

elektron210.mcd 209. programmi trükivariant.

Elektron relativistliku elektrodünaamika vaatenurgast

Näide arvuti kasutamisest teoreetises füüsikas

Ülo Uder

Sissejuhatus

Kui järgneva töö autor oma tööalase tegevuse lõpetas – pensionile siirdus, ei tahtnud ta oma sisseharjunud tegevusest – arvuti kasutamine mitmesuguste füüsikaliste ja matemaatiliste ülesannete lahendamisel – loobuda. Hakkasin otsima mitmesuguseid võimalikke ja võimalikke ülesandeid. Tuli meelde olukord füüsika õppimisel ülikoolis, kus asumisel kvantmehhaanika juurde tihti esinesid väljendid, et klassikaline füüsika ei suuda seda või teist küsimust lahendada. Ei loengutel ega raamatutes ei leidnud näiteid kuidas kvantmehhaanika eel-ajal püüti seda näidata. Tänapäeval on arusaadav, et ei ole mõtet nendele katsetele aega raisata. Kuid tollel ajal ei olnud sellist abivahendit nagu tänapäevane arvuti. Pensionäril on selleks aega küllalt. Nii jõudsin ülesandeni - kirjeldada elektronis esinevaid võimalikke liikumisi, mis põhjustavad sellel spinni olemasolu. Milliste tulemisteni võib jõuda elektromagnetvälja teooria abil? On ju elektron selle välja allikpunkt.

Kuna peamiseks on ilmselt ruumis paigalseisva telje ümber liikumine, valisin silindrilise koordinaadistiku ja arvutuste tegemiseks silindri umbes selliste mõõtmetega nagu kirjanduses pakutakse elektroni klassikaliseks raadiuseks:

$$2.8179 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 2.8179 \cdot 10^{-5} \text{ angströmi}$$

Silindri pikkus ja läbimõõt on sama mõõduga, mõnevõrra suurem ($1.61 \cdot 10^{-4}$), sest arvatavasti ei ole elektronil täpselt fikseeritavat välispinda.

Kuna võivad esineda küllalt suured kiirused, siis on tarvis relativistlikku teooriat. Landau ja Lifšitsi raaamatute väljateooria köite lk 64 võib leida valemi:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{E}) \right]$$

so dünaamika põhivõrrand punktilaengu liikumise kirjeldamiseks elektromagnetväljas. Kolmas liige jõuavaldises kirjeldab elektrivälja pidurdavat toimet relativistlikul liikumisel selles.

Elektroni sisese liikumise kirjeldamisel tuleb kasutada mingit jaotusfunktsiooni $\tau(r, \varphi, z)$. Kui see on normeeritud 1-le siis ruumielemendis dV asub laeng ja mass

$$dV = r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz \quad dq = \tau \cdot e \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz \quad dm = \tau \cdot m \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz \quad \tau = \tau(r, \varphi, z) = \tau(r, z)$$

Et lihtsustada arvutusi (eriti integraalide arvutamist ja andmemassiivide graafilisi kujutamisi), vaatlesin olukorda, kus kõik suurused on telgsümmeetrilised - ei olene pöörlemisnurgast φ . See võimaldab üldjuhul väljatugevuste arvutamisel φ järgi ära integreerida. Samuti lülitasin välja ajakoordinaadi - otsima hakkasin statsionaarseid seisundeid. Näiteks r -suunalise kiirenduse saab arvutada nii:

$$a_r = \frac{d^2}{dt^2} r = \frac{d}{dt} v_r = v_r \cdot \frac{d}{dr} v_r \quad \text{sest} \quad \frac{d}{dt} v_r = \frac{d}{dr} v_r \cdot \frac{d}{dt} r = \left(\frac{d}{dr} v_r \right) \cdot v_r$$

Kiiruste komponente hakkasin mõõtma valguse kiirustes c :

$$\frac{v}{c} = v \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2}$$

Nii saab dünaamika põhivõrrandist osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemi, mis on kirjutatud allpool programmis.

Võrrandite jõupooles, vabades liikmetes, väljatugevuste komponendid E_r , E_z , H_r , H_φ ja H_z tuleb arvutada jaotusfunktsiooni $\tau(r, z)$ ja kiiruskomponentidest vastavate integraalidega. Neid ei saa tavalisel viisil arvutada kuna ei ole valemeid jaotusfunktsiooni ja kiiruskomponentide jaoks.

Samal põhjusel ei saa ka asuda diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendamata. Esiälgu näib, et nendega ei ole midagi peale hakata. Kuid saab kasutada nn järkjärgulise lähendamise meetodit – kõik kiirused paremal pool ja tuletiste kordajates, samuti jaotusfunktsiooni anname ette mingi väljavalitud mudeli järgi. Siis muutuvad võrrandid lineaarseteks, kus tuletiste kordajad ja vabad liikmed on koordinaatide r ja z funktsioonid. Kuidas neid lahendatakse, on matemaatikas teada – saab kirjutada karakteristiklikud võrrandid, mille abil leitakse karakteristiklikud jooned ja neid mööda vabu liikmeid integreerides saadaksegi kiirustele uued lähendid $v_{\rho u}$, $v_{\phi u}$, $v_{z u}$.

Nii jääb uuendamata jaotusfunktsioon τ . Selleks kasutame statsionaarsetes süsteemides kehtivat pidevusvõrrandit

$$\operatorname{div}(\vec{J}) = \frac{d}{dt} D = 0 \quad D \text{ on laengu ruumiline tihendus kohas, kus on arvatud divergents voolutiheduse vektorist } J. \text{ Eelduse tõttu } D \text{ ei muutu ajas.}$$

$$\vec{J} = D \cdot \vec{v} = e \cdot \tau \cdot \vec{v}$$

$$\operatorname{div}(\vec{J}) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \cdot J_r) + \frac{1}{r} \frac{d}{d\phi} J_{\phi} + \frac{d}{dz} J_z \quad \text{osatuletised, Mathcad ei kasuta nende jaoks teist tähist.}$$

Tuletis ϕ järgi on 0 meie eelduse kohaselt ja τ logaritmi jaoks saame võrrandi:

$$L\tau = \ln(\tau) \quad v_{ru} \frac{d}{dr} L\tau + v_{zu} \frac{d}{dz} L\tau = \text{vab} \quad \text{vab} = \frac{d}{dr} v_{ru} - \frac{d}{dz} v_{zu} - \frac{v_{ru}}{r}$$

See omab samu karakteristiklike võrrandeid ja jooni, mis on süsteemi kolmel esimesel võrrandil.

Osutub, et numbrilise arvutuse juures on karakteristiklike jooni nii täpselt raske leida, et neid mööda integreerides ja integraale summadena arvutades saaks mõistliku täpsusega tulemusi. Edukamaks osutus järgmine viis. $v_{\rho u}$, $v_{\phi u}$, $v_{z u}$ ja $L\tau$ tuleb arendada ritta koordinaatide r ja z järgi, asetada read tuletistesse ja otsida reaksarenduste kordajatele väärtusi miinimum-ülesannetena, milles otsitakse võrrandite poolte erinevuste ruutkeskmiste väärtuste miinimumi. Vahesid arvutatakse üle silindri ühes pooles võetud $34 \times 34 = 1156$ punkti (teises on väärtused samad). See ülesanne taandub konstantsete kordajatega lineaarvõrrandite süsteemi lahendamiseks. Võrrandeid on niimitu kui on reaksarendustes võetud liikmeid. Süsteemi lahendamine determinantide meetodil toimub silmapilkselt, kui süsteemi maatriks on arvatud.

Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lõpmatust lahenditehulgast tuleb valida ülesandele vastav ääretingimustega. Osalt saab neid esitada reaksarendusele, ülejäänuid kordava funktsiooniga reaksarenduse juurde. Paremaid tulemusi sain modifitseeritud Fourier reaga.

Saadud $v_{\rho u}$, $v_{\phi u}$, $v_{z u}$ ja τu salvestatakse failides ja betakse sisse programmi alguses endiste v_{ρ} , v_{ϕ} , v_z ja τa asemele. Kogu programmi korraldatakse seni, kuni nendes väärtustes ei ole märgata olulisi muutusi või vahedesummad enam oluliselt ei vähene.

Saadud tulemuste järg arvutasin laengusüsteemi impulsimomendi ja võrdlesin seda elektroni spinniga $h/4\pi$.

Millise algmudeli valisin ja kuidas seda põhjendada? Seda võiks nimetada "suitsurõnga" mudeliks. Ka solenoidi või rõnga mudeliks. Ainult nende siseraadius on 0. "Solenoidis" kulgevate paralleelvoolude vahel esinev magneetiline tõmbejõud hoiab laengusüsteemi laialivalgumise eest. Ka rõnga sisemuses koordinaadi ϕ suunas liikumine moodustab paralleelvoolusid.

Kogu silinder jaotatakse $34 \times 34 \times 34$ punktiks. Seda kasutatakse väljatugevuste määramisel integraalsummade arvutamiseks. Et vältida integraalsummade arvutamisel singulaarsusi, eeldame, et kogu laeng asub nendes punktides. Väljatugevusi arvutatakse $17 \times 17 \times 17$ punktis, mis asuvad laengupunktide vahelises ruumiosas. Nii saame integraalide peaväärtused. Need arvutused näitavad ka, et väärtused ei olenegi ϕ koordinaadist. Selle järgi keskmistatakse ja saadakse 17×17 massiivid väljatugevuste jaoks silindri ühes pooles. Otsitavate väärtuste väiksem hulk on tingitud arvutusaja lühendamisest, sest vastupidisel juhul kestaks üks lähendustsükkel päevi, mis on muidugi arvuti töökiirusest. Kogu järgnev töö käib 34×34 punktis silindri ühes pooles. Selleks laiendatakse väljatugevuste 17×17 massivid ka 34×34 mõõtmeliseks.

Integreerimispunktide arv ($i_m + 2 \times i_m + 2 \times i_m / 2 + 2$) ja koordinaadid (iv peab olema paarisarv):

$$i_v := 16 \quad n := 2 \quad i_m := n \cdot i_v \quad i_m = 32 \quad \rho_{10} := 0 \quad \rho_{1m} := 1.60985653409092 \times 10^{-4}$$

$$\Delta\rho_1 := \frac{\rho_{1m} - \rho_{10}}{im + 1} \quad \Delta\varphi_1 := \frac{2 \cdot \pi}{im + 1} \quad \zeta_{1m} := 2 \cdot \rho_{1m} \quad \Delta\zeta_1 := \frac{\zeta_{1m}}{im + 1} \quad km := im \quad i := 0..im + 1$$

$$\rho_{1j} := \rho_{10} + \Delta\rho_1 \cdot j \quad j := 0..im + 1 \quad \varphi_{1j} := \Delta\varphi_1 \cdot j \quad k := 0..km + 1 \quad \zeta_{1k} := \Delta\zeta_1 \cdot k - \frac{\zeta_{1m}}{2}$$

Vaatluspunktide arv (iv x iv x iv) ja koordinaadid: $i := 0..iv \quad v := 0..iv \quad \kappa := 0..iv$

$$\Delta\rho := n \cdot \Delta\rho_1 \quad \Delta\varphi := n \cdot \Delta\varphi_1 \quad \Delta\zeta := n \cdot \Delta\zeta_1 \quad \rho_i := \rho_{10} + \frac{\Delta\rho_1}{2} + \Delta\rho \cdot i$$

$\varphi_v := \frac{\Delta\varphi_1}{2} + \Delta\varphi \cdot v \quad \zeta_\kappa := \frac{\Delta\zeta_1}{2} + \Delta\zeta \cdot \kappa - \frac{\zeta_{1m}}{2}$ Integreerimispunkti ja vaatluspunkti, kus integraali väärtus arvutatakse, vahekaugus arvutub valemiga

$$R(\rho, \varphi, \zeta, \rho_1, \varphi_1, \zeta_1) := \sqrt{\rho^2 - 2 \cdot \rho \cdot \rho_1 \cdot \cos(\varphi - \varphi_1) + \rho_1^2 + (\zeta - \zeta_1)^2}$$

Sisendväärtusteks on kiiruse komponentide ja jaotusfunktsiooni väärtused integreerimispunktides ning jaotusfunktsiooni üldkordaja. Alustatakse algmudelil numbriga 363. Seda saab näha, kui lugeda selle numbriga failidest vastavad massiivid. Siin trükituna näeme viimast lähendussükli.

vρ :=

 C:\..\lvru153

vφ :=


 C:\..\lvju153

At := 2.183318170085 × 10³⁶

vz :=

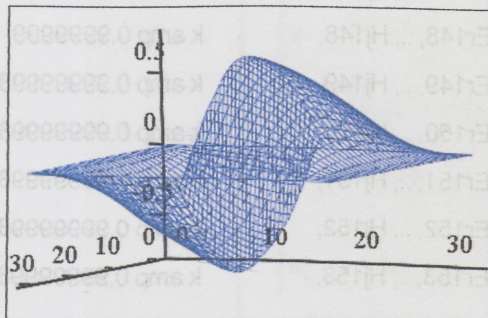
 C:\..\lvzu153

ta :=

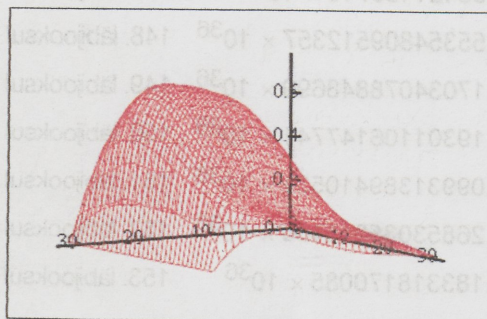
 C:\..\ltu153

φ joonisel on φ telg suunatud alla. Kui vφ näib siin positiivne, siis on tal ρ, φ, ζ koordiaadistikus väärtus negatiivne.

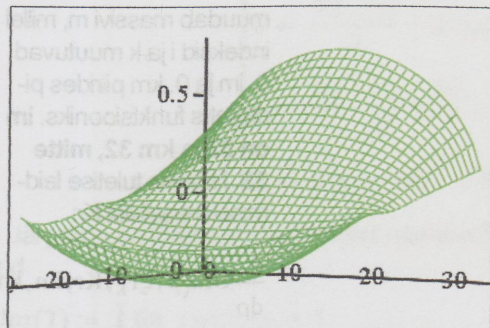
min(vφ) = 0



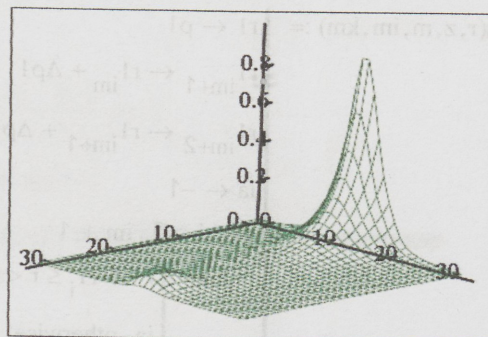
vρ



vφ



vz



ta

Sisendandmete tabel esimese 25 iteratsiooni kohta. Esimene (363) vastab algmudelile.

$3.81468435059975 \times 10^{34}$	363. läbijooksul võeti Er363, ..., Hj363, failidest	
$3.41652101288717 \times 10^{36}$	130. läbijooksul leiti Er130, ..., Hj130	kiiruse amp 0.25
$1.15889952878476 \times 10^{36}$	131. läbijooksul leiti Er131, ..., Hj131,	
$8.73635864761227 \times 10^{35}$	132. läbijooksul leiti Er132, ..., Hj132,	
$1.27607856878761 \times 10^{36}$	133. läbijooksul leiti Er133, ..., Hj133,	
$1.28050511178688 \times 10^{36}$	134. läbijooksul leiti Er134, ..., Hj134,	
$3.07942179120127 \times 10^{36}$	135. läbijooksul leiti Er135, ..., Hj135,	
$3.3396663643369 \times 10^{36}$	136. läbijooksul leiti Er136, ..., Hj136,	
$3.34804533988446 \times 10^{36}$	137. läbijooksul leiti Er137, ..., Hj137,	
$2.38914022029551 \times 10^{36}$	138. läbijooksul leiti Er138, ..., Hj138,	
$2.51159883019318 \times 10^{36}$	139. läbijooksul leiti Er139, ..., Hj139,	
$2.72712533256789 \times 10^{36}$	140. läbijooksul leiti Er140, ..., Hj140,	kiiruse amp 0.5
$2.54058963997598 \times 10^{36}$	141. läbijooksul leiti Er141, ..., Hj141,	sama
$2.42068021937241 \times 10^{36}$	142. läbijooksul leiti Er142, ..., Hj142,	kiiruse amp 0.8
$2.33544420056963 \times 10^{36}$	143. läbijooksul leiti Er143, ..., Hj143,	sama
$2.41503729230334 \times 10^{36}$	144. läbijooksul leiti Er144, ..., Hj144,	kiiruse amp 0.95
$2.33055868212575 \times 10^{36}$	145. läbijooksul leiti Er145, ..., Hj145,	kiiruse amp 0.98
$2.28399011353057 \times 10^{36}$	146. läbijooksul leiti Er146, ..., Hj146,	k amp 0.9998
$2.33421480718 \times 10^{36}$	147. läbijooksul leiti Er147, ..., Hj147,	k amp 0.999998
$1.55354809512357 \times 10^{36}$	148. läbijooksul leiti Er148, ..., Hj148,	k amp 0.9999999
$2.17034078848699 \times 10^{36}$	149. läbijooksul leiti Er149, ..., Hj149,	k amp 0.999999985
$2.19301106147741 \times 10^{36}$	150. läbijooksul leiti Er150, ..., Hj150,	k amp 0.999999982
$2.09931389410531 \times 10^{36}$	151. läbijooksul leiti Er151, ..., Hj151,	k amp 0.999999984
$2.26853035215188 \times 10^{36}$	152. läbijooksul leiti Er152, ..., Hj152,	k amp 0.999999985
$2.183318170085 \times 10^{36}$	153. läbijooksul leiti Er153, ..., Hj153,	k amp 0.999999986

Kasutame arvumassiivide "m" pidevaks funktsiooniks muutmise programmi, mis kasutab parabolset interpolatsiooni rastripunktide vahedes funktsiooni väärtuste leidmisel:

```
Gfu(r, z, m, im, km) :=
  r1 ← ρ1
  r1im+1 ← r1im + Δρ1
  r1im+2 ← r1im+1 + Δρ1
  ia ← -1
  for i ∈ 0..im + 1
    ia ←  $\begin{cases} i & \text{if } r1_i \leq r < r1_{i+1} \\ ia & \text{otherwise} \end{cases}$ 
  ia ←  $\begin{cases} 1 & \text{if } ia \leq 0 \\ 32 & \text{if } ia \geq im + 1 \\ ia & \text{otherwise} \end{cases}$ 
```

muudab massivi m, millel indeksid i ja k muutuvad 0..im ja 0..km piirides pidevaks funktsiooniks. **im on 32 ja km 32, mitte 33.** Näiteks tuletise leidmisel massiivist Kr:

$$\frac{d}{dp} Gfu(\rho, \zeta_1 k, Kr, im, km)$$

```

z1 ← ζ1
z1km+1 ← z1km + Δζ1
z1km+2 ← z1km+1 + Δζ1
ka ← -1
for k ∈ 0..km + 1
  ka ← | k if z1k ≤ z < z1k+1
        | ka otherwise
ka ← | 1 if ka ≤ 0
      | 32 if ka ≥ km + 1
      | ka otherwise
Δi ←  $\frac{r - \rho1_{ia}}{\Delta\rho1}$ 
Δk ←  $\frac{z - \zeta1_{ka}}{\Delta\zeta1}$ 
for κ ∈ 0..2
  f0 ← mia-1, ka-1+κ
  f1 ← mia, ka-1+κ
  f2 ← mia+1, ka-1+κ
  a ←  $\frac{f2 - 2 \cdot f1 + f0}{2}$ 
  b ←  $\frac{f2 - f0}{2} - 2 \cdot ia \cdot a$ 
  c ←  $\frac{f0 + f1 + f2}{3} - a \cdot \left( ia^2 + \frac{2}{3} \right) - b \cdot ia$ 
  hκ ←  $a \cdot (ia + \Delta i)^2 + b \cdot (ia + \Delta i) + c$ 
  a ←  $\frac{h2 - 2 \cdot h1 + h0}{2}$ 
  b ←  $\frac{h2 - h0}{2} - 2 \cdot ka \cdot a$ 
  c ←  $\frac{h0 + h1 + h2}{3} - a \cdot \left( ka^2 + \frac{2}{3} \right) - b \cdot ka$ 
  h ←  $a \cdot (ka + \Delta k)^2 + b \cdot (ka + \Delta k) + c$ 

```

Järgmine on tõenäosusfunktsiooni normeerimise programm. Sisseloetu τa on juba normeeritud.

```

Jnτ(T) := | for i ∈ 0..im + 1
           | | for j ∈ 0..im
           | | for k ∈ 0..km + 1
           | | fli,k ← Gfu(ρ1i, ζ1k, T, 32, 32) · ρ1i

```

```

for k ∈ 0..km + 1
  flim+1,k ← fl0,k
fi ← fl
s ← 0
for i ∈ 0..im
  for j ∈ 0..im
    for k ∈ 0..km
      s ← s + (fi)j,k + (fi)j+1,k + (fi+1)j,k + (fi+1)j+1,k
      s ← s + (fi)j,k+1 + (fi)j+1,k+1 + (fi+1)j,k+1 + (fi+1)j+1,k+1
s ←  $\frac{s}{8} \cdot \Delta\rho_1 \cdot \Delta\phi_1 \cdot \Delta\zeta_1$ 

```

Valemid, mis võimaldavad teostada τ a normeerimist (= asendamisel märgiga = lülitab valemi kasutusest välja):

$$I_\tau = J_{n\tau}(\tau_a) \quad A_{\tau\rho} = \frac{10^{24}}{I_\tau} \quad A_{\tau\rho} = \tau_1(\rho_1, \zeta_1) = A_\tau \cdot G_{fu}(\rho_1, \zeta_1, \tau_a, 32, 32)$$

A_τ ei lähe integraalidesse ja ära jääb ka kordaja 10^{-8} (on ρ_1, ζ_1 teisendustegur):

$A_j := A_\tau \cdot 10^{-8}$ $A_j = 2.183318170085 \times 10^{28}$ Kolmemõõtmelise funktsiooni F integraal-summa arvutamine toimub programmiga Is() ja G7():

```

Is(ρ, φ, ζ, F) := for i ∈ 0..im + 1
  for j ∈ 0..im
    for k ∈ 0..km + 1
      flj,k ←  $\frac{(F_i)_{j,k} \cdot \rho_1 i}{R(\rho, \phi, \zeta, \rho_1 i, \phi_1 j, \zeta_1 k)^3}$ 
    for k ∈ 0..km + 1
      flim+1,k ← fl0,k
    fi ← fl
s ← 0
for i ∈ 0..im
  for j ∈ 0..im
    for k ∈ 0..km
      s ← s + (fi)j,k + (fi)j+1,k + (fi+1)j,k + (fi+1)j+1,k
      s ← s + (fi)j,k+1 + (fi)j+1,k+1 + (fi+1)j,k+1 + (fi+1)j+1,k+1
s ←  $\frac{s}{8} \cdot \Delta\rho_1 \cdot \Delta\phi_1 \cdot \Delta\zeta_1$ 

```

```

G7(F) := for i ∈ 0..iv
        for v ∈ 0..iv
          for κ ∈ 0..iv
            gv,κ ← Is(ρi, φv, ζκ, F)
            gi2 ← g
        g2

```

Esmalt arvutame laengusüsteemi elektriväljatugevuse radiaalsuunalise ehk koordinaatleje ρ suunalise komponendi E_ρ laengusüsteemi sees. Välja jääb üldkordaja A_j. Valem on:

$$E_{\rho} = \int \int \int \tau_1 \cdot \frac{\rho - \rho_1 \cdot \cos(\varphi - \varphi_1)}{R^3} \cdot \rho_1 d\rho_1 d\varphi_1 d\zeta_1 \quad \text{Murru lugejas on seega avaldis}$$

$\rho - \rho_1 \cdot (\cos(\varphi) \cdot \cos(\varphi_1) + \sin(\varphi) \cdot \sin(\varphi_1))$, mis näitab, et tuleb 3 integraali arvutada:

1, $\rho_1 \cos(\varphi_1)$ ja $\rho_1 \sin(\varphi_1)$ korrutatult τ_1 . ρ , $\cos(\varphi)$ ja $\sin(\varphi)$ saab integraalide ette võtta.

```

f1(F) := for i ∈ 0..im + 1
        for j ∈ 0..im + 1
          for k ∈ 0..km + 1
            fj,k ← Fi,k
            vi ← f
        v

```

Arutamisel tuleb G7()-d kirjutada g1..g5 avaldistesse.

$F1 := f1(\tau_1) \quad g1 := \blacksquare \quad G7(F1)$

Seda kasutatakse ka Ez esimese integraalina.

```

f2(F) := for i ∈ 0..im + 1
        for j ∈ 0..im + 1
          for k ∈ 0..km + 1
            fj,k ← Fi,k · ρ1i · cos(φ1j)
            vi ← f
        v

```

$F2 := f2(\tau_1) \quad g2 := \blacksquare \quad G7(F2)$

```

f3(F) := for i ∈ 0..im + 1
        for j ∈ 0..im + 1
          for k ∈ 0..km + 1
            fj,k ← Fi,k · ρ1i · sin(φ1j)
            vi ← f
        v

```

$F3 := f3(\tau_1) \quad g3 := \blacksquare \quad G7(F3)$

```


Eρ := for i ∈ 0..iv
        for v ∈ 0..iv
          for κ ∈ 0..iv
            fv,κ ← ρi · (g1i)v,κ - cos(φv) · (g2i)v,κ - sin(φv) · (g3i)v,κ
            si ← f
        s

```

E_ρ osutub φ -st sõltumatuks. Seepärast keskmistame üle selle nurgaga määratud väärtuste.

$$Ks(Ma) := \begin{array}{l} \text{for } \iota \in 0..iv \\ \quad \text{for } \kappa \in 0..iv \\ \quad \quad s \leftarrow 0 \\ \quad \quad \text{for } v \in 0..iv \\ \quad \quad \quad s \leftarrow s + (Ma_\iota)_{v,\kappa} \\ \quad \quad \quad Mv_{\iota,\kappa} \leftarrow \frac{s}{iv + 1} \end{array}$$

$E_{\rho k} := \blacksquare$ $Ks(E_\rho)$
 $E_{\rho k} :=$


C:\...\Er153

Saadud $E_{\rho k}$ tuleb salvestada faili Er153 ja siis sealt ka välja lugeda, et ei peaks iga kord seda arvutama, kui on tarvis lähendust korrata. $g1..g5$ valemiteest võtta $G7()$ -d ja asetada kõrvale. Samuti ka $Ks(E_\rho)$.

