TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Ariva
M. Rahula

ANALÜÜTILISE GEOMEETRIA

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Algebra ja geomeetria kateeder

K. Ariva
M. Rahula

ANALÜÜTILINE GEOMEETRIA

I

TARTU 1967

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

М. Рахула и К. Арива
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
I
На эстонском языке

Vastutav toimetaja Ü. Lumiste
Korrektor E. Oja

TRÜ rotaprint 1966. Trükipoognaid 5,75.
Tingtrükipoognaid 5,23. Arvestuspoognaid
3,83. Trükiarv 1000. Paber 30x42. 1/4.
Paljundamisele antud 30. XII 1966.
MB 11891. Tell. nr. 572.

Hind 11 kop.

Saateks esimesele osale

Käesolev õppevahend on autorite poolt rea aastate jooksul TRÜ matemaatika ja füüsika osakondade üliõpilastele loetud analüütilise geomeetria kursuse konspekti esimene osa. Esitatud materjal ületab ulatuselt mõnevõrra füüsikute jaoks kehtivas kõrgema matemaatika programmis analüütilisele geomeetriale pühendatud ainelõigu. Matemaatikutele määratud täiendava programmilise materjali (projektiivse ja afiinse geomeetria alused, rühmateoreetiline printsiip geomeetrias) käsitlemine on ette nähtud konspekti teises osas.

Esimene osa on jaotatud kolmeks peatükiks, mis avaldatakse eraldi kolmes vihikus. Esimene vihik sisaldab vektoralgebra süstemaatilist ülesehitust; teises vihikus vaadeldakse koordinaatmeetodit ja selle rakendamist sirgete ja tasandite analüütilisel esitamisel (lineaargeomeetria); kolmas vihik on pühendatud teist järku algebraliste joonte ja pindade uurimisele (ruutgeomeetria) elementaarselt vaatekohalt.

Aine käsitlemisel on püütud vältida järsku hüpet üleminekul elementaarmatemaatika mõtteringist kõrgema matemaatika valdkonda. Pideva ülemineku tagamiseks ja algmõistete ning meetodi selge omandamise huvides on konspektis osutatud maksimaalset tähelepanu näitlikkusele, mis väljendub ennekõike jooniste rohkuses ja näidete valikus.

Aine esitus konspektis erineb mõneti analüütilise geomeetria käsitlusest käibel olevais õpikuis. Nõnda on vektoralgebra eraldatud esimesse sissejuhatavasse peatükki, kusjuures koordinaadid võetakse kasutusele alles peatüki lõpus. Selline materjali paigutus avab autorite arvates reljeefsemalt kursuse loogilise struktuuri. Koonuselõigete teooriale on konspektis lähenetud uudsel viisil: harilikule käsitlusele eelneb koonuselõigete sünteetiline (koordinaatvaba) uurimine. Niisugune kõrvalekalle kursuse analüütilisest laadist väldib aine formaalset omandamist seal, kus veel puuduvad küllaldased harjumused "mõtlemiseks valemite abil".

Elementaarne ja piltlik käsitluslaad peaks muutma konspekti sobivaks abivahendiks loengulise materjali omandamisel ja soodustama keskkooli lõpetanu esimest tutvumist kõrgema matemaatikaga.

Autorid avaldavad siirast tänu dotsent U.Lumistele, kes luges läbi konspekti käsikirja ja tegi seejuures palju väärtuslikke märkusi.

I peatükk

NÄITLIK VEKTORALGEBRA

§ 1. Algmõisted

1. Eelmärkused.

Esimeses peatükis vaadeldakse kaht liiki objekte: skalaare ja vektoreid.

Need mõisted on tuttavad kooli füüsika kursusest. Teatavasti eristatakse füüsikas kaht liiki suurusi:

1) skalaarsuurused, mis on täielikult iseloomustatavad oma reaalarvuliste väärtustega, kusjuures viimaseid saab kujutada arvsirge punktidena (skalaar - arvskaala abil kirjeldatav suurus; näit. aeg, temperatuur, nurk, pindala, mass, juhtme takistus, jne.);

2) vektorsuurused, mille täielikuks iseloomustamiseks on peale arvulise väärtuse tarvis teada veel suunda (tung, kiirus, kiirendus, elektrivälja tugevus jne.); vektorit kujutatakse "noolega".

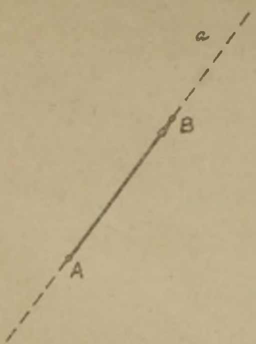
Käesolevas kursuses mõistetakse skalaaride all alati reaalarve. Juhul, kui on tegemist muutuva suurusega, mille väärtusi saab esitada arvskaala abil, räägitakse skalaarmuutujast.

Esimeses peatükis defineeritakse rida tehteid vektoritega; nende tehete omaduste uurimine moodustab vektorarvutuse esimese osa - vektoralgebra. Et käesolevas on vektori määritlemisel aluseks võetud vektorsuuruste näitlik kujutamisviis, siis kõneleme <u>näitlikust</u> vektoralgebrast. Vektori mõiste abstraktne käsitlus antakse kõrgema algebra kursuses. Vektorarvutuse teisi osi (vektoranalüüs, vektorväljade teooria) vaadeldakse diferentsiaalgeomeetrias.

Märgime, et vektorarvutusel on kaasaegses matemaatikas ja füüsikas väga lai rakendusväli. Vektoralgebra ei kuulu vahetult analüütilise geomeetria põhitemaatikasse. Kuid käesolevas esituses on analüütilise geomeetria kursus üles ehitatud viisil, mis eeldab vektoralgebra head tundmist. Lugejal tuleb läbi töötada ka lisatud näited, millest enamik laiendab põhimaterjali ja on vajalik järgneva mõistmiseks.

2. <u>Vektori mõiste</u>.

<u>Vektor on sirglõik, millele on omistatud suund</u>.



Joon. 1

Vektori puhul kõneldakse tema sihist, suunast ja pikkusest, samuti tema algus- ja lõpp-punktist.

Vektor on täielikult määratud oma algus- ja lõpp-punktiga, s.o. järjestatud (nummerdatud) punktipaariga. Vektorit alguspunktiga A ja lõpp-punktiga B (joon. 1) tähistatakse sümboliga $\overline{AB}$.

Vektori <u>sihi</u> määrab sirge, millel asub vektor (sirge a joonisel 1), või mistahes sellega paralleelne sirge. Vektori <u>suuna</u> määrab otspunktide järjestus; suunda kujutatakse noole teravikuga. Antud suund määrab ka sihi; antud sihi korral on suuna valikuks kaks võimalust.

Vektori $\overline{AB}$ <u>pikkuseks</u> nimetatakse lõigu AB pikkust.

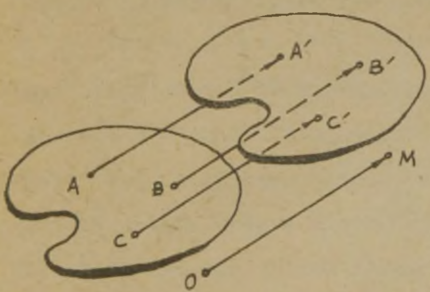
<u>Näide</u> 1. Kui punkt P liigub mööda teatud trajektoori

Joon. 2

(joon. 2), siis iseloomustab punkti kiirust antud hetkel vektor, mille alguspunkt ühtib punkti P asendiga vaadeldaval hetkel, sihi määrab trajektoori puutuja, suuna – punkti liikumise suund (puutuja liikumisesuunaline poolsirge), ja pikkus on võrdne punkti P lineaarkiirusega antud hetkel; vektori lõpp-punkt Q on nende tingimustega üheselt määratud. Vektorit $\overline{PQ}$ nimetatakse punkti P kiirusvektoriks antud hetkel.

3. <u>Võrdsete vektorite klassid</u>.

Vektori pikkus ja suund (seega ka siht) on vektori mõistega lahutamatult seotud, sest nad iseloomustavad oluliselt vektoriga kujutatud suurust (näide 1). Kuid vektorarvutuse paljudes rakendustes ei ole vektori alguspunktil (ja järelikult ka lõpp-punktil) sellist tähtsust. Illustreerime seda asjaolu näidetega.

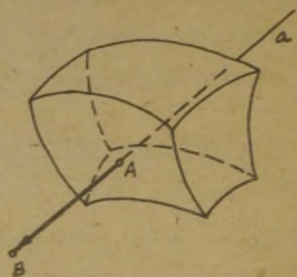


Joon. 3

<u>Näide</u> 2. Liikugu jäik keha ühest asendist teise rööplükke teel (joon. 3). Keha iga punkti alg- ja lõppasend määravad vektori: $\overline{AA'}$; $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, ... Neil vektoreil on ühine

pikkus ja suund. Antud algasendi korral on keha lõppasend täielikult määratud iga sellise vektoriga. Samuti määrab keha uue asendi ruumi suvalisse punkti rakendatud vektor $\overline{OM}$, millel on sama pikkus ja suund. Siit ilmneb, et jäiga keha rööplükete iseloomustamisel on kõik ühise suuna ja pikkusega vektorid samaväärsed sõltumatult nende alguspunktide valikust. Rööplükete kirjeldamisel võib niisuguseid vektoreid samastada, s.t. lugeda nad üheks ja samaks vektoriks erinevais asendeis.

Näide 3. Vabale jäigale kehale rakendatud tung $\overline{AB}$ (joon. 4) avaldab kehale ühesugust toimet sõltumatult rakenduspunkti A valikust tungi mõjusirgel a. Kui aga rakenduspunkt valida väljaspool sirget a, siis tungi toime kehale muutub. Seega on vaadeldaval juhul samaväärsed kõik ühise suuna ja pikkusega vektorid, mille alguspunktid asuvad ühel sirgel. Jäigale kehale rakendatud tungide kirjeldamisel võib kõik sellised ühele sirgele kuuluvad vektorid samastada, s.t. lugeda nad üheks ja samaks vektoriks erinevais asendeis.



Joon. 4

Vektorite mõne rakenduse puhul (näit. elektrivälja tugevuse iseloomustamisel) osutub alguspunkt vektori oluliseks karakteristikuks ja ühise suuna ning pikkusega, kuid erinevate alguspunktidega vektoreid ei saa lugeda samaväärseiks.

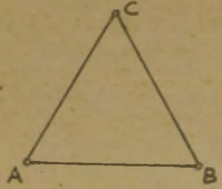
Juhul, kui vektori alguspunkti asend loetakse mitteoluliseks - s.t. samastatakse kõik vektorid, millel on ühine suund ja pikkus - räägitakse vabavektoritest. Kui mitteoluliseks loetakse vektori alguspunkti asend sirgel, millel vektor asub - s.t. samastatakse kõik vektorid, mis asuvad ühel sirgel ja omavad ühist suunda ning pikkust - siis kõneldakse libisevatest vektoritest. Kui kõiki erinevate alguspunktidega vektoreid loetakse erinevaiks, siis öeldakse, et tegemist on seotud vektoritega.

Matemaatilise teooria ülesehitamisel on otstarbekas asuda kõige üldisemale seisukohale, et garanteerida teooria maksimaalselt laia rakendusvälja. Ilmneb, et seotud ja libisevat vektorit saab käsitleda vabavektorite abil (vt. § 2 p. 5); sellepärast võetakse vektorarvutuse aluseks viimane mõiste.

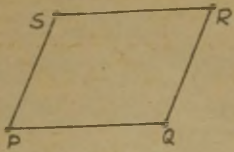
Iseloomustame vabavektoreid vektorite klasside abil.

Nagu märkisime eelnevas punktis, määrab iga järjestatud punktipaar ühe vektori. Järelikult võib igasse punkti P rakendada lõpmata palju vektoreid: igale punktile Q vastab vektor $\overline{PQ}$. Vaatleme kõigi punktipaaridega määratud vektorite hulka, s.o. kõigi võimalike vektorite hulka (tasandil või ruumis). Jaotame selle hulga klassideks tingimusega, et ühte klassi kuuluvad kõik ühise suuna ja pikkusega vektorid. Ilmselt on igasse punkti rakendatud igast klassist parajasti üks vektor - selle esindaja vaadeldavas punktis.

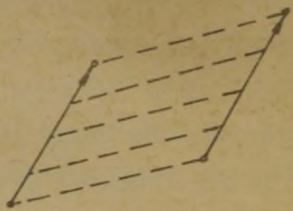
Ühte klassi kuuluvaid vektoreid nimetatakse võrdseteks. Seega: kaks vektorit on võrdsed parajasti siis, kui neil on ühine suund ja pikkus. Vektorite võrdsust tähistatakse nagu skalaaride puhul märgiga "=".



Joon. 5



Joon. 6



Joon. 7

Vektorite võrdsust tuleb eristada lõikude võrdsusest. Nõnda joonisel 5 AB = BC = CA, kuid $\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{CA}$. Rombi PQRS puhul (joon. 6) $\overline{PQ} = \overline{SR}$, $\overline{QR} = \overline{PS}$, $\overline{QP} = \overline{RS}$, kuid $\overline{PQ} \neq \overline{QR}$, $\overline{PQ} \neq \overline{RS}$, $\overline{PQ} \neq \overline{QP}$.

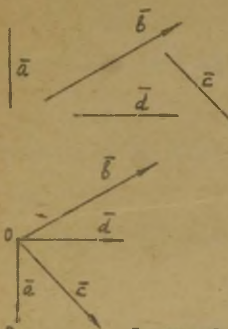
Iga kaht võrdset vektorit saab viia ühtimisele rööplükkega (joon. 7). Vektorite klass on vektorite hulk, mis on saadud antud vektorist kõigi võimalike rööplükete teel.

Võrdsed vektorid samastatakse, s.t. võrdseid vektoreid vaadeldakse ühe ja selle sama vektorina erinevais asendeis. Nagu märgitud, saadakse sellise samastamise teel vabavektor, mis on määratud oma suuna ja pikkusega sõltumatult alguspunkti asendist. Igale vektorite klassile vastab parajasti üks vabavektor; klass on vabavektori kõigi võimalike asendite hulk.

Edaspidi mõistame vektorite all alati vabavektoreid.

Vektoreid, mille alguspunkti ei ole mainitud, märgitakse sümbolitega $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, ... Seega on $\bar{a}$ teatud klassi mingi esindaja, s.t. teatud vabavektor mingis asendis. Võrdus $\bar{a} = \bar{b}$ tähendab, et $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ kuuluvad ühte klassi, s.o. esitavad üht ja sama vabavektorit. Tihti kasutatakse sümboleid $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$,...

vektorite lühikeseks tähistamiseks ka siis, kui alguspunktid on joonisel antud. Sama sümbolit võib kasutada koguni mitme võrdse vektori märkimiseks, et rõhutada nende kuuluvust ühte klassi (joon. 8).



Joon. 8

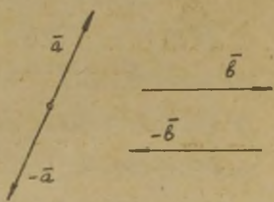
Soovi korral võib kõik vaadeldavad vektorid või osa nendest viia rööplüketega mistahes fikseeritud punkti (joon. 8); selle juures räägitakse *vektorite kandmisest ühisesse alguspunkti*. Vektori $\bar{a}$ kandmine punkti 0 tähendab vektoriga $\bar{a}$ määratud klassi esindaja leidmist punktis 0, s.o. sellise punkti P leidmist, et $\overline{OP} = \bar{a}$.

4. *Lisadefinitsioonid*.

1) Vektorit pikkusega 1 nimetatakse *ühikvektoriks*. Vektori $\bar{a}$ suunalist ühikvektorit tähistatakse sümboliga $\bar{a}_o$.

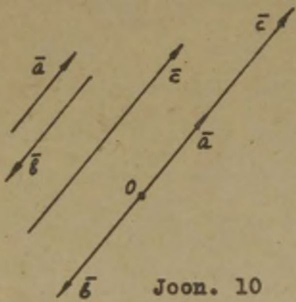
2) Vektorit, mille otspunktid ühtivad, nimetatakse *nullvektoriks*. Seega koosneb nullvektor ühest punktist, tema siht ja suund on määramata ning pikkus on null. Nullvektori sümbol on $\bar{0}$ (või 0, kui tähendus on vahetult selge).

3) Kaht vektorit, millel on ühine pikkus ja siht, kuid vastupidised suunad, nimetatakse *vastandvektoriteks*. Vektori $\bar{a}$ vastandvektorit märgitakse $-\bar{a}$ ("miinus $\bar{a}$") (joon. 9).



Joon. 9

4) Vektoreid, mis pärast ühisesse algusesse kandmist asuvad ühel sirgel, nimetatakse *kollineaarseteks*. Kollineaarseid vektoreid iseloomustab ühine



Joon. 10

siht, s.t. paralleelsus. Kasutatakse tähistusi (joon. 10):

$\bar{a} \parallel \bar{b} \parallel \bar{c}$ (vektorid $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ on kollineaarsed),

$\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{c}$ (vektorid $\bar{a}$ ja $\bar{c}$ on samasuunalised),

$\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ (vektorid $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ on vastassuunalised).

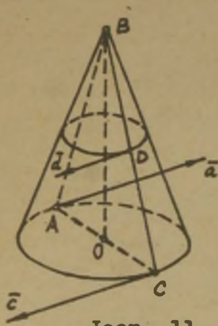
Vastandvektorid on kollineaarsed. Nullvektorit võib lugeda soovi korral kollineaarseks iga vektoriga.

5) Vektoreid, mis pärast ühisesse algusesse kandmist asuvad ühel tasandil, nimetatakse <u>komplanaarseteks</u>. Komplanaarsed vektorid võivad erineda nii sihilt, suunalt kui ka pikkuselt, kuid nende sihid on paralleelsed ühe tasandiga. Kollineaarsed vektorid on alati komplanaarsed; vastupidine üldiselt ei kehti. Kui kolme vektori hulgas on kaks kollineaarset, siis vektorite kolmik on komplanaarne; vastupidine üldiselt ei kehti.

6) Skalaare märgime mitmeti: a, b, c, ..., x, y, z, ..., A, B, C, ..., X, Y, Z, ..., α, β, γ, ... Skalaari a absoluutväärtust $|a|$ nimetatakse tema <u>mooduliks</u>. Igale vektorile vastab üheselt määratud skalaar – tema pikkus; seda mittenegatiivset skalaari nimetatakse <u>vektori mooduliks</u>. Vektorite $\bar{a}$ ja $\overline{AB}$ mooduleid märgitakse sümbolitega $|\bar{a}|$ ja $|\overline{AB}|$.

<u>Näide</u> 4. Vaatleme võrdhaarse kolmnurga ABC (AB = BC) pöörlemist ümber kõrguse BO (joon. 11). Olgu BC keskpunkt D. Punktide A, C ja D kiirusi kujutavad vektorid $\bar{a}$, $\bar{c}$ ja $\bar{d}$,

mille puhul kehtib: $\bar{a} \parallel \bar{c} \parallel \bar{d}$; $|\bar{a}| = |\bar{c}|$, $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{c}$; $|\bar{d}| \neq |\bar{c}|$, $\bar{d} \uparrow\downarrow \bar{c}$. Kolmnurga pöörlemisel muutuvad kõik kolm vektorit, sest muutuvad nende sihid; sellejuures säilitavad vektorid komplanaarsuse - jäävad paralleelseiks telje BO risttasandiga; ühtlase pöörlemise puhul vektorite moodulid ei muutu.



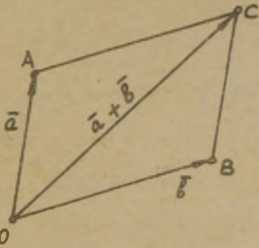
Joon. 11

§ 2. Lineaartehted vektoritega

1. Vektorite liitmine.

Koolifüüsikast on teada ühte punkti rakendatud tungide ja kiiruste liitmise rööpküliku reegel: kahe vektori summat kujutab neile vektoreile ehitatud rööpküliku diagonaal. Vabavektori mõiste võimaldab seda reeglit oluliselt üldistada.

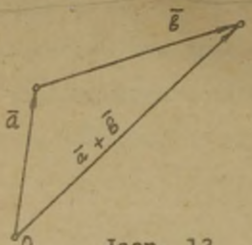
Iga kaht vektorit saab kanda ühisesse alguspunkti, seega ka liita. Sõnastame rööpküliku reegli vastaval kujul: kahe mittekollineaarse vektori liitmiseks kantakse nad ühisesse alguspunkti; summavektori määrab liidetavaile vektoreile ehitatud rööpküliku diagonaal, mis lähtub ühisest alguspunktist (joon. 12).



Joon. 12

Seda reeglit ei saa rakendada kollineaarsetele vektoritele; pealegi on teda tülikas kasutada suurema arvu vektorite liitmisel.

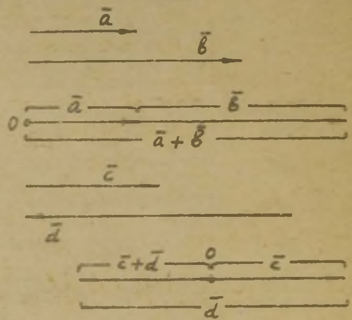
Vektorite sõltumatus alguspunktist lubab anda praktilisema eeskirja: kahe vektori liitmiseks rakendatakse teine liidetav esimese liidetava lõpp-punkti; summavektor viib esimese liidetava algusest teise liidetava lõpp-punkti (joon. 13). Mittekollineaarsete vektorite puhul tuleneb see reegel vahetult eelnevast: joonisel 12 $\overline{AC} - \bar{b}$.



Joon. 13

Kaks mittekollineaarset vektorit ja nende summa moodustavad selle kokkuleppe põhjal vektorkolmnurga, sellepärast nimetatakse vektorite liitmise teist eeskirja kolmnurga reegliks. See reegel sobib ka kollineaarsete vektorite puhul, mil kolmnurk kõdub sirglõiguks (joon. 14).

Esimese liidetava alguspunkt 0 on valitud täiesti suvaliselt. Kui võtta tema alguspunktiks mingi teine punkt 0' ja rakendada uuesti liitmise reeglit, siis tekib kolmnurk (sirglõik), mis on kongruentne esialgsega, sest ta on saadud sellest rööplükke teel. Järelikult on ka kahe vektori summa sõltumatu alguspunktist, s.t. ta on vabavektor.



Joon. 14

Kolmnurga reeglis on liidetavail vektoreil erinev osa - vektorid on järjestatud. Kuid joonistelt 12 ($\overline{BC} = \bar{a}$) ja 14 ilmneb, et kahe vektori summa on sõltumatu liidetavate järjekorrast - kahe vektori liitmine on kommutatiivne:

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$$

Nende tähelepanekute põhjal võib öelda, et kahe vektori summa on liidetavatega üheselt määratud vektor. Väljendume täpsemalt: üheselt on määratud vektorite klass, kuhu kuulub summavektor. Tõepoolest, konstruktsiooni sõltumatus alguspunktist tähendab seda, et on valitud suvalised esindajad liidetavate vektoritega määratud klassidest ja on saadud teatud esindaja klassist, kuhu kuulub summavektor. Järelikult seob liitmisoperatsioon õieti vektorite klasse: kolmnurga reegel seab igale kahele vektorite klassile vastavusse üheselt määratud kolmanda klassi.

