25), (C_2), (28), (42) и (E_2).

4) Пусть γ, $\delta > \alpha$, β. Аналогично случаям 2) и 3) теперь необходимы и достаточны условия (B), (25), (26), (A), (42) и (43).

2. Множители суммируемости типа $(C_b^{\alpha,\beta}, C_r^{\gamma,\delta})$

Пусть $0 \leqslant \gamma \leqslant \alpha$. Ограничимся доказательством условия (f_1^4), для чего, используя (68), (11), (12) и (14) перепишем его в виде:

$$\lim_{m} \sum_{\mu=0}^{m} A_{\mu}^{\alpha} \left| \sum_{k=0}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{k} \left(\frac{A_{m-\mu-k}^{k+\gamma-\alpha-1}}{A_m^{\gamma}} - \Delta_{\mu}^{\alpha+1-k} 1 \right) \Delta_{\mu}^{k} \varepsilon_{\mu\nu} \right| = 0$$

$$(\nu = 0, 1, \ \ .).$$

Вместо последнего выражения достаточно рассматривать стремление к нулю при $m \to \infty$ следующих двух:

$$S_m = \sum_{k=0}^{p} \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^\alpha \frac{c_{m-\mu}^{k}}{A_m^\gamma} \left| \Delta_\mu^k \varepsilon_{\mu\nu} \right|,$$

$$T_m = \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^\alpha \left| \sum_{k=p+1}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{k} \left(\frac{A_{m-\mu-k}^{k+\gamma-\alpha-1}}{A_m^\gamma} - \Delta_\mu^{\alpha+1-k} 1 \right) \Delta_\mu^k \varepsilon_{\mu\nu} \right|$$

Теперь, в силу неравенства

$$\frac{A_{m+s-\mu}^{\alpha}}{A_m^\gamma} \left| \varepsilon_{m+s-\mu,\nu} \right| \leqslant M,$$

справедливого по условию (28), можем, учитывая (F_2), писать:

$$\lim_m S_m = O(1) \sum_{k=0}^{p} \sum_{s=0}^{k} \sum_{\mu} c_\mu^k \lim_m \frac{A_{m+s-\mu}^{\alpha}}{A_m^\gamma} \left| \varepsilon_{m+s-\mu,\nu} \right| = 0.$$

Далее, если γ — целое число, то из соотношения

$$A_\mu^\alpha \left| \sum_{k=p+1}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{k} \frac{A_{m-\mu-k}^{k+\gamma-\alpha-1}}{A_m^\gamma} \Delta_\mu^k \varepsilon_{\mu\nu} \right| = O(1) \sum_{k=p+1}^{\alpha+1} \left(\frac{m+1-\mu}{m+1} \right)^{k+\gamma-\alpha-1}$$
$$\left(\frac{\mu+1}{m+1} \right)^{\alpha+1-k} (\mu+1)^{k-1} \left| \Delta_\mu^k \varepsilon_{\mu\nu} \right| = O(1) \sum_{k=p+1}^{\alpha+1} (\mu+1)^{k-1} \left| \Delta_\mu^k \varepsilon_{\mu\nu} \right| \tag{73}$$

на основе условий (A) и (25) по лемме 11 следует

$$\lim_m T_m = \sum_{\mu} A_\mu^\alpha \left| \sum_{k=p+1}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{k} \left(\lim_m \frac{A_{m-\mu-k}^{k+\gamma-\alpha-1}}{A_m^\gamma} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \Delta_\mu^{\alpha+1-k} 1 \right) \Delta_\mu^k \varepsilon_{\mu\nu} \right| = 0. \tag{74}$$

Если же γ — не целое число, то

$$T_m \leqslant K(T_m' + T_m''),$$

где

$$T'_m = \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^\alpha \frac{A_{m-\mu}^{p+\gamma-\alpha}}{A_m^\gamma} \left| \Delta_\mu^{p+1} \varepsilon_{\mu\nu} \right|,$$

$$T''_m = \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^\alpha \left| \sum_{k=p+2}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{k} \left(\frac{A_{m-\mu-k}^{k+\gamma-\alpha-1}}{A_m^\gamma} - \Delta_\mu^{\alpha+1-k} 1 \right) \Delta_\mu^k \varepsilon_{\mu\nu} \right|$$

По лемме 12 из условий (A) и (25) (аналогично тому, как при рассмотрении Q''_{mn}) следует $\lim\limits_m T'_m = 0$. Соотношение $\lim\limits_m T''_m = 0$ следует из (73) и (74), если в них $p+1$ заменить на $p+2$.

Замечание 5. Из хода предыдущего рассуждения мы видим, что при $0 \leqslant \gamma \leqslant \alpha$ условие (f_1^4) следует из условий (25), (28) и (F_2). Аналогично, условие (f_2^4) следует из условий (26), (27) и (F_1).

Нетрудно рассмотреть случай $\gamma > \alpha$.

Итак (заметив, что из условий (F) следуют (E)), доказана

Теорема 6. *Если $0 \leqslant \gamma, \delta \leqslant \alpha, \beta$, то для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типов* а) $\left(C_b^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta}\right)$ б) $\left(C_b^{\alpha,\beta}, C_b^{\gamma,\delta}\right)$, в) $\left(C_b^{\alpha,\beta}, C_r^{\gamma,\delta}\right)$, *необходимы и достаточны в случаях* а) *и* б) *условия* (B), (C), (D) *и* (E), *а в случае* в) — *условия* (B), (C), (D) *и* (F).

Если $\delta > \beta$, то необходимы и достаточны те же условия, что и при $\delta = \beta$.

Если $\gamma > \alpha$, то необходимы и достаточны те же условия, что и при $\gamma = \alpha$.

Дополнение к теореме 6. *Если $\delta = \beta$, то можем отбросить условие* (C_1), *а при $\gamma = \alpha$ — условие* (C_2).

Если $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, то можно отбросить также условие (D).

Доказательство. Пусть, например, $\delta = \beta$. Из условия (28) следует (A). Покажем, что из условий (A), (B) и (42) следует не только условие (25). но и (53).

Действительно, по лемме 13 из (A) и (B) следует (30), из которого, в силу (42), следуют (57) и (58). Из (58), в силу (30), следуют (25) и (53).

Если $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, то условие (D) следует из (24).

Замечание 6. Случай б) теоремы 6 при $\alpha = \beta$ и $\gamma = \delta = 0$ впервые доказал Мур [14], а случаи а) и в) при $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ — Гамильтон [10].

Случай б) теоремы 6 при $\gamma = \delta = 0$ впервые доказан в [15] и передоказан в [2], а случаи а) и в) впервые доказаны в [2].

Однако в [15] α и β — любые комплексные числа с $R(\alpha)$. $R(\beta) > 0$, а в [2] — $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$.

§ 9. Множители суммируемости типов $(C_O^{\alpha,\beta}, B)$

Для дальнейшего нам нужна

Лемма 21. *Из условий* (G) *и* (H) *при* $0 \leqslant \gamma, \delta \leqslant \alpha, \beta$ *следуют условия* (D) *и* (F).

Доказательство. По условию (G_1) имеем:

$$\lim_n (n+1)^{\beta-\delta} \sum_{m=k}^{\infty} (m+1)^{\alpha} \left| \Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn} \right| = 0 \quad (k = 0, 1, \quad .)$$

и подавно

$$\lim_n (n+1)^{\beta-\delta} \sum_m (m+1)^{\alpha} \left| \Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{m+k,n} \right| = 0 \quad (k = 0, 1, \quad .).$$

Учитывая легко доказываемое тождество

$$\sum_{\mu=0}^{m} A_\mu^\alpha \Delta_\mu^{\alpha+1} \varepsilon_{\mu+k,n} = \sum_{\mu=0}^{m} \Delta_\mu \varepsilon_{\mu+k,n} - \sum_{\mu=0}^{\alpha-1} A_m^{\alpha-\mu} \Delta_m^{\alpha-\mu} \varepsilon_{m+k+1,n}$$

$$= \varepsilon_{kn} - \sum_{\mu=0}^{\alpha} A_m^{\mu} \Delta_m^{\mu} \varepsilon_{m+k+1,n}$$

$$= \varepsilon_{kn} - V_{mn},$$

убеждаемся в существовании $\lim\limits_m V_{mn}$ и в том, что

$$\lim_m (n+1)^{\beta-\delta} (\varepsilon_{kn} - \lim_m V_{mn}) = 0 \quad (k = 0, 1, \quad .). \tag{75}$$

Покажем, что из (G_1) и (H) следует (27). Действительно, так как условие (G_1) влечет за собой условие (C_1), то имеем

$$(n+1)^{\beta-\delta} (\varepsilon_{kn} - \lim_m V_{mn}) = O(1) \quad (k, n = 0, 1, \quad .). \tag{76}$$

Далее, из условия (H) следует

$$(n+1)^{\beta-\delta} \varepsilon_{kn} = O(1) \quad (k, n \geqslant N).$$

Вставляя последнее в (76), получаем для всех $n \geqslant N$ (а следовательно и для всех $n = 0, 1, \quad .$)

$$(n+1)^{\beta-\delta} \lim_m V_{mn} = O(1).$$

Отсюда и из (76) теперь следует (27).

Далее, так как из (27) следует (A), то можем к выражению V_{mn} применить лемму 12, откуда

$$\Delta_m^{\mu} \varepsilon_{m+k+1,n} = o(m^{-\mu}) \quad (0 < \mu \leqslant \alpha).$$

Следовательно,

$$\lim_m V_{mn} = \lim_m \varepsilon_{mn} \quad (n = 0, 1, \quad .). \tag{77}$$

Учитывая (77) и (55) (справедливое в силу (H)), по теореме о двойном и повторных пределах мы вправе писать

$$\lim_n \lim_m (n+1)^{\beta-\delta} \varepsilon_{mn} = \lim_n (n+1)^{\beta-\delta} \lim_m V_{mn} = 0.$$

Последнее вместе с (75) и (77) влечет (F_1).

Аналогично из (G_2) и (H) следует (F_2).

Из условий (F) и (H) следует условие (D). Лемма доказана.

Так как условия, достаточные для $(C_O^{\alpha,\beta},\ C_r^{\gamma,\delta})$, достаточны как для $(C_O^{\alpha,\beta},\ C_b^{\gamma,\delta})$. так и для $(C_O^{\alpha,\beta},\ C^{\gamma,\delta})$, то достаточно рассмотреть случай $(C_O^{\alpha,\beta},\ C_r^{\gamma,\delta})$.

Учитывая замечания 2, 4 и 5, согласно теореме 4, нам остается доказать, что из условий лемм 2, 5, 7 и 10 следует условие (d^5).

1) Пусть $0 \leqslant \gamma,\ \delta \leqslant \alpha,\ \beta$. Тогда

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} A_\mu^a A_\nu^\beta \left| \mathfrak{D}_{mn}\varepsilon_{\mu\nu} - \Delta_{\mu\nu}^{\alpha+1,\beta+1} \varepsilon_{\mu\nu} \right| \leqslant A_{mn} + B_{mn} + C_{mn} + X_{mn},$$

где A_{mn}, B_{mn} и C_{mn} имеют те же значения, что в § 7, а

$$X_{mn} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \left| \sum_{k,l=p+1,q+1}^{\alpha+1,\beta+1} \binom{\alpha+1}{k}\binom{\beta+1}{l} \left(\frac{A_{m-\mu-k}^{k+\gamma-\alpha-1} A_{n-\nu-l}^{l+\delta-\beta-1}}{A_m^\gamma A_n^\delta} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \Delta_{\mu\nu}^{\alpha+1+k,\beta+1+l} 1 \right) \Delta_{\mu\nu}^{kl} \varepsilon_{\mu\nu} \right|$$

Но, в силу неравенства

$$\frac{A_{m-\mu}^\alpha A_{n-\nu}^\beta}{A_m^\gamma A_n^\delta} \left| \Delta_{mn}^{kl} \varepsilon_{m-\mu,n-\nu} \right| \leqslant M,$$

справедливого по условию (D), можем, учитывая (H) и формулы (11), писать

$$\lim_{m,n} A_{mn} = O(1) \sum_{k,l=0}^{p,q} \sum_{\mu,\nu} c_\mu^k d_\nu^l \lim_{m,n} \frac{A_{m-\mu}^\alpha A_{n-\nu}^\beta}{A_m^\gamma A_n^\delta} \left| \Delta_{mn}^{kl} \varepsilon_{m-\mu,n-\nu} \right| = 0.$$

Вместо выражения B_{mn}, в силу неравенства

$$B_{mn} \leqslant K(B'_{mn} + B''_{mn}),$$

рассмотрим стремление к нулю следующих двух выражений:

$$B'_{mn} = \sum_{k,\,l=0,\,q+1}^{p,\beta} \sum_{\mu,\nu=0}^{m,\,n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \frac{c^k_{m-\mu} \; A^{l+\delta-\beta-1}_{n-\nu}}{A^\gamma_m \; A^\delta_n} \left| \Delta^{kl}_{\mu\nu} \, \varepsilon_{\mu\nu} \right|,$$

$$B''_{mn} = \sum_{k=0}^{p} \sum_{\mu,\nu=0}^{m,\,n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \frac{c^k_{m-\mu}}{A^\gamma_m} \left| \Delta^{k\;\beta+1}_{\mu\nu} \, \varepsilon_{\mu\nu} \right|.$$

Умножив и разделив все члены внутренней суммы выражения B'_{mn} на $(\mu+1)^{\alpha-\gamma}(\nu+1)^l$ и применяя (11), находим:

$$B'_{mn} = O(1) \sum_{k,\,l=0,\,q+1}^{p,\,\beta} \sum_{s=0}^{k} \sum_{\mu,\nu=0}^{m,\,n} \frac{(\mu+1)^\gamma}{A^\gamma_m} c^k_{m-\mu}$$

$$\cdot \frac{A^{\beta-l}_\nu \, A^{l+\delta-\beta-1}_{n-\nu}}{A^\delta_n} \left| (\mu+1)^{\alpha-\gamma}(\nu+1)^l \Delta^l_\nu \, \varepsilon_{\mu+s,\,\nu} \right|$$

На основе леммы 19 последовательность

$$\left\{ \left| (\mu+1)^{\alpha-\gamma}(\nu+1)^l \Delta^l_\nu \, \varepsilon_{\mu+s,\,\nu} \right| \right\}$$

$rcrn$-сходится [19] и, применяя условие 10) § 2, легко убедиться, что $\lim\limits_{m,\,n} B'_{mn} = 0$.

Выражение B''_{mn} легко привести к виду:

$$B''_{mn} = O(1) \sum_{k=0}^{p} \sum_{s=0}^{k} \sum_{\mu=0}^{m} \frac{(\mu+1)^\gamma}{A^\gamma_m} c^k_{m-\mu} (\mu+1)^{\alpha-\gamma} \sum_\nu A^\beta_\nu \left| \Delta^{\beta+1}_\nu \, \varepsilon_{\mu+s,\,\nu} \right| \tag{78}$$

По условию (G_2) можем для произвольного $\varepsilon > 0$ указать такое $N = N(\varepsilon)$, что для всех $\mu > N$

$$O(1)(\mu+1)^{\alpha-\gamma} \sum_\nu A^\beta_\nu \left| \Delta^{\beta+1}_\nu \, \varepsilon_{\mu+s,\,\nu} \right| < \frac{\varepsilon}{2p^2 M},$$

а для $\mu \leqslant N$

$$(\mu+1)^{\alpha-\gamma} \sum_\nu A^\beta_\nu \left| \Delta^{\beta+1}_\nu \, \varepsilon_{\mu+s,\,\nu} \right| \leqslant M'$$

---

[19] См. Гамильтон [9].

Взяв в (78) $m > N$ достаточно большим, получаем

$$B''_{mn} \leqslant \sum_{k=0}^{p} \sum_{s=0}^{k} \left(O(1) \sum_{\mu=0}^{N} \frac{(\mu+1)^{\gamma}}{A_m^{\gamma}} + \sum_{\mu=N+1}^{m} c^k_{m-\mu} \frac{\varepsilon}{2p^2 M} \right) < \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{m,n} B_{mn} = 0$. Аналогично можем доказать, что также $\lim\limits_{m,n} C_{mn} = 0$.

Далее, если γ, δ — целые числа, то, по лемме 20, $\lim\limits_{m,n} X_{mn} = 0$.

Пусть γ, δ — не целые числа. Тогда

$$X_{mn} = K(E_{mn} + F_{mn} + G_{mn} + Y_{mn}),$$

где E_{mn}, F_{mn} и G_{mn} имеют те же значения, что в § 7, а

$$Y_{mn} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta \Bigg| \sum_{k,l=p+2,q+2}^{\alpha+1,\beta+1} \binom{\alpha+1}{k}\binom{\beta+1}{l} \left(\frac{A^{k+\gamma-\alpha-1}_{m-\mu-k} A^{l+\delta-\beta-1}_{n-\nu-l}}{A_m^\gamma A_n^\delta} - \Delta^{\alpha+1-k\ \beta+1-l}_{\mu\nu} 1 \right) \Delta^{kl}_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \Bigg| \to 0$$

при $m, n \to \infty$ по лемме 20. Докажем стремление к нулю выражений E_{mn}, F_{mn} и G_{mn}. Имеем

$$E_{mn} = O(1) \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} A_\mu^{\alpha-p-1} A_\nu^{\beta-q-1} \frac{A^{p+\gamma-\alpha}_{m-\mu} A^{q+\delta-\beta}_{n-\nu}}{A_m^\gamma A_n^\delta} \cdot \left| (\mu+1)^{p+1} (\nu+1)^{q+1} \Delta^{p+1\ q+1}_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \right|$$

На основе леммы 18 последовательность

$$\left\{ \left| (\mu+1)^{p+1} (\nu+1)^{q+1} \Delta^{p+1\ q+1}_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \right| \right\}$$

$rcrn$-сходится, и по условиям 10) § 2 легко убедиться, что $\lim\limits_{m,n} E_{mn} = 0$.

Далее, аналогично доказательству того, что $\lim\limits_{m,n} B''_{mn} = 0$, здесь по лемме 17 получаем $\lim\limits_{m,n} F_{mn} = 0$, ибо F_{mn} легко привести к виду:

$$F_{mn} = O(1) \sum_{k=p+2}^{\alpha+1} \frac{1}{A_n^\delta} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu^{\beta-q-1} A^{q+\delta-\beta}_{n-\nu} (\nu+1)^{q+1} \sum_{\mu} (\mu+1)^{k-1} \left| \Delta^{k\ q+1}_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \right|.$$

Аналогично доказывается стремление к нулю выражения G_{mn}.

З а м е ч а н и е 7. Из хода предыдущего рассуждения видно, что при $0 \leqslant \gamma, \delta \leqslant \alpha, \beta$ условие (d^5) вытекает из условий (B), (D), (G), (H), (47) и (48), а по лемме 21 для этого достаточны условия (B), (G) и (H)

2) Пусть $\gamma > \alpha$, $\delta \leqslant \beta$. Из замечаний 2, 4, 5 и 7 следует, что для множителей суммируемости типа $(C_O^{\alpha,\beta}, C_r^{\gamma,\delta})$ достаточны условия (B), (G_1) (54) и (55), а по леммам 2 и 10 также необходимы.

3) Пусть $\gamma \leqslant \alpha$, $\delta > \beta$. Теперь необходимы и достаточны условия (B), (53), (G_2) и (56).

4) Пусть γ, $\delta > \alpha$, β. Здесь необходимы и достаточны условия (B) (53), (54) и (51).

Итак, доказана

Теорема 7. *Если* $0 \leqslant \gamma$, $\delta \leqslant \alpha$, β, *то для того, чтобы числа* ε_{mn} *были множителями суммируемости типов* а) $(C_O^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta})$, б) $(C_O^{\alpha,\beta}, C_b^{\gamma,\delta})$, в) $(C_O^{\alpha,\beta}\ C_r^{\gamma,\delta})$, *необходимы и достаточны условия* (B). (G) *и* (H).

Если $\delta > \beta$, *то необходимы и достаточны те же условия, что и при* $\delta = \beta$.

Если $\gamma > \alpha$, *то необходимы и достаточны те же условия, что и при* $\gamma = \alpha$.

Дополнение к теореме 7. *Если* $\delta = \beta$, *то можем условие* (G_1) *заменить условием* (47) *а если* $\gamma = \alpha$ — *условие* (G_2) *условием* (48).

Если $\delta = \beta$ *и* $\gamma = \alpha$ *одновременно, то можем дополнительно условие* (H) *заменить условием* (A), *а если* $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ — отбросить условие (H).

Доказательство. Пусть $\delta = \beta$. Учитывая, что из (47) вытекает (42), то, доказывая дополнение к теореме 6, мы уже доказали, что из (A), (B) и (47) следует (53). В свою очередь, рассуждением, аналогичным приведенному в доказательстве леммы 21, обнаруживаем, что из (G_2) и (56) следует (A)

Доказательство того, что при $\delta = \beta$ и $\gamma = \alpha$ условие (51) можно заменить на (A) или отбросить, уже содержится в конце доказательства леммы 9.

Замечание 8. Случай $\gamma = \delta = 0$ теоремы 7 впервые доказан в [2] в предположении, что $0 \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant 1$. Случаи а) и в) теоремы 7 при $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ впервые доказаны Кожима [13] (необходимость) и Харди [11] (достаточность). Случай б) при $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ впервые доказал Гамильтон [10].

§ 10. Примеры

Теоремами 5, 6 и 7 решен вопрос о множителях суммируемости рассматриваемых типов. Условия этих теорем мы назвали эффективными. В настоящем параграфе на конкретных примерах мы убедимся в том, что условия этих теорем действительно эффективны.

Прежде чем приступить к примерам, заметим, что из теорем 5, 6 и 7 непосредственно следует

Теорема 8. *Если* $\varepsilon_{mn} = \varepsilon'_m \ \varepsilon''_n$, *то для того, чтобы числа* ε_{mn} *были при* $0 \leqslant \gamma$, $\delta \leqslant \alpha$, β *множителями суммируемости типов* $(C_r^{\alpha,\beta}, B)$, *необходимы и достаточны условия* (B) *и* (D), *а для типов* $(C_b^{\alpha,\beta}, B)$ *и* $(C_0^{\alpha,\beta}, B)$ — *условия* (B) *и* (F).

Если $\delta > \beta$, *то необходимы и достаточны те же условия, что при* $\delta = \beta$.

Если $\gamma > \alpha$, *то необходимы и достаточны те же условия, что при* $\gamma = \alpha$.

1. Множитель $x^m y^n$ $(x, y \neq 0, 1)$

Условие (A) очевидно выполняется при $|x|, |y| \leqslant 1$. Кроме того, например при $|x| \leqslant 1$ и $\varkappa \geqslant 0$, имеем [20]:

$$\Delta_m^{\varkappa} x^m = \sum_k A_k^{-\varkappa-1} x^{k+m} = (1-x)^{\varkappa} x^m \tag{79}$$

Условия (B), (D) и (F) выполняются тогда и только тогда, если $|x|, |y| < 1$, и по теореме 8 доказана

Теорема 9. *Числа* $x^m y^n (x, y \neq 0, 1)$ *являются множителями суммируемости типов* (A, B) *тогда и только тогда, если*

$$|x|, |y| < 1.$$

2. Множители $(m+1)^{-s}(n+1)^{-t}$ и $(A_m^s A_n^t)^{-1}$ $(s, \ t \neq 0)$

Условие (A) очевидно выполняется при $s, t > 0$.

Для дальнейшего нам нужна следующая формула [21]:

$$\sum_k \frac{A_k^{\delta}}{A_{k+m}^{\sigma}} = \frac{\sigma}{\sigma-\delta-1} \frac{1}{A_m^{\sigma-\delta-1}}, \tag{80}$$

где $\sigma \geqslant 0$, $\sigma - \delta > 1$ и $m = 0, 1,$

Из формулы (80) непосредственно следует

$$\Delta_m^{\varkappa} (A_m^s)^{-1} = \frac{s}{s+\varkappa} (A_m^{s+\varkappa})^{-1} \quad (\varkappa \geqslant 0). \tag{81}$$

---

[20] Так как ряд, фигурирующий в условии (B), является произведением двух простых рядов, то $\Delta_{mn}^{\varkappa\lambda} \varepsilon_{mn}$ мы не вычисляем. Так же поступим в последующих примерах.

[21] См. [8], лемма 1.

Последовательным применением формулы конечных приращений находим:

$$\Delta_m(m+1)^{-s} = s(m+\Theta_1)^{-s-1} \quad (1 < \Theta_1 < 2),$$

$$\Delta_m^{\varkappa}(m+1)^{-s} = \varkappa!\, A_{\varkappa}^{s-1}(m+\Theta_{\varkappa})^{-s-\varkappa} \sim \tag{82}$$

$$\sim \varkappa!\, A_{\varkappa}^{s-1}(m+1)^{-s-\varkappa} \quad (1 \leqslant \Theta_{\varkappa} < \varkappa+1,\ \varkappa = 0,\ 1,\ \ \ .).$$

Выполнение условий теоремы 8 легко проверяется. Перечислим лишь результаты.

Условие (B) выполняется при $s,\ t > 0$; условие (D) — при[22] $s,\ t \geqslant (\alpha-\gamma),\ (\beta-\delta)$; а условие (F) — при $s,\ t > (\alpha-\gamma),\ (\beta-\delta)$.

Итак, доказана

Теорема 10. *Числа* $(m+1)^{-s}(n+1)^{-t}$ *и* $(A_m^s A_n^t)^{-1}$ $(s,\ t \neq 0)$ *являются множителями суммируемости типов* $(C_r^{\alpha,\beta}, B)$ *тогда и только тогда, если одновременно*

$$s,\ t > 0 \ \text{и}\ s,\ t \geqslant \alpha-\gamma,\ \beta-\delta;$$

а множителями суммируемости типов $(C_b^{\alpha,\beta}, B)$ *и* $(C_0^{\alpha,\beta}, B)$ *тогда и только тогда, если одновременно*

$$s, t > 0 \ \text{и}\ s, t > \alpha-\gamma,\ \beta-\delta.$$

3. Множитель $\dfrac{(-1)^{m+n}}{(m+1)^s(n+1)^t}$

Условие (A) выполняется при $s,\ t \geqslant 0$. Из формул (12), (79) и (82) следует

$$\Delta_m^{\varkappa}\frac{(-1)^m}{(m+1)^s} = (-1)^m 2^{\varkappa}\sum_{k=0}^{\varkappa}(-2)^{-k}\binom{\varkappa}{k}k!\,A_k^{s-1}(m+\Theta_k)^{-s-k} \tag{83}$$

$$\sim (-1)^m 2^{\varkappa}(m+1)^{-s} \quad (\varkappa = 0,\ 1,\ \ \ .).$$

Условие (B) выполняется при $s,\ t > \alpha+1,\ \beta+1$; условие (D) — при $s,\ t \geqslant (\alpha-\gamma),\ (\beta-\delta)$; а условие (F) — при $s,\ t > (\alpha-\gamma),\ (\beta-\delta)$.

Итак, доказана

Теорема 11. *Числа* $\dfrac{(-1)^{m+n}}{(m+1)^s(n+1)^t}$ *являются множителями суммируемости типов (A, B) тогда и только тогда, если*

$$s,\ t > \alpha+1,\ \beta+1.$$

---

[22] Здесь и в дальнейшем применяем обозначения

$$(\omega) = \begin{cases} \omega, & \text{при } \omega > 0, \\ 0, & \text{при } \omega \leqslant 0. \end{cases}$$

4. Множители $(m+n+1)^{-s}$ и $\left(A^s_{m+n}\right)^{-1}$ $(s \neq 0)$

Условие (A) выполняется при $s > 0$. Из (81) и (82) следует соответственно

$$\Delta^{\varkappa\lambda}_{mn}\left(A^s_{m+n}\right)^{-1} = \frac{s}{s+\varkappa}\Delta^{\lambda}_{n}\left(A^{s+\varkappa}_{m+n}\right)^{-1} = \frac{s}{s+\varkappa+\lambda}\left(A^{s+\varkappa+\lambda}_{m+n}\right)^{-1},$$

$$\begin{aligned} \Delta^{\varkappa\lambda}_{mn}(m+n+1)^{-s} &= \varkappa!\, A^{s-1}_{\varkappa}\Delta^{\lambda}_{n}(m+n+\Theta_\varkappa)^{-s-\varkappa} = \\ &= \varkappa!\, A^{s-1}_{\varkappa}\, \lambda!\, A^{s+\varkappa-1}_{\lambda}(m+n+\Theta_{\varkappa+\lambda})^{-s-\varkappa-\lambda} \sim \\ &\sim (\varkappa+\lambda)!\, A^{s-1}_{\lambda+\varkappa}(m+n+1)^{-s-\varkappa-\lambda} \end{aligned} \tag{84}$$

Условие (B) выполнено при $s > 0$, ибо тогда

$$\sum_{m,n}\frac{(m+1)^{\alpha}(n+1)^{\beta}}{(m+n+1)^{s+\alpha+\beta+2}} =$$

$$= \sum_{m,n}\left(\frac{m+1}{m+n+1}\right)^{\alpha}\left(\frac{n+1}{m+n+1}\right)^{\beta}\frac{1}{(m+n+1)^{s+2}} < \infty$$

Далее, так как по формуле (80) в обоих случаях

$$\sum_m (m+1)^{\alpha}\left|\Delta^{\alpha+1}_m \varepsilon_{mn}\right| = O(1)\sum_m \frac{A^{\alpha}_m}{A^{s+\alpha+1}_{m+n}} = \frac{O(1)}{(n+1)^s},$$

то условие (C_1) выполняется при $s \geqslant (\beta - \delta)$, а условие ($G_1$) — при $s > (\beta - \delta)$.

Условие (E_1) выполнено, так как $s > 0$, а условие (F_1) выполняется при $s > (\beta - \delta)$.

Аналогично проверяются условия (C_2), (G_2), (E_2) и (F_2).

Для проверки условий (D) и (H) нам нужна

Лемма 22. *Для того, чтобы при $x, y \geqslant 0$ было*

$$Z_{mn} = \frac{(m+1)^x(n+1)^y}{(m+n+1)^z} = O(1)$$

(*соответственно* $\lim\limits_{m,n} Z_{mn} = 0$), *необходимо и достаточно условие*

$$z \geqslant x + y \text{ (соответственно } z > x + y).$$

Доказательство. Достаточность этих условий видна из соотношения

$$Z_{mn} = \left(\frac{m+1}{m+n+1}\right)^x\left(\frac{n+1}{m+n+1}\right)^y\frac{1}{(m+n+1)^{z-x-y}}$$

Эти условия и необходимы, ибо если $z = x + y - \varepsilon < x + y$, то

$$Z_{nn} = \frac{(n+1)^{x+y}}{(2n+1)^{x+y-\varepsilon}} \to \infty,$$

а если $z = x + y$, то

$$Z_{nn} = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{x+y} \to 2^{-x-y}.$$

По лемме 22 условие (D) выполняется при $s \geqslant (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)$, а условие (H) — при $s > (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)$.
Итак, доказана

Теорема 12. *Числа* $(m+n+1)^{-s}$ *и* $(A_{m+n}^{s})^{-1} (s \neq 0)$ *являются множителями суммируемости типов* $(C_r^{\alpha,\beta}, B)$, $(C_b^{\alpha,\beta}, C^{\gamma,\delta})$ *и* $(C_b^{\alpha,\beta}, C_b^{\gamma,\delta})$ *тогда и только тогда, если одновременно*

$$s > 0,\ s \geqslant \alpha - \gamma,\ s \geqslant \beta - \delta \text{ и } s \geqslant \alpha + \beta - \gamma - \delta;$$

типа $(C_b^{\alpha,\beta}, C_r^{\gamma,\delta})$ — *если*

$$s > 0,\ s > \alpha - \gamma,\ s > \beta - \delta \text{ и } s \geqslant \alpha + \beta - \gamma - \delta;$$

а типов $(C_O^{\alpha,\beta}, B)$ — *если*

$$s > 0,\ s > \alpha - \gamma,\ s > \beta - \delta \text{ и } s > \alpha + \beta - \gamma - \delta.$$

Замечание 9. Теоремы 10 и 12 являются обобщениями на двойные ряды теорем 74 и 76 книги Харди [4]. Можно обобщить и теорему 75 этой книги.

5. Множитель $\dfrac{(-1)^{m+n}}{(m+n+1)^s}$

Условие (A) выполняется при $s \geqslant 0$. Из (13), (79), (83) и (84) следует

$$\Delta_{mn}^{\varkappa\lambda} \frac{(-1)^{m+n}}{(m+n+1)^s} \sim (-1)^{m+n} 2^{\varkappa+\lambda} (m+n+1)^{-s} \quad (\varkappa, \lambda = 0,1 \ldots).$$

Поэтому условие (B) выполняется тогда и только тогда, если $s > \alpha + \beta + 2$, ибо в этом случае по формуле (80)

$$\sum_{m,n} \frac{(m+1)^{\alpha} (n+1)^{\beta}}{(m+n+1)^s} = O(1) \sum_{n} \frac{(n+1)^{\beta}}{(n+1)^{s-\alpha-1}} < \infty$$

При $s > \alpha + \beta + 2$ выполняются также все условия (C) — (H).
Итак, доказана

Теорема 13. *Числа* $\dfrac{(-1)^{m+n}}{(m+n+1)^s}$ *являются множителями суммируемости типов (A, B) тогда и только тогда, если*

$$s > \alpha + \beta + 2.$$

Поступило
13 I 1958

Литература

1. Жак И. Е. и Тиман М. Ф., О суммировании двойных рядов. Матем. сб., 1954, **35** (77), 21—56.
2. Кангро Г., О множителях суммируемости для двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1957, **46**, 3—42.
3. Кангро Г и Барон С., Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых методом Чезаро. Докл. АН СССР, 1959, **124**, 751—753.
4. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва 1951.
5. Andersen, A. F., Studier over Cesàro's Summabilitetsmetode. Kopenhagen 1921.
6. Bosanquet, L. S., Note on the Bohr-Hardy theorem. J. London Math. Soc., 1942, **17**, 166—173.
7. Bosanquet, L. S., Note on convergence and summability factors III. Proc. London Math. Soc., (2), 1949, **50**, 482—496.
8. Chow, H. C., Note on convergence and summability factors. J. London Math. Soc., 1954, **29**, 459—476.
9. Hamilton, H. J., Transformations of multiple sequences. Duke Math. J., 1936, **2**, 29—60.
10. Hamilton, H. J., On tansformations of double series. Bull. Amer. Math. Soc., 1936, **42**, 275—283.
11. Hardy, G. H., On the convergence of certain multiple series. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1917, **19**, 86—95.
12. Knopp, K., Beweis eines von I. Schur in der Theorie der C-Summierbarkeit aufgestellten Satzes. J. reine und angew. Math., 1950, **187**, 70—74.
13. Kojima, T., Theorems on double series. Tôhoku Math. J., 1920, **17**, 213—220.
14. Moore, C. N., On convergence factors in multiple series. Trans. Amer. Math. Soc., 1927, **29**, 227—238.
15. Moore, C. N., Summable series and convergence factors. New York 1938.
16. Nigam, T. P., Summability of multiple series. Proc. London Math. Soc., 1940, **46**, 249—269.
17. Robison, G. M., Divergent double sequences and series. Trans. Amer. Math. Soc., 1926, 28, 50—73.

SUMMEERUVUSTEGURID CESÀRO-SUMMEERUVATE JA CESÀRO-TÕKESTATUD KAHEKORDSETE RIDADE JAOKS

Prof., füüs.-mat. tead. dr. G. Kangro ja S. Baron
Geomeetriakateeder

Resümee

Tähendagu $C^{\alpha,\beta}$ α,β-järku Cesàro summeerimismenetlust. Käesolevas artiklis leitakse kahekordsete ridade jaoks summeeruvustegurid tüüpi (A, B), kus $A = C_r^{\alpha,\beta}$, $C_b^{\alpha,\beta}$ või $C_0^{\alpha,\beta}$ ning $B = C^{\gamma,\delta}$, $C_b^{\gamma,\delta}$ või $C_r^{\gamma,\delta}$ Et leida tarvilikud tingimused otsitavate summeeruvustegurite jaoks, kasutatakse peamiselt artiklis [2] tõestatud teoreeme kahekordsete ridade korral. Edasi leitakse, et saadud tarvilikud tingimused osutuvad ka piisavateks, sealjuures piirdutakse täisarvuliste järkudega $\alpha, \beta \geqslant 0$. Selle tõestuse puhul üldistatakse Anderseni [5] kaks tuntud lemmat kahekordsetele ridadele.

Saadud tulemusi rakendatakse 7 näite puhul.

SUMMIERBARKEITSFAKTOREN FÜR CESÀRO-SUMMIERBARE UND CESÀRO-BESCHRÄNKTE DOPPELREIHEN

G. Kangro und S. Baron

Zusammenfassung

Bezeichnen wir mit $C^{\alpha,\beta}$ das Cesàro-Verfahren von der Ordnung α, β.

In diesem Artikel werden Summierbarkeitsfaktoren des Typus (A, B) wo $A = C_r^{\alpha,\beta}$, $C_b^{\alpha,\beta}$ oder $C_0^{\alpha,\beta}$ und $B = C^{\gamma,\delta}$, $C_b^{\gamma,\delta}$ oder $C_r^{\gamma,\delta}$, für Doppelreihen gefunden. Um notwendige Bedingungen für die gesuchten Summierbarkeitsfaktoren abzuleiten, benutzen wir hauptsächlich die in dem Artikel [2] bewiesenen allgemeinen Sätze für Summierbarkeitsfaktoren der Doppelreihen. Nachher wird gezeigt, dass die abgeleiteten notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind, dabei begnügen wir uns mit ganzzahligen $\alpha, \beta \geqslant 0$. Für diesen Beweis werden zwei bekannte Lemmata von Andersen [5] auf Doppelreihen verallgemeinert.

Die erhaltenen Ergebnisse wenden wir in 7 Beispielen an.

ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ И УМНОЖЕНИЕ СУММИРУЕМЫХ ДВОЙНЫХ РЯДОВ

Э. Реймерс

Кафедра геометрии

Введение

В статье [7] мы распространили на двойные ряды теорию теорем о среднем значении, изложенную Юркатом и Пейеримхоффом в статьях [2], [3], [6] для обычных рядов, и применили ее для изучения включений методов суммирования. В настоящей статье мы применяем теоремы о среднем значении для изучения суммируемости произведения Коши суммируемых двойных рядов.

Оказывается, что при помощи теорем о среднем значении можно для некоторого класса неконкретизированных методов суммирования решить проблему суммируемости произведения рядов достаточно эффективно. Получаемые необходимые и достаточные условия для суммируемости произведения рядов не содержат элементов обратных матриц и в большинстве случаев представляются простыми по виду и легко применимы.

Для чтения настоящей работы не нужно предварительного ознакомления со статьей [7]. Ниже в § 1 мы приводим из нее все используемые результаты; в § 1 мы также даем обозначения, основные понятия и определения. Теоремы умножения содержатся в § 2, а в § 3 мы применяем полученные результаты в случае методов Рисса и Вороного-Нёрлунда.

§ 1. Обозначения, основные понятия и определения

1.1. Определение суммируемости. Мы будем рассматривать следующие классы двойных последовательностей[1] $x=\{x_{\mu\nu}\}$: b — класс ограниченных последовательностей (если $|x_{\mu\nu}|<M$, где M константа), c — класс сходящихся последовательностей (существует $\lim\limits_{\mu\nu\to\infty} x_{\mu\nu}=\xi$), bc — класс ограниченно

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то индексы имеют все целочисленные значения от 0 до ∞.

сходящихся последовательностей ($x \epsilon c$ и $x \epsilon b$), rc — класс регулярно сходящихся последовательностей ($x \epsilon c$ и существуют $\lim_{\mu \to \infty} x_{\mu\nu} = x^\nu$ и $\lim_{\nu \to \infty} x_{\mu\nu} = x_\mu$)[2], a — класс абсолютно сходящихся последовательностей[3] ($\Sigma \mid \bar{\Delta}_{\mu\nu} x_{\mu\nu} \mid < \infty$) и классы к нулю сходящихся последовательностей bcn ($x \epsilon bc$ и $\xi = 0$). rcn ($x \epsilon rc$ и $\xi = 0$), $rcrn$ ($x \epsilon rc$ и $\xi = x^\nu = x_\mu = 0$). an ($x \epsilon a$ и $\xi = 0$) и arn ($x \epsilon a$ и $x \epsilon rcrn$)

В дальнейшем для удобства будем буквами α, α', α'' обозначать один из классов bc, bcn, rc, rcn, $rcrn$, a, an и arn; буквой β один из классов bc, bcn, rc, rcn и $rcrn$; буквой γ один из классов a, an и arn.

Определим понятие α-суммируемости ряда

$$\Sigma a_{kl}. \tag{1.1.1}$$

Пусть $x = \{x_{\mu\nu}\} = \{\sum_{kl=0}^{\mu\nu} a_{kl}\}$ Мы скажем, что ряд (1. 1. 1.) α-суммируем треугольным методом $A = (a_{mn\mu\nu})$ (или A_α-суммируем) к сумме $A(x)$, если последовательность $\{A_{mn}(x)\} \epsilon \alpha$, где

$$A_{mn}(x) = \sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu},$$

и если $\lim_{mn \to \infty} A_{mn}(x) = A(x)$. Множество всех последовательностей α-суммируемых методом A обозначим через αA. αA назовем полем α-суммирования метода A. Когда A — единичный метод, то его полем α-суммирования будет класс α и тогда вместо A_α-суммируемости мы можем просто говорить о α-сходимости. Метод A мы будем называть α-реверсивным, если любому $\{A_{mn}(x)\} \epsilon \alpha$ соответствует одна и только одна $x \epsilon \alpha A$.

В настоящей работе мы будем рассматривать лишь треугольные методы суммирования[4] и поэтому не будем всегда отмечать этого. Треугольные методы реверсивны, если они нормальны[4].

---

[2] В дальнейшем всегда будем пользоваться такими обозначениями индексов, например в случае последовательности $\{y_{\mu\nu}\} \epsilon rc$ обозначаем $y_\mu = \lim_{\nu \to \infty} y_{\mu\nu}$ и $y^\nu = \lim_{\mu \to \infty} y_{\mu\nu}$.

[3] Здесь и в дальнейшем Σ означает $\sum_{\mu\nu=0}^{\infty}$, $\bar{\Delta}_\nu x_\nu = x_\nu - x_{\nu-1}$ и $\bar{\Delta}_{\mu\nu} x_{\mu\nu} = \bar{\Delta}_\mu (\bar{\Delta}_\nu x_{\mu\nu}) = \bar{\Delta}_\nu (\bar{\Delta}_\mu x_{\mu\nu})$.

[4] Метод $A = (a_{mn\mu\nu})$ треуголен, если $a_{mn\mu\nu} = 0$, когда $\mu > m$ или $\nu > n$ или оба. Метод A называем нормальным, если он треуголен и $a_{mnmn} \neq 0$.

Если A нормален, то для $x \in \beta A$ определим норму

$$\|x\|_A = \sup_{\mu\nu=0,1\ldots} |A_{\mu\nu}(x)| \tag{1.1.2}$$

и для $x \in \gamma A$ норму

$$\|x\|_{|A|} = \Sigma |\bar{\Delta}_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(x)| \tag{1.1.3}$$

Тогда поля α-суммирования метода A будут BK-пространствами [5].

В пространствах αA будем рассматривать следующие специальные последовательности: $e_{\mu\nu}$ — последовательность, элементы которой нули, за исключением элемента с индексами μ, ν, который равен 1; e_μ — последовательность, где только μ-ная строка отлична от нуля и состоит из чисел 1; e^ν — последовательность, где только ν-ный столбец отличен от нуля и состоит из чисел 1; $\bar{e}_\mu$ — последовательность, элементы, которой равны нулю за исключением μ-ной строки, где 0 и 1 находятся в произвольном расположении; $\bar{e}^\nu$ — последовательность, элементы которой равны нулю за исключением ν-ного столбца, где 0 и 1 находятся в произвольном расположении; e — последовательность, элементы которой равны 1.

Мы скажем, что множество G лежит плотно в αA, если для любого $x \in \alpha A$ и при любом $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $g \in G$, что $\|x - g\| < \varepsilon$. Множество $E \in \alpha A$ называется основным множеством пространства αA, если линейные комбинации всех элементов из E лежат плотно в αA.

Например, в пространствах α основное множество составляют следующие последовательности: 1) в bc: $e_{\mu\nu}$, $\bar{e}_\mu$, $\bar{e}^\nu$ и e; 2) в bcn: $e_{\mu\nu}$, $\bar{e}_\mu$ и $\bar{e}^\nu$; 3) в rc: $e_{\mu\nu}$, e_μ, e^ν и e; 4) в rcn: $e_{\mu\nu}$, e_μ и e^ν; 5) в $rcrn$: $e_{\mu\nu}$; 6) в a: $e_{\mu\nu}$, e_μ, e^ν и e; 7) в an: $e_{\mu\nu}$, e_μ и e^ν; 8) в arn: $e_{\mu\nu}$.

1.2. Условия для метода A. Ниже мы будем пользоваться следующими условиями для треугольной матрицы $A = (a_{mn\mu\nu})$:

(a) $\lim\limits_{mn\to\infty} a_{mn\mu\nu} = 0$;

(b) $\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn\mu\nu} = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_{mn\mu\nu} = 0$;

(b′) $\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn\mu\nu} = a^n_{\mu\nu}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_{mn\mu\nu} = a_{m\mu\nu}$;

---

[5] Т. е. пространствами Банаха, где имеет место сходимость по координатам.

$$
\text{(c)}\ \begin{cases} \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{\mu=0}^{m} a_{mn\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu = n, \\ 0, & \text{если } \nu < n, \end{cases} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_{mn\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu = m, \\ 0, & \text{если } \mu < m; \end{cases} \end{cases}
$$

$$
\text{(c}'\text{)}\ \begin{cases} \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{\mu=0}^{m} a_{mn\mu\nu} = \begin{cases} L^n, & \text{если } \nu = n, \\ 0, & \text{если } \nu < n, \end{cases} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_{mn\mu\nu} = \begin{cases} L_m, & \text{если } \mu = m, \\ 0, & \text{если } \mu < m; \end{cases} \end{cases}
$$

$$
\text{(d)}\quad \lim_{mn\to\infty} \sum_{\mu=0}^{m} a_{mn\mu\nu} = 0, \quad \lim_{mn\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} a_{mn\mu\nu} = 0;
$$

$$
\text{(e)}\quad \lim_{mn\to\infty} \sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{mn\mu\nu} = 1;
$$

$$
\text{(e}'\text{)}\quad \lim_{mn\to\infty} \sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{mn\mu\nu} = L;
$$

$$
\text{(f)}\quad \lim_{mn\to\infty} \sum_{\mu=0}^{m} |a_{mn\mu\nu}| = 0, \quad \lim_{mn\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} |a_{mn\mu\nu}| = 0;
$$

$$
\text{(g)}\ \begin{cases} \text{Существуют такие числа } a^n_{\mu\nu} \text{ и } a_{m\mu\nu}, \text{ что} \\ \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{\mu=0}^{m} |a_{mn\mu\nu} - a^n_{\mu\nu}| = 0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} |a_{mn\mu\nu} - a_{m\mu\nu}| = 0; \end{cases}
$$

$$
\text{(h)}\quad \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{mn\mu\nu}| < N_1;
$$

$$
\text{(i)}\quad \Big|\sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu}\Big| < N_2;
$$

$$
\text{(j)}\quad \sum_{mn=0}^{\infty} \Big|\bar{\Delta}_{mn} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu}\Big| < N_3.
$$

В этих условиях L^n, L_m, L, N_1, N_2 и N_3 некоторые числа.