Kuna $E_{\rho k}$ arvutati ilma kordajata A_j , siis tegelikult $E_\rho := A_j \cdot E_{\rho k}$

Ez arvutus nõuab ühe integraali lisamist E_ρ puhul saadutele. Valem on:

$$Ez = \int \int \int \tau_1 \cdot \frac{\zeta - \zeta_1}{R^3} \cdot \rho_1 d\rho_1 d\phi_1 d\zeta_1$$


ζ saab integraali ette võtta ja murru lugeja see osa annab integraali $g1$. Lisada tuleb ζ_1 antud integraal $g5$.

$$f5(F) := \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..im + 1 \\ \quad \text{for } j \in 0..im + 1 \\ \quad \quad \text{for } k \in 0..km + 1 \\ \quad \quad \quad f_{j,k} \leftarrow F_{i,k} \cdot \zeta_1 k \\ \quad \quad \quad v_i \leftarrow f \end{array}$$

$F5 := f5(\tau_a)$ $g5 := \blacksquare$ $G7(F5)$

$$Ez := \begin{array}{l} \text{for } \iota \in 0..iv \\ \quad \text{for } v \in 0..iv \\ \quad \quad \text{for } \kappa \in 0..iv \\ \quad \quad \quad f_{v,\kappa} \leftarrow \zeta_\kappa \cdot (g1_\iota)_{v,\kappa} - (g5_\iota)_{v,\kappa} \\ \quad \quad \quad s_\iota \leftarrow f \end{array}$$

$Ez_k := \blacksquare$ $Ks(Ez)$
 $Ez_k :=$


C:\...\Ez153

$Ez := A_j \cdot Ez_k$

Kolmas elektrivälja komponent E_φ tuleb 0, kuna me eeldasime, et ükski kiirus ega ka jaotusfunktsioon ei olene koordinaadist φ . Seega järgmised on magnetvälja komponendid H_ρ , H_z ja H_φ . H_ρ valem on:

$$H_\rho = \int \int \int \tau_1 \cdot \frac{v\varphi_1 \cdot \cos(\varphi - \varphi_1) \cdot (\zeta - \zeta_1)}{R^3} \cdot \rho_1 d\rho_1 d\phi_1 d\zeta_1 \quad tv\varphi_{i,k} := \tau a_{i,k} \cdot v\varphi_{i,k}$$

Lisaks $tv\varphi$ -le on H_ρ arvutamisel integraali aluseks funktsiooniks

$$(\zeta - \zeta_1) \cdot \cos(\varphi - \varphi_1) = (\zeta - \zeta_1) \cdot (\cos(\varphi) \cdot \cos(\varphi_1) + \sin(\varphi) \cdot \sin(\varphi_1)) = \blacksquare$$

$$\blacksquare = \zeta \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\varphi_1) + \zeta \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\varphi_1) - \cos(\varphi) \cdot \zeta_1 \cdot \cos(\varphi_1) - \sin(\varphi) \cdot \zeta_1 \cdot \sin(\varphi_1)$$

Seega tuleb arvutada 4 integraali (ilma Aj-ta).

$$f1(F) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..im + 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..im + 1 \\ \quad \text{for } k \in 0..km + 1 \\ \quad \quad f_{j,k} \leftarrow F_{i,k} \cdot \cos(\varphi_1 j) \\ \quad \quad v_i \leftarrow f \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad F1 := f1(tv\varphi) \quad g1 := \blacksquare \quad G7(F1) \\ \quad \quad \quad \text{Seda kasutame ka Hz teise integraalina.} \end{array} \right.$$

$$f2(F) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..im + 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..im + 1 \\ \quad \text{for } k \in 0..km + 1 \\ \quad \quad f_{j,k} \leftarrow F_{i,k} \cdot \sin(\varphi_1 j) \\ \quad \quad v_i \leftarrow f \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad F2 := f2(tv\varphi) \quad g2 := \blacksquare \quad G7(F2) \\ \quad \quad \quad \text{Seda kasutame ka Hz kolmanda integraalina.} \end{array} \right.$$

$$f3(F) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..im + 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..im + 1 \\ \quad \text{for } k \in 0..km + 1 \\ \quad \quad f_{j,k} \leftarrow F_{i,k} \cdot \zeta_1 k \cdot \cos(\varphi_1 j) \\ \quad \quad v_i \leftarrow f \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad F3 := f3(tv\varphi) \quad g3 := \blacksquare \quad G7(F3) \end{array} \right.$$

$$f4(F) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..im + 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..im + 1 \\ \quad \text{for } k \in 0..km + 1 \\ \quad \quad f_{j,k} \leftarrow F_{i,k} \cdot \zeta_1 k \cdot \sin(\varphi_1 j) \\ \quad \quad v_i \leftarrow f \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad F4 := f4(tv\varphi) \quad g4 := \blacksquare \quad G7(F4) \\ \quad \quad \quad \text{Arvutame Hp ilma konstandita Aj:} \end{array} \right.$$

$$Hp := \left| \begin{array}{l} \text{for } t \in 0..iv \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } v \in 0..iv \\ \quad \text{for } \kappa \in 0..iv \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} f_{v,\kappa} \leftarrow \zeta \kappa \left[\cos(\varphi_v) \cdot (g1_t)_{v,\kappa} + \sin(\varphi_v) \cdot (g2_t)_{v,\kappa} \right] \\ f_{v,\kappa} \leftarrow f_{v,\kappa} - \cos(\varphi_v) \cdot (g3_t)_{v,\kappa} - \sin(\varphi_v) \cdot (g4_t)_{v,\kappa} \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad s_t \leftarrow f \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad \text{S} \end{array} \right.$$

$$Hp_k := \blacksquare \quad Ks(Hp) \quad Hp_k := \quad Hp := Aj \cdot Hp_k$$

C:\..\Hr153

Arvutame Hz. Valem on:

$$Hz = \int \int \int \tau_1 \cdot \frac{-\rho \cdot v\phi_1 \cdot \cos(\phi - \phi_1) + \rho_1 \cdot v\phi_1}{R^3} \cdot \rho_1 \, d\rho_1 \, d\phi_1 \, d\zeta_1$$

$$(\rho_1 - \rho \cdot \cos(\phi - \phi_1)) \cdot tv\phi = tv\phi \cdot [\rho_1 - \rho \cdot (\cos(\phi) \cdot \cos(\phi_1) + \sin(\phi) \cdot \sin(\phi_1))]$$

Selles sisaldub 3 integraali (2. ja 3. on Hp juures juba olemas, g1 ja g2):

$$f1(F) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..im + 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..im + 1 \\ \quad \text{for } k \in 0..km + 1 \\ \quad \quad f_{j,k} \leftarrow F_{i,k} \cdot \rho_1^i \\ \quad \quad v_i \leftarrow f \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad v \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} F5 := f1(tv\phi) \\ g5 := \blacksquare \end{array} \quad G7(F5)$$

Arvutame Hz ilma konstandita Aj:

$$Hz := \left| \begin{array}{l} \text{for } \iota \in 0..iv \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } v \in 0..iv \\ \quad \text{for } \kappa \in 0..iv \\ \quad \quad f_{v,\kappa} \leftarrow (g5_{\iota})_{v,\kappa} - \rho_{\iota} \cdot [\cos(\phi_v) \cdot (g1_{\iota})_{v,\kappa} + \sin(\phi_v) \cdot (g2_{\iota})_{v,\kappa}] \\ \quad \quad s_{\iota} \leftarrow f \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad s \end{array} \right.$$

$$Hzk := \blacksquare \quad Ks(Hz) \quad Hzk := \quad Hz := Aj \cdot Hzk$$

C:\..\Hz153

Järgmisena arvutame Hp. Valem on:

$$Hp = \int \int \int \tau_1 \cdot \frac{vz_1 \cdot (\rho - \rho_1 \cdot \cos(\phi - \phi_1)) - v\phi_1 \cdot \cos(\phi - \phi_1) \cdot (\zeta - \zeta_1)}{R^3} \cdot \rho_1 \, d\rho_1 \, d\phi_1 \, d\zeta_1$$

$$\rho \cdot vz_1 - \cos(\phi) \cdot (\rho_1 \cdot vz_1 - \zeta_1 \cdot v\phi_1) \cdot \cos(\phi_1) - \sin(\phi) \cdot (\rho_1 \cdot vz_1 - \zeta_1 \cdot v\phi_1) \cdot \sin(\phi_1) - \blacksquare$$

$$-\zeta \cdot \cos(\phi) \cdot v\phi_1 \cdot \cos(\phi_1) - \zeta \cdot \sin(\phi) \cdot v\phi_1 \cdot \sin(\phi_1) \quad \text{See avaldis kuulub integreerimisele.}$$

Seega integraalid arvutatakse τ_a kord vastavalt vz_1 $(\rho_1 \cdot vz_1 - \zeta_1 \cdot v\phi_1) \cdot \cos(\phi_1)$
 $(\rho_1 \cdot vz_1 - \zeta_1 \cdot v\phi_1) \cdot \sin(\phi_1)$ $v\phi_1 \cdot \cos(\phi_1)$ ja $v\phi_1 \cdot \sin(\phi_1)$

$$f1(F) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..im + 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..im + 1 \\ \quad \text{for } k \in 0..km + 1 \\ \quad \quad f_{j,k} \leftarrow F_{i,k} \\ \quad \quad v_i \leftarrow f \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad v \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} tvz_{i,k} := \tau_{aj,k} \cdot vz_{i,k} \\ F1 := f1(tvz) \\ g1 := \blacksquare \\ tv\rho_{i,k} := \tau_{aj,k} \cdot v\rho_{i,k} \\ \rho\zeta_{i,k} := \rho_1 \cdot tvz_{i,k} - \zeta_1 \cdot tv\rho_{i,k} \end{array} \quad G7(F1)$$

$$f2(F) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..im + 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..im + 1 \\ \quad \text{for } k \in 0..km + 1 \\ \quad \quad f_{j,k} \leftarrow F_{i,k} \cdot \cos(\varphi 1j) \\ \quad \quad v_i \leftarrow f \end{array} \right. \\ v \end{array} \right. \quad F2 := f2(\rho\zeta) \quad g2 := \blacksquare \quad G7(F2)$$

$$f3(F) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..im + 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..im + 1 \\ \quad \text{for } k \in 0..km + 1 \\ \quad \quad f_{j,k} \leftarrow F_{i,k} \cdot \sin(\varphi 1j) \\ \quad \quad v_i \leftarrow f \end{array} \right. \\ v \end{array} \right. \quad F3 := f3(\rho\zeta) \quad g3 := \blacksquare \quad G7(F3)$$

$$f4(F) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..im + 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..im + 1 \\ \quad \text{for } k \in 0..km + 1 \\ \quad \quad f_{j,k} \leftarrow F_{i,k} \cdot \cos(\varphi 1j) \\ \quad \quad v_i \leftarrow f \end{array} \right. \\ v \end{array} \right. \quad F4 := f4(tv\rho) \quad g4 := \blacksquare \quad G7(F4)$$

$$f5(F) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..im + 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..im + 1 \\ \quad \text{for } k \in 0..km + 1 \\ \quad \quad f_{j,k} \leftarrow F_{i,k} \cdot \sin(\varphi 1j) \\ \quad \quad v_i \leftarrow f \end{array} \right. \\ v \end{array} \right. \quad F5 := f5(tv\rho) \quad g5 := \blacksquare \quad G7(F5)$$

Arvutame $H\varphi$ ilma konstandita A_j :

$$H\varphi := \left| \begin{array}{l} \text{for } \iota \in 0..iv \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } v \in 0..iv \\ \quad \text{for } \kappa \in 0..iv \\ \quad \quad fa_{v,\kappa} \leftarrow \rho_\iota \cdot (g1_\iota)_{v,\kappa} - \cos(\varphi_v) \cdot \left[(g2_\iota)_{v,\kappa} + \zeta_\kappa \cdot (g4_\iota)_{v,\kappa} \right] \\ \quad \quad f_{v,\kappa} \leftarrow fa_{v,\kappa} - \sin(\varphi_v) \cdot \left[(g3_\iota)_{v,\kappa} + \zeta_\kappa \cdot (g5_\iota)_{v,\kappa} \right] \\ \quad \quad s_\iota \leftarrow f \end{array} \right. \\ s \end{array} \right.$$

$$H\varphi_k := \blacksquare \quad Ks(H\varphi) \quad H\varphi_k := \blacksquare \quad H\varphi := A_j \cdot H\varphi_k$$

C:\...\Hj153

Kiirused on antud 34 x 34 mõõtmelistena. Arvutatud E_{pk} , .. $H_{\phi k}$ on aga 17 x 17 mõõtmega massiivid. Laiendame väljatugevusi ja arvutame ka dif-võrrandite vabade liikmete (jõudude) massiivid 34x34 mõõtmelistena. Esimest teeme programmiga Pf().

$Pf(r, z, m, um, km) :=$

$i0 \leftarrow 0$	$E_{\rho l_{i,k}} := Pf(\rho_{1i}, \zeta_{1k}, E_{pk}, 16, 16)$
for $i \in 0..um - 1$	$E_{z l_{i,k}} := Pf(\rho_{1i}, \zeta_{1k}, E_{zk}, 16, 16)$
$i0 \leftarrow \begin{cases} i & \text{if } \rho_i \leq r \leq \rho_{i+1} \\ i0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$H_{\rho l_{i,k}} := Pf(\rho_{1i}, \zeta_{1k}, H_{pk}, 16, 16)$
$i0 \leftarrow \begin{cases} 15 & \text{if } r > \rho_{um} \\ i0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$H_{\phi l_{i,k}} := Pf(\rho_{1i}, \zeta_{1k}, H_{\phi k}, 16, 16)$
$\kappa 0 \leftarrow 0$	$H_{z l_{i,k}} := Pf(\rho_{1i}, \zeta_{1k}, H_{zk}, 16, 16)$
for $\kappa \in 0..km - 1$	Kolmas täht tähistustes on l (el).
$\kappa 0 \leftarrow \begin{cases} \kappa & \text{if } \zeta_{\kappa} \leq z \leq \zeta_{\kappa+1} \\ \kappa 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	
$\kappa 0 \leftarrow \begin{cases} 15 & \text{if } z > \zeta_{km} \\ \kappa 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	
$m1 \leftarrow m_{i0, \kappa 0}$	
$m2 \leftarrow m_{i0, \kappa 0+1}$	
$m3 \leftarrow m_{i0+1, \kappa 0}$	
$m4 \leftarrow m_{i0+1, \kappa 0+1}$	
$h1 \leftarrow m2 + \frac{m1 - m2}{\zeta_{\kappa 0} - \zeta_{\kappa 0+1}} \cdot (z - \zeta_{\kappa 0+1})$	
$h2 \leftarrow m4 + \frac{m3 - m4}{\zeta_{\kappa 0} - \zeta_{\kappa 0+1}} \cdot (z - \zeta_{\kappa 0+1})$	
$h3 \leftarrow m3 + \frac{m1 - m3}{\rho_{i0} - \rho_{i0+1}} \cdot (r - \rho_{i0+1})$	
$h4 \leftarrow m4 + \frac{m2 - m4}{\rho_{i0} - \rho_{i0+1}} \cdot (r - \rho_{i0+1})$	
$h12 \leftarrow h2 + \frac{h1 - h2}{\rho_{i0} - \rho_{i0+1}} \cdot (r - \rho_{i0+1})$	
$h34 \leftarrow h4 + \frac{h3 - h4}{\zeta_{\kappa 0} - \zeta_{\kappa 0+1}} \cdot (z - \zeta_{\kappa 0+1})$	
$h \leftarrow \frac{1}{2} \cdot (h12 + h34)$	
h	

Programmi **medsmooth(f,n)** baasil tehtud programm **Sim()** silub mööda k ja $i = \text{const}$ jooni 34x34 mõõtmega massiive m . $n_i = 1, 3, 5, 7, \dots$ on i -suunaline ning $n_k = 1, 3, 5, \dots$ k -suunaline silumise järk. $sa = 0$ tähendab pärastist sümmeerimist $S_{\phi}()$, 1 – assümmeerimist $As()$ ja 2 – kumbagi ei toimu. Need sümmeetrimisprogrammid on:

```

Sü(M) := | m ← M
          | for i ∈ 0..33
          |   for k ∈ 0..16
          |     | mi,k ← 1/2 · (mi,k + mi,33-k)
          |     | mi,33-k ← mi,k
          |   vä ← m
  
```

```

As(M) := | m ← M
          | for i ∈ 0..33
          |   for k ∈ 0..16
          |     | mi,k ← 1/2 · (mi,k - mi,33-k)
          |     | mi,33-k ← -mi,k
          |   vä ← m
  
```

```

Sim(m, ni, nk, sa) := | for k ∈ 0..33
                       |   for i ∈ 0..33
                       |     fi ← mi,k
                       |     fp ← medsmooth(f, ni)
                       |     for i ∈ 0..33
                       |       fsi,k ← fpi
                       |   for i ∈ 0..33
                       |     for k ∈ 0..33
                       |       gk ← fsi,k
                       |     gp ← medsmooth(g, nk)
                       |     for k ∈ 0..33
                       |       gsi,k ← gpk
                       |   gs ← Sü(gs) if sa = 0
                       |   gs ← As(gs) if sa = 1
                       |   gs ← gs otherwise
                       |   gs
  
```

Sümmeereerime kõiki arvatatud väljatugevusi Sim() abil. Igal läbjooksul tuleb kontrollida viimase parameetri õigsust – 0 – süm, 1 – asüm, 2 – sümmeereerimist ei toimu. Võib ka mitte siluda märgi := väljalülitamisega.

Epl := Sim(Epl, 5, 3, 0) Ezl := Sim(Ezl, 3, 3, 1)

Hpl := Sim(Hpl, 3, 3, 1) Hzl := Sim(Hzl, 3, 3, 0)

Hφl := Sim(Hφl, 3, 3, 0) Vaata all!

Epl_{0,k} := 0 Hφl_{0,k} := 0 Hpl_{0,k} := 0

Nimetasime neid väljatugevusteks. See oleks õige, kui laengusüsteem oleks positiivne. Siin on nad jõud negatiivse ühiklaengu kohta. Seda tuleb arvestada vektorite suundade lugemisel kasutatud joonistel.

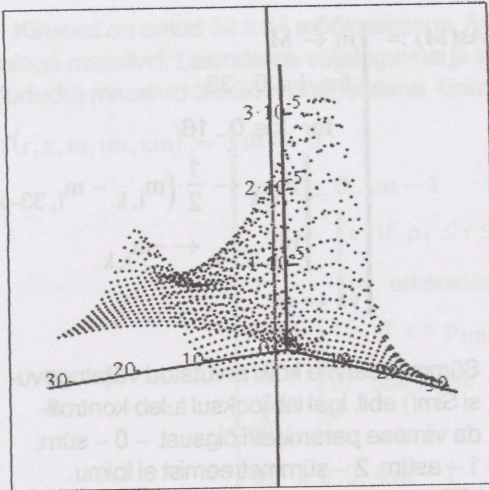
Ka sisendkiiruste ja jaotusfunktsiooni sümmeetriat kontrollime, sest võib olla, et nende arvutamisel jäi see tegemata:

$$\sum_{i=0}^{33} \left| \sum_{k=0}^{16} v_{\rho i,k} + \sum_{k=17}^{33} v_{\rho i,k} \right| = 2.03170813506404 \times 10^{-14} \quad v_{\rho} \text{ on assümmeetriline,}$$

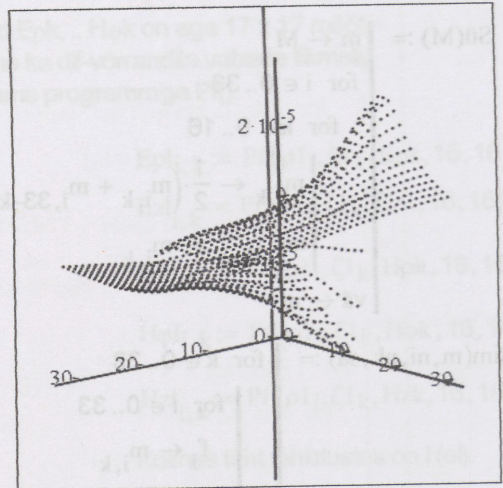
$$\sum_{i=0}^{33} \left| \sum_{k=0}^{16} v_{\varphi i,k} - \sum_{k=17}^{33} v_{\varphi i,k} \right| = 1.70974345792274 \times 10^{-14} \quad v_{\varphi} \text{ on sümmeetriline}$$

$$\sum_{i=0}^{33} \left| \sum_{k=0}^{16} v_{z,i,k} - \sum_{k=17}^{33} v_{z,i,k} \right| = 2.14273043752655 \times 10^{-14} \quad v_z \text{ on sümmeetriline}$$

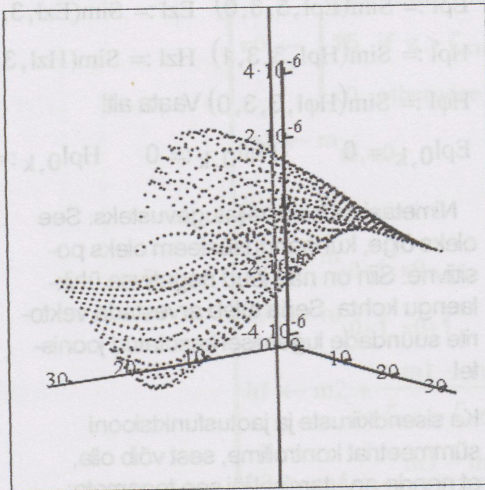
$$\sum_{i=0}^{33} \left| \sum_{k=0}^{16} \tau_{a i,k} - \sum_{k=17}^{33} \tau_{a i,k} \right| = 3.01147995429574 \times 10^{-15} \quad \tau_a \text{ on sümmeetriline}$$



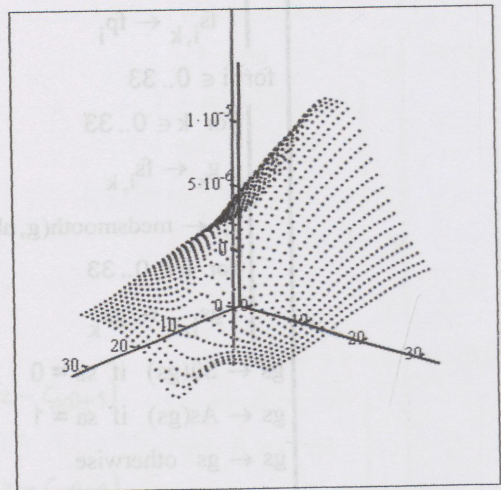
Epl



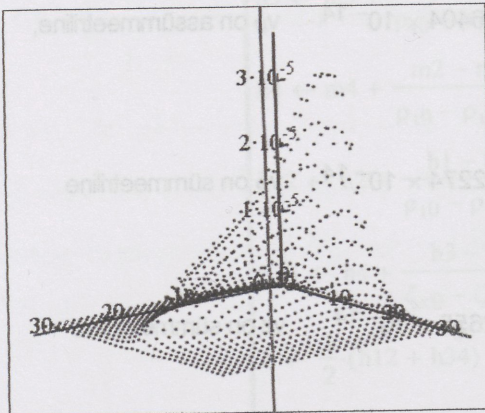
Ezl



Hpl



Hzl



Hpl

NB! Sümmeereimisprogramm Sim töötab as-sümmeetrilise massiivi juures (sa=1) tihti paremini, kui enne teha see sümmeetriliseks (sa=0) ja pärast muuta tagasi assümmeetriliseks ekvaatori suhtes. Siiski, see on tähtis ainult juhul, kui üle $\zeta_1=0$ tasandi minekul esineb üljärsk hüpe nagu näiteks kiiruse v_p puhul.

