A-11014 I

A. BORKVELL
A. KASVAND
F. LAARENS
K. MAASIK
A. VIHMAN
O. PAAS

KESKKOOLI GEOMEETRIA I

K./Ü. „LOODUS"

A-11079 I

A. BORKVELL / A. KASVAND / F. LAARENS
K. MAASIK / O. PAAS / A. VIHMAN

KESKKOOLI
GEOMEETRIA
I

ÕPPERAAMAT
III klassile

~~25169~~

Haridusministeeriumi poolt koolidele tarvitamiseks lubatud.

K./Ü. „LOODUS“, TARTU 1937

Bibliotheca Universitatis Tartuensis
(1937:01199)
2-56653
A-11079 I
25163

O./Ü. „ILUTRÜKK", TARTU, 1937.

Eessõna.

Käesolev õpiraamat moodustab esimese osa keskkooli geomeetria kursusest, mis jaguneb kolmeks raamatuks: „Geomeetria I“ (planimeetria kursus III klassile), „Geomeetria II“ (planimeetria kursus IV klassile) ja „Geomeetria III“ (stereomeetria kursus V klassile).

Terve keskkooli geomeetria kursus (Geomeetria I, II ja III) sisaldab konspektiivse teoreetilise kursuse selles ulatuses, mis peaks praegune keskkool sellel alal pakkuma oma kasvandikkudele. Neis raamatuis käsiteldud õppematerjal on korraldatud nõnda, et õpilane ka iseseisvalt, ilma õpetaja juhatuseta võiks esitatud ainepalu lugeda, neid mõista ja omandada. Esitatud materjal peaks võimaldama õpilastes ilma suurema jõupingutuseta tasapinnaliste kui ka ruumiliste kujundite õiget ettekujutamist ja nendest arusaamist, peaks seega aitama arendada õpilastes nende ruumilist mõtlemis- ja kujutlemisvõimet. Peale selle peaks ta andma tarviliku ja küllaldase hulga teadmisi nende rakendamiseks tegelikus elus. Et nimetatud otstarvet paremini saavutada, selleks tuleb tarvitada geomeetria õpetamisel ka vastavaid mõõtmisriistu ja harjutada nende käsitlemist klassis kui ka tegelikkudel mõõtmistel väljas. Samuti tuleb tarvitada vastavaid traat-, papp- või klaasmudeleid ja lahendada nende abil konstruktsiooniülesandeid. Ruumilise geomeetria käsitlemisel tuleb vaadelda traatmudeleid nii tsentraal- kui ka paralleelprojektsioonis (päikesekiirtes) ning valmistada neis projektsioonides ruumilises geomeetrias ettetulevate ese-

mete kujutusi, mis aitab viia õpilasi geomeetriliste jooniste õigele arusaamisele.

Iga aineosa Geomeetria I, II ja III raamatus on varustatud harjutuste ja ülesannetega niisuguses ulatuses, mis võimaldab vajaliku ja küllaldase valiku selleks, et kaasa aidata õpilaste praktiliste geomeetriliste teadmiste süvendamiseks ja ainepalade põhjalikumaks omandamiseks. Harjutuste ja ülesannete hulka geomeetria raamatutes ei tule mõista nii, et neid harjutusi ja ülesandeid peaks kõiki läbi uuritama ja lahendatama. Küllaldane on neist igal õppejõul oma äranägemise järgi teha valik selles ulatuses, kui palju lubab aeg ja nõuab õpilaste teadmiste tase või nende võime iseseisvaks töötamiseks. Mõnda ainepala, mis otseselt pole tähendatud õppekavades, kuid on otstarbekohasuse mõttes geomeetria õpiraamatutes siiski toodud, võib õpetaja, kui aeg seda lubab, arvestada kui harjutusmaterjali.

Peale selle esineb „Geomeetria III“ lõpus keskkooli geomeetrias ettetulevate valemite ja mõnede ainete erikaalude tabel, mis vajalik stereomeetriliste ülesannete lahendamisel.

Autorid.

PLANIMEETRIA.

Esimene osa.

I. Geomeetrilisi kujundeid.

1. Geomeetria ala.

Kehad, pinnad ja jooned on ruumikujundid. Geomeetrilistest kehadest tunneme kuupi, risttahukat, prismat, püramiidi, silindrit, koonust ja kera.