1.3. Регулярность и мультипликативность. Мы скажем, что метод A L-мультипликативен относительно преобразования $\alpha \to \alpha'$, если все последовательности класса α $A_{\alpha'}$-суммируемы и при каждом $x \in \alpha$ выполняется равенство $A(x) = L \lim\limits_{mn\to\infty} x_{mn}$, где L есть некоторое число. Если при этом $L = 1$, мы скажем, что A $\alpha \to \alpha'$ регулярен. Если $\alpha = \alpha'$, то скажем, что метод A α-регулярен. Мы скажем, что метод A вполне L-мультипликативен относительно преобразования $\alpha \to \alpha'$, если все последовательности класса α $A_{\alpha'}$-суммируемы, и если для всех $x \in \alpha$ выполняются равенство $A(x) = L \lim\limits_{mn \to \infty} x_{mn}$ и равенства $\lim\limits_{m \to \infty} A_{mn}(x) = L^n \lim\limits_{m \to \infty} x_{mn}$, $\lim\limits_{n \to \infty} A_{mn}(x) = L_m \lim\limits_{n \to \infty} x_{mn}$, если только пределы при $m \to \infty$ и $n \to \infty$ существуют (L, L_m и L^n — некоторые числа). Если $L = L_m = L^n = 1$, то скажем, что метод A вполне $\alpha \to \alpha'$ регулярен. Если при этом $\alpha = \alpha'$, то скажем, что A вполне α-регулярен.

Лемма 1.3.1. *Следующие условия необходимы и достаточны для вполне L-мультипликативности относительно преобразования*

1) $bc \to bc$: (a), (b), (c′), (e′), (f), (h),
2) $rc \to rc$: (a), (b), (c′), (d), (e′), (h),
3) $a \to rc$: (a), (b), (c′), (d), (e′), (i),
4) $a \to a$: (a), (b), (c′), (d), (e′), (j),

и для мультипликативности относительно преобразования

$a \to bc$: (a), (d), (e′), (i).

Лемма 1.3.2. *Метод A тогда и только тогда*

1) *bc-регулярен, когда* (a), (e), (f), (h),
2) $bc \to rc$ *регулярен, когда* (a) (b′), (e) (f), (g), (h),
3) $rc \to bc$ *регулярен, когда* (a), (d), (e), (h),
4) $a \to bc$ *регулярен, когда* (a), (d), (e), (i),
5) *вполне bc-регулярен, когда* (a), (b), (c), (e), (f), (h),
6) *вполне rc-регулярен, когда* (a), (b) (c), (d), (e), (h),
7) *вполне rcn-регулярен, когда* (a), (b), (d), (h),
8) *вполне a-регулярен, когда* (a), (b), (c), (d), (e), (j),
9) *вполне arn-регулярен, когда* (a), (b), (j),
10) *вполне* $a \to rc$ *регулярен, когда* (a), (b), (c), (d), (e), (i).

Лемма 1.3.3. *Метод A преобразует любую rc-сходящую последовательность в bcn-сходящую тогда и только тогда, когда условия* (a), (d), (e′), *где* $L = 0$, *и* (h) *выполняются.*

Леммы 1.3.1, 1.3.2 и 1.3.3 заключаются из соответствующих общих условий Хамильтона [1] и Мэарса [5].

Ниже α' $\alpha'' \to \alpha$ регулярность метода A будет означать, что A $\alpha' \to \alpha$ регулярен и $\alpha'' \to \alpha$ регулярен.

1.4. Теоремы о среднем значении. Введем следующие оценки для метода $A = (a_{mn\mu\nu})$:

$$|A_{mnkl}(x)| \leqslant K_1 |A_{k'l'}(x)|, \quad \begin{matrix}(0 \leqslant k' \leqslant k \leqslant m)\\(0 \leqslant l' \leqslant l \leqslant n)\end{matrix} \qquad (1.4.1)$$

$$\left(\sum_{mn=0}^{\infty} - \sum_{mn=0}^{kl}\right) |\bar{\Delta}_{mn} A_{mnkl}(x)| \leqslant K_2 |A_{k'l'}(x)|, \qquad (1.4.2)$$

$$(0 \leqslant k' \leqslant k,\ 0 \leqslant l' \leqslant l)$$

$$\sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu}| \leqslant K_3 \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |\bar{\Delta}_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(x)|, \tag{1.4.3}$$

где $A_{mnkl}(x) = \sum\limits_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu}$, $x = \{x_{\mu\nu}\}$ произвольная последовательность и K_1, K_2, K_3 некоторые константы. В случае оценок (1.4.1) и (1.4.2) полагаем, что существуют такие числа k' и l', что соответствующее неравенство выполняется.

Следующие леммы дают достаточные условия для каждой из этих оценок.

Лемма 1.4.1. *Если*

1^0 $a_{kl\mu\nu} \neq 0$, $0 \leqslant \dfrac{a_{mn\mu\nu}}{a_{kl\mu\nu}} \leqslant K_1$ $\quad (0 \leqslant \mu \leqslant k \leqslant m,\ 0 \leqslant \nu \leqslant l \leqslant n)$,

2^0 $\Delta_{\mu\nu} \dfrac{a_{mn\mu\nu}}{a_{kl\mu\nu}} \geqslant 0$,[6] $\quad$ (— " —),

то A удовлетворяет оценке (1.4.1)

Лемма 1.4.2. *Если A удовлетворяет оценке* (1.4.1) *и условию*[6]

$$\left(\sum_{mn=0}^{\infty} - \sum_{mn=0}^{kl}\right) \sum_{\mu\nu=0}^{kl} \left|\bar{\Delta}_{mn} \Delta_{\mu\nu} \frac{a_{mn\mu\nu}}{a_{kl\mu\nu}}\right| \leqslant M',$$

где M' константа, то A удовлетворяет оценке (1.4.2).

Лемма 1.4.3. *Если* $\Delta_{mn} |a_{mn\mu\nu}| = -|\Delta_{mn} a_{mn\mu\nu}|$, $\Delta_m |a_{mn\mu n}| = |\Delta_m a_{mn\mu n}|$, $\Delta_n |a_{mnm\nu}| = |\Delta_n a_{mnm\nu}|$, *то A удовлетворяет оценке* (1.4.3).

Для факторизующих треугольных методов A, т. е. для таких методов $A = (a_{mn\mu\nu})$. при которых $a_{mn\mu\nu} = a'_{m\mu} a''_{n\nu}$, условия этих лемм значительно упрощаются.

Если $A = (a'_{m\mu} a''_{n\nu})$ и

$$0 \leqslant \frac{a'_{m\mu}}{a'_{k\mu}} \leqslant M', \quad \Delta_\mu \frac{a'_{m\mu}}{a'_{k\mu}} \geqslant 0,^7 \quad (0 \leqslant \mu \leqslant k \leqslant m)$$

$$0 \leqslant \frac{a''_{n\nu}}{a''_{l\nu}} \leqslant M'', \quad \Delta_\nu \frac{a''_{n\nu}}{a''_{l\nu}} \geqslant 0, \quad (0 \leqslant \nu \leqslant l \leqslant n)$$

где M' и M'' константы, то A удовлетворяет оценке (1.4.1).

---

[6] В последней предполагается, что $\dfrac{a_{mn\mu\nu}}{a_{kl\mu\nu}} = 0$, если $\mu > k$ или $\nu > l$ или оба. Здесь и в дальнейшем $\Delta_\nu a_\nu = a_\nu - a_{\nu+1}$ и $\Delta_{\mu\nu} a_{\mu\nu} = \Delta_\mu (\Delta_\nu a_{\mu\nu}) = \Delta_\nu (\Delta_\mu a_{\mu\nu})$.

Если $A = (a_{m\mu} a''_{n\nu})$ удовлетворяет оценке (1. 4. 1) и условиям [7]

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{k} \left| \bar{\Delta}_m \Delta_\mu \frac{a_{m\mu}}{a'_{k\mu}} \right| \leqslant N', \sum_{n=l+1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{l} \left| \bar{\Delta}_n \Delta_\nu \frac{a''_{n\nu}}{a''_{l\nu}} \right| \leqslant N'',$$

где N' и N'' константы, то A удовлетворяет оценке (1. 4. 2).

Если $\Delta_m | a_{m\mu} | = | \Delta_m a_{m\mu} |$ и $\Delta_n | a''_{n\nu} | = | \Delta_n a''_{n\nu} |$, то $A = (a_{m\mu} a''_{n\nu})$ удовлетворяет оценке (1. 4. 3).

Примечание 1. 4. 1. Очевидно, что в оценках (1. 4. 1) и (1. 4. 2) правую сторону неравенства мы можем заменить при $x \in \beta A$ на $K \|x\|_A$ и в оценке (1. 4. 3) при $x \in \gamma A$ на $K \|x\|_{|A|}$, где K некоторая константа.

Мы скажем, что метод A удовлетворяет [8] *ТСЗ* 1 (*ТСЗ* 2 соответственно *ТСЗ* 3), если A удовлетворяет оценке (1. 4. 1), ((1. 4. 2) соответственно (1. 4. 3)).

1. 5. Совершенные методы суммирования. Понятие совершенности метода суммирования мы определяем при помощи отрезков. Отрезок $g_\alpha = \left\{ g^\alpha_{\mu\nu} \right\}$ в поле суммирования αA мы определяем как линейную комбинацию элементов основного множества пространства α. Например, в rcA имеем

$$g_{rc} = ge + \sum_{\mu=0}^{k_0} g_\mu e_\mu + \sum_{\nu=0}^{l_0} g^\nu e^\nu + \sum_{\mu\nu=0}^{k_0 l_0} g_{\mu\nu} e_{\mu\nu}, \qquad (1. 5. 1)$$

где g, g_μ, g^ν и $g_{\mu\nu}$ произвольные числа, в aA имеем $g_a = g_{rc}$ и т. д. Если нужно указать, что в отрезке g_α линейная комбинация сканчивается при индексах κ_0 и l_0, мы пишем $\overset{k_0 l_0}{g_\alpha}$

Важно знать, что если A α-регулярен, то $g_\alpha \in \alpha A$.

Определение 1. 5. 1. *Мы называем нормальный метод A α-совершенным, если A вполне α-регулярен, и если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такой отрезок g_α, что*

$$\|x - g_\alpha\| < \varepsilon,$$

где норма определяется по формуле (1. 1. 2), *если $\alpha = \beta$, и по формуле* (1. 1. 3), *если $\alpha = \gamma$.*

---

[7] В этих условиях предполагаем, что $\frac{a_{m\mu}}{a'_{k\mu}} = 0$, если $\mu > k$, и $\frac{a''_{n\nu}}{a''_{l\nu}} = 0$, если $\nu > l$, а также, что $a_{m\mu} \neq 0$ и $a''_{n\nu} \neq 0$.

[8] *ТСЗ* — сокращение от «теорема о среднем значении».

Для некоторых методов суммирования в определении 1.5.1 отрезки g_α можно заменить отрезками $\overset{kl}{x}_\alpha$ для последовательности x, которые мы определяем следующим образом:

1° если $x \in bcA$, то $\overset{kl}{x}_{bc} = A(x)e + \overset{k}{y} + \overset{l}{z} + \sum_{\mu\nu=0}^{kl}(x_{\mu\nu} - \overset{k}{y}_{\mu\nu} - \overset{l}{z}_{\mu\nu} - A(x))e_{\mu\nu}$, где

$$\overset{k}{y} = \left\{\overset{k}{y}_{\mu\nu}\right\} = \sum_{\mu\nu=0}^{k,n(k)}(A_{\mu\nu}(x) - A(x))(\overset{k}{\bar e}_\mu)_\nu,$$

$$\overset{l}{z} = \left\{\overset{l}{z}_{\mu\nu}\right\} = \sum_{\mu\nu=0}^{m(l),l}(A_{\mu\nu}(x) - A(x))(\overset{l}{\bar e}{}^\nu)_\mu,$$

последовательности $(\overset{k}{\bar e}_\mu)_\nu$, $(\overset{l}{\bar e}{}^\nu)_\mu$ соответственно типа $\bar e_\mu$ и $\bar e^\nu$, причем расположение чисел 0 и 1 в них зависит соответственно от индексов k, ν и l, μ и оно таково, что в последовательностях $\overset{k}{y}$ и $\overset{l}{z}$ в каждое место попадает точно один элемент $A_{\mu\nu}(x) - A(x)$ (очевидно, что определение не однозначно);

2° если $x \in bcnA$, то $\overset{kl}{x}_{bcn} = \overset{kl}{x}_{bc}$, где $A(x) = 0$;

3° если $x \in rcA$, то $\overset{kl}{x}_{rc} = A(x)e + \sum_{\mu=0}^{k}(A_\mu(x) - A(x))e_\mu + \sum_{\nu=0}^{l}(A^\nu(x) - A(x))e^\nu + \sum_{\mu\nu=0}^{kl}(x_{\mu\nu} - A_\mu(x) - A^\nu(x) + A(x))e_{\mu\nu}$;

4° если $x \in rcnA$, то $\overset{kl}{x}_{rcn} = \overset{kl}{x}_{rc}$, где $A(x) = 0$;

5° если $x \in rcrnA$, то $\overset{kl}{x}_{rcrn} = \overset{kl}{x}_{rc}$, где $A(x) = A_\mu(x) = A^\nu(x) = 0$;

6° если $x \in aA$, то $\overset{kl}{x}_a = \overset{kl}{x}_{rc}$;

7° если $x \in anA$, то $\overset{kl}{x}_{an} = \overset{kl}{x}_{rcn}$;

8° если $x \in arnA$, то $\overset{kl}{x}_{arn} = \overset{kl}{x}_{rcrn}$

Если метод A вполне α-регулярен, то $\overset{kl}{x}_\alpha \in aA$.

Пусть $y = \overset{kl}{x}_{\alpha}$. Рассматривая y как обычную двойную последовательность, мы можем и для нее составить отрезок $\overset{ij}{y}_{\alpha}$. Мы имеем

$$\overset{ij}{y}_{\alpha} = \begin{cases} \overset{ij}{x}_{\alpha}, & \text{если} \quad i, j \leqslant k, l; \\ \overset{kl}{x}_{\alpha}, & \text{если} \quad i, j \geqslant k, l; \\ \overset{il}{x}_{\alpha}, & \text{если} \quad i \leqslant k, \ j \geqslant l; \\ \overset{kj}{x}_{\alpha}, & \text{если} \quad i \geqslant k, \ j \leqslant l. \end{cases}$$

Видим, что $\overset{kl}{y}_{\alpha} = \overset{kl}{x}_{\alpha}$.

Лемма 1.5.1. *Если нормальный метод A вполне β-регулярен и удовлетворяет оценке* (1.4.1), *то A β-совершенный метод суммирования, причем в определении* 1.5.1 *можно взять $g_{\beta} = \overset{k_0 l_0}{x}_{\beta}$ при достаточно больших k_0 и l_0.*

Таким образом, если выполняются условия леммы 1.5.1 при $\beta = bc$, то при любом $\varepsilon > 0$ и $x \in bcA$ существует такой отрезок $\overset{l}{x}_{bc}$ с $k, l \geqslant k_0, l_0$, что $\|x - \overset{kl}{x}_{bc}\|_A < \varepsilon$. Аналогично при отрезке $\overset{kl}{x}_{bcn}$. В остальных случаях отрезки определяются однозначно и неравенство в определении 1.5.1 выполняется для всех отрезков при достаточно больших k, l.

Лемма 1.5.2. *Если нормальный метод A вполне γ-регулярен и удовлетворяет оценке* (1.4.2), *то A γ-совершенный метод суммирования, причем в определении* 1.5.1 *можно взять $g_{\gamma} = \overset{k_0 l_0}{x}_{\gamma}$ при достаточно больших k_0 и l_0.*

Лемма 1.5.1 доказана в [7] (см. там теорему 5.1 и примечание 3.3) Из леммы 1.5.2 в [7] (см. там примечание 5.3) доказан только случай $\gamma = arn$. Случаи $\gamma = an$ и $\gamma = a$ следуют из этого непосредственно. Действительно, пусть $\gamma = an$ и $x \in anA$. Поскольку $\{A_{\mu}(x)\}$ и $\{A^{\nu}(x)\}$ последовательности, сходящиеся к нулю, то мы можем составить последовательность

$$x' = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu}(x) e_{\mu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} A^{\nu}(x) e^{\nu}$$

Тогда $y = x - x' \in arnA$. Если A an-регулярен и удовлетворяет оценке (1.4.2), то он arn-совершенный и мы имеем $\|y - \overset{k_0 l_0}{y}_{arn}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ при достаточно больших k_0 l_0. Пусть

$$\overset{k_0 l_0}{x'} = \sum_{\mu=0}^{k_0} A_{\mu}(x) e_{\mu} + \sum_{\nu=0}^{l_0} A^{\nu}(x) e^{\nu}$$

Мы можем написать

$$\|y-\overset{k_0l_0}{y_{arn}}\|=\|x-(\overset{k_0l_0}{y_{arn}}+\overset{k_0l_0}{x'})-(x'-\overset{k_0l_0}{x'})\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

откуда, учитывая что $\overset{k_0l_0}{y_{arn}}+\overset{k_0l_0}{x'}=\overset{k_0l_0}{x_{an}}$, получаем

$$\|x-\overset{k_0l_0}{x_{an}}\|<\frac{\varepsilon}{2}+\|x'-\overset{k_0l_0}{x'}\|$$

При достаточно больших k_0 и l_0 мы имеем $\|x'-\overset{k_0l_0}{x'}\|<\frac{\varepsilon}{2}$, следовательно, тогда $\|x-\overset{k_0l_0}{x_{an}}\|<\varepsilon$ и A an-совершенный по определению 1. 5. 1. Аналогично доказывается случай $\gamma=a$.

1.6. Вспомогательные леммы и равенства. В следующей главе встречающиеся условия для треугольных матриц мы будем записывать в короткой форме, предполагая, что в них члены, не имеющие смысла, равны нулю. Так, например, для треугольных методов C и A в условии

$$\sum_{\mu\nu=0}^{mn}\left|\Delta_{\mu\nu}\frac{c_{mn\mu\nu}}{a_{mn\mu\nu}}\right|\leqslant M, \tag{1.6.1}$$

где M константа, полагаем, что $\frac{c_{mn\mu\nu}}{a_{mn\mu\nu}}=0$ как только $\mu>m$ или $\nu>n$ или оба. В условии (1.6.1) также предполагается, что $a_{mn\mu\nu}\neq 0$, если $\mu\leqslant m$ и $\nu\leqslant n$, чего мы особо не будем отмечать.

Учитывая сказанное, мы видим, что (1.6.1) состоит из 4-х следующих условий:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\mu\nu=0}^{m-1\,n-1}\left|\Delta_{\mu\nu}\frac{c_{mn\mu\nu}}{a_{mn\mu\nu}}\right|\leqslant M^{\mathrm{I}},\ \sum_{\mu=0}^{m-1}\left|\Delta_{\mu}\frac{c_{mn\mu n}}{a_{mn\mu n}}\right|\leqslant M^{\mathrm{II}},\\&\sum_{\nu=0}^{n-1}\left|\Delta_{\nu}\frac{c_{mnm\nu}}{a_{mnm\nu}}\right|\leqslant M^{\mathrm{III}},\ \left|\frac{c_{mnmn}}{a_{mnmn}}\right|\leqslant M^{\mathrm{IV}},\end{aligned}\right\} \tag{1.6.2}$$

где M^{I}, M^{II}, M^{III}, M^{IV} константы. Если метод A конкретно задан, то вместо (1.6.1) следует пользоваться условиями (1.6.2)

Ниже, например, в условиях (2.2.2) — (2.2.8), следует эти вышеизложенные замечания иметь в виду.

Преобразование Абеля-Харди мы также применяем в упрощенном виде

$$\sum_{\mu\nu=0}^{mn}a_{\mu\nu}b_{\mu\nu}=\sum_{\mu\nu=0}^{mn}\Delta_{\mu\nu}a_{\mu\nu}\sum_{kl=0}^{\mu\nu}b_{kl},$$

полагая автоматически, что $a_{\mu\nu}=0$, если $\mu>m$ или $\nu>n$ или оба. Такая короткая запись облегчает изложение.

В статье [7] мы доказали некоторые теоремы о включении методов суммирования. Ниже под леммой 1.6.1 мы воспроизводим одну из них. Мы скажем, что метод C включает метод A в смысле (β, α), если $\beta C \supseteq \alpha A$, и обозначаем $C_\beta \supseteq A_\alpha$. Такое включение мы называем вполне регулярным, если C β-суммирует все A_α-суммируемые ряды к той же сумме, сохраняя также равенство пределов по строкам и столбцам, если только последние существуют, и пишем, что $C_\beta \supseteq A_\alpha$ вполне регулярно. Если A единичный метод, то в таком случае мы просто говорим, что C вполне $\alpha \to \beta$ регулярен, как это мы определили выше в 1.3.

Лемма 1.6.1. *Если нормальный, вполне rc-регулярный метод A удовлетворяет оценке* (1.4.1) *и вполне rc-регулярный метод C условию* (1.6.1), *то* $C_{rc} \supseteq A_{rc}$ *вполне регулярно, т. е.* $C(x) = A(x)$ $C_m(x) = A_m(x)$, $C^n(x) = A^n(x)$ *при всех* $x \in rcA$.

Ниже мы будем пользоваться следующей формулой:

$$\overline{\Delta}_{mn}(a_{mn}b_{mn}) = \overline{\Delta}_{mn}a_{mn} \quad b_{mn} + \overline{\Delta}_n a_{m-1n} \quad \overline{\Delta}_m b_{mn} + \\ + \overline{\Delta}_m a_{mn-1} \quad \overline{\Delta}_n b_{mn} + a_{m-1\,n-1} \quad \overline{\Delta}_{mn} b_{mn}. \tag{1.6.3}$$

В случае отрезков g_α удобно пользоваться следующего вида разложениями:

$$A_{mn}(g_{rc}) = \sum_{\mu\nu=0}^{k_0 l_0} a_{mn\mu\nu} g_{\mu\nu} + \sum_{\mu=0}^{k_0} g_\mu \sum_{\nu=0}^{n} a_{mn\mu\nu} + \\ + \sum_{\nu=0}^{l_0} g^\nu \sum_{\mu=0}^{m} a_{mn\mu\nu} + g \sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{mn\mu\nu}, \tag{1.6.4}$$

где g_{rc} отрезок, определенный в (1.5.1).

2. Теоремы умножения

2.1. Постановка проблемы. Мы будем рассматривать умножение Коши. Пусть даны ряды Σu_{kl} и Σv_{kl}. Из этих рядов составим ряд-произведение Σw_{kl} по правилу Коши, т. е. ряд Σw_{kl}, где

$$w_{kl} = \sum_{\mu\nu=0}^{kl} v_{k-\mu\, l-\nu} u_{\mu\nu}. \tag{2.1.1}$$

При умножении рядов нецелесообразно особо выделять классы рядов, α-сходящихся к нулю. Поэтому в дальнейшем до конца работы α, α', α'' будут обозначать один из классов bc, rc или a, и β, β', β'' один из классов bc или rc.

Будем рассматривать следующие проблемы:

Проблема I. *Если Σu_{kl} любой A_α-суммируемый и Σv_{kl} любой $B_{\alpha'}$-суммируемый ряды, то каким условиям должен удовлетворять метод C, чтобы ряд-произведение Σw_{kl} был $C_{\alpha''}$-суммируем.*

Проблема II. *Если Σu_{kl} любой A_α-суммируемый ряд, то каким условиям должен удовлетворять ряд Σv_{kl}, чтобы ряд-произведение Σw_{kl} был α'-суммируем заданным методом C.*

Если A и B реверсивны, то полное решение этих проблем будет содержать элементы обратных матриц A^{-1} и B^{-1}. Из-за сложности условий такое решение имеет главным образом теоретическое значение. Для получения эффективных и практически применимых условий нужно налагать некоторые ограничения на методы A и B, и здесь наиболее целесообразным является применение теорем о среднем значении, которые вместе с некоторыми другими предположениями дают условия, содержащие только элементы матриц A, B и C.

При исследовании проблем I и II мы также рассмотрим, когда выполняются равенства

$$C(W) = B(V)A(U), \tag{2.1.2}$$

$$C_m(W) = B_m(V)\,A_m(U) \text{ и } C^n(W) = B^n(V)A^n(U) \tag{2.1.3}$$

2.2. Условия для матриц. Пусть методы A, B нормальны и C треуголен с матрицами соответственно $A = (a_{mn\mu\nu})$, $B = (b_{mn\mu\nu})$ и $C = (C_{mn\mu\nu})$. Определим величину $d_{mn\mu\nu}$ следующим образом:

$$d_{mn\mu\nu} = \sum_{kl=0}^{m-\mu\; n-\nu} b_{mn\,k+\mu\,l+\nu}\, a_{mn\,m-k\,n-l} \tag{2.2.1}$$

Ниже будем применять следующие условия ($M_1, \ldots, M_8$ константы):

$$\sum_{kl=0}^{mn} \sum_{ij=0}^{m-k\; n-l} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} \left| \Delta_{ij} \Delta_{\mu\nu} D_{mnklij\mu\nu} \right| \leqslant M_1, \tag{2.2.2}$$

где

$$D_{mnklij\mu\nu} = \frac{\Delta_{\mu\nu} c_{mn\,i+\mu\,j+\nu}}{d_{mn\,i+\mu\,j+\nu}} \, \frac{a_{mn\,m-k+\mu\,n-l+\nu}}{a_{kl\mu\nu}} \, \frac{b_{mn\,i+k\,j+l}}{b_{m-k\,n-l\,ij}};$$

$$\sum_{\mu\nu=0}^{m-k\; n-l} \left| \Delta_{\mu\nu} \frac{\Delta_{kl} c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{a_{mnkl} b_{m-k\,n-l\mu\nu}} \right| \leqslant M_2, \tag{2.2.3}$$

$$\left| \frac{\Delta_{kl} c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{a_{mnkl}\, b_{m-k\,n-l\mu\nu}} \right| \leqslant M_3, \tag{2.2.4}$$

$$\sum_{\mu\nu=0}^{m-k\; n-l} \left| \Delta_{\mu\nu} \frac{c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k\,n-l\,\mu\nu}} \right| \leqslant M_4, \tag{2.2.5}$$

$$\sum_{mn=kl}^{\infty} \sum_{\mu\nu=0}^{m-k\; n-l} \left| \bar{\Delta}_{mn} \Delta_{\mu\nu} \frac{c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k\,n-l\,\mu\nu}} \right| \leqslant M_5, \tag{2.2.6}$$

$$\left|\frac{c_{mn\,mn}}{c_{kl\,kl}}\right| \leqslant M_6, \text{ если } k \leqslant m,\ l \leqslant n, \tag{2.2.7.}$$

$$\sum_{mn=kl}^{\infty}\left|\bar{\Delta}_{mn}\frac{c_{mn\,mn}}{c_{m-k\,n-l\,m-k\,n-l}}\right| \leqslant M_7. \tag{2.2.8}$$

2.3. Транслятивность. Пусть $U_{\mu\nu}=\sum\limits_{kl=0}^{\mu\nu} u_{kl}$, $V_{\mu\nu}=\sum\limits_{kl=0}^{\mu\nu} v_{kl}$ и $W_{\mu\nu}=\sum\limits_{kl=0}^{\mu\nu} w_{kl}$, тогда $U=\{U_{\mu\nu}\}$, $V=\{V_{\mu\nu}\}$ и $W=\{W_{\mu\nu}\}$ будут последовательностями частичных сумм соответственно рядов Σu_{kl}, Σv_{kl} и Σw_{kl}. Мы можем написать, учитывая (2.1.1.),

$$W_{\mu\nu}=\sum_{kl=0}^{\mu\nu} v_{\mu-k\,\nu-l}U_{kl}=\sum_{kl=0}^{\mu\nu} U_{\mu-k\,\nu-l}v_{kl}=$$

$$=\sum_{kl=0}^{\mu\nu} u_{\mu-k\,\nu-l}V_{kl}=\sum_{kl=0}^{\mu\nu} V_{\mu-k\,\nu-l}u_{kl}. \tag{2.3.1}$$

Мы скажем, что метод C вполне регулярно α-транслятивен слева, если из C_α-суммируемости ряда Σu_{kl} к сумме $C(U)$ следует также C_α-суммируемость рядов Σu_{k-1l} (где $u_{-1l}=0$) и Σu_{kl-1} (где $u_{k,-1}=0$) к той же сумме $C(U)$, причем сохраняются пределы по строкам и столбцам, если последние существуют.

Если C треуголен, то для α-транслятивности нужно, чтобы из $\left\{\sum\limits_{\mu\nu=0}^{mn} c_{mn\mu\nu}U_{\mu\nu}\right\}\epsilon\alpha$ следовало бы $\left\{\sum\limits_{\mu\nu=0}^{m-1\,n} c_{mn\,\mu+1\,\nu}U_{\mu\nu}\right\}\epsilon\alpha$ и $\left\{\sum\limits_{\mu\nu=0}^{m\,n-1} c_{mn\,\mu\nu+1}U_{\mu\nu}\right\}\epsilon\alpha$. Пусть C' и C'' будут методами суммирования, матрицы которых соответственно $C'=(c_{m+1\,n\,\mu+1\,\nu})$ и $C''=(c_{mn+1\,\mu\nu+1})$. Очевидно, что для вполне регулярной α-транслятивности слева метода C необходимо и достаточно вполне регулярное включение

$$C'_\alpha \supseteq C_\alpha \text{ и } C''_\alpha \supseteq C_\alpha. \tag{2.3.2}$$

Примечание 2.3.1. *Из определения транслятивности непосредственно заключается, что, если C вполне регулярно α-транслятивен слева, то из C_α-суммируемости ряда Σu_{kl} следует также C_α-суммируемость ряда $\sum\limits_{kl=0}^{\infty} u_{k-pl-q}$ (где $u_{-p,-q}=0$) к той же сумме, причем сохраняются пределы по строкам и столбцам, если последние существуют.*

Поскольку имеем

$$\sum_{kl=0}^{mn} c_{mnkl} v_{kl} = \sum_{kl=0}^{mn} c_{mnkl} V_{kl} - \sum_{kl=1,0}^{mn} c_{mnkl} V_{k-1\,l} -$$

$$- \sum_{kl=0,1}^{mn} c_{mnkl} V_{kl-1} + \sum_{kl=1}^{mn} c_{mnkl} V_{k-1\,l-1},$$

то выполняется следующая

Лемма 2. 3. 1. *Метод C трансформирует последовательность $\{v_{kl}\}$ из элементов ряда $\Sigma v_{kl} \in rcC$ в $rcrn$-сходящую последовательность тогда и только тогда, когда C вполне регулярно rc-транслятивен слева.*

Лемма 2. 3. 2. *Если нормальный метод C вполне rc-регулярен, удовлетворяет ТСЗ 1 и условию* (2. 2. 5) *при $k = 1$, $l = 0$ и при $k = 0$, $l = 1$, то метод C вполне регулярно rc-транслятивен слева.*

Эта лемма заключается из-за (2. 3. 2) из леммы 1. 6. 1.

2. 4. Решение проблемы I. В этой части работы доказательства теорем в основном аналогичны друг другу. Поэтому для иллюстрации метода мы докажем первую теорему с достаточной полнотой, а для других изложим только существенно отличающие места доказательств. Метод доказательства состоит в основном в том, что мы используем такие соотношения между элементами методов A, B и C, которые позволяют написать $|C_{mn}(W)| \leqslant K(U, V)$ (где $K(U, V)$ величина, зависящая от последовательностей U и V), откуда уже и следует (при надлежащих условиях для метода C) C_α-суммируемость ряда Σw_{kl}.

Теорема 2. 4. 1. *Пусть метод A нормален, вполне rc-регулярен и удовлетворяет ТСЗ 1. Пусть метод B нормален, вполне β-регулярен и удовлетворяет ТСЗ 1. Пусть метод C удовлетворяет условию* (2. 2. 2.).

Ряд-произведение Σw_{kl} при любых $\Sigma u_{kl} \in rcA$ и $\Sigma v_{kl} \in \beta B$ $C_{\beta'}$-суммируем к сумме (2. 1. 2) *тогда и только тогда, когда метод C rc, $\beta \to \beta'$ регулярен, причем при $\beta = \beta' = rc$, если метод C вполне rc-регулярен, выполняются также равенства* (2. 1. 3).

Доказательство. Докажем типичный случай, где $\beta = \beta' = rc$. Необходимость очевидна. Докажем достаточность.

а) Учитывая (2. 3. 1) и (2. 2. 1), мы можем написать

$$C_{mn}(W) = \sum_{ij=0}^{mn} c_{mnij} \sum_{\mu\nu=0}^{ij} v_{i-\mu\, j-\nu} U_{\mu\nu} =$$

$$= \sum_{\mu\nu=0}^{mn} U_{\mu\nu} \sum_{ij=0}^{m-\mu\, n-\nu} c_{mn\, i+\mu\, j+\nu} v_{ij} =$$

$$= \sum_{\mu\nu=0}^{mn} U_{\mu\nu} \sum_{ij=0}^{m-\mu\, n-\nu} \Delta_{ij} c_{mn\, i+\mu\, j+\nu} V_{ij} =$$

$$= \sum_{\mu\nu=0}^{mn} U_{\mu\nu} \sum_{ij=0}^{m-\mu\, n-\nu} \frac{\Delta_{ij} c_{mn\, i+\mu\, j+\nu}}{d_{mn\, i+\mu\, j+\nu}} V_{ij} \sum_{kl=\mu\nu}^{m-i\, n-j} b_{mn\, k+i\, l+j} a_{mn\, m-k+\mu\, n-l+\nu} =$$

$$= \sum_{\mu\nu=0}^{mn} U_{\mu\nu} \sum_{kl=\mu\nu}^{mn} a_{mn\, m-k+\mu\, n-l+\nu} \sum_{ij=0}^{m-k\, n-l} \frac{\Delta_{ij} c_{mn\, i+\mu\, j+\nu}}{d_{mn\, i+\mu\, j+\nu}} b_{mn\, k+i\, l+j} V_{ij} =$$

$$= \sum_{kl=0}^{mn} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\, m-k+\mu\, n-l+\nu} U_{\mu\nu} \sum_{ij=0}^{m-k\, n-l} \frac{\Delta_{ij} c_{mn\, i+\mu\, j+\nu}}{d_{mn\, i+\mu\, j+\nu}} b_{mn\, k+i\, l+j} V_{ij} =$$

$$= \sum_{kl=0}^{mn} \sum_{ij=0}^{m-k\, n-l} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} D_{mn\, kl\, ij\, \mu\nu} b_{m-k\, n-l\, ij} V_{ij} a_{kl\, \mu\nu} U_{\mu\nu} =$$

$$= \sum_{kl=0}^{mn} \sum_{ij=0}^{m-k\, n-l} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} \Delta_{ij} \Delta_{\mu\nu} D_{mn\, kl\, ij\, \mu\nu} B_{m-k\, n-l\, ij}(V) A_{kl\, \mu\nu}(U).$$

Поскольку A и B удовлетворяют *ТСЗ* 1 и выполняется (2. 2. 2), то

$$|C_{mn}(W)| \leqslant K \|V\|_B \|U\|_A, \tag{2. 4. 1}$$

где K константа.

б) Подставим в (2. 4. 1) вместо последовательности U последовательность $U - \overset{k_0 l_0}{U}_{rc}$, где $\overset{k_0 l_0}{U}_{rc} = \{ \overset{k_0 l_0}{U}{}^{rc}_{\mu\nu} \}$ отрезок последовательности U. Тогда

$$|C_{mn}(W')| \leqslant K \|V\|_B \|U - \overset{k_0 l_0}{U}_{rc}\|_A,$$

где $W' = \{ W'_{\mu\nu} \}$ последовательность с элементами

$$W'_{\mu\nu} = \sum_{kl=0}^{\mu\nu} v_{\mu-k\, \nu-l} (U_{kl} - \overset{k_0 l_0}{U}{}^{kl}_{rc}).$$

Ввиду леммы 1. 5. 1 при достаточно больших k_0, l_0 правая часть последнего неравенства будет меньше любого заданного числа $\varepsilon > 0$, и мы имеем тогда

$$|C_{mn}(W')| < \varepsilon. \tag{2. 4. 2}$$

в) Докажем, что если $\Sigma v_{kl} \in rcB$, то ряд $\sum\limits_{kl=0}^{\infty} v_{k-p\, l-q}$ (где $p, q \geqslant 0$ и $v_{-p, -q} = 0$) C_{rc}-суммируем и выполняются равенства

$$\left.\begin{aligned} &C(V^{pq}) = B(V), \\ &C_m(V^{pq}) = \begin{cases} B_m(V), & \text{если } m \geqslant p, \\ 0, & \text{если } m < p, \end{cases} \\ &C^n(V^{pq}) = \begin{cases} B^n(V), & \text{если } n \geqslant q, \\ 0, & \text{если } n < q, \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{2. 4. 3}$$

причем $V^{pq}=\{\sum\limits_{\mu\nu=0}^{kl} v_{\mu-p\,\nu-q}\}$ последовательность частных сумм ряда $\Sigma v_{\mu-p\,\nu-q}$.

Пусть e^{pq} последовательность e, где в первых p строках и q столбцах элементы 1 заменены нулями. Если $U=e^{pq}$, то $\{W_{\mu\nu}\}=\{V_{\mu-p\,\nu-q}\}=V^{pq}$ и из (2. 4. 1) получаем

$$|C_{mn}(V^{pq})|\leqslant K||e^{pq}||_A||V||_B.$$

Подставляя вместо V последовательность $V-\overset{k_0l_0}{V_{rc}}$, получаем аналогично тому, как получили (2. 4. 2), что

$$|C_{mn}(V^{pq})-(C_{mn}(V^{pq}_{rc})|<\varepsilon,$$

где $V^{pq}_{rc}=(V_{rc})^{pq}$ определяется аналогично последовательности V^{pq}. Поскольку C rc-регулярен, то имеем $C(V^{pq}_{rc})=B(V)$, $C_m(V^{pq}_{rc})=B_m(V)$, $C^n(V^{pq}_{rc})=B^n(V)$, если $m\geqslant p$, $n\geqslant q$ и $C_m(V^{pq}_{rc})=C^n(V^{pq}_{rc})=0$, если $m<p$, $n<q$. То же самое выполняется и для $\{C_{mn}(V^{pq})\}$, что и требовалось доказать.

г) Покажем теперь, что из неравенства (2. 4. 2) следует C_{rc}-суммируемость ряда Σw_{kl} к сумме (2. 1. 2) с выполнением равенств (2. 1. 3). Для этого введем некоторый вспомогательный треугольный метод суммирования Н с матрицей $H=(h_{mnkl})$, где

$$h_{mnkl}=\sum_{\mu\nu=kl}^{mn} c_{mn\,\mu\nu}v_{\mu-k\,\nu-l}.$$

Тогда условие (2. 4. 2) можно написать в следующем виде:

$$|C_{mn}(W)-H_{mn}(\overset{k_0l_0}{U_{rc}})|<\varepsilon. \qquad (2.\ 4.\ 4.)$$

Метод H удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{mn\to\infty} h_{mnkl}=0, \qquad (2.\ 4.\ 5)$$

$$\lim_{m\to\infty} h_{mnkl}=0 \quad \lim_{n\to\infty} h_{mnkl}=0, \qquad (2.\ 4.\ 6)$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m} h_{mnkl} &= \begin{cases} B^n(V), & \text{если } l=n,\\ 0, & \text{если } l<n,\end{cases}\\ \lim_{n\to\infty}\sum_{l=0}^{n} h_{mnkl} &= \begin{cases} B_m(V), & \text{если } k=m,\\ 0, & \text{если } k<m,\end{cases}\end{aligned}\right\} \qquad (2.\ 4.\ 7)$$

$$\lim_{mn\to\infty}\sum_{k=0}^{m} h_{mnkl}=0, \quad \lim_{mn\to\infty}\sum_{l=0}^{n} h_{mnkl}=0, \qquad (2.\ 4.\ 8)$$

$$\lim_{mn\to\infty}\sum_{kl=0}^{mn} h_{mnkl}=B(V). \qquad (2.\ 4.\ 9)$$

Действительно, мы имеем

$$h_{mnkl}=C_{mn}(V^{kl})-C_{mn}(V^{k-1\,l})-C_{mn}(V^{k\,l-1})+C_{mn}(V^{k-1\,l-1}),$$

и из-за (2. 4. 3) выполнение условий (2. 4. 5), (2. 4. 6) очевидно. Далее, мы имеем

$$\sum_{k=0}^{m} h_{mnkl}=\sum_{\mu\nu=0}^{mn} c_{mn\mu\nu}\sum_{k=0}^{\mu} v_{\mu-k\,\nu-l}=$$

$$=\begin{cases} C_{mn}(V^{0l})-C_{mn}(V^{0l+1}), & \text{если } l<n, \\ C_{mn}(V^{0l}) & \text{если } l=n. \end{cases} \tag{2. 4. 10}$$

Аналогичное равенство можно выписать и для $\sum_{l=0}^{n} h_{mnkl}$. Учитывая равенства (2. 4. 3), очевидно выполнение условий (2. 4. 7) и (2. 4. 8). И, наконец, для условия (2. 4. 9) имеем

$$\lim_{mn\to\infty}\sum_{kl=0}^{mn} h_{mnkl}=\lim_{mn\to\infty}\sum_{\mu\nu=0}^{mn} c_{mn\mu\nu}V_{\mu\nu}=B(V),$$

так как выполняется первое равенство из (2. 4. 3) при $p=q=0$.

При помощи условий (2. 4. 5) — (2. 4. 9) теперь легко показать, что $\left\{H_{mn}(\overset{k_0}{V_{rc}})\right\}\in rc$. Аналогично равенству (1. 6. 4) мы можем написать

$$H_{mn}(\overset{k_0 l_0}{U_{rc}})=\sum_{kl=0}^{k_0 l_0} h_{mnkl}\,[U_{kl}-A_k(U)-A^l(U)+A(U)]+$$

$$+\sum_{k=0}^{k_0}[A_k(U)-A(U)]\sum_{l=0}^{n} h_{mnkl}+$$

$$+\sum_{l=0}^{l_0}[A^l(U)-A(U)]\sum_{k=0}^{m} h_{mnkl}+$$

$$+A(U)\sum_{kl=0}^{mn} h_{mnkl}=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}.$$

Если $m, n\to\infty$, то I, II, III $\to 0$ и IV $\to A(U)B(V)$ соответственно из-за условий (2. 4. 5), (2. 4. 8) и (2. 4. 9). Если $m\to\infty$ при фиксированном n, то можем всегда предположить, что $l_0\geqslant n$, и тогда I, II $\to 0$ из-за (2. 4. 6),

$$\mathrm{III}+\mathrm{IV}=\sum_{l=0}^{l_0} A^l(U)\sum_{k=0}^{m} h_{mnkl}\to A^n(U)\,B^n(V)$$

из-за (2.4.7). Аналогично исследуем случай $n \to \infty$, беря $k_0 \geqslant m$. Следовательно,

$$\lim_{mn \to \infty} H_{mn}(\overset{k_0 l_0}{U_{rc}}) = A(U)B(V),$$

$$\lim_{m \to \infty} H_{mn}(\overset{k_0 l_0}{U_{rc}}) = A^n(U)B^n(V), \quad \text{если } l_0 \geqslant n,$$

$$\lim_{n \to \infty} H_{mn}(\overset{k_0 l_0}{U_{rc}}) = A_m(U)B_m(V), \quad \text{если } k_0 \geqslant m.$$

Из условия (2.4.4), где $\varepsilon \to 0$ при k_0, $l_0 \to \infty$, теперь заключается выполнение условий (2.1.2) (2.1.3).

Этим теорема доказана.

Теорема 2.4.2. *Пусть метод A нормален, вполне α-регулярен и удовлетворяет ТСЗ 2 и 3. Пусть метод B нормален, вполне β-регулярен и удовлетворяет ТСЗ 1. Пусть метод C удовлетворяет условию* (2.2.3).

Ряд-произведение Σw_{kl} при любых $\Sigma u_{kl} \in \alpha A$ и $\Sigma v_{kl} \in \beta B$ $C_{\beta'}$-суммируем к сумме (2.1.2) *тогда и только тогда, когда метод C $\alpha'\beta \to \beta'$ регулярен, причем при $\beta = \beta' = rc$, если метод C вполне rc-регулярен, выполняются также равенства* (2.1.3)

Доказательство. Докажем типичный случай $\beta = \beta' = rc$. Необходимость очевидна. Докажем достаточность.

Мы можем написать

$$C_{mn}(W) = \sum_{\mu\nu=0}^{mn} U_{\mu\nu} \sum_{ij=0}^{m-\mu\, n-\nu} \Delta_{\mu\nu} c_{mn\, i+\mu\, j+\nu} V_{ij} =$$

$$= \sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{mn\mu\nu} U_{\mu\nu} \sum_{ij=0}^{m-\mu\, n-\nu} \frac{\Delta_{\mu\nu} c_{mn\, i+\mu\, j+\nu}}{a_{mn\mu\nu} b_{m-\mu\, n-\nu\, ij}} b_{m-\mu\, n-\nu\, ij} V_{ij} =$$

$$= \sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{mn\mu\nu} U_{\mu\nu} \sum_{ij=0}^{m-\mu\, n-\nu} \Delta_{ij} \frac{\Delta_{\mu\nu} c_{mn\, i+\mu\, j+\nu}}{a_{mn\mu\nu} b_{m-\mu\, n-\nu\, ij}} B_{m-\mu\, n-\nu\, ij}(V),$$

откуда

$$|C_{mn}(W)| \leqslant \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |a_{mn\mu\nu} U_{\mu\nu}| \sum_{ij=0}^{m-\mu\, n-\nu} \left| \Delta_{ij} \frac{\Delta_{\mu\nu} c_{mn\, i+\mu\, j+\nu}}{a_{mn\mu\nu} b_{m-\mu\, n-\nu\, ij}} \right| |B_{m-\mu\, n-\nu\, ij}(V)|.$$

Поскольку A удовлетворяет *ТСЗ* 3, B удовлетворяет *ТСЗ* 1 и выполняется (2.2.3), то

$$|C_{mn}(W)| \leqslant K \|V\|_B \|U\|_{|A|},$$

где K константа. Дальше теорема доказывается аналогично предыдущей теореме.

Теорема 2.4.3. *Пусть методы A и B нормальны, вполне a-регулярны и удовлетворяют ТСЗ 2 и 3. Пусть метод C удовлетворяет условию* (2.2.4).

