Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Raido Rehepapp

Absoluutselt lamedad monoidid

Matemaatika

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: prof. Valdis Laan, PhD Nasir Sohail

Tartu 2023

ABSOLUUTSELT LAMEDAD MONOIDID

Bakalaureusetöö

Raido Rehepapp

Lühikokkuvõte

Bakalaureusetöös uuritakse polügoone üle monoidi. Töös antakse üksikasjalised tõestused kahele tulemusele: iga absoluutselt lame monoid on regulaarne ning iga inversne monoid on absoluutselt lame. Referatiivne töö põhineb Sydney Bulman-Flemingu ja Kenneth McDowelli 1983. aasta artiklil „Absolutely Flat Semigroups“, mis ilmus ajakirjas Pacific Journal of Mathematics.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria.

Märksõnad: Poolrühm, monoid, inversne monoid, polügoon, lamedus.

ABSOLUTELY FLAT MONOIDS

Bachelor's thesis

Raido Rehepapp

Abstract

In this bachelor's thesis acts over monoids are studied. In the thesis detailed proofs of two results are given: every absolutely flat monoid is regular and every inverse monoid is absolutely flat. The thesis is referative and it is based on Sydney Bulman-Fleming's and Kenneth McDowell's 1983 article „Absolutely Flat Semigroups“, which was published in the Pacific Journal of Mathematics.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory.

Keywords: Semigroup, monoid, inverse monoid, act, flatness.

Sisukord

Sissejuhatus

See bakalaureusetöö kuulub algebra (täpsemalt poolrühmateooria) valdkonda. Töös uuritakse absoluutselt lamedaid monoide. Need on sellised monoidid, mille korral iga polügoon, mis on defineeritud üle selle monoidi, on lame. Polügoon on lame siis, kui tema abil defineeritud tensorkorrutamise funktor säilitab monomorfisme.

Töö on referatiivne. See põhineb Sydney Bulman-Flemingu ja Kenneth McDowelli 1983. aasta artiklil „Absolutely Flat Semigroups“, mis ilmus ajakirjas Pacific Journal of Mathematics [1].

Polügoonide omadused võib üldjoontes jaotada kahte suurde rühma: projektiivsusega seotud omadused ja injektiivsusega seotud omadused. Lamedus kuulub esimesse rühma: iga projektiivne polügoon on lame, kuid vastupidine üldiselt ei kehti. Polügoonide lamedust uuris esimesena Tartu Ülikooli emeriitprofessor Mati Kilp. Aastal 1970. ilmunud artiklis [3] tõestas ta muuhulgas, et iga vasakult absoluutselt lame monoid peab olema regulaarne. Nii tema kui ka mitmed teised Tartu algebraistid on lamedusega seotud omadusi uurinud paljudes artiklites. Kanada matemaatikud Bulman-Fleming ja McDowell tõestasid hiljem, et iga inversne poolrühm on vasakult absoluutselt lame. Seda teoreemi võib pidada üheks olulisemaks tulemuseks polügoonide teoorias. On loomulik küsida: kas on võimalik kirjeldada ära kõik monoidid, mis on vasakult absoluutselt lamedad? See klass peab asuma inverssete poolrühmade klassi ja regulaarsete poolrühmade klassi vahel ja on teada, et ta ei lange kokku kummagi klassiga. Vaatamata erinevate matemaatikute jõupingutustele ei ole sellist rahuldavat kirjeldust tänaseni leitud.

Töö eesmärk on uurida absoluutselt lamedaid monoide ning võimalusel lihtsustada Bulman-Flemingu ja McDowelli artiklis antud tõestusi.

Bakalaureusetöö koosneb neljast peatükist. Esimeses peatükis sõnastatakse töös vajalikud definitsioonid, nende hulgas polügooni ning polügoonide vahelise tensorkorrutise definitsioon. Teises peatükis antakse tingimused polügooni lameduseks ning monoidi absoluutseks lameduseks. Kolmandas peatükis sõnastatakse ning tõestatakse tulemus absoluutselt lameda monoidi regulaarsusest. Viimases peatükis näidatakse, et iga inversne monoid on absoluutselt lame.

1 Definitsioonid ja abitulemused

Järgnevad on mõned definitsioonid, mida töös vaja läheb.

Definitsioon 1.1 ([4]). **Poolrühmaks** nimetatakse hulka millel on defineeritud kahekohaline algebraline tehe, mis on assotsiatiivne.

Definitsioon 1.2 ([4]). **Monoidiks** nimetatakse poolrühma, milles leidub ühikelement. Seda ühikelementi tähistame sümboliga 1.

Definitsioon 1.3 ([6]). Poolrühma S nimetatakse **regulaarseks**, kui

$$(\forall s \in S)(\exists x \in S)\, s = sxs.$$

Definitsioon 1.4 ([6]). Poolrühma S elementi s' nimetatakse elemendi s **inversseks elemendiks**, kui

$$s = ss's \;\text{ ja }\; s' = s'ss'.$$

Definitsioon 1.5 ([6]). Poolrühma S nimetatakse **inversseks**, kui tema igal elemendil s leidub täpselt üks inversne element. Elemendi s inversset elementi tähistatakse sümboliga s^{-1}.

Definitsioon 1.6 ([6]). Poolrühma S elementi e nimetatakse **idempotendiks**, kui $e^2 = e$.

Lihtne on näha, et inversses poolrühmas ss^{-1} ja $s^{-1}s$ on idempotendid.

Lemma 1.7 ([6]). *Poolrühm on inversne parajasti siis, kui ta on regulaarne ja tema idempotendid kommuteeruvad.*

Lemma 1.8 ([7]). *Olgu S inversne poolrühm ning $s, t \in S$. Siis*

1. $(st)^{-1} = t^{-1}s^{-1}$,

2. $(s^{-1})^{-1} = s$.

Definitsioon 1.9 ([6])**.** Olgu S monoid. Hulka A nimetatakse **vasakpoolseks polügooniks** üle monoidi S, kui on defineeritud kujutus

$$S \times A \to A, (s, a) \to sa$$

nii, et

1. iga $a \in A$ ja $s, t \in S$ korral $(st)a = s(ta)$,
2. iga $a \in A$ korral $1a = a$.

Sellist polügooni tähistame ${}_SA$. Parempoolne polügoon defineeritakse analoogselt.

Definitsioon 1.10 ([6])**.** Kujutust $f : {}_SA \to {}_SB$ nimetatakse **polügoonide homomorfismiks**, kui ta säilitab monoidi toime, s.t

$$f(sa) = sf(a)$$

iga $a \in A$ ja $s \in S$ korral. Parempoolsete polügoonide jaoks defineeritakse kujutus analoogiliselt.