Sümmeetriliseks ja tagasi assümmeetriliseks saab teha lihtsate valemitega

$$ka := 17..33 \quad m_{i,ka} = m_{i,33-ka}$$

$m_{i,ka} = -m_{i,33-ka}$ Nende vahel võib ka kasutada järgmist silumisprogrammi, kus $\mu_i = 0.25..1, 2, 3, ..$ veerus, μ_k sama reas. Programm rakendub valemiga

$var = Smrv(var, 0.75, 0.75)$ Muidugi tuleb valemite rakendamisel loogilise võrdumise märk = asendada omistamismärgiga :=.

```

Smrv(m, μi, μk) :=
  for i ∈ 0..33
    for k ∈ 0..33
      vxk ← ζ1k
      vyk ← mi,k
      as ← loess(vx, vy, μk)
      for k ∈ 0..33
        syi,k ← interp(as, vx, vy, vxk)
    for k ∈ 0..33
      for i ∈ 0..33
        wxi ← ρ1i
        wyi ← syi,k
      bs ← loess(wx, wy, μi)
      for i ∈ 0..33
        tyi,k ← interp(bs, wx, wy, wxi)
  ty

```

Kui indeks i väärtuste hulgast tuleb väärtus 0 välja jätta, näiteks juhul, kui selles kohas tekiks 0-ga jagamine, siis kasutame indeksit

i1 := 1..33 Sellisel juhul täidetakse

se tühjaks jäänud i = 0 rida programmiga Ex(M). Analooiline olukord võib tekkida i=33 reas, siis

i2 := 0..32 ja rida 33 täidetakse programmiga Ex1(M).

```

Ex(M) :=
  m ← M
  for k ∈ 0..33
    m0,k ← 3·(m1,k - m2,k) + m3,k
  vä ← m

x1(M) :=
  m ← M
  for k ∈ 0..33
    m33,k ← 3·(m32,k - m31,k) + m30,k
  vä ← m

```

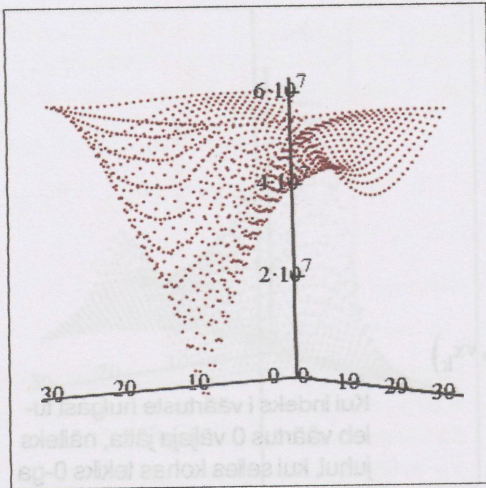
Dif-võrrandite vabade liikmete arvutamisel kasutame kordajat R_j, millesse on koondatud kõik integraalidesse mitte minevad kordajad, samuti kasutatavatest mõõtühikute teisendamisest tulenevad kordajad. Sisendis on antud silindrilise vaatevälja maksimaalmõõdud – silindri pikkus ja läbimõõt ρ1 m angströmites, milles on mõõdetud kõik seni kasutatud koordinaadid ρ, ζ, ρ1 ja ζ1. Edasine suuruste arvutus käib aga CGS süsteemis, kus mugavuse mõttes võetakse ρ1 ja ζ1 asemel kasutusele koordinaadid r ja z:

$$\rho1m := 1.60985653409092 \times 10^{-4} r := \rho1 \cdot 10^4 \quad z := \zeta1 \cdot 10^4 \quad R_j \text{ avaldisse minev konstant}$$

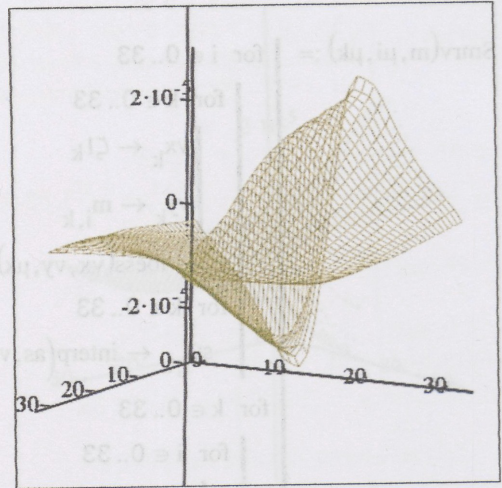
kr on arvatud järgmiselt (ilma mõistliku ümardamiseta):

$$kr = m0 \cdot \left(\frac{c}{e}\right)^2 \quad kr := 9.109534 \cdot 10^{-28} \cdot \left(\frac{2.99792458 \cdot 10^{10}}{4.8032 \cdot 10^{-10}}\right)^2 \quad kr = 3.54875670306443 \times 10^{12}$$

$$R_{j,i,k} := \frac{A_j \cdot 10^{-8}}{kr} \cdot \sqrt{1 - (v\rho_{i,k})^2 - (v\phi_{i,k})^2 - (vz_{i,k})^2} \quad vE_{i,k} := v\rho_{i,k} \cdot E\rho_{i,k} + vz_{i,k} \cdot Ez_{i,k}$$



Rj



vE

Kui kesktõmbe- ja Coriolise kiirendus viia võrrandite vasakust poolest paremale, siis omandavad kõik diferentsiaalvõrrandid ühesuguse kuju (ka allpool kasutatav pidevusvõrand):

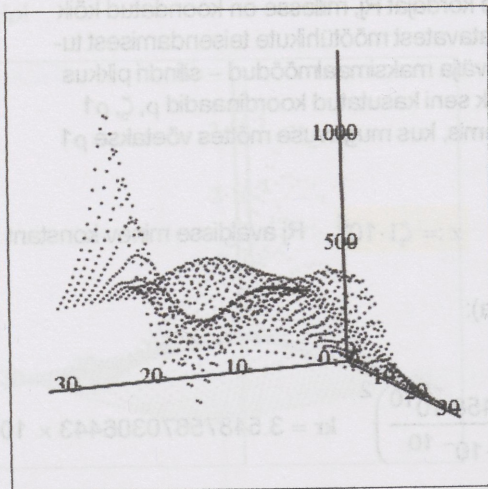
$$v\rho \cdot \frac{d}{dp} v\rho u + v_z \cdot \frac{d}{d\zeta} v\rho u = R_j \cdot (E\rho l - v\rho \cdot vE) + R_j \cdot (v\varphi \cdot Hzl - v_z \cdot H\varphi l) + \frac{v\varphi^2}{\rho}$$

$$v\rho \cdot \frac{d}{dp} v\varphi u + v_z \cdot \frac{d}{d\zeta} v\varphi u = -R_j \cdot v\varphi \cdot vE + R_j \cdot (v_z \cdot H\rho l - v\rho \cdot Hzl) - \frac{v\rho}{\rho} \cdot v\varphi \quad E\varphi l = 0$$

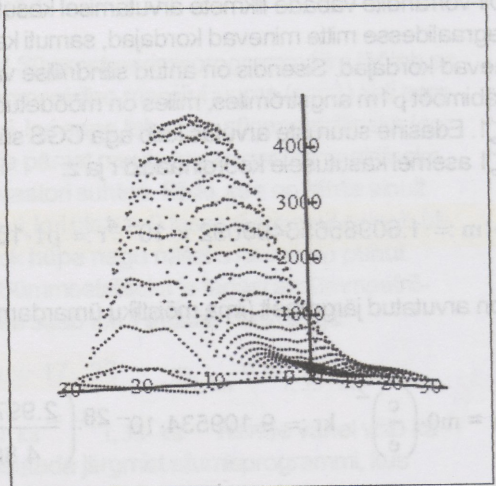
$$v\rho \cdot \frac{d}{dp} v_z u + v_z \cdot \frac{d}{d\zeta} v_z u = R_j \cdot (Ez l - v_z \cdot vE) + R_j \cdot (v\rho \cdot H\varphi l - v\varphi \cdot H\rho l)$$

Arvutame vabad liikmed sisendkiiruste väärtusi kasutades.

$$v\rho v_{i,k} := R_{j_{i,k}} \cdot (E\rho l_{i,k} - v\rho_{i,k} \cdot vE_{i,k} + v\varphi_{i,k} \cdot Hzl_{i,k} - v_z_{i,k} \cdot H\varphi l_{i,k}) \quad v\varphi_{i,k} := \frac{(v\varphi_{i,k})^2}{\rho l_{i,k}}$$

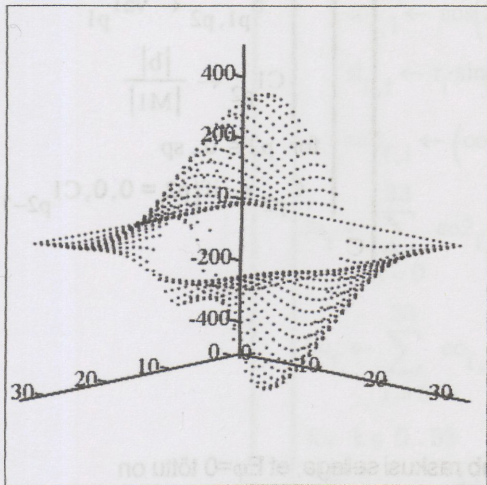


v\rho v

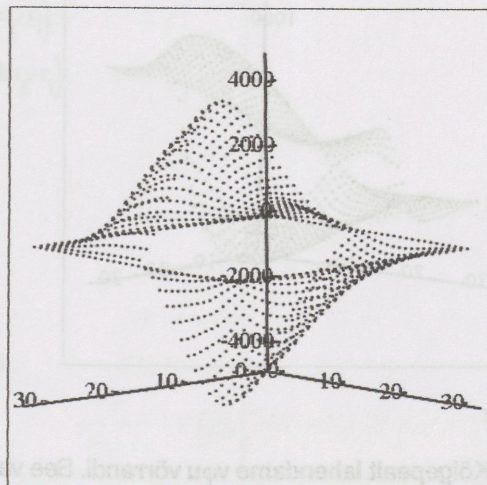


v\varphi_{i,k}

$$v\varphi v_{i,k} := R_{j_{i,k}} \cdot (-v\varphi_{i,k} \cdot vE_{i,k} + v_z_{i,k} \cdot H\rho l_{i,k} - v\rho_{i,k} \cdot Hzl_{i,k}) \quad v\rho j_{i1,k} := \frac{v\rho_{i1,k}}{\rho l_{i1}} \quad v\rho j = Ex(v\rho j)$$



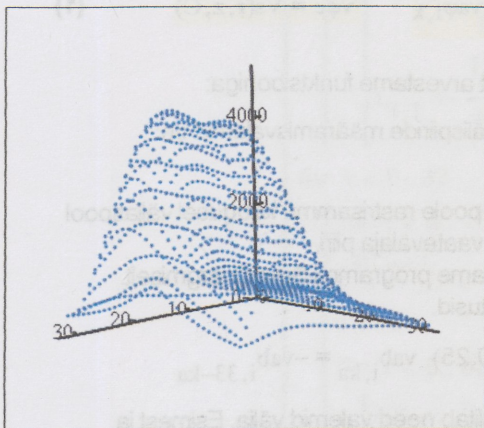
vaφv



vaφi

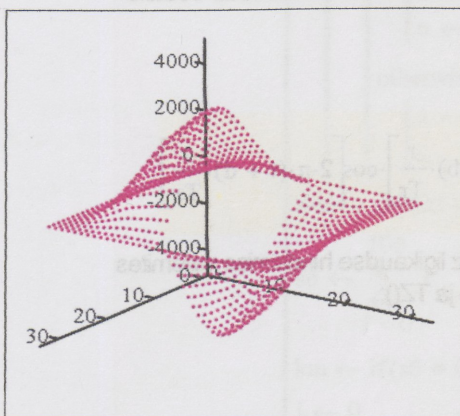
$$va\phi_{i,k} := -v\phi_{j,k} \cdot v\phi_{i,k}$$

$$vaz_{i,k} := R_{j,i,k} \cdot (Ez_{l,i,k} - vz_{i,k} \cdot vE_{i,k} + v\phi_{i,k} \cdot H\phi_{l,i,k} - v\phi_{i,k} \cdot H\phi_{l,i,k}) \quad vap := vapv + vapi$$



vap

$$vap := vapv + vapi$$



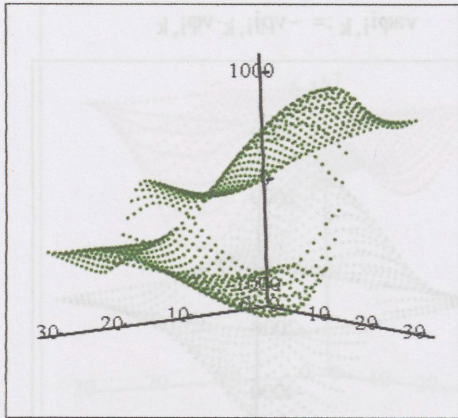
vaφ

Kõigil diferentsiaalvõrranditel on sama homogeenne osa. Kolmel esimesel kasutame osatuletiste kordajates sisendkiirusi $v\phi$ ja vz ning jaotusfunktsiooni omas äsja arvatud uusi kiirusi $v\phi$ ja vz . Tuletistes on uued kiirused ja jaotusfunktsiooni võrrandi puhul selle funktsiooni logaritmi $L\tau = \ln(\tau)$.

Lineaarse võrrandsüsteemi lahendamise programm on Cs(). M on süsteemi maatriks ja "va" vabade liikmete vektor. Kui $va_0 = 0$ vähendatakse võrrandite arvu 1 võrra ja C_0 jääbki 0-ks.

```

Cs0(M, va, sp) :=
  for p2 ∈ 0..sp if va0 ≠ 0
    b ← M
    for p1 ∈ 0..sp
      bp1,p2 ← vap1
    Cp2 ←  $\frac{|b|}{|M|}$ 
  otherwise
    for p3 ∈ 0..sp - 1
      va1p3 ← vap3+1
      for p4 ∈ 0..sp - 1
        M1p3,p4 ← Mp3+1,p4+1
    for p2 ∈ 0..sp - 1
      b ← M1
  
```



vaz

Kõigepealt lahendame v_φ võrrandi. See valmistab raskusi sellega, et $E_\varphi=0$ tõttu on kõik võrrandi liikmed võrdelised v_φ -ga ja ülesanne võrrandi poolte vahe ruutude summale miinimumi otsimine viib lõppude lõpuks v_φ 0-ni. See ütleb ka, et võrrandit või v_φ võib korrutada mistahes konstantse teguriga. Nii võib saadud lahendi suurust soovitud suunas muuta. **Esiteks leiame erilahendi v_φ Fourier rea sarnase reaksarenduse V_s kaudu.**

$$v_\rho \frac{d}{dr} v_\varphi + v_z \frac{d}{dz} v_\varphi = v_{ab}$$

$$v_{ab, i, k} := 10^{-4} \cdot v_{a\varphi, i, k}$$

$$v_\varphi = V_s(r, z, C) \quad (1)$$

Fourier reaksarenduses oleva 0. liikme kordaja eristaatust arvestame funktsiooniga:

$$iF(j, t) := \text{if}\left(j = 0, \frac{1}{2}, 1\right) \cdot \text{if}\left(t = 0, \frac{1}{2}, 1\right) \text{ Vaatevälja välispiiride määramisvalemid on:}$$

$$r1 := r_{33} + 0.5 \cdot 10^4 \cdot \Delta\rho1 \quad z1 := z_{33} + 0.5 \cdot 10^4 \cdot \Delta z1 \quad \text{– poole rastrisammu kaugusel väljaspool vaatevälja piiri.}$$

Kui vaba liige tarvitab arvutusvigade silumist, siis kasutame programmi **SmrV()** järgmiselt. See puudutab ka kõiki teisi selle programmi kasutamisihtusi.

$$v_{ab, i, ka} = v_{ab, i, 33-ka} \quad v_{ab} = \text{Smrv}(v_{ab}, 0.25, 0.25) \quad v_{ab, i, ka} = -v_{ab, i, 33-ka}$$

Omistamismärgi := asendamine loogilise võrdusega "=" lülitab need valemid välja. Esimest ja kolmandat valemit ei ole vaja kui silutav massiiv on sümmeetriline $z=0$ tasandi suhtes või ka assümmeetriline kui üleminek mainitud tasandist ei ole järsk hüpe. Järsu hüppe puhul teeb 1. valem silutava sümmeetriliseks ja 3. tulemuse tagasi assümmeetriliseks – järsk hüpe säilib.

(1) asetamisel võrrandisse saame (V_s tähisele liituv kolmas täht r või z tähendab osatuletit r või z järgi):

$$v_\rho \cdot V_{sr} + v_z \cdot V_{sz} = v_{ab} \quad V_s \text{ jaoks valime rea:}$$

$$V_s(r, z, C) = \sum_{j=0}^{j_m} \sum_{t=0}^{t_m} C_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot iF(j, t) \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot (j + b) \cdot \frac{r}{Tr}\right] \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot (t + d) \cdot \frac{z}{Tz}\right]$$

Selle koosinuste argumentides olevate konstantide Tr ja Tz ligikaudse hindamise valemites olevad kordajad Tr_k ja Tz_k määrame programmidega $TR()$ ja $TZ()$:

$$TR(v_{ab}, sm, r1) := \begin{cases} \text{for } f \in 0..100 \\ tk_f \leftarrow 1 + sm \cdot f \\ ks_f \leftarrow \frac{1}{r1 \cdot tk_f} \end{cases}$$

```

for i ∈ 0..33
  |
  | cof,i ← cos(2·π·ksf·ri)
  | sif,i ← ri·sin(2·π·ksf·ri)
  | co2f,i ← (cof,i)2
  |
  | Jaf ← ∑i=033 co2f,i
  | Luf ← ∑i=033 cof,i·sif,i
  |
  | for k ∈ 0..33
  |   |
  |   | Lcf,k ← ∑i=033 vabi,k·cof,i
  |   | Lsf,k ← ∑i=033 vabi,k·sif,i
  |   | Lf,k ←  $\frac{Lu_f}{Ja_f} \cdot Lc_{f,k} - Ls_{f,k}$ 
  |   |
  |   | for f ∈ 0..33
  |   |   | for f ∈ 0..100
  |   |   |   | lif ← Lf,k
  |   |   |   | n ← 0
  |   |   |   | for f ∈ 0..99
  |   |   |   |   | korf ← lif·lif+1
  |   |   |   |   | if korf < 0
  |   |   |   |   |   | k0,k,n ← 0.5·(ksf + ksf+1)
  |   |   |   |   |   | n ← n + 1
  |   |   |   |   | otherwise
  |   |   |   |   |   | n ← n
  |   |   |   |   |   | b ← 1
  |   |   |   | nm ← cols(k0) - 1
  |   |   |   | s0 ← ∑f=0100 Lf,33
  |   |   |   | km ← if(s0 = 0,32,33)
  |   |   |   | j ← 0
  |   |   |   | S ← 0
  |   |   |   | for k ∈ 0..km

```

```

for n ∈ 0..nm
  S ← S + if(k0k,n > 0, k0k,n, 0)
  j ← j + if(k0k,n > 0, 1, 0)
k0k ←  $\frac{S}{j}$ 
vä0 ← ks
vä1 ← L
vä2 ← k0
vä3 ← k0k
vä4 ←  $\frac{1}{r1 \cdot k0k}$ 
vä

```

TZ(vab, sm, z1) := for f ∈ 0..100

```

tkf ← 2 + sm·f
ksf ←  $\frac{1}{2 \cdot z1 \cdot tk_f}$ 
for k ∈ 0..33
  cof,k ← cos(2·π·ksf·zk)
  sif,k ← zk·sin(2·π·ksf·zk)
  co2f,k ← (cof,k)2
Jaf ←  $\sum_{k=0}^{33} co2_{f,k}$ 
Luf ←  $\sum_{k=0}^{33} co_{f,k} \cdot si_{f,k}$ 
for i ∈ 0..33
  Lcf,i ←  $\sum_{k=0}^{33} vab_{i,k} \cdot co_{f,k}$ 
  Lsf,i ←  $\sum_{k=0}^{33} vab_{i,k} \cdot si_{f,k}$ 
  Lf,i ←  $\frac{Lu_f}{Ja_f} \cdot Lc_{f,i} - Ls_{f,i}$ 

```

for i ∈ 0..33

for f ∈ 0..100

li_f ← L_{f,i}

```

n ← 0
for f ∈ 0..99
  korf ← lif · lif+1
  if korf < 0
    k0i,n ← 0.5 · (ksf + ksf+1)
    n ← n + 1
  otherwise
    n ← n
    b ← 1
nm ← cols(k0) - 1
s0 ← ∑f=0100 Lf,33
im ← if(s0 = 0, 32, 33)
j ← 0
S ← 0
for i ∈ 0..im
  for n ∈ 0..nm
    S ← S + if(k0i,n > 0, k0i,n, 0)
    j ← j + if(k0i,n > 0, 1, 0)
k0k ← S / j
vä0 ← ks
vä1 ← L
vä2 ← k0
vä3 ← k0k
vä4 ← 1 / (2 · z1 · k0k)
vä

```

Trk := TR(vab, 0.04, r1)₄
Trk = 1.22174057146818
Tzk := TZ(vab, 0.04, z1)₄
Tzk = 3.74050803941101
Kuna need on ligikaudsed –
"vab" ridade ja veergude järgi
määratud keskmised, siis neid
tuleb parandada käsitsi täisar-
ve lisades selle järgi, millised
annavava võrrandi poolte pari-
ma kokkulangevuse **Sj(Cj)** (vt
altpoolt). b ja d on reaksaren-
duse konstandid. Vastavad
valemid on:
Δr := 10⁴ · Δρ1
Tr := (Trk + 1) · r1 - 5 · Δr
Tr = 3.38695809474694
Δz := 10⁴ · Δζ1
Tz := (Tzk - 1) · z1 - 1 · Δz
Tz = 4.44794937111974
b := 0.5 d := 0.5

Esiteks määrame summad Trk ja Tzk paranduste puhul alloleva tabeli järgi, kui Trp=Tzp=0 ja b=d=0.5 (Trp ja Tzp on Δr ja Δz kordajad):

0 ja 0	0.108714614115171	Teiseks saadud väiksema summa andnud paaranduste
1 ja 0	0.014805373539312	juures teistele b ja d paaridele vastavad summad järgmi-
1 ja -1	2.2938026114289 × 10⁻⁴	se skeemi kohaselt
0 ja -1	2.74743257848375 × 10 ⁻³	b ja d valimise järjekord
0 ja -2	0.025910211914888	0.5 0.5 2.2938026114289 × 10⁻⁴
1 ja -2	0.016548631285951	0 0.5 2.42952247167869 × 10 ⁻⁴
		0 1 2.49425211126829 × 10 ⁻⁴
		0.5 1 2.60351977613339 × 10 ⁻⁴

Kolmandaks leiame parandused Trp ja Tzp parimat summat andnud b ja d paari puhul.

0.5 0 2.2961030032059 × 10⁻⁴

0 0 0.023675230822906

Löptulemuste tabel

Trkp Tzkp b d Trp Tzp hälvetesumma 1 0 3.06008003789818 × 10⁻⁴

1 -1 0.5 0.5 -5 -1 2.2236865884308 × 10⁻⁴ 1 0.5 3.04835575688633 × 10⁻⁴

Programm, mis annab need hälvetesummad (võrrandi 1 1 3.16839983331636 × 10⁻⁴

poolte väärtuste vahede ruudud keskmistatud üle poole vaateälja kõikide punktide, teine pool annab sama tulemuse) on:

jm := 10 tm := jm j := 0..jm t := 0..tm j1 := 0..jm t1 := 0..tm pm := jm + (jm + 1)·tm

$$Vsr(r, z, C) := \sum_{j=0}^{jm} \sum_{t=0}^{tm} C_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot iF(j, t) \cdot \frac{-2 \cdot \pi \cdot (j + b)}{Tr} \cdot \sin \left[2 \cdot \pi \cdot (j + b) \cdot \frac{r}{Tr} \right] \cdot \cos \left[2 \cdot \pi \cdot (t + d) \cdot \frac{z}{Tz} \right]$$

$$Vsz(r, z, C) := \sum_{j=0}^{jm} \sum_{t=0}^{tm} C_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot iF(j, t) \cdot \frac{-2 \cdot \pi \cdot (t + d)}{Tz} \cdot \cos \left[2 \cdot \pi \cdot (j + b) \cdot \frac{r}{Tr} \right] \cdot \sin \left[2 \cdot \pi \cdot (t + d) \cdot \frac{z}{Tz} \right]$$

Asetamisel võrrandisse, saame (ilma summa märkita ja kordajateta C ning iF()):

$$vp \cdot \frac{-2 \cdot \pi \cdot (j + b)}{Tr} \cdot \sin \left[2 \cdot \pi \cdot (j + b) \cdot \frac{r}{Tr} \right] \cdot \cos \left[2 \cdot \pi \cdot (t + d) \cdot \frac{z}{Tz} \right] + vz \cdot \frac{-2 \cdot \pi \cdot (t + d)}{Tz} \cdot \cos \left[2 \cdot \pi \cdot (j + b) \cdot \frac{r}{Tr} \right] \cdot \sin \left[2 \cdot \pi \cdot (t + d) \cdot \frac{z}{Tz} \right]$$

$$\cdot \sin \left[2 \cdot \pi \cdot (t + d) \cdot \frac{z}{Tz} \right] = \text{vab} \quad \text{Kasutadesi tähistusi:} \quad \alpha_i := 2 \cdot \pi \cdot \frac{r_i}{Tr} \quad \beta_k := 2 \cdot \pi \cdot \frac{z_k}{Tz}$$

$$d1_{i,k} := 2 \cdot \pi \cdot \frac{v\alpha_{i,k}}{Tr} \quad d2_{i,k} := 2 \cdot \pi \cdot \frac{v\beta_{i,k}}{Tz} \quad \text{saame}$$

$$-d1 \cdot (j + b) \cdot \sin[\alpha_i(j + b)] \cdot \cos[\beta_k(t + d)] - d2 \cdot (t + d) \cdot \cos[\alpha_i(j + b)] \cdot \sin[\beta_k(t + d)] = \text{vab}$$

$$F1(i, k, j, t) := -iF(j, t) \cdot d1_{i,k} \cdot (j + b) \cdot \sin[\alpha_i(j + b)] \cdot \cos[\beta_k(t + d)]$$

$$F(i, k, j, t) := F1(i, k, j, t) - iF(j, t) \cdot d2_{i,k} \cdot (t + d) \cdot \cos[\alpha_i(j + b)] \cdot \sin[\beta_k(t + d)]$$

$$Vs(r, z, C) := \sum_{j=0}^{jm} \sum_{t=0}^{tm} C_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot iF(j, t) \cdot \cos \left[2 \cdot \pi \cdot (j + b) \cdot \frac{r}{Tr} \right] \cdot \cos \left[2 \cdot \pi \cdot (t + d) \cdot \frac{z}{Tz} \right]$$

$$ja := \sum_{i=0}^{33} \sum_{k=0}^{16} (\text{vab}_{i,k})^2 \quad ja = 19.1560865477565 \quad ja := \text{if}(ja < 1, 1, ja) \quad ja = 19.15608655$$

Ühest väiksema ja-ga hälvetesummat ei jagata.

$$S(C) := \frac{1}{ja} \sum_{i=0}^{33} \sum_{k=0}^{16} \left[\sum_{j=0}^{jm} \sum_{t=0}^{tm} C_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot F(i, k, j, t) - \text{vab}_{i,k} \right]^2$$

On võrrandi poolte vahe ruut keskmistatud üle poole vaatevälja punktide.