Ряд-произведение Σw_{kl} при любых $\Sigma u_{kl}\in aA$ и $\Sigma v_{kl}\in aB$ C_β-суммируем к сумме (2.1.2) *тогда и только тогда, когда метод C $a\to\beta$ регулярен, причем при $\beta=rc$, если метод C вполне $a\to rc$ регулярен, выполняются также равенства* (2.1.3.)

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Мы можем написать

$$|C_{mn}(W)|\leqslant\sum_{\mu\nu=0}^{mn}|a_{mn\mu\nu}U_{\mu\nu}|\sum_{ij=0}^{m-\mu\ n-\nu}\left|\frac{\Delta_{\mu\nu}c_{mn\ i+\mu\ j+\nu}}{a_{mn\mu\nu}b_{m-\mu\, n-\nu\ ij}}\right||b_{m-\mu\, n-\nu\ ij}V_{ij}|,$$

откуда из-за условия (2.2.4) учитывая, что методы A и B удовлетворяют ТСЗ 3, получаем

$$|C_{mn}(W)|\leqslant K\|V\|_{|B|}\|U\|_{|A|}$$

Дальнейшее доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.4.1.

В теореме 2.4.1, как это видно из условий, методы A и B могут быть также единичные методы. В остальных теоремах 2.4.2 и 2.4.3 такая возможность исключается из-за предположений $a_{mn\mu\nu}\neq 0$ и $b_{mn\mu\nu}\neq 0$.

2.5. Решение проблемы II. При постановке вопроса в соответствии с проблемой II, приведенной в § 2.1, мы можем получить необходимые и достаточные условия для суммируемости ряда-произведения Σw_{kl}, если предполагать a-сходимость ряда Σu_{kl}. При доказательстве таких теорем мы используем вспомогательный метод суммирования $H=(h_{mnkl})$, определенный выше в § 2.4, где

$$h_{mnkl}=\sum_{\mu\nu=kl}^{mn}c_{mn\mu\nu}v_{\mu-k\ \nu-l}. \tag{2.5.1}$$

Мы можем написать

$$C_{mn}(W)=\sum_{\mu\nu=0}^{mn}c_{mn\mu\nu}W_{\mu\nu}=\sum_{kl=0}^{mn}U_{kl}\sum_{\mu\nu=kl}^{mn}c_{mn\mu\nu}v_{\mu-k\ \nu-l}$$

или, учитывая (2.5.1),

$$C_{mn}(W)=\sum_{kl=0}^{mn}h_{mnkl}U_{kl}. \tag{2.5.2}$$

Для того, чтобы при любом α-сходящем ряде Σu_{kl} было $\{C_{mn}(W)\}\in a'$, метод H должен удовлетворять условиям, обеспечивающим такое преобразование. Поскольку члены ряда Σv_{kl} содержатся в элементах метода H, то мы получаем необходимые и достаточные условия для ряда Σv_{kl}. Если на метод C не налагать никаких ограничений, то в общем мы не получим хорошо трактуемых условий для ряда Σv_{kl}. Однако, если ряд Σu_{kl} a-сходится, применение *ТСЗ* позволяет здесь из многих таких условий элиминировать элементы ряда Σv_{kl} или обеспечить автоматическое выполнение этих условий, чем результаты значительно упрощаются.

Пусть

$$C(W) = U'C(V), \quad \text{где} \quad U' = \lim_{\mu\nu\to\infty} U_{\mu\nu}, \tag{2.5.3}$$

$$C_m(W) = U_m C_m(V), \qquad C^n(W) = U^n C^n(V). \tag{2.5.4}$$

Теорема 2.5.1. *Пусть метод C нормален, вполне rc-регулярен и удовлетворяет условию* (2.2.5) *и ТСЗ 1.*

Ряд-произведение Σw_{kl} при всех a-сходящихся рядах Σu_{kl} тогда и только тогда C_{rc}-суммируем к сумме (2.5.3) *с выполнением* (2.5.4), *когда ряд Σv_{kl} C_{rc}-суммируем.*

Доказательство. На основании равенства (2.5.2) метод $H = (h_{mnkl})$ должен быть вполне $C(V)$-мультипликативным относительно преобразования $a \to rc$, и из леммы 1.3.1 видим, что H должен удовлетворять условиям (a), (b), (c′), (d), (e′), (i).

Покажем, что эти условия выполняются. Для условия (i) имеем из-за условия (2.2.5) и *ТСЗ* 1

$$\left|\sum_{kl=ij}^{mn} h_{mnkl}\right| = \left|\sum_{\mu\nu=ij}^{mn} c_{mn\mu\nu} V_{\mu-i\,\nu-j}\right| =$$

$$= \left|\sum_{\mu\nu=0}^{m-i\,n-j} \frac{c_{mn\,\mu+i\,\nu+j}}{c_{m-i\,n-j\,\mu\nu}} c_{m-i\,n-j\,\mu\nu} V_{\mu\nu}\right| =$$

$$= \sum_{\mu\nu=0}^{m-i\,n-j} \left|\Delta_{\mu\nu} \frac{c_{mn\,\mu+i\,\nu+j}}{c_{m-i\,n-j\,\mu\nu}}\right| |C_{m-i\,n-j\,\mu\nu}(V)| \leqslant M(V),$$

где $M(V)$ некоторая величина, зависящая только от последовательности V Следовательно, (i) выполняется, если $\Sigma v_{kl} \in rcC$.

Для условия (e′) имеем

$$\lim_{mn\to\infty} \sum_{kl=0}^{mn} h_{mnkl} = \lim_{mn\to\infty} \sum_{\mu\nu=0}^{mn} c_{mn\,\mu\nu} V_{\mu\nu} = C(V),$$

для выполнения которого достаточна C_{rc}-суммируемость ряда Σv_{kl}.

Из леммы 2.3.2, учитывая условия (2.2.5), получаем, что метод C вполне регулярно rc-транслятивен слева. Поэтому метод H всегда удовлетворяет условиям (a), (b), (c′) и (d), если только $\Sigma v_{kl} \in rcC$. Для (c′) и (d) это следует из равенства (2.4.10), а для (a) и (b) из леммы 2.3.1 и примечания 2.3.1.

Из условий (e′) и (c′) заключается также необходимость C_{rc}-суммируемости ряда Σv_{kl}.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 2.5.2. *Пусть метод C нормален, вполне bc-регулярен и удовлетворяет условию* (2.2.5) *и ТСЗ 1.*

Ряд-произведение Σw_{kl} при всех a-сходящихся рядах Σu_{kl} тогда и только тогда C_{bc}-суммируем к сумме (2.5.3), *когда ряд Σv_{kl} C_{bc}-суммируем.*

Теорема 2.5.3. *Пусть метод C нормален, вполне a-регулярен и удовлетворяет условию* (2.2.6) *и ТСЗ 2.*

Ряд-произведение Σw_{kl} при всех a-сходящихся рядах Σu_{kl} тогда и только тогда C_a-суммируем к сумме (2.5.3) *с выполнением* (2.5.4), *когда ряд Σv_{kl} C_a-суммируем.*

Доказательство. На основании равенства (2.5.2) метод H должен быть $C(V)$-мультипликативным относительно преобразования $a\rightarrow a$, и из леммы 1.3.1 видим, что H должен удовлетворять условиям (a), (b) (c′), (d), (e′) (j). Очевидно, что вместо условия (j) можно взять условие

$$\mathrm{I}=\sum_{mn=kl}^{\infty}\left|\bar{\varDelta}_{mn}\sum_{\mu\nu=kl}^{mn}h_{mn\mu\nu}\right|\leqslant N_3. \tag{2.5.5}$$

При $k=l=0$ из-за равенства $\sum\limits_{\mu\nu=0}^{mn}h_{mn\mu\nu}=\sum\limits_{\mu\nu=0}^{mn}c_{mn\mu\nu}V_{\mu\nu}$ из (2.5.5) заключается необходимость C_a-суммируемости ряда Σv_{kl}. Докажем достаточность. Мы имеем

$$\mathrm{I}=\sum_{mn=kl}^{\infty}\left|\bar{\varDelta}_{mn}\sum_{\mu\nu=0}^{m-k\,n-l}c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}V_{\mu\nu}\right|=$$

$$=\sum_{mn=kl}^{\infty}\left|\bar{\varDelta}_{mn}\sum_{\mu\nu=0}^{m-k\,n-l}\varDelta_{\mu\nu}\frac{c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k\,n-l\,\mu\nu}}C_{m-k\,n-l\,\mu\nu}(V)\right|$$

Используя формулу (1.6.3), мы можем написать

$$\mathrm{I}\leqslant\sum_{mn=kl}^{\infty}\sum_{\mu\nu=0}^{m-k\,n-l}\left|\bar{\varDelta}_{mn}\varDelta_{\mu\nu}\frac{c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k\,n-l\,\mu\nu}}\right|\left|C_{m-k\,n-l\,\mu\nu}(V)\right|+$$

$$+\sum_{mn=k+1\,l}^{\infty}\sum_{\mu\nu=0}^{m-k-1\,n-l}\left|\bar{\varDelta}_{n}\varDelta_{\mu\nu}\frac{c_{m-1\,n\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k-1\,n-l\,\mu\nu}}\right|\left|\bar{\varDelta}_{m}C_{m-k\,n-l\,\mu\nu}(V)\right|+$$

$$+\sum_{mn=k\,l+1}^{\infty}\sum_{\mu\nu=0}^{m-k\,n-l-1}\left|\bar{\varDelta}_{m}\varDelta_{\mu\nu}\frac{c_{m\,n-1\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k\,n-l-1\,\mu\nu}}\right|\left|\bar{\varDelta}_{n}C_{m-k\,n-l\,\mu\nu}(V)\right|+$$

$$+\sum_{mn=k+1\,l+1}^{\infty}\sum_{\mu\nu=0}^{m-k-1\,n-l-1}\left|\varDelta_{\mu\nu}\frac{c_{m-1\,n-1\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k-1\,n-l-1\,\mu\nu}}\right|\left|\bar{\varDelta}_{mn}C_{m-k\,n-l\,\mu\nu}(V)\right|=$$

$$=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3+\mathrm{I}_4.$$

Метод C удовлетворяет $TC3$ 2, поэтому также $TC3$ 1 [7], следовательно, $I_1 \leqslant N_1(V)$ [9]

Пользуясь равенством

$$\frac{c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k\,n-l\,\mu\nu}} = \sum_{ij=\mu+k\,\nu+l}^{mn} \overline{\Delta}_{ij} \frac{c_{ij\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{i-k\,j-l\,\mu\nu}},$$

мы получаем

$$I_4 \leqslant \sum_{mn=k+1\,l+1}^{\infty} \sum_{\mu\nu=0}^{m-k-1\,n-l-1} \sum_{ij=\mu+k\,\nu+l}^{m-1\,n-1} |a||b|,$$

где

$$|a| = \left| \overline{\Delta}_{ij} \Delta_{\mu\nu} \frac{c_{ij\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{i-k\,j-l\,\mu\nu}} \right|,$$

$$|b| = |\overline{\Delta}_{mn} c_{m-k\,n-l\,\mu\nu}(V)|$$

Меняя порядок суммирования, мы находим

$$I_4 \leqslant \sum_{mn=k+1\,l+1}^{\infty} \sum_{ij=kl}^{m-1\,n-1} \sum_{\mu\nu=0}^{i-k\,j-l} |a||b| =$$

$$= \sum_{ij=kl}^{\infty} \sum_{\mu\nu=0}^{i-k\,j-l} |a| \sum_{mn=i+1\,j+1}^{\infty} |b| \leqslant N_4(V)$$

из-за условия (2. 2. 6) и $TC3$ 2.

Пользуясь равенством

$$\frac{c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k\,n-l\,\mu\nu}} = \sum_{i=\mu+k}^{m} \Delta_i \frac{c_{in\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{i-k\,n-l\,\mu\nu}},$$

аналогично предыдущему получаем

$$I_2 \leqslant \sum_{in=kl}^{\infty} \sum_{\mu\nu=0}^{i-k\,n-l} \left| \overline{\Delta}_{in} \Delta_{\mu\nu} \frac{c_{in\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{i-k\,n-l\,\mu\nu}} \right| \sum_{m=i+1}^{\infty} |\overline{\Delta}_m C_{m-k\,n-l\,\mu\nu}(V)| \leqslant N_2(V)$$

из-за условия (2. 2. 6) и $TC3$ 2. Аналогично получаем $I_3 \leqslant N_3(V)$. Итак, мы имеем $I \leqslant N_1(V) + N_2(V) + N_3(V) + N_4(V)$, следовательно, условие (j) для метода H выполняется.

Из-за условий (j), (2. 2. 6), вполне α-регулярности и α-транслятивности метода C условия (a), (b) (c′) (d), (e′) для метода H также выполняются.

Этим теорема доказана.

2.6. Методы, удовлетворяющие Δ условию. Если рассматривать используемые условия для матриц (например, условия (2. 2. 2.). (2. 2. 5). (2. 2. 6)), то видим, что они со-

[9] Величина $N_1(V)$, как и ниже встречающиеся $N_2(V)$, $N_3(V)$ и $N_4(V)$, зависят только от последовательности V

держат разности, обозначаемые через Δ, которые для некоторых методов суммирования (например Вороного-Нёрлунда) могут быть равны нулю. В предыдущих теоремах для таких методов некоторые условия оказываются излишними (например, требование выполнения теорем о среднем значении), поэтому представляет интерес рассмотреть такие случаи отдельно.

Под Δ-условиями будем подразумевать следующие условия для треугольных методов A, B и C:

$$\Delta_{\mu\nu} \frac{\Delta_{\mu\nu} c_{mn\mu\nu}}{d_{mn\mu\nu}} = 0, \tag{2.6.1}$$

если $\mu < m$ или $\nu < n$ или оба, где $d_{mn\mu\nu}$ определена в (2.2.1);

$$\Delta_{\mu\nu} \frac{a_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{a_{m-k\,n-l\,\mu\nu}} = 0, \quad \Delta_{\mu\nu} \frac{b_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{b_{m-k\,n-l\,\mu\nu}} = 0, \tag{2.6.2}$$

$$\Delta_{\mu\nu} \frac{c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}}{c_{m-k\,n-l\,\mu\nu}} = 0, \tag{2.6.3}$$

если $\mu < m - k$ или $\nu < n - l$ или оба.

Если методы A и B удовлетворяют Δ-условию (2.6.2) и метод C Δ-условию (2.6.1), то мы имеем

$$C_{mn}(W) = \sum_{kl=0}^{mn} t_{mnkl} B_{m-k\,n-l}(V)\, A_{kl}(U), \tag{2.6.4}$$

где

$$t_{mnkl} = \frac{c_{mn\,mn}}{b_{m-k\,n-l\,m-k\,n-l}\, a_{klkl}}.$$

Равенство (2.6.4) мы получаем аналогично тому, как в разделе а) доказательства теоремы 2.4.1 мы получили неравенство (2.4.1).

Вместо теоремы 2.4.1 мы можем теперь доказать следующую теорему:

Теорема 2.6.1. *Пусть методы A и B нормальны и удовлетворяют Δ-условию* (2.6.2). *Пусть метод C удовлетворяет Δ-условию* (2.6.1).

Ряд-произведение Σw_{kl} при любых $\Sigma u_{kl} \in \beta A$ и $\Sigma v_{kl} \in \beta' B$ будет $C_{\beta''}$-суммируем к сумме (2.1.2) *тогда и только тогда, когда*

1° *метод* $T = (t_{mnkl})$ $\quad \beta \to \beta''$ *регулярен,*
2° *метод* $T' = (t_{mn\,m-k\,n-l})$ $\quad \beta' \to \beta''$ *регулярен,*

причем при $\beta = \beta' = rc$ нужно добавить еще условие

3° $\lim\limits_{mn\to\infty} t_{mn\,m-kl} = 0, \quad \lim\limits_{mn\to\infty} t_{mn\,k\,n-l} = 0.$

Доказательство. Докажем типичный случай $\beta = \beta' = \beta'' = rc$. Необходимость условий 1°, 2° и 3° легко установить соответствующим подбором последовательностей U и V Например, если взять последовательность V так, что $B_{kl}(V)=1$, мы из-за равенства (2.1.2) из (2.6.4) заключаем, что rc-регулярность метода $T=(t_{mnkl})$ необходима.

Для доказательства достаточности нужно показать на основании равенства (2.6.4), что метод $S=(s_{mnkl})$. где $s_{mnkl}=$ $=t_{mnkl}\,B_{m-k\,n-l}(V)$, $B(V)$-мультипликативен относительно преобразования $rc\to rc$, т. е. $S=(s_{mnkl})$ должен удовлетворять условиям (a), (b), (c′), (d), (e′) и (h) (см. лемма 1.3.1). Эти условия выполняются условиями 1° 2° и 3°. Например, в случае условия (d) имеем

$$\lim_{mn\to\infty}\sum_{\mu=0}^{m} t_{mn\mu\nu}B_{m-\mu\,n-\nu}(V)=\lim_{mn\to\infty}\sum_{\mu l=0}^{mn} q_{mn\mu l}B_{\mu l}(V)=0,$$

где

$$q_{mn\mu l}=\begin{cases} t_{mn\,m-\mu\nu}, & \text{если } l=n-\nu,\\ 0, & \text{если } l\neq n-\nu,\end{cases}$$

так как метод $Q=(q_{mn\,\mu l})$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим преобразование $rc\to bcn$ (см. лемма 1.3.2).

Если метод C удовлетворяет Δ-условию (2.6.3), то вместо теоремы 2.5.1 мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 2.6.2. *Пусть метод C нормален, вполне rc-регулярен, удовлетворяет Δ-условию* (2.6.3) *и условию* (2.2.7).

Ряд-произведение Σw_{kl} при всех a-сходящихся рядах Σu_{kl} тогда и только тогда C_{rc}-суммируем к сумме (2.5.3) *с выполнением* (2.5.4) *когда ряд Σv_{kl} C_{rc}-суммируем.*

Доказательство. Аналогично, как при доказательстве теоремы 2.5.1, метод $H=(h_{mnkl})$ на основании равенства (2.5.2) должен удовлетворять условиям (a), (b), (c′), (d), (e′) и (i). Покажем, что эти условия выполняются.

Для (i) из-за Δ-условия (2.6.3) имеем

$$\left|\sum_{kl=ij}^{mn} h_{mnkl}\right|=\left|\frac{c_{mn\,mn}}{c_{m-i\,n-j\,m-i\,n-j}}\right|\,|C_{m-i\,n-j}(V)|,$$

следовательно (i) выполняется, если $\Sigma v_{kl}\in rcC$.

Для выполнения условия (e′) достаточна C_{rc}-суммируемость ряда Σv_{kl}. Выполнение условий (a), (b), (c′), (d) доказывается так же, как при доказательстве теоремы 2.5.1. Для этого покажем, что метод C вполне rc-транслятивен слева.

Пусть $\Sigma v_{kl} \in rcrnC$. Мы имеем

$$\sum_{kl=0}^{m-1\, n} c_{mn\, k+1\, l} V_{kl} = \frac{c_{mnmn}}{c_{m-1\, n\, m-1\, n}} C_{m-1\, n}(V).$$

Из-за условия (2. 2. 7) очевидно теперь, что и ряд $\Sigma v_{k-1\, l}$ (где $v_{-1\, l} = 0$) C_{rcrn}-суммируем. Аналогично можно показать, что также $\Sigma v_{k\, l-1}$ (где $v_{k,\, -1} = 0$) C_{rcrn}-суммируем. Если $\Sigma v_{kl} \in rcnC$, то последовательность

$$V' = [V - \sum_{\mu=0}^{\infty} C_{\mu}(V) e_{\mu} - \sum_{\nu=0}^{\infty} C^{\nu}(V) e^{\nu}] \in rcrn\, C,$$

и мы получаем, что

$$\sum_{kl=0}^{m-1\, n} c_{mn\, k+1\, l} [V_{kl} - C_k(V) - C^l(V)] \to 0$$

при $m, n \to \infty$, при $m \to \infty$ и при $n \to \infty$, откуда из-за rc-регулярности метода C $\Sigma v_{k-1\, l} \in rcn\, C$ (где $v_{-1\, l} = 0$) с сохранением пределов при $m \to \infty$ и при $n \to \infty$. Аналогично $\Sigma v_{kl-1} \in rcnC$, если $\Sigma v_{kl} \in rcnC$. Значит, метод C вполне rcn-транслятивен слева. Аналогично получаем, что метод C также вполне rc-транслятивен слева. Теорема 2. 6. 2 доказана.

Аналогично теореме 2. 6. 2 можно доказать и следующую теорему.

Теорема 2. 6. 3. *Пусть метод C нормален, β-регулярен, удовлетворяет Δ-условию* (2. 6. 3) *и условию* (2. 2. 7).

Ряд-произведение Σw_{kl} при всех a-сходящихся рядах Σu_{kl} тогда и только тогда C_{β}-суммируем к сумме (2. 5. 3) *когда ряд Σv_{kl} C_{β}-суммируем.*

Теорема 2. 6. 4. *Пусть метод C нормален, вполне a-регулярен, удовлетворяет Δ-условию* (2. 6. 3) *и условию* (2. 2. 8).

Ряд-произведение Σw_{kl} при всех a-сходящихся рядах Σu_{kl} тогда и только тогда C_a-суммируем к сумме (2. 5. 3) *с выполнением* (2. 5. 4.), *когда ряд Σv_{kl} C_a-суммируем.*

Доказательство. Эта теорема соответствует теореме 2. 5. 3 и доказывается аналогично. Метод H должен удовлетворять условиям (a), (b), (c′). (d), (e′), (j). Для выполнения условия (j) нужно показать, что выполняется (2. 5. 5) Мы имеем

$$\mathrm{I} = \sum_{mn=kl}^{\infty} \left| \bar{\Delta}_{mn} \sum_{\mu\nu=0}^{m-k\, n-l} c_{mn\, \mu+k\, \nu+l} V_{\mu\nu} \right|$$

$$= \sum_{mn=kl}^{\infty} \bar{\Delta}_{mn} \left(\frac{c_{mnmn}}{c_{m-k\, n-l\, m-k\, n-l}} C_{m-k\, n-l}(V) \right) \Bigg|$$

Используя формулу (1.6.3), мы доказываем ограниченность последней суммы аналогично как при доказательстве теоремы 2.5.3.

3. Теоремы умножения для методов Рисса и Вороного-Нёрлунда

3.1. Теоремы умножения для метода Рисса. Метод Рисса $(R, a_{\mu\nu})$ матричный метод $A=(a_{mn\mu\nu})$. где элементы $a_{mn\mu\nu}$ определяются следующим образом:

$$a_{mn\mu\nu}=\begin{cases}\dfrac{a_{\mu\nu}}{A_{mn}}, & \text{если } \mu,\nu\leqslant m,n\\ 0, & \text{если } \mu>m \text{ или } \nu>n \text{ или оба,}\end{cases}$$

где $\{a_{\mu\nu}\}$ заданная последовательность и такая, что $a_{\mu\nu}\neq 0$ и $A_{mn}=\sum\limits_{\mu\nu=0}^{mn} a_{\mu\nu}\neq 0$. $(R, a_{\mu\nu})$ нормальный метод.

Пусть даны еще методы Рисса $(R, b_{\mu\nu})$ и $(R, c_{\mu\nu})$ и некоторый треугольный метод $C=(c_{mn\mu\nu})$ Ниже будем пользоваться следующими условиями (где K_1, K_8 константы):

а) Условия для $TC3$:

$$|A_{kl}|\leqslant K_1|A_{mn}|,\quad (k,l\leqslant m,n) \tag{3.1.1}$$

$$\left(\sum_{mn=0}^{\infty}-\sum_{mn=0}^{kl}\right)\left|\overline{\Delta}_{mn}\frac{A_{kl}}{A_{mn}}\right|\leqslant K_2, \tag{3.1.2}$$

$$\sum_{\mu\nu=0}^{mn}|a_{\mu\nu}|\leqslant K_3|A_{mn}|; \tag{3.1.3}$$

б) Условия для проблем I и II:

$$|\Delta_{kl}c_{mn\,\mu+k\,\nu+l}|\leqslant K_4\left|\frac{a_{kl}}{A_{mn}}\,\frac{b_{\mu\nu}}{B_{m-k\,n-l}}\right|, \tag{3.1.4}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\mu\nu=0}^{m-k-1\,n-l-1}\left|\Delta_{\mu\nu}\frac{c_{\mu+k\,\nu+l}}{c_{\mu\nu}}\right|\leqslant K_5\left|\frac{C_{mn}}{C_{m-kn-l}}\right|,\\
&\sum_{\mu=0}^{m-k-1}\left|\Delta_{\mu}\frac{c_{\mu+k\,n}}{c_{\mu\,n-l}}\right|\leqslant K_6\left|\frac{C_{mn}}{C_{m-k\,n-l}}\right|,\\
&\sum_{\nu=0}^{n-l-1}\left|\Delta_{\nu}\frac{c_{m\,\nu+l}}{c_{m-k\,\nu}}\right|\leqslant K_7\left|\frac{C_{mn}}{C_{m-k\,n-l}}\right|,\\
&\left|\frac{c_{mn}}{c_{m-k\,n-l}}\right|\leqslant K_8\left|\frac{C_{mn}}{C_{m-k\,n-l}}\right|
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.5}$$

Лемма 3.1.1. *Метод Рисса* $(R, a_{\mu\nu})$ *удовлетворяет ТСЗ 1 (ТЗС 2, соответственно ТСЗ 3) тогда и только тогда, когда выполняется условие* (3.1.1) ((3.1.2), *соответственно* (3.1.3)).

Доказательство. Необходимость условий (3.1.1), (3.1.2) и (3.1.3) легко установить, беря в оценках, определяющих *ТСЗ*, вместо произвольной последовательности последовательность $e_{\mu\nu}$ или e. Докажем достаточность.

Выполняется равенство ($x = \{x_{\mu\nu}\}$ произвольная последовательность)

$$\left|\sum_{\mu\nu=0}^{kl} \frac{a_{\mu\nu}}{A_{mn}} x_{\mu\nu}\right| = \left|\frac{A_{kl}}{A_{mn}}\right| \left|\sum_{\mu\nu=0}^{kl} \frac{a_{\mu\nu}}{A_{kl}} x_{\mu\nu}\right|,$$

следовательно, если $(R, a_{\mu\nu})$ удовлетворяет условию (3.1.1), то также *ТСЗ* 1.

Если выполняется условие (3.1.2), то

$$\left(\sum_{mn=0}^{\infty} - \sum_{mn=0}^{kl}\right)\left|\bar{\varDelta}_{mn} \frac{A_{kl}}{A_{mn}} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} \frac{a_{\mu\nu}}{A_{kl}} x_{\mu\nu}\right| \leqslant K_2 \left|\sum_{\mu\nu=0}^{kl} \frac{a_{\mu\nu}}{A_{kl}} x_{\mu\nu}\right|,$$

следовательно, $(R, a_{\mu\nu})$ удовлетворяет *ТСЗ* 2.

И, наконец, выполняется равенство

$$\sum_{\mu\nu=0}^{mn} \left|\frac{a_{\mu\nu}}{A_{mn}} x_{\mu\nu}\right| = \sum_{\mu\nu=0}^{mn} \left|\bar{\varDelta}_{\mu\nu} \left(\frac{A_{\mu\nu}}{A_{mn}} A_{\mu\nu}(x)\right)\right|,$$

где в данном случае $A_{\mu\nu}(x) = \sum_{ij=0}^{\mu\nu} \frac{a_{ij}}{A_{\mu\nu}} x_{ij}$. Используя формулу (1.6.3), мы можем написать

$$\sum_{\mu\nu=0}^{mn} \left|\frac{a_{\mu\nu}}{A_{mn}} x_{\mu\nu}\right| \leqslant \sum_{\mu\nu=0}^{mn} \left|\bar{\varDelta}_{\mu\nu} \frac{A_{\mu\nu}}{A_{mn}}\right| |A_{\mu\nu}(x)| +$$

$$+ \sum_{\mu\nu=01}^{mn} \left|\bar{\varDelta}_{\mu} \frac{A_{\mu\nu-1}}{A_{mn}}\right| |\bar{\varDelta}_{\nu} A_{\mu\nu}(x)| + \sum_{\mu\nu=1,0}^{mn} \left|\bar{\varDelta}_{\nu} \frac{A_{\mu-1\,\nu}}{A_{mn}}\right| |\bar{\varDelta}_{\mu} A_{\mu\nu}(x)| +$$

$$+ \sum_{\mu\nu=1}^{mn} \left|\frac{A_{\mu-1\,\nu-1}}{A_{mn}}\right| |\bar{\varDelta}_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(x)|$$

Если выполняется (3. 1. 3), то также (3. 1. 1) Учитывая еще равенства

$$A_{\mu\nu}(x)=\sum_{ij=0}^{\mu\nu}\overline{\Delta}_{ij}A_{ij}(x)=\sum_{i=0}^{\mu}\overline{\Delta}_{i}A_{i\nu}(x)=\sum_{j=0}^{\nu}\overline{\Delta}_{j}A_{\mu j}(x),$$

нетрудно убедится, что в последнем неравенстве правая сторона $\leqslant K \sum_{\mu\nu=0}^{mn} |\overline{\Delta}_{\mu\nu}A_{\mu\nu}(x)|$, где K некоторая константа.

Лемма 3. 1. 1 доказана.

Для α-регулярности или вполне α-регулярности метода $(R, a_{\mu\nu})$ необходимы и достаточны условия леммы 1. 3. 2, где теперь условие (h) представляется в виде (3. 1. 3), (i) в виде (3. 1. 1) и (j) в виде (3. 1. 2) Учитывая лемму 3. 1. 1, видим, что β-регулярный (или вполне β-регулярный) метод $(R, a_{\mu\nu})$ удовлетворяет *ТСЗ* 3 и *ТСЗ* 1, a-регулярный (или вполне a-регулярный) метод $(R, a_{\mu\nu})$ удовлетворяет *ТСЗ* 2 и *ТСЗ* 1, и $a\to\beta$ регулярный метод $(R, a_{\mu\nu})$ удовлетворяет ТСЗ 1.

Ниже будем пользоваться равенствами (2. 1. 2) и (2. 1. 3), где под методами A и B следует подразумевать методы Рисса, а также равенствами (2. 5. 3) и (2. 5. 4), где под методом C следует подразумевать метод Рисса $(R, c_{\mu\nu})$.

Теорема 3. 1. 1. *Пусть методы* $(R, a_{\mu\nu})$ *и* $(R, b_{\mu\nu})$ *вполне a-регулярны и удовлетворяют ТСЗ 3. Пусть метод* $C=(c_{mn\mu\nu})$ *удовлетворяет условию* (3. 1. 4).

Ряд-произведение Σw_{kl} *при любых* $\Sigma u_{kl}\in a(R, a_{\mu\nu})$ *и* $\Sigma v_{kl}\in a(R, b_{\mu\nu})$ *будет C_β-суммируем к сумме* (2. 1. 2) *тогда и только тогда, когда C $a\to\beta$ регулярен, причем при $\beta=rc$, если C вполне $a\to rc$ регулярен, выполняются также равенства* (2. 1. 3).

Эта теорема следует из теоремы 2. 4. 3.

Теорема 3. 1. 2. *Пусть метод* $(R, c_{\mu\nu})$ *вполне rc-регулярен и удовлетворяет условию* (3. 1. 5).

Ряд-произведение Σw_{kl} *при всех a-сходящихся рядах* Σu_{kl} *тогда и только тогда* $(R, c_{\mu\nu})_{rc}$*-суммируем к сумме* (2. 5. 3) *с выполнением* (2. 5. 4), *когда ряд* Σv_{kl} $(R, c_{\mu\nu})_{rc}$*-суммируем.*

Эта теорема заключается из теоремы 2. 5. 1.

Теорема 3. 1. 3. *Пусть метод* $(R, c_{\mu\nu})$ *вполне β-регулярен и удовлетворяет условию* (3. 1. 5).

Ряд-произведение Σw_{kl} *при всех a-сходящихся рядах* Σu_{kl} *тогда и только тогда* $(R, c_{\mu\nu})_\beta$*-суммируем к сумме* (2. 5. 3), *когда ряд* Σv_{kl} $(R, c_{\mu\nu})_\beta$*-суммируем.*

Эта теорема заключается из теоремы 2. 5. 2.

Метод Рисса $(R, c_{\mu\nu})$, где $c_{\mu\nu}\neq\text{const}$, не удовлетворяет Δ-условиям параграфа 2. 6.

3.2. Теоремы умножения для метода Вороного Нёрлунда. Метод Вороного-Нёрлунда $(WN, a_{\mu\nu})$ матричный метод $A=(a_{mn\mu\nu})$, где элементы $a_{mn\mu\nu}$ определяется следующим образом:

$$a_{mn\mu\nu}=\begin{cases} \dfrac{a_{m-\mu\, n-\nu}}{A_{mn}}, & \text{если } \mu,\nu\leqslant m,n \\ 0, & \text{если } \mu>m \text{ или } \nu>n \text{ или оба,}\end{cases}$$

где $\{a_{\mu\nu}\}$ заданная последовательность и такая, что $A_{mn}=$ $=\sum\limits_{\mu\nu=0}^{mn} a_{\mu\nu}\neq 0$. $(WN, a_{\mu\nu})$ нормальный метод.

При помощи леммы 1.3.2 нетрудно получить условия для α-регулярности или вполне α-регулярности метода $(WN, a_{\mu\nu})$.

ТСЗ удовлетворяет метод $(WN, a_{\mu\nu})$ при очень узких условиях, и эти условия можно получить из лемм 1.4.1, 1.4.2 и 1.4.3. Поэтому и теоремы умножения в параграфах 2.4 и 2.5 для методов Вороного-Нёрлунда очень ограничены. Оказывается, однако, что $(WN, a_{\mu\nu})$ и $(WN, b_{\mu\nu})$ удовлетворяют Δ-условию (2.6.2), а метод $(WN, c_{\mu\nu})$, где $c_{\mu\nu}=\sum\limits_{kl=0}^{\mu\nu} b_{\mu-k\,\nu-l}A_{kl}$, удовлетворяет также Δ-условию (2.6.1) Поэтому теоремы параграфа 2.6 выполняются в случае методов Вороного-Нёрлунда.

В настоящем параграфе используем равенства (2.1.2), (2.5.3) и (2.5.4), где под методами A, B и C следует подразумевать методы Вороного-Нёрлунда. В следующей теореме метод $(WN, c_{\mu\nu})$ определяется с $c_{\mu\nu}=\sum\limits_{kl=0}^{\mu\nu} b_{\mu-k\,\nu-l}A_{kl}$.

Теорема 3.2.1. *Ряд-произведение Σw_{kl} при любых $\Sigma u_{kl}\in$ $\in\beta(WN, a_{\mu\nu})$ и $\Sigma v_{kl}\in\beta'(WN, b_{\mu\nu})$ будет $(WN, c_{\mu\nu})_{\beta''}$-суммируем к сумме* (2.1.2) *тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ\ (WN, c_{\mu\nu})_{\beta''}\supseteq (WN, a_{\mu\nu})_{\beta}\quad \text{регулярно,}$$

$$2^\circ\ (WN, c_{\mu\nu})_{\beta''}\supseteq (WN, b_{\mu\nu})_{\beta'}\quad \text{регулярно,}$$

причем $\beta=\beta'=rc$ нужно добавить условие

$$3^\circ\ \lim_{mn\to\infty}\frac{A_{m-kl}B_{k\,n-l}}{C_{mn}}=\lim_{mn\to\infty}\frac{A_{k\,n-l}B_{m-kl}}{C_{mn}}=0.$$

Эта теорема заключается непосредственно из теоремы 2.6.1. Очевидно, что условия 1°, 2° и 3° тождественны соответственно условиям 1°, 2°, 3° теоремы 2.6.1. Теорему, аналогичную теореме 3.2.1, но при немного более общих предположениях относительно суммы произведения, доказал И. Кулль [4], используя другой метод.

Пусть ниже будет $(WN,\ c_{\mu\nu})$ произвольный метод Вороного-Нёрлунда.

Теорема 3.2.2. *Пусть метод* $(WN,\ c_{\mu\nu})$ *вполне rc-регулярен.*

Ряд-произведение Σw_{kl} *при всех а-сходящихся рядах* Σu_{kl} *тогда и только тогда* $(WN,\ c_{\mu\nu})_{rc}$*-суммируем к сумме* (2.5.3) *с выполнением* (2.5.4), *когда ряд* Σv_{kl} $(WN,\ c_{\mu\nu})_{rc}$*-суммируем.*

Эта теорема заключается из теоремы 2.6.2, где условие (2.2.7) принимает вид $|C_{kl}| \leqslant M_6|C_{mn}|$ $(k, l \leqslant m, n)$ и выполняется из-за rc-регулярности метода $(WN,\ c_{\mu\nu})$.

Теорема 3.2.3. *Пусть метод* $(WN,\ c_{\mu\nu})$ β*-регулярен.*

Ряд-произведение Σw_{kl} *при всех а-сходящихся рядах* Σu_{kl} *тогда и только тогда* $(WN,\ c_{\mu\nu})_{\beta}$*-суммируем к сумме* (2.5.3), *когда ряд* Σv_{kl} $(WN,\ c_{\mu\nu})_{\beta}$*-суммируем.*

Эта теорема заключается из теоремы 2.6.3.

Теорема 3.2.4. *Пусть метод* $(WN,\ c_{\mu\nu})$ *вполне а-регулярен.*

Ряд-произведение Σw_{kl} *при всех а-сходящихся рядах* Σu_{kl} *тогда и только тогда* $(WN,\ c_{\mu\nu})_{a}$*-суммируем к сумме* (2.5.3) *с выполнением (2.5.4), когда ряд* Σv_{kl} $(WN,\ c_{\mu\nu})_{a}$*-суммируем.*

Эта теорема заключается из теоремы 2.6.4, где условие (2.2.8) принимает вид

$$\sum_{mn=kl}^{\infty} \left| \Delta_{mn} \frac{C_{m-k\,n-l}}{C_{mn}} \right| \leqslant M_7$$

и выполняется из-за a-регулярности метода $(WN,\ c_{\mu\nu})$.

Поступило
13 I 1958

Литература

1. Hamilton, H. J., Transformations of multiple sequences. Duke Math. J., 1936, **2**, 29—60.
2. Jurkat, W., Peyerimhoff, A., Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z., 1951, **55**, 92—108.
3. Jurkat, W., Peyerimhoff A., Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen. Math. Z., 1952, **56**, 152—178.
4. Кулль И., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 3—59.
5. Mears, F. M., Transformations of double sequences. Amer. J. Math., 1948, **70**, 804—832.
6. Peyerimhoff, A., Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. Math. Z., 1953, **57**, 265—290.
7. Реймерс Э., Теоремы о среднем значении для двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 60—79.

KESKVÄÄRTUSTEOREEMID JA KAHEKORDSETE SUMMEERUVATE RIDADE KORRUTAMINE

E. Reimers
Geomeetriakateeder

Resümee

Artiklis [7] meie laiendasime Jurkat'i ja Peyerimhoff'i poolt harilike ridade jaoks loodud keskväärtusteoreemide teooria kahekordsetele ridadele ja rakendasime seda summeerimismenetluste sisalduvuse uurimisel. Käesolevas artiklis me rakendame keskväärtusteoreeme kahekordsete summeeruvate ridade Cauchy korrutise summeeruvuse uurimiseks.

Tähendagu α, α', α'' ühte kahekordsete koonduvate ridade klassidest bc, rc ja a, mis on defineeritud käesoleva artikli paragrahvis 1.1. Me vaatleme järgmist transformatsiooni

$$y = \{A_{mn}(x)\} = \{\sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu}\} = Ax.$$

Me ütleme, et rida Σu_{kl} on A_α-summeeruv summaks $A(x)$, kui $y \in \alpha$, kus $x = \{x_{\mu\nu}\} = \{\sum_{kl=0}^{\mu\nu} u_{kl}\}$, ja kui $\lim_{mn \to \infty} A_{mn}(x) = A(x)$ ning me kirjutame $\Sigma u_{kl} \in \alpha A$.

Peatükis 2 me vaatleme kahte järgmist probleemi.

P r o b l e e m I. *Kui* Σu_{kl} *on mis tahes* A_α*-summeeruv rida ja* Σv_{kl} *mis tahes* $B_{\alpha'}$*-summeeruv rida, siis milliseid tingimusi peab rahuldama menetlus C selleks, et korrutisrida* Σw_{kl} *oleks* $C_{\alpha''}$*-summeeruv.*

P r o b l e e m II. *Kui* Σu_{kl} *on mis tahes absoluutselt koonduv rida, siis milliseid tingimusi peab rahuldama rida* Σv_{kl} *selleks, et korrutisrida* Σw_{kl} *oleks* $C_{\alpha'}$*-summeeruv, kusjuures menetlus C on ette antud.*

Nende probleemide üldine lahendus oma komplitseerituse tõttu omab peamiselt teoreetilist tähtsust. Osutub aga, et keskväärtusteoreemide abil me võime eraldada selliseid mittekonkretiseeritud

menetluste klasse, mille jaoks eespool mainitud probleemide lahendus osutub efektiivseks. Illustreerime seda kahe näite varal, mis on võetud vastavalt paragrahvidest 2. 4 ja 2. 5.

T e o r e e m. *Olgu menetlus A normaalne, täielikult absoluutselt regulaarne ning rahuldagu keskväärtusteoreeme* (1. 4. 2) *ja* (1. 4. 3). *Menetlus B rahuldagu samu tingimusi ja menetlus C tingimust* (2. 2. 4)

Korrutisrida $\Sigma\, w_{kl}$ *mis tahes ridade* $\Sigma\, u_{kl} \in aA$ *ja* $\Sigma\, v_{kl} \in aB$ *korral on* C_{rc}*-summeeruv summaks* $C(W) = A(U)B(V)$ *siis ja ainult siis, kui menetlus C on* $a \to rc$ *regulaarne.*

T e o r e e m. *Olgu menetlus C normaalne, täielikult* $rc \to rc$ *regulaarne ning rahuldagu tingimust* (2. 2. 5) *ja* (1. 4. 1)*-le analoogilist keskväärtusteoreemi.*

Korrutisrida $\Sigma\, w_{kl}$ *iga absoluutselt koonduva rea* $\Sigma\, u_{kl}$ *korral on siis ja ainult siis* C_{rc}*-summeeruv summaks* $C(W) = C(V)\Sigma\, u_{kl}$, *kui rida* $\Sigma\, v_{kl}$ *on* C_{rc}*-summeeruv.*

Paragrahvis 2. 6 me vaatleme menetlusi, mis rahuldavad Δ-tingimusi (2. 6. 1) ja (2. 6. 2). Selliste menetluste korral võib mõned eeldused menetluste kohta ära jätta (näiteks keskväärtusteoreemid).

Peatükis 3 me rakendame üldisi korrutamisteoreeme Riesz'i ja Voronoi-Nörlundi menetluse korral.

MEAN VALUE THEOREMS AND MULTIPLICATION OF DOUBLE SUMMABLE SERIES

E. Reimers

Summary

In the article [7] we extended the theory of the mean value theorems, created for simple series by Jurkat and Peyerimhoff, on the double series and applied it by investigating the inclusion of the methods of summability. In the present article, we apply the theory of the mean value theorems to investigate the summability of Cauchy product of double summable series.

Let the letters α, α', α'' denote one of the classes of the convergent double series *bc, rc* and *a* being defined in the paragraph 1. 1 of the present article. We take the following transformation

$$y = \{A_{mn}(x)\} = \{\sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu}\} = Ax.$$

Assuming that series Σu_{kl} is summable A_α to $A(x)$ if $y \epsilon \alpha$ where $x = \{x_{\mu\nu}\} = \{\sum_{kl=0}^{\mu\nu} u_{kl}\}$ and if $\lim\limits_{mn \to \infty} A_{mn}(x) = A(x)$, we are allowed to write $\Sigma u_{kl} \in \alpha A$.

In Chapter 2 two problems will be examined.

P r o b l e m I. *If* Σu_{kl} *is any series summable* A_α *and* Σv_{kl} *any series summable* $B_{\alpha'}$, *then, which conditions the method C must satisfy in order that the product series* Σw_{kl} *would be summable* $C_{\alpha''}$.

P r o b l e m II. *If* Σu_{kl} *is any absolutely convergent series, then, which conditions the series* Σv_{kl} *must satisfy in order that the product series* Σw_{kl} *would be summable* $C_{\alpha'}$ *where the method C is given.*

Because of its own complication the general solution of these problems has a mainly theoretical significance. It turns out that by the aid of the mean value theorems we are able to pick out those classes of the non-concrete methods for which the solution

of the above presented problems proves to be effective. We illustrate this at the hand of examples taken from paragraphs 2.4 and 2.5, respectively.

Theorem. *Let the method A be normal and completely absolutely regular, satisfying the mean value theorems* (1.4.2) *and* (1.4.3). *Let the method B have the similar properties, and the method C satisfy* (2.2.4).

The product series Σw_{kl} *for any* $\Sigma u_{kl} \in aA$ *and* $\Sigma v_{kl} \in aB$ *is summable* C_{rc} *to* $C(W) = A(U)B(V)$ *if and only if the method C is* $a \rightarrow rc$ *regular.*

Theorem. *Let the method C be normal, completely* $rc \rightarrow rc$ *regular, satisfying both* (2.2.5) *and the mean value theorem similar to* (1.4.1).

The product series Σw_{kl} *for any absolutely convergent series* Σu_{kl} *is summable* C_{rc} *to* $C(W) = C(V)\Sigma u_{kl}$ *if and only if the series* Σv_{kl} *is summable* C_{rc}.

In paragraph 2.6, we deal with the methods satisfying Δ-conditions (2.6.1) and (2.6.2). For these methods, some presumptions may be omitted (for example, the mean value theorems).

In Chapter 3, we use the general theorems for special cases, the methods being those of Riesz and Voronoi-Nörlund.

О ПРИНЦИПЕ МАЖОРАНТ ДЛЯ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Э. Тамме

Кафедра геометрии

В настоящей работе даются общие теоремы о сходимости одного класса итерационных методов (§ 3) и о сходимости степенного ряда неявного оператора (§ 4). При этом используется метод мажорирования одного уравнения другим. В последних двух параграфах указываются некоторые возможности применения полученных результатов к изучению сходимости метода разложения в ряд по параметру или метода возмущений (в § 5 — при приближенном решении интегральных и дифференциальных уравнений, в § 6 — при приближенном разыскании собственных значений и элементов). В первых двух параграфах излагаются некоторые понятия и вспомогательные результаты, необходимые для последующего изложения.

§ 1. Аналитические операторы

1. Пусть $A_{1 \ldots n}$ — n-линейный (т. е. аддитивный по каждому аргументу и ограниченный) оператор ([2, 15]) из банаховых пространств $X_1, \ldots, X_n$ в пространство Z того же типа.[1] Совокупность всех таких операторов образует пространство Банаха, которое обозначается $(X_1 \ldots X_n \to Z)$.