Geomeetria on õpetus ruumikujunditest, nende vormist, suurusest ja nende osade omavahelistest seadustest.

Piiratud osa ruumi nimetame geomeetriliseks kehaks.

Pind eraldab üht ruumi osa teisest.

Joon eraldab üht pinna osa teisest.

Punkt eraldab üht joone osa teisest.

2. Punkt. Sirge joon. Tasapind. Tahkkeha.

Punkt.

Punkt määrab koha ruumis.

Näiteks on võimalik mõelda punkti, kus kaks joont lõikuvad. Samuti võime punktiks nimetada seda kohta, kus kaks kuubi serva lõikuvad.

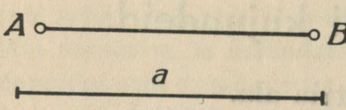
Punktil ei ole pikkust, laiust ega kõrgust. Kui tindiga või pliiatsiga märkida paberile või kriidiga tahvlile mingi täpp, siis võib suurendusvahendite abil hoolsasti mõõtes määrata seesuguse täpi pikkuse, laiuse ja kõrguse. Seepärast ei või niiviisi tekitatud täppi mitte geomeetriliseks punktiks pidada — ta sobib ainult geomeetrilise punkti märgiks.

Punkte tähistatakse harilikult suurte ladina tähtedega *A*, *B*, *C*, *D* jne.

Sirge joon.

Kahte punkti ruumis võib ühendada mitmesuguste joontega.

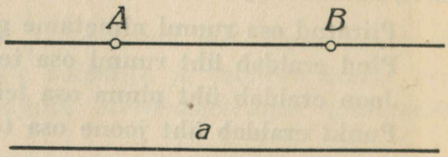
Kõige lühemat ühendusjoont kahe punkti vahel nimetatakse sirglõiguks.



1. joonis.

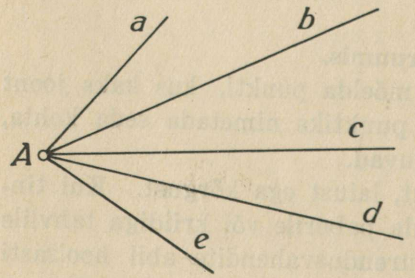
Sirglõiku märgitakse tema otsapunktide nimetuste järgi kahe suure tähega, näiteks sirglõik *AB*, või ühe väikese tähega, näiteks sirglõik *a* (1. joonis).

Sirglõiku võib tema mõlemast otsast kui palju tahes pikendada; sel puhul saame sirge. Meie arusaamise järgi ulatub sirge mõlemalt poolt lõpmatusse. Sirge märgitakse kas nende kahe suure tähega, millega oli märgitud sirglõik, mille pikendamisest sirge tekkis, või ühe väikese tähega (2. joonis).



2. joonis.

Sirglõiku ühest otsast piiramata pikendades saame **kiire.** Nõnda on kiir ühelt poolt punktiga piiratud, teiselt poolt ulatub ta lõpmatusse. Kiiri märgitakse väikeste tähtedega *a*, *b*, *c* jne. (3. joonis).



3. joonis.

Kahe punkti vaheliseks kauguseks nimetatakse nende punktide vahelise sirglõigu pikkust.

Tasapind.

Pind kui ühe ruumiosa teisest eraldaja võib olla mitmesuguse kujuga. Meie vaatleme eriti niisuguseid pindasid, millele saab sirgeid joonestada.

Pinda, millel igast tema punktist saab igas sihis sirgeid jooni joonestada, nimetatakse tasapinnaks. Pinda, millel seda omadust ei ole, nimetatakse kõverpinnaks.

Tasapind, nagu temale joonestatavad sirgedki, ulatub meie ettekujutuse järgi lõpmatusse.

Me tarvitame tasapinnana paberilehe või tahvli pinda, millele joonestame.

Tahkkeha.

Tasapinna osadega piiratud kehasid nimetatakse tahkkehadeks. Nii on kuup, risttahukas, prisma ja püramiid tahkkehad, kuna silinder ega koonus ei ole seda mitte.

