

I. PETERSEN H. ROOS

Kõrgema
matemaatika
ülesannete
kogu

I

HA-29700

I. PETERSEN, H. ROOS

KÕRGEMA MATEMAATIKA ÜLESANNETE KOGU

I

3. trükk

7

158703

KIRJASTUS «VALGUS»
TALLINN 1969

Kunstiliselt kujundanud J. Nikkarinen

Lubatud Eesti NSV Kõrgema ja Keskerihariduse Ministeeriumi poolt kasutada õppevahendina Eesti NSV kõrgemates õppeasutustes

Сборник предназначен для использования в ВУЗ-ах и ВТУЗ-ах с курсом высшей математики в объеме 350—450 часов. Кроме задач и их ответов в сборнике для каждого раздела курса дается обзор соответствующего теоретического материала и набор примерных задач, снабженных подробными решениями и объяснениями.

N



TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

ESIMESE TRÜKI SAATEKS

Käesolev ülesannetekogu on mõeldud kasutamiseks peamiselt nendes Eesti NSV kõrgemates õppeasutustes, kus matemaatikat ei õpita põhiainena. Ülesannete valik vastab 350—450-tunnilisele kõrgema matemaatika kursusele. Erinevalt varemilmunud ülesannetekogudest on selles kogus pearõhk asetatud näiteülesannetele ja nende üksikasjalistele lahendustele. Näiteülesannete valik ja seletused lahenduste juurde on püütud koostada nii, et iseõppija oleks suuteline pärast ühe paragrahvi näidete läbitöötamist ilma täiendavate nõuanneteta lahendada kõiki selle paragrahvi ülesandeid. Kogu kasutamise hõlbustamiseks on iga paragrahvi alguses lühidalt esitatud vastav teoreetiline materjal. Kogust on peaaegu täiesti välja jäetud numbrilised meetodid, sest vastavad ülesannete tüübid ja nende lahendamise meetodika ei ole veel küllaldaselt välja kujunenud ja ühtlustunud.

Kogemused näitavad, et kaugõppe ja õhtuste osakondade üliõpilastel on kõrgema matemaatika õppimisel peamiseks raskuseks ülesannete lahendamise oskuse omandamine. Ilma selleta aga jäävad ka teoreetilised teadmised pealiskaudseiks ja formaalseiks. Autorid loodavad, et käesolev ülesannetekogu aitab iseõppijail kergemini ja põhjalikumalt omandada matemaatika kursust.

Kogu I osa, välja arvatud § 12, ning II osa § 16 on kirjutanud I. Petersen ning § 12 ja II osa peale § 16 on kirjutanud H. Roos.

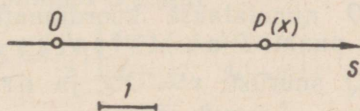
Autorid on tänulikud kõigi paranduste ja märkuste eest, mis võiksid ülesannetekogu täiustada.

Autorid

ANALÜÜTILINE GEOMEETRIA

§ 1. KOORDINAADISTIK TASAPINNAL

Olgu sirgel s valitud mingi punkt O koordinaatide alguspunktiks, loetud üks kahest võimalikust suunast positiivseks ja määratud pikkusühik. Sirge s mistahes punkti P koordinaadiks nimetatakse lõigu OP pikkust, kui punkt P asetseb punk-



Joon. 1

tist O positiivses suunas, ja pikkuse -1 -kordset, kui P asetseb punktist O negatiivses suunas. Asjaolu, et punkti P koordinaat on x , tähistatakse $P(x)$.

Kui sirgel s on antud kaks punkti oma koordinaatidega $P_1(x_1)$ ja $P_2(x_2)$, siis on nende punktide vahelise lõigu P_1P_2 pikkus

$$|P_1P_2| = |x_2 - x_1|.$$

Vahet

$$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1,$$

mis võrdub lõigu P_1P_2 pikkusega, kui suund punktist P_1 punkti P_2 ühtib sirge s positiivse suunaga, ja selle pikkuse -1 -kordsega vastupidisel juhul, nimetatakse suunatud sirglõigu P_1P_2 suuruseks.

Lõigu alguse ja lõpu vahetamisel tema suurus muudab märki:

$$\overline{P_1P_2} = -\overline{P_2P_1}.$$

Iga kolme punkti P_1 , P_2 ja P_3 puhul on lõigu P_1P_3 suurus võrdne lõikude P_1P_2 ja P_2P_3 suuruste summaga:

$$\overline{P_1P_3} = \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3}.$$

Kui sirgel s antud kolme punkti $P_1(x_1)$, $P_2(x_2)$ ja $P(x)$ puhul suunatud sirglõikude P_1P ja PP_2 suuruste suhe on λ , s. t.

$$\lambda = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}},$$

siis öeldakse, et punkt P jaotab lõigu P_1P_2 suhtes λ . Kui P asetseb P_1 ja P_2 vahel, siis on $\lambda > 0$, kui P_2 asetseb P_1 ja P vahel, siis $\lambda < -1$, ja kui P_1 asetseb P ja P_2 vahel, siis $-1 < \lambda < 0$. Lõiku P_1P_2 suhtes λ jaotava punkti P koordinaat avaldub kujul

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

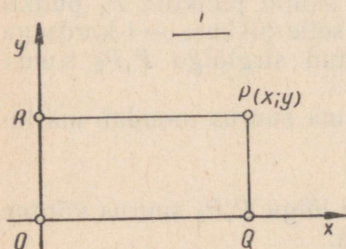
Lõigu keskpunkti koordinaat ($\lambda = 1$) on võrdne otspunktide koordinaatide poolsummaga.

Cartesiuse ristkoordinaadistik tasapinnal koosneb kahest ristuvast sirgest, millel on valitud postiiivsed suunad ja milledest ühte nimetatakse x - ehk abstsisssteljeks ja teist y - ehk ordinaatteljeks, ning pikkusühikust. Koordinaattelgede lõikepunkti O nimetatakse koordinaatide alguspunktiks. Tasapinna mistahes punkti P abstsissiks x nimetatakse suunatud sirglõigu OQ suurust, $x = \overline{OQ}$, ja ordinaadiks suunatud sirglõigu OR suurust, $y = \overline{OR}$, kus Q ja R on punkti P projektsioonid vastavalt x - ja y -teljel (joon. 2). Asjaolu, et punkti P abstsiss on x ja ordinaat y , tähistatakse $P(x; y)$.

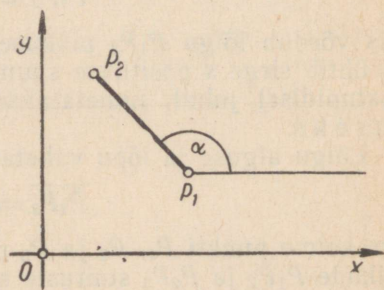
Punktide $P_1(x_1; y_1)$ ja $P_2(x_2; y_2)$ vaheline kaugus d avaldub kujul

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

Sirglõigu P_1P_2 suunanurgaks α nimetatakse vastu kellaosuti liikumise suunda mõõdetud nurka x -telje positiivsest suunast kuni suunanani P_1P_2 (joon. 3).



Joon. 2



Joon. 3

$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

$$\sin \alpha = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$
(2)

avaldavad lõigu P_1P_2 suunanurga α trigonomeetrilised funktsioonid selle lõigu otspunktide koordinaatide kaudu.

Kui punkt $P(x; y)$ jaotab punktist $P_1(x_1; y_1)$ punkti $P_2(x_2; y_2)$ suunduva lõigu suhtes λ , siis

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$
(3)

Sirglõigu keskpunkti koordinaatideks on otspunktide vastavate koordinaatide poolsummad.

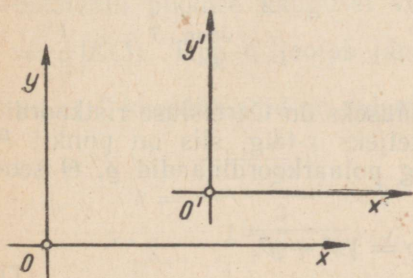
Kui kolmnurga tipud on $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ ja $P_3(x_3; y_3)$, siis avaldub tema pindala S kujul

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|,$$
(4)

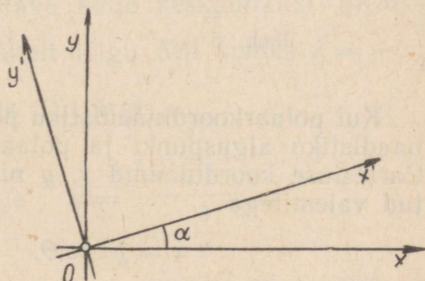
kusjuures determinant $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$ on positiivne, kui lii-

kumisel punktist P_1 punkti P_2 kolmnurk asetseb vasakul, negatiivne vastupidisel juhul ja võrdne nulliga, kui punktid P_1 , P_2 ja P_3 asetsevad ühel sirgel.

Cartesiuse ristkoordinaadistiku teisendust, mille puhul uue koordinaadistiku $O'x'y'$ teljed on vana teljestiku Oxy telgedega paralleelsed ja samasuunalised (joon. 4), nimetatakse paralleellükkeks. Kui uue ja vana teljestiku alguspunktid langevad ühte (joon. 5), siis nimetatakse teisendust teljestiku



Joon. 4



Joon. 5

pööramiseks. Üldise koordinaaditeisenduse puhul (joon. 6) on uuel ja vanal teljestikul nii alguspunktid kui ka telgede sihid erinevad. Tasapinna mistahes punkti P koordinaadid x, y vana teljestiku suhtes avalduvad sama punkti koordinaatide x', y' kaudu uue teljestiku suhtes paralleellükke puhul valemitega

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad (5)$$

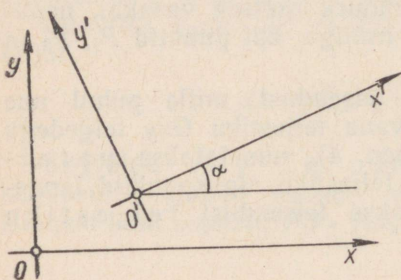
kus x_0 ja y_0 on uue koordinaatide alguspunkti O' koordinaadid vanas teljestikus; teljestiku pööramise puhul nurga α võrra vastu kellaosuti liikumise suunda valemitega

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha; \end{aligned} \quad (6)$$

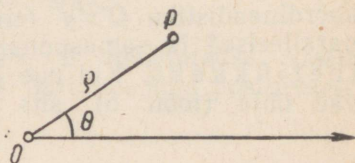
üldise koordinaaditeisenduse puhul, kui uue alguspunkti koordinaadid vanas teljestikus on x_0, y_0 ja nurk vanast abstsissiteljest uueni on α , valemitega

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + x_0, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + y_0. \end{aligned}$$

Tasapinna polaarkoordinaadistik on määratud punktiga O , mida nimetatakse pooluseks, sellest punktist väljuva kiirega, mida nimetatakse polaarteljeks, ja pikkusühikuga. Tasapinna punkti P polaarkauguseks ρ nimetatakse lõigu OP pikkust ja polaarnurgaks θ nurka polaarteljest vastu kellaosuti liikumise suunda suunani OP (joon. 7).



Joon. 6



Joon. 7

Kui polaarkoordinaadistiku pooluseks on Cartesiuse ristkoordinaadistiku alguspunkt ja polaarteljeks x -telg, siis on punkti P Cartesiuse koordinaadid x, y ning polaarkoordinaadid ρ, θ seotud valemitega

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ y &= \rho \sin \theta, & \tan \theta &= \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (7)$$

Näiteid

I. Leida koordinaattelgede positiivsete suundade vahelise nurga poolitajal punkt, mis asetseb punktidest $A(-1; 5)$ ja $B(2; -3)$ võrdse kaugusel.

Lahendus. Olgu otsitav punkt $P(x; y)$. Et P asetseb koordinaattelgede positiivsete suundade vahelise nurga poolitajal, siis

$$x = y.$$

Tingimusest $AP = BP$ järeldeb lõigu pikkuse valemi (1) järgi

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}.$$

Asendades siin $y = x$, tõstes ruutu ja lihtsustades, saame $10x = 13$, millest $x = 1,3$ ja seega ka $y = 1,3$. Otsitav punkt on järelikult $P(1,3; 1,3)$.

II. Kolmnurga mediaanide lõikepunkt on $M(0; 3)$, üks tipp $A(3; -4)$ ja selle tipu lähiskülje AB keskpunkt $K(-1; 1)$. Leida tipud B ja C (joon. 8).

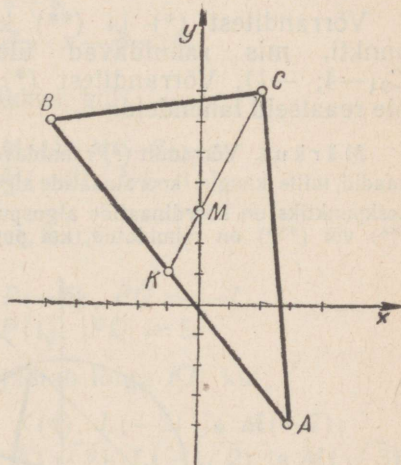
Lahendus. Et K on külje AB keskpunkt, siis jaotab punkt B lõigu AK suhtes $\lambda = -2$ ($|AB| = 2|BK|$, AB ja BK on vastupidi suunatud). Seega avalduvad tipu B koordinaadid valemite (3) järgi:

$$x = \frac{3 - 2 \cdot (-1)}{1 - 2} = -5$$

ja

$$y = \frac{-4 - 2 \cdot 1}{1 - 2} = 6.$$

Tipu C leidmiseks kasutame asjaolu, et kolmnurga mediaanide lõikepunkt asetseb $\frac{1}{3}$



Joon. 8

mediaani pikkuse kaugusel vastava külje keskpunktist ($|KM| = \frac{1}{3}|KC|$). Tipp C jaotab järelikult lõigu KM suhtes $\lambda = -\frac{3}{2}$,

nii et C koordinaadid on valemite (3) järgi

$$x = \frac{-1 - \frac{3}{2} \cdot 0}{1 - \frac{3}{2}} = 2 \quad \text{ja} \quad y = \frac{1 - \frac{3}{2} \cdot 3}{1 - \frac{3}{2}} = 7.$$

Otsitavad kolmnurga tipud on seega $B(-5; 6)$ ja $C(2; 7)$.

III. Kolmnurga kaks tippu on $A(2; -1)$ ja $B(5; 2)$. Määrata kolmas tipp C , mis asetseb koordinaatide alguspunktist kaugusel $\sqrt{17}$, nii et kolmnurga pindala oleks 9.

Lahendus. Olgu tipp C koordinaadid $(x; y)$. Et C asetseb koordinaatide alguspunktist $(0; 0)$ kaugusel $\sqrt{17}$, siis

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{17}. \quad (*)$$

Tingimusest kolmnurga ABC pindala kohta järeldub valemi (4) põhjal, et

$$\frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 5-2 & 2-(-1) \\ x-2 & y-(-1) \end{vmatrix} \right| = 9$$

ehk

$$|-3x + 3y + 9| = 18,$$

mis on rahuldatud, kui

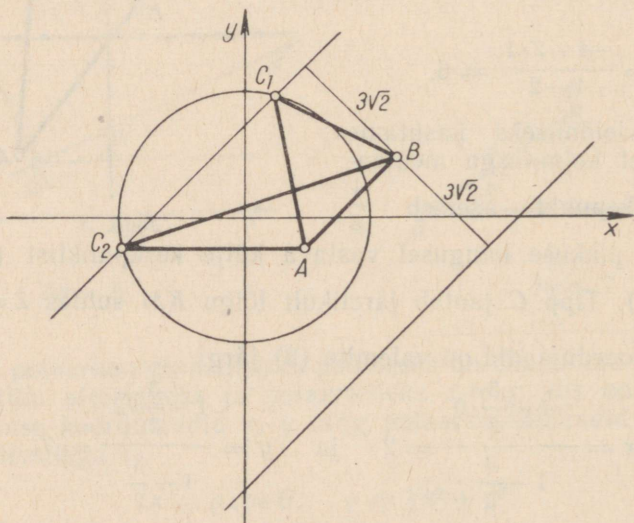
$$-3x + 3y + 9 = 18 \quad \text{ehk} \quad x - y + 3 = 0 \quad (**)$$

või

$$-3x + 3y + 9 = -18 \quad \text{ehk} \quad x - y - 9 = 0. \quad (***)$$

Võrranditest (*) ja (**) koosnevast süsteemist saame kaks punkti, mis rahuldavad ülesande tingimusi: $C_1(1; 4)$ ja $C_2(-4; -1)$. Võrranditest (*) ja (***) koosneval süsteemil ei ole reaalseid lahendeid.

Märkus. Võrrandit (*) rahuldavad tasapinna kõigi nende punktide koordinaadid, mille kaugus koordinaatide alguspunktist on $\sqrt{17}$, seega ringjoone, mille keskpunktiks on koordinaatide alguspunkt ja raadiuseks $\sqrt{17}$, punktid. Võrrand (**) või (***) on rahuldatud, kui punkt $C(x; y)$ asetseb sirgest AB niisugu-



Joon. 9

sel kaugusel h , et $\frac{1}{2}|AB|h = 9$, s. t. $h = \frac{18}{|AB|} = \frac{18}{\sqrt{(5-2)^2 + [2-(-1)]^2}} = \frac{18}{\sqrt{18}} = 3\sqrt{2}$. Seega tähendab nõue, et C rahuldaks võrrandit (**)

või võrrandit (***) , et C peab asetsema ühel sirgega AB paralleelseist sirgeist, mille kaugus sirgest AB on $3\sqrt{2}$. Leitud punktid C_1 ja C_2 on järelkult kirjeldatud ringjoone ja paralleelsete sirgete paari lõikepunktid (joon. 9).

Koordinaadid sirgel

1. Konstrueerida punktid $A(4)$, $B(-3)$, $C\left(\frac{1}{2}\right)$, $D(0)$, $E(-\sqrt{2})$, $F(\sqrt{5}-1)$.

2. Kuidas asetsevad punktid, mille koordinaadid rahuldavad võrratust

- | | |
|-------------------|----------------------------|
| 1) $x > 3$; | 3) $\frac{x-1}{x+3} > 0$; |
| 2) $x+4 \leq 0$; | 4) $x^2 - x - 6 < 0$. |

3. Leida lõigu MN suurus ja pikkus, kui

- | | |
|----------------------|-------------------------|
| 1) $M(2)$, $N(7)$; | 3) $M(1)$, $N(-3)$; |
| 2) $M(7)$, $N(2)$; | 4) $M(-2)$, $N(-11)$. |

4. Arvutada punkti Q koordinaat, kui

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $P(2)$, $\overline{PQ} = 3$; | 3) $P(-5)$, $\overline{PQ} = -7$; |
| 2) $P(2)$, $\overline{QP} = 3$; | 4) $P(1)$, $ PQ = 5$. |

5. Leida suhe, milles punkt M jaotab lõigu KL , kui

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1) $K(-1)$, $L(5)$ ja $M(3)$; | 3) $K(4)$, $L(-2)$ ja $M(-7)$; |
| 2) $K(1)$, $L(13)$ ja $M(5)$; | 4) $K(\sqrt{2})$, $L(-\sqrt{2})$ ja $M(\sqrt{3})$. |

6. Leida punktid, mis jaotavad punktide $A(7)$ ja $B(-5)$ vahelise lõigu kaheksaks võrdseks osaks.

7. Leida punkt B , kui punkt $C(-4)$ jaotab punktide $A(2)$ ja B vahelise lõigu suhtes -3 .

8. Leida punktiga $A(2)$ sümmeetriline punkt C punkti $B(-3)$ suhtes.

9. Punkt C jaotab lõigu AB suhtes λ . Missuguses suhtes jaotab

- 1) punkt C lõigu BA ?
- 2) punkt A lõigu BC ?
- 3) punkt B lõigu CA ?

Cartesiuse ristkoordinaadid tasapinnal

10. Konstrueerida punktid $A(4; 2)$, $B(-1; 3)$, $C(-2; 5)$, $D\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, $E(0; -\sqrt{2})$, $F(\sqrt{2}; -\sqrt{5})$.

11. Leida punkti $M(-2; 3)$ projektsioonid koordinaattelgedel.

12. Leida punktiga $A(-7; 3)$ sümmeetrilised punktid x -telje, y -telje ja koordinaatide alguspunkti suhtes.

13. Mis tingimust rahuldavad punkti $P(x; y)$ koordinaadid, kui P asetseb

1) x -teljel? 2) y -teljel? 3) koordinaattelgede positiivsete suundade vahelise nurga poolitajal? 4) y -teljest vasakul? 5) tasapinna veerandis x -telje positiivse ja y -telje negatiivse suuna vahel?

14. Leida korrapärase kuusnurga $ABCDEF$ tippude koordinaadid, kui koordinaatide alguspunktiks on tipp A , x -telg suundub läbi tipu B ja y -telg läbi tipu E ning kuusnurga külje pikkus on 2.

Sirglõigu pikkus ja suunanurk

15. Arvutada punktide A ja B vaheline kaugus, kui

- 1) $A(0; 0)$, $B(4; 3)$;
- 2) $A(4; 5)$, $B(9; -7)$;
- 3) $A(-4; 2)$, $B(1; -3)$.

16. Kolmnurga tipud on $A(6; 11)$, $B(-2; 3)$, $C(1; -1)$. Leida kolmnurga übermõõt.

17. Leida x -teljel punkt, mis asetseb võrdsel kaugusel punktidest $(3; 7)$ ja $(1; 1)$.

18. Leida y -teljel punkt, mis asetseb koordinaatide alguspunkti suhtes sama kaugel kui punktist $(4; 3)$.

19. Leida punkti $(2; -4)$ läbiva ringjoone keskpunkt, kui see ringjoon puudutab y -telge punktis $(0; 2)$.

20. Ringjoon läbib punkti $(-4; 2)$ ja puudutab mõlemat koordinaattelge. Leida ringjoone keskpunkt ja raadius.

21. Arvutada lõigu AB suunanurga trigonomeetriliste funktsioonide väärtused, kui

- 1) $A(3; 2)$, $B(7; 5)$;
- 2) $A(-1; 4)$, $B(2; -5)$;
- 3) $A\left(-\frac{5}{3}; \frac{1}{2}\right)$, $B(-2; 0)$.

22. Leida lõigu MN suunanurk, kui

- 1) $M(-2; 1)$, $N(1; 4)$;
- 2) $M(0; 7)$, $N(-\sqrt{3}; 6)$;
- 3) $M(3; -2)$, $N(5; -4)$.

23. Kolmnurga tipud on $A(-1; 2)$, $B(3; 0)$ ja $C(2; 5)$. Arvutada selle kolmnurga sisenurkade tangensid.

Sirglõigu jaotamine antud suhtes

24. Leida punktide $A(-7; 6)$ ja $B(5; 4)$ vahelise lõigu keskpunkt.

25. Leida punktiga $(5; -2)$ sümmeetriline punkt punkti $(3; 6)$ suhtes.

26. Leida punktid, mis jaotavad punktide $(3; 4)$ ja $(-3; 1)$ vahelise lõigu kolmeks võrdseks osaks.

27. Rööpküliku kolm tippu on $A(7; -5)$, $B(4; 3)$ ja $C(2; -4)$. Leida neljas tipp, teades, et ta asetseb A vastas.

28. Kolmnurga tipud on $(-4; 0)$, $(2; 4)$ ja $(-1; -1)$. Leida mediaanide lõikepunkt.

29. Kolmnurga kaks tippu on $A(1; 2)$ ja $B(-3; 4)$ ning mediaanide lõikepunkt $M(1; 3)$. Leida kolmas tipp.

30. Missuguses suhtes jaotab punkte $P(-2; 7)$ ja $Q(3; 1)$ läbiva sirge ning y -telje lõikepunkt lõigu PQ ?

31. Mitmekordseks tuleb pikendada lõik, mille algus on $(5; 7)$ ja lõpp $(-1; 4)$, et ta ulatuks x -teljeni?

32. Rööpküliku ühe külje otspunktid on $(1; -3)$ ja $(-2; 1)$ ning selle külje vastaskülje keskpunkt on $(2; 4)$. Leida diagonaalide pikkused.

33. Kolmnurga tipud on $A(-2; 1)$, $B(1; 5)$ ja $C(-7; 11)$. Arvutada tipust B tõmmatud nurgapoolitaja pikkus.

Kolmnurga pindala

34. Arvutada kolmnurga pindala, kui kolmnurga tipud on

- 1) $A(2; -3)$, $B(-3; 4)$ ja $C(-4; -5)$;
- 2) $K(3; -2)$, $L(-5; 2)$ ja $M(-1; -3)$;
- 3) $P_1(-8; 6)$, $P_2(2; 1)$ ja $P_3(-2; -2)$.

35. Arvutada kolmnurga pindala, kui kolmnurga kaks tippu on $A(4; -3)$ ja $B(2; 5)$ ning kolmandaks tipuks on punkti A projektsioon x -teljel.

36. Arvutada nelinurga pindala, kui tema tipud on $(3; -1)$, $(2; 3)$, $(-5; 2)$ ja $(-1; -4)$.

37. Arvutada punkti $(-1; 2)$ kaugus punkte $(3; -1)$ ja $(6; 3)$ läbivast sirgest.

38. Kolmnurga kaks tippu on $(4; 1)$ ja $(-3; 2)$. Leida kolmas tipp, kui see asetseb ordinaatteljel ja kui kolmnurga pindala on 12.

39. Kolmnurga kaks tippu on $A(-3; 1)$ ja $B(-1; -3)$. Leida kolmas tipp, teades, et kolmnurga pindala on 3 ja mediaanide lõikepunkt asetseb x -teljel.

40. Kolmnurga kaks tippu on $A(-1; 7)$ ja $B(-3; 0)$ ning mediaanide lõikepunkt $K(-1; 3)$. Arvutada selle kolmnurga pindala.

Cartesiuse koordinaatide teisendamine

41. Koostada koordinaatide teisendamise valemid paralleellükke jaoks, kui uueks alguspunktiks on $(-2; 7)$.

42. Leida punktide $A(-1; 3)$, $B(5; -2)$ ja $C(-3; -4)$ uued koordinaadid pärast alguspunkti viimist paralleellükkega punkti $(2; -1)$.

43. Koostada koordinaatide teisendamise valemid, kui telgi on pööratud ümber alguspunkti 1) 45° , 2) $\frac{5\pi}{6}$, 3) 300° , 4) -90° võrra.

44. Punkti A koordinaadid on pärast telgede pööramist ümber alguspunkti nurga 60° võrra $(2\sqrt{3}; -4)$. Arvutada punkti A koordinaadid vanas koordinaadistikus.

45. Arvutada punktide $M(-1; \sqrt{3})$ ja $N(2; 0)$ koordinaadid uues koordinaadistikus, mis on saadud vanast teljestiku pööramisega ümber alguspunkti 240° võrra.

46. Leida uue alguspunkti vanad koordinaadid ja nurk α , mille võrra on pööratud telgi, kui koordinaatide teisendamise valemid on

$$\begin{aligned} 1) \quad x &= \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} - 1, & y &= \frac{-x' + y' + 4}{\sqrt{2}}; \\ 2) \quad x &= -x' + 3, & y &= -y' - 2. \end{aligned}$$

47. Koostada koordinaatide teisendamise valemid, kui uueks alguspunktiks on punkt $A(8; -4)$ ja uus x -telg suundub läbi vanas teljestikus antud punkti $B(-7; 4)$.

48. Missugused on punkti $(7; 1)$ koordinaadid pärast koordinaatide alguspunkti viimist punkti $(2; 3)$ ja teljestiku pööramist 45° võrra?

49. Leida punkt, mille uued ja vanad koordinaadid on võrdsed, kui uueks alguspunktiks on $(-2; 1)$ ja uued teljed moodustavad vanadega teravnurga α , mille tangens on $\frac{4}{3}$.

Polaarkoordinaadistik

50. Konstrueerida punktid, mis on antud oma polaarkoordinaatidega: $A\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$, $B(3; 0)$, $C\left(1; \frac{5\pi}{3}\right)$, $D\left(5; -\frac{\pi}{4}\right)$.

51. Leida punktidega $M\left(2; \frac{\pi}{4}\right)$ ja $N\left(5; \frac{7}{6}\pi\right)$ sümmeetrilised punktid M_1 , N_1 pooluse suhtes ja sümmeetrilised punktid M_2 , N_2 polaartelje suhtes.

52. Leida sirglõigu keskpunkti polaarkoordinaadid, kui otspunktid on

1) $A\left(5; \frac{\pi}{3}\right)$ ja $B\left(9; -\frac{2}{3}\pi\right)$;

2) $A\left(3; \frac{\pi}{6}\right)$ ja $B\left(3; \frac{4}{3}\pi\right)$.

53. Arvutada punktide $A\left(3; \frac{\pi}{15}\right)$ ja $B\left(12; -\frac{\pi}{10}\right)$ vaheline kaugus.

54. Arvutada kolmnurga pindala, kui kolmnurga üheks tipuks on poolus ja kaks teist tippu on $\left(5; \frac{5\pi}{18}\right)$ ja $\left(8; \frac{\pi}{9}\right)$.

55. Arvutada punktide $A\left(4; \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{8}; \frac{3}{4}\pi\right)$ ja $C\left(1; -\frac{\pi}{6}\right)$ Cartesiuse koordinaadid, võttes pooluse alguspunktiks ja polaartelje x -teljeks.

56. Leida Cartesiuse koordinaadistikus antud punktide $A(0; -3)$, $B(\sqrt{3}; 1)$ ja $C(-3\sqrt{2}; -3\sqrt{2})$ polaarkoordinaadid, võttes pooluseks Cartesiuse koordinaatide alguspunkti ja polaartelje x -teljeks.

57. Leida punkti Cartesiuse koordinaadid, kui selle punkti polaarkoordinaadid on $\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$, kusjuures poolus asetseb Cartesiuse koordinaadistiku punktis $(-3; 5)$ ja polaartelg on paralleelne y -teljega, kuid vastupidi suunatud.

§ 2. SIRGJOON JA RINGJOON TASAPINNAL

Joone võrrandiks (mingis koordinaadistikus) nimetatakse kahte muutujat sisaldavat võrrandit, mida rahuldavad joone iga punkti koordinaadid ja ainult need. Joone võrrandis esinevaid muutujaid nimetatakse joone jooksva punkti koordinaatideks.

Sirge tõusuks nimetatakse x -telje ja sirge vahelise nurga tangensit. Kui sirge läbib punkti $P_1(x_1; y_1)$ ja ta tõus on k , siis on sirge võrrand

$$y = y_1 + k(x - x_1). \quad (1)$$

Sirge ja y -telje lõikepunkti ordinaati nimetatakse sirge algordinaadiks. Kui sirge tõus on k ja algordinaat b , siis on ta võrrand

$$y = kx + b. \quad (2)$$

Punkte $P_1(x_1; y_1)$ ja $P_2(x_2; y_2)$ läbiva sirge võrrand on

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}. \quad (3)$$

Kui sirge lõikab koordinaattelgi vastavalt punktides $(a; 0)$ ja $(0; b)$, siis on sirge võrrand

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (4)$$

kusjuures arve a ja b nimetatakse sirge telglõikudeks.

Sirge võrrandit

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \quad (5)$$

kus sirge asendit määravaiks andmeiks on sirge kaugus koordinaatide alguspunktist p ja seda kaugust mõõtva lõigu suunanurk α , nimetatakse sirge normaalkõrrandiks.

Üldist kahe muutujaga lineaarvõrrandit

$$ax + by + c = 0,$$

mis esitab alati (kui a ja b pole korruga nullid) sirget, nimetatakse sirge üldvõrrandiks.

Sirge üldvõrrandi teisendamiseks normaalkujule tuleb teda korrutada normeeriva teguriga

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

mille märgiks on üldvõrrandi vabaliikme c märgi vastandmärk.

Kui sirge s tõus on k_1 ja sirge t tõus k_2 ning nurk sirgest s sirgeni t on φ , siis

$$\tan \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (6)$$

Sirged s ja t on paralleelsed, kui $k_1 = k_2$, ja risti, kui $k_1 k_2 = -1$. Üldvõrranditega $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ ja $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ antud sirgete vahelise nurga tangens avaldub kujul

$$\tan \varphi = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2}. \quad (7)$$

Need sirged on paralleelsed, kui $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, ja risti, kui $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.

Punkti $P_1(x_1; y_1)$ kaugus d normaalkujuga antud sirgest $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ on võrdne selle normaalkujuga vasaku poole absoluutväärtusega, kui seal jooksva punkti koordinaadid asendada P_1 vastavate koordinaatidega:

$$d = |x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p|.$$

Kui sirge normaalkujuga vasaku pooles x ja y asendamisel P_1 koordinaatidega tulemus osutub negatiivseks, siis asetsevad koordinaatide alguspunkt ja P_1 samal pool antud sirget, kui aga positiivseks, siis teine teisel pool.

Punkti $P_1(x_1; y_1)$ kaugus üldvõrrandiga $ax + by + c = 0$ antud sirgest on

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (8)$$

Sirgete $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ ja $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ vaheliste nurkade poolitussirgete võrrandid on

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}. \quad (9)$$

Tasapinna ühes punktis lõikuvate sirgete kogu nimetatakse sirgete kimbuks, nende sirgete ühist punkti kimbu keskpunktiks. Kui $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ ja $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ on kaks lõikuvat sirget, siis esitab võrrand

$$a_1 x + b_1 y + c_1 + \lambda(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0 \quad (10)$$

iga λ puhul nende kahe sirge lõikepunkti läbivat sirget. Vastupidi, võrrandiga (10) on sobival λ valikul esitatav iga antud

kahe sirge lõikepunkti läbiv sirge peale teise antud sirge. Võrrandit (10) nimetatakse seetõttu sirgete kimbu võrrandiks.

Kui ringjoone keskpunkt on $K(x_0; y_0)$ ja raadius r , siis on ringjoone võrrand

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (11)$$

Kui võrrandi

$$kx^2 + ky^2 + 2lx + 2my + n = 0 \quad (k \neq 0) \quad (12)$$

teisendamisel kujule

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = u \quad (13)$$

tuleb $u > 0$, siis esitab võrrand (12) ringjoont, mille keskpunkt on $(p; q)$ ja raadius \sqrt{u} ; kui tuleb $u = 0$, siis esitab (12) punkti $(p; q)$; kui tuleb $u < 0$, siis esitab (12) kujunditult joont (ühegi reaalse punkti koordinaadid ei rahulda võrrandit).

Näiteid

I. Koostada võrrand joonele, mille iga punkti P kauguste ruutude summa punktideni $A(-2; 1)$ ja $B(3; -2)$ võrdub punkti P kauguse ruuduga punktini $C(1; 3)$.

Lahendus. Punkt $P(x; y)$ asetseb ülesandes antud joonel täpselt siis, kui $|AP|^2 + |BP|^2 = |CP|^2$ ehk kui

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = (x - 1)^2 + (y - 3)^2,$$

mida lihtsustades saamegi nõutud võrrandi

$$x^2 + y^2 + 8y + 8 = 0.$$

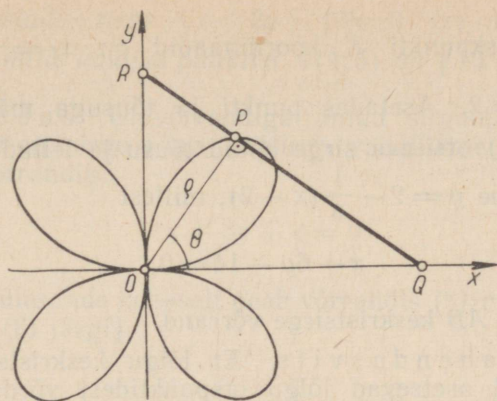
II. Sirglõik pikkusega $2a$ liigub nii, et ta üks otspunkt asetseb kogu aeg polaarteljel ja teine otspunkt polaarteljele poolusest tõmmatud ristsirgel. Koostada polaarkoordinaadistikus võrrand joonele, mille kirjeldab pooluse projektsioon sellel sirglõigul. Teisendada saadud võrrand Cartesiuse koordinaadistikku, võttes alguspunktiks pooluse ja x -teljeks polaartelje.

Lahendus. Olgu $P(\varrho; \theta)$ vaadeldava joone mingi punkt. Siis (joon. 10)

$$|OQ| = \frac{\varrho}{|\cos \theta|}, \quad |OR| = \frac{\varrho}{|\sin \theta|},$$

mida ruutu tõstes ja liites saame

$$|OQ|^2 + |OR|^2 = \varrho^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) = \frac{\varrho^2}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}.$$



Joon. 10

Et aga sõltumatult P asukohast joonel

$$|OQ|^2 + |OR|^2 = |QR|^2 = 4a^2,$$

siis

$$4a^2 = \frac{\rho^2}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$$

ehk $\rho^2 = a^2(2 \sin \theta \cos \theta)^2$ ehk

$$\rho = a |\sin 2\theta|,$$

mis ongi nõutud võrrand polaarkoordinaadistikus. Saadud võrrandi teisendamiseks Cartesiuse koordinaadistikku asendame temas [§ 1, valemite (7) järgi] $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \frac{y}{\rho} \frac{x}{\rho} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$. Saame

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \frac{2|xy|}{x^2 + y^2},$$

millest

$$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2.$$

III. Leida punktide $A(1; -4)$ ja $B(3; 8)$ vahelise lõigu keskriistsirge.

L a h e n d u s. Lõigu AB suunanurga tangens (sirge AB tõus) on § 1, valemi (2) põhjal $k = \frac{8 - (-4)}{3 - 1} = 6$. Otsitava ristsirge tõus on siis niisugune arv k_1 , et $kk_1 = -1$, millest $k_1 = -\frac{1}{6}$.

Lõigu AB keskpunkti K koordinaadid on $x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$ ja $y_1 = \frac{-4+8}{2} = 2$. Asetades punkti ja tõusuga määratud sirge võrrandisse (1) otsitava sirge leitud tõusu ja leitud punkti koordinaadid, saame $y = 2 - \frac{1}{6}(x-2)$, millest

$$x + 6y - 14 = 0,$$

mis ongi lõigu AB keskristsirge võrrand.

Teine lahendusviis. Et lõigu keskristsirge punktid ja ainult need asetsevad lõigu otspunktidest võrdsel kaugusel, siis on $P(x; y)$ lõigu AB keskristsirge punkt täpselt siis, kui $|AP| = |BP|$ ehk $|AP|^2 = |BP|^2$, millest sirglõigu pikkuse valemit rakendades saame

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = (x-3)^2 + (y-8)^2$$

ehk lihtsustatult

$$x + 6y - 14 = 0.$$

IV. Leida sirgel $2x - 3y - 5 = 0$ (s) punktid, mis asetsevad sirgest $x + 2y - 11 = 0$ (t) kaugusel $\sqrt{5}$.

Lahendus. Kõik punktid, mis asetsevad sirgest t kaugusel $\sqrt{5}$, moodustavad paralleelsete sirgete paari. Kui $P(x; y)$ on selle sirgete paari mingi punkt, siis valemi (8) järgi

$$\frac{|x + 2y - 11|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

ehk

$$|x + 2y - 11| = 5$$

ehk

$$x + 2y - 11 = \pm 5.$$

Sirgega t paralleelsed ja temast kaugusel $\sqrt{5}$ asetsevad sirged on seega

$$x + 2y - 16 = 0 \text{ (} u \text{)} \text{ ja } x + 2y - 6 = 0 \text{ (} v \text{)}.$$

Otsitavad punktid on sirgete s ja u ning s ja v lõikepunktid, mille koordinaadid leiame nende sirgete võrrandeist koosnevate süsteemide lahendamisel. Sirgete s ja u lõikepunktiks osutub $\left(\frac{58}{7}; \frac{27}{7}\right)$ ning sirgete s ja v lõikepunktiks $(4; 1)$.

V. *Koostada sirge* $6x + 2y - 13 = 0$ (*s*) *nende ristsirgete võrrandid, mille kaugus punktist* $A(4; 5)$ *on* $\sqrt{10}$.

Lahendus. Üldvõrrandiga antud sirgete ristumise tingimuse järgi on sirge *s* iga ristsirge vabaliikme *c* sobival valikul esitatav võrrandiga

$$x - 3y + c = 0. \quad (*)$$

Käesoleva ülesande kohaselt peab võrrandis (*) *c* olema niisugune, et [valemi (8) järgi]

$$\frac{|4 - 3 \cdot 5 + c|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \sqrt{10},$$

millest $c - 11 = \pm 10$, s. t. $c_1 = 21$, $c_2 = 1$. Järelikult on ülesandes nõutud sirgete võrrandid $x - 3y + 21 = 0$ ja $x - 3y + 1 = 0$.

VI. *Leida sirgete* $2x + 3y - 4 = 0$ (*s*) ja $x - 4y + 2 = 0$ (*t*) *lõikepunkti läbiv sirge, mis moodustab sirgega* $2x + y - 7 = 0$ (*u*) *nurga, mille tangens on* 2.

Lahendus. Et otsitav sirge läbib *s* ja *t* lõikepunkti, siis kuulub ta sirgetega *s* ja *t* määratud kimpu ja on järelikult esitatav võrrandiga

$$2x + 3y - 4 + \lambda(x - 4y + 2) = 0$$

(välja arvatud juhtum, kus otsitavaks osutub sirge *t*) ehk

$$(2 + \lambda)x + (3 - 4\lambda)y - 4 + 2\lambda = 0. \quad (*)$$

Ülesande tingimuste kohaselt nõuame, et sirgete *u* ja (*) vahelise nurga tangens oleks 2. Et sirgete järjekord seejuures ei ole määratud ja sirgest *u* sirgeni (*) mõõdetud nurga tangens erineb sirgest (*) sirgeni *u* mõõdetud nurga tangensist ainult märgi poolest, siis saame valemi (7) põhjal λ määramiseks võrrandid

$$\frac{2 \cdot (3 - 4\lambda) - 1 \cdot (2 + \lambda)}{2 \cdot (2 + \lambda) + 1 \cdot (3 - 4\lambda)} = \pm 2$$

ehk

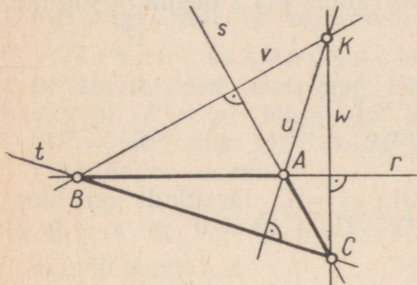
$$\frac{4 - 9\lambda}{7 - 2\lambda} = \pm 2, \text{ millest } \lambda = \frac{4 \mp 14}{9 \mp 4}, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = \frac{18}{13}.$$

Asetades need λ väärtused võrrandisse (*), saame ülesandele kaks vastust:

$$11y - 8 = 0 \text{ ja } 44x - 33y - 16 = 0.$$

VII. Kolmnurga üks külge on $5x + 4y - 17 = 0$ (r) ning kaks kõrgust $4x + y - 18 = 0$ (u) ja $2x - y + 1 = 0$ (v). Leida antud külje vastastipp.

Lahendus. Kolmnurga antud külge r ei ole risti kõrgusega u (sest $5 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \neq 0$) ega kõrgusega v [sest $5 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \neq 0$]. Järelikult on r ja u lõikepunkt A ning r ja v lõikepunkt B kolmnurga tipud (joon. 11). Punkti A läbiv kõrguse v ristsirge s ja punkti B läbiv kõrguse u ristsirge t on kolmnurga küljed. Otsitav külje r vastastipp on külgede s ja t lõikepunkt C .



Joon. 11

Sirge s võrrandi leidmiseks koostame sirgetega r ja u määratud kimbu võrrandi

$$5x + 4y - 17 + \lambda(4x + y - 18) = 0$$

ning määrame λ sirgete s ja v ristumise tingimusest $(5 + 4\lambda) \cdot 2 + (4 + \lambda)(-1) = 0$, millest $\lambda = -\frac{6}{7}$ ja sirge s võrrand on

$$x + 2y - 1 = 0. \quad (s)$$

Analoogiliselt leiame sirgetega r ja v määratud kimbu võrrandis

$$5x + 4y - 17 + \mu(2x - y + 1) = 0$$

parameetri μ tingimusest, et vastav sirge oleks risti sirgega u .

Saame $\mu = -\frac{24}{7}$, nii et sirge t võrrand on

$$x - 4y + 11 = 0. \quad (t)$$

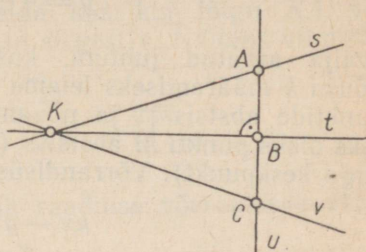
Ülesandes nõutud kolmnurga tipu koordinaatideks saame võrrandist (s) ja (t) koosneva süsteemi lahendamisel $C(-3; 2)$.

Arvutuste kontrollimiseks leiame kolmnurga ABC kolmanda kõrguse w kui antud külje r ristsirge, mis läbib antud kõrguste u ja v lõikepunkti K , ning veendume, et C asetseb sellel kõrgusel. Sirge w võrrand tuleb $4x - 5y + 22 = 0$ ning C koordinaatide

asendamine annab $4 \cdot (-3) - 5 \cdot 2 + 22 = -12 - 10 + 22 = 0$,
nagu peabki olema.

VIII. Nurga üks haar on $3x + 4y - 1 = 0$ (s) ning nurga-
poolitaja $14x - 8y - 3 = 0$ (t).
Leida teine haar.

Lahendus. Võtame sirgel s
vabalt punkti A (mis ei ole s
ja t lõikepunkt), leiame punkti A
ristprojektsiooni B sirgel t ja
nende kahe punkti abil kolmanda
punkti C, mis on punktiga A süm-
meetriiline sirge t suhtes. Otsitav
nurga teine haar läbib s ja t lõi-
kepunkti K ning punkti C
(joon. 12).



Joon. 12

Sirgel s asetseb näiteks punkt $A(-1; 1)$ [sest $3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 - 1 = 0$]. Kirjutades sirge t võrrandi ümber kujul $y = \frac{7}{4}x - \frac{3}{8}$, näeme, et t tõus on $k_1 = \frac{7}{4}$. Tema ristsirge u tõus on siis $k_2 = -\frac{4}{7}$ ja u võrrand $y = 1 - \frac{4}{7}(x + 1)$ ehk

$$4x + 7y - 3 = 0. \quad (*)$$

Lahendades sirgete t ja u võrrandeist koosneva süsteemi, saame nende sirgete lõikepunktiks $B\left(\frac{9}{26}; \frac{3}{13}\right)$. Punktiga A sirge t suhtes sümmeetriiline punkt C jaotab lõigu AB suhtes $\lambda = -2$. Järelikult on C koordinaadid

$$x = \frac{-1 - 2 \cdot \frac{9}{26}}{1 - 2} = \frac{22}{13} \quad \text{ja} \quad y = \frac{1 - 2 \cdot \frac{3}{13}}{1 - 2} = -\frac{7}{13}.$$

Sirgetega s ja t määratud kimbu võrrand on

$$3x + 4y - 1 + \mu(14x - 8y - 3) = 0. \quad (*)$$

Asetades sellesse võrrandisse jooksva punkti koordinaatide asemele C koordinaadid, saame $25 + 325\mu = 0$, millest $\mu = -\frac{1}{13}$, mis asetatuna kimbu võrrandisse (*) annab nurga haara v võrrandiks

$$5x + 12y - 2 = 0.$$

IX. *Leida sirge, mille lõik sirgete $x - 2y + 9 = 0$ (s) ja $3x + 5y + 4 = 0$ (t) vahel poolitub punktis $M(1; 4)$.*

Lahendus. Et otsitav sirge läbib punkti M , siis on ta võrrand esitatav kujul

$$y = 4 + k(x - 1) \quad (*)$$

(välja arvatud juhtum, kus sirge on paralleelne y -teljega). Tõusu k määramiseks leiame sirgete (*) ja s ning (*) ja t lõikepunktide abstsissid ja nõuame, et nende aritmeetiliseks keskmiseks oleks punkti M abstsiss (sest siis on M lõikepunktide-vahelise lõigu keskpunkt). Võrrandisüsteemist

$$\begin{aligned} kx - y + 4 - k &= 0, \\ x - 2y + 9 &= 0 \end{aligned}$$

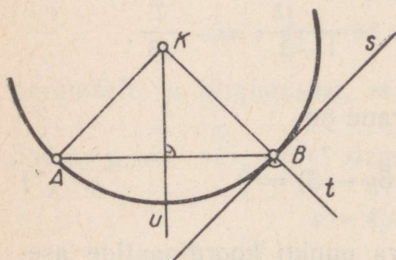
saame sirgete (*) ja s lõikepunkti abstsissiks $x_1 = \frac{2k+1}{2k-1}$ ja süsteemist

$$\begin{aligned} kx - y + 4 - k &= 0, \\ 3x + 5y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

sirgete (*) ja t lõikepunkti abstsissiks $x_2 = \frac{5k-24}{5k+3}$. Nõudest $\frac{x_1+x_2}{2} = 1$ saame $k = \frac{3}{4}$, nii et otsitav sirge on $y = 4 + \frac{3}{4}(x-1)$ ehk $3x - 4y + 13 = 0$.

X. *Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punkti $A(-3; 1)$ ja puudutab sirget $2x - y + 3 = 0$ (s) punktis $B(1; 5)$.*

Lahendus. Ringjoone võrrandi koostamiseks on vaja teada ta keskpunkti ja raadiust. Kõigil ringjoontel, mis puudutavad sirget s punktis B, asetsevad keskpunktid punktis B sirgele s tõmmatud ristsirgel t. Kõigil kahte punkti A ja B läbivatel ringjoontel asetsevad keskpunktid lõigu AB keskristsirgel u. Järelikult on käesoleva ülesande tingimusi rahuldava ringjoone keskpunktiks sirgete t ja u lõikepunkt K.



Joon. 13

Sirge s iga ristsirge on esitatav võrrandiga $x + 2y + C = 0$. Selleks, et ta läbiks punkti B, peab vabaliige C rahuldama tingimust $1 + 2 \cdot 5 + C = 0$, millest $C = -11$. Seega on sirge t võrrand

$$x + 2y - 11 = 0. \quad (t)$$

Lõigu AB keskristsirgeks saame näites III kirjeldatud viisil

$$x + y - 2 = 0. \quad (u)$$

Võrrandeist (t) ja (u) koosnevast süsteemist leiame $K(-7; 9)$.

Ringjoone raadiuse r võime leida kas kui lõigu KA või KB pikkuse või kui punkti K kauguse sirgest s . Näiteks viimasel viisil:

$$r = \frac{|2 \cdot (-7) - 9 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}.$$

Asetades keskpunkti koordinaadid ja raadiuse võrrandisse (11), saame ülesande vastuseks

$$(x + 7)^2 + (y - 9)^2 = 80$$

ehk

$$x^2 + y^2 + 14x - 18y + 50 = 0.$$

XI. Leida ringjoon, mis läbib punkti $A(-1; 5)$ ning puudutab sirgeid

$$3x + 4y - 35 = 0 \quad (s) \quad \text{ja} \quad 4x + 3y + 14 = 0 \quad (t).$$

L a h e n d u s. Kui ringjoon puudutab sirgeid s ja t , siis asetseb ringjoone keskpunkt K neist sirgeist võrdsel kaugusel. Järelikult (sest s ja t lõikuvad) asetseb K sirgete s ja t vaheliste nurkade poolitajate paaril. Nende nurgapoolitajate võrrandite koostamiseks nõuame, et punkt $P(x; y)$ asetseks sirgest s niisama kaugel kui sirgest t . Valemi (8) kohaselt saab see tingimus kuju

$$\frac{|3x + 4y - 35|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|4x + 3y + 14|}{\sqrt{16 + 9}}$$

ehk

$$3x + 4y - 35 = \pm(4x + 3y + 14),$$

millest

$$x - y + 49 = 0, \quad (u)$$

$$x + y - 3 = 0, \quad (v)$$

mis ongi sirgete s ja t vaheliste nurkade poolitussirgete võrrandid.

Edasi asetseb ülesande tingimuste kohaselt otsitava ringjoone keskpunkt K punktist A ja sirgest s (või t) võrdsel kaugusel. Kui punkti kaugused punktist A ja sirgest s on võrdsed, siis rahuldavad ta koordinaadid x ja y tingimust

$$\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 5)^2} = \frac{|3x + 4y - 35|}{\sqrt{9 + 16}}. \quad (*)$$

Võrrandeist (u) ja (*) ning (v) ja (*) koosnevate süsteemide iga reaallahend on meie ülesandes nõutava ringjoone keskpunkti koordinaadipaariks. Asetades võrrandist (u) avaldatud $y = x + 49$ võrrandisse (*) ning lihtsustades, saame x määramiseks võrrandi $x^2 + 46x + 24729 = 0$, millel ei ole reaalseid lahendeid. Võrrandist (v) avaldatud $y = 3 - x$ asetamisel võrrandisse (*) saame $49x^2 + 104x - 404 = 0$, millest $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{202}{49}$ ning seose $y = 3 - x$ järgi vastavalt $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{349}{49}$. Järelikult on ülesandes nõutavaid ringjooni kaks. Ühel on keskpunktiks $K_1(2; 1)$ ja teisel $K_2\left(-\frac{202}{49}; \frac{349}{49}\right)$. Vastavad raadiused saame sirglõigu pikkuse valemist:

$$r_1 = |AK_1| = \sqrt{(2+1)^2 + (1-5)^2} = 5,$$

$$r_2 = |AK_2| = \sqrt{\left(-\frac{202}{49} + 1\right)^2 + \left(\frac{349}{49} - 5\right)^2} = \frac{185}{49}.$$

Otsitavad ringjooned on seega

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \quad \text{ja} \quad \left(x + \frac{202}{49}\right)^2 + \left(y - \frac{349}{49}\right)^2 = \left(\frac{185}{49}\right)^2.$$

XII. Leida ringjoone $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$ puutujad, mis läbivad punkti $A(-2; 1)$.

Lahendus. Kõigepealt leiame antud ringjoone keskpunkti ja raadiuse. Selleks teisendame antud võrrandi kujule (13):

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 - 2y - 6 &= 0, \\ x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 2y + 1 - 1 - 6 &= 0, \\ (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) &= 9 + 1 + 6, \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 &= 16. \end{aligned}$$

Võrreldes viimast võrrandit võrrandiga (11), näeme, et antud ringjoone keskpunkt on $K(3; 1)$ ja raadius $r = 4$.

Ülesandes nõutavaid punkti A läbivaid ringjoone puutujaid saab nüüd leida kui punkti A läbivaid sirgeid, mille kaugus punktist K on 4. Iga punkti A läbiv sirge (välja arvatud y -teljega paralleelne sirge) on esitatav võrrandiga $y = 1 + k(x + 2)$ ehk

$$kx - y + 1 + 2k = 0. \quad (*)$$

Koostame tingimuse, et punkt $K(3; 1)$ asetseks sirgest (*) kaugusel 4:

$$\frac{|k \cdot 3 - 1 + 1 + 2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 4.$$

Asetades sellest tingimusest leitud $k = \pm \frac{4}{3}$ võrrandisse (*), saame otsitavate puutujate võrranditeks

$$4x - 3y + 11 = 0 \quad \text{ja} \quad 4x + 3y + 5 = 0.$$

XIII. Leida ringjoonte $x^2 + y^2 - 6x + y - 4 = 0$ (l) ja $x^2 + y^2 - 28x - 3y - 11 = 0$ (m) lõikepunkti läbiv ringjoon, mille keskpunkt asetseb sirgel $4x - 2y + 7 = 0$ (s).

L a h e n d u s. Otsitava ringjoone keskpunkti võib leida antud ringjoonte lõikepunktide vahelise lõigu keskristsirge (antud ringjoonte keskpunkte läbiva sirge) ja sirge s lõikepunktina ning raadiuse keskpunkti kaugusena ühest antud ringjoonte lõikepunktist. Arvutustöö seisukohalt on lihtsam kasutada järgmist, kimbu võttel põhinevat lahendusviisi.

Koostame võrrandi

$$x^2 + y^2 - 6x + y - 4 + \lambda(x^2 + y^2 - 28x - 3y - 11) = 0 \quad (*)$$

ehk

$$x^2 + y^2 + \frac{-6 - 28\lambda}{1 + \lambda}x + \frac{1 - 3\lambda}{1 + \lambda}y + \frac{-4 - 11\lambda}{1 + \lambda} = 0. \quad (**)$$

Kui antud ringjooned l ja m lõikuvad, siis esitab võrrand (*) iga λ puhul joont, mis läbib l ja m lõikepunkte, sest nende punktide koordinaatide asetamisel võrrandisse (*) saab viimane kuju $0 + \lambda \cdot 0 = 0$. Kui $\lambda \neq -1$, siis saab võrrandile (*) anda kuju (**), millest nähtub [vt. (12)], et (*) esitab kas ringjoont, punkti või kujundit joont. Joonte l ja m lõikumisel kahes erinevas punktis langevad kaks viimast võimalust ära. Järelikult, kui ringjooned l ja m lõikuvad, siis esitab võrrand (*) iga $\lambda \neq -1$ puhul nende lõikepunkte läbivat ringjoont. Sobival λ valikul saab võrrandiga (*) esitada iga l ja m lõikepunkti läbivat ringjoont, välja arvatud ringjoon m.

Meie ülesandes otsitavale ringjoonele vastava λ leidmiseks nõuame, et ringjoone (**) keskpunkti koordinaadid $\left(\frac{3 + 14\lambda}{1 + \lambda}; \frac{-1 - 3\lambda}{2 + 2\lambda} \right)$ rahuldaksid sirge s võrrandit:

$$4 \frac{3 + 14\lambda}{1 + \lambda} - 2 \frac{-1 + 3\lambda}{2 + 2\lambda} + 7 = 0,$$

millest $\lambda = -\frac{1}{3}$. Asetades leitud λ võrrandisse (*) saame ülesande vastuseks

$$2x^2 + 2y^2 + 10x + 6y - 1 = 0.$$

Joone võrrandi mõiste

58. Missugused punktidest $A(1; -4)$ $B(-3; 6)$; $C(0; 0)$, $D(2; -5)$; $E(5; -10)$ asetsevad joonel $2x + y = 0$?

59. Leida joonel $x^2 - 2x + y - 1 = 0$ punktid,

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------------|
| 1) mille abstsiss on -1 ; | 4) mis asetsevad x -teljel; |
| 2) mille ordinaat on -14 ; | 5) mille kaugus y -teljest on 2 . |
| 3) mis asetsevad y -teljel; | |

60. Leida kahe joone lõikepunktid:

- | | |
|-----------------------------|------------------------|
| 1) $3x + y - 1 = 0$, | 2) $2x + y - 3 = 0$; |
| 2) $x^2 - x - 2y + 1 = 0$, | $x - y - 2 = 0$; |
| 3) $x^2 + y^2 - 18 = 0$, | $x + y = 0$; |
| 4) $4x^2 - 3y^2 - 13 = 0$, | $x^2 + 2y^2 - 6 = 0$. |

61. Skitseerida järgmised jooned, leides neil küllaldasel arvul punkte:

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1) $x + y = 0$; | 4) $x^2 + y^2 - 4 = 0$; |
| 2) $2x - 3y + 12 = 0$; | 5) $xy - 2x + 4 = 0$. |
| 3) $x^2 + 2x - y = 0$; | |

62. Koostada joone võrrand, kui joone iga punkt asetseb punktidest $A(2; -3)$ ja $B(1; 4)$ võrdsel kaugusel.

63. Koostada joone võrrand, kui joone iga punkt asetseb punktist $A(0; 1)$ kaks korda kaugemal kui punktist $B(0; 4)$.

64. Koostada joone võrrand, kui joone iga punkti kauguste ruutude vahe punktidest $A(2; 0)$ ja $B(-2; 0)$ on 6 .

65. Koostada joone võrrand, kui joone iga punkti kauguste ruutude summa punktidest $(1; 0)$ ja $(0; 1)$ on 2 .

66. Missugused polaarkoordinaadistikus antud punktidest $A\left(1; \frac{\pi}{6}\right)$, $B(4; \pi)$, $C\left(2; \frac{7}{4}\pi\right)$, $D\left(3; \frac{4}{3}\pi\right)$, $E\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$ asetsevad joonel $\rho = 4 \sin^2 \theta$?

67. Leida joonel $\rho = \frac{2}{\cos \theta}$ punktid, mille polaarnurgad on

- 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) 0 ; 3) $\frac{5}{3}\pi$.

68. Skitseerida järgmised jooned, leides neil küllaldasel arvul punkte:

- 1) $\rho = \frac{\theta}{3\pi}$; 2) $\rho = \frac{\pi}{\theta}$; 3) $\rho = 2^{\frac{\theta}{\pi}}$; 4) $\rho = a(1 - \cos \theta)$;

- 5) $\rho = a \sin 3\theta$; 6) $\rho^2 = a^2 \sin 2\theta$.

69. Leida joone $\rho^2 - 16\rho \cos(\theta - 30^\circ) + 45 = 0$ lõikepunktid polaarteljega.

70. Kui kaugel polaarteljest asetseb joone $\rho = 10(1 + \cos \theta)$ punkt, mille kaugus poolusest on 16 ?

71. Koostada ringjoone võrrand polaarkoordinaadistikus, kui selle ringjoone keskpunkti polaarkoordinaadid on $\left(3; \frac{\pi}{4}\right)$ ning raadius on 2.

72. Koostada sirgjoone võrrand polaarkoordinaadistikus, kui selle sirgjoone kauguse poolusest on 5 ning polaartelje ja poolusest sellele sirgele tõmmatud ristsirge vaheline nurk on $\frac{\pi}{3}$.

73. Koostada joone võrrand polaarkoordinaadistikus, kui joone iga punkti kauguste korrutis punktidest $A(2; 0)$ ja $B(2; \pi)$ on 5.

74. Koostada joone võrrand polaarkoordinaadistikus, kui joone iga punkti kauguste summa poolusest ja punktist $(6; 0)$ on 8.

75. Teisendada järgmised Cartesiuse koordinaadistikus antud joonte võrrandid polaarkoordinaadistikku:

$$\begin{array}{ll} 1) x^2 + y^2 = a^2; & 3) x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0; \\ 2) x^2 - y^2 = a^2; & 4) (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2). \end{array}$$

76. Teisendada järgmised polaarkoordinaadistikus antud joonte võrrandid Cartesiuse koordinaadistikku:

$$\begin{array}{ll} 1) \rho \sin \theta = a; & 3) \rho^2 \sin 2\theta = 6; \\ 2) \rho = 2a \cos \theta; & 4) \rho = \frac{3}{1 - \cos \theta}. \end{array}$$

Punkti ja tõusuga, tõusu ja algordinaadiga ning kahe punktiga määratud sirge võrrandid

77. Koostada sirge võrrand, kui

- 1) sirge tõus on 3 ja ta läbib punkti $(-1; 2)$;
- 2) sirge läbib koordinaatide alguspunkti ja moodustab x -telje positiivse suunaga nurga 60° ;
- 3) sirge tõus on -2 ja algordinaat 6;
- 4) sirge läbib punkte $(-2; 1)$ ja $(3; 6)$;
- 5) sirge telglõigud on 4 ja 6.

78. Leida sirge tõus ja algordinaat, kui sirge võrrand on

$$\begin{array}{ll} 1) 6x - 3y - 8 = 0; & 3) y - 5 = 0; \\ 2) x + y = 0; & 4) 2x + 7y - 21 = 0. \end{array}$$

79. Skitseerida järgmised sirged:

$$\begin{array}{ll} 1) 2x - 3y - 12 = 0; & 4) y + 2 = 0; \\ 2) 4x + 5y + 20 = 0; & 5) 2x + y = 0; \\ 3) x - 6 = 0; & 6) 8x + 12y - 1 = 0. \end{array}$$

80. Koostada punkti (3; -7) paralleelselt koordinaattelgedega läbivate sirgete võrrandid.

81. Leida sirgel, mis läbib punkte (2; -1) ja (3; 5), punktid, mille abstsissid on 1 ja 4.

82. Leida punkte (2; -6) ja (4; -1) läbiva sirge telglõigud ja tõus.

83. Kui suure pindalaga kolmnurga moodustab sirge $2x + 3y - 12 = 0$ koos koordinaattelgedega?

84. Kolmnurga tipud on $A(-2; 7)$, $B(4; -11)$ ja $C(-6; 5)$. Koostada tippu A läbiva mediaani võrrand.

85. Leida kahe sirge lõikepunkt:

$$1) 5x + 2y + 19 = 0, \quad 4x - 3y + 29 = 0;$$

$$2) 6x + 12y - 21 = 0, \quad 4x + 8y - 14 = 0;$$

$$3) 4x - 6y + 5 = 0, \quad 2x - 3y + 1 = 0;$$

$$4) 3x + 8y + 34 = 0, \quad 2x - y - 9 = 0.$$

Nurk kahe sirge vahel, sirgete ristumise ja paralleelsuse tingimused

86. Missugused antud võrrandipaaridest esitavad paralleelseid ja missugused ristuvaid sirgeid:

$$1) y = 2x + 3 \quad \text{ja} \quad y = -\frac{1}{2}x + 1;$$

$$2) y = 3x - 1 \quad \text{ja} \quad y = \frac{1}{3}x - 2;$$

$$3) 2x - y + 5 = 0 \quad \text{ja} \quad 4x - 2y + 3 = 0;$$

$$4) 3x + 7y - 2 = 0 \quad \text{ja} \quad 3x - 7y + 1 = 0;$$

$$5) 2x + 4y - 1 = 0 \quad \text{ja} \quad 2x - y = 0.$$

87. Missuguse parameetri k väärtuse puhul on sirged $2x + 3ky - 5 = 0$ ja $6x - 7y + 1 = 0$ paralleelsed? Risti?

88. Koostada punkti (-3; 2) läbiva ja sirgega $4x - 7y + 3 = 0$ paralleelse sirge võrrand.

89. Leida sirge, mis läbib punkti (5; -8) ja on risti sirgega $4x - 6y + 3 = 0$.

90. Koostada punkti (3; -4) läbiva sirge võrrand, kui sirge on

1) paralleelne sirgega $2x - 5y + 7 = 0$;

2) risti sirgega $x + 3y - 2 = 0$;

3) paralleelne punkte (2; -1) ja (5; 2) läbiva sirgega;

4) risti punkte (1; 3) ja (-5; 4) läbiva sirgega.

91. Leida punkti (-9; -5) ristprojektsioon sirgel $12x + 7y - 50 = 0$.

92. Leida punktiga (-1; 7) sümmeetriline punkt sirge $3x - 5y + 4 = 0$ suhtes.

93. Leida teravnurk sirgete vahel:

1) $y = 5x - 1$, $y = \frac{2}{3}x + 4$;

2) $3x + 2y = 0$, $6x + 4y - 5 = 0$;

3) $(2 - \sqrt{3})x + y + \sqrt{5} = 0$, $x - y = 0$;

4) $5x - 3y + 7 = 0$, $3x + 5y + 1 = 0$.

94. Koostada võrrandid punkti $(1; -2)$ läbivatele sirgetele, mis moodustavad sirgega $3x - 2y + 4 = 0$ nurga 45° .

95. Leida sirged, mis läbivad punkti $(1; -2)$ ja moodustavad sirgega $2x - 5y + 7 = 0$ nurga, mille tangens on 3.

96. Arvutada kolmnurga sisenurkade tangensid, kui kolmnurga küljed on $2x - 5y + 2 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$ ja $4x - 2y + 7 = 0$.

Sirge normaalvõrrand ja punkti kaugus sirgest

97. Missugused järgmistest võrranditest on sirge normaalvõrrandid:

1) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0$; 4) $y + 3 = 0$;

2) $-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + 3 = 0$; 5) $-x - 1 = 0$;

3) $x + y - 2 = 0$; 6) $-\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 2 = 0$.

98. Normeerida antud sirgete võrrandid:

1) $3x + 4y - 5 = 0$; 3) $x + 5 = 0$;

2) $12x - 5y + 26 = 0$; 4) $3x - y - \sqrt{10} = 0$.

99. Leida sirge kaugus koordinaatide alguspunktist ja seda kaugust mõõtva lõigu suunanurk, kui sirge võrrand on

1) $x + y - 2 = 0$; 3) $x + 5 = 0$;

2) $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$; 4) $y - 3 = 0$.

100. Arvutada antud punkti kaugus antud sirgest:

1) $(0; 1)$, $4x - 3y + 8 = 0$;

2) $(-10; 2)$, $8x - 6y + 5 = 0$;

3) $(3; -4)$, $x + 2y = 0$;

4) $(1; 7)$, $5x + 12y - 11 = 0$.

101. Leida punkti $(2; -5)$ kaugus punkti $(-2; 4)$ läbivast sirgest, mis on paralleelne sirgega $6x + 8y + 5 = 0$.

102. Leida punkti $(1; 4)$ kaugus sirgest, mis läbib punkte $(3; 1)$ ja $(4; -3)$.

103. Arvutada ristküliku pindala, kui ristküliku üks tipp on $(1; -2)$ ning kaks külge on $3x + 2y + 7 = 0$ ja $2x - 3y + 5 = 0$.

104. Missugused sirgetest

$$1) x + y - 2 = 0,$$

$$2) 5x - y - 12 = 0,$$

$$3) 3x + 4y + 5 = 0$$

lõikavad punktide $A(2; -3)$ ja $B(4; 1)$ vahelist sirglõiku?

105. Arvutada antud paralleelsete sirgete vaheline kaugus:

$$1) 5x + 12y - 13 = 0, \quad 10x + 24y + 39 = 0;$$

$$2) 12x - 5y - 26 = 0, \quad 12x - 5y + 13 = 0;$$

$$3) 4x - 3y + 15 = 0, \quad 8x - 6y + 25 = 0.$$

106. Leida antud sirgete vaheliste nurkade poolitussirged:

$$1) x - 3y + 5 = 0, \quad 3x - y - 2 = 0;$$

$$2) 2x - 3y + 8 = 0, \quad 6x + 4y - 3 = 0;$$

$$3) 2x + 3y - 2 = 0, \quad x + 2 = 0.$$

107. Leida x -teljel punkt, mis asetseb võrdsel kaugusel sirgeist $3x - 4y - 2 = 0$ ja $4x - 3y + 3 = 0$.

108. Leida sirgega $2x + 3y = 0$ paralleelne sirge, mis asetseb temast kaugusel $2\sqrt{13}$.

109. Leida sirged, mis on paralleelsed sirgega $3x + 4y - 7 = 0$ ja asetsevad punktist $(1; -2)$ kaugusel 3.

Sirgete kimp

Järgmised ülesanded lahendada ilma antud sirgete lõikepunkti leidmata.

110. Leida sirgete $5x + 3y - 1 = 0$ ja $7x + 4y - 4 = 0$ lõikepunkti läbiv sirge, mis on paralleelne sirgega $18x + 10y - 3 = 0$.

111. Koostada sirgete $5x + 3y - 4 = 0$ ja $x - 7y - 3 = 0$ lõikepunkti ning punkti $(-1; 2)$ läbiva sirge võrrand.

112. Leida sirgete $5x + 2y - 4 = 0$ ja $3x - y - 9 = 0$ lõikepunkti läbiv sirge, mis on risti sirgega $4x + y = 0$.

113. Leida sirgete $x - 2y - 1 = 0$ ja $2x + 3y + 19 = 0$ lõikepunkti projektsioon sirgel $2x + 3y - 7 = 0$.

114. Leida sirgete $x + y - 6 = 0$ ja $2x + y - 13 = 0$ lõikepunkti läbiv sirge, mille telglõigud on võrdsed.

115. Leida sirgete $5x - 7y + 3 = 0$ ja $2x + 8y - 1 = 0$ lõikepunkti läbiv sirge, mille

1) tõus on 2;

2) algordinaat on -1 .

116. Koostada sirgete $3x + 2y - 9 = 0$ ja $x + y - 4 = 0$ lõikepunkti läbiva sirge võrrand, kui see sirge moodustab esimese antud sirgega nurga 45° .

117. Leida sirgete $5x + 4y + 6 = 0$ ja $x + 3y + 10 = 0$ lõikepunkti läbiv sirge, mille kaugus koordinaatide alguspunktist on 4.

Mitmesuguseid ülesandeid sirge kohta

118. Kolmnurga tipud on $A(4; 6)$, $B(-4; 2)$ ja $C(0; 3)$. Leida kolmnurga pindala ja tipust A tõmmatud kõrguse võrrand.

119. Nelinurga tipud on $A(-9; 0)$, $B(-3; 6)$, $C(3; 4)$ ja $D(6; -3)$. Leida diagonaalide lõikepunkt ja nurk nende vahel.

120. Kolmnurga kaks külge on

$$3x - y - 3 = 0 \quad \text{ja} \quad 6x - y - 3 = 0$$

ning üks mediaan $3x - 2y + 3 = 0$. Leida kolmas külge.

121. Kolmnurga kaks tippu on $A(2; 1)$ ja $B(-2; 5)$ ning mediaanide lõikepunkt on $(-1; -1)$. Koostada tippu B läbiva kõrguse võrrand.

122. Kolmnurga kaks tippu on $(5; 4)$ ja $(3; -4)$ ning kõrguste lõikepunkt $(3; 3)$. Leida kolmas tipp.

123. Koostada punkti $(5; 3)$ läbiva ning punktidest $(3; -7)$ ja $(-15; 11)$ võrdsel kaugusel asetseva sirge võrrand.

124. Arvutada punkti $(2; 1)$ kaugus sirgest, mis läbib punkti $(1; 3)$ ja on risti sirgega $3x - 4y + 2 = 0$.

125. Leida sirgel $3x + 2y - 3 = 0$ punkt, mis asetseb punktidest $(2; 1)$ ja $(3; -1)$ võrdsel kaugusel.

126. Leida sirgel $x + 2y - 12 = 0$ punkt, mis asetseb sirgeist $x + y - 5 = 0$ ja $7x - y + 11 = 0$ võrdsel kaugusel.

127. Leida joon, mille iga punkt on sirgest $x + y - 2 = 0$ kolm korda kaugemal kui sirgest $7x - y + 3 = 0$.

128. Leida sirgel $3x - y - 13 = 0$ punktid, mille kaugus sirgest $2x + y + 3 = 0$ on $\sqrt{5}$.

129. Leida sirgel $x + y - 8 = 0$ punktid, mis asetsevad punktist $(2; 8)$ ja sirgest $x - 3y + 2 = 0$ võrdsel kaugusel.

130. Koostada võrdhaarse kolmnurga aluse võrrand, kui haarad on

$$2x + 3y - 12 = 0 \quad \text{ja} \quad 3x + 2y - 12 = 0$$

ning alus läbib punkti $(5; -1)$;

131. Leida punkt, mis asetseb võrdsel kaugusel punktidest $(2; 3)$, $(-2; 1)$ ja $(1; 5)$.

132. Koostada niisuguse sirge võrrand, mille lõik sirgete

$$x + y - 10 = 0 \quad \text{ja} \quad x + y - 3 = 0$$

vahel on 5 ja mis asetseb punktidest $(1; 3)$ ja $(5; 2)$ võrdsel kaugusel.

133. Leida sirge, mille lõik sirgete $x - 3y + 10 = 0$ ja $2x + y - 8 = 0$ vahel poolitub punktis $(0; 1)$.

134. Leida punkti $(6; 1)$ läbiv sirge, mille kaugus punktist $(-1; 2)$ on 5.

135. Kolmnurga üks tipp on (2; 9) ning kaks kõrgust $5x - 8y - 3 = 0$ ja $3x + 10y - 31 = 0$. Koostada selle kolmnurga antud tipu vastaskülje võrrand.

136. Kolmnurga ABC külje AB võrrand on $4x + 3y - 3 = 0$ ning tippude A ja B sisenurkade poolitajate võrrandid

$$7x + 4y + 1 = 0 \quad \text{ja} \quad y + 3 = 0.$$

Leida küljed AC ja BC .

Ringjoon

137. Koostada ringjoone võrrand, kui

1) ringjoone keskpunkt on koordinaatide alguspunkt ja raadius on 5;

2) ringjoone keskpunkt on (2; -3) ja raadius on 4;

3) ringjoone keskpunkt on (3; -4) ja ringjoon läbib koordinaatide alguspunkti;

4) punktid $A(1; 8)$ ja $B(-5; 2)$ on ringjoone ühe diameetri otspunktid.

138. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoone keskpunkt on (2; -8) ja üks puutuja $4x + 3y - 4 = 0$.

139. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoon puudutab x -telge punktis, mille abstsiss on 5, ja läbib punkti (2; -3).

140. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punkti (2; 1) ja puudutab sirget $x + 2y - 3 = 0$ punktis, mille abstsiss on -1.

141. Ringjoon puudutab koordinaattelgi ja läbib punkti (-8; 4). Koostada selle ringjoone võrrand.

142. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoone keskpunkt asetseb sirgel $x + 3y = 0$ ja ringjoon puudutab sirget $2x - y + 5 = 0$ punktis (-1; 3).

143. Leida ringjoon, mis läbib punkte (-1; 7) ja (4; 1) ning mille keskpunkt on y -teljel.

144. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punkte $A(3; 1)$ ja $B(-1; 3)$ ning ta keskpunkt asetseb sirgel $3x - y - 2 = 0$.

145. Koostada punkte (7; 7), (0; 8) ja (-2; 4) läbiva ringjoone võrrand.

146. Ringjoone raadius on $\sqrt{41}$ ning ta läbib punkte (1; 4) ja (2; -5). Koostada selle ringjoone võrrand.

147. Leida ringjoon, mille keskpunkt asetseb sirgel $x + 3y - 1 = 0$, kui ringjoone raadius on $\sqrt{13}$ ja ta puudutab sirget $2x - 3y - 1 = 0$.

148. Leida ringjoon, mille kaks puutujat on

$$x + 2y - 1 = 0 \quad \text{ja} \quad 2x + y + 7 = 0$$

ning mille keskpunkt asetseb sirgel $3x - 2y + 1 = 0$.

149. Leida ringjoon, mille keskpunkt asetseb sirgel $5x + 7y + 2 = 0$ ning mis puudutab sirgeid $x + y + 3 = 0$ ja $x + y - 2 = 0$.

150. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoon puudutab sirgeid

$$x - 7y + 5 = 0 \quad \text{ja} \quad x + y + 13 = 0,$$

seejuures esimest punktis, mille abstsiss on 2.

151. Leida ringjoon, mille kaks puutujat on

$$4x - 3y + 20 = 0 \quad \text{ja} \quad 3x + 4y - 60 = 0$$

ning mille raadius on 5.

152. Leida ringjoon, mille keskpunkt asetseb sirgel $x + y - 8 = 0$, kui ringjoon läbib punkti (2; 8) ja puudutab sirget $x - 3y + 2 = 0$.

153. Missugused järgmistest võrranditest esitavad ringjooni? Leida keskpunktid ja raadiused.

- 1) $x^2 + y^2 + 6y = 0$;
- 2) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$;
- 3) $3x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$;
- 4) $2x^2 + 2y^2 + 3x - y + 2 = 0$;
- 5) $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$.

154. Kuidas asetsevad ringjoone $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ suhtes punktid $A(1; -3)$, $B(2; -1)$ ja $C\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$?

155. Leida joone $2x^2 + 2y^2 + x = 0$ pikkus.

156. Leida ringjoone

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y - 1 = 0$$

sisse joonestatud ruudu tipud, kui ruudu küljed on paralleelsed koordinaattelgedega.

157. Leida ringjoone $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ sirgel $2x - y + 8 = 0$ asetseva kõõlu pikkus.

158. Arvutada ringjoonele

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$$

punkti (4; -5) tõmmatud puutujalõigu pikkus.

159. Leida ringjoonega

$$3x^2 + 3y^2 - 2x + 7y - 15 = 0$$

konsentriline ringjoon, mis läbib punkti (1; 2).

160. Leida ringjoone

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$$

keskpunkti ristprojektsioon sirgel $x - 2y + 1 = 0$.

161. Leida antud sirge ja ringjoone lõikepunktid:

- 1) $x + 2y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$;
- 2) $4x + 3y - 35 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$;
- 3) $5x + 4y - 20 = 0$, $x^2 + y^2 + 8x = 0$;
- 4) $x + y - 5 = 0$, $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

162. Koostada ringjoonte

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 &= 0, \\(x - 1)^2 + (y + 3)^2 &= 9\end{aligned}$$

lõikepunkte läbiva sirge võrrand.

163. Leida ringjoonte

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 2x - 6y - 40 &= 0, \\x^2 + y^2 - 10x + 26y + 144 &= 0\end{aligned}$$

lõikepunktide vahelise lõigu keskpunkt.

164. Leida ringjoonel $x^2 + y^2 + 2x - 8y = 0$ punkt, mis asetseb koordinaatide alguspunktist kõige kaugemal.

165. Leida ringjoon, mis läbib ringjoonte

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 8x - 8y - 4 &= 0, \\x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 &= 0\end{aligned}$$

lõikepunkte ja punkti (1; 3).

166. Leida ringjoonte

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 4x &= 0, \\x^2 + y^2 - 2x + 6y + 2 &= 0\end{aligned}$$

lõikepunkte läbiv ringjoon,

- 1) mille keskpunkti ordinaat on 2;
- 2) mille keskpunkt asetseb sirgel $x + 2y - 1 = 0$;
- 3) mis läbib esimese antud ringjoone keskpunkti.

167. Koostada ringjoone

$$x^2 + y^2 - 7x + 6y + 12 = 0$$

nende puutujate võrrandid, mille puutepunktid asetsevad x -teljel.

168. Leida ringjoone

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$$

puutujad, mis on paralleelsed sirgega $3x - 4y = 0$.

169. Leida ringjoone $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ puutujad, mis läbivad koordinaatide alguspunkti.

170. Kui suure nurga all paistab ringjoon $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ punktist (1; 6)?

171. Leida joon, mille iga punkt asetseb punktist (0; -3) kaks korda kaugemal kui punktist (0; 3).

172. Leida joon, mille iga punkti kauguse ruut punktist (2; 7) on 10 korda suurem kui kaugus sirgest $3x + 4y + 4 = 0$.

§ 3. TEIST JÄRKU JOONED

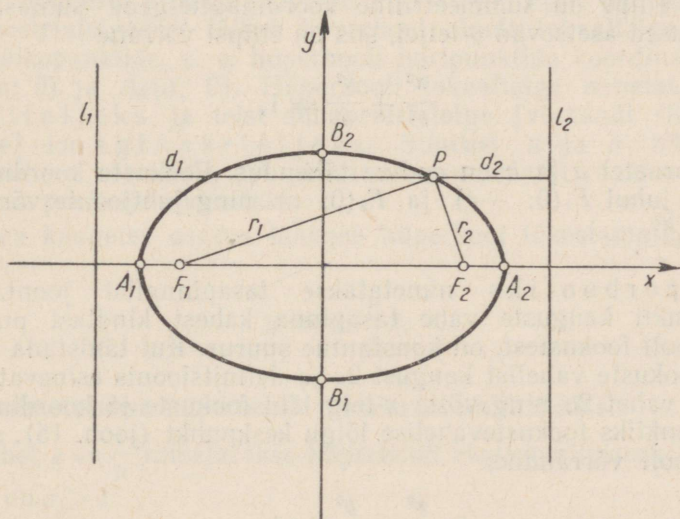
Ellipsiks nimetatakse tasapinnalist joont, mille iga punkti kauguste summa kahest tasapinna kindlast punktist, ellipsi fookustest, on konstantne suurus. Seda konstantset suurust tähistatakse $2a$ ja fookustevahelist kaugust $2c$. Võttes x -telje läbi fookuste ning koordinaatide alguspunktiks fookustevahelise lõigu keskpunkti (joon. 14), saame ellipsi võrrandi lihtsaimal, nn. kaanonilisel kujul:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

kus

$$b^2 = a^2 - c^2. \quad (2)$$

Koordinaadistiku kirjeldatud valiku puhul on ellips sümmeetriline koordinaattelgedele ja koordinaatide alguspunkti suhtes. Ellipsi sümmeetriatelgi nimetatakse ka lihtsalt ellipsi telge-



Joon. 14

deks ja sümmeetriakeskpunkti ellipsi keskpunktiks. Kanoonilise võrrandi puhul on ellipsi fookuste koordinaadid $F_1(-c; 0)$ ja $F_2(c; 0)$. Ellipsi lõikepunkte oma sümmeetriatelgedega nimetatakse ellipsi haripunktideks. Haripunktide koordinaadid on $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$ ja $B_2(0; b)$. Haripunktidevahelist lõiku A_1A_2 , mille pikkus on $2a$, nimetatakse ellipsi pikemaks teljeks (ehk fokaalteljeks) ja lõiku B_1B_2 , mille pikkus on $2b$, lühemaks teljeks. Kanoonilises võrrandis (1) esinevad suurused a ja b on seega ellipsi pooltelgede pikkused.

Ellipsi ekstsentrilisuseks nimetatakse suhet $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Ellipsi ekstsentrilisus on väiksem kui 1.

Fokaaltelje ristsirgeid l_1 ja l_2 , mis asetsevad ellipsi keskpunkti kaugusel $\frac{a^2}{c}$ (joon. 14), nimetatakse ellipsi juhtjoonteks. Kanoonilisele võrrandile vastava koordinaadistiku puhul on juhtjoonte võrrandid

$$x = \pm \frac{a^2}{c}.$$

Ellipsi iga punkti kaugus fookusest, jagatud sama punkti kaugusega sellele fookusele lähemast juhtjoonest, on konstantne suurus, mis võrdub ellipsi ekstsentrilisusega:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

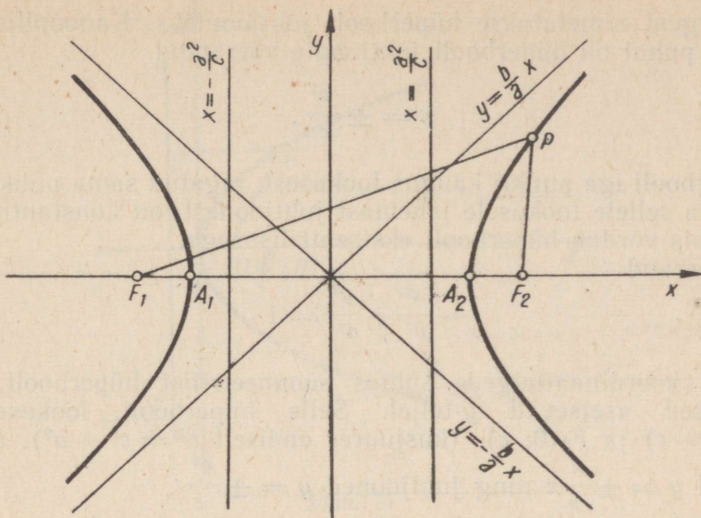
Kui ellips on sümmeetriline koordinaattelgede suhtes, kuid ta fookused asetsevad y -teljel, siis on ellipsi võrrand

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

kus suurustel a ja b on endine tähendus. Fookuste koordinaadid on sel juhul $F_1(0; -c)$ ja $F_2(0; c)$ ning juhtjoonte võrrandid $y = \pm \frac{a^2}{c}$.

Hüperbooliks nimetatakse tasapinnalist joont, mille iga punkti kauguste vahe tasapinna kahest kindlast punktist, hüperbooli fookustest, on konstantne suurus. Kui tähistada hüperbooli fookuste vahelist kaugust $2c$ ja definitsioonis esinevat konstantset vahet $2a$ ning võtta x -telg läbi fookuste ja koordinaatide alguspunktiks fookustevahelise lõigu keskpunkt (joon. 15), siis on hüperbooli võrrandiks

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3)$$



Joon. 15

kus

$$b^2 = c^2 - a^2. \quad (4)$$

Võrrandit (3) nimetatakse hüperbooli kanooniliseks võrrandiks. Kanoonilise võrrandi puhul on hüperbool sümmeetriline koordinaattelgedele ja koordinaatide alguspunkti (hüperbooli keskpunkti) suhtes; fookuste koordinaadid on $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ (joon. 15). Sümmeetriatelgedest lõikab hüperbool ainult fokaaltelge. Vastavate lõikepunktide, s. o. hüperbooli haripunktide koordinaadid on $A_1(-a; 0)$ ja $A_2(a; 0)$. Hüperbooli fokaaltelge nimetatakse ka reaalteljeks ja teist sümmeetriatelge [võrrandi (3) puhul y -telge] imaginaarteljeks. Suurusi a ja b hüperbooli kanoonilises võrrandis (3) nimetatakse vastavalt reaalse ja imaginaarse pooltelje pikkusteks.

Oma kaugetes osades läheneb hüperbool tõkestamatult sirgetele

$$y = \pm \frac{b}{a} x, \quad (5)$$

mida nimetatakse hüperbooli asümptootideks.

Suhet $\varepsilon = \frac{c}{a}$ nimetatakse hüperbooli ekstsentrilisuseks. Hüperboolil on $\varepsilon > 1$.

Hüperbooli keskpunktist kaugusel $\frac{a^2}{c}$ asetsevaid fokaaltelje

ristirsigeid nimetatakse hüperbooli juhtjoonteks. Kanoonilise võrrandi puhul on hüperbooli juhtjoonte võrrandid

$$x = \pm \frac{a^2}{c}.$$

Hüperbooli iga punkti kaugus fookusest, jagatud sama punkti kaugusega sellele fookusele lähemast juhtjoonest, on konstantne suurus, mis võrdub hüperbooli ekstsentrilisusega.

Võrrand

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (6)$$

esitab koordinaattelgede suhtes sümmeetrilist hüperbooli, mille fookused asetsevad y -teljel. Selle hüperbooli fookused on $F_1(0; -c)$ ja $F_2(0; c)$ (kusjuures endiselt $b^2 = c^2 - a^2$), asümptootidid $y = \pm \frac{a}{b}x$ ning juhtjooned $y = \pm \frac{a^2}{c}$.