Назовем операторы $A_{1 \ldots n} \in (X_1 \ldots X_n \to Z)$ и $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \in (X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_n} \to Z)$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — некоторая перестановка чисел $1, \ldots, n$) эквивалентными, если при любых $x_i \in X_i$

$$A_{1 \ldots n} x_1 \ldots x_n = A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_n}.$$

Ставя каждому оператору из $(X_1 \ldots X_n \to Z)$ в соответствие экви-

[1] В настоящей статье рассматривается случай действительных банаховых пространств, но все приведенные результаты переносятся без всякого изменения и на случай комплексных банаховых пространств.

валентный оператор из $(X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_n} \to Z)$. мы получим линейно-изометричное соответствие между этими пространствами.

Оператор $A_{1 \dots n}$ называется симметричным, если при каждой совпадающей паре пространств $X_i = X_j$ он совпадает с эквивалентным оператором, полученным из $A_{1 \dots n}$ путем перестановки индексов i и j. Совокупность всех симметричных n-линейных операторов $[X_1 \dots X_n \to Z]$ является также пространством Банаха. Эквивалентные симметричные n-линейные операторы будем считать тождественными.

Отметим, что почти все понятия и результаты, приведенные в работе [2] для n-линейных операторов в случае $X_1 = \dots = X_n$, можно перенести на рассматриваемый случай.

2. Рассмотрим оператор $P(x, y)$ из банаховых пространств X и Y в пространство Z того же типа. Частной производной P_x называется производная (в смысле Фреше) оператора P, рассматриваемого зависящим только от x. Аналогично определяется P_y. Частные производные высших порядков определяются обычным образом: $P_{x^2} = (P_x)_x$, $P_{xy} = (P_x)_y$, $P_{yx} = (P_y)_x$ и т. д.

Нетрудно показать, что если всевозможные частные производные порядка n, существуют в некоторой окрестности точки (x, y) и непрерывны в этой точке, то эти производные являются симметричными n-линейными операторами. При этом все частные производные, полученные дифференцированием оператора P $n-k$ раз по x и k раз по y (в произвольном порядке), являются эквивалентными, и их можно отождествить с оператором [2]

$$P_{x^{n-k}y^k}(x, y) \in [Y^k X^{n-k} \to Z].$$

Пару пространств X и Y можно рассматривать как банахово пространство $X \times Y$ элементами которого являются пары $\bar{x} = (x, y)$ $(x \in X,\ y \in Y)$, причем, например, $\|\bar{x}\| = \|x\| + c\|y\|$ $(c > 0)$.

Можно доказать, что из существования производной $P^{(n)}(\bar{x})$ следует существование всех частных производных порядка n в точке $\bar{x} = (x, y)$. Наоборот, из существования всех частных производных порядка n в окрестности точки $\bar{x} = (x, y)$ и их непрерывности в этой точке вытекает существование и непрерывность производной $P^{(n)}$ в точке $\bar{x}$, которую (как и в случае функции двух переменных [6]) можно представить однострочной матрицей

$$P^{(n)} = (P_{x^n},\ P_{x^{n-1}y}, \dots,\ P_{y^n}),$$

---

[2] Для краткости обозначаем $\underbrace{Y \dots Y}_{k} \underbrace{X \dots X}_{n-k} = Y^k X^{n-k}$.

причем

$$P^{(n)}\Delta\overline{x}^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_{x^{n-k}y^k}\, \Delta y^k \Delta x^{n-k},$$

где $\Delta\overline{x} = (\Delta x,\ \Delta y)$, и

$$\|P^{(n)}\| = \max_{k=0,1,\ldots,n} \left(\frac{1}{c^k} \|P_{x^{n-k}y^k}\| \right).$$

3. Оператор двух переменных $P(x, y)$ называется аналитическим, если он аналитичен как оператор из пространства $X \times Y$ в пространство Z ([2, 28]).

Пользуясь результатами работы [2] и предыдущего пункта, можно установить следующие критерии аналитичности и формулы для частных производных.

Оператор $P(x, y)$ аналитичен в точке (x_0, y_0) тогда и только тогда, когда он имеет в этой точке все частные производные, являющиеся симметричными операторами, и представим в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) сходящимся рядом

$$P(x,\ y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_{x^{n-k}y^k}(x_0, y_0)\,(y - y_0)^k\,(x - x_0)^{n-k} \tag{1}$$

Пусть D — связное, открытое, содержащее точку (x_0, y_0) множество пространства $X \times Y$, на котором оператор P аналитичен и ряд (1) сходится. Можно доказать, что на множестве D оператор P представим рядом (1) и его частные производные выражаются сходящимися рядами

$$P_{x^i y^j}(x, y) = \sum_{n=i+j}^{\infty} \frac{1}{(n-i-j)!} \sum_{k=j}^{n-i} \binom{n-i-j}{k-j} P_{x^{n-k}y^k}(x_0, y_0) \times$$

$$\times (y - y_0)^{k-j} (x - x_0)^{n-k-i},$$

которые получены почленными дифференцированием ряда (1).

Лемма 1. *Оператор $P(x, y)$, определенный в окрестности точки (x_0, y_0), является аналитическим в точке (x_0, y_0) тогда и только тогда, когда он имеет в некоторой окрестности этой точки все (симметричные) частные производные любого порядка и когда в той же окрестности справедливы неравенства*

$$\frac{1}{n!} \|P_{x^{n-k}y^k}(x, y)\| \leqslant h b^n c^k \ (n = 0, 1, \ldots;\ k = 0, \ldots, n),$$

где h, b и c — неотрицательные постоянные.

Для степенных рядов в пространстве Банаха имеет место следующее обобщение второй теоремы Абеля.

Л е м м а 2. *Если степенной ряд*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

сходится в точке $x = x_1$, *то*

$$\lim_{t \to 1-0} P[x_0 + t(x_1 - x_0)] = P(x_1),$$

где t — *действительная переменная.*

Доказательство этой леммы можно провести аналогично доказательству второй теоремы Абеля.

§ 2. Обобщенно-нормированное пространство

1. П о л у у п о р я д о ч е н н ы м п р о с т р а н с т в о м Б а н а х а называется банахово пространство, в котором выделен конус (см [14]), т. е. замкнутое множество, которому вместе с элементами u и u' принадлежат также элементы $u + u'$ и λu при $\lambda \geqslant 0$, но не принадлежит $-u$ (если $u \neq 0$). Элементы, принадлежащие конусу, называются положительными и обозначатюся $u \geqslant 0$.

Назовем полуупорядоченное пространство Банаха B^+-п р о с т р а н с т в о м, если в нем из $u' \geqslant u \geqslant 0$ всегда следует, что $\|u'\| \geqslant \|u\|$. Примером B^+-пространства является полный KB-линеал ([12]).

Пусть $U_1, \ldots, U_n$ и V — полуупорядоченные пространства Банаха и $M_{1\ldots n} \in (U_1 \ldots U_n \to V)$. Если $M_{1\ldots n} u_1 \ldots u_n \geqslant 0$ при любом $u_i \geqslant 0$ $(u_i \in U_i)$, то принимаем $M_{1\ldots n} \geqslant 0$. Множество $M_{1\ldots n} \geqslant 0$ образует конус, и таким образом пространства n-линейных операторов $(U_1 \ldots U_n \to V)$ и $[U_1 \ldots U_n \to V]$ оказываются полуупорядоченными пространствами Банаха.

2. Линейное множество X называется п р о с т р а н с т в о м, н о р м и р о в а н н ы м п о с р е д с т в о м п о л у у п о р я д о ч е н н о г о б а н а х о в а п р о с т р а н с т в а U (ср. [9]), если для некоторых пар x и $u \geqslant 0$ (для каждого $x \in X$ хотя бы при одном $u \in U$) определено соотношение $|x| \leqslant u$, причем:

1) если $|x| \leqslant u$ и $u \leqslant u'$, то $|x| \leqslant u'$;
2) $|x| \leqslant 0$ эквивалентно $x = 0$;
3) если $|x| \leqslant u$, то $|\lambda x| \leqslant |\lambda| u$;
4) если $|x| \leqslant u$ и $|x'| \leqslant u'$ то $|x + x'| < u + u'$;
5) если $|x| \leqslant u_n$ и $\lim u_n = u$, то $|x| \leqslant u$.

Соотношение $|x| \leqslant u$ дает возможность ввести в пространство

X понятие сходимости по обобщенной норме.[3] Будем писать $\lim x_n = x$, если имеются такие u_n, что $|x_n - x| \leqslant u_n$ и $\lim u_n = 0$. Из условий 4) и 5) получим: если $|x_n| \leqslant u_n$, $\lim x_n = x$ и $\lim u_n = u$, то $|x| \leqslant u$.

Пространство X предполагается полным по обощенной норме, т. е. предполагается, что если $|x_n - x_m| \leqslant u_{nm}$ и $\lim\limits_{n, m \to \infty} u_{nm} = 0$, то имеется такой $x \in X$, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

Примечание 1. Если определить норму равенством

$$\|x\| = \inf_{|x| \leqslant u} \|u\|,$$

то пространство X становится линейным нормированным пространством, в котором сходимость по этой норме совпадает со сходимостью по обощенной норме в X. Если полученное линейное нормированное пространство полно, то и X полно по обобщенной норме, и наоборот. Поэтому, без ограничения общности, за исходное линейное множество можно взять некоторое банахово пространство X и определить в нем соотношение $|x| \leqslant u$, удовлетворяющее условиям 1) — 5). Это соотношение обычно дает возможность более точно охарактеризовать вид сходимости и дать более точные оценки, чем обычная норма. Отметим, что если из $|x| \leqslant u$ следует $\|x\| \leqslant \|u\|$, то из сходимости по обобщенной норме следует обычная сходимость в банаховом пространстве X.

Пусть $X_1, \quad X_n$ и Z — пространства, нормированные соответственно посредством полуупорядоченных пространств Банаха $U_1, \quad U_n$ и V, а $A_{1 \dots n} \in (X_1 \quad X_n \to Z)$ и $M_{1 \dots n} \in (U_1 \quad U_n \to V)$. Если при всех $|x_i| \leqslant u_i$ $|A_{1 \dots n} x_1 \quad x_n| \leqslant M_{1 \dots n} u_1 \quad u_n$, то принимаем $|A_{1 \dots n}| \leqslant M_{1 \dots n}$. Нетрудно показать, что это соотношение удовлетворяет условиям 1) — 5).

3. Пусть X нормировано посредством полуупорядоченного пространства U, а $A \in (X \to X)$ и $M \in (U \to U)$. Очевидно, если $|A| \leqslant M$ и $|A'| \leqslant M'$ то также $|AA'| \leqslant MM'$.

Существование обратного оператора легко доказывается следующей леммой.

Лемма 3. *Если $|A| \leqslant M$ и ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} M^i$ сходится всюду в U, то ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} A^i$ сходится всюду в X и существуют обратные операторы*

$$(I - M)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} M^i \geqslant 0, \quad (E - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i,$$

[3] Под обобщенной нормой $|x|$ можно понимать множество тех u, для которых $|x| \leqslant u$. Если в этом множестве найдется наименьший элемент, то обобщенную норму можно отождествить с этим наименьшим элементом.

причем

$$|(E-A)^{-1}| \leqslant (I-M)^{-1}$$

($M^0 = I$ — *единичный оператор в* U, *а* $A^0 = E$ — *в* X)

§ 3. Сходимость итерационных методов

В работах [9, 10, 17] указана возможность исследования сходимости процессов Ньютона, Чебышева и их модификаций методом мажорант. Ю. Я. Каазик дал теорему сходимости для широкого класса итерационных методов ([4, 5]) мажорируя, по существу, данное уравнение специальным действительным уравнением. В дальнейшем дадим более общую теорему сходимости итерационных процессов.

Рассмотрим для решения уравнения

$$P(x) = 0 \tag{2}$$

(P — оператор из банахова пространства X в пространство Z того же типа) итерационные процессы, в которых начальное приближение x_0 точного решения x^* предполагается известным и последующие приближения $x_1, x_2,$ даются рекуррентными формулами вида

$$\Delta x_n = x_{x+1} - x_n = G_n[\Gamma_{i_n} P(x_n), E, \Gamma_{i_n} P''(x_n), \quad , \Gamma_{i_n} P^{(k_n)}(x_n)], \tag{3}$$

где $n = 0,1,$; $0 \leqslant i_n \leqslant n, i_n \leqslant i_{n+1}$, $k_n \geqslant 1,$ $\Gamma_i = [P'(x_i)]^{-1}$ и G_n — некоторый оператор указанных аргументов.

Методами типа (3) являются метод Ньютона и различные его обобщения и модификации (см. напр. [5, 8, 18]). При составлении процесса (3) мы пользуемся сравнительно большой свободой. Мы можем, например, на каждом шагу вводить новый итерационный оператор, удовлетворяющий лишь некоторым требованиям, которые мы приведем ниже; мы можем на каждом шагу вычислять новый обратный оператор Γ_n или пользоваться несколько шагов подряд одним и тем же оператором Γ_{i_n}

Пусть пространство X нормировано посредством B^+-пространства U (см. § 2). Предположим существование таких симметричных i-линейных операторов $q_i \in [U^i \to U]$ $(i = 2, 3, \quad .)$, что

$$|\Gamma_0 P^{(i)}(x_0)| \leqslant q_i \qquad (i = 0, 2, 3, \quad ; q_0 \in U), \tag{4}$$

причем ряд

$$q(u) = q_0 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} q_i u^i$$

сходится в некоторой окрестности точки $u = 0$.

Лемма 4. *Если*

1^0 *найдется такой* $u' \geqslant 0$, *что* $u' \geqslant q(u')$,

2^0 *оператор* $q(u)$ *аналитичен для* $0 \leqslant u \leqslant u'$,

3^0 *ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty}[q'(u')]^i$ *сходится всюду в* U,

то уравнение

$$u = q(u) \tag{5}$$

имеет в множестве $0 \leqslant u \leqslant u'$ *единственное решение* u^* *Последовательные приближения* $u_0 = 0$, $u_{n+1} = q(u_n)$ *сходятся к этому решению.*

Доказательство. Нетрудно показать индуктивно, что

$$0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant [q'(u')]^n q_0.$$

Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u^* \leqslant u'$ Переходя в равенстве $u_{n+1} = q(u_n)$ к пределу при $n \to \infty$, получается $u^* = q(u^*)$. Легко показать, что в множестве $0 \leqslant u \leqslant u'$ нет другого решения уравнения (5), кроме u^* Лемма доказана.

Пусть выполнены предположения этой леммы. Обозначим $p(u) = u - q(u)$, $\gamma_i = [p'(u_i)]^{-1}$ и образуем по формуле (3) последовательность $\{u_n\}$:

$$u_0 = 0,$$

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = G_n[\gamma_{i_n} p(u_n), I, \gamma_{i_n} p''(u_n), \quad , \gamma_{i_n} p^{(k_n)}(u_n)]. \tag{6}$$

Если операторы G_n такого типа, что

а) $\lim u_n = u^*$ причем $\Delta u_n \geqslant 0$,

б) из $|\Gamma_{i_n} P^{(\nu)}(x_n)| \leqslant -\gamma_{i_n} p^{(\nu)}(u_n) \quad (\nu = 0, 2, 3, \quad .)$ (7)

следует, что

$$|\Delta x_n| \leqslant \Delta u_n,$$

$$|\Gamma_{i_n} P(x_n) + \Delta x_n + \frac{1}{2!}\Gamma_{i_n} P''(x_n)\Delta x_n^2 + \quad + \frac{1}{k_n!}\Gamma_{i_n} P^{(k_n)}(x_n)\Delta x_n^{k_n}| \leqslant -\Big[\gamma_{i_n} p(u_n) + \Delta u_n + \frac{1}{2!}\gamma_{i_n} p''(u_n)\Delta u_n^2 + \quad + \frac{1}{k_n!}\gamma_{i_n} p^{(k_n)}(u_n)\Delta u_n^{k_n}\Big] (n = 0, 1, \quad .),$$

то имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть*

1^0 *уравнение* (5) *имеет решение* $u^* \geqslant 0$,

2^0 *оператор* $q(u)$ *аналитичен для* $0 \leqslant u \leqslant u^*$,

3^0 *ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty}[q'(u^*)]^i$ *сходится всюду в* U.

4^0 *существует* $[P'(x_0)]^{-1} = \Gamma_0$,

5^0 *оператор* $P(x)$ *аналитичен в области*

$$|x - x_0| \leqslant u^* \tag{8}$$

тогда уравнение (2) *имеет в области* (8) *единственное решение* x^*, *к которому сходится*[4] *полученная из* (3) *последовательность* $\{x_n\}$, *причем справедливы оценки*

$$|x^* - x_n| \leqslant u^* - u_n \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{9}$$

Доказательство. Докажем индуктивно, что в условиях теоремы существуют операторы Γ_{i_n} и справедливы оценки (7) при всех $n = 0, 1, \ldots$ В силу условия 4^0 и оценок (4) это верно при $n = 0$. Пусть это верно при $n = 0, 1, \ldots, k$. Тогда $|\Delta x_k| \leqslant \Delta u_k$ и $|x_{k+1} - x_0| \leqslant u_{k+1} \leqslant u^*$.

Сопоставляя разложение в ряд

$$\Gamma_{i_k} P(x_{k+1}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \Gamma_{i_k} P^{(j)}(x_k) \Delta x_k^j$$

с аналогичным разложением для $-\gamma_{i_k} p(u_{k+1})$ и учитывая формулу

$$\Gamma_{i_k} P'(x_k) = E + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \Gamma_{i_k} P^{(j+1)}(x_{i_k})(x_k - x_{i_k})^j,$$

а также требование б) и оценку (7) при $n \leqslant k$, получаем

$$|\Gamma_{i_k} P(x_{k+1})| \leqslant -\gamma_{i_k} p(u_{k+1}).$$

Сопоставление разложений для $\Gamma_{i_k} P^{(\nu)}(x_{k+1})$ и $-\gamma_{i_k} p^{(\nu)}(u_{k+1})$

---

[4] Под сходимостью в пространстве X здесь и в дальнейшем понимается сходимость по обобщенной норме.

дает

$$|\Gamma_{i_k} P^{(\nu)}(x_{k+1})| \leqslant -\gamma_{i_k} p^{(\nu)}(u_{k+1}) \qquad (\nu = 2, 3, \ldots).$$

Так как

$$\Gamma_0 P'(x_{i_{k+1}}) = E - \Gamma_0[P'(x_0) - P'(x_{i_{k+1}})],$$

$$p'(u_{i_{k+1}}) = I - q'(u_{i_{k+1}}),$$

$$|\Gamma_0[P'(x_0) - P'(x_{i_{k+1}})]| \leqslant q'(u_{i_{k+1}}) \leqslant q'(u^*),$$

то на основании леммы 3 существуют обратные операторы $\Gamma_{i_{k+1}}$ и $\gamma_{i_{k+1}}$, причем $|\Gamma_{i_{k+1}} P'(x_0)| \leqslant \gamma_{i_{k+1}}$. Используя тождества

$$\Gamma_{i_{k+1}} P'(x_{i_k}) = E + \Gamma_{i_{k+1}}[P'(x_{i_k}) - P'(x_{i_{k+1}})],$$

$$\gamma_{i_{k+1}} p'(u_{i_k}) = I + \gamma_{i_{k+1}}[q'(u_{i_{k+1}}) - q'(u_{i_k})],$$

нетрудно показать, что

$$|\Gamma_{i_{k+1}} P'(x_{i_k})| \leqslant \gamma_{i_{k+1}} p'(u_{i_k}).$$

Следовательно,

$$|\Gamma_{i_{k+1}} P^{(\nu)}(x_{k+1})| \leqslant -\gamma_{i_{k+1}} p^{(\nu)}(u_{k+1}) \qquad (\nu = 0, 2, 3, \ldots),$$

т. е. оценки (7) верны и при $n = k + 1$.

Таким образом доказано, что операторы Γ_{i_n} существуют и оценки (7) верны при всех n.

Из условий б) и а) следует оценка $|x_{n+m} - x_n| \leqslant u_{n+m} - u_n$ $(m \geqslant 1)$ и сходимость последовательности $\{x_n\}$. Очевидно, для $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ имеют место оценки (9).

По формуле (7)

$$|\Gamma_{i_n} P(x_n)| \leqslant -\gamma_{i_n} p(u_n),$$

откуда при $n \to \infty$ получается

$$|[P'(x')]^{-1} P(u^*)| \leqslant -[p'(u')]^{-1} p(u^*) = 0,$$

где $x' = \lim_{n\to\infty} x_{i_n}$ и $u' = \lim_{n\to\infty} u_{i_n} \leqslant u^*$ Следовательно, элемент $x^* = \lim x_n$ является решением уравнения (2).

Покажем, что существование решения x^* в области (8) следует только из условий 1^0—5^0, а не связано с требованиями а) и б). Действительно, модифицированный процесс Ньютона $\Delta x_n = -\Gamma_0 P(x_n)$ [для которого $u_0 = 0$, $u_{n+1} = q(u_n)$] удовлетворяет требованию б) и, в силу леммы 4, также а). Следовательно, этот процесс сходится к решению уравнения (2). Единственность решения уравннения (2) в области (8) следует из теорему 5 (см. § 4). Теорема доказана.

Примечание 2. Теорема 1 остается в силе, если вместо условия 5^0 требовать $(k+1)$-кратную непрерывную дифференцируемость оператора P на ломаной $x_0 x_1$ причем $k \geqslant \max_n k_n$. При этом оценки (4) и условие 2^0 надо заменить требованием существования такого (на ломаной $u_0 u_1$ $k+1$ раз непрерывно дифференцируемого) оператора q, что верны оценки

$$|\Gamma_0 P^{(i)}(x_0)| \leqslant q^{(i)}(0) \quad \text{при} \quad i = 0, 2, 3, \quad k,$$

$$|\Gamma_0 P^{(k+1)}(x)| \leqslant q^{(k+1)}(u) \quad \text{для соответствия}^5\ x \leftrightarrow u.$$

В этих предположениях можно провести доказательство теоремы 1, пользуясь формулой Тэйлора с дополнительным членом в интегральной форме (ср. [9, 17, 18]).

Примечание 3. Теорема 1 применима также в случае, если известен не точный обратный оператор Γ_0, а некоторый близкий к нему Γ, который имеет обратный оператор Γ^{-1} (ср. [1, 11]). Вместо оценок (4) предположим, что известны такие операторы $q_i \in [U^i \to U]$ $(i = 1, 2, \quad .)$, что

$$|\Gamma P(x_0)| \leqslant q_0, \qquad |\Gamma P'(x_0) - E| \leqslant q_1,$$

$$|\Gamma P^{(i)}(x_0)| \leqslant q_i \qquad (i = 2, 3, \quad .),$$

причем $q(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} q_i u^i$. Для процесса

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = G_n[\Gamma P(x_n), E, \Gamma P''(x_n), \quad , \Gamma P^{(k_n)}(x_n)],$$

---

[5] Соответствие, где с каждой точкой $x = x_n + \Theta\Delta x_n$ $(0 \leqslant \Theta \leqslant 1)$ сопоставляется точка $u = u_n + \Theta\Delta u_n$ ([9]).

которому соответствуют $u_0 = 0$,

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = G_n[p(u_n), I, p''(u_n), \quad , p^{(k_n)}(u_n)],$$

верны утверждения теоремы 1, если выполнены условия 1^0, 2^0, 3^0, 5^0 и операторы G_n удовлетворяют требованиям а) и б) (надо заменить Γ_i и γ_i соответственно на Γ и I).

Примечание 4. Если все итерационные операторы G_n ($n = 0, 1, \quad .$) отдельно удовлетворяют требованию б) и соотношениям

$$-p(u_n) \leqslant \Delta u_n \leqslant u^* - u_n, \quad -p(u_n + \Delta u_n) \geqslant 0$$

при всех $0 \leqslant u_n \leqslant u^*$, для которых $-p(u_n) \geqslant 0$,
то в силу леммы 4 получаемый процесс (3) удовлетворяет и условию а) Таким требованиям удовлетворяют итерационные операторы, приведенные в работах [5, 6], например, операторы

$$\Delta_k x_n = G_n = -\left[E + \sum_{j=2}^{k} \frac{\alpha_j}{j!} \Gamma_{i_n} P^{(j)}(x_n) \Delta_{k-1} x_n^{j-1}\right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\Gamma_{i_n} P(x_n) - \sum_{j=2}^{k} \frac{\alpha_j - 1}{j!} \Gamma_{i_n} P^{(j)}(x_n) \Delta_{k-1} x_n^{j}\right],$$

где $0 \leqslant \alpha_j \leqslant j$ и элементы $\Delta_{k-1} x_n, \quad , \Delta_2 x_n$ последовательно выражаются той же формулой, а $\Delta_1 x_n = -\Gamma_{i_n} P(x_n)$.

§ 4. Сходимость степенного ряда неявного оператора

Рассмотрим уравнение

$$P(x, y) = 0, \tag{10}$$

где P — аналитический оператор из банаховых пространств X и Y в пространство Z того же типа. Пусть известно решение x_0 этого уравнения при значении параметра $y = y_0$, а ищется решение x^* при $y = y^*$ (ср. [10, 11]). Применяя для вычисления приближений к x^* формулы вида (3). придется уже при $n = 0$ пользоваться частными производными операторами P по x в точке (x_0, y^*) (на основании примечания 3 можно заменить $[P'(x_0, y^*)]^{-1}$ на $[P'(x_0, y_0)]^{-1}$). Но часто оказываются полезными процессы, пользующиеся частными производными только в точке (x_0, y_0). Такие процессы можно получить обобщением рассмотренных в [6] процессов, например, часто удобно пользоваться формулами

$$\Delta x_n = -\Gamma_0 P_y(x_0, y_0)(y^* - y_0) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Gamma_0 P_{x^{k-i}y^i}(x_0, y_0) \times$$

$$\times (y^* - y_0)^i \Delta x_{n-1}^{k-i},$$

где $n = 1, 2, \ldots$; $\Delta x_n = x_n - x_0$ и $\Gamma_0 = [P'(x_0, y_0)]^{-1}$ Сходимость таких процессов можно доказать аналогично доказательству основной теоремы в [6].

Аналогичную структуру имеет и практически важный метод разложения в ряд неявного оператора. Ввиду сложности общих рекуррентных формул для этого процесса проведем его изучение по несколько иному пути (ср. [19]).

О существовании и аналитичности неявного оператора имеет место следующая теорема (см. напр. [22])

Теорема 2. *Пусть*

1° $P(x_0, y_0) = 0$,

2° *существует* $[P_x(x_0, y_0)]^{-1} = \Gamma_0$,

3° *оператор* P *аналитичен в точке* (x_0, y_0);

тогда в окрестности точки y_0 *существует аналитический оператор* $x = \Phi(y)$, *определенный уравнением* (10) *и условием* $\Phi(y_0) = x_0$.

Эту теорему можно доказать, используя теорему о неявных операторах, данную [16], и лемму 1 (ср. также [19]).

Пусть пространство X нормировано посредством B^+-пространства U, а V — произвольное B^+-пространство. Предположим существование таких положительных симметричных k-линейных операторов $q_{k-i,\,i} \in [V^i U^{k-i} \to U]$, что ряд

$$q(u, v) = q_{01}\, v + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} q_{k-i,\,i} v^i u^{k-i} \qquad (11)$$

сходится в некоторой окрестности точки (0, 0) и выполнены оценки

$$|\Gamma_0 P_y(x_0, y_0)(y^* - y_0)| \leqslant q_{01} v^*,$$

$$|\Gamma_0 P_{x^{k-i}y^i}(x_0, y_0)(y^* - y_0)^i| \leqslant q_{k-i,\,i}\, v^{*i} \qquad (12)$$

$$(k = 2, 3, \ldots;\ i = 0, \ldots, k).$$

Оператор $u - q(u, v)$ удовлетворяет в точке $(0, 0)$ условиям 1°—3° теоремы 2. Следовательно, уравнение $u = q(u, v)$ определяет аналитический оператор $u = \varphi(v)$, для которого $\varphi(0) = 0$.

Теорема 3. *Если выполнены условия 1°—3° теоремы 2 и оценки* (12), *то*

$$|\Phi^{(k)}(y_0)(y^* - y_0)^k| \leqslant \varphi^{(k)}(0)\, v^{*k} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Доказательство. В силу условий 1°—3° можно уравнение (10) заменить уравнением

$$x - x_0 = -\Gamma_0 P_y(x_0, y_0)(y - y_0) -$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Gamma_0 P_{x^{k-i} y^i}(x_0, y_0)(y - y_0)^i (x - x_0)^{k-i}$$

Подставив в него $x = \Phi(y)$, получаем тождество, дифференцированием которого можно получить формулы для $\Phi^{(k)}(y_0)(y^* - y_0)^k$. Их сопоставление с соответствующими формулами для $\varphi^{(k)}(0)\, v^{*k}$, полученными дифференцированием тождества $\varphi(v) = q[\varphi(v), v]$, и доказывает теорему.

Введем обозначения

$$\Delta x_n = \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(y_0)(y^* - y_0)^n,$$

$$x_n = x_{n-1} + \Delta x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \Phi^{(k)}(y_0)(y^* - y_0)^k,$$

$$\Delta u_n = \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(0)\, v^{*n},$$

$$u_0 = 0,\ u_n = u_{n-1} + \Delta u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0)\, v^{*k} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Индуктивно можно доказать, что

$$\Delta x_1 = -\Gamma_0 P_y(x_0, y_0)(y^* - y_0),$$

$$\Delta x_n = -\Gamma_0 \sum_{k=2}^{n} \sum_{\substack{i_1 + \ldots + i_{n-1} = k \\ 1 \cdot i_1 + \ldots + (n-1) i_{n-1} = n}} \frac{1}{i_1! \ldots i_{n-1}!} Q_k^{i_1} \Delta x_2^{i_2} \ldots \Delta x_{n-1}^{i_{n-1}} \tag{14}$$

$$(n = 2, 3, \ldots),$$

где

$$Q_k^i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} P_{x^{k-j}y^j}(x_0, y_0)(y^* - y_0)^j \Delta x_1^{i-j}$$

О сходимости степенного ряда неявного оператора имеет место следующая

Теорема 4. *Пусть*

а) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u^*$;

б) ряд (11) *сходится при* $u = u^*$ *и* $v = v^*$ *а при* $u = \varphi(tv^*)$, $v = tv^*$ $0 \leqslant t < 1$ *оператор* $q(u, v)$ *аналитичен и ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} [q_u(u, v)]^k \Delta u$ *сходится для любого* $\Delta u \in U$;

в) оператор $P(x,y)$ *удовлетворяет условиям* 1° *и* 2° *теоремы* 2 *и аналитичен в области*

$$|x - x_0| \leqslant u^*, \tag{15}$$

$$y = y_0 + t\,(y^* - y_0)\ (0 \leqslant t \leqslant 1); \tag{16}$$

тогда уравнение (10) *имеет при* $y = y^*$ *в области* (15) *решение* $x^* = \Phi(y^*)$, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *причем справедливы оценки*

$$|x^* - x_n| \leqslant u^* - u_n \quad (n = 0,1 \ldots). \tag{17}$$

Доказательство. Оценка (13) дает $|\Delta x_n| \leqslant \Delta u_n$, и таким образом ряд

$$\Phi[y_0 + t(y^* - y_0)] = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \Delta x_k\ (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{18}$$

сходится к точке, находящейся в области $|x - x_0| \leqslant \varphi\ (tv^*)$. Взяв $t = 1$, видим, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке $x^* = \Phi(y^*)$, лежащей в области (15). Очевидным образом получается оценка (17). Остается показать, что x^* является решением уравнения (10) при y^*.

Для

$$\begin{gathered} |x - x_0| \leqslant \varphi\ (tv^*), \\ y = y_0 + t\ (y^* - y_0)\ \ (0 \leqslant t < 1) \end{gathered} \tag{19}$$

из (12) следует оценка

$$|E - \Gamma_0 P_x(x, y)| \leqslant q_u[\varphi\ (tv^*), tv^*],$$

а из леммы 3 — существование обратного оператора

$$[P_x(x,y)]^{-1}=\{E-[E-\Gamma_0P_x(x,y)]\}^{-1}\Gamma_0.$$

На основании теоремы 2 ряд (18) при малых t представляет неявный оператор $\Phi(y)$ Но, так как выполнены следующие условия: 1) ряд (18) сходится при $0\leqslant t\leqslant 1$, 2) обратный оператор $[P_x(x,y)]^{-1}$ существует в области (19) и 3) оператор $P(x,y)$ аналитичен в области $\{(15)\ \ (16)\}$, то, используя теорему 2 и лемму 2, уже нетрудно показать, что неявный оператор $\Phi(y)$ существует и представим рядом (18) для всех y на отрезке (16). Следовательно, $x^*=\Phi(y^*)$ является решением уравнения (10) при $y=y^*$ Теорема доказана.

Примечание 5. Теорема 4 применима также в случае, если известно не точное решение уравнения (10) при $y=y_0$, а его некоторое приближение x_0. Пусть $P(x_0,y_0)=z_0$ и $\bar{y}=(y,\ z)\in Y\times Z$. Уравнение

$$\bar{P}(x,\bar{y})=P(x,\ y)-z=0 \tag{20}$$

при $\bar{y}_0=(y_0,\ z_0)$ имеет решение x_0, а при $\bar{y}^*=(y^*\ \ 0)$ решением уравнения (20) является искомое решение уравнения (10) при $y=y^*$ Простые вычисления дают:

$$\bar{P}_x(x_0,\bar{y}_0)=P_x(x_0,y_0),$$

$$\bar{P}_{\bar{y}}(x_0,\bar{y}_0)(\bar{y}^*-\bar{y}_0)=P_y(x_0,y_0)(y^*-y_0)+z_0,$$

$$\bar{P}_{x^{k-i}\bar{y}^i}(x_0,\bar{y}_0)(\bar{y}^*-\bar{y}_0)^i=P_{x^{k-i}y^i}(x_0,y_0)(y^*-y_0)^i\quad (k=2,\ 3,\ \ \ldots).$$

Оценки (12) для уравнения (20) имеют вид

$$\begin{gathered}|\Gamma_0P_y(x_0,y_0)(y^*-y_0)+\Gamma_0P(x_0,y_0)|\leqslant q_{01}v^*\\ |\Gamma_0P_{x^{k-i}y^i}(x_0,\ y_0)(y^*-y_0)^i|\leqslant q_{k-i,\,i}v^{*i}\quad (k=2,\ 3,\ \ \ldots).\end{gathered} \tag{21}$$

При вычислении приближений $x_n=x_{n-1}+\Delta x_n$ к решению x^* можно и в этом случае пользоваться формулами (14). заменив только первую из них следующей

$$\Delta x_1=-\Gamma_0P_y(x_0,y_0)(y^*-y_0)-\Gamma_0P(x_0,y_0). \tag{22}$$

Пусть мажорирующий ряд (11) образован при помощи оценок (21). О единственности решения уравнения (10) имеет место следующая

Т е о р е м а 5. *Если при* $u' \geqslant 0$

а) оператор $q(u, v)$ *аналитичен в точке* (u', v^*) *и ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}[q_u(u', v^*)]^k$ *сходится всюду в* U*;*

б) существует $[P_x(x_0, y_0)]^{-1} = \Gamma_0$ *и оператор* $P(x, y)$ *аналитичен в области*

$$|x - x_0| \leqslant u', \tag{23}$$

$$y = y_0 + t\,(y^* - y_0) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1);$$

то уравнение (10) *имеет при* $y = y^*$ *в области* (23) *не более одного решения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть уравнение (10) имеет при y^* в области (23) два решения x^* и x^{**}, т. е. $P(x^*, y^*) = 0$ и $P(x^{**}, y^*) = 0$. Вычитая из тождества

$$x^* = x_0 - \Gamma_0 P(x_0, y_0) - \Gamma_0 P_y(x_0, y_0)\,(y^* - y_0) -$$

$$- \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Gamma_0 P_{x^{k-i}y^i}(x_0, y_0)\,(y^* - y_0)^i (x^* - x_0)^{k-i}$$

аналогичное тождество для x^{**}, получим $x^* - x^{**} = Q(x^* - x^{**})$, где $|Q| \leqslant q_u(u', v^*)$. Следовательно, существует обратный оператор $(E - Q)^{-1}$ и

$$x^* - x^{**} = (E - Q)^{-1} 0 = 0,$$

т. е. $x^* = x^{**}$ Теорема доказана.

П р и м е ч а н и е 6. Если B^+-пространство U такого типа, что в нем сходится каждый ряд с положительными членами и ограниченными (по упорядоченности) частными суммами, то при проверке условий теорем 1, 4 и 5 можно пользоваться следующими легко доказываемыми фактами.

1) Из существования положительного обратного оператора $[I - q_u(u, v)]^{-1}$ $(q_u(u, v) \geqslant 0)$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}[q_u(u, v)]^k \Delta u$ при любом $\Delta u \geqslant 0$.

2) Если имеется такой элемент $u' \geqslant 0$, что $u' \geqslant q(u', v^*)$, то

а) уравнение

$$u = q\,(u, v^*) \tag{24}$$

имеет наименьшее положительное решение $u^* \leqslant u'$;

б) выполнено условие а) теоремы 4, причем $\lim u_n = u^*$;

в) ряд $\sum_{k=0}^{\infty}[q_u(\varphi(tv^*),\ tv^*)]^k \Delta u$ $(0 \leqslant t < 1)$ сходится на множестве $\Delta u = q_v(\varphi(tv^*),\ tv^*)v^* \Delta t$, где Δt — любое действительное число.

Применяя эти результаты в случае $U = m_n$ (m_n есть пространство векторов $u = (u_1, \ldots, u_n)$, причем $\|u\| = \max |u_k|$ и $u \geqslant 0$, если все $u_k \geqslant 0$), получим, что условия а) и б) теоремы 4 выполнены, если уравнение (24) имеет положительные решения, из которых наименьшим является u^*, и все координаты вектора $q_v(u^*,\ v^*)v^*$ отличны от нуля. Для $U = m_1$ (множество действительных чисел) выполненность этих условий следует единственно из существования положительного решения уравнения (24).

В последнем случае ($U = m_1$) уже из условий 1°, 4° и 5° теоремы 1 вытекают существование решения x^* уравнения (2) в области (8), сходимость процесса (3) и справедливость оценок (9), где u^* — наименьшее положительное решение уравнения (5).

Примечание 7. В случае $U = V = m_1$ можно, в силу леммы 1, оценки (21) всегда найти в виде

$$\begin{gathered}\|\Gamma_0 P_y(x_0, y_0)(y^* - y_0) + \Gamma_0 P(x_0,\ y_0)\| \leqslant av^*, \\ \|\Gamma_0 P_{x^{k-i}y^i}(x_0, y_0)(y^* - y_0)^i\| \leqslant k!\, hb^{k-2}(cv^*)^i \quad (k = 2,\ 3, \ldots),\end{gathered} \tag{25}$$

где $a,\ b,\ c,\ h$ и v^* являются неотрицательными постоянными. В этом случае

$$q(u,\ v) = av + \frac{h(u + cv)^2}{1 - b(u + cv)},$$

и уравнение (24) имеет неотрицательное решение

$$u^* = \varphi(v^*) = \frac{1 + b(a + c)v^* - \sqrt{[1 - b(a + c)v^*]^2 - 4h(a + c)v^*}}{2(b + h)} -$$

$$- cv^* \leqslant (2a + c)v^*,$$

лишь только

$$b(a + c)v^* + 2\sqrt{h(a + c)v^*} \leqslant 1.$$

Последнее требование является равносильным условиям а) и б) теоремы 4. Условие а) теоремы 5 выполнено для

$$u' < \frac{b + h - \sqrt{h(b + h)}}{b(b + h)} - cv^*$$

Разлагая $\varphi(v^*)$ в ряд по степеням v^* получаем $\Delta u_1 = av^*$

$$\Delta u_k = \sum_{i=0}^{k-2} \frac{1}{i+1} \binom{k-2}{i} \binom{k+i}{i} b^{k-2-i} h^{i+1} (a+c)^k v^{*k} (k = 2,\ 3, \ldots).$$

Если $m = 2(b + 2h)\ (a + c)v^* < 1$, то можно индуктивно доказать, что

$$\Delta u_k \leqslant h(a+c)^2 v^{*2} \frac{m^{k-2}}{k-1}\ (k = 2, 3, \ldots).$$

В этом случае из оценки (17) следует не столь точная, но более простая оценка (ср. [19])

$$\|x^* - x_n\| < \frac{h\,(a+c)^2\, v^{*2}}{1-m} \frac{m^{n-1}}{n}\ (n = 1, 2, \ldots). \tag{26}$$

Примечание 8. Теоремы 1 и 4 дают априорные оценки (9) и (17) точности приближений x_n. Можно указать и различные апостериорные оценки. Простая апостериорная оценка получается следующим образом. Пусть выполнены предположения теоремы 4 и $\tilde{x}$ — некоторое находящееся в области (15) приближение решения x^* уравнения (10) при $y = y^*$ По формуле Лагранжа

$$P(x^*, y^*) = P(\tilde{x}, y^*) + P_x[\tilde{x} + \Theta(x^* - \tilde{x}), y^*]\,(x^* - \tilde{x}) = 0$$
$$(0 \leqslant \Theta \leqslant 1).$$

Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}[q_u(u^*\ v^*)]^k$ сходится всюду в U и $|\Gamma_0 P(\tilde{x}, y^*)| \leqslant w$, то получаем оценку

$$|x^* - \tilde{x}| \leqslant [I - q_u(u^*, v^*)]^{-1} w.$$

В рассмотренном в примечании 7 случае при условии $b(a+c)v^* + 2\sqrt{h(a+c)v^*} < 1$ выполнено неравенство

$$q_u(u^*\ v^*) = \frac{h\,(u^* + cv^*)\,[2 - b\,(u^* + cv^*)]}{[1 - b\,(u^* + cv^*)]^2} < 1$$

и справедлива оценка

$$\|x^* - \tilde{x}\| \leqslant \frac{\|\Gamma_0 P(\tilde{x}, y^*)\|}{1 - q_u(u^*, v^*)}.$$

§ 5. Примеры приближенного решения уравнений

В общих чертах пути применения процессов, рассмотренных в §§ 3 и 4, к приближенному решению некоторых важных классов уравнений указаны в работе [6]. Метод разложения в ряд неявного оператора (§ 4) успешно применим к приближенному решению уравнений, зависящих от параметров. Часто можно путем искусственного введения некоторого параметра упростить вычисление приближенных решений уравнений, не зависящих от параметра (см. [11]).

Использование мажорирующего уравнения, построенного в B^+-пространстве вместо числового уравнения, дает возможность уточнить оценки области сходимости процесса и точности приближений (ср. [12, 27]).

Покажем на двух примерах некоторые возможности применения результатов § 4.

1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$P(x, y) = x(s) - \int_{\alpha}^{\beta} K(s, t, x(t), y)\, dt = 0,$$

где y — действительный или комплексный параметр [6], а K — непрерывная функция своих аргументов и аналитическая по $x(t)$ и y. Частные производные оператора P выражаются в виде

$$P_x(x_0, y_0)\Delta x = \Delta x(s) - \int_{\alpha}^{\beta} K_x(s, t, x_0(t), y_0)\Delta x(t)\, dt,$$

$$P_{x^k y^i}(x_0, y_0)\Delta y^i \Delta x^k = -\Delta y^i \int_{\alpha}^{\beta} K_{x^k y^i}(s, t, x_0(t), y_0)\Delta x^k(t)\, dt$$

($k = 0$, $i = 1$ и $k + i \geqslant 2$). Возможность получения оценок при $X = Z = C[\alpha, \beta]$ с использованием обычной нормы указана в [6]. Отметим, что в частном случае, когда $P(x, y)$ линейно зависит от x и y, из теоремы 4 следует теорема о замене ядра линейного интегрального уравнения на близкое к нему ядро (см. [13]).

Нормируем $X = Z = C[\alpha, \beta]$ посредством $U = m_2$, определяя $|x| \leqslant u = (u_1, u_2)$, если $\max\limits_{\alpha \leqslant s \leqslant \gamma} |x(s)| \leqslant u_1$ и $\max\limits_{\gamma \leqslant s \leqslant \beta} |x(s)| \leqslant u_2$ ($\alpha \leqslant \gamma \leqslant \leqslant \beta$). Обозначим через $\Gamma(s, t)$ резольвенту ядра $K_x(s, t, x_0(t), y_0)$.

---

[6] Аналогично можно рассматривать и случай, когда y — некоторая совокупность параметров, т. е. когда уравнение зависит от нескольких параметров.

Пусть

$$|y^* - y_0| \leqslant v^*, \quad \max_{\alpha_m \leqslant s \leqslant \beta_m} |\Delta x_1(s)| \leqslant a_m v^*,$$

$$\max_{\alpha_m \leqslant s \leqslant \beta_m} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} |\Gamma(s,t)|\,dt \leqslant c^{mn}, \quad \max_{\alpha_m \leqslant s \leqslant \beta_m} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} |K_{x^k y^i}(s,t,x_0(t),y_0)|\,dt \leqslant b_{ki}^{mn},$$

где $m, n = 1, 2;\ \alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = \beta_1 = \gamma$ и $\beta_2 = \beta$.

Тогда мажорирующий ряд (11) имеет вид

$$q(u,v) = (a_1, a_2)v +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} v^i \begin{pmatrix} 1+c^{11} & c^{12} \\ c^{21} & 1+c^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{k-i,i}^{11} & b_{k-i,i}^{12} \\ b_{k-i,i}^{21} & b_{k-i,i}^{22} \end{pmatrix} (u_1^{k-i}, u_2^{k-i}).$$

Пример 1. Для приближенного решения уравнения

$$x(s) - \int_0^{0,5} s\cos(st) e^{x(t) - \frac{t}{3}}\,dt = 0$$

рассмотрим уравнение

$$P(x,y) = x(s) - \int_0^{0,5} \{s + ys[\cos(st) - 1]\} e^{x(t) - \frac{t}{3}}\,dt = 0,$$

которое при $y^* = 1$ совпадает с исходным уравнением. Для $y_0 = 0$ возьмем приближенное решение $x_0(s) = \frac{s}{3}$. При $X = Z = C\left[0, \frac{1}{2}\right]$ оценки (25) выполнены с постоянными $a = 0{,}095$, $b = \frac{1}{3}$, $c = 0{,}011$, $h = 0{,}165$, $v^* = 1$. Следовательно, в области $\|x - x_0\| \leqslant 0{,}097$ существует решение $x^*(s)$, которое единственно в $\|x - x_0\| \leqslant 1{,}26$ и к которому равномерно сходится вычисленная из (14) [где первая формула заменена на (22)] последовательность $\{x_n(s)\}$. Результаты вычислений следующие:

n	$x_n(s)$	Оценка (26)	оценка (17) ($\gamma = 0{,}25$)
1	$\sin\frac{s}{2} + 0{,}0234s$	$2{,}2 \cdot 10^{-3}$	$(0{,}6;\ 1{,}3)\ 10^{-3}$
2	$\sin\frac{s}{2} + 0{,}024245s - 0{,}001458s^3 + 0{,}000020s^5$	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$	$(2{,}8;\ 6{,}6)\ 10^{-5}$
3	$\sin\frac{s}{2} + 0{,}024268s - 0{,}001517s^3 + 0{,}000021s^5$	$1{,}4 \cdot 10^{-5}$	$(1{,}7;\ 3{,}8)\ 10^{-6}$
4	$\sin\frac{s}{2} + 0{,}024269s - 0{,}001519s^3 + 0{,}000021s^5$	$1{,}5\ 10^{-6}$	$(1{,}1;\ 2{,}4) \cdot 10^{-7}$

2. Рассмотрим приближенное решение граничной задачи

$$x'' + f(s, x, x', y) = 0, \quad x(\alpha) = x(\beta) = 0,$$

где y является численным параметром. Если при $x_0(s)$, y_0 удается найти функцию Грина $\Gamma(s, t)$ задачи

$$\Delta x'' + f_{x'}(s, x_0, x_0', y_0)\Delta x' + f_x(s, x_0, x_0' \; y_0)\Delta x = 0,$$
$$\Delta x(\alpha) = \Delta x(\beta) = 0,$$

то уравнение

$$P(x, y) = x(s) + \int_\alpha^\beta \Gamma(s, t)\{f[t, x(t) \; x'(t), y] -$$
$$- f_{x'} \; [t, x_0(t). x_0'(t) \cdot y_0]x'(t) - f_x[t, x_0(t), x_0'(t), y_0]x(t)\}dt = 0$$

является эквивалентным изучаемой граничной задаче.

