

TARTU ÜLIKOOL  
Matemaatika-informaatika teaduskond  
Rakendusmatemaatika instituut  
Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite õppetool

Marek Kolk

**Modifitseeritud spline-kollokatsioonimeetod  
teist liiki Volterra integraalvõrrandi  
lahendamiseks**

Magistritöö

Juhendaja: prof. Arvet Pedas

TARTU 2004

# Sisukord

<b>1</b>	<b>Põhimõisted ja abitulemused</b>	<b>5</b>
1.1	Mõisteid ja abitulemusi funktsionaalanalüüsist . . . . .	5
1.2	Polünoomiaalsete splainide ruum . . . . .	6
1.3	Kvadratuurvalemid . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Splain-kollokatsioonimeetod</b>	<b>11</b>
2.1	Ruum $C^{m,\alpha}$ . . . . .	11
2.2	Volterra integraalvõrrand . . . . .	13
2.3	Kollokatsioonimeetodi jaoks kasutatav võrk . . . . .	13
2.4	Kollokatsioonimeetodi kirjeldus . . . . .	14
2.5	Kollokatsioonimeetodi koondumine . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Modifitseeritud kollokatsioonimeetod</b>	<b>19</b>
3.1	Meetodi kirjeldus . . . . .	19
3.2	Operaator $\mathcal{P}_N$ . . . . .	20
3.3	Üleminek operaatorvõrranditele . . . . .	24
3.4	Modifitseeritud kollokatsioonimeetodi koondumine . . . . .	26
3.5	Kollokatsioonimeetodi superkoondumine . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Arvulised tulemused</b>	<b>33</b>
4.1	Gammafunktsioon ja hüpergeomeetriline funktsioon . . . . .	33
4.2	Integraalide teisendus . . . . .	34
4.3	Testülesanne . . . . .	35
4.4	Arvuliste tulemuste analüüs . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Lisad</b>	<b>49</b>
5.1	Programmikood . . . . .	49
5.2	Programmikoodi selgitus . . . . .	56

# Sissejuhatus

Käesolevas töös vaatleme nõrgalt singulaarse tuumaga Volterra integraalvõrrandit

$$u(x) = f(x) + \int_0^x (x-y)^{-\alpha} K(x,y) u(y) dy, \quad x \in [0, b], \quad (0.1)$$

kus  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < b < \infty$ . Funktsioonid  $K$  ja  $f$  on antud ja  $u$  on otsitav.

Olgu

$$\Delta_b = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq b\}.$$

Eeldame, et  $K \in C^m(\Delta_b)$  ja  $f \in C[0, b] \cap C^m(0, b)$  ( $m \in \mathbb{N}$ ). Sellisel juhul on võrrand (0.1) üheselt lahenduv ja tema lahend  $u \in C[0, b] \cap C^m(0, b)$  (vt. punkt 2.5).

Tehes võrrandis (0.1) muutujavahetused

$$x = b^{1-\rho} t^\rho, \quad y = b^{1-\rho} s^\rho, \quad t, s \in [0, b], \rho \in \mathbb{N}$$

saame üle minna võrrandile

$$u_\rho(t) = f_\rho(t) + \int_0^t K_\rho(t, s) u_\rho(s) ds, \quad t \in [0, b], \quad (0.2)$$

kus  $f_\rho$  ja  $K_\rho$  on antud valemitega (3.3). Seostest (3.3) järeldub, et võrrandi (0.2) lahend  $u_\rho$  on üldiselt  $\rho \geq 2$  korral siledam kui lähtevõrrandi (0.1) lahend  $u$ .

Võrrandi (0.2) lähilahendit  $u_{\rho, N}$  ( $N \in \mathbb{N}$ ) otsime polünoomiaalsete splineide ruumist  $S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N^{(r, b)})$ , kus  $\Pi_N^{(r, b)}$  tähistab punktis 2.3 toodud võrku. Võrrandi (0.2) lähilahendi  $u_{\rho, N}$  leidmiseks kasutame peatükis 2 toodud spline-kollokatsioonimeetodit. Saadud  $u_{\rho, N}$  abil defineerime lähtevõrrandi (0.1) lähilahendi

$$\tilde{u}_{\rho, N}(x) = u_{\rho, N}(b^{\rho-1} x^{\frac{1}{\rho}}), \quad x \in [0, b], \quad \rho, m \in \mathbb{N}. \quad (0.3)$$

Magistritöö põhitulemused on toodud teoreemides 3.1 ja 3.2. Neist esimeses on saadud tulemused lähilahendi  $\tilde{u}_{\rho, N}$  koondumise kohta võrrandi (0.1) täpseks lahendiks  $u$  ja hinnatud viga

$$\sup_{x \in [0, b]} |u(x) - \tilde{u}_{\rho, N}(x)|.$$

Teoreemis 3.2 on uuritud lokaalset koondumist. Saadud koondumishinnangud näitavad, et antud töös kirjeldatud modifitseeritud spline-kollokatsioonimeetod lubab

võrrandi (0.1) lahendamiseks kasutada tunduvalt vähem ebahühtlast võrku kui peatükis 2 toodud klassikaline spline-kollokatsioonimeetod. See on oluline praktilistes arvutustes. Lisaks on uuritud arvulisi tulemusi teoreemide 3.1 ja 3.2 teoreetiliste hinnangute kontrollimiseks.

Magistritöö koosneb neljast peatükist. Esimene peatükk sisaldab abitulemusi. Teises peatükis on defineeritud ruum  $C^{m,\alpha}[0,b]$ ,  $0 < \alpha < 1$ , kirjeldatud spline-kollokatsioonimeetodit ja toodud ära meetodi koondumisteoreem. Kolmandas peatükis on kirjeldatud modifitseeritud spline-kollokatsioonimeetodit ja toodud ära kaks põhiteoreemi modifitseeritud meetodi globaalse ja lokaalse koondumise kohta. Neljandas peatükis on toodud teoreemide 3.1 ja 3.2 teoreetiliste hinnangute kontrollimiseks kirjutatud programmi poolt saadud arvuliste tulemuste analüüs testülesande korral ja lisatud juurde arvulised tabelid. Lisaks on kirjeldatud süsteemis (3.4) olevate integraalide arvutamist hüpergeomeetrilise funktsiooni abil. Programmikood ja programmikoodi selgitus on toodud lisades.

# 1 Põhimõisted ja abitulemused

Selles paragrahvis toome sisse mõningad põhimõisted ja esitame lühidalt väited, mida edaspidi kasutame.

## 1.1 Mõisteid ja abitulemusi funktsionaalanalüüsist

Kirjutisega  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  tähistame naturaalarvude hulka ja kirjutisega  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$  reaalarvude hulka.

Olgu  $X$  ja  $Y$  Banachi ruumid. Sümboliga  $\mathcal{L}(X, Y)$  tähistame pidevate lineaarsete operaatorite hulka ruumist  $X$  ruumi  $Y$ . Hulk  $\mathcal{L}(X, Y)$  on Banachi ruum normi

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|Ax\| \quad (A \in \mathcal{L}(X, Y))$$

suhtes.

Kirjutisega  $C[a, b]$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) tähistame kõigi lõigul  $[a, b]$  pidevate funktsioonide hulka. Hulk  $C[a, b]$  on Banachi ruum normiga

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|, \quad x \in C[a, b].$$

Kirjutisega  $C^m[a, b]$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) tähistame kõigi lõigul  $[a, b]$   $m$  korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulka. Hulk  $C^m[a, b]$  on Banachi ruum normiga

$$\|x\| = \sum_{k=0}^m \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t)|, \quad x \in C^m[a, b].$$

Kirjutisega  $L^\infty(a, b)$  tähistame kõigi lõigul  $[a, b]$  mõõtuvate funktsioonide hulka, mille puhul

$$\|x\| = \inf_{\mu(E)=0} \sup_{t \in [a, b] \setminus E} |x(t)| < \infty \quad x \in L^\infty(a, b).$$

Hulk  $L^\infty(a, b)$  on Banachi ruum.

**Definitsioon 1.1.** Hulka  $K$  meetrilises ruumis nimetatakse suhteliselt kompaktsaks, kui igast  $K$  elementidest moodustatud jadast saab eraldada koonduva osajada.

**Definitsioon 1.2.** Olgu  $X, Y$  normeeritud ruumid ja  $K \subset X$  mittetühi hulk. Operaatorit  $A : K \rightarrow Y$  nimetatakse kompaktsaks, kui ta hulka  $K$  iga tõekestatud osahulga teisendab suhteliselt kompaktsaks hulgaks ruumis  $Y$ .

**Definitsioon 1.3.** Hulka  $E \subset X$  nimetatakse põhihulgaks normeeritud ruumis  $X$ , kui  $\overline{\mathcal{L}(E)} = X$  (s.t. hulga  $E$  lineaarne kate on kõikjal tihe).

**Definitsioon 1.4.** Öeldakse, et operaatorite jada  $A_n : X \rightarrow Y$  koondub punktiviisi ehk kõikjal ruumis  $X$ , kui iga  $x \in X$  korral jada  $A_n x$  koondub ruumis  $Y$ .

**Teoreem 1.1.** (vt. [3], lk. 135). Olgu  $X$  ja  $Y$  Banachi ruumid ning  $E$  põhihulk ruumis  $X$ . Jada  $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$  koondub kõikjal ruumis  $X$  parajasti siis, kui on täidetud järgmised tingimused:

- 1)  $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \|A_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N},$
- 2)  $\exists \lim_n A_n x \quad \forall x \in E.$

**Teoreem 1.2.** (vt. [3], lk. 141-142). Olgu  $X$  Banachi ruum ja operaator  $A \in \mathcal{L}(X, X)$  selline, et  $\|A\| < 1$ . Siis operaatoril  $I - A$  on olemas pöördoperaator  $(I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$  ja kehtib hinnang

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}. \quad (1.1)$$

**Teoreem 1.3.** (vt. [3], lk. 142). Olgu  $X$  ja  $Y$  Banachi ruumid. Kui  $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$  ja  $\|B\| \|A^{-1}\| < 1$ , siis leidub pöördoperaator  $(A + B)^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$  ning kehtib hinnang

$$\|(A + B)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|B\| \|A^{-1}\|}. \quad (1.2)$$

**Teoreem 1.4.** (vt. [3], lk. 223). Olgu  $X$  Banachi ruum ja operaator  $A \in \mathcal{L}(X, X)$  kompaktne. Võrrand  $x = Ax + y$  on iga  $y \in X$  korral lahenduv parajasti siis, kui homogeensel võrrandil  $x = Ax$  on ainult triviaalne lahend. Sel juhul on võrrand  $x = Ax + y$  iga  $y \in X$  korral üheselt lahenduv.

## 1.2 Polünoomiaalsete splineide ruum

Olgu lõigul  $[0, b]$  antud võrk sõlmedega  $t_0, t_1, \dots, t_N$  nii, et oleks rahuldatud tingimused

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

Toome sisse järgmised tähistused:

$$\sigma_0 = [t_0, t_1], \quad \sigma_i = (t_i, t_{i+1}], \quad i = 1, \dots, N - 1. \quad (1.4)$$

Tähega  $Z_N$  märgime võrgu (1.3) sisepunktide hulka

$$Z_N = \{t_i : i = 1, \dots, N-1\}. \quad (1.5)$$

Defineerime hulga

$$\bar{Z}_N = Z_N \cup \{b\}. \quad (1.6)$$

Tähistame lõigul  $[0, b]$  määratud funktsiooni  $u : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ahendit hulgale  $\sigma_i \subset [0, b]$  järgmiselt:

$$u_i(t) = u(t)|_{t \in \sigma_i}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (1.7)$$

Olgu  $m \in \mathbb{N}$  ja  $d$  täisarv, mis rahuldab tingimust  $-1 \leq d \leq m-1$ . Tähistagu  $\pi_m$  reaalsete polünoomide hulka, mille järk on väiksem või võrdne arvuga  $m$ . Defineerime hulga

$$S_m^{(d)}(Z_N) = \{u : u|_{\sigma_i} = u_i \in \pi_m, \quad 0 \leq i \leq N-1; \\ u_{i-1}^{(j)}(t_i) = u_i^{(j)}(t_i), \quad 0 \leq j \leq d, \quad t_i \in Z_N\}. \quad (1.8)$$

**Definitsioon 1.5.** Hulka  $S_m^{(d)}(Z_N)$  kujul (1.8) nimetatakse  $m$ -järku polünoomiaalsete splineide ruumiks pidevuse klassiga  $d$ .

Märgime, et kui  $d = -1$ , siis funktsioon  $u \in S_m^{(-1)}(Z_N) = \{u : u|_{\sigma_i} \in \pi_m, \quad 0 \leq i \leq N-1\}$  võib olla katkev punktides  $t_1, \dots, t_{N-1}$ .

### 1.3 Kvadratuurvalemid

Määratud integraalide  $\int_a^b f(x) dx$  ligikaudseks arvutamiseks kasutatakse sageli kvadratuurvalemeid kujul

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^m A_i f(x_i) + R, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1.9)$$

kus  $A_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) on kvadratuurvalemi kordajad,  $x_i \in [a, b]$  ( $x_1 < \dots < x_m$ ,  $i = 1, \dots, m$ ) sõlmed ja  $R$  jääkliige.

**Definitsioon 1.6.** Kvadratuurvalemit (1.9), mille kordajad avalduvad kujul

$$A_i = \int_a^b \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.10)$$

nimetatakse interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemiks.

**Definitsioon 1.7.** Kvadratuurvalemit (1.9) nimetatakse täpseks funktsiooni  $f$  puhul, kui jääkliige  $R = 0$ .

**Definitsioon 1.8.** Kui kvadratuurvalem (1.9) on täpne kõigi  $k$ -astme polünoomide  $f$  puhul, siis öeldakse, et selle kvadratuurvalemi algebraline täpsusaste on  $k$ .

**Märkus 1.1.** Kui valem (1.9) algebraline täpsusaste on  $k$ , siis on valem (1.9) täpne ka kõigi ülimalt  $k$ -astme polünoomide puhul, sest madalama astme polünoomid on esitatavad  $k$ -astme polünoomide vahena. Osutub, et  $m$  sõlmega ( $m \in \mathbb{N}$ ) interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemi algebraline täpsusaste on vähemalt  $m - 1$ .

**Teoreem 1.5.** (vt. [ 5 ], lk. 80). Valem (1.9) on interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalem parajasti siis, kui ta on täpne iga  $(m - 1)$ -astme polünoomi puhul.

Läheme valemis (1.9) olevas integraalis muutujavahetusega

$$x = (b - a)t + a \tag{1.11}$$

üle lõigule  $[0, 1]$ . Siis

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \int_0^1 g(t) dt, \tag{1.12}$$

kus

$$g(t) = f((b - a)t + a), \quad t \in [0, 1].$$

Kui on antud kvadratuurvalem kujul

$$\int_0^1 g(t) dt = \sum_{i=1}^m B_i g(c_i) + r, \quad c_i \in [0, 1], \tag{1.13}$$

siis muutujavahetusega (1.11) saame üle minna suvalisele lõigule  $[a, b]$  ja kasutada integraali  $\int_a^b f(x) dx$  leidmiseks kvadratuurvalemit kujul

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \sum_{i=1}^m B_i f(a + (b - a)c_i) + (b - a)R. \tag{1.14}$$

Ilmselt lineaarse teisenduse (1.11) korral teisenevad muutuja  $x$   $k$ -astme polünoomid muutuja  $t$  sama astme polünoomideks ja ka vastupidi. Seega kui valem (1.13)

on täpne kõigi ülimalt  $k$ -astme polünoomide  $g$  korral, siis ka valem (1.14) on täpne kõigi  $k$ -astme polünoomide  $f$  korral, s.t.

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=1}^m B_i f(a + (b-a) c_i) \quad (1.15)$$

iga  $f \in \Pi_k$  korral ( $0 \leq k \leq 2m-1$ ) vt [5], lk. 106). Märgime ka, et teoreemi 1.5 põhjal valem (1.9) on interpolatsioonitüüpi parajasti siis, kui valem (1.13) on interpolatsioonitüüpi.

Osutub, et sobiva sõlmede  $t_i$  valikuga saab kvadratuurvalemi (1.13) täpsusastet tõsta. Järgnevalt toome ära paar erinevat võimalust nende valikuks.

**Definitsioon 1.9.** Polünoome kujul

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.16)$$

nimetatakse Legendre'i polünoomideks.

Osutub (vt. [5], lk. 50), et Legendre'i polünoome võib leida ka rekursiivse seose

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)x P_n(x) - n P_{n-1}(x)}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.17)$$

abil, kus

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x.$$

**Definitsioon 1.10.** Me nimetame kvadratuurvalemi (1.13) sõlmi  $c_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) Gaussi punktideks, kui nad on võrrandi

$$P_m(2t-1) = 0, \quad m \in \mathbb{N} \quad (1.18)$$

lahendid, kus  $P_m$  on Legendre'i polünoomid (1.16).

Gaussi punktid on sümmeetrilised punkti  $1/2$  suhtes ja nad asuvad vahemikus  $(0, 1)$ . Gaussi kvadratuurvalem (1.13) on täpne kõigi  $(2m-1)$ -astme polünoomide puhul. Toome näiteks ära Gaussi punktid  $c_1, \dots, c_m$  parameetri  $m = 1, 2, 3$  korral:

$$\begin{cases} m = 1, & c_1 = \frac{1}{2} \\ m = 2, & c_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, \quad c_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \\ m = 3, & c_1 = \frac{5-\sqrt{15}}{10}, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{5+\sqrt{15}}{10} \end{cases} .$$

**Definitsioon 1.11.** Me nimetame kvadratuurvalemi (1.13) sõlmi  $c_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) Radau II-liiki punktideks, kui nad on võrrandi

$$P_m(2t - 1) - P_{m-1}(2t - 1) = 0, \quad m \in \mathbb{N} \quad (1.19)$$

lahendid, kus  $P_m$  on Legendre'i polünoomid (1.16).

Radau II-liiki punktid asuvad poollõigis  $(0, 1]$ . Radau II-liiki kvadratuurvalem (1.13) on täpne kõigi  $(2m - 2)$ -astme polünoomide puhul. Toome näiteks ära Radau II-liiki punktid  $c_1, \dots, c_m$  parameetri  $m = 1, 2, 3$  korral:

$$\begin{cases} m = 1, & c_1 = 1 \\ m = 2, & c_1 = \frac{1}{3}, \quad c_2 = 1 \\ m = 3, & c_1 = \frac{4-\sqrt{6}}{10}, \quad c_2 = \frac{4+\sqrt{6}}{10}, \quad c_3 = 1 \end{cases} .$$

## 2 Splain-kollokatsioonimeetod

### 2.1 Ruum $C^{m,\alpha}$

Olgu  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$ . Tähistame

$$\Delta_b = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq b\}.$$

Olgu järgnevalt  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ .

**Definitsioon 2.1.** Kirjutisega  $C^{m,\alpha}[0, b]$  tähistame pidevate funktsioonide  $u : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  hulka, mis on  $m$  korda pidevalt diferentseeruvad poollõigus  $(0, b]$  ja mille tuletiste jaoks kehtivad hinnangud

$$|u^{(j)}(x)| \leq C x^{1-\alpha-j}, \quad j = 1, \dots, m, \quad x \in (0, b], \quad (2.1)$$

kus  $C = C(u)$  on mingi positiivne konstant.

**Lemma 2.1.** Olgu antud funktsioon  $u \in C^{m,\alpha}[0, b]$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \alpha < 1$  ning olgu  $u_\rho(t) = u(b^{1-\rho} t^\rho)$ ,  $t \in [0, b]$ ,  $\rho \in \mathbb{N}$ . Siis  $u_\rho \in C[0, b] \cap C^m(0, b]$  ja kehtivad hinnangud

$$|u_\rho^{(j)}(t)| \leq C t^{\rho(1-\alpha)-j}, \quad j = 1, \dots, m, \quad t \in (0, b], \quad (2.2)$$

kus  $C = C(u_\rho)$  on mingi positiivne konstant.

*Tõestus.* Lemma eeldustest saame, et  $u_\rho \in C[0, b]$  ja  $u_\rho \in C^m(0, b]$ .

Tähistame  $\varphi(t) = b^{1-\rho}(t^\rho)$ ,  $u_\rho(t) = u(\varphi(t))$  ja leiame liitfunktsiooni  $u(\varphi(t))$   $j$ -järku tuletise ( $j=1, \dots, m$ ). Näitame, et see tuletis on kujul

$$u_\rho^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^j u^{(k)}(\varphi(t)) \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \Psi_{j,k}} a_{j,k} \varphi^{(i_1)}(t) \cdots \varphi^{(i_k)}(t), \quad t \in (0, b], \quad (2.3)$$

kus  $a_{j,k}$  on mingid naturaalarvulised kordajad ja  $\Psi_{j,k}$  on  $k$ -mõõtmeline vektorhulk

$$\Psi_{j,k} = \{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k : \sum_{q=1}^k i_q = j, \quad 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k\}. \quad (2.4)$$

Valemi (2.3) tõestamiseks kasutame matemaatilise induktsiooni meetodit. Induktsiooni baas  $j = 1$  korral kehtib, sest

$$u_\rho'(t) = u'(\varphi(t)) \varphi'(t) = \sum_{k=1}^1 u^{(k)}(\varphi(t)) \sum_{i_1 \in \Psi_{1,1}} a_{1,1} \varphi^{(i_1)}(t).$$

Teeme induktsiooni eelduse, et (2.3) kehtib  $j = z$  ( $1 \leq z \leq m-1$ ) korral ja näitame, et valem kehtib ka  $j = z+1$  korral. Valemist (2.3) saame

$$\begin{aligned}
u_\rho^{(z+1)}(t) &= (u_\rho^{(z)}(t))' = \sum_{k=1}^z u^{(k+1)}(\varphi(t)) \varphi'(t) \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \Psi_{z,k}} a_{z,k} \varphi^{(i_1)}(t) \dots \varphi^{(i_k)}(t) + \\
&+ \sum_{k=1}^z u^{(k)}(\varphi(t)) \left[ \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \Psi_{z,k}} a_{z,k} \varphi^{(i_1)}(t) \dots \varphi^{(i_k)}(t) \right]' = \\
&= \sum_{k=2}^{z+1} u^{(k)}(\varphi(t)) \sum_{(i_1, \dots, i_{k-1}) \in \Psi_{z,k-1}} a_{z,k-1} \varphi'(t) \varphi^{(i_1)}(t) \dots \varphi^{(i_{k-1})}(t) + \\
&+ \sum_{k=1}^z u^{(k)}(\varphi(t)) \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \Psi_{z,k}} a_{z,k} \left[ \varphi^{(i_1+1)}(t) \varphi^{(i_2)}(t) \dots \varphi^{(i_k)}(t) + \right. \\
&\left. + \varphi^{(i_1)}(t) \left( \varphi^{(i_2)}(t) \dots \varphi^{(i_k)}(t) \right)' \right] = \\
&= \sum_{k=2}^{z+1} u^{(k)}(\varphi(t)) \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \Psi_{z+1,k}} a_{z,k-1} \varphi^{(i_1)}(t) \dots \varphi^{(i_k)}(t) + \\
&+ \sum_{k=1}^z u^{(k)}(\varphi(t)) \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \Psi_{z,k}} a_{z,k} \left[ \varphi^{(i_1+1)}(t) \varphi^{(i_2)}(t) \dots \varphi^{(i_k)}(t) + \right. \\
&\left. + \dots + \varphi^{(i_1)}(t) \dots \varphi^{(i_{k-1})}(t) \varphi^{(i_k+1)}(t) \right] = \\
&= \sum_{k=2}^{z+1} u^{(k)}(\varphi(t)) \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \Psi_{z+1,k}} a_{z,k-1} \varphi^{(i_1)}(t) \dots \varphi^{(i_k)}(t) + \\
&+ \sum_{k=1}^z u^{(k)}(\varphi(t)) \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \Psi_{z+1,k}} b_{z,k} \varphi^{(i_1)}(t) \dots \varphi^{(i_k)}(t) = \\
&= \sum_{k=1}^{z+1} u^{(k)}(\varphi(t)) \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \Psi_{z+1,k}} a_{z+1,k} \varphi^{(i_1)}(t) \dots \varphi^{(i_k)}(t).
\end{aligned}$$

Märgime, et kordajad  $a_{i,j}$  ja  $b_{i,j}$  on omavahel seotud konkreetsete valemitega, kuid siinkohal nende täpsed avaldised meile huvi ei paku. Seega valem (2.3) kehtib. Kuna  $i = 1, \dots, m$  korral võime kirjutada

$$\varphi^{(i)}(t) = (b^{1-\rho} t^\rho)^{(i)} = \begin{cases} b^{1-\rho} \rho \dots (\rho - i + 1) t^{\rho-i} & , \quad i \leq \rho \\ 0 & , \quad i > \rho \end{cases},$$

siis eelnevast järeldub hinnang

$$|u_\rho^{(j)}(t)| \leq C_{b,\rho,j} \sum_{k=1}^j |u^{(k)}(\varphi(t))| \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \Psi_{j,k}} t^{\rho-i_1} \dots t^{\rho-i_k} = C'_{b,\rho,j} \sum_{k=1}^j |u^{(k)}(\varphi(t))| t^{k\rho-j}.$$

Siit saame edasi (2.1) põhjal hinnata

$$|u_\rho^{(j)}(t)| \leq C'_{b,\rho,j} C \sum_{k=1}^j |(b^{1-\rho} t^\rho)^{1-\alpha-k} t^{k\rho-j}| \leq C' t^{\rho(1-\alpha)-j}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Sellega on lemma tõestatud.  $\square$

## 2.2 Volterra integraalvõrrand

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(x) = f(x) + \int_0^x (x-y)^{-\alpha} K(x,y) u(y) dy, \quad x \in [0, b], \quad (2.5)$$

kus  $0 < \alpha < 1$ . Funktsioonid  $K : \Delta_b \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on ette antud pidevad funktsioonid. Funktsioon  $u$  on otsitav. Siis võrrand (2.5) on üheselt lahenduv. Kui  $K \in C^m(\Delta_b)$ ,  $f \in C^{m,\alpha}[0, b]$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , siis  $u \in C^{m,\alpha}[0, b]$  (vt. [ 1 ]).

## 2.3 Kollokatsioonimeetodi jaoks kasutatav võrk

Integraalvõrrandi (2.5) lahendamiseks kasutame splain-kollokatsioonimeetodit. Selleks toome sisse mõned vajalikud tähised.

Vaatleme lõigul  $[0, b]$  võrku  $\Pi_N^{(r,b)}$  sõlmedega  $x_0, \dots, x_N$ , mis rahuldab tingimusi

$$x_i = b \left( \frac{i}{N} \right)^r, \quad 0 \leq i \leq N, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (2.6)$$

kus  $r \in [1, \infty)$  on võrgu ebaühtlust näitav parameeter. Märgime, et kui  $r = 1$ , siis on võrk (2.6) ühtlane. Kui  $r > 1$ , siis võrgu (2.6) punktid paiknevad tihedamalt lõigu  $[0, b]$  vasakpoolse otsupunkti 0 ümbruses.

Saadud võrgu (2.6) põhjal moodustame osalõikude pikkused

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Osutub, et võrgu (2.6) korral saame, et

$$0 < h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_{N-1} = h$$

ning kehtib järgmine võrratuste ahel:

$$h_i \leq h \leq b r N^{-1}, \quad 0 \leq i \leq N-1. \quad (2.7)$$

Tõepoolest, vastavalt ülal toodud võrdustele kehtib

$$h_i = b \left( \frac{i+1}{N} \right)^r - b \left( \frac{i}{N} \right)^r, \quad 0 \leq i \leq N-1.$$

Võttes nüüd  $f(x) = x^r$ , saame Lagrange'i keskvaartusteoreemi põhjal

$$b \left( \frac{i+1}{N} \right)^r - b \left( \frac{i}{N} \right)^r = \frac{br \xi_i^{r-1}}{N} \leq br N^{-1},$$

kus

$$\xi_i \in \left( \frac{i}{N}, \frac{i+1}{N} \right), \quad 0 \leq i \leq N-1.$$

Valime lõigus  $[0, 1]$   $m$  parameetrit  $c_1, \dots, c_m$  nii, et

$$0 \leq c_1 < \dots < c_m \leq 1, \quad m \in \mathbb{N} \quad (2.8)$$

ja defineerime hulga

$$X_i = \{x_{ij} = x_i + c_j h_i : 1 \leq j \leq m\}, \quad 0 \leq i \leq N-1. \quad (2.9)$$

Olgu

$$X(N) = \bigcup_{i=0}^{N-1} X_i, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Parameetreid (2.8) nimetatakse kollokatsiooniparameetriteks ja hulka  $X(N)$  kollokatsioonipunktide hulgaks.

## 2.4 Kollokatsioonimeetodi kirjeldus

Kirjutame uuesti välja võrrandi (2.5)

$$u(x) = f(x) + \int_0^x (x-y)^{-\alpha} K(x,y) u(y) dy, \quad x \in [0, b]. \quad (2.11)$$

Võrrandi (2.11) lähislahendit  $u_N$  otsime polünoomiaalsete splineide ruumist  $S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N^{(r,b)})$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ), kus võrk  $\Pi_N^{(r,b)}$  on kujul (2.6). Funktsiooni  $u_N$  leidmiseks asetame ta algvõrrandisse (2.11) otsitava  $u$  kohale ning nõuame, et võrrand oleks rahuldatud kollokatsioonipunktides  $x_{ij} \in X(N)$ :

$$\left[ u_N(x) - f(x) - \int_0^x (x-y)^{-\alpha} K(x,y) u_N(y) dy \right]_{x=x_{ij}} = 0, \quad (2.12)$$

$$0 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq m,$$

kus  $x_{ij} = x_i + c_j (x_{i+1} - x_i) = x_i + c_j h_i$  ning  $x_i$  ja  $c_j$  on määratud vastavalt seostega (2.6) ja (2.8).

Seosed (2.12) võime kirjutada ka kujul

$$u_N(x_{ij}) = f(x_{ij}) + \sum_{k=0}^{i-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{ij} - y)^{-\alpha} K(x_{ij}, y) u_N(y) dy + \int_{x_i}^{x_{ij}} (x_{ij} - y)^{-\alpha} K(x_{ij}, y) u_N(y) dy, \quad (2.13)$$

$$0 \leq i \leq N - 1, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Teeme võrrandites (2.13) kõikides integraalides asendused  $y = x_k + z h_k$ , ( $dy = h_k dz$ ;  $k = 0, \dots, i$ ;  $i = 0, \dots, N - 1$ ). Siis võrdused (2.13) võtavad kuju

$$u_N(x_{ij}) = f(x_{ij}) + \sum_{k=0}^{i-1} h_k \int_0^1 (x_{ij} - x_k - z h_k)^{-\alpha} K(x_{ij}, x_k + z h_k) u_N(x_k + z h_k) dz + h_i \int_0^{c_j} (x_{ij} - x_i - z h_i)^{-\alpha} K(x_{ij}, x_i + z h_i) u_N(x_i + z h_i) dz, \quad (2.14)$$

$$0 \leq i \leq N - 1, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Järgnevalt toome sisse  $(m - 1)$ -järku Lagrange'i fundamentaalpolünoomid, mis vastavad kollokatsiooniparameetritele (2.8) :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{x - c_k}{c_j - c_k}, \quad x \in [0, b], \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.15)$$

Siis iga  $i = 0, \dots, N - 1$  korral

$$u_N(x_i + z h_i) = \sum_{k=1}^m \beta_k^{(i)} L_k(z), \quad x_i + z h_i \in \sigma_i, \quad (2.16)$$

kus

$$\beta_k^{(i)} = u_N(x_i + c_k h_i) \quad (2.17)$$

ja  $\sigma_i$  ( $i = 0, \dots, N - 1$ ) on defineeritud seostega (1.4).

Kollokatsioonitingimused (2.14) on seega iga  $i = 0, \dots, N - 1$  korral kirjutatavad

kujul

$$\begin{aligned} \beta_j^{(i)} = & f(x_{ij}) + \sum_{k=0}^{i-1} h_k \int_0^1 (x_{ij} - x_k - z h_k)^{-\alpha} K(x_{ij}, x_k + z h_k) \sum_{q=1}^m \beta_q^{(k)} L_q(z) dz + \\ & + h_i \int_0^{c_j} (x_{ij} - x_i - z h_i)^{-\alpha} K(x_{ij}, x_i + z h_i) \sum_{q=1}^m \beta_q^{(i)} L_q(z) dz, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Oleme saanud lineaarse algebraise võrrandisüsteemi suuruste  $\beta_1^{(i)}, \dots, \beta_m^{(i)}$  ( $i = 0, \dots, N - 1$ ) arvutamiseks. Asetades leitud konstandid  $\beta_1^{(i)}, \dots, \beta_m^{(i)}$  võrdustesse (2.16), saame leida võrrandi (2.11) lähislahendi  $u_N$ .

Järgnevalt esitame ka lineaarse võrrandisüsteemi (2.18) maatrikskuju. Selleks teisendame süsteemi (2.18) järgmiselt:

$$\begin{aligned} \beta_j^{(i)} - \sum_{k=1}^m \left( h_0 \int_0^1 (x_{ij} - x_0 - z h_0)^{-\alpha} K(x_{ij}, x_0 + z h_0) L_k(z) dz \right) \beta_k^{(0)} - \dots - \\ - \sum_{k=1}^m \left( h_{i-1} \int_0^1 (x_{ij} - x_{i-1} - z h_{i-1})^{-\alpha} K(x_{ij}, x_{i-1} + z h_{i-1}) L_k(z) dz \right) \beta_k^{(i-1)} - \\ - \sum_{k=1}^m \left( h_i \int_0^{c_j} (x_{ij} - x_i - z h_i)^{-\alpha} K(x_{ij}, x_i + z h_i) L_k(z) dz \right) \beta_k^{(i)} = f(x_{ij}) \\ i = 0, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Seega võime võrrandisüsteemi (2.18) kirjutada maatrikskujul

$$(\mathcal{I} - \mathcal{A}) \mathcal{B} = \mathcal{F}, \quad (2.19)$$

kus  $\mathcal{I}$  on  $(mN \times mN)$ -järku ühikmaatriks ja

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & (\beta_1^{(0)}, \dots, \beta_m^{(0)}, \beta_1^{(1)}, \dots, \beta_m^{(1)}, \dots, \beta_1^{(N-1)}, \dots, \beta_m^{(N-1)})^T, \\ \mathcal{F} = & (f(x_{01}), \dots, f(x_{0m}), f(x_{11}), \dots, f(x_{1m}), \dots, f(x_{N-1,1}), \dots, f(x_{N-1,m}))^T. \end{aligned}$$

Maatriks  $\mathcal{A}$  kujutab endast  $(mN \times mN)$ -järku plokkdiagonaalmaatriksit, mille võib kirja panna ka kujul

$$A = \begin{pmatrix} D_{00} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ B_{10} & D_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ B_{20} & B_{21} & D_{22} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N-1,0} & B_{N-1,1} & B_{N-1,2} & \dots & B_{N-1,N-2} & D_{N-1,N-1} \end{pmatrix},$$

kus  $\mathbf{0}$  tähistab  $(m \times m)$ -järku nullvormi,  $D_{nn}$  ja  $B_{nk}$  on aga  $(m \times m)$ -järku ruutvormid, mis on defineeritud järgmiselt:

$$\begin{aligned} D_{nn} &= (d_{ij}^{(n)})_{i,j=1}^m, \quad n = 0, \dots, N-1, \\ d_{ij}^{(n)} &= h_n \int_0^{c_i} (x_{ni} - x_n - z h_n)^{-\alpha} K(x_{ni}, x_n + z h_n) L_j(z) dz \end{aligned} \quad (2.20)$$

ja

$$\begin{aligned} B_{nk} &= (b_{ij}^{(n,k)})_{i,j=1}^m, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad k = 0, \dots, n-1, \\ b_{ij}^{(n,k)} &= h_k \int_0^1 (x_{ni} - x_k - z h_k)^{-\alpha} K(x_{ni}, x_k + z h_k) L_j(z) dz. \end{aligned} \quad (2.21)$$

## 2.5 Kollokatsioonimeetodi koondumine

Formuleerime tulemuse kollokatsioonimeetodi koondumise kohta.

**Teoreem 2.1.** (Vt. [1]). Olgu antud  $f \in C^{m,\alpha}[0, b]$  ja  $K \in C^m(\Delta_b)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \alpha < 1$  ning olgu lõigul  $[0, b]$  antud võrk (2.6). Siis on võrrand (2.5) üheselt lahenduv ja tema lahend  $u \in C^{m,\alpha}[0, b]$ . Leidub arv  $N_0 \in \mathbb{N}$  nii, et kollokatsioonitingimused (2.12) määravad iga  $N \geq N_0$  korral üheselt võrrandi (2.5) lähilahendi  $u_N \in S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N^{(r,b)})$ ,  $m \geq 1$ . Seejuures kollokatsiooniparameetrite  $0 \leq c_1 < \dots < c_m \leq 1$  mistahes valiku korral kehtib hinnang

$$\sup_{x \in [0, b]} |u(x) - u_N(x)| \leq C \begin{cases} N^{-r(1-\alpha)}, & 1 \leq r \leq \frac{m}{1-\alpha}, \\ N^{-m}, & r > \frac{m}{1-\alpha}, \end{cases} \quad (2.22)$$

kus konstant  $C$  ei sõltu suurusest  $N$ .