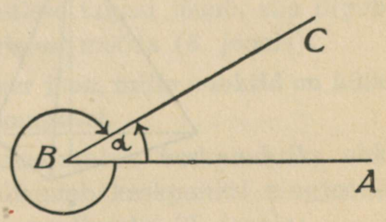
Tasapinna osasid, mis tahkkeha piiravad, nimetatakse selle keha tahkudeks. Kuubil ja risttahukal on 6 tahku, kolmnurksel püramiidil 4, nelinurksel püramiidil 5 tahku.

Sirglõikusid, mis piiravad tahkkeha tahkusid, nimetatakse selle tahkkeha servadeks. Kuubil näiteks on 12 serva.

Servade koondumispunkte nimetatakse tahkkeha tippudeks. Kuubil on 8 tippu, kuusnurksel püramiidil 7 tippu.

3. Nurk.

Kaks ühest punktist lähtuvat kiirt moodustavad nurga. Nurk määrab pöörde suuruse, millega üks neist kiirtest satub teise kiire asendisse.

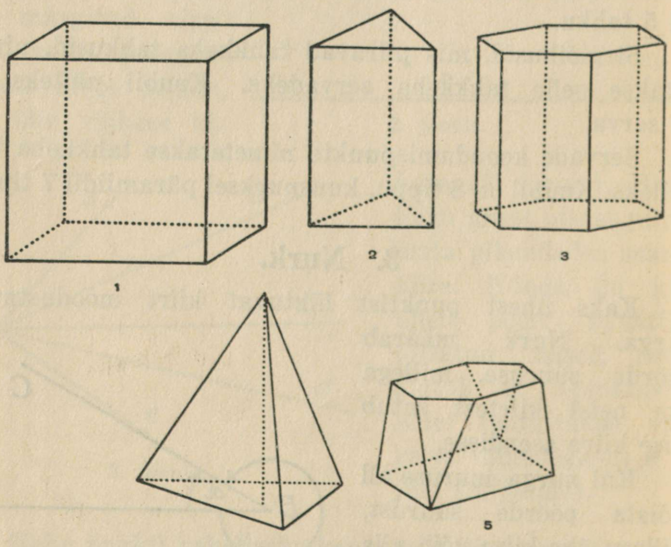


4. joonis.

Kui nurga suuruse all mõista pöörde suurust, millega ühe kiire võib viia teise kiire asendisse, siis võib seda teha kahes suunas, nagu näha 4. joonisel. Seega moodustab iga paar ühest punktist lähtuvaid kiiri kaks nurka. Tavaliselt mõtleme nurga all väiksemat neist kahest. Nurka moodustavaid kiiri nimetatakse nurga külgedeks ehk haaradeks. Punkti, millest kiired lähtuvad, nimetatakse nurga tipuks.

Nurga märgiks on $\wedge$, mis tekstis nurga nimetusele peale kirjutatakse.

Nurki märgitakse: 1) kolme suure tähega; sel puhul kirjutatakse **tipu juures olev täht keskele:** $\widehat{ABC}$ (loe: nurk ABC); 2) ühe suure tähega, nimelt selle tähega, mis asetseb tipu juures: $\widehat{B}$ (loe: nurk B); 3) väikese kreekakeelse tähega α (alfa), β (beeta), γ (gamma), δ (delta) jne., mis joonisel kirjutatakse tipu ligidale nurga haarade vahele. Et kreekakeelseid väikesi tähti harilikult tarvitatakse ainult nurkade märkimiseks, siis jäetakse nendele märk $\wedge$ peale kirjutamata: α (loe: nurk α).



5. joonis.

Ülesandeid.

1. Kuubil on 8 tippu, 6 tahku ja 12 serva. Kui tippude arv märkida tähega t, tahkude arv tähega T ja servade arv tähega s, siis on kuubi kohta õige valem $t + T = s + 2$. Määra loendamise teel vastavad arvud 5. joonisel esinevatel tahkkehadel! Kanna need arvud oma vihikus alljärgnevasse tabelisse ja otsusta iga keha puhul, kas valem $t + T = s + 2$ on maksev või mitte!

nr.	t	T	s	$t + T$	$s + 2$	valem $t+T=s+2$
1	8	6	12	14	14	on maksev
2						
3						
4						
5						

2. Kuubi tahkudel on kokku 24 nurka ja servi on kuubil 12. Kui servade arv märkida tähega s, nurkade arv tähega n, siis on kuubi kohta maksev valem $n = 2s$. Otsusta, kas see valem on maksev ka teiste eelmises ülesandes antud tahkkehade kohta!