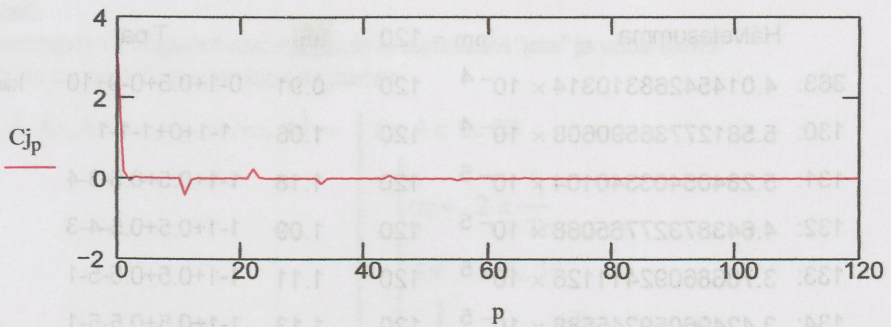
$$k_0 := \frac{10^1}{34.17}$$

Kui süsteemi determinant annab ületäitumise, tuleb kogu võrrandsüsteemi kordavat tegurit "ko" vähendada, vähendades astmenäitajat.

$$V_{j_{1+(j_m+1)} \cdot t_1} := \sum_{i=0}^{33} \sum_{k=0}^{16} v_{ab_{i,k}} \cdot F(i,k,j_1,t_1) \quad V_{j_0} = 5.52649778402862$$

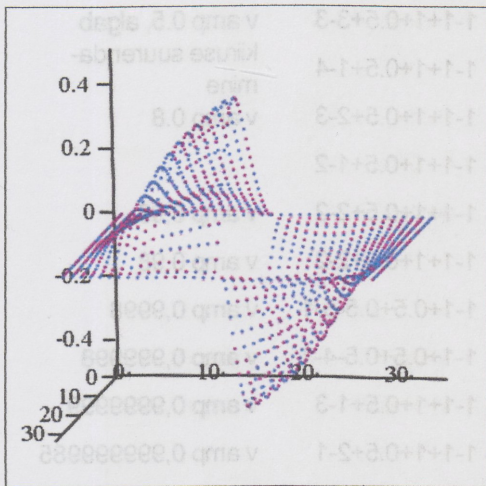
$$M_{j_{1+(j_m+1)} \cdot t_1, j_{+(j_m+1)} \cdot t} := \sum_{i=0}^{33} \sum_{k=0}^{16} F(i,k,j,t) \cdot F(i,k,j_1,t_1) \quad |k_0 \cdot M_j| = 3.88782453 \times 10^{64}$$

$$C_j := C_{s_0}(k_0 \cdot M_j, k_0 \cdot V_j, p_m) \quad p := 0..p_m \quad \text{Lahendiks on:} \quad \kappa := 0..16 \quad v\varphi_{e_{i,\kappa}} := V_s(r_i, z_\kappa, C_j)$$

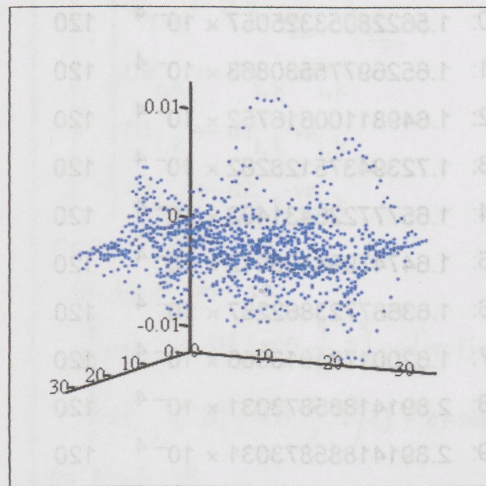


Hälvetesumma on: $S(C_j) = 2.2236865884308 \times 10^{-4}$ $v\varphi_{e_{i,33-\kappa}} := v\varphi_{e_{i,\kappa}}$

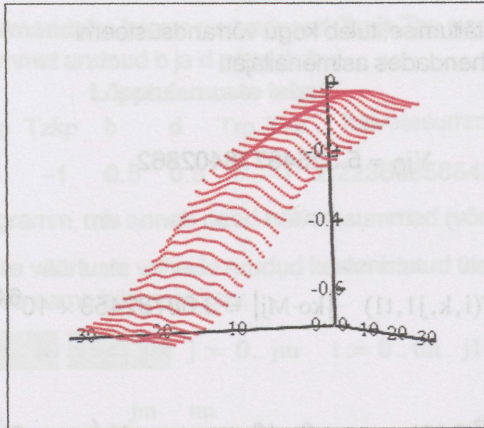
$$v\varphi_e := v\varphi_e - v\varphi_{e_0,16} \quad v_{as_{i,\kappa}} := \sum_{j=0}^{j_m} \sum_{t=0}^{t_m} C_{j_{+(j_m+1)} \cdot t} \cdot F(i,\kappa,j,t) \quad v_{as_{i,33-\kappa}} := -v_{as_{i,\kappa}}$$



vab, vas



vas - vab



$v\phi$

$v\phi$ võrdlemine sisendiga $v\phi$:

$$\mu := \frac{\max(v\phi) - \min(v\phi)}{\max(v\phi) - \min(v\phi)}$$

$$\mu = 1.12$$

Numbriliste iseloomustussuuruste tabel
alates algmudelst (363) järgneva 24 lähendus-
tsükli (iteratsiooni) kohta erilahendi $v\phi$ määra-
misel.

	Hälvetesumma	$p_m = 120$	μ	T par	
363:	$4.01454268310314 \times 10^{-4}$	120	0.91	0-1+0.5+0-9+10	kiirus amp 0.25
130:	$5.58127736590608 \times 10^{-4}$	120	1.06	1-1+0+1-1-1	
131:	$5.28405403340104 \times 10^{-5}$	120	1.18	1-1+0.5+0.5-3-4	
132:	$4.64387327765088 \times 10^{-5}$	120	1.09	1-1+0.5+0.5-4-3	
133:	$3.78686092411126 \times 10^{-5}$	120	1.11	1-1+0.5+0.5-5-1	
134:	$3.42496059245588 \times 10^{-5}$	120	1.13	1-1+0.5+0.5-5-1	
135:	$4.63379561029566 \times 10^{-5}$	120	1.11	1-1+1+0.5+2-4	
136:	$3.73664155464329 \times 10^{-5}$	120	1.11	1-1+1+0.5+2-4	
137:	$3.62650715354464 \times 10^{-5}$	120	1.12	1-1+1+0.5+1-3	
138:	$4.47945620250529 \times 10^{-5}$	120	1.1	1-2+0.5+0-4-9	
139:	$4.52435174424084 \times 10^{-5}$	120	1.1	1-1+0.5+0.5-5-3	
140:	$1.56228053325057 \times 10^{-4}$	120	1.11	1-1+1+0.5+3-3	v amp 0.5, algab
141:	$1.65269775530863 \times 10^{-4}$	120	1.11	1-1+1+0.5+1-4	kiiruse suurenda-
142:	$1.64981100616752 \times 10^{-4}$	120	1.11	1-1+1+0.5+2-3	mine
143:	$1.72394375128282 \times 10^{-4}$	120	1.11	1-1+1+0.5+1-2	v amp 0.8
144:	$1.65777226431402 \times 10^{-4}$	120	1.12	1-1+1+0.5+2-2	v amp 0,95
145:	$1.64747994408012 \times 10^{-4}$	120	1.12	1-1+1+0.5+2-2	v amp 0,98
146:	$1.63687723862287 \times 10^{-4}$	120	1.13	1-1+0.5+0.5-5-1	v amp 0,9998
147:	$1.62001781913886 \times 10^{-4}$	120	1.13	1-1+0.5+0.5-4-1	v amp 0,999998
148:	$2.89141885873031 \times 10^{-4}$	120	1.08	1-1+1+0.5+1-3	v amp 0,9999999
149:	$2.89141885873031 \times 10^{-4}$	120	1.08	1-1+1+0.5+2-1	v amp 0,999999985
150:	$2.25168851097203 \times 10^{-4}$	120	1.08	1-1+1+0.5+4-2	v amp 0,999999982
151:	$2.09475648129213 \times 10^{-4}$	120	1.1	1-1+0.5+0.5-4-2	v amp 0,999999984
152:	$1.80246450675365 \times 10^{-4}$	120	1.12	1-1+0.5+0.5-5-1	v amp 0,999999985
153:	$2.2236865884308 \times 10^{-4}$	120	1.12	1-1+0.5+0.5-5-1	v amp 0,999999986

Siintoodud arvutuse järgi on moodustatud kaks programmi. Esimene on

$W(\text{Tr}, \text{Tz}, b, d, \text{vp}, \text{vz}, \ddot{A}, \ddot{A}r, \ddot{A}z, \text{ko}, \text{jm}, \text{tm}, \text{va}, \text{sü})$, mis teeb kõik vajalikud arvutused järgnevatel juhtudel märksa kiremini ja väldib ka paljude valemite mitmekordset väljakirjutamist. Seda rakendame v_{ϕ} arvutuse teises pooles – erilahendi kõrvale üldlahendi leidmisel. Seal kasutame ääritingimusi andvat kordajat "Ä", ja selle osatuletist r järgi "Är" ning z järgi "Äz".

Kui programmi rakendame erilahendi leidmise osale, kus ääritingimusi ei kasutata, tuleb Ä võtta ühikuliste väärtustega massiiviks ja selle osatuletised nullistega:

$$\ddot{A}_{i,k} := 1 \quad \ddot{A}r_{i,k} := 0 \quad \ddot{A}z_{i,k} := 0 \quad \text{va} = \text{vab}$$

Kui võrrandi vaba liige on sümmeetriline, siis $\text{sü} = 1$, assümmeetrilise puhul $\text{sü} = -1$.

Teine programm $\text{Tbd}(\text{Trk}, \text{Tzk}, \text{vp}, \text{vz}, \ddot{A}, \ddot{A}r, \ddot{A}z, \text{ko}, \text{jm}, \text{tm}, \text{va}, \text{sü})$ määrab Trk , Tzk , b ja d optimaalsed väärtused, kasutades ka $W()$ -programmi. Käsitli määramiseks jääb veel Trp ja Tzp leidmine, sest ei ole ette teada, mis vahemikes tuleks varieerida Δr ja Δz kordajaid Tr ja Tz valemities (vt ülalt).

Reaksarenduse kordajate C , võrrandi vasaku poole arvumassiivi "vas" ja vaba liikme "vab" erinevuste ruutude summa S arvutamise programm.

```

W(Tr, Tz, b, d, vp, vz, Ä, Är, Äz, ko, jm, tm, va, sü) :=
  for i ∈ 0..33
    αi ← 2·π· $\frac{r_i}{\text{Tr}}$ 
    for k ∈ 0..16
      βk ← 2·π· $\frac{z_k}{\text{Tz}}$ 
      d0i,k ← vpi,k·Äri,k + vzi,k·Äzi,k
      d1i,k ← 2·π· $\frac{\text{vp}_{i,k}}{\text{Tr}}$ ·Äi,k
      d2i,k ← 2·π· $\frac{\text{vz}_{i,k}}{\text{Tz}}$ ·Äi,k
      D0i,k ← d0i,k·vai,k
      D1i,k ← d1i,k·vai,k
      D2i,k ← d2i,k·vai,k
    for i ∈ 0..33
      for j ∈ 0..jm
        co1i,j ← if(j = 0, 1/2, 1)·cos[αi·(j + b)]
        si1i,j ← if(j = 0, 1/2, 1)·(j + b)·sin[αi·(j + b)]
      for k ∈ 0..16
        for t ∈ 0..tm
          co2k,t ← if(t = 0, 1/2, 1)·cos[βk·(t + d)]
          si2k,t ← if(t = 0, 1/2, 1)·(t + d)·sin[βk·(t + d)]

```

for j1 ∈ 0..jm

for t1 ∈ 0..tm

$V_{j1,t1} \leftarrow 0$

for i ∈ 0..33

for k ∈ 0..16

$s1 \leftarrow (D0_{i,k} \cdot col_{i,j1} - D1_{i,k} \cdot sil_{i,j1}) \cdot co2_{k,t1} -$
 $V_{j1,t1} \leftarrow V_{j1,t1} + s1 - D2_{i,k} \cdot col_{i,j1} \cdot si2_{k,t1}$

$Vv_{j1+(jm+1) \cdot t1} \leftarrow V_{j1,t1}$

for j ∈ 0..jm

for t ∈ 0..tm

for i ∈ 0..33

for k ∈ 0..16

$A_{i,k} \leftarrow (d0_{i,k} \cdot col_{i,j} - d1_{i,k} \cdot sil_{i,j}) \cdot co2_{k,t} - d2_{i,k} \cdot col_{i,j} \cdot si2_{k,t}$

$M_{j,t} \leftarrow A$

for j ∈ 0..jm

for t ∈ 0..tm

for j1 ∈ 0..jm

for t1 ∈ 0..tm

$Mm_{j1+(jm+1) \cdot t1, j+(jm+1) \cdot t} \leftarrow \sum_{i=0}^{33} \sum_{k=0}^{16} (M_{j,t})_{i,k}$

$pm \leftarrow jm + (jm + 1) \cdot tm$

$Ch \leftarrow Cs0(ko \cdot Mm, ko \cdot Vv, pm)$

for i ∈ 0..33

for k ∈ 0..16

$vas_{i,k} \leftarrow \sum_{j=0}^{jm} \sum_{t=0}^{tm} Ch_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot (M_{j,t})_{i,k}$

$vas_{i,33-k} \leftarrow s\ddot{u} \cdot vas_{i,k}$

$ja \leftarrow \sum_{i=0}^{33} \sum_{k=0}^{16} (vas_{i,k})^2$

$ja \leftarrow \text{if}(ja < 1, 1, ja)$

$Su \leftarrow \frac{1}{ja} \sum_{i=0}^{33} \sum_{k=0}^{16} (vas_{i,k} - va_{i,k})^2$

$v\ddot{a}0 \leftarrow Ch$

$v\ddot{a}1 \leftarrow vas$

$v\ddot{a}2 \leftarrow Su$

vä

Trk ja Tzk paranduste rp ja zp ning b ja d optimaalsete väärtuste programm.

Tbd(Trk, Tzk, vp, vz, Ä, Är, Äz, ko, jm, tm, va, sü) :=

$$T \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B \leftarrow \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 1 \\ 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0.5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

S ← 10

rp ← 0

zp ← 0

for j ∈ 0..5

Tr ← (Trk + T_{j,0})·r1

Tz ← (Tzk + T_{j,1})·z1

w ← W(Tr, Tz, 0.5, 0.5, vp, vz, Ä, Är, Äz, ko, jm, tm, va, sü)

Su ← w2

if Su ≤ S

S ← Su

rp ← T_{j,0}

zp ← T_{j,1}

otherwise

S ← S

rp ← rp

zp ← zp

Tr ← (Trk + rp)·r1

Tz ← (Tzk + zp)·z1

b ← 0.5

d ← 0.5

for j ∈ 1..8

w ← W(Tr, Tz, B_{j,0}, B_{j,1}, vp, vz, Ä, Är, Äz, ko, jm, tm, va, sü)




Su ← w2

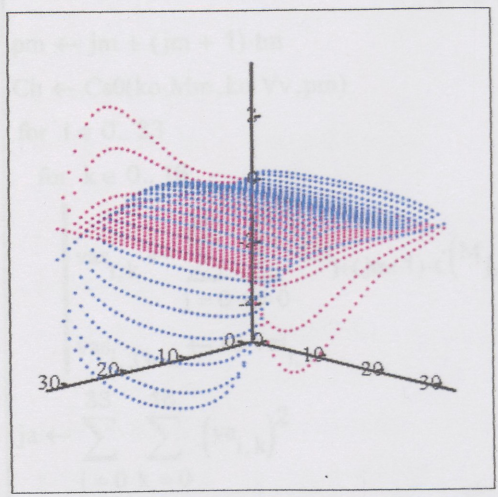
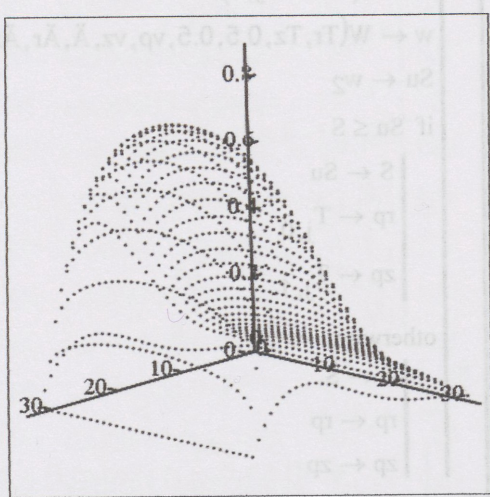
```

if Su ≤ S
  S ← Su
  b ← Bj,0
  d ← Bj,1
otherwise
  S ← S
  b ← b
  d ← d
vä0 ← S
vä1 ← rp
vä2 ← zp
vä3 ← b
vä4 ← d
vä

```

Otsime üldlahendit, mis rahuldaks ääritingimusi. Erilahend neile ei vasta. Üldlahendi saab, kui lisame $v_{\phi e}$ -le mingi homogeenise võrrandiosa lahendi v_h , sellise, et üldlahendit saab otsida rea ja ääritingimusi esitava teguri korrutisega. Selleks teguriks kasutame varemates programmides leitud VJ. See ja osatuletised määrati programmis 201 ja väljastati failidesse:

VJ :=  VJ201 VJr :=  VJr201 VJz :=  VJz201



VJ

VJr, VJz

$$v_{\phi e} + v_h = VJ \cdot V_s(r, z, C) \quad v_h = VJ \cdot V_s - v_{\phi e} \quad v_r \frac{d}{dr} v_h + v_z \frac{d}{dz} v_h = 0 \quad v_{\phi u} = VJ \cdot V_s(t, z, C)$$

$$v_r \cdot (VJ_r \cdot V_s + VJ \cdot V_{sr} - v_{\phi er}) + v_z \cdot (VJ_z \cdot V_s + VJ \cdot V_{sz} - v_{\phi ez}) = 0 \quad \text{ehk}$$

$$(v_r \cdot VJ_r + v_z \cdot VJ_z) \cdot V_s + VJ \cdot (v_r \cdot V_{sr} + v_z \cdot V_{sz}) = v_r \cdot v_{\phi er} + v_z \cdot v_{\phi ez} \quad \text{Kuna } v_{\phi e} \text{ on selle kiirus-}$$

võrrandi erilahend, siis paremal pool võrdust seisab põhivõrrandi vaba liige "vab". Selle võrrandi lahendame sama reaga, ainult rea parameetrid omandavad uued väärtused. Esimesena mää-

ramegi Trk ja Tzk parandused rp ja zp ning b ja d optimaalsed väärtused ja nendele vastava hälvetesumma S.

$$k_o := \frac{10^2}{34.17}$$

$$P := \text{Tbd}(\text{Trk}, \text{Tzk}, v_p, v_z, \text{VJ}, \text{VJr}, \text{VJz}, k_o, j_m, t_m, v_{ab}, -1) \quad S := P_0$$

$$r_p := P_1 \quad z_p := P_2 \quad r_p = 1 \quad z_p = -2 \quad S = 0.017054715620659$$

$$\text{Tr} := (\text{Trk} + r_p) \cdot r_1 + 29 \cdot \Delta r \quad b := P_3 \quad b = 0 \quad \text{Tr}_p \quad \text{Tz}_p \quad \text{hälvetesumma}$$

$$\text{Tz} := (\text{Tzk} + z_p) \cdot z_1 + 0 \cdot \Delta z \quad d := P_4 \quad d = 0 \quad 29 \quad 0 \quad 9.23841660743912 \times 10^{-3}$$

Viimane tabeliosa parandab järgmise prommiosaga hälvetesummat S, muutes käsitsi Tr ja Tz valemi viimaseid parandusi - Δr ja Δz kordajaid, leides väärtuste kombinatsiooni, mis annab väikseima hälvetesumma Su.

$$\text{WP} := \text{W}(\text{Tr}, \text{Tz}, b, d, v_p, v_z, \text{VJ}, \text{VJr}, \text{VJz}, k_o, j_m, t_m, v_{ab}, -1) \quad \text{Ch} := \text{WP}_0 \quad \text{vas} := \text{WP}_1$$

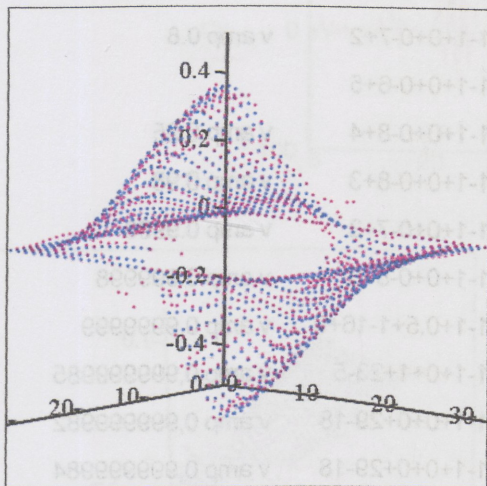
$$S_u := \text{WP}_2 \quad S_u = 9.23841660743912 \times 10^{-3} \text{ summa käsitsi valitud Trp ja Tzp puhul.}$$

$$V_s(r, z, C) := \sum_{j=0}^{j_m} \sum_{t=0}^{t_m} C_{j+(j_m+1) \cdot t} \cdot iF(j, t) \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot (j + b) \cdot \frac{r}{\text{Tr}}\right] \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot (t + d) \cdot \frac{z}{\text{Tz}}\right]$$

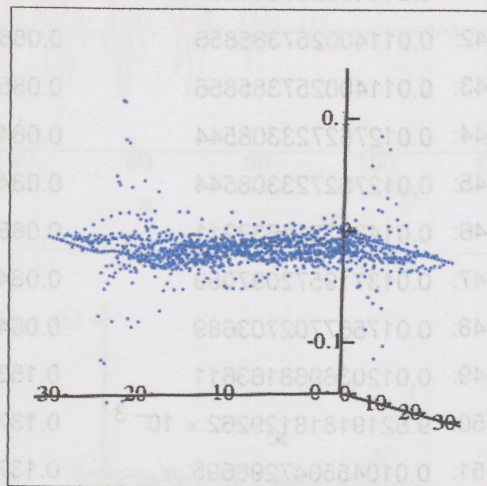
Lahendiks on: $\kappa := 0..16$ vs. $i, \kappa := V_s(r_i, z_\kappa, \text{Ch})$ $vs_{i, 33-\kappa} := vs_{i, \kappa}$ $ni := \max(vs)$

$$vs_{i, \kappa} := vs_{i, \kappa} - ni$$

Igasugune konstantne nihe ei muuda võrrandi vasakut poolt.



vab, vas



vas - vab

$$v\varphi_{i, \kappa} := -vs_{i, \kappa} \cdot VJ_{i, \kappa}$$

märgimuutus tehti pöörlemssuuna valiku tõttu.