Võrdsete pooltelgedega hüperbooli $x^2 - y^2 = a^2$ nimetatakse võrdhaarseks hüperbooliks ehk risthüperbooliks. Võrdhaarse hüperbooli asümptootidid on risti.

Parabooliks nimetatakse tasapinnalist joont, mille iga punkt asetseb tasapinna ühest kindlast punktist, parabooli fookusest, ja kindlast sirgest, parabooli juhtjoonest, võrdsel kaugusel. Parabooli kanooniliseks võrrandiks on

$$y^2 = 2px, \quad (7)$$

kus p on fookuse kaugus juhtjoonest. Kanoonilise võrrandi puhul on x -telg suunatud risti juhtjoonega läbi fookuse ning y -telg asetseb võrdsel kaugusel juhtjoonest ja fookusest. Juhtjoone võrrandiks on seega $x = -\frac{p}{2}$ ja fookuse koordinaatideks $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

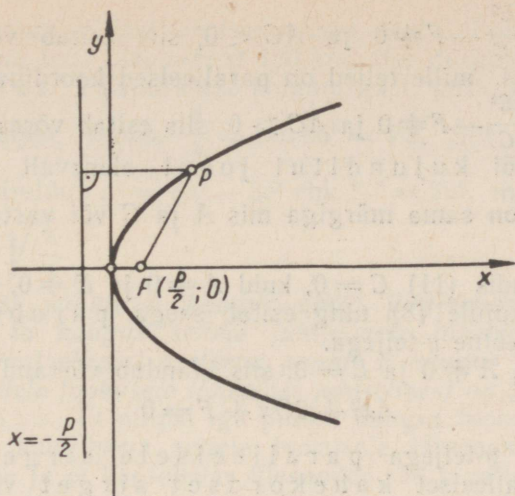
Parabool (7) on sümmeetriline x -telje suhtes ja ta haripunktiks on koordinaatide alguspunkt (joon. 16). Kordajat $2p$ parabooli võrrandis nimetatakse parabooli fokaallaiuseks, sest ta on võrdne parabooli selle kõõlu pikkusega, mis läbib fookust ja on risti parabooli teljega.

Võrrand $y^2 = -2px$ ($p > 0$) esitab parabooli, mille teljeks on x -telg ja haripunktiks koordinaatide alguspunkt, kuid mis avaneb x -telje negatiivses suunas. Võrrandite $x^2 = 2py$ ja $x^2 = -2py$ ($p > 0$) puhul on tegemist parabooliga, mille teljeks on y -telg ja haripunktiks koordinaatide alguspunkt ning mis esimesel juhul avaneb y -telje positiivses suunas, teisel juhul y -telje negatiivses suunas.

Võrrand

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (8)$$

kus $a \neq 0$, esitab parabooli, mille telg on paralleelne y -teljega



Joon. 16

ning mis avaneb y -telje positiivses suunas, kui $a > 0$, ja negatiivses suunas, kui $a < 0$.

Kui teist järku joone üldvõrrandis

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad (9)$$

on $b \neq 0$, siis on alati võimalik koordinaadistikku pöörata ümber alguspunkti niisuguse teravnurga α võrra, et teisendatud koordinaadistikus puudub selle joone võrrandis liige jooksva punkti koordinaatide korrutisega. Vastav $\tan \alpha$ on ruutvõrrandi

$$b \tan^2 \alpha + (a - c) \tan \alpha - b = 0 \quad (10)$$

positiivne lahend.

Teise astme võrrand

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (11)$$

milles $A \neq 0$ ja $C \neq 0$, on teisendatav kujule

$$A \left(x + \frac{D}{A} \right)^2 + C \left(y + \frac{E}{C} \right)^2 = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F. \quad (12)$$

Kui siin $\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F = 0$, siis esitab võrrand kas punkti $\left(-\frac{D}{A}; -\frac{E}{C} \right)$ või selles punktis lõikuvate sirgete paari olenevalt sellest, kas A ja C on samamärgilised ($AC > 0$) või vastandmärgilised ($AC < 0$).

Kui $\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F \neq 0$ ja $AC < 0$, siis esitab võrrand (11) hüperbooli, mille teljed on paralleelsed koordinaattelgedega.

Kui $\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F \neq 0$ ja $AC > 0$ siis esitab võrrand (11) kas ellipsit või kujundit jooant olenevalt sellest, kas $\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F$ on sama märgiga mis A ja C või vastupidise märgiga.

Kui võrrandis (11) $C = 0$, kuid $A \neq 0$ ja $E \neq 0$, siis taandub see võrrand kujule (8) ning esitab seega parabooli, mille telg on paralleelne y -teljega.

Kui $C = 0$, $A \neq 0$ ja $E = 0$, siis taandub võrrand (11) kujule

$$Ax^2 + 2Dx + F = 0$$

ja esitab kas y -teljega paralleelsete sirgete paari, y -teljega paralleelset kahekordset sirget või kujundit jooant vastavalt sellele, kas avaldis $D^2 - AF$ on positiivne, null või negatiivne.

Kui $A = 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, siis esitab võrrand parabooli, mille telg on paralleelne x -teljega, ja kui $A = 0$, $C \neq 0$, $D = 0$, siis x -teljega paralleelsete sirgete paari, x -teljega paralleelset kahekordset sirget või kujundit jooant.

Näiteid

I. Koostada ellipsi kanooniline võrrand, kui ellipsi juhtjoonte vaheline kaugus on 9 ja fookuse kaugus lähimast haripunkti on 1.

Lahendus. Ülesande tingimustest järelduvad võrrandid

$$2\frac{a^2}{c} = 9 \quad \text{ja} \quad a - c = 1,$$

millest $2a^2 - 9a + 9 = 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = \frac{3}{2}$ ja $c_1 = 2$, $c_2 = \frac{1}{2}$.

Valemi (2) põhjal $b_1^2 = a_1^2 - c_1^2 = 9 - 4 = 5$, $b_2^2 = a_2^2 - c_2^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2$. Seega on ülesandel kaks lahendit:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

II. Leida ellipsi $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ fookuste vaheline kaugus ja ekstsentrilisus.

Lahendus. Antud ellipsi võrrandist järeldub, et $a^2 = 16$ ja $b^2 = 7$. Siis $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 7 = 9$. Seega $2c = 2 \cdot 3 = 6$

ja $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$.

III. Arvutada ellipsi ekstsentrilisus, kui ellipsi pikem telg paistab lühema telje otspunktist 120-kraadise nurga all.

Lahendus. Täisnurksest kolmnurgast, mille kaatetiteks on ellipsi poolteljed, saame $\frac{a}{b} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Siit koos seosega $b^2 = a^2 - c^2$ järeldub $a^2 = 3a^2 - 3c^2$ ehk $3c^2 = 2a^2$, millest $\frac{c^2}{a^2} = \frac{2}{3}$ ja $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

IV. Ellipsi punkti A kaugus ühest juhtjoonest on 5 korda suurem kui ta kaugus sellele juhtjoonele lähemast fookusest. Arvutada samal ellipsil asetseva punkti B kaugus fookusest, kui B kaugus sellele fookusele lähemast juhtjoonest on 3.

Lahendus. Et ellipsi iga punkti kaugus fookusest, jagatud sama punkti kaugusega sellele fookusele lähemast juhtjoonest, on konstantne ja et käesolevas ülesandes see jagatis on punkti A puhul $\frac{1}{5}$ siis on ka punkti B kaugus fookusest $\frac{1}{5}$ B kaugusest juhtjoonest, seega $\frac{3}{5}$.

V. Koostada ellipsi juhtjoonte võrrandid, kui ellips on sümmeetriline koordinaattelgede suhtes ja läbib punkte $A(3; 2\sqrt{2})$ ja $B(\sqrt{3}; -4)$.

Lahendus. Koordinaattelgede suhtes sümmeetrilise ellipsi võrrandit otsime kujul

$$kx^2 + ly^2 = 1.$$

Punktid A ja B asetsevad sellel ellipsil, kui

$$k \cdot 3^2 + l \cdot (2\sqrt{2})^2 = 1,$$

$$k \cdot (\sqrt{3})^2 + l \cdot (-4)^2 = 1.$$

Lahendades selle lineaarvõrrandisüsteemi, saame $k = \frac{1}{15}$ ja $l = \frac{1}{20}$. Ellipsi võrrand on seega $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{20} = 1$. Et selles võrrandis on y^2 jagaja suurem x^2 jagajast, siis on ellipsi fokaalteljeks y -telg ja $a^2 = 20$, $b^2 = 15$. Järelikult $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{20 - 15} = \sqrt{5}$ ja $\frac{a^2}{c} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$. Ellipsi juhtjooned on seega $y = \pm 4\sqrt{5}$.

VI. Leida ellipsi

$$5x^2 + 9y^2 - 40x + 18y + 44 = 0$$

poolteljed ja fookused.

L a h e n d u s. Teisendame antud võrrandit järgmiselt:

$$\begin{aligned} 5(x^2 - 8x) + 9(y^2 + 2y) + 44 &= 0, \\ 5(x^2 - 8x + 16 - 16) + 9(y^2 + 2y + 1 - 1) + 44 &= 0, \\ 5(x^2 - 8x + 16) - 80 + 9(y^2 + 2y + 1) - 9 + 44 &= 0, \\ 5(x-4)^2 + 9(y+1)^2 &= 45, \\ \frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} &= 1. \end{aligned}$$

Võttes viimases võrrandis $x-4=x'$ ja $y+1=y'$ ehk $x=x'+4$ ja $y=y'-1$, s. t. viies paralleellükkega koordinaatide alguspunkti punkti $O'(4; -1)$, saame uutes koordinaatides võrrandile kuju

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{5} = 1,$$

millest nähtub, et vaadeldav joon on ellips, mille keskpunktiks on $O'x'y'$ -teljestiku alguspunkt, fokaalteljeks x' -telg ja pooltelgedeks $a = \sqrt{9} = 3$, $b = \sqrt{5}$. Fookuste leidmiseks arvutame $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 5} = 2$. Vaadeldava ellipsi fookused on seega punktid, mis asetsevad ellipsi keskpunktist $O'(4; -1)$ kaugusel 2 punkti O' läbival x -telje paralleelil. Fookused on järelikult $F_1(2; -1)$ ja $F_2(6; -1)$.

VII. Koostada hüperbooli võrrand, kui hüperbooli asümptoodid on $2x \pm 3y = 0$ ja fookustevaheline kaugus on 26.

L a h e n d u s. Ülesandes antud asümptoodipaar on sümmeetriline koordinaatteljestiku suhtes. Järelikult on otsitava hüperbooli võrrandiks kas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{või} \quad -\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Esimese võrrandi puhul on asümptootide tõsusud $\pm \frac{b}{a}$, teise võrrandi puhul $\pm \frac{a}{b}$. Seega rahuldavad otsitava hüperbooli a , b ja c tingimusi

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{3}, \quad 2c = 26, \quad b^2 = c^2 - a^2$$

või

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}, \quad 2c = 26, \quad b^2 = c^2 - a^2,$$

millest esimesel juhul $a^2 = 117$, $b^2 = 52$ ja teisel juhul $a^2 = 52$, $b^2 = 117$, nii et hüperbooli võrrand on kas $\frac{x^2}{117} - \frac{y^2}{52} = 1$ või

$$-\frac{x^2}{117} + \frac{y^2}{52} = 1.$$

VIII. Koostada hüperbooli võrrand, kui hüperbooli fookusteks on koordinaatide alguspunkt ja punkt $F(4; 4)$ ning hüperbool läbib punkti $A(0; 1)$.

Lahendus. Punkti A kaugused fookustest on $|OA| = 1$ ja $|FA| = \sqrt{4^2 + (4-1)^2} = 5$. Punkti A kauguste vahe fookustest on seega $2a = 5 - 1 = 4$. Hüperbooli mistahes punkti $P(x; y)$ puhul on siis kauguste vahe fookustest samuti 4: $\pm |OP| \mp |FP| = 4$, millest

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} \mp \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} = 4$$

ehk

$$\mp \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} = 4 \mp \sqrt{x^2 + y^2},$$

mida ruutu tõstes saame

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 = 16 \mp 8\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2$$

ehk

$$-x - y + 2 = \sqrt{x^2 + y^2},$$

millest

$$x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 4x - 4y = x^2 + y^2$$

ehk

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0,$$

mis ongi nõutud hüperbooli võrrand.

IX. Veenduda, et võrrand

$$9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y + 101 = 0$$

esitab hüperbooli, ja leida selle hüperbooli asümptoodid.

Lahendus. Teisendades antud võrrandit samuti nagu näites VI, saame

$$-\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1,$$

millest nähtub, et antud võrrand esitab hüperbooli, mille keskpunkt on $(-3; 2)$, teljed on paralleelsed koordinaattelgedega, kusjuures fokaaltelg on paralleelne y -teljega, ja poolteljed on $a = 3$, $b = 2$. Selle hüperbooli asümptoodid on järelikult sirged,

mis läbivad punkti $(-3; 2)$ ja mille tõusud on $\pm \frac{a}{b} = \pm \frac{3}{2}$.

Asümptootide võrrandid on seega $y = 2 \pm \frac{3}{2}(x+3)$ ehk $3x - 2y + 13 = 0$ ja $3x + 2y + 5 = 0$.

X. Leida parabooli fookus, kui parabooli haripunktiks on koordinaatide alguspunkt ja teljeks x -telg ning parabool läbib punkti $A(3; -6)$.

Lahendus. Ülesande tingimustega määratud parabooli võrrandi kuju on $y^2 = 2px$. Et parabool läbib punkti A , siis $(-6)^2 = 2p \cdot 3$, millest $p = 6$. Parabooli $y^2 = 2px$ fookuse koordinaadid on $(\frac{p}{2}; 0)$, meie juhul seega $(3; 0)$.

XI. Koostada parabooli $x^2 - 6x + 4y + 29 = 0$ juhtjoone võrrand.

Lahendus. Teisendades antud võrrandi kujule $(x - 3)^2 = -4(y + 5)$, järeldame nagu näite VI puhul, et võrrand esitab parabooli, mille haripunkt on $(3; -5)$ ja fokaallaius $2p = 4$, kusjuures selle parabooli telg on paralleelne y -teljega ning parabool avaneb y -telje negatiivses suunas. Selle parabooli juhtjooneks on järelikult x -teljega paralleelne sirge, mille punktide ordinaadid on $\frac{p}{2} = 1$ võrra suuremad haripunkti ordinaadist -5 . Juhtjoone võrrand on seega $y + 4 = 0$.

XII. Uurida, missuguseid jooni esitab võrrand

$$kx^2 + y^2 + 4kx - 6y - 16 = 0$$

olenevalt parameetrist k .

Lahendus. Kui antud võrrandis $k = 0$, s. t. võrrand on $y^2 - 6y - 16 = 0$, siis teisendub ta kujule $(y - 8)(y + 2) = 0$. Sellest järeldub, et $k = 0$ puhul esitab antud võrrand x -teljega paralleelsete sirgete paari.

Kui $k \neq 0$, siis saab võrrandi teisendada kujule

$$k(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4k + 25. \quad (*)$$

Kui $4k + 25 = 0$, s. t. $k = -\frac{25}{4}$, siis saab (*) kuju $-\frac{25}{4}(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$ ehk $\left[\frac{5}{2}(x + 2) + (y - 3)\right] \left[\frac{5}{2}(x + 2) - (y - 3)\right] = 0$ ehk $(5x + 2y + 4)(5x - 2y + 16) = 0$. Seega $k = -\frac{25}{4}$ puhul esitab antud võrrand lõikuvate sirgete paari.

Kui $4k + 25 \neq 0$, siis saab võrrandi (*) ümber kirjutada kujul

$$\frac{(x + 2)^2}{4 + \frac{k}{25}} + \frac{(y - 3)^2}{4k + 25} = 1. \quad (**)$$

Kui võrrandis (**) $4 + \frac{k}{25} > 0$ ja $4k + 25 > 0$, s. t. kui $k > 0$, siis esitab (**) ja seega ka antud võrrand ellipsit, kui $4k + 25 > 0$, aga $4 + \frac{k}{25} < 0$, s. t. $-\frac{25}{4} < k < 0$, siis esitab antud

võrrand hüperbooli (mille fokaaltelg on paralleelne y -teljega), ja kui $4k + 25 < 0$, s. t. $k < -\frac{25}{4}$, siis samuti hüperbooli (kuid nüüd on hüperbooli fokaaltelg paralleelne x -teljega). Sellega on selgitatud antud võrrandi geomeetiline tähendus kõigi k väärtuste jaoks.

XIII. Veenduda, et võrrand

$$4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$$

esitab hüperbooli, ning leida selle hüperbooli teljed, fookused ja juhtjooned.

Lahendus. Ruutvõrrandist (10) leiame niisuguse nurga tangensi, mille võrra tuleb teljestikku ümber alguspunkti pöörata, et antud joone võrrandist kaoks liige jooksva punkti koordinaatide korrutisega:

$$2 \tan^2 \alpha - 3 \tan \alpha - 2 = 0, \quad \tan \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}.$$

Seega võime võtta $\tan \alpha = 2$ ja järelilikult

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Teljestiku pööramise valemid saavad kuju

$$x = \frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}}, \quad y = \frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}. \quad (*)$$

Asetades need x ja y avaldised antud joone võrrandisse, saame joone võrrandiks $Ox'y'$ -koordinaadistikus

$$4x'^2 - y'^2 + 8\sqrt{5}x' - 4\sqrt{5}y' - 36 = 0.$$

Edasi teisendame saadud võrrandi kujule

$$\frac{(x' + \sqrt{5})^2}{9} - \frac{(y' + 2\sqrt{5})^2}{36} = 1.$$

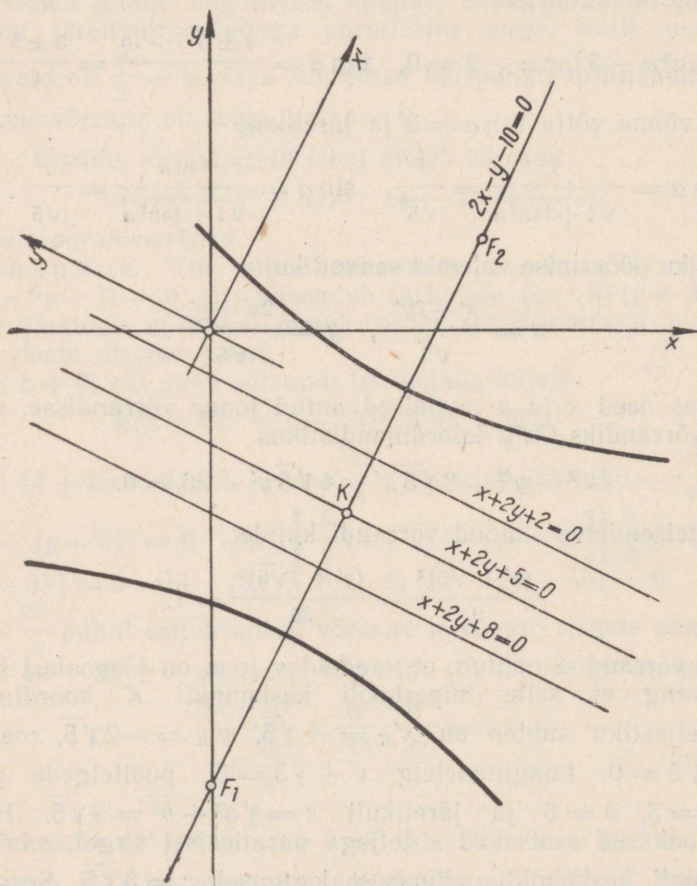
Sellest võrrandist nähtub, et vaadeldav joon on tõepoolest hüperbool ning et selle hüperbooli keskpunkti K koordinaadid $Ox'y'$ -teljestiku suhtes on $x'_K = -\sqrt{5}$, $y'_K = -2\sqrt{5}$, reaaltelg $y' + 2\sqrt{5} = 0$, imaginaartelg $x' + \sqrt{5} = 0$, pooltelgede pikkused $a = 3$, $b = 6$ ja järelilikult $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3\sqrt{5}$. Hüperbooli fookused asetsevad x' -teljega paralleelsel sirgel, mis läbib hüperbooli keskpunkti, viimasest kaugusel $c = 3\sqrt{5}$. Seega on fookuste koordinaadid $Ox'y'$ -koordinaadistikus $x'_{F_1} = x'_K - c =$

$= -4\sqrt{5}$, $x'_{F_2} = x'_K + c = 2\sqrt{5}$, $y'_{F_1} = y'_{F_2} = y'_K = -2\sqrt{5}$.
 Hüperbooli juhtjooned on y -teljega paralleelsed sirged, mis asetsevad punktist K kaugusel $\frac{a^2}{c} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$, s. t. $x' + \frac{8}{5}\sqrt{5} = 0$ ja $x' + \frac{2}{5}\sqrt{5} = 0$.

Fookuste koordinaadid lähtekoordinaadistikus saame valemist (*), asetades sinna fookuste koordinaadid $Ox'y'$ -teljestikus:

$$x_{F_1} = \frac{x'_{F_1} - 2y'_{F_1}}{\sqrt{5}} = 0, \quad y_{F_1} = \frac{2x'_{F_1} + y'_{F_1}}{\sqrt{5}} = -10$$

ja analoogiliselt $x_{F_2} = 6$, $y_{F_2} = 2$. Antud hüperbooli fookused on seega $F_1(0; -10)$ ja $F_2(6; 2)$.



Joon. 17

Selleks et teisendada hüperbooli telgede ja juhtjoonte võrrandid lähtekoordinaadistikku, avaldame valemist (*) uued koordinaadid vanade kaudu:

$$x' = \frac{x+2y}{\sqrt{5}}, \quad y' = \frac{-2x+y}{\sqrt{5}}$$

ning asetame need eespool saadud telgede ja juhtjoonte võrrandisse:

$$\begin{aligned} \frac{-2x+y}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{5} &= 0, & \frac{x+2y}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} &= 0, \\ \frac{x+2y}{\sqrt{5}} + \frac{8}{5}\sqrt{5} &= 0, & \frac{x+2y}{\sqrt{5}} + \frac{2}{5}\sqrt{5} &= 0. \end{aligned}$$

Antud hüperbooli reaaltelg on seega $2x - y - 10 = 0$, imaginaartelg $x + 2y + 5 = 0$ ning juhtjooned $x + 2y + 8 = 0$ ja $x + 2y + 2 = 0$ (joon. 17).

Ellips

173. Koostada ellipsi kanooniline võrrand, kui ellipsi

- 1) lühem pooltelg on 4 ja pikem pooltelg 6;
- 2) pikem telg on 26 ja fookuste vaheline kaugus 10;
- 3) lühem pooltelg on 4 ja fookuste vaheline kaugus 6;
- 4) fookuste vaheline kaugus on 12 ja ekstsentrilisus $\frac{3}{5}$;
- 5) pikem telg on 16 ja ekstsentrilisus $\frac{1}{2}$.

174. Koostada ellipsi kanooniline võrrand, kui ellipsi

- 1) ekstsentrilisus on $\frac{3}{4}$ ja lühem telg 14;
- 2) juhtjoonte vaheline kaugus on 8 ja fookuste vaheline kaugus 6;
- 3) pikem pooltelg on $\sqrt{13}$ ja juhtjoonte vaheline kaugus 13;
- 4) juhtjoonte vaheline kaugus on 18 ja ekstsentrilisus $\frac{2}{3}$;
- 5) juhtjoone kaugus keskpunktist on 6 ja lühem telg $2\sqrt{5}$.

175. Koostada ellipsi võrrand, kui ellipsi fookused asetsevad x -teljel sümmeetriliselt alguspunkti suhtes ning

- 1) ellipsi juhtjoone kaugus lähimast haripunktist on 1 ja kaugeimast 9;
- 2) ellipsi pikemal teljel asetseva haripunkti kaugus lühemal teljel asetsevast haripunktist on 17 ja lähimast fookusest 6;
- 3) ellips läbib punkte (3; -5) ja (6; 4);
- 4) ellips läbib punkti (-3; 1) ja ta fookuste vaheline kaugus on 8;

5) ellips läbib punkti $(-2\sqrt{6}; 3)$ ja ta juhtjoonte vaheline kaugus on 24.

176. Leida ellipsi

$$1) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, \quad 2) \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1, \quad 3) 5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$$

poolteljed, fookused ja juhtjooned.

177. Arvutada ellipsi ekstsentrilisus, kui ellipsi

1) lühem pooltelg on võrdne fookuse kaugusega keskpunktist;

2) lühem telg paistab fookusest 60-kraadise nurga all;

3) fookuste vaheline kaugus on telgede pikkuste aritmeetiline keskmine;

4) juhtjoonte vaheline kaugus on 5 korda suurem fookuste vahelisest kaugusest.

178. Koostada ellipsi võrrand, kui ellipsi fookused on $F_1(0; 0)$ ja $F_2(4; 0)$ ning ellipsi pikem telg on 6.

179. Koostada ellipsi võrrand, kui ellipsi fookused on $F_1(0; 1)$ ja $F_2(1; 0)$ ning ellips läbib koordinaatide alguspunkti.

180. Kui kaugel asetseb ellipsi $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$ ühest fookusest punkt, mille kaugus teisest fookusest on 1,5?

181. Ellipsil $2x^2 + 3y^2 - 72 = 0$ asetseva punkti M kaugus ühest ellipsi fookusest on 3 korda suurem kui teisest. Leida punkti M kaugus kummastki fookusest.

182. Leida ellipsi punkti M kaugus fookusest, kui M kaugus sellele fookusele lähemast juhtjoonest on 8 ning ellipsi ekstsentrilisus on $\frac{3}{4}$.

183. Koostada ellipsi võrrand, kui ellipsi ekstsentrilisus on $\frac{1}{2}$, üks fookus $(-3; 0)$ ja sellele fookusele lähem juhtjoon $x - y + 1 = 0$.

184. Koostada ellipsi võrrand, kui ellipsi fookused asetsevad y -teljel sümmeetriliselt alguspunkti suhtes ning

1) ellipsi poolteljed on 6 ja 2;

2) ellipsi lühem pooltelg on 6 ja ekstsentrilisus $\frac{1}{5}$;

3) ellipsi pooltelgede summa on 8 ja fookuste vaheline kaugus on samuti 8;

4) ellips läbib punkti $(4; 6)$ ja ta ekstsentrilisus on $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) ellipsi juhtjoonte vaheline kaugus on 32 ja ekstsentrilisus $\frac{1}{2}$.

185. Leida ellipsi fookused ja juhtjooned, kui ellipsi võrrand on

$$1) x^2 + \frac{y^2}{4} = 1; \quad 3) 9x^2 + 25y^2 = 1;$$

$$2) 2x^2 + y^2 - 8 = 0; \quad 4) 25x^2 + 9y^2 - 225 = 0.$$

186. Leida antud kahe joone lõikepunktid:

$$1) 2x + y - 7 = 0, \quad 4x^2 + y^2 = 25;$$

$$2) x^2 + 4y^2 - 20 = 0, \quad x + y + 5 = 0;$$

$$3) 2x^2 + 3y^2 - 35 = 0, \quad 5x^2 + 2y^2 - 38 = 0;$$

$$4) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad x - 2y + 10 = 0.$$

187. Missugustel k väärtustel sirge $2x - y + k = 0$

- 1) lõikab ellipsit $x^2 + 3y^2 - 12 = 0$,
- 2) puudutab seda ellipsit,
- 3) ei oma selle ellipsiga ühiseid punkte?

188. Leida ellipsi

$$3x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 4 = 0$$

keskpunkt, poolteljed ja fookused.

189. Leida ellipsi

$$9x^2 + 5y^2 + 54x - 20y + 56 = 0$$

juhtjooned ja ekstsentrilisus.

190. Leida ellipsi

$$9x^2 + 16y^2 + 27x - 16y - 119,75 = 0$$

keskpunkt, haripunktid ja juhtjooned.

191. Leida ellipsi

$$9x^2 + 8y^2 - 72x + 80y + 272 = 0$$

fookused ja arvutada ta juhtjoone kaugus lähimast haripunktist.

192. Koostada ellipsi võrrand, kui ellipsi fookused on $F_1(-3; 4)$ ja $F_2(1; 4)$ ning lühem pooltelg on 6.

193. Ellipsi kaks haripunkti on $(2; -6)$ ja $(2; -2)$ ning üks juhtjoon on $y + 7 = 0$. Koostada ellipsi võrrand.

Hüperbool

194. Koostada hüperbooli kanooniline võrrand, kui hüperbooli

- 1) reaalne pooltelg on 5 ja imaginaarne pooltelg 3;
- 2) haripunktide vaheline kaugus on 8 ja fookuste vaheline kaugus 12;

3) reaaltelje pikkus on 6 ja ekstsentrilisus $\frac{5}{3}$;

4) imaginaarne pooltelg on 7 ja ekstsentrilisus $\frac{4}{3}$.

195. Koostada hüperbooli võrrand, kui hüperbooli fookused asetsevad x -teljel sümmeetriliselt alguspunkti suhtes ning hüperbooli

1) asümptoodid on $y = \pm \frac{2}{3}x$ ja fookuste vaheline kaugus $2\sqrt{52}$;

2) juhtjoonte vaheline kaugus on 18 ja ekstsentrilisus $\frac{4}{3}$;

3) juhtjoonte vaheline kaugus on $12\frac{4}{5}$ ja asümptoodid $3x \pm 4y = 0$;

4) haripunktide vaheline kaugus on 24 ja asümptootide vaheline juhtjoone lõik on 8.

196. Leida hüperbool, mille telgedeks on koordinaatteljed, kui hüperbool läbib punkte

1) $(-6; 4)$ ja $(3\sqrt{6}; 2\sqrt{7})$;

2) $(3; 7)$ ja $(-6; \sqrt{70})$.

197. Arvutada hüperbooli ekstsentrilisus, kui hüperbooli

1) haripunkt on ühest fookusest 4 korda kaugemal kui teisest;

2) asümptoot moodustab fokaalteljega nurga 30° ;

3) juhtjoonte vaheline kaugus võrdub fookuse kaugusega lähemast haripunktist.

198. Hüperbooli punkti A kaugus fookusest on 3 korda suurem kui punkti A kaugus sellele fookusele lähemast juhtjoonest. Arvutada samal hüperboolil asetseva punkti B kaugus juhtjoonest, kui B kaugus juhtjoonele lähemast fookusest on 5.

199. Leida joone $16x^2 - 9y^2 = 144$ fookused, juhtjooned ja ekstsentrilisus.

200. Leida joone $3x^2 - 2y^2 - 6 = 0$ juhtjoonte ja asümptootide lõikepunktid.

201. Hüperbool, mille telgedeks on koordinaatteljed, läbib punkte $(6; -2)$ ja $(-5; \sqrt{1,25})$. Koostada selle hüperbooli juhtjoonte ja asümptootide võrrandid.

202. Arvutada hüperbooli fookuste vaheline kaugus, kui hüperbool läbib punkti $(6; 4)$ ja ta asümptoodid on $4x \pm 3y = 0$.

203. Arvutada hüperbooli $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ fookuse kaugus asümptoodist.

204. Leida hüperbool, mille fookusteks on ellipsi $5x^2 + 6y^2 - 30 = 0$ haripunktid ja haripunktideks selle ellipsi fookused.

205. Koostada hüperbooli võrrand, kui hüperbooli fookused asetsevad y -teljel sümmeetriliselt alguspunkti suhtes ning hüperbooli

1) fookuste vaheline kaugus on 20 ja ekstsentrilisus $\frac{5}{3}$;

2) haripunkti kaugus keskpunktist on 24 ja asümptoodid on $12x \pm 5y = 0$;

3) ekstsentrilisus on $\sqrt{2}$ ja hüperbool läbib punkti $(-3; 5)$;

4) juhtjooned on $3y \pm 4 = 0$ ja hüperbool läbib punkti $(2,5; 3)$.

206. Leida hüperbooli $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$ 1) poolteljed, 2) fookused, 3) ekstsentrilisus, 4) asümptoodid ja 5) juhtjooned.

207. Leida hüperbool, mille haripunktideks on ellipsi $3x^2 + 2y^2 - 24 = 0$ fookused ja mille fookused asetsevad antud ellipsi juhtjoontel.

208. Leida antud joonte lõikepunktid:

$$1) 3x - 4y + 16 = 0, \quad -\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1;$$

$$2) x - 2y - 1 = 0, \quad 9x^2 - 4y^2 + 36 = 0;$$

$$3) 2x - y - 10 = 0, \quad x^2 - 4y^2 - 20 = 0;$$

$$4) x^2 + 4y^2 - 20 = 0, \quad \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1;$$

$$5) \frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{12} = 1, \quad \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{14} = 1.$$

209. Koostada hüperbooli võrrand, kui hüperbooli fookused on $F_1(3; 4)$ ja $F_2(-3; -4)$ ning haripunktide vaheline kaugus on 6.

210. Koostada hüperbooli võrrand, kui hüperbooli fookused on $F_1(2; -2)$ ja $F_2(-4; 4)$ ning ekstsentrilisus on $\sqrt{2}$.

211. Veenduda, et antud võrrand esitab hüperbooli, mille teljed on paralleelsed koordinaattelgedega; leida selle hüperbooli keskpunkt K , fookused F_1 ja F_2 , juhtjooned ja asümptoodid:

$$1) 16x^2 - 9y^2 + 32x + 54y - 209 = 0;$$

$$2) 4x^2 - y^2 - 6y - 5 = 0;$$

$$3) 25x^2 - 144y^2 - 50x - 576y + 3049 = 0.$$

212. Koostada hüperbooli võrrand, kui hüperbooli asümptoodid on $4x + 3y + 14 = 0$ ja $4x - 3y + 26 = 0$ ning üks fookus on $F(5; 2)$.

213. Koostada hüperbooli võrrand, kui hüperbooli keskpunkt on $K(2; -1)$, ekstsentrilisus $\varepsilon = \frac{5}{4}$ ja üks juhtjoon $5y - 11 = 0$.

Parabool

214. Koostada parabooli võrrand, kui parabooli haripunktiks on koordinaatide alguspunkt, parabooli teljeks on x -telg, parabool avaneb x -telje positiivses suunas ning

- 1) parabooli fokaallaius on 6;
- 2) parabool läbib punkti $(2; -3)$;
- 3) parabooli fookuse kaugus juhtjoonest on 7;
- 4) parabooli fookus on $F(2,5; 0)$;
- 5) parabooli juhtjoon on $6x + 7 = 0$.

215. Koostada parabooli võrrand, kui parabooli haripunktiks on koordinaatide alguspunkt ning parabooli

- 1) fookus on $F(-2; 0)$;
- 2) juhtjoon on $4y + 3 = 0$;
- 3) teljeks on y -telg ja parabool läbib punkti $(6; -3)$;
- 4) fookuse kaugus juhtjoonest on 3 ja parabool avaneb y -telje positiivses suunas.

216. Leida antud parabooli fookus ja juhtjoon:

- 1) $y^2 - 12x = 0$;
- 2) $2y^2 + 3x = 0$;
- 3) $y = x^2$;
- 4) $x^2 + 20y = 0$.

217. Arvutada parabooli $y^2 = 24x$ punkti M kaugus parabooli fookusest, kui punkti M abstsiss on 3.

218. Arvutada parabooli $x^2 + 18y = 0$ punkti N kaugus parabooli fookusest, kui punkti N abstsiss on 6.

219. Leida paraboolil $y^2 + 12x = 0$ punkt, mille kaugus fookusest on 9.

220. Leida parabooli $y^2 = 3x$ lõikepunktid sirgetega

- 1) $3x - 2y - 15 = 0$;
- 2) $3x - 8y + 16 = 0$;
- 3) $9x - 2y + 1 = 0$.

221. Leida parabooli haripunkt, fookus ja juhtjoon, kui parabooli võrrand on

- 1) $y = x^2 - 2x - 1$;
- 2) $x^2 - 6x + 2y - 2 = 0$;
- 3) $y^2 + 6x - 12y + 42 = 0$;
- 4) $4y^2 - x - 8y + 7 = 0$.

222. Parabooli juhtjoon on $3x - 5y + 1 = 0$ ja fookus $F(9; -8)$. Leida haripunkt.

223. Koostada parabooli juhtjoone võrrand, kui parabooli haripunkt on $H(2; -1)$ ja fookus $F(6; -5)$. Kui suur on selle parabooli fokaallaius?

224. Koostada parabooli võrrand, kui parabooli fookus on $F(3; -3)$ ja juhtjoon $x - y + 1 = 0$.

225. Koostada parabooli võrrand, kui parabooli fookus on $F(3; 4)$ ja haripunkt asetseb koordinaatide alguspunktis.

226. Mis liiki jooni esitavad võrrandid

- 1) $x^2 + 2y^2 - 2x + 12y + 11 = 0$;
- 2) $3x^2 - y^2 + 30x + 4y + 71 = 0$;
- 3) $2x^2 + 3y^2 + 4x - 12y + 14 = 0$;
- 4) $5x^2 + 7y^2 + 14y + 8 = 0$;
- 5) $x^2 - 6x + 5 = 0$;
- 6) $4y^2 - 12y + 9 = 0$;
- 7) $4x^2 - 3y^2 - 24x + 37 = 0$;
- 8) $3x^2 + 12x - 4y + 20 = 0$;
- 9) $3y^2 + 8y + 6 = 0$;
- 10) $4x^2 + 3y^2 + 8x - 12y = 0$;

227. Veenduda, et võrrand $4x^2 - 9y^2 - 24x - 18y + 27 = 0$ esitab lõikuvate sirgete paari, ja leida need sirged.

228. Määrata võrrandis $2x^2 + 6y^2 - 8x + 3y + f = 0$ vabaliige f nii, et võrrand esitaks ühte punkti.

229. Uurida, missuguseid jooni esitab võrrand $x^2 + 3y^2 - 2kx + 6y + 7 = 0$ olenevalt parameetrist k .

230. Uurida, missuguseid jooni esitab võrrand $3x^2 + ky^2 - 12x + 4y + 13 = 0$ olenevalt parameetrist k .

231. Koostada paralleellükke valemid, mis kaotavad antud võrrandist liikmed, milles jooksva punkti koordinaadid esinevad ainult esimeses astmes:

- 1) $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 6x - 3y + 5 = 0$;
- 2) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 11 = 0$;
- 3) $4x^2 + 4xy + y^2 + 8x - 5 = 0$.

232. Leida teravnurk, mille võrra tuleb koordinaattelgi ümber alguspunkti pöörata, et antud võrrandist kaoks liige jooksva punkti koordinaatide korrutisega:

- 1) $7x^2 + 8xy + 7y^2 - 12y + 1 = 0$;
- 2) $4x^2 + \sqrt{3}xy + 5y^2 + 2x = 0$;
- 3) $2x^2 - 4xy - y^2 + 6x - 8y + 5 = 0$.

233. Koostada niisuguse koordinaaditeisenduse valemid, mille tagajärjel võrrandist $x^2 + 6xy + 9y^2 - 6x = 0$ kaob liige jooksva punkti koordinaatide korrutisega.

234. Kaotada teljestiku pööramisega sobiva nurga võrra antud võrrandist liige jooksva punkti koordinaatide korrutisega:

- 1) $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$;
- 2) $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 0$;
- 3) $2xy + x + y - 5 = 0$.

235. Määrata antud joone liik ja asend teljestiku suhtes, koostada selle joone kanooniline võrrand ning skitseerida joon lähteteljestikus:

- 1) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;
- 2) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;
- 3) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$.

236. Määrata antud teist järku joone liik ja asend teljestiku suhtes:

- 1) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$;
- 2) $17x^2 - 12xy + 8y^2 = 0$;
- 3) $x^2 - 6xy - 7y^2 - 12x - 28y - 28 = 0$;
- 4) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$;
- 5) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$;
- 6) $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 6x + 4y + 1 = 0$.

237. Teades, et antud võrrand esitab sirgete paari, leida need sirged, lahutades antud võrrandi vasaku poole lineaartegurite korrutiseks:

- 1) $2x^2 - 13xy + 15y^2 + x - 5y = 0$;
- 2) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 16x - 24y + 16 = 0$;
- 3) $2x^2 - 12xy + 18y^2 - x + 3y - 10 = 0$.

238. Määrata joone $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ kuju ja asend.

239. Leida joone $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$ fookused ja juhtjooned.

240. Leida parabooli $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$ fokaallaius, fookus ja juhtjoon.

241. Leida joone $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 18 = 0$ telgede võrrandid, ekstsentrilisus ja fookused.

242. Veenduda, et võrrand $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$ esitab hüperbooli, ning leida selle hüperbooli fokaaltelg ja asümp-toodid.

243. Veenduda, et võrrand $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$ esitab parabooli, ning leida selle parabooli fokaallaius, telg ja hari-punkt.

§ 4. DETERMINANDID JA LINEAARVÖRRANDISÜSTEEMID

Neljast arvust a_1, a_2, b_1, b_2 koosnevale tabelile

$$\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}$$

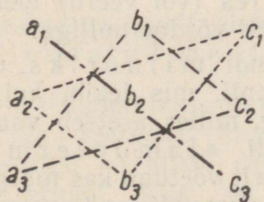
vastavaks kaherealiseks determinandiks nimetakse avaldist $a_1b_2 - a_2b_1$. Kaherealist determinanti tähistatakse sümboliga $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Seega

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

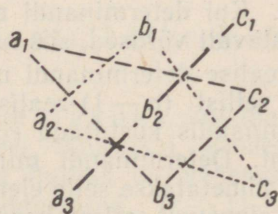
Kolmerealine determinant on defineeritud avaldisena

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

Kolmerealise determinandi avaldis koosneb kuuest liikmest, kusjuures iga liige on determinandi sümbolis esineva kolme arvu korrutis võetuna kas märgiga $+$ või $-$. Järgmistel skeemidel on erinevate punktiirjoontega ühendatud arvukolmikud, mille korrutised on kolmerealise determinandi liikmeiks:



$+$ märgiga liikmed



$-$ märgiga liikmed

Mingi n erineva elemendi iga kindlat järjestust nimetatakse nende elementide permutatsiooniks. Erinevaid permutatsioone saab n elemendist moodustada $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$. Kui n elemendi permutatsioonide hulgast on üks kindel permutatsioon valitud algpermutatsiooniks, siis on nende n elemendi mingi teise permutatsiooni iga kahe elemendi puhul kaks võimalust — nad esinevad permutatsioonis kas vastupidises järjekorras kui algpermutatsioonis või samas järjekorras. Esimesel juhul öeldakse, et need kaks elementi moodustavad *inversiooni*, ja teisel juhul, et nad ei moodusta inversiooni algpermutatsiooni suhtes. Iga permutatsiooniga on üheselt määratud ta kõigi elementide *inversioonide arv* algpermutatsiooni suhtes.

n^2 arvust koosnevale n -realisele ja n -veerulisele tabelile

$$\begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & \dots & v_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & v_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & v_n \end{array}$$

vastavaks n -realiseks determinandiks nimetatakse $n!$ liikmest koosnevat summat, mille iga liige omab kuju

$$(-1)^{\sigma} a_{i_1} b_{i_2} \dots v_{i_n},$$

kus i_1, i_2, \dots, i_n on mingi permutatsioon arvudest $1, 2, \dots, n$ ja σ on inversioonide arv selles permutatsioonis loomuliku järjestuse $1, 2, \dots, n$ suhtes, kusjuures summa igal liikmel on indeksite permutatsioon i_1, i_2, \dots, i_n erinev. n -realist determinanti tähistatakse sümboliga

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & v_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & v_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & v_n \end{vmatrix}.$$

Determinantide omadused. I. Determinandi väärtus ei muutu, kui ta read ja veerud omavahel ümber paigutata.

II. Kui determinandis kaks rida (või veergu) omavahel ümber paigutata, siis muutub determinandi märk vastupidiseks.

III. Kui determinandi mingi kahe rea (või veeru) elemendid on vastavalt võrdsed, siis on determinant võrdne nulliga.

n -realise determinandi mingi elemendi *miinoriks* nimetatakse sellist $(n-1)$ -realist determinanti, mis tekib, kui antud determinandis kustutada rida ja veerg, milles asetseb vaadeldav element. Determinandi mingi elemendi *alamdeterminandiks* nimetatakse selle elemendi miinorit võetuna kas märgiga $+$ või $-$ olenevalt sellest, kas vaadeldava elemendi rea ja veeru järjekorranumbrite summa on paarisarv või paaritu arv.

Maatriksi astak ei muutu, kui maatriksile rakendada järgmisi teisendusi:

- 1° maatriksi kahe rea (või veeru) ümberpaigutamine,
- 2° maatriksi ühe rea (või veeru) kõigi elementide korrutamine ühe ja sama nullist erineva arvuga,
- 3° maatriksi ühe rea (või veeru) elementidele teise rea (veeru) ühe ja sama arvu kordsete elementide liitmine.

Kroneckeri teoreem. *Lineaarvõrrandisüsteem on lahenduv siis ja ainult siis, kui süsteemi maatriksi astak on võrdne laiendatud maatriksi astakuga.*

Kui süsteemis on n otsitavat ning süsteemi maatriksi ja laiendatud maatriksi astakud on mõlemad r , siis saab need r otsitavat, mille kordajaist moodustatud r -realine determinant erineb nullist, avaldada Crameri teoreemi põhjal üheselt ülejäänud $n-r$ otsitava kaudu. Tähistades viimased $n-r$ otsitavat meelevaldsete konstantidega C_1, C_2, \dots, C_{n-r} , saame kõik otsitavad avaldada nende konstantide kaudu. Saadud avaldiste süsteemi nimetatakse antud võrrandisüsteemi üldlahendiks, sest ta annab igal konstantide valikul ühe lahendi ja, vastupidi, vaadeldava süsteemi iga lahend on saadav neist avaldistest sobival konstantide C_1, C_2, \dots, C_{n-r} väärtuste valikul.

Lineaarvõrrandisüsteemi, mille kõik vabaliikmed on võrdsed nulliga, nimetatakse homogeenseks süsteemiks. Homogeenne süsteem on alati lahenduv, omades lahendit, milles kõigi otsitavate väärtused on nullid. Seda lahendit nimetatakse nulllahendiks ehk triviaalseks lahendiks.

Võrdse otsitavate ja võrrandite arvuga homogeenisel süsteemil on mittetriviaalseid lahendeid siis ja ainult siis, kui süsteemi determinant on null.

Näiteid

I. Lahendada lineaarvõrrandisüsteem

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 3, \\ 3x + 7y + 4z &= 3, \\ 2x + 3y + 5z &= 10. \end{aligned}$$

Lahendus. Antud süsteemi determinant on

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot 7 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 4 - 2 \cdot 7 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 5 - \\ &\quad - 1 \cdot 3 \cdot 4 = -1. \end{aligned}$$

Et $D \neq 0$, siis on süsteem Crameri teoreemi järgi üheselt lahenduv. Otsitavate leidmiseks arvutame veel determinandid

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ 10 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 105 + 18 + 80 - 140 - 30 - 36 = -3,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 60 + 24 - 12 - 45 - 40 = 2,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 70 + 27 + 12 - 42 - 60 - 9 = -2.$$

Süsteemi lahend on seega

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3}{-1} = 3, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{2}{-1} = -2, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Arvutuste kontrolliks asetame otsitavate leitud väärtused antud süsteemi võrranditesse ja veendume, et kõik võrrandid on rahuldatud:

$$\begin{aligned} 3 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 &= 3, \\ 3 \cdot 3 + 7 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 &= 3, \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 2 &= 10. \end{aligned}$$

II. Leida determinandi

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

väärtus vahetult determinandi definitsiooni järgi.

Lahendus. Determinandi definitsiooni kohaselt on determinandi iga liige korrutis, milles iga tegur on determinandi eri reast ja eri veerust. Et antud determinandi esimeses veerus on ainult neljanda rea element nullist erinev, siis on determinandi avaldises nullist erinevad vaid need liikmed, mis sisaldavad seda elementi tegurina. Liikmeil, mille üks tegur on esimesest veerust ja neljandast reast, võib teguriks teisest veerust olla mistahes element peale neljanda rea elemendi. Teises veerus ja mitte neljandas reas on aga ainult üks nullist erinev element — see, mis asetseb esimeses reas. Analoogiliselt edasi arutledes leiame, et antud determinandi avaldises on nullist erinevad ainult kaks liiget:

$$\pm 2 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-4) \cdot 5 \quad \text{ja} \quad \pm 2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5.$$

Esimese liikme reaindeksite permutatsioon on 4, 1, 2, 5, 3. Selles permutatsioonis moodustavad loomuliku järjestuse 1, 2, 3, 4, 5 suhtes inversiooni elemendipaarid 41, 42, 43 ja 53. Seega on inversioonide arv 4 (paarisarv), mistõttu esimene liige tuleb võtta märgiga +. Teise liikme puhul on reaindeksite permutatsioon 4, 1, 5, 2, 3, mille inversioonide arv on 5. Järelikult tuleb see liige võtta märgiga -. Antud determinandi väärtus on seega

$$D = 2 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-4) \cdot 5 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 = 80 + 30 = 110.$$

III. Arvutada determinandi omaduste põhjal

$$D = \begin{vmatrix} 8 & -20 & 24 & 8 \\ -3 & 7 & -6 & 4 \\ 5 & -9 & 12 & 7 \\ 4 & -6 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Lahendus. Arvutuste lihtsustamiseks toome kõigepealt determinandi esimese rea elementide ühise teguri 4 ja seejärel kolmanda veeru elementide ühise teguri 6 determinandi märgi alt välja:

$$D = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 & 6 & 2 \\ -3 & 7 & -6 & 4 \\ 5 & -9 & 12 & 7 \\ 4 & -6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 24 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Järelejäänud 4-realises determinandis teisendame kolmandas veerus (kus elemendid on absoluutväärtuselt kõige väiksemad) kõik elemendid peale esimese nullideks. Selleks liidame esimese rea teisele, siis -2 -kordse esimese rea kolmandale ja lõpuks -1 -kordse esimese rea neljandale reale. Determinantide vastava omaduse tõttu ei muutu nende teisenduste rakendamisel determinandi väärtus:

$$D = 24 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Edasi avaldame saadud determinandi kolmanda veeru elementide ja nende alamdeterminantide korrutiste summana («arendame determinanti kolmanda veeru järgi»). Selles summas on üksainuke liige nullist erinev, kusjuures vastav alamdeterminant on võrdne miinoriga, sest 1 asetseb esimeses reas ja kolmandas veerus ning $1 + 3 = 4$ on paarisarv:

$$D = 24 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Sellega on neljarealise determinandi arvutamise taandatud kolme-realise determinandi arvutamiseks. Liidame selle determinandi 2-kordse teise veeru esimesele veerule ja arendame saadud determinanti kolmanda rea järgi:

$$\begin{aligned} D &= 24 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 24 \cdot (-1) \cdot \left(- \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \right) = 24 \cdot (-1) \cdot [-(9 - 18)] = -216. \end{aligned}$$

IV. Leida maatriksi

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 5 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 9 & 7 & -4 & 5 & -20 \end{vmatrix}$$

astak.

Lahendus. Teisendame maatriksi A esimese veeru elemendid alates teisest nullideks, liites teisele reale -2 -kordse esimese, kolmandale reale -1 -kordse esimese ja neljandale reale -3 -kordse esimese rea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 2 & -14 \end{vmatrix}.$$

Saadud maatriksi astak on sama mis A astak, sest rakendatud teisendus (3°) ei muuda maatriksi astakut. Edasi paigutame selles maatriksis ümber teise ja kolmanda veeru ning teisendame seejärel teise veeru kolmanda ja neljanda elemendi nullideks, liites sobiva arvu kordse teise rea kolmandale ja neljandale reale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 2 & -14 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -15 \end{vmatrix}.$$

Viimases maatriksis korrutame neljanda rea elemente teguriga $\frac{1}{5}$

ja paigutame seejärel ümber kolmanda ja neljanda rea ning kolmanda ja neljanda veeru. Tulemuseks on maatriks

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ilmselt ei saa maatriksist B ridade ja veergude ärajätmise teel moodustada ühtegi neljarealist nullist erinevat determinanti, kuid kolmerealine determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

on nullist erinev. Seega on maatriksi B astak 3. Et maatriks B on saadud maatriksist A teisendustega $1^\circ-3^\circ$, mis ei muuda maatriksi astakut, siis on ka antud maatriksi A astak 3.

V. Veenduda, et süsteem

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z + u + 3v &= 5, \\ 2x - 3y - 3z + u - 7v &= 3, \\ x + y + z + 2u &= 4, \\ 3x - y - z + 2u - 4v &= 8 \end{aligned} \quad (*)$$

on lahenduv, ja leida süsteemi üldlahend.

Lahendus. Leiame antud süsteemi maatriksi ja laiendatud maatriksi astakud. Selleks teisendame süsteemi laiendatud maatriksit

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & -3 & 1 & -7 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -4 & 8 \end{vmatrix},$$

opereerides ainult maatriksi ridadega. Esimese rea elemente -2 -, -1 - ja -3 -kordselt vastavalt teise, kolmanda ja neljanda rea elementidele liites saame

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -7 & -1 & -13 & -7 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & -7 & -1 & -13 & -7 \end{vmatrix}.$$

Paigutame ümber teise ja kolmanda rea ja liidame seejärel -7 -kordse teise rea kolmandale ja neljandale reale. Tulemuseks on

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 8 & 0 \end{vmatrix},$$

millest lõpuks

$$B' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Et maatriksi B' esimese, teise ja neljanda veeru ning esimese kolme rea elementidest koostatud kolmerealine determinant on nullist erinev ja neljanda rea elemendid on kõik nullid, siis on B' ja järelikult ka A' astak 3. Antud süsteemi maatriks A erineb maatriksist A' ainult puuduva kuuenda (vabaliikmete) veeru poolest. Kui oleksime maatriksile A rakendanud samu teisendusi, mis maatriksile A' , oleksime B' asemel jõudnud maatriksile, mis erineb B' -st ainult puuduva kuuenda veeru poolest. Et selle maatriksi astak on samuti kui B' astak 3, siis on ka A astak 3 ja antud süsteem Kroneckeri teoreemi põhjal lahenduv. (Kui B' kuuenda veeru ja neljanda rea element oleks teisenduste tulemusena osutunud nullist erinevaks, teised sama rea elemendid aga endiselt nullideks, siis oleks laiendatud maatriksi astak olnud 4, süsteemi maatriksi astak aga 3 ja süsteem järelikult mittelahenduv.)

Teisendused, mille abil tuletasime maatriksist A' maatriksi B' , viisid antud võrrandisüsteemi niisugusele kujule, mille laiendatud maatriks on B' , seega kujule

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z + u + 3v &= 5, \\ -y - z + u - 3v &= -1, \\ u - v &= 0, \\ 0 &= 0. \end{aligned} \quad (**)$$

Et seejuures maatriksile rakendatud teisendused tähendasid võrrandisüsteemis vastavalt võrrandite järjekorra muutmist, võrrandi korrutamist nullist erineva teguriga ja mingi arvu kordse võrrandi liitmist teisele võrrandile, siis on saadud süsteem (**) järeldus süsteemist (*) ja teda rahuldab süsteemi (*) iga lahend. Analoogiliste teisendustega on aga ilmselt ka vastupidi süsteemist (**) järeldatav süsteem (*), mistõttu süsteemi (**) iga lahend rahuldab süsteemi (*). Neil süsteemidel on seega samad lahendid.

Süsteemist (**) on kerge avaldada kolme otsitavat ülejäänud kahe kaudu nii, et kõik võrrandid oleksid rahuldatud:

$$\begin{aligned}u &= v, \quad y = -z + u - 3v + 1 = 1 - z - 2v, \\x &= 5 - 2y - 2z - u - 3v = 3.\end{aligned}$$

Tähistades $z = C_1$, $v = C_2$, saame antud süsteemi üldlahendiks

$$x = 3, \quad y = 1 - C_1 - 2C_2, \quad z = C_1, \quad u = C_2, \quad v = C_2.$$

VI. Kuidas oleneb süsteemi

$$\begin{aligned}2x - 3y + z &= 1, \\4x + 2y - az &= 3, \\2x - y + 3z &= b\end{aligned}$$

lahendi olemasolu ning ühesus parameetritest a ja b ?

Lahendus: Teisendame antud süsteemi laiendatud maatriksit

$$\left\| \begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 1 & \\ 4 & 2 & -a & 3 & \\ 2 & -1 & 3 & b & \end{array} \right\|$$

nagu eelmises näiteski. Tulemuseks on maatriks

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 & \\ 0 & 2 & 2 & b-1 & \\ 0 & 0 & -a-10 & -4b+5 & \end{array} \right\|.$$

Kui siin $-a-10 \neq 0$, s. t. $a \neq -10$, siis on süsteemi maatriksi ja süsteemi laiendatud maatriksi astakud ning otsitavate arv võrdsed ja süsteem seega üheselt lahenduv. Kui $a = -10$, aga $-4b+5 \neq 0$, s. t. $b \neq \frac{5}{4}$, siis on süsteemi maatriksi astak 2, kuid laiendatud maatriksi astak 3, mistõttu süsteem ei ole sel juhul lahenduv. Lõpuks, kui $a = -10$ ja $b = \frac{5}{4}$, siis on nii süsteemi maatriksi kui ka laiendatud maatriksi astak 2 ja süsteem järelikult lõpmata mitmeselt lahenduv (otsitavad avalduvad ühe meelevaldse konstandi kaudu).

VII. Leida punkte $(0; -1)$, $(-4; 1)$ ja $(11; -2)$ läbiv parabool, mille telg on paralleelne x -teljega.

Lahendus. Iga parabool, mille telg on paralleelne x -teljega, on esitatav võrrandiga

$$x = ay^2 + by + c. \quad (*)$$

Nõudes, et joon, mida esitab võrrand (*), läbiks antud kolme punkti, saame kordajate a , b ja c määramiseks süsteemi

$$\begin{aligned} a - b + c &= 0, \\ a + b + c &= -4, \\ 4a - 2b + c &= 11. \end{aligned}$$

Selle süsteemi determinant on

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

Crameri teoreemi järgi leiame süsteemi ainukese lahendi: $a = 3$, $b = -2$ ja $c = -5$. Asetades leitud kordajate väärtused parabooli võrrandisse (*), saame $x = 3y^2 - 2y - 5$.

VIII. Mis tingimusel asetsevad neli punkti $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ ja $(x_4; y_4)$ ühel ringjoonel?

L a h e n d u s. Iga ringjoone võrrand on esitatav kujul

$$k(x^2 + y^2) + lx + my + n = 0,$$

kus $k \neq 0$. Antud neli punkti asetsevad seega ühel ringjoonel, kui leiduvad niisugused arvud k , l , m ja n , mis pole kõik korraka nullid (vähemalt $k \neq 0$), et on rahuldatud võrdused

$$\begin{aligned} (x_1^2 + y_1^2)k + x_1l + y_1m + n &= 0, \\ (x_2^2 + y_2^2)k + x_2l + y_2m + n &= 0, \\ (x_3^2 + y_3^2)k + x_3l + y_3m + n &= 0, \\ (x_4^2 + y_4^2)k + x_4l + y_4m + n &= 0. \end{aligned}$$

Järelikult peab neist neljast võrrandist koosnev nelja otsitavaga (k , l , m ja n) homogeenne lineaarvõrrandisüsteem omama mitte-triviaalset lahendit. Homogeenne süsteem omab mittetriviaalseid lahendeid aga ainult siis, kui süsteemi determinant on null. Nõutud tingimus on seega

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Kaherealised determinandid ja kahe otsitavaga süsteemid

244. Arvutada

$$1) \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ -5 & -8 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 12 & -6 \end{vmatrix}.$$

245. Avaldada ja lihtsustada

$$1) \begin{vmatrix} a & a+1 \\ a-1 & a \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix};$$

$$2) \begin{vmatrix} m+n & m-n \\ m-n & m+n \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}.$$

246. Lahendada determinantide abil süsteemid

$$1) \begin{cases} 5x + 3y = 1, \\ 2x - 4y = 16; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 5x - y + 2 = 0, \\ 7x + 9y - 5 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 4x - 5y = 10; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} kx + y = 1, \\ x + ky = -1, \end{cases} \quad (k \neq \pm 1);$$

$$5) \begin{cases} x \cos \alpha - y \sin \alpha = \cos \beta, \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha = \sin \beta. \end{cases}$$

247. Uurida, kas antud süsteem on üheselt lahenduv, lõpmata mitmeselt lahenduv või mittelahenduv:

$$1) \begin{cases} 6x - 4y = 10, \\ -9x + 6y = -15; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 9x + 7y = 0, \\ 7x + 5y = 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 10x + 8y = 7, \\ 15x + 12y = 11; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 12x + ay = 4, \\ ax + 3y = 2; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} kx + y = 1, \\ 3x - 2y = l. \end{cases}$$

248. Lahendada süsteemid

$$1) \begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3x + 6y = 9; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x - 6y = 8, \\ 6x - 9y = 12; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x + y = 0, \\ 6x + 3y = 0. \end{cases}$$

Kolmerealised determinantid

249. Arvutada

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} 14 & 1 & -9 \\ 56 & -16 & 24 \\ 14 & -3 & 12 \end{vmatrix}; \quad 5) \begin{vmatrix} 16 & -3 & 5 \\ -72 & 12 & -48 \\ 4 & -7 & -5 \end{vmatrix}; \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \\ 25 & 49 & 64 \end{vmatrix}.$$

250. Avaldada ja lihtsustada

$$1) \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} k & l & m \\ l & m & k \\ m & k & l \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} b-a & -2 & a+b \\ a & 0 & -b \\ a & 1 & -b \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix}.$$

251. Lahendada Crameri teoreemi järgi süsteemid

1) $2x - y - z = 5,$

$x + 3y - z = 4,$

$5x + 2y + 2z = 8;$

3) $3x + 4y + 2z + 10 = 0,$

$5x + 2y + 3z + 2 = 0,$

$2x - 2y + 5z = 0;$

2) $2x - 3y + 2z = -8,$

$x + 2y + z = 3,$

$5x + y - z = 5;$

4) $u + 2v + 2w = 3,$

$2u + 3v + 5w = 10,$

$3u + 7v + 4w = 3.$

n-realise determinandi mõiste

252. Leida antud naturaalarvude permutatsiooni inversioonide arv loomuliku järjestuse suhtes:

1) 2, 1, 4, 3; 2) 6, 3, 1, 2, 5, 4; 3) 7, 5, 6, 4, 1, 3, 2;

4) $n, n - 1, \dots, 1;$ 5) $2, 4, \dots, 2n, 1, 3, \dots, 2n - 1.$

253. Kas liikmed

1) $-c_1 d_2 c_3 a_5 e_4;$ 2) $+a_2 c_1 d_3 e_5 b_4;$ 3) $+a_4 c_2 b_1 d_4 e_5$

kuuluvad viierealise determinandi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

avaldisse?

254. Missuguse märgiga kuuluvad eelmises ülesandes antud determinandi avaldisse liikmed

1) $a_3 b_1 c_5 d_4 e_2;$ 2) $c_3 a_2 d_5 b_1 e_4;$ 3) $c_1 b_2 e_3 a_4 d_5?$

255. Valida *i* ja *k* nii, et korrutis $a_i b_5 c_1 d_k e_3$ kuuluks ülesandes 253 antud determinandi avaldisse märgiga $+$.

256. Arvutada vahetult determinandi definitiooni põhjal

1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix};$ 2) $\begin{vmatrix} 0 & b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & c \\ a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & c & a & b \end{vmatrix};$ 3) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$

257. Arvutada determinantide väärtused:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix};$ 2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix};$ 3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix};$

4) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \end{vmatrix};$ 5) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$

258. Lahendada Crameri teoreemi järgi süsteemid

$$\begin{array}{l}
 1) \quad 2x - 3y + 2z = -8, \\
 \quad \quad x + 2y + z = 3, \\
 \quad \quad 5x + y - z = 5; \\
 2) \quad 3x + 4y + z + 2u = 3, \\
 \quad \quad \quad \quad x - 5z + u = 0, \\
 \quad \quad \quad \quad 3y - 2z + u = 4, \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad y - 4z = 4; \\
 3) \quad 2x + y - 3u = 3, \\
 \quad \quad x - 4z + 2u = 0, \\
 \quad \quad \quad \quad 5y + u = -7, \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad z + 2u = 2.
 \end{array}$$

259. Leida maatriksi astak:

$$\begin{array}{l}
 1) \quad \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 8 \end{array} \right\|; \quad 2) \quad \left\| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 5 & 4 & -17 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 4 & 5 \end{array} \right\|; \\
 3) \quad \left\| \begin{array}{cccc} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{array} \right\|; \quad 4) \quad \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 5 & 3 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 & 17 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 3 & 12 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 & 57 \end{array} \right\|.
 \end{array}$$

Uurida, kas antud süsteem on lahenduv või mitte, ja lahenduvuse korral leida süsteemi üldlahend:

$$\begin{array}{l}
 260. \quad 2x + 3y - z = 3, \\
 \quad \quad 4x - y + z = 11, \\
 \quad \quad x - 2y + z = 4. \\
 261. \quad x + 2y + 3z = 4, \\
 \quad \quad 5x + 4y + z = 13, \\
 \quad \quad 3x + 3y + 2z = 10.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 262. \quad 3x - 7y + 4z + 7u = 20, \\
 \quad \quad x + 3y - 2z - 5u = -6, \\
 \quad \quad 2x + 5y - 6z - 6u = -7.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 263. \quad x + z + 2u - v = 4, \\
 \quad \quad y + z + u + v = 3, \\
 \quad \quad x - 2y - z + u - 3v = 0, \\
 \quad \quad 2x + y + 3z + 2u - v = 5.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 264. \quad x_1 + 2x_4 - 3x_5 = 5, \\
 \quad \quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\
 \quad \quad x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\
 \quad \quad \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 2.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 265. \quad x_1 + x_4 - x_5 = 3, \\
 \quad \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 5, \\
 \quad \quad \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\
 \quad \quad \quad \quad x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 6x_5 = 2.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 266. \quad x - y + 2z + 2v = 0, \\
 \quad \quad 3x + 2y - z = 3, \\
 \quad \quad \quad 3y + v = -1, \\
 \quad \quad \quad 3z - 2v = -2.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 267. \quad x + y - 2z = -5, \\
 \quad \quad 3x - y + z = 4, \\
 \quad \quad 2x + 2y + 5z = 8, \\
 \quad \quad 2x - 2y + 3z = 9, \\
 \quad \quad \quad x - 3y - 4z = -4.
 \end{array}$$

268. Missuguse a ja b puhul on süsteem

$$\begin{array}{l}
 2x - y + az = 4, \\
 x + 2y - z = 3, \\
 4x + 3y + z = b
 \end{array}$$

mittelahenduv?

269. Kuidas oleneb süsteemi

$$\begin{array}{l}
 4x + 2y - az = 1, \\
 3x - y + 2z = b, \\
 x - 3y + az = 2
 \end{array}$$

lahendi olemasolu ja ühesus parameetritest a ja b ?

270. Kuidas oleneb süsteemi

$$\begin{array}{l}
 x - 2ay + 2 = 0, \\
 4ax - 4y + z - 3 = 0, \\
 2x + z - 1 = 0
 \end{array}$$

lahendi olemasolu ja ühesus parameetrist a ?

Lahendada homogeensed süsteemid:

$$\begin{array}{l}
 271. \quad x + 2y - z = 0, \\
 \quad \quad 3x - 5y + z = 0.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 272. \quad x + 4y + 2z = 0, \\
 \quad \quad 4x + 11y + 5z = 0, \\
 \quad \quad 4x + 6y + 2z = 0.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 273. \quad 2x + y - z + 3v = 0, \\
 \quad \quad x + 2z + v = 0, \\
 \quad \quad y + z + v = 0, \\
 \quad \quad \quad 2z - v = 0.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 274. \quad x - 3y - 26z + 22v = 0, \\
 \quad \quad 3x + 8y + 24z - 19v = 0, \\
 \quad \quad x + 2y + 4z - 3v = 0, \\
 \quad \quad 3x + 5y + 6z - 4v = 0.
 \end{array}$$

275. Määrata homogeenses süsteemis

$$\begin{array}{l}
 ax + y + 3z = 0, \\
 x - 2y + 3z = 0, \\
 2x + ay = 0
 \end{array}$$

parameeter a nii, et süsteemil oleks mittetriviaalseid lahendeid.

Geomeetrilisi rakendusi

276. Leida punkte $(2; 1)$, $(1; 1)$ ja $(3; -3)$ läbiv parabool, mille telg on paralleelne y -teljega.

277. Koostada punkte $(-2; 2)$, $(2; 0)$ ja $(1; 1)$ läbiva ringjoone võrrand.

278. Leida teist järku joon, mis läbib punkte $(0; 0)$, $(3; -1)$, $(0; -1)$, $(1; -2)$ ja $(2; 0)$.

279. Mis tingimusel asetsevad kolm punkti $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ ja $(x_3; y_3)$ ühel sirgel?

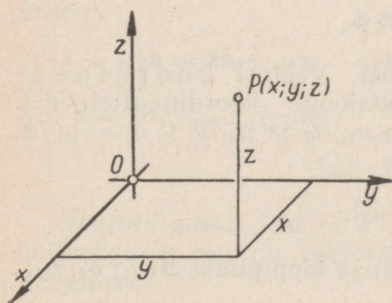
280. Mis tingimusel omavad kolm sirget $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ja $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ ühist punkti?

§ 5. KOORDINAADISTIK RUUMIS JA VEKTORALGEBRA

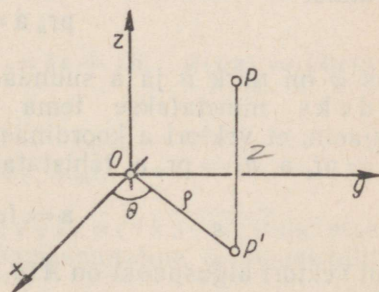
Ristkoordinaadistiku moodustavad ruumis pikkusühik ja kolm ühes punktis paarikaupa risti lõikuvat suunatud sirget — koordinaattelge, mida nimetatakse vastavalt x -, y - ja z -teljeks. Telgede positiivsed suunad (või nimetused) peavad seejuures olema valitud nii, et nad moodustaksid parema käe kolmiku (joon. 18). Koordinaattelgede lõikepunkti O nimetatakse koordinaatide alguspunktiks ja iga kahte koordinaattelge läbivat tasapinda koordinaattasapinnaks.

Punkti P abstsissiks ehk x -koordinaadiks nimetatakse P kaugust yz -tasapinnast, kui P asetseb selles poolruumis, kuhu suundub x -telg, või selle kauguse vastandaru, kui P asetseb teisel pool yz -tasapinda. Analoogiliselt defineeritakse punkti P ordinaat ehk y -koordinaat ja aplikaat ehk z -koordinaat P kauguse abil vastavalt kas xz - või xy -tasapinnast. Asjaolu, et punkti P abstsiss on x , ordinaat y ja aplikaat z , tähistatakse $P(x; y; z)$.

Ristkoordinaatide kõrval kasutatakse ruumis ka silinder- ja sfäärkoordinaate. Silinderkoordinaadistiku puhul määratakse punkt P aplikaadiga z ja punkti P' polaarkoordinaatidega ρ ja θ , kus P' on punkti P ristprojektsioon xy -tasapinnal (joon. 19). Punkti P silinderkoordinaadid on seotud P ristkoordi-



Joon. 18



Joon. 19

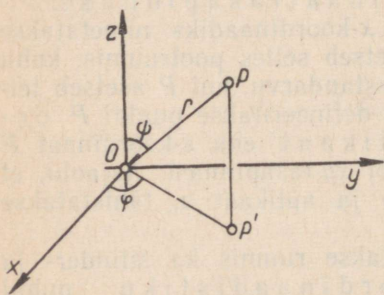
naatidega järgmiselt:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta, & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\y &= \rho \sin \theta, & \tan \theta &= \frac{y}{x}. \\z &= z,\end{aligned}$$

Punkti P sfäärkoordinaatideks on P kaugus r koordinaatide alguspunktist ning joonisel 20 näidatud nurgad φ ja ψ . Sfäärkoordinaadid ja ristkoordinaadid on seotud valemitega

$$\begin{aligned}x &= r \sin \psi \cos \varphi, & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\y &= r \sin \psi \sin \varphi, & \tan \varphi &= \frac{y}{x}, \\z &= r \cos \psi, & \tan \psi &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.\end{aligned}$$

Vektoriks nimetatakse suunatud sirglõiku, s. t. sirglõiku, mille otspunktide kohta on teada, kumb neist on algus- ja kumb lõpp-punkt. Vektorit, mille alguspunkt on A ja lõpp-punkt B ,



Joon. 20

tähistatakse \vec{AB} . Kahte vektorit (vabavektorit) loetakse võrdseseks, kui nad on paralleelsed, ühepikkused ja ühtepidi suunatud. Vektor on seega määratud kolme andmega: sihi, suuna ja pikkusega. Vektori a pikkust tähistatakse a või $|a|$. Vektorit, mille pikkus on 0, nimetatakse nullvektoriks ja tähistatakse $\mathbf{0}$. Vektorit, mille pikkus on 1, nimetatakse ühikvektoriks.

Vektori a projektsiooniks teljel u nimetatakse avaldist

$$\text{pr}_u a = a \cos \varphi,$$

kus φ on nurk u ja a suundade vahel. Vektori koordinaatideks nimetatakse tema projektsioone koordinaattelgedel. Asjaolu, et vektori a koordinaadid on a_1, a_2 ja a_3 , s. t. $a_1 = \text{pr}_x a$, $a_2 = \text{pr}_y a$, $a_3 = \text{pr}_z a$, tähistatakse

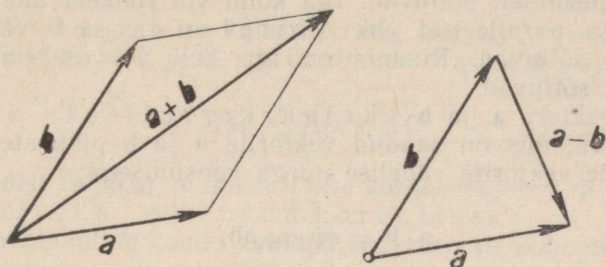
$$\mathbf{a} = \{a_1; a_2; a_3\}.$$

Kui vektori alguspunkt on $A(a_1; a_2; a_3)$ ja lõpp-punkt $B(b_1; b_2; b_3)$, siis

$$\vec{AB} = \{b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3\}.$$

Eriti on koordinaatide alguspunktist O punkti $A(a_1; a_2; a_3)$ suunduva vektori — punkti A kohavektori — koordinaadid vastavalt võrdsed punkti A koordinaatidega.

Kahe vektori \mathbf{a} ja \mathbf{b} summaks $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ nimetatakse ühisesse alguspunkti võetud vektoritele \mathbf{a} ja \mathbf{b} ehitatud rööpküliku seda diagonaali, mille alguseks on \mathbf{a} ja \mathbf{b} ühine algus (joon. 21).



Joon. 21

Vaheks $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ nimetatakse vektorit, mis liidetuna vektorile \mathbf{b} annab summana \mathbf{a} . Kui \mathbf{a} ja \mathbf{b} alguspunktid ühtivad, siis on $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektor, mille alguspunktiks on \mathbf{b} lõpp ja lõpp-punktiks \mathbf{a} lõpp (joon. 21). Vektorite liitmine on kommutatiivne ja assotsiatiivne:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}.$$

Kui $\mathbf{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ ja $\mathbf{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$, siis

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \{a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3\}.$$

Vektori \mathbf{a} skalaari (arvu) λ kordseks vektoriks $\lambda \mathbf{a}$ nimetatakse vektorit, mille pikkus on $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$ ning mis on vektoriga \mathbf{a} samasihiline (paralleelne) ja $\lambda > 0$ puhul samasuunaline ning $\lambda < 0$ puhul vastassuunaline. Kehtivad arvutusseadused:

$$(\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}, \quad \lambda (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \quad \lambda (\mu \mathbf{a}) = (\lambda \mu) \mathbf{a}.$$

Kui $\mathbf{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$, siis

$$\lambda \mathbf{a} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\}.$$

Vektori $\mathbf{a} \neq 0$ suuna ühikvektoriks \mathbf{a}° nimetatakse ühikvektorit, mis on vektoriga \mathbf{a} samasuunaline ja samasihiline. Seejuures

$$\mathbf{a}^\circ = \frac{1}{a} \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = a \mathbf{a}^\circ.$$

n vektorit $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{v}$ nimetatakse lineaarselt sõltuvaks, kui leiduvad niisugused arvud $\alpha, \beta, \dots, \varphi$, mis pole kõik korraga nullid, et

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \dots + \varphi\mathbf{v} = 0.$$

Iga kaks või rohkem paralleelset ehk kollineaarset vektorit on lineaarselt sõltuvad. Iga kolm või rohkem ühe ja sama tasapinnaga paralleelset ehk komplanaarset vektorit on lineaarselt sõltuvad. Ruumis on iga neli või rohkem vektorit lineaarselt sõltuvad.

Kahe vektori \mathbf{a} ja \mathbf{b} skalaarkorrutiseks $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ nimetatakse arvu, mis on saadud vektorite \mathbf{a} ja \mathbf{b} pikkuste korrutamisel nende vektorite vahelise nurga koosinusega:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \widehat{ab}.$$

Kui $\mathbf{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ ja $\mathbf{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$, siis

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Vektorite skalaarkorrutise puhul kehtivad arvutusseadused:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, & (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Kui vektorid \mathbf{a} ja \mathbf{b} on risti, siis $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Vektori pikkus avaldub skalaarkorrutise kaudu kujul

$$a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

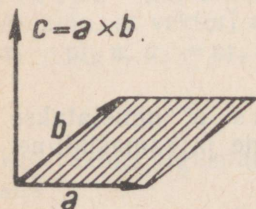
Eriti on punktide $A(a_1; a_2; a_3)$ ja $B(b_1; b_2; b_3)$ vaheline kaugus

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Vektori \mathbf{a} projektsioon vektori \mathbf{b} suunal avaldub kujul

$$\text{pr}_b \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^\circ = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{b}.$$

Kahe vektori \mathbf{a} ja \mathbf{b} vektoriaalkorrutiseks nimetatakse niisugust kolmandat vektorit \mathbf{c} , mis on sihilt risti nii vektoriga \mathbf{a} kui ka \mathbf{b} , suunatud nii, et vektorid \mathbf{a}, \mathbf{b} ja \mathbf{c} moodustavad parema käe kolmiku (joon. 22), ning pikkuselt võrdne vektoreile \mathbf{a} ja \mathbf{b} ehitatud rööpküliku



Joon. 22

pindalaga $ab |\sin \widehat{ab}|$. Vektoriaalkorrutist tähistatakse $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Kui $\mathbf{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ ja $\mathbf{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$, siis

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Vektoriaalkorrutise puhul kehtivad arvutusseadused:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}), \quad (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

Kui vektorid \mathbf{a} ja \mathbf{b} on kollineaarsed, siis $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$. Kui kolm-nurga tipud on A , B ja C , siis ta pindala S avaldub kujul

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

Avaldist $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ nimetatakse kolme vektori \mathbf{a} , \mathbf{b} ja \mathbf{c} sega-korrutiseks ehk ruumkorrutiseks ja tähistatakse \mathbf{abc} . Koordinaatide kaudu avaldub segakorrutis kolmerealise deter-minandina

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Kehtivad seosed:

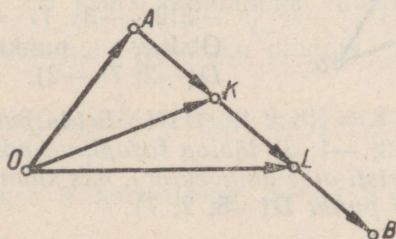
$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \\ \mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{acb}.$$

Geomeetriliselt tähendab kolme vektori segakorrutis \mathbf{abc} vektoreile \mathbf{a} , \mathbf{b} ja \mathbf{c} ehitatud rööptahuka ruumala võetuna märgiga $+$, kui \mathbf{a} , \mathbf{b} ja \mathbf{c} moodustavad parema käe kolmiku, ja märgiga $-$ vastupidisel juhul. Kolm vektorit on komplanaarsed siis ja ainult siis, kui nende segakorrutis on null.

Näiteid

I. Leida punktid, mis jaotavad punktide $A(2; -7; 1)$ ja $B(5; 2; -5)$ vahelise lõigu kolmeks võrdseks osaks.

Lahendus. Kui tähistada otsitavad punktid tähtedega K ja L (joon. 23), siis $\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ ja $\vec{AL} = \frac{2}{3}\vec{AB}$. Järelikult



Joon. 23

$$\begin{aligned}\vec{OK} &= \vec{OA} + \vec{AK} = \vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{AB}, \\ \vec{OL} &= \vec{OA} + \vec{AL} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{AB}.\end{aligned}\quad (*)$$

Et $\vec{AB} = \{5 - 2; 2 - (-7); -5 - 1\} = \{3; 9; -6\}$ ja $\vec{OA} = \{2; -7; 1\}$, siis saame seostest (*)

$$\vec{OK} = \{2; -7; 1\} + \frac{1}{3}\{3; 9; -6\} = \{3; -4; -1\},$$

$$\vec{OL} = \{2; -7; 1\} + \frac{2}{3}\{3; 9; -6\} = \{4; -1; -3\}.$$

Vektorite \vec{OK} ja \vec{OL} kui punktide K ja L kohavektorite koordinaadid on vastavalt võrdsed otsitavate punktide K ja L koordinaatidega. Ülesandes nõutud punktid on seega $K(3; -4; -1)$ ja $L(4; -1; -3)$.

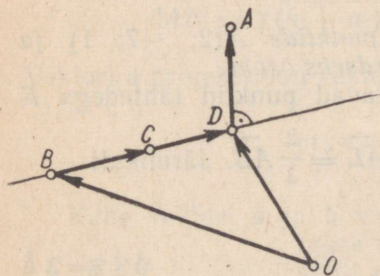
II. Leida punkti $A(0; 10; 3)$ ristprojektsioon punkte $B(4; -2; 1)$ ja $C(6; -5; 2)$ läbival sirgel.

Lahendus. Olgu otsitav punkt D . Et D asetseb punkte B ja C läbival sirgel, siis leidub niisugune skalaar k , et $\vec{BD} = k\vec{BC}$. Vektorite \vec{BC} ja $\vec{DA} = \vec{BA} - \vec{BD} = \vec{BA} - k\vec{BC}$ ristumisest järeljub

$$\vec{BC} \cdot (\vec{BA} - k\vec{BC}) = 0.\quad (*)$$

Et $\vec{BC} = \{2; -3; 1\}$ ja $\vec{BA} = \{-4; 12; 2\}$, siis $\vec{BA} - k\vec{BC} = \{-4 - 2k; 12 + 3k; 2 - k\}$, nii et tingimus (*) saab kuju $2(-4 - 2k) - 3(12 + 3k) + 1(2 - k) = 0$, millest $k = -3$.

Järelikult $\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{BD} = \vec{OB} + k\vec{BC} = \{4; -2; 1\} - 3\{2; -3; 1\} = \{-2; 7; -2\}$. Otsitav punkt on seega $D(-2; 7; -2)$.



Joon. 24

III. Leida punkte $A(1; -3; 2)$, $B(2; 1; -4)$ ja $C(3; -1; 3)$ läbiva tasapinna normaali ühikvektor (s. t. tasapinnaga risti olev ühikvektor), mis suundub sellesse poolruumi, kus asetseb punkt $D(-5; 2; 7)$.

Lahendus. Vektorid $\vec{AB} = \{1; 4; -6\}$ ja $\vec{AC} = \{2; 2; 1\}$

asetsevad punkte A , B ja C läbival tasapinnal. Järelikult on vektor

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \left\{ \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{16; -13; -6\}$$

neid punkte läbiva tasapinnaga risti. Leiame $|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{16^2 + (-13)^2 + (-6)^2} = \sqrt{461}$. Tasapinna normaali ühikvektorid on seega $\pm \frac{1}{\sqrt{461}} \{16; -13; -6\}$. Selleks et selgitada, kumb neist suundub sellesse poolruumi, kus asetseb D , moodustame $\vec{AD} = \{-6; 5; 5\}$ ja leiame $(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 16 \cdot (-6) - 13 \cdot 5 - 6 \cdot 5 < 0$. Järelikult on vektorite $\vec{AB} \times \vec{AC}$ ja \vec{AD} vaheline nurk nürinurk ning $\vec{AB} \times \vec{AC}$ suundub poolruumi, kus D ei asetse. Ülesandes nõutud vektor on seega vektorile $\vec{AB} \times \vec{AC}$ vastassuunaline: $-\frac{1}{\sqrt{461}} \{16; -13; -6\}$ ehk

$$\left\{ -\frac{16}{\sqrt{461}}; \frac{13}{\sqrt{461}}; \frac{6}{\sqrt{461}} \right\}.$$

IV. Nelitahuka tipud on $A(5; -1; 2)$, $B(2; -1; 0)$, $C(1; -2; 2)$ ja $D(4; -2; 5)$. Arvutada tipust A tahule BCD tõmmatud kõrguse pikkus.

Lahendus. Ühelt poolt on vektoreile $\vec{BA} = \{3; 0; 2\}$, $\vec{BC} = \{-1; -1; 2\}$ ja $\vec{BD} = \{2; -1; 5\}$ ehitatud rööptahuka ruumala

$$V = |\vec{BA} \ \vec{BC} \ \vec{BD}| = \left| \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \right| = |-3| = 3,$$

teiselt poolt aga on sama rööptahuka ruumala võrdne vektorile \vec{BC} ja \vec{BD} ehitatud rööpküliku pindala

$$S = |\vec{BC} \times \vec{BD}| = |\{-3; 9; 3\}| = 3\sqrt{11}$$

ja otsitava kõrguse h korrutisega. Seega $3 = 3\sqrt{11} \cdot h$, millest $h = \frac{1}{\sqrt{11}}$.

Koordinaadistikud ruumis

281. Leida punkti $A(-3; 1; 4)$ * ristprojektsioon

- 1) xy -tasapinnal;
- 2) yz -tasapinnal;
- 3) y -teljel;
- 4) x -teljel.

282. Leida punktiga $P(x; y; z)$ sümmeetriline punkt

- 1) xy -tasapinna suhtes;
- 2) xz -tasapinna suhtes;
- 3) x -telje suhtes;
- 4) z -telje suhtes;
- 5) koordinaatide alguspunkti suhtes.

283. Arvutada punkti $A(4; 12; -3)$ kaugus

- 1) koordinaatide alguspunktist;
- 2) xy -tasapinnast;
- 3) y -teljest.

284. Leida punkti M koordinaadid, kui M asetseb y -telje positiivse suuna ning x - ja z -telje negatiivse suuna vahelises ruumikaheksandikus ja kui M kaugus x -teljest on $2\sqrt{10}$, kaugus y -teljest $2\sqrt{17}$ ja kaugus z -teljest 10.

285. Punkti P silinderkoordinaadid on $(\rho; \theta; z)$. Leida P kaugus

- 1) koordinaatide alguspunktist;
- 2) x -teljest;
- 3) y -teljest.

286. Leida silinderkoordinaadistikus antud punktiga $P(\rho; \theta; z)$ sümmeetriline punkt

- 1) xy -tasapinna suhtes;
- 2) y -telje suhtes;
- 3) koordinaatide alguspunkti suhtes.

287. Arvutada ristkoordinaadistikus antud punktide $A(3; -3; -3)$ ja $B(-6; 0; 8)$ silinderkoordinaadid.

288. Punkti P sfäärkoordinaadid on $(r; \varphi; \psi)$. Leida P silinderkoordinaadid.

289. Arvutada punkti A ristkoordinaadid, kui ta sfäärkoordinaadid on $r = 6$, $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ ja $\psi = \frac{\pi}{6}$.

* Kui koordinaadistikku pole eraldi nimetatud, on tegemist ristkoordinaadistikuga.

Vektorite liitmine ja skalaariga korrutamine

290. Vektorid \mathbf{a} ja \mathbf{b} on risti ning $a = 8$ ja $b = 6$. Arvutada $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ ja $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

291. Leida $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, kui $a = 23$, $b = 11$ ja $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 20$.

292. Leida $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, kui $a = 19$, $b = 13$ ja $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 22$.

293. Avaldada rööpküliliku küljed \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} ja \vec{DA} diagonaalide $\vec{AC} = \mathbf{a}$ ja $\vec{BD} = \mathbf{b}$ kaudu.

294. Korrapärase kuusnurga $ABCDEF$ kaks lähiskülge on vektorid $\vec{AB} = \mathbf{a}$ ja $\vec{AF} = \mathbf{b}$. Avaldada vektorid \vec{AC} , \vec{AD} , \vec{AE} ja \vec{EC} vektorite \mathbf{a} ja \mathbf{b} kaudu.

295. Mis tingimust peavad rahuldama vektorid \mathbf{a} ja \mathbf{b} , et vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ poolitaks \mathbf{a} ja \mathbf{b} vahelise nurga?

296. Leida vektorite $\mathbf{a} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{p}$ ja $\mathbf{d} = 2\mathbf{p} - 3\mathbf{q}$ koordinaadid, kui $\mathbf{p} = \{2; -1; 5\}$ ja $\mathbf{q} = \{-4; 0; 1\}$.