Нормируем множество X непрерывно дифференцируемых на отрезке $[\alpha, \beta]$ функций посредством $U = m_2$, взяв $|x| \leqslant u = (u_1, u_2)$, если для всех $s \in [\alpha, \beta]$ $|x(s)| \leqslant u_1$ и $|x'(s)| \leqslant u_2$. Частные производные оператора P суть

$$P_x(x_0, y_0) = E,$$

$$P_{x^k y^i}(x_0, y_0)\,\Delta y^i \Delta x^k = \Delta y^i \int_\alpha^\beta \Gamma(s,t) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f_{x^{k-j} x'^j y^i} \Delta x^{k-j} \Delta x'^j dt$$

$$(k = 0, \; i = 1 \;\text{ и }\; k + i \geqslant 2).$$

Если известны оценки $|y^* - y_0| \leqslant v^*$

$$\max_{\alpha \leqslant s \leqslant \beta} |\Delta x_1(s)| \leqslant a_1 v^*, \quad \max_{\alpha \leqslant s \leqslant \beta} |\Delta x_1'(s)| \leqslant a_2 v^*$$

$$\max_{\alpha \leqslant s \leqslant \beta} \int_\alpha^\beta |\Gamma_{s^n}(s,t) f_{x^{k-j} x'^j y^i} [t, x_0(t), x_0'(t), y_0]|dt \leqslant b_{kij}^n \qquad (n = 0,1),$$

то

$$q(u, v) = (a_1, a_2)v +$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} v^i \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k-i}{j} (b^0_{k-i,i,j}, b^1_{k-i,i,j})\, u_1^{k-i-j} u_2^j.$$

Пример 2. Рассмотрим задачу ([21])

$$x'' - xx' + ys = 0, \quad x(0) = x(1) = 0$$

при $y = 6{,}3$. Эта задача при $y_0 = 0$ имеет решение $x_0(s) = 0$. По формулам (14) легко вычислить первые приближения

$$x_1(s) = \frac{1}{6} s(1 - s^2) y,$$

$$x_2(s) = \frac{1}{6} s(1 - s^2)\left[y - \frac{1}{1260}(8 - 27s^2 + 15s^4) y^2\right].$$

Если за пространство X примем множество непрерывно дифференцируемых на отрезки $[0,1]$ функции с нормой

$$\|x\| = \max_{0 < s < 1} (|x(s)|, p|x'(s)|) \qquad (p > 0),$$

то при $p = 1$ из теоремы 4 следует сходимость процесса для $|y| \leqslant 1{,}5$, а при $p = 0{,}2$ — для $|y| \leqslant 6$. Выбор постоянного p не дает возможности дальнейшего уточнения области сходимости процесса. Используя только что рассмотренный способ введения обобщенной нормы ($U = m_2$), из теоремы 4 следует существование решения и сходимость процесса при $|y| \leqslant 6{,}8$. Оценки (17) дают для $y = 6{,}3$: $|x^* - x_1| \leqslant (0{,}27; 1{,}06)$, $|x^* - x_2| \leqslant (0{,}16; 0{,}63)$, т. е. на отрезке $s \in [0,1]$ $|x^*(s) - x_2(s)| \leqslant 0{,}16$ и $|x^{*\prime}(s) - x_2'(s)| \leqslant 0{,}63$.

§ 6. Сходимость метода возмущений

Метод возмущений является одним из важнейших методов приближенного разыскания собственных значений и элементов операторов (см. напр. [20, 23]). Этот метод можно рассматривать как метод разложения в ряд неявного оператора. Поэтому результаты § 4 дают возможность изучить сходимость метода возмущений и оценить точность приближений, полученных с его помощью. Отметим, что применение такого способа ограничивается случаем т. н. регулярного возмущения, т. е. случаем, когда собственные значения и элементы аналитически зависят от параметра возмущения.

1. Рассмотрим задачу о собственных значениях для уравнения

$$(A - \lambda B)x + yF(x, \lambda, y) = 0, \tag{27}$$

где λ и y комплексные параметры.

Предположим, что:

1) A и B являются линейными (в общем случае неограничен-

ными) операторами из банахова пространства X в пространство Z того же типа.

2) Уравнение

$$(A-\lambda_0 B)x = 0 \tag{28}$$

имеет m линейно независимых решений $x_{10}, \quad , x_{m0}$.

3) Можно указать m непрерывных линейных функционалов [7] $f_1, \quad f_m$, определенных в пространстве Z, таких, что

$$f_j B x_{i0} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i, \\ 0 & \text{при } j \neq i \end{cases}$$

и оператор $A-\lambda_0 B$, рассматриваемый на множестве $X_{f_1 B, \ldots, f_m B}$, имеет обратный оператор R, определенный во всем пространстве [8] $Z_{f_1, \ldots, f_m}$. В дальнейшем пользуемся оператором R, распространенным на все пространство Z при помощи равенств $RBx_{i0} = 0$ $(i = 1, \quad m)$.

4) Операторы RB и [9] $f_j B$ $(j = 1, \quad , m)$ являются ограниченными и их можно распространить до непрерывных линейных операторов, определенных во всем пространстве X. В дальнейшем под обозначениями RB и $f_j B$ понимаются эти непрерывные распространения.

5) Оператор $F(x, \lambda, y)$ является однородным относительно x, а операторы $RF(x, \lambda, y)$ и $f_j F(x, \lambda, y)$ $(j = 1, \quad , m)$ можно распространить до операторов, аналитических в некоторой окрестности точки $(x_{i0}, \lambda_0, 0)$. В дальнейшем под RF и $f_j F$ понимаются эти аналитические распространения.

При этих условиях собственное значение λ_i $(i = 1, \quad , m)$ уравнения (27) и соответствующий ему собственный элемент x_i можно найти как решения системы (ср. [8, 25])

$$\begin{aligned} &(A-\lambda B)x + yF(x, \lambda, y) = 0, \\ &f_j B x = \alpha_j \quad (j = 1, \qquad m), \end{aligned} \tag{29}$$

где $\alpha_i = 1$, а α_j при $j \neq i$ являются добавочными неизвестными. Решение системы (29) заменим разысканием решений для си-

---

[7] Функционалы $f_1, \quad ., f_m$ можно обычно найти как решения уравнения, сопряженного с уравнением (28).

[8] Через $X_{f_1 B, \ldots, f_m B}$ и $Z_{f_1, \ldots, f_m}$ обозначаются подмножества пространств X и Z, удовлетворяющие соответственно условиям $f_1 Bx = . \quad = f_m Bx = 0$ и $f_1 z = \quad = f_m z = 0$.

[9] Операторы $f_j B$, а также $f_j F$ в предложении 5) являются, конечно, функционалами.

стемы

$$R(A-\lambda B)x+yRF(x,\lambda,y)=0,$$
$$f_j(A-\lambda B)x+yf_jF(x,\lambda,y)=0 \quad (j=1, \ldots, m),$$

где $x=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j x_{j0}+\tilde{x}$ $(\tilde{x}\in X_{f_1 B}, \ldots, {}_{f_m B})$. Последнюю систему в свою очередь заменим системой

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}-\tilde{\lambda}RB\tilde{x}+yRF(x,\lambda,y)=0,\\
&\tilde{\lambda}-yf_iF(x,\lambda,y)=0, && (30)\\
&\alpha_j f_i F(x,\lambda,y)-f_jF(x,\lambda,y)=0 \quad (j=1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m),
\end{aligned}$$

где $x=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j x_{j0}+\tilde{x}$ и $\lambda=\lambda_0+\tilde{\lambda}$.

Очевидно, каждое решение системы (29) является и решением системы (30). Наоборот, решение системы (30) x_i, $\tilde{\lambda}_i$, $\alpha_{ji}(j\neq i)$ дает собственное значение $\lambda_i=\lambda_0+\tilde{\lambda}_i$ уравнения (27) и соответствующий ему собственный элемент $x_i=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ji}x_{j0}+\tilde{x}_i$ $(\alpha_{ii}=1)$, лишь только x_i и λ_i принадлежат области определения операторов A, B и F Заметим, что принадлежность $\tilde{x}_i$ области определения этих операторов часто следует из того факта, что $\tilde{x}_i$ является решением первого уравнения системы (30). Например, если операторы B и F определены для x_i и λ_i, то x_i принадлежит также области определения оператора A.

Введем понятие пространства Ξ, элементами которого являются системы $\xi=(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \alpha_j)$ $(j=1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m)$, где $\tilde{x}\in X$, а $\tilde{\lambda}$ и α_j являются комплексными числами. Пусть пространство X обобщенно-нормировано посредством B^+-пространства U. Дадим следующее определение:

$$|(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \alpha_j)|\leqslant(u, \mu, \beta_j),$$

если $|\tilde{x}|\leqslant u$, $|\tilde{\lambda}|\leqslant\mu$ и $|\alpha_j|\leqslant\beta_j$. Тогда Ξ оказывается обобщенно-нормированным посредством B^+-пространства $\bar{U}$, элементами которого являются системы $\bar{u}=(u, \mu, \beta_j)$ ($u\in U$, а μ и β_j — действительные числа, причем, например, $\|\bar{u}\|=\max(\|u\|, |\mu|, |\beta_j|)$).

Определим оператор P_i из Ξ и Y в Ξ:

$$\begin{aligned}
P_i(\xi,y)=(&\tilde{x}-\tilde{\lambda}RBx+yRF(x,\lambda,y),\\
&\tilde{\lambda}-yf_iF(x,\lambda,y),\\
&\alpha_j f_iF(x,\lambda,y)-f_jF(x,\lambda,y)) \quad (j=1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m).
\end{aligned}$$

Тогда система (30) принимает форму операторного уравнения

$$P_i(\xi, y) = 0. \tag{31}$$

Решение этого уравнения есть $\xi_i = (\tilde{x}_i, \tilde{\lambda}_i, a_{ji})$; оно дает искомое собственное значение с собственным элементом. Решая уравнение (31) методом разложения в ряд неявного оператора, получим те же приближения, которые дает и метод возмущений. Условия сходимости этих разложений в ряд даются теоремой 4.

Остановимся более подробно на двух частных случаях уравнения (27).

2. Пусть уравнение (27) имеет вид

$$(A + yC)x = \lambda(B + yD)x, \tag{32}$$

т. е. $F(x, \lambda, y) = Cx - \lambda Dx$, где C и D — линейные операторы. Пусть выполнены предположения 1)—5). Заметим, что условие 5) выполнено, если операторы RC, RD, f_jC и f_jD ограничены и имеют непрерывные линейные распространения на все пространство X.

В случае, когда $m > 1$, предположим дополнительно, что

6) $\qquad f_j(C - \lambda_0 D)x_{i0} = 0$ при[10] $j \neq i$

и

$$f_j(C - \lambda_0 D)x_{j0} \neq f_i(C - \lambda_0 D)x_{i0} \text{ при } j \neq i.$$

В этих предположениях уравнения (31) имеет при $y_0 = 0$ решение $\xi_0 = 0$. Простые вычисления дают:

$$\Gamma_{i0}(x, \lambda, a_j) = (x, \lambda, \gamma_{ij}[a_j + f_j(C - \lambda_0 D)x - \lambda f_j D x_{i0}]),$$

где

$$\frac{1}{\gamma_{ij}} = f_i(C - \lambda_0 D)x_{i0} - f_j(C - \lambda_0 D)x_{j0},$$

$$P_{iy}(0,0)\Delta y = \Delta y(R(C - \lambda_0 D)x_{i0}, -f_i(C - \lambda_0 D)x_{i0}, 0).$$

$$P_{i\xi^2}(0,0)\Delta\xi^2 = 2(-\Delta\lambda RB\,\Delta\tilde{x},\ 0,\ \Delta a_j f_i(C - \lambda_0 D)\,\Delta\tilde{x} - $$
$$- \Delta a_j \Delta\lambda f_i D x_{i0} + \Delta\lambda f_j D\Delta x),$$

---

[10] Заметим, что если вначале $f_j(C - \lambda_0 D)x_{i0} = f_i(C - \lambda_0 D)x_{j0}$ (напр., оператор $A - \lambda_0 B$ является самосопряженным), то всегда можно заменить функционалы f_j и элементы x_{j0} такими их линейными комбинациями $f_j' = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} f_k$ и $x_{i0}' = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} x_{k0}$, что удовлетворено условие 3) и $f_j'(C - \lambda_0 D)x_{i0}' = 0$ при $j \neq i$ (см. [20]).

$$P_{iy\xi}(0,0)\Delta\xi\Delta y = \Delta y(R(C-\lambda_0 D)\Delta x - \Delta\lambda RDx_{i0},$$
$$-f_i(C-\lambda_0 D)\Delta\tilde{x} + \Delta\lambda f_i Dx_{i0},\ 0),$$
$$P_{i\xi^3}(0,0)\Delta\xi^3 = 6(0,0,-\Delta a_j\ \Delta\lambda f_i D\Delta x),$$
$$P_{iy\xi^2}(0,0)\Delta\xi^2\Delta y = 2\Delta y(-\Delta\lambda RD\Delta x,\ \Delta\lambda f_i D\Delta x,\ 0),$$

где

$$\Delta\xi = (\Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{\lambda},\ \Delta a_j),\ \Delta x = \sum_{j=1}^{m}\Delta a_j x_{j0} + \Delta\tilde{x}\ \ (\Delta a_i = 0)$$

и

$$\Delta\lambda = \Delta\tilde{\lambda}.$$

Обозначая оценки

$$\|R(C-\lambda_0 D)\| \leqslant a, \|R(C-\lambda_0 D)x_{i0}\| \leqslant a_i,$$
$$\|f_j(C-\lambda_0 D)\| \leqslant b_j,\ \ |f_i(C-\lambda_0 D)x_{i0}| \leqslant b_{ii},$$
$$\|RD\| \leqslant c,\ \|RDx_{i0}\| \leqslant c_i,\ \|f_j D\| \leqslant d_j,\ |f_j Dx_{i0}| \leqslant d_{ji},$$
$$\|RB\| \leqslant r, |\gamma_{ij}| \leqslant g_{ij}\ \ (i,\ j = 1, \quad , m),$$

можем оценить нормы производных оператора P_i. Мажорирующее уравнение $\bar{u} = q(\bar{u}, v)$, где $\bar{u} = (u, \mu, \beta_j)$ (u, μ и β_j — действительные числа), представляет собой систему

$$u = r\mu u + v(a + c\mu)u + v\sum_{k=1}^{m}(a_k + c_k\mu)\beta_k,$$
$$\mu = v(b_{ii} + b_i u + d_i\mu u) + v\mu\sum_{k=1}^{m} d_{ik}\beta_k, \tag{33}$$
$$\beta_j = g_{ij}(b_j + b_i\beta_j + d_j\mu + d_i\beta_j\mu)u + g_{ij}\mu\sum_{k=1}^{m}(d_{jk} + d_{ik}\beta_j)\beta_k$$
$$(j = 1, \quad i-1,\ i+1, \quad , m;\ \beta_i = 1).$$

Если эта система имеет неотрицательные решения, причем наименьшие из них u_i, μ_i, β_{ji} $(j \neq i)$ положительны [11], то на основании теоремы 4 (учитывая примечание 6) уравнение (31) имеет при $|y| \leqslant v$ решение $\xi_i = (\tilde{x}_i,\ \tilde{\lambda}_i,\ a_{ji})$, к которому сходится ряд по y неявного оператора. Если удастся показать, что x_i принадлежит области определения операторов B, C и D, то уравнение (32)

[11] Если некоторые из чисел u_i, μ_i, β_i равны нулю, то надо еще проверить условие б) теоремы 4.

имеет собственное значение $\lambda_i = \lambda_0 + \tilde{\lambda}_i$, которому соответствует собственный элемент $x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} x_{j0} + \tilde{x}_i$, причем $|\lambda_i - \lambda_0| \leqslant \mu_i$, $\|x_i - x_{i0}\| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{m} \beta_{ji} \|x_{j0}\| + u_i$. Следующие приближения к λ_i и x_i можно вычислить по формулам (14):

$$\lambda_{i1} = \lambda_0 + \Delta\lambda_{i1}, \lambda_{i2} = \lambda_{i1} + \Delta\lambda_{i2}, x_{i1} = x_{i0} + \Delta\tilde{x}_{i1} + \sum_{j=1}^{m} \Delta a_{ji1} x_{j0},$$

где

$$\Delta\lambda_{i1} = y f_i (C - \lambda_0 D) x_{i0}, \Delta\lambda_{i2} = y [f_i (C - \lambda_0 D) \Delta\tilde{x}_{i1} - \Delta\lambda_{i1} f_i D x_{i0}],$$

$$\Delta\tilde{x}_{i1} = -yR(C - \lambda_0 D) x_{i0}, \Delta a_{ji1} = -\gamma_{ij} [f_j (C - \lambda_0 D) \Delta\tilde{x}_{i1} - \Delta\lambda_{i1} f_j D x_{i0}]$$

(при $j \neq i$) и $\Delta a_{ii1} = 0$.

Из формулы (17) получим при $|y| \leqslant v$ оценки

$$|\lambda_i - \lambda_{i1}| \leqslant \mu_i - v b_{ii},$$

$$|\lambda_i - \lambda_{i2}| \leqslant \mu_i - v b_{ii} - v^2 (a_i b_i + b_{ii} d_{ii}),$$

$$\|x_i - x_{i1}\| \leqslant u_i - v a_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{m} [\beta_{ji} - v g_{ij} (a_i b_j + b_{ii} d_{ji})] \|x_{j0}\|.$$

В случае, когда λ_0 является простым собственным значением, т. е. $m = 1$, система (33) имеет вид

$$u = r\mu u + v(a_1 + au + c_1\mu + c\mu u),$$

$$\mu = v(b_{11} + b_1 u + d_{11}\mu + d_1 \mu u).$$

В частном случае, если $D = 0$, можно взять $c = c_1 = d_1 = d_{11} = 0$ $(m = 1)$. В этом случае условия теоремы 4 выполнены при

$$v \leqslant \frac{1}{a + b_{11} r + 2\sqrt{a_1 b_1 r}}, \tag{34}$$

и тогда

$$\mu_1 = \frac{1}{2r} [1 - va + vb_{11} r - \sqrt{(1 - va - vb_{11} r)^2 - 4v^2 a_1 b_1 r}],$$

$$u_1 = \frac{va_1}{1 - va - r\mu_1}.$$

Примечание 9. Сравним последний результат с некоторыми известными условиями для сходимости метода возмущений.

Пусть $B = E$ и C является ограниченным оператором, определенным во всем пространстве X. При [12] $a = r\,\|C\|$, $a_1 = r\,\|C\|\,\|x_0\|$, $b_1 = \|f\|\ \|C\|$, $b_{11} = \|f\|\ \|C\|\ \|x_0\|$ условие (34) принимает форму

$$|y|\,\|C\| \leqslant \frac{1}{r(1+\gamma+2\sqrt{\gamma})}, \tag{35}$$

где $\gamma = \|f\|\ \|x_0\|$.

Результат, полученный в работе [25], гарантирует в сделанных предположениях сходимость метода возмущений при условии

$$|y|\,\|C\| \leqslant \frac{1}{r(1+\gamma+2\sqrt{2\gamma})},$$

которое более узко, чем условие (35).

В случае гильбертова пространства X теорема М. К. Гавурина ([3]) обеспечивает сходимость метода возмущений при

$$|y|\,\|C\| \leqslant \frac{\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}}{2r\gamma} \tag{36}$$

Последнее условие хуже условия (35) при $\gamma \geqslant 1{,}2$. Однако в практически важном случае $\gamma = 1$ (например, в случае самосопряженного оператора A) оно, очевидно, значительно лучше. Отметим, что условие (34) в примерах часто оказывается более точным, чем условие (36), даже при $\gamma = 1$.

Рассматриваемый в данной работе метод применим также в предположениях, сделанных в работе Ф. Реллиха [24]. Например, пусть $X = Z$ является гильбертовым пространством, а A — самосопряженным и C — симметричным оператором с той же областью определения D_A $(B = E,\ D = 0)$. Пусть λ_0 — простое собственное значение оператора A с собственным элементом $x_0 = f$ $(\|x_0\| = 1)$, причем в промежутке $(\lambda_0 - \delta,\ \lambda_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ нет других точек спектра оператора A, кроме λ_0. Если существуют такие постоянные α и β, что для всех $x \in D_A$

$$\|Cx\| \leqslant \alpha\|x\| + \beta\|Ax\|,$$

то выполнены предположения 1) — 5) и можно взять $r = \frac{1}{\delta}$, $b_1 = \alpha + \beta\,|\lambda_0|$, $b_{11} = |(Cx_0, x_0)|$, $a_1 = b_1 r$, $a = a_1 + \beta$. Условие (34) обеспечивает сходимость метода возмущений при

$$|y| \leqslant \frac{\delta}{\beta\delta + 3(\alpha+\beta|\lambda_0|) + |(Cx_0, x_0)|}.$$

---

[12] В случае $m = 1$ употребляем для простоты обозначения x_0 и f вместо x_{10} и f_1.

Теорема работы [26] гарантирует в сделанных предложениях сходимость метода возмущений только при

$$|y| \leqslant \frac{\delta}{2\beta\delta + 3(\alpha + \beta|\lambda_0|) + |(Cx_0, x_0)|},$$

а результаты из [23, 24] — при еще более строгих условиях.

Пример 3. Рассмотрим задачу о собственных значениях [13]

$$\begin{gathered} x^{IV} - yh_1(sx')' = -\lambda(x'' - yh_2x), \\ x(0) = x''(0) = x(1) = x''(1) = 0, \end{gathered} \tag{37}$$

где h_1 и h_2 — комплексные параметры. В качестве пространства X возьмем множество непрерывных на отрезке [0,1] функций, удовлетворяющих условиями $x(0) = x(1) = 0 \left(\|x\| = \max\limits_{0 \leqslant s \leqslant 1} |x(s)|\right)$.

В данном случае операторы $Ax = x^{IV}$, $Bx = -x''$, $Cx = -h_1(sx')'$ $Dx = h_2x$ определены на множестве функций, четыре (A) или два (B, C) раза непрерывно дифференцируемых на отрезке [0,1] и удовлетворяющих граничными условиями задачи (37).

Задача (37) при $y_0 = 0$ имеет простые собственные значения $\lambda_{n0} = (n\pi)^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$, которым соответствуют собственные функции $x_{n0} = \sin n\pi s$ функционалы $f_nz = \frac{2}{n^2\pi^2} \int\limits_0^1 \sin n\pi s\, z(s)ds$ и операторы [14]

$$R_nz = \int\limits_0^1 \Gamma_n(s, t)z(t)dt,$$

где

$$\Gamma_n(s, t) = \frac{5}{2n^4\pi^4} \sin n\pi s \sin n\pi t - \frac{s}{n^3\pi^3} \cos n\pi s \sin n\pi t -$$

$$- \frac{t}{n^3\pi^3} \sin n\pi s \cos n\pi t + \frac{ts}{n^2\pi^2} + \begin{cases} \frac{1}{n^3\pi^3} \sin n\pi s \cos n\pi t - \frac{s}{n^2\pi^2} & \text{при } s \leqslant t, \\ \frac{1}{n^3\pi^3} \cos n\pi s \sin n\pi t - \frac{t}{n^2\pi^2} & \text{при } s \geqslant t. \end{cases}$$

Условия 1) — 5) удовлетворены. В данном случае нетрудно

---

[13] Задачи такого типа возникают при изучении изгиба тяжелого стержня (см. [20]).

[14] В случае дифференциальных уравнений оператор R выражается просто при помощи обобщенной функции Грина (см. [7]).

показать, что x_n принадлежит области определения операторов B, C и D. Вычисления дают:

$$\lambda_{n1} = \lambda_{n0} + y\left(\frac{h_1}{2} - h_2\right),$$

$$\lambda_{n2} = \lambda_{n1} + y^2 h_1^2 \left[\frac{1}{48 n^2 \pi^2} + \frac{7}{16 n^4 \pi^4} - \frac{4}{n^6 \pi^6}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)\right] -$$

$$-\frac{y^2 h}{n^2 \pi^2}\left(\frac{h_1}{2} - h_2\right), \quad x_{n1} = x_{n0} + y h_1 \left[\frac{s(1-s)}{4 n \pi} \cos n\pi s +\right.$$

$$\left. + \frac{3(2s-1)}{8 n^2 \pi^2} \sin n\pi s + \frac{1}{n^3 \pi^3}(\cos n\pi s - 1) + \frac{s}{n^3 \pi^3}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)\right].$$

Оценивая, получим $a = \frac{0{,}27}{n}|h_1| + 0{,}43\,|h_2|$,

$$a_1 = \frac{0{,}029}{n}|h_1|,\ b_1 = 0{,}87\,|h_1| + 1{,}28|h_2|,\ b_{11} = |0{,}5 h_1 - h_2|,$$

$$c = \frac{0{,}044}{n^2}|h_2|,\ c_1 = 0,\ d_1 = \frac{0{,}13}{n^2}|h_2|,\ d_{11} = \frac{0{,}11}{n^2}|h_2|,\ r = \frac{0{,}17}{n},$$

откуда следует [15]:

h_1	h_2	условие сходимости	оценки при $\lvert y\rvert \leqslant 1$ $(v = 1)$ и $0 \leqslant s \leqslant 1$				
			$\lvert\lambda_n - \lambda_{n0}\rvert$	$\lvert\lambda_n - \lambda_{n1}\rvert$	$\lvert\lambda_n - \lambda_{n2}\rvert$	$\lvert x_n(s) - x_{n0}(s)\rvert$	$\lvert x_n(s) - x_{n1}(s)\rvert$
1	0	$\lvert y\rvert \leqslant 2{,}05 n$	0,54	0,04	0,015	0,046	0,017
1	0,5	$\lvert y\rvert \leqslant 1{,}59$	0,045	0,045	0,024	0,057	0,028
0	1	$\lvert y\rvert \leqslant 1{,}68$	$\frac{n^2}{n^2 - 0{,}11}$	$\frac{0{,}11}{n^2 - 0{,}11}$	$\frac{0{,}0121}{n^2(n^2 - 0{,}11)}$	0	0

Эти оценки верны для всех $n = 1, 2, \ldots$; для $n \geqslant 2$ можно дать еще более точные оценки.

3. В прикладной математике встречаются и проблемы о собственных значениях, при которых уравнение нелинейно зависит от параметра λ. Рассматриваемый метод применим и в таких случаях. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$Ax = \lambda Bx + y\lambda^2 Cx, \tag{38}$$

где C — линейный оператор. Пусть выполнены условия 1) — 5) и $m = 1$.

---

[15] При $h_1 = 1$, $h_2 = 0{,}5$ пользуется оценкой $b_1 = 0{,}73$.

В данном случае $F(x, \lambda, y) = -\lambda^2 Cx$, и уравнение (31) имеет вид

$$P(\xi, y) = (\tilde{x} - \tilde{\lambda} RB\tilde{x} - y\lambda^2 RCx,\ \tilde{\lambda} + y\lambda^2 f\, Cx) = 0, \qquad (39)$$

где $\xi = (\tilde{x}, \tilde{\lambda})$, $\xi_0 = (0, 0)$, $\lambda = \lambda_0 + \tilde{\lambda}$, $x = x_0 + \tilde{x}$.

Нетрудно найти

$$\Gamma_0 = E,\ P_y(0, 0)\Delta y = \Delta y(-\lambda_0^2 RCx_0, \lambda_0^2 fCx_0),$$

$$P_{\xi^2}(0,0)\Delta\xi^2 = 2(-\Delta\lambda RB\Delta x, 0),$$

$$P_{y\xi}(0, 0)\Delta\xi\Delta y = \Delta y(-\lambda_0^2 RC\Delta x - 2\lambda_0\Delta\lambda RCx_0,$$
$$\lambda_0^2 fC\Delta x + 2\lambda_0\Delta\lambda fCx_0),$$

$$P_{y\xi^2}(0, 0)\Delta\xi^2\Delta y = 2\Delta y\,(-2\lambda_0\Delta\lambda RC\Delta x - \Delta\lambda^2 RCx_0,$$
$$2\lambda_0\Delta\lambda fC\Delta x + \Delta\lambda^2 fCx_0)$$

$$P_{y\xi^3}(0,0)\Delta\xi^3\Delta y = 6\Delta y\,(-\Delta\lambda^2 RC\Delta x, \Delta\lambda^2 fC\Delta x),$$

где $\Delta\xi = (\Delta x, \Delta\lambda)$.

Обозначим оценки $\|RC\| \leqslant a$, $\|RCx_0\| \leqslant a_0$, $\|fC\| \leqslant b$, $|fCx_0| \leqslant \leqslant b_0$, $\|RB\| \leqslant r$. Тогда уравнение $\bar{u} = q(\bar{u}, v)$, где $\bar{u} = (u, \mu)$, представляет собой систему

$$\begin{aligned} u &= r\mu u + v(a_0 + au)(|\lambda_0| + \mu)^2, \\ \mu &= v(b_0 + bu)(|\lambda_0| + \mu)^2. \end{aligned} \qquad (40)$$

Если эта система имеет неотрицательные решения, наименьшие из которых u_1, μ_1 положительны, то уравнение (39) имеет при $|y| \leqslant v$ решение $\xi_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{\lambda}_1)$, к которому сходится ряд неявного оператора. Если $x_1 = x_0 + \tilde{x}_1$ принадлежит области определения операторов B и C, то $\lambda_1 = \lambda_0 + \tilde{\lambda}_1$ является собственным значением уравнения (38) и $x_1 = x_0 + \tilde{x}_1$ — соответствующим ему собственным элементом, причем $|\lambda_1 - \lambda_0| \leqslant \mu_1$ и $\|x_1 - x_0\| \leqslant u_1$. Для первых приближений $\lambda_{11} = \lambda_0 - y\lambda_0^2 fCx_0$, $x_{11} = x_0 + y\lambda_0^2 RCx_0$ верны оценки

$$|\lambda_1 - \lambda_{11}| \leqslant \mu_1 - v|\lambda_0|^2 b_0, \quad \|x_1 - x_{11}\| \leqslant u_1 - v|\lambda_0|^2 a_0.$$

В случае, когда $B = E$, C — ограниченный оператор, определенный во всем пространстве X, и $\|f\| = \|x_0\| = 1$, можно взять $a_0 = a = rc$ и $b_0 = b = c$, где $\|C\| \leqslant c$. Тогда при

$$|y| \leqslant \frac{1}{4|\lambda_0| c(1 + r|\lambda_0|)}$$

выполнены условия теоремы 4, причем

$$\mu_1 = \frac{1}{2(r+vc)}[1-2v|\lambda_0|c-\sqrt{1-4v|\lambda_0|c(1+r|\lambda_0|)}],$$

$$u_1 = \frac{r\mu_1}{1-r\mu_1}.$$

Поступило
13 I 1958

Литература

1. Вертгейм Б. А., О некоторых методах приближенного решения нелинейных финкциональных уравнений в пространстве Банаха. Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 1, 166—169.
2. Гавурин М. К., Аналитические методы исследования нелинейных функциональных преобразований. Уч. зап. Ленингр. ун-та, серия матем. наук, 1950, **19**, 59—154.
3. Гавурин М. К., Об оценках для собственных чисел и векторов возмущенного оператора. Докл. АН СССР, 1954, **96**, 1093—1095.
4. Каазик Ю. Я., О приближенном решении нелинейных операторных уравнений итеративными методами. Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 1, 195—199.
5. Каазик Ю. Я., О сходимости итерационных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 80—98.
6. Каазик Ю. Я., Тамме Э. Э., Об одном методе приближенного решения нелинейных операторных уравнений. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 99—116.
7. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 1951.
8. Канторович Л. В., О методе Ньютона. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1949, 28, 104—144.
9. Канторович Л. В., Принцип мажорант и метод Ньютона. Докл. АН СССР, 1951, **76**, 17—20.
10. Канторович Л. В., Некоторые дальнейшие применения принципа мажорант. Докл. АН СССР, 1951, **80**, 849—852.
11. Канторович Л. В., Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона для функциональных уравнений. Вестник Ленингр. ун-та, 1957, **12**, № 7, 68—103.
12. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. 1950.
13. Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа. 1952.
14. Крейн М. Г., Рутман М. А., Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 1, 3—95.
15. Кулль И., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 3—59.
16. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа. 1951.
17. Мираков В. Е., О принципе мажорант для метода Чебышева. Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 3, 171—174.
18. Мираков В. Е., Принцип мажорант и метод касательных парабол для нелинейных функциональных уравнений. Докл. АН СССР, 1957, **113**, 977—979.

19. Тамме Э. Э., О приближенном решении функциональных уравнений методом разложения в ряд обратного оператора. Докл. АН СССР, 1955, **103**, 769—772.

20. Collatz, L., Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig, 1949.

21. Collatz, L., Fehlerabschätzungen zum Iterationsverfahren bei linearen und nichtlinearen Randwertaufgaben. Z. angew. Math. Mech., 1953, **33**, 116—127.

22. Michal, A. D., Clifford, A. H., Fonctions analytiques implicite dans les espaces vectoriel abstraits. C. r. Acad. sci., 1933, **197**, 735—737.

23. Sz.-Nagy, B., Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert. Comm. Math. Helv., 1947, **19**, 347—366.

24. Rellich, F., Störungstheorie der Spektralzerlegung IV. Math. Ann., 1940, **117**, 356—382.

25. Rosenbloom, P., Perturbation of Linear Operators in Banach Spaces. Arch. Math., 1955, **6**, 89—101.

26. Schröder, J., Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung bei linearen Eigenwertproblemen mit Operatoren eines Hilbertschen Raumes. Math. Nachr., 1953, **10**, 113—128.

27. Schröder, J., Neue Fehlerabschätzungen für verschiedene Iterationsverfahren, Z. angew. Math. Mech., 1956, **36**, 168—181.

28. Taylor, E., On the Properties of Analytic Function in Abstract Spaces. Mat. Ann., 1938, **115**, 466—484.

MAJORANTPRINTSIIBIST ITERATSIOONIMEETODITE JAOKS

E. Tamme
Geomeetriakateeder

Resümee

Käesolevas töös vaadeldakse iteratsioonimeetodeid mittelineaarse operaatorvõrrandi

$$P(x)=0 \tag{*}$$

ligikaudseks lahendamiseks mingis Banachi ruumis. Iteratsioonimeetodite koonduvuse uurimisel majoreeritakse võrrandit (*) teise (lihtsama) võrrandiga.

Kahes esimeses paragrahvis esitatakse mõningad vajalikud mõisted ja abitulemused. Siin vaadeldakse analüütilisi operaatoreid, pooljärjestatud Banachi ruume (B^+-ruume) jne.

Paragrahvis 3 antakse võrdlemisi üldise iteratsioonimeetodite klassi (3) jaoks koonduvustingimused ja veahinnang, majoreerides võrrandit (*) võrrandiga B^+-ruumis. Klass (3) sisaldab Newton'i meetodi ning selle väga mitmesugused üldistused ja modifikatsioonid.

Paragrahvis 4 vaadeldakse võrrandit (*) sõltuvana mingisse Banachi ruumi kuuluvast parameetrist ning kasutatakse tema lahendamiseks ilmutamata operaatori reaksarendust. Töö lõpposas vaadeldakse saadud meetodi (häiritusmeetodi) kasutamist integraal- ja diferentsiaalvõrrandite (§ 5) ning küllaltki üldise omaväärtusülesande (27) (§ 6) ligikaudsel lahendamisel.

ÜBER DAS MAJORANTENPRINZIP FÜR DIE ITERATIONSVERFAHREN

E. Tamme

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden Iterationsverfahren zur angenäherten Lösung der nichtlinearen Operatorgleichungen

$$P(x) = 0 \tag{*}$$

in einem Banachschen Raum betrachtet. Bei der Untersuchung der Konvergenz dieser Verfahren wird die Gleichung (*) mit einer anderen (einfacheren) Gleichung majoriert.

Die ersten zwei Paragraphen sind der Herleitung einiger notwendigen Begriffe und Hilfsergebnisse gewidmet. Es werden hier analytische Operatoren, halbgeordnete Banachsche Räume (B^+-Räume) usw. betrachtet.

In § 3 werden die Konvergenzbedingungen und die Fehlerabschätzung für die umfängliche Klasse der Iterationsmethoden (3) gegeben, wobei die Gleichung (*) mit einer im B^+-Raum konstruierten Gleichung majoriert wird. Die Klasse (3) enthält das Newtonsche Verfahren und seine verschiedenen Modifikationen und Verallgemeinerungen.

In § 4 wird in die Gleichung (*) ein Parameter (aus einem Banachschen Raum) eingeführt und zu ihrer Auflösung die Reihenentwicklung des impliziten Operators benutzt. In den letzten Paragraphen der Arbeit wird die Anwendung dieser Methode (der Störungsmethode) zur angenäherten Lösung der Integral- und Differentialgleichungen (§ 5) und der ziemlich allgemeinen Eigenwertaufgabe (27) (§ 6) betrachtet.

ОБ ОБЩЕМ ВИДЕ НЕКОТОРЫХ ИТЕРАТИВНЫХ МЕТОДОВ

Канд. физ.-мат. наук Ю. Я. Каазик и У. Х. Малков
Кафедра геометрии

1. Для приближенного решения операторного уравнения

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

где P — аналитический (в некоторой окрестности точного решения x^*) оператор из банахова пространства $\mathfrak{X}$ в линейное нормированное пространство $\mathfrak{Y}$, в [2, 3, 4] рассмотрен класс итеративных методов вида

$$\Delta_k x_{n+1} = x_{n+1} - x_n = G_{kn} \Gamma_n P(x_n), \tag{2}$$

где $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$ и G_{kn} — некоторый линейный оператор, составленный из операторов E, $\Gamma_n P''(x_n)$, $\quad \Gamma_n P^{(k)}(x_n)$ (E — единичный оператор в пространстве $\mathfrak{X}$, k — фиксированное натуральное число) и элемента $\Gamma_n P(x_n)$.

Обозначим

$$\|\Gamma_n P(x_n)\| \leqslant \eta_n, \quad \left\| \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \right\| \leqslant A_n H_n^{j-1} \quad (n = 0, 1, \quad ; j \geqslant 2). \tag{3}$$

В статье [2] доказана теорема сходимости для тех из методов типа (2), у которых оператор итерирования G_{kn} удовлетворяет условиям:

а) оценку

$$\|G_{kn}\| \leqslant \delta_{kn} = \delta_k(A_n, H_n, \eta_n) \tag{4}$$

можно найти в таком виде, что

$$\delta_{k,n+1} \leqslant \delta_{kn}; \tag{5}$$

б) можно найти оценку

$$\left\| \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_k x_{n+1}^j \right\| \leqslant p_{kn} h_{kn}^k \eta_n, \tag{6}$$

где $h_{kn} = H_n \delta_{kn} \eta_n$, $\overline{\lim\limits_{h_{kn} \to 0}} p_{kn} < +\infty$, так, что выполняется неравенство

$$a_{n+1} l_{n+1}^k \leqslant a_n l_n^{k(k+1)}, \tag{7}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_n &= (1 - q_n)(1 - h_{kn})^3, \quad q_n = A_n \frac{h_{kn}(2 - h_{kn})}{(1 - h_{kn})^2}, \\ l_n &= \frac{s_n h_{kn}}{\sqrt[k]{(1 - q_n)(1 - h_{kn})^2}}, \quad s_n = \sqrt[k]{\frac{p_{kn}(1 - h_{kn}) + A_n \delta_{kn}}{(1 - q_n)(1 - h_{kn})^2}} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

В статье [3] указан путь построения конкретных итеративных методов, удовлетворяющих условиям а) и б).

2. Идея такого построения следующая. Оператор G_{kn} раскладывается на такие слагаемые U_{in}

$$G_{kn} = \sum_{i=1}^{k} U_{in}, \tag{9}$$

что норма $\|U_{in}\|$ оценивается величиной порядка h_{kn}^{i-1} В состав выражения

$$\Delta_k x_{n+1} + \Gamma_n P(x_n) \tag{10}$$

подбираем с обратным знаком все такие члены суммы

$$\sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \left(\sum_{i=1}^{k} U_{in} \Gamma_n P(x_n)\right)^j, \tag{11}$$

норма которых не оценивается величиной порядка $h_{kn}^k \eta_n$. Такой выбор нужен для получения оценки (6). Кроме того, в состав выражения (10) могут с любыми коэффициентами входить и другие члены суммы (11), но с таким расчетом, чтобы получаемое уравнение можно было решить относительно $\Delta_k x_{n+1}$. При этом для большей общности члены второго типа выбираем с неопределенными коэффициентами, фиксирование которых дает конкретные методы. (Таким путем в [3, 4] построен общий вид итеративных методов со второй производной). В общем случае описанный выбор должен, следовательно, иметь вид

$$\Delta_k x_{n+1} + \Gamma_n P(x_n) = -\sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \left[u_{jn}^k + v_{jn}^k U_{kn} \Gamma_n P(x_n)\right], \tag{12}$$

где [1]

$$
\left.
\begin{aligned}
&u_{jn}^k = r_{jn}^k + t_{jn}^k;\\
&r_{jn}^k = \sum_{\substack{\omega_k < k-j\\ \varkappa_k = j}} \frac{j!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_{k-1}!} \prod_{i=1}^{k-1} [U_{in}\Gamma_n P(x_n)]^{\alpha_i};\\
&t_{jn}^k = \sum_{\substack{\omega_k > k-j\\ \varkappa_k = j}} \beta^{(j)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} [U_{in}\Gamma_n P(x_n)]^{\alpha_i};\\
&v_{jn}^k = \sum_{\varkappa_k = j-1} \gamma^{(j)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} [U_{in}\Gamma_n P(x_n)]^{\alpha_i};\\
&\omega_k = \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + \quad + (k-2)\alpha_{k-1};\\
&\varkappa_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \quad + \alpha_{k-1}
\end{aligned}
\right\}
\tag{13}
$$

(α_i — неотрицательные целые числа, $\beta^{(j)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}$ и $\gamma^{(j)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}$ — неопределенные коэффициенты).

Так как из (2) и (9) вытекает равенство

$$\Delta_k x_{n+1} = \Delta_{k-1} x_{n+1} + U_{kn}\Gamma_n P(x_n), \tag{14}$$

то из (12) следует, что

$$\Delta_k x_{n+1} = -\Big(E + \sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j!}\Gamma_n P^{(j)}(x_n)\, v_{jn}^k\Big)^{-1} \Big[\Gamma_n P(x_n) + \sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j!}\Gamma_n P^{(j)}(x_n)\big(u_{jn}^k - v_{jn}^k \Delta_{k-1} x_{n+1}\big)\Big]. \tag{15}$$

3. Полученный класс (15) является в некотором смысле общим видом всех итеративных методов с производными порядка k и содержит все конкретные примеры, построенные в [3] и [4]. Например, фиксируя неопределенные коэффициенты следующим образом

$$\beta^{(j)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}} = \gamma^{(j)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}} = \frac{j!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_{k-1}!},$$

получим метод

$$\Delta_k x_{n+1} = -\Big[E + \sum_{j=2}^{k} \frac{1}{(j-1)!}\Gamma_n P^{(j)}(x_n)\, \Delta_{k-1} x_{n+1}^{j-1}\Big]^{-1} \Big[\Gamma_n P(x_n) - \sum_{j=2}^{k} \frac{j-1}{j!}\Gamma_n P^{(j)}(x_n)\, \Delta_{k-1} x_{n+1}^{j}\Big], \tag{16}$$

[1] Чтобы лучше осмыслить эти формальные выражения, можно их рассматривать как элементы пространств $\mathfrak{X}^i$ (см. [1]), напр. $u_{jn}^k \in \mathfrak{X}^j$, $v_{jn}^k \in \mathfrak{X}^{j-1}$

а беря

$$\gamma^{(j)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}=\begin{cases}\dfrac{(j-1)!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_{k-1}!} & \text{при } \alpha_1\leqslant j-1, \quad , \alpha_{k-j+1}\leqslant j-1, \\ & \quad \alpha_{k-j+2}\leqslant j-2, \quad , \alpha_{k-1}\leqslant 1 \\ 0 & \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

$$\beta^{(j)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}=\begin{cases}\dfrac{j!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_{k-1}!} & \text{при } \alpha_1\leqslant j, . \quad \alpha_{k-j+1}\leqslant j, \\ & \quad \alpha_{k-j+2}\leqslant j-1, \quad \alpha_{k-1}\leqslant 2 \\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

получим

$$\Delta_k x_{n+1}=-[E+\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j!}\Gamma_n P^{(j)}(x_n)\Delta_{k-j+1}x_{n+1}\ldots\Delta_{k-1}x_{n+1}]^{-1}\Gamma_n P(x_n). \tag{17}$$

При $k=2$ формула (15) принимает вид

$$\Delta_2 x_{n+1}=-[E+\frac{\alpha}{2}\Gamma_n P''(x_n)\Gamma_n P(x_n)]^{-1}[E+ + \frac{\alpha+1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\Gamma_n P(x_n)]\Gamma_n P(x_n), \tag{18}$$

где положено $\gamma_1^{(2)}=\alpha$.

В [4] доказано, что в случае этого метода условия а) и б) заменяются условием

$$|\alpha|A_0H_0\eta_0<1. \tag{19}$$

Можно доказать выполненность условий а) и б) также в случае метода (15). для чего достаточно ввести условие

$$\|\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j!}\Gamma_n P^{(j)}(x_n)v^k_{jn}\|\leqslant K_{kn}= =\sum_{j=2}^{k}\bar{A}_n(H_n\eta_n)^{j-1}\sum_{\varkappa_k=j-1}|\gamma^{(j)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}|\prod_{i=1}^{k}[S_{in}(H_n\eta_n)^{i-1}]^{\alpha_i}<1, \tag{20}$$

которое гарантирует существование обратного оператора в формуле (15) и ограничивает неопределенность коэффициентов $\gamma^{(j)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}$ (в связи с выбором начального приближения x_0).