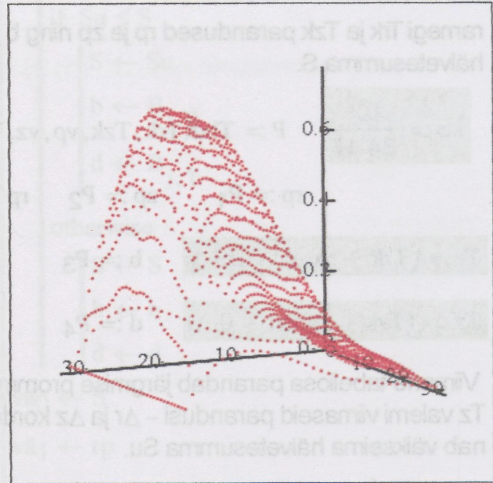
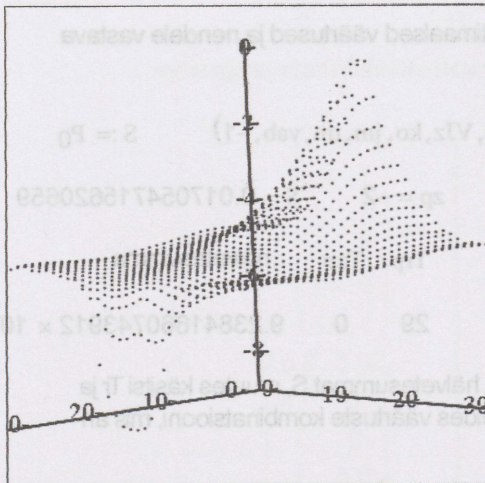
$$v\varphi := S_u(v\varphi)$$

$$\mu := \frac{\max(v\varphi)}{\max(v\varphi)} \quad \mu = 0.18$$

Säilitame sisendkiiruse suuruse:

$$v\varphi := \mu \cdot v\varphi \quad v\varphi_{0, \kappa} := 0$$

Üldlahendi leidmist koos ääretingimuste rakendamisega alustati 135. lähendusest, kui erilahendi osa oli küllaldaselt koondunud.



vs

v ρ u

mu

135:	$2.55859689477533 \times 10^{-3}$	0.101	1-1+0+0.5+5+0	
136:	$2.14928074577857 \times 10^{-3}$	0.114	1-1+0+0+7+0	
137:	$2.14928074577857 \times 10^{-3}$	0.121	1-1+0+0+8+0	
138:	$3.05366659837858 \times 10^{-3}$	0.104	1-1+0+0+5+0	
139:	$2.65392131732628 \times 10^{-3}$	0.1	1-1+0+0+8+0	v amp 0.25
140:	$9.71874871900061 \times 10^{-3}$	0.1	1-1+0+0+4+1	v amp 0.5
141:	0.011400257385856	0.096	1-1+0+0+1+1	
142:	0.011400257385856	0.086	1-1+0+0-7+2	v amp 0.8
143:	0.011400257385856	0.085	1-1+0+0-6+5	
144:	0.012762723308544	0.084	1-1+0+0-8+4	v amp 0.95
145:	0.012762723308544	0.084	1-1+0+0-8+3	v amp 0.98
146:	0.014392211633211	0.085	1-1+0+0-7+3	v amp 0.9998
147:	0.013719572097059	0.084	1-1+0+0-8+3	v amp 0.999998
148:	0.017567702703689	0.084	1-1+0.5+1-16+9	v amp 0.9999999
149:	0.012036968163611	0.153	1-1+0+1+23-5	v amp 0,999999985
150:	$9.82191818129262 \times 10^{-3}$	0.137	1-1+0+0+29-18	v amp 0,999999982
151:	0.010455047298695	0.137	1-1+0+0+29-18	v amp 0,999999984
152:	$9.75496425054491 \times 10^{-3}$	0.137	1-1+0+0+29-18	v amp 0,999999985
153:	$9.23841660743912 \times 10^{-3}$	0.18	1-2+0+0+29+0	v amp 0,999999986

III võrrandi lahenduskaik. Sisendi v ρ ja vz võetakse tuletiste kordajateks ja otsitava vze arvutamiseks kasutatakse sama rida Vs(r,z,C).

vze = Vs(r, z, C)

Vaba liige: $vab_{i,k} := 10^{-4} \cdot vaz_{i,k}$ $vab = As(vab)$

Asetamisel III diferentsiaalvõrrandisse, saame:

$v\rho \cdot Vsr + vz \cdot Vsz = vab$

Reas kasutatavaid perioode määrame sama meetodikaga kui $v_{\varphi e}$ määramise juures.

$$\text{Trk} := \text{TR}(\text{vab}, 0.04, r1)_4 \quad \text{Trk} = 1.91687371142539 \quad \text{Tzk} := \text{TZ}(\text{vab}, 0.04, z1)_4$$

$$\text{jm} := 10 \quad \text{tm} := \text{jm} \quad \text{pm} := \text{jm} + (\text{jm} + 1) \cdot \text{tm} \quad \text{Tzk} = 3.68738635322485$$

$$\text{ko} := \frac{10^1}{34.17} \quad \text{P} := \text{Tbd}(\text{Trk}, \text{Tzk}, v_{\varphi}, v_z, \ddot{A}, \ddot{A}r, \ddot{A}z, \text{ko}, \text{jm}, \text{tm}, \text{vab}, -1) \quad \text{S} := \text{P}_0 \quad \text{rp} := \text{P}_1$$

$$\text{zp} := \text{P}_2 \quad \text{rp} = 1 \quad \text{zp} = -1 \quad \text{S} = 0.046320608739963$$

$$\text{Tr} := (\text{Trk} + \text{rp}) \cdot r1 + 7 \cdot \Delta r \quad \text{b} := \text{P}_3 \quad \text{b} = 0.5 \quad \text{Trp} \quad \text{Tzp} \quad \text{h\ddot{a}lvetesumma}$$

$$\text{Tz} := (\text{Tzk} + \text{zp}) \cdot z1 - 2 \cdot \Delta z \quad \text{d} := \text{P}_4 \quad \text{d} = 1 \quad 7 \quad -2 \quad 0.045094996257148$$

$$\text{WP} := \text{W}(\text{Tr}, \text{Tz}, \text{b}, \text{d}, v_{\varphi}, v_z, \ddot{A}, \ddot{A}r, \ddot{A}z, \text{ko}, \text{jm}, \text{tm}, \text{vab}, -1) \quad \text{Cz} := \text{WP}_0 \quad \text{vas} := \text{WP}_1 \quad \text{Su} := \text{WP}_2$$

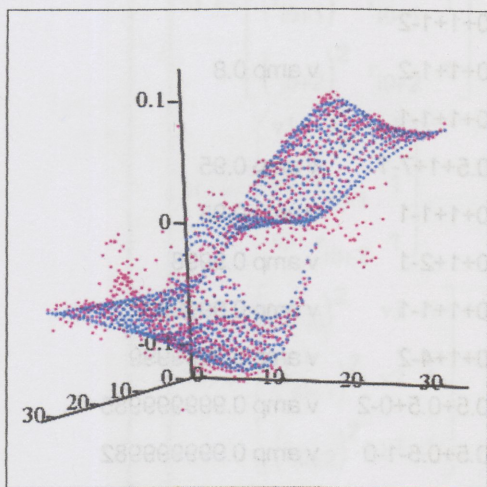
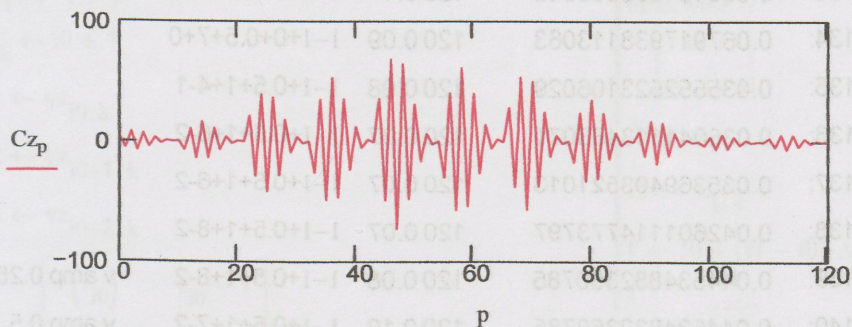
$$V_s(r, z, C) := \sum_{j=0}^{\text{jm}} \sum_{t=0}^{\text{tm}} C_{j+(\text{jm}+1) \cdot t} \cdot iF(j, t) \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot (j + b) \cdot \frac{r}{\text{Tr}}\right] \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot (t + d) \cdot \frac{z}{\text{Tz}}\right]$$

$$\kappa := 0..16 \quad vze_{i, \kappa} := V_s(r_i, z_{\kappa}, Cz) \quad vze_{i, 33-\kappa} := vze_{i, \kappa} \quad vze_{i, k} := 0 \quad ni := vze_{0, 17}$$

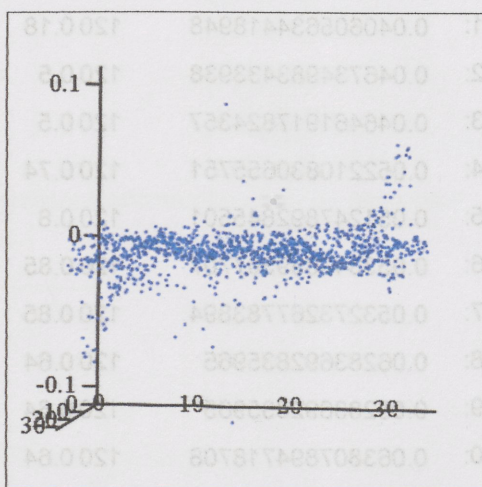
$$vze := vze - ni$$

$$p := 0..pm$$

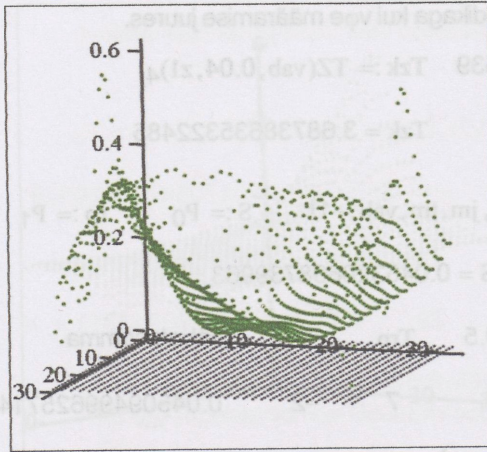
$$Cz_{pm} = 0.029526836872911$$



vab, vas



vab - vas



Hälvetesumma on:

$$Su = 0.045094996257148$$

$$\mu := 0.5 \cdot \left(\frac{\max(vz) - \min(vz)}{\max(vze) - \min(vze)} \right)$$

$$\mu = 0.92$$

vze, vz0

	pm = 120	mu	T par	
363:	2.67660099131388 × 10 ⁻⁸	120 0.43	1-1+0+0.5+15+1	
130:	0.041653970276102	120 0.13	1-1+0.5+0.5-3-1	
131:	0.061339031502848	120 0.1	1-1+0+1+3-1	
132:	0.060936677081038	120 0.1	1-1+0+0.5+16-3	
133:	0.063154082369545	120 0.1	1-1+0+0.5+12-1	
134:	0.067917938113063	120 0.09	1-1+0+0.5+7+0	
135:	0.035552523106029	120 0.08	1-1+0.5+1+4-1	
136:	0.036041113463071	120 0.07	1-1+0.5+1+6-2	
137:	0.035369403521013	120 0.07	1-1+0.5+1+6-2	
138:	0.042601114773797	120 0.07	1-1+0.5+1+8-2	
139:	0.044534832350785	120 0.08	1-1+0.5+1+8-2	v amp 0.25
140:	0.044534832350785	120 0.19	1-1+0.5+1+7-2	v amp 0.5
141:	0.040605634418948	120 0.18	1-1+0+1+1-2	
142:	0.046734983433938	120 0.5	1-1+0+1+1-2	v amp 0.8
143:	0.046461917824357	120 0.5	1-1+0+1+1-1	
144:	0.052210830655751	120 0.74	1-1+0.5+1+7-1	v amp 0.95
145:	0.051247892845501	120 0.8	1-1+0+1+1-1	v amp 0.98
146:	0.053343839307707	120 0.85	1-1+0+1+2-1	v amp 0.9998
147:	0.053273267783894	120 0.85	1-1+0+1+1-1	v amp 0.999998
148:	0.06283692835965	120 0.64	1-1+0+1+4-2	v amp 0.9999999
149:	0.06283692835965	120 0.64	0-1+0.5+0.5+0-2	v amp 0.999999985
150:	0.063807894718708	120 0.64	0-1+0.5+0.5-1-0	v amp 0.999999982
151:	0.055768453089966	120 0.88	1-1+0.5+1+4-1	v amp 0.999999984
152:	0.055768453089966	120 0.85	1-1+0+0.5+3-2	v amp 0.999999985
153:	0.045094996257148	120 0.92	1-1+0.5+1+7-2	v amp 0.999999986

Analoogiliselt v_{ϕ} määramisega leiame üldlahendi koos ääreväärtusi andva teguriga VZ.

$vzu = VZ \cdot Vs(t, z, C)$ Ääritingimust määrava teguri VZ arvutamiseks on kõigepeal tarvis

pogrammi Rop(vz), mis arvutaks 0-joone "ros", millest üleminekul sisendkiirus vz muudab märki. Selle joone silumiseks kasutatavat programmi Sm() on ka tarvis.

$$Sm(f, x, \mu, nm) := \begin{cases} \text{for } n \in 0..nm \\ \quad \left| \begin{array}{l} wx_n \leftarrow x_n \\ wy_n \leftarrow f_n \end{array} \right. \\ \quad bs \leftarrow \text{loess}(wx, wy, \mu) \\ \quad \text{for } n \in 0..nm \\ \quad \quad sf_n \leftarrow \text{interp}(bs, wx, wy, x_n) \\ \quad sf \end{cases}$$

Veel on tarvis programmi, mis asetab selle joone kahemõõtmelisse massiivi

$$\ddot{U}fz(z, m) := \begin{cases} s \leftarrow \frac{z - \zeta_{10}}{\Delta \zeta_1} \\ \Delta l \leftarrow \text{mod}(s, 1) \\ l \leftarrow s - \Delta l \\ \text{if } l < 0 \\ \quad \left| \begin{array}{l} l \leftarrow 0 \\ \Delta l \leftarrow s - 1 \end{array} \right. \\ \text{if } l > 32 \\ \quad \left| \begin{array}{l} l \leftarrow 32 \\ \Delta l \leftarrow s - 1 \end{array} \right. \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} l \leftarrow 1 \\ \Delta l \leftarrow \Delta l \end{array} \right. \\ f_0 \leftarrow m_l \\ f_1 \leftarrow m_{l+1} \\ f \leftarrow f_0 + (f_1 - f_0) \cdot \Delta l \\ f \end{cases}$$

$$Rop(vz) := \begin{cases} \text{for } k \in 0..33 \\ \quad i \leftarrow 0 \\ \quad \text{while } i < 32 \wedge vz_{i,k} \cdot vz_{i+1,k} > 0 \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} i_0 \leftarrow i \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \\ \quad \quad I_{0,k} \leftarrow i_0 + 1 \\ \quad \quad v_1 \leftarrow vz_{i_0,k} \\ \quad \quad v_2 \leftarrow vz_{i_0+1,k} \\ \quad \quad v_3 \leftarrow vz_{i_0+2,k} \\ \quad \quad M \leftarrow \begin{bmatrix} (r_{i_0})^2 & r_{i_0} & 1 \\ (r_{i_0+1})^2 & r_{i_0+1} & 1 \\ (r_{i_0+2})^2 & r_{i_0+2} & 1 \end{bmatrix} \\ \quad \quad Ma \leftarrow \begin{pmatrix} v_1 & r_{i_0} & 1 \\ v_2 & r_{i_0+1} & 1 \\ v_3 & r_{i_0+2} & 1 \end{pmatrix} \\ \quad \quad Mb \leftarrow \begin{bmatrix} (r_{i_0})^2 & v_1 & 1 \\ (r_{i_0+1})^2 & v_2 & 1 \\ (r_{i_0+2})^2 & v_3 & 1 \end{bmatrix} \\ \quad \quad Mc \leftarrow \begin{bmatrix} (r_{i_0})^2 & r_{i_0} & v_1 \\ (r_{i_0+1})^2 & r_{i_0+1} & v_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

```

    [ (r_{i0+2})^2 r_{i0+2} v^3 ]
    a ← |Ma| / |M|
    b ← |Mb| / |M|
    c ← |Mc| / |M|
    if a ≠ 0
        r1 ← (-b + √(b^2 - 4·a·c)) / (2·a)
        r2 ← (-b - √(b^2 - 4·a·c)) / (2·a)
        ro_k ← r1 if r_{i0} < r1 ≤ r_{i0+2}
                r2 otherwise
        ro_k ← -c/b otherwise
        y0_k ← a·(ro_k)^2 + b·ro_k + c
    for k ∈ 0..33
        for i ∈ 0..32
            rp_k ← 0.5·(r_i + r_{i+1}) if r_i ≤ ro_k < r_{i+1}
                    continue otherwise
        vä0 ← ro
        vä1 ← y0
        vä2 ← I0
        vä3 ← rp
        vä

```

```

    rop := Rop(vz)
    rou := rop3    rou33 := rou0
    ros := Sm(rou, z, 0.75, 33)
    ros_k võrdub r väärtusega, kus null-
    joon lõikub k veergu vz massiivis.

```

```

    O määrab vz nullkoha joonel "ros".
    rs(z) := Üfz(z·10^-4, ros)

```

$$O_{i,k} := rs(z_k) - r_i$$

Edasi on tarvis z-suunalist joont, mis 0-staks vzu piiridel z = -z1 ja z = z1:

$$Z_k := \sqrt{1 - \left(\frac{z_k}{z1}\right)^2}$$

Järgmisena r-suunaline joon, mis omaks väärust 1 teel z-tejst kuni "ros" jooneni ning kahaneks ringjoont mööda piiril r = r1 nullini.

```

    i0 := 20    ro := r_{i0}

```

$$R_i := \text{if} \left[i \leq i0, 1, \sqrt{1 - \left(\frac{r_i - ro}{r1 - ro}\right)^2} \right]$$

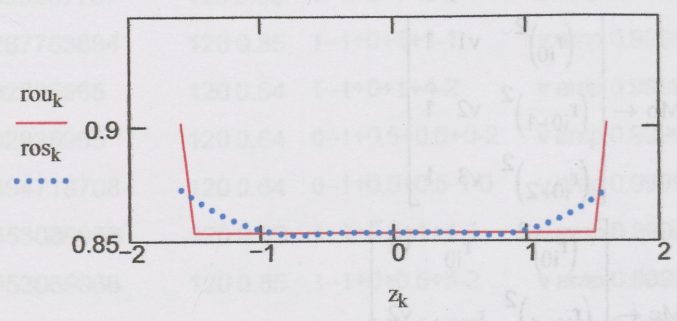
Nii saame ääretingimusi andvaks teguriks VZ:

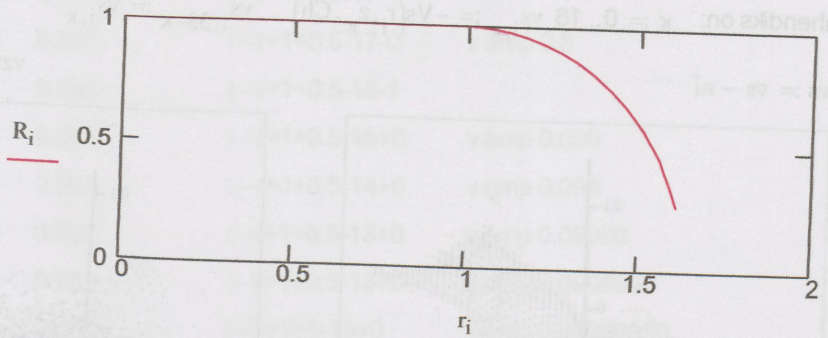
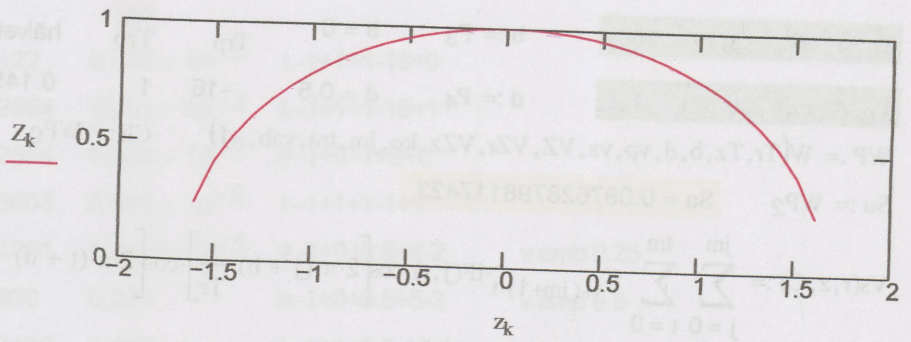
$$RZ_{i,k} := R_i \cdot Z_k$$

$$VZ_{i,k} := RZ_{i,k} \cdot O_{i,k}$$

VZ tuletsed r ja z järgi on otseselt arvutatavad valemiteest (vt alla).

Tulemused on toodud järgnevate jooniste ja valemitega.



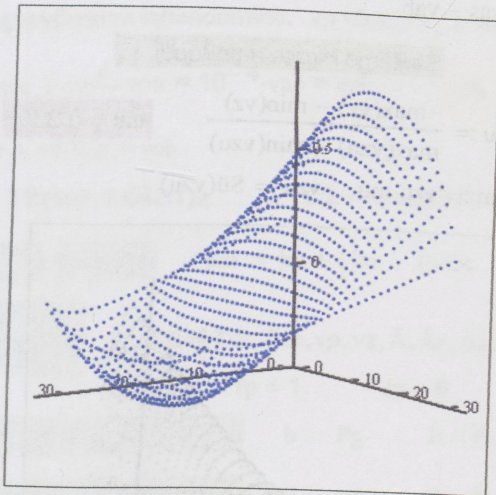


$$Or_{i,k} := -1 \quad rsz(z) := \frac{d}{dz}rs(z) \quad Oz_{i,k} := rsz(z_k)$$

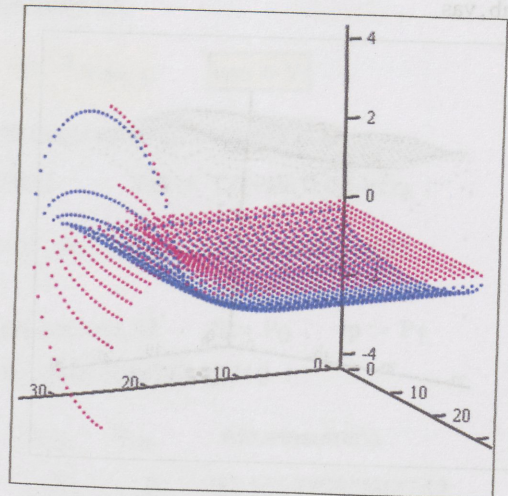
$$RZr_{i,k} := Z_k \cdot \text{if} \left[i \leq i0, 0, \frac{ro - r_i}{(r1 - ro) \cdot \sqrt{(r1 - ro)^2 - (r_i - ro)^2}} \right] \quad VZr_{i,k} := RZr_{i,k} \cdot O_{i,k} + RZ_{i,k} \cdot Or_{i,k}$$

$$VZz_{i,k} := RZr_{i,k} \cdot O_{i,k} + RZ_{i,k} \cdot Oz_{i,k}$$

$$VZz_{i,33-ka} := -VZz_{i,ka}$$



VZ



VZr, VZz

Alles pärast selliseid ettevalmistusi saame asuda üldlahendi vzu leidmisele.

$$ko := \frac{10^3}{34.17}$$

$$P := \text{Tbd}(\text{Trk}, \text{Tzk}, \text{vp}, \text{vz}, \text{VZ}, \text{VZr}, \text{VZz}, \text{ko}, \text{jm}, \text{tm}, \text{vab}, -1) \quad S := P_0$$

$$rp := P_1 \quad zp := P_2 \quad rp = 0 \quad zp = -1 \quad S = 0.082746678533487$$

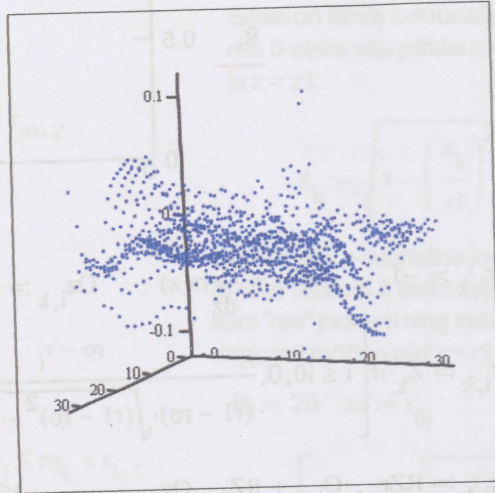
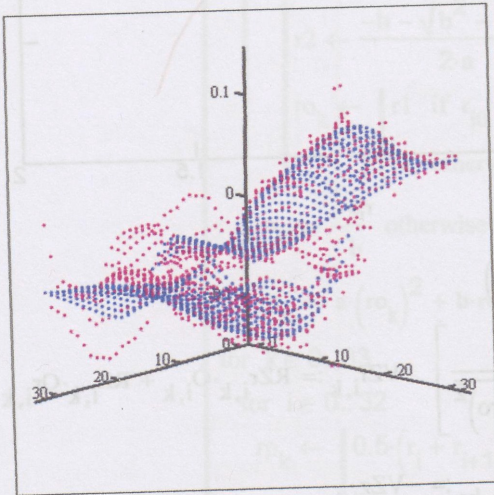
$Tr := (Trk + rp) \cdot r1 - 16 \cdot \Delta r$ $b := P3$ $b = 0$ Trp Tzp hälvetesumma
 $Tz := (Tzk + zp) \cdot z1 + 1 \cdot \Delta z$ $d := P4$ $d = 0.5$ -16 1 0.145302419630284
 $WP := W(Tr, Tz, b, d, vp, vz, VZ, VZr, VZz, ko, jm, tm, vab, -1)$ $Ch := WP0$ $vas := WP1$
 $Su := WP2$ $Su = 0.097628798117423$

$$Vs(r, z, C) := \sum_{j=0}^{jm} \sum_{t=0}^{tm} C_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot iF(j, t) \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot (j + b) \cdot \frac{r}{Tr}\right] \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot (t + d) \cdot \frac{z}{Tz}\right]$$

Lahendiks on: $\kappa := 0..16$ $vs_{i, \kappa} := -Vs(r_i, z_{\kappa}, Ch)$ $vs_{i, 33-\kappa} := vs_{i, \kappa}$ $ni := \min(vs)$

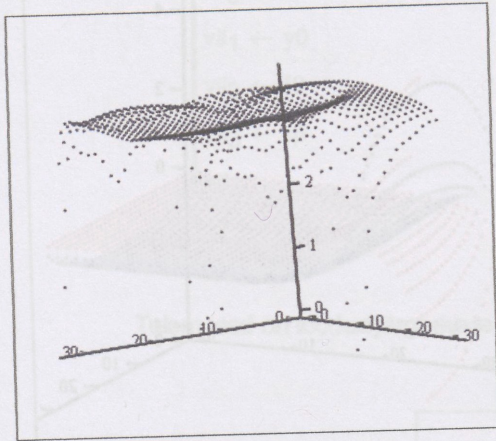
$vs := vs - ni$

$vzu_{i, k} := vs_{i, k} \cdot VZ_{i, k}$



vab, vas

vas - vab



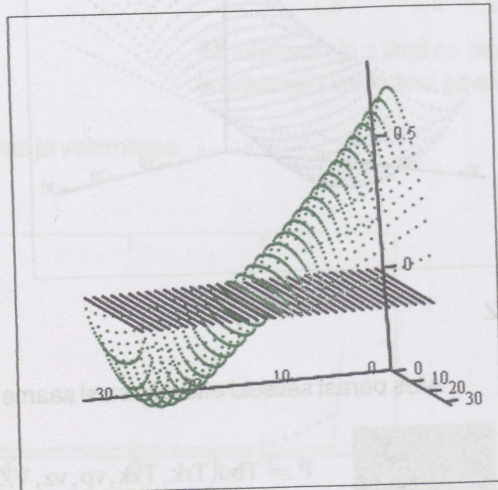
Säilitame kiiruse amplituudi.