297. Leida vektori $\mathbf{a} = \{3; -7; 2\}$ lõpp-punkti B koordinaadid, kui ta alguspunkt on $A(-1; 3; 4)$.

298. Leida lõigu AB keskpunkt K , kui $A(-2; 3; 0)$ ja $B(6; -1; -8)$.

299. Leida punktiga $A(3; 7; -8)$ sümmeetriline punkt B punkti $M(4; 3; -5)$ suhtes.

300. Leida punktid, mis jaotavad punktide $A(2; -3; 1)$ ja $B(7; 17; -9)$ vahelise lõigu viieks võrdseks osaks.

301. Kolmnurga tipud on $A(2; 0; -4)$, $B(4; -5; 8)$ ja $C(0; 2; 5)$. Leida selle kolmnurga mediaanide lõikepunkt.

302. Kolmnurga kaks tippu on $A(5; -2; 1)$ ja $B(-1; 5; -2)$ ning mediaanide lõikepunkt $M(2; 1; -3)$. Leida kolmas tipp.

303. Kolmnurga üks tipp on $A(3; 2; -6)$, selle tipu lähiskülje keskpunkt $K(2; -1; -2)$ ja mediaanide lõikepunkt $M(3; -3; 0)$. Leida ülejäänud kaks tippu.

304. Kolmnurga külgede keskpunktid on $K(4; -3; 1)$, $L(1; 2; 3)$ ja $M(-2; 1; 2)$. Leida kolmnurga tipud.

305. Määrata k ja l nii, et vektorid $\mathbf{a} = \{3k; -2; 5l\}$ ja $\mathbf{b} = \{4; -4; 2\}$ oleksid kollineaarsed, ja avaldada seejärel vektor \mathbf{a} vektori \mathbf{b} kaudu.

306. Lahutada vektor $\mathbf{a} = \{5; 1; -3\}$ vektorite $\mathbf{b} = \{7; 3; -1\}$ ja $\mathbf{c} = \{1; -1; -3\}$ sihiliste liidetavate summaks.

Skalaarkorrutis

307. Arvutada $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, kui

$$1) a = 8, \quad b = 6, \quad \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}} = \frac{2\pi}{3};$$

$$2) a = 2, \quad b = 3, \quad |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 4;$$

$$3) a = 4, \quad b = 12, \quad |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 10.$$

308. Kolmnurga ABC külgede pikkused on $|AB| = 7$, $|BC| = 5$ ja $|CA| = 6$. Arvutada $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

309. Arvutada $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, kui

- 1) $\mathbf{a} = \{2; -3; 1\}$ ja $\mathbf{b} = \{4; 2; -5\}$;
- 2) $\mathbf{a} = \{5; -1; 2\}$ ja $\mathbf{b} = \{-3; -1; 7\}$;
- 3) $\mathbf{a} = \{\alpha - 1; \beta - 1; \gamma - 1\}$ ja $\mathbf{b} = \{\beta + 1; \gamma + 1; \alpha + 1\}$.

310. Leida vektori pikkus, kui vektori koordinaadid on

- 1) $\{4; -2; 4\}$; 3) $\{-4; 7; -5\}$;
- 2) $\{-6; 2; 3\}$; 4) $\{2; -5; 11\}$.

311. On antud vektorid $\mathbf{p} = \{-2; 1; 2\}$ ja $\mathbf{q} = \{3; -2; 6\}$. Arvutada

- 1) $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$; 4) $(\mathbf{p} - 3\mathbf{q}) \cdot (2\mathbf{q} - 5\mathbf{p})$;
- 2) $\sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}$; 5) $(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q})$.
- 3) $\sqrt{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}}$;

312. Arvutada

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c},$$

kui $\mathbf{a} = \{k; l; m\}$, $\mathbf{b} = \{l; m; k\}$ ja $\mathbf{c} = \{m; k; l\}$.

313. Arvutada punkti $A(6; -9; 2)$ kaugus koordinaatide alguspunktist ja punkti $B(-6; 7; 17)$.

314. Kolmnurga tipud on $A(-2; 7; 5)$, $B(1; 4; -3)$ ja $C(3; 0; 1)$. Leida tipust A tõmmatud mediaani pikkus.

315. Arvutada vektorite $\mathbf{a} = \{2; 6; -3\}$ ja $\mathbf{b} = \{-2; 2; 1\}$ vahelise nurga koosinus.

316. Kolmnurga tipud on $A(2; 0; 4)$, $B(2; -1; -3)$ ja $C(2; -4; 1)$. Leida sisenuurk tipu A juures.

317. Missuguse k puhul on vektorid $\{2; 3k; -1\}$ ja $\{6; 2; 2k\}$ risti?

318. Selgitada, missugused kahest antud vektorist on risti, paralleelsed, moodustavad teravnurga või nürinurga:

- 1) $\{2; -7; 3\}$, $\{5; 2; 1\}$;
- 2) $\{4; 16; -12\}$, $\{-6; -24; 18\}$;
- 3) $\{2; 1; -8\}$, $\{7; 2; 2\}$;
- 4) $\{5; -3; 2\}$, $\{1; 3; 4\}$.

319. Leida vektori $\{2; 1; -2\}$ suuna ühikvektor.

320. Leida vektori $\{4; -2; -6\}$ projektsioon vektori $\{3; -4; 12\}$ suunal.

321. Leida vektori $\{6; -3; 7\}$ projektsioon vektori $\{-3; 4; 0\}$ suunal.

322. Leida vektorite $\{15; -16; 12\}$ ja $\{6; 0; -8\}$ suundade vahelise nurga poolitaja suuna ühikvektor.

323. Lahutada vektor $\mathbf{a} = \{5; 1; 6\}$ vektori $\mathbf{b} = \{-3; 6; -2\}$ sihilise ja \mathbf{b} ristsihilise liidetava summaks.

Vektoriaalkorrutis

324. Leida $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, kui $a = 3$, $b = 4$ ja $\widehat{ab} = 30^\circ$.

325. Leida $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, kui $a = 7$, $b = 5$ ja $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -21$.

326. On antud kaks vektorit $\mathbf{a} = \{2; -3; 1\}$ ja $\mathbf{b} = \{5; 1; -2\}$.

Leida

1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$; 2) $(3\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$; 3) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 5\mathbf{b})$.

327. Leida vektorite $\mathbf{a} = \{1; -3; 2\}$ ja $\mathbf{b} = \{3; 1; -2\}$ vahelise nurga siinus.

328. Arvutada kolmnurga ABC pindala, kui

1) $A(4; 1; -4)$, $B(6; 3; 7)$ ja $C(2; 3; 1)$;

2) $A(0; 5; -1)$, $B(2; 4; 2)$ ja $C(-6; 8; -10)$;

3) $A(-2; 3; 1)$, $B(3; -1; 1)$ ja $C(2; 3; 4)$.

329. Leida kolmnurga pindala, kui kolmnurga tippudeks on punkti $(a; b; c)$ ristprojektsioonid koordinaattelgedel.

330. Kolmnurga tipud on $A(2; 1; 5)$, $B(0; -3; 2)$ ja $C(1; -1; 4)$. Leida tipust A tõmmatud kõrguse pikkus.

331. Arvutada punkti $(5; 6; -4)$ kaugus punkte $(5; 2; 1)$ ja $(2; 2; 5)$ läbivast sirgest.

332. Leida punktidega $A(-2; 1; 3)$, $B(4; 2; 1)$ ja $C(-5; 1; 5)$ määratud tasapinna normaali ühikvektor.

333. Leida vektor, mis on risti vektoritega $\{6; 2; 1\}$ ja $\{3; 1; -20\}$, kui selle vektori pikkus on $2\sqrt{10}$ ning ta moodustab y -telje positiivse suunaga nürinurga.

Segakorrutis

334. Vektorid \mathbf{a} , \mathbf{b} ja \mathbf{c} moodustavad parema käe kolmiku ning on paarikaupa risti. Arvutada \mathbf{abc} , kui $a = 2$, $b = 4$ ja $c = 3$.

335. Arvutada \mathbf{abc} , kui \mathbf{c} on risti vektoritega \mathbf{a} ja \mathbf{b} , $\widehat{ab} = \frac{5\pi}{6}$, $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$.

336. Arvutada \mathbf{abc} , kui $\mathbf{a} = \{3; -4; 7\}$, $\mathbf{b} = \{1; 2; 5\}$ ja $\mathbf{c} = \{1; -4; 5\}$.

337. Arvutada nelitahuka ruumala, kui ta tipud on $A(2; -1; 3)$, $B(1; 3; 4)$, $C(5; 4; 5)$ ja $D(-1; 1; 2)$.

338. Leida punkti $(-4; 8; -5)$ kaugus punkte $(1; -2; 4)$, $(3; 7; 6)$ ja $(3; 1; 2)$ läbivast tasapinnast.

339. Veenduda, et vektorid $\mathbf{a} = \{0; 1; 4\}$, $\mathbf{b} = \{2; 1; -1\}$ ja $\mathbf{c} = \{4; 3; 2\}$ on komplanäärsed.

340. Missuguse k puhul asetsevad punktid $(2; -1; k)$, $(3; 1; 5)$, $(6; 4; k + 2)$ ja $(9; 7; 7)$ ühel tasapinnal?

§ 6. TASAPIND JA SIRGE RUUMIS

Tasapinna normaalvektoriks nimetatakse iga nullvektorist erinevat vektorit, mis on tasapinnaga risti. Tasapinna asend koordinaatteljestiku suhtes on määratud tasapinna ühe punktiga ja tasapinna ühe normaalvektoriga. Kui tasapinna üks punkt on $P_0(x_0; y_0; z_0)$ ja normaalvektor $\mathbf{n} = \{n_1; n_2; n_3\}$, siis on tasapinna võrrand

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

Tasapinna võrrand on jooksva punkti koordinaatide suhtes lineaarne, kusjuures tasapinna normaalvektori koordinaadid on selles võrrandis jooksva punkti koordinaatide kordajaiks. Vastupidi, iga lineaarvõrrand

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (2)$$

milles a , b ja c pole korruga nullid, esitab ristkoordinaadistikus tasapinda, mille üheks normaalvektoriks on vektor $\{a; b; c\}$.

Kui tasapinna võrrandis (2) puudub vabaliige (s. t. $d = 0$), siis läbib tasapind koordinaatide alguspunkti. Kui selles võrrandis puudub liige jooksva punkti ühe koordinaadiga (s. t. üks kordajaist a , b , c on null), siis on tasapind paralleelne puuduvale koordinaadile vastava koordinaatteljega. Kui tasapinna võrrandis esineb ainult üks jooksva punkti koordinaatidest (kaks kordajaist a , b , c on nullid), siis on tasapind risti sellele koordinaadile vastava koordinaatteljega.

Sirge asend on teljestiku suhtes määratav sirge ühe punktiga ja ühe sirgesihilise vektoriga (mis ei ole nullvektor). Kui sirge on paralleelne vektoriga $\mathbf{m} = \{m_1; m_2; m_3\}$ ja läbib punkti $P_0(x_0; y_0; z_0)$, siis on sirge võrrandeiks

$$\frac{x - x_0}{m_1} = \frac{y - y_0}{m_2} = \frac{z - z_0}{m_3}. \quad (3)$$

Sirge võrrandeid kujul (3) nimetatakse sirge kanoonilisteks võrranditeks. Kui vektori \mathbf{m} mõni koordinaatidest on null, siis kasutame ikkagi kirjutust (3), mõistes sel juhul võrdusi (3) mitte suhete võrdustena, vaid tingimusena, et lugejad on saadud

vastavate nimetajate ühe ja sama arvuga korrutamisel. Tähistades võrdustes (3) võrdseid suhteid $\frac{x-x_0}{m_1}$, $\frac{y-y_0}{m_2}$ ja $\frac{z-z_0}{m_3}$ tähega t , saame sirge jooksva punkti koordinaatide avaldised t kaudu:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + m_1 t, \\y &= y_0 + m_2 t, \\z &= z_0 + m_3 t,\end{aligned}\tag{4}$$

mida nimetatakse sirge parameetrilisteks võrranditeks.

Sirge on esitatav kahe tasapinna lõikejoonena ka lineaarvõrrandisüsteemiga

$$\begin{cases}a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \\a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0,\end{cases}\tag{5}$$

kus jooksva punkti koordinaatide kordajad ei ole võrdelised (vastupidisel juhul oleksid tasapinnad paralleelsed).

Kui võrrandis (4) parameeter t tähendab aega ja neid võrrandeid vaadelda punkti P liikumise võrrandina, siis määravad nad punkti P ühtlase sirgjoonelise liikumise, kusjuures hetkel $t=0$ asetseb P punktis P_0 ning P konstantne kiirus on $v = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$.

Kahe tasapinna, kahe sirge ning sirge ja tasapinna vahelised nurgad, ristumise ja paralleelsuse tingimused on avaldatavad tasapindade normaalvektorite ja sirgesihiliste vektorite kaudu.

Punkti $P_1(x_1; y_1; z_1)$ kaugus δ tasapinnast (2) avaldub kujul

$$\delta = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.\tag{6}$$

(Näiteid)

I. Koostada punkte $A(2; -3; 1)$, $B(-2; 0; -4)$ ja $C(6; -5; 3)$ läbiva tasapinna võrrand.

Lahendus. Tasapinna võrrandi koostamiseks on vaja tasapinna ühte punkti ja ühte normaalvektorit. Otsitava tasapinna üheks punktiks võib võtta ühe kolmest antud punktist, näiteks B . Et antud punktid A , B ja C asetsevad otsitaval tasapinnal, siis on vektorid $\vec{AB} = \{-4; 3; -5\}$ ja $\vec{AC} = \{4; -2; 2\}$ selle tasapinnaga paralleelsed. Järelikult on vektoriaalkorrutis

$\vec{AB} \times \vec{AC} = \{-4; -12; -4\}$, aga siis ka sellega paralleelne vektor $n = -\frac{1}{4}(\vec{AB} \times \vec{AC}) = \{1; 3; 1\}$ tasapinnaga risti. Asetades punkti B ja vektori n koordinaadid võrrandisse (1), saame otsi-

tava tasapinna võrrandiks $1 \cdot (x + 2) + 3 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z + 4) = 0$ ehk $x + 3y + z + 6 = 0$. Arvutuste kontrolliks veendume, et punktide A ja C koordinaadid rahuldavad saadud võrrandit.

II. *Leida tasapind, mis läbib punkti $A(5; -2; 3)$, on risti tasapinnaga $4x + 3y - z + 2 = 0$ ja paralleelne z -teljega.*

Lahendus. Otsitava tasapinna võrrandi koostamisel võib üheks punktiks võtta antud punkti A . Antud tasapinna võrrandist järeldub, et üheks tema normaalvektoriks on $\mathbf{m} = \{4; 3; -1\}$. Et antud tasapind on otsitava tasapinnaga risti, siis on vektor \mathbf{m} otsitava tasapinnaga paralleelne. Samuti on iga z -telje sihiline vektor, seega ka näiteks vektor $\mathbf{n} = \{0; 0; 1\}$, ülesande andmete kohaselt otsitava tasapinnaga paralleelne. Järelikult on vektori-alkorrutis $\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \{3; -4; 0\}$ selle tasapinnaga risti. Otsitava tasapinna võrrand on seega $3(x - 5) - 4(y + 2) + 0(z - 3) = 0$ ehk $3x - 4y - 23 = 0$.

III. *Koostada punkte $A(-1; 3; -2)$ ja $B(5; 3; 1)$ läbiva sirge võrrandid.*

Lahendus. Sirge võrrandite koostamiseks on vaja sirge ühte punkti ja ühte sirgesihilist vektorit. Sirge üheks punktiks võib käesoleval juhul võtta ühe antud punkti, näiteks A , ja sirgesihiliseks vektoriks neid punkte ühendava vektoriga $\vec{AB} = \{6; 0; 3\}$ paralleelse vektori $\mathbf{m} = \frac{1}{3} \vec{AB} = \{2; 0; 1\}$. Ülesandes nõutud sirge (kanoonilisteks) võrranditeks on seega üldkuju (3) järgi

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{0} = z+2.$$

Vastavalt kokkulepele võrrandite (3) tähenduse kohta juhul, kui mõni nimetajaist on null, tuleb saadud võrrandeid mõista süsteemina

$$\frac{x+1}{2} = z+2, \quad y-3=0.$$

IV. *Koostada tasapindade $2x - 3y + 5z - 2 = 0$ ja $x + 6y + 2z + 3 = 0$ lõikesirge kanoonilised võrrandid.*

Lahendus. Antud tasapindade lõikesirge kui mõlemal tasapinnal asetsev sirge on risti nende tasapindade normaalvektoritega $\mathbf{m} = \{2; -3; 5\}$ ja $\mathbf{n} = \{1; 6; 2\}$ ja järelikult paralleelne vektori-alkorrutisega $\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \{-36; 1; 15\}$. Lõikesirge üheks punktiks võib võtta ta lõikepunkti ühe koordinaattasapinnaga, näiteks xz -tasapinnaga $y = 0$. Süsteemist

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z - 2 &= 0, \\ x + 6y + 2z + 3 &= 0, \\ y &= 0 \end{aligned}$$

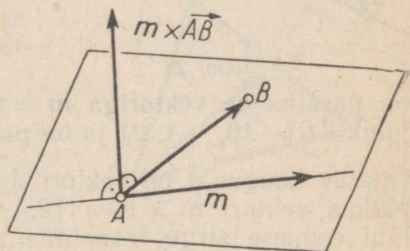
saame $x = -19$, $y = 0$, $z = 8$. Antud tasapindade lõikesirge läbib seega punkti $(-19; 0; 8)$ ja on paralleelne vektoriga $\{-36; 1; 15\}$. Järelikult on tema kanoonilised võrrandid

$$\frac{x+19}{-36} = y = \frac{z-8}{15}.$$

V. Leida tasapind, mis läbib punkti $B(2; -3; 1)$ ja millel asetseb sirge $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{3} = 2-z$.

Lahendus. Kui antud sirge võrrandid ümber kirjutada kujul $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{-1}$, siis järeldub nende võrrandite kõrvutamisel võrranditega (3), et antud sirge läbib punkti $A(-1; 2; 2)$ ning on paralleelne vektoriga $\mathbf{m} = \{4; 3; -1\}$. Ülesandes nõutud tasapind on paralleelne vektoritega \mathbf{m} ja $\vec{AB} = \{3; -5; -1\}$ ning järelikult risti vektoriga $\mathbf{m} \times \vec{AB} = \{-8; 1; -29\}$ (joon. 25).

Võttes tasapinna üheks punktiks A , saame tasapinna võrrandiks $-8(x+1) + (y-2) - 29(z-2) = 0$ ehk $8x - y + 29z - 48 = 0$. Arvutuste kontrolliks veendume, et ka punkt B asetseb tasapinnal: $8 \cdot 2 - (-3) + 29 \cdot 1 - 48 = 0$.



Joon. 25

VI. Leida y -teljel punktid, mis asetsevad tasapindadest $x - 2y + 3z - 1 = 0$ ja $3x + y - 2z + 5 = 0$ võrdsel kaugusel.

Lahendus. Kõik punktid, mis asetsevad kahest lõikuvast tasapinnast võrdsel kaugusel, moodustavad nende tasapindade vaheliste nurkade poolitustasapinnad. Punkt $P(x; y; z)$ asetseb antud kahest tasapinnast võrdsel kaugusel täpselt siis, kui [valemi (6) järgi]

$$\frac{|x - 2y + 3z - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{|3x + y - 2z + 5|}{\sqrt{9 + 1 + 4}}$$

ehk $x - 2y + 3z - 1 = \pm(3x + y - 2z + 5)$. Seega on antud tasapindade vaheliste nurkade poolitustasapinnad $2x + 3y - 5z + 6 = 0$ ja $4x - y + z + 4 = 0$. Ülesandes nõutud punktid on nende tasapindade ja y -telje lõikepunktid. Et y -telje võrrandid on $x = z = 0$, siis on otsitavad punktid $(0; -2; 0)$ ja $(0; 4; 0)$.

VII. Arutada punkti $B(1; 2; 5)$ kaugus sirgest $x = \frac{1-y}{2} = z - 3$.

Lahendus. Antud sirge võrrandeist järeldub (nagu näites V), et sirge läbib punkti $A(0; 1; 3)$ ja on paralleelne vektoriga $\mathbf{m} = \{1; -2; 1\}$. Vektoreile \mathbf{m} ja $\vec{AB} = \{1; 1; 2\}$ ehitatud rööpküliku (joon. 26) pindala on ühelt poolt

$$S = |\mathbf{m} \times \vec{AB}| = | \{-5; -1; 3\} | = \sqrt{25 + 1 + 9} = \sqrt{35},$$

teiselt poolt aga $S = dm = d \cdot \sqrt{1 + 4 + 1} = d\sqrt{6}$, kus d on otsitav punkti kaugus sirgest.

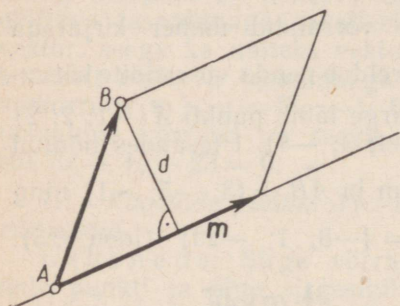
Seega $\sqrt{35} = d\sqrt{6}$, millest

$$d = \sqrt{\frac{35}{6}}.$$

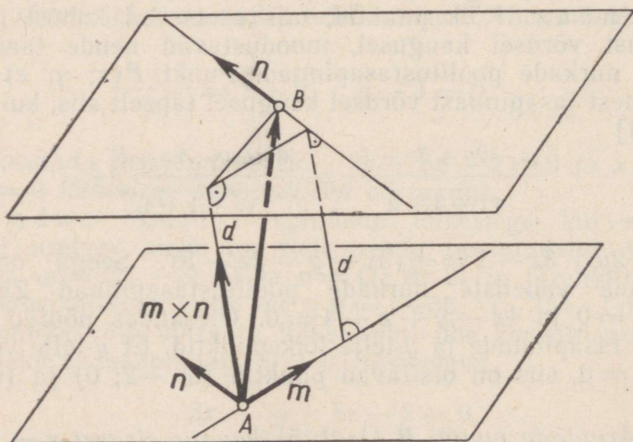
VIII. Leida sirge $\frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-3}$ kaugus sirgest $\frac{x+10}{3} = \frac{y+4}{8} = \frac{z-2}{-3}$.

Lahendus. Esimene antud sirge läbib punkti $A(5; 1; 3)$ ja on paralleelne vektoriga $\mathbf{m} = \{2; 4; -3\}$ ning teine sirge läbib punkti $B(-10; -4; 2)$ ja on paralleelne vektoriga $\mathbf{n} = \{3; 8; -3\}$.

Otsitav kaugus d on vektori $\vec{AB} = \{-15; -5; -1\}$ projektsiooni pikkus vektori $\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \{12; -3; 4\}$ suunal. Tõepoolest, võttes läbi esimese sirge tasapinna paralleelselt teise sirgega ja läbi teise sirge tasapinna paralleelselt esimese sirgega (joon. 27), näeme, et antud sirgete vaheline kaugus — sirgete ühise ristlõigu



Joon. 26



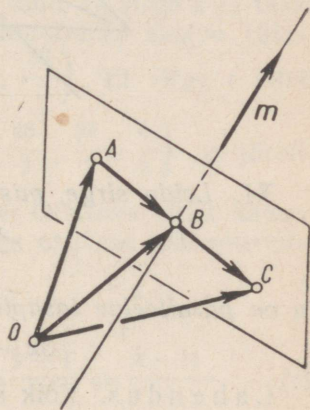
Joon. 27

pikkus — kui konstrueeritud paralleelsete tasapindade vaheline kaugus on võrdne ühe tasapinna mistahes punkti teise tasapinna mingi punktiga ühendava lõigu projektsiooniga tasapindade ühisel normaalil. Seega

$$d = |pr_{\mathbf{m} \times \mathbf{n}} \vec{AB}| = \frac{|\vec{AB} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})|}{|\mathbf{m} \times \mathbf{n}|} = \frac{|-180 + 15 - 4|}{\sqrt{144 + 9 + 16}} = \frac{169}{\sqrt{169}} = 13.$$

IX. Leida punktiga $A(5; -4; 7)$ sümmeetriline punkt sirge $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-8}{5}$ suhtes.

Lahendus. Leiame kõigepealt punkti A ristprojektsiooni B antud sirgel. Selleks võtame läbi punkti A risti antud sirgega tasapinna (joon. 28). Antud sirge sihiline vektor $\mathbf{m} = \{-2; 6; 5\}$ on selle tasapinna normaalks ja tasapinna võrrand on järelilikult $-2(x-5) + 6(y+4) + 5(z-7) = 0$ ehk $2x - 6y - 5z + 1 = 0$. Sirge ja tasapinna lõikepunkti leidmiseks moodustame sirge parameetriselised võrrandid $x = 2 - 2t$, $y = 5 + 6t$, $z = 8 + 5t$ ja asetame neist x , y ja z tasapinna võrrandisse: $2(2 - 2t) - 6(5 + 6t) - 5(8 + 5t) + 1 = 0$, millest $t = -1$, nii et B koordinaadid on $x = 2 - 2 \cdot (-1) = 4$, $y = 5 + 6 \cdot (-1) = -1$ ja $z = 8 + 5 \cdot (-1) = 3$. Moodustame nüüd $\vec{AB} = \{-1; 3; -4\}$. Kui tähistame



Joon. 28

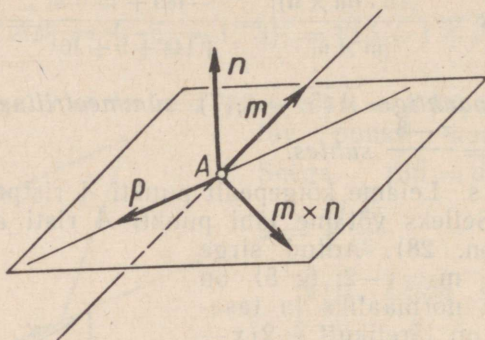
otsitava punkti tähega C , siis (joon. 28) $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + 2\vec{AB} = \{5; -4; 7\} + 2\{-1; 3; -4\} = \{3; 2; -1\}$. Punktiga A sümmeetriline punkt antud sirge suhtes on järelilikult $C(3; 2; -1)$.

X. Leida sirge $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+4}{4}$ ristprojektsioon tasapinnal $3x + y - z + 4 = 0$.

Lahendus. Et antud sirge sihilise vektori $\mathbf{m} = \{3; -2; 4\}$ ja antud tasapinna normaali $\mathbf{n} = \{3; 1; -1\}$ skalaarkorrutis $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 3$ on nullist erinev, siis antud sirge ja tasapind lõikuvad teatavas punktis A . Otsitav ristprojektsioon on siis punkti A läbiv sirge, mis on risti vektoriga \mathbf{n} (sest ta asetseb antud tasapinnal) ja vektoriga $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ (projekteeritavate kiirte tasapinna normaaliga), seega vektori $\mathbf{p} = (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}$ sihiline (joon. 29). Antud sirge ja tasapinna lõikepunkti A koordinaatideks saame

eelmises näites kirjeldatud viisil $A(-11; 9; -20)$. Edasi $\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \{-2; 15; 9\}$ ja $\mathbf{p} = (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \{-24; 25; -47\}$. Ülesandes nõutud ristprojektsioon on seega

$$\frac{x+11}{24} = \frac{y-9}{-25} = \frac{z+20}{47}.$$



Joon. 29

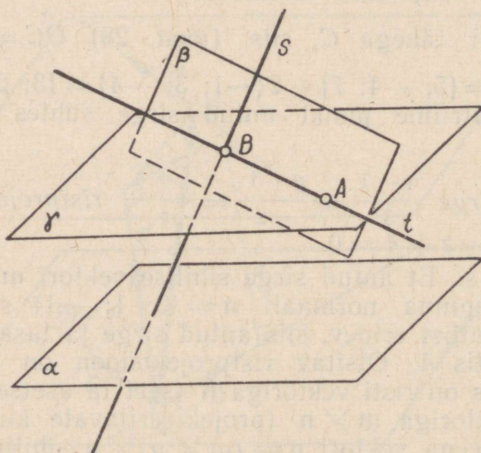
XI. Leida sirge, mis läbib punkti $A(-1; 0; 4)$, lõikab sirget

$$\frac{x+1}{3} = y-3 = \frac{z}{2} \quad (s)$$

ja on paralleelne tasapinnaga

$$3x - 4y + z - 10 = 0. \quad (a)$$

Lahendus. Kõik sirged, mis läbivad punkti A ja lõikavad sirget s , asetsevad punkti A ja sirget s läbival tasapinnal β (joon. 30) ning on seega risti tasapinna β normaalvektoriga \mathbf{m} .



Joon. 30

Viimase leiame sirgel s asetsevast punktist $(-1; 3; 0)$ punkti A suunduva vektori $\{0; -3; 4\}$ ja sirge s sihilise vektori $\{3; 1; 2\}$ vektoriaalkorrutisena: $\mathbf{m} = \{-10; 12; 9\}$. Et otsitav sirge t on ülesande tingimuste kohaselt risti ka tasapinna α normaaliga $\mathbf{n} = \{3; -4; 1\}$, siis on ta vektoriaalkorrutise $\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \{48; 37; 4\}$ sihiline ning ta kanoonilised võrrandid on järelikult

$$\frac{x+1}{48} = \frac{y}{37} = \frac{z-4}{4}.$$

Teine lahendusviis. Kõik sirged, mis läbivad punkti A ja on paralleelsed tasapinnaga α , asetsevad tasapinnal γ , mis on võetud läbi punkti A paralleelselt tasapinnaga α . Tasapinna γ võrrand on $3(x+1) - 4y + z - 4 = 0$ ehk $3x - 4y + z - 1 = 0$. Et otsitav sirge t lõikab veel sirget s , siis läbib ta sirge s ja tasapinna γ lõikepunkti B .* Punkti B koordinaatideks saame (ülesandes IX kirjeldatud viisil) $B\left(\frac{41}{7}; \frac{37}{7}; \frac{32}{7}\right)$. Et sirge t läbib

punkte A ja B , siis on ta vektori $\vec{AB} = \left\{ \frac{48}{7}; \frac{37}{7}; \frac{4}{7} \right\}$ ja järel-

kult ka vektori $7\vec{AB} = \{48; 37; 4\}$ sihiline. Otsitava sirge kanoonilised võrrandid tulevad seega samad mis esimese lahendusviisi puhul.

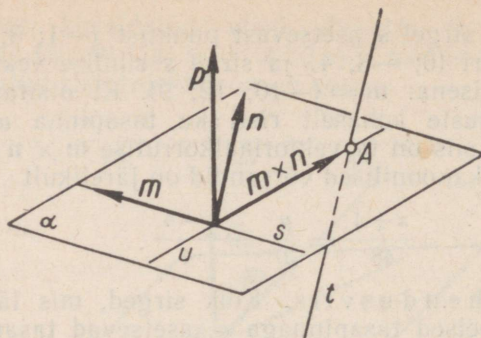
XIII. Koostada sirgete

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y+3}{2} = z \quad (s) \quad \text{ja} \quad x-10 = \frac{y-4}{2} = \frac{z-11}{7} \quad (t)$$

ühise ristlõikaja kanoonilised võrrandid.

Lahendus. Otsitav sirge u on risti sirge s sihilise vektoriga $\mathbf{m} = \{3; 2; 1\}$ ja t sihilise vektoriga $\mathbf{n} = \{1; 2; 7\}$ (joon. 31). Seega on üheks u sihiliseks vektoriks $\frac{1}{4}(\mathbf{m} \times \mathbf{n}) = \{3; -5; 1\}$. Sirge u ühe punkti leidmiseks võtame abitasapinna α läbi sirge s paralleelselt vektoriga $\frac{1}{4}(\mathbf{m} \times \mathbf{n})$. Selle tasapinna normaaliks on vektor $\mathbf{p} = \frac{1}{4}(\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{m} = \{-7; 0; 21\} = -7\{1; 0; -3\}$ ja üheks punktiks sirgel s asetsev punkt $(-3; -3; 0)$. Seega on abitasapinna α võrrand $1 \cdot (x+3) + 0 \cdot (y+3) - 3 \cdot (z-0) = 0$ ehk $x - 3z + 3 = 0$. Et otsitav sirge u lõikab sirget s ja on paralleelne vektoriga $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$, siis ta asetseb tasapinnal α . Teiselt poolt aga lõikab sirge u ka sirget t . Järelikult läbib u sirge t ja tasapinna α lõikepunkti A . Punkti A koordinaatideks saame

* Kui s ja γ ei lõikuks, siis ei oleks ülesanne lahenduv, kui aga s asetseks γ -l, siis oleks ülesandel lõpmata palju lahendeid.



Joon. 31

$A(9; 2; 4)$. Antud sirgete ühise ristlõikaja kui punkti A läbiva ja vektori $\frac{1}{4}(\mathbf{m} \times \mathbf{n})$ sihilise sirge kanoonilised võrrandid on

$$\frac{x-9}{3} = \frac{y-2}{-5} = z-4.$$

Arvutuste kontrolliks veendume, et leitud sirge u lõikab antud sirget s . Kaks mitteparalleelset sirget lõikuvad täpselt siis, kui ühe sirge mingist punktist teise sirge mingisse punkti suunduv vektor ja nende sirgete sihilised vektorid on komplanarsed, s. t. kui nende kolme vektori segakorrutis on null. Käesoleval juhul peab seega sirge u punktist A sirge s punkti $(-3; -3; 0)$ suunduva vektori $\{-12; -5; -4\}$, sirge s sihilise vektori $\{3; 2; 1\}$ ja sirge u sihilise vektori $\{3; -5; 1\}$ segakorrutis olema null. See segakorrutis avaldub kolmerealise determinandina

$$\begin{vmatrix} -12 & -5 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -24 - 15 + 60 + 24 - 60 + 15 = 0.$$

Seega sirged u ja s lõikuvad tõepoolest.

XIII. Leida tasapindade $3x - y + 2z + 8 = 0$ ja $5x + 3y - 4z + 6 = 0$ lõikesirget läbiv tasapind, mis asetseb võrdsel kaugusel punktidest $A(1; -1; 3)$ ja $B(-3; 7; 1)$.

Lahendus. Ülesandel on üldkujul kaks lahendit: üks tasapind läbib lõikesirget ja lõigu AB keskpunkti, teine läbib lõikesirget ja on paralleelne vektoriga \vec{AB} .

Võrrand

$$3x - y + 2z + 8 + k(5x + 3y - 4z + 6) = 0 \quad (*)$$

esitab sobival k väärtusel iga antud kahe tasapinna lõikesirget läbivat tasapinda peale teise antud tasapinna [vrd. § 2, (10) sirgete juhul]. Nõudes, et punktide A ja B vahelise lõigu keskpunkti $(-1; 3; 2)$ koordinaadid rahuldaksid võrrandit (*), saame esimesele otsitavale tasapinnale vastava k väärtuse: $6 + 2k_1 = 0$, $k_1 = -3$. Tasapinna (*) normaali $\{3 + 5k; -1 + 3k; 2 - 4k\}$ ja vektori $\vec{AB} = \{-4; 8; -2\}$ ristumise tingimusest $(3 + 5k) \cdot (-4) + (-1 + 3k) \cdot 8 + (2 - 4k) \cdot (-2) = 0$ leiame, et ülesande tingimusi rahuldavale teisele tasapinnale vastavaks k väärtuseks on $k_2 = 2$. Asetades leitud k_1 ja k_2 võrrandisse (*), saame ülesandele kaks vastust: $6x + 5y - 7z + 5 = 0$ ja $13x + 5y - 6z + 20 = 0$.

Tasapinna võrrand

341. Koostada punkti $A(-2; 1; 3)$ läbiva tasapinna võrrand, kui see tasapind on risti vektoriga $\mathbf{n} = \{5; -2; 7\}$.

342. Leida koordinaatide alguspunkti läbiv tasapind, mis on risti vektoriga $\{-2; 11; -8\}$.

343. Leida tasapind, mis läbib punkti $A(3; -8; 4)$ ja on risti z -teljega.

344. Leida tasapind, mis läbib punkti $(3; -5; 2)$ ja on risti koordinaatide alguspunktist sellesse punkti suunduva lõiguga.

345. Leida tasapinna $5x - 2y + 3z + 15 = 0$ ja koordinaattelgede lõikepunktid.

346. Arvutada tasapinnaga $x - 6y + 4z - 12 = 0$ ja koordinaattasapindadega piiratud keha ruumala.

347. Leida tasapinnal $3x - 2y + z - 5 = 0$ punkt, mille ordinaat on -3 ning mille abstsiss ja aplikaat on võrdsed.

348. Koostada punktide $A(3; -8; 1)$ ja $B(1; 6; -7)$ vahelise lõigu keskristtasapinna võrrand.

349. Koostada punkte $A(2; -4; 3)$ ja $B(1; -2; 5)$ läbiva ja vektoriga $\mathbf{m} = \{2; -3; 1\}$ paralleelse tasapinna võrrand.

350. Leida tasapind, mis läbib punkti $(3; 1; -7)$ ning on paralleelne vektoritega $\{-2; 1; 3\}$ ja $\{4; 2; 5\}$.

351. Leida tasapind, mis läbib punkte $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$ ja $C(3; 2; 1)$.

352. Leida tasapind, millel asetsevad y -telg ja punkt $(2; -3; 5)$.

353. Selgitada missugused järgmistest võrrandipaaridest esitavad paralleel- ja missugused risttasapindu:

1) $x - 3y + 2z = 0$,	$x - 3y + 2z + 17 = 0$;
2) $2x - 4y + 6z + 1 = 0$,	$3x - 6y + 9z - 2 = 0$;
3) $5x - y + 3z = 0$,	$2x - 2y - 4z + 5 = 0$;

$$4) 3x + 2y - z + 5 = 0, \quad x + 4y + z - 2 = 0;$$

$$5) 2x + 3y - 7 = 0, \quad z + 8 = 0.$$

354. Leida antud kahe tasapinna vaheline (väikseim) nurk:

$$1) x + 9y - 3z + 2 = 0, \quad 3x - y - 2z + 5 = 0;$$

$$2) 3x - z + 4 = 0, \quad 2x + z - 7 = 0;$$

$$3) x\sqrt{2} - y - z + 21 = 0, \quad x\sqrt{2} - y + z - 7 = 0.$$

355. Leida tasapind, mis läbib punkti $(5; -2; 3)$ ja on paralleelne tasapinnaga $2x + 3y - z = 0$.

356. Leida tasapind, mis läbib koordinaatide alguspunkti ning on risti tasapindadega $2x - 3y + z - 2 = 0$ ja $3x + y + 2z - 1 = 0$.

357. Leida tasapind, mis läbib punkti $(3; -5; 2)$, on risti tasapinnaga $x + 2y - z + 2 = 0$ ja paralleelne vektoriga $\{2; -3; 1\}$.

358. Leida tasapind, mis läbib punkte $(4; -2; 5)$ ja $(1; 0; 3)$ ning on risti tasapinnaga $x - 6y + 3z - 8 = 0$.

359. Leida tasapind, mis läbib punkte $(3; 1; 2)$ ja $(2; -1; 1)$ ning on paralleelne y -teljega.

360. Leida tasapind, millel asetseb x -telg ja mis on risti tasapinnaga $2x - y + 5z - 3 = 0$.

Sirge võrrandid

361. Koostada vektoriga $\mathbf{m} = \{7; -2; 3\}$ paralleelse ja punkti $A(-3; 1; 0)$ läbiva sirge kanoonilised võrrandid.

362. Koostada sirge kanoonilised võrrandid, kui sirge läbib punkti $(2; -5; 1)$ ning on risti tasapinnaga $3x + 2y - z + 5 = 0$.

363. Leida punkti $(3; 7; -12)$ läbiv sirge, mis on paralleelne sirgega $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+2}{-5}$.

364. Koostada koordinaatide alguspunkti ja punkti $(7; -3; 1)$ läbiva sirge kanoonilised võrrandid.

365. Koostada punkte $(2; -5; 3)$ ja $(-1; 0; 2)$ läbiva sirge kanoonilised võrrandid.

366. Koostada punkte $(3; 2; 0)$ ja $(1; -2; 5)$ läbiva sirge parameetriselised võrrandid.

367. Leida punkte $(2; 13; -5)$ ja $(7; 9; 2)$ läbiva sirge ja yz -tasapinna lõikepunkt.

368. Kolmnurga tipud on $A(7; -4; 2)$, $B(9; 1; -6)$ ja $C(3; -5; 4)$. Leida tipust A tõmmatud mediaan.

369. Koostada sirge $\frac{x-1}{3} = 2y = 4 - z$ parameetriselised võrrandid.

370. Missugused punktidest $A(2; 3; -1)$; $B(1; 2; -3)$,
 $C(8; -1; 11)$ ja $D\left(\frac{3}{2}; \frac{10}{3}; -2\right)$ asetsevad sirgel $\frac{x-2}{3} =$
 $= \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{6}$?

371. Leida sirgel $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+5}{-4}$ punkt, mille ordinaat on 5.

372. Leida kahe sirge vaheline nurk:

1) $\frac{x-2}{16} = \frac{y+1}{12} = \frac{5-z}{15}$, $2x = y + 1 = z - 4$;

2) $x = 2t - 3$, $y = t + 1$, $z = -3t$, $\frac{x+1}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{5}$;

3) $\frac{x+1}{0} = \frac{y}{3} = -z$, $\frac{x}{0} = \frac{y+3}{2} = z$;

4) $2x + 1 = 4 - 3y = z$, $1 - x = \frac{3y+2}{2} = 4 - 2z$.

373. Leida punkti $(3; 9; -1)$ läbiv sirge, mis on risti vektoritega $\{2; 3; 1\}$ ja $\{0; 7; -2\}$.

374. Koostada tasapindade $x + 2y - z - 6 = 0$ ja $2x - y + z + 1 = 0$ lõikesirge kanoonilised võrrandid.

375. Koostada tasapindade $3x - 2y + 2z + 5 = 0$ ja $x + y + 5z = 0$ lõikesirge parameetrilised võrrandid.

376. Leida koordinaatide alguspunkti läbiv sirge, mis on risti sirgetega $x = 3t + 1$, $y = 1 - 2t$, $z = t + 2$ ja $x = t - 5$, $y = 6t + 1$, $z = t + 4$.

377. Punkti $P(x; y; z)$ liikumise võrrandid on

$$x = 2 - 6t, \quad y = 1 + 3t, \quad z = -5 + 2t.$$

Leida punkti P liikumise kiirus ja asukoha koordinaadid hetkel $t = 3$.

378. Koostada punkti $P(x; y; z)$ liikumise võrrandid, kui P , asetstes hetkel $t = 0$ punktis $(7; -3; 5)$, liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt vektori $\{6; -2; 9\}$ suunas kiirusega $v = 22$.

379. Koostada punkti $P(x; y; z)$ liikumise võrrandid, kui punkt P liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt, asetstes hetkel $t = 0$ punktis $A(4; -5; 7)$ ja hetkel $t = 6$ punktis $B(7; -1; -5)$. Arvutada P liikumise kiirus v ja kaugus d koordinaatide alguspunkti hetkel $t = 2$.

Kauguste leidmine

380. Leida punkti A kaugus antud tasapinnast:

1) $A(3; -2; 7)$, $6x - 2y + 9z + 3 = 0$;

2) $A(0; -4; 5)$, $16x + 15y - 12z - 5 = 0$;

3) $A(2; -3; 1)$, $3x + 5y - 2z - 27 = 0$.

381. Arvutada koordinaatide alguspunkti kaugus punkte $(1; 0; -4)$, $(-1; 2; -1)$ ja $(3; 2; -5)$ läbivast tasapinnast.

382. Arvutada tasapindadevaheline kaugus:

$$\begin{array}{ll} 1) 2x - y + 2z + 3 = 0, & 2x - y + 2z - 6 = 0; \\ 2) 3x - 2y + 6z - 7 = 0, & 6x - 4y + 12z + 21 = 0; \\ 3) x - y + 2z - 1 = 0, & 2x - 2y + 4z - 7 = 0. \end{array}$$

383. Leida sirge $\frac{1-x}{3} = \frac{y+5}{8} = \frac{z+2}{3}$ kaugus tasapinnast $4x - 3y + 12z - 21 = 0$.

384. Leida tasapindade $5x - 6y + 2z - 3 = 0$ ja $2x + 5y - 6z + 7 = 0$ vaheliste nurkade poolitustasapinnad.

385. Leida sirgel $x + 1 = -y = \frac{z+2}{3}$ punktid, mis asetsevad võrdsel kaugusel tasapindadest $x - 2y + z - 3 = 0$ ja $2x + y - z + 4 = 0$.

386. Leida tasapinnaga $x - 2y - z + 3 = 0$ paralleelsed tasapinnad, mis asetsevad temast kaugusel $2\sqrt{6}$.

387. Leida z -teljel punktid, mille kaugus tasapinnast $12x - 3y + 4z - 2 = 0$ on 2.

388. Leida punkti kaugus sirgest:

$$1) (5; -2; 1), \quad 2 - x = \frac{y-6}{2} = \frac{z-4}{0};$$

$$2) (3; -1; 2), \quad x - 2 = \frac{y-13}{4} = z - 1;$$

$$3) (2; -1; 3), \quad x = 3t, \quad y = 5t - 7, \quad z = 2t + 2.$$

389. Leida sirge $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$ kaugus sirgest $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-2}$.

390. Leida sirgete $\frac{x-3}{4} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z+6}{-5}$ ja $\frac{x-5}{-5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{6}$ vaheline kaugus.

Mitmesuguseid ülesandeid sirge ja tasapinna kohta

391. Leida punkti $A(3; -2; 7)$ läbiv tasapind, mis on risti sirgega $\frac{x-2}{3} = y = 1 - z$.

392. Leida punkti $(2; -5; 6)$ läbiv sirge, mis on paralleelne tasapindade $x - 2y + z - 5 = 0$ ja $x + y - z = 0$ lõikesirgega.

393. Leida koordinaatide alguspunkti läbiv tasapind, mis on paralleelne sirgetega $x = 2t - 3$, $y = t$, $z = 5$ ja $x = 1$, $y = 3t$, $z = -4t + 7$.

394. Leida tasapind, millel asetsevad punktid (3; -1; 7) ja (5; 3; 2) ning mis on paralleelne sirgega $x = y = -z$.

395. Leida sirge ja tasapinna lõikepunkt:

$$1) \frac{x+1}{2} = -\frac{y}{6} = 1-z, \quad 3x + y + 2z - 1 = 0;$$

$$2) \frac{1-x}{3} = y-3 = \frac{z}{2}, \quad 2x - 4y + 5z + 10 = 0;$$

$$3) x = t - 3, \quad y = 1 - 2t, \quad z = 3t + 1, \quad 2x - 5y - 4z + 14 = 0.$$

396. Leida punkti (1; 0; -5) ristprojektsioon tasapinnal $x - 2y + 3z = 0$.

397. Leida punkti (1; -3; 4) projektsioon punkte (-17; -8; -2) ja (4; 6; 5) läbival sirgel.

398. Leida punktiga (5; -3; 7) sümmeetriline punkt tasapinna $2x + 3y + 5z + 2 = 0$ suhtes.

399. Leida punktiga (-1; 3; 2) sümmeetriline punkt sirge $\frac{x+7}{5} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$ suhtes.

400. Leida sirgel $2x = y = z$ punkt, mis asetseb punktidest (1; -3; 6) ja (7; 3; -2) võrdsel kaugusel.

401. Leida koordinaatide alguspunkti ja sirget $\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{2} = -z$ läbiv tasapind.

402. Koostada punkti (-2; 1; 2) ja sirget $\frac{2-x}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{2}$ läbiva tasapinna võrrand.

403. Arvutada punkti $A(0; 0; 3)$ kaugus punkti $B(3; 1; 2)$ ja sirget $2x = 3 - y = \frac{3z+6}{2}$ läbivast tasapinnast.

404. Leida tasapind, mis asetseb võrdsel kaugusel paralleelsetest tasapindadest $2x - y + 3z + 5 = 0$ ja $2x - y + 3z - 1 = 0$.

405. Leida tasapind, mis asetseb võrdsel kaugusel sirgeist $\frac{x-2}{5} = y = \frac{4-z}{3}$ ja $x = 0,5y - 3 = z$.

406. Leida tasapind, millel asetseb sirge $2x = -y = 3z$ ning mis on risti tasapinnaga $x - 3z = 0$.

407. Leida punktide (-2; 7; 3) ja (6; 1; -5) vahelise lõigu keskristsirge, mis on paralleelne xz -tasapinnaga.

408. Leida punkti (-5; 1; 0) läbiv sirge, mis lõikab sirget $x - 1 = \frac{y+9}{2} = -z - 12$ risti.

409. Leida tasapinnal $x - 6y + 2z + 7 = 0$ sirge, mis lõikab sirget $x = y = -z$ risti.

410. Leida tasapinnal $5x - 3y + 2z - 5 = 0$ sirge, mis lõikab sirget $x = \frac{y-1}{2} = z$ ja on paralleelne tasapinnaga $3x - y + 2z - 4 = 0$.

411. Leida sirge $x = y = -z$ ristprojektsioon tasapinnal $2x + 4y + z - 15 = 0$.

412. Leida punkti $A(-5; 3; -4)$ läbiv sirge, mis lõikab sirget $\frac{x+1}{3} = \frac{1-y}{5} = \frac{z-2}{2}$ ja on paralleelne tasapinnaga $7x + 8y - 2z = 0$.

413. Leida punkti $(3; 5; -1)$ läbiv sirge, mis on risti seda punkti koordinaatide alguspunktiga ühendava lõiguga ja lõikab y -telge.

414. Leida punkti $(5; -11; 3)$ läbiv sirge, mis lõikab sirgeid $\frac{x+1}{2} = -y = \frac{z+2}{3}$ ja $\frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{2} = 6-z$.

415. Kolmnurga tipud on $A(2; -7; 1)$, $B(14; -3; -5)$ ja $C(-1; -1; 3)$. Leida tipu A sisenurga poolitaja.

416. Kolmnurga tipud on $A(-2; 1; 5)$, $B(3; 2; 6)$ ja $C(5; -1; 7)$. Leida tipust A tõmmatud kõrgus.

417. Nelitahuka tipud on $A(5; 2; -3)$, $B(2; 0; 2)$, $C(3; -1; 2)$ ja $D(4; -1; -1)$. Koostada tipust A tõmmatud kõrguse võrrandid.

418. Kuidas oleneb sirge $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{k} = \frac{z}{-2}$ ja tasapinna $2x - y + 4z + l = 0$ vastastikune asend parameetritest k ja l ?

419. Leida tasapindade $3x - 7y + 5z + 17 = 0$ ja $x + 8y - 11z - 2 = 0$ lõikesirget ning punkti $(-1; 3; 2)$ läbiv tasapind.

420. Leida tasapindade $2x + y - 3z + 5 = 0$ ja $x - 3y + 5z - 4 = 0$ lõikesirget läbiv tasapind, mis on paralleelne sirgega $\frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4}$

421. Leida tasapindade $3x + 2y - 6z + 2 = 0$ ja $6x - 13 = 0$ lõikesirget läbiv tasapind, mille kaugus punktist $(4; -5; -3)$ on 3.

§ 7. TEIST JÄRKU PINNAD

Pinna võrrandiks (valitud ristkoordinaadistikus) nimetatakse niisugust kolme muutujaga võrrandit

$$F(x, y, z) = 0,$$

mida rahuldavad selle pinna iga punkti koordinaadid ega rahulda ühegi sellel pinnal mitte asetseva punkti koordinaadid.

Joont esitab ruumis kahest võrrandist koosnev süsteem

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Geomeetriliselt on joon (1) nende kahe pinna lõikejoon, mida esitavad süsteemi (1) võrrandid üksikult. Võrrand

$$F(x, y, z) - k\Phi(x, y, z) = 0$$

esitab iga k puhul pinda, mis läbib joont (1) ehk millel asetseb joon (1). Süsteem

$$\begin{cases} F(x, y, z) - k_1\Phi(x, y, z) = 0, \\ F(x, y, z) - k_2\Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

esitab iga $k_1 \neq k_2$ puhul sama joont mis süsteem (1).

Pinda, mille kujundab ruumis liikuv sirge, mis jääb kogu aeg paralleelseks ühe kindla sirgega, nimetatakse silinderpinnaks. Liikuva sirge üksikuid asendeid ruumis nimetatakse selle silinderpinna moodustajateks. Kui pinna võrrandis puudub üks jooksva punkti koordinaatidest, siis on see pind silinderpind, mille moodustajad on paralleelsed puudevale koordinaadile vastava koordinaatteljega.

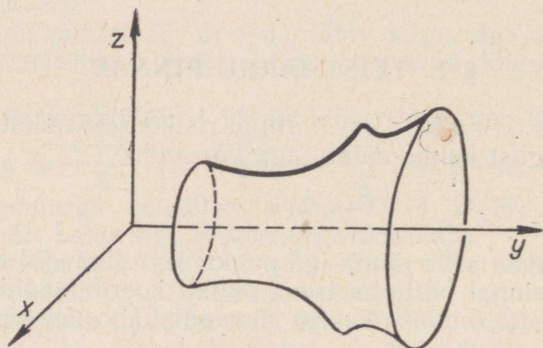
Pöördpinnaks nimetatakse pinda, mille kujundab tasapinnaline joon, pööreldes ümber oma tasapinnal asetseva sirge. Pöörleva joone üksikuid asendeid ruumis nimetatakse pöördpinna meridiaanideks ja sirget, mille ümber toimub pöörlemine,

pöördpinna teljeks. Kui pöördpinna meridiaan on antud oma võrranditega yz -tasapinnal kujul

$$\begin{cases} F(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

ja pöördpinna teljeks on y -telg (joon. 32), siis on pöördpinna võrrand

$$F(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0. \quad (3)$$



Joon. 32

Kui sfääri (kerapinna) keskpunkt on $P_0(x_0; y_0; z_0)$ ja raadius r , siis on sfääri võrrand

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2. \quad (4)$$

Teise astme võrrand, milles puuduvad liikmed jooksva punkti koordinaatide korrutisega ja milles jooksva punkti koordinaatide ruutude kordajad on võrdsed:

$$ax^2 + ay^2 + az^2 + 2bx + 2cy + 2dz + e = 0 \quad (a \neq 0), \quad (5)$$

esitab sfääri, kui ta teisendamisel kujule

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{a}\right)^2 + \left(z + \frac{d}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2 + d^2 - ae}{a^2} \quad (6)$$

on avaldis $b^2 + c^2 + d^2 - ae > 0$, kusjuures selle sfääri keskpunkt

on $\left(-\frac{b}{a}; -\frac{c}{a}; -\frac{d}{a}\right)$ ja raadius $\frac{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2 - ae}}{|a|}$. Kui võrrandis

(5) $b^2 + c^2 + d^2 - ae = 0$, siis esitab võrrand ainult punkti

$\left(-\frac{b}{a}; -\frac{c}{a}; -\frac{d}{a}\right)$, kui aga $b^2 + c^2 + d^2 - ae < 0$, siis kujundit pinda.

Teist järku pinnaks nimetatakse iga pinda, mille võrrandiks ristkoordinaadistikus on teise astme võrrand. Reaalsete teist järku kõverpindade kanoonilised võrrandid on:

ellipsoid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$
ühekatteline hüperboloid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$
kahekatteline hüperboloid	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$
elliptiline paraboloid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$
hüperboolne paraboloid (sadulpind)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$
koonus	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$
elliptiline silinder	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$
hüperboolne silinder	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$
parabolne silinder	$y^2 = 2px.$

Näiteid

1. Koostada sfääri võrrand, kui sfäär läbib punkti $A(3; -4; 1)$ ja puudutab tasapinda $7x - 6y - 10z - 73 = 0$ punktis $B(5; 2; -5)$.

Lahendus. Sfääri võrrandi koostamiseks on vaja teada sfääri keskpunkti ja raadiust. Et otsitav sfäär puudutab antud tasapinda punktis B , siis asetseb sfääri keskpunkt antud tasapinna ristsirgel, mis läbib punkti B . Selle ristsirge kanoonilised võrrandid on

$$\frac{x-5}{7} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+5}{-10}. \quad (*)$$

Teiselt poolt läbib sfäär punkte A ja B . Järelikult asetseb sfääri keskpunkt punktide A ja B võrdsel kaugusel, seega punktide A ja B vahelise lõigu keskristtasapinnal. Selle keskristtasapinna normaalvektoriks võib võtta vektori $\vec{AB} = \{2; 6; -6\} = 2\{1; 3; -3\}$ ja üheks punktiks A ja B vahelise lõigu keskpunkti $(4; -1; -2)$. Keskristtasapinna võrrand on seega

$$x + 3y - 3z - 7 = 0. \quad (**)$$

Sirge (*) ja tasapinna (**) lõikepunkt $K(-2; 8; 5)$ on sfääri keskpunkt. Sfääri raadiuse r leiame kui punkti K kauguse punk-

tist A või punktist B või antud puutuvtasapinnast. Kõigil kolmel juhul tuleb $r = \sqrt{185}$. Otsitava sfääri võrrandi saame nüüd, asetades K koordinaadid ja r võrrandisse (4):

$$(x + 2)^2 + (y - 8)^2 + (z - 5)^2 = 185$$

ehk

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 16y - 10z - 92 = 0.$$

II. Leida ringjoone

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 94 = 0, \\ x - 2y + 2z - 17 = 0 \end{cases}$$

keskpunkt ja raadius.

L a h e n d u s. Teisendame antud joont määrava süsteemi esimese võrrandi kujule (6): $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 100$. See võrrand esitab sfääri, mille keskpunkt on $K(1; -1; -2)$ ja raadius $r = 10$. Ülesandes antud ringjoon on seega esitatud sfääri ja tasapinna lõikejoonena. Ringjoone keskpunkti leiame kui sfääri keskpunkti K projektsiooni ringjoone tasapinnal. Projekteriva sirge võrrand on seejuures $x - 1 = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z + 2}{2}$ ja ringjoone keskpunktiks saame $C(3; -5; 2)$. Ringjoone raadius R on kaatetiks täisnurkses kolmnurgas, mille hüpotenuusiks on sfääri raadius $r = 10$ ja teiseks kaatetiks $|KC| = 6$. Järelikult $R = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

III. Koostada hüperbooli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0$$

pöörlemisel ümber x -telje tekkiva pöördpinna võrrand.

L a h e n d u s. Et meridiaani võrrandite (2) järgi pöördpinna võrrandi (3) koostamiseks tuleb süsteemi (2) esimeses võrrandis asendada see koordinaat, millele vastava telje ümber pöördlemine ei toimu, \pm ruutjuurega asendatava ja kolmanda koordinaadi ruutude summast, siis tuleb käesoleval juhul pöördpinna võrrandi saamiseks asendada y võrrandis $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avaldisega $\pm \sqrt{y^2 + z^2}$. Nõutud pöördpinna (kahekattelise pöördhüperboloidi) võrrand on seega

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

IV. Uurida, mis joont mööda lõikuvad kahekatteline hüperboloid $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} + 1 = 0$ ja tasapind $x = 4$, ning leida selle joone fookused.

Lahendus. Tuletame antud joont esitavast võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} + 1 = 0, \\ x = 4 \end{cases} \quad (*)$$

järelduse, mis ei sisalda jooksva punkti abstsissi x . Selleks asetame teisest võrrandist esimesse $x = 4$. Saame $\frac{4^2}{2} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} + 1 = 0$ ehk

$$\frac{y^2}{81} - \frac{z^2}{144} = 1. \quad (**)$$

Saadud võrrand (**) esitab ühelt poolt kui järeldus süsteemist (*) pinda, millel asetseb joon (*) [sest iga arvukolmik x, y, z , mis rahuldab süsteemi (*) mõlemat võrrandit, rahuldab ka võrrandit (**)]. Teiselt poolt ei sisalda võrrand (**) koordinaati x , mistõttu (**) on silinderpind, mille moodustajad on paralleelsed x -teljega. Võrrandist (**) ja yz -tasapinna võrrandist moodustatud süsteem

$$\begin{cases} \frac{y^2}{81} - \frac{z^2}{144} = 1, \\ x = 0 \end{cases} \quad (***)$$

esitab järelikult antud lõikejoone (*) projektsiooni xz -tasapinnal. Et joone (*) tasapind ja yz -tasapind on paralleelsed, siis joone kuju projekteerimisel ei muutunud. Süsteem (***) esitab ilmselt hüperbooli, mille fokaalteljeks on y -telg, pooltelgedeks $a = 9$, $b = 12$ ja fookusteks $(0; \pm 15; 0)$. Antud hüperboloidi ja tasapinna lõikejoon on järelikult hüperbool, mille fokaaltelg on paralleelne y -teljega; selle hüperbooli poolteljed on $a = 9$, $b = 12$ ja fookused $(5; \pm 15; 0)$.

Sfäär

422. Koostada sfääri võrrand, kui sfääri

- 1) keskpunktiks on koordinaatide alguspunkt ja raadius on 4;
- 2) keskpunkt on $(3; -2; 4)$ ja raadius 3;
- 3) ühe diameetri otspunktid on $(-7; 2; 3)$ ja $(5; -8; 7)$;

4) keskpunkt on (3; 7; -11) ja üks puutuvtasapind $3x - 5y + 8z + 16 = 0$;

5) keskpunkt on (2; 3; -1) ja üks puutuja $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$.

423. Leida sfääri keskpunkt K ja raadius r :

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z - 11 = 0$;

3) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 24y + 2z + 11 = 0$;

4) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 10 = 0$;

5) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 12y + 2z + 54 = 0$.

424. Leida pind, mille iga punkt asetseb koordinaatide alguspunktist kaks korda kaugemal kui punktist (4; 0; 0).

425. Leida sfäär, mis läbib punkte (-2; 7; 1) ja (6; 1; -9) ning mille keskpunkt asetseb sirgel $\frac{x-1}{2} = y + 4 = \frac{8-z}{3}$.

426. Leida sfäär, mille keskpunkt asetseb y -teljel ja mis puudutab sirget $\frac{x+10}{5} = y + 1 = \frac{6-z}{2}$ punktis (-5; 0; 4).

427. Koostada sfääri võrrand, kui sfääri raadius on $\sqrt{14}$ ja sfäär puudutab tasapinda $3x + y - 2z = 0$ punktis, mille ordinaat on 2 ja aplikaat -2.

428. Koostada sfääri võrrand, kui sfäär läbib punkte (1; -8; 3), (0; -5; -5) ja (4; -4; -2) ning sfääri keskpunkt asetseb tasapinnal $x - y + 2z - 2 = 0$.

429. Leida punkte (4; -1; 4), (-2; -1; 16), (7; 11; 7) ja (-5; 2; 4) läbiv sfäär.

430. Koostada sfääri $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 6 = 0$ puutuvtasapinna võrrand, kui puutepunktis $x = 1$, $y = 0$ ja z on positiivne.

431. Leida sfääri $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 4y - 6z - 5 = 0$ puutuvtasapind sfääri ja z -telje lõikepunktis.

432. Leida sfääri $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 6z + 15 = 0$ puutuvtasapind, mis on risti sirgega $2x = y = -z$.

433. Leida ringjoone

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z - 11 = 0, \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

keskpunkt ja raadius.

434. Leida ringjoont

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 2y + 4z - 15 = 0, \\ 3x - 6y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

ja koordinaatide alguspunkti läbiv sfäär.

Pöördpinnad

435. Koostada joone $\begin{cases} y = z^2 + 1, \\ x = 0 \end{cases}$ pöörlemisel ümber y -telje tekkiva pöördpinna võrrand.

436. Koostada sirge $\begin{cases} 2y + 3z - 6 = 0, \\ x = 0 \end{cases}$ pöörlemisel ümber y -telje tekkiva pöördkoonuse võrrand.

437. Koostada hüperbooli $\begin{cases} \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ pöörlemisel ümber z -telje tekkiva pöördpinna võrrand.

438. Leida pöördpind, mis tekib parabooli $\begin{cases} y = x^2, \\ z = 0 \end{cases}$ pöörlemisel ümber x -telje.

439. Koostada ellipsi $\begin{cases} 2x^2 + 3z^2 - 18 = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ pöörlemisel ümber z -telje tekkiva pöördpinna võrrand.

440. Ringjoon, mis asetseb yz -tasapinnal, pöörleb ümber z -telje. Koostada tekkiva rõngaspinna võrrand, kui ringjoone keskpunkt on $(0; a; 0)$ ja raadius b ($a > b$).

441. Koostada pinna $x^4 + y^4 + z^4 - 1 = 0$ ja xy -tasapinna lõikejoone pöörlemisel ümber x -telje tekkiva pöördpinna võrrand.

442. Pöördsilindri telg on $x = 2y = -z$ ja raadius 4. Koostada selle pöördsilindri võrrand.

Teist järku pindade kanoonilised võrrandid

443. Mis pindu esitavad järgmised võrrandid:

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1) $x^2 - y^2 + z^2 + 2 = 0;$ | 6) $2x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0;$ |
| 2) $y = x^2 + y^2;$ | 7) $x^2 - y^2 = z;$ |
| 3) $x^2 - 4y^2 - 3z^2 + 1 = 0;$ | 8) $x^2 + 2x - 3y = 0;$ |
| 4) $y^2 + 2z^2 + x = 0;$ | 9) $(x + y)^2 + (y + z)^2 = 0;$ |
| 5) $x^2 - y^2 = 0;$ | 10) $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$ |

444. Uurida pinna $3y^2 + 2z^2 + 18x = 0$ lõikejooni xz -tasapinnaga paralleelsete tasapindadega.

445. Uurida pinna $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ lõikejooni yz -tasapinnaga paralleelsete tasapindadega $x = h$.

446. Määrata joone $\begin{cases} \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1, \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ liik ning leida selle joone poolteljed ja haripunktid.

447. Veenduda, et sadulpinna $x^2 - 3z^2 = 12y$ ja tasapinna $x - 2 = 0$ lõikejoon on parabool, ning leida selle parabooli fokaallaius, haripunkt ja fookus.

448. Veenduda, et ellipsoidi $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{125} = 1$ ja tasapinna $y = -2$ lõikejoon on ellips, ning leida selle ellipsi fookused.

449. Kuidas oleneb pindade $9x^2 - 36y^2 + kz^2 = 36k$ ja $z = h$ lõikejoone kuju suurustest k ja h ?

450. Pinna iga punkt asetseb võrdsel kaugusel punktist $F(0; -1; 0)$ ja tasapinnast $y - 1 = 0$. Koostada selle pinna võrrand.

451. Leida pind, mille iga punkti kauguste summa punktides $(0; 0; 1)$ ja $(-1; 0; 0)$ on 4.

452. Leida antud teist järku pinna ja sirge lõikepunktid:

$$1) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 2z,$$

$$x - 2 = \frac{y + 5}{3} = \frac{z - 3}{2};$$

$$2) \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1,$$

$$\frac{x + 9}{-3} = \frac{y - 10}{4} = \frac{z - 12}{4};$$

$$3) \quad 4x^2 - z^2 - y = 0,$$

$$x = \frac{y + 1}{4} = \frac{z - 1}{-2};$$

$$4) \quad x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 1,$$

$$x = 2y = 1 - z.$$

453. Leida pöördparaboloidi $x^2 + y^2 = 2z$ ja tasapinna $2x - y + z = 0$ lõikejoone projektsioonid koordinaattasapindadel.

MATEMAATILINE ANALÜÜS

§ 8. FUNKTSIOONID JA NENDE GRAAFIKUD

Muutuvaks suuruseks nimetatakse sümboleid x , y , a jne., mis võib omandada mitmesuguseid reaalarvulisi väärtusi. Viimaste hulka nimetatakse muutuva suuruse muutumispiirkonnaks. Kõigist võrratust $a \leq x \leq b$ rahuldavatest reaalarvudest x koosnevat muutumispiirkonda nimetatakse kinniseks vahemikuks ja samal viisil võrratusega $a < x < b$ määratud piirkonda lahiseks vahemikuks.

Muutuvat suurust y nimetatakse muutuva suuruse x (üheks) funktsiooniks, kui mingi eeskirjaga on suuruse x igale väärtusele tema muutumispiirkonnast seatud vastavusse suuruse y üks väärtus. Suurust x nimetatakse seejuures argumentiks, tema muutumispiirkonda funktsiooni määramispiirkonnaks ja suuruse y muutumispiirkonda funktsiooni väärtuste hulgaks. Asjaolu, et y on x funktsioon, tähistatakse $y = f(x)$, $y = g(x)$ jne., kus f , g jne. tähistavad sümboolselt seda eeskirja, mille järgi on funktsiooni väärtused seatud vastavusse argumenti väärtustele. Kui x_0 on mingi argumenti väärtus funktsiooni $y = f(x)$ määramispiirkonnast, siis tähistatakse temale vastavat funktsiooni väärtust $f(x_0)$ ja nimetatakse funktsiooni $f(x)$ väärtuseks kohal x_0 . Neid argumenti väärtusi, millele vastav funktsiooni väärtus on null, s. t. võrrandi $f(x) = 0$ lahendeid, nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ nullkohtadeks.

Kui funktsiooni määrav eeskiri seab ühele argumenti väärtusele vastavaks rohkem kui ühe funktsiooni väärtuse, siis öeldakse, et funktsioon on mitmene.

Kui kahest funktsioonist $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ teise funktsiooni väärtuste hulga mingi osa kuulub esimese funktsiooni määramispiirkonda, siis saab neist kahest funktsioonist moodustada kolmanda, lugedes argumenti väärtusele x vastavaks funktsiooni väärtuseks seda esimese antud funktsiooni väärtust, mis vastab teise funktsiooni väärtusele. Nii saadud kolmandat funktsiooni nimetatakse liitfunktsiooniks, mille sisemiseks funktsiooniks on $g(x)$ ja väliseks funktsiooniks $f(x)$, ning tähis-

tatakse $y = f[g(x)]$. Liitfunktsiooni määramispiirkonnaks on ta sisemise funktsiooni määramispiirkonna see osa, millele vastav sisemise funktsiooni väärtuste hulk kuulub välise funktsiooni määramispiirkonda.

Võrrandist $y = f(x)$ avaldatud x kui y (üldiselt mitmest) funktsiooni $x = g(y)$ ehk pärast argumendi ja funktsiooni tähise muutmist $y = g(x)$ nimetatakse lähtefunktsiooni $y = f(x)$ pöördfunktsiooniks. Funktsiooni $f(x)$ määramispiirkond on seejuures ta pöördfunktsioonile $g(x)$ väärtuste hulgas ja $f(x)$ väärtuste hulk on $g(x)$ määramispiirkonnaks. Kui mingis piirkonnas iga $x_1 > x_2$ puhul on $f(x_1) > f(x_2)$ [$f(x_1) < f(x_2)$], siis nimetatakse funktsiooni $f(x)$ selles piirkonnas monotoonselt kasvavaks (kahanevaks). Mingis piirkonnas monotoonse funktsiooni selles piirkonnas moodustatud pöördfunktsioon on ühene. Piirkonnas, kus $g(x)$ on $f(x)$ pöördfunktsioon, kehtib samasus

$$g[f(x)] \equiv x. \quad (1)$$

Joont, mille võrrand Cartesiuse ristkoordinaadistikus Oxy on $y = f(x)$, nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ graafikuks. Funktsiooni ja ta pöördfunktsiooni graafikud on sümmeetrilised sirge $y = x$ suhtes.

Kui funktsioon $f(x)$ rahuldab tingimust $f(-x) = f(x)$, siis nimetatakse teda paarisfunktsiooniks. Paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline y -telje suhtes. Tingimust $f(-x) = -f(x)$ rahuldavat funktsiooni nimetatakse paarituks funktsiooniks. Paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

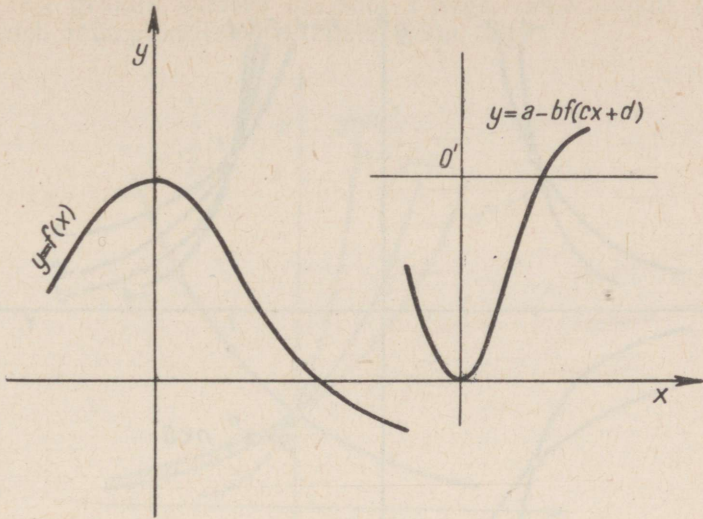
Kui leidub arv $l \neq 0$, nii et iga x puhul

$$f(x + l) = f(x), \quad (2)$$

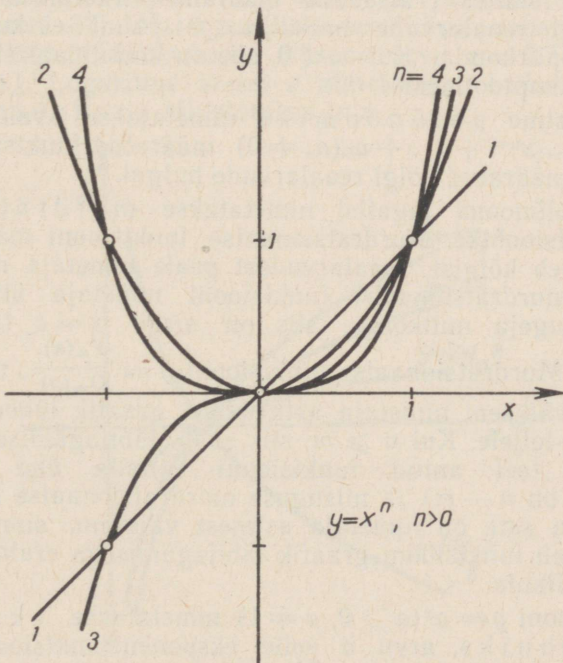
siis nimetatakse funktsiooni $f(x)$ perioodiliseks. Väikseimat arvu $l > 0$, mille puhul kehtib (2), nimetatakse seejuures funktsiooni perioodiks.

Funktsiooni $y = f(x)$ graafiku järgi saab konstrueerida funktsiooni $y = a + bf(cx + d)$, kus $b \neq 0$ ja $c \neq 0$, graafiku. Selleks tuleb teljestikus, mis on saadud lähteteljestikust Oxy paralleel-lükkega alguspunkti viimisel punkti $O' \left(-\frac{d}{c}; a \right)$, konstrueerida joon, mille punktide abstsissid on saadud $y = f(x)$ graafiku punktide abstsisside jagamisel arvuga c ja ordinaadid selle graafiku punktide ordinaatide korrutamisel arvuga b (joonisel 33 on võetud $a = 2$, $b = -1$, $c = 2$ ja $d = -6$).

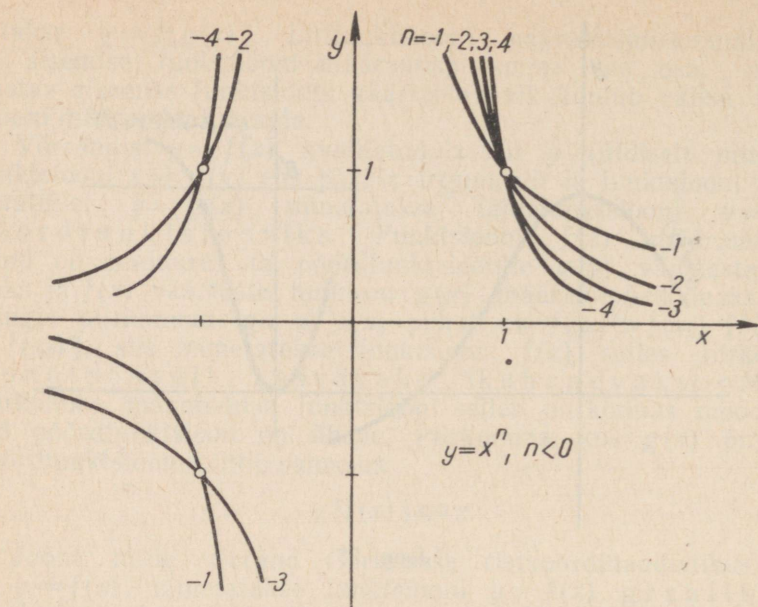
Funktsiooni $y = x^n$, kus n on täisarv, nimetatakse täisastmeks. Kõigi täisastmete graafikud (joon. 34 ja 35) läbivad punkti (1; 1). Paarisarvulise n puhul on x^n graafik sümmeetriline y -telje suhtes, paarituarvulise n puhul koordinaatide



Joon. 33



Joon. 34



Joon. 35

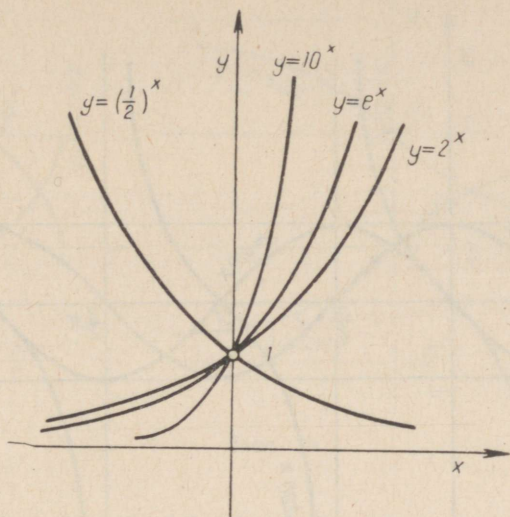
alguspunkti suhtes. Täisastme määramispiirkonnaks on $n \geq 0$ puhul kõigi reaalarvude hulk; $n < 0$ puhul ei kuulu ainult 0 määramispiirkonda. Kui $n < 0$, siis on koordinaatteljed $y = x^n$ graafiku asümptootideks.

n -nda astme polünoomiks nimetatakse avaldisega $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ($a_n \neq 0$) määratud funktsiooni. Polünoomid on määratud kõigi reaalarvude hulgal.

Kahe polünoomi jagatist nimetatakse murdratsionaalseks funktsiooniks. Murdratsionaalse funktsiooni määramispiirkond koosneb kõigist reaalarvudest peale nimetaja nullkohtade. Kui c on murdratsionaalse funktsiooni nimetaja üks nullkoht (ega ole lugeja nullkoht), siis on sirge $x = c$ ta graafiku asümptoot. Murdratsionaalse funktsiooni $y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, mille lugeja aste n on väiksem nimetaja astmest m , graafik läheneb asümptootiliselt x -teljele. Kui $n \geq m$, siis saab läbijagamisega täisosa eraldamise teel antud funktsiooni esitada ühe polünoomi (mille aste on $n - m$) ja niisuguse murdratsionaalse funktsiooni, mille lugeja aste on nimetaja astmest väiksem, summana. Sel juhul läheneb funktsiooni graafik läbijagamisega eraldatud polünoomi graafikule.

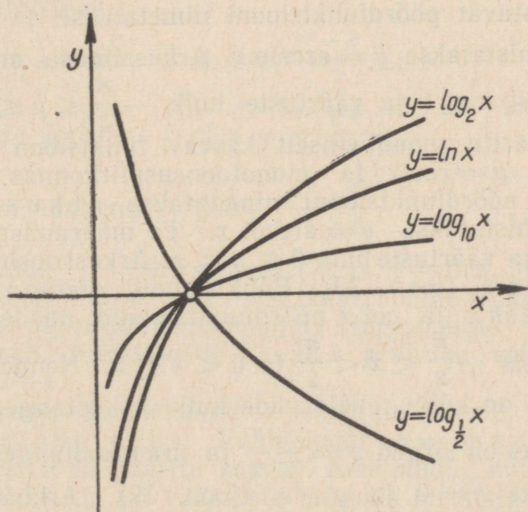
Funktsiooni $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) nimetatakse eksponentfunktsiooniks, arvu a selle eksponentfunktsiooni aluseks. Eksponentfunktsiooni määramispiirkond koosneb kõigist reaalar-

vudest. Ta graafik asetseb ülalpool x -telge, läbib punkti $(0; 1)$ ja läheneb asümptootiliselt x -teljele (joon. 36).



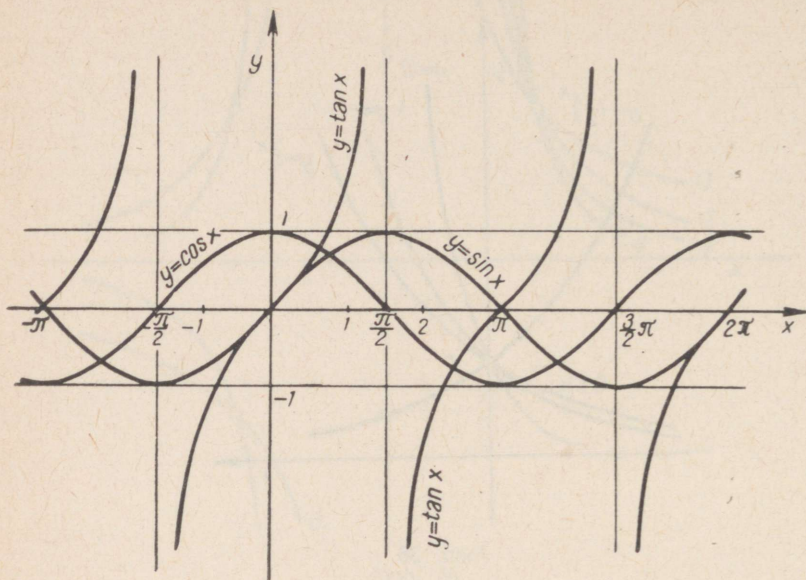
Joon. 36

EkspONENTFUNKTSIOONI $y = a^x$ PÖÖRDFUNKTSIOONI nimetatakse LOGARITMFUNKTSIOONIKS alusel a ja tähistatakse $y = \log_a x$ (joon. 37). Matemaatilises analüüsis eelistatakse eksponent- ja logaritmifunktsiooni alusena arvu $e = 2,718\dots$ [def. vt. § 9, (5)]. Logaritme alusel e nimetatakse loomulikeks logaritmideks ja tähistatakse $\ln x$.



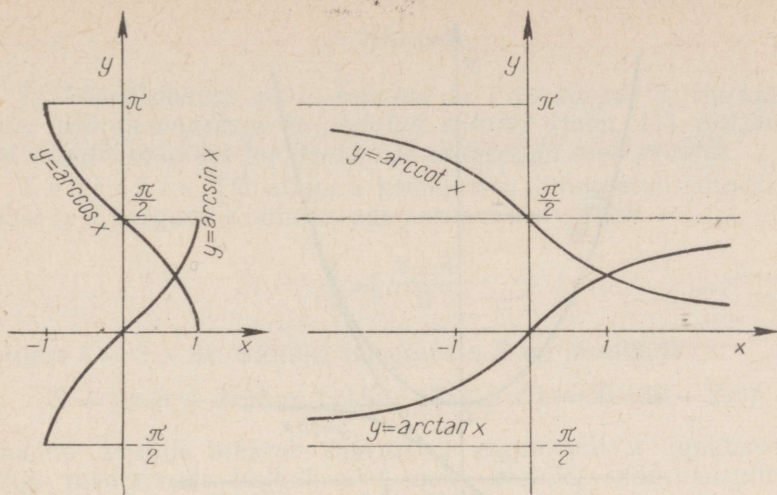
Joon. 37

Trigonomeetriliste funktsioonide $\sin x$, $\cos x$ ja $\tan x$ graafikud on esitatud joonisel 38.



Joon. 38

Funktsioonile $y = \sin x$ ta monotoonsuspiirkonnas $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ vastavat pöördfunktsiooni nimetatakse arkussiinuseks ja tähistatakse $y = \arcsin x$. Arkussiinuse määramispiirkond on $-1 \leq x \leq 1$ ja väärtuste hulk $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Arkussiinus on paaritu monotoonselt kasvav funktsioon (joon. 39). Funktsioonist $y = \cos x$ ta monotoonsuspiirkonnas $0 \leq x \leq \pi$ moodustatud pöördfunktsiooni nimetatakse arkuskoosinuseks ja tähistatakse $y = \arccos x$. Ta määramispiirkond on $-1 \leq x \leq 1$ ja väärtuste hulk $0 \leq y \leq \pi$. Arkuskoosinus on monotoonselt kahanev (joon. 39). Funktsioonid $\arctan x$ ja $\operatorname{arccot} x$ on vastavalt $\tan x$ ja $\cot x$ pöördfunktsioonid nende monotoonsuspiirkondades $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ja $0 < x < \pi$. Nende määramispiirkondadeks on kõigi reaalarvude hulk. Arkustangensi graafiku asümptootideks on sirged $y = \pm \frac{\pi}{2}$ ja arkuskootangensi graafiku asümptootideks $y = 0$ ja $y = \pi$ (joon. 39). Arkustangens on paaritu monotoonselt kasvav funktsioon. Arkuskootangens on



Joon. 39

monotoonselt kahanev. Arkusfunktsioonid on oma määramispiirkondades seotud samasustega

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad (3)$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

Hüperboolsed funktsioonid (joon. 40) on defineeritud järgmiste avaldistega:

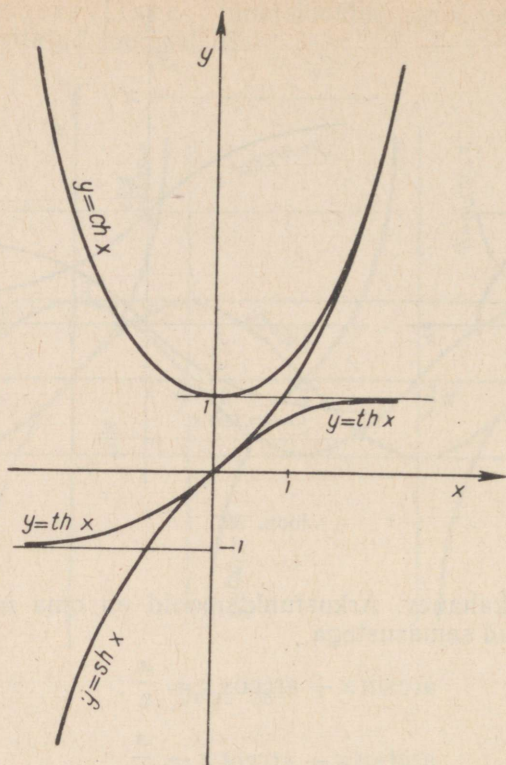
$$\text{hüperboolne siinus} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (5)$$

$$\text{hüperboolne koosinus} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (6)$$

$$\text{hüperboolne tangens} \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \quad (7)$$

Funktsioonide $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$ ja $y = \operatorname{th} x$ määramispiirkonnaks on kõigi reaalarvude hulk. Hüperboolne siinus ja tangens on kasvavad paaritud funktsioonid. Hüperboolne koosinus on paarisfunktsioon. Funktsiooni $y = \operatorname{th} x$ graafiku asümptootideks on sirged $y = \pm 1$.

Hüperboolsete funktsioonide pöordfunktsioone nimetatakse areafunktsioonideks. Funktsiooni $y = \operatorname{sh} x$ pöordfunktsioon $y = \operatorname{Arsh} x$ on paaritu kasvav funktsioon, mille nii määramispiirkonnaks kui ka väärtuste hulgaks on kõigi reaalarvude hulk. Funktsioonist $y = \operatorname{ch} x$ ta monotoonsuspiirkonnas $x \geq 0$



Joon. 40

moodustatud pöördfunktsiooni $y = \text{Arch } x$ määramispiirkonnaks on $x \geq 1$. Hüperboolse tangensi pöördfunktsioon $y = \text{Arth } x$ on määratud lahtises vahemikus $-1 < x < 1$ ja ta graafikul on kaks asümptooti: $x = \pm 1$. Areafunktsioonid avalduvad logaritm-funktsiooni kaudu kujul

$$\text{Arsh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad (8)$$

$$\text{Arch } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad (9)$$

$$\text{Arth } x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}. \quad (10)$$

Kõiki funktsioone, mille avaldised on saadud funktsioonidest x^n , a^x ja trigonomeetristest funktsioonidest ning nende funktsioonide pöördfunktsioonidest lõpliku arvu aritmeetiliste tehete ja liitfunktsioonide moodustamise teel, nimetatakse elementaarfunktsioonideks.

Näiteid

1. Pöördkoonuse põhja raadius on 1 ja kõrgus 3. Uurida sellesse pöördkoonusesse kujundatud silindri (joon. 41) täispindala kui silindri raadiuse funktsiooni ja skitseerida selle graafik.

