

D. I. PEREPJOLKIN

**ELEMENTAARGEOMETRIA
KURSUS**

II



EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

A-19004 II

D. I. PEREPJOLKIN

ELEMENTAARGEOMEETRIA
KURSUS

TEINE OSA
RUUMIGEOMEETRIA



EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1956

Originaali tiitel:

Д. И. Перепелкин
КУРС ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ
ЧАСТЬ II

Геометрия в пространстве

Государственное издательство технико-теоретической литературы
Москва 1949 Ленинград

Tõlkinud E. Etoerk

See raamat esitab pedagoogiliste instituutide üliõpilaste ja ka keskkooliõpetajate jaoks mõeldud elementargeomeetria kursuse teist (ja viimast) osa. Käesolev teine osa, nagu ka raamatu esimene osa, erineb tavalistest õpikutest käsitluse suurema ranguse poolest (kursus on üles ehitatud tänapäeva aksiomaatika ideede alusel) ja ulatuslikuma sisu poolest (geomeetrilised teisendused, sfäärigeomeetria, hulktahukate teooria, konstruktsioonülesanded).

2

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

32090

Eessõna.

Käesolev raamat esitab pedagoogiliste instituutide füüsika-matemaatikateaduskonna üliõpilastele määratud elementargeomeetria süstemaatilise kursuse teist (ja viimast) osa ning on pühendatud stereomeetria. Tavalistest elementargeomeetria õpikuteist erineb käesolev raamat (nagu ka kursuse esimene osa) nii oma sisu poolest kui ka käsitluse suurema rangusega.

Kursuse materjali ja ülesehituse printsiipide valiku kohta võiks korrata sedasama, mis on öeldud esimese osa eessõnas. Märgime ainult, et selle teise osa puhul tundus materjali valiku ülesanne veel raskemana kui esimese osa puhul. Seejuures püüdsime sisse võtta võimalikult palju niisugust materjali, mis soodustab lugeja ruumikujutluse arenemist. Selliseid «näitlik-konstruktivse» iseloomuga küsimusi oleme teises osas eelistanud teooriatele, millede eesmärgiks on ühtede või teiste probleemide aksiomaatiline käsitlus. Näiteks loobusime täiesti hulktahuka ruumala teooriale¹ pühendatud peatükist järgmistel kaalutlustel. Ühelt poolt oleks vastava teooria detailne käsitlus, mis sisaldaks näiteks ruumvõrdsuse ja tükeldusvõrdsuse probleemi, tunduvalt suurendanud raamatu mahtu (või oleks sundinud ohverdama tunduva osa meie arvates väärtuslikust materjalist); teiselt poolt saaks see käsitlus olla ainult eristuudiumi materjaliks. Hulktahuka ruumala käsitleva lühikese peatüki paigutamine raamatusse oleks aga tunduvalt määral viinud koolikursuse kordamisele. Samadel kaalutlustel ei ole vaadeldud ümarkehade pindalasid ja ruumalasid.

Ülesannete suhtes jäime raamatu käesolevas osas samale vaatekohale kui tema esimeses osas; konstruktsioonülesandeid on raamatu teises osas vaadeldud arvult üle 90.

D. Perepõlkin.

¹ Hulktahukate ruumala kohta käiva põhiteoreemi tõestuse võib leida Hadamard'ilt [1], 2. osa, lk. 498—501. Hulktahukate ruumvõrdsuse ja tükeldusvõrdsuse küsimusele on pühendatud Kagani raamat [15]. Ümarkehade pindalade ja ruumalade kohta vt. Hadamard [1], 2. osa, lk. 501—515. Numbrid nurksulgudes viitavad raamatu lõppu paigutatud kirjanduse nimestikule.

Algmõisted. Paralleelsus.

§ 95. Punkti ja sirge, punkti ja tasapinna vastastikune asend.

Ruumigeomeetria algmõisteteks on punkti, sirge ja tasapinna mõisted. Punkti tähistame suurte ladina tähtedega A, B, C, \dots ja sirgeid väikeste ladina tähtedega a, b, c, \dots , nagu seda tegime ka tasapinnageomeetrias. Tasapindu tähistame väikeste kreeka tähtedega $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

Punkt ja sirge võivad teineteise suhtes olla (nagu ka tasapinnageomeetrias) mitmesuguseis asendeis. Punkt võib asetseada sirgel, võib aga ka mitte asetseada. Selle asemel, et öelda «punkt asetseb sirgel», öeldakse ka, et «sirge läbib punkti». Analoogiliselt võib punkt ka tasapinna suhtes olla mitmesuguseis asendeis. Punkt võib asetseada tasapinnal, võib aga ka mitte asetseada. Selle asemel, et öelda «punkt asetseb tasapinnal», öeldakse ka, et «tasapind läbib punkti».

Formuleerime nüüd järgmised ühendamise aksioomid», milledest esimest kolme kasutasime juba tasapinnageomeetrias (I, § 1).

Aksioom 1a. *On olemas üks ja ainult üks sirge, mis läbib kaht antud punkti.*

Aksioom 1b. *Iga sirge läbib lõpmatu hulga punkte.*

Aksioom 1c. *On olemas punkte, mis ei asetse ühel ja samal sirgel.*

Aksioom 1d. *On olemas üks ja ainult üks tasapind, mis läbib kolme antud punkti, mis ei asetse ühel sirgel.*

Aksioom 1e. *Iga tasapind läbib lõpmatu hulga punkte, mis ei asetse ühel ja samal sirgel.*

Aksioom 1f. *Kui antud sirge kaks punkti asetsevad mingil tasapinnal, siis asetsevad samal tasapinnal ka selle sirge kõik teised punktid.*

Aksioom 1g. *Kui kahel tasapinnal leidub üks ühine punkt, siis leidub neil ka teine ühine punkt.*

Aksioom 1h. *On olemas punkte, mis ei asetse ühel ja samal tasapinnal.*

Punkte A ja B läbivad sirget tähistatakse sümboliga AB või BA . Tasapinda, mis läbib mitte ühel sirgel asetsevad punkte A , B ja C , nimetatakse tasapinnaks ABC või BAC jne. (kolme tähe kuus permutatsioonil!).

Kui sirge a kõik punktid asetsevad tasapinnal α , siis öeldakse, et sirge a asetseb tasapinnal α ehk tasapind α läbib sirget a .

Samuti nagu tasapinnageomeetrias kasutatakse ka ruumigeomeetrias väljendite «asetseb» ja «läbib» asemel terminit «intsidentne» ja öeldakse: «punkt ja sirge on intsidentsed», «punkt ja tasapind on intsidentsed». Sest tõttu nimetatakse ühendamise aksioome $1a-1h$ ka «intsidentsi aksioomideks».

Loetleme nüüd rea teoreeme, mis tulenevad aksioomidest $1a-1h$. Kaks neist teoreemidest tõestame, kuna ülejäänud teoreemide tõestamise jätame lugeja hooleks.

Teoreem 178. *Kahel sirgel ruumis ei saa olla rohkem kui üks ühine punkt.*

Teoreem 179. *Tasapinnal ja sellel mitte asetseval sirgel ei saa olla rohkem kui üks ühine punkt.*

Teoreem 180. *Kui kaks tasapinda läbivad üht ja sama punkti, siis nad läbivad ka üht ja sama sirget ning peale selle sirge punktide ei ole neil tasapindadel muid ühiseid punkte.*

Sel juhul öeldakse, et tasapinnad lõikuvad mööda sirget; seda sirget nimetatakse kahe tasapinna lõikejooneks.

Tõestus. Olgu kahel tasapinnal α ja β ühine punkt A . Aksioomi $1g$ põhjal leidub neil ka teine ühine punkt B . Punkte A ja B läbib üksainus sirgjoon a (aksioom $1a$). Aksioomi $1f$ põhjal asetsevad sirge a kõik punktid nii tasapinnal α kui ka tasapinnal β . See tähendabki, et tasapinnad α ja β läbivad sirget a .

Tasapindadel α ja β ei saa olla ühiseid punkte, mis ei asetse sirgel a . Tõepoolest, kui tasapindadel α ja β leiduks niisugune ühine punkt C , siis nad ühtiksid, sest kolme mitte ühel sirgel asetsevat punkti A , B ja C läbib aksioomi $1d$ järgi ainult üks tasapind.

Teoreem 181. *On olemas sirgeid, mis ei asetse ühel ja samal tasapinnal.*

Tõestus. Et aksioomi $1h$ põhjal on olemas neli punkti A , B , C ja D , mis ei asetse ühel ja samal tasapinnal, siis ei asetse ka sirged AB ja CD ühel ja samal tasapinnal.

Teoreem 182. *Iga punkti läbib lõpmatu hulk sirgeid, mis ei asetse ühel ja samal tasapinnal.*

Teoreem 183. *On olemas üks ja ainult üks tasapind, mis läbib antud sirget ja sellel sirgel mitte asetsevat antud punkti.*

Teoreem 184. *On olemas üks ja ainult üks tasapind, mis läbib antud kaht lõikuvat sirget.*

Teoreem 185. *Iga sirget läbib lõpmatu hulk tasapindu.*

§ 96. Ruumigeomeetria aksioomid.

Eelmises paragrahvis loetlesime juba osa ruumigeomeetria aksioomidest, nimelt ühendamise aksioomid 1a—1h. Peale nende aksioomide kasutatakse stereomeetrias neidsamu aksioome, mida kasutasime tasapinnageomeetrias. Kuid sellal kui planimeetrias neid aksioome rakendati ainult ühel tasapinnal asetsevate punktide, sirgete, lõikude, nurkade, kolmnurkade, ... kohta, rakendatakse neid stereomeetrias kujunditele, mis asetsevad mistahes tasapindadel.

Hõlpsuse mõttes loetleme veel kord kõik kasutamisele tulevad aksioomid peale ühendamise aksioomide, mis on toodud §-s 95.

Järjestuse aksioomid (I, § 2).

Aksioom 2a. Sirge kolmest punktist asetseb alati üks ja ainult üks kahe teise vahel.

Aksioom 2b. Kui A ja B on kaks antud punkti, siis sirgel AB leidub nii lõpmatu hulk punkte, mis asetsevad A ja B vahel, kui ka lõpmatu hulk niisuguseid punkte, et punkt B asetseb punkti A ja viimase hulga iga punkti vahel.

Aksioom 2c. Sirge iga punkt O jaotab selle sirge ülejäänud punktid kahte klassi nii, et punkt O asetseb iga kahe, mitte ühte klassi kuuluva punkti vahel, kuid ei asetse ühte klassi kuuluva kahe punkti vahel. (Sirgjoone jaotamise aksioom.)

Tasapinna jaotamise aksioom (I, § 3).

Aksioom 3. Iga sirge, mis asetseb mingil tasapinnal, jaotab selle tasapinna kaheks kumeraks piirkonnaks.

Kongruentsuse aksioomid (I, §§ 9 ja 11).

Aksioom 4a. Lõikude ja nurkade võrdsusel on refleksiivsus, sümmeetrilisuse ja transitiivsus omadus.

Aksioom 4b. Asetsegu punkt C sirgel AB punktide A ja B vahel ja punkt C' sirgel $A'B'$ punktide A' ja B' vahel. Kui seejuures $AC = A'C'$ ja $BC = B'C'$, siis ka $AB = A'B'$. Kui samade eelduste puhul $AB = A'B'$ ja $AC = A'C'$, siis ka $BC = B'C'$.

Aksioom 4c. Asetsegu kiir l nurga $\angle hk$ haarade h ja k vahel ja kiir l' nurga $\angle h'k'$ haarade h' ja k' vahel. Kui seejuures $\angle hl = \angle h'l'$ ja $\angle lk = \angle l'k'$, siis ka $\angle hk = \angle h'k'$; kui samade eelduste puhul $\angle hk = \angle h'k'$ ja $\angle hl = \angle h'l'$, siis ka $\angle kl = \angle k'l'$.

Aksioom 4d. Olgu AB mingi lõik ja h' kiir, mis väljub punktist A' ; kiirel h' on üks ja ainult üks niisugune punkt B' , mille puhul lõik AB on kongruentne lõiguga $A'B'$.

Aksioom 4e. Olgu $\angle hk$ mingi nurk, h' punktist O' väljuv kiir ja η' kiirest h' väljuv pooltasapind; pooltasapinnal η' on üks ja ainult üks niisugune punktist O' väljuv kiir, mille puhul $\angle hk$ on kongruentne $\angle h'k'$ -ga.

Aksioom 4f. Kui ühe kolmnurga kaks külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe küljega ja nende külgede vahelised kolm-

nurkade nurgad on võrdsed, siis on vastavalt võrdsed ka nende kolmnurkade ülejäänud nurgad.

Ringjoone aksioomid (I, §§ 15 ja 16).

Aksioom 5. Kui lõigu üks ots asetseb ringjoone sees ja teine väljaspool ringjoont, siis lõigul on ringjoonega ühine punkt.

Aksioom 6. Kui mingi kaare üks ots asetseb ringjoone sees ja teine väljaspool ringjoont, siis kaarel on ringjoonega ühine punkt. Paralleelsuse aksioom (I, § 21).

Aksioom 7. Läbi punkti, mis ei asetse antud sirgel, läheb mitte rohkem kui üks sirge, mis on paralleelne antud sirgega.

Paralleelseteks nimetatakse seejuures sirgeid, mis asetsevad ühel tasapinnal ja ei lõiku.

Arhimedese aksioom (I, § 44).

Aksioom 8. Missugused ka oleksid kaks antud lõiku, ikka leidub niisugune väiksema lõigu kordne, mis ületab suurema lõigu.

Cantori aksioom (I, § 45).

Aksioom 9. Kui on antud tōkestamatult kahanev sisestatud lõikude jada, siis on olemas niisugune punkt, mis kõigil neil lõikudel on seesmiseks või otsmiseks punktiks.

Loetletud aksioomide vastuvõtmisega me ühtlasi tunnustame kõik planimeetrias tõestatud teoreemid kehtivaks ruumi mistahes tasapinnal asetsevate kujundite kohta (ja seal, kus see teoreemi mõtte järgi on võimalik, ka eri tasapindadel asetsevate kujundite kohta).

§ 97. Kahe sirge vastastikune asend.

Olgu ruumis antud kaks sirgjoont. Võtame endale ülesandeks selgitada, missugused on nende vastastikuse asendi võimalikud juhud.

Kõigepealt küsime, kas on olemas tasapind, mis läbib kaht antud sirgjoont. Niisugune tasapind võib muidugi leiduda, kuid on ka võimalik, et niisugust tasapinda ei leidu (teoreem 181). Viimasel juhul sirgeid nimetatakse kiivsirgeteks. Niisiis, kaht sirget nimetatakse kiivsirgeteks, kui ei leidu tasapinda, mis läbiks nii üht kui ka teist sirget. Teisiti öeldes, kiivsirgeteks nimetatakse kaht sirget, mis ei asetse ühel ja samal tasapinnal. Kiivsirgetel ei saa olla ühiseid punkte, sest kaht lõikuvat sirget läbib ikka üks tasapind (teoreem 184).

Asetsegu nüüd kaks antud sirget ühel ja samal tasapinnal. Kaht sirget, mis asetsevad ühel ja samal tasapinnal, nimetatakse *komplanaarseteks*. Kaks *komplanaarset* sirget kas lõikuvad või on paralleelsed.

Niisiis kehtib järgmine lause.

Teoreem 186. Kahel sirgel ruumis võivad esineda järgmised vastastikused asendid.

I. Kaks sirget võivad mitte asetseda ühel ja samal tasapinnal ja, järelikult, neil võib mitte olla ühiseid punkte (kiivsirged).

II. Kaks sirget võivad asetseda ühel ja samal tasapinnal (komplanaarsed sirged); seejuures neil võib

a) kas olla ühine punkt (lõikuvad sirged),

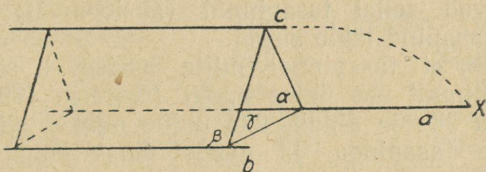
b) või mitte olla ühiseid punkte (paralleelsed sirged).

Vaatleme üksikasjalisemalt paralleelsete sirgete juhtu.

Paralleelsuse aksiomist (§ 96, aksiom 7) järeldeb, nagu ka planimeetrias, et iga punkti, mis ei asetse antud sirgel, läbib üks ja ainult üks sirge, mis on paralleelne antud sirgega.

Teoreem 187. Kui kaks tasapinda, mis vastavalt läbivad antud kaht paralleelset sirget, lõikuvad, siis nende lõikejoon on paralleelne kummagi antud sirgega.

Tõestus. Oletame, et antud kaht paralleelset sirget a ja b läbivad vastavalt tasapinnad α ja β , mis lõikuvad mööda sirget c (joonis 1). Peame tõestama, et sirge c on paralleelne nii sirgega a kui ka sirgega b .



Joonis 1.

Sirged a ja c asetsevad ühel ja samal tasapinnal α . Oletame, et nad lõikuvad mingis punktis X . Punkt X asetseb nii tasapinnal α kui ka tasapinnal β , sest ta asetseb nende lõikejoonel c . Peale selle asetseb punkt X sellel tasapinnal γ , millel definitsiooni järgi asetsevad paralleelsed sirged a ja b . Punkt X asetseb nii tasapinnal β kui ka tasapinnal γ ; järelikult ta asetseb ka sirgel b , sest tasapindade β ja γ kõik ühised punktid asetsevad sellel sirgel (teoreem 180). Seetõttu punkt X on sirgete a ja b ühine punkt. See aga on vastuolus eeldusega, et sirged a ja b on paralleelsed. Nii-siis oletus, et sirged a ja c lõikuvad, viib vastuolule. Järelikult ühel tasapinnal asetsevad sirged a ja c on paralleelsed.

Analoogiliselt saab tõestada, et ka sirged b ja c on paralleelsed.

Tõestatud teoreem lubab tuletada paralleelsete sirgete järgmise tähtsa omaduse.

Teoreem 188. Kaks sirget, mis on paralleelsed kolmandaga, on omavahel paralleelsed.

Tõestus. Olgu kumbki sirgetest a ja b paralleelne mingi sirgega c . Peame tõestama, et nad on omavahel paralleelsed.

Juhu jaoks, kus kõik kolm sirget asetsevad ühel ja samal tasapinnal, tõestasime teoreemi juba varem (I, § 21, järeldeb 2 aksiom

mist 7). Seepärast eeldame, et antud kolm sirget ei asetse ühel ja samal tasapinnal.

Võtame sirgel a mingi punkti A ja vaatleme kaht tasapinda: üht, mis läbib punkti A ja sirget b , ja teist, mis läbib sama punkti A ja sirget c . Need kaks tasapinda lõikuvad mööda mingit sirget a' (teoreem 180), mis on paralleelne nii sirgega b kui ka sirgega c (teoreem 187). Et läbi punkti A läheb üksainus sirge, mis on paralleelne sirgega c , ja selleks sirgeks on sirge a , siis sirge a' ühtib sirgega a . Väide, et sirge a' on paralleelne sirgega b , tähendab siis, et sirge a on paralleelne sirgega b . Teoreem on tõestatud.

§ 98. Sirge ja tasapinna vastastikune asend.

Ruumis võib sirge olla tasapinna suhtes mitmesugustes asendites.

Kui sirgel on tasapinnaga kaks ühist punkti, siis sirge kõik punktid asetsevad sellel tasapinnal (aksioom 1f): sirge asetseb tasapinnal ja tasapind läbib sirget.

Siit järeldub, et tasapinnal mitte asetseval sirgel on selle tasapinnaga ülimalt üks ühine punkt (teoreem 179). Kui sirgel on tasapinnaga üks ja ainult üks ühine punkt, siis öeldakse, et sirge lõikab tasapinda, ja nende ühist punkti nimetatakse lõikepunktiks.

Antud tasapinda lõikavate sirgete olemasolu järeldub kergesti aksiomist 1h. Tõepoolest, selle aksioomi järgi on olemas punkte, mis ei asetse antud tasapinnal. Sirge, mis ühendab üht niisugust punkti antud tasapinna mingi punktiga, lõikabki antud tasapinda.

Lõpuks on mõeldav ka niisugune juhtum, kus sirgel ja tasapinnal ei ole ühiseid punkte. Kui sirgel ja tasapinnal ei leidu ühtki ühist punkti, siis öeldakse, et sirge on paralleelne tasapinnaga (ja tasapind on paralleelne sirgega).

Öeldut kokku võttes võime väita järgmist.

Teoreem 189. *Sirge ja tasapinna vastastikuse asendi suhtes on olemas järgmised kolm võimalust:*

a) *sirge asetseb tasapinnal* (sirge kõik punktid asetsevad tasapinnal);

b) *sirge lõikab tasapinda* (sirge üks ja ainult üks punkt asetseb tasapinnal);

c) *sirge on paralleelne tasapinnaga* (sirge ükski punkt ei asetse tasapinnal).

Tõestame kõigepealt järgmise teoreemi tasapinda lõikavatest sirgetest.

Teoreem 190. *Kui üks kahest paralleelsest sirgest lõikab mingit tasapinda, siis ka teine lõikab seda tasapinda.*

Tõestus. Lõigaku üks kahest paralleelsest sirgest a ja a' , nimelt sirge a , tasapinda α mingis punktis A (joonis 2). Sel

juhul ka sirgeid a ja a' läbiv tasapind β lõikab tasapinda α mööda mingit sirget b (teoreem 180). Sirge b , mis asetseb tasapinnal β ja lõikab sirget a , lõikab ka sellega paralleelset sirget a' mingis punktis A' (I, § 21, aksioom 7, järeldus 3). Punkt A' ongi sirge a' ja tasapinna α lõikepunkt.

Antud tasapinnaga paralleelsete sirgete olemasolu järeldub järgmisest teoreemist.

Teoreem 191. Kui antud tasapinnal mitte asetsev sirge on paralleelne sirgega, mis asetseb sellel tasapinnal, siis ta on paralleelne antud tasapinnaga.

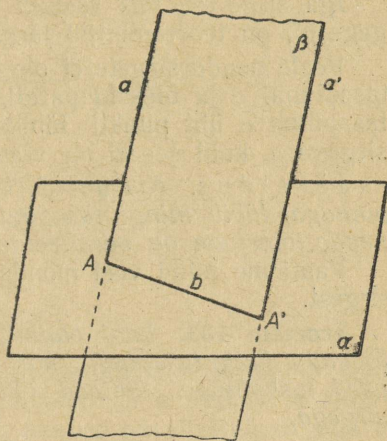
Selle teoreemi tõestuse võib lugeda tuntuks koolikursusest.

Järeldus. Antud tasapinnal mitte asetsevat punkti läbib lõpmatu hulk sirgeid, mis on paralleelsed selle tasapinnaga.

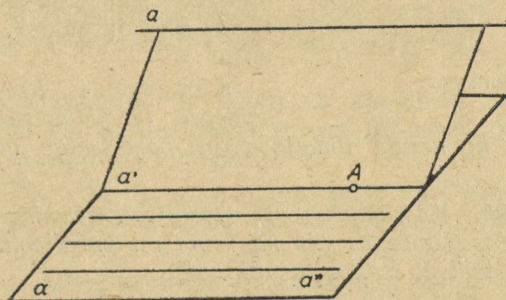
Tõepoolest, vaatleme antud punkti läbivaid sirgeid, mis on vastavalt paralleelsed antud tasapinnal asetsevate ning üht ja sama punkti läbivate sirgetega. Kõik need sirged on üksteisest erinevad, sest vastasel juhul üht punkti läbiks rohkem kui üks sirge, mis on paralleelne antud sirgega, ja kõik nad on paralleelsed antud tasapinnaga.

Tõestame nüüd järgmise teoreemi, mis teatavas mõttes on eelmise pöördteoreemiks.

Teoreem 192. Tasapinnaga paralleelne sirge on paralleelne lõpmatu hulga sirgetega, mis asetsevad sellel tasapinnal ja mis kõik on omavahel paralleelsed.



Joonis 2.



Joonis 3.

Tõestus. Olgu sirge a paralleelne tasapinnaga α (joonis 3). Sirget a ja tasapinna α mingit punkti A läbib tasapind. See lõi-

ka tasapinda a mööda mingit sirget a' . Sirged a ja a' on paralleelsed, sest nad asetsevad ühel ja samal tasapinnal, kuid ei saa lõikuda: kui nad lõikuksid, siis ka sirge a lõikaks tasapinda a .

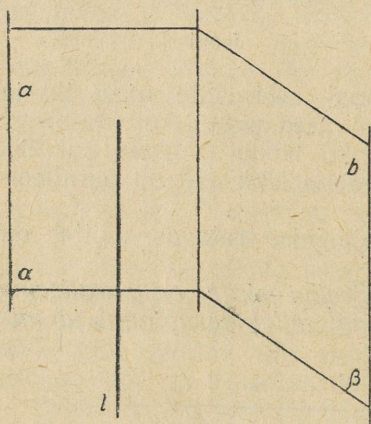
Iga sirge a'' , mis asetseb tasapinnal a ja on paralleelne sirgega a' , on teoreemi 188 järgi paralleelne ka sirgega a .

Peale nende sirgete ei ole olemas muid sirgeid, mis asetseksid tasapinnal a ja oleksid paralleelsed sirgega a , sest vastasel juhul tasapinna a üht punkti läbiks kaks sirget, mis on paralleelsed sirgega a , kuid see ei ole võimalik.

Järeldus. Kui antud sirget, mis on paralleelne antud tasapinnaga, läbib mingi tasapind, mis lõikab antud tasapinda, siis nende lõikejoon on paralleelne antud sirgega.

Vaatleme nüüd veel mõnda teoreemi tasapinnaga paralleelsest sirgest.

Teoreem 193. Läbi punkti, mis ei asetse antud sirgel, läheb lõpmatu hulk tasapindu, mis on paralleelsed selle sirgega; kõik need tasapinnad läbivad üht sirget, mis on paralleelne antud sirgega.



Joonis 4.

Olgu A antud punkt, mis ei asetse antud sirgel a (joonis 3). Punkti A läbib sirge a' , mis on paralleelne sirgega a . Iga tasapind, mis läbib sirget a' , peale ühe (ja nimelt selle, mis ühtlasi läbib ka sirget a), on paralleelne sirgega a . Muid tasapindu, mis läbiksid punkti A ja oleksid paralleelsed sirgega a , ei ole olemas. Tõepoolest, punkti A ja sirget a läbiv tasapind peab lõikama iga niisugust tasapinda mööda sirget, mis on paralleelne sirgega a (teoreem 192, järeldus), s. o. mööda sirget a' .

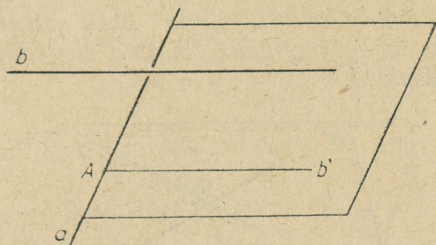
Järeldus. Kui kaks antud sirgega paralleelset tasapinda lõikuvad, siis ka nende lõikejoon on paralleelne antud sirgega (joonis 4).

Teoreem 194. Kui üks kahest paralleelsest sirgest on paralleelne mingi tasapinnaga, siis ka teine on paralleelne selle tasapinnaga (või asetseb sellel tasapinnal).

Tõestus. Kui teine sirge lõikaks antud tasapinda, siis teoreemi 190 põhjal ka esimene sirge lõikaks teda. Järelikult teine sirge on paralleelne tasapinnaga (või asetseb tasapinnal).

Teoreem 195. Kumbagi kahest kiirsirgest läbib üks ja ainult üks tasapind, mis on paralleelne teise sirgega.

Tõestus. Olgu a ja b kaks kiivsirget (joonis 5). Tähistame sirge a mingi punkti tähega A ja seda punkti läbiva, sirgega b paralleelse sirge tähega b' .



Joonis 5.

Tasapind, mis läbib sirget a ja on paralleelne sirgega b (kui niisugune tasapind on olemas), peab lõikama punkti A ja sirget b läbivat tasapinda mööda sirget b' , mis on paralleelne sirgega b (teoreemi 192 järelduse põhjal). Siit järeldub, et otsitavaks tasapinnaks saab olla ainult tasapind, mis läbib sirgeid a ja b' . Viimane tasapind on tõepoolest paralleelne sirgega b (teoreemi 191 järgi), sest ta läbib sirgega b paralleelset sirget b' .

§ 99. Kahe tasapinna vastastikune asend.

Kui kahel tasapinnal leidub kas või ükski ühine punkt, siis nad lõikuvad mööda sirget (teoreem 180).

On mõeldav ka niisugune juhtum, kus kahel tasapinnal ei leidu ühtki ühist punkti. Kaht tasapinda, millel ei ole ühtki ühist punkti, nimetatakse paralleelseteks tasapindadeks.

Sellest definitsioonist järeldub, et tasapind, mis on paralleelne tasapinnaga α , on paralleelne ka kõikide sirgetega, mis asetsevad tasapinnal α .

Paralleelsete tasapindade põhilised omadused avalduvad järgmistes teoreemides, milledest muuseas järeldub ka paralleelsete tasapindade olemasolu (teoreem 197).

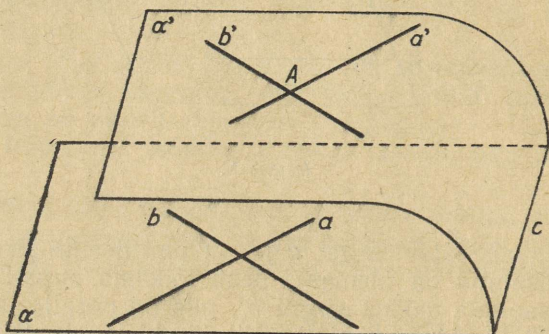
Teoreem 196. *Kui mingi tasapind on paralleelne kahe lõikuva sirgega, siis ta on paralleelne ka tasapinnaga, millel asetsevad need sirged.*

Tõestus. Olgu tasapind α' paralleelne kahe lõikuva sirgega a ja b , mis asetsevad tasapinnal α (joonis 6). Näitame, et tasapinnad α ja α' on paralleelsed.

Tõepoolest, oletame, et tasapinnad α ja α' lõikuvad mööda mingit sirget c . Sirge c , asetledes tasapinnal α , tingimata lõikab vähemalt üht kahest lõikuvast sirgest a ja b .

Siis järelikult ka tasapind α' lõikab vähemalt üht kahest sirgest a ja b , kuid see on vastuolus eeldusega, et tasapind α' on paralleelne nende kahe sirgega. Niisiis, tasapind α' on paralleelne tasapinnaga α .

Järeldus. Kui ühe tasapinna kaks sirget on vastavalt paralleelsed teise tasapinna kahe lõikuva sirgega, siis need tasapinnad on paralleelsed.



Joonis 6.

Tõepoolest, olgu tasapinna α' sirged a' ja b' vastavalt paralleelsed tasapinna α kahe lõikuva sirgega a ja b (joonis 6). Tasapind α' , mis läbib sirgega a paralleelset sirget a' , kuid ei läbi sirget a ennast, on paralleelne sirgega a (teoreem 191). Analoogilisel põhjusel on tasapind α' paralleelne ka sirgega b . Viimati tõestatud teoreemi põhjal tasapind α' on paralleelne tasapinnaga α .

Teoreem 197. Läbi antud punkti, mis ei asetse antud tasapinnal, läheb üks ja ainult üks tasapind, mis on paralleelne antud tasapinnaga.

Tõestus. Olgu A tasapinnal α mitte asetsev punkt (joonis 6). Tähistame tähtedega a ja b mingit kaht lõikuvat sirget, mis asetsevad tasapinnal α , ja tähtedega a' ja b' sirgeid, mis läbivad punkti A ja on vastavalt paralleelsed sirgetega a ja b .

Otsitav tasapind peab olema paralleelne tasapinnaga α ja järelikult ka sirgetega a ja b . Kuid kõik punkti A läbivad ja sirgega a paralleelsed tasapinnad läbivad sirget a' (teoreem 193) ja kõik punkti A läbivad ja sirgega b paralleelsed tasapinnad läbivad sirget b' . Järelikult saab otsitavaks tasapinnaks olla ainult tasapind, mis läbib sirgeid a' ja b' . See tasapind on teoreemi 196 järelduse põhjal tõepoolest paralleelne tasapinnaga α .

Järeldused. 1. Kaks tasapinda, mis on paralleelsed kolmanda tasapinnaga, on omavahel paralleelsed.

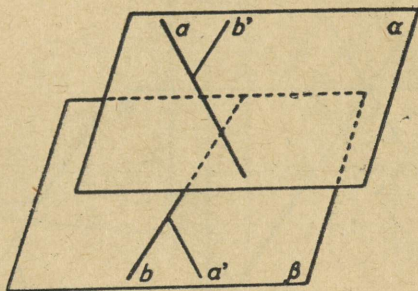
Vastasel juhul läheks läbi nende ühise punkti kaks tasapinda, mis on paralleelsed kolmanda tasapinnaga.

2. Kui mingi tasapind lõikab üht kahest paralleelsest tasa-

pinnast, siis ta lõikab ka teist, kusjuures tekkivad lõikesirged on omavahel paralleelsed.

Teoreem 198. On olemas üks ja ainult üks paar paralleelseid tasapindu, mis vastavalt läbivad antud kaht kiivsirget.

Tõestus. Olgu a ja b antud kiivsirged (joonis 7). Kui mingi tasapind α , mis läbib sirget a , on paralleelne tasapinnaga β , mis läbib sirget b , siis tasapind α on paralleelne ka sirgega b .



Joonis 7.

Seetõttu tasapind α on määratud selle ainsa tasapinnana, mis läbib sirget a ja on paralleelne sirgega b (teoreem 195). Täpselt niisamuti tasapind β on määratud selle ainsa tasapinnana, mis läbib sirget b ja on paralleelne sirgega a .

Niiviisi määratud tasapinnad on omavahel paralleelsed, nagu etsekohe näitame.

Et tasapind α on paralleelne sirgega b , siis ta sisaldab sirget b' , mis on paralleelne sirgega b ja lõikab sirget a (teoreem 192). Analoogiliselt tasapind β , mis on paralleelne sirgega a , sisaldab sirget a' , mis on paralleelne sirgega a ja lõikab sirget b . Et tasapinna α kaks lõikuvat sirget a ja b' on vastavalt paralleelsed tasapinna β sirgetega a' ja b , siis need kaks tasapinda on paralleelsed.

Teoreem 199. Sirge, mis lõikab üht kahest paralleelsest tasapinnast, lõikab ka teist.

Tõestus. Lõigaku sirge l üht kahest paralleelsest tasapinnast α ja α' , nimelt tasapinda α . Näitame, et ta lõikab ka tasapinda α' .

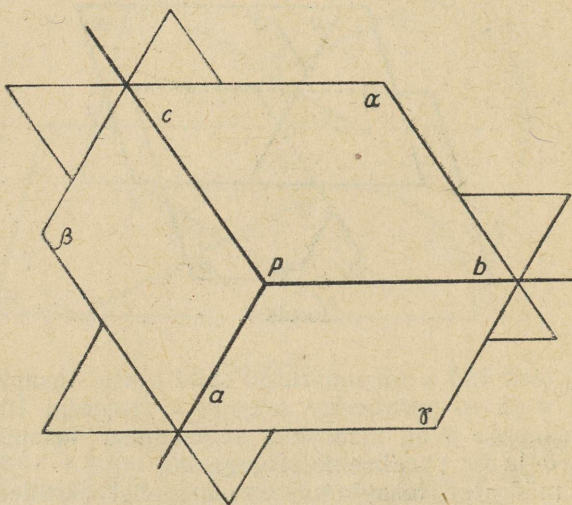
Mingi tasapind β , mis läbib sirget l , lõikab tasapinda α mööda mingit sirget a , sest tal on sellega ühine punkt (teoreem 180). Järelikult lõikab tasapind β ka tasapinda α' mööda sirget a' , mis on paralleelne sirgega a (teoreem 197, järeldus). Sirge l , mis asetseb tasapinnal β ja lõikab sirget a , lõikab tingimata ka sirgega a paralleelset sirget a' . Järelikult lõikab sirge l ka tasapinda α' , millel asetseb sirge a' .

Järeldus. Sirge ja teda mitte läbiv tasapind, mis on paralleelsed ühe ja sama tasapinnaga, on paralleelsed.

§ 100. Kolme tasapinna vastastikune asend.

Siirdume küsimuse juurde kolme tasapinna α , β ja γ vastastikusest asendist ruumis.

Eeldame esiteks, et kolm antud tasapinda lõikuvad paariti: tasapinnad β ja γ lõikugu mööda sirget a , tasapinnad γ ja α mööda sirget b ja tasapinnad α ja β mööda sirget c .



Joonis 8.

Kui sirge a lõikab tasapinda α mingis punktis P (joonis 8), siis seda punkti läbivad kõik kolm tasapinda α , β ja γ ning kõik kolm sirget a , b ja c . Kolm tasapinda lõikuvad ühes ja samas punktis.

Kui sirge a on paralleelne tasapinnaga α , siis on ta paralleelne ka sirgetega b ja c (teoreem 192, järeldus). Kolm tasapinda lõikuvad mööda kolme paralleelset sirget a , b ja c ; ei leidu ühtki punkti, mis oleks ühine kõigil kolmel tasapinnal (joonis 9).

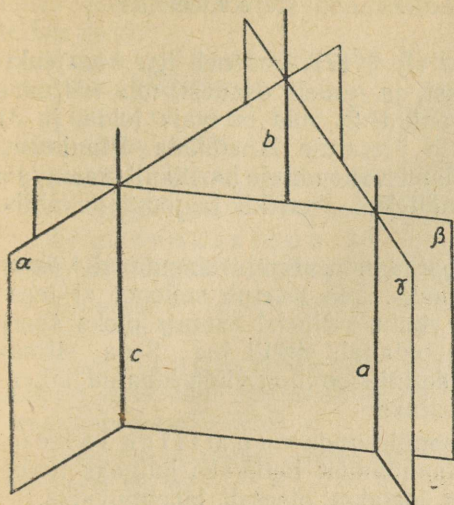
Kui sirge a asetseb tasapinnal α , siis ühtib ta sirgetega b ja c ; kõik kolm tasapinda läbivad üht ja sama sirget (joonis 10).

Eeldame nüüd, et kaks tasapinda, ütleme α ja β , on paralleelsed. Kui kolmas tasapind γ lõikab üht kahest tasapinnast α ja β , siis lõikab ta ka teist (teoreem 197, järeldus 2), ja need kaks lõikejoont on paralleelsed (joonis 11).

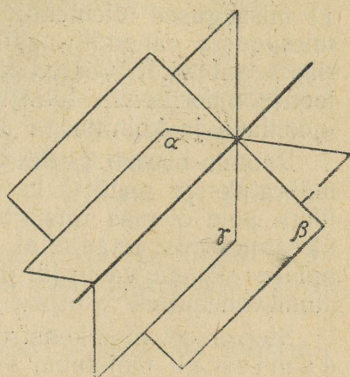
Lõpuks, kõik kolm tasapinda võivad osutada omavahel paralleelseteks (joonis 12).

Tulemusena saame järgmise teoreemi:

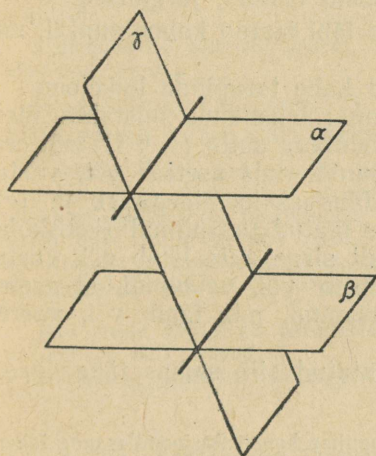
Teoreem 200. *On võimalikud järgmised kolme tasapinna vastastikuse asendi juhud:*



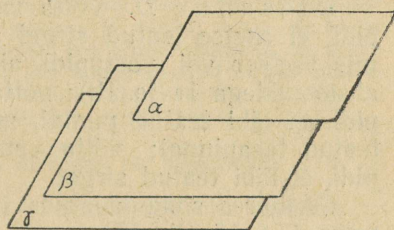
Joonis 9.



Joonis 10.



Joonis 11.



Joonis 12.

a) Kolmel tasapinnal on üks ja ainult üks ühine punkt («kolm tasapinda lõikuvad ühes ja samas punktis»).

b) Kolm tasapinda lõikuvad paariti ja nende lõikejooned on omavahel paralleelsed.

c) Kolm tasapinda läbivad üht ja sama sirget.

d) Kaks tasapinda on paralleelsed ja kolmas lõikab neid mööda kaht paralleelset sirget.

e) Kõik kolm tasapinda on paralleelsed.

§ 101. Konstruktsioonülesanded stereomeetrias.

Nagu omal ajal nimetasime (I, § 17), koosneb iga konstruktsioonülesande sisu kolmest osast, ja nimelt osadest, mis näitavad 1) missugused elemendid on antud, 2) mis on vaja leida, ja 3) missuguste vahendite abil tuleb ülesanne lahendada. Planimeetrias seisab viide lubatud lahendamisevahenditele harilikult vastavate joonestamisriistade loetelus (näiteks — «sirkli ja joonlaua abil», «joonlaua ja kolmnurga abil»).

Ruumis osutub küsimus lubatud lahendamisevahenditest vähem määratuks ja seetõttu keerukamaks. See seletub sellega, et tegelikult pole olemas niisuguseid riistu, millel ruumis oleks sama ülesanne, mis tasapinnal on joonlaual, sirkliil jne. Seda silmas pidades võtame vastu järgmise definitsiooni, et viide lubatud lahendamisevahenditele osutuks määratuks.

Stereomeetrilise konstruktsioonülesande ruumilise lahendamise all mõistame selle taandamist lõplikuks hulgaks teatavaiks lihtsaiks ülesandeks, mis loetakse otseselt lahenduvaks.

Niisuguste otseselt lahenduvate ülesannetena võetakse käesolevas raamatus kõikjal, kus pole teisiti öeldud, järgmised:

Ülesanne A. Panna tasapind läbi teatud kolme punkti, mis ei asetse ühel ja samal sirgel.

Ülesanne B. Määrata teatud kahe tasapinna lõikejoon.

Ülesanne C. Teatud tasapinnal lahendada mistahes ülesanne, mis on lahendatav «sirkli ja joonlaua abil» (I, § 17 mõttes).

Ülesanne D. Võtta vabalt punkt, mis asetseb või, vastupidi, ei asetse teatud sirgel (kooskõlas aksioomidega 1b ja 1c), mis asetseb või, vastupidi, ei asetse teatud tasapinnal (kooskõlas aksioomidega 1e ja 1h); võtta vabalt sirge, mis läbib või, vastupidi, ei läbi teatud punkti, mis asetseb või, vastupidi, ei asetse teatud tasapinnal; võtta vabalt tasapind, mis läbib või, vastupidi, ei läbi teatud sirget.

Seejuures sõna «teatud» on kasutatud siin samas tähenduses, nagu I, § 17 (lk. 55).

Märkus. Mitte peatudes termini «ruumilise konstruktsioonülesande lahendamine» teiste võimalike tõlgenduste juures, toonitame ainult, et ülalantud tõlgendus ei ole ainus võimalik.¹

Esitame nüüd mõned õige lihtsad konstruktsioonülesanded, mis kergesti taanduvad ülesannetele A—D. Toonitame, et nende ülesannete lahendite olemasolu või, mõnel juhul, puudumise küsimus kas on juba lahendatud eelmiste teoreemidega või nende abil ilma raskusteta lahenduv. Nende ülesannete lahendamisel on oluline see, et taandada otsitava sirge või otsitava tasapinna leidmine lõplikuks hulgaks ülalloetletud ülesanneteks A—D.

Konstruktsioon 64. Panna tasapind läbi sirge ja sellel

¹ Vt. Tšetveruhhini artiklit [23] ja tema raamatut [24].

mitte asetseva punkti, läbi kahe lõikuva sirge, läbi kahe paralleelse sirge.

Konstruktsioon 65. Konstrueerida antud sirge ja antud tasapinna lõikepunkt.

Konstruktsioon 66. Konstrueerida kolme antud tasapinna ühine punkt.

Konstruktsioon 67. Läbi antud punkti, mis ei asetse antud sirgel, panna sirge, mis on paralleelne antud sirgega.

Konstruktsioon 68. On antud kaks kiivsirget; ühest neist läbi panna tasapind, mis on paralleelne teisega.

Lahendusviis tuleneb sellest, mis on öeldud teoreemi 195 tõestamisel. Lahendeid on üks.

Konstruktsioon 69. On antud kaks kiivsirget; kummaski neist läbi panna tasapind nii, et need tasapinnad oleksid omavahel paralleelsed.

Lahendusviis tuleneb sellest, mis on öeldud teoreemi 198 tõestamisel. Lahendeid on üks.

Konstruktsioon 70. Läbi antud punkti, mis ei asetse antud tasapinnal, panna tasapind, mis on paralleelne antud tasapinnaga.

Lahendusviis tuleneb sellest, mis on öeldud teoreemi 197 tõestamisel. Lahendeid on üks.

Konstruktsioon 71. Konstrueerida tasapind, mis läbib antud punkti ja on paralleelne kahe antud sirgega.

Paneme läbi antud punkti kaks sirget, mis on vastavalt paralleelsed antud sirgetega. Kui antud sirged on kiivsirged ja antud punkt ei asetse kummalgi neist kahest tasapinnast, mis läbivad üht antud sirget ja on paralleelsed teise antud sirgega (teoreem 195), siis konstrueeritud sirged määravad otsitava tasapinna ja ülesandel on üks lahend. Sama kehtib ka siis, kui antud sirged lõikuvad ja antud punkt ei asetse antud sirgetega ühel tasapinnal.

Kui antud sirged on paralleelsed, siis ülesanne on määramatu, s. t. tal on lõpmatu hulk lahendeid.

Ülejäänud juhtudel (missugustel nimelt?) ülesandel ei ole lahendeid.

§ 102. Lihtsamad sirgete geomeetrilised kohad ruumis.

Ruumigeomeetrias laieneb geomeetrilise koha mõiste. Kõrvuti punktide geomeetriliste kohtadega (võrrelda I, § 24) on ruumis võimalik vaadelda veel sirgjoonte geomeetrilisi kohti. Käesolevas paragrahvis vaadeldakse niisuguste geomeetriliste kohtade kõige lihtsamaid näiteid.

Geomeetriline koht XII. *Geomeetriliseks kohaks sirgetele, mis läbivad antud punkti ja on komplanaarsed antud sirgega* (s. o. asetsevad sellega ühel tasapinnal; vrd. § 97), *on tasapind, mis läbib antud punkti ja antud sirget.* Seejuures eeldatakse muidugi, et antud punkt ei asetse antud sirgel.

Geomeetriline koht XIII. Geomeetriliseks kohaks sirgetele, mis lõikavad antud sirget ja on paralleelsed teise antud sirgega, on tasapind. Seejuures eeldatakse, et antud kaks sirget on kiivsirged.

Olgu a ja b antud sirged. Läbi sirge a iga punkti A läheb üks sirge b' , mis on paralleelne sirgega b . Kõik niisugused sirged asetsevad ühel tasapinnal a ja nimelt tasapinnal, mis läbib sirget a ja mingit üht neist sirgeist. Sirged b' ilmselt täidavad kogu tasapinna a .

Märkus. Kui sirge b lõikab sirget a , siis geomeetriliseks kohaks sirgetele, mis lõikavad sirget a ja on paralleelsed sirgega b , on sirgeid a ja b läbiv tasapind, millest sirge b ise on välja võetud.

Et mitte teha viimast erandit («millest sirge b ise on välja võetud»), vaadeldakse mõnikord iga sirget kui iseendaga paralleelset. Siis evib kahe sirge paralleelsuse mõiste refleksiivsuse, sümmeetrilisuse ja transitiivsuse omadust. Allpool me siiski mõistame paralleelsete sirgete all ikka kaht erinevat sirget.

Geomeetriline koht XIV. Geomeetriliseks kohaks sirgetele, mis läbivad antud punkti ja on paralleelsed antud tasapinnaga, on antud tasapinnaga paralleelne tasapind. Seejuures eeldatakse, et antud punkt ei asetse antud tasapinnal.

Olgu A antud punkt ja a antud tasapind. Punkti A läbib üksainus tasapind a' , mis on paralleelne tasapinnaga a . Kõik sirged, mis läbivad punkti A ja asetsevad tasapinnal a' , on ilmselt paralleelsed tasapinnaga a .

Muid sirgeid, mis läbiksid punkti A ja oleksid paralleelsed tasapinnaga a , ei ole olemas. Tõepoolest, punkti A läbiv ja tasapinnal a' mitte asetsev sirge lõikab tasapinda a' . Teoreemi 199 alusel ta lõikab ka tasapinda a .

Näitame esitatud geomeetriliste kohtade rakendamist järgmise kahe konstruktsioonülesande lahendamisel.

Konstruktsioon 72. Läbi antud punkti panna sirge, mis lõikab antud kaht kiivsirget; eeldatakse, et antud punkt ei asetse kummalgi antud sirgel.

Olgu M antud punkt, a ja b — antud kiivsirged. Leiame esiteks sirge, mis läbib punkti M ja on komplanaarne nii sirgega a kui ka sirgega b . Geomeetriliseks kohaks sirgetele, mis läbivad punkti M ja on komplanaarsed sirgega a , on punkti M ja sirget a läbiv tasapind a (geomeetriline koht XII). Analoogiliselt on punkti M ja sirget b läbiv tasapind geomeetriliseks kohaks sirgetele, mis läbivad punkti M ja on komplanaarsed sirgega b .

Sirgeks, mis läbib punkti M ja on komplanaarne sirgetega a ja b , on nende kahe tasapinna lõikejoon l .

Kui sirge l lõikab nii sirget a kui ka sirget b , siis ta ongi antud ülesande lahendiks.

Kui sirge l osutub paralleelseks sirgega a , siis ta paratamatult lõikab sirget b (sest vastasel juhul sirged a ja b oleksid paralleelsed). Antud ülesandel ei ole lahendit. Seejuures sirge l ja järelikult ka antud punkt M asetsevad tasapinnal, mis läbib sirget b ja on paralleelne sirgega a (geomeetriline koht XIII).

Antud ülesandel ei ole lahendit ka sel juhul, kui punkt M asetseb tasapinnal, mis läbib sirget a ja on paralleelne sirgega b . Siis sirge l lõikab sirget a ja on paralleelne sirgega b .

Niisiis on ülesandel üks lahend, välja arvatud see juhtum, kus antud punkt asetseb ühel neist kahest paralleelsest tasapinnast, mis vastavalt läbivad antud kaht kiivsirget (teoreem 198).

Märkus. Selle ülesande lahendusest järeldub, et on olemas lõpmatu hulk niisuguseid sirgeid, mis lõikavad iga sirget antud kolmest paariti kiivsirgest. Tõepoolest, neist kolmest ühe sirge iga punkti (välja arvatud võimalik tema kaks punkti) läbib sirge, nagu äsja nägime, mis lõikab antud kaht ülejäänud sirget.

Tekib küsimus niisuguste sirgete geomeetrilise koha leidmisest. Selle küsimuse lahendamine ulatub välja elementargeomeetria raamidest. Analüütilise geomeetria (ja projektiivse geomeetria) vahenditega saab tõestada, et selleks geomeetriliseks kohaks on teist järku joonpind.

Konstruksioon 73. Konstrueerida sirge, mis lõikab antud kaht kiivsirget ja on paralleelne kolmanda antud sirgega.

Olgu a ja b antud kiivsirged ja c kolmas antud sirge. Ülesande sisu järgi sirge c ei saa olla paralleelne kummagagi sirgetest a ja b .

Geomeetriliseks kohaks sirgetele, mis lõikavad sirget a ja on paralleelsed sirgega c , on tasapind (geomeetriline koht XIII); geomeetriliseks kohaks sirgetele, mis lõikavad sirget b ja on paralleelsed sirgega c , on samuti tasapind.

Kui need kaks tasapinda lõikuvad, siis nende lõikejoon ongi otsitavaks sirgeks, sest teoreemi 193 järelduse põhjal on ta paralleelne sirgega c .

Kui aga need kaks tasapinda osutuvad paralleelseteks, siis puudub ülesandel lahend; sel juhul sirged a , b ja c on paralleelsed ühe ja sama tasapinnaga ja nimelt mingi tasapinnaga, mis on paralleelne mõlema konstrueeritud tasapinnaga ega läbi sirget c .

§ 103. Paralleelprojektsioon.

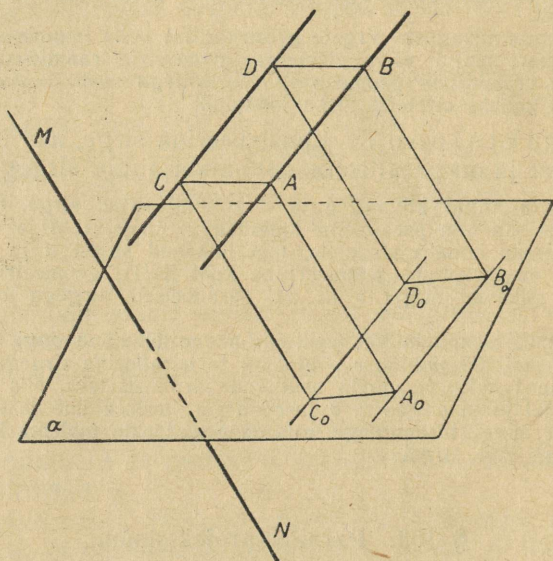
Tasapinnageomeetrias (I, § 28) tundma õpitud paralleelprojektsiooni mõistet on võimalik järgmiselt üldistada.

Olgu antud mingi tasapind α , mida nimetame projektsioonitasapinnaks (joonis 13), ja mingi sirge MN , mis lõikab tasapinda α . Et sirget MN võib kõiges järgnevas asendada iga teise, temaga paralleelse sirgega $M'N'$, siis ütleme, et on antud mingi siht MN , ja nimetame seda projekteerimissihiks. Sirge, mis läbib antud punkti A ja on paralleelne sirgega MN , lõikab tasapinda α (teoreemi 190 põhjal) mingis punktis A_0 , mida nimetamegi punkti A MN -sihiliseks paralleelprojektsiooniks tasapinnal α .¹

Mingi kujundi F paralleelprojektsiooniks nimetatakse kujundit F_0 , mis koosneb antud kujundi F kõikide punktide paralleelprojektsioonidest. Et geomeetriliseks kohaks sirgetele, mis lõikavad antud sirget ja on paralleelsed teise antud sirgega, on tasapind (§ 102, geomeetriline koht XIII), siis sirgjoone paralleelprojektsioon on sirgjoon ja lõigu paralleelprojektsioon on lõik;

¹ Terminit «projektsioon» (lihtsalt) kasutame, nagu tasapinnageomeetriaski, ainult ristprojektsiooni korral, mida vaatleme allpool (§ 115).

seejuures eeldatakse muidugi, et antud sirge või lõik ei ole paralleelne projekteerimissihiga. Nurga paralleelprojektsioon on nurk, kolmnurga ja üldiselt hulknurga paralleelprojektsioon on vastavalt kolmnurk või hulknurk; seejuures eeldatakse, et antud nurga või hulknurga tasapind ei ole paralleelne projekteerimissihiga. Punkt, lõik ja iga kujund, mis asetseb projektsioonitasapinnal, ühtib oma projektsiooniga.



Joonis 13.

Paralleelprojektsioonide põhiomadusi väljendavad järgmised teoreemid.

Teoreem 201. *Paralleelsete sirgete (samasihilised) paralleelprojektsioonid ühel ja samal tasapinnal on paralleelsed või ühtivad sirged, kui antud paralleelsed sirged ei ole paralleelsed projekteerimissihiga.*

Tõestus. Olgu AB ja CD (joonis 13) paralleelsed sirged ja A_0, B_0, C_0 ja D_0 antud sihi puhul punktide A, B, C ja D paralleelprojektsioonid tasapinnal α .

Kui tasapinnad ABA_0 ja CDC_0 ei ühti, siis nad on omavahel paralleelsed, sest $AB \parallel CD$ ja $AA_0 \parallel CC_0$ (teoreem 196, järeldus). Nende tasapindade ja tasapinna α lõikejooned A_0B_0 ja C_0D_0 on samuti paralleelsed.

Kui aga tasapinnad ABA_0 ja CDC_0 ühtivad, siis ühtivad ka sirged A_0B_0 ja C_0D_0 .

Järeldus. *Kui rööpküliliku tasapind ei ole paralleelne pro-*

jektseerimissihiga, siis tema paralleelprojektsioon on samuti rööpkülik.

Tõepoolest, kui $AB \parallel CD$ ja $AC \parallel BD$ (joonis 13), siis tõestatud teoreemi järgi ka $A_0B_0 \parallel C_0D_0$ ja $A_0C_0 \parallel B_0D_0$.

Teoreem 202. Võrdsete ja paralleelsete lõikude paralleelprojektsioonid ühel ja samal tasapinnal on omavahel võrdsed, kui need lõigud ei ole paralleelsed projekteerimissihiga.

Tõestus. Olgu AB ja CD võrdsed ja paralleelsed lõigud, A_0B_0 ja C_0D_0 nende paralleelprojektsioonid.

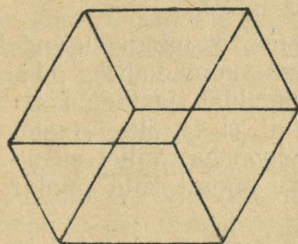
Kui tasapind $ABCD$ ei ole paralleelne projekteerimissihiga (joonis 13), siis $A_0B_0D_0C_0$ on rööpkülik (teoreem 201, järeldus) ja seetõttu $A_0B_0 = C_0D_0$.

Kui aga tasapind $ABCD$ on paralleelne projekteerimissihiga, siis võrdus $A_0B_0 = C_0D_0$ tuleneb teoreemist 66 (I, lk. 85).

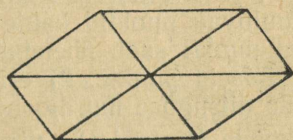
Märkus. Tõestatud teoreemid 201 ja 202 leiavad rakendamist ruumiliste kujundite jooniste valmistamisel.

Geomeetrias ja samuti ka tehnikas kasutatavad ruumiliste kujundite joonised kujutavad endast nende kujundite paralleelprojektsioone joonise tasapinnal (või niisuguste paralleelprojektsioonidega sarnaseid kujundeid).¹

Tõestatud teoreemide rakendamise näitena nimetame seda, et rööptahuka tahud, mis on ju rööpkülikud, kujutuvad niisugustel joonistel samuti rööpkülikutena ja korrapärane kuusnurk kujutub kuusnurgana, mille vastasküljed on paralleelsed ja võrdsed (joonised 14 ja 15).²



Joonis 14.



Joonis 15.

Ruumiliste kujundite tasapinnal kujutamise küsimust käsitletakse geomeetria eriharus — kujutavas geomeetrias.³

¹ Mõnel erialal (näiteks ehitusalal) kasutatakse ka jooniseid, millede konstrueerimine põhineb «tsentraalprojektsiooni» printsüübil.

² Mõisted rööptahukas, prisma, püramiid, tüvipüramiid, kuup, põhi, kõrgus jms. loeme käesolevas raamatus tuntuiks ja nende defineerimisel me ei peatu.

³ Vt. näiteks Glagolevi õpikut [8]. Jooniste küsimusele geomeetria kurses on pühendatud Tšetveruhhini raamat [25].

Ruumi jaotamine. Hulktahtukad.

§ 104. Ruumi jaotamine tasapindadega.

Asudes küsimuse juurde ruumi jaotamisest tasapinnaga, säilitame murdjoonel ka ruumi juhul sellesama definitsiooni, mis on antud tasapinnageomeetrias (I, § 3). Kuid ruumis on võimalik juhtum, kus ei leidu tasapinda, millel asetseksid antud murdjoone kõik punktid. Kui mingi murdjoone kõik punktid asetsevad ühel ja samal tasapinnal, siis murdjoont nimetatakse *tasaseks*, vastasel juhul aga *ruumiliseks*. Vastavalt defineeritakse ka *tasase ja ruumilise hulknurga mõisted*.

Samuti nagu tasapinna juhul ütleme, et mingi kujund **F** ruumis (s. o. mingi punktide hulk) jaotab ruumi kaheks piirkonnaks D_1 ja D_2 , kui see kujund võimaldab jaotada kõik temale mitte kuuluvad punktid kahte klassi nii, et 1) ühe ja sama klassi iga kaht punkti saab ühendada murdjoonega, millel ei ole kujundiga **F** ühiseid punkte, 2) eri klasside mingit kaht punkti ei saa ühendada niisuguse murdjoonega.

Piirkonda D_1 (või D_2) nimetatakse *kumeraks*, kui tema iga kaht punkti saab ühendada lõiguga, millel ei ole kujundiga **F** ühiseid punkte.

Analoogiliselt defineeritakse ruumi jaotamist kuitahes mitmeks (lõplikuks arvuks) piirkonnaks.

Mingil tasapinnal asetseva sirgjoone omaduse jaotada tasapind kaheks kumeraks piirkonnaks võtsime vastu aksioomina (§ 96, aksiom 3). Erinevalt sellest saame tasapinna vastava omaduse nüüd tõestada.

Teoreem 203. *Iga tasapind jaotab ruumi kaheks kumeraks piirkonnaks.*

Tõestus. Olgu α antud tasapind ja X_0 mingi punkt, mis ei asetse tasapinnal α .

Jaotame kõik tasapinnal α mitte asetsevad punktid kahte klassi järgmisel viisil. Esimesse klassi loeme punkti X_0 ja kõik niisugused punktid X , millede puhul lõigul X_0X ei ole tasapinnaga α ühiseid punkte. Teise klassi loeme kõik niisugused punktid Y , millede

puhul lõigul X_0Y on tasapinnaga α ühine punkt. Näitame, et esimese klassi punktid X ja teise klassi punktid Y moodustavad kaks kumerat piirkonda, milledeks tasapind α jaotab ruumi.

Vaatleme esimese klassi mingit kaht punkti X ja X' ja tasapinda X_0XX' (või üht neist tasapindadest, mis läbivad neid kolme punkti, kui nad asetsevad ühel sirgel). Kui see tasapind ei lõika tasapinda α , siis ei ole ka lõigul XX' tasapinnaga α ühiseid punkte. Kui aga see tasapind lõikab tasapinda α mööda sirget, siis kõik kolm punkti X_0 , X ja X' asetsevad sellest sirgest ühel ja samal pool, sest lõikudel X_0X ja X_0X' ei ole temaga ühiseid punkte. Järelikult lõigul XX' ei ole lõikejoonega ja, tähendab, ka tasapinnaga α ühiseid punkte. Niisiis, esimese klassi iga kaht punkti saab ühendada lõiguga, millel ei ole ühiseid punkte tasapinnaga α .

Analoogiliselt teostub vastav tõestus ka teise klassi kahe punkti Y ja Y' juhul. Ainult tasapind X_0YY' tingimata lõikab tasapinda α , punkt X_0 asetseb lõikejoonest ühel pool, punktid Y ja Y' teisel pool (sest kummalgi lõikudest X_0Y ja X_0Y' on tasapinnaga α ühine punkt).

Lõpuks, kui X on esimese klassi punkt ja Y on teise klassi punkt, siis lõigul XY on tasapinnaga α ühine punkt, sest sel juhul tasapind X_0XY lõikab tasapinda α (lõigul X_0Y on tasapinnaga α ühine punkt), punktid X_0 ja X asetsevad lõikejoonest ühel pool ja punkt Y teisel pool.

Olgu nüüd X esimese klassi mistahes punkt ja A mingi punkt, mis ei asetse tasapinnal α . Kui lõigul XA ei ole ühiseid punkte tasapinnaga α , siis ka A on esimese klassi punkt. Tõepoolest, kui punkt A kuuluks teise klassi, siis tõestatu järgi lõigul XA leiduks ühine punkt tasapinnaga α .

Korrates seda arutelu korduvalt, jõuame järgmisele tulemusele. Kui murdjoone $XAB \dots KL$ üks ots X kuulub esimesse klassi ja murdjoonel ei ole tasapinnaga α ühiseid punkte, siis kuulub ka murdjoone teine ots L samuti esimesse klassi. Siit järeldub vahetult, et eri klasside mingit kaht punkti ei saa ühendada murdjoonega, millel ei ole tasapinnaga ühiseid punkte. Teoreem on täielikult tõestatud.

Kumbagi neist kahest kumerast piirkonnast, milleks mingi tasapind α jaotab ruumi, nimetatakse tasapinnaga α piiratud ehk tasapinnast α väljuvaks poolruumiks. Poolruume tähistame suurte kreeka tähtedega \mathbb{H} , \mathbb{K} , \mathbb{A} , \dots

Ühte poolruumi kuuluva kahe punkti kohta öeldakse, et nad asetsevad tasapinnast ühel pool; erinevatesse poolruumidesse kuuluva kahe punkti kohta öeldakse, et nad asetsevad tasapinnast eri pooltel.

Olgu antud mingi pooltasapind η . See kuulub mingile tasapinnale α . Neid kaht poolruumi, milleks tasapind α jaotab ruumi, nimetatakse pooltasapinnast η väljuvateks poolruumideks.

Olgu nüüd antud kaks tasapinda. Kui kaks tasapinda lõikuvad, siis kehtib nende kohta järgmine teoreem.

Teoreem 204. *Kaks lõikuvat tasapinda jaotavad ruumi neljaks kumeraks piirkonnaks.*

Tõestus on sellel teoreemil täiesti analoogiline teoreemi 3 (I, § 3) tõestusega.

Olgu α ja β antud tasapinnad. Tähistame tähtedega H ja H_1 need poolruumid, milleks ruum jaotub tasapinnaga α , ja tähtedega K ja K_1 need poolruumid, milleks ruum jaotub tasapinnaga β .

Esimesse klassi, mida tähistame sümboliga HK , loeme need punktid, mis asetsevad ühtlasi nii poolruumis H kui ka poolruumis K . Analoogiliselt defineerime ka kolm ülejäänud klassi H_1K , HK_1 ja H_1K_1 . On kerge näha, et igaühes neist neljast klassist on olemas punkte.

Ühe ja sama klassi kaht punkti ühendaval lõigul ei ole ühiseid punkte kummagi antud tasapinnaga, sest sama klassi kaks punkti on ühel pool nii tasapinnast α kui ka tasapinnast β . Eri klasside mingit kaht punkti ei saa ühendada murdjoonega, millel ei ole ühiseid punkte kummagi antud tasapinnaga, sest eri klasside kaks punkti asetsevad eri pooltel vähemalt ühest tasapinnast α ja β hulgast.

Niisiis, ülalpool defineeritud neli punktideklassi kujutavad endast tõepoolest nelja kumerat piirkonda.

Sõna-sõnalt samuti saab tõestada ka järgmist teoreemi.

Teoreem 205. *Kolm tasapinda, mis lõikuvad ühes punktis, jaotavad ruumi kaheksaks kumeraks piirkonnaks.*

§ 105. Kahetahuline nurk.

Kahetahuliseks nurgaks nimetatakse kogu, mis koosneb mingist sirgest ja sellest väljuvast kahest pooltasapinnast; seda sirget nimetatakse kahetahulise nurga servaks ja neid pooltasapindu — nurga tahkudeks. Kahetahulise nurga punktide all mõistame tema serva kõiki punkte ja tema tahkude kõiki punkte.

Pooltasapindade η ja \varkappa poolt (mis väljuvad ühest ja samast sirgest) moodustatud kahetahulist nurka tähistame sümboliga $\angle \eta\varkappa$ ehk $\angle \varkappa\eta$. Järgides Hadamard'i¹, tähistame kahetahulist nurka, mille servaks on sirge XY ja mille tahud läbivad vastavalt punkte A ja B , sümboliga $A \cdot XY \cdot B$.

Kahetahulist nurka nimetatakse sirgnurgaks, kui tema tahud koos servaga moodustavad tasapinna.

Kahetahulise nurga põhiomadus avaldub järgmise teoreemina.

Teoreem 206. *Sirgnurgast erinev kahetahuline nurk jaotab ruumi kaheks piirkonnaks, milledest üks on kumer, teine aga mitte.*

Tõestus on sellel teoreemil väga lähedane teoreemi 4 (I, § 4) tõestusele.

Tähistame sümbolitega η_1 ja \varkappa_1 pooltasapinnad, mis on antud

¹ Hadamard [1], 2. osa, lk. 35.

kahetahulise nurga tahkude η ja \varkappa laiendusteks üle tema serva. Edasi tähistame sümboolitega H ja H_1 poolruumid, mis väljuvad pooltasapinnast η , ning sümboolitega K ja K_1 poolruumid, mis väljuvad pooltasapinnast \varkappa . Need tähised valime nii, et pooltasapind \varkappa asetseks poolruumis H ja pooltasapind η poolruumis K .

Jaotame nüüd kõik kahetahulisele nurgale mitte kuuluvad punktid kahte klassi.

Esimesse klassi HK loeme kõik need punktid, mis asetsevad ühtlasi nii poolruumis H kui ka poolruumis K . Kõik muud kahetahulisele nurgale mitte kuuluvad punktid loeme kuuluvaks teise klassi $H_1 + K_1$.

Korrates nüüd arutelu, mis leidis aset teoreemi 4 tõestamisel, põhjendame järk-järgult järgmisi väiteid.

Esimese klassi HK iga kaht punkti M ja N saab ühendada lõiguga, millel ei ole kahetahulise nurgaga ühiseid punkte.

Kui M on esimese klassi punkt ja murdjoonel $MAB \dots KL$ ei ole kahetahulise nurgaga ühiseid punkte, siis ka punkt L kuulub esimesse klassi.

Järelikult ei ole võimalik eri klasside kaht punkti ühendada murdjoonega, millel ei ole kahetahulise nurgaga ühiseid punkte.

Teise klassi $H_1 + K_1$ iga punkti P ja pooltasapinna η_1 iga punkti H saab ühendada lõiguga, millel ei ole kahetahulise nurgaga ühiseid punkte; sellest järeldub, et teise klassi iga kaht punkti saab ühendada murdjoonega, millel ei ole kahetahulise nurgaga ühiseid punkte.

Lõpuks näitame, nagu ka tasapinnal, et klass $H_1 + K_1$ kujutab endast mittekumerat piirkonda, ja sellega lõpeb teoreemi tõestus.

Üht neist kahest piirkonnast, milleks kahetahuline nurk jaotab ruumi, ja sellele piirkonnale kuuluvaid punkte nimetatakse seesmisteks selle kahetahulise nurga suhtes ning teist piirkonda ja temale kuuluvaid punkte välisteks selle kahetahulise nurga suhtes.

Harilikult nimetatakse seesmiseks piirkonnaks kumerat piirkonda, väliseks aga mittekumerat. Edaspidi, kui ei ole öeldud vastupidist, rakendame seda terminoloogiat. Lugesdes kumera piirkonna seesmiseks, öeldakse, et vaadeldakse kahetahulisest sirgnurgast väiksemat nurka.

Kui aga mittekumer piirkond loetakse seesmiseks, siis öeldakse, et vaadeldakse kahetahulisest sirgnurgast suuremat nurka.

§ 106. Kolmetahuline nurk.

Kolmetahuliseks nurgaks nimetatakse kogu, mis koosneb mingist punktist, sellest punktist väljuvast kolmest mitte ühel tasapinnal asetsevast kiirest ja kõikidest punktidest, milledest igaüks on antud kolmest kiirest mingi kahe kui haarade poolt moodustatud nurga sees.

Punkti, millest väljuvad need kolm kiirt, nimetatakse kolmetahulise nurga tipuks, neid kiiri tema servadeks, paari võetud servade poolt moodustatud nurki tema tasanurkadeks ja tasanurkade suhtes seesmisi piirkondi tema tahkudeks. Kahetahulisi nurki, milledest igaühel on servaks üks kolmetahulise nurga servadest (koos selle pikendusega üle tipu) ja tahkudeks pooltasapinnad, mis läbivad kolmetahulise nurga kaht ülejäänud serva, nimetatakse kolmetahulise nurga kahetahulisteks nurkadeks.

Kolmetahulise nurga punktide all mõistame tema tippu ja tema servade ning tahkude kõiki punkte.

Kolmetahulise nurga tasanurki vaatleme ikka sirgnurgast väiksematena (selle väljendi täpne tähendus on määratud I, § 4 lõpus).

Kolmetahulist nurka tipuga S ja servadega, mis läbivad vastavalt punkte A , B ja C , tähistatakse sümboliga $SABC$ (esimesel kohal on tipp) või üheainsa tähega S , kui vaadeldakse ainult üht nurka tipuga S .

Kolmetahulise nurga põhiomadus väljendub järgmise teoreemina.

Teoreem 207. *Kolmetahuline nurk jaotab ruumi kaheks piirkonnaks, milledest üks on kumer, teine aga mitte.*

Tõestus on sellel teoreemil väga sarnane teoreemi 5 (I, § 5) tõestusega.

Olgu $SABC$ antud kolmetahuline nurk. Tähistame tähtedega H ja H_1 poolruumid, mis väljuvad tasapinnast SBC , tähtedega K ja K_1 poolruumid, mis väljuvad tasapinnast SCA , ning tähtedega A ja A_1 poolruumid, mis väljuvad tasapinnast SAB ; need tähised valime nii, et kiir SA asetseks poolruumis H , kiir SB poolruumis K ja kiir SC poolruumis A .

Jaotame kõik kolmetahulisele nurgale mitte kuuluvad punktid kahte klassi. Esimesse klassi loeme need punktid, mis asetsevad ühtlasi nii poolruumis H kui ka poolruumides K ja A . Kõik muud kolmetahulisele nurgale mitte kuuluvad punktid loeme teise klassi. Ei ole raske tõestada, et mõlemas klassis leidub punkte.

Samuti nagu teoreemi 5 tõestamisel näitame järk-järgult, et esimese klassi iga kaht punkti saab ühendada lõiguga, millel ei ole kolmetahulise nurgaga ühiseid punkte, et eri klasside mingit kaht punkti ei saa ühendada murdjoonega, millel ei ole kolmetahulise nurgaga ühiseid punkte, et teise klassi iga kaht punkti saab ühendada niisuguse murdjoonega ja, lõpuks, et teise klassi punktid moodustavad mittekumera piirkonna.

Üht neist kahest piirkonnast, milleks kolmetahuline nurk jaotab ruumi, ja nimelt kumerat ning sellele kuuluvaid punkte nimetatakse seesmisteks selle kolmetahulise nurga suhtes, teist — mittekumerat ja sellele kuuluvaid punkte — välisteks selle kolmetahulise nurga suhtes.

§ 107. Hulktahuline nurk.

Asume hulktahulise nurga mõiste vaatlemisele. Hulktahuliste nurkade teooria meenutab väga suurel määral tasaste hulknurkade teooriat (I, §§ 6—7).

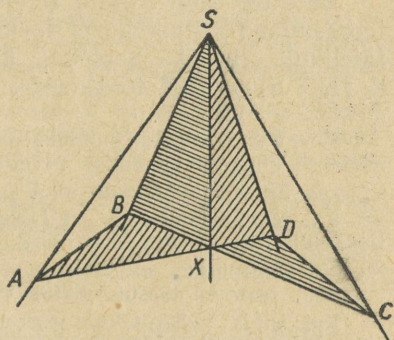
Olgu antud mingi punkt S ja sellest punktist väljuvad kiired SA, SB, \dots, SK ja SL ; neid kiiri vaatleme antud järjekorras. Kõneldes edaspidi nurkadest ASB, BSC, \dots, KSL ja LSA , peame silmas ikka sirgurgast väiksemaid nurki (vt. I, § 4, lõpp).

Hulktahuliseks nurgaks nimetatakse kogu, mis koosneb punktist S , sellest väljuvatest kiirtest SA, SB, \dots, SK ja SL ning kõikidest nurkade ASB, BSC, \dots, KSL ja LSA seesmistest piirkondadest. Samuti nagu kolmetahulise nurga juhul nimetatakse punkti S hulktahulise nurga tipuks, kiiri SA, \dots, SL tema servadeks, nurki ASB, \dots, LSA tema tasanurkadeks, nende nurkade seesmisi piirkondi tema tahkudeks ja kahtahulisi nurki $L \cdot SA \cdot B, A \cdot SB \cdot C, \dots, K \cdot SL \cdot A$ tema kahtahulisteks nurkadeks.

Hulktahulist nurka tipuga S ja servadega SA, SB, \dots, SL tähistatakse sümboliga $SAB \dots L$ (esimesel kohal on tipp) või üheainsa tähega S , kui vaadeldakse ainult üht nurka tipuga S .

Hulktahulisi nurki liigitatakse tahkude või, mis on seesama, servade arvu järgi. Lihtsaim hulktahuline nurk on juba vaadeldud kolmetahuline nurk, edasi tuleb neljatahuline, viietahuline jne. nurk.

Ülalantud hulktahulise nurga üldise definitsiooni alla mahuvad õige keerukad kujundid. Nii näiteks võivad hulktahulisel nurgal olla kahekordsed, kolmekordsed jne. kiired, s. o. kiired, mida mööda löikuvad hulktahulise nurga kaks, kolm jne. tahku. Näiteks joonisel 16 kujutatud neljatahulisel nurgal $SABCD$ on kahekordne kiir SX . Edasi, hulktahulise nurga serv võib asetsema tema ühel tahul, kuigi ta ei ole vastava tasanurga haar. Lõpuks on võimalik, et hulktahulise nurga serv on mitte tema kahe, vaid suurema arvu tasanurkade haaraks.



Joonis 16.

Märkus. Hulktahulise nurga äsjaloetletud iseärasustest võime saada õige konkreetse kujutluse, kui kasutame järgmist võtet.

Vaatleme mingit tasast hulknurka ja mingit punkti S , mis ei asetse hulknurga tasapinnal. Punktist S väljuvad kiired, mis läbivad hulknurga tippu ja hulknurga külgede kõiki punkte, moodustavad hulktahulise nurga. Öeldakse,

et hulktahuline nurk saadakse hulknurga «projekteerimisel» punktist S . Võttes mitmesuguseid tasaseid hulknurki, saab niiviisi luua endale konkreetse kujutluse tähelisest, lihtsast, kumerast ja lokaalselt kumerast hulktahulisest nurgast, milledest on juttu allpool.

Hulktahulist nurka nimetatakse lihtsaks, kui tema mingid kaks tahku ei lõiku, tema ükski serv ei asetse tema tahul ja iga serv on ainult tema kahe tasanurga haaraks. Mittelihtsaid hulktahulisi nurki nimetatakse mõnikord tähelisteks hulktahulisteks nurkadeks.

Hulktahulist nurka nimetatakse kumeraks, kui iga tahu tasapinna suhtes tema ülejäänud tahud asetsevad ühes ja samas poolruumis (ühel pool).

Iga kumer hulktahuline nurk on lihtne, kuid iga lihtne hulktahuline nurk ei ole kumer.

Kumera hulktahulise nurga tähtsaim omadus väljendub järgmise teoreemina.

Teoreem 208. *Kumer hulktahuline nurk jaotab ruumi kaheks piirkonnaks, milledest üks on kumer, teine aga mitte.*

Kumerat piirkonda nimetatakse seesmiseks ja mittekumerat piirkonda väliseks selle kumera hulktahulise nurga suhtes.

Selle teoreemi tõestus on sedavõrd lähedane teiste analoogiliste teoreemide tõestustele, et loeme võimalikuks jätta selle teostamise täielikult lugeja hooleks. Eeskujuks võiksid olla teoreemide 8 (I, § 6) ja 207 tõestused.

Märkus. Kumera hulktahulise nurga vaadeldud omadust saab üldistada mistahes lihtsa hulktahulise nurga juhule. Nimelt kehtib järgmine teoreem.

Iga lihtne hulktahuline nurk jaotab ruumi kaheks piirkonnaks.

Kui hulktahuline nurk on kumer, siis üks neist piirkondadest on kumer, teine mitte. Kui hulktahuline nurk on mittekumer, siis on mõlemad piirkonnad mittekumerad.

Selle teoreemi tõestus ulatub välja käesoleva raamatu raamidest.

Kui antud hulktahuline nurk on mittekumer, siis võib ükskõik kumba neist kahest mittekumerast piirkonnast, milledeks ta jaotab ruumi, nimetada seesmiseks; teist piirkonda tuleb siis nimetada väliseks. Küsimuse detailsem uurimine näitab, et meelevaldse mittekumera hulktahulise nurga juhul ei saa anda niisugust tunnist, mis võimaldaks eristada üht neist kahest piirkonnast teisest. (Meenutame, et kumera hulknurga ja kumera hulktahulise nurga juhul üks kahest piirkonnast on kumer ja teine mitte. Tasase mittekumera lihtsa hulknurga juhul üks kahest piirkonnast on lõpmatu, teine mitte; võrrelda I, § 7.)

¹ Termin «projekteerimine» esineb siin tähenduses, mis on erinev selles raamatus mujal kasutatud tähendusest (§ 103); siinsel juhul ta tähendab «tsentraalprojekteerimist».

§ 108. Tetraeeder.

Tetraeedriks¹ (ehk kolmnurkseks püramiidiks) nimetatakse kogu, mis koosneb neljast mitte ühel tasapinnal asetsevast punktist, kuuest neid punkte paariti ühendavast lõigust ja kõikidest punktidest, milledest igaüks on seespool mingit kolmnurka, mille tippudeks on kolm punkti antud neljast.

Antud nelja punkti nimetatakse tetraeedri tippudeks, kuut lõiku tema servadeks ja kolmnurki, milledest igaühel on tippudeks kolm punkti antud neljast, tema tahkudeks.

Tetraeedri kahetahulisteks nurkadeks nimetatakse neid kuut kahetahulist nurka, millest igaüks on moodustatud ühest tetraeedri servast väljuvast kahest pooltasapinnast, mis läbivad vastavalt kaht sellel serval mitte asetsevat tippu.

Tetraeedri kolmetahulisteks nurkadeks nimetatakse neid nelja kolmetahulist nurka, milledest igaüks on moodustatud tetraeedri ühest tipust väljuvast ja vastavalt kolme ülejäänud tippu läbivast kolmest kiirest.

Tetraeedri punktideks nimetame tema tippu, tema servade punkte ja tema tahkude kõiki seesmisi punkte.

Kui me mingeil kaalutlusil tõstame esile ühe tetraeedri tahkudest, siis nimetame teda mõnikord põhjaks, ülejäänud kolme tahku aga külgtahkudeks.

Märkused. 1. Meie õppekirjanduses termin «tetraeeder» peaaegu ei leia rakendamist (välja arvatud korrapärase tetraeedri juhtum) ja on levinud nimetus «kolmnurkne püramiid». Kuid tetraeedril on ruumigeomeetrias eriline osa (nagu kolmnurgal on tasapinnal), lahkuminev sellest, mida täidavad püramiidid teistsuguse tahkude arvuga. Sellepärast me loomegi õigeks kasutada «kolmnurkse püramiidi» asemel eri terminit «tetraeeder». See terminoloogia on kooskõlas kaasaegse nii nõukogude kui ka välismaise teadusliku kirjandusega.

2. Termin «tetraeedri tahk» kasutamises ei ole vajalikku järjekindlust. Tahkudeks nimetatakse neid kolmnurki, milledest kõneldi ülalpool. Samal ajal nimetatakse tahkudeks sageli neid kolmnurki koos nende seesmiste piirkondadega. Märgetavaid ebamugavusi aga niisugune kahesus terminoloogias tegelelikult ei tekita.²

Tetraeedri lihtsaim omadus väljendub järgmise teoreemina.

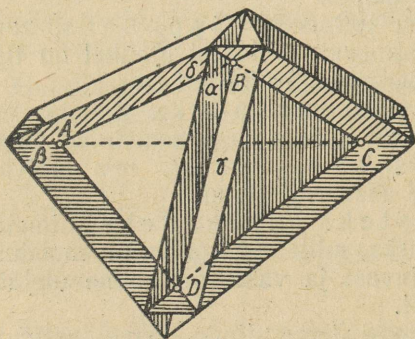
Teoreem 209. *Tetraeeder jaotab ruumi kaheks piirkonnaks, milledest üks on kumer, teine aga mitte.*

Selle teoreemi tõestamise jätame lugejale. See toimub teoreemi 5 (I, § 5) tõestuse eeskujul.

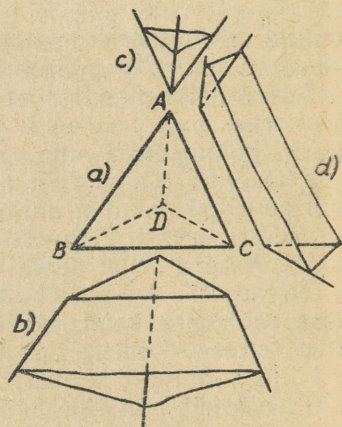
¹ Tetraeeder — (kreeka k.) nelitahukas.

² Sellise kahesusega terminoloogias kohtume geomeetrias väga sagedasti. Piisab, kui juhime tähelepanu termini «kolmnurga kõrgus» kahesugusele tähendusele järgmistest lausetes: võrdsetel kolmnurkadel on võrdsed kõrgused; nüri-nurkse kolmnurga kõrguste lõikepunkt asetseb väljaspool kolmnurka. Väites «kolmnurga pindala võrdub aluse ja kõrguse poole korrutisega» mõeldakse kõrguse all juba vastava lõigu pikkust. Termin «ringjoone lõikaja» tähendab nii sirget (I, lk. 48) kui ka lõiku (I, lk. 213); sama kehtib ka terminite «perpendikulaar», «kaldjoon» jne. kohta.

Neist kahest piirkonnast, milleks tetraeeder jaotab ruumi, ühe, nimelt kumera piirkonna punkte nimetatakse seesmisteks ja teise piirkonna punkte välisteks tetraeedri suhtes.



Joonis 17.



Joonis 18.

Edasi jätame lugejale endale tõestada, et kui neli punkti A , B , C ja D ei asetse ühel ja samal tasapinnal, siis tasapinnad BCD , CDA , DAB ja ABC jaotavad ruumi viieteistkümneks piirkonnaks (joonis 17). Üheks neist piirkondadest on tetraeedri $ABCD$ seesmine piirkond (joonis 18, a), neli piirkonda liituvad tetraeedri tahkudega (joonis 18, b) ja neli piirkonda tema tippudega (joonis 18, c). Lõpuks, igaüks ülejäänud kuuest piirkonnast omab renni kuju ja liitub tetraeedri ühe servaga (joonis 18, d).

§ 109. Hulktahukas.

Eelmises paragrahvis vaadeldud tetraeeder kujutab endast hulktahuka erijuhtu. Enne kui vaadelda hulktahukat üldiselt, vaatleme üldisemat — hulktahulise pinna mõistet.

Seejuures nimetame tasaseks hulknurgaks iga kinnist murdjoont (võrrelda I, lk. 17), mille kõik lülid asetsevad ühel ja samal tasapinnal, ja ruumiliseks hulknurgaks kinnist murdjoont, mille kõik lülid ei asetse ühel tasapinnal.

Hulktahuliseks pinnaks nimetatakse kogu, mis koosneb lõplikust arvust tasastest hulknurkadest, mis asetsevad ruumis nii, et

- 1) mistahes hulknurga iga külg on ainult selle hulknurga või veel ainult ühe hulknurga küljeks,
- 2) kui A on ühe ja B on mingi teise antud hulknurga tipp, siis

on olemas murdjoon, mille otsteks on punktid A ja B ning lülideks antud hulknurkade küljed,

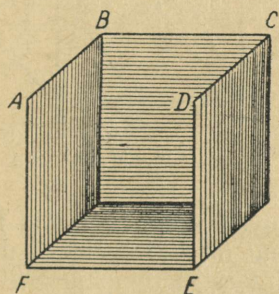
ja peale selle kõikidest punktidest, milledest igaüks asetseb antud hulknurga sees.

Märkus. Neist tingimustest esimest saaks asendada üldisema tingimusega. Nimelt võiks vaadelda ka juhte, kus mingi antud hulknurga külj on küljeks veel kolmel, viiel, ... hulknurgal (nii, et oleks paarisarv hulknurki ühise küljega). Et seda laadi üldistus tegelikult ei paku huvi, siis jätame ta vaatluse alt välja.

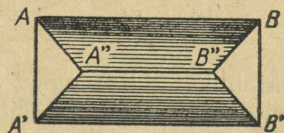
Teise tingimuse konkreetne tähendus seisab selles, et hulktahuline pind «on ühes tükis», s. t. ta ei lagune üksikuteks, omavahel mitte seotud osadeks.

Toonitame, et me ei jäta vaatluse alt välja juhte, kus kaks ühise küljega hulknurka asetsevad ühel ja samal tasapinnal või kus analoogilise omadusega on mitu antud hulknurka (mis täidavad teist tingimust). Veel enam, me ei arva välja isegi seda juhtu, kus kõik antud hulknurgad asetsevad ühel ja samal tasapinnal; mõnel juhul on mõtet vaadelda ka niisuguseid hulktahulisi pindu (nii näiteks allpool, teoreemi 357 tõestamisei, vaatleme hulknurka kui hulktahulise pinna erijuhtu).

Hulktahulist pinda moodustavate hulknurkade tippe nimetatakse selle pinna tippudeks, nende külgi tema servadeks ja hulknurki endid tema tahkudeks.¹



Joonis 19.



Joonis 20.

Hulktahulise pinna serva nimetatakse seesmiseks, kui ta on küljeks pinna kahel tahul, ja äärmiseks, kui ta on küljeks ainult ühel tahul. Kõikide äärmiste servade ja nende otste kogu nimetatakse hulktahulise pinna ääreks ehk piiriks. Saab tõestada, et hulktahulise pinna äär (kui antud pinnal üldse on äär) kujutab endast üht või mitut, üldiselt ruumilist hulknurka; vastavalt sellele kõneldakse ühe või mitme kontuuriga piiratud hulktahulisest pinnast.

Näiteks kõrvaldades kuubil tema kaks tahku (joonisel 19 ülemise ja eesmise), saame hulktahulise pinna, mis on piiratud üheainsa kontuuriga $ABCDEF$; kahe kontuuriga pinna näiteks võib

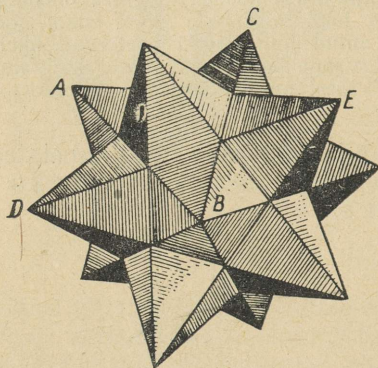
¹ Tahu mõiste puhul võiks korrata sedasama, mis on öeldud tetraeedri tahu kohta; vt. märkust 2 leheküljel 31.

olla joonisel 20 kujutatud pind, mis koosneb kolmest nelinurgast (kontuurideks on $AA'A''$ ja $BB'B''$).

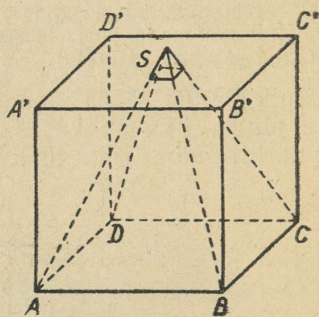
Hulktahulist pinda nimetatakse hulktahukaks, kui pinna kõik servad on seesmised.¹ Vastavalt defineeritakse ka hulktahuka tippe, servi ja tahke.

Hulktahukaid liigitatakse nende tahkude arvu järgi. Lihtsaim hulktahukas on juba vaadeldud tetraeeder. Edasi tuleb pentaeder (viistahukas), heksaeeder (kuustahukas) jne.

Teistest nimetustest esinevad sagedamini oktaeder (kaheksatahukas), dodekaeder (kaksteisttahukas) ja ikosaeder (kakskümmendtahukas).



Joonis 21.



Joonis 22.

Hulktahuka üldise mõiste alla mahuvad väga keerukad kujundid. Näiteks joonisel 21 esitatud kujund on hulktahukas, mis on moodustatud kaheteistkümnest korrapärasest tähtviisnurgast (üks neist on viisnurk $ABCDE$).

Selleks, et mitte vaadelda niisuguse keeruka kujuga hulktahukaid, võtame vastu järgmise definitsiooni.

Hulktahukat nimetatakse lihtsaks, kui ta vastab järgmistele nõuetele:

- 1) hulktahuka kõik tahud on lihtsad hulknurgad;
- 2) hulktahuka servadel ei ole ühiseid punkte ei omavahel ega tema tahkude seesmiste piirkondadega;
- 3) hulktahuka tipud ei asetse tema tahkude seesmistes piirkondades ega tema servadel;
- 4) hulktahuka kõikide ühise tipuga tahkude tasanurgad moodustavad selle tipu juures ühe hulktahulise nurga.

Analoogiliselt defineeritakse lihtsat hulktahulist pinda.

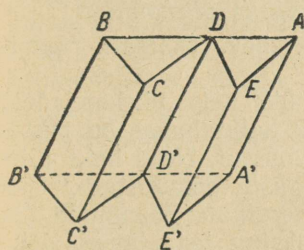
¹ Üldiselt ei ole erilist mõtet vaadelda hulktahukat, mille kõik tahud asetsevad ühel ja samal tasapinnal. Analüütilise geomeetria kursustes siiski esinevad niisugused väljendid, nagu «tetraeedri $ABCD$ ruumala muutub nulliks, kui kõik neli punkti A, B, C ja D asetsevad ühel ja samal tasapinnal».

Märkus. Joonisel 21 kujutatud hulktahukas ei ole lihtne, sest tema tahkudeks on tähtviisnurgad.

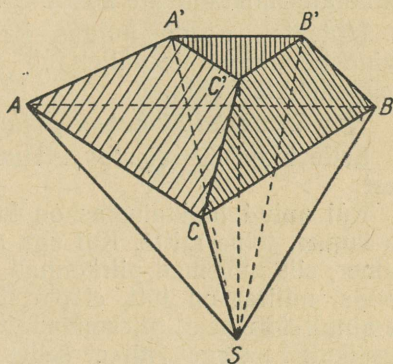
Joonisel 22 kujutatud hulktahukas ei ole lihtne, sest tema servadel SA , SB , SC ja SD on tahu $A'B'C'D'$ seesmise piirkonnaga ühiseid punkte.

Joonisel 23 kujutatud viisnurkne prisma ei ole lihtne, sest tema tipud D ja D' asetsevad vastavalt servadel AB ja $A'B'$ ning tema serv DD' asetseb tahu $ABB'A'$ seesmises piirkonnas.

Lõpuks joonisel 24 kujutatud hulktahukas ei ole lihtne — ta vastab nõuetele 1) — 3), kuid tasanurgad BSC , CSA , ASB , $B'SC'$, $C'SA'$ ja $A'SB'$ moodustavad tipu S juures kaks kolmetahulist nurka: $SABC$ ja $SA'B'C'$.



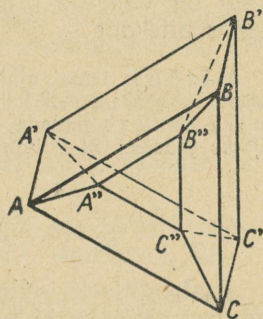
Joonis 23.



Joonis 24.

Ka lihtne hulktahukas võib omada kuju, millel on väga vähe ühist igapäevase, koolilise kujutlusega hulktahukast. Selles suhtes on õige õpetlik järgmine näide.

Vaatleme kolme hulktahulist pinda, milledest igaüks on moodustatud kolmest nelinurksest tahust ja on piiratud kahe kolmnurkse kontuuriga (vt. joon. 20). «Ühendame» need kolm pinda nii, et saame ühe, joonisel 25 kujutatud hulktahuka, mida piiravad üheksa nelinurksest tahku: $AA'B'B$, $A'A''B''B'$, $A''ABB''$, $BB'C'C$, $B'B''C''C'$ jne. Niisuguse hulktahuka karakterseks iseärasuseks on tema «rõngakujulisus» (me ei peatu siin selle kujuka väljendi täpse tähenduse selgitamisel; vt. allpool, § 163).



Joonis 25.

Meie poolt konstrueeritud hulktahukas on lihtne, sest ta vastab ülalpool antud definitsioonile.

Koolitöös ja üldiselt elementargeomeetrias mõistetakse sõna «hulktahukas» all enamasti ainult teatavat erikujulist hulktahukat — kumerat hulktahukat.

Hulktahukat nimetatakse kumeraks, kui tema iga tahu tasapinna suhtes kõik ülejäänud tahud on ühel pool (ühes poolruumis).

Kumera hulktahuka üheks näiteks on tetraeeder. Teisteks näideteks sobivad rööptahukas, aga ka prisma, püramiid, tüviprisma ja tüvipüramiid, millede põhjaks on kumer hulknurk. Edaspidi puutume käesolevas raamatus kokku ka keerukamate näidetega kumerate hulktahukate kohta.

Lihtsatel, nende hulgas ka kumeratel hulknurkadel on üks ühine omadus, mis väljendub järgmise Jordan'i teoreemina hulktahukate kohta.

Iga lihtne hulktahukas jaotab ruumi kaheks piirkonnaks.

Selle teoreemi tõestus ulatub välja käesoleva raamatu raamidest.

Kui antud hulktahukas on kumer, siis üks neist piirkondadest on kumer, teine mitte. Kui aga antud lihtne hulktahukas on mitte-kumer, siis mõlemad piirkonnad on mitte-kumerad. Need kaks piirkonda, millest on jutt, ei ole siiski ühesuguste omadustega. Üks ja ainult üks neist piirkondadest sisaldab tervikuna tasapinda (ja järelikult ka sirget, nii et selles mõttes võiksime teda lugeda lõpmatuks).

Selle piirkonna punkte ja seda piirkonda ennast nimetatakse v ä l i s t e k s hulktahuka suhtes; teise piirkonna punkte ja piirkonda ennast nimetatakse s e e s m i s t e k s. Kumera hulktahuka juhul on väliseks piirkonnaks mitte-kumer piirkond ja seesmiseks kumer piirkond.

Märkus: Omal ajal märkisime, et iga mittelihtne hulknurk jaotab tasapinna rohkem kui kaheks piirkonnaks. Erinevalt sellest võib mittelihtne hulktahukas jaotada ruumi ka kaheks piirkonnaks. Niisugune omadus on näiteks joonisel 24 kujutatud hulktahukal.

§ 110. Suunaga kolmetahulised nurgad.

Analoogiliselt sellega, nagu me tasapinnageomeetrias vaatlesime suunaga nurki (I, § 8), saab ruumis vaadelda suunaga kolmetahulisi nurki.

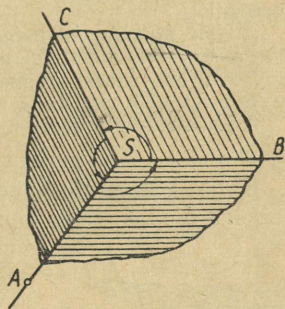
Kolmetahulist nurka $SABC$ nimetame s u u n a g a (ehk orienteeritud) nurgaks, kui pöörame tähelepanu järjekorrale, milles on antud tema servad, ja loeme SA esimeseks servaks, SB teiseks servaks ja SC kolmandaks servaks.

Suunaga kolmetahulisi nurki tähistame kriipsukesega tähtede peal: \overline{SABC} .

Kui on antud mitu suunaga kolmetahulist nurka, siis saame

neid üksteisega suuna poolest võrrelda. Kõige lihtsam on seda teostada järgmise mitterange, kuid küllalt kujuka mõttekäigu abil (vrd. I, § 8).

Võtame suunaga kolmetahulise nurga \overline{SABC} esimesel serval mingi punkti A (joonis 26). Kujutleme «vaatlejat», kes asetseb punktis A ja on näoga pööratud tasapinna BSC poole. Kui sellele vaatlejale sirgnurgast väiksem suunaga tasanurk BSC (algushaaraks on teine serv, lõpphaaraks kolmas serv) näib olevat positiivse suunaga, siis öeldakse, et ka kolmetahuline nurk on positiivse suunaga (ehk positiivselt orienteeritud ehk positiivse orientatsiooniga); vastasel juhul öeldakse, et kolmetahuline nurk on negatiivse suunaga. On ilmne, et kolmetahulise nurga positiivne või negatiivne suund ei sõltu punkti A valikust nurga esimesel serval.



Joonis 26.

Märkus: Selle asemel võiks kolmetahulise nurga $SABC$ servadel võtta vastavalt punktid A , B ja C ja kujutleda «vaatlejat», kes asetseb tasapinnast ABC mitte seal pool, kus on punkt S . Kui sellele vaatlejale näib orienteeritud kolmnurk \overline{ABC} omavat positiivset (negatiivset) orientatsiooni, siis ka kolmetahulisele nurgale omistatakse positiivne (vastavalt negatiivne) orientatsioon.

Meenutame, et tasase nurga \overline{BSC} positiivseks suunaks lugesime (I, § 8) suuna «vastu kellaosuti liikumist». Sellest kokkuleppes peame kinni ka allpool. Muidugi võiks kokku leppida ka vastupidiselt, s. o. lugeda tasase nurga positiivseks suunaks «kellaosuti liikumise» suuna.

Kui ruumis on valitud kolmetahuliste nurkade positiivne suund, siis öeldakse, et «ruum on orienteeritud».