Kui vektoreid on enam kui kaks, siis saab neid liita järjestikku: liidetakse esmalt kaks vektorit, nende summaga liidetakse kolmas vektor jne. Sel viisil saab leida mistahes lõpliku arvu vektorite summa:

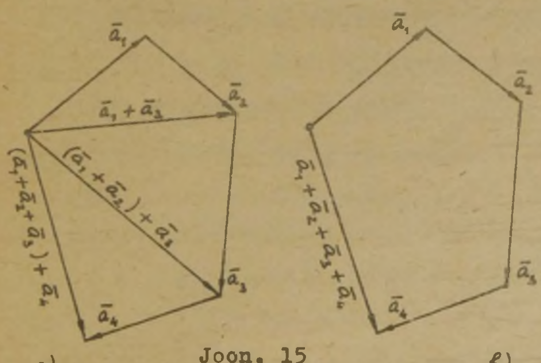
$$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 = (\bar{a}_1 + \bar{a}_2) + \bar{a}_3,$$

$$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \bar{a}_4 = (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3) + \bar{a}_4,$$

....

$$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n = (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_{n-1}) + \bar{a}_n.$$

Liitmisprotsessis rakendatakse korduvalt kolmnurga reeglit (joon. 15a). Selle juures ilmneb (joon. 15b), et iga liidetav tuleb rakendada talle



a) Joon. 15 b)

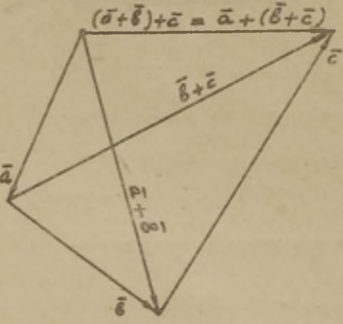
eelneva liidetava lõpp-punkti, kusjuures summavektori määrab tekkinud murdjoone sulgeja. Siit saame vektorite liitmise üldeeskirja - hulknurga reegli: lõpliku arvu vektorite liitmiseks kantakse iga vektor eelneva vektori lõpp-punkti; summavektor viib esimese liidetava alguspunktist viimase liidetava lõpp-punkti. Esimese liidetava alguspunkti valik on suvaline; vektorkolmnurga puhul tehtud märkus vektorite klasside kohta kandub üle ka üldjuhule.

Ilmselt on kolmnurga reegel hulknurga reegli lihtsaim erijuht. Kollineaarsete vektorite puhul on hulknurk "laotatud" sirgele. Komplanaarsete vektorite liitmisel on hulknurk tasandiline, mittekomplanaarsete puhul - ruumiline.

Vektorite liitmisel on kaks põhiomadust:

1) kommutatiivsus (summa ei sõltu liidetavate järjekorrast),

2) assotsiatiivsus (summa ei sõltu liidetavate rühmitamisest sulgude abil).



Joon. 16

Kolme vektori summa assotsiatiivsuses on kerge veenduda joonise 16 abil. Samal viisil saab seda näidata 4, 5 jne. liidetava korral.

Summa kommutatiivsus kahe liidetava puhul ilmnes eelnevas. Kui liidetavaid on kolm, siis toetume seni tõestatule:

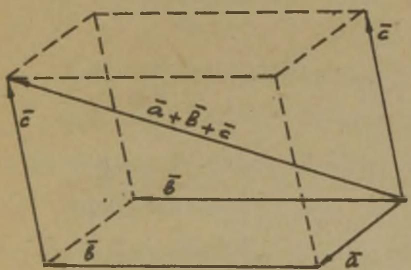
$$\bar a + \bar b + \bar c \overset{\text{def}}{=} (\bar a + \bar b) + \bar c \overset{\text{komm.}}{=} \bar c + (\bar a + \bar b) =$$

$$= \begin{cases} \overset{\text{ass.}}{=} (\bar{c} + \bar{a}) + \bar{b} \overset{\text{def}}{=} \bar{c} + \bar{a} + \bar{b}, \\ \overset{\text{komm.}}{=} \bar{c} + (\bar{b} + \bar{a}) \overset{\text{ass.}}{=} (\bar{c} + \bar{b}) + \bar{a} \overset{\text{def}}{=} \bar{c} + \bar{b} + \bar{a}. \end{cases}$$

Samal viisil saab tõestada 4, 5 jne. vektori summa kommutatiivsuse.

Liitmise põhiomaduste tõestamiseks mistahes lõpliku arvu vektorite puhul kasutatakse matemaatilist induktsiooni. (Sooritage vastavad tõestused iseseisvalt!).

Edaspidises arutluses on suur tähtsus juhul, kui liidetavaiks on kas kaks mittekollineaarset või kolm mittekomplanaarset vektorit. Esimesel juhul saab kasutada rööpküliku reeglit. Teisel juhul kehtib selle üldistus – <u>rööptahuka reegel</u>: kolme mittekomplanaarse vektori summavektori määrab neile vektoreile ehitatud rööptahuka diagonaal, mis lähtub liidetavate vektorite ühisest alguspunktist (joon. 17).



Joon. 17

Lugeja veendugu rööptahuka servade ja tahkude diagonaalide abil veel kord, et kolme vektori summa ei sõltu liidetavate järjekorrast ega rühmitamisest sulgude abil.

2. <u>Vektori korrutamine skalaariga.</u>

Vektorsumma $\bar{a} + \bar{a} + \ldots + \bar{a}$, milles $\bar{a}$ esineb liidetavana n korda, on kollineaarne vektoriga $\bar{a}$ ja omab moodulit $n|\bar{a}|$. On loomulik nimetada summavektorit vektori $\bar{a}$ n-kordseks ja tähistada $n\bar{a}$.

Newtoni teine seadus on esitatav vektorkujus võrdusega $\bar{F} = m\bar{a}$, kus $\bar{F}$ on tung, $\bar{a}$ on kiirendus ja m on keha mass (mingi positiivne skalaar).

Üldistame sellise korrutise mõistet.

Vektori korrutiseks skalaariga nimetatakse vektorit, mis on lähtevektoriga kollineaarne, mille moodul võrdub skalaari ja lähtevektori moodulite korrutisega ja mis on lähtevektoriga sama- või vastassuunaline vastavalt sellele, kas skalaar on positiivne või negatiivne.

Niisiis vektori $\bar{a}$ ja skalaari k korrutis $k\bar{a}$ rahuldab tingimusi:

(1) $k\bar{a}$ on vektor,

(2) $k\bar{a} \parallel \bar{a}$,

(3) $|k\bar{a}| = |k| \cdot |\bar{a}|$,

(4) $k\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{a}$, kui $k > 0$,
$k\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{a}$, kui $k < 0$.

Ilmselt on $k\bar{a}$ nende tingimustega üheselt määratud vabavektor.

Vektori skalaariga korrutamisel on järgmised omadused:

1) $(kl)\bar{a} = k(l\bar{a})$ (assotsiatiivsus skalaaride korrutamise suhtes;

2) $(-k)\bar{a} = k(-\bar{a}) = -(k\bar{a})$;

3) $k\bar{a} = \bar{0}$ parajasti siis, kui kehtib vähemalt üks tingimustest $k = 0$, $\bar{a} = \bar{0}$.

Need võrdused järelduvad definitsiooni tingimustest (1)-(4). Tõestame näiteks esimese. Võrduse mõlemad pooled on vektorid (1). Need vektorid on kollineaarsed (2). Nende moodulid on võrdsed tingimuse (3) ja skalaaride korrutamise assotsiatiivsuse tõttu:

$$|(k\ell)\bar{a}| = |k\ell|\cdot|\bar{a}| = (|k|\cdot|\ell|)\cdot|\bar{a}|,$$
$$|k(\ell\bar{a})| = |k|\cdot|\ell\bar{a}| = |k|\cdot(|\ell|\cdot|\bar{a}|).$$

Vektoreil on ühine suund, sest (4) põhjal on nad mõlemad kas $\bar{a}$-suunalised (kui k ja ℓ on samamärgilised) või $-\bar{a}$-suunalised (kui k ja ℓ on vastandmärgilised). Seega on need vektorid võrdsed.

Lugeja ülesandeks jääb tõestada samal viisil ülejäänud võrdused.

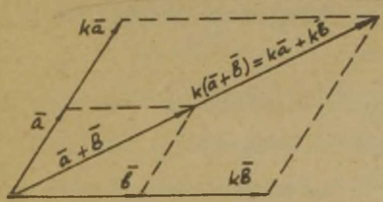
Ilmselt on vektorite $\bar{a}$, $\bar{a}_o$ ja $-\bar{a}$ vahel on järgmised seosed (põhjendada!):

$$\bar{a} = |\bar{a}|\bar{a}_o,$$
$$\bar{a}_o = \frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a},$$
$$-\bar{a} = (-1)\bar{a} = (-|\bar{a}|)\bar{a}_o.$$

Kaks defineeritud tehet - vektorite liitmine ja korrutamine skalaariga - on omavahel seotud <u>distributiivselt</u>:

1) $k(\bar{a} + \bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b}$,

2) $(k + \ell)\bar{a} = k\bar{a} + \ell\bar{a}$.



Joon. 18

Esimese omaduse - vektorsumma distributiivsuse skalaariga korrutamise suhtes - tõestuseks märgime, et vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ korrutamisel ühise skalaarteguriga k teiseneb neile vektoreile ehitatud rööpkülik sarnaseks rööpkülikuks (joon. 18) ja summavektori $\bar{a} + \bar{b}$ kkordne osutub uue rööpküliku diagonaaliga määratud vektoriks. Joonisel 18 on kujutatud juhtu $k > 1$; uurida iseseisvalt juhte $0 < k < 1$ ja $k < 0$.

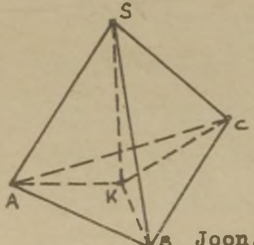
Teise omaduse – skalaaride summa distributiivsuse vektoriga korrutamise suhtes – tõestame vektori skalaariga korrutamise definitsiooni abil. Ilmselt on siin tegemist kollineaarsete vektoritega. Vaatleme juhte: 1) k ja ℓ on samamärgilised, 2) k ja ℓ on vastandmärgilised ning $|k| > |\ell|$.

$$|(k+\ell)\bar{a}| = |k+\ell|\cdot|\bar{a}| = \begin{cases} (|k|+|\ell|)\cdot|\bar{a}| & \text{esimesel juhul,} \\ (|k|-|\ell|)\cdot|\bar{a}| & \text{teisel juhul;} \end{cases}$$

$$|k\bar{a}+\ell\bar{a}| = \begin{cases} |k|\cdot|\bar{a}| + |\ell|\cdot|\bar{a}| = (|k|+|\ell|)|\bar{a}| & \text{esimesel juhul,} \\ |k|\cdot|\bar{a}| - |\ell|\cdot|\bar{a}| = (|k|-|\ell|)\cdot|\bar{a}| & \text{teisel juhul.} \end{cases}$$

Kui $|k| < |\ell|$, siis on tulemus analoogiline; kui aga $|k| = |\ell|$, siis vastandmärgiliste kordajate puhul esinevad nullvektorid. Niisiis on vektorite moodulid võrdsed. Kerge on näha, et $(k+\ell)\bar{a}$ ja $k\bar{a}+\ell\bar{a}$ on samasuunalised vektorid k ja ℓ iga märkide ja moodulite kombinatsiooni korral.

Distributiivsusest kahe liidetava puhul saab selle korduva rakendamise teel järeldada, et distributiivsus kehtib ka siis, kui vektor- või skalaarliidetavaid või mõlemaid on mistahes lõplik arv. (Anda vastav tõestus matemaatilise induktsiooni teel!)



Joon.19

__Näide__ 5. Avaldame korrapärase tetraeedri ABCS kõrgusega määratud vektori $\overline{KS}$ servavektorite $\overline{AS}$, $\overline{BS}$ ja $\overline{CS}$ kaudu (joon. 19).

Märgime esmalt, et kui n komplanaarset vektorit kanda ühisesse alguspunkti ja selle järel neid kõiki pöörata ümber alguspunkti samas suunas ühesuguse nurga võrra, siis pöördub nende summa samas suunas sama nurga võrra (põhjendada!). Järelikult niisugusel pöörlemisel ei muutu summa parajasti kahel juhul: 1) pöördel $2k\pi$ võrra ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), 2) kui summa on null.

Korrapärase kolmnurga keskpunkti tippudega ühendavate vektorite summa ei muutu pöördel $^2/_3\pi$ võrra. Seega on nende vektorite summa null (geomeetriliselt: nende vektorite abil saab jälle moodustada kolmnurga).

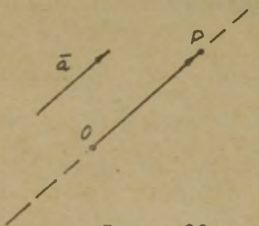
Kasutame seda tulemust ülesande lahendamisel:

$$\overline{KS} = \overline{KA} + \overline{AS},$$
$$\overline{KS} = \overline{KB} + \overline{BS},$$
$$\overline{KS} = \overline{KC} + \overline{CS};$$
$$3\overline{KS} = (\overline{KA} + \overline{KB} + \overline{KC}) + (\overline{AS} + \overline{BC} + \overline{CS}),$$
$$\overline{KS} = {}^1/_3\,(\overline{AS} + \overline{BS} + \overline{CS}).$$

3. Vektorvõrrand $\bar{x} = t\bar{a}$.

Olgu antud vektor $\bar{a} \neq \bar{0}$ ja mingi skalaarmuutuja t. Võrdus $\bar{x} = t\bar{a}$ seab igale t väärtusele vastavusse teatud vektori $\bar{x}$; erinevatele t väärtustele vastavad erinevad vektorid. Seega on $\bar{x}$ muutuva vektori sümbol; analoogia põhjal skalaarmuutujaga räägime vektormuutujast $\bar{x}$. Muutumise käigus $\bar{x} \parallel \bar{a}$, s.t. võrdust $\bar{x} = t\bar{a}$ rahuldavad ainult teatud vektorid – see võrdus ei ole samasus, vaid vektorvõrrand. Et muutuja $\bar{x}$ väärtused on vabavektorid, siis on nende alguspunktid ja järelikult ka lõpp-punktid määramata. Kõigi võrrandit rahuldavate vektorite hulk (võrrandi lahendite hulk) koosneb parajasti kõigist vektoriga $\bar{a}$ kollineaarsetest vektoritest (nende hulgas on ka nullvektor - vastab väärtusele $t = 0$). Niisiis võrrand eraldab kõigi vektorite hulgast (tasandil või ruumis) välja vektorid, millel on vektoriga $\bar{a}$ ühine siht.

Tõlgendame vaadeldavat võrrandit geomeetriliselt. Selleks valime mingi punkti O ja loeme selle kõigi muutujaga t määratud vektorite ühiseks alguseks. Siis asuvad need vektorid ühel sirgel. Vektormuutuja $\bar{x} = \overline{OP}$ muutumist kirjeldab nüüd tema lõpp-punkti P liikumine mööda sirget (joon. 20). Kui t omandab järjestikku kõik reaalarvulised väärtused,



Joon. 20

siis punkt P kirjeldab sirge, mis läbib punkti O ja on paralleelne vektoriga $\bar{a}$. Sellepärast nimetatakse võrrandit $\overline{OP} = t\bar{a}$ <u>sirge vektorvõrrandiks</u>, vektorit $\bar{a}$ sirge <u>sihivektoriks</u> ja skalaarmuutujat t - koordinaatmuutujaks sirgel.

Märgime, et sama tulemuseni jõuame iga nullist erineva vektori $\bar{b} \parallel \bar{a}$ korral. Seega on sirge sihivektori puhul oluline ainult tema siht, mitte suund ja pikkus.

Kui suuruse t all mõista aega, siis võrrand $\overline{OP} = t\bar{a}$ määrab ühtlaselt ja sirgjooneliselt liikuva punkti P trajektoori, kusjuures $\bar{a}$ on kiirusvektor.

4. <u>Pöördtehted</u>.

Vektorite lahutamine defineeritakse liitmise pöördtehtena (analoogiliselt skalaaride lahutamisele): <u>kahe vektori $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ vaheks nimetatakse vektorit, mille summa vektoriga $\bar{b}$</u>

on võrdne vektoriga $\bar{a}$.

Näitame, et vektorite hulgas on lahutamine alati teostatav ja tulemus on üheselt määratud vabavektor.

Vahevektori määrab võrrand

$$\bar{a} = \bar{b} + \bar{x}.$$

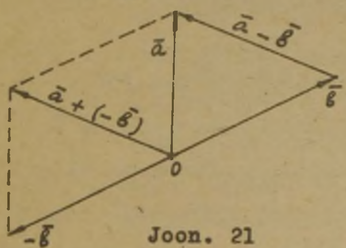
Vektorvõrdus säilib, kui tema pooltele liita üks ja seesama vektor (põhjendada!). Liidame võrrandi pooltega lahutatava vektori vastandvektori $-\bar{b}$ ja kasutame vektorsumma kommutatiivsust ning assotsiatiivsust:

$$\begin{aligned} \bar{a} + (-\bar{b}) &= (\bar{b} + \bar{x}) + (-\bar{b}) = \\ &= (\bar{x} + \bar{b}) + (-\bar{b}) = \\ &= \bar{x} + (\bar{b} + (-\bar{b})) = \\ &= \bar{x} + \bar{0} = \\ &= \bar{x}. \end{aligned}$$

Ilmneb, et vaadeldaval vektorvõrrandil on parajasti üks lahend, sest vektorsumma on üheselt määratud.

Vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ vahet tähistatakse sümboliga $\bar{a} - \bar{b}$. Niisiis $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$: vektori lahutamiseks tuleb liita vastandvektor.

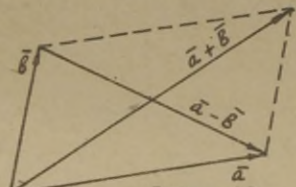
Vektorvahe geomeetriliseks konstrueerimiseks kanname vektorid $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $-\bar{b}$ ühisesse alguspunkti (joon. 21) ja moodustame summa $\bar{a} + (-\bar{b})$ rööpküliku reegli abil. Saadud vektor ongi otsitav vahe. Kasutame tema alguspunkti suvalisust ja rakendame ta vektori $\bar{b}$



Joon. 21

lõpp-punkti. Siis ühtib vektori $\bar{a} - \bar{b}$ lõpp-punkt vähendatava vektori $\bar{a}$ lõpp-punktiga (põhjendada!).

Sõnastame selle tulemuse reeglina vektorvahe geomeetriliseks määramiseks: kahe vektori vahe leidmiseks kantakse need vektorid ühisesse alguspunkti; nende vahe on vektor, mis viib lahutatava lõpp-punktist vähendatava lõpp-punkti.



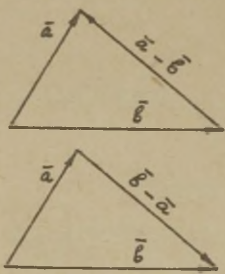
Joon. 22

Paneme tähele, et kahe vektori summa ja vahe on määratud neile vektoreile ehitatud rööpküliku kahe diagonaaliga (joon. 22).

Eksimist vektorvahe suuna määramisel on hõlpus vältida, kui pidada silmas vektorvahe definitsiooni, mida väljendab samasus

$$\bar{b} + (\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a}$$

(võrrelda kaht vektorkolmnurka joonisel 23).



Joon. 23

Vektori korrutamisel skalaariga on tegurid erinevat liiki suurused, sellepärast on mõeldav kahe pöördtehte olemasolu (analoogia tavalisest algebrast: astendamisel on kaks pöördtehet - juurimine ja logaritmimine).

Antud skalaarteguri k ja korrutise $\bar{a}$ puhul määrab vektorteguri võrrand $k\bar{x} = \bar{a}$. Kui $k \neq 0$, siis on lahend üheselt määratud. Lahendit tähistatakse $\frac{\bar{a}}{k}$ ja nimetatakse vektori $\bar{a}$ jagatiseks skalaariga k. Jagatist skalaariga võib vaadelda korrutisena skalaari pöördväärtusega: $\frac{\bar{a}}{k} = \frac{1}{k}\,\bar{a}$ (põhjendada!).

Antud vektorteguri $\bar{b}$ ja korrutise $\bar{a}$ puhul määrab skalaarteguri võrrand $x\bar{b} = \bar{a}$. See võrrand ei ole üldiselt lahenduv (näit. kui $\bar{a} \nparallel \bar{b}$ või $\bar{b} = \bar{0}$ ja $\bar{a} \neq \bar{0}$); sellepärast pöördtehet ei leidu.

Vektori skalaariga korrutamise eeskiri määrab võrrandi $x\bar{b} = \bar{a}$ lahenduvuse tarviliku tingimuse: $\bar{b} \parallel \bar{a}$. Lahendit nimetatakse vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ suhteks ja tähistatakse $\bar{a} : \bar{b}$.

Oluline on märkida, et juhul, kui $\bar{b} \neq \bar{0}$, on leitud tarvilik tingimus ka piisav: kui $\bar{a} \parallel \bar{b}$, siis leidub suhe $\bar{a} : \bar{b}$. Selles veendumiseks kirjutame vaadeldava võrrandi ühikvektorite abil:

$$x\,|\bar{b}|\,\bar{b}_o = |\bar{a}|\,\bar{a}_o.$$

Et $\bar{b}_o \parallel \bar{a}_o$, siis kas $\bar{b}_o = \bar{a}_o$, või $\bar{b}_o = -\bar{a}_o$; järelikult

$$x = \begin{cases} \dfrac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}, & \text{kui } \bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}, \\ -\dfrac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}, & \text{kui } \bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}. \end{cases}$$

Niisiis leidub <u>iga kahe kollineaarse vektori $\bar{a}$ ja $\bar{b} \neq \bar{0}$ korral parajasti üks skalaar x nii, et $x\bar{b} = \bar{a}$</u>.

<u>Näited</u>.

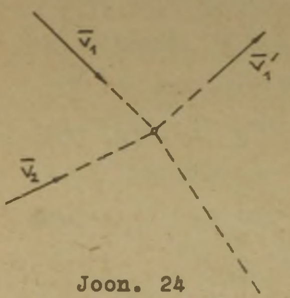
6. Vektorite ja skalaaridega sooritatavate lineaartehete põhiomadused (kommutatiivsus, assotsiatiivsus, distributiivsus) ühtivad vastavate aritmeetiliste tehete omadustega arvuvallas. Selle ühtimise tõttu saab vektorarvutusse üle kanda rea avaldiste teisendusi, nagu ühisele nimetajale võtmine, sulgude avamine ja sarnaste liikmete koondamine.

Näide:

$$\frac{2\bar{a} - 3\bar{b}}{2} - \frac{2\bar{b} - \bar{a}}{4} - \frac{2\bar{a} - 6\bar{b}}{3} = \frac{7}{12}\bar{a}.$$

Põhjendada lihtsustamise käiku tehete omaduste abil!

7. Toome näite lineaartehete rakenduse kohta mehhaanikas. Põrkugu kaks keha massidega m_1 ja m_2. Olgu nende kehade kiirused enne põrget $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ ning pärast põrget $\bar{v}_1'$ ja $\bar{v}_2'$. Liikumishulga säilivuse seadust väljendab vektorvõrdus



Joon. 24

$$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = m_1\bar{v}_1' + m_2\bar{v}_2',$$

ehk

$$m_1(\bar{v}_1 - \bar{v}_1') = m_2(\bar{v}_2' - \bar{v}_2).$$

Konstrueerida vektor $\bar{v}_2'$, kui on antud $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_1'$ ja vektori $\bar{v}_2'$ siht (joon. 24)!

5. Punkti kohavektor.

Vabavektorite ja punktide vahel puudub oluline seos. Ühe vektorite klassi esindajad on algebraliselt samaväärsed: vektoralgebra seisukohalt on vektori alguspunkti asend ebaoluline. Selle tõttu on lineaartehted vektoritega sisuliselt tehted klassidega: liidetakse ja korrutatakse skalaariga klasse ja saadakse tulemusena jälle klassid. Tehete geomeetrilised eeskirjad määravad vaid abikonstruktsioonid, mis võimaldavad klasside suvaliste esindajate abil leida uut klassi. Etteruttavalt märgime, et samal viisil toimuvad vektoritega ka ülejäänud tehted, mida käsitleme edaspidi. Selline algebraline vaateviis kandub üle kõigile arutlustele vektorite vallas.

Geomeetrias vaadeldakse kujundeid, s.o. punktihulki. Punktihulkade kirjeldamiseks vektorite abil on tarvis korraldada vastavus vektorite ja punktide vahel - loobumata vabavektori kasutamisest.

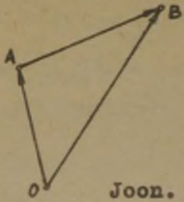
Selline vastavus korraldatakse vajaduse puhul ühe suvalise punkti fikseerimise teel (tasandil või ruumis). Fikseeritud punkti O korral vastab igale punktile P kindel vektor $\overline{OP}$ ja vastupidi, igale vektorile $\bar{a}$ vastab kindel punkt Q, mille puhul $\overline{OQ} = \bar{a}$.

Fikseeritud punkti O nimetatakse <u>pooluseks</u>. Pooluse abil punktile vastavusse seatud vektorit nimetatakse punkti <u>kohavektoriks</u>. Seega punkti P kohavektor pooluse O suhtes on $\overline{OP}$.