4. Доказательство этого утверждения проведем методом полной индукции, предполагая, что при $k=2$, 3, , k_0 выполнены

следующие условия:

$$\|U_{kn}\Gamma_n P(x_n)\| \leqslant (H_n\eta_n)^{k-1}\eta_n S_{kn};\quad S_{k,n+1} \leqslant \frac{S_{kn}}{[(1-q_n)(1-h_{kn})^2]^{k+1}}; \tag{21}$$

$$\left\|\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\Gamma_n P^{(j)}(x_n)\Delta_k x^j_{n+1}\right\| \leqslant p_{kn}h^k_{kn}\eta_n; \tag{22}$$

$$p_{kn} = \frac{p_{kn}}{\delta^k_{kn}};\qquad p'_{k,n+1} \leqslant \frac{p_{kn}}{[(1-q_n)(1-h_{kn})^2]^k}. \tag{23}$$

Выполненность этих условий при $k=2$ легко проверяется по результатам работы [4].

Используем некоторые формулы и неравенства, полученные в [2, 3, 4]:

$$\left.\begin{aligned} &A_{n+1} = A_n[(1-q_n)(1-h_{kn})^2]^{-1};\quad H_{n+1} = H_n(1-h_{kn})^{-1};\\ &\eta_{n+1} = (1-h_{kn})S^k_n h^k_{kn}\eta_n;\quad l^k_n \leqslant 1;\ h_{kn} < 1;\\ &q_n < 1;\ h_{k,n+1} \leqslant h_{kn};\quad q_{n+1} \leqslant q_n. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Из формул (15) и (14) вытекает

$$U_{kn}\Gamma_n P(x_n) = -\left(E + \sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j!}\Gamma_n P^{(j)}(x_n)v^k_{jn}\right)^{-1}(\Gamma_n P(x_n) +$$

$$+ \Delta_{k-1}x_{n+1} + \sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j!}\Gamma_n P^{(j)}(x_n)u^k_{jn}). \tag{25}$$

$$A_{n+1}H_{n+1}\eta_{n+1} \leqslant A_n H_n\eta_n;\ H_{n+1}\eta_{n+1} \leqslant H_n\eta_n. \tag{26}$$

Легко установить (учитывая структуру формулы (25), а также (3) и (13)), что $\|U_{in}\|$ возрастающая функция от $A_nH_n\eta_n$ и $H_n\eta_n$. Но тогда из (26) следует, что $\|U_{i,n+1}\| \leqslant \|U_{in}\|$ при каждом i. Следовательно, из (15) получаем, что $\delta_{k,n+1} \leqslant \delta_{kn}$ (также при каждом значении k). Это значит, что выполненность условия a) проверена.

Аналогично можно установить из (20), (3), (13) и (26), что $K_{k,n+1} \leqslant K_{kn}$, и, следовательно, условие (20) заменяется условием $K_{k0} < 1$.

Теперь проверим выполненность условий (21), (22) и (23) при $k = k_0 + 1$.

Сперва замечаем, что

$$u^{k_0+1}_{jn} = r^{k_0}_{jn} + \sum_{\substack{\omega_{k_0+1}=k_0-j+1\\ \varkappa_{k_0+1}=j}}\frac{j!}{\alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_{k_0}!}\prod_{i=1}^{k_0}[U_{in}\Gamma_n P(x_n)]^{\alpha_i} + t^{k_0+1}_{jn},$$

$$\Gamma_n P(x_n) + \Delta_{k_0}x_{n+1} = -\sum_{j=2}^{k_0}\frac{1}{j!}\Gamma_n P^{(j)}(x_n)[r^{k_0}_{jn} + t^{k_0}_{jn} + v^{k_0}_{jn}U_{k_0n}\Gamma_n P(x_n)].$$

Отсюда следует, что в формуле (25) при $k = k_0 + 1$ самыми «крупными» членами являются

$$B_n = -\left(E + \sum_{j=2}^{k_0+1} \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) v_{jn}^{k_0+1}\right)^{-1}$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \left[\frac{2!}{\alpha_1! \ldots \alpha_{k_0}!} \prod_{i=1}^{k_0} [U_{in} \Gamma_n P(x_n)]^{\alpha_i} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \beta^2_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k_0-1}} \prod_{i=1}^{k_0-1} [U_{in} \Gamma_n P(x_n)]^{\alpha_i} \right] \right\},$$

которые получаются при $\omega_{k_0+1} = \omega_{k_0} = k_0 - 1$, $\varkappa_{k_0+1} = \varkappa_{k_0} = 2$.

Учитывая, что $K_{k,n+1} \leqslant K_{kn}$, получим из (21), (3) и (13) для B_n оценку в виде

$$\|B_n\| \leqslant (H_n \eta_n)^{k_0} \eta_n T_{k_0+1,n},$$

причем

$$T_{k_0+1,n+1} \leqslant \frac{T_{k_0+1,n}}{[(1-q_n)(1-h_{k_0+1,n})^2]^{k_0}}$$

Отсюда и следует выполненность условия (21) при $k = k_0 + 1$. (В последнем неравенстве мы заменили величины $h_{in}(i = 2, 3, \ldots, k_0)$ величиной $h_{k_0+1,n}$. Такая замена допустима, так как $\delta_{k+1,n} \geqslant \delta_{kn}$ и тем более $h_{k+1,n} \geqslant h_{kn}$).

Выполненность условия (22) при $k = k_0 + 1$ следует теперь из выбора выражения $\Gamma_n P(x_n) + \Delta_{k_0+1} x_{n+1}$.

Равенство $p_{k_0+1,n} = p'_{k_0+1,n}\, \delta_{k_0+1,n}^{-(k_0+1)}$ также очевидно, так как в оценку (22) при $k = k_0 + 1$ входит величина

$$h_{k_0+1,n}^{k_0+1} = H_n^{k_0+1} \delta_{k_0+1,n}^{k_0+1} \eta_n^{k_0+1}$$

Для проверки условия (23) (при $k = k_0 + 1$) исследуем более подробную сумму

$$\sum_{j=0}^{k_0+1} \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_{k_0+1} x_{n+1}^j = \Gamma_n P(x_n) + \Delta_{k_0+1} x_{n+1} +$$

$$+ \sum_{j=2}^{k_0+1} \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \left[\sum_{i=1}^{k_0+1} U_{in} \Gamma_n P(x_n) \right]^j =$$

$$= \sum_{j=2}^{k_0+1} \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \left\{ \left[\sum_{i=1}^{k_0+1} U_{in} \Gamma_n P(x_n) \right]^j - \right.$$

$$\left. - u_{jn}^{k_0+1} - v_{jn}^{k_0+1} U_{k_0+1,n} \Gamma_n P(x_n) \right\}$$

Самым «крупным» членом этой суммы является

$$Q_n = \frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\,\beta^{(2)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_0}}\prod_{i=1}^{k_0}[U_{in}\Gamma_n P(x_n)]^{\alpha_i},$$

получившийся при $\omega_{k_0+1} = k_0$, $\varkappa_{k_0+1} = 2$.

Аналогично, как при проверке условия (21) при $k = k_0 + 1$, получим здесь, что

$$\|Q_n\| \leqslant (H_n\eta_n)^{k_0+1} L_n\eta_n;\quad L_{n+1} \leqslant \frac{L_n}{[(1-q_n)(1-h_{k_0+1,n})^2]^{k_0+1}},$$

откуда и следует выполненность условия (23) при $k = k_0 + 1$.

Теперь из формул, обозначений и неравенств (8), (23) и (24) вытекает, что

$$a_{n+1}l_{n+1}^{k_0+1} = \frac{p'_{k_0+1,n+1}(1-h_{k_0+1,n+1}) + \delta^{k_0+2}_{k_0+1,n+1}A_{n+1}}{(1-q_{n+1})(1-h_{k_0+1,n+1})}\cdot\frac{h^{k_0+1}_{k_0+1,n+1}}{\delta^{k_0+1}_{k_0+1,n+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p'_{k_0+1,n}(1-h_{k_0+1,n}) + \delta^{k_0+2}_{k_0+1,n}A_n}{[(1-q_n)(1-h_{k_0+1,n})^2]^{k_0+2}}\cdot\frac{(1-h_{k_0+1,n})\,S_n^{(k_0+1)^2}h^{(k_0+1)(k_0+2)}_{k_0+1,n}}{\delta^{k_0+1}_{k_0+1,n}} =$$

$$= a_n l_n^{(k_0+1)(k_0+2)}$$

Тем самым и выполненность условия б) при $k = k_0 + 1$ проверена.

5. Используя теорему сходимости, данную в [1], видим, что для методов (15) имеет место

Теорема. *Пусть выполнены условия*:

1° *существует обратный оператор* Γ_0,

2° *оператор* P *аналитичен в сфере*

$$\|x - x_0\| \leqslant \frac{\delta_{k0}\eta_0}{1 - a_0 l_0^{k(k+1)}}, \tag{27}$$

причем

$$\left\|\frac{1}{j!}\Gamma_0 P^{(j)}(x_0)\right\| \leqslant A_0 H_0^{j-1} \quad (j \geqslant 2),$$

3° *величины* η_0, A_0 *и* H_0 *удовлетворяют неравенствам*

$$h_0 < 1 - \sqrt{\frac{A_0}{1 + A^0}},\quad l_0^k \leqslant 1,$$

4° $$\left\|\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j!}\Gamma_0 P^{(j)}(x_0)\,v_{j0}^k\right\| < 1,$$

тогда уравнение (1) *имеет в сфере* (27) *решение* x^*, *к которому* *(сильно) сходится вычисленная из формулы* (15) *последовательность* $\{x_n\}$ *со скоростью*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{a_0^n l_0^{(k+1)^n-1} \delta_{k0} \eta_0}{1 - a_0 l^{k(k+1)}}$$

Число неопределенных коэффициентов в формуле (15) быстро возрастает с увеличением числа k. Например, при $k = 1, 2, 3, 4, 5$ это число будет соответственно 0, 1, 10, 52, 204.

6. Формула (15) дает довольно общий класс итеративных методов рассматриваемого вида. Путем уменьшения числа независимых неопределенных коэффициентов можно получить более узкие классы методов, которые с практической точки зрения представляют наибольший интерес.

Например, задав при $k = 3$ семь зависимостей между неопределенным коэффициентам, получим класс

$$\begin{aligned} \Delta_3 x_{n+1} = &- \Big\{E - \frac{\alpha}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Delta_2 x_{n+1} - \\ &- \frac{1}{6} \Gamma_n P'''(x_n) \left[(1-\gamma-\beta) \Delta_2 x_{n+1}^2 + \right. \\ &\left. + (1-\beta) \Gamma_n P(x_n) \Delta_2 x_{n+1} \right] \Big\}^{-1} \Big\{ \Gamma_n P(x_n) + \frac{1+\alpha}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Delta_2 x_{n+1}^2 + \\ &+ \frac{1-\gamma}{6} \Gamma_n P'''(x_n) \Delta_2 x_{n+1}^3 \Big\}, \end{aligned} \tag{28}$$

(где α, β, γ — неопределенные коэффициенты, а $\Delta_2 x_{n+1}$ определен формулой (18) с тем же α), который содержит все конкретные методы, рассмотренные в [3, 4] при $k = 3$. Так, методы (16) и (17) для $k = 3$ получаются соответственно при $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = 3$ и $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$.

Условие 4° в приведенной теореме в случае класса (28) заменяется следующим

$$\begin{aligned} \Big\| \frac{\alpha}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Delta_2 x_1 + \frac{1}{6} \Gamma_0 P'''(x_0) \left[(1-\beta) \Gamma_0 P(x_0) \Delta_2 x_1 + \right. \\ \left. + (1-\gamma-\beta) \Delta_2 x_1^2 \right] \Big\| < 1, \end{aligned}$$

а p_{30} вычисляется из неравенства

$$\begin{aligned} \Big\| \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \left[(2+\alpha) \Delta_2 x_1 + (U_3 \Gamma_0 P(x_0))^2 \right] U_3 \Gamma_0 P(x_0) + \\ + \frac{1}{6} \Gamma_0 P'''(x_0) \left[U_3 \Gamma_0 P(x_0) \right)^3 + 3 \Delta_2 x_1 (U_3 \Gamma_0 P(x_0))^2 + \\ + (5-\gamma-2\beta) U_1 \Gamma_0 P(x_0) U_2 \Gamma_0 P(x_0) U_3 \Gamma_0 P(x_0) + \\ + (3-\gamma) U_3 \Gamma_0 P(x_0) \Delta_2 x_1^2 + (1-\beta) U_2 \Gamma_0 P(x_0) \Delta_2 x_1^2 \Big\| \leqslant p_{30} h_{30}^3 \eta_0, \end{aligned}$$

где $U_1\Gamma_0P(x_0) = -\Gamma_0P(x_0)$; $U_2\Gamma_0P(x_0) =$

$$= -\left(E + \frac{\alpha}{2}\Gamma_0P'''(x_0)\Gamma_0P(x_0)\right)^{-1}\cdot\frac{1}{2}\Gamma_0P''(x_0)\left(\Gamma_0P(x_0)\right)^2;$$

$$U_3\Gamma_0P(x_0) = -\{E - \frac{\alpha}{2}\Gamma_0P''(x_0)\Delta_2x_1 - \frac{1}{6}\Gamma_0P'''(x_0)$$

$$[(1-\beta)\Gamma_0P(x_0)\Delta_2x_1 + (1-\gamma-\beta)\Delta_2x_1^2]\}^{-1}\{\Gamma_0P(x_0) + \Delta_2x_1 +$$

$$+ \frac{1}{2}\Gamma_0P''(x_0)\Delta_2x_1^2 + \frac{1}{6}\Gamma_0P'''(x_0)[\Delta_2x_1^3 +$$

$$+ (\beta-1)U_2\Gamma_0P(x_0)\Delta_2x_1^2]\}$$

Поступило
13 I 1958

Литература

1. Гаврин М. К., Аналитические методы исследования нелинейных функциональных преобразований. Уч. зап. Ленингр. ун-та, серия матем. наук, 1950, **19**, 59—154.
2. Каазик Ю. Я., О приближенном решении нелинейных операторных уравнений итерационными методами. Успехи матем. наук, 1957, **12**, 195—199.
3. Каазик Ю. Я., О сходимости итерационных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 80—98.
4. Каазик Ю. Я., Об итерационных методах в пространстве Банаха. Автореферат диссертации, 1957, Тарту.

MÕNINGATE ITERATSIOONIMEETODITE ÜLDISEST KUJUST

Füüs.-mat. tead. kand. Ü. Kaasik ja U. Malkov
Geomeetriakateeder

Resümee

Töös [2] on tõestatud iteratsioonimeetodite klassi (2) koonduvusteoreem. Käesolevas artiklis konstrueeritakse kuni k-ndat järku tuletisi sisaldavate iteratsioonimeetodite üldkuju (15) Tõestatakse, et sel puhul töös [2] antud tingimused asenduvad tingimusega 4° toodavas teoreemis.

ON A GENERAL FORMULA FOR SOME ITERATION METHODS

Ü. Kaasik and U. Malkov

Summary

In the paper [2] a convergence theorem for the iteration methods (2) is given. In the present paper the general formula (15) for iteration methods (containing k derivatives) is constructed. In this case the restrictive conditions, given in [2] are replaceable by condition 4° in represented theorem.

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАТИВНЫХ МЕТОДОВ В СЛУЧАЕ НЕАНАЛИТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Канд. физ.-мат. наук Ю. Я. Каазик и А. В. Йыги
Кафедра геометрии

1. В [1] и [2] рассматривалось приближенное решение нелинейного операторного уравнения

$$P(x) = 0 \tag{1}$$

в случае аналитического оператора P (из банахова пространства $\mathfrak{X}$ в нормированное пространство $\mathfrak{Y}$) итеративными методами вида

$$\Delta x_{n+1} = x_{n+1} - x_n = G_n \Gamma_n P(x_n) \quad (n = 0, 1, \quad .), \tag{2}$$

где x_0 — начальное приближение точного решения x^*, $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$, а G_n — некоторый линейный оператор, составленный из операторов E, $\Gamma_n P''(x_n)$, $\quad$, $\Gamma_n P^{(k)}(x_n)$ и элемента $\Gamma_n P(x_n)$ (k — фиксированное натуральное число).

В настоящей статье мы будем рассматривать тот же вопрос в предположении, что известна лишь дифференцируемость оператора P до порядка $k+1$ (включительно) в некоторой окрестности начального приближения x_0.

2. Если существуют обратные операторы Γ_n, то можно найти оценки

$$\|\Gamma_n\| \leqslant B_n. \tag{3}$$

Введем еще обозначения η_n, K_j, δ_n и h_n:

$$\|\Gamma_n P(x_n)\| \leqslant \eta_n \quad (n = 0, 1, \quad .);$$

в области, уточняемой ниже

$$\left\| \frac{1}{j!} P^{(j)}(x) \right\| \leqslant K_j \quad (j = 2, 3, \quad , k+1); \tag{4}$$

$$\|G_n\| \leqslant \delta_n = \delta(\eta_n, B_n);$$

$$h_n = B_n K_2 \delta_n \eta_n. \tag{5}$$

Пусть для оператора итерирования G_n выполнены следующие условия:

1) $$\delta_{n+1} \leqslant \delta_n; \tag{6}$$

2) $$\left\| \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta x_{n+1}^j \right\| \leqslant p_n h_n^k \eta_n, \tag{7}$$

где $\overline{\lim\limits_{h_n \to 0}}\, p_n < +\infty$;

3) $$s_{n+1}^k \leqslant s_n^k, \tag{8}$$

где

$$s_n = \sqrt[k]{\frac{p_n + a_{k+1}\delta_n}{1 - \varphi'(h_n)}},$$

а a_{k+1} и $\varphi(h)$ определяются ниже.

Тогда о сходимости методов (2) имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполнены условия:*

1) *существует обратный оператор* Γ_0,

2) *оператор* P *имеет в сфере*

$$\|x - x_0\| \leqslant \frac{\delta_0 \eta_0}{1 - s_0^k h_0^k} \tag{9}$$

производные $P^{(j)}(x)$, *которые оцениваются неравенствами* (4),

3) $$\varphi'(h_0) < 1, \tag{10}$$

где

$$\varphi(h) = \sum_{j=2}^{k+1} a_j h^j, \tag{11}$$

а постоянные a_j *определяются неравенствами*

$$K_j \leqslant a_j B_0^{j-2} K_2^{j-1} \quad (j = 2, \quad , k+1), \tag{12}$$

4) $$l_0^k = \frac{s_0^k h_0^k}{1 - \varphi'(h_0)} \leqslant 1, \tag{13}$$

то уравнение (1) *имеет в сфере* (9) *решение* x^*, *к которому сходится полученная из* (2) *последовательность* $\{x_n\}$ *со скоростью*

$$\|x^* - x\| \leqslant \frac{[1 - \varphi'(h_0)]^n l_0^{(k+1)^n - 1} \delta_0 \eta_0}{1 - [1 - \varphi'(h_0)]\, l_0^{(k+1)}}. \tag{14}$$

Доказательство. Покажем, что при переходе от x_0 к x_1 условия 1)—4) не нарушаются.

Прежде всего имеем

$$||\Delta x_1|| \leqslant \delta_0\eta_0. \tag{15}$$

Далее из формулы Тейлора с учетом (3), (4), (15), (12), (5), (11) и (10) получаем

$$||\Gamma_0(P'(x_0) - P'(x_1))|| \leqslant \sum_{j=2}^{k} jB_0K_j(\delta_0\eta_0)^{j-1} +$$

$$+(k+1)B_0K_{k+1}(\delta_0\eta_0)^k = \varphi'(h_0) < 1.$$

Таким образом существует

$$Q^{-1} = [E - \Gamma_0(P'(x_0) - P'(x_1))]^{-1},$$

причем

$$||Q^{-1}|| \leqslant \frac{1}{1-\varphi'(h_0)}.$$

Но тогда существует также $\Gamma_1 = Q^{1-}\Gamma_0$ и

$$||\Gamma_1|| \leqslant \frac{B_0}{1-\varphi'(h_0)} = B_1, \tag{16}$$

т. е. условие 1) выполнено.

По формуле Тейлора

$$P(x_1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} P^{(j)}(x_0)\Delta x_1^j + J, \tag{17}$$

где

$$J = \frac{1}{k!}\int_0^1 P^{(k+1)}(x_0 + t\Delta x_1)\Delta x_1^{k+1}(1-t)^k dt.$$

Используя (16), (4), (15), (12) и (5). найдем

$$||\Gamma_1 J|| \leqslant \frac{a_{k+1}h_0^k\delta_0\eta_0}{1-\varphi'(h_0)} \tag{18}$$

На основании (7) и (18)

$$||\Gamma_1 P(x_1)|| \leqslant s_0^k h_0^k \eta_0,$$

так что можно выбрать

$$\eta_1 = s_0^k h_0^k \eta_0. \tag{19}$$

Условие 3) проверяется непосредственно (используя (11), (5). (16), (6), (19), (13) и (11)):

$$\varphi'(h_1) \leqslant \sum_{i=2}^{k+1} ja_j \left[\frac{s_0^k h_0^k}{1-\varphi'(h_0)}\right]^{j-1} h_0{}^{j-1} \leqslant \varphi'(h_0) l_0^k < 1,$$

причем мы получили

$$\varphi'(h_1) \leqslant \varphi'(h_0). \tag{20}$$

Непосредственно можно также найти, что

$$h_1 \leqslant l_0^k h_0 \leqslant h_0. \tag{21}$$

Проверим теперь справедливость условия 4) при x_1. Применяя (8), (21) и (20), имеем

$$l_1^k = \frac{s_1^k h_1^k}{1-\varphi'(h_1)} \leqslant \frac{s_0^k h_0^k}{1-\varphi'(h_0)} = l_0^k \leqslant 1.$$

Для проверки условия 2) докажем, что сфера

$$\|x - x_1\| \leqslant \frac{\delta_1 \eta_1}{1 - s_1^k h_1^k} \tag{22}$$

не выходит за пределы сферы (9). Действительно, если x принадлежит сфере (22), то

$$\|x - x_0\| \leqslant \|x - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta_1 \eta_1}{1 - s_1^k h_1^k} + \delta_0 \eta_0 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta_0 \eta_0 s_0^k h_0^k}{1 - s_0^k h_0^k} + \delta_0 \eta_0 = \frac{\delta_0 \eta_0}{1 - s_0^k h_0^k},$$

т. е. x попадает в сферу (9). Значит, ту же оценку K_j и тем самым a_j (ведь $B_1 \geqslant B_0$) можно применить в случае замены x_0 на x_1.

Таким образом, все условия теоремы выполнены при x_1 и мы можем продолжить определение элементов x_n и величин

B_n, η_n, h_n, $\varphi'(h_n)$ и l_n^k по формулам

$$B_n = \frac{B_{n-1}}{1-\varphi'(h_{n-1})},$$

$$\eta_n = s_{n-1}^k h_{n-1}^k \eta_{n-1}, \tag{23}$$

$$h_n \leqslant h_{n-1} l_{n-1}^k, \tag{24}$$

$$\varphi'(h_n) \leqslant \varphi'(h_{n-1}) l_{n-1}^k,$$

$$l_n^k = \frac{s_n^k h_n^k}{1-\varphi'(h_n)} \leqslant 1. \tag{25}$$

Применяя (8), (24) и (25), получим

$$s_n^k h_n^k \leqslant s_{n-1}^k h_{n-1}^k l_{n-1}^{k^2}, \tag{26}$$

откуда

$$l_n^k \leqslant l_{n-1}^{k(k+1)} \tag{27}$$

Повторное применение неравенств (27), (26) и (23) дает

$$l_n^k \leqslant l_0^{k(k+1)^n},$$

$$s_k^n h_n^k \leqslant [1-\varphi'(h_0)]\, l_0^{k(k+1)^n},$$

$$\eta_n \leqslant [1-\varphi'(h_0)]^n l_0^{(k+1)^n - 1} \eta_0. \tag{28}$$

Дальше, на основании (6) и (28)

$$\| \Delta x_{n+1} \| \leqslant \delta_n \eta_n \leqslant \delta_0 \eta_n \leqslant [1-\varphi'(h_0)]^n l_0^{(k+1)^n - 1} \delta_0 \eta_0$$

и, в силу неравенства

$$(k+1)^{n+i-1} \geqslant (k+1)^n + k(k+1)(i-1),$$

получим

$$\| x_{n+i} - x_n \| \leqslant \frac{[1-\varphi'(h_0)]^n l_0^{(k+1)^n - 1} \delta_0 \eta_0}{1-[1-\varphi'(h_0)]\, l_0^{k(k+1)}}. \tag{29}$$

Из полноты пространства $\mathcal{X}$ следует существование предела $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и при $i \to \infty$ из неравенства (29) получим (14). Взяв там же $n = 0$, видим, что последовательность $\{x_n\}$, а также x^* входит в (9).

Наконец докажем, что x^* является решением уравнения (1). На основании (17)

$$P(x_{n+1}) = P'(x_n)\left[\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\Gamma_n P^{(j)}(x_n)\,\Delta x_{n+1}^{j} + \Gamma_n J\right],$$

откуда

$$\|P(x_{n+1})\| \leqslant \|P'(x_n)\|\left(1 + 2B_0K_2\frac{\delta_0\eta_0}{1 - s_0^k h_0^k}\right)[1 - \varphi'(h_n)]\,\eta_{n+1}$$

Так как $\|P'(x_n)\|$ очевидно ограничены, а из (28) следует

$$\lim_{n\to\infty}\eta_{n+1} = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\|P(x_{n+1})\| = 0$$

и, следовательно,

$$P(x^*) = P(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} P(x_n) = 0.$$

3. Из доказанной теоремы легко получаются теоремы сходимости конкретных итеративных методов. Для этого нужно в каждом случае проверить, удовлетворяет ли соответствующий оператор G_n условиям (6). (7) и (8).

В качестве примера рассмотрим итеративный метод (см. [2])

$$\Delta_k x_{n+1} = -\Gamma_n P(x_n) - \sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j!}\Gamma_n P^{(j)}(x_n)\,\Delta_{k-1} x_{n+1}^{j}, \qquad (30)$$

сходимость которого решается следующей теоремой.

Теорема 2. *Если выполнены условия* I) — 4) *теоремы* 1, *где*

$$s_0^k = \frac{\delta_0\left[a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i+1}\left(\frac{\varphi'(h_0)}{h_0}\right)^i\right]}{1 - \varphi'(h_0)}$$

и δ_0 *является наименьшим положительным корнем уравнения*

$$\varphi(h_0) - h_0 + B_0K_2\eta_0 = 0,$$

то уравнение (1) *имеет в сфере* (9) *решение* x^* *к которому сходится полученная из* (30) *последовательность* $\{x_n\}$ *со скоростью* (14).

4. Приведем пример о применении метода (30) при $к = 2$. Исходя в случае уравнения

$$\tan x = 2x$$

из первого приближения $x_0 = 1{,}2$, получим следующие результаты:

n	x_n	Оценка по формуле (14)	Действительная погрешность
1	1,1666	$8{,}6 \cdot 10^{-3}$	$0{,}6 \quad 10^{-3}$
2	1,165572	$8{,}3 \cdot 10^{-6}$	$2{,}03 \cdot 10^{-6}$

Поступило
13 I 1958

Литература

1. Каазик Ю. Я., О приближенном решении нелинейных операторных уравнений итерационными методами. Успехи матем. наук, 1957, **12**, 195—199.
2. Каазик Ю. Я., О сходимости итерационных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 80—98.

ITERATSIOONIMEETODITE KOONDUMINE MITTEANALÜÜTILISE OPERAATORI JUHUL

Füüs.-mat. tead. kand. Ü. Kaasik ja A. Jõgi

Geomeetriakateeder

Resümee

Käesolevas artiklis vaadeldakse operaatorvõrrandi (1) ligikaudset lahendamist iteratsioonimeetoditega (2). Tõestatakse nende meetodite koonduvusteoreem juhul, kui operaator P omab $k+1$ tuletist.

CONVERGENCE OF ITERATION METHODS FOR NON-ANALYTIC OPERATION

Ü. Kaasik and A. Jõgi

Summary

In the present paper the numerical solution of the functional equation (1) with the iteration methods (2) is considered. A convergence theorem of those methods is proved for equations where operation P has $k+1$ derivatives.

ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ИТЕРАТИВНЫХ МЕТОДОВ

Канд. физ.-мат. наук Л. К. Выханду
Кафедра геометрии

1. Для решения операторных уравнений

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

где $P(x)$ аналитический (или дифференцируемый необходимое число раз) оператор из банахова пространства $\mathfrak{X}$ в линейное нормированное пространство $\mathfrak{Y}$, развиты многие итеративные методы следующего типа:

$$x_{n+1} = x_n - G_n \Gamma_n P(x_n). \tag{2}$$

где $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$ и G_n линейный оператор, в состав которого входят операторы $E, \Gamma_n P''(x_n), \Gamma P'''(x_n)$, (см., напр., [1]—[6]).

Общую теорему о сходимости таких итеративных методов дал Ю. Я. Каазик [4].

Наряду с полученными строгими оценками представляют интерес и оценки, которые не являются строгими, но дают довольно правдивую картину о действительной точности полученного приближения, в то время как строгие оценки часто оказываются преувеличенными.

Все методы типа (2) мы можем представить в следующем виде:

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n - [A(x_n)]^{-1} B(x_n). \tag{3}$$

При этом, если обозначить решения уравнения (1) через x^*, имеем

$$B(x^*) = 0, \quad A(x^*) \neq 0.$$

Введем для погрешности n-го приближения решения x следующее обозначение:

$$x^* - x_n = \delta_n.$$

Пусть разложение погрешности $n+1$-го приближения δ_{n+1} в ряд Тэйлора имеет вид

$$\delta_{n+1} = -\frac{1}{k!} d^k(f(x^*);\ \delta_n) - \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1}(f(x^*);\ \delta_n) - \ldots, \tag{4}$$

где $d^k(f(x^*);\ \delta_n) \neq 0$. В этом случае назовем число k порядком сходимости итеративного метода (3). В случае обыкновенных уравнений такое определение порядка сходимости дано, например, в книге Хаусхолдера [7].

Если предполагать δ_n достаточно малым, то мы можем для практической оценки погрешности $n+1$-го приближения ограничиться первыми членами разложения (4) и заменить при этом точку x^* точкой x_n.

В результате получим

$$\delta_{n+1} \approx -\frac{1}{k!} d^k(f(x_n);\ \Delta x_n) - \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1}(f(x_n);\ \Delta x_n) - \ldots,$$

где

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n.$$

Корректность такого предположения видна из того, что итеративный метод, определяемый равенством

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n - \frac{1}{k!} d^k(f(x_n);\ \Delta x_n),$$

имеет сходимость $k+1$-го порядка.

Для итеративных методов вида (3) имеем

$$d^k(f(x^*);\ \delta_n) = d^k(x^*;\ \delta_n) - d^k(A^{-1}(x^*)B(x^*);\ \delta_n).$$

Находить дифференциалы от произведения $A^{-1}B$ довольно неудобно, так как один из операторов является обратным; однако оказывается, что эту трудность можно обойти, если выполнены условия

$$d^i(B(x^*);\ \delta_n) = i d^{i-1}(A(x^*);\ \delta_n)\delta_n,\quad i = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{5}$$

Тогда мы найдем после несложных преобразований, что

$$d^k(A^{-1}(x^*)B(x^*);\ \delta_n) = A^{-1}(x^*)[d^k(B(x^*);\ \delta_n) - \\ - k d^{k-1}(A(x^*);\ \delta_n)\delta_n] + k d^{k-1}(E\ \delta_n), \tag{6}$$

$$d^{k+1}(A^{-1}(x^*)B(x^*);\ \delta_n) = A^{-1}[d^{k+1}(B(x^*);\ \delta_n) - \\ - (k+1)d^k(A(x^*);\ \delta_n)\delta_n] + (k+1)d(A^{-1}(x^*);\ \delta_n)[d^k(B(x^*);\ \delta_n) - \\ - k d^{k-1}(A(x^*);\ \delta_n)\delta_n]. \tag{7}$$

Из соотношения (6) видно, что введенные нами условия (5) являются достаточными для того, чтобы итеративный процесс (4) имел бы порядок сходимости κ.

Проведем проверку условий (5) для некоторых итеративных методов и найдем оценку погрешности.

2. Метод Ньютона.

Как известно, метод Ньютона имеет следующий вид:

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n).$$

Значит, в данном случае $A(x) = P'(x)$, $B(x) = P(x)$. Проверяем выполненность условий (5).

$$\begin{aligned}
&i=1 \quad d(B(x^*);\ \delta_n) = P'(x)\,\delta_n;\ A(x^*)\,\delta_n = P'(x^*)\,\delta_n,\\
&i=2 \quad d^2(B(x^*);\ \delta_n) = P''(x^*)\,\delta_n^2;\ 2d(A(x^*);\ \delta_n)\,\delta_n = 2P''(x^*)\,\delta_n^2,\\
&i=3 \quad d^3(B(x^*);\ \delta_n) = P'''(x)\,\delta_n^3;\ 3d^2A(x^*);\ \delta_n)\,\delta_n = 3P'''(x^*)\,\delta_n^3.
\end{aligned}$$

Условия (5) выполнены только при $i = 1$, значит, метод Ньютона является итеративным методом второго порядка. Принимая во внимание соотношения (6). (7), имеем

$$\begin{aligned}
&d(f(x^*);\ \delta_n) = 0,\\
&d^2(f(x^*);\ \delta_n) = \Gamma(x^*)\,P''(x^*)\,\delta_n^2,\\
&d^3(f(x^*);\ \delta_n) = 2\Gamma(x^*)\,P'''(x^*)\,\delta_n^3 - 3\Gamma(x^*)\,P''(x^*)\,\delta_n\,\Gamma(x^*)\,P''(x^*)\,\delta_n^2.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$x^* = x_{n+1} + \delta_{n+1} = x_{n+1} - \frac{1}{2}\Gamma(x^*)\,P''(x^*)\,\delta_n^2 - \frac{1}{3}\Gamma(x^*)\,P'''(x)\,\delta_n^3 + \\ + \frac{1}{2}\Gamma(x^*)\,P''(x^*)\,\delta_n\,\Gamma(x^*)\,P''(x^*)\,\delta_n^2 - \qquad (8)$$

Заменяя в выражении (8) точку x^* на x_n, мы получим приближенную погрешность $n+1$-го приближения

$$\delta_{n+1} \approx -\frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\,\Delta x_n^2 - \frac{1}{3}\Gamma_n P'''(x_n)\,\Delta x_n^3 + \\ + \frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\,\Delta x_n\,\Gamma_n P''(x_n)\,\Delta x_n^2 -$$

Примечание. Для оценки погрешности нет надобности вычислять δ_{n+1}; достаточно, если мы найдем нормы величины Δx_n и операторов $\Gamma_n P''(x_n)$, $\Gamma_n P'''(x_n)$.

3. Методы третьего порядка.

Ю. Я. Каазик рассматривал в работе [8] довольно общий класс итеративных методов третьего порядка:

$$x_{n+1}=x_n-(P'(x_n)+\frac{\alpha}{2}P''(x_n)\Gamma_nP(x_n))^{-1}[P(x_n)+$$
$$+\frac{\alpha+1}{2}P''(x_n)(\Gamma_nP(x_n))^2], \qquad (9)$$

где α вещественный или комплексный параметр.

Из выражения (9) при выборе $\alpha=$ о получается метод Эйлера-Чебышева [3]; при выборе $\alpha=-1$ получается метод касательных гипербол [2]; при выборе $\alpha=-2$ получается метод, рассмотренный в работе [6].

Если и здесь проверить условия (5) и найти соответствующие дифференциалы по формулам (6), (7), то мы получим

$$d(f(x^*);\ \delta_n)=0,$$
$$d^2(f(x^*);\ \delta_n)=0,$$
$$d^3(f(x^*);\ \delta_n)=\Gamma(x^*)P'''(x^*)\delta_n^3-$$
$$-(3+\frac{3}{2}\alpha)\Gamma(x^*)P''(x^*)\delta_n\Gamma(x^*)P''(x^*)\delta_n^2,$$

$$d^4(f(x^*);\ \delta_n)=3\Gamma(x^*)P^{IV}(x^*)\delta_n^4+$$
$$+(6\alpha+12)\Gamma(x^*)P'''(x^*)\delta_n^2\Gamma(x^*)P''(x^*)\delta_n^2+$$
$$+(2\alpha+4)\Gamma(x^*)P''(x^*)d^3(\Gamma(x^*)P(x^*);\ \delta_n)\delta_n+$$
$$+(3\alpha+3)\Gamma(x^*)P''(x^*)\delta_n\Gamma(x^*)P''(x^*)\delta_n\Gamma(x^*)P''(x^*)\delta_n^2$$

Заменяя x^* на x_n, мы получаем приближение погрешности

$$\delta_{n+1}\approx-\frac{1}{6}(\Gamma_nP'''(x_n)\Delta x_n^3+(3+\frac{3}{2}\alpha)\ \Gamma_nP''(x_n)\Gamma_nP''(x_n)\ \Delta x_n^2)-$$
$$-\frac{1}{24}[3\Gamma_nP^{IV}(x_n)\Delta x_n^4+(6\alpha+12)\Gamma_nP'''(x_n)\Delta x_n^2\Gamma_nP''(x_n)\Delta x_n^2+$$
$$+(2\alpha+4)\Gamma_nP''(x_n)d^3(\Gamma_nP(x_n))\Delta x_n+$$
$$+(3\alpha+3)(\Gamma_nP''(x_n)\Delta x_n)^3\Delta x_n]-\ .. \qquad (10)$$

Выражение (10) приобретает наиболее простой вид при выборе $\alpha=-2$. Так как при этом выборе из выражения для δ_{n+1} отпадают именно члены с наибольшими нормами, то мы имеем основание считать полученный метод в некотором смысле наилучшим из методов третьего порядка.

При выборе $\alpha=-2$ для итеративного метода

$$x_{n+1}=x_n-(P'(x_n)+P''(x_n)\Delta x^*{}_n)^{-1}(P(x_n)-\frac{1}{2}P''(x_n)\Delta x^{*2}_n), \qquad (11)$$

где $\Delta x^*_n = -\Gamma_n P(x_n)$, имеем следующее выражение для погрешности:

$$\delta_{n+1} \approx -\frac{1}{6}\Gamma_n P'''(x_n)\Delta x_n^3 - \frac{1}{8}\Gamma_n P^{IV}(x_n)\Delta x_n^4 + \\ + \frac{1}{8}(\Gamma_n P''(x_n)\Delta x_n)^3 \Delta x_n - . \qquad (12)$$

Пример.

Для уравнения

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

в случае начального приближения $x_0 = 2$ метод (11) дает в качестве первого приближения значение

$$x_1 = 2{,}09464.$$

Действительная погрешность полученного приближения равна 0,00009; оценка (12) дает 0,00010.

Поступило
13 I 1958

Литература

1. Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика. Успехи матем. наук, 1948, **3**, 6, 89—185.
2. Мертвецова М. А., Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений. Докл. АН СССР, 1953, 88, 4, 611—614.
3. Нечепуренко М. И., О методе Чебышева для функциональных уравнений. Успехи матем. наук, 1954, **9**, 2, 168—170.
4. Каазик Ю. Я., О приближенном решении нелинейных операторных уравнений итеративными методами. Успехи матем. наук, 1957, **12**, 1, 195—199.
5. Ульм С. И., О сходимости некоторых итерационных процессов в пространстве Банаха. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1956, **42**, 136—142.
6. Выханду Л. К., Об итерационных методах решения уравнений. Автореферат диссертации, 1955, Тарту.
7. Хаусхолдер А. С., Основы численного анализа. 1956, Москва.
8. Каазик Ю. Я., Об одном классе итерационных процессов для приближенного решения операторных уравнений. Докл. АН СССР. 1957, **112**, 4, 579—582.

ÜHEST VEA HINDAMISE VÕIMALUSEST ITERATSIOONIMEETODITE PUHUL

Füüs.-mat. tead. kand. L. Võhandu
Geomeetriakateeder

Resümee

Iteratsioonimeetodite rakendamisel operaatorvõrrandite lahendamiseks on üheks tähtsaks küsimuseks saadud lähendite vea hindamine. Käesolevas artiklis vaadeldakse ühte võimalust veahinnangute leidmiseks, mis ei anna küll rangeid veatõkkeid, kuid annab õige ettekujutuse saadud täpsusest.

ÜBER EINE MÖGLICHKEIT DER FEHLERABSCHÄTZUNG BEI DER ITERATSIONSMETHODEN

L. Võhandu

Zusammenfassung

In diesem Artikel wird die Frage der Fehlerabschätzung von Näherungen bei der Lösung der Funktionalgleichungen mit Iterationsmethoden behandelt. Es wird eine Möglichkeit hergeleitet, die Genauigkeit der Näherungslösungen praktisch abzuschätzen.

О РАЗЛОЖЕНИИ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

Канд. физ.-мат. наук Л. К. Выханду
Кафедра геометрии

1. В случае многих технических проблем возникает потребность решать алгебраические уравнения высоких степеней. В связи с нахождением комплексных корней в последнее время развиты методы, дающие возможность разложения многочленов на многочлены второй и первой степени.

Из них наиболее известными являются метод предпоследнего остатка Лина [1] и метод Фридмана [2]. Менее известны другой метод Лина [1] и метод Палувера [4], которые, по-видимому, на практике несколько слабее вышеназванных методов. Все эти методы сходятся линейно.

Методы с квадратичной сходимостью предложили в 1914 г. Бэрстоу [3] и в 1954 г. Белостоцкий [5].

В настоящей работе дается два варианта применения общих методов приближенного решения операторных уравнений к вопросу о разложении многочленов на квадратичные множители.

Для отделения квадратичных множителей дается кроме того новый линейный процесс, который особенно эффективен, если его применить комбинированно вместе с методами Фридмана или Палувера.

2. Два метода для отделения квадратичных множителей. При делении многочлена с действительными коэффициентами

$$f_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \quad + a_{n-1}x + a_n, \quad a_n \neq 0$$

на многочлен второй степени

$$f_2(x) = x^2 - sx - t$$

мы получаем в результате

$$f_n(x) = f_2(x) \quad g_{n-2}(x) + ux + v,$$

где u и v определители порядка n, составленные из коэффициентов многочленов $f_n(x)$ и $f_2(x)$.

Как показали Эйткин и Белостоцкий [5]:

$$u = \begin{vmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & \cdots & (-1)^{n-3}\, a_{n-3} & (-1)^{n-2}\, a_{n-2} & (-1)^{n-1}\, a_{n-1} \\ 1 & s & -t & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s & & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & & & \cdot\cdot & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & s & -t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & s \end{vmatrix} = D_{n-1}$$

$$v = tD_{n-2} + a_n. \qquad (1)$$

Следовательно, проблема нахождения квадратичного множителя сводится к проблеме решения нелинейной системы уравнений

$$\begin{aligned} u(s, t) &= 0, \\ v(s, t) &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Рассматривая систему (2) в операторном виде

$$P(z) = 0, \qquad (3)$$

где $z = (s, t)$ и $P(z)$ — непрерывный оператор из R_2 в R_2, мы можем найти производные оператора $P(z)$ в точке начального приближения $z_0 = (s_0, t_0)$ и применить любой из общих итеративных методов типа Ньютона [7].

Если использовать обозначения

$$\begin{aligned} u_{ik} &= \frac{1}{(i+k)!}\,\frac{\partial^{i+k} u(s_0,\ t_0)}{\partial^i s \partial^k t}, \\ v_{ik} &= \frac{1}{(i+k)!}\,\frac{\partial^{i+k} v(s_0,\ t_0)}{\partial^i s \partial^k t}, \end{aligned} \qquad (4)$$

то мы можем производные оператора $P(z)$ представить в следующем символическом виде:

$$\frac{1}{k!} P^{(k)}(z_0) = \begin{pmatrix} u_{k0}\, u_{k-1,\,1} & u_{0k} \\ v_{k0}\, v_{k-1,\,1} & v_{0k} \end{pmatrix} (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ .). \qquad (5)$$

Этот результат получается непосредственно из разложения оператора $P(z)$ в ряд

$$P(z) = P(z_0) + P'(z_0)\Delta z + \frac{1}{2!}P''(z_0)\Delta z^2 + \quad =$$

$$= \begin{pmatrix} u_{00} + u_{10}\Delta s + u_{01}\Delta t + u_{20}\Delta s^2 + 2u_{11}\Delta s\Delta t + u_{02}\Delta t^2 + \quad . \\ v_{00} + v_{10}\Delta s + v_{01}\Delta t + v_{20}\Delta s^2 + 2v_{11}\Delta s\Delta t + v_{02}\Delta t^2 + \quad . \end{pmatrix},$$

где $\Delta z = z - z_0 = (\Delta s, \Delta t)$.

Правила операции с введенными символами следующие [7]: произведение векторов определяется так:

$$(b_1, b_2, \quad b_i)(c_1\ c_2, \quad c_j) = (b_1c_1, b_1c_2 + c_1b_2, b_1c_3 + b_2c_2 + \\ + c_1b_3, \quad , b_ic_j) \quad (i, j = 2, 3, \quad .),$$

а произведение символов (5) на вектор определяется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} d_{11}d_{12} & & d_{1n} \\ d_{21}d_{22} & & d_{2n} \end{pmatrix} (c_1, \ldots, c_i) = \begin{pmatrix} r_{11}, & r_{12}, & & r_{1\ n-1+1} \\ r_{21}, & r_{22}, & & r_{2\ n-i+1} \end{pmatrix},$$

где

$$r_{lm} = \sum_{j=1}^{i} d_{l\ m+j-1}c_j \quad (l = 1, 2;\ m = 1, 2, \qquad n - i + 1).$$

В последующем мы найдем, как выражаются величины u_{ik}, v_{ik} при помощи коэффициентов многочлена $f_n(x)$ и величин s_0, t_0, а также дадим схему для удобного вычисления этих величин.

Принимая во внимание соотношения

$$\begin{aligned} u &= D_{n-1} = sD_{n-2} + tD_{n-3} + a_{n-1}, \\ v &= tD_{n-2} + a_n, \quad (n = 1, 2, \quad .), \end{aligned} \tag{6}$$

где $D_{-2} = 0$, $D_{-1} = 0$, мы можем легко найти частные производные от u и v по s и t.

Найдем частные производное D_{n-1} по s:

$$(D_{n-1})_s' = D_{n-2} + t(D_{n-3})_s' + s(D_{n-2})_s', \tag{7}$$

$$\frac{(D_{n-1})_s''}{2!} = (D_{n-2})_s' + t\frac{(D_{n-3})_s''}{2!} + s\frac{(D_{n-2})_s''}{2!}$$

Покажем методом индукции, что вообще, если

$$\frac{(D_{n-1})_s^{(k-1)}}{(k-1)!} = \frac{(D_{n-2})_s^{(k-2)}}{(k-2)!} + t\frac{(D_{n-3})_s^{(k-1}}{(k-1)!} + s\frac{(D_{n-2})_s^{(k-1)}}{(k-1)!}, \tag{8}$$

то

$$\frac{(D_{n-1})_s^{(k)}}{k!} = \frac{(D_{n-2})_s^{(k-1)}}{(k-1)!} + t\frac{(D_{n-3})_s^{(k)}}{k!} + s\frac{(D_{n-2})_s^{(k)}}{k!} \tag{9}$$

Действительно, дифференцируя соотношение (8) по s, имеем

$$\frac{(D_{n-1})_s^k}{(k-1)!} = \frac{(D_{n-2})_s^{k-1}}{(k-2)!} + t\frac{(D_{n-3})_s^{(k)}}{(k-1)!} + \frac{(D_{n-2})_s^{(k-1)}}{(k-1)!} + s\frac{(D_{n-2})_s^{(k)}}{(k-1)!},$$

а так как

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{(k-2)!}+\frac{1}{(k-1)!}\right)=\frac{1}{(k-1)!},$$

то мы и получим соотношение (9).