Teoreemist 2.1 järeldub, et ühtlase võrgu (2.6) korral kehtib hinnang

$$\sup_{x \in [0, b]} |u(x) - u_N(x)| \leq C N^{-(1-\alpha)}, \quad 0 < 1 - \alpha < 1,$$

mis tähendab, et kollokatsioonimeetodi koondumine on üsna aeglane ja ei sõltu lähilähendi leidmiseks kasutatavast aproksimeeriva splaini järgust  $m - 1$ . Samas kui võtta  $r$  piisavalt suur,  $r > \frac{m}{1-\alpha}$ , siis teoreemi 2.1 põhjal kehtib hinnang

$$\sup_{x \in [0, b]} |u(x) - u_N(x)| \leq C N^{-m}.$$

Sel juhul on meetodi koondumine maksimaalset järku, kuid praktilistes arvutustes tähendab suur  $r$  väärtus seda, et lõigu  $[0, b]$  vasakpoolsele rajapunktile 0 lähedal olevad osalõigud  $[t_i, t_{i+1}]$  on väga väikesed (eriti ühele lähedaste  $\alpha$  väärtuste korral). Näiteks  $\alpha = \frac{3}{4}$ ,  $r = 12$ ,  $m = 3$  korral  $h_0 = b N^{-12}$ . Sellisel juhul võivad juba väikesed osalõikude arvu  $N$  väärtused põhjustada suuri arvutusvigu. Järgnevas peatükis me vaatleme meetodit, mis kasutab maksimaalset järku koondumise saavutamiseks vähem ebahühtlasi võrke.

### 3 Modifitseeritud kollokatsioonimeetod

Selles peatükis vaatleme modifitseeritud spline-kollokatsioonimeetodit võrrandi (2.5) lahendamiseks.

#### 3.1 Meetodi kirjeldus

Teksti paremaks jälgimiseks kirjutame uuesti välja võrrandi (2.5)

$$u(x) = f(x) + \int_0^x (x-y)^{-\alpha} K(x,y) u(y) dy, \quad x \in [0, b].$$

Teeme võrrandis (2.5) muutujavahetused

$$\begin{cases} x = b^{1-\rho} t^\rho \\ y = b^{1-\rho} s^\rho \end{cases}, \quad t, s \in [0, b], \rho \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Siit saame  $dy = \rho b^{1-\rho} s^{\rho-1} ds$  korral teisendada võrrandi (2.5) kujule

$$u_\rho(t) = f_\rho(t) + \int_0^t K_\rho(t,s) u_\rho(s) ds, \quad t \in [0, b], \quad (3.2)$$

kus

$$\begin{cases} u_\rho(t) & = u(b^{1-\rho} t^\rho) \\ f_\rho(t) & = f(b^{1-\rho} t^\rho) \\ K_\rho(t,s) & = \rho b^{(1-\rho)(1-\alpha)} s^{\rho-1} (t^\rho - s^\rho)^{-\alpha} K(b^{1-\rho} t^\rho, b^{1-\rho} s^\rho) \\ & t, s \in [0, b], \rho \in \mathbb{N} \end{cases}. \quad (3.3)$$

Võrrandi (3.2) lähislahendit  $u_{\rho,N}$  otsime polünoomiaalsete splineide ruumist  $S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N^{(r,b)})$ , kus võrk  $\Pi_N^{(r,b)}$  on kujul (2.6). Funktsiooni  $u_{\rho,N}$  leidmiseks asetame ta algvõrrandisse (3.2) otsitava  $u_\rho$  kohale ning nõuame, et võrrand oleks rahuldatud kollokatsioonipunktides  $t_{ij} \in X(N)$ :

$$\left[ u_{\rho,N}(t) - f_\rho(t) - \int_0^t K_\rho(t,s) u_{\rho,N}(s) ds \right]_{t=t_{ij}} = 0, \quad (3.4)$$

$$0 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq m,$$

kus  $t_{ij} = t_i + c_j(t_{i+1} - t_i) = t_i + c_j h_i$  ning  $t_i$  ja  $c_j$  on määratud vastavalt seostega (2.6) ja (2.8). Järgides peatükis 2 toodud kollokatsioonimeetodit, leiame lähislahendi  $u_{\rho,N}$  kujul (2.16). Edasi defineerime võrrandi (2.5) lähislahendi  $\tilde{u}_{\rho,N}$  järgmiselt:

$$\tilde{u}_{\rho,N}(x) = u_{\rho,N}\left((b^{\rho-1}x)^{\frac{1}{\rho}}\right), \quad x \in [0, b], \quad u_{\rho,N} \in S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N^{(r,b)}); \quad \rho, m \in \mathbb{N}. \quad (3.5)$$

Järgnevalt uurime saadud võrrandi (3.2) lahenduvust ja lähislahendi  $\tilde{u}_{\rho,N}$  koon- dumist esialgse võrrandi (2.5) lahendiks  $u$ .

### 3.2 Operaator $\mathcal{P}_N$

Toome sisse operaatori  $\mathcal{P}_N$ , mis igale lõigus  $[0, b]$  pidevale funktsioonile  $u \in C[0, b]$  seab vastavusse tükiti polünoomiaalse funktsiooni  $\mathcal{P}_N u \in S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N^{(r,b)})$  nii, et  $\mathcal{P}_N$  interpoleerib funktsiooni  $u$  sõlmedes  $\{x_{ij}\}$  (vt. (2.9)):

$$(\mathcal{P}_N u)(x_{ij}) = u(x_{ij}), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.6)$$

Igal osalõigul  $[x_i, x_{i+1}]$  ( $i = 0, \dots, N-1$ ) saame operaatori  $\mathcal{P}_N$  esitada kujul

$$(\mathcal{P}_N u)(x) = \sum_{j=1}^m u(x_{ij}) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{x - x_{ik}}{x_{ij} - x_{ik}}, \quad (3.7)$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, N-1.$$

**Lemma 3.1.** (vt. [4], lk. 22). Olgu operaator  $\mathcal{P}_N : C[0, b] \rightarrow L^\infty(0, b)$  antud valemiga (3.7), kus  $x_i$  ( $i = 0, \dots, N-1$ ) on võrgu (2.6) sõlmed ja  $x_{ij}$  on määratud seostega (2.9). Süs kehtivad hinnangud

$$\|\mathcal{P}_N\|_{\mathcal{L}(C[x_i, x_{i+1}], C[x_i, x_{i+1}])} \leq C_1, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad N \in \mathbb{N} \quad (3.8)$$

ja

$$\|\mathcal{P}_N\|_{\mathcal{L}(C[0, b], L^\infty(0, b))} \leq C_2, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (3.9)$$

kus konstandid  $C_1$  ja  $C_2$  ei sõltu suurusest  $N$ .

**Lemma 3.2.** Iga lõigus  $[t_n, t_{n+1}]$  ( $n = 0, \dots, N-1$ ),  $N \in \mathbb{N}$ , oleva  $(m-1)$ -astme polünoomi  $\omega$  korral kehtib võrdus

$$(\mathcal{P}_N \omega)(t) = \omega(t), \quad t \in [t_n, t_{n+1}]. \quad (3.10)$$

*Tõestus.* Tingimused (3.6) määravad üheselt ära  $(m-1)$ -astme polünoomi. Viimase väite tõestus on toodud õpikus [ 5 ], lk 13.  $\square$

**Lemma 3.3.** *Olgu antud funktsioonid  $u \in C^{m,\alpha}[0, b]$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \alpha < 1$  ja  $u_\rho(t) = u(b^{1-\rho} t^\rho)$ ,  $t \in [0, b]$ ,  $\rho \in \mathbb{N}$ . Lisaks olgu antud operaator  $\mathcal{P}_N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , kujul (3.7), kus sõlmed  $x_{ij}$  ja parameetrid  $c_j$  on defineeritud vastavalt valemitega (2.9) ja (2.8). Siis kehtib hinnang*

$$\|u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho\|_{L^\infty(0,b)} \leq C \mathcal{E}_N(m, \alpha, r), \quad (3.11)$$

kus konstant  $C$  ei sõltu suurusest  $N$  ja

$$\mathcal{E}_N(m, \alpha, r) = \begin{cases} N^{-m}, & m \leq \rho(1-\alpha), r \geq 1 \\ N^{-r\rho(1-\alpha)}, & m > \rho(1-\alpha), 1 \leq r < \frac{m}{\rho(1-\alpha)} \\ N^{-m}, & m > \rho(1-\alpha), r \geq \frac{m}{\rho(1-\alpha)} \end{cases}. \quad (3.12)$$

*Tõestus.* Võtame suvalise  $u \in C^{m,\alpha}[0, b]$ . Siis  $u_\rho(t) = u(b^{1-\rho} t^\rho)$  ja lemma 2.1 põhjal  $u_\rho \in C[0, b] \cap C^m(0, b]$ . Hindame vahet

$$\begin{aligned} \|u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho\|_{L^\infty(0,b)} &= \max_{i=0,\dots,N-1} \|u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho\|_{L^\infty(t_i, t_{i+1})} = \\ &= \max_{i=0,\dots,N-1} \|u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho\|_{C[t_i, t_{i+1}]} = \\ &= \max_{i=0,\dots,N-1} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |u_\rho(t) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(t)|. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Võtame ühe suvalise splaini  $\omega_N \in S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N^{(r,b)})$ . Siis igas osalõiguses  $[t_i, t_{i+1}]$  on  $\omega_N$  näol tegemist  $(m-1)$ -astme polünoomiga. Lemma 3.2 põhjal  $(\mathcal{P}_N \omega_N)(t) = \omega_N(t)$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . Sel juhul võime iga  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  korral kirjutada

$$\begin{aligned} u_\rho(t) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(t) &= u_\rho(t) - \omega_N(t) + \omega_N(t) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(t) = \\ &= u_\rho(t) - \omega_N(t) + (\mathcal{P}_N \omega_N)(t) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(t) = \\ &= (u_\rho(t) - \omega_N(t)) + \mathcal{P}_N(\omega_N(t) - u_\rho(t)) = (\mathcal{I} - \mathcal{P}_N)(u_\rho(t) - \omega_N(t)). \end{aligned}$$

Siit edasi hinnates saame

$$\begin{aligned} \|u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho\|_{L^\infty(0,b)} &\leq (1 + \|\mathcal{P}_N\|_{\mathcal{L}(C[t_i, t_{i+1}], C[t_i, t_{i+1}])}) \max_{i=0,\dots,N-1} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |u_\rho(t) - \omega_N(t)| \leq \\ &\leq C \max_{i=0,\dots,N-1} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |u_\rho(t) - \omega_N(t)|, \end{aligned}$$

kus lemma 3.1 põhjal konstant  $C$  ei sõltu suuruselt  $N$ . Kuna  $u_\rho \in C^m(0, b]$ , siis iga  $i = 0, \dots, N - 1$  korral

$$u_\rho(t) = u_\rho(t_{i+1}) + \frac{(u_\rho)'(t_{i+1})(t - t_{i+1})}{1!} + \dots + \frac{(u_\rho)^{(m-1)}(t_{i+1})(t - t_{i+1})^{(m-1)}}{(m-1)!} + R_{m-1}(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

kus

$$R_{m-1}(t) = \frac{1}{(m-1)!} \int_{t_{i+1}}^t (t-x)^{m-1} u_\rho^{(m)}(x) dx, \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Olgu

$$\omega_N(t) = u_\rho(t_{i+1}) + \frac{(u_\rho)'(t_{i+1})(t - t_{i+1})}{1!} + \dots + \frac{(u_\rho)^{(m-1)}(t_{i+1})(t - t_{i+1})^{(m-1)}}{(m-1)!},$$

kus  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$ . Siis

$$\begin{aligned} \|u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho\|_{L^\infty(0,b)} &\leq C \max_{i=0,\dots,N-1} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |R_{m-1}(t)| = \\ &= C \frac{1}{(m-1)!} \max_{i=0,\dots,N-1} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \left| \int_{t_{i+1}}^t (t-x)^{m-1} u_\rho^{(m)}(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Kasutame  $u_\rho$  tuletiste hindamiseks lemmat 2.1,

$$\|u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho\|_{L^\infty(0,b)} \leq C_1 \max_{i=0,\dots,N-1} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \int_t^{t_{i+1}} (x-t)^{m-1} x^{\rho(1-\alpha)-m} dx. \quad (3.14)$$

Kui  $m \leq \rho(1-\alpha)$ , siis

$$\|u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho\|_{L^\infty(0,b)} \leq C_1 b^{\rho(1-\alpha)-m} \max_{i=0,\dots,N-1} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} (t_{i+1} - t)^m \leq C_2 N^{-m}. \quad (3.15)$$

Kui  $m > \rho(1-\alpha)$ , siis hindame võrratust (3.14)  $i = 0$  ja  $i = 1, \dots, N - 1$  jaoks eraldi. Olgu kõigepealt  $i = 0$ . Et  $0 \leq t \leq x \leq t_1$  korral  $0 \leq x - t \leq x$ , siis

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, t_1]} \int_t^{t_1} (x-t)^{m-1} x^{\rho(1-\alpha)-m} dx &\leq \max_{t \in [0, t_1]} \int_t^{t_1} (x-t)^{m-1} (x-t)^{\rho(1-\alpha)-m} dx = \\ &= \max_{t \in [0, t_1]} \int_t^{t_1} (x-t)^{\rho(1-\alpha)-1} dx = \max_{t \in [0, t_1]} \frac{(t_1 - t)^{\rho(1-\alpha)}}{\rho(1-\alpha)} = \frac{t_1^{\rho(1-\alpha)}}{\rho(1-\alpha)} = \\ &= \frac{b^{\rho(1-\alpha)}}{\rho(1-\alpha)} N^{-\rho r(1-\alpha)} \leq C_3 \begin{cases} N^{-\rho r(1-\alpha)} & , \quad 1 \leq r < \frac{m}{\rho(1-\alpha)} \\ N^{-m} & , \quad r \geq \frac{m}{\rho(1-\alpha)} \end{cases}. \end{aligned}$$

Olgu nüüd  $i = 1, \dots, N - 1$ . Siis  $m > \rho(1 - \alpha)$  korral saame

$$\begin{aligned}
\max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \int_t^{t_{i+1}} (x-t)^{m-1} x^{\rho(1-\alpha)-m} dx &\leq \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} t^{\rho(1-\alpha)-m} \int_t^{t_{i+1}} (x-t)^{m-1} dx = \\
&= \frac{1}{m} t_i^{\rho(1-\alpha)-m} (t_{i+1} - t_i)^m = \\
&= \frac{b^{\rho(1-\alpha)}}{m} \left(\frac{i}{N}\right)^{\rho r(1-\alpha)-r m} \left[ \left(\frac{i+1}{N}\right)^r - \left(\frac{i}{N}\right)^r \right]^m = \\
&= \frac{b^{\rho(1-\alpha)}}{m} N^{-\rho r(1-\alpha)} \frac{i^{\rho r(1-\alpha)}}{i^{r m}} [(i+1)^r - i^r]^m.
\end{aligned}$$

Lagrange'i keskvaertusteoreemi põhjal  $(i+1)^r - i^r = r \xi^{r-1}$ , kus  $\xi \in (i, i+1)$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ . Seega

$$\begin{aligned}
\max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \int_t^{t_{i+1}} (x-t)^{m-1} x^{\rho(1-\alpha)-m} dx &\leq C_4 N^{-\rho r(1-\alpha)} \frac{i^{\rho r(1-\alpha)}}{i^{r m}} \frac{(i+1)^{r m}}{(i+1)^m} = \\
&= C_4 N^{-\rho r(1-\alpha)} \frac{i^{\rho r(1-\alpha)}}{(i+1)^m} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{r m} \leq \\
&\leq C_4 2^{r m} N^{-\rho r(1-\alpha)} \frac{i^{\rho r(1-\alpha)}}{(i+1)^m} \leq C_5 N^{-\rho r(1-\alpha)} \frac{(i+1)^{\rho r(1-\alpha)}}{(i+1)^m} = \\
&= C_5 N^{-\rho r(1-\alpha)} (i+1)^{\rho r(1-\alpha)-m}
\end{aligned}$$

ehk

$$\max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \int_t^{t_{i+1}} (x-t)^{m-1} x^{\rho(1-\alpha)-m} dx \leq C_6 \begin{cases} N^{-\rho r(1-\alpha)} & , \quad 1 \leq r < \frac{m}{\rho(1-\alpha)} \\ N^{-m} & , \quad r \geq \frac{m}{\rho(1-\alpha)} \end{cases}, \quad (3.16)$$

kus  $i = 1, \dots, N - 1$ . Kuna samasuguse hinnangu saime ka  $i = 0$  korral, siis kokkuvõtteks järeldeb hinnangutest (3.15) ja (3.16), et (3.11) kehtib.  $\square$

**Lemma 3.4.** *Olgu  $E_0$  ja  $E_1$  mingid Banachi ruumid, mille korral  $E_0 \subset E_1$  ja leidub konstant  $C > 0$  nii, et  $\|x\|_{E_1} \leq C \|x\|_{E_0}$  iga  $x \in E_0$  puhul. Olgu  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$  kompaktne ja  $P_N \in \mathcal{L}(E_0, E_1)$  ( $N \in \mathbb{N}$ ) sellised, et*

$$\|P_N x - x\|_{E_1} \rightarrow 0, \quad \forall x \in E_0.$$

Siis

$$\|T - P_N T\|_{\mathcal{L}(E_1, E_1)} \rightarrow 0, \quad \text{kui } N \rightarrow \infty. \quad (3.17)$$

*Tõestus.* Oletame vastuväiteliselt, et  $\exists \delta > 0$  nii, et

$$\|T - P_N T\|_{\mathcal{L}(E_1, E_1)} \geq \delta, \text{ kui } N \rightarrow \infty, N \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}.$$

Teiste sõnadega, leiduvad elemendid  $x_N \in E_1$ , et  $\|x_N\|_{E_1} = 1$  ja

$$\|(T - P_N T)x_N\|_{E_1} \geq \frac{\delta}{2}, \quad (N \in \mathbb{N}'). \quad (3.18)$$

Teiselt poolt, operaatori  $T$  kompaktsuse tõttu on jada  $Tx_N$  ( $N \in \mathbb{N}'$ ) suhteliselt kompaktne ruumis  $E_0$ , s.t. leidub element  $v \in E_0$  nii, et

$$\|Tx_N - v\|_{E_0} \rightarrow 0, \text{ kui } N \rightarrow \infty, N \in \mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'.$$

Et  $P_N \in \mathcal{L}(E_0, E_1)$  ja iga  $x \in E_0$  korral  $\|P_N x - x\|_{E_1} \rightarrow 0$ , kui  $N \rightarrow \infty$ , siis teoreemi 1.1 põhjal  $\|P_N\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq C_1$ , ( $N \in \mathbb{N}$ ), kus konstant  $C_1$  ei sõltu suuruselt  $N$ . Seega

$$\begin{aligned} \|(T - P_N T)x_N\|_{E_1} &\leq \|Tx_N - v\|_{E_1} + \|v - P_N v\|_{E_1} + \\ &\quad + \|P_N v - P_N T x_N\|_{E_1} \leq \\ &\leq C \|Tx_N - v\|_{E_0} + \|v - P_N v\|_{E_1} + \\ &\quad + \|P_N\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \|v - T x_N\|_{E_1} \leq \\ &\leq C \|Tx_N - v\|_{E_0} + \|v - P_N v\|_{E_1} + C' \|v - T x_N\|_{E_0}. \end{aligned}$$

Kuna normid  $\|v - T x_N\|_{E_0}$  ja  $\|v - P_N v\|_{E_1}$  koonduvad nulli, kui  $N \rightarrow \infty$ , siis sellest järeldub, et  $\|(T - P_N T)x_N\|_{E_1} \rightarrow 0$ , kui  $N \rightarrow \infty$ . See on aga vastuolus eeldusega (3.18). Sellega on lemma tõestatud.  $\square$

### 3.3 Üleminek operaatorvõrranditele

Järgnevalt vaatleme võrrandit (2.5) operaatorkujul

$$u = f + \mathcal{T}u, \quad (3.19)$$

kus  $\mathcal{T}$  on integraaloperaator

$$(\mathcal{T}u)(x) = \int_0^x (x-y)^{-\alpha} K(x,y) u(y) dy, \quad x \in [0, b]. \quad (3.20)$$

Kollokatsioonitingimused (2.12) lähilähendi  $u_N \in S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N^{(r,b)})$  leidmiseks on samaväärsed operaatorvõrrandiga

$$u_N = \mathcal{P}_N f + \mathcal{P}_N \mathcal{T}u_N, \quad (3.21)$$

kus  $\mathcal{T}$  on integraaloperaator (3.20) ja operaator  $\mathcal{P}_N$  on defineeritud kujul (3.6). Tõepoolest, et  $\mathcal{P}_N u = 0$  parajasti siis, kui  $u(x_{ij}) = 0$ ,  $j = 1, \dots, m$ ;  $i = 0, \dots, N-1$  (vt. (3.7)), siis on tingimused (2.12) samaväärsed seostega  $\mathcal{P}_N(u_N - f - \mathcal{T}u_N) = 0$ ,  $u_N \in S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N^{(r,b)})$ . Et  $\mathcal{P}_N u_N = u_N$  (vt. lemma 3.2), siis on viimased seosed samaväärsed võrrandiga (3.21).