Pooluse fikseerimine eraldab igast klassist ühe esindaja - sellesse klassi kuuluva kohavektori. Selline eristamine on geomeetrilise iseloomuga; algebraliselt on iga kohavektor samaväärne oma klassi ülejäänud esindajatega. Selle tõttu saab kohavektoriga sooritada kõiki algebralisi operatsioone, liita mistahes vektoriga, jne. Sisuliselt korraldab pooluse fikseerimine üksühese vastavuse punktide ja vektorite klasside vahel.

Kohavektori mõiste võimaldab vektoralgebrat rakendada geomeetrias. Selliseid rakendusi vaatleme teises peatükis. Ühtlasi saab vektorite vahelisi algebralisi seoseid tõlgendada kohavektori abil geomeetriliselt. Eelnevas tõlgendasime sel viisil vektorvõrrandit $\bar{x} = t\bar{a}$.

Seotud ja libisevaid vektoreid saab kohavektorite abil vaadelda vabavektoritena. Olgu näiteks $\overline{AB}$ mingi punktiga A

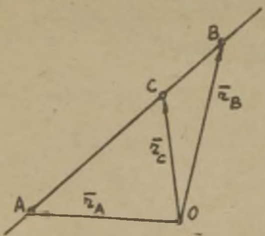


seotud vektor (joon. 25), siis saab teda avaldada tema otspunktide kohavektorite kaudu: $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$.

Joon. 25

<u>Näide</u> 8. Kohavektori mõiste rakendusena vaatleme sirglõigu jaotamist antud suhtes.

Kolme ühel sirgel asuva punkti A, B, C <u>lihtsuhteks</u> punktide antud järjekorras nimetatakse skalaari (vektorite suhet) $\lambda = \overline{AC} : \overline{CB}$. Olgu A ja B kohavektorid pooluse O suhtes



Joon. 26

$\bar{r}_A$ ja $\bar{r}_B$ (joon. 26). Määrame C kohavektori $\bar{r}_C$. Et $\overline{AC} \parallel \overline{CB}$, siis lihtsuhe eksisteerib ja on üheselt määratud võrrandiga $\overline{AC} = \lambda \overline{CB}$. Avaldame $\overline{AB}$ ja $\overline{CB}$ otspunktide kohavektorite kaudu: $\overline{AC} = \bar{r}_C - \bar{r}_A$, $\overline{CB} = \bar{r}_B - \bar{r}_C$; asendame võrrandis:

$$\bar{r}_C - \bar{r}_A = \lambda(\bar{r}_B - \bar{r}_C),$$

$$\bar{r}_C + \lambda\bar{r}_C = \bar{r}_A + \lambda\bar{r}_B$$

$$\bar{r}_C = \frac{\bar{r}_A + \lambda\bar{r}_B}{1 + \lambda}. \qquad (2.1)$$

Skalaari λ nimetatakse ka suhteks, milles punkt C jaotab lõigu AB. Antud definitsioon määrab selle suhte ka siis, kui C asub sirgel AB väljaspool lõiku AB. Et sellisel juhul $\overline{AC} \uparrow\downarrow \overline{CB}$, siis on lõigu välispunkti korral lihtsuhe negatiivne. Kui aga C on lõigu AB sisepunkt, siis $\overline{AC} \uparrow\uparrow \overline{CB}$ ja $\lambda > 0$.

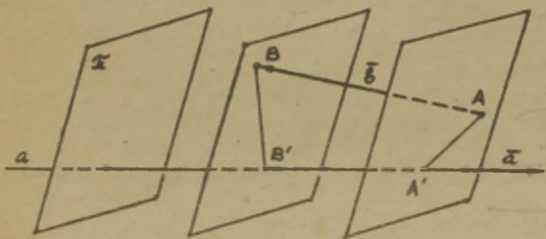
Erijuhul, kui C on lõigu AB keskpunkt, on $\lambda = 1$, s.t. lõigu keskpunkti kohavektor on otspunktide kohavektorite aritmeetiline keskmine:

$$\bar{r}_C = \frac{\bar{r}_A + \bar{r}_B}{2} \tag{2.2}$$

§ 3. Vektorite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus

1. Vektori projekteerimine teise vektori sihile.

Olgu antud vektorid $\bar{a}$, $\bar{b} = \overline{AB}$ ja tasand π, mis ei ole paralleelne vektoriga $\bar{a}$. Projekteerime vektori $\bar{b}$ paralleelselt tasandiga π sirgele a, millel asub vektor $\bar{a}$. Selleks asetame läbi punktide A ja B tasandid paralleelselt tasandiga π (joon. 27). Nende tasandite ja sirge a lõikepunktid A' ja B' on järjestatud $\bar{b}$ otspunktide järjestatuse tõttu; seega on vektori $\bar{b}$ ja tasandi π abil sirgel a määratud uus vektor $\overline{A'B'}$. Seda vektorit nimetatakse vektori $\bar{b}$ komponendiks vektori $\bar{a}$ suhtes (tasandiga π määratud projekteerimisel) ja tähistatakse sümboliga $Pr_{\bar{a}}\bar{b}(\| \pi)$. Vektori $\bar{b}$ projektsiooniks vektori $\bar{a}$ sihile (paralleelselt tasandiga π) nimetatakse komponendi $Pr_{\bar{a}}\bar{b}(\| \pi)$ moodulit, mis on varustatud pluss- või miinusmärgiga vastavalt sellele, kas $Pr_{\bar{a}}\bar{b}$ on vektoriga $\bar{a}$ sama- või vastassuunaline. Projektsiooni märgitakse sümboliga $pr_{\bar{a}}\bar{b}(\| \pi)$.



Joon. 27

Niisiis

$$pr_{\bar{a}}\bar{b} = \begin{cases} |Pr_{\bar{a}}\bar{b}|, & \text{kui } Pr_{\bar{a}}\bar{b} \uparrow\uparrow \bar{a}, \\ -|Pr_{\bar{a}}\bar{b}|, & \text{kui } Pr_{\bar{a}}\bar{b} \uparrow\downarrow \bar{a}. \end{cases}$$

(Juhul, kui tasandi π valik on eelnevast ilmne või - nagu käesolevas arutluses - suvaline, jäetakse ta sümbolite juurde märkimata).

Et $Pr_{\bar{a}}\bar{b} \parallel \bar{a}_o$, siis $Pr_{\bar{a}}\bar{b} = k\bar{a}_o$, kus

$$|k| = \frac{|Pr_{\bar{a}}\bar{b}|}{|\bar{a}_o|} = |Pr_{\bar{a}}\bar{b}|$$

ja

$$k \begin{cases} >0, & \text{kui } Pr_{\bar{a}}\bar{b} \uparrow\uparrow \bar{a}, \\ <0, & \text{kui } Pr_{\bar{a}}\bar{b} \uparrow\downarrow \bar{a}, \end{cases}$$

seega $k = pr_{\bar{a}}\bar{b}$ ja kehtib seos

$$Pr_{\bar{a}}\bar{b} = (pr_{\bar{a}}\bar{b})\bar{a}_o. \qquad (3.1)$$

Vektorite paralleelprojekteerimisel on järgmised omadused:

1a) Kahe vektori summa komponent võrdub nende vektorite komponentide summaga (ühe ja sellesama vektori suhtes):

$$Pr_{\bar{a}}(\bar{b} + \bar{c}) = Pr_{\bar{a}}\bar{b} + Pr_{\bar{a}}\bar{c}. \qquad (3.2)$$

1b) Kahe vektori summa projeksioon võrdub nende vektorite projektsioonide summaga (ühe ja sellesama vektori sihis):

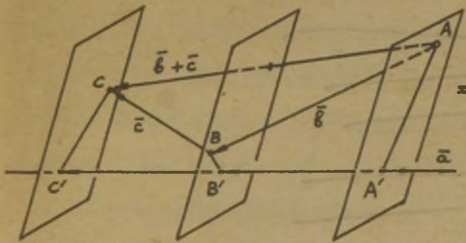
$$pr_{\bar{a}}(\bar{b} + \bar{c}) = pr_{\bar{a}}\bar{b} + pr_{\bar{a}}\bar{c}. \qquad (3.3)$$

2a) Vektori ja skalaari korrutise komponent võrdub vektori komponendi ja selle skalaari korrutisega:

$$Pr_{\bar{a}}(k\bar{b}) = kPr_{\bar{a}}\bar{b}. \qquad (3.4)$$

2b) Vektori ja skalaari korrutise projektsioon võrdub vektori projektsiooni ja selle skalaari korrutisega:

$$\mathrm{pr}_{\bar a}(k\bar b) = k\,\mathrm{pr}_{\bar a}\bar b \,. \tag{3.5}$$



Joon. 28

Kahe esimese lause tõestamiseks tähistame $\bar b = \overline{AB}$, $\bar c = \overline{BC}$ ja punktide A, B, C projektsioone vastavalt A', B', C' (joon. 28). Siis (3.1) põhjal

$$\mathrm{Pr}_{\bar a}\bar b = \overline{A'B'} = (\mathrm{pr}_{\bar a}\bar b)\bar a_{o},$$

$$\mathrm{Pr}_{\bar a}\bar c = \overline{B'C'} = (\mathrm{pr}_{\bar a}\bar c)\bar a_{o},$$

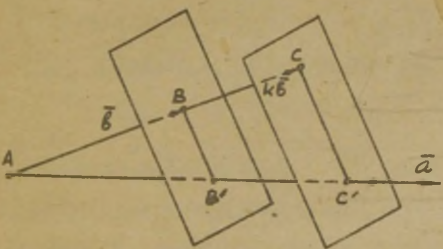
$$\mathrm{Pr}_{\bar a}(\bar b + \bar c) = \overline{A'C'} = [\mathrm{pr}_{\bar a}(\bar b + \bar c)]\bar a_{o}.$$

Kuid $\overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$, järelikult

$$\mathrm{Pr}_{\bar a}(\bar b + \bar c) = \mathrm{Pr}_{\bar a}\bar b + \mathrm{Pr}_{\bar a}\bar c;$$

$$[\mathrm{pr}_{\bar a}(\bar b + \bar c)]\bar a_{o} = (\mathrm{pr}_{\bar a}\bar b + \mathrm{pr}_{\bar a}\bar c)\bar a_{o},$$

$$\mathrm{pr}_{\bar a}(\bar b + \bar c) = \mathrm{pr}_{\bar a}\bar b + \mathrm{pr}_{\bar a}\bar c.$$



Joon. 29

Kahe viimase lause tõestamiseks kanname $\bar a$ ja $\bar b$ ühisesse algusesse (ilmselt projekteerimine on sõltumatu alguspunkti valikust). Olgu $\bar b = \overline{AB}$ ja $k\bar b = \overline{AC}$, siis (joon. 29)

$$\mathrm{Pr}_{\bar a}\bar b = \overline{AB'} = (\mathrm{pr}_{\bar a}\bar b)\bar a_{o},$$

$$\mathrm{Pr}_{\bar a}(k\bar b) = \overline{AC'} = [\mathrm{pr}_{\bar a}(k\bar b)]\,\bar a_{o};$$

$BB' \parallel CC'$ tõttu $\overline{AC'} = k\overline{AB'}$, seega

$$Pr_{\bar{a}}(k\bar{b}) = k\,Pr_{\bar{a}}\bar{b},$$
$$pr_{\bar{a}}(k\bar{b}) = k\,pr_{\bar{a}}\bar{b}.$$

Joonisel 29 on vaadeldud juhtu $k > 0$; uurida iseseisvalt juhtu $k < 0$.

Eelnevais arutlustes pidasime silmas üldjuhtu, kui vektorid asuvad ruumis. Tasandilisel juhul toimub projekteerimine sirgete abil; projekteerimise sihi määrab mingi antud sirge ℓ. Vastavad mõttekäigud on analoogilised ja viivad samadele tulemustele. Lugeja uurigu tasandilist juhtu iseseisvalt, tehes vastavad joonised.

Seni käsitlesime paralleelprojekteerimise üldjuhtu – <u>kaldprojekteerimist</u>. Kui projekteerivad tasandid (sirged) on risti vektoriga $\bar{a}$, siis kõneldakse <u>ortogonaalprojekteerimisest</u>. Sellisel juhul $Pr_{\bar{a}}\bar{b}$ nimetatakse vektori $\bar{b}$ <u>ortogonaalkomponendiks</u> vektori $\bar{a}$ suhtes ja $pr_{\bar{a}}\bar{b}$ – vektori $\bar{b}$ <u>ortogonaalprojektsiooniks</u> vektori $\bar{a}$ sihile. Ilmselt kõik eelnevad tulemused kehtivad ka ortogonaalprojekteerimisel.

2. <u>Vektorite lineaarkombinatsioon</u>.

Vektorite lineaartehete abil defineeritakse vektorite lineaarkombinatsiooni mõiste.

<u>Vektorit $k^1\bar{a}_1 + k^2\bar{a}_2 + \dots + k^n\bar{a}_n$, kus $k^1, k^2, \dots, k^n$ on mingid skalaarid, nimetatakse vektorite $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ lineaarkombinatsiooniks</u>. (Skalaaride eristamiseks on kasutatud ülemisi indekseid; sellise tähistamisviisi otstarbekus selgub edaspidi (vt. p. 6)).

Niisiis on $k\bar{a}$ vektori $\bar{a}$ lineaarkombinatsioon, $\bar{a} + \bar{b}$ ja $\bar{a} - \bar{b}$ on vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ lineaarkombinatsioonid, $\bar{a}_1 +$

$+ \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n$ on vektorite $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ lineaarkombinatsioon ($k^1 = k^2 = \ldots = k^n = 1$), jne. Tungi lahutamine komponentideks tähendab tungi avaldamist oma komponentide lineaarkombinatsioonina. Näites 5 veendusime, et korrapärase tetraeedri kõrgusvektor on servavektorite lineaarkombinatsioon. Näites 5 saab vektoritest $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}'_1, \bar{v}'_2$ igaühe esitada ülejäänute lineaarkombinatsioonina, näit. otsitava vektori korral $\bar{v}'_2 = \frac{m_1}{m_2}\bar{v}_1 + \bar{v}_2 - \frac{m_1}{m_2}\bar{v}'_1$. Kui oletada, et kehad põrkel liituvad (nagu elavhõbedatilgad), siis on liitkeha mass $m_1 + m_2$ ja tema kiirus $\bar{v} = \bar{v}'_1 + \bar{v}'_2$ on kehade esialgsete kiiruste lineaarkombinatsioon: $\bar{v} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\bar{v}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\bar{v}_2$.

Lineaarkombinatsiooni $k^1\bar{a}_1 + k^2\bar{a}_2 + \ldots + k^n\bar{a}_n$ nimetatakse <u>mittetriviaalseks</u>, kui skalaaride $k^1, k^2, \ldots, k^n$ hulgas leidub vähemalt üks nullist erinev, vastasel juhul – <u>triviaalseks</u>. Kõigis esitatud näidetes (peale esimese) on tegemist mittetriviaalsete lineaarkombinatsioonidega.

Projektsioonide valemid (3.2-5) saab kokku võtta järgmisel kompaktsel kujul:

$$Pr_{\bar{a}}(k\bar{b} + \ell\bar{c}) = k\,Pr_{\bar{a}}\bar{b} + \ell\,Pr_{\bar{a}}\bar{c},$$

$$pr_{\bar{a}}(k\bar{b} + \ell\bar{c}) = k\,pr_{\bar{a}}\bar{b} + \ell\,pr_{\bar{a}}\bar{c}.$$

Kasutades matemaatilist induktsiooni, saab need omadused hõlpsasti üldistada mistahes lõpliku arvu vektorite lineaarkombinatsioonile:

$$Pr_{\bar{a}}(k^1\bar{b}_1 + k^2\bar{b}_2 + \ldots + k^n\bar{b}_n) = k^1Pr_{\bar{a}}\bar{b}_1 + k^2Pr_{\bar{a}}\bar{b}_2 + \ldots + k^nPr_{\bar{a}}\bar{b}_n, \qquad (3.6)$$

$$pr_{\bar{a}}(k^1\bar{b}_1 + k^2\bar{b}_2 + \ldots + k^n\bar{b}_n) = k^1pr_{\bar{a}}\bar{b}_1 + k^2pr_{\bar{a}}\bar{b}_2 + \ldots + k^npr_{\bar{a}}\bar{b}_n.$$

5.

3. Lineaarse sõltuvuse mõiste.

Eelnevas ilmnes (vt. §2 p. 4), et antud vektorit $\bar{a}$ saab esitada mingi teise vektori $\bar{b}$ lineaarkombinatsioonina ($\bar{a} = k\bar{b}$) parajasti siis, kui $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ on kollineaarsed. Kahe suvalise vektori puhul sellist seost pole üldiselt võimalik leida. Tekib küsimus, millisel tingimusel on võimalik esitada antud vektorit kahe, kolme jne. vektori lineaarkombinatsioonina. Selle probleemi uurimisel kasutatakse vektorite lineaarse sõltuvuse mõistet.

Vektoreid $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ nimetatakse lineaarselt sõltuvaiks, kui nullvektor on avaldatav nende mittetriviaalse lineaarkombinatsioonina; vastasel juhul nimetatakse vektoreid $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ lineaarselt sõltumatuiks.

Lineaarse sõltuvuse mõistel on tsentraalne asend vektorarvutuses. Lihtne on märgata selle mõiste seost eelnevaga: vektoreist $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ on vähemalt üks avaldatav ülejäänute lineaarkombinatsioonina parajasti siis, kui need vektorid on lineaarselt sõltuvad.

Tõepoolest, olgu $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ lineaarselt sõltuvad vektorid, siis leiduvad sellised skalaarid, et kehtib võrdus

$$k^1\bar{a}_1 + k^2\bar{a}_2 + \dots + k^n\bar{a}_n = \bar{0}, \qquad (3.7)$$

milles vähemalt üks skalaartegureist pole null. Olgu näiteks $k^n \neq 0$, siis on vektor $\bar{a}_n$ avaldatav ülejäänute lineaarkombinatsioonina:

$$\bar{a}_n = -\frac{k_1}{k_n}\bar{a}_1 - \frac{k_2}{k_n}\bar{a}_2 - \dots - \frac{k_{n-1}}{k_n}\bar{a}_n .$$

Vastupidi, kui vektor $\bar{a}_r$ on antud lineaarkombinatsioonina $\bar{a}_n = \ell^1\bar{a}_1 + \ell^2\bar{a}_2 + \ldots + \ell^{n-1}\bar{a}_{n-1}$, siis kehtib võrdus $\ell^1\bar{a}_1 + \ell^2\bar{a}_2 + \ldots + \ell^{n-1}\bar{a}_{n-1} + (-1)\bar{a}_n = \bar{0}$, ja $\ell^n = -1 \neq 0$ tõttu on vektorid $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ lineaarselt sõltuvad.

Võrdusest (3.7) saab avaldada iga vektori, mille kordaja ei ole null; öeldakse, et selline vektor on vaadeldavas lineaarkombinatsioonis oluline. Et võrdus (3.7) säilib nullkordajatega liikmete ärajätmisel, siis moodustab kõigi oluliste vektorite hulk antud lineaarkombinatsioonis lineaarselt sõltuva alamhulga.

4. Lauseid lineaarse sõltuvuse kohta.

1) Iga vektorite hulk, mis sisaldab lineaarselt sõltuvat alamhulka, on lineaarselt sõltuv.

Leidugu antud n vektori $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ hulgas p lineaarselt sõltuvat ($p < n$). Olgu sõltuvateks näit. p esimest vektorit $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_p$. Siis kehtib võrdus $k^1\bar{a}_1 + k^2\bar{a}_2 + \ldots + k^p\bar{a}_p = \bar{0}$, milles vähemalt üks kordajatest $k^1, k^2, \ldots, k^p$ erineb nullist. Kuid sellisel juhul kehtib ka võrdus (3.7) ($k^{p+1} = \ldots = k^n = 0$, vähemalt üks eelnevaist kordajaist erineb nullist), s.t. vektorite hulk $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ on lineaarselt sõltuv.

Sellest lausest järeldub, et vektorite hulk, mis sisaldab nullvektorit, on alati lineaarselt sõltuv. Tõepoolest, samasuse $k\bar{0} = \bar{0}$ ($k \neq 0$) tõttu on nullvektor lineaarselt sõltuv.

Uhtlasi ilmneb siit, et lineaarselt sõltumatute vektorite hulk ei saa sisaldada lineaarselt sõltuvat alamhulka.

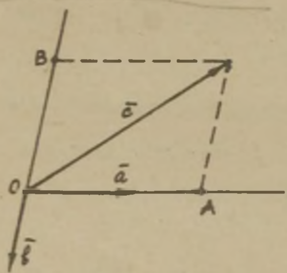
2) <u>Kaks vektorit on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui nad on kollineaarsed</u>.

See lause on tõestatud eelnevas (§2 p. 4).

3) <u>Kolm vektorit on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui nad on komplanaarsed</u>.

Näitame eemalt, et kolm komplanaarset vektorit on lineaarselt sõltuvad.

Kui vektorite kolmik sisaldab kollineaarsete vektorite paari, siis kolmiku lineaarne sõltuvus on lausete 1) ja 2) vahetu järeldus. Vaatleme sellepärast komplanaarset kolmikut $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, milles pole ühtki kollineaarset vektoripaari. Kanname need vektorid ühisesse alguspunkti 0, siis nad asuvad ühel tasandil. Veendume, et iga vektorit sellest kolmikust saab avaldada ülejäänud kahe lineaarkombinatsioonina; avaldame näiteks vektori $\bar{c}$.



Joon. 30

Selleks projekteerime vektori $\bar{c}$ vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ sihtidele paralleelselt vastavalt $\bar{b}$ ja $\bar{a}$-ga (joon. 30). Komponendid

$$\overline{OA} = Pr_{\bar{a}}\bar{c}(\parallel \bar{b}) = p\bar{a},$$

$$\overline{OB} = Pr_{\bar{b}}\bar{c}(\parallel \bar{a}) = q\bar{b}$$

(§2 p.4) moodustavad rööpküliku, mille diagonaaliks on vektor $\bar{c}$; järelikult

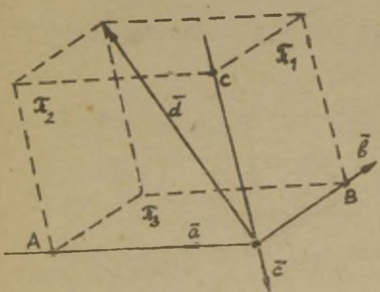
$$\bar{c} = p\bar{a} + q\bar{b} \tag{3.8}$$

Eelnevas veendusime, et selline võrdus on samaväärne vektorite $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ lineaarse sõltuvusega.

Nüüd on lihtne tõestada vastupidist: kolm lineaarselt sõltuvat vektorit on komplanaarsed. Tõepoolest, kui $k\bar a + \ell\bar b + m\bar c = 0$ ja näiteks $m \neq 0$, siis $\bar c = \frac{k}{m}\bar a - \frac{\ell}{m}\bar b$, s.t. $\bar c$ on sellise rööpküliku diagonaal, mille külgedeks on vektorid $-\frac{k}{m}\bar a$ ja $-\frac{\ell}{m}\bar b$. Järelikult asuvad vektorid $\bar a$, $\bar b$ ja $\bar c$ ühel tasandil.

4) <u>Neli vektorit on alati lineaarselt sõltuvad</u>.

Vaatleme suvalist vektorite nelikut $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ ja $\bar d$. Kui nende hulgas on komplanaarseid vektorite kolmikuid, siis neliku lineaarne sõltuvus on lausete 1) ja 3) vahetu järeldus. Sellepärast eeldame, et iga vektorite kolmik vaadeldavast hulgast on mittekomplanaarne. Näitame, et sel juhul on iga vektor nelikust avaldatav ülejäänute lineaarkombinatsioonina (ja seega nelik on lineaarselt sõltuv).



Joon. 31

Selleks kanname vektorid ühisesse alguspunkti. Vektorite paarid $\{\bar a, \bar b\}$, $\{\bar b, \bar c\}$ ja $\{\bar c, \bar a\}$ määravad kolm tasandit, mis läbivad ühist alguspunkti 0; tähistame neid tasandeid vastavalt π_3, π_1 ja π_2. Projekteerime vektori $\bar d$ paralleelselt nende tasanditega vektorite $\bar a$, $\bar b$ ja $\bar c$ sihtidele (joon. 31).

Komponendid

$$\overline{OA} = Pr_{\bar a}\bar d(\parallel \pi_1) = p\bar a,$$

$$\overline{OB} = Pr_{\bar{b}}\bar{d}(\parallel\pi_2) = q\bar{b}$$

$$\overline{OC} = Pr_{\bar{c}}\bar{d}(\parallel\pi_3) = r\bar{c}$$

moodustavad rööptahuka, mille diagonaaliks on vektor $\bar{d}$; järelikult

$$\bar{d} = p\bar{a} + q\bar{b} + r\bar{c}. \tag{3.9}$$

See võrdus näitab lause kehtivust.

Tõestatud lausetest saab teha rea edaspidiseks olulise tähtsusega järeldusi:

(1) Maksimaalne lineaarselt sõltumatute vektorite arv ruumis on kolm, tasandil - kaks ja sirgel - üks.

Sellepärast öeldakse, et ruum on kolme-, tasand kahe- ja sirge ühedimensionaalne.

(2) Sirgel saab iga vektorit avaldada selle sirge mistahes nullist erineva vektori lineaarkombinatsioonina.

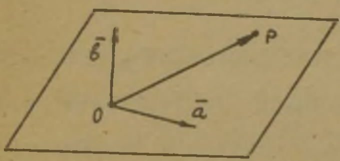
(3) Tasandil saab iga vektorit avaldada selle tasandi mistahes kahe mittekollineaarse vektori lineaarkombinatsioonina.

(4) Ruumis saab iga vektorit avaldada mistahes kolme mittekomplanaarse vektori lineaarkombinatsioonina.

5. Vektorvõrrand $\bar{x} = u\bar{a} + v\bar{b}$.

Antud mittekollineaarsete vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ning kahe skalaarmuutuja u ja v abil määratud vektorvõrrand $\bar{x} = u\bar{a} + v\bar{b}$ seab igale u ja v väärtuste paarile vastavusse teatud vektori, erinevatele väärtuste paaridele vastavad erinevad vektorid. Vektormuutuja $\bar{x}$ muutumiskäigus jäävad vektorid $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{x}$ komplanaarseiks. Öeldakse, et vektorid $\bar{a} \nparallel \bar{b}$ määravad ruumis kahedimensionaalse sihi; viimane on ühine kõigile vektorpaariga $\bar{a}$, $\bar{b}$ paralleelseile tasandeile (samuti, nagu harilik – ühedimensionaalne – siht on ühine paralleelsete sirgete hulgale). Vektorvõrrandi $\bar{x} = u\bar{a} + v\bar{b}$ lahendeiks on kõik vektorid, mis on paralleelsed selle kahedimensionaalse sihiga.

Geomeetrilisema pildi saamiseks rakendame muutuja $\bar{x}$ kõik väärtused fikseeritud punkti – poolusesse O (joon. 32; näitlikkuse huvides on ka vektorid $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ rakendatud poolusesse), siis nad asuvad ühel tasandil. Muutuja $\bar{x} = \overline{OP}$ muutumist kirjeldab nüüd punkti P liikumine mööda tasandit. Kui u ja v omandavad teineteisest sõltumatult kõiki reaalarvulisi väärtusi, siis punkt P kirjeldab kogu tasandi, mis läbib punkti O ja on paralleelne vektoritega $\bar{a}$ ja $\bar{b}$. Sellepärast nimetatakse võrrandit $\overline{OP} = u\bar{a} + v\bar{b}$ tasandi vektorvõrrandiks ja muutujaid u ning v – koordinaatmuutujateks tasandil.

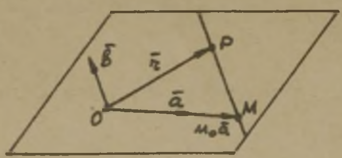


Joon. 32

Rõhutame, et selline tõlgendus tekib siis, kui fikseeritakse poolus O ja vaadeldakse vektormuutujat $\bar{x}$ tasandi muutuva punkti P kohavektorina: $\bar{r} = u\bar{a} + v\bar{b}$.

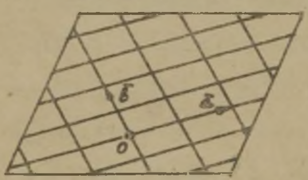
Kui fikseerida ühe koordinaatmuutuja väärtus selles võrrandis, näit. lugeda $u = u_0 = \text{const}$, siis saame üht skalaarmuutujat sisaldava vektorvõrrandi $\bar{r} = u_0\bar{a} + v\bar{b}$, mis määrab sirge vaadeldaval tasandil. See sirge läbib vektori $u_0\bar{a}$

lõpp-punkti ja on paralleelne vektoriga $\bar{b}$ (joon. 33). Teiselt poolest, kui $u_0 = 0$, saame võrrandi $\bar{r} = v\bar{b}$ (sümboliga $\bar{r}$ tähistame siin ja edaspidi muutuva punkti P kohavektorit). See võrrand määrab poolust O läbiva sirge, mille sihivektor on $\bar{b}$ ja koordinaatmuutuja on v (vt. § 2 p. 3). Kui $u_0 \neq 0$, siis selle sirge iga punkti on nihutatud vektori $u_0\bar{a}$ võrra, s.t. võrrand $\bar{r} = u_0\bar{a} + v\bar{b}$ määrab paralleelse sirge. Olgu $u_0\bar{a}$ lõpp-punkt M, s.o. $u_0\bar{a} = \bar{r}_M$, siis vaadeldava sirge võrrand on $\bar{r} = \bar{r}_M + v\bar{b}$.



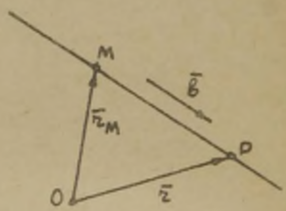
Joon. 33

Muutuja u igale väärtusele vastab teatud sirge sihivektoriga $\bar{b}$. Analoogilise pildi saame muutuja v fikseerimisel (muutuva u korral): igale v väärtusele vastab teatud sirge, mis on paralleelne vektoriga $\bar{a}$. Öeldakse, et koordinaatmuutujad u ja v määravad tasandil sirgete <u>võrgu</u> (joon. 34).



Joon. 34

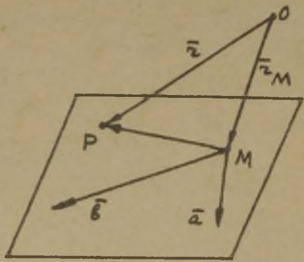
Eelnevalt tõlgendasime võrrandit $\bar{r} = \bar{r}_M + v\bar{b}$ sirge vektorvõrrandina tasandil. Kuid kerge on märgata, et sama tulemuseni jõuame ka ruumilisel juhul. Võrrandist järeldub, et $\bar{r} - \bar{r}_M = v\bar{b}$,



Joon. 35

s.o. $\bar{r} - \bar{r}_M \parallel \bar{b}$ igal parameetri v väärtusel. Et $\bar{r} - \bar{r}_M = \overline{PM}$, siis $\overline{PM} \parallel \bar{b}$: muutuva vektoriga $\bar{r}$ määratud punktid asuvad sirgel, mis läbib punkti M ja on paralleelne vektoriga $\bar{b}$ (joon. 35). Võrrand $\bar{r} = v\bar{b}$ kujutab erijuhtu, mil sirge läbib poolust (vt. §2 p. 3).

Vaadeldud tasandi võrrandit $\bar{r} = u\bar{a} + v\bar{b}$ saab analoogilisel viisil üldistada: võrrand $\bar{r} = \bar{r}_M + u\bar{a} + v\bar{b}$ määrab tasandi, mis ei läbi poolust (joon. 36).



Joon. 36

6. Summeerimiskokkulepe.

Summa lühidalt märkimiseks kasutatakse sageli summeerimissümbolit $\sum$. Näiteks lineaarkombinatsiooni $k^1\bar{a}_1 + k^2\bar{a}_2 + \ldots + k^n\bar{a}_n$ märgitakse selle sümboli abil lühidalt

$$\sum_{i=1}^{n} k^i\bar{a}_i \text{ (loe: "summa } k^i\bar{a}_i \text{ i muutudes 1-st n-ni").}$$

Indeksit i nimetatakse summeerimisindeksiks.

Maksimaalse lihtsustuse saavutamiseks on otstarbekas jätta sümbol $\sum$ ära ja kasutada Einsteini summeerimisreeglit: iga üksliiget, milles mingi tähtindeks esineb kaks korda, sellejuures kord ülemises ja kord alumises asendis, tuleb summeerida; liidetavate arvu määrab eelnevalt kokku lepitud (või juurde märgitud) summeerimisindeksi muutumispiirkond.

Näiteks kokkuleppe $i = 1, 2, 3$ ja $\alpha = 1, 2$ korral

$$k^i\bar{a}_i = k^1\bar{a}_1 + k^2\bar{a}_2 + k^3a_3,$$

$$k^{\alpha}\bar{a}_{\alpha} = k^1\bar{a}_1 + k^2\bar{a}_2.$$

Kirjutis $a^k b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ tähendab summat $a^1 b_1 + a^2 b_2 + \ldots + a^p b_p$.

Paralleelprojekteerimise põhiomadusi väljendavaid valemeid (3.6) saab summeerimiskokkuleppe abil kirjutada lühidalt:

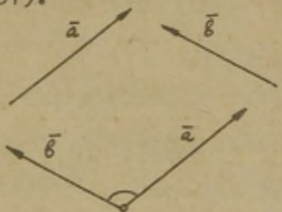
$$\mathrm{Pr}_{\bar{a}}\, k^i \bar{b}_i = k^i\, \mathrm{Pr}_{\bar{a}}\, \bar{b}_i,$$
$$\mathrm{pr}_{\bar{a}}\, k^i \bar{b}_i = k^i\, \mathrm{pr}_{\bar{a}}\, \bar{b}_i.$$

Ilmselt on summeerimisindeksi tähistus täiesti suvaline: kui $i, j, k = 1, 2, 3$, siis $a^i b_i = a^j b_j = a^k b_k$.

§ 4. Vektorite skalaarkorrutis

1. Nurk kahe vektori vahel.

Nurgaks kahe vektori vahel nimetatakse nurka, mille need vektorid moodustavad ühisesse alguspunkti kantuina (joon. 37).



Joon. 37

Märgime vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ vahelist nurka sümboliga $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$.

Vektorite vahelist nurka mõõdetakse 0-st π-ni:

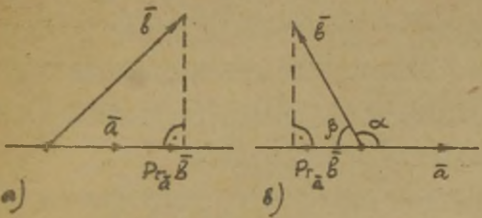
$$0 \leq (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) \leq \pi.$$

Ilmselt $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 0$ parajasti siis, kui $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, ja $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \pi$ parajasti siis, kui $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$. Kui $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{\pi}{2}$, nimetatakse vektoreid ortogonaalseiks ja tähistatakse: $\bar{a} \perp \bar{b}$.

Kehtib lause: vektori ortogonaalprojektsioon teise vek-

<u>tori sihile võrdub projekteeritava vektori mooduli ja vektoritevahelise nurga koosinuse korrutisega:</u>

$$\boxed{pr_{\bar a}\bar b = |\bar b|\cos(\widehat{\bar a,\bar b}).} \qquad (4.1)$$



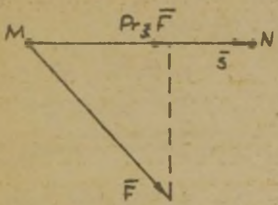
Joon. 38

Kui $(\widehat{\bar a,\bar b}) < \frac{\pi}{2}$, siis $pr_{\bar a}\bar b > 0$; valemi kehtivus on ilmne (joon. 38a). Kui $(\widehat{\bar a,\bar b}) = \frac{\pi}{2}$, siis on valemi mõlemal pool null. Kui $(\widehat{\bar a,\bar b}) > \frac{\pi}{2}$, siis (joon. 38b) $pr_{\bar a}\bar b < 0$, seega

$$pr_{\bar a}\bar b = -|\bar b|\cos\beta = -|\bar b|\cos(\pi-\alpha) =$$
$$= |\bar b|\cos\alpha = |\bar b|\cos(\widehat{\bar a,\bar b}).$$

2. <u>Skalaarkorrutise mõiste</u>.

Alustame näitega. Liikugu masspunkt tungi $\bar F$ toimel asendist M asendisse N (joon. 39). Punkti nihke määrab vektor



Joon. 39

$\overline{MN} = \bar s$. Kui $\bar F \uparrow\uparrow \bar s$, siis tungi $\bar F$ poolt tehtud tööks nimetatakse skalaari

$$A = \overline{MN}\cdot\bar F = |\bar s|\cdot|\bar F|.$$

Kui aga $\bar F \not\uparrow\uparrow \bar s$, siis teeb tööd ainult nihkesihiline komponent $Pr_{\bar s}\bar F$, s.t.

$$A = |\bar s|\, pr_{\bar s}\bar F$$

ehk (4.1) tõttu $A = |\bar s|\cdot|\bar F|\cdot\cos(\widehat{\bar s,\bar F})$.

Saadud valemiga seatakse kahele vektorile $\bar F$ ja $\bar s$ vastavusse skalaar A. Sellise operatsiooni algebraliste omaduste tõttu (mida vaatleme järgnevas) räägitakse vektorite skalaarsest korrutamisest. Vektorite skalaarkorrutist tuleb eristada vektori ja skalaari korrutisest, mis on vektor.

Jätame nüüd kõrvale eelnevas näites vektoritele omistatud konkreetse tähenduse ja sõnastame vektorite skalaarkorrutise üldise definitsiooni: <u>kahe vektori skalaarkorrutiseks nimetatakse skalaari, mis võrdub nende vektorite moodulite ja vektoritevahelise nurga koosinuse korrutisega</u>.

Märgime vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ skalaarkorrutist sümboliga $(\bar{a},\bar{b})$, siis

$$\boxed{(\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}).} \qquad (4.2)$$

3. <u>Skalaarkorrutise omadused</u>.

Loetleme esmalt rea skalaarkorrutise geomeetrilisi omadusi:

1) Skalaarkorrutis on positiivne või negatiivne skalaar vastavalt vektoritevahelise nurga suurusele:

$$(\bar{a},\bar{b}) > 0, \text{ kui } (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) < \frac{\pi}{2},$$

$$(\bar{a},\bar{b}) < 0, \text{ kui } (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) > \frac{\pi}{2}.$$

Skalaarkorrutis on null kahel juhul: (1) kui üks tegureist on nullvektor, (2) kui $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{\pi}{2}$, s.t. vektorid on ortogonaalsed. Et nullvektorit võib lugeda ortogonaalseks iga vektoriga, siis saab mõlemad juhud kokku võtta lausena: skalaarkorrutis on null parajasti siis, kui korrutatavad vektorid on ortogonaalsed.

2) Kollineaarsete vektorite vaheline nurk on 0 või π, järelikult

$$(\bar{a},\bar{b}) = \begin{cases} |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|, & \text{kui } \bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}, \\ -|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|, & \text{kui } \bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}. \end{cases}$$

3) Vektori mooduli - seega ka kahe punkti vahelise kauguse saab avaldada skalaarkorrutise kaudu. Tõepoolest, vektori skalaarkorrutis iseendaga e. <u>skalaarruut</u> $(\bar{a},\bar{a})$ (sageli kasutatakse ka sümbolit $\bar{a}^2$) võrdub vektori mooduli ruuduga: $(\bar{a},\bar{a}) = |\bar{a}|^2$. Siit järeldub valem

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})}\,.} \tag{4.3}$$

Punktide A ja B vaheline kaugus - lõigu AB pikkus - võrdub nende punktidega määratud vektori $\overline{AB}$ (või $\overline{BA}$) mooduliga; järelikult

$$\boxed{AB = \sqrt{(\overline{AB},\ \overline{AB})}\,.} \tag{4.4}$$

4) Skalaarkorrutise definitsioonist tuleneb valem vektoritevahelise nurga määramiseks:

$$\boxed{\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{\sqrt{(\bar{a},\bar{a})}\cdot\sqrt{(\bar{b},\bar{b})}}\,.} \tag{4.5}$$

5) Skalaarkorrutis võrdub ühe vektori mooduli ja teise vektori ortogonaalprojektsiooni korrutisega (projektsioon on moodustatud esimese vektori sihile):

$$\boxed{(\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}|\cdot pr_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\cdot pr_{\bar{b}}\bar{a}.} \tag{4.6}$$

See seos on valemite (4.1) ja (4.2) vahetu järeldus.

Siit tuleneb omakorda, et vektori korrutis ühikvektoriga võrdub vektori projektsiooniga ühikvektori sihile:

$$\boxed{(\bar{a},\bar{b}_\circ) = pr_{\bar{b}_\circ}\bar{a}.} \tag{4.7}$$

6) Kahe ühikvektori skalaarkorrutis võrdub nende vahelise nurga koosinusega:

$$\boxed{(\bar{a}_\circ,\bar{b}_\circ) = \cos(\widehat{\bar{a}_\circ,\bar{b}_\circ}).} \tag{4.8}$$

Skalaarkorrutisel on järgmised algebralised omadused:

1°. <u>Kommutatiivsus</u>: $(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{b},\bar{a})$. See omadus järeldub vahetult skalaarkorrutise definitsioonist, skalaaride korrutamise kommutatiivsusest ja asjaolust, et $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$.

2°. <u>Assotsiatiivsus</u> skalaarteguri suhtes: $(k\bar{a},\bar{b}) = k(\bar{a},\bar{b})$.

Tõestus (4.6) ja (3.5) abil:

$$(k\bar{a},\bar{b}) = |\bar{b}|\ pr_{\bar{b}}(k\bar{a}) = k|\bar{b}|pr_{\bar{b}}\bar{a} = k(\bar{a},\bar{b}).$$

Kommutatiivsuse tõttu ka $(\bar{a},k\bar{b}) = k(\bar{a},\bar{b})$.

3°. <u>Distributiivsus</u> vektorite liitmise suhtes:

$$(\bar{a} + \bar{b},\bar{c}) = (\bar{a},\bar{c}) + (\bar{b},\bar{c}).$$

Tõestus (4.6) ja (3.3) abil:

$$(\bar{a}+\bar{b},\bar{c}) = |\bar{c}|pr_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b}) = |\bar{c}|(pr_{\bar{c}}\bar{a} + pr_{\bar{c}}\bar{b}) =$$
$$= |\bar{c}|pr_{\bar{c}}\bar{a} + |\bar{c}|pr_{\bar{c}}\bar{b} = (\bar{a},\bar{c}) + (\bar{b},\bar{c}).$$

Kommutatiivsuse tõttu ka $(a,\bar{b}+\bar{c}) = (\bar{a},\bar{b}) + (\bar{a},\bar{c})$.

Distributiivsuse ja assotsiatiivsuse seaduste korduva rakendamise teel saab kergesti näidata, et vektorite lineaarkombinatsioonide skalaarne korrutamine toimub hulkliikmete korrutamise eeskirja põhjal (matemaatiline induktsioon!):

$$(k^1\bar{a}_1 + k^2\bar{a}_2 + \ldots + k^n\bar{a}_n, \ell^1\bar{b}_1 + \ell^2\bar{b}_2 + \ldots + \ell^m\bar{b}_m) =$$
$$= k^1\ell^1(\bar{a}_1,\bar{b}_1) + k^1\ell^2(\bar{a}_1,\bar{b}_2) + \ldots + k^1\ell^m(\bar{a}_1,\bar{b}_m) + \ldots \quad (4.9)$$
$$\ldots + k^n\ell^1(\bar{a}_n,\bar{b}_1) + k^n\ell^2(\bar{a}_n,\bar{b}_2) + \ldots + k^n\ell^m(\bar{a}_n,\bar{b}_m)$$

ehk lühisümboolikas

$$(\sum_{i=1}^{n} k^i\bar{a}_i, \sum_{j=1}^{m} \ell^j\bar{b}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k^i\ell^j(\bar{a}_i,\bar{b}_j)$$

ja summeerimiskokkuleppe abil

$(k^i\bar{a}_i,\ell^j\bar{b}_j) = k^i\ell^j(\bar{a}_i,\bar{b}_j)$, kus $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$.

Märgime, et nendes valemites kasutatakse distributiivsust mn - 1 korda (põhjendada!).

Vektorite skalaarne korrutamine erineb mitmeti skalaaride korrutamisest, ehkki nendel tehetel on ühesugused algebralised põhiomadused (kommutatiivsus, assotsiatiivsus, distributiivsus). Paljud erinevused tulenevad asjaolust, et vektorite korrutamisel ei ole tegurid ja korrutis sama liiki suurused.

Märgime tähtsamaid erinevusi.

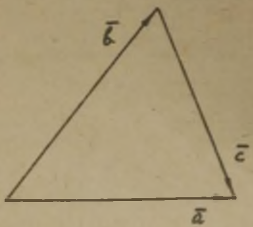
1) Kolme vektorit ei saa skalaarselt korrutada, sest juba kahe vektori korrutis on skalaar. Suurus $\bar{a}^3 = (\bar{a},\bar{a})\bar{a}$ on vektor.

2) Vektorite puhul ei kehti paljud skalaaride algebrast tuntud korrutamise abivalemid. Näiteks üldiselt $(\bar{a} - \bar{b})(\bar{a}^2 + (\bar{a},\bar{b}) + \bar{b}^2) \neq \bar{a}^3 - \bar{b}^3$, sest võrdus $\bar{a}^2\bar{b} = (\bar{a},\bar{b})\bar{a}$ saab kehtida vaid $\bar{a} \parallel \bar{b}$ korral.

3) Skalaarkorrutisel leiduvad <u>nullitegurid</u>, s.t. tegurid, mis ise erinevad nullist, kuid korrutamisel annavad nulli (vt. Omadus 1)). Sellepärast võrduses $(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{a},\bar{c})$ ei saa ühise teguriga "taandada". Tõepoolest, teisendatud võrdusest $(\bar{a},\bar{b}) - (\bar{a},\bar{c}) = 0$ e. $(\bar{a},\bar{b}-\bar{c}) = 0$ ei saa järeldada, et $\bar{b} = \bar{c}$, kui $\bar{a} \neq \bar{0}$; võrdus näitab, et $\bar{a} \perp (\bar{b}-\bar{c})$. "Taandamine" on lubatav siis, kui võrdus $(\bar{x},\bar{b}) = (\bar{x},\bar{c})$ kehtib mistahes vektori $\bar{x}$ korral: kui siin oletada, et $\bar{b} \neq \bar{c}$, s.o. $\bar{b} - \bar{c} \neq 0$, siis saame vasturääkivuse. Võrdus peab kehtima ka sellise $\bar{x}$ korral, mis ei ole ortogonaalne vektoriga $\bar{b}-\bar{c}$; siis aga $(\bar{x},\bar{b}-\bar{c}) \neq 0$, $(\bar{x},\bar{b}) \neq (\bar{x},\bar{c})$.

Näited.

9. Tõestame koosinuslause. Tähistame kolmnurga külgedega määratud vektoreid joonisel 40 näidatud viisil, siis

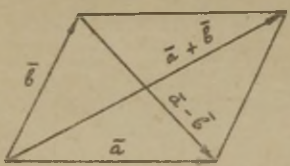


Joon. 40

$$\bar c = \bar a - \bar b,$$

$$c^2 = \bar c^2 = |\bar c|^2 = (\bar c,\bar c) = (\bar a-\bar b,\bar a-\bar b) =$$
$$= (\bar a,\bar a) - (\bar a,\bar b) - (\bar b,\bar a) + (\bar b,\bar b) =$$
$$= |\bar a|^2 + |\bar b|^2 - 2(\bar a,\bar b) =$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{\bar a,\bar b}).$$

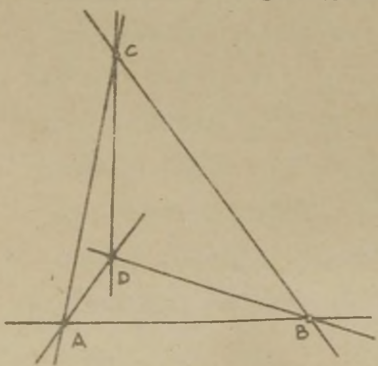
10. Tõestame lause: rööpküliku diagonaalide ruutude summa võrdub tema külgede ruutude summaga (joon. 41).



Joon. 41

$$(\bar a + \bar b)^2 + (\bar a - \bar b)^2 = \bar a^2 + 2(\bar a,\bar b) +$$
$$+ \bar b^2 + \bar a^2 - 2(\bar a,\bar b) + \bar b^2 = 2(a^2 + b^2).$$

11. Vaatleme nelja punkti A, B, C ja D, millest ükski kolm ei asu ühel sirgel (joon. 42). Ühendame kõik punktipaarid sirgetega. Tekib kujund, mida nimetatakse <u>nelitipuks</u>. Punktid on tema tipud, sirged - küljed, ühiste tippudeta küljed - vastasküljed.



Joon. 42

Tõestame lause: kui nelitipu kaks vastaskülgede paari on risti, siis on seda ka kolmas paar.

Olgu näit. $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ja $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, s.o. $(\overline{AB}, \overline{CD}) = 0$, $(\overline{AD}, \overline{BC}) = 0$. Valime pooluse 0 väljaspool nelitipu külgi (joonisel märkimata), siis $\overline{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A$, $\overline{CD} = \bar{r}_D - \bar{r}_C$, $\overline{AD} = \bar{r}_D - \bar{r}_A$, $\overline{AC} = \bar{r}_C - \bar{r}_A$, $\overline{BD} = \bar{r}_D - \bar{r}_B$ ja lause eelduse saab kirjutada võrdustega

$$(\bar{r}_B - \bar{r}_A, \bar{r}_D - \bar{r}_C) = 0,$$
$$(\bar{r}_D - \bar{r}_A, \bar{r}_C - \bar{r}_B) = 0;$$
$$(\bar{r}_B, \bar{r}_D) - (\bar{r}_B, \bar{r}_C) - (\bar{r}_A, \bar{r}_D) + (\bar{r}_A, \bar{r}_C) = 0$$
$$(\bar{r}_D, \bar{r}_C) - (\bar{r}_D, \bar{r}_B) - (\bar{r}_A, \bar{r}_C) + (\bar{r}_A, \bar{r}_B) = 0.$$

Liidame need võrdused, siis

$$(\bar{r}_D, \bar{r}_C) - (\bar{r}_B, \bar{r}_C) - (\bar{r}_A, \bar{r}_D) + (\bar{r}_A, \bar{r}_B) = 0,$$
$$(\bar{r}_D - \bar{r}_B, \bar{r}_C) - (\bar{r}_A, \bar{r}_D - \bar{r}_B) = 0,$$
$$(\bar{r}_D - \bar{r}_B, \bar{r}_C - \bar{r}_A) = 0,$$
$$(\overline{BD}, \overline{AC}) = 0,$$
$$\overline{BD} \perp \overline{AC}.$$

Sisuliselt tõestasime kaks lauset, mis vastavad punktide kahele võimalikule asendile:

1) tasandil - kolmnurga kõrgused lõikuvad ühes punktis (joonisel 42 on neli kolmnurka);

2) ruumis - kui tetraeedri kaks vastasservade paari on risti, siis on seda ka kolmas paar.

4. <u>Vektorvõrrand $(\bar{x}, \bar{n}) = c$</u>.

Skalaaride korrutamisel esineb pöördtehe - jagamine. Skalaaride a ja b jagatiseks nimetatakse võrrandi $bx = a$ lahendit, mis eksisteerib ja on üheselt määratud, kui $b \neq 0$.

Vektorite skalaarsele korrutamisele ei saa pöördtehet - "skalaarset jagamist" - määrata, sest "jagatis" ei ole ühene.

Tõepoolest, siin tähendaks pöördtehe ühe vektorteguri leidmist antud teise teguri $\bar{n}$ ja korrutise c kaudu, s.t. võrrandi $(\bar{x}, \bar{n}) = c$ lahendamist. Kuid sellel võrrandil on lõpmata palju lahendeid: üks võrrand $|\bar{x}|\cdot|\bar{n}|\cdot\cos(\widehat{\bar{x},\bar{n}}) = c$ sisaldab kaht tundmatut $|\bar{x}|$ ja $(\widehat{\bar{x},\bar{n}})$.

Olgu vektor $\bar{a}$ selle võrrandi üks lahend, s.t. $(\bar{a},\bar{n}) = c$, siis $(\bar{x},\bar{n}) - (\bar{a},\bar{n}) = 0$ ehk

$$(\bar{x}-\bar{a}, \bar{n}) = 0,$$

$$\bar{x} - \bar{a} \perp \bar{n}.$$

Tasandilisel juhul järeldub siit, et iga vektor $\bar{b} \perp \bar{n}$ määrab vektoriga $\bar{x}-\bar{a}$ kollineaarse sihi: $\bar{x} - \bar{a} \parallel \bar{b}$. Selle tõttu kehtib võrdus

$$\bar{x} = \bar{a} + t\bar{b}, \qquad (\alpha)$$

kus t on mingi skalaarmuutuja. Vastupidi: kui $\bar{b} \perp \bar{a}$, siis iga vektor (α) on võrrandi $(\bar{x},\bar{n}) = c$ lahend:

$$(\bar{a}+t\bar{b}, \bar{n}) = (\bar{a},\bar{n}) + t(\bar{b},\bar{n}) = (\bar{a},\bar{n}) = c.$$

Järelikult tasandil on võrrand $(\bar{x},\bar{n}) = c$ samaväärne parameetrilise vektorvõrrandiga $\bar{x} = \bar{a} + t\bar{b}$, kus $\bar{a}$ on esimese võrrandi mingi lahend ja $\bar{b} \perp \bar{n}$.

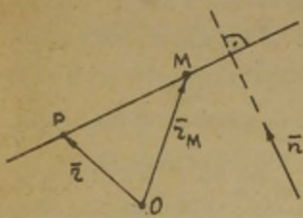
Ruumis iga vektorpaari $\bar{b} \nparallel \bar{c}$, $\bar{b} \perp \bar{n}$, $\bar{c} \perp \bar{n}$ korral on vektorid $\bar{x} - \bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ komplanaarsed, seega $\bar{x} - \bar{a}$ saab avaldada $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ lineaarkombinatsioonina:

$$\bar{x} = \bar{a} + u\bar{b} + v\bar{c}. \qquad (\beta)$$

Vastupidi, iga selline vektor rahuldab võrrandit $(\bar{x},\bar{n}) = c$ (kontrollida!). Niisiis ruumis on võrrand $(\bar{x},\bar{n}) = c$ samaväärne parameetrilise vektorvõrrandiga $\bar{x} = \bar{a} + u\bar{b} + v\bar{c}$, kus $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ rahuldavad märgitud tingimusi.

Märgime, et võrrandi $(\bar{x},\bar{n}) = c$ üldlahend $\bar{x}$ on selle võrrandi ühe erilahendi $\bar{a}$ ja vastava homogeense võrrandi $(\bar{x},\bar{n}) = 0$ üldlahendi (tasandil $t\bar{b}$, ruumis $u\bar{b} + v\bar{c}$) summa.

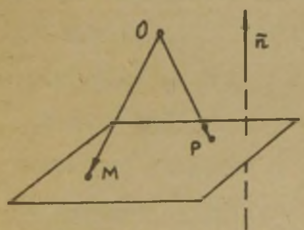
Võrrandeid (α) ja (β) analüüsisime eelnevas (vt. § 3 p. 2. ja § 3 p. 5). Saadud tulemused võimaldavad anda võrrandile $(\bar{x},\bar{n}) = c$ lihtsa geomeetrilise tõlgenduse.



Joon. 43

Loeme vektormuutuja $\bar{x}$ kõik väärtused rakendatuks poolusesse O; tähistame $\bar{x} = \bar{r}$. Olgu vektori $\bar{a} = \bar{r}_M$ lõpp-punkt M. Siis võrrand $(\bar{r},\bar{n}) = c$ määrab:

1) tasandil - sirge, mis läbib punkti M ja on risti vektoriga $\bar{n}$ (joon. 43),



Joon. 44

2) ruumis - tasandi, mis läbib punkti M ja on risti vektoriga $\bar{n}$ (joon. 44).

Vektorit $\bar{n}$ nimetatakse vastavalt sirge või tasandi <u>normaalvektoriks</u>.

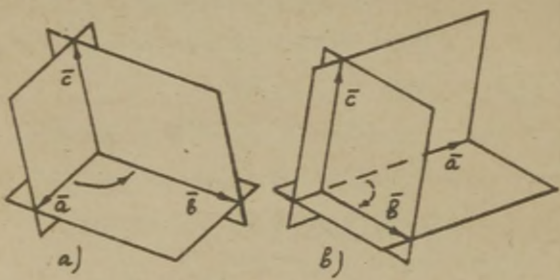
§ 5. V e k t o r i t e   v e k t o r k o r r u t i s

1. <u>Järjestatud mittekomplanaarse vektorikolmiku orientatsioon</u>.

Käesolevas ja järgmises paragrahvis vaatleme vektorite hulka ruumis. Sellest hulgast saab alati valida kolm mittekomplanaarset vektorit ja seda lõpmata paljudel erinevatel viisidel.

Kui kolmele vektorile $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ on omistatud kindel järjekord (vektorid on nummerdatud, näit. $\bar{a}$ loetakse esimeseks, $\bar{b}$ teiseks ja $\bar{c}$ kolmandaks vektoriks), siis öeldakse, et need vektorid moodustavad järjestatud vektorite kolmiku.

Järjestatud mittekomplanaarset vektorite kolmikut nimetatakse parempoolselt orienteerituks e. parempoolseks, kui pärast ühisesse algusesse kandmist kolmanda vektori poolt vaadates lühem pööre esimesest vektorist teiseni toimub vastupidiselt kellaosuti liikumisele e. positiivses suunas; pöörde puhul kellaosuti liikumise suunas e. negatiivses suunas kolmikut nimetatakse vasakpoolselt orienteerituks e. vasakpoolseks.



Vektorite kolmik $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ joonisel 45a on parempoolne, joonisel 45b - vasakpoolne (märgitud järjestuse korral).

Joon. 52

Vektorite kolmiku orientatsiooni on kerge määrata järgmise reegli abil: parempoolses kolmikus asuvad vektorid (ühisesse alguspunkti kantuina) nii, nagu parema käe pöial, esimene sõrm ja peopesa poole kõverdatud teine sõrm; vasakpoolset kolmikut meenutab samal viisil vasak käsi.

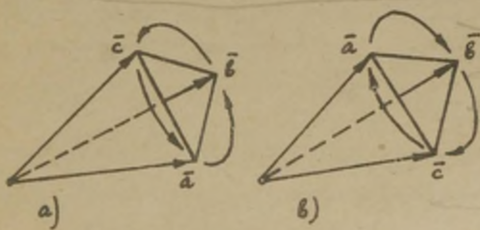
Kolme vektorit saab järjestada kuuel erineval viisil (permutatsioonide arv kolmest elemendist $P_3 = 3!$):

$\bar{a},\bar{b},\bar{c}$; $\bar{b},\bar{c},\bar{a}$; $\bar{c},\bar{a},\bar{b}$;

$\bar{a},\bar{c},\bar{b}$; $\bar{c},\bar{b},\bar{a}$; $\bar{b},\bar{a},\bar{c}$.

Kerge on veenduda, et esimese rea kolmikud on orienteeritud ühesuguselt, samuti kolmikud teises reas, kuid kolmikud erinevaist ridadest on erineva orientatsiooniga. Tõepoolest: kui $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ on parempoolne kolmik (joon. 45a), siis näit. kolmiku $\bar{c},\bar{a},\bar{b}$ korral on lühem pööre $\bar{c}$-st $\bar{a}$-ni $\bar{b}$ poolt vaadates vastupidine kellaosuti liikumisele, kuid kolmiku $\bar{b},\bar{a},\bar{c}$ puhul on lühem pööre $\bar{b}$-st $\bar{a}$-ni $\bar{c}$ poolt vaadates kellaosuti liikumise suunaline. Analoogiline olukord esineb juhul, kui lähtekolmik $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ on vasakpoolne kolmik (joon. 45b).

Kolmikute eristamiseks võib kasutada ka järgmist meetodit: vaadates kolme vektoriga moodustatud ruuminurka näeme



Joon. 46

lühemat pööret esimesest teise, teisest kolmanda ja kolmandast esimese vektorini toimuvat kellaosuti liikumisele vastassuunas parempoolse kolmiku puhul (joon. 46a) ja kellaosuti liikumise suunas vasakpoolse kolmiku korral (joon. 46b); sellejuures esimeseks vektoriks on loetav iga vektor kolmikus.

Reas $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{a},\bar{b}$ on kõik järjestikustest vektoritest moodustatud kolmikud ühesuguselt orienteeritud. Öeldakse, et need kolmikud on saadud üksteisest vektorite <u>tsüklilise üm-</u>

berpaigutamise teel. Paneme tähele, et eelnevas vaadeldud kuue permutatsiooni puhul on kumbki rida vektorite kolmikuid moodustatud tsüklilise ümberpaigutamisega; üleminek ühelt realt teisele toimub aga kahe vektori vahetamise teel. Järelikult: vektorite kolmiku orientatsioon säilib vektorite tsüklilisel ümberpaigutamisel ja muutub kahe vektori vahetamisel.

Vaatlesime vektorite kolmiku orientatsiooni sõltuvust järjestusest. Märgime lisaks, et antud vektorite kolmiku ühe vektori asendamisel vastassuunalise vektoriga (näit. vastandvektoriga) saadakse uus kolmik, millel on erinev orientatsioon (veenduda iseseisvalt!); kahe vektori asendamine vastassuunalistega orientatsiooni ei muuda (toimub orientatsiooni kahekordne muutus); vastassuunaliste vektoritega kolmikuil on vastupidine orientatsioon (orientatsiooni kolmekordne muutus).

2. Vektorkorrutise mõiste.

Peale skalaarse korrutamise, millega tutvusime eelnevas, on rakenduslikult otstarbekas defineerida ruumi vektorite hulgas veel üks korrutamisoperatsioon, nimelt selline, mille tulemuseks on jälle vektor. Skalaarsest korrutamisest eristamiseks nimetatakse seda tehet vektoriaalseks korrutamiseks.

Kahe vektori $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ vektorkorrutiseks nimetatakse vektorit $\bar{c}$, mis rahuldab tingimusi:

1) $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$, (sihi määritlus)

2) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ on parempoolne kolmik, (suuna määritlus)

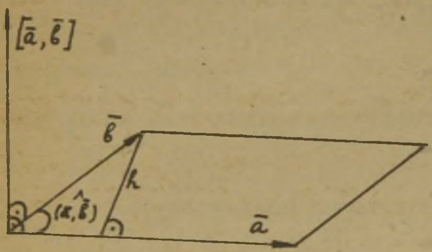
3) $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$. (mooduli määritlus).

Tähistame $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ vektorkorrutist sümboliga $[\bar{a},\bar{b}]$.

Vektorkorrutise moodulil

$$\boxed{\left|[\bar{a},\bar{b}]\right| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}})} \qquad (5.1)$$

on lihtne geomeetriline tähendus: kui kanda tegurid $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ühisesse alguspunkti, siis nendega määratud rööpküliku (joon. 47) pindala on



Joon. 47

$$S = ah =$$
$$= |\bar{a}|(|\bar{b}|\sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}})) =$$
$$= \left|[\bar{a},\bar{b}]\right|.$$

Seega: vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ vektorkorrutis on vektor, mis võrdub moodulilt tegureile ehitatud rööpküliku pindalaga, on risti selle rööpküliku tasandiga ja on suunatud nii, et tema lõpp-punktist vaadates lühem pööre $\bar{a}$-st $\bar{b}$-ni toimub vastassuunaliselt kellaosuti liikumisele.

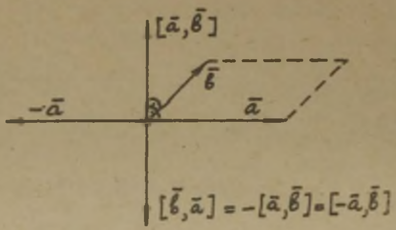
3. Vektorkorrutise omadused.

Vektorkorrutis on null (vektor) parajasti kahel juhul: (1) kui üks tegureist on nullvektor, (2) kui $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 0$ või π, s.t. $\bar{a}\parallel\bar{b}$. Et nullvektorit võib lugeda kollineaarseks iga vektoriga, siis saab mõlemad juhud kokku võtta lausega: vektorkorrutis on null parajasti siis, kui korrutatavad vektorid on kollineaarsed.

Niisiis on ka vektorkorrutisel nulliteguerid.

Vektorkorrutisel on järgmised algebralised omadused:

1) Antikommutatiivsus: $[\bar{a},\bar{b}] = -[\bar{b},\bar{a}]$.



Joon. 48

Kui $\bar{a} \parallel \bar{b}$, on see omadus ilmne. Kui $\bar{a} \nparallel \bar{b}$, siis $[\bar{a},\bar{b}]$ ja $[\bar{b},\bar{a}]$ on moodulilt võrdsed ühe ja sellesama rööpküliku pindalaga ning mõlemad on risti selle rööpküliku tasandiga. Vektorkorrutise definitsioonist tuleneb, et $[\bar{a},\bar{b}] \uparrow\downarrow [\bar{b},\bar{a}]$ (joon. 48).

2) <u>Assotsiatiivsus</u> skalaarteguri suhtes:

$$[k\bar{a},\bar{b}] = k[\bar{a},\bar{b}],$$
$$[\bar{a},k\bar{b}] = k[\bar{a},\bar{b}].$$

Kui $k = 0$ või $\bar{a} \parallel \bar{b}$, on võrdused triviaalsed. Üldjuhul märgime esimese võrduse tõestuseks: Kui $k > 0$, siis rööpküliku ühe külje pikendamisel k korda (lühendamisel, kui $k < 1$) kasvab ka rööpküliku pindala k korda (kahaneb, kui $k < 1$); kui aga $k < 0$, siis $-|k| = k$ ja juba tõestatu ning joonise 48 põhjal

$$[k\bar{a},\bar{b}] = [|k|(-\bar{a}),\bar{b}] = |k|[-\bar{a},\bar{b}] = -|k|[\bar{a},\bar{b}] = k[\bar{a},\bar{b}].$$

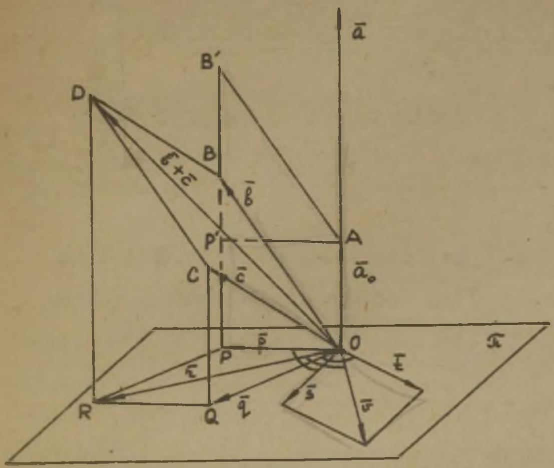
Teise võrduse tuletame esimesest antikommutatiivsuse abil:

$$[\bar{a},k\bar{b}] = -[k\bar{b},\bar{a}] = -k[\bar{b},\bar{a}] = k[\bar{a},\bar{b}].$$

3) <u>Distributiivsus</u> vektorite liitmise suhtes:

$$[\bar{a},\bar{b}+\bar{c}] = [\bar{a},\bar{b}] + [\bar{a},\bar{c}],$$
$$[\bar{a}+\bar{b},\bar{c}] = [\bar{a},\bar{c}] + [\bar{b},\bar{c}].$$

Tõestame esimese võrduse kõige üldisemal juhul: eeldame, et $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ on mittekomplanaarne kolmik. Kanname selle kolmiku ühisesse alguspunkti O (joon. 49).



Joon. 49

Asetame läbi punkti O vektori $\bar{a}$ risttasandi π. Prcjekteerime $\bar{b}, \bar{c}$ ja $\bar{b}+\bar{c}$ lõpp-punktid B, C ja D vektoriga $\bar{a}$ paralleelsete sirgete abil sellele tasandile. Projektsioonid P, Q ja R määravad vektorid $\overline{OP} = \bar{p}$, $\overline{OQ} = \bar{q}$ ja $\overline{OR} = \bar{r}$. Ilmselt $\bar{r} = \bar{p} + \bar{q}$.

Pöörame vektoreile $\bar{p}$ ja $\bar{q}$ ehitatud rööpkülikut tasandil ümber alguspunkti O täisnurga võrra positiivses suunas $\bar{a}$ poolt vaadates. Tähistame $\bar{p}$, $\bar{q}$ ja $\bar{r}$ pööramisel saadud vektoreid vastavalt $\bar{s}$, $\bar{t}$ ja $\bar{v}$, siis $\bar{v} = \bar{s} + \bar{t}$.

Skalaar $|\bar{s}| = |\bar{p}|$ on võrdne vektoritega $\bar{p}$ ja $\bar{a}_0$ moodustatud ristküliku OAP'P pindalaga (alus $|\bar{p}|$ ja kõrgus $|\bar{a}_0| = 1$). See ristkülik on pindvõrdne vektoritele $\bar{b}$ ja $\bar{a}_0$ ehitatud rööpkülikuga OAB'B. $\bar{s}$ on risti vektorite $\bar{b}$ ja $\bar{a}_0$ tasandiga. Kolmik $\bar{a}_o, \bar{b}, \bar{s}$ on parempoolne. Järelikult $\bar{s} = [\bar{a}_o, \bar{b}]$.

Analoogiliselt arutledes veendume, et $\bar{t} = [\bar{a}_o, \bar{c}]$ ja $\bar{v} = [\bar{a}_o, \bar{b}+\bar{c}]$. Et $\bar{v} = \bar{s} + \bar{t}$, siis $[\bar{a}_o, \bar{b}+\bar{c}] = [\bar{a}_o, \bar{b}] + [\bar{a}_o, \bar{c}]$.

Järelikult

$$[\bar{a}, \bar{b}+\bar{c}] = [|\bar{a}|\bar{a}_o, \bar{b}+\bar{c}] = |\bar{a}|[\bar{a}_o, \bar{b}+\bar{c}] = |\bar{a}|\,([\bar{a}_o, \bar{b}] + [\bar{a}_o, \bar{c}]) = |\bar{a}|[\bar{a}_o, \bar{b}] + |\bar{a}|[\bar{a}_o, \bar{c}] = [|\bar{a}|\bar{a}_o, \bar{b}] + [|\bar{a}|\bar{a}_o, \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{a}, \bar{c}].$$

Erijuhul, kui $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ on komplanaarne vektorite kolmik, on $\bar{p}$, $\bar{q}$ ja $\bar{r}$ vektorite $\bar{b}$, $\bar{c}$ ja $\bar{b}+\bar{c}$ komponentideks mistahes vektori suhtes kolmiku $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ tasandi ja tasandi π lõikesirgel. Sellisel juhul tuleneb distributiivsuse valem komponentidevahelisest seosest (3.2).

Teine distributiivsust väljendav võrdus järeldub tõestatust:

$$[\bar{a}+\bar{b}, \bar{c}] = -[\bar{c}, \bar{a}+\bar{b}] = -([\bar{c}, \bar{a}] + [\bar{c}, \bar{b}]) = -[\bar{c}, \bar{a}] - [\bar{c}, \bar{b}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}].$$

Distributiivsuse ja assotsiatiivsuse seaduste korduva rakendamise teel saab näidata, et vektorite lineaarkombinatsioonide vektoriaalne korrutamine toimub hulkliikmete korrutamise eeskirja põhjal (matemaatiline induktsioon!)

$$\begin{aligned}
&[k^1\bar{a}_1 + k^2\bar{a}_2 + \ldots + k^n\bar{a}_n, \ell^1\bar{b}_1 + \ell^2\bar{b}_2 + \ldots + \ell^m\bar{b}_m] = \\
&= k^1\ell^1[\bar{a}_1, \bar{b}_1] + k^1\ell^2[\bar{a}_1, \bar{b}_2] + \ldots + k^1\ell^m[\bar{a}_1, \bar{b}_m] + \ldots \qquad (5.2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots + k^n\ell^1[\bar{a}_n, \bar{b}_1] + k^n\ell^2[\bar{a}_n, \bar{b}_2] + \ldots + k^n\ell^m[\bar{a}_n, \bar{b}_m]
\end{aligned}$$

ehk lühisummeerimisel

$$\left[\sum_{i=1}^{n} k^i\bar{a}_i, \sum_{j=1}^{m} \ell^j\bar{b}_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k^i\ell^j[\bar{a}_i, \bar{b}_j]$$

ja summeerimiskokkuleppe abil:

$$\left[k^i\bar{a}_i,\ \ell^j\bar{b}_j\right] = k^i\ell^j\left[\bar{a}_i,\bar{b}_j\right].$$

Teeme skemaatilise kokkuvõtte skalaaride ja vektoritega sooritatavaist põhitehetest, mida kasutatakse vektoralgebras.

Liitmine: $k + \ell$ on skalaar,

$\bar{a} + \bar{b}$ on vektor.

Korrutamine: $k\ell$ on skalaar,

$k\bar{a}$ on vektor,

$(\bar{a},\bar{b})$ on skalaar,

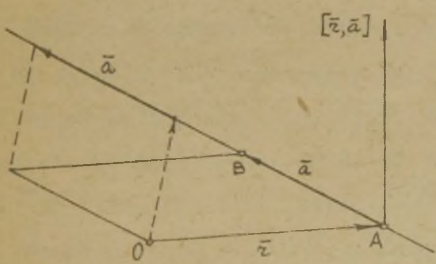
$[\bar{a},\bar{b}]$ on vektor.

Pöördtehe leidub skalaaride liitmisel ja korrutamisel ning vektorite liitmisel. Vektorarvutuses kasutatakse muidugi ka skalaaride astendamist ja selle pöördtehteid.

Näited.

12. $$\left[2\bar{a} - 3\bar{b},\ 2\bar{b} - 3\bar{a}\right] = 4\left[\bar{a},\bar{b}\right] - 6\left[\bar{a},\bar{a}\right] - 6\left[\bar{b},\bar{b}\right] + 9\left[\bar{b},\bar{a}\right] = 4\left[\bar{a},\bar{b}\right] - 9\left[\bar{a},\bar{b}\right] = -5\left[\bar{a},\bar{b}\right] = 5\left[\bar{b},\bar{a}\right].$$

13. Vektori $\bar{a} = \overline{AB}$ momendiks punkti O suhtes nimetatakse vektorkorrutist $[\bar{r},\bar{a}]$, kus $\bar{r} = \overline{OA}$ (joon.50). Kui vektor $\bar{a}$ libiseb mööda sirget AB, siis muutub küll vektor $\bar{r}$, kuid vektori $\bar{a}$ moment punkti O suhtes ei muutu. Tõepoolest,

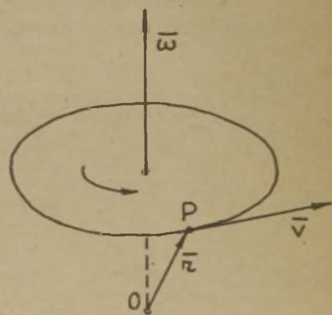


Joon. 50

libisemisel säilivad vektori $[\bar{r},\bar{a}]$ siht, suund ja moodul (vektoritele $\bar{r}$ ja $\bar{a}$ ehitatud rööpküliku pindala).

Vektori momendi mõistet kasutatakse mehhaanikas (tungi moment $[\bar{r},\bar{F}]$, impulssmoment $[\bar{r},m\bar{v}]$, jne.).

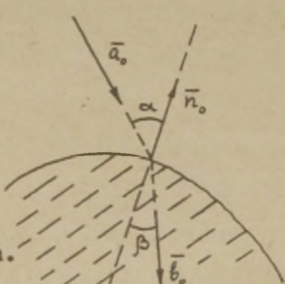
14. Pöörleva keha punkti P joonkiiruse $\bar{v}$ määrab valem $\bar{v} = [\bar{\omega},\bar{r}]$, kus $\bar{\omega}$ on keha nurkkiiruse vektor (mis moodulilt võrdub nurkkiirusega, asub pöörlemisteljel ja näitab suunda, millest pöörlemine paistab positiivsena), $\bar{r} = \overline{OP}$ ja O on pöörlemistelje mingi punkt (joon. 51). Veenduda, et punkti O asend teljel on ebaoluline! Iseloomustada vektorite $\bar{v}$ ja $\bar{\omega}$ asendit käekella osutite pöörlemisel!



Joon. 51

15. Kui elektron laenguga e liigub kiirusega $\bar{v}$ magnetväljas, millel on konstantne tugevus $\bar{H}$, siis välja toime elektronile avaldub kõrvalekallutava tungina $\bar{F} = e/c[\bar{v},\bar{H}]$, kus c on valguse kiirus (Lorentzi valem).

16. Monokromaatilise valguskiire murdumisseadused on väljendatavad ühe valemiga $[\bar{n}_c,\bar{a}_o] = \nu[\bar{n}_o,\bar{b}_o]$, kus ühikvektorid $\bar{a}_o$, $\bar{b}_o$ ja $\bar{n}_o$ määravad vastavalt langeva kiire, murdunud kiire ja keskkondi lahutava pinna normaali ning $\nu > 0$ on murdumiskoefitsient (joon. 52). Tõepoolest, märgitud valemi



Joon. 52

põhjal

1) $\bar{a}_o$, $\bar{b}_o$ ja $\bar{n}_o$ on komplanaarsed, s.t. langev kiir, murdunud kiir ja pinnanormaal asuvad ühel tasandil;

2) $\sqrt{} > 0$ tõttu $[\bar{n}_o,\bar{a}_o] \uparrow\uparrow [\bar{n}_o,\bar{b}_o]$, sellepärast nende vektorite suhe võrdub moodulite suhtega:

$$\sqrt{} = \frac{[\bar{n}_o,\bar{a}_o]}{[\bar{n}_o,\bar{b}_o]} = \frac{|[\bar{n}_o,\bar{a}_o]|}{|[\bar{n}_o,\bar{b}_o]|} = \frac{\sin(\bar{n}_o\hat{,}\bar{a}_o)}{\sin(\bar{n}_o\hat{,}\bar{b}_o)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

4. <u>Vektorvõrrand $[\bar{x},\bar{s}] = \bar{c}$</u>.

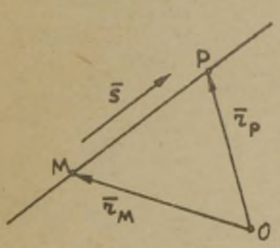
Vektorkorrutise definitsioonist järeldub, et vektorvõrrandil $[\bar{x},\bar{s}] = \bar{c}$, kus $\bar{s}$ ja $\bar{c}$ on konstantsed vektorid, on lõpmata palju lahendeid (põhjendada!). Sellepärast ei saa defineerida vektoriaalse korrutamise pöördtehet.

Olgu $\bar{a}$ selle võrrandi mingi lahend, s.t. $[\bar{a},\bar{s}] = \bar{c}$, siis

$$[\bar{x},\bar{s}] = [\bar{a},\bar{s}],$$
$$[\bar{x}-\bar{a},\bar{s}] = 0,$$
$$\bar{x}-\bar{a} \parallel \bar{s}.$$

Järelikult võrrandi $[\bar{x},\bar{s}] = \bar{c}$ iga lahend on kirjutatav kujul $\bar{x} = \bar{a} + t\bar{s}$, kus t on mingi skalaarmuutuja. Vastupidi, võrrandi

$$\bar{x} = \bar{a} + t\bar{s} \qquad (\alpha)$$



Joon. 53

iga lahend rahuldab lähtevõrrandit (kontrollida!). Seega on võrrand $[\bar{x},\bar{s}] = \bar{c}$ samaväärne võrrandiga (α), mida uurisime eespool (§ 3. p.5).

Ilmneb, et võrrandi $[\bar{x},\bar{s}] = \bar{c}$ üldlahend on selle võrrandi ühe erilahendi $\bar{a}$ ja vastava homogeense võrrandi $[\bar{x},\bar{s}] = 0$ üldlahendi $t\bar{s}$ summa.

Rakendame vektormuutuja $\bar{x} = \bar{r}$ väärtused poolusesse. Olgu $\bar{a} = \bar{r}_M$. Võrrand $[\bar{r},\bar{s}] = \bar{c}$ määrab sirge, mis läbib punkti M vektori $\bar{s}$ sihis (joon. 53). Märgime, et vektorkorrutise definitsiooni tõttu saab vaadeldavat võrrandit nõnda tõlgendada ainult ruumis.

§ 6. Vektorite kombineeritud korrutised

1. Segakorrutis.

Kahe vektori vektorkorrutise skalaarkorrutist kolmanda vektoriga nimetatakse kolme vektori segakorrutiseks. Seega on segakorrutis skalaar, mis seatakse vastavusse vektorite kolmikule.

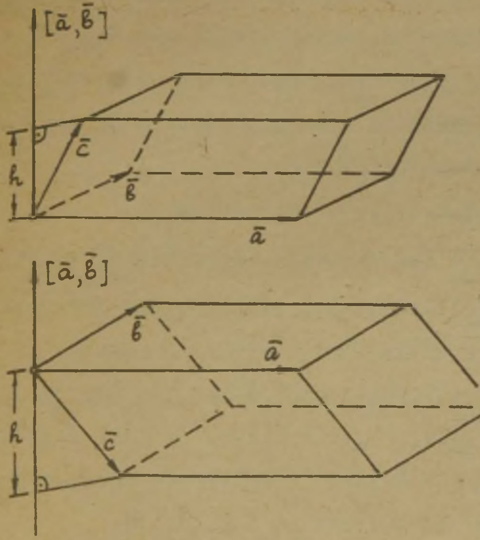
Segakorrutis on null parajasti siis, kui vektor- või skalaarkorrutis on null. Seega $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = 0$, kui $\bar{a}\parallel\bar{b}$ või $[\bar{a},\bar{b}]\perp\bar{c}$. Ilmselt sisaldab teine tingimus erijuhuna ka esimest: kui $\bar{a}\parallel\bar{b}$, siis $[\bar{a},\bar{b}] = \bar{0}\perp\bar{c}$. Et ka $\bar{a}\perp[\bar{a},\bar{b}]$ ja $\bar{b}\perp[\bar{a},\bar{b}]$, siis on vektorid $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ vaadeldaval juhul ortogonaalsed ühe vektoriga $[\bar{a},\bar{b}]$, s.t. vektorite kolmik on komplanaarne. Vastupidi, komplanaarsuse korral $[\bar{a},\bar{b}]\perp\bar{c}$. Seega: segakorrutis on null parajasti komplanaarsete vektorite puhul.

Olgu $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ mittekomplanaarne vektorite kolmik; kanname need vektorid ühisesse alguspunkti. Siis (4.6) põhjal

$$([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = \left|[\bar{a},\bar{b}]\right| pr_{[\bar{a},\bar{b}]}\bar{c},$$

järelikult

$$([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})\begin{cases}>0, & \text{kui } Pr_{[\bar{a},\bar{b}]}\bar{c}\uparrow\uparrow[\bar{a},\bar{b}],\\ <0, & \text{kui } Pr_{[\bar{a},\bar{b}]}\bar{c}\uparrow\downarrow[\bar{a},\bar{b}].\end{cases}$$



Joon. 54

Lihtne on veenduda, et segakorrutis on positiivne parempoolse kolmiku ja negatiivne vasakpoolse kolmiku puhul (joon. 54).

Mittekomplanaarne vektorite kolmik määrab (ühise alguspunkti korral) rööptahuka. Loeme selle rööptahuka põhjaks vektoritele $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ehitatud tahu. Väljendame kolmiku vektorite abil rööptahuka põhja pindala S_p, kõrguse h ja ruumala V:

$$S_p = \left|[\bar{a},\bar{b}]\right|,$$

$$h = \left|pr_{[\bar{a},\bar{b}]}\bar{c}\right|,$$

$$V = S_p \cdot h = \left|[\bar{a},\bar{b}]\right|\left|pr_{[\bar{a},\bar{b}]}\bar{c}\right| = \left|([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})\right|.$$

Võtame eelnevad tulemused kokku lausega, mis iseloomustab segakorrutist geomeetriliselt: <u>kolme vektori segakorrutis on skalaar, mis võrdub moodulilt neile vektoritele ehitatud rööptahuka ruumalaga ja on positiivne parempoolse ning negatiivne vasakpoolse vektorite kolmiku puhul</u>.

Kehtib samasus $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = (\bar{a},[\bar{b},\bar{c}])$. Tõepoolest, kolmikud $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ ja $\bar{b},\bar{c},\bar{a}$ on ühesuguselt orienteeritud ning määravad ühe ja sellesama rööptahuka, järelikult $([\bar{a},\bar{b}],\bar{c}) = ([\bar{b},\bar{c}],\bar{a})$; skalaarkorrutise kommutatiivsuse tõttu $([\bar{b},\bar{c}],\bar{a}) = (\bar{a},[\bar{b},\bar{c}])$; nendest võrdustest tuleneb märgitud samasus.

Selle samasuse tõttu on otstarbekas jätta segakorrutises vektorkorrutis eraldi märkimata ning kasutada segakorrutise tähistamiseks lihtsat sümbolit $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$.

Vaatleme segakorrutise algebralisi omadusi.

1) Sõltuvust tegurite järjekorrast iseloomustab lause: segakorrutise moodul säilib tegurite igal ümberpaigutamisel, märk aga säilib tegurite tsüklilisel ümberpaigutamisel ja muutub vastupidiseks kahe teguri vahetamisel või ühe teguri muutmisel vastassuunaliseks. Lause kehtivus tuleneb segakorrutise geomeetrilisest tähendusest ja vektorite kolmiku orientatsiooni kohta tehtud märkustest (§ 5 p.1).

2) Segakorrutis on assotsiatiivne skalaarteguri suhtes:

$$(k\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = (\bar{a},k\bar{b},\bar{c}) = (\bar{a},\bar{b},k\bar{c}) = k(\bar{a},\bar{b},\bar{c}).$$

Tõestus:

$$(k\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = (k\bar{a},[\bar{b},\bar{c}]) = k(\bar{a},[\bar{b},\bar{c}]) = k(\bar{a},\bar{b},\bar{c}),$$
$$(\bar{a},k\bar{b},\bar{c}) = -(k\bar{b},\bar{a},\bar{c}) = -k(\bar{b},\bar{a},\bar{c}) = k(\bar{a},\bar{b},\bar{c}),$$
$$(\bar{a},\bar{b},k\bar{c}) = (k\bar{c},\bar{a},\bar{b}) = k(\bar{c},\bar{a},\bar{b}) = k(\bar{a},\bar{b},\bar{c}).$$

3) Segakorrutis on distributiivne vektorite liitmise suhtes:

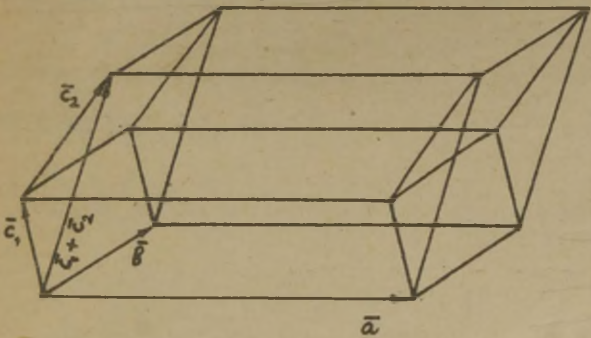
$$(\bar{a}_1+\bar{a}_2,\bar{b},\bar{c}) = (\bar{a}_1,\bar{b},\bar{c}) + (\bar{a}_2,\bar{b},\bar{c}),$$
$$(\bar{a},\bar{b}_1+\bar{b}_2,\bar{c}) = (\bar{a},\bar{b}_1,\bar{c}) + (\bar{a},\bar{b}_2,\bar{c}),$$
$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}_1+\bar{c}_2) = (\bar{a},\bar{b},\bar{c}_1) + (\bar{a},\bar{b},\bar{c}_2).$$

Tõestus:

$$(\bar{a}_1+\bar{a}_2,\bar{b},\bar{c}) = (\bar{a}_1+\bar{a}_2,[\bar{b},\bar{c}]) = (\bar{a}_1,[\bar{b},\bar{c}]) + (\bar{a}_2,[\bar{b},\bar{c}]) =$$
$$= (\bar{a}_1,\bar{b},\bar{c}) + (\bar{a}_2,\bar{b},\bar{c}).$$

Ülejäänud juhud tõestada iseseisvalt!

Assotsiatiivsuse ja distributiivsuse tõestamisel saab kasutada ka geomeetrilist näitlikkust. Nõnda on ühise orientatsiooniga kolmikute $\bar{a},\bar{b},\bar{c}_1$ ja $\bar{a},\bar{b},\bar{c}_2$ korral distributiivsus kergesti nähtav jooniselt 55.



Joon. 55

Uurida erinevate orientatsioonide juhtu ja tõlgendada geomeetriliselt ka assotsiatiivsust!

Assotsiatiivsus ja distributiivsus kandub üle vektorite lineaarkombinatsioonidele hariliku hulkliikmete korrutamise reeglina:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} k^i \bar{a}_i,\ \sum_{j=1}^{m} \ell^j \bar{b}_j,\ \sum_{s=1}^{p} r^s \bar{c}_s \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{p} k^i \ell^j r^s (\bar{a}_i,\bar{b}_j,\bar{c}_s)$$

ehk

$$(k^i \bar{a}_i,\ \ell^j \bar{b}_j,\ r^s \bar{c}_s) = k^i \ell^j r^s (\bar{a}_i,\bar{b}_j,\bar{c}_s).$$

Mitu korda on selles valemis kasutatud distributiivsust?

Märkus. Et segakorrutise distributiivsuse tõestamisel ei ole kasutatud vektorkorrutise distributiivsust, siis võib

9.

nüüd tõestada esimese abil teise (vrd. geomeetriline tõestus §5 p.3):

$$([\bar a_1+\bar a_2,\bar b],\bar c) = (\bar a_1+\bar a_2,\bar b,\bar c) = (\bar a_2,\bar b,\bar c) + (\bar a_2,\bar b,\bar c),$$

s.t. kehtib samasus

$$([\bar a_1+\bar a_2,\bar b],\bar c) = ([\bar a_1,\bar b],\bar c) + ([\bar a_2,\bar b],\bar c),$$

milles võib "taandada" §4 p.3 tehtud märkuse 3) põhjal:

$$[\bar a_1+\bar a_2,\bar b] = [\bar a_1,\bar b] + [\bar a_2,\bar b].$$

2. Kahekordne vektorkorrutis.

Vektorkorrutise vektoriaalne korrutamine kolmanda vektoriga annab jälle vektori, mida nimetatakse kahekordseks vektorkorrutiseks.

Näitame, et iga vektorite kolmiku $\bar a,\bar b,\bar c$ korral kehtib samasus

$$\boxed{[\bar a,[\bar b,\bar c]] = \bar b(\bar a,\bar c) - \bar c(\bar a,\bar b).} \tag{6.1}$$

Juhul $\bar a \parallel [\bar b,\bar c]$ on see võrdus triviaalne; see on nii näiteks siis, kui $\bar b \parallel \bar c$.

Vaatleme üldjuhtu, mil neid kollineaarsusi ei esine. Et $[\bar a,[\bar b,\bar c]]\perp[\bar b,\bar c]$, siis on $[\bar a,[\bar b,\bar c]]$ komplanaarne vektoritega $\bar b$ ja $\bar c$, järelikult saab teda esitada viimaste lineaarkombinatsioonina:

$$[\bar a,[\bar b,\bar c]] = k\bar b + \ell\bar c.$$

Korrutame seda võrdust skalaarselt vektoriga $\bar a$; siis $[\bar a,[\bar b,\bar c]]\perp \bar a$ tõttu

$$k(\bar a,\bar b) + \ell(\bar a,\bar c) = 0.$$

Määrame siit kordajate suhte:

$$k : \ell = -(\bar a,\bar c) : (\bar a,\bar b)$$

(kui $\bar{a}\perp\bar{b}$, s.o. $(\bar{a},\bar{b}) = 0$, võib vaadelda pöördsuhet $l : k$). Ilmneb, et leidub skalaar λ, mille puhul $k = \lambda(\bar{a},\bar{c})$ ja $l = -\lambda(\bar{a},\bar{b})$, s.t.

$$\left[\bar{a},\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right] = \lambda\left\{\bar{b}(\bar{a},\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a},\bar{b})\right\}.$$

Samasuse tõestamiseks tuleb veel näidata, et $\lambda = 1$. Teeme selleks kaks eelmärkust skalaari λ iseloomu kohta:

(1) λ ei muutu, kui mõni vaadeldavatest vektoritest asendatakse kollineaarsega. Tõepoolest, kui korrutada viimast võrdust mingi nullist erineva skalaariga p, siis võib skalaar- ja vektorkorrutise omaduste tõttu kirjutada skalaari p mistahes vektori juurde kolmikust $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$.

(2) λ ei sõltu vektori $\bar{a}$ valikust. Oletame, et vektorile $\bar{a}'$ vastab skalaar λ', s.t.

$$\left[\bar{a}',\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right] = \lambda'\left\{\bar{b}(\bar{a}',\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}',\bar{b})\right\},$$

siis

$$\left(\bar{a},\left[\bar{a}',\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right]\right) = \lambda'\left\{(\bar{a},\bar{b})(\bar{a}',\bar{b}) - (\bar{a},\bar{c})(\bar{a}',\bar{b})\right\}.$$

Analoogiliselt $\left(\bar{a}',\left[\bar{a},\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right]\right) = \lambda\left\{(\bar{a}',\bar{b})(\bar{a},\bar{c}) - (\bar{a}',\bar{c})(\bar{a},\bar{b})\right\}$.

Kuid $\left(\bar{a},\left[\bar{a}',\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right]\right) = \left(\bar{a},\bar{a}',\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right) = -\left(\bar{a}',\bar{a},\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right) =$
$= -\left(\bar{a}',\left[\bar{a},\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right]\right)$; järelikult $\lambda = \lambda'$.

Kasutame neid märkusi. Muudame $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ moodulid võrdseiks ja valime vektoriks $\bar{a}$ summa $\bar{b} + \bar{c}$. Siis $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ määravad ühte punkti kantuina rombi, mille diagonaal on $\bar{a}$ (joon. 56). Vektor $\left[\bar{a},\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right]$ on ortogonaalne $\bar{a}$-ga ja asub rombi tasandil; tema moodul võrdub rombi diagonaali ja pindala korrutisega:

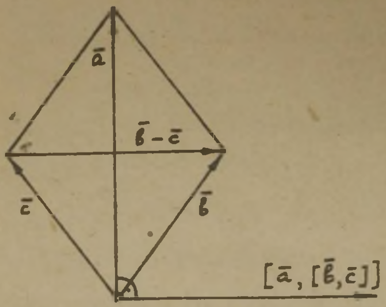
$$\left|\left[\bar{a},\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right]\right| = |\bar{a}|\cdot\left|\left[\bar{b},\bar{c}\right]\right|.$$

Vaatleme nüüd vektorit $\bar{b}(\bar{a},\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a},\bar{b})$:

$$(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{a},\bar{c}) = |\bar{a}|\ \mathrm{pr}_{\bar{a}}\bar{c} = \bar{a}^2/2,$$

$$\bar{b}(\bar{a},\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a},\bar{b}) = \frac{\bar{a}^2}{2}(\bar{b} - \bar{c}),$$

$$|\bar{b}(\bar{a},\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a},\bar{b})| = \tfrac{1}{2}\bar{a}^2|\bar{b}-\bar{c}| = |\bar{a}|\frac{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}-\bar{c}|}{2}.$$



Joon. 56

Diagonaalide poolkorrutis $\frac{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}-\bar{c}|}{2}$ on võrdne rombi pindalaga. Arvestades eelnevat tulemust kirjutame võrduse

$$\left|[\bar{a},[\bar{b},\bar{c}]]\right| = |\bar{b}(\bar{a},\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a},\bar{b})|.$$

λ on positiivne, sest $\bar{b}-\bar{c} \uparrow\uparrow [\bar{a},[\bar{b},\bar{c}]]$ (vt. joon. 56) ja $(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{a},\bar{c})$. Järelikult $\lambda = 1$.

Tõestatust järeldub, et üldiselt $[\bar{a},[\bar{b},\bar{c}]] \neq [[\bar{a},\bar{b}],\bar{c}]$. Leida tingimused, mille puhul kehtib võrdus!

Lisame veel mõned vektoralgebras olulised samasused.

1) Kahe vektorkorrutise skalaarkorrutis rahuldab samasust

$$([\bar{a},\bar{b}],[\bar{p},\bar{q}]) = \begin{vmatrix} (\bar{a},\bar{p}) & (\bar{a},\bar{q}) \\ (\bar{b},\bar{p}) & (\bar{b},\bar{q}) \end{vmatrix}. \qquad (6.2)$$

Tõestus: $([\bar{a},\bar{b}],[\bar{p},\bar{q}]) = (\bar{a},\bar{b},[\bar{p},\bar{q}]) = (\bar{a},[\bar{b},[\bar{p},\bar{q}]]) =$
$= (\bar{a},\bar{p}(\bar{b},\bar{q}) - \bar{q}(\bar{b},\bar{p})) = (\bar{a},\bar{p})(\bar{b},\bar{q}) - (\bar{a},\bar{q})(\bar{b},\bar{p})$.

2) Kahe vektorkorrutise vektorkorrutis rahuldab samasust:

$$[[\bar{a},\bar{b}],[\bar{p},\bar{q}]] = \bar{p}(\bar{a},\bar{b},\bar{q}) - \bar{q}(\bar{a},\bar{b},\bar{p}), \qquad (6.3)$$

mis järeldub vahetult valemist (6.1): $[[\bar{a},\bar{b}],[\bar{p},\bar{q}]] = \bar{p}([\bar{a},\bar{b}],\bar{q}) - \bar{q}([\bar{a},\bar{b}],\bar{p})$.

Analoogiliselt kehtib: $[[\bar{a},\bar{b}],[\bar{p},\bar{q}]] = \bar{b}(\bar{a},\bar{p},\bar{q}) - \bar{a}(\bar{b},\bar{p},\bar{q})$. Järelikult võrdus

$$\bar{p}(\bar{a},\bar{b},\bar{q}) - \bar{q}(\bar{a},\bar{b},\bar{p}) = \bar{b}(\bar{a},\bar{p},\bar{q}) - \bar{a}(\bar{b},\bar{p},\bar{q}) \qquad (6.4)$$

kehtib iga vektorineliku $\bar{a},\bar{b},\bar{p},\bar{q}$ korral. Selles väljendub asjaolu, et mistahes neli vektorit ruumis on lineaarselt sõltuvad.

3) Samasusest (6.1) saab tuletada Jacobi samasuse

$$\left[\bar{a},[\bar{b},\bar{c}]\right] + \left[\bar{b},[\bar{c},\bar{a}]\right] + \left[\bar{c},[\bar{a},\bar{b}]\right] = 0, \tag{6.5}$$

mille kontrollimise jätame lugeja hooleks.

3. Vektorvõrrand $(\bar{x},\bar{a},\bar{b}) = c$.

Võrrandil on lõpmata palju lahendeid: üks võrrand $|\bar{x}|\cdot\left|[\bar{a},\bar{b}]\right|\cos(\bar{x},\widehat{[\bar{a},\bar{b}]}) = c$ sisaldab kaht tundmatut $|\bar{x}|$ ja $(\bar{x},\widehat{[\bar{a},\bar{b}]})$. Geomeetriliselt: vektoritele $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ saab ehitada lõpmata palju rööptahukaid, mille ruumala on c.

Olgu $\bar{c}$ selle võrrandi mingi lahend, s.t. $(\bar{c},\bar{a},\bar{b}) = c$; siis

$$(\bar{x},\bar{a},\bar{b}) = (\bar{c},\bar{a},\bar{b}),$$

$$(\bar{x}-\bar{c},\bar{a},\bar{b}) = 0,$$

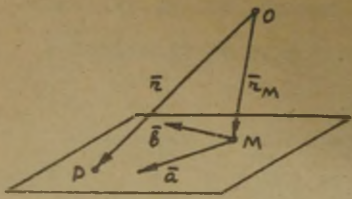
mis tähendab, et vektorid $\bar{x}-\bar{c}$, $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ on komplanaarsed. Tuleb eeldada, et $\bar{a}\nparallel\bar{b}$, sest vastasel juhul on lähtevõrrand vasturääkiv (kui $c \neq 0$) või osutub triviaalseks samasuseks $0 = 0$. Järelikult $\bar{x}-\bar{c}$ on vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ lineaarkombinatsioon, s.t.

$$\bar{x} = \bar{c} + u\bar{a} + v\bar{b}, \tag{α}$$

kus u ja v on mingid skalaarmuutujad. (Võrrandi üldlahendi struktuuri kohta vt. märkus § 5 p. 4)

Lähtevõrrand on samaväärne võrrandiga (α) (põhjendada!). Viimase uurimise tulemused (vt. §3 p.5) võimaldavad nüüd tõlgendada võrrandit $(\bar{x},\bar{a},\bar{b}) = c$ geomeetriliselt.

Kanname vektormuutuja $\bar{x}$ väärtused poolusesse 0 ja tähis-

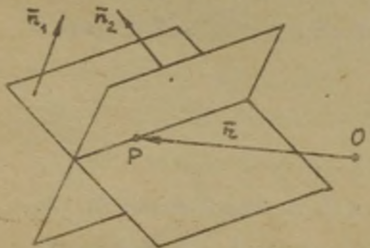


Joon. 57

tame $\bar{x} = \bar{r}$. Olgu tema antud väärtus $\bar{c} = \bar{r}_M$. Siis määrab võrrand $(\bar{r},\bar{a},\bar{b}) = c$ tasandi, mis läbib punkti M ja on paralleelne vektoritega $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ (joon. 57).

Näited.

17. Võrrandid $(\bar{r},\bar{n}_1) = c_1$ ja $(\bar{r},\bar{n}_2) = c_2$ määravad kaks tasandit (vt. § 4 p. 4); $\bar{n}_1$ ja $\bar{n}_2$ on nende tasandite normaalvektorid. Kui $\bar{n}_1 \nparallel \bar{n}_2$, siis need tasandid lõikuvad (joon. 58). Koostame võrrandi, mis määrab tasandite lõikesirge. Et vektorid $\bar{n}_1$ ja $\bar{n}_2$ on mõlemad lõikesirgega risti, siis vektor $[\bar{n}_1,\bar{n}_2]$ on lõikesirgega paralleelne – sirge sihivektor. Järelikult on lõikesirge võrrand $[\bar{r},[\bar{n}_1,\bar{n}_2]] = \bar{c}$ (vt. §5 p.4).



Joon. 58

Vektori $\bar{c}$ määramiseks kasutame valemit (6.1):

$$[\bar{r},[\bar{n}_1,\bar{n}_2]] = \bar{n}_1(\bar{r},\bar{n}_2) - \bar{n}_2(\bar{r},\bar{n}_1);$$

siin $(\bar{r},\bar{n}_1) = c_1$ ja $(\bar{r},\bar{n}_2) = c_2$, seega lõikesirge määrab võrrand

$$[\bar{r},[\bar{n}_1,\bar{n}_2]] = c_2\bar{n}_1 - c_1\bar{n}_2.$$

18. Väljendame kahe segakorrutise (skalaari) korrutise vektorite skalaarkorrutiste abil.

Iga nelja vektori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ja $\bar{p}$ korral kehtib samasus (vt. 6.4):

$$(\bar a,\bar b,\bar c)\bar p = (\bar p,\bar b,\bar c)\bar a + (\bar a,\bar p,\bar c)\bar b + (\bar a,\bar b,\bar p)\bar c.$$

Olgu $\bar p = [\bar d,\bar e]$, siis

$$(\bar a,\bar b,\bar c)[\bar d,\bar e] = ([\bar d,\bar e],\bar b,\bar c)\bar a + (\bar a,[\bar d,\bar e],\bar c)\bar b +$$
$$+ (\bar a,\bar b,[\bar d,\bar e])\bar c = ([\bar d,\bar e],[\bar b,\bar c])\bar a + ([\bar d,\bar e],[\bar c,\bar a])\bar b +$$
$$+ ([\bar d,\bar c],[\bar a,\bar b])\bar c \overset{(6.2)}{=} \begin{vmatrix} (\bar d,\bar b) & (\bar d,\bar c) \\ (\bar e,\bar b) & (\bar e,\bar c) \end{vmatrix}\bar a + \begin{vmatrix} (\bar d,\bar c) & (\bar d,\bar a) \\ (\bar e,\bar c) & (\bar e,\bar a) \end{vmatrix}\bar b + \begin{vmatrix} (\bar d,\bar a) & (\bar d,\bar b) \\ (\bar e,\bar a) & (\bar e,\bar b) \end{vmatrix}\bar c.$$

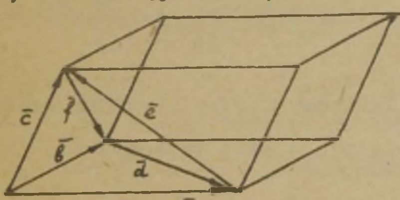
Korrutame saadud võrdust skalaarselt mingi vektoriga $\bar f$, siis saame otsitava seose:

$$(\bar a,\bar b,\bar c)\,(\bar d,\bar e,\bar f) = \begin{vmatrix} (\bar d,\bar b) & (\bar d,\bar c) \\ (\bar e,\bar b) & (\bar e,\bar c) \end{vmatrix}(\bar a,\bar f) + \begin{vmatrix} (\bar d,\bar c) & (\bar d,\bar a) \\ (\bar e,\bar c) & (\bar e,\bar a) \end{vmatrix}(\bar b,\bar f) +$$
$$+ \begin{vmatrix} (\bar d,\bar a) & (\bar d,\bar b) \\ (\bar e,\bar a) & (\bar e,\bar b) \end{vmatrix}(\bar c,\bar f) = \begin{vmatrix} (\bar d,\bar a) & (\bar d,\bar b) & (\bar d,\bar c) \\ (\bar e,\bar a) & (\bar e,\bar b) & (\bar e,\bar c) \\ (\bar f,\bar a) & (\bar f,\bar b) & (\bar f,\bar c) \end{vmatrix}.$$

Erijuhul, kui $\bar d = \bar a$, $\bar e = \bar b$ ja $\bar f = \bar c$, saame segakorrutise ruudu:

$$(\bar a,\bar b,\bar c)^2 = \begin{vmatrix} \bar a^2 & (\bar a,\bar b) & (\bar a,\bar c) \\ (\bar b,\bar a) & \bar b^2 & (\bar b,\bar c) \\ (\bar c,\bar a) & (\bar c,\bar b) & \bar c^2 \end{vmatrix}. \tag{6.6}$$

19. Tuletame Heroni valemi analoogi ruumilisel juhul: väljendame tetraeedri ruumala tema servade pikkuste a, b, c, d, e, f kaudu (joon. 59).



Joon. 59

Olgu tetraeedri servadega määratud vektorite $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$, $\bar d$, $\bar e$ ja $\bar f$ suunad valitud joonisel näidatud viisil. Teatavasti tetraeedri ruumala on $\frac{1}{6}$ selle tetraeedri servadele ehitatud rööptahuka ruumalast. Järelikult

$$V_{tetr} = \frac{1}{6}(\bar a,\bar b,\bar c) = \frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} \bar a^2 & (\bar a,\bar b) & (\bar a,\bar c) \\ (\bar b,\bar c) & \bar b^2 & (\bar b,\bar c) \\ (\bar c,\bar a) & (\bar c,\bar b) & \bar c^2 \end{vmatrix}}\,.$$

Et $d = \bar a - \bar b$, siis (vt. näide 7) $(\bar a,\bar b) = \frac{\bar a^2 + \bar b^2 - \bar d^2}{2}$; analoogiliselt $(\bar b,\bar c) = \frac{\bar b^2 + \bar c^2 - \bar f^2}{2}$ ja $(\bar a,\bar c) = \frac{\bar a^2 + \bar c^2 - \bar e^2}{2}$.

Asendame eelnevas, siis saame pärast lihtsaid teisendusi valemi

$$V_{tetr} = \frac{1}{12}\sqrt{2\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2 + b^2 - d^2 & a^2 + c^2 - e^2 \\ a^2 + b^2 - d^2 & 2b^2 & b^2 + c^2 - f^2 \\ a^2 + c^2 - c^2 & b^2 + c^2 - f^2 & 2c^2 \end{vmatrix}}\,.$$

§ 7. Vektori koordinaadid

1. Baas ja koordinaadid.

Üleminekuks vektoroperatsioonidelt tehetele skalaaridega seatakse igale vektorile vastavusse teatud reaalarvud, mida nimetatakse vektori koordinaatideks. Asendades vektorid nende koordinaatidega saab vektorvalemid väljendada skalaarsete valemitena ja sel teel geomeetrilistelt arutlustelt üle minna arvutamisele.

Vektorite koordinaatide defineerimiseks kasutame vektorite lineaarse sõltuvuse uurimisel saadud tulemusi (§3 p.4, järeldused (1) - (4)).

Alustame vektorite hulgast sirgel (üldisemalt: omavahel kollineaarsete vektorite hulgast). Valime sellest hulgast mingi vektori $\bar{e} \neq 0$. Iga vektor $\bar{x}$ vaadeldavast hulgast on vektori $\bar{e}$ lineaarkombinatsioon (järeldus (2)):

$$\bar{x} = X\bar{e}.$$

Öeldakse, et $\bar{e}$ on sirge vektorite hulga baas; skalaari X nimetatakse vektori $\bar{x}$ koordinaadiks baasi $\bar{e}$ suhtes.

Et $|\bar{x}|\bar{x}_{\circ} = X|\bar{e}|\bar{e}_{\circ}$, siis

$$X = \begin{cases} \dfrac{|\bar{x}|}{|\bar{e}|}, \text{ kui } \bar{x} \uparrow\uparrow \bar{e}, \\ -\dfrac{|\bar{x}|}{|\bar{e}|}, \text{ kui } \bar{x} \uparrow\downarrow \bar{e}. \end{cases} \tag{7.1}$$

Siit on kerge näha, et vektori koordinaat võrdub absoluutväärtuselt vektori pikkusega, kui pikkusühikuks sirgel valida baasivektori $\bar{e}$ pikkus (s.t. lugeda baasivektor ühikvektoriks); koordinaadi märgi määrab vektori suund baasivektori suhtes.

Baas korraldab üksühese vastavuse sirge vabavektorite hulga ja reaalarvude hulga vahel. Tõepoolest, tingimuste (7.1) tõttu vastab võrdsetele vektoritele parajasti üks reaalarv X, ja vastupidi - iga reaalarv X määrab üheselt vektori suuna ning mooduli. Seega esineb üksühene vastavus sirge vektorite klasside ja reaalarvude vahel.

Baasiks sirgel võib valida iga nullist erineva vektori sellel sirgel.

Vaatleme nüüd vektorite hulka tasandil. Valime sellest hulgast mingi kaks mittekollineaarset vektorit $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_2$. Iga vektor $\bar{x}$ vaadeldavast hulgast on vektorite $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_2$ lineaarkombinatsioon (järeldus (3)):

$$\bar{x} = X^1\bar{e}_1 + X^2\bar{e}_2. \tag{7.2}$$

Oeldakse, et vektorid $\bar{e}_1$ ja $\bar{e}_2$ moodustavad tasandi vektorite hulga <u>baasi</u>; skalaare X^1 ja X^2 nimetatakse vektori $\bar{x}$ <u>koordinaatideks</u> baasi $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ suhtes.

X^1 on vektori $\bar{x}$ komponendi $Pr_{\bar{e}_1}\bar{x}(\parallel\bar{e}_2)$ koordinaat vektori $\bar{e}_1$ suhtes, X^2 on komponendi $Pr_{\bar{e}_2}\bar{x}(\parallel\bar{e}_1)$ koordinaat vektori $\bar{e}_2$ suhtes (vt. (3.8) ja joon. 30, samuti märkus (7.1) järel).

Analoogiliselt määratakse vektori koordinaadid ruumis: fikseeritakse mingid kolm mittekomplanaarset vektorit $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ ja $\bar{e}_3$ - vektorite hulga <u>baas</u> ruumis. Iga vektor $\bar{x}$ on vektorite $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ ja $\bar{e}_3$ lineaarkombinatsioon (järeldus (4)):

$$\bar{x} = X^1\bar{e}_1 + X^2\bar{e}_2 + X^3\bar{e}_3. \tag{7.3}$$

Skalaare X^1, X^2 ja X^3 nimetatakse vektori $\bar{x}$ koordinaatideks baasi $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ suhtes.

X^1 on vektori $\bar{x}$ komponendi $Pr_{\bar{e}_1}\bar{x}(\parallel\pi_1)$ koordinaat vektori $\bar{e}_1$ suhtes, X^2 on komponendi $Pr_{\bar{e}_2}\bar{x}(\parallel\pi_2)$ koordinaat vektori $\bar{e}_2$ suhtes ja X^3 on komponendi $Pr_{\bar{e}_3}\bar{x}(\parallel\pi_3)$ koordinaat vektori $\bar{e}_3$ suhtes, kusjuures π_1, π_2 ja π_3 tähendavad vektorite paaridega $\{\bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, $\{\bar{e}_1, \bar{e}_3\}$ ja $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ määratud kahedimensionaalseid sihte (vt. (3.9) ja joon. 31). (Kirjeldada vektori $\bar{x}$ asendit, kui $X^2 = 0$! kui $X^1 = X^3 = 0$!)

Nii tasandil kui ka ruumis on baasivektorid järjestatud; sellepärast on järjestatud ka vektori koordinaadid. Baasivektorite järjestuse muutmine tähendab baasi muutmist.

Baas korraldab tasandil üksühese vastavuse tasandi vabavektorite hulga ja järjestatud reaalarvupaaride hulga vahel, ruumis - kõigi vabavektorite hulga ja järjestatud reaalarvukolmikute hulga vahel.

Veendume selles näiteks ruumi vektorite hulga korral. Olgu vektorite $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ koordinaadid baasi $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ suhtes vastavalt X^1, X^2, X^3 ja Y^1, Y^2, Y^3, s.t.

$$\bar{x} = X^1\bar{e}_1 + X^2\bar{e}_2 + X^3\bar{e}_3,$$
$$\bar{y} = Y^1\bar{e}_1 + Y^2\bar{e}_2 + Y^3\bar{e}_3.$$

Lahutame ühest võrdusest teise:

$$\bar{x} - \bar{y} = (X^1 - Y^1)\bar{e}_1 + (X^2 - Y^2)\bar{e}_2 + (X^3 - Y^3)\bar{e}_3.$$

Olgu $\bar{x} = \bar{y}$, s.o. $\bar{x} - \bar{y} = 0$. Baasivektorite lineaarse sõltumatuse tõttu (mittekomplanaarsus!) saab nulliga võrduda ainult nende triviaalne lineaarkombinatsioon, seega $X^1 = Y^1$, $X^2 = Y^2$, $X^3 = Y^3$. Järelikult: <u>võrdsete vektorite vastavad koordinaadid on võrdsed</u>. See aga tähendab, et vabavektori koordinaadid on üheselt määratud.

Vastupidi, antud järjestatud reaalarvukolmik X^1, X^2, X^3 määrab antud baasi korral ruumis vektori, mille koordinaatideks on need arvud. See vektor $\bar{x}$ on baasivektorite sihiliste vektorite (vektori $\bar{x}$ komponentide) $X^1\bar{e}_1$, $X^2\bar{e}_2$ ja $X^3\bar{e}_3$ summa. (7.1) tõttu on komponentide suunad ja moodulid skalaaridega X^1, X^2 ja X^3 üheselt määratud. Järelikult määrab antud baasi korral iga järjestatud reaalarvukolmik ruumis parajasti ühe vabavektori.

Seda tulemust võib väljendada ka teisiti: iga baas ruumis tekitab üksühese vastavuse ruumi vektorite klasside ja järjestatud reaalarvukolmikute vahel.

Analoogilise arutluse saab sooritada tasandi vektorite hulga korral.

Baasivektorite valikut tasandil kitsendab ainult mittekollineaarsuse nõue, ruumis - mittekomplanaarsuse nõue. Seega baasivektoriks ei saa olla nullvektor ja baasivektorite vaheline nurk ei või olla 0 ega π. Ülejäänus on baasivektorite moodulite ja nendevaheliste nurkade valik täiesti suvaline.

Vektori $\bar{x}$ puhul koordinaatidega x^1, x^2, x^3 kasutatakse tähistust $\bar{x}(x^1,x^2,x^3)$; tasandil analoogiliselt $\bar{x}(x^1,x^2)$. Praktikas on sageli otstarbekas kasutada õppekirjanduses levinud kirjaviisi $\bar{x} = (x^1,x^2,x^3)$, kus võrdus tähendab vektori samastamist talle vastava järjestatud reaalarvukolmikuga. Tuleb aga silmas pidada, et selline samastamine on võimalik ainult ühe baasi korral, mille suhtes x^1, x^2 ja x^3 on vektori $\bar{x}$ koordinaadid. Vektori koordinaadid erinevate baaside suhtes on erinevad; sellepärast lakkab baasi muutmisel märgitud võrdus kehtimast.

2. <u>Ortonormeeritud baas</u>.

Baasi nimetatakse <u>ortonormeeritud baasiks</u>, kui baasivektorid $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ ja $\bar{e}_3$ on paarikaupa ortogonaalsed ühikvektorid, s.t.

$$(\bar{e}_1,\bar{e}_1) = (\bar{e}_2,\bar{e}_2) = (\bar{e}_3,\bar{e}_3) = 1,$$
$$(\bar{e}_1,\bar{e}_2) = (\bar{e}_1,\bar{e}_3) = (\bar{e}_2,\bar{e}_3) = 0.$$

Neid tingimusi saab kirjutada lühidalt <u>Kroneckeri sümboli</u> δ_{ij} abil, mis defineeritakse järgmiselt:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ kui } i = j, \\ 0, \text{ kui } i \neq j. \end{cases}$$

Seega baas $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ on ortonormeeritud parajasti siis, kui

$$(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij} \quad (i,j = 1,2,3). \tag{7.5}$$

Ortonormeeritud baasi vektorite puhul kasutatakse sageli spetsiaalseid tähistusi $\bar{I}$, $\bar{J}$ ja $\bar{K}$; vektori koordinaate ortonormeeritud baasi suhtes märgitakse sel juhul tähtedega X, Y ja Z (tasandil vastavalt $\bar{I}$, $\bar{J}$, X, Y).

Märgime, et selline tähistamisviis ei lase kasutada lühisummeerimist indeksite puudumise tõttu. Nõnda võrdus $\bar{x} = x^i\bar{e}_i$ $(i = 1,2,3)$ tuleb kirjutada alati pikalt:

$$\bar{x} = X\bar{I} + Y\bar{J} + Z\bar{K}. \tag{α}$$

Selles sümboolikas ei saa ortonormeerituse tingimusi väljendada kujul (7.5); neid peab kirjutama eraldi:

$$\left.\begin{aligned} (\bar{I},\bar{I}) = (\bar{J},\bar{J}) = (\bar{K},\bar{K}) = 1, \\ (\bar{I},\bar{J}) = (\bar{I},\bar{K}) = (\bar{K},\bar{J}) = 0. \end{aligned}\right. \tag{7.5a}$$

Vektori koordinaadid ortonormeeritud baasi suhtes on vektori ortogonaalprojektsioonid baasivektorite sihtidele. See asjaolu järeldub vahetult valemeist (7.2) ja (7.3), kuid seda on otstarbekas põhjendada veel teisiti: korrutame võrdust (α) kordamööda vektoritega $\bar{I}$, $\bar{J}$ ja $\bar{K}$ skalaarselt, siis seoste (7.5a) ja (4.7) põhjal

$$\begin{aligned} X &= (\bar{x},\bar{I}) = pr_{\bar{I}}\bar{x}, \\ Y &= (\bar{x},\bar{J}) = pr_{\bar{J}}\bar{x}, \\ Z &= (\bar{x},\bar{K}) = pr_{\bar{K}}\bar{x}. \end{aligned} \tag{7.6}$$

(Tasandi korral muidugi viimane rida puudub).

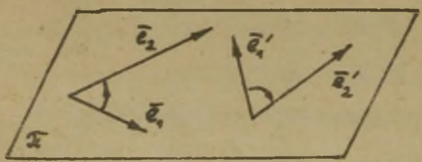
3. <u>Baasi orientatsioon</u>.

Baasi sirgel, tasandil ja ruumis saab valida lõpmata paljudel viisidel. Ilmneb aga, et kõik baasid jagunevad kahte klassi, mis erinevad teineteiselt orientatsioonilt.

Baasivektori valik sirgel omistab sirgele kindla suuna; suunaga varustatud sirget nimetatakse __teljeks__. Suunda saab sirgel valida kahel viisil.

Baasi ruumis moodustavad kolm mittekomplanaarset vektorit. Kõik järjestatud mittekomplanaarsed vektorite kolmikud jagunevad orientatsioonilt kahte klassi - parem- ja vasakpoolsed (§ 5 p. 1).

Baasi orientatsiooni määramiseks tasandil tuleb valida tasandi külg, s.o. suund, kustpoolt vaatlus toimub. Selle järel saab ka tasandi puhul rääkida baasi kahest võimalikust orientatsioonist - parem- ja vasakpoolsest - vastavalt sellele, kas lühem pööre esimesest baasivektorist teiseni on positiivne või negatiivne.



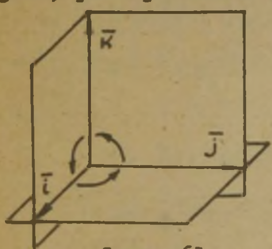
Joon. 60

Kui tasandit π joonisel 60 vaadelda "ülalt", siis $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ on parempoolse orientatsiooniga ja $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$ - vasakpoolse orientatsiooniga baas. Kui tasandit vaadelda "alt", siis baaside orientatsioonid muutuvad, kuid säilib jaotus klassideks.

Ühte klassi kuuluvate baaside korral saab ühe baasi muuta teiseks pideva deformeerimise teel, s.t. vektoritevaheliste nurkade ja vektorite moodulite muutmise teel nõnda, et igal vahepealsel etapil moodustavad vektorid baasi. Baaside puhul erinevaist klassidest ei ole selline pidev üleminek võimalik: vahepeal peavad vektorid muutuma lineaarselt söltuvaiks, s.o. lakkavad moodustamast baasi.

See arutlus kehtib muidugi ka ortonormeeritud baaside erijuhul. Siin vektoritevahelised nurgad ja vektorite moodulid ei muutu, sellepärast üleminekul ühelt baasilt teisele võib rääkida liikumisest. Ühte klassi kuuluvaid ortonormeeritud baase on võimalik viia ühtimisele liikumise teel; erinevatest klassidest valitud baaside korral seda teha ei saa (analoogia: vasaku ja parema käe kindaid ei saa viia ühtimisele) – on tarvilik sooritada veel peegeldus.

Järgnevas kasutatakse üldiselt (kui vastupidist ei märgita) parempoolseid vektorbaase nii tasandil kui ka ruumis.



Joon. 61

Parempoolse ortonormeeritud baasi korral ruumis kehtivad järgmised seosed:

$$[\bar i,\bar j]=\bar k,\quad [\bar j,\bar k]=\bar i,$$
$$[\bar k,\bar i]=\bar j;\quad (\bar i,\bar j,\bar k)=1. \tag{7.7}$$

Nende võrduste kehtivuses on lihtne veenduda joonise 61 abil, kasutades vektorkorrutise ja segakorrutise definitsioone. Anda iseseisvalt detailne põhjendus ja tuletada analoogilised valemid vasakpoolse orientatsiooni jaoks!

4. Vektortehted koordinaatkujus.

Järgnevalt tuletame rea koordinaatvalemeid. Märgime, et valemite tuletamine toimub vektortehete omaduste (kommutatiivsus, assotsiatiivsus, distributiivsus) abil. Lugeja veendugu selles igal üksikjuhul.

Olgu $\bar x$ ja $\bar y$ mingid vektorid, mille koordinaadid antud baasi $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ suhtes olgu vastavalt X^1, X^2, X^3 ja Y^1, Y^2, Y^3, s.t.

$$\bar{x} = X^1\bar{e}_1 + X^2\bar{e}_2 + X^3\bar{e}_3,$$
$$\bar{y} = Y^1\bar{e}_1 + Y^2\bar{e}_2 + Y^3\bar{e}_3.$$

(1) Võrdsete vektorite vastavad koordinaadid on võrdsed: kui $\bar{x} = \bar{y}$, siis $X^1 = Y^1$, $X^2 = Y^2$ ja $X^3 = Y^3$. See asjaolu on tõestatud eespool (§ 7 p.1).

(2) Kahe vektori summa (vahe) koordinaatideks on nende vektorite vastavate koordinaatide summad (vahed).

$$\bar{x} \pm \bar{y} = (X^1\bar{e}_1 + X^2\bar{e}_2 + X^3) \pm (Y^1\bar{e}_1 + Y^2\bar{e}_2 + Y^3\bar{e}_3) =$$
$$= (X^1 \pm Y^1)\bar{e}_1 + (X^2 \pm Y^2)\bar{e}_2 + (X^3 \pm Y^3)\bar{e}_3,$$

s.o. vektorite $\bar{x} \pm \bar{y}$ koordinaadid on $X^1 \pm Y^1$, $X^2 \pm Y^2$, $X^3 \pm Y^3$.

Järeldus: nullvektori koordinaadid on nullid.

(3) Vektori korrutamisel skalaariga korrutub selle skalaariga vektori iga koordinaat.

$$k\bar{x} = k(X^1\bar{e}_1 + X^2\bar{e}_2 + X^3\bar{e}_3) = (kX^1)\bar{e}_1 + (kX^2)\bar{e}_2 +$$
$$+ (kX^3)\bar{e}_3,$$

s.o. vektori $k\bar{x}$ koordinaadid on kX^1, kX^2 ja kX^3.

(4) Vektorid on kollineaarsed parajasti siis, kui nende koordinaadid on võrdelised.

Kui $\bar{x} \parallel \bar{y}$, siis $\bar{x} = k\bar{y}$, järelikult (3) ja (1) tõttu $X^1 = kY^1$, $X^2 = kY^2$, $X^3 = kY^3$, s.t. $(k =)\ \frac{X^1}{Y^1} = \frac{X^2}{Y^2} = \frac{X^3}{Y^3}$.

Kui aga $\frac{X^1}{Y^1} = \frac{X^2}{Y^2} = \frac{X^3}{Y^3}$, siis tähistame suhete ühist väärtust sümboliga k: $X^1 = kY^1$, $X^2 = kY^2$, $X^3 = kY^3$. Seega $\bar{x} = k\bar{y}$, s.t. $\bar{x} \parallel \bar{y}$.

(5) Vektorid on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui seda on nende vastavad koordinaadid.

Kui $k^1\bar{x} + k^2\bar{y} + k^3\bar{z} = \bar{0}$, kus vektori $\bar{z}$ koordinaadid vaadeldava baasi suhtes on Z^1, Z^2 ja Z^3, siis (3), (2) ja (1) põhjal

$$k^1X^1 + k^2Y^1 + k^3Z^1 = 0,$$
$$k^1X^2 + k^2Y^2 + k^3Z^2 = 0,$$
$$k^1X^3 + k^2Y^3 + k^3Z^3 = 0.$$

Vastupidi, nendest skalaarvõrdustest järeldub esialgne vektorvõrdus. Juhul, kui kordajaist k^1, k^2 ja k^3 vähemalt üks erineb nullist, esineb lineaarne sõltuvus.

Näidata koordinaatide abil, et iga neli vektorit on lineaarselt sõltuvad!

Laused (1) - (5) kehtivad muidugi ka ortonormeeritud baasi puhul; erinevus võib olla ainult tähistustes. Näit. kollineaarsete vektorite $\bar{x}(X_1,Y_1,Z_1)$ ja $\bar{y}(X_2,Y_2,Z_2)$ puhul $\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$ jne.

Märgime, et erinevate vektorite koordinaatide tähistamiseks ortonormeeritud baasi suhtes kasutatakse alumisi indekseid. Need indeksid ei määra koordinaatide järjestust ja neid ei saa kasutada summeerimisindeksitena.

Tasandi juht erineb vaid kolmanda koordinaadi puudumise poolest.

(6) Skalaarkorrutise puhul järeldub valemist (4.9):

$$(\bar{x},\bar{y}) = (X^1\bar{e}_1 + X^2\bar{e}_2 + X^3\bar{e}_3,\ Y^1\bar{e}_1 + Y^2\bar{e}_2 + Y^3\bar{e}_3) =$$
$$= X^1Y^1(\bar{e}_1,\bar{e}_1) + X^1Y^2(\bar{e}_1,\bar{e}_2) + X^1Y^3(\bar{e}_1,\bar{e}_3) +$$
$$+ X^2Y^1(\bar{e}_2,\bar{e}_1) + X^2Y^2(\bar{e}_2,\bar{e}_2) + X^2Y^3(\bar{e}_2,\bar{e}_3) +$$

$$+ X^3Y^1(\bar{e}_3,\bar{e}_1) + X^3Y^2(\bar{e}_3,\bar{e}_2) + X^3Y^3(\bar{e}_3,\bar{e}_3) =$$
$$= X^1Y^1(\bar{e}_1,\bar{e}_1) + X^2Y^2(\bar{e}_2,\bar{e}_2) + X^3Y^3(\bar{e}_3,\bar{e}_3) +$$
$$+ (X^1Y^2 + X^2Y^1)(\bar{e}_1,\bar{e}_2) + (X^1Y^3 + X^3Y^1)(\bar{e}_1,\bar{e}_3) +$$
$$+ (X^2Y^3 + X^3Y^2)(\bar{e}_2,\bar{e}_3).$$

Kasutades summeerimiskokkulepet saab tulemuse kirjutada lühidalt:

$$\boxed{(\bar{x},\bar{y}) = X^iY^j(\bar{e}_i,\bar{e}_j).} \qquad (7.8)$$

Ilmneb, et skalaarkorrutis avaldub baasivektorite skalaarkorrutiste kaudu. See asjaolu võimaldab baasi sobiva valikuga skalaarkorrutise koordinaatkuju tunduvalt lihtsustada. Tõepoolest, kui valida ortonormeeritud baas, siis (7.5) tõttu

$$(\bar{x},\bar{y}) = X^iY^j\delta_{ij}.$$

Tegemist on kahekordse summaga, mille liikmed sisaldavad tegurit 1, kui $i = j$, ja 0, kui $i \neq j$. Selle tõttu säilivad summas ainult need liikmed, milles indeksid on ühise väärtusega:

$$(\bar{x},\bar{y}) = X^1Y^1 + X^2Y^2 + X^3Y^3. \qquad (7.9)$$

Ortonormeeritud reeperiga määratud koordinaatide spetsiaalsete tähistuste korral

$$\boxed{(\bar{x},\bar{y}) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.} \qquad (7.9a)$$

Seega: ortonormeeritud baasil võrdub kahe vektori skalaarkorrutis nende vektorite vastavate koordinaatide korrutiste summaga.

See tulemus näitab, et skalaarkorrutist kasutades on otstarbekas avaldada vektorid ortonormeeritud baasi suhtes.

Esitame nüüd (7.9a) abil skalaarkorrutisega seotud valemid (§ 4 p.3) koordinaatkujus.

Vektori moodul võrdub ruutjuurega vektori koordinaatide ruutude summast (vt. 4.3):

$$\boxed{|\bar{x}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.} \tag{7.10}$$

Nurk kahe vektori vahel (vt. 4.5):

$$\boxed{\cos(\bar{x},\bar{y}) = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.} \tag{7.11}$$

Kahe vektori ortogonaalsuse tingimus:

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0. \tag{7.12}$$

Nurgad vektori ja baasivektorite vahel:

$$\begin{cases} \cos(\bar{x},\bar{i}) = \dfrac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \\ \cos(\bar{x},\bar{j}) = \dfrac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \\ \cos(\bar{x},\bar{k}) = \dfrac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}. \end{cases} \tag{7.13}$$

Vektori projektsioon teise vektori sihile (vt. 4.6):

$$\boxed{pr_{\bar{x}}\bar{y} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}.} \tag{7.14}$$

Tasandil kehtivad ortonormeeritud reeperi korral analoogilised valemid:

$$(\bar{x},\bar{y}) = X_1X_2 + Y_1Y_2; \tag{7.9b}$$

$$|\bar{x}| = \sqrt{X^2 + Y^2}; \tag{7.10a}$$

$$\cos(\bar{x},\bar{y}) = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}\ \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}}; \tag{7.11a}$$

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 = 0. \tag{7.12a}$$

$$\begin{cases} \cos(\bar{x},\bar{I}) = \dfrac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \\ \cos(\bar{x},\bar{J}) = \dfrac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}; \end{cases} \tag{7.13a}$$

$$pr_{\bar{x}}\bar{y} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}. \tag{7.14a}$$

(7) <u>Vektorkorrutise</u> puhul kasutame valemit (5.2):

$$[\bar{x},\bar{y}] = [X^1\bar{e}_1 + X^2\bar{e}_2 + X^3\bar{e}_3, Y^1\bar{e}_1 + Y^2\bar{e}_2 + Y^3\bar{e}_3] =$$
$$= X^1Y^2[\bar{e}_1,\bar{e}_2] + X^1Y^3[\bar{e}_1,\bar{e}_3] + X^2Y^1[\bar{e}_2,\bar{e}_1] +$$
$$+ X^2Y^3[\bar{e}_2,\bar{e}_3] + X^3Y^1[\bar{e}_3,\bar{e}_1] + X^3Y^2[\bar{e}_3,\bar{e}_2].$$

Antikommutatiivsuse tõttu

$$[\bar{x},\bar{y}] = (X^1Y^2 - X^2Y^1)[\bar{e}_1,\bar{e}_2] + (X^1Y^3 - X^3Y^1)[\bar{e}_1,\bar{e}_3] +$$
$$+ [(X^2Y^3 - X^3Y^2)[\bar{e}_2,\bar{e}_3] =$$
$$= \begin{vmatrix} X^1 & X^2 \\ Y^1 & Y^2 \end{vmatrix} [\bar{e}_1,\bar{e}_2] - \begin{vmatrix} X^1 & X^3 \\ Y^1 & Y^3 \end{vmatrix} [\bar{e}_3,\bar{e}_1] +$$
$$+ \begin{vmatrix} X^2 & X^3 \\ Y^2 & Y^3 \end{vmatrix} [\bar{e}_2,\bar{e}_3]$$

$$\boxed{[\bar{x},\bar{y}] = \begin{vmatrix} [\bar{e}_2,\bar{e}_3] & [\bar{e}_3,\bar{e}_1] & [\bar{e}_1,\bar{e}_2] \\ X^1 & X^2 & X^3 \\ Y^1 & Y^2 & Y^3 \end{vmatrix}.} \tag{7.15}$$

Kui baas on ortonormeeritud, siis (7.7) tõttu

$$\boxed{[\bar{x},\bar{y}] = \begin{vmatrix} \bar{I} & \bar{J} & \bar{K} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.} \tag{7.15a}$$

Seega <u>ortonormeeritud baasil võrdub kahe vektori vektorkorrutis kolmandat järku determinandiga, mille esimeses reas on baasivektorid, teises reas esimese vektori ja kolmandas reas teise vektori koordinaadid</u>.

Niisiis vektorkorrutise koordinaatideks ortonormeeritud baasi suhtes on teist järku determinandid

$$\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}.$$

Järelikult vektorkorrutise mooduli määrab (7.10) põhjal valem

$$\boxed{\left|[\bar{x},\bar{y}]\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}.} \qquad (7.16)$$

See valem võimaldab arvutada vektoritele $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ehitatud rööpküliku ja kolmnurga pindala (vt. näide 21).

(8) <u>Segakorrutis</u>.

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (X^1\bar{e}_1 + X^2\bar{e}_2 + X^3\bar{e}_3, Y^1\bar{e}_1 + Y^2\bar{e}_2 + Y^3\bar{e}_3, Z^1\bar{e}_1 +$$
$$+ Z^2\bar{e}_2 + Z^3\bar{e}_3) =$$
$$= X^1Y^2Z^3(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3) + X^1Y^3Z^2(\bar{e}_1,\bar{e}_3,\bar{e}_2) +$$
$$+ X^2Y^1Z^3(\bar{e}_2,\bar{e}_1,\bar{e}_3) + X^2Y^3Z^1(\bar{e}_2,\bar{e}_3,\bar{e}_1) +$$
$$+ X^3Y^1Z^2(\bar{e}_3,\bar{e}_1,\bar{e}_2) + X^3Y^2Z^1(\bar{e}_3,\bar{e}_2,\bar{e}_1) =$$
$$= (X^1Y^2Z^3 + X^2Y^3Z^1 + X^3Y^1Z^2 - X^1Y^3Z^2 - X^2Y^1Z^3 -$$
$$- X^3Y^2Z^1)(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3).$$

Lihtne on veenduda, et sulgudes olev avaldis on kolmandat järku determinant; seega

$$\boxed{(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \begin{vmatrix} X^1 & X^2 & X^3 \\ Y^1 & Y^2 & Y^3 \\ Z^1 & Z^2 & Z^3 \end{vmatrix} (\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3).} \tag{7.17}$$

Determinant on positiivne, kui vektorite kolmikud $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ ja $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ on ühise orientatsiooniga, ja negatiivne, kui orientatsioonid on vastupidised (põhjendada!).

Ortonormeeritud baasil (7.7) tõttu

$$\boxed{(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},} \tag{7.17a}$$

s.o. <u>ortonormeeritud baasil võrdub segakorrutis korrutatavate vektorite koordinaatidest moodustatud kolmandat järku determinandiga</u>.

Siit tuleneb kolme vektori komplanaarsuse tingimus koordinaatkujus: nende vektorite koordinaatidest moodustatud kolmandat järku determinant on null. Nält. ortonormeeritud baasi puhul

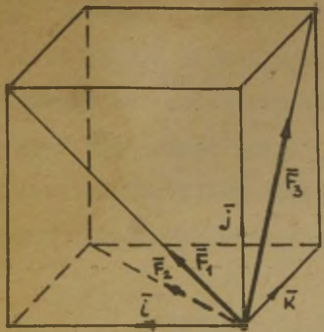
$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.18}$$

Märgime, et valemi (7.17a) abil saab arvutada vektoritele $\bar{x}$, $\bar{y}$ ja $\bar{z}$ ehitatud rööptahuka ja tetraeedri ruumala (vt. näide 22).

<u>Näited</u>.

20. Kuubi tippu on rakendatud kolm tungi suurustega 1, 2 ja 3 kG. Tungid on suunatud mööda kuubi tahkude diagonaa-

le (joon. 62). Leiame resultanttungi suuruse.



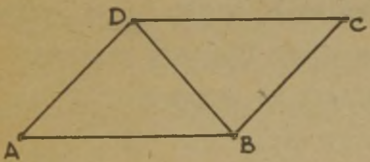
Joon. 62

Valime ortonormeeritud baasi, mille vektorid asuvad vaadeldavasse kuubi tippu rakendatuina kuubi servadel. Määrame tungide koordinaadid selle baasi suhtes:

$$F_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),$$
$$F_2\left(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right),$$
$$F_3\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

(1) põhjal resultanttung on $R\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$. (7.10) tõttu $R = 5$ kG.

21. Teatavasti võrdub kahe vektori vektorkorrutise moodul neile vektoreile ehitatud rööpküliku pindalaga (joon. 63):



Joon. 63

$$S_{ABCD} = \left|[\overline{AB}, \overline{AB}]\right|.$$

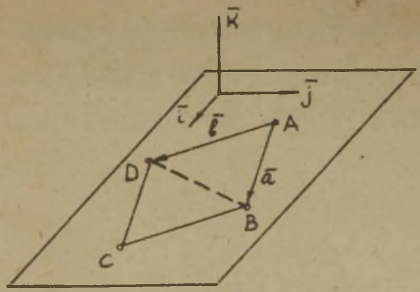
Järelikult saab vektorite abil väljendada ka kolmnurga pindala:

$$S_{ABD} = \tfrac{1}{2}\left|[\overline{AB}, \overline{AD}]\right|.$$

Kui vektorid on antud oma koordinaatide abil, võimaldavad need seosed ja valem (7.16) arvutada pindala.

Silmas tuleb pidada asjaolu, et vektorkorrutisel on mõte ainult ruumis; tasandil ei ole vektorkorrutis defineeritud. Kui aga vaadelda tasandit asuvana ruumis, siis saab (7.16) abil tuletada arvutusvalemid rööpküliku ja kolmnurga pindala jaoks ka koordinaatides tasandil.

Tõepoolest, olgu tasandil antud ortonormeeritud baas $\bar{i},\bar{j}$ ja vektorid $\bar{a}(X_1,Y_1)$ ning $\bar{b}(X_2,Y_2)$. Täiendame selle baasi ruumiliseks, lisades tasandi normaalühikvektori $\bar{k}$ (joon. 64).



Joon. 64

Selle ruumilise baasi suhtes on vektoreil kolm koordinaati: $\bar{a}(X_1,Y_1,0)$, $\bar{b}(X_2,Y_2,0)$. Rakendame valemit (7.16):

$$S_{ABCD} = \operatorname{mod}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \qquad (7.19)$$

(determinandi moodul)

$$S_{ABD} = \tfrac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}. \qquad (7.20)$$

Viimase valemi abil saab määrata mistahes hulknurga pindala, kui tükeldada hulknurk kolmnurkadeks – ja kui on teada vastavate vektorite koordinaadid.

Tuletatud valemeis võib determinant osutuda negatiivseks, sellepärast tuleb pindala väljendamisel kasutada absoluutväärtust. Kuid ka determinandi märgil on geomeetriline tähendus. Tõepoolest, (7.6) ja (7.16) tõttu

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = \operatorname{pr}_{\bar{k}}\,[\bar{a},\bar{b}],$$

Järelikult

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \begin{cases} > 0, \text{ kui } [\bar{a},\bar{b}] \uparrow\uparrow \bar{k}, \\ < 0, \text{ kui } [\bar{a},\bar{b}] \uparrow\downarrow \bar{k}. \end{cases}$$

Niisiis: determinant on positiivne, kui vektoripaarid $\bar{a},\bar{b}$ ja $\bar{i},\bar{j}$ kuuluvad orientatsioonilt ühte klassi, ja negatiivne vastupidisel juhul.

Viimati tuletatud pindala valemeid saab kasutada ka ruumis, kui eelnevalt valida kaks baasivektorit vaadeldava rööpküliku või kolmnurga tasandiga paralleelsetena. Seega on sobiva baasi valikuga võimalik lihtsustada arvutamiskäiku.

22. Kasutades segakorrutise geomeetrilist tähendust saab arvutada vektoritega $\bar{a}(X_1,Y_1,Z_1)$, $\bar{b}(X_2,Y_2,Z_2)$ ja $\bar{c}(X_3,Y_3,Z_3)$ määratud rööptahuka ning tetraeedri ruumala (vrd. näide 19):

$$V_{\text{rööpt.}} = \bmod \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}, \qquad (7.21)$$

$$V_{\text{tetr.}} = \frac{1}{6} \bmod \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \qquad (7.22)$$

23. Valemist (7.17a) ilmneb vahetu seos kolme vektori segakorrutise ja kolmandat järku determinandi omaduste vahel. Esitame rea näiteid.

(1) Determinandi kahe rea vahetamisel muutub determinandi märk.

(1') Kahe vektori vahetamisel muutub segakorrutise märk.

(2) Determinandi ühe rea korrutamisel skalaariga korrutub determinant selle skalaariga.

(2') Segakorrutis on assotsiatiivne skalaarteguri suhtes.

(3) Kui determinandi read on lineaarselt sõltuvad, siis determinant on null.

(3') Komplanaarsete vektorite segakorrutis on null.

(4) Kui determinandi ühe rea iga element on kahe liidetava summa, siis determinant võrdub kahe determinandi summaga, kusjuures nende determinantide vaadeldavad read koosnevad vastavalt esimestest ja teistest liidetavatest.

(4') Segakorrutis on distributiivne vektorite liitmise suhtes.

(5) Determinandi arendi ühe rea järgi

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = X_3 \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Y_3 \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} + Z_3 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$$

saab kirjutada ka segakorrutise definitsiooni ja valemite (7.9a) ning (7.15a) abil.

(6) Determinantide korrutamise reegel on esitatud vektorite abil näites 18 korrutise $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})(\bar{d},\bar{e},\bar{f})$ väljendamisel tegurite skalaarkorrutiste kaudu.

SISUKORD