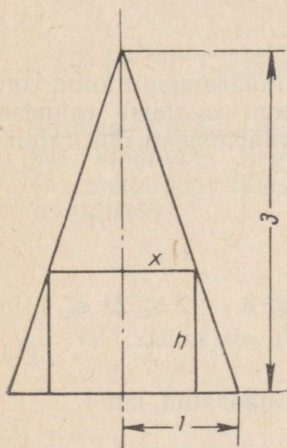
L a h e n d u s. Tähistagu x koonusesse kujundatud silindri raadiust ja h kõrgust. Kolmnurkade sarnasusest saame

$$\frac{x}{1} = \frac{3-h}{3},$$

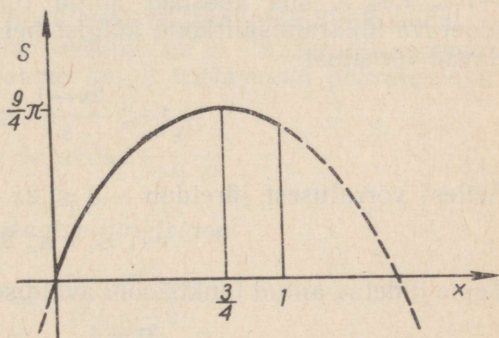
millest $h = 3 - 3x$. Silindri täispindala S on järelilikult

$$S = 2\pi xh + 2\pi x^2 = 2\pi(3x - 3x^2 + x^2) = 2\pi(3x - 2x^2).$$

Saadud avaldis määrab suuruse S argumendi x funktsioonina kõigi reaalarvude hulgal, s. t. selle avaldise määramispiirkond koosneb kõigist reaalarvudest. Et aga koonusesse kujundatud



Joon. 41



Joon. 42

silindri raadius on positiivne ja väiksem koonuse põhja raadiusest, siis esitab see avaldis ülesandes nõutud funktsiooni ainult piirkonnas $0 < x < 1$. Teisendades suuruste S ja x vahelise seose kujule

$$S - \frac{9\pi}{4} = -4\pi \left(x - \frac{3}{4} \right)^2,$$

näeme, et nõutud funktsiooni graafikuks on Sx -koordinaadistikus S -telje ja sirge $x = 1$ vahel asetsev parabooli kaar, kusjuures parabooli haripunktiks on punkt $\left(\frac{3}{4}; \frac{9}{4}\pi \right)$, fokaallaiuseks 4π ,

parabooli telg on paralleelne S -teljega ning parabool avaneb S -telje negatiivses suunas. Nende andmete järgi saame skitseerida antud pöördkoonusesse kujundatud silindri täispindala S selle silindri raadiuse x funktsioonina. Selleks et graafik oleks ülevaatlikum, võtame S -teljel 10 korda väiksema ühiku kui x -teljel (joon. 42).

Graafikust nähtub, et vaadeldav funktsioon on piirkonnas $0 < x \leq \frac{3}{4}$ kasvav ning piirkonnas $\frac{3}{4} \leq x < 1$ kahanev. Raadiuse $x = \frac{3}{4}$ puhul saavutab silindri täispindala S maksimaalse väärtuse $\frac{9}{4}\pi$. Funktsiooni väärtuste hulk on $0 < S \leq \frac{9}{4}\pi$.

II. Leida funktsiooni

$$y = \arcsin \frac{2x-1}{3} + \log \frac{3x-4}{2x-3}$$

määramispiirkond.

Lahendus. Et funktsiooni $\arcsin x$ määramispiirkond on $-1 \leq x \leq 1$, siis koosneb antud funktsiooni avaldise esimese liidetava määramispiirkond kõigist neist x väärtustest, mis rahuldavad võrratust

$$-1 \leq \frac{2x-1}{3} \leq 1.$$

Sellest võrratusest järeldub $-3 \leq 2x-1 \leq 3$, $-2 \leq 2x \leq 4$ ja $-1 \leq x \leq 2$. (*)

Teine liidetav antud funktsiooni avaldises on määratud, kui

$$\frac{3x-4}{2x-3} > 0,$$

mis on rahuldatud, kui $3x-4 > 0$ ja $2x-3 > 0$, s. t. kui

$$x > \frac{3}{2}, \quad (**)$$

või kui $3x-4 < 0$ ja $2x-3 < 0$, s. t. kui

$$x < \frac{4}{3}. \quad (***)$$

Antud funktsiooni määramispiirkond koosneb kõigist neist x väärtustest, mis rahuldavad võrratust (*) ja ühte võrratus-

test (**) või (***) . Järelikult koosneb ülesandes nõutud määramispiirkond kahest vahemikust: $-1 \leq x < \frac{4}{3}$ ja $\frac{3}{2} < x \leq 2$.

III. Koostada funktsiooni

$$y = \ln \frac{\cos \sqrt{x}}{1 - \cos \sqrt{x}} \quad (*)$$

pöördfunktsiooni avaldis.

Lahendus. Et funktsiooni $\ln x$ pöördfunktsioon on e^x , siis järeldub võrdusest (*)

$$e^y = \frac{\cos \sqrt{x}}{1 - \cos \sqrt{x}},$$

millest saame edasi

$$\cos \sqrt{x} = \frac{e^y}{1 + e^y}, \quad \sqrt{x} = \arccos \frac{e^y}{1 + e^y}, \quad x = \arccos^2 \frac{e^y}{1 + e^y}.$$

Viimase võrduse parem pool ongi nõutud pöördfunktsiooni avaldis, kusjuures argumendi tähiseks on y . Vahetades argumendi ja funktsiooni tähised, saame antud funktsiooni pöördfunktsiooni avaldiseks

$$y = \arccos^2 \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

IV. Leida murdratsionaalse funktsiooni

$$y = \frac{x^3 + 2x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$$

graafiku asümptoodid ja skitseerida graafik.

Lahendus. Jagame antud funktsiooni lugeja nimetajaga:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 4}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 2} = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x - 2} + \frac{-4}{x^2 + x - 2}$$

Et jagatise täiosa on $x + 1$ ja jääk $x - 2$, siis on antud murdratsionaalne funktsioon esitatav kujul

$$y = x + 1 + \frac{x - 2}{x^2 + x - 2}$$

ehk, pärast nimetaja teguriteks lahtutamist,

$$y = x + 1 + \frac{x-2}{(x+2)(x-1)}. \quad (*)$$

$|x|$ tõkestamatul suurenemisel läheneb $\frac{x-2}{x^2+x-2}$ nullile kui murdratsionaalne funktsioon, mille nimetaja aste (2) on suurem lugeja astmest (1). Järelikult läheneb $|x|$ suurenemisel antud murdratsionaalse funktsiooni väärtus lineaarfunktsiooni $y = x + 1$ väärtusele ja seega murdratsionaalse funktsiooni graafik sirgele $y = x + 1$. Üks nõutud asümptootidest on seetõttu $y = x + 1$. Kui argument läheneb antud funktsiooni nimetaja nullkohtadele -2 või 1 , siis suureneb funktsiooni absoluutväärtus tõkestamatult. Järelikult on ka y -teljega paralleelsed sirged $x = -2$ ja $x = 1$ vaadeldava funktsiooni graafiku asümptootideks.

Selleks et asümptootide järgi funktsiooni graafikut konstrueerida, uurime, kummalt poolt graafik läheneb asümptootile $y = x + 1$ ning mis suunas ta läheneb asümptootidele $x = -2$

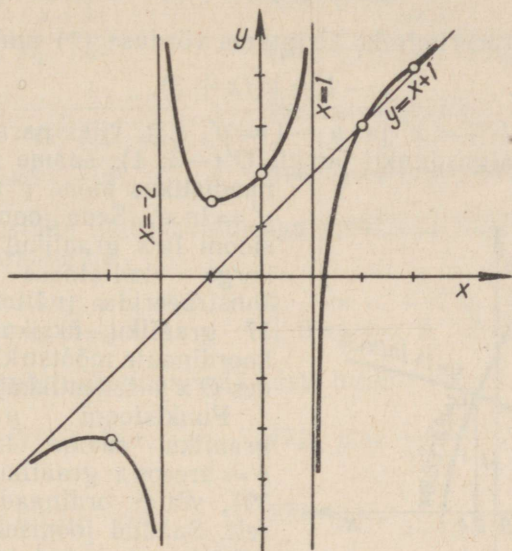
ja $x = 1$. Kui $x < -2$, siis on võrduses (*) murru $\frac{x-2}{(x+2)(x-1)}$ kõik kolm tegurit negatiivsed ja murd ise seega negatiivne. Järelikult on $x < -2$ puhul antud murdratsionaalse funktsiooni väärtus väiksem kui $x + 1$. Meie murdratsionaalse funktsiooni graafik läheneb seega x -telje negatiivses suunas asümptootile $y = x + 1$ altpoolt (joon. 43). Kui edasi x läheneb väärtusele -2 ,

jäädes aga temast väiksemaks, siis suureneb murru $\frac{x-2}{(x+2)(x-1)}$ absoluutväärtus tõkestamatult (sest tegur $x + 2$ läheneb nimetajas nullile), kuid murd on endiselt negatiivne. Järelikult läheneb antud funktsiooni graafik vasakult asümptootile $x = -2$ y -telje negatiivses suunas. Seevastu $x > -2$ puhul x lähenemisel väärtusele -2 on vaadeldav murd positiivne ja tõkestamatult suurenev. Paremalt poolt läheneb meie funktsiooni graafik järelikult asümptootile $x = -2$ y -telje positiivses suunas. Analoogiline arutelu näitab, et asümptootile $x = 1$ läheneb graafik vasakult y -telje positiivses suunas ja paremalt y -telje negatiivses suunas. Lõpuks on suurte positiivsete x väärtuste puhul ($x > 2$)

murru $\frac{x-2}{(x+2)(x-1)}$ positiivne nullile lähenev suurus, mistõttu antud funktsiooni graafik läheneb asümptootile $y = x + 1$ x -telje positiivses suunas ülalt. Pannes veel tähele, et $x - 2 = 0$, s. t. $x = 2$ puhul antud funktsiooni graafik lõikab asümptooti $y = x + 1$, ning leides argumentidele väärtusi $x = -3$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$ andes ja vastavaid funktsiooni väärtusi arvutades, et graafik läbib punkte $\left(-3; \frac{13}{4}\right)$, $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$, $(0; 2)$ ja $(3; 4,1)$,

võime saadud tulemuste järgi ülesandes nõutud graafiku võrdlemisi täpselt skitseerida (joon. 43).

Kasutatud meetod ei võimalda siiski lahendada mitmeid olulisi küsimusi antud funktsiooni kohta. Näiteks ei saa öelda, kus täpselt $x = -1$ ümbruses funktsioon omandab minimaalse vää-



Joon. 43

tuse, kus $x = -2$ ümbruses maksimaalse väärtuse või missuguses punktis $x = 3$ ümbruses funktsiooni graafik läheb kumeruselt üle nõgususele. Seda laadi küsimuste lahendamiseks tuleb rakendada juba diferentsiaalarvutuse võtteid (§ 11).

V. Leida graafiliselt võrrandi

$$1 + \ln(x + 3) - 2 \arccos x = 0$$

lahendite lähisväärtused.

Lahendus. Võrrandi $f(x) = 0$ lahendamine tähendab geomeetriliselt funktsiooni $y = f(x)$ graafiku ja x -telje lõikepunktide abstsisside leidmist. Antud võrrandi lahendite lähisväärtuste leidmiseks tuleks seega konstrueerida võimalikult täpselt funktsiooni $1 + \ln(x + 3) - 2 \arccos x$ graafik. Ilmselt on see tülikas. Lihtsam on kasutada järgmist võtet. Kirjutame antud võrrandi ümber kahe niisuguse funktsiooni võrdusena, mille graafikuid oleks võimalikult lihtne konstrueerida, näiteks

$$1 + \ln(x + 3) = 2 \arccos x.$$

Nüüd on võrrandi lahendiks iga niisugune x , millele vastavad võrrandi vasaku ja parema poole väärtused on võrdsed, ehk, geomeetriliselt, võrrandi vasakul ja paremal poolel seisvate funktsioonide graafikute iga lõikepunkti abstsiss.

Funktsiooni

$$y = 1 + \ln(x + 3) \quad (*)$$

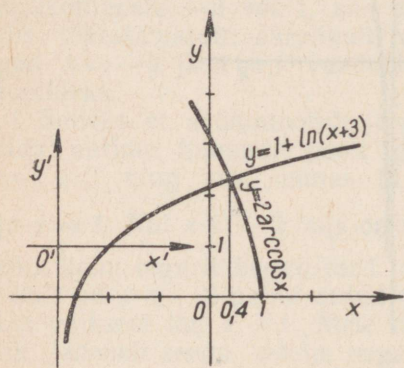
graafiku konstrueerimiseks kirjutame võrduse (*) ümber kujul

$$y - 1 = \ln(x + 3).$$

Võttes siin $x + 3 = x'$ ja $y - 1 = y'$, s. t. viies paralleellükkega koordinaatide alguspunkti punkti $O'(-3; 1)$, saame uues koordinaadistikus joone (*) võrrandiks

$y' = \ln x'$. Seda joont — funktsiooni $\ln x$ graafikut — on juba kerge küllaldase täpsusega konstrueerida (näiteks jooniselt 37 graafiku üksikute punktide koordinaate mõõtsirkliga üle kandes $O'x'y'$ -teljestikku).

Funktsiooni $y = 2 \arccos x$ graafiku saame konstrueerida $y = \arccos x$ graafiku abil (joon. 39), võttes ordinaadid kahekordselt. Saadud jooniselt (joon. 44) nähtub, et antud võrrandil on üks lahend ja et selle lähisväärtus on 0,4.



Joon. 44

Funktsiooni mõiste

454. Arvutada $f(0)$, $f(1)$ ja $f(a + 1)$, kui

1) $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$; 2) $f(x) = 3^{2-4x}$; 3) $f(x) = \sqrt[3]{9-5x}$.

455. Leida

1) $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ ja 2) $f(a-b) - f(a+b)$,

kui $f(x) = 1 - x^2$.

456. Olgu

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{kui } 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 + x, & \text{kui } 1 < x \leq 4, \\ \sqrt[3]{2x^2 - 5}, & \text{kui } 4 < x \leq 5. \end{cases}$$

Leida $f(2)$, $f\left(\frac{3}{4}\right)$, $f(0)$ ja $f(3\sqrt{2})$.

Leida antud funktsiooni määramispiirkond:

$$457. y = \frac{x-1}{x+2}.$$

$$462. y = \log(3 - 5x - 2x^2).$$

$$458. y = \frac{\sqrt{3-2x}}{x+1}$$

$$463. y = \frac{\log x}{\sin \pi x}.$$

$$459. y = \sqrt[4]{4-x^2}.$$

$$464. y = \sqrt[3]{3-2\log_4 x}.$$

$$460. y = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}.$$

$$465. y = \sqrt{\cos x}.$$

$$461. y = \sqrt[3]{9x-x^3}.$$

$$466. y = \log(1-2\sin x).$$

467. Koostada näide avaldisega määratud funktsioonist, mille määramispiirkond on

$$1) -3 \leq x \leq +3;$$

$$3) -\infty < x < 5, \quad 5 < x < +\infty;$$

$$2) 1 \leq x \leq 2;$$

$$4) 0 \leq x < 2, \quad 2 < x < +\infty.$$

Leida antud funktsiooni väärtuste hulk:

$$468. y = 3 - 4 \sin x.$$

$$471. y = \frac{1}{x^2+1}$$

$$469. y = \log(3-4x^2).$$

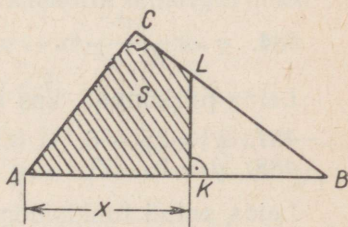
$$472. y = \frac{1}{x-1}.$$

$$470. y = x^2 - x - 2.$$

$$473. y = 2^{\cos x}.$$

474. Kerasse, mille raadius on R , on kujundatud silinder. Avaldada silindri ruumala V silindri kõrguse h funktsioonina. Missugune on selle funktsiooni määramispiirkond? Seda funktsiooni esitava avaldise määramispiirkond?

475. Poolringi, mille raadius on R , on kujundatud ristkülik. Avaldada ristküliku pindala S ristküliku kõrguse h funktsioonina, kui ristküliku alus asetseb poolringi diameetril. Missugune on selle funktsiooni määramispiirkond? Seda funktsiooni esitava avaldise määramispiirkond?



Joon. 45

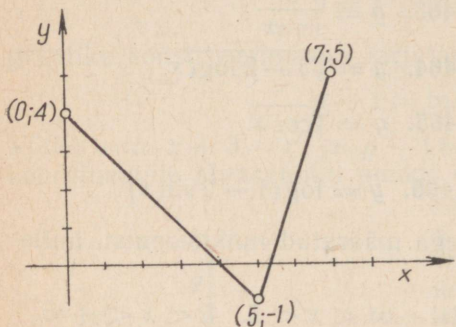
476. Avaldada täisnurksest kolmnurgast ABC (joon. 45) hüpotenuusi AB ristlõiguga KL eraldatud osa pindala S lõigu $AK = x$ pikkuse funktsioonina, kui $AC = 3$ ja $BC = 4$.

477. Leida joonisel 46 graafikuga määratud funktsiooni $f(x)$ määramispiirkond, väärtuste hulk ja nullkohad ning esitada see funktsioon avaldiste abil.

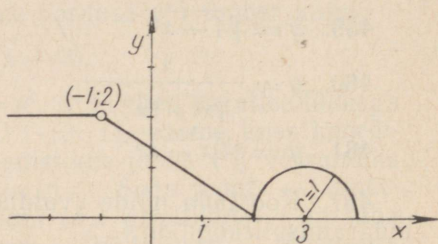
478. Esitada avaldiste abil joonisel 47 graafikuga määratud funktsioon $f(x)$ vahemikus $-\infty < x \leq 4$.

479. Olgu $u = 1 + \sqrt{v}$, $v = z^2 + z$, $z = y - 2$, $y = \sin x$. Avaldada z , v ja u argumendi x funktsioonidena.

480. Moodustada $f[g(x)] + g[f(x)]$, kui $f(x) = \sqrt{1 + \log_a x}$ ja $g(x) = a^{x^2}$.



Joon. 46



Joon. 47

481. Moodustada $f[g(x)]$, $g[f(x)]$ ja $f\{g[f(x)]\}$, kui $f(x) = 1 + \log_5 x$, $g(x) = 5^{x-2}$.

482. Leida $f\{f[f(x)]\}$, kui $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Koostada antud funktsiooni pöördfunktsiooni avaldis:

483. $y = \frac{2x-1}{3x+4}$.

485. $y = 2^{3x-4}$.

484. $y = \frac{x^3}{1-x^3}$.

486. $y = \log_3(1 - \sqrt{x})$.

Leida piirkonnad, kus antud funktsioon on positiivne:

487. $y = 2x - 6$.

489. $y = x^3 - 3x^2 - 10x$.

488. $y = 9 - x^2$.

490. $y = 9 - 3^x$.

Leida antud funktsiooni kasvamis- ja kahanemispiirkonnad:

491. $y = 1 + x^2$.

494. $y = 2^{-\sqrt{x}}$.

492. $y = \frac{1}{1-x}$.

495. $y = \sqrt{4-x^2}$.

493. $y = \frac{1}{1+x^2}$.

496. $y = \log(2 - \sqrt[3]{x})$.

Missugused järgmistest funktsioonidest on paarisfunktsioonid ja missugused paaritud funktsioonid?

497. $f(x) = x^3 + 3x$.

499. $f(x) = 1 - x^2$.

498. $f(x) = \cos 5x$.

500. $f(x) = x^3 + \cos x$.

$$501. f(x) = \frac{1+2^x}{1-2^x}.$$

$$503. f(x) = (x - \sin x) \tan 2x.$$

$$502. f(x) = \frac{3^x}{1+3^x}.$$

$$504. f(x) = \frac{x}{\log \cos x}.$$

505. Olgu $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ paarisfunktsioonid ning $g_1(x)$ ja $g_2(x)$ paaritud funktsioonid. Mida võib öelda funktsioonide

- 1) $f_1(x) \cdot g_1(x)$, 2) $f_1(x) \cdot f_2(x)$, 3) $f_1(x) + g_1(x)$, 4) $g_1(x) \cdot g_2(x)$,
 5) $\frac{f_1(x) - f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)}$ ja 6) $g_1(x) - g_2(x)$ kohta?

Täisastmed, polünoomid ja murdratsionaalsed funktsioonid

Skitseerida antud funktsioonide graafikud:

$$506. y = x^3.$$

$$511. y = \frac{1}{3}(x+1)^3.$$

$$507. y = x^4.$$

$$512. y = \sqrt[3]{x}.$$

$$508. y = \frac{1}{x^2}.$$

$$513. y = \sqrt[5]{x+3} - 2.$$

$$509. y = (x-2)^3.$$

$$514. y = 2x^{\frac{3}{2}}.$$

$$510. y = 3 + (x+2)^5.$$

$$515. y = \frac{3}{\sqrt[4]{x}}.$$

Leida graafiliselt antud võrrandite lahendite lähisväärtused:

$$516. x^3 + 3x - 1 = 0.$$

$$518. x^5 - x^2 - 4 = 0.$$

$$517. 2x^4 + 3x + 3 = 0.$$

$$519. 4\sqrt[3]{x^2} - x - 3 = 0.$$

520. Leida lineaarfunktsioon $f(x)$, kui $f(1) = 3$ ja $f(4) = -2$.

521. Konstrueerida funktsioonide $y = |x| + |x-1|$ ja $y = |2x| + x - 3$ graafikud.

522. Leida ruutfunktsioon $f(x) = ax^2 + bx + c$, kui $f(-1) = 5$, $f(0) = 3$ ja $f(4) = 75$.

Arvutada Horneri skeemi abil polünoomi $f(x)$ väärtus argumendi väärtusel $x = x_0$, kui

$$523. f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16, x_0 = 4;$$

$$524. f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x, x_0 = -3;$$

$$525. f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 52, x_0 = 2.$$

526. Leida murdlineaarne funktsioon $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, kui $f(0) = -2$, $f(1) = -7$ ja $f(4) = 8$.

527. Leida funktsiooni $y = \frac{x^4 + 1}{x^5 - 3x^3 - 4x}$ määramispiirkond.

Leida antud murdratsionaalsete funktsioonide graafikute asümptoodid, selgitada, kummalt poolt graafikud lähenevad asümptootidele, ning skitseerida graafikud:

$$528. y = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$531. y = \frac{x^3 + x^2 - x + 2}{x^2 - 4}.$$

$$529. y = \frac{x}{x^2 + 5x + 6}.$$

$$532. y = \frac{x^4 + 9x + 2}{x^3 - 6x^2 + 9x}.$$

$$530. y = \frac{2x - 1}{1 - x}.$$

$$533. y = \frac{2x^3 - 6x^2 - x + 2}{x - 3}.$$

EkspONENT- ja logARITMFUNKTSIOONID

Skitseerida antud funktsioonide graafikud:

$$534. y = -3^x.$$

$$538. y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}.$$

$$535. y = 2^{-x}.$$

$$539. y = 5 \cdot 3^{2x}.$$

$$536. y = 2 + 3^{x-1}.$$

$$540. y = 3 - 2^{\frac{x}{3}}.$$

$$537. y = e^x.$$

$$541. y = \frac{1}{4} e^{x+2}.$$

Leida graafiliselt antud võrrandite lahendite lähisväärtused:

$$542. 2^x - 3x = 0. \quad 543. 3^{-x} + 2x - 3 = 0. \quad 544. 10^x - x^2 = 0.$$

545. Leida funktsioon, mille graafik on funktsiooni $y = 2 - 3^{x+1}$ graafikuga sümmeetriline

- 1) x -telje suhtes;
- 2) y -telje suhtes;
- 3) koordinaatide alguspunkti suhtes;
- 4) sirge $y = x$ suhtes.

546. Joonestada millimeetripaberile funktsiooni $y = \ln x$ graafik ja konstrueerida samale joonisele (ilma täiendavate arvutus-teta) funktsioonide

$$y = 2 - \ln(x + 4) \quad \text{ja} \quad y = 4 + 3 \ln \frac{x+1}{2}$$

graafikud.

Leida antud funktsioonide pöördfunktsioonid:

$$547. y = 2 + \ln(1 + e^{3x}). \quad 548. y = \sqrt{3 - \frac{2}{1 + \ln x}}.$$

Lahendada võrratused:

549. $1 \leq 2^x \leq 8$.

551. $\frac{1}{e} < e^{3x+2} < e^8$.

550. $|\ln x| < 3$.

552. $\log_3(9 - x^2) \leq 1$.

553. Leida funktsiooni $y = \sqrt{2 - \ln(1 - 4x)}$ määramispiirkond ja väärtuste hulk.

554. Avaldada funktsioon $f(x)$ funktsiooni $g(x)$ kaudu, kui

1) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$;
2) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \log_3 x$.

Trigonomeetrilised funktsioonid ja nende pöördfunktsioonid

Skitseerida antud funktsiooni graafik:

555. $y = -\cos x$.

559. $y = 3 + 2 \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$.

556. $y = 1 + \sin x$.

560. $y = \sin |x|$.

557. $y = \sin 3x$.

561. $y = |\sin x|$.

558. $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

562. $y = \tan \frac{2x}{\pi}$.

Veenduda, et antud funktsioon on perioodiline, ning leida ta periood:

563. $y = \sin 3x$.

566. $y = 5 \sin^2 x + 2 \cos 3x$.

564. $y = 1 + 2 \tan \frac{3x}{2}$.

567. $y = \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{4}$.

565. $y = |\cos x|$.

568. $y = \sqrt{\tan x}$.

569. Skitseerida funktsioonide $y = -\arcsin x$, $y = \arctan(x - 3)$ ja $y = 2 \arccos(-x)$ graafikud.

570. Skitseerida funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} \arccos x, & \text{kui } -1 \leq x \leq 0, \\ \pi \frac{1+x}{2}, & \text{kui } 0 < x \leq 1, \\ 4 \arctan(2-x) & \text{kui } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

graafik ning leida $f(x)$ minimaalne ja maksimaalne väärtus.

571. Pöördkoonuse tipunurk on α ja pinnalaotuse kui ringi sektori kesknurk on β . Avaldada α nurga β funktsioonina.

Leida funktsiooni määramispiirkond:

572. $y = \ln \sin x$.

573. $y = \arcsin \ln x$.

$$574. y = \sqrt{\pi - 3 \arccos x}. \quad 575. y = \arcsin \frac{2x}{1+x}.$$

576. Olgu $f(x) = \arccos(2x - 1)$. Leida $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{3}{4}\right)$ ja $f(1 - a)$.

577. Avaldada

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) $\sin \arccos 0,8$; | 3) $\tan \arcsin 0,6$; |
| 2) $\cos \arctan 7$; | 4) $\cot \arctan 3$. |

578. Leida neljakohalistest trigonomeetriliste funktsioonide tabelitest

- 1) $\arcsin 0,989$; 2) $\operatorname{arccot}(-2,06)$; 3) $\arccos(-0,91)$.

579. Leida neljakohalistest tabelitest

- 1) $e^{-0,2505}$; 2) $\ln \sin 1,1188$; 3) $e^{1 - \arcsin 0,94}$.

Hüperboolsed funktsioonid

Tõestada samasused:

580. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$. 582. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.
 581. $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$. 583. $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$.

584. Avaldada

- | | |
|---|---|
| 1) $\operatorname{sh} x \operatorname{th} x$ kaudu; | 3) $2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} \operatorname{ch} x$ kaudu; |
| 2) $\operatorname{th} x \operatorname{ch} x$ kaudu; | 4) $\operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch} 2x$ kaudu. |

585. Mis joont esitab parameetriliste võrrandite paar $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$?

Tõestada, et kehtivad samasused:

586. $\operatorname{Arsh}(-x) = -\operatorname{Arsh} x$.
 587. $\operatorname{Arth}(-x) = -\operatorname{Arth} x \quad (-1 < x < 1)$.
 588. $\operatorname{Arsh} \sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{Arch} x \quad (x \geq 1)$.
 589. $\operatorname{Arth} \frac{1}{x} = \operatorname{Arcth} x \quad (|x| > 1)$.
 590. $\operatorname{ch} \operatorname{Arsh} x = \sqrt{x^2 + 1}$.

§ 9. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS JA PIDEVUS

Arvu A nimetatakse arvjada

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

piirväärtuseks, kui iga (kuitahes väikese) $\varepsilon > 0$ puhul leidub niisugune naturaalarv N , et

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

iga $n > N$ puhul. Asjaolu, et A on jada (1) piirväärtus, tähistatakse

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Arvu A nimetatakse funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks argumenti lähenemisel väärtusele a ja tähistatakse

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

kui iga $\varepsilon > 0$ puhul leidub niisugune $\delta > 0$, et iga $x \neq a$ puhul, mis rahuldab võrratust

$$|x - a| < \delta, \quad (2)$$

kehtib võrratus

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \quad (3)$$

Kui võrratusest $0 < x - a < \delta$ ($0 < a - x < \delta$) järeldub võrratus (3), siis nimetatakse arvu A funktsiooni $f(x)$ parempoolseks (vasakpoolseks) piirväärtuseks argumenti lähenemisel väärtusele a ja tähistatakse $A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ [$A = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$]. Kui iga $\varepsilon > 0$ puhul leidub niisugune reaalarv $N > 0$, et võrratus (3) kehtib iga $x > N$ ($x < -N$) puhul, siis nimetatakse arvu A funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks argumenti tõkestamatul kasvamisel (kahanemisel) ja tähistatakse $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ [$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$].

Matemaatilises analüüsis on eriti tähtsad järgmised kaks piirväärtust:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828 \dots \quad (5)$$

Piirväärtusteoreemid. 1° Summa piirväärtus on võrdne liidetavate piirväärtuste summaga.

2° Korrutise piirväärtus on võrdne tegurite piirväärtuste korrutisega.

3° Jagatise piirväärtus on võrdne lugeja ja nimetaja piirväärtuste jagatisega, kui nimetaja piirväärtus on nullist erinev.

Muutuvat suurust, mille piirväärtus vaadeldavas muutumisprotsessis on 0, nimetatakse selles muutumisprotsessis lõpmatult vähenevaks suuruseks. Kui kahe (samas muutumisprotsessis) lõpmatult väheneva suuruse α ja β suhte $\frac{\alpha}{\beta}$ piirväärtus on null, siis öeldakse, et suurus α on kõrgemat järku lõpmatult vähenev kui β . Kui suhte $\frac{\alpha}{\beta}$ piirväärtus on 1, siis nimetatakse suurusi α ja β ekvivalentseteks lõpmatult vähenevateks suurusteks. Murru piirväärtus ei muutu, kui lugeja ja nimetaja vastavalt asendada vaadeldavas piirprotsessis ekvivalentsete lõpmatult vähenevate suurustega. Kahe lõpmatult väheneva suuruse vahe on kummagi suuruse suhtes kõrgemat järku lõpmatult vähenev siis ja ainult siis, kui need suurused on ekvivalentsed.

Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse pidevaks kohal x_0 , kui

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (6)$$

Funktsiooni nimetatakse pidevaks mingis piirkonnas, kui ta on pidev selle piirkonna igas punktis. Mingil argumendi väärtusel (mingis piirkonnas) pidevate funktsioonide summa ja korrutis on sellel argumendi väärtusel (selles piirkonnas) pidevad funktsioonid. Kahe pideva funktsiooni jagatis on pidev argumendi väärtustel, mis ei ole nimetaja nullkohtadeks. Kahest pidevast funktsioonist moodustatud liitfunktsioon on pidev. Pideva monootoonse funktsiooni pöördfunktsioon on pidev.

Kõik elementaarfunktsioonid on oma määramispiirkondades pidevad.

Argumendi väärtusi, millel funktsioon ei ole pidev, nimetatakse funktsiooni katkevuskohadeks. Arvu x_0 nimetatakse funktsiooni $f(x)$ kõrvaldatavaks katkevuskohaks, kui eksisteerib $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, kuid tingimus (6) ei ole täi-

detud. Kui kohal x_0 eksisteerivad funktsiooni vasak- ja parempoolne piirväärtus, kuid nad pole võrdsed, siis nimetatakse x_0 funktsiooni $y = f(x)$ hüppekohaks. Kui $x \rightarrow x_0$ puhul $|f(x)|$ kasvab tõkestamatult, siis on x_0 funktsiooni $y = f(x)$ lõpmatu skohht.

Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse mingis piirkonnas ühtlaselt pidevaks, kui iga $\varepsilon > 0$ puhul leidub niisugune $\delta > 0$, et iga x_1 ja x_2 puhul sellest piirkonnast, mis rahuldavad võrratust

$$|x_1 - x_2| < \delta,$$

kehtib võrratus

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Kui funktsioon $f(x)$ on pidev kinnises vahemikus $a \leq x \leq b$, siis:

1° $f(x)$ on selles vahemikus tõkestatud;

2° $f(x)$ omandab selles vahemikus minimaalse ja maksimaalse väärtuse;

3° $f(x)$ omandab selles vahemikus iga väärtuse oma minimaalse ja maksimaalse väärtuse vahelt;

4° kui $f(x)$ väärtused vahemiku otstes on vastasmärgilised [$f(a) \cdot f(b) < 0$], siis leidub selles vahemikus vähemalt üks $f(x)$ nullkoht;

5° $f(x)$ on selles vahemikus ühtlaselt pidev.

Näiteid

I. Tõestada ε ja δ arutlusega, et

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{1+x} = 2.$$

Lahendus. Funktsiooni piirväärtuse definitsiooni kohaselt tuleb antud väite tõestamiseks moodustada niisugune funktsioon $\delta = \delta(\varepsilon)$, mis on määratud ja positiivne kõigi (küllalt väikeste) $\varepsilon > 0$ puhul, et võrratus

$$|\sqrt{1+x} - 2| < \varepsilon \quad (*)$$

oleks rahuldatud iga $x \neq 3$ puhul, mis rahuldab võrratust

$$|x - 3| < \delta. \quad (**)$$

Selleks tuletame võrratusest (*) uusi võrratuse, millest iga järgmine on eelmisega samaväärne või rangem (s. t. igast järgmisest järeldub eelmine), kuni jõuame võrratuseni, mille vasakul poolel on $|x - 3|$ ja paremal poolel mingi avaldis ε -st.

Võrratus (*) on samaväärne võrratusega

$$-\varepsilon < \sqrt{1+x} - 2 < \varepsilon.$$

Liites sellele võrratusele 2, saame

$$2 - \varepsilon < \sqrt{1+x} < 2 + \varepsilon,$$

millest ruutu tõstes saame ($2 - \varepsilon > 0$, s. t. $\varepsilon < 2$ puhul)

$$(2 - \varepsilon)^2 < 1 + x < (2 + \varepsilon)^2$$

ja lahutades 4:

$$(2 - \varepsilon)^2 - 4 < x - 3 < (2 + \varepsilon)^2 - 4$$

ehk

$$\varepsilon^2 - 4\varepsilon < x - 3 < \varepsilon^2 + 4\varepsilon.$$

Viimane võrratus on ($0 < \varepsilon < 2$ puhul) samaväärne võrratusega (*). Temast rangem on võrratus

$$-(4\varepsilon - \varepsilon^2) < x - 3 < 4\varepsilon - \varepsilon^2$$

ehk

$$|x - 3| < 4\varepsilon - \varepsilon^2. \quad (***)$$

Saadud võrratus (***) on rangem kui (*), s. t. iga x , mis rahuldab võrratust (***), rahuldab ka võrratust (*). Kui võtta $\delta = 4\varepsilon - \varepsilon^2$, siis järeldeb võrratusest (**) võrratus (*) iga $0 < \varepsilon < 2$ puhul ja nende ε väärtuste puhul on $\delta > 0$. Sellega ongi väide $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{1+x} = 2$ tõestatud.

II. Arvutada

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{3 - \sqrt{x^2+8}}.$$

Lahendus. Kui $x \rightarrow 1$, siis lähenevad piirväärtusmärgi aluses murrus nii lugeja kui nimetaja nullile, mistõttu ei ole rakendatav teoreem jagatise piirväärtusest. Selle olukorra muutmiseks korrutame murru lugejat ja nimetajat nimetaja kaasavaldisega $3 + \sqrt{x^2+8}$ ja taandame seejärel nullile läheneva teguriga $1-x$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{3 - \sqrt{x^2+8}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(3 + \sqrt{x^2+8})}{(3 - \sqrt{x^2+8})(3 + \sqrt{x^2+8})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(3 + \sqrt{x^2+8})}{9 - (x^2+8)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(3 + \sqrt{x^2+8})}{1-x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 + \sqrt{x^2+8}}{1+x}. \end{aligned}$$

Nüüd on nimetaja piirväärtus $\lim_{x \rightarrow 1} (1+x) = 2 \neq 0$ ja võime rakendada teoreemi murru piirväärtusest. Lugeja piirväärtus on ilmselt (lugeja kui elementaarfunktsiooni pidevuse tõttu)

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3 + \sqrt{x^2 + 8}) = 3 + \sqrt{1 + 8} = 6.$$

Seega

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{3 - \sqrt{x^2 + 8}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 + \sqrt{x^2 + 8}}{1+x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3 + \sqrt{x^2 + 8})}{\lim_{x \rightarrow 1} (1+x)} = \frac{6}{2} = 3.$$

III. Arvutada

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$$

Lahendus. Teisendame piirväärtusmärgi alust funktsiooni järgmiselt:

$$\begin{aligned} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^3} = \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \\ &= \frac{\sin x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cos x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2 \cos x}. \end{aligned}$$

Piirväärtusteoreemi 2^o järgi saame nüüd

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x}.$$

Võrduse (4) järgi on $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Kui võtame $\frac{x}{2} = y$, siis

$x \rightarrow 0$ puhul ka $y \rightarrow 0$. Järelikult $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$. Lõpuks

$\frac{1}{2 \cos x}$ pidevuse tõttu kohal $x = 0$ on $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2 \cdot \cos 0} = \frac{1}{2}$.

Järelikult

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

IV. Leida

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \sqrt[5]{1-x^3} + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2-1}}{4 - \sqrt[3]{x^2+1} + 2 \cdot \sqrt{x}}$$

Lahendus. Argumendi tõkestamatul kasvamisel on ka piirväärtusmärgi aluse murru lugeja ja nimetaja tõkestamatud. Seetõttu ei ole teoreem jagatise piirväärtusest otsekohe rakendatav (lugejal ja nimetajal pole piirväärtust olemas). Teisendame murdu nii, et nimetaja läheneks $x \rightarrow +\infty$ puhul lõplikule nullist erinevale arvule. Selleks tuleb antud ülesandes murru lugejat ja nimetajat jagada avaldisega $\sqrt[3]{x^2}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \sqrt[5]{1-x^3} + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2-1}}{4 - \sqrt[3]{x^2+1} + 2 \cdot \sqrt{x}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{x^{10}} - \frac{1}{x}} + 3 \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}}}{\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{2}{\sqrt{x}}} \end{aligned}$$

x tõkestamatul suurenemisel lähevad nüüd $\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{1}{x^2}$ jne. nullile, nii et otsitav piirväärtus on

$$\frac{2 \cdot \sqrt[5]{0-0} + 3 \cdot \sqrt[3]{1-0}}{0 - \sqrt[3]{1+0} + 0} = -3.$$

V. Leida

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^x.$$

Lahendus. Et $x \rightarrow \infty$ puhul $\frac{x+3}{x+1} = \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow 1$, siis on

käesolevas ülesandes tegemist «määramatusel kujul 1^∞ ». Piirväärtuse leidmiseks teisendame piirväärtusmärgi alust funktsiooni nii, et «määramatus 1^∞ » esineks temas kujul $\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$, kus y on

mingi avaldis muutujast x , mis kasvab tõkestamatult koos x -ga:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x &= \left(\frac{x+1+2}{x+1}\right)^x = \left(1 + \frac{2}{x+1}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{\frac{x+1}{2}}\right)^x = \\ &= \left(1 + \frac{1}{\frac{x+1}{2}}\right)^{x+1} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^{-2} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{\frac{x+1}{2}}\right)^{x+1}}{1 + \frac{2}{x+1}}. \end{aligned}$$

Kui võtame nüüd $\frac{x+1}{2} = y$, siis $x \rightarrow \infty$ puhul ka $y \rightarrow \infty$. Järelikult

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y^2}\right]}{1 + \frac{1}{y}} = \frac{\left[\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^2}{\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)} = \frac{e^2}{1} = e^2.$$

Märkus. Ülesande lahenduskäigus oli kunstlik ja tülikas avaldise $\frac{x+3}{x+1}$ teisendamine kujule $1 + \frac{1}{y}$. Selle asemel võib kohe võtta

$$\frac{x+3}{x+1} = 1 + \frac{1}{y}$$

ja siit y avaldada: $\frac{x+3-x-1}{x+1} = \frac{1}{y}$, $y = \frac{x+1}{2}$. Et nüüd $x \rightarrow \infty$ puhul ka $y \rightarrow \infty$ ja $x = 2y - 1$, siis

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{2y-1} = \dots = e^2.$$

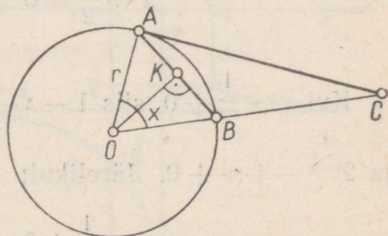
VI. Tõestada, et ringjoone kaar \widehat{AB} , sellele kaarele toetuv kõõl AB ja lõik AC , kus C on ringjoone keskpunkti O ja punkti B läbiva sirge ning punktis A ringjoonele tõmmatud puutuja lõikepunkt (joon. 48), on kaare \widehat{AB} kesknurga x nullile lähenemisel ekvivalentsed lõpmatult vähenevad suurused.

Lahendus. Kui vaadeldava ringjoone raadius on r , siis

$$\widehat{AB} = rx,$$

$$AB = 2AK = 2r \sin \frac{x}{2},$$

$$AC = r \tan x.$$



Joon. 48

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{AB}{\widehat{AB}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2r \sin \frac{x}{2}}{rx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$$

ja

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{AC}{\widehat{AB}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r \tan x}{rx} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \cdot 1 = 1,$$

millega ongi tõestatud kaare \widehat{AB} , kõõlu AB ja lõigu AC ekvi-valentsus.

VII. Leida funktsiooni

$$y = \frac{3}{\frac{1}{2^{1-x}} - 4}$$

katkevuskohad, selgitada, mis liiki nad on, ja skitseerida funktsiooni graafik.

Lahendus. Et antud funktsioon on elementaarfunktsioon, siis võivad ta katkevuskohadeks olla ainult need argumendi väärtused, mis ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda. Antud funktsioon ei ole määratud, kui $1 - x = 0$, s. t. kui $x = 1$, ning kui $\frac{1}{2^{1-x}} - 4 = 0$, s. t. kui $\frac{1}{1-x} = 2$ ehk $x = \frac{1}{2}$. Otsitavateks

katkevuskohadeks on seega 1 ja $\frac{1}{2}$. Nende liigi määramiseks uurime funktsiooni käitumist argumendi lähenemisel kummalegi katkevuskohale nii vasakult kui ka paremalt. Kui x läheneb väärtusele $\frac{1}{2}$ vasakult, s. t. $x \rightarrow \frac{1}{2} - 0$, siis $1 - x \rightarrow \frac{1}{2} + 0$, $\frac{1}{1-x} \rightarrow 2 - 0$, $\frac{1}{2^{1-x}} \rightarrow 4 - 0$ ja $\frac{1}{2^{1-x}} - 4 \rightarrow -0$. Järelikult

$$x \rightarrow \frac{1}{2} - 0 \text{ puhul } y \rightarrow -\infty.$$

Kui $x \rightarrow \frac{1}{2} + 0$, siis $1 - x \rightarrow \frac{1}{2} - 0$, $\frac{1}{1-x} \rightarrow 2 + 0$, $\frac{1}{2^{1-x}} \rightarrow 4 + 0$ ja $\frac{1}{2^{1-x}} - 4 \rightarrow +0$. Järelikult

$$x \rightarrow \frac{1}{2} + 0 \text{ puhul } y \rightarrow +\infty.$$

Niisiis on $x = \frac{1}{2}$ antud funktsiooni lõpmatuskohaks.

Kui edasi $x \rightarrow 1 - 0$, siis $1 - x \rightarrow +0$, $\frac{1}{1-x} \rightarrow +\infty$, $2^{\frac{1}{1-x}} \rightarrow +\infty$ ja $2^{\frac{1}{1-x}} - 4 \rightarrow +\infty$. Seega

$$x \rightarrow 1 - 0 \text{ puhul } y \rightarrow +0.$$

Lõpuks, kui $x \rightarrow 1 + 0$, siis $1 - x \rightarrow -0$, $\frac{1}{1-x} \rightarrow -\infty$, $2^{\frac{1}{1-x}} \rightarrow +0$ ja $2^{\frac{1}{1-x}} - 4 \rightarrow -4 + 0$. Järelikult

$$x \rightarrow 1 + 0 \text{ puhul } y \rightarrow -\frac{3}{4} - 0,$$

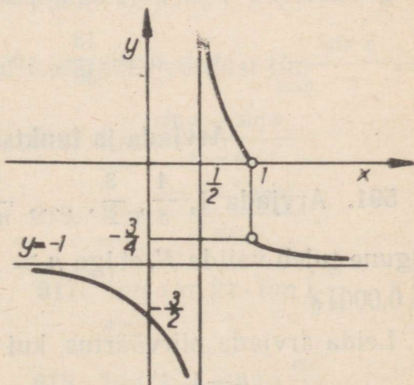
nii et $x = 1$ on vaadeldava funktsiooni hüppekoht. Funktsiooni graafiku skitseerimisel (joon. 49) võtame veel arvesse, et $x \rightarrow +\infty$ puhul $\frac{1}{1-x} \rightarrow +0$ ja järelikult $y \rightarrow -1 + 0$ ning $x \rightarrow -\infty$ puhul $y \rightarrow -1 - 0$.

VIII. Määrata konstandid a ja b nii, et funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{kui } 0 \leq x \leq 1, \\ ax + b, & \text{kui } 1 < x \leq 4, \\ \frac{\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{x+4}}{x-4}, & \text{kui } 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

oleks vahemikus $0 \leq x \leq 5$ pidev.

Lahendus. Et antud funktsioon on defineeritud osavahemikes $0 \leq x \leq 1$, $1 < x \leq 4$ ja $4 < x \leq 5$ elementaarfunktsioonidena, mis on neis vahemikes määratud ja seega ka pidevad, siis on $f(x)$ pidev igaühes neist kolmest osavahemikust mistahes a ja b puhul. Antud funktsioon on seega pidev terves vahemikus $0 \leq x \leq 5$, kui ka $x = 1$ ja $x = 4$ on ta pidevuskohtadeks. Kohal $x = 1$ on $f(x)$ väärtuseks ja ühtlasi ($x^2 - 2x$ pidevuse tõttu) vasakpoolseks piirväärtuseks $f(x)$ definitsiooni järgi $f(1) = 1^2 -$



Joon. 49

$-2 \cdot 1 = -1$. $f(x)$ on pidev kohal $x = 1$, kui ka $f(x)$ parempoolne piirväärtus x lähenemisel sellele kohale on -1 . Et $x > 1$ puhul on $f(x)$ väärtus $ax + b$ ja $\lim_{x \rightarrow 1+0} (ax + b) = a \cdot 1 + b = a + b$, siis on $f(x)$ pidevuse tingimuseks kohal $x = 1$

$$a + b = -1. \quad (*)$$

Kohal $x = 4$ on $f(x)$ väärtuseks ja ühtlasi vasakpoolseks piirväärtuseks $f(x)$ definitsiooni järgi $f(4) = 4a + b$ ja parempoolseks piirväärtuseks

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{x+4}}{x-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{(\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{x+4})[(\sqrt[3]{2x})^2 + \sqrt[3]{2x}\sqrt[3]{x+4} + (\sqrt[3]{x+4})^2]}{(x-4)[(\sqrt[3]{2x})^2 + \sqrt[3]{2x}\sqrt[3]{x+4} + (\sqrt[3]{x+4})^2]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{2x - x - 4}{(x-4)[(\sqrt[3]{2x})^2 + \sqrt[3]{2x}\sqrt[3]{x+4} + (\sqrt[3]{x+4})^2]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{1}{(\sqrt[3]{2x})^2 + \sqrt[3]{2x}\sqrt[3]{x+4} + (\sqrt[3]{x+4})^2} = \\ &= \frac{1}{2^2 + 2 \cdot 2 + 2^2} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Järelikult on $f(x)$ pidev kohal $x = 4$, kui

$$4a + b = \frac{1}{12}. \quad (**)$$

Tingimustest (*) ja (**) saame nõutud a ja b väärtusteks

$$a = \frac{13}{36}, \quad b = -\frac{49}{36}.$$

Arvjada ja funktsiooni piirväärtus

591. Arvjada $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{2n}{n+1}, \dots$ piirväärtus on 2. Mis-sugune tuleb valida N , et iga $n > N$ puhul oleks $\left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon = 0,0001$?

Leida arvjada piirväärtus, kui jada üldelement on:

592. $a_n = \frac{n-1}{n+1}$.

593. $a_n = \frac{1}{n^2+1}$.

$$594. a_n = \frac{100n}{1+(n-1)!}$$

$$597. a_n = \frac{n^2 + (-1)^n n}{1 - 2n^2}$$

$$595. a_n = \frac{3 \cdot 2^n - 4}{2^n + 1}$$

$$598. a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$$

$$596. a_n = \frac{(-1)^n (2n+1)}{n}$$

$$599. a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

600. Kui $x \rightarrow 3$, siis $x^2 \rightarrow 9$. Missuguse δ puhul järeldub võrratusest $|x-3| < \delta$ võrratus $|x^2-9| < \varepsilon$?

601. Olgu $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$. $x \rightarrow 2$ puhul $f(x) \rightarrow \frac{1}{4}$. Leida δ , nii et võrratusest $|x-2| < \delta$ järelduks $\left| f(x) - \frac{1}{4} \right| < \varepsilon = 0,0025$.

602. Tõestada ε ja δ arutlusega, et

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} (2x+3) = 5;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 2x) = 8.$$

Leida piirväärtused:

$$603. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{2x^2}$$

$$607. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

$$604. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$$

$$608. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$605. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - \sqrt{x}}$$

$$609. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}}{x}$$

$$606. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}$$

$$610. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} [\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}]$$

Leida järgmised piirväärtused, kasutades võrdust $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

$$611. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

$$615. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$612. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$$

$$616. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^2 \sin x}$$

$$613. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$617. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$614. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$618. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$619. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2}.$$

$$620. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}.$$

Leida piirväärtused:

$$621. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x + 3}.$$

$$626. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2x^3 - x^2 + 1}}{x + 3}.$$

$$622. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{x^2 + 1}.$$

$$627. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + x}}{\sqrt[5]{x^4 - x}}.$$

$$623. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x^3}{2x^3 + 3}.$$

$$628. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{x}}.$$

$$624. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - x + 1}.$$

$$629. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + \sin 2x}{4x^3 - 1}.$$

$$625. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}.$$

$$630. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{1 - x}.$$

Leida järgmised piirväärtused, kasutades võrdust $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$:

$$631. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x.$$

$$635. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

$$632. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x + 2}\right)^{3x}.$$

$$636. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}.$$

$$633. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}\right)^{x^2}.$$

$$637. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

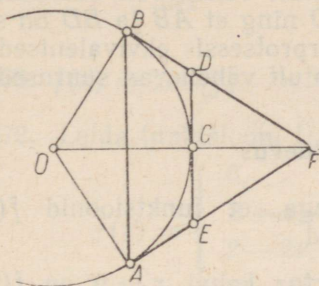
$$634. \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x + 1) - \ln x].$$

$$638. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1 + 3x}.$$

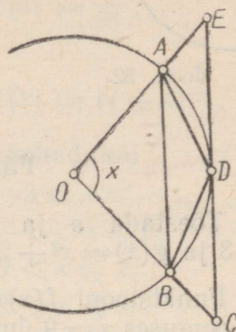
639. Sirglõigule, mille pikkus on l , on joonestatud n ringjoont, nii et ringjoonte keskpunktid asetsevad sirglõigul ja ringjooned puudutavad üksteist. Leida nende ringjoonte pikkuste summa ning pindalade summa piirväärtused ringjoonte arvu n tõkestamatul suurenemisel.

640. Ruutu, mille külje pikkus on a , on joonestatud ring, sellesse ringi ruut, ruutu jälle ring jne. Nii on joonestatud n ruutu ja n ringi. Avaldada nende n ruudu ja ringi pindalade summad ning leida kõigi ruutude pindalade summa piirväärtus ja kõigi ringide pindalade summa piirväärtus $n \rightarrow \infty$ puhul.

641. Ringjoonele on tõmmatud puutujad punktides A , B ja kaare \widehat{AB} keskpunktis C ning punktid A ja B on ühendatud kõõluga. Leida kolmnurkade ABF ja EDF (joon. 50) pindalade suhte piirväärtus punkti A lähenemisel mööda ringjoont punktile B .



Joon. 50



Joon. 51

642. Leida joonisel 51 esitatud ringjoone kaarele kujundatud trapetsi $ABCE$ ja kolmnurga ABD pindalade suhte piirväärtus kesknurga x lähenemisel nullile.

Lõpmatult vähenevate suuruste suurusjärk ja ekvivalentsus

643. Kumb $n \rightarrow \infty$ puhul lõpmatult vähenevatest suurustest $u_n = \frac{1}{n+1}$ ja $v_n = \frac{1}{n!}$ on kõrgemat järku lõpmatult vähenev?

644. Järjestada $t \rightarrow 0$ puhul lõpmatult vähenevad suurused $x = 1 - \cos t$, $y = t^3$, $z = \sqrt{t}$ ja $u = \sin t$ nii, et iga järgmine oleks eelmise suhtes kõrgemat järku lõpmatult vähenev.

645. Veenduda, et $x \rightarrow 0$ puhul on

1) $\sqrt{1+x} - 1$ ja $\frac{x}{2}$,

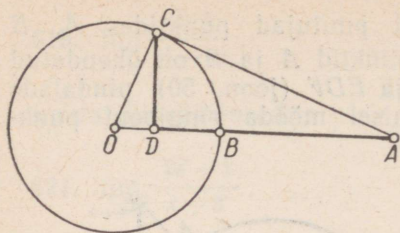
2) $\tan x - \sin x$ ja $\frac{x^3}{2}$

ekvivalentsed lõpmatult vähenevad suurused.

646. Määrata konstandid a ja n nii, et ax^n oleks $x \rightarrow 0$ puhul ekvivalentne lõpmatult väheneva suurusega

1) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$; 2) $x \sin 3x$; 3) $\sqrt{1-x^3} - 1$.

647. Ringjoone keskpunkti O väljaspool ringjoont asetseva punktiga A ühendav sirglõik lõikub ringjoonega punktis B . Punk-



Joon. 52

tist A ringjoonele tõmmatud puutuja puudutab ringjoont punktis C . C projektsioon sirgel OA on D (joon. 52). Näidata, et piirprotsessis $A \rightarrow B$ on AB ja BD kõrgemat järku lõpmatult vähenevad suurused kui CD ning et AB ja BD on selles piirprotsessis ekvivalentset lõpmatult vähenevad suurused.

Funktsiooni pidevus

648. Tõestada ε ja δ arutlusega, et funktsioonid $f(x) = 5x - 3$ ja $g(x) = x^2 + 2$ on pidevad.

649. Funktsiooni $f(x) = \sqrt{x}$ väärtus kohal $x = 9$ on $f(9) = 3$. Missuguses $x = 9$ ümbruses on $|f(x) - f(9)| < \varepsilon$?

Leida antud funktsiooni pidevuspriirkond:

$$650. y = \frac{2x - 1}{x^3 - 9x}$$

$$653. y = \frac{\ln(16 - x^2)}{1 - \sin 2x}$$

$$651. y = \frac{\sqrt{x-1}}{2x^2 - 7x + 3}$$

$$654. y = \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$652. y = \frac{\arcsin x}{2 + \ln x}$$

$$655. y = \ln \left(1 + \cos \frac{1}{x} \right)$$

Leida ühepoolsed piirväärtused:

$$656. \lim_{x \rightarrow 1-0} \arctan \frac{1}{1-x}$$

$$660. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

$$657. \lim_{x \rightarrow 1+0} \arctan \frac{1}{1-x}$$

$$661. \lim_{x \rightarrow -0} e^{x^2 + \frac{1}{x}}$$

$$658. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + 2 \frac{1}{x}}$$

$$662. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{3x}{1 + 2 \tan x}$$

$$659. \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + 2 \frac{1}{x}}$$

$$663. \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{\arctan \frac{1}{\ln x}}$$

Leida antud funktsiooni katkevuskohad, määrata iga katkevuskoha liik ja skitseerida funktsiooni graafik katkevuskoha ümbruses:

$$664. f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

$$665. f(x) = \arctan \frac{1}{x}$$

$$666. f(x) = \frac{1 - 2^{\frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$$

$$669. f(x) = x - |x|$$

$$667. f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

$$670. f(x) = \frac{x}{|x|}$$

$$668. f(x) = \cos \frac{1}{x^2}$$

$$671. f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

672. Leida funktsiooni $f(x)$ katkevuskohad, kui

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } -3 \leq x \leq -1, \\ 2 + x - x^2, & \text{kui } -1 < x \leq 0, \\ 2 - 2x, & \text{kui } 0 < x \leq 2, \\ x^2 - 5, & \text{kui } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

673. Määrata funktsiooni $f(x)$ definitsioonis

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 5, & \text{kui } 0 \leq x \leq 2, \\ ax + b, & \text{kui } 2 < x \leq 3, \\ 10, & \text{kui } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

konstandid a ja b nii, et $f(x)$ oleks vahemikus $0 \leq x \leq 4$ pidev.

Funktsioon $f(x)$ ei ole määratud argumendi väärtusel $x=0$. Määrata $f(0)$ nii, et $f(x)$ oleks kohal $x=0$ pidev, kui:

$$674. f(x) = \frac{2x}{\sin x}$$

$$676. f(x) = \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{4 - \sqrt{x^2 + 16}}$$

$$675. f(x) = (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$677. f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

678. Olgu $f(x) = \frac{1}{x}$. Kuidas tuleb valida δ , et mingi x puhul vahemikust $0 < x < 1$ järelduks võrratusest $0 < x' - x < \delta$ võrratus $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$? Võttes $\varepsilon = 0,1$ ja $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,01$, $x_3 = 0,0001$, leida vastavad δ väärtused δ_1 , δ_2 ja δ_3 . Kas $f(x) = \frac{1}{x}$ on vahemikus $0 < x < 1$ ühtlaselt pidev?

679. Veenduda pidevate funktsioonide omaduste alusel, et võrrandil $3 \cdot 2^x + x + 1 = 0$ on vahemikus $-2 \leq x \leq -1$ vähemalt üks reaallahend.

680. Kas funktsioon $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2} + \arcsin x$ omandab väärtuse $\sqrt{\pi}$?

§ 10. FUNKTSIOONI TULETIS

Funktsiooni $y=f(x)$ juurdekasvuks, mis vastab kohal x argumendi juurdekasvule Δx , nimetatakse vahet

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

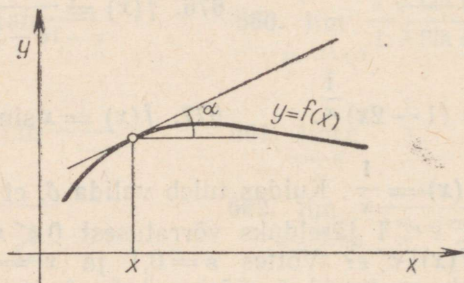
Funktsiooni $y=f(x)$ tuletiseks nimetatakse selle funktsiooni juurdekasvu ja argumendi juurdekasvu suhte piirväärtust argumendi juurdekasvu lähenemisel nullile. Tuletist tähistatakse

kas y' , $f'(x)$ või $\frac{dy}{dx}$:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Funktsiooni nimetatakse kohal x diferentseeruvaks, kui tal on sel kohal tuletis olemas [s. t. piirväärtus (1) eksisteerib]. Iga diferentseeruv funktsioon on pidev.

Geomeetriselt on $f'(x)$ funktsiooni $y=f(x)$ graafiku puutuja tõus punktis, mille abstsiss on x : $f'(x) = \tan \alpha$ (joon. 53).



Joon. 53

Kui c on konstant ning $u=u(x)$ ja $v=v(x)$ diferentseeruvad funktsioonid, siis kehtivad järgmised diferentseerimiseeskirjad:

$$1^\circ c' = 0;$$

$$2^\circ (cu)' = cu';$$

$$3^\circ (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$4^\circ (uv)' = u'v + uv';$$

$$5^\circ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

6° kui $y = f(u)$ ja $u = g(x)$, siis avaldub liitfunktsiooni $y = f[g(x)]$ tuletis kujul

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Elementaarfunktsioonide diferentseerimise põhivalemid:

1) $(x^n)' = nx^{n-1}$;

10) $(a^x)' = a^x \ln a$;

2) $(\sin x)' = \cos x$;

$(e^x)' = e^x$;

3) $(\cos x)' = -\sin x$;

11) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;

4) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

5) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

12) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

13) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

6) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

7) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

15) $(\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;

8) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

16) $(\operatorname{Arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

9) $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

17) $(\operatorname{Arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$.

Kui y on määratud argumendi x pideva ühese funktsioonina parameetrilisel kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

kus $\varphi(t)$ ja $\psi(t)$ on diferentseeruvad funktsioonid ja $\varphi'(t) \neq 0$, siis avaldub selle funktsiooni tuletis kujul

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad (2)$$

kus $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ja $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$.

Kui y on määratud argumendi x ilmutamata diferentseeruva funktsioonina muutujaid x ja y siduva võrrandiga $F(x, y) = 0$, siis tuleb selle funktsiooni tuletise y' leidmiseks antud võrrandit diferentseerida, lugedes y argumendi x funktsiooniks (nii et y tuletis on y'), ja saadud võrrandist avaldada y' (x ja y kaudu).

Funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaaliks dy nimetatakse selle funktsiooni juurdekasvuga ekvivalentset lõpmatult vähenevat suurust, mis on võrdeline argumendi juurdekasvuga. Funkt-

sioonil on diferentsiaal olemas ja ainult siis, kui funktsioon on diferentseeruv. Funktsiooni $y=f(x)$ diferentsiaal avaldub kujul

$$dy = f'(x)dx, \quad (3)$$

kus $dx = \Delta x$. Diferentsiaali avaldis (3) jääb kehtima ka siis, kui x ei ole sõltumatu muutuja, vaid funktsioon mingist uuest argumendist. Väikeste $|\Delta x|$ puhul $\Delta y \approx dy$ ehk

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \quad (4)$$

Funktsiooni $y=f(x)$ teist järku tuletiseks nimetatakse tema tuletise tuletist ja seda tähistatakse kas y'' , $f''(x)$ või $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

Üldiselt defineeritakse funktsiooni n -järku tuletis kui tuletis $(n-1)$ -järku tuletisest:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \right).$$

Näiteid

I. Leida tuletise definitsiooni järgi funktsiooni $y = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ tuletis.

Lahendus. Tuletise definitsiooni (1) järgi saame antud funktsiooni tuletiseks

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x+\Delta x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x+\Delta x}}{\Delta x \sqrt{(1+x+\Delta x)(1+x)}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x+\Delta x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x+\Delta x})}{\Delta x \sqrt{(1+x+\Delta x)(1+x)}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x+\Delta x})} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1+x-1-x-\Delta x}{\Delta x \sqrt{(1+x+\Delta x)(1+x)}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x+\Delta x})} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{(1+x+\Delta x)(1+x)}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x+\Delta x})} = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{(1+x)(1+x)}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x})} = -\frac{1}{2(1+x)(\sqrt{1+x})}, \end{aligned}$$

sest antud funktsiooni määramispiirkonnas $1 + x > 0$ ja seetõttu $\sqrt[3]{(1+x)^2} = |1+x| = 1+x$.

II. *Avaldada elementaarfunktsioonide tuletiste põhivalemite ja diferentseerimiseeskirjade põhjal funktsiooni*

$$y = \frac{3x^2 - 1}{3x^3} + \ln \sqrt[3]{1+x^2} + \arctan x$$

tuletis.

L a h e n d u s. Kõigepealt kirjutame antud funktsiooni avaldise ümber diferentseerimiseks sobival kujul:

$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \arctan x.$$

Et summa tuletis on liidetavate tuletiste summa (3°), siis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{1}{x} - \frac{d}{dx} \frac{1}{3x^3} + \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{d}{dx} \arctan x.$$

Edasi funktsiooni x^n diferentseerimise valemi põhjal

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = \frac{d}{dx} x^{-1} = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{3x^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} x^{-3} \right) = \frac{1}{3} \frac{d}{dx} x^{-3} = \frac{1}{3} \cdot (-3)x^{-3-1} = -\frac{1}{x^4}.$$

Kolmanda liikme avaldamisel rakendame liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirja (6°):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \ln(1+x^2) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln(1+x^2) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \frac{d}{dx} (1+x^2) = \\ &= \frac{0+2x}{2(1+x^2)} = \frac{x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Lõpuks vastava põhivalemi järgi

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Seega on nõutud tuletis

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{-x^2 - x^4 + 1 + x^2 + x^5 + x^4}{x^4(1+x^2)} = \\ &= \frac{1+x^5}{x^4(1+x^2)}. \end{aligned}$$

III. *Avaldada* $\frac{dy}{dx}$, *kui*

$$y = \ln(e^x \cos x + e^{-x} \sin x).$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{e^x \cos x + e^{-x} \sin x} \cdot \frac{d}{dx} (e^x \cos x + e^{-x} \sin x) = \\ &= \frac{\frac{d}{dx} (e^x \cos x) + \frac{d}{dx} (e^{-x} \sin x)}{e^x \cos x + e^{-x} \sin x} = \\ &= \frac{\left(\frac{d}{dx} e^x\right) \cos x + e^x \frac{d}{dx} \cos x + \left(\frac{d}{dx} e^{-x}\right) \sin x + e^{-x} \frac{d}{dx} \sin x}{e^x \cos x + e^{-x} \sin x} = \\ &= \frac{e^x \cos x - e^x \sin x - e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x}{e^x \cos x + e^{-x} \sin x} = \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})(\cos x - \sin x)}{e^x \cos x + e^{-x} \sin x}. \end{aligned}$$

IV. Leida joone $y = \frac{x}{1-x}$ puutuja, mis läbib punkti (5; -1).

Lahendus. Funktsiooni tuletise geomeetrilise tähenduse kohaselt on joone $y = f(x)$ puutuja selle joone punktis $(x_0; y_0)$ puutepunkti läbiv sirge, mille tõus on $f'(x_0)$. Seega on puutuja võrrandi koostamiseks vaja teada puutepunkti koordinaate ja $f'(x)$ väärtust puutepunkti abstsissi kohal. Käesolevas ülesandes antud punkt ei asetse antud joonel $\left(\frac{5}{1-5} \neq -1\right)$ ega ole järelikult puutepunkt. Tähistame nõutud puutuja puutepunkti abstsissi x_0 . Puutepunkti ordinaat on siis $\frac{x_0}{1-x_0}$ ning jagatise diferentseerimise eeskirja järgi

$$y' = \frac{1 \cdot (1-x) - x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Otsitava puutuja tõus on järelikult $\frac{1}{(1-x_0)^2}$ ja puutuja võrrand seega

$$y = \frac{x_0}{1-x_0} + \frac{1}{(1-x_0)^2} (x-x_0). \quad (*)$$

Seni määramata puutepunkti abstsissi x_0 leiame tingimusest, et sirge (*) läbib antud punkti (5; -1):

$$-1 = \frac{x_0}{1-x_0} + \frac{1}{(1-x_0)^2} (5-x_0).$$

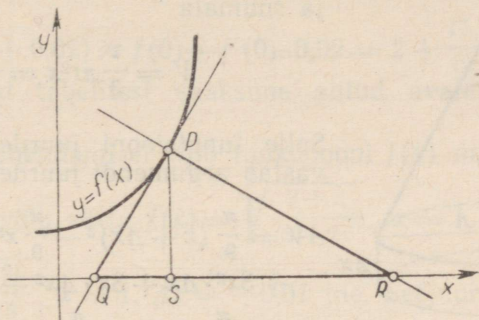
Siit saame $x_0 = 3$. Nõutud puutuja on järelikult

$$y = \frac{3}{1-3} + \frac{1}{(1-3)^2} (x-3)$$

ehk $x - 4y - 9 = 0$.

V. Leida joone $y = x\sqrt{x^2 - 5}$ puutuja lõigu, normaali lõigu, puutuja aluse ning normaali aluse pikkused selle joone punktis $P(3; 6)$.

Lahendus. Joone puutuja lõiguks mingis punktis P nimetatakse punkti P ja punktis P joonele tõmmatud puutuja ning x -telje lõikepunkti Q vahelist lõiku PQ (joon. 54). Analoogiliselt on joone normaali (puutepunktis puutujale tõmmatud ristsirge)



Joon. 54

lõik puutepunkti P normaali ja x -telje lõikepunktiga R ühendav lõik PR . Puutuja ja normaali alused on vastavalt puutuja ning normaali lõikude projektsioonid x -teljel QS ja RS .

Antud joone puutuja tõus on punktis abstsissiga x

$$y' = 1 \cdot \sqrt{x^2 - 5} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 5}} \cdot 2x = \frac{2x^2 - 5}{\sqrt{x^2 - 5}}$$

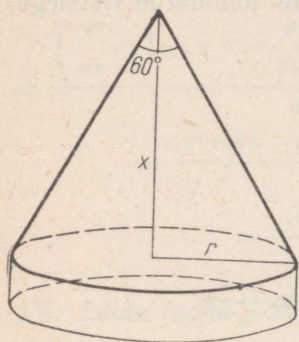
ja järelikult punktis P $\frac{2 \cdot 3^2 - 5}{\sqrt{3^2 - 5}} = \frac{13}{2}$. Puutuja võrrand on seega $13x - 2y - 27 = 0$. Puutuja ja x -telje lõikepunktiks saame $Q\left(\frac{27}{13}; 0\right)$, nii et puutuja lõigu pikkus on

$$\begin{aligned} |PQ| &= \sqrt{\left(3 - \frac{27}{13}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2 + 6^2} = 6 \sqrt{\left(\frac{2}{13}\right)^2 + 1} = \\ &= \frac{6}{13} \sqrt{173}. \end{aligned}$$

Normaali tõus on $-\frac{2}{13}$, võrrand järelikult $2x + 13y - 84 = 0$ ning lõikepunkt x -teljega $R(42; 0)$. Seega on normaali lõigu pikkus $|PR| = \sqrt{(42 - 3)^2 + 6^2} = 3\sqrt{173}$. Et punkti S koordinaadid on $S(3; 0)$, siis on puutuja aluse pikkus $|QS| = \left|3 - \frac{27}{13}\right| = \frac{12}{13}$ ja normaali aluse pikkus $|RS| = |3 - 42| = 39$.

VI. Pöördkoonuse tipunurk on 60° . Avaldada diferentsiaali definitsiooni alusel selle koonuse ruumala diferentsiaal, vaadeldes koonuse ruumala kõrguse funktsioonina.

Lahendus. Kui koonuse kõrgus on x ja tipunurk 60° (joon. 55), siis on koonuse põhja raadius $r = x \tan 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}}$



Joon. 55

ja ruumala

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 x = \frac{\pi}{9} x^3.$$

Selle funktsiooni juurdekasv ΔV , mis vastab argumendi juurdekasvule Δx , on

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{\pi}{9} (x + \Delta x)^3 - \frac{\pi}{9} x^3 = \frac{\pi}{9} (x^3 + \\ &+ 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3) = \\ &= \frac{\pi}{3} x^2 \cdot \Delta x + \frac{\pi}{3} x \cdot \Delta x^2 + \frac{\pi}{9} \Delta x^3, \end{aligned}$$

kus $\Delta x^2 = (\Delta x)^2$ ja $\Delta x^3 = (\Delta x)^3$. Saadud avaldises on kaks viimast liidetavat ja seega ka nende summa Δx suhtes kõrgemat järku lõpmatult vähenevad suurused. Järelikult on ΔV ja ta avaldise esimene liidetav $\Delta x \rightarrow 0$ puhul ekvivalentsed lõpmatult vähenevad suurused. Et lisaks sellele esimene liidetav on võrdeline argumendi juurdekasvuga Δx , siis on funktsiooni diferentsiaali definitsiooni alusel liige $\frac{\pi}{3} x^2 \cdot \Delta x$ ΔV avaldises funktsiooni

$$V = \frac{\pi}{9} x^3 \text{ diferentsiaal: } dV = \frac{\pi}{3} x^2 \cdot \Delta x \text{ ehk } (\Delta x = dx) \quad dV = \frac{\pi}{3} x^2 dx.$$

Et meil oli $r = \frac{x}{\sqrt{3}}$, siis on saadud diferentsiaali avaldis esitatav

ka kujul $dV = \pi r^2 \cdot \Delta x$, millest nähtub, et vaadeldava koonuse ruumala kui kõrguse funktsiooni diferentsiaal on geomeetriliselt niisuguse silindri ruumala, mille põhjaks on koonuse põhi ja kõrguseks koonuse kõrguse juurdekasv (joon. 55).

VII. Arvutada funktsiooni diferentsiaali abil ligikaudselt

$$\sqrt[3]{\frac{8,02}{0,96}}.$$

Lahendus. Antud avaldist võib vaadelda kui funktsiooni $f(x) = \sqrt[3]{\frac{8+x}{1-2x}}$ väärtust kohal $x + \Delta x$, kus $x = 0$ ja $\Delta x = 0,02$. Funktsiooni juurdekasvu asendamisel diferentsiaaliga saadud ligi-

kaudse valemi (4) rakendamiseks arvutame $f(0) = \sqrt[3]{\frac{8+0}{1-0}} = 2$,

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{8+x}{1-2x} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{(1-2x) - (8+x)(-2)}{(1-2x)^2} = \frac{17}{3 \cdot \sqrt[3]{(8+x)^2(1-2x)^4}}$$

ja $f'(0) = \frac{17}{12}$. Järelikult

$$\sqrt[3]{\frac{8,02}{0,96}} = f(0 + 0,02) \approx f(0) + f'(0) \cdot 0,02 = 2 + \frac{17}{12} \cdot 0,02 = 2,028.$$

Neljakohalistest tabelitest saaksime antud avaldise väärtuseks 2,024.

Ülesande lahendamisel võib funktsiooni $f(x)$ mitmeti moodustada. Näiteks võib võtta $f(x) = \sqrt[3]{\frac{7+x}{3-2x}}$, $x = 1$, $\Delta x = 0,02$ või

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{10-2x}{4x-3}}, \quad x = 1, \quad \Delta x = -0,01 \text{ jne.}$$

Seejuures tuleb ainult tähele panna, et kui antud avaldis on moodustatud funktsiooni väärtus kohal $x + \Delta x$, siis selle funktsiooni ja ta tuletise väärtused peavad kohal x olema kergesti leitavad ning $|\Delta x|$ peab olema võimalikult väike.

VIII. Avaldada funktsiooni

$$y = \sqrt{x+1} \sqrt[3]{\frac{x}{x^2-3}} 2^x \quad (*)$$

tuletis.

Lahendus. Antud ilmutatud funktsiooni tuletis on avaldatav elementaarfunktsioonide diferentseerimise põhivalemite ning diferentseerimiseeskirjade alusel, kuid see nõuab palju arvutustööd. Lihtsam on kasutada nn. logaritmilise diferentseerimise võtet. Võtame antud funktsiooni määrava võrrandi (*) kummastki poolst loomuliku logaritmi:

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{3} \ln x - \frac{1}{3} \ln(x^2-3) + x \ln 2.$$

Saadud võrrand määrab y argumenti x ilmutamata funktsioonina. y' leidmiseks diferentseerime seda võrrandit, lugedes y argumenti x funktsiooniks. Võrrandi vasakul pool on $\ln y$ siis argumenti x liitfunktsioon, nii et diferentseerimisel saame:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{3x} - \frac{2x}{3(x^2-3)} + \ln 2.$$

Järelikult

$$y' = y \left[\frac{x^3 - 2x^2 - 15x - 6}{6x(x+1)(x^2-3)} + \ln 2 \right],$$

millest pärast y asendamist (*) põhjal saame nõutud tuletiseks

$$y' = \sqrt[3]{x+1} \sqrt{\frac{x}{x^3-3}} 2^x \left[\frac{x^3 - 2x^2 - 15x - 6}{6x(x+1)(x^2-3)} + \ln 2 \right].$$

IX. Avaldada

$$\frac{d}{dx} (\sin x)^{\tan x}$$

Lahendus. Et meil diferentseerimise põhivalemite hulgas ei ole astme diferentseerimise valemit juhuks, kus astme alus ja astendaja on korruga muutuvad, siis ei ole nõutud tuletis vahe-
tult avaldatav ilmutatud elementaarfunktsioonide diferentseerimise
teel. Siin on jälle rakendatav logaritmilise diferentseerimise võte.
Selleks võtame

$$y = (\sin x)^{\tan x}$$

ja moodustame

$$\ln y = \tan x \cdot \ln \sin x,$$

millest

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x + \tan x \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x.$$

Järelikult

$$y' = y \left(\frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} + 1 \right)$$

ja nõutud tuletis on

$$\frac{d}{dx} (\sin x)^{\tan x} = \left(1 + \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} \right) (\sin x)^{\tan x}.$$

Antud funktsiooni on võimalik diferentseerida ka ilmutatud funktsioonina, kuid selleks tuleb teda enne teisendada nii, et astme alus oleks konstantne:

$$(\sin x)^{\tan x} = (e^{\ln \sin x})^{\tan x} = e^{\tan x \cdot \ln \sin x}.$$

X. Leida nurk, mille all lõikuvad jooned

$$x^2 + 3x + y + 2 = 0 \quad (*)$$

ja

$$x = \frac{t+2}{t-1}, \quad y = \frac{5t+2}{(t-1)^2}. \quad (**)$$

Lahendus. Kahe kõverjoone vaheliseks nurgaks nimetatakse nende joonte puutujate vahelist nurka joonte lõikepunktis. Järelikult on ülesande lahendamiseks vaja leida antud kahe joone lõikepunkt ning kummagi joone puutuja tõus selles punktis. Lõikepunktile vastava joone (**) parameetri t leidmiseks asetame võrrandeist (**) x ja y võrrandisse (*):

$$\frac{(t+2)^2}{(t-1)^2} + 3 \frac{t+2}{t-1} + \frac{5t+2}{(t-1)^2} + 2 = 0,$$

millest $3t^2 + 4t + 1 = 0$ ja $t_1 = -1$, $t_2 = -\frac{1}{3}$. Seega lõikuvad antud jooned kahes punktis. Lõikepunktide abstsissid saame joone (**) abstsissi avaldisest:

$$x_1 = \frac{-1+2}{-1-1} = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-\frac{1}{3}+2}{\frac{1}{-3}-1} = -\frac{5}{4}.$$

Esimese joone võrrandist saame $y = -x^2 - 3x - 2$ ja $y' = -2x - 3$, nii et joone (*) puutujate tõusud antud kahe joone lõikepunktides on

$$k_1 = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = -2 \quad \text{ja} \quad k_2 = -2 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) - 3 = -\frac{1}{2}.$$

Joone (**) jooksva punkti ordinaadi kui abstsissi funktsiooni tuletise $\frac{dy}{dx}$ avaldamiseks leiame

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{t-1-(t+2)}{(t-1)^2} = \frac{-3}{(t-1)^2},$$
$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{5(t-1)^2 - (5t+2)2(t-1)}{(t-1)^4} = -\frac{5t+9}{(t-1)^3}.$$

Valemi (2) järgi saame nüüd

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{5t+9}{3(t-1)}.$$

Joone (**) puutujate tõusud joonte lõikepunktides on järelikult

$$k_1' = \frac{5 \cdot (-1) + 9}{3 \cdot (-1 - 1)} = -\frac{2}{3} \quad \text{ja} \quad k_2' = \frac{5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 9}{3 \cdot \left(-\frac{1}{3} - 1\right)} = -\frac{11}{6}.$$

Esimeses lõikepunktis on antud joonte puutujate vahelise teravnurga α tangens seega

$$\tan \alpha_1 = \left| \frac{k_1' - k_1}{1 + k_1 k_1'} \right| = \left| \frac{-\frac{2}{3} + 2}{1 + 2 \cdot \frac{2}{3}} \right| = \frac{4}{7}$$

ja teises lõikepunktis

$$\tan \alpha_2 = \left| \frac{k_2' - k_2}{1 + k_2 k_2'} \right| = \left| \frac{-\frac{11}{6} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{6}} \right| = \frac{16}{23}$$

Nõutud nurki on järelikult kaks: $\alpha_1 = \arctan \frac{4}{7}$ ja $\alpha_2 = \arctan \frac{16}{23}$ ehk neljakohalistest tabelitest: $\alpha_1 = 29^\circ 44'$ ja $\alpha_2 = 34^\circ 50'$.

XI. Leida funktsiooni $y = x^2 e^x$ sajandat järku tuletis.

Lahendus. Leiame esmalt antud funktsiooni esimest, teist jne. järku tuletised, kuni oskame nende avaldistest järeldada antud funktsiooni mistahes järku tuletise avaldise:

$$\begin{aligned} y' &= 2xe^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x)e^x, \\ y'' &= (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x, \\ y''' &= (2x + 4)e^x + (x^2 + 4x + 2)e^x = (x^2 + 6x + 6)e^x, \\ y^{IV} &= (2x + 6)e^x + (x^2 + 6x + 6)e^x = (x^2 + 8x + 12)e^x, \\ y^V &= (2x + 8)e^x + (x^2 + 8x + 12)e^x = (x^2 + 10x + 20)e^x. \end{aligned}$$

Siit on tuletise järke ja tuletise avaldise kordajaid võrreldes juba kerge järeldada, et arvatavasti

$$y^{(n)} = [x^2 + 2nx + n(n-1)]e^x. \quad (*)$$

Selle tõestamiseks rakendame matemaatilist induktsiooni. Oletame, et valem (*) kehtib n asendamisel $(n-1)$ -ga, s. t. et

$$y^{(n-1)} = [x^2 + 2(n-1)x + (n-1)(n-2)]e^x.$$

Siis

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{d}{dx} y^{(n-1)} = [2x + 2(n-1)]e^x + [x^2 + 2(n-1)x + \\ &+ (n-1)(n-2)]e^x = [x^2 + (2n-2+2)x + (n-1)(2+n- \\ &-2)]e^x = [x^2 + 2nx + n(n-1)]e^x. \end{aligned}$$

Seega järeldub valemi (*) kehtivusest $n-1$ puhul ta kehtivus n puhul. Et valem (*) lisaks sellele on kehtiv $n=1$ puhul ($y^{(1)} = [x^2 + 2 \cdot 1x + 1 \cdot (1-1)]e^x = (x^2 + 2x)e^x = y'$), siis on

ta kehtiv iga naturaalarvu n puhul. Seega saame käesolevas ülesandes nõutud sajandat järku tuletiseks

$$y^{(100)} = [x^2 + 2 \cdot 100x + 100(100 - 1)]e^x = (x^2 + 200x + 9900)e^x.$$

XII. Arvutada y'' punktis $(2; -1)$, kui y on määratud x funktsioonina võrrandiga

$$y^3 + 2xy^2 - 3x^2 + 9 = 0.$$

Lahendus. Diferentseerime antud võrrandit, lugedes y argumenti x funktsiooniks:

$$3y^2y' + 2y^2 + 4xyy' - 6x = 0 \quad (*)$$

ja asendame saadud võrrandis $x = 2, y = -1$. Saame

$$3y' + 2 - 8y' - 12 = 0,$$

millest $y' = -2$. Edasi diferentseerime võrrandit (*), lugedes seal y ja y' argumenti x funktsioonideks:

$$6yy'^2 + 3y^2y'' + 4yy' + 4yy' + 4xy'^2 + 4xyy'' - 6 = 0$$

ja asendame $x = 2, y = -1, y' = -2$:

$$-24 + 3y'' + 8 + 8 + 32 - 8y'' - 6 = 0,$$

millest otsitav $y'' = \frac{18}{5}$.

XIII. Avaldada $\frac{d^2y}{dx^2}$, kui

$$\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t. \end{cases}$$

Lahendus. Valemi (2) järgi on

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t + t \cos t}{\cos t - t \sin t}.$$

Diferentseerides selle valemi mõlemat poolt parameetri t järgi (vasakut poolt kui liitfunktsiooni, paremat poolt kui murdu), saame

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{(\cos t + \cos t - t \sin t)(\cos t - t \sin t) - (\sin t + t \cos t)(-\sin t - \sin t - t \cos t)}{(\cos t - t \sin t)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot (\cos t - t \sin t) = \frac{2 \cos^2 t - 4t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + 2 \sin^2 t + 4t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t}{(\cos t - t \sin t)^2},$$

millest

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 + t^2}{(\cos t - t \sin t)^2}.$$

Tuletise mõiste

681. Arvutada funktsiooni $y = x^2 - x$ juurdekasv, mis vastab kohal $x = 3$ argumendi juurdekasvule

1) $\Delta x = 1$; 2) $\Delta x = -1$; 3) $\Delta x = 0,2$; 4) $\Delta x = -0,1$.

682. Arvutada funktsiooni $y = x^3 - 2x + 1$ juurdekasvu ja argumendi juurdekasvu suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kohal $x = 2$, kui

1) $\Delta x = 1$; 2) $\Delta x = 0,5$; 3) $\Delta x = 0,1$; 4) $\Delta x = 0,01$,

ning leida selle suhte piirväärtus $\Delta x \rightarrow 0$ puhul.

Leida vahetult tuletise definitsiooni põhjal $f'(x)$, kui:

683. $f(x) = x^2 - 3x$.

685. $f(x) = \frac{1}{x}$.

684. $f(x) = \sqrt{x}$.

686. $f(x) = \cos 2x$.

687. Punkti asukoht x -teljel on hetkel t määratud võrdusega $x = 3t^2 - 2t$. Arvutada selle punkti keskmine kiirus hetkest t hetkeni $t + \Delta t$, kui $t = 10$ ja

1) $\Delta t = 5$; 2) $\Delta t = 1$; 3) $\Delta t = 0,1$; 4) $\Delta t = 0,01$.

Missugune on punkti kiirus hetkel $t = 10$?

688. Sirgjooneliselt liikuva punkti kiirus v on aja funktsioon: $v = 2t - t^2$. Leida selle punkti kiirendus w aja funktsioonina.

689. Elektri juhtme ristlõiget hetkeni t läbinud elektrihulk Q avaldub kujul $Q = 1 + 8\sqrt{t}$. Arvutada voolutugevus hetkel $t = 4$.

Ilmutatud funktsioonide diferentseerimine

Leida elementaarfunktsioonide tuletiste valemite ja diferentseerimiseeskirjade põhjal järgmiste funktsioonide tuletised:

$$690. y = x^3 + \sqrt[3]{x}.$$

$$713. y = \frac{1}{\log_3 x}.$$

$$691. y = x + x^5 + \sqrt[3]{x^2 + 1}.$$

$$714. y = \arcsin \sqrt{\ln x}.$$

$$692. y = \frac{x-1}{x^2+1}.$$

$$715. y = \frac{1}{\sqrt[3]{x \cdot \ln x}}.$$

$$693. y = (2x+3)^5.$$

$$716. y = \log_5(x - \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$694. y = \sqrt{x^3 + x - 1}.$$

$$717. y = 2^{3x} - 2^3.$$

$$695. y = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}}.$$

$$718. y = \frac{x}{4^x}.$$

$$696. y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

$$719. y = e^x \sin x.$$

$$697. y = x \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{2}.$$

$$720. y = 2^{\cos x}.$$

$$698. y = \sin x - \cos x.$$

$$721. y = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}.$$

$$699. y = x \tan x.$$

$$722. y = (10^x + 10^{-x})^{10}.$$

$$700. y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}.$$

$$723. y = \frac{e^x}{1 + x^2}.$$

$$701. y = \sqrt{\cos 2x}.$$

$$724. y = 2^{3^{4^x}}.$$

$$702. y = 1 + \sin^2 x.$$

$$725. y = \operatorname{ch}^3 x.$$

$$703. y = \cot x + \tan x.$$

$$726. y = \ln \operatorname{ch} x.$$

$$704. y = \frac{\tan x}{1 + \cos x}.$$

$$727. y = \arctan \operatorname{th} x.$$

$$705. y = \sin \sqrt{1 - x^2}.$$

$$728. y = \sqrt{x} \cdot \sin x \cdot \operatorname{sh} x.$$

$$706. y = x \arcsin x.$$

$$729. y = \frac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{ch} x}.$$

$$707. y = \frac{\arccos x}{x}.$$

$$730. y = \arccos \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

$$708. y = \arctan \sqrt{x}.$$

$$731. y = \operatorname{Arsh} \sqrt{x}.$$

$$709. y = \frac{x}{1+x^2} - \arctan x.$$

$$732. y = \operatorname{Arth} \frac{1}{x}.$$

$$710. y = x^3 \log_2 x.$$

$$733. y = \operatorname{Arsh} \tan x.$$

$$711. y = \sin x \cdot \ln x.$$

$$734. y = \operatorname{Arch} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$712. y = \ln \sin x.$$

Leida antud funktsiooni tuletis ja lihtsustada tulemus:

$$735. y = \sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x}).$$

$$736. y = 1 - \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}).$$

$$737. y = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2}.$$

$$738. y = \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1}.$$

$$739. y = \frac{3}{8} \arctan x - \frac{x}{4(x^2 - 1)} - \frac{3}{16} \ln \frac{x - 1}{x + 1}.$$

$$740. y = \sqrt{1 + x^2} \cdot \arctan x - \operatorname{Arsh} x.$$

$$741. y = \arccos \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + 2.$$

$$742. y = \operatorname{Arch}(x + 1) - \frac{4}{x + \sqrt{2x + x^2}}.$$

$$743. y = \operatorname{Arsh} x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arth} \frac{x}{\sqrt{2 + 2x^2}}.$$

$$744. y = \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2 + \tan^2 x}} + \ln(\tan x + \sqrt{2 + \tan^2 x}).$$

Arvutada antud funktsiooni tuletise väärtus nõutud kohal:

$$745. f(x) = x\sqrt{2 - x^2}, \text{ leida } f'(1).$$

$$746. f(x) = 2^x \cos x, \text{ leida } f'(0).$$

$$747. f(x) = \arccos \frac{2 - x}{x\sqrt{2}}, \text{ leida } f'(1).$$

$$748. f(x) = \arcsin \frac{1}{x}, \text{ leida } f'(-3).$$

$$749. f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}, \text{ leida } f'\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

$$750. f(x) = \frac{\sin(2 \ln x) - \cos(2 \ln x)}{x^2}, \text{ leida } f'(1).$$

Tuletise geomeetriline tähendus

$$751. \text{ Leida joone } y = x^2 + x^3 \ln x \text{ puutuja punktis } (1; 1).$$

$$752. \text{ Leida joone } y = \sqrt{1 - x} + \arctan x^3 \text{ puutuja selle joone ja } y\text{-telje lõikepunktis.}$$

$$753. \text{ Leida ellipsi } 7x^2 + 3y^2 = 55 \text{ puutujad selle ellipsi ja sirge } x + y - 5 = 0 \text{ lõikepunktides.}$$

$$754. \text{ Leida punkt, milles parabooli } y = -x^2 + 2x - 3 \text{ puutuja}$$

1) on paralleelne x -teljega; 2) moodustab x -telje positiivse suunaga nurga 45° .