Definitsioon 1.11 ([1])**.** Olgu S monoid ning A_S ja ${}_SB$ vastavad polügoonid. Olgu τ vähim ekvivalentsusseos hulgal $A \times B$, mis sisaldab kõiki paare $((as, b), (a, sb))$, kus $a \in A, b \in B, s \in S$. Faktorhulka $(A \times B)/\tau$ nimetatakse polügoonide A_S ja ${}_SB$ **tensorkorrutiseks** ning tähistatakse $A \otimes_S B$. Paari (a, b) τ-klassi tähistatakse kui $a \otimes b$ ning nimetatakse elementide a ja b **tensorkorrutiseks**.

Definitsioonist näeme, et iga $a \in A, b \in B, s \in S$ korral

$$as \otimes b = a \otimes sb. \tag{1}$$

Saab tõestada, et kehtib järgmine tulemus.

Lemma 1.12. *Olgu A_S ja $_SB$ polügoonid üle monoidi S ja olgu C mingi hulk. Kui $\varphi : A \times B \to C$ on selline kujutus, mis rahuldab tingimust*

$$\varphi(as, b) = \varphi(a, sb)$$

iga $a \in A$, $b \in B$ ja $s \in S$ korral, siis kujutus

$$\Phi : A \otimes_S B \to C, \quad a \otimes b \mapsto \varphi(a, b)$$

on korrektselt defineeritud.

Definitsioon 1.13 ([5])**.** **Kategooria** $\mathcal{C}$ koosneb järgmistest asjadest:

1. klass $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, mille elemente kutsume selle kategooria objektideks;
2. iga objektipaari (A, B) jaoks on olemas hulk $\mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, mille elemente nimetame **morfismideks** (ehk noolteks) objektist A objekti B; kõikide morfismide klassi kategoorias $\mathcal{C}$ tähistame $\mathsf{Mor}(\mathcal{C})$;
3. iga objektikolmiku (A, B, C) jaoks on olemas kujutus (komponeerimine ehk **korrutamine**)

$$\circ : \mathsf{Mor}_C(A, B) \times \mathsf{Mor}_C(B, C) \to \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C);$$

   morfismide paarile (f, g) vastavat kujutist (f ja g kompositsiooni ehk korrutist) tähistame $g \circ f$ (või lühidalt gf);
4. iga objekti A jaoks on olemas morfism $\mathsf{id}_A \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$, mida nimetatakse objekti A **ühikmorfismiks**.

Need andmed peavad rahuldama järgmisi aksioome.

1. Kui $(A, B) \neq (A', B')$, siis $\mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(A', B') = \emptyset$.

2. **Assotsiatiivsuse aksioom**: mistahes morfismide $f \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$, $g \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C)$, $h \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(C,D)$ korral kehtib võrdus

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

3. **Ühiku aksioom**: mistahes morfismide $f \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B), g \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C)$ korral kehtivad võrdused

$$\mathsf{id}_B \circ f = f \text{ ja } g \circ \mathsf{id}_B = g.$$

Definitsioon 1.14 ([5])**.** Morfismi $f : A \to B$ kategoorias $\mathcal{C}$ nimetatakse **monomorfismiks**, kui ta on vasakult taandatav, s.t.

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

iga morfismide paari $g, h : C \to A$ korral

On teada, et hulkade kategoorias Set on monomorfismideks parajasti injektiivsed kujutused ja parempoolsete S-polügoonide kategoorias Act_S on monomorfismideks parajasti injektiivsed homomorfismid.

Lemma 1.15 ([1])**.** *Olgu S monoid, A_S parempoolne S-polügoon, $a, a' \in A$ ja ${}_SB$ vasakpoolne S-polügoon, $b, b' \in B$. Siis $a \otimes b = a' \otimes b'$ hulgas $A \otimes_S B$ parajasti siis, kui eksisteerivad $a_1, \ldots, a_n \in A, b_2, \ldots b_n \in B, s_1, \ldots, s_n \in S, t_1, \ldots, t_n \in S$ nii, et*

$$\begin{array}{rclrcl} a & = & a_1 s_1, & & & \\ a_1 t_1 & = & a_2 s_2, & s_1 b & = & t_1 b_2 \\ a_2 t_2 & = & a_3 s_3, & s_2 b_2 & = & t_2 b_3 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ a_n t_n & = & a', & s_n b_n & = & t_n b'. \end{array} \tag{2}$$

Definitsioon 1.16 ([1])**.** Võrduste süsteemi (2) nimetatakse paare (a, b) ja (a', b')

ühendavaks **skeemiks** pikkusega n.

Lemma 1.17. *Kui eksisteerib paare* (a, b) *ja* (a', b') *ühendav skeem pikkusega* n, *siis eksisteerib ka neid paare ühendav skeem pikkusega* $n + 1$.

Tõestus. Eksisteerigu skeem (2) pikkusega n. Saame alati lisada algusesse rea

$$\begin{array}{rclrcl} a & = & a1, & & & \\ 1a & = & a_1 s_1, & 1b & = & 1b \\ a_1 t_1 & = & a_2 s_2, & s_1 b & = & t_1 b_2 \\ a_2 t_2 & = & a_3 s_3, & s_2 b_2 & = & t_2 b_3 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ a_n t_n & = & a', & s_n b_n & = & t_n b'. \end{array}$$

Eelnev skeem on pikkusega $n + 1$. □

2 Polügooni lamedus

Antud peatükis defineerime, millal on polügoon lame ning kunas on monoid absoluutselt lame.

Definitsioon 2.1 ([1])**.** Olgu S monoid, ning olgu ${}_SB$ vasakpoolne polügoon. Siis ${}_SB$ on **lame**, kui iga injektiivse parempoolsete polügoonide homomorfismi $f : A_S \to C_S$ korral kujutus

$$f \otimes 1_B : A \otimes B \to C \otimes B,\ a \otimes b \mapsto f(a) \otimes b,$$

on injektiivne. Lamedad parempoolsed polügoonid defineeritakse analoogiliselt.

Niisiis poolügoon ${}_SB$ on lame parajasti siis, kui iga injektiivse homomorfismi $f : A_S \to C_S$ ja mistahes elementide $a, a' \in A$ ja $b, b' \in B$ korral

$$\begin{aligned} & f(a) \otimes b = f(a') \otimes b' \ \text{ tensorkorrutises } C \otimes_S B \\ \Longrightarrow\ & a \otimes b = a' \otimes b' \ \text{ tensorkorrutises } A \otimes_S B. \end{aligned}$$

Näide 2.2. Iga monoidi S võib vaadelda vasakpoolse S-polügoonina ${}_SS$, kui toime defineerida S korrutamise abil. Näitame, et ${}_SS$ on lame.

Olgu $f : A_S \to C_S$ injektiivne homomorfism ja kehtigu tensorkorrutises $C \otimes_S S$ võrdus $f(a) \otimes s = f(a') \otimes s'$. Siis leidub meil skeem

$$\begin{array}{rclrcl} f(a) & = & c_1 l_1, & & & \\ c_1 t_1 & = & c_2 l_2, & l_1 s & = & t_1 s_2 \\ c_2 t_2 & = & c_3 l_3, & l_2 s_2 & = & t_2 s_3 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ c_n t_n & = & f(a'), & l_n s_n & = & t_n s', \end{array}$$

kus $c_1, \dots, c_n \in C, s_2, \dots s_n \in S,\ l_1, \dots, l_n \in S, t_1, \dots, t_n \in S$. Kasutades neid võrdusi näeme, et

$$\begin{aligned} f(as) &= f(a)s = c_1 l_1 s = c_1 t_1 s_2 \\ &= c_2 l_2 s_2 = \ldots\ldots = c_n l_n s_n = c_n t_n s' \\ &= f(a')s' = f(a's'). \end{aligned}$$

Järelikult $f(as) = f(a's')$. Injektiivsuse tõttu $as = a's'$. Nüüd tensorkorrutises $A \otimes_S S$

$$a \otimes s = 1 \otimes as = 1 \otimes a's' = a' \otimes s'.$$

Näide 2.3. Vaatleme monoidi $S = \{u, v, 1\}$ korrutamistabeliga

	1	u	v
1	1	u	v
u	u	u	u
v	v	v	v.

Olgu ${}_S\Theta = \{\theta\}$ ühe-elemendiline vasakpoolne polügoon üle S, s.t. $s\theta = \theta$ iga $s \in S$ korral. Olgu $f : uS \cup vS \to S_S$ sisestus (paneme tähele, et $uS \cup vS = \{u, v\}$).

Paneme tähele, et $u \otimes \theta = v \otimes \theta$ tensorkorrutises $S \otimes_S \Theta$:

$$u \otimes \theta = 1u \otimes \theta = 1 \otimes u\theta = 1 \otimes \theta = 1 \otimes v\theta = 1v \otimes \theta = v \otimes \theta.$$

Oletame, et $u \otimes \theta = v \otimes \theta$ tensorkorrutises $(uS \cup vS) \otimes_S \Theta$ ja näitame, et nii tekib vastuolu. Leidub paare (u, θ) ja (v, θ) ühendav skeem

$$\begin{array}{rclrcl} u &=& u_1 s_1, & & & \\ u_1 t_1 &=& u_2 s_2, & s_1 \theta &=& t_1 \theta_2 \\ u_2 t_2 &=& u_3 s_3, & s_2 \theta_2 &=& t_2 \theta_3 \\ &\vdots& & &\vdots& \\ u_n t_n &=& v, & s_n \theta_n &=& t_n \theta, \end{array}$$

kus $u_1, \ldots, u_n \in \{u, v\}, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \{\theta\},\ s_1, \ldots, s_n \in S, t_1, \ldots, t_n \in S$. Kuna $u = u_1 s_1$, siis on ainuke võimalus, et $u_1 = u$, sest vastasel juhul $u_1 s_1 = v s_1 = v$ mis ei saa kehtida, sest $u \neq v$. Nüüd kui $u_1 = u$, siis $u_1 t_1 = u$. Eelnevat korrates saame, et ka $u_2 = u$. Analoogiliselt jätkates jõuame selleni, et $u = u_n t_n = v$, mis on vastuolus sellega, et u ja v on erinevad. Seega polügoon ${}_S\Theta$ ei ole lame.

Definitsioon 2.4 ([1])**.** Olgu S monoid. Siis S on **vasakult absoluutselt lame**, kui kõik vasakpoolsed S-polügoonid on lamedad. Paremalt absoluutselt lamedus defineeritakse analoogiliselt.

Näide 2.5. Kõik rühmad on absoluutselt lamedad.

Lemma 2.6 ([1])**.** *Olgu S monoid. Vasakpoolne S-polügoon ${}_SB$ on lame parajasti siis, kui iga parempoolse S-polügooni A_S ning iga $a, a' \in A, b, b' \in B$ korral*

$$\begin{aligned} & a \otimes b = a' \otimes b' \ \ \textit{tensorkorrutises } A \otimes_S B \\ \Longrightarrow\ & a \otimes b = a' \otimes b' \ \ \textit{tensorkorrutises } (aS \cup a'S) \otimes_S B. \end{aligned}$$

(Siin $aS \cup a'S$ on polügooni A_S alampolügoon.)

3 Absoluutselt lame monoid on regulaarne

Selles peatükis tõestame, et absoluutselt lame monoid peab olema regulaarne. Selleks läheb vaja faktorpolügoone. Anname vajalikud definitsioonid.

Definitsioon 3.1 ([2])**.** Ekvivalentsiseost $\rho \subseteq B \times B$ nimetatakse vasakpoolse polügooni ${}_SB$ **kongruentsiks**, kui iga $s \in S$ ja $b, b' \in B$ korral

$$b \, \rho \, b' \implies sb \, \rho \, sb'.$$

Definitsioon 3.2 ([2])**.** Tähistame elemendi $b \in B$ ρ-klassi $\bar{b}$. Siis faktorhulga $B/\rho = \{\bar{b} \mid b \in B\}$ saab muuta vasakpoolseks S-polügooniks defineerides

$$s\bar{b} = \overline{sb}.$$

Saadud polügooni nimetatakse polügooni ${}_SB$ **faktorpolügooniks**.

Mistahes alamhulga $H \subseteq B \times B$ korral leidub vähim polügooni ${}_SB$ kongruents, mis sisaldab hulka H. Tähistame seda kongruentsi $\theta(H)$.

Definitsioon 3.3 ([1])**.** Olgu meil vasakpoolne polügoon ${}_SS$ ning vaatleme ühest paarist koosnevat hulka $H = \{(s,t)\} \subseteq S \times S$. Siis saame defineerida kongruentsi $\theta(H) =: \theta(s,t)$. Nüüd, kui $u, v \in S$, siis $(u,v) \in \theta(s,t)$ parajasti siis, kui

$$u = v$$

või eksisteerivad $w_1, \ldots, w_n \in S, s_1, \ldots, s_n \in S, t_1, \ldots, t_n \in S$, kus $\{s_i, t_i\} = \{s, t\}, i = 1, \ldots, n$ nii, et

$$\begin{aligned} u &= w_1 s_1 \\ w_1 t_1 &= w_2 s_2 \\ &\vdots \\ w_n t_n &= v. \end{aligned} \tag{3}$$

Lemma 3.4 ([1]). *Olgu S monoid, $s, t \in S, A_S$ parempoolne S-polügoon, $a, a' \in A$. Siis $a \otimes \overline{1} = a' \otimes \overline{1}$ hulgas $A \otimes_S S/\theta(s,t)$ siis ja ainult siis, kui*

$$a = a'$$

või eksisteerivad $a_1, \dots, a_n \in A, s_1, \dots, s_n \in S, t_1, \dots, t_n \in S$, kus $\{s_i, t_i\} = \{s, t\}, i = 1, \dots, n$ nii, et

$$\begin{array}{rcl} a & = & a_1 s_1 \\ a_1 t_1 & = & a_2 s_2 \\ & \vdots & \\ a_n t_n & = & a'. \end{array} \tag{4}$$

Tõestus. Olgu $a, a' \in A$. Defineerime seose ψ nii, et $a \psi a'$ parajasti siis, kui $a = a'$ või kehtib süsteem (4). On lihtne veenduda, et ψ on ekvivalentsusseos. Defineerime kujutuse

$$\varphi : A \times S/\theta(s,t) \to A/\psi, \quad \varphi(a, \overline{u}) = \widetilde{au},\ a \in A,\ u \in S.$$

Näitame, et kujutus on korrektselt defineeritud ning tasakaalustatud ehk $\varphi(ax, \overline{u}) = \varphi(a, x\overline{u})$ iga $a \in A, x, u \in S$ korral.

Olgu $a, a' \in A, \overline{u}, \overline{v} \in S/\theta(s,t), (a, \overline{u}) = (a', \overline{v})$ ning eksisteerigu süsteem (3), mis ühendab elemente u ja v. Näitame, et siis $\widetilde{au} = \widetilde{a'v}$, kus $\widetilde{au}, \widetilde{a'v} \in A/\psi$. Näitame, et nende vahele saab luua süsteemi (4). Esiteks näeme, et kehtib võrduste süsteem

$$\begin{array}{rcl} au & = & aw_1 s_1 \\ aw_1 t_1 & = & aw_2 s_2 \\ & \vdots & \\ aw_n t_n & = & a'v. \end{array}$$

Defineerides $a_i = aw_i, a_i \in A, i = 1, \dots, n$, saamegi süsteemi (4). Järelikult kujutus on korrektselt defineeritud.

On ilmne, et see kujutus on tasakaalustatud, sest kui $a \in A$ ja $x, u \in S$, siis

$$\varphi(ax, \overline{u}) = \widetilde{axu} = \varphi(a, \overline{xu}) = \varphi(a, x\overline{u}).$$

Nüüd saame defineerida kujutuse

$$\Phi : A \otimes_S S/\theta(s,t) \to A/\psi, \quad a \otimes \overline{u} \mapsto \widetilde{au}.$$

Lemmast 1.12 järeldub, et see kujutus on korrektselt defineeritud.

Näitame, et tegu on bijektsiooniga.

Olgu $a, b \in A$, $\overline{u}, \overline{v} \in S/\theta(s,t)$ ning $\widetilde{au} = \widetilde{bv}$. Näitame, et $a \otimes \overline{u} = b \otimes \overline{v}$. Eelduse kohaselt kehtib võrduste süsteem

$$\begin{array}{rcl} au & = & a_1 s_1 \\ a_1 t_1 & = & a_2 s_2 \\ & \vdots & \\ a_n t_n & = & bv, \end{array} \tag{5}$$

kus $a_1, \ldots, a_n \in A, s_1, \ldots, s_n \in S, t_1, \ldots, t_n \in S$. Nüüd

$$
\begin{aligned}
a \otimes \overline{u} &= a \otimes u\overline{1} && \text{(faktorpolügooni def.)} \\
&= au \otimes \overline{1} && \text{(omadus (1))} \\
&= a_1 s_1 \otimes \overline{1} && \text{(süsteem (5))} \\
&= a_1 \otimes s_1\overline{1} && \text{(omadus (1))} \\
&= a_1 \otimes \overline{s_1} && \text{(faktorpolügooni def.)} \\
&= a_1 \otimes \overline{t_1} && (\overline{s_1} = \overline{t_1}) \\
&= a_1 \otimes t_1\overline{1} && \text{(faktorpolügooni def.)} \\
&= a_1 t_1 \otimes \overline{1} && \text{(omadus (1))} \\
&= a_2 s_2 \otimes \overline{1} && \text{(süsteem (5))} \\
&\ \vdots \\
&= a_n t_n \otimes \overline{1} \\
&= bv \otimes \overline{1} && \text{(süsteem (5))} \\
&= b \otimes v\overline{1} && \text{(omadus (1))} \\
&= b \otimes \overline{v}. && \text{(faktorpolügooni def.)}
\end{aligned}
$$

Järelikult kujutus on injektiivne.

Nüüd olgu meil $\widetilde{a} \in A/\psi$. Sellest saame, et

$$\widetilde{a} = \widetilde{a1} = \varphi(a \otimes \overline{1})$$

ehk elemendil $\widetilde{a}$ leidub originaal hulgas $A \otimes_S S/\theta(s,t)$, järelikult kujutus on sürjektiivne.

Seega, $a, a' \in A$ korral $a \otimes \overline{1} = a' \otimes \overline{1}$ parajasti siis, kui $\Phi(a \otimes \overline{1}) = \Phi(a' \otimes \overline{1})$, mis kehtib parajasti siis, kui $a\psi a'$. $\square$

Lause 3.5 ([1]). *Olgu S monoid. Kui kõik tsüklilised vasakpoolsed polügoonid on* *lamedad, siis S on regulaarne.*

Tõestus. Olgu $s \in S$. Kehtib

$$s \otimes \overline{1} = 1s \otimes \overline{1} = 1 \otimes s\overline{1} = 1 \otimes \overline{s1} = 1 \otimes \overline{s} = 1 \otimes \overline{s^2} = 1 \otimes s^2\overline{1} = s^2 \otimes \overline{1}$$

tensorkorrutises $S \otimes_S S/\theta(s, s^2)$, ning $S/\theta(s, s^2)$ lameduse tõttu kehtib samasugune võrdus ka tensorkorrutises $sS \otimes_S S/\theta(s, s^2)$. Lemma 3.4 põhjal kas $s = s^2$ või eksisteerivad $u_1, \ldots, u_n \in sS, s_1, \ldots, s_n \in \{s, s^2\}, t_1, \ldots, t_n \in S$ nii, et

$$\begin{aligned} s &= u_1 s_1 \\ u_1 t_1 &= u_2 s_2 \\ &\vdots \\ u_n t_n &= s^2. \end{aligned}$$

Mõlemal juhul on selge, et $s \in sSs$.

□

Sarnase tulemuse saab tõestada ka parempoolsete polügoonide jaoks.

Järeldus 3.6. *Absoluutselt lamedad monoidid on regulaarsed.*

4 Inversne monoid on absoluutselt lame

Peatükis näitame, et iga inversne monoid on absoluutselt lame. Esiteks tõestame ühe abitulemuse.

Lemma 4.1 ([1])**.** *Olgu S monoid, A_S parempoolne S-polügoon, $a, a' \in A$ ja ${}_SB$ vasakpoolne S-polügoon, $b, b' \in B$ ning eksisteerigu neid elemente ühendav skeem* (2). *Tähistame*

$$x_0 = 1,\, x_i = s_1^{-1}t_1s_2^{-1}t_2 \dots s_i^{-1}t_i\, (1 \leq i \leq n),$$

ning

$$y_0 = 1,\, y_i = t_n^{-1}s_nt_{n-1}^{-1}s_{n-1} \dots t_{n-i+1}^{-1}s_{n-i+1}\, (1 \leq i \leq n),$$

Kus s_i, t_i on elemendid skeemist (2). *Siis*

1. $x_{n-i}y_i^{-1} = x_n\ (0 \leq i \leq n)$,
2. $y_ix_{n-i}^{-1} = y_n\ (0 \leq i \leq n)$,
3. $ax_i = a_it_ix_i^{-1}x_i\ (0 \leq i \leq n)$,
4. $a'y_i = a_{n-i+1}s_{n-i+1}y_i^{-1}y_i\ (0 \leq i \leq n)$.

Tõestus. 1. Kuna

$$x_{n-i} = s_1^{-1}t_1s_2^{-1}t_2 \dots s_{n-i}^{-1}t_{n-i}$$

ja

$$y_i^{-1} = (t_n^{-1}s_1t_{n-1}^{-1}s_{n-1} \dots t_{n-i+1}^{-1}s_{n-i+1})^{-1} = s_{n-i+1}^{-1}t_{n-i+1} \dots s_{n-1}^{-1}t_{n-1}s_n^{-1}t_n,$$

siis

$$x_{n-i}y_i^{-1} = s_1^{-1}t_1s_2^{-1}t_2 \dots s_{n-i}^{-1}t_{n-i}s_{n-i+1}^{-1}t_{n-i+1} \dots s_{n-1}^{-1}t_{n-1}s_n^{-1}t_n = x_n.$$

2. Kuna

$$y_i = t_n^{-1}s_nt_{n-1}^{-1}s_{n-1} \dots t_{n-i+1}^{-1}s_{n-i+1}$$

ning

$$x_{n-i}^{-1} = (s_1^{-1}t_1s_2^{-1}t_2 \dots s_{n-i}^{-1}t_{n-i})^{-1} = t_{n-i}^{-1}s_{n-i} \dots t_2^{-1}s_2t_1^{-1}s_1,$$

siis

$$y_ix_{n-i}^{-1} = t_n^{-1}s_nt_{n-1}^{-1}s_{n-1} \dots t_{n-i+1}^{-1}s_{n-i+1}t_{n-i}^{-1}s_{n-i} \dots t_2^{-1}s_2t_1^{-1}s_1 = y_n.$$

3. Tõestame induktsiooni abil.

Alus: Tõestame väite $i = 1$ korral. Tõepoolest

$$\begin{aligned}
ax_1 &= a_1s_1x_1 && (a = a_1s_1)\\
&= a_1s_1s_1^{-1}t_1 && (x_1 \text{ def.})\\
&= a_1s_1s_1^{-1}t_1t_1^{-1}t_1 && (t_1 = t_1t_1^{-1}t_1)\\
&= a_1t_1t_1^{-1}s_1s_1^{-1}t_1 && (\text{idempotendid kommuteeruvad})\\
&= a_1t_1(s_1^{-1}t_1)^{-1}s_1^{-1}t_1 && (\text{lemma 1.8})\\
&= a_1t_1x_1^{-1}x_1. && (x_1 \text{ def.})
\end{aligned}$$

Samm: Kehtigu väide $1 \leq k < n$ korral, näitame et kehtib $k + 1$ korral. Tõepoolest

$$
\begin{aligned}
a_{k+1}t_{k+1}x_{k+1}^{-1}x_{k+1} &= a_{k+1}t_{k+1}(x_k s_{k+1}^{-1}t_{k+1})^{-1}x_k s_{k+1}^{-1}t_{k+1} \\
&\qquad\qquad (x_{k+1} = x_k s_{k+1}^{-1}t_{k+1}) \\
&= a_{k+1}t_{k+1}(s_{k+1}^{-1}t_{k+1})^{-1}x_k^{-1}x_k s_{k+1}^{-1}t_{k+1} && \text{(lemma 1.8)} \\
&= a_{k+1}(t_{k+1}t_{k+1}^{-1})s_{k+1}x_k^{-1}x_k s_{k+1}^{-1}t_{k+1} && \text{(lemma 1.8)} \\
&= a_{k+1}(t_{k+1}t_{k+1}^{-1})(s_{k+1}x_k^{-1})(s_{k+1}x_k^{-1})^{-1}t_{k+1} \\
&= a_{k+1}(s_{k+1}x_k^{-1})(s_{k+1}x_k^{-1})^{-1}(t_{k+1}t_{k+1}^{-1})t_{k+1} \\
&\qquad\qquad \text{(idempotendid kommuteeruvad)} \\
&= a_{k+1}s_{k+1}x_k^{-1}x_k s_{k+1}^{-1}(t_{k+1}t_{k+1}^{-1}t_{k+1}) \\
&= a_{k+1}s_{k+1}x_k^{-1}x_k s_{k+1}^{-1}t_{k+1} && (t_{k+1}t_{k+1}^{-1}t_{k+1} = t_{k+1}) \\
&= a_k t_k x_k^{-1}x_k s_{k+1}^{-1}t_{k+1} && \text{(lemma 1.15)} \\
&= a x_k s_{k+1}^{-1}t_{k+1} && \text{(induktsiooni eeldus)} \\
&= a x_{k+1}. && (x_{k+1} = x_k s_{k+1}^{-1}t_{k+1})
\end{aligned}
$$

4. Tõestame induktsiooni abil.

   Alus: Tõestame väite $i = 1$ korral. Tõepoolest

$$
\begin{aligned}
a'y_1 &= a_n t_n y_1 && (a' = a_n t_n) \\
&= a_n t_n t_n^{-1} s_n && (y_1 \text{ def.}) \\
&= a_n t_n t_n^{-1} s_n s_n^{-1} s_n && (s_n = s_n s_n^{-1} s_n) \\
&= a_n s_n s_n^{-1} t_n t_n^{-1} s_n && \text{(idempotendid kommuteeruvad)} \\
&= a_n s_n (t_n^{-1} s_n)^{-1} t_n^{-1} s_n && \text{(lemma 1.8)} \\
&= a_n s_n y_1^{-1} y_1. && (y_1 \text{ def.})
\end{aligned}
$$

   Samm: Kehtigu väide $1 \leq k < n$ korral, näitame et kehtib $k + 1$ korral. Tõepoolest

$$
\begin{aligned}
a_{n-k}s_{n-k}y_{k+1}^{-1}y_{k+1} &= a_{n-k}s_{n-k}(y_k t_{n-k}^{-1}s_{n-k})^{-1}y_k t_{n-k}^{-1}s_{n-k} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (y_{k+1} = y_k t_{n-k}^{-1}s_{n-k}) \\
&= a_{n-k}(s_{n-k}s_{n-k}^{-1})t_{n-k}y_k^{-1}y_k t_{n-k}^{-1}s_{n-k} \qquad (\text{lemma } 1.8) \\
&= a_{n-k}(s_{n-k}s_{n-k}^{-1})(t_{n-k}y_k^{-1})(t_{n-k}y_k^{-1})^{-1}s_{n-k} \\
&= a_{n-k}(t_{n-k}y_k^{-1})(t_{n-k}y_k^{-1})^{-1}(s_{n-k}s_{n-k}^{-1})s_{n-k} \\
&\qquad\qquad (\text{idempotendid kommuteeruvad}) \\
&= a_{n-k}t_{n-k}y_k^{-1}y_k t_{n-k}^{-1}(s_{n-k}s_{n-k}^{-1}s_{n-k}) \\
&= a_{n-k}t_{n-k}y_k^{-1}y_k t_{n-k}^{-1}s_{n-k} \qquad (s_{n-k} = s_{n-k}s_{n-k}^{-1}s_{n-k}) \\
&= a_{n-k+1}s_{n-k+1}y_k^{-1}y_k t_{n-k}^{-1}s_{n-k} \qquad (\text{lemma } 1.15) \\
&= a' y_k t_{n-k}^{-1}s_{n-k} \qquad (\text{induktsioooni eeldus}) \\
&= a' y_{k+1}. \qquad (y_{k+1} = y_k t_{n-k}^{-1}s_{n-k})
\end{aligned}
$$

□

Selle töö põhitulemus on järgmine.

Teoreem 4.2 ([1]). *Iga inversne monoid on vasakult absoluutselt lame.*

Tõestus. Olgu S inversne monoid. Kasutades lemmat 2.6 näitame, et kõik vasakpoolsed S-polügoonid on lamedad. Olgu ${}_SB$ vasakpoolne polügoon, A_S parempoolne polügoon, $a, a' \in A$ ja $b, b' \in B$. Eeldame, et $a \otimes b = a \otimes b'$ tensorkorrutises $A \otimes_S B$. Siis leidub paare (a, b) ja (a', b') ühendav skeem (2) pikkusega n. Võime eeldada, et n on paarisarv. Kui n on paaritu arv, saame kasutada lemmat 1.17. Tähistame $s_i^{-1}s_i = e_i$ ja $t_{n-i+1}^{-1}t_{n-i+1} = f_i$. Lemma 2.6 abil piisab tõestuseks näidata, et $a \otimes b = a \otimes b'$ tensorkorrutises $(aS \cup a'S) \otimes_S B$. Selle näitamiseks tõestame veel mõned abistavad võrdused.

1. Näitame, et

$$ax_i = ax_ie_{i+1} \ (0 \leq i \leq n-1). \tag{6}$$

Kui $i = 0$, siis

$$\begin{aligned}
ax_0e_1 &= ae_1 && \text{(lemma 4.1 } x_0 \text{ def.)}\\
&= as_1^{-1}s_1 && (e_1 \text{ def.})\\
&= a_1s_1s_1^{-1}s_1 && \text{(lemma 1.15)}\\
&= a_1s_1 && (s_1 = s_1s_1^{-1}s_1)\\
&= a && \text{(lemma 1.15)}\\
&= ax_0. && \text{(lemma 4.1 } x_0 \text{ def.)}
\end{aligned}$$

Kui $0 < i \leq n-1$, siis

$$\begin{aligned}
ax_ie_{i+1} &= a_it_ix_i^{-1}x_ie_{i+1} && \text{(lemma 4.1(3))}\\
&= a_{i+1}s_{i+1}x_i^{-1}x_ie_{i+1} && \text{(lemma 1.15)}\\
&= a_{i+1}s_{i+1}x_i^{-1}x_is_{i+1}^{-1}s_{i+1} && (e_i \text{ def.})\\
&= a_{i+1}s_{i+1}s_{i+1}^{-1}s_{i+1}x_i^{-1}x_i && \text{(idempotendid kommuteeruvad)}\\
&= a_{i+1}s_{i+1}x_i^{-1}x_i && (s_{i+1} = s_{i+1}s_{i+1}^{-1}s_{i+1})\\
&= a_it_ix_i^{-1}x_i && \text{(lemma 1.15)}\\
&= ax_i && \text{(lemma 4.1(3))}
\end{aligned}$$

2. Näitame, et

$$ax_ny_i = ax_ny_if_{i+1} \ (0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1). \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
ax_ny_i &= ax_{n-i}y_i^{-1}y_i && \text{(lemma 4.1(1))}\\
&= ax_{n-i-1}s_{n-i}^{-1}t_{n-i}y_i^{-1}y_i && (x_{n-i} = x_{n-i-1}s_{n-i}^{-1}t_{n-i})\\
&= ax_{n-i-1}s_{n-i}^{-1}t_{n-(i+1)+1}y_i^{-1}y_i\\
&= ax_{n-i-1}s_{n-i}^{-1}t_{n-(i+1)+1}t_{n-(i+1)+1}^{-1}t_{n-(i+1)+1}y_i^{-1}y_i\\
& && (t_{n-(i+1)+1} = t_{n-(i+1)+1}t_{n-(i+1)+1}^{-1}t_{n-(i+1)+1})\\
&= ax_{n-i-1}s_{n-i}^{-1}t_{n-(i+1)+1}f_{i+1}y_i^{-1}y_i && (f_{i+1}\text{ def.})\\
&= ax_{n-i}f_{i+1}y_i^{-1}y_i && (x_{n-i} = x_{n-i-1}s_{n-i}^{-1}t_{n-i})\\
&= ax_{n-i}y_i^{-1}y_if_{i+1} && \text{(idempotendid kommuteeruvad)}\\
&= ax_ny_if_{i+1}. && \text{(lemma 4.1(1))}
\end{aligned}
$$

3. Näitame, et

$$
ax_ny_{\frac{n}{2}} = a'y_nx_{\frac{n}{2}}. \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
ax_ny_{\frac{n}{2}} &= ax_{\frac{n}{2}}y_{\frac{n}{2}}^{-1}y_{\frac{n}{2}} && \text{(lemma 4.1(1))}\\
&= a_{\frac{n}{2}}t_{\frac{n}{2}}x_{\frac{n}{2}}^{-1}x_{\frac{n}{2}}y_{\frac{n}{2}}^{-1}y_{\frac{n}{2}} && \text{(lemma 4.1(3))}\\
&= a_{\frac{n}{2}+1}s_{\frac{n}{2}+1}x_{\frac{n}{2}}^{-1}x_{\frac{n}{2}}y_{\frac{n}{2}}^{-1}y_{\frac{n}{2}} && \text{(lemma 1.15)}\\
&= a_{\frac{n}{2}+1}s_{\frac{n}{2}+1}y_{\frac{n}{2}}^{-1}y_{\frac{n}{2}}x_{\frac{n}{2}}^{-1}x_{\frac{n}{2}} && \text{(idempotendid kommuteeruvad)}\\
&= a'y_{\frac{n}{2}}x_{\frac{n}{2}}^{-1}x_{\frac{n}{2}} && \text{(lemma 4.1(4))}\\
&= a'y_nx_{\frac{n}{2}}. && \text{(lemma 4.1(2))}
\end{aligned}
$$

4. Näitame, et

$$
a'y_nx_ie_{i+1} = a'y_nx_i \ (0 \le i \le \frac{n}{2} - 1). \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
a'y_nx_ie_{i+1} &= a'y_{n-i}x^{-1}_{n-(n-i)}x_ie_{i+1} && \text{(lemma 4.1(2))}\\
&= a'y_{n-i}x_i^{-1}x_ie_{i+1}\\
&= a'y_{n-i}e_{i+1}x_i^{-1}x_i && \text{(idempotendid kommuteeruvad)}\\
&= a'y_{n-i-1}t^{-1}_{n-(n-i)+1}s_{n-(n-i)+1}e_{i+1}x_i^{-1}x_i && (y_{n-i}\text{ def.})\\
&= a'y_{n-i-1}t^{-1}_{n-(n-i)+1}s_{i+1}s^{-1}_{i+1}s_{i+1}x_i^{-1}x_i && (e_{i+1}\text{ def.})\\
&= a'y_{n-i-1}t^{-1}_{n-(n-i)+1}s_{i+1}x_i^{-1}x_i && (s_{i+1}=s_{i+1}s^{-1}_{i+1}s_{i+1}\text{ def.})\\
&= a'y_{n-i}x_i^{-1}x_i && (y_{n-i}\text{ def.})\\
&= a'y_nx_i && \text{(lemma 4.1(2))}
\end{aligned}
$$

5. Näitame, et

$$a'y_if_{i+1}=a'y_i\ (0\le i\le n-1). \tag{10}$$

$$
\begin{aligned}
a'y_i &= a_{n-i+1}s_{n-i+1}y_i^{-1}y_i && \text{(lemma 4.1(4))}\\
&= a_{n-i}t_{n-i}y_i^{-1}y_i && \text{(lemma 1.15)}\\
&= a_{n-i}t_{n-(i+1)+1}y_i^{-1}y_i\\
&= a_{n-i}t_{n-(i+1)+1}t^{-1}_{n-(i+1)+1}t_{n-(i+1)+1}y_i^{-1}y_i\\
& && (t_{n-(i+1)+1}=t_{n-(i+1)+1}t^{-1}_{n-(i+1)+1}t_{n-(i+1)+1})\\
&= a_{n-i}t_{n-(i+1)+1}f_{i+1}y_i^{-1}y_i && (f_{i+1}\text{ def.})\\
&= a_{n-i}t_{n-i}y_i^{-1}y_if_{i+1} && \text{(idempotendid kommuteeruvad)}\\
&= a_{n-i+1}s_{n-i+1}y_i^{-1}y_if_{i+1} && \text{(lemma 1.15)}\\
&= a'y_if_{i+1}. && \text{(lemma 4.1(4))}
\end{aligned}
$$

Näitame nüüd, et $a\otimes b=a'\otimes b'$ tensorkorrutises $(aS\cup a'S)\otimes_S B$. Selleks vaatame võrduste jada

$$
\begin{aligned}
a \otimes b &= a_1 s_1 \otimes b && \text{(skeem (2))}\\
&= a_1 s_1 s_1^{-1} s_1 \otimes b && (\ s_1 = s_1 s_1^{-1} s_1)\\
&= a s_1^{-1} \otimes s_1 b && \text{(omadus (1))}\\
&= a s_1^{-1} \otimes t_1 b_2 && \text{(skeem (2))}\\
&= a s_1^{-1} t_1 \otimes b_2 && \text{(omadus (1))}\\
&= a x_1 \otimes b_2 && (x_1 \text{ def.})\\
&= a x_1 s_2^{-1} s_2 \otimes b_2 && \text{(võrdus (6))}\\
&= a x_1 s_2^{-1} \otimes s_2 b_2 && \text{(omadus (1))}\\
&= a x_1 s_2^{-1} \otimes t_2 b_3 && \text{(skeem (2))}\\
&= a x_1 s_2^{-1} t_2 \otimes b_3 && \text{(omadus (1))}\\
&= a x_2 \otimes b_3 && (x_2 \text{ def.})\\
&\dots\\
&= a x_{n-1} \otimes b_n,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ax_{n-1} \otimes b_n &= ax_{n-1}s_n^{-1}s_n \otimes b_n && \text{(võrdus (6))}\\
&= ax_{n-1}s_n^{-1} \otimes s_nb_n && \text{(omadus (1))}\\
&= ax_{n-1}s_n^{-1} \otimes t_nb' && \text{(skeem (2))}\\
&= ax_{n-1}s_n^{-1}t_n \otimes b' && \text{(omadus (1))}\\
&= ax_n \otimes b' && (x_n \text{ def.})\\
&= ax_ny_0 \otimes b' && (y_0 \text{ def.})\\
&= ax_ny_0t_n^{-1}t_n \otimes b' && \text{(võrdus (7))}\\
&= ax_ny_0t_n^{-1} \otimes t_nb' && \text{(omadus (1))}\\
&= ax_ny_0t_n^{-1} \otimes s_nb_n && \text{(skeem (2))}\\
&= ax_ny_0t_n^{-1}s_n \otimes b_n && \text{(omadus (1))}\\
&= ax_ny_1 \otimes b_n && (y_1 \text{ def.})\\
&\dots\\
&= ax_ny_{\frac{n}{2}-1} \otimes b_{\frac{n}{2}+2}\\
&= ax_ny_{\frac{n}{2}-1}t_{\frac{n}{2}+1}^{-1}t_{\frac{n}{2}+1} \otimes b_{\frac{n}{2}+2} && \text{(võrdus (7))}\\
&= ax_ny_{\frac{n}{2}-1}t_{\frac{n}{2}+1}^{-1} \otimes t_{\frac{n}{2}+1}b_{\frac{n}{2}+2} && \text{(omadus (1))}\\
&= ax_ny_{\frac{n}{2}-1}t_{\frac{n}{2}+1}^{-1} \otimes s_{\frac{n}{2}+1}b_{\frac{n}{2}+1} && \text{(skeem (2))}\\
&= ax_ny_{\frac{n}{2}-1}t_{\frac{n}{2}+1}^{-1}s_{\frac{n}{2}+1} \otimes b_{\frac{n}{2}+1} && \text{(omadus (1))}\\
&= ax_ny_{\frac{n}{2}} \otimes b_{\frac{n}{2}+1} && (y_{\frac{n}{2}} \text{ def.})\\
&= a'y_nx_{\frac{n}{2}} \otimes b_{\frac{n}{2}+1} && \text{(võrdus (8))}\\
&= a'y_nx_{\frac{n}{2}-1}s_{\frac{n}{2}}^{-1}t_{\frac{n}{2}} \otimes b_{\frac{n}{2}+1} && (x_{\frac{n}{2}} \text{ def.})\\
&= a'y_nx_{\frac{n}{2}-1}s_{\frac{n}{2}}^{-1} \otimes t_{\frac{n}{2}}b_{\frac{n}{2}+1} && \text{(omadus (1))}\\
&= a'y_nx_{\frac{n}{2}-1}s_{\frac{n}{2}}^{-1} \otimes s_{\frac{n}{2}}b_{\frac{n}{2}} && \text{(skeem (2))}\\
&= a'y_nx_{\frac{n}{2}-1}s_{\frac{n}{2}}^{-1}s_{\frac{n}{2}} \otimes b_{\frac{n}{2}} && \text{(omadus (1))}\\
&= a'y_nx_{\frac{n}{2}-1} \otimes b_{\frac{n}{2}} && \text{(võrdus (9))}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a'y_n x_{\frac{n}{2}-1} \otimes b_{\frac{n}{2}} &= a'y_n x_{\frac{n}{2}-2} s_{\frac{n}{2}-1}^{-1} t_{\frac{n}{2}-1} \otimes b_{\frac{n}{2}} && (x_{\frac{n}{2}-1} \text{ def.})\\
&= a'y_n x_{\frac{n}{2}-2} s_{\frac{n}{2}-1}^{-1} \otimes t_{\frac{n}{2}-1} b_{\frac{n}{2}} && (\text{omadus } (1))\\
&= a'y_n x_{\frac{n}{2}-2} s_{\frac{n}{2}-1}^{-1} \otimes s_{\frac{n}{2}-1} b_{\frac{n}{2}-1} && (\text{skeem } (2))\\
&= a'y_n x_{\frac{n}{2}-2} s_{\frac{n}{2}-1}^{-1} s_{\frac{n}{2}-1} \otimes b_{\frac{n}{2}-1} && (\text{omadus } (1))\\
&= a'y_n x_{\frac{n}{2}-2} \otimes b_{\frac{n}{2}-1} && (\text{võrdus } (9))\\
&\dots\\
&= a'y_n x_0 \otimes b\\
&= a'y_n \otimes b && (x_0 \text{ def.})\\
&= a'y_{n-1} t_1^{-1} s_1 \otimes b && (y_n \text{ def.})\\
&= a'y_{n-1} t_1^{-1} \otimes s_1 b && (\text{omadus } (1))\\
&= a'y_{n-1} t_1^{-1} \otimes t_1 b_2 && (\text{skeem } (2))\\
&= a'y_{n-1} t_1^{-1} t_1 \otimes b_2 && (\text{omadus } (1))\\
&= a'y_{n-1} \otimes b_2 && (\text{võrdus } (10))\\
&\dots\\
&= a'y_1 \otimes b_n\\
&= a'y_0 t_n^{-1} s_n \otimes b_n && (y_1 \text{ def.})\\
&= a'y_0 t_n^{-1} \otimes s_n b_n && (\text{omadus } (1))\\
&= a'y_0 t_n^{-1} \otimes t_n b' && (\text{skeem } (2))\\
&= a'y_0 t_n^{-1} t_n \otimes b' && (\text{omadus } (1))\\
&= a'y_0 \otimes b' && (\text{võrdus } (10))\\
&= a' \otimes b'. && (y_0 \text{ def.})
\end{aligned}
$$

Võrdusseose transitiivsuse tõttu $a \otimes b = a' \otimes b'$ tensorkorrutises $(aS \cup a'S) \otimes_S B$. $\square$

Analoogiliselt saab tõestada, et iga inversne monoid on paremalt absoluutselt lame.

Seega iga inversne monoid on absoluutselt lame.

Kokkuvõte

Selles bakalaureusetöös uuriti absoluutselt lamedadaid monoide, s.t. monoide, üle mille kõik polügoonid on lamedad. Esitati kahe olulise tulemuse tõestused: absoluutselt lamedad monoidid on regulaarsed ning inverssed monoidid on absoluutselt lamedad. Edasi oleks võimalik uurida seda, kas nende tulemuste tõestused lähevad läbi ka poolrühmade korral, kui neis tõestustes teha vajalikud muudatused.

Viited

[1] S. Bulman-Fleming, K. McDowell (1983). Absolutely flat semigroups, *Pacific J. Math.*, **107**, 319–333.

[2] M. Kilp (1998). *Algebra II*, Tartu Ülikool, 167 lk.

[3] M. Kilp (1970). Lamedad polügoonid (vene keeles), *Tartu Riikl. Ül. Toimetised*, **253**, 66–72.

[4] V. Laan (2022). *Algebra I*, https://courses.ms.ut.ee/MTMM.00.038/2022_fall/uploads/Main/kon.pdf, (vaadatud 07.05.2023).

[5] V. Laan (2022). *Kategooriateooria*, https://courses.ms.ut.ee/MTMM.00.037/2022_spring/uploads/Main/kat2022c.pdf, (vaadatud 07.05.2023).

[6] V. Laan, L. Tart (2023). *Sissejuhatus algebra struktuuridesse*, https://courses.ms.ut.ee/MTMM.00.013/2023_spring/uploads/Main/konspektV1.3.pdf, (vaadatud 07.05.2023).

[7] M.V. Lawson (1998). *Inverse semigroups*, World Scientific Publishing Co., River Edge, NJ, 411 lk.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Raido Rehepapp,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Absoluutselt lamedad monoidid“, mille juhendajad on Valdis Laan ja Nasir Sohail, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Raido Rehepapp

09.05.2023