Suunaga kolmetahuliste nurkade klassidel on järgmised omadused, mis loeme ilmselt õigeteks:

a) Kolmetahulised nurgad \overline{SABC} , \overline{SBCA} ja \overline{SCAB} (millede servad on ringjärjekorras ümber vahetatud) kuuluvad ühte ja samasse klassi (on samasuunalised).

b) Kolmetahulised nurgad \overline{SABC} ja \overline{SBAC} (kaks serva on ümber vahetatud) kuuluvad eri klassidesse (on vastandsuunalised).

c) Kui kolmetahulise nurga \overline{SABC} esimesed kaks serva SA ja SB ühtivad kolmetahulise nurga $\overline{SABC'}$ vastavate servadega, siis kolmetahulised nurgad kuuluvad ühte ja samasse klassi (on samasuunalised) või eri klassidesse (on vastandsuunalised) sõltuvalt sellest, kas kolmandad servad SC ja SC' asetsevad ühel pool või eri poolltel tasapinnast ASB .

d) Kolmetahulised nurgad \overline{SABC} ja \overline{ASBC} kuuluvad eri klassidesse (on vastandsuunalised).

(Neid nelja omadust on soovitatav kõrvutada suunaga tasaste nurkade ja orienteeritud kolmnurkade omadustega, mida vaadeldi I paragrahvis 8.)

Märkus. Soovides vältida konkreetseid mõisteid «vaatleja» ja «kellaosuti», võiksime suunaga kolmetahuliste nurkade teooria rajada järgmisele teoreemile.

Ruumi kõikide kolmetahuliste nurkade hulga saab ühesel viisil jaotada kaheks klassiks, millel on omadused a) kuni d).

Neist ühe klassi kolmetahulistele nurkadele — ükskõik kumma klassi omadele — võib omistada positiivse suuna.

Äsjasõnastatud teoreemi tõestus ulatub välja käesoleva raamatu raamidest.

Kaht kolmetahulist nurka ühise tipuga S nimetame tippnurkadeks (ehk tipu suhtes sümmeetrilisteks nurkadeks), kui ühe nurga iga serv on teise nurga vastava serva pikendus üle nende ühise tipu.

Joonis 27 kujutab kaht kolmetahulist tippnurka $SABC$ ja $SA'B'C'$.

Kasutades suunaga kolmetahuliste nurkade omadusi a) kuni d), saab tõestada järgmise teoreemi.

Teoreem 210. Kui kolmetahuliste tippnurkade iga kaht serva, mis on teineteisele pikenduseks, lugeda teineteisele vastavaks, siis saame kaks vastandlikult orienteeritud kolmetahulist nurka.

Tõestus: Olgu $SABC$ (joonis 27) antud kolmetahuline nurk ja SA' , SB' ja SC' vastavalt servade SA , SB ja SC pikendused. Orienteeritud kolmetahulised nurgad \overline{SABC} ja $\overline{SABC'}$ on omaduse c) järgi vastandsuunalised, sest kiired SC ja SC' asetsevad eri pooltel tasapinnast SAB . Analoožilisel põhjusel on vastandsuunalised ka nurgad $\overline{SABC'}$ ja $\overline{SAB'C'}$, samuti nurgad $\overline{SAB'C'}$ ja $\overline{SA'B'C'}$.

Järelikult nurgad \overline{SABC} ja $\overline{SAB'C'}$ on samasuunalised ning nurgad \overline{SABC} ja $\overline{SA'B'C'}$ on vastandsuunalised.

Samale tulemusele jõutakse järgmise, näitlikuma mõttekäigu abil. Punktis A asetsevale vaatlejale näivad nurgad BSC ja $B'SC'$ samasuunalistena. Et kiired SA ja SA' asetsevad eri pooltel tasapinnast SBC , siis kahele vaatlejale, kes asetsevad vastavalt punktides A ja A' , näivad nurgad \overline{BSC} ja $\overline{B'SC'}$ vastavalt vastandsuunalistena.

Kasutades suunaga (orienteeritud) kolmetahuliste nurkade

omadusi, ei ole raske üles ehitada ka orienteeritud (suunaga) tetraeedrite teooriat.

Tetraeedrit $ABCD$ nimetame orienteeritud (ehk suunaga) tetraeedriks, kui pöörame tähelepanu tema tippude järjekorrale ja loeme A esimeseks tipuks, ..., D neljandaks tipuks.

Orienteeritud tetraeedrit tähistame kriipsukesega tähtede peal: \overline{ABCD} .

Kaht orienteeritud tetraeedrit \overline{ABCD} ja $\overline{A'B'C'D'}$ nimetame samaselt orienteerituks või vastandlikult orienteerituks sõltuvalt sellest, kas nende vastavad kolmetahulised nurgad \overline{ABCD} ja $\overline{A'B'C'D'}$ on samasuunalised või vastandsuunalised.

Suunaga kolmetahuliste nurkade omaduste a) kuni d) põhjal on kahel samaselt orienteeritud tetraeedril \overline{ABCD} ja $\overline{A'B'C'D'}$ iga kaks vastavat kolmetahulist nurka (\overline{BACD} ja $\overline{B'A'C'D'}$, \overline{BCDA} ja $\overline{B'C'D'A'}$ jne.) samasuunalised, kahel vastandlikult orienteeritud tetraeedril aga vastandsuunalised.

Samaselt orienteeritud ja vastandlikult orienteeritud tetraeedrite ülalantud definitsioonist järeldeb vahetult, et suunaga kolmetahuliste nurkade omadused a) kuni d) jäävad kehtima ka orienteeritud tetraeedrite korral, kui ainult sümboli \overline{SABC} all mõista mitte kolmetahulist nurka, vaid tetraeedrit.

Kui kolmetahuliste nurkade positiivne suund on valitud, s. t. kui ruum on orienteeritud, siis sellega on määratud ka, missugused suunaga tetraeedrid tuleb lugeda positiivselt orienteerituks ja missugused negatiivselt orienteerituks.

On samuti ilmne, et kui mingi tetraeedri \overline{ABCD} lugeda positiivselt orienteerituks, siis sellega on valitud ka kolmetahuliste nurkade positiivne suund, s. t. ruum on orienteeritud.

§ 111. Tetraeedri omadusi.

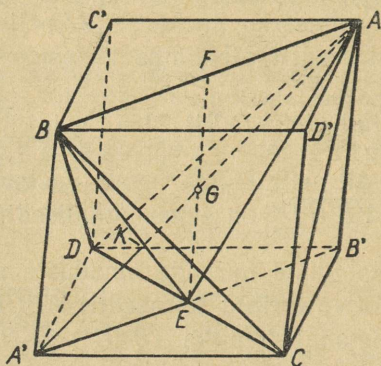
Tetraeedri kuus serva jaotuvad kolmeks paariks vastasservadeks, s. o. servadeks, millel ei ole ühiseid otsi. Nii on tetraeedril $ABCD$ (joonis 28) vastasservadeks AD ja BC , BD ja AC , CD ja AB .

Tetraeedri kaks vastasserva on kiivsirgete lõigud ja seetõttu saab neist läbi panna kaks paralleelset tasapinda (teoreem 198). Pannes niisuguse paralleelsete tasapindade paari läbi tetraeedri vastasservade iga paari, saame teatava rööptahuka (joonis 28). Antud tetraeedri tipud kuuluvad selle rööptahuka tippude hulka ja tetraeedri servad rööptahuka tahkude diagonaalide hulka.

Seda rööptahukat nimetame antud tetraeedri ümberkujundatud rööptahukaks.

Tetraeedri ümber kujundatud rööptahuka vaatlemine võimal-

dab tõestada rea tetraeedri omadusi. Toetudes tuntud teoreemile selle kohta, et rööptahuka diagonaalid läbivad üht ja sama punkti ja poolituvad selles punktis, tõestame otsekohe järgmise lause.



Joonis 28.

Teoreem 211. *Igal tetraeedril need kuus tasapinda, milledest igaüks läbib üht serva ja selle vastasserva keskpunkti, läbivad üht ja sedasama punkti.*

Need neli lõiku, milledest igaüks ühendab tetraeedri üht tippu vastastahu raskuskeskmega, läbivad sedasama punkti ja jaotuvad selles punktis suhtes 3:1, arvates tipust.

Need kolm lõiku, milledest igaüks ühendab tetraeedri kahe vastasserva keskpunkte, läbivad ka sedasama punkti ja poolituvad selles punktis.

Punkti, millest kõneldakse selles teoreemis, nimetatakse tetraeedri raskuskeskmeks (mõnikord ka tsentroidiks).

Tõestus: Olgu $ABCD$ (joonis 28) antud tetraeedri ja $AC'BD'B'DA'C$ tema ümber kujundatud rööptahukas.

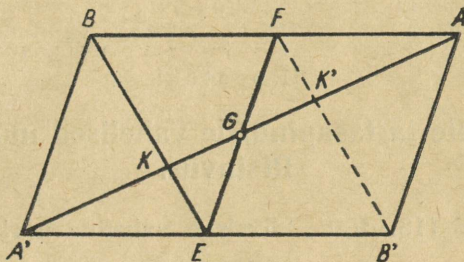
Tasapind, mis läbib tetraeedri serva AB ja selle vastasserva CD keskpunkti E , ilmselt ühtib rööptahuka diagonaaltasapinnaga $ABA'B'$ ja seetõttu läbib tema diagonaalide lõikepunkti G . Analoogiliselt saab tõestada, et punkti G läbivad ka ülejäänud viis tasapinda, millest kõneldakse teoreemis.

Tasapind $ABA'B'$ lõikab tetraeedri tahku BCD mööda selle tahu mediaani BE . Niisamuti tasapind $ACA'C'$ lõikab tetraeedri sama tahku BCD mööda tema teist mediaani. Siit järeldub, et tetraeedri tippu A ja tahu BCD raskuskeset K ühendav sirge ühtib tasapinnade $ABA'B'$ ja $ACA'C'$ lõikejoonega, s. t. rööptahuka diagonaaliga AA' . Seetõttu sirge AK läbib punkti G , nagu see toimub siis ka ülejäänud kolme analoogilise sirgega.

Suhet, milles lõik AK (ja järelikult ka teised kolm analoogilist lõiku) jaotub punktis G , on kõige lihtsam leida diagonaallõikest $ABA'B'$ (joonis 29). Sellest saame, et $AK' = K'K = KA'$ (võr-

duste $AF = FB$ ja $B'E = EA'$ põhjal) ja $AG = GA'$, millest järeldubki, et $AG = \frac{1}{2} AA'$, $GK = \frac{1}{6} AA'$, nii et $AG : GK = 3:1$.

Samast joonisest nähtub, et lõik EF , mis ühendab vastasservade CD ja AB keskpunkte E ja F , läbib sedasama punkti G ja poolitub selles. Sama kehtib ka kahe-teise analoogilise lõigu kohta.



Joonis 29.

Järeldus. Tetraeedri ümber kujundatud rööptahuka servad on vastavalt võrdsed lõikudega, mis paariti ühendavad tetraeedri vastasservade keskpunkte.

Tõepoolest, rööptahuka servad $AB' = BA' = D'C = C'D$ joonisel 28 on võrdsed lõiguga EF , mis ühendab tetraeedri servade CD ja AB keskpunkte E ja F .

Sirgete ja tasapindade vahelised nurgad. Ristuvus.

§ 112. Kahe kiivsirge vaheline nurk.

Kahe kiire vaheliseks nurgaks ehk lihtsalt nurgaks nimetasime omal ajal kogu, mis koosneb mingist punktist ja sellest punktist väljuvast kahest kiirest (1, § 4). Stereomeetrias üldistasime seda mõistet, vaadeldes kahetahulisi (§ 105), kolmetahulisi (§ 106) ja hulktahulisi (§ 107) nurki. Käesolevas peatükis vaatleme selle mõiste teisi üldistusi. Alustame kahe sirgjoone juhuga.

Kaks sirget moodustavad lõikudes neli nurka, milledest igaüht võib lugeda kahe sirge vaheliseks nurgaks. Need neli nurka moodustavad kaks tippnurgade paari ja on seetõttu paariti võrdsed. Mitte lugedes võrdseid nurki erinevateks, öeldakse, et kaks lõikuvat sirget moodustavad kaks nurka, mis täiendavad teineteist kaheks täisnurgaks. Muide, kui antud lõikuvaid sirgeid vaadelda suunaga sirgetena, siis saadakse ainult üks täiesti määratud nurk.

Kahe sirge vahelise nurga mõiste üldistamine mittelõikuvate sirgete juhule on rajatud järgmisele teoreemile.

Teoreem 212. *Paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad on võrdsed.*

Teoreemi tõestuse nii selle juhu korral, kui nurgad asetsevad ühel ja samal tasapinnal, kui ka juhu korral, kui nad asetsevad eri tasapindadel (mis on paralleelsed), loeme tuntuks koolikursusest.

Ülalsõnastatud teoreem võimaldab anda järgmise definitsiooni.

Kahe kiivsirge vaheliseks nurgaks nimetatakse nurka kahe lõikuva sirge vahel, kui need sirged on vastavalt paralleelsed antud kahe kiivsirgega.

Kui võrdseid nurki mitte lugeda erinevateks nurkadeks, siis nende tingimuste juures kaks kiivsirget moodustavad üldiselt kaks nurka, mis täiendavad teineteist kaheks täisnurgaks. Tõepoolest, kui läbi kahe erineva punkti O' ja O'' tõmmata sirged a' , b' ja a'' ,

b'' , mis on vastavalt paralleelsed antud kahe kiivsirgega a, b (joonis 30), siis teoreemi 212 põhjal sirgete a' ja b' vahelised nurgad on vastavalt võrdsed sirgete a'' ja b'' vaheliste nurkadega. Kui aga antud kiivsirgeid vaadelda suunaga sirgetena, siis saadakse üks (suuruselt) täiesti määratud nurk.

Märkus. Kui antud definitsiooni rakendada mitte kiivsirgetele, vaid paralleelsetele sirgetele a ja b , siis sirged a' ja b' osutuvad ühtivateks. Sellelt seisukohalt vaadates võib «paralleelsete sirgete vahelist nurka» lugeda võrdseks nulliga või $2d$ -ga. Võimalik, et analüütilises geometrias on lugeja sellega juba kokku puutunud.

Kui kaks lõikuvat sirget, mis on vastavalt paralleelsed antud kahe (kiiv- või lõikuva) sirgega, on teineteisega risti, siis nimetame ka antud sirgeid ristuvateks.

Toonitame veel kord, et ristuvate sirgete mõiste ja antud sirgega ristuva sirge mõiste on ühteviisi rakendatav nii kiivsirgete kui ka lõikuvate sirgete juhul. Erinevalt sellest väljendit «antud sirgega ristuv lõik» rakendatakse harilikult ainult antud sirget täisnurga all lõikava sirge korral¹.

Märgime, et ristuvatel sirgetel on järgmine, nende definitsioonist tulenev omadus:

Kui üks kahest paralleelsest sirgest on risti mingi antud sirgega, siis ka teine neist on risti sellega.

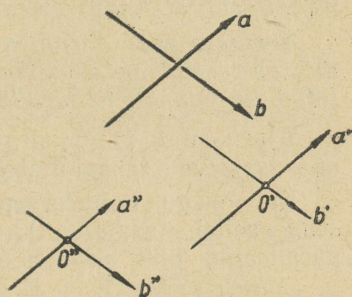
§ 113. Sirge ja tasapinna ristuvus.

Me ütleme, et sirge on risti tasapinnaga (ehk sirge ja tasapind ristuvad, ehk tasapind on risti sirgega), kui sirge on risti iga sirgega, mis asetseb tasapinnal. Väljendi «tasapinnaga ristuv sirge» asemel öeldakse ka «tasapinna ristsirge».

Sellest definitsioonist järeldub, et tasapinnaga ristuv sirge lõikab seda tasapinda.

Tõepoolest, tasapinnaga paralleelne sirge (samuti ka tasapinnal asetsev sirge) on (teoreemi 192 järgi) paralleelne teatavate sirgetega, mis asetsevad tasapinnal, seega mitte risti nendega. Mingi tasapinna ristsirge ja selle tasapinna lõikepunkti nimetatakse ristsirge aluseks.

Märkus. Kooliõpikuis defineeritakse tasapinnaga ristuvat sirget harilikult kui sirget, mis lõikab antud tasapinda ja on risti iga sirgega, mis asetseb tasapinnal ja läbib antud sirge ja tasapinna lõikepunkti. Kuid niisugune



Joonis 30.

¹ Vt. Hadamard [1], 2. osa, lk. 31–32.

sirge on (§ 112 viimase märkuse põhjal) risti ka üldse kõikide sirgetega, mis asetsevad antud tasapinnal.

Teiselt poolt, sirge, mis meie poolt antud definitsiooni järgi on risti tasapinnaga, lõikab tasapinda ja rahuldab traditsioonilist definitsiooni.

Niisiis need kaks sirge ja tasapinna ristuvuse definitsiooni oluliselt ei erine teineteisest.

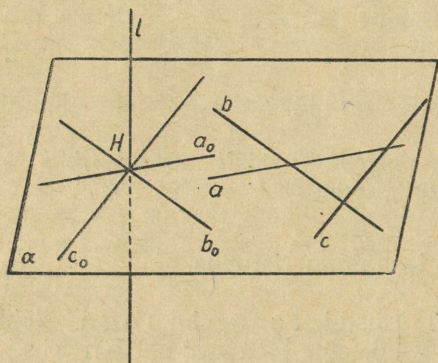
Meie poolt vastu võetud definitsioon on siiski loomulikum ja võimaldab peale selle mõningaid teoreeme lihtsamalt tõestada.

Sirge ja tasapinna ristuvuse tunnuse (ehk, teiste sõnadega, sirge ja tasapinna ristuvuse piisava tingimuse) sõnastame järgmise teoreemi kujul.

Teoreem 213. *Sirge, mis on risti mingi kahe lõikuva sirgega, mis asetsevad antud tasapinnal, on risti iga sirgega, mis asetseb sellel tasapinnal, ja järelikult on risti ka selle tasapinnaga.*

Tõestus. Olgu sirge l risti kahe lõikuva sirgega a ja b , mis asetsevad tasapinnal α .

Kui sirge l oleks paralleelne tasapinnaga α (või asetseks sellel tasapinnal), siis ta oleks (teoreemi 192 järgi) paralleelne ühe sirgega l' , mis asetseb sellel tasapinnal. Kõik



Joonis 31.

antud tasapinnal asetsevad ja sirgega l ristuvad sirged oleksid risti ka sirgega l' (§ 120 viimase märkuse põhjal). Järelikult kõik sirged, mis asetsevad tasapinnal α ja on risti sirgega l , oleksid omavahel paralleelsed, nii et sirge l ei saaks olla risti lõikuvate sirgetega a ja b . Niisiis sirge l lõikab tasapinda α mingis punktis H .

Vaatleme tasapinnal α sirgeid a_0 ja b_0 , mis läbivad punkti H ja on vastavalt paralleelsed sirgetega a ja b (joonis 31). Kummagi sir-

gega a ja b ristuv sirge l on risti ka sirgetega a_0 ja b_0 . Sellest järeldub, et ta on risti ka iga sirgega c_0 , mis asetseb tasapinnal α ja läbib punkti H . Selle viimase väite tõestuse, mis baseerub mõne paari võrdsete kolmnurkade järjestikusel vaatlemisel, loeme tuntuks koolikursusest.

Et iga sirge c , mis asetseb tasapinnal α , on paralleelne ühe sirgega c_0 , mis asetseb samal tasapinnal ja läbib punkti H , siis sirgega c_0 ristuv sirge l on risti ka sirgega c . Teoreem on tõetatud.

Tasapinnaga ristuva sirge definitsioonist ja põhiteoreemist 213 tuleneb rida uusi teoreeme sirge ja tasapinna ristumise kohta.

Teoreem 214. *Läbi antud punkti (mis kas asetseb või ei asetse antud tasapinnal) läheb mitte rohkem kui üks sirge, mis on risti antud tasapinnaga.*

Teoreem 215. *Läbi antud punkti (mis asetseb antud sirgel või ei asetse sellel) läheb mitte rohkem kui üks tasapind, mis on risti antud sirgega.*

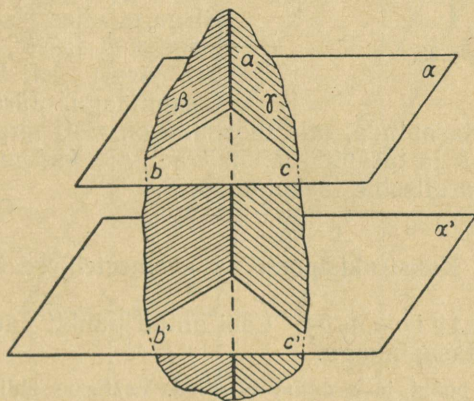
Nende kahe teoreemi tõestused loeme tuntuks koolikursusest. Märgime, et nende teoreemidega kaugeltki ei tõestata antud tasapinnaga ristuva ja antud punkti läbiva sirge olemasolu ega antud sirgega ristuva ja antud punkti läbiva tasapinna olemasolu. Niisuguse sirge ja niisuguse tasapinna olemasolu tõestatakse allpool (§ 114).

Teoreem 216. *Kui üks kahest paralleelsest sirgest on risti mingi tasapinnaga, siis ka teine neist on risti selle tasapinnaga.*

Tõestus. Kui üks kahest paralleelsest sirgest on risti antud tasapinnaga, siis ta on risti iga sirgega, mis asetseb sellel tasapinnal. § 112 lõpul tehtud märkuse põhjal teine sirge on risti nendesamade sirgetega ja järelikult ka antud tasapinnaga.

Teoreem 217. *Kaks ühe ja sama tasapinnaga ristuvat sirget on paralleelsed.*

Tõestus. Olgu kumbki sirgetest a ja a' risti tasapinnaga α . Tõmbame läbi sirge a' mingi punkti sirge a'' paralleelselt sirgega a . Teoreemi 216 järgi sirge a'' on samuti risti tasapinnaga α . Et üht punkti läbib mitte rohkem kui üks sirge, mis on risti tasapinnaga α , siis sirge a'' ühtib sirgega a' ja seega sirge a' on paralleelne sirgega a .



Joonis 32.

Teoreem 218. *Kui üks kahest paralleelsest tasapinnast on risti mingi sirgega, siis ka teine on risti selle sirgega.*

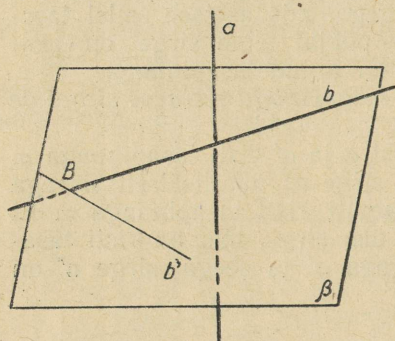
Tõestus. Olgu üks kahest paralleelsest tasapinnast α ja α' , nimelt tasapind α , risti sirgega a .

Et sirge a lõikab tasapinda α , siis ta lõikab ka tasapinda α' (teoreem 199). Paneme läbi sirge a vabalt kaks tasapinda β ja γ (joonis 32). Need lõikavad tasapinda α mööda kaht sirget b ja c ning tasapinda α' mööda kaht sirget b' ja c' , mis on vastavalt paralleelsed sirgetega b ja c .

Et sirge a on risti tasapinnaga α , siis on ta risti sirgetega b ja c . Järelikult on sirge a risti ka sirgetega b' ja c' , tähendab (teoreemi 213 järgi) on risti ka tasapinnaga α' .

Teoreem 219. *Kaks ühe ja sama sirgega ristuvat tasapinda on paralleelsed.*

Tõestus. Kui nad ei oleks paralleelsed, siis läbi nende ühise punkti läheks kaks tasapinda, mis oleksid risti ühe ja sama sirgega, kuid see on vastuolus teoreemiga 215. Järelikult on tasapinnad paralleelsed.



Joonis 33.

Teoreem 220. *Tasapind ja sellel mitte asetsev sirge, mis ristuvad ühe ja sama sirgega, on paralleelsed.*

Tõestus. Tõestame teoreemi vastuväiteliselt. Oletame, et tasapind β ja sirge b , mis mõlemad on risti sirgega a , lõikuvad mingis punktis B (joonis 33). Mingi sirge b' , mis läbib punkti B ja asetseb tasapinnal β , on risti sirgega a . Sirge a , olles risti kahe lõikuva sirgega b ja b' , on (teoreemi 213 järgi) risti ka neid läbiva tasapinnaga. Järelikult läbivad

punkti B kaks tasapinda, mis mõlemad on risti sirgega a . Niisiis oletus, et sirge b ja tasapind β lõikuvad, viib vastuolule. Jääb üle, et sirge b on paralleelne tasapinnaga β .

§ 114. Konstruksioonid ja geomeetrilised kohad.

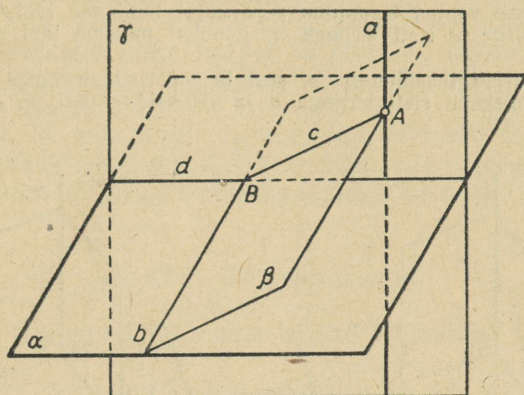
Konstruksioon 74. Läbi antud punkti panna sirge, mis on risti antud tasapinnaga.

Olgu A antud punkt ja α antud tasapind. Vaatleme üldjuhtu, kus antud punkt ei asetse antud tasapinnal (joonis 34).

Paneme läbi punkti A mingi tasapinna β , mis lõikab tasapinda α mööda teatud sirget b . Tõmbame tasapinnal β läbi punkti A sirge c risti sirgega b ning tähistame selle ristsirge ja sirge b lõikepunkti tähega B . Läbi punkti B tõmbame tasapinnal α sirge d risti sirgega b ja läbi lõikuvate sirgete c ja d paneme tasapinna γ . Lõpuks tõmbame tasapinnal γ läbi punkti A sirge a risti sirgega d . Sirge a ongi otsitav ristsirge, nagu otsekohe näitame.

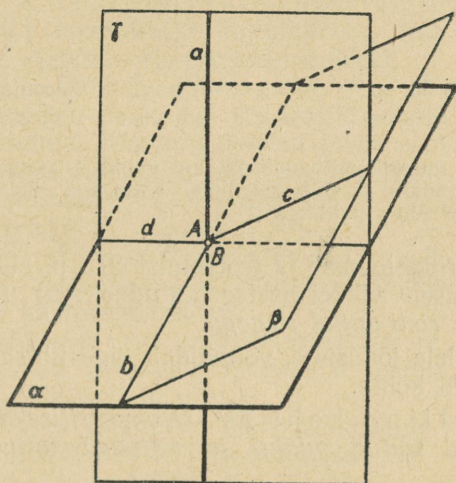
Tõepoolest, sirge b , mis konstruksiooni järgi on risti sirgetega c ja d , on risti tasapinnaga γ ja järelikult ka sirgega a . Niisiis sirge a , mis konst-

ruktiooni järgi on risti sirgega d , osutub risti olevaks ka sirgega b . Järelikult sirge a on risti tasapinnaga α . Muid sirgeid, mis läbiksid punkti A ja oleksid risti tasapinnaga α , ei leidu, nagu väidab teoreem 214.



Joonis 34.

Konstruksioon muutub mitteoluliselt, kui punkt A asetseb antud tasapinnal α (joonis 35). Sel juhul nimelt punkt B ühtib punktiga A .



Joonis 35.

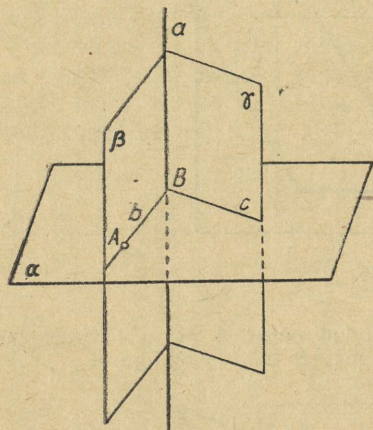
Sellest konstruktsioonist ja teoreemist 214 järeldub, et läbi iga punkti (mis kas asetseb või ei asetse antud tasapinnal) läheb üksainus sirge, mis on risti antud tasapinnaga.

Konstruksioon 75. Läbi antud punkti panna tasapind, mis on risti antud sirgega.

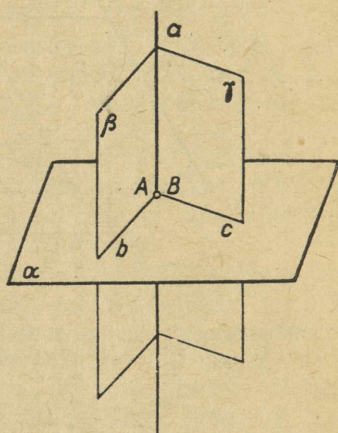
Olgu A antud punkt ja a antud sirge. Vaatleme üldjuhtu, kus antud punkt ei asetse antud sirgel (joonis 36).

Paneme läbi punkti A ja sirge a tasapinna β ning sellel tasapinnal tõmbame läbi punkti A sirge b risti sirgega a . Edasi paneme läbi sirge a mingi teise, vabalt võetud tasapinna γ ja sellel tõmbame läbi sirgete a ja b lõikepunkti B sirge c risti sirgega a . Lõpuks paneme läbi sirgete b ja c tasapinna α .

Sirge a on risti tasapinnaga α , sest ta on risti sirgetega b ja c . Muid tasapindu, mis oleksid risti sirgega a ja läbiksid punkti A , ei leidu, nagu väidab teoreem 215.



Joonis 36.



Joonis 37.

Konstruksioon muutub mitteoluliselt, kui punkt A asetseb antud sirgel a (joonis 37). Tasapinnaks β võib sel juhul võtta iga tasapinna, mis läbib sirget a , ja punkt B ühtib punktiga A .

Sellest konstruktsioonist ja teoreemist 215 järeldub, et läbi iga punkti (mis asetseb või ei asetse antud sirgel) läheb üksainus tasapind, mis on risti antud sirgega.

Tulemus, millele jõudsimme, võimaldab õige lihtsalt uurida järgmist geomeetrilist kohta.

Geomeetriline koht XV. Geomeetriliseks kohaks sirgetele, mis läbivad antud punkti ja ristuvad antud sirgega, on tasapind.

Olgu A antud punkt ja a antud sirge. Punkti A läbib, nagu äsja nägime, üksainus tasapind α , mis on risti sirgega a . Kõik punkti A läbivad ja tasapinnal α asetsevad sirged on risti sirgega a . Muid sirgeid, mis läbiksid punkti A ja oleksid risti sirgega a , ei leidu, nagu nähtub teoreemist 220, sest kooskõlas selle teoreemiga kõik sirgega a ristuvad sirged, mis ei asetse tasapinnal α , on paralleelsed selle tasapinnaga. Järelikult tasapind α ongi otsitavaks geomeetriliseks kohaks. Toonitame, et see mõttekäik on kehtiv nii

antud sirgel mitte asetseva punkti A korral kui ka antud sirgel asetseva punkti A korral.

Lõpuks vaatleme veel üht geomeetrilist kohta, mis on seotud tasapinnaga ristuva sirge mõistega.

Geomeetriline koht XVI. *Geomeetriliseks kohaks sirgetele, mis lõikavad antud sirget ja ristuvad antud tasapinnaga, on tasapind.* Seejuures eeldatakse, et antud sirge ja antud tasapind ei ristu omavahel.

Tõepoolest, et kõik antud tasapinnaga ristuvad sirged on omavahel paralleelsed (teoreemid 217 ja 218), siis vaadeldav geomeetriline koht taandub geomeetriliseks kohaks XIII (§ 102).

§ 115. Ristprojektsioon.

Sirge ja tasapinna ristuvuse mõiste võimaldab vaadelda ristprojektsiooni.

Punkti A ristprojektsiooniks (teisiti ortogonaalprojektsiooniks) ehk lihtsalt projektsiooniks tasapinnal α nimetatakse punkti A_0 , kus tasapind α lõikub sirgega, mis läbib punkti A ja on risti tasapinnaga α ; lühemalt öeldes, punkti ristprojektsiooniks ehk lihtsalt projektsiooniks tasapinnal nimetatakse antud punktist antud tasapinnale tõmmatud ristlõigu alust. Mingi kujundi F ristprojektsiooniks ehk lihtsalt projektsiooniks nimetatakse kujundit F_0 , mis koosneb antud kujundi kõikide punktide ristprojektsioonidest.

Et kõik ühe ja sama tasapinnaga ristuvad sirged on omavahel paralleelsed (teoreem 217), siis ristprojektsioonid on paralleelprojektsioonide erijuhud. Ristprojektsiooni juhul projekteerimissiht on risti projektsioonitasapinnaga. Kui projekteerimissiht ei ole risti projektsioonitasapinnaga, siis projektsiooni nimetatakse kaldprojektsiooniks.

Järgides kujunenud tava, mõistame (lihtsalt) «projektsiooni» all ainult ristprojektsiooni, «paralleelprojektsiooni» all aga iga-sugust rist- või kaldprojektsiooni.

Et ristprojektsioon on paralleelprojektsiooni erijuhtum, siis §-is 103 vaadeldud paralleelprojektsiooni omadused jäävad kehtima ka ristprojektsiooni juhul.

Meenutame veel järgmisi ristprojektsioonide omadusi, millede tõestused on lugejale tuntud koolikursusest.

Teoreem 221. *Kui tasapinnal mitte asetsevast punktist on sellele tasapinnale tõmmatud mitu kaldlõiku, siis*

- 1) võrdsete projektsioonidega kaldlõigud on võrdsed,
- 2) kahest mitte võrdsete projektsioonidega kaldlõigust on suurem see kaldlõik, millel on suurem projektsioon.

Teoreem 222 (teoreemi 221 pöördteoreem). *Kui tasapinnal mitte asetsevast punktist sellele tasapinnale tõmmata mitu kaldlõiku, siis*

- 1) võrdsetel kaldlõikudel on võrdsed projektsioonid,
- 2) kahest mittevõrdsest kaldlõigust suuremal kaldlõigul on ka suurem projektsioon.

Järeldus. Korrapärase püramiidi tipp projekteerub põhja tasapinnale põhja keskpunktis.

Nagu teada, nimetatakse püramiidi korrapäraseks, kui tema põhjaks on korrapärase hulknurk ja tema kõik külgservad on võrdsed. Külgservade võrdsusest järeldub ka nende projektsioonide võrdsus.

Viimase kahe teoreemi juurde kuulub veel järgmine teoreem.

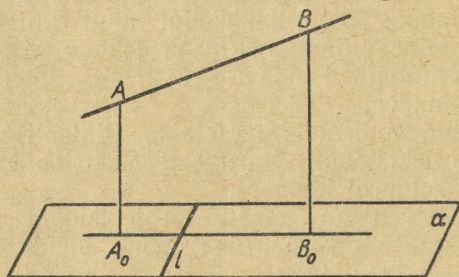
Teoreem 223. *Kui mingist tasapinnal mitte asetsevast punkti on sellele tasapinnale tõmmatud ristlõik ja kaldlõike, siis ristlõik on lühem igast kaldlõigust.*

Punkti tasapinnale tõmmatud ristlõiku nimetatakse punkti kauguseks tasapinnast.

Mõiste sirgjoone ristprojektsioonist tasapinnal võimaldab lahendada järgmise küsimuse.

Antud tasapinnaga ristuv sirge on oma definitsiooni järgi risti iga sirgega, mis asetseb sellel tasapinnal; missuguste antud tasapinnal asetsevate sirgetega on risti sirge, mis ei ole risti selle tasapinnaga? Antud sirge võib olla tasapinnaga paralleelne, võib teda aga ka lõigata. Seatud küsimusele annab mõlemal juhul vastuse järgmine teoreem.

Teoreem 224. *Tasapinnaga mitte ristuv sirge on risti lõpmatu hulga sirgetega, mis asetsevad sellel tasapinnal, nimelt kõikide nende ja ainult nende sirgetega, mis on risti antud sirge projektsiooniga antud tasapinnal.*



Joonis 38.

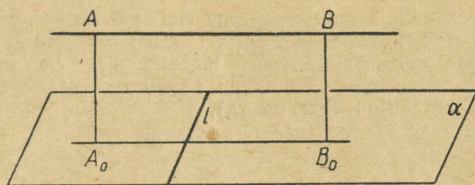
Tõestus. Esitatav tõestus on ühteviisi kehtiv nii juhul, kus antud sirge AB lõikab tasapinda, kui ka juhul, kus ta on tasapinnaga paralleelne (joonised 38 ja 39).

Olgu A_0B_0 antud sirge projektsioon tasapinnal α ja l mingi sirge, mis asetseb tasapinnal α ja on risti sirgega A_0B_0 .

Sirge l on risti kahe lõikuva sirgega, mis asetsevad tasapinnal AA_0B , ja nimelt sirgega A_0B_0 (eelduse järgi) ja sirgega AA_0 .

(sest sirge AA_0 on risti tasapinnaga α). Järelikult sirge l on risti tasapinnaga AA_0B ja, tähendab, ka sirgega AB .

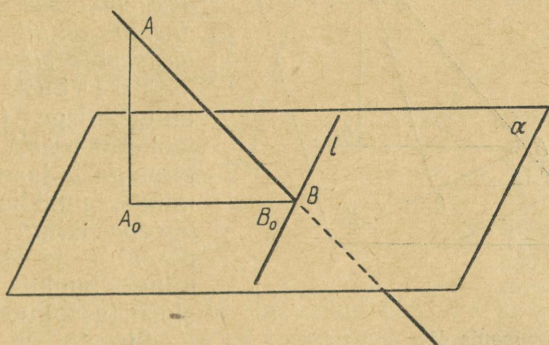
Niisiis, sirge AB on risti iga sirgega l , mis asetseb tasapinnal ja on risti sirgega A_0B_0 .



Joonis 39.

Olgu nüüd sirge AB risti ühe sirgega l , mis asetseb tasapinnal α . Siis sirge l on risti sirgetega AB ja AA_0 . Järelikult sirge l on risti tasapinnaga AA_0B ja, tähendab, ka sirgega A_0B_0 .

Niisiis, kõikidest tasapinnal α asetsevatest sirgetest on sirge AB risti ainult nende sirgetega, mis on risti tema projektsiooniga A_0B_0 sellel tasapinnal.



Joonis 40.

Järeldused. 1. («Kolme ristsirge teoreem».¹⁾

Mingil tasapinnal asetsev sirge, mis läbib antud kaldlõigu alust ja on risti tema projektsiooniga, on risti ka kaldlõigu endaga.

2. («Kolme ristsirge teoreemi pöörde teoreem».)

Mingil tasapinnal asetsev sirge, mis läbib antud kaldlõigu alust ja on risti selle kaldlõiguga, on risti ka tema projektsiooniga.

Üldise teoreemi 224 tõestus on muidugi kehtiv ka antud juhul (punkt B_0 ühtib punktiga B ; joonis 40).

3. Korrapärase kolmnurkse püramiidi vastasservad on teineteisega risti.

¹ Traditsiooniline nimetus «kolme ristsirge teoreem» on õige ebakohane.

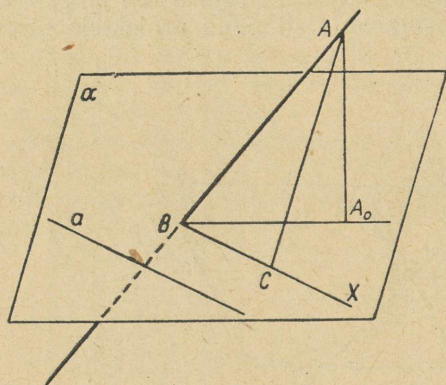
Tõepoolest, kui SH on korrapärase kolmnurkse püramiidi $SABC$ kõrgus ($BC = CA = AB$; $SA = SB = SC$), siis AH on risti BC -ga ja järelikult ka SA on risti BC -ga. Analoogiliselt SB on risti CA -ga ja SC on risti AB -ga.

Märkus. Kooliõpikus antakse kolme ristsirge teoreemile ja tema pöördteoreemile teistsugused, käesolevas tekstis toodust pikemad tõestused. See selgub sellega, et kooli geometriakursuses lähtume sirge ja tasapinna ristuvuse definitsioonist, mis on erinev käesolevas raamatus vastuvõetust (vrd. § 113 alguses leheküljel 43 tehtud märkusega).

§ 116. Sirge ja tasapinna vaheline nurk.

Teatavasti nimetatakse sirge ja (temaga mitteparalleelse ja mitteristuva) tasapinna vaheliseks nurgaks teravnurka selle sirge ja tema projektsiooni vahel antud tasapinnal.

Selle nurga põhiomadus väljendub järgmise teoreemina.



Joonis 41.

Teoreem 225. Sirge ja tasapinna vaheline nurk on väiksem neist nurkadest, mis see sirge moodustab antud tasapinnal asetsevate sirgetega.

Tõestus. Olgu AB antud sirge (joonis 41), mis ei ole risti antud tasapinnaga α ja lõikab teda mingis punktis B , edasi olgu a mingi sirge tasapinnal α ja A_0 sirge AB mingi punkti A projektsioon tasapinnal α .

Sirgete AB ja a vaheline nurk on võrdne nurgaga, mis sirge AB moodustab punkti B läbiva ja sirgega a paralleelse sirgega BX . Peame tõestama, et teravnurk ABA_0 on väiksem nurgast ABX .

Selleks märgime kiirel BX lõiguga BA_0 võrdse lõigu BC ja võrdleme kolmnurki ABA_0 ja ABC . Et ühe kolmnurga kaks külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe küljega (AB on ühine, $BA_0 = BC$) ja kolmandad küljed ei ole võrdsed, nimelt $AA_0 < AC$, siis koolikursusest tuntud teoreemi järgi $\angle ABA_0 < \angle ABC$. Teoreem on tõestatud.

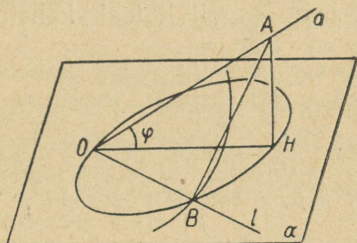
Märkus. Kui paralleelsete sirgete vaheline nurk lugeda võrdseks nulliga (§ 112, märkus), siis tuleb nulliga võrdseks lugeda ka sirge ja temaga paralleelse tasapinna vaheline nurk: tõepoolest, antud sirge on paralleelne oma projektsiooniga antud tasapinnal.

Tõestatud teoreem aitab lõpuni lahendada küsimuse nurkadest, mis tasapinnal mitte asetsev sirge moodustab sellel tasapinnal asetsevate sirgetega.

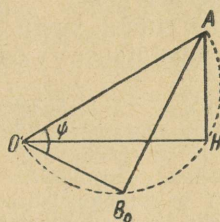
Kui sirge on tasapinnaga risti, siis moodustab ta tasapinna iga sirgega täisnurga. Sel juhul öeldakse ka, et sirge moodustab tasapinnaga täisnurga.

Kui sirge on tasapinnaga paralleelne, siis ta on paralleelne lõpmatu hulga sirgetega, mis asetsevad sellel tasapinnal, ja moodustab tasapinna ülejäänud sirgetega nurgad, mis omavad igasuguseid väärtusi nullist kuni täisnurgani, nagu on kerge näha.

Lõpuks, kui sirge ei ole tasapinnaga risti ega ka paralleelne, siis väikseim neist nurkadest, mis ta moodustab tasapinnal asetsevate sirgetega, võrdub (äsjatõestatud teoreemi järgi) sirge ja tasapinna vahelise nurgaga φ . Järgmise ülesande lahendusest selgub, et antud sirge moodustab tasapinnal asetsevate sirgetega igasuguseid võimalikke teravnurki suurusega φ ja d vahel. (Teoreemiga 224 on kindlaks tehtud, et tasapinnal leidub sirgeid, mis on risti antud sirgega.)



Joonis 42.



Joonis 43.

Konstruksioon 76. On antud tasapind ja temaga lõikuv, kuid mitte ristuv sirge. Antud tasapinnal konstrueerida sirge, mis läbib antud sirge ja tasapinna ühist punkti ja moodustab selle sirgega antud teravnurga.

Lõigaku antud sirge a antud tasapinda α punktis O nurga φ all ja olgu tasapinnal vaja tõmmata läbi punkti O sirge l , mis sirgega a moodustab antud teravnurga ψ (joonis 42).

Tõmbame sirge a mingist punktist A tasapinnale α ristlõigu AH ja otsitavale sirgele l ristlõigu AB . Teoreemi 224 põhjal on ka sirge BH risti sirgega OB . Ülesanne on lahendatud, kui pärast punkti A võtmist läheb korda konstrueerida vastavat punkti B .

Et määrata punkti B asukohta, konstrueerime tasapinnal AOH täisnurkse kolmnurga AOB_0 hüpotenuusi AO ja teravnurga $\angle AOB_0 = \psi$ järgi (joonis 43). Edasi konstrueerime tasapinnal α kaks geomeetrilist kohta: ringjoone, mille diameetriks on lõik OH (nurk OBH peab olema täisnurk), ja ringjoone, mille keskpunktiks on O ja raadiuseks OB_0 (lõigud OB_0 ja OB on võrdsed kolmnurkade AOB_0 ja AOB võrdsuse tõttu). Nende kahe geomeetrilise koha lõikepunkt ongi otsitav punkt B ja sirge OB on otsitav sirge l .

Kui $OB_0 < OH$ ja järelikult $\psi > \varphi$, siis ülesandel on kaks lahendit (ring-

jooned lõikuvad kahes punktis). Kui $OB_0 = OH$ ja järelikult $\psi = \varphi$, siis ülesandel on üks lahend (ringjooned puutuvad teineteist punktis H), nimelt sirge OH . Lõpuks, kui $OB_0 > OH$ ja järelikult $\psi < \varphi$, siis ülesandel ei ole lahendeid (ringjoontel ei ole ühiseid punkte).

§ 117. Kahe tasapinna vaheline nurk. Ristuvad tasapinnad.

Paragrahvis 105 võeti tarvitusele mõiste kahetahulisest nurgast kui kujundist, mille moodustavad kaks ühest ja samast sirgest (servast) väljuvat pooltasapinda (tahku). Meenutame üht koolikursusest tuntud definitsiooni.

Kahetahulise nurga *joonnurk* nimetatakse nurka, mille moodustavad kaks kahetahulise nurga serva mingist punktist väljuvat kiirt, mis on risti selle servaga ja asetsevad kahetahulise nurga tahkudel.

Kahetahulisel nurgal on lõpmatu hulk joonnurki, mis teoreemi 212 järgi on kõik omavahel võrdsed. Mitte tehes vahet nende võrdsete joonnurkade vahel, kõneleme sageli lihtsalt kahetahulise nurga joonnurgast.

Võtame nüüd vastu järgmise definitsiooni. Kaht kahetahulist nurka nimetatakse *võrdseteks*, kui nende joonnurgad on võrdsed.

Märkus. Äsjasõnastatud kahetahuliste nurkade võrdsuse definitsioon võib tekitada arusaamatust lugejale, kes on harjunud seda lauset lugema mitte kahetahuliste nurkade võrdsuse definitsiooniks, vaid teoreemiks. See arusaamatus lahendub järgmiselt.

Võttes teoreemina lauset «kui kahe kahetahulise nurga joonnurgad on võrdsed, siis ka need kahetahulised nurgad on võrdsed», tõestame selle «pealpaigutamise» teel. See tähendab, et me loeme tuntuks rea liikumisomadusi ja nimetame võrdseteks niisuguseid kujundeid, mida saab mingi liikumisega teha ühtivateks. Käesolevas raamatus, kus liikumise mõistet ei loeta algmõisteks, vaid see tuletatakse võrdsuse mõistest (vt. I, § 30), me ei saa minna seda teed.

Kahetahuliste nurkade võrdsuse küsimuse juurde tuleme veel tagasi üldsemalt vaatekohalt (§ 133).

Kahetahuliste nurkade võrdsuse definitsioonist tulenevad otseselt järgmised võrdsete kahetahuliste nurkade omadused (vt. § 96, aksioomid 4a, 4c, 4e).

1. *Kahetahuliste nurkade võrdsusel on reflektiivsuse, sümmeetrilisuse ja transitiivsuse omadus.*

2. *Väljugu pooltasapind λ kahetahulise nurga $\angle \eta\kappa$ servast ja asetsegu selle nurga sees ning täpselt samuti väljugu pooltasapind λ' kahetahulise nurga $\angle \eta'\kappa'$ servast ja asetsegu selle nurga sees. Kui seejuures $\angle \eta\lambda = \angle \eta'\lambda'$ ja $\angle \lambda\kappa = \angle \lambda'\kappa'$, siis ka $\angle \eta\kappa = \angle \eta'\kappa'$; kui samade eelduste puhul $\angle \eta\kappa = \angle \eta'\kappa'$ ja $\angle \eta\lambda = \angle \eta'\lambda'$, siis ka $\angle \lambda\kappa = \angle \lambda'\kappa'$.*

3. *Olgu $\angle \eta\kappa$ mingi kahetahuline nurk, η' mingi pooltasapind, mis väljub sirgest s' , ja H' üks neist kahest poolruumist, mis väljuvad pooltasapinnast η' ; poolruumis H' on olemas üks ja ainult*

üks niisugune sirgest s' väljuv pooltasapind α' , mille puhul $\angle \eta\alpha = \angle \eta'\alpha'$.

Nende omaduste tõestamiseks tuleb vaadelda kahetahuliste nurkade joonnurki ja rakendada neile ülalloeletud aksioome. Me ei peatu nende tõestuste andmisel, jättes selle lugeja hooleks.

Me ei peatu ka niisuguste mõistete juures, nagu mõisted «summa», «vahe», «on suurem» ja «on väiksem» ühenduses kahetahuliste nurkadega, ja kahetahulise teravnurga, nürinurga ning kahetahuliste tippnurkade ja kõrvunurkade definitsiooni juures.

Võtame vastu ainult järgmise definitsiooni: kahetahulise nurga servast väljuvat pooltasapinda, mis poolitab selle nurga, nimetatakse kahetahulise nurga bisektorpooltasapinnaks (ehk poolitavaks pooltasapinnaks). Niisuguse pooltasapinna olemasolu järeldub teoreemist 20 (I, § 12). Kahe kahetahulise tippnurga bisektorpooltasapinnad moodustavad ühe tasapinna — bisektortasapinna; see järeldub teoreemist 21 (I, § 12).

Olgu nüüd valitud tasaste nurkade mõõtmiseks mingi ühik (I, § 50). Võtame kahetahuliste nurkade mõõduühikuks niisuguse kahetahulise nurga, mille joonnurk võrdub ühikuks võetud nurgaga.

Sel juhul lahendub otsekohe kahetahuliste nurkade mõõtmise küsimus: iga kahetahulise nurga suurus väljendub sellesama arvuga, mis väljendab vastava joonnurga suurust.

Olgu nüüd antud kaks lõikuvat tasapinda. Lõikumisel nad moodustavad neli kahetahulist nurka, millest igaüht saab lugeda kahe tasapinna vaheliseks nurgaks. Need neli kahetahulist nurka moodustavad kaks tippnurkade paari ja on seetõttu paariti võrdsed. Mitte lugedes võrdseid nurki erinevateks, öeldakse, et kaks lõikuvat tasapinda moodustavad kaks kahetahulist nurka, mis teineteist täiendavad kaheks täisnurgaks. Kui kaks tasapinda lõikumisel moodustavad kahetahulised täisnurgad, siis neid tasapindu nimetatakse ristuvateks.

Ristuvate tasapindade näitena võib nimetada kahe tasapinna lõikumisel tekkiva kahe tippnurkade paari bisektortasapindu.

Ristuvate tasapindade tähtsamad omadused väljenduvad järgmiste teoreemidena.

Teoreem 226. *Tasapind, mis läbib antud tasapinnaga ristuvat sirget, on selle tasapinnaga risti.*

Teoreem 227. *Kahe ristuva tasapinna lõikejoonega ristuv sirge, mis asetseb ühel neist tasapindadest, on risti teise tasapinnaga.*

Järeldused. 1. *Sirge, mis on risti ühega kahest ristuvast tasapinnast ja läbib teise tasapinna mingit punkti, asetseb sellel teisel tasapinnal.*

2. *Kui kaks lõikuvat tasapinda on risti kolmanda tasapinnaga, siis ka nende lõikejoon on risti selle tasapinnaga.*

Nende lausete tõestused loeme tuntuks koolikursusest.

Lõpuks jätame lugeja hooleks tuletada siit järgmine lause.

Teoreem 228. *Tasapind ja sellel mitte asetsev sirge, mis mõlemad on risti mingi tasapinnaga, on omavahel paralleelsed.*

§ 118. Konstruktsioone.

Vaatleme mõnda põhilist konstruktsiooni, mis on ühenduses ristuvate tasapindade ja kahe tasapinna vahelise nurga mõistega.

Konstruktsioon 77. Läbi antud sirge panna tasapind, mis on risti antud tasapinnaga.

Antud sirge võib asetseda antud tasapinnal, võib aga ka mitte asetseda. Konstruktsiooni teostamise jätame lugeja hooleks. Ülesandel on üks lahend, välja arvatud see juht, kui antud sirge on risti antud tasapinnaga.

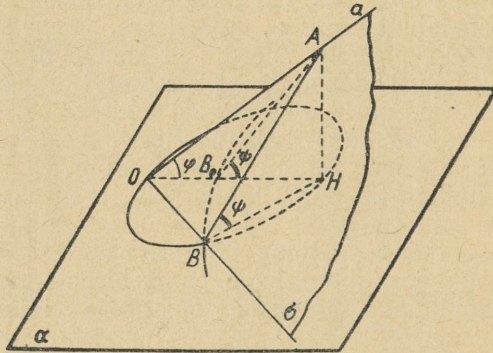
Konstruktsioon 78. Läbi antud punkti panna tasapind, mis on risti kahe antud tasapinnaga.

Antud punkt võib asetseda ühel antud tasapindadest või mõlemal neist (nende lõikejoonel), võib aga ka mitte asetseda. Konstruktsiooni teostamise jätame lugeja hooleks. Ülesandel on üks lahend, välja arvatud see juht, kui antud tasapinnad on paralleelsed.

Konstruktsiooni 77 üldistuseks on järgmine ülesanne.

Konstruktsioon 79. Läbi antud sirge panna tasapind, mis antud tasapinda lõikab antud nurga all.

Kui antud sirge asetseb antud tasapinnal või on sellega paralleelne, siis ülesanne lahendub väga lihtsalt (kuidas nimelt?) ja tal on kaks lahendit, kui antud nurk on täisnurgast erinev, ja üks lahend, kui antud nurk on täisnurk. Kui antud sirge on antud tasapinnaga risti, siis ülesanne ei paku huvi (miks?).



Joonis 44.

Seetõttu vaatleme ainult seda juhtu, kui antud sirge a lõikab antud tasapinda α mingis punktis O täisnurgast erineva nurga φ all (joonis 44). Tähistame otsitava tasapinna tähega σ ja olgu ψ antud nurk, mille all see tasapind peab lõikama antud tasapinda α . Üldisust kitsendamata võime nurga ψ lugeda teravnurgaks.

Konstrueerime tasapindade α ja σ poolt moodustatud kahetahulise teravnurga joonnurga. Selleks tõmbame sirge a mistahes punktist A ristlõigu AH tasapinnale α ja ristlõigu AB nende kahe tasapinna lõikejoonele. Siis sirge BH on risti sirgega OB (teoreem 224) ja seetõttu nurk ABH on tasapindade α ja σ poolt moodustatud kahetahulise nurga joonnurk. Ülesanne on lahendatud, kui pärast punkti A valimist läheb korda konstrueerida vastavat punkti B .

Selleks et määrata punkti B asukohta, leiame kiirel HO niisuguse punkti B_0 , et nurk AB_0H oleks võrdne antud nurgaga ψ . Edasi konstrueerime tasapinnal α kaks geomeetrilist kohta: ringjoone, mille diameetriks on lõik OH (nurk OBH peab olema täisnurk), ja ringjoone, mille keskpunktiks on H ja raadiuseks on HB_0 (lõigud HB_0 ja HB peavad olema võrdsed kolmnurkade AHB_0 ja AHB võrdsuse tõttu). Nende kahe geomeetrilise koha lõikepunkt ongi otsitav punkt B ja tasapind AOB on otsitav tasapind σ .

Kui $HB_0 < HO$, s. t. kui $\psi > \varphi$, siis ülesandel on kaks lahendit (ringjooned lõikuvad kahes punktis). Kui $HB_0 = HO$, s. t. kui $\psi = \varphi$, siis ülesandel on üks lahend (ringjooned puutuvad teineteist punktis O): kahe tasapinna lõikejoon on risti HO -ga. Lõpuks, kui $HB_0 > HO$, s. t. kui $\psi < \varphi$, siis ülesandel ei ole lahendit (ringjoontel ei ole ühiseid punkte).

§ 119. Üldine märkus sirgete ja tasapindade paralleelsusest ja ristuvusest.

Uheksandas peatükis ja käesoleva peatüki eelmistes paragrahvides vaatlesime teoreeme sirgetest ja tasapindadest, mis on omavahel paralleelsed või risti. Järgmine tabel annab ülevaate reas selliste teoreemide sisust.

	on paralleelsed ühe ja sama sirgega (on risti ühe ja sama tasapinnaga),	on paralleelsed ühe ja sama tasapinnaga (on risti ühe ja sama sirgega),
Kaks sirget, mis	on omavahel paralleelsed (teoreemid 188 ja 217).	—
Tasapind ja sellel mitte asetsev sirge, mis	on omavahel paralleelsed (teoreemid 194 ja 228).	on omavahel paralleelsed (teoreem 199, järeldus, ja teoreem 220).
Kaks tasapinda, mis	lõikuvad mööda sirget, mis on paralleelne antud sirgega või on risti antud tasapinnaga (teoreem 193 ja teoreem 227, järeldus 2), või on paralleelsed.	on omavahel paralleelsed (teoreem 197, järeldus 1, ja teoreem 219).

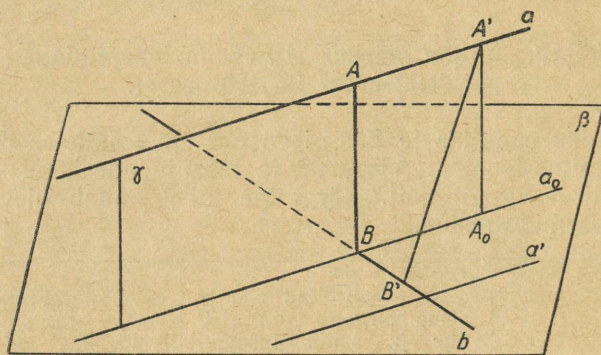
Seejuures tuleb silmas pidada, et ühe ja sama sirgega paralleelsed tasapinnad ja sirged on samal ajal risti ühe tasapinnaga ning ühe ja sama tasapinnaga paralleelsed tasapinnad ja sirged on samal ajal risti ühe sirgega.

Kriipsuke «—» näitab, et kaks ühe tasapinnaga paralleelset (ühe sirgega ristuvat) sirget saavad ruumis omada mistahes asendit.

§ 120. Kahe kiivsirge vaheline väikseim kaugus.

Teoreem 229. *On olemas üks ja ainult üks sirge, mis lõikab kaht antud kiivsirget täisnurkade all; selle sirge lõik nende lõikepunktide vahel on väikseim kaugus kahel kiivsirgel asetsevate punktide vahel.*

Seda lõiku nimetatakse kahe kiivsirge vaheliseks väikseimaks kauguseks ja kõne all olevat sirget kiivsirgete ühiseks ristsirgeks.



Joonis 45.

Tõestus. Olgu a ja b antud kiivsirged (joonis 45). Sirget b läbib (teoreemi 195 järgi) üksainus tasapind β , mis on paralleelne sirgega a ; see tasapind on määratud mingi sirgega a' , mis on paralleelne sirgega a ja lõikab sirget b .

Olgu AB otsitav ühine ristlõik (kui ta on olemas). Et sirge AB on risti sirgega a , siis ta on risti ka sirgega a' , ja et ta peale selle on veel risti sirgega b , siis ta on risti ka tasapinnaga β (teoreem 213). Järelikult sirge AB peab kuuluma tasapinnale γ , mis läbib sirget a ja on risti tasapinnaga β , sest tasapind γ on geomeetriliseks kohaks sirgetele, mis lõikavad sirget a ja on risti tasapinnaga β (§ 114, geomeetiline koht XVI). Tähistame tasapinna γ ja sirge b lõikepunkti tähega B .

Õeldust selgub, et ühiseks ristsirgeks (kui ta on olemas) saab olla ainult punktist B sirgele a tõmmatud ristsirge BA .

Näitame nüüd, et see viimane ristsirge on tõepoolest sirgete a ja b ühine ristsirge. Sirge a suhtes on see selge. Sirge b suhtes selgub see järgmistest kaalutlustest. Et sirge AB on risti sirgega a , siis on ta risti ka tasapindade β ja γ lõikejoonega a_0 . Et sirge AB peale selle asetseb tasapinnaga β ristuv tasapinnal γ , siis ta on risti ka tasapinnaga β (teoreem 227) ja, tähendab, ka sirgega b . Niisiis ühise ristsirge olemasolu ja ühesus on tõestatud.

Olgu nüüd A' ja B' sirgete a ja b mingid kaks punkti. Tõmbame punktist A' tasapinnale β ristsirge $A'A_0$. See asetseb tasapinnal γ (teoreem 227, järeldus 1) ja seetõttu punkt A_0 asetseb sirgel a_0 . Lõigud AB ja $A'A_0$ on võrdsed kui ristküliku vastasküljed; samal ajal lõik $A'A_0$ on lühem kui lõik $A'B'$ (teoreemi 223 järgi), välja arvatud see juhtum, kus punkt A' ühtib punktiga A ja punkt B' ühtib punktiga B . Niisiis saame, et $AB = A'A_0$ ja $A'A_0 < A'B'$, millest järeldub, et $AB < A'B'$.

Selle teoreemi tõestusest selgub ka järgmise ülesande lahendus, mis on alati võimalik ja ühese tulemusega.

Konstruktsioon 80. Konstrueerida antud kahe kiivsirgele ühine ristsirge.

§ 121. Tetraeedri kõrguste omadusi.

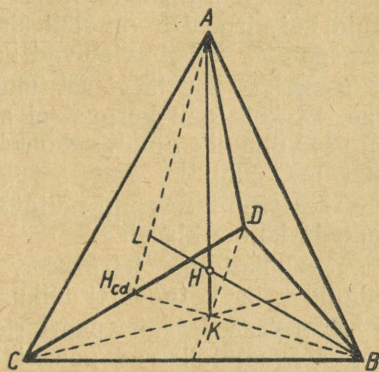
Eelmistes paragrahvides kasutusele võetud sirge ja tasapinna ning kahe tasapinna ristuvuse mõiste rakendamise näidetena vaatleme tetraeedri kõrguste mõnda omadust.

Teoreem 230. Kui tetraeedri $ABCD$ tippudest A ja B väljuvad kõrgused AK ja BL lõikuvad, siis serv AB on risti servaga CD ; ja ümberpöörduvalt: kui AB ja CD on risti, siis kõrgused AK ja BL lõikuvad.

Tõestus. Oletame, et tetraeedri $ABCD$ kõrgused AK ja BL lõikuvad mingis punktis H (joonis 46). Sirge AK on risti tasapinnaga BCD (kõrguse definitsiooni järgi) ja järelikult ka sirgega CD ; analoogilisel põhjusel ka sirge BL on risti sirgega CD . Sirge CD , olles risti tasapinna ABH kahe lõikuva sirgega AK ja BL , on risti tasapinnaga ABH ja järelikult ka sirgega AB . Teoreemi esimene osa on tõestatud.

Olgu nüüd teada, et sirge AB on risti sirgega CD . Näitame, et tetraeedri kõrgused AK ja BL lõikuvad.

Mõlemad sirged AB ja AK on risti sirgega CD : esimene teoreemi eelduse järgi ja teine kui tasapinna BCD ristsirge. Järelikult tasapind ABK on risti sirgega CD . Teoreemi 226 põhjal tasapind ACD on risti tasapinnaga ABK . Tasapinna ABK punktist B tasapinnale ACD tõmmatud ristsirge BL asetseb täielikult tasapinnal ABK . Ühel ja samal tasapinnal ABK asetsevad sirged AK ja BL lõikuvad, sest nad ilmselt ei ole paralleelsed. Teoreem on täielikult tõestatud.



Joonis 46.

Järeldus. Kui tetraeedri kahest tipust väljuvad kõrgused lõikuvad, siis lõikuvad ka tema kahest ülejäänud tipust väljuvad kõrgused.

Tõepoolest, kui tetraeedri $ABCD$ tippudest A ja B väljuvad kõrgused lõikuvad, siis servad AB ja CD on risti (teoreemi esimese poole järgi). Kuid sel juhul lõikuvad ka tippudest C ja D väljuvad kõrgused (teoreemi teise poole järgi).

Teoreem 231. *Kui tetraeedril on kaks paari ristuvaid vastasservi, siis ristuvad ka kolmanda paari vastasservad. Sel juhul tetraeedri kõik neli kõrgust lõikuvad ühes ja samas punktis.*

Tõestus. Olgu tetraeedri $ABCD$ (joonis 46) serv AB risti servaga CD ja serv AC risti servaga BD . Tähistame tipust A väljuva kõrguse AK -ga.

Kui sirge AB on risti sirgega CD , siis on tema projektsioon BK samuti risti CD -ga. Järelikult asetseb punkt K kolmnurga BCD ühel kõrgusel (või selle pikendusel). Kui peale selle ka sirge AC on risti sirgega BD , siis punkt K asetseb ka sama kolmnurga teisel kõrgusel CK (või selle pikendusel). Järelikult punkt K on kolmnurga BCD ortotsenter ja seetõttu sirge DK on risti sirgega BC . Kuid kui sirge DK on risti sirgega BC , siis ka sirge AD on risti sirgega BC . Niisiis ristuvad ka kolmanda paari vastasservad.

Teoreemi 230 järgi sel juhul tetraeedri iga kaks kõrgust lõikuvad. Et kõik neli kõrgust ei asetse ühel ja samal tasapinnal, siis on see võimalik ainult eeldusel, et kõik neli kõrgust lõikuvad ühes ja samas punktis.

Tõestatud teoreemid näitavad, et kõrguste järgi saab tetraeedrid jaotada kolme klassi.

1) Üldkujuline tetraeeder. Mingid kaks vastasserva ei ristu; mingid kaks kõrgust ei lõiku.

2) Tetraeeder ühe paari ristuvate vastasservadega. Tetraeedri neli kõrgust lõikuvad paariti kahes punktis.

Joonisel 46 tipu A projektsioon K tahul BCD asetseb kolmnurga BCD ühel kõrgusel (või ühe kõrguse pikendusel).

3) Ortotsentriline tetraeeder. Nõnda nimetatakse tetraeedrit, millel on kolm paari ristuvaid vastasservi. Kõik neli kõrgust lõikuvad ühes ja samas punktis, mida nimetatakse tetraeedri ortotsentriks.

Joonisel 46 tipu A projektsioon K tahul BCD ühtib kolmnurga BCD ortotsentriga (ja sama kehtib ka kolme ülejäänud tipu kohta).

§ 122. Erikujulised rööptahukad ja tetraeedrid.

Vaadeldes eelmises paragrahvis tetraeedri kõrgusi, eraldasime kaks erikujulist tetraeedrit: tetraeedri ühe paari ristuvate vastasservadega ja ortotsentrilise tetraeedri. Nüüd vaatleme ka mõnin-

gaid muid erikujulisi tetraeedreid, sidudes tetraeedri vaatlemise tema ümber kujundatud rööptahuka (§ 111) vaatlemisega.

Kui tetraeedri $ABCD$ (vt. joon. 28) servad AB ja CD ristuvad, siis ristuvad ka rööpküliliku $A'CB'D$ diagonaalid $A'B'$ ja CD . See rööpkülilik on romb, nii et $A'C = CB'$. Kuid $A'C$ on võrdne lõiguga, mis ühendab tetraeedri vastasservade AC ja BD keskpunkte (samuti nagu $A'B = EF$). Siit tuleneb järgmine teoreem.

Teoreem 232. *Kui tetraeedri kaks vastasserva ristuvad, siis on võrdsed need kaks lõiku, milledest kumbki ühendab kahe teise vastasserva keskpunkte. Ortotsentrilisel tetraeedril on võrdsed need kolm lõiku, mis paariti ühendavad vastasservade keskpunkte.*

Ortotsentrilise tetraeedri juhul on tetraeedri ümber kujundatud rööptahuka kõik tahud rombid.

Ortotsentrilise tetraeedri erijuhuks on korrapärane kolmnurkne püramiid (teoreemi 224 järelduse 3 põhjal). Korrapärase püramiidi ümber kujundatud rööptahuka kõik tahud on võrdsed rombid (sest tema kõikidel tahkudel on vastavalt võrdsed diagonaalid); niisugust rööptahukat nimetatakse **romboeedriks**.

Oleme vaadelnud tetraeedri vastasservade ristuvuse juhte. Võiks seada küsimuse ka tetraeedri vastasservade võrdsusest. Kui tetraeedri kaks vastasserva on võrdsed, siis tema ümber kujundatud rööptahuka vastavad tahud on ristkülilikud (sest kummagi tahu diagonaalid on omavahel võrdsed).

Tetraeedril võib olla üks paar, kaks paari või kolm paari võrdsed vastasservi, sest rööptahukal ilmselt saab olla üks paar täisnurkseid tahke, kaks paari täisnurkseid tahke (püströöptahukas) või kolm paari täisnurkseid tahke (risttahukas).

Erijuhul, kui kolmest vastasservade paarist igas paaris on vas-

Ümberkujundatud rööptahukas	Tetraeeder
Meelevaldne	Meelevaldne
<p>Põhjadeks on rombid (külgtahud on mistahes rööpkülilikud) Tahkudeks on rombid</p> <p>Romboeeder</p>	<p>Üks paar ristuvaid vastasservi</p> <p>Ortotsentriline tetraeeder (kolm paari ristuvaid vastasservi) Korrapärane püramiid</p>
<p>Põhjadeks on ristkülilikud (külgtahud on mistahes rööpkülilikud) Püströöptahukas Risttahukas</p>	<p>Üks paar võrdsed vastasservi</p> <p>Kaks paari võrdsed vastasservi Võrdtahkne tetraeeder (kolm paari võrdsed vastasservi)</p>
<p>Kuup (üheaegselt romboeeder ja risttahukas)</p>	<p>Korrapärane tetraeeder (ortotsentriline ja võrdtahkne tetraeeder)</p>

tasservad võrdsed, siis on tetraeedri kõik tahud võrdsed (kolme külje võrdsuse põhjal); niisugust tetraeedrit nimetatakse võrdtahkseks.

Märkus. Võrdtahkse tetraeedri pinnalaotuse võib saada, kui konstrueerida kolmnurgas ABC tema kesklõigud. Seejuures kolmnurk ABC peab olema teravnurkne (mispärast?).

Leheküljel 61 toodud tabelis on kõrvutatud mitmesugused tetraeedrite ja nende ümber kujundatud rööptahukate erijuhud (vt. ka § 143).

Kera. Geomeetrilisi kohti.

§ 123. Definiitsioonid. Kera lõikumine sirgega ja tasapinnaga.

Keraks (ehk sfääriks) nimetatakse kõikide niisuguste punktide kogu, mille ühendamisel ühe punktiga O saadud lõigud on võrdsed ühe ja sama lõiguga.¹

Punkti O nimetatakse kera keskpunktiks. Me ei peatu niisuguste mõistete defineerimisel, nagu kera raadius, diameeter (läbimõõt), kõõl ja lõikaja (vt. vastavaid definiitsioone ringjoone puhul, I, § 15). Kera keskpunktiga O ja raadiusega r tähistatakse sageli sümboliga $O(r)$; kui vaadeldakse ainult üht kera keskpunktiga O , siis teda nimetatakse sageli «keraks O ».

Punkte, mille kaugus kera keskpunktist on väiksem kui raadius (kaasa arvatud ka keskpunkt ise), nimetatakse selle kera suhtes seesmisteks, ja punkte, mille kaugus on suurem raadiusest, välisteks.

Saab tõestada, et kera jaotab ruumi kaheks piirkonnaks. Üks neist piirkondadest koosneb kõikidest seesmistest punktidest ja teda nimetatakse kera suhtes seesmiseks piirkonnaks, teine koosneb kõikidest välistest punktidest ja teda nimetatakse väliseks piirkonnaks. Seesmine piirkond on kumer, väline mitte.

Kera ja ringjoone definiitsioonist järeldub otseselt järgmine teoreem.

Teoreem 233. *Kera keskpunkti läbival tasapinnal on keraga lõpmatu hulk ühiseid punkte. Need punktid asetsevad ringjoonel, mille keskpunkt ühtib kera keskpunktiga ja raadius võrdub kera raadiusega.*

Seda ringjoont nimetatakse kera suurringiks.

Küsimus kera lõikumisest sirgega ja tasapinnaga laheneb järgmise kahe teoreemiga.

¹ Kooliõpikutes mõistetakse harilikult kera all keha, mis koosneb sfäärist ja tema kõikidest seesmistest punktidest. Erinevalt sellest tähendab käesolevas raamatus termin kera ikka pinda (aga mitte keha).

Teoreem 234. *Sirgel on keraga kas kaks ühist punkti või üks ühine punkt või tal ei ole sellega ühtki ühist punkti sõltuvalt sellest, kas sirge kaugus kera keskpunktist on väiksem kui raadius, võrdne raadiusega või suurem kui raadius.*

Tõestus. Paneme tasapinna läbi antud sirge ja kera keskpunkti (kui antud sirge läbib kera keskpunkti, siis paneme temast läbi mistahes tasapinna). Antud sirge ja kera ühised punktid ühtivad nende punktidega, kus antud sirge lõikub selle suuringiga, mida mööda antud kera lõikub saadud tasapinnaga. Tõestatav teoreem taandub teoreemidele 39—43 (I, § 15) sirge ja ringjoone lõikumise kohta.

Järeldus. *Sirgel, mis läbib kera mingit punkti ja on risti sellesse punkti tõmmatud raadiusega, on keraga ainult üks ühine punkt, ja ümberpöörduvalt.*

Tõepoolest, öelda, et sirge läbib kera punkti ja on risti sellesse punkti tõmmatud raadiusega, tähendab sedasama, kui öelda, et sirge kaugus kera keskpunktist on võrdne raadiusega.

Sirget, millel on keraga ainult üks ühine punkt, nimetatakse kera puutujaks.

Teoreem 235. *Tasapinnal on keraga kas lõpmatu hulk ühiseid punkte, mis moodustavad ringjoone, või üks ühine punkt või tal ei ole sellega ühtki ühist punkti sõltuvalt sellest, kas tasapinna kaugus kera keskpunktist on väiksem kui raadius, võrdne raadiusega või suurem kui raadius.*

Tõestus. Olgu tasapinna α ja kera keskpunkti O vaheline kaugus OA väiksem kui kera raadius (joonis 47). Tähistame tähega a mingi sirge, mis asetseb tasapinnal α ja läbib punkti A . Et sirge a kaugus OA kera keskpunktist on väiksem kui raadius, siis sirgel a on keraga kaks ühist punkti B ja B' (teoreem 234). Kui M on mingi punkt ringjoonel, mille keskpunkt on A ja raadius on AB , siis $AB = AM$ ja järelikult $OB = OM$ (teoreem 221); niisiis selle ringjoone kõik punktid kuuluvad antud kerale. Ümberpöörduvalt, kui antud kera mingi punkt M asetseb tasapinnal α , siis $OB = OM$ ja järelikult $AB = AM$. Keral ei ole tasapinnaga muid ühiseid punkte peale nimetatud ringjoone punktide.

Kui antud tasapinna α ja kera keskpunkti O vaheline kaugus OA on võrdne kera raadiusega (joonis 48), siis kaugus OM , kus M on punktist A erinev tasapinna α mistahes punkt, on suurem kui raadius, sest OM on kaldlõik (teoreem 223). Tasapinnal α ei ole keraga muid ühiseid punkte peale punkti A .

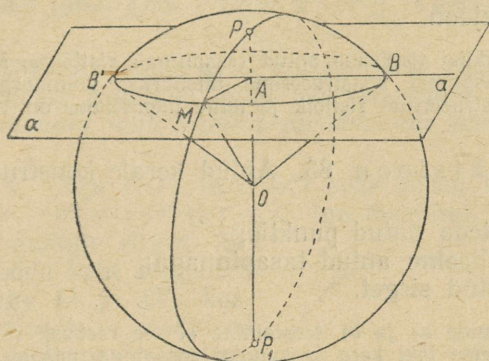
Lõpuks, kui antud tasapinna kaugus kera keskpunktist on suurem kui raadius, siis on selle tasapinna iga punkti kaugus kera keskpunktist suurem kui raadius. Tasapinnal ei ole keraga ühiseid punkte.

Järeldused. 1. *Keskpunkt ringjoonel, mida mööda kera lõikub tema keskpunkti mitte läbiva tasapinnaga, ühtib kera keskpunktist sellele tasapinnale tõmmatud ristlõigu alusega.*

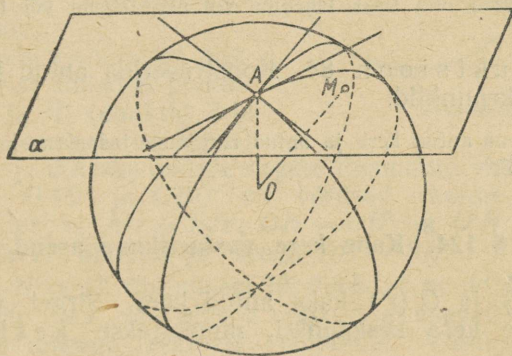
2. Tasapind, mis läbib kera mingit punkti ja on risti sellesse punkti tõmmatud raadiusega, omab keraga ainult üht ühist punkti.

3. Keral ja temal mitte asetseval ringjoonel on kas kaks ühist punkti või üks ühine punkt või neil ei ole ühtki ühist punkti.

Selle tõestamiseks vaatleme kera lõikumist tasapinnaga, millel asetseb antud ringjoon.



Joonis 47.



Joonis 48.

Tasapinda, mis lõikab kera mööda ringjoont, nimetatakse kera lõikavaks tasapinnaks.

Ringjoont, mida mööda kera lõikub tema keskpunkti mitte läbiva tasapinnaga, nimetatakse kera väikeringiks.

Tasapinda, millel on keraga ainult üks ühine punkt, nimetatakse kera puutuvaks tasapinnaks.

Teoreemid 234 ja 235 võimaldavad väita järgnevat.

Geomeetriline koht XVII. Geomeetriliseks kohaks kõikidele sirgetele, mis puutuvad kera ühes ja samas punktis, on kera samas punktis puutuv tasapind.

Vaadeldud kera omadused võimaldavad õige lihtsalt lahendada järgmisi ülesandeid. Seejuures kera loetakse «antuks», kui on teada tema keskpunkt ja raadius.

Konstruksioon 81. Konstrueerida antud kera ja antud sirge lõikepunktid.

Konstruksioon 82. Konstrueerida antud kera ja antud tasapinna lõikejoon.

Kera keskpunktist tõmbame antud tasapinnale ristlõigu. Mingil seda ristlõiku läbival tasapinnal konstrueerime täisnurkse kolmnurga, mille üheks kaatetiks on konstrueeritud ristlõik ja mille hüpotenuus on võrdne kera raadiusega jne.

Konstruksioon 83. Antud kerale konstrueerida puutuv tasapind, mis

- a) puutub teda antud punktis;
- b) on paralleelne antud tasapinnaga;
- c) läbib antud sirget.

Konstruksioonide a) ja b) teostamine ei tee raskusi.

Juhul c) paneme läbi kera keskpunkti tasapinna, mis on risti antud sirgega, ja konstrueerime kera suurringi, mis asetseb sellel tasapinnal.

Sellele suurringile tõmbame tema tasapinna ja antud sirge lõikepunktist puutujad jne.

Ülesandel võib olla kaks lahendit või üks lahend või tal ei ole üldse lahendit.

Konstruksioon 84. Konstrueerida antud kera ja antud ringjoone lõikepunktid.

Konstrueerime antud kera ja antud ringjoone tasapinna lõikejoone (konstruksioon 82) jne.

§ 124. Kahe kera vastastikune asend.

Olgu $O(r)$ ja $O'(r')$ kaks antud kera. Sirget, mis läbib nii ühe kui teise kera keskpunkti, nimetatakse keskpunktide sirgeks.

Teoreem 236. *Kui kahe kera keskpunktide vaheline kaugus on suurem raadiuste summast või väiksem raadiuste vahest (erijuhul, kui kahel keral on ühine keskpunkt), siis keradel ei ole ühiseid punkte. Esimesel juhul on kummagi kera kõik punktid väljaspool teist kera; teisel juhul on suurema raadiusega kera kõik punktid väljaspool teist kera ja viimase kõik punktid on esimese kera sees.*

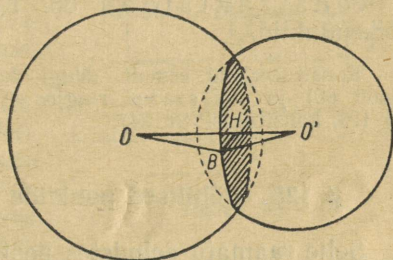
Teoreem 237. *Kui kahe kera keskpunktide vaheline kaugus on võrdne raadiuste summaga või raadiuste vahega, siis keradel on üks ja ainult üks ühine punkt, mis asetseb nende keskpunktide sirgel. Esimesel juhul on kummagi kera kõik ülejäänud punktid väljaspool teist kera; teisel juhul on ühe kera kõik ülejäänud punktid väljaspool teist kera ja teise kõik ülejäänud punktid on esimese kera sees.*

Nende teoreemide tõestamisel korduvad sõna-sõnalt kahe ringjoone vastastikuse asendi teoreemide 44 ja 45 (I, § 16) tõestused.

Teoreemis 237 vaadeldud keradel on nende ainsas ühises punktis ka ühine puutuv tasapind. Seepärast öeldakse, et mõlemad kerad puutuvad teineteist selles ühises punktis. Nende kerade puutumist nimetatakse esimesel juhul (kui $OO' = r + r'$) väliseks ja teisel juhul (kui $OO' = |r - r'|$) seesmiseks puutumiseks.

Teoreem 238. *Kui kahe kera keskpunktide vaheline kaugus on väiksem raadiuste summast, kuid suurem nende vahest, siis neil keradel on lõpmatu hulk ühiseid punkte, mis moodustavad ringjoone.*

Tõestus. Olgu $O(r)$ ja $O'(r')$ kaks antud kera, mis täidavad eeldust $|r - r'| < OO' < r + r'$. Iga tasapind, mis läbib nende kerade keskpunktide sirget, lõikab neid mööda kaht ringjoont keskpunktidega O ja O' , kusjuures ringjoonte raadiused rahuldavad neidsamu võrratsi. Järelikult neil kahe ringjoonel on kaks ühist punkti ning antud kahe keral on lõpmatu hulk ühiseid punkte.



Joonis 49.

Olgu A ja B (joonis 49) mingid kaks neist ühistest punktidest ning H ja H' (punktid A ja H' ei ole joonisel näidatud)

punktidest A ja B keskpunktide sirgele tõmmatud ristlõikude alused. Kolmnurgad OAO' ja OBO' on võrdsed (kolme külje põhjal), millest järeldub, et $AH = BH'$, $OH = OH'$ ja $O'H = O'H'$, nii et punktid H ja H' ühtivad ja seega $AH = BH$.

Punktide H ja H' ühtimisest järeldub, et punktid A ja B , järelikult ka kahe kera kõik ühised punktid asetsevad ühel ja samal keskpunktide sirgega ristival tasapinnal. Võrdusest $AH = BH$ järeldub, et kõik need ühised punktid asetsevad ühel ringjoonel.

Ei ole raske näidata, et kõik selle ringjoone punktid on nende kerade ühisteks punktideks.

Teoreemidega 236—238 on täielikult lahendatud kahe kera lõikumise küsimus.

Peatume veel kolme kera lõikumisel.

Teoreem 239. *Kolmel keral, mis ei läbi üht ja sama ringjoont, on kas kaks ühist punkti või üks ühine punkt või neil ei ole üldse ühiseid punkte.*

Tõestus. Olgu O , O' ja O'' kolm antud kera.

Kui kerad O ja O' lõikuvad mööda mingit ringjoont, siis see ringjoon kas lõikub keraga O'' kahes punktis või omab temaga üht ühist punkti või ei oma temaga üldse ühiseid punkte (teoreem 235,

järeldus 3). Kui keradel O ja O' on ainult üks ühine punkt, siis see ühine punkt võib asetseda keral O'' , võib aga ka mitte asetseda. Lõpuks, kui keradel O ja O' ei ole ühiseid punkte, siis ei ole ühiseid punkte ka kõigil kolmel keral. Siit järeldubki teoreem.

Saab tõestada, et kui kolmel keral on ainult üks ühine punkt, siis neil on selles punktis kas ühine puutuv tasapind (s. t. kerad puutuvad paariti teineteist) või ühine puutuv sirge.

Vaadeldud teoreemidest tulenevad lahendused järgmistele ülesannetele.

Konstruktsioon 85. Konstrueerida kahe antud kera lõikejoon.

Olgu $O(r)$ ja $O'(r')$ antud kerad. Konstrueerime mingil sirget OO' läbi val tasapinnal kolmnurga $OA O'$, mille üheks küljeks on lõik OO' ja teised kaks külge OA ja $O'A$ on vastavalt võrdsed r -ga ja r' -ga jne.

Konstruktsioon 86. Konstrueerida kolme antud kera lõikepunktid.

Konstrueerime esmalt mingi kahe antud kera lõikejoone (konstruktsioon 85) ja siis saadud ringjoone ja kolmanda antud kera lõikepunktid (§ 123, konstruktsioon 84).

§ 125. Põhilised punktide geomeetrilised kohad ruumis.

Selle raamatu eelmistes peatükkides vaatlesime juba sirgjoonte geomeetrilisi kohti ruumis (§ 102, § 114). Kera mõiste tarvituselevõtmine ajendab meid süstemaatiliselt vaatlema rida ruumipunktide geomeetrilisi kohti, mis on kas tasapinnad või kerad. Väga paljud siin vaadeldavatest geomeetrilistest kohtadest kujutavad endast tasapinna punktide vastavate geomeetriliste kohtade üldistusi. Neid me üksikasjaliselt ei vaatle, vaid piirdume vastava viite andmisega.

Geomeetriline koht XVIII. *Geomeetriliseks kohaks punktidele, millede kaugused antud punktist O on võrdsed ühe ja sama lõiguga r , on kera keskpunktiga O ja raadiusega r .*

See järeldub kera definitsioonist (§ 123).

Kahest paralleelsest tasapinnast ühe tasapinna kõikide punktide kaugused teisest tasapinnast on võrdsed (selle väite tõestamise jätame lugeja hooleks). Seetõttu nimetatakse tasapinna mingi punkti kaugust teisest, esimesega paralleelsest tasapinnast nende kahe paralleelse tasapinna vaheliseks kauguseks.

Sellest märkusest tuletub kergesti

Geomeetriline koht XIX. *Geomeetriliseks kohaks punktidele, millede kaugused antud tasapinnast on võrdsed ühe ja sama lõiguga, on antud tasapinnaga paralleelsete tasapindade paar. (Vrd. I, § 24, geom. koht II.)*

Geomeetriline koht XX. *Geomeetriliseks kohaks punktidele, mis on võrdsetel kaugustel kahest antud punktist A ja B ,*

on lõiguga AB ristuv ja tema keskpunkti läbiv tasapind (lõigu keskristtasapind). (Vrd. I, § 24, geom. koht III.)

Selle tõestamiseks tuleb vaadelda otsitava geomeetrilise koha punkte, mis asetsevad mingil sirget AB läbival tasapinnal; need punktid moodustavad sirgjoone — geomeetrilise koha III (I, § 24). Kõik niisugused sirged asetsevad ilmselt ühel ja samal tasapinnal.

Geomeetriline koht XXIa. Geomeetriliseks kohaks punktidele, mis on antud kahest paralleelsest tasapinnast võrdsetel kaugustel, on kahe antud tasapinnaga paralleelne tasapind. (Vrd. I, § 24, geom. koht IVa.)

Geomeetriline koht XXIb. Geomeetriliseks kohaks punktidele, mis on kahest lõikuvast tasapinnast võrdsetel kaugustel, on kaks teineteisega ristuvat tasapinda — antud tasapindade poolt moodustatud kahe tahuliste nurkade bisektortasapinnad. (Vrd. I, § 24, geom. koht IVb.)

Geomeetriline koht XXIIa. Geomeetriliseks kohaks punktidele, mis on antud kahest paralleelsest sirgest võrdsetel kaugustel, on tasapind, mis ristub antud sirgeid läbiva tasapinnaga ja lõikub sellega mööda sirget, mis on kahest antud sirgest võrdsetel kaugustel.

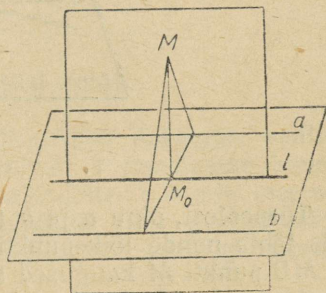
Tõepoolest, kui mingi punkt M (joonis 50) on sirgetest a ja b võrdsetel kaugustel, siis ka tema projektsioon M_0 sirgete a ja b tasapinnal on sirgetest a ja b võrdsetel kaugustel, ja ümberpöörduvalt. Järelikult punktide M_0 geomeetriliseks kohaks on sirgetega a ja b paralleelne sirge l (I, § 24, geom. koht IVa) ja punktide M geomeetriliseks kohaks on sirget l läbiv tasapind, mis on risti sirgete a ja b tasapinnaga.

Geomeetriline koht XXIIb. Geomeetriliseks kohaks punktidele, mis on antud kahest lõikuvast sirgest võrdsetel kaugustel, on kaks ristuvat tasapinda, mis on risti antud sirgete tasapinnaga ja poolitavad nende sirgete vahelised nurgad (joonis. 51).

See geomeetriline koht tuleb analoogiliselt geomeetrilise kohaga XXIIa, ainult geomeetrilise koha IVa asemel tuleb kasutada geomeetrilist kohta IVb (I, § 24).

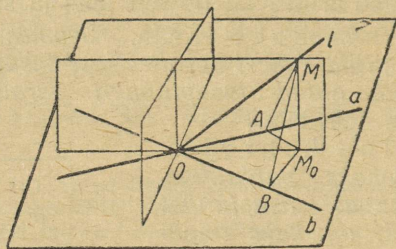
Kõne all olevaid tasapindu võiks nimetada antud sirgete poolt moodustatud nurkade bisektortasapindadeks (poolitavateks tasapindadeks).

Märkus. Kahest antud kiivsirgest võrdsetel kaugustel olevate punktide geomeetrilise koha vaatlemine ulatub välja elementargeomeetria raamidest. Analüütilise geomeetria meetodeid kasutades saab tõestada, et selleks geomeetriliseks kohaks on teist järku joonpind, nimelt üks erikujuline hüperboolne paraboloid.



Joonis 50.

Geomeetriline koht XXIII. Geomeetriliseks kohaks sirgetele, mis läbiivad antud punkti ja moodustavad võrdsed nurgad sedasama punkti läbiva kahe sirgega, on kaks teineteisega ristuvat tasapinda — kahe antud sirge vaheliste nurkade bisektortasapinnad.



Joonis 51.

Tõepoolest, olgu a ja b (joonis 51) antud sirged, l mingi sirge, mis läbib nende lõikepunkti O , M mingi punkt sirgel l ning MA ja MB punkti M kaugused sirgetest a ja b . Kui sirge l moodustab võrdsed nurgad sirgetega a ja b , siis kolmnurgad OAM ja OBM on võrdsed, sellega $MA = MB$. Ümberpöörduvalt, võrdusest $MA = MB$ järeldub, et $\angle AOM = \angle BOM$. Niisiis jõuame geomeetrilisele kohale XXIIIb.

Märkus. Kui kõneldakse antud punktist O väljuvatest kiirtest, mis moodustavad võrdsed nurgad kahe antud kiiriga OA ja OB (mitte aga kahe antud sirgega), mis väljuvad punktist O , siis on geomeetriliseks kohaks üksainus tasapind — nurga AOB bisektortasapind.

Geomeetriline koht XXIV. Geomeetriliseks kohaks punktidele, milledest antud lõik paistab täisnurga all, on kera, mille diameetriks on antud lõik.

Tõestuseks tuleb vaadelda otsitava geomeetrilise koha punkte, mis asetsevad mingil antud lõiku läbival tasapinnal. Need punktid moodustavad ringjoone — geomeetrilise koha Va (I, § 24). Kõik need ringjooned asetsevad ühel ja samal keral, sest neil on ühine diameeter.

Märkus. Geomeetriline koht punktidele, milledest antud lõik paistab antud, täisnurgast erineva nurga all, moodustub poolringjoonest erineva kaare pöörlemisel selle kaare otsi ühendava sirge ümber. Vastava pinna vaatlemine ulatub välja elementargeomeetria raamidest (analüütilise geomeetria meetodid näitavad, et on tegemist neljandat järku pinnaga).

Kasutades samu võtteid, mida rakendasime geomeetriliste kohtade XX ja XXIV leidmisel, saame kergesti järgmised geomeetrilised kohad.

Geomeetriline koht XXV. Geomeetriliseks kohaks punktidele, millede kaugused kahest antud punktist suhtuvad nagu antud kaks mittevõrdset lõiku, on kera. (Vrd. I, § 49, geom. koht VI.)

Geomeetriline koht XXVI. *Geomeetriliseks kohaks punktidele, millede kaugused kahest antud punktist omavad jäävat ruutude vahet, on tasapind, mis on risti antud punkte ühendava sirgega.* (Vrd. I, § 75, geom. koht VII.)

Geomeetriline koht XXVII. *Geomeetriliseks kohaks punktidele, millede kaugused kahest antud punktist omavad jäävat ruutude summat, on (kui ta on olemas ega muutu punktiks) kera, mille keskpunkt on antud lõigu keskpunktis.* (Vrd. I, § 75, geom. koht VIII.)

Jätame lõpuks lugeja enda laiendada ruumi juhule geomeetriselised kohad IX ja X (I, § 75).

§ 126. Muid geomeetrisi kohti.

Tasapinna punktide kahe geomeetriselise koha üheaegne vaatlemine määrab üldiselt lõpliku hulga punkte ja moodustab konstruktsioonülesannete lahendamise geomeetriseliste kohtade meetodi (I, § 25). Erinevalt sellest ruumi punktide kahe geomeetriselise koha üheaegne vaatlemine viib paljudel juhtudel uuele geomeetriselisele kohale.

Märkus. See tasapinna ja ruumi erinevus seletub dimensioonide arvuga. Seda on kerge endale selgeks teha, kui kasutada koordinaatide meetodit.

Punktide geomeetriline koht tasapinnal on üldiselt määratud ühe võrrandiga, milles on kaks muutujat (sellele lisanduvad mõnel juhul ühed või teised võrratused). Kahest niisugusest võrrandist koosneval süsteemil on üldiselt lõplik hulk lahendeid.

Ruumis on iga geomeetriline koht, mida vaatlesime paragrahvis 125, määratud kolme muutuja võrrandiga. Kahest niisugusest võrrandist koosneval süsteemil on üldiselt lõpmatu hulk lahendeid ja ta määrab ühe uue geomeetriselise koha.

Vaatleme mõnda tüüpilist näidet geomeetriseliste kohtade saamisest sel viisil. Lugejal on kerge suurendada nende näidete hulka.

Geomeetriline koht XXVIII. *Geomeetriliseks kohaks punktidele, mis on antud kolmnurga kolmest tipust võrdsetel kaugustel, on selle kolmnurga tasapinnaga ristuv sirge, mis läbib kolmnurga ümberringjoone keskpunkti.*

Tõepoolest, olgu ABC antud kolmnurk. Kahest antud punktist A ja B võrdsetel kaugustel olevate punktide geomeetriseliseks kohaks on lõiguga AB , järelikult ka tasapinnaga ABC ristuv tasapind (§ 125, geom. koht XX). Niisamuti on punktide A ja C võrdsetel kaugustel olevate punktide geomeetriseliseks kohaks üks teine tasapinnaga ABC ristuv tasapind. Nende kahe tasapinna lõikejoon ongi otsitav geomeetriselise koht. Saadud sirge läbib kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkti, sest selle ringjoone keskpunkt on kolmnurga tippudest võrdsetel kaugustel.

Sama geomeetriselise koha võib saada ka teisiti. Kui mingi punkt

M on võrdsetel kaugustel punktidest A , B ja C , siis ka tema projektsioon O tasapinnal ABC on võrdsetel kaugustel punktidest A , B ja C , ja ümberpöördukt. Järelikult punkt O on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt ja punktide M geomeetriliseks kohaks on tasapinnale ABC punktis O püstitatud ristsirge.

Geomeetriline koht XXIX. *Geomeetriliseks kohaks punktidele, millede kaugused antud kolmnurga tippudest on võrdelised kolme antud lõiguga, on (kui ta on olemas ega muutu punktiks) ringjoon või sirge.*

Olgu vaja leida geomeetriline koht punktidele M , mis täidavad tingimust $MA : MB : MC = a : b : c$, kus ABC on antud kolmnurk ja a , b , c on antud lõigud.

Geomeetriliseks kohaks punktidele M , mis täidavad tingimust $MA : MB = a : b$, on kera, kui $a \neq b$ (§ 125, geom. koht XXV), ja tasapind, kui $a = b$ (§ 125, geom. koht XX). Täpselt niisamuti on tingimust $MA : MC = a : c$ täitvate punktide geomeetriliseks kohaks kera või tasapind.

Järelikult otsitav geomeetriline koht on määratud kahe kera lõikejoonena (kui antud kolme lõigu hulgas ei ole kaht võrdset lõiku), kera ja tasapinna lõikejoonena (kui antud kolme lõigu hulgas on kaks võrdset lõiku) või kahe tasapinna lõikejoonena (kui kõik kolm antud lõiku on võrdsed; vrd. geom. koht XXVIII). Siit tulenebki meie väide.

Geomeetriline koht XXX. *Geomeetriliseks kohaks punktidele, mis on võrdsetel kaugustel antud kolmest ühes punktis lõikuvast tasapinnast, on neli sirget, mis läbivad sedasama punkti.*

Tõepoolest, olgu a , β ja γ antud tasapinnad ja O nende lõikepunkt. Tasapindadest a ja β võrdsetel kaugustel olevate punktide geomeetriline koht koosneb kahest ristuvast tasapinnast λ ja λ' (§ 125, geom. koht XXIIb). Täpselt niisamuti tasapindadest a ja γ võrdsetel kaugustel olevate punktide geomeetriline koht koosneb kahest tasapinnast μ ja μ' . Et iga punkt, mis on võrdsetel kaugustel kõigist kolmest tasapinnast, peab asetsema ühel tasapindadest λ ja λ' ning samal ajal ühest tasapindadest μ ja μ' , siis tasapindadest a , β ja γ võrdsetel kaugustel olevate punktide geomeetriline koht koosneb neljast sirgest, mida mööda paariti lõikuvad tasapinnad λ ja μ , λ' ja μ , λ ja μ' , λ' ja μ' .¹ Nende tasapindade hulgas ei ole kaht paralleelset tasapinda, sest nad läbivad kõik üht ja sama punkti O .

Selle geomeetrilise koha vaatlusest tuletub kergesti järgmine lause. (Vrd. I, § 25, teoreem 60.)

Teoreem 240. *Ühes ja samas punktis lõikuva kolme tasapinna poolt moodustatud kahetahuliste nurkade kuus bisektortasapinda läbivad kolmekaupä nelja sirget. Kui vaadelda antud tasapindade poolt moodustatud kaheksast kolmetahulisest nurgast mingit üht*

¹ Need neli sirget on ilmselt erinevad.

nurka, siis mööda üht neist neljast sirgest lõikuvad kolme seesmise kahetahulise nurga bisektortasapinnad, mööda igaüht kolmest ülejäänust aga kahe serva juures olevate väliste kahetahuliste nurkade bisektortasapinnad ja kolmanda serva juures oleva seesmise kahetahulise nurga bisektortasapind.

Tõepoolest, olgu α , β ja γ kolm antud tasapinda, mis lõikuvad ühes ja samas punktis, λ ja λ' tasapindade α ja β poolt moodustatud kahetahuliste nurkade bisektortasapinnad, μ ja μ' analoogilised bisektortasapinnad tasapindade α ja γ puhul ja lõpuks ν ja ν' analoogilised tasapinnad tasapindade β ja γ puhul.

Iga punkt, mis asetseb tasapindade λ ja μ lõikejoonel, on kõigist kolmest tasapinnast α , β ja γ võrdsetel kaugustel ja seetõttu peab asetsema ka ühel tasapindadest ν ja ν' . Analoogiline väide kehtib ka tasapindade λ' ja μ , λ ja μ' , λ' ja μ' lõikejoonte puhul. Nii saadaksegi neli sirget.

Kolmetahulise nurga kahe serva juures olevate seesmiste kahetahuliste nurkade bisektortasapindade lõikejoon s asetseb kolmetahulise nurga sees ja seepärast peab asetsema kolmanda serva juures oleva seesmise (mitte aga välise) kahetahulise nurga bisektortasapinnal. Niisiis, kolme seesmise kahetahulise nurga bisektortasapinnad läbivad üht kõne all olevast neljast sirgest. Järelikult läbib igaüht ülejäänud kolmest sirgest ainult üks seesmine bisektortasapind ja kaks välist bisektortasapinda.

Me vaatlesime kolmest üht ja sama punkti läbivast tasapinnast võrdsetel kaugustel olevate punktide geomeetrilist kohta. Jätame lugeja hooleks vaadelda analoogiliselt geomeetrilist kohta punktidele, mis on võrdsetel kaugustel kolmest antud tasapinnast, kui neil tasapindadel on mingi muu vastastikune asend ruumis (§ 100).

Geomeetriline koht XXXI. *Geomeetriline koht punktidele, mis on võrdsetel kaugustel kolmest antud sirgest, mis läbivad üht ja sama punkti ega asetse ühel ja samal tasapinnal, koosneb neljast sirgest.*

Selle geomeetrilise koha tuletamine on täiesti analoogiline geomeetrilise koha XXX tuletamisega, ainult geomeetrilise koha XXIIb asemel tuleb kasutada geomeetrilist kohta XXIIb.

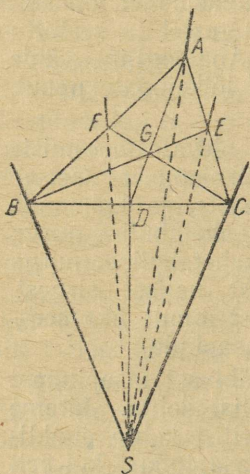
Jätame lugeja hooleks tuletada selle geomeetrilise koha vaatlusest järgmine, teoreemiga 240 täiesti analoogiline teoreem.

Teoreem 241. *Ühes ja samas punktis lõikuva kolme tasapinna lõikejoonte poolt moodustatud tasanurkade kuus bisektortasapinda läbivad kolmekaupana nelja sirget. Kui vaadelda antud tasapindade poolt moodustatud kaheksast kolmetahulisest nurgast mingit üht nurka, siis mööda üht neist neljast sirgest lõikuvad tema kolme tasanurga bisektortasapinnad, mööda igaüht kolmest ülejäänust aga antud kolmetahulise nurga kahe tasanurga kõrvanurkade bisektortasapinnad ja tema kolmanda tasanurga bisektortasapind.*

Lugeja kahtlemata märkab seda analoogiat, mis on olemas

ähelt poolt teoreemide 240 ja 241 ning teiselt poolt teoreemide vahel kolmnurga nurgapoolitajate lõikumisest (I, teoreem 60) ja kolmnurga külgede keskristsirgete lõikumisest (I, teoreem 57, järeldus 1). Ka teoreemid kolmnurga mediaanide lõikumisest ja kõrguste lõikumisest (I, teoreemid 69 ja 70) on üle kantavad kolmetahulisele nurgale, ja nimelt järgmiselt.

Teoreem 242. *Kolm tasapinda, milledest igaüks läbib kolmetahulise nurga üht serva ja selle vastas asetseva tasanurga poolitajat, läbivad üht ja sama sirget.*



Joonis 52.

Tõestus. Antud kolmetahulise nurga S servadel märgime võrdsed lõigud $SA = SB = SC$ (joonis 52) ja tähistame tähtedega D , E ja F punktid, kus tasanurkade BSC , CSA ja ASB poolitajad lõikuvad kolmnurga ABC külgedega. Peame tõestama, et tasapinnad ASD , BSE ja CSF läbivad üht ja sama sirget.

Et kolmnurk BSC on võrdhaarne, siis $BD = DC$, ja analoogiliselt $CE = EA$, $AF = FB$. Lõigud AD , BE ja CF on kolmnurga ABC mediaanideks ja seetõttu läbivad üht ja sama punkti G . Järelikult kolm tasapinda ASD , BSE ja CSF läbivad üht sirget SG .

Järeldus. *Kuus tasapinda, milledest igaüks läbib üht antud kolmest sirgest, mis lõikuvad ühes punktis, kuid ei asetse ühel ja samal tasapinnal, ja teise kahe antud sirge poolt moodustatud kahe tippnurga poolitajat, läbivad kolmekaupta nelja sirget.*

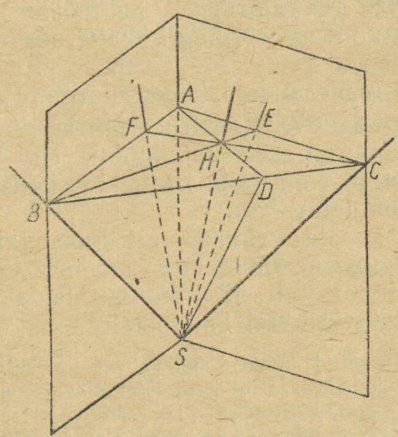
Teoreem 243. *Kolm tasapinda, milledest igaüks läbib kolmetahulise nurga üht serva ja on risti selle vastas asetseva tahu tasapinnaga, läbivad üht ja sama sirget.¹*

Tõestus. Olgu $SABC$ antud kolmetahuline nurk (joonis 53). Tähistame sümboliga SE sirget, mida mööda tasapind ASC lõikab temaga ristuvat ja serva SB läbivat tasapinda, ja analoogiliselt sümboliga SF sirget, mida mööda tasapind ASB lõikab temaga ristuvat ja serva SC läbivat tasapinda. Teoreem on tõestatud, kui saame näidata, et tasapind ASD , mis läbib serva SA ja tasapindade BSE ja CSF lõikejoont SH , on risti tasapinnaga BSC .

Võtame serval SA vabalt punkti A ja paneme sellest läbi tasapinna, mis on risti SA -ga. Selle tasapinna lõikepunkte sirgetega SB ja SC tähistame tähtedega B ja C ; juhtu, kus serv SB või

¹ Teoreem ei paku huvi (kuigi formaalselt säilitab oma sisu), kui kolmetahulise nurga kaks kahetahulist nurka ja järelikult ka kaks tasanurka on täisnurgad.

serv SC on risti SA -ga, saab vältida, valides tähised nii, et nurkad ASB ja ASC oleksid täisnurgast erinevad. Lõpuks tähistame tähtedega D, E, F ja H punktid, kus sirged SD, SE, SF ja SH lõikuvad tasapinnaga ABC . Et tasapind ASC läbib tasapinnaga ABC ristuvat sirget SA , siis ta on risti tasapinnaga ABC . Sirge BE kui tasapinnaga ASC ristuvate tasapindade ABC ja BSE lõikejoon on samuti risti tasapinnaga ASC . Järelikult sirge BE on risti sirgega AC , s. t. ta on kolmnurga ABC kõrguseks. Analoogiliselt tõestame, et sirge CF on sama kolmnurga kõrguseks.



Joonis 53.

Kolmnurga ABC kahe kõrguse BE ja CF lõikepunkti H läbib sirge AD on kolmnurga ABC kolmandaks kõrguseks. Teisiti öeldes, sirge AD on risti sirgega BC .

Et kaldsirge SD projektsioon AD tasapinnal ABC on risti BC -ga, siis kaldsirge SD ise on ka risti BC -ga. Tasapind ASD on risti BC -ga (sest kaks sellel tasapinnal asetsevat sirget on risti BC -ga) ja järelikult ka BC -d läbiva tasapinnaga BSC . Teoreem on tõestatud.

Sirgeid, mida kolmekaupa läbivad teoreemides 240, 241, 242 ja 243 vaadeldud tasapinnad, nimetatakse mõnikord kolmetahulise nurga tähtsamateks sirgeteks.

§ 127. Tetraeedri ümber kujundatud kera, sisse kujundatud kera ja külge kujundatud kera.

Teatavasti kera nimetatakse hulktahuka ümber kujundatud keraks ja hulktahukat kera sisse kujundatud hulktahukaks, kui hulktahuka kõik tipud asetsevad keral.

Kera nimetatakse hulktahuka sisse kujundatud keraks (laiemas tähenduses) ja hulktahukat kera ümber kujundatud hulktahukaks, kui hulktahuka iga tahu tasapind puutub kera. Sagedamini, muide, nimetatakse kera hulktahuka sisse kujundatud keraks ja hulktahukat kera ümber kujundatud hulktahukaks, kui seejuures kera asetseb hulktahuka sees ja kera ning tahkude tasapindade puutepunktid on vastavate tahkude sees; kui aga kera asetseb väljaspool hulktahukat, siis nimetatakse teda hulktahuka külge kujundatud keraks. Käesolevas paragrahvis peame kinni viimasest terminoloogiast.

Kasutades punktide geomeetrilise koha mõistet, vaatleme tetraeedri ümber kujundatud kera ja samuti ka tetraeedri sisse ja külge kujundatud kerasid.

Alustame järgmise ülesande lahendamisega.

Konstruksioon 87. Konstrueerida kera, mis läbib antud nelja mitte ühel tasapinnal asetsevat punkti.

Sama ülesannet võib sõnastada ka teisiti: konstrueerida antud tetraeedri ümber kujundatud kera.

Seejuures «kera konstrueerimise» all mõistetakse tema keskpunkti ja raadiuse konstrueerimist.

Ülesanne taandub otseselt järgmiseks: leida punkt, mis on neljast antud punktist võrdsetel kaugustel.

Olgu A, B, C ja D antud punktid, mis ei asetse ühel ja samal tasapinnal. Punktidest A, B ja C võrdsetel kaugustel olevate punktide geomeetriliseks kohaks on sirge l (§ 126, geomeetriline koht XXVIII). Punktidest A ja D võrdsetel kaugustel olevate punktide geomeetriliseks kohaks on tasapind α . Otsitavaks punktiks on sirge l ja tasapinna α lõikepunkt. Sirge l ei saa olla paralleelne tasapinnaga α ega asetseda sellel tasapinnal, sest punkt D ei asetse tasapinnal ABC .

Selle ülesande lahendamise tulemusena saame sõnastada järgmise teoreemi.

Teoreem 244. Läbi iga nelja punkti, mis ei asetse ühel ja samal tasapinnal, läheb üks ja ainult üks kera.

Teisiti öeldes, iga tetraeedri ümber saab kujundada ühe ja ainult ühe kera.

Järeldused. 1. Igal tetraeedril kuus tasapinda, milledest igaüks on risti ühe servaga ja läbib selle serva keskpunkti, ja samuti neli sirget, milledest igaüks on risti ühe tahu tasapinnaga ja läbib selle tahu ümberringjoone keskpunkti, läbivad üht ja sama punkti — tetraeedri ümber kujundatud kera keskpunkti.

Järeldus tuleneb sellest, et tetraeedri ümber kujundatud kera keskpunkt on võrdsetel kaugustel tetraeedri kõigist neljast tipust.

2. Tarvilik ja piisav tingimus selleks, et püramiidi ümber saaks kujundada kera, seisab selles, et tema põhja ümber peab saama joonestada ringjoont.

Tõepoolest, selle tingimuse korral püramiidi tippu ja tema põhja kolme tippu läbiv kera läbib ka põhja ülejäänud tippe.

3. *Tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et prisma ümber saaks kujundada kera, seisavad selles, et prisma põhja ümber peab saama joonestada ringjoont ja et prisma peab olema püst-prisma.*

Esimese tingimuse tarvilikkus on ilmne; teise tingimuse tarvilikkus tuleneb sellest, et kõikidest rööpkülikutest ainult ristküliku ümber saab joonestada ringjoont.

Kui mõlemad tingimused on täidetud, siis prisma ühe põhja kolme järjestikust tippu A , B ja C ning külgserva BB' otsa B' läbiv kera läbib ka külgservade AA' ja CC' otsi A' ja C' (sest tahud $ABB'A'$ ja $BCC'B'$ on ristkülikud). Siit järeldub, et sama kera läbib ka prisma kõiki ülejäänud tippe.

4. *Tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et tüüpüramiidi ümber saaks kujundada kera, seisavad selles, et tema ühe põhja ümber peab saama joonestada ringjoont ja et tema külgservad peavad olema võrdsed.*

Tõestus on analoogiline järelduse 3 tõestusega (kõikidest trapetsitest ainult võrdhaarse trapetsi ümber saab joonestada ringjoont).

5. *Läbi kahe ringjoone, mis lõikuvad kahes punktis ega asetse ühel ja samal tasapinnal, läheb üks ja ainult üks kera.*

Tõestamiseks tuleb vaadeldud teoreemi rakendada nelja punkti suhtes, milledest kaks ühtivad ringjoonte lõikepunktidega, kolmas ja neljas aga asetsevad vastavalt ühel ja teisel antud ringjoonel.

6. *Läbi kahe ringjoone, mis teineteist puutuvad mingis punktis ega asetse ühel ja samal tasapinnal, läheb üks ja ainult üks kera.*

Seejuures ütleme, et kaks mitte ühel tasapinnal asetsevat ringjoont puutuvad teineteist, kui nad puutuvad üht ja sama sirget ühes ja samas punktis.

Tõestamiseks tuleb vaadeldud teoreemi rakendada nelja punkti suhtes, milledest üks ühtib kahe ringjoone puutepunktiga, kaks asetsevad ühel antud ringjoonel ja viimane teisel antud ringjoonel.

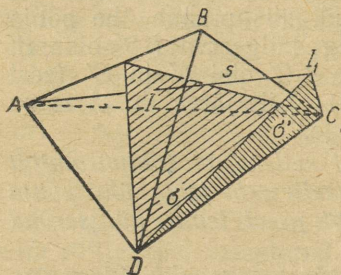
Neid nelja punkti läbiv kera läbib esimest antud ringjoont (teoreemi 235 järelduse 3 põhjal), sest tal on sellega kolm ühist punkti. Jätame lugeja tõestada, et sama kera läbib ka teist antud ringjoont, sest tal on sellega kaks ühist punkti ja ühine puutuja ühes neist punktides.

Asume tetraeedri sisse kujundatud kera ja külge kujundatud kera juurde.

Konstruksioon 88. Leida punkt, mis on võrdsetel kaugustel neljast tetraeedrit moodustavast tasapinnast.

Olgu α , β , γ ja δ antud tasapinnad ning A , B , C ja D nende poolt moodustatud tetraeedri tipud (vrd. joon. 17), kusjuures tipp A asetseb tahu α vastas jne. Tasapindadest β , γ ja δ võrdsetel kaugustel olevate punktide geomeetriaalne koht koosneb neljast sirgest, mis läbivad tippu A (§ 126, geomeetriaalne koht XXX). Tähistame tähega s selle neist sirgetest, mida mööda lõikuvad kolmetahulise nurga $ABCD$ seesmiste kahetahuliste nurkade bisektor-

tasapinnad, ja tähtedega s_1, s_2, s_3 kolm ülejäänud sirget. Tasapindadest α ja β võrdsetel kaugustel olevate punktide geomeetriline koht koosneb kahest tasapinnast, mis lõikuvad mööda serva CD (§ 125, geomeetriline koht XX1b). Tähistame tähega σ neist tasapindadest selle, mis poolitab tetraeedri serva CD juures oleva seesmise kahetahulise nurga, ja tähega σ' selle, mis poolitab sama serva juures oleva välise kahetahulise nurga. Otsitavateks punktideks on punktid, kus mingi sirge sirgete s, s_1, s_2 ja s_3 hulgast lõikab tasapinda σ või σ' . Suurim mõeldav lahendite arv on seetõttu 8.



Joonis 54.

Sirge s lõikab alati tasapinda σ punktis I (joonis 54), mis asetseb tetraeedri $ABCD$ sees (selle ilmse tõsiasi tõestamisel me ei peatu).

Saab tõestada, et igas tetraeedris lõikab sirge s ka tasapinda σ' . Vastav lõikepunkt I_1 asetseb tetraeedri suhtes välises piirkonnas, mis külgneb tahuga BCD (vt. joon. 18, *b*). Analoogiliselt on alati olemas veel kolm lõikepunkti I_2, I_3 ja I_4 , mis asetsevad väljaspool tetraeedrit, tema ülejäänud kolme tahuga külgnevates piirkondades.

Lõpuks, detailsem uurimine näitab, et kolmest ülejäänud lõikepunktist võib olemas olla nii kõik kolm punkti kui ka (erijuhtudel) ainult kaks, üks või isegi mitte ühtegi. Nii on see neil juhtudel, kui mõned sirgetest s_1, s_2 ja s_3 on paralleelsed ühega tasapindadest σ ja σ' . Need lõikepunktid — me tähistame neid sümbolitega I', I'' ja I''' — asetsevad niisamuti väljaspool tetraeedrit, kuid juba tema servadega külgnevates piirkondades (vt. joon. 18, *d*).

Niisiis saab ülesandel olla 5 kuni 8 lahendit.

Selle ülesande lahendusest tuleb kergesti järgmine lause.

Teoreem 245. *Tetraeedri seesmiste ja välise kahetahuliste nurkade kaksteist bisektortasapinda lõikuvad kolmekaupa mööda kuuttest sirget (nii et igaühel neist 12 tasapinnast asetseb 4 niisugust sirget). Needsamad kaksteist tasapinda läbivad kuuekaupa üldiselt kaheksat punkti; üksikutel juhtudel võib nende punktide arv olla ka 7, 6 või 5.*

Tõepoolest, igaüht tetraeedri neljast tipust läbib neli sirget, mis on analoogilised konstruktsiooni 88 vaatlemisel kõne all olnud sirgetega s, s_1, s_2 ja s_3 , nii et üldse saame kuusteist niisugust sirget.

Igaüks kaheksast sealnimetatud punktist I, I_1, \dots, I''' on võrdsetel kaugustel kõigist neljast tasapinnast α, β, γ ja δ ja asetseb seetõttu ühel kahest bisektortasapinnast, mis läbivad tetraeedri iga serva. Nii asetseb punkt I kõigi kuue serva juures olevate seesmiste kahetahuliste nurkade bisektortasapindadel; punkt I_1 asetseb servade AB, AC ja AD juures olevate seesmiste kahetahuliste nurkade bisektortasapindadel ja servade BC, CD ja DB juures olevate välise kahetahuliste nurkade bisektortasapindadel jne.

Konstruktsioon 88a. Konstrueerida kera, mis puutub nelja, tetraeedrit moodustavat tasapinda.

Et otsitavate kerade keskpunktideks saavad olla punktid, mis on võrdsetel kaugustel neljast antud tasapinnast, siis see ülesanne oluliselt ei erine eelnevast ja tal on samuti 5 kuni 8 lahendit.

Üks saadud keradest (keskpunktiga punktis I) on tetraeedri sisse kujundatud kera, ülejäänud aga külge kujundatud kerad. Külge kujundatud kera saab puutuda üht tahku ja ülejäänud kolme tahu laiendusi või kõigi nelja tahu laiendusi.

Niisiis, iga tetraeedril on üks sisse kujundatud kera ja üldiselt seitse külge kujundatud kera; erijuhtudel võib külge kujundatud kerade arv olla 7, 6, 5 või 4.

Jätame lugeja vaadelda konstruktsioonid 88 ja 88a juhtudel, kui neljal tasapinnal on mingi muu vastastikune asend.

§ 128. Koonus ja silinder kui geomeetrilised kohad.

Lugeja kahtlemata tunneb koolikursusest (pöör-)koonuse ja silindri mõistet. Nende mõistete kõige loomulikumateks definitsioonideks elementargeomeetria raamides on järgmised.

Geomeetiline koht XXXII. Geomeetrilist kohta sirgetele, mis läbivad antud sirgel s asetsevat antud punkti O ja moodustavad antud sirgega nurgad, mis on võrdsed antud nurgaga, nimetatakse kooniliseks pöörpinnaks ehk pöörkoonuseks.

Meie juhtudel, kus ei vaadelda mingeid muid koonuseid, nimetatakse pöörkoonust lihtsalt koonuseks. Selles tähenduses leiabki termin «koonus» kasutamist käesolevas raamatus.¹

Punkti O nimetatakse koonuse tipuks ja sirget s tema teljeks; sirgeid, milledest koosneb vaadeldav geomeetiline koht, nimetatakse moodustajateks.

Kui antud nurk on täisnurk, siis koonus muutub tasapinnaks. Kogu järgnevas eeldatakse, et see nurk on täisnurgast erinev.

Geomeetiline koht XXXIII. Geomeetrilist kohta sirgetele, mis on paralleelsed antud sirgega s ja asetsevad sellest antud lõiguga võrduval kaugusel, nimetatakse silindriliseks pöörpinnaks ehk pöör-silindriks.

Pöör-silindrit saab ilmselt defineerida ka kui antud sirgest s antud lõiguga võrduval kaugusel asetsevate punktide geomeetrilist kohta.

Juhtudel, kus ei vaadelda mingeid muid silindreid, nimetatakse pöör-silindrit lihtsalt silindriks. Selles tähenduses leiabki termin «silinder» kasutamist käesolevas raamatus.²

¹ Kooli elementargeomeetria õpikuis mõistetakse koonuse all harilikult teatud keha, analüütilise geomeetria ja projektiivse geomeetria kursustes aga rakendatakse terminit «koonus» koonilise pinna sünonüümina. Ka käesolevas raamatus loeme otstarbekohaseks seda viimast terminoloogiat.

Sama märkus käib ka termini «silinder» kohta.

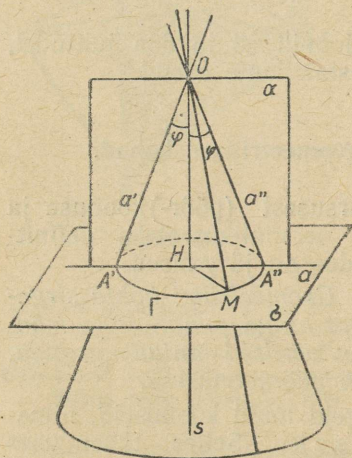
² Vt. eelmist viidet.

Sirget s , millest kõneldakse silindri definitsioonis, nimetatakse silindri teljeks ja sirgeid, milledest koosneb vaadeldav geomeetrliline koht, tema moodustajateks.

Märkus. Koonilise pinna ja silindrilise pinna mõiste üldine, täiesti range definitsioon ulatub välja elementargeomeetria raamidest, samuti nagu kõverjoone ja pinna üldised definitsioonid.

Koonuse lihtsamad omadused väljenduvad järgmise teoreemina.

Teoreem 246. *Koonuse teljega ristuv tasapind, mis ei läbi tema tippu, lõikab koonust mööda ringjoont.*



Joonis 55.

Koonuse tippu läbival tasapinnal on koonusega kaks ühist moodustajat või üks ühine moodustaja või tal ei ole sellega muid ühiseid punkte peale tippu.

Tõestus. Olgu O koonuse tipp, s tema telg, σ mingi tasapind, mis on risti teljega ega läbi tippu, H koonuse telje s ja tasapinna σ lõikepunkt ning φ nurk koonuse telje ja moodustaja vahel (joonis 55).

Vaatleme mingit tasapinda α , mis läbib koonuse telge. On ilmne, et sellel tasapinnal asetsevad kaks sirget, mis läbivad punkti O ja moodustavad sirgega s nurga φ . Need sirged a' ja a'' on koonuse moodustajad. Et tasapindade α ja σ lõikejoon a on risti sirgega s ja nurk φ on täisnurgast erinev, siis sirged a'

ja a'' lõikavad sirget a kahes punktis A' ja A'' , mis on võrdsetel kaugustel punktist H . Need kaks punkti kuuluvad koonusele.

Iga punkt M ringjoonel Γ , mis asetseb tasapinnal σ ja mille keskpunktiks on punkt H ning raadiuseks lõik $HA' = HA''$, kuulub koonusele. Tõepoolest, täisnurksete kolmnurkade $OA'H$ ja OMH võrdsuse tõttu on nurgad HOA' ja HOM võrdsed. On kerge näha, et muid ühiseid punkte tasapinnal σ ja koonusel ei ole.

Teoreemi esimene osa on tõestatud. Asume tema teise osa juurde.

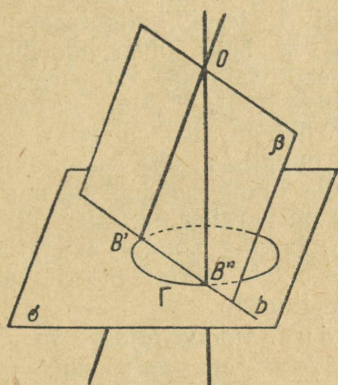
Olgu β , mingi tasapind, mis läbib koonuse tippu ega ole risti tema teljega, ja b tema lõikejoon tasapinnaga σ .

Kui sirge b lõikab ringjoont Γ kahes punktis B' ja B'' , siis tasapinnal β on koonusega kaks ühist moodustajat OB' ja OB'' (joonis 56). Kui sirge b puutub ringjoont Γ mingis punktis T , siis tasapinnal β on koonusega üks ühine moodustaja OT (joonis 57).

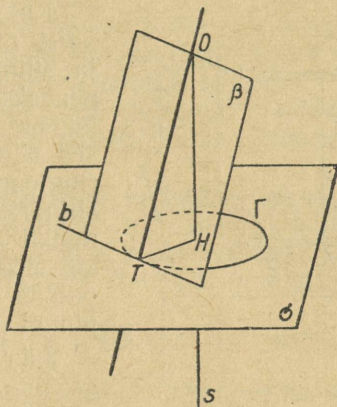
Lõpuks, kui sirgel b ei ole ühiseid punkte ringjoonega Γ , siis ka tasapinnal β ei ole koonusega ühiseid punkte peale tippu. Sama leiab aset ka sel juhul, kui tasapind β on risti koonuse teljega ja järelikult ei lõika tasapinda σ .

Järeldus. Moodustajast erineval sirgel on koonusega kas kaks ühist punkti või üks ühine punkt või tal ei ole sellega ühtki ühist punkti.

Töestuseks tuleb vaadelda antud sirget ja koonuse tippu läbiva tasapinna ning koonuse ühiseid punkte (kui antud sirge läbib koonuse tippu, siis antud sirget läbiva mistahes tasapinna ja koonuse ühiseid punkte).



Joonis 56.



Joonis 57.

Tasapinda, millel on koonusega ainult üks ühine moodustaja, nimetatakse koonust puutuvaks tasapinnaks. Selle moodustaja iga punkti nimetatakse puutuva tasapinna puutepunktiks.

Sirget, millel on koonusega ainult üks ühine punkt, mis on erinev tema tipust, nimetatakse koonuse puutuvas.

Teoreemi 246 tõestus juhatab kätte tee järgmiste ülesannete lahendamiseks.

Konstruksioon 89. Konstrueerida ringjoon, mida mööda antud koonus lõikub antud tasapinnaga, mis on risti koonuse teljega.

Konstruksioon 90. Konstrueerida antud koonuse moodustajad, mis asetsevad tema tippu läbival antud tasapinnal.

Konstruksioon 91. Konstrueerida antud koonuse ja antud sirge lõikepunktid.

Märgime, et koonus loetakse antuks, kui on antud tema tipp, telg ja telje ning moodustaja vaheline nurk.

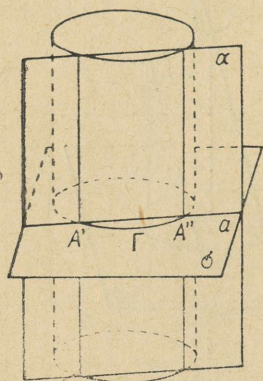
Asume silindri lihtsamate omaduste vaatlemisele.

Teoreem 247. Silindri teljega ristuv tasapind lõikab silindrit mööda ringjoont.

Silindri teljega paralleelsel tasapinnal ja telge. läbival tasapinnal on silindriga kas kaks ühist moodustajat või üks ühine moodustaja või tal ei ole sellega ühiseid punkte.

Tõestus. Teoreemi esimene osa tuleneb vahetult silindri kui antud sirgest võrdsetel kaugustel olevate punktide geomeetrilise koha definitsioonist. Jääb tõestada tema teine osa.

Olgu σ mingi tasapind, mis on risti silindri teljega (joonis 58), Γ ringjoon, mida mööda tasapind σ lõikab silindrit, α mistahes tasapind, mis on paralleelne teljega või läbib seda, ja a sirge, mida mööda lõikuvad tasapinnad σ ja α .



Joonis 58.

Kui sirgel a ja ringjoonel Γ on kaks ühist punkti A' ja A'' , siis tasapinnal α ja silindril on kaks ühist moodustajat; nendeks moodustajateks on sirged, mis läbivad punkte A' ja A'' ning on paralleelsed silindri teljega. Kui sirge a puutub ringjoont Γ punktis T , siis tasapinnal α on silindriga üks ühine moodustaja, mis läbib punkti T ja on paralleelne teljega. Lõpuks, kui sirgel a ja ringjoonel Γ ei ole ühiseid punkte, siis ei ole ühiseid punkte ka tasapinnal α ja silindril.

Järeldus. *Moodustajast erineval sirgel on silindriga kas kaks ühist punkti või üks ühine punkt või tal ei ole sellega ühtki ühist punkti.*

Tõestuseks tuleb vaadelda tasapinda, mis läbib antud sirget ja on paralleelne silindri teljega (kui antud sirge lõikab telge, siis antud sirget ja telge läbivat tasapinda).

Tasapinda, millel on silindriga ainult üks ühine moodustaja, nimetatakse silindrit puutuva kstasapinnaks. Selle moodustaja iga punkti nimetatakse puutuva tasapinna puutepunktiks.

Sirget, millel on silindriga ainult üks ühine punkt, nimetatakse silindri puutujaiks.

Teoreemi 247 tõestus juhatab kätte tee järgmiste ülesannete lahendamiseks.

Konstruktsioon 92. Konstrueerida ringjoon, mida mööda antud silinder lõikub antud tasapinnaga, mis on risti silindri teljega.

Konstruktsioon 93. Konstrueerida antud silindri moodustajad, mis asetsevad tema teljega paralleelsel antud tasapinnal.

Konstruktsioon 94. Konstrueerida antud silindri ja antud sirge lõikepunktid.

Märgime, et silinder loetakse antuks, kui on antud tema telg ja telje ning moodustaja vaheline kaugus.

Märkus. Silindri või koonuse ja mistahes tasapinna lõikumise vaatlamine ulatub välja käesoleva raamatu raamidest. Analüütilise geomeetria ja projektiivse geomeetria kursusest lugeja arvatavasti teab, et koonuse lõiku-

misel mistahes tasapinnaga võib tekkida ellips, hüperbool või parabool ja silindri lõikumisel mistahes tasapinnaga tekib ellips.

Ellipsi, hüperbooli ja parabooli omadusi saab uurida ka ilma analüütilise või projektiivse geomeetria abita, kasutades ainult elementaargeomeetria meetodeid.¹

Vaatleme nüüd koonust puutuva tasapinna ja silindrit puutuva tasapinna põhiomadust, mis meenutab ringjoone puutuja ja kera puutuva tasapinna omadusi.

Teoreem 248. *Koonuse või silindri moodustajat läbiv tasapind, mis on risti tasapinnaga, millel asetseb see moodustaja ja koonuse või silindri telg, on koonust või silindrit puutuv tasapind.*

Ümberpöörduvalt: *koonust või silindrit mööda mingit moodustajat puutuv tasapind on risti tasapinnaga, mis läbib seda moodustajat ja telge.*

Tõestus. Olgu O ja s koonuse tipp ja telg, σ mingi tasapind, mis on risti teljega s ega läbi tippu O , H ja T punktid, kus tasapind σ lõikub teljega s ja koonuse ühe moodustajaga, β tasapind, mis läbib moodustajat OT ja on risti tasapinnaga OHT (vt. joon. 57).

Peame tõestama, et tasapinnal β ja koonusel on ainult üks ühine moodustaja OT .

Tähistame tähtedega Γ ja b ringjoone ja sirge, mida mööda tasapind σ lõikab antud koonust ja tasapinda β .

Sirge b on risti tasapinnaga OHT kui tasapinnaga OHT ristuvate tasapindade σ ja β lõikejoon. Järelikult sirge b on risti ka sirgiga HT ja seetõttu puutub ringjoont Γ . Asjaolust, et sirgel b on ringjoonega Γ ainult üks ühine punkt, järeldub, et ka tasapinnal β on koonusega ainult üks ühine moodustaja OT .

Ümberpöörduvalt, kui tasapinnal β on koonusega ainult üks ühine moodustaja OT , siis sirge b puutub ringjoont Γ ja järelikult on risti sirgiga HT . Sirge b , olles risti koonuse teljega s ja sirgiga HT , on risti ka tasapinnaga OHT . Järelikult ka sirget b läbib tasapind β on risti sama tasapinnaga OHT . Koonuse juhul on teoreem tõestatud.

Analoogilisel viisil saab teoreemi tõestada ka silindri juhul.

Järeldused. 1. *Koonusel on tema igas punktis, mis erineb tipust, üks ja ainult üks puutuv tasapind.*

2. *Silindril on tema igas punktis üks ja ainult üks puutuv tasapind.*

Nüüd on võimalik väita järgmist.

Geomeetriline koht XXXIV. *Geomeetriliseks kohaks koonuse kõigile puutujatele, mis puutuvad teda ühes ja samas, tipust erinevas punktis, on koonust selles punktis puutuv tasapind.*

Geomeetriline koht XXXV. *Geomeetriliseks kohaks silindri kõigile puutujatele, mis puutuvad teda ühes ja samas punktis, on silindrit selles punktis puutuv tasapind.*

¹ Vt. Izvolski [13] ja Hadamard [1], 2. osa.

Et neid väiteid esitada nii lihtsal kujul, ilma ühegi kitsendusega, peame ka koonuse või silindri mingit punkti läbiva moodustaja lugema koonust või silindrit selles punktis puutuvate sirgete hulka.

Koonuse ja silindri vaadeldud omadused võimaldavad lahendada järgmisi ülesandeid.

Konstruksioon 95. Konstrueerida antud koonust puutuv tasapind, mis läbib antud punkti.

Kui antud punkt asetseb koonusel, tuleneb lahendusviis teoreemist 248.

Üldisel juhul saab ülesannet lahendada järgmisel viisil. Läbi antud punkti paneme tasapinna σ , mis on risti koonuse teljega, ja konstrueerime ringjoone Γ , mida mööda tasapind σ lõikab koonust. Läbi antud punkti tõmbame puutujad ringjoonele Γ . Tasapinnad, mis läbivad üht neist puutujatest ja koonuse tippu, ongi otsitavad puutuvad tasapinnad.

Konstruksiooni tuleb oluliselt muuta, kui tasapind σ läbib koonuse tippu. Jätame selle juhu vaatlemise lugeja hooleks.

Ülesandel on kas kaks lahendit või üks lahend (kui antud punkt asetseb koonusel) või tal ei ole ühtki lahendit. Ülesanne muutub määramatuks, kui antud punkt ühtib koonuse tipuga.

Konstruksioon 96. Konstrueerida antud silindrit puutuv tasapind, mis läbib antud punkti.

Lahendatakse analoogiliselt eelmise ülesandega.

Lõpuks jätame lugeja tõestada järgmise kahe väite kehtivuse.

Geomeetiline koht XXXVI. *Geomeetriliseks kohaks antud kera puutujatele, mis läbivad väljaspool kera antud punkti, on koonus.*

Geomeetiline koht XXXVII. *Geomeetriliseks kohaks antud kera puutujatele, mis on paralleelsed antud sirgega, on silinder.*

Seda koonust ja seda silindrit nimetatakse kera ümber kujundatud koonuseks ja silindriks.

Kujundite võrdsus.

§ 129. Kolmetahuliste nurkade võrdsuse tunnused.

Käesoleva raamatu eelmistes peatükkides kõnelesime juba ruumiliste kujundite võrdsusest ja nimelt lõikude ja nurkade võrdsusest, kuid samuti ka kahetahuliste nurkade võrdsusest (§ 96 ja § 117).

Asume nüüd kolmetahuliste nurkade võrdsuse uurimisele. Kaht kolmetahulist nurka nimetame võrdseteks, kui nende kolmetahuliste nurkade tasanurgad ja kahetahulised nurgad on vastavalt võrdsed.¹

Kolmetahuliste nurkade võrdsust märgime kirjas nii, et võrdsete kahetahuliste nurkade servad esineksid selles kirjutises ühesugustel kohtadel. Niisiis, väide «kolmetahulised nurgad $SABC$ ja $S'A'B'C'$ on võrdsed» väljendab mitte ainult kolmetahuliste nurkade võrdsuse fakti, vaid näitab ka, et esimese kolmetahulise nurga serva SA juures olev kahetahuline nurk on võrdne teise nurga serva $S'A'$ juures oleva kahetahulise nurgaga, et esimese tasanurk BSC on võrdne teise tasanurgaga $B'S'C'$ jne.

Kui kolmetahulised nurgad $SABC$ ja $S'A'B'C'$ on võrdsed, siis orienteeritud kolmetahulised nurgad \overline{SABC} ja $\overline{S'A'B'C'}$ võivad olla kas samaselt orienteeritud või vastandlikult orienteeritud. See võimaldab järgmise definitiooni tarvituselevõtmist.

Võrdseid kolmetahulisi nurki $SABC$ ja $S'A'B'C'$ nimetame pärisvõrdseteks, kui orienteeritud kolmetahulised nurgad \overline{SABC} ja $\overline{S'A'B'C'}$ on samaselt orienteeritud, ja peegeldusvõrdseteks, kui nad on orienteeritud vastandlikult.²

Peegeldusvõrdsete kolmetahuliste nurkade näitena võib nimetada kaht kolmetahulist tippnurka, kui lugeda vastavateks iga

¹ Seejuures eeldatakse, et võrdsed kahetahulised nurgad asetsevad võrdsete tasanurkade vastas.

² Ei ole võimatu, et kolmetahulised nurgad $SABC$ ja $S'A'B'C'$ on pärisvõrdsed ja samal ajal kolmetahulised nurgad $SABC$ ja $S'A'B'C'$ (pöörata tähelepanu tähtede järjekorrale!) on peegeldusvõrdsed; vt. viidet lk. 87.

kaks serva, mis on teineteise pikendusteks (§ 110; vt. joon. 27). Tõepoolest, vastavad tasanurgad ja kahetahulised nurgad on võrdsed kui tippnurgad; samal ajal kolmetahulised tippnurgad on siin vastandlikult orienteeritud.

Märkus. Termin «võrdsed» tarvitamise suhtes ühenduses ruumiliste kujunditega ja eriti kolmetahuliste nurkadega ei ole kirjanduses täielikku ühtlust.

Nii nimetatakse võrdseteks kolmetahulisteks nurkadeks väga sageli ainult neid kolmetahulisi nurki, mida ülalpool nimetasime «pärisvõrdseteks». Nii-sugune terminoloogia on seletatav sellega, et ainult pärisvõrdseid kolmetahulisi nurki saab teineteisega ühtivaks teha, kasutades «pidevat nihutamist» (viimase mõiste täpsel defineerimisel me praegu ei peatu). Peegeldusvõrdseid kolmetahulisi nurki ei saa «pideva nihutamise» abil ühtivaiks teha nii, et vastavad servad ühtiksid. Selles on soovitatav lugejal veenduda kahe peegeldusvõrdse kolmetahulise nurga mudeli abil, kus kummalgi nurgal on kolm omavahel mittevõrdset tasanurka. Erinevus nende kahe kolmetahulise nurga vahel on seejuures samasugune nagu näiteks erinevus ühte paari kuuluvate parema ja vasaku jala ühesuuruste saabaste vahel.

Analoogiline märkus käib ka ruumiliste kujundite võrdsuse mõiste kohta üldiselt: väga sageli nimetatakse «võrdseteks» ainult neid kujundeid, mida allpool nimetame pärisvõrdseteks (§§ 133—134).

Ruumilise kujundi «pideva nihutamise» küsimuse juurde tuleme veel tagasi (vt. märkust paragrahvis 141).

Kolmetahuliste nurkade võrdsusel on ilmselt refleksiivsuse, sümmeetrilisuse ja transitiivsuse omadused. Seejuures kaks kolmetahulist nurka, mis on pärisvõrdsed kolmandaga, ja samuti kaks kolmetahulist nurka, mis on peegeldusvõrdsed kolmandaga, on omavahel pärisvõrdsed. Kui üks antud kahest kolmetahulisest nurgast on pärisvõrdne kolmandaga, teine aga peegeldusvõrdne sellega, siis antud kolmetahulised nurgad on peegeldusvõrdsed.

Kolmetahuliste nurkade kohta kehtivad teoreemid, mis on teatava määranani analoogilised kolmnurkade võrdsuse tunnustega ja mida nimetatakse kolmetahuliste nurkade võrdsuse tunnusteks. Vaatamata sellele, et vaatleme neid võrdsuse tunnuseid teises järjekorras kui tasapinnal, säilitame neile analoogia põhjal kolmnurkade vastavate tunnustega nimetused «esimene, teine, ... tunnus». Sellel põhjusel nimetame näiteks järjekorras esimesena vaadeldavat teoreemi «kolmandaks tunnuseks».

Teoreem 249 («kolmetahuliste nurkade võrdsuse kolmas tunnus»). *Kui ühe kolmetahulise nurga kolm tasanurka on vastavalt võrdsed teise kolmetahulise nurga kolme tasanurgaga, siis need kolmetahulised nurgad on võrdsed.*

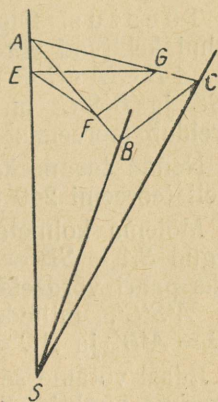
Tõestus. Olgu kahe kolmetahulise nurga $SABC$ ja $S'A'B'C'$ puhul kehtivad võrdused $\angle ASB = \angle A'S'B'$, $\angle ASC = \angle A'S'C'$, $\angle BSC = \angle B'S'C'$. Tõestame kahetahuliste nurkade võrdsuse $\angle B \cdot SA \cdot C = \angle B' \cdot S'A' \cdot C'$.

Selleks märgime mõlema kolmetahulise nurga servadel võrdsed lõigud $SA = SB = SC = S'A' = S'B' = S'C'$ (joonis 59)¹. Saame

¹ Joonisel 59 ja veel mõnel järgnevatel joonistel on kujutatud ainult üks kahest võrdsest kolmetahulisest nurgast; lugeja kujutleb kergesti ka teist, temaga võrdset nurka.

kolm paari võrdseid võrdhaarseid kolmnurki: ASB ja $A'S'B'$, ASC ja $A'S'C'$, BSC ja $B'S'C'$. Siit saame võrdused $\angle SAB = \angle S'A'B'$, $\angle SAC = \angle S'A'C'$, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ ja $BC = B'C'$, nii et kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$ on samuti võrdsed ja seega $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

Et nurgad SAB , SAC , $S'A'B'$ ja $S'A'C'$ on teravnurgad, siis lõikudel SA ja $S'A'$ saab valida niisugused punktid E ja E' , et lõigud AE ja $A'E'$ on võrdsed ja et servale SA punktis E tõmmatud ristlõigud, mis asetsevad tahkudel ASB ja ASC , lõikavad lõike AB ja AC endid (aga mitte nende pikendusi) mingeis punktides F ja G , ning et servale $S'A'$ punktis E' tõmmatud analoogilised ristlõigud lõikavad lõike $A'B'$ ja $A'C'$ endid mingeis punktides F' ja G' . Lugeja tõestab raskusteta, et selleks tuleb punktid E ja E' võtta punktidele A ja A' «küllalt lähedal», ja fikseerib selle väljendi täpse tähenduse. Täisnurksed kolmnurgad AEF ja $A'E'F'$ osutuvad võrdsedeks ($AE = A'E'$, $\angle EAF = \angle E'A'F'$), millest järeldub, et $AF = A'F'$ ja $EF = E'F'$. Analoogiliselt järeldub täisnurksete kolmnurkade AEG ja $A'E'G'$ võrdsusest, et $AG = A'G'$ ja $EG = E'G'$.



Joonis 59.

Vaatleme lõpuks veel kaht paari võrdseid kolmnurki. Kolmnurgad AFG ja $A'F'G'$ on võrdsed ($AF = A'F'$, $AG = A'G'$, $\angle FAG = \angle F'A'G'$), nii et $FG = F'G'$. Järelikult ka kolmnurgad EFG ja $E'F'G'$ on võrdsed (kolme külje põhjal), millest $\angle FEG = \angle F'E'G'$. Servade SA ja $S'A'$ juures olevad kahetahulised nurgad on võrdsed, sest neil on võrdsed joonnurgad FEG ja $F'E'G'$.

Analoogiliselt tõestatakse ka ülejäänud kahetahuliste nurkade võrdsus.

Järeldus. Kui kolmetahulise nurga kaks tasanurka on võrdsed, siis on võrdsed ka kahetahulised nurgad, mis asetsevad nende võrdsete tasanurkade vastas.¹

Tõepoolest, kui kolmetahulisel nurgal $SABC$ on võrdsed tasanurgad ASB ja ASC , siis kolmetahulise nurga $SABC$ ja temaga ühtiva kolmetahulise nurga $SACB$ suhtes on rakendatav äsjatõestatud teoreem.

Kolmetahulist nurka, millel on kaks võrdset tasanurka, nimetatakse mõnikord võrdhaarseks kolmetahuliseks nurgaks.

¹ Kasutades seda omadust, on kerge tõestada, et kui kolmetahuline nurk $SABC$ võrdsete tasanurkadega ASB ja ASC on pärisvõrdne kolmetahulise nurgaga $S'A'B'C'$, siis ta on peegeldusvõrdne kolmetahulise nurgaga $S'A'C'B'$ (pöörata tähelepanu tähtede järjekorrale!); vt. viidet 2 lk. 85

Teoreem 250 («kolmetahuliste nurkade võrdsuse esimene tunnus»). *Kui ühe kolmetahulise nurga kaks tasanurka on vastavalt võrdsed teise nurga kahe tasanurgaga ja nende tasanurkade vahelised kahetahulised nurgad neis kolmetahulistes nurkades on võrdsed, siis need kolmetahulised nurgad on võrdsed.*

Tõestus. Olgu kahe kolmetahulise nurga $SABC$ ja $S'A'B'C'$ puhul kehtivad võrdsed $\angle ASB = \angle A'S'B'$, $\angle ASC = \angle A'S'C'$ ja $\angle B \cdot SA \cdot C = \angle B' \cdot S'A' \cdot C'$. Kui tõestame, et tasanurgad BSC ja $B'S'C'$ on võrdsed, siis kolmetahuliste nurkade võrdsus järeldub teoreemist 249.

Nende tasanurkade võrdsuse tõestamiseks toimime analoogiliselt teoreemi 249 tõestamisega.

Mõlema kolmetahulise nurga servadel märgime jälle võrdsed lõigud $SA = SB = SC = S'A' = S'B' = S'C'$ (joonis 59). Saame kaks paari võrdseid võrdhaarseid kolmnurki ASB ja $A'S'B'$, ASC ja $A'S'C'$, milledes $\angle SAB = \angle S'A'B'$, $\angle SAC = \angle S'A'C'$, $AB = A'B'$ ja $AC = A'C'$.

Edasi võtame servadel SA ja $S'A'$ punktid E ja E' ning konstrueerime punktid F , F' , G ja G' samuti, nagu seda tegime ülalpool. Saame jälle, et $AF = A'F'$, $EF = E'F'$, $AG = A'G'$ ja $EG = E'G'$.

Lõpuks tuleb järjestikku vaadelda nelja paari võrdseid kolmnurki, nimelt kolmnurki EFG ja $E'F'G'$ ($EF = E'F'$, $EG = E'G'$, $\angle FEG = \angle F'E'G'$ kui võrdsete kahetahuliste nurkade joonnurgad), millede võrdsusest järeldub, et $FG = F'G'$, edasi kolmnurki AFG ja $A'F'G'$ (mis on võrdsed kolme külje põhjal), millede võrdsusest järeldub, et $\angle FAG = \angle F'A'G'$, siis kolmnurki ABC ja $A'B'C'$ ($AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$), millede võrdsusest järeldub, et $BC = B'C'$, ja lõpuks kolmnurki BSC ja $B'S'C'$ (mis on võrdsed kolme külje põhjal), millede võrdsusest järeldubki, et $\angle BSC = \angle B'S'C'$.

Kolmetahuliste nurkade võrdsuse järgnevate tunnuste, eriti «teise tunnuse» tõestamiseks vajame üht uut mõistet.

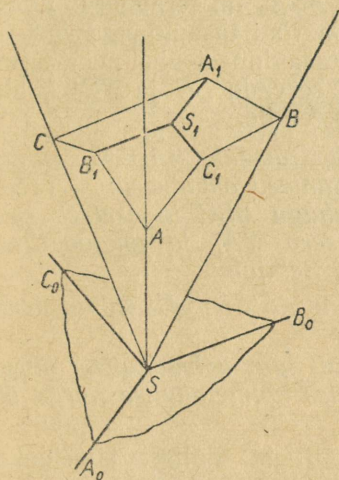
Võtame antud kolmetahulise nurga $SABC$ (joonis 60) sees vabalt punkti S_1 ja tõmbame sellest kolmetahulise nurga tahkude tasapindadele BSC , CSA ja ASB vastavalt ristlõigud S_1A_1 , S_1B_1 ja S_1C_1 .

Tasapinnad $B_1S_1C_1$, $C_1S_1A_1$ ja $A_1S_1B_1$ on vastavalt risti sirgetega SA , SB ja SC ning lõikavad neid teatud punktides A , B ja C . Punkti S_1 saab alati võtta nii, et punktid A_1 , B_1 ja C_1 asetseksid antud kolmetahulise nurga tahkudel endil (aga mitte nende laiendustel)¹.

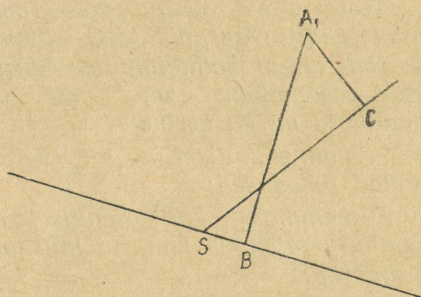
¹ Saab näiteks tõestada, et selle omadusega on iga punkt S_1 , mis asetseb antud kolmetahulise nurga sees sellel sirgel s , mida mööda lõikuvad tema seesmiste kahetahuliste nurkade bisektortasapinnad (vt. teoreemi 240 tõestust).

Punktid A , B ja C võivad asetseda nii antud kolmetahulise nurga servadel endil kui ka nende pikendustel üle tipu.

Vahekord kolmetahuliste nurkade $SABC$ ja $S_1A_1B_1C_1$ vahel on vastastikune: iga serv ühel neist on risti teise vastava tahuga; iga kahetahulise nurga joonnurk ühel neist täiendab teise vastavat tasanurka kahe täisnurgani.



Joonis 60.



Joonis 61.

Tõepoolest, $\angle B_1AC_1 + \angle B_1S_1C_1 = 2d$, sest $\angle AB_1S_1 = \angle AC_1S_1 = d$. Edasi, $\angle BA_1C + \angle BSC = 2d$, sest $\angle A_1BS = \angle A_1CS = d$ nii sel juhul, kui mõlemad punktid B ja C asetsevad antud kolmetahulise nurga servadel endil (joonis 60), kui ka sel juhul, kui üks neist asetseb serva pikendusel üle tipu (joonis 61). Kerge on näha, et mõlemad punktid B ja C korraga ei saa olla servade pikendustel. Analoogiline on olukord ka teiste nurkadega.

Niisiis, konstrueeritud kolmetahulised nurgad $SABC$ ja $S_1A_1B_1C_1$ on järgmiste omadustega.

Kummagi kolmetahulise nurga iga serv on risti teise kolmetahulise nurga ühe tahuga; kummagi kolmetahulise nurga iga kahetahulise nurga joonnurk täiendab teise üht tasanurka kahe täisnurgani.

On muidugi olemas mitte ainult üks kolmetahuline nurk, millel on antud kolmetahulise nurga $SABC$ suhtes need kaks omadust; need omadused on igal kolmetahulisel nurgal, mis on võrdne ülalpool konstrueeritud kolmetahulise nurgaga $S_1A_1B_1C_1$ ja mille servad on paralleelsed viimase servadega.

Ülalsõnastatud omadustega on muude hulgas ka kolmetahuline nurk $SA_0B_0C_0$ (joonis 60), mis on võrdne nurgaga $S_1A_1B_1C_1$ ja mis antud kolmetahulisest nurgast on saadud järgmisel viisil: serv

SA_0 on risti antud kolmetahulise nurga tahuga BSC ja asetseb sellele tahu tasapinnast samal pool, kus antud kolmetahulise nurga serv SA ; analoogiliselt on määratud servad SB_0 ja SC_0 .

Seejuures, ümberpöörduvalt, ka algul antud kolmetahulise nurga $SABC$ saab nurgast $SA_0B_0C_0$ selsamal viisil. Tõepoolest, et kiir SA_0 on risti tasapinnaga BSC ja asetseb kiirega SA sellest tasapinnast ühel ja samal pool, siis nurk ASA_0 on teravnurk. Edasi, et see nurk on teravnurk ja kiir SA on risti tasapinnaga $B_0S_0C_0$, siis asetsevad kiired SA ja SA_0 sellest tasapinnast ühel pool. Sama kehtib ka servade SB ja SB_0 , samuti servade SC ja SC_0 kohta.

Kokkuvõttes jõuame järgmisele teoreemile.

Teoreem 251. *Olgu kolmetahulisel nurgal $SA_0B_0C_0$ antud kolmetahulise nurga $SABC$ suhtes järgmised omadused: serv SA_0 on risti antud kolmetahulise nurga tahuga BSC ja asetseb sellele tahu tasapinnast samal pool, kus serv SA , ja analoogilised omadused on ka servadel SB_0 ja SC_0 . Sel juhul*

- 1) kolmetahulisel nurgal $SABC$ on nurga $SA_0B_0C_0$ suhtes need samad omadused;
- 2) kummalgi kolmetahulisel nurgal iga kahetahulise nurga joonnurk täiendab kahe täisnurgani teise kolmetahulise nurga üht tasanurka.

Kumbagi kahest kolmetahulisest nurgast, millest kõneldakse teoreemis 251, nimetatakse teise täiendusnurgaks (ehk teise polaarseks nurgaks).

Järeldus. *Kui kaks kolmetahulist nurka on võrdsed, siis on võrdsed ka nende kolmetahulised täiendusnurgad.*

Kasutades kolmetahuliste täiendusnurgade mõistet, saab kahest varem tõestatud võrdsusetunnusest (teoreemid 249 ja 250) tuletada kaks uut kolmetahuliste nurkade võrdsuse tunnust.

Teoreem 252 («kolmetahuliste nurkade võrdsuse teine tunnus»). *Kui ühe kolmetahulise nurga üks tasanurk on võrdne teise kolmetahulise nurga ühe tasanurgaga ja nende tasanurkade juures olevad kolmetahuliste nurkade kahetahulised nurgad on vastavalt võrdsed, siis need kolmetahulised nurgad on võrdsed.*

Tõestus. Olgu kahe kolmetahulise nurga $SABC$ (joonis 60) ja $S'A'B'C'$ ¹ puhul kehtivad järgmised võrdused: $\angle ASB = \angle A'S'B'$; $\angle B \cdot SA \cdot C = \angle B' \cdot S'A' \cdot C'$; $\angle A \cdot SB \cdot C = \angle A' \cdot S'B' \cdot C'$.

Vaatleme kolmetahulist nurka $SA_0B_0C_0$, mis on täiendusnurgaks nurgale $SABC$ ja kolmetahulist nurka $S'A'_0B'_0C'_0$, mis on täiendusnurgaks nurgale $S'A'B'C'$.

Teoreemi 251 põhjal on kolmetahulistel nurkadel $SA_0B_0C_0$ ja $S'A'_0B'_0C'_0$ antud juhul järgmised omadused: $\angle A_0 \cdot SC_0 \cdot B_0 = \angle A'_0 \cdot S'C'_0 \cdot B'_0$; $\angle B_0SC_0 = \angle B'_0S'C'_0$; $\angle A_0SC_0 = \angle A'_0S'C'_0$.

¹ Vt. viidet lk. 86.

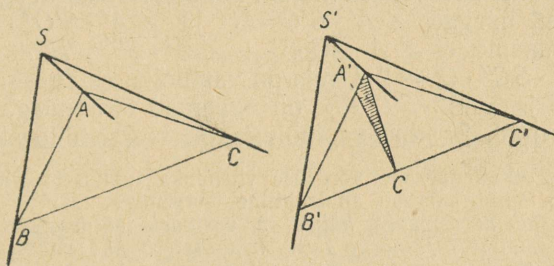
Järelikult kolmetahulised nurgad $SA_0B_0C_0$ ja $S'A'_0B'_0C'_0$ on võrdsed esimese tunnuse järgi (teoreem 250).

Nende nurkade võrdsusest järeldub (teoreem 251, järeldus) ka nende kolmetahuliste täiendusnurkade $SABC$ ja $S'A'B'C'$ võrdsus.

Järgmist võrdsusetunnust loeme kuuendaks tunnuseks, sest temale ei leidu analoogilist tasapinnageomeetrias, kus loetlesime viis võrdsusetunnust (I, teoreemid 12, 13, 15, 18 ja 27).

Teoreem 253 («kolmetahuliste nurkade võrdsuse kuues tunnus»). *Kui ühe kolmetahulise nurga kolm kahetahulist nurka on vastavalt võrdsed teise kolmetahulise nurga kolme kahetahulise nurgaga, siis need kolmetahulised nurgad on võrdsed.*

Tõestus. Olgu kolmetahuliste nurkade $SABC$ ja $S'A'B'C'$ puhul kehtivad järgmised võrdsused: $\angle B \cdot SA \cdot C = \angle B' \cdot S'A' \cdot C'$; $\angle C \cdot SB \cdot A = \angle C' \cdot S'B' \cdot A'$; $\angle A \cdot SC \cdot B = \angle A' \cdot S'C' \cdot B'$.



Joonis 62.

Konstrueerides jälle antud nurkade kolmetahulised täiendusnurgad $SA_0B_0C_0$ ja $S'A'_0B'_0C'_0$, saame (teoreemi 251 järgi) võrdsed $\angle B_0SC_0 = \angle B'_0S'C'_0$, $\angle C_0SA_0 = \angle C'_0S'A'_0$ ja $\angle A_0SB_0 = \angle A'_0S'B'_0$. Järelikult kolmetahulised nurgad $SA_0B_0C_0$ ja $S'A'_0B'_0C'_0$ on võrdsed kolmanda tunnuse järgi (teoreem 249).

Nende kolmetahuliste nurkade võrdsusest tuleneb (teoreem 251, järeldus) ka nende kolmetahuliste täiendusnurkade $SABC$ ja $S'A'B'C'$ võrdsus.

Tõestatud nelja võrdsusetunnust saab teatavas mõttes vaadelda kolmetahuliste nurkade võrdsuse põhitunnustena. Tõestame nüüd viimased kaks võrdsusetunnust, mis on analoogilised kolmnurkade võrdsuse neljanda ja viienda tunnusega.

Teoreem 254 («kolmetahuliste nurkade võrdsuse viies tunnus»). *Kui ühe kolmetahulise nurga kaks tasanurka on vastavalt võrdsed teise kolmetahulise nurga kahe tasanurgaga, esimese kolmetahulise nurga kahetahuline nurk, mis asetseb ühe nimetatud tasanurga vastas, on võrdne teise kolmetahulise nurga vastava kahetahulise nurgaga ja kolmetahuliste nurkade kahetahulised nurgad, mis asetsevad teiste, eelduse järgi võrdsete tasanurkade vas-*

tas, on mõlemad teravnurgad või mõlemad nürinurgad, siis need kolmetahulised nurgad on võrdsed.

Tõestus. Olgu kahe antud kolmetahulise nurga $SABC$ ja $S'A'B'C'$ (joonis 62) puhul kehtivad võrdused $\angle ASB = \angle A'S'B'$, $\angle ASC = \angle A'S'C'$ ja $\angle A \cdot SB \cdot C = \angle A' \cdot S'B' \cdot C'$ ning võrratused $\angle A \cdot SC \cdot B < d$ ja $\angle A' \cdot S'C' \cdot B' < d$ või võrratused $\angle A \cdot SC \cdot B > d$ ja $\angle A' \cdot S'C' \cdot B' > d$. Kui tõestame, et nurgad BSC ja $B'S'C'$ on võrdsed, siis kolmetahulised nurgad on võrdsed kolmanda võrdsusetunnuse järgi (teoreem 249).

Tõestame selle vastuväiteliselt. Oletame, et nurk BSC ei võrdu nurgaga $B'S'C'$ ja olgu, konkreetsuse mõttes, $\angle BSC < \angle B'S'C'$. Sel juhul võtame nurga $B'S'C'$ sees kiire $S'C''$ nii, et $\angle BSC = \angle B'S'C''$. Kolmetahulised nurgad $SABC$ ja $S'A'B'C''$ on võrdsed esimese tunnuse järgi (teoreem 250), millest saame, et $\angle A \cdot SC \cdot B = \angle A' \cdot S'C'' \cdot B'$ ja $\angle ASC = \angle A'S'C''$, järelikult $\angle A'S'C' = \angle A'S'C''$. Võrdhaarsel kolmetahulisel nurgal $S'A'C'C''$ kahetahulised nurgad $\angle A' \cdot S'C' \cdot C''$ ja $\angle A' \cdot S'C'' \cdot C'$ on võrdsed. Niisiis saame, et $\angle A \cdot SC \cdot B + \angle A' \cdot S'C' \cdot B' = \angle A' \cdot SC'' \cdot B' + \angle A' \cdot S'C'' \cdot C' = 2d$, mis on vastuolus eeldusega, et nurgad $\angle A \cdot SC \cdot B$ ja $\angle A' \cdot S'C' \cdot B'$ on mõlemad teravnurgad või mõlemad nürinurgad. Saadud vastuoluga on teoreem tõestatud.

Märkus. «Kolmnurkade võrdsuse viiendaks tunnuseks» loetakse mõnikord järgmist lauset, mis on analoogiline teoreemiga 254:

Kui ühe kolmnurga kaks külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe küljega, esimese kolmnurga nurk, mis asetseb ühe nimetatud külje vastas, on võrdne teise kolmnurga vastava nurgaga ja kolmnurkade nurgad, mis asetsevad teiste, eelduse järgi võrdsete külgede vastas, on mõlemad teravnurgad või mõlemad nürinurgad, siis need kolmnurgad on võrdsed.

Selle lause tõestus on täiesti analoogiline ülaltoodud teoreemi 254 tõestusega.

Tasapinnageomeetria teoreem 27 (I, lk. 45) järeldub kergesti äsjasõnatatud lausest, sest kolmnurga mingi kahe külje hulgast väiksema vastasnurk on ikka teravnurk.

Küsimuse detailssem uurimine näitab, et kolmetahuliste nurkade kohta ei kehti teoreem, mis on analoogiline teoreemiga 27 tasapinnageomeetriast.

Teoreem 255 («kolmetahuliste nurkade võrdsuse neljas tunnus»). *Kui ühe kolmetahulise nurga kaks kahetahulist nurka on vastavalt võrdsed teise kolmetahulise nurga kahe kahetahulise nurgaga, esimese kolmetahulise nurga tasanurk, mis asetseb ühe nimetatud kahetahulise nurga vastas, on võrdne teise kolmetahulise nurga vastava tasanurgaga ja kolmetahuliste nurkade tasanurgad, mis asetsevad teiste, eelduse järgi võrdsete kahetahuliste nurkade vastas, on mõlemad teravnurgad või mõlemad nürinurgad, siis need kolmetahulised nurgad on võrdsed.*

Tõestus. Olgu kolmetahuliste nurkade $SABC$ ja $S'A'B'C'$ puhul kehtivad võrdused $\angle A \cdot SC \cdot B = \angle A' \cdot S'C' \cdot B'$, $\angle A \cdot SB \cdot C = \angle A' \cdot S'B' \cdot C'$ ja $\angle ASC = \angle A'S'C'$ ning võrratused $\angle ASB < d$ ja $\angle A'S'B' < d$ või võrratused $\angle ASB > d$ ja $\angle A'S'B' > d$.

Järeldus. Iga kolmetahulise nurga tasanurkade summa on väiksem kui neli täisnurka.

Selle omaduse üht tõestust ja seejuures niisugust, mis kõlbas mitte ainult kolmetahulise, vaid iga hulktahulise nurga puhul, teab lugeja koolikursusest. Kolmetahulise nurga juhul saab anda lühema tõestuse.

Olgu $SABC$ antud kolmetahuline nurk ja SA_1 serva SA pikendus üle tipu S (joonis 64). Kolmetahulisest nurgast SA_1BC saame viimase teoreemi järgi, et $\angle BSC < \angle A_1SB + \angle A_1SC$, ja siit $\angle ASB + \angle ASC + \angle BSC < (\angle ASB + \angle A_1SB) + (\angle ASC + \angle A_1SC) = 4d$.

Toome nüüd näiteid kolmetahulistest nurkade niisugustest omadustest, mis oluliselt erinevad kolmnurkade vastavatest omadustest.

Teoreem 257. Iga kolmetahulise nurga kahetahuliste nurkade summa on suurem kui kaks täisnurka.

Tõestus. Olgu $SABC$ (vt. joon. 60) antud kolmetahuline nurk ja $SA_0B_0C_0$ tema täiendusnurk. Teoreemi 256 järelduse põhjal võime kirjutada:

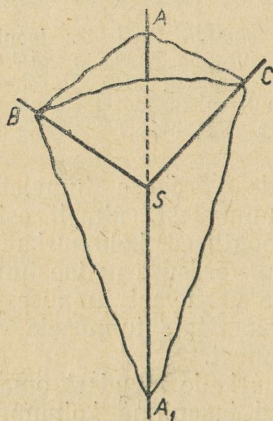
$$\angle B_0SC_0 + \angle C_0SA_0 + \angle A_0SB_0 < 4d.$$

Asendades siin tasanurgad B_0SC_0, \dots nende avaldistega teoreemi 251 põhjal, saame

$$(2d - \angle BSC) + (2d - \angle CSA) + (2d - \angle ASB) < 4d$$

ehk

$$\angle BSC + \angle CSA + \angle ASB > 2d.$$



Joonis 64.

Teoreem 258. Kolmetahulise nurga kahetahuline välisnurk (s. o. kahetahuline nurk, mis on kolmetahulise nurga mingile kahetahulisele nurgale kõrvunurgaks) võib olla suurem temaga mitte kõrvuti olevast sisenurgast või väiksem sellest või võrdne sellega.

Tõestus. Olgu $SABC$ mingi kolmetahuline nurk (joon. 64) ja SA_1 tema serva SA pikendus üle nurga tipu.

Kui kolmetahulise nurga $SABC$ valime nii, et tema kahetahulised nurgad servade SB ja SC juures on teravnurgad, siis tema kahetahuline välisnurk $C \cdot SB \cdot A_1$ on ilmselt suurem kui sellega mitte kõrvuti olev kahetahuline sisenurk $A \cdot SC \cdot B$. Ühtlasi kolmetahulise nurga SA_1BC kahetahuline

välisnurk $A \cdot SC \cdot B$ on väiksem kui temaga mitte kõrvuti olev sama kolmetahulise nurga kahetahuline sisenurk $C \cdot SB \cdot A_1$.

Ei ole raske tuua näidet ka niisuguse kolmetahulise nurga

kohta, mille kahetahuline välisnurk serva SB juures on võrdne kahetahulise sisenurgaga serva SC juures. Selleks tuleb ainult kolmetahuline nurk $SABC$ valida nii, et tasapind BSC oleks risti servaga SA .

§ 130. Täisnurksete kolmetahuliste nurkade võrdsuse tunnused.

Läheme üle täisnurksete kolmetahuliste nurkade, s. o. kahetahulist täisnurka omavate kolmetahuliste nurkade võrdsuse tunnuste uurimisele.

Märgime, et erinevalt kolmnurgast saab kolmetahuline nurk olla ühe kahetahulise täisnurgaga, kahe kahetahulise täisnurgaga või isegi kolme kahetahulise täisnurgaga.

Kahe või kolme kahetahulise täisnurgaga kolmetahulise nurga omadused tuletuvad väga lihtsalt ega paku erilist huvi. Nii tõestab lugeja kergesti (kasutades teoreemi 227 järeldest 2 ja teoreemi 213) järgmise lause.

Teoreem 259. *Kui kolmetahulise nurga kaks kahetahulist nurka on täisnurgad, siis nende vastas asetsevad tasanurgad on samuti täisnurgad.*

Ümberpöörduvalt: *kui kolmetahulise nurga kaks tasanurka on täisnurgad, siis nende vastas asetsevad kahetahulised nurgad on samuti täisnurgad.*

Järeldus. *Kui kolmetahulise nurga kõik kolm kahetahulist nurka on täisnurgad, siis ka kõik kolm tasanurka on täisnurgad.*

Ümberpöörduvalt: *kui kolmetahulise nurga kõik kolm tasanurka on täisnurgad, siis ka kõik kolm kahetahulist nurka on täisnurgad.*

Seetõttu võtame allpool uurimisele üksnes niisugused täisnurksed kolmetahulised nurgad, millel on ainult üks kahetahuline täisnurk.

Niisuguse kolmetahulise nurga tasanurki, mis moodustavad kahetahulise täisnurga, nimetame kaatetiteks, ja tasanurka, mis asetseb kahetahulise täisnurga vastas, nimetame hüpotenuusiks.

Formuleerime esiteks need täisnurksete kolmetahuliste nurkade võrdsuse tunnused; mis otseselt tulenevad üldiste kolmetahuliste nurkade võrdsuse tunnustest. Nende tõestamiseks tarvitseb ainult viidata vastavale üldisele teoreemile.

Teoreem 260. *Kui ühe täisnurkse kolmetahulise nurga kaks kaatetit on võrdsed teise täisnurkse kolmetahulise nurga kahe kaatetiga, siis need kolmetahulised nurgad on võrdsed. (Teoreem 250.)*

Teoreem 261. *Kui ühe täisnurkse kolmetahulise nurga üks kaatet on võrdne teise täisnurkse kolmetahulise nurga ühe kaatetiga ja nende kaatetite juures olevad kolmetahuliste nurkade kahetahulised nurgad, mis erinevad täisnurgast, on võrdsed, siis need kolmetahulised nurgad on võrdsed. (Teoreem 252.)*

Teoreem 262. Kui ühe täisnurkse kolmetahulise nurga kaks kahetahulist nurka, mis erinevad täisnurgast, on vastavalt võrdsed teise täisnurkse kolmetahulise nurga kahe kahetahulise nurgaga, siis need kolmetahulised nurgad on võrdsed. (Teoreem 253.)

Teoreem 263. Kui ühe täisnurkse kolmetahulise nurga üks täisnurgast erinev kahetahuline nurk on võrdne teise täisnurkse kolmetahulise nurga ühe kahetahulise nurgaga, nende kahetahuliste nurkade vastas asetsevad kolmetahuliste nurkade kaatedid on võrdsed ja kolmetahuliste nurkade hüpoteenuusid on mõlemad teravnurgad või mõlemad nürinurgad, siis need kolmetahulised nurgad on võrdsed. (Teoreem 255.)

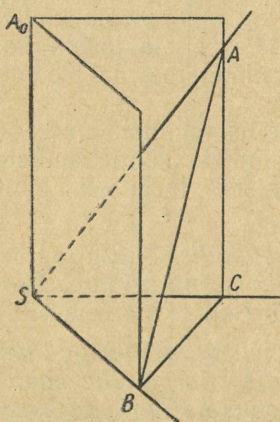
Märkus. Tingimus, et kolmetahuliste nurkade hüpoteenuusid oleksid mõlemad teravnurgad või mõlemad nürinurgad, on oluline; vt. teoreemi 255 puhul tehtud märkust ja joonist 63.

Järgmised kaks täisnurksete kolmetahuliste nurkade võrdsuse tunnust ei järeldu enam otseselt eelmise paragrahvi teoreemidest, vaid nõuavad tuletamiseks mõningaid täiendavaid kaalutlusi.

Teoreem 264. Kui ühe täisnurkse kolmetahulise nurga hüpoteenus ja üks kaatet on vastavalt võrdsed teise täisnurkse kolmetahulise nurga hüpoteenuusi ja ühe kaatetiga, siis need kolmetahulised nurgad on võrdsed.

Tõestus. Olgu kahe kolmetahulise nurga $SABC$ ja $S'A'B'C'$ puhul kehtivad järgmised võrdsused: $\angle A \cdot SC \cdot B = \angle A' \cdot S'C' \cdot B' = d$; $\angle ASB = \angle A'S'B'$; $\angle ASC = \angle A'S'C'$. Kui tõestame, et kahetahulised nurgad $\angle A \cdot SB \cdot C$ ja $\angle A' \cdot S'B' \cdot C'$ on mõlemad teravnurgad või mõlemad nürinurgad, siis antud kolmetahuliste nurkade võrdsus järeldub teoreemist 254.

Tähistame sümboliga SA_0 (joonis 65) punktist S väljuva kiire, mis on risti tasapinnaga BSC ja asetseb sellest samal pool, kus on serv SA . Serv SA on ilmselt tasapinnal A_0SC . Kui nurk ASC (kaatet) on teravnurk, siis kiir SA asetseb tasanurga A_0SC sees ja järelikult kahetahulise täisnurga $A_0 \cdot SB \cdot C$ sees; seetõttu asetseb ka tahk ASB sellesama kahetahulise nurga sees, nii et kahetahuline nurk $A \cdot SB \cdot C$ on teravnurk (kõik need väited järelduvad teoreemist 206 ruumi jaotamise kohta kahetahulise nurga poolt ja tasase teravnurga ning kahetahulise teravnurga definitsioonidest). Ümberpöörduvalt, kui kahetahuline nurk $A \cdot SB \cdot C$ on teravnurk, siis analoogilistel kaalutlustel ka nurk ASC on teravnurk. Kui nurk ASC on täisnurk, siis ilmselt ka kahetahuline nurk $A \cdot SB \cdot C$ on täisnurk, ja ümberpöörduvalt. Siit järeldub, et kui tasanurk



Joonis 65.

ASC on nürinurk, siis ka kahetahuline nurk $A \cdot SB \cdot C$ on nürinurk, ja ümberpöörduvalt.

Juhtu, kus võrdsed tasanurgad ASC ja $A'S'C'$ on täisnurgad, ei tarvitse vaadelda, sest antud kolmetahulistel nurkadel on sel juhul veel teine kahetahuline täisnurk, nimelt servade SB ja $S'B'$ juures. Kui need tasanurgad on mõlemad teravnurgad (mõlemad nürinurgad), siis ülalöeldu põhjal kahetahulised nurgad servade SB ja $S'B'$ juures on mõlemad teravnurgad (vastavalt mõlemad nürinurgad). Teoreem on tõestatud.

Teoreem 265. *Kui ühe täisnurkse kolmetahulise nurga üks kahetahuline nurk, mis erineb täisnurgast, on võrdne teise täisnurkse kolmetahulise nurga ühe kahetahulise nurgaga ja kolmetahuliste nurkade hüpoteenuusid on võrdsed, siis need kolmetahulised nurgad on võrdsed.*

Selle teoreemi tõestus on niivõrd lähedane eelmise tõestusele, et jätame selle lugeja hooleks; teoreemi 254 asemel tuleb toetuda teoreemile 255.

§ 131. Konstruktsioone.

Eelmistes paragrahvides käsitletud kolmetahuliste nurkade võrdsuse tunnused viivad järgmisele järeldusele. Kui võrdsed kolmetahulisi nurki mitte lugeda erinevateks, siis kolmetahuline nurk on täiesti määratud tema kolme sobivalt valitud «elemendi», s. o. tasanurga ja kahetahulise nurga andmisel.

See annab põhjust vaadelda rida ülesandeid kolmetahuliste nurkade konstrueerimisest nende elementide järgi. Piirdume ainult mõnega neist.

Konstruktsioon 97. Konstrueerida kolmetahuline nurk kahe tasanurga ja nende vahel oleva kahetahulise nurga järgi.

Konstruktsioon 98. Konstrueerida kolmetahuline nurk tasanurga ja kahe temaga külgneva kahetahulise nurga järgi.

Kummagi ülesande lahendamine on väga lihtne ja selle võime jätta lugeja teha. Mõlemad ülesanded on võimalikud ja kummalgi on üksainus lahend, muudugi kui iga antud tasanurk ja kahetahuline nurk on väiksem kui $2d$.

Konstruktsioon 99. Konstrueerida kolmetahuline nurk tema kolme tasanurga järgi.

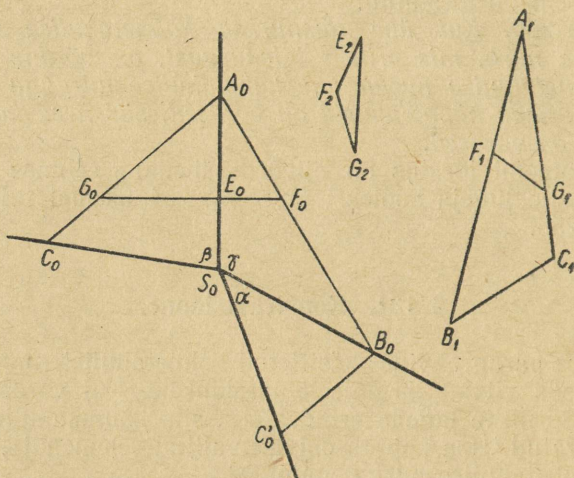
Olgu vaja konstrueerida kolmetahuline nurk $SABC$, teades tema kolme tasanurka $\angle BSC = \alpha$, $\angle CSA = \beta$ ja $\angle ASB = \gamma$.

Võtame nurga servadel punktid A , B ja C nii, et oleks $SA = SB = SC$, ja määrame punktid E , F ja G samuti, nagu on tehtud teoreemi 249 tõestamisel (vt. joon. 59).

«Lõikame» nüüd mõttes kolmetahulise nurga $SABC$ mööda serva SC lahti ja «laotame ta tasapinnale». Saame joonisel 66 näidatud kujundi, kus sümboolitega S_0 , A_0 , B_0 , E_0 , F_0 ja G_0 tähistatud punktide S , A , B , E , F ja G uued asukohad ja sümboolitega C_0 ja C'_0 punkti C uued asukohad.

See viib järgmisele konstruktsioonile. Konstrueerime mingil tasapinnal nurgad $C_0S_0A_0$, $A_0S_0B_0$ ja $B_0S_0C'_0$, mis on vastavalt võrdsed antud nurkadega β , γ ja α , ja märgime nende nurkade haaradel võrdsed lõigud $S_0A_0 = S_0B_0 =$

$= S_0C_0 = S_0C'_0$. Võtame lõigul S_0A_0 punkti E_0 nii, et punkti E_0 läbiv ja lõiguga S_0A_0 ristuv sirge lõikaks lõike A_0B_0 ja A_0C_0 endid (aga mitte nende pikendusi) punktides F_0 ja G_0 . Edasi konstrueerime kolmnurga $A_1B_1C_1$ kolme külje $A_1B_1 = A_0B_0$, $A_1C_1 = A_0C_0$ ja $B_1C_1 = B_0C'_0$ järgi ja märgime tema külgedel lõigud A_1F_1 ja A_1G_1 , mis on vastavalt võrdsed lõikudega A_0F_0 ja A_0G_0 . Lõpuks konstrueerime kolmnurga $E_2F_2G_2$ kolme külje $E_2F_2 = E_0F_0$, $E_2G_2 = E_0G_0$ ja $F_2G_2 = F_1G_1$ järgi. Viimase kolmnurga tipu E_2 juures olev nurk on võrdne otsitava kolmetahulise nurga serva SA juures oleva joonnurgaga. Nii siis jõuame konstruktsiooni 97 juurde.



Joonis 66.

Kirjeldatud konstruktsiooni saab asendada tunduvalt lihtsamaga (missugusega?), kui antud nurkade α , β ja γ hulgas leidub kaks teravnurka.

Selleks, et ülesandel leiduks lahend, on teoreemi 256 ja selle järelduse põhjal tarvilik, et üks antud kolmest tasanurgast oleks väiksem kahe teise summast, kuid suurem nende vahest¹, nende summa aga oleks väiksem kui $4d$.

Samad tingimused osutuvad ka piisavateks. Nende tingimuste piisavuse range tõestus aga ei ole hoopiski lihtne ja me saame selle anda alles hiljem (§ 152, konstruktsioon 106, märkus).

Konstruktsioon 100. Konstrueerida kolmetahuline nurk tema kolme kahetahulise nurga järgi.

Kui λ , μ ja ν on antud kahetahulised nurgad, siis otsitava kolmetahulise nurga kolmetahulise täiendusnurga saab konstrueerida tema kolme tasanurga järgi (konstruktsioon 99). Tõepoolest, teoreemi 251 järgi on selle täiendusnurga tasanurgad $2d - \lambda$, $2d - \mu$ ja $2d - \nu$.

Konstrueeritud kolmetahulise täiendusnurga kahetahulised nurgad määravad (jälle teoreemi 251 järgi) otsitava kolmetahulise nurga tasanurgad. Nii siis ülesanne taandub ühele (ükskõik missugusele) konstruktsioonidest 97–99.

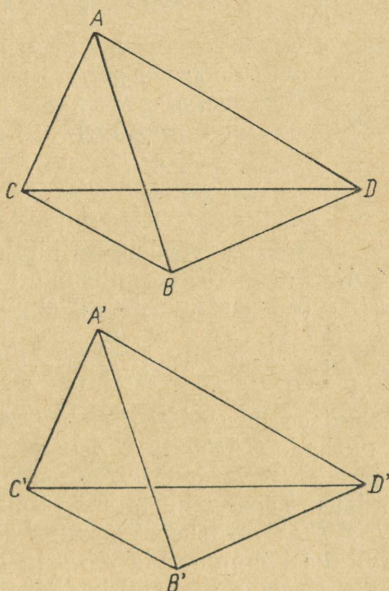
¹ Võrrelda vastavate arutlustega kolmnurga külgede kohta raamatu esimeses osas (I, lk. 42).

§ 132. Tetraeedrite võrdsus.

Kaht tetraeedrit nimetatakse võrdseteks, kui nende servad, tasanurgad, kahetahulised nurgad, tahud ja kolmetahulised nurgad on vastavalt võrdsed. Saab kõnelda ka, nagu paragrahvis 129, pärisvõrdsetest ja peegeldusvõrdsetest tetraeedritest.

On võimalik sõnastada rida teoreeme, mida tuleks nimetada tetraeedrite võrdsuse tunnusteks. Et need tunnused ja nende tõestamine ei paku huvi, siis piirdume ainult ühe niisuguse vaatlemisega, millele meil tuleb edaspidi toetuda.

Teoreem 266. *Kui ühe tetraeedri üks kahetahuline nurk on võrdne teise tetraeedri ühe kahetahulise nurgaga ja nende tetraeedrite tahud, mis moodustavad neid kahetahulisi nurki, on vastavalt võrdsed ja ühteviisi asetatud, siis tetraeedrid on võrdsed.*



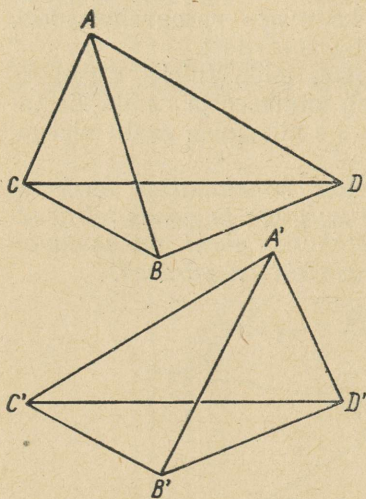
Joonis 67.

Sõnad «ühteviisi asetatud» tähendavad järgmist: esimese tetraeedri ühest tipust väljuvale kolmele servale vastavad teisel tetraeedril eelduse järgi nendega võrdsed servad, mis samuti väljuvad ühest tipust.

Joonisel 67 on kujutatud kaks tetraeedrit, mis täidavad teoreemi eeldust, ja nimelt $\angle A \cdot CD \cdot B = \angle A' \cdot C'D' \cdot B'$, $\triangle ACD = \triangle A'C'D'$ ja $\triangle BCD =$

¹ Meenutame, et kirjutis $\triangle ACD = \triangle A'C'D'$ tähendab meil mitte ainult kolmnurkade ACD ja $A'C'D'$ endi võrdsust, vaid ka külgede võrdsust: $AC = A'C'$, $AD = A'D'$ ja $CD = C'D'$ (vt. I, lk. 33).

= $\triangle B'C'D'$. Eelduse järgi võrdsed tahud on «ühteviisi asetatud». Tõepoolest, tipust C väljuvatele servadele CA , CB ja CD vastavad nendega võrdsed servad $C'A'$, $C'B'$ ja $C'D'$, mis väljuvad tipust C' . Sama on kehtiv servade DA , DB , DC ja $D'A'$, $D'B'$, $D'C'$ kohta.



Joonis 68.

Joonisel 68 on kujutatud kaks tetraeedrit, millede kahetahulised nurgad servade CD ja $C'D'$ juures on võrdsed ja neid kahetahulisi nurki moodustavad tahud on vastavalt võrdsed (tahk ACD on võrdne tahuga $A'D'C'$ ja tahk BCD on võrdne tahuga $B'C'D'$). Need kaks tetraeedrit ei rahulda siiski teoreemi eeldust. Vastavalt võrdsed tahud ei ole «ühteviisi asetatud»: tipust C väljuvatele servadele CA , CB ja CD vastavad eelduse järgi nendega võrdsed servad $D'A'$, $C'B'$ ja $C'D'$, mis ei välju ühest ja samast tipust. Niisugused kaks tetraeedrit üldiselt ei ole võrdsed.

Tõestus. Olgu kahe tetraeedri $ABCD$ ja $A'B'C'D'$ (joonis 67) puhul kehtivad võrdsused¹
 $\angle A \cdot CD \cdot B = \angle A' \cdot C'D' \cdot B'$,
 $\triangle ACD = \triangle A'C'D'$ ja $\triangle BCD = \triangle B'C'D'$.

Kolmnurkade ACD ja $A'C'D'$ võrdsusest järeldub, et $\angle ACD = \angle A'C'D'$ ja $\angle ADC = \angle A'D'C'$; niisamuti järeldub kolmnurkade BCD ja $B'C'D'$ võrdsusest, et $\angle BCD = \angle B'C'D'$. Kolmetahulised nurgad $CABD$ ja $C'A'B'D'$ on võrdsed esimese tunnuse järgi (teoreem 250), sest $\angle ACD = \angle A'C'D'$, $\angle BCD = \angle B'C'D'$ ja $\angle A \cdot CD \cdot B = \angle A' \cdot C'D' \cdot B'$. Analoogiliselt on võrdsed ka kolmetahulised nurgad $DABC$ ja $D'A'B'C'$.

Kolmetahulistest nurkade $CABD$ ja $C'A'B'D'$ võrdsusest järeldub tasanurkade ACB ja $A'C'B'$ võrdsus ja, tähendab, ka kolmnurkade ABC ja $A'B'C'$ võrdsus. Täpselt niisamuti järeldub kolmetahulistest nurkade $DABC$ ja $D'A'B'C'$ võrdsusest tasanurkade ADB ja $A'D'B'$ võrdsus ja, tähendab, ka kolmnurkade ABD ja $A'B'D'$ võrdsus.

Kõikide vastavate servade, tasanurkade ja tahkude võrdsus järeldub öeldust otseselt. Vastavate tasanurkade võrdsuse tõttu on võrdsed (teoreemi 249 järgi) kõik vastavad kolmetahulised nurgad ja järelikult ka kõik vastavad kahetahulised nurgad. Tetraeedrite võrdsus on tõestatud.

¹ Vt. eelmist viidet.

§ 133. Mistahes kujundite võrdsus.

Asume ruumi juhule üldistama mistahes liiki kujundite võrdsuse mõistet (I, § 18).

Seejuures kujundi all mõistame nagu tasapinnageomeetriaski iga punktide hulka. Kujundeid tähistame endiselt rasvaste püst-tähtedega.

Kujundit **F** nimetatakse võrdseks kujundiga **F'**, kui nende kujundite punktide vahel saab korraldada üksühese vastavuse nii, et iga lõik, mis ühendab esimese kujundi **F** mingit kaht punkti, on võrdne lõiguga, mis ühendab neile vastavaid teise kujundi **F'** punkte.¹

Saab tõestada, et võrdsed kahetahulised nurgad, võrdsed kolmetahulised nurgad ja võrdsed tetraeedrid (mis on defineeritud paragrahvides 117, 129 ja 132) on äsjaantud definitsiooni mõttes võrdsed kujundite erijuhud.

Sellest definitsioonist, mis sõna-sõnalt kordab vastavat definitsiooni tasapinnageomeetriast, tuleneb rida võrdsete kujundite omadusi. Me ei anna tõestusi neile omadustele, mida saab tõestada täiesti analoogiliselt võrdsete kujundite vastavate omadustega tasapinnageomeetrias.

1°. *Kujundite võrdsusel on refleksiivsuse, sümmeetrilisuse ja transitiiivsuse omadus.*

2°. *Kujundi **F** punktidele, mis asetsevad ühel sirgel, vastavad temaga võrdse kujundi **F'** punktid, mis samuti asetsevad ühel sirgel; mingi lõigu punktidele vastavad samuti mingi lõigu punktid.*

Siit järeldub, et kujundi **F** igale kiirele vastab kujundis **F'** samuti kiir ja igale tasanurgale samuti tasanurk.

3°. *Võrdsete kujundite vastavad tasanurgad on võrdsed.*

4°. *Kui kujundis **F** punktid **C** ja **D** asetsevad punktidega **A** ja **B** ühel ja samal tasapinnal ning sirgest **AB** eri pooltel (ühel pool) ja punktidele **A**, **B**, **C** ja **D** vastavad kujundis **F'** punktid **A'**, **B'**, **C'** ja **D'**, siis asetsevad ka punktid **C'** ja **D'** punktidega **A'** ja **B'** ühel tasapinnal ning sirgest **A'B'** eri pooltel (vastavalt ühel pool). Kui kujundi **F** mingid neli punkti ei asetse ühel ja samal tasapinnal, siis ei asetse ühel ja samal tasapinnal ka neile vastavad kujundi **F'** punktid.*

Tõepoolest, omaduse 3° järgi $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $\angle BAD = \angle B'A'D'$ ja $\angle CAD = \angle C'A'D'$.

Olgu punktid **C** ja **D** punktidega **A** ja **B** ühel tasapinnal ja sirgest **AB** eri pooltel. Siis nurk **CAD** (mille seesmiseks piirkonnaks loeme selle piirkonna, kus asetseb kiir **AB**) on nurkade **BAC** ja **BAD** summa. Järelikult on ka nurgaga **CAD** võrdne nurk **C'A'D'** nurkade **B'A'C'** ja **B'A'D'** summa, kuid see on (teoreemi 256 põh-

¹ Võrdsete kujundite sellise definitsiooni kohta vt. märkust paragrahvis 129 (lk. 86).

jal) võimalik ainult sel juhul, kui kiired $A'C'$ ja $A'D'$ asetsevad sirgega $A'B'$ ühel tasapinnal ja sellest sirgest eri pooltel. Analooiline mõttekäik on rakendatav ka sel juhul, kui punktid C ja D on sirgest AB ühel pool.

Kui nüüd kujundi F punktid A, B, C ja D ei asetse ühel tasapinnal, siis

$$|\angle BAC - \angle BAD| < \angle CAD < \angle BAC + \angle BAD.$$

Järelikult

$$|\angle B'A'C' - \angle B'A'D'| < \angle C'A'D' < \angle B'A'C' + \angle B'A'D'.$$

Kuid see seos on võimalik ainult juhul, kui kiired $A'B', A'C'$ ja $A'D'$ ei asetse ühel ja samal tasapinnal.

Tõestatud omadusest järeldub, et tasapinnale vastab tasapind, pooltasapinnale pooltasapind, poolruumile poolruum, kahetahulisele nurgale ja kolmetahulisele nurgale kahetahuline nurk ja kolmetahuline nurk, tetraeedrile tetraeeder, tasanurga, kahetahulise nurga ja kolmetahulise nurga seesmisele piirkonnale seesmine piirkond jne.

5°. *Võrdsete kujundite vastavad kolmetahulised nurgad on võrdsed.*

Tõepoolest, olgu $SABC$ kujundi F mingi kolmetahuline nurk ja S', A', B' ja C' kujundi F' punktid, mis vastavad punktidele S, A, B ja C . Kolmetahulised nurgad $SABC$ ja $S'A'B'C'$ osutuvad võrdseteks, sest on võrdsed tasanurgad $\angle BSC = \angle B'S'C', \angle CSA = \angle C'S'A'$ ja $\angle ASB = \angle A'S'B'$, mis järeldub võrdsete kujundite omadusest 3°.

Siit järeldub, et võrdsete kujundite vastavad kahetahulised nurgad on võrdsed.

Nimetame nüüd kujundi tasaseks, kui tema kõik punktid asetsevad ühel ja samal tasapinnal, ja ruumiliseks, kui tema punktide hulgas leidub neli mitte ühel tasapinnal asetsevat punkti.

Võrdsete kujundite omaduse 4° põhjal mingi tasase kujundiga võrdne kujund on samuti tasane ja mingi ruumilise kujundiga võrdne kujund on samuti ruumiline.

Meelevaldselt antud tasase või ruumilise kujundiga võrdse kujundi olemasolu näitavad järgmised kaks teoreemi.

Teoreem 267. *Olgu F ja F' kaks võrdset tasast kujundit ja X mingi punkt, mis asetseb kujundi F tasapinnal. Kujundi F' tasapinnal leidub niisugune punkt X' , et kujund FX , mis koosneb kujundi F kõikidest punktidest ja punktist X , on võrdne kujundiga $F'X'$. Niisuguse omadusega punkt X' on ainus, kui kujundi F punktide hulgas leidub kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel.*

Selle teoreemi tõestus on sedavõrd lähedane teoreemi 49 tõestusele (I, § 18), et ei ole vajadust tema juures peatuda. Märgime ainult seda, et punkt X' peab ülalpool sõnastatud võrdsete kujundite omaduse 4° põhjal asetsema kujundi F' kõikide punktide ühisel tasapinnal.

Järeldused. 1. Olgu antud tasane kujund F missugune tahes, ikka leidub lõpmatu hulk kujundeid F' , mis on võrdsed kujundiga F .

Kui kujundi F kõik punktid asetsevad ühel sirgel, siis iga niisugune kujund F' on täiesti määratud, kui antakse kaks punkti A' ja B' , mis vastavad kujundi F antud punktidele A ja B ; need punktid peavad olema niisugused, et $AB = A'B'$ (aga muus osas misugused tahes).

Kui tasase kujundi F punktide seas leidub kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel, siis iga niisugune kujund F' on täiesti määratud, kui antakse kolm punkti A' , B' ja C' , mis vastavad kujundi F mitte ühel sirgel antud punktidele A , B ja C ; need punktid peavad olema niisugused, et $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (aga muus osas misugused tahes).

2. Kui tasase kujundi F kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti A , B ja C ühtivad kujundiga F võrdse kujundi F' vastavate punktidega A' , B' ja C' , siis ühtib ka kujundi F iga punkt kujundi F' vastava punktiga.

Teoreem 268. Olgu F ja F' kaks võrdset (tasast või ruumilist) kujundit ja X mingi punkt. On olemas niisugune punkt X' , et kujund FX on võrdne kujundiga $F'X'$. Niisuguse omadusega punkt X' on ainus, kui kujund F on ruumiline.

Tõestus. Tähistame kujundi F punktidele A, B, C, D, E, \dots vastavad kujundi F' punktid tähtedega $A', B', C', D', E', \dots$

Kui kujund F (ja järelikult ka F') on tasane ja punkt X asetseb kujundi F kõikide punktide ühisel tasapinnal, siis tõestatakse lause taandub teoreemile 267.

Vaatleme kaht teist võimalikku juhtu.

1) Kujund F (ja järelikult ka kujund F') on tasane, kuid punkt X ei asetse kujundi F kõikide punktide ühisel tasapinnal (joon. 69). Siis ka punkt X' ei asetse kujundi F' kõikide punktide ühisel tasapinnal.

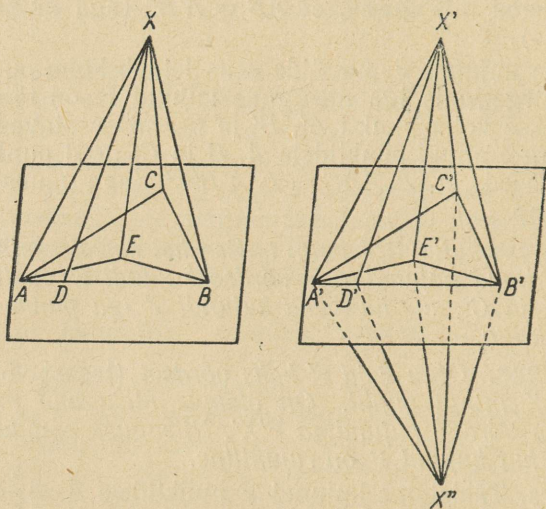
Olgu A, B ja C kujundi F mingid kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel. Niisuguseid punkte kindlasti leidub, sest vastasel juhul punkt X asetseks kujundi F kõikide punktide ühisel tasapinnal. On olemas kaks ja ainult kaks niisugust sirgest $A'B'$ väljuvat pooltasapinda ja kummalgi neist üks niisugune punkt X' ja X'' , et $\angle C \cdot AB \cdot X = \angle C' \cdot A'B' \cdot X' = \angle C' \cdot A'B' \cdot X''^1$ ja $\triangle ABX = \triangle A'B'X' = \triangle A'B'X''$. Seejuures tetraeedrid $ABCX, A'B'C'X'$ ja $A'B'C'X''$ on võrdsed² ja järelikult $CX = C'X' = C'X''$.

Kui D on sirge AB mingi punkt, siis kolmnurkade $ADX, A'D'X'$ ja $A'D'X''$ võrdsuse tõttu $DX = D'X' = D'X''$.

¹ Vt. viidet 1 lk. 99.

² Tetraeedrite võrdsus siin ja kogu edasises tõestuskäigus järeldeb teoreemist 266.

Tähistame tähega E kujundi F mingi punkti, mis ei asetse sirgel AB (eelduse kohaselt punkt E asetseb tasapinnal ABC). Kahtahuliste nurkade võrdsuse $\angle E \cdot AB \cdot X = \angle E' \cdot A'B' \cdot X' = \angle E' \cdot A'B' \cdot X''$ tõttu (nad on vastavalt võrdsed kahtahuliste nurkadega $\angle C \cdot AB \cdot X$, $\angle C' \cdot A'B' \cdot X'$ ja $\angle C' \cdot A'B' \cdot X''$ või siis



Joonis 69.

kahtahuliste nurkadega, mis on viimase kolme nurga kõrvunurkadeks) ja kolmnurkade võrdsuse $\triangle ABE = \triangle A'B'E'$, $\triangle ABX = \triangle A'B'X' = \triangle A'B'X''$ tõttu on tetraeedrid $ABEX$, $A'B'E'X'$ ja $A'B'E'X''$ võrdsed, millest järeldub lõikude võrdsus $EX = E'X' = E'X''$.

Niisiis antud juhul on olemas mitte üks, vaid kaks punkti X' ja X'' , mis täidavad teoreemi eeldust.

2) Kujund F on ruumiline. Kujundi F punktide hulgas leidub neli punkti A , B , C ja D , mis ei asetse ühel tasapinnal.

Kui punkt X asetseb tasapinnal ABC , siis temale vastav punkt X' määratakse võrdustest $\angle BAX = \angle B'A'X'$ ja $AX = A'X'$, nagu on näidatud teoreemi 49 tõestuses (I, § 18). Lõikude võrdsus $EX = E'X'$, kus E on kujundi F mistahes punkt, järeldub kolmnurkade AEX ja $A'E'X'$ võrdsusest, kui punkt E asetseb tasapinnal ABC , ja tetraeedrite $ABEX$ ja $A'B'E'X'$ võrdsusest, kui punkt E ei asetse tasapinnal ABC .

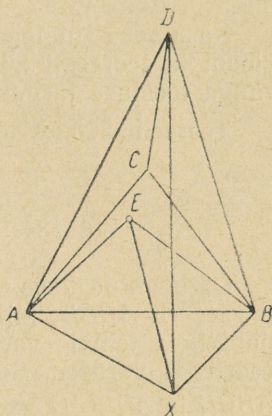
Olgu nüüd punkt X väljaspool tasapinda ABC (joonis 70).¹

¹ Joonisel 70 on kujutatud ainult kujund F ; lugeja kujutleb kergesti ka sellega võrdsed kujundit F' .

Otsitav punkt X' peab täitma tingimusi $\angle C \cdot AB \cdot X = \angle C' \cdot A'B' \cdot X'$ ja $\triangle ABX = \triangle A'B'X'$; kui punktid D ja X on seejuures tasapinnast ABC eri pooltel (ühel pool), siis peavad ka punktid D' ja X' asetsema eri pooltel (vastavalt ühel pool) tasapinnast $A'B'C'$. Nende nõuetega on punkti X' asukoht täielikult määratud. Tetraeedrite $ABCX$ ja $A'B'C'X'$ võrdsuse tõttu saame seejuures, et $CX = C'X'$.

Tõestame, et kujundi F mistahes punkti E kaugus punktist X on võrdne kujundi F' vastava punkti E' kaugusega punktist X' .

Kui punkt E asetseb sirgel AB , siis lõigud EX ja $E'X'$ on võrdsed kolmnurkade AEX ja $A'E'X'$ võrdsuse tõttu. Kui punkt E asetseb tasapinnal ABC , kuid mitte sirgel AB , siis lõigud EX ja $E'X'$ on võrdsed tetraeedrite $ABEX$ ja $A'B'E'X'$ võrdsuse tõttu. Kui punktid E ja X asetsevad tasapinnast ABC eri pooltel (ühel pool), siis ka punktid E' ja X' asetsevad eri pooltel (ühel pool) tasapinnast $A'B'C'$, nagu on kerge veenduda (kasutades punkte D ja D'). Seejuures kahetahulised nurgad $E \cdot AB \cdot X$ ja $E' \cdot A'B' \cdot X'$ on võrdsed kui vastavalt võrdsete kahetahuliste nurkade $E \cdot AB \cdot C$, $X \cdot AB \cdot C$ ja $E' \cdot A'B' \cdot C'$, $X' \cdot A'B' \cdot C'$ summad (vahed). Lõigud EX ja $E'X'$ osutuvad võrdseteks tetraeedrite $ABEX$ ja $A'B'E'X'$ võrdsuse tõttu.



Joonis 70.

Niisiis kujundid FX ja $F'X'$ on võrdsed.

Järeldused. 1. Olgu antud ruumiline kujund F missugune tahes, ikka leidub lõpmatu hulk kujundeid F' , mis on võrdsed kujundiga F .

Iga niisugune kujund F' on täiesti määratud, kui antakse tema neli punkti A' , B' , C' ja D' , mis vastavad kujundi F mitte ühel tasapinnal antud punktidele A , B , C ja D ; need punktid peavad olema valitud nii, et tetraeedrid $ABCD$ ja $A'B'C'D'$ oleksid võrdsed (aga muus osas missugused tahes).

2. Kui kujundi F neli mitte ühel tasapinnal asetsevat punkti A , B , C ja D ühtivad kujundiga F võrdse kujundi F' vastavate punktidega A' , B' , C' ja D' , siis ühtib ka kujundi F iga punkt kujundi F' vastava punktiga.

3. Kui A , B ja C on ruumilise kujundi F kolm punkti ja A' , B' ja C' on mingid kolm punkti, millede puhul $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, siis on olemas kaks ja ainult kaks kujundiga F võrdset kujundit, milledes kujundi F punktidele vastavad etteantud punktid A' , B' ja C' .

Tõepoolest, olgu D kujundi F mingi punkt, mis ei asetse tasa-

pinnal ABC . Sellele vastav teise kujundi punkt võib omada üht kahest asukohast D' ja D'' , mis on määratavad nii, nagu on näidatud teoreemi esimese juhu tõestuses. Kui valida üks neist kahest punktist D' ja D'' , siis kujundiga F võrdse kujundi muud punktid on üheselt määratud.

Kasutades ülalpool antud võrdsete kujundite üldist definitsiooni ja teoreemi 268, saaksime nüüd anda täpse tähenduse ja range tõestuse järgmisele teoreemile.

Teoreem 269. *Kaks võrdsete raadiustega kera on võrdsed.*

§ 134. Kujundite võrdsuse kaks liiki.

Olgu antud kaks võrdset ruumilist kujundit F ja F' . Vaatleme tetraeedrit $ABCD$, mille tippudeks on esimese kujundi mingid neli punkti, ja temale vastavat tetraeedrit $A'B'C'D'$. Need kaks tetraeedrit on võrdsed. Seejuures võivad kaks orienteeritud tetraeedrit \overline{ABCD} ja $\overline{A'B'C'D'}$ (§ 110) olla kas sama orientatsiooniga või vastandorientatsioonidega. On kehtiv järgmine teoreem (vrd. I, teoreem 51).

Teoreem 270. *Kui võrdsete kujundite mingid kaks vastavat tetraeedrit \overline{ABCD} ja $\overline{A'B'C'D'}$ on sama orientatsiooniga, siis nende kujundite iga kaks vastavat tetraeedrit on sama orientatsiooniga; kui aga tetraeedrid \overline{ABCD} ja $\overline{A'B'C'D'}$ on vastandorientatsioonidega, siis ka iga kaks vastavat tetraeedrit on vastandorientatsioonidega.*

Tõestus. Piirdume esimese juhuga, kus tetraeedrid \overline{ABCD} ja $\overline{A'B'C'D'}$ on sama orientatsiooniga; analoogilise tõestuse teise juhu kohta jätame lugeja anda.

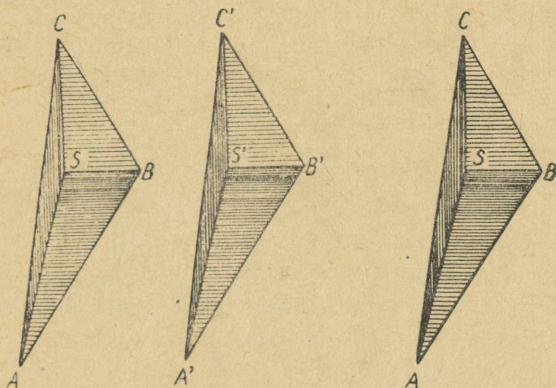
Olgu $XYZT$ esimese kujundi mistahes tetraeeder ja $\overline{X'Y'Z'T'}$ temale vastav teise kujundi tetraeeder.

Kui punktid D ja T on tasapinnast ABC ühel pool, siis ka punktid D' ja T' on tasapinnast $A'B'C'$ ühel pool (§ 133, 4°). Sel juhul saame kolm paari sama orientatsiooniga tetraeedreid, nimelt paari \overline{ABCD} ja $\overline{A'B'C'D'}$, paari \overline{ABCT} ja $\overline{A'B'C'T'}$ ning paari \overline{ABCT} ja $\overline{A'B'C'T'}$. Järelikult on tetraeedrid \overline{ABCT} ja $\overline{A'B'C'T'}$ sama orientatsiooniga.

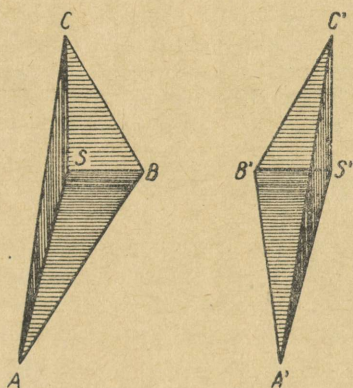
Kui punktid D ja T on tasapinnast ABC eri pooltel, siis ka punktid D' ja T' on tasapinnast $A'B'C'$ eri pooltel. Sel juhul saame ühe paari sama orientatsiooniga tetraeedreid \overline{ABCD} ja $\overline{A'B'C'D'}$ ning kaks paari vastandorientatsioonidega tetraeedreid: \overline{ABCD} ja

\overline{ABCT} ning $\overline{A'B'C'D'}$ ja $\overline{A'B'C'T'}$. Järelikult on tetraeedrid \overline{ABCT} ja $\overline{A'B'C'T'}$ jällegi sama orientatsiooniga.

Et tetraeedrid \overline{ABCT} ja $\overline{A'B'C'T'}$ on sama orientatsiooniga, siis ka tetraeedrid \overline{TABC} ja $\overline{T'A'B'C'}$ on sama orientatsiooniga. Korra-tes tetraeedrite \overline{TABC} ja $\overline{T'A'B'C'}$ ning punktide Z ja Z' puhul arutlust, mis äsja toimus tetraeedrite \overline{ABCD} ja $\overline{A'B'C'D'}$ ning punktide T ja T' puhul, jõuame järeldusele, et ka tetraeedrid \overline{TABZ} ja $\overline{T'A'B'Z'}$ on sama orientatsiooniga ja seega ka tetraeedrid \overline{ZTAB} ja $\overline{Z'T'A'B'}$ on sama orientatsiooniga. Korrates sama arut- lust kolmandat korda, jõuame järeldusele, et tetraeedrid \overline{ZTAY} ja $\overline{Z'T'A'Y'}$ ja järelikult ka tetraeedrid \overline{YZTA} ja $\overline{Y'Z'T'A'}$ on sama orientatsiooniga. Korrates lõpuks sama arutlust neljandat korda, saame tõestada, et ka tetraeedrid \overline{XYZT} ja $\overline{X'Y'Z'T'}$ on sama orien- tatsiooniga.



Joonis 71.



Joonis 72.

See mõttekäik ei ole õige, kui neli punkti A, B, C ja T või A, B, Z ja T või A, Y, Z ja T asetsevad ühel tasapinnal. Et vältida neid juhte, võib tetraeedri \overline{XYZT} tippe tähistada ikka nii, et tipp T ei asetseks tasapinnal \overline{ABC} , serv \overline{ZT} ei asetseks sirgega \overline{AB} ühel tasapinnal ja tahk \overline{YZT} ei läbiks tippu A .

Tõestatud teoreemist järeldub ruumiliste kujundite võrdsuse kahe eri liigi olemasolu (vrd. I, teoreem 52).

Teoreem 271. *On olemas kaks ruumiliste kujundite võrdsuse liiki. Ühel juhul võrdsete kujundite iga kaks vastavat tetraeedrit on sama orientatsiooniga ja iga kaks kolmetahulist nurka on sama-suunalised; teisel juhul vastavad tetraeedrid on vastandorientatsioonidega ja vastavad kolmetahulised nurgad on vastandsuuna- lised.*

Esimesel juhul nimetame kaht võrdset ruumilist kujundit (joonis 71) pärisvõrdseteks, teisel juhul (joonis 72) peegeldusvõrdseteks.

Kaks kujundit, mis on pärisvõrdsed kolmandaga, samuti kaks kujundit, mis on peegeldusvõrdsed kolmandaga, on ilmselt pärisvõrdsed; kaks kujundit, millest üks on kolmandaga pärisvõrdne, teine aga sellega peegeldusvõrdne, on omavahel peegeldusvõrdsed.

Liikumine ja sümmeetria.

§ 135. Liikumise mõiste.

Võrdsete kujundite uurimisel puudutasime seni ainult võrdsete kujundite endi omadusi ega pööranud üldse tähelepanu võrdsete kujundite vastastikusele asendile ruumis. Asudes nüüd selle küsimuse juurde, võtame tarvitusele kujundi liikumise mõiste.

Ruumigeomeetrias nagu ka tasapinnageomeetrias mõistetakse liikumisena (ehk nihkumisena), mis antud kujundi F viib temaga võrdseks antud kujundiks F' , lihtsalt seda vastavust, mis leiab aset kujundi F punktide ja kujundi F' punktide vahel. Võib öelda ka, et liikumine on antud kujundi teisendamine temaga võrdseks kujundiks.

Niiviisi mõistetud liikumisel ruumis on omadused, mis on täiesti analoogilised tasapinnalise liikumise omadustega (I, § 30). See-tõttu piirdume lihtsalt tähtsamate omaduste loetlemisega.

1°. Liikumine kujutab endast üksühest vastavust kahe võrdse kujundi punktide vahel või isegi kogu ruumi punktide vahel.

2°. Liikumise pöördvastavus on ka liikumine.

3°. Kahe liikumise korrutis (s. o. nende järjestikuse teostamise tulemus) on ka liikumine. Mingi liikumise ja tema pöördliikumise korrutis on samasus liikumine, s. o. liikumine, milles igale punktile vastab seesama punkt.

4°. Ühel sirgel asetsevad punktid muutuvad liikumisel punktideks, mis samuti asetsevad ühel sirgel; ühel tasapinnal asetsevad punktid muutuvad samuti ühel tasapinnal asetsevateks punktideks. Mingi lõigu punktid muutuvad liikumisel samuti teatud lõigu punktideks.

Siit järeldub, et kiirest saab liikumisel kiire, pooltasapinnast pooltasapinna, poolruumist poolruumi, tasanurga, kahetahulise nurga ja hulktahuka seesmisest piirkonnast samuti vastava seesmise piirkonna.

5°. On olemas üks ja ainult üks liikumine, millès antud punktile A vastab antud punkt A' , punktist A väljuvale antud kiirele h vastab punktist A' väljuv antud kiir h' , kiirest h väljuvale antud

poollasapinnale η vastab kiirest h' väljuv antud poollasapind η' ja poollasapinnast η väljuvale antud poolruumile H vastab poollasapinnast η' väljuv antud poolruum H' .

Kujundite võrdsuse kahele liigile (§ 134) vastavalt eristame ka liikumiste kaht liiki: kui kujundid F ja F' on pärisvõrdsed, siis kujundit F kujundiks F' viivat liikumist nimetatakse esimest liiki liikumiseks, ja kui nad on peegeldusvõrdsed, siis teist liiki liikumiseks.

Kahe üht ja sama liiki liikumise korrutis on esimest liiki liikumine ja kahe eri liiki liikumise korrutis on teist liiki liikumine.

Piirdudes liikumiste loetletud üldiste omadustega, asume nüüd liikumise üksikute tüüpide tundmaõppimisele ja liikumiste liigitamisele.

§ 136. Peegeldumine tasapinnast.

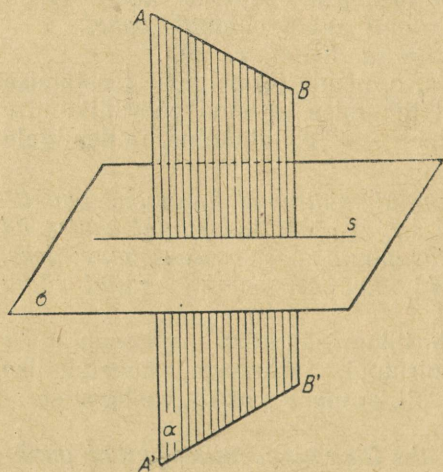
Kaht punkti A ja A' nimetatakse tasapinna σ suhtes sümmeetrilisteks, kui lõik AA' on risti tasapinnaga σ ja see tasapind poolitab lõigu AA' . Analoogiliselt ka kaht kujundit, mis koosnevad antud tasapinna suhtes paariti sümmeetrilistest punktidest, nimetatakse sümmeetrilisteks selle tasapinna suhtes.

Tasapinda σ nimetatakse seejuures peegeldustasapinnaks (ehk sümmeetriatasapinnaks).

Peegeldustasapinnal asetsevad punktid ühtivad oma sümmeetriliste punktidega.

Sümmeetriliste punktide põhiomadus väljendub järgmise teoreemina.

Teoreem 272. *Kui kahe lõigu otsad on vastavalt sümmeetrilised mingi tasapinna suhtes, siis need lõigud on võrdsed.*



Joonis 73.

siis need lõigud on võrdsed.

Tõestus. Olgu punktid A' ja B' (joonis 73) vastavalt sümmeetrilised punktidega A ja B tasapinna σ suhtes. Et sirged AA' ja BB' on risti tasapinnaga σ , siis nad on omavahel paralleelsed ja seepärast asetsevad ühel tasapinnal α . Tasapind α lõikab tasapinda σ ; tähistame nende lõikejoone tähega s . Lõigud AB ja $A'B'$ tasapinnal α on sümmeetrilised sirge s suhtes, sest lõigud AA' ja BB' on risti sirgega s ja poolituvad sellel sirgel. Järelikult lõigud AB ja $A'B'$ on

võrdsed tasapinnageomeetria vastava teoreemi põhjal (I, teoreem 73).

Järeldused: 1. *Kaks tasapinna suhtes sümmeetrilist kujundit on võrdsed.*

Tõepoolest, kui kujundi F' punktid A', B', C', \dots on antud tasapinna suhtes sümmeetrilised kujundi F punktidega A, B, C, \dots , siis tõestatud teoreemi järgi $AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C', \dots$. Need võrdused näitavadki, et kujundid F ja F' on võrdsed.

2. *Lõiguga sümmeetriline kujund on lõik; sirgega sümmeetriline kujund on sirge; tasapinnaga sümmeetriline kujund on tasapind jne.*

3. *Vastavus mingi kujundi F punktide ja temaga tasapinna suhtes sümmeetrilise kujundi F' punktide vahel on liikumine.*

Seda liikumise eriliiki nimetatakse peegeldumiseks tasapinnast ehk lihtsalt peegelduseks (kasutatakse ka väljendit «sümmeetria tasapinna suhtes»¹).

4. *Iga kaks ruumilist kujundit, mis on tasapinna suhtes sümmeetrilised, on teineteisega peegeldusvõrdsed (aga mitte pärisvõrdsed).*

Tõepoolest, olgu A_0, B_0 ja C_0 peegeldustasapinna σ kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel, D antud kujundi mingi punkt ja D' temale vastav punkt. Tetraeedrile $A_0B_0C_0D$ vastab antud peegelduses tetraeeder $A_0B_0C_0D'$.

Need kaks tetraeedrit on vastandorientatsioonidega, sest punktid D ja D' asetsevad tasapinnast σ eri pooltel. Järelikult on (teoreemi 270 järgi) vastandorientatsioonidega ka sümmeetriliste kujundite iga kaks vastavat tetraeedrit.

Niisiis, *peegeldumine tasapinnast on teist liiki liikumine.*

Nagu juba märkisime, ühtib peegeldustasapinnal asetsev punkt temaga sümmeetrilise punktiga.

Punkti, mis ühtib temale mingis liikumises vastava punktiga, nimetatakse selle liikumise kahekordseks punktiks (ehk püsipunktiks ehk invariantseks punktiks). Analooiliselt defineeritakse kahekordset (ehk invariantset) sirget ja kahekordset (ehk invariantset) tasapinda: kahekordseks sirgeks (tasapinnaks) nimetatakse sirget (tasapinda), mis ühtib temale mingis liikumises vastava sirgega (tasapinnaga). Kahekordse sirge (tasapinna) punktid üldiselt ei ole kahekordsed punktid (ühest punktist võib liikumisel saada teise).

Nüüd võime öelda, et peegeldustasapinnal asetsevad punktid on kahekordsed punktid.

Peegelduse kahekordseteks sirgeteks on ilmselt kõik peegeldustasapinnal asetsevad sirged ja kõik selle tasapinnaga ristuvad

¹ Eelistame siin nagu ka tasapinnageomeetrias kasutada terminit «peegeldus», aga mitte terminit «sümmeetria», sest vastasel juhul sõna «sümmeetria» omandab kahese tähenduse (vt. I, viide leheküljel 93).

sirged. Täpselt samuti on kahekordseteks tasapindadeks peegeldustasapind ja kõik sellega ristuvad tasapinnad.

Kahekordsete (ehk invariantsete) punktide, sirgete ja tasapindade mõistet kasutatakse mitte ainult liikumise, vaid ka teiste teisenduste puhul.

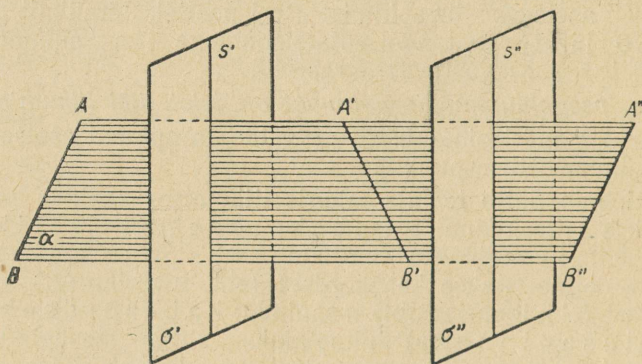
§ 137. Lüke; pööre.

Vaatleme nüüd kahe peegelduse korrutist.

Et peegeldus on teist liiki liikumine (kaks tasapinna suhtes sümmeetrilist kujundit on peegeldusvõrdsed), siis kahe peegelduse korrutis on esimest liiki liikumine. Vaatleme eraldi kaht juhtu: kui kaks peegeldustasapinda on paralleelsed ja kui nad lõikuvad.

Teoreem 273. *Paralleelsete peegeldustasapindade korral on kahe peegelduse korrutis järgmiste omadustega liikumine: kõik lõigud, mis ühendavad kaht vastavat punkti, on võrdsed, paralleelsed ja samasuunalised. Igaüks neist lõikudest on võrdne kahe peegeldustasapinna vahelise kauguse kahekordsega.*

Nimetatud omadusega liikumist nimetatakse lükkeks (kasutatakse ka teisi termineid: paralleelnihe, paralleellüke jne.). Lüke on täiesti määratud vastavate punktide ühe paariga A ja A' ehk, mis on seesama, vektoriga AA' . Seepärast võib kõnelda lükkest AA' .



Joonis 74.

Tõestus. Olgu σ' esimene peegeldustasapind ja σ'' teine peegeldustasapind (joonis 74). Tähistame antud kujundi mingit kaht punkti tähtedega A ja B , nendega tasapinna σ' suhtes sümmeetrilisi punkte tähtedega A' ja B' ning punktidega A' ja B' tasapinna σ'' suhtes sümmeetrilisi punkte tähtedega A'' ja B'' .

Punktid A , A' ja A'' asetsevad ühel sirgel, punktid B , B' ja B'' teisel, esimesega paralleelsel sirgel (või erijuhul selsamal sir-

gel l). Neid kaht paralleelset sirget läbiv tasapind α (või erijuhul seda sirget l läbiv mistahes tasapind α) lõikab tasapindu σ' ja σ'' mööda kaht paralleelset sirget s' ja s'' .

Punktid A' ja B' tasapinnal α on sirge s' suhtes sümmeetrilised punktidega A ja B ning punktid A'' ja B'' on sümmeetrilised punktidega A' ja B' sirge s'' suhtes. Järelikult saadakse punktid A'' ja B'' punktidest A ja B lükke abil tasapinnal α (I, teoreem 74). Seetõttu lõigud AA'' ja BB'' on võrdsed, paralleelsed ja sama-suunalised. Niisiis, nende omadustega on iga kaks lõiku, millest kumbki ühendab kaht vastavat punkti.

Lõik AA'' (ja järelikult ka igaüks lõikudest BB'' , ...) võrdub sirgete s' ja s'' vahelise kauguse kahekordsega, s. o. tasapindade σ' ja σ'' vahelise kauguse kahekordsega (sellesama teoreemi põhjal).

Järeldused. 1. Iga lüket saab vaadelda kahe peegelduse korrutisena; mõlemad peegeldustasapinnad σ' ja σ'' on risti lükke sihiga ja nendevaheline kaugus võrdub poolega lõigust, mis ühendab vastavaid punkte; suund tasapinna σ' poolt tasapinna σ'' poole ühtib lükke suunaga; muus osas on tasapinnad σ' ja σ'' meelevaldsed.

Tõepoolest, kui peegeldustasapinnad σ' ja σ'' on võetud nii, nagu näidatud, siis kahe peegelduse resultantlücke ühtib antud lükkega, sest neil lüketel on ühine suund ja suurus.

2. Lükkel puuduvad kahekordsed punktid, kuid tal on lõpmatu hulk kahekordseid sirgeid ja kahekordseid tasapindu; nendeks sirgeteks ja tasapindadeks on kõik lükke sihiga paralleelsed sirged ja tasapinnad.

Et kahe (peegeldustest erineva) liikumise korrutamise küsimuse süstemaatiline uurimine oma ulatuselt ei mahu käesoleva raamatu raamidesse¹, siis esitame siin ühe teoreemi kahe lükke korritise kohta, mida allpool tuleb kasutada.

Teoreem 274. Kahe lükke korrutis on samuti lücke; see lücke ei sõltu tegurite järjekorrast ja lükete $\overline{AA'}$ ja $\overline{A'A''}$ korrutis on lücke $\overline{AA''}$.

Selle teoreemi tõestus on sõna-sõnalt vastava teoreemi tõestuse kordamine tasapinnageometriast (I, teoreem 81), mispärast me seda ei anna.

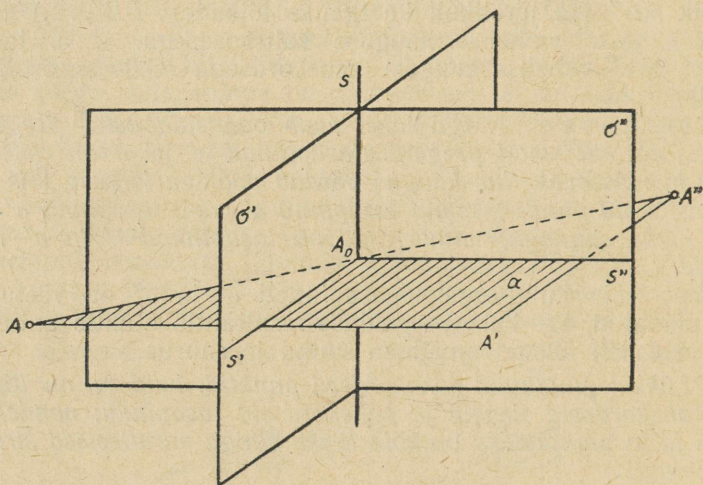
Järeldus. Iga lüket saab lõpmatult mitmesel viisil vaadelda kahe lükke korrutisena, ja nimelt lüket $\overline{AA'}$ saab vaadelda lükete $\overline{AA_0}$ ja $\overline{A_0A'}$ korrutisena, kusjuures A_0 on ruumi mistahes punkt.

Me vaatlesime kahe peegelduse korrutist juhul, kus peegeldustasapinnad on paralleelsed. Siirdume nüüd selle juhu vaatlemisele, kus kaks peegeldustasapinda lõikuvad, ja alustame ristuvate tasapindadega.

¹ Vt. näiteks Bogomolov [5], lk. 20–31.

Teoreem 275. Ristuvate peegeldustasapindade korral on kahe peegelduse korrutis järgmiste omadustega liikumine: kõik lõigud, milledest igaüks ühendab kaht vastavat punkti, lõikavad üht ja sama sirget täisnurga all ja poolituvad sellel sirgel.

Sellise omadusega liikumist oleks loomulik nimetada pöördeks (sirge ümber) 180° võrra, kuid arvestades seda, et sellel liikumisel on ruumigeomeetrias eriline osa¹, on soovitatav anda sellele eri nimetus. Seda liikumist võiks nimetada peegeldumiseks sirgest, poolpöördeks ehk Hadamard'i järgi transpositsiooniks sirge suhtes (kasutatakse ka terminit «sümmeetria sirge suhtes»).



Joonis 75.

Sirget s , millel asetsevad kõikide kahe kujundi vastavaid punkte paariti ühendavate lõikude keskpunktid, nimetatakse pöördeteljeks (ehk poolpöördeteljeks, peegeldusteljeks, transpositsiooniteljeks, sümmeetriateljeks).

Kaht punkti A ja A' nimetatakse sümmeetrilisteks sirge s suhtes, kui lõik AA' lõikab sirget s täisnurga all ja see sirge poolitab lõiku AA' ; kaht kujundit, mis koosnevad mingi sirge suhtes paariti sümmeetrilistest punktidest, nimetatakse sümmeetrilisteks selle sirge suhtes.

Tõestus. Olgu σ' ja σ'' kaks peegeldustasapinda ja s nende lõikejoon (joonis 75). Tähistame antud kujundi mingi punkti tähega A , selle punktiga tasapinna σ' suhtes sümmeetrilise punkti tähega A' ja punktiga A' tasapinna σ'' suhtes sümmeetrilise punkti tähega A'' . Kerge on näha, et punkte A , A' ja A'' läbib tasapind α on risti tasapindadega σ' ja σ'' ning järelikult on risti ka nende

¹ Vt. Hadamard [1], 2. osa, lk. 111—115.

lõikejoonega s . Tähistame sirged, mida mööda tasapind α lõikab tasapindu σ' ja σ'' , tähtedega s' ja s'' ning selle tasapinna ja sirge s lõikepunkti tähega A_0 .

Tasapinnal α on punkt A' sümmeetriline punktiga A sirge s' suhtes ja punkt A'' sümmeetriline punktiga A' sirgega s' ristuva sirge s'' suhtes. Järelikult läbib lõik AA'' punkti A_0 ja poolitub selles punktis. Lõik AA'' lõikab sirget s punktis A_0 täisnurga all, sest tasapind α on risti sirgega s .

Järeldus. *Peegeldumisel sirgest on lõpmatu hulk kahekordseid punkte, ja nimelt kõik teljel asetsevad punktid, lõpmatu hulk kahekordseid sirgeid, nimelt peegeldustelg ja kõik sirged, mis lõikavad teda täisnurga all, ja lõpmatu hulk kahekordseid tasapindu, nimelt kõik telge läbivad tasapinnad ja kõik teljega ristuvad tasapinnad.*

Enne kui edasi minna, teeme mõned märkused suunaga kahtahuliste nurkade kohta.

Sirgurgast erinevat kahtahulist nurka $\angle \eta\kappa$ nimetame suunaga kahtahuliseks nurgaks, kui eristame tema algustahku η tema lõpptahust κ .

Suunaga kahtahuliste nurkade kohta saab tõestada järgmise teoreemi: *kui kaks suunaga kahtahulist nurka, millel on ühine serv või paralleelsed servad, moodustavad lõikumisel mingi ühe ja sama, servaga ristuva tasapinnaga samasuunalised (vastandsuunalised) joonnurgad, siis moodustavad nad samasuunalised (vastavalt vastandsuunalised) joonnurgad ka lõikumisel iga teise tasapinnaga, mis on risti kahtahulise nurga servaga.*

See teoreem, mille tõestamisel me ei peatu, võimaldab tarvitusele võtta järgmise definitsiooni.

Kaht ühise servaga või paralleelsete servadega kahtahulist nurka nimetatakse samasuunalisteks või vastandsuunalisteks sõltuvalt sellest, kas nad moodustavad samasuunalised või vastandsuunalised joonnurgad lõikudes mingi tasapinnaga, mis on risti kahtahulise nurga servaga.

Paralleelsete (või ühtivate) servade korral on suunaga kahtahuliste nurkade kohta kehtivad kõik tasapinna suunaga nurkade omadused (I, § 8).

Erinevate ja mitteparalleelsete servade korral on suunaga kahtahuliste nurkade suundade võrdlemine võimatu.

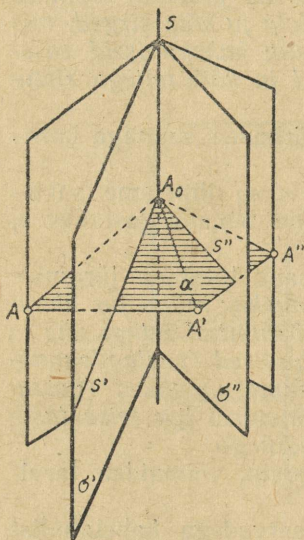
Vaatleme lõpuks kahe peegeldustasapinna juhtu, kui need tasapinnad lõikuvad täisnurgast erineva mistahes nurga all.

Teoreem 276. *Täisnurgast erineva nurga all lõikuvate peegeldustasapindade korral on kahe peegelduse korritis järgmiste omadustega liikumine: iga lõik, mis ühendab kaht vastavat punkti, on risti teatud sirgega s ; iga kaks vastavat punkti on sellest sirgest võrdsetel kaugustel; kõik kahtahulised nurgad ühise servaga s , millede tahkudeks on kaht vastavat punkti läbivad pooltasapinnad, on võrdsed ja samasuunalised.*

Sirge s on kahe antud tasapinna σ' ja σ'' lõikejoon; kahe sirgest s väljuva ja kaht vastavat punkti läbiva pooltasapinna poolt moodustatud kahtahuline nurk φ võrdub tasapindade σ' ja σ'' vahelise teravnurga kahekordsega ja on sellega samasuunaline.

Nimetatud omadustega liikumist nimetatakse pöördeks; sirget s nimetatakse pöördeteljeks ja nurka φ pöördenurgaks.

Tõestus. Olgu σ' esimene peegeldustasapind, σ'' teine peegeldustasapind ja s nende kahe tasapinna lõikejoon (joonis 76). Tähistame antud kujundi mingi punkti tähega A , selle punktiga tasapinna σ' suhtes sümmeetrilise punkti tähega A' ja punktiga A' tasapinna σ'' suhtes sümmeetrilise punkti tähega A'' . Kerge on näha, et punkte A , A' ja A'' läbiv tasapind α on risti sirgega s . Järelikult on sirgega s risti ka (joonisel mitte näidatud) lõik AA'' . Tähistame tasapinna α ja sirge s lõikepunkti tähega A_0 ning tasapinna α lõikejooned tasapindadega σ' ja σ'' tähtedega s' ja s'' .



Joonis 76.

Tasapinnal α on punkt A' sirge s' suhtes sümmeetriline punktiga A ja punkt A'' on sirge s'' suhtes sümmeetriline punktiga A' . Järelikult tasapinnal α saadakse punkt A'' punktist A pöörde abil punkti A_0 ümber, nii et $A_0A = A_0A''$; pöördenurk $\angle AA_0A''$ tasapinnal α võrdub sirgete s' ja s'' vahelise teravnurga kahekordsega ja on sellega samasuunaline (I, teoreem 76). Järelikult on sirgest s väljuvate ja

punkte A ja A'' läbivate pooltasapindade poolt moodustatud kahtahuline nurk võrdne tasapindade σ' ja σ'' vahelise teravnurga kahekordsega ja sellega samasuunaline.

Järeldused. 1. Iga pöoret saab vaadelda kahe peegelduse korrutisena. Mõlemad peegeldustasapinnad σ' ja σ'' läbivad pöördetelge. Nende vaheline nurk (suunaga σ' poolt σ'' poole) võrdub poolega pöördenurgast ja on sellega samasuunaline. Muus osas on tasapinnad σ' ja σ'' meelevaldsed.

Tõepoolest, kui peegeldustasapinnad σ' ja σ'' on valitud nii, nagu näidatud, siis kahe peegelduse resultantspöore ühtib antud pöördega, sest neil pöoretel on ühine telg ning üks ja sama pöördenurk.

2. Peegeldumist sirgest saab vaadelda kui pöörde erijuhtu, kus pöördenurk on sirgnurk. Seejuures peegeldustasapinnad on teineteisega risti.

3. Pöördel on lõpmatu hulk kahekordseid punkte, nimelt kõik pöördetelje punktid.

4. Pööre, mis ei ole peegeldumine sirgest, omab üht kahekordset sirget — pöördetelge — ja lõpmatut hulka kahekordseid tasapindu, milledeks on kõik teljega ristuvad tasapinnad.

§ 138. Peegeldumine punktist; pöördepeegeldus.

Asume kolme peegelduse korrutise vaatlemisele.

Et peegeldumine tasapinnast on teist liiki liikumine (kaks tasapinna suhtes sümmeetrilist kujundit on peegeldusvõrdsed), siis kolme peegelduse korrutis on teist liiki liikumine (kolme peegelduse tulemusena kolmetahulise nurga suund muutub vastand-suunaks).

Kolm peegeldustasapinda võivad ruumis asetseda mitmel viisil (§ 100, teoreem 200).

Alustame selle juhuga, kus kolm peegeldustasapinda lõikuvad ühes punktis ja ristuvad paariti.

Teoreem 277. *Kolme paariti ristuvate peegeldustasapindadega peegelduse korrutis kujutab endast liikumist, millel on järgmine omadus: kõikidel lõikudel, milledest igaüks ühendab mõlema kujundi kaht vastavat punkti, on ühine keskpunkt.*

Niisuguse omadusega liikumist nimetatakse mõnikord peegeldumiseks punktist (kasutatakse ka väljendeid «sümmeetria punkti suhtes» ja «tsentraalne sümmeetria»).

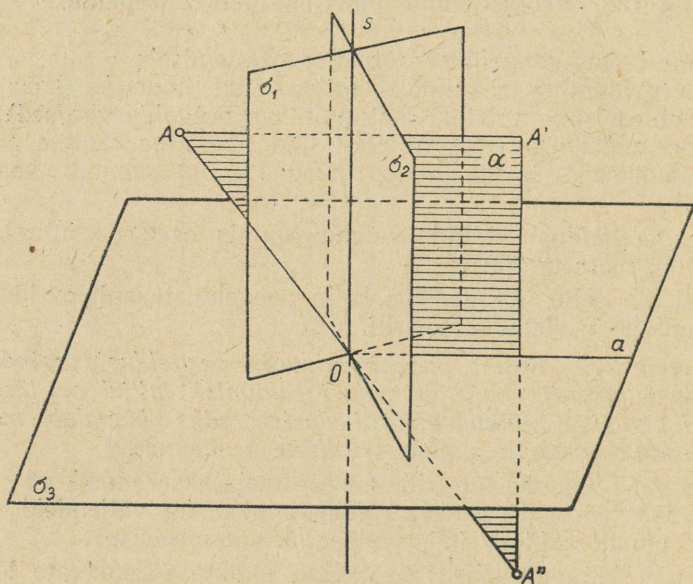
Mõlema kujundi paariti vastavaid punkte ühendavate lõikude AA' , BB' , ... ühist keskpunkti O nimetatakse peegelduskeskpunktiks (ehk sümmeetriakeskpunktiks). Kaht punkti A ja A' nimetatakse sümmeetrilisteks punkti O suhtes, kui punkt O on lõigu AA' keskpunkt; kaht kujundit, mis koosnevad punkti O suhtes paariti sümmeetrilistest punktidest, nimetatakse sümmeetrilisteks selle punkti suhtes.

Tõestus. Kolmest paariti ristuvast tasapinnast σ_1 , σ_2 ja σ_3 saadavate peegelduste korrutist võib vaadelda (teoreemi 275 järgi) kui tasapindade σ_1 ja σ_2 lõikejoonest s saadava peegelduse ja sirgega s ristuvast tasapinnast σ_3 saadava peegelduse korrutist. Tähistame tähega A antud kujundi mingi punkti, tähega A' punkti, mis on sirge s suhtes sümmeetriline punktiga A , ja tähega A'' punkti, mis on tasapinna σ_3 suhtes sümmeetriline punktiga A' . Punktid A' ja A'' ilmselt asetsevad tasapinnal α , mis läbib punkti A ja sirget s (joonis 77).

Tasapinnal α punktid A ja A' on sümmeetrilised sirge s suhtes ning punktid A' ja A'' on sümmeetrilised sirge a suhtes, mis on tasapindade α ja σ_3 lõikejooneks. Järelikult punktid A ja A'' on tasapinnal α sümmeetrilised sirgete a ja s lõikepunkti O suhtes.

Teisiti öeldes, lõik AA'' poolitub sirge s ja tasapinna σ_3 lõikepunktis O , s. o. kolme peegeldustasapinna ühises punktis.

Järeldused. 1. Peegeldumine punktist omab üht kahekordset punkti — peegelduskeskpunkti — ja lõpmatut hulka kahekordseid sirgeid ja kahekordseid tasapindu; nendeks sirgeteks ja tasapindadeks on kõik sirged ja tasapinnad, mis läbivad peegelduskeskpunkti.



Joonis 77.

2. Vaatleme kolme liikumist: peegeldumist mingist sirgest s , peegeldumist tasapinnast σ_3 , mis ristub sirgega s , ja peegeldumist punktist O , milles lõikuvad sirge s ja tasapind σ_3 . Neist kolmest liikumisest mistahes kahe liikumise korrutis on samane kolmanda liikumisega.

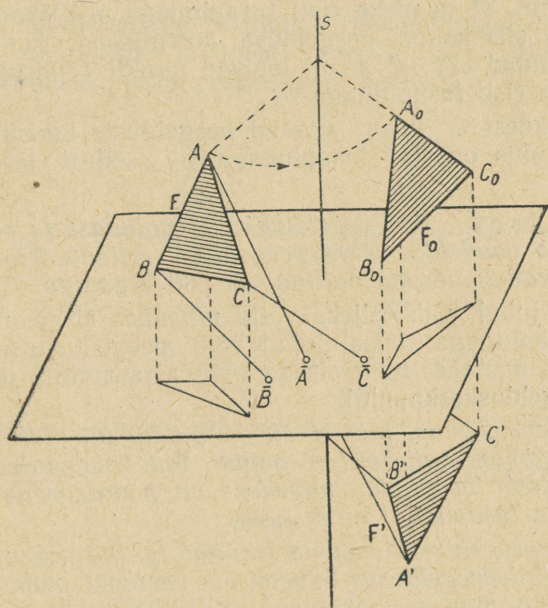
See järeldub kergesti konstruktsioonidest, mis on teostatud joonisel 77.

3. Kahe, punkti suhtes sümmeetrilise kujundi vastavad sirged ja vastavad tasapinnad on paralleelsed.

Vaatleme nüüd kolme ühes punktis lõikuva meelevaldse (s. o. mistahes nurga all lõikuva) peegeldustasapinna juhtu.

Teoreem 278. Kolme peegelduse korrutis, kui peegeldustasapinnad lõikuvad ühes ja samas punktis, kujutab endast pöörde korrutist peegeldusega niisugusest tasapinnast, mis on risti pöördeteljega.

Niisugust liikumist nimetatakse mõnikord pöördepeegelduseks¹; pöördetelge ja peegeldustasapinda, millest kõneldakse teoreemis, nimetatakse pöördepeegelduse teljeks ja tasapinnaks; pöördepeegelduse telje ja tasapinna lõikepunkti nimetatakse pöördepeegelduse keskpunktiks ja vastavat pöördenurka pöördepeegelduse nurgaks. Pöördepeegeldus on kujutatud joonisel 78. Kujund $A_0B_0C_0\dots$ saadakse kujundist $ABC\dots$ pöördetelje s , kujund $A'B'C'\dots$ aga kujundist $A_0B_0C_0\dots$ peegeldusega, nii et kujund $A'B'C'\dots$ saadakse kujundist $ABC\dots$ pöördepeegeldusega.



Joonis 78.

Tõestus. Olgu σ_1 , σ_2 ja σ_3 antud peegeldustasapinnad ja punkt O nende lõikepunkt.

Tasapindadest σ_1 ja σ_2 saadud peegelduste korrutis kujutab endast teoreemi 276 järgi pöoret nende tasapindade lõikejoone s ümber. Sama teoreemi järelduse 1 põhjal saab seda pöoret vaadelda ka kui kahe teise peegelduse korrutist, kusjuures peegeldustasapinnad σ_1' ja σ_2' läbivad sama sirget s , nendevaheline nurk on võrdne nurgaga tasapindade σ_1 ja σ_2 vahel ja mõlemal nurgal on üks ja sama suund (lugedes seda σ_1 poolt σ_2 poole ja σ_1' poolt σ_2' poole).

¹ See nimetus on tarvilusel näiteks geomeetrilises kristallograafias.

Võtame tasapinnaks σ_2' tasapinna, mis läbib sirget s ja on risti tasapinnaga σ_3 , ning valime tasapinna σ_1' nii, et näidatud nurkade võrdsuse tingimus oleks täidetud. Vaadeldav liikumine esineb siis kolme peegelduse korrutisena, kusjuures peegeldustasapinnad σ_1' , σ_2' ja σ_3 läbivad punkti O ning tasapinnad σ_2' ja σ_3 on teineteisega risti.

Vastastikku ristuvatest tasapindadest σ_2' ja σ_3 saadud peegelduste korrutis on teoreemi 275 järgi peegeldus nende tasapindade lõikejoonest s' . Sama teoreemi järelduse 1 põhjal saab seda korrutist vaadelda ka mistahes kahest ristuvast, sirget s' läbivast tasapinnast σ_2'' ja σ_3' saadud peegelduste korrutisena. Tasapinna σ_3' võib valida nii, et ta oleks risti tasapinnaga σ_1' . Vaadeldav liikumine esineb siis kolme peegelduse korrutisena, kusjuures peegeldustasapinnad σ_1' , σ_2'' ja σ_3' läbivad punkti O ning tasapinnad σ_1' ja σ_2'' on risti tasapinnaga σ_3' .

Tasapindadest σ_1' ja σ_2'' saadud peegelduste korrutis on pööre ümber telje, mis on risti tasapinnaga σ_3' ; sellest järeldebki teoreem.

Järeldused. 1. Peegeldumist tasapinnast ja peegeldumist punktist saab vaadelda pöördepeegelduse erijuhtudena, kus selle nurk on vastavalt võrdne nulliga või 180 kraadiga.

Esimesel juhul võib teljeks võtta mistahes sirge, mis on risti peegeldustasapinnaga; teisel juhul võib peegeldustasapinnaks ja -teljeks võtta mistahes teineteisega ristuva tasapinna ja sirge, mis läbivad peegelduskeskpunkti.

2. Pöördepeegeldus, mis ei ole peegeldumine tasapinnast või punktist, omab üht kahekordset punkti, üht kahekordset sirget ja üht kahekordset tasapinda, milledeks on pöördepeegelduse keskpunkt, telg ja tasapind.

3. Pöördepeegelduse tasapind poolitab iga sirglõigu, mis ühendab kaht pöördepeegelduses teineteisele vastavat punkti.

See järeldeb sellest, et kaks vastavat punkti asetsevad sellest tasapinnast võrdsetel kaugustel.

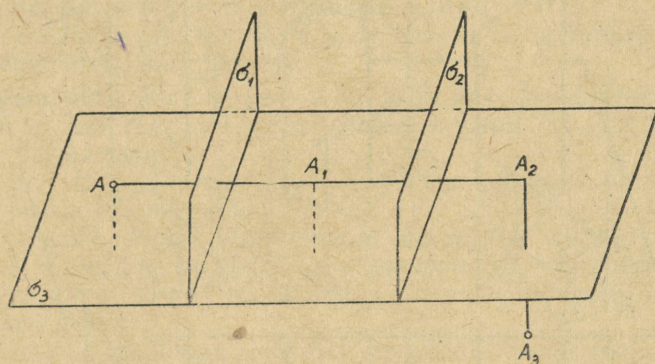
4. Pööre mingi telje ümber ja peegeldumine punktist, mis asetseb samal teljel, annavad (mistahes järjekorras) korrutamisel pöördepeegelduse, mille telg ühtib pöördeteljega ja keskpunkt antud punktiga.

Tõepoolest, kui vaadelda näiteks pöörde korrutamist peegeldusega, siis peegeldumist antud punktist saab kujutada kui pööret ümber antud pöördetelje nurga $2d$ võrra, mis on korrutatud peegeldusega selle teljega ristuvast tasapinnast (teoreem 277, järeldus 2). Seejuures antud pöörde ja nurga $2d$ võrra tehtud pöörde korrutis on jälle pööre sama telje ümber, selle uue pöörde ja teljega ristuvast tasapinnast saadava peegelduse korrutis aga on pöördepeegeldus. Analoogilised kaalutlused on rakendatavad ka punktist peegeldumise ja pöörde korrutamisel.

Vaatlesime kolme peegelduse korrutist juhul, kus peegeldustasapinnad σ_1 , σ_2 ja σ_3 läbivad üht ja sama punkti. Tasapindade σ_1 , σ_2 ja σ_3 vastastikuse asendi kõikidel muudel juhtudel need kolm tasapinda on risti ühe ja sama tasapinnaga. Selle asemel, et vaadelda neid juhte eraldi, vaatleme järgnevas paragrahvis kuidas mitmest ühe ja sama tasapinnaga ristuvast tasapinnast saadavate peegelduste korrutist.

§ 139. Liikumine paralleelselt tasapinnaga.

Asume nüüd lihtsamate liikumiste (peegeldumine, lüke, pööre) vaatlemiselt niisuguste liikumiste vaatlemisele, mis kujutavad endast meelevaldse hulga peegelduste korrutist.



Joonis 79.

Käesolevas paragrahvis piirdume selle juhuga, kus kõik peegeldustasapinnad on risti ühe ja sama tasapinnaga. Näiteks selle kohta (peale peegelduse, lükke ja pöörde) võib olla kolmest tasapinnast σ_1 , σ_2 ja σ_3 saadud peegelduste korrutis, kui esimesed kaks tasapinda on paralleelsed ja kolmas tasapind on nendega risti (joonis 79). Vaatleme seda liikumist veidi üksikasjalisemalt.

Et peegeldusi on kolm, siis on meil tegemist teist liiki liikumisega. Tähistame esimese kujundi mingi punkti tähega A , selle punktiga tasapinna σ_1 suhtes sümmeetrilise punkti tähega A_1 , punktiga A_1 tasapinna σ_2 suhtes sümmeetrilise punkti tähega A_2 ja punktiga A_2 tasapinna σ_3 suhtes sümmeetrilise punkti tähega A_3 . Vaadeldav liikumine on ilmselt lükke $\overline{AA_2}$ korrutis peegeldusega tasapinnast σ_3 .

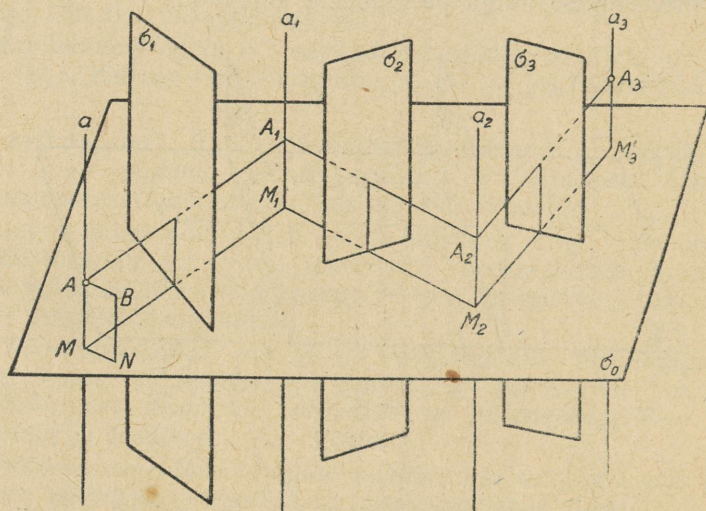
Niisugust teist liiki liikumist, mis kujutab endast mingi tasapinnaga paralleelse lükke korrutist peegeldusega sellest tasapinnast, nimetatakse mõnikord libisevaks peegelduseks

(vrd. I, teoreem 80). Vastavat peegeldustasapinda nimetatakse libiseva peegelduse tasapinnaks.

Libiseval peegeldusel on ilmselt järgmine omadus: libiseva peegelduse tasapind poolitab iga lõigu, mis ühendab kaht vastavat punkti.

Siin vaadeldavate liikumiste ühiseid omadusi iseloomustab järgmine teoreem.

Teoreem 279. *Mitmest ühe ja sama tasapinnaga σ_0 ristuvast tasapinnast saadavate peegelduste korrutis kujutab endast liikumist, millel on järgmised omadused: iga lõik, mis ühendab kaht vastavat punkti, on paralleelne tasapinnaga σ_0 ; sirgele, mis on risti tasapinnaga σ_0 , vastab sirge, mis on samuti risti tasapinnaga σ_0 .*



Joonis 80.

Esimesena nimetatud omaduse tõttu nimetatakse seda liikumist liikumiseks paralleelselt tasapinnaga.

Tõestus. Kujutagu antud liikumine endast näiteks kolme peegelduse korrutist, millede tasapinnad σ_1 , σ_2 ja σ_3 on risti tasapinnaga σ_0 (joonis 80). Tähistame tähega A antud kujundi mingi punkti, tähega a antud kujundi mingi sirge, mis on risti tasapinnaga σ_0 , tähtedega A_1 ja a_1 punkti ja sirge, mis on tasapinna σ_1 suhtes sümmeetrilised punktiga A ja sirgega a , tähtedega A_2 ja a_2 punkti ja sirge, mis on tasapinna σ_2 suhtes sümmeetrilised punktiga A_1 ja sirgega a_1 , ning tähtedega A_3 ja a_3 punkti ja sirge, mis on tasapinna σ_3 suhtes sümmeetrilised punktiga A_2 ja sirgega a_2 .

Lõigud AA_1 , A_1A_2 ja A_2A_3 on vastavalt risti tasapindadega

σ_1 , σ_2 ja σ_3 ; järelikult kõik nad on paralleelsed tasapinnaga σ_0 . Kõik punktid A_1 , A_2 ja A_3 asetsevad tasapinnal, mis läbib punkti A ja on paralleelne tasapinnaga σ_0 . Seetõttu ka (joonisel mitte näidatud) lõik AA_3 , mis ühendab kaht vastavat punkti, on paralleelne tasapinnaga σ_0 .

Tasapinnaga σ_0 ristuv sirge a on paralleelne tasapindadega σ_1 , σ_2 ja σ_3 . Sellest järeldub, et ka sirged a_1 , a_2 ja a_3 on paralleelsed samade tasapindadega ning järelikult ka sirgega a .

Tõestatud teoreemist järeldub, et mistahes kujundi $AB\dots$ liikumise uurimine, kui see liikumine toimub paralleelselt tasapinnaga σ_0 , taandub selle kujundi projektsiooni $MN\dots$ liikumise uurimisele tasapinnal σ_0 . Peegeldumisele tasapinnast σ_1 vastab peegeldumine tasapindade σ_1 ja σ_0 lõikejoonest s ; tasapinnaga σ_0 paralleelsele lükkele vastab lüke tasapinnal σ_0 endal jne.

Tasapinnaliste liikumiste uurimise tulemused (I, § 33) viivad meid seega vahetult järgmiste lausete juurde.

Teoreem 280. Iga liikumine paralleelselt tasapinnaga on ülimalt kolme peegelduse korrutis.

Teoreem 281. Iga esimest liiki liikumine paralleelselt tasapinnaga on kas lüke või pööre (kaasa arvatud ka peegeldumine sirgest) või samasus.

Iga teist liiki liikumine paralleelselt tasapinnaga on kas libisev peegeldus või peegeldus.

Järeldus. Mingi tasapinnaga paralleelse lükke korrutis pöördega, mille telg on risti sama tasapinnaga, on pööre samas suunas ja sama nurga võrra ümber teatava telje, mis on risti sellesama tasapinnaga.

Tõepoolest, vaadeldav korrutis on antud tasapinnaga paralleelne liikumine, kuid ei saa olla lüke, nagu on kerge näha. Selles, et nende pöörete nurgad on võrdsed ja samasuunalised, on kerge veenduda, kui vaadelda suundsid kahel vastaval lõigul, mis on risti kummagi pöörde teljega.

§ 140. Püsipunktiga liikumine.

Paragrahvis 136 juba nimetasime mingi liikumise kahekordeks punktiks ehk püsipunktiks iga punkti, mis ühtib temale vastava punktiga. Käesolevas paragrahvis vaatleme kõiki (esimest ja teist liiki) liikumise tüüpe, millel on vähemalt üks püsipunkt. Niisuguseid liikumisi nimetatakse püsipunktiga liikumisteks.

Teoreem 282. Iga püsipunktiga liikumist on võimalik vaadelda ülimalt kolme peegelduse korrutisena.

Tõestus.¹ Oletame, et mingi liikumine püsipunktiga O viib

¹ Vrd. I, § 33 (tasapinnageomeetria teoreemi 78 tõestus ja joonis 79 leheküljel 100).

kujundi F kolm punkti A , B ja C , mis ei asetse punktiga O ühel ja samal tasapinnal, kujundi F' punktideks A' , B' ja C' .

Tähistame tähega σ_1 nurga AOA' bisektortasapinna, s. o. tasapinna, mis on risti tasapinnaga OAA' ja mis poolitab nurga AOA' (§ 125). Peegeldumine tasapinnast σ_1 viib kujundi F punktid O , A , B ja C mingi uue kujundi F_1 punktideks O , A' , B_1 ja C_1 . (Kui juhuslikult punkt A ühtib punktiga A' , siis peegeldumist tasapinnast σ_1 ei tarvitse vaadelda ja kujundiks F_1 võib võtta antud kujundi F .)

Edasi tähistame tähega σ_2 nurga B_1OB' bisektortasapinna. Et $\angle A'OB_1 = \angle AOB = \angle A'OB'$, siis kiir OA' ja järelikult ka punkt A' asetsevad tasapinnal σ_2 (§ 125, geomeetriline koht XXIII, märkus). Peegeldumine tasapinnast σ_2 viib kujundi F_1 punktid O , A' , B_1 ja C_1 teatava uue kujundi F_2 punktideks O , A' , B' ja C_2 . (Kui juhuslikult punkt B_1 ühtib punktiga B' , siis peegeldumist tasapinnast σ_2 ei tarvitse vaadelda ja kujundiks F_2 võib võtta kujundi F_1 .)

Tähistame lõpuks nurga C_2OC' bisektortasapinna tähega σ_3 . Et $\angle A'OC_2 = \angle A'OC_1 = \angle AOC = \angle A'OC'$ ja $\angle B'OC_2 = \angle B_1OC_1 = \angle BOC = \angle B'OC'$, siis kiired OA' ja OB' ning järelikult ka punktid A' ja B' asetsevad tasapinnal σ_3 . Peegeldumine tasapinnast σ_3 viib kujundi F_2 punktid O , A' , B' ja C_2 kujundi F_3 punktideks O , A' , B' ja C' . (Kui punkt C_2 ühtib punktiga C' , siis peegeldumist tasapinnast σ_3 ei tarvitse vaadelda ja kujundiks F_3 võib võtta kujundi F_2 .)

Õeldust järeldub, et kolmest tasapinnast σ_1 , σ_2 ja σ_3 (või ülalpool märgitud erijuhtudel mõnedest neist) saadud peegelduste korrutis teisendab antud kujundi F punktid O , A , B ja C kujundiga F ja järelikult ka kujundiga F' võrdse kujundi F_3 punktideks O , A' , B' ja C' . See kujund F_3 ühtib kujundiga F' (teoreem 268, järeldus 2), sest tema neli punkti O , A' , B' ja C' ühtivad neile vastavate kujundi F' punktidega.

Niisiis, antud liikumine on kolme peegelduse korrutis, kusjuures peegeldustasapindadeks on σ_1 , σ_2 ja σ_3 (või erijuhtudel korrutis mõnedest neist peegeldustest).

Järeldus. Iga esimest liiki liikumist püsipunktiga, kui see liikumine ei ole samasus, saab vaadelda kahe peegelduse korrutisena.

Tõepoolest, et peegeldumine tasapinnast on teist liiki liikumine, siis esimest liiki liikumine saab olla ainult paarisarvu peegelduste korrutis. Tõestatud teoreemi põhjal see peegelduste arv on kaks.

Paragrahvis 137 tõestati, et kahe peegelduse korrutis on pöör või lüke. Et lükkel ei ole liikumatuid punkte, siis jõuame järgmisele tulemusele.

Teoreem 283 (D'Alembert). *Iga esimest liiki liikumine püsipunktiga on pöör.*

Teisiti öeldes: *kui mingi punkt ühel kahest pärisõõrdsest kujun-*

dist ühtib teisē kujundi vastava punktiga, siis kummagi kujundi saab teisest pöörde abil.

Kui antud liikumine püsipunktiga on teist liiki liikumine, siis peegelduste arv, millest kõneldakse teoreemis 282, on võrdne kolmēga vōi ühega, ja (teoreemi 278 järgi) saame järgmise lause.

Teoreem 284. Iga teist liiki liikumine püsipunktiga on pöördepeegeldus vōi peegeldumine tasapinnast.

Tõestatud teoreemid võimaldavad käsitleda järgmisi konstruksioone.

Konstruksioon 101. Konstrueerida antud kahe pārisvōrdse kujundi pöordetelg, teades, et esimese kujundi antud punkt O ühtib teise kujundi vastava punktiga.

Olgu A ja B esimese kujundi mingid kaks punkti, mis ei asetse punktiga O ühel ja samal sirgel, ning A' ja B' neile vastavad teise kujundi punktid. Et otsitav pöordetelg moodustab kiirtega OA ja OA' , samuti ka kiirtega OB ja OB' vōrdsed nurgad, siis ta ühtib nurkade AOA' ja BOB' bisektor-tasapindade α ja β lõikejoonega (vrd. I, konstruksioon 18).

Juhul, kui tasapinnad α ja β ühtivad, ei ole pöordetelg selle konstruksiooniga määratud, kuid sel juhul on pöordeteljeks, nagu on kerge näha, tasapindade OAB ja $OA'B'$ lõikejoon.

Analoogiline ülesanne teist liiki liikumise kohta sõnastub ja laheneb järgmisel viisil.

Konstruksioon 102. Konstrueerida üht antud kahest peegeldusvōrdsest kujundist teisega ühtivaks tegeva pöördepeegelduse tasapind ja telg, teades, et esimese kujundi antud punkt O ühtib teise kujundi vastava punktiga.

Kahe kujundi paariit vastavate punktide ühenduslõikude keskpunktid asetsevad otsitaval pöördepeegelduse tasapinnal (teoreem 278, järeldus 3). Kahe niisuguse lõigu keskpunktid, mis ei asetse ühel sirgel punktiga O , määravad selle tasapinna asendi.

§ 141. Vintnihe. Liikumiste liigitelu.

Vaatleme nüüd esimest vōi teist liiki liikumise meelevaldset juhtu ruumis.

Teoreem 285. Iga liikumist saab vaadelda ülimalt nelja peegelduse korrutisena.

Tõestus. Oletame, et mingi liikumine viib antud kujundi F mingi punkti A kujundi F' punktiks A' .

Pegeldumine tasapinnast σ_1 , mis on risti lõiguga AA' ja läbib selle keskpunkti, viib punkti A punktiks A' ja kujundi F kujundiks F_1 , mis on võrdne kujundiga F ja järelikult ka kujundiga F' .

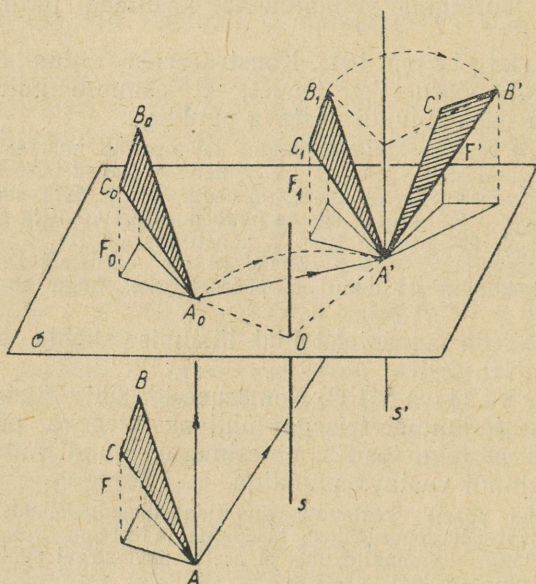
Seejuures kujundi F_1 punkt A' ühtib kujundi F' vastava punktiga. Järelikult kujund F' saadakse kujundist F_1 ülimalt kolme peegelduse abil (teoreem 282) ja kujundist F ülimalt nelja peegelduse abil.

Järeldus. Iga teist liiki liikumine on peegeldumine tasapinnast vōi kolme niisuguse peegelduse korrutis.

Tõepoolest, et peegeldumine tasapinnast on teist liiki liiku-

mine, siis teist liiki liikumine saab olla ainult paaritu arvu peegelduste korrutis. Tõestatud teoreemi põhjal see peegelduste arv on võrdne ühega või kolmega.

Kui antud teist liiki liikumine ei ole peegeldumine tasapinnast, siis saab teda kujutada kolme peegelduse korrutisena. Juhul, kui vastavad kolm peegeldustasapinda lõikuvad ühes punktis, saame pöördepeegelduse (teoreem 278), muudel juhtudel aga liikumise,



Joonis 81.

mis on paralleelne tasapinnaga (mis ristub kõigi kolme peegeldustasapinnaga). Viimasel juhul antud liikumine on libisev peegeldus (teoreem 281).

Niisiis saame järgmise tulemuse.

Teoreem 286. Iga teist liiki liikumine, mis ei kujuta endast peegeldumist tasapinnast, on pöördepeegeldus või libisev peegeldus.

Siirdume esimest liiki liikumiste juurde. Teoreemi 285 põhjal on igaüks neist kas kahe või nelja peegelduse korrutis. Kahe peegelduse korrutis on pöore või lükke. Vaatleme nüüd nelja peegelduse juhtu.

Teoreem 287 (Chasles). Iga esimest liiki liikumine, mis ei ole pöore ega lükke, kujutab endast lükke ja pöörde korrutist, kusjuures pöördetelg on paralleelne lükke sihiga.

Niisugust liikumist nimetatakse vintliikumiseks (ehk vintnihkeks); pöördetelge, millest kõneldakse teoreemis, nimetatakse vinditeljeks ja selle pöörde nurka vintnihkenurgaks.

Tõestus. Oletame, et antud liikumine viib kujundi F mingi punkti A kujundiga F pärisvõrdse kujundi F' punktiks A' (joonis 81).

Lüke $\overline{AA'}$ viib punkti A punktiks A' ja kujundi F mingiks kujundiks F_1 , mis on pärisvõrdne kujundiga F ja järelikult ka kujundiga F' . Seejuures kujundi F_1 punkt A' ühtib kujundi F' vastava punktiga. Et kujundid F_1 ja F' on pärisvõrdsed, siis liikumine, mis viib kujundi F_1 kujundiks F' , on esimest liiki liikumine püsi-punktiga A' . Viimane liikumine on teoreemi 283 põhjal pööre ümber teatava telje s' , mis läbib punkti A' .

Niisiis, antud liikumine on korrutis lükkest $\overline{AA'}$ ja pöördest ümber teatava telje s' , mis läbib punkti A' .

Tähistame tähega σ tasapinna, mis läbib punkti A' ja on risti sirgega s' , ja tähega A_0 punkti A ristprojektsiooni tasapinnal σ . Lüket $\overline{AA'}$ saab vaadelda kui lükete $\overline{AA_0}$ ja $\overline{A_0A'}$ korrutist (teoreem 274, järeldus).

Niisiis, antud liikumine on kolme liikumise, nimelt lükke $\overline{AA_0}$, lükke $\overline{A_0A'}$ ja teatava, telje s' ümber teostatud pöörde korrutis.

Neist kolmest liikumisest viimase kahe korrutis kujutab endast pöoret teatava telje s ümber, mis on paralleelne teljega s' (teoreem 281, järeldus).

Järelikult antud liikumine on lükke $\overline{AA_0}$ ja ühe pöörde korrutis, kusjuures pöördetelg s on paralleelne sirgega AA_0 . Teoreem on tõestatud.

Märgime veel, et telje s ja tasapinna σ lõikepunkt O on täiesti määratud järgmiste nõuetega: nurk A_0OA' peab võrduma telje s' ümber tehtava pöörde nurgaga, mis ühitab kujundi F kujundiga F' , ja peab olema sellega samasuunaline; lõigud OA_0 ja OA' peavad olema võrdsed.

Järeldused. 1. Pöoret telje ümber ja lüket võiks vaadelda kui vintnihke erijuhte (täpsemalt piirjuhte). Pöörde juhul lõik $\overline{AA_0}$ (lükke suurus) muutub nulliks; lükke juhul muutub nulliks pöördenurk.

2. Vintnihe, mis erineb lükkest ja pöördest, ei oma kahekordseid punkte ja omab üht kahekordset sirget, milleks on vinditelg.

3. Kui vintnihke nurk erineb sirgnurgast, siis vintnihe ei oma kahekordseid tasapindu; kui ta on võrdne sirgnurgaga, siis kahekordseks tasapinnaks on iga tasapind, mis läbib vinditelge.

Märkus. Teoreemist 287 järeldub, et iga kaht pärisvõrdset kujundit saab teineteisega ühitada, kui üht neist «pidevalt nihutada».¹ Tõepoolest, nii pööre kui ka lükke, järelikult ka nende korrutis, on teostatavad kujundi pideva nihutamise teel ruumis.

Määrates täpselt pideva nihutamise mõiste, saaksime tõestada iseenesest ilmse lause, et kaht peegeldusvõrdset ruumikujundit ei ole võimalik ühitada pideva nihutamise teel.²

¹ Vt. märkus lk. 86.

² Vt. Delone, Padurov ja Aleksandrov [10], lk. 17—19.

Tehes öeldust kokkuvõtte, saame (teoreemide 287 ja 286 põhjal) järgmise liikumiste liigitelu.

- I. Esimest liiki liikumine:
 - a) vintliikumine (4),
 - b) pööre (2),
 - c) lüke (2),
 - d) samasus (0).
- II. Teist liiki liikumine:
 - a) pöördepeegeldus (3),
 - b) libisev peegeldus (3),
 - c) peegeldus (1).

Number sulgudes näitab väikseimat peegelduste arvu, millede korrumtamisel on võimalik saada antud tüüpi liikumist.

Teoreemi 287 tõestus juhatab kätte järgmise ülesande lahendusviisi.

Konstruktsioon 103. Konstrueerida telg vintnihkele, mis teisendab ühe antud kahest pärisvõrdsest kujundist teiseks.

Olgu A, B ja C esimese kujundi (joonis 81) kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel, ning A', B' ja C' teise kujundi vastavad punktid. Konstrueerime lõigud BB_1 ja CC_1 , mis on võrdsed, paralleelsed ja samasuunalised lõiguga AA' . (Punktid B_1 ja C_1 saadakse lükke $\overline{AA'}$ abil punktidest B ja C ning seetõttu vastavad kujundis F_1 , millest kõneldakse teoreemi 287 tõestuses, kujundi F punktidele B ja C .)

Edasi konstrueerime kahe pärisvõrdse kujundi $A'B_1C_1 \dots$ ja $A'B'C' \dots$ pöördeltele s' (konstruktsioon 101). Vastav pöördenurk φ on määratav pooltasapindadega, mis väljuvad sirgest s' ja läbivad punkte B_1 ja B' (või C_1 ja C').

Läbi punkti A' paneme tasapinna σ risti sirgega s' ja punktist A konstrueerime ristlõigu AA_0 tasapinnale σ . Leiame tasapinnal σ punkti O nii, et nurk A_0OA' oleks võrdne ja samasuunaline pöördenurgaga φ ning $OA_0 = OA'$. Sirge s , mis läbib punkti O ja on risti tasapinnaga σ , ongi otsitavaks vinditeljeks (vt. teoreemi tõestuse lõpul tehtud märkust).

Kui punkt B_1 ühtib punktiga B' ja punkt C_1 punktiga C' , siis vintnihe muutub lükkeks $\overline{AA'}$; kui telg s' ristub sirgega AA' , siis vintnihe muutub pöördeks telje s ümber.

Vaatleme vastavat ülesannet teist liiki liikumise puhul.

Konstruktsioon 104. Konstrueerida tasapind ja telg pöördepeegeldusele või tasapind libisevale peegeldusele, mis ühitab ühe antud kahest peegeldusvõrdsest kujundist teisega.

Antud kujundite paariiti vastavate punktide ühenduslõikude AA', BB', CC', \dots keskpunktid $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \dots$ (vt. joon. 78) asetsevad otsitaval tasapinnal σ ; pöördepeegelduse juhul see tuleneb teoreemi 278 järeldusest 3 ja libiseva peegelduse juhul sellest, mis on öeldud paragrahvis 139. Punkte A, B ja C saab valida nii, et vastavate lõikude AA', BB' ja CC' keskpunktid ei asetse ühel sirgel. Tõepoolest, pöördepeegelduse ja libiseva peegelduse omadustest on kerge järeldada, et peegeldustasapinna σ mistahes punkt M_0 on keskpunktiks lõigule MM' , mis ühendab kaht vastavat punkti M ja M' . Kolme niisuguse lõigu keskpunktid, mis ei asetse ühel sirgel, määravad tasapinna σ asendi.

Olgu A_0, B_0, C_0, \dots ja A_0', B_0', C_0', \dots esimese kujundi punktide A, B, C, \dots ja teise kujundi punktide A', B', C', \dots projektsioonid tasapinnal σ ,

Tasapinnal σ kujundit $A_0B_0C_0 \dots$ kujundiga $A_0'B_0'C_0' \dots$ ühitava pöörde keskpunkt O ongi pöördepeegelduse keskpunktiks ja tasapinnaga σ punktis O ristuv sirge pöördepeegelduse teljeks.

Kui kujundid $A_0B_0C_0 \dots$ ja $A_0'B_0'C_0' \dots$ saadakse teineteisest lükke abil, siis antud kujundid saadakse teineteisest libiseva peegelduse abil. Kui punktid A_0, B_0, C_0, \dots ühtivad punktidega A_0', B_0', C_0', \dots (piisab kahe punkti ühtimisest), siis antud kujundid on ilmselt sümmeetrilised tasapinna σ suhtes.

§ 142. Sümmeetria.

Samuti nagu tasapinnageomeetrias (I, § 36) omavad ruumi-geomeetrias olulist tähtsust liikumised, mis teisendavad antud kujundi selleksamaks kujundiks (iseendaks).

Kui mingi kujund teisendub iseendaks mõnede liikumiste puhul, mis erinevad samasusliikumisest, siis öeldakse, et sel kujundil on olemas sümmeetria; kujundit iseendaks teisendavaid liikumisi nimetatakse selle kujundi sümmeetria teisendusteks.

Asetsegu antud kujund piiratud ruumiosas, näiteks mingi kera sees (kui pole öeldud vastupidist, siis vaatleme ainult niisuguseid kujundeid). Niisugusel juhul selle kujundi sümmeetria teisenduseks ei saa olla lüke, libisev peegeldus ega vintnihe. Tõepoolest, teostades korduvalt üht neist kolmest teisendusest, saame antud kujundi mingist punktist A punktide jada $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, milles n suurenemisel kaugus AA_n tõkestamatult kasvab (vrd. I, § 36).

Niisiis piiratud kujundil saavad esineda ainult järgmised sümmeetria teisendused: peegeldumine (tasapinnast), pööre ja selle erijuht — peegeldumine sirgest, peegeldumine punktist ja pöördepeegeldus. Vaatleme mõnda siin võimalikest juhtudest.

a) Kujund võib lubada peegeldumist mingist tasapinnast. Seda tasapinda nimetatakse kujundi sümmeetria tasapinnaks ja kujundit ennast sümmeetriliseks tasapinna suhtes. Sel juhul öeldakse ka, et kujundil on sümmeetria tasapinna suhtes. Näited kujunditest seda liiki sümmeetriaga on üldiselt tuntud.

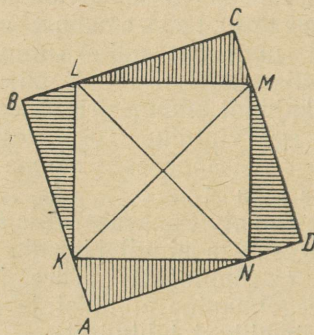
b) Kujund võib lubada peegeldumist mingist sirgest. Seda sirget nimetatakse sümmeetria teljeks ehk eristamiseks muudest võimalikest juhtudest, teist järku sümmeetria teljeks; kujundit ennast nimetatakse sümmeetriliseks telje suhtes. Sel juhul öeldakse ka, et kujundil on teljeline sümmeetria.

Näiteks kujunditest seda liiki sümmeetriaga võib olla püströoptahukas. Tema sümmeetriateljeks on sirge, mis ühendab põhjade keskpunkte.

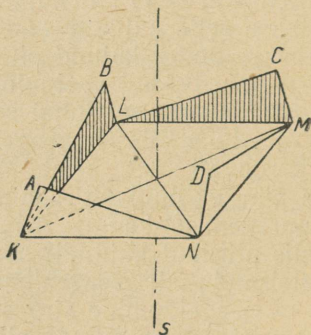
c) Kujund võib lubada pööret mingi sirge sümmeetri ümber. Vaatleme ainult juhtu, kui väikseim võimalik pöördenurk on suurusega $\varphi = \frac{4d}{n}$, kus $n \geq 2$ on naturaalarv [kui $n = 2$, siis saame juhu b), kui $n > 2$, siis oluliselt uued juhud]. Sel juhul kujund võimaldab

ka pöördeid (ühes ja teises suunas) nurkade $\varphi_k = \frac{4dk}{n}$ võrra, kus $k = 1, 2, \dots, n-1$. Sirget s nimetatakse sel juhul n -ndat järku sümmeetriateljeks. Ka võib siis öelda, et kujundil on n -ndat järku pöördesümmeetria.

Näitena vaatleme järgmist kujundit (joonised 82 ja 83). Ruudu $ABCD$ külgedel, alates tema tippudest (ja minnes tema piiret mööda ühes ja samas suunas), märgime võrdsed lõigud $AK = BL = CM = DN$ ja ühendame saadud punktid; saame uue ruudu $KLMN$. Seejuures tekkinud kolmnurgad AKN , BLK , CML ja DNM kääname ära nii, et nad oleksid ühel pool tasapinnast $KLMN$ ja asetseksid sellega ristuvatel tasapindadel (joonis 83). Saadud kujundil leidub neljandat järku sümmeetriatelg s : selleks teljeks on ruudu $KLMN$ tasapinnaga ristuv sirge, mis läbib ruudu keskpunkti. Seejuures sümmeetriatasapindu saadud kujundil ei leidu.



Joonis 82.



Joonis 83.

d) Kujund võib lubada peegeldumist mingist punktist. Seda punkti nimetatakse kujundi sümmeetriakeskpunktiks ja kujundit ennast sümmeetriliseks punkti suhtes. Sel juhul öeldakse, et kujundil on tsentraalne sümmeetria.

Niisuguse kujundi näitena võib tuua mistahes rööptahuka. Tõepoolest, kooligeomeetriast on teada, et rööptahuka diagonaalid lõikuvad ühes ja samas punktis, mis neid poolitab. Siit järeldub, et rööptahuka diagonaalide lõikepunkt on tema sümmeetriakeskpunktiks.

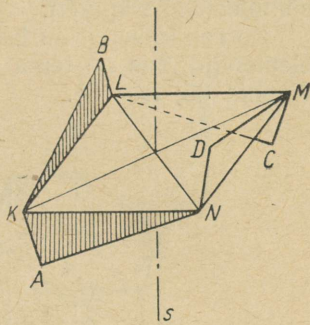
e) Vaatleme keerukamat juhtu, kus kujund lubab pöördepeegeldust. Alustame näitest. Konstrueerime, nagu joonisel 82, ruudu $ABCD$ ja $KLMN$. Kääname kolmnurgad AKN , BLK , CML ja DNM nii ära, et nad oleksid tasapinnast $KLMN$ vaheldumisi ühel ja teisel pool ja asetseksid sellega ristuvatel tasapindadel. Nii tekib kujund, mida kujutab joonis 84. Ruudu $KLMN$ tasapinnaga ristuv sirge s , mis läbib ruudu keskpunkti, on ilmselt antud kujundi (teist

järku) sümmeetriateljeks. Kuid antud kujund lubab peale peegeldumise sirgest s veel muid sümmeetriateisendusi.

Tõepoolest, kui teostada pöörde täisnurga võrra ümber sirge s ja selle järel peegeldumine tasapinnast $KLMN$, siis kujundi uus asend ühtib endisega (punktid $A, B, C, D; K, L, M, N$ ühtivad vastavalt punktidega $B, C, D, A; L, M, N, K$ või punktidega $D, A, B, C; N, K, L, M$). Niisiis konstrueeritud kujund lubab pöördepeegeldust nurgaga d sirge s ümber.

Korrates analoogilist konstruktsiooni ja arutelu mistahes korrapärase hulknurga kohta, millel on paarisarv $2n$ külge, jõuame järgmisele tulemusele.

Kujund võib lubada pöördepeegeldust, mille väiksem nurk $\varphi = \frac{2d}{n}$, kus $n \geq 2$ on naturaalarv. Selle pöördepeegelduse telge nimetatakse $2n$ -ndat järku pöördepeegeldusteljeks (ehk mõnikord lihtsalt peegeldusteljeks)¹.



Joonis 84.

On kerge näha, et $2n$ -ndat järku pöördepeegeldustelg on samal ajal n -ndat järku sümmeetriatelg.

Sümmeetriatasapindu, sümmeetriatelgi, sümmeetriakeskpunkti ja pöördepeegeldustelgi nimetatakse ühise nimega sümmeetriaelementideks.

Vaatleme nüüd lihtsamaid juhtumeid, kus kujundil on mitu sümmeetriaelementi.

f) Olgu kujundil kaks sümmeetriatasapinda σ_1 ja σ_2 , mis lõikuvad mööda sirget s nurga $\psi = 2d : n$ all, kus n on naturaalarv. Samuti nagu tasapinnageomeetrias (I, § 36, d) tõestame, et kujundil on sel juhul n sümmeetriatasapinda, mis läbivad ühist sirget s ja millede vahelised nurgad on $2d : n$. Sirge s on n -ndat järku sümmeetriateljeks.

Niisuguseid sümmeetriaelemente omava kujundi näiteks võib olla korrapärane n -nurkne püramiid.

g) Vaatleme (tasase) korrapärase n -nurga sümmeetriaelemente. Hulknurga keskpunkti läbib sirge, mis on risti tema tasapinnaga, on ilmselt n -ndat järku sümmeetriatelg. Sirged, mis ühendavad hulknurga keskpunkti tema tippudega või külgede keskpunktidega, kujutavad endast n teist järku sümmeetriatelge. Paarisarvulise n korral pooled neist sümmeetriatelgedest on hulknurga diagonaalideks läbi tema keskpunkti, teine pool sümmeetriatelgedest aga on vastaskülgede keskpunkte ühendavateks sirgeteks: Paaritarvu-

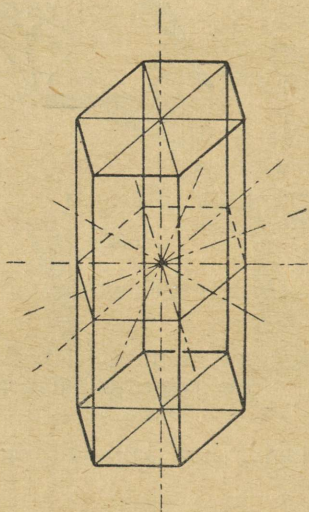
¹ Need nimetused on kasutamisel geomeetriselises kristallograafias.

lise n korral iga sümmeetriatelg ühendab tippu selle vastas asetseva külje keskpunktiga.

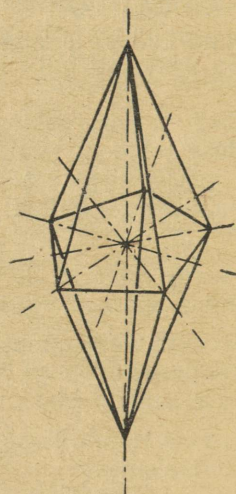
Hulknurga tasapind on tema sümmeetriatasapinnaks. Peale selle on korrapärasel n -nurgal veel n sümmeetriatasapinda, millest igaks läbib n -ndat järku sümmeetriatelge ja üht teist järku sümmeetriatelge.

Lõpuks, paarisarvulise n korral leidub korrapärasel hulknurgal sümmeetriakeskpunkt.

Korrapärasel n -nurksel prismaal on ilmselt samad sümmeetriaelemendid, mis on tema «kesklõikeks» oleval korrapärasel n -nurgal (joonis 85; $n = 6$).



Joonis 85.



Joonis 86.

Esitame veel ühe näite hulktahukatest, millel on samad sümmeetriaelemendid kui korrapärasel hulknurgal.

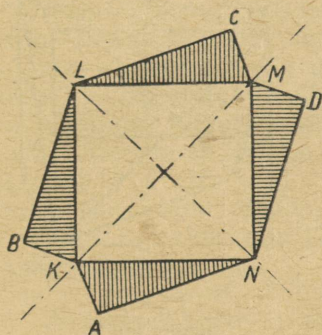
Kaksikpüramiidiks nimetatakse hulktahukat, mille moodustavad kahe ühist põhja omava n -nurkse püramiidi $2n$ külgtahku juhul, kui püramiidid asetsevad nende põhja tasapinnast eri pooltel. Kui mõlemad püramiidid on korrapärased ja omavahel võrdsed, siis kaksikpüramiidi nimetatakse korrapäraseks (joonis 86; $n = 5$).

Korrapärasel n -nurksel kaksikpüramiidil leiduvad samad sümmeetriaelemendid, mis korrapärasel n -nurgal.

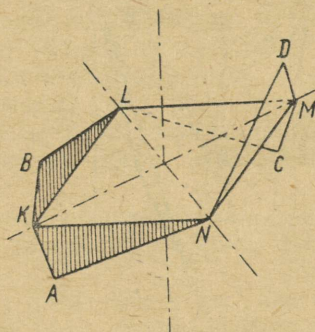
h) Kujundil võib leiduda mitu sümmeetriatelge, ilma et tal leiduks ühtki sümmeetriatasapinda. Piirdume lihtsaima näitega seda liiki kujunditest, millel on kolm teist järku sümmeetriatelge.

Konstrueerime ruudu $KLMN$ külgedel neli võrdset mittevõrdhaarset kolmnurka AKN , BKL , CML ja DMN , mis on asetatud nii,

nagu on näidatud joonisel 87. Kääname need kolmnurgad nii, et nad oleksid vaheldumisi eri pooltel tasapinnast $KLMN$ ja asetseksid sellega ristuvatel tasapindadel. Saame kujundi, mida kujutab joonis 88. Ruudu diagonaalid KM ja LN ning ruudu tasapinnaga ristuv sirge läbi tema keskpunkti on saadud kujundi teist järku sümmeetriatelgedeks; sümmeetriatasapindu niiviisi konstrueeritud kujundil ei leidu. Edaspidi (§ 143, e) tuuakse veel üks näide kujunditest, millel on kolm paariti ristuvat teist järku sümmeetriatelge, kuid ei leidu sümmeetriatasapindu.



Joonis 87.



Joonis 88.

Sümmeetrieelementide mõnede teiste kombinatsioonidega puutume kokku edaspidises käsitluses (vt. §§ 143 ja 170).¹

§ 143. Tetraedrite ja rööptahukate sümmeetria.

Edasiste näidetena sümmeetria kohta vaatleme tetraedrite ja rööptahukate sümmeetriat.

Et iga tetraedri ümber saab kujundada rööptahuka ja iga rööptahuka sisse saab kujundada tetraedri (§ 111), siis on sobiv vaadelda rööbiti mõlema hulktahukaliigi sümmeetriat.

Loetleme siin esineda võivad juhud. Selle tõestamise juures, et nendega on ammendatud kõik siin esinevad võimalused, me ei peatu.

a) Meelevaldsel rööptahukal ei leidu peale sümmeetriakeskpunkti muid sümmeetrieelemente (§ 142, d).

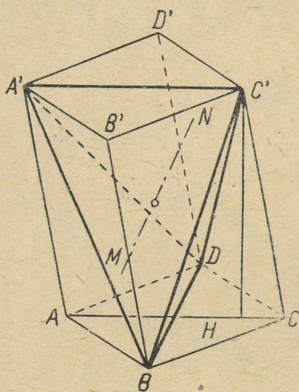
Meelevaldsel tetraedril ei leidu üldse sümmeetrieelemente.

b) Rööptahukal $ABCD A'B'C'D'$ leidub sümmeetriatasapind $ACC'A'$, kui tema põhjaks $ABCD$ on romb ja teise põhja üks tipp C' projekteerub punkti H , mis asetseb selle rombi diagonaalil (joonis 89). Et rööptahukal on peale selle veel sümmeetriakesk-

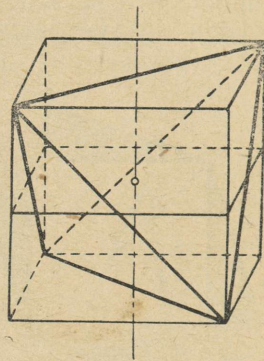
¹ Sümmeetria kohta ruumis vt. Subnikovi raamatut [27] ja Bogomolovi raamatut [5].

punkt, siis antud juhul tal leidub (teoreem 277, järeldus 2) ka teist järku sümmeetriatelg; see sümmeetriatelg läbib servade BB' ja DD' keskpunkte M ja N . Muid sümmeetriaelemente sellel rööptahukal üldiselt ei leidu.

Vastav sissekujundatud tetraeder omab üht sümmeetriatasapinda ja üldiselt muid sümmeetriaelemente ei oma.

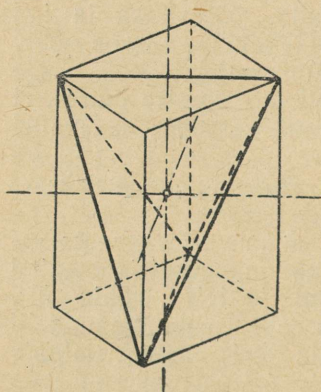


Joonis 89.



Joonis 90.

c) Püströöptahukal, mille põhjaks on üldkujuline rööpkülik (s. o. mitte romb ega ristkülik), leidub teist järku sümmeetriatelg, mis ühendab põhjade sümmeetriakeskpunkte, üks sümmeetriakeskpunkt ja sümmeetriatasapind, mis on võrdsetel kaugustel põhjade tasapindadest (joonis 90). Niisiis on olemas needsamad sümmeetriaelemendid, mis juhul b), kuid nad on rööptahuka suhtes teisiti asetatud.



Joonis 91.

Vastaval sissekujundatud tetraedril on ainult teist järku sümmeetriatelg.

d) Püströöptahukas, mille põhjaks on (ruudust erinev) romb, omab kolme paariti ristuvat teist järku sümmeetriatelge (joonis 91). Üks neist ühendab põhjade sümmeetriakeskpunkte, teised kaks külgservade keskpunkte. Sel püströöptahukal leidub ka kolm sümmeetriatasapinda, milledest igaüks läbib kaht kolmest sümmeetriateljest, ja muidugi sümmeetriakeskpunkt.

Vastaval sissekujundatud tetraedril on ainult üks teist järku sümmeetriatelg ja kaks seda läbivat sümmeetriatasapinda.

e) Risttahukal (millel ei leidu ruudukujulisi tahke) on kolm paari ristuvat teist järku sümmeetriatelge, mis ühendavad vastastahkude sümmeetriakeskpunkte, kolm sümmeetriatasapinda, milledest igaüks läbib kaht kolmest sümmeetriateljest, ja muidugi sümmeetriakeskpunkt.

Niisiis on siin olemas needsamad sümmeetriealemendid, mis juhul d), kuid nad on rööptahuka suhtes teisiti asetatud.

Vastav sissekujundatud tetraeeder on võrdtahkne (§ 122) ja omab kolme teist järku sümmeetriatelge, kuid ei oma sümmeetriatasapindu (vrd. § 142, h).

f) Korrapärasel nelinurksel prismal on (§ 142, g) üks neljandat järku sümmeetriatelge, neli teist järku sümmeetriatelge, üldse viis sümmeetriatasapinda ja üks sümmeetriakeskpunkt.

Vastavale sissekujundatud tetraeedrile on, nagu kerge näha, prisma neljandat järku sümmeetriatelge teist järku sümmeetriateljeks ehk, täpsemalt öeldes, neljandat järku pöördepeegeldusteljeks.

Peale selle leidub sissekujundatud tetraeedril veel kaks teist järku sümmeetriatelge, mis läbivad prisma vastastikku asetsevate külgtahkude keskpunkte.

Sümmeetriatasapindu leidub sel tetraeedril kaks: nendeks on prisma diagonaallõigete tasapinnad, mis läbivad prisma neljandat järku sümmeetriatelge.

g) Tetraeeder, mis kujutab endast korrapärast püramiidi, omab kolmandat järku sümmeetriatelge. Järelikult peab leiduma kolmandat järku sümmeetriatelge ka tetraeedri ümber kujundatud rööptahukal — romboeedril (§ 122). Vaatleme seda rööptahukat mõnevõrra üksikasjalisemalt.

Romboeeder on moodustatud kuuest võrdsest rombist. Kui need rombid on ruudud, siis on tegemist kuubiga. Vaatleme esiteks romboeedrit, mis erineb kuubist (joonis 92). On kerge näha, et romboeedri neljast diagonaalist ühe kummaski otsas koonduvad kolm võrdset tasanurka; joonisel 92 on nendeks tippudeks A ja C' . Punkt A ja sellest väljuvate tahkude diagonaalide otsad, s. o. punktid B' , D' ja C' , on korrapärase kolmnurkse püramiidi $AB'D'C$ tippudeks. Sel püramiidil ja järelikult ka romboeedril leidub kolmandat järku sümmeetriatelge, mis läbib tippu A ja selle vastas asetsevat romboeedri tippu C' . Niisiis romboeeder omab kolmandat järku sümmeetriatelge.

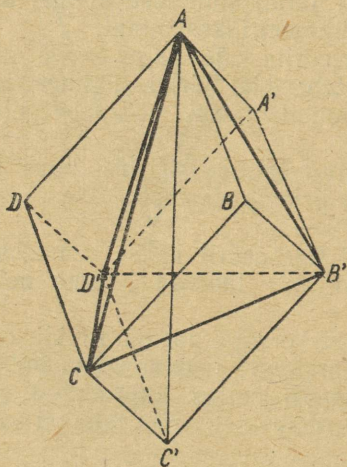
Ei ole raske näha, et korrutis pöördest 120° -se nurga võrra mingi telje s ümber ja peegeldusest punktist O , mis asetseb samal teljel, on pöördepeegeldus (teoreem 278, järeldus 4; joonis 93). Pöördepeegelduse teljeks on sama sirge s ; pöördepeegelduse tasapind on risti sirgega s ja läbib punkti O ; pöördepeegelduse nurk on 60° ja on suunatud vastupidiselt esialgse pöörde nurgale.

Siit järeldub, et romboeedri kolmandat järku sümmeetriatelge on ka tema kuuendat järku pöördepeegeldusteljeks. Tõepoolest, romboeeder omab, nagu iga rööptahukas, sümmeetriakeskpunkti,

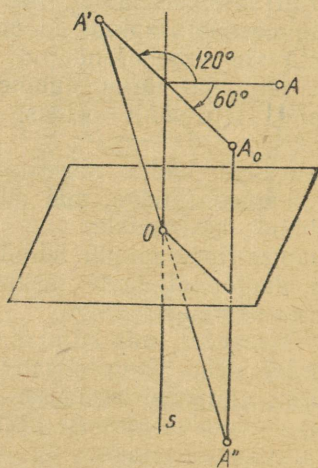
ja see sümmeetriakeskpunkt asetseb sümmeetriateljel, sest viimane ühtib romboeedri diagonaaliga.

Romboeedri tipud A, B, C, D, A', B', C' ja D' joonisel 92 siirduvad pöördel (ühes või teises suunas) 60° -se nurga võrra ümber telje s ja järgneval peegeldumisel keskpunktist O vastavalt tippudesse $C', C, D, D', B', B, A, A'$ või $C', B', B, C, D', A', A, D$.

Edasi, kolmnurksel püramiidil $AB'D'C$ ja järelkult ka romboeedril on kolm sümmeetriatasapinda, mis läbivad kolmandat järku sümmeetriatelge. Lõpuks, sümmeetriatasapindade ja sümmeetriakeskpunkti olemasolu toob endaga kaasa (teoreemi 277 järelduse 2 põhjal) kolme teist järku sümmeetriatelje olemasolu.



Joonis 92.



Joonis 93.

Niisiis romboeedril leidub kolmandat järku sümmeetriatelge, täpsemalt kuuendat järku pöördepeegeldustelge, kolm teist järku sümmeetriatelge, kolm sümmeetriatasapinda ja sümmeetriakeskpunkt.

Romboeedri sisse kujundatud tetraeeder on korrapärase kolmnurkne püramiid. Tal leidub kolmandat järku sümmeetriatelge ja kolm sümmeetriatasapinda (§ 142, f).

h) Asume lõpuks kuubi juurde. Kuupi saab kolmel erineval viisil vaadelda korrapärase prismana, sest tema iga paralleelsete tahkude paari võib lugeda prisma põhjadeks. Edasi saab kuupi neljal viisil vaadelda romboeedrina, sest tema neljast diagonaalist igäühe kummaski otsas koonduvad kolm võrdset tasanurka.

Siit järeldub, et kuubil leidub kolm neljandat järku sümmeetriatelge, mis paariti ühendavad paralleelsete tahkude keskpunkte. Edasi leidub kuubil neli kolmandat järku sümmeetriatelge, täpsemalt neli kuuendat järku pöördepeegeldustelge, mis ühtivad tema

diagonaalidega. Lõpuks on kuubil kuus teist järku sümmeetriatelge, milledest igaüks ühendab kahe paralleelse vastasserva keskpunkte.

Kuubil on üheksa sümmeetriatasapinda. Kuus neist ühendavad tema diagonaale kahekaupa ja ülejäänud kolm on võrdsetel kaugustel iga paralleelsete tahkude paari tasapindadest.

Nagu igal rööptahukal, leidub ka kuubil sümmeetriakeskpunkt.

Kuubi sisse kujundatud tetraeeder on korrapärane tetraeeder (§ 122). Tal on neli kolmandat järku sümmeetriatelge, kolm teist järku sümmeetriatelge, täpsemalt kolm neljandat järku pöördepeegeldustelge (mis ühtivad kuubi neljandat järku sümmeetriatelgedega), ja kuus sümmeetriatasapinda.

Märkus. On peaaegu ilmne, et kuubil ja korrapärasel tetraeedril ei leidu peale ülalootletute muid sümmeetrielemente. Seda asjaolu on võimalik ka rangelt tõestada (vt § 170, märkus 1).

Sfäärigeomeetria.

§ 144. Algmõisted.

Kujundit nimetatakse sfääriliseks, kui tema kõik punktid kuuluvad ühele ja samale kerale, ühele ja samale sfäärile. Geomeetria osa, mis uurib ühel ja samal keral asetsevad kujundeid, nimetatakse sfäärigeomeetriaks.¹

Nagu selgub järgnevast käsitlesest, meenutab sfäärigeomeetria mõnevõrra geomeetria tasapinnal (märgime, et geomeetria tasapinnal ja geomeetria sfääril kujutavad endast lihtsamaid pinnageomeetria näiteid). Seejuures kera suuringid osutuvad analoogilisteks sirgjoontega tasapinnal. Samal ajal reas olulistes küsimustes sfäärigeomeetria erineb geomeetriast tasapinnal.

Juhtudel, kui sfäärigeomeetria üks või teine lause on analoogiline tasapinnageomeetria mingi lausega, teeme sõnastuse lõpui vastava viite, märkides seda nurksulgudega.

Sfäärigeomeetria algmõisteteks on punkti ja suuringi mõisted (§ 123). Käesolevas peatükis tähistame punkte nagu alati suurte ladina tähtedega A, B, C, \dots ja suuringe väikeste ladina tähtedega a, b, c, \dots

Kera kaht punkti, mis on ühe ja sama diameetri otsteks, nime-tame *d i a m e t r a a l s e t e k s* punktideks. Kahe *m i t t e d i a m e t r a a l s e* punkti kohta kehtib järgmine lause.

Teoreem 288. *On olemas üks ja ainult üks suuring, mis läbib kera kaht antud mittediametraalset punkti.* [Aksiom 1.]

Tõestus. Kera kaks mittediametraalset punkti koos tema keskpunktiga määravad üheainsa tasapinna, mis lõikabki kera mööda otsitavat suuringi.

Toonitame veel, et aksiom 1 on tasapinnal õige iga kahe punkti kohta, kuna teoreem 288 on õige ainult mittediametraalsete punktide kohta.

¹ Muide, mõned sfäärigeomeetria laused, näiteks need, mis käivad võrdsete kujundite kohta, on õiged mitte ainult ühel ja samal keral asetsevate kujundite, vaid ka kahel võrdsetel keral asetsevate kujundite kohta.

Mittediametraalseid punkte A ja B läbivat suuringi tähistatakse sümboliga AB või BA .

Kaht mittediametraalset punkti A ja B läbiva suuringi kohta öeldakse, et ta ühendab punkte A ja B .

Kui kaks suuringi läbivad üht ja sama punkti, siis öeldakse, et nad lõikuvad selles punktis.

Teoreem 289. *Kera kaks suuringi lõikuvad kahes punktis.*

Tõestus. Kahe suuringi tasapindadel leidub ühine punkt — kera keskpunkt — ja seepärast nad lõikuvad mööda sirget. Selle sirge ja kera lõikepunktid ongi punktideks, kus lõikuvad kaks suuringi.

Märgime teoreemi 289 olulist erinevust vastavast tasapinna-geomeetria teoreemist 1.

Me ei hakka peatuma niisuguste lausete juures, nagu «iga suuring läbib lõpmatu hulga punkte», «on olemas kera punkte, mis ei asetse ühel ja samal suuringil», «kera iga punkti läbib lõpmatu hulk suuringe» [aksioomid 1b ja 1c; I, teoreem 2] ja teised analoogilised laused. Neid lauseid, mis on iseenesest ilmselt õiged, saaks tõestada, toetudes varemõeldule.

Olgu keral O antud suuring a ja sellel kaks punkti A ja B . Need kaks punkti jaotavad suuringi a ülejäänud punktid kaheks kaareks (I, lk. 49), millede otsteks on punktid A ja B .

Kasutades teoreemi tasapinna jaotamisest nurga haarade poolt (I, teoreem 4), saaks tõestada järgmise lause.

Teoreem 290. *Need kaks kaart, milleks jaotavad kera suuringi tema kaks punkti A ja B , on järgmiste omadustega: kui kaks punkti M ja N asetsevad ühel ja samal kaarel, siis üks kaarest, mille otsteks on punktid M ja N , ei sisalda ei punkti A ega ka punkti B , teine aga sisaldab mõlemaid neid punkte; kui aga kaks punkti M ja N asetsevad eri kaartel, siis üks kahest kaarest, mille otsteks on punktid M ja N , sisaldab punkti A , teine punkti B .*

Kasutades tasapinna jaotamise teoreeme ja teoreeme mittevõrdsete kaldlõikude kohta, saaks edasi tõestada veel järgmise teoreemi.

Teoreem 291. *Neist kahest kaarest, milleks jaotavad suuringi tema kaks punkti A ja B , asetseb üks selle suuringi tasapinnal sirstest AB ühel pool ja teine teisel pool.¹*

Suuringi kaart, mille otsteks on punktid A ja B , tähistame lihtsalt sümboliga AB .

Kui punktid A ja B on diametraalsed punktid, siis kumbagi kaart, milleks nad jaotavad suuringi, on loomulik nimetada suuringi poolringjooneks. Kui punktid A ja B ei ole diametraalsed punktid, siis ühele kahest kaarest, mille otsteks on punktid A ja B , vastab sirgnurgast väiksem kesknurk AOB (vrd. I,

¹ Teoreemid 290 ja 291 on kehtivad muidugi iga ringjoone punktide kohta, kuid me sõnastame need ainult suuringi punktide kohta, sest sel juhul on neil eriline tähtsus.

lk. 14 ja lk. 49); selle kaare nimetame poolringjoonest väiksemaks kaareks. Seejuures teisele kaarele vastab kesknurk, mis on sirgnurgast suurem; selle kaare nimetame poolringjoonest suuremaks kaareks. Mõnikord kõneldakse lihtsalt suuringi väiksemast ja suuremast kaarest, mille otsteks on punktid A ja B .

Edaspidi mõistame igal pool, kus pole öeldud vastupidist, antud kaht punkti ühendava suuringi kaare all või lihtsalt «kaare» all poolringjoonest väiksemat kaart. Suuringi kaart (poolringjoonest väiksemat), mille otsteks on punktid A ja B , nimetatakse punktide A ja B vaheliseks sfääriliseks kauguseks.

Vaatleme kera jaotamist suuringidega.

Analoogiliselt vastavate mõistetega tasapinnageomeetriast (I, lk. 10) saab defineerida sfäärilise murdjoone, tema otste, tippude ja lülide (külgede) mõisted. Seejuures sirgjoone lõikude asemel tuleb muidugi vaadelda suuringide kaari, mis võivad olla poolringjoonest väiksemad, sellega võrdsed või seltest suuremad.

Öeldakse, et mingi sfääriline kujund F jaotab kera kaheks piirkonnaks D_1 ja D_2 , kui see kujund võimaldab jaotada kõik temale mitte kuuluvad kera punktid kahte järgmiste omadustega klassi: 1) ühe ja sama klassi iga kaht punkti saab ühendada sfäärilise murdjoonega, millel ei ole kujundiga F ühiseid punkte; 2) eri klasside mingit kaht punkti ei saa ühendada niisuguse murdjoonega.

*Nüüd saame sõnastada järgmise teoreemi.

Teoreem 292. Iga suuring, mis asetseb mingil keral, jaotab selle kera kaheks piirkonnaks. [Aksiom 3.]

Tõestus. Olgu a suuring, mis asetseb antud keral.

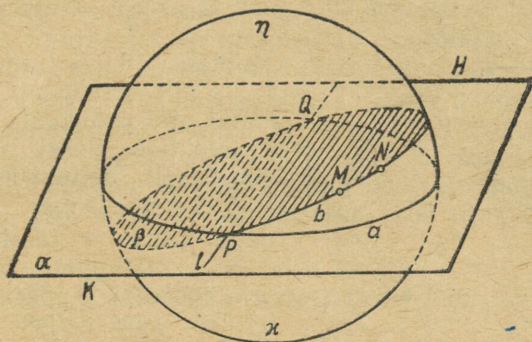
Suuringi a tasapind a jaotab ruumi kaheks poolruumiks H ja K (teoreem 203). Esimesse klassi loeme need kera punktid, mis kuuluvad poolruumi H , tähistades selle punktide klassi tähega η ; analoogiliselt defineerime nende kera punktide klassi \varkappa , mis kuuluvad poolruumi K . Näitame, et nii defineeritud kaks kera punktide klassi kujutavad endast kaht piirkonda.

Olgu M ja N kaks kera punkti (joonis 94), mis kuuluvad ühte ja samasse klassi, ütleme, konkreetse mõttes, klassi η . Need kaks punkti ei saa olla diametraalsed punktid, sest vastasel juhul lõigul MN leiduks tasapinnaga a ühine punkt, nimelt kera keskpunkt, ja punktidest M ja N üks kuuluks ühte, teine teise poolruumidest H ja K , seega ka üks kuuluks ühte ja teine teise klassidest η ja \varkappa . Järelikult punkte M ja N läbib üksainus suuring b . Tähistame selle suuringi tasapinna tähega β , tasapindade a ja β lõikejoone tähega l ning suuringide a ja b lõikepunktide tähtedega P ja Q .

Et punktid M ja N kuuluvad klassi η , siis asetsevad nad mõlemad poolruumis H . Siit järeldub, et punktid M ja N asetsevad

tasapinnal β sirgest l ühel ja samal pool ning ringjoone b ühel ja samal kaarel, mille otsteks on punktid P ja Q .

Et punktid M ja N asetsevad suurringi b ühel ja samal kaarel, mille otsteks on punktid P ja Q , siis üks kaartest, mille otsteks on punktid M ja N , ei sisalda kumbagi punktist P ja Q (teoreem 290). Teiste sõnadega, klassi η kaht punkti M ja N saab ühendada suurringi kaarega, millel ei ole ühiseid punkte suurringiga a . Sama on ilmselt kehtiv ka klassi κ kohta.



Joonis 94.

Korrates seda arutelu vastupidises järjekorras, jõuame järgmisele järeldusele: kui punkt M kuulub esimesse klassi η ja kaarel MN ei ole suurringiga a ühiseid punkte, siis kuulub esimesse klassi ka punkt N . Rakendades seda väidet korduvalt, saame kindlaks teha, et kui punkt M kuulub esimesse klassi ja sfäärilisel murdjoonel $MAB \dots N$ ei leidu ühiseid punkte suurringiga a , siis kuulub esimesse klassi ka punkt N . Teiste sõnadega, esimese klassi punkti M ei saa ühendada teise klassi punktiga murdjoone abil, millel ei ole ühiseid punkte suurringiga a . Sellega on teoreem tõestatud.

Kumbagi kahest piirkonnast, milleks suurring a jaotab kera, nimetatakse suurringiga a piiratud poolkeraks.

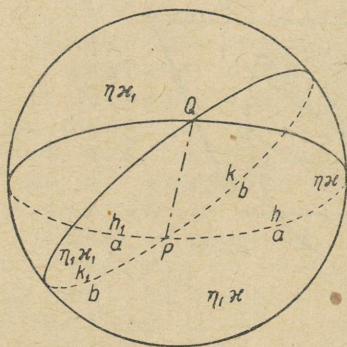
Ühel ja samal suurringiga a piiratud poolkeral asetseva kahe punkti kohta öeldakse, et nad on suurringist a ühel pool; kahe punkti kohta, mis asetsevad eri poolkeradel, öeldakse, et nad on suurringist a eri pooltel.

Kasutades teoreemi 292, saab tõestada ka järgneva lause kera jaotamise kohta suurringidega.

Teoreem 293. *Kaks suurringi jaotavad kera neljaks piirkonnaks [I, teoreem 3].*

Tõestus. Olgu a ja b antud suurringid ning P ja Q nende lõikepunktid (joonis 95). Tähistame tähtedega h ja h_1 need poolringjooned, milledeks punktid P ja Q jaotavad suurringi a , ning tähtedega k ja k_1 need poolringjooned, milledeks punktid P ja Q

jaotavad suuringi b . Suuring a jaotab kera kaheks poolkeraks. Seejuures poolringjooned k ja k_1 asetsevad eri poolkeradel, sest kumbki kahest kaarest, mis ühendab poolringjoone k mingit punkti poolringjoone k_1 mingi punktiga, sisaldab üht punktidest P ja Q . Neist kahest poolkerast seda, millel asetseb poolringjoon k , tähistame tähega η ja seda, millel asetseb poolringjoon k_1 , tähega η_1 . Analoogiliselt tähistame tähtedega \varkappa ja \varkappa_1 need kaks suuringiga b piiratud poolkera, mis sisaldavad vastavalt poolringjooni h ja h_1 . Jaotame nüüd punktid, mis ei asetse suuringidel a ja b , järgmiselt nelja klassi.



Joonis 95.

Esimesse klassi loeme need kera punktid, mis kuuluvad poolkerale η ja samal ajal poolkerale \varkappa ; tähistame selle punktide klassi sümboliga $\eta\varkappa$. Analoogiliselt defineerime punktide klassid $\eta\varkappa_1$, $\eta_1\varkappa$ ja $\eta_1\varkappa_1$.

Selle teoreemi tõestuse edasine käik on analoogiline tasapinnageomeetria teoreemi 3 tõestusega.

Igaüks neist neljast piirkonnast, mille olemasolu näitab teoreem 293, on «piiratud» kahe poolringjoonega, millel on ühised otsad. Nii on piirkond $\eta\varkappa$ piiratud poolringjoontega h ja k , piirkonnad $\eta\varkappa_1$, $\eta_1\varkappa$ ja $\eta_1\varkappa_1$ vastavalt poolringjoontega h_1 ja

k , h ja k_1 , h_1 ja k_1 . See asjaolu õigustab järgmise definitsiooni tarvituselevõtmist. Kogu, mis koosneb kera kahest diametraalsest punktist ja kahest poolringjoonest, mille otsteks on need punktid, nimetatakse sfääriliseks kaksnurgaks. Kaksnurka moodustavaid poolringjooni nimetatakse kaksnurga külgedeks ja nende ühiseid otsi tema tippudeks.

Saab tõestada, et sfääriline kaksnurk jaotab kera kaheks piirkonnaks [I, teoreem 4]. Kui kaksnurga kaks külge (koos tema tippudega) moodustavad ühe suuringi (millisest juhust me erandit ei tee), siis kumbki neist piirkondadest on poolkera. Kui kaksnurga küljed (koos tema tippudega) ei moodusta üht suuringi, siis üks neist piirkondadest on poolkerast «väiksem» ja teine «suurem». Sõltuvalt sellest, kumma neist kahest piirkonnast loeme seesmiseks piirkonnaks, saab vaadelda poolkerast väiksemaid kaksnurki ja poolkerast suuremaid kaksnurki. [Vrd. sirgnurga, sirgnurgast väiksema nurga ja sirgnurgast suurema nurga mõistet; I, lk. 12—14.]

Sfäärilise kaksnurga mõistega seostub loomulikult sfäärilise nurga mõiste.

Sfääriliseks nurgaks nimetatakse kogu, mis koosneb mingist punktist ja kahest poolringjoonest, mille ühiseks otsaks on

see punkt; seda punkti nimetatakse nurga tipuks ja poolringjooni tema haaradeks.

Kahest poolringjoonest, mille ühiseks otsaks on punkt A ja mis läbivad vastavalt punkte B ja C , moodustatud nurka tähistatakse, nagu tasapinnageomeetriaski, sümboliga $\angle BAC$ või $\angle CAB$.

Sfäärilise nurga haarad (koos nurga tipuga ja haarade teise ühise otsaga) moodustavad sfäärilise kaksnurga. Vastavalt poolkeraks muutunud sfäärilisele kaksnurgale ja poolkerast väiksematele ning poolkerast suurematele sfäärilistele kaksnurkadele saab kõnelda sfäärilisest sirgnurgast ja sirgnurgast väiksematest ning sirgnurgast suurematest sfäärilistest nurkadest.

Märgime lõpuks, et analoogiliselt suunaga lõikudega sirgel ja suunaga nurkadega tasapinnal (I, § 8) saab tarvitusele võtta suuringi suunaga kaarte mõiste ja samuti ka suunaga sfääriliste nurkade mõiste. Seejuures peame kujutlema, et «vaatleja», kellest oli seal juttu, asub alati väljaspool kera (või alati kera sees).

§ 145. Sfäärilised hulknurgad.

Sfäärilise hulknurga all selle kõige laiemas tähenduses mõistetakse iga kinnist sfäärilist murdjoont.

Kitsendame siiski mõnevõrra seda mõistet ja nõuame, et selle murdjoone iga lüli oleks poolringjoonest väiksem.

Niisiis sfääriliseks hulknurgaks nimetame kogu, mis koosneb lõplikust arvust kera punktidest A, B, C, D, \dots, K, L ja kõigi poolringjoonest väiksemate suuringi kaarte AB, BC, CD, \dots, KL ja LA punktidest; punkte A, B, C, \dots, K ja L nimetatakse hulknurga tippudeks ning kaari AB, BC, \dots, KL ja LA tema külgedeks; nurki LAB, ABC, \dots, KLA nimetatakse hulknurga nurkadeks.

Eelmises paragrahvis vaadeldud sfääriline kaksnurk ei rahulda meie sfäärilise hulknurga definitsiooni. Seetõttu lihtsaimaks sfääriliseks hulknurgaks on sfääriline kolmnurk, millel on kolm tippu A, B ja C , kolm külge AB, BC ja CA ning kolm nurka CAB, ABC ja BCA . Edasi järgnevad sfääriline nelinurk, viisnurk jne.

Analoogiliselt tasapinnageomeetriaga (I, lk. 20) võtame tarvitusele lihtsa sfäärilise hulknurga mõiste: sfäärilist hulknurka nimetame lihtsaks, kui tema mingid kaks külge ei lõiku, ükski tipp ei asetse tema küljel ja iga tipp on ainult kahe külje otsaks.

Lihtsate hulknurkade hulgast tuleb esile tõsta kumerad sfäärilised hulknurgad: sfäärilist hulknurka nimetatakse kumeraks, kui tema kõik ülejäänud küljed asetsevad ühel ja samal poolkeral iga suuringi suhtes, mille kaareks on hulknurga üks külge (vrd. I, lk. 17).

Sfääriliste hulknurkade üldiste omaduste range tõestamine ei

mahu oma iseloomult ja ulatuselt käesoleva raamatu raamidesse. Seepärast piirdume käesolevas paragrahvis ainult mõnede niisuguste omaduste loetlemisega, peatumata nende tõestamise juures (vrd. I, § 7).

Lihtsa sfäärilise hulknurga tähtsaimat omadust väljendab järgmine lause, mida võiks nimetada Jordan'i teoreemiks sfääriliste hulknurkade kohta (vrd. I, lk. 21).

Iga lihtne sfääriline hulknurk jaotab kera kaheks piirkonnaks.

Erinevalt sellest, mis kehtib tasapinnal, on need kaks piirkonda üheõiguslikud, ja meil üldiselt ei ole objektiivset alust seesmise piirkonna eristamiseks välistest. Kahest piirkonnast, milleks lihtne sfääriline hulknurk jaotab kera, võib üht meelevaldselt nimetada väliseks ja teist seesmiseks.

Poolringjoonest väiksemat, sellega võrdset või sellest suuremat suuringi kaart, mille otsteks on hulknurga kaks tippu ja mis ei ole tema küljeks, nimetatakse sfäärilise hulknurga diagonaaliks.

Saab tõestada, et igal lihtsal sfäärilisel hulknurgal leidub kolm niisugust järjestikust tippu — tähistame need tähtedega A , B ja C —, et diagonaal AC asetseb täielikult hulknurga sees (täpsemalt kera selles piirkonnas, mille lugesime seesmiseks). See diagonaal tükeldab lihtsa n -nurga seesmise piirkonna kolmnurga ABC seesmiseks piirkonnaks ja lihtsa $(n-1)$ -nurga seesmiseks piirkonnaks (kui mitte arvestada diagonaali AC enda punkte). Seda arutelu jätkates jõuame tulemusele, et *iga lihtsa sfäärilise n -nurga seesmist piirkonda saab tema diagonaalidega tükeldada $n-2$ kolmnurgaks.*

Nimetasime juba, et mistahes lihtsa sfäärilise hulknurga seesmiseks piirkonnaks võib lugeda ükskõik kumba neist kahest piirkonnast, milleks ta jaotab kera.

Teisiti on olukord juhul, kui *antud hulknurk täielikult asetseb ainult ühel, mingi suuringiga a piiratud poolkeral.* Saab muide tõestada, et viimane omadus on igal kumeral hulknurgal. Sel juhul on loomulik nimetada hulknurga suhtes seesmiseks piirkonnaks seda piirkonda, mis ei sisalda suuringi a ühtki punkti. Niisiis seesmise ja välise piirkonna mõiste on täiesti määratud näiteks iga kumera sfäärilise hulknurga puhul, eriti sfäärilise kolmnurga puhul.

§ 146. Kaarte ja nurkade võrdsus; ristuvus.

Kera suuringi kaarte kohta saab kehtestada võrdsuse mõiste.

Kaht suuringi kaart, mis on poolringjoonest väiksemad, sellega võrdsed või sellest suuremad, nimetatakse võrdseteks, kui neile vastavad kesknurgad on võrdsed.

See definitsioon on kooskõlas võrdsete kujundite üldise definitsiooniga (vt. I, teoreem 50).

Nii defineeritud võrdsetel kaartel on võrdsete lõikude omadustega analoogilised omadused, välja arvatud omadus, mida väljendab aksioom 4d.

Viimane omadus kera puhul ei kehti, sest keral puudub kiire mõiste, ja selle omaduse võib asendada järgmisega.

Olgu AB ja $A'X'$ kaks suuringi kaart, milledest kumbki võib olla poolringjoonest väiksem, sellega võrdne või sellest suurem; sel juhul keral leidub üks ja ainult üks niisugune punkt B' , et kaar AB on võrdne kaarega $A'B'$ ja punkt B' ühtib punktiga X' või punkt B' asetseb kaarel $A'X'$ või punkt X' asetseb kaarel $A'B'$.

Siit saaks tuletada võrdsete kaarte järgmise omaduse.

Olgu AB mingi kaar, mis erineb poolringjoonest, ja a' suuring, mis läbib antud punkti A' ; suuringil a' leidub kaks ja ainult kaks niisugust punkti B' , et kaar AB on võrdne ühega kahest kaarest, mille otsteks on punktid A' ja B' .

Suuringi kaart, mis vastab sirgnurgaga võrdsele kesknurgale, nimetasime poolringjooneks (§ 144); kõik suuringi poolringjooned on võrdsed, sest kõik sirgnurgad on võrdsed (I, teoreem 16, järeldus 2).

* Suuringi kaar, mis vastab täisnurgaga võrdsele kesknurgale, kannab *kvadrandi* nimetust. Et kõik täisnurgad on võrdsed (I, teoreem 28, järeldus), siis on võrdsed ka kõik kvadrandid. Vastavalt sellele, kas kesknurk on teravnurk või nürinurk, nime-tame kaart kvadrandidist väiksemaks või suuremaks.

Poolringjoone ja kvadrandi mõistega analoogilisi mõisteid tasapinnageomeetrias ei leidu.

Asume sfääriliste nurkade võrdsuse vaatlemisele. Igale sfäärilisele nurgale BAC vastab kahetahuline nurk $B \cdot OA \cdot C$, mille serv läbib antud kera keskpunkti O . See annab võimaluse defineerida võrdseid sfäärilisi nurki kui nurki, mis vastavad niisugustele võrdsetele kahetahulistele nurkadele, millede servad läbivad kera keskpunkti.

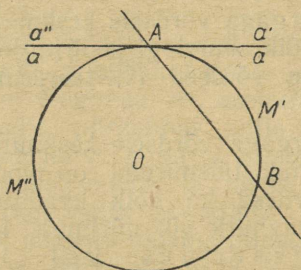
Sellele definitsioonile saab anda teise kuju, mis on näitlikum ja, peasi, mis lubab üldistamist mistahes pinnageomeetria juhule. Et anda sellele uuele definitsiooni kujule suuremat täpsust, võtame tarvitusele kaarele tema otspunktis tõmmatud poolpuutuja mõiste.

Olgu sirge a ringjoone O puutuja punktis A (joonis 96). Ringjoone O mingi punkt B , mis erineb punktist A , jaotab koos punktiga A ringjoone O kaheks kaareks $AM'B$ ja $AM''B$. Puutepunkt A jaotab sirge a kaheks kiireks. Üks neist kahest kiirest — tähistame selle tähega a' — asetseb sirgest AB samal pool, kus asetseb kaar $AM'B$. Teine kiir a'' asetseb sirgest AB ühel pool kaarega $AM''B$. Nende eelduste juures kiirt a' nimefatakse poolpuutujaks kaarele $AM'B$ tema otspunktis A ; analoogiliselt kiir a'' on poolpuutujaks kaarele $AM''B$ punktis A .

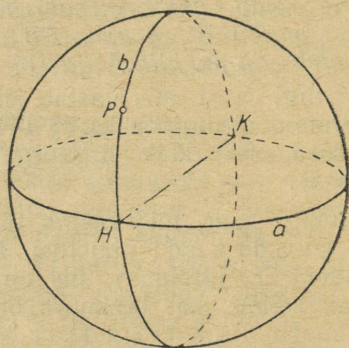
Me ütleme, et sfääriline nurk BAC on võrdne sfäärilise nurgaga $B'A'C'$, kui tasanurk kaartele AB ja AC punktis A tõmmatud poolpuutujate vahel on võrdne samalaadilise nurgaga kaartele $A'B'$ ja $A'C'$ punktis A' tõmmatud poolpuutujate vahel.

Nurk kaartele AB ja AC punktis A tõmmatud poolpuutujate vahel on ilmselt kahetahulise nurga $B \cdot OA \cdot C$ joonnurk. Seetõttu äsja tarvitusele võetud sfääriliste nurkade võrdsuse definitsioon sisuliselt ei erine varemantust.

Niiviisi defineeritud sfääriliste nurkade võrdsuse mõiste on täiesti analoogiline tasapinnaliste nurkade võrdsuse mõistega ja lubab sfääriliste nurkade kohta tarvitusele võtta mõisted «on suurem» ja «on väiksem», samuti ka nurkade summa, täisnurga, teravnurga jne. mõisted.



Joonis 96.



Joonis 97.

Peatume veel kera ristuvate suurringide mõiste juures.

Kera kaht suurringi nimetatakse ristuvateks, kui nad moodustavad oma ühe (ükskõik kumma) lõikepunkti juures täisnurga.

Kera suurringide ristuvuse vaatlemisel on otstarbekohane tarvitusele võtta järgmine mõiste. Antud suurringi poolusteks nimetatakse selle suurringi tasapinnaga ristuva diameetri ja kera lõikepunkte. On kehtivad järgmised teoreemid.

Teoreem 294. Läbi kera antud punkti, mis on erinev antud suurringi mõlemast poolusest, läheb üks ja ainult üks suurring, mis on risti antud suurringiga [I, teoreemid 28 ja 29].

Antud punkt võib seejuures asetseda antud suurringil, võib aga ka mitte asetseda sellel.

Selle teoreemi õigsus järeldub otseselt konstruktsioonist 77.

Oletame, et punkt P ei asetse suurringil a (joonis 97) ega ühti tema kummagi poolusega. Punkti P läbiv ja suurringiga a ristuv suurring b lõikab suurringi a kahes punktis H ja K . Nende eelduste korral väiksemat kahest kaarest PH ja PK (joonisel 97 on see kaar PH) nimetatakse punkti P kauguseks suurringist a .

Niisiis, kui punkt ei ühti suuringi poolusega, siis tema kaugus sellest suuringist on kvadrandidist väiksem.

Suuringi kummagi pooluse kaugust suuringist on loomulik lugeda võrdseks kvadrandidiga.

Teoreem 295. *Kahe suuringi ristuvuse tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks on see, et üks neist läbib teise pooluseid.*

Seejuures ka teine ring läbib esimese pooluseid.

Teoreem 296. *On olemas üks ja ainult üks suuring, mis on risti kahe antud suuringiga.*

Viimase kahe lause tõestamise jätame lugeja hooleks.

§ 147. Sfäärigeomeetria seos mähigeomeetriaiga.

Kiirte mähiks nimetame kogu, mis koosneb kõikidest ühest ja samast punktist väljuvatest kiirtest (poolsirgetest) ruumis¹; seda punkti nimetame mähikeskpunktiks.

Kiirte mähki keskpunktiga O nimetame mõnikord lühidalt «mähiks O ».

Mähik O kujundiks nimetame iga kujundit, mis koosneb selle mähiki kiirtest, s. o. kujundit järgmise omadusega: kui A on antud kujundi F mingi punktist O erinev punkt, siis kiire OA kõik punktid kuuluvad kujundile F . Punkti O on seejuures otstarbekohane lugeda samuti kujundile F kuuluvaks.

Mähiki O kujundite ja kujundite vahel, mis asetsevad mingil keral keskpunktiga O , on olemas üksühene vastavus. See vastavus põhineb sellel, et läbi kera iga punkti läheb mähiki üksainus kiir ja mähiki iga kiir lõikab kera ühesainsas punktis.

Esitame loetelu lihtsamatest kujunditest, mis mähis ja keral vastavad teineteisele.

Mähik

Kiir
Sirge
Tasapind
Pooltasapind
Tasanurk (koos seesmise piirkonnaga)
Täisnurk
Võrdsed nurgad
Kahetahuline nurk
Võrdsed kahetahulised nurgad
Ristuvad tasapinnad
Nurk sirge ja tasapinna vahel
Kolmetahuline nurk, tema tasanurgad ja kahetahulised nurgad

Kera

Punkt
Diametraalsete punktide paar
Suuring
Suuringi poolringjoon
Suuringi kaar
Kvadrant
Võrdsed kaared
Sfääriline kaksnurk (sfääriline nurk)
Võrdsed sfäärilised kaksnurgad (võrdsed sfäärilised nurgad)
Ristuvad suuringid
Punkti kaugus suuringist
Sfääriline kolmnurk, tema küljed ja nurgad

¹ Analüütilises geomeetrias ja projektiivses geomeetrias tuleb sagedamini vaadelda sirgete mähki, s. o. antud punkti läbivate sirgete kogu.

Kolmetahulised tippnurgad

Kolmetahulised täiendusnurgad

Suunaga kolmetahuline nurk
Samasuunalised (vastandsuunalised)
kolmetahulised nurgad

Hulkta huline nurk

Koonus

jne.

«Diametraalsete» sfääriliste kolmnur-
kade paar

«Polaarsed» sfäärilised kolmnurgad

«Orienteeritud» sfääriline kolmnurk

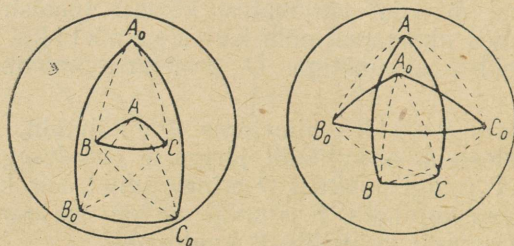
Ühte viisi (vastupidiselt) orienteeritud
sfäärilised kolmnurgad

Sfääriline hulknurk

«Diametraalsete» väikeriingide paar

Nagu nähtub sellest loetelust, põhjustab vastavus mähikujundite ja sfääriliste kujundite vahel rea uute mõistete tarvituselevõtmist; nendeks uuteks mõisteteks on «diametraalsete» sfääriliste kolmnurkade mõiste, «orienteeritud» sfäärilise kolmnurga mõiste jne.

Jätame vastavate definitsioonide formuleerimise lugeja hooleks, tuues näitena ainult ühe neist.



Joonis 98.

Sfäärilist kolmnurka $A_0B_0C_0$ (joonis 98) nimetatakse sfäärilise kolmnurga ABC suhtes polaarseteks, kui punkt A_0 on suuringi BC poolus, mis asetseb temast samal pool, kus punkt A , ja punktid B_0 ning C_0 on analoogiliste omadustega.

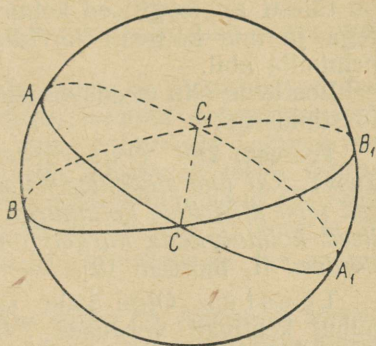
Kui $A_0B_0C_0$ on kolmnurga ABC suhtes polaarne kolmnurk, siis ka ABC on $A_0B_0C_0$ suhtes polaarne kolmnurk (see järel dub kolmetahuliste täiendusnurkade vastavast omadusest; teoreem 251).

Kirjeldatud vastavus mähikujundite ja sfääriliste kujundite vahel leiab geometrias laialdast rakendamist. Tegelikult oleme seda juba kasutanud paragrahvides 144—146. Tõestades teoreemi 289 kahe suuringi lõikumisest, me taandasime küsimuse neile vastavate tasapindade lõikumisele. Tõestades teoreemi 292 kera jaotamisest suurfiingiga, toetusime vastavale teoreemile mühi kohta, s. o. teoreemile 203 ruumi jaotamisest tasapinnaga. Kaarte ja sfääriliste nurkade võrdsuse mõisted taandasime neile vastavate tasanurkade ja kahetahuliste nurkade võrdsuse mõistetele.

Esitame veel näiteid selle vastavuse rakendamisest. Teoreemist 204 ruumi jaotamise kohta kahe lõikuva tasapinnaga tuleneb teoreem 293 kera jaotamisest. Teoreemist 205 tuleneb otseselt järgmine sfäärigeomeetria lause.

Teoreem 297. Kera kolm suuringi, kui nad kõik kolm ei läbi kaht diametraalset punkti, jaotavad kera kaheksaks piirkonnaks, moodustades seejuures kaheksa sfäärilist kolmnurka.

Kui üks neist kaheksast kolmnurgast tähistada sümboliga ABC , siis ülejäänud seitsmest kolmnurgast kolm on ABC naaberkolmnurkadeks ja üks on tema diametraalseks kolmnurgaks. Ülejäänud kolm kolmnurka on naaberkolmnurkadeks kolmnurgale, mis on diametraalne kolmnurgaga ABC (joonis 99).



Joonis 99.

Edasist rakendamist leiab vaaeldav vastavus käesoleva peatüki järgnevates paragrahvides. Seejuures ühtedel juhtudel tuletame mühi-kujundite kohta käivatest lausetest vastavad sfäärigeomeetria laused, teistel juhtudel, ümberpöörduvalt, sfäärigeomeetria lausetest mühi kohta käivad laused.

§ 148. Sfäärilised kolmnurgad ja nende omadused.

Kaht sfäärilist kolmnurka nimetatakse võrdseteks, kui nende kolmnurkade küljed ja nurgad on vastavalt võrdsed.¹ Kasutades allpool tõestatud sfääriliste kolmnurkade võrdsuse tunnuseid, saab näidata, et see definitsioon on kooskõlas võrdsete ruumikujundite üldise definitsiooniga.

Suunaga sfääriliste nurkade omadustest, mis on täiesti analoogilised tasapinna suunaga nurkade omadustega (vrd. I, lk. 24—25), järeldub kergesti, et iga sfäärilise kolmnurga ABC kolm nurka $\angle BAC$, $\angle CBA$ ja $\angle ACB$ on samasuunalised. See asjaolu võimaldab kõnelda sfäärilise kolmnurga orientatsioonist (vrd. I, lk. 26—27).

Kaht võrdset sfäärilist kolmnurka nimetame pärisvõrdseteks juhul, kui nad on ühteviisi orienteeritud, ja peegeldusvõrdseteks juhul, kui nad on vastupidiselt orienteeritud.

Sfääriliste kolmnurkade võrdsusel on ilmselt refleksiivsuse, sümmeetrilisuse ja transitiivsuse omadus. Seejuures kaks sfäärilist kolmnurka, mis on pärisvõrdsed kolmandaga, ja samuti kaks sfäärilist kolmnurka, mis on peegeldusvõrdsed kolmandaga, on teineteisega pärisvõrdsed. Kui üks antud kahest sfäärilisest kolmnurgast on kolmandaga pärisvõrdne, teine aga temaga peegeldus-

¹ Selle definitsiooni puhul vt. märkust paragrahvis 129, lk. 86.

võrdne, siis antud sfäärilised kolmnurgad on teineteisega peegeldusvõrdsed.

Sfääriliste kolmnurkade võrdsuse kohta kehtivad tunnused, mis on täiesti analoogilised kolmetahuliste nurkade võrdsuse tunnustega ja mis kergesti järelduvad neist paragrahvis 147 esitatud printsíibi abil.

Loetleme siin need võrdsuse tunnused, piirdudes neist esimese tõestamisega.

Teoreem 298 («sfääriliste kolmnurkade võrdsuse esimene tunnus»). *Kui ühe sfäärilise kolmnurga kaks külge on vastavalt võrdsed teise sfäärilise kolmnurga kahe küljega ja nende külgede vahelised kolmnurkade nurgad on võrdsed, siis need kolmnurgad on võrdsed* [I, teoreem 12].

Tõestus. Olgu kahe sfäärilise kolmnurga ABC ja $A'B'C'$ puhul kehtivad võrdsused $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ ja $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

Vaatleme kolmetahulisi nurki $OABC$ ja $O'A'B'C'$, kus O on antud kera keskpunkt. Antud sfääriliste kolmnurkade külgede AB ja $A'B'$ võrdsuse tõttu neil kolmetahulistel nurkadel $\angle AOB = \angle A'O'B'$; analoogiliselt võrdustest $AC = A'C'$ ja $\angle BAC = \angle B'A'C'$ järeldub, et $\angle AOC = \angle A'O'C'$ ja $\angle B \cdot OA \cdot C = \angle B' \cdot OA' \cdot C'$. Järelikult kolmetahulised nurgad $OABC$ ja $O'A'B'C'$ on võrdsed esimese tunnuse järgi (teoreem 250). See tõttu on võrdsed ka tasanurgad $\angle BOC$ ja $\angle B'OC'$ ning järelikult ka antud sfääriliste kolmnurkade küljed BC ja $B'C'$. Edasi, kolmetahuliste nurkade võrdsusest järeldub nende ülejäänud kahetahuliste nurkade võrdsus, nimelt $\angle C \cdot OB \cdot A = \angle C' \cdot OB' \cdot A'$ ja $\angle A \cdot OC \cdot B = \angle A' \cdot OC' \cdot B'$, s. o. sfääriliste kolmnurkade ülejäänud nurkade võrdsus: $\angle CBA = \angle C'B'A'$ ja $\angle ACB = \angle A'C'B'$.

Järgnevate võrdsuse tunnuste tõestamisel tuleb toimida analoogiliselt, toetudes iga kord vastavale kolmetahuliste nurkade võrdsuse tunnusele (§ 129).

Teoreem 299 («sfääriliste kolmnurkade võrdsuse teine tunnus»). *Kui ühe sfäärilise kolmnurga üks külge on võrdne teise sfäärilise kolmnurga ühe küljega ja nende külgede lähisnurgad on kolmnurkadel vastavalt võrdsed, siis need kolmnurgad on võrdsed* [I, teoreem 13].

Teoreem 300 («sfääriliste kolmnurkade võrdsuse kolmas tunnus»).

Kui ühe sfäärilise kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise sfäärilise kolmnurga kolme küljega, siis need kolmnurgad on võrdsed [I, teoreem 15].

Teoreem 301 («sfääriliste kolmnurkade võrdsuse neljas tunnus»).

Kui ühe sfäärilise kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise sfäärilise kolmnurga kahe nurgaga, esimese kolmnurga neist nurkadest ühe vastaskülge on võrdne teise kolmnurga vastava kül-

jega ja nende kolmnurkade küljed, mis asetsevad teiste, eelduse järgi võrdsete nurkade vastas, on mõlemad kvadrandid väiksemad või mõlemad kvadrandid suuremad, siis need kolmnurgad on võrdsed [I, teoreem 18].

Teoreem 302 («sfääriliste kolmnurkade võrdsuse viies tunnus»).

Kui ühe sfäärilise kolmnurga kaks külge on vastavalt võrdsed teise sfäärilise kolmnurga kahe küljega, esimese kolmnurga neist külgedest ühe vastasnurk on võrdne teise kolmnurga vastava nurgaga ja nende kolmnurkade nurgad, mis asetsevad teiste, eelduse järgi võrdsete külgede vastas, on mõlemad teravnurgad või mõlemad nürinurgad, siis need kolmnurgad on võrdsed [I, teoreem 27].

Teoreem 303 («sfääriliste kolmnurkade võrdsuse kuues tunnus»).

Kui ühe sfäärilise kolmnurga kolm nurka on vastavalt võrdsed teise sfäärilise kolmnurga kolme nurgaga, siis need kolmnurgad on võrdsed.

Sfäärilist kolmnurka nimetatakse täisnurkseks, kui tal leidub üks ja ainult üks täisnurk; täisnurga vastaskülge nimetatakse, nagu tasapinnageomeetriasi, hüpotenuusiks ja ülejäänud kaht külge kaatetiteks.

Loetleme nüüd täisnurksete sfääriliste kolmnurkade võrdsuse tunnused, ilma et peatuksime nende tõestamise juures. Need tunnused järelduvad otseselt paragrahvis 130 vaadeldud täisnurksete kolmetahuliste nurkade võrdsuse tunnustest.

Teoreem 304. Kui ühe täisnurkse sfäärilise kolmnurga kaks kaatetit on võrdsed teise täisnurkse sfäärilise kolmnurga kahe kaatetiga, siis need kolmnurgad on võrdsed [I, teoreem 30].

Teoreem 305. Kui ühe täisnurkse sfäärilise kolmnurga üks kaatet on võrdne teise täisnurkse sfäärilise kolmnurga ühe kaatetiga ja nende kaatetite juures olevad kolmnurkade nurgad, mis erinevad täisnurgast, on võrdsed, siis need kolmnurgad on võrdsed [I, teoreem 31].

Teoreem 306. Kui ühe täisnurkse sfäärilise kolmnurga üks nurk, mis erineb täisnurgast, on võrdne teise täisnurkse sfäärilise kolmnurga ühe nurgaga ja nende kolmnurkade hüpotenuusid on võrdsed, siis need kolmnurgad on võrdsed [I, teoreem 32].

Teoreem 307. Kui ühe täisnurkse sfäärilise kolmnurga üks nurk, mis erineb täisnurgast, on võrdne teise täisnurkse sfäärilise kolmnurga ühe nurgaga, nende nurkade vastas asetsevad kolmnurkade kaatetid on võrdsed ja mõlema kolmnurga hüpotenuusid on kvadrandid väiksemad või kvadrandid suuremad, siis need kolmnurgad on võrdsed [I, teoreem 33].

Teoreem 308. Kui ühe täisnurkse sfäärilise kolmnurga hüpotenuus ja üks kaatet on vastavalt võrdsed teise täisnurkse sfäärilise kolmnurga hüpotenuusi ja ühe kaatetiga, siis need kolmnurgad on võrdsed [I, teoreem 35].

Teoreem 309. Kui ühe täisnurkse sfäärilise kolmnurga kaks nurka, mis erinevad täisnurgast, on vastavalt võrdsed teise täisnurkse sfäärilise kolmnurga kahe nurgaga, siis need kolmnurgad on võrdsed.

Siirdume sfääriliste kolmnurkade muude omaduste vaatlemisele.

Sfäärilist kolmnurka nimetatakse võrdhaarseks, kui tal on kaks võrdset külge, ja võrdkülgseks, kui tema kõik küljed on võrdsed.

Kasutades sfääriliste kolmnurkade võrdsuse esimest ja teist tunnust, saab lugeja ilma raskuseta tõestada võrdhaarse sfäärilise kolmnurga järgmise omaduse (vrd. I, teoreemide 11 ja 14 tõestused).

Teoreem 310. Võrdhaarse sfäärilise kolmnurga võrdsete külgede vastas asetsevad nurgad on võrdsed.

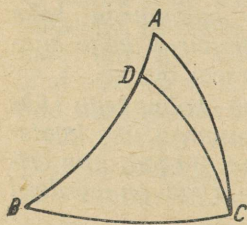
Umberpöördult: kui sfäärilise kolmnurga kaks nurka on võrdsed, siis see sfääriline kolmnurk on võrdhaarne.

Teoreem 311. Sfäärilise kolmnurga iga külg on väiksem kahe teise külje summast ja suurem nende vahest.

Järeldus. Iga sfäärilise kolmnurga kolme külje summa on väiksem kui suuring.

Järeldus tuleneb teoreemist 256 ja selle järeldusest.

Teoreem 312. Igas sfäärilises kolmnurgas asetseb suurema nurga vastas ka suurem külg.



Joonis 100.

Tõestus. Kehtigu sfäärilise kolmnurga ABC kohta võrratus $\angle C > \angle B$ (joonis 100). Selle võrratuse põhjal saab öelda, et läbi tipu C läheb kolmnurga sees niisugune kaar CD , et $\angle ABC = \angle BCD$. Kolmnurk BCD on võrdhaarne (teoreem 310), seega $BD = CD$. Teoreemi 311 järgi

$AC < AD + DC = AD + DB = AB$,
seega teoreem on tõestatud.

Järeldus. Igas sfäärilises kolmnurgas asetseb suurema külje vastas ka suurem nurk.

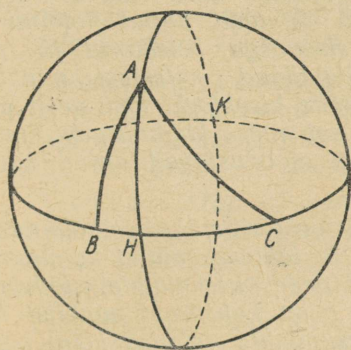
Tõepoolest, kehtigu sfäärilise kolmnurga ABC kohta võrratus $AB > AC$. Kui oleks õige, et $\angle C = \angle B$, siis saaksime (teoreemi 310 järgi), et ka $AB = AC$, või kui oleks õige, et $\angle C < \angle B$, siis saaksime (teoreemi 312 järgi), et ka $AB < AC$. Järelikult $\angle C > \angle B$.

Bisektori, mediaani ja kõrguse mõisted on kergesti üldistatavad sfäärilise kolmnurga juhule.

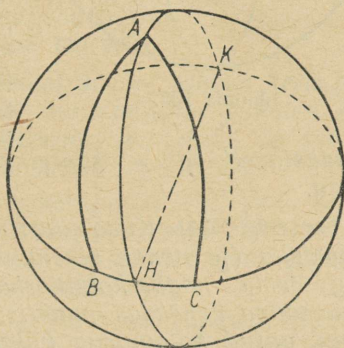
Sfäärilise kolmnurga bisektoriks nimetatakse suuringi, mis poolitab tema üht nurka, ja ka selle suuringi kaart, mille otsteks on kolmnurga tipp ning suuringi lõikepunkt selle tipu vastasküljega. Antud sfäärilist nurka poolitava suuringi olemasolu

järeldub kahetahulise nurga bisektortasapinna olemasolust (§ 117). Analoogiliselt saab defineerida välist bisektorit. Antud sfäärilise kolmnurga väline bisektor on ühtlasi selle kolmnurga kahe naaberkolmnurga (seesmiseks) bisektoriks.

Sfäärilise kolmnurga mediaaniks (ehk seesmiseks mediaaniks) nimetatakse suurringi, mis läbib tema üht tippu ja selle tipu vastaskülje keskpunkti, ja ka selle suurringi kaart, mille otsteks on needsamad kaks punkti. Analoogiliselt välise bisektoriga nimetatakse sfäärilise kolmnurga ABC tippu A läbivaks väliseks mediaaniks suurringi, mis läbib punkti A ja on ühiseks mediaaniks kahele sfäärilisele kolmnurgale AB_1C ja ABC_1 , s. o. antud kolmnurga naaberkolmnurkadele vastavalt külgedele AC ja AB juures (neil kahel sfäärilisel kolmnurgal on mediaan ühine, sest nende kolmnurkade külgedele CB_1 ja BC_1 keskpunktid on diametraalsed punktid).



Joonis 101.

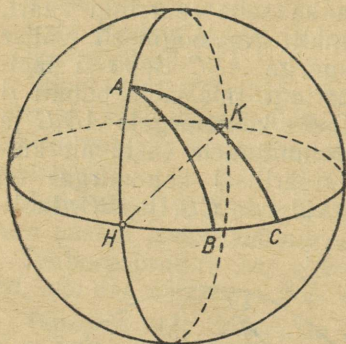


Joonis 102.

Lõpuks, sfäärilise kolmnurga kõrguseks nimetatakse suurringi, mis läbib tema üht tippu ja on risti selle tipu vastas asetseva küljega, ja ka selle suurringi üht kaart neist kahest kaarest, mille otsteks on kolmnurga antud tipp ja punktid, kus suurring lõikab selle tipu vastaskülge (või selle pikendust). Kui sfäärilise kolmnurga nurgad tema kahe ülejäänud tipu juures on mõlemad teravnurgad või mõlemad nürinurgad, siis on kõrguseks loomulik lugeda seda kaart, mis asetseb kolmnurga sees (joonised 101 ja 102). Saab tõestada, et neil kahel juhul üks kahest kaarest, millest oli jutt, asetseb sfäärilise kolmnurga sees, teine aga väljas. Kui aga üks kahest nurgast kahe ülejäänud tipu juures on teravnurk ja teine nürinurk, siis mõlemad kaared, millest oli jutt, asetsevad väljaspool sfäärilist kolmnurka, nagu saab tõestada; sel juhul on loomulik lugeda kõrguseks seda kaart, mis on kvadrantist väiksem (joonis 103). Lõpuks, kui nurgad kahe ülejäänud tipu juures on täisnurgad, siis sfäärilise kolmnurga antud tipust

väljuva kõrguse mõiste kaotab mõtte; sel juhul iga suuring, mis läbib antud tippu, on risti selle tipu vastasküljega.

Teoreemid kolmnurga bisektorite, mediaanide, kõrguste ja külgede keskristsirgete lõikumisest ühes punktis on laiendatavad ka sfäärigeomeetria.



Joonis 103.

Tõepoolest, järgmised laused tulevad kolmetahuliste nurkade kohta käivatest teoreemidest 240, 241, 242 ja 243. Seejuures vaatleme koos antud kolmnurgaga veel seitset uut, tema külgede pikenduste poolt moodustatud kolmnurka (teoreem 297).

Teoreem 313. *Sfäärilise kolmnurga sise- ja välisnurkade kuus bisektorit lõikuvad kolmekaupaks kaheksas punktis: ühes neist kaheksast punktist lõikuvad antud kolmnurga kolme sisenurga bisektorid ja iga ühes ülejäänud seitsmest punktist sisenurkade bisektorid ühel neist ülejäänud seitsmest kolmnurgast, mille*

moodustavad samad suuringid, mis moodustavad antud kolmnurga.

Teoreem 314. *Kuus suuringi, mis on risti sfäärilise kolmnurga külgedega (ja nende pikendustega) ja läbivad antud kolmnurga ning tema naaberkolmnurkade külgede keskpunkte, lõikuvad kolmekaupaks kaheksas punktis: ühes neist kaheksast punktist lõikuvad antud kolmnurga külgede keskpunkte läbivad kolm suuringi ja igaühes ülejäänud seitsmest punktist suuringid, mis läbivad külgede keskpunkte ühel neist ülejäänud seitsmest kolmnurgast, mille moodustavad samad suuringid, mis moodustavad antud kolmnurga.*

Teoreem 315. *Sfäärilise kolmnurga kuus seesmist ja välist mediaani lõikuvad kolmekaupaks kaheksas punktis: ühes neist kaheksast punktist lõikuvad antud kolmnurga kolm seesmist mediaani ja igaühes ülejäänud seitsmest punktist seesmised mediaanid ühel neist ülejäänud seitsmest kolmnurgast, mille moodustavad samad suuringid, mis moodustavad antud kolmnurga.*

Teoreem 316. *Sfäärilise kolmnurga kolm kõrgust lõikuvad kahes diametraalses punktis.*

On ilmne, et need kolm kõrgust on kõrgusteks ka neis ülejäänud seitsmes kolmnurgas, mille moodustavad samad suuringid, mis moodustavad antud kolmnurga.

Ülalpool juba tutvusime sfääriliste kolmnurkade mõnede niisuguste omadustega (teoreem 303 ja sellest tulenev teoreem 309), mis oluliselt erinevad tasaste kolmnurkade omadustest. Esitame veel kaks sfääriliste kolmnurkade niisugust omadust.

Teoreem 317. *Sfäärilise kolmnurga nurkade summa on suurem kui 2d.*

See järeldeb teoreemist 257.

Teoreem 318. *Sfäärilise kolmnurga välisnurk (s. o. tema mingi nurga kõrvunurk) võib olla suurem sisenurgast, mis ei ole temale kõrvunurgaks, või väiksem sellest või võrdne sellega.*

See järeldeb teoreemist 258.

§ 149. Kera väikeringid.

Väikeringiks nimetatakse, nagu teame (§ 123), ringjoont, mida mööda kera lõikub tema keskpunkti mitte läbiva tasapinnaga.

Käesolevas paragrahvis vaadeldavatest väikeringide omadustest selgub, et väikeringidel on sfäärigeomeetrias analoogiline osa sellega, mis on ringjoontel tasapinnageomeetrias.

Seda kinnitab kõigepealt järgmine teoreem.

Teoreem 319. *Väikering on geomeetriliseks kohaks kera punktidele, millede sfäärilised kaugused kera mingist punktist P on võrdsed ühe ja sama kaarega; väikeringi punktidel on seesama omadus ka punktiga P diametraalse punkti P_1 suhtes.*

Tõestus. Olgu O antud kera keskpunkt (vt. joon. 47), A punktist O antud väikeringi tasapinnale α tõmmatud ristlõigu alus, B antud väikeringi mingi fikseeritud punkt, M tema mistahes teine punkt ja P punkt, kus kiir OA lõikub keraga.

Täisnurksed kolmnurgad MOA ja BOA on võrdsed; järelikult on võrdsed ka nurgad MOA ja BOA , s. o. nurgad MOP ja BOP . Võrdsetele kesknurkadele aga vastavad ka võrdsed kaared. Järelikult sfääriline kaugus PM punktist P väikeringi mingi punktini M on võrdne kaarega PB .

Kaarte PM ja PB võrdsusest järeldeb ka kaarte P_1M ja P_1B võrdsus, kui P_1 on punktiga P diametraalne punkt. Teoreem on tõestatud.

Väikeringi kõikidest punktidest võrdsetel kaugustel olevaid punkte P ja P_1 nimetatakse selle väikeringi poolusteks, pooluste ja väikeringi vahelisi sfäärilisi kaugusi aga tema sfäärilisteks raadiusteks.

Ühele poolusele — meie juhul poolusele P — vastab kvadrandid väiksem sfääriline raadius, teisele poolusele P_1 kvadrandid suurem sfääriline raadius. Kui kõneldakse lihtsalt väikeringi «poolusest» ja «sfäärilisest raadiusest», siis mõeldakse kvadrandid väiksemat raadiust ja sellele vastavat poolust.

Teoreemi tõestusest nähtub, et väikeringi poolusteks on väikeringi tasapinnaga ristuva keradiameetri otsad.

Tõestatud teoreem on ilmselt õige ka suuringi puhul; sel juhul kumbki sfääriline raadius on võrdne kvadrandidiga.

Teoreem 320. Iga väikering, mis asetseb mingil keral, jaotab selle kera kaheks piirkonnaks.

Selle teoreemi tõestus on täiesti analoogiline teoreemi 292 tõestusega.

Kumbagi kahest piirkonnast, milledeks väikering jaotab kera, nimetatakse sfääri segmendiks ehk lihtsalt segmendiks¹ (kasutatakse ka nimetusi «kera võlv» ja «segmendi pind»). Üks neist kahest piirkonnast on poolkerast väiksem selles mõttes, et tema kõik punktid kuuluvad ühele ja samale poolkerale; teine piirkond on poolkerast suurem, s. t. ei leidu niisugust poolkera, mis sisaldaks kõiki selle piirkonna punkte.

Neist kahest piirkonnast esimest, s. o. poolkerast väiksemat piirkonda ja tema kõiki punkte nimetatakse seesmisteks selle väikeringi suhtes; teine, poolkerast suurem piirkond ja tema kõik punktid on välised selle väikeringi suhtes.

Teoreem 321. Läbi kera iga kolme punkti, mis ei asetse ühel ja samal suuringil, läheb üks ja ainult üks väikering.

Tõestus. Olgu A , B ja C antud kera kolm punkti, mis ei asetse ühel ja samal suuringil. Need kolm punkti ei asetse (teoreemi 234 põhjal) ühel ja samal sirgel, mistõttu neid läbib üksainus tasapind ABC . Tasapind ABC lõikub keraga mööda väikeringi, mis läbib punkte A , B ja C , sest eelduse kohaselt need punktid ei asetse ühel ja samal suuringil.

Selliseid väikeringe leidub ainult üks, sest tasapindu ABC on ainult üks.

§ 150. Kahe ringi vastastikune asend keral.

Asume väikeringi ja suuringi lõikumise ja kahe väikeringi vastastikuse asendi küsimuse juurde.

Märkus. Selle küsimuse käsitlemisel on võimalikud kaks vaatekohta.

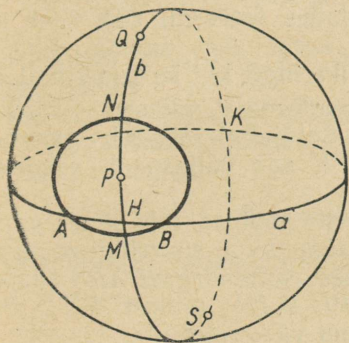
Kõige lihtsam on vaadelda ainult neid väikeringide sfäärilisi raadiusi, mis on kvadrandid väiksemad, ja neile vastavaid pooluseid. Sellele vaatekohale asudes saame tasapinnageomeetriaga täiesti analoogilised tulemused (teoreemid 322 ja 324). Sfäärigeomeetria mitmed küsimused nõuavad siiski avaramat vaatekohta: tuleb vaadelda nii kvadrandid väiksemaid kui ka suuremaid väikeringide sfäärilisi raadiusi (teoreem 322, järeldus; teoreem 324, järeldused 1 ja 2). See teine vaatekoht võimaldab muuseas lahendada antud külgedega sfäärilise kolmnurga olemasolu küsimuse (teoreem 324, järeldus 3).

Teoreem 322. Suuringil on väikeringiga kaks ühist punkti või üks ühine punkt või tal ei ole temaga ühiseid punkte sõltuvalt sellest, kas antud väikeringi kvadrandid väiksem sfääriline raadius on suurem kui sellele raadiusele vastava väikeringi pooluse sfääriline kaugus antud suuringist või võrdne selle kaugusega või

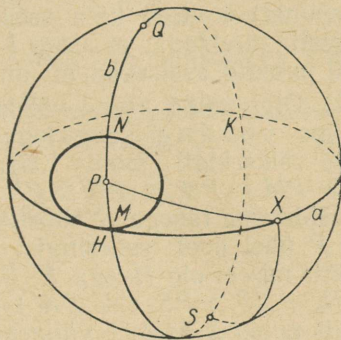
¹ Nagu on teada koolikursusest, nimetatakse kera segmendiks teatavat keha, nimelt kera lõikavast tasapinnast ühel pool asetsevate kera enda punktide ja kera suhtes seesmistele punktide kogu.

väiksem sellest kaugusest (vrd. I, teoreemid 39—43 ja kokkuvõte raamatu esimese osa leheküljel 51).

Toonitame, et teoreemi sõnastuses esineb kvadrantist väiksem väikeringi sfääriline raadius ja sellele vastav poolus; väikeringi pooluse sfäärilise kaugusena suuringist mõistetakse kvadrantist väiksemat või sellega võrdset kaart (§ 146).



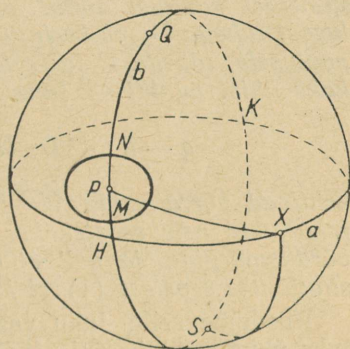
Joonis 104.



Joonis 105.

Tõestus. Olgu P antud väikeringi see poolus, millele vastav sfääriline raadius on kvadrantist väiksem, ja a antud suuring (joonised 104, 105 ja 106). Tähistame tähtedega H ja K punktid, kus antud suuring lõikub suuringiga b , mis läbib poolust P ja on risti suuringiga a ; tähised valime nii, et kaar PH ei ületaks kvadranti, s. t. oleks punkti P sfääriliseks kauguseks suuringist a (võimalus, et punkt P ühtib punktiga H , on kaasa arvatud).

Antud väikeringi poolust läbib suuring b lõikab seda väikeringi kahes punktis M ja N . Tõepoolest, suuringil b saab leida kaks punkti, millede kaugused punktist P on võrdsed väikeringi raadiusega (vt. § 146, kaarte võrdsus keral).



Joonis 106.

1) Vaatleme esmalt seda juhtu, kus antud väikeringi kvadrantist väiksem sfääriline raadius on suurem kui sellele raadiusele vastava pooluse P sfääriline kaugus PH suuringist a (joonis 104). Sel juhul kaar PH on väiksem võrdsetest kaartest PM ja PN ning järelikult punkt H asetseb kaarel MPN . Et viimane kaar on poolringjoonest väiksem, siis punkti H diametraalne punkt K ei asetse kaarel MPN .

Siit järeldub (teoreemide 290 ja 291 abil), et suurringi b tasapinnal punktid H ja K on sirgest MN eri pooltel ning punktid M ja N on sirgest HK eri pooltel. Viimasest asjaolust järeldub omakorda, et kõõlud MN ja HK lõikuvad ringjoone b sees, järelikult ka antud kera sees.

Nii oleme tõestanud, et antud väikeringi tasapinna ja suurringi a tasapinna lõikejoone l üks punkt (nimelt kõõlude MN ja HK lõikepunkt) asetseb kera sees. Kasutades teoreemi 234, saab siit kergesti järeldada, et sirge l lõikab kera kahes punktis A ja B . Need punktid asetsevad nii antud väikeringil kui ka suurringil a .

2) Olgu nüüd antud väikeringi kvadrantist väiksem sfääriline raadius võrdne kaugusega PH . Sel juhul asetseb punkt H antud väikeringil (joonis 105), punkt K aga väljaspool seda, sest $PH = PM = PN$ ja $PK > PH$.

Tähistame tähega S suurringi a selle pooluse, mis ei ole punktiga P ühel pool suurringist a , ja tähega X suurringi a mingi punkti, mis ei ole H ega K . Sfäärilisest kolmnurgast XPS saame, et $PX + XS > PS$ ehk $PX + XS > PH + HS$, millest $PX > PH$. Niisiis punkt X asetseb väljaspool antud väikeringi.¹

3) Lõpuks, kui antud väikeringi kvadrantist väiksem sfääriline raadius on väiksem kui kaugus PH , siis punktid H ja K on mõlemad väljaspool antud väikeringi (joonis 106). Antud suurringi a iga punkti X puhul, mis erineb punktidest H ja K , saame jälle, et $PX + XS > PS$, kust $PX > PH > PM$.

Teoreem on tõestatud.

Järeldus. Kui tähistada väikeringi ükskõik kumma pooluse sfäärilist kaugust antud suurringi ühest, ükskõik kummast poolusest tähega D , väikeringi sfäärilist raadiust, mis vastab valitud poolusele, tähega R ja kvadranti tähega q , siis antud ringidel on kaks ühist punkti sel juhul, kui kõigis kolmes seoses

$$|q - R| \leq D; D \leq q + R; D + R \leq 3q \quad (1)$$

kehtivad võrratusmärgid. Samadel ringidel on üks ühine punkt juhul, kui neis seostes kas või ainult üks võrratusmärk asendub võrdusmärgiga, ja neil ei ole ühiseid punkte juhul, kui kas või ainult üks seostest (1) ei kehti.

Piirdume selle juhu vaatlemisega, kus antud ringidel leidub kaks ühist punkti. Kui sfäärilise kauguse PH tähistame tähega h ja antud väikeringi kvadrantist väiksema sfäärilise raadiuse tähega r , siis kahes punktis lõikumise tingimus avaldub kujul

$$h < r. \quad (2)$$

¹ Me ei oleks saanud siin arutleda nii, nagu tasapinnageomeetria vastaval juhul. Tõepoolest, täisnurkse sfäärilise kolmnurga kaatet võib olla hüpoteenusist nii väiksem kui ka suurem (võrrelda näiteks kolmnurki ACH ja ACK joonisel 101).

Võtame nüüd vabalt kummagi antud ringi ühe või teise pooluse.

Kui antud väikeringi pooluseks võtta punkt P ja antud suurringi pooluseks Q , s. o. tema see poolus, mis asetseb suurringist a punktiga P ühel pool (joonis 104)¹, siis peame eeldama, et $D = q - h$ ja $R = r$, seega võrratus (2) omandab kuju

$$q - D < R.$$

Et seejuures $D \leq q$ ja $R < q$, siis saame võrratusmärgi kõigis kolmes seoses (1).

Kui antud väikeringi pooluseks võtta punktiga P diametraalne punkt P_1 ja suurringi pooluseks seesama punkt Q , mis varem, siis tuleb eeldada, et

$$D = h + q; R = 2q - r,$$

ja võrratus (2) omandab kuju

$$D - q < 2q - R.$$

Et seejuures $q \leq D \leq 2q$ ja $q < R < 2q$, siis saame jällegi võrratusmärgi kõigis kolmes seoses (1).

Kui antud väikeringi pooluseks võtta punkt P ja suurringi pooluseks punktiga Q diametraalne punkt S , siis tuleb eeldada, et $D = h + q$ ja $R = r$, nii et võrratus (2) omandab kuju

$$D - q < R.$$

Et sel juhul $q < D \leq 2q$ ja $R < q$, siis kõigis kolmes seoses (1) saame uuesti võrratusmärgid.

Lõpuks võime võtta väikeringi pooluseks punkti P_1 ja suurringi pooluseks punkti S ; siis $D = q - h$ ja $R = 2q - r$ ning seega tingimus (2) omandab kuju

$$q - D < 2q - R.$$

Et nüüd $D < q$ ja $q < R < 2q$, siis kehtivad seostes (1) ka sel juhul võrratusmärgid.

Kui suurringil on antud väikeringiga ainult üks ühine punkt, siis teda nimetatakse väikeringi puutuvaks ringiks; nende ringide ühist punkti nimetatakse puutepunktiks. Teoreemi 322 tõestusest saab teha järgmise järelduse.

Teoreem 323. Väikeringi iga punkti puhul leidub väikeringi selles punktis puutuv suuring; see suuring on risti väikeringi sfäärilise raadiusega, mis on tõmmatud puutepunkti.

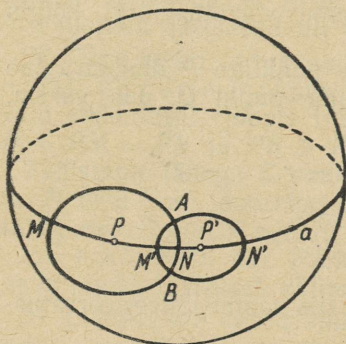
Vaatleme nüüd kahe väikeringi vastastikuse asendi küsimust.

Teoreem 324. Kui kahe väikeringi kvadrantist väiksemate sfääriliste raadiuste vahe on suurem kui neile raadiustele vasta-

¹ Kui punkt P asetseb suurringil a , siis punktiks Q võib võtta selle suurringi ükskõik kumma pooluse.

vate pooluste vaheline sfääriline kaugus, siis kahel ringil ei leidu ühiseid punkte ja üks väikering asetseb teise sees, teine aga väljaspool esimest.

Kui samade raadiuste vahe on võrdne neile vastavate pooluste vahelise sfäärilise kaugusega, siis kahel ringil on ainult üks ühine punkt ja neist kahest ringist ühe kõik ülejäänud punktid asetsevad teise sees, teise kõik ülejäänud punktid aga väljaspool esimest.



Joonis 107.

Kui samade raadiuste vahe on väiksem kui neile vastavate pooluste vaheline sfääriline kaugus ja nende raadiuste summa on suurem kui see kaugus, siis kahel väikeriingil on kaks ühist punkti.

Kui samade raadiuste summa on võrdne neile vastavate pooluste vahelise sfäärilise kaugusega, siis kahel ringil on ainult üks ühine punkt ja kummagi ringi kõik ülejäänud punktid asetsevad väljaspool teist ringi.

Lõpuks, kui samade raadiuste summa on väiksem kui neile vastavate pooluste vaheline sfääriline kaugus, siis kahel ringil ei leidu ühiseid

punkte ja kummagi ringi kõik punktid asetsevad väljaspool teist antud ringi [I, teoreemid 44—48].

Toonitame, et teoreemi sõnastuses esinevad kvadrantist väiksemad väikeringide raadiused ja neile vastavad poolused.

Tõestus. Olgu r ja r' antud väikeringide kvadrantist väiksemad sfäärilised raadiused, P ja P' neile raadiustele vastavad poolused (joonis 107), M ja N väikeringi P lõikepunktid suurringiga a , mis läbib punkte P ja P' , ning M' ja N' väikeringi P' lõikepunktid sama suurringiga a .

Vaatleme juhtu, kus $|r - r'| < PP' < r + r'$.

Sel juhul, nagu on kerge veenduda, üks punktidest M ja N kuulub kaarele $M'P'N'$, teine aga ei kuulu sellele. Siit järeldub, samuti nagu teoreemi 322 esimese osa tõestamisel, et kõõlud MN ja $M'N'$ lõikuvad suurringi a sees, järelikult ka antud kera sees. Edasi saab näidata, jälle samuti nagu nimetatud teoreemi esimese osa tõestamisel, et antud kahe väikeringi tasapindade lõikejoon lõikab kera kahes punktis; need punktid ongi kahe antud väikeringi ühisteks punktideks.

Teoreemi ülejäänud väiteid saab tõestada analoogiliselt kahe ringjoone juhuga tasapinnal.

Järeldused. 1. Tähistame antud väikeringide mistahes kahe pooluse vahelise kauguse tähega D , võetud poolustele vastavad väikeringide raadiused tähtedega R ja R' ning kvadranti

tähega q ; siis antud kahel väikeringil leidub kaks ühist punkti juhul, kui kõigis kolmes seoses

$$|R - R'| \leq D; D \leq R + R'; D + R + R' \leq 4q \quad (3)$$

kehtivad võrratusmärgid, s. o. kui poolustevaheline sfääriline kaugus on väiksem vastavate sfääriliste raadiuste summast, kuid suurem nende vahest, ja kui poolustevahelise sfäärilise kauguse ning mõlema sfäärilise raadiuse summa on väiksem suuringist. Kahel ringil on ainult üks ühine punkt juhul, kui neis seostes kas või ainult üks võrratusmärk asendub võrdusmärgiga, ja neil ei ole ühiseid punkte juhul, kui kas või ainult üks seostest (3) ei kehti.

Piirdume selle juhu vaatlemisega, kus antud väikeringidel leidub kaks ühist punkti. Kui tähistada kvadrantist väiksematele väikeringide sfäärilistele raadiustele vastavate pooluste P ja P' vahelist sfäärilist kaugust tähega d , siis ringide lõikumise tingimuseks on

$$|r - r'| < d < r + r'. \quad (4)$$

Võtame nüüd vabalt antud väikeringide ühe või teise pooluse.

Kui antud väikeringide poolusteks võtta punktid P ja P' , siis peame eeldama, et $D = d$, $R = r$ ja $R' = r'$; võrratused (4) omandavad siis kuju

$$|R - R'| < D < R + R'.$$

Et sel juhul $D \leq 2q$, $R < q$ ja $R' < q$, siis kehtib võrratusmärk ka viimases seostest (3).

Kui antud väikeringide poolusteks võtta punkt P ja punktiga P' diametraalne punkt, siis peame eeldama, et $D = 2q - d$, $R = r$ ja $R' = 2q - r'$; seega võrratused (4) omandavad kuju

$$|R - 2q + R'| < 2q - D < R + 2q - R'.$$

Siit järeldub, et $D + R + R' < 4q$, $D < R + R'$ ja $D > R' - R$. Et peale selle $R < q < R'$, siis kehtivad kõigis kolmes seoses (3) võrratusmärgid.

Võttes antud väikeringide poolusteks punktiga P diametraalse punkti ja punkti P' , jõuaksime analoogilise arutelu kaudu samadele tulemustele.

Lõpuks, kui võtta antud väikeringide poolusteks punktidega P ja P' diametraalsed punktid, siis tuleb eeldada, et $D = d$, $R = 2q - r$ ja $R' = 2q - r'$; seega võrratused (4) omandavad kuju

$$|R' - R| < D < 4q - (R + R').$$

Siit järeldub, et $|R - R'| < D$ ja $D + R + R' < 4q$.

Et sel juhul $D \leq 2q$, $R > q$ ja $R' > q$, siis kehtivad võrratusmärgid kõigis seostes (3).

2. *Tingimused, mis on näidatud järelduses 1, jäävad kehtima ka siis, kui üks antud kahest ringist on suuring ja teine väikering.* Tõepoolest, kui tingimustes (3) lugeda $R' = q$, siis tingimused (3) muutuvad tingimusteks (1).

Märgime, et kahe suurringi puhul kehtivad seostes (3) ikka võrratusmärgid (kaks suurringi lõikuvad alati).

3. *Kui üks antud kolmest kaarest on väiksem kahe teise summast, kuid suurem nende vahest, järeldub kõigepealt, et iga antud kaar on väiksem kahe teise summast, kuid suurem nende vahest (vt. I, lk. 42). Sellest ja eeldusest, et kolme kaare summa on väiksem suurringist, järeldub edasi, et iga antud kaar on väiksem kui suurringi poolringjoon. Tõepoolest, kui $a < b + c$ ja $a + b + c < 4q$, siis $a < 2q$.*

Tingimusest, et üks antud kaartest on väiksem kahe teise summast, kuid suurem nende vahest, järeldub kõigepealt, et iga antud kaar on väiksem kahe teise summast, kuid suurem nende vahest (vt. I, lk. 42). Sellest ja eeldusest, et kolme kaare summa on väiksem suurringist, järeldub edasi, et iga antud kaar on väiksem kui suurringi poolringjoon. Tõepoolest, kui $a < b + c$ ja $a + b + c < 4q$, siis $a < 2q$.

Olgu nüüd AB üks antud kolmest kaarest. Ringid, mille poolusteks on punktid A ja B ja mille sfäärilised raadiused on vastavalt võrdsed kahe teise antud kaarega, omavad (järelduste 1 ja 2 põhjal) kaht ühist punkti C' ja C'' . Kolmnurk ABC' (ja samuti ka ABC'') ongi nõutud omadustega.

Juhul, kui kahel väikeringil on ainult üks ühine punkt, ei ole raske tõestada järgmist lauset.

Teoreem 325. *Kui kahel väikeringil on ainult üks ühine punkt, siis see ühine punkt asetseb ringide poolustega ühel ja samal suurringil ning mõlemal väikeringil on nende ühises punktis ka ühine puutuv suuring.*

Sel juhul öeldakse, et kaks väikeringi puutuvad teineteist («väliselt» või «seesmiselt»).

§ 151. Punktide geomeetriselised kohad keral.

Tasapinnageomeetrias vaadeldud lihtsamad punktide geomeetriselised kohad on kergesti laiendatavad ka kera juhule.

Geomeetriseline koht XXXVIII. *Geomeetriseliseks kohaks kera punktidele, millede sfäärilised kaugused kera antud punktist P on võrdsed suurringi ühe ja sama kaarega r , on väikering poolusega P ja sfäärilise raadiusega r [I, geomeetriseline koht I].*

Geomeetriseline koht XXXIX. *Geomeetriseliseks kohaks kera punktidele, millede sfäärilised kaugused antud suurringist on võrdsed ühe ja sama (kvadrantist väiksema) kaarega a , on paar võrdseid väikeringe, millede poolusteks on antud suurringi poolused ja sfääriliseks raadiuseks on kaar, mis täiendab kaart a kuni kvadrantini [I, geomeetriseline koht II].*

Geomeetriseline koht XL. *Geomeetriseliseks kohaks kera punktidele, mis asetsevad selle kera kahest punktist A ja B võrd-*

setel kaugustel, on kaarega AB ristuv suurring, mis läbib keskpunkte neil kahel kaarel, mille otsteks on punktid A ja B [I, geomeetriline koht III].

Geomeetriline koht XLI. Geomeetriliseks kohaks kera punktidele, mis asetsevad võrdsetel kaugustel kahest suurringist, on kaks teineteisega ristuvat suurringi, mis poolitavad antud suurringide vahelised nurgad [I, geomeetriline koht IVb].

Kera punktide geomeetristest kohtadest, milledele ei leidu analoogilisi tasapinnageomeetrias, vaatleme ainult üht.

Geomeetriline koht XLII. Geomeetriliseks kohaks antud väikeringi puutuvate suurringide poolustele on diametraalsete väikeringide paar; nende väikeringide poolused ühtivad antud väikeringi poolustega ja kummagi sfääriline raadius täiendab kvadranti antud väikeringi seda sfäärilist raadiust, mis on kvadrantist väiksem.

Tõepoolest, olgu P antud väikeringi see poolus, millele vastav raadius r on kvadrantist väiksem. Et punkti P kaugus antud väikeringi ja mingi suurringi puutepunktist on r , siis sama punkti P kaugus selle suurringi ühest poolusest täiendab kaart r kvadrantini.

§ 152. Konstruktsioonid keral.

Konstruktsioonülesanne keral omab, nagu ka tasapinnageomeetrias (I, § 17), ainult siis kindlat sisu, kui on nimetatud need vahendid, mille abil ülesanne tuleb lahendada, — need riistad, millega konstruktsioon tuleb teostada. Tasapinnageomeetrias me defineerisime täpselt, mis tähendab lahendada ülesanne sirkli ja joonlaua abil. Keral, nagu tasapinnalgi, kasutame kindlaksmääratud riistu.

Geomeetriste konstruktsioonide teostamisel keral kasutame riistadena sfäärilist joonlauda ja sfäärilist sirklit. Sfäärilise joonlaua all mõistetakse niisugust riista (instrumenti), mis võimaldab konstrueerida suurringi, teades selle üht poolust, ja sfäärilise sirkli all riista, mis võimaldab konstrueerida mistahes (üldiselt väike-) ringi, teades selle üht poolust ja sellele vastavat sfäärilist raadiust.

Vastavalt sellele lahendada keral konstruktsioonülesanne sfäärilise sirkli ja sfäärilise joonlaua abil tähendab teostada tema lahendamiseks täpselt määratud arv järgmisi konstruktsioone:¹

- a) suurringi konstrueerimine, kui tema üheks pooluseks on teatud punkt;
- b) kahe teatud suurringi lõikepunktide määramine;

¹ Nende konstruktsioonide mudelil realiseerimise võimaluste kohta vt. lk. 164, märkus 1.

c) mingi ringi konstrueerimine, kui tema üheks pooluseks on teatud punkt ja vastavaks sfääriliseks raadiuseks teatud kaar;

d) teatud suuringi ja mingi teatud ringi lõikepunktide määramine (selle ülesande erijuhuks on teatud suuringil teatud punktist alates teatud kaarega võrduva kaare «märkimine»);

e) mistahes kahe teatud ringi lõikepunktide määramine.

Terminid «teatud» kasutatakse siin täiesti analoogilises mõttes sellega, mida ta tähendas konstruktsioonide puhul tasapinnal (I, lk. 55).

Märkused. 1. Konstruktsioonide teostamist keral saab näitlikuks teha näiteks järgmiselt. Keraks võtame tuhmi musta värviga kaetud gloobuse, millele saab kriidiga tõmmata jooni. Sfäärilise sirkli realiseerime klassitahvli sirkliga analoogilise sirklina, mille harud on kõverad ja võimaldavad teostada konstruktsioone kumeral pinnal. Kaugust sirkli teravike vahel peab saama muuta (on ilmne, et sirkli teravike vaheline suurim kaugus, mida sfääriline sirkel lubab, peab võrduma kera diameetriga). Lõpuks, sfääriliseks joonlauaks on samasugune sirkel, kuid muutumatu kaugusega teravike vahel (harud on liikumatult kinnitatud sirklipeasse); see kaugus sirkli teravike vahel peab ilmselt olema $R\sqrt{2}$, kus R on kera raadius.

2. Konstruktsioonide teostamine keral on läbiviidav ainult sfäärilise sirkli abil ilma erilise sfäärilise joonlauata, kui koos konstrueerimisega keral lubada konstrueerimist tasapinnal.

Täpsemalt öeldes, oletame, et on võimaldatud:

1) teostada antud keral konstruktsioone sfäärilise sirkli abil (s. o. teostada ülalpool punktide c, d ja e all loetletud konstruktsioone);

2) teostada mingil määratud tasapinnal konstruktsioone sirkli ja joonlaua abil;

3) «üle kanda» lõik keralt tasapinnale, s. o. konstrueerida tasapinnal kaks punkti nii, et nendevaheline kaugus võrdub kera kahe teatud punkti vahelise kaugusega (mitte sfäärilise kaugusega, vaid kaugusega ruumis harilikus mõttes), ja teostada pöördkonstruktsioon, s. o. «üle kanda» lõik tasapinnalt kerale.

Saab tõestada¹, et nende eelduste korral on võimalik tasapinnal konstrueerida lõik, mis võrdub antud kera raadiusega R . Järelikult saab konstrueerida ka lõigu $R\sqrt{2}$. «Kandes üle» selle lõigu kerale, saame võimaluse suuringi konstrueerimiseks sfäärilise sirkli abil.

Lugejale ei võinud märkamatuks jääda see sarnasus, mis on olemas ülalloeletud konstruktsioonide a) — e) ja vastavate konstruktsioonide a) — e) vahel tasapinnal (I, lk. 55): See sarnasus ulatub veel kaugemal: ta avaldub ka paljude, sisult analoogiliste ülesannete lahendusviisides.

Esitame nüüd loetelu neist ülesandest, mida võiks vaadelda kui «põhikonstruktsioone» keral. Juhtudel, kus mitte ainult ülesande sõnastus, vaid ka lahendusviis on analoogiline vastava ülesande lahendusviisiga tasapinnal, piirdume ainult viitega.

Konstruktsioon 105. Konstrueerida suuring, mis läbib kaht antud punkti.

Kasutades sfäärilist joonlauda, konstrueerime suuringid, millede poolusteks on antud punktid. Nende suuringide (ükskõik kumb) lõikepunkt on otsitava suuringi pooluseks.

¹ Vt. Hadamard [1], 2. osa, lk. 56.

Samal viisil saab konstrueerida antud suuringi poolused. Viimasele konstruktsioonile taandub ka antud punktiga diametraalse punkti konstrueerimine.

Konstruktsioon 106. Konstrueerida sfääriline kolmnurk kolme külje järgi [I, konstruktsioon 1].

Lahendi olemasolu tarvilikud ja piisavad tingimused on järgmised:

1) üks antud külgedest peab olema väiksem kahe teise külje summast, kuid suurem nende vahest, ja

2) antud kolme külje summa peab olema väiksem suuringist.

Nende tingimuste tarvilikkus nähtub teoreemist 311 ja selle järeldusest, piisavus teoreemi 324 järeldusest 3.¹

Neist kahest tingimusest esimese saab asendada nõudega, et iga antud külg oleks väiksem kahe teise külje summast, või et suurim antud kolmest küljest oleks väiksem kahe teise külje summast (vrd. I, lk. 42—43).

Märkus. Kolme antud küljega sfäärilise kolmnurga olemasolu tingimustest tulenevad ka kolme antud tasanurgaga kolmetahulise nurga olemasolu tingimused (vt. § 131, konstruktsioon 99).

Viimaste tingimuste tuletamiseks piisab, kui vaadelda otsitava kolmetahulise nurga servade lõikumist mistahes keraga, mille keskpunktiks on kolmetahulise nurga tipp.

Konstruktsioon 107. Konstrueerida antud nurgaga võrdne nurk, mille tipuks on antud punkt ja üheks haaraks sellest punktist väljuv antud poolringjoon [I, konstruktsioon 2].

Konstruktsioon 108. Konstrueerida sfääriline kolmnurk kahe külje ja nendevahelise nurga järgi [I, konstruktsioon 3].

Konstruktsioon 109. Konstrueerida sfääriline kolmnurk külje ja selle kahe lähisnurga järgi [I, konstruktsioon 4].

Konstruktsioon 110. Konstrueerida sfääriline nurk, mis «möötab» suuringi antud kaarega ja, ümberpöörduvalt, kaar, mis «möötab» antud nurgaga.

Selle ülesande mõte seisab selles, et tuleb konstrueerida sfääriline nurk, mis võrdub antud kaarele vastava kesknurgaga.

Olgu AB antud kaar. Konstrueerime suuringi AB pooluse O (konstruktsioon 105) ja suuringid OA ning OB . Nurk AOB ongi otsitav nurk. Pöördkonstruktsiooni teostamiseks piisab, kui kujundada suuring, mille pooluseks on nurga tipp, ja vaadelda punkte, kus ta lõikub antud nurga haaradega.

Analoogiliselt saab konstrueerida nurka, mis «täiendab antud kaart kuni $2d$ -ni», ja kaart, mis «täiendab antud nurka kuni $2d$ -ni».

Konstruktsioon 111. Konstrueerida antud sfäärilise kolmnurgaga polaarne² kolmnurk.

Konstrueerime vajalikul viisil valitud poolused neile suuringidele, mille kaarteks on antud kolmnurga küljed (vt. lk. 148). Kui ABC on antud sfääriline kolmnurk ja $A_0B_0C_0$ on otsitav, antud kolmnurga suhtes polaarne sfääriline kolmnurk, siis A_0 on suuringi BC see poolus, mis asetseb temast samal pool, kus punkt A jne.

¹ Teise, näitlikuma, kuid vähem range tõestuse nende tingimuste piisavuse kohta võib leida Hadamard'i raamatust [1], 2. osa, lk. 64—65.

² Vt. lk. 148.

Konstruktsioon 112. Konstrueerida sfääriline kolmnurk kolme nurga järgi.

Konstrueerime kaared, mis antud nurki täiendavad kuni kahe täisnurgani (konstruktsioon 110), ja kolmnurga, mille külgedeks on need kaared (konstruktsioon 106). Konstrueeritud kolmnurgaga polaarne kolmnurk ongi otsitav kolmnurk.

(Võrrelda seda konstruktsiooni konstruktsiooniga 100 — kolmetahulise nurga konstrueerimisega tema kolme kahetahulise nurga järgi.)

Konstruktsioon 113. Konstrueerida suuring, mis on risti antud suuringiga ja läbib antud punkti [I, konstruktsioon 5].

Antud punkt võib siin asetseda antud suuringil või ka mitte asetseda sellel.

Ülesandel on üksainus lahend, välja arvatud see juhtum, kus antud punkt on antud suuringi pooluseks (teoreem 294).

Konstruktsioon 114. Konstrueerida suuring, mis on risti antud kaarega AB ja läbib selle kaare keskpunkti (ja järelikult ka keskpunkti teisel kaarel, mille otsteks on punktid A ja B [I, konstruktsioon 6].

Samal teel leiame ka antud kaare keskpunkti, s. o. poolitame suuringi kaare.

Konstruktsioon 115. Konstrueerida antud sfäärilise nurga bisektor ehk teisiti öeldes, poolitada antud sfääriline nurk [I, konstruktsioon 7].

Konstruktsioon 116. Konstrueerida suuring, mis puutub antud väikeringi tema antud punktis [I, konstruktsioon 8].

Konstruktsioon 117. Konstrueerida täisnurkne sfääriline kolmnurk hüpotenuusi ja selle lähisnurga järgi [I, konstruktsioon 9].

Konstruktsioon 118. Konstrueerida täisnurkne sfääriline kolmnurk hüpotenuusi ja kaateti järgi [I, konstruktsioon 10].

Märgime, et täisnurkse sfäärilise kolmnurga konstrueerimine kahe kaateti järgi ning samuti kaateti ja selle juures oleva mitte-täisnurga järgi on (pärast konstruktsiooni 113 käsitlemist) ainult konstruktsioonide 108 ja 109 erijuht.

Konstruktsioon 119. Konstrueerida suuring, mis puutub antud väikeringi ja läbib antud punkti.

Olgu O antud väikeringi üks poolus, A antud punkt ja T_1 (või T_2) otsitav puutepunkt.

Kui suuringil T_0A_0 , mis puutub antud väikeringi meelevaldses punktis T_0 (joonis 108), märgime (ühes või teises suunas) kaarega AT_1 võrdse kaare T_0A_0 , siis täisnurksed sfäärilised kolmnurgad AOT_1 ja A_0OT_0 on võrdsed kaatetite võrdsuse tõttu.

Siit selgub järgmine konstruktsioon. Konstrueerime suuringi T_0A_0 , mis puutub antud väikeringi meelevaldses punktis T_0 , ja peale selle ringi, mille pooluseks on O ja raadiuseks OA . Olgu A_0 konstrueeritud ringide lõikepunkt. Ring poolusega A ja raadiusega, mis on võrdne kaarega A_0T_0 , lõikab antud väikeringi otsitavates puutepunktides.

Saab tõestada, et ülesandel on kaks lahendit juhul, kui punkt A asetseb

nii väljaspool antud väikeringi kui ka väljaspool antud ringiga diametraalset väikeringi, üks lahend juhul, kui punkt A asetseb antud väikeringil või sellega diametraalsel väikeringil, ja ülesandel ei ole lahendit juhul, kui punkt A asetseb antud väikeringi sees või sellega diametraalse väikeringi sees.

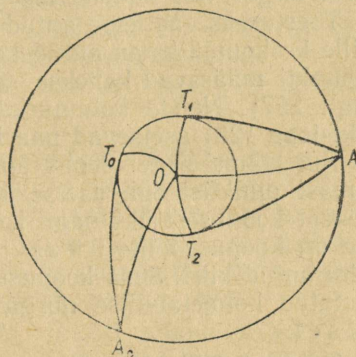
Toome nüüd näiteid keerukamatest konstruktsioonülesannetest keral.

Konstruktsioon 120. Konstrueerida sfääriline kolmnurk kahe külje ja nende ühe vastasnurga järgi.

Otsitava kolmnurga saab konstrueerida analoogiliselt konstruktsiooniga 12 tasapinnal, kuid uurimine osutub kera juhul tunduvalt keerukamaks kui tasapinnal ja sellel me ei peatu. Suurim lahendite arv on kaks.

Konstruktsioon 121. Konstrueerida sfääriline kolmnurk kahe nurga ja nende ühe vastaskülje järgi.

On võimalik konstrueerida otsitava kolmnurgaga polaarne kolmnurk (võrdrelda konstruktsiooniga 112) kahe külje ja nende ühe vastasnurga järgi (konstruktsioon 120). Teades otsitava kolmnurgaga polaarset kolmnurka, saab konstrueerida ka otsitava kolmnurga (konstruktsioon 111).



Joonis 108.

Konstruktsiooni 121 erijuhuks on järgmine konstruktsioon.

Konstruktsioon 122. Konstrueerida täisnurkne sfääriline kolmnurk kaateti ja selle vastasnurga järgi.

Peale konstruktsioonist 121 tuleneva lahendusviisi, mis põhineb polaarse kolmnurga kasutamisel, on ülesandel veel otsene lahendus.

Konstrueerime antud nurga ja kujundame tema ühe haara pooluse ümber väikeringi (geomeetriline koht XXXIX), mille sfääriline raadius on võrdne kvadranti ja antud kaateti vahe absoluutväärtusega. Konstrueeritud väikeringi ja nurga teise haara lõikepunkt on otsitava kolmnurga tipuks. Suurim lahendite arv on kaks.

Konstruktsioon 123. Konstrueerida väikering, mis läbib antud kolme mitte ühel suuringil asetsevat punkti.

Teisiti öeldes, konstrueerida väikering, mis on antud sfäärilise kolmnurga ümberringjooneks [I, konstruktsioon 14].

Konstruktsioon 124. Leida punkt, mis on kolmest antud suuringist võrdsetel kaugustel [I, konstruktsioon 15].

Selle ülesandega kaasub otseselt järgmine: konstrueerida väikering, mis puutub kolme antud suuringi [I, konstruktsioon 15a].

Kui kõik kolm antud suuringi ei läbi kaht diametraalset punkti, siis ülesandel on kaheksa lahendit. Igaüks kaheksast väikeringist, mis rahuldavad ülesande tingimusi, puutub ühe sfäärilise kolm-

nurga külgi (aga mitte nende pikendusi) neist kaheksast kolmnurgast, mis on moodustatud antud suurringide poolt; niisugust väikeriingi nimetatakse antud sfäärilise kolmnurga sisse joonestatud ringjooneks ehk siseringjooneks.

Viimase kahe ülesande lahendustest järelduvad paragrahvis 147 käsitletud printsiibi abil kolmetahuliste nurkade järgmised omadused.

Teoreem 326. *On olemas neli ja ainult neli koonust, milledest igäühel on moodustajateks antud kolm mitte ühel tasapinnal asetsevat sirget, mis läbivad üht ja sama punkti.*

Tõestuseks vaatleme antud sirgete lõikepunkte mistahes keraga, mille keskpunktiks on antud kolme sirge lõikepunkt. Need kuus lõikepunkti määravad kaheksa sfäärilist kolmnurka (võrrelda teoreemiga 297). Nende kolmnurkade kaheksa ümberringjoont (konstruktsioon 123) asetsevad paariti neljal koonusel.

Kui kolme sirge asemel anda kolm kiirt, mis väljuvad ühest ja samast punktist ega asetse ühel tasapinnal, siis neljast kõne all olevast koonusest üks nagu iseenesest paistab teiste hulgast silma. See on koonus, mille ühel ja samal kattel asetsevad kõik kolm antud kiirt. Seda koonust nimetatakse antud kiirte poolt moodustatud kolmetahulise nurga ümber kujundatud koonuseks.

Teoreem 327. *On olemas neli ja ainult neli koonust, mis puutuvad antud kolme ühes ja samas punktis lõikuvat tasapinda.*

Tõestuseks vaatleme kolme suurringi, mida mööda antud tasapinnad lõikavad mingit kera, mille keskpunktiks on kolme antud tasapinna lõikepunkt. Sel keral tekib kaheksa sfäärilist kolmnurka. Nende kaheksa sfäärilise kolmnurga kaheksa siseringjoont asetsevad paariti neljal koonusel.

Järeldus. *On olemas üks ja ainult üks koonus, mis puutub antud kolmetahulise nurga tahke endid (mitte nende laiendusi).*

Seda koonust nimetatakse kolmetahulise nurga sisse kujundatud koonuseks.

Konstruktsioon 125. Konstrueerida suurring, mis puutub kaht antud väikeriingi.

Olgu C_1 ja C_2 antud väikeriingid. Antud väikeriingi C_1 puutuvate suurringide pooluste geomeetiline koht koosneb kahest teineteisega diametraalsest väikeriingist C_1' ja C_1'' (geomeetiline koht XLII).

Koosnegu analoogiline geomeetiline koht teise antud väikeriingi puhul väikeriingidest C_2' ja C_2'' .

Otsitavate suurringide poolusteks on punktid, kus väikeriing C_1' lõikub väikeriingidega C_2' ja C_2'' (punktid, kus väikeriing C_1'' lõikub samade väikeriingidega, ei anna uusi lahendeid, sest punktid, kus ring C_1'' lõikub ringidega C_2' ja C_2'' , on diametraalsed punktidega, kus väikeriing C_1' lõikub vastavalt ringidega C_2'' ja C_2').

Ülesande suurim lahendite arv on neli nagu tasapinnageomeetriaski (konstruktsioon 31). Ülesandel võib ka lahend puududa: nii on see näiteks juhul, kui väikeriing C_2 asetseb väiksema segmendi sees neist kahest sfääri segmendist, milledeks C_1 jaotab kera. Kahe väikeriingi vastastikuse asendi mõnede juhtude korral võib lahendite arv olla ka väiksem kui neli.

§ 153. Võrdsus ja liikumine keral.

Sfääriliste kujundite võrdsuse õpetust saab üles ehitada täiesti analoogiliselt vastava teooriaga tasapinna kohta (I, §§ 18—19).

Sfäärilist kujundit F nimetatakse võrdseks kujundiga F' , mis asetseb samal keral¹ kus F , kui nende kujundite punktide vahel saab korraldada üksühese vastavuse nii, et iga suurringi kaar (poolringjoonest väiksem või võrdne sellega), mis ühendab kujundi F mingit kaht punkti, on võrdne analoogilise kaarega, mis ühendab vastavaid kujundi F' punkte.

Võrdsete tasapinnaliste kujundite omadused 1° — 4° (I, lk. 58—59) on kergesti üle kantavad sfääriliste kujundite juhule.

Võrdsete sfääriliste kujundite põhiomadus väljendub järgmise teoreemina.

Teoreem 328. *Olgu F ja F' kaks võrdset sfäärilist kujundit ja X kera mingi punkt. On olemas niisuguse omadusega punkt X' , et kujund FX , mis koosneb kujundi F kõikidest punktidest ja punktist X , on võrdne kujundiga $F'X'$. Niisuguse omadusega punkte X' on üksainus, kui kujundi F punktide hulgas leidub kolm punkti, mis ei asetse ühel ja samal suuringil [I, teoreem 49].*

Seda teoreemi saab tõestada täiesti analoogiliselt tasapinnageomeetria vastava lausega, kuid järgmist märkust kasutades jõuame siiski kiiremini eesmärgile. Kui sfääriline kujund F on võrdne kujundiga F' , siis ka kujund FO , mis koosneb kujundi F kõikidest punktidest ja antud kera keskpunktist O , on võrdne analoogilise kujundiga $F'O$, ja ümberpöörduvalt. Sama kehtib ka kujundite FX ja $F'X'$ ning kujundite FOX ja $F'OX'$ kohta.

Rakendame nüüd kujunditele FO ja $F'O$ ning punktile X teoreemi 268. Selle teoreemi põhjal leidub niisugune punkt X' , mille puhul kujundid FOX ja $F'OX'$ ning järelikult ka kujundid FX ja $F'X'$ on võrdsed. Seejuures punkt X' asetseb antud keral, sest lõigud OX ja OX' on võrdsed.

Kui kujundi F punktide hulgas leidub kolm punkti, mis ei asetse ühel ja samal suuringil, siis kujund FO on ruumiline ja järelikult punkte X' on üksainus.

Teoreemi 49 järeldused 1—3 (I, lk. 62) kanduvad vahetult üle kera juhule.

Võttes arvesse kahe võrdse sfäärilise kujundi vastavate sfääriliste kolmnurkade orientatsiooni, saab tõestada täiesti niisamuti nagu tasapinnal järgmised kaks lauset.

Teoreem 329. *Kui võrdsete sfääriliste kujundite mingid kaks vastavat sfäärilist kolmnurka on ühteviisi (vastupidiselt) orienteeritud, siis nende kujundite iga kaks vastavat sfäärilist kolmnurka on ühteviisi (vastupidiselt) orienteeritud [I, teoreem 51].*

¹ Või selle keraga võrdsel keral (vt. viidet lk. 138).

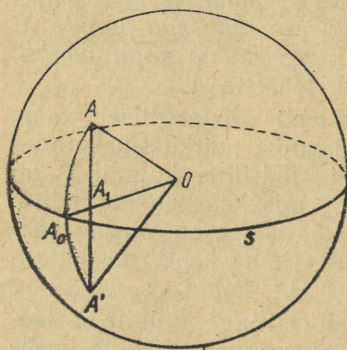
Teoreem 330. *On olemas kaks võrdset sfääriliste kujundite liiki. Ühel juhul võrdsete kujundite iga kaks vastavat sfäärilist kolmnurka on ühteviisi orienteeritud ja iga kaks vastavat nurka on samasuunalised; teisel juhul vastavad sfäärilised kolmnurgad on vastupidiselt orienteeritud ja vastavad nurgad on vastandsuunalised [I, teoreem 52].*

Esimesel juhul nimetame kaht võrdset sfäärilist kujundit pärisvõrdseteks, teisel juhul peegeldusvõrdseteks.

Siirdume liikumise vaatlemisele keral.

Keral liikumise (ehk nihkumise) all mõistame, nagu ikka, seda vastavust, mis on olemas ühel ja samal keral asetseva kahe võrdse kujundi punktide vahel.

Nii tasapinnal liikumise põhiomadused (I, § 30) kui ka pöördliikumise, kahe liikumise korrutise, samasusliikumise, esimest liiki ja teist liiki liikumise mõisted kannab lugeja kergesti üle kera juhule.



Joonis 109.

Vaatleme nüüd peegeldumist kera suuringist. Kaht kera punkti A ja A' nimetatakse sümmeetrilisteks mingi suuringi s suhtes, kui suurring AA' on risti suurringiga s ja üks kaartest, mille otsteks on punktid A ja A' (ja järelikult ka teine samade otstega kaar), poolitatakse suuringi s poolt. Analoogiliselt, kaht sfäärilist kujundit, mis koosnevad antud suuringi s suhtes paariti sümmeetrilistest punktidest, nimetatakse sümmeetrilisteks selle suuringi suhtes. Suuringi s nimetatakse siinjuures peegeldusteljeks (ehk sümmeetriateljeks).

Sümmeetrilisi sfäärilisi kujundeid saaks uurida täpselt sama meetodiga, mida kasutasime tasapinnal (I, § 31), kuid järgmine teoreem kergendab tunduvalt seda uurimist.

Teoreem 331. *Kaks punkti, mis on keral sümmeetrilised mingi suuringi suhtes, on ruumis sümmeetrilised selle suuringi tasapinna suhtes.*

Tõestus. Olgu punktid A ja A' keral sümmeetrilised suuringi s suhtes (joonis 109). Tähistame antud kera keskpunkti tähega O , kaare AA' keskpunkti tähega A_0 ja sirge AA' lõikepunkti suuringi s tasapinnaga tähega A_1 .

Et punkt A_0 poolitab kaare AA' , siis suuringi raadius OA_0 on risti kõõluga AA' ja poolitab selle punktis A_1 . Et suurring AA' on risti suuringiga s , siis ka tasapind OAA' on risti suuringi s tasapinnaga. Tasapinnal OAA' asetsev sirge AA' , mis tõestuse järgi on risti sirgega OA_0 , on siis risti ka suuringi s tasapinnaga.

Niisiis, lõik AA' on risti suuringi s tasapinnaga ja see tasapind poolitab teda.

Järeldused. 1. Kaks sfäärilist kujundit, mis keral on sümmeetrilised mingi suuringi suhtes, on ruumis sümmeetrilised selle suuringi tasapinna suhtes.

2. Kaks sfäärilist kujundit, mis on sümmeetrilised mingi suuringi suhtes, on võrdsed.

Teisiti öeldes: vastavus mingi sfäärilise kujundi punktide ja temaga suuringi suhtes sümmeetrilise kujundi punktide vahel on liikumine keral.

Seda liikumise eriliiki nimetatakse peegeldumiseks suuringist (sümmeetriaks suuringi suhtes¹) ehk lihtsalt peegelduseks keral.

3. Kaks suuringi suhtes sümmeetrilist sfäärilist kujundit on keral peegeldusvõrdsed (aga mitte pärisvõrdsed).

Teisiti öeldes: peegeldumine suuringist on teist liiki liikumine keral.

Tõepoolest, olgu ABC ja $A'B'C'$ kaks sfäärilist kolmnurka, mis on sümmeetrilised suuringi s suhtes. Tõestatud teoreemi põhjal on kolmetahulised nurgad $OABC$ ja $OA'B'C'$, kus O on antud kera keskpunkt, sümmeetrilised suuringi s tasapinna suhtes ja seetõttu vastandsuunalised. Järelikult on vastupidiselt orienteeritud ka sfäärilised kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$ (§ 147). See näitabki, et peegeldumine suuringist on teist liiki liikumine.

Et kera kaks suuringi alati lõikuvad, siis kahe peegelduse korutus keral on alati ühesuguste omadustega (samal ajal kui tasapinnal on see kas lüke või pööre).

Teoreem 332. Kahe peegelduse korutus keral kujutab endast liikumist, millel on järgmised omadused: iga kaks vastavat punkti on võrdsetel kaugustel teatud punktist P (ja järelikult ka punktiga P diametraalsest punktist P_1); kõik kaared, mis ühendavad kaht vastavat punkti, paistavad sellest punktist P võrdsete ja samasuunaliste nurkade all.

Punkt P (nagu ka P_1) on peegeldustelgedes s' ja s'' üks lõikepunkt; nurk φ , mille all paistavad punktist P paariti vastavaid punkte ühendavad kaared², võrdub telgedes s' ja s'' vahelise teravvõi täisnurga kahekordsega ja on sama suunaga kui nende telgede vaheline nurk punkti P juures (sama omadus kehtib ka punkti P_1 kohta) [I, teoreemid 75 ja 76].

Nimetatud omadustega liikumist nimetatakse pöördeks (ehk pööramiseks); punkte P ja P_1 nimetatakse pöördeskespunktideks, nurka φ pöördenuurgaks. Punktidele P ja P_1 vastavad pöördenurgad on mõlemad võrdsed φ -ga, kuid vastandsuunalised.

¹ Terminite «peegeldus» ja «sümmeetria» kohta vt. viidet lk. 111.

² Nurgaks, mille all punktist P paistab punkte A ja B ühendav kaar, nimetatakse analoogia põhjal tasapinna juhuga sfäärilist nurka APB .

Me ei hakka peatuma selle lause tõestusel. Lugeja saab selle kergesti anda iseseisvalt, korrates kera kohta seda arutlust, mida kasutasime teoreemi 76 tõestamisel, või asendades (teoreemi 331 põhjal) peegelduse keral peegeldumisega tasapinnast ruumis ja kasutades teoreemi 276.

Järeldused. 1. Pööre on esimest liiki liikumine.

2. Iga pööret saab lõpmatult mitmel viisil vaadelda kahe peegelduse korrutisena. Mõlemad peegeldusteljed s' ja s'' läbivad pöördekeskpunkte P ja P_1 . Punkti P juures olev nurk nende vahel (lugeses esimesest peegeldusteljest s' teise peegeldustelje s'' poole) võrdub poolega pöördenurgast ja on samasuunaline selle sama punkti P juures oleva pöördenurgaga.

Muus osas on telgede s' ja s'' valik vaba, nii et kui pööre on antud, siis üheks neist võib võtta mistahes suuringi, mis läbib antud pöördekeskpunkte.

3. Kui peegeldusteljed ristuvad, siis kahe peegelduse korrutisel on järgmine omadus: kumbki suuringi kaar, mille otsteks on mingid kaks vastavat punkti, poolitub telgede ühes lõikepunktis.

Kolme peegelduse korrutise kohta on keral kehtiv järgmine lause.

Teoreem 333. Kolme peegelduse korrutis keral kujutab endast kas pöörde korrutist peegeldumisega suuringist, mille poolusteks on pöördekeskpunktid, või lihtsalt peegeldust.

Pöörde korrutist peegeldumisega suuringist, mille poolusteks on pöördekeskpunktid, on loomulik nimetada pöördepeegelduseks keral.

Tõestus. Tõestamisel vaatleme eraldi kaht juhtu.

1) Kõik kolm peegeldustelge ei läbi üht ja sama diametraalsete punktide paari.

Sel juhul need kolm tasapinda, millel asetsevad suuringid — peegeldusteljed —, lõikuvad ühes punktis. Asendades (teoreemi 331 põhjal) peegeldumised suuringidest peegeldumistega tasapinnadest ja toetudes teoreemile 278, saame kergesti vajaliku tulemuse.

2) Kõik kolm peegeldustelge s_1 , s_2 ja s_3 läbivad kaht diametraalset punkti P ja P_1 .

Korrutades peegeldused, mille telgedeks on s_1 ja s_2 , saame pöörde ümber punktide P ja P_1 . Seda pööret saab vaadelda kahe peegelduse korrutisena (teoreem 332, järeldus 2), kusjuures üheks peegeldusteljeks on teatav telg s , mis läbib punkte P ja P_1 , teiseks telg s_3 . Antud peegelduste korrutis esineb siis järgmise kolme peegelduse korrutisena: teljest s , teljest s_3 ja uuesti teljest s_3 . Et ühe ja sama telje korral kahe peegelduse korrutis on samasus, siis antud peegelduste korrutis on peegeldumine teljest s . Teoreem on tõestatud.

Minnes meelevaldse liikumise juurde keral, tõestame kõigepealt järgmise lause.

Teoreem 334. *Iga liikumist keral on võimalik vaadelda ülimalt kolme peegelduse korrutisena [I, teoreem 78].*

Tõestus. Arutelu, mida rakendasime tasapinnageomeetrias teoreemi 78 tõestamisel, saaks korrata ka kera juhul, kuid kiiremini jõuame siiski eesmärgile järgmisel teel. Oletame, et mingi liikumine viib sfäärilise kujundi F kujundiks F' . Seejuures kujund FO , mis koosneb kujundist F ja antud kera keskpunkti O , on võrdne analoogilise kujundiga $F'O$. Kuid kujundit FO kujundiks $F'O$ viival liikumisel ruumis on ilmselt liikumatu punkt O ja seetõttu seda liikumist võib vaadelda ülimalt kolme peegelduse korrutisena, kusjuures peegeldustasapinnad läbivad punkti O (teoreem 282). See näitabki (teoreemi 331 põhjal), et kujundi F' saab keral kujundist F ülimalt kolme peegelduse abil.

Järeldus. *Iga liikumine keral, kui ta erineb samasusliikumisest, on kas peegeldus, pööre või pöördepeegeldus.*

See selgub teoreemi 334 kõrvutamisel teoreemidega 332 ja 333. Lõpuks saame liikumistest keral järgmise liigitelu:

I. Esimest liiki liikumine:

- a) pööre (2),
- b) samasusliikumine (0).

II. Teist liiki liikumine:

- a) pöördepeegeldus (3),
- b) peegeldus (1).

Number sulgudes näitab väikseimat peegelduste arvu, millede korrutamisel on võimalik saada antud tüüpi liikumist.

§ 154. Sfäärilise hulknurga pindala.

Selles paragrahvis vaatleme ainult lihtsaid sfäärilisi murdjooni ja lihtsaid sfäärilisi hulknurki (§ 145), nimetades neid lühiduse mõttes lihtsalt murdjoonteks ja hulknurkadeks. On otstarbekohane lugeda siin hulknurkade hulka ka sfäärilised kaksnurgad erinevalt sellest, kuidas see oli sfäärigeomeetria muude küsimuste uurimisel.

Sfääriliste hulknurkade vaatlemisel arvestame ka seda võimalust, kus hulknurga kaks (või isegi mitu) järjestikust külge kuuluvad ühele ja samale suuringile, moodustades teineteise pikenduse.¹

Eeldame, et sfäärilise hulknurga andmisel on iga kord näidatud, missugune piirkond kahest temale vastavast piirkonnast on loetud seesmiseks (vt. lk. 144). Sellega ühenduses mõistame hulknurga nurga suuruse all tema seesmise piirkonna poole suunduva nurga suurust.

¹ Vt. viidet I raamatu esimeses osas leheküljel 10.

Sfääriliste hulknurkade pindala mõõtmise ülesande saab seada täiesti analoogiliselt vastava ülesande seadmisega tasaste hulknurkade kohta (I, § 58).

Kujundada (antud kera) sfääriliste hulknurkade pindalade mõõtmise süsteem tähendab seada igale (lihtsale) sfäärilisele hulknurgale vastavaks üks positiivne arv, mida nimetatakse selle sfäärilise hulknurga pindalaks ja millel on järgmised kaks omadust:

a) võrdsetele sfäärilistele kolmnurkadele vastab üks ja sama pindala (liikumise suhtes invariantse omadus ehk, lühemalt, «invariantse omadus»);

b) kahe sfäärilise hulknurga summa pindala võrdub nende hulknurkade pindalade summaga («aditiivsuse omadus»).

Sfääriliste hulknurkade summa defineeritakse seejuures täiesti analoogiliselt tasapinnaliste hulknurkade summaga (I, § 53).

Aditiivsuse omadust saab otsekohe üldistada iga lõpliku arvu liidetavate hulknurkade juhule.

On ilmne (ja seda tõestame allpool rangelt), et kera pindalaühiku valik jääb esialgu täiesti meelevaldseks. Paragrahvi lõpul tuleme selle küsimuse juurde veel kord tagasi.

Märgime kohe nüüd, et vaatamata täielikule analoogiale ülesandis erineb pindala mõõtmise teooria kera puhul oluliselt pindala mõõtmise teooriast tasapinna puhul.

Enne kui asuda hulknurga pindala määramisele, vaatleme sama ülesannet sfäärilise kaksnurga puhul. Seda on kerge teha.

Vastavalt võrdsete nurkadega kaksnurgad on võrdsed ja seetõttu on neil üks ja sama pindala; kui mingi kaksnurga nurk on võrdne kahe teise kaksnurga nurkade summaga, siis ka esimese kaksnurga pindala peab (aditiivsuse omaduse põhjal) võrduma kahe teise kaksnurga pindalade summaga. Siit järeldub (I, teoreem 103a), et sfäärilise kaksnurga pindala peab olema võrdeline tema nurgaga:

$$S = 2ka, \quad (1)$$

kus S on kaksnurga pindala, a on tema nurk ja $2k$ on võrdetegur.¹

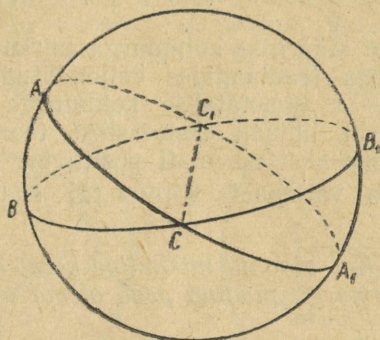
Et kordaja k arvuline väärtus oleks täiesti määratud, tuleb peale pindalaühiku valida veel nurga mõõtmise ühik. Selles paragrahvis eeldame, et nurki mõõdetakse radiaanides (I, lk. 152).² Seejuures poolkera kui kaksnurk nurgaga π peab omama pindala, mis väljendub arvuga $2k\pi$.

Asume sfäärilise kolmnurga pindala juurde.

¹ Et edasistes valemities (2) ja (4) vältida teguri $\frac{1}{2}$ ilmutist, tähistame võrdeteguri siin $2k$ -ga (aga mitte lihtsalt k -ga).

² Nurkade mõõtmine radiaanides viib lihtsamate pindalavalemite juurde, kui mõõtmine mistahes muudes ühikutes; vt. teoreemi 338 sõnastust ja sellele järgnevaid ridu (võrrelda ringjoone kaare pikkuse valemiteid nurkade mõõtmise radiaanides ja kraadides; I, lk. 152).

Olgu ABC mingi sfääriline kolmnurk. Tähistame tähtedega A_1 , B_1 ja C_1 kera punktid, mis on diametraalsed punktidega A , B ja C (joonis 110).



Joonis 110.

Märgime sümboliga «pa ABA_1C » niisuguse sfäärilise kaksnurga pindala, mille tippudeks on A ja A_1 ja mille küljed läbivad punkte B ja C . Aditiivsuse omaduse põhjal saame siis, et

$$\text{pa } ABC + \text{pa } A_1BC = \text{pa } ABA_1C$$

ehk, võttes arvesse võrdust (1),

$$\text{pa } ABC + \text{pa } A_1BC = 2k\alpha$$

ja analoogiliselt:

$$\text{pa } ABC + \text{pa } AB_1C = 2k\beta;$$

$$\text{pa } ABC + \text{pa } ABC_1 = 2k\gamma,$$

kus α , β ja γ on antud kolmnurga nurgad.

Viimasest kolmest võrdusest saame:

$$2 \cdot \text{pa } ABC + (\text{pa } ABC + \text{pa } A_1BC + \text{pa } AB_1C + \text{pa } ABC_1) = 2k(\alpha + \beta + \gamma).$$

Invariantsuse omaduse alusel asendame sulgudes olevas avaldises kolmnurga ABC_1 pindala temaga võrdse kolmnurga A_1B_1C pindalaga. Pärast seda saab aditiivsuse omaduse ja poolkera kohta tehtud märkuse põhjal sulgudes oleva summa, s. o.

$$\text{pa } ABC + \text{pa } A_1BC + \text{pa } AB_1C + \text{pa } A_1B_1C,$$

asendada poolkera pindalaga, mis on $2k\pi$.

Pärast kergesti nähtavaid teisendusi omandab eelmine võrdus kuju

$$\text{pa } ABC = k(\alpha + \beta + \gamma - \pi). \quad (2)$$

Sulgudes olevat sfäärilise kolmnurga nurkade summa ja tasapinnalise kolmnurga (radiaanides väljendatud) nurkade summa vahet $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ nimetatakse kolmnurga sfääriliseks ekstsessiks ehk lihtsalt ekstsessiks; teoreemi 317 järgi on kolmnurga sfääriline ekstsess alati positiivne.

Tulemust, mida väljendab võrdus (2), saab sõnastada järgmiselt.

Teoreem 335. *Kui pindala mõõtmise keral osutub võimalikuks, siis sfäärilise kolmnurga pindala peab olema võrdeline tema sfäärilise ekstsessiga.*

Võrdetegur valemis (2) erineb sellest, mis esineb valemis (1); edaspidi see ebakõla kõrvaldatakse.

Sfäärilise kolmnurga kohta tarvitusele võetud sfäärilise ekstsessi mõistet saab järgmisel viisil laiendada sfäärilise hulknurga juhule. Sfäärilise n -nurga sfääriliseks ekstsessiks ehk lihtsalt ekstsessiks nimetatakse tema nurkade summa ja tasapinnalise n -nurga (radiaanides väljendatud) nurkade summa vahet.

Tähistades sfäärilise n -nurga nurki tähtedega $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$, saame tema ekstsessi ε jaoks järgmise avaldise:

$$\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda) - (n - 2)\pi. \quad (3)$$

Sfäärilise ekstsessi põhiline omadus väljendub järgmise lausega.

Teoreem 336. *Sfääriliste hulknurkade summa ekstsess on võrdne liidetavate hulknurkade ekstsesside summaga.*

Tõestus. Piisab teoreemi tõestamisest sellel juhul, kui antud hulknurk P on kahe hulknurga P' ja P'' summa. Tõestamisel tuleb eraldi vaadelda kolme juhtu sõltuvalt sellest, kas hulknurka P hulknurkadeks P' ja P'' jaotava murdjoone otsteks on hulknurga P tipud või tema külgede punktid (jooniséd 111, 112 ja 113).

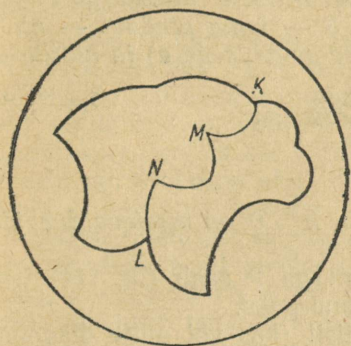
1) Murdjoone $KM \dots NL$ mõlemad otsad on hulknurga P tipud (joonis 111).

Tähistame hulknurkade P, P' ja P'' tippude arvu vastavalt tähtedega n, n' ja n'' ning hulknurga P sees asetsevate murdjoone $KM \dots NL$ tippude arvu tähega ν . Analoogiliselt tähistame nende hulknurkade nurkade summad tähtedega σ, σ' ja σ'' ning nende ekstsessid tähtedega $\varepsilon, \varepsilon'$ ja ε'' . Nende arvude vahel kehtivad ilmselt järgmised seosed:

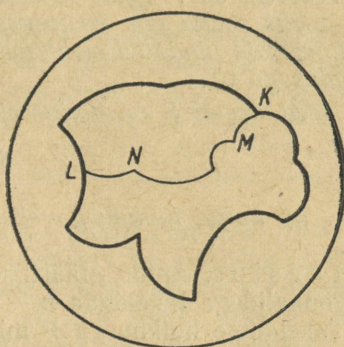
$$n' + n'' = n + 2\nu + 2 \text{ ja } \sigma' + \sigma'' = \sigma + 2\pi\nu.$$

Siit järeldubki, et

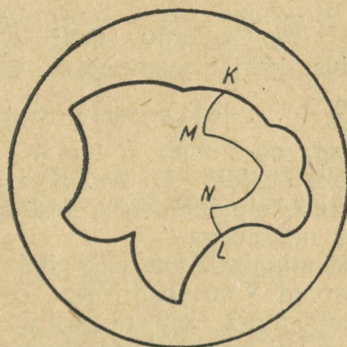
$$\begin{aligned}
 \varepsilon' + \varepsilon'' &= \sigma' - \pi(n' - 2) + \sigma'' - \pi(n'' - 2) = \\
 &= (\sigma' + \sigma'') - \pi(n' + n'' - 4) = \\
 &= (\sigma + 2\pi\nu) - \pi(n + 2\nu - 2) = \\
 &= \sigma - \pi(n - 2) = \varepsilon.
 \end{aligned}$$



Joonis 111.



Joonis 112.



Joonis 113.

2) Murdjoone $KM \dots NL$ üheks otsaks, ütleme otsaks K , on hulknurga P tipp, teiseks otsaks L aga on selle hulknurga ühe külje punkt (joonis 112).

Vaatleme n -nurka P ($n + 1$)-nurgana, mille ($n + 1$)-seks tipuks on punkt L ja selle tipu juures olev nurk on võrdne π -ga. Sellest hulknurga P ekstsess ei muutu, sest võrduse (3) parema poole kumbki liige suureneb π võrra. Järelikult kõik teoreemi tõestuse esimeses osas esitatud võrdused jäävad püsima.

3) Murdjoone $KM \dots NL$ mõlemad otsad on hulknurga P külgede punktid (joonis 113). Antud n -nurka P vaatleme nüüd ($n + 2$)-nurgana, mille tippude hulka kuuluvad ka mõlemad punk-

tid K ja L . Nurga kummagi nimetatud tipu juures loeme võrdseks π -ga. Hulknurga P ekstsess ei muutu ja eelmised võrdused on uuesti kehtivad.

Viimati tõestatud teoreem võimaldab väga lihtsalt lahendada sfäärilise hulknurga pindala küsimuse.

Teoreem 337. *Igale (lihtsale) sfäärilisele hulknurgale saab vastavaks seada ühe positiivse arvu S — tema pindala — nii, et hulknurkade pindalad on invariantse omadusega a) ja aditiivsuse omadusega b).*

Need arvud S on defineeritud võrdusega

$$S = k\varepsilon, \quad (4)$$

kus ε on antud hulknurga ekstsess ja $k > 0$ on meelevaldne jääv arv.

Tõestus. Antud sfäärilise hulknurga P saab (lk. 144) tema diagonaalidega tükeldada $n - 2$ kolmnurgaks.

Tükeldame hulknurga P mingil viisil (kas või mitte diagonaalidega) t kolmnurgaks ja tähistame viimaste ekstsessid tähtedega $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_t$. Valemi (2) järgi nende kolmnurkade pindalad peavad olema vastavalt

$$S_1 = k\varepsilon_1, S_2 = k\varepsilon_2, \dots, S_t = k\varepsilon_t.$$

Aditiivsuse omaduse põhjal saame, et

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_t = k(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t).$$

Teoreemi 336 järgi aga on summa $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t$ võrdne ε -ga. Siit järeldubki S jaoks avaldis (4). Arv S ei sõltu sellest, kuidas hulknurk on tükeldatud kolmnurkadeks, sest ta on täiesti määratud antud hulknurga nurkadega.

Näitame, et leitud arvudel S on kõik pindala omadused.

Kõigepealt kõik arvud S on positiivsed. Tõepoolest, nagu juba märkisime, on iga kolmnurga ekstsess positiivne arv, ja järelikult on positiivne arv ka ε kui kolmnurkade ekstsesside summa.

Edasi, võrdsetele hulknurkadele vastab üks ja seesama arv S , sest võrdsetel hulknurkadel on vastavalt võrdsed nurgad, hulknurga ekstsess aga on täiesti määratud tema nurkadega.

Lõpuks, valemist (4) saadavad S väärtused on aditiivsuse omadusega, sest ekstsessid on sellise omadusega (teoreem 336).

Niisiis on tõestatud, et sfääriliste hulknurkade pindalade mõõtmine on võimalik ja et pindala üldises avaldises (4) esineb meelevaldne konstant $k > 0$.

Rakendades valemist (4) erijuhul sfäärilisele kaksnurgale, mille nurk on α , peame valemis (3) lugema $n = 2$, mistõttu $\varepsilon = 2\alpha$. Valemist (4) saame sel juhul valemi (1). Kolmnurga juhul saame ilmselt valemi (2).

Konstant k on täiesti määratud siis, kui keral valime pindalaühiku, s. o. kui mingi täiesti määratud sfäärilise hulknurga pind-

ala loeme võrdseks ühega; kui ε_0 on selle hulknurga ekstsess, siis $k = \frac{1}{\varepsilon_0}$. Võib ka, üldisemalt, mingil täiesti määratud hulknurgal, mille ekstsess on ε_0 , lugeda pindala võrdseks antud arvuga $S_0 > 0$. Siis $k = \frac{S_0}{\varepsilon_0}$. Tegelikult lähtutakse konstandi k valikul järgmistest kaalutlustest.

Tasaste hulknurkade ja sfääriliste hulknurkade pindalade võrdlemine ei ole võimalik, sest pindalade võrdlemise aluseks on aditiivsuse tingimuse kõrval veel eeldus, et võrdsetel kujunditel on võrdsed pindalad. Lugeja teab aga kooli geometriakursusest, et see võrdlemine on teostatav ka udsel teel, nimelt piiriprotsessi abil. Mõtleme siin kera ja sfääri segmendi pindala üldtuntud tuletust.

Sellest tuletusest selgub, et poolkera pindala on $2\pi R^2$, kus R on kera raadius. Kuid poolkera saab vaadelda ka sfäärilise kaksnurgana, mille nurk on π (või, kui soovitakse, sfäärilise n -nurgana, mille iga nurk tema n nurgast on π). Siit saame sfäärilise ekstsessi väärtuseks 2π ja pindala väärtuseks $2k\pi$. Võrdsustades need kaks pindala avaldist, saame k jaoks väärtuse $k = R^2$. Nii jõuame järgmisele lõpptulemusele.

Teoreem 338. *Kui pindalaühik valida nii, et poolkera pindala on $2\pi R^2$, kus R on antud kera raadius, siis iga sfäärilise hulknurga pindala avaldub võrdusega*

$$S = \varepsilon R^2,$$

kus ε on hulknurga ekstsess (radiaanides).

On ilmne, et ekstsessi mõõtmisel kraadides saame mõnevõrra keerukama valemi:

$$S = \frac{2\pi}{360} \varepsilon R^2 \quad (\varepsilon \text{ kraadides}).$$

Märkused. 1. Sfäärilise hulknurga pindala mõõtmine annab võimaluse hulktahulise nurga mõõtmiseks. Selleks vaatleme mistahes raadiusega kera, mille keskpunktiks on antud hulktahulise nurga tipp. Antud hulktahuline nurk määrab sellel keral teatud sfäärilise hulknurga. Viimase sfääriline ekstsess, mis, nagu on kerge näha, ei sõltu kera raadiusest (või mingi selle ekstsessiga võrdeline suurus), võetakse antud hulktahulise nurga mõõduks ja nimetatakse harilikult ruuminurgaks¹. Ruuminurgad on ilmselt aditiivsuse ja invariantsuse omadusega.

2. Samuti nagu tasapinnaliste hulknurkade puhul võiks pindala küsimuse kõrval vaadelda ka sfääriliste hulknurkade tükeldusvõrdsuse küsimust (vrd. I, § 53 ja § 60).

Kaht sfäärilist hulknurka nimetatakse tükeldusvõrdseteks, kui neid saab tükeldada üheks ja samaks arvuks vastavalt võrdseteks kolmnurkadeks. Igal kahel tükeldusvõrdsel sfäärilisel hulknurgal on teoreemi 336 järgi üks ja sama sfääriline ekstsess. Saab tõestada ka pöördlauset:

Iga kaks sfäärilist hulknurka, millel on üks ja sama sfääriline ekstsess, on tükeldusvõrdsed.

¹ See nimetus on tarvitusel näiteks füüsikas.

Siit järeldub, et iga kaks pindvõrdset sfäärilist hulknurka on tükeldusvõrdsed.

3. Kui «võrdsete» kujundite all mõista ainult neid kujundeid, mida me nimetame pärisvõrdseteks (vt. märkust paragrahvis 129), siis pindala mõõtmise ülesande seadmisel tuleb piirduda invarianttsuse nõudega ainult esimest liiki liikumiste suhtes, sõnastades lk. 174 toodud nõudeist esimese järgmiselt:

«a) Pärisvõrdsetele sfäärilistele hulknurkadele vastab üks ja sama pindala.»

Esitatud teooriat tuleb seejuures kohati muuta, sest teoreemi 335 tõestamisel kasutasime peegeldusvõrdsete kolmnurkade ABC_1 ja A_1B_1C võrdsust (joonis 110). Et jõuda samale tulemusele kui tekstis, tuleks eraldi tõestada, et peegeldusvõrdsete kolmnurkade pindalad on võrdsed.

Homoteetsus ja sarnasus.

§ 155. Homoteetsuse definitsioon ja omadused.

Käesolevas peatükis üldistame ruumi juhule tasapinnageomeetrias (I, peatükk VIII) tundma õpitud homoteetsuse ja sarnasuse mõisted. Paljudel juhtudel on tõestused ruumi korral õige lähedased vastavatele tõestustele tasapinna puhul. Neil juhtudel ainult skematiseerime tõestuse või jätame ta täiesti andmata.

Kahe homoteetse ruumikujundi definitsioon on tasapinnageomeetria vastava definitsiooni sõnasõnaline kordamine.

Kujundit F' nimetatakse homoteetseks ehk perspektiivselt sarnaseks (ehk sarnaseks ja sarnaselt asetsevaks) kujundiga F , kui nende kahe kujundi punktide vahel on korraldatud järgmiste omadustega vastavus:

a) kõik kaht vastavat punkti ühendavad sirged läbivad üht ja sama punkti S ;

b) iga kaks vastavat punkti asetsevad punktist S ühel pool või iga kaks vastavat punkti asetsevad punktist S eri pooltel;

c) kui A ja B on esimese kujundi mingid kaks punkti ning A' ja B' on neile vastavad teise kujundi punktid, siis $SA' : SA = SB' : SB$.

Punkti S , millest kõneldakse selles definitsioonis, nimetatakse sarnasuskeskpunktiks (ehk homoteetsus-keskpunktiks); jäävat suhet $k = SA' : SA = SB' : SB = \dots$ nimetatakse kujundi F' sarnasusteguriks (ehk homoteetsusteguriks) kujundi F suhtes. Vastavust nende kahe kujundi punktide vahel ehk, teiste sõnadega, teisendust, mille abil kujundi F punktidest saadakse kujundi F' punktid, nimetatakse homoteetsuseks.

Kui iga kaks vastavat punkti asetsevad punktist S ühel pool, siis kujundeid nimetatakse päripidi homoteetseiks ($k > 0$), ja kui mitte ühel pool, siis vastupidi homoteetseiks ($k < 0$); sarnasuskeskpunkti nimetatakse, esimesel juhul väliseks ja teisel juhul seesmiseks sarnasuskeskpunktiks.

Vaatleme nüüd homoteetsuse põhiomadusi.

1°. Kui sarnasuskeskpunkt lugeda homoteetsuses iseendale vastavaks, s. o. mõlema kujundi kahekordseks punktiks, siis *homoteetsus on üksühene vastavus kahe kujundi punktide vahel*. Teda saab vaadelda ka üksühese vastavusena kogu ruumi punktide vahel.

2°. *Homoteetsusel on refleksiivsuse ja sümmeetrilisuse omadus.*¹

3°. *Kujundi F ühel sirgel asetsevatele punktidele vastavad homoteetses kujundis F' punktid, mis samuti asetsevad ühel sirgel; mingi lõigu punktidele vastavad samuti mingi lõigu punktid.*

Siit järeldub, et kiirega, nurgaga, kolmnurgaga jne. homoteetne kujund on samuti kiir, nurk, kolmnurk jne.

4°. *Kahe homoteetse kujundi vastavad sirged, mis ei läbi sarnasuskeskpunkti, on paralleelsed.*

5°. *Ühe kujundi kahele paralleelsele sirgele vastavad homoteetses kujundis samuti paralleelsed sirged.*

6°. *Iga kahe vastava lõigu suhe on võrdne sarnasusteguri absoluutväärtusega.*

7°. *Iga kaks homoteetsset kolmnurka on sarnased.*

8°. *Iga kaks vastavat tasanurka on võrdsed.*

9°. *Kui kujundis F punktid C ja D asetsevad ühel tasapinnal punktidega A ja B ning sirgest AB eri pooltel (ühel pool) ning kujundi F punktidele A, B, C ja D vastavad kujundi F' punktid A', B', C' ja D', siis asetsevad ka punktid C' ja D' ühel tasapinnal punktidega A' ja B' ning sirgest A'B' eri pooltel (vastavalt ühel pool). Kui kujundi F mingid neli punkti ei asetse ühel ja samal tasapinnal, siis ei asetse ühel ja samal tasapinnal ka vastavad kujundi F' punktid.*

Seda omadust saab tõestada täpselt samuti nagu võrdsete kujundite vastavat omadust (§ 133, omadus 4).

Sellest omadusest järeldub, et tasapinnale vastab tasapind, pooltasapinnale pooltasapind, poolruumile poolruum jne. (võrrelda § 133, omadus 4).

10°. *Homoteetsete kujundite vastavad kolmetahulised nurgad ja järelikult ka vastavad kahetahulised nurgad on võrdsed (võrrelda § 133, omadus 5).*

11°. *Iga kaks vastavat lõiku on kahel päripidi homoteetsel kujundil samasuunalised, kahel vastupidi homoteetsel kujundil aga vastandsuunalised.*

Siit järeldub, et ka iga kaks vastavat kiirt on kahel päripidi (vastupidi) homoteetsel kujundil samasuunalised (vastavalt vastandsuunalised).

12°. *Iga kaks päripidi homoteetsset kolmetahulist nurka on samasuunalised (§ 110 mõttes), iga kaks vastupidi homoteetsset kolmetahulist nurka aga vastandsuunalised.*

¹ Homoteetsusel on selle mõiste teatava üldistuse korral ka transitiivsuse omadus (vt. I, lk. 187, märkus, ja teoreemi 340).

Järelikult on iga kaks päripidi homoteetset tetraeedrit ühte viisi orienteeritud, iga kaks vastupidi homoteetset tetraeedrit aga vastupidiselt orienteeritud.

See järeldeb otseselt omadusest 11° .

Omaduse 12° rangem tuletamine omadusest 11° toimub järgmiselt.

Kahel päripidi homoteetsel kolmetahulisel nurgal $OABC$ ja $O'A'B'C'$ on iga kaks vastavat serva OA ja $O'A'$, OB ja $O'B'$, OC ja $O'C'$ paralleelsed ja samasuunalised. Siit selgub, et kolmetahulise nurga $OABC$ saab viia lükke $\overline{OO'}$ abil ühtivusse kolmetahulise nurgaga $O'A'B'C'$. Et lüke on esimest liiki liikumine, siis kolmetahulised nurgad $OABC$ ja $O'A'B'C'$ on pärisvõrdsed.

Kahe vastupidi homoteetse kolmetahulise nurga $OABC$ ja $O'A'B'C'$ juhul lüke $\overline{OO'}$ asendub teist liiki liikumisega, nimelt peegeldumisega lõigu OO' keskpunktist.

Toonitame, et kahe homoteetse kujundi omadus 12° ruumis on oluliselt erinev homoteetsete kujundite vastavast omadusest tasapinnal (I, § 62, omadus 9).

Peegeldumine punktist S on nagu tasapinnageomeetriasi homoteetsuse erijuhtum ($k = -1$) ja iga vastupidine homoteetsus (sarnasusteguriga $k < 0$) on korrutis, mille teguriteks on päripidine homoteetsus (sarnasusteguriga $|k|$) ja peegeldumine sarnasuskeskpunktist.

§ 156. Sarnasustelg. Sarnasustasapind.

Rida homoteetsete kujundite omadusi, mida oleme vaadelnud tasapinnageomeetrias (I, teoreemid 134—136), on ilma ühegi muudatuseta koos tõestustega üle kantavad ruumi. Seetõttu piirdume ainult nende sõnastamisega.

Teoreem 339. Iga üksühene vastavus kahe kujundi punktide vahel on homoteetsus või lüke, kui sellel vastavusel on järgmised omadused:

- lõigu punktidele vastavad lõigu punktid;
- iga kaks vastavat lõiku on paralleelsed ning omavad üht ja sedasama suhet;
- iga kaks vastavat lõiku on samasuunalised või iga kaks vastavat lõiku on vastandsuunalised.

Teoreem. 340. Kui kummagi kujunditest F_2 ja F_3 saab kujundist F_1 homoteetsuse või lükke abil, siis saab ka kujundid F_2 ja F_3 teineteisest homoteetsuse või lükke abil.

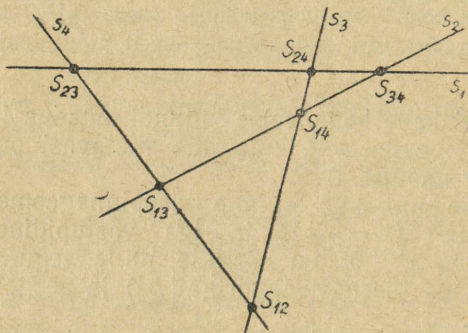
Järeldus. Kaks kujundit, mis on kolmandaga päripidi homoteetsed, ja samuti kaks kujundit, mis on kolmandaga vastupidi homoteetsed, on päripidi homoteetsed (või saadakse teineteisest lükke abil); kui kahest kujundist üks on kolmandaga päripidi, teine aga vastupidi homoteetne, siis need kaks kujundit on vastupidi homoteetsed.

Teoreem 341. Kolme paariti homoteetse kujundi sarnasuskeskpunktid asetsevad ühel sirgel.

Sirget, millel asetsevad kolme paariti homoteetse kujundi kolm sarnasuskeskpunkti, nimetatakse nende kujundite sarnasusteljeks.

Järeldus. Sarnasusteljel asetsevast kolmest sarnasuskeskpunktist on väliseid sarnasuskeskpunkte kolm või üks ja seesmisi vastavalt ei ühtki või kaks.

Vaatleme nüüd nelja paariti homoteetset kujundit. Niisugustel kujunditel on järgmine omadus.



Joonis 114.

Teoreem 342. Nelja paariti homoteetse kujundi kuus sarnasuskeskpunkti asetsevad ühel tasapinnal.

Tõestus. Olgu F_1, F_2, F_3 ja F_4 antud homoteetsed kujundid ning $S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{23}, S_{24}$ ja S_{34} neist moodustatud kujundipaaride sarnasuskeskpunktid. Seejuures S_{12} tähistab kujundipaari F_1 ja F_2 sarnasuskeskpunkti jne. Kujunditest F_2, F_3 ja F_4 moodustatud paaride sarnasuskeskpunktid S_{23}, S_{24} ja S_{34} asetsevad teoreemi 341 järgi ühel sirgel s_1 . Kujunditest F_1, F_3 ja F_4 moodustatud paaride sarnasuskeskpunktid S_{13}, S_{14} ja S_{34} asetsevad samuti ühel sirgel s_2 .

Kui need kaks sirget ei ühti, siis nad asetsevad ühel ja samal tasapinnal σ , sest nad lõikuvad punktis S_{34} (joonis 114).

Sirged $S_{24}S_{14}$ ja $S_{23}S_{13}$ läbivad mõlemad punkti S_{12} , sest nad on vastavalt kujundite F_1, F_2 ja F_4 ning F_1, F_2 ja F_3 sarnasustelgedeks s_3 ja s_4 . Niisiis kõik kuus sarnasuskeskpunkti asetsevad tasapinnal σ .

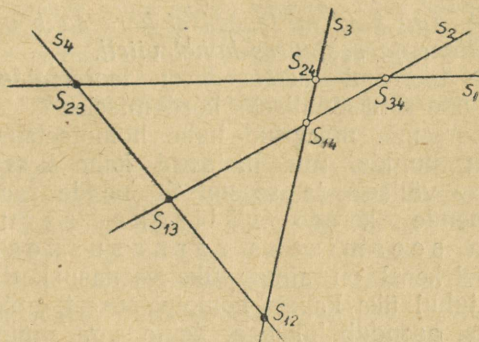
Kui sarnasusteljed s_1 ja s_2 ühtiksid, siis kõik kuus sarnasuskeskpunkti asetseksid ühel ja samal sirgel.

Tasapinda, millel asetsevad nelja paariti homoteetse kujundi kuus sarnasuskeskpunkti, nimetatakse nende kujundite sarnasustasapinnaks.

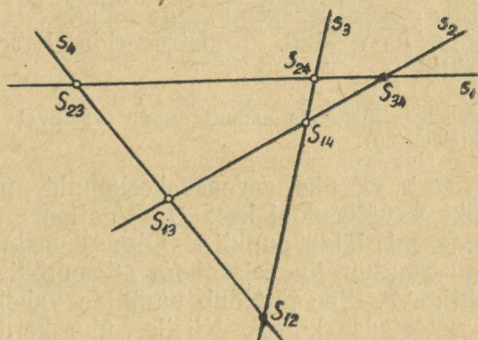
Järeldused. 1. Nelja paariti homoteetse kujundi kuus sarnasuskeskpunkti asetsevad kolmekaupal neljal sirgel — nende

kujundikolmikute sarnasustelgedel. Iga sarnasuskeskpunkti läbiivad neljast sarnasusteljest kaks.

2. Sarnasustasapinnal asetsevast kuuest sarnasuskeskpunktist on välisteks sarnasuskeskpunktideks kõik kuus või kolm, mis asetsevad seejuures ühel ja samal sarnasusteljel, või kaks, mis ei asetse ühel ja samal sarnasusteljel.



Joonis 115.



Joonis 116.

Tõepoolest, võib esineda kolm juhtu: nelja kujundi iga neli vastavat lõiku on ühe ja sama suunaga või kolm neist on ühe ja sama suunaga, kuid neljas vastandsuunaga või, lõpuks, kaks neist on ühe ja sama suunaga, ülejäänud kaks aga vastandsuunaga. Need kolm juhtu on skemaatiliselt kujutatud joonistel 114, 115 ja 116, kus välised sarnasuskeskpunktid on märgitud mustade ringikestega ja seesmised valgetega.

§ 157. Kerade sarnasuskeskpunktid ja sarnasusteljed.

Rakendame paragrahvides 155 ja 156 saadud tulemusi sellele juhule, kus antud kujundeiks on kerad. Nii saame I, § 65 tulemuste üldistuse.

Teoreem 343. *Keraga homoteetne kujund on samuti kera ja nende kerade keskpunktid on teineteisele vastavateks punktideks.*

Teoreem 344. *Iga kaht mittevõrdset kera saab vaadelda homoteetsete kujunditena ja seejuures kahel viisil.*

Nende kahe teoreemi tõestused on teoreemide 139 ja 140 (I, § 65) tõestuste sõnasõnaliseks kordamiseks.

Viimases teoreemis märgitud kahe homoteetsuse keskpunkte, teiste sõnadega punkte, mis jaotavad kahe kera keskpunktide vahelise kauguse väliselt ja seesmiselt nende raadiuste suhtes, nimetatakse nende kerade väliseks sarnasuskeskpunktiks ja seesmiseks sarnasuskeskpunktiks.

Kahel võrdsel keral on ainult üks sarnasuskeskpunkt, nimelt seesmine. Sel juhul üks kahest homoteetsusest, mis teisendavad ühe kera teiseks, asendub lükkega, teine aga muutub tsentraalseks peegelduseks.

See, mis on öeldud tasapinnageomeetrias (raamatu esimene osa, lk. 192) kahe ringjoone sarnasuskeskpunktide ja nende ringjoonte vastastikuse asendi kohta, on ilma igasuguste muudatusteta kehtiv ka kahe kera sarnasuskeskpunktide puhul.

Konstruksioon 126. Konstrueerida kahe antud kera sarnasuskeskpunktid.

Seda ülesannet saab lahendada samuti nagu vastavat ülesannet tasapinnal (I, konstruksioon 30).

Olgu kerade O ja O' üks sarnasuskeskpunkt, näiteks väline sarnasuskeskpunkt S väljaspool kera O . Vaatleme selle kera üht puutuvat tasapinda, mis läbib punkti S . Olgu T vastav puutepunkt. Seesama tasapind puutub ka teist kera O' punktis T' , mis on homoteetne punktiga T . See järeldub punktide vahelise vastavuse üksühesusest homoteetsuse korral. Niisiis, ühe kera iga puutuv tasapind, mis läbib kahe kera välist või seesmist sarnasuskeskpunkti, puutub ka teist kera ja on nende kerade ühiseks puutuvaks tasapinnaks. Kui ta läbib välist sarnasuskeskpunkti, siis puutepunktidesse tõmmatud raadiused OT ja $O'T'$ on samasuunalised, ja kui seesmist sarnasuskeskpunkti, siis vastand-suunalised. Esimesel juhul saame ühise välise puutuva tasapinna, teisel juhul ühise seesmise puutuva tasapinna.

Oletame ümberpöörduvalt, et kahe kera O ja O' mingi ühine puutuv tasapind puutub neid kerasid punktides T ja T' . Et raadiused OT ja $O'T'$ on paralleelsed, siis sirge TT' lõikab keskpunktide sirget OO' ühes sarnasuskeskpunktis või on selie sirgega paralleelne. Niisiis läbib kahe kera iga ühine puutuv tasapind

nende kerade üht sarnasuskeskpunkti või on paralleelne nende keskpunktide sirgega.

Analoogiliselt, kahest kerast ühe iga puutuja, mis läbib nende kerade seesmist või välist sarnasuskeskpunkti, puutub ka teist kera ja on kahe kera ühiseks puutujaks.

Pöördjärgeldus oleks, erinevalt puutuva tasapinna juhust, ebaõige. Kahe kera iga ühine puutuja ei läbi nende kerade üht sarnasuskeskpunkti. Tõepoolest, vaatleme ringjooni, mida mööda mõlemad kerad lõikuvad mingi tasapinnaga. Neil kahel ringjoonel võib leiduda ühiseid puutujaid, mis kuuluvad nende kerade ühiste puutujate hulka. Juba siit saab järgeldada, et kahe kera kõikide ühiste puutujate kogu kujutab endast ruumis õige keerukalt asetsevate sirgete peret. Nende uurimine ulatub välja elementargeomeetria raamidest.

Kahe kera ühised puutujad, mis läbivad nende kerade üht sarnasuskeskpunkti väljaspool kumbagi antud kera, moodustavad koonuse. Seda koonust võiks nimetada kahe kera ühiseks ümberkujundatud koonuseks. Võttes arvesse sarnasuskeskpunktide asetust antud kerade suhtes, saame järgneva lause.

Teoreem 345. *Kahel mittevõrdsel keral, mis asetsevad teineteisest väljaspool, on kaks ühist ümberkujundatud koonust; kahel keral, mis puutuvad teineteist väliselt, on üks ühine puutuv koonus ja üks ühine puutuv tasapind; kahel keral, mis lõikuvad mööda ringjoont, on ainult üks ühine ümberkujundatud koonus; kahel keral, mis puutuvad teineteist seesmiselt, on ainult üks ühine puutuv tasapind; lõpuks, kahel keral, milledest üks asetseb teise sees, ei leidu üldse ühiseid ümberkujundatud koonuseid ega ühiseid puutuvaid tasapindu.*

Seda teoreemi saab vaadelda kui teoreemi 141 üldistust ruumi juhule.

Kahe võrdse kera juhul ühine väline ümberkujundatud koonus muutub ühiseks ümberkujundatud silindriks.

On kerge näidata, et kahe kera iga ühine puutuv tasapind (välja arvatud kahe teineteist puutuva kera puutuv tasapind nende ühises punktis) puutub nende üht ühist ümberkujundatud koonust (või ümberkujundatud silindrit). See märkus võimaldab lahendada järgmist ülesannet.

Konstruksioon 127. Konstrueerida kahe antud kera ühine puutuv tasapind, mis läbib antud punkti.

Äsiaõeldu põhjal taandub ülesanne konstruktsioonile 95 (või konstruktsioonile 96).

Siirdume kolme antud kera juhule.

Teoreem 346. *Kui kolme paariti mittevõrdse kera keskpunktid ei asetse ühel sirgel, siis asetsevad nende kerapaaride kuus sarnasuskeskpunkti kolmekaupä neljal sirgel.*

Selle teoreemi tõestus erineb nii vähe vastava teoreemi tõestusest kolme ringjoone kohta (teoreem 142, I, lk. 193), et tema juures ei tarvitse peatuda.

Nelja sirget, millel kolme kaupa asetsevad kolme paari mittevõrdse kera sarnasuskeskpunktid, nimetatakse kolme kera sarnasustelgedeks.

Kui kolme kera välised sarnasuskeskpunktid tähistada sümbolitega S_{23} , S_{13} , ja S_{12} ning seesmised sarnasuskeskpunktid sümbolitega S_{23}^* , S_{13}^* ja S_{12}^* , siis need keskpunktid asetsevad sarnasustelgedel järgmiselt:

telg s : keskpunktid S_{23} , S_{13} , S_{12} ;
 telg s_1 : keskpunktid S_{23} , S_{13}^* , S_{12}^* ;
 telg s_2 : keskpunktid S_{23}^* , S_{13} , S_{12}^* ;
 telg s_3 : keskpunktid S_{23}^* , S_{13}^* , S_{12} .

Konstruksioon 128. Konstrueerida kolme antud kera sarnasusteljed.

Oletame nüüd, et kerade O_1 , O_2 ja O_3 üks sarnasustelg, näiteks s , millel asetsevad antud kerade välised sarnasuskeskpunktid S_{23} , S_{13} ja S_{12} , ei lõika kera O_1 . Paneme läbi sirge s tasapinna, mis puutub kera O_1 , ja tähistame vastava puutepunkti tähega T_1 . Et see tasapind läbib kerade O_1 ja O_2 sarnasuskeskpunkti S_{12} , siis ta puutub ka kera O_2 . Puutepunktiks T_2 on kera O_2 punkt, mis on homoteetne punktiga T_1 sarnasuskeskpunkti S_{12} suhtes.

Samade kaalutluste põhjal puutub vaadeldav tasapind ka kolmandat antud kera. Niisiis, kolme kera mingit üht sarnasustelge läbib tasapind, mis puutub üht neist keradest, puutub ka ülejäänud kaht kera ja on kolme kera ühiseks puutuvaks tasapinnaks.

Oletame ümberpöörduvalt, et kolmel keral O_1 , O_2 ja O_3 , millede keskpunktid ei asetse ühel sirgel, on mingi ühine puutuv tasapind, mis puutub neid vastavalt punktides T_1 , T_2 ja T_3 . Et raadiused O_1T_1 ja O_2T_2 on paralleelsed, siis läbib see tasapind kerade O_1 ja O_2 üht sarnasuskeskpunkti või on paralleelne nende keskpunktide sirgega. Sama kehtib ka kerade O_1 ja O_3 kohta.

Siit selgub, et see ühine puutuv tasapind läbib kolme antud kera üht sarnasustelge või on paralleelne nende keskpunktide tasapinnaga.

Järelikult kolmel keral, millede keskpunktid ei asetse ühel ja samal sirgel, saab olla ülimalt kaheksa ühist puutuvat tasapinda, mis kahekaupa läbivad nende kerade nelja sarnasustelge. (Kui kõik kolm kera on võrdsed, siis üks neljast sarnasusteljest puudub ja kaks ühist puutuvat tasapinda on paralleelsed keskpunktide tasapinnaga.) Kui kolm kera asetsevad üksteisest väljaspool, siis on olemas kõik kaheksa ühist puutuvat tasapinda (nagu detailsem uurimine näitab). Kui antud kolmest kerast üks asetseb teise sees, siis ei ole kolmel keral ilmselt ühtki ühist puutuvat tasapinda. Kolme kera vastastikuse asendi muude juhtude korral võib neil keradel leiduda ka vähem kui kaheksa ühist puutuvat tasapinda.

Õeldust näeme järgmise ülesande üht lahendusviisi.

Konstruktsioon 129. Konstrueerida antud kolme kera ühised puutuvad tasapinnad.

Esimene viis. Konstrueerime antud kerade sarnasusteljed ja paneme läbi iga telje tasapinnad, mis puutuvad üht antud kera. Saadud tasapinnad ongi kerade ühisteks puutuvateks tasapindadeks.

Suurim lahendite arv on kaheksa.

Selle ülesande teine lahendusviis antakse allpool (§ 177).

§ 158. Nelja kera sarnasustasapinnad.

Teoreem 347. *Kui nelja paariti mittevõrdse kera keskpunktid ei asetse ühel tasapinnal, siis asetsevad nende kerapaaride kaks-teist sarnasuskeskpunkti kuuekaupa kaheksal tasapinnal.*

Tõestus. Olgu O_1, O_2, O_3 ja O_4 antud nelja kera keskpunktid, $S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{23}, S_{24}$ ja S_{34} nende kerade välised sarnasuskeskpunktid ning S_{12}^*, \dots ja S_{34}^* nende seesmised sarnasuskeskpunktid. Seejuures S_{12} ja S_{12}^* tähistavad kerade O_1 ja O_2 vastavalt välist ja seesmist sarnasuskeskpunkti jne.

Antud nelja kera saab (teoreemi 344 põhjal) vaadelda kujunditena, mis on paariti päripidi homoteetsed. Vastavateks sarnasuskeskpunktideks on siis välised sarnasuskeskpunktid S_{12}, \dots, S_{34} . Need kuus sarnasuskeskpunkti asetsevad teoreemi 342 põhjal ühel ja samal sarnasustasapinnal, mille tähistame tähega σ .

Edasi saab kolme antud keradest vaadelda kujunditena, mis on paariti päripidi homoteetsed, ja neljandat kujundina, mis on vastupidi homoteetne esimese kolmega. Kui näiteks vaadelda kerasid O_2, O_3 ja O_4 kujunditena, mis on paariti päripidi homoteetsed, ja kera O_1 kujundina, mis on nendega vastupidi homoteetne, siis vastavateks sarnasuskeskpunktideks on $S_{12}^*, S_{13}^*, S_{14}^*, S_{23}, S_{24}$ ja S_{34} . Teoreemi 342 põhjal need kuus sarnasuskeskpunkti asetsevad samuti ühel ja samal tasapinnal, mille tähistame tähega σ_1 .

Analoogiliselt võib saada tasapinnad σ_2, σ_3 ja σ_4 , vaadeldes vastavalt igaüht keradest O_2, O_3 ja O_4 kujundina, mis on vastupidi homoteetne ülejäänud kolme keraga.

Lõpuks, antud keradest kaht saab vaadelda kahe päripidi homoteetse kujundina ja teist kaht nendega vastupidi homoteetsete (ja järelikult teineteisega päripidi homoteetsete) kujunditena. Kui näiteks vaadelda kerasid O_1 ja O_2 päripidi homoteetsete kujunditena ja kumbagi keradest O_3 ja O_4 nendega vastupidi homoteetsetena, siis vastavateks sarnasuskeskpunktideks on $S_{12}, S_{13}^*, S_{14}^*, S_{23}^*, S_{24}^*$ ja S_{34} . Teoreemi 342 põhjal asetsevad ka need kuus sarnasuskeskpunkti ühel ja samal tasapinnal, mida on loomulik tähistada sümboliga σ_{12} või σ_{34} . Analoogiliselt võib saada tasapinna σ_{13} (või σ_{24}), kui jaotada antud neli kera paarideks O_1, O_3 ja O_2, O_4 , ja tasapinna σ_{14} (või σ_{23}), kui vaadelda kerapaare O_1, O_4 ja O_2, O_3 .

Üldse on olemas $1 + 4 + 3 = 8$ niisugust tasapinda.

On kerge näidata, et juhul, kui antud kerade keskpunktid ei asetse ühel ja samal tasapinnal, need kaheksa tasapinda on üksteisest erinevad. Teoreem on tõestatud.

Kaheksat tasapinda, millel kuuekaupa asetsevad nelja paariti mittevõrdse kera sarnasuskeskpunktid, nimetatakse nelja kera sarnasustasapindadeks.

Nelja kera sarnasuskeskpunktid asetsevad sarnasustasapindadel järgmiselt:

- tasapind σ : keskpunktid $S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{23}, S_{24}, S_{34}$;
- tasapind σ_1 : keskpunktid $S_{12}^*, S_{13}^*, S_{14}^*, S_{23}, S_{24}, S_{34}$;
- tasapind σ_2 : keskpunktid $S_{12}^*, S_{13}, S_{14}, S_{23}^*, S_{24}^*, S_{34}$;
- tasapind σ_3 : keskpunktid $S_{12}, S_{13}^*, S_{14}, S_{23}^*, S_{24}, S_{34}^*$;
- tasapind σ_{12} või σ_{34} : keskpunktid $S_{12}, S_{13}^*, S_{14}^*, S_{23}^*, S_{24}^*, S_{34}$;
- tasapind σ_{13} või σ_{24} : keskpunktid $S_{12}^*, S_{13}, S_{14}^*, S_{23}^*, S_{24}, S_{34}^*$;
- tasapind σ_{14} või σ_{23} : keskpunktid $S_{12}^*, S_{13}^*, S_{14}, S_{23}, S_{24}^*, S_{34}^*$.

Märkus. Sellest tabelist võib kergesti märgata järgmisi seaduspärasusi antud kerade 12 sarnasuskeskpunkti, 16 sarnasustelje ja 8 sarnasustasapinna asetuses.

1) Läbi iga sarnasuskeskpunkti läheb neli sarnasustelje.

Läbi sarnasuskeskpunkti S_{12} näiteks lähevad sarnasusteljed, mis sisaldavad järgmisi sarnasuskeskpunktide kolmikuid: $S_{12}S_{13}S_{23}$, $S_{12}S_{13}^*S_{23}^*$, $S_{12}S_{14}S_{24}$ ja $S_{12}S_{14}^*S_{24}^*$. Läbi sarnasuskeskpunkti S_{12}^* lähevad sarnasusteljed $S_{12}^*S_{13}S_{23}^*$, $S_{12}^*S_{14}S_{24}^*$, $S_{12}^*S_{13}^*S_{23}$ ja $S_{12}^*S_{14}^*S_{24}$, jne.

2) Läbi iga sarnasuskeskpunkti läheb neli sarnasustasapinda.

Läbi sarnasuskeskpunkti S_{12} näiteks lähevad sarnasustasapinnad σ , σ_3 , σ_4 ja σ_{12} , läbi sarnasuskeskpunkti S_{12}^* sarnasustasapinnad σ_1 , σ_2 , σ_{13} ja σ_{14} , jne.

3) Igal sarnasusteljel asetseb kolm sarnasuskeskpunkti.

4) Läbi iga sarnasustelje läheb kaks sarnasustasapinda.

5) Igal sarnasustasapinnal asetseb neli sarnasustelje.

6) Igal sarnasustasapinnal asetseb kuus sarnasuskeskpunkti.

See õigustab järgmise üldise definitsiooni vastuvõtmist. Lõplikust hulgast punktidest A , sirgetest a ja tasapindadest α koosnev kogum nimetatakse ruumiliseks konfiguratsiooniks, kui tal on järgmised omadused: läbi iga punkti A läheb üks ja sama arv sirgeid a ning üks ja sama arv tasapindu α ; igal sirgel a asetseb üks ja sama arv punkte A ning läbi iga sirge a läheb üks ja sama arv tasapindu α ; igal tasapinnal α asetseb üks ja sama arv punkte A ning üks ja sama arv sirgeid a .

Konfiguratsiooni lihtsaima (kuigi mitteühivita) näitena võiks nimetada tetraeedri 4 tipust, 6 servast ja 4 tahust koosnevat kogu.

Nüüd võime öelda, et *mistahes nelja kera 12 sarnasuskeskpunkti, 16 sarnasustelje ja 8 sarnasustasapinda moodustavad konfiguratsiooni.*

Analoogiliselt saab vaadelda konfiguratsioone ka tasapinnal. Mingi tasapinna lõplikust hulgast punktidest A ja sirgetest a koosnev kogum nimetatakse (tasaseks) konfiguratsiooniks, kui läbi iga punkti A läheb üks ja sama arv sirgeid a ja igal sirgel a asetseb üks ja sama arv punkte A .

Tasase konfiguratsiooni näitena võib nimetada kolme ringjoone või kera 6 sarnasuskeskpunkti ja 4 sarnasusteljest koosnevat kogu (I, teoreem 142; II, teoreem 346): iga sarnasuskeskpunkti läbib kaks sarnasustelje ja igal sarnasusteljel asetseb kolm sarnasuskeskpunkti. Samasuguse konfiguratsiooni moodustavad antud nelja paariti homoteetse kujundi 6 sarnasuskeskpunkti ja 4 sarnasustelje (teoreem 342 ja joonis 114).

§ 159. Konstruktsioone.

Homoteetsete kujundite omadusi saab nagu tasapinnageomeetriaski (I, § 66) kasutada konstruktsioonülesannete lahendamiseks ruumis.

Siin on lihtsamateks ja ühtlasi põhilisteks konstruktsioonideks järgmised kaks konstruktsiooni.

Konstruktsioon 130. Konstrueerida antud hulknurgaga homoteetne hulknurk või antud hulktahtukaga homoteetne hulktahtukas, teades sarnasuskeskpunkti ja ühe tipuga homoteetset punkti (või teades sarnasuskeskpunkti ja kahe lõigu suhtega antud sarnasustegurit).

Lahendusviis, mida kasutasime vastava ülesande puhul tasapinnal (I, konstruktsioon 33), on täiesti rakendatav ka ruumis.

Konstruktsioon 131. Konstrueerida antud keraga homoteetne kera, teades sarnasuskeskpunkti ja antud kera antud punktiga homoteetset punkti (või teades sarnasuskeskpunkti ja kahe lõigu suhtega antud sarnasustegurit).

Meenutame, et kera konstrueerimise all mõistetakse (§ 127) selle kera keskpunkti ja raadiuse konstrueerimist.

Lahendusviis, mida kasutasime vastava ülesande puhul ringjoone kohta tasapinnal (I, konstruktsioon 34), on täiesti rakendatav ka kera juhul.

Tüüpiliseks näiteks homoteetsuse rakendamiseks konstruktsioonidele ruumis võib lugeda järgmist ülesannet (mida saab vaadelda raamatu esimeses osas esitatud konstruktsiooni 36 üldistusena).

Konstruktsioon 132. Konstrueerida kera, mis puutub kolme antud tasapinda ja läbib antud punkti, mis ei asetse ühelgi antud tasapinnal.

Esimene viis. Piirdume selle juhu vaatlemisega, kus antud kolm tasapinda lõikuvad ühes punktis; ülejäänud juhtudel (missugustel?) ülesanne laheneb lihtsamalt (kuidas?).

Olgu vaja konstrueerida kera, mis puutub punktis S lõikuvaid tasapindu α , β ja γ ning läbib punkti A , mis ei asetse ühelgi tasapindadest α , β ja γ . Nimetame «kolmetahuliseks nurgaks S_n » selle tasapindade α , β ja γ poolt moodustatud kolmetahulise nurga, mille sees asetseb punkt A .

Vaatleme mingit kera O' , mis puutub kolme antud tasapinda ja asetseb kolmetahulise nurga S_n sees.

Selle kera keskpunkt on võrdsetel kaugustel kolmest antud tasapinnast ja asetseb seetõttu kolmetahulise nurga S_n seesmistest kahetahuliste nurkade bisektortasapindade lõikejoonel s . Igaüks tasapindadest α , β ja γ on ilmselt kera O' ja otsitava kera O ühiseks väliseks puutuvaks tasapinnaks (§ 157). Järelikult kolme tasapinna lõikepunkt S on kerade O ja O' väliseks sarnasuskespunktiks.¹ Otsitava kera O antud punktiga A homoteetseks kera O' punktiks on kera O' ja sirge SA üks lõikepunkt.

¹ Võiks vaadelda ka kera O' , mis asetseb kolmetahulise nurga S_n tippnurga sees. Siis igaüks tasapindadest α , β ja γ on kerade O' ja O ühiseks seesmiseks puutuvaks tasapinnaks ja punkt S on nende kerade seesmiseks sarnasuskespunktiks.

Antud tasapindade poolt moodustatud kuuest ülejäänud kolmetahulisest

Oeldust tuleneb vaadeldava ülesande järgmine lahendusviis. Konstrueerime kolmetahulise nurga S_a kahe seesmise kahetahulise nurga bisektortasapindade lõikejoone s . Sirge s mingist punktist O' , mis asetseb kolmetahulise nurga S_a sees¹, konstrueerime ühele antud tasapinnale, näiteks tasapinnale α , ristsirge $O'H'$. Edasi konstrueerime sirge SA lõikepunkti A' keraga, mille keskpunktiks on O' ja raadiuseks lõik $O'H'$ (konstruktsioon 81). Lõpuks konstrueerime viimase keraga homoteetse kera, teades sarnasuskeskpunkti S ja punktiga A' homoteetset punkti A .

Sirge SA võib kas lõikuda keraga O' kahes punktis (milledest ükskõik kumma võib võtta punktiks A') või puutuda teda mingis punktis või mitte omada temaga ühiseid punkte. Järelikult vaadeldaval ülesandel võib olla (erinevalt vastavast ülesandest tasapinnal) kaks lahendit või üks lahend või mitte ühtki lahendit.

Ülesandel on ilmselt kaks lahendit, kui punkt A asetseb seespool kera O' ümber kujundatud koonust, mille tipuks on S , üks lahend, kui punkt A asetseb sellel koonusel, ja mitte ühtki lahendit, kui punkt A asetseb väljaspool seda koonust.

Sama ülesande teise lahendusviisi anname allpool (§ 176).

Märgime, et konstruktsiooni 132 sõnastuses esinev nõue, et antud punkt ei asetseks ühelgi antud tasapinnal, on oluline.

Tõepoolest, üldiselt ei leidu ühtki kera, mis puutuks kolme antud tasapinda ja seejuures üht neist antud punktis. Kera konstrueerimiseks on küllalt, kui anda mitte kolm, vaid kaks puutuvat tasapinda ja puutepunkt ühel neist.

See nähtub järgmise ülesande lahendusest.

Konstruktsioon 133. Konstrueerida kera, mis puutub kaht antud tasapinda ja seejuures üht neist antud punktis.

Olgu vaja konstrueerida kera, mis puutub tasapindu α ja β ja seejuures esimest neist punktis A .

On küllalt, kui vaadelda lõikuvate tasapindade juhtu; paralleelsete tasapindade juhul on lahendus ilmne.

Otsitava kera keskpunktiks on punkt, kus lõikuvad tasapinnale α punktist A püstitatud ristsirge ning üks tasapindade α ja β poolt moodustatud kahtahuliste nurkade bisektortasapind.

Ülesandel on kaks lahendit (muidugi kui punkt A ei asetse tasapindade α ja β lõikejoonel).

Märkus. Konstruktsioonide 132 ja 133 vaatlemisel tekib järgmine küsimus. Mispärast kera on määratud kolme antud puutuva tasapinnaga ja tema antud punktiga juhul, kui antud punkt ei asetse ühelgi antud tasapinnal, aga kahe antud puutuva tasapinnaga ja neist ühe puutepunktiga juhul, kui antud punkt asetseb antud tasapinnal?

Sama küsimuse võib teisiti sõnastada nii: mispärast kolme antud tasapinda puutuva ja antud punkti läbiva kera konstrueerimise ülesandel üldiselt leiduvad lahendid juhul, kui antud punkt ei asetse ühelgi antud tasapinnal, ja üldiselt ei leidu lahendit juhul, kui antud punkt asetseb ühel antud tasapinnal?

nurgast mingi ühe nurga sees asetseva abikeraga vaatlemine ilmselt ei vii eesmärgile. Formaalselt on see seletatav sellega, et siis üks tasapindadest α , β ja γ on kerade ühiseks väliseks puutuvaks tasapinnaks, teised aga seesmisteks, ja punkt S ei ole nende kahe kera ei väliseks ega seesmiseks sarnasuskeskpunktiks.

¹ Nõue, et punkt O' asetseks kolmetahulise nurga S_a sees, ei ole oluline; vt. eelmist viidet.

Seda liiki küsimuste täielik lahendus ulatub välja elementaargeomeetria raamidest.¹ Antud ülesande juhul esinevaid olukordi saab selgitada järgmise arutlusega.

Rakendame konstruktsiooni 132 teostamiseks ülalpool antud viisi sel juhul, kui punkt A asetseb tasapinnal α . Puutugu abikera O' tasapinda α mingis punktis T' . Sirge SA läbib seda punkti ainult erandjuhul, punkti A asukoha spetsiaalsel valikul: punkt A peab asetsema sirgel ST' . Ainult sel juhul leidub ülesandel lahend.

Järgmise kahe ülesande lahendust saab kergesti taandada konstruktsioonile 132 (võrrelda I, konstruktsioon 37).

Konstruktsioon 134. Konstrueerida kera, mis puutub kaht antud tasapinda ja läbib kaht antud punkti, mis ei asetse antud tasapindadel.

Esimene viis. Olgu vaja konstrueerida kera, mis puutub antud tasapindu α ja β ning läbib antud tasapindadel mitte asetsevaid punkte A ja B .

Et otsitav kera läbib punkte A ja B , siis tema keskpunkt asetseb tasapinnal σ , mis on risti lõiguga AB ja läbib selle keskpunkti. Et otsitav kera puutub tasapinda α , siis ta puutub ka tasapinnaga α tasapinna σ suhtes sümmeetrilist tasapinda α' . Nii jõuame välja konstruktsioonile 132: konstrueerida kera, mis puutub kolme tasapinda α , β ja α' ning läbib üht antud punkti, ütleme punkti A . Kuid sellele lisandub siin täiendav tingimus: otsitava kera keskpunkt peab asetsema tasapindade α ja α' poolt moodustatud kahetahuliste nurkade täiesti määratud bisektortasapinnal σ .

Ülesandel võib olla kaks lahendit või üks lahend või mitte ühtki lahendit. Ülesandel võib leiduda ka lõpmatu hulk lahendeid: see esineb siis, kui tasapinnad α ja β on sümmeetrilised tasapinna suhtes, mis ristub lõiguga AB ja läbib selle keskpunkti (tasapind α' ühtib tasapinnaga β).

Sama ülesande teine lahendusviis tuleb vaatluse alla allpool (§ 176).

Konstruktsioon 135. Konstrueerida kera, mis puutub antud tasapinda ja läbib kolme antud punkti, mis ei asetse sellel tasapinnal.

Olgu vaja konstrueerida kera, mis puutub tasapinda α ja läbib sellel tasapinnal mitte asetsevaid punkte A , B ja C .

Et otsitav kera läbib punkte A , B ja C , siis tema keskpunkt asetseb tasapinnal σ_1 , mis on risti lõiguga AB ja läbib selle keskpunkti, ning ka analoogilisel tasapinnal σ_2 , mis on risti lõiguga AC ja läbib selle keskpunkti. Et otsitav kera puutub tasapinda α , siis ta puutub ka tasapinnaga α tasapindade σ_1 ja σ_2 suhtes sümmeetrilisi tasapindu α_1 ja α_2 .

Nii jõuame välja konstruktsioonile 132: konstrueerida kera, mis puutub kolme antud tasapinda α , α_1 ja α_2 ning läbib üht antud punkti, ütleme punkti A . Kuid sellele lisandub ka siin täiendav tingimus: otsitava kera keskpunkt peab asetsema tasapindade α ja vastavalt α_1 või α_2 poolt moodustatud kahetahuliste nurkade täiesti määratud bisektortasapindadel σ_1 ja σ_2 .

Ülesandel võib olla kaks lahendit või üks lahend või mitte ühtki lahendit.

Konstruktsioonide 134 ja 135 puhul võiks teha vastavate muudatustega samad märkused, mis konstruktsiooni 132 puhul.

Kui üks antud punktidest asetseb ühel antud tasapinnal, siis ei ole vaja konstruktsioonis 134 anda teist tasapinda ja konstruktsioonis 135 on küllalt, kui kolme punkti asemel anda kaks.

¹ Lahenduse võib saada analüütilise geomeetria meetoditega.

See nähtub järgmise ülesande lahendusest.

Konstruktsioon 136. Konstrueerida kera, mis puutub antud tasapinda tema antud punktis ja läbib teist antud punkti.

Olgu vaja konstrueerida kera, mis puutub tasapinda α punktis A ja läbib punkti B .

Otsitava kera keskpunktiks on ilmselt punkt, kus tasapinnale α punktis A püstitatud ristsirge lõikub tasapinnaga, mis on risti lõiguga AB ja läbib selle keskpunkti.

Ülesandel on üks lahend (muidugi kui punkt B ei asetse tasapinnal α).

Lõpuks juhime tähelepanu veel järgmisele homoteetsuse abil lahenduvale ülesandele.

Konstruktsioon 137. Konstrueerida kera, mis puutub kolme antud tasapinda ja antud kera.

Oletame, et antud tasapinnad lõikuvad ühes punktis. Jätame lugeja hooleks laiendada sellele juhule tasapinnageomeetria vastava ülesande «esimese» ja «teise» lahendusviisi, mida vaatleme raamatu esimeses osas (I, § 66, konstruktsioon 38). Selle ülesande «kolmanda lahendusviisi» (I, § 94) üldistamist ruumi juhule vt. allpool, § 177.

Jätame lugeja hooleks vaadelda ka teisi antud tasapindade vastastikuse asendi juhte.

§ 160. Ortotsentrilise tetraeedri omadusi.

Homoteetsete kujundite omaduste ja eriti kahe kera sarnasuskeskpunktide kasutamise näitena vaatleme siin tasapinna üheksa-punkti ringjoone (I, teoreemid 72 ja 143) mõiste üldistamist ortotsentrilise tetraeedri juhule (§ 121).

Eelnevalt vaatleme järgmist teoreemi.

Teoreem 348. *Ortotsentrilise tetraeedri ümber kujundatud kera keskpunkt ja ortotsenter on sümmeetrilised tetraeedri raskuskeskme suhtes.*

Tõestus. Olgu $ABCD$ antud ortotsentriline tetraeeder, H tema ortotsenter (§ 121), G raskuskeske (§ 111) ja O ümberkujundatud kera keskpunkt (§ 127).

Tasapind, mis läbib tetraeedri serva AB ja tema ortotsentrit H (joonis 46), läbib tetraeedri tahkude ACD ja BCD kõrgusi AL ja BK , olles seega risti servaga CD (võrrelda teoreemi 230 tõestusega). Järelikult saab ortotsentrit H vaadelda punktina, kus lõikuvad kuus tasapinda $\alpha_1, \dots, \alpha_6$, milledest igaüks läbib üht tetraeedri kuuest servast ja on risti selle vastasservaga.

Analoogiliselt saab ümberkujundatud kera keskpunkti O vaadelda punktina (teoreem 244, järeldus 1), kus lõikuvad kuus tasapinda β_1, \dots, β_6 , milledest igaüks on risti tetraeedri ühe servaga ja läbib selle keskpunkti.

Tasapinnad α ja β on paariti sümmeetrilised tetraeedri raskuskeskme G suhtes. Tõepoolest, tasapind, mis läbib tetraeedri serva AB ja ristub servaga CD , on paralleelne tasapinnaga, mis ristub servaga CD ja läbib selle keskpunkti. Peale selle läbivad need kaks tasapinda servade AB ja CD keskpunkte, mis (teoreemi 211 põhjal) on sümmeetrilised punkti G suhtes. Et kaks vaadelda-

vat tasapinda on paralleelsed ja läbivad vastavalt punkti G suhtes sümmeetrilisi punkte, siis on nad punkti G suhtes sümmeetrilised (vrd. teoreem 277, järeldus 3).

Asjaolust, et tasapinnad α ja β on paariti sümmeetrilised punkti G suhtes, järeldub, et tasapindade α lõikepunkt H on punkti G suhtes sümmeetriline tasapindade β lõikepunktiga O .

Asume nüüd käesoleva paragrahvi põhiliste teoreemide juurde.

Teoreem 349. *Igal ortotsentrilisel tetraeedril on järgmised omadused:*

1) nelja tahu raskuskeskmed, nelja kõrguse aluspunktid ja ortotsentrit tippudega ühendava nelja lõigu punktid, mis jaotavad igaühe neist lõikudest suhtes $1:2$ arvates ortotsentrist, asetsevad ühel ja samal keral O_1 ;

2) ümberkujundatud kera keskpunkt O , raskuskesse G , kera O_1 keskpunkt ja ortotsenter H asetsevad ühel ja samal sirgel selles järjekorras, nagu nad on siin loetletud, ja nendevahelised kaugused suhtuvad nagu

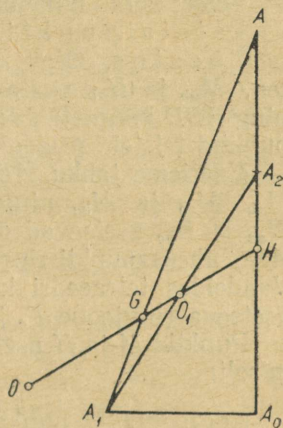
$$OG : GO_1 : O_1H = 3 : 1 : 2;$$

3) kera O_1 raadius võrdub ühe kolmandikuga ümberkujundatud kera raadiusest.

Kera O_1 , mille olemasolu fikseerib see teoreem, nimetatakse ortotsentrilise tetraeedri esimeseks kaksteistpunkti keraks. Sirget, millel asetsevad punktid O , G , O_1 ja H , võiks nimetada ortotsentrilise tetraeedri Euleri sirgeks.

Tõestus. Olgu $ABCD$ antud tetraeeder. Tähistame tema kõrguste aluspunktid tähtedega A_0 , B_0 , C_0 ja D_0 , tahkude raskuskeskmed tähtedega A_1 , B_1 , C_1 ja D_1 ning punktid, mis jaotavad lõike HA , HB , HC ja HD suhtes $1:2$ arvates punkti H , tähtedega A_2 , B_2 , C_2 ja D_2 .

Et lõigud AA_1 , BB_1 , CC_1 ja DD_1 läbivad punkti G ja jaotuvad selles punktis suhtes $3:1$ arvates tetraeedri tippude poolt (teoreem 211), siis on tetraeeder $A_1B_1C_1D_1$ punkti G suhtes vastupidi homoteetne tetraeedriga $ABCD$; vastav sarnasustegur $\overline{GA_1} : \overline{GA} = \dots$ on $-\frac{1}{3}$. Järelikult tetraeedri $A_1B_1C_1D_1$ ümber kujundatud kera keskpunkt O_1 asetseb sirgel OG ja rahuldab tingimust $\overline{GO_1} : \overline{GO} = -\frac{1}{3}$ (joonis 117), nii et kera O_1 raadius O_1A_1 on võrdne ühe kolmandikuga tetraeedri $ABCD$ ümber kujundatud kera raadiusest. Punkt G on kerade O ja O_1 seesmiseks sarnasuskeskpunktiks. Sellest ja teoreemist 348 järeldubki, et punktid O , G , O_1 ja H asetsevad teoreemi sõnastuses näidatud viisil.



Joonis 117.

Edasi on ilmne, et $HO_1 : HO = 1 : 3$. Et kera O_1 raadius on üks kolmandik kera O raadiusest, siis viimane võrre näitab, et punkt H on kerade O_1 ja O väline sarnasuskeskpunkt. Järelikult lõikab kera O_1 lõiku HA (A on kera O punkt) punktis A_2 , mis rahuldab tingimust $HA_2 : HA = 1 : 3$, s. t. $HA_2 : A_2A = 1 : 2$; analoogiline omadus on ka lõikudel HB , HC ja HD .

Lõpuks, kera O_1 punkt A_1 on homoteetne kera O punktiga A kerade O_1 ja O seesmise sarnasuskeskpunkti G suhtes ja kera O_1 punkt A_2 on homoteetne sama punktiga A kerade O_1 ja O välise sarnasuskeskpunkti H suhtes. Järelikult on punktid A_1 ja A_2 kera O_1 diametraalsed punktid. Et nurk $A_1A_0A_2$ on täisnurk, siis siit järeldub, et kera O_1 läbib ka punkti A_0 . Analoogiliselt saab tõestada, et kera O_1 läbib punkte B_0 , C_0 ja D_0 .

Teoreem on täielikult tõestatud.

Selleks, et lugeja õigesti mõistaks järgmise teoreemi sõnastust, teeme enne järgmise märkuse. Ortotsentrilise tetraeedri tahkude ACD ja BCD (joonis 46) kõrgused AL ja BK lõikavad serva CD ühes ja samas punktis H_{ca} (aga mitte kahes eri punktis nagu meelevaldsel tetraeedril, kus serv AB ei ole risti servaga CD). Niisiis leidub ortotsentrilise tetraeedri igal serval ainult üks punkt, mis on selle serva juures oleva kahe tahu kõrguste ühiseks aluspunktiks.

Teoreem 350. *Ortotsentrilise tetraeedri servade kuus keskpunkti ja tahkude kõrguste kuus aluspunkti asetsevad ühel ja samal keral, mille keskpunktiks on tetraeedri raskuskese.*

Seda kera nimetatakse ortotsentrilise tetraeedri teiseks kaksteistpunkti keraks.

Tõestus. Olgu $ABCD$ antud tetraeeder. Tähistame sümbolitega M_{ab} ja H_{ab} vastavalt serva AB keskpunkti ja tahkude ABC ning ABD kõrguste CH_{ab} ning DH_{ab} ühist aluspunkti. Analoogilised punktid teistel servadel tähistame sümbolitega M_{ac} , H_{ac} , ...

Vaatleme tahku ABC . Lõikude AB , AC ja BC keskpunktid M_{ab} , M_{ac} ja M_{bc} ning kolmnurga ABC kõrguste aluspunktid H_{ab} , H_{ac} ja H_{bc} asetsevad ühel ja samal ringjoonel, nimelt kolmnurga ABC üheksapunkti ringjoonel; tähistame selle ringjoone tähega Γ_a . Vaadeldes tetraeedri kolme ülejäänud tahku, saame tahul ABD asetseva ringjoone Γ_c ja veel kaks analoogilist ringjoont Γ_a ja Γ_b .

Punktid M ja H asetsevad ringjoontel Γ_a , Γ_b , Γ_c ja Γ_d järgmiselt:

- ringjoon Γ_a : punktid M_{bc} , H_{bc} , M_{bd} , H_{bd} , M_{cd} , H_{cd} ;
- ringjoon Γ_b : punktid M_{ac} , H_{ac} , M_{ad} , H_{ad} , M_{cd} , H_{cd} ;
- ringjoon Γ_c : punktid M_{ab} , H_{ab} , M_{ad} , H_{ad} , M_{bd} , H_{bd} ;
- ringjoon Γ_d : punktid M_{ab} , H_{ab} , M_{ac} , H_{ac} , M_{bc} , H_{bc} .

Ringjoontel Γ_a ja Γ_b leidub nende definitsiooni järgi kaks ühist punkti M_{ca} ja H_{ca} . Järelikult asetsevad nad ühel ja samal keral (teoreem 244, järeldus 5). See kera läbib ringjoont Γ_c , sest tal on sellega neli ühist punkti M_{ad} , H_{ad} , M_{bd} ja H_{bd} . Analoogiliselt

põhjusel läbib sama kera ka ringjoont Γ_a . Niisiis, kõik kaksteist kõne all olevat punkti asetsevad ühel ja samal keral.

Kui üks punktidest M ühtib temale vastava punktiga H , siis eelmine arutlus kaotab kehtivuse ja vajab muutmist.

Oletame näiteks, et punktid M_{ca} ja H_{ca} ühtivad. Sel juhul kolmnurkade BCD ja ACD kõrgused AM_{ca} ja BM_{ca} poolitavad külje CD . Kolmnurgad BCD ja ACD on siis võrdhaarsed. Vastavad üheksapunkti ringjooned Γ_a ja Γ_b ilmselt puutuvad serva CD selle keskpunktis.

Niisiis, kui mingi serva keskpunkt M ühtib punktiga H , siis vastavad kaks ringjoont Γ puutuvad teineteist selle serva keskpunktis.

Kui see toimub serval CD , siis ringjooned Γ_a ja Γ_b ei lõiku kahes punktis, vaid puutuvad teineteist. Siiski asetsevad nad jälle ühel ja samal keral (teoreem 244, järeldus 6). Kui analoogiline olukord leiab aset tetraeedri teistel servadel, siis ringjoonel Γ_c või Γ_a saab olla keraga, mis läbib ringjooni Γ_a ja Γ_b , mitte neli ühist punkti, vaid kolm ühist punkti ja ühine puutuja ühes neist punktidest või isegi kaks ühist punkti ja ühised puutujad mõlemas neis punktides. On kerge näha, et ka neil juhtudel ringjoon Γ_c või Γ_a asetseb keral, mis läbib ringjooni Γ_a ja Γ_b .

Niisiis, kõikidel juhtudel asetsevad kaksteist punkti, millest kõneldakse teoreemi sõnastuses, ühel ja samal keral.

Jääb tõestada, et selle kera keskpunktiks on tetraeedri raskuskese G . Selles on kerge veenduda järgmiselt.

Ortsentrilise tetraeedri ümber kujundatud rööptahuka kõik tahud on rombid ja järelikult selle rööptahuka kõik servad on võrdsed (§ 122). Tähendab, lõigud $M_{ab}M_{ca}$, $M_{ac}M_{bz}$ ja $M_{az}M_{bc}$ on võrdsed (teoreem 211, järeldus). Seetõttu punkt G — viimase kolme lõigu ühine keskpunkt — on võrdsetel kaugustel kõigest kuuest punktist M .

Märkus. Esimese kaksteistpunkti kera mõiste on üldistatav mistahes tetraeedri juhule. See üldistus, mis ei kujune kaugeltki triviaalseks, sest meelevaldse tetraeedri kõrgustel ei leidu ühiseid punkte (§ 121), ulatub välja käesoleva raamatu raamidest.

Mainime sel puhul veel, et XIX sajandil moodustasid tetraeedriga teatud viisil seotud «tähtsamate» punktide, sirgete, kerade jne. omadused geomeetria suure osa, mis on tuntud tetraeedri geomeetria nime all.

§ 161. Kahe kujundi sarnasuse üldjuhtum.

Ruumigeomeetrias nagu tasapinnageomeetriaski nimetatakse kujundit F' sarnaseks kujundiga F , kui nende kujundite punktide vahel saab korraldada üksühese vastavuse nii, et kujundi F' iga kaht punkti ühendava lõigu suhe kujundi F vastavaid punkte ühendavasse lõiku on nende kujundite kõikide punktide puhul ühe ja sama väärtusega.¹

Niisiis, vastavate punktide A, B, C, \dots ja A', B', C', \dots puhul on $k = A'B' : AB = A'C' : AC = B'C' : BC = \dots = \text{konst.}$

Seda jäävat suhet k nimetatakse kujundi F' sarnasuste-

¹ Vt. paragrahvis 162 (lk. 200) tehtud märkust sarnasuse definitsiooni kohta.

guriks kujundi F suhtes. Vastavust nende kahe kujundi punktide vahel ehk, teiste sõnadega, teisendust, millega esimese kujundi F punktidest saadakse teise kujundi F' punktid, nimetatakse sarnasuseks (ehk sarnasusteisenduseks).

Sellest definitsioonist tuleneb rida sarnasuse omadusi.

1°. Sarnasusel on refleksiivsuse, sümmeetrilisuse ja transitivisuse omadus.

2°. Kujundi F punktidele, mis asetsevad ühel sirgel, vastavad temaga sarnases kujundis F' punktid, mis samuti asetsevad ühel sirgel; mingi lõigu punktidele vastavad samuti mingi lõigu punktid.

Sarnaste tasapinnaliste kujundite vastava omaduse tõestus (I, § 68, 2°) jääb täiesti jõusse ka ruumi korral.

Siit järeldub, et kiirega, nurgaga, kolmnurgaga jne. sarnane kujund on samuti kiir, nurk, kolmnurk jne.

3°. Kahe sarnase kujundi vastavad tasanurgad on võrdsed.

Tõestatakse samuti nagu tasapinnal (I, § 68, 3°).

4°. Kui kujundis F punktid C ja D asetsevad ühel tasapinnal punktidega A ja B ning sirgest AB eri pooltel (ühel pool) ja punktidele A , B , C ja D vastavad kujundis F' punktid A' , B' , C' ja D' , siis ka punktid C' ja D' asetsevad ühel tasapinnal punktidega A' ja B' ning sirgest $A'B'$ eri pooltel (vastavalt ühel pool). Kui kujundi F mingid neli punkti ei asetse ühel ja samal tasapinnal, siis ei asetse ühel ja samal tasapinnal ka neile vastavad kujundi F' punktid.

Seda saab tõestada täpselt samuti nagu võrdsete kujundite vastavat omadust (§ 133, 4°).

Sellest omadusest järeldub, et tasapinnale vastab tasapind, pooltasapinnale pooltasapind jne. (vrd. § 133, 4°).

5°. Sarnaste kujundite vastavad kolmetahulised nurgad ja järelikult ka vastavad kahetahulised nurgad on võrdsed (vt. § 133, 5°).

Võrdsed kujundid, samuti ka homoteetsed kujundid on sarnaste kujundite erijuhtudeks.

Teisiti öeldes, liikumine ja homoteetsus on sarnasuse erijuhud.

Järgmine teoreem annab üldise võtte antud kujundiga sarnaste kujundite saamiseks.

Teoreem 351. Iga kujund F' , mis on sarnane kujundiga F , võrdub ühe kujundiga F_0 , mis on päripidi homoteetne kujundiga F ; ümberpöördult; iga kujund F' , mis võrdub mingi kujundiga, mis on (päripidi või vastupidi) homoteetne kujundiga F , on sarnane kujundiga F .

Teiste sõnadega, iga sarnasus on päripidise homoteetsuse ja liikumise korrutis; ümberpöördult, iga (päripidise või vastupidise) homoteetsuse ja liikumise korrutis on sarnasus.

Tasapinnageomeetria vastava teoreemi tõestus (I, teoreem 144) jääb jõusse ka ruumi juhul.

Järeldused. 1. Ruumilise kujundiga F sarnane kujund F'

on täiesti määratud, kui on antud kujundi F neljale mitte ühel tasapinnal asetsevale punktile A, B, C ja D vastavad punktid A', B', C' ja D' . (Seejuures punktid A', B', C' ja D' tuleb valida nõnda, et tetraeeder $A'B'C'D'$ oleks sarnane tetraeedriga $ABCD$.)

Tõepoolest, neil eeldustel saab konstrueerida kujundi F_0 , millest kõneldi teoreemis 351. Kujundiga F_0 võrdne kujund F' on täiesti määratud punktide A', B', C' ja D' andmisega (teoreem 268, järeldus 1).

2. Kui F on ruumiline kujund, siis leidub kaks ja ainult kaks kujundiga F sarnast kujundit, milles kujundi F antud punktile A, B , ja C , mis ei asetse ühel sirgel, vastavad antud punktid A', B' ja C' (valitud nii, et kolmnurk $A'B'C'$ on sarnane kolmnurgaga ABC).

Tõepoolest, neil eeldustel saab jälle konstrueerida kujundiga F võrdse kujundi F_0 , millest kõneldi teoreemis 351. Seejuures on olemas kaks ja ainult kaks kujundiga F_0 võrdset kujundit F' , milles kujundi F_0 punktile A_0, B_0 ja C_0 vastavad antud punktid A', B' ja C' (teoreem 268, järeldus 3).

Sarnaste ruumikujundite sügavamaks omaduseks on järgmine.

Liikumisest erineval sarnasusel leidub üksainus kahekordne punkt.

Et selle lause tõestust on sobiv rajada esimest ja teist liiki sarnasuse mõistele, siis tõestame selle järgmises paragrahvis.

§ 162. Sarnasuse kaks liiki.

Käesolevas paragrahvis piirdume ainult ruumiliste kujunditega.

Nagu äsja nägime (teoreem 351), iga kujund F' , mis on sarnane antud kujundiga F , võrdub ühe kujundiga F_0 , mis on päripidi homoteetne kujundiga F . Seejuures võib esineda, nagu tasapinnalgi (I, § 69), kaks juhtu: kujund F' võib olla kujundiga F_0 kas pärisvõrdne või peegeldusvõrdne.

Esimesel juhul kujundi F iga orienteeritud tetraeeder \overline{ABCD} on sama orientatsiooniga kui temale vastav kujundi F_0 tetraeeder $\overline{A_0B_0C_0D_0}$ (§ 155, omadus 12°); samal ajal ka tetraeedrid $\overline{A_0B_0C_0D_0}$ ja $\overline{A'B'C'D'}$ on sama orientatsiooniga, sest kujundid F_0 ja F' on pärisvõrdsed. Järelikult on sel juhul sarnaste kujundite iga kaks vastavat tetraeedrit ühte viisi orienteeritud ja kaks vastavat kolmetahulist nurka samasuunalised.

Analoogiliselt saab näidata, et teisel juhul (kui kujundid F_0 ja F' on peegeldusvõrdsed) on iga kaks vastavat tetraeedrit vastupidiselt orienteeritud ja iga kaks vastavat kolmetahulist nurka vastandsuunalised.

Seega kehtib järgmine lause (võrrelda teoreemiga 271 ja I, teoreemiga 145).

Teoreem 352. *On olemas kaks sarnaste ruumikujundite liiki ja vastavalt sellele kaks sarnasuse liiki. Ühel juhul on sarnaste kujundite iga kaks vastavat tetraeedrit ühteviisi orienteeritud ja iga kaks vastavat kolmetahulist nurka on samasuunalised; teisel juhul on vastavad tetraeedrid vastupidiselt orienteeritud ja vastavad kolmetahulised nurgad vastandsuunalised.*

Nimetame kaht sarnast ruumikujundit esimesel juhul päris-sarnasteks, teisel juhul peegeldussarnasteks. Vastavalt eristame esimest liiki ja teist liiki sarnasust.

On ilmne, et kaks kujundit, mis on päris-sarnased kolmandaga, ja samuti kaks kujundit, mis on peegeldussarnased kolmandaga, on teineteisega päris-sarnased; kaks kujundit, millest üks on kolmandaga päris-sarnane, teine aga temaga peegeldussarnane, on teineteisega peegeldussarnased.

Antud kujundiga F päris-sarnane kujund F' on täiesti määratud, kui on antud kolm punkti A' , B' ja C' , mis vastavad kujundi F kolmele mitte ühel sirgel antud punktile A , B ja C ; sama omadus kehtib peegeldussarnaste kujundite kohta. (Seejuures tuleb punktid A' , B' ja C' valida nii, et kolmnurk $A'B'C'$ oleks sarnane kolmnurgaga ABC .)

Tõepoolest, punktide A' , B' ja C' andmisega on määratud kaks antud kujundiga sarnast kujundit (teoreem 351, järeldus 2); need kaks kujundit on sümmeetrilised tasapinna $A'B'C'$ suhtes. Järelikult on üks neist antud kujundiga päris-sarnane, teine aga peegeldussarnane.

Märkus. Omal ajal märkisime (§ 129, märkus), et «võrdsete» ruumikujundite all mõistetakse sageli neid kujundeid, mida meie nimetasime päris-võrdseteks kujundeiks.

Järjekindluse mõttes tuleb siis ka «sarnasteks» kujunditeks nimetada ainult neid kujundeid, mida meie nimetame päris-sarnasteks.¹

Kujundit, mis meie terminoloogia järgi on peegeldussarnane kujundiga F , iseloomustatakse siis kui kujundit, mis «on sarnane kujundiga, mis on sümmeetriline kujundiga F ».

Tuleme nüüd tagasi eelmise paragrahvi lõpul sõnastatud, kuid mitte tõestatud sarnasuse omaduse vaatlemisele.

Teoreem 353. *Liikumisest erineval sarnasusel leidub üksainus kahekordne punkt.*

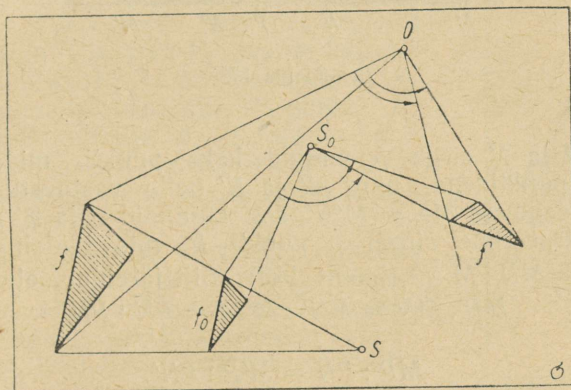
Tõestus. Olgu kujund F' sarnane kujundiga F . Ehitame kujundi F_0 nii, et ta oleks meelevaalse punkti S suhtes homoteetne kujundiga F ja samal ajal võrdne kujundiga F' (võrrelda teoreemiga 351). Seejuures võtame kujundi F_0 päripidi homoteetseks kujundiga F , kui kujund F' on päris-sarnane kujundiga F , ja vastupidi homoteetseks kujundiga F , kui kujund F' on peegeldussarnane kujundiga F . Nii on kujund F' alati päris-võrdne kujundiga F_0 ja on seetõttu kujundist F_0 saadav mingi esimest liiki liikumisega.

¹ Vt. näiteks Hadamard [1], 2. osa, lk. 124.

Kui selleks liikumiseks on lüke, siis kujundid F ja F' täidavad teoreemi 339 eeldust, sest üks neist saadakse teisest homoteetsuse ja lükke korrutise abil. Järelikult on kujundid F ja F' teineteisega homoteetsed. Vastav sarnasus on homoteetsus ja järelikult omab kahekordset punkti, milleks on homoteetsuse keskpunkt.

Jääb üle vaadelda juhtu, kui kujund F' saadakse kujundist F_0 vintnihke või, erijuhul, pöörde abil. Märgive selle vintnihke või pöörde telje tähega s . Paneme veel läbi punkti S tasapinna σ risti teljega s .

Tähistame kujundite F , F_0 ja F' projektsioone tasapinnal σ vastavalt tähtedega f , f_0 ja f' (joonis 118).



Joonis 118.

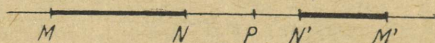
Kujundid F ja F_0 on homoteetsed tasapinnal σ asetseva punkti S suhtes. Sellest on kerge järeldada, et ka nende projektsioonid f ja f_0 tasapinnal σ on homoteetsed sama punkti suhtes. Edasi, kujund F' saadakse kujundist F_0 vintnihkega, mille telg s on risti tasapinnaga σ (või erijuhul pöördega, mille teljeks on sama s). See vintnihe on (teoreem 287) korrutis pöördest, mille telg on s , ja selle telje sihilisest lükkest (erijuhul see lüke võib muutuda samasuseks). Seetõttu saab tasapinnal σ kujundi F' projektsiooni f' kujundi F_0 projektsioonist f_0 pöörde abil ümber punkti S_0 , milles lõikuvad telg s ja tasapind σ .

Niisiis, tasapinnal σ saadakse kujund f_0 kujundist f homoteetsuse abil ja kujund f' kujundist f_0 pöörde abil. Järelikult on tasapinnal σ kujund f' pärisarnane kujundiga f . Tähistame tasapinnal σ asetsevate kujundite f ja f' kahekordse punkti tähega O (I, teoreem 146, järeldus 1) ja seda punkti läbiva, tasapinnaga σ ristuva sirge, mis on paralleelne sirgega s , tähega p .

On kerge veenduda, et sirgele p , kui see lugeda kujundile F kuuluvaks, vastab kujundis F' seesama sirge p , nii et p on kujundite F ja F' kahekordne sirge (paragrahv 136 näidatud mõttes).

Tõepoolest, kujundit F kujundiks F' teisendav sarnasus esineb kolme teisenduse korrutisena, milledeks on homoteetsus punkti S suhtes, teatav pööre ümber sirge s ja teatav lüke piki sirget s . Esimese kahe teisenduse korrutis teisendab kujundi f kujundiks f' ja järelikult punkti O (tema definitsiooni põhjal) selleksamaks punktiks, seega ka sirge p selleksamaks sirgeks. Lüke sirgega p paralleelse sirge s sihis teisendab sirge p ilmselt selleksamaks sirgeks.

Niisiis on tõestatud, et kujunditel F ja F' leidub kahekordne sirge p . Ei ole raske tõestada, et sellel sirgel leidub tingimata ka kujundite F ja F' kahekordne punkt.



Joonis 119.

Olgu M ja N sirge p mingid kaks punkti, mida vaatleme kujundi F punktidenä, ning M' ja N' neile vastavad kujundi F' punktid. Seejuures $MN \neq M'N'$, sest kujundid F ja F' ei ole võrdsed. Konstrueerime sirgel p punkti P , mis täidab tingimust¹

$\overline{MP} : \overline{M'P} = \overline{MN} : \overline{M'N'}$ (joonis 119). Siit järeldub, et

$$\overline{MP} : \overline{MN} = \overline{M'P} : \overline{M'N'} = \overline{PN} : \overline{PN'}$$

ehk

$$\overline{MP} : \overline{PN} = \overline{M'P} : \overline{PN'}$$

Viimane võrdus näitab, et kujundi F punktile P , mis jaotab lõigu MN suhtes $\overline{MP} : \overline{PN}$, vastab kujundis F' seesama punkt P , mis jaotab ka lõigu $M'N'$ sellesamas suhtes. Niisiis, kujunditel F ja F' leidub kahekordne punkt P .

Kui neil kujunditel leiduks veel teine kahekordne punkt Q , siis kujundi F' sarnasustegur kujundi F suhtes oleks $PQ : PQ = 1$, mis oleks vastuolus eeldusega, mille järgi kujundid F ja F' ei ole võrdsed. Järelikult on olemas ainult üks kahekordne punkt P .

Sarnaste kujundite viimatitõestatud omadus võimaldab luua konkreetsema kujutluse kahe sarnase ruumikujundi vastastikusest asendist. Selle eesmärgiga vaatleme järgmist teoreemi (võrrelda I, teoreem 146).

Teoreem 354. *Liikumisest erinev esimest või teist liiki sarnasus on korrutis vastavalt päripidisest või vastupidisest homoteetsusest teatava punkti suhtes ja pöördest ümber teatava telje, mis läbib seda punkti.*

Tõestus. Olgu P sarnaste kujundite F ja F' kahekordne punkt, mille olemasolu on kindlaks tehtud teoreemiga 353.

Ehitame samuti nagu teoreemi 353 tõestamisel kujundi F_0 nii, et ta oleks päripidi või vastupidi homoteetne kujundiga F ja samal

¹ Sümbolid \overline{MN} , \overline{MP} , ... tähistavad suunaga lõike.

ajal pärisvõrdne kujundiga F' , võttes seekord homoteetsuskeskpunktiks mitte meelevaldse ruumpunkti, vaid kujundite F ja F' kahekordse punkti P . On ilmne, et punkt P on kahekordseks punktiks ka kujunditel F_0 ja F' .

Et kujundid F_0 ja F' on pärisvõrdsed ja omavad kahekordset punkti P , siis kujundi F' saab kujundist F_0 (teoreemi 283 järgi) pöörde abil ümber teatava telje p , mis läbib punkti P . Teoreem on tõestatud.

Järeldused. 1. *Homoteetsus keskpunktiga P ja pööre ümber sama punkti läbiva telje s on vahetatavad.*

Selles on kerge veenduda, kui vaadelda joonist 120. Tõepoolest, teostades esmalt homoteetsuse ja siis pöörde, saame kujundi F mingist punktist A esmalt kujundi F_0 punkti A_0 ja sellest kujundi F' punkti A' , mis on vastav punktile A . Teostades aga esmalt pöörde ja siis homoteetsuse, saame punktist A esmalt teatava punkti A^* ja sellest sama punkti A' .

2. *Liikumisest erinev teist liiki sarnasus on päripidise homoteetsuse korrutis pöördepeegeldusega, mille keskpunkt ühtib homoteetsuskeskpunktiga* (võrrelda I, teoreem 147).

Tõepoolest, teist liiki sarnasus on vastupidise homoteetsuse ja pöörde korrutis. Vastupidine homoteetsus on omakorda päripidise homoteetsuse korrutis peegeldusega punktist (§ 155, lõppmärkus), viimase korrutis pöördega aga on pöördepeegeldus (teoreem 278, järeldus 4).

3. *Liikumisest ja homoteetsusest erineval sarnasusel leidub üksainus kahekordne sirge ja üksainus kahekordne tasapind.*

Selleks kahekordseks sirgeks on pöördetelg p ja kahekordseks tasapinnaks on tasapind, mis läbib punkti P ja ristub sirgega p .

Lõpuks vaatleme veel järgmist ülesannet.

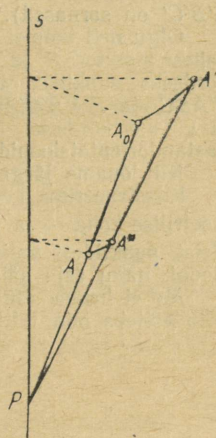
Konstruksioon 138. Konstrueerida kahe antud sarnase kujundi kahekordne punkt.

Esimene viis selle ülesande lahendamiseks tuleneb otseselt teoreemi 353 tõestuskäigust. Konstrueerinud kujundi F_0 , millest kõneldakse selles tõestuses, saab siis üksteise järel konstrueerida kujundite F_0 ja F' vintnihe telje s (konstruktsioon 103), tasapinna σ , punkti O (I, konstruktsioon 39), sirge p ja lõpuks punkti P .

Saab aga siiski anda ka lühema lahenduse.

Teine viis. Olgu A, B ja C ühe antud kujundi F kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel, ja A', B' ja C' neile vastavad teise, kujundiga F päris-sarnase kujundi F' punktid¹ (või teise, kujundiga F peegeldussarnase kujundi F'' punktid).

¹ Punktid A', B' ja C' tuleb valida nii, et kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$ oleksid sarnased, muus osas aga vabalt (teoreem 351, järeldus 2).



Joonis 120.

Otsitav kujundite F ja F' (või F ja F'') kahekordne punkt P peab ilmselt täitma tingimusi $PA' : PA = PB' : PB = PC' : PC = k$, kus $k = A'B' : AB$ on kujundi F' (või F'') sarnasustegur kujundi F suhtes. Siit järeldub, et punkt P peab kuuluma keralale O_a , s. t. tingimust $MA' : MA = k$ täitvate punktide M geomeetrilisele kohale (geomeetriline koht XXV), ja analoogilistele keradele O_b ning O_c , mis on määratud tingimustega $MB' : MB = k$ ning $MC' : MC = k$.

Et kujundid F ja F' (samuti ka F ja F'') teoreemi 353. põhjal teatavasti omavad kahekordset punkti, siis äsjanäidatud viisil konstrueeritud kolmel keral O_a , O_b ja O_c leidub ühiseid punkte (muidugi kui kolmnurgad ABC ja $A'B'C'$ on sarnased).

Olgu neil kolmel keral kaks ühist punkti P' ja P'' (teoreem 239). Siis üks kahest punktist P' ja P'' — olgu see P' — peab olema kujundite F ja F' kahekordseks punktiks; teda iseloomustab see, et tema puhul on tetraeedrid $P'ABC$ ja $P'A'B'C'$ sama orientatsiooniga. Teine punkt P'' on kujundite F ja F'' kahekordseks punktiks; seejuures tetraeedrid $P''ABC$ ja $P''A'B'C'$ on vastandorientatsioonidega.

Nii jõuame järgmise konstruktsiooni juurde.

Konstrueerime kera O_a — tingimust $MA' : MA = k$ täitvate punktide geomeetrilise koha — ja kahe analoogilise kera O_b ja O_c ühised punktid P' ja P'' . Neist punktidest valime ühe, pidades silmas vastavate tetraeedrite orientatsiooni, nagu äsja näidati.

Me ei hakka siin peatuma esineda võivate erijuhtude juures (kolmel keral võib näiteks olla mitte kaks, vaid üks ühine punkt jne.).

Euleri teoreem. Korrapärased hulktahukad ja nende üldistused.

§ 163. Null-liiki hulktahukad.

Omal ajal defineerisime (§ 109) hulktahulise pinna, hulktahuka, lihtsa hulktahulise pinna ja lihtsa hulktahuka mõisted. Käesolevas paragrahvis mõistame hulktahulise pinna ja hulktahuka all lihtsat hulktahulist pinda ja lihtsat hulktahukat (kui pole öeldud vastupidist).

Nagu nägime, leidub (lihtsate) hulktahukate hulgas hulktahukaid, mis paistavad silma oma rōngataolise kujuga (näiteks joonisel 25 kujutatud hulktahukas). Võtame endale ülesandeks rangelt eristada niisuguseid «keerukaid» ja «ebaharilikke» hulktahukaid hulktahukatest selle sõna harilikus, meile tuntud tähenduses, nagu rōõptahukatest, tetraeedritest jne. Selle ülesande lahendusele viivad meid järgmised kaalutlused.

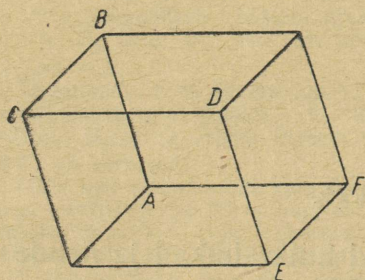
Nimetame hulktahuka lõikeks iga kinnise lihtsa murdjoone, mille iga külg kuulub hulktahuka servade hulka. Lõike näitena võib nimetada hulktahuka mingi ühe tahu kõikide külgede kogu. Keerukama näitena võib nimetada joonisel 121 kujutatud rōõptahuka kuue serva poolt moodustatud murdjoont *ABCDEF*A.

Lõige võib antud hulktahuka jaotada kaheks hulktahuliseks pinnaks, võib aga ka mitte jaotada. Nii jaotab ühe ja sama tahu kõikide külgede poolt moodustatud lõige hulktahuka kaheks pinnaks: üheks neist on antud tahk ja teine koosneb hulktahuka kõigist ülejäänud tahkudest. Joonisel 121 kujutatud lõige *ABCDEF*A jaotab rōõptahuka kaheks hulktahuliseks pinnaks, millest kumbki koosneb kolmest tahust. Hulktahukat kaheks hulktahuliseks pinnaks mitte jaotava lõike näitena võib tuua lõike *AA'A''* joonisel 25: see lõige muudab antud hulktahuka üheks hulktahuliseks pinnaks, mis on piiratud kahe (ühtiva) kontuuriga.

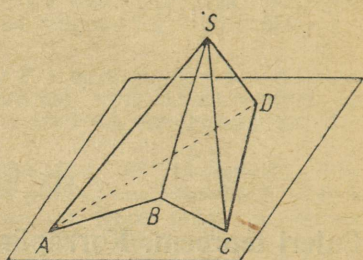
See asjaolu, et lõige võib jaotada või ka mitte jaotada hulktahuka kaheks hulktahuliseks pinnaks, õigustab järgmise definitiooni vastuvõtmist.

Mingit hulktahukat nimetatakse null-liiki hulktahukaks

(ehk «hulktahukaks liiki null»), kui iga lõige jaotab tema kaheks hulktahuliseks pinnaks, ja mitterull-liiki hulktahukaks, kui leidub lõige, mis ei jaota teda kaheks hulktahuliseks pinnaks.



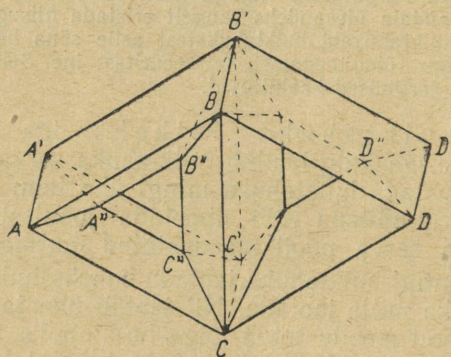
Joonis 121.



Joonis 122.

Näidetena null-liiki hulktahukate kohta võib esitada tetraeedri, rööptahuka, prisma ja püramiidi. Null-liiki mittekumera hulktahuka näitena võib tuua prisma või püramiidi, mille põhjaks on lihtne mittekumer hulknurk (joonis 122). Mitterull-liiki hulktahuka näiteks on ülalöeldu põhjal hulktahukas, mida kujutab joonis 25.

Saab tõestada, et iga kumer hulktahukas on null-liiki hulktahukas. Selle peaaegu ilmselt õige lause tõestamine ei ole aga kuigi lihtne ja me ei peatu sellel.



Joonis 123.

Märkus. Mitterull-liiki hulktahukad jaotatakse esimest liiki, teist liiki, ..., p -ndat liiki hulktahukateks (teistiti — hulktahukateks liiki üks, liiki kaks, ..., liiki p) järgmise definitsiooni alusel.

Hulktahukat nimetatakse p -ndat liiki hulktahukaks, kui leidub ükski p ühiste punktidega lõiget, mis ei jaota teda kaheks hulktahuliseks pinnaks, kuid iga $p + 1$ ühiste punktidega lõiget jaotavad tema kaheks hulktahuliseks pinnaks.

Joonisel 25 kujutatud hulktahukas kuulub esimest liiki hulktahukate hulka. Näite teist liiki hulktahukate kohta võib saada järgmiselt. Kõrvaldame jooni-

sel 25 kujutatud hulktahukalt tahu $BCC'B'$ ja ühendame järelejäänud hulktahulise pinnaga teise samasuguse hulktahulise pinna; saame joonisel 123 kujutatud hulktahuka, mis on piiratud kuueistkümnepöörlema nelinurkse tahuga. See hulktahukas on teist liiki hulktahukas; lõiked AAA'' ja $DD'D''$, millel ei ole ühiseid punkte, ei jaota teda kaheks hulktahuliseks pinnaks. Analoogiliselt saab konstrueerida näiteid ka kõrgemat liiki hulktahukatest.

Näitlikult, kuid mitterangelt võib öelda, et esimest liiki hulktahukal on rõngataoline kuju, teist liiki hulktahukas koosneb kahest omavahel ühendatud rõngast jne.; null-liiki hulktahukas ei oma rõngataolist kuju. Nende näitlike tõsiasjade täpse väljenduse saab anda järgmistele lausetega.

Iga null-liiki hulktahuka punktide ja sfääri punktide vahel saab korraldada «pideva» üksühese vastavuse; niisugune vastavus ei ole võimalik mittenuull-liiki hulktahuka korral.

Iga esimest liiki hulktahuka punktide ja rõngaspinna (s. o. pinna, mis moodustub ringjoone pöörlemisel tema tasapinnal asetseva ja teda mitte lõikava sirge ümber) punktide vahel saab korraldada «pideva» üksühese vastavuse.

Puudutatud küsimuste üksikasjaline uurimine, eriti siin toodud lausete tõestamine ulatub välja elementargeomeetria raamidest ja kuulub topoloogia valdkonda, mille üheks põhiliseks ülesandeks on kahe kujundi punktide vaheliste «pidevate» üksühese vastavuste uurimine («pideva» vastavuse mõiste täpne definitsioon antakse topoloogias) ¹.

§ 164. Ühelisidusad ja mitmelisidusad hulktahulised pinnad.

Asume hulktahukatest erinevate hulktahuliste pindade vaatlemisele. Kogu järgnevas käsitluses vaatleme ainult niisuguseid hulktahulisi pindu, mida piirab üksainus kontuur (lk. 33), ja nimetame neid lihtsalt hulktahulisteks pindadeks.

Hulktahulise pinna lõikeks nimetatakse iga lihtsat murdjoont, mille kõik küljed kuuluvad hulktahulise pinna servade hulka, mille otsad asetsevad selle pinna piirdel ja millel peale otste ei ole pinna kontuuriga muid ühiseid punkte.

Hulktahulise pinna lõige võib jaotada hulktahulise pinna kaheks pinnaks, võib aga ka mitte jaotada. Seetõttu võtame vastu järgmise definitsiooni.

Hulktahulist pinda nimetatakse ühelisidusaks, kui ei leidu niisugust selle pinna lõiget, mis ei jaota teda kaheks hulktahuliseks pinnaks, ja mitmelisidusaks, kui leidub kas või ükski niisugune lõige.²

Ühelisidusa hulktahulise pinna näiteks võib olla kumbki kahest

¹ Topoloogia algmõistete kohta vt. näiteks Aleksandrovi ja Jefremovitši raamatut [2] ja nende elementaarset brošüüri [3].

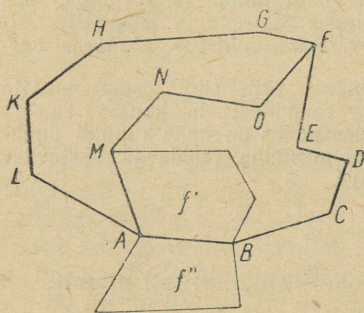
² Esimesel pilgul võib lihtsamana näida järgmine ühelisidusa pinna definitsioon.

Hulktahulist pinda nimetatakse ühelisidusaks, kui iga lõige jaotab tema kaheks hulktahuliseks pinnaks.

Kuid sellekujulise definitsiooni korral ühest hulknurgast koosnev hulktahuline pind ei oleks ei ühelisidus ega mitmelisidus. Ometi on loomulik ühe tahuga hulktahulist pinda lugeda ühelisidusaks (vt. näiteks teoreeme 356 ja 357).

pinnast, milleks kinnine murdjoon $ABCDEF$ (joonis 121) jaotab rööptahuka pinna. Mitmelisidusa pinna näite võib saada järgmisel viisil. Kõrvaldame joonisel 25 kujutatud hulktahukalt ühe tahu, näiteks tahu $BCC'B'$. Saame hulktahulise pinna, mis on piiratud ühe kontuuriga $BCC'B'B$. See pind on mitmelisidus. Tõepoolest, lõige $BB''B'$ ei jaota konstrueeritud pinda kaheks: ta muudab selle üheks pinnaks, mida piiravad kaks (osaliselt ühtivat) kontuuri $BB''B'B$ ja $BB''B'C'B$.

Ühelisidusa hulktahulise pinna mõiste on tihedalt seotud null-liiki hulktahuka mõistega, nagu nähtub järgmisest lausest.



Joonis 124.

Teoreem 355. *Kumbki kahest hulktahulisest pinnast, milleks meelevaldne lõige jaotab null-liiki hulktahuka, on ühelisidus.*

Tõestus. Jaotagu lõige $ABCDEF$ (joonis 124) antud hulktahuka P kaheks hulktahuliseks pinnaks P' ja P'' (joonisel mitte näidatud). Oletame, et üks neist pindadest, näiteks P' , on mitmelisidus. See tähendab, et hulktahulisel pinnal P' leidub lõige $AMNOF$, mis ei jaota teda kaheks pinnaks. Teiste sõnadega, pinna P' igalt tahult on võimalik pääseda

tema mistahes tahule, minnes järjest tahult selle tahu mingile naabertahule, ilma et seejuures ületataks lõiget $AMNOF$ ja muidugi lõiget $ABCDEF$. Nii on pinna P' igalt tahult võimalik pääseda ka sama pinna tahule f' , mille küljeks on hulktahuka serv AB . Samal ajal pääseb pinna P'' igalt tahult samal viisil pinna P'' tahule f'' , mille küljeks on sama AB , ilma lõikest $ABCDEF$ (ja muidugi lõikest $AMNOF$) üle minemata.

Vaatleme nüüd antud hulktahuka lõiget $FGHKLAMNOF$. Tehtud oletuse kohaselt pääseb pinna P' igalt tahult sama pinna igale tahule, ka tahule f' , ilma sellest lõikest üle minemata. Samal ajal pääseb pinna P'' igalt tahult sama pinna igale tahule, ka tahule f'' , ilma samast lõikest üle minemata. Et tahult f' pääseb tema naabertahule f'' samuti ilma vaadeldavast lõikest üle minemata, siis antud hulktahuka P igalt tahult pääseb tema mistahes teisele tahule ilma lõikest $FGHKLAMNOF$ üle minemata. See aga on vastuolus eeldusega, et antud hulktahukas P kuulub null-liiki.

Saadud vastuoluga on teoreem tõestatud.

Täiesti analoogiliselt saab tõestada ühelisidusa pinna järgmist omadust.

Teoreem 356. *Kumbki kahest hulktahulisest pinnast, milleks meelevaldne lõige jaotab ühelisidusa hulktahulise pinna, on samuti ühelisidus.*

Märkus. Üheliiduse hulktahulise pinna oluline omadus väljendub järgmises elementargeomeetria raamidest välja ulatuvas lauses: iga üheliiduse hulktahulise pinna punktide ja ringi punktide vahel saab korraldada «pideva» üksühese vastavuse (pinna kontuurile vastab seejuures ringjoon, pinna ülejäänud punktid aga vastavad ringi seesmised punktid); niisugune vastavus ei ole võimalik mitmeliiduse pinna puhul.

§ 165. Euleri teoreem.

Hulktahukate ja hulktahuliste pindade geomeetrilised omadused saab jaotada kahte rühma.

Ühte rühma kuuluvad omadused, mis on seotud servade pikkustega, tasaste ja kahetahuliste nurkade suurustega, tahkude pindaladega jms. Seda liiki omadusi nimetatakse meetrilisteks.

Selleks, et täpselt iseloomustada teise rühma omadusi, võtame vastu järgmise definitsiooni.

Kaht hulktahukat (kaht hulktahulist pinda) nimetatakse isomorfseteks, kui nende tahkude, servade ja tippude vahel saab korraldada üksühese vastavuse, milles

- 1) vastavad tahud on ühenimelised, s. o. omavad ühepalju tippe;
- 2) kahele ühise servaga tahule vastavad tahud, millel on samuti ühine serv; ühise tipuga tahkudele vastavad tahud, millel on samuti ühine tipp.

Kahe hulktahuka (kahe hulktahulise pinna) isomorfisuse mõistel on ilmselt refleksiivsuse, sümmeetrilisuse ja transitiivsuse omadus.

Kahe isomorfse hulktahuka (hulktahulise pinna) kohta öeldakse, et nad kuuluvad ühte ja samasse topoloogilisse tüüpi.

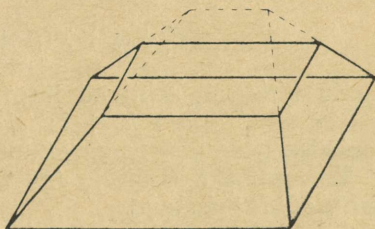
Kõikide üksteisega isomorfsete hulktahukate (hulktahuliste pindade) ühiseid omadusi nimetame nende topoloogilisteks omadusteks.

Üksteisega isomorfsete hulktahukate näitena nimetame kas või kõiki nelinurkseid prismasid ja nelinurkseid tüvipüramiide. Samasse topoloogilisse tüüpi kuulub ka joonisel 125 kujutatud, mõnikord obeliskiks nimetatav hulktahukas (erineb tüvipüramiidist sellega, et tema külgservade pikendused ei läbi üht ja sama punkti).

Topoloogiliste omaduste näidetena võib nimetada tippude arvu, servade arvu, tahkude arvu, kolmnurksete tahkude arvu, üheliidusust ja mitmeliidusust jne.

Hulktahuliste pindade ja hulktahukate tähtsamad topoloogilised omadused väljenduvad järgmises kahes lauses. Nende lausete sõnastuse lühendamiseks võtame vastu järgmise definitsiooni.

Olgu hulktahulise pinna või hulktahuka tippude arv e , tahkude



Joonis 125.

arv f ja servade arv k ; avaldist $e + f - k$ nimetatakse hulktahulise pinna või hulktahuka Euleri karakteristikuks.

Teoreem 357. Iga ühelisidusa hulktahulise pinna Euleri karakteristik võrdub ühega.

Teisiti öeldes: ühelisidusa hulktahulise pinna tippude arvu e , tahkude arvu f ja servade arvu k vahel valitseb sõltuvus

$$e + f - k = 1. \quad (1)$$

Tõestus. Teoreem on õige ühest tahust koosneva pinna puhul, sest sel juhul $e = k$ ja $f = 1$.

Oletame nüüd, et teoreem on õige kõikide ühelisidusate pindade puhul, millel tahkude arv on väiksem kui f . Kui saame tõestada, et sellel oletusel teoreem on õige ka f tahuga ühelisidusate pindade puhul, siis on teoreem täielikult tõestatud.

Olgu niisiis antud ühelisidus pind, millel on e tippu, f tahku ja k serva. Vaatleme selle pinna mingit lõiget ja tähistame tähega k_0 selle lõike lülide arvu ning tähtedega e' , f' , k' ja e'' , f'' , k'' vastavalt tippude, tahkude ja servade arvu neil kahel ühelisidusal pinnal, milleks antud lõige jaotab pinna.

Oletuse kohaselt

$$e' + f' - k' = 1; \quad e'' + f'' - k'' = 1,$$

millest

$$(e' + e'') + (f' + f'') - (k' + k'') = 2.$$

Kuid ilmselt kehtivad järgmised seosed:

$$e' + e'' = e + k_0 + 1; \quad f' + f'' = f; \quad k' + k'' = k + k_0.$$

Asetades need väärtused eelmisse võrdusse, saamegi seose (1).

Teoreem 358 (Euler). Iga null-liiki hulktahuka Euleri karakteristik võrdub kahega.

Teisiti öeldes: iga null-liiki hulktahuka tippude arvu e , tahkude arvu f ja servade arvu k vahel valitseb sõltuvus

$$e + f - k = 2. \quad (2)$$

See seos kehtib eriti iga kumera hulktahuka kohta.¹

Tõestus. Kui kõrvaldame antud hulktahuka ühe tahu, siis saame hulktahulise pinna, mis on (teoreemi 355 järgi) ühelisidus ja omab e tippu, $f - 1$ tahku ning k serva. Teoreemi 357 põhjal saame:

$$e + (f - 1) - k = 1 \quad \text{ehk} \quad e + f - k = 2.$$

Nii saimegi võrduse (2).

¹ Õige lihtsa, kuid ainult kumerate hulktahukate puhul kõlbava tõestuse Euleri teoreemile võib leida näiteks Glagolevi raamatust [9], 2. osa, lk. 68—69.

Märkus. Euleri teoreem on järgmisel viisil laiendatav hulktahukatele liiki $p > 0$:

p -ndat liiki hulktahuka Euleri karakteristik on $2-2p$, kus $p \geq 0$.

Teisiti öeldes: iga p -ndat liiki hulktahuka ($p \geq 0$) tippude arvu e , tahkude arvu f ja servade arvu k vahel valitseb sõltuvus

$$e + f - k = 2 - 2p. \quad (3)$$

Selle lause tõestusel me ei peatu.

Võrdust (3) saab kasutada hulktahuka liigi määramiseks tema tippude, servade ja tahkude arvu põhjal. Näiteks joonisel 25 kujutatud hulktahukal $e = 9$, $f = 9$ ja $k = 18$, seega $p = 1$. Analoogiliselt saame joonisel 123 kujutatud hulktahuka puhul, kus $e = 14$, $f = 16$ ja $k = 32$, et $p = 2$.

§ 166. Järeldused Euleri teoreemist.

Selles paragrahvis vaatleme null-liiki hulktahukate mõningaid topoloogilisi eriomadusi. Nende tuletamisel on aluseks võrdusega (2) väljendatav Euleri teoreem ja samuti iga (ka mittenull-liiki) hulktahuka järgmine omadus.

Teoreem 359. Iga hulktahuka tippude arv e , tahkude arv f ja servade arv k rahuldavad tingimusi

$$3e \leq 2k, \quad (4)$$

$$3f \leq 2k. \quad (5)$$

Tõestus. Leiame antud hulktahuka iga hulktahulise nurga servade arvu ja liidame kõik saadud arvud. Saadud summa on $2k$, sest hulktahuka iga serv on arvestatud täpselt kaks korda. Samal ajal ei ole saadud summa väiksem kui $3e$, sest hulktahuliste nurkade arv on e ja iga hulktahulisel nurgal on vähemalt kolm serva. Siit tulenebki seos (4).

Analoogiliselt saab tuletada seose (5): ainult nüüd tuleb vaadelda iga tahu külgede arvu ja liita kõik need arvud.

Null-liiki hulktahukate omadused, mida katvame vaadelda, formuleerime nüüd järgmiste lausete kujul.

Teoreem 360. Iga null-liiki hulktahuka tippude arv e , tahkude arv f ja servade arv k rahuldavad tingimusi

$$k + 6 \leq 3e \leq 2k, \quad (6)$$

$$k + 6 \leq 3f \leq 2k, \quad (7)$$

$$e + 4 \leq 2f \leq 4e - 8, \quad (8)$$

$$f + 4 \leq 2e \leq 4f - 8. \quad (9)$$

Tõestus. Võrdusest (2) saame $3e + 3f - 3k = 6$. Et seose (5) põhjal $3f \leq 2k$, siis järeldub siit, et $3e + 2k - 3k \geq 6$, s. t. $k + 6 \leq 3e$. Nii on saadud esimene seostest (6); teine seostest (6) on samane juba tõestatud seosega (4). Analoogiliselt saab tõestada seose (7).

Seosest (2) saame edasi, et $2e + 2f = 2k + 4$. Et seose (4) põhi-

ja $3e \leq 2k$, siis järeldub siit, et $2e + 2f \geq 3e + 4$, s. t. $e + 4 \leq 2f$ ehk $2e \leq 4f - 8$. Nii on saadud esimene seostest (8) ja teine seostest (9). Analoogiliselt saab teise seostest (8) ja esimese seostest (9).

Allpool kasutame null-liiki hulktahuka tippude, tahkude ja servade arvu tähistega e, f ja k kõrval veel järgmisi tähiseid. Märjime tähistega e_3, e_4, \dots, e_s hulktahuka kolmetahuliste, neljatahuliste, \dots, s -tahuliste nurkade arvu ja tähistega f_3, f_4, \dots, f_n kolmnurksete, nelinurksete, \dots, n -nurksete tahkude arvu.

Siis on ilmne, et

$$e = e_3 + e_4 + e_5 + \dots, \quad (10)$$

$$f = f_3 + f_4 + f_5 + \dots \quad (11)$$

Summad võrduste (10) ja (11) paremates pooltes sisaldavad lõpliku hulga liikmeid, kuid lihtsuse mõttes me siiski ei kirjuta nende summade viimaseid liikmeid. Analoogiline märkus käib ka selle paragrahvi järgnevate võrduste kohta.

Pöörame jälle tähelepanu iga hulktahulise nurga servade arvule ja liidame kõik need arvud. Saame ühelt poolt, nagu nägime, $2k$; teiselt poolt aga on ilmne, et saame $3e_3 + 4e_4 + \dots$, seega

$$2k = 3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + \dots \quad (12)$$

Analoogiliselt leiame, et

$$2k = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots \quad (13)$$

Teoreem 361. *Igal null-liiki hulktahukal on kolmetahulisi nurki ja kolmnurkseid tahke kokku vähemalt 8; neid on täpselt kaheksa, kui ühelgi hulktahulisel nurgal ei ole üle nelja tahu ja ühelgi tahul ei ole üle nelja tipu.*

Tõestus. Anname võrdusele (2) kuju $2e + 2f = 4 + 2k$, asendame vasakus pooles e ja f nende avaldistega (10) ja (11), paremas pooles aga $2k$ üks kord avaldisega (12), teine kord avaldisega (13). Saame:

$$2(f_3 + f_4 + f_5 + \dots) = 4 + e_3 + 2e_4 + 3e_5 + \dots, \quad (14)$$

$$2(e_3 + e_4 + e_5 + \dots) = 4 + f_3 + 2f_4 + 3f_5 + \dots \quad (15)$$

Liites liikmeti võrdused (14) ja (15), saame pärast vastavaid lihtsustusi võrduse

$$e_3 + f_3 = 8 + (e_5 + f_5) + 2(e_6 + f_6) + \dots \quad (16)$$

Siit $e_3 + f_3 \geq 8$ ja kui $e_5 = f_5 = e_6 = f_6 = \dots = 0$, siis $e_3 + f_3 = 8$, millega teoreem on tõestatud.

Teoreem 362. *Null-liiki hulktahukal, millel puuduvad nelinurksed ja viisnurksed tahud, on vähemalt 4 kolmnurkset tahku; null-liiki hulktahukal, millel puuduvad kolmnurksed ja viisnurksed tahud, on vähemalt 6 nelinurkset tahku; null-liiki hulktahukal, millel puuduvad kolmnurksed ja nelinurksed tahud, on vähemalt 12 viisnurk-*

set tahku. Ei ole olemas null-liiki hulktahukat, mille igal tahul oleks rohkem kui viis serva.

Tõestus. Korrutame võrduse (14) mõlemad pooled kahega ja liidame saadud võrduse liikmeti võrdusega (15). Pärast lihtsustusi saame:

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 = 12 + 2e_4 + 4e_5 + \dots + f_7 + 2f_8 + \dots \quad (17)$$

Võrdusest (17) saab kergesti kõik teoreemi väited. Nii saab, kui $f_4 = f_5 = 0$, et $f_3 \geq 4$; kui $f_3 = f_5 = 0$, et $f_4 \geq 6$; kui $f_3 = f_4 = 0$, et $f_5 \geq 12$. Lõpuks, eeldus $f_3 = f_4 = f_5 = 0$ viib vastuolule.

Teoreem 363. Null-liiki hulktahukal, millel puuduvad neljatahulised ja viietahulised nurgad, on vähemalt 4 kolmetahulist nurka; null-liiki hulktahukal, millel puuduvad kolmetahulised ja viietahulised nurgad, on vähemalt 6 neljatahulist nurka; null-liiki hulktahukal, millel puuduvad kolmetahulised ja neljatahulised nurgad, on vähemalt 12 viietahulist nurka. Ei ole olemas null-liiki hulktahukat, mille igal hulktahulisel nurgal oleks rohkem kui viis tahku.

Tõestus. Korrutades võrduse (15) mõlemad pooled kahega ja liites saadud võrduse liikmeti võrdusega (14), saame:

$$3e_3 + 2e_4 + e_5 = 12 + 2f_4 + 4f_5 + \dots + e_7 + 2e_8 + \dots \quad (18)$$

Sellest võrdusest tulenevadki kõik teoreemi väited.

Teoreem 364. Null-liiki hulktahukal, millel puuduvad kolmnurksed ja nelinurksed tahud, on vähemalt 20 kolmetahulist nurka; null-liiki hulktahukal, millel puuduvad kolmetahulised ja neljatahulised nurgad, on vähemalt 20 kolmnurkset tahku.

Tõestus. Korrutades võrduse (14) mõlemad pooled kolmega ja võrduse (15) mõlemad pooled kahega ning liites saadud võrdused liikmeti, saame:

$$4f_3 + 2f_4 + e_3 = 20 + 2e_4 + 5e_5 + \dots + 2f_6 + 4f_7 + \dots \quad (19)$$

Niisamuti, korrutades võrduse (14) mõlemad pooled kahega ja võrduse (15) mõlemad pooled kolmega ning liites saadud võrdused liikmeti, saame:

$$4e_3 + 2e_4 + f_3 = 20 + 2f_4 + 5f_5 + \dots + 2e_6 + 4e_7 + \dots \quad (20)$$

Teoreemi mõlemad väited järelduvad võrdustest (19) ja (20).

Märkus. Võrdustes (2), (4) ja (5), mille alusel on saadud selle paragrahvi tulemused, esinevad hulktahuka tippude arv e ja tema tahkude arv f täiesti samaväärsetena. Samuti esinevad võrdustes (10) ja (11) ning võrdustes (12) ja (13) samaväärsetena mitte ainult e ja f , vaid ka e_3 ja f_3 , e_4 ja f_4 , e_5 ja f_5 , ...

Seetõttu vastab selle paragrahvi igale väitele üks teine väide, milles tippude arvu e ja tahkude arvu f osad on vahetunud ja vastavalt on vahetunud arvud e_3 ja f_3 , e_4 ja f_4 , e_5 ja f_5 , ...

Nii näiteks vastavad teineteisele võrdused (6) ja (7), (8) ja (9), (14) ja (15), (17) ja (18), (19) ja (20); võrdus (16) vastab iseendale.

Täpselt samuti vastavad teineteisele teoreem 362 ja teoreem 363, esimene pool teoreemist 364 ja teine pool temast (teoreem 361 vastab seejuures iseendale).

Siin käsitletud asjaolu kannab duaalsuse printsiibi nimetust. See ulatub kaugemalegi. Osutub, et igale hulktahukatüübile, millel on e tippu ja f tahku, e_3 kolmetahulist nurka ja f_3 kolmnurkset tahku, e_4 neljatahulist nurka ja f_4 nelinurkset tahku jne., vastab üks teine hulktahukatüüp, millel on f tippu ja e tahku, f_3 kolmetahulist nurka ja e_3 kolmnurkset tahku, f_4 neljatahulist nurka ja e_4 nelinurkset tahku jne.

Duaalsuse printsiip laieneb teataval määral isegi hulktahukate meetrilistele omadustele (vt. näiteks võrdnurkseid poolkorrapäraseid ja võrdtahkseid poolkorrapäraseid hulktahukaid paragrahvis 169 ning duaalselt vastavaid korrapäraseid hulktahukaid, võrdnurkseid ja võrdtahkseid hulktahukaid paragrahvis 170).

§ 167. Topoloogiliselt korrapärased hulktahukad.

Teoreemid 361—363 võimaldavad lahendada järgmise ülesande.

Nimetame null-liiki hulktahuka topoloogiliselt korrapäraseks, kui tema kõikidel tahkudel on üks ja sama arv tippe ja tema kõikidel hulktahulistel nurkadel on üks ja sama arv tahke; katsume määrata niisuguste hulktahukate kõik topoloogilised tüübid.

Säilitades kõik endised tähistused, märgime tahu tippude arvu tähega n ja hulktahulise nurga tahkude arvu tähega s .

Teoreemi 361 põhjal peab vähemalt üks arvudest n ja s olema 3.

Kui $n = s = 3$, siis võrduse (16) põhjal $e_3 + f_3 = e + f = 8$, ja et $e \geq 4$, $f \geq 4$, siis $e = e_3 = 4$, $f = f_3 = 4$. Võrduse (2) põhjal saame, et $k = 6$.

Kui $n = 3$ ja $s \neq 3$, siis peab teoreemi 363 põhjal olema $s = 4$ või $s = 5$. Kui $n = 3$ ja $s = 4$, siis võrduste (18) ja (17) põhjal $e = e_4 = 6$ ja $f = f_3 = 8$. Euleri teoreemi (2) järgi $k = 12$. Kui aga $n = 3$ ja $s = 5$, siis võrduste (18) ja (20) põhjal $e = e_5 = 12$ ja $f = f_3 = 20$; võrduse (2) järgi $k = 30$.

Kui $s = 3$ ja $n \neq 3$, siis teoreemi 362 põhjal peab olema $n = 4$ või $n = 5$. Kui $s = 3$ ja $n = 4$, siis võrduste (17) ja (18) põhjal $f = f_4 = 6$ ja $e = e_3 = 8$ ning (2) põhjal $k = 12$. Kui aga $s = 3$ ja $n = 5$, siis võrduste (17) ja (19) põhjal $f = f_5 = 12$ ja $e = e_3 = 20$; võrduse (2) põhjal siis $k = 30$.

Niisiis oleme jõudnud järgmisele tulemusel.

Teoreem 365. Iga topoloogiliselt korrapärane hulktahukas kuulub ühesse neist viiest tüübist, mida iseloomustatakse tabelis lk. 215.

Neist viiest tüübist esimesse kuuluvaks hulktahukaks on tetraeder; neljandat tüüpi hulktahuka näiteks võib olla nelinurkne prisma (või mistahes hulktahukas, mis on temaga isomorfne). Ülejäänud kolme tüüpi kuuluvate hulktahukate olemasolu tõestatakse järgmises paragrahvis.

Arvestades seda tähtsust, mis teoreemil 365 on edasises käsitluses, anname talle veel otsese, teoreemidest 361—363 mitte oleneva tõestuse.

Kui liidame topoloogiliselt korrapärase hulktahuka kõikide tahkude tippude arvud, siis saame võrduse $nf = 2k$. Liites kõikide hulktahuliste nurkade tah-

	n	s	e	f	k	
I	3	3	4	4	6	Tetraeeder
II	3	4	6	8	12	Oktaeeder
III	3	5	12	20	30	Ikosaeeder
IV	4	3	8	6	12	Heksaeder
V	5	3	20	12	30	Dodekaeeder

kude arvud, saame analoogiliselt $se = 2k$. Määrates viimasest kahest võrdusest f ja e ning asendades need võrduses (2), saame pärast jagamist arvuga $2k$ järgmise seose:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k}.$$

Sellest võrdusest nähtub, et vähemalt üks arvudest s ja n peab võrduma kolmega; tõepoolest, kui oleks $s \geq 4$ ja $n \geq 4$, siis saaksime $\frac{1}{s} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$, mis on vastuolus eelmise võrdusega.

Kui $n = 3$, siis $\frac{1}{s} = \frac{1}{6} + \frac{1}{k}$ ja $s < 6$. Väärtused $s = 3, 4, 5$ viivad (seoste $nf = 2k$ ja $se = 2k$ kaudu) samadele tulemustele, mis on saadud ülalpool. Analoogiliselt saame $s = 3$ korral $\frac{1}{n} = \frac{1}{6} + \frac{1}{k}$ ja $n < 6$.

§ 168. Korrapärased hulktahukad.

Seni vaatlesime käesolevas peatükis ainult hulktahukate topoloogilisi omadusi. Selles paragrahvis vaatleme üht hulktahukate klassi, mida iseloomustavad tema meetrilised omadused.

Hulktahulist nurka nimetatakse *korrapäraseks*, kui tema kõik tasanurgad on võrdsed ja kõik kahetahulised nurgad on võrdsed.

Hulktahukat nimetame (meetrilises mõttes) *korrapäraseks*, kui tema kõik tahud on võrdsed korrapärased hulknurgad ja kõik hulktahulised nurgad on võrdsed korrapärased hulktahulised nurgad.

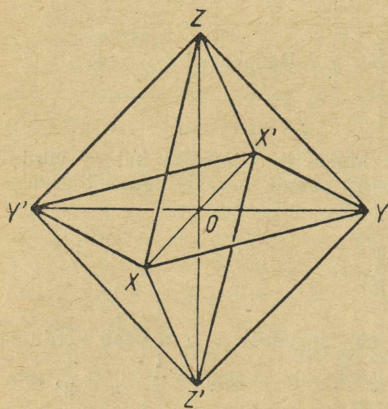
Märkus. Niisuguse definitsiooni anname korrapärasele hulktahukale ainult suurema näitlikkuse huvides. Võiks piirduda ka väiksemate nõudmistega. Nii piisaks juba nõudmistest, et kõik tahud oleksid korrapärased ühenimelised

(s. o. ühesuguse tippude arvuga) hulknurgad ja et kõik kahetahulised nurgad oleksid võrdsed. Siit juba järelduks, et kõik tahud on võrdsed ja kõik hulktahulised nurgad on korrapäraseid ja võrdsed.

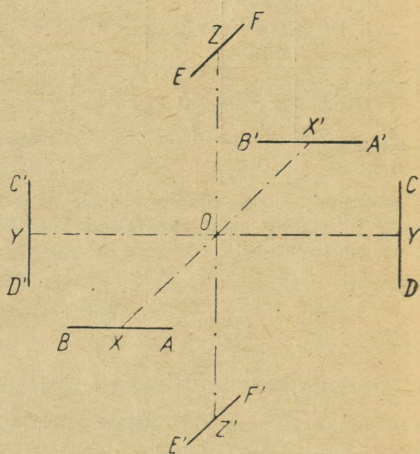
Vaatleme ainult kumeraid korrapäraseid hulktahukaid. Et iga kumer hulktahukas on null-liiki, siis iga korrapärane hulktahukas on korrapärane ka topoloogilises mõttes.

Teoreemist 365 järeldub otseselt järgmine lause.

Teoreem 366. Iga kumer korrapärane hulktahukas kuulub ühesse neist viiest tüübist, mida iseloomustatakse teoreemis 365 toodud tabelis.



Joonis 126.



Joonis 127.

Esimene neist viiest korrapärasest hulktahukast on korrapärane tetraeeder (vt. § 122); neljas neist — korrapärane heksaeeder — ei ole midagi muud kui kuup. Ülejäänud kolme nimetatakse vastavalt korrapäraseks oktaeedriks, korrapäraseks ikosaeedriks ja korrapäraseks dodekaeedriks.

Selleks, et tõestada kõigi viie korrapärase hulktahuka tüübi olemasolu (ja järelikult ka kõigi viie topoloogiliselt korrapärase hulktahuka tüübi olemasolu), vaatleme nende konstrueerimist.

Seejuures selgub (mida me ei tõesta), et igale viiest teoreemis 365 loetletud juhust vastab ainult üks korrapärane hulktahukas selles mõttes, et kaks korrapärast hulktahukat ühe ja sama tahkude arvuga on sarnased.

Konstruksioon 139. Konstrueerida korrapärane tetraeeder.

Konstruksioon 140. Konstrueerida korrapärane heksaeeder (kuup).

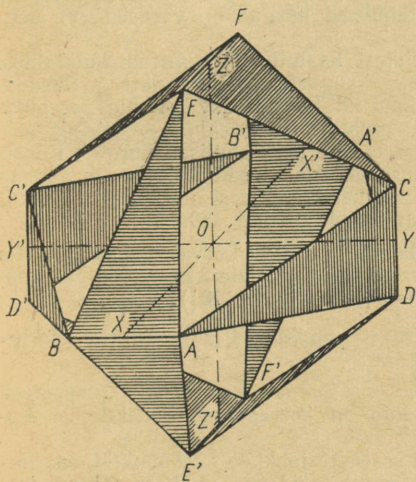
Nende konstruktsioonide teostamise jätame lugeja hooleks.

Konstruksioon 141. Konstrueerida korrapärase oktaeder.

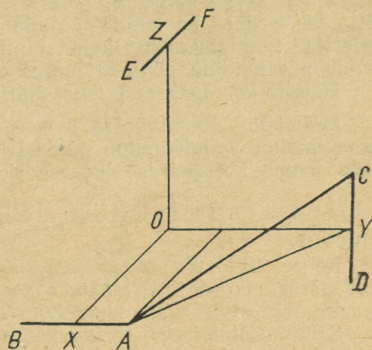
Konstrueerime kolm paariti ristuvat sirget läbi ühe ja sama punkti (joonis 126) ning märgime neil sirgeil kummalgi pool nende ühisest punktist O võrdsed lõigud. On kerge veenduda, et nende lõikude kuus lõppu X, X', Y, Y', Z ja Z' on korrapärase oktaedri tippudeks.

Konstruksioon 142. Konstrueerida korrapärase iko-saeeder.

Kõige lihtsamaks ja lühemaks konstrueerimisviisiks on järgmine.



Joonis 128.



Joonis 129.

Konstrueerime nagu korrapärase oktaedri puhulgi kolm võrdset paariti ristuvat lõiku XX', YY' ja ZZ' ühise keskpunktiga O (joonis 127). Läbi esimese lõigu otste X ja X' paneme sirged AB ja $A'B'$ paralleelselt teise lõiguga YY' ja märgime neil võrdsed lõigud $XA = XB = X'A' = X'B'$. Täpselt samuti paneme läbi teise lõigu otste Y ja Y' sirged CD ja $C'D'$ paralleelselt kolmanda lõiguga ZZ' ja märgime neil võrdsed lõigud $YC = YD = Y'C' = Y'D'$, millest igaüks on võrdne lõiguga XA . Lõpuks paneme läbi kolmanda lõigu otste Z ja Z' sirged EF ja $E'F'$ paralleelselt esimese lõiguga ja märgime neil võrdsed lõigud $ZE = ZF = Z'E' = Z'F'$, millest igaüks on samuti võrdne lõiguga XA . Ühendades punkti A punktidega C, D, E ja E' , punkti A' punktidega C, D, F ja F' jne., saame kumera hulktahuka (joonis 128).

On ilmne, et selle hulktahuka moodustavad kaksteist võrdhaarset kolmnurka ABE, ABE', CDA, \dots , millel paariti on alusteks lõigud $AB, CD, EF, A'B', C'D'$ ja $E'F'$ ja kaheksa võrdkülgset kolmnurka ACE, ADE', \dots .

Nagu kohe näitame, saab omavahel võrdsed lõigud $XA = XB = X'A' = \dots = Z'F' = x$ valida nii, et igaüks kahesteistkümnest võrdhaarset kolmnurgast on ka võrdkülgne.

Selleks, et see leiaks aset, on küllalt, kui kehtib võrdus $AC = CD$. Tähistades igaühe võrdsetest lõikudest $OX = OX' = \dots = OZ'$ tähega m , saame (joonis 129) $AC^2 = AY^2 + YC^2 = (OY - XA)^2 + OX^2 + YC^2$, s. o. $AC^2 =$

¹ Joonisel 128 on kaksteist võrdhaarset kolmnurka kujutatud mitteläbi-paistvatena, kaheksa võrdkülgset läbi-paistvatena.

$= (m - x)^2 + m^2 + x^2$, ja $CD = 2x$ Võrdus $AC = CD$ annab võrrandi $(m - x)^2 + m^2 + x^2 = 4x^2$ ehk, pärast mõnd lihtsat teisendust,

$$\frac{m}{x} = \frac{x}{m - x}.$$

See võrre näitab (I, § 77), et x on kuldloikes jaotatud lõigu m suurem osa.

Niisiis, konstrueeritud hulktahukas moodustub kahekümnest võrdkülgsest kolmnurgast, kui igaüks võrdsetest lõikudest $XA = XB = \dots$ on võrdne suurema osaga kuldloikes jaotatud lõigust $OX = OX' = \dots$

Selle tõestamiseks, et saadud hulktahukas on korrapärane ikosaeder, on küllalt, kui näitame, et kõik tema kahetahulised nurgad on võrdsed (vt märkust paragrahvi alguses).

Kõige lihtsamalt tuleneb see järgmistest kaalutlustest. Antud hulktahuka kõik tipud on punktist O ilmselt võrdsetel kaugustel. Selle punkti O ühendamisel iga tahu tippudega saame kaksikümme korrapärast kolmnurkset püramiidi. On kerge näha, et kõik need püramiidid on omavahel võrdsed ja seetõttu on võrdsed ka nende põhjade juures olevad kahetahulised nurgad. Konstrueeritud hulktahuka iga kahetahuline nurk on aga ilmselt kaks korda suurem nende püramiidide põhjade juures olevatest kahetahulistest nurkadest.

Üldpilt korrapärase ikosaeedri on antud joonisel 130.

Märkus. Korrapärase ikosaeedri konstrueerimine kõrval pakub huvi ka tema mudeli valmistamine näiteks kartongist. Et lugejale seda tööd kergendada, toome korrapärase ikosaeedri pinnalaotuse (joonis 131).

Konstruksioon 143. Konstrueerida korrapärane dodekaeder.

Kõige lihtsam on selleks kasutada korrapärast ikosaeedrit. Tõepoolest, korrapärase ikosaeedri tahkude keskpunktid on korrapärase dodekaeedri tippudeks, millest lähtubki tema konstruksioon.¹

Selle tõestamiseks, et korrapärase ikosaeedri tahkude keskpunktid on korrapärase dodekaeedri tippudeks, tuleb esmalt näidata, et korrapärase ikosaeedri viis ühise tipuga tahku moodustavad korrapärase püramiidi, s. t. et nende tahkude viis ülejäänud tippu asetsevad ühel ja samal tasapinnal (me ei hakka peatuma selle tõestuse formaalsel teostamisel). Edasi on kerge veenduda, et korrapärase viisnurkse püramiidi külgtahkude keskpunktid moodustavad korrapärase viisnurga. Korrapärase ikosaeedri kahekümne tahu keskpunktid moodustavad niisiis hulktahuka, mis on piiratud kaheteistkümmene korrapärase viisnurgaga. Teoreemi 249 ja tema järelduse põhjal on konstrueeritud dodekaeedri kahetahulised nurgad võrdsed. Järelikult oleme saanud korrapärase dodekaeedri (joonis 132).

Märkus. Korrapärase dodekaeedri pinnalaotusel on joonisel 133 esitatud kuju. Kasutades seda laotust, saab valmistada ka vastava mudeli.

Nii on tõestatud kõigi viie korrapärase hulktahukate tüübi olemasolu.

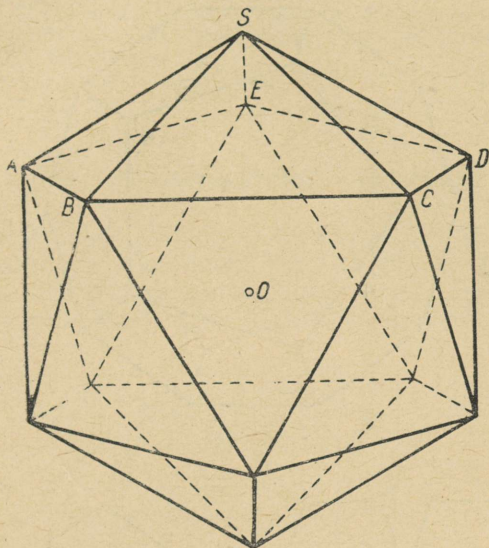
Ülaltoodud konstrueerimisviisidest selgub, et iga korrapärase hulktahuka kohta kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 367. *Igal korrapärasel hulktahukal leidub ümberkujundatud kera, sissekujundatud kera ja kera, mis puutub kõiki tema servi; kõigi kolme kera keskpunktid ühtivad.*

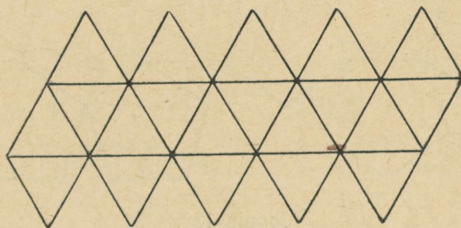
Nende kolme kera ühist keskpunkti nimetatakse korrapärase hulktahuka keskpunktiks.

¹ Korrapärase dodekaeedri konstrueerimine viisil, mis ei nõua korrapärase ikosaeedri konstrueerimist, on kirjeldatud näiteks autori artiklis [20].

Tõestus. Korrapärase tetraeedri ümber kujundatud kera ja sisse kujundatud kera olemasolu jäeldub teoreemist 244 ja konstruktsioonist 88a. Nende kerade keskpunktid ühtivad. Tõepoolest, korrapärase tetraeedri $ABCD$ ümber kujundatud kera keskpunkt O on nelja võrdse tetraeedri $OBCD, OCDA, \dots$ ühiseks tipuks ja aset-



Joonis 130.



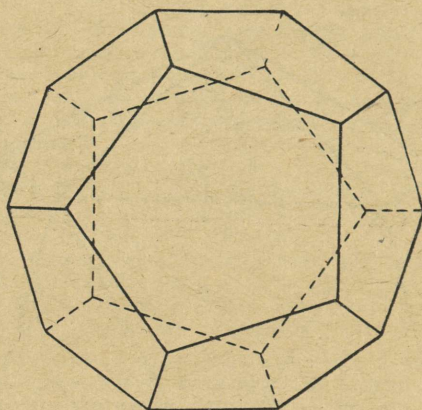
Joonis 131.

seb seetõttu kõigi nelja tahu tasapindadest võrdsetel kaugustel. Lõpuks, sama punkt on kolmnurkade OAB, OAC, \dots võrdsuse tõttu võrdsetel kaugustel korrapärase tetraeedri kõigist kuuest servast, olles seega keskpunktiks kolmandale kerale, millest kõneldakse teoreemi sõnastuses.

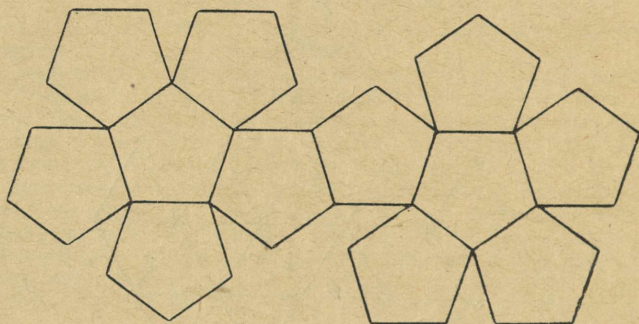
Kuubi ja korrapärase oktaeedri juhu vaatlemise jätame lugeja hooleks.

Korrapärase ikosaeedri juhul asetseb konstruktsiooni 142 teostamisel kasutatud punkt O kõikidest tippudest võrdsetel kaugustel,

olles järelikult ümberkujundatud kera keskpunktiks. Sama punkt on, nagu juba märgiti, ühiseks tipuks kahekümnele võrdsele püramiidile, mille põhjadeks on ikosaeedri tahud, ja asetseb seetõttu kõiki-dest neist tahkudest võrdsetel kaugustel. Järelikult on punkt O ka sissekujundatud kera keskpunktiks. Lõpuks, sama kahekümne püra-



Joonis 132.



Joonis 133.

miidi külgtahkude võrdsuse tõttu asetseb punkt O võrdsetel kaugustel ikosaeedri kõikidest servadest, olles seetõttu ka kõiki servi puutuva kera keskpunktiks.

Analoogilised kaalutlused on võimalikud ka korrapärase dodekaeedri juhul.¹

Märkus. Peale käesolevas paragrahvis vaadeldud viie kumera korrapärase hulktahuka on olemas veel neli tähelist korrapärast hulktahukat

¹ Mistahes korrapärase hulktahuka ümber kujundatud kera ja sisse kujundatud kera olemasolu üldine tõestus, mis ei ole seotud vaadeldava hulktahuka tüübiga, on toodud Hadamard'i raamatus [1], 2. osa, lk. 381.

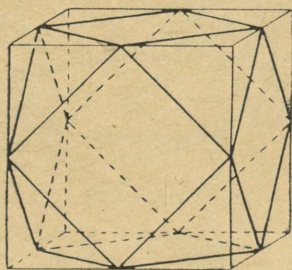
(mida mõnikord nimetatakse Poinsoot' hulktahukateks). Kõik need neli hulktahukat saab korrapärasest dodekaedrist ja korrapärasest ikosaedrist, kui vaadelda nende diagonaalatasapindu või servade pikendusi.

Kui korrapärasel ikosaedril panna diagonaalatasapinnad läbi ühest tipust väljuva viie serva lõppude, näiteks läbi punktide A, B, C, D ja E (joonis 130), ja igal saadud tasapinnal konstrueerida tähtviisnurk, mille tippudeks on ikosaeedri tipud, siis saadakse korrapärane tähtdodekaeder (joonis 21), millel on 12 tähelist viisnurkset tahku ja 12 kumerat viietahulist nurka. Sama hulktahuka võib saada ka dodekaedrist, kui pikendada selle servi nii, et igal tahul tekiks tähtviisnurk.

Analoogiliselt saab konstrueerida ka ülejäänud kolm korrapärast täht-hulktahukat.¹

§ 169. Poolkorrapärased hulktahukad.

Korrapärase hulktahuka mõistet on võimalik mitmeti üldistada. Käesolevas paragrahvis vaatleme lühidalt mõnda neist üldistus-test, piirdudes kumerate hulktahukatega. Siin puudutatud küsimuste detailssem vaatlemine ulatub välja käesoleva raamatu raamidest.



Joonis 134.

Hulktahukat nimetatakse võrdnurkseks poolkorrapäraseks (ehk lihtsalt poolkorrapäraseks ehk Arhimede hulktahtukaks), kui tema tahkudeks on mitut eri tüüpi korrapärased hulknurgad ja kõik tema hulktahulised nurgad on võrdsed.

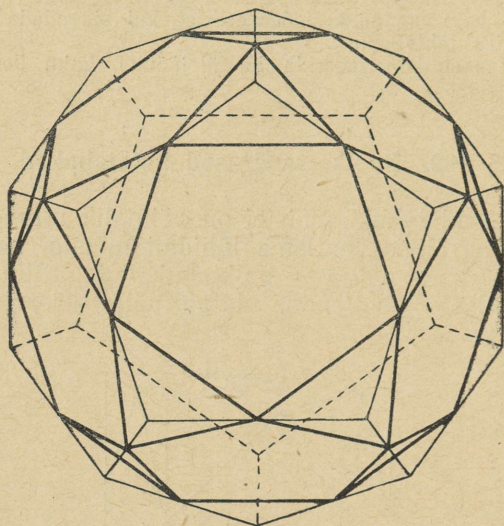
Esitame näiteid seda liiki hulktahukatest.

Lihtsaima näitena võib nimetada ruudukujuliste külgtahkudega korrapärast n -nurkset prisma (iga n korral).

Järgneva näitena nimetame kuubik-oktaeedrit (joonis 134) — neljatahuliste nurkadega hulktahukat, mis on piiratud kaheksa võrdkülgse kolmnurgaga ja kuue ruuduga. Kõige lihtsam on seda hulktahukat konstrueerida, kui tema tippudeks võtta kuubi kaheteistkümne serva keskpunktid (või korrapärase oktaeedri kaheteistkümne serva keskpunktid).

¹ Üksikasjalisi andmeid korrapäraste täht-hulktahukate kohta leiab lugeja artiklitest [22].

Analoogiliselt on korrapärase dodekaedri (või korrapärase ikosaedri) servade keskpunktid tippudeks võrdnurksele poolkorrapärasele hulktahukale, mida nimetatakse d o d e k a e e d r i k - i k o - s a e e d r i k s (joonis 135) ja mis moodustub kaheteistkümnest korrapärasest viisnurgast ja kahekümnest võrdkülgsest kolmnurgast.



Joonis 135.

Lõpuks nimetame keerukama näitena 62-tahukat (joonis 136), mis moodustub kaheteistkümnest korrapärasest viisnurgast, kahekümnest võrdkülgsest kolmnurgast ja kolmekümnest ruudust.¹

Korrapärase hulktahuka mõiste teiseks üldistuseks on järgmine mõiste.

Hulktahukat nimetatakse võrdtahkseks poolkorrapäraseks, kui tema hulktahulisteks nurkadeks on mitut eri tüüpi korrapärased hulktahulised nurgad ja kõik tema tahud on võrdsed.

Lihtsaima näitena võib tuua eespool juba vaadeldud korrapärase n -nurkse (iga n korral) kaksikpüramiidi (joonis 86; $n = 5$), kui selle põhja külj ja külgserv on sobivalt valitud.

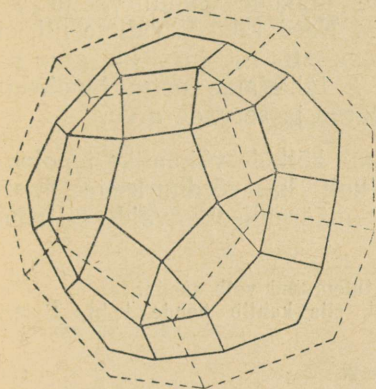
Teise näitena nimetame rombik-dodekaeedrit (mida nimetatakse mõnikord ka rombjaks dodekaedriks), millel on kaheksa korrapärast kolmetahulist nurka ning kuus korrapärast neljatahulist nurka ja mis moodustub kaheteistkümnest võrdsest rombist (joonis 137).

Rombik-dodekaeedrit saab konstrueerida, kui panna läbi mingi

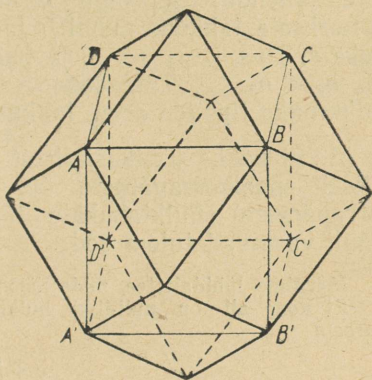
¹ Võrdnurksete poolkorrapärase hulktahukate kõikide tüüpide kirjeldus, varustatud jooniste, pinnalaotuste ja ülesvõtetega, leidub Nikolski artiklis [19].

kuubi (kuubi $ABCD A'B'C'D'$ joonisel 137) kõikide seryade tasapinnad, mis asetsevad väljaspool kuupi ja moodustavad selle tahkudega 45-kraadised nurgad.

Mõlemad vaadeldud hulktahukatüübid — võrdnurksed poolkorrapärase hulktahtakad ja võrdtahtsed poolkorrapärase hulktahtakad — kujutavad endast, nagu juba öeldud, korrapärase hulktahtaka mõiste üldistusi ja on iseloomustatavad nende meetriliste omadustega. Järgnevaid meetrilise iseloomuga üldistusi kohtame järgmises paragrahvis, nüüd aga vaatleme hoopis kaugemale ulatuvaid, puhttopoloogilise iseloomuga üldistusi.



Joonis 136.



Joonis 137.

Nimetame hulktahtaka täheks tipu A juures selle hulktahtalise pinna, mis koosneb hulktahtaka kõikidest tahkudest ühise tipuga A . Üldine hulktahtaliste pindade isomorfismi mõiste (§ 165) on rakendatav ka hulktahtaka tähtede puhul.

Null-liiki hulktahtakat nimetame tippude suhtes topoloogiliselt poolkorrapäraseks ehk lihtsalt topoloogiliselt poolkorrapäraseks, kui kõik tema tähed on omavahel isomorfsed. See tähendab, et seda liiki hulktahtaka

a) iga tipu juures on üks ja sama arv kolmnurki, üks ja sama arv nelinurki jne.;

b) kõikidel hulktahtalistel nurkadel asetsevad ühe ja sama külgede arvuga tahud ühes ja samas järjekorras.

Võrdnurksed poolkorrapärase hulktahtakad on ilmselt tippude suhtes topoloogiliselt poolkorrapärase hulktahtakate erijuhud.

Märkus. Kasutades duaalsuse printsiipi (§ 166, märkus), saab tippude suhtes topoloogiliselt poolkorrapärase hulktahtaka mõistest tuletada järgmise uue mõiste.

Null-liiki hulktahtakat nimetame tahkude suhtes topoloogiliselt poolkorrapäraseks, kui tal on kaks järgmist omadust:

a) tema iga tahk on üks ja sama arv korda hulktahuka kolmetahuliste nurkade tahuks, üks ja sama arv korda neljatahuliste nurkade tahuks jne.;

b) kõikide tahkude tippude juures asetsevad ühe ja sama tahkude arvuga hulktahulised nurgad ühes ja samas järjekorras.

Allpool tippude suhtes topoloogiliselt poolkorrapäraste hulktahukate kohta toodavad andmed saab duaalsuse printsiibi alusel üle kanda ka tahkude suhtes topoloogiliselt poolkorrapärastele hulktahukatele.

Võtame tarvitusele järgmised tähised. Olgu topoloogiliselt poolkorrapärasel hulktahukal n_1 -nurksed, n_2 -nurksed, n_3 -nurksed, ... tahud. Tähistame n_1 -nurksete tahkude üldarvu sümboliga f_1 ja samade tahkude arvu iga tähe koosseisus sümboliga s_1 ; analoogiliste tähendustega olgu n_2 -nurksete tahkude puhul f_2 ja s_2 , n_3 -nurksete tahkude puhul f_3 ja s_3 , ... Need tähised valime nii, et oleks $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \dots$, ja kui $s_1 = s_2$, siis $n_1 < n_2$, kui $s_2 = s_3$, siis $n_2 < n_3$, ... Tähtedega e , f ja k tähistame nagu tavaliselt hulktahuka tippude arvu, tahkude üldarvu ja servade arvu.

Me ei hakka üksikasjaliselt peatuma kõikide võimalike topoloogiliselt poolkorrapäraste (ja järelikult ka võrdnurksete poolkorrapäraste) hulktahukate tüüpide määramisel, vaid esitame ainult vastavad tulemused.

Märgime lühidalt tee, mida käies need tulemused võib saada.

Et kõne all on null-liiki hulktahukad, siis kehtib nende kohta Euleri teoreem

$$e + f - k = 2. \quad (1)$$

Kui antud hulktahukas on topoloogiliselt poolkorrapärane, siis on tema kõikidel tähtedel (hulktahulistel nurkadel) üks ja sama arv tahke; olgu see arv s .

Võrdus

$$2k = 3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + \dots, \quad (2)$$

mis on õige iga hulktahuka puhul, omandab nüüd kuju

$$se = 2k. \quad (3)$$

Määrates siit k ja asetades selle võrrandisse (1), saame

$$e + f - \frac{se}{2} = 2 \quad (4)$$

ehk, teisendatult,

$$e = \frac{2(f-2)}{s-2}. \quad (5)$$

Võrduse (3) põhjal võrratus

$$3f \leq 2k \quad (6)$$

[võrratus (5) leheküljel 211] omandab kuju

$$3f \leq se. \quad (7)$$

Asendades selles võrratuses e tema avaldisega (5), saame pärast mõningaid teisendusi

$$(6 - s) f \geq 4s.$$

Siit järeldub, et $s < 6$. Nii oleme saanud järgmise tulemuse:

Topoloogiliselt poolkorrapärase (ja erijuhul võrdnurkse poolkorrapärase) *hulktahuka ühelgi tähel* (ühelgi hulktahulisel nurgal) *ei ole üle viie tahu.*

Edasi arutleme järjmselt. Kõikidel n_1 -nurksetel tahkudel on kokku ühelt poolt $n_1 f_1$ tasanurka, teiselt poolt $s_1 e$ tasanurka, nii et $n_1 f_1 = s_1 e$. Analoogilise võrduse saame n_2 -nurksete, n_3 -nurksete, ... tahkude kohta. Siit saame rea võrrandeid:

$$f_1 = \frac{s_1}{n_1} \cdot e; \quad f_2 = \frac{s_2}{n_2} \cdot e; \quad f_3 = \frac{s_3}{n_3} \cdot e; \quad \dots \quad (8)$$

Asetades need väärtused ilmselt õigesse võrdusesse

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + \dots, \quad (9)$$

saame

$$f = e \left(\frac{s_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2} + \frac{s_3}{n_3} + \dots \right).$$

Asendades nüüd võrduses (4) suuruse f selle viimase väärtusega, leiame (pärast jagamist e -ga), et

$$\frac{s_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2} + \frac{s_3}{n_3} + \dots = \frac{s-2}{2} + \frac{2}{e}, \quad (10)$$

kusjuures on ilmne, et

$$s_1 + s_2 + s_3 + \dots = s,$$

kus s väärtuseks on ülalöeldu põhjal 3, 4 või 5.

Topoloogiliselt poolkorrapäraseid hulktahukaid, mille kõikidel tahkudel on üks ja sama arv külgi, muutuvad topoloogiliselt korrapäraseks hulktahukateks, mida vaatlesime juba paragrahvis 167.

Seepärast peame $s = 3$ juhul vaatlema hulktahukaid kaht tüüpi tahkudega — n_1 -nurksete ja n_2 -nurksetega ($s_1 = 2; s_2 = 1$) — ja kolme tüüpi tahkudega — n_1 -nurksete, n_2 -nurksete ja n_3 -nurksetega ($s_1 = s_2 = s_3 = 1$).

Olgu nüüd $s = 4$ ja hulktahukal nelja erinevat tüüpi tahke ($s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1; n_1 < n_2 < n_3 < n_4$). Võrrand (10) omandab sel juhul kuju

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1 + \frac{2}{e};$$

kuid $n_1 \geq 3, n_2 \geq 4, n_3 \geq 5, n_4 \geq 6$ ja seetõttu

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6},$$

millest $1 + \frac{2}{e} \leq \frac{19}{20}$, mis on võimatu. Seepärast tuleb ka juhul $s = 4$ vaadelda

hulktahukaid kaht tüüpi tahkudega ($s_1 = 3, s_2 = 1$ või $s_1 = s_2 = 2$) ja kolme tüüpi tahkudega ($s_1 = 2; s_2 = s_3 = 1$).

Vaatleme lõpuks viimast võimalust $s = 5$. Kui sel juhul hulktahukal on kolme, nelja või viit tüüpi tahke, siis

$$\frac{s_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2} + \frac{s_3}{n_3} + \dots \leq \frac{3}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

ja võrduse (10) põhjal saame $\frac{3}{2} + \frac{2}{e} \leq \frac{29}{20}$, mis on võimatu. Niisiis juhul $s = 5$ tuleb vaadelda hulktahukaid ainult kaht tüüpi tahkudega. Kui seejuures $s_1 = 3$ ja $s_2 = 2$, siis $\frac{s_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2} = \frac{3}{n_1} + \frac{2}{n_2} \leq \frac{3}{3} + \frac{2}{4}$ ja võrduse (10) põhjal $\frac{3}{2} + \frac{2}{e} \leq \frac{3}{2}$, mis on võimatu. Seepärast $s = 5$ korral on küllalt, kui vaadelda kaht tüüpi tahkude seda juhtu, kus $s_1 = 4$ ja $s_2 = 1$.

Õeldust järeldub, et topoloogiliselt poolkorrapäraste (eriti võrdnurksete poolkorrapäraste) hulktahukate kõikide tüüpide määramiseks tuleb positiivsetes täisarvudes lahendada kolme tundmatuga n_1, n_2 ja e võrrand

$$\frac{s_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2} = \frac{s-2}{2} + \frac{2}{e} \quad (11)$$

järgmiste eelduste juures:

- a) $s = 3$; $s_1 = 2$; $s_2 = 1$;
- b) $s = 4$; $s_1 = 3$; $s_2 = 1$;
- c) $s = 4$; $s_1 = s_2 = 2$;
- d) $s = 5$; $s_1 = 4$; $s_2 = 1$,

ja samuti nelja tundmatuga n_1, n_2, n_3 ja e võrrand

$$\frac{s_1}{n_1} + \frac{s_2}{n_2} + \frac{s_3}{n_3} = \frac{s-2}{2} + \frac{2}{e} \quad (12)$$

järgmiste eelduste juures:

- e) $s = 3$; $s_1 = s_2 = s_3 = 1$;
- f) $s = 4$; $s_1 = 2$; $s_2 = s_3 = 1$.

Leides võrrandist (11) tundmatute n_1, n_2 ja e väärtused või võrrandist (12) tundmatute n_1, n_2, n_3 ja e väärtused, leiame valemite (8) järgi f_1 ja f_2 või f_1, f_2 ja f_3 väärtused ning valemite (9) ja (3) järgi f ja k väärtused.

Märgime, et ülalõeldust sugugi ei järeldu, et võrrandi (11) või (12) iga positiivne täisarvuline lahend (isegi niisugune, mis rahuldab näiteks võrratusi $n_i \geq 3, e \geq 4$) annab ühe otsitava hulktahuka.

Seetõttu ei ole mõtet leida põhivõrrandite (11) ja (12) kõiki positiivseid täisarvulisi lahendeid, vaid kasutades geomeetrilisi kaalutlusi, tuleb kõlbmatud lahendid algusest peale kõrvale jätta.

Me ei peatu tuletatud võrrandite lahendamisprotsessil ja kõlbmatute lahendite kõrvalejätmisel, mis ei paku erilist huvi. Esitame ainult loetelu nende võrrandite neist lahendeist, millele vastavad mingid hulktahukad.

Siin toodud tabelis on näidatud s, s_1, s_2, \dots, e, f ja k väärtused kõigi üldse võimalike topoloogiliselt poolkorrapäraste hulktahukate kohta.

Seejuures osutub, et igale selle tabeli viieteistkümnest reast vastab (reas 1 ja 7 — antud n korral) ainult üks hulktahukatüüp. Teisiti öeldes, kõik topoloogiliselt poolkorrapärased hulktahukad,

Nr.	s	s_1	s_2	s_3	n_1	n_2	n_3	f_1	f_2	f_3	e	f	k	
1	3	2	1	—	4	n	—	n	2	—	$2n$	$n+2$	$3n$	$n=3, 5, 6 \dots$
2	3	2	1	—	6	3	—	4	4	—	12	8	18	
3	3	2	1	—	6	4	—	8	6	—	24	14	36	
4	3	2	1	—	6	5	—	20	12	—	60	32	90	
5	3	2	1	—	8	3	—	6	8	—	24	14	36	
6	3	2	1	—	10	3	—	12	20	—	60	32	90	
7	4	3	1	—	3	n	—	$2n$	2	—	$2n$	$2n+2$	$4n$	$n=4, 5, 6 \dots$
8	4	3	1	—	4	3	—	18	8	—	24	26	48	
9	4	2	2	—	3	4	—	8	6	—	12	14	24	
10	4	2	2	—	3	5	—	20	12	—	30	32	60	
11	5	4	1	—	3	4	—	32	6	—	24	38	60	
12	5	4	1	—	3	5	—	80	12	—	60	92	150	
13	3	1	1	1	4	6	8	12	8	6	48	26	72	
14	3	1	1	1	4	6	10	30	20	12	120	62	180	
15	4	2	1	1	4	3	5	30	20	12	60	62	120	

mis vastavad suuruste $s, s_1, s_2, \dots, e, f, k$ (ja n) ühele ja samale väärtusesüsteemile, on omavahel isomorfsed.

Edasi osutub, et iga loetletud tüübi hulktahukate seas leidub ka võrdnurkseid poolkorrapäraseid hulktahukaid. Seejuures kõik võrdnurksed poolkorrapäraseid hulktahukad, mis vastavad suuruste $s, s_1, s_2, \dots, e, f, k$ (ja n) ühele ja samale väärtusesüsteemile, osutuvad omavahel sarnasteks.

Selgitame selle tabeli sisu mõne näitega.

Nr. 1 all on kirjeldatud n -nurkse prismaga isomorfne hulktahukas. Tõepoolest, sel hulktahukal on kolmetähulised nurgad ($s=3$) ja tema iga tipu juures on kaks nelinurkset tahku ($s_1=2; n_1=4$) ning üks n -nurkne tahk ($s_2=1; n_2=n$); nelinurksete tahkude üldarv on $f_1=n$; n -nurksete tahkude üldarv $f_2=2$. Hulktahukal on üldse $2n$ tippu, $n+2$ tahku ja $3n$ serva.

Analoogiliselt saab veenduda, et nr. 9 tähendab kuubikoktaeedriga isomorfsed hulktahukat, nr. 10 dodekaeedrik-ikosaeed-

riga isomorfset hulktahukat ning nr. 15 hulktahukat, millel on 62 tahku ja mis on isomorfne joonisel 136 kujutatud hulktahukaga.

Märkus.¹ Topoloogiliselt poolkorrapärase hulktahuka mõistet saab veel edasi üldistada. Kasutame selleks järgmist definitsiooni.

Kaht hulktahukat (kaht hulktahulist pinda ja eriti hulktahuka kaht tähte) nimetatakse allomorfseteks, kui nende tahkude vahel saab korraldada üksühese vastavuse, milles vastavad tahud on ühenimelised, s. t. omavad ühepalju tippe.

Selle definitsiooni järgi on isomorfset hulktahukad (§ 165) allomorfsete hulktahukate erijuhuks. Allomorfsetel, kuid mitte isomorfsetel hulktahukatel asetsevad vastavad tahud *mitte* tingimata ühes ja samas järjekorras: kahele naabertahule võivad vastata tahud, mis ei asetse kõrvuti.

Allomorfsete hulktahukate üheks lihtsamaks näiteks on kuubik-oktaeeder (joonis 134) ja joonisel 138 kujutatud hulktahukas. Kumbki neist on piiratud 6 nelinurgaga ja 8 kolmnurgaga, kuid need hulktahukad ei ole isomorfset: kuubik-oktaeedril mingid kaks nelinurka ei asetse kõrvuti ja mingid kaks kolmnurka ei asetse kõrvuti, kuna teisel hulktahukal leiduvad kõrvutiasetsevad nelinurgad ja kõrvutiasetsevad kolmnurgad.

Nimetame hulktahuka tippude suhtes topoloogiliselt *homogeenseks* ehk lihtsalt topoloogiliselt *homogeenseks*, kui tema iga kaks tähte on omavahel allomorfset. See tähendab, et selle hulktahuka kõikides tippudes koondub üks ja sama arv kolmnurki, üks ja sama arv nelinurki jne., kuid ühe ja sama külgede arvuga tahud ei asetse erinevatel hulktahulistel nurkadel ühes ja samas järjekorras.

Joonisel 138 kujutatud hulktahukas on topoloogiliselt *homogeense*, kuid mitte topoloogiliselt poolkorrapärase hulktahuka näiteks (ja seejuures, nagu selgub, lihtsaimaks).

Võrrandid (11) ja (12) koos nende tuletusega on õiged ka topoloogiliselt homogeensete hulktahukate puhul.

Küsimuse lähem vaatlus viib järgmistele järeldustele:

1°. On olemas kuus ja ainult kuus topoloogiliselt homogeensete, kuid mitte topoloogiliselt poolkorrapärase hulktahukate erinevat tüüpi.

2°. Hulktahukad ühest neist kuuest tüübist on allomorfset kuubik-oktaeedriga, teisest — dodekaeedrik-ikosaeedriga ja ülejäänud neljast — joonisel 136 kujutatud 62-tahulise hulktahukaga.

3°. Iga tüüpi hulktahukate seas neist kuuest leidub hulktahukas, millel on järgmised kaks meetrilist omadust:

a) tema kõik tahud on korrapärase hulknurgad;

b) tema kõik hulktahulised nurgad jaotuvad kahte rühma nii, et kummaski rühmas on nurgad omavahel võrdsed.

Lihtsaim kõne all olevast kuuest hulktahukast on kujutatud joonisel 138.

Kasutades duaalsuse printsiipi, saab luua tahkude suhtes topoloogiliselt homogeensete hulktahukate mõiste ja jõuda nende kohta tulemustele, mis on duaalsed tulemustega 1° kuni 3°.

¹ Käesolevas märkuses käsitletud tulemused on autori poolt saavutatud tema avaldamata töös ja, kuivõrd temal teada, ei esine kirjanduses.

§ 170. Korrapärase hulktahkate sümmeetria.

Varem vaatlesime juba kujundite sümmeetriat üldiselt (§ 142) ning eriti tetraeedrite ja rööptahukate sümmeetriat (§ 143). Käesolevas paragrahvis vaatleme korrapärase hulktahkate sümmeetriat. Käsitluse rajame järgmisele lausele.

Teoreem 368. *Leidub üks ja ainult üks korrapärase hulktahkata sümmeetriateisendus, mis viib hulktahkata ühe tahu $A_0B_0C_0\dots$ antud kolm järjestikust tippu A_0 , B_0 ja C_0 tema meelevaldse tahu $ABC\dots$ mistahes kolmeks järjestikuseks tipuks A , B ja C .*

Tõestus. Et antud korrapärase hulktahkata kõik tahud on võrdsed korrapärased hulknurgad, siis on kolmnurgad $A_0B_0C_0$ ja ABC ilmselt võrdsed. Järelikult on olemas (teoreemi 268 järelduse 3 põhjal) kaks ja ainult kaks liikumist, milles punktid A_0 , B_0 ja C_0 siirduvad vastavalt punktideks A , B ja C . On ilmne, et mõlemad need liikumised teisendavad tahu $A_0B_0C_0\dots$ tahuks $ABC\dots$

Soovides saada antud hulktahkata sümmeetriateisendust, peame neist kahest liikumisest valima selle, mis teisendab tasapinnaga $A_0B_0C_0$ piiratud ja antud hulktahkata sisaldava poolruumi selleks kahest tasapinnaga ABC piiratud poolruumist, mis samuti sisaldab antud hulktahkata. Viimast tingimust rahuldab, nagu on kerge näha, ainult üks kahest vaadeldavast liikumisest.

Nii valitud liikumine teisendab antud korrapärase hulktahkata tõe poolest iseendaks: ta teisendab antud hulktahkata tahu $A_0B_0C_0\dots$ tema tahuks $ABC\dots$; kõikide kahetahulistele nurkade võrdsuse ja kõikide hulktahkata tahude võrdsuse tõttu teisendab ülalnäidatud viisil valitud liikumine tahu $A_0B_0C_0\dots$ naabertahud tahu $ABC\dots$ naabertahudeks. Seda arutelu jätkates veendume järkjärgult, et hulktahkata iga tahk teisendub sama hulktahkata mingiks teiseks tahuks.

Järeldused. 1. *Leidub kaks ja ainult kaks korrapärase hulktahkata sümmeetriateisendust, mis tema antud tasanurga teisendavad tema teiseks antud tasanurgaks.*

Tõepoolest, kui servade B_0A_0 ja B_0C_0 poolt moodustatud tasanurk teisendub servade BA ja BC poolt moodustatud tasanurgaks, siis teisenduvad punktid A_0 , B_0 ja C_0 kas vastavalt punktideks A , B ja C või vastavalt punktideks C , B ja A .

2. *Korrapärase hulktahkata sümmeetriateisenduste üldaru (kaasa arvatud ka samasus) võrdub tema tasanurkade arvu kahekordsega, s. o. tema servade arvu neljakordsega.*

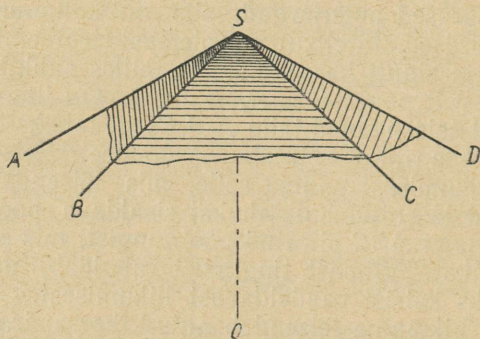
See tuleneb järeldusest 1, kui võtta arvesse, et tasanurkade arv on servade arvust kaks korda suurem (iga serv on nelja tasanurga küljeks, kuid iga tasanurk asetseb kahe serva vahel).

Niisiis sümmeetriateisendusi on korrapärasel tetraeedril 24, kuubil ja korrapärasel oktaeedril 48 ning korrapärasel ikosaeedril ja korrapärasel dodekaeedril 120.

Korrapäraste hulktahukate üksikute tüüpide sümmeetrialelementide uurimist lihtsustab järgmise lause kasutamine.

Teoreem 369. *Kumera korrapärase hulktahuka tahkude keskpunktid on ühe teise, samuti kumera ja korrapärase hulktahuka tippudeks.*

Tõestus. Vaatleme (joonis 139) antud korrapärase hulktahuka tahke $ASB \dots$, $BSC \dots$, millel on ühine tipp S . On olemas (teoreemi 368 järgi) sümmeetriateisendused, mille puhul tasanurk ASB siirdub vastavalt tasanurkadeks BSC ja CSD . Kõigi nende sümmeetriateisenduste puhul jäävad ilmselt oma kohale vaadeldavate tahkude ühine tipp S ja ümberkujundatud kera keskpunkt O



Joonis 139.

kui ainus punkt, mis on kõikidest tippudest võrdsetel kaugustel. Siit on kerge järeldada, et kõne all olevad teisendused kujutavad endast pöördeid ümber sirge OS .

Et kõikide ühist tippu S omavate tahkude keskpunktid teisenduvad pöoretel ümber telje OS üksteiseks, siis asetsevad nad kõik ühel ja samal tasapinnal ning moodustavad sellel korrapärase s -nurka, kusjuures s on nagu varemgi ühist tippu S omavate tahkude arv. Niisiis, antud hulktahuka tahkude keskpunktid moodustavad e korrapärast hulknurka (e on nagu alati antud hulktahuka tippude arv). Kõik need hulknurgad on ilmselt võrdsed.

Iga saadud hulknurga iga külg on veel ühe teise hulknurga küljeks. Näiteks tahkude $ASB \dots$ ja $BSC \dots$ keskpunkte ühendav külg kuulub kahele ja ainult kahele korrapärasele hulknurgale: üks neist vastab antud hulktahuka tipule S ja teine tipule B . Niisiis moodustavad kõne all olevad hulknurgad hulktahuka.

Saadud hulktahuka kõik kahetahulised nurgad on omavahel võrdsed. Tõepoolest, on olemas antud hulktahuka sümmeetriateisendus, mis viib tema serva A_0B_0 tema mistahes teiseks servaks AB . Tippudele A_0 ja B_0 vastavad korrapärased hulknurgad lähevad selle teisendusega üle tippudele A ja B vastavateks korrapärasteks hulknurkadeks, millest tulenebki saadud hulktahuka kõi-

kide kahetahuliste nurkade võrdsus. Järelikult on antud hulktahuka tahkude keskpunktide poolt moodustatud hulktahukas korrapärase.

Lõpuks, jätame formaalselt tõestamata, et uus hulktahukas on kumer, kui antud hulktahukas seda oli. Selle asjaolu võime lugeda ilmselt õigeks.

Järeldused. 1. Kummagi kõne all oleva korrapärase hulktahuka tippude arv on võrdne teise hulktahuka tahkude arvuga.

See järeldub teoreemi tõestuskäigust.

2. Korrapärase tetraeedri tahkude keskpunktid moodustavad samuti korrapärase tetraeedri; kuubi tahkude keskpunktid moodustavad korrapärase oktaeedri ja ümberpöördult; korrapärase dodekaeedri tahkude keskpunktid moodustavad korrapärase ikosaeedri ja ümberpöördult.

See järeldub järeldusest 1.

Kuupi ja korrapäranast oktaeedrit nimetatakse selle omaduse tõttu *duaalselt vastavateks* korrapäranasteks hulktahukateks; sama käib ka dodekaeedri ja ikosaeedri kohta. Korrapärase tetraeedri on duaalselt vastav iseendale.

3. Kahel duaalselt vastaval korrapärasel hulktahukal on ühed ja samad sümmeetriaelemendid.

Tõepoolest, antud korrapärase hulktahuka iga sümmeetria-teisendus on sümmeetria-teisenduseks ka hulktahukale, mille tippudeks on antud hulktahuka tahkude keskpunktid.

Asudes nüüd korrapärase hulktahukate üksikute tüüpide sümmeetriaelementide kirjeldamisele, peame vaatlema ainult kolme juhtu: a) korrapärase tetraeedri, b) kuup ja korrapärase oktaeedri, c) korrapärase ikosaeedri ja korrapärase dodekaeedri.

a) Korrapärase tetraeedri sümmeetriat oleme juba vaadelnud (§ 143, h). Tal on neli kolmandat järku sümmeetriatelge, kolm teist järku sümmeetriatelge (täpsemalt kolm neljandat järku pöördepeegeldustelge) ja kuus sümmeetria-tasapinda.

b) Kuubi sümmeetria on ka juba vaadeldud (§ 143, h). Ülalöeldust järeldub, et oktaeedril on samad sümmeetriaelemendid, mis on kuubil, ja et nende sümmeetriaelementide (erinevat järku sümmeetriatelgede, sümmeetriatasapindade) vastastikune asetus ruumis on samasugune nagu kuubil.

Kuid sümmeetriatelgede ja sümmeetriatasapindade asend hulktahuka enda elementide suhtes on korrapärasel oktaeedril teistsugune kui kuubil. Neljandat järku teljed näiteks läbivad kuubil tahkude keskpunkte, korrapärasel tetraeedril aga tippe jne.

Niisiis korrapärasel oktaeedril on kolm neljandat järku sümmeetriatelge, mis paariti ühendavad tema vastastippe. Edasi on korrapärasel oktaeedril neli kolmandat järku sümmeetriatelge ehk täpsemalt neli kuuendat järku pöördepeegeldustelge, mis paariti ühendavad tema paralleelsete tahkude keskpunkte, ning kuus teist järku sümmeetriatelge, millest igaüks ühendab kahe paral-

leelse vastasserva keskpunkte. Korrapärasel oktaeedril on üheksa sümmeetriatasapinda. Kolm neist ühendavad paariti tema diagonaale ja ülejäänud kuus tasapinda poolitavad esimese kolme vahelisi nurki. Lõpuks, korrapärasel oktaeedril leidub sümmeetriakeskpunkt.

c) Läheme edasi korrapärase ikosaeedri sümmeetria juurde.

Korrapärase ikosaeedri ülaltoodud konstrueerimisviisist (konstruktsioon 142) selgub kõigepealt, et punkt O , millest kõneldakse selles konstruktsioonis, on hulktahuka sümmeetriakeskpunktiks. Järelikult asetsevad korrapärase ikosaeedri kaksteist tippu kahekaupa kuuel tema keskpunkti läbival sirgel. Igaüks neist sirgeist on, nagu kohe näitame, tema viiendat järku sümmeetriateljeks.

Selleks vaatleme korrapärase ikosaeedri mingit tippu S (joonis 130) ja sellest tipust väljuvate servade otsi A, B, C, D ja E . Viie kolmnurkse püramiidi $OSAB, OSBC, \dots$ võrdsuse tõttu on võrdsed viis tasanurka OSA, OSB, \dots ja samuti viis serva OS juures olevat kahetahulist nurka, mille moodustavad järjestikku teineteisega pooltasapinnad OSA, OSB, \dots . Nende tasanurkade ja kahetahuliste nurkade võrdsusest on kerge järeldada, et pööre ümber telje OS nurga $\frac{4d}{5}$ võrra ühes või teises suunas teisendab ikosaeedri tipud A, B, C, D ja E vastavalt sama ikosaeedri tippudeks B, C, D, E ja A või tippudeks E, A, B, C ja D (ja jätab muidugi tipu S kohale). Et ikosaeedri kõik tahud on võrdsed ja tema kõik kahetahulised nurgad on võrdsed, siis järeldub siit, et ikosaeedri iga tipp (iga tahk, iga serv) ühtib sama ikosaeedri mingi teise tipuga (teise tahuga, teise servaga).

Niisiis pööre nurga $\frac{4d}{5}$ võrra ümber sirge OS on korrapärase ikosaeedri sümmeetriateisendus. Teisiti öeldes on sirge OS korrapärase ikosaeedri viiendat järku sümmeetriatelg. Sama käib muidugi ka viie ülejäänud, sirgega OS analoogilise sirge kohta.

Pööre ümber telje OS ühes kindlas suunas nurga $3 \cdot \frac{4d}{5} = \frac{12d}{5}$ võrra on samuti antud hulktahuka sümmeetriateisendus, mida on ka selle pöörde korruktis peegeldusega punktist O . Kuid see korruktis on (teoreem 278, järeldus 4) pöördepeegeldus teljega OS ja keskpunktiga O . Pöördepeegelduse nurk on siin $\frac{12d}{5} + 2d = 4d + \frac{2d}{5}$, s. t. $\frac{2d}{5}$. Sellest järeldub, et sirge OS ja järelikult korrapärase ikosaeedri iga viiendat järku sümmeetriatelg on tema kümnenдат järku pöördepeegeldusteljeks.

Arutledes analoogiliselt sellega, mida tegime viiendat järku sümmeetriatelgede puhul, on kerge veenduda, et kahekümne võrdse ja punkti O suhtes paariti sümmeetrilise püramiidi $OSAB, OSBC, \dots$ kõrgused on korrapärase ikosaeedri kümneks kolmandat

järku sümmeetriateljeks. Et igaüks neist telgedest läbib sümmeetriakeskpunkti, siis nad on ühtlasi ka kuuendat järku pöördepeegeldustelgedeks (võrrelda romboeedri juhuga; § 143, g).

Edasi, korrapärase ikosaeedri konstruksioonist tuleneb, et igaüks sirgetest XX' , YY' , ZZ' (joonis 127) ja järelikult ka igaüks viieteistkümnest sirgest, mis ühendavad vastasservade keskpunkte, on korrapärase ikosaeedri teist järku sümmeetriateljeks.

Lõpuks, et iga teist järku sümmeetriatelg läbib sümmeetriakeskpunkti, siis korrapärasel ikosaeedril on (teoreem 277, järeldus 2) ka viisteist sümmeetriatasapinda, mis läbivad sümmeetriakeskpunkti ja on risti teist järku sümmeetriatelgedega; näidetena neist sümmeetriatasapindadest olgu toodud tasapinnad XOY , YOZ ja ZOX jooniselt 127.

Niisi korrapärasel ikosaeedril on kuus viiendat järku sümmeetriatelge (täpsemalt kuus kümnendat järku pöördepeegeldustelge), kümme kolmandat järku sümmeetriatelge (täpsemalt kümme kuuendat järku pöördepeegeldustelge), viisteist teist järku sümmeetriatelge, viisteist sümmeetriatasapinda ja sümmeetriakeskpunkt. Viiendat järku sümmeetriateljed ühendavad vastastippe, kolmandat järku sümmeetriateljed vastastahkude keskpunkte ja teist järku sümmeetriateljed vastasservade keskpunkte.

Et korrapärase ikosaeedri tahkude keskpunktid on korrapärase dodekaeedri tippudeks, siis on korrapärasel dodekaeedril samad sümmeetriealemendid, mis on korrapärasel ikosaeedril, ja nende elementide (erinevat järku sümmeetriatelgede, sümmeetriatasapindade) vastastikune asetus ruumis on samasugune nagu korrapärase ikosaeedri juhul.

Sümmeetriatelgede asend hulktahuka enda elementide suhtes aga on dodekaeedril teistsugune kui ikosaeedril. Näiteks viiendat järku sümmeetriateljed läbivad korrapärasel ikosaeedril vastastippe, korrapärasel dodekaeedril aga vastastahkude keskpunkte; kolmandat järku sümmeetriateljed läbivad, ümberpöördult, korrapärasel ikosaeedril vastastahkude keskpunkte, korrapärasel dodekaeedril aga vastastippe.

Märkused. 1. On peaaegu ilmne, et korrapärasel hulktahukatel ei leidu muid sümmeetriealelemente peale ülalloetletute. Seda asjaolu saab rangelt tõestada järgmisel viisil.

Alustame korrapärase tetraeedriga. Temal on üldse (teoreem 368, järeldus 2) 24 sümmeetrieateisendust.

Igaüks neljast kolmandat järku sümmeetriateljest annab kaks samasusest erinevat sümmeetrieateisendust. Igaüks kolmest teist järku sümmeetriateljest on ühtlasi neljandat järku pöördepeegeldusteljeks ja annab seetõttu ühe pöörde ning kaks pöördepeegeldust, seega kokku kolm samasusest erinevat sümmeetrieateisendust. Igaüks kuuest sümmeetriatasapinnast annab ühe samasusest erineva teisenduse. Lisades juurde veel samasuse, saame üldse

$$2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 6 + 1 = 24$$

sümmeetrieateisendust. Järelikult ei leidu peale ülalloetletute muid sümmeetrieateisendusi ja seega ei leidu ka muid sümmeetriealelemente.

Analoogiline mõttekäik on rakendatav iga ülejäänud korrapärase hulktahuka puhul.

Kuubi (ja oktaeedri) puhul iga neljandat järku sümmeetriatelg on ühtlasi, nagu kergesti nähtub, ka neljandat järku pöördepeegeldusteljeks. Järelikult annab igaüks kolmest neljandat järku sümmeetriateljest kolm pööret ja kaks pöördepeegeldust, mis on erinevad samasusest ja peegeldumisest punktist, seega kokku viis niisugust sümmeetriateisendust. Igaüks neljast kuuendat järku pöördepeegeldusteljest annab neli sümmeetriateisendust, kaasa arvamata samasust ja peegeldumist punktist. Igaüks kuuest teist järku sümmeetriateljest ja igaüks üheksast sümmeetriatasapinnast annab ühe samasusest erineva sümmeetriateisenduse. Arvestades veel sümmeetriat keskpunkti suhtes ja samasust, jõuame järeldusele, et ülalpool loetletud kuubi sümmeetriaelemendid määravad üldse

$$3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 6 + 9 + 1 + 1 = 48$$

sümmeetriateisendust, s. o. tema kõik sümmeetriateisendused (teoreem 368, järeldus 2).

Korrapärase ikosaeedri (ja korrapärase dodekaeedri) juhul igaüks kuuest kümnendat järku pöördepeegeldusteljest annab kaheksa samasusest ja punktist peegeldumisest erinevat sümmeetriateisendust, igaüks kümnest kuuendat järku pöördepeegeldusteljest annab neli niisugust teisendust ning igaüks viieteistkümnest teist järku sümmeetriateljest ja igaüks viieteistkümnest sümmeetriatasapinnast annab ühe teisenduse. Arvestades veel sümmeetriat keskpunkti suhtes ja samasust, jõuame järeldusele, et ülalpool loetletud sümmeetriaelemendid määravad üldse

$$8 \cdot 6 + 4 \cdot 10 + 15 + 15 + 1 + 1 = 120$$

sümmeetriateisendust, s. o. ikosaeedri kõik sümmeetriateisendused.

Neist arvestustest selgubki, et peale ülalpool loetletute ei ole korrapärasel hulktahukatel muid sümmetriaelemente.

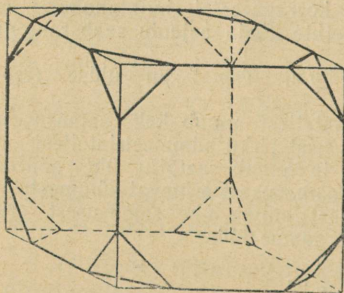
2. Korrapärase hulktahukas lubab, nagu järeldub teoreemist 368, sümmeetriateisendusi, mis viivad tema mistahes antud tipu tema mistahes teiseks tipuks. See õigustab järgmist üldistamist.

Hulktahukat nimetatakse võrdnurkseks hulktahukaks (ehk isogooniks), kui ta lubab sümmeetriateisendusi, mis viivad tema mistahes antud tipu tema mistahes teiseks tipuks.

Siit järeldub, et niisuguse hulktahuka iga kaks tähte on võrdsed ja järelikult ka isomorfsed. Seega kuuluvad võrdnurksed hulktahukad topoloogiliselt poolkorrapärase hulka (§ 169). Lähemal uurimisel selgub, et võrdnurkse hulktahuka tahud on alati võrdnurksed poolkorrapärased hulknurgad (I, § 10), erijuhul korrapärased hulknurgad.

Korrapärased hulktahukad on võrdnurksete hulktahukate erijuhud; edasi saab tõestada, et ka võrdnurksed poolkorrapärased hulktahukad kujutavad endast võrdnurkseid hulktahukaid. Näitena võrdnurksest hulktahukast, mis erineb korrapärasest ja võrdnurksest poolkorrapärasest hulktahukatest, võib tuua hulktahuka, mille saab kuubist järgmise konstruktsiooni teel

Märgime kuubi kõikidel servadel, alates tema tippudest, võrdsed lõigud (joonis 140) ja ühendame omavahel ühest ja samast tipust väljuvate lõikude otsad. Saame hulktahuka, mis on piiratud 8 võrdkülgse kolmnurgaga ja 6 kaheksanurgaga. Need kaheksanurgad on üldiselt võrdnurksed poolkorrapärased ja hulktahukas ise on võrd-



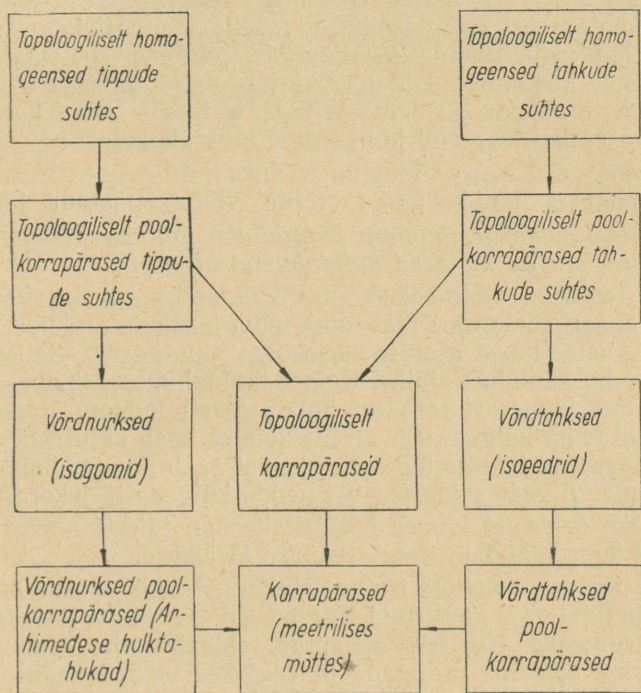
Joonis 140.

nurkne. Erijuhul võivad need kaheksanurgad olla korrapärased; siis hulktahukas on võrdnurkne poolkorrapärane.

Analoogiliselt võib anda ka järgmise definitsiooni: hulktahukat nimetakse võrdtahkseks hulktahukaks (ehk isoeedriks), kui ta lubab sümmeetriateisendusi, mis viivad tema mistahes antud tahu tema mistahes teiseks tahuks.¹

Käesolevas peatükis vaadeldud hulktahukate mitmesuguste erikujude loetelu ja vastastikuse loogilise seose nende erikujude vahel saab anda järgmise skeemiga:

HULKTAHUKAD



3. Paragrahvides 142 ja 143 ning ka käesolevas paragrahvis on toodud rida sümmeetrielementide mitmesuguseid kombinatsioone, milliseid võib omada lõplikust hulgast punktidest koosnev ruumiline kujund, näiteks hulktahuka tippude kogu. Tekib küsimus, kuidas kindlaks teha kõik võimalikud sellised sümmeetrielementide kombinatsioonid. Selle puhtgeomeetrilise küsimuse täielik lahendus ulatub välja käesoleva raamatu raamidest.²

¹ Võrdnurksed ja eriti võrdtahksed hulktahukad omavad olulist tähtsust geomeetrilises kristallograafias ja on üksikasjaliselt uuritud Fjodorovi poolt tema suures töös [21].

Fjodorov, Jevgraf Stepanovič (1853—1919), akadeemik ja suur vene kristallograaf, on ka rea geomeetria-alaste tööde autoriks.

² Lugeja leiab selle näiteks Bogomolovi raamatust [5], 1. osa, lk. 33—35.

Kõneldes käesoleva peatüki eelmistes paragrahvides ühtedest või teistest hulktahuka erikujudest, eeldasime, et vaadeldavad hulktahukad on kumerad. Selle eelduse tegime arutluste lihtsuse huvi- des; suurem osa saadud tulemustest on üldistatavad (sageli aga suurte raskustega) ka mittekumeratele hulktahukatele.

Vastupidiselt sellele on olemas rida kumerate hulktahukate kau- geleulatuvaid omadusi, mille puhul eeldus kumeruse kohta on oluline. Need omadused pärinevad kaasaegse geomeetria ühest suurest harust (osaliselt elementaarsest, kuid põhili- selt elementaarsest kaugel olevast); selle geomeetria osa eesmär- giks on kumerate kehade ja kumerate pindade spetsiaalne uuri- mine. Nende küsimuste käsitus ulatub välja käesoleva raamatu raamidest. Seepärast piirdume sellega, et toome siin ilma tõestu- seta kolm olulist teoreemi kumeratest hulktahukatest.¹

Esimene neist teoreemidest on Cauchy teoreem kumera hulktahuka jäikusest, mille võib sõnastada järgmiselt.

Kui kahe isomorfse kumera hulktahuka iga kaks vastavat tahku on võrdsed, siis on ka need hulktahukad võrdsed.

Selle teoreemi mõte seisab näitlikult selles, et kumerat hulktahukat ei saa «deformeerida» ilma tema üksikute tahkude suuruse, kuju või vastastikuse asetuse järjekorra muutmiseta. Selles mõttes on kumer hulktahukas «jäik». Kumer hulktahukas erineb selle pool- lest teravalt kumerast tasasest hulknurgast: kumerat tasast hulknurka (kui tema külgede arv on üle kolme) saab kujutleda «šarniir- ühendustega», s. t. tema nurkade suurusi saab muuta, ilma et muu- tuksid tema külgede pikkused või nende külgede järjekord.

Võib ka öelda, et kumer hulktahukas on täiesti määratud, kui on antud tema tahud ja nende asetuse järjekord.

Teine teoreem käsitleb samuti tingimusi, mis täiesti määravad kumera hulktahuka, kuid need tingimused on täiesti teist tüüpi kui Cauchy teoreemis. Kui seal oli antud tahkude kuju ja suurus, siis siin antakse tahkude «suunad» ja seatakse mõned kaunis üldised kitsendused tahkude suuruse kohta. Seejuures tahu «suund» antakse suunaga tema välisel normaamil, s. o. kiirel, mis on tõmmatud risti selle tahuga tema mingist punktist ja suundub hulktahuka suhtes välisesse piirkonda.

Kõne all olev teoreem kuulub nõukogude geomeetrile A. D. Aleksandrovile² ja sõnastub nii:

Olgu võimalik korraldada kahe kumera hulktahuka tahkude vahel üksühest vastavust nii, et iga kahe vastava tahu välised

¹ Esimese kahe teoreemi tõestused ja järgneva siiakuuluva materjali leiab lugeja Ljusterniki raamatust [18], kolmanda teoreemi tõestuse Delone, Padurovi ja Aleksandrovi raamatust [10].

² Aleksandrov, Aleksandr Danilovič — akadeemik, Stalini preemia laureaat, mitmete uurimuste autor kumerate kehade ja pindade geomeetria alal.

normaalid on paralleelsed ja samasuunalised; kui iga kaks vastavat tahku on niisugused, et ühtki neist ei saa lükke abil paigutada teise sisse, siis hulktahukad on võrdsed.

Seejuures ütleme, et hulknurga P_1 «saab lükke abil paigutada hulknurga P_2 sisse», kui leidub järgmiste omadustega lüke (§ 137): hulknurk P_1 teisendub selle lükkega hulknurgaks P'_2 , mille ükski punkt ei asetse väljaspool hulknurka P_2 ja vähemalt üks külg asetseb hulknurga P_2 sees.

Lõpuks, kolmas teoreem kuulub samuti A. D. Aleksandrovile ja kõlab nii:

Kui kumera hulktahuka igal tahul leidub sümmeetriakeskpunkt, siis leidub sümmeetriakeskpunkt ka hulktahukal endal.

Toonitame, et ükski neist teoreemidest ei jää kehtima, kui vaadelda ka mittekumeraid hulktahukaid.

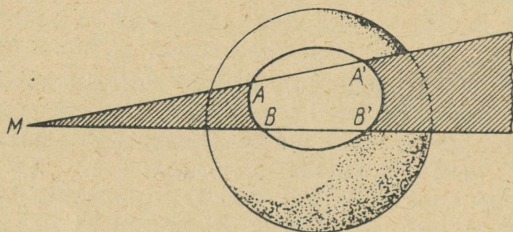
Kerade geomeetria elemendid.

§ 172. Punkti potents kera suhtes.

Esimese osa X peatükis vaadeldud ringjoonte omadusi saab üldistada kerade juhule ruumis. Et vastavate teoreemide tõestused on paljudel juhtudel analoogilised ringjoonte kohta käivate teoreemide tõestustega, siis käsitleme neid lühidalt ja jätame lugeja hooleks vajalike arutluste täieliku teostamise, juhindudes vajaduse korral X peatüki tekstist.

Teoreemi 165 (I, X ptk.) saab järgmiselt üldistada kera juhule.

Teoreem 370. *Kui läbi mingi punkti M tõmmata mõned kera lõikajad, siis kaugustel punktist M kuni iga lõikaja ja kera kahe lõikepunktini on jääv korrutis (antud punkti puhul); see korrutis säilitab oma väärtuse ka juhul, kui lõikaja ja kera lõikepunktid ühtivad, s. t. kui lõikaja muutub puutujaks.*



Joonis 141.

Tõestus. Oletame, et mingi üks lõikaja, mis läbib keral mitte asetsevat punkti M , lõikab seda kera punktides A ja A' ning teine sama punkti läbiv lõikaja punktides B ja B' (joonis 141). Neli punkti A , A' , B ja B' asetsevad ühel ja samal ringjoonel, nimelt antud kera ja tasapinna MAB lõikejoonel. Teoreemi 165 põhjal siis $MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$. Analoogiliselt saab arutleda ka juhul, kui üks kahest lõikajast asendub puutujaga.

Jäävat korrutist, millest kõneldakse teoreemis 370 ja mis on

võetud vastava märgiga, nimetatakse punkti M potentsiks kera suhtes; punkti potents kera suhtes loetakse positiivseks või negatiivseks sõltuvalt sellest, kas antud punkt asetseb väljaspool kera või kera sees; keral asetseva punkti potents on võrdne nulliga.

Kasutades suunaga lõikude tähiseid, saab punkti M potentsi kera suhtes anda kujul

$$\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = \overline{MB} \cdot \overline{MB'} = \dots$$

Teoreemi 165 järeldused 1—2 saab otseselt üle kanda kera juhule.

Järeldused. 1. *Punkti M potents kera suhtes, mille keskpunkt on O ja raadius r , võrdub igal juhul (märgi ja suuruse poolest) avaldisega $MO^2 - r^2$.*

2. *Välise punkti M potents kera suhtes võrdub punktist M keralle tõmmatud puutuva ruuduga (lugedes puutujat punktist M kuni puutepunkti).*

Punkti potentsiga kera suhtes seotud küsimuste käsitlemisel osutub otstarbekohaseks vaadelda punkti kerana, mille raadius võrdub nulliga, ja nimetada teda null-keraks. Punkti M potents nullkera (punkti) O suhtes on MO^2 .

§ 173. Radikaaltasapind, radikaaltelg, radikaalpunkt.

Kahe ringjoone radikaaltelje ja kolme ringjoone radikaalpunkti mõisted ning nende omadused saab järgmiselt üle kanda ruumile.

Geomeetriline koht XLIII. *Geomeetriliseks kohaks punktidele, milledest igaühel on võrdsed potentsid kahe antud mittekontsentrilise kera suhtes, on keskpunktide sirgega ristuv tasapind.*¹

Seda tasapinda nimetatakse kahe kera potentsitasapinnaks ehk radikaaltasapinnaks.

Geomeetrilise koha XLIII tuletamine ei erine milleski geomeetrilise koha XI tuletamisest (I, § 81); ainult geomeetrilise koha VII asemel tuleb toetuda geomeetrilisele kohale XXVI.

Kahe ringjoone radikaaltelje omadustele 1—8, mis on loetletud paragrahvis 81, vastavad radikaaltasapinna analoogilised omadused.

1. *Kui kaks kera lõikuvad mööda ringjoont, siis nende radikaaltasapinnaks on tasapind, millel asetseb see ringjoon.*

2. *Kui kaks kera puutuvad teineteist, siis radikaaltasapinnaks on kerad nende ühises punktis puutuv tasapind.*

3. *Kui kahel keral ei ole ühiseid punkte, siis ei ole ka radikaaltasapinnal antud keradega ühiseid punkte.*

¹ Kahel kontsentrilisel keral ei ole radikaaltasapinda, sest võrdus $MO^2 - r^2 = MO'^2 - r'^2$ on võimatu juhul $r \neq r'$.

4. Kui kaks kera asetsevad teineteisest väljaspool, siis radikaaltasapind lõikab keskpunktide sirget nende kerade vahel.

5. Kui kahest mittekontsentrisest kerast üks asetseb teise sees, siis radikaaltasapind on väljaspool mõlemat kera.

6. Kahe kera radikaaltasapind (kui keradel ei ole ühiseid punkte) või tema osa, mis on väline mõlema kera suhtes, on geomeetriliseks kohaks punktidele, milledest saab kahele antud kerale tõmmata võrdsed puutujad (lugedes puutujaid antud punktidest kuni puutepunktideni).

7. Kui kahel keral leidub ühine puutuja, siis nende radikaaltasapind poolitab ühise puutuja lõigu puutepunktide vahel.

Võtame edasi tarvitusele ortogonaalsete kerade mõiste. Kaht kera nimetatakse teineteisega ortogonaalseteks juhul, kui nende puutuvad tasapinnad kerade ühes (ükskõik missuguses) lõikepunktis on teineteisega risti. Teisiti võib öelda, et kaks kera on ortogonaalsed, kui nende ühte ühisesse punkti tõmmatud raadiused on teineteisega risti.

Radikaaltasapinna omadusest 6 tuleneb nüüd veel üks tema omadus.

8. Radikaaltasapinna iga punkt, mis on väline mõlema kera suhtes, on mõlema antud keraga ortogonaalse kera keskpunktiks. Siirdume kolme kera juhule.

Teoreem 371. Kui kolme kera keskpunktid ei asetse ühel sirgel, siis läbivad nendest keradest paariiti võetud kerade radikaaltasapinnad üht ja sama sirget.

Seda sirget nimetatakse kolme kera potentssirgeks ehk radikaalteljeks.

Tõestus. Et antud kolme kera keskpunktid O_1 , O_2 ja O_3 ei asetse ühel ja samal sirgel, siis kerade O_1 ja O_2 radikaaltasapind (mis on risti sirgega O_1O_2) ja kerade O_1 ja O_3 radikaaltasapind (mis on risti sirgega O_1O_3) lõikuvad mööda teatavat sirget l . Selle sirge l igal punktil M on üks ja sama potents nii kerade O_1 ja O_2 kui ka kerade O_1 ja O_3 suhtes. Järelikult asetseb see punkt M ka kerade O_2 ja O_3 radikaaltasapinnal. Niisiis kerade O_2 ja O_3 radikaaltasapind läbib ka sirget l .

Tõestatud teoreemist tuleneb järgmine geomeetriline koht.

Geomeetriline koht XLIV. Kui kolme kera keskpunktid ei asetse ühel sirgel, siis geomeetriliseks kohaks punktidele, milledest igaühel on võrdsed potentsid kõigi kolme kera suhtes, on antud kolme kera radikaaltelj.

Jätame lugeja enda uurida, missugusel määral kahe ringjoone radikaaltelje omadused 1—8 (I, § 81) laienevad kolme kera radikaaltelje juhule.

Kolme kera radikaaltelje omadusi saab kasutada järgmise ülesande lahendamisel.

Konstruksioon 144. Konstrueerida kahe antud kera radikaaltasapind.

Kui antud kerad lõikuvad või puutuvad teineteist, siis konstrueerimisviis tuleneb otseselt radikaaltasapinna omadusest 1 või 2.

Üldisel juhul saab konstruksiooni teostada järgmisel viisil, mis pakub erilist huvi juhul, kui kerad ei lõiku.

Olgu O ja O' antud kerad. Konstrueerime mingi kera Γ' , mis lõikab kerased O ja O' mööda kaht ringjoont. Nende ringjoonte tasapindade lõikejoon l' asetseb antud kerade radikaaltasapinnal.

Konstruksiooni lõpetamiseks võib kas panna läbi sirge l'' (mis ristub sirgega OO') tasapinna, mis on risti antud kerade keskpunktide sirgega, või määrata uue kera Γ'' abil veel ühe sirge l'' , mis asetseb radikaaltasapinnal.

Vaatleme lõpuks nelja kera juhtu.

Teoreem 372. *Kui nelja kera keskpunktid ei asetse ühel tasapinnal, siis neist keradest kahekaupa võetud kerade radikaaltasapinnad ja kolmekaupa võetud kerade radikaalteljed läbivad üht ja sama punkti.*

Seda punkti nimetatakse nelja kera potentspunktiks ehk radikaalpunktiks.

Tõestus. Et antud kerade keskpunktid O_1, O_2, O_3 ja O_4 ei asetse ühel tasapinnal, siis kerade O_1 ja O_2, O_1 ja O_3, O_1 ja O_4 kolm radikaaltasapinda ei ole paralleelsed ühe ja sama sirgega. Järelikult nad lõikuvad mingis punktis I . Sel punktil I on üks ja sama potents kõigi nelja kera suhtes ja ta asetseb seetõttu ka kerade O_2 ja O_3, O_2 ja O_4, O_3 ja O_4 radikaaltasapindadel. Punkt I asetseb ka neil sirgetel, mida mööda kahekaupa lõikuvad kuus radikaaltasapinda, s. t. kolmekaupa võetud kerade radikaaltelgedel.

Tõestatud teoreemist tulenevad järeldused on täiesti analoogilised teoreemi 166 järeldustega 1—4 (I, § 82).

§ 174. Kerade kimp.

Kui kerade O_1 ja O_2 radikaaltasapind ühtib kerade O_1 ja O_3 radikaaltasapinnaga, siis on kerge näha, et sama tasapind on ka kerade O_2 ja O_3 radikaaltasapinnaks. See märkus õigustab järgmise definitsiooni vastuvõtmist.

Kerade kimbuks nimetatakse kõikide nende kerade kogu, mille paaridel on üks ja sama radikaaltasapind. Seda ühist radikaaltasapinda nimetatakse kimburadikaaltasapinnaks.

Sellest definitsioonist järeldub vahetult (võrrelda I, § 83), et kerade kimp on täiesti määratud tema kahe kera andmisega või tema ühe kera ja radikaaltasapinna andmisega ja et kimbu kerade keskpunktid asetsevad ühel ja samal sirgel — kimbu keskpunktide sirgel.

Edasi veendume, nagu I osa paragrahvis 83, et kerade kimp on kolm tüüpi: 1) elliptiline kimp, mis koosneb kõikidest üht ja sama ringjoont läbivatest keradest; 2) paraboolne kimp, mis koosneb kõikidest üksteist ühises punktis puutuvatest keradest; 3) hüperboolne kimp, mis koosneb ühiseid punkte mitte oma-

vatest keradest. Konkreetse kujutluse saamiseks hüperboolsest kerade kimbust lõikame selle kimbu keradid mingi tasapinnaga, mis läbib keskpunktide sirget. Lõikes saame hüperboolse ringjoonte kimbu; selle ringjoonte kimbu radikaalteljeks on antud kerade kimbu radikaaltasapinna ja lõiketasapinna lõikejoon ning ringjoonte kimbu keskpunktide sirgeks antud kerade kimbu keskpunktide sirge.

Elliptiline kerade kimp ei sisalda ühtki null-kerad, s. t. ühtki kerad, mille raadius võrdub nulliga. Paraboolne kimp sisaldab üht null-kerad, milleks on kõikide kimbu kerade ühine puutepunkt. Hüperboolne kerade kimp sisaldab, analoogiliselt hüperboolse ringjoonte kimbuga, kaks null-kerad (kaks punkti); neid kaht null-kerad nimetatakse kerade kimbu piirpunktideks.

Kerade kimbu omadustest saab endale luua üsna konkreetse kujutluse, kui teda vaadelda kujundina, mis tekib teatava ringjoonte kimbu kõikide ringjoonte «pöörlemisel» ümber selle kimbu keskpunktide sirge.

Nii saab peaaegu ilmseks ka kerade kimbu järgmine omadus.

Teoreem 373. *Läbi iga punkti, mis ei asetse kimbu radikaaltasapinnal, läheb üks ja ainult üks kimbu kerad.*

Vaatleme nüüd järgmist konstruktsioonülesannet, mida allpool tuleb kasutada.

Konstruktsioon 145. Konstrueerida antud kimpu kuuluv kerad, mis puutub antud kerad (vrd. I, § 84, konstruktsioon 56).

Olgu Ω antud kerad, λ kimbu radikaaltasapind ja O üks kimbu keradest.

Tähistame otsitava kerad tähega O' ja tema puutepunkti keraga Ω tähega T' . Kerade O' ja Ω ühine puutuv tasapind τ punktis T' on nende kerade radikaaltasapinnaks ja tasapind λ on kerade O ja O' radikaaltasapinnaks. Järelilikult läbib kerade O ja Ω radikaaltasapind λ' tasapindade τ ja λ lõikejoont l .

Siit tuleneb järgmine konstruktsioon. Konstrueerime kerade O ja Ω radikaaltasapinna λ' . Läbi tasapindade λ ja λ' lõikesirge l paneme kerad Ω puutuvad tasapinnad. Nende puutuvate tasapindade puutepunktid T' ja T'' ongi punktideks, kus kerad Ω puutub otsitavaid keradid O' ja O'' . Viimaste keskpunktid asetsevad punktides, kus sirged $\Omega T'$ ja $\Omega T''$ lõikavad kimbu keskpunktide sirget (on kerge näha, et need sirged lõikavad keskpunktide sirget).

Ülesandel võib olla kaks lahendit või üks lahend või mitte ühtki lahendit.

Selle ülesande erijuhuks on järgmine ülesanne.

Konstruktsioon 146. Konstrueerida kerad, mis puutub antud kerad ja läbib kolme antud punkti (mis ei asetse antud keral).

On ilmne, et kerad, mis läbivad kolme antud punkti, läbivad ka üht ja sama ringjoont ja moodustavad seepärast kimbu. Konstruktsiooni teostamise jätab lugeja hooleks (vrd. I, § 84, konstruktsioon 57).

Konstruktsiooni 146 teostamisel mängib olulist osa eeldus, et ükski antud punktidest ei asetse antud keral. Tõepoolest, järgmise ülesande lahendusest nähtub, et antud kerad puutuva ja kolme antud

punkti läbiva kera konstrueerimise ülesandel üldiselt ei ole lahen-
dit, kui üks antud punkt asetseb antud keral.¹

Konstruksioon 147. Konstrueerida kera, mis puutub
antud kera tema antud punktis ja läbib teist antud punkti.

Olgu O antud kera keskpunkt, T antud puutepunkt ja A teine antud
punkt.

Otsitava kera keskpunktiks on punkt, kus sirge OT lõikab tasapinda, mis
on risti lõiguga AT ja läbib selle keskpunkti.

§ 175. Antud kerasad puutuvad kerad.

Kaht antud kera puutuvate kerade uurimisel on oluline osa järg-
misel mõistel. Kaht punkti A ja A' , mis asetsevad vastavalt kera-
del O ja O' , nimetame nende kerade antihomoteetseteks
punktideks² nende ühe sarnasuskeskpunkti suhtes (§ 157),
kui sirge AA' läbib seda sarnasuskeskpunkti S , kuid punktid A ja
 A' ei ole homoteetsed punkti S suhtes.

Antihomoteetsedel punktidel on järgmine omadus.

Teoreem 374. *Kahe kera välise sarnasuskeskpunkti kaugused
igast kahest selle sarnasuskeskpunkti suhtes antihomoteetsest punk-
tist omavad (absoluutväärtuselt ja märgilt) üht ja sama korrutist.*

*Sama omadus on ka seesmise sarnasuskeskpunkti suhtes anti-
homoteetsedel punktidel.*

Selle teoreemi tõestus on sama, mis vastaval teoreemil kahe
ringjoone kohta tasapinnal (I, teoreem 169).

Jäävat korrutist, millest kõneldakse teoreemis, nimetatakse
mõnikord kahe kera ühispotentsiks, nimelt väliseks või
seesmiseks ühispotentsiks sõltuvalt sellest, kas vaadeldav sar-
nasuskeskpunkt on väline või seesmine.

Teoreem 375. *Iga kera, mis puutub kaht antud kera, puutub
neid kahes antihomoteetses punktis; kui kera puutub mõlemat antud
kera ühel ja samal viisil (s. o. mõlemat väliselt või mõlemat sees-
miselt), siis puutepunktid on antihomoteetsed välise sarnasuskesk-
punkti suhtes, kui aga erinevatel viisidel (s. o. üht väliselt, teist
seemiselt), siis seesmise sarnasuskeskpunkti suhtes.*

Järeldus. *Välisel (seesmisel) sarnasuskeskpunktil on kõi-
kide kaht antud kera ühel ja samal viisil (vastavalt erinevatel vii-
sidel) puutuvate kerade suhtes üks ja sama potents, mis võrdub
antud kerade välise (vastavalt seesmise) ühispotentsiga.*

Teoreem 376. *Kera, mis läbib kahe kera kaht antihomoteetsel
punkti ja puutub üht neist keradest, puutub ka teist.*

Nende teoreemide tõestused on samad, mis vastavatel teoree-

¹ Võrrelda sellega, mis on öeldud paragrahvis 159 konstruksioonide 132
ja 133 puhul.

² Laiemalt on kasutamisel nende punktide teine nimetus — antihomoloo-
gilised punktid.

midel kahe ringjoone kohta tasapinnal (I, teoreemid 170—171), ja seepärast me neid ei anna.

Rakendame nüüd kaht antud kera puutuvate kerade vaadeldud omadusi järgmise ülesande lahendamiseks (vrd. I, konstruktsioon 58).

Konstruktsioon 148. Konstrueerida kera, mis puutub kolme antud kera (millede keskpunktid ei asetse ühel ja samal sirgel) ja läbib antud punkti, mis ei asetse antud keradel.

Esimene viis. Olgu vaja konstrueerida kera Ω , mis puutub kolme antud kera O_1 , O_2 ja O_3 ning läbib antud punkti M . Vaatleme juhtu, kus otsitav kera puutub kõiki kolme antud kera ühel ja samal viisil.

Tähistame tähega S_{12} kerade O_1 ja O_2 välise sarnasuskeskpunkti, tähega N sirge SM ja otsitava kera teise löikepunkti ning tähtedega K_1 ja K_2 kerade O_1 ja O_2 mingid punktid, mis on antihomoteetsed S_{12} suhtes (näiteks keskpunktide sirgel asetsevad punktid). Kaht antud kera puutuvate kerade omadustest järeldub, et $\overline{SM} \cdot \overline{SN} = \overline{SK_1} \cdot \overline{SK_2}$. See võrdus võimaldab konstrueerida löiku SN ja punkti N .

Analoogiliselt saab konstrueerida ka sirge $S_{13}M$ ja otsitava kera teise löikepunkti P , kus S_{13} on kerade O_1 ja O_3 väline sarnasuskeskpunkt. Pärast punktide N ja P konstrueerimist taandub ülesanne konstruktsioonile 146.

Kolme antud kera erinevatel viisidel puutuvad kerad konstrueeritakse analoogiliselt; ainult mõlemad välised sarnasuskeskpunktid S_{12} ja S_{13} või üks neist tuleb asendada samade kerade seesmistest sarnasuskeskpunktidega.

Ülesande suurim võimalik lahendite arv on kaheksa. Tõepoolest, tuleb ju vaadelda nelja sarnasuskeskpunktide kombinatsiooni S_{12} S_{13} , S_{12}^* S_{13} , S_{12} S_{13}^* ja S_{12}^* S_{13}^* ; iga kombinatsiooni puhul neist neljast annab vastav konstruktsioon 146 ülimalt kaks lahendit.

Sama ülesande teist lahendusviisi vaatleme hiljem (§ 176).

Analoogiliselt, kuid mõnevõrra lihtsamalt lahendub järgmine ülesanne.

Konstruktsioon 149. Konstrueerida kera, mis puutub kaht antud kera ja läbib kaht antud punkti, mis ei asetse antud keradel.

Jätame lugeja hooleks lahendada see ülesanne analoogiliselt äsjavaadeldud lahendusega. Suurim lahendite arv on neli.

Teist lahendusviisi vaatleme hiljem (§ 176).

Konstruktsioonide 148 ja 149 sõnastustes sisalduv eeldus, et ükski antud punktidest ei asetse antud keradel, on oluline. Tõepoolest, üldiselt ei leidu ühtki kera, mis puutuks kolme antud kera ja seejuures üht neist antud punktis, ja ei leidu ühtki kera, mis puutuks kaht antud kera ja seejuures üht neist antud punktis ning peale selle läbiks teist antud punkti. See nähtub järgmise ülesande lahendusest.¹

Konstruktsioon 150. Konstrueerida kera, mis puutub kaht antud kera ja seejuures üht neist antud punktis.

¹ Võrrelda sellega, mis on öeldud paragrahvis 159 konstruktsioonide 132 ja 133 puhul.

Olgu O ja O' antud kerade keskpunktid ja T antud punkt, kus otsitav kera puutub kera O .

Otsitava kera keskpunktiks on sirgete OT ja $O'T'$ lõikepunkt, kus T' on punktiga T antihomoteetne punkt kahe kera ühe sarnasuskeskpunkti suhtes. Suurim lahendite arv on kaks (üks kummagi sarnasuskeskpunkti puhul).

§ 176. Inversioon.

Inversiooni mõistet ja omadusi (I, §§ 87—89) saab järgmiselt laiendada ruumile.

Olgu antud kera, mille keskpunkt on P ja raadius r . Kaht punkti M ja M' , mis asetsevad antud raadiusega r kera keskpunktist P väljuval ühel ja samal kiirel, nimetatakse teineteisega inversseteks punktideks selle kera suhtes, kui nende kaugused keskpunktist rahuldavad seost

$$PM \cdot PM' = r^2.$$

On ilmne, et antud kera mingi punktiga inversne punkt ühtib selle punktiga ja et kera keskpunktil puudub temaga inversne punkt.

Vastavust inverssete punktide vahel ehk, teiste sõnadega, teiseendust, millega saadakse igast punktist M temaga inversne punkt M' , nimetatakse inversiooniks kera suhtes ehk hüperboolseks inversiooniks. Kera ennast nimetatakse inversioonikeraks, tema keskpunkti inversioonipooluseks (ehk inversioonikeskpunktiks) ja tema raadiuse ruutu inversiooni potentsiks. Kaht mingis inversioonis teineteisele vastavat kujundit nimetatakse teineteisega inversseteks kujunditeks.

Niisiis inversioon kujutab endast üksühest ruumpunktide (välja arvatud punkt P) teiseendust. Inversioonipoolusel puudub inversne punkt.

Punktidevaheline vastavus inversioonis on vastastikune: kui punkt M' vastab punktile M , siis ka punkt M vastab punktile M' . Inversioonikera iga punkt on kahekordne punkt.

Vaatleme nüüd, kuidas inversiooni puhul teisenduvad tasapinnad, kerad, sirged ja ringjooned.

Teoreem 377. *Inversioonipoolust läbiv tasapind vastab iseendale. Inversioonipoolust mitte läbivale tasapinnale vastab seda poolust läbiv kera.*

Tõestus. Teoreemi esimene pool tuleneb inversiooni definitioonist endast. Tema teise poole tõestamisel saab kasutada sama mõttekäiku, mis tasapinnageomeetrias teoreemi 173 tõestamisel.

Järeldused. 1. *Inversioonipoolust läbivale kerale vastab tasapind, mis ei läbi seda poolust.*

2. *Inversioonipoolust läbiv sirge vastab iseendale. Inversiooni-*

poolust mitte läbivale sirgele vastab ringjoon, mis läbib inversioonipoolust, ja ümberpöördult.

Tõepoolest, iga sirget saab vaadelda kahe tasapinna lõikejoonena ja iga ringjoont kera lõikejoonena.

Teoreem 378. *Inversioonipoolust mitte läbivale kerale vastab kera, mis samuti ei läbi seda poolust; inversioonipoolus ühtib nende kahe kera ühe sarnasuskeskpunktiga.*

Tõestus on täiesti analoogiline tasapinnageomeetria teoreemi 174 tõestusega.

Järeldus. *Inversioonipoolust mitte läbivale ringjoonele vastab ringjoon, mis samuti ei läbi inversioonipoolust.*

Tõepoolest, ringjoont saab vaadelda kahe kera lõikejoonena.

Inversiooni muud omadused, mis on vaadeldud raamatu esimese osa paragrahvides 87—89, on samuti laiendatavad ruumile. Piirdume kõige olulisemaga neist — nurgapüsiga.

Kahe kera vaheliseks nurgaks nimetatakse iga nurka nende kenade ühest (ükskõik missugusest) ühisest punktist läbi pandud puutuvate tasapindade vahel.

Üks neist kahest nurgast on võrdne nurgaga nende kerade ühisesse punkti tõmmatud raadiuste vahel (täpsemalt nurgaga kahe kiire vahel, mis väljuvad kerade ühisest punktist ja läbivad vastavalt nende keskpunkte). Kahe kera vaheline nurk on null või kaks täisnurka, kui kerad puutuvad teineteist.

Kera ja tasapinna vaheliseks nurgaks nimetatakse iga nurka kera ja tasapinna mingist ühisest punktist tõmmatud kera puutuva tasapinna ja antud tasapinna vahel. Need nurgad on vastavalt võrdsed nurkadega, mis antud tasapinna ja kera lõikepunkti tõmmatud raadius moodustab antud tasapinna ristsirgega.

Teoreem 379. *Kahe kera vaheline nurk on võrdne nendega inverssete kerade vahelise nurgaga; see omadus kehtib ka juhul, kui mõned siin nimetatud keradest asenduvad tasapindadega.*

Tõestus. Olgu P inversioonipoolus ning O ja O_1 antud kahe lõikuva kera keskpunktid. Vaatleme kujundit, mille saame antud kerade ja nendega inverssete kerade lõikamisel tasapinnaga POO_1 (kui punktid P , O ja O_1 asetsevad ühel sirgel, siis mistahes tasapinnaga, mis läbib seda sirget). Rakendades saadud kujundile teoreemi 175, saamegi inversiooni vaadeldava omaduse kindlaks teha.

Analoogiline arutlus on läbiviidav ka juhul, kui üks keradest O ja O_1 või nad mõlemad on asendatud tasapindadega; antud kera keskpunkti läbiva lõiketasapinna asemel tuleb siis vaadelda antud tasapinnaga ristuvat lõiketasapinda.

Inversiooni kera suhtes saab järgmiselt üldistada.

Olgu antud punkt P ja mingi jääv arv $h \neq 0$. Kaht punkti M

ja M' , mis asetsevad punktiga P ühel ja samal sirgel ja rahuldavad tingimust

$$\overline{PM} \cdot \overline{PM'} = h,$$

nimetatakse inversseteks punktideks. Punktide M ja M' vahel aset leidev vastavus on inversioon, punkt P — inversioonipoolus, konstant h — inversiooni potents; paariti inverssetest punktidest koosnevad kujundid on inverssed kujundid.

Kui $h > 0$, siis võime eeldada, et $h = r^2$. Vastavad punktid M ja M' asetsevad siis ühel ja samal punktist P väljuval kiirel ja me saame hüperboolse inversiooni ehk inversiooni kera suhtes, mille keskpunktiks on P ja raadiuseks r .

Kui $h < 0$, siis saame uut liiki inversiooni — elliptilise inversiooni. Erinevalt hüperboolsest inversioonist ei ole elliptilises inversioonis ühtki kahekordset punkti; tõe poolest, võrdus $PM^2 = h$ ei ole võimalik, kui $h < 0$.¹

Elliptilise inversiooni uurimisel omab erilist tähtsust järgmine asjaolu.

Elliptiline inversioon potentsiga $h < 0$ on korrutis hüperboolsest inversioonist, mille poolus on seesama ja potents on $|h|$, ja peegeldusest, mille keskpunktiks on inversioonipoolus.

See elliptilise inversiooni omadus on peaaegu ilmne. Tõe poolest, vastaku punktile M antud elliptilises inversioonis, mille poolus on P ja potents $h < 0$, punkt M' ja sama poolusega ning potentsiga $|h|$ hüperboolses inversioonis punkt M'' . Saame

$$\begin{aligned} \overline{PM} \cdot \overline{PM'} &= h, \\ \overline{PM} \cdot \overline{PM''} &= |h| = -h, \end{aligned}$$

millest $\overline{PM'} = -\overline{PM''}$. Niisiis, punkti M' võib saada punktist M , teisendades viimase hüperboolse inversiooni abil punktiks M'' ja konstrueerides punktiga M'' punkti P suhtes sümmeetrilise punkti M' .

Kasutades äsjaöeldut, saame teoreemid 377—379 ilma ühegi muudatuseta otsekohe laiendada elliptilise inversiooni juhule.

Inversiooni rakendamise näidetena vaatleme järgmisi ülesandeid.

Konstruksioonid 134, 149 ja 151. Konstrueerida kera, mis puutub

- a) kaht antud tasapinda või
- b) kaht antud kera või
- c) antud tasapinda ja antud kera

¹ Terminid «hüperboolne inversioon» ja «elliptiline inversioon» seletuvadki just sellega, et esimesel juhul on olemas kahekordseid punkte, teisel juhul aga mitte (võrrelda I, lk. 257, märkus).

ning läbib kaht antud punkti, mis ei asetse antud tasapinnadel ega keradel.

Juhud, kus on antud kaks tasapinda (§ 159, konstruktsioon 134) või kaks kera (§ 175, konstruktsioon 149), on juba vaadeldud. Inversioon võimaldab anda üldise lahendusviisi, mis kõlbab nii neil kahel juhul kui ka juhul, kus on antud kera ja tasapind (konstruktsioon 151).

Olgu α ja β antud tasapinnad või kerad, A ja B antud punktid. Võtame punkti A inversioonipooluseks ja valime inversiooni potentsi vabalt. Konstrueerime keradega α ja β inverssed kerad α' ja β' ning punktiga B inversse punkti B' . Otsitav kera teisendub siis kerade α' ja β' ühiseks puutuvaks tasapinnaks, mis läbib punkti B' . Seda tasapinda me oskame konstrueerida (konstruktsioon 127). Punktid, kus see tasapind puutub kerad α' ja β' , on inversseteks punktideks punktidele, kus otsitav kera puutub kerad (või tasapindu) α ja β .

Kui on antud kaks kera või kera ja tasapind, siis saab inversiooni potentsi otstarbekohasel valikul konstruktsiooni mõnevõrra lihtsustada.

Oletame, et α on kera. Võtame inversiooni potentsiks punkti A potentsi kera α suhtes. Kera α' ühtib siis keraga α ja konstruktsioon kujuneb järgmiseks. Konstrueerime punktiga B inversse punkti B' . Läbi punkti B' paneme ühised puutuvad tasapinnad kerale α ja keraga (või tasapinnaga) β inverssele kerale β' . Nende ühiste puutuvate tasapinnadega inverssed kerad ongi otsitavad.

Suurim lahendite arv on neli.

Konstruktsioonid 132, 148, 152 ja 153.

Konstrueerida kera, mis puutub

- kolme antud tasapinda või
- kolme antud kera või
- kaht antud kera ja antud tasapinda või
- kaht antud tasapinda ja antud kera

ning läbib antud punkti, mis ei asetse antud keradel ega tasapinnadel.

Juhud, kus on antud kolm tasapinda (§ 159, konstruktsioon 132) või kolm kera (§ 175, konstruktsioon 148), on juba vaadeldud. Inversioon võimaldab anda üldise lahendusviisi, mis kõlbab nii neil kahel juhul kui ka juhul, kus on antud kaks kera ja üks tasapind (konstruktsioon 152) või kaks tasapinda ja üks kera (konstruktsioon 153).

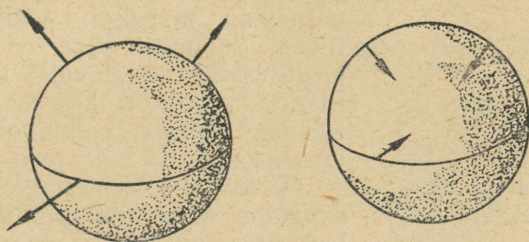
Olgu α , β ja γ antud tasapinnad või kerad ja A antud punkt. Võtame punkti A inversioonipooluseks, valides inversiooni potentsi vabalt. Konstrueerime keradega α , β ja γ inverssed kerad α' , β' ja γ' . Otsitav kera teisendub siis kerade α' , β' ja γ' ühiseks puutuvaks tasapinnaks. Seda tasapinda me oskame konstrueerida (konstruktsioon 129). Punktid, kus see tasapind puutub kerad α' , β' ja γ' , on inversseteks punktideks punktidele, kus otsitav kera puutub kerad (tasapindu) α , β ja γ .

Konstruktsiooni saab inversiooni potentsi otstarbekohase valikuga jälle mõnevõrra lihtsustada, kui andmete seas on vähemalt üks kera. Oletame, et α on kera. Kui inversiooni potentsiks võtta punkti A potentsi kera α suhtes, siis kera α' ühtib keraga α , nii et konstrueerida jääb ainult keradega β ja γ inverssed kerad β' ja γ' .

Suurim lahendite arv on kaheksa.

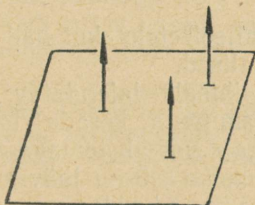
§ 177. Suunaga kerad. Dilatatsioon.

Suunaga kera mõistet on kõige lihtsam defineerida järgmiselt. Määrame kera igas punktis tema normaalil, s. o. seda punkti kera keskpunktiga ühendaval sirgel, positiivse suuna, valides kõik need suunad ühte viisi kera suhtes välisesse piirkonda või kõik ühte viisi seesmisse piirkonda.¹ Kera, mille igas punktis on niiviisi

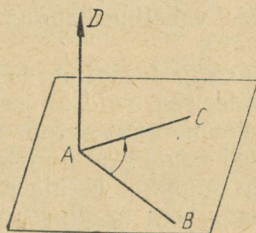


Joonis 142.

suund välisesse piirkonda loetud positiivseks või mille igas punktis on suund seesmisse piirkonda loetud positiivseks, nimetatakse suunaga (ehk orienteeritud) keraks; esimesel juhul nimetame teda positiivse suunaga, teisel juhul negatiivse suunaga keraks (joonis 142).



Joonis 143.



Joonis 144.

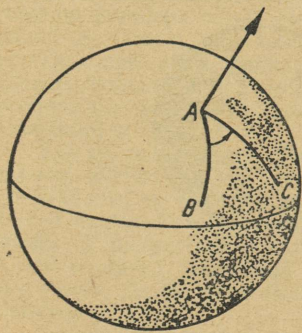
Suunaga kerade vaatlemisel tuleb ka tasapindu vaadelda suunaga tasapindadena. Tasapinda nimetame suunaga (ehk orienteeritud) tasapinnaks, kui selle tasapinna kõigil ristsirgetel on valitud positiivne suund ühele ja samale poole tasapinnast (joonis 143). Seejuures suundade võrdlemine on võimalik ainult paralleelsete tasapindade korral (nii et ei saa kõnelda positiivse või negatiivse suunaga tasapindadest).

Märkus. Tasapinnageomeetrias kasutasime teist orienteeritud tasapinna definitsiooni (I, § 8): me nimetasime tasapinda orienteerituks, kui temal oli valitud nurkade positiivne suund.

¹ Kera kahes diametraalses punktis tuleb ühel ja samal sirgel võtta kaks vastandsuunda.

Orienteeritud ruumis (§ 110) need kaks definitsiooni osutuvad teineteisest tulenevaiks. Tõepoolest, antud tasapinnal asetseva nurga BAC positiivse suuna valikuga on määratud positiivne suund AD normaali ja ümberpöörduvalt, kui nõuda, et kolmetahuline nurk $ABCD$ oleks alati positiivse suunaga (joonis 144).

Analoogiline märkus käib ka kera kohta; normaali positiivse suuna valimise asemel võib keral valida nurkade positiivse suuna (joonis 145). Selles mõttes võib suunaga kera mõistet vaadelda suunaga ringjoone mõiste üldistusena (I, § 92).



Joonis 145.

Suunaga kera raadiust on loomulik varustada märgiga: positiivse (negatiivse) suunaga kera raadiuse loome positiivseks (vastavalt negatiivseks). Punkti loome seal, kus see on küsimuse iseloomu kohane, suunaga keraks raadiusega null.

Õeldakse, et suunaga kera puutub suunaga tasapinda ainult sel juhul, kui kera puutub tasapinda harilikus mõttes ja tasapinna ristsirgel valitud suund ühtib suunaga, mis on valitud puutepunktist tõmmatud kera normaali. Analoogiliselt defineerime, et kaks suunaga kera puutuvad teineteist ainult juhul, kui nad puutuvad teineteist

harilikus mõttes ja puutepunktist tõmmatud normaali suunad ühtivad. Kahe teineteist puutuva suunaga kera keskpunktide vaheline kaugus ja raadiused on seotud valemiga $OO' = |r - r'|$.

Kaht suunaga tasapinda loome paralleelseteks, kui nad on mitte ainult paralleelsed, vaid ka samasuunalised.

Dilatatsiooni mõiste on samuti lihtsalt laiendatav ruumile. Dilatatatsiooniks nimetatakse suunaga kerade teisendust, milles igale suunaga kerale raadiusega r vastab temaga konsentriiline suunaga kera raadiusega $r + a$, kus $a \geq 0$ on jääv arv, mida nimetatakse dilatatsiooni parameetriks.

Jätame lugeja hooleks jälgida, kuidas üldistuvad ruumile I osa paragrahvis 93 vaadeldud dilatatsiooni omadused, ja eriti näidata, et dilatatsioon teisendab suunaga tasapinna jälle suunaga tasapinnaks.

Suunaga kera ja dilatatsiooni mõiste rakenduste näidetena esitame järgmised ülesanded.

Konstruktioon 129. Konstrueerida kolme antud kera ühisest puutuvad tasapinnad.

Esimene viis selle ülesande lahendamiseks on juba vaadeldud (§ 157).

Teine viis. Olgu $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$ ja $O_3(r_3)$ antud kerad; konkreetsuse mõttes valime tähised nii, et $r_1 \geq r_2 \geq r_3$.

Alustame ühiste väliste puutuvate tasapindade otsimisega. Kolme kera ühist puutuvat tasapinda nimetatakse väliseks, kui kõigi kolme kera keskpunktid asetsevad sellest tasapinnast ühel ja samal pool, teisiti öeldes,

kui kõigi kolme kera raadiused, mis on tõmmatud puutepunktidesse, on samasuunalised.

Vaatleme antud kolme kera suunaga keradena. Selleks, et nende ühist välist puutuvat tasapinda saaks vaadelda antud kolme suunaga kera ühise, suunaga puutuva tasapinnana, tuleb neile anda üks ja sama, näiteks positiivne suund. Kõigi kolme kera raadiusi tuleb seejuures samuti vaadelda positiivsetena.

Rakendame nüüd antud kolme suunaga kera ja nende ühise otsitava välise puutuva tasapinna suhtes dilatatsiooni parameetriga $a = -r_3$. Antud kerad teisenduvad vastavalt suunaga keradeks $O_1(r_1-r_3)$ ja $O_2(r_2-r_3)$ ning kolmanda antud kera keskpunktiks O_3 . Otsitav tasapind α teisendub viimase kahe kera ühiseks väliseks puutuvaks tasapinnaks α' , mis läbib punkti O_3 . Nii oleme jõudnud konstruktsiooni 127 juurde. Pärast tasapinna α' konstrueerimist ei paku tasapinna α konstrueerimine mingeid raskusi.

Analoogiliselt saab arutleda ka ühiste seesmiste puutuvate tasapindade konstrueerimisel. Kolme kera ühist puutuvat tasapinda nimetatakse seesmiseks, kui kahe antud kera keskpunktid asetsevad temast ühel pool ja kolmanda kera keskpunkt teisel pool ehk, teisiti öeldes, kui puutepunktidesse tõmmatud kolmest raadiusest kaks on samasuunalised, kolmas aga vastand-suunaline.

Ühiste seesmiste puutuvate tasapindade konstrueerimisel tuleb kaht antud kolmest kerast vaadelda samasuunalistena, kolmandat aga neile vastandsuunalisena.

Konstruktsioon 137. Konstrueerida kera, mis puutub kolme antud tasapinda ja antud kera.

Selle ülesande kaks lahendusviisi on juba antud (§ 159). Jätame lugeja hooldeks laiendada ruumi juhule ka tasapinnageomeetria vastava ülesande kolmas lahendusviis (I, § 94, konstruktsioonid 38' ja 38).

Konstruktsioon 148'. Konstrueerida kera, mis puutub antud kolme suunaga kera (millede keskpunktid ei asetse ühel sirgel) ja läbib antud punkti, mis ei asetse antud keradel (vrd. §§ 175 ja 176, konstruktsioon 148).

Erinevalt sellest, mis kehtib suunata kerade puhul, on suurim lahendite arv siin kaks. Tõepoolest, kui kõik kolm antud kera on samasuunalised (kaks antud kera on samasuunalised, kolmas aga neile vastandsuunaline), siis otsitav kera puutub kõiki kolme antud kera ühel ja samal viisil (vastavalt kaht kera ühel ja samal viisil, kolmandat aga teistsugusel viisil kui kaht esimest).

Konstruktsioon 154'. Konstrueerida suunaga kera, mis puutub antud nelja suunaga kera.¹

Olgu $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$, $O_3(r_3)$ ja $O_4(r_4)$ antud suunaga kerad ja $O(r)$ üks otsitavatest suunaga keradest. Konkreetseuse mõttes valime tähised nii, et $|r_1| \geq |r_2| \geq |r_3| \geq |r_4|$.

Rakendame antud nelja suunaga kera ja otsitava suunaga kera suhtes dilatatsiooni, mille parameeter $a = -r_4$. Siis antud kerad teisenduvad vastavalt suunaga keradeks $O_1(r_1-r_4)$, $O_2(r_2-r_4)$ ja $O_3(r_3-r_4)$ ning neljanda antud kera keskpunktiks O_4 . Otsitav kera teisendub uueks suunaga keraks $O(r-r_4)$, mis puutub viimast kolme suunaga kera ja läbib punkti O_4 . Nii jõuame konstruktsiooni 148' juurde. Pärast seda, kui punkt O kui kera $O(r-r_4)$ keskpunkt on konstrueeritud, ei paku otsitava kera $O(r)$ konstrueerimine mingeid raskusi.

Ülesandel leidub ülimalt kaks lahendit.

¹ Analoogiline ülesanne suunata kerade kohta tuleb vaatlemisele järgmises paragrahvis.

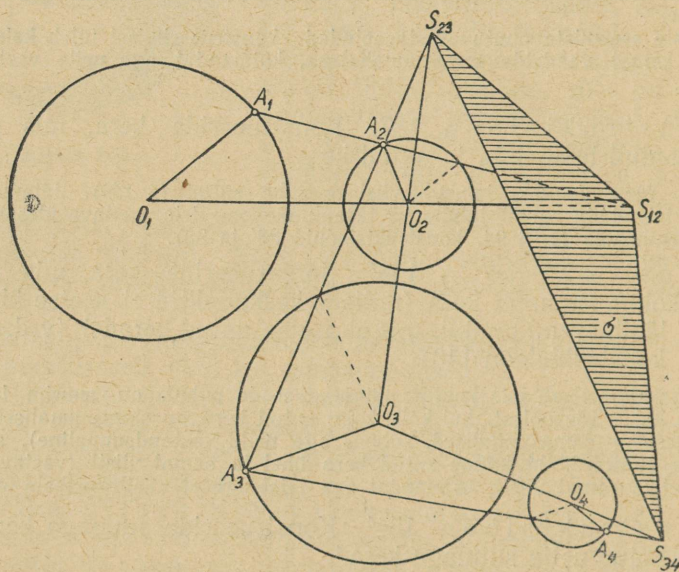
§ 178. Fermat' ülesanne.

Apolloniose ülesanne tasapinnal antud kolme ringjoont puutuva ringjoone konstrueerimisest on prantsuse matemaatiku Fermat¹ poolt järgmiselt laiendatud ruumile.

Konstruksioon 154 (Fermat' ülesanne). Konstrueerida kera, mis puutub nelja antud kera.

Vaatleme selle ülesande kaht erinevat lahendusviisi. Neist üks põhineb kaht antud kera puutuvate kerade omadustel, mida me vaatlesime paragrahvis 175, ja teine kasutab paragrahvis 177 tarvitusele võetud dilatatsiooni mõistet. Toonitame, et need lahendusviisid on täiesti analoogilised Apolloniose ülesande kahe vaadeldud lahendusviisiga (I, §§ 86 ja 94).

Esimene viis. Alustame nende kerade konstrueerimisega, mis puutuvad nelja antud kera O_1, O_2, O_3 ja O_4 ühel ja samal viisil (vt. skemaatilist joonist 146). Selleks vaatleme kera O_1 mistahes punkti A_1 . Tähistame



Joonis 146.

tähega A_2 kera O_2 punkti, mis on antihomoteetne punktiga A_1 välise sarnasuskeskpunkti S_{12} suhtes, tähega A_3 kera O_3 punkti, mis on antihomoteetne punktiga A_2 välise sarnasuskeskpunkti S_{23} suhtes, ja tähega A_4 kera O_4 punkti, mis on antihomoteetne punktiga A_3 välise sarnasuskeskpunkti S_{34} suhtes. Punkti S_{12} potents otsitava kera suhtes on (teoreemi 375 järelduse järgi) $S_{12} A_1 \cdot S_{12} A_2$. Analoogiliselt on punktide S_{23} ja S_{34} potentsid otsitava kera suhtes vastavalt $S_{23} A_2 \cdot S_{23} A_3$ ja $S_{34} A_3 \cdot S_{34} A_4$. Järelikult on igaühel

¹ Pierre Fermat (1601—1665) on tuntud oma töödega arvuteooria alalt («Fermat' teoreem») ja teistelt matemaatika aladelt.

punktidest S_{12} , S_{23} ja S_{34} üks ja sama potents nii otsitava kera kui ka kera $A_1A_2A_3A_4$ suhtes. Seetõttu tasapind $S_{12}S_{23}S_{34}$, s. o. antud kerade sarnasustasapind σ on otsitava kera ja kera $A_1A_2A_3A_4$ radikaaltasapinnaks.¹ Teisiti võib öelda, et otsitav kera kuulub kimpu, mis on määratud radikaaltasapinnaga σ ja keraga $A_1A_2A_3A_4$.

Üldust tuleneb järgmine konstruktsioon. Konstrueerime kerade O_1 ja O_2 välise sarnasuskeskpunkti S_{12} , kerade O_2 ja O_3 välise sarnasuskeskpunkti S_{23} , kerade O_3 ja O_4 välise sarnasuskeskpunkti S_{34} ja sarnasustasapinna σ , millel asetsevad need sarnasuskeskpunktid. Võtame keral O_1 vabalt punkti A_1 ja konstrueerime keral O_2 punkti A_2 , mis on S_{12} suhtes antihomoteetne punktiga A_1 , keral O_3 punkti A_3 , mis on S_{23} suhtes antihomoteetne punktiga A_2 , ja keral O_4 punkti A_4 , mis on S_{34} suhtes antihomoteetne punktiga A_3 . Lõpuks konstrueerime kimbust, mis on määratud radikaaltasapinnaga σ ja keraga $A_1A_2A_3A_4$, kera O_1 puutuva kera (konstruktsioon 145). Selleks ehitame kerade O_1 ja $A_1A_2A_3A_4$ radikaaltasapinna λ . Läbi tasapindade λ ja σ löikejoone paneme kera O_1 puutuva tasapinna. Selle puutuva tasapinna puutepunkt T ongi kera O_1 ja otsitava kera puutepunktiks. Otsitava kera keskpunkt O asetseb sirgel O_1T ja sirgel, mis läbib kera $A_1A_2A_3A_4$ keskpunkti Ω ning ristub sarnasustasapinnaga σ .

Konstrueeritud kera O läbib kera O_2 punkti, mis on S_{12} suhtes antihomoteetne punktiga T , sest punktil S_{12} on kerade $A_1A_2A_3A_4$ ja O suhtes üks ja sama potents. Järelikult kera O puutub (teoreemi 376 põhjal) ka kera O_2 . Samal viisil tõestame edasi, et konstrueeritud kera O puutub ka keradid O_3 ja O_4 .

Et läbi antud sirge (tasapindade σ ja λ löikejoone) saab panna ülimalt kaks tasapinda, mis puutuvad kera O_1 , siis nelja antud kera ühel ja samal viisil puutuva kera O konstrueerimise ülesandel saab olla kaks lahendit või üks lahend või mitte ühtki lahendit.

Seni vaatlesime ainult keradid, mis puutuvad nelja antud kera ühel ja samal viisil. Et konstrueerida keradid, mis puutuvad nelja antud kera mitte ühel ja samal viisil (näiteks keradid O_1 , O_2 ja O_3 ühel ja samal viisil, kuid keradid O_1 ja O_4 mitte ühel ja samal viisil jne.), peame kasutama teisi sarnasuskeskpunkte. Jõuame sama konstruktsiooni juurde, mis ülalpool, kuid milles üks või kaks sarnasuskeskpunktidest S_{12} , S_{23} , S_{34} või nad kõik on asendatud vastavate seesmist sarnasuskeskpunktidega S_{12}^* , S_{23}^* , S_{34}^* . Peaie ülalvaadeldud juhu, kus kera puutub nelja antud kera ühel ja samal viisil, peame siis vaatlema veel seitset juhtu: kolme juhtu, mis saame, kui võtame ühe seesmise sarnasuskeskpunkti ja kaks välist, kolme juhtu, mis saame, kui võtame kaks seesmist sarnasuskeskpunkti ja ühe välise, ja lõpuks üht juhtu, kus on teemist kolme seesmise sarnasuskeskpunktiga. Neile seitsmele juhule vastavad antud kerade seitse sarnasustasapinda, mis erinevad tasapinnast σ (§ 158).

Nelja antud kera puutuva kera konstrueerimise ülesandel saab niisiis olla ülimalt kuusteist lahendit. (Saab tõestada, et kui antud keradest iga kaks kera on teineteisest väljaspool, siis ükski sarnasustasapind ei löika ühtki antud kera ja kõik kuusteist lahendit on olemas. Kui aga näiteks kera O_1 asetseb kera O_2 sees ja kera O_3 sellest väljaspool, siis ülesandel ilmselt ei ole ühtki lahendit. Nelja kera vastastikuse asendi muudel juhtudel võib ülesandel olla ka vähem kui kuusteist lahendit.)

Teine viis. Olgu O_1 , O_2 , O_3 ja O_4 antud kerad ja O üks otsitavatest keradest.

Omistame ühele antud neljast kerast — ütleme kerale O_4 — teatava suuna, näiteks positiivse. Kerale O saab omistada niisuguse suuna, et ta puutub suunaga kera O_4 , ja keradele O_1 , O_2 ja O_3 niisugused suuna, et nad

¹ Juhtu, kus punktid S_{12} , S_{23} ja S_{34} asetsevad ühel ja samal sirgel, me ei vaatle.

kõik kolm puutuvad suunaga kera O . Fermat' ülesanne suunata kerade kohta taandub seega samaks ülesandeks suunaga kerade kohta — ülesandeks, mida vaatlesime ülalpool (konstruktsioon 154'). Seejuures saame kaheksa niisugust ülesannet, sest igaühele kolmest antud kerast O_1 , O_2 ja O_3 saab sõltumatult teistest omistada ühe kahest võimalikust suunast.

Et igal saadud kaheksast Fermat' ülesandest suunaga kerade kohta on ülimalt kaks lahendit, siis Fermat' ülesandel suunata kerade kohta on üldse ülimalt 16 lahendit, nagu veendusime esimese lahendusviisi puhul.

Märkus. Käesolevas paragrahvis käsitletud Fermat' ülesande piirjuhtudena saab vaadelda analoogilisi ülesandeid, milledes otsitava kera ja antud kera puutumise nõue on asendatud nõudega, et otsitav kera puutuks antud tasapinda või läbiks antud punkti.

Asendades kõik neli antud kera või mõned neist tasapindadega või punktidega, saame neliteist ülesannet. Kui tähistada antud kerad indeksiga varustatud tähega O , antud tasapinnad analoogiliselt tähega α ja antud punktid tähega P , siis saab neid ülesandeid lühidalt üles kirjutada nii:

- 1) $O_1 O_2 O_3 \alpha_4$;
- 2) $O_1 O_2 O_3 P_4$ (§§ 175 ja 176, konstruktsioon 148);
- 3) $O_1 O_2 \alpha_3 \alpha_4$;
- 4) $O_1 O_2 \alpha_3 P_4$ (§ 176, konstruktsioon 152);
- 5) $O_1 O_2 P_3 P_4$ (§§ 175 ja 176, konstruktsioon 149);
- 6) $O_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ (§§ 159 ja 177, konstruktsioon 137);
- 7) $O_1 \alpha_2 \alpha_3 P_4$ (§ 176, konstruktsioon 153);
- 8) $O_1 \alpha_2 P_3 P_4$ (§ 176, konstruktsioon 151);
- 9) $O_1 P_2 P_3 P_4$ (§ 174, konstruktsioon 146);
- 10) $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ (§ 127, konstruktsioon 88a);
- 11) $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 P_4$ (§§ 159 ja 176, konstruktsioon 132);
- 12) $\alpha_1 \alpha_2 P_3 P_4$ (§§ 159 ja 176, konstruktsioon 134);
- 13) $\alpha_1 P_2 P_3 P_4$ (§ 159, konstruktsioon 135);
- 14) $P_1 P_2 P_3 P_4$ (§ 127, konstruktsioon 87).

Neist ülesandest kahteist oleme juba vaadelnud (vastavad viited on antud sulgudes). Ülejäänud kahe — esimese ja kolmanda — ülesande puhul piirdume järgmiste märkustega.

Analoogiliselt sellega, nagu paragrahvis 175 vaatlesime kaht antud kera puutuvate kerade omadusi, saaks vaadelda antud kera ja antud tasapinda puutuvaid keradid, kusjuures saaksime eelmistega analoogilised tulemused. Kahe kera sarnasuskeskpunktide osas esinevad siin antud tasapinnaga ristuva antud kera diameetri otsad. Siis on võimalik konstruktsiooni 154 (Fermat' ülesanne) esimest teostamisviisi laiendada ka esimesele ja kolmandale ülal loetletud ülesannetest, s. o. kolme antud kera ja antud tasapinda või kaht antud kera ja kaht antud tasapinda puutuva kera konstrueerimisele.

Konstruktsiooni 154 teine teostamisviis (dilataatsiooni kasutamine) on samuti kergesti laiendatav neile kahele ülesandele.

Kui mingis ülal loetletud ülesandes antud punkt või üks antud punktidest asetseb antud keral või antud tasapinnal, siis lahendus muutub oluliselt (vt. § 159, konstruktsioonid 132, 133, 134, 135 ja 136; § 174, konstruktsioonid 146 ja 147).

Elementaargeomeetria aksioomidest.

Käesoleva kursuse sissejuhatuses (I, lk. 6) märkisime, et geomeetrilisi aksioome puudutavate küsimuste detailne vaatlus kuulub geomeetria aluste valdkonda.¹ Anname siin mõningad teadmised elementaargeomeetria aksioomidest, arvestades eeskätt neid selle raamatu lugejaid, kes geomeetria aluseid spetsiaalselt ei kavatse õppida.

Nagu juba märkisime (I, lk. 5), väljendavad geomeetrilised aksioomid fakte, mis on meil teada paljusajandilise praktika põhjal, kuid aksioomid ei ole siiski isegi kollektiivsete kogemuste lihtsaks kirjelduseks. Nad tekivad kogemustest abstraksiooni protsessi tulemusena, mis võimaldab esile tõsta antud küsimuse kõige olulisemaid jooni.

Vaatleme näitena paralleelsuse aksioomi (§ 96, aksioom 7):

Läbi punkti, mis ei asetse antud sirgel, läheb mitte rohkem kui üks sirge, mis on paralleelne antud sirgega.

See aksioom ei ole otseselt kogemuse teel kontrollitav, kuid praktika siiski veenab meid selle aksioomi õigsuses ja nimelt järgmiselt. Paralleelsuse aksioom koos ülejäänud geomeetriliste aksioomidega (mis on loetletud paragrahvides 95—96) on selle geomeetria aluseks, mis kannab eukleidilise geomeetria nimetust ja mida käsitletakse nii käesolevas raamatus kui ka teistes elementaargeomeetria õpikutes. Selle geomeetrilise süsteemi õigsust kinnitabki inimsoo praktika.

Eukleidiline geomeetria aga ei kujuta endast ainuvõimalikku geomeetrilist süsteemi. Meie geniaalne kaasmaalane Lobatševski²

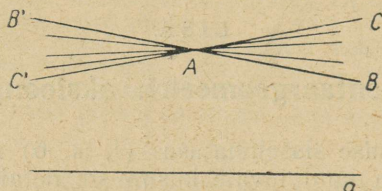
¹ Vt. näiteks Kostini raamatut [17] ja Jefimovi raamatu [12] esimest poolt.

² Lobatševski, Nikolai Ivanovič (1792—1856) — suur vene geomeeter, esimese eukleidilisest erineva geomeetrilise süsteemi looja. Mitteeukleidilise geomeetria avastamine Lobatševski poolt oli geomeetria ajaloos pöördepunktiks ja avaldas olulist mõju matemaatiliste ideede kogu edasisele arengule.

Lobatševski elu ja tegevusega saab tutvuda Kagani raamatu [16] põhjal; vt. ka tema populaarset brošüüri [14] ning Aleksandrovi ja Kolmogorovi raamatut [4]. Lobatševski geomeetria põhitõed antakse geomeetria aluste kursustes ja kirjanduses mitteeukleidilise geomeetria alalt; eeskätt juhime tähelepanu Sirokovi artiklile [26].

näitas, et hariliku paralleelsuseaksioomi asemel võib aksioomiks võtta ka järgmise lause («Lobatsjevski aksioom»):

Läbi punkti A , mis ei asetse antud sirgel, läheb loendamatu hulk sirgeid, mis asetsevad antud sirgega a ühel ja samal tasapinnal, kuid ei lõika seda; kõik need sirged täidavad seesmised piirkonnad kahel tippnurgal BAC ja $B'AC'$ tipuga punktis A (joonis 147); nende nurkade haarad BB' ja CC' kuuluvad ka mitte-lõikavate sirgete hulka.



Joonis 147.

Asendades hariliku paralleelide aksioomi selle aksioomiga, arendas Lobatsjevski välja uue geomeetrilise süsteemi, mis oluliselt erineb eukleidilisest. Seda süsteemi nimetatakse Lobatsjevski geometriaks (ehk, mitte päris täpselt, mitte-eukleidiliseks geometriaks). Selle geometria detailne uurimine näitab, et ka tema põhiväited ei ole vastuolus kogemustega.¹

Lobatsjevski ajal ei olnud veel täielikku, elementargeomeetria ülesehitamiseks piisavat aksiomide loetelu. Oma töödes Lobatsjevski puudutab mitte ainult paralleelide teooria küsimusi, vaid ka kogu geometria põhjendamise küsimusi. Täielikud, kogu elementargeomeetria ülesehitamiseks piisavad aksiomide süsteemid loodi aga siiski alles XIX sajandi lõpul.

Teaduslikus kirjanduses üheks levinumaks eukleidilise geometria aksiomide süsteemiks on Hilberti aksiomide süsteem.²

Algmõisteks on Hilberti süsteemis sisult samad mõisted, mis käesolevas raamatus (I, lk. 5), ja nimelt: «punkt asetseb sirgel», «punkt asetseb tasapinnal», «punkt on kahe punkti vahel», «üks lõik on võrdne teisega», «üks nurk on võrdne teisega».

Oma aksiomid jaotab Hilbert järgmiselt viide rühma:

¹ Kogemustega kooskõlas oleva kahe erineva matemaatilise teooria — eukleidilise geometria ja Lobatsjevski geometria — võimalikkus ise ei peaks meid imestama. Meil ei ole kahjuks siin võimalik peatuda sellel huvitaval küsimusel; vt. näiteks Kagan [16], lk. 220—221, või Kostin [17], lk. 237—239.

² Hilbert esitas oma aksiomide süsteemi raamatus «Geometria alused» [7]. Esitame Hilberti aksiomide süsteemi mõnede olulise tähenduseta muudatustega, nimelt Hilberti aksiom V_2 on lihtsustamise mõttes asendatud lugejale juba tuntud Cantori aksiomiga (aksiom 9); mõnes aksiomis on tehtud ka redaktsioonilisi muudatusi.

I. Ühendamise aksioomid.

I₁. Kui A ja B on kaks punkti, siis on olemas sirge, millel asetsevad punktid A ja B .

I₂. Kui A ja B on kaks punkti, siis ei ole olemas rohkem kui üks sirge, millel asetsevad punktid A ja B .

I₃. Igal sirgel asetseb vähemalt kaks punkti; on olemas kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel.

I₄. Kui A , B ja C on kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel, siis on olemas tasapind, millel asetsevad punktid A , B ja C ; igal tasapinnal asetseb vähemalt üks punkt.

I₅. Kui A , B ja C on kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel, siis ei ole olemas rohkem kui üks tasapind, millel asetsevad punktid A , B ja C .

I₆. Kui sirge a kaks punkti A ja B asetsevad tasapinnal α , siis ka sirge a iga punkt asetseb tasapinnal α .

I₇. Kui kahel tasapinnal α ja β on ühine punkt A , siis on neil veel vähemalt üks ühine punkt.

I₈. On olemas vähemalt neli punkti, mis ei asetse ühel tasapinnal.

II. Järjestuse aksioomid.

II₁. Kui punkt B on punkti A ja punkti C vahel, siis A , B ja C on ühe ja sama sirge kolm erinevat punkti ja punkt B on ka punkti C ja punkti A vahel.

II₂. Kui A ja B on kaks punkti, siis alati on olemas vähemalt üks niisugune punkt C , et punkt B on A ja C vahel.

II₃. Ühe sirge kolmest punktist on alati mitte rohkem kui üks punkt kahe teise vahel.

Enne järgmise aksioomi sõnastamist on vaja defineerida lõigu mõiste (vt. I, lk. 9).

II₄ (Paschi aksioom). Olgu A , B ja C kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel, ja a tasapinna ABC sirge, millel ei asetse ükski punktidest A , B ja C ; kui seejuures sirge a läbib lõigu AB üht punkti, siis ta läbib üht punkti ka vähemalt ühel kahest lõigust AC ja BC .

Enne järgnevate aksioomide formuleerimist on vaja defineerida kiire mõiste (vt. I, lk. 9); seejuures lauset, mille me võtsime sirgjoone jaotamise aksioomiks (aksioom 2c), osutub võimalikuks tõestada, toetudes ainult I ja II rühma aksioomidele.

III. Kongruentsuse aksioomid.

III₁. Olgu AB mingi lõik ja h' mingi kiir, mis väljub punktist A' ; kiirel h' on olemas niisugune punkt B' , et lõik AB on võrdne lõiguga $A'B'$.

III₂. Kui lõik AB ja lõik $A'B'$ on võrdsed lõiguga $A''B''$, siis ka lõik AB on võrdne lõiguga $A'B'$.

III₃. Kui punkt B on punktide A ja C vahel ja punkt B' on punktide A' ja C' vahel ning lõik AB on võrdne lõiguga $A'B'$ ja lõik BC lõiguga $B'C'$, siis ka lõik AC on võrdne lõiguga $A'C'$.

Enne järgmise aksiomi sõnastamist on vaja defineerida nurga mõiste (vt. I, lk. 12) ja pooltasapinna mõiste (vt. I, lk. 11); seejuures lauset, mille me võtsime tasapinna jaotamise aksiomiks (aksiom 3), osutub võimalikuks tõestada, toetudes ainult I ja II rühma aksiomidele.

III₄. Olgu $\angle hk$ mingi nurk ja η' üks sirgega a' piiratud pooltasapind; kui h' on punktist O' väljuv sirge a' kiir, siis pooltasapinnal η' on olemas üks ja ainult üks niisugune punktist O' väljuv kiir k' , et $\angle hk = \angle h'k'$. Iga nurk on võrdne iseendaga.

Enne järgmise aksiomi sõnastamist on vaja defineerida kolmnurga, tema külgede ja nurkade mõiste (vt. I, lk. 14).

III₅. Kui kahel kolmnurgal ABC ja $A'B'C'$ külg AB on võrdne küljega $A'B'$, külg AC küljega $A'C'$ ja nurk BAC nurgaga $B'A'C'$, siis ka nurk ABC on võrdne nurgaga $A'B'C'$.

IV. Paralleelsuse aksiom.

IV. Olgu a mingi sirge ja A punkt, mis ei asetse sirgel a ; siis sirge a ja punkti A poolt määratud tasapinnal ei ole olemas rohkem kui üks niisugune sirget a mitte lõikav sirge, millel asetseb punkt A .

V. Pidevuse aksiomid.

V_1 (Arhimedese aksiom). Kui AB ja CD on mingid lõigud, siis sirgel AB on olemas mingi hulk niisuguseid (erinevaid) punkte $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$, et iga lõik $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ on võrdne lõiguga CD ja punkt B on A ja A_n vahel.

Defineerides lõpuks tõkestamatult kahaneva sisestatud lõikude jada mõiste (vt. I, lk. 136), saame sõnastada ka viimase aksiomi.

V_2 (Cantori aksiom). Kui on antud tõkestamatult kahaneva sisestatud lõikude jada, siis on olemas niisugune punkt, mis igaühel neist lõikudest on seesmiseks või otsmiseks punktiks.

Hilberti aksiomid kujutavad endast, nagu juba märgiti, eukleidilise geomeetria aksiomide süsteemi. Kui soovime saada Lobatševski geomeetria vastavat aksiomide süsteemi, siis tarvitseb vaid asendada aksiom IV Lobatševski aksiomiga (vt. lk. 256), jättes süsteemi teised aksiomid muutmata.

Võrreldes Hilberti eukleidilise geomeetria aksiomide süsteemi selle süsteemiga, mis on meie poolt käesolevas raamatus vastu

võetud (§§ 95—96), märkab lugeja kahtlemata järgmist õige olulist asjaolu.

Käesolevas raamatus aksiomidena vastu võetud geomeetriliste tõsiasjade loetelu osutub tunduvalt ulatuslikumaks kui Hilberti süsteemis. Me võtsime näiteks aksiomina (aksiom 1b), et igal sirgel asetseb lõpmatu hulk punkte, kuna aksiom I_3 nõuab ainult, et igal sirgel asetseks vähemalt kaks punkti. Põhilised tõsiasjad ringjoone lõikumisest sirgega ja teise ringjoonega me võtsime ringjoone aksiomidena (aksiom 5 ja aksiom 6), kuna Hilberti süsteemis vastavad aksiomid üldse puuduvad jne.

On iseenesest arusaadav, et mida rohkem geomeetrilisi fakte võtame aksiomidena, seda lihtsamaks osutub geomeetria esitamine. Mida vähem fakte võetakse aksiomidena, seda suurem on tõestamist vajavate lausete arv. Niisiis, Hilberti aksiomidel põhineva geomeetriakursuse ülesehitamine osutub tunduvalt keerukamaks kui näiteks see, mis on teostatud käesolevas raamatus.

Teisest küljest on teaduse vaatekohalt oluline ja täiesti loomulik nõuda, et aksiomidena võetaks võimalikult väike hulk geomeetrilisi fakte. Täpsemalt öeldes püstitatakse nõue, et süsteemi ükski aksiom ega ühegi aksiomi mingi osa ei oleks loogiliseks järelduseks teistest vastuvõetud aksiomidest. Seda aksiomide süsteemi omadust iseloomustatakse kui süsteemi aksiomide vastastikust sõltumatust. Käesolevas raamatus vastu võetud aksiomide süsteemil puudub vastastikuse sõltumatuse omadus, nagu selgub selle kõrvutamisel Hilberti omaga. Ta on, nagu öeldakse, üleküllane aksiomide süsteem.

KIRJANDUS.

1. Адамар Ж., Элементарная геометрия, ч. I, Планиметрия, 3-е изд., М., 1948; ч. 2, Стереометрия, М., 1938.
2. Александров П. С. и Ефремович В. А., Очерк основных понятий топологии, М.—Л., 1936.
3. Александров П. С. и Ефремович В. А., О простейших понятиях современной топологии, М.—Л., 1935.
4. Александров П. С. и Колмогоров А. Н., Николай Иванович Лобачевский, М.—Л., 1943.
5. Богомолов С. А., Вывод правильных систем по методу Федорова, ч. 1, Общее учение о симметрии и основные свойства правильных систем, Л., 1932.
6. Бончковский Р. Н., Площади и объемы, М.—Л., 1937.
7. Гильберт Д., Основания геометрии, М.—Л., 1948.
8. Глаголев Н. А., Начертательная геометрия, 2-е изд., М.—Л., 1946.
9. Глаголев Н. А., Элементарная геометрия, ч. 1, Планиметрия, 2-е изд., М., 1949; ч. 2, Стереометрия, 2-е изд., М., 1948.
10. Делоне Б., Падуров Н., Александров А., Математические основы структурного анализа кристаллов . . . , Л.—М., 1934.
11. Делоне Б. Н. и Житомирский О., Задачник по геометрии, 3-е изд., М.—Л., 1949.
12. Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 2-е изд., М.—Л., 1949.
13. Извольский Н. А., Синтетическая геометрия, М., 1941.
14. Каган В. Ф., Великий русский учёный Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке, 2-е изд., М.—Л., 1948.
15. Каган В. Ф., О преобразовании многогранников, 2-е изд., М.—Л., 1933.
16. Каган В. Ф., Лобачевский, 2-е изд., М.—Л., 1948.
17. Костин В. И., Основания геометрии, 2-е изд., М., 1948.
18. Люстерник Л. А., Выпуклые тела, 2-е изд., М.—Л., 1941.
19. Никольский А., Полуправильные тела Архимеда, «Математика в школе», 1940, № 5, стр. 5—11.
20. Перепелкин Д. И., Об одном построении правильного икосаэдра и правильного додекаэдра, «Математическое просвещение», вып. 12, М.—Л., 1937, стр. 10—15.
21. Федоров Е. С., Начала учения о фигурах, СПб, 1885.
22. Цикл статей по наглядной геометрии, «Успехи математических наук», вып. X, М.—Л., 1944.
23. Четверухин Н. Ф., Вопросы методологии и методики геометрических построений в школьном курсе геометрии, «Известия академии педагогических наук», вып. 6, Вопросы методики математики, М.—Л., 1946, стр. 77—94.
24. Четверухин Н. Ф., Стереометрические задачи на проекционном чертеже, часть 1, М.—Л., 1947; часть 2, М.—Л., 1948.
25. Четверухин Н. Ф., Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, М., 1946.
26. Широков П. А., Краткий очерк основ геометрии Лобачевского, gaatatus: Николай Иванович Лобачевский, Сборник статей, М.—Л., 1943, стр. 19—55.
27. Шубников А. В., Симметрия, М.—Л., 1940.

AINEREGISTER.

- aditiivsus 174
- aksioom, Arhimedese 8, 258
- Cantori 8, 258
 - Lobatševski 256
 - — paralleelsuse 8, 258
 - Paschi 257
 - sirgjoone, tasapinna jaotamise 7
- aksioomid, intsidentsi 6
- järjestuse 7, 257
 - kongruentsuse 7, 257
 - pidevuse 258
 - ringjoone 8
 - ühendamise 5, 257
- Aleksandrov, A. D. 127, 236, 237
- P. S. 207, 255
- allomorfsus vt. hulktahukad, allomorfsed
- Arhimedes 8, 258
- bisektorpooltasapind 55
- bisektortasapind 55, 69
- Bogomolov 113, 133, 235
- Cantor 8, 258
- Cauchy 236
- Chasles 126
- D'Alembert 124
- Delone 127, 236
- dilatatsioon 250
- dilatatsiooni parameeter 250
- dodekaeeder 34, 215
- korrapärane 216, 218, 221, 233, 234
- dodekaedrik-ikosaeeder 222
- duaalsus 214
- ekstsess, sfääriline 176
- eukleidiline geomeetria 255
- Euler 195, 210, 211
- Euleri karakteristik 210
- sirge 195
- Fermat 252
- Fjodorov 235
- geomeetiline koht vt. «Geomeetrilised kohad» (lk. 266)
- Glagolev 23, 210
- Hadamard 26, 43, 83, 114, 164, 165, 200, 220
- heksaeeder 34, 215
- Hilbert 256
- homoteetsus 181
- homoteetsus-keskpunkt 181
- homoteetsustegur 181
- hulknurgad, tükeldusvõrdsed sfäärilised 179
- hulknurk, sfääriline 143
- tasane, ruumiline 24
- hulktahukad, allomorfsed 228
- duaalselt vastavad korrapäraseks 231
 - isomorfsed 209
 - vt. ka kujundid
- hulktahukas 34
- Arhimedese 221
 - kera sisse kujundatud 75
 - — ümber kujundatud 76
 - korrapärane 215, 220
 - kumer 36, 236—237
 - lihtne 34
 - liiki p 206
 - mitternull-liiki, null-liiki 205, 206
 - poolkorrapärane 221
 - topoloogiliselt homogeenne 288
 - — korrapärane 214
 - — poolkorrapärane 223
 - võrdnurkne 234
 - — poolkorrapärane 221
 - võrdtahkne 235
 - — poolkorrapärane 222
- hulktahuline nurk 29
- — korrapärane 215
 - — kumer 30
 - — lihtne 30
 - — täheline 30
- hulktahuline pind 32
- — lihtne 34
 - — mitmelisidus, ühelisidus 207

hulktahulise nurga mõõtmine 179
— — tasanurk 29
hulktahulised pinnad, allomorfsed 228
— — isomorfsed 209

ikosaeder 34, 215
— korrapärane 216, 232, 234
inversioon 245, 247
inversioonikera 245
inversioonipoolus (inversioonikesk-
punkt) 245, 247
inversiooni potents 245, 247
isoeeder 235
isogoon 234
isomorfsed hulktahukad 209
Iz v o l s k i 83

J e f i m o v 255
J e f r e m o v i t s 207
joonnurk 54
J o r d a n 36, 144

kaar (keral) 139
K a g a n 256
kahe kiivsirge ühine ristsirge 58
kahetahuline nurk 26, vt. ka nurk,
kahetahuline
kahetahuliste nurkade mõõtmine 55
kaksikpüramiid 132, 222
kaksnurk, sfääriline 142
kaldloik 49, 50
kaldprojektsioon 49
kaugus, kiivsirgete vaheline väiksem

58
— paralleelsete tasapindade vahe-
line 68
— punkti kaugus suuringist 146
— kaugus tasapinnast 50
— sfääriline 140

kera (sfäär) 63
— jaotamine 140, 141, 156
— kaksteistpunkti, esimene 195
— teine 196
— keskpunkt 63
— külgekujundatud 76, 79
— löikumine sirgega 64
— — tasapinnaga 64
— sissekujundatud 76, 79
— suunaga 249
— ümberkujundatud 75

kerad, ortogonaalsed 240
kerade homoteetsus 186
— kimp 241
— sarnasuskeskpunkt 186
— vastastikune asend 66—68
— võrdsus 106

keskpunktide sirge 66
kolmetahuline nurk 27, vt. ka nurk,
kolmetahuline
kolmetahulise nurga hüpotenuus 95

kolmetahulise nurga kaadet 95
— — (kahetahuliste, tasa-) nur-
kade summa 94
— — tasanurk 28
— — täiendusnurk (polaarne n.)
90

kolmnurgad, sfäärilised, diametraal-
sed 148
— — peegeldusvõrdsed 149
— — pärisvõrdsed 149
— — võrdsed 149—152
kolmnurk, sfääriline 143
— — orienteeritud 148, 149
— — polaarne (antu suhtes) 148
— — täisnurkne 151
— — võrdhaarne 152
— — võrdkülgne 152

K o l m o g o r o v 255
konfiguratsioon 190
konstruktsioonid 18
— keral 163—164
— vt. ka «Konstruktsioonid»
(lk. 267)

koonus 79
— sissekujundatud, ümberkujunda-
tud 84, 168
— vt. ka ühine ümberkujundatud
koonus

koonuse moodustaja, telg, tipp 79
korrapärane hulktahukas 215, 220
— püramiid 50, 51, 61
korrapärase hulktahuka keskpunkt
218

K o s t i n 255, 256
kujund 101
— mühi 147
— sfääriline 138
— sümmeetriline punkti suhtes 130
— — tasapinna suhtes 129
— — telje suhtes 129
— tasane, ruumiline 102

kujudid, homoteetsed 181, 183
— inverssed 245, 247
— peegeldussarnased 200
— peegeldusvõrdsed 108
— — keral 170
— perspektiivselt sarnased 181
— päripidi homoteetsed 181
— pärisarnased 200
— pärisvõrdsed 108
— — keral 170
— sarnased 197
— — ja sarnaselt asetsevad 181
— sümmeetrilised punkti suhtes 117
— — sirge suhtes 114
— — suuringi suhtes 170
— — tasapinna suhtes 110
— vastupidi homoteetsed 181
— võrdsed 85, 101—106
— — keral 169

kujutav geomeetria 23
kuubik-oktaeder 221
kuup 61, 136, 216, 231, 234
kvadrant 145
külgtahk 31

liikumine (nihkumine) 109
— esimest, teist liiki 110
— keral 170
— paralleelselt tasapinnaga 122
— püsipunktiga 123

liikumiste liigitelu 128
— — keral 173

Ljusternik 236

Lobatševski 255

Lobatševski (mitteukeleidiline)
geomeetria 256

löige 205, 207

lõikumine, kerade 67, 68
— kera ja ringjoone 65
— — ja sirge 64
— — ja tasapinna 64
— koonuse ja sirge 81
— — ja tasapinna 80, 82
— silindri ja sirge 82
— — ja tasapinna 81, 82
— tasapindade 6, 17
— tasapinna ja sirge 10
lüke (paralleellüke) 112

meetrilised omadused 209

murdjoon, sfääriline 140
— tasane, ruumiline 24

mühi keskpunkt 147

mühk, kiirte, sirgete 147

nihkumine vt. liikumine

Nikolski 222

normaal, kera 249

null-kerade 239

nurgad, kolmetahulised peegeldus-
võrdsed 85

— — pärisvõrdsed 85
— — tippnurgad 38
— — võrdsed 85, 86, 87—88,
90—93, 95—97, 101
— võrdsed 7
— — kahetahulised 54, 101
— — sfäärilised 145, 146

nurk, hulktahtuline vt. hulktahtuline
nurk

— kahetahuline 26
— — hulktahtulise nurga 29
— — kolmetahulise nurga 28
— — sirgnurgast suurem, väik-
sem 27
— — sirgnurk 26
— — suunaga 115
— — tetraeedri 31
— kerade vaheline 246

nurk, kiirte, sirgete vaheline 42

— kolmetahuline 27

— — suunaga 36—38

— — tetraeedri 31

— — täisnurkne 95

— — võrdhaarne 87

— sfääriline 142

— sfäärilise hulknurga 143

— sirge ja tasapinna vaheline 52

— tasapinna ja kera vaheline 246

obelisk 209

oktaeder 34, 215

— korrapärase 216, 231, 234

orienteeritud ruum 37

ortotsenter 60, 194

Padurov 127, 236

paralleelprojektsioon 21, 49

Pasch 257

peegeldumine punktist 117

— sirgest 114

— suurringist 171

— tasapinnast 111

peegeldus, libisev 121

peegelduskeskpunkt (sümmeetriakesk-
punkt) 117

peegeldustasapind (sümmeetriatasa-
pind) 110

peegeldustelg (sümmeetriatelg) 114
— keral 170

pentaeeder 34

piire vt. äär

piirkond, kumer 24

— seesmine, väline vt. punkt,
seesmine, väline

piirkond (kerade) 242

pindala mõõtmine keral 174—180

Poinsot 221

poolkera 141

poolpuutuja 145

poolringjoon 139

poolruum 25

poolus, suuringi 146

— väikeringi 155

potentspunkt 241

projektsioon (ortogonaal-, rist-) 21, 49
— kald 49

projektsioonitasapind 21

punkt 5, 138

— kahekordne (invariantne, püsi-)
111

— seesmine, väline 27, 28, 30, 32,
36, 63, 144, 156

punkti potents kera suhtes 238—239

punktid, antihomoteetsed (antihomo-
loogilised) 243

— diametraalsed 138

— inverssed 245, 247

- punktid, sümmeetrilised punkti suhtes 117
 — — sirge suhtes 114
 — — suurringi suhtes 170
 — — tasapinna suhtes 110
 puutepunkt 81, 82, 159
 puutuja, kera 64
 — koonuse 81
 — silindri 82
 — vt. ka ühised puutujad
 puutumine, kerade 67, 250
 — kera ja sirge 64
 — — ja tasapinna 65, 250
 — ringide (keral) 159, 162
 pöördekeskpunkt, keral 171
 pöördenurk 116
 — keral 171
 pöördepeegeldus 119
 — keral 172
 pöördepeegelduse keskpunkt 119
 — nurk 119
 — telg 119, 131
 — tasapind 119
 pöördetelg 114, 116
 pööre 116
 — keral 171, 172

 radikaalpunkt 241
 radikaaltasapind 239, 241
 radikaaltelg 240
 raskuskese, tetraeedri 40, 194
 refleksiivsus 7, 20, 54, 86, 101, 182, 198, 209
 ringide puutumine keral 159, 162
 — vastastikune asend keral 156—
 —162
 ristirsirge alus 43
 rombik-dodekaeeder 222
 romboeeder 61, 135
 ruumi jaotamine 24, 26, 28, 30, 31, 36
 ruuminurk 179
 rööptahukas, tetraeedri ümber kujun-
 datud 39

 samasusliikumine 109
 sarnasus 198
 — esimest, teist liiki 200
 sarnasuskeskpunkt 181
 — seesmine, väline 181
 sarnasustasapind 184
 — kerade 190
 sarnasustegur 181
 sarnasustelg 184
 — kerade 188
 serv, hulkta huka 34
 — hulkta hulise nurga 29
 — — pinna 33
 — kahtahulise nurga 26
 — kolmetahulise nurga 28
 — seesmine 33
 serv, tetraeedri 31
 — äärmine 33
 servad, tetraeedri vastas- 39
 sfäär vt. kera
 sfäärigeomeetria 138
 sfääriline joonlaud 163
 — raadius 155
 — sirkel 163
 sfäärilise hulknurga diagonaal 144
 — — külge 143
 — — pindala 174, 178, 179
 — — tipp 143
 — kaksnurga külge 142
 — — tipp 142
 — kolmnurga bisektor 152, 154
 — — hüpotenuus 151
 — — kaatet 151
 — — kõrgused 153, 154
 — — mediaan, seesmine, väline 153, 154
 — — nurkade summa 155
 — nurga haar 143
 — — tipp 143
 sfääri segment 156
 silinder 79
 — kera ümber kujundatud 84
 — vt. ka ühine ümberkujundatud silinder
 silindri moodustaja 80
 — telg 80
 sirge 5
 — kahekordne (invariantne) 111
 — tasapinnaga paralleelne 10
 — ristuv 43, 45, 47, 57
 sirged, kiiv- 8
 — komplanaarsed 8
 — lõikuvad 9
 — paralleelsed 9, 20
 — ristuvad 43
 sirgega ristuv lõik 43
 sissekujundatud, ümberkujundatud
 koonus 84, 168
 suurring 63, 138
 — väikeringi puutuv 159
 suurringid, ristuvad 146
 sümmeetria 129, vt. ka peegeldumine
 — korrapärase hulkta hukate 229—
 —234
 — pöörde- 130
 — rööptahukate 133—137
 — tasapinna suhtes 129
 — teljeline 129
 — tetraeedrite 133—137
 — tsentraalne 130
 sümmeetriaelemendid 131
 sümmeetriakeskpunkt 130, vt. ka pee-
 gelduskeskpunkt
 sümmeetriatasapind 110, 129, vt. ka
 peegeldustasapind

- sümmeetriatelg 129, 130, vt. ka peegeldustelg
 sümmeetrisus 7, 20, 54, 86, 101, 182, 198, 209
- Sirokov 255
 Subnikov 133
- tahk, hulktahuka 34
 — hulktahulise nurga 29
 — — pinna 33
 — kahetahulise nurga 26
 — kolmetahulise nurga 28
- tasapind 5
 — kahekordne (invariantne) 111
 — kera lõikav 65
 — — puutuv 65
 — koonust puutuv 81
 — libiseva peegelduse 122
 — pöördepegelduse 119
 — silindrit puutuv 82
 — sirgega paralleelne 10
 — sirgega ristuv 43—45, 48
 — suunaga 249
- tasapinna ristlõik 50
 — ristsirge 43
- tasapinnad, paralleelsed 13, 57, 250
 — ristuvad 55
- teisendus, sümmeetria- 129
 — vt. ka dilatatsioon, homoteet-
 sus, inversioon, liikumine, sar-
 nasus
- tetraeedri 31, 39—41, 59—62, 215
 — korrapärase 61, 137, 216, 231, 233
 — orienteeritud 39
 — ortotsentriline 60, 61, 194—197
- tetraeedri geomeetria 197
- tetraeedri kõrgused 59, 60
 — põhi 31
 — serv 31
 — tahk 31
 — tipp 31
- tetraeedrite võrdsus 99, 101
- tipp, hulktahuka 34
 — hulktahulise nurga 29
 — — pinna 33
 — kaksnurga 142
- tipp, kolmetahulise nurga 28
 — koonuse 79
 — sfäärilise hulknurga 143
 — — nurga 143
 — tetraeedri 31
- topoloogia 207
 topoloogiline tüüp 209
 topoloogilised omadused 209
 transitiivsus 7, 20, 54, 86, 101, 182, 198, 209
 transpositsioon 114
 transpositsioonitelg 114
 tsentroid 40
 Tšetveruhhin 18, 23
 täht 223
- vinditelg 126
 vintliikumine 126
 vintnihke nurk 126
- võrdsed kaared (keral) 144, 145
 — kahetahulised nurgad 54, 101
 — kerad 106
 — kolmetahulised nurgad 85—88, 90—93, 95—97, 101
 — kujundid keral 169
 — — (üldiselt) 86, 101—106
 — lõigud 7
 — sfäärilised kolmnurgad 149
 — — nurgad 145, 146
 — (tasased) nurgad 7
 — tetraeedrid 99, 101
- väikering 65, 155—156
 — sfäärilise kolmnurga sisse, ümber joonestatud 167—168
- välisnurk, kolmetahulise nurga 94
 — sfäärilise kolmnurga 155
- äär (piire) 33
- ühine ümberkujundatud koonus 187
 — — silinder 187
- ühised puutujad, kahe kera 187
 — puutuvad tasapinnad, kahe kera 186
 — — tasapinnad, kolme kera 188, 250
- ühispotents, kahe kera 243

**AKSIOOMIDE, TEOREEMIDE, GEOMEETRILISTE KOHTADE
JA KONSTRUKTSIOONIDE REGISTER.**

Aksioomid 1a—9

lk. 5—8

Teoreemid.

Teoreemi nr.	lk.	Teoreemi nr.	lk.	Teoreemi nr.	lk.	Teoreemi nr.	lk.
178—185	6	233	63	276	115	338	179
186	8	234—235	64	277	117	339—340	183
187—188	9	236—237	66	278	118	341—342	184
189—190	10	238—239	67	279	122	343—344	186
191—192	11	240	72	280—282	123	345—346	187
193—195	12	241	73	283	124	347	189
196	13	242—243	74	284—285	125	348	194
197	14	244	76	286—287	126	349	195
198—199	15	245	78	288	138	350	196
200	16	246	80	289—291	139	351	198
201	22	247	81	292	140	352—353	200
202	23	248	83	293	141	354	202
203	24	249	86	294	146	355—356	208
204—206	26	250	88	295—296	147	357—358	210
207	28	251—252	90	297	149	359—360	211
208	30	253—254	91	298—301	150	361—362	212
209	31	255	92	302—308	151	363—364	213
210	38	256	93	309—312	152	365	214
211	40	257—258	94	313—316	154	366	216
212	42	259—261	95	317—319	155	367	218
213	44	262—264	96	320—322	156	368	229
214—218	45	265	97	323—324	159	369	230
219—220	46	266	99	325	162	370	238
221—222	49	267	102	326—327	168	371	240
223—224	50	268	103	328—329	169	372	241
225	52	269—270	106	330—331	170	373	242
226—228	55	271	107	332	171	374—376	243
229	58	272	110	333	172	377	245
230	59	273	112	334	173	378—379	246
231	60	274	113	335—336	176		
232	61	275	114	337	178		

Geomeetriselised kohad.

Geom. koha nr.	lk.	Geom. koha nr.	lk.	Geom. koha nr.	lk.
XII	19	XXIII—XXV	70	XXXVIII—XL	162
XIII—XIV	20	XXVI—XXVIII	71	XLI—XLII	163
XV	48	XXIX—XXX	72	XLIII	239
XVI	49	XXXI	73	XLIV	240
XVII	65	XXXII—XXXIII	79		
XVIII—XX	68	XXXIV—XXXV	83		
XXI a — XXII b	69	XXXVI—XXXVII	84		

Konstruktsioonid.

Konstr. nr.	lk.	Konstr. nr.	lk.	Konstr. nr.	lk.
64	18	100	98	137	194, 251
65—71	19	101—102	125	138	203
72	20	103—104	128	139—140	216
73	21	105	164	141—142	217
74	46	106—111	165	143	218
75	47	112—119	166	144	240
76	53	120—124	167	145—146	242
77—79	56	125	168	147	243
80	59	126	186	148	244, 248
81—84	66	127	187	148'	251
85—86	68	128	188	149	244, 247
87	76	129	189, 250	150	244
88	77	130—131	191	151	247
88a	78	132	191, 248	152—153	248
89—91	81	133	192	154	252
92—94	82	134	193, 247	154'	251
95—96	84	135	193		
97—99	97	136	194		

SISUKORD.

Eessõna		3
XI peatükk. Algmõisted. Paralleelsus		5
§ 95. Punkti ja sirge, punkti ja tasapinna vastastikune asend		5
§ 96. Ruumigeomeetria aksioomid		7
§ 97. Kahe sirge vastastikune asend		8
§ 98. Sirge ja tasapinna vastastikune asend		10
§ 99. Kahe tasapinna vastastikune asend		13
§ 100. Kolme tasapinna vastastikune asend		16
§ 101. Konstruksioonülesanded stereomeetrias		18
§ 102. Lihtsamad sirgete geomeetrilised kohad ruumis		19
§ 103. Paralleelprojeksioon		21
XII peatükk. Ruumi jaotamine. Hulktahukad		24
§ 104. Ruumi jaotamine tasapindadega		24
§ 105. Kahetahuline nurk		26
§ 106. Kolmetahuline nurk		27
§ 107. Hulktahuline nurk		29
§ 108. Tetraeeder		31
§ 109. Hulktahukas		32
§ 110. Suunaga kolmetahulised nurgad		36
§ 111. Tetraeedri omadusi		39
XIII peatükk. Sirgete ja tasapindade vahelised nurgad. Ristuvus		42
§ 112. Kahe kiivsirge vaheline nurk		42
§ 113. Sirge ja tasapinna ristuvus		43
§ 114. Konstruksioonid ja geomeetrilised kohad		46
§ 115. Ristprojeksioon		49
§ 116. Sirge ja tasapinna vaheline nurk		52
§ 117. Kahe tasapinna vaheline nurk. Ristuvad tasapinnad		54
§ 118. Konstruksioone		56
§ 119. Üldine märkus sirgete ja tasapindade paralleelsusest ja ristuvusest		57
§ 120. Kahe kiivsirge vaheline väikseim kaugus		58
§ 121. Tetraeedri kõrguste omadusi		59
§ 122. Erikujulised rööptahukad ja tetraeedrid		60
XIV peatükk. Kera. Geomeetrilisi kohti		63
§ 123. Definitsioonid. Kera lõikumine sirgega ja tasapinnaga		63
§ 124. Kahe kera vastastikune asend		66
§ 125. Põhilised punktide geomeetrilised kohad ruumis		68
§ 126. Muid geomeetrilisi kohti		71
§ 127. Tetraeedri ümber kujundatud kera, sisse kujundatud kera ja külge kujundatud kera		75
§ 128. Koonus ja silinder kui geomeetrilised kohad		79

XV peatükk. Kujundite võrdsus	85
§ 129. Kolmetahuliste nurkade võrdsuse tunnused	85
§ 130. Täisnurksete kolmetahuliste nurkade võrdsuse tunnused	95
§ 131. Konstruksioone	97
§ 132. Tetraeedrite võrdsus	99
§ 133. Mistahes kujundite võrdsus	101
§ 134. Kujundite võrdsuse kaks liiki	106
XVI peatükk. Liikumine ja sümmeetria	109
§ 135. Liikumise mõiste	109
§ 136. Peegeldumine tasapinnast	110
§ 137. Lüke; pööre	112
§ 138. Peegeldumine punktist; pöördepeegeldus	117
§ 139. Liikumine paralleelselt tasapinnaga	121
§ 140. Püsipunktiga liikumine	123
§ 141. Vintnihe. Liikumiste liigitelu	125
§ 142. Sümmeetria	129
§ 143. Tetraeedrite ja rööptahukate sümmeetria	133
XVII peatükk. Sfäärigeomeetria	138
§ 144. Algmõisted	138
§ 145. Sfäärilised hulknurgad	143
§ 146. Kaarte ja nurkade võrdsus; ristuvus	144
§ 147. Sfäärigeomeetria seos mähigeomeetriaga	147
§ 148. Sfäärilised kolmnurgad ja nende omadused	149
§ 149. Kera väkeringid	155
§ 150. Kahe ringi vastastikune asend keral	156
§ 151. Punktide geomeetrilised kohad keral	162
§ 152. Konstruksioonid keral	163
§ 153. Võrdsus ja liikumine keral	169
§ 154. Sfäärilise hulknurga pindala	173
XVIII peatükk. Homoteetsus ja sarnasus	181
§ 155. Homoteetsuse definitsioon ja omadused	181
§ 156. Sarnasustelg. Sarnasustasapind	183
§ 157. Kerade sarnasuskeskpunktid ja sarnasusteljed	186
§ 158. Nelja kera sarnasustasapinnad	189
§ 159. Konstruksioone	191
§ 160. Ortotsentrilise tetraeedri omadusi	194
§ 161. Kahe kujundi sarnasuse üldjuhtum	197
§ 162. Sarnasuse kaks liiki	199
XIX peatükk. Euleri teoreem. Korrapärased hulktahukad ja nende üldistused	205
§ 163. Null-liiki hulktahukad	205
§ 164. Uhelisidusad ja mitmelisidusad hulktahulised pinnad	207
§ 165. Euleri teoreem	209
§ 166. Järeldused Euleri teoreemist	211
§ 167. Topoloogiliselt korrapärased hulktahukad	214
§ 168. Korrapärased hulktahukad	215
§ 169. Poolkorrapärased hulktahukad	221
§ 170. Korrapärase hulktahukate sümmeetria	229
§ 171. Kumerate hulktahukate omadusi	236
XX peatükk. Kerade geomeetria elemendid	238
§ 172. Punkti potents kera suhtes	238
§ 173. Radikaaltasapind, radikaaltelg, radikaalpunkt	239

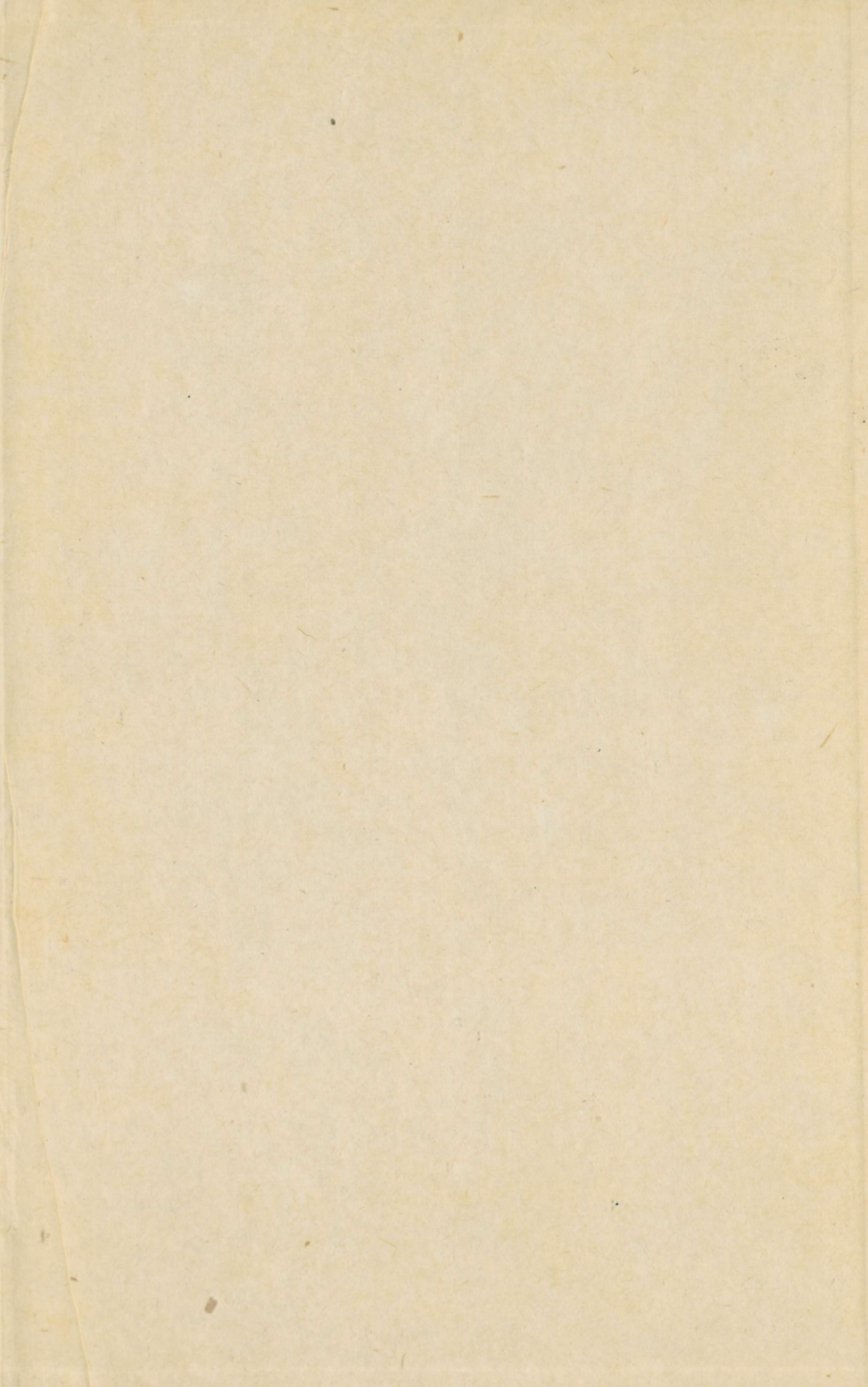
§ 174. Kerade kimp	241
§ 175. Antud kerasid puutuvad kerad	243
§ 176. Inversioon	245
§ 177. Suunaga kerad. Dilatatsioon	249
§ 178. Fermat' ülesanne	252
Lisa. Elementargeomeetria aksiomidest	255
Kirjandus	260
Aineregister	261
Aksiomide, teoreemide, geomeetriliste koh- tade ja konstruktsioonide register	266
Viidetes raamatu esimene osa märgitakse I abil.	

Д. И. Перепелкин
КУРС ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ
ЧАСТЬ II
ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ
На эстонском языке
Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярну маантеэ 10

*

Toimetaja R. Toming
Tehniline toimetaja H. Kohu
Korrektoirid S. Ridala ja E. Toots
Ladumisele antud 31. XII 1955. Trükkimisele antud
27. III 1956. Paber 60 × 92, 1/16. Trükipoognaid 17.
Arvutuspoognaid 19,12. Trüktarv 1500. MB-03203.
Tellimise nr. 3648.
Trükikoda «Tartu Kommunist», Tartu,
Olikooli 17/19.

Hind rbl. 7.40



2.

A

19004

Rbl. 7.40

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00443739 0

Rbl. 7.40

A
19004

2.

D. I. PEREPJOLKIN — ELEMENTAARGEOMETRIA KURSUS II

D. I. PEREPJOLKIN

ELEMENTAARGEOMETRIA
KURSUS

II



EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00443739 0