Дифференцируя D_{n-1} по t, мы получим, ввиду (7),

$$(D_{n-1})_t'=D_{n-3}+s(D_{n-2})_t'+t(D_{n-3})_t'=(D_{n-2})_s' \qquad (10)$$

Повторно применяя соотношение (10), мы видим, что

$$\frac{1}{k!}(D_{n-1})_t^{(k)}=\frac{1}{k!}(D_{n-k-1})_s^{(k)} \quad (k=1,2,\ldots) \qquad (11)$$

Теперь нетрудно получить интересующие нас значения для u_{ik}, v_{ik}.

Именно

$$u_{ik}=\frac{1}{(i+k)!}(D_{n-k-1})_{s_0}^{(i+k)},$$

$$v_{ik}=\frac{1}{(i+k-1)!}(D_{n-k-1})_{s_0}^{(i+k-1)}+\frac{t_0}{(i+k)!}(D_{n-k-2})_s^{(i+k)}$$

Значения определителей D, нужные для вычисления u_{ik}, v_{ik}, легко находятся на основе рекуррентных соотношений (6) и (8) при помощи т. н. обобщенной схемы Горнера.

Если для краткости ввести обозначения

$$a_k^i=(D_{k+i})_{s_0}^{(i)},$$

то схема вычислений a_k^i имеет следующий вид:

	a_0	a_1	a_2		a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
s_0		$s_0a_0^0$	$s_0a_1^0$	.	$s_0a_{n-4}^0$	$s_0a_{n-3}^0$	$s_0a_{n-2}^0$	
t_0			$t_0a_0^0$		$t_0a_{n-5}^0$	$t_0a_{n-4}^0$	$t_0a_{n-3}^0$	$t_0a_{n-2}^0$
	$a_0^0=a_0$	a_1^0	a_2^0		a_{n-3}^0	a_{n-2}^0	a_{n-1}^0	a_n^0
s_0		$s_0a_0^1$	$s_0a_1^1$		$s_0a_{n-4}^1$	$s_0a_{n-3}^1$		
t_0			$t_0a_0^1$		$t_0a_{n-5}^1$	$t_0a_{n-4}^1$	$t_0a_{n-3}^1$	
	$a_0^1=a_0$	a_1^1	a_2^1		a_{n-3}^1	a_{n-2}^1		

Принимая во внимание обозначения (5) и соотношения (8), (9), мы можем производные оператора $P(z)$ в точке z_0 представить следующим образом:

$$P(z_0)=\begin{pmatrix}a_{n-1}^0\\ \bar{a}_n^0\end{pmatrix},$$

$$P'(z_0)=\begin{pmatrix}a_{n-2}^1 & a_{n-3}^1\\ t_0a_{n-3}^1 & t_0a_{n-4}^1+a_{n-2}^0\end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{k!}P^{(k)}(z_0)=\begin{pmatrix}a_{n-k-1}^k & a_{n-k-2}^k & a_{n-2k-1}^k\\ t_0a_{n-k-2}^k & t_0a_{n-k-3}^k+a_{n-k-1}^{k-1} & t_0a_{n-2k-2}^k+a_{n-2k}^{k-1}\end{pmatrix},$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Другой метод, имеющий более симметрический вид, получается, если представить $f_n(x)$ в виде

$$f_n(x)=f_2(x)g_{n-2}(x)+ux+v-su,$$

где

$$u=D_{n-1},$$

$$v=D_n.$$

Производные оператора $P(z)$ в точке z_0 выражаются следующим образом:

$$P(z_0)=\begin{pmatrix}a_{n-1}^0\\ a_n^0\end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{k!}P^{(k)}(z_0)=\begin{pmatrix}a_{n-k-1}^k & a_{n-k-1}^k & a_{n-2k-1}^k\\ a_{n-k}^k & a_{n-k-1}^k & a_{n-2k}^k\end{pmatrix}(k=1,\ 2,\ \ldots),$$

где величины a_j^i вычисляются при помощи аналогичной схемы.

Метод, рассмотренный Бэрстоу, получается отсюда при $k=1$, если в первой производной оператора $P(z)$ взять $a_{n-1}^0=0$, т. е. если вместо точной производной

$$P'(z_0)=\begin{pmatrix}a_{n-2}^1 & a_{n-3}^1\\ a_{n-1}^1 & a_{n-2}^1\end{pmatrix}$$

рассматривать приближенный оператор

$$\overline{P'}(z_0)=\begin{pmatrix}a_{n-2}^1 & a_{n-3}^1\\ a_{n-1}^1-a_{n-1}^0 & a_{n-2}^1\end{pmatrix}.$$

Условия корректности предположения Бэрстоу можем найти в работе Борисовича [6], где даны условия сходимости метода Ньютона в случае приближенной первой производной.

3. Об одном новом линейном методе для отделения квадратичных множителей.

В случае многочлена с действительными коэффициентами

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \quad + c_n x^n \tag{12}$$

одним из возможных путей подхода к хорошо известному методу Фюрстенау-Шрэдера для отделения линейных множителей является следующий.

Если умножать многочлен (12) на многочлен

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & & x^k \\ c_2 & c_1 & c_0 & 0 & & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & & 0 \\ & & & & & \\ c_{k+1} & c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & & c_1 \end{vmatrix},$$

то в произведении исчезают члены $b_s x^s (s = 2, 3, \quad , k + 1)$ и мы получим

$$x = -\frac{c_0 P_{k-1}}{P_k} - \frac{\alpha \cdot x^{k+2}}{P_k} - \quad .,$$

где

$$P_k = \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 & & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & & 0 \\ & & & & \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & & c_1 \end{vmatrix}, \qquad P_0 = 1.$$

Определители P_k легко вычисляются при помощи рекуррентного соотношения

$$P_k = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i c_0^i c_{i+1} P_{k-1-i}.$$

Для отделения квадратичных множителей возможен аналогичный путь.

Именно, если умножить многочлен (12) на многочлен

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & & x^k \\ c_3 & c_2 & c_1 & & 0 \\ c_4 & c_3 & c_2 & & 0 \\ & & & & \\ c_{k+2} & c_{k+1} & c_k & & c_2 \end{vmatrix}, \tag{13}$$

то в результате исчезают члены $b_s x^s$, где $s = 3, 4, \ldots\ k+2$. Оставляя вне рассмотрения члены со степенью $s \geqslant k+3$, получим для квадратичного множителя последовательные приближения:

$$z_0 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2;$$

$$z_1 = c_0 c_2 + \begin{vmatrix} c_1 & c_0 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} c_2 & c_1 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix} x^2,$$

$$z_2 = c_0 \begin{vmatrix} c_2 & c_1 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ c_4 & c_3 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} c_2 & c_1 & c_0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ c_4 & c_3 & c_2 \end{vmatrix} x^2,$$

$$z_k = c_0 \begin{vmatrix} c_2 & c_1 & c_0 & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & 0 \\ & & & & \\ c_{k+1} & c_k & c_{k-1} & c_k & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \,.. & 0 \\ c_4 & c_3 & c_2 & 0 \\ & & & \\ c_{k+2} & c_{k+1} & c_k & c_2 \end{vmatrix} x +$$

$$+ \begin{vmatrix} c_2 & c_1 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & 0 \\ c_4 & c_3 & c_2 & 0 \\ & & & \\ c_{k+2} & c_{k+1} & c_k & c_2 \end{vmatrix} x^2$$

Вычисление этих определителей в общем случае не так просто, как в случае линейных множителей, но приближение z_1 находится без труда. Это обстоятельство мы можем эффективно использовать, комбинируя приведенный метод с другими линейными методами для отделения квадратичных множителей.

Приводим идею комбинированного применения метода Фридмана и предлагаемого здесь метода.

Метод Фридмана состоит в следующем. Многочлен (12) делят на начальное приближение $x^2 - s_0 x - t_0$ в порядке убывания степеней. После этого делят многочлен (10) на полученное частное в порядке возрастания степеней до тех пор, пока мы в результате получим квадратичный многочлен, который и будет новым приближением.

В комбинированном методе мы вначале делим многочлен (10) на приближенный множитель $x^2 - s_0 x - t_0$. Коэффициенты полученного частного мы улучшаем преобразованием коэффициента у x^{-1} в нуль. Деля потом многочлен на уточненное частное в порядке возрастающих степеней, преобразуем опять-таки, аналогично предыдущему, член с x^3 в нуль.

Пример.

Рассмотрим многочлен $x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 10x + 6 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x + 3)$.

Найдем $z_1 : z_1 = 54 + 66x + 41x^2 = (x^2 + 1{,}61x + 1{,}32)\ 41$.

Для вычислений удобна следующая схема:

	1	4	9	10	4	9	10	6	
−1,61		−1,61	−3,85	−6,17	−2,125	−3,97	−3,9		−0,650
−1,32			−1,32	−3,16	−1,795	−1,76			−0,294
	1	2,39	3,83	0,67	0,080	3,27	6,1	6	
	0,262	0,625	1	0,175	0,0245	1	1,87		
		−0,046	−0,109			−0,046	−0,04		
	0,262	0,579	0,891			0,954	1,83	1,84	
						1	1,92	1,93.	

В левой части схемы мы найдем, исходя из приближенного делителя $x^2+1{,}61x+1{,}32$, по методу Фридмана приближенное частное $x^2+2{,}39x+3{,}83+0{,}67\ x^{-1}$. Умножая полученное частное на соответствующий многочлен (13), мы получим в результате уточненное частное $0{,}262x^2+0{,}579x+0{,}891=1+0{,}650x+$ $+0{,}294x^2$

В правой части схемы мы делим данный многочлен на приближенное частное в порядке возрастания степеней и получаем новый приближенный делитель $6+6{,}1x+3{,}27x^2+0{,}080x^3=$ $=1{,}84+1{,}87x+x^2+0{,}00245x^3$.

Опять-таки уточняя этот результат при помощи соответствующего многочлена (13), мы найдем

$$x^2+1{,}92x+1{,}93.$$

Аналогично мы можем данный метод применить в комбинации с методом Палувера [4].

Комбинированный метод особенно выгоден в случае уравнений высоких степеней, так как уточнение полученных приближений при помощи многочлена (13) требует всегда одно и то же количество арифметических действий.

Литература

1. Lin, S. N., A method of successive approximations of evaluating the real and complex roots of cubic and higher-order equations. J. Math. and Phys., 1941, **20**, 231—242.
2. Friedman, B., Note on approximating complex zeros of a polynomial. Comm. Pure and Appl. Math., 1949, **2**, 195—208.
3. Olver, F. W., The evaluation of zeros of high-degree polynomials. Phil. Transact. Roy. Soc. London, Series A-885, 1952, **224**, 385—415.
4. Палувер Н. В., Об одном итерационном методе разложения многочленов на множители. Труды Таллинского Политехнического Института. Серия А. 1955, **62**.

5. Белостоцкий А. Я., Об одном методе решения алгебраических уравнений. Успехи матем. наук, 1953, 8, № 6, 87—96.
6. Борисович Ю. Г., О влиянии погрешности на сходимость процесса Ньютона для нелинейных функциональных операций. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1952, 113, № 13, 189—192.
7. Каазик Ю. Я. и Тамме Э. Э., Об одном методе приближенного решения нелинейных операторных уравнений. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, 62, 99—116.

POLÜNOOMIDE RUUTTEGURITEKS LAHUTAMISEST

Füüs.-mat. tead. kand. L. Võhandu
Geomeetriakateeder

Resümee

Artikli esimeses osas vaadeldakse reaalkordajatega algebraliste võrrandite ruuttegurite eraldamise probleemi lahendamist funktsionaalanalüüsi lähendusmeetodite abil. Artikli teises osas antakse ruuttegurite eraldamiseks uus meetod, mis osutub eriti efektiivseks rea teiste analoogiliste lineaarsete meetoditega koos rakendatult.

ON THE FACTORISING OF POLYNOMIALS

L. Võhandu

Summary

The first part of this paper describes the use of the iteration methods of general analysis for splitting algebraic equations into factors of the first and second degree. In the second part of the paper there is given a new linear method for finding quadratic factors of algebraic equations. This method is especially effective when combined with other analogous methods with linear convergence.

ИЗГИБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ В СЛУЧАЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Доц., канд. физ.-мат. наук Ю. Р. Лепик
Кафедра теоретической механики

1. Постановка вопроса

Рассмотрим стержень, сечение которого обладает двумя осями симметрии. Пусть координатная ось x совпадает с касательной к оси стержня: для осей y и z выбираем оси симметрии поперечного сечения. Концы стержня $x=0$ и $x=l$ будем считать свободно опертыми. Ограничиваемся лишь случаем, где прогибы стержня настолько малы, что можно считать $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \ll 1$.

Пусть на концах стержня $x=0$ и $x=l$ приложены растягивающие силы T Оставляя предварительное натяжение неизменным, приложим к стержню поперечную нагрузку интенсивности q. Допустим, что предварительное растяжение T настолько большое (или нагрузка настолько мала), что влиянием касательного напряжения параллельно оси z можно пренебрегать, и в стержне не появляются зоны пластических деформаций от сжатия.

Дифференциальное уравнение равновесия стержня имеет в рассматриваемом случае вид

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q - T\frac{d^2w}{dx^2} \tag{1.1}$$

Интегрируя это уравнение два раза по x и определяя постоянные интегрирования из граничных условий $M=0$ при $x=0$ и $x=l$, находим

$$M = \frac{x}{l}Q(l) - Q(x) - Tw. \tag{1.2}$$

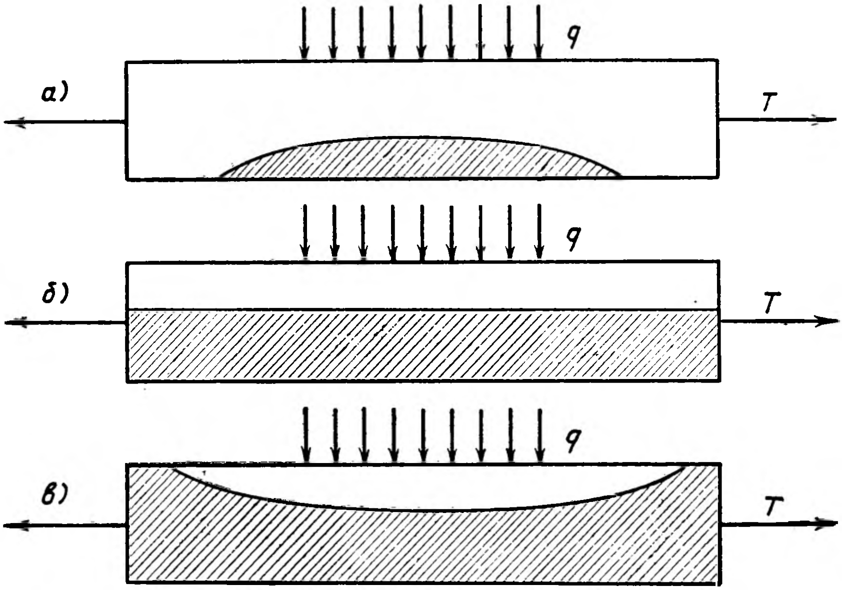
Здесь символом $Q(x)$ обозначено выражение

$$Q(x) = \int_0^x dx \int_0^x q(x)\,dx. \tag{1.3}$$

Дальнейший ход решения задачи зависит от того, начинается ли изгибание стержня при упругих деформациях или является начальное растяжение T настолько большим, что пластические деформации в стержне возникают уже до приложения нагрузки q. Оба случая будут рассмотрены в дальнейшем отдельно.

2. Случай, когда предварительное напряжение меньше от предела текучести

Здесь в начальном моменте деформации происходят упруго; но после приложения поперечной нагрузки вблизи края $z = +{}^h/_2$ могут возникать и пластические деформации (фиг. 1а). Обозна-



Фиг. 1.

чим символами σ и e растягивающее напряжение и относительное удлинение в рассматриваемой точке стержня; символом ε — относительное удлинение в слое $z = 0$. В случае линейного упрочнения материала имеем (λ — параметр упрочнения):

а) в зоне упругих деформаций

$$\sigma = E\left(\varepsilon - z\frac{d^2w}{dx^2}\right), \tag{2. 1}$$

б) в зоне пластических деформаций

$$\sigma = \lambda\sigma_s + E(1-\lambda)\left(\varepsilon - z\frac{d^2w}{dx^2}\right) \tag{2. 2}$$

Вычисляя величины растягивающей силы T и изгибающего момента M по формулам ($b(z)$ — ширина сечения, h — высота балки)

$$T = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma b(z)\,dz, \quad M = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma b(z)\,z\,dz, \tag{2.3}$$

находим, что

$$\begin{aligned} T &= E[F - \lambda B_1(z_y)]\varepsilon + E\lambda B_2(z_y)\frac{d^2w}{dx^2} + \lambda\sigma_s B_1(z_y), \\ M &= -E\lambda B_2(z_y)\varepsilon - E[I - \lambda B_3(z_y)]\frac{d^2w}{dx^2} + \lambda\sigma_s B_2(z_y). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь F — площадь сечения, I — момент инерции; кроме того введено еще обозначение

$$B_i(z_y) = \int_{z_y}^{h/2} b(z)\,z^{i-1}dz \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.5}$$

Переходим к безразмерным величинам

$$\begin{gathered} \xi = 1 - \frac{2}{l}x, \quad w^* = \frac{2}{h}w, \quad z^* = \frac{2}{h}z, \quad \beta(z^*) = \frac{b(z)}{b(0)}, \quad \mu = \frac{e_s l^2}{h^2}, \\ F^* = \frac{2}{hb(0)}F, \quad I^* = \left(\frac{2}{h}\right)^3\frac{I}{b(0)}, \quad B_i^* = \left(\frac{2}{h}\right)^i\frac{B_i}{b(0)}, \\ T^* = \frac{2Tl^2}{Eb(0)h^3}, \quad Q^*(\xi) = \frac{4l^2}{Eh^4b(0)}\left[\frac{x}{l}Q(l) - Q(x)\right] \end{gathered} \tag{2.6}$$

Формулы (2.4) приобретают в безразмерных величинах (2.6) вид (штрихами обозначены производные по ξ):

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{h^2}[F^* - \lambda B_1^*(z_y^*)]\varepsilon + \lambda\mu B_1^*(z_y^*) + \lambda B_2^*(z_y^*)\,w^{*\prime\prime} &= T^*, \\ \frac{l^2}{h^2}\lambda B_2^*(z_y^*)\varepsilon - \lambda\mu B_2^*(z_y^*) + [I^* - \lambda B_3^*(z_y^*)]\,w^{*\prime\prime} &= T^*w^* - Q^*. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Границу между упругой и пластической зонами $z = z_y$ определяем из условия

$$\varepsilon - z_y\frac{d^2w}{dx^2} = e_s. \tag{2.8}$$

Переходя в (2. 8) к безразмерным величинам и используя соотношения (2. 7). приходим к следующей системе уравнений:

$$w^{*''}=\frac{T^*-\mu F^*}{k_1(z_y^*)}, \quad \frac{k_2(z_y^*)}{k_1(z_y^*)}=\frac{T^*w^*-Q^*}{T^*-\mu F^*} \tag{2. 9}$$

Символами $k_1(z_y^*)$ и $k_2(z_y^*)$ в этих формулах обозначены выражения

$$\begin{aligned} k_1(z_y^*)&=[F^*-\lambda B_1^*(z_y^*)]z_y^*+\lambda B_2^*(z_y^*), \\ k_2(z_y^*)&=\lambda B_2^*(z_y^*)z_y^*+I^*-\lambda B_3^*(z_y^*). \end{aligned} \tag{2. 10}$$

Путем интегрирования системы (2. 10) можем определить интересующие нас величины $z_y^*(\xi)$ и $w^*(\xi)$.

Рассмотрим еще, при каких условиях система (2. 10) применима. Мы допускали, что изгибание стержня начинается при чисто-упругих деформациях; это требование можно написать в виде $\varepsilon_0=\frac{T}{EF}<e_s$ или в безразмерных величинах $T^*<\mu F^*$ Кроме того, должно быть выполнено условие для того, чтобы в стержне не возникли зоны пластических деформаций от сжатия (условие односторонней пластичности). Если допустить, что материал имеет одинаковый предел текучести на растяжение-сжатие, и учитывать то обстоятельство, что первые пластические деформации от сжатия возникают у края $z^*=-1$, то приходим к неравенству $\varepsilon+\frac{h}{2}\frac{d^2w}{dx^2}>-e_s$ или в безразмерных величинах $\frac{l^2}{h^2}\varepsilon+$ $+w^{*''}>-\mu$. Вычисляя величины ε и $w^{*''}$ из уравнений (2. 8)—(2. 9), можем условие односторонней пластичности переписать в форме

$$T^*>\mu\left[F^*-\frac{2k_1(z_y^*)}{1+z_y^*}\right] \tag{2. 11}$$

Как доказано в работе [1], величина $k_1(z_y^*)$ является монотонно возрастающей функцией, причем в промежутке $(-1, +1)$ должно найтись некоторое значение $z_y^*=\bar{z}_y^*$, при котором $k_1(\bar{z}_y^*)=0$. На основании этих обстоятельств можно делать следующие общие выводы, действительность которых является почти очевидной:

1) Во всех сечениях стержня выполняется условие $z_y^*>\bar{z}_y^*$

2) Толщина пластического слоя является наибольшей в точке, где величина $|w^{*''}|$ имеет максимум.

3) Зона упруго-пластических деформаций не может подойти к концам стержня.

3. Предварительное напряжение превосходит предел текучести материала

В этом случае $T^* > \mu F^*$; изгибание стержня начинается при чисто-пластических деформациях, причем после приложения нагрузки q у края $z^* = -1$ возникает зона разгрузки.

Будем понимать под символами σ_0, $e_0 = \varepsilon_0$ значения величин σ и e в момент приложения нагрузки q. Тогда в зоне активных пластических деформаций имеем соотношение

$$\sigma = \sigma_0 + E(1-\lambda)\left(\varepsilon - \varepsilon_0 - z\frac{d^2w}{dx^2}\right) \qquad (3.1)$$

При пассивных пластических деформациях (т. е. в зоне разгрузки) следует иметь в виду, что напряжение σ в начале разгрузки может в некоторой мере превосходить значение σ_0. Если обозначить значения величин σ и e перед началом разгрузки символами $\sigma_0 + \Delta\sigma$ и $e_0 + \Delta e$, то имеем (ср. также формулу (1.5) в [2]):

$$\sigma = \sigma_0 - \frac{\lambda}{1-\lambda}\Delta\sigma - E\left(\varepsilon - \varepsilon_0 - z\frac{d^2w}{dx^2}\right) \qquad (3.2)$$

Вычисляем теперь интегралы (2.3). Обозначая (z_p — граница зоны разгрузки)

$$\Delta T = \frac{\lambda}{1-\lambda}\int_{-h/2}^{z_p}\Delta\sigma b(z)\,dz, \quad \Delta M = \frac{\lambda}{1-\lambda}\int_{-h/2}^{z_p}\Delta\sigma b(z)\,z\,dz, \qquad (3.3)$$

приходим к следующим соотношениям:

$$T = T_0 + E\,[F - \lambda B_1(z_p)]\,(\varepsilon - \varepsilon_0) + E\lambda B_2(z_p)\frac{d^2w}{dx^2} - \Delta T,$$

$$M = -E\lambda B_2(z_p)\,(\varepsilon - \varepsilon_0) - E\,[I - \lambda B_3(z_p)]\frac{dw^2}{dx^2} - \Delta M. \qquad (3.4)$$

Величину z_p определяем из условия

$$\delta\varepsilon - z_p\frac{d^2\delta w}{dx^2} = 0. \qquad (3.5)$$

Путем варьирования соотношений (3.4) находим, что

$$\delta T = E\,[F - \lambda B_1(z_p)]\,\delta\varepsilon + E\lambda B_2(z_p)\frac{d^2\delta w}{dx^2},$$

$$\delta M = -E\lambda B_2(z_p)\,\delta\varepsilon - E\,[I - \lambda B_3(z_p)]\frac{d^2\delta w}{dx^2} \qquad (3.6)$$

Так как мы допустили, что растягивающая сила T остается при изгибании стержня неизменной, то $T = T_0$ и $\delta T = 0$. Из (3. 5) и из первого уравнения (3. 6), если перейти к безразмерным величинам, вытекает, что

$$k_1(z_p^*) = [F^* - \lambda B_1^*(z_p^*)] z_p^* + \lambda B_2^*(z_p^*) \equiv 0, \tag{3. 7}$$

и, следовательно, $z^*_p = \bar{z}^*_p =$ const (фиг. 1б). Интегрируя соотношение (3. 5) и определяя постоянные интегрирования из условия $\varepsilon = \varepsilon_0$ при $w^{*''} = 0$, находим

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = z_p \frac{d^2 w}{dx^2}$$

Подставляя полученный результат в первое уравнение из (3. 4), увидим, что $\Delta T \equiv 0$. Но так как величина $\Delta\sigma$ не может обладать отрицательными значениями, то должно быть $\Delta\sigma \equiv 0$; следовательно, и $\Delta M \equiv 0$. Учитывая еще соотношение (1. 2), находим из второго уравнения (3. 4), что

$$-E[\lambda B_2(z_p) z_p + I - \lambda B_3(z_p)] \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{x}{l} Q(l) - Q(x) - Tw$$

или в безразмерных величинах

$$w^{*''} - \frac{T^*}{k_2(z_p^*)} w^* = -\frac{1}{k_2(z_p^*)} Q^*(\xi). \tag{3. 8}$$

Так как величины T^* и $k_2(z_p^*)$ постоянные, то решение дифференциального уравнения (3. 8) при заданной величине $Q^*(\xi)$ затруднения не причиняет. Отметим еще, что к тому же уравнению мы пришли бы, если бы решили поставленную задачу в случае $T^* = \mu F^*$

Выведем еще условие односторонней пластичности для случая $T^* > \mu F^*$ ограничиваясь при этом упрощенной диаграммой из фиг. I в работе [2] и считая $\gamma(e_0) = 2$. Так как первые пластические деформации от сжатия возникают у края $z^* = -1$, то должно быть

$$\varepsilon - \varepsilon_0 + \frac{h}{2} \frac{d^2 w}{dx^2} > -2e_s. \tag{3. 9}$$

В рассматриваемом случае $z_p^* =$ const; это дает нам возможность заменить формулу (3. 5) условием $\varepsilon - \varepsilon_0 = z_p \dfrac{d^2 w}{dx^2}$ Переходя к безразмерным величинам и вычисляя $w^{*''}$ из уравнения (3. 8), можем условие (3. 9) написать в виде

$$Q^* - T^* w^* < \frac{2\mu k_2(z_p^*)}{1 + z_p^*} \tag{3. 10}$$

Наконец, обратим внимание еще на одно обстоятельство.

Именно, мы доказывали, что если растягивающая сила не изменяется в процессе прогибания стержня, то после приложения нагрузки q — несмотря на ее величину — в стержне возникает зона разгрузки, причем толщина этой зоны во всех сечениях одинакова и не зависит от величины поперечной нагрузки.

4. О влиянии сложного нагружения

Возвратимся еще раз к случаю $T^* > \mu F^*$. Допустим теперь, что при изгибании стержня растягивающая сила T не остается постоянной, но возрастает с увеличением нагрузки q согласно некоторому закону $T - T_0 = f(q)$, который мы считаем известным (в таком случае $\delta T \neq 0$)

Формулы (3. 6), если учитывать, что

$$\delta M = \frac{x}{l}\,\delta Q(l) - \delta Q(x) - T\delta w - w\delta T,$$

и перейти к безразмерным величинам, получают теперь вид

$$\begin{gathered} \delta T^* = k_1(z_p^*)\,\delta w^{*\prime\prime}, \\ k_2(z_p^*)\,\delta w^{*\prime\prime} = T^*\delta w^* + w^*\delta T^* - \delta Q^*. \end{gathered} \tag{4. 1}$$

Введя обозначение $v = \delta w^*/\delta T^*$, можем уравнения (4. 1) переписать в форме

$$v'' = \frac{1}{k_1(z_p^*)}, \quad \frac{k_2(z_p^*)}{k_1(z_p^*)} = Tv + w^* - \frac{\delta Q^*}{\delta T^*}. \tag{4. 2}$$

Из этой системы следует, что во всех сечениях стержня выполняется неравенство $z_p^* < \bar{z}_p^*$. Так как $\delta M = v = 0$ при $\xi = \pm 1$, то нетрудно видеть, что зона разгрузки не может подойти к концам стержня и вблизи сечений $\xi = \pm 1$ должны возникать области чисто-пластических деформаций (фиг. 1b).

Дадим другой вид и формулам (3. 4). Элиминируя из этой системы величину $\varepsilon - \varepsilon_0$ и переходя к безразмерным величинам, получаем

$$\begin{gathered} w^{*\prime\prime} = (T^*w^* - Q^* - m)\Phi_1(z_p^*) + \\ (T^* - T_0^* + p)\Phi_2(z_p^*). \end{gathered} \tag{4. 3}$$

Здесь обозначено

$$p = \frac{l^2}{h^2}\lambda\int_{-1}^{z_p^*} \Delta e\beta(z^*)\,dz^*, \quad m = \frac{l^2}{h^2}\lambda\int_{-1}^{z_p^*} \Delta e\beta(z^*)\,z^*dz^*; \tag{4. 4}$$

функции $\Phi_1(z^*_p)$ и $\varphi_2(z^*_p)$ определяются по формулам

$$[\Phi_1(z^*_p)]^{-1} = I^* - \lambda B^*_3(z^*_p) - \frac{\lambda^2 [B^*_2(z^*_p)]^2}{F^* - \lambda B^*_1(z^*_p)},$$

$$\Phi_2(z^*_p) = -\frac{\lambda B^*_2(z^*_p)}{F^* - \lambda B^*_1(z^*_p)} \Phi_1(z^*_p). \qquad (4.5)$$

В области чисто-пластических деформаций уравнение (4.3) упрощается и получает вид

$$w^{*\prime\prime} - \frac{T^*}{I^*(1-\lambda)} w^* = -\frac{1}{I^*(1-\lambda)} Q^*(\xi). \qquad (4.6)$$

Так как мы считаем величину $\delta Q^*/\delta T^*$ известной, то решение поставленной задачи сходится к решению уравнений (4.2) — (4.3), (4.6) при соответствующих граничных условиях и условиях непрерывности; это можно делать методом, указанным в [2].

Если поперечная нагрузка по сравнению с растягивающей силой возрастает достаточно медленно, то возможно, что зоны разгрузки в стрежне совсем не возникает. В таком случае следует решать только уравнение (4.6). Состояния равновесия, характеризующиеся уравнениями (3.8) и (4.6), можно рассматривать, как крайние случая для всех возможных видов закона $T - T_0 = f(q)$.

Наконец, приводим еще следующий пример. Рассмотрим стержень прямоугольного сечения, допуская, что поперечная нагрузка распределена равномерно по всему стержню. В таком случае имеем (ζ — относительная толщина пластического слоя, $q^* = \dfrac{ql^4}{Eh^4b}$):

$$F^* = 2, \quad I^* = 2/3, \quad Q^*(\xi) = \frac{1}{2} q^*(1-\xi^2);$$

$$k_1 = 2(1 - 2\zeta + \lambda\zeta^2);$$

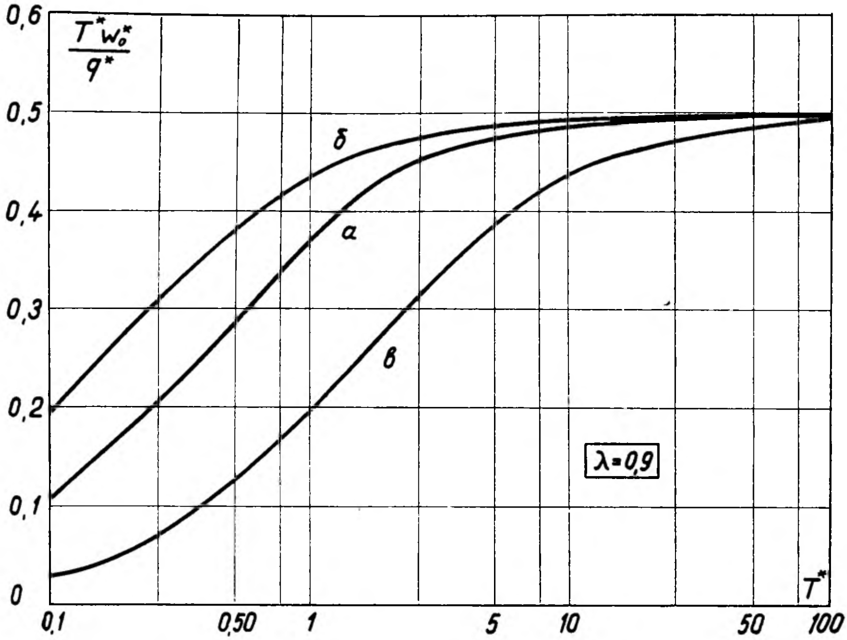
$$k_2 = 2/3\,[1 - \lambda\zeta^2(3 - 2\zeta)].$$

Решая уравнения (3.8) или (4.6) при граничных условиях $w^*(1) = w^{*\prime}(o) = o$, получаем

$$\frac{T^* w^*}{q^*} = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha\xi}{\operatorname{ch}\alpha} - 1\right) + \frac{1}{2}(1-\xi^2). \qquad (4.7)$$

Здесь обозначено $\alpha^2 = T^*/k_2$; в случае чисто-пластических деформаций величину k_2 следует определить из формулы $k_2 = \dfrac{2}{3}(1-\lambda)$.

Результаты вычислений, проведенных при $\lambda = 0{,}9$, даны на



Фиг. 2.

фиг. 2.[1] Здесь кривая «*а*» соответствует случаю, когда растягивающая сила T не изменяется при изгибании стержня, кривая «*б*» — другому предельному случаю, когда деформации во всем стержне остаются чисто-пластическими. Для сравнения были выполнены вычисления и для чисто-упругой задачи (кривая «*в*»). Из фиг. 2 явствует, что все три кривые асимптотически приближаются к прямой $\frac{T^* w_0^*}{q^*} = 0{,}5$ (эта прямая соответствует решению, найденному по мембранной теории)

Поступило
16 I 1958

Литература

1. Лепик Ю. Р., О влиянии начальной кривизны и эксцентричного нагружения на прогибы сжатого стержня за пределом упругости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 142—152.
2. Лепик Ю. Р., О равновесии сжатых упруго-пластических стержней. Прикладная математика и механика, 1957, 21, № 1, 101—108.

[1] Координатная сетка на фиг. 2 является полулогарифмической.

ELASTILIS-PLASTILISE VARDA PAINE EELNEVA VENITUSE KORRAL

Teoreetilise mehhaanika kateeder
Dots., füüs.-mat. tead. kand. Ü. Lepik

Resümee

Käesolevas artiklis vaadeldakse sirget varrast, mille otstesse on rakendatud venitavad tungid T Jättes need tungid muutumatuks, lisatakse vardale veel ristkoormus intensiivsusega q, mis põhjustab varda läbipaindumise. Sealjuures eeldatakse, et läbipainded on niivõrd väikesed, et oleks täidetud tingimus $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \ll 1$. Töös antakse valemid, milledest võib arvutada läbipainde suuruse sõltuvuses tungidest T ja q.

DIE BIEGUNG EINES ELASTISCH-PLASTISCHEN STABES IM FALLE VORANGEHENDER DEHNUNG

Ü. Lepik

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz wird ein gerader Stab, an deren Enden Zugkräfte T angespannt sind, betrachtet. Bei unveränderten Kräften T wird dem Stabe noch eine verteilte Querlast mit Intensivität q beigefügt, die Durchbiegungen des Stabes veranlasst. Es wird dabei vorausgesetzt, dass die Durchbiegungen so gering sind, dass die Bedingung $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \ll 1$ erfüllt ist. In dem Aufsatz werden Formeln gegeben, aus denen die Durchbiegungen in ihrer Abhängigkeit von den Kräften T und q berechnet werden können.

ИЗУЧЕНИЕ ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ СЖАТОГО УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ ВТОРИЧНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

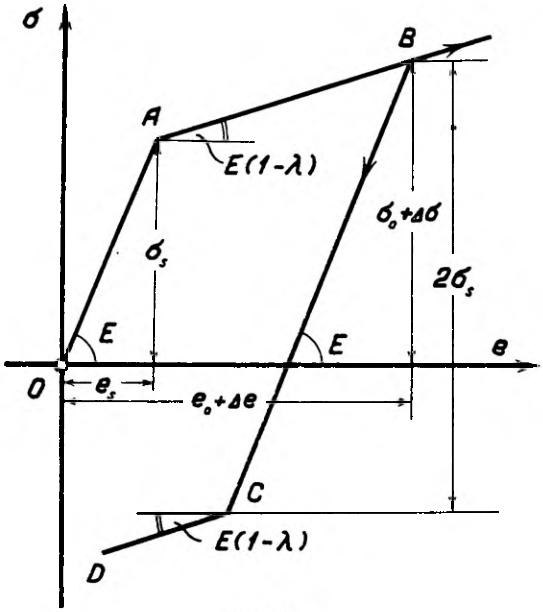
Доц., канд. физ.-мат. наук Ю. Р. Лепик
Кафедра теоретической механики

Задача о равновесии стержней, потерявших устойчивость за пределом упругости, рассматривалась в работах [1, 2] в предположении, что в стержне отсутствуют зоны вторичных пластических деформаций (т. е. зоны пластических деформаций от растяжения). Но, с другой стороны, известно [2], что вторичные пластические деформации возникают в стержне уже при сравнительно малых прогибах. В связи с этим возникает вопрос, какое влияние имеют эти деформации на работу стержня в послекритической стадии; решению этой проблемы посвящена и настоящая статья. Здесь выводятся основные уравнения задачи и дается метод для определения максимальной нагрузки, удерживаемой стержнем. Более подробно рассматривается случай, где сечением стержня является идеализированный двутавр.

1. Основные соотношения

Рассмотрим прямой сжатый продольной силой стержень, сечение которого имеет две оси симметрии. Пусть ось x будет центральной продольной осью стержня, оси y и z — оси симметрии поперечного сечения; начало координат выбираем в конечном сечении стержня. Концы стержня $x = o$ и $x = l$ будем считать свободно опертыми. Допустим еще, что при потере устойчивости изгиб стержня происходит в плоскости xz; за положительное направление оси z примем направление прогибов.

Ограничиваемся случаем линейного упрочнения материала, допуская, что поведение материала в процессах нагружения и разгружения описывается упрощенной диаграммой, приведенной на фиг. 1. Обозначим символами σ и e величины сжимающего напряжения и относительного укорочения элемента стержня; пусть символы σ_0 и e_0 обозначают значения этих величин в критическом состоянии. Дадим теперь формулы, связывающие эти величины; в



Фиг. 1.

случае диаграммы из фиг. 1 здесь придется различать следующие три случая:

1) Если пластическая деформация в данной точке является активной (отрезок AB на фиг. 1), то

$$\sigma - \sigma_0 = E(1-\lambda)(e - e_0) \text{ при } \lambda = 1 - \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{de} \qquad (1.1)$$

2) Если в рассматриваемой точке происходит упругая разгрузка (отрезок BC), то из фиг. 1 находим, что

$$\sigma - \sigma_0 = -\frac{\lambda}{1-\lambda}\Delta\sigma + E(e - e_0) \qquad (1.2)$$

(Здесь символом $\sigma_0 + \Delta\sigma$ обозначено то значение сжимающего напряжения, при котором в данной точке началась разгрузка).

3) Если в данной точке стержня возникает пластическая деформация от растяжения (отрезок CD на фиг. 1), то имеем [1]

$$\sigma - \sigma_0 = E(1-\lambda)(e - e_0) - 2\lambda\sigma_s. \qquad (1.3)$$

Обозначим еще символом ε относительное укорочение средин-

[1] Интересно отметить, что соотношение (1.3) не зависит от величины $\Delta\sigma$.

ного слоя $z = 0$; тогда на основании гипотезы плоских сечений имеем

$$e - e_0 = \varepsilon - \varepsilon_0 + z\frac{d^2w}{dx^2}. \tag{1.4}$$

Как вытекает из работы [2], вторичные пластические деформации возникают в стержне уже при сравнительно малых прогибах, при которых можно считать $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \ll 1$. В таком случае уравнение равновесия стержня имеет простой вид

$$M = Pw \quad \left(P = \int\limits_{-h/2}^{+h/2} \sigma b(z)\,dz, \quad M = -\int\limits_{-h/2}^{+h/2} \sigma b(z) z\,dz\right). \tag{1.5}$$

Здесь M — изгибающий момент, P — сжимающая сила, приложенная в концах стержня, w — прогиб, h и $b(z)$ — высота и ширина рассматриваемого сечения.

Пусть будет $z_p = z_p(x)$ уравнением кривой разделяющей зон активных и пассивных пластических деформаций; $z_b = z_b(x)$ — уравнением кривой разделяющей зон упругой разгрузки и вторичных пластических деформаций. В случае координатной системы (x, y, z) зона вторичных пластических деформаций возникает вблизи края $z = h/2$, т. е. при $z_b < z < h/2$; в зоне $z_p < z < z_b$ происходит упругая разгрузка; при $-h/2 < z < z_p$ пластические деформации в стержне остаются активными (зона нагрузки).

Имея в виду формулы (1.1) — (1.4), вычисляем интегралы в формулах (1.5). Если еще под символом P_0 понимать касательно-модульную нагрузку и ввести обозначения

$$B_i = \int\limits_{-h/2}^{z_p} b(z) z^{i-1}dz, \quad C_i = \int\limits_{z_b}^{h/2} b(z) z^{i-1}dz \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\Delta P = \frac{\lambda}{1-\lambda}\int\limits_{z_p}^{z_b} b(z)\Delta\sigma dz, \quad \Delta M = \frac{\lambda}{1-\lambda}\int\limits_{z_p}^{z_b} b(z)\Delta\sigma z dz, \tag{1.6}$$

то находим (F — площадь сечения, I — момент инерции):

$$P = P_0 + E(F - \lambda B_1 - \lambda C_1)(\varepsilon - \varepsilon_0) - E\lambda(B_2 + C_2)\frac{d^2w}{dx^2} -$$

$$- \Delta P - 2\lambda\sigma_s C_1, \tag{1.7}$$

$$M = E\lambda(B_2 + C_2)(\varepsilon - \varepsilon_0) - E(I - \lambda B_3 - \lambda C_3)\frac{d^2w}{dx^2} +$$
$$+ \Delta M + 2\lambda\sigma_s C_2 = Pw.$$

Переходим к следующим безразмерным величинам:

$$\xi = 1 - \frac{1}{l}x, \quad w^* = \frac{2}{h}w, \quad z^* = \frac{2}{h}z, \quad z_p^* = \frac{2}{h}z_p, \quad z_b^* = \frac{2}{h}z_b,$$

$$\mu = e_s\frac{l^2}{h^2}, \quad \beta(z^*) = \frac{b(z)}{b(0)}, \quad F^* = \frac{2}{hb(0)}F, \quad I^* = \left(\frac{2}{h}\right)^3\frac{I}{b(0)},$$

$$B_i^* = \left(\frac{2}{h}\right)^i\frac{B_i}{b(0)}, \quad C_i^* = \left(\frac{2}{h}\right)^i\frac{C_i}{b(0)},$$

$$\beta^2 = \frac{Pl^2}{4EI(1-\lambda)}, \quad \beta_0^2 = \frac{P_0l^2}{4EI(1-\lambda)} = \frac{\pi^2}{4}, \tag{1.8}$$

$$p = \frac{\Delta Pl^2}{4EI(1-\lambda)}, \quad m = \frac{\Delta Ml^2}{2EhI(1-\lambda)}.$$

В этих обозначениях формулы (1. 7) приобретают вид

$$\frac{l^2}{h^2}(F^* - \lambda B_1^* - \lambda C_1^*)(\varepsilon - \varepsilon_0) - \lambda(B_2^* + C_2^*)w^{*\prime\prime} -$$
$$- 2\lambda\mu C_1^* = I^*(1-\lambda)(\beta^2 - \beta_0^2 + p), \tag{1.9}$$
$$\frac{l^2}{h^2}\lambda(B_2^* + C_2^*)(\varepsilon - \varepsilon_0) - (I^* - \lambda B_3^* - \lambda C_3^*)w^{*\prime\prime} +$$
$$+ 2\lambda\mu C_2^* = I^*(1-\lambda)(\beta^2 w^* - m).$$

Элиминируя из соотношений (1. 9) величину $\varepsilon - \varepsilon_0$, приходим к уравнению

$$w^{*\prime\prime} = -I^*(1-\lambda)[(\beta^2 w^* - m)\phi_1 + (\beta^2 - \beta_0{}^2 + p)\phi_2] + 2\lambda\mu\phi_3. \tag{1.10}$$

Здесь обозначено

$$\phi_1(z_p^*, z_b^*) = \frac{1}{\Delta}(F^* - \lambda B_1{}^* - \lambda C_1{}^*),$$

$$\phi_2(z_p^*, z_b^*) = -\frac{\lambda}{\Delta}(B_2{}^* + C_2{}^*), \tag{1.11}$$

$$\phi_3(z_p^*, z_b^*) = \frac{1}{\Delta}[(F^* - \lambda B_1{}^*)C_2{}^* + \lambda C_1{}^* B_2{}^*],$$

при

$$\Delta = (I^* - \lambda B_3^* - \lambda C_3^*)\,(F^* - \lambda B_1^* - \lambda C_1^*) - \lambda^2 (B_2^* + C_2^*)^2.$$

Уравнение (1. 10) является и основным уравнением равновесия стержня.

Для решения уравнения (1. 10) нужно еще дать зависимости для определения величин z_p^* и z_b^*; приходим к выводу этих формул.