4. Ringjoon, raadius, kaar.

Kui sirglõik pöördub tasapinnal ühe oma otsapunkti ümber, kuni ta oma algasendisse tagasi jõuab, siis liigub teine ots kõverat joont, **ringjoont** mööda (6. joonis).

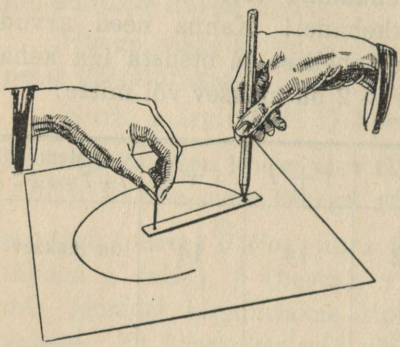
Ringjoon on kinnine kõver joon, mille punktid on kõik ühest kindlast punktist ühekaugusel.

Seda kindlat punkti nimetatakse **keskpunktiks** ehk **tsentriks.** Sirglõiku, mis ühendab keskpunkti ringjoone mingi punktiga, nimetatakse **raadiuseks** (7. joonis).

Ringjoone osa nimetatakse **kaareks.** Ringjoonega piiratud tasapinna osa nimetatakse **ringiks.**

Konstruktsioone.

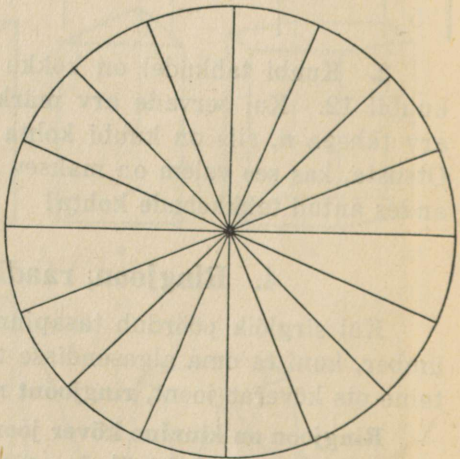
3. Joonesta joonise tasapinnal igas sihis punktist K palju kiiri ja aseta igale kiirele punktist K arvates 2 cm pikkune sirglõik! Mis joonel asuvad kiirtel tekkinud punktid?



6. joonis.

4. Joonesta punkti K kui keskpunkti ümber raadiusega r ($r = 2{,}5$ cm) ringjoon! Võta sellel ringjoonel hulk punkte ja joonesta ta iga võetud punkti kui keskpunkti ümber jälle ringjoon sama raadiusega r! Mis punkt on nendel ringjoontel ühine?

5. Joonesta raadiusega $r = 2$ cm hulk ringjooni, nii et kõik läheksid läbi antud punkti A! Mis joonel asuvad kõikide ringjoonte keskpunktid?



7. joonis.

6. Võttes punkt K keskpunktiks, joonesta kaks ringjoont — üks raadiusega 1,8 cm, teine raadiusega 2,7 cm! Kui lai on nii tekkinud rõngas?

7. Antud on sirge s ja väljaspool seda sirget joont punkt P. Joonesta 10 ringjoont, mis lähevad läbi punkti P ja mille keskpunktid on sirgel s!

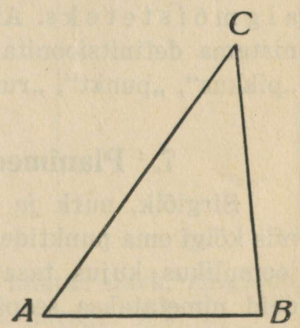
8. Võta kaks punkti A ja B, mille kaugus teineteisest on 3 cm! Joonesta kõik punktid, mis on A-st 2 cm kaugusel! Joonesta samal viisil kõik punktid, mis on B-st 2 cm kaugusel! Märgi lõpuks punktid, mis nii A-st kui B-st on 2 cm kaugusel! Mitu niisugust punkti on?

9. Antud on punktid A ja B, mille kaugus teineteisest on 4 cm. Konstrueeri punkt, mis oleks nii A-st kui ka B-st 3 cm kaugusel!