Samuti vaatleme võrrandit (3.2) operaatorkujul

$$u_\rho = f_\rho + \mathcal{T}_\rho u_\rho, \quad \rho \in \mathbb{N}, \quad (3.22)$$

kus  $\mathcal{T}_\rho$  on integraaloperaator

$$(\mathcal{T}_\rho u_\rho)(t) = \int_0^t K_\rho(t, s) u_\rho(s) ds, \quad t \in [0, b], \quad (3.23)$$

siin  $K_\rho$  on funktsioon kujul (3.3).

**Lemma 3.5.** *Kui  $K_\rho$  avaldises (3.3) tuum  $K \in C(\Delta_b)$ , siis  $\mathcal{T}_\rho$  ( $\rho \in \mathbb{N}$ ) on lineaarne kompaktne operaator ruumist  $L^\infty(0, b)$  ruumi  $C[0, b]$  ja samuti ruumist  $L^\infty(0, b)$  ruumi  $L^\infty(0, b)$ .*

*Tõestus.* Operaatori  $\mathcal{T}_\rho$  lineaarsus on ilmne. Kuna  $K$  on pidev, siis (3.3) põhjal  $K_\rho$  on pidev, kui  $0 < s < t$  (sest  $(t^\rho - s^\rho)^{-\alpha}$  on pidev, kui  $0 < s < t$ ). Näitame, et kehtib

$$|K_\rho(t, s)| \leq C (t - s)^{-\alpha}, \quad t, s \in [0, b], \quad s < t, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3.24)$$

Tõepoolest, kuna  $K$  on pidev, siis  $0 < s < t$  korral

$$\begin{aligned} |K_\rho(t, s)| &= |\rho b^{(1-\rho)(1-\alpha)} s^{\rho-1} (t^\rho - s^\rho)^{-\alpha} K(b^{1-\rho} t^\rho, b^{1-\rho} s^\rho)| \leq \\ &\leq C_1 \sup_{t, s \in [0, b]} |K(t, s)| s^{\rho-1} (t^\rho - s^\rho)^{-\alpha} = \\ &= C_1 \sup_{t, s \in [0, b]} |K(t, s)| s^{\rho-1} (t - s)^{-\alpha} (\rho \xi^{\rho-1})^{-\alpha}, \quad \xi \in (s, t). \end{aligned}$$

Viimast võrratust saab edasi hinnata järgmiselt:

$$|K_\rho(t, s)| \leq C_2 (t - s)^{-\alpha} s^{\rho-1} (s^{\rho-1})^{-\alpha} = C_2 (t - s)^{-\alpha} s^{(\rho-1)(1-\alpha)} \leq C (t - s)^{-\alpha}.$$

Seega kui  $s \rightarrow t$ , siis  $K_\rho$  on nõrgalt singulaarne. Sellisel juhul on operaator  $\mathcal{T}_\rho$  kompaktne ruumist  $L^\infty(0, b)$  ruumi  $C[0, b]$ . Kuna  $C[0, b] \subset L^\infty(0, b)$ , siis on  $\mathcal{T}_\rho$  kompaktne ka kui operaator ruumist  $L^\infty(0, b)$  ruumi  $L^\infty(0, b)$  (vt. näiteks [ 3 ], lk. 215-216). Sellega on lemma tõestatud.  $\square$

### 3.4 Modifitseeritud kollokatsioonimeetodi koondumine

Käesolevas punktis toome tulemuse võrrandi (2.5) lähislahendi  $\tilde{u}_{\rho,N}$  (vt. (3.5)) koondumisest võrrandi (2.5) täpseks lahendiks  $u$ .

**Teoreem 3.1.** *Olgu võrrandis (2.5) antud funktsioonid  $K \in C^m(\Delta_b)$  ja  $f \in C^{m,\alpha}[0,b]$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Lisaks olgu lõigus  $[0,b]$  antud võrk  $\Pi_N^{(r,b)}$  defineeritud kujul (2.6). Siis leidub arv  $N_0 \in \mathbb{N}$  nii, et kollokatsioonitingimused (3.4) määravad iga  $N \geq N_0$  ja  $\rho \in \mathbb{N}$  korral üheselt võrrandi (2.5) lähislahendi  $\tilde{u}_{\rho,N}$  kujul*

$$\tilde{u}_{\rho,N}(x) = u_{\rho,N}\left((b^{\rho-1}x)^{\frac{1}{\rho}}\right), \quad x \in [0,b], \quad u_{\rho,N} \in S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N^{(r,b)}), \quad (3.25)$$

kus  $u_{\rho,N}$  on võrrandi (3.2) lähislahend, mis on leitud punktis 3.1 toodud modifitseeritud kollokatsioonimeetodiga. Seejuures kollokatsiooniparameetrite (2.8),  $(0 \leq c_1 < \dots < c_m \leq 1)$ , mistahes valiku korral kehtib hinnang

$$\sup_{x \in [0,b]} |u(x) - \tilde{u}_{\rho,N}(x)| \leq C \begin{cases} N^{-m}, & m \leq \rho(1-\alpha), r \geq 1 \\ N^{-r\rho(1-\alpha)}, & m > \rho(1-\alpha), 1 \leq r < \frac{m}{\rho(1-\alpha)}, \\ N^{-m}, & m > \rho(1-\alpha), r \geq \frac{m}{\rho(1-\alpha)} \end{cases}, \quad (3.26)$$

kus  $N \geq N_0$ ,  $u$  on võrrandi (2.5) täpne lahend ja konstant  $C$  ei sõltu suurusest  $N$ .

*Tõestus.* Analoogiliselt punktis 3.3 tooduga kirjutame võrrandi (3.2) operaatorkujul (vt. (3.22))

$$u_\rho = f_\rho + \mathcal{T}_\rho u_\rho. \quad (3.27)$$

Lemma 3.5 põhjal operaator  $\mathcal{T}_\rho$  (vt. (3.23)) on lineaarne kompaktne operaator ruumist  $L^\infty(0,b)$  ruumi  $L^\infty(0,b)$ . Kuna homogeesel võrrandil  $u_\rho = \mathcal{T}_\rho u_\rho$  leidub vaid triviaalne lahend  $u_\rho = 0$ ,  $f \in C[0,b]$  ja operaator  $\mathcal{T}_\rho$  on kompaktne, siis teoreemi 1.4 põhjal on võrrand (3.22) üheselt lahenduv ja lahend  $u_\rho = (I - \mathcal{T}_\rho)^{-1} f_\rho \in L^\infty(0,b)$  iga  $\rho \in \mathbb{N}$  korral. Siin  $I$  on ühikoperaator ja  $(I - \mathcal{T}_\rho)^{-1} \in \mathcal{L}(L^\infty(0,b), L^\infty(0,b))$ . Kollokatsioonitingimused (3.4) on samaväärsed operaatorvõrrandiga (vt. (3.21))

$$u_{\rho,N} = \mathcal{P}_N f_\rho + \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho u_{\rho,N}, \quad (3.28)$$

kus  $\mathcal{P}_N$  on defineeritud punktis 3.2. Kuna  $(I - \mathcal{T}_\rho)^{-1} \in \mathcal{L}(L^\infty(0,b), L^\infty(0,b))$ , siis küllalt suurte  $N$  korral (s.t.  $N \geq N_0$  korral) on ka operaatorid  $I - \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho$  pidevalt

pööratavad ruumis  $\mathcal{L}(L^\infty(0, b), L^\infty(0, b))$  ja

$$\|(I - \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^\infty(0, b), L^\infty(0, b))} \leq C, \quad (N \geq N_0), \quad (3.29)$$

kus konstant  $C$  ei sõltu suuruselt  $N$ . Tõepoolest, lemma 3.3 põhjal iga  $u_\rho \in C^{m, \alpha}[0, b]$  korral  $\|\mathcal{P}_N u_\rho - u_\rho\|_{L^\infty(0, b)} \rightarrow 0$ , kui  $N \rightarrow \infty$ . Lemma 3.1 põhjal  $\|\mathcal{P}_N\|_{\mathcal{L}(C[0, b], L^\infty(0, b))} \leq C$  ( $N \in \mathbb{N}$ ). Seega Banach-Steinhausi teoreemi põhjal (vt. teoreem 1.1) iga  $u_\rho \in C[0, b]$  korral  $\|\mathcal{P}_N u_\rho - u_\rho\|_{L^\infty(0, b)} \rightarrow 0$ , kui  $N \rightarrow \infty$ . Lemma 3.4 tõttu saame nüüd valida nii suure  $N_0$ , et  $N \geq N_0$  korral kehtib võrratus

$$\|\mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho - \mathcal{T}_\rho\|_{\mathcal{L}(L^\infty(0, b), L^\infty(0, b))} \|(I - \mathcal{T}_\rho)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^\infty(0, b), L^\infty(0, b))} < 1. \quad (3.30)$$

Esitame operaatori  $I - \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho$  kujul

$$I - \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho = [I - (\mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho - \mathcal{T}_\rho)(I - \mathcal{T}_\rho)^{-1}](I - \mathcal{T}_\rho).$$

Teoreemi 1.2 põhjal leidub pöördoperaator  $(I - (\mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho - \mathcal{T}_\rho)(I - \mathcal{T}_\rho)^{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(L^\infty(0, b), L^\infty(0, b))$ . Teoreemi 1.3 põhjal on operaator  $I - \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho \in \mathcal{L}(L^\infty(0, b), L^\infty(0, b))$  pööratav ja kehtib hinnang

$$\|(I - \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^\infty(0, b), L^\infty(0, b))} \leq \frac{\|(I - \mathcal{T}_\rho)^{-1}\|}{1 - \|\mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho - \mathcal{T}_\rho\| \|(I - \mathcal{T}_\rho)^{-1}\|}.$$

Siit järeldub vahetult hinnang (3.29). Niisiis,  $N \geq N_0$  korral on võrrandil (3.28) olemas parajasti üks lahend  $u_{\rho, N} \in S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N^{(r, b)})$ . Arvestades seoseid (3.27) ja (3.28) võime kirjutada

$$u_{\rho, N} = (I - \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho)^{-1} \mathcal{P}_N f_\rho, \quad \mathcal{P}_N f_\rho = (\mathcal{P}_N - \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho) u_\rho,$$

$$u_\rho - u_{\rho, N} = (I - \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho)^{-1} (I - \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho) u_\rho - (I - \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho)^{-1} (\mathcal{P}_N - \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho) u_\rho,$$

millest saame, et

$$u_\rho - u_{\rho, N} = (I - \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho)^{-1} (u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho), \quad N \geq N_0. \quad (3.31)$$

Võrratuse (3.29) põhjal saame hinnangu

$$\|u_\rho - u_{\rho, N}\|_{L^\infty(0, b)} \leq C \|u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho\|_{L^\infty(0, b)}, \quad N \geq N_0. \quad (3.32)$$

Teoreem 2.1 põhjal võrrand (2.5) on üheselt lahenduv ja lahend  $u \in C^{m, \alpha}[0, b]$ . Siis lemma 2.1 põhjal  $u_\rho(t) = u(b^{1-\rho} t^\rho) \in C[0, b] \cap C^m(0, b)$ . Hinnang (3.26) järeldub nüüd lemmast 3.3 ja seosest (3.25). Sellega on teoreem tõestatud.  $\square$

### 3.5 Kollokatsioonimeetodi superkoondumine

Järgnevalt toome ära teoreemi modifitseeritud kollokatsioonimeetodi lokaalse koondumise kohta.

**Teoreem 3.2.** *Olgu võrrandis (2.5) antud funktsioonid  $K \in C^{m+1}(\Delta_b)$  ja  $f \in C^{m+1,\alpha}[0, b]$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Lisaks olgu lõigus  $[0, b]$  antud võrk  $\Pi_N^{(r,b)}$  defineeritud kujul (2.6) ning kollokatsiooniparameetrid (2.8) ( $0 \leq c_1 < \dots < c_m \leq 1$ ) valitud nii, et nad oleksid kvadratuurvalemi (1.13) sõlmed. Eeldame, et kvadratuurvalem (1.13) on täpne iga  $(m+1)$ -astme polünoomi puhul.*

*Kui parameeter  $r$  valida tingimustest*

$$\begin{cases} m \leq \rho(1-\alpha) - 1, & r \geq 1 \\ \rho(1-\alpha) - 1 < m \leq \rho(1-\alpha), & r \geq 1 + \frac{1}{\rho} \\ m > \rho(1-\alpha), & r \geq \frac{m+1-\alpha}{\rho(1-\alpha)} \end{cases}, \quad (3.33)$$

*siis kehtib hinnang*

$$\sup_{\substack{x \\ x=b^{1-\rho}t^\rho \\ t \in X(N)}} |u(x) - \tilde{u}_{\rho,N}(x)| \leq C N^{-(m+1-\alpha)}, \quad N \geq N_0 \in \mathbb{N}, \quad (3.34)$$

*kus  $\rho \in \mathbb{N}$ ,  $u$  on võrrandi (2.5) täpne lahend,  $\tilde{u}_{\rho,N}$  on defineeritud valemiga (3.25), kollokatsioonipunktide hulk  $X(N)$  on defineeritud valemiga (2.10) ja konstant  $C$  ei sõltu suurusest  $N$ .*

*Tõestus.* Olgu täidetud teoreemi 3.2 eeldused. Siis teoreemi 3.1 põhjal võrrandil (2.5) leidub parajasti üks lahend  $u \in C[0, b] \cap C^{m+1}(0, b]$  ning  $\exists N_0 \in \mathbb{N}$  nii, et kollokatsioonitingimused (3.4) määravad iga  $N \geq N_0$  ja  $\rho \in \mathbb{N}$  korral üheselt võrrandi (2.5) lähilahendi  $\tilde{u}_{\rho,N}$  kujul (3.5). Võrduste (3.3) ja (3.5) põhjal võime kirjutada

$$\sup_{\substack{x \\ x=b^{1-\rho}t^\rho \\ t \in X(N)}} |u(x) - \tilde{u}_{\rho,N}(x)| = \sup_{t \in X(N)} |u(b^{1-\rho}t^\rho) - \tilde{u}_{\rho,N}(b^{1-\rho}t^\rho)| = \sup_{t \in X(N)} |u_\rho(t) - u_{\rho,N}(t)|.$$

Operaatori  $\mathcal{P}_N$  definitsioonist (3.6) järeldub, et  $(\mathcal{P}_N u_\rho)(t) = u_\rho(t)$ ,  $t \in X(N)$ .

Seega

$$\sup_{t \in X(N)} |u_\rho(t) - u_{\rho,N}(t)| = \sup_{t \in X(N)} |(\mathcal{P}_N u_\rho)(t) - u_{\rho,N}(t)| \leq \|\mathcal{P}_N u_\rho - u_{\rho,N}\|_{L^\infty(0,b)}$$

Rakendame võrrandi (3.27) mõlemale poolele operaatorit  $\mathcal{P}_N$ . Siis

$$\mathcal{P}_N u_\rho = \mathcal{P}_N f_\rho + \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho u_\rho. \quad (3.35)$$

Lahutades omavahel võrrandid (3.35) ja (3.28) saame

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N u_\rho - u_{\rho,N} &= \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho u_\rho - \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho u_{\rho,N} = \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho (u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho + \mathcal{P}_N u_\rho - u_{\rho,N}) = \\ &= \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho (u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho) + \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho (\mathcal{P}_N u_\rho - u_{\rho,N}). \end{aligned}$$

Järelikult

$$(\mathcal{I} - \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho) (\mathcal{P}_N u_\rho - u_{\rho,N}) = \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho (u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho).$$

Teoreemi 3.1 tõestuses näitasime, et iga  $N \geq N_0$  korral on operaatorid  $\mathcal{I} - \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho$  pidevalt pööratavad ja kehtib hinnang (3.29). Seega

$$\mathcal{P}_N u_\rho - u_{\rho,N} = (\mathcal{I} - \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho)^{-1} \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho (u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho)$$

ning (3.29) ja lemma 3.1 põhjal

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_N u_\rho - u_{\rho,N}\|_{L^\infty(0,b)} &\leq \|(\mathcal{I} - \mathcal{P}_N \mathcal{T}_\rho)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^\infty(0,b), L^\infty(0,b))} \|\mathcal{P}_N\|_{\mathcal{L}(C[0,b], L^\infty(0,b))} \cdot \\ &\quad \cdot \|\mathcal{T}_\rho (u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho)\|_{L^\infty(0,b)} \leq C \|\mathcal{T}_\rho (u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho)\|_{L^\infty(0,b)}, \end{aligned}$$

kus konstant  $C$  ei sõltu osalõikude arvust  $N$ . Hindame suurust

$$\|\mathcal{T}_\rho (u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho)\|_{L^\infty(0,b)} = \sup_{j=1, \dots, N} \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \left| \int_0^t K_\rho(t, s) [u_\rho(s) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(s)] ds \right|. \quad (3.36)$$

Leidub selline indeks  $j \in \{1, \dots, N\}$ , et kehtib hinnang

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_\rho (u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho)\|_{L^\infty(0,b)} &\leq \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \left| \sum_{k=1}^{j-2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} K_\rho(t, s) [u_\rho(s) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(s)] ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} K_\rho(t, s) [u_\rho(s) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(s)] ds + \int_{t_{j-1}}^t K_\rho(t, s) [u_\rho(s) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(s)] ds \right|. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Kui  $j = 1$ , siis viimases võrratuses summat ja esimest integraali ei ole.

Hindame võrratuses (3.37) liikmeid eraldi. Esiteks vaatame summat

$$E_1^j = \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \left| \sum_{k=1}^{j-2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} K_\rho(t, s) [u_\rho(s) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(s)] ds \right|, \quad j \geq 3. \quad (3.38)$$

Toome sisse operaatori  $\tilde{\mathcal{P}}_N$ , mis igas osalõiguses  $[t_{k-1}, t_k]$  seab pidevale funktsioonile vastavusse  $m$ -astme polünoomi  $\tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho$  (vt.(3.6)). Polünoomi  $\tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho$  moodustame kollokatsiooniparameetrite  $\{c_1, \dots, c_m\} \cup c'$  ( $c' \notin \{c_1, \dots, c_m\}$ ) abil nii, et kehtiksid tingimused (2.8). Sel juhul

$$\begin{aligned} E_1^j &\leq \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \left| \sum_{k=1}^{j-2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} K_\rho(t, s) [u_\rho(s) - (\tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho)(s)] ds \right| + \\ &+ \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \left| \sum_{k=1}^{j-2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} K_\rho(t, s) [(\tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho)(s) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(s)] ds \right| = E_{1,1}^j + E_{1,2}^j. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Hindame esimest liiget

$$\begin{aligned} E_{1,1}^j &= \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \left| \sum_{k=1}^{j-2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} K_\rho(t, s) [u_\rho(s) - (\tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho)(s)] ds \right| \leq \\ &\leq \|u_\rho - \tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho\|_{L^\infty(0,b)} \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \sum_{k=1}^{j-2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |K_\rho(t, s)| ds \end{aligned} \quad (3.40)$$

Edasi kasutame  $K_\rho$  jaoks võrratust (3.24). Seega

$$\begin{aligned} E_{1,1}^j &\leq C_1 \|u_\rho - \tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho\|_{L^\infty(0,b)} \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \sum_{k=1}^{j-2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t-s)^{-\alpha} ds = \\ &= \frac{C_1}{1-\alpha} \|u_\rho - \tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho\|_{L^\infty(0,b)} \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \sum_{k=1}^{j-2} [(t-t_{k-1})^{1-\alpha} - (t-t_k)^{1-\alpha}] = \\ &= \frac{C_1}{1-\alpha} \|u_\rho - \tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho\|_{L^\infty(0,b)} \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} [t^{1-\alpha} - (t-t_{j-2})^{1-\alpha}] \leq \\ &\leq C_2 \|u_\rho - \tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho\|_{L^\infty(0,b)}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Liikme  $E_{1,2}^j$  hindamiseks võtame igas osalõiguses  $[t_{k-1}, t_k]$  punkti  $s_k = t_{k-1} + \frac{(t_k - t_{k-1})}{2}$ . Liidame ja lahutame integraali märgi all liikme  $K_\rho(t, s_k)$  ning kasutame vahe

$(K_\rho(t, s) - K_\rho(t, s_k))$  jaoks Lagrange'i keskväärtushinnangut. Siis saame

$$\begin{aligned}
E_{1,2}^j &= \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \left| \sum_{k=1}^{j-2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} K_\rho(t, s) [(\tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho)(s) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(s)] ds \right| = \\
&= \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \left| \sum_{k=1}^{j-2} \left[ \int_{t_{k-1}}^{t_k} [K_\rho(t, s) - K_\rho(t, s_k)] [(\tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho)(s) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(s)] ds + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{t_{k-1}}^{t_k} K_\rho(t, s_k) [(\tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho)(s) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(s)] ds \right] \right| = \\
&= \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \left| \sum_{k=1}^{j-2} \left[ \frac{\partial K_\rho(t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\xi_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [s - s_k] [(\tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho)(s) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(s)] ds + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + K_\rho(t, s_k) \int_{t_{k-1}}^{t_k} [(\tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho)(s) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(s)] ds \right] \right|, \quad \xi_k \in [t_{k-1}, t_k].
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Osutub, et  $E_{1,2}^j = 0$ . Selle näitamiseks kasutame võrduse (3.42) mõlemas integraalis kvadratuurvalemit (1.14). Esimese integraali märgi all on  $(m+1)$ -astme polünoom ja teise integraali märgi all on  $m$ -astme polünoom. Kuna teoreemi eelduse kohaselt meie kvadratuurvalem on täpne kõigi ülimalt  $(m+1)$ -astme polünoomide puhul, siis esimese integraali korral võime kirjutada

$$\begin{aligned}
&\int_{t_{k-1}}^{t_k} [s - s_k] [(\tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho)(s) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(s)] ds = (t_k - t_{k-1}) \cdot \\
&\cdot \sum_{i=1}^m B_i [t_{k-1,i} - s_k] [(\tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho)(t_{k-1,i}) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(t_{k-1,i})] = 0, \quad t_{k-1,i} \in X(N).
\end{aligned}$$

Viimane võrdus kehtib sellepärast, et  $(\tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho)(t_{k-1,i}) = u_\rho(t_{k-1,i})$  ja  $(\mathcal{P}_N u_\rho)(t_{k-1,i}) = u_\rho(t_{k-1,i})$ . Analoogiliselt saab näidata, et hinnangu (3.42) teine integraal võrdub nulliga. Seega

$$E_1^j \leq C_2 \|u_\rho - \tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho\|_{L^\infty(0,b)}. \tag{3.43}$$

Hindame järgnevalt (3.37) teist liiget  $E_2^j$ ,

$$E_2^j = \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \left| \int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} K_\rho(t, s) [u_\rho(s) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(s)] ds + \int_{t_{j-1}}^t K_\rho(t, s) [u_\rho(s) - (\mathcal{P}_N u_\rho)(s)] ds \right|. \tag{3.44}$$

Märgime, et  $K_\rho(t, s)$  on katkev punktis  $s = t$ . Kasutame hindamiseks võrratust (3.24). Siis

$$\begin{aligned}
E_2^j &\leq \|u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho\|_{L^\infty(0,b)} \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \left| \int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} |K_\rho(t, s)| ds + \int_{t_{j-1}}^t |K_\rho(t, s)| ds \right| \leq \\
&\leq C_3 \|u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho\|_{L^\infty(0,b)} \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \left| \int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} (t-s)^{-\alpha} ds + \int_{t_{j-1}}^t (t-s)^{-\alpha} ds \right| = \\
&= C_3 \|u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho\|_{L^\infty(0,b)} \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \left| -\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{s=t_{j-2}}^{s=t_{j-1}} - \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{s=t_{j-1}}^{s=t} \right| \leq \\
&\leq C_4 \|u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho\|_{L^\infty(0,b)} N^{-(1-\alpha)}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Võttes kokku  $E_1^j$  ja  $E_2^j$  hinnangud võime kirjutada

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}_\rho(u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho)\|_{L^\infty(0,b)} &\leq C_5 (\|u_\rho - \tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho\|_{L^\infty(0,b)} + \\
&+ \|u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho\|_{L^\infty(0,b)} N^{-(1-\alpha)}).
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Hinnang (3.34) jäeldub nüüd lemmast 3.3, kasutades võrratust suuruste  $u_\rho - \tilde{\mathcal{P}}_N u_\rho$  ja  $u_\rho - \mathcal{P}_N u_\rho$  hindamiseks seostega (3.33) määratud  $r$  väärtuste korral.  $\square$

## 4 Arvulised tulemused

Antud peatükis toome ära arvulised tulemused teoreemide 3.1 ja 3.2 teoreetiliste hinnangute kontrollimiseks. Kuna lineaarvõrrandite süsteem (2.19) sisaldab kordajatena integraale kujul (2.20) ja (2.21), mis enamasti ei ole vahetult täpselt leitavad, siis tuleb nende leidmiseks sageli kasutada eriliiki teisendusi. Antud peatüki esimeses punktis toome sisse gammafunktsiooni ja hüpergeomeetrilise funktsiooni, mille abil saab mõningatel juhtudel leida vajalike integraalide väärtusi. Teises punktis toome ära kirjelduse selle kohta, kuidas on teisendatud vastavad integraalid lisas olevas programmis 5.1 tuuma  $K_\rho$  (3.3) korral, kus  $K(t, s) = 1$ . Lihtsuse mõttes vaatleme ülesandeid ja vastavaid integraale lõigus  $[0, b] = [0, 1]$ . Kolmandas punktis toome ära testimiseks kasutatud ülesande ja neljandas punktis vastavate tulemuste analüüsi ja tabelid meetodi koondumise kohta meie testüleande jaoks.

### 4.1 Gammafunktsioon ja hüpergeomeetriline funktsioon

Gammafunktsiooniks nimetatakse funktsiooni kujul

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in (0, \infty). \quad (4.1)$$

Kehtivad valemid (vt. [ 2 ], lk. 253)

$$\Gamma(n) = (n - 1)!, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\Gamma(z + k)}{\Gamma(z)} = \prod_{j=0}^{k-1} (z + j), \quad k \in \mathbb{N}, \quad z \in (0, \infty). \quad (4.3)$$

Olgu antud vektorid

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x_1, \dots, x_{n_1}], \quad x_i \in (0, \infty), \quad i = 1, \dots, n_1, \quad n_1 \in \mathbb{N}, \\ \mathbf{y} &= [y_1, \dots, y_{n_2}], \quad y_i \in (0, \infty), \quad i = 1, \dots, n_2, \quad n_2 \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Vaatleme funktsiooni

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \prod_{i=1}^{n_1} \frac{\Gamma(x_i + k)}{\Gamma(x_i)} \prod_{i=1}^{n_2} \frac{\Gamma(y_i)}{\Gamma(y_i + k)} \right) \frac{z^k}{k!}, \quad z \in (0, \infty), \quad (4.5)$$

kus  $\Gamma(z)$  on gammafunktsioon (4.1). Funktsiooni  $H$  nimetatakse ka hüpergeomeetriliseks funktsiooniks ja kaasaegsete matemaatikaprogrammide arvutuspaketid sisaldavad meetodeid tema väärtuste leidmiseks.

## 4.2 Integraalide teisendus

Vaatleme integraali kujul

$$I = h \int_0^M K_\rho(s, t + v h) P_{m-1}(v) dv, \quad m, \rho \in \mathbb{N}, \quad (4.6)$$

kus  $h$  on osalõigupikkus,  $s \neq 0$  on kollokatsioonipunkt,  $t$  on sõlm (vt. punkt 2.3, kus  $b = 1$ ),  $M \in (0, 1]$ ,  $K_\rho$  on tuum kujul (3.3) ( $K(x, y) = 1$ ) ja  $P_{m-1}$  on  $(m - 1)$ -astme polünoom lõigus  $[0, 1]$ . Asendades vastavad muutujad, saame (4.6) kirjutada kujul

$$I = h \int_0^M \rho \frac{(t + v h)^{\rho-1}}{(s^\rho - (t + v h)^\rho)^\alpha} \sum_{\mu=0}^{m-1} A_\mu v^\mu dv. \quad (4.7)$$

Teisendame seda integraali järgmiselt:

$$\begin{aligned} I &= \rho \sum_{\mu=0}^{m-1} h A_\mu \int_0^M \frac{(t + v h)^{\rho-1} v^\mu}{(s^\rho - (t + v h)^\rho)^\alpha} dv = \rho \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{A_\mu}{h^\mu} \int_t^{t+Mh} \frac{v^{\rho-1} (v-t)^\mu}{(s^\rho - v^\rho)^\alpha} dv = \\ &= \rho \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{A_\mu s^{\rho(1-\alpha)+\mu}}{h^\mu} \int_{\frac{t}{s}}^{\frac{t+Mh}{s}} \frac{v^{\rho-1} (v-\frac{t}{s})^\mu}{(1-v^\rho)^\alpha} dv = \rho \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{A_\mu s^{\rho(1-\alpha)+\mu}}{h^\mu} \\ &\cdot \int_{\frac{t}{s}}^{\frac{t+Mh}{s}} \frac{v^{\rho-1} \sum_{i=0}^{\mu} \frac{\mu!}{i!(\mu-i)!} (-1)^i \left(\frac{t}{s}\right)^i v^{\mu-i}}{(1-v^\rho)^\alpha} dv = \\ &= \rho \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{\mu} (-1)^i \frac{A_\mu s^{\rho(1-\alpha)+\mu-i} t^i}{h^\mu} \frac{\mu!}{i!(\mu-i)!} \int_{\frac{t}{s}}^{\frac{t+Mh}{s}} \frac{v^{\rho-1+\mu-i}}{(1-v^\rho)^\alpha} dv. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Muudame viimases võrduses summeerimise järjekorda, kogudes kokku integraalid, mis sisaldavad liiget  $v^{\rho-1+\mu-i}$ . Selleks toome sisse muutuja  $j = \mu - i$ . Järgnevast arusaamiseks annab lihtsa ettekujutuse järgmine protseduur: me summeerime mingi diagonaalmaatriksi ridade ja veergude asemel selle diagonaalmaatriksi neid diagonaale, mis suunduvad vasakult paremale ja ülalt alla. Siis saame

$$\begin{aligned} I &= \rho \sum_{j=0}^{m-1} \left[ \sum_{\mu=j}^{m-1} (-1)^{\mu-j} \frac{A_\mu s^{\rho(1-\alpha)+j} t^{\mu-j}}{h^\mu} \frac{\mu!}{j!(\mu-j)!} \right] \int_{\frac{t}{s}}^{\frac{t+Mh}{s}} \frac{v^{\rho+j-1}}{(1-v^\rho)^\alpha} dv = \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \left[ \sum_{\mu=j}^{m-1} (-1)^{\mu-j} \frac{A_\mu s^{\rho(1-\alpha)+j} t^{\mu-j}}{h^\mu} \frac{\mu!}{j!(\mu-j)!} \right] \int_{\left(\frac{t}{s}\right)^\rho}^{\left(\frac{t+Mh}{s}\right)^\rho} \frac{v^j}{(1-v)^\alpha} dv. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Arendame viimases võrduses funktsiooni  $(1-v)^{-\alpha}$  punktis  $v=0$  Taylori ritta, s.t.

$$(1-v)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha+i)}{k!} v^k.$$

Siit saame

$$\int_A^B \frac{v^{\frac{j}{\rho}}}{(1-v)^{\alpha}} dv = \int_A^B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha+i)}{k!} v^{\frac{j}{\rho}+k} dv = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha+i)}{k! (\frac{j}{\rho}+1+k)} v^{\frac{j}{\rho}+1+k} \Big|_{v=A}^{v=B}. \quad (4.10)$$

Edasi kasutame korduvalt valemit (4.3). Siis saame (4.10) teisendada järgmiselt:

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{v^{\frac{j}{\rho}}}{(1-v)^{\alpha}} dv &= v^{\frac{j}{\rho}+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha) (\frac{j}{\rho}+1+k)} \frac{v^k}{k!} \Big|_{v=A}^{v=B} = \\ &= v^{\frac{j}{\rho}+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (\frac{j}{\rho}+1+i)}{\prod_{i=0}^k (\frac{j}{\rho}+1+i)} \frac{v^k}{k!} \Big|_{v=A}^{v=B} = \\ &= \frac{v^{\frac{j}{\rho}+1}}{\frac{j}{\rho}+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\frac{j}{\rho}+1+k)}{\Gamma(\frac{j}{\rho}+1)} \frac{\Gamma(\frac{j}{\rho}+2)}{\Gamma(\frac{j}{\rho}+2+k)} \frac{v^k}{k!} \Big|_{v=A}^{v=B}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Näeme, et viimases avaldises olev summa on sarnane funktsiooni  $H$  definitsiooniga (4.5), kus  $n_1 = 2$  ja  $n_2 = 1$ . Seega

$$\int_A^B \frac{v^{\frac{j}{\rho}}}{(1-v)^{\alpha}} dv = \frac{v^{\frac{j}{\rho}+1}}{\frac{j}{\rho}+1} H \left( \left[ \alpha, \frac{j}{\rho}+1 \right], \left[ \frac{j}{\rho}+2 \right], v \right) \Big|_{v=A}^{v=B}. \quad (4.12)$$

Pannes nüüd kokku valemid (4.9) ja (4.12) saame

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=0}^{m-1} \left[ \sum_{\mu=j}^{m-1} (-1)^{\mu-j} \frac{A_{\mu} s^{\rho(1-\alpha)+j} t^{\mu-j}}{h^{\mu}} \frac{\mu!}{j! (\mu-j)!} \right] \cdot \\ &\cdot \frac{v^{\frac{j}{\rho}+1}}{\frac{j}{\rho}+1} H \left( \left[ \alpha, \frac{j}{\rho}+1 \right], \left[ \frac{j}{\rho}+2 \right], v \right) \Big|_{v=(\frac{t}{s})^{\rho}}^{v=(\frac{t+Mh}{s})^{\rho}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

### 4.3 Testülesanne

Vaatleme võrrandit (2.5), kus  $b=1$ ,  $K(x,y)=1$ ,  $\alpha=\frac{1}{2}$ :

$$u(x) = f(x) + \int_0^x (x-y)^{-\frac{1}{2}} u(y) dy, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.14)$$

Vaatleme võrrandi (4.14) vabaliikme ja lahendi komplekti :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} (1 + x^{\frac{1}{4}}) - \frac{1}{2} \pi x - \frac{6}{5} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma^2 \left( \frac{3}{4} \right) x^{\frac{5}{4}}, \\ u(x) &= \sqrt{x} (1 + x^{\frac{1}{4}}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

On lihtne kontrollida, et funktsioonid  $f$  ja  $u$  rahuldavad tingimusi (2.1) ja seega kuuluvad hulka  $C^{m, \frac{1}{2}}[0, 1]$ .