Величину z_b^* будем определять из соотношения

$$(e - e_0)_{z=z_b} = \Delta e|_{z=z_b} - 2e_s. \qquad (1.12)$$

Учитывая, что

$$e - e_0 = \varepsilon - \varepsilon_0 + \frac{h^2}{l^2} z^* w^{*\prime\prime},$$

и вычисляя величину $\varepsilon - \varepsilon_0$ по формулам (1. 9), находим

$$k w^{*\prime\prime} = - I^* (1 - \lambda)(\beta^2 - \beta_0{}^2 + p) - 2\mu (F^* - \lambda B_1^*) +$$

$$+ (F^* - \lambda B_1^* - \lambda C_1^*)\,\mu \left(\frac{\Delta e}{e_s}\right)_{z^* = z_b^*}. \qquad (1.13)$$

Здесь введено обозначение

$$k(z_p^*, z_b^*) = (F^* - \lambda B_1^* - \lambda C_1^*) z_b^* + \lambda (B_2^* + C_2^*). \qquad (1.14)$$

Для вычисления величины z_p^* следует — как показано в работе [2] — варьировать соотношения (1. 9). Если понимать под символами k_1 и k_2 выражения

$$k_1 (z_p^*,\ z_b^*) = (F^* - \lambda B_1^* - \lambda C_1^*)\, z_p^* + \lambda (B_2^* + C_2^*),$$

$$k_2 (z_p^*,\ z_b^*) = \lambda (B_2^* + C_2^*)\, z_p^* + (I^* - \lambda B_3^* - \lambda C_3^*)$$

и ввести обозначение $v = \delta w^* / \delta \beta^2$, то находим

$$v'' = - \frac{I^* (1 - \lambda)}{k_1}, \qquad \beta^2 v = \frac{k_2}{k_1} - w^*. \qquad (1.16)$$

Зависимости (1. 7) — (1. 16) выведены для области двухсторонних пластических деформаций. Кроме того, в стержне имеются и области односторонних пластических деформаций (здесь в рассматриваемом сечении вторичные пластические деформации отсутствуют, причем зона упругой разгрузки не доходит до края $z = - h/2$) и вблизи концов $\xi = \pm 1$ могут возникать области чисто-пластических деформаций. Нетрудно проверить, что формулы (1. 7) — (1. 16) остаются и в этих случаях применимыми, если только в области односторонних пластических деформаций взять $z^*_b = 1$, а в области чисто-пластических деформаций заменить $z^*_p = -1$, $z^*_b = +1$.

Для решения поставленной задачи следует решать системы уравнений (1. 10), (1. 13), (1. 16), выполняя при этом и условия непрерывности на границах отдельных областей. Из этих уравнений при заданной величине P мы можем вычислить интересующие нас функции $w^*(\xi)$, $z^*_p(\xi)$ и $z^*_b(\xi)$. Уравнения (1. 10), (1. 13) и (1. 16) можно решать методом, указанным в работе [2].

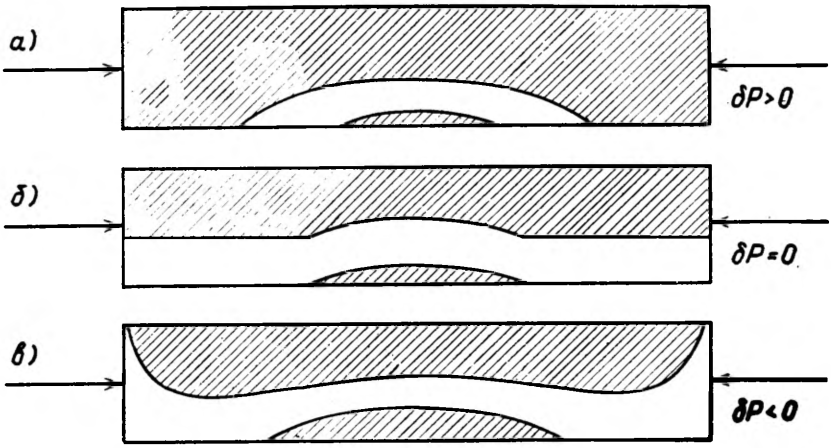
2. Выводы, вытекающие из основных зависимостей. Определение максимальной нагрузки

На основании основных зависимостей, полученных в п. 1, можно сделать некоторые выводы общего характера о форме кривой «нагрузка-прогиб» и о распределении зон пластических деформаций.

Допустим, что возникновение пластических деформаций от растяжения начинается при некоторой нагрузке $P = P_1$. Будем рассматривать среднее сечения стержня $\xi = 0$, в котором эти деформации появляются прежде всего. Если функции $k_1(z_p^*, z^*_b)$ и $k_2(z^*_p, z^*_b)$ являются непрерывными относительно их агрументов [2], то величина v должна изменяться в точке $P = P_1$ непрерывно и, следовательно, кривая «нагрузка-прогиб» является в этой точке гладкой. Из последнего обстоятельства вытекает в свою очередь, что $v > 0$, $\delta P > 0$ при $P = P_1$ и таким образом $P_1 < P_{max}$. Мы увидим, что после появления первых пластических деформаций от растяжения стержень не сразу потеряет свое сопротивление к продольному изгибу, но возможен еще некоторый — хотя и небольшой — подъем сверх нагрузки $P = P_1$. Схематическое распределение зон пластических деформаций в стержне для случая $P_1 < P < P_{max}$ дано на фиг. 2а.

Переходим теперь к определению максимальной нагрузки P_{max}. Так как диаграмма «нагрузка-прогиб» имеет в точке $P = P_{max}$ горизонтальную касательную, то $\delta P = 0$ и, следовательно, $v \to \infty$. Из второго уравнения системы (1. 16) явствует, что требование $v \to \infty$ можно реализовать только при $k_1(z^*_p, z^*_b) = 0$. Нетрудно увидеть, что при $P = P_{max}$ областей чисто-пластических деформаций у концов стержня $\xi = \pm 1$ возникать уже не может, так как в этом случае на границе областей чисто-пластических и односторонних пластических деформаций не было бы выполнено условие непрерывности относительно величи-

[2] Отметим, что такое предположение может оказаться несостоятельным в случае некоторых идеализированных сечений (ср. п. 3 настоящей статьи).



Фиг. 2.

ны $\delta w^{*\prime\prime}$ В области односторонних пластических деформаций из условия $k_1\ (z^*_p, 1) = 0$ вытекает, что величина z^*_p является постоянной, причем она имеет то же значение, что и при решении задачи устойчивости стержня в постановке Энгессера-Кармана (ср., напр., формулу (3. 14) в [3]).

Если сделать очень вероятное предположение, что функция $z^*_b = z^*_b(\xi)$ является при $P = P_{max}$ монотонно возрастающей, то нетрудно доказать, что и функция $z^*_p = z^*_p(\xi)$ должна быть в области двухсторонних пластических деформаций возрастающей. Действительно: дифференцируя условие $k_1(z^*_p, z^*_b) \equiv 0$ по координате ξ, находим

$$\frac{dk_1}{d\xi} = \frac{\partial k_1}{\partial z_b^*} \cdot \frac{dz_b^*}{d\xi} + \frac{\partial k_1}{\partial z_p^*} \cdot \frac{dz_p^*}{d\xi} = 0.$$

Но так как

$$\frac{\partial k_1}{\partial z_b^*} = \lambda\beta(z_b^*)(z_b^* - z_p^*) < 0, \qquad \frac{\partial k_1}{\partial z_p^*} = F^* - \lambda B_1^* - \lambda C_1^* > 0$$

и согласно нашему предположению $\frac{dz_b^*}{d\xi} > 0$, то должно быть $\frac{dz_p^*}{d\xi} > 0$, чем и наше утверждение доказано.

Распределение зон пластических деформаций в стержне для случая $P = P_{max}$ дано схематически на фиг. 2б.

Так как $v \to \infty$ при $P = P_{max}$, то соотношения (1. 16) для определения максимальной нагрузки становятся неприменимыми.

Необходимые для нас зависимости между величинами δw^* и $\delta w^{*\prime\prime}$ можем теперь найти путем варьирования формул (1. 9) Имея еще в виду условие $\delta e = \delta\varepsilon + z_p \frac{d^2\delta w}{dx^2} = о$, приходим к следующему уравнению

$$\delta w^{*\prime\prime} + l^*(1-\lambda)\frac{\beta^2}{k_2}\delta w^* = 0. \qquad (2.\ 1)$$

Нас интересуют такие нетривиальные решения уравнения (2. 1), которые удовлетворяют всем граничным условиям и условиям непрерывности на границе областей одно- и двухсторонних пластических деформаций; такие решения возможны лишь при некоторых дискретных значениях параметра β. Таким образом, мы видим, что вычисление максимальной нагрузки P_{max} сводится к определению собственных значений уравнения (2. 1).

Собственные значения уравнения (2. 1) можно определить методом последовательного приближения. Общая схема решения этой задачи является следующей:

1) Выбираем для параметра нагрузки β некоторое значение, возможно более близкое к искомой величине β_{max}. Решаем систему уравнений (1. 10) и (1. 13) при надлежащих граничных условиях и условиях непрерывности. Имея еще в виду условие $k_1\ (z^*_p,\ z^*_b) = о$, можем определить функции $w^*\ (\xi)$, $z^*_p\ (\xi)$ и $z^*_b\ (\xi)$ в первом приближении [3].

2) Считая зависимости $z^*_p\ (\xi)$ и $z^*_b\ (\xi)$ известными, вычисляем наименьшее собственное значение уравнения (2. 1); это и дает нам второе приближение для β_{max}.

Таким же образом можно найти третье, четвертое и т. д. приближения для величины β_{max}.

После прохождения максимальной нагрузки величины δP и v становятся отрицательными; из уравнений (1. 16) вытекает, что и $k_1\ (z^*_p,\ z^*_b) < о$. Теперь вблизи края $\xi = 1$ должна возникать область, где во всем сечении стержня происходит упругая разгрузка, так как в противном случае не были бы выполнены граничные условия $w^* = v = о$ при $\xi = 1$ (фиг. 2в). Но так как при $\delta P < о$ несущая способность пластинки уже исчерпана, то практического интереса этот случай не представляет.

3. Определение максимальной нагрузки в случае идеализированного двутавра

Интегрирование дифференциальных уравнений, выведенных в пп. 1—2 этой работы, может легко быть проведено до конца, если сечением стержня является т. н. идеализированный двутавр. Под

---

[3] При решении системы (1. 10), (1. 13) величины p, m и $\Delta\sigma$ вычисляются по методу, указанному в [2].

этим термином будем понимать двутавровое сечение, при котором полки соединены между собой бесконечно тонкой, но жесткой на сдвиг стенкой. В таком случае материал сечения можно считать сконцентрированным в двух точках, отстоящих друг от друга на расстоянии h (ряд сопоставлений теории с экспериментом показал, что эта идеализация поперечного сечения не вносит значительной ошибки в исследование).

Допустим, что каждой точке приписывается площадь $F/2$; тогда имеем $B_1 = C_1 = {}^1/_2\, F$, $B_2 = -C_2 = -h/_4\, F$, $B_3 = C_3 = h^2/_8\, F$

Переходя к безразмерным величинам

$$B_i^* = \left(\frac{2}{h}\right)^{i-1} \frac{B_i}{F}, \quad C_i^* = \left(\frac{2}{h}\right)^{i-1} \frac{C_i}{F} \quad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

увидим, что $B^*_1 = C^*_1 = \frac{1}{2}$ $B^*_2 = -C^*_2 = -\frac{1}{2}$ $B^*_3 = C^*_3 = \frac{1}{2}$.

Нетрудно доказать, что если ограничиться случаем $\delta P \geqslant 0$, то поправочные члены ΔP и ΔM оказываются в случае идеализированного двутавра равными нулю. В самом деле, так как при $\delta P \geqslant 0$ зона разгрузки не достигает полки $z^* = -1$, то из формул (1. 6) следует, что

$$\Delta P = \frac{\lambda F}{2(1-\lambda)} \Delta\sigma \Big|_{z^*=1}, \quad \Delta M = \frac{\lambda h F}{4(1-\lambda)} \Delta\sigma \Big|_{z^*=+1}$$

В работе [2] мы доказывали, что сжимающее напряжение σ при $z^* = 1$ не может превосходить его критическое значение. Но в таком случае $\Delta\sigma|_{z^*=1} = 0$ и, следовательно, $\Delta P = \Delta M \equiv 0$, чем и наше утверждение доказано.

Все зависимости, выведенные в пп. 1—2, остаются в силе и при идеализированном двутавре, если взять $I^* = F^* = 1$ и под символом β^2 понимать выражение $\beta^2 = \frac{Pl^2}{EFh^2(1-\lambda)}$ Основное уравнение равновесия (1. 10) получает теперь следующие виды:

а) в области двухсторонних пластических деформаций

$$w^{*\prime\prime} + \beta^2 w^* = \frac{\mu\lambda}{1-\lambda}; \tag{3. 1}$$

б) в области односторонних пластических деформаций

$$w^{*\prime\prime} + \beta^2\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) w^* = -\frac{\lambda}{2}\left(\beta^2 - \beta_0^2\right). \tag{3. 2}$$

Допустим, что область двухсторонних пластических деформаций распространяется при $P = P_{max}$ от центра стержня $\xi = 0$ до некоторой координаты $\xi = \xi_1$. Решая уравнения (3. 1)—(3. 2) при соответствующих граничных условиях, находим, что

$$w^* = A\cos\beta\xi + \beta^2 \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \quad \text{при } 0 \leqslant \xi < \xi_1,$$

$$w^* = B\sin[\beta^*(1-\xi] - \frac{\lambda}{2-\lambda}\left(1-\frac{\beta_0^2}{\beta^2}\right)\left(1-\frac{\sin\beta^*\xi}{\sin\beta^*}\right) \quad \text{при } \xi_1 < \xi \leqslant 1. \tag{3. 3}$$

Здесь обозначено $\beta^* = \beta\sqrt{1-\lambda\ 2}$.Коэффициенты A и B определяем из условий непрерывности для w^* и $w^{*\prime}$ в точке $\xi = \xi_1$. Условие (1. 13) для определения величины $z_b{}^*$ получает теперь вид

$$A\cos\beta\xi\quad z_b{}^* = 1 - \frac{\beta_0^2}{\beta^2} + \frac{(2-\lambda)\mu}{\beta^2(1-\lambda)} - \frac{1}{\beta^2}\mu\left(\frac{\Delta e}{e_s}\right)_{z^*=z_b^*}. \tag{3. 4}$$

Так как при $\xi = \xi_1$ имеют место равенства $z^*{}_b = 1$ и $\Delta e = 0$, то из (3. 4) находим

$$A\cos\beta\xi_1 = 1 - \frac{\beta_0^2}{\beta^2} + \frac{(2-\lambda)\mu}{\beta^2(1-\lambda)} \tag{3. 5}$$

Подставляя сюда величину A, вычисленную из условий непрерывности для w^* и $w^{*\prime}$, приходим к уравнению

$$(1 - st\sqrt{1-\lambda/2})\left[1-\frac{\beta_0^2}{\beta^2} + \frac{(2-\lambda)\mu}{\beta^2(1-\lambda)}\right]\cos[\beta^*(1-\xi_1)] = $$
$$= \frac{\lambda}{2}\left(1-\frac{\beta_0^2}{\beta^2}\right) \tag{3. 6}$$

при обозначениях

$$s = \tan[\beta^*(1-\xi_1)],\ t = \tan\beta\xi_1. \tag{3. 7}$$

Варьируя соотношения (3. 3) и принимая в расчет, что $\delta\beta = 0$ при $\beta = \beta_{max}$, находим

$$\delta w^* = \delta A\cos\beta\xi \quad \text{при } 0 \leqslant \xi < \xi_1,$$
$$\delta w^* = \delta B\sin[\beta^*(1-\xi)] \quad \text{при } \xi_1 < \xi \leqslant 1. \tag{3. 8}$$

При $\xi = \xi_1$ должны быть выполнены условия непрерывности для δw^* и $\delta w^{*\prime}$ Последнее требование — так как тривиальные решения $\delta A = \delta B = 0$ нас не интересуют — ведет к условию

$$s\quad t = \sqrt{1-\lambda/2.} \tag{3. 9}$$

Из двух трансцендентных уравнений (3. 6) и (3. 9) можем определить единственные неизвестные ξ_1 и $\beta = \beta_{max}$. Прогиб в средине стержня w^*_0 будем определять по формуле

$$w_0^* = \left[1 - \frac{\beta_0^2}{\beta^2} + \frac{(2-\lambda)\mu}{\beta^2(1-\lambda)}\right]\frac{1}{\cos\beta\xi_1} + \frac{\lambda\mu}{\beta^2(1-\lambda)}, \qquad (3.\ 10)$$

которая получена на основании зависимостей (3. 3) и (3. 5).

Для иллюстрации указанного выше метода были выполнены вычисления при $\lambda = 0{,}9$; для параметра μ выбраны значения 0,1 и 0,2. Эти вычисления дали следующие результаты:

$$\frac{P_{max}}{P_0} = 1{,}375, \quad w_0^* = 0{,}90, \quad \xi_1 = 0{,}20 \quad \text{при } \mu = 0{,}1;$$

$$\frac{P_{max}}{P_0} = 1{,}475, \quad w_0^* = 1{,}46, \quad \xi_1 = 0{,}14 \quad \text{при } \mu = 0{,}2.$$

Наряду с этим были вычислены и те нагрузки $P = P_1$, при которых в стержне возникают первые пластические деформации от растяжения; результатами здесь оказываются

$$\frac{P_1}{P_0} = 1{,}374, \quad w_0^* = 0{,}86 \quad \text{при } \mu = 0{,}1;$$

$$\frac{P_1}{P_0} = 1{,}475, \quad w_0^* = 1{,}42 \quad \text{при } \mu = 0{,}2.$$

Из проведенных вычислений вытекает, что максимальная нагрузка практически не отличается от той нагрузки, при которой в стержне начинается возникновение пластических деформаций от растяжения.

Поступило
16 I 1958

Литература

1. Pflüger A., Zur plastischen Knickung gerader Stäbe. Ingenieur-Archiv, 1952, 20, № 5, 291—301.

2. Лепик Ю. Р., О равновесии сжатых упруго-пластических стержней. Прикладная математика и механика, 1957, 21, № 1, 101—108.

3. Ильюшин А. А., Пластичность. Гостехиздат, 1948.

SURUTUD ELASTILIS-PLASTILISE VARDA PÄRASTKRIITILISE STAADIUMI ANALÜÜS SEKUNDAARSETE PLASTILISTE DEFORMATSIOONIDE PIIRKONNA ARVESTAMISEGA

Dots., füüs.-mat. tead. kand. Ü. Lepik
Teoreetilise mehhaanika kateeder

Resümee

Varraste nõtkumist plastiliste deformatsioonide piirkonnas on käsitletud töödes [1,2] eeldusel, et vardas puuduvad sekundaarsete plastiliste deformatsioonide piirkonnad (s. t. puuduvad plastilised deformatsioonid venitusest). Teiselt poolt on aga teada [2], et sekundaarsed plastilised deformatsioonid tekivad juba suhteliselt väikeste läbipainete puhul. Seoses sellega kerkib küsimus, milline on nende deformatsioonide mõju varda tööle pärastkriitilises staadiumis; selle problemi lahendamisele ongi pühendatud käesolev artikkel. Siin tuletatakse probleemi põhivõrrandid ja antakse meetod maksimaalse koormuse määramiseks. Üksikasjalisemalt on vaadeldud juhtu, kus varda ristlõikeks on idealiseeritud kaksik T-tala.

ANALYSE DES NACHKRITISCHEN STADIUMS EINES ELASTISCH-PLASTISCHEN DRUCKSTABES MIT BERÜCKSICHTIGUNG DER SEKUNDÄREN PLASTISCHEN DEFORMATIONEN

Ü. Lepik

Zusammenfassung

Das Gleichgewichtsproblem von Stäben, die ihre Stabilität im plastischen Bereich verlieren, ist in den Arbeiten [1,2] behandelt worden bei der Voraussetzung, dass im Stabe keine Bereiche von sekundären plastischen Deformationen (d. h. plastische Deformationen von Dehnung) auftreten. Von anderer Seite ist aber bekannt [2], dass sekundäre plastische Deformationen schon bei verhältnismässig kleinen Durchbiegungen entstehen. In Verbindung damit steigt die Frage auf, welche Wirkung diese Deformationen auf die Arbeit des Stabes im nachkritischen Stadium haben werden; der Lösung dieses Problems ist der vorliegende Aufsatz gewidmet. Es werden hier die Hauptgleichungen des Problems abgeleitet und eine Methode zur Ermittlung der Maximallast gegeben. Eingehender wird der Fall des idealisierten I-Stabes behandelt.

К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ ПЛАСТИНОК, ПОТЕРЯВШИХ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

Доц., канд. физ.-мат. наук Ю. Р. Лепик
Кафедра теоретической механики

Настоящая статья посвящена исследованию работы пластинок в послекритической стадии при условии, что потеря устойчивости произошла при продолжающемся нагружении (т. н. концепции Шенли). Исходя из теории малых упругопластических деформаций и считая материал пластинки несжимаемым, в работе дается простой метод, который позволяет определить наклон касательной к диаграмме «нагрузка-прогиб» в точке бифуркации. Разработан ряд примеров.

§ 1. Вывод основных соотношений

Как известно, система основных уравнений устойчивости пластинок имеет вид [1]:

$$\frac{\partial T'_1}{\partial x}+\frac{\partial S'}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial S'}{\partial x}+\frac{\partial T'_2}{\partial y}=0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2 M'_1}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 H'}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M'_2}{\partial y^2}-T_1\varkappa'_1-T_2\varkappa'_2-2S\varkappa'_3=0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon'_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon'_2}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 \varepsilon'_3}{\partial x\partial y}=0. \tag{1.3}$$

В этих формулах символами T'_1, T'_2, S' M'_1, M'_2, H' обозначены скорости усилий и моментов при потере устойчивости; символами $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \varkappa'_1, \varkappa'_2, \varkappa'_3$ — скорости деформаций и искривлений в момент потери устойчивости.

Будем считать, что потеря устойчивости происходит при чистопластических деформациях [1]; тогда имеют место следующие соотношения (ср. [1], стр. 289):

[1] Хотя такое допущение не имеет полного теоретического обоснования, оно все-таки является общепринятым при концепции продолжающегося нагружения, так как при этом разыскивается более безопасная граница устойчивости (см. и [2], стр. 290).

$$(1-\omega)\varepsilon'_1=\frac{1}{Eh}\left(T'_1-\frac{1}{2}T'_2\right)+(\lambda-\omega)S^*_x\varepsilon',$$

$$(1-\omega)\varepsilon'_2=\frac{1}{Eh}\left(T'_2-\frac{1}{2}T'_1\right)+(\lambda-\omega)S^*_y\varepsilon', \qquad (1.4)$$

$$\frac{2}{3}(1-\omega)\varepsilon'_3=\frac{1}{Eh}S'+(\lambda-\omega)X^*_y\varepsilon',$$

$$\frac{9}{Eh^3}M'_1=(1-\omega)\left(\varkappa'_1+\frac{1}{2}\varkappa'_2\right)-\frac{3}{4}(\lambda-\omega)X^*_x\varkappa',$$

$$\frac{9}{Eh^3}M'_2=(1-\omega)\left(\varkappa'_2+\frac{1}{2}\varkappa'_1\right)-\frac{3}{4}(\lambda-\omega)Y^*_y\varkappa', \qquad (1.5)$$

$$\frac{18}{Eh^3}H'=(1-\omega)\varkappa'_3-3(\lambda-\omega)X^*_y\varkappa'$$

Здесь E — модуль упругости, h — толщина пластинки, кроме того введены еще следующие обозначения:

$$X^*_x=\frac{T_1}{\sigma_i h},\quad Y^*_y=\frac{T_2}{\sigma_i h},\quad X^*_y=\frac{S}{\sigma_i h},$$

$$S^*_x=X^*_x-\frac{1}{2}Y^*_y,\ S^*_y=Y^*_y-\frac{1}{2}X^*_x, \qquad (1.6)$$

$$\varepsilon'=X^*_x\varepsilon'_1+Y^*_y\varepsilon'_2+2X^*_y\varepsilon'_3,$$

$$\varkappa'=X^*_x\varkappa'_1+Y^*_y\varkappa'_2+2X^*_y\varkappa'_3,$$

$$\lambda=1-\frac{1}{E}\frac{d\sigma_i}{de_i},\quad \omega=1-\frac{1}{E}\frac{\sigma_i}{e_i}$$

Учитывая определение величины ε по формулам (1.6), можем соотношения (1.4) переписать в виде

$$[1-\omega-(\lambda-\omega)X^*_xS^*_x]\varepsilon'_1-(\lambda-\omega)S^*_xY^*_y\varepsilon'_2-$$
$$-2(\lambda-\omega)S^*_xX^*_y\varepsilon'_3=\frac{1}{Eh}\left(T'_1-\frac{1}{2}T'_2\right);$$
$$-(\lambda-\omega)X^*_xS^*_y\varepsilon'_1+[1-\omega-(\lambda-\omega)Y^*_yS^*_y]\varepsilon'_2-$$
$$-2(\lambda-\omega)S^*_yX^*_y\varepsilon'_3=\frac{1}{Eh}\left(T'_2-\frac{1}{2}T'_1\right);$$
$$-(\lambda-\omega)X^*_xX^*_y\varepsilon'_1-(\lambda-\omega)Y^*_yX^*_y\varepsilon'_2+$$
$$+2\left[\frac{1}{3}(1-\omega)-(\lambda-\omega)X^{*2}_y\right]\varepsilon'_3=\frac{1}{Eh}S' \qquad (1.7)$$

Будем рассматривать уравнения (1.7) как систему для определения величин ε'_1, ε'_2, ε'_3; детерминант этой системы равняется

$$\Delta=\frac{2}{3}(1-\lambda)(1-\omega)^2. \qquad (1.8)$$

Разрабатываем вначале случай $\lambda\neq1$; тогда $\Delta\neq0$ и решением системы (1.7) является

$$Eh(1-\lambda)\varepsilon'_1=(1-\gamma_3-2\gamma_6)T'_1+\left(-\frac{1}{2}+\gamma_2+\gamma_6\right)T'_2+$$
$$+(2\gamma_4-\gamma_5)S',$$
$$Eh(1-\lambda)\varepsilon'_2=\left(-\frac{1}{2}+\gamma_2+\gamma_6\right)T'_1+(1-\gamma_1-2\gamma_6)T'_2+$$
$$+(2\gamma_5-\gamma_4)S',$$
$$2Eh(1-\lambda)\varepsilon'_3=(2\gamma_4-\gamma_5)T'_1+(2\gamma_5-\gamma_4)T'_2+(3-4\gamma_1+$$
$$+4\gamma_2-4\gamma_3)S' \qquad (1.9)$$

Здесь обозначено

$$\gamma_1=\frac{3}{4}\frac{\lambda-\omega}{1-\omega}X^*{}_x^2, \qquad \gamma_2=\frac{3}{4}\frac{\lambda-\omega}{1-\omega}X^*{}_xY^*{}_y,$$
$$\gamma_3=\frac{3}{4}\frac{\lambda-\omega}{1-\omega}Y^*{}_y^2, \qquad \gamma_4=\frac{3}{2}\frac{\lambda-\omega}{1-\omega}X^*{}_xX^*{}_y,$$
$$\gamma_5=\frac{3}{2}\frac{\lambda-\omega}{1-\omega}X^*{}_yY^*{}_y, \qquad \gamma_6=\frac{3}{2}\frac{\lambda-\omega}{1-\omega}X^*{}_y^2. \qquad (1.10)$$

Уравнения равновесия (1.1) удовлетворены, если ввести скорость функции напряжений F' соотношениями

$$T'_1=Eh\frac{\partial^2F'}{\partial y^2}, \quad T'_2=Eh\frac{\partial^2F'}{\partial^2 x}, \quad S'=-Eh\frac{\partial^2F'}{\partial x\partial y} \qquad (1.11)$$

Даем основным уравнениям устойчивости (1.2) и (1.3) другой вид. При этом ограничиваемся для простоты лишь случаем, когда напряженное состояние перед потерей устойчивости однородно; тогда величины X_x, Y_y, X_y будут постоянными и в силу соотношений (1.5) и (1.9) система уравнений (1.2)—(1.3) получает форму

$$(1-\gamma_1-2\gamma_6)\frac{\partial^4F'}{\partial x^4}+2(1-2\gamma_1+3\gamma_2-2\gamma_3+\gamma_6)\frac{\partial^4F'}{\partial x^2\partial y^2}-$$
$$+(1-\gamma_3-2\gamma_6)\frac{\partial^4F'}{\partial y^4}+2(\gamma_5-2\gamma_4)\frac{\partial^4F'}{\partial x\partial y^3}+$$
$$+2(\gamma_4-2\gamma_5)\frac{\partial^4F'}{\partial x^3\partial y}=0. \qquad (1.12)$$

$$(1-\gamma_1)\frac{\partial^4w'}{\partial x^4}+2(1-\gamma_2-\gamma_6)\frac{\partial^4w'}{\partial x^2\partial y^2}+(1-\gamma_3)\frac{\partial^4w'}{\partial y^4}-$$
$$-\gamma_4\frac{\partial^4w'}{\partial x^3\partial y}-\gamma_5\frac{\partial^4w'}{\partial x\partial y^3}-\frac{9\sigma_i}{Eh^2(1-\omega)}\left(X^*{}_x\frac{\partial^2w'}{\partial x^2}+Y^*{}_y\frac{\partial^2w'}{\partial y^2}+\right.$$
$$\left.+2X^*{}_y\frac{\partial^2w'}{\partial x\partial y}\right)=0. \qquad (1.13)$$

Нас интересуют нетривиальные решения системы (1. 12) — (1. 13), которые удовлетворяют всем граничным условиям для F' и w'. Эти решения можно написать в виде (символами A и B обозначены коэффициенты, которые при решении рассматриваемой системы остаются неопределенными):

$$w' = Aw_1(x, y), \quad F' = BF_1(x, y) \tag{1. 14}$$

Так как мы исходили из предположения, что потеря устойчивости происходит при чисто-пластических деформациях, то в каждой точке пластинки должно быть выполнено неравенство $e'_i = \varepsilon' + z\varkappa' \geqslant 0$. Имея в виду, что величина z изменяется в пределах $(-h/2, +h/2)$, можем это требование написать еще в форме $\varepsilon' - h/2\varkappa' \mathrm{sg}\varkappa' \geqslant 0$ или — на основании соотношений (1. 9) — в виде неравенства

$$2\frac{S_x^* T'_1 + S_y^* T'_2 + 3X_x^* S'}{Eh^2(1-\lambda)\varkappa' \operatorname{sg}\varkappa'} \geqslant 1. \tag{1. 15}$$

Наклон касательной к диаграмме «нагрузка-прогиб» в точке бифуркации будем характеризовать величиной

$$\tau = \left[\frac{d(p/p_0)}{dw_0^*}\right]_{w_0^*=0} = \left[\frac{p'}{p_0 w'^*_0}\right]_{w_0^*=0}. \tag{1. 16}$$

Здесь символ p обозначает приложенную к пластинке нагрузку, p_0 — ее критическое значение, w_0 — стрела прогиба, $w^*_0 = \frac{1}{h} w_0$.

Искомую величину τ можно определить по следующей схеме: Решая уравнения (1. 12)—(1. 13) при соответствующих граничных условиях, находим критическую нагрузку p_0 и функции $w_1(x, y)$, $F_1(x, y)$ Подставляя полученные результаты в условие (1. 15), разыскиваем наименьшее значение для отношения $|B/A|$, при котором неравенство (1. 15) выполняется во всех точках срединной поверхности пластинки. Если величина $|B/A|$ известна, то вычисление коэффициента τ по формуле (1. 16) затруднений уже не представляет.

§ 2. Некоторые применения полученных зависимостей

В качестве примеров применения общего метода решения, выработанного нами в § 1, рассмотрим несколько частных задач.

Пример 1. Пусть прямоугольная пластинка ширины l сжимается в направлении оси x усилием p, постоянным в направлении оси y. Предположим, что перемещения краев в направлении оси y исключены вследствие наличия ограничивающих стенок, расположенных в плоскостях $y=0$ и $y=b$. Форму потери устойчивости будем считать цилиндрической. Ограничимся случаем, когда края пластинки $x=\pm l/2$ являются свободно опертыми.

По условиям задачи имеем

$$Y^*_y = \frac{1}{2} X^*_x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad X^*_y = 0;$$

$$T'_1 = 2T'_2 = -p', \; S' = 0, \; \varepsilon'_2 = \varepsilon'_3 = 0, \; w' = w'(x).$$

Из дифференциальных уравнений равновесия (1. 1) вытекает, что $p=\text{const}$. В таком случае первое уравнение системы (1. 12) — (1. 13) удовлетворяется тождественно, а второе приобретает вид

$$\frac{d^4w'}{dx^4} + \frac{9p}{Eh^3(1-\lambda)} \frac{d^2w'}{dx^2} = 0. \tag{2. 1}$$

Решением дифференциального уравнения (2. 1) оказывается

$$w'^* = A\cos\frac{2\alpha x}{l} \quad \text{при} \quad \alpha^2 = \frac{9p_0l^2}{4Eh^3(1-\lambda)} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Разыскивая для отношения p'/A наименьшее значение, которое удовлетворяет условию (1. 15), находим

$$\frac{p'}{A} = \frac{p'}{w'^*_0} = \frac{2}{3l^2}\pi^2 Eh^3(1-\lambda)$$

Отсюда явствует, что коэффициент τ, определенный по формуле (1. 16), имеет в рассматриваемом случае значение $\tau=6$.

Пример 2. Рассмотрим цилиндрическую форму потери устойчивости прямоугольной пластинки, достаточно длинной в направлении оси y и равномерно сжатой в направлении оси x. Края пластинки $x=\pm l/2$ будем считать опять свободно опертыми.

Из уравнений равновесия (1. 1) следует, что $T'_1 = -p' = \text{const}$, $S'=0$. Имея в виду обстоятельство, что всякое поперечное сечение пластинки $y=\text{const}$ и после потери устойчивости остается плоским, увидим, что $\varepsilon'_2 = \text{const}$ и $\varepsilon'_3 = 0$. Так как форма потери устойчивости является цилиндрической, то $\varepsilon'_1 = \varepsilon'_1(x)$ и условие совместимости деформаций (1. 3) выполняется автоматически.

Из второго уравнения системы (1. 9) находим

$$Eh(1-\lambda)\frac{d\varepsilon'_2}{dx} = (1-\gamma_1-2\gamma_6)\frac{dT'_2}{dx} = 0,$$

следовательно, $T'_2 = C = \text{const}$. Но так как вдоль оси y никаких сил не приложено, то должно быть

$$\int_{-l/2}^{+l/2} T'_2 dx = 0,$$

из чего вытекает, что $T'_2 = C = 0$.

В данном случае $X^*_x = -1$, $Y^*_y = X^*_y = 0$, $w' = w'(x)$ и уравнение устойчивости (1. 13) получает вид

$$\frac{d^4w'}{dx^4} + \frac{36p}{Eh^3(4-3\lambda-\omega)} \frac{d^2w'}{dx^2} = 0.$$

Решением этого уравнения является

$$w'^* = A \cos\frac{2\alpha x}{l} \quad \text{при} \quad \alpha^2 = \frac{9p_0 l^2}{Eh^3(4-3\lambda-\omega)} = \frac{\pi^2}{4} \tag{2.3}$$

Неравенство (1. 15) выполняется, если

$$\frac{p'}{A} \geqslant \frac{\pi^2 Eh^3(1-\lambda)}{2l^2}.$$

Учитывая еще условие (2. 3), получаем для определения коэффициента τ формулу

$$\tau = \frac{18(1-\lambda)}{3-4\lambda-\omega} \tag{2. 4}$$

Нетрудно видеть, что условие (2. 4) в случае $\omega = 0$ совпадает с результатом, полученным нами иным путем в работе [3].

Пример 3. Пусть сплошная круглая пластинка сжата усилием p, равномерно распределенным по контуру; тогда $X^*_x = Y^*_y = -1$, $X^*_y = 0$. Основные уравнения устойчивости, если перейти к безразмерным величинам

$$\varrho = \frac{r}{a}, \qquad \varphi = \frac{a}{h}\frac{dw'}{dr}, \qquad \psi = \frac{T'_1 \varrho a^2}{Eh^3},$$

$$\alpha^2 = \frac{9a^2 p_0}{Eh^3}\frac{4}{4-3\lambda-\omega}, \tag{2. 5}$$

приобретают форму

$$\varrho\frac{d^2\psi}{d\varrho^2} + \frac{d\psi}{d\varrho} - \frac{\psi}{\varrho} = 0, \tag{2. 6}$$

$$\varrho^2\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} + \varrho\frac{d\varphi}{d\varrho} + (\alpha^2\varrho^2 - 1)\varphi = 0. \tag{2. 7}$$

Общее решение уравнения (2. 6) имеет вид $\psi = B\varrho + c/\varrho$. Но так как величина ψ должна остаться при $\varrho = 0$ ограниченной, то $c = 0$ и, следовательно, $\psi = B\varrho$.

Решением уравнения (2. 7) является $\varphi = -AJ_1(\alpha\varrho)$ (символом J_1 обозначена функция Бесселя первого порядка).

Из неравенства (1. 15) находим (J_0 — функция Бесселя нулевого порядка):

$$B/A \geqslant \frac{1}{2}\alpha(1-\lambda)|J_0(\alpha\varrho)|.$$

Так как $|J_0(\alpha\varrho)| \leqslant 1$, то для отношения B/A можно выбирать значение $B/A = \frac{1}{2}\alpha(1-\lambda)$.

Ограничиваемся в дальнейшем случаем защемленной по контуру пластинки, тогда $\alpha = 3{,}832$. Вычисляя величину $w'_0{}^*$ по формуле

$$w'_0{}^* = A\int\limits_0^1 J_1(\alpha\varrho)\,d\varrho = 0{,}366\,A,$$

из (1. 16) и (2. 5) находим, что

$$\tau = \frac{12{,}83\,(1-\lambda)}{4-3\lambda-\omega} \tag{2. 8}$$

Пример 4. Рассмотрим прямоугольную пластинку с размерами сторон a и b. Допустим, что пластинка сжата в направлении оси x усилием p, которое распределено равномерно по кромкам $y=0$ и $y=b$ (начало координат поставим в один угол пластинки).

Так как в данном случае $X^*_x = -1$, $Y^*_y = X^*_y = 0$, то основные уравнения устойчивости (1. 12) — (1. 13) приобретают вид

$$(4-3\lambda-\omega)\frac{\partial^4 F'}{\partial x^4} + 4(2-3\lambda+\omega)\frac{\partial^4 F'}{\partial x^2\partial y^2} + \\ + 4(1-\omega)\frac{\partial^4 F'}{\partial y^4} = 0 \tag{2. 9}$$

и

$$\frac{1}{4}(4-3\lambda-\omega)\frac{\partial^4 w'}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w'}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w'}{\partial y^4} + \\ + \frac{9p}{Eh^3}\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = 0. \tag{2. 10}$$

К этим уравнениям принадлежат граничные условия. Сформулируем их, во-первых, для скорости функции напряжений F', исходя при этом из следующих допущений:

а) Касательные напряжения вдоль кромок пластинки отсутствуют; тогда $\frac{\partial^2 F'}{\partial x\partial y} = 0$ по всему контуру.

б) Во всех сечениях $x = \text{const}$ средняя величина скорости сжимающих усилий равняется величине p'; т. е.

$$p'b = -Eh\int\limits_0^b \frac{\partial^2 F'}{\partial y^2}\,dy \quad \text{при} \quad x = \text{const},$$

в) В сечениях $y = \text{const}$ средняя величина скорости усилия T'_2 равна нулю; т. е.

$$\int_0^a \frac{\partial^2 F'}{\partial x^2} dx = 0 \text{ при } y = \text{const}.$$

г) Кромки пластинки не могут искривляться; тогда $u' = \text{const}$ при $x = 0$ и $x = a$, $v' = \text{const}$ при $y = 0$ и $y = b$.[2]

Всем этим граничным условиям удовлетворим, полагая

$$F' = -\frac{1}{2Eh} p' y^2 \tag{2. 11}$$

Из полученного результата (2. 11) следует, что

$$T'_1 = -p' = \text{const}, \quad T'_2 = S' \equiv 0.$$

Граничные условия для w' удовлетворены, если искать решение уравнения (2. 10) в форме

$$w' = Ah \sin\frac{\pi y}{b} \sin\frac{m\pi x}{a} \tag{2. 12}$$

В таком случае критическая нагрузка p_0 вычисляется из соотношения (ср. и формулу (5. 120) в [1]):

$$p_0 = \frac{\pi^2 E h^3}{36 a^2}\left[(4 - 3\lambda - \omega) m^2 + 4(1-\omega)\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{m^2 b^2} + 2\right)\right] \tag{2. 13}$$

Вычисляя на основании неравенства (1. 15) величину p'/A, находим

$$\frac{p'}{A} = \frac{1}{2} E h^3 (1 - \lambda)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \tag{2. 14}$$

Формула (1. 16) для определения наклона касательной получает в рассматриваемом случае вид

$$\tau = \frac{18(1-\lambda) m^2}{(4 - 3\lambda - \omega) m^2 + 4(1-\omega)\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{m^2 b^2} + 2\right)} \tag{2. 15}$$

В случае квадратной пластинки $a = b$ и число полуволн m равняется единице, следовательно,

$$\tau = \frac{18(1-\lambda)}{16 - 3\lambda - 13\omega}. \tag{2. 16}$$

---

[2] Отметим, что условия прямолинейности кромок можно привести путем несложных преобразований (см. напр. [4], гл. VI, § 23) к более удобным видам

$$\frac{\partial^3 F'}{\partial x^3} = 0 \text{ при } x = 0,\ x = a; \quad \frac{\partial^3 F'}{\partial y^3} = 0 \text{ при } y = 0,\ y = b.$$

Наконец, обратим еще внимание на одно обстоятельство. Из формул (2.4), (2.8) и (2.15) — (2.16) вытекает, что если $\lambda \to 1$, то $\tau \to 0$. Это обозначает, что в случае идеально пластического материала (т. е. при $\lambda = 1$) потеря устойчивости может происходить только при неизменяемых внешних силах.

§ 3. Замечание к случаю, когда потеря устойчивости происходит на площадке текучести материала

Указанный выше метод для определения наклона касательной τ становится неприменимым в случае идеально пластического материала: тогда $\lambda = 1$ и детерминант системы (1.7) обращается в нуль; следовательно, вычисление всех величин ε'_1, ε'_2, ε'_3 из соотношений (1.7) не удастся.

Путем непосредственных вычислений можно убедиться в том, что ранг матрицы системы (1.7) всегда равняется двум; то же значение имеет и ранг расширенной матрицы. Из этого следует, что система (1.7) всегда совместна; при решении ее следует одну из величин ε'_1, ε'_2, ε'_3 оставить свободной. Допустим для конкретности, что свободной неизвестной является ε'_1. Решим теперь систему (1.7) относительно величин ε'_2, ε'_3 и поставим найденные результаты в (1.3); таким образом приходим к дифференциальному уравнению с двумя неизвестными ε'_1 и F' Кроме того, при $\lambda = 1$ должно быть еще удовлетворено условие:

$$S^*_x T'_1 + S^*_y T'_2 + 3X^*_y S' = 0. \tag{3.1}$$

Из этих двух уравнений можем определить величины ε'_1, F' как функции от координат x и y. Так как потеря устойчивости должна произойти при чисто-пластических деформациях, то следует еще выполнить условие $\varepsilon' - \frac{h}{2}\varkappa' \mathrm{sg}\varkappa' \geqslant 0$.

Проиллюстрируем сказанное при помощи одного примера. Рассмотрим опять круглую равномерно сжатую по контуру пластинку: тогда $X_x^* = Y_y^* = -1$, $X_y^* = 0$ и условие (3.1) получает при обозначениях (2.5) форму

$$\frac{d\psi}{d\varrho} + \frac{\psi}{\varrho} = 0. \tag{3.2}$$

Общим решением дифференциального уравнения (3.2) является $\psi = c/\varrho$; но так как величина ψ должна быть при $\varrho = 0$ ограничена, то $c = 0$ и следовательно $\psi \equiv 0$. Отсюда вытекает, что $\tau = 0$ при $\lambda = 1$ (тот же результат получен и путем предельного перехода $\lambda \to 1$ в § 2).

Из системы (1.7) и из условия совместности деформаций находим, что $\varepsilon'_1 = \varepsilon'_2 = \mathrm{const}$. Неравенство $\varepsilon' - \frac{h}{2}\varkappa' \mathrm{sg}\varkappa' \geqslant 0$, если учитывать еще полученные в § 2 для защемленной по контуру пластинки соотношения, можно представить в виде

$$-\frac{\varepsilon'_1}{w'^{*}_0} \geqslant 2{,}62 \left(\frac{h}{a}\right)^2 \qquad (3.3)$$

Таким же методом могут быть решены при $\lambda = 1$ и иные задачи, рассмотренные нами в § 2.

Поступило
16 I 1958

Литература

1. Ильюшин А. А., Пластичность, ОГИЗ 1948.
2. Качанов Л. М., Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.
3. Лепик Ю. Р., Еще раз к вопросу о цилиндрической форме потери устойчивости упругопластических пластинок. Прикл. матем. и механ., 1956, 20, № 1, 140—143.
4. Папкович П. Ф., Строительная механика корабля. Ч. II. Судпромгиз, Ленинград, 1939.
5. Лепик Ю. Р., К устойчивости упруго-пластической прямоугольной пластинки, сжатой в одном направлении. Прикл. матем. и механ., 1957, 20, № 5, 722—726.

PLAATIDE PÄRASTKRIITILISE STAADIUMI ANALÜÜSIST JUHUL, KUS STABIILSUSE KADU TOIMUS PLASTILISTE DEFORMATSIOONIDE PIIRKONNAS

Dots., füüs.-mat. tead. kand. Ü. Lepik
Teoreetilise mehhaanika kateeder

Resümee

Käesolevas töös on vaadeldud plaatide tasakaaluprobleemi pärastkriitilises staadiumis tingimusel, et stabiilsuse kadu toimus jätkuva koormamise juures (nn. Shanley kontseptsioon). Lähtudes väikeste elastilis-plastiliste deformatsioonide teooriast, antakse töös lihtne meetod, mis võimaldab määrata puutuja tõusu «koormus-läbipainde» diagrammi harunemispunktis. Näidetena on läbi töötatud neli konkreetset ülesannet.

ZUR ANALYSE DES NACHKRITISCHEN STADIUMS DER PLATTEN, DIE IHRE DRUCKSTABILITÄT BEI PLASTISCHEN DEFORMATIONEN VERLOREN HABEN

Ü. Lepik

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz wird das Gleichgewichtsproblem der plastischen Platten im nachkritischen Stadium behandelt; es wird dabei angenommen, dass der Übergang vom ebenen zum gekrümmten Zustand bei zunehmender Belastung geschah (sogenannte Shanley-Konzeption). Ausgehend von der Theorie der kleinen elastisch-plastischen Deformationen, wird in dem Aufsatz eine einfache Methode entwickelt, die die Ermittlung der Tangentenneigung im Verzweigungspunkte der Last-Dehnungskurve ermöglicht. Als Beispiele werden vier konkrete Aufgaben gelöst.

SISUKORD

Тартуский государственный университет
Тарту, ул. Юликооли, 18
На русском, эстонском, немецком и английском языках

*

Toimetaja G. Kangro

Ladumisele antud 17. XII 1958. Trükkimisele antud 30. VI 1959. Paber 60 × 92, 1/16. Trükipoognaid 12,25. Trükiarv 700. MB-05758. Tellimise nr. HH-3727.

Hans Heidemanni nim. trk. Tartu, Ülikooli 17/19.

Hind rbl. 8.50