10. Antud on punktid A ja B, mille kaugus teineteisest on 3 cm. Konstrueeri punkt, mis on A-st 5 cm ja B-st 2 cm kaugusel!

5. Kolmnurk.

Kolme sirglõiguga täielikult piiratud osa tasapinda nimetatakse kolmnurgaks. Neid sirglõike nimetatakse kolmnurga külgedeks. Kolmnurgal on kolm tippu, kolm külge ja kolm nurka. Kolmnurga sümboliks on märk $\triangle$, kirjutatakse nii: $\triangle\ ABC$ (8. joonis).



8. joonis.

6. Definitsioon.

Geomeetrilisi kujundeid käsitelles peab hoolsalt tähele panema iga sõna tähendust. Uue sõna tarvitusele-võtmisel tuleb iga kord täpselt seletada selle sõna mõistet. **Mõiste seletust varemalt tuntud mõistete abil nimetatakse mõiste definitsiooniks.** Definitsioon peab olema õige, selge ja võimalikult lühike.

Enamasti valmib uue mõiste definitsioon nõnda, et öeldakse asjast, m i s ta on, ja lisatakse siis lähemaks seletuseks juurde tema omadused, m i s s u g u n e ta on. Definitsiooni näidis: V õ r d h a a r n e k o l m n u r k on niisugune k o l m n u r k, m i l l e l o n k a k s ü h e- p i k k u s t k ü l g e.

Siin on uus mõiste „võrdhaarne kolmnurk“. Varemalt tuntud mõisted, mille abil uus mõiste seletatud või defineeritud, on „kolmnurk“, „külg“ ja „pikkus“.

Teine näidis: V õ r d k ü l g n e k o l m n u r k on niisugune kolmnurk, mille kõik küljed on ühepikkused.

Et defineerimisel tuleb alati toetuda varemalt tuntud mõistetele, siis on selge, et nende varemalt tuntud mõistete reas tagasi minnes peab jõudma mõisteni, mida defineerida ei saa. K õ i k i m õ i s t e i d p o l e v õ i m a l i k d e f i n e e r i d a.

Me oleme sunnitud teatud hulga mõisteid võtma a l g m õ i s t e t e k s. Algmõistete sisu peame selgeks tunnistama definitsioonita. Algmõistetena tarvitame näiteks „pikkus“, „punkt“, „ruum“ jt.

7. Planimeetria ja stereomeetria.

Sirglõik, nurk ja ringjoon on niisugused kujundid, mis kõigi oma punktidega mahuvad tasapinnale; neid võib loomulikus kujus tasapinnale joonestada. Neid kujundeid nimetatakse seepärast t a s a p i n n a l i s t e k s ehk p l a n i m e e t r i l i s t e k s k u j u n d i t e k s.

Kuul seevastu ei mahu kõigi oma punktidega tasapinnale, teda saab tasapinnale ainult moonutatult joonestada. Samuti on lugu püramiidiga, silindriga jne. Kujundeid, mis kõigi oma punktidega ei mahu tasapinnale, nimetatakse r u u m i l i s t e k s ehk s t e r e o m e e t r i l i s t e k s.

Geomeetria osa, mis käsitleb tasapinnalisi kujundeid, nimetatakse **tasapinna geomeetriaks** ehk **planimeetriaks.**

Seda geomeetria osa aga, mis käsitleb ruumilisi kujundeid, nimetatakse **ruumi geomeetriaks** ehk **stereomeetriaks.**

Ülesandeid.

11. Otsi selle peatüki paragraafidest 1 ja 2 järgmiste mõistete definitsioonid: geomeetria, geomeetriline keha, sirglõik, kiir, sirge, kahe punkti vaheline kaugus, tasapind ning täida oma vihikus allpool-järgnev tabel.

Defineeritav mõiste	Mis defineeritav on	Defineeritava lähemad omadused
geomeetria		
geomeetriline keha		
sirglõik		
kiir		
sirge		
kahe punkti vaheline kaugus		
tasapind		

12. Sama ülesanne mõistete kohta: nurk, ringjoon, raadius, kaar, ring, kolmnurk. (Vt. paragr. 3, 5, 6.)

13. Defineeri mõiste: nelinurk!

14. Defineeri mõiste: viisnurk!

II. Kujundite omadusi.

1. Sirge läbi kahe punkti. Sirglõikude kongruentsus.

Läbi kahe punkti läheb ainult üks sirge. Seda tõsiasja on kasulik mõnikord sõnastada ka sel kujul: kaks punkti ruumis määravad ainult ühe sirge.