$$\mu := \frac{\max(vz) - \min(vz)}{\max(vzu) - \min(vzu)}$$

$\mu = 0.239$

$vzu := vzu - \mu$ $vzu := S\ddot{u}(vzu)$

vs



vab ja vas võrdlus-joonis näitab, et kasutatud rida ei sobi hästi vzu lähendamiseks. Lähendus paraneb kui suurendada rea liikmete arvu $jm=tm=10$ aga mitte oluliselt - arvutusviga ka suureneb. Väljatrükitud variandi puhul on kõigis $jm=10$, et võrdlus eri arvutuste vahel oleks õigem.

vzu, vz0

mu

135:	0.16134118657122	8.944×10^{-3}	1-1+1+1-18+0	
136:	0.143108609682854	6.851×10^{-3}	1-1+1+1-18+1	
137:	0.143108609682854	6.539×10^{-3}	0-1+0+1+8+0	
138:	0.161018060773608	6.539×10^{-3}	1-1+1+1-1+1	
139:	0.153144275401061	5.883×10^{-3}	0-1+0+0.5+4-2	v amp 0.25
140:	0.15699804476938	0.016	0-1+0+0.5+5-2	v amp 0.5
141:	0.157563104157498	0.017	1-1+1+0.5-17-1	
142:	0.157563104157498	0.044	1-1+1+0.5-17-0	v amp 0.8
143:	0.15874973690319	0.043	1-1+1+0.5-15-1	
144:	0.158150449028481	0.061	1-1+1+0.5-15+0	v amp 0.095
145:	0.15223612442493	0.066	1-1+1+0.5-14+0	v amp 0.098
146:	0.150768412408139	0.068	1-1+1+0.5-13+0	v amp 0.09998
147:	0.151661646105064	0.069	1-1+1+0.5-13+0	v amp 0.0999998
148:	0.151661646105064	0.059	1-1+1+1-10+0	v amp 0.09999999
149:	0.144191218020742	0.065	0-1+0+0.5+0+0	v amp 0.0999999985
150:	0.136074238486166	0.068	0-1+0.5+0+1-20	v amp 0.0999999982
151:	0.149587359779114	0.071	1-1+1+0.5-16+0	v amp 0.0999999984
152:	0.148156828483388	0.071	1-1+1+0-12-2	v amp 0.0999999985
153:	0.145302419630284	0.075	1-1+1+0.5-16+1	v amp 0.0999999986

vpu võrrandi lahendamise. vp võrrand r, z koordinaatides on:

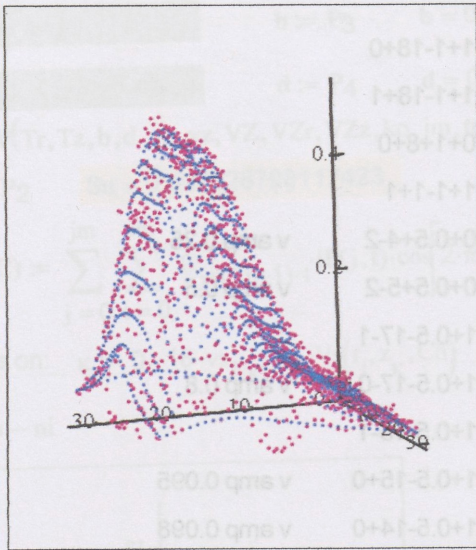
```

vp· $\frac{d}{dr}$ vpu + vz· $\frac{d}{dz}$ vpu = 10-4·vap = vab      vabi,k := 10-4·vapi,k      vpu = Vs
vp·Vsr + vz·Vsz = vab      Nii nagu varemgi, leiame Tr ja Tz.
Trk := TR(vab, 0.04, r1)4      Trk = 1.35589123867069      Tzk := TZ(vab, 0.04, z1)4
jm := 10      tm := jm      pm := jm + (jm + 1)·tm      p := 0..pm      Tzk = 2.6532449710861
ko :=  $\frac{10^1}{34.17}$       P := Tbd(Trk, Tzk, vp, vz, Ä, Är, Äz, ko, jm, tm, vab, 1)      S := P0      rp := P1
zp := P2      rp = 1      zp = 0      S = 0.02156825942719
Tr := (Trk + rp)·r1 + 23·Är      b := P3      b = 0      Trp      Tzp      hälvetesumma
Tz := (Tzk + zp)·z1 - 6·Äz      d := P4      d = 0.5      23      -6      0.016647695508742
WP := W(Tr, Tz, b, d, vp, vz, Ä, Är, Äz, ko, jm, tm, vab, 1)      Cr := WP0      vas := WP1      Su := WP2

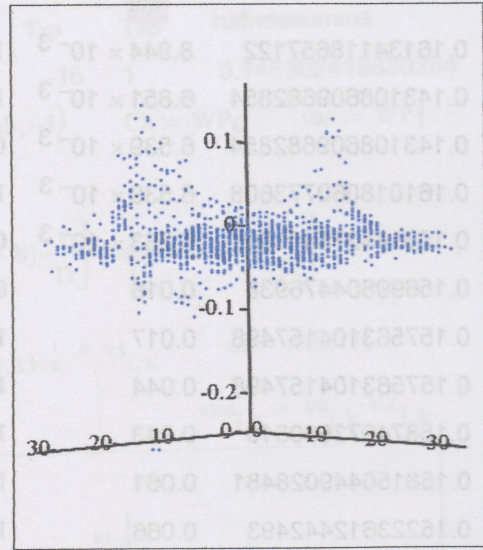
```

$$V_s(r, z, C) := \sum_{j=0}^{jm} \sum_{t=0}^{tm} C_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot iF(j, t) \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot (j + b) \cdot \frac{r}{Tr}\right] \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot (t + d) \cdot \frac{z}{Tz}\right]$$

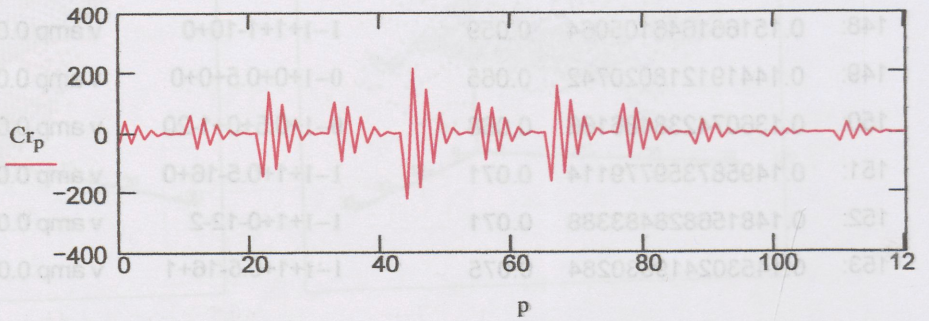
$$\kappa := 0..16 \quad v_{pe_{i,\kappa}} := V_s(r_i, z_\kappa, Cr) \quad v_{pe_{i,33-\kappa}} := v_{pe_{i,\kappa}}$$



vab, vas

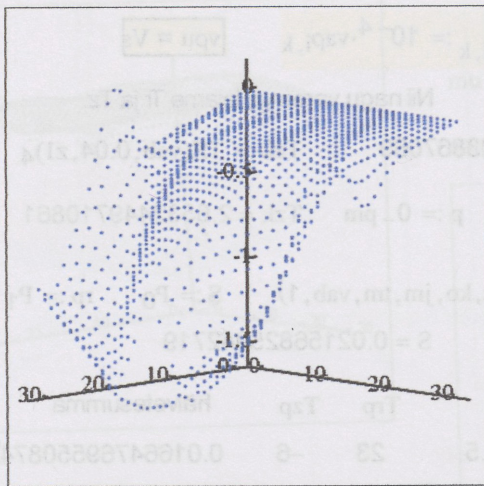


vab - vas



vpe := vpe - vpe0,17 vpe0,k := 0

$Cr_{pm} = -0.03757709210238$



Hälvetesumma on:

$Su = 0.016647695508742$

$$\mu := \frac{\max(vp) - \min(vp)}{\max(vpe) - \min(vpe)}$$

$\mu = 0.888$

vpe

pm = 120 mu

Tp

363: 0.018705013074341 120 0.258 1-1+0.5+1+4-3

130: 0.033759495211567 120 0.083 1+0+0+1-2-8

131: 0.032857672582118 120 0.258 1+0+0+1+13+6

132:	0.037028376473826	120	0.282	1+0+0+0.5+17+2	
133:	0.037567081997825	120	0.24	1+0+0+0.5+20-6	
134:	0.043146984295974	120	0.23	1+0+0+0.5+21-11	
	0.04336131416703	120	0.232	1+0+0+1+19-7	
135:	0.019547884411529	120	0.21	1+0+0+0.5+3+1	
136:	0.021445422409276	120	0.186	1+0+0.5+0+12-2	
137:	0.021817570581309	120	0.194	1+0+0+0.5+5+1	
138:	0.021115077148167	120	0.219	1+0+0+0.5+20+1	
139:	0.021000304835859	120	0.219	1+0+0+0.5+21+1	v amp 0.25
140:	0.020200949791103	120	0.449	1+0+0+0.5+22-1	v amp 0.5
141:	0.019790094018081	120	0.449	1+0+0+0.5+23-1	
142:	0.019790094018081	120	0.841	1+0+0+0.5+21-1	v amp 0.8
143:	0.020091393962812	120	0.841	1+0+0+0.5+23-1	
144:	0.020453644060247	120	0.952	1+0+0+0.5+22-1	v app 0.95
145:	0.020600393542229	120	0.956	1+0+0+0.5+21-2	v app 0.95
146:	0.020738258879883	120	0.963	1+0+0+0.5+22-3	v app 0.9995
147:	0.021026220235871	120	0.981	1+0+0+0.5+22-3	v app 0.999995
148:	0.039892514543186	120	0.813	1+0+1+0.5+38-3	v app 0.9999999
149:	0.021266295282322	120	0.931	1+0+0+0.5+21-3	v app 0.999999985
150:	0.02144847385118	120	0.928	1+0+0+0.5+22-5	v app 0.999999982
151:	0.022764870854569	120	0.966	1+0+0+0.5+22-5	v app 0.999999984
152:	0.021720764253797	120	0.933	1+0+0+0.5+22-5	v app 0.999999985
153:	0.016647695508742	120	0.888	1+0+0+0.5+23-6	v app 0.999999986

Üldlahendi vpu leidmiseks tuleb samuti kõigepealt määrata ääritingimusi seadev tegur VR.

vpu = VR · Vs(r, z, C) Selleks tuleb kirjutada programm RZp(ros), mis annaks VR-le

suurima amplituudi kohta, kus vzu omandas nullised väärtused.

RZp(ros) := for k ∈ 17..33

$$M \leftarrow \begin{bmatrix} 2 \cdot \text{ros}_k & 1 \\ (\text{ros}_k)^2 & \text{ros}_k \end{bmatrix}$$

$$Md \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \text{ros}_k \end{bmatrix}$$

$$Mg \leftarrow \begin{bmatrix} 2 \cdot \text{ros}_k & 0 \\ (\text{ros}_k)^2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$d \leftarrow \frac{|Md|}{|M|}$$

$$Rz := -RZp(\text{ros})_0$$

$$Rz_{1,33-ka} := Rz_{1,ka}$$

z-tele sihis töötav tegr peab andma suurima väärtuse kohas z = 0 ja piiridel z = -z1 ja z = z1 lähenema nullile:

$$Z_k := \left[\frac{(z_k)^2}{z1^2} - 1 \right]^2$$

$$g \leftarrow \frac{|Mg|}{|M|}$$

for $i \in 0..33$

$$rz1_{i,k} \leftarrow \text{if} \left[r_i \leq \text{ros}_k, d \cdot (r_i)^2 + g \cdot r_i, 0 \right]$$

$$M \leftarrow \begin{bmatrix} (r_{33})^2 & r_{33} & 1 \\ 2 \cdot \text{ros}_k & 1 & 0 \\ (\text{ros}_k)^2 & \text{ros}_k & 1 \end{bmatrix}$$

$$Md \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & r_{33} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & \text{ros}_k & 1 \end{bmatrix}$$

$$Mg \leftarrow \begin{bmatrix} (r_{33})^2 & 0 & 1 \\ 2 \cdot \text{ros}_k & 0 & 0 \\ (\text{ros}_k)^2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Mh \leftarrow \begin{bmatrix} (r_{33})^2 & r_{33} & 0 \\ 2 \cdot \text{ros}_k & 1 & 0 \\ (\text{ros}_k)^2 & \text{ros}_k & -1 \end{bmatrix}$$

$$d \leftarrow \frac{|Md|}{|M|}$$

$$g \leftarrow \frac{|Mg|}{|M|}$$

$$h \leftarrow \frac{|Mh|}{|M|}$$

for $i \in 0..33$

$$rz2_{i,k} \leftarrow \text{if} \left[r_i \geq \text{ros}_k, d \cdot (r_i)^2 + g \cdot r_i + h, 0 \right]$$

$$\text{v}a_0 \leftarrow rz1 + rz2$$

$$\text{v}a_1 \leftarrow rz1$$

$$\text{v}a_2 \leftarrow rz2$$

vä

$$\text{Tfu}(r, z, m) := s \leftarrow \frac{r}{\Delta p}$$

$$\Delta p \leftarrow \text{mod}(s, 1)$$

$$p \leftarrow s - \Delta p$$

if $p < 0$

$$p \leftarrow 0$$

$$\Delta p \leftarrow s$$

$$\text{ja } VR_{i,ka} := Rz_{i,ka} \cdot Z_{ka}$$

$$VR_{i,33-ka} := -VR_{i,ka}$$

sest programm RZp() annab Rz väärtused ainult poolel väljal: ka := 17..33. Kuna Rzp() annab negatiivse väärtuse, siis "-" annab väärtuse, mis sobib meie poolt valitud pöörlemissuunaga. VR osatuletsi r ja z järgi tuleb määrata viisil, kus programm Tfu() teeb VR pidevaks funktsiooniks poolel väljal ka = 17...33 ja sellest võetud tuletised kantakse teisele poole välja sümmeetria järgi. Vajalik programm on kirjutatud allpool ja ka selle kasutamise viis. Peab märkima, et r ja z selles programmis tähendavad koordinaate ρ_1 ja ζ_1 .

Arvumassiiv M muudetakse pidevaks kahemõõtmeliseks funktsiooniks nii:

$\text{sf}(r, z, M) := \text{Tfu}(r, z, M)$ Sellest saab osatuletsi leida r ja z järgi:

$$\text{srf}(r, z, M) := \frac{d}{dr} \text{sf}(r, z, M)$$

```

if p > 32
  p ← 32
  Δp ← s - p
otherwise
  p ← p
  Δp ← Δp
s ←  $\frac{z - \zeta_{10}}{\Delta \zeta_1}$ 
Δl ← mod(s, 1)
l ← s - Δl
if l < 17
  l ← 17
  Δl ← s - l
if l > 32
  l ← 32
  Δl ← s - l
otherwise
  l ← l
  Δl ← Δl
f0 ← mp,l
f1 ← mp+1,l
f2 ← mp+1,l+1
f3 ← mp,l+1
fx ← [f0 + (f1 - f0)·Δp]·(1 - Δl)
fx ← fx + [f3 + (f2 - f3)·Δp]·Δl
fx

```

$$szf(r, z, M) := \frac{d}{dz} sf(r, z, M)$$

Peab arvestama, et r ja z tähendavad siin ρ₁ ja ζ₁ ja tulestised võetakse poolka = 17..33

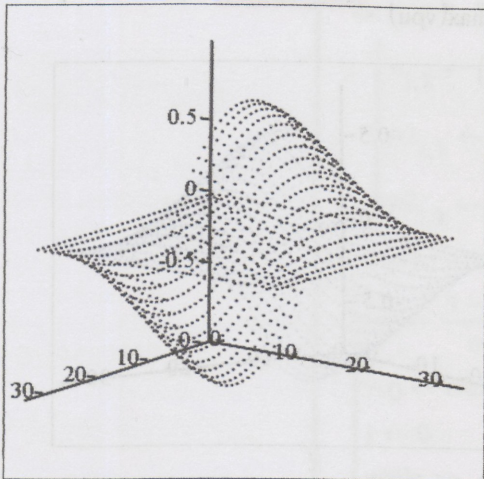
$$VRr_{i,ka} := 10^{-4} \cdot srf(\rho_{1i}, \zeta_{1ka}, VR)$$

$$VRr_{i,33-ka} := -VRr_{i,ka}$$

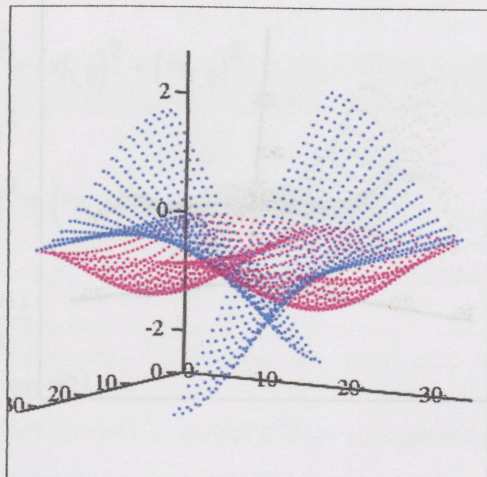
$$VRz_{i,ka} := 10^{-4} \cdot szf(\rho_{1i}, \zeta_{1ka}, VR)$$

$$VRz_{i,33-ka} := VRz_{i,ka}$$

Kui tulestise leidmisel esineb tõrkeid – funktsioonid ei ole küllalt siledad, siis tuleb kasutada operaatorit "on error" ja tühjad kohad täita silumisega.



VR



VRr, VRz

Üldlahendi leiame samal viisil nagu eelmisel kahel juhul. Ääritingimusi esitab VR.

$$k_0 := \frac{10^1}{34 \cdot 17}$$

$$P := \text{Tbd}(\text{Trk}, \text{Tzk}, \text{vp}, \text{vz}, \text{VR}, \text{VRr}, \text{VRz}, k_0, \text{jm}, \text{tm}, \text{vab}, 1)$$

$$S := P_0 \quad S = 0.1203175332673 \quad \text{rp} := P_1 \quad \text{zp} := P_2 \quad \text{rp} = 1 \quad \text{zp} = 0$$

$$\text{Tr} := (\text{Trk} + \text{rp}) \cdot r_1 + 15 \cdot \Delta r$$

$$b := P_3 \quad b = 0 \quad \text{Trp} \quad \text{Tzp} \quad \text{hälvetesumma}$$

$$\text{Tz} := (\text{Tzk} + \text{zp}) \cdot z_1 - 6 \cdot \Delta z$$

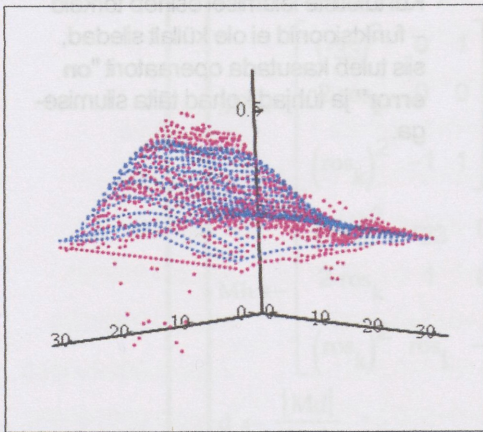
$$d := P_4 \quad d = 1 \quad 15 \quad -6 \quad 0.102859973476753$$

$$\text{WP} := \text{W}(\text{Tr}, \text{Tz}, b, d, \text{vp}, \text{vz}, \text{VR}, \text{VRr}, \text{VRz}, k_0, \text{jm}, \text{tm}, \text{vab}, 1) \quad \text{Ch} := \text{WP}_0 \quad \text{vas} := \text{WP}_1$$

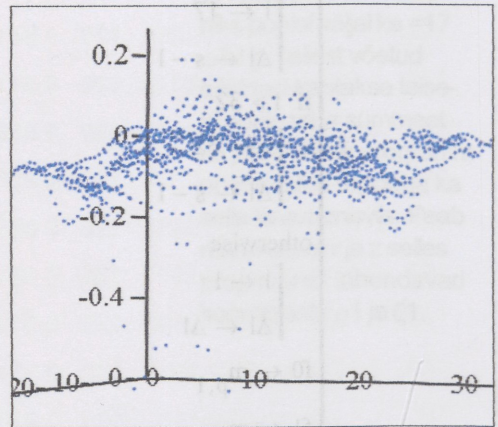
$$\text{Su} := \text{WP}_2$$

$$\text{Su} = 0.102859973476753$$

$$V_s(r, z, C) := \sum_{j=0}^{\text{jm}} \sum_{t=0}^{\text{tm}} C_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot iF(j, t) \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot (j + b) \cdot \frac{r}{\text{Tr}}\right] \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot (t + d) \cdot \frac{z}{\text{Tz}}\right]$$



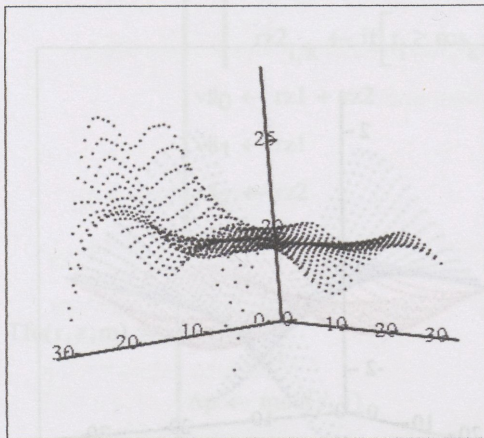
vab, vas



vas - vab

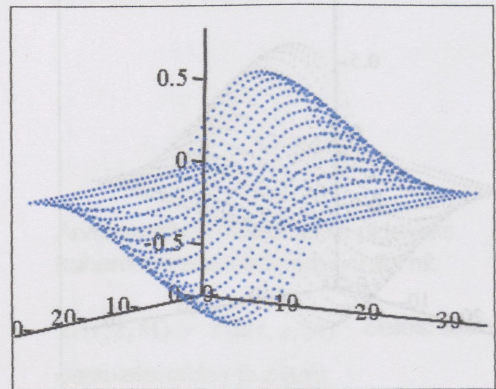
Lahendiks on: $\kappa := 0..16$ $vs_{i,\kappa} := V_s(r_i, z_\kappa, \text{Ch})$ $vs_{i,33-\kappa} := vs_{i,\kappa}$ $ni := \min(vs)$

$$vs := vs - ni \quad vs := \text{Smrv}(vs, 0.75, 0.75) \quad \text{vpu}_{i,k} := \text{VR}_{i,k} \cdot vs_{i,k} \quad \text{vpu} := \text{As}(\text{vpu}) \quad \text{vpu}_{0,k} := 0$$



vs

$$\mu := \frac{\max(\text{vpu})}{\max(\text{vpu}_{0,k})} \quad \mu = 0.037 \quad \text{vpu} := \mu \cdot \text{vpu}_{0,k}$$



vpu

Eri lähendustes saadud numbrilised tulemused on:

		mu		
135:	0.019547884411529	0.034	1+0+0+1+12-1	
136:	0.019547884411529	0.028	1+0+0+1+13-1	
137:	0.092736062094086	0.011	1+0+0+1+13-1	
138:	0.12601798160202	0.011	1+0+1+1+0+0	
139:	0.12601798160202	0.027	1+0+0+1+11-1	v amp 0.25
140:	0.095974138175559	0.034	1+0+0+1+12-0	v amp 0.5
141:	0.108902506909269	0.037	1+0+0+1+11-0	
142:	0.097735849480607	0.054	1+0+0+1+11-1	v amp 0.8
143:	0.099589235546141	0.06	1+0+0+1+12-1	
144:	0.094299624170008	0.062	1+0+0+1+12-1	v amp 0.95
145:	0.095904908876298	0.056	1+0+0+1+11-2	v amp 0.98
146:	0.09564036666836	0.07	1+0+0+1+13-3	v amp 0.9998
147:	0.051039899656065	0.104	1-2+0+0+14+1	v amp 0.999998
148:	0.161200549516139	0.013	1+0+0+1+8-1	v amp 0.9999999
149:	0.100531118784732	0.014	1+0+0+1+12-3	v amp 0.999999985
150:	0.104833706968015	0.069	1+0+0+1+10-4	v amp 0.999999982
151:	0.096138058703087	0.069	1+0+0+1+11-5	v amp 0.999999984
152:	0.141979151491756	0.728	1-2+1+0.5+16-5	v amp 0.999999985
153:	0.102859973476753	0.037	1-0+0+1+15-6	v amp 0.999999986

KOKKUVÖTE. Esielgu säilitasime kiiruste suurusi konstantsena (0.25) kuni iteratsiooni-
 protsess hakkab koonduma. Seejärel suurendasime kiirusi, säilitades moodulit 1-st väiksemana. Samuti võrdsustasime v_{pu} ja v_{zu} amplituude.

Siin võrdsustatakse v_{pu} ja v_{zu} suurimad kõrvalekaldeid 0-st.

```

Tg(vr, vj, vz, Δtg1, Δtg2) :=
  for i ∈ 0..33
    for k ∈ 0..33
      wi,k ← (vri,k)2 + (vji,k)2 + (vzi,k)2
      w1i,k ← (vji,k)2
      w2i,k ← (vri,k)2 + (vzi,k)2
    if max(w) ≥ 1
      tgo ←  $\frac{1 - \max(w1)}{\max(w2)}$ 
      ve0 ← max(w1 + tgo·w2)
      j ← 0
      while vej < 1
        | j ← j + 1
  
```


$$\max(\text{veat}) = 0.999999986$$

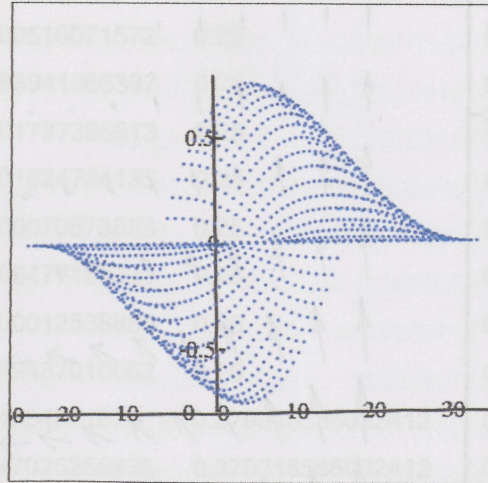
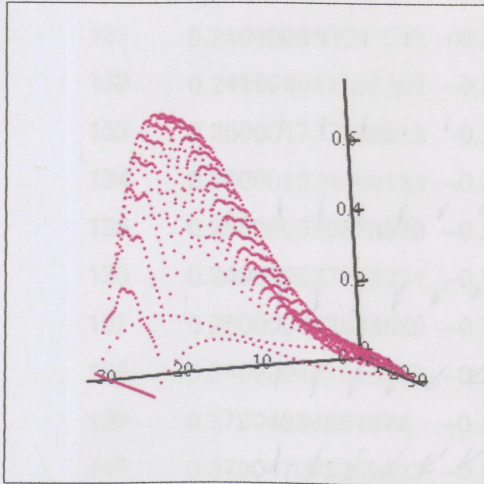
$$\text{ve}_{i,k} := \sqrt{1 - (\text{veat}_{i,k})^2}$$

$$\sum_{i=0}^{33} \sum_{k=0}^{33} |\text{Im}(\text{ve}_{i,k})| = 0$$

$$\text{vpu} := \text{t} \cdot \text{vpu}$$

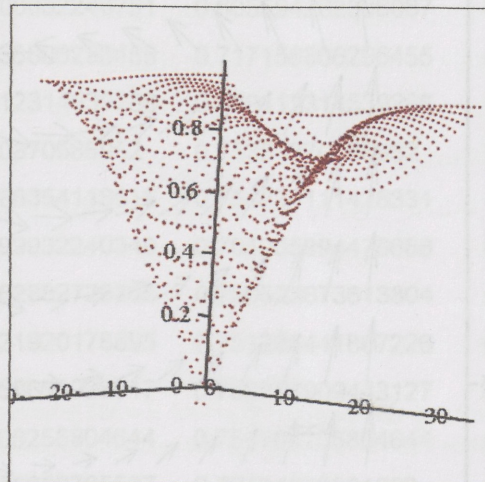
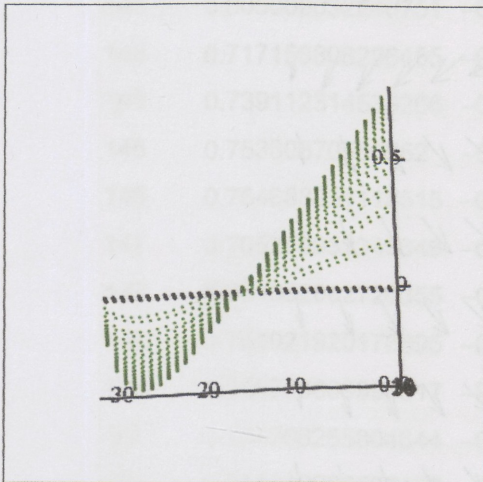
$$\text{vpu} := \text{t} \cdot \text{vpu}$$

$$\text{vzu} := \text{t} \cdot \text{vzu}$$



vpu

vpu



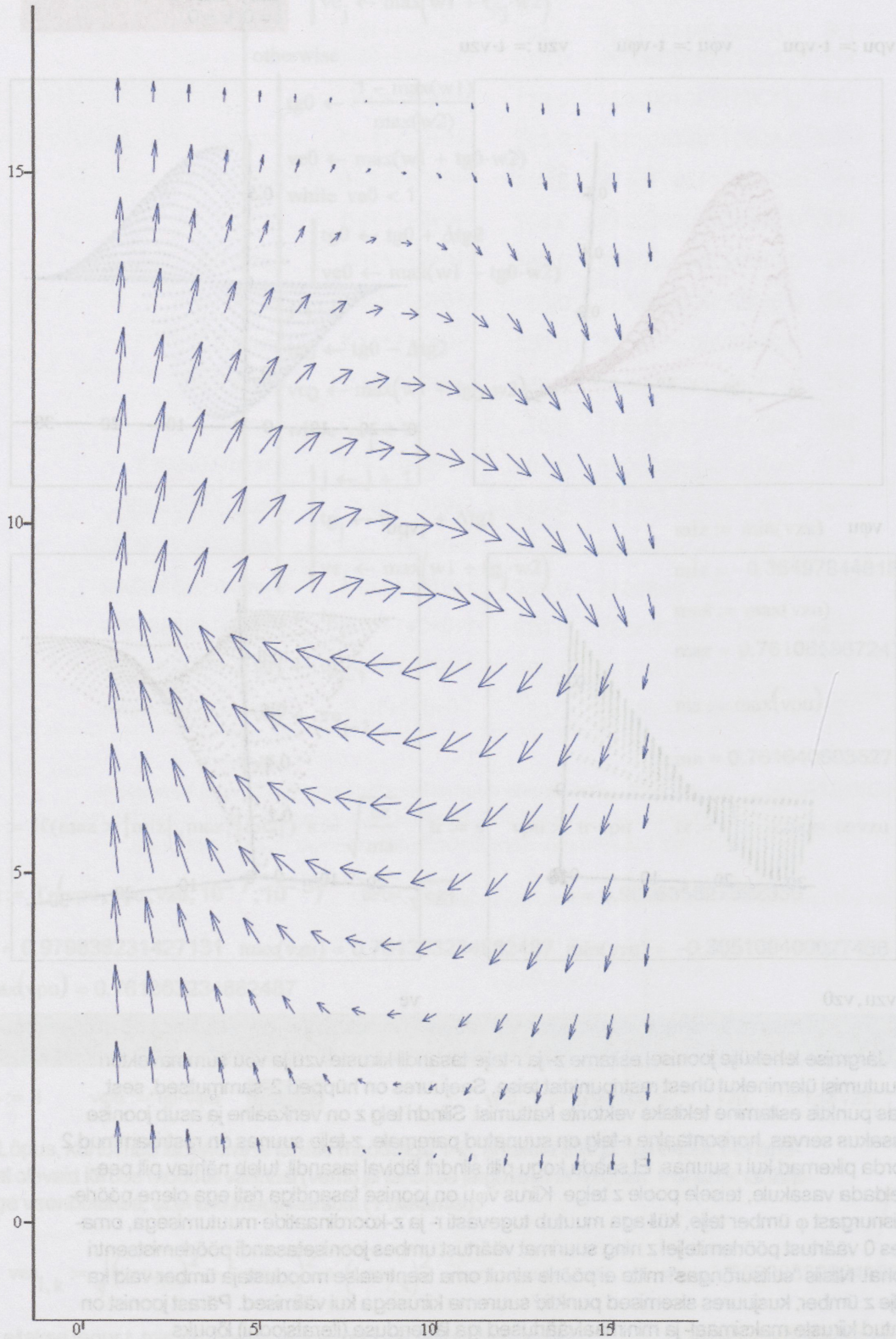
vzu, vz0

ve

Järgmise lehekülje joonisel esitame z- ja r-telje tasandil kiiruste vzu ja vpu summa vektori muutumisi üleminekul ühest rastripunktist teise. Seejuures on hüpped 2-sammulised, sest igas punktis esitamine tekitab vektorite kattumisi. Silindri telg z on verikaalne ja asub joonise vasakus servas, horisontaalne r-telg on suunatud paremale. z-telje suunas on rastrisammud 2 korda pikemad kui r suunas. Et saada kogu pilt silindrit läbival tasandil, tuleb nähtav pilt peegeldada vasakule, teisele poole z telge. Kiirus vpu on joonise tasandiga risti ega olene pöörlemisnurkast φ ümber telje, küll aga muutub tugevasti r- ja z-koordinaatide muutumisega, omades 0 väärtust pöörlemisel z ning suurimat väärtust umbes joonisetasandi pöörlemisentraal kohal. Niisiis "suitsurõngas" mitte ei pöörle ainult oma tsentraalse moodustaja ümber vaid ka telje z ümber, kusjuures sisemised punktid suurema kiirusega kui välimised. Pärast joonist on antud kiiruste maksimaal- ja minimaalväärtused iga lähenduse (iteratsiooni) lõpuks

(30, 10)

$p := 1..16$ $t := 1..16$ $Gr_{p,t} := vpu_{p-2,t-2}$ $Gz_{p,t} := vzu_{p-2,t-2}$



(Gr, Gz)

	max(vpu)	min(vpu)	max(vφu)	min(vφu)
363:	0.249999859558525	-0.249999859558525	0.25	0
130	0.249999940682119	-0.249999940682119	0.25	0
131	0.249999516071572	-0.249999516071572	0.25	0
132	0.249998941366397	-0.249998941366397	0.25	0
133	0.250001737386913	-0.250001737386913	0.25	0
134	0.250001524784135	-0.250001524784135	0.25	0
135	0.250000070673883	-0.250000070673883	0.25	0
136	0.249999477185331	-0.249999477185331	0.25	0
137	0.250000012538855	-0.250000012538855	0.25	0
138	0.249999487016062	-0.249999487016062	0.25	0
139	0.37904634851674	-0.37904634851674	0.379315586032412	0
140	0.379047025259433	-0.379047025259433	0.379315586032412	0
141	0.605000000000001	-0.605000000000001	0.605594282336087	0
142	0.605000032240751	-0.605000032240751	0.605594282336087	0
143	0.717156806296455	-0.717156806296455	0.717156806296455	0
144	0.739112314539266	-0.739112314539266	0.739112314539266	0
145	0.75360370586952	-0.75360370586952	0.75360370586952	0
146	0.754688354118515	-0.754688354118515	0.754734111428331	0
147	0.705299932240349	-0.705299932240349	0.705285994476686	0
148	0.751362882726355	-0.751362882726355	0.750523673613804	0
149	0.751021920178895	-0.751021920178895	0.751286441807226	0
150	0.756756663998017	-0.756756663998017	0.756851909443127	0
151	0.754766255804644	-0.754766255804644	0.754766255804644	0
152	0.761640603527177	-0.761640602765537	0.76164523291092	0
153	0.755077427811741	-0.755077427811741	0.755367731083012	0

Ülesviidav uus t_{pz} väärtus esimesel juhul kui veel säilitati kiiruste amplituude.

$$\frac{\max(v_p)}{\max(v_{pu})} = 0.999476174653379 \quad t_{pz} := 1.00002118240443$$

max(vzu)	min(vzu)	t _{pz} , lõpus t selle asemele kui läheneti 1-le.
0.249999859558525	-0.132882858731929	0.87508
0.249999940682119	-0.11932069799442	0.98213
0.249999516071572	-0.120142098127069	1.00111
0.249998941366397	-0.119817870015354	0.99956
0.250001737386913	-0.120476900325909	1.0009

0.250001524784135	-0.120907308200248	1.00058	
0.250000070673883	-0.117284897546655	0.9951	
0.249999477185331	-0.11778604153029	1.00068	
0.250000012538855	-0.112814464117161	0.99322	
0.249999487016062	-0.118548935828825	1.00787	seni kiiruse amp = 0.25
0.37904634851674	-0.180527767378414	1.51726234412965	kiiruse amp 0.5-ni
0.379047025259433	-0.179787698819524	1	sama
0.605000000000001	-0.287448692963092	1.59654468373029	kiiruse amp 0.8-ni
0.605000032240751	-0.288769925863388	1.00074	sama
0.717156806296455	-0.34290256854222	1.185718463389	kiiruse amp 0.95-ni
0.739112314539266	-0.353654621548978	1.03073455134	kiiruse amp 0.98-ni
0.75360370586952	-0.360650759038579	1.01963494702135	kiiruse amp 0.9998-ni
0.754688354118515	-0.36121711080401	1.00146049489188	kiiruse amp 0.999998-ni
0.705285994476686	-0.337410627957186	t = 0.934482732126597	kiiruse amp 0.9999999-ni
0.751362882726355	-0.357010655634265	t = 1.06414090098398	kiiruse amp 0.999999985
0.751021920178895	-0.357373490788444	t = 1.00101631463502	kiiruse amp 0.999999982
0.756756663998017	-0.36235304209652	t = 1.00740791603488	kiiruse amp 0.999999984
0.754766255804645	-0.361030741537191	t = 0.99720483071786	kiiruse amp 0.999999985
0.761640602765537	-0.364421809902572	t = 1.00915399450342	kiiruse amp 0.999999986
0.755077427811741	-0.362126523331937	t = 0.991757971353781	kiiruse amp 0.999999986

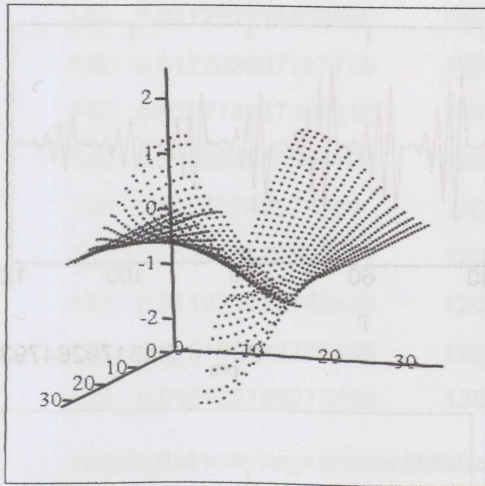
Edasi tuleb lahendada τ võrrand. Esmalt leiame erilahendi τ logaritmile ($L_{\tau e}$) nii nagu eelmiste võrrandite puhulgi. Sissejuhatuses tuletatud võrrand on:

$$v_{pu} \frac{d}{dr} \ln(\tau) + v_{zu} \frac{d}{dz} \ln(\tau) + v_{\tau} = 0 \quad v_{\tau} = \frac{d}{dr} v_{pu} + \frac{d}{dz} v_{zu} + \frac{v_{pu}}{r} \quad L_{\tau e} = V_s(r, z, C)$$

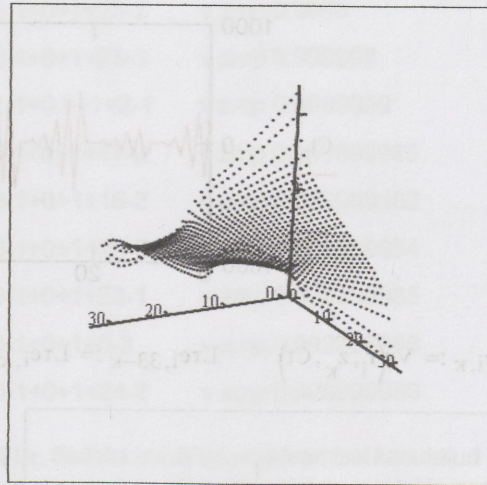
$$v_{pur_{i,ka}} := 10 \text{ on error } 10^{-4} \cdot \text{srf}(\rho_{1i}, \zeta_{1ka}, v_{pu}) \quad v_{pur_{i,33-ka}} := -v_{pur_{i,ka}}$$

$$v_{zuz_{i,ka}} := 0 \text{ on error } 10^{-4} \cdot \text{srf}(\rho_{1i}, \zeta_{1ka}, v_{zu}) \quad v_{zuz_{i,33-ka}} := -v_{zuz_{i,ka}} \quad v_{pj_{i1,k}} := \frac{v_{pu_{i1,k}}}{r_{i1}}$$

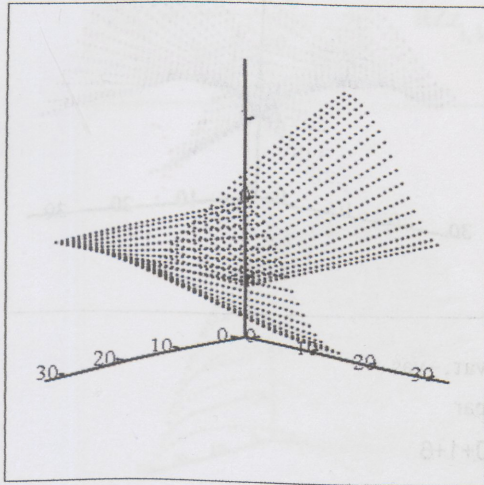
$$v_{pj} := \text{Ex}(v_{pj}) \quad v_{\tau_{i,k}} := v_{pur_{i,k}} + v_{zuz_{i,k}} + v_{pj_{i,k}} \quad \text{Kõik 3 liiget on assümmeetrilised.}$$



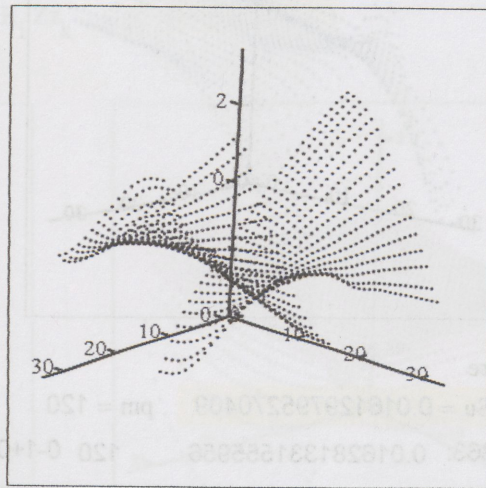
vpu



vzu



vpu



vzu

$$v_p \cdot V_{sr} + v_z \cdot V_{sz} = -var$$

Leiame rea parametrid Tr ja Tz.

$$Trk := TR(-var, 0.04, r1)_4$$

$$Trk = 2.2652596129625$$

$$Tzk := TZ(-var, 0.04, z1)_4$$

$$jm := 10 \quad tm := jm$$

$$pm := jm + (jm + 1) \cdot tm \quad p := 0..pm$$

$$Tzk = 3.65621147248964$$

$$ko := \frac{10^2}{34.17}$$

$$P := Tbd(Trk, Tzk, vpu, vzu, \ddot{A}, \ddot{A}_r, \ddot{A}_z, ko, jm, tm, -var, -1) \quad S := P_0 \quad rp := P_1$$

$$zp := P_2 \quad rp = 0$$

$$zp = -1$$

$$S = 0.020415867305822$$

$$Tr := (Trk + rp) \cdot r1 + 24 \cdot \Delta r$$

$$b := P_3$$

$$b = 0$$

$$Trp$$

$$Tzp$$

$$\text{h\u00e4lvetesumma}$$

$$Tz := (Tzk + zp) \cdot z1 - 2 \cdot \Delta z$$

$$d := P_4$$

$$d = 1$$

$$24$$

$$-2$$

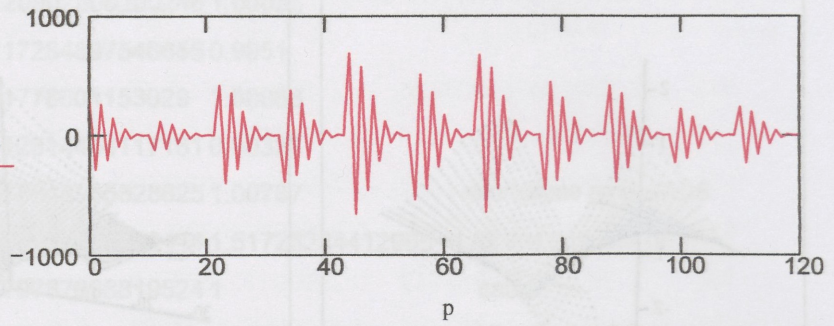
$$0.016129795270409$$

$$WP := W(Tr, Tz, b, d, vpu, vzu, \ddot{A}, \ddot{A}_r, \ddot{A}_z, ko, jm, tm, -var, -1)$$

$$Ct := WP_0 \text{ vas} := WP_1$$

$$Su := WP_2$$

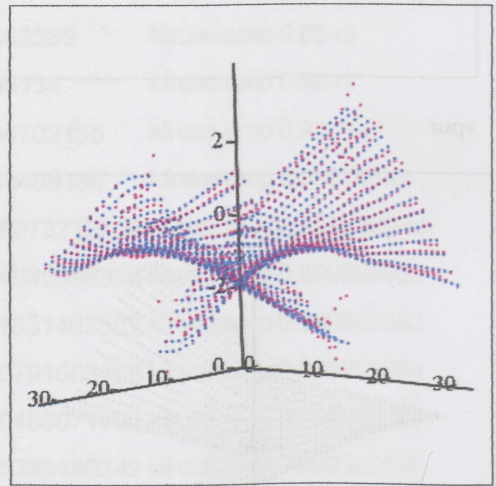
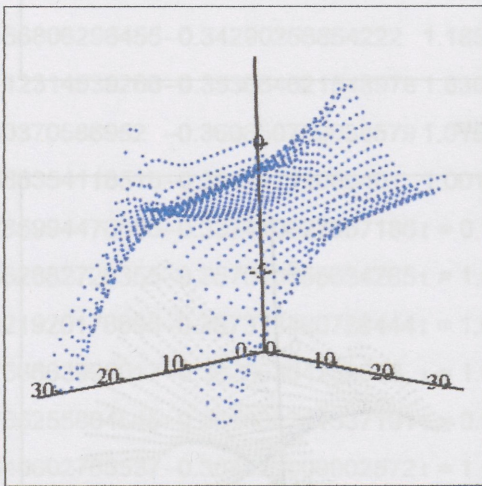
$$Vs(r, z, C) := \sum_{j=0}^{jm} \sum_{t=0}^{tm} C_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot iF(j, t) \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot (j + b) \cdot \frac{r}{Tr}\right] \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot (t + d) \cdot \frac{z}{Tz}\right] \quad \kappa := 0..16$$



$$Lte_{i,k} := Vs(r_i, z_k, Ct)$$

$$Lte_{i,33-k} := Lte_{i,k}$$

$$Ct_{pm} = 0.431792647938089$$



Lte

var, -vas

Su = 0.016129795270409

pm = 120

Tpar

363:	0.016281331555956	120	0-1+0.5+0+1+6	
130:	0.011418228616865	120	1-1+0+1+15-3	
131:	0.017447242797369	120	0-1+0+1+25-2	
132:	$9.6111582928394 \times 10^{-3}$	120	0-1+0+1+24-1	
133:	$8.97040336323715 \times 10^{-3}$	20	0-1+0+1+22-2	
134:	0.010499999796278	120	0-1+0+1+23-1	
135:	$9.56579169510586 \times 10^{-3}$	20	0-1+0+1+23-1	
136:	$9.17178467049944 \times 10^{-3}$	20	0-1+0+1+22-2	
137:	0.01085635290453	120	0-1+0+1+16-2	
138:	0.010699779373872	120	0-1+0+1+23-2	v amp 0.25
139:	0.011598909032045	120	0-1+0+1+24-1	v amp 0.5
140:	0.010076196540548	120	0-1+0+1+22-1	sama
141:	0.010954152350192	120	0-1+0+1+23-1	v amp 0.8
142:	0.011201702711877	120	0-1+0+1+23-1	sama
143:	0.011201702711877	120	0-1+0+1+24-1	v amp 0.95
144:	0.011294812247036	120	0-1+0+1+23-2	v amp 0.98

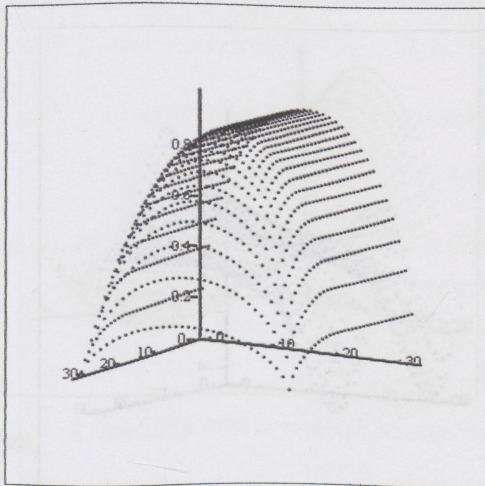
145:	0.011291224409405	120	0-1+0+1+23-2	v amp 0.9998
146:	0.012263007727725	120	0-1+0+1+23-3	v amp 0.999998
147:	0.029714147954012	120	1-1+0.5+1+2-1	v amp 0.9999999
148:	0.010664066554109	120	0-1+0+1+17-2	v amp 0.999999985
149:	0.01058749573399	120	0-1+0+1+16-2	v amp 0.999999982
150:	0.013765480591649	120	0-1+0+1+23-3	v amp 0.999999984
151:	0.011271232743478	120	0-1+0+1+23-1	v amp 0.999999985
152:	0.010158143278835	120	0-1+0+1+0-3	v amp 0.999999986
153:	0.016129795270409	120	0-1+0+1+24-2	v amp 0.999999986

Analoogselt varemaga leiaime üldlahendi L_τ . Selleks sobib vzu määramisel kasutatud ääritingimusi esitav kordaja RZ. Seal on ka leitud osatuletis r järgi RZr. Tuleb veel leida osatuletis RZz:

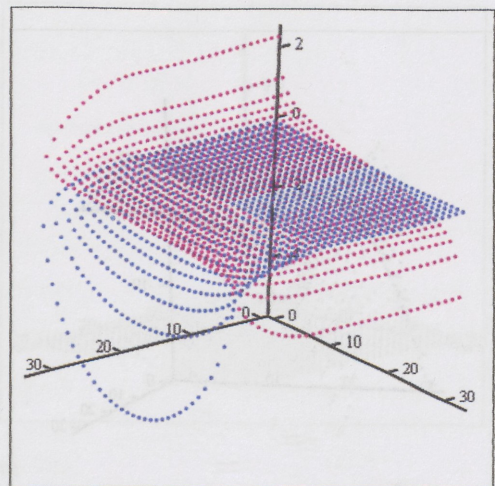
$$ZZ_k := \frac{-z_k}{z_1 \cdot \sqrt{z_1^2 - (z_k)^2}}$$

$$RZZ_{i,k} := R_i \cdot ZZ_k$$

$$L_\tau = RZ \cdot Vs(t, z, C)$$



RZ



RZr, RZz

$$ko := \frac{10^2}{34.17} \quad P := \text{Tbd}(\text{Trk}, \text{Tzk}, \text{vpu}, \text{vzu}, \text{RZ}, \text{RZr}, \text{RZz}, ko, \text{jm}, \text{tm}, -\text{var}, -1) \quad S := P_0 \quad rp := P_1$$

$$zp := P_2 \quad rp = 0 \quad zp = -1 \quad S = 0.038977267583203$$

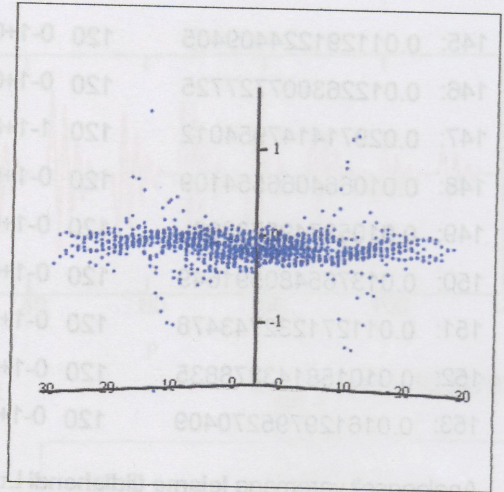
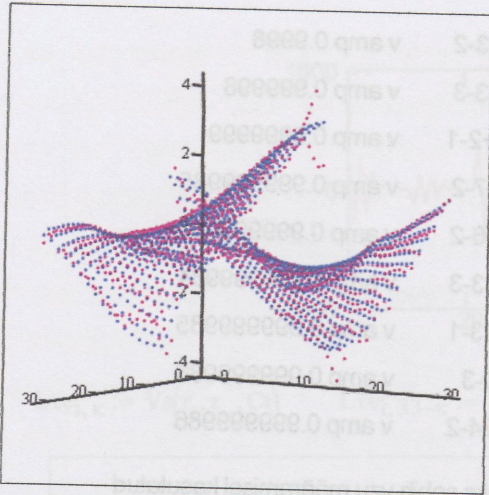
$$\text{Tr} := (\text{Trk} + rp) \cdot r_1 + 18 \cdot \Delta r \quad b := P_3 \quad b = 0 \quad \text{Trp} \quad \text{Tzp} \quad \text{h\u00e4lvetesumma}$$

$$\text{Tz} := (\text{Tzk} + zp) \cdot z_1 - 5 \cdot \Delta z \quad d := P_4 \quad d = 0 \quad 18 \quad -5 \quad 0.01859551198205$$

$$\text{WP} := \text{W}(\text{Tr}, \text{Tz}, b, d, \text{vpu}, \text{vzu}, \text{RZ}, \text{RZr}, \text{VRz}, ko, \text{jm}, \text{tm}, -\text{var}, -1) \quad \text{Ch} := \text{WP}_0 \quad \text{vas} := \text{WP}_1$$

$$\text{Su} := \text{WP}_2 \quad \text{Su} = 0.021574013402397$$

$$Vs(r, z, C) := \sum_{j=0}^{\text{jm}} \sum_{t=0}^{\text{tm}} C_{j+(jm+1) \cdot t} \cdot iF(j, t) \cdot \cos \left[2 \cdot \pi \cdot (j + b) \cdot \frac{r}{\text{Tr}} \right] \cdot \cos \left[2 \cdot \pi \cdot (t + d) \cdot \frac{z}{\text{Tz}} \right]$$

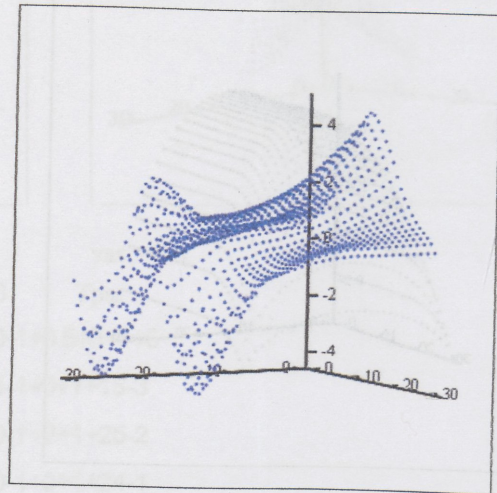
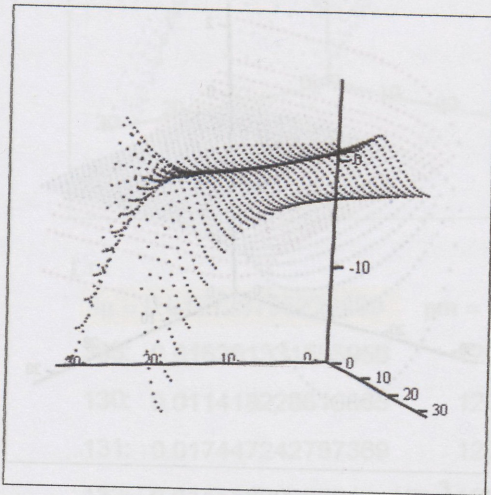


-var, vas

vas + var

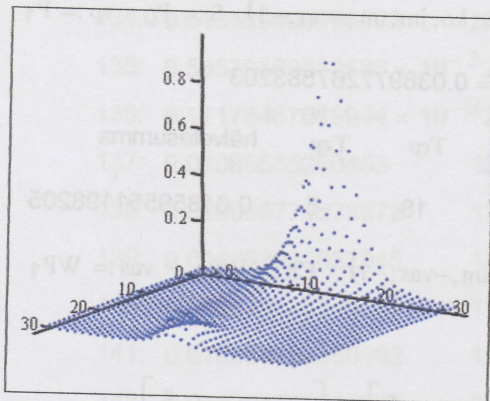
Lahendiks on: $\kappa := 0..16$ $vs_{i,\kappa} := Vs(r_i, z_\kappa, Ch)$ $vs_{i,33-\kappa} := vs_{i,\kappa}$ $vs := Smrv(vs, 0.75, 0.75)$

$L\tau_{i,k} := RZ_{i,k} \cdot vs_{i,k}$ $C1 := -\max(L\tau)$ $\tau_{i,k} := e^{L\tau_{i,k} + C1}$ $\tau := S\ddot{u}(\tau)$



vs

L τ



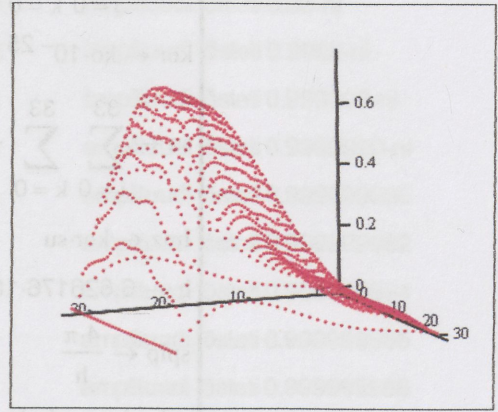
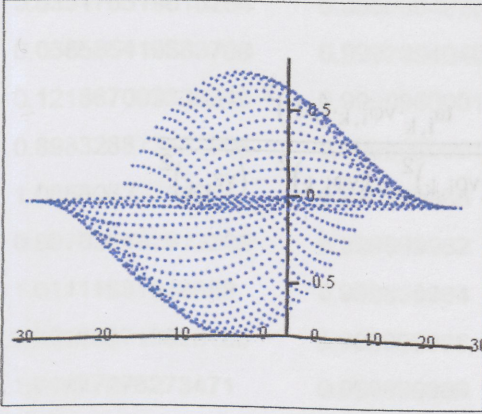
τ

- | | | |
|------|-------------------|----------------|
| 135: | 0.014501976703152 | 0-1+0+0+16-3 |
| 136: | 0.014095537024281 | 0-1+0+0+15-4 |
| 137: | 0.013863474341572 | 0-1+0+0+9-4 |
| 138: | 0.014239945372209 | 0-1+0+0+16-5 |
| 139: | 0.015293874411306 | 0-1+0+0+20-5 |
| 140: | 0.013281601146308 | 0-1+0+0+19-5 |
| 141: | 0.014255422156327 | 0-1+0+0+20-5 |
| 142: | 0.014255422156327 | 0-1+0+0+20-5 |
| 143: | 0.014889658423856 | 0-1+0+0+19-5 |
| 144: | 0.014889658423856 | 0-1+0+0+19-5 |
| 145: | 0.014278596533226 | 0-1+0+0+18-5 |
| 146: | 0.015646878933348 | 0-1+0+0+17-5 |
| 147: | 0.030619221290073 | 0-1+0+0.5+25-4 |
| 148: | 0.012911239621959 | 0-1+0+0+11-5 |
| 149: | 0.012777684587749 | 0-1+0+0+12-5 |

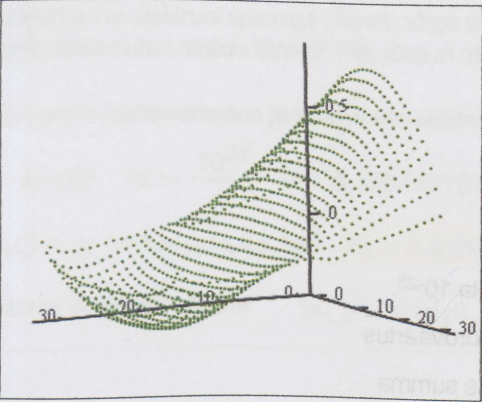
150: 0.017073003816589 0-1+0+0+18-6
 151: 0.014494679389473 0-1+0+0+21-5
 152: 0.012113744312378 0-1+0+0+10-5
 153: 0.01859551198205 0-1+0+0+18-5

$$\tau_m := \max(\tau) \quad ta := \frac{\tau}{\tau_m}$$

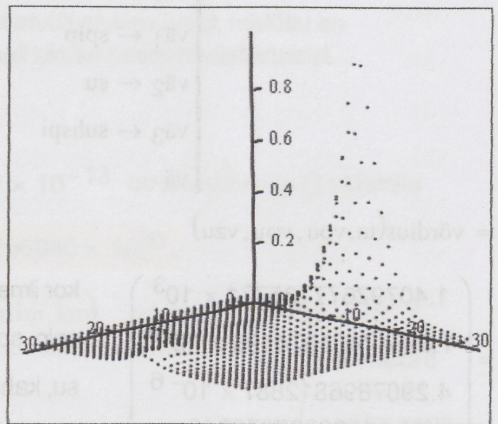
$$ta_{i,k} := \text{if}(ta_{i,k} < 0, 0, ta_{i,k}) \quad ta := \text{Sü}(ta) \quad \max(ta) = 1 \quad \min(ta) = 1.01833 \times 10^{-4}$$



vpu



vφu

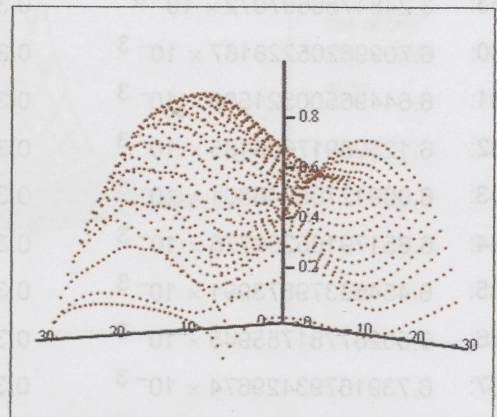
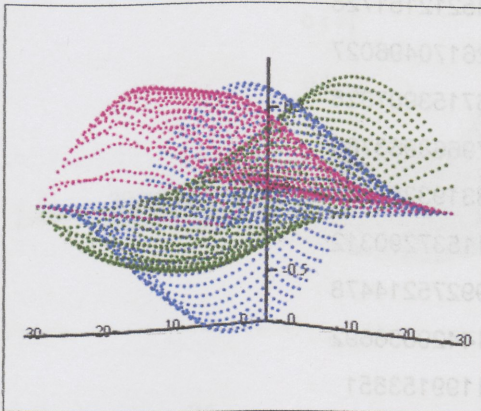


vzu

$$vm_{i,k} := \sqrt{(vpu_{i,k})^2 + (v\phi u_{i,k})^2 + (vzu_{i,k})^2}$$

ta

$$\max(vm) = 0.999999986$$



vpu, vφu, vzu

vm

Võrdleme laengutesüsteemi impulsimomenti z telje suhtes elektroni spinniga $\hbar/4\pi$.
Mittmed konstandid muutuvad kui välja mõõtmised muutuvad!

$$\begin{aligned} \text{võrdlus}(ta, v\rho, v\varphi, vz) &:= ko \leftarrow \frac{2.730969971695}{\sum_{i=0}^{33} \sum_{k=0}^{33} ta_{i,k} \cdot \rho 1_i} \\ kor &\leftarrow ko \cdot 10^{-25} \\ su &\leftarrow \sum_{i=0}^{33} \sum_{k=0}^{33} \frac{ta_{i,k} \cdot v\varphi_{i,k} \cdot (\rho 1_i)^2}{\sqrt{1 - (v\rho_{i,k})^2 - (v\varphi_{i,k})^2 - (vz_{i,k})^2}} \\ \text{Imz} &\leftarrow kor \cdot su \\ h &\leftarrow 6.626176 \cdot 10^{-27} \\ \text{spip} &\leftarrow \frac{4 \cdot \pi}{h} \\ \text{suhspi} &\leftarrow \text{spip} \cdot \text{Imz} \\ vä_0 &\leftarrow ko \\ vä_1 &\leftarrow \text{spip} \\ vä_2 &\leftarrow su \\ vä_3 &\leftarrow \text{suhspi} \\ vä & \end{aligned}$$

vä := võrdlus(ta, v\rho, v\varphi, vz)

$$\text{vä} = \begin{pmatrix} 1.40792677735771 \times 10^3 \\ 1.89647401674196 \times 10^{27} \\ 4.2907896812887 \times 10^{-6} \\ 1.14568227279346 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{kor ilma astmeta } 10^{-25}. \\ \text{spip, spinni pöördväärtus} \\ \text{su, kahekordne summa} \\ \text{suhspi juhul, kui tegu on käesoleva lähendi kiiruste ja} \\ \text{jaotusega.} \end{array}$$

	shsp	max(vm)
363:	$3.2484758607072 \times 10^{-3}$	0.323435212151728
130:	$6.70996205228167 \times 10^{-3}$	0.332126170496027
131:	$6.64496500521569 \times 10^{-3}$	0.345167153907328
132:	$6.12508917696185 \times 10^{-3}$	0.330879668963785
133:	$6.00912795846801 \times 10^{-3}$	0.329633193252633
134:	$6.85179105259776 \times 10^{-3}$	0.328011537290312
135:	$6.45463379873991 \times 10^{-3}$	0.329599275214478
136:	$6.50267781755948 \times 10^{-3}$	0.329714420656692
137:	$6.73916793429674 \times 10^{-3}$	0.33051199153851
138:	$6.57431520432341 \times 10^{-3}$	0.33092746265589
139:	0.01068832285851	0.499999999999999 kiiruse amplituudi tõsteti 0.5-ni

140:	0.010901585273807	0.502071698191427	
141:	0.021358512136078	0.800462292744245	amplituudi tõsteti 0.8-ni
142:	0.021620805577933	0.802238785937988	
143:	0.033307467256988	0.950000774577646	amplituudi tõsteti 0.95-ni
144:	0.039176319616254	0.980000497032403	amplituudi tõsteti 0.98-ni
145:	0.058585419683708	0.999799404055076	amplituudi tõsteti 0.9998-ni
146:	0.121867009338349	0.999998000151051	amplituudi tõsteti 0.999998-ni
147:	0.898328873491996	0.999998000151051	amplituudi tõsteti 0.9999999-ni
148:	1.08580623214071	0.999999985	amplituudi tõsteti 0.999999985
149:	0.997636482913298	0.999999982	amplituudi tõsteti 0.999999982
150:	1.01111881916688	0.999999984	amplituudi tõsteti 0.999999984
151:	0.981058713828185	0.999999985	amplituudi tõsteti 0.999999985
152:	1.01477276273471	0.999999986	amplituudi tõsteti 0.999999986
153:	1.13673640528375	0.999999986	amplituudi tõsteti 0.999999986

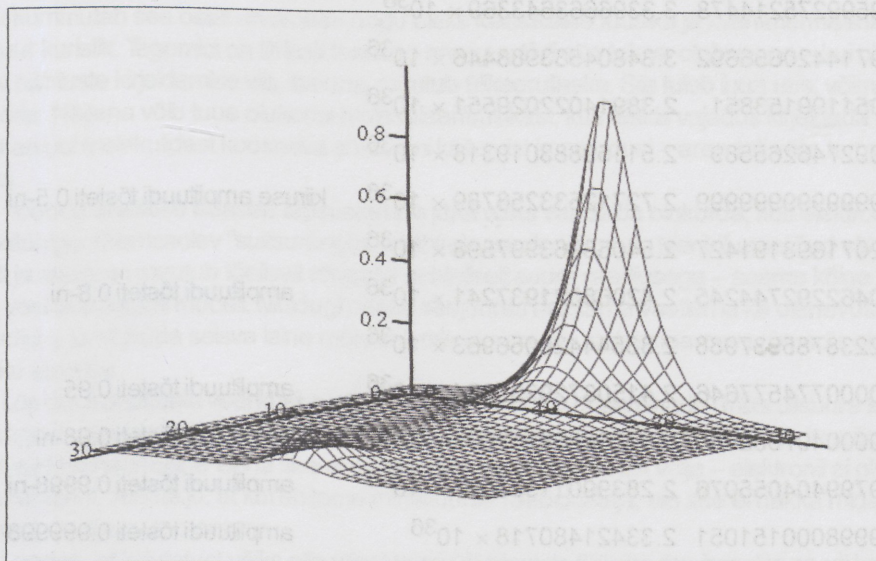
Arvutatud suhe elektroni spinniga oleneb väga paljudest arvutustulemustest, mistõttu on väga raske seda suhet sättida täpselt 1-le. See ei olene ainult kiiruse maksimaalväärust.

Viimasena τ normeerimine ja tulemuste väljaviimine.

$$I_{\tau} := \int n_{\tau}(ta) \quad A_{\tau} := \frac{10^{24}}{I_{\tau}} \quad I_{\tau} = 5.33874276797611 \times 10^{-13} \text{ on siis nüüd } \tau(\rho, \zeta) \text{ valemiks}$$

$$\tau(\rho, \zeta) = A_{\tau} \cdot G_{\text{fu}}(\rho, \zeta, ta, im, km) \quad A_{\tau} = 1.87310017256946 \times 10^{36}$$

$$\text{Arvutame ilma üldkordajata} \quad \tau_{i,k} := G_{\text{fu}}(\rho_{1i}, \zeta_{1k}, ta, im, km) \quad \min(\tau_u) = 8.1723 \times 10^{-5}$$



Mõnikord tekib siin väike negatiivsus.

τ_u ei lähe edasi, seepärast ei ole sellel suurt tähtsust.

$$\tau_u \quad A_{\tau} \cdot \int n_{\tau}(\tau_u) = 1 \times 10^{24}$$

Kontrollime "ta" ja kiiruste sümmeetriaid. Arv suurusjärguga 10^{-15} .. 10^{-14} näitab kehtivust.

$$\sum_{i=0}^{33} \left| \sum_{k=0}^{16} ta_{i,k} - \sum_{k=17}^{33} ta_{i,k} \right| = 3.33066907387547 \times 10^{-15}$$

$$\sum_{i=0}^{33} \left| \sum_{k=0}^{16} v\varphi u_{i,k} + \sum_{k=17}^{33} v\varphi u_{i,k} \right| = 2.02060590481778 \times 10^{-14}$$

$$\sum_{i=0}^{33} \left| \sum_{k=0}^{16} v\varphi u_{i,k} - \sum_{k=17}^{33} v\varphi u_{i,k} \right| = 2.15383808878367 \times 10^{-14}$$

$$\sum_{i=0}^{33} \left| \sum_{k=0}^{16} vzu_{i,k} - \sum_{k=17}^{33} vzu_{i,k} \right| = 1.87627691161651 \times 10^{-14}$$




$$vmt_{i,k} := \sqrt{(v\varphi u_{i,k})^2 + (v\varphi u_{i,k})^2 + (vzu_{i,k})^2} \quad \max(vmt) = 0.999999986$$


Seejärel läheme uuele programmi 209 "läbijooksule" salvestades tulemused (v φ u, v φ u, vzu, ta) failidesse **vru130**, **vju130**, **vzu130**, **tu130**, ja kandes **Ar** väärtuse programmi algusesse käsitsi.

130:	0.323435212151728	3.41652101288717 × 10 ³⁶	
131:	0.332126170496027	1.15889952878476 × 10 ³⁶	
132:	0.345167153907328	8.73635864761227 × 10 ³⁵	
133:	0.330879668963785	1.27607856878761 × 10 ³⁶	
134:	0.329633193252633	1.28050511178688 × 10 ³⁶	
135:	0.328011537290312	3.07942179120127 × 10 ³⁶	
136:	0.329599275214478	3.3396663643369 × 10 ³⁶	
137:	0.329714420656692	3.34804533988446 × 10 ³⁶	
138:	0.33051199153851	2.38914022029551 × 10 ³⁶	
139:	0.33092746265589	2.51159883019318 × 10 ³⁶	
140:	0.499999999999999	2.72712533256789 × 10 ³⁶	kiiruse amplituudi tõsteti 0.5-ni
141:	0.502071698191427	2.54058963997598 × 10 ³⁶	
142:	0.800462292744245	2.42068021937241 × 10 ³⁶	amplituudi tõsteti 0.8-ni
143:	0.802238785937988	2.33544420056963 × 10 ³⁶	
144:	0.950000774577646	2.41503729230334 × 10 ³⁶	amplituudi tõsteti 0.95
145:	0.980000497032403	2.33055868212575 × 10 ³⁶	amplituudi tõsteti 0.98-ni
146:	0.999799404055076	2.28399011353057 × 10 ³⁶	amplituudi tõsteti 0.9998-ni
147:	0.99998000151051	2.33421480718 × 10 ³⁶	amplituudi tõsteti 0.999998
148:	0.9999999	1.55354809512357 × 10 ³⁶	amp tõsteti 0.9999999-ni
149:	0.999999985	2.17034078848699 × 10 ³⁶	amp tõsteti 0.999999985
150:	0.999999982	2.19301106147741 × 10 ³⁶	amp 0.999999982-ni
151:	0.999999984	2.09931389410531 × 10 ³⁶	amp 0.999999984-ni

152:	0.999999985	$2.26853035215188 \times 10^{36}$	amp 0.999999985-ni
153:	0.999999986	$2.183318170085 \times 10^{36}$	amp 0.999999986-ni
154:	0.999999986	$1.87310017256946 \times 10^{36}$	amp 0.999999986-ni

Pärast kiiruste ja "ta" salvestamist failidesse peab kontrolliks need välja lugema. Kui kõik allpool tehtud arvutuste tulemuseks on 0, toimus väljastus korrektselt. Pärast seda kustutame väljastusoperaatorid, et juhuslikul kordamistel väljastatud failid ei saaks rikutud. Unustada ei tohi ka A_T käsitsi sisendisse viimist.

vpp :=  C:\..\vru154 vφp :=  C:\..\vju154 vzp :=  C:\..\vzu154

tap :=  C:\..\tu154

$$\sum_{i=0}^{33} \sum_{k=0}^{17} (vpp_{i,k} - vpu_{i,k})^2 = 0$$

$$\sum_{i=0}^{33} \sum_{k=0}^{17} (v\phi p_{i,k} - v\phi u_{i,k})^2 = 0$$

$$\sum_{i=0}^{33} \sum_{k=0}^{17} (vzp_{i,k} - vzu_{i,k})^2 = 0$$

$$\sum_{i=0}^{33} \sum_{k=0}^{17} (tap_{i,k} - ta_{i,k})^2 = 0$$

Lõpetuseks

Esitatud arvutus ei ole mingi panus osakeste füüsikasse, kvantmehhaanikast rääkimata. Ehk kummutab see osalt arvamuse nagu oleks klassikalise füüsika ja kvantmehhaanika vahel ülisuur kuristik. Tegemist on lihtsalt teaduse arengus tihti ette tuleva olukorraga – kui olemasolev nähtuste kirjeldamise viis, teooria, muutub ülikeeruliseks. Siis tuleb luua uus, võimekam teooria. Näitena võib tuua olukorra molekulaarfüüsikast, kus tekkis vajadus kirjeldada ülisuurest arvust molekulidest koosneva süsteemi käitumist ja omadusi – arendati välja termodünaamika.

Toodud arvutuse edasise täpsustamise järel võiks vaadelda olukorda, kus elektron kohtub prootoniga. Olemasolev "suitsurõngas" mähkub prootoni ümber, tsentrifugaaljõud väheneb oluliselt ja süsteem muutub tõeliselt rõngaks suhteliselt suure raadiusega – saame kõige lihtsama vesiniku aatomi mudeli. Muidugi peaks seejuures hakkama vaatlema ka olenevusi koordinaadist ϕ ja nii jõuda seisva laine mõisteni, mis eksisteerib statsionaarses seisundis oleva vesiniku aatomis.

Lõpuks puudutaks veel küsimust, mis tekkis 15.11.2022 seminaril – miks ülisuure kiirusega liikuv elektrilaeng ei kaota energiat käsitletud liikumisel. Eks see energia äravija on samuti elektromagnetiline väli ja see ei pääse lihtsalt elektroni seest välja – elektronil ei ole vajalikku antenni. Teame ju, et kui ehitame miniatuurse raadiosaatja, siis see ei hakka midagi kiirgama kui sel puudub antenn.

Loodan, et kirjutatust võiks olla mingi kasu ülõpilastele füüsika õppimisel ja arvuti kasutamisel

Ülo Uder, 15.06.2023, ylo.uder@mail.ee, 5652030.