

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Voldemar Kirss
**Caputo murrulise tuletisega
diferentsiaalvõrrandi lahendamine pidevate
lineaarsplainidega kollokatsioonimeetodil**

Matemaatika
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: prof. Arvet Peda

TARTU 2026

**CAPUTO MURRULISE TULETISEGA
DIFERENTSIAALVÕRRANDI LAHENDAMINE PIDEVATE
LINEAARSPLAINIDEGA KOLLOKATSIOONIMEETODIL**

Bakalaureusetöö

Voldemar Kirss

Lühikokkuvõte

Bakalaureusetöös vaadeldakse lineaarse Caputo murrulise tuletisega diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesande ligikaudset lahendamist. Ülesanne teisendatakse teist liiki Volterra integraalvõrrandiks, mis lahendatakse lineaarsplainidega kollokatsioonimeetodil. Leitakse veahinnang, mida võrreldakse numbriliste näidetega.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid

Märksõnad: Diferentsiaalvõrrandid, kollokatsioonimeetod, Cauchy ülesanne, Caputo murruline diferentsiaaloperaator

**LINEAR SPLINE COLLOCATION METHOD FOR SOLVING
DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE CAPUTO
FRACTIONAL DERIVATIVE**

Bachelor thesis

Voldemar Kirss

Abstract

In this bachelor's thesis, we study the approximate solution of a linear initial value problem involving a Caputo fractional derivative. The problem is transformed into a Volterra integral equation of the second kind, which is then solved using a collocation method based on linear splines. An error estimate is derived and validated through numerical experiments.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations

Key Words: Differential equations, collocation method, initial value problem, Caputo fractional differential operator

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Caputo tuletis	5
1.1 Eelteadmised	5
1.2 Caputo tuletisega võrrandi Cauchy ülesanne	8
2 Kollokatsioonimeetod	11
2.1 Gradueeritud võrk	11
2.2 Lineaarsed baassplainid	12
2.3 Kollokatsioonimeetod	14
3 Kollokatsioonimeetodi koonduvus	16
3.1 Üleminek operaatorvõrrandile	16
3.2 Koonduvushinnang	19
4 Numbrilised eksperimendid	27
4.1 Näide 1	27
4.2 Näide 2	28
4.3 Näide 3	30
Kasutatud kirjandus	32
Lisa	34
Pythoni kood	34

Sissejuhatus

Küsimus murruliste tuletiste olemuse kohta tekkis juba diferentsiaalarvutuse varajases arengujärgus. Kulus peaaegu 2 sajandit enne kui Georg Friedrich Bernhard Riemann ja Joseph Liouville 19. sajandi keskel andsid murrulise tuletise definitsiooni. Aja jooksul on murruliste tuletiste teooria arenenud ja murrulised tuletised leiavad tänapäeval rakendust paljudes valdkondades. Üks enimkasutatavaid murrulise tuletise definitsioonidest on Michele Caputo poolt aastal 1967 sisse toodud definitsioon, mis kujutab endast teatavat modifikatsiooni Riemanni-Liouville'i murrulise tuletise definitsioonist.

Käesolevas bakalaureusetöös tutvustatakse lühidalt Riemanni-Liouville'i ja Caputo murruliste tuletiste mõisteid ning vaadeldakse diferentsiaalvõrrandi algtingimusega ülesannet kujul

$$(D_{Cap}^\alpha y)(t) + d(t)y(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq b, \quad b > 0,$$
$$y(0) = y_0,$$

kus $0 < \alpha < 1$, $-\infty < y_0 < \infty$ on antud arvud ja $d = d(t)$ ning $f = f(t)$ on antud funktsioonid, $D_{Cap}^\alpha y$ on otsitava funktsiooni $y = y(t)$ α -järku Caputo murruline tuletis. Ülesanne teisendatakse teist liiki Volterra integraalvõrrandiks, mis lahendatakse kollokatsioonimeetodiga kasutades lineaarsplaine.

Bakalaureusetöö koosneb neljast osast. Esimeses osas tuuakse sisse vajalikud mõisted ja kirjeldatakse vaadeldavat diferentsiaalvõrrandit. Teises osas kirjeldatakse lineaarsplaine ja kollokatsioonimeetodit. Kolmandas peatükis uuritakse meetodi koondumist ja koondumiskiirust. Neljandas peatükis testitakse bakalaureusetöös saadud teoreetilisi tulemusi konkreetsete näitülesannete lahendamisega. Lisas on toodud Pythoni programmi kood, mida kasutati numbriliste eksperimentide läbiviimiseks.

1 Caputo tuletis

Selles peatükis esitame Caputo murrulise tuletise mõiste ning toome sisse Caputo murrulise tuletisega diferentsiaalvõrrandi algtingimusega ülesande, mida hakkame lahendama. Järgnev käsitus tugineb artiklile [1].

1.1 Eelteadmised

Tähistame tähega $\mathbb{N}$ naturaalarvude hulka ja tähega $\mathbb{R}$ reaalarvude hulka, kusjuures edaspidisel funktsioonide uurimisel piirdume reaalarvuliste väärtustega. Olgu $C[a, b]$ lõigus $[a, b]$ pidevate funktsioonide hulk ning $C^m[a, b]$ lõigus $[a, b]$ m -korda ($m \in \mathbb{N}$) pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulk. Hulk $C[a, b]$ on Banachi ruum normiga $\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$, kus $x \in C[a, b]$.

Definitsioon 1. Euleri gammafunktsioon $\Gamma = \Gamma(\delta)$ on funktsioon kujul

$$\Gamma(\delta) = \int_0^\infty e^{-s} s^{\delta-1} ds, \quad 0 < \delta < \infty.$$

Definitsioon 2. Olgu $0 < \delta < \infty$ mingi positiivne reaalarv. Riemanni-Liouville'i δ -järku integraaloperaatoriks nimetatakse operaatorit J^δ , mis seab igale funktsioonile $y \in C[0, b]$ vastavusse funktsiooni $J^\delta y$ valemiga

$$(J^\delta y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-s)^{\delta-1} y(s) ds, \quad 0 \leq t \leq b. \quad (1.1)$$

Kuna $J^\delta y$ on muutuja t funktsioon, siis teda nimetatakse ka Riemanni-Liouville'i murruliseks integraaliks.

Kui $\delta = 0$, siis definitsioon (1.1) ei ole rakendatav, sest gammafunktsioon $\Gamma(\delta)$ pole määratud $\delta = 0$ korral ja integraal $\int_0^t (t-s)^{\delta-1} y(s) ds$ hajub. Seega

kui $\delta = 0$, siis defineerime J^δ ühikoperaatorina:

$$(J^0 y)(t) = y(t), \quad 0 \leq t \leq b, \quad y \in C[0, b].$$

Definitsioon 3. Olgu $0 < \alpha < \infty$ ja $m = \lceil \alpha \rceil$ ehk m on vähim täisarv, mis on suurem või võrdne arvuga α . Funktsiooni $y \in C[0, b]$ Riemanni-Liouville'i α -järku murruline tuletis $D_{RL}^\alpha y$ kohal $t \in (0, b]$ defineeritakse valemiga

$$(D_{RL}^\alpha y)(t) = \frac{d^m}{dt^m} (J^{m-\alpha} y)(t),$$

kus $J^{m-\alpha} y$ on integraaloperaator (1.1). Kui $m - \alpha = 0$, siis on tegu ühik-operaatoriga.

Riemann-Liouville'i murrulise tuletise saab esitada ka operaatorite kaudu

$$D_{RL}^\alpha = D^m J^{m-\alpha}, \quad \alpha > 0, m = \lceil \alpha \rceil.$$

Siin operaator D osas mõeldakse diferentseerimise operaatorit, mis igale diferentseeruvale funktsioonile $y = y(t)$ punktis t seab vastavusse tema tuletise y' ehk $(Dy)(t) = \frac{d}{dt} y(t)$. Seega $D^m = \underbrace{D \dots D}_m$, $m \in \mathbb{N}$.

Olgu $\alpha > 0$ ja $m = \lceil \alpha \rceil$. Siis öeldakse, et

$$(T_{m-1} y)(s) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{y^{(j)}(0)}{j!} s^j, \quad 0 \leq s \leq b \quad (1.2)$$

on funktsiooni $y \in C^{m-1}[0, b]$ Tayloriga $(m-1)$ -järku polünoom punktis 0.

Definitsioon 4. Olgu $\alpha > 0$, $m = \lceil \alpha \rceil$, $y \in C^{m-1}[0, b]$. Funktsiooni y Caputo α -järku murruliseks tuletiseks $D_{Cap}^\alpha y$ kohal $t \in (0, b]$ nimetatakse funktsiooni

$y - T_{m-1}y$ α -järku Riemanni-Liouville'i tuletist $(D_{RL}^\alpha(y - T_{m-1}y))(t)$:

$$(D_{Cap}^\alpha y)(t) = (D_{RL}^\alpha(y - T_{m-1}y))(t), \quad 0 \leq t \leq b.$$

Vastavat operaatorit D_{Cap}^α nimetatakse α -järku Caputo murrulise diferentseerimise operaatoriks. Sarnaselt Riemanni-Liouville'i murrulise diferentseerimise operaatorile on $\alpha = 0$ korral loomulik defineerida

$$(D_{Cap}^0 y)(t) = y(t).$$

Kui $\alpha = m \in \mathbb{N}$ ja $y \in C^m[0, b]$, siis $D^m T_{m-1}y = 0$, millest järeldub, et

$$D_{Cap}^m y = D^m(y - T_{m-1}y) = D^m y - D^m T_{m-1}y = D^m y$$

ehk täisarvulist järku Caputo tuletis langeb kokku vastava tavatuletisega.

Esitame ka mõned vajalikud funktsionaalanalüüsi mõisted ja tulemused (vt [2]).

Definitsioon 5. Hulka $E \subset X$ nimetatakse põhihulgaks normeeritud ruumis X , kui $\overline{\text{span}(E)} = X$ ehk hulga E lineaarne kate on kõikjal tihe.

Definitsioon 6. Öeldakse, et operaatorite jada $A_n : X \rightarrow Y$ koondub punktiivis ehk kõikjal ruumis X , kui iga $x \in X$ korral jada $A_n x$ koondub ruumis Y .

Olgu X, Y normeeritud ruumid üle sama korpuse. Tähistame sümboliga $L(X, Y)$ hulka, mis koosneb kõigist pidevatest lineaarsetest operaatoritest ruumist X ruumi Y .

Teoreem 1. (*Banach-Steinhausi teoreem*). Olgu X, Y Banachi ruumid ning

E põhihulk ruumis X . Jada $A_n \in L(X, Y)$ koondub punktiviisi operaatoriks $A \in L(X, Y)$ (st $A_n x \rightarrow Ax$ iga $x \in X$ korral) parajasti siis, kui

$$1. \exists M \in \mathbb{R}, \|A_n\|_{L(X, X)} \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$2. A_n x \rightarrow Ax, \quad \forall x \in E.$$

1.2 Caputo tuletisega võrrandi Cauchy ülesanne

Vaatleme Caputo tuletisega diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesannet, mis on kujul

$$(D_{Cap}^\alpha y)(t) + d(t)y(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq b, \quad b > 0, \quad (1.3)$$

$$y(0) = y_0, \quad (1.4)$$

kus $0 < \alpha < 1$, $-\infty < y_0 < \infty$ on antud arvud ja $d = d(t)$ ning $f = f(t)$ on antud funktsioonid. Otsitava funktsiooni α -järku Caputo murruline tuletis on $D_{Cap}^\alpha y$.

Ülesande (1.3)-(1.4) lahendamiseks defineerime funktsioonide hulga $C^{q,\nu}(0, b]$, kus $q \in \mathbb{N}$ ja $\nu \in (0, 1)$ on vaadeldavat funktsioonide klassi iseloomustavad parameetrid. Täpsemalt, $C^{q,\nu}(0, b]$ on selliste funktsioonide $u = u(t)$ hulk, mis on pidevad lõigus $[0, b]$ ja q korda pidevalt diferentseeruvad poollõigus $(0, b]$ ning mille korral

$$|u^{(i)}(t)| \leq c \cdot t^{1-\nu-i}, \quad 0 < t \leq b, \quad i = 1, \dots, q,$$

kus c on mingi positiivne konstant.

Paneme tähele, et kehtib $C^q[0, b] \subset C^{q,\nu}(0, b]$ iga $q \in \mathbb{N}$ ja iga $\nu \in (0, 1)$ korral.

Järgnev teoreem on võetud artiklist [1].

Teoreem 2. Olgu $0 < \alpha < 1, y_0 \in \mathbb{R}$. Olgu $d, f \in C[0, b]$. Siis on ülesanne (1.3)-(1.4) üheselt lahenduv ja tema lahend $y \in C[0, b]$ ning $D_{Cap}^\alpha y \in C[0, b]$.

Kui $d, f \in C^{2,\mu}[0, b], 0 < \mu < 1$, siis ülesande (1.3)-(1.4) lahend y ning tema Caputo murruline tuletis $D_{Cap}^\alpha y$ kuuluvad hulka $C^{2,\nu}(0, b]$, kus $\nu = \max\{1 - \alpha, \mu\}$. Kui $d, f \in C^2[0, b]$, siis y ja $D_{Cap}^\alpha y$ kuuluvad hulka $C^{2,\nu}(0, b]$, kus $\nu = 1 - \alpha$.

Läheme vaadeldavalt diferentsiaalvõrrandilt üle Volterra teist liiki integraalvõrrandile.

Kui $0 < \alpha < 1$ (vt [3], Teoreem 3), siis $y \in C[0, b]$ korral

$$(J^\alpha D_{Cap}^\alpha y)(t) = y(t) - y(0), \quad 0 \leq t \leq b,$$

kus J^α on Riemann-Liouville'i integraaloperaator. Rakendades seda operaatorit vaadeldava diferentsiaalvõrrandi mõlemale poolele, saame võrduse

$$y(t) - y_0 + (J^\alpha(d \cdot y))(t) = (J^\alpha f)(t).$$

Näeme, et iga $t \in [0, b]$ korral

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} d(s)y(s)ds + y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds \\ &= \int_0^t -\frac{(t-s)^{\alpha-1} d(s)}{\Gamma(\alpha)} y(s)ds + y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds \\ &= \int_0^t K(t, s)y(s)ds + g(t), \end{aligned}$$

kus

$$K(t, s) = -\frac{(t-s)^{\alpha-1} d(s)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (1.5)$$

$$g(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \quad (1.6)$$

Saadud võrrand

$$y(t) = \int_0^t K(t,s)y(s)ds + g(t), \quad 0 \leq t \leq b \quad (1.7)$$

on Volterra teist liiki integraalvõrrand otsitava funktsiooni $y = y(t)$ suhtes.

Saadud integraalvõrrand on samaväärne ülesandega (1.3)-(1.4).

2 Kollokatsioonimeetod

2.1 Gradueeritud võrk

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning vaatame lõigul $[0, b]$ võrku

$$\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n | 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}.$$

Punktid $t_0, t_1, \dots, t_n$ on võrgu Δ_n sõlmed. Nad määravad lõigu $[0, b]$ osalõikudeks $[t_{i-1}, t_i]$ ($i = 1, \dots, n$) nii, et $[0, b] = \bigcup_{i=1}^n [t_{i-1}, t_i]$. Olgu võrk Δ_n selline, et

$$t_i = b \left(\frac{i}{n} \right)^r, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Parameeter $r \geq 1$ näitab võrgu ebaühtlust. Kui $r = 1$, siis on tegu ühtlase võrguga, sest sõlmed avalduvad kujul $t_i = ih, i = 0, 1, \dots, n$, kus $h = \frac{b}{n}$ on iga osalõigu $[t_{i-1}, t_i]$ ($i = 1, \dots, n$) pikkus. Kui $r > 1$, siis paiknevad võrgu Δ_n sõlmed tihedamalt lõigu $[0, b]$ vasaku otspunkti 0 läheduses. Sellist võrku nimetatakse gradueeritud võrguks.

Punktide t_i ja t_{i-1} vaheline kaugus $t_i - t_{i-1}$ on osalõigu $[t_{i-1}, t_i]$ pikkus. Tähistame h_n -ga maksimaalse osalõigu pikkuse:

$$h_n = \max_{i=1, \dots, n} (t_i - t_{i-1}).$$

Osutub, et kui $n \rightarrow \infty$, siis võrgu Δ_n punktide (2.1) korral $h_n \rightarrow 0$. Tõepoolest

$$\begin{aligned} t_i - t_{i-1} &= b \left(\frac{i}{n} \right)^r - b \left(\frac{i-1}{n} \right)^r = b \left(\frac{1}{n} \right)^r [i^r - (i-1)^r] \\ &\leq b \left(\frac{1}{n} \right)^r r n^{r-1} = \frac{br}{n}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Järelikult

$$h_n = \max_{i=1, \dots, n} (t_i - t_{i-1}) \leq \frac{br}{n} \rightarrow 0, \quad \text{kui } n \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

2.2 Lineaarsed baassplainid

Olgu lõigul $[0, b]$ antud võrk $\Delta_n, n \in \mathbb{N}$. Olgu $\varphi_i : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) funktsioonid, mis on defineeritud järgmiselt:

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \frac{t_1-t}{t_1-t_0}, & \text{kui } t_0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & t_1 < t \leq b, \end{cases} \quad (2.3)$$

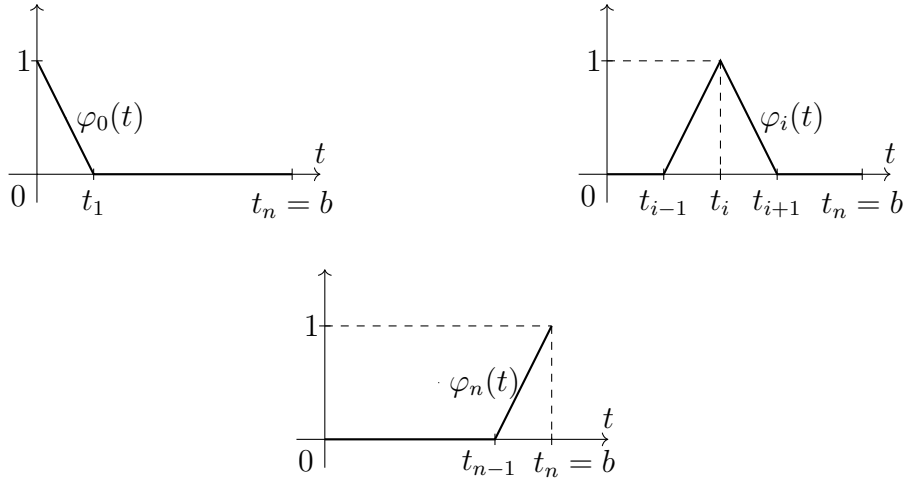
$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}, & \text{kui } t_{i-1} \leq t \leq t_i, \\ \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}, & \text{kui } t_i < t \leq t_{i+1}, i = 1, \dots, n-1, \\ 0, & \text{mujal,} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}}, & \text{kui } t_{n-1} \leq t \leq t_n, \\ 0, & 0 \leq t < t_{n-1}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Valemitega (2.3)-(2.5) defineeritud funktsioonid on lineaarsplainid, sest nad on igas osalõigul $[t_{i-1}, t_i]$ ($i = 1, \dots, n$) esimese astme polünoomid ja nad on pidevad kogu lõigul $[0, b]$. Funktsioonide φ_0, φ_i ($i = 1, \dots, n-1$), φ_n graafikud on esitatud Joonisel 1.

Funktsioonide (2.3)-(2.5) puhul saame $i, j = 0, \dots, n$ korral, et

$$\varphi_i(t_j) = \begin{cases} 1, & \text{kui } i = j \\ 0, & \text{kui } i \neq j. \end{cases} \quad (2.6)$$



Joonis 1: Funktsioonid $\varphi_0(t)$, $\varphi_i(t)$ ja $\varphi_n(t)$.

On ka lihtne näha, et funktsioonid $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ on lineaarselt sõltumatud lõigus $[0, b]$. Tõepoolest, võrdus

$$a_0\varphi_0(t) + a_1\varphi_1(t) + \dots + a_n\varphi_n(t) = 0, \quad \forall t \in [0, b], \quad (2.7)$$

saab kehtida ainult siis, kui kõik kordajad $a_0, \dots, a_n$ on võrdsed nulliga.

Nimelt võttes seoses (2.7) $t = t_0$, saame (2.6) põhjal

$$a_0\varphi_0(t_0) + a_1\varphi_1(t_0) + \dots + a_n\varphi_n(t_0) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 = 0$$

ehk $a_0 = 0$. Võttes seoses (2.7) $t = t_i$ ($i = 1, \dots, n$), saame $a_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$).

Järelikult võrdus (2.7) kehtib ainult juhul, kui

$$a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0.$$

2.3 Kollokatsioonimeetod

Vaatleme integraalvõrrandit

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t, s)y(s)ds, \quad 0 \leq t \leq b, \quad (2.8)$$

kus $y = y(t)$ on otsitav ning g ja K on funktsioonid, mis on defineeritud vastavalt valemitega (1.6) ja (1.5).

Olgu lõigul $[0, b]$ antud võrk Δ_n ($n > 2$) ja olgu φ_j ($j = 0, \dots, n$) valemitega (2.3)-(2.5) defineeritud lineaarsplainid. Võrrandi (2.8) lahendile $y(t)$ otsime lähendit kujul

$$y_n(t) = \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j(t), \quad 0 \leq t \leq b, \quad (2.9)$$

kus c_j ($j = 0, \dots, n$) on konstandid, mis tuleb leida. Nende leidmiseks asetame $y_n(t)$ võrrandisse (2.8) otsitava $y(t)$ kohale ning nõuame, et võrgu Δ_n sõlmedes t_i ($i = 0, \dots, n$) kehtiksid võrdused

$$y_n(t_i) = g(t_i) + \int_0^{t_i} K(t_i, s)y_n(s)ds, \quad i = 0, \dots, n. \quad (2.10)$$

Need seosed saab definitsiooni (2.9) tõttu kirjutada kujul

$$\sum_{j=0}^n c_j \varphi_j(t_i) = g(t_i) + \sum_{j=0}^n \left(\int_0^{t_i} K(t_i, s)\varphi_j(s)ds \right) c_j, \quad i = 0, \dots, n.$$

Saadud võrdused kujutavad endast lineaarset algebralist võrrandisüsteemi suuruste $c_0, \dots, c_n$ leidmiseks, mille tänu omadusele (2.6) saame esitada kujul

$$c_i = g(t_i) + \sum_{j=0}^n k_{ij}c_j, \quad i = 0, \dots, n,$$

kus

$$k_{ij} = \int_0^{t_i} K(t_i, s) \varphi_j(s) ds, \quad i, j = 0, \dots, n.$$

Et

$$\varphi_0(t) = 0, \text{ kui } t \geq t_1,$$

$$\varphi_j(t) = 0, \text{ kui } t \notin (t_{j-1}, t_{j+1}), j = 1, \dots, n-1,$$

$$\varphi_n(t) = 0, \text{ kui } t \leq t_{n-1},$$

siis saame suuruste k_{ij} leidmiseks järgnevad valemid.

Kui $j = 0$, siis $k_{00} = 0$ ning

$$k_{i0} = \int_0^{t_1} K(t_i, s) \frac{t_1 - s}{t_1 - t_0} ds, \quad i = 1, \dots, n.$$

Kui $i = j$, siis

$$k_{ij} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t_i, s) \frac{s - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} ds, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Kui $i - 1 \geq j$, siis

$$k_{ij} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t_i, s) \frac{s - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} K(t_i, s) \frac{t_{j+1} - s}{t_{j+1} - t_j} ds, \quad i = 2, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.$$

Kui $i < j$, siis

$$k_{ij} = \int_0^{t_i} K(t_i, s) \varphi_j(s) ds = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, n.$$

3 Kollokatsioonimeetodi koonduvus

3.1 Üleminek operaatorvõrrandile

Volterra integraalvõrrandit (2.8) saab Banachi ruumis $C[0, b]$ vaadelda operaatorvõrrandina

$$y = g + Ty, \quad (3.1)$$

milles g on funktsioon kujul (1.6) ja operaator $T : C[0, b] \rightarrow C[0, b]$ on defineeritud seosega

$$(Ty)(t) = \int_0^t K(t, s)y(s)ds, \quad 0 \leq t \leq b, \quad (3.2)$$

kus $K(t, s)$ omab kuju (1.5). On lihtne näha, et operaator T on lineaarne.

Tõepoolest, kui $y, z \in C[0, b]$ ja $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, siis

$$\begin{aligned} (T(\lambda y + \gamma z))(t) &= \int_0^t K(t, s)(\lambda y(s) + \gamma z(s))ds \\ &= \lambda \int_0^t K(t, s)y(s)ds + \gamma \int_0^t K(t, s)z(s)ds \\ &= \lambda(Ty)(t) + \gamma(Tz)(t), \quad 0 \leq t \leq b. \end{aligned}$$

Operaator $T : C[0, b] \rightarrow C[0, b]$ on kompaktne. Tõepoolest, integraaloperaatori T tuuma $K(t, s)$ saab esitada kujul

$$K(t, s) = -\frac{(t-s)^{\alpha-1}d(s)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{K_0(t, s)}{|t-s|^\beta}, \quad 0 \leq t \leq b,$$

kus $\beta = 1 - \alpha$ ja $K_0(t, s) = -\frac{d(s)}{\Gamma(\alpha)}$. Et $0 < \alpha < 1$, siis $0 < \beta < 1$ ning et $K_0(t, s)$ on pidev, siis on tuum $K(t, s)$ nõrgalt singulaarne ning vastav integraaloperaator T on samuti nõrgalt singulaarne ja nõrgalt singulaarsed

integraaloperaatorid on kompaktsed (vt [2], lk 215).

Et integraaloperaator T on nõrgalt singulaarne, siis homogeenisel võrrandil $y = Ty$ on ainult null-lahend (vt [6], lk 18-19).

Analoogiliselt töödega [5, 4] toome sisse operaatori $P_n : C[0, b] \rightarrow C[0, b]$, $n \in \mathbb{N}$, mis seab suvalisele funktsioonile ruumist $C[0, b]$ vastavusse funktsiooni:

$$(P_n y)(t) = \sum_{j=0}^n y(t_j) \varphi_j(t), \quad 0 \leq t \leq b, \quad (3.3)$$

kus φ_j ($j = 0, \dots, n$) on lineaarsplainid (2.3)-(2.5). Järgnevalt esitame mõned valemiga (3.3) defineeritud operaatori P_n olulisemad omadused.

Operaator P_n on lineaarne. Tõepoolest, kui $y, z \in C[0, b]$ ja $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, siis

$$\begin{aligned} (P_n(\lambda y + \gamma z))(t) &= \sum_{j=0}^n (\lambda y(t_j) \varphi_j(t) + \gamma z(t_j) \varphi_j(t)) \\ &= \lambda \sum_{j=0}^n y(t_j) \varphi_j(t) + \gamma \sum_{j=0}^n z(t_j) \varphi_j(t) \\ &= \lambda(P_n y)(t) + \gamma(P_n z)(t), \quad 0 \leq t \leq b. \end{aligned}$$

Järgnevalt veendume, et operaator $P_n : C[0, b] \rightarrow C[0, b]$ on tõkestatud ehk iga $y \in C[0, b]$ korral $\|P_n y\|_{C[0, b]} \leq c \|y\|_{C[0, b]}$, kus $c \in \mathbb{R}$ on mingi konstant. Tõepoolest, kui $y \in C[0, b]$, siis

$$\begin{aligned} \|P_n y\|_{C[0, b]} &= \max_{t \in [0, b]} \left| \sum_{j=0}^n y(t_j) \varphi_j(t) \right| \leq \max_{t \in [0, b]} \sum_{j=0}^n |y(t_j)| \varphi_j(t) \\ &\leq \|y\|_{C[0, b]} \max_{t \in [0, b]} \sum_{j=0}^n \varphi_j(t) \\ &= \|y\|_{C[0, b]}. \end{aligned}$$

Seega $P_n \in L(C[0, b], C[0, b])$ ja

$$\|P_n\|_{L(C[0, b], C[0, b])} \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Operaatori P_n definitsiooni (3.3) ja omaduse (2.6) tõttu saame

$$(P_n y)(t_i) = \sum_{j=0}^n y(t_j) \varphi_j(t_i) = y(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Seega iga $y \in C[0, b]$ korral

$$\begin{aligned} (P_n^2 y)(t) &= (P_n(P_n y))(t) = \sum_{j=0}^n (P_n y)(t_j) \varphi_j(t) \\ &= \sum_{j=0}^n y(t_j) \varphi_j(t) = (P_n y)(t), \quad 0 \leq t \leq b, \end{aligned}$$

mis tähendab, et $P_n^2 = P_n$ ehk P_n on projektor ning järelikult kehtib $\|P_n\|_{L(C[0, b], C[0, b])} \geq 1, n \in \mathbb{N}$ ([2], lk 259). Et samuti kehtib (3.4), siis

$$\|P_n\|_{L(C[0, b], C[0, b])} = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Samuti selgub, et $P_n y = 0$ parajasti siis, kui $y(t_i) = 0$ iga $i = 0, \dots, n$ korral.

Tõepoolest, olgu $P_n y = 0$, kus $y \in C[0, b]$. Siis $(P_n y)(t_i) = 0$ iga $i = 0, \dots, n$ korral. Omaduse (3.5) tõttu $(P_n y)(t_i) = y(t_i) = 0$ ehk $y(t_i) = 0$ iga $i = 0, \dots, n$ korral. Teistpidi, kui $y(t_i) = 0$ iga $i = 0, \dots, n$ korral, siis saame otse definitsioonist (3.3), et $P_n y = 0$.

Niisiis kollokatsioonitingimused (2.10) on samaväärsed nõudega

$$P_n(y_n - g - T y_n) = 0 \quad (3.6)$$

ja operaatori P_n lineaarsusest ning võrdusest $P_n y_n = y_n$ saame

$$y_n = P_n g + P_n T y_n. \quad (3.7)$$

Järgneva teoreemi tõestuse võib leida raamatust [5], lk 59.

Teoreem 3. *Olgu T lineaarne kompaktne ehk täielikult pidev operaator Banachi ruumis E . Homogeensel võrrandil $y = Ty$ olgu vaid null-lahend $y = 0$. Projektorid P_n ($n = 1, 2, \dots$) koondugu $n \rightarrow \infty$ korral punktiviisi ühikoperaatoriks:*

$$P_n y \rightarrow y, \text{ kui } n \rightarrow \infty \text{ } (\forall y \in E). \quad (3.8)$$

Siis võrrand (3.1) on iga $g \in E$ korral üheselt lahenduv ning leidub selline n_0 , et $n \geq n_0$ korral on ka võrrandid (3.7) üheselt lahenduvad. Võrrandite (3.7) lahendid y_n koonduvad $n \rightarrow \infty$ korral võrrandi (3.1) lahendiks y ning kehtib veahinnang

$$\|y_n - y\|_E \leq c \|y - P_n y\|_E, \quad n \geq n_0, \quad (3.9)$$

kus konstant c ei sõltu arvust n .

3.2 Koonduvushinnang

Olgu antud valemi (3.3) abil määratud operaatorid P_n ($n \geq 2$) ning olgu $y \in C^1[0, b]$. Leiame ülemise tõkke suurusele $\max_{t \in [0, b]} |y(t) - (P_n y)(t)|$.

Olgu $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ($i = 1, \dots, n$). Siis

$$\begin{aligned}
|y(t) - (P_n y)(t)| &= |y(t) - y(t_{i-1})\varphi_{i-1}(t) - y(t_i)\varphi_i(t)| \\
&= \left| y(t) - y(t_{i-1}) \frac{t_{(i-1)+1} - t}{t_{(i-1)+1} - t_{i-1}} - y(t_i) \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right| \\
&= \left| y(t) - y(t_{i-1}) \left[1 - \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right] - y(t_i) \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right| \\
&= \left| y(t) - y(t_{i-1}) - (t - t_{i-1}) \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right|.
\end{aligned}$$

Lagrange'i keskvaartusteoreemi põhjal on olemas selline $\xi \in (t_{i-1}, t_i)$, et

$$y'(\xi) = \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}.$$

Et $y \in C^1[0, b]$, siis võime selle kirjutada Tayloriga valemi abil kujul

$$y(t) = y(t_{i-1}) + y'(\eta)(t - t_{i-1}), \quad \eta \in (t_{i-1}, t).$$

Seega iga $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ja $i = 1, \dots, n$ korral

$$\begin{aligned}
|y(t) - (P_n y)(t)| &= \left| y(t) - y(t_{i-1}) - (t - t_{i-1}) \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right| \\
&= |y(t_{i-1}) + y'(\eta)(t - t_{i-1}) - y(t_{i-1}) - y'(\xi)(t - t_{i-1})| \\
&= |(y'(\eta) - y'(\xi))(t - t_{i-1})| \\
&\leq |y'(\eta) - y'(\xi)| |t - t_{i-1}| \\
&\leq 2 \max_{t \in [0, b]} |y'(t)| h_n \\
&\leq 2 \max_{t \in [0, b]} |y'(t)| b n^{-1},
\end{aligned}$$

millest järeldub, et

$$\max_{t \in [0, b]} |y(t) - (P_n y)(t)| \leq cn^{-1},$$

kus $c = 2 \max_{t \in [0, b]} |y'(t)|br$. Niisiis, kui $y \in C^1[0, b]$, siis leiab aset koondumine

$$\|y - P_n y\|_{C[0, b]} = \max_{t \in [0, b]} |y(t) - (P_n y)(t)| \rightarrow 0, \text{ kui } n \rightarrow \infty.$$

Kuna kehtib võrratus (3.4) ja $C^1[0, b]$ on kõikjal tihe ruumis $C[0, b]$, siis Banach-Steinhausi teoreemi (Teoreemi 1) põhjal saame, et iga $y \in C[0, b]$ korral

$$\|y - P_n y\|_{C[0, b]} \rightarrow 0, \text{ kui } n \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

Sõnastame ja tõestame teoreemi lähendi ühesuse ja koonduvuse kiiruse kohta.

Teoreem 4. *Vaatleme ülesannet (1.3)-(1.4), kus $\alpha \in (0, 1)$, $d, f \in C[0, b]$. Siis ülesandel (1.3)-(1.4) leidub parajasti üks lahend $y \in C[0, b]$. Olgu kollokatsioonimeetodis (2.9)-(2.10) aluseks gradueeritud võrk $\Delta_n (n > 2)$, mille sõlmed on kujul*

$$t_i = b \left(\frac{i}{n} \right)^r, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad r \geq 1.$$

Siis leidub $n_0 \in \mathbb{N}$ nii, et $n \geq n_0$ korral on ülesande (1.3)-(1.4) lahendile $y \in C[0, b]$ kollokatsioonimeetodiga (2.9)-(2.10) leitud lähsilahend $y_n \in C[0, b]$ üheselt määratud ning leiab aset koondumine

$$\max_{t \in [0, b]} |y_n(t) - y(t)| \rightarrow 0, \quad \text{kui } n \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Kui $d, f \in C^{2,\mu}(0, b]$, $\mu \in (0, 1)$, siis kehtib hinnang

$$\max_{t \in [0, b]} |y_n(t) - y(t)| \leq c \begin{cases} n^{-r(1-\nu)}, & \text{kui } 1 \leq r < \frac{2}{1-\nu}, \\ n^{-2}, & \text{kui } r \geq \frac{2}{1-\nu}, \end{cases} \quad (3.12)$$

kus $\nu = \max\{1 - \alpha, \mu\}$, c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest n , $n \geq n_0$.

Tõestus. Teoreemi väide, et ülesandel (1.3)-(1.4) on üks lahend $y \in C[0, b]$, tuleb Teoreemist 2.

Järgnevalt näitame, et kollokatsioonimeetodiga (2.9)-(2.10) leitud lähislahend $y_n \in C[0, b]$ on üheselt määratud ja kehtib koondumine (3.11).

Teisendame ülesande (1.3)-(1.4) kujule (2.8) ning kirjutame võrrandi (2.8) projektori P_n ($n \in \mathbb{N}$) abil kujul

$$y_n = P_n g + P_n T y_n, \quad (3.13)$$

milles T on defineeritud valemiga (3.2).

Et operaator $T : C[0, b] \rightarrow C[0, b]$ on lineaarne ja kompaktne, vastaval homogeensel võrrandil $y = T y$ on ainult null-lahend ja kehtib koondumine (3.10), siis kehtivad kõik Teoreemi 3 eeldused. Selle põhjal leidub selline $n_0 \in \mathbb{N}$ nii, et $n \geq n_0$ korral on võrrand (3.13) üheselt lahenduv. Kehtib veahinnang

$$\|y_n - y\|_{C[0, b]} \leq c \|y - P_n y\|_{C[0, b]}, \quad n \geq n_0, \quad (3.14)$$

kus $y \in C[0, b]$ on ülesande (1.3)-(1.4) lahend ja c on mingi positiivne konstant mis ei sõltu suurusest n . Koondumine (3.11) tuleb tulemustest (3.14) ja (3.10).

Eeldame, et $d, f \in C^{2,\mu}(0, b]$ ja näitame nüüd, et kehtib hinnang (3.12). Selle näitamiseks tugineme Teoreemist 2 järelduvale väitele, et $y \in C^{2,\nu}(0, b]$, kus $\nu = \max\{1 - \alpha, \mu\}$. Vaatame kõigepealt juhtu, kui $t \in [0, t_1]$. Et lähend $y_n(t)$ on lahendit $y(t)$ punktides $t_0 = 0$ ja $t = t_1$ interpoleeriv funktsioon, siis saame kirjutada

$$\begin{aligned}
y_n(t) - y(t) &= y(0)\varphi_0(t) + y(t_1)\varphi_1(t) - y(t) \\
&= y(0)\frac{t_1 - t}{t_1 - 0} + y(t_1)\frac{t - 0}{t_1 - 0} - y(t) \\
&= \frac{y(0)(t_1 - t) + y(t_1)t - y(t)t_1}{t_1} \\
&= \frac{y(0)(t_1 - t) + y(t_1)t - y(t)t_1 + y(t)t - y(t)t}{t_1} \\
&= \frac{(t_1 - t)(y(0) - y(t)) - t(y(t) - y(t_1))}{t_1} \\
&= \frac{t_1 - t}{t_1}(y(0) - y(t)) - \frac{t}{t_1}(y(t) - y(t_1)).
\end{aligned}$$

Et lahend $y \in C^{2,\nu}(0, b]$, siis saame $t \in [0, t_1]$ korral vea $y_n(t) - y(t)$ esitada kujul

$$\begin{aligned}
y_n(t) - y(t) &= \frac{t_1 - t}{t_1}(y(0) - y(t)) - \frac{t}{t_1}(y(t) - y(t_1)) \\
&= -\frac{t_1 - t}{t_1} \int_0^t y'(s)ds - \frac{t}{t_1} \int_{t_1}^t y'(s)ds \\
&= \frac{t}{t_1} \int_t^{t_1} y'(s)ds - \frac{t_1 - t}{t_1} \int_0^t y'(s)ds.
\end{aligned}$$

Seega lõigul $[0, t_1]$ on maksimaalne viga $y_n(t) - y(t)$ hinnatav järgmiselt

$$\begin{aligned}
\max_{t \in [0, t_1]} |y_n(t) - y(t)| &= \max_{t \in [0, t_1]} \left| \frac{t}{t_1} \int_t^{t_1} y'(s)ds - \frac{t_1 - t}{t_1} \int_0^t y'(s)ds \right| \\
&\leq \max_{t \in [0, t_1]} \left(\int_t^{t_1} |y'(s)|ds + \int_0^t |y'(s)|ds \right), \quad .
\end{aligned}$$

Et $y \in C^{2,\nu}(0, b]$, siis $|y'(s)| \leq c_1 s^{-\nu}$, kus c_1 on mingi positiivne konstant.

Järelikult

$$\begin{aligned}
\max_{t \in [0, t_1]} \left(\int_t^{t_1} |y'(s)| ds + \int_0^t |y'(s)| ds \right) &\leq \max_{t \in [0, t_1]} \left(\int_0^{t_1} c_1 s^{-\nu} ds + \int_0^t c_1 s^{-\nu} ds \right) \\
&= 2c_1 \max_{t \in [0, t_1]} \left(\frac{s^{1-\nu}}{1-\nu} \Big|_0^{t_1} + \frac{s^{1-\nu}}{1-\nu} \Big|_0^t \right) \\
&= 2c_1 \max_{t \in [0, t_1]} \frac{t_1^{1-\nu} + t^{1-\nu}}{1-\nu} \\
&\leq 4c_1 \frac{t_1^{1-\nu}}{1-\nu} \\
&= \frac{4c_1}{1-\nu} \left[b \left(\frac{1}{n} \right)^r \right]^{1-\nu} \\
&= \frac{4c_1 b^{1-\nu}}{1-\nu} n^{-r(1-\nu)} = c_2 n^{-r(1-\nu)},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

kus $c_2 = \frac{4c_1 b^{1-\nu}}{1-\nu}$ on positiivne konstant.

Järgmisena olgu $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ($i = 2, \dots, n$). Vahe $y_n(t) - y(t)$ saame ümber kirjutada kujul (vt [7], lk 17)

$$y_n(t) - y(t) = \frac{y''(\xi)}{2} (t - t_{i-1})(t - t_i),$$

kus $\xi \in (t_{i-1}, t_i)$. Et $y \in C^{2,\nu}(0, b]$, siis

$$|y''(\xi)| \leq c_3 \xi^{-\nu-1} \leq c_3 t_{i-1}^{-\nu-1}, \quad \xi \in (t_{i-1}, t_i), \quad i = 2, \dots, n.$$

Et $\xi > t_{i-1}$ ja $\nu \in (0, 1)$, siis $-\nu - 1 < 0$, ning seetõttu $\xi^{-\nu-1} \leq t_{i-1}^{-\nu-1}$.

Liiget $(t - t_{i-1})(t - t_i)$ saame ülevalt hinnata liikmega $\frac{(t_i - t_{i-1})^2}{4}$. See tuleb sellest, et polünoomi $(t - t_{i-1})(t - t_i)$ ekstreemumkoht on kohal $\frac{t_{i-1} + t_i}{2}$ ja

seega

$$\begin{aligned}
|(t - t_{i-1})(t - t_i)| &\leq \left| \left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2} - t_{i-1} \right) \left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2} - t_i \right) \right| \\
&= \left| \frac{(t_i - t_{i-1})(t_{i-1} - t_i)}{4} \right| \\
&= \frac{(t_i - t_{i-1})^2}{4}.
\end{aligned}$$

Kasutades neid hinnanguid saame $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ($i = 2, \dots, n$) korral

$$\begin{aligned}
|y_n(t) - y(t)| &\leq \frac{c_3 t_{i-1}^{-\nu-1}}{2} \cdot \frac{(t_i - t_{i-1})^2}{4} \\
&= \frac{c_3}{8} \left[b \left(\frac{i-1}{n} \right)^r \right]^{-\nu-1} \cdot \left[b \left(\frac{i}{n} \right)^r - b \left(\frac{i-1}{n} \right)^r \right]^2 \\
&= \frac{c_3}{8} b^{-\nu-1+2} \left(\frac{i-1}{n} \right)^{r(-\nu-1)} \cdot \left[\left(\frac{i}{n} \right)^r - \left(\frac{i-1}{n} \right)^r \right]^2 \\
&= \frac{c_3}{8} b^{1-\nu} n^{-r(-\nu-1)} (i-1)^{r(-\nu-1)} \cdot n^{-2r} [i^r - (i-1)^r]^2 \\
&= \frac{c_3}{8} b^{1-\nu} n^{r\nu-r} (i-1)^{r(-\nu-1)} \cdot [i^r - (i-1)^r]^2.
\end{aligned}$$

Kasutades Lagrange'i keskvaartusteoreemi, saame leida ülemise tõkke liikmele $i^r - (i-1)^r$. Nimelt leidub $\omega \in (i-1, i)$ nii, et

$$i^r - (i-1)^r = r\omega^{r-1} \cdot (i - (i-1)) = r\omega^{r-1} \leq ri^{r-1}.$$

Seega

$$\begin{aligned}
\max_{t \in [t_{i-1}, t_i]} |y_n(t) - y(t)| &\leq \frac{c_3}{8} b^{1-\nu} n^{r\nu-r} (i-1)^{r(-\nu-1)} \cdot ri^{2(r-1)} \\
&= \frac{c_3}{8} b^{1-\nu} r n^{r\nu-r} (i-1)^{r(-\nu-1)} \cdot i^{2(r-1)}, \quad i = 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

Hindame tegurit $(i-1)^{r(-\nu-1)} \cdot i^{2(r-1)}$, kui $i = 2, \dots, n$. Näeme, et

$$\begin{aligned}
(i-1)^{r(-\nu-1)} i^{2(r-1)} &= (i-1)^{r(-\nu-1)} i^{2r} i^{-2} \\
&= (i-1)^{r(-\nu-1)} i^{2r} \left(\frac{i-1}{i-1} \right)^{2r} i^{-2} \left(\frac{i-1}{i-1} \right)^{-2} \\
&= (i-1)^{r(-\nu-1)+2r-2} \left(\frac{i}{i-1} \right)^{2r} \left(\frac{i}{i-1} \right)^{-2} \\
&= (i-1)^{r-r\nu-2} \left(\frac{i}{i-1} \right)^{2r-2} \\
&\leq (i-1)^{r-r\nu-2} 2^{2r-2}.
\end{aligned}$$

Kasutades seda hinnangut, saame

$$\begin{aligned}
\max_{t \in [t_{i-1}, t_i]} |y_n(t) - y(t)| &\leq \frac{c_3}{8} b^{1-\nu} r n^{r\nu-r} (i-1)^{r-r\nu-2} 2^{2r-2} \\
&= c_4 n^{r\nu-r} (i-1)^{r(1-\nu)-2}, \quad i = 2, \dots, n,
\end{aligned}$$

milles $c_4 = \frac{c_3}{8} b^{1-\nu} r 2^{2r-2} = c_3 b^{1-\nu} r 2^{2r-5}$.

Kui $r(1-\nu) - 2 < 0$ ehk $r < 2(1-\nu)^{-1}$, siis

$$\max_{t \in [t_{i-1}, t_i]} |y_n(t) - y(t)| \leq c_4 n^{r\nu-r} (i-1)^{r(1-\nu)-2} \leq c_4 n^{-r(1-\nu)}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.16)$$

Teisel juhul $r(1-\nu) \geq 2$ ning seetõttu

$$\max_{t \in [t_{i-1}, t_i]} |y_n(t) - y(t)| \leq c_4 n^{r\nu-r} (i-1)^{r(1-\nu)-2} \leq c_4 n^{-2}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.17)$$

Hinnangutest (3.15)-(3.17) järeldub hinnang (3.12).

□

4 Numbrilised eksperimendid

4.1 Näide 1

Vaatleme ülesannet

$$(D_{Cap}^{\frac{1}{4}}y)(t) + y(t) = \frac{3\Gamma(\frac{3}{4})}{2\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{4}} + 4, \quad 0 \leq t \leq 1,$$
$$y(0) = 4,$$

kus $y = y(t)$ on otsitav funktsioon.

See ülesanne on kujul (1.3)-(1.4), kus

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad y_0 = 4, \quad d(t) = 1, \quad f(t) = \frac{3\Gamma(\frac{3}{4})}{2\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{4}} + 4, \quad b = 1, \quad \nu = \frac{3}{4}.$$

Teisendame ülesande teist liiki Volterra integraalvõrrandiks (2.8) ja kasutame peatükis 2.3 kirjeldatud kollokatsioonimeetodit lähendi $y_n(t)$ leidmiseks. Võrguks on gradueeritud võrk $\Delta_n (n \geq 2)$, kus võrgupunktid t_i ($i = 0, 1, \dots, n$) saab esitada valemiga (2.1). Täpne lahend on $y(t) = t^{\frac{3}{4}} + 4$.

Viga ε_n on ligikaudu arvutatud järgmiselt erinevate n -i väärtuste korral:

$$\varepsilon_n = \max_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=0,\dots,10}} |y(t_{ij}) - y_n(t_{ij})|,$$

kus $t_{ij} = t_{j-1} + \frac{i}{10}(t_j - t_{j-1})$ ja $y = y(t)$ on täpne lahend. Et näha, kas teoreetiline hinnang vastab katsete tulemustele, on tabelites välja arvutatud vigade suhted $\varrho_n = \varepsilon_{n/2}/\varepsilon_n$.

Teoreemi 4 järgi on teoreetiline hinnang järgmine:

$$\max_{t \in [0, b]} |y_n(t) - y(t)| \leq c \begin{cases} n^{-\frac{r}{4}}, & \text{kui } 1 \leq r < 8, \\ n^{-2}, & \text{kui } r \geq 8, \end{cases}$$

Suhted ϱ_N peaksid olema seega $r = 1$ korral $2^{\frac{1}{4}} \approx 1,19$, $r = 4$ korral $2^1 = 2$ ja $r = 8$ korral $2^2 = 4$.

Tabel 1: Vead ja nende suhted erinevate r -i väärtuste korral

n	$\varepsilon_n(r = 1)$	ϱ_n	$\varepsilon_n(r = 4)$	ϱ_n	$\varepsilon_n(r = 8)$	ϱ_n
4	$3.160 \cdot 10^0$		$7.395 \cdot 10^{-1}$		$1.624 \cdot 10^{-1}$	
8	$2.360 \cdot 10^0$	1.339	$3.385 \cdot 10^{-1}$	2.185	$3.939 \cdot 10^{-2}$	4.122
16	$1.814 \cdot 10^0$	1.301	$1.624 \cdot 10^{-1}$	2.085	$9.775 \cdot 10^{-3}$	4.030
32	$1.423 \cdot 10^0$	1.275	$7.956 \cdot 10^{-2}$	2.041	$2.439 \cdot 10^{-3}$	4.007
64	$1.132 \cdot 10^0$	1.257	$3.939 \cdot 10^{-2}$	2.020	$6.096 \cdot 10^{-4}$	4.002
128	$9.113 \cdot 10^{-1}$	1.243	$1.960 \cdot 10^{-2}$	2.010	$1.524 \cdot 10^{-4}$	4.000
256	$7.395 \cdot 10^{-1}$	1.232	$9.775 \cdot 10^{-3}$	2.005	$3.809 \cdot 10^{-5}$	4.000

Tabelist 1 on näha, et arvulised tulemused on kooskõlas teoreetilise vea hinnanguga.

4.2 Näide 2

Vaatleme ülesannet

$$(D_{Cap}^{\frac{1}{2}}y)(t) + t^2y(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 5t^2 + t^{\frac{5}{2}}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$y(0) = 5,$$

kus $y = y(t)$ on otsitav funktsioon. See ülesanne on kujul (1.3)-(1.4), kus

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad y_0 = 5, \quad d(t) = t^2, \quad f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 5t^2 + t^{\frac{5}{2}}, \quad b = 1, \quad \nu = 1 - \alpha.$$

Teisendame ülesande teist liiki Volterra integraalvõrrandiks (2.8) ja kasutame peatükis 2.3 kirjeldatud kollokatsioonimeetodit lähendi $y_n(t)$ leidmiseks. Võrguks on gradueeritud võrk $\Delta_n (n \geq 2)$, kus võrgupunktid t_i ($i = 0, 1, \dots, n$) saab esitada valemiga (2.1). Arvutame ligikaudse vea ε_n ja vigade suhted ρ_n erinevate n -i väärtuste korral.

Selle ülesande täpne lahend on

$$y(t) = \sqrt{t} + 5.$$

Teoreemi 4 järgi on teoreetiline hinnang järgmine:

$$\max_{t \in [0, b]} |y_n(t) - y(t)| \leq c \begin{cases} n^{-\frac{r}{2}}, & \text{kui } 1 \leq r < 4, \\ n^{-2}, & \text{kui } r \geq 4. \end{cases}$$

Suhted ρ_n peaksid olema seega $r = 1$ korral $2^{\frac{1}{2}} \approx 1,41$, $r = 2$ korral $2^1 = 2$ ja $r = 4$ korral $2^2 = 4$.

Tabelist 2 on näha, et arvulised tulemused on kooskõlas teoreetilise veahinnanguga.

Tabel 2: Vead ja nende suhted erinevate n -i väärtuste korral

n	$\varepsilon_n(r=1)$	ϱ_n	$\varepsilon_n(r=2)$	ϱ_n	$\varepsilon_n(r=4)$	ϱ_n
4	$1.237 \cdot 10^{-1}$		$6.193 \cdot 10^{-2}$		$2.990 \cdot 10^{-2}$	
8	$8.756 \cdot 10^{-2}$	1.413	$3.097 \cdot 10^{-2}$	2.000	$7.645 \cdot 10^{-3}$	3.911
16	$6.193 \cdot 10^{-2}$	1.414	$1.548 \cdot 10^{-2}$	2.000	$1.939 \cdot 10^{-3}$	3.943
32	$4.379 \cdot 10^{-2}$	1.414	$7.741 \cdot 10^{-3}$	2.000	$4.872 \cdot 10^{-4}$	3.980
64	$3.097 \cdot 10^{-2}$	1.414	$3.871 \cdot 10^{-3}$	2.000	$1.220 \cdot 10^{-4}$	3.994
128	$2.190 \cdot 10^{-2}$	1.414	$1.935 \cdot 10^{-3}$	2.000	$3.051 \cdot 10^{-5}$	3.998
256	$1.548 \cdot 10^{-2}$	1.414	$9.677 \cdot 10^{-4}$	2.000	$7.629 \cdot 10^{-6}$	3.999

4.3 Näide 3

Vaatleme ülesannet

$$(D_{Cap}^{\frac{3}{4}}y)(t) + t^{\frac{5}{2}}y(t) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{13}{4})}t^{\frac{9}{4}} + 2t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{11}{2}}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$y(0) = 2,$$

kus $y = y(t)$ on otsitav funktsioon. See ülesanne on kujul (1.3)-(1.4), kus

$$\alpha = \frac{3}{4}, \quad y_0 = 2, \quad d(t) = t^{\frac{5}{2}}, \quad f(t) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{13}{4})}t^{\frac{9}{4}} + 2t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{11}{2}}, \quad b = 1, \quad \nu = 1 - \alpha.$$

Teisendame ülesande teist liiki Volterra integraalvõrrandiks (2.8) ja kasutame peatükis 2.3 kirjeldatud kollokatsioonimeetodit lähendi $y_n(t)$ leidmiseks. Võrguks on gradueeritud võrk $\Delta_n(n \geq 2)$, kus võrgupunktid t_i ($i = 0, 1, \dots, n$) saab esitada valemiga (2.1). Arvutame ligikaudse vea ε_n ja vigade suhted ρ_n erinevate n -i väärtuste korral.

Selle ülesande lahendiks on

$$y(t) = t^3 + 2.$$

Teoreemi 4 järgi on teoreetiline hinnang järgmine:

$$\max_{t \in [0, b]} |y_n(t) - y(t)| \leq c \begin{cases} n^{-\frac{3r}{4}}, & \text{kui } 1 \leq r < \frac{8}{3}, \\ n^{-2}, & \text{kui } r \geq \frac{8}{3}, \end{cases}$$

Suhted ϱ_N peaksid olema seega $r = 1$ korral $2^{\frac{3}{4}} \approx 1,68$, $r = 2$ korral $2^{\frac{3}{2}} \approx 2,83$ ja $r = 4$ korral $2^2 = 4$.

Tabel 3: Vead ja nende suhted erinevate r -i väärtuste korral

n	$\varepsilon_n(r = 1)$	ϱ_n	$\varepsilon_n(r = 2)$	ϱ_n	$\varepsilon_n(r = 4)$	ϱ_n
4	$2.791 \cdot 10^{-2}$		$2.925 \cdot 10^{-2}$		$9.158 \cdot 10^{-3}$	
8	$8.601 \cdot 10^{-3}$	3.245	$1.955 \cdot 10^{-2}$	1.497	$2.416 \cdot 10^{-2}$	0.379
16	$2.300 \cdot 10^{-3}$	3.739	$7.226 \cdot 10^{-3}$	2.705	$1.682 \cdot 10^{-2}$	1.437
32	$5.898 \cdot 10^{-4}$	3.900	$2.136 \cdot 10^{-3}$	3.382	$6.663 \cdot 10^{-3}$	2.524
64	$1.490 \cdot 10^{-4}$	3.958	$5.763 \cdot 10^{-4}$	3.707	$2.058 \cdot 10^{-3}$	3.238
128	$3.742 \cdot 10^{-5}$	3.982	$1.493 \cdot 10^{-4}$	3.859	$5.683 \cdot 10^{-4}$	3.621
256	$9.376 \cdot 10^{-6}$	3.992	$3.798 \cdot 10^{-5}$	3.931	$1.491 \cdot 10^{-4}$	3.813

Näeme, et praktilised tulemused, mis on Tabelis 3 on paremad kui teoreetiline hinnang. Võimalike põhjustena võib välja tuua, et ülesande täpne lahend $y(t) = t^3 + 2$ on väga sile ning teoreetiline hinnang käsitleb halvimat juhtu.

Kasutatud kirjandus

- [1] Pedas, A., Vikerpuu, M. (2022). Murrulised tuletised ja murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandid. A. Kivinukk, K. Lätt (toim), *Eesti Matemaatika Selts. Aastaraamat (2019)*, lk. 81–117. Eesti Matemaatika Selts.
- [2] Oja, E., Oja, P. (1991) *Funktsionaalanalüüs*. Tartu Ülikool.
- [3] Grigoletto, E., de Oliveira, E. (2013) Fractional Versions of the Fundamental Theorem of Calculus. *Applied Mathematics 4. nr 7*, lk 23-33. Scientific Research Publishing.
- [4] Õunpuu, R. (2025) *Iseärasustega Volterra integraalvõrrandi lahendamine kollokatsioonimeetodil*. Bakalaureusetöö. Tartu Ülikool. URL: <https://hdl.handle.net/10062/112255> (vaadatud 18.05.2026)
- [5] Vainikko, G. (1990) *Kiirguslevi. Matemaatilise füüsika täiendavaid peatükke*. Tartu Ülikool.
- [6] Brunner, H. (2017) *Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications*. Cambridge University Press.
- [7] Tamme, E., Vöhandu, L. ja Luht, L. (1986) *Arvutusmeetodid*. Valgus.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Voldemar Kirss,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

"Caputo murrulise tuletisega diferentsiaalvõrrandi lahendamine pidevate lineaarsplainidega kollokatsioonimeetodil",

mille juhendaja on Arvet Pedas, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Voldemar Kirss

27.05.2026

Lisa

Pythoni kood

```
import math
import numpy as np
import scipy

#esialgse diferentsiaalvõrrandi antud konstandid(näide 1)
alpha = 0.5
a = 0
b = 1
y0 = 5

#antud funktsioon f(näide 1)
def f(t):
    return np.sqrt(math.pi)/2 + 5*t**2 + t**2.5

#antud funktsioon d(näide 1)
def d(t):
    return t**2

#võrrandi täpne lahend(näide 1)
def täpne(t):
    return t**0.5 + 5
```

```

#teisendused volterra integraalvõrrandi jaoks
def K(t,s):
    return -1 * ((t-s)**(alpha-1)*d(s))/(math.gamma(alpha))

def g(t):
    if t==0:
        return y0
    return 1/math.gamma(alpha)*integraal(lambda s:(t-s)**(alpha-1)*f(s),0,t)
    + y0

#integraali arvutamine
def integraal(g,a,b):
    def päris(x):
        return np.real(g(x))
    pärisosa = scipy.integrate.quad(päris, a, b, points=[b])
    return pärisosa[0]

#võrgupunktid
def grad_võrk(a,b,n,r):
    võrk = []
    for i in range(n+1):
        võrk.append( a + (b-a)*(i/n)**r )
    return võrk

#lineaarsplaini phi_i väärtus kohal z
def phi(i,z):
    if i==0:

```

```

        if vörk[0] <= z <= vörk[1]:
            return (vörk[1]-z)/(vörk[1]-vörk[0])
        else: return 0
    elif i==n:
        if vörk[n-1]<= z <= vörk[n]:
            return (z-vörk[n-1])/(vörk[n]-vörk[n-1])
        else: return 0
    else:
        if vörk[i-1] <= z <= vörk[i]:
            return (z - vörk[i-1])/(vörk[i]-vörk[i-1])
        elif vörk[i] <= z <= vörk[i+1]:
            return (vörk[i+1]-z)/(vörk[i+1]-vörk[i])
        else: return 0

#kordajad k_ij
def k(i,j):
    if j == 0:
        return integraal(lambda y: K(vörk[i],y)*phi(0,y),vörk[0],vörk[1])
    elif i == j:
        return integraal(lambda y: K(vörk[i],y)*phi(j,y),vörk[i-1],vörk[i])
    elif i-1>= j :
        return integraal(lambda y: K(vörk[i],y)*phi(j,y),vörk[j-1],vörk[j])
        +integraal(lambda y: K(vörk[i],y)*phi(j,y),vörk[j],vörk[j+1])
    else:
        return 0

```

```

#lineaarvõrrandisüsteemi kordajate maatriks
def maatriks_K(n):
    M = np.zeros((n+1,n+1),dtype=float)
    for i in range(n+1):
        for j in range(n+1):
            M[i ,j]=k(i,j)
    M = np.identity(n+1) - M
    return M

#integraalvõrrandi vabaliikmete üheveeruline maatriks
def maatriks_vabaliige(n,võrk):
    F = np.zeros((n+1))
    for i in range(len(F)):
        F[i]=g(võrk[i])
    return F

#lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine
def lahend(kordajad,vabaliige):
    return np.linalg.solve(kordajad,vabaliige)

#kordajatega c_j ligikaudse lähendi väärtus kohal x
def lähend(x,c_j):
    summa = 0
    for i in range(len(c_j)):
        summa = summa + c_j[i]*phi(i,x)
    return summa

```

```

#leiame vead erinevate r-i ja n-i väärtustel
N_väärtused = [4,8,16,32,64,128,256]
vead = []

for R in [1,2,4]:
    for N in N_väärtused:
        max_viga = 0
        n = N
        r = R
        vörk = grad_vörk(a,b,n,r)
        vabaliige_maatriks = maatriks_vabaliige(n,vörk)
        kordaja_maatriks = maatriks_K(n)
        c = lahend(kordaja_maatriks,vabaliige_maatriks)
        t=vörk
        for j in range(1,N):
            for i in range(11):
                tij = t[j-1]+i*(t[j]-t[j-1])/10
                vahe = abs(täpne(tij)-lähend(tij,c))
                if vahe > max_viga:
                    max_viga=vahe
            vead.append(max_viga)

esimesed=vead[0:7]
teised=vead[7:14]
kolmas=vead[14:21]

```

```

#prindime välja tabeli
veerunimed = ["N", "eps(r=1)", "suhe", "eps(r=2)", "suhe", "eps(r=4)", "suhe"]

print(" ".join(f"{h:>14}" for h in veerunimed))

for i in range(len(N_väärtused)):
    if i == 0:
        r1 = r2 = r3 = ""
    else:
        r1 = esimesed[i-1] / esimesed[i]
        r2 = teised[i-1] / teised[i]
        r3 = kolmas[i-1] / kolmas[i]
    row = [
        f"{N_väärtused[i]:14d}",
        f"{esimesed[i]:14.3e}",
        f"{r1:14.3f}" if r1 != "" else f"{'':14}",
        f"{teised[i]:14.3e}",
        f"{r2:14.3f}" if r2 != "" else f"{'':14}",
        f"{kolmas[i]:14.3e}",
        f"{r3:14.3f}" if r3 != "" else f"{'':14}",
    ]
    print("".join(row))

```