Sellest järgneb:

Kui kahel sirgel on kaks ühist punkti, siis langevad nad ühte kogu oma ulatusel.

Sellest omakorda järgneb, et kui kaks sirget osaliselt ühtivad, siis ühtivad nad täielikult.

Ülalnimetatud lausetest saame veel järgmist järeldada: Kui kaks sirglõiku teineteise peale paigutatult oma otsapunktides ühtivad, siis ühtivad nad täielikult.

Sirglõike, mis teineteise peale asetatult täielikult ühtivad, nimetatakse ühtivateks ehk kongruentseteks sirglõikudeks.

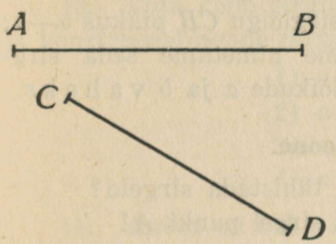
On arusaadav, et kongruentsed sirglõigud on ühepikkused. Kongruentsuse märgiks on $\equiv$.

Sirglõikude AB ja CD kongruentsust kirjutame sümboolselt nii: $AB \equiv CD$ või ka $AB = CD$.

2. Sirglõikude summa ja vahe.

Sirglõikude võrdlemine.

Et võrrelda sirglõiku CD sirglõiguga AB (9. joonis), asetame sirkliga sirglõigu CD sirglõigu AB peale, nii et punkt C langeb punktisse A ja et sirge CD läheb punkti B suunas.



9. joonis.

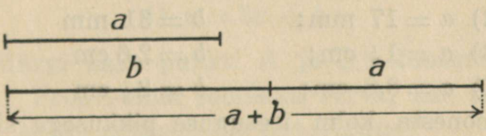
1) Kui punkt D langeb punktide A ja B vahele, siis on sirglõik CD lühem, seega ka väiksem kui sirglõik AB; seda kirjutame: $CD < AB$.

2) Kui punkt D langeb punkti B peale, siis on sirglõik CD kongruentne, seega ka võrdne sirglõiguga AB: $CD \equiv AB$ või $CD = AB$.

3) Kui punkt D langeb AB pikendisele, siis on sirglõik CD pikem, seega ka suurem kui sirglõik AB: $CD > AB$.

Sirglõikude summa.

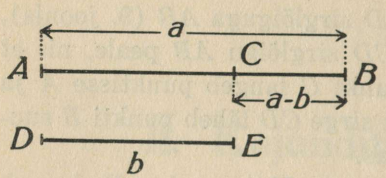
Olgu antud sirglõigud a ja b (10. joonis). Kui pikendame sirglõiku b sirglõigu a võrra või sirglõiku a sirglõigu b võrra, siis saame uue sirglõigu pikkusega $a + b$ või $b + a$. Võib veenduda, et $a + b = b + a$. See uus sirglõik on sirglõikude a ja b summa.



10. joonis.

Sirglõikude vahe.

Olgu joonestatud sirglõik AB pikkusega a ja sirglõik DE pikkusega b, nii et $a > b$ (11. joonis). Asetades sirglõigu DE sirglõigule AB nii, et punkt D langeb punktisse A ja punkt E langeb punktisse C, siis on sirglõigu CB pikkus $a—b$; me nimetame seda sirglõikude a ja b v a h e k s.



11. joonis.

Konstruktsioone.

1. Kuidas saab maapinnal tähistada sirgeid?

2. Antud on sirge. Märgi sirgel punkt A!

3. Joonesta antud sirgel punktist A alates sirglõigud pikkusega 2 cm, $2\frac{1}{2}$ cm ja 3 cm!

4. Võta sirgel kaks punkti A ja B! Määra sirkli abil nende kaugus mm-tes! Kirjelda, kuidas määratakse kahe punkti vaheline kaugus maapinnal!