755. Koostada joone $y = (x + 1) \cdot \sqrt[3]{5 - x}$ normaali võrrand punktis $(-3; -4)$.

756. Leida parabooli $y^2 = 7x$ puutuja, mis on paralleelne sirgega $21x - 12y - 5 = 0$.

757. Leida hüperbooli $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ puutujad, mis on risti sirgega $4x - 3y + 1 = 0$.

758. Leida ellipsi $3x^2 + 4y^2 - 28 = 0$ puutujad, mis läbivad punkti $(2; 5)$.

Leida nurk, mille all lõikuvad antud jooned:

759. $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}$.

760. $x^2 + y^2 = 8$, $y^2 = 2x$.

761. $x^2 - y^2 = 12$, $xy = 8$.

762. $x^2 + y^2 = 8x$, $y^2 = \frac{x^3}{2 - x}$.

763. Missuguse a puhul joon $y = a^x$

1) moodustab y -teljega lõikudes nurga 45° ;

2) puudutab sirget $y = x$?

764. Leida joone $y = ax^m$ ($m > 0$) puutuja alus punktis $(x_0; y_0)$.

765. Leida funktsiooni a^x ($a > 0$) graafiku puutuja alus.

766. Leida joone $y = \operatorname{ch} x$ normaali lõigu pikkus punktis $(x_0; y_0)$.

Funktsiooni diferentsiaal

767. Leida ringi pindala S kui raadiuse funktsiooni juurdekasv ΔS ning diferentsiaal dS (diferentsiaali definitsiooni põhjal).

768. Leida diferentsiaali definitsiooni alusel antud funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaal ning suurus a , mille võrra erinevad funktsiooni juurdekasv Δy ja diferentsiaal dy :

1) $y = x^3 - 2x$; 2) $y = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$).

769. Arvutada funktsiooni $y = 3x^4 + x$ juurdekasv ja diferentsiaal, mis vastavad kohal $x = 1$ argumendi juurdekasvule 1) $\Delta x = 1$; 2) $\Delta x = 0,1$; 3) $\Delta x = 0,01$.

Leida antud funktsiooni diferentsiaal:

770. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

773. $y = \ln(2 + x^2)$.

771. $y = \arcsin \frac{x}{3}$.

774. $y = 2\sqrt[3]{x^2}$.

772. $y = \sqrt{\cos x}$.

775. $y = \operatorname{Arth} \cos x$.

Arvutada funktsiooni diferentsjaali abil ligikaudu:

776. $\sqrt[3]{1,02}$.

778. $\arctan 0,97$.

777. $\log 11$.

779. $\sqrt{\frac{2,92^2 - 5}{2,92^2 + 7}}$.

Tuletada valem antud avaldise väärtuse ligikaudseks arvutamiseks väikeste $|x|$ puhul:

780. $\sqrt[n]{1+x}$. 781. $\ln(1+x)$. 782. $\frac{1}{a+x}$. 783. $e^{\sin x}$.

Funktsiooni diferentseeruvus

784. Leida argumendi väärtused, millel antud funktsioon on pidev, kuid ei ole diferentseeruv:

1) $y = \sqrt[3]{x}$; 2) $y = \sqrt{x^2 - 3x - 10}$; 3) $y = \sqrt{1 - \cos x}$.

785. Leida antud funktsiooni ühepoolsed tuletised neil kohtadel, kus funktsioon ei ole diferentseeruv:

1) $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$; 2) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

786. Leida punktid, kus antud funktsiooni graafiku puutuja on paralleelne y -teljega:

1) $y = \sqrt[3]{3 + 2x - x^2}$; 2) $y = 3x - \sqrt[5]{(x-1)^4}$.

787. Määrata konstandid b ja c nii, et funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c, & \text{kui } 1 \leq x \leq 2, \\ 3x - 4, & \text{kui } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

oleks vahemikus $1 \leq x \leq 3$ diferentseeruv.

788. Missuguse n puhul on funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \end{cases}$$

1) pidev kohal $x=0$; 2) diferentseeruv kohal $x=0$; 3) pidevalt diferentseeruv kohal $x=0$?

Ilmutamatult ja parameetrilisel kujul antud funktsioonide diferentseerimine

Avaldada y' , kui y on määratud x ilmutamata funktsioonina võrrandiga:

789. $xy + y^2 - x^3 - 1 = 0.$

793. $y = 1 + xe^y.$

790. $x^3 + y^3 + 3xy = 0.$

794. $y = x + \arctan y.$

791. $x^y = y^x.$

795. $1 - xy^2 + x \ln y = 0.$

792. $\sin(xy) = x.$

796. $x = \operatorname{ch}(x + y).$

Avaldada logaritmilise diferentseerimise võtte abil antud funktsioonide tuletised:

797. $y = \sqrt[3]{\frac{x^3 + x}{(x^2 - 1)^2}}.$

800. $y = (\ln x)^x.$

798. $y = \sin x \cdot \sqrt{\cos x} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{(1-x)^2}.$

801. $y = x^{x^x}.$

799. $y = x^{\sin x}.$

802. $y = \log_{\sqrt{x}} \cos x.$

803. Leida joone $x^3y + xy^3 + 4x^2 + 6 = 0$ puutuja punktis $(1; -2)$.

804. Leida joone $y^3 + 3y = x$ puutuja, mis on paralleelne sirgega $x - 15y + 8 = 0$.

805. Leida joonel $e^{xy} + xy^2 = 0$ punktid, kus puutuja on paralleelne x -teljega.

806. Arvutada võrrandiga $e^{(x-1)y} + x^2 - y = 0$ määratud y kui x funktsiooni ligikaudne väärtus kohal $x = 0,97$.

Avaldada $\frac{dy}{dx}$, kui:

807. $x = a \sin t,$

$y = b \cos t.$

810. $x = a \operatorname{ch}^3 t,$

$y = b \operatorname{sh}^3 t.$

808. $x = t^2 + 1,$

$y = t^3 - t.$

811. $x = 2^t - 1,$

$y = \frac{2^t}{1 + 2^t}.$

809. $x = t - \arctan t,$

$y = \ln(1 + t^2).$

812. $x = \sqrt{1 + t^2} + \operatorname{Arsh} t,$

$y = \ln(t - 1).$

813. Koostada joone $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$ puutuja ja normaali võrrandid koordinaatide alguspunktis ning punktis $(1; 2)$.

Leida nurk, mille all lõikuvad jooned:

814. $y = x^2$ ja $x = \frac{5}{3} \cos t$, $y = \frac{5}{4} \sin t.$

815. $x^2 + 3x - 3y - 4 = 0$ ja $x = \frac{t+2}{t-1}$, $y = \frac{5t-2}{(t-1)^2}.$

816. $x^2 - 4y^2 + 4 = 0$ ja $x = 2t^2 + t$, $y = 1 - t^2.$

817. Leida astroidi $x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$ puutuja lõigu pikkus, normaali lõigu pikkus, puutuja alus ja normaali alus punktis, kus $t = \frac{\pi}{3}$.

818. Veenduda, et joone

$$x = \ln \tan \frac{t}{2} + \cos t, \quad y = \sin t$$

(traktrissi) puutuja lõik on konstantse pikkusega.

Kõrgemat järku tuletised

Avaldada antud funktsiooni teist järku tuletis:

819. $y = x \sqrt{1+x^2}$.

822. $y = x^x$.

820. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

823. $y = x \operatorname{Arsh} x$.

821. $y = e^{\sqrt{x}}$.

824. $y = \sin^2 x + \tan x$.

Avaldada antud funktsiooni nõutud järku tuletis:

825. $y = (1+x^2) \arctan x$, leida y'' .

826. $y = x^3 + 2x^5 - x^6$, leida y^{IV} .

827. $y = e^x \sin x$, leida y^{IV} .

828. $y = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$, leida y^V .

829. $y = \frac{x}{2+3x}$, leida y''' .

Avaldada $f^{(n)}(x)$, kui:

830. $f(x) = \frac{1}{x^m}$.

833. $f(x) = x \ln x$.

831. $f(x) = \ln x$.

834. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

832. $f(x) = e^{2x}$.

835. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

Arvutada:

836. $f'''(0)$, kui $f(x) = x^2 e^{ax}$.

837. $f^{IV}(0)$, kui $f(x) = \arcsin x$.

838. $f''' \left(\frac{\pi}{4} \right)$, kui $f(x) = \cos^2 x$.

839. $f^{IV}(2)$, kui $f(x) = \frac{1}{x-x^2}$.

840. $f^{(100)}(0)$, kui $f(x) = x \operatorname{sh} x$.

Avaldada d^2y , luges x sõltumatuks muutujaks, kui:

841. $y = \sqrt{1+x^2}$. 842. $y = \frac{\ln x}{x}$. 843. $y = xe^{x^2}$.

Leida ilmutamatult antud funktsiooni nõutud järku tuletis:

844. $e^{x+y} - xy = 0$, leida y'' .

845. $x^2 + 2xy - y^2 - 1 = 0$, leida y'' .

846. $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$, leida y''' .

847. $x^2 + y^3 + y = 0$, leida y''' .

848. Arvutada y' , y'' ja y''' kohal $x = 0$, $y = 1$, kui

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0.$$

Avaldada $\frac{d^2y}{dx^2}$, kui:

849. $x = \frac{1+t^3}{1+t^4}$, 850. $x = e^t \cos t$, 851. $x = \cos^3 t$,

$y = \frac{t-t^3}{1+t^4}$. $y = e^t \sin t$. $y = \sin^3 t$.

Avaldada $\frac{d^3y}{dx^3}$, kui:

852. $x = 2t - t^2$, 854. $x = e^t$,
 $y = 3t - t^3$. $y = t + \ln t$.

853. $x = \cos t - \ln \cot \frac{t}{2}$,
 $y = \sin t$.

§ 11. TULETISE RAKENDUSI

Keskväärtusteoreemid. Rolle'i teoreem. Kui funktsioon $f(x)$ on kinnises vahemikus $a \leq x \leq b$ pidev, vastavas lahtises vahemikus $a < x < b$ diferentseeruv ja omab vahemiku otstes võrdseid väärtusi, s. t. $f(a) = f(b)$, siis leidub selles lahtises vahemikus vähemalt üks niisugune argumendi väärtus ξ , $a < \xi < b$, et $f'(\xi) = 0$.

Lagrange'i teoreem. Kui funktsioon $f(x)$ on kinnises vahemikus $a \leq x \leq b$ pidev ja vastavas lahtises vahemikus $a < x < b$ diferentseeruv, siis leidub selles lahtises vahemikus vähemalt üks niisugune argumendi väärtus ξ , $a < \xi < b$, et

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \quad (1)$$

Cauchy teoreem. Kui funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ on kinnises vahemikus $a \leq x \leq b$ pidevad, vastavas lahtises vahemikus $a < x < b$ diferentseeruvad ja kui selles lahtises vahemikus $g'(x) \neq 0$, siis leidub lahtises vahemikus vähemalt üks niisugune argumendi väärtus ξ , $a < \xi < b$, et

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (2)$$

Teoreem võrdsete tuletistega funktsioonidest. Kui kahe mingis vahemikus diferentseeruva funktsiooni $f(x)$ ja $g(x)$ tuletised on selles vahemikus võrdsed, siis on need kaks funktsiooni selles vahemikus kas võrdsed või erinevad liidetava konstandi võrra:

$$f(x) = g(x) + C.$$

L'Hôpitali reegel. Kui funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ on pidevad ja diferentseeruvad $x = a$ mingis ümbruses, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ning eksisteerivad $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow a} g'(x) \neq 0$, siis

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (3)$$

Kui $f(x)$ ja $g(x)$ on pidevad ja n korda diferentseeruvad $x = a$ mingis ümbruses, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} g'(x) = \dots = \lim_{x \rightarrow a} f^{(n-1)}(x) = \lim_{x \rightarrow a} g^{(n-1)}(x) = 0$ ning eksisteerivad $\lim_{x \rightarrow a} f^{(n)}(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow a} g^{(n)}(x) \neq 0$, siis

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}. \quad (4)$$

L'Hôpitali reegel kehtib analoogilistel eeldustel ka $x \rightarrow \pm\infty$ puhul ning $x \rightarrow a$ puhul, kui a on $f(x)$ ja $g(x)$ ühine lõpmatuskoht või kui $f(x)$ ja $g(x)$ $x \rightarrow \pm\infty$ puhul tõkestamatult kasvavad.

Sirge $y = ax + b$ on joone $y = f(x)$ asümptootiks $x \rightarrow +\infty$ puhul siis ja ainult siis, kui eksisteerivad piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b. \quad (6)$$

Analoogiline lause kehtib $x \rightarrow -\infty$ puhul.

Taylori valem. Kui funktsioon $f(x)$ on vahemikus $a < x < b$ $n + 1$ korda diferentseeruv, siis leidub iga x_0 ja x puhul sellest vahemikust x_0 ja x vahel vähemalt üks niisugune argumendi väärtus ξ , et

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (7)$$

Polünoomi

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (8)$$

nimetatakse funktsiooni $f(x)$ n -astme Taylori polünoomiks kohal x_0 . Liiget

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (9)$$

valemis (7) nimetatakse jääkliikmeks.

Kui funktsioon $f(x)$ on mingis oma diferentseeruvuspiirkonda kuuluvas vahemikus kasvav (kahanev), siis on selles

vahemikus $f'(x) \geq 0$ [$f'(x) \leq 0$]. Kui mingis vahemikus $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$], siis on funktsioon $f(x)$ selles vahemikus kasvav (kahanev).

Argumendi väärtust x_0 nimetatakse funktsiooni $f(x)$ maksimumkohaks (miinimumkohaks), kui leidub niisugune positiivne arv δ , et iga x puhul, mis rahuldab võrratust $0 < |x - x_0| < \delta$, on $f(x) < f(x_0)$ [$f(x) > f(x_0)$]. Maksimum- ja miinimumkohti nimetatakse funktsiooni ekstreemumkohtadeks.

Kui x_0 on funktsiooni $f(x)$ ekstreemumkoht ja $f(x)$ on kohal x_0 diferentseeruv, siis $f'(x_0) = 0$.

Kui $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) < 0$, siis x_0 on $f(x)$ maksimumkoht.

Kui $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) > 0$, siis x_0 on $f(x)$ miinimumkoht.

Kui $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, aga $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, kusjuures

1) n on paarisarv ja $f^{(n)}(x_0) < 0$, siis x_0 on $f(x)$ maksimumkoht;

2) n on paarisarv ja $f^{(n)}(x_0) > 0$, siis x_0 on $f(x)$ miinimumkoht;

3) n on paaritu arv ja $f^{(n)}(x_0) < 0$, siis x_0 on $f(x)$ kahanemiskoht;

4) n on paaritu arv ja $f^{(n)}(x_0) > 0$, siis x_0 on $f(x)$ kasvamisekoht.

Kinnises vahemikus $a \leq x \leq b$ pideva funktsiooni $f(x)$ kõige suurem (kõige väiksem) väärtus selles vahemikus on suurim (väiksem) arvudest: $f(a)$, $f(b)$, $f(x)$ väärtused $f'(x)$ nullkohtadel, mis asetsevad vahemikus $a \leq x \leq b$, ning $f(x)$ väärtused neil kohtadel vahemikus $a \leq x \leq b$, kus $f(x)$ ei ole diferentseeruv.

Tasapinnalist joont nimetatakse punktis P nõgusaks, kui see joon asetseb punkti P mingis (kuitahes väikeses) ümbruses ülalpool punktis P joonele tõmmatud puutujast, ja kumeraks, kui ta asetseb puutujast allpool. Joone kaart nimetatakse nõgusaks (kumeraks), kui joon on nõgus (kumer) selle kaare igas punktis. Punkte, millest ühel pool (kuitahes väikeses piirkonnas) joon on nõgus ja teisel pool kumer, nimetatakse joone käänupunktideks.

Kui mingis vahemikus $f''(x) > 0$ [$f''(x) < 0$], siis on funktsiooni $y = f(x)$ graafik selles vahemikus nõgus (kumer).

Kui $f''(x_0) = 0$ ja $f'''(x_0) \neq 0$, siis on x_0 funktsiooni $y = f(x)$ graafiku käänupunkti abstsiss.

Newtoni võtte võrrandi lahendi lähisväärtuse täpsustamiseks. Kui x_1 on võrrandi $f(x) = 0$ lahendi ξ mingil viisil leitud esimene lähend, siis määratakse järgmised lähendid valemist

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (10)$$

võttes selles $n = 1, 2, \dots$. Lähendi x_{n+1} vea ülemmäär on praktikas hinnatav võrratusega

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \frac{M}{2|f'(x_n)|} (x_{n+1} - x_n)^2, \quad (11)$$

kus M on $|f''(x)|$ maksimaalne väärtus täpset lähendit ξ ja lähendit x_{n+1} sisaldavas piirkonnas.

Näiteid

I. Tõestada, et funktsiooni $y = \arccos x$ juurdekasvu absoluutväärtus on suurem samale argumendi juurdekasvule vastavast funktsiooni $y = \sqrt{1-x^2}$ juurdekasvu absoluutväärtusest:

$$|\Delta \arccos x| > |\Delta \sqrt{1-x^2}|.$$

L a h e n d u s. Antud funktsioonid $y = \arccos x$ ja $y = \sqrt{1-x^2}$ on määratud ja pidevad kinnises vahemikus $-1 \leq x \leq 1$ ning diferentseeruvad lahtises vahemikus $-1 < x < 1$. Järelikult on nad pidevad ja diferentseeruvad ka igas vahemikus $x_1 \leq x \leq x_2$, mis asetseb vahemikus $-1 < x < 1$ ($-1 < x_1 < x_2 < 1$). Seejuures on funktsiooni $y = \arccos x$ tuletis $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ nullist erinev. Seega on funktsioonide $y =$

$\sqrt{1-x^2}$ ja $y = \arccos x$ puhul vahemikus $x_1 \leq x \leq x_2$ täidetud Cauchy teoreemi eeldused. Cauchy teoreemi põhjal leidub niisugune ξ , $x_1 < \xi < x_2$, et

$$\frac{\sqrt{1-x_2^2} - \sqrt{1-x_1^2}}{\arccos x_2 - \arccos x_1} = \frac{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}} = \xi.$$

Arvestades, et $-1 < \xi < 1$ tõttu on $|\xi| < 1$, saame siit absoluutväärtustele üle minnes

$$\frac{|\sqrt{1-x_2^2} - \sqrt{1-x_1^2}|}{|\arccos x_2 - \arccos x_1|} < 1$$

ehk

$$|\arccos x_2 - \arccos x_1| > |\sqrt{1-x_2^2} - \sqrt{1-x_1^2}|,$$

mida tuligi tõestada.

II. Tõestada, et vahemikus $-1 < x < 1$

$$\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \arcsin x = \frac{\pi}{4}.$$

Lahendus. Antud väite tõestamiseks näitame kõigepealt, et funktsioon

$$f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \arcsin x$$

on vahemikus $-1 < x < 1$ konstantne. Tõepoolest, $f(x)$ on vahemikus $-1 < x < 1$ määratud ja diferentseeruv ning

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{1+x}{1+x+1-x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Teoreemist võrdsete tuletistega funktsioonide kohta järeldub nüüd $f(x) = C$ iga x puhul vahemikust $-1 < x < 1$. Võttes $x = 0$, saame

$$C = f(0) = \arctan \sqrt{\frac{1-0}{1+0}} + \frac{1}{2} \arcsin 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Järelikult $f(x) = \frac{\pi}{4}$, mida tuligi tõestada.

III. Arvutada

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Lahendus. Kui $x \rightarrow 0$, siis $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ ja $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$, nii et antud piirväärtuse puhul on tegemist «määramatusega kujul 1^∞ ».

Et seda juhtu taandada kujule « $\frac{0}{0}$ », millele on rakendatav l'Hôpitali reegel, tähistame antud piirväärtuse tähega A ja moodustame $\ln A$. Logaritmfunksiooni pidevuse tõttu on siis $\ln A =$

$$= \ln \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2}. \text{ Et nüüd}$$

$x \rightarrow 0$ puhul murru lugeja ja nimetaja lähenevad nullile ja on $x = 0$ ümbruses diferentseeruvad, siis on l'Hôpitali reegli kohaselt

$$\ln A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2 \sin x}.$$

Et jälle on tegemist «määramatusega $\frac{0}{0}$ », siis rakendame veel kord l'Hôpitali reeglit:

$$\ln A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{4x \sin x + 2x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{4 \sin x + 2x \cos x}.$$

Kui nüüd veel kolmandat korda kasutame sama võtet, saame lõpuks

$$\begin{aligned} \ln A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{4 \cos x + 2 \cos x - 2x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{6 \cos x - 2x \sin x} = \\ &= \frac{-\cos 0}{6 \cos 0 - 2 \cdot 0 \cdot \sin 0} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Seega $\ln A = -\frac{1}{6}$ ja nõutud piirväärtus on $A = e^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}$.

IV. Leida joone

$$x = \frac{t^2}{1+t^3}, \quad y = \frac{t}{1+t^3}.$$

asümptoodid.

L a h e n d u s. Parameetriliste võrranditega määratud joone jooksev punkt $(x; y)$ saab asümptoodile läheneda ainult niisuguses t muutumisprotsessis, kus vähemalt ühe koordinaadi x või y absoluutväärtus tõkestamatult kasvab. Antud joone puhul on niisuguseks t muutumisprotsessiks ainult t lähenemine väärtusele -1 . Vastavalt valemitele (5) ja (6) on sirge $y = ax + b$ antud joone asümptoodiks, kui

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{\frac{t}{1+t^3}}{\frac{t^2}{1+t^3}} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{1}{t} = -1$$

ja

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax) = \lim_{t \rightarrow -1} \left(\frac{t}{1+t^3} + \frac{t^2}{1+t^3} \right) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t+t^2}{1+t^3}.$$

Viimase piirväärtuse leiame l'Hôpitali reegli abil:

$$b = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{1+2t}{3t^2} = \frac{1+2 \cdot (-1)}{3 \cdot (-1)^2} = -\frac{1}{3}.$$

Antud joone ainus asümptoot on seega $y = -x - \frac{1}{3}$ ehk $3x + 3y + 1 = 0$.

V. Leida polünoom, mis ei erine vahemikus $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ funktsioonist sh x rohkem kui 0,0001 võrra.

Lahendus. Nõutud polünoomi leiame funktsiooni sh x Tayloriga polünoomina kohal $x=0$. Polünoomi astme n valime nii, et Tayloriga valemi vastava jääkliikme R_n absoluutväärtus ei ületa antud vahemikus suurust 0,0001.

Kui $f(x) = \text{sh } x$, siis

$$f'(x) = \text{ch } x, \quad f''(x) = \text{sh } x, \quad f'''(x) = \text{ch } x, \quad \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \text{sh } x, & \text{kui } n = 2k, \\ \text{ch } x, & \text{kui } n = 2k + 1, \end{cases}$$

ja

$$f(0) = \text{sh } 0 = 0, \quad f'(0) = \text{ch } 0 = 1, \quad f''(0) = 0, \quad \dots,$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{kui } n = 2k, \\ 1, & \text{kui } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Seega valemi (7) järgi

$$\begin{aligned} \text{sh } x &= 0 + \frac{1}{1!} (x-0) + \frac{0}{2!} (x-0)^2 + \frac{1}{3!} (x-0)^3 + \dots + \\ &+ \frac{1}{(2k+1)!} (x-0)^{2k+1} + \frac{\text{sh } \xi}{(2k+2)!} (x-0)^{2k+2}. \end{aligned}$$

Funktsiooni sh x $(2k+1)$ -astme Tayloriga polünoom kohal $x=0$ on järelikult

$$T_{2k+1}(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ja vastav jääkliikme

$$R_{2k+1} = \frac{\text{sh } \xi}{(2k+2)!} x^{2k+1},$$

kus $-\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. Hindame jääkliikme absoluutväärtust:

$$\begin{aligned} |R_{2k+1}| &= \left| \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2} x^{2k+1} \right| \leq \frac{\sqrt{e} - \frac{1}{\sqrt{e}}}{2 \cdot (2k+2)! \cdot 2^{2k+2}} < \frac{2}{(2k+2)! 2^{2k+3}} = \\ &= \frac{1}{(2k+2)! 2^{2k+2}} = M_k. \end{aligned}$$

Andes k -le väärtusi $k = 0, 1, 2, \dots$, saame vastavalt

$$M_0 = \frac{1}{8} < 0,2, \quad M_1 = \frac{1}{24 \cdot 16} < 0,003, \quad M_2 = \frac{1}{720 \cdot 64} < 0,00003, \dots$$

Et siin M_2 on juba väiksem sh x ja polünoomi lubatud erinevusest 0,0001, siis on nõutud polünoomiks

$$T_5(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

VI. Leida funktsiooni $y = x^2 - 8 \ln x$ kasvamis- ja kahanemispiirkonnad.

Lahendus. Antud funktsiooni määramis- ja diferentseeruvuspiirkonnaks on $0 < x < +\infty$. Funktsioon on kasvav selle piirkonna osades, kus

$$y' = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2(x^2 - 4)}{x} > 0.$$

Saadud võrratus on rahuldatud piirkondades $-2 < x < 0$ ja $2 < x < +\infty$. Et esimene vahemik ei kuulu antud funktsiooni määramispiirkonda*, siis on ainult $2 < x < +\infty$ funktsiooni kasvamispiirkonnaks. Kahanemispiirkonda määrav võrratus

$$y' = \frac{2(x^2 - 4)}{x} < 0$$

on rahuldatud piirkondades $-\infty < x < -2$ ja $0 < x < 2$. Antud funktsioon on seega kahanev vahemikus $0 < x < 2$. Piirkondadega $2 < x < +\infty$ ja $0 < x < 2$ on haaratud vaadeldava funktsiooni kogu määramispiirkond, välja arvatud $x = 2$. Et $x < 2$ puhul funktsioon kahaneb ja $x > 2$ puhul kasvab, siis on $x = 2$ antud funktsiooni miinumikoht. Järelikult võime $x = 2$ lugeda nii funktsiooni kasvamis- kui ka kahanemispiirkonda kuuluvaks. Nõutud kasvamispiirkonnaks on seega $2 \leq x < +\infty$ ja kahanemispiirkonnaks $0 < x \leq 2$.

VII. Tõestada, et $x > 0$ puhul kehtib võrratus

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}.$$

Lahendus. Moodustame funktsiooni $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. Selle funktsiooni väärtus kohal $x = 0$ on $f(0) = \ln 1 = 0$. Edasi on $x > 0$ puhul

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - 1 + x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} > 0.$$

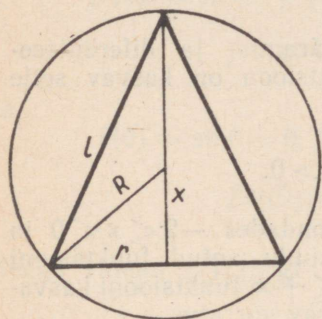
* Leitud y' avaldis on küll määratud iga $x \neq 0$ puhul, kuid antud funktsiooni tuletiseks on ta ainult $x > 0$ puhul. On kerge veenduda, et $x < 0$ puhul on sama avaldis funktsiooni $y = x^2 - 8 \ln(-x)$ tuletiseks.

Järelikult on funktsioon $f(x)$ $x > 0$ puhul kasvav. Et ta väärtus $x = 0$ puhul on 0, siis $x > 0$ puhul $f(x) > 0$, s. t.

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0,$$

mida tuligi tõestada.

VIII. Arvutada kerasse kujundatud pöördkoonuse maksimaalne külgpindala, kui kera raadius on R .



Joon. 56

Lahendus. Olgu vaadeldava koonuse kõrgus x (joon. 56). Koonuse põhja raadius on siis

$$r = \sqrt{R^2 - (x - R)^2} = \sqrt{2Rx - x^2},$$

moodustaja $l = \sqrt{x^2 + r^2} = \sqrt{2Rx}$ ja külgpindala

$$S = \pi r l = \pi \sqrt{4R^2 x^2 - 2Rx^3}.$$

Funktsiooni $S = S(x)$ maksimumkoha leidmiseks avaldame $\frac{dS}{dx}$ ja võrrutame selle nulliga:

$$\pi \frac{1}{2\sqrt{4R^2 x^2 - 2Rx^3}} \cdot (4R^2 \cdot 2x - 2R \cdot 3x^2) = 0.$$

Saadud võrrandi lahendid on $x_1 = 0$ ja $x_2 = \frac{4}{3}R$. Et funktsiooni esimese tuletise nullkoht võib peale maksimumkoha olla ka miinimumkoht või üldse mitte ekstreemukoht, siis tuleks avaldada $\frac{d^2S}{dx^2}$ ja vaadelda selle märki $x_1 = 0$ ja $x_2 = \frac{4}{3}R$ puhul (kui $\frac{d^2S}{dx^2} < 0$, siis on tegemist maksimumkohaga). Et käesolevas ülesandes on $\frac{d^2S}{dx^2}$ avaldamine tülikas, siis on lihtsam arutleda järgmiselt. Kinnises vahemikus $0 \leq x \leq 2R$ on funktsioon $S = S(x)$ kui selles vahemikus määratud elementaarfunktsioon pidev. Kinnises vahemikus pidevate funktsioonide vastava omaduse põhjal omandab ta selles vahemikus maksimaalse väärtuse. Seda maksimaalset väärtust ei saa ta omandada vahemiku otstes, sest $x = 0$ ja $x = 2R$ puhul on $S = 0$, aga näiteks $x = R$ puhul $S = \pi R^2 \sqrt{2} > 0$. Järelikult omandab funktsioon $S = S(x)$ maksimaalse väärtuse lahtises vahemikus $0 < x < 2R$. Selles lahtises vahemikus on vaadeldav funktsioon diferentseeruv ja võib maksimaalse väärtuse omandada seega ainult oma esimese tuletise

nullkohas. Eespool leitud funktsiooni $S = S(x)$ tuletise nullkoh-
tadest asetseb vahemikus $0 < x < 2R$ ainult üks, nimelt $x_2 = \frac{4}{3}R$.

Järelikult on see vaadeldava funktsiooni maksimumkoht.

Ülesandes nõutud koonuse maksimaalne külgpindala on funktsiooni $S = S(x)$ väärtus kohal $\frac{4}{3}R$:

$$S_{max} = \pi \sqrt{4R^2 \cdot \frac{16}{9}R^2 - 2R \cdot \frac{64}{27}R^3} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \pi R^2.$$

IX. Leida funktsiooni $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$ kõige suurem ja kõige väiksem väärtus vahemikus $-4 \leq x \leq 1$.

L a h e n d u s. Et funktsioon $f(x)$ on antud kinnises vahemikus pidev (kui elementaarfunktsioon), siis omandab ta selles vahemikus minimaalse ja maksimaalse väärtuse. Nende leidmiseks tuleb arvutada $f(x)$ väärtused antud vahemikus asetsevatel esimese tuletise nullkohtadel ja neil argumendi väärtustel, kus funktsioon ei ole diferentseeruv, ning vahemiku otstes. Kõige väiksem nii saadud arvudest on $f(x)$ minimaalne ja kõige suurem $f(x)$ maksimaalne väärtus antud vahemikus. Et

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{3\sqrt[3]{(x^2 + 2x)^2}},$$

siis $f'(x) = 0$ $x = -1$ puhul ja $f(x)$ ei ole diferentseeruv, kui $x^2 + 2x = 0$, s. t. $x = 0$ ja $x = -2$ puhul. $f(x)$ väärtused leitud argumendi väärtustel (mis kõik asetsevad vahemikus $-4 \leq x \leq 1$) ja vahemiku otstes on

$$f(-4) = 2, \quad f(-2) = 0, \quad f(-1) = -1, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = \sqrt[3]{3}.$$

Leitud funktsiooni väärtustest on väiksem $f(-1) = -1$ ja suurim $f(-4) = 2$. Järelikult on antud funktsiooni kõige väiksem väärtus antud vahemikus -1 ja kõige suurem väärtus 2 .

X. Leida funktsiooni $y = \sin^2 x \cdot \cos x$ graafiku kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänupunktid.

L a h e n d u s. Funktsiooni graafiku kumerus- ja nõgususpiirkondade leidmiseks tuleb uurida funktsiooni teise tuletise märki. Selleks avaldame

$$y' = 2 \sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x = 2 \sin x - 3 \sin^3 x$$

ja

$$y'' = 2 \cos x - 9 \sin^2 x \cdot \cos x = -7 \cos x + 9 \cos^3 x.$$

Antud funktsiooni graafik on kumer piirkonnas, kus

$$-7 \cos x + 9 \cos^3 x < 0$$

ehk

$$\cos x (9 \cos^2 x - 7) < 0.$$

See võrratus on rahuldatud, kui $\cos x > 0$ ja $9 \cos^2 x - 7 < 0$ ehk

$$|\cos x| < \frac{\sqrt{7}}{3}, \text{ s. t. kui}$$

$$0 < \cos x < \frac{\sqrt{7}}{3},$$

või kui $\cos x < 0$ ja $9 \cos^2 x - 7 > 0$ ehk $|\cos x| > \frac{\sqrt{7}}{3}$, s. t. kui

$$\cos x < -\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Nendest võrratustest järeldub (joonisel 57 on need x -telje osad, kus üks antud võrratustest on rahuldatud, tõmmatud jämeda joonega), et antud funktsiooni graafik on kumer vahemikes, mis on määratud võrratustega

$$2k\pi + \arccos \frac{\sqrt{7}}{3} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi - \arccos \frac{\sqrt{7}}{3},$$

$$(2k+1)\pi - \arccos \frac{\sqrt{7}}{3} < x < (2k+1)\pi + \arccos \frac{\sqrt{7}}{3},$$

kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Analoogiliselt järeldub võrratusest $y'' > 0$, et antud funktsiooni graafik on nõgus vahemikes

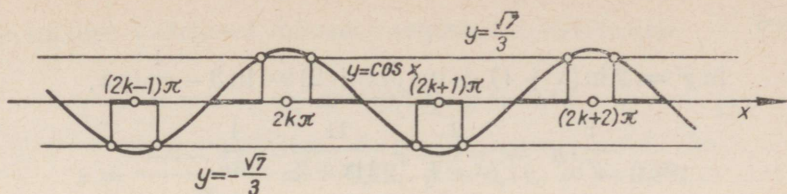
$$2k\pi - \arccos \frac{\sqrt{7}}{3} < x < 2k\pi + \arccos \frac{\sqrt{7}}{3},$$

$$(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\pi - \arccos \frac{\sqrt{7}}{3},$$

$$(2k+1)\pi + \arccos \frac{\sqrt{7}}{3} < x < (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2},$$

kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Et vaadeldava funktsiooni graafiku kumerus- ja nõgususpiirkonnad paiknevad vaheldumisi, siis on nende vahemike jaotus-



Joon. 57

punktid $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ ja $x = k\pi \pm \arccos \frac{\sqrt{7}}{3}$ graafiku käänupunktide abstsissideks. Vastavad funktsiooni $y = \sin^2 x \cdot \cos x = \cos x - \cos^3 x$ väärtused on 0 ja $\pm \frac{2\sqrt{7}}{27}$. Käanupunktid on seega $((2k + 1) \frac{\pi}{2}; 0)$ ja $(k\pi \pm \arccos \frac{\sqrt{7}}{3}; \pm \frac{2\sqrt{7}}{27})$, kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

XI. Uurida funktsiooni

$$y = (x + 1)^3 \sqrt[3]{x^2}$$

ja skitseerida selle graafik.

Lahendus. Antud funktsiooni määramispiirkond koosneb kõigist reaalarvudest. Funktsioonil on kaks nullkohta: $x = -1$ ja $x = 0$. Piirkonnas $x < -1$ on funktsioon negatiivne ja piirkonnades $-1 < x < 0$, $x > 0$ positiivne. Katkevuskohti funktsioonil ei ole. Et $|x| \rightarrow \infty$ puhul ka $|y| \rightarrow \infty$, siis pole funktsiooni graafikul x -teljega paralleelseid asümptoote. Samuti kasvab tõkestamatult $\left| \frac{y}{x} \right|$, kui $|x| \rightarrow \infty$, nii et puuduvad ka kaldasümptootid.

Avaldame antud funktsiooni esimese ja teise tuletise. Selleks on otstarbekohane kasutada logaritmilise diferentseerimise võtet:

$$\ln y = 3 \ln(x + 1) + \frac{2}{3} \ln x,$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{3}{x + 1} + \frac{2}{3x},$$

millest $y' = y \frac{11x + 2}{3(x + 1)x}$ ehk

$$y' = \frac{(x + 1)^2 (11x + 2)}{3 \sqrt[3]{x}}.$$

$$\ln y' = 2 \ln(x+1) + \ln(11x+2) - \ln 3 - \frac{1}{3} \ln x,$$

$$\frac{1}{y'} \cdot y'' = \frac{2}{x+1} + \frac{11}{11x+2} - \frac{1}{3x}$$

ja

$$y'' = \frac{(x+1)(88x^2+32x-2)}{9x\sqrt[3]{x}} = \frac{2(x+1)(22x+4+3\sqrt{3})(22x+4-3\sqrt{3})}{9x\sqrt[3]{x}}.$$

Saadud y' avaldisest nähtub, et antud funktsioon on diferentseeruv kõikjal peale argumendi väärtuse $x=0$. Kui $x \rightarrow 0$, siis $|y'| \rightarrow \infty$. Järelikult on y -telg funktsiooni graafiku puutujaks. Ka y'' eksisteerib iga $x \neq 0$ puhul. Funktsiooni kasvamis- ja kahane mispiirkondade ning funktsiooni graafiku kumerus- ja nõgususpiirkondade leidmiseks uurime y' ja y'' märki.

Piirkondades $x < -1$, $-1 < x < -\frac{2}{11}$ ja $x > 0$ on $y' > 0$ ja funktsioon seega kasvav, piirkonnas $-\frac{2}{11} < x < 0$, kus $y' < 0$, kahanev. Esimese tuletise nullkohtadest on $x = -1$ kasvamis-koht, sest temast mõlemal pool on funktsioon kasvav, $x = -\frac{2}{11}$ aga maksimumkoht, sest temast vasakul funktsioon kasvab ja paremal kahaneb. $x = 0$, kus y' ei eksisteeri, on miinimumkoht, sest temast vasakul funktsioon kahaneb, paremal aga kasvab.

Vaadeldava funktsiooni teine tuletis on positiivne piirkondades $-1 < x < \frac{-4-3\sqrt{3}}{22}$ ja $x > \frac{-4+3\sqrt{3}}{22}$. Nendes piirkondades

on funktsiooni graafik nõgus. Piirkondades $x < -1$, $\frac{-4-3\sqrt{3}}{22} <$

$< x < 0$ ja $0 < x < \frac{-4-3\sqrt{3}}{22}$ on $y'' < 0$ ja funktsiooni graafik järelikult kumer. Argumendi väärtused $x = -1$, $x = \frac{-4-3\sqrt{3}}{22}$ ja $x = \frac{-4+3\sqrt{3}}{22}$, mis eraldavad kumerus- ja nõgususpiirkondi, on graafiku käänupunktide abstsissideks.

Funktsiooni graafiku skitseerimiseks arvutame veel funktsiooni väärtuse ekstreemumkohas $x = -\frac{2}{11}$, käänupunktide ordinaadid ja puutujate tõusud käänupunktides ning funktsiooni ja

selle tuletise väärtused mõnedel argumentide väärtustel:

$$x = -\frac{2}{11} \approx -0,18, \quad y = 0,18;$$

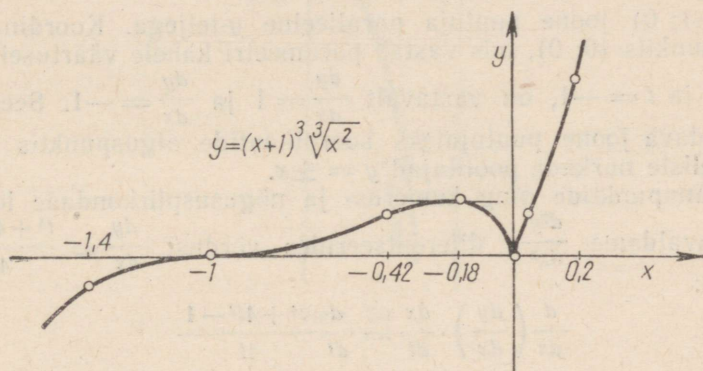
$$x = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{22} \approx -0,42, \quad y = 0,11, \quad y' = 0,39;$$

$$x = \frac{-4 + 3\sqrt{3}}{22} \approx 0,045, \quad y = 0,14, \quad y' = 2,6;$$

$$x = 0,20, \quad y = 0,58, \quad y' = 3,5;$$

$$x = -1,4, \quad y = -0,08, \quad y' = 0,64.$$

Kõigi saadud andmete järgi on joonisel 58 skitseeritud antud funktsiooni graafik.



Joon. 58

XII. Uurida ja skitseerida parameetriliste võrranditega antud joon

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad y = \frac{t^3 - t}{t^2 + 1}.$$

Lahendus. Kui antud joone parameetrilistes võrrandites paigutame t asemele $-t$, siis jääb x muutumatuks, y asemel aga saame $-y$. Seega asetseb koos iga punktiga $(x; y)$ vaadeldaval joonel ka punkt $(x; -y)$. Et need punktid on sümmeetrilised x -telje suhtes, siis on ka antud joon x -telje suhtes sümmeetriline. x -telge lõikab joon punktides, kus $y = 0$ ehk $t^3 - t = 0$, seega parameetri väärtustele $t = 0$ ja $t = \pm 1$ vastavates punktides $(-1; 0)$ ja $(0; 0)$. Kui $t \rightarrow \pm\infty$, siis $x \rightarrow 1$ ja $y \rightarrow \pm\infty$. Järelikult on sirge $x = 1$ vaadeldava joone asümptoot.

Joone edasiseks uurimiseks avaldame

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(3t^2 - 1)(t^2 + 1) - (t^3 - t) \cdot 2t}{\frac{2t(t^2 + 1) - (t^2 - 1) \cdot 2t}{(t^2 + 1)^2}} = \frac{t^4 + 4t^2 - 1}{4t}.$$

$\frac{dy}{dx} = 0$, kui $t^4 + 4t^2 - 1 = 0$, s. t. kui $t^2 = -2 \pm \sqrt{5}$. Joonel on järelikult x -teljega paralleelsed puutujad parameetri väärtustele

$$t = \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2} \text{ vastavates punktides } \left(\frac{\sqrt{5} - 3}{\sqrt{5} - 1}; \pm \frac{\sqrt{5} - 3}{\sqrt{5} - 1} \sqrt{\sqrt{5} - 2} \right),$$

mille koordinaadid on ligikaudu $(-0,61; \pm 0,30)$. Kui $t \rightarrow 0$,

siis $\frac{dy}{dx} \rightarrow \infty$. Järelikult on t väärtusele $t = 0$ vastavas punktis $(-1; 0)$ joone puutuja paralleelne y -teljega. Koordinaatide alguspunktis $(0; 0)$, mis vastab parameetri kahele väärtusele $t =$

$= +1$ ja $t = -1$, on vastavalt $\frac{dy}{dx} = 1$ ja $\frac{dy}{dx} = -1$. Seega on

vaadeldava joone puutujateks koordinaatide alguspunktis telgedevaheliste nurkade poolitajad $y = \pm x$.

Käänupunktide ning kumerus- ja nõgususpiirkondade leidmiseks avaldame $\frac{d^2y}{dx^2}$, diferentseerides võrdust $\frac{dy}{dx} = \frac{t^4 + 4t^2 - 1}{4t}$

t järgi:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{t^4 + 4t^2 - 1}{4t}$$

ehk

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(t^2 + 1)^2}{16t} \cdot \frac{(4t^3 + 8t) \cdot t - (t^4 + 4t^2 - 1) \cdot 1}{t^2} = (t^2 + 1)^2 \frac{3t^4 + 4t^2 + 1}{16t^3}.$$

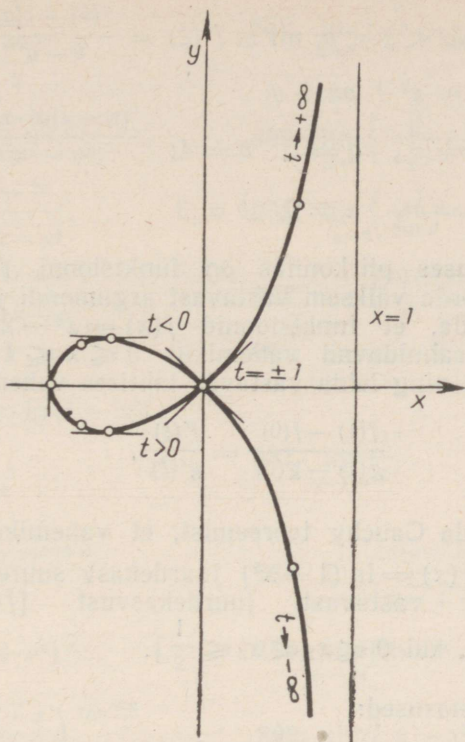
Et $t^2 + 1 > 0$ ja võrrandist $3t^4 + 4t^2 + 1 = 0$ saame $t^2 = \frac{-2 \pm 1}{3} < 0$, siis ei ole võrrandil $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ reaalseid lahendeid.

Järelikult ei ole antud joonel käänupunkte. $t > 0$ puhul on $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, nii et $t > 0$ puhul on joon nõgus. Kui $t < 0$, siis ka $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ ja joon on kumer.

Saadud andmete järgi saame antud joone juba õige täpselt skitseerida (joon. 59). Joonise täpsustamiseks leiame veel joone punktid, mis vastavad parameetri väärtustele $t = \pm 2$ ja $t =$

$= \pm \frac{1}{3}$. Need punktid on $(0,6; \pm 1,2)$ ja $(-0,8; \mp 0,27)$. Punk-

tis $(0,6; \pm 1,2)$ on puutuja tõus $\pm \frac{31}{8} \approx \pm 4$.



Joon. 59

Keskväärtusteoreemid

855. Veenduda Rolle'i teoreemi kehtivuses funktsiooni $f(x) = x^2 - 2x - 5$ puhul vahemikus $-1 \leq x \leq 3$.

856. Leida funktsiooni $y = \ln \sin x$ tuletise nullkoht vahemikus $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$.

857. Selgitada, kas antud funktsioon rahuldab antud vahemikus Rolle'i teoreemi tingimusi:

- 1) $y = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$;
- 2) $y = x - \ln x$, $-1 \leq x \leq e$;
- 3) $y = |x|$, $-1 \leq x \leq 1$;
- 4) $y = x^2 + \sin x$, $-\pi \leq x \leq \pi$;
- 5) $y = \frac{2-x^2}{x^4}$, $-1 \leq x \leq 1$.

858. Leida joonel $y = x^3 - 2x$ punkt, milles puutuja on paralleelne selle joone punkte $A(-1; 1)$ ja $B(2; 4)$ ühendava kõõluga.

859. Leida ξ , $a < \xi < b$, nii et $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, kui

1) $f(x) = x^2 + px + q$;

2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 4$;

3) $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b = 3$.

860. Missuguses piirkonnas on funktsiooni \sqrt{x} juurdekasv vähemalt 100 korda väiksem vastavast argumendi juurdekasvust?

861. Veenduda, et funktsioonid $f(x) = x^2 - 2x$ ja $g(x) = x^3 + 3x - 1$ rahuldavad vahemikus $0 \leq x \leq 1$ Cauchy teoreemi tingimusi, ning leida vastavas lahtises vahemikus ξ , nii et

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

862. Järeldada Cauchy teoreemist, et vahemikus $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ on funktsiooni $f(x) = \ln(1 + x^2)$ juurdekasv suurem funktsiooni $g(x) = \arctan x$ vastavast juurdekasvust $[f(x_2) - f(x_1)] > > g(x_2) - g(x_1)$, kui $0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{1}{2}$.

Tõestada samasused:

$$863. \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{kui } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

$$864. 2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi, \text{ kui } x \geq 1.$$

$$865. \frac{1}{2} \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} + \arctan \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}, \text{ kui } x \geq 0.$$

L'Hôpitali reegel. Asümptoodid

Ülesandeis 866–890 leida antud piirväärtus l'Hôpitali reegli abil:

$$866. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}.$$

$$869. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

$$867. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^n - 1}.$$

$$870. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}.$$

$$868. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{\sin x}.$$

$$871. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x}.$$

$$872. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cot \frac{\pi x}{2}}$$

$$873. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x \cdot \ln(x-\pi)}{\ln(e^x - e^\pi)}$$

$$874. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x \sqrt{1-x^2}}$$

$$875. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\tan x - x}$$

$$876. \lim_{x \rightarrow 0} \tan x \cdot \ln x$$

$$877. \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(1-x^2)$$

$$878. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$879. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\tan x}$$

$$880. \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$$

$$881. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6-x}{3} \right)^{\tan \frac{\pi x}{6}}$$

$$882. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$883. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$884. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$885. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cot x}{x} \right)$$

$$886. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \arctan x) x$$

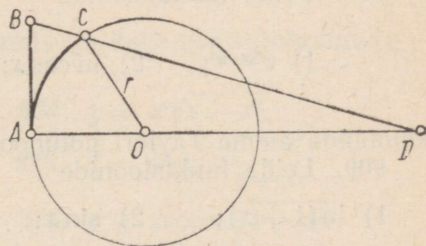
$$887. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$$

$$888. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a + be^x)}{\sqrt{m + nx^2}}$$

$$889. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^x$$

$$890. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

891. Ringjoone kaar AC on võrdne punktis A ringjoonele tõmmatud puutuja lõiguga AB . Punkte B ja C läbiva sirge ning punkti A ja ringjoone keskpunkti O läbiva sirge lõikepunkt on D (joon. 60). Arvutada lõigu AD pikkuse piirväärtus kaare AC lähenemisel nullile, kui ringjoone raadius on r .



Joon. 60

892. Leida ringi segmendi pindala ning segmendile vastava kõõluga ja ringjoonele selle kõõlu otspunktides tõmmatud puutujatega piiratud kolmnurga pindala suhte piirväärtus segmendi kaare lähenemisel nullile.

893. Kas l'Hôpitali reegel on rakendatav järgmiste piirväärtuste arvutamisel? Kui ei, siis miks?

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 5}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

Leida antud funktsiooni graafiku asümptoodid:

$$894. y = \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1}.$$

$$897. y = x \arctan x.$$

$$895. y = x + e^{-x}.$$

$$898. y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right).$$

$$896. y = x + \arctan x.$$

$$899. y = 1 + xe^{\frac{2}{x}}.$$

Leida parameetriliste võrranditega antud joone asümptoodid:

$$900. x = \frac{2e^t}{t-1},$$

$$901. x = \frac{2t}{1-t^2},$$

$$902. x = \frac{t-8}{t^2-4},$$

$$y = \frac{te^t}{t-1}.$$

$$y = \frac{t^2}{1-t^2}.$$

$$y = \frac{3}{t(t^2-4)}.$$

Taylori valem

903. Arendada x^5 vahe $x-1$ astmete järgi.

904. Arendada polünoom $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ vahe $x-4$ astmete järgi.

905. Koostada funktsiooni $f(x) = \frac{1}{x}$ n -astme Taylori valem kohal $x_0 = -1$.

906. Koostada funktsiooni $f(x) = e^{2x}$ n -astme Taylori valem kohal $x_0 = 0$.

907. Koostada funktsiooni $f(x) = \arcsin x$ kolmanda astme Taylori valem kohal $x_0 = 0$.

908. Leida funktsioonide

$$1) e^{2x-x^2}; \quad 2) \ln \cos x; \quad 3) \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$$

kolmanda astme Taylori polünoomid kohal $x_0 = 0$.

909. Leida funktsioonide

$$1) \ln(1+x); \quad 2) \sin x; \quad 3) \operatorname{ch} x; \quad 4) \sqrt[3]{1+x}$$

neljanda astme Taylori polünoomid kohal $x_0 = 0$.

910. Koostada võrrandiga

$$\sin xy + 2x + y - 1 = 0$$

määratud y kui x funktsiooni kolmanda astme Taylori polünoom kohal $x_0 = 0$.

911. Leida funktsiooni $f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$ teise astme Taylori polünoom kohal $x_0 = 2$ ning arvutada selle abil ligikaudu $f(2,02)$ ja $f(1,97)$.

912. Leida funktsiooni e^x asendamisel tema kolmanda astme Taylori polünoomiga kohal $x_0 = 0$ tehtava vea ülemmäär piirkonnas $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

913. Leida funktsiooni $x \ln x$ viienda astme Taylori polünoom kohal $x_0 = 1$ ning arvutada selle funktsiooni asendamisel leitud polünoomiga tehtava vea ülemmäär vahemikus 1) $1 \leq x \leq 2$; 2) $1 \leq x \leq 1,1$.

914. Leida funktsiooni $\sqrt[3]{x}$ Taylori polünoom kohal $x_0 = 1$, mis erineb sellest funktsioonist vahemikus $1 \leq x \leq 2$ vähem kui 0,05 võrra.

915. Arvutada Taylori valemi abil ligikaudselt

1) $\arctan 0,8$; 2) $(1,1)^{1,2}$; 3) $\ln 1,2$; 4) $\sqrt[5]{250}$

ning leida tulemuse vea ülemmäär.

Funktsiooni monotoonsuspiirkonnad. Võrratused

916. Leida piirkonnad, kus funktsioon $y = 2x^3 - 3x^2 - 30x + 5$ on monotoonselt kasvav.

917. Leida funktsiooni $y = \frac{2x}{1+x^2}$ kahanemiskiirkonnad.

918. Veenduda, et funktsioon $y = x + \sin x$ on kõikjal kasvav.

919. Veenduda, et funktsioon $y = \frac{x^2-1}{x}$ kasvab igas vahemikus, mis ei sisalda punkti $x=0$.

Leida antud funktsiooni kasvamis- ja kahanemiskiirkonnad:

920. $y = \sqrt{2x - x^2}$.

924. $y = x \sqrt{x - x^2}$.

921. $y = \frac{1}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$.

925. $y = \arctan \frac{1+x}{1-x}$.

922. $y = x^2 e^{-x}$.

926. $y = \arccos \sqrt{1-x^2}$.

923. $y = \frac{x}{\ln x}$.

927. $y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + 2 \ln \operatorname{ch} x$.

Tõestada, et kehtivad võrratused:

928. $\ln(1+x) < x$, kui $x > 0$.

929. $\sin x < x$, kui $x > 0$.

930. $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, kui $x > 0$.

$$931. 2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}, \text{ kui } x > 1.$$

$$932. e^x \geq 1 + x.$$

$$933. x - \frac{x^3}{6} < \sin x, \text{ kui } x > 0.$$

$$934. \tan x > x + \frac{x^3}{3}, \text{ kui } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$935. \frac{1+x}{1-x} > e^{2x}, \text{ kui } 0 < x < 1.$$

Funktsiooni ekstreemumkohad

Ülesandeis 936—945 leida antud funktsiooni miinimum- ja maksimumkohad:

$$936. y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4. \quad 941. y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}.$$

$$937. y = x\sqrt[3]{x-1}. \quad 942. y = x^x.$$

$$938. y = xe^{-x}. \quad 943. y = \sqrt[x]{x}.$$

$$939. y = \frac{\ln^2 x}{x}. \quad 944. y = \ln x + 2 \arctan x.$$

$$940. y = x - \ln(x+1). \quad 945. y = 2 \sin 2x + \sin 4x.$$

Ülesandeis 946—951 arvutada antud funktsiooni ekstreemalsed väärtused:

$$946. y = e^{-x} - e^{-2x}. \quad 949. y = \frac{(a-x)^3}{a-2x}.$$

$$947. y = \frac{1}{x} + \frac{4}{1-x}. \quad 950. y = \frac{x^2}{\ln x}.$$

$$948. y = x^2 e^{-x^2}. \quad 951. y = \cos 2x + 2 \cos x.$$

Ülesandeis 952—957 leida antud funktsiooni väikseim ja suurim väärtus antud vahemikus:

$$952. y = x^2 - 4x + 6, \quad -3 \leq x \leq 10.$$

$$953. y = \sqrt[3]{5-4x}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$954. y = x + 2\sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

$$955. y = \frac{x^2}{x^4+4}, \quad -1 \leq x \leq 2.$$

$$956. y = \sqrt[3]{x^2-x}, \quad -1 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

$$957. y = \cos 2x + 2x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Leida antud võrrandiga määratud ilmutamata funktsiooni y ekstremaalsed väärtused:

958. $xy^2 - x^2y - 2 = 0$.

959. $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

960. $x^3 + y^3 - 6xy = 0$.

961. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$.

962. $3a^2y^2 + xy^3 + 4ax^3 = 0$.

963. Leida antud hüpoteenuusiga c täisnurkse kolmnurga maksimaalne pindala.

964. Arvutada poolringi, mille raadius on R , kujundatud maksimaalse übermõõduga ristküliku küljed.

965. Leida silindri maksimaalne ruumala, kui silindri telglõike übermõõt on 6.

966. Arvutada kerasse, mille raadius on R , kujundatud silindri maksimaalne ruumala ning maksimaalne külgpindala.

967. Kuidas tuleb valida üheliitrisel silindrikujulise kaaneta anuma mõõtmed, et materjalikulu oleks minimaalne?

968. Kuidas tuleb valida üheliitrisel silindrikujulise konservitoosi mõõtmed, et ta valmistamiseks kuluks kõige vähem plekki?

969. Võrdhaarse kolmnurga übermõõt on $2p$. Kuidas tuleb valida kolmnurga küljed, et keha, mis tekib selle kolmnurga pöörlemisel ümber aluse, oleks maksimaalse ruumalaga?

970. Koonuse põhja raadiuse ning koonuse moodustaja pikkuste summa on a . Arvutada koonuse kõrgus, mille puhul koonuse ruumala on maksimaalne.

971. Arvutada antud koonusesse kujundatud silindri maksimaalne ruumala.

972. Arvutada koonuse maksimaalne ruumala, kui koonuse moodustaja pikkus on 3.

973. Leida ümber antud kera kujundatud koonuse minimaalne ruumala.

974. Leida paraboolil $y^2 = 2px$ punkt, millest tõmmatud parabooli normaali lõik parabooli sees on minimaalne.

975. Ellipsi poolteljed on a ja b . Leida sellesse ellipsisse joonestatud ristküliku maksimaalne pindala.

976. Leida joonel $\rho = \theta^2 \cdot e^{-\theta}$ punkt, mis asetseb poolusest kõige kaugemal.

977. Leida joonel $x^2 - y^3 + y^4 = 0$ punkt, mis asetseb y -teljest kõige kaugemal.

978. Kuidas tuleb valida silindrilisest palgist lõigatava ristkülikukujulise ristlõikega tala mõõtmed, et tala kandejõud oleks maksimaalne, kui tala kandejõud on võrdeline ristlõike alusega ja ristlõike kõrguse ruuduga?

979. Kui kõrgele ringikujulise laua keskpunkti kohale tuleb riputada valgusallikas, et laua äärte valgustatus oleks maksi-

maalne, kui pinna valgustatus on võrdeline kiirte kaldenurga siinusega ja pöördvõrdeline kauguse ruuduga?

980. Missuguse kesknurga puhul on ringi sektorist, mille raadius on R , painutatud koonilise anuma maht maksimaalne?

Kumerus ja nõgusus. Käänupunktid

981. Tõestada, et joon $y = \ln(x^2 - 1)$ on kõikjal kumer.

982. Missugustes punktidest $A(2; 20)$, $B(-2; -184)$, $C(1; -1)$, $D(0; -2)$ on joon $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$ kumer, missugustes nõgus?

Ülesandeis 983—990 leida antud funktsiooni graafiku kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänupunktid:

983. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50.$

984. $y = (x + 2)^6 + 2x + 2.$

985. $y = \ln(1 + x^2).$

986. $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$

987. $y = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}.$

988. $y = e^{\sqrt[3]{x}}.$

989. $y = x \arctan x.$

990. $y = (1 + x^2)e^{-x^2}.$

Leida parameetriliste võrranditega antud joone käänupunktid:

991. $x = t^3 + 3t + 1,$
 $y = t^3 - 3t + 1.$

992. $x = t^3 + 1,$
 $y = t^3 - 6 \arctan t.$

993. Veenduda, et kolmanda astme polünoomi graafikul on alati täpselt üks käänupunkt.

994. Määrata parameetrid a ja b nii, et punkt $(1; 3)$ oleks joone $y = ax^3 + bx^2$ käänupunktiks.

995. Leida kolmanda astme polünoom, mille graafikul on punktis $(-1; 2)$ x -teljega paralleelse puutujaga käänupunkt ja mille graafik läbib koordinaatide alguspunkti.

996. Leida kuuenda astme polünoom, mille graafikul on punktides $(-1; 1)$ ja $(1; 1)$ x -teljega paralleelsete puutujatega käänupunktid ja mille graafik puudutab koordinaatide alguspunktis x -telge.

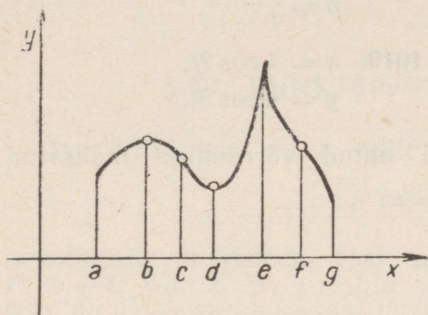
997. Mis punktid on funktsiooni $f'(x)$ ekstreemumkohtades funktsioonide $f(x)$ ja $f''(x)$ graafikutel?

998. Kuidas näeb välja funktsiooni $y = f(x)$ graafik vahemikus $a \leq x \leq b$, kui selles vahemikus

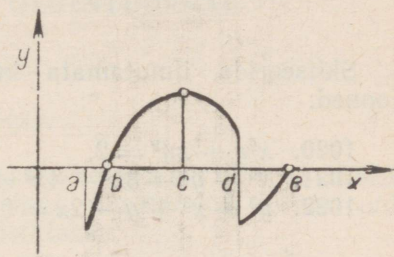
- 1) $y > 0$, $y' > 0$, $y'' < 0$; 3) $y > 0$, $y' < 0$, $y'' > 0$;
 2) $y < 0$, $y' > 0$, $y'' > 0$; 4) $y > 0$, $y' < 0$, $y'' < 0$.

999. Joonisel 61 on antud funktsiooni $f(x)$ graafik. Skitseerida funktsioonide $f'(x)$ ja $f''(x)$ graafikud.

1000. Joonisel 62 on antud funktsiooni $f'(x)$ graafik. Skitseerida $f(x)$ ja $f''(x)$ graafikud.



Joon. 61



Joon. 62

Funktsiooni üldine uurimine ja graafiku konstrueerimine

Ülesannetes 1001—1015 konstrueerida antud funktsiooni graafik, leides selleks 1) funktsiooni määramispiirkonna, 2) funktsiooni katkevuskohad, 3) funktsiooni nullkohad, 4) funktsiooni ekstreemumkohad ning kasvamis- ja kahanemispiirkonnad, 5) graafiku käänupunktid ning kumerus- ja nõgususpiirkonnad, 6) graafiku asümptootid ja 7) funktsiooni väärtusi üksikutel argumentide väärtustel graafiku täpsemaks joonestamiseks:

$$1001. y = x^2 - \frac{x^4}{2}.$$

$$1007. y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

$$1002. y = \frac{x^4}{(1+x)^3}.$$

$$1008. y = x^2 e^{-x}.$$

$$1003. y = \frac{1}{x} + 4x^2.$$

$$1009. y = \frac{e^x}{x}.$$

$$1004. y = \frac{x^3}{3-x^2}.$$

$$1010. y = \frac{\ln x}{x}.$$

$$1005. y = x \sqrt{1-x^2}.$$

$$1011. y = \frac{1}{e^x - 1}.$$

$$1006. y = \sqrt{1+x^3}.$$

1012. $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

1014. $y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$.

1013. $y = \sqrt[2]{2xe^{1-2x}}$.

1015. $y = x \sin \ln x$.

Uurida ja skitseerida parameetrilisel kujul antud jooned:

1016. $x = 2t - t^2,$
 $y = 3t - t^3.$

1018. $x = \frac{t^2}{t-1},$

1017. $x = 2t + t^2,$
 $y = \frac{1}{t-1}.$

$y = \frac{t}{t^2-1}.$

1019. $x = 4 \cos 2t,$
 $y = 4 \cos 3t.$

Skitseerida ilmutamata kujul antud võrrandiga määratud jooned:

1020. $x^2y + xy^2 = 2.$

1021. $x^4 + y^4 - 3x^3 - 4x^2 = 0.$

1022. $y^3 - x^3 + y - 2x = 0.$

Newtoni võtte

1023. Leida Newtoni võtte abil võrrandi

$$x^3 + 3,4x - 17,8 = 0$$

lahendi teine ja kolmas lähend, võttes esimeseks lähendiks $x_1 = 2$. Hinnata leitud lähendite täpsust.

Ülesandeis 1024–1029 leida antud võrrandi lahendite lähisväärtused kolme õige kohaga pärast koma:

1024. $x^3 - 9,6x + 18,2 = 0.$

1025. $x^3 - 6x + 2 = 0.$

1026. $x^4 - x - 1 = 0.$

1027. $\cos x + 1,2x - 1,674 = 0.$

1028. $e^{-2x} - 3,1x + 2,4 = 0.$

1029. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10x.$

1030. Leida võrrandi $x^5 + 5x + 1 = 0$ lahend viie õige kohaga pärast koma.

1031. Arvutada Newtoni võtte abil $\sqrt[3]{0,5}$ kaheksa õige kohaga pärast koma.

1032. Leida võrrandi $x^3 - 2x - 5 = 0$ lahend kümne õige kohaga pärast koma.

§ 12. FUNKTSIOONI ÜLDINTEGRAAL

Iga funktsiooni $F(x)$, mille puhul

$$F'(x) = f(x),$$

nimetatakse funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooniks. Avaldist $F(x) + C$, kus C on suvaline konstant, nimetatakse funktsiooni $f(x)$ üldintegraaliks ja tähistatakse

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Funktsiooni üldintegraal esitab selle funktsiooni kõigi algfunktsioonide hulka. Funktsiooni järgi üldintegraali leidmist nimetatakse funktsiooni integreerimiseks.

Üldintegraalide põhivalemid

$$\int x^n dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, & \text{kui } n \neq -1, \\ \ln|x| + C, & \text{kui } n = -1; \end{cases} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C; \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C; \quad (3)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0); \quad (4)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad (5)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C; \quad (6)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C; \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C; \quad (8)$$

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C; \quad (9)$$

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C; \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C; \quad (11)$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C. \quad (12)$$

Integreerimise üldvõtteid. Konstantse teguri võib tuua integraalimärgi ette:

$$\int a f(x) \, dx = a \int f(x) \, dx. \quad (13)$$

Summa integraal võrdub liidetavate integraalide summaga:

$$\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx. \quad (14)$$

Integraali $\int f(u) \, du$ avaldamiseks on mõnikord otstarbekohane kasutada uut integreerimismuutujat t nii, et $u = \varphi(t)$, kus $\varphi(t)$ on diferentseeruv funktsioon. Funktsioon $f(u)$ asendub sel juhul funktsiooniga $f[\varphi(t)]$ ja diferentsiaal du diferentsiaaliga $\varphi'(t) \, dt$ ning

$$\int f(u) \, du = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) \, dt. \quad (15)$$

Sama valemit ja asendust kasutatakse sageli ka vastupidises järjekorras, lähtudes võrduse (15) paremast pooldest.

Kui

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C, \quad (16)$$

siis

$$\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C. \quad (17)$$

Kui u ja v on mingid diferentseeruvad funktsioonid, siis kehtib nn. ositi integreerimise valem:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du. \quad (18)$$

Integreerimise erivõtteid. Ratsionaalse funktsiooni $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, kus $P_m(x)$ on m -astme polünoom ja $Q_n(x)$

n -astme polünoom, integreerimiseks tuleb $m > n$ puhul kõigepealt antud funktsioon esitada (läbijagamisega täisosa eraldamise teel) $m - n$ astme polünoomi ja niisuguse murdratsionaalse funktsiooni, mille lugeja aste on nimetaja astmest väiksem, summana:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = T_{m-n}(x) + \frac{R(x)}{Q_n(x)}.$$

Seejärel tuleb nimetaja $Q_n(x)$ lahutada reaalsete kordajatega lineaartegurite ja lahutamatumate ruuttegurite korrutiseks kujul

$$Q_n(x) = (x - \alpha)^k \dots (x^2 + px + q)^l \dots, \text{ kus } (p^2 - 4q < 0). \quad (19)$$

Edasi koostatakse vastavalt võrduses (19) esinevaile tegureile murru $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$ [või $m < n$ puhul kohe $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$] lahutus osamurdude summaks määramata kordajate kaudu:

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{(x - \alpha)^k \dots (x^2 + px + q)^l \dots} &= \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \\ &+ \frac{A_k}{(x - \alpha)^k} + \dots + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \\ &+ \frac{M_lx + N_l}{(x^2 + px + q)^l} + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Kordajad $A_1, \dots, A_k, \dots, M_1, N_1, \dots, M_l, N_l, \dots$ määratakse tingimusest, et (20) kehtiks samaselt iga x puhul.

Osamurru $\frac{A_k}{(x - \alpha)^k}$ üldintegraal on avaldatav valemi (1) ja

(17) alusel. Osamurru $\frac{M_lx + N_l}{(x^2 + px + q)^l}$ integreerimiseks teisenda-

takse see murd kahe murru summaks, millest esimese lugeja on konstandi kordne $x^2 + px + q$ tuletis ja teise lugeja konstant. Esimese liidetava integreerimisel võetakse $x^2 + px + q$ uueks muutujaks. Teise liidetava üldintegraal taandatakse lineaarse

muutuja vahetusega kujule $I_n = \int \frac{du}{(1 + u^2)^n}$ ja avaldatakse $I_n = 1$

puhul valemi (2) järgi $n > 1$ puhul rekursioonvalemist

$$I_{n+1} = \frac{u}{2n(1 + u^2)^n} + \frac{2n - 1}{2n} I_n. \quad (21)$$

Trigonomeetriliste funktsioonide suhtes ratsionaalsete funktsioonide üldintegraalide

$\int R(\sin x, \cos x) dx$ avaldamine taandatakse ratsionaalfunktsiooni integreerimisele asendusega

$$\tan \frac{x}{2} = t, \quad (22)$$

mille puhul

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}. \quad (23)$$

Järgmiste integraalide puhul võivad osutuda asendusest (22) sobivamaks vastavalt asendused

$$\int R(\sin x, \cos^2 x) \cos x dx \text{ puhul } \sin x = t, \quad (24)$$

$$\int R(\sin^2 x, \cos x) \sin x dx \text{ puhul } \cos x = t, \quad (25)$$

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx \text{ ja } \int R(\tan x) dx \text{ puhul } \tan x = t, \quad (26)$$

kusjuures juhul (26)

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}. \quad (27)$$

EkspONENTFUNKTSIOONI e^x suhtes ratsionaalse funktsiooni integraali $\int R(e^x) dx$ avaldamisel kasutatakse asendust

$$e^x = t, \quad dx = \frac{dt}{t}. \quad (28)$$

Integraal $\int R\left(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots\right) dx$, kus p, q, \dots on naturaalarvud ja $ad - bc \neq 0$, taandub ratsionaalfunktsiooni integraaliks asendusega

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n, \quad (29)$$

kus n on juurijate p, q, \dots väikseim ühiskordne.

Integraal $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ taandub lineaarse muutuva vahetusega üheks järgmisest kolmest integraalist ning edasi ratsionaalfunktsiooni integraaliks vastavalt asendustega

$$\int R_1(u, \sqrt{k^2 - u^2}) du \text{ puhul } u = k \sin t, \quad (30)$$

$$\int R_2(u, \sqrt{k^2 + u^2}) du \text{ puhul } u = k \tan t \text{ või } u = k \operatorname{sh} t, \quad (31)$$

$$\int R_3(u, \sqrt{u^2 - k^2}) du \text{ puhul } u = \frac{k}{\sin t} \text{ või } u = k \operatorname{ch} t. \quad (32)$$

Diferentsiaalbinoomi üldintegraal $\int x^m (a + bx^n)^p dx$, kus m, n

ja p on ratsionaalarvud, taandub ratsionaalfunktsiooni integraaliks kolmel juhul:

1° kui p on täisarv — asendusega $x = t^q$, kus q on murdude m ja n ühine nimetaja;

2° kui $\frac{m+1}{n}$ on täisarv — asendusega $a + bx^n = t^r$, kus r on murru p nimetaja;

3° kui $\frac{m+1}{n} + p$ on täisarv — asendusega $ax^{-n} + b = t^r$ kus r on murru p nimetaja.

Näiteid

I. Avaldada $\int \frac{3 dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Lahendus. Antud integraali puhul ei ole üldintegraalide põhivalemid vahetult rakendatavad. Nende rakendamiseks teisendame integraalialuse funktsiooni kujule

$$\frac{3}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{3(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{3}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x}.$$

Seega

$$\int \frac{3 dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = 3 \int \frac{dx}{\sin^2 x} + 3 \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -3 \cot x + C_1 + 3 \tan x + C_2.$$

Suvaliste konstantide C_1 ja C_2 summa kui suvalise konstandi võime asendada üheainsa konstandiga C . Seega

$$\int \frac{3 dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = 3(\tan x - \cot x) + C.$$

Saadud tulemust võib kontrollida diferentseerimise teel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [3(\tan x - \cot x) + C] &= 3 \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) + 0 = \\ &= \frac{3}{\cos^2 x \sin^2 x}, \end{aligned}$$

mis näitabki, et integraal oli õigesti avaldatud.

II. Avaldada $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{e^x + 2}} dx$, võttes integreeritava funktsiooni nimetaja uueks muutujaks.

Lahendus. Olgu $u = \sqrt[3]{e^x + 2}$. Siis $e^x = u^3 - 2$, millest $e^x dx = 3u^2 du$. Seega

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{e^x + 2}} dx &= \int \frac{e^x \cdot e^x dx}{\sqrt[3]{e^x + 2}} = \int \frac{(u^3 - 2)3u^2 du}{u} = 3 \int (u^4 - 2u) du = \\ &= 3 \left(\frac{u^5}{5} - u^2 \right) + C = \frac{3}{5} u^2 (u^3 - 5) + C = \\ &= \frac{3}{5} \sqrt[3]{(e^x + 2)^2} (e^x - 3) + C. \end{aligned}$$

III. Avaldada

$$I = \int 5^{x+\sin x} dx + \int 5^{x+\sin x} \cos x dx.$$

Lahendus. Valemi (14) põhjal võime antud integraalide summa esitada üheainsa integraalina:

$$\begin{aligned} I &= \int (5^{x+\sin x} + 5^{x+\sin x} \cos x) dx = \\ &= \int 5^{x+\sin x} (1 + \cos x) dx. \end{aligned}$$

Saadud integraal omab kuju $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$, kus $\varphi(x) = x + \sin x$ ja $f[\varphi(x)] = 5^{x+\sin x}$. Võtame uueks muutujaks $u = x + \sin x$. Siis $du = (1 + \cos x) dx$ ja

$$I = \int 5^u du = \frac{5u}{\ln 5} + C = \frac{5^{x+\sin x}}{\ln 5} + C.$$

IV. Tuletada valem $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ avaldamiseks.

Lahendus. Võtame uueks muutujaks $u = f(x)$. Siis $du = f'(x) dx$ ja $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |f(x)| + C$.

V. Avaldada $\int \frac{dx}{(1+x^2)(7-3 \arctan x)}$.

Lahendus.

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)(7-3 \arctan x)} = -\frac{1}{3} \int \frac{\frac{3}{1+x^2}}{7-3 \arctan x} dx.$$

Nagu näha, on saadud integraalis integreeritavaks funktsiooniks murd, mille lugeja on nimetaja tuletis. Seega on eelmises

näites leitud valemi põhjal ülesande vastuseks

$$-\frac{1}{3} \ln |7 - 3 \arctan x| + C.$$

VI. Avaldada $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-7x)^2}}$.

Lahendus. Teame, et

$$\int \frac{dt}{\sqrt[5]{t^2}} = \int t^{-\frac{2}{5}} dt = \frac{5}{3} t^{\frac{3}{5}} + C.$$

Seega on valemi (17) põhjal

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-7x)^2}} = -\frac{1}{7} \cdot \frac{5}{3} (3-7x)^{\frac{3}{5}} + C.$$

VII. Avaldada $\int e^{xx} dx$.

Lahendus. Antud integraali on võimalik avaldada ositi integreerimise teel. Osti integreerimise valemit (18) rakendades saame antud integraali alust avaldist $e^{xx} dx$ mitmel viisil tegurite u ja dv korrutiseks lahutada. Valime näiteks $u = e^x$ ja $dv = x dx$. Siis $du = e^x dx$, $v = \frac{x^2}{2}$ ja (18) järgi

$$\int e^{xx} dx = \frac{x^2}{2} e^x - \frac{1}{2} \int e^{xx^2} dx.$$

Ilmselt ei olnud see valik otstarbekohane, sest antud integraali avaldamine ei taandunud temast lihtsama integraali avaldamisele.

Valime u ja dv teisiti. Näiteks $u = e^{xx}$ ja $dv = dx$. Siis $du = e^x(x+1) dx$, $v = x$ ja $\int e^{xx} dx = e^{xx^2} - \int e^{xx}(x+1) dx$. Ka see valik ei vii sihile.

Võtame nüüd $u = x$ ja $dv = e^x dx$. Siis $du = dx$, $v = e^x$ ja $\int e^{xx} dx = xe^x - \int e^x dx$. Nagu näha, on seekordne valik otstarbekohane, sest võrduse paremal poolel esinev integraal on märksa lihtsam esialgselt: $\int e^x dx = e^x + C$.

Seega

$$\int e^{xx} dx = e^x(x-1) + C.$$

VIII. Avaldada

$$\int e^{-t} \cos \frac{t}{3} dt. \quad (*)$$

Lahendus. Antud ülesande lahendamise ositi integreerimise teel. Valime $u = \cos \frac{t}{3}$ ja $dv = e^{-t} dt$. Siis $du = -\frac{1}{3} \sin \frac{t}{3} dt$, $v = -e^{-t}$ ja

$$\int e^{-t} \cos \frac{t}{3} dt = -e^{-t} \cos \frac{t}{3} - \frac{1}{3} \int e^{-t} \sin \frac{t}{3} dt. \quad (**)$$

Viimane integraal ei ole siin küll lihtsam antud integraalist (*), kuid erinevus nende vahel on parajasti niisugune, et kui viimast integraali omakorda ositi integreerida, siis võib loota, et ta avaldise ilmub lähteintegraal (*), nii et tekib võrrand, millest lähteintegraal on avaldatav.

Valime $u = \sin \frac{t}{3}$ ja $dv = e^{-t} dt$. Siis $du = \frac{1}{3} \cos \frac{t}{3} dt$, $v = -e^{-t}$ ja

$$\int e^{-t} \sin \frac{t}{3} dt = -e^{-t} \sin \frac{t}{3} + \frac{1}{3} \int e^{-t} \cos \frac{t}{3} dt.$$

Asetades nüüd saadud avaldise võrdusse (**), saame

$$\int e^{-t} \cos \frac{t}{3} dt = -e^{-t} \cos \frac{t}{3} + \frac{1}{3} e^{-t} \sin \frac{t}{3} - \frac{1}{9} \int e^{-t} \cos \frac{t}{3} dt.$$

Liites võrduse mõlemale poolele $\frac{1}{9} \int e^{-t} \cos \frac{t}{3} dt$, saame

$$\frac{10}{9} \int e^{-t} \cos \frac{t}{3} dt = -e^{-t} \cos \frac{t}{3} + \frac{1}{3} e^{-t} \sin \frac{t}{3} + C,$$

millest lõpuks

$$\int e^{-t} \cos \frac{t}{3} dt = \frac{3e^{-t}}{10} \left(\sin \frac{t}{3} - 3 \cos \frac{t}{3} \right) + C.$$

IX. Avaldada $\int \frac{2x^3 + 5x^2 - 2x + 2}{2x^2 + 3x - 2} dx.$

Lahendus. Et integraaliluse murdratsionaalse funktsiooni lugeja on kõrgema astme polünoom kui nimetaja, siis eraldame kõigepealt läbijagamisega täisosa:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 - 2x + 2 \\ 2x^3 + 3x^2 - 2x \\ \hline 2x^2 + 2 \\ 2x^2 + 3x - 2 \\ \hline -3x + 4 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 2x^2 + 3x - 2 \\ x + 1 \end{array} \right.$$

Seega

$$\frac{2x^3 + 5x^2 - 2x + 2}{2x^2 + 3x - 2} = x + 1 + \frac{-3x + 4}{2x^2 + 3x - 2}.$$

Viimase murru teisendame nüüd osamurdude summaks. Selleks lahutame esmalt nimetaja tema nullkohtade abil tegureiks:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0,$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4},$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ ja } x^2 = -2. \quad (**)$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x + 2) = (2x - 1)(x + 2).$$

Juhise (20) kohaselt on siis

$$\frac{-3x + 4}{(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{x + 2}.$$

Konstandid A ja B leiame määramata kordajate meetodi abil. Selleks korrutame samasuse mõlemaid pooli ühise nimetajaga. Saame

$$-3x + 4 \equiv A(x + 2) + B(2x - 1). \quad (**)$$

Nüüd võime kordajad A ja B leida kahel viisil.

1. Et samasus (**) on kehtiv iga x väärtuse puhul, siis võime sellest samasusest tuletada otsitavaid konstante sisaldavaid võrrandeid, andes x -le eriväärtusi. Otstarbekohane on võtta x võrdseks nimetaja nullkohtadega (*), sest iga niisuguse x väärtuse puhul saame võrrandi, mis sisaldab ainult ühte otsitavat konstanti. Seega, võttes $x = \frac{1}{2}$, saame

$$-\frac{3}{2} + 4 = A \left(\frac{1}{2} + 2 \right) \text{ ehk } \frac{5}{2} = \frac{5}{2}A \text{ millest } A = 1.$$

Kui $x = -2$, siis saame võrrandi

$$6 + 4 = B(-4 - 1) \text{ ehk } 10 = -5B, \text{ millest } B = -2.$$

Seda võtet nimetatakse eriväärtuste võtteks.

2. Korraldame samasuse (**) parema poole x astmete järgi:

$$-3x + 4 \equiv (A + 2B)x + (2A - B).$$

Et polünoomide samasuse mõlemal poolel on x ühesuguste

astmete kordajad võrdsed, siis saame A ja B määramiseks võrrandi-süsteemi

$$\begin{aligned} A + 2B &= -3, \\ 2A - B &= 4, \end{aligned}$$

millest jälle $A = 1$ ja $B = -2$.

Niisiis

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 + 5x^2 - 2x + 2}{2x^2 + 3x - 2} dx &= \int (x + 1) dx + \int \frac{1}{2x - 1} dx - \\ &- \int \frac{2}{x + 2} dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \ln|2x - 1| - 2 \ln|x + 2| + C, \end{aligned}$$

kus kaks viimast integraali on avaldatud valemite (1) ja (17) abil.

X. Avaldada $\int \frac{2x - 1}{(x^3 - 2x^2 + x)(x^2 + x + 1)} dx$.

Lahendus. Lahutame nimetaja tegureiks:

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2.$$

Ruuttrinoomi $x^2 + x + 1$ ei saa reaalsete kordajatega tegureiks lahutada, sest ta nullkohad on kompleksarvud. Seega

$$(x^3 - 2x^2 + x)(x^2 + x + 1) = x(x - 1)^2(x^2 + x + 1).$$

Integreeritav murd teisendub nüüd juhise (20) kohaselt järgmiste osamurdude summaks:

$$\frac{2x - 1}{x(x - 1)^2(x^2 + x + 1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x - 1} + \frac{Mx + N}{x^2 + x + 1},$$

millest

$$2x - 1 \equiv A(x - 1)^2(x^2 + x + 1) + Bx(x^2 + x + 1) + Cx(x - 1)(x^2 + x + 1) + (Mx + N)x(x - 1)^2. \quad (*)$$

Võttes siin $x = 0$, saame kordaja A määramiseks võrrandi $-1 = A$.

Võttes $x = 1$, saame kordaja B määramiseks võrrandi $1 = 3B$, millest $B = \frac{1}{3}$.

Ülejäänud kordajate määramiseks ei ole eriväärtuste võtte enam sobiv. Nende leidmiseks korraldame samasuse parema poole x astmete järgi:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &\equiv -(x^4 - x^3 - x + 1) + \frac{1}{3}(x^3 + x^2 + x) + \\ &+ C(x^4 - x) + M(x^4 - 2x^3 + x^2) + N(x^3 - 2x^2 + x) \end{aligned}$$

ehk

$$2x - 1 \equiv x^4(C + M - 1) + x^3\left(1 + \frac{1}{3} - 2M + N\right) + \\ + x^2\left(\frac{1}{2} + M - 2N\right) + x\left(1 + \frac{1}{3} - C + N\right) - 1$$

ja võrrutame vastavad kordajad:

$$C + M - 1 = 0,$$

$$-2M + N + \frac{4}{3} = 0,$$

$$M - 2N + \frac{1}{3} = 0.$$

Viimasest võrrandist saame $M = 2N - \frac{1}{3}$. Asetades saadud avaldise teise võrrandisse, saame $-4N + \frac{2}{3} + N + \frac{4}{3} = 0$ ehk $-3N + 2 = 0$, millest $N = \frac{2}{3}$. Seega $M = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$. Asetades saadud M väärtuse esimesse võrrandisse, saame $C = 0$.

Kontrolliks võtame samasuses (*) $x = -1$, mille tagajärjel saame võrrandi $-3 = 4A - B + 2C + 4M - 4N$, ning vaatame, kas leitud konstandid seda võrrandit rahuldavad. Saame $4 \cdot (-1) - \frac{1}{3} + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 - 4 \cdot \frac{2}{3} = -3$, nagu peabki olema.

Niisiis

$$\int \frac{2x - 1}{(x^3 - 2x^2 + x)(x^2 + x + 1)} dx = - \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \\ + \int \frac{x + \frac{2}{3}}{x^2 + x + 1} dx.$$

Viimase integraali avaldamiseks teisendame integreeritava murru kahe murru summaks, nii et nimetaja jääks mõlemal endiseks, lugeja aga oleks ühel murrul mingi konstandi kordne nimetaja tuletis ($2x + 1$), teisel konstant:

$$\int \frac{x + \frac{2}{3}}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 1 - 1 + \frac{4}{3}}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx + \\ + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

Siin

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1)$$

näites IV saadud valemi järgi.

Integraali $\frac{1}{6} \int \frac{dx}{x^2+x+1}$ avaldamiseks teisendame nimetaja kujule $k[1+(ax+b)^2]$:

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= x^2+2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \\ &= \left(\frac{2x+1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left[1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Nüüd

$$\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

valemite (2) ja (17) järgi.

Lõpuks

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

valemite (1) ja (17) järgi.

Seega

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{(x^3-2x^2+x)(x^2+x+1)} dx &= -\ln|x| + \frac{1}{3(1-x)} + \\ &+ \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2} + \frac{1}{3(1-x)} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

XI. Avaldada $\int \frac{x dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

L a h e n d u s. Integreeritava murru nimetajat ei saa lineaarseks tegureiks lahutada. Et murru lugeja on lineaarne, siis on antud murd selline, mis esineb osamurdude (20) hulgas, mille tõttu teda polegi vaja osamurdudeks lahutada. Teisendame

integreeritava murru kahe samanimelise murru summaks, nii et ühe murru lugejaks oleks mingi konstandi kordne nimetajas esineva ruuttrinoomi tuletis $(2x + 2)$ ja teise murru lugejaks konstant:

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2 - 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \\ = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx - \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

Esimese integraali avaldamiseks võtame kasutusele uue muutuja $u = x^2 + 2x + 2$. Siis $du = (2x + 2) dx$ ja

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2u} + C = -\frac{1}{2(x^2 + 2x + 2)} + C.$$

Teise integraali avaldamiseks teisendame kõigepealt avaldist $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$. Võttes nüüd uueks muutujaks $u = x + 1$, saame $du = dx$ ja

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \int \frac{du}{(u^2 + 1)^2}.$$

Saadud integraali avaldame rekursioonvalemi (21) abil, kusjuures antud juhul $n = 1$:

$$\int \frac{du}{(1 + u^2)^2} = \frac{u}{2(1 + u^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{u}{2(1 + u^2)} + \frac{1}{2} \arctan u + C.$$

Seega

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = -\frac{1}{2(x^2 + 2x + 2)} - \frac{x + 1}{2(x^2 + 2x + 2)} - \\ - \frac{1}{2} \arctan(1 + x) + C = C - \frac{x + 2}{2(x^2 + 2x + 2)} - \frac{1}{2} \arctan(1 + x).$$

XII. Avaldada $\int \frac{\sin x - 1}{\sin x - 2 \cos x - 1} dx$.

L a h e n d u s. Integreeritava funktsiooni võime teisendada ratsionaalseks asendusega (22):

$$\tan \frac{x}{2} = t.$$

Valemite (23) põhjal on siis

$$\begin{aligned}\sin x - 1 &= \frac{2t - 1 - t^2}{1 + t^2} = -\frac{(t-1)^2}{1 + t^2}, \\ \sin x - 2 \cos x - 1 &= \frac{t^2 + 2t - 3}{1 + t^2} = \frac{(t-1)(t+3)}{1 + t^2}, \\ dx &= \frac{2dt}{1 + t^2}\end{aligned}$$

ja

$$\int \frac{\sin x - 1}{\sin x - 2 \cos x - 1} dx = \int \frac{2(1-t)}{(t+3)(1+t^2)} dt.$$

Edasi

$$\begin{aligned}\frac{2-2t}{(t+3)(1+t^2)} &\equiv \frac{A}{t+3} + \frac{Mt+N}{1+t^2}, \\ 2-2t &\equiv A(1+t^2) + (Mt+N)(t+3),\end{aligned}$$

millest

$$A = \frac{4}{5}, \quad M = -\frac{4}{5}, \quad N = \frac{2}{5}.$$

Seega

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x - 1}{\sin x - 2 \cos x - 1} dx &= \frac{4}{5} \int \frac{dt}{t+3} - \frac{2}{5} \int \frac{2t dt}{1+t^2} + \frac{2}{5} \int \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \frac{4}{5} \ln \left| \tan \frac{x}{2} + 3 \right| - \frac{2}{5} \ln \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) + \frac{2}{5} \arctan \tan \frac{x}{2} + C = \\ &= \frac{4}{5} \ln \left| \sin \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{2} \right| + \frac{2}{5} \arctan \tan \frac{x}{2} + C.\end{aligned}$$

XIII. Avaldada $\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx.$

Lahendus. Et integreeritav funktsioon on ratsionaalne $\sin^2 x$ ja $\cos^2 x$ suhtes, siis tuleks integraali avaldamiseks kasutada juhise (26) kohaselt asendust $\tan x = t$. Selle asenduse puhul teisenduks antud integraal valemite (27) põhjal kujule $\int \frac{(1+t^4)dt}{(1-t^2)(1+t^2)^2}$, mille avaldamiseks määramata kordajate meetodil tuleks leida 6 konstanti (sest nimetaja aste on 6). Ilmselt

nõuaks see palju arvutustööd. Sellepärast uurime, kas pole võimalik integreeritavat funktsiooni nii teisendada, et integreerimine oleks lihtsam.

Kõigepealt saame lihtsustada murru nimetajat, sest $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. Samuti saame lihtsustada lugejat:

$$\begin{aligned} \cos^4 x + \sin^4 x &= \cos^4 x + \sin^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x = \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 + \frac{4 \sin^2 x \cos^2 x}{2} = \cos^2 2x + \frac{1}{2} \sin^2 2x. \end{aligned}$$

Seega

$$\frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\cos^2 2x + \frac{1}{2} \sin^2 2x}{\cos 2x} = \cos 2x + \frac{\sin^2 2x}{2 \cos 2x}$$

ja

$$\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int \cos 2x dx + \frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} dx.$$

Esimese integraali avaldamiseks kasutame valemuid (6) ja (17):

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Kui edasi integraali $\frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} dx$ avaldamiseks kasutada asendust (22) ja valemuid (23) (kusjuures need valemid antud juhul omaksid kuju $\tan x = t$, $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ja $dx = \frac{dt}{1+t^2}$), siis

$$\frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} dx = 2 \int \frac{t^2(1+t^2)dt}{(1+t^2)^2(1-t^2)(1+t^2)} = 2 \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2(1-t^2)},$$

mille avaldamine nõuaks jälle 6 kordaja leidmist. Ka siin saab lihtsamini, kui korrutada integraali $\frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} dx$ lugejat ja nimetajat avaldisega $\cos 2x$:

$$\frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 2x \cos 2x}{\cos^2 2x} dx$$

ja kasutades asendust (24): $\sin 2x = t$. Siis

$$2 \cos 2x dx = dt, \cos^2 2x = 1 - t^2$$

ja

$$\frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} dx = \frac{1}{4} \int \frac{t^2 dt}{1-t^2}.$$

Nüüd

$$\frac{t^2}{1-t^2} = \frac{t^2 - 1 + 1}{1-t^2} = -1 + \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} - 1,$$

$$\frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t},$$

$$1 = A(1+t) + B(1-t),$$

millest $t = 1$ puhul järeldub $A = \frac{1}{2}$ ja $t = -1$ puhul $B = \frac{1}{2}$.

Järelikult

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int \frac{t^2}{1-t^2} dt &= \frac{1}{8} \int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{8} \int \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{4} \int dt = \\ &= \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{4} t = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x} \right| - \frac{\sin 2x}{4}. \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx &= \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x} \right| - \frac{\sin 2x}{4} + C = \\ &= \frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} \right| + \sin 2x \right) + C. \end{aligned}$$

XIV. Avaldada $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1}} dx.$

Lahendus. On vaja integreerida ratsionaalset funktsiooni irratsionaalavaldistest $\sqrt[3]{x+1}$ ja $\sqrt{x+1}$. Niisiis võib kasutada asendust (29). Antud juhul on $a=1$, $b=1$, $c=0$, $d=1$, seega $ad-bc=1 \neq 0$; $p=3$ ja $q=2$, mistõttu $n=6$. Järelikult peame asendama $x+1=t^6$. Seega $dx=6t^5 dt$, $t=\sqrt[6]{x+1}$, $\sqrt[3]{x+1}=t^2$, $\sqrt{x+1}=t^3$ ja

$$\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{t^2 6t^5 dt}{t^2 + t^3} = 6 \int \frac{t^5 dt}{1+t}.$$

Jagades lugeja nimetajaga täisososa eraldamiseks, saame $\frac{t^5}{1+t} =$
 $= t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}.$

Järelikult

$$\int \frac{t^5}{1+t} dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(t+1)$$

ja

$$\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1}} dx = \frac{6}{5} \sqrt[6]{(x+1)^5} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt{x+1} -$$

$$- 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt{x+1} - \ln(\sqrt[6]{x+1} + 1) + C.$$

XV. *Avaldada* $\int \frac{2+3x}{\sqrt{x^2+x+3}} dx.$

Lahendus. Lahutame antud integraali kahe integraali summaks, nii et ühe integraali lugeja oleks nimetajas esineva juuritava tuletis ja teise integraali lugeja oleks konstant:

$$\int \frac{2+3x}{\sqrt{x^2+x+3}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x + \frac{4}{3}}{\sqrt{x^2+x+3}} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+3}}.$$

Siin

$$\frac{3}{2} \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}} dx = 3\sqrt{x^2+x+3}.$$

Teise integraali avaldamiseks teisendame juuritava avaldise kujule $x^2+x+3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$, milles asendame $x + \frac{1}{2} = y$.

Seega $dx = dy$, $\sqrt{x^2+x+3} = \sqrt{y^2 + \frac{11}{4}}$ ja

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+3}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \frac{11}{4}}} = I.$$

Integraali I avaldamiseks kasutame teisendusi (31): $y =$
 $= \frac{\sqrt{11}}{2} \tan t$ või $y = \frac{\sqrt{11}}{2} \operatorname{sh} t.$

Kui asendada $y = \frac{\sqrt{11}}{2} \tan t$, siis

$$dy = \frac{\sqrt{11}}{2} \frac{dt}{\cos^2 t}, \quad \sqrt{y^2 + \frac{11}{4}} = \sqrt{\frac{11}{4} \tan^2 t + \frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2} \cdot \frac{1}{\cos t}$$

ja

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \frac{11}{4}}} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t} = \int \frac{du}{1-u^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C, \text{ kus } u = \sin t \text{ (vt. näide XIII).}$$

Seega

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \frac{11}{4}}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right| = \ln \left| \frac{1 + \sin t}{\cos t} \right| + C,$$

kusjuures

$$\frac{1}{\cos t} = \frac{2}{\sqrt{11}} \sqrt{y^2 + \frac{11}{4}} = \frac{2}{\sqrt{11}} \sqrt{x^2 + x + 3}, \quad \tan t = \frac{2y}{\sqrt{11}} = \frac{2x+1}{\sqrt{11}},$$

$$\sin t = \tan t : \frac{1}{\cos t} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+3}},$$

$$\frac{1 + \sin t}{\cos t} = \frac{2\sqrt{x^2+x+3} + 2x+1}{2\sqrt{x^2+x+3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{11}} \sqrt{x^2+x+3} =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2+x+3} + 2x+1}{\sqrt{11}}.$$

Niisiis

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \frac{11}{4}}} = \ln |2\sqrt{x^2+x+3} + 2x+1| - \ln \sqrt{11} + C,$$

kusjuures $-\ln \sqrt{11} + C$ kui meelevaldset konstanti võib tähistada lihtsalt C -ga.

Kui aga asendada $y = \frac{\sqrt{11}}{2} \operatorname{sh} t$, siis

$$dy = \frac{\sqrt{11}}{2} \operatorname{ch} t dt,$$

$$\sqrt{y^2 + \frac{11}{4}} = \sqrt{\frac{11}{4} \operatorname{sh}^2 t + \frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2} \operatorname{ch} t,$$

$$\operatorname{sh} t = \frac{2y}{\sqrt{11}} = \frac{2x+1}{\sqrt{11}}$$

ja

$$t = \operatorname{Arsh} \frac{2x+1}{\sqrt{11}} = \ln \left[\frac{2x+1}{\sqrt{11}} + \sqrt{\frac{(2x+1)^2}{11} + 1} \right] = \\ = \ln(2x+1 + 2\sqrt{x^2+x+3}) - \ln\sqrt{11}.$$

Seega

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+3}} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \frac{11}{4}}} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{\sqrt{11}}{2} \operatorname{ch} t dt}{\frac{\sqrt{11}}{2} \operatorname{ch} t} = \\ = \frac{1}{2} \int dt = \frac{1}{2} t + C = \frac{1}{2} \ln(2\sqrt{x^2+x+3} + 2x+1) + C$$

ja

$$\int \frac{2+3x}{\sqrt{x^2+x+3}} dx = 3\sqrt{x^2+x+3} + \frac{1}{2} \ln(2\sqrt{x^2+x+3} + \\ + 2x+1) + C.$$

XVI. Avaldada $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$.

Lahendus. Kasutame asendust (30): $x = 2 \sin t$. Siis $\sqrt{4-x^2} = 2 \cos t$, $dx = 2 \cos t dt$, $t = \arcsin \frac{x}{2}$ ja $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx =$
 $= \int 4 \sin^2 t \cdot 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt = 4 \int (2 \sin t \cos t)^2 dt =$
 $= 4 \int \sin^2 2t dt = 2 \int (1 - \cos 4t) dt = 2t - \frac{1}{2} \sin 4t + C.$

Et $\sin 4t = 2 \sin 2t \cos 2t = 2 \cdot 2 \sin t \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t) =$
 $= 2x \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \left(\frac{4-x^2}{4} - \frac{x^2}{4} \right) = x \sqrt{4-x^2} \frac{2-x^2}{2},$

siis

$$\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x(x^2-2)}{4} \sqrt{4-x^2} + C.$$

XVII. Avaldada $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$.

Lahendus. Et integraal on teisendatav kujule

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \int x^5 (x^2-1)^{-\frac{2}{3}} dx,$$

siis tuleb integreerida diferentsiaalbinoomi. Antud juhul on $m = 5$, $n = 2$, $p = \frac{2}{3}$ ja $\frac{m+1}{n} = \frac{5+1}{2}$ on täisarv. Seega tuleb kasutada asendust 2° : $x^2 - 1 = t^3$ ehk $x^2 = t^3 + 1$, mille puhul

$$(x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} = (t^3)^{-\frac{2}{3}} = t^{-2}, \quad 2x dx = 3t^2 dt$$

ja

$$\begin{aligned} \int x^5 (x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} dx &= \frac{1}{2} \int x^4 (x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} 2x dx = \\ &= \frac{1}{2} \int (t^3 + 1)^2 \cdot t^{-2} \cdot 3t^2 dt = \frac{3}{2} \int (t^6 + 2t^3 + 1) dt = \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{t^7}{7} + \frac{t^4}{2} + t \right) + C = \frac{3t}{28} (2t^6 + 7t^3 + 14) + C = \\ &= \frac{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}{28} (2x^4 + 3x^2 + 9) + C. \end{aligned}$$

XVIII. *Avaldada* $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{2 - x^3}}$.

Lahendus. Antud integraal on teisendatav kujule

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{2 - x^3}} = \int x^{-3} (2 - x^3)^{-\frac{1}{3}} dx,$$

nii et on jälle tegemist diferentsiaalbinoomi integreerimisega, kusjuures $m = -3$, $n = 3$, $p = -\frac{1}{3}$ ja $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-3+1}{3} - \frac{1}{3}$ on täisarv. Niisiis tuleb kasutada asendust 3° . Seega $2x^3 - 1 = t^3$ millest $x^3 = \frac{t^3 + 1}{2}$, $x^3 = \frac{2}{t^3 + 1}$, $x = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{(t^3 + 1)^{\frac{1}{3}}}$, $2 - x^3 = \frac{2t^3}{t^3 + 1}$,

$$(2 - x^3)^{-\frac{1}{3}} = \frac{(t^3 + 1)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} t}, \quad -3x^{-4} dx = \frac{3}{2} t^2 dt \quad \text{ja}$$

$$\begin{aligned} \int x^{-3} (2 - x^3)^{-\frac{1}{3}} dx &= -\frac{1}{3} \int x (2 - x^3)^{-\frac{1}{3}} (-3x^{-4} dx) = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{2^{\frac{1}{3}} (t^3 + 1)^{\frac{1}{3}} t^2 dt}{(t^3 + 1)^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{3}} t} = -\frac{1}{2} \int t dt = -\frac{1}{4} t^2 + C = \\ &= -\frac{1}{4} (2x^3 - 1)^{\frac{2}{3}} + C = -\frac{\sqrt[3]{(2 - x^3)^2}}{4x^2} + C. \end{aligned}$$

Summa integreerimine

Ülesandeis 1033—1040 integreerida summa, tarbe korral integreeritavat funktsiooni enne integreerimist sobivalt teisendada:

$$1033. \int (x^7 + 7^x - 7) dx.$$

$$1037. \int \frac{3 - 2 \sin^3 x}{\sin^2 x} dx.$$

$$1034. \int (2x^3 - 5 \sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{4x^5} - 1) dx.$$

$$1038. \int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1} dx.$$

$$1035. \int \frac{(x-2)^2}{x} dx.$$

$$1039. \int \frac{\sqrt{x^6 + x^{-6} + 2}}{x^3} dx.$$

$$1036. \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx.$$

$$1040. \int \frac{x^2 dx}{1 + x^2}.$$

Integreerimine asendusvõttega

Ülesandeis 1041—1048 avaldada antud üldintegraal, kasutades näidatud muutuja vahetust:

$$1041. \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}, \quad x = \sin^2 z.$$

$$1042. \int \frac{dx}{x \sqrt{x-x^2}}, \quad x = \sin^2 z.$$

$$1043. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}, \quad x = \frac{1}{t}.$$

$$1044. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2-x^2}}, \quad x = a \sin t.$$

$$1045. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^3-1}}, \quad u = \sqrt{x^3-1}.$$

$$1046. \int \frac{dx}{2 \sqrt[3]{x+1}}, \quad u = 2 \sqrt[3]{x+1}.$$

$$1047. \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx, \quad u = \sqrt{1+x^2}.$$

$$1048. \int \frac{2 + \ln \tan x}{\sin x \cos x} dx, \quad u = 2 + \ln \tan x.$$

Ülesandeis 1049—1052 avaldada antud integraal valemi

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C \text{ abil:}$$

$$1049. \int \frac{6x^3 - 3x^2 - x + 2}{3x^4 - 2x^3 - x^2 + 4 - 5} dx. \quad 1051. \int \frac{dx}{1 + e^x}.$$

$$1050. \int \frac{e^{3x}}{5 - e^{3x}} dx. \quad 1052. \int \tan x dx.$$

Ülesandeis 1053—1056 on antud integraal kujul $\int f(x)f'(x)dx$, mille avaldamiseks tuleb kasutada asendust $u = f(x)$:

$$1053. \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad 1055. \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx.$$

$$1054. \int \frac{5 \arctan x}{1+x^2} dx. \quad 1056. \int (2\sqrt{x} + x) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \right) dx.$$

Ülesandeis 1057—1064 on antud integraal kujul

$$\int f[g(x)]g'(x) dx,$$

mille avaldamiseks tuleb kasutada asendust $u = g(x)$:

$$1057. \int \frac{t^2 dt}{(1+2t^3)^2}, \quad 1061. \int \frac{\sqrt[4]{(1-\arctan x)^3}}{1+x^2} dx.$$

$$1058. \int \frac{dx}{x \sqrt{1-\ln^2 x}}, \quad 1062. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt[5]{3-x^4}}.$$

$$1059. \int x \sqrt{x^2+5} dx. \quad 1063. \int \frac{\sqrt[3]{(\tan x - 3)^2}}{\cos^2 x} dx.$$

$$1060. \int \frac{2x^4}{\cos^2 x^5} dx. \quad 1064. \int \frac{\cos x}{\sin^7 x} dx.$$

Ülesandeis 1065—1072 avaldada antud integraal valemi (17) abil:

$$1065. \int (3x-7)^{15} dx. \quad 1067. \int e^{ax+b} dx.$$

$$1066. \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}. \quad 1068. \int a^{mx+n} dx.$$

$$1069. \int [\operatorname{sh}(3x-2) + \operatorname{ch} 2x] dx. \quad 1071. \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}.$$

$$1070. \int \frac{dx}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}. \quad 1072. \int \frac{dx}{1+(ax+b)^2}.$$

Ülesandeis 1073 ja 1074 teisendada integreeritav funktsioon enne integreerimist kujule $\frac{1}{1+(ax+b)^2}$:

$$1073. \int \frac{dx}{x^2+6x+13}. \quad 1074. \int \frac{dx}{2x^2-3x+7}.$$

Ülesandeis 1075 ja 1076 lahutada integreeritav funktsioon enne integreerimist kahe samanimelise murru summaks, nii et ühe murru lugeja oleks mingi konstandi kordne nimetaja tuletis ja teise murru lugeja oleks konstant:

$$1075. \int \frac{2x+5}{x^2+4x+10} dx. \quad 1076. \int \frac{8x+3}{2x^2-6x+7} dx.$$

Avaldada muutuja vahetusega:

$$1077. \int \frac{dx}{\cos^2(3x-2)}.$$

$$1078. \int \frac{dx}{1+4x^2}.$$

$$1079. \int \frac{dx}{(1+x^2)(\arctan x-1)}.$$

$$1080. \int \frac{dx}{x \sqrt[5]{(\ln x+2)^2}}.$$

$$1081. \int \frac{dx}{1+(9-6x+x^2)}.$$

$$1082. \int \frac{dx}{7+\sqrt{2x-3}}.$$

$$1083. \int (e^{4x} + 5^{2x} - 2 \cdot 7^{-3x}) dx.$$

$$1084. \int \left[\frac{1}{(5x+1)^3} + \sqrt[3]{7-8x} \right] dx.$$

$$1085. \int \sqrt[5]{(7-\cos x)^3} \sin x dx.$$

1086. $\int_i \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}$.

1089. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$.

1087. $\int_i \frac{\arctan^2 x - 3}{1 + x^2} dx$.

1090. $\int \frac{3 - 7x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

1088. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} (5 + \arcsin x)}$.

Ositi integreerimine

1091. $\int (2x - 5) \sin x dx$.

1098. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

1092. $\int (x + \sin x) \cos x dx$. 1099. $\int e^x \sin x dx$ ja $\int_1 e^x \cos x dx$.

1093. $\int x e^{-x} dx$.

1100. $\int e^x \operatorname{ch} 2x dx$.

1094. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

1101. $\int (x^3 - 3x + 1) e^{4x} dx$.

1095. $\int \arcsin x dx$.

1102. $\int \left(x - \frac{1}{x}\right) \ln x dx$.

1096. $\int \arctan x dx$.

1103. $\int x^2 \operatorname{sh} x dx$.

1097. $\int x^n \ln x dx, n \neq -1$.

1104. $\int_i x^3 e^x dx$.

Ratsionaalsete funktsioonide integreerimine

1105. $\int_i \frac{dx}{(x+1)(x-3)}$.

1109. $\int \frac{x^2 + 8}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx$.

1106. $\int_i \frac{x + 2}{(x^2 - 1)(x + 1)^2} dx$.

1110. $\int \frac{x^3 + x^2 + 2}{x(x^2 - 1)^2} dx$.

1107. $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$.

1111. $\int \frac{11x + 16}{(x - 1)(x - 2)^2} dx$.

1108. $\int \frac{x + 6}{x(x - 1)(x - 2)(x - 3)} dx$.

1112. $\int \frac{x^2}{(x - 1)^3} dx$.

$$1113. \int \frac{x^5 - 2x^4 + 3}{x^3 - 3x^2 - 10x} dx.$$

$$1114. \int \frac{x^4 + x^2 + 2}{x^3 - 7x + 6} dx.$$

$$1115. \int \frac{x^4 - x^2 + 2x}{x^2 - 1} dx.$$

$$1116. \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x} dx.$$

$$1117. \int \frac{x^3 + x}{(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 4x + 4)} dx.$$

$$1118. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 3x - 9}{(x + 3)^2(x + 4)^2} dx.$$

$$1119. \int \frac{x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + 4x}{(x^2 - 1)(x + 1)} dx.$$

$$1120. \int \frac{x^3 - 2}{(x - 1)^2(x + 2)^2} dx.$$

$$1121. \int \frac{3x - 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx.$$

$$1122. \int \frac{2x^3 - 7x^2 + 9x}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 - x - 2)} dx.$$

1123. $\int \frac{x^3}{(x + 1)^{200}} dx$. Mitu kordajat tuleks arvutada, kui antud murd tavalisel viisil osamurdudeks lahutada? Avaldada integraal kasutades teisendust $x = t - 1$.

1124. Avaldada $\int \frac{x^2}{(1 - x)^{100}} dx$, kasutades eelmises ülesandes antud näpunäidet.

$$1125. \int \frac{dx}{16x^2 - 8x + 3}.$$

$$1128. \int \frac{x^3}{x^2 + x + 1} dx.$$

$$1126. \int \frac{x - 3}{x^2 + 4x + 7} dx.$$

$$1129. \int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} dx.$$

$$1127. \int \frac{8x + 3}{4x^2 + 12x + 11} dx.$$

$$1130. \int \frac{x^2}{5 + 2x + x^2} dx.$$

1131. $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$.

1138. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

1132. $\int \frac{dx}{(2x^2 + 3)x^2}$.

1139. $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$.

1133. $\int \frac{7x^2 + 14x + 47}{(x + 3)(x^2 + 25)} dx$.

1140. $\int \frac{x^2}{x^4 - 1} dx$.

1134. $\int \frac{4x}{(x - 1)^3(x^2 + 1)} dx$.

1141. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$.

1135. $\int \frac{dx}{(4x^2 + 5)(1 - x)}$.

1142. $\int \frac{x dx}{(x + 1)(x^2 + 1)^2}$.

1136. $\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + 3)(x^2 - 1)}$.

1143. $\int \frac{3x - 4}{(x^2 + 1)^2} dx$.

1137. $\int \frac{dx}{x^5 + 3x^4 + 5x^3}$.

1144. $\int \frac{dx}{(x^4 - 1)^3}$.

Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine

1145. Avaldada $\int \cos^2 x dx$, kasutades teisendust $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

1146. Avaldada $\int \sin^2 x dx$, kasutades teisendust $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

1147. Avaldada $\int \cos^4 x dx$, kasutades teisendust $\cos^4 x = \frac{1}{4}(1 + \cos 2x)^2$.

1148. Avaldada $\int \sin^3 x dx$, kasutades teisendust $\sin^3 x = (1 - \cos^2 x) \sin x$.

1149. Avaldada $\int \sin^5 x dx$, kasutades teisendust $\sin^5 x = (1 - \cos^2 x)^2 \sin x$.

1150. Avaldada $\int \frac{dx}{\sin x}$, kasutades teisendust $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}$.

1151. Avaldada $\int \frac{dx}{\cos x}$, kasutades eelmise ülesande tulemust ja teisendust $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

1152. Avaldada $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$, kasutades teisendust

$$\sin x - \cos x = \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

1153. Avaldada $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ eelmise ülesande eeskujul.

1154. Avaldada $\int \frac{1}{1 + \cos x} dx$, kasutades teisendust $1 + \cos x =$

$$= 2 \cos^2 \frac{x}{2}.$$

1155. Avaldada $\int \frac{1}{1 - \cos x} dx$ eelmise ülesande eeskujul.

Ülesandeis 1156—1163 kasutada asendust (22):

1156. $\int \frac{dx}{4 + 5 \cos x}$ 1159. $\int \frac{2 + \cos x}{\sin x - 7 \cos x - 5} dx.$

1157. $\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}$ 1160. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}.$

1158. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$ 1161. $\int \frac{\sin x}{\cos x - 2 \sin x + 2} dx.$

1162. Avaldada $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$, teisendades integreeritava funktsiooni enne integreerimist summaks.

1163. Avaldada $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$, kasutades teisendust $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x.$

Ülesandeis 1164—1167 kasutada asendust (24) või (25):

1164. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x} dx.$ 1166. $\int \frac{\tan x}{1 + \cos x} dx.$

1165. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$ 1167. $\int (\cos^3 x - \sin^2 x \sin 2x) dx.$

Ülesandeis 1168—1174 kasutada asendust (26):

$$1168. \int \frac{dx}{1 - \tan x}.$$

$$1172. \int \frac{dx}{3 - 2 \sin^2 x + 4 \cos^2 x}.$$

$$1169. \int \frac{\tan x}{1 - 2 \tan x} dx.$$

$$1173. \int \frac{\sin x - \frac{1}{2} \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

$$1170. \int \frac{dx}{\cos^5 x}.$$

$$1174. \int \frac{dx}{\sin^4 x}.$$

$$1171. \int \frac{dx}{2 + 3 \sin^2 x}.$$

Ülesandeis 1175—1180 teisendada integreeritava funktsiooni summaks vastavalt valemeile

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2} [\cos(u - v) - \cos(u + v)],$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2} [\cos(u - v) + \cos(u + v)],$$

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2} [\sin(u - v) + \sin(u + v)]:$$

$$1175. \int \sin mx \sin nx dx.$$

$$1178. \int \sin 3x \cos 2x dx.$$

$$1176. \int \sin mx \cos nx dx.$$

$$1179. \int \sin^3 2x \sin^2 3x dx.$$

$$1177. \int \cos mx \cos nx dx.$$

$$1180. \int \cos 2x \cos 3x \cos 4x dx.$$

EkspONENTFUNKTSIOONI JA HÜPERBOOLSETE FUNKTSIOONIDE INTEGREERIMINE

Ülesandeis 1181—1184 kasutada asendust (28):

$$1181. \int \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx.$$

$$1183. \int \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^{2x} + 1} dx.$$

$$1182. \int \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx.$$

$$1184. \int \frac{e^x - 2}{e^{2x} + 4} dx.$$

$$1185. \text{Avaldada } \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x \pm 1}}, \text{ kasutades teisendust } e^x \pm 1 = z^4.$$

$$1186. \text{Avaldada } \int e^{\sqrt{x}} dx, \text{ kasutades teisendust } \sqrt{x} = u.$$

$$1187. \text{Avaldada } \int \operatorname{sh}^2 x dx, \text{ kasutades teisendust } \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1188. Avaldada $\int \text{cth}^3 x \, dx$, kasutades teisendust

$$\text{cth}^3 x = \frac{\text{ch}^3 x}{\text{sh}^3 x} = \frac{\text{ch} x (1 + \text{sh}^2 x)}{\text{sh}^3 x}.$$

1189. Avaldada $\int \frac{dx}{\text{sh} x \text{ch} x}$, kasutades teisendust $\text{sh} x \text{ch} x = \frac{\text{sh} x \text{ch}^2 x}{\text{ch} x} = \text{th} x \text{ch}^2 x$.

1190. Avaldada $\int \text{sh}^3 x \, dx$, teisendades integreeritava funktsiooni summaks valemi $\text{sh}^2 x = \text{ch}^2 x - 1$ abil.

1191. Avaldada $\int \text{th}^2 x \, dx$, teisendades integreeritava funktsiooni summaks valemi $\text{th} x = \frac{\text{sh} x}{\text{ch} x}$ ja eelmises ülesandes kasutatud valemi abil.

Irratsionaalsete funktsioonide integreerimine

Ülesandeis 1192—1197 kasutada asendust (29):

$$1192. \int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} \, dx.$$

$$1195. \int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} \, dx.$$

$$1193. \int \frac{\sqrt{x+1}}{x} \, dx.$$

$$1196. \int \frac{2+x}{\sqrt[3]{3-x}} \, dx.$$

$$1194. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

$$1197. \int \frac{x \, dx}{\sqrt[5]{a+bx}}.$$

1198. Avaldada $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$ asendusega (29) ja asendusega $x = \cos u$. Kumba asendust tuleks eelistada?

1199. Avaldada $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}}$, teisendades nimetaja ratsionaalseks.

1200. Avaldada $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx$, teisendades lugeja ratsionaalseks.

1201. Avaldada $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{x^2}$, taandades selle integraali asendusega $x = \frac{1}{u}$ eelmises ülesandes antud integraaliks.

Ülesandeis 1202—1211 kasutada kas teisendust (30), (31) või (32):

$$1202. \int \frac{dx}{\sqrt{16x^2 - 8x + 3}}. \quad 1207. \int x \sqrt{-x^2 + 4x - 3} dx.$$

$$1203. \int \frac{18x - 5}{\sqrt{9x^2 - 6x - 2}} dx. \quad 1208. \int \frac{x + 5}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx.$$

$$1204. \int \frac{3x + 5}{\sqrt{3 + 4x - 4x^2}} dx. \quad 1209. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$1205. \int \sqrt{1 - x^2} dx. \quad 1210. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$1206. \int \sqrt{4x^2 + 4x + 5} dx. \quad 1211. \int \frac{x^2 + 4x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx.$$

1212. Avaldada $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}$ asendades $x = \frac{1}{t}$.

1213. Avaldada $\int \frac{dx}{2x \sqrt{1 - x^2}}$, asendades $u = \sqrt{1 - x^2}$.

Ülesandeis 1214—1219 avaldada integraal diferentsiaalbinoomist:

$$1214. \int x^{-11} (1 + x^4)^{-\frac{1}{2}} dx. \quad 1217. \int x^7 \sqrt{1 + x^2} dx.$$

$$1215. \int \frac{\sqrt[3]{x - x^3}}{x} dx. \quad 1218. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1216. \int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}. \quad 1219. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(\sqrt[3]{x} + 1)^3}}.$$

Mitmesuguste funktsioonide integreerimine

$$1220. \int \frac{x^3 dx}{x^2 + 2x + 2}. \quad 1222. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x - 1}}.$$

$$1221. \int \frac{\sin x}{4 \sin x + 3 \cos x} dx. \quad 1223. \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}.$$

1224. $\int \frac{\sqrt[5]{(3 - \arctan x)^2}}{1 + x^2} dx.$
1225. $\int \frac{4x^3 + 5x^2 + 2x + 1}{(x^3 + 2x^2 + x)(x^2 - 1)} dx.$
1226. $\int \frac{dx}{2 + \sqrt[3]{x}}.$
1227. $\int \frac{2x^6 - 5x^5 - x^3 + 5}{(x^2 - 1)(x^2 + 2x)} dx.$
1228. $\int_1^2 x 3^x dx.$
1229. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$
1230. $\int \frac{\sin^2 2x}{(\cos^3 x + \sin^3 x)^2} dx.$
1231. $\int \frac{x \arcsin x}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} dx.$
1232. $\int \frac{x^2 + \arctan x}{1 + x^2} dx.$
1233. $\int \frac{dx}{e^x + e^{2x}}.$
1234. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$
1235. $\int \frac{\ln(x - 1)}{(x + 1)^3} dx.$
1236. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x + 1}}.$
1237. $\int \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + x^2} \left(\frac{x^2 - 2x}{\sqrt[3]{x^3 - 3x^2}} + 2x \right) dx.$
1238. $\int \frac{4}{x^3} e^x dx.$
1239. $\int x \arctan x dx.$
1240. $\int \cos^3 x dx.$
1241. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 4}}.$
1242. $\int \frac{\ln^5 x - 3 \ln^3 x}{x} dx.$
1243. $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx.$
1244. $\int (\ln x)^2 dx.$
1245. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1 + x^2}}.$
1246. $\int \frac{\sqrt[3]{x + 1}}{x(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 1})} dx.$
1247. $\int \tan^8 x dx.$
1248. $\int \frac{7x}{3x^2 - 4x + 7} dx.$
1249. $\int \left(2x - \frac{1}{x^3} \right) \sqrt{x \sqrt{x}} dx.$
1250. $\int \frac{\cot x}{1 - \sin x} dx.$
1251. $\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)(x - 2)^3}.$
1252. $\int (x^2 + 1) \cos 2x dx.$
1253. $\int \frac{x + 6}{(x^2 - x)(x^2 - 5x + 6)} dx.$
1254. $\int \sqrt[3]{e^{\cos x}} \sin x dx.$
1255. $\int \frac{dx}{1 + 2 \cos x - \sin x}.$
1256. $\int \frac{2x^3 - 7x^2 + 9x}{(x^2 - 1)(x - 2)^2} dx.$
1257. $\int \frac{dx}{4 + 2 \sin x}.$
1258. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}(3 + \arcsin x)}.$

$$1259. \int \frac{dx}{2 \sin x + \sin 2x}.$$

$$1260. \int_1^4 \frac{x^5 + x^4 - 7x^3 + 6x - 14}{x^2 + x - 6} dx.$$

$$1261. \int \frac{\ln x}{x^4} dx.$$

$$1262. \int \frac{dx}{3 \sin^2 2x \cos^2 2x}.$$

$$1263. \int \frac{1 - \cos^4 x}{\sin x} dx.$$

$$1264. \int_1^4 \frac{dx}{(4x^2 + 5)x^2}.$$

§ 13. MÄÄRATUD INTEGRAAL

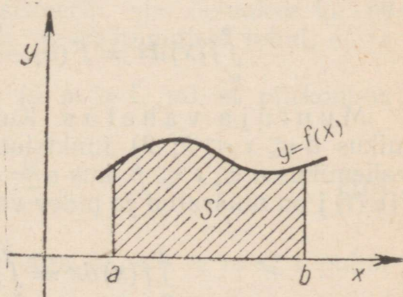
Funktsiooni $f(x)$ määratud integraaliks rajades a -st b -ni nimetatakse piirväärtust

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (1)$$

kus $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ ja $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Summat $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ nimetatakse integraalsummaks. Funktsiooni, mille puhul piirväärtus (1) eksisteerib (sõltumatuna osavahemike jaotuspunktide x_i ja osavahemikes argumendi väärtuste ξ_i valikust), nimetatakse vahemikus $a \leq x \leq b$ integreeruvaks.

Kui funktsioon on kinnises vahemikus pidev, siis on ta selles vahemikus integreeruv.

Vahemikus $a \leq x \leq b$ positiivse funktsiooni $f(x)$ puhul on $\int_a^b f(x) dx$ võrdne joontega $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ ja $x = b$ piiratud kujundi (kõverjoonelise trapetsi) pindalaga (joon. 63).



Joon. 63

Määratud integraali omadused:

- 1° $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$
- 2° $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$
- 3° $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$
- 4° $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

5° Kui vahemikus $a \leq x \leq b$ on $f(x) \geq g(x)$, siis ka

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

6° Kui $f(x)$ minimaalne väärtus vahemikus $a \leq x \leq b$ on m ja maksimaalne väärtus M , siis

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

7° Kui $f(x)$ on vahemikus $a \leq x \leq b$ pidev, siis leidub selles vahemikus vähemalt üks niisugune ärgumendi väärtus ξ , et

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

Kui funktsioon $f(t)$ on pidev kohal x , siis

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x). \quad (2)$$

Newton-Leibniz'i valem. Kui $f(x)$ on vahemikus $a \leq x \leq b$ pidev ja $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ üks algfunktsioon, siis

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x). \quad (3)$$

Muutuja vahetus. Kui 1) funktsioon $f(x)$ on pidev vahemikus $a \leq x \leq b$; 2) funktsioon $\varphi(t)$ on pidevalt diferentseeruv vahemikus $\alpha \leq t \leq \beta$, kus $a = \varphi(\alpha)$ ja $b = \varphi(\beta)$; 3) liitfunktsioon $f[\varphi(t)]$ on määratud ja pidev vahemikus $\alpha \leq t \leq \beta$, siis

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (4)$$

Kui funktsioonid $u(x)$ ja $v(x)$ on pidevalt diferentseeruvad vahemikus $a \leq x \leq b$, siis kehtib ositi integreerimise valem:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (5)$$

Trapetsvalem määratud integraali ligikaudseks arvutamiseks. Kui $\frac{b-a}{n} = h$, $x_i = a + ih$ ja $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$), siis

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})]. \quad (6)$$

Simpsoni valem. Kui $\frac{b-a}{2n} = h$, $x_i = a + ih$ ja $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, 2n$), siis

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})]. \quad (7)$$

Kui funktsioon $f(x)$ on integreeruv igas vahemikus $a \leq x \leq N$ ($N > a$) ja eksisteerib piirväärtus

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N f(x) dx, \quad (8)$$

siis nimetatakse seda piirväärtust lõpmatu rajaga päratuks integraaliks.

Kui b on funktsiooni $f(x)$ lõpmatuskoht, kuid $f(x)$ on integreeruv igas vahemikus $a \leq x \leq b - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) ja eksisteerib piirväärtus

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, \quad (9)$$

siis nimetatakse seda piirväärtust päratuks integraaliks tõkestamatust funktsioonist.

Kui piirväärtus (8) või (9) eksisteerib, siis öeldakse ka, et vastav päratu integraal koondub, ja vastupidisel juhul, et ta hajub.

Kui leiduvad konstandid $M > 0$ ja $m > 1$, nii et piirkonnas $0 < a \leq x < +\infty$

$$0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x^m}, \quad (10)$$

siis integraal $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ koondub. Kui aga $M > 0$ ja $m \leq 1$ puhul on piirkonnas $0 < a \leq x < +\infty$

$$f(x) \geq \frac{M}{x^m}, \quad (11)$$

siis integraal $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ hajub.

Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^m f(x) = A \quad [f(x) \geq 0], \quad (12)$$

siis $m > 1$ puhul integraal $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ koondub, aga $m \leq 1$ ja $A > 0$ puhul hajub.

Päratu integraal kohal b tõkestamatust funktsioonist $\int_a^b f(x) dx$ koondub, kui leiduvad konstandid $M > 0$ ja $0 < m < 1$, nii et vahemikus $0 < a \leq x < b$ kehtib võrratus

$$0 \leq f(x) \leq \frac{M}{(b-x)^m}. \quad (13)$$

Kui aga vahemikus $0 < a \leq x < b$

$$f(x) \geq \frac{M}{(b-x)^m} \quad (14)$$

ja $M > 0$, $m \geq 1$, siis integraal $\int_a^b f(x) dx$ hajub.

Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow b-0} (b-x)^m f(x) = A \quad [f(x) \geq 0], \quad (15)$$

siis $0 < m < 1$ puhul integraal $\int_a^b f(x) dx$ koondub, aga $m \geq 1$ ja $A > 0$ puhul hajub.

Kui päratu integraal funktsioonist $|f(x)|$ koondub, siis nimetatakse päratut integraali funktsioonist $f(x)$ absoluutselt koonduvaks. Iga absoluutselt koonduv integraal on koonduv. Päratut integraali, mis koondub, kuid ei koondu absoluutselt, nimetatakse tingimisi koonduvaks.

Näiteid

I. Arutada määratud integraali definitsiooni alusel

$$\int_1^2 x^3 dx.$$

Lahendus. Jaotame vahemiku $1 \leq x \leq 2$ n osavahemikuks nii, et jaotuspunktide abstsissid x_i moodustavad geomeetrilise progressiooni. Selleks võtame $x_i = 2^{\frac{i}{n}}$, $\Delta x_i = 2^{\frac{i+1}{n}} - 2^{\frac{i}{n}} = 2^{\frac{i}{n}}(2^{\frac{1}{n}} - 1)$, kus $i = 0, 1, \dots, n$. Ilmselt $\max |\Delta x_i| = \Delta x_n = 2(2^{\frac{1}{n}} - 1)$ ja $n \rightarrow \infty$ puhul $\max |\Delta x_i| \rightarrow 0$. Argumendi väärtusteks ξ_i valime osavahemike alguspunktid: $\xi_i = x_i$. Määratud integraali definitsiooni (1) järgi on siis

$$\int_1^2 x^3 dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^3 \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} 2^{\frac{3i}{n}} \cdot 2^{\frac{i}{n}} (2^{\frac{1}{n}} - 1).$$

Rakendades geomeetrilise progressiooni liikmete summa valemite ja l'Hôpitali reeglit, saame siit

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^3 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{\frac{1}{n}} - 1) \sum_{i=0}^{n-1} (2^{\frac{4}{n}})^i = \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{\frac{1}{n}} - 1) \frac{2^{\frac{4}{n} \cdot n} - 1}{2^{\frac{4}{n}} - 1} = \\ &= 15 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{2^{\frac{4}{n}} - 1} = 15 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} \ln 2 \cdot \left(-\frac{1}{n^2}\right)}{2^{\frac{4}{n}} \ln 2 \cdot \left(-\frac{4}{n^2}\right)} = \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

Et funktsioon x^3 on vahemikus $1 \leq x \leq 2$ pidev ja seega integreeruv, siis on $\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^3 \Delta x_i = \frac{15}{4}$ sõltumatult sellest, kuidas on läbi viidud vahemiku $1 \leq x \leq 2$ osavahemikeks jaotamine ja nendes osavahemikes argumentide väärtuste ξ_i valik. Ülesande lahendamisel kasutatud osavahemikeks jaotuse ja ξ_i -de valiku puhul on aga integraalsumma piirväärtuse leidmine kõige lihtsam.

II. Arvutada Newton-Leibniz'i valemi abil

$$\int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx.$$

Lahendus. Et integraalialune funktsioon $x \sqrt{1-x^2}$ on integreerimisvahemikus $0 \leq x \leq 1$ määratud ja pidev, siis on Newton-Leibniz'i valemi rakendamine lubatud. Leiame funktsiooni $x \sqrt{1-x^2}$ ühe algfunktsiooni. Selle funktsiooni kõik algfunktsioonid avalduvad üldintegraalina $\int x \sqrt{1-x^2} dx$. Asendusega $1-x^2 = u$, mille puhul $-2x dx = du$ ehk $x dx = -\frac{1}{2} du$, saame

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{1-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = -\frac{1}{3} \sqrt{u^3} + C = \\ &= -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C. \end{aligned}$$

Funktsiooni $x \sqrt{1-x^2}$ üheks algfunktsiooniks on seega $-\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3}$.

Newton-Leibniz'i valemi (3) järgi on nüüd

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx &= -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} \sqrt{(1-1^2)^3} - \\ &= -\left[-\frac{1}{3} \sqrt{(1-0^2)^3} \right] = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

III. Leida määratud integraali abil

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right).$$

Lahendus. Kui piirväärtusmärgi alune avaldis ümber kirjutada kujul

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n},$$

siis võib teda vaadelda funktsiooni $\frac{1}{1+x^2}$ integraalsummana vahemikus $0 \leq x \leq 1$, mille puhul osavahemike jaotuspunktideks on $x_i = \frac{i}{n}$, $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ ja funktsiooni väärtused on võetud osavahemike parempoolsetes otspunktides ($\xi_i = x_{i+1}$). Et funktsioon $\frac{1}{1+x^2}$ on vahemikus $0 \leq x \leq 1$ pidev ja seega integreeruv, siis on ta integraalsumma piirväärtuseks $\max |\Delta x_i| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, s. t. $n \rightarrow \infty$ puhul

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Järelikult ka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

IV. Avaldada

$$\frac{d}{dx} \int_x^{\ln x} e^{t^2} dt.$$

Lahendus. Määratud integraali omaduste 4° ja 3° põhjal on mistahes arvu a puhul

$$\int_x^{\ln x} e^{t^2} dt = \int_x^a e^{t^2} dt + \int_a^{\ln x} e^{t^2} dt = - \int_a^x e^{t^2} dt + \int_a^{\ln x} e^{t^2} dt.$$

Liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirja ja valemi (2) põhjal on nüüd

$$\frac{d}{dx} \int_x^{\ln x} e^{t^2} dt = \frac{d}{dx} \left(- \int_a^x e^{t^2} dt + \int_a^{\ln x} e^{t^2} dt \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{d}{dx} \int_a^x e^{t^2} dt + \frac{d}{dx} \int_a^{\ln x} e^{t^2} dt = -e^{x^2} + e^{\ln^2 x} \frac{d}{dx} \ln x = \\
 &= -e^{x^2} + (e^{\ln x})^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = x^{-1+\ln x} - e^{x^2}.
 \end{aligned}$$

V. Arvutada

$$\int_{-1}^2 (|x^2 - 1| + |x|) dx.$$

Lahendus. Et $|x^2 - 1| = x^2 - 1$, kui $x \geq 1$ või $x \leq -1$, ja $|x^2 - 1| = 1 - x^2$, kui $-1 \leq x \leq 1$, ning $|x| = x$, kui $x \geq 0$, ja $|x| = -x$, kui $x \leq 0$, siis on integraalilune funktsioon määratud integreerimispiirkonnas $-1 \leq x \leq 2$ avaldistega

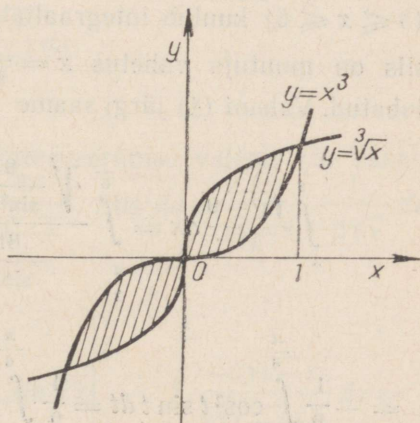
$$|x^2 - 1| + |x| = \begin{cases} 1 - x^2 - x, & \text{kui } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x^2 + x, & \text{kui } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 + x, & \text{kui } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Seega

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^2 (|x^2 - 1| + |x|) dx &= \int_{-1}^0 (1 - x^2 - x) dx + \int_0^1 (1 - x^2 + x) dx + \\
 &+ \int_1^2 (x^2 - 1 + x) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \\
 &+ \left[\frac{x^3}{3} - x + \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 0 - \left(-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - 0 + \\
 &+ \left(\frac{8}{3} - 2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{31}{6}.
 \end{aligned}$$

VI. Leida joontega $y = x^3$ ja $y^3 = x$ piiratud kujundi pindala.

Lahendus. Antud joontega — funktsioonide x^3 ja $\sqrt[3]{x}$ graafikutega — piiratud kujund koosneb kahest osast, mis on koordinaatide alguspunkti suhtes sümmeetrilised (joon. 64). Ülalpool x -telge asetseva osa pindala (pool kogu kujundi pindalast) on vaadeldav kahe kõverjoonelise trapetsi pindalade vahena. Mõlema trapetsi aluseks



Joon. 64

on vahemik $0 \leq x \leq 1$. Esimest piirab ülalt funktsiooni $\sqrt[3]{x}$ ja teist funktsiooni x^3 graafik. Nende kõverjooneliste trapetsite pindalad avalduvad määratud integraali geomeetrilise tähenduse kohaselt integraalidena rajades 0-st 1-ni vastavalt funktsioonidest $\sqrt[3]{x}$ ja x^3 . Järelikult on nõutud pindala

$$S = 2 \left(\int_0^1 \sqrt[3]{x} dx - \int_0^1 x^3 dx \right) = 2 \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right]_0^1 - 2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

VII. Arvutada

$$\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx.$$

Lahendus. Antud määratud integraali arvutamiseks on sobiv kasutada vastava üldintegraali tüübi $\int R(x, \sqrt{x^2-k^2}) dx$ jaoks ette nähtud asendust [§ 12, (32)]:

$$x = \frac{3}{\sin t}.$$

Vana muutuja x alumise raja väärtusele 3 vastavaks uue muutuja t alumise raja väärtuseks saame selle muutuja vahetuse puhul võrrandist $3 = \frac{3}{\sin t}$ $t = \frac{\pi}{2}$. Võrrandist $6 = \frac{3}{\sin t}$ saame uueks ülemiseks rajaks $\frac{\pi}{6}$. Et vahemikus $\frac{\pi}{2} \geq t \geq \frac{\pi}{6}$ on funktsioon $x = \frac{3}{\sin t}$ pidevalt diferentseeruv ja ta väärtuste hulk ($3 \leq x \leq 6$) kuulub integraalialuse funktsiooni pidevuspiirkonda, siis on muutuja vahetus $x = \frac{3}{\sin t}$ antud määratud integraalis lubatud. Valemi (4) järgi saame

$$\begin{aligned} \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{\frac{9}{\sin^2 t} - 9}}{\frac{81}{\sin^4 t}} \left(-\frac{3 \cos t}{\sin^2 t} \right) dt = \\ &= -\frac{1}{9} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t \sin t dt = \frac{1}{9} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t d \cos t = \frac{\cos^3 t}{27} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{72}. \end{aligned}$$

Märkus. Uute rajade määramisel võiksime ülemiseks rajaks võtta ka $\frac{5\pi}{6}$ või alumiseks rajaks $\frac{5\pi}{2}$ ja ülemiseks $\frac{13\pi}{6}$ — muutuja vahetuse eeskirja tingimused jääksid täidetuks ja vastus tuleks sama. Ei tohi aga näiteks alumiseks rajaks võtta $\frac{\pi}{2}$ ja ülemiseks $\frac{13\pi}{6}$, sest siis ei ole funktsioon $x = \frac{3}{\sin t}$ uute rajade vahel pidev.

VIII. Arvutada

$$\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln^2 x}}$$

Lahendus. Antud integraali lihtsustamiseks teeme kõigepealt asenduse $\ln x = u$. Siis $x = e^u$, uuteks rajadeks on 0 ja 1, $dx = e^u du$ ning muutuja vahetuse valemi tingimused on täidetud. Saame

$$\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln^2 x}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}$$

Saadud integraal on juba kergesti arvutatav asendusega $u = \operatorname{sh} t$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} &= \int_0^{\operatorname{Arsh} 1} \frac{\operatorname{ch} t dt}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t}} = \int_0^{\operatorname{Arsh} 1} dt = t \Big|_0^{\operatorname{Arsh} 1} = \\ &= \operatorname{Arsh} 1 = \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

IX. Arvutada ositi integreerimise teel

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$$

Lahendus. Võtame ositi integreerimise valemi (5) rakendamiseks $u = \arcsin \sqrt{x}$ ja $dv = \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$. Siis $du = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$,

$v = -2\sqrt{1-x}$ ja

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx = -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{-2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}} dx =$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{4\sqrt{2}} + 2\sqrt{x} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{12} (3\sqrt{2} - 4) + \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

X. Arvutada

$$\int_0^1 x^3 e^x dx.$$

Lahendus. Antud integraali väärtuse leiame kolmekordse ositi integreerimise teel, kusjuures iga kord võtame $e^x dx = dv$:

$$\int_0^1 x^3 e^x dx = x^3 e^x \Big|_0^1 - 3 \int_0^1 x^2 e^x dx = e - 3(x^2 e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx) =$$

$$= e - 3e + 6(xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx) = -2e + 6e - 6e^x \Big|_0^1 = 4e - 6e +$$

$$+ 6 = 6 - 2e.$$

XI. Arvutada ligikaudselt trapetsvalemil ja Simpsoni valemil

$$\int_0^1 \frac{4 dx}{1+x^2},$$

jaotades integreerimisvahemiku neljaks osavahemikuks.

Lahendus. Osavahemike pikkusteks on ülesande tingimuste kohaselt $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$ ning osavahemike jaotuspunktide abstsissideks $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=\frac{3}{4}$ ja $x_4=1$. Integraali aluse funktsiooni vastavate väärtuste ning trapetsvalemis (6) ja Simpsoni valemis (7) esinevate avaldiste arvutamise koondate järgmise tabelisse:

x	x^2	$1+x^2$	$y = \frac{4}{1+x^2}$	T	S
0	0	1	4 = 4,	4,	4,
1	1	17	64	7,529 42	15,058 84
4	16	16	17 = 3,764 71		
1	1	5	16	6,4	6,4
2	4	4	5 = 3,2		
3	9	25	64	5,12	10,24
4	16	16	25 = 2,56		
1	1	2	2 = 2,	2,	2,
				25,049 42	37,698 84

Antud integraali ligikaudseks väärtuseks saame seega trapetsvalemiga järgi

$$\frac{1}{4 \cdot 2} \cdot 25,049\,42 = 3,131\,18$$

ja Simpsoni valemi järgi

$$\frac{1}{4 \cdot 3} \cdot 37,698\,84 = 3,141\,57.$$

Võrreldes tulemusi integraali täpse väärtusega

$$\int_0^1 \frac{4\,dx}{1+x^2} = 4 \arctan x \Big|_0^1 = 4 \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \pi = 3,141\,592\dots,$$

näeme, et Simpsoni valem andis peaaegu sama arvutustöö juures palju täpsema tulemuse kui trapetsvalem.

XII. Arvutada

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

Lahendus. Lõpmatu ülemise rajaga päratu integraali definitsiooni põhjal on

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

Viimases integraalis teeme muutuja vahetuse $\sqrt{x} = t$, $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,dt$,

mille puhul uuteks rajadeks tulevad 1 ja \sqrt{N} :

$$\int_1^N \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_1^{\sqrt{N}} \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2 \arctan t \Big|_1^{\sqrt{N}} = 2 \arctan \sqrt{N} - \frac{\pi}{2}.$$

Seega

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(2 \arctan \sqrt{N} - \frac{\pi}{2} \right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

XIII. Urida, kas päratud integraalid

$$\text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{x\sqrt{4x-1}}{x^3+1} dx \quad \text{ja} \quad \text{b) } \int_0^{+\infty} (\pi - 2 \arctan x) dx$$

koonduvad või hajuvad.

Lahendus. Integraali a) puhul rahuldab integraalialune funktsioon võrratust

$$\frac{x\sqrt{4x-1}}{x^3+1} < \frac{x\sqrt{4x}}{x^3} = \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Seega on tingimus (10) täidetud ($M=2 > 0$, $m=\frac{3}{2} > 1$), nii et päratu integraal a) koondub.

Integraali b) puhul vaatleme piirväärtust

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^m (\pi - 2 \arctan x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \arctan x}{x^{-m}}.$$

$m > 0$ puhul lähenevad viimase murru lugeja ja nimetaja nullile, nii et l'Hôpitali reegli järgi

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{-m x^{-m-1} (1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{m x^{1-m} \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)}.$$

Järelikult on $1-m > 0$, s. t. $m < 1$ puhul $A=0$, $m=1$ puhul $A=2$ ja $m > 1$ puhul piirväärtus ei eksisteeri. Seega on integraal b) tingimuse (12) järgi hajuv ($m=1$, $A=2 > 0$).

XIV. Leida

$$\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln^2 x}}.$$

Lahendus. Et $x=1$ on integraalialuse funktsiooni lõpmatuskoht ja $\frac{1}{e} < 1 < e$, siis on antud integraal päratu. Lahutame ta kaheks, nii et lõpmatuskoht oleks liidetavaile üheks rajaks, ning arvutame mõlemad liidetavad päratu integraali definitsiooni alusel määratud integraalide piirväärtustena:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln^2 x}} &= \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{dx}{x \sqrt{\ln^2 x}} + \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln^2 x}} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{e}}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x \sqrt{\ln^2 x}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln^2 x}} \quad (\varepsilon > 0). \end{aligned}$$

Asendus $\ln x = u$, $\frac{dx}{x} = du$ annab

$$\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln^2 x}} = \int \frac{du}{\sqrt[3]{u^2}} = \int u^{-\frac{2}{3}} du = \frac{u^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3 \sqrt[3]{\ln x} + C.$$

Järelikult

$$\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln^2 x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[3 \sqrt[3]{\ln(1-\varepsilon)} - 3 \sqrt[3]{\ln \frac{1}{e}} \right] +$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[3 \sqrt[3]{\ln e} - 3 \sqrt[3]{\ln(1+\varepsilon)} \right] = 0 - 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 - 0 = 6.$$

XV. Veenduda, et integraal

$$\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$$

koondub.

Lahendus. Et $0 < x \leq 1$ puhul

$$0 \leq \left| \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

siis on päratu integraal $\int_0^1 \left| \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \right| dx$ tingimuse (13) järgi koon-

duv ($M = 1$, $m = \frac{1}{2} < 1$). Seega on integraal $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$ abso-

luutselt ja järelikult ka harilikus mõttes koonduv.

Määratud integraali definitsioon ja omadused.
Newton-Leibniz'i valem

1265. Arvutada antud integraalid integraalsummade piirväärtustena, jaotades integreerimisvahemiku võrdse pikkusega osavahemikeks ja võttes integraalsummade liikmetes funktsiooni väärtused osavahemike alguspunktides:

$$1) \int_0^1 x dx; \quad 2) \int_a^b e^x dx.$$

Ülesandeis 1266—1275 arvutada Newton-Leibniz'i valemi abil antud määratud integraal:

$$1266. \int_1^2 x^3 dx.$$

$$1267. \int_1^4 \sqrt{x} dx.$$

$$1268. \int_0^\pi \cos x dx.$$

$$1269. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1270. \int_0^1 (x - e^x) dx.$$

$$1271. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2} dx.$$

$$1272. \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{1+2x}}.$$

$$1273. \int_{-\pi}^\pi x \sin x dx.$$

$$1274. \int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} dx.$$

$$1275. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x}.$$

Leida antud piirväärtus määratud integraali abil, vaadeldes piirväärtusmärgi alust avaldist sobivalt valitud funktsiooni integraalsummana teatavas vahemikus:

$$1276. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$$1277. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right).$$

$$1278. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} \quad (k > 0).$$

$$1279. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right).$$

$$1280. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

1281. Kas Newton-Leibniz'i valem on rakendatav integraalide

$$1) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}, \quad 2) \int_0^5 \sqrt{4-x} dx$$

arvutamisel? Miks?

1282. Leida funktsiooni $y = \int_0^x \frac{3+t}{1+t^2} dt$ tuletis kohal $x=0$ ja kohal $x=1$.

Avaldada:

$$1283. \frac{d}{dx} \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt.$$

$$1285. \frac{d}{dx} \int_2^{e^x} \frac{\ln t}{t} dt.$$

$$1284. \frac{d}{dx} \int_{-x}^{x^2} \sin^2 t dt.$$

$$1286. \frac{d^2}{dx^2} \int_{x^2}^1 \ln t dt.$$

1287. Leida määratud integraalide

$$1) \int_5^{10} (x-5) dx \quad \text{ja} \quad 2) \int_0^3 \sqrt[3]{9-x^2} dx$$

väärtused, kasutades integraali geomeetrilist tähendust.

1288. Veenduda ilma algfunktsiooni leidmata, et antud integraalid on võrdsed nulliga:

$$1) \int_{-1}^1 (x^3 - x) dx;$$

$$3) \int_1^2 (x^x - e^{x \ln x}) dx;$$

$$2) \int_2^2 2^x dx;$$

$$4) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cdot \sqrt{1+x^2} dx.$$

1289. Otsustada antud integraale arvutamata, kas nad on positiivsed või negatiivsed:

$$1) \int_3^1 x^2 e^{-x} dx; \quad 2) \int_{-10}^{-2} \frac{\arctan x}{x} dx; \quad 3) \int_{-4}^3 x \cos x dx.$$

1290. Otsustada, kumb antud kahest integraalst on suurem, ilma integraalide väärtusi leidmata:

$$1) \int_0^1 \sqrt{x} dx \quad \text{ja} \quad \int_0^1 x^3 dx; \quad 3) \int_1^2 \ln x dx \quad \text{ja} \quad \int_1^2 \ln^2 x dx;$$

$$2) \int_1^2 x^2 dx \quad \text{ja} \quad \int_1^2 x^3 dx; \quad 4) \int_0^1 2^{\sin x} dx \quad \text{ja} \quad \int_0^1 2^x dx.$$

1291. Hinnata antud määratud integraale:

$$1) \int_{-1}^1 e^{x^2} dx; \quad 2) \int_2^3 \frac{x dx}{1+x^2}; \quad 3) \int_{10}^{15} \frac{dx}{10+x}.$$

1292. Leida antud määratud integraalide $\int_a^b f(x) dx$ puhul ξ ($a \leq \xi \leq b$) nii, et $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$:

$$1) \int_0^3 x^2 dx; \quad 2) \int_0^{\sqrt[3]{8}} \sqrt{x} dx; \quad 3) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$$

Funktsiooni $f(x)$ integraalkeskmiseks vahemikus $a \leq x \leq b$ nimetatakse arvu $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Leida antud funktsiooni integraalkeskmine antud vahemikus:

$$1293. f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad 1 \leq x \leq 8.$$

$$1294. f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}, \quad 1 \leq x \leq 4.$$

$$1295. f(x) = \sin x \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$1296. f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{3}.$$

1297. Arvutada $\int_{-\pi}^5 f(x) dx$, kui

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{kui } x < 0, \\ x^2, & \text{kui } 0 \leq x \leq 2, \\ 6-x, & \text{kui } 2 < x. \end{cases}$$

1298. Arvutada $\int_3^{-2} f(x) dx$, kui

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5x+26}}, & \text{kui } -2 \leq x < 2, \\ \sqrt{3x-5}, & \text{kui } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

1299. Arvutada

$$1) \int_0^2 |x-1| dx; \quad 2) \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x} dx; \quad 3) \int_{-1}^3 (|x^2-4| + |x|) dx.$$

Arvutada antud joontega piiratud kujundi pindala:

1300. $y = 4 - x^2, y = 0.$

1303. $y = x^2, y = \sqrt{x}.$

1301. $y^2 = 12x, x = 3.$

1304. $y = x(x-1)^2, y = 0.$

1302. $y = \ln x, x = e,$

1305. $y = \frac{1}{1+x^2}, x = 0,$

$y = 0.$

$y = 0, x = 1.$

1306. Leida töö, mida teeb x -telje sihiline ja suunaline jõud F jõu rakenduspunkti nihkumisel punktist $x = 1$ punkti $x = 4$, kui jõu tugevus avaldub jõu rakenduspunkti koordinaadi funktsioonina kujul $F = 3x^2 - 2x$.

1307. Vedru venitamiseks 1 cm võrra tuleb rakendada jõudu 1 kG. Leida töö, mis kulub selle vedru venitamiseks 4 cm võrra.

1308. Vedru pikkus pingevabas olekus on 20 cm. Jõud 10 kG venitab vedru 2,5 cm võrra pikemaks. Arvutada töö, mis kulub selle vedru venitamiseks pikkuselt 25 cm pikkuseni 35 cm.

Muutuja vahetus ja ositi integreerimine

1309. Selgitada, kas antud määratud integraalis on lubatud näidatud muutuja vahetus, ja kui on, siis teostada see vahetus:

$$1) \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2}, \quad x = \frac{1}{t}; \quad 4) \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}, \quad \tan x = t;$$

$$2) \int_0^2 x \sqrt[3]{1-x^2} dx, \quad x = \sin t; \quad 5) \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx, \quad e^x = t;$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos x} dx, \quad \cos x = t^2; \quad 6) \int_{-1}^{+1} \sqrt{1+x^3} dx, \quad x^3 = t.$$

Arvutada määratud integraalid, kasutades muutuja vahetust:

- | | | | |
|-------|---|-------|--|
| 1310. | $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$ | 1315. | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx.$ |
| 1311. | $\int_0^2 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx.$ | 1316. | $\int_0^{\ln 2} e^x \sqrt{e^x - 1} dx.$ |
| 1312. | $\int_0^1 \frac{x dx}{1 + x^4}.$ | 1317. | $\int_0^1 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x}}.$ |
| 1313. | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}.$ | 1318. | $\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx.$ |
| 1314. | $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx.$ | 1319. | $\int_0^4 x^3 \sqrt{x^2 + 9} dx.$ |

Arvutada määratud integraalid, kasutades näidatud muutuja vahetust:

1320. $\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx, \quad x = a \cos t.$
1321. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \arcsin x = t.$
1322. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx, \quad \tan^2 x = t.$
1323. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{3 + 2 \sin 2x} dx, \quad \sin x - \cos x = t.$
1324. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx, \quad e^x - 1 = t^2.$

Arvutada ositi integreerimise teel:

$$1325. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx.$$

$$1329. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx.$$

$$1326. \int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx.$$

$$1330. \int_0^{e-1} \ln(x+1) \, dx.$$

$$1327. \int_0^1 \arcsin x \, dx.$$

$$1331. \int_1^e \ln^3 x \, dx.$$

$$1328. \int_0^1 x \arctan x \, dx.$$

$$1332. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx.$$

Arvutada:

$$1333. \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$1338. \int_0^{\pi} x^3 \sin x \, dx.$$

$$1334. \int_0^1 x e^{-x} \, dx.$$

$$1339. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, dx.$$

$$1335. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \, dx.$$

$$1340. \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} \, dx.$$

$$1336. \int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{(1 + x^2)^3}.$$

$$1341. \int_1^e \frac{\ln x \, dx}{x^2}.$$

$$1337. \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}}.$$

$$1342. \int_{-1}^{+1} \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Määratud integraali ligikaudne arvutamine

Arvutada antud määratud integraali ligikaudne väärtus trapetsvalemi abil, jaotades integreerimisvahemiku n osavahemikuks:

$$1343. \int_0^1 x^3 dx, \quad n = 4.$$

$$1345. \int_{0,4}^{0,5} \tan x dx, \quad n = 5.$$

$$1344. \int_1^4 \frac{e^x}{x} dx, \quad n = 6.$$

$$1346. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}, \quad n = 12.$$

Arvutada antud määratud integraali ligikaudne väärtus Simpsoni valemi abil, jaotades integreerimisvahemiku $2n$ osavahemikuks:

$$1347. \int_1^9 \sqrt{x} dx, \quad n = 2.$$

$$1349. \int_2^5 \frac{dx}{\ln x}, \quad n = 3.$$

$$1348. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx, \quad n = 5.$$

$$1350. \int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad n = 5.$$

1351. Arvutada Simpsoni valemi abil $\int_0^{1,2} f(x) dx$, kui funktsioon $y = f(x)$ on määratud tabeliga

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
y	0,765	0,671	0,567	0,455	0,340	0,224	0,110

1352. Arvutada $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ trapetsvalemi ja Simpsoni valemi abil, jaotades integreerimisvahemiku kümneks osavahemikuks, ning võrrelda tulemusi antud integraali täpse väärtusega $\ln 2 = 0,69314718 \dots$

1353. Arvutada ligikaudselt $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x} dx$, kasutades funktsiooni $\sqrt{1+x}$ teise astme Taylori valemit kohal $x = 0$, ja hinnata tulemuse täpsust jääkliikme kaudu. Võrrelda hindamisel saadud vea ülemmäära Newton-Leibniz'i valemi abil leitud tegeliku veaga.

1354. Arvutada ligikaudselt $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$, kasutades funktsiooni sin x viienda astme Taylori polünoomi kohal $x = 0$.

1355. Arvutada ligikaudselt $\int_0^1 e^{2x-x^2} dx$, kasutades integraaliluse funktsiooni viienda astme Taylori polünoomi kohal $x = 0$.

Päratud integraalid

Ülesandeis 1356—1365 arvutada antud lõpmatute rajadega päratu integraal:

$$1356. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

$$1361. \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx.$$

$$1357. \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx.$$

$$1362. \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$$

$$1358. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$1363. \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx.$$

$$1359. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}.$$

$$1364. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}.$$

$$1360. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

$$1365. \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx.$$

Leida x -telje ja antud joonfega piiratud kujundi pindala:

$$1366. y = \frac{1}{1+x^2}, \quad x = 0.$$

$$1368. y = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}, \quad x = 3.$$

$$1367. y = e^{-\sqrt{x}}, \quad x = 0.$$

$$1369. y = \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}, \quad x = 1.$$

Ülesandeis 1370—1377 uurida antud integraali koonduvust (ilma üldintegraali leidmata):

$$1370. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx.$$

$$1371. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}.$$

$$1372. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx.$$

$$1375. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{3x+4\sqrt{x}}.$$

$$1373. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$1376. \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1+x^3}} dx.$$

$$1374. \int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^3}} dx.$$

$$1377. \int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2} dx.$$

Uurida, kuidas oleneb antud päratu integraali koonduvus parameetrist k :

$$1378. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^k}}.$$

$$1380. \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^k} dx.$$

$$1379. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}.$$

$$1381. \int_1^{+\infty} \frac{x^k}{1+x^2} dx.$$

Arvutada päratu integraal tõkestamatust funktsioonist:

$$1382. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$1386. \int_0^1 x \ln x dx.$$

$$1383. \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1387. \int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$1384. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1388. \int_0^{12} \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^2-4}}.$$

$$1385. \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$1389. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x dx.$$

Leida antud joontega piiratud kujundi pindala:

$$1390. y = -\ln x, x = 0, y = 0, x = 1.$$

$$1391. y = \frac{1}{\sqrt{x}}, x = 0, y = 0, x = 4.$$

$$1392. y = \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}, y = 0.$$

Ülesanded 1393—1400 otsustada, kas antud päratu integraal koondub või hajub:

$$1393. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$1397. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}.$$

$$1394. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - x^3}}.$$

$$1398. \int_0^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

$$1395. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3} \sqrt{1-x^2}}.$$

$$1399. \int_1^e \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}.$$

$$1396. \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^3(x-1)}}.$$

$$1400. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

1401. Tõestada, et integraal $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^n} dx$ koondub, kui $n < 2$.

1402. Kuidas oleneb integraali $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$ koonduvus parameetritest m ja n ?

Tõestada, et antud integraal koondub absoluutselt:

$$1403. \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

$$1405. \int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1404. \int_1^{+\infty} \frac{\cos x \cdot \ln x}{x \cdot \sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$1406. \int_0^1 \frac{x - \sin x}{x^3 \cdot \sqrt{x}} dx.$$

§ 14. MÄÄRATUD INTEGRAALI RAKENDUSI

Kui funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ on vahemikus $a \leq x \leq b$ pidevad ja selles vahemikus $f(x) \geq g(x)$, siis on joontega $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$ ja $x=b$ piiratud kujundi (joon. 65) pindala

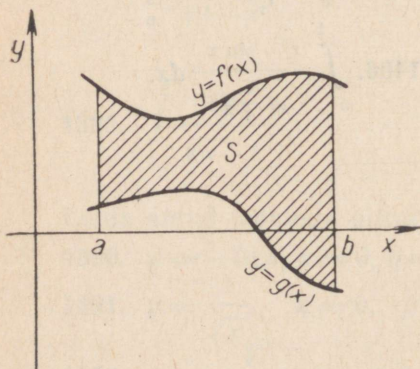
$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (1)$$

Parameetrilisel kujul antud joonega $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, sirgetega $x=a$, $x=b$ ja x -teljega piiratud kõverjoonelise trapetsi pindala S avaldub kujul

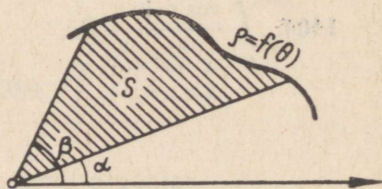
$$S = \int_a^b y \dot{x} dt, \quad (2)$$

kus $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ ning vahemikus $\alpha \leq t \leq \beta$ on $\psi(t) \geq 0$, $\psi(t)$ pidev, $\varphi(t)$ pidevalt diferentseeruv ja $\varphi'(t) \neq 0$.

Kui funktsioon $f(\theta)$ on vahemikus $\alpha \leq \theta \leq \beta$ pidev ja mittemnegatiivne, siis avaldub joonega $\rho = f(\theta)$ ja poolsirgetega $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ piiratud kõverjoonelise sektori (joon. 66)



Joon. 65



Joon. 66

pindala S kujul

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta. \quad (3)$$

Vahemikus $a \leq x \leq b$ pidevalt diferentseeruva funktsiooni $f(x)$ puhul on joone $y = f(x)$ kaare pikkus punktist abstsissiga a punktini abstsissiga b

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (4)$$

Kui $\varphi(t)$ ja $\psi(t)$ on vahemikus $\alpha \leq t \leq \beta$ pidevalt diferentseeruvad funktsioonid, siis avaldub joone $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ kaare pikkus punktist, mis vastab parameetri väärtusele $t = \alpha$, punktini, mis vastab parameetri väärtusele $t = \beta$, kujul

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt. \quad (5)$$

Polaarkoordinaadistikus avaldub joone $\rho = f(\theta)$ kaare pikkus kujul

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta, \quad (6)$$

kus $\rho = f(\theta)$ on vahemikus $\alpha \leq \theta \leq \beta$ pidevalt diferentseeruv funktsioon ning α ja β on kaare otspunktide polaarnurgad.

Kui funktsioon $f(x)$ on vahemikus $a \leq x \leq b$ pidevalt diferentseeruv ja $f(x) \geq 0$, siis on joone $y = f(x)$ punktide $[a; f(a)]$ ja $[b; f(b)]$ vahelise kaare pöörlemisel ümber x -telje moodustuva pöördepinna pindala

$$S = 2\pi \int_a^b y ds = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (7)$$

Kahe paralleelse, x -teljega ristuva tasapinna $x = a$ ja $x = b$ vahel asetseva keha ruumala V avaldub tema x -teljega ristuva lõike pindala $S = S(x)$ kui x pideva funktsiooni kaudu kujul

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (8)$$

Eriti on joontega $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ piiratud kõverjoonelise trapetsi pöörlemisel ümber x -telje moodustuva pöördekeha ruumala

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx. \quad (9)$$

Punkti sirgjoonelisel liikumisel hetkest $t = \alpha$ hetkeni $t = \beta$

kiirusega $v = v(t)$ [$v(t) \geq 0$ ja pidev vahemikus $a \leq t \leq \beta$] käidud tee pikkus on

$$s = \int_a^\beta v(t) dt. \quad (10)$$

x -telje sihis ja suunas mõjuva pidevalt muutuva jõu $F = F(x)$ poolt vahemikus $a \leq x \leq b$ tehtud töö on

$$A = \int_a^b F(x) dx. \quad (11)$$

Joone $y = f(x)$ kaare massikeskme koordinaadid avalduvad kujul

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+y'^2} dx}{s}, \quad \bar{y} = \frac{\int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx}{s}, \quad (12)$$

kus a ja b on kaare otspunktide abstsissid ning $s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx$ on kaare pikkus.

Kui vahemikus $a \leq x \leq b$ on $f(x) \geq g(x)$, siis avalduvad joontega $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ ja $x = b$ piiratud kujundi massikeskme koordinaadid kujul

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x[f(x) - g(x)] dx}{S}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx}{S}, \quad (13)$$

kus S on kujundi pindala.

Kui vahemik $a \leq x \leq b$ on jaotatud n osavahemikuks $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, funktsioon $f(x)$ on vahemikus $a \leq x \leq b$ pidev ning arv Q on esitatav summana $Q = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta Q_i$, kus

$$\Delta Q_i = [f(\xi_i) + \alpha_i] \Delta x_i, \quad (14)$$

nii et $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ ja $\max |\alpha_i| \rightarrow 0$, kui $\max |\Delta x_i| \rightarrow 0$, siis

$$Q = \int_a^b f(x) dx. \quad (15)$$

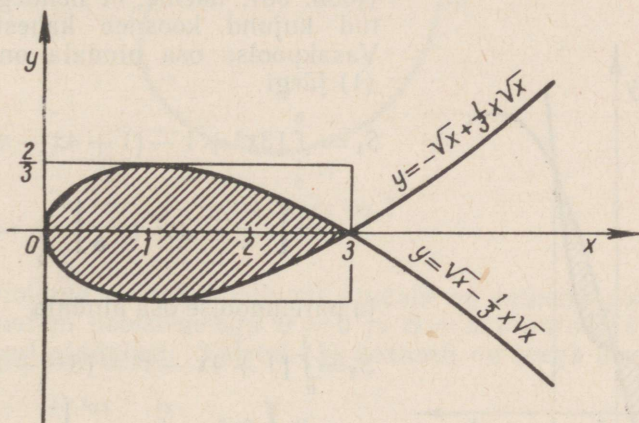
Näiteid

I. Arvutada joonega

$$9y^2 = x(3-x)^2$$

piiratud kujundi pindala.

Lahendus. Et antud joone võrrandis y esineb ainult ruudus, siis on joon sümmeetriline x -telje suhtes. Joone võrrandi vasaku poole mittenegatiivsusest ($y^2 \geq 0$) jäeldub, et joone punktidel $x \geq 0$, s. t. joonel ei ole punkte vasakul pool y -telge. Joone lõikepunktideks x -teljega saame võrrandist $x(3-x)^2 = 0$, $x = 0$ ja $x = 3$. Avaldades joone võrrandist y , saame $y = +\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x} = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x\sqrt{x}$ ja $y = -\sqrt{x} + \frac{1}{3}x\sqrt{x}$, mis esitavad antud joone x -telje suhtes sümmeetrilisi harusid. Esimese haru puhul $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$, millest nähtub, et koordinaatide alguspunktis on joone puutujaks y -telg, punktis $(3; 0)$ moodustavad joone puutujad x -teljega nurgad 150° ja 30° ning vahemikus $0 \leq x \leq 3$ on joone ordinaadi maksimaalseks väärtuseks $y = \frac{2}{3}$ mille ta omandab kohal $x = 1$. Nende andmete järgi on võimalik antud joont õige täpselt skitseerida (joon. 67).



Joon. 67

Ülesandes nõutud pindala S on järelikult joonega $y = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x\sqrt{x}$ ja x -teljega piiratud kõverjoonelise trapetsi kahekordne pindala. Et selle trapetsi aluseks on vahemik $0 \leq x \leq 3$, siis on nõutud pindala

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \int_0^3 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{3}x\sqrt{x} \right) dx = 2 \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} \right]_0^3 = \\
 &= 2 \left(2\sqrt{3} - \frac{6\sqrt{3}}{5} \right) = \frac{8}{5}\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Tulemus on kooskõlas joonisega 67, sest vaadeldav kujund asetseb ristkülikus, mille alus on 3, kõrgus $\frac{4}{3}$ ja pindala seega 4,

moodustades viimasest $\frac{8\sqrt{3}}{5 \cdot 4} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0,7$.

II. Arvutada joontega $y = 1 + 4x - x^2$ ja $y = 3x^3 + 1$ piiratud kujundi pindala.

Lahendus. Antud joontest on esimene (kui ruutfunktsiooni graafik) parabool, mille telg on paralleelne y -teljega; see parabool avaneb y -telje negatiivses suunas ning ta haripunkt on (2; 5). Teise joone saame funktsiooni $y = x^3$ graafikust, korrutades kõik ordinaadid kolmega ja liites neile ühe. Antud joonte lõikepunktide abstsissideks saame võrrandist $1 + 4x - x^2 = 3x^3 + 1$ $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ja $x_3 = -\frac{4}{3}$. Lõikepunktid on seega (0; 1), (1; 4) ja $(-\frac{4}{3}; -\frac{55}{9})$. Skitseerides antud jooned

(joon. 68), näeme, et nendega piiratud kujund koosneb kahest osast. Vasakpoolse osa pindala on valemi (1) järgi

$$S_1 = \int_{-\frac{4}{3}}^0 [3x^3 + 1 - (1 + 4x - x^2)] dx =$$

$$= \left[\frac{3x^4}{4} - 2x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{4}{3}}^0 = \frac{160}{81}$$

ja parempoolse osa pindala

$$S_2 = \int_0^1 [1 + 4x - x^2 - (3x^3 + 1)] dx =$$

$$= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{11}{12}$$

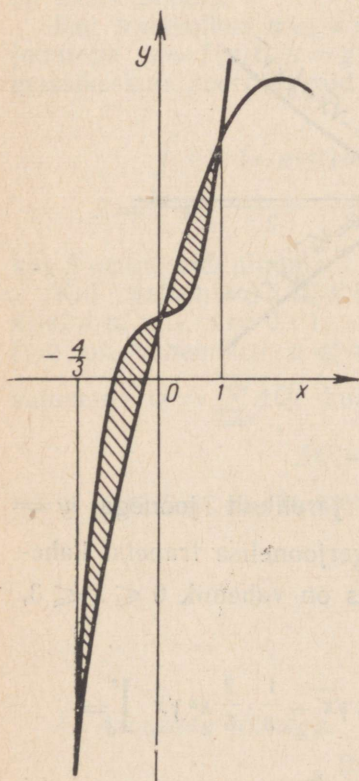
Kogu kujundi pindala on seega

$$S = S_1 + S_2 = \frac{160}{81} + \frac{11}{12} = \frac{937}{81 \cdot 4} \approx$$

$$\approx 2,89.$$

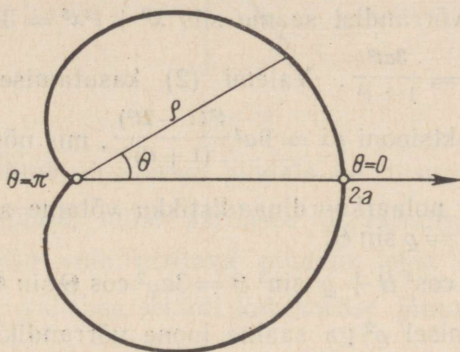
III. Arvutada joonega $\rho = a(1 + \cos \theta)$ piiratud kujundi pindala.

Lahendus. Joont $\rho = a(1 + \cos \theta)$ nimetatakse kardioidiks. Selle skitseerimiseks uurime joone jooksva punkti polaarkauguse ρ



Joon. 68

muutumist olenevalt polaarnurga θ muutumisest. Kui θ kasvab nullist π -ni, siis kahaneb $\cos \theta + 1$ -st monotoonselt -1 -ni ja polaarkaugus ρ järelkult $2a$ -st nullini. Polaarnurga θ suurenemisel π -st kuni 2π -ni kasvab ρ 0 -st $2a$ -ni. Et seejuures $\cos(\pi + a) = \cos(\pi - a)$, siis on vahemikele $0 \leq \theta \leq \pi$ ja $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ vastavad jooneosad, s. t. ülal- ja allpool polaartelge asetsevad osad, polaartelje suhtes sümmeetrilised. Polaarnurga θ edasisel muutumisel liigub punkt $(\rho; \theta)$ juba vahemikus $0 \leq \theta \leq 2\pi$ kirjeldatud joont mööda. Järelkult on kardioid $\rho = a(1 + \cos \theta)$ joonisel 69 toodud kujuga.



Joon. 69

Kardioidiga piiratud kujundi pindala on eelnenu põhjal kaks korda suurem poolsirgetega $\theta = 0$ ja $\theta = \pi$ piiratud kõverjoonelise sektori pindalast. Valemi (3) kohaselt on seega kogu nõutud pindala

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho^2 d\theta = \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \\
 &= a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \\
 &= a^2 \int_0^{\pi} \left(1 + 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \\
 &= a^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = \\
 &= a^2 \left[\frac{3}{2} \theta + 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi a^2.
 \end{aligned}$$

IV. Leida joonega $x^3 + y^3 = 3axy$ piiratud kujundi (nn. Cartesiuse lehe) pindala.

Lahendus. Et käesolevas ülesandes on joon antud niisuguse ilmutamata võrrandiga, millest muutuja y avaldamine on tülikas (nõuab kuupvõrrandi lahendusvalemi kasutamist) ja annab integreerimiseks väga keeruka avaldise, siis tuleb kõigepealt teisendada joone võrrand kas parameetrilisele kujule või polaarkoordinaadistikku.

Antud joone parameetriliste võrrandite koostamiseks võtame $y = tx$. Joone võrrandist saame siis $x^3 + t^3x^3 = 3atx^2$, $x = \frac{3at}{1+t^3}$ ja järelikult $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$. Valemi (2) kasutamisel tuleks seega integreerida funktsiooni $y\dot{x} = 9a^2 \frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}$, mis nõuaks jälle palju arvutustööd.

Üleminekuks polaarkoordinaadistikku võtame antud võrrandis $x = \rho \cos \theta$ ja $y = \rho \sin \theta$:

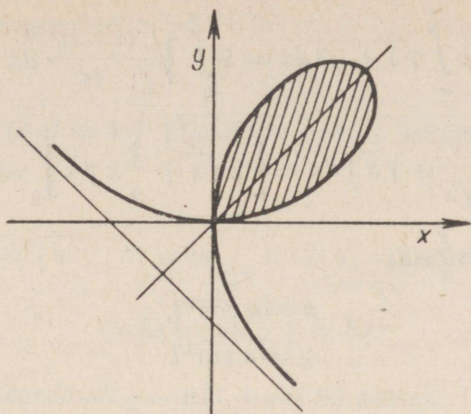
$$\rho^3 \cos^3 \theta + \rho^3 \sin^3 \theta = 3a\rho^2 \cos \theta \sin \theta,$$

millest taandamisel ρ^2 -ga saame joone võrrandiks polaarkoordinaadistikus

$$\rho = \frac{3a \cos \theta \sin \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}.$$

Kui asendame selles võrrandis θ nurgaga $\frac{\pi}{2} - \theta$, jääb ρ muutumatuks. Järelikult on vaadeldav joon sümmeetriline sirge $y = x$ suhtes. θ suurenemisel nullist $\frac{\pi}{4}$ -ni kasvab ρ avaldise lugeja $\left(\frac{3}{2}a \sin 2\theta\right)$ monotoonselt nullist $\frac{3}{2}a$ -ni. Et ρ avaldise nimetaja tuletis $3 \cos^2 \theta \cdot (-\sin \theta) + 3 \sin^2 \theta \cos \theta = 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)$ on vahemikus $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ negatiivne, siis ρ nimetaja kahaneb selles vahemikus monotoonselt ühest väärtuseni $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Polaarkaugus ρ järelikult kasvab vahe-

mikus $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ monotoonselt nullist kuni $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ -ni. θ lähene-
misel ρ nimetaja nullkohale $\frac{3}{4}\pi$ kasvab $|\rho|$ tõkestamatult. Järelikult on joonel sirgega $y = -x$ paralleelne asümptoot. Saadud andmete järgi on vaadeldav joon skitseeritud joonisel 70.



Joon. 70

Jooniselt nähtub, et nõutud pindala on niisuguse kõverjoonelise sektori pindala, mille äärmised polaarnurgad on 0 ja $\frac{\pi}{2}$. Sümmeetria tõttu võib otsitava pindala leida ka kui polaarnurkade 0 ja $\frac{\pi}{4}$ vahelise sektori kahekordse pindala. Valemi (3) järgi on seega

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{9a^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)^2} d\theta = 9a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 \theta}{(1 + \tan^3 \theta)^2} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

Viimase integraali arvutamiseks on ilmselt otstarbekohane kasutada asendust $1 + \tan^3 \theta = u$, mille puhul uuteks rajadeks on 1 ja 2 ning $\frac{3 \tan^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = du$. Ülesandes nõutud pindala on seega

$$S = 3a^2 \int_1^2 \frac{du}{u^2} = 3a^2 \left[-\frac{1}{u} \right]_1^2 = 3a^2 \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{2} a^2.$$

V. Arvutada I näites antud joone kinnise osa pikkus.

L a h e n d u s. Sümmeetria tõttu võib nõutud joone kinnise osa pikkuse s leida kui joone $y = \sqrt{x} - \frac{1}{3} x \sqrt{x}$ punktide $(0; 0)$ ja $(3; 0)$ vahelise kaare kahekordse pikkuse (joon. 67). Valemi (4) rakendamiseks arvutame $y' = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$ ja $1 + y'^2 = 1 + \frac{(1-x)^2}{4x} = \frac{4x + 1 - 2x + x^2}{4x} = \frac{(1+x)^2}{4x}$. Järelikult

$$s = 2 \int_0^3 \sqrt{1+y'^2} dx = 2 \int_0^3 \sqrt{\frac{(1+x)^2}{4x}} dx =$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) dx = \left[2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} \right]_0^3 = 4\sqrt{3}.$$

VI. Leida astroidi

$$x = a \cos^3 t,$$

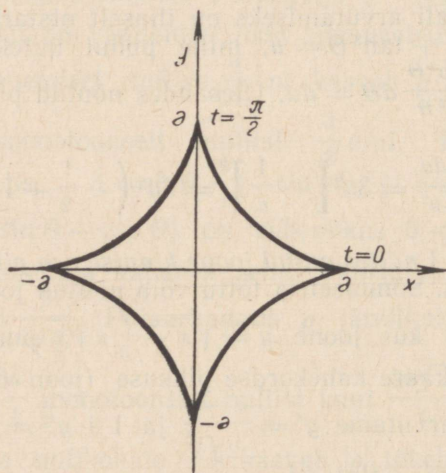
$$y = a \sin^3 t$$

pikkus

Lahendus. Kui antud joone parameetristes võrrandites paigutame t asemele $-t$, siis jääb x muutumatuks, y aga asendub $-y$ -ga. Järelikult on joon sümmeetriline x -telje suhtes. Kui paigutame t asemele $(\pi - t)$, siis jääb, vastupidi, y muutumatuks, x aga asendub $-x$ -ga. Seega on joon ka y -telje suhtes sümmeetriline. Kogu joone pikkus on järelikult 4 korda suurem ta I veerandis asetseva kaare pikkusest. Selle kaare kirjeldab joone jooksev punkt parameetri t muutumisel 0-st $\frac{\pi}{2}$ -ni, sest siis x kahaneb a -st nullini ja y samal ajal kasvab nullist a -ni (joon. 71).

Antud joone parameetristest võrranditest saame

$$\dot{x} = -3a \cos^2 t \sin t, \quad \dot{y} = 3a \sin^2 t \cos t$$



Joon. 71

ja valemi (5) järgi

$$\begin{aligned}
 s &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \\
 &= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 6a \left[-\frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= 6a \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 6a.
 \end{aligned}$$

VII. Leida kardioidi $\varrho = a(1 + \cos \theta)$ pikkus.

Lahendus. Jooniselt 69 nähtub, et kardioidi ülalpool polaartelge asetseva osa otspunktide polaarnurgad on 0 ja π . Et kogu kardioidi pikkus s on sümmeetria tõttu selle osa pikkusest kaks korda suurem, siis on valemi (6) järgi

$$\begin{aligned}
 s &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} d\theta = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + (-a \sin \theta)^2} d\theta = \\
 &= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} d\theta = \\
 &= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \\
 &= 8a \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a.
 \end{aligned}$$

Märkus. Kui leida korraka kogu kardioidi pikkus

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta,$$

siis tuleb tähele panna, et

$$\sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = \begin{cases} 2 \cos \frac{\theta}{2}, & \text{kui } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ -2 \cos \frac{\theta}{2}, & \text{kui } \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

ja seega

$$s = a \int_0^{\pi} 2 \cos \frac{\theta}{2} d\theta + a \int_{\pi}^{2\pi} -2 \cos \frac{\theta}{2} d\theta.$$

Seda asjaolu arvestamata saaksime kardioidi pikkuse asemel

$$a \int_0^{2\pi} 2 \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4a \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4a(0 - 0) = 0.$$

VIII. Arvutada I näites antud joone kinnise osa pöörlemisel ümber x -telje moodustuva pöördpinna pindala.

Lahendus. Joonise 67 järgi kujundab nõutud pöördpinna joone $y = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x\sqrt{x}$ punktide $(0; 0)$ ja $(3; 0)$ vaheline kaar.

V näite järgi on $y\sqrt{1+y'^2} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{3}x\sqrt{x}\right) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{6}$. Seega saame valemist (7) nõutud pindalaks

$$S = 2\pi \int_0^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{6}\right) dx = \pi \left[x - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{9} \right]_0^3 = 3\pi.$$

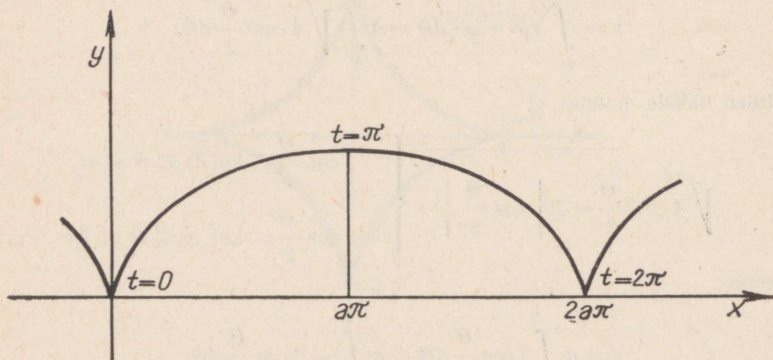
IX. Arvutada tsükloidi

$$x = a(t - \sin t),$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

ühe kaare pöörlemisel ümber x -telje moodustuva pöördpinna pindala.

Lahendus. Antud parameetristest võrranditest järeldub, et tsükloidil on joonisel 72 näidatud kuju. Tsükloidi ühe kaare otspunktidele vastavad parameetri t väärtused on 0 ja 2π . Valemi (7) rakendamiseks parameetrilisel kujul antud joonele tuleb temas asendada $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$ ja rajadeks võtta pöörd-



Joon. 72

pinda moodustava kaare otspunktidele vastavad parameetri väärtused. Antud joone puhul on

$$\dot{x} = a(1 - \cos t), \quad \dot{y} = a \sin t,$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= a^2(1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = 4a^2 \frac{1 - \cos t}{2} = \\ &= 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Et integreerimisvahemikus $0 \leq t \leq 2\pi$ on $\sin \frac{t}{2} \geq 0$, siis

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{2\pi} y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} dt. \end{aligned}$$

Kui siin võtta $\cos \frac{t}{2} = u$, siis on $\sin \frac{t}{2} dt = -2 du$ ning uued rajad on 1 ja -1 .

Seega

$$\begin{aligned} S &= -16\pi a^2 \int_1^{-1} (1 - u^2) du = -16\pi a^2 \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_1^{-1} = \\ &= -16\pi a^2 \left(-1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{64}{3} \pi a^2. \end{aligned}$$

X. Leida kardioidi $\rho = a(1 + \cos \theta)$ pöörlemisel ümber polaartelje moodustuva pöördpinna pindala.

Lahendus. Kui pöördpinna meridiaan on antud polaarkoordinaadistikus võrrandiga $\rho = f(\theta)$ ning ta otspunktide polaarnurgad on α ja β , siis teisendub valem (7) kujule

$$S = 2\pi \int_a^b y ds = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho \sin \theta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta.$$

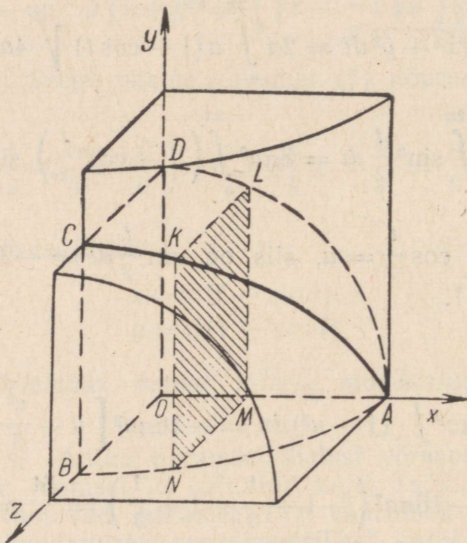
Käesoleva ülesande puhul on rajadeks $\alpha = 0$ ja $\beta = \pi$ (joon. 69) ning VII näite järgi on $\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = 2a \cos \frac{\theta}{2}$. Seega on nõutud pindala

$$S = 2\pi \int_0^\pi a(1 + \cos \theta) \sin \theta \cdot 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta =$$

$$\begin{aligned}
 &= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = -32\pi a^2 \int_1^0 u^4 du = \\
 &= -32\pi a^2 \frac{u^5}{5} \Big|_1^0 = \frac{32}{5} \pi a^2.
 \end{aligned}$$

XI. Arvutada kahe pöördsilindri lõikumisel moodustuva keha ruumala, kui silindrite teljed lõikuvad risti ja mõlema silindri raadius on r .

Lahendus. Joonisel 73 kujutatud keha $OABCD$ ruumala moodustab ühe kaheksandiku sellest ruumalast, mida ülesandes



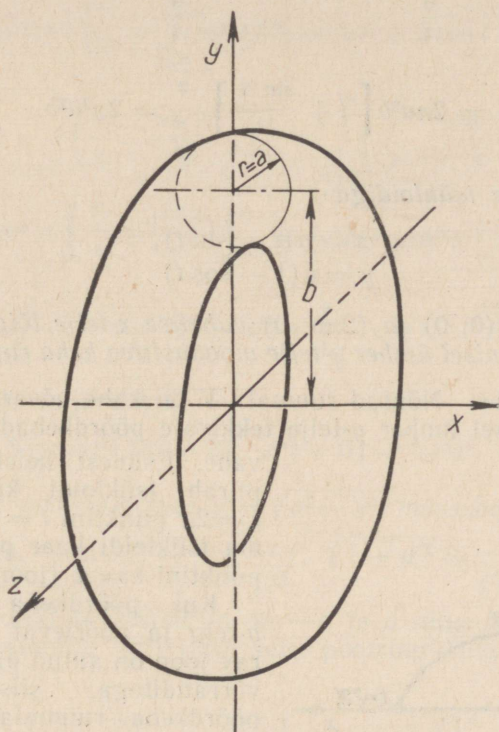
Joon. 73

nõutakse. Võtame x -telje läbi silindri telgede lõikepunkti O risti mõlema silindri teljega. Keha $OABCD$ lõige $KLMN$, mis on võetud punktist O kaugusel x risti x -teljega, on siis ruut külje pikkusega $MN = \sqrt{r^2 - x^2}$. Lõike $KLMN$ pindala on seega $S(x) = r^2 - x^2$. Ülesandes nõutud keha ruumala V on järelkult valemi (8) kohaselt

$$V = 8 \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 8 \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{16}{3} r^3.$$

XII. Arvutada ringjoone pöörlemisel ümber tema tasapinnas asetseva sirge moodustuva rõnga ruumala, kui pöörleva ringjoone raadius on a ja ringi keskpunkti kaugus pöördeteljelt on b , kusjuures $b > a$.

Lahendus. Olgu pöördpinna telg võetud x -teljeks ja asetsegu pöördpinna kujundav ringjoon xy -tasapinnal keskpunktiga y -teljel (joon. 74). Ringjoone võrrand on siis $x^2 + (y - b)^2 = a^2$.



Joon. 74

Rõnga ruumala V on leitav ringjoone ülemise poolega $y = b + \sqrt{a^2 - x^2}$ ja alumise poolega $y = b - \sqrt{a^2 - x^2}$ ning sirgetega $x = \pm a$ ja $y = 0$ piiratud kõverjooneliste trapetsite pöörlemisel ümber x -telje tekkivate pöördkehade ruumalade vahena:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-a}^{+a} (b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 dx - \pi \int_{-a}^{+a} (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 dx = \\
 &= \pi \int_{-a}^{+a} (b^2 + 2b\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 - x^2 - b^2 + 2b\sqrt{a^2 - x^2} - a^2 + \\
 &\quad + x^2) dx = 4\pi b \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} dx.
 \end{aligned}$$

Kui võtame viimases integraalis $x = a \sin t$, siis $dx = a \cos t$ ning uuteks rajadeks saame $-\frac{\pi}{2}$ ja $+\frac{\pi}{2}$. Nõutud ruumala on seega

$$\begin{aligned}
 V &= 4\pi a^2 b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = 4\pi a^2 b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \\
 &= 2\pi a^2 b \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2 a^2 b.
 \end{aligned}$$

XIII. Leida tsükloidiga

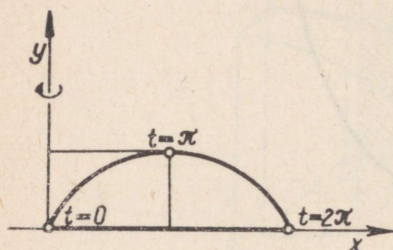
$$\begin{aligned}
 x &= a(t - \sin t), \\
 y &= a(1 - \cos t)
 \end{aligned}$$

ning punktide $(0; 0)$ ja $(2\pi a; 0)$ vahelise x -telje lõiguga piiratud kujundi pöörlemisel ümber y -telje moodustuva keha ruumala.

Lahendus. Nõutud ruumala V on kahe kõverjoonelise trapetsi pöörlemisel ümber y -telje tekkivate pöördkehade ruumalade

vahe. Esimest neist trapetsitest piirab tsükloidi kaar punktist $t = 2\pi$ punktini $t = \pi$ ja teist sama tsükloidi kaar punktist $t = 0$ punktini $t = \pi$ (joon. 75).

Kui pöördkeha teljeks on y -telg ja pöörlevat trapetsit piirav joon on antud parameetriliste võrranditega, siis teisendub pöördkeha ruumala valem (9) kujule



Joon. 75

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x^2 y \, dt.$$

Seega

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{2\pi}^{\pi} x^2 y \, dt - \pi \int_0^{\pi} x^2 y \, dt = \pi \left(\int_{2\pi}^{\pi} x^2 y \, dt + \int_{\pi}^0 x^2 y \, dt \right) = \\
 &= \pi \int_{2\pi}^0 x^2 y \, dt = \pi a^3 \int_{2\pi}^0 (t - \sin t)^2 \sin t \, dt = \\
 &= \pi a^3 \int_{2\pi}^0 (t^2 \sin t - 2t \sin^2 t + \sin^3 t) \, dt = \\
 &= \pi a^3 \left(\int_{2\pi}^0 t^2 \sin t \, dt - 2 \int_{2\pi}^0 t \sin^2 t \, dt + \int_{2\pi}^0 \sin^3 t \, dt \right).
 \end{aligned}$$

Viimasest kolmest integraalist arvutame kaks esimest ositi integreerimise teel ja kolmanda asendusvõttega:

$$\int_{2\pi}^0 t^2 \sin t \, dt = -t^2 \cos t \Big|_{2\pi}^0 + 2 \int_{2\pi}^0 t \cos t \, dt =$$

$$= 4\pi^2 + 2 \left(t \sin t \Big|_{2\pi}^0 - \int_{2\pi}^0 \sin t \, dt \right) = 4\pi^2 + 2 \cos t \Big|_{2\pi}^0 = 4\pi^2;$$

$$\int_{2\pi}^0 t \sin^2 t \, dt = t \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_{2\pi}^0 - \int_{2\pi}^0 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) dt =$$

$$= -2\pi^2 - \left[\frac{t^2}{4} + \frac{\cos 2t}{8} \right]_{2\pi}^0 = -2\pi^2 + \pi^2 = -\pi^2;$$

$$\int_{2\pi}^0 \sin^3 t \, dt = \int_{2\pi}^0 (1 - \cos^2 t) \sin t \, dt = \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} \right]_{2\pi}^0 = 0.$$

Nõutud ruumala on järelikut

$$V = \pi a^3 [4\pi^2 - 2(-\pi^2) + 0] = 6\pi^3 a^3.$$

XIV. Leida poolringjoone $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ massikese.

Lahendus. Siin $y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $\sqrt{1 + y'^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, pool-

ringjoone otspunktide abstsissid on $-a$ ja a ning pikkus $s = \pi a$. Järelikut on valemite (12) järgi selle poolringjoone massikeskme koordinaadid

$$\bar{x} = \frac{1}{\pi a} \int_{-a}^a x \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \left[-\sqrt{a^2 - x^2} \right]_{-a}^a = 0;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\pi a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{\pi} x \Big|_{-a}^a = \frac{2}{\pi} a.$$

Nõutud massikese on seega $(0; \frac{2}{\pi} a)$. Tulemust $\bar{x} = 0$ oleks võinud ka arvutamata ette näha, sest antud poolringjoon on sümmeetriline y -telje suhtes.

XV. Leida I näites antud joonega piiratud kujundi massikese.

Lahendus. Et vaadeldav kujund on sümmeetriline x -telje suhtes (joon. 67), siis $\bar{y} = 0$. I näite järgi on selle kujundi pind-

ala $\frac{8\sqrt{3}}{5}$. Kujundit piirab ülalt joon $y = \sqrt{x} - \frac{x}{3}\sqrt{x}$ ja alt $y = -\sqrt{x} + \frac{x}{3}\sqrt{x}$. Äärmised x väärtused on 0 ja 3. Järelikut on

vaadeldava kujundi massikeskme abstsiss valemite (13) järgi

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{5}{8\sqrt{3}} \int_0^3 x \left[\left(\sqrt{x} - \frac{x}{3} \sqrt{x} \right) - \left(-\sqrt{x} + \frac{x}{3} \sqrt{x} \right) \right] dx = \\ &= \frac{5}{4\sqrt{3}} \int_0^3 \left(x\sqrt{x} - \frac{x^2}{3}\sqrt{x} \right) dx = \frac{5}{4\sqrt{3}} \left[\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} - \frac{2}{21} x^3 \sqrt{x} \right]_0^3 = \\ &= \frac{5}{4\sqrt{3}} \left(\frac{18\sqrt{3}}{5} - \frac{18\sqrt{3}}{7} \right) = \frac{9}{7}. \end{aligned}$$

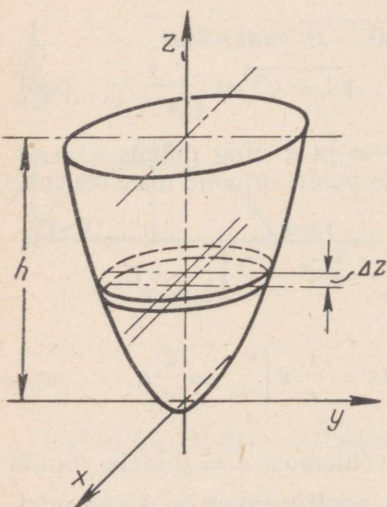
Nõutud massikesk on seega $\left(\frac{9}{7}; 0 \right)$.

XVI. Elliptilise paraboloidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ kujuline anum, mille kõrgus on h , on täidetud veega. Arvutada töö, mis kulub selle anuma tühjaks-pumpamiseks.

L a h e n d u s. Jaotame vahemiku $0 \leq z \leq h$ n osavahemikuks ja avaldame kogu nõutud töö A selle osa ΔA_i , mis kulub vaadeldava anuma tasapindade $z = z_i$

ja $z = z_{i+1}$ vahelise osa tühjaks-pumpamiseks.

Olgu $z_{i+1} - z_i = \Delta z_i$ ja antud elliptilise paraboloidi kohal z z -teljega risti võetud tasapinnalise lõike pindala $S(z)$. Et $S(z)$ on niisuguse ellipsi pindala, mille poolteljed on $a\sqrt{2z}$ ja $b\sqrt{2z}$, ning ellipsi pindala on ta pooltelgede korrutise π -kordne, siis $S(z) = 2\pi abz$. Ilmselt leidub z_i ja z_{i+1} vahel selline z väärtus ξ_i , et tasapindade $z = z_i$ ja $z = z_{i+1}$ vahelise paraboloidiosa ruumala ja temas sisalduva vee hulga kaal on $S(\xi_i)\Delta z_i$. Edasi on töö ΔA_i ilmselt suurem tööst, mis kulub raskuse $S(\xi_i)\Delta z_i$ tõstmiseks kõrgusele $h - z_{i+1}$, ja väiksem tööst,



Joon. 76

mis kulub sama raskuse tõstmiseks kõrgusele $h - z_i$:

$$(h - z_{i+1})S(\xi_i)\Delta z_i < \Delta A_i < (h - z_i)S(\xi_i)\Delta z_i.$$

Järelikult leidub z_i ja z_{i+1} vahel niisugune ξ'_i , et $\Delta A_i = (h - \xi'_i)S(\xi_i)\Delta z_i$ ehk, et $(h - \xi'_i) = (h - \xi_i) + (\xi_i - \xi'_i)$, siis

$$\Delta A_i = [(h - \xi_i)S(\xi_i) + \alpha_i]\Delta z_i,$$

kus

$$\alpha_i = (\xi_i - \xi'_i)S(\xi_i).$$

Et $S(\xi_i)$ on tõkestatud ja $|\xi_i - \xi'_i| < \Delta z_i$, siis $\max |\Delta z_i| \rightarrow 0$ puhul ka $\max |a_i| \rightarrow 0$. Seega on (15) järgi

$$A = \int_0^h (h-z)S(z)dz = 2\pi ab \int_0^h (hz - z^2)dz = \\ = 2\pi ab \left[\frac{hz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi abh^3.$$

Tasapinnaliste kujundite pindalade arvutamine

Ülesandeis 1407—1420 leida antud joontega piiratud kujundi pindala:

1407. $y = 6x - x^2, y = 0.$

1408. $y = \ln x, y = 0, x = 2.$

1409. $y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2}.$

1410. $y = x^2 + 2, y = x^4.$

1411. $y = 3x^2 - x, y = 8x - 6.$

1412. $y = 3x^2 - 12x, y = -x^2 + 8x - 24.$

1413. $y^2 = 2x + 4, x = 0.$

1414. $y^2 = (4-x)^3, x = 0.$

1415. $y^2 = \frac{x^3}{1-x}, x = 1.$

1416. $y^2 = 2x, 27y^2 = 8(x-1)^3.$

1417. $xy^2 = 1-x, x = 0.$

1418. $y = \arccos x, y = \frac{\pi(1-x)}{2}.$

1419. $y = \arcsin x, y = \arctan x, x^2 - 1 = 0.$

1420. $y = \operatorname{ch} x, y = \operatorname{sh} x, x = 0, x = 1.$

Leida antud joone kinnise osaga piiratud kujundi pindala:

1421. $4(y^2 - x^2) + x^3 = 0.$

1424. $x^3 + x^2 - y^2 = 0.$

1422. $y^2 = x^3(2-x).$

1425. $x^4 - x^2 + y^2 = 0.$

1423. $y^2 = (1-x^2)^3.$

1426. $x^4 - x^3 + y^2 = 0.$

1427. Arvutada ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pindala.

1428. Arvutada koordinaattelgedega ja parabooliga $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ piiratud kujundi pindala.

1429. Parabool $y^2 = 6x$ jaotab ringi $x^2 + y^2 = 16$ kaheks osaks. Arvutada mõlema osa pindala.

1430. Hüperbool $x^2 - 2y^2 = 1$ jaotab ringi $x^2 + y^2 = 4$ kolmeks osaks. Arvutada nende osade pindalad.

Leida antud joonega ja selle asümptoodiga piiratud kujundi pindala:

$$1431. y = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$1433. y^2 = \frac{2-x}{x}.$$

$$1432. y = xe^{-x^2}.$$

$$1434. y^2 = \frac{x^3}{2a-x}.$$

1435. Arvutada joone $y^2 = \frac{1+x}{1-x}x^2$ kinnise osaga ning selle joonega ja ta asümptoodiga piiratud kujundite pindalad.

1436. Leida x -teljega, joonega $x = \sqrt{t-1}$, $y = \sqrt{t^2-1}$ ja sirgega $x=2$ piiratud kujundi pindala.

Leida antud joone kinnise osaga piiratud kujundi pindala:

$$1437. x = 3t^2, y = 3t - t^3.$$

$$1438. x = t^2 - 1, y = t^3 - t.$$

$$1439. x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3.$$

1440. Arvutada tsükloidi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ühe kaarega ja x -teljega piiratud kujundi pindala.

1441. Arvutada astroidiga $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ piiratud kujundi pindala.

1442. Arvutada joonega $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$ piiratud kujundi pindala.

1443. Leida joonega $\rho = \tan \theta$ ja sirgega $\theta = \frac{\pi}{4}$ piiratud kujundi pindala.

1444. Leida joontega $\rho = \sin \theta$ ja $\rho = \cos \theta$ piiratud kujundite ühise osa pindala.

Arvutada antud joonega piiratud kujundi pindala:

$$1445. \rho = a \sin 3\theta.$$

$$1448. \rho = a \cos \theta + b (b \geq a).$$

$$1446. \rho^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

$$1449. \rho = a(\cos \theta + \sin \theta).$$

$$1447. \rho = a \cos 4\theta.$$

$$1450. \rho^2 = a(\cos \theta + \sin \theta).$$

Arvutada antud joonega piiratud kujundi pindala, teisendades joone võrrandi eelnevalt polaarkoordinaadistikku:

$$1451. (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

$$1452. (x^2 + y^2)^3 = 4a^2xy(x^2 - y^2).$$

$$1453. (x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

$$1454. (x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy.$$

Kaare pikkuse arvutamine

Leida antud joone kaare pikkus punktist abstissiga a punktini abstsissiga b :

$$1455. y = \sqrt[3]{x^2}, a = 0, b = 4.$$

1456. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, $a = 1$, $b = e$.

1457. $y = \operatorname{ch} x$, $a = 0$, $b = \ln 2$.

1458. $y = \ln \cos x$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{4}$.

1459. Leida joone $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ pikkus.

1460. Leida astroidi $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ pikkus.

1461. Arvutada joone $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$ selle kaare pikkus, mis asetseb paraboolis $y^2 = \frac{x}{3}$.

1462. Leida parabooli $y = x^2$ selle kaare pikkus, mis asetseb ringis $x^2 + y^2 = 6$.

1463. Arvutada joontega $y = \ln(1 - x^2)$ ja $y = \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ piiratud kujundi ümbermõõt.

1464. Leida funktsiooni e^x graafiku kaare pikkus punktist $(0; 1)$ punktini $(1; e)$.

1465. Arvutada joone $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ kaare pikkus punktist $t = 0$ punktini $t = \pi$.

1466. Leida joone $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$ kinnise osa pikkus.

1467. Arvutada tsükloidi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ühe kaare pikkus.

1468. Arvutada joone $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$ pikkus.

1469. Leida joone $\rho = 2r \sin \theta$ pikkus.

1470. Arvutada Arhimedese spiraali $\rho = a\theta$ kaare pikkus poolusest esimese täispöörde lõpuni.

1471. Leida hüperboolse spiraali $\rho = \frac{1}{\theta}$ kaare pikkus punktist $\rho = 2$, $\theta = \frac{1}{2}$ punktini $\rho = \frac{1}{2}$, $\theta = 2$.

1472. Leida logaritmilise spiraali $\rho = e^{-\theta}$ kaare pikkus punktist $\rho = 1$, $\theta = 0$ pooluseni.

Pöördpinna pindala arvutamine

1473. Arvutada parabooli $y^2 = 4x$ koordinaatide alguspunkti ja punkti $(3; 2\sqrt{3})$ vahelise kaare pöörlemisel ümber x -telje moodustuva pöördpinna pindala.

1474. Rõngaspinde tekib ringjoone pöörlemisel ümber oma tasapinnas asetseva sirge, mis ei lõiku ringjoonega. Avaldada rõngaspinna pindala, kui pöörleva ringjoone raadius on a ning ringjoone keskpunkti kaugus pöördeteljelt b .

1475. Ringjoone kaar, mille raadius on r ja kesknurk 90° , pöörleb ümber oma otspunkte ühendava sirge. Arvutada tekkiva pöördpinna pindala.

1476. Leida joone $8y^2 = x^2 - x^4$ kinnise osa pöörlemisel ümber x -telje moodustuva pöördpinna pindala.

1477. Arvutada joontega $y = x^3$, $x = 1$ ja $y = 0$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber x -telje moodustuva pöördkeha täispindala.

1478. Arvutada sinusoidi $y = \sin x$ punktide $(0; 0)$ ja $(\pi; 0)$ vahelise kaare pöörlemisel ümber x -telje tekkiva pöördpinna pindala.

1479. Arvutada tangensoidi $y = \tan x$ punktide $(0; 0)$ ja $(\frac{\pi}{4}; 1)$ vahelise kaare pöörlemisel ümber x -telje moodustuva pöördpinna pindala.

1480. Arvutada ellipsi $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ pöörlemisel ümber y -telje tekkiva pöördellipsoidi pindala.

1481. Arvutada joone $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ punktide $t = 0$ ja $t = \frac{\pi}{2}$ vahelise kaare pöörlemisel ümber x -telje tekkiva pöördpinna pindala.

1482. Arvutada ülesandes 1481 antud kaare pöörlemisel ümber y -telje tekkiva pöördpinna pindala.

1483. Leida astroidi $x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$ pöörlemisel ümber x -telje moodustuva pöördpinna pindala.

1484. Arvutada tsükloidi

$$\begin{aligned}x &= a(t - \sin t), \\y &= a(1 - \cos t)\end{aligned}$$

ühe kaare pöörlemisel tekkiva pöördpinna pindala, kui pöörde-
teljeks on

1) x -telg;

2) selle kaare x -teljega paralleelne puutuja;

3) selle kaare sümmeetriatelg.

1485. Arvutada joone $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ pöörlemisel ümber polaartelje moodustuva pöördpinna pindala.

1486. Leida joone $\rho = 2r \sin \theta$ pöörlemisel ümber polaartelje moodustuva pöördpinna pindala.

Ruumala arvutamine

1487. Arvutada parabooliga $y^2 = 2px$ ja sirgega $x = \frac{p}{2}$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber x -telje moodustuva pöördkeha ruumala.

1488. Arvutada ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pöörlemisel ümber x -telje tekkiva pöördkeha ruumala.

1489. Arvutada joontega $y = x^2$ ja $y^2 = x$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber x -telje tekkiva pöördkeha ruumala.

1490. Leida sinusoidi $y = \sin x$ ühe kaare pöörlemisel ümber x -telje tekkiva pöördkeha ruumala.

1491. Arvutada joontega $y = \sin x$, $y = 1$, $x = 0$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber y -telje moodustuva pöördkeha ruumala.

1492. Leida joontega $y = 2x - x^2$ ja $y = 0$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber 1) x -telje, 2) y -telje tekkiva pöördkeha ruumala.

1493. Leida joone $9y^2 = x(3 - x)^2$ kinnise osa pöörlemisel 1) ümber x -telje, 2) ümber y -telje tekkiva pöördkeha ruumala.

1494. Arvutada joone $y = \frac{1}{1 + x^2}$ pöörlemisel ümber oma asümptoodi tekkiva pöördkeha ruumala.

1495. Leida joontega $y = \frac{1}{x^k}$, $y = 0$ ja $x = 1$ piiratud kujundi ($x \geq 1$) pöörlemisel ümber x -telje moodustuva pöördkeha ruumala.

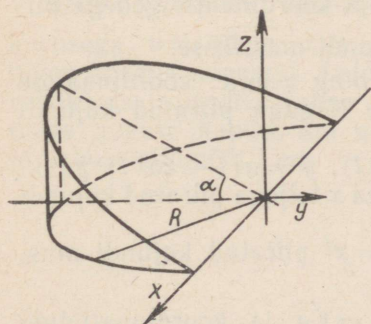
1496. Leida joontega $y = \frac{1}{x^k}$ ($k > 0$), $x = 0$, $x = 1$ ja $y = 0$ piiratud kujundi pöörlemisel ümber x -telje tekkiva pöördkeha ruumala.

1497. Arvutada paraboloidi $x^2 + y^2 = 2z$ ja kera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ühise osa ruumala.

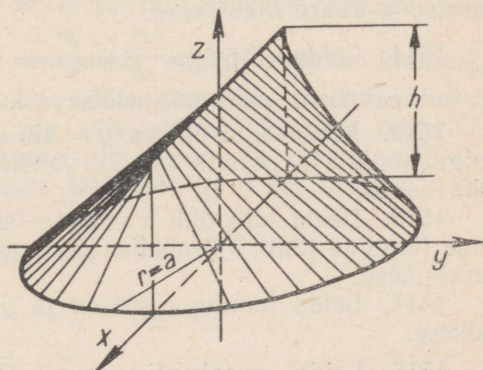
1498. Leida kera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ja koonuse $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ühise osa ruumala.

1499. Leida tsükloidi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ühe kaare pöörlemisel ümber x -telje tekkiva pöördkeha ruumala.

1500. Leida astroidi $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$ pöörlemisel ümber y -telje tekkiva pöördkeha ruumala.



Joon. 77



Joon. 78

1501. Tasapind, mis läbib pöördsilindri põhja diameetrit ja moodustab põhjaga nurga α , eraldab silindrist joonisel 77 näidatud keha. Arvutada selle keha ruumala, kui silindri raadius on R .

1502. Keha põhjaks on ring raadiusega a ja ta külpinna kirjeldab ruumis liikuv sirge, mis lõikab risti põhjaringi ühe diameetriga paralleelset, põhja tasapinnast kaugusel h asetsevat sirget ning põhjaringjoont (joon. 78). Leida selle keha ruumala.

1503. Muutuva raadiusega ring liigub nii, et ta keskpunkt nihkub mööda ringjoont $x^2 + y^2 = r^2$, ringi tasapind on risti x -teljega ning liikuva ringi piireringjoone üks punkt libiseb piki x -telge (edasi-tagasi). Arvutada ringi sellisel liikumisel kirjeldatava keha ruumala.

1504. Arvutada elliptilise tüvikoonuse ruumala, kui ta põhjadeks on ellipsid pooltelgedega A , B ja a , b ning kõrgus on h .

1505. Arvutada elliptilise paraboloidiga $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 2x$ ja tasapinnaga $x = h$ piiratud keha ruumala.

1506. Arvutada ühekäattelise hüperboloidiga $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ja tasapindadega $z = 0$, $z = h$ piiratud keha ruumala.

Määratud integraali rakendusi mehaanikas ja füüsikas

1507. Leida ringjoone $x^2 + y^2 = a^2$ esimeses veerandis asetseva kaare massikese.

1508. Leida joone $y = \operatorname{ch} x$ punktide $(-1; \operatorname{ch} 1)$ ja $(1; \operatorname{ch} 1)$ vahelise kaare massikese.

1509. Leida tsükloidi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ punktide $(0; 0)$ ja $(2\pi a; 0)$ vahelise kaare massikese.

1510. Leida astroidi $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ teises veerandis asetseva kaare massikese.

1511. Leida ellipsiga $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ja koordinaattelgedega piiratud, esimeses veerandis asetseva kujundi massikese.

1512. Leida sinusoidiga $y = \sin x$ ning x -telje koordinaatide alguspunkti ja punkti $(\pi; 0)$ vahelise lõiguga piiratud kujundi massikese.

1513. Leida tsükloidi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ punktide $(0; 0)$ ja $(2\pi a; 0)$ vahelise kaarega ja x -teljega piiratud kujundi massikese.

1514. Leida joontega $y^2 = x$ ja $y = x^2$ piiratud kujundi massikese.

1515. Leida parabooliga $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ja koordinaattelgedega piiratud kujundi massikese.

1516. Leida joonega $y^2 = ax^3 - x^4$ piiratud kujundi massikese.

1517. Punkt liigub sirgjooneliselt kiirusega $v = 6t + 0,04t^3$. Kui pika teosa käib see punkt hetkest $t = 0$ hetkeni $t = 10$?

1518. Sirgjooneliselt liikuva punkti kiirus on $v = te^{-0,01t} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Kui pika teosa käib see punkt hetkest $t = 0$ kuni peatumiseni?

1519. Arvutada töö, mis kulub vedru venitamiseks 6 cm võrra, kui jõud 1 kG venitab seda vedru 1 cm võrra.

1520. Leida töö, mis on vajalik keha tõstmiseks maapinnalt kõrgusele h , kui keha mass on m .

1521. Kera, mille raadius on R , asetseb vedelikus. Leida töö, mis kulub selle kera vedelikust väljatõstmiseks, kui vedeliku ja kera tihedus on 1.

1522. Leida töö, mis kulub koonusekujulise, tipuga allapoole asetatud veemahuti tühjaks pumpamiseks, kui anuma kõrgus on h ja põhja raadius r .

1523. Leida töö, mis on vajalik horisontaalse teljega silindrikujulise veemahuti tühjaks pumpamiseks mahuti peal asetseva avause kaudu, kui mahuti pikkus on l ja läbimõõt $2r$.

1524. Keha sirgjoonelise liikumise seadus on $x = 8t^3$, kus x on ajavahemiku t jooksul käidud tee pikkus. Arvutada keskkonna takistuse ületamiseks kuluv töö keha liikumisel punktist $x = 0$ punktini $x = 3$, kui keskkonna takistus on võrdeline kiiruse ruuduga.

1525. Liikuva kolviga silindri läbimõõt on 20 cm ja pikkus 80 cm. Silindris on gaas $10 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ rõhu all. Arvutada töö, mis kulub konstantsel temperatuuril selle gaasi kokkusurumiseks kuni ruumala kahekordse vähenemiseni.

1526. Homogeense varda mass on M ja pikkus l . Leida jõud, millega see varras tõmbab temaga ühel sirgel, lähemast otsast kaugusel a asetsevat materiaalselt punkti, kui viimase mass on m .

1527. Arvutada vee rõhk vertikaalsele poolringikujulisele seinale, kui poolringi raadius on a ja ta diameeter asetseb vee pinnal.

1528. Vastavalt Torricelli seadusele voolab vedelik anumast kiirusega $v = \sqrt{2gh}$, kus g on raskuskiirendus ja h vedeliku nivoo kõrgus avausest. Leida aeg, mis kulub vedelikuga täidetud vertikaalse silindrikujulise anuma tühjendamiseks anuma põhjas oleva avause kaudu, kui anuma läbimõõt on 1 m, kõrgus 2 m ja avause läbimõõt 1 cm.

ÜLESANNETE VASTUSED

2. 1) Punktist $A(3)$ positiivses suunas; 2) punktist $B(-4)$ negatiivses suunas ja punktist B ; 3) punktist $C(1)$ positiivses ja punktist $D(-3)$ negatiivses suunas; 4) punktide $E(-2)$ ja $F(3)$ vahel. 3. 1) $\overline{MN} = 5$, $|MN| = 5$; 2) $\overline{MN} = -5$, $|MN| = 5$; 3) $\overline{MN} = -4$, $|MN| = 4$; 4) $\overline{MN} = -9$, $|MN| = 9$.
4. 1) $Q(5)$; 2) $Q(-1)$; 3) $Q(-12)$; 4) $Q_1(6)$ ja $Q_2(-4)$. 5. 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{11}{5}$; 4) $-5 + 2\sqrt{6}$. 6. $P_1\left(-\frac{7}{2}\right)$, $P_2(-2)$, $P_3\left(-\frac{1}{2}\right)$, $P_4(1)$, $P_5\left(\frac{5}{2}\right)$, $P_6(4)$, $P_7\left(\frac{11}{2}\right)$. 7. $B(-2)$. 8. $C(-8)$. 9. 1) $\frac{1}{\lambda}$; 2) $-\frac{1+\lambda}{\lambda}$; 3) $-\frac{1}{1+\lambda}$. 11. $(-2; 0)$ ja $(0; 3)$. 12. $(-7; -3)$, $(7; 3)$ ja $(7; -3)$. 13. 1) $y = 0$; 2) $x = 0$; 3) $x = y$; 4) $x < 0$; 5) $x > 0$, $y < 0$. 14. $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(3; \sqrt{3})$, $D(2; 2\sqrt{3})$, $E(0; 2\sqrt{3})$, $F(-1; \sqrt{3})$. 15. 1) $|AB| = 5$; 2) 13; 3) $5\sqrt{2}$.
16. $18 + 8\sqrt{2}$. 17. $(14; 0)$. 18. $(0; 5)$. 19. $(10; 2)$. 20. $K_1(-2; 2)$, $r_1 = 2$, $K_2(-10; 10)$, $r_2 = 10$. 21. 1) $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\tan \alpha = -3$, $\sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$; 3) $\tan \alpha = \frac{3}{2}$, $\sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}$.
22. 1) $\alpha = 45^\circ$; 2) $\alpha = 210^\circ$; 3) $\alpha = 315^\circ$. 23. $\tan A = 3$, $\tan B = \frac{7}{9}$ ja $\tan C = \frac{3}{2}$. 24. $(-1; 5)$. 25. $(1; 14)$. 26. $(1; 3)$ ja $(-1; 2)$. 27. $(-1; 4)$.
28. $(-1; 1)$. 29. $(5; 3)$. 30. $\frac{2}{3}$. 31. $\frac{7}{3}$. 32. $\frac{5}{2}\sqrt{13}$ ja $\frac{5}{2}\sqrt{5}$. 33. $\frac{10\sqrt{2}}{3}$.
34. 1) 26; 2) 12; 3) 25. 35. 3. 36. 32,5. 37. 5. 38. $(0; 5)$, $\left(0; -\frac{13}{7}\right)$. 39. $C_1(-2; 2)$, $C_2(-5; 2)$. 40. 12. 41. $x = x' - 2$, $y = y' + 7$. 42. $A(-3; 4)$, $B(3; -1)$ ja $C(-5; -3)$. 43. 1) $x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$; 2) $x = \frac{-\sqrt{3}x' - y'}{2}$, $y = \frac{x' - \sqrt{3}y'}{2}$; 3) $x = \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2}$, $y = \frac{-\sqrt{3}x' + y'}{2}$; 4) $x = y'$, $y = -x'$.
44. $A(3\sqrt{3}; 1)$. 45. $M(-1; -\sqrt{3})$, $N(-1; \sqrt{3})$. 46. 1) $O'(-1; 2\sqrt{2})$, $\alpha = 315^\circ$; 2) $O'(3; -2)$, $\alpha = 180^\circ$. 47. $x = -\frac{15x' + 8y'}{17} + 8$, $y = \frac{8x' - 15y'}{17} - 4$.

48. $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$. 49. $\left(-2; -\frac{3}{2}\right)$. 51. $M_1\left(2; \frac{5}{4}\pi\right)$, $N_1\left(5; \frac{\pi}{6}\right)$, $M_2\left(2; -\frac{\pi}{4}\right)$,
 $N_2\left(5; \frac{5}{6}\pi\right)$. 52. 1) $K\left(2; -\frac{2}{3}\pi\right)$; 2) $K\left(3\sin\frac{\pi}{12}; -\frac{\pi}{4}\right)$. 53. $3\sqrt{17-4\sqrt{3}}$. 54. 10.
55. $A(2; 2\sqrt{3})$, $B(-2; 2)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. 56. $A\left(3; \frac{3}{2}\pi\right)$, $B\left(2; \frac{\pi}{6}\right)$, $C\left(6; \frac{5}{4}\pi\right)$.
57. $(\sqrt{3}-3; 4)$. 58. B , C ja E . 59. 1) $(-1; -2)$; 2) $(-3; -14)$ ja
 $(5; -14)$; 3) $(0; -1)$; 4) $(1+\sqrt{2}; 0)$ ja $(1-\sqrt{2}; 0)$; 5) $(2; 1)$ ja
 $(-2; -7)$. 60. 1) $(-2; 7)$; 2) ei lõiku; 3) $(3; -3)$ ja $(-3; 3)$; 4) $(2; 1)$,
 $(-2; 1)$, $(2; -1)$ ja $(-2; -1)$. 62. $x-7y+2=0$. 63. x^2+y^2-10y+
 $+21=0$. 64. $4x+3=0$, $4x-3=0$. 65. $x^2+y^2-x-y=0$. 66. A , C
ja D . 67. 1) $\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}; \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $(2; 0)$; 3) $\left(4; \frac{5}{3}\pi\right)$. 69. $(3\sqrt{3}; 0)$ ja $(5\sqrt{3}; 0)$.
70. 12,8. 71. $\rho^2 - 6\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 5 = 0$. 72. $\rho = \frac{5}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)}$. 73. $\rho^4 -$
 $-8\rho^2 \cos 2\theta = 9$. 74. $\rho = \frac{7}{4-3\cos\theta}$. 75. 1) $\rho = a$; 2) $\rho^2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta}$;
3) $\rho = \frac{p}{\cos(\theta - \alpha)}$; 4) $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$. 76. 1) $y = a$; 2) $x^2 + y^2 = 2ax$;
3) $xy = 3$; 4) $y^2 = 9 + 6x$. 77. 1) $3x - y + 5 = 0$; 2) $\sqrt{3}x - y = 0$; 3) $2x +$
 $+y - 6 = 0$; 4) $x - y + 3 = 0$; 5) $3x + 2y - 12 = 0$. 78. 1) $k=2$, $b = -\frac{8}{3}$;
2) $k = -1$, $b = 0$; 3) $k = 0$, $b = 5$; 4) $k = -\frac{2}{7}$, $b = 3$. 80. $x - 3 = 0$,
 $y + 7 = 0$. 81. $(1; -7)$ ja $(4; 11)$. 82. $a = 4,4$, $b = -11$, $k = 2,5$. 83. 12.
84. $10x + y + 13 = 0$. 85. 1) $(-5; 3)$; 2) sirged langevad ühte; 3) sirged ei
lõiku; 4) $(2; -5)$. 86. 1) Risti; 3) paralleelsed; 5) risti. 87. Paralleelsed,
kui $k = -\frac{7}{9}$, ja risti, kui $k = \frac{4}{7}$. 88. $4x - 7y + 26 = 0$. 89. $3x + 2y + 1 = 0$.
90. 1) $2x - 5y - 26 = 0$; 2) $3x - y - 13 = 0$; 3) $x - y - 7 = 0$; 4) $6x -$
 $-y - 22 = 0$. 91. $(3; 2)$. 92. $(5; -3)$. 93. 1) 45° ; 2) 0° ; 3) 60° ; 4) 90° .
94. $x - 5y - 11 = 0$ ja $5x + y - 3 = 0$. 95. $17x + y - 15 = 0$ ja $13x + 11y +$
 $+9 = 0$. 96. $\frac{8}{9}$, $\frac{11}{13}$ ja -7 . 97. Võrrandid 1), 5) ja 6) on sirge normaal-
võrrandid. 98. 1) $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0$; 2) $-\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 2 = 0$; 3) $-x -$
 $-5 = 0$; 4) $\frac{3}{\sqrt{10}}x - \frac{1}{\sqrt{10}}y - 1 = 0$. 99. 1) $p = \sqrt{2}$, $\alpha = 45^\circ$; 2) $p = 2$,
 $\alpha = 120^\circ$; 3) $p = 5$, $\alpha = 180^\circ$; 4) $p = 3$, $\alpha = 90^\circ$. 100. 1) 1; 2) 8,7; 3) $\sqrt{5}$;
4) 6. 101. 4,8. 102. $\frac{5}{\sqrt{17}}$. 103. 6. 104. Lõikavad 1) ja 3). 105. 1) 2,5; 2) 3;
3) 0,5. 106. 1) $2x + 2y - 7 = 0$ ja $4x - 4y + 3 = 0$; 2) $2x + 10y - 19 = 0$ ja
 $10x - 2y + 13 = 0$; 3) $(2 - \sqrt{13})x + 3y - 2(1 + \sqrt{13}) = 0$ ja $(2 + \sqrt{13})x +$
 $+ 3y - 2(1 - \sqrt{13}) = 0$. 107. $\left(-\frac{1}{7}; 0\right)$, $(-5; 0)$. 108. $2x + 3y + 26 = 0$,

- $2x + 3y - 26 = 0$. **109.** $3x + 4y + 20 = 0$ ja $3x + 4y - 10 = 0$. **110.** $9x + 5y - 7 = 0$. **111.** $29x + 25y - 21 = 0$. **112.** $x - 4y - 14 = 0$. **113.** $(-1; 3)$. **114.** $x + y - 6 = 0$. **115.** 1) $12x - 6y + 5 = 0$; 2) $65x + 17y + 17 = 0$. **116.** $x + 5y - 16 = 0$ ja $5x - y - 2 = 0$. **117.** $4x - 3y - 20 = 0$, $y + 4 = 0$. **118.** $S = 4$, $4x + y - 22 = 0$. **119.** $(0; 3)$, $\arctan 2$. **120.** $3x + y - 15 = 0$, $12x - 5y + 3 = 0$. **121.** $C(-3; -9)$, $x + 2y - 8 = 0$. **122.** $(-1; 4)$. **123.** $x + y - 8 = 0$, $x - 11y + 28 = 0$. **124.** $0,4$. **125.** $\left(\frac{11}{8}; -\frac{9}{16}\right)$. **126.** $(0; 6)$, $\left(-1; \frac{13}{2}\right)$. **127.** Sirgete paar: $16x - 8y + 19 = 0$ ja $26x + 2y - 1 = 0$. **128.** $(1; -10)$ ja $(3; -4)$. **129.** $(3; 5)$ ja $(-37; 45)$. **130.** $x + y - 4 = 0$, $x - y - 6 = 0$. **131.** $\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$. **132.** $3x - 4y + 1 = 0$, $8x - 6y - 9 = 0$. **133.** $x + 4y - 4 = 0$. **134.** $4x + 3y - 27 = 0$, $3x - 4y - 14 = 0$. **135.** $x - 4y - 3 = 0$. **136.** $4x - 3y - 21 = 0$, $12x + 5y + 11 = 0$. **137.** 1) $x^2 + y^2 = 25$; 2) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; 3) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$; 4) $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 11 = 0$. **138.** $x^2 + y^2 - 4x + 16y + 52 = 0$. **139.** $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 25 = 0$. **140.** $x^2 + y^2 - 8x - 24y + 35 = 0$. **141.** $x^2 + y^2 + 8x - 8y + 16 = 0$, $x^2 + y^2 + 40x - 40y + 400 = 0$. **142.** $x^2 + y^2 - 30x + 10y - 70 = 0$. **143.** $2x^2 + 2y^2 - 11y - 23 = 0$. **144.** $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$. **145.** $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. **146.** $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 31 = 0$, $x^2 + y^2 - 12x - 5 = 0$. **147.** $(x - 5)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = 13$, $\left(x + \frac{11}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{14}{9}\right)^2 = 13$. **148.** $x^2 + y^2 - 30x - 46y + 34 = 0$, $5x^2 + 5y^2 + 10x + 10y - 6 = 0$. **149.** $2x^2 + 2y^2 + 3x - y - 5 = 0$. **150.** $x^2 + y^2 - 6x + 12y - 5 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - 58y + 45 = 0$. **151.** $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 22y + 105 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 38y + 345 = 0$, $x^2 + y^2 - 22x - 26y + 265 = 0$. **152.** $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 24 = 0$, $x^2 + y^2 + 74x - 90y + 504 = 0$. **153.** 1) Ringjoon, $K(0; -3)$, $r = 3$; 2) punkt $(2; -1)$; 3) ringjoon, $K\left(\frac{2}{3}; -1\right)$, $r = \frac{4}{3}$; 4) kujunditu; 5) ringjoon, $K(4; -2)$, $r = 2\sqrt{5}$. **154.** A asetseb ringjoonel, B väljaspool ja C seespool ringjoont. **155.** $\frac{\pi}{2}$. **156.** $(4; 1)$, $(4; 7)$, $(-2; 7)$ ja $(-2; 1)$. **157.** $2\sqrt{5}$. **158.** $\sqrt{65}$. **159.** $3x^2 + 3y^2 - 2x + 7y - 27 = 0$. **160.** $(1; 1)$. **161.** 1) $(3; 0)$ ja $(-1; 2)$; 2) sirge puudutab ringjoont punktis $(5; 5)$; 3) sirge ja ringjoon ei lõiku; 4) $(5; 0)$ ja $(4; 1)$. **162.** $3x - 4y - 6 = 0$. **163.** $(2; -5)$. **164.** $(-2; 8)$. **165.** $x^2 + y^2 + 70x + 44y - 212 = 0$. **166.** 1) $3x^2 + 3y^2 + 24x - 12y - 4 = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$; 3) $7x^2 + 7y^2 + 16x + 12y + 4 = 0$. **167.** $x + 6y - 4 = 0$ ja $x - 6y - 3 = 0$. **168.** $3x - 4y - 14 = 0$ ja $3x - 4y + 36 = 0$. **169.** $3x \pm 4y = 0$. **170.** 90° . **171.** Ringjoon $x^2 + (y - 5)^2 = 16$. **172.** Ringjoon $(x - 5)^2 + (y - 11)^2 = 101$. **173.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$; 3) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 4) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$; 5) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$. **174.** 1) $\frac{x^2}{112} + \frac{y^2}{49} = 1$; 2) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$; 3) $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$; 4) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$; 5) $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{5} = 1$, $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1$. **175.** 1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5,76} = 1$; 2) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{120} = 1$; 3) $\frac{x^2}{84} + \frac{y^2}{28} = 1$; 4) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$; 5) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$, $\frac{x^2}{132} + \frac{y^2}{11} = 1$. **176.** 1) Poolteljed: $a = 5$, $b = 4$; fooku-

sed: $F_1(-3; 0)$, $F_2(3; 0)$; juhtjooned: $x = \pm \frac{25}{3}$; 2) $a=13$, $b=5$, $F_1(-12; 0)$,

$F_2(12; 0)$, $x = \pm \frac{169}{12}$; 3) $a = 3$, $b = \sqrt{5}$, $F_1(-2; 0)$, $F_2(2; 0)$, $x = \pm \frac{9}{2}$.

177. 1) $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\varepsilon = \frac{4}{5}$; 4) $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 178. $5x^2 + 9y^2 - 20x -$

$-25 = 0$. 179. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 0$. 180. 2.5 . 181. 3 ja 9. 182. 6.

183. $7x^2 + 2xy + 7y^2 + 46x + 2y + 71 = 0$. 184. 1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$; 2) $\frac{x^2}{36} +$

$\frac{2y^2}{75} = 1$; 3) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$; 4) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$; 5) $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{64} = 1$.

185. 1) $F_1(0; -\sqrt{3})$, $F_2(0; \sqrt{3})$, $y = \pm \frac{4}{3}\sqrt{3}$; 2) $F_1(0; -2)$, $F_2(0; 2)$, $y = \pm 4$;

3) $F_1\left(-\frac{4}{15}; 0\right)$, $F_2\left(\frac{4}{15}; 0\right)$, $x = \pm \frac{5}{12}$; 4) $F_1(0; -4)$, $F_2(0; 4)$, $y = \pm \frac{25}{4}$.

186. 1) $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$, $(2; 3)$; 2) puutuvad punktis $(-4; -1)$; 3) $(2; 3)$, $(-2; 3)$,

$(2; -3)$ ja $(-2; -3)$; 4) ei lõiku. 187. 1) $-\sqrt{52} < k < \sqrt{52}$; 2) $k =$

$= \pm \sqrt{52}$; 3) $k < -\sqrt{52}$ ja $k > \sqrt{52}$. 188. $K(2; -1)$, $a = 2$, $b = \sqrt{3}$,

$F_1(1; -1)$, $F_2(3; -1)$. 189. $2y - 13 = 0$, $2y + 5 = 0$, $\varepsilon = \frac{2}{3}$. 190. Kesk-

punkt: $K(-1.5; 0.5)$; haripunktid: $(2.5; 0.5)$; $(-1.5; 3.5)$, $(-5.5; 0.5)$,

$(-1.5; -2.5)$; juhtjooned: $14x + 21 - 32\sqrt{7} = 0$, $14x + 21 + 32\sqrt{7} = 0$.

191. $F_1(4; -4)$, $F_2(4; -6)$; 6. 192. $\frac{(x+1)^2}{40} + \frac{(y-4)^2}{36} = 1$. 193. $\frac{(x-2)^2}{9} +$

$\frac{(y+4)^2}{4} = 1$. 194. 1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$; 3) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$;

4) $\frac{x^2}{63} - \frac{y^2}{49} = 1$. 195. 1) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{112} = 1$; 3) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$;

4) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{18} = 1$. 196. 1) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$; 2) $-\frac{x^2}{54} + \frac{y^2}{42} = 1$. 197. 1) $\frac{5}{3}$;

2) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; 3) 2. 198. $\frac{5}{3}$. 199. $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$, $5x \pm 9 = 0$, $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

200. $\left(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}; \pm \sqrt{\frac{6}{5}}\right)$ - neli punkti. 201. $x = \pm 4$, $y = \pm \frac{1}{2}x$. 202. $10\sqrt{3}$.

203. 3. 204. $5x^2 - y^2 - 5 = 0$. 205. 1) $-\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$; 2) $-\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{576} = 1$;

3) $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$; 4) $-\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$, $-\frac{16x^2}{305} + \frac{9y^2}{61} = 1$. 206. 1) $a = 3$, $b = 4$;

2) $F_1(0; -5)$, $F_2(0; 5)$; 3) $\varepsilon = \frac{5}{3}$; 4) $3x \pm 4y = 0$; 5) $5y \pm 9 = 0$.

207. $-\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{4} = 1$. 208. 1) $\left(3; \frac{25}{4}\right)$ - sirge puudutab hüperbooli; 2) ei

lõiku; 3) $(6; 2)$ ja $\left(\frac{14}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; 4) $(4; 1)$, $(-4; 1)$, $(4; -1)$ ja

(-4; -1); 5) ei lõiku. **209.** $24xy + 7y^2 - 144 = 0$. **210.** $xy - x + y + 3,5 = 0$. **211.** 1) $K(-1; 3)$, $F_1(-6; 3)$, $F_2(4; 3)$, $5x - 4 = 0$, $5x + 14 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$, $4x - 3y + 13 = 0$; 2) $K(0; -3)$, $F_1(0; -3 - \sqrt{5})$, $F_2(0; -3 + \sqrt{5})$, $\sqrt{5}y + 3\sqrt{5} + 4 = 0$, $\sqrt{5}y + 3\sqrt{5} - 4 = 0$, $2x + y + 3 = 0$, $2x - y - 3 = 0$; 3) $K(1; -2)$, $F_1(1; -15)$, $F_2(1; 11)$, $13y + 51 = 0$, $13y + 1 = 0$, $5x + 12y + 19 = 0$, $5x - 12y - 29 = 0$. **212.** $\frac{(x+5)^2}{36}$

$-\frac{(y-2)^2}{64} = 1$. **213.** $-\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$. **214.** 1) $y^2 = 6x$; 2) $y^2 = 4,5x$; 3) $y^2 = 14x$; 4) $y^2 = 10x$; 5) $y^2 = \frac{14}{3}x$. **215.** 1) $y^2 = -8x$;

2) $x^2 = 3y$; 3) $x^2 = -12y$; 4) $x^2 = 6y$. **216.** 1) $F(3; 0)$, $x + 3 = 0$; 2) $F\left(-\frac{3}{8}; 0\right)$, $8x - 3 = 0$; 3) $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$, $4y + 1 = 0$; 4) $F(0; -5)$,

$y - 5 = 0$. **217.** $FM = 9$. **218.** $FN = \frac{13}{2}$. **219.** $(-6; 6\sqrt{2})$, $(-6; -6\sqrt{2})$.

220. 1) $(3; -3)$ ja $\left(\frac{25}{3}; 5\right)$; 2) sirge puudutab parabooli punktis $\left(\frac{16}{3}; 4\right)$;

3) sirge ei lõiku parabooliga. **221.** 1) $H(1; -2)$, $F\left(1; -\frac{7}{4}\right)$, $4y + 9 = 0$;

2) $H\left(3; \frac{11}{2}\right)$, $F(3; 5)$, $y - 6 = 0$; 3) $H(-1; 6)$, $F\left(-\frac{5}{2}; 6\right)$, $2x - 1 = 0$;

4) $H(3; 1)$, $F\left(\frac{49}{16}; 1\right)$, $16x - 47 = 0$. **222.** $H(6; -3)$. **223.** Juhtjoon: $x - y +$

$+5 = 0$; $2p = 16\sqrt{2}$. **224.** $x^2 + 2xy + y^2 - 14x + 14y + 35 = 0$. **225.** $16x^2 -$

$-24xy + 9y^2 - 300x - 400y = 0$. **226.** 1) Ellips; 2) paar lõikuvaid sirgeid;

3) punkt; 4) kujunditu; 5) paar paralleelseid sirgeid; 6) kahekordne sirge;

7) hüperbool; 8) parabool; 9) kujunditu; 10) ellips. **227.** $2x + 3y - 3 = 0$,

$2x - 3y - 9 = 0$. **228.** $f = \frac{67}{8}$. **229.** $k > 2$ ja $k < -2$ puhul esitab võrrand

ellipsit, $k = \pm 2$ puhul punkti ning $-2 < k < 2$ puhul kujunditut joont.

230. $k > 4$ kujunditu; $k = 4$ punkt; $3 < k < 4$ ellips, mille fokaaltelg on

paralleelne x -teljega; $k = 3$ ringjoon; $0 < k < 3$ ellips, mille fokaaltelg on

paralleelne y -teljega; $k = 0$ parabool; $k < 0$ hüperbool, mille fokaaltelg on

paralleelne y -teljega. **231.** 1) $x = x' - 1$, $y = y' + 2$; 2) $x = x' + 1$, $y =$

$= y' + 1$; 3) nõutavaid valemeid ei eksisteeri. **232.** 1) 45° ; 2) 60° ; 3) $63^\circ 26'$.

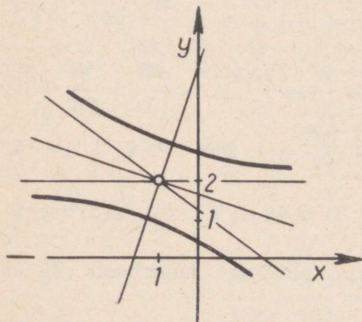
$$233. x = \frac{x' - 3y'}{\sqrt{10}}, \quad y = \frac{3x' + y'}{\sqrt{10}}$$

$$234. 1) x'^2 + 4y'^2 - 16 = 0; \quad 2) x'^2 - y'^2 = 0;$$

$$3) x'^2 - y'^2 + \sqrt{2}x' - 5 = 0. \quad 235. 1) \text{ Hüperbool, mille keskpunkt on } (-1; 2), \text{ fokaaltelje tõus } k = 3 \text{ ja kanooniline võrrand}$$

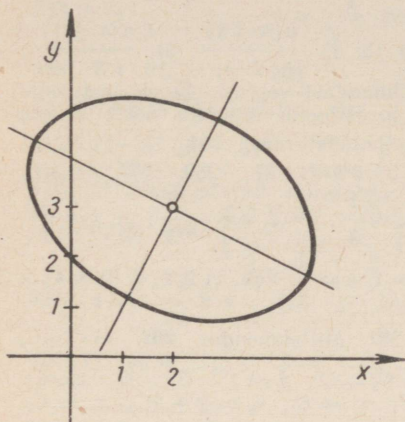
$$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{9} = 1 \text{ (joon. 79); } 2) \text{ ellips, mille}$$

$$\text{keskpunkt on } (2; 3), \text{ fokaaltelje tõus } k = -\frac{1}{2} \text{ ja kanooniline võrrand } \frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$$

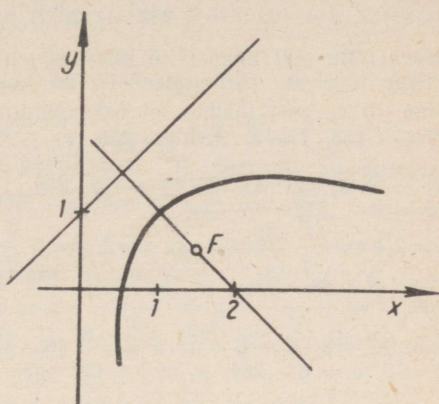


Joon. 79

(joon. 80); 3) parabool, mille haripunkt on $(1; 1)$, fookus $(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$ ja kanooniline võrrand $Y^2 = 2\sqrt{2}X$ (joon. 81). 236. Paralleelsete sirgete



Joon. 80



Joon. 81

paar: $2x - 3y + 1 = 0$, $2x - 3y - 2 = 0$; 2) punkt $(0; 0)$; 3) lõikuvate sirgete paar: $x - 7y - 14 = 0$, $x + y + 2 = 0$; 4) punkt $(0; -2)$; 5) kujunditu; 6) kahekordne sirge: $3x - 2y - 1 = 0$. 237. 1) $x - 5y = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$ (lõikuvad sirged); 2) $2x + 3y - 4 = 0$ (kahekordne sirge); 3) $x - 3y + 2 = 0$, $2x - 6y - 5 = 0$ (paralleelsed sirged). 238. Parabool, mille fokaallaius on $a\sqrt{2}$, telg $x - y = 0$ ja mis puudutab koordinaattelgi punktides $(a; 0)$ ja $(0; a)$. 239. $F_1(-2; -1)$, $F_2(0; 5)$, $x + 3y - 4 = 0$, $x + 3y - 6 = 0$. 240. $2p = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $F(2,9; 1,95)$, $8x + 4y - 33 = 0$. 241. $2x + y -$

$-5 = 0$ (fokaaltelg), $x - 2y = 0$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{3}}$, $F_1(2 + \sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2})$,

$F_2(2 - \sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2})$. 242. Fokaaltelje võrrand on $2x - 3y + 1 = 0$, asümptootide võrrandid $x - 1 = 0$ ja $5x + 12y - 17 = 0$. 243. $2p = 2\sqrt{2}$, $x + y - 2 = 0$, $H(1; 1)$. 244. 1) 46; 2) -26; 3) 0. 245. 1) 1; 2) $4mn$; 3) 1; 4) $\sin(\alpha - \beta)$. 246. 1) $x = 2$, $y = -3$; 2) $x = 5$, $y = 2$; 3) $x = -\frac{1}{4}$,

$y = \frac{3}{4}$; 4) $x = \frac{1}{k-1}$, $y = -\frac{1}{k-1}$; 5) $x = \cos(\beta - \alpha)$, $y = \sin(\beta - \alpha)$.

247. 1) Lõpmata mitmeselt lahenduv; 2) mittelahenduv; 3) üheselt lahenduv; 4) $a \neq \pm 6$ puhul üheselt lahenduv, $a = 6$ puhul lõpmata mitmeselt lahenduv, $a = -6$ puhul mittelahenduv; 5) $k \neq -\frac{3}{2}$ puhul üheselt lahenduv, $k = -\frac{3}{2}$

ja $l = -2$ puhul lõpmata mitmeselt lahenduv, $k = -\frac{3}{2}$ ja $l \neq -2$ puhul mittelahenduv. 248. $x = 3 - 2C$, $y = C$; 2) $x = \frac{3C + 4}{2}$, $y = C$; 3) $x = C$,

$y = -2C$. 249. 1) 32; 2) 6; 3) 0; 4) -2520; 5) -2400; 6) 6. 250. 1) $2a^3$;
 2) $3klm - k^3 - l^3 - m^3$; 3) $a^2 + b^2$; 4) $x^2 + y^2 + z^2 + 1$. 251. 1) $x = 2$,
 $y = \frac{1}{4}$, $z = -\frac{5}{4}$; 2) $x = \frac{1}{3}$, $y = 2$, $z = -\frac{4}{3}$; 3) $x = 2$, $y = -3$, $z = -2$;
 4) $u = 3$, $v = -2$, $w = 2$. 252. 1) 2; 2) 8; 3) 18; 4) $\frac{n(n-1)}{2}$; 5) $\frac{n(n+1)}{2}$.

253. 1) Ei, sest liikmes on kaks tegurit kolmandast veerust; 2) ei, sest selle liikme indeksite permutatsioon on kolm inversiooni, mistõttu märk ei ole õige; 3) ei, sest liikmes on kaks tegurit neljandast reast. 254. 1) -; 2) +; 3) -. 255. $i = 4$, $k = 2$. 256. 1) -20; 2) a^2bcd ; 3) -280. 257. 1) 360;
 2) -72; 3) 521; 4) 125; 5) -172. 258. 1) $x = \frac{1}{3}$, $y = 2$, $z = -\frac{4}{3}$; 2) $x = \frac{1}{2}$,
 $y = 2$, $z = -\frac{1}{2}$, $u = -3$; 3) $x = 3$, $y = -\frac{3}{2}$, $z = 1$, $u = \frac{1}{2}$. 259. 1) 2; 2) 2; 3) 3; 4) 5.

260. $x = \frac{18-C}{7}$, $y = \frac{3C-5}{7}$, $z = C$. 261. Mittelahenduv. 262. $x = 1+C$,
 $y = 2C-3$, $z = C-1$, $u = C$. 263. $x = C_2 - C_1$, $y = 1 - C_1 - C_2$, $z = C_1$,
 $u = 2$, $v = C_2$. 264. $x_1 = 1 - C_2$, $x_2 = -C_1$, $x_3 = C_1$, $x_4 = 2 + 2C_2$, $x_5 = C_2$.

265. Mittelahenduv. 266. Üheselt lahenduv: $x = 1$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = -\frac{2}{3}$, $v = 0$.

267. Üheselt lahenduv: $x = \frac{1}{4}$, $y = -\frac{5}{4}$, $z = 2$. 268. $a = 3$, $b \neq 10$. 269. Lahend on ühene, kui $a \neq 14$ iga b puhul; mitmene, kui $a = 14$ ja $b = 2$. Süsteem pole lahenduv, kui $a = 14$ ja $b \neq 2$. 270. Kui $a \neq 1$, $a \neq -\frac{1}{2}$, siis on süsteem

üheselt lahenduv, kui $a = 1$ ja kui $a = -\frac{1}{2}$, siis mittelahenduv. 271. $x = 3C$,

$y = 4C$, $z = 11C$. 272. $x = 2C$, $y = -3C$, $z = 5C$. 273. $x = y = z = v = 0$.

274. $x = 8C_1 - 7C_2$, $y = -6C_1 + 5C_2$, $z = C_1$, $v = C_2$. 275. $a = 3$ või $a = -2$.

276. $y = -2x^2 + 6x - 3$. 277. $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$. 278. $2x^2 + 2xy +$

$+ 3y^2 - 4x + 3y = 0$. 279. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. 280. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

281. 1) (-3; 1; 0); 2) (0; 1; 4); 3) (0; 1; 0); 4) (-3; 0; 0).

282. 1) (x; y; -z); 2) (x; -y; z); 3) (x; -y; -z); 4) (-x; -y; z);

5) (-x; -y; -z). 283. 1) 13; 2) 3; 3) 5. 284. $M(-8; 6; -2)$.

285. 1) $\sqrt{q^2 + z^2}$; 2) $\sqrt{q^2 \sin^2 \theta + z^2}$; 3) $\sqrt{q^2 \cos^2 \theta + z^2}$. 286. 1) (q; θ ; -z);

2) (q; $180^\circ - \theta$; -z); 3) (q; $\theta + 180^\circ$; -z). 287. $A(3\sqrt[4]{2}; \frac{7}{4}\pi; -3)$,

$B(6; \pi; 8)$. 288. $\rho = r \sin \psi$, $\theta = \varphi$, $z = r \cos \psi$. 289. $A\left(-\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 3\sqrt[3]{3}\right)$.

290. $|a + b| = |a - b| = 10$. 291. $|a - b| = 30$. 292. $|a + b| = 24$. 293. $\vec{AB} = \frac{1}{2}(a - b)$, $\vec{BC} = \frac{1}{2}(a + b)$, $\vec{CD} = \frac{1}{2}(b - a)$, $\vec{DA} = -\frac{1}{2}(a + b)$. 294. $\vec{AC} =$

$= 2a + b$, $\vec{AD} = 2(a + b)$, $\vec{AE} = a + 2b$, $\vec{EC} = a - b$. 295. $|a| = |b|$. 296. $a = \{-2; -1; 6\}$, $b = \{6; -1; 4\}$, $c = \{6; -3; 15\}$, $d = \{16; -2; 7\}$.

297. $B(2; -4; 6)$. 298. $K(2; 1; -4)$. 299. $B(5; -1; -2)$. 300. $(3; 1; -1)$, $(4; 5; -3)$, $(5; 9; -5)$ ja $(6; 13; -7)$. 301. $(2; -1; 3)$. 302. $C(2; 0; -8)$. 303. $B(1; -4; 2)$, $C(5; -7; 4)$. 304. $(1; -4; 0)$, $(7; -2; 2)$ ja $(-5; 6; 4)$. 305. $h = \frac{2}{3}$, $l = \frac{1}{5}$, $a = \frac{1}{2}$ b. 306. $a = \frac{3}{5}b + \frac{4}{5}c$. 307. 1) -24 ; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 30.
308. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 19$. 309. 1) -3 ; 2) 0; 3) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - 3$. 310. 1) 6; 2) 7; 3) $3\sqrt{10}$; 4) $5\sqrt{6}$. 311. 1) 4; 2) 3; 3) 7; 4) -271 ; 5) -40 . 312. 0. 313. 11 ja 25. 314. $\sqrt{77}$. 315. $\cos \widehat{ab} = \frac{5}{21}$. 316. 45° . 317. $k = -3$. 318. 1) Moodustavad nürinurga; 2) paralleelsed; 3) risti; 4) moodustavad teravnurga. 319. $\left\{ \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3} \right\}$. 320. -4 . 321. 6. 322. $\frac{1}{\sqrt{305}}$ {15; -8 ; -4 }. 323. $a = -\frac{3}{7}b + \frac{1}{7}\{26; 25; 36\}$. 324. $|a \times b| = 6$. 325. $|a \times b| = 28$. 326. 1) {5; 9; 17}; 2) $\{-5; -9; -17\}$; 3) {85; 153; 289}. 327. $\sin \widehat{ab} = \frac{3}{7}\sqrt{5}$. 328. 1) $2\sqrt{77}$; 2) 0; 3) 12,5. 329. $S = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$. 330. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. 331. 5. 332. $\pm \left\{ \frac{2}{7}; -\frac{6}{7}; \frac{3}{7} \right\}$. 333. {2; -6 ; 0}. 334. 24. 335. ± 30 . 336. 48. 337. 3. 338. 11. 340. $k = 4$. 341. $5x - 2y + 7z - 9 = 0$. 342. $2x - 11y + 8z = 0$. 343. $z - 4 = 0$. 344. $3x - 5y + 2z - 38 = 0$. 345. $(-3; 0; 0)$, $(0; 7,5; 0)$ ja $(0; 0; -5)$. 346. 12. 347. $\left(-\frac{1}{4}; -3; -\frac{1}{4}\right)$. 348. $x - 7y + 4z + 3 = 0$. 349. $8x + 5y - z + 7 = 0$. 350. $x - 22y + 8z + 75 = 0$. 351. $3x - 2y - 3z - 2 = 0$. 352. $5x - 2z = 0$. 353. 1) Paralleelsed; 2) paralleelsed; 3) risti; 4) ei ole risti ega paralleelsed; 5) risti. 354. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$. 355. $2x + 3y - z - 1 = 0$. 356. $7x + y - 11z = 0$. 357. $x + 3y + 7z - 2 = 0$. 358. $6x - 7y - 16z + 42 = 0$. 359. $x - z - 1 = 0$. 360. $5y + z = 0$. 361. $\frac{x+3}{7} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$. 362. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-1}$. 363. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{6} = \frac{z+12}{-5}$. 364. $\frac{x}{7} = \frac{y}{-3} = z$. 365. $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{-5} = z - 2$. 366. $x = 2t + 3$, $y = 4t + 2$, $z = -5t$. 367. $\left(0; \frac{73}{5}; -\frac{39}{5}\right)$. 368. $x - 7 = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-2}{3}$. 369. $x = 3t + 1$, $y = \frac{1}{2}t$, $z = -t + 4$. 370. A, C ja D asetsevad, B ei asetse. 371. $(4; 5; -13)$. 372. 1) $\arccos \frac{2}{15}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\arccos \frac{-8\sqrt{61}}{427}$. 373. $\frac{x-3}{-13} = \frac{y-9}{4} = \frac{z+1}{14}$. 374. $-x = \frac{y-5}{3} = \frac{z-4}{5}$. 375. $x = 12t - 1$, $y = 13t + 1$, $z = -5t$. 376. $\frac{x}{4} = y = -\frac{z}{10}$. 377. $v = 7$, $(-16; 10; 1)$. 378. $x = 7 + 12t$, $y = -3 - 4t$, $z = 5 + 18t$. 379. $x = 4 + \frac{t}{2}$, $y = -5 + \frac{2t}{3}$, $z = 7 - 2t$.

$$v = \frac{13}{6}, \quad d = \frac{\sqrt{427}}{3}. \quad 380. \quad 1) \ 8; \ 2) \ 5; \ 3) \ \sqrt[3]{38}. \quad 381. \ 2. \ 382. \ 1) \ 3; \ 2) \ 2,5;$$

$$3) \ \frac{5}{2\sqrt[6]{6}}. \quad 383. \ 2. \ 384. \ 7x - y - 4z + 4 = 0 \quad \text{ja} \quad 3x - 11y + 8z - 10 = 0.$$

$$385. \ \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \quad \text{ja} \quad \left(\frac{1}{4}; -\frac{5}{4}; \frac{7}{4}\right). \quad 386. \ x - 2y - z - 9 = 0 \quad \text{ja}$$

$$x - 2y - z + 15 = 0. \quad 387. \ (0; 0; 7) \quad \text{ja} \quad (0; 0; -6). \quad 388. \ 1) \ \frac{7}{\sqrt[5]{5}}; \ 2) \ 6; \ 3) \ \sqrt[3]{3}.$$

$$389. \ 21. \ 390. \ \frac{28}{3}. \quad 391. \ 3x + y - z = 0. \quad 392. \ x - 2 = \frac{y+5}{2} = \frac{z-6}{3}.$$

$$393. \ 2x - 4y - 3z = 0. \quad 394. \ x - 3y - 2z + 8 = 0. \quad 395. \ 1) \ (-3; 6; 2);$$

$$2) \ \text{sirge asetseb tasapinnal}; \ 3) \ \text{sirge on paralleelne tasapinnaga.}$$

$$396. \ (2; -2; -2). \quad 397. \ (-2; 2; 3). \quad 398. \ (1; -9; -3). \quad 399. \ (-3; 5; 4).$$

$$400. \ (4; 8; 8). \quad 401. \ 3x + 2y + 19z = 0. \quad 402. \ 6x + 5y + 4z - 1 = 0. \quad 403. \ 3.$$

$$404. \ 2x - y + 3z + 2 = 0. \quad 405. \ 7x - 8y + 9z - 1 = 0. \quad 406. \ 18x + 11y + 6z = 0.$$

$$407. \ x - 2 = \frac{y-4}{0} = z + 1. \quad 408. \ \frac{x+5}{19} = \frac{1-y}{28} = -\frac{z}{37}. \quad 409. \ \frac{x-1}{4} =$$

$$= \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{7} \quad 410. \ x - 8 = y - 17 = 8 - z. \quad 411. \ \frac{x-3}{11} = y - 3 =$$

$$= \frac{z+3}{-26}. \quad 412. \ \frac{x+5}{2} = 3 - y = \frac{z+4}{3}. \quad 413. \ -\frac{x}{3} = \frac{y-7}{2} = z. \quad 414. \ \frac{x-5}{2} =$$

$$= \frac{y+11}{-9} = 3 - z. \quad 415. \ \frac{x-2}{-3} = \frac{y+7}{-8} = z - 1. \quad 416. \ \frac{x+2}{27} = \frac{y-1}{19} =$$

$$= \frac{z-5}{3}. \quad 417. \ \frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{3} = z + 3. \quad 418. \ \text{Kui } k \neq -2, \text{ siis sirge}$$

$$\text{ja tasapind lõikuvad, kui } k = -2, \text{ siis on sirge ja tasapind paralleelsed, ning}$$

$$\text{kui } k = -2 \text{ ja } l = 4, \text{ siis sirge asetseb tasapinnal.} \quad 419. \ 6x + 17y - 28z +$$

$$+ 11 = 0. \quad 420. \ 9x + y - 7z + 16 = 0. \quad 421. \ 351x + 406y - 1218z - 965 = 0$$

$$\text{ja } 9x + 2y - 6z - 11 = 0. \quad 422. \ 1) \ x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0; \ 2) \ x^2 + y^2 + z^2 -$$

$$- 6x + 4y - 8z + 20 = 0; \ 3) \ x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 10z - 30 = 0; \ 4) \ x^2 +$$

$$+ y^2 + z^2 - 6x - 14y + 22z + 81 = 0; \ 5) \ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z -$$

$$- 427 = 0. \quad 423. \ 1) \ K(0; 0; 0), \quad r = 2; \ 2) \ K(-2; 3; -1), \quad r = 5;$$

$$3) \ K\left(1; -4; -\frac{1}{3}\right), \quad r = \frac{11}{3}; \ 4) \ \text{võrrand esitab punkti } (1; -3; 0);$$

$$5) \ \text{võrrand esitab kujundit pinda.} \quad 424. \ \text{Sfäär } 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 32x + 64 = 0.$$

$$425. \ x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 4y - 4z - 98 = 0. \quad 426. \ x^2 + (y+33)^2 + z^2 = 1130.$$

$$427. \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 8z + 12 = 0 \quad \text{ja} \quad x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 2y +$$

$$+ 12 = 0. \quad 428. \ x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y - 2z - 40 = 0. \quad 429. \ x^2 + y^2 + z^2 -$$

$$- 2x - 10y - 20z + 45 = 0. \quad 430. \ x - 3y - 3z + 8 = 0. \quad 431. \ 5x - 2y - \sqrt[3]{14}z -$$

$$- 14 + 3\sqrt[3]{14} = 0 \quad \text{ja} \quad 5x - 2y + \sqrt[3]{14}z - 14 - 3\sqrt[3]{14} = 0. \quad 432. \ x + 2y - 2x -$$

$$- 5 = 0 \quad \text{ja} \quad x + 2y - 2z + 7 = 0. \quad 433. \ K(1; 0; 2), \quad r = 4. \quad 434. \ 2x^2 +$$

$$+ 2y^2 + 2z^2 + x + 26y - 2z = 0. \quad 435. \ y = x^2 + z^2 + 1. \quad 436. \ 9x^2 - 4y^2 +$$

$$+ 9z^2 + 24y - 36 = 0. \quad 437. \ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1. \quad 438. \ x^4 - y^2 - z^2 = 0.$$

$$439. \ 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 18 = 0. \quad 440. \ (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 -$$

$$- 4a^2(x^2 + y^2) = 0. \quad 441. \ x^4 + y^4 + z^4 + 2y^2z^2 - 1 = 0. \quad 442. \ 5x^2 + 8y^2 + 5z^2 -$$

$$- 4xy + 8xz + 4yz - 144 = 0. \quad 443. \ 1) \ \text{Kahekatteline hüperboloid}; \ 2) \ \text{pöörd-}$$

$$\text{silinder}; \ 3) \ \text{ühkatteline hüperboloid}; \ 4) \ \text{elliptiline paraboloid}; \ 5) \ \text{lõikuvate}$$

$$\text{tasapindade paar}; \ 6) \ \text{pöördellipsoid}; \ 7) \ \text{hüperboolne paraboloid}; \ 8) \ \text{para-}$$

$$\text{boolne silinder}; \ 9) \ \text{sirgjoon}; \ 10) \ \text{kujunditu.} \quad 444. \ \text{Lõikejoonteks on para-}$$

boolid, mille fokaallaius on 9, mille telg on paralleelne x -teljega ja mis avanevad x -telje negatiivses suunas. 445. $|h| < 3$ puhul on lõikejoonteks hüperboolid, mille fokaalteljed on paralleelsed y -teljega, $h = \pm 3$ puhul lõikuvate sirgete paarid ja $|h| > 3$ puhul hüperboolid, mille fokaalteljed on paralleelsed z -teljega. 446. Hüperbool, $a = 2$, $b = 3$, $(2; 0; -1)$,

$(-2; 0; -1)$. 447. $2p = 4$, $H\left(2; \frac{1}{3}; 0\right)$, $F\left(2; -\frac{2}{3}; 0\right)$. 448. $F_1(0; -2; 4)$,

$F_2(0; -2; -4)$. 449. Lõikejooneks on $k = 0$ või $h = \pm 6$ puhul lõikuvate sirgete paar, $k > 0$ ja $|h| < 6$ või $k < 0$ ja $|h| > 6$ või $k < 0$ ja $|h| < 6$ puhul hüperbool, mille fokaaltelg on paralleelne x -teljega, ning $k > 0$ ja $|h| > 6$ või $k < 0$ ja $|h| < 6$ puhul hüperbool, mille fokaaltelg on paralleelne y -teljega. 450. $x^2 + z^2 + 4y = 0$ (pöördparaboloid). 451. $15x^2 + 16y^2 + 15z^2 - 2xz + 16x - 16z - 32 = 0$

(pöördellipsoid). 452. 1) $(3; -2; 5)$ ja $\left(\frac{43}{13}; -\frac{14}{13}; \frac{73}{13}\right)$; 2) $(-3; 2; 4)$ — sirge puudutab pinda; 3) sirge asub pinnal; 4) sirge ei lõiku pinnaga.

453. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0, \\ z = 0, \\ 5y^2 - 2yz + z^2 - 8z = 0, \\ x = 0. \end{cases}$ 454. 1) $f(0) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = 0$, $f(a+1) = \frac{a}{1-a}$; 2) $f(0) = 9$, $f(1) = \frac{1}{9}$, $f(a+1) = 3^{-2-4a}$; 3) $f(0) = 3$,

$f(1) = 2$, $f(a+1) = \sqrt{4-5a}$. 455. 1) $-a-b$; 2) $4ab$. 456. $f(2) = 6$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f(0) = 1$, $f(3\sqrt{2}) = \sqrt[3]{31}$. 457. $-\infty < x < -2$, $-2 < x < +\infty$.

458. $-\infty < x < -1$, $-1 < x \leq 1,5$. 459. $-2 \leq x \leq +2$. 400. $-\infty < x < -3$, $1 < x < +\infty$. 461. $-\infty < x \leq -3$, $0 \leq x \leq +3$. 462. $-3 < x < \frac{1}{2}$.

463. $x > 0$, $x \neq n$, $n = 1, 2, \dots$. 464. $0 < x \leq 8$. 465. $\frac{4k-1}{2} \pi \leq x \leq \frac{4k+1}{2} \pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 466. $\frac{12k-7}{6} \pi < x < \frac{12k+1}{6} \pi$,

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 468. $-1 \leq y \leq 7$. 469. $-\infty < y \leq \log 3$. 470. $-\frac{1}{4} \leq y < +\infty$. 471. $0 < y \leq 1$. 472. $-\infty < y < 0$, $0 < y < +\infty$.

473. $\frac{1}{2} \leq y \leq 2$. 474. $V = \pi h \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)$, funktsiooni määramispiirkond on $0 \leq h \leq 2R$, avaldise määramispiirkond $-\infty < h < +\infty$. 475. $S = 2h\sqrt{R^2 - h^2}$, funktsiooni määramispiirkond on $0 \leq h \leq R$, avaldise määramispiirkond $-R \leq h \leq R$.

476. $S = \begin{cases} \frac{2x^2}{3}, & \text{kui } 0 \leq x \leq 1,8, \\ 6 - \frac{3(5-x)^2}{8}, & \text{kui } 1,8 < x \leq 5. \end{cases}$

477. Määramispiirkond on $0 \leq x \leq 7$, väärtuste hulk $-1 \leq y \leq 5$, nullkohad

$x = 4$ ja $x = \frac{16}{3}$, $f(x) = \begin{cases} 4-x, & \text{kui } 0 \leq x \leq 5, \\ 3x-16, & \text{kui } 5 < x \leq 7. \end{cases}$

$$478. f(x) = \begin{cases} 2, & \text{kui } x < -1, \\ \frac{-2x+4}{3}, & \text{kui } -1 \leq x \leq 2, \\ \sqrt{-x^2+6x-8}, & \text{kui } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

$$479. z = \sin x - 2, \quad v = \sin^2 x - 3 \sin x + 2, \quad u = 1 + \sqrt{\sin^2 x - 3 \sin x + 2}.$$

$$480. f[g(x)] + g[f(x)] = \sqrt{1+x^2} + ax. \quad 481. f[g(x)] = x-1, \quad g[f(x)] = \frac{x}{5},$$

$$f\{g[f(x)]\} = \log_5 x. \quad 482. f\{f[f(x)]\} = \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}}. \quad 483. y = \frac{1+4x}{2-3x}. \quad 484. y =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{x}{1+x}}. \quad 485. y = \frac{4 + \log_2 x}{3}. \quad 486. y = (1-3x)^2. \quad 487. 3 < x < +\infty.$$

$$488. -3 < x < 3. \quad 489. -2 < x < 0, \quad 5 < x < +\infty. \quad 490. -\infty < x < 2.$$

$$491. -\infty < x \leq 0 \text{ kahaneb, } 0 \leq x < +\infty \text{ kasvab. } 492. -\infty < x < 1 \text{ kasvab,}$$

$$1 < x < +\infty \text{ kasvab. } 493. -\infty < x \leq 0 \text{ kasvab, } 0 \leq x < +\infty \text{ kahaneb.}$$

$$494. 0 \leq x < +\infty \text{ kahaneb. } 495. -2 \leq x \leq 0 \text{ kasvab, } 0 \leq x \leq 2 \text{ kahaneb.}$$

$$496. -\infty < x < 8 \text{ kahaneb. } 497. \text{ Paaritu funktsioon. } 498. \text{ Paarisfunktsioon.}$$

$$499. \text{ Paarisfunktsioon. } 501. \text{ Paaritu funktsioon. } 503. \text{ Paarisfunktsioon. } 504. \text{ Paaritu}$$

$$\text{funktsioon. } 505. 1) \text{ Paaritu funktsioon; } 2) \text{ paarisfunktsioon; } 4) \text{ paaris-}$$

$$\text{funktsioon; } 5) \text{ paaritu funktsioon. } 516. x = 0,3. \quad 517. x_1 = -1,2, \quad x_2 = 0,8.$$

$$518. x = 1,2. \quad 519. x_1 = -0,5, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 55. \quad 520. f(x) = \frac{-5x+14}{3}. \quad 522. f(x) =$$

$$= 4x^2 + 2x + 3. \quad 523. f(4) = 136. \quad 524. f(-3) = -327. \quad 525. f(2) = 0.$$

$$526. f(x) = \frac{3x+4}{x-2}. \quad 527. \text{ Kõik reaalarvud, välja arvatud } x = -2, x = 0 \text{ ja}$$

$$x = 2. \quad 528. y = 0. \quad 529. x+2=0, \quad x+3=0. \quad 530. y+2=0, \quad x-1=0.$$

$$531. x-y+1=0, \quad x-2=0. \quad 532. x-y+6=0, \quad x-3=0, \quad x=0. \quad 533. y =$$

$$= 2x^2 - 1, \quad x-3=0. \quad 542. x_1 = 0,46, \quad x_2 = 3,3. \quad 543. x_1 = -1,7, \quad x_2 = 1,4.$$

$$544. x = -0,54. \quad 545. 1) y = 3^{x+1} - 2; \quad 2) y = 2 - 3^{1-x}; \quad 3) y = 3^{1-x} - 2;$$

$$4) y = \log_3(2-x) - 1. \quad 547. y = \frac{1}{3} \ln(e^{x-2} - 1). \quad 548. y = e^{\frac{x^2-1}{3-x^2}}. \quad 549. 0 \leq x \leq 3.$$

$$550. \frac{1}{e^3} < x < e^3. \quad 551. -1 < x < 2. \quad 552. \sqrt[3]{6} \leq |x| < 3. \quad 553. \frac{1-e^2}{4} \leq x < \frac{1}{4}.$$

$$0 \leq y < +\infty. \quad 554. 1) f(\tilde{x}) = g(x \cdot \log_3 2); \quad 2) f(x) = \ln 3 \cdot g(x). \quad 563. \frac{2\pi}{3}.$$

$$564. \frac{2\pi}{3}. \quad 565. \pi. \quad 566. 2\pi. \quad 567. 24\pi. \quad 568. \pi. \quad 570. f_{\min}(x) = 0, \quad f_{\max}(x) = \pi.$$

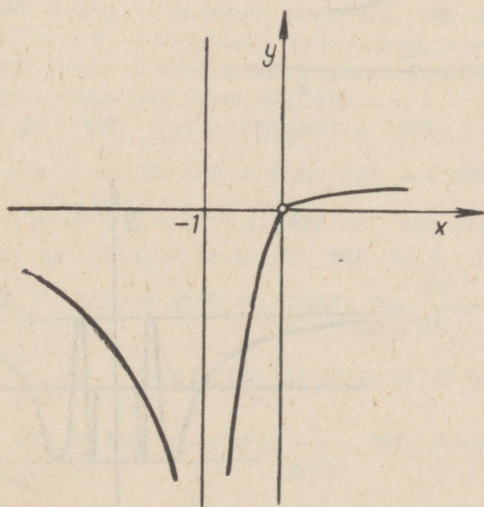
$$571. \alpha = 2 \arcsin \frac{\beta}{2\pi}. \quad 572. 2n\pi < x < (2n+1)\pi, \text{ kus } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$573. \frac{1}{e} \leq x \leq e. \quad 574. \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \quad 575. -\frac{1}{3} \leq x \leq 1. \quad 576. f(0) = \pi, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

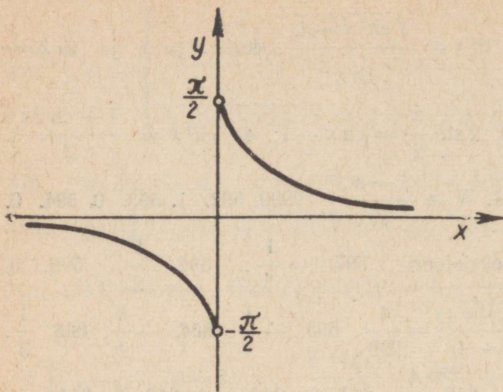
$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{3}, \quad f(1-a) = \arccos(1-2a). \quad 577. 1) 0,6; \quad 2) \frac{1}{5\sqrt{2}}; \quad 3) \frac{3}{4}; \quad 4) \frac{1}{3}.$$

$$578. 1) 1,4224; \quad 2) 2,6895; \quad 3) 2,7140. \quad 579. 1) 0,7780; \quad 2) -0,1059; \quad 3) 0,8004.$$

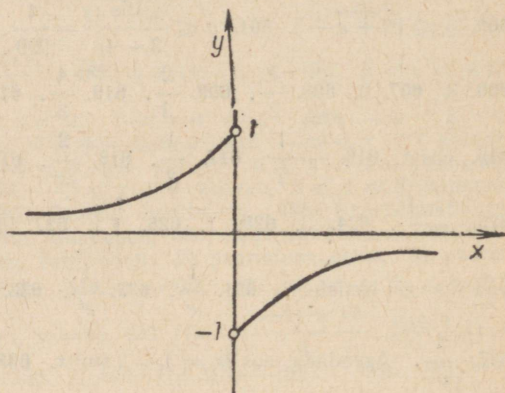
584. 1) $\operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}$; 2) $\operatorname{th} x = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x}$, kui $x \geq 0$, ja $\operatorname{th} x = \frac{-\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x}$, kui $x < 0$; 3) $2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = \operatorname{ch} x - 1$; 4) $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2}$.
585. Hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. 591. $N \geq \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} = 19999$. 592. 1. 593. 0. 594. 0.
595. 3. 596. Piirväärtus ei eksisteeri. 597. $-\frac{1}{3}$. 598. $\frac{1}{2}$. 599. 0.
600. $\delta \leq \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$. 601. $\delta \leq \frac{16\varepsilon}{3 - 4\varepsilon} = \frac{4}{299}$. 603. $-\frac{1}{4}$. 604. $-\frac{3}{2}$. 605. $\frac{1}{3}$.
606. 3. 607. 0. 608. $\frac{1}{2}$. 609. $\frac{2}{3}$. 610. $\frac{4}{3}$. 611. 3. 612. $\frac{5}{3}$. 613. 1. 614. $\frac{1}{2}$.
615. $\cos a$. 616. $-\frac{1}{2}$. 617. $\frac{1}{2}$. 618. $\frac{2}{\pi}$. 619. $-\frac{1}{2\pi}$. 620. 0. 621. 2. 622. 0.
623. $-\frac{1}{2}$. 624. 3. 625. 1. 626. $\sqrt[3]{2}$. 627. 0. 628. 1. 629. $\frac{1}{4}$. 630. Piirväärtus ei eksisteeri. 631. $\frac{1}{e}$. 632. $\frac{1}{e^6}$. 633. e^3 . 634. 1. 635. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 636. 1.
637. $\frac{1}{e^2}$. Asendada $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$. 638. e^3 . 639. πl , 0. 640. $2a^2, \frac{\pi a^2}{2}$.
641. 4. 642. 2. 643. v_n . 644. z, u, x, y . 646. 1) x ; 2) $3x^2$; 3) $-\frac{x^3}{2}$.
649. $9 - (6\varepsilon - \varepsilon^2) < x < 9 + (6\varepsilon + \varepsilon^2)$. 650. $-\infty < x < -3$, $-3 < x < 0$,



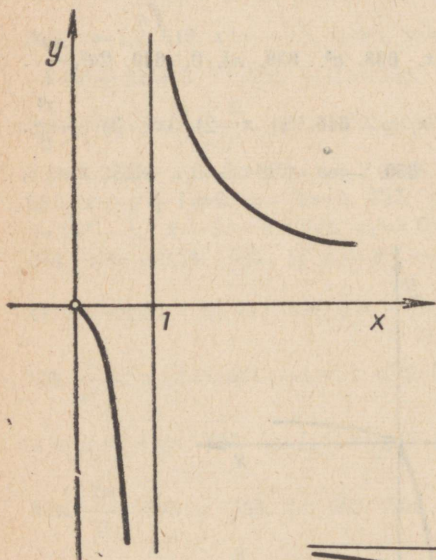
Joon. 82



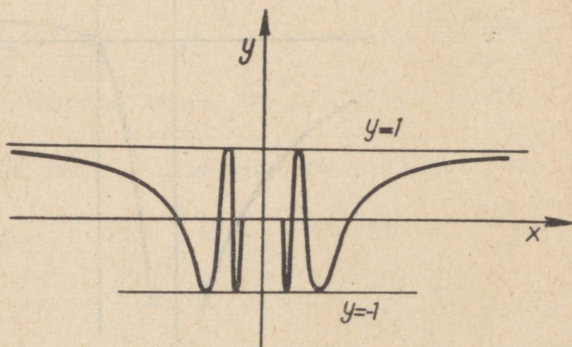
Joon. 83



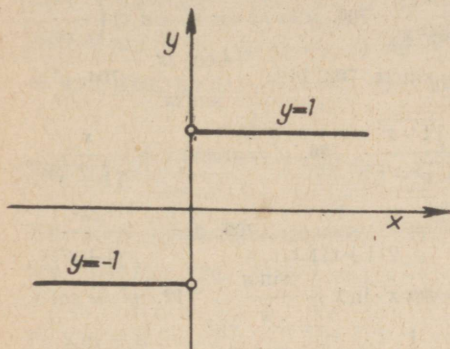
Joon. 84



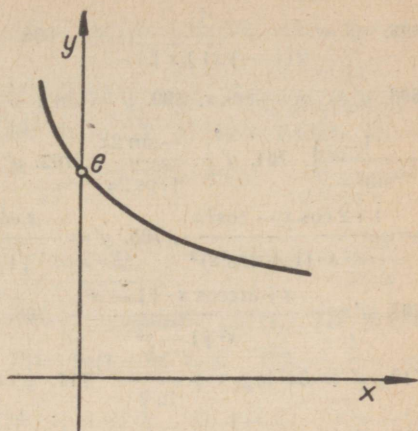
Joon. 85



Joon. 86



Joon. 87



Joon. 88

- $0 < x < 3$, $3 < x < +\infty$. 651. $1 \leq x < 3$, $3 < x < +\infty$. 652. $0 < x \leq \frac{1}{e^2}$,
 $\frac{1}{e^2} < x \leq 1$. 653. $-4 < x < -\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi < x < 4$.
 654. Kõik reaalarvud peale paaritute täisarvude. 655. Kõik reaalarvud peale
 $x = 0$ ja $x = \frac{1}{(2k+1)\pi}$, kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 656. $\frac{\pi}{2}$. 657. $-\frac{\pi}{2}$. 658. 0.
 659. 1. 660. -1. 661. 0. 662. $\frac{3}{2}\pi$. 663. $-\frac{2}{\pi}$. 664. $x = -1$ — lõpmatus-
 koht (joon. 82). 665. $x = 0$ — hüppekoht (joon. 83). 666. $x = 0$ — hüppe-
 koht (joon. 84). 667. $x = 0$ — kõrvaldatav katkevuskoht, $x = 1$ — lõpmatus-
 koht (joon. 85). 668. $x = 0$ — võnkumiskoht (joon. 86). 669. Katkevuskohti
 ei ole. 670. $x = 0$ — hüppekoht (joon. 87). 671. $x = 0$ — kõrvaldatav kat-
 kevuskoht (joon. 88). 672. $x = 2$ (hüppekoht). 673. $a = 7$, $b = -11$.
 674. $f(0) = 2$. 675. $f(0) = \frac{1}{e^2}$. 676. $f(0) = 4$. 677. $f(0) = 0$. 678. $\delta \leq \frac{\varepsilon x^2}{1 - \varepsilon x} \approx$
 $\approx \varepsilon x^2$; $\delta_1 = 10^{-3}$, $\delta_2 = 10^{-5}$, $\delta_3 = 10^{-9}$; ei. 680. Jah, sest $f(x)$ on vahemikus
 $-1 \leq x \leq 1$ pidev ja $f(-1) < \sqrt{\pi} < f(1)$. 681. 1) 6; 2) -4; 3) 1,04;
 4) -0,49. 682. 1) 17; 2) 13,25; 3) 10,61; 4) 10,0601; $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 10$. 683. $2x - 3$.
 684. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 685. $-\frac{1}{x^2}$. 686. $-2 \sin 2x$. 687. 1) 73; 2) 61; 3) 58,3; 4) 58,03; 58.
 688. $\omega = 2(1 - t)$. 689. 2. 690. $y' = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. 691. $y' = 1 + 5x^4 + \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$.
 692. $y' = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$. 693. $y' = 10(2x + 3)^4$. 694. $y' = \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x - 1}}$.

695. $y' = \frac{1}{2(1-\sqrt{x})\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$. 696. $y' = \frac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$. 697. $y' = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.
 698. $y' = \sin x + \cos x$. 699. $y' = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$. 700. $y' = (x \cos x - \sin x) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$. 701. $y' = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$. 702. $y' = \sin 2x$. 703. $y' = -\frac{4 \cot 2x}{\sin 2x}$. 704. $y' = \frac{1+2 \cos x - \cos^3 x}{\cos^2 x \cdot (1 + \cos x)^2}$. 705. $y' = \frac{-x \cos \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$. 706. $y' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
 707. $y' = -\frac{x + \arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$. 708. $y' = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$. 709. $y' = -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$.
 710. $y' = 3x^2 \log_2 x + \frac{1}{\ln 2}$. 711. $y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}$. 712. $y' = \cot x$.
 713. $y' = \frac{-1}{x \cdot \ln 3 \cdot \log_3^2 x}$. 714. $y' = \frac{1}{2x \sqrt{\ln x - \ln^2 x}}$. 715. $y' = -\frac{3 + \ln x}{3x \sqrt{x \ln^2 x}}$.
 716. $y' = \frac{-1}{\ln 5 \cdot \sqrt{x^2-1}}$. 717. $y' = 3 \cdot 2^{3x} \cdot \ln 2$. 718. $y' = \frac{1-x \ln 4}{4^x}$. 719. $y' = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}$.
 720. $y' = -2^{\cos x} \sin x \cdot \ln 2$. 721. $y' = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$. 722. $y' = 10(10^x + 10^{-x})^9(10^x - 10^{-x}) \ln 10$. 723. $y' = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$. 724. $y' = 2^3 \cdot 4^x \cdot 3^{4^x} \cdot 4^x \cdot \ln 2 \cdot \ln 3 \cdot \ln 4$. 725. $y' = 3 \operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{sh} x$. 726. $y' = \operatorname{th} x$.
 727. $y' = \frac{1}{\operatorname{ch} 2x}$. 728. $y' = \frac{\sin x \cdot \operatorname{sh} x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot \cos x \cdot \operatorname{sh} x + \sqrt{x} \cdot \sin x \cdot \operatorname{ch} x$.
 729. $y' = \frac{1}{1 + \operatorname{ch} x}$. 730. $y' = \frac{\operatorname{sh} x}{|\operatorname{sh} x| \operatorname{ch} x}$. 731. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+x^2}}$. 732. $y' = \frac{1}{1-x^2}$.
 733. $y' = \frac{|\cos x|}{\cos^2 x}$. 734. $y' = \frac{x}{|x|(1-x^2)}$. 735. $y' = \frac{1}{2(1+\sqrt{x})}$. 736. $y' = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$.
 737. $y' = \sqrt{4-x^2}$. 738. $y' = \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}$. 739. $y' = \frac{1}{(x^4-1)^2}$. 740. $y' = \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$. 741. $y' = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 \sqrt{x+1}}$. 742. $y' = \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}$. 743. $y' = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}$.
 744. $y' = \sqrt{2 + \tan^2 x}$. 745. 0. 746. $\ln 2$. 747. 2. 748. $-\frac{\sqrt{2}}{12}$.
 749. $-\sqrt{2}$. 750. 4. 751. $3x - y - 2 = 0$. 752. $x + 2y - 2 = 0$. 753. $7x + 12y - 55 = 0$, $14x + 9y - 55 = 0$. 754. 1) (1; -2); 2) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{9}{4} \right)$.
 755. $6x + 13y + 70 = 0$. 756. $7x - 4y + 4 = 0$. 757. $3x + 4y + 10 = 0$.
 758. $3x - 4y + 14 = 0$, $9x + 2y - 28 = 0$. 759. $\arctan \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 760. $\arctan 3$. 761. 90° . 762. 45° ja 90° . 763. 1) $a = e$; 2) $a = \sqrt{e}$.

764. $\frac{|x_0|}{m}$. 765. $\frac{1}{\ln a}$. 766. y_0^2 . 767. $\Delta S = 2\pi r \cdot \Delta r + \pi \cdot \Delta r^2$, $dS = 2\pi r \cdot dr$.
768. 1) $dy = (3x^2 - 2)dx$, $a = 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3$; 2) $dy = -\frac{dx}{x^2}$, $a = \frac{x \cdot \Delta x^2}{x^4 + x^3 \cdot \Delta x}$.
769. 1) $\Delta y = 46$, $dy = 13$; 2) $\Delta y = 1,49$, $dy = 1,3$; 3) $\Delta y = 0,1318$, $dy = 0,13$. 770. $dy = \frac{-2 dx}{(x-1)^2}$. 771. $dy = \frac{dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$. 772. $dy = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} dx$.
773. $dy = \frac{2x dx}{2+x^2}$. 774. $dy = \frac{2^{1+\sqrt{x^2}}}{3\sqrt[3]{x}} \ln 2 \cdot dx$. 775. $dy = -\frac{dx}{\sin x}$.
776. 1,007 (tabelitest 1,0066). 777. 1,043 (tabelitest 1,041). 778. 0,770.
779. 0,4775. 780. $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}$. 781. $\ln(1+x) \approx x$. 782. $\frac{1}{a+x} \approx \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2}$. 783. $e^{\sin x} \approx 1 + x$. 784. 1) $x = 0$; 2) $x = 5$, $x = -2$; 3) $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 785. 1) $f'(-0) = -1$, $f'(0) = 1$; 2) $f'(-1-0) = -1$, $f'(-1+0) = 1$, $f'(1-0) = 1$, $f'(1+0) = -1$.
786. 1) $(-1; 0)$ ja $(3; 0)$; 2) $(1; 3)$. 787. $b = -1$, $c = 0$.
788. 1) $n > 0$; 2) $n > 1$; 3) $n > 2$. 789. $y' = \frac{3x^2 - y}{x + 2y}$. 790. $y' = -\frac{x^2 + y}{y^2 + x}$.
791. $y' = \frac{y^2 - xy \ln y}{x^2 - xy \ln x}$. 792. $y' = \frac{1 - y \cos(xy)}{x \cos(xy)}$. 793. $y' = \frac{e^y}{2-y}$.
794. $y' = \frac{1+y^2}{y^2}$. 795. $y' = \frac{y - y^3 + y \ln y}{2xy^2 - x}$. 796. $y' = \frac{1 - \operatorname{sh}(x+y)}{\operatorname{sh}(x+y)}$.
797. $y' = \frac{x^4 + 6x^2 + 1}{3x(1-x^4)} \sqrt[3]{\frac{x^3 + x}{(x^2 - 1)^2}}$. 798. $y' = \left[\frac{2 - 3 \sin^2 x}{\sin 2x} + \frac{1 + 5x}{3(x-x^2)} \right] \sin x \cdot \sqrt{\cos x} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{(1-x)^2}$. 799. $y' = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$.
800. $y' = (\ln x)^x \left(\frac{1}{\ln x} + \ln \ln x \right)$. 801. $y' = x^{x^x} \cdot x^x \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x} \right)$. 802. $y' = -2 \frac{x \tan x \cdot \ln x + \ln \cos x}{x \ln^2 x}$. 803. $6x - 13y - 32 = 0$.
804. $x - 15y + 16 = 0$, $x - 15y - 16 = 0$. 805. $\left(-\frac{1}{e}; -e \right)$. 806. 1,88.
807. $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \tan t$. 808. $\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 1}{2t}$. 809. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{t}$.
810. $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \operatorname{th} t$. 811. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+2^t)^2}$. 812. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t^2 - 1}$.
813. $3x - 2y = 0$, $2x + 3y = 0$; $3x - y - 1 = 0$, $x + 3y - 7 = 0$.
814. $\alpha_1 = \alpha_2 = \arctan \frac{41}{2} \approx 87^\circ 12'$. 815. Ülesanne ei ole õigesti seatud — antud võrrandid esitavad ühte ja sedasama joont. 816. $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \arctan \frac{162}{2647}$. 817. $\frac{a}{4}$, $\frac{a}{4\sqrt{3}}$, $\frac{a\sqrt{3}}{8}$, $\frac{a}{8\sqrt{3}}$. 819. $y'' = \frac{(3+2x^2)x}{(1+x^2)^2}$.

820. $y'' = \frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2) \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$. 821. $y'' = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$.
822. $y'' = x^x \left[(1+\ln x)^2 + \frac{1}{x} \right]$. 823. $y'' = \frac{2+x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. 824. $y'' =$
- $= 2 - 4 \sin^2 x + \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$. 825. $y'' = \frac{2x}{1+x^2} + 2 \arctan x$. 826. $y^{IV} =$
- $= 120(2x-3x^2)$. 827. $y^{IV} = -4e^x \sin x$. 828. $y^V = \frac{120}{(1+x)^6} \left[\frac{131}{60} - \ln(x+1) \right]$.
829. $y''' = \frac{108}{(2+3x)^4}$. 830. $(-1)^n m(m+1) \dots (m+n-1) \frac{1}{x^{m+n}}$.
831. $(-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{x^n}$. 832. $2^n e^{2x}$. 833. $(-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$, $(n \geq 2)$.
834. $\frac{(-1)^{n+1}}{2} \left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$. 835. $\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}$. 836. 6a.
837. 0. 838. 4. 839. $-\frac{93}{4}$. 840. 100. 841. $d^2y = \frac{dx^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.
842. $d^2y = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} dx^2$. 843. $d^2y = 2e^{x^2}(3x+2x^3) dx^2$. 844. $y'' =$
- $= -\frac{y[(x-1)^2 + (y-1)^2]}{x^2(y-1)^3}$. 845. $y'' = \frac{2}{(x-y)^3}$. 846. $y''' = -\frac{162x}{(x+2y)^5}$.
847. $y''' = \frac{48x^3 - 24xy - 720x^3y^2 - 144xy^3 - 216xy^5}{(3y^2+1)^5}$. 848. $y' = 0$, $y'' = -\frac{2}{3}$,
- $y''' = -\frac{2}{3}$. 849. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{12t(1+t^4)^4}{(1-t^2)^3(1+4t^2+t^4)^3}$. 850. $\frac{d^2y}{dx^2} =$
- $= \frac{2e^{-t}}{(\cos t - \sin t)^3}$. 851. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3 \sin t \cos^4 t}$. 852. $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3}{8(1-t)^3}$.
853. $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{(1+3 \sin^2 t) \sin t}{\cos^7 t}$. 854. $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{8(1-t)^3}{2+3t+2t^2+2t^3}$.
855. $f'(1) = 0$. 856. $\frac{\pi}{2}$. 857. 1) Rahuldab; 2) ei rahulda, funktsiooni väärtused ei ole vahemiku otstes võrdsed; 3) ei rahulda, funktsioon pole kohal $x=0$ diferentseeruv; 4) rahuldab; 5) ei rahulda, funktsioon on kohal $x=0$ katkev. 858. $A(-1; 1)$, $C(1; -1)$. 859. 1) $\xi = \frac{a+b}{2}$; 2) $\xi = 2$;
- 3) $\xi = \ln \frac{e^3-1}{3}$. 860. $x \geq 2500$. 861. $\xi = \frac{\sqrt{31}-4}{3}$. 866. 1. 867. $\frac{1}{n}$. 868. 1.
869. $\frac{1}{6}$. 870. $\frac{1}{3}$. 871. -2 . 872. $\frac{2}{\pi}$. 873. -1 . 874. $\ln \frac{2}{3}$. 875. 1. 876. 0.
877. 0. 878. $\frac{1}{e}$. 879. 1. 880. e^2 . 881. e . 882. $\frac{2}{2}$. 883. Ei eksisteeri. 884. 0.
885. $\frac{1}{3}$. 886. 2. 887. 0. 888. $\frac{1}{\sqrt{n}}$. 889. 1. 890. $\frac{1}{2}$. 891. 3r. 892. $\frac{2}{3}$.

893. 1) Ei, sest 2 pole nimetaja nullkoht; 2) ei, sest lugeja tuletisel pole piirväärtust. 894. $y = \frac{x}{2}$, $y = -\frac{x}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. 895. $y = x$. 896. $y = x - \frac{\pi}{2}$, $y = x + \frac{\pi}{2}$. 897. $y = \frac{\pi}{2}x - 1$, $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$. 898. $x = -\frac{1}{e}$, $y = x + \frac{1}{e}$. 899. $x = 0$, $y = x + 3$. 900. $y = \frac{1}{2}x + e$. 901. $y = \frac{x-1}{2}$, $y = -\frac{x+1}{2}$. 902. $x = 2$, $2x + 8y + 1 = 0$, $6x - 40y + 9 = 0$. 903. $x^5 = 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5$. 904. $-56 + 21(x-4) + 37(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4$. 905. $f(x) = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - \dots - (x+1)^n + (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}$. 906. $f(x) = 1 + \frac{2}{1}x + \frac{2^2}{2!}x^2 + \dots + \frac{2^n}{n!}x^n + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}e^{2\xi}x^{n+1}$. 907. $f(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} \frac{3\xi^3 + 2\xi^3}{(1-\xi^2)^{7/2}}$. 908. 1) $1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3$; 2) $-\frac{x^2}{2}$; 3) $1 + 2x + 2x^2$. 909. 1) $x - \frac{2}{3} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$, 2) $x - \frac{x^3}{6}$; 3) $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$; 4) $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128}$. 910. $1 - 3x + 3x^2 - \frac{17}{6}x^3$. 911. $321 + 1087(x-2) + 1648(x-2)^2$; $f(2,02) \approx 343,4$; $f(1,97) \approx 289,9$. 912. 0,0022. 913. $x - 1 + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} - \frac{(x-1)^5}{20}$; 1) $3,4 \cdot 10^{-2}$; 2) $3,4 \cdot 10^{-8}$. 914. $1 + \frac{x-1}{3} - \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{5(x-1)^3}{81}$. 915. 1) 0,67474; 2) 1,12117; 3) 0,182321; 4) 3,0171. 916. $-\infty < x \leq \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$, $\frac{1 + \sqrt{21}}{2} \leq x < +\infty$. 917. $-\infty < x \leq -1$, $1 \leq x < +\infty$. 920. Piirkonnas $0 \leq x \leq 1$ kasvab, piirkonnas $1 \leq x \leq 2$ kahaneb. 921. Piirkondades $-\infty < x < 0$, $0 < x \leq \frac{1}{2}$ ja $1 \leq x < +\infty$ kahaneb, piirkonnas $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ kasvab. 922. Piirkonnas $0 \leq x \leq 2$ kasvab, piirkondades $-\infty < x \leq 0$ ja $2 \leq x < +\infty$ kahaneb. 923. Piirkonnas $e \leq x < +\infty$ kasvab, piirkondades $0 < x < 1$ ja $1 < x \leq e$ kahaneb. 924. Piirkonnas $0 \leq x \leq \frac{3}{4}$ kasvab, piirkonnas $\frac{3}{4} \leq x \leq 1$ kahaneb. 925. Kasvab igas piirkonnas, mis ei sisalda punkti $x = 1$. 926. Piirkonnas $-1 \leq x \leq 0$ kahaneb, piirkonnas $0 \leq x \leq +1$ kasvab. 927. Piirkonnas $-\infty < x \leq 0$ kahaneb, piirkonnas $0 \leq x < +\infty$ kasvab. 936. $x_{max} = 1$, $x_{min} = 3$. 937. $x_{min} = \frac{3}{4}$. 938. $x_{max} = 1$. 939. $x_{min} = 1$, $x_{max} = e^2$. 940. $x_{min} = 0$. 941. $x_{max} = \frac{12}{5}$. 942. $x_{min} = \frac{1}{e}$. 943. $x_{max} = e$. 944. Funktsioon on oma määramispiirkonnas kasvav. 945. $x_{max} = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x_{min} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

946. $y_{max} = \frac{1}{4}$. 947. $y_{max} = 1, y_{min} = 9$. 948. $y_{max} = \frac{1}{e}, y_{min} = 0$.

949. $y_{min} = \frac{27}{32}a^2$. 950. $y_{min} = 2e$. 951. $y_{max} = (-1)^k + \frac{1}{2}, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$y_{min} = -\frac{3}{4}$. 952. 2; 66. 953. 1; 3. 954. 0; 8. 955. 0; $\frac{1}{4}$. 956. 0; 2.

957. $-\pi - 1; \pi - 1$. 958. $y_{min} = 2$. 959. $y_{max} = 0, y_{min} = -\frac{1}{2}$. 960. $y_{max} =$

$= 2 \cdot \sqrt[3]{4}$. 961. $y_{max} = 1$. 962. $y_{max} = -3a$. 963. $\frac{c^2}{4}$. 964. $\frac{4R}{\sqrt{5}}$ ja $\frac{R}{\sqrt{5}}$.

965. π . 966. $\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi R^3, 2\pi R^2$. 967. Põhja raadius ja kõrgus $\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ cm.

968. Kõrgus $\frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}}$, põhja raadius $\frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$. 969. Alus $\frac{p}{2}$. 970. $\frac{a}{\sqrt{5}}$. 971. $\frac{4}{27}\pi r^2 h$,

kus r on koonuse põhja raadius, h koonuse kõrgus. 972. $\frac{6\pi}{\sqrt{3}}$. 973. $\frac{8}{3}\pi R^3$, kus

R on sfääri raadius. 974. $(p; \pm p\sqrt{2})$. 975. $2ab$. 976. $\theta = 2, \rho = \frac{4}{e^2}$.

977. $(\pm \frac{3\sqrt{3}}{16}; \frac{3}{4})$. 978. Alus $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$, kõrgus $b = d\sqrt{\frac{2}{3}}$, kus d on palgi läbi-

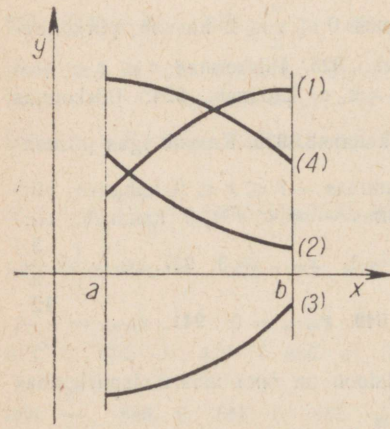
mõõt. 979. Kõrgus $h = \frac{d}{2\sqrt{2}}$, kus d on laua diameeter. 980. $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 288^\circ$.

982. Kumer punktides B ja D , nõgus punktis A ; C on käänupunkt. 983. Kumer piirkonnas $2 < x < 4$, nõgus piirkondades $-\infty < x < 2$ ja $4 < x < +\infty$; käänupunktid (2; 62) ja (4; 206). 984. Graafik on kõikjal nõgus, käänupunkte ei ole. 985. Kumer $-\infty < x < -1$ ja $1 < x < \infty$, nõgus $-1 < x < 1$; käänupunktid $(\pm 1; \ln 2)$. 986. Kumer $-1 < x < 1$, nõgus $-\infty < x < -1$ ja $1 < x < +\infty$; käänupunkte ei ole.

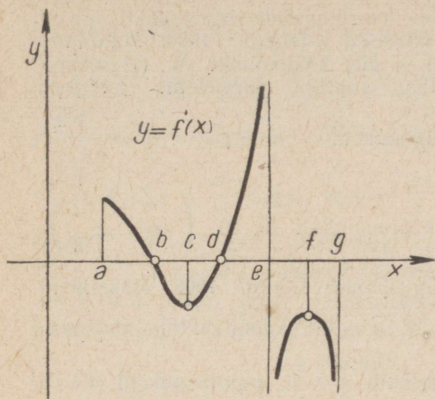
987. Kumer $-3a < x < 0$ ja $3a < x < +\infty$; nõgus $-\infty < x < -3a$ ja $0 < x < 3a$; käänupunktid $(0; 0)$, $(-3a; \frac{9}{4}a)$ ja $(3a; \frac{9}{4}a)$. 988. Kumer $0 < x < 8$, nõgus $-\infty < x < 0$ ja $8 < x < +\infty$; käänupunktid $(8; e^2)$, $(0; 1)$. 989. Kõikjal nõgus, käänupunkte ei ole. 990. Kumer $-\sqrt{\frac{3}{2}} < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$,

nõgus $-\infty < x < -\sqrt{\frac{3}{2}}$ ja $\sqrt{\frac{3}{2}} < x < +\infty$; käänupunktid $(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}})$.

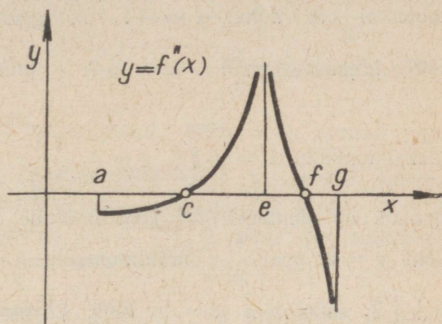
991. (1; 1). 992. (1; 0). 994. $a = -\frac{3}{2}, b = \frac{9}{2}$.



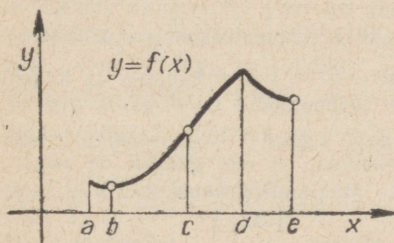
Joon. 89



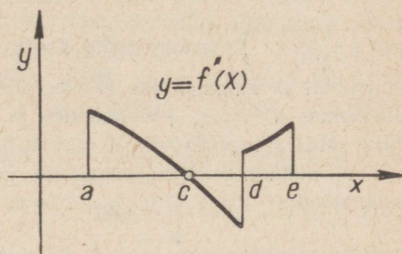
Joon. 90



Joon. 91



Joon. 92



Joon. 93

995. $y = -2x^3 - 6x^2 - 6x$. 996. $y = x^6 - 3x^4 + 3x^2$. 997. $f(x)$ graafikul käänupunktid, $f''(x)$ graafikul löikepunktid x -teljega. 998. Vt. joon. 89. 999. $f'(x)$ graafik vt. joon. 90 ja $f''(x)$ graafik joon. 91. 1000. $f(x)$ graafik vt. joon. 92, $f''(x)$ graafik joon. 93. 1001. Miinimumkoht $x = 0$, $y = 0$; maksimumkohad $x = \pm 1$, $y = \frac{1}{2}$; käänupunktid $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{5}{18}\right)$; graafik on sümmeetriline y -telje suhtes. 1002. Lõpmatuskoht $x = -1$; miinimumkoht $x = 0$, $y = 0$; maksimumkoht $x = -4$, $y = \frac{229}{27}$; käänupunkte ei ole; asümptoodid $x + 1 = 0$, $x - y - 3 = 0$. 1003. Lõpmatuskoht $x = 0$; miinimumkoht $x = \frac{1}{2}$, $y = 3$; käänupunkt $\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}; 0\right)$; asümptoot $x = 0$. 1004. Lõpmatuskohad $x = \pm \sqrt{3}$; maksimumkoht $x = 3$, $y = -\frac{9}{2}$; miinimumkoht $x = -3$, $y = \frac{9}{2}$; käänupunkt $(0; 0)$; asümptoodid $x \pm \sqrt{3} = 0$, $x + y = 0$; graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes. 1005. Määramispiirkond $-1 \leq x \leq 1$; maksimumkoht $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{2}$; miinimumkoht $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{1}{2}$; käänupunkt $(0; 0)$;

asümptoote ei ole; graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes; graafiku otstes $x = \pm 1$ on puutujad paralleelsed y -teljega. **1006.** Määramispiirkond $-1 \leq x \leq +\infty$; ekstreemumkohti ei ole; käänupunkt $(0; 1)$; asümptoote ei ole; kohal $x = -1$ on graafiku puutuja paralleelne y -teljega.

1007. Lõpmatuskohad $x = \pm 1$; miinimumkoht $x = \sqrt[3]{3}$, $y = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$;

maksimumkoht $x = -\sqrt[3]{3}$, $y = -\frac{\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{2}}$; käänupunktid $(0; 0)$, $(\pm 3; \pm \frac{3}{2})$;

graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes. **1008.** Maksimumkoht $x = 2$, $y = \frac{4}{e^2}$; miinimumkoht $x = 0$, $y = 0$; käänupunktide abstsissid

$2 \pm \sqrt[3]{2}$; asümptoot $y = 0$. **1009.** Lõpmatuskoht $x = 0$; miinimumkoht $x = 1$, $y = e$; käänupunkte ei ole; asümptoodid $x = 0$, $y = 0$. **1010.** Määramispiirkond $0 < x < +\infty$; nullkoht $x = 1$; maksimumkoht $x = e$, $y = \frac{1}{e}$; käänupunkt

$(\frac{3}{e^2}; \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}})$; asümptoodid $x = 0$, $y = 0$. **1011.** Lõpmatuskoht $x = 0$; ekstreemumkohti ja käänupunkte ei ole; piirkonnas $-\infty < x < 0$ kahanev ja kumer, piirkonnas $0 < x < +\infty$ kahanev ja nõgus; asümptoodid $x = 0$, $y = 0$, $y = -1$.

1012. Määramispiirkond $-1 < x < 0$, $0 < x < +\infty$; kõrvaldatav katkevuskoht $x = 0$; nullkohti, ekstreemumkohti ja käänupunkte ei ole; graafik on nõgus; asümptoodid $x + 1 = 0$, $y - 1 = 0$. **1013.** Määramispiirkond $0 \leq x < +\infty$;

maksimumkoht $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$; käänupunkti abstsiss $\frac{1 + \sqrt[3]{2}}{2}$; asümptoot $y = 0$.

1014. Perioodiline funktsioon perioodiga 2π ; nullkohad $x = k\pi$; graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes; vahemikus $-\pi \leq x \leq \pi$ on

miinimumkohad $x = -\frac{3\pi}{4}$, $y = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $y = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$ ja $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{2}{3}$ ning maksimumkohad $x = -\frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$ ja

$x = \frac{3\pi}{4}$, $y = \frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$; käänupunktid samas vahemikus $(0; 0)$, $(\pm \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}};$

$\pm \frac{4}{27}\sqrt[3]{30})$, $(\pm \pi \mp \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}}; \pm \frac{4}{27}\sqrt[3]{30})$ ja $(\pm \pi; 0)$. **1015.** Määramis-

piirkond $0 < x < +\infty$; miinimumkohad $x = e^{2k\pi - \frac{\pi}{4}}$; maksimumkohad $x = e^{2k\pi + \frac{3}{4}\pi}$; käänupunktide abstsissid $x = e^{k\pi + \frac{\pi}{4}}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

1016. Lõikepunktid koordinaattelgedega $(0; 0)$, $(0; -2)$, $(\pm 2\sqrt[3]{3} - 3; 0)$; $x_{max} = 1$, $y_{max} = 1$, $y_{min} = -2$; $t < 1$ puhul nõgus, $t > 1$ puhul kumer.

1017. Lõikepunktid koordinaattelgedega $(0; -1)$, $(0; -\frac{1}{3})$; $x_{min} = -1$; käänu-

punkt $(-\frac{5}{9}; -\frac{3}{4})$, asümptoodid $y = 0$, $x - 3 = 0$. **1018.** Lõikepunkt koordinaattelgedega $(0; 0)$; $x_{max} = 0$, $x_{min} = 4$; t suurenemisel y kahaneb; käänu-

punkt (ligikaudu) $(-0,08; 0,3)$; asümptoodid $y = 0$, $2x + 1 = 0$, $2x - 4y - 3 = 0$. **1019.** Lõikepunktid koordinaattelgedega $(2; 0)$, $(0; -2\sqrt{2})$, $(-4; 0)$, $(0; 2\sqrt{2})$; $x_{max} = 4$ ($t = 0$ ja $t = \pi$ puhul), $x_{min} = -4$ ($t = \frac{\pi}{2}$ puhul), $y_{max} = 4$ ($t = 0$ ja $t = \frac{2\pi}{3}$ puhul), $y_{min} = -4$ ($t = \frac{\pi}{3}$ ja $t = \pi$ puhul);

nõgus $0 < t < \frac{\pi}{2}$ puhul, kumer $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ puhul. **1020.** Joon asetseb piirkonnas $x \leq -2$ ja $x > 0$ ning on sümmeetriline sirge $x - y = 0$ suhtes; $y_{max} = -2$ ($x = 1$ puhul); käänupunkte ei ole; asümptoodid $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 0$. **1021.** Joon asetseb piirkonnas $-1 \leq x \leq 4$ ning on sümmeetriline x -telje suhtes; lõikepunktid koordinaattelgedega $(-1; 0)$, $(0; 0)$,

$(4; 0)$; $|y|_{max}$ on $x = \frac{9 \pm \sqrt{209}}{8}$ puhul; käänupunkte ei ole; joon koosneb kahest silmusest, mis puudutavad teineteist punktis $(0; 0)$. **1022.** Ekstremumkohti ei ole; käänupunkt $(0; 0)$; $x > 0$ puhul kumer, $x < 0$ puhul nõgus; asümptoot $x - y = 0$; joon on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes. **1023.** $x_2 = 2,20$ ($\pm 0,03$), $x_3 = 2,1827$ ($\pm 0,0002$). **1024.** $x = -3,794$. **1025.** $x_1 = -2,602$, $x_2 = 0,340$, $x_3 = 2,262$. **1026.** $x_1 = -0,724$, $x_2 = 1,221$. **1027.** $x = 0,836$. **1029.** $x_1 = 0,472$, $x_2 = 9,999$. **1030.** $-0,19994$.

1031. $0,793\ 700\ 53$. **1032.** $2,094\ 551\ 4816$. **1033.** $\frac{x^8}{8} + \frac{7^x}{\ln 7} - 7x + C$. **1034.** $\frac{x^4}{2} - 3x\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{16x^4} - x + C$. **1035.** $\frac{x^2}{2} - 4x + 4 \ln|x| + C$. **1036.** $-\cot x - x + C$. **1037.** $-3 \cot x + 2 \cos x + C$. **1038.** $\frac{x^3}{3} + \arctan x + C$. **1039.** $\left(x - \frac{1}{5x^5}\right) \operatorname{sg} x + C$. **1040.** $x - \arctan x + C$. **1041.** $2 \arcsin \sqrt{x} + C$.

1042. $C - 2 \cot(\arcsin \sqrt{x})$. **1043.** $C - \arcsin \frac{1}{x}$. **1044.** $C - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x}$.

1045. $\frac{2}{3} \arctan \sqrt{x^3 - 1} + C$. **1046.** $\frac{3\sqrt[3]{x}}{4} (\sqrt[3]{x} - 1) + \frac{3}{8} \ln|2\sqrt[3]{x} + 1| + C$.

1047. $\sqrt{1 + x^2} + C$. **1048.** $\frac{\ln \tan x}{2} (4 + \ln \tan x) + C$. **1049.** $\frac{1}{2} \ln|3x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 5| + C$. **1050.** $C - \frac{1}{3} \ln|5 - e^{3x}|$. **1051.** $x - \ln(1 + e^x) + C$. **1052.** $C - \ln|\cos x|$. **1053.** $\frac{1}{2} (\arcsin x)^2 + C$. **1054.** $\frac{5}{2} (\arctan x)^2 + C$.

1055. $\frac{\tan^2 x}{2} + C$. **1056.** $\frac{(2\sqrt{x} + x)^2}{2} + C$. **1057.** $C - \frac{1}{6(1 + 2t^3)}$.

1058. $\arcsin(\ln x) + C$. **1059.** $\frac{1}{3} (x^2 + 5)^{\frac{3}{2}} + C$. **1060.** $\frac{2}{5} \tan x^5 + C$.

1061. $C - \frac{4}{7} (1 - \arctan x)^{\frac{7}{4}}$. **1062.** $C - \frac{5}{16} \sqrt[5]{(3 - x^4)^4}$. **1063.** $\frac{3}{5} \sqrt[3]{(\tan x - 3)^5} + C$.

1064. $C - \frac{1}{6 \sin^6 x}$. 1065. $\frac{(3x-7)^{16}}{48} + C$. 1066. $C - \frac{2}{3} \sqrt{2-3x}$.
1067. $\frac{e^{ax+b}}{a} + C$. 1068. $\frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + C$. 1069. $\frac{1}{3} \operatorname{ch}(3x-2) + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x + C$.
1070. $\frac{1}{a} \arcsin(ax+b) + C$. 1071. $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \sqrt{3}x + C$.
1072. $\frac{1}{a} \arctan(ax+b) + C$. 1073. $\frac{1}{2} \arctan \frac{x+3}{2} + C$.
1074. $\frac{2}{\sqrt{47}} \arctan \frac{4x-3}{\sqrt{47}} + C$. 1075. $\frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{6}} + \ln(x^2+4x+$
 $+ 10) + C$. 1076. $3\sqrt{5} \arctan \frac{2x-3}{\sqrt{5}} + 2 \ln(2x^2-6x+7) + C$.
1077. $\frac{1}{3} \tan(3x-2) + C$. 1078. $\frac{1}{2} \arctan 2x + C$. 1079. $\ln|\arctan x - 1| + C$.
1080. $\frac{5^5}{3} \sqrt[5]{(\ln x + 2)^3} + C$. 1081. $\arctan(x-3) + C$. 1082. $\sqrt{2x-3} -$
 $- 7 \ln(\sqrt{2x-3} + 7) + C$. 1083. $\frac{1}{4} e^{4x} + \frac{5^{2x}}{2 \ln 5} + \frac{2}{3 \cdot 7^{3x} \ln 7} + C$. 1084. $C -$
 $-\frac{1}{10(5x+1)^2} - \frac{3^3}{32} \sqrt[3]{(7-8x)^4}$. 1085. $\frac{5}{8} (7 - \cos x)^{\frac{8}{5}} + C$. 1086. $\arcsin(x-3) +$
 $+ C$. 1087. $\frac{\arctan^3 x}{3} - 3 \arctan x + C$. 1088. $\ln(5 + \arcsin x) + C$.
1089. $\ln|\ln(\ln x)| + C$. 1090. $3 \arcsin x + 7\sqrt{1-x^2} + C$. 1091. $(5-2x) \cos x +$
 $+ 2 \sin x + C$. 1092. $x \sin x + \cos x + \frac{\sin^2 x}{2} + C$. Enne integreerimist teisen-
- dada integreeritav funktsioon summaks. 1093. $-e^{-x}(x+1) + C$. 1094. $x \tan x +$
 $+ \ln|\cos x| + C$. 1095. $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$. 1096. $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 +$
 $+ x^2) + C$. 1097. $\frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$. 1098. $-\frac{1}{x} (\ln x + 1) + C$.
1099. $\frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$, $\frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C$. 1100. $\frac{e^x}{3} (2 \operatorname{sh} 2x - \operatorname{ch} 2x) +$
 $+ C$. 1101. $\frac{e^{4x}}{4} \left(x^3 - \frac{3}{4} x^2 - \frac{21}{8} x + \frac{53}{32} \right) + C$. 1102. $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{\ln^2 x}{2} + C$.
1103. $(x^2+2) \operatorname{ch} x - 2x \operatorname{sh} x + C$. 1104. $e^x(x^3-3x^2+6x-6) + C$.
1105. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C$. 1106. $\frac{3}{8} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{3x+4}{4(x+1)^2} + C$. 1107. $\ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C$.
1108. $-\ln|x| + \frac{7}{2} \ln|x-1| - 4 \ln|x-2| + \frac{3}{2} \ln|x-3| + C$. 1109. $\frac{3}{2} \ln|x-1| -$
 $-\frac{9}{2} \ln|x+1| + 4 \ln|x+2| + C$. 1110. $\frac{1}{4} \ln \frac{x^3}{|(x-1)^3(x+1)^5|} - \frac{x+3}{2(x^2-1)} + C$.

1111. $27 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{38}{x-2} + C.$ 1112. $\ln|x-1| - \frac{4x-3}{2(x-1)^2} + C.$ 1113. $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 13x - \frac{3}{10} \ln|x| + \frac{1878}{35} \ln|x-5| - \frac{61}{14} \ln|x+2| + C.$ 1114. $\frac{x^2}{2} - \ln|x-1| + \frac{22}{5} \ln|x-2| + \frac{23}{5} \ln|x+3| + C.$ 1115. $\frac{x^3}{3} + \ln|x^2-1| + C.$
1116. $\frac{x^2}{2} + \ln \left| \frac{x^2-1}{x} \right| + C.$ 1117. $\frac{1}{18} \ln|x-1| - \frac{15}{2} \ln|x+3| - \frac{59}{9} \ln|x+2| - \frac{10}{3(x+2)} + C.$ 1118. $264 \ln|x+3| - 263 \ln|x+4| + \frac{99}{x+3} + \frac{181}{x+4} + C.$
1119. $\frac{x^4}{4} + \ln|x-1| - \ln|x+1| - \frac{2}{x+1} + C.$ 1120. $\frac{11x-8}{9(x-1)(x+2)} + \frac{11}{27} \ln|x-1| + \frac{16}{27} \ln|x+2| + C.$ 1121. $\frac{1}{6} \ln|x-1| + \frac{5}{2} \ln|x+1| - \frac{8}{3} \ln|x+2| + C.$ 1122. $\ln|1+x| + 2 \ln|x-1| - \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C.$
1123. $C - \frac{1}{196(x+1)^{196}} + \frac{3}{197(x+1)^{197}} - \frac{3}{198(x+1)^{198}} + \frac{1}{199(x+1)^{199}}.$
1124. $\frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}} + C.$ 1125. $\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{4x-1}{\sqrt{2}} + C.$
1126. $\frac{1}{2} \ln(x^2+4x+7) - \frac{5}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{3}} + C.$ 1127. $\ln(4x^2+12x+11) - \frac{9}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{2x+3}{\sqrt{2}} + C.$ 1128. $\frac{x^2}{2} - x + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$
1129. $x + \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$ 1130. $x - \ln(x^2+2x+5) - \frac{3}{2} \arctan \frac{x+2}{2} + C.$ 1131. $\frac{1}{3} \ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$
1132. $-\frac{1}{3x} - \frac{\sqrt{6}}{9} \arctan \sqrt{\frac{2}{3}}x + C.$ 1133. $2 \ln|x+3| + \frac{5}{2} \ln(x^2+25) - \frac{1}{5} \arctan \frac{x}{5} + C.$ 1134. $-\frac{2}{5(x-1)^2} - \frac{2}{5(x-1)} - \frac{4}{5} \ln|x-1| + \frac{2}{5} \ln(x^2+1) + \frac{2}{5} \arctan x + C.$ 1135. $\frac{1}{18} \ln(4x^2+5) + \frac{2}{9\sqrt{5}} \arctan \frac{2x}{\sqrt{5}} - \frac{1}{9} \ln|1-x| + C.$
1136. $\frac{1}{8} \ln|x^2-1| + \frac{3}{8} \ln(x^2+3) + C.$ 1137. $-\frac{1}{10x^2} + \frac{3}{25x} + \frac{2}{125} \ln \frac{x^2}{x^2+3x+5} + \frac{18}{125\sqrt{11}} \arctan \frac{2x+3}{\sqrt{11}} + C.$ 1138. $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C.$

$$\begin{aligned}
& x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2. \quad 1139. \quad \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}} [\arctan(\sqrt{2}x + 1) + \arctan(\sqrt{2}x - 1)] + C. \quad 1140. \quad \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \\
& + \frac{1}{2} \arctan x + C. \quad 1141. \quad \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + C. \quad 1142. \quad \frac{x-1}{4(x^2+1)} + \\
& + \frac{1}{8} \ln \frac{x^2+1}{(x+1)^2} + C. \quad 1143. \quad C - \frac{3}{2(x^2+1)} - \frac{2x}{1+x^2} - 2 \arctan x. \\
1144. \quad \frac{7x^5 - 11x}{32(x^4 - 1)^2} + \frac{21}{128} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{21}{64} \arctan x + C. \quad 1145. \quad \frac{\sin 2x}{4} - \frac{x}{2} + C. \\
1146. \quad C - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2}. \quad 1147. \quad \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \sin 4x + 2 \sin 2x + 3x \right) + C. \\
1148. \quad \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C. \quad 1149. \quad C - \cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x. \\
1150. \quad \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} + C. \quad 1151. \quad \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \\
+ C = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + C. \quad 1152. \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right| + C. \\
1153. \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + C. \quad 1154. \quad \tan \frac{x}{2} + C. \quad 1155. \quad C - \cot \frac{x}{2}. \\
1156. \quad \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3 + \tan \frac{x}{2}}{3 - \tan \frac{x}{2}} \right| + C. \quad 1157. \quad \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{7}} + C. \\
1158. \quad \frac{1}{8} \left(\tan^2 \frac{x}{2} - \cot^2 \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C. \quad 1159. \quad \frac{1}{25} \left(7 \ln \left| \tan \frac{x}{2} - 2 \right| - \right. \\
- 6 \ln \left| \tan \frac{x}{2} + 3 \right| + \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| - \frac{7}{2} x \left. \right) + C. \quad 1160. \quad \frac{1}{64} \left(\tan^4 \frac{x}{2} - \cot^4 \frac{x}{2} \right) + \\
+ \frac{1}{8} \left(\tan^2 \frac{x}{2} - \cot^2 \frac{x}{2} \right) + \frac{3}{8} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C. \quad 1161. \quad \frac{3}{5} \ln \left| \tan \frac{x}{2} - 3 \right| - \ln \left| \tan \frac{x}{2} - 1 \right| + \\
+ \frac{1}{5} \ln \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) - \frac{2x}{5} + C. \quad 1162. \quad \ln(2 + \cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C. \\
1163. \quad C - \frac{1}{1 + \tan x}. \quad 1164. \quad C - \frac{1}{5 \sin^5 x} + \frac{2}{3 \sin^3 x} - \frac{1}{\sin x}. \quad 1165. \quad -\frac{1}{\cos x} + \\
+ \frac{1}{3 \cos^3 x} + C. \quad 1166. \quad \ln \frac{1 + \cos x}{|\cos x|} + C. \quad 1167. \quad \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^4 x}{4} + C. \\
1168. \quad \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln |\cos x - \sin x| + C. \quad 1169. \quad -\frac{1}{5} \ln |1 - 2 \tan x| + \\
+ \frac{1}{10} \ln(1 + \tan^2 x) - \frac{2}{5} x + C \quad \text{ehk} \quad -\frac{1}{5} \ln |\cos x - 2 \sin x| + \frac{2}{5} x + C. \\
1170. \quad \frac{\sin x}{5 \cos^5 x} + \frac{4}{5} \left(\frac{\sin x}{3 \cos^3 x} + \frac{2}{3} \tan x \right) + C. \quad 1171. \quad \text{Murru nimetajat on sobiv}
\end{aligned}$$

teisendada:

$$2 + 3 \sin^2 x = 2 \cos^2 x + 5 \sin^2 x = \cos^2 x (2 + 5 \tan^2 x).$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \arctan \left(\frac{\sqrt{10}}{2} \tan x \right) + C.$$

$$1172. \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{7}} + C.$$

$$1173. -\frac{3}{4} \ln |\tan x + 1| + \frac{3}{8} \ln (\tan^2 x + 1) + \frac{x}{4} + C \quad \text{ehk} \quad \frac{x}{4} - \frac{3}{8} \ln |\sin x + \cos x| + C.$$

$$1174. C - \frac{\cot^3 x}{3} - \cot x.$$

$$1175. \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right] + C.$$

$$1176. C - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m+n} \cos(m+n)x + \frac{1}{m-n} \cos(m-n)x \right].$$

$$1177. \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right] + C. \quad 1178. C - \frac{1}{2} \left(\frac{\cos 5x}{5} + \cos x \right).$$

$$1179. -\frac{\cos 2x}{16} + \frac{\cos 4x}{64} + \frac{\cos 6x}{48} + \frac{\cos 8x}{128} - \frac{\cos 12x}{192} + C. \quad 1180. \frac{1}{4} \left(\frac{\sin 9x}{9} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 3x}{3} + \sin x \right) + C.$$

$$1181. x - 2 \ln(1 + e^x) + C. \quad 1182. e^x + \ln |e^x - 1| + C.$$

$$1183. \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - 2 \arctan e^x + C. \quad 1184. \frac{1}{2} \arctan \frac{e^x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \ln(e^{2x} + 4) + C.$$

$$1185. \frac{4}{21} \sqrt[4]{(e^x + 1)^3 (3e^x - 4)} + C. \quad 1186. 2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + C.$$

$$1187. \frac{1}{8} (e^{2x} - e^{-2x}) - \frac{x}{2} + C. \quad 1188. \ln |\operatorname{sh} x| - \frac{1}{2} \operatorname{cth}^2 x + C. \quad 1189. \ln |\operatorname{th} x| + C.$$

$$1190. \frac{\operatorname{ch}^3 x}{3} - \operatorname{ch} x + C. \quad 1191. x - \operatorname{th} x + C. \quad 1192. 2 \arctan \sqrt{x} + C.$$

$$1193. 2 \sqrt{x+1} + \ln \left| \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1} \right| + C. \quad 1194. 2 \sqrt{x} - 3 \sqrt[3]{x} + 6 \sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C.$$

$$1195. \frac{4}{3} x^{3/4} - \frac{12}{7} x^{7/12} + \frac{12}{5} x^{5/12} - 4x^{1/4} + 12x^{1/12} - 12 \arctan x^{1/12} + C.$$

$$1196. -\frac{3}{5} \sqrt[3]{(3-x)^2} \left(\frac{19}{2} + x \right) + C.$$

$$1197. \frac{5}{36b^2} \sqrt[5]{(a+bx)^4 (4bx - 5a)} + C. \quad 1198. \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right| + 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

$$\text{ehk} \quad \arccos x - \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C.$$

$$1199. \frac{2}{3} [\sqrt{(x+3)^3} - \sqrt{(x+2)^3}] + C. \quad 1200. \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$1201. \arccos \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} + C. \quad 1202. \frac{1}{4} \ln |\sqrt{16x^2-8x+3} + 4x-1| + C.$$

$$1203. 2 \sqrt{9x^2-6x-2} + \frac{1}{3} \ln |3x-1 + \sqrt{9x^2-6x-2}| + C.$$

$$1204. -\frac{3}{4} \sqrt{3+4x-4x^2} + \frac{13}{4} \arcsin \frac{2x-1}{2} + C. \quad 1205. \frac{1}{2} (x \sqrt{1-x^2} +$$

- $+ \arcsin x) + C.$ 1206. $\ln |\sqrt{4x^2 + 4x + 5} + 2x + 1| + \frac{2x + 1}{4} \sqrt{4x^2 + 4x + 5} + C.$
 1207. $(x - 2)\sqrt{-4x^2 + 4x - 3} - \frac{\sqrt{(-x^2 + 4x - 3)^3}}{3} + \arcsin(x - 2) + C.$
 1208. $\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 6 \ln |\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x - 1| + C.$ 1209. $C - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x}.$
 1210. $\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$ 1211. $\frac{x + 5}{2} \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \frac{7}{2} \ln |x +$
 $+ 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + C.$ 1212. $C - \left| \arcsin \frac{1}{x} \right|.$ 1213. $\frac{1}{2} \ln \frac{|x|}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + C.$
 1214. $C - \frac{1}{10} t^5 + \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t,$ kus $t^2 = \frac{1 + x^4}{x^4}.$ 1215. $\frac{1}{2(t^3 + 1)} +$
 $+\frac{1}{6} \ln \frac{\sqrt{t^2 - t + 1}}{t + 1} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{2t - 1}{\sqrt{3}} + C,$ kus $t^3 = \frac{1 - x^2}{x^2}.$ 1216. $6 \left(\frac{t^7}{7} - \right.$
 $\left. - \frac{3t^5}{5} + t^3 - t \right) + C,$ kus $t^2 = 1 + \sqrt[3]{x}.$ 1217. $\frac{t^9}{9} - \frac{3t^7}{7} + \frac{3t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C,$
 kus $t^2 = 1 + x^2.$ 1218. $\frac{3}{7} (4\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} - 3) \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} + C.$ 1219.
 $-\frac{3}{2(\sqrt[3]{x} + 1)^2} + C.$ 1220. $\frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x^2 + 2x + 2) + 2 \arctan(x + 1) + C.$
 1221. $\frac{4x}{25} + \frac{3}{25} \ln |4 \tan x + 3| - \frac{3}{50} \ln(1 + \tan^2 x) + C.$ 1222. $\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 3 \sqrt[3]{x} +$
 $+ 3 \ln |\sqrt[3]{x} - 1| + C.$ 1223. $\frac{1}{3} \ln |\tan x - 1| - \frac{1}{6} \ln(\tan^2 x + \tan x + 1) -$
 $-\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \tan x + 1}{\sqrt{3}} + C.$ 1224. $-\frac{5}{7} (3 - \arctan x) \sqrt[5]{(3 - \arctan x)^2} + C.$
 1225. $-\ln |x| + \frac{3}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| - \frac{2}{x + 1} + C.$ 1226. $\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} - 6 \sqrt[3]{x} +$
 $+ 12 \ln |2 + \sqrt[3]{x}| + C.$ 1227. $\frac{2}{3} x^3 - \frac{9}{2} x^2 + 20x - \frac{5}{2} \ln |x| + \frac{13}{2} \ln |x + 1| +$
 $+ \frac{1}{6} \ln |x - 1| - \frac{301}{6} \ln |x + 2| + C.$ 1228. $\frac{3^x}{\ln^2 3} (x \ln 3 - 1) + C.$
 1229. $x - \sqrt{1 - x^2} \arcsin x + C.$ 1230. $C - \frac{4}{3(1 + \tan^3 x)}.$
 1231. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + 1}{x - 1} \right| + \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + C.$ 1232. $x - \arctan x + \frac{1}{2} \arctan^2 x + C.$
 1233. $\ln(e^x + 1) - e^{-x} - x + C.$ 1234. $\frac{\tan^3 x}{3} + \tan x + C.$ 1235. $-\frac{\ln(x - 1)}{2(x + 1)^2} +$
 $+\frac{1}{8} \ln \frac{x - 1}{x + 1} + \frac{1}{4(x + 1)} + C.$ 1236. $2[\sqrt{x + 1} - \ln(1 + \sqrt{x + 1})] + C.$
 1237. $\frac{1}{2} (\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + x^2})^2 + C.$ 1238. $e^{\frac{2}{x}} \left(1 - \frac{2}{x} \right) + C.$ 1239. $\frac{x^2 + 1}{2} \arctan x -$

$$\begin{aligned}
& -\frac{x}{2} + C. \quad 1240. \quad \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C. \quad 1241. \quad \frac{1}{\sqrt[6]{5}} \ln(\sqrt[6]{5x} + \sqrt[6]{4+5x^2}) + C. \\
1242. & \frac{(\ln x)^6}{6} - \frac{3(\ln x)^4}{4} + C. \quad 1243. \quad \frac{1}{2} \ln |\cos x + \sin x| + \frac{x}{2} + C. \\
1244. & x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C. \quad 1245. \quad \ln \frac{|x|}{1 + \sqrt{1+x^2}} + C. \\
1246. & \frac{1}{2} \ln |x| - 3 \ln(\sqrt[6]{x+1} + 1) - \frac{1}{\sqrt[6]{x+1} + 1} + \sqrt[3]{3} \arctan \frac{\sqrt[6]{2\sqrt{x+1}+1}}{\sqrt[3]{3}} + \\
& + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \arctan \frac{\sqrt[6]{2\sqrt{x+1}-1}}{\sqrt[3]{3}} + C. \quad 1247. \quad \frac{\tan^7 x}{7} - \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^3 x}{3} - \\
& - \tan x + x + C. \quad 1248. \quad \frac{7}{6} \ln(3x^2 - 4x + 7) + \frac{14}{3\sqrt[3]{17}} \arctan \frac{3x-2}{\sqrt[3]{17}} + C. \\
1249. & \frac{8}{11} x^2 \sqrt[4]{x^3} + \frac{4}{5x\sqrt[4]{x}} + C. \quad 1250. \quad \ln \left| \frac{\sin x}{\sin x - 1} \right| + C. \quad 1251. \quad \frac{3x-11}{25(x-2)^2} + \\
& + \frac{2}{125} \ln |x-2| - \frac{1}{125} \ln(x^2+1) + \frac{11}{125} \arctan x + C. \quad 1252. \quad \frac{2x^2+1}{4} \sin 2x + \\
& + \frac{x}{2} \cos 2x + C. \quad 1253. \quad -\ln |x| + \frac{7}{2} \ln |x-1| - 4 \ln |x-2| + \frac{3}{2} \ln |x+3| + C. \\
1254. & C - 3e^{\frac{\cos x}{3}}. \quad 1255. \quad \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 1}{\tan \frac{x}{2} + 3} \right| + C. \quad 1256. \quad \ln |x+1| + 2 \ln |x-1| - \\
& - \ln |x-2| - \frac{2}{x-2} + C. \quad 1257. \quad \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \arctan \frac{2 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt[3]{3}} + C. \quad 1258. \quad \ln |3 + \\
& + \arcsin x| + C. \quad 1259. \quad \frac{1}{4} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{8} \tan^2 \frac{x}{2} + C. \quad 1260. \quad \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x + \\
& + \ln \frac{|x+3|}{(x-2)^2} + C. \quad 1261. \quad C - \frac{3 \ln x + 1}{9x^3}. \quad 1262. \quad C - \frac{1}{3} \cot 4x. \quad 1263. \quad C - \\
& - \cos x - \frac{\cos^3 x}{3}. \quad 1264. \quad -\frac{1}{5x} - \frac{2}{5\sqrt[5]{5}} \arctan \frac{2x}{\sqrt[5]{5}} + C. \quad 1265. \quad 1) \frac{1}{2}; \\
2) & e^b - e^a. \quad 1266. \quad \frac{15}{4}. \quad 1267. \quad \frac{14}{3}. \quad 1268. \quad 0. \quad 1269. \quad \frac{\pi}{6}. \quad 1270. \quad 1,5 - e. \\
1271. & \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{\pi}{4}. \quad 1272. \quad 2 - \ln 2. \quad 1273. \quad 2\pi. \quad 1274. \quad \frac{29}{3}. \quad 1275. \quad 1. \\
1276. & \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}. \quad 1277. \quad \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2. \quad 1278. \quad \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}.
\end{aligned}$$

1279. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$. 1280. $e^{\int_1^0 \ln x \, dx} = e^{-1}$. 1281. Ei, sest integraalil
- alune funktsioon on kohal $x = 0$ katkev; 2) ei, sest integraalilune funktsioon pole terves integreerimispiirkonnas määratud. 1282. 3; 2.
1283. $\frac{2 \sin x^2}{x}$. 1284. $2x \sin x^4 + \sin x^2$. 1285. x . 1286. $-4(1 + \ln x)$.
1287. 1) 12,5 (kolmnurga pindala); 2) $\frac{9}{4}\pi$ (veerandringi pindala).
1289. 1) Negatiivne; 2) positiivne; 3) positiivne. 1290. 1) Esimene; 2) teine; 3) esimene; 4) teine. 1291. Tõkked on 1) 2 ja 2e; 2) 0,3 ja 0,4; 3) 0,2 ja 0,25. 1292. 1) $\xi = \sqrt{3}$; 2) $\xi = \frac{27}{8}$; 3) $\xi = \pm \arccos \frac{2}{\pi}$.
1293. $\frac{6}{7}$. 1294. $\frac{20}{9}$. 1295. $\frac{2}{3\pi}$. 1296. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 1297. $\frac{61}{6}$.
1298. $-\frac{106}{45}$. 1299. 1) 1; 2) 2; 3) $\frac{49}{3}$. 1300. $\frac{32}{3}$. 1301. 24.
1302. 1. 1303. $\frac{1}{3}$. 1304. $\frac{1}{12}$. 1305. $\frac{\pi}{4}$. 1306. 48. 1307. 0,08 kGm.
1308. 4 kGm. 1309. 1) Ei, sest $x = \frac{1}{t}$ on kohal $t = 0$ katkev; 2) ei, sest
- $x = \sin t$ ei omanda väärtust 2; 3) $-\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2t^2 dt}{\sqrt{1-t^4}}$; 4) ei, sest funktsioonil
- $t = \tan x$ pole ühest pidevalt diferentseeruvat pöördfunktsiooni, mille väärtuste hulk oleks $0 \leq x \leq \pi$; 5) $\int_e^{e^2} \frac{dt}{\ln t}$; 6) ei, sest $x = \sqrt[3]{t}$ pole kohal $t = 0$
- diferentseeruv. 1310. $\frac{1}{2}$. 1311. $\frac{52}{9}$. 1312. $\frac{\pi}{8}$. 1313. $\frac{2}{\sqrt{5}} \arctan \frac{1}{\sqrt{5}}$.
1314. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. 1315. $\frac{1}{3}$. 1316. $\frac{2}{3}$. 1317. $\frac{5}{3} - 2 \ln 2$. 1318. $\frac{\pi}{16}$.
1319. $282 \frac{2}{5}$. 1320. $\left(\frac{\pi}{6} + 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a$. 1321. $\frac{6 - \pi \sqrt{3}}{12}$. 1322. $\frac{\pi}{4}$.
1323. $\frac{\ln 3}{4}$. 1324. $\frac{4 - \pi}{2}$. 1325. 1. 1326. -2π . 1327. $\frac{\pi}{2} - 1$.
1328. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. 1329. $\frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \right)$. 1330. 1. 1331. $6 - 2e$.
1332. $\frac{\pi a^2}{4}$. 1333. $\arctan e - \frac{\pi}{4}$. 1334. $1 - \frac{2}{e}$. 1335. $2 \ln 2 - 1$.
1336. $\frac{\pi}{32}$. 1337. $\frac{\pi}{4}$. 1338. $\pi^2 - 6\pi$. 1339. $\frac{8}{15}$. 1340. $\frac{\pi^3}{64} + \arctan \frac{\pi}{4}$.

1341. $1 - \frac{2}{e}$. 1342. $\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)$. 1343. $\frac{17}{64}$. 1344. 28,135.
1345. 0,04836. 1346. 0,83566. 1347. 17,333. 1348. 1,3704. 1349. 2,59.
1350. 0,7468. 1351. 0,539. 1352. 0,69377; 0,693152. 1353. Ligikaudne
väärtus on $\frac{95}{96} \approx 0,9896$, jääkliikme kaudu hinnatud vea ülemäär $\frac{\sqrt{2}}{32} \approx 0,05$,
täpne väärtus $\frac{3\sqrt{3}-1}{3\sqrt{2}} \approx 0,9892$ ning tegelik viga 0,0004. 1354. 0,9461.
1355. $\frac{179}{90}$. 1356. 1. 1357. $\frac{1}{2}$. 1358. Hajub. 1359. $\frac{\pi}{2}$.
1360. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 1361. $\frac{1}{2}$. 1362. $\frac{1}{2}$. 1363. $\frac{1}{2}$. 1364. $1 - \ln 2$.
1365. Hajub. 1366. $\frac{\pi}{2}$. 1367. 2. 1368. $\ln 3$. 1369. $\frac{\pi}{2}$.
1370. Koondub. 1371. Koondub. 1372. Koondub. 1373. Hajub.
1374. Hajub. 1375. Hajub. 1376. Koondub. 1377. Koondub.
1378. Koondub, kui $k > 2$, ja hajub, kui $k \leq 2$. 1379. Koondub, kui $k > 1$,
ja hajub, kui $k < 1$. 1380. Koondub, kui $k > 1$, ja hajub, kui $k \leq 1$.
1381. Koondub, kui $k < 1$, ja hajub, kui $k \geq 1$. 1382. 3. 1383. π .
1384. 1. 1385. $\frac{8}{3}$. 1386. $-\frac{1}{4}$. 1387. Hajub. 1388. $9\sqrt{2}$.
1389. $\frac{\pi}{2} \ln 2$. 1390. 1. 1391. 4. 1392. π . 1393. Koondub.
1394. Koondub. 1395. Koondub. 1396. Hajub. 1397. Koondub.
1398. Hajub. 1399. Koondub. 1400. Koondub. 1402. Koondub, kui
on korraga täidetud tingimused $m > -1$ ja $n > m + 1$. 1407. 36.
1408. $2 \ln 2 - 1$. 1409. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$. 1410. $\frac{56}{15}\sqrt{2}$. 1411. $\frac{1}{2}$. 1412. $\frac{2}{3}$.
1413. $\frac{16}{3}$. 1414. 25,6. 1415. $\frac{3}{4}\pi$. 1416. $\frac{88}{15}\sqrt{2}$. 1417. π .
1418. $2 - \frac{\pi}{2}$. 1419. $\frac{\pi}{2} - 2 + \ln 2$. 1420. $1 - \frac{1}{e}$. 1421. $\frac{128}{15}$. 1422. π .
1423. $\frac{3}{4}\pi$. 1424. $\frac{8}{15}$. 1425. $\frac{4}{3}$. 1426. $\frac{\pi}{8}$. 1427. πab . 1428. $\frac{a^2}{6}$.
1429. $\frac{4}{3}(4\pi + \sqrt{3})$ ja $\frac{4}{3}(8\pi - \sqrt{3})$. 1430. $\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2})$,
 $\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ ja $\frac{8}{3}\pi + \sqrt{2} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2})$. 1431. π . 1432. 1. 1433. π .
1434. $3\pi a^2$. 1435. $1 - \frac{\pi}{4}$, $1 + \frac{\pi}{4}$. 1436. $\frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{3}$. 1437. $\frac{72}{5}\sqrt{3}$.
1438. $\frac{8}{15}$. 1439. $\frac{8}{15}$. 1440. $3\pi a^2$. 1441. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 1442. $6\pi a^2$. 1443. $\frac{4 - \pi}{8}$.

1444. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ 1445. $\frac{\pi a^2}{4}$ 1446. a^2 1447. $\frac{\pi a^2}{2}$ 1448. $\frac{\pi}{2}(a^2 + 2b^2)$.
 1449. $\frac{\pi a^2}{2}$ 1450. $2\sqrt{2}$ 1451. a^2 1452. a^2 1453. $\frac{\pi}{2}(a^2 + b^2)$ 1454. a^2 .
 1455. $\frac{1}{27} \left[\sqrt[3]{(18\sqrt{2} + 4)^3 - 8} \right]$ 1456. $\frac{e^2 + 1}{4}$ 1457. $\frac{3}{4}$ 1458. $\ln \tan \frac{3\pi}{8} =$
 $= \ln(1 + \sqrt{2})$. 1459. 4 1460. $6a$ 1461. $\frac{8}{9} \left(\frac{5}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} - 1 \right)$ 1462. $3\sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln(3 +$
 $+ 2\sqrt{2})$. 1463. $\sqrt{5} - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13}) + \ln \frac{4 + 2\sqrt{13}}{1 + \sqrt{5}}$ 1464. $\sqrt{1 + e^2} - \sqrt{2} - 1 +$
 $+ \ln[(\sqrt{1 + e^2} - 1)(1 + \sqrt{2})] \approx 2,0$. 1465. $\frac{\pi^2 a}{2}$ 1466. $4\sqrt{3}$ 1467. $8a$.
 1468. $\frac{3}{2}\pi a$ 1469. $2\pi r$ [antud joon on ringjoon, mille keskpunkt on $(r; \frac{\pi}{2})$ ja
 raadius r]. 1470. $\pi a \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})$ 1471. $\frac{\sqrt{5}}{2} + \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.
 1472. $\sqrt{2}$ 1473. $\frac{56}{3}\pi$ 1474. $4\pi^2 ab$ 1475. $\pi r^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{2}$ 1476. $\frac{\pi}{4}$.
 1477. $\frac{10\sqrt{10} + 26}{27}\pi$ 1478. $2\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$ 1479. $\pi(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \pi \ln \frac{2(1 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{5}}$.
 1480. $2\pi \left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \right)$ 1481. $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^\pi - 2)$ 1482. $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(2e^\pi + 1)$.
 1483. $\frac{12\pi a^2}{5}$ 1484. 1) $\frac{64\pi a^2}{3}$; 2) $\frac{32\pi a^2}{3}$; 3) $8\pi \left(\pi - \frac{4}{3} \right) a^2$.
 1485. $4\pi a^2(2 - \sqrt{2})$ 1486. $4\pi^2 r^2$ 1487. $\frac{\pi p^3}{4}$ 1488. $\frac{4}{3}\pi ab^2$ 1489. $\frac{3\pi}{10}$.
 1490. $\frac{\pi^2}{2}$ 1491. $\pi \left(\frac{\pi^2}{2} - 2 \right)$ 1492. 1) $\frac{16\pi}{15}$; 2) $\frac{8\pi}{3}$ 1493. 1) $\frac{3\pi}{4}$;
 2) $\frac{144}{35}\pi\sqrt{3}$ 1494. $\frac{\pi^2}{2}$ 1495. Kui $k > \frac{1}{2}$, siis on ruumala $\frac{\pi}{2k - 1}$, kui
 $k \leq \frac{1}{2}$, siis ei ole kehal lõplikku ruumala. 1496. Kui $k < \frac{1}{2}$, siis on ruumala
 $\frac{\pi}{1 - 2k}$, kui $k \geq \frac{1}{2}$, siis ei ole kehal lõplikku ruumala. 1497. $\frac{\pi}{3}(6\sqrt{3} - 5)$.
 1498. $\frac{2}{3}\pi a^2(2 - \sqrt{2})$ 1499. $5\pi^2 a^3$ 1500. $\frac{32}{105}\pi a^3$ 1501. $\frac{2}{3}R^3 \tan a$.
 1502. $\frac{1}{2}\pi a^2 h$ 1503. $\frac{8}{3}\pi r^3$ 1504. $\frac{\pi h}{6}[(2A + a)B + (A + 2a)b]$ 1505. πabh^2 .
 1506. $\pi abh \left(1 + \frac{h^2}{3c^2} \right)$ 1507. $\left(\frac{2a}{\pi}; \frac{2a}{\pi} \right)$ 1508. $\left(0; \frac{2 + \operatorname{sh} 2}{4 \operatorname{sh} 1} \right)$,

1509. $\left(\pi a; \frac{4}{3} a\right)$. 1510. $\left(-\frac{2}{5} a; \frac{2}{5} a\right)$. 1511. $\left(\frac{4a}{3\pi}; \frac{4b}{3\pi}\right)$. 1512. $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$.

1513. $\left(\pi a; \frac{5}{6} a\right)$. 1514. $\left(\frac{9}{20}; \frac{9}{20}\right)$. 1515. $\left(\frac{a}{5}; \frac{a}{5}\right)$. 1516. $\left(\frac{5}{8} a; 0\right)$.

1517. 400. 1518. 10^4 m. 1519. 0,18 kGm. 1520. $mg \frac{Rh}{R+h}$, kus R on Maa

raadius. 1521. $\frac{4}{3} \pi r^4$. 1522. $\frac{\pi}{12} r^2 h^2$. 1523. $\pi l r^3$. 1524. $\frac{972}{7} k \sqrt{3}$, kus k on

keskkonna takistuse võrdetegur. 1525. $800\pi \ln 2$ kGm. 1526. $\frac{kMm}{a(a+l)}$, kus

k on gravitatsioonikonstant. 1527. $\frac{2}{3} a^3$. 1528. 107 minutit.

AINEREGISTER

A

Abstsiss 6, 73
 Abstsistelg 6
 Alamdeterminant 58
 Algfunktsioon 187
 Aplikaat 73
 Areafunktsioonid 113—114
 Argument 107
 Arkusfunktsioonid 112—113
 Arvjada piirväärtus 127

C

Cartesiuse ristkoordinaadistik 6
 Cauchy teoreem 162
 Crameri teoreem 59

D

Determinandi elemendi miinor 58
 — — alamdeterminant 58
 Determinandid 57—59
 — kaherealised 57
 — kolmerealised 57
 — n -realised 58
 Determinantide omadused 58—59
 Diferentseerimiseeskirjad 142—143
 Diferentsiaal 143—144

E

EkspONENTfunktsioon 110—111
 Ekvivalentset lõpmatult vähenevad suurused 128
 Elementaarfunktsioonid 114
 Elementaarfunktsioonide diferentseerimise põhivalemid 143
 Ellips 37—38
 Ellipsi ekstsentrilisus 38
 — fokaaltelg 38
 — haripunktid 38
 — juhtjooned 38
 — juhtjoonte võrrandid 38
 — kanooniline võrrand 37
 — keskpunkt 38

— lühem telg 38
 — pikem telg 38
 — teljed 37—38
 — võrrand 37—38
 Ellipsoid 101
 Elliptiline paraboloid 101
 — silinder 101

F

Funktsioon 107
 — integreeruv 219
 — liit- 107
 — logaritmi- 111
 — mitmev 107
 — monotoonselt kahanev 108
 — — kasvav 108
 — murdratsionaalne 110
 — paaris- 108
 — paaritu 108
 — perioodiline 108
 — pidev 128
 — pöörd- 108
 — ühtlaselt pidev 129
 Funktsiooni algfunktsioon 187
 — diferentseeruvus 142
 — diferentsiaal 143—144
 — ekstreemumkohad 164
 — graafik 108
 — hüppekoht 129
 — juurdekasv 142
 — katkevuskohad 128
 — kõrvaldatav katkevuskohad 128
 — lõpmatuskoht 129
 — maksimumkoht 164
 — miinimumkoht 164
 — määramispiirkond 107
 — määratud integraal 219
 — n -järku tuletis 144
 — nullkohad 107
 — periood 108
 — pidevus 128—129
 — piirväärtus 127
 — — parempoolne 127
 — — vasakpoolne 127
 — tuletis 142

- väärtuste hulk 107
 - ühtlane pidevus 129
 - üldintegraal 187
- Funktsioonid, hüperboolsed 113
- trigonomeetrilised 112

H

- Homogeenne lineaarvõrrandisüsteem 60
- Hüperboloid, kahekatteline 101
- ühekatteline 101
- Hüperbool 38
- rist- 40
 - võrdhaarne 40
- Hüperbooli asümptoodid 39
- ekstsentrilisus 39
 - fokaaltelg 39
 - imaginaarse pooltelje pikkus 39
 - imaginaartelg 39
 - juhtjooned 40
 - juhtjoonte võrrandid 40
 - kanooniline võrrand 38—39
 - reaalse pooltelje pikkus 39
 - reaaltelg 39
 - võrrand 38—39
- Hüperboolne parabolid 101
- silinder 101
- Hüperboolsed funktsioonid 113

I

- Inversioon 58
- Integraalsumma 219
- Integreerimise erivõtted 188—191
- üldvõtted 188
- Integreeruv funktsioon 219

J

- Joone asümptoot 163
- jooksva punkti koordinaadid 16
 - kumerus 164
 - käänupunktid 164
 - nõgusus 164
 - võrrand 16

K

- Kaare massikese 244
- pikkus 243
- Kahekatteline hüperboloid 101
- Kaherealine determinant 57
- Keskväärtusteoreemid 162
- Kinnine vahemik 107
- Kollineaarsed vektorid 76
- Kolmerealine determinant 57
- Komplanaarsed vektorid 76
- Koonus 101
- Koordinaadid 5—8
- Koordinaatide alguspunkt 5—6, 73

- Koordinaattasapind 73
- Koordinaatteljed 6, 73
- Kroneckeri teoreem 60
- Kõrvaldatav katkevuskoht 128
- Kõverjoonelise sektori pindala 242
- trapetsi pindala 242
- Käänupunkt 164

L

- Lagrange'i teoreem 162
- Lahtine vahemik 107
- L'Hôpitali reegel 162—163
- Liitfunktsioon 107
- Liitfunktsiooni määramispiirkond 107
- sisemine funktsioon 107
 - väline funktsioon 107
- Lineaarne sõltuvus 76
- Logaritmifunktsioon 111
- Loomulikud logaritmid 111
- Lõpmatult vähenev suurus 128
- Lõpmatuskoht 129

M

- Maatriks 59
- Maatriksi astak 59
- Maksimumkoht 164
- Miinumkoht 164
- Miinor 58
- Mitmene funktsioon 107
- Monotoonselt kahanev funktsioon 108
- kasvav funktsioon 108
- Murdratsionaalne funktsioon 110
- Muutuva vahetus 220
- Muutuv suurus 107
- Muutuva suuruse muutumispiirkond 107
- Määramispiirkond 107
- Määratud integraal 219
- Määratud integraali omadused 210—220

N

- Newtoni võte 164—165
- Newton-Leibniz'i valem 220
- n -järku tuletis 144
- n -realine determinant 58
- Null-lahend 60
- Nullvektor 74

O

- Ordinaat 6, 73
- Ordinaattelg 6
- Ositi integreerimise valem 220

P

- Paarisfunktsioon 108
- Paaritu funktsioon 108

Paraboloid, elliptiline 101
 — hüperboolne 101
 Parabool 40
 Parabooli fokaallaius 40
 — fookus 40
 — juhtjoon 40
 — juhtjoone võrrand 40
 — kanooniline võrrand 40
 — võrrand 40
 Paraboolne silinder 101
 Paralleellüke 7
 Paremoolne piirväärtus 127
 Perioodiline funktsioon 108
 Permutatsioon 58
 Pidev funktsioon 128
 Pidevus 128—129
 Piirväärtus, arvjada 127
 — funktsiooni parempoolne 127
 — — vasakpoolne 127
 Piirväärtusteoreemid 128
 Pinna võrrand 99
 Polaarkaugus 8
 Polaarkoordinaadistik 8
 Polaarnurk 8
 Polünoom 110
 Punkti kaugus sirgest 17
 — — tasapinnast 85
 — kohavektor 75
 Päratu integraal 221—222
 — — absoluutselt koonduv 222
 — — tingimisi koonduv 222
 Pöördfunktsioon 108
 Pöördfunktsiooni määramispiirkond 108
 — väärtuste hulk 108
 Pöördkeha ruumala 243
 Pöördpind 99
 Pöördpinna meridiaanid 99
 — pindala 243
 — telg 100

R

Ratsionaalse funktsiooni integreerimine
 188—189
 Ringjoone võrrand 18
 Risthüperbool 40
 Ristkoordinaadistik 6, 73
 — Cartesiuse 6
 — ruumis 73
 — tasapinnal 6
 Rolle'i teoreem 162

S

Sadulpind 101
 Sfäär 100
 Sfääri võrrand 100
 Sfäärkoordinaadistik 74
 Silinder, elliptiline 101
 — hüperboolne 101

 — paraboolne 101
 Silinderkoordinaadistik 73—74
 Silinderpind 99
 Silinderpinna moodustajad 99
 Simpsoni valem 221
 Sirge algordinaat 16
 — kanoonilised võrrandid ruumis
 84
 — normaalvõrrand 16
 — parameetrilised võrrandid ruu-
 mis 85
 — punkti koordinaat 5
 — telglõigud 16
 — tõus 16
 — üldvõrrand 16
 Sirgete kimp 17
 — paralleelsus 17
 — ristumine 17
 Sirglõigu suunanurk 6
 Skalaari kordne vektor 75
 Suunatud sirglõigu suurus 5

T

Tasapinna normaalvektor 84
 — võrrand 84
 Taylori polünoom 163
 — valem 163
 — valemi jääkliige 163
 Teist järku pinnad 101
 Teljestiku pööramine 7—8
 Teoreem, Cauchy 162
 — Crameri 59
 — Kroneckeri 60
 — Lagrange'i 162
 — Rolle'i 162
 — võrdsete tuletistega funktsiooni-
 dest 162
 Trapetsvalem 220
 Trigonomeetrilised funktsioonid 112
 Triviaalne lahend 60
 Tuletis 142
 Täisaste 108

V

Vahemik, kinnine 107
 — lahtine 107
 Valem, Newton-Leibniz'i 220
 — ositi integreerimise 220
 — Simpsoni 221
 — Taylori 163
 — trapets- 220
 Vasakpoolne piirväärtus 127
 Vektor 74
 — koha- 75
 — null- 74
 — skalaari kordne 75
 — tasapinna normaal- 84
 — ühik- 74

Vektori koordinaadid 74—75

— projektsioon teljel 74

— suuna ühikvektor 75

Vektorid, kollineaarsed 76

— komplanaarsed 76

— lineaarselt sõltuvad 76

Vektorite ruumkorrutus 77

— segakorrutus 77

— skalaarkorrutus 76

— summa 75

— vahe 75

— vektoriaalkorrutus 76—77

— võrdsus 74

Võrdhaarne hüperbool 40

Võrrand, ellipsi 37—38

— — kanooniline 37

— hüperbooli 38—39

— — kanooniline 38—39

— joone 16

— parabooli 40

— — juhtjoone 40

— — kanooniline 40

— pinna 99

— ringjoone 18

— sfääri 100

— sirge normaal- 16

Võrrandid, ellipsi juhtjoonte 38

— hüperbooli juhtjoonte 40

— sirge kanoonilised 84

— — parameetrilised 85

Võrrandisüsteemi üldlahend 60

C

Ühekatteline hüperboloid 101

Ühikvektor 74

Ühtlane pidevus 129

Ühtlaselt pidev funktsioon 129

Üldintegraal 187

Üldintegraalide põhivalemid 187—188

SISUKORD

Saateks	3
-------------------	---

Analüütiline geomeetria

§ 1. Koordinaadistik tasapinnal	5
§ 2. Sirgjoon ja ringjoon tasapinnal	16
§ 3. Teist järku jooned	37
§ 4. Determinandid ja lineaarvõrrandisüsteemid	57
§ 5. Koordinaadistik ruumis ja vektoralgebra	73
§ 6. Tasapind ja sirge ruumis	84
§ 7. Teist järku pinnad	99

Matemaatiline analüüs

§ 8. Funktsioonid ja nende graafikud	107
§ 9. Funktsiooni piirväärtus ja pidevus	127
§ 10. Funktsiooni tuletis	142
§ 11. Tuletise rakendusi	162
§ 12. Funktsiooni üldintegraal	187
§ 13. Määratud integraal	219
§ 14. Määratud integraali rakendusi	242
Ülesannete vastused	266
Aineregister	298

Ивар Петерсен, Хильда Роос. СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ I.
Издание 3-е. На эстонском языке. Художественное оформление Ю. Никкаринен. Изда-
тельство «Валгус». Таллин, Пярнуское шоссе, 10.

Toimetaja R. Toming. Kunstiline toimetaja H. Keigo. Tehniline toimetaja S. Kohu.
Korrektor J. Nurme. Laduda antud 12. IX 1967. Trükkida antud 13. XII 1968. Kohila
Paberivabriku trükipaber nr. 2, 60 × 90/16. Trükipoognaid 19. Arvestuspoognaid 16,15.
Trükiarv 10000. Tellimise nr. 6134. Hans Heidemanni nim. Trükkikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II.

Hind 55 kop.

55 kop.

A-29700

TARTU ÜLIKOOLI RAAMATUKOGU



1 0300 00095670 8