#### 4.4 Arvuliste tulemuste analüüs

Teoreetilisi tulemusi on kontrollitud numbriliste eksperimentide abil. Osa saadud tulemusi on toodud tabelites 1 – 25, kus  $N$  on osalõikude arv ja  $\|E_K\|_N$  tähistab hinnangut (3.34) osalõikude arvu  $N$  korral ehk ülesande (4.14) teisendatud ülesande (3.2) lähislahendi viga kollokatsioonipunktides. Tabelites olevad vead on kirjutatud eksponentsiaalsel kujul s.t.  $a 10^{-x} = a E - x$ . Lisas 2 olevas programmikoodis on hinnang (3.34) realiseeritud normina  $\sup_{t \in X(N)} |u_\rho(t) - u_{\rho, N}(t)|$ , kus  $u_\rho$  on võrrandi (3.2) täpne lahend ja  $u_{\rho, N}$  lähislahend, mis on leitud peatükis 2 toodud spline-kollokatsioonimeetodiga.  $\|E\|_N$  tähistab hinnangut (3.26) osalõikude arvu  $N$  korral. Lisas 2 olevas programmikoodis on hinnang (3.26) realiseeritud normina

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, b]} |u_\rho(t) - u_{\rho, N}(t)| &\approx \\ &\approx \max_{i=0, \dots, N-1} \max_{j=0, \dots, 20} \left| u_\rho \left( t_i + \frac{j}{20} (t_{i+1} - t_i) \right) - u_{\rho, N} \left( t_i + \frac{j}{20} (t_{i+1} - t_i) \right) \right|, \end{aligned}$$

kus  $t_i$  ( $i = 0, \dots, N$ ) on võrgu (2.6) sõlmed. Tulemuste arvutamiseks me varieerime väärtust  $\rho$  ja lõigu ebahütlusparameetrit  $r$ . Märgime, et kui  $\rho = 1$ , siis ülesanded (2.5) ja (3.2) langevad kokku. Lisaks Gaussi ja Radau II-liiki kollokatsiooniparameetritele kasutame  $m = 3$  korral komplekti  $c_1 = 0.1, c_2 = 0.7, c_3 = 0.9$  ja  $m = 2$  korral komplekti  $c_1 = 0.4, c_2 = 0.9$ .

#### Koondumine tervel lõigul

Teoreem 3.1 ütleb, et kui me kasutame lineaarsplaine ( $m = 2$ ) ja suurendame osalõikude arvu  $N$  kaks korda, siis peab piisavalt suurte  $N$  korral viga  $\|E\|_N$  terves

lõigus vastavalt  $r$ -i väärtustele vähenema ligikaudu

$$\begin{aligned}
 2^{0.5} &\approx 1.4 \text{ korda, kui } \rho = 1, & r = 1, \\
 &2 \text{ korda, kui } \rho = 1, & r = 2, \\
 2^{1.5} &\approx 2.8 \text{ korda, kui } \rho = 1, & r = 3, \\
 &4 \text{ korda, kui } \rho = 1, & r \geq 4, \\
 &2 \text{ korda, kui } \rho = 2, & r = 1, \\
 &4 \text{ korda, kui } \rho = 2, & r \geq 2, \\
 2^{1.5} &\approx 2.8 \text{ korda, kui } \rho = 3, & r = 1, \\
 &4 \text{ korda, kui } \rho = 3, & r \geq \frac{4}{3}, \\
 &4 \text{ korda, kui } \rho \geq 4, & r \geq 1,
 \end{aligned}$$

Kui me kasutame ruutsplaine ( $m = 3$ ) ja suurendame osalõikude arvu  $N$  kaks korda, siis peab piisavalt suurte  $N$  korral viga  $\|E\|_N$  terves lõigus vastavalt  $r$ -i väärtustele vähenema ligikaudu

$$\begin{aligned}
 2^{0.5} &\approx 1.4 \text{ korda, kui } \rho = 1, & r = 1, \\
 &2 \text{ korda, kui } \rho = 1, & r = 2, \\
 2^{1.5} &\approx 2.8 \text{ korda, kui } \rho = 1, & r = 3, \\
 &4 \text{ korda, kui } \rho = 1, & r = 4, \\
 2^{2.5} &\approx 5.7 \text{ korda, kui } \rho = 1, & r = 5, \\
 &8 \text{ korda, kui } \rho = 1, & r \geq 6, \\
 &2 \text{ korda, kui } \rho = 2, & r = 1, \\
 &4 \text{ korda, kui } \rho = 2, & r = 2, \\
 &8 \text{ korda, kui } \rho = 2, & r \geq 3, \\
 2^{1.5} &\approx 2.8 \text{ korda, kui } \rho = 3, & r = 1, \\
 &8 \text{ korda, kui } \rho = 3, & r \geq 2, \\
 &8 \text{ korda, kui } \rho \geq 6, & r \geq 1.
 \end{aligned}$$

Kasutades ruutsplaine ja kollokatsiooniparameetritena  $c_1, c_2, c_3$  Gaussi punkte, siis tabelitest 1 - 5 on näha, et  $\rho = 1$  ja  $r = 1, r = 4$  korral on praktilised tulemused heas kooskõlas teoreetilistega. Võttes  $r = 6$ , jääb maksimaalsest suhtest 8 natukene

puudu, kuid tulemus on ikkagi lähedane. Kui lasta  $r$ -il minna suuremaks (nt.  $r = 8.1$ ), siis tulemused veidi halvenevad, sest et suured  $r$ -i väärtused põhjustavad suuremaid arvutusvigu. Kui  $\rho = 2$ , siis  $r = 1$  korral väheneb viga 2.8 korda teoreetiliselt saadud 2 asemel. Kui  $r > 1$ , siis kõikide valitud  $\rho$ -de korral jääb maksimumsuhtest 8 natukene puudu, kuid tulemus on siiski teoreetilisele lähedane. Põhjus natukene halvemateks hinnanguteks võib olla selles, et  $N$  ei ole piisavalt suur.

Kasutades ruutsplaine ja kollokatsiooniparameetritena  $c_1, c_2, c_3$  Radau II-liiki punkte, siis tabelitest 6 - 10 on näha, et eeltoodud arutlused Gaussi punktide kohta kehtivad ka siin. Erinevus on aga maksimaalsetes suhetes, kus Radau II-liiki punktide korral need suhted on pisut üle 8, kuid Gaussi punktide korral jäi enamasti 8-st natukene puudu. Samuti on Radau II-liiki punktidele iseloomulik vigade kõrgemad suhted väiksemate osalõikude arvu  $N$  korral, kui  $\rho = 1$ .

Kasutades ruutsplaine ja kollokatsiooniparameetritena  $c_1, c_2, c_3$  suvaliselt valitud punkte 0.1, 0.7, 0.9, siis (vt. tabelid 11 - 15) tulemused kinnitavad juba eespool öeldut. Nii nagu Gaussi punktide korral, jäävad siingi maksimaalsed suhted 8-st natukene halvemaks.

Kasutades lineaarsplaine ja kollokatsiooniparameetritena  $c_1, c_2$  Gaussi punkte, siis tabelitest 16 - 20 on näha, et  $\rho = 1$  korral on praktilised tulemused heas kooskõlas teoreetilistega. Nii nagu ruutsplainide korral, siis ka nüüd on tulemus komplekti  $\rho = 2$  ja  $r = 1$  jaoks veidi parem (suhe 2.8). Ülejäänud juhtudel on arvulised näidud jällegi vastavuses teooriaga.

Kasutades lineaarsplaine ja kollokatsiooniparameetritena  $c_1, c_2$  suvaliselt valitud punkte 0.4, 0.9, siis tabelitest 21 - 25 ilmneb, et  $r = 1$  ja  $\rho = 2$  ning  $\rho = 3$  korral on koondumine veidi kiirem teoreetilisest (suhted vastavalt 2.8 ja 3.9 suhete 2 ja 2.8 asemel). Kui  $\rho = 1$  ja  $r = 3$ , siis on suhe 3.3 samuti parem kui teoreetiline 2.8, kuid ilmselt koonduv selleks. Ülejäänud juhtudel on tulemused heas vastavuses teooriaga.

### **Koondumine kollokatsioonipunktides**

Teoreem 3.2 ütleb, et kui me kasutame lineaarsplaine ( $m = 2$ ), sobivaid kollokatsiooniparameetreid  $c_1, \dots, c_m$  ja suurendame osalõikude arvu  $N$  kaks korda, siis peab

piisavalt suurte  $N$  korral viga  $\|E_K\|_N$  kollokatsioonipunktides vastavalt  $r$ -i väärtustele

$$\begin{aligned}\rho = 1, & \quad r \geq 5, \\ \rho = 2, & \quad r \geq 2.5, \\ \rho = 3, & \quad r \geq \frac{5}{3}, \\ \rho = 4, & \quad r \geq \frac{5}{4}, \\ \rho \geq 6, & \quad r \geq 1\end{aligned}$$

vähemena ligikaudu  $2^{2.5} \approx 5.7$  korda.

Kui me kasutame ruutsplaine ( $m = 3$ ) ja suurendame osalõikude arvu  $N$  kaks korda, siis peab piisavalt suurte  $N$  korral viga  $\|E_K\|_N$  kollokatsioonipunktides vastavalt  $r$ -i väärtustele

$$\begin{aligned}\rho = 1, & \quad r \geq 7, \\ \rho = 2, & \quad r \geq 3.5, \\ \rho = 3, & \quad r \geq \frac{7}{3}, \\ \rho = 6, & \quad r \geq \frac{7}{6}, \\ \rho \geq 8, & \quad r \geq 1\end{aligned}$$

vähemena ligikaudu  $2^{3.5} \approx 11.3$  korda.

Kasutades ruutsplaine ja kollokatsiooniparameetritena  $c_1, c_2, c_3$  Gaussi punkte (vastav kvadratuurvalem (1.13) on täpne kõigi  $(2m - 1)$ -astme polünoomide korral ja seega  $m \geq 2$  jaoks on teoreemi 3.2 eeldused täidetud), siis tabelitest 1 - 5 on näha, et maksimaalne vigade suhe 11.3 saavutatakse teoreetilisest varem. Näiteks  $\rho = 1$  korral väheneb viga ligikaudu 11.3 korda juba  $r = 4$  korral teoreetilise  $r = 7$  asemel. Kui  $\rho = 2$ , siis saavutatakse maksimaalne hinnang vähemalt  $r = 2$  korral teoreetilise  $r = 3.5$  asemel. Samuti on vigade  $\|E_K\|_N$  suhted  $\rho = 3$  ja  $\rho = 6$  korral paremad kui teoreetilised hinnangud. Seega võivad teoreemis 3.2 toodud tulemused olla parandatavad.

Kasutades ruutsplaine ja kollokatsiooniparameetritena  $c_1, c_2, c_3$  Radau II-liiki punkte (vastav kvadratuurvalem (1.13) on täpne kõigi  $(2m - 2)$ -astme polünoomide korral ja seega  $m \geq 3$  jaoks on teoreemi 3.2 eeldused täidetud), siis tabelitest 6 - 10 on näha, et tulemused on analoogilised nendele, millele sai tähelepanu juhitud

Gaussi punktide korral. Erinevus on maksimaalsetes suhetes  $\rho = 1$  jaoks, kus Radau II-liiki punktidele on iseloomulikud tublisti kõrgemad suhted väiksemate osalõikude arvu  $N$  korral.

Kasutades ruutsplaine ja kollokatsiooniparameetritena  $c_1, c_2, c_3$  suvaliselt valitud punkte 0.1, 0.7, 0.9, siis tabelitest 11 - 15 ilmneb, et kõikidel juhtudel, kui  $\rho = 1, r \geq 4$  ja  $\rho > 1, r \geq 1$ , siis viga kollokatsioonipunktides väheneb osalõikude arvu suurendamisel ligikaudu 8 korda, mis on mõnel juhul (nt.  $\rho = 2, r = 1$ ) parem kui Gaussi ja Radau II-liiki punktide korral. Kuid mitte üheski parameetrite  $\rho$  ja  $r$  valikus ei saavutata superkoondumist s.t. suhet 11.3.

Kasutades lineaarsplaine ja kollokatsiooniparameetritena  $c_1, c_2$  Gaussi punkte, siis tabelitest 16 - 20 on näha, et maksimaalne vigade suhe 5.7 saavutatakse enamus juhtudel teoreetilisest varem. Näiteks  $\rho = 1$  korral väheneb viga ligikaudu 5.7 korda  $r = 3$  korral teoreetilise  $r = 5$  asemel. Kui  $\rho = 2$ , siis saavutatakse maksimaalsele hinnangule lähedane hinnang  $r = 1$  ja maksimaalne hinnang vähemalt  $r = 2$  korral teoreetilise  $r = 2.5$  asemel. Samuti on vigade  $\|E_K\|_N$  suhted  $\rho = 3$  ja  $\rho = 4$  korral paremad kui teoreetilised hinnangud.

Kasutades lineaarsplaine ja kollokatsiooniparameetritena  $c_1, c_2$  suvaliselt valitud punkte 0.4, 0.9, siis tabelitest 21 - 25 on näha, et enamustel juhtudel viga kollokatsioonipunktides väheneb osalõikude arvu  $N$  suurendamisel umbes neli korda, kuid koondumine ei saavuta üheski parameetrite  $\rho$  ja  $r$  valikus superkoondumist s.t. suhet 5.7.

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>3.0</b>	7.2 E - 3	<b>1.5</b>	6.1 E - 2	16	<b>16.2</b>	3.1 E - 5	<b>4.1</b>	8.0 E - 4
32	<b>3.0</b>	2.4 E - 3	<b>1.5</b>	4.2 E - 2	32	<b>13.1</b>	2.4 E - 6	<b>4.0</b>	2.0 E - 4
64	<b>2.9</b>	8.3 E - 4	<b>1.5</b>	2.9 E - 2	64	<b>11.9</b>	2.0 E - 7	<b>4.0</b>	5.0 E - 5
128	<b>2.9</b>	2.8 E - 4	<b>1.4</b>	2.0 E - 2	128	<b>11.5</b>	1.7 E - 8	<b>4.0</b>	1.2 E - 5
256	<b>2.9</b>	9.8 E - 5	<b>1.4</b>	1.4 E - 2	256	<b>11.4</b>	1.5 E - 9	<b>4.0</b>	3.1 E - 6

Tabel 1: Ülesanne (4.14). Gaussi punktid.  $m = 3, \rho = 1: r = 1$  ja  $r = 4$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>17.7</b>	1.0 E - 4	<b>10.1</b>	2.5 E - 4	16	<b>20.1</b>	2.8 E - 4	<b>9.8</b>	6.5 E - 4
32	<b>13.3</b>	7.5 E - 6	<b>9.7</b>	2.6 E - 5	32	<b>14.3</b>	2.0 E - 5	<b>9.7</b>	6.7 E - 5
64	<b>11.9</b>	6.3 E - 7	<b>8.0</b>	3.3 E - 6	64	<b>12.0</b>	1.7 E - 6	<b>9.2</b>	7.3 E - 6
128	<b>11.5</b>	5.5 E - 8	<b>7.5</b>	4.4 E - 7	128	<b>11.6</b>	1.4 E - 7	<b>7.1</b>	1.0 E - 6
256	<b>11.4</b>	4.8 E - 9	<b>7.6</b>	5.8 E - 8	256	<b>11.4</b>	1.3 E - 8	<b>7.4</b>	1.4 E - 7

Tabel 2: Ülesanne (4.14). Gaussi punkt.  $m = 3, \rho = 1$ :  $r = 6$  ja  $r = 8.1$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>6.0</b>	2.2 E - 6	<b>2.9</b>	3.6 E - 4	16	<b>10.7</b>	1.6 E - 6	<b>8.2</b>	5.6 E - 6
32	<b>5.8</b>	3.8 E - 7	<b>2.8</b>	1.3 E - 4	32	<b>11.1</b>	1.4 E - 7	<b>7.8</b>	7.1 E - 7
64	<b>5.7</b>	6.7 E - 8	<b>2.8</b>	4.5 E - 5	64	<b>11.2</b>	1.3 E - 8	<b>7.8</b>	9.2 E - 8
128	<b>5.7</b>	1.2 E - 8	<b>2.8</b>	1.6 E - 5	128	<b>11.3</b>	1.1 E - 9	<b>7.9</b>	1.2 E - 8
256	<b>5.7</b>	2.1 E - 9	<b>2.8</b>	5.6 E - 6	256	<b>11.3</b>	9.8 E - 11	<b>7.9</b>	1.5 E - 9

Tabel 3: Ülesanne (4.14). Gaussi punkt.  $m = 3, \rho = 2$ :  $r = 1$  ja  $r = 2$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>7.2</b>	5.4 E - 7	<b>2.7</b>	3.3 E - 4	16	<b>9.7</b>	1.1 E - 6	<b>7.9</b>	5.5 E - 6
32	<b>7.5</b>	7.1 E - 8	<b>2.7</b>	1.2 E - 4	32	<b>10.8</b>	9.7 E - 8	<b>7.9</b>	6.9 E - 7
64	<b>7.7</b>	9.2 E - 9	<b>2.8</b>	4.3 E - 5	64	<b>11.3</b>	8.6 E - 9	<b>8.0</b>	8.7 E - 8
128	<b>7.8</b>	1.2 E - 9	<b>2.8</b>	1.5 E - 5	128	<b>11.2</b>	7.6 E - 10	<b>7.9</b>	1.1 E - 8
256	<b>7.9</b>	1.5 E - 10	<b>2.8</b>	5.5 E - 6	256	<b>11.2</b>	6.8 E - 11	<b>7.8</b>	1.4 E - 9

Tabel 4: Ülesanne (4.14). Gaussi punkt.  $m = 3, \rho = 3$ :  $r = 1$  ja  $r = 2$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>9.4</b>	2.2 E - 5	<b>8.6</b>	7.1 E - 5
32	<b>10.5</b>	2.1 E - 6	<b>8.7</b>	8.2 E - 6
64	<b>10.9</b>	1.9 E - 7	<b>7.3</b>	1.1 E - 6
128	<b>11.1</b>	1.7 E - 8	<b>7.4</b>	1.5 E - 7
256	<b>11.2</b>	1.5 E - 9	<b>7.6</b>	2.0 E - 8

Tabel 5: Ülesanne (4.14). Gaussi punkt.  $m = 3, \rho = 6$ :  $r = 1$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>3.1</b>	1.3 E - 2	<b>1.5</b>	7.1 E - 2	16	<b>18.6</b>	1.1 E - 4	<b>4.1</b>	9.2 E - 4
32	<b>3.0</b>	4.2 E - 3	<b>1.5</b>	4.8 E - 2	32	<b>15.3</b>	7.0 E - 6	<b>4.0</b>	2.3 E - 4
64	<b>3.0</b>	1.4 E - 3	<b>1.5</b>	3.3 E - 2	64	<b>12.2</b>	5.7 E - 7	<b>4.0</b>	5.7 E - 5
128	<b>2.9</b>	4.9 E - 4	<b>1.4</b>	2.3 E - 2	128	<b>11.9</b>	4.8 E - 8	<b>4.0</b>	1.4 E - 5
256	<b>2.9</b>	1.7 E - 4	<b>1.4</b>	1.6 E - 2	256	<b>11.6</b>	4.1 E - 9	<b>4.0</b>	3.5 E - 6

Tabel 6: Ülesanne (4.14). Radau II punkt.  $m = 3, \rho = 1$ :  $r = 1$  ja  $r = 4$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>20.5</b>	3.6 E - 4	<b>11.3</b>	6.5 E - 4	16	<b>22.3</b>	1.1 E - 3	<b>14.9</b>	1.6 E - 3
32	<b>15.9</b>	2.3 E - 5	<b>9.5</b>	6.8 E - 5	32	<b>18.1</b>	5.9 E - 5	<b>9.3</b>	1.7 E - 4
64	<b>12.1</b>	1.9 E - 6	<b>9.3</b>	7.4 E - 6	64	<b>12.0</b>	4.9 E - 6	<b>9.2</b>	1.9 E - 5
128	<b>11.9</b>	1.6 E - 7	<b>8.9</b>	8.3 E - 7	128	<b>12.0</b>	4.1 E - 7	<b>9.0</b>	2.1 E - 6
256	<b>11.7</b>	1.3 E - 8	<b>8.7</b>	9.5 E - 8	256	<b>11.8</b>	3.5 E - 8	<b>8.7</b>	2.4 E - 7

Tabel 7: Ülesanne (4.14). Radau II punktid.  $m = 3, \rho = 1$ :  $r = 6$  ja  $r = 8.1$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>9.7</b>	3.3 E - 6	<b>2.9</b>	5.2 E - 4	16	<b>11.5</b>	1.1 E - 6	<b>9.1</b>	1.3 E - 5
32	<b>5.9</b>	5.7 E - 7	<b>2.8</b>	1.8 E - 4	32	<b>10.7</b>	7.0 E - 7	<b>9.0</b>	1.4 E - 6
64	<b>5.8</b>	9.9 E - 8	<b>2.8</b>	6.5 E - 5	64	<b>11.1</b>	5.7 E - 8	<b>8.9</b>	1.6 E - 7
128	<b>5.7</b>	1.7 E - 8	<b>2.8</b>	2.3 E - 5	128	<b>11.3</b>	4.8 E - 9	<b>8.7</b>	1.8 E - 8
256	<b>5.7</b>	3.1 E - 9	<b>2.8</b>	8.1 E - 6	256	<b>11.4</b>	4.1 E - 10	<b>8.6</b>	2.1 E - 9

Tabel 8: Ülesanne (4.14). Radau II punktid.  $m = 3, \rho = 2$ :  $r = 1$  ja  $r = 2$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>7.3</b>	5.1 E - 7	<b>2.6</b>	4.7 E - 4	16	<b>9.7</b>	2.9 E - 6	<b>8.4</b>	1.0 E - 5
32	<b>7.6</b>	6.7 E - 8	<b>2.7</b>	1.7 E - 4	32	<b>10.7</b>	2.7 E - 7	<b>8.7</b>	1.1 E - 6
64	<b>7.7</b>	8.7 E - 9	<b>2.8</b>	6.3 E - 5	64	<b>11.2</b>	2.4 E - 8	<b>8.7</b>	1.3 E - 7
128	<b>7.8</b>	1.1 E - 9	<b>2.8</b>	2.3 E - 5	128	<b>11.4</b>	2.1 E - 9	<b>8.3</b>	1.6 E - 8
256	<b>7.9</b>	1.4 E - 10	<b>2.8</b>	8.0 E - 6	256	<b>11.5</b>	1.8 E - 10	<b>8.0</b>	2.0 E - 9

Tabel 9: Ülesanne (4.14). Radau II punktid.  $m = 3, \rho = 3$ :  $r = 1$  ja  $r = 2$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>9.5</b>	5.6 E - 5	<b>8.7</b>	1.9 E - 4
32	<b>10.2</b>	5.5 E - 6	<b>8.8</b>	2.1 E - 5
64	<b>10.7</b>	5.1 E - 7	<b>8.8</b>	2.4 E - 6
128	<b>11.1</b>	4.6 E - 8	<b>8.7</b>	2.8 E - 7
256	<b>11.3</b>	4.1 E - 9	<b>8.6</b>	3.2 E - 8

Tabel 10: Ülesanne (4.14). Radau II punktid.  $m = 3, \rho = 6$ :  $r = 1$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>2.1</b>	1.0 E - 2	<b>1.5</b>	6.1 E - 2	16	<b>6.2</b>	1.2 E - 3	<b>6.6</b>	1.3 E - 3
32	<b>2.5</b>	4.1 E - 3	<b>1.5</b>	4.2 E - 2	32	<b>7.2</b>	1.7 E - 4	<b>6.6</b>	2.0 E - 4
64	<b>2.6</b>	1.5 E - 3	<b>1.5</b>	2.9 E - 2	64	<b>7.6</b>	2.2 E - 5	<b>4.0</b>	5.0 E - 5
128	<b>2.7</b>	5.6 E - 4	<b>1.4</b>	2.0 E - 2	128	<b>7.8</b>	2.8 E - 6	<b>4.0</b>	1.2 E - 5
256	<b>2.8</b>	2.0 E - 4	<b>1.4</b>	1.4 E - 2	256	<b>7.9</b>	3.6 E - 7	<b>4.0</b>	3.1 E - 6

Tabel 11: Ülesanne (4.14). Punktid  $c = \{0.1, 0.7, 0.9\}$ .  $m = 3, \rho = 1$ :  $r = 1$  ja  $r = 4$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>5.6</b>	2.3 E - 3	<b>6.0</b>	2.6 E - 3	16	<b>4.6</b>	4.2 E - 3	<b>5.0</b>	4.9 E - 3
32	<b>6.9</b>	3.3 E - 4	<b>7.2</b>	3.7 E - 4	32	<b>6.6</b>	6.4 E - 4	<b>6.9</b>	7.1 E - 4
64	<b>7.4</b>	4.5 E - 5	<b>7.6</b>	4.8 E - 5	64	<b>7.3</b>	8.7 E - 5	<b>7.5</b>	9.5 E - 5
128	<b>7.7</b>	5.9 E - 6	<b>7.8</b>	6.2 E - 6	128	<b>7.6</b>	1.2 E - 5	<b>7.7</b>	1.2 E - 5
256	<b>7.8</b>	7.5 E - 7	<b>7.9</b>	7.9 E - 7	256	<b>7.8</b>	1.5 E - 6	<b>7.8</b>	1.6 E - 6

Tabel 12: Ülesanne (4.14). Punktid  $c = \{0.1, 0.7, 0.9\}$ .  $m = 3$ ,  $\rho = 1$ :  $r = 6$  ja  $r = 8.1$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>7.1</b>	7.2 E - 5	<b>2.9</b>	3.8 E - 4	16	<b>6.9</b>	6.8 E - 5	<b>7.3</b>	7.6 E - 5
32	<b>7.4</b>	9.8 E - 6	<b>2.8</b>	1.3 E - 4	32	<b>7.4</b>	9.2 E - 6	<b>7.7</b>	9.9 E - 6
64	<b>7.6</b>	1.3 E - 6	<b>2.8</b>	4.7 E - 5	64	<b>7.6</b>	1.2 E - 6	<b>7.8</b>	1.3 E - 6
128	<b>7.7</b>	1.7 E - 7	<b>2.8</b>	1.7 E - 5	128	<b>7.8</b>	1.6 E - 7	<b>7.8</b>	1.6 E - 7
256	<b>7.8</b>	2.1 E - 8	<b>2.8</b>	5.9 E - 6	256	<b>7.9</b>	2.0 E - 8	<b>7.9</b>	2.1 E - 8

Tabel 13: Ülesanne (4.14). Punktid  $c = \{0.1, 0.7, 0.9\}$ .  $m = 3$ ,  $\rho = 2$ :  $r = 1$  ja  $r = 2$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>6.9</b>	1.1 E - 6	<b>2.7</b>	3.5 E - 4	16	<b>6.7</b>	1.6 E - 5	<b>7.3</b>	2.0 E - 5
32	<b>7.3</b>	1.5 E - 7	<b>2.7</b>	1.3 E - 4	32	<b>7.3</b>	2.2 E - 6	<b>7.6</b>	2.6 E - 6
64	<b>7.7</b>	1.9 E - 8	<b>2.8</b>	4.6 E - 5	64	<b>7.5</b>	2.9 E - 7	<b>7.7</b>	3.4 E - 7
128	<b>7.9</b>	2.4 E - 9	<b>2.8</b>	1.6 E - 5	128	<b>7.7</b>	3.8 E - 8	<b>7.5</b>	4.5 E - 8
256	<b>8.0</b>	3.0 E - 10	<b>2.8</b>	5.8 E - 6	256	<b>7.8</b>	4.8 E - 9	<b>7.6</b>	5.9 E - 9

Tabel 14: Ülesanne (4.14). Punktid  $c = \{0.1, 0.7, 0.9\}$ .  $m = 3$ ,  $\rho = 3$ :  $r = 1$  ja  $r = 2$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>6.4</b>	7.0 E - 4	<b>7.0</b>	8.2 E - 4
32	<b>7.3</b>	9.6 E - 5	<b>7.6</b>	1.1 E - 4
64	<b>7.6</b>	1.3 E - 5	<b>7.8</b>	1.4 E - 5
128	<b>7.7</b>	1.6 E - 6	<b>7.8</b>	1.8 E - 6
256	<b>7.8</b>	2.1 E - 7	<b>7.8</b>	2.2 E - 7

Tabel 15: Ülesanne (4.14). Punktid  $c = \{0.1, 0.7, 0.9\}$ .  $m = 3$ ,  $\rho = 6$ :  $r = 1$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>3.1</b>	2.3 E - 2	<b>1.5</b>	9.7 E - 2	16	<b>7.5</b>	8.7 E - 4	<b>2.1</b>	2.1 E - 2
32	<b>3.0</b>	7.5 E - 3	<b>1.5</b>	6.5 E - 2	32	<b>6.8</b>	1.3 E - 4	<b>2.1</b>	1.0 E - 2
64	<b>3.0</b>	2.5 E - 3	<b>1.5</b>	4.4 E - 2	64	<b>6.7</b>	1.9 E - 5	<b>2.0</b>	5.0 E - 3
128	<b>2.9</b>	8.6 E - 4	<b>1.5</b>	3.1 E - 2	128	<b>6.6</b>	2.9 E - 6	<b>2.0</b>	2.5 E - 3
256	<b>2.9</b>	2.9 E - 4	<b>1.4</b>	2.1 E - 2	256	<b>4.3</b>	6.7 E - 7	<b>2.0</b>	1.2 E - 3

Tabel 16: Ülesanne (4.14). Gaussi punktid.  $m = 2$ ,  $\rho = 1$ :  $r = 1$  ja  $r = 2$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>7.7</b>	8.4 E - 4	<b>2.9</b>	5.0 E - 3	16	<b>7.7</b>	1.4 E - 3	<b>6.1</b>	3.2 E - 3
32	<b>6.6</b>	1.3 E - 4	<b>2.9</b>	1.7 E - 3	32	<b>6.5</b>	2.2 E - 4	<b>4.8</b>	6.6 E - 4
64	<b>6.4</b>	2.0 E - 5	<b>2.9</b>	6.0 E - 4	64	<b>6.3</b>	3.4 E - 5	<b>4.6</b>	1.4 E - 4
128	<b>6.1</b>	3.3 E - 6	<b>2.8</b>	2.1 E - 4	128	<b>6.1</b>	5.6 E - 6	<b>4.1</b>	3.6 E - 5
256	<b>5.9</b>	5.5 E - 7	<b>2.8</b>	7.4 E - 5	256	<b>5.9</b>	9.5 E - 7	<b>4.0</b>	8.9 E - 6

Tabel 17: Ülesanne (4.14). Gaussi punktid.  $m = 2$ ,  $\rho = 1$ :  $r = 3$  ja  $r = 4$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>3.8</b>	7.9 E - 5	<b>2.9</b>	2.0 E - 3	16	<b>5.1</b>	3.8 E - 4	<b>4.3</b>	1.1 E - 3
32	<b>4.7</b>	1.7 E - 5	<b>2.8</b>	6.9 E - 4	32	<b>5.6</b>	6.8 E - 5	<b>4.4</b>	2.5 E - 4
64	<b>5.2</b>	3.3 E - 6	<b>2.8</b>	2.4 E - 4	64	<b>5.7</b>	1.2 E - 5	<b>4.3</b>	5.9 E - 5
128	<b>5.5</b>	6.0 E - 7	<b>2.8</b>	8.6 E - 5	128	<b>5.8</b>	2.1 E - 6	<b>4.0</b>	1.5 E - 5
256	<b>5.6</b>	1.1 E - 7	<b>2.8</b>	3.0 E - 5	256	<b>5.8</b>	3.6 E - 7	<b>4.0</b>	3.8 E - 6

Tabel 18: Ülesanne (4.14). Gaussi punktid.  $m = 2$ ,  $\rho = 2$ :  $r = 1$  ja  $r = 2$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>5.0</b>	4.2 E - 4	<b>3.1</b>	2.3 E - 3	16	<b>4.9</b>	7.6 E - 4	<b>4.3</b>	2.4 E - 3
32	<b>5.3</b>	7.8 E - 5	<b>3.0</b>	7.5 E - 4	32	<b>5.3</b>	1.4 E - 4	<b>4.4</b>	5.4 E - 4
64	<b>5.5</b>	1.4 E - 5	<b>2.9</b>	2.6 E - 4	64	<b>5.6</b>	2.6 E - 5	<b>4.3</b>	1.3 E - 4
128	<b>5.6</b>	2.5 E - 6	<b>2.9</b>	8.9 E - 5	128	<b>5.7</b>	4.5 E - 6	<b>4.0</b>	3.2 E - 5
256	<b>5.7</b>	4.4 E - 7	<b>2.9</b>	3.1 E - 5	256	<b>5.7</b>	7.9 E - 7	<b>4.0</b>	8.0 E - 6

Tabel 19: Ülesanne (4.14). Gaussi punktid.  $m = 2$ ,  $\rho = 3$ :  $r = 1$  ja  $r = 1.34$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>4.8</b>	9.2 E - 4	<b>4.3</b>	2.9 E - 3
32	<b>5.3</b>	1.7 E - 4	<b>4.4</b>	6.7 E - 4
64	<b>5.5</b>	3.2 E - 5	<b>4.2</b>	1.6 E - 4
128	<b>5.6</b>	5.6 E - 6	<b>4.0</b>	4.0 E - 5
256	<b>5.7</b>	9.9 E - 7	<b>4.0</b>	1.0 E - 5

Tabel 20: Ülesanne (4.14). Gaussi punkt.  $m = 2, \rho = 4: r = 1.$

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>2.7</b>	1.0 E - 1	<b>2.2</b>	1.3 E - 1	16	<b>3.9</b>	1.9 E - 2	<b>2.9</b>	2.7 E - 2
32	<b>2.8</b>	3.6 E - 2	<b>1.5</b>	8.4 E - 2	32	<b>4.1</b>	4.5 E - 3	<b>2.1</b>	1.3 E - 2
64	<b>2.8</b>	1.3 E - 2	<b>1.5</b>	5.7 E - 2	64	<b>4.1</b>	1.1 E - 3	<b>2.1</b>	6.3 E - 3
128	<b>2.8</b>	4.5 E - 3	<b>1.5</b>	3.9 E - 2	128	<b>4.1</b>	2.7 E - 4	<b>2.0</b>	3.1 E - 3
256	<b>2.8</b>	1.6 E - 3	<b>1.5</b>	2.7 E - 2	256	<b>4.0</b>	6.8 E - 5	<b>2.0</b>	1.5 E - 3

Tabel 21: Ülesanne (4.14). Punkt  $c = \{0.4, 0.9\}$ .  $m = 2, \rho = 1: r = 1$  ja  $r = 2.$

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>4.0</b>	2.0 E - 2	<b>4.1</b>	2.2 E - 2	16	<b>3.7</b>	2.7 E - 2	<b>3.8</b>	2.9 E - 2
32	<b>4.2</b>	4.8 E - 3	<b>4.3</b>	5.0 E - 3	32	<b>4.2</b>	6.4 E - 3	<b>4.3</b>	6.8 E - 3
64	<b>4.2</b>	1.2 E - 3	<b>4.2</b>	1.2 E - 3	64	<b>4.2</b>	1.5 E - 3	<b>4.2</b>	1.6 E - 3
128	<b>4.1</b>	2.8 E - 4	<b>3.9</b>	3.0 E - 4	128	<b>4.1</b>	3.7 E - 4	<b>3.9</b>	4.1 E - 4
256	<b>4.1</b>	6.9 E - 5	<b>3.3</b>	9.3 E - 5	256	<b>4.1</b>	9.2 E - 5	<b>3.9</b>	1.1 E - 4

Tabel 22: Ülesanne (4.14). Punkt  $c = \{0.4, 0.9\}$ .  $m = 2, \rho = 1: r = 3$  ja  $r = 4.$

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>3.6</b>	4.5 E - 3	<b>3.7</b>	4.8 E - 3	16	<b>3.5</b>	8.1 E - 3	<b>3.6</b>	8.9 E - 3
32	<b>3.9</b>	1.2 E - 3	<b>3.8</b>	1.3 E - 3	32	<b>4.0</b>	2.0 E - 3	<b>4.1</b>	2.2 E - 3
64	<b>4.0</b>	3.0 E - 4	<b>2.8</b>	4.5 E - 4	64	<b>4.1</b>	5.0 E - 4	<b>4.0</b>	5.5 E - 4
128	<b>4.0</b>	7.4 E - 5	<b>2.8</b>	1.6 E - 4	128	<b>4.1</b>	1.2 E - 4	<b>3.8</b>	1.4 E - 4
256	<b>4.0</b>	1.9 E - 5	<b>2.8</b>	5.6 E - 5	256	<b>4.0</b>	3.0 E - 5	<b>3.9</b>	3.6 E - 5

Tabel 23: Ülesanne (4.14). Punkt  $c = \{0.4, 0.9\}$ .  $m = 2, \rho = 2: r = 1$  ja  $r = 2.$

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$	$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>3.5</b>	1.3 E - 2	<b>3.7</b>	1.4 E - 2	16	<b>3.3</b>	1.8 E - 2	<b>3.5</b>	2.0 E - 2
32	<b>3.9</b>	3.4 E - 3	<b>4.0</b>	3.5 E - 3	32	<b>3.9</b>	4.6 E - 3	<b>4.0</b>	5.0 E - 3
64	<b>4.0</b>	8.4 E - 4	<b>4.0</b>	8.9 E - 4	64	<b>4.0</b>	1.2 E - 3	<b>4.0</b>	1.2 E - 3
128	<b>4.0</b>	2.1 E - 4	<b>3.8</b>	2.3 E - 4	128	<b>4.0</b>	2.9 E - 4	<b>3.8</b>	3.3 E - 4
256	<b>4.0</b>	5.2 E - 5	<b>3.9</b>	5.9 E - 5	256	<b>4.0</b>	7.1 E - 5	<b>3.9</b>	8.4 E - 5

Tabel 24: Ölesanne (4.14). Punktid  $c = \{0.4, 0.9\}$ .  $m = 2$ ,  $\rho = 3$ :  $r = 1$  ja  $r = 1.34$ .

$N$	$\frac{\ E_K\ _{N-1}}{\ E_K\ _N}$	$\ E_K\ _N$	$\frac{\ E\ _{N-1}}{\ E\ _N}$	$\ E\ _N$
16	<b>3.2</b>	2.3 E - 2	<b>3.4</b>	2.5 E - 2
32	<b>3.9</b>	5.8 E - 3	<b>4.0</b>	6.2 E - 3
64	<b>4.0</b>	1.5 E - 3	<b>4.0</b>	1.6 E - 3
128	<b>4.0</b>	3.6 E - 4	<b>3.8</b>	4.2 E - 4
256	<b>4.0</b>	9.1 E - 5	<b>3.9</b>	1.1 E - 4

Tabel 25: Ölesanne (4.14). Punktid  $c = \{0.4, 0.9\}$ .  $m = 2$ ,  $\rho = 4$ :  $r = 1$ .

## Summary

In this work we consider a linear Volterra integral equation of the second kind in the form

$$u(x) = f(x) + \int_0^x (x-y)^{-\alpha} K(x,y) u(y) dy, \quad x \in [0, b], \quad (4.16)$$

where  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < b < \infty$ . Functions  $K$  and  $f$  are given ones and  $u$  is unknown.

Let

$$\Delta_b = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq b\}$$

and assume that  $K \in C^m(\Delta_b)$  and  $f \in C[0, b] \cap C^m(0, b]$  ( $m \in \mathbb{N}$ ). Then equation (4.16) is uniquely solvable and its solution  $u \in C[0, b] \cap C^m(0, b]$  (see chapter 2.5).

In (4.16) we change the variables

$$x = b^{1-\rho} t^\rho, \quad y = b^{1-\rho} s^\rho, \quad t, s \in [0, b], \rho \in \mathbb{N}$$

and reach to a modified equation in the form

$$u_\rho(t) = f_\rho(t) + \int_0^t K_\rho(t, s) u_\rho(s) ds, \quad t \in [0, b], \quad (4.17)$$

where  $f_\rho$  and  $K_\rho$  are given by (3.3). The singularities of the derivatives of the solution  $u_\rho$  are milder or disappear at all.

To find an approximation of the equation (4.16) we solve equation (4.17). We use piecewise polynomial collocation method (see chapter 2) to find an approximate solution  $u_{\rho, N} \in S_{m-1}^{(-1)}(\Pi_N^{(x, b)})$  (space of polynomial splines of degree  $m-1$ ) of the equation (4.17). Approximate solution  $\tilde{u}_{\rho, N}$  of the equation (4.16) we define as

$$\tilde{u}_{\rho, N}(x) = u_{\rho, N}(b^{\rho-1} x^{\frac{1}{\rho}}), \quad x \in [0, b], \quad \rho, m \in \mathbb{N}. \quad (4.18)$$

Basic results are given in theorems 3.1 and 3.2. We give results for global and local convergence and estimate the error

$$\sup_{x \in [0, b]} |u(x) - \tilde{u}_{\rho, N}(x)|.$$

It follows from theorems 3.1 and 3.2, that using equation (4.17) we may use much more regular mesh in collocation method to obtain optimal convergence results. Its very useful in practical computing. At last in chapter 4 we carry out some numerical examples using the general theory.

## Viited

- [ 1 ] H. Brunner, A. Pedas, G. Vainikko. The piecewise polynomial collocation method for nonlinear weakly singular Volterra equations. *Mathematics of Computation*, V. 68 (1999), No. 227, 1079-1095.
- [ 2 ] G. Kangro. *Matemaatiline analüüs II*. Tallinn "Valgus", 1968.
- [ 3 ] E. Oja, P. Oja. *Funktsionaalanalüüs*. Tartu Ülikool, 1991.
- [ 4 ] I. Parts. Tükiti polünoomiaalne kollokatsioonimeetod astmeliselt iseärase tuumaga integro diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks. Magistritöö. Tartu Ülikool, Matemaatika-informaatika teaduskond, Rakendusmatemaatika Instituut, Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite õppetool. Tartu, 2001.
- [ 5 ] E. Tamme, L. Võhandu, L. Luht. *Arvutusmeetodid I*. Tallinn "Valgus", 1986.

## 5 Lisad

### 5.1 Programmikood

```
> restart;
> with(linalg): with(plots):
> Digits:=30;

----- Protseduurid -----

> lagrangepolynom:=proc(meetod,j,v)
>     local i;
>     product((v-meetod[i])/(meetod[j]-meetod[i]),i=1..j-1)*
>     product((v-meetod[i])/(meetod[j]-meetod[i]),i=j+1..nops(meetod));
> end:

> lagrangekordajad:=proc(meetod)
>     local i,koefjada,v, kordajad;
>     koefjada:=[];
>
>     for i from 1 to nops(meetod) do
>
>         kordajad:=expand(lagrangepolynom(meetod,i,v));
>         koefjada:=[op(koefjada),tcoeff(kordajad),seq(coeff(kordajad,v**i),
>             i=1..nops(meetod)-1)];
>     od;
>
>     koefjada;
> end:

> legendrepolynom := proc (n,x)
>     local P,y;
>     if n=0 then
>         P:=unapply(1,y);
>     else
```

```

>          P:=unapply(1/((2**n)*n!)*diff((y**2-1)**n,y$(n)),y);
>   fi;
>   evalf(P(x));
> end:

> kollokparameetrid:=proc(m,meetodnr)
>       local x,parametrid;
>   if meetodnr=1 then
>       parametrid:=sort([solve(legendrepoly(m,2*x-1)=0,x)]);
>   fi;
>
>   if meetodnr=2 then
>       parametrid:=[op(sort([solve(legendrepoly(m-1,2*x-1)=0,x)])),1];
>   fi;
>
>   if meetodnr=3 then
>       parametrid:=sort([solve(legendrepoly(m-1,2*x-1)-
>                               legendrepoly(m,2*x-1)=0,x)]);
>   fi;
>
>   if meetodnr=4 then
>       parametrid:=[1/2/m,seq(1/2/m+1/m*i,i=1..m-1)];
>   fi;
>
>   parametrid;
> end:

> ebayhtlasedsolmed:=proc(n,r)
>       local i;
>   [seq((i/n)**r,i=0..n)];
> end:

> hjada:=proc(solmed)
>       local i;
>   [seq(solmed[i+1]-solmed[i],i=1..nops(solmed)-1)];

```

```

> end:

> kolloksolmed:=proc(h,solmed,meetod)
>     local aa,i,j,k;
>     k:=1;
>     for i from 1 to nops(solmed)-1 do
>         for j from 1 to nops(meetod) do
>             aa[k]:=solmed[i]+meetod[j]*h[i];
>             k:=k+1;
>         od;
>     od;
>     [seq(aa[i],i=1..k-1)];
> end:

> Yleidmine:=proc(f,Kalg,integraal,koefjada,h,solmed,meetod,tnj)
>     local A,F,Y,C,n,m,i,ii,j,k,d;
>
>     n:=nops(solmed)-1;
>     m:=nops(meetod);
>
>     A:=Matrix(m);
>     F:=array(1..m);
>     Y:=[ ];
>
>     for k from 0 to n-1 do
>         for i from 1 to m do
>             for j from 1 to m do
>                 A[i,j]:=evalf(1-abs(signum(i-j))-Kalg*
>                     integraal(seq(koefjada[m*(j-1)+ii],ii=1..m),
>                     h[k+1],solmed[k+1],tnj[k*m+i],meetod[i]));
>             od;
>
>         F[i]:=evalf(f(tnj[k*m+i]));
>
>         for d from 0 to k-1 do

```

```

>         for j from 1 to m do
>             F[i]:=evalf(F[i]+Kalg*
>                 integraal(seq(koefjada[m*(j-1)+ii],ii=1..m),
>                 h[d+1],solmed[d+1],tnj[k*m+i],1)*Y[d*m+j]);
>         od;
>     od;
> od;
>
>
> C:=linsolve(A,F);
>
> Y:=[op(Y),seq(C[d],d=1..m)];
>
> print(n,k+1);
> od;
>
> Y;
> end:

> viga:=proc(Y,meetod,tapne,solmed,h,tnj,kordaja)
>     local l1,k1,s1,i,j,v,m,konstant,ligif;
>
>     m:=nops(meetod);
>
>     s1:=0;
>     k1:=0;
>     l1:=0;
>
>     for i from 0 to nops(solmed)-2 do
>
>         ligif:=unapply(
>             sum('Y[i*m+j]*lagrangepolynom(meetod,j,v)', 'j'=1..m),v);
>
>         if i=0 then l1:=evalf(abs(tapne(0)-ligif(0))) fi;
>

```

```

>   for j from 1 to kordaja do
>       konstant:=evalf(solmed[i+1]+j/kordaja*h[i+1]);
>       l1:=max(l1,evalf(abs(tapne(konstant)-ligif(j/kordaja))));
>   od;
>
>   for j from 1 to m do
>       konstant:=evalf(tnj[i*m+j]);
>       k1:=max(k1,evalf(abs(tapne(konstant)-ligif(meetod[j]))));
>   od;
>
>   s1:=max(s1,evalf(abs(tapne(solmed[i+2])-ligif(1))));
>
> end do;
>
> [s1,k1,l1];
> end:

> kollokmeetod:=proc(i,r,f,Kalg,integraal,koefjada,tapne,meetod,kordaja)
>     local Y,h,tnj,solmed;
>
>   solmed:=ebayhtlasedsolmed(i,T,r);
>   h:=hjada(solmed);
>   tnj:=kolloksolmed(h,solmed,meetod);
>   Y:=Yleidmine(f,Kalg,integraal,koefjada,h,solmed,meetod,tnj);
>
>   viga(Y,meetod,tapne,solmed,h,tnj,kordaja);
> end:

> avaldis:=proc(m,rho,alpha,B,h,t,s,M)
>     local myy,j,d,dc;
>   dc:=0;
>   for d from 0 to m-1 do
>     dc:=dc+rho/(rho+d)/d!*
>       sum('(-1)**(myy-d)*(t**(myy-d)*s**(rho*(1-alpha)+d)/h**myy)*
>       B[myy+1]*myy!/(myy-d)!',myy=d..m-1)*

```

```

>      ((t+M*h)/s)**(rho+d)*
>      Hypergeom([1+d/rho,alpha],[2+d/rho],((t+M*h)/s)**rho)-
>      (t/s)**(rho+d)*Hypergeom([1+d/rho,alpha],[2+d/rho],(t/s)**rho));
> od;
> dc;
> end:

> prindi:=proc(r,f,Kalg,integraal,koefjada,tapne,
>      meetod,meetodnr,m,rho,kordaja)
>      local i, meetodjada, veajada, g, gg, fd;
>
>      meetodjada:=['Gaussi punktid','Modifitseeritud Gaussi punktid',
>      'Radau II punktid','Ühtlane jaotus','Ebaühtlane jaotus'];
>
>      veajada := ['Viga võrgu sõlmedes', 'Viga kollokatsiooni punktides',
>      'Viga tervel lõigul'];
>
>      interface( prettyprint=0 );
>
>      print('');
>      print('-----');
>      print(meetodjada[meetodnr], ' m '=m, ' rho '=rho, ' r '=r);
>      print('-----');
>      print('VIGA: võrgu sõlmedes, kollokatsioonipunktides, tervel lõigul');
>      print('-----');
>
>      g:=kollokmeetod(1,r,f,Kalg,integraal,koefjada,tapne,meetod,kordaja);
>
>      for i from 1 to 8 do
>
>      gg:=g;
>      g:=kollokmeetod(2**i,r,f,Kalg,integraal,koefjada,tapne,meetod,kordaja);
>
>      print(cat(
>      '-----', ' N ', ' = ', 2**i,

```

```

> '-----');
>
> print('Vead :      ',
> [evalf[2](g[1])], ' ', [evalf[2](g[2])], ' ', [evalf[2](g[3])]);
>
> print('Suhted:      ',
> [evalf[3](gg[1]/g[1])], ' ', [evalf[3](gg[2]/g[2])], ' ',
> [evalf[3](gg[3]/g[3])]);
>
> od:
>
> end:

----- Parameetrid -----

>interface( prettyprint=2 ):
>alpha:=1/2; rho:=1;

> tapnealg:=t->t**(3/4)+sqrt(t);
>
> Kalg:=(t,s)->1;
> konstant1:=evalf(1/2*Pi):
> konstant2:=evalf(6/5*sqrt(2/Pi)*GAMMA(3/4)**2):
> falg:=t->tapnealg(t)-konstant1*t-konstant2*t**(5/4);
>
> tapne:=unapply(tapnealg(t**rho),t):
> f:=unapply(falg(t**rho),t):
>
> interface( prettyprint=2 ):

>
> m:=3; meetodnr:=1; r:=evalf(1.0);

> meetod:=kollokparameetrid(m,meetodnr);
> B:='B':h:='h': t:='t': s:='s': M:='M':

```

```
> koefjada:=lagrangekordajad(meetod):
> integraal:=unapply(avaldis(m,rho,alpha,B,h,t,s,M),
> [seq(B[i],i=1..m),h,t,s,M]):
```

----- Käivitamine -----

```
> prindi(r,f,Kalg,integraal,koefjada,tapne,meetod,meetodnr,m,rho,20);
```

## 5.2 Programmikoodi selgitus

Antud punktis kirjeldame programmikoodis olevaid protseduure ja parameetreid ning kirjeldame koodi tööpõhimõtet. Programmikood on kirjutatud matemaatikapaketi Maple 6.

*lagrangepolynom(meetod,j,v)* - leitakse Lagrange'i interpolatsioonipolünoom  $L_j(v)$  (vt. (2.15)), *meetod* tähistab siin ja edaspidi kollokatsiooniparameetreid (2.8). Käsk *product* tähendab korrutamist ja käsk *nops* jada pikkust.

*lagrangekordajad(meetod)* - leitakse Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi  $L_j(v)$  arvulised kordajad ja väljastatakse nende jada  $j = 1, \dots, m$  jaoks, kus ühe komplekti kordajad algavad polünoomi konstantsest liikmest kuni kõrgema astmega liikmeni. Käsk *expand* leiab polünoomi normaalkuju, käsk *op* leiab jada liikmed, käsk *tcoeff* leiab polünoomi konstantse liikme kordaja ja käsk *coeff* leiab polünoomi ülejäänud liikmete kordajad.

*legendrepolynom(n,x)* - leitakse Legendre'i polünoom  $P_n(x)$  (vt. (1.16)). Käsk *unapply* abil defineeritakse funktsioone ja käsk *evalf* arvutab funktsioonide väärtusi.

*kollokparameetrid(m,meetodnr)* - leitakse  $m$  kollokatsiooniparameetrit (2.8) meetodil *meetodnr*, kus meetodinumbritele 1, 2, 3, 4 vastavad Gaussi punktid, Modifitseeritud Gaussi punktid, Radau II-liiki punktid ja ühtlane jaotus ( $c_i = \frac{1}{2m} + \frac{(i-1)}{m}$ ). Käsk *sort* sorteerib ette antud jada.

*ebayhtlasedsolmed(n,r)* - leitakse lõigus  $[0, 1]$  sõlmed (2.6), kus  $n$  tähistab osalõigupikkust  $N$ . Sõlmede jada tähistame edaspidi muutujaga *solmed*.

*hjada(solmed)* - leitakse lõigupikkused  $h_i$ . Nende jada tähistame edaspidi muutujaga  $h$ .

$kolloksolmed(h, solmed, meetod)$  - leitakse kollokatsioonisõlmed (2.9)  $t_{ij} = solmed_i + meetod_j h_i$ . Antud jada tähistame edaspidi muutujaga  $tnj$ .

$Yleidmine(f, integraal, koefjada, h, solmed, meetod, tnj)$  - leitakse võrrandi (2.19) lahend, mida tähistatakse siin ja edaspidi sümboliga  $Y$ . Süsteem lahendatakse blokkide kaupa, leides esiteks  $Y_1^0, \dots, Y_m^0$ , siis nende abil  $Y_1^1, \dots, Y_m^1$  ja nii edasi kuni lõpuni. Maatriksvõrrand lahendatakse käsuga *linsolve*. Maatriksis  $A$  olevad kordajad on kujul (4.13), kus  $H$  on hüpergeomeetriline funktsioon. Programmis tähistab valemit (4.13) funktsioon *integraal*. Muutuja *koefjada* on jada Lagrange'i interplatsioonipoliinoomide kordajatest,  $f$  on vabaliige (3.3), *Kalg* on integraalvõrrandi konstante tuum  $K$  (3.3),  $tnj$  on jada kollokatsioonipunktidest. Protseduuris prinditakse käsuga *print* ekraanile iga leitud  $Y_i$  indeks, et suurte  $N$ -i väärtuste korral oleks jälgitav, kui kaugel programm oma tööga parajasti on. See viimane lisand on tingitud sellest, et programmi tööks vajaminevast ajast võtab enamuse enda alla käesolev protseduur.

$viga(Y, meetod, tapne, solmed, h, tnj, kordaja)$  - Lähtudes kordajatest  $Y$  leitakse igal osalõigul  $[t_{i-1}, t_i]$  võrrandi (3.2) täpse lahendi *tapne* ja lähislahendi *ligif* viga vastavalt kogu lõigus ( $l1$ ), kollokatsioonipunktides ( $k1$ ) ja võrgusõlmedes ( $l1$ ). Lähislahend moodustatakse käsuga *unapply* kujul (2.16). Igal osalõigul leitud maksimaalsetest vigadest väljastatakse suurimad vektorina  $[s1, k1, l1]$ . Muutuja *kordaja* on programmis võrdne arvuga 20 ja on vajalik lõigus maksimaalse vea leidmiseks, kus iga osalõik  $[t_i, t_{i+1}]$  jaotatakse omakorda *kordaja*-arvuks osalõikudeks ja leitakse maksimaalne viga vastavates sõlmedes.

$kollokmeetod(i, r, f, integraal, koefjada, tapne, meetod, kordaja)$  - Realiseeritakse kollokatsioonimeetod ja leitakse vajalikud vead (vt. protseduuri *viga*) osalõikude arvu  $i$  korral. Siin  $r$  on võrgutihendaja,  $f$  on integraalvõrrandi vabaliige, *integraal* on funktsioon, mis tähistab avaldist (4.13), *koefjada* on jada Lagrange'i polünoomi kordajatest, *kordaja* kohta vaata protseduuri *viga*.

$avaldis(m, rho, alpha, B, h, t, s, M)$  - Realiseeritakse avaldis (4.13). Siin  $B$  tähistab kordajaid  $A$ , ülejäänud muutujad tähendavad sama, mis avaldises (4.13).

$prindi(r, f, integraal, koefjada, tapne, meetod, meetodnr, m, rho, kordaja)$  - Kutsutakse välja protseduur *kollokmeetod* ja trükitakse saadud tulemused ekraanile. Käsk *interface* on vajalik kujundamiseks, et ekraanile trükitavad avaldised või reaalarvud oleksid vastavalt vajaliku stiiliga.

Programmis kasutatakse arvutamiseks 30 komakohta (käsk *Digits*). Parameetrite osas omistatakse muutujad *alpha* ja *rho*. Siis defineeritakse võrrandi (2.5) täpne lahend *tapnealg*, vabaliige *falg* ja konstantne tuum *Kalg*. Seejärel defineeritakse muutujad *tapne*, *f*, mis on vastavuses seostega (3.3). Järgnevalt omistatakse muutujad *m* (seotud lähendavate splineide järguga), *meetodnr* (milliseid kollokatsioonipunkte kasutatakse), ja *r* (võrgutihendaja). Seejärel omistatakse jadad *meetod*, *koefjada* ja defineeritakse funktsioon *integraal*. Programm käivitatakse käsuga *prindi*.