5. Joonesta sirglõik $a = 4$ cm ja sirglõik $b = 3$ cm! Pikenda esimene teise võrra!

6. Joonesta sirglõik, mis on 2 korda nii pikk kui antud sirglõik! 3 korda nii pikk kui antud sirglõik!

7. Joonesta sirglõikude summa $a + b$, kui antud sirglõigud on järgmiste pikkustega:

1) $a = 25$ mm; $b = 18$ mm
2) $a = 17$ mm; $b = 31$ mm
3) $a = 1\frac{1}{2}$ cm; $b = 2{,}6$ cm
4) $a = 3{,}8$ cm; $b = 2\frac{1}{2}$ cm

8. Joonesta kolm isesuguse pikkusega sirglõiku a, b ja c (millest ükski ei ole üle 3 cm) ja konstrueeri siis järgmised sirglõigud:

1) $a + b$
2) $a + c$
3) $b + c$
4) $a + b + c$

9. Joonesta sirglõikude vahe $a - b$, kui antud sirglõigud on järgmiste pikkustega!

1) $a = 46$ mm; $b = 18$ mm
2) $a = 32$ mm; $b = 17$ mm
3) $a = 3\frac{1}{2}$ cm; $b = 1{,}6$ cm
4) $a = 4{,}9$ cm; $b = 2\frac{1}{2}$ cm

10. Võta kolm sirglõiku a, b ja c nii, et $a > b > c$, ja konstrueeri nende järgi sirglõigud!

1) $a - b$
2) $a - c$
3) $a + b - c$
4) $a + c - b$

11. Antud on kolm sirglõiku a, b ja c.
Joonesta sirglõigud!

1) $2a - b - c$
2) $2a + b$
3) $3a - 2b + c$
4) $2a - b$
5) $2a + 3b$
6) $3a - 2b$

12. a ja b on antud sirglõigud. Joonesta sirglõik!

1) $x = a + b$
2) $y = a - b$
3) $z = 3c$
4) $u = 3a + b$

13. Märgi kaks punkti A ja B! Joonesta nendest läbi sirge! Proovi oma joonlaua serva, kas ta on sirgjooneline! Millel põhineb see proovimine?

3. Nurkade kongruentsus, summa ja vahe.

Nurkade kongruentsus.

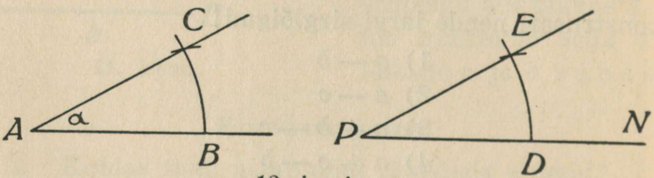
Kui kahel nurgal on üks ja sama suurus, siis on need nurgad k o n g r u e n t s e d ehk ühtivad.

Nurkade α ja β kongruentsust kirjutatakse sümboolselt nii:

$\alpha \equiv \beta$, mida loeme: α on kongruentne β-ga.

Võib ka kirjutada: $\alpha = \beta$.

Antud nurgale saab konstrueerida kongruentse nurga järgmisel viisil. Olgu antud nurk α tipuga A. Joonestame kiire PN (12. joonis). Siis joonestama sama sirkli

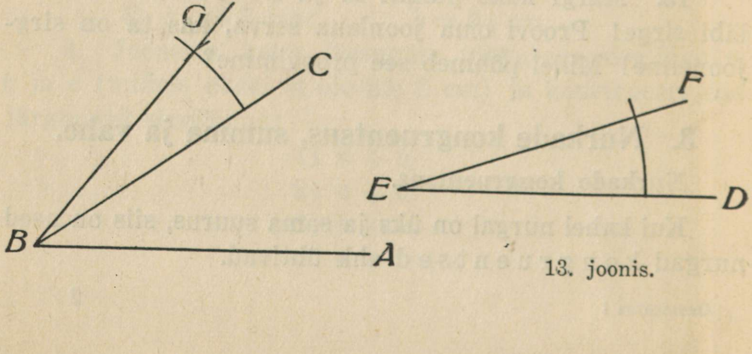


12. joonis.

haarade vahega punktide A ja P ümber kaared. Tipu A ümber joonestatud kaar peab lõikama nurga α mõlemaid haarasid. Märgime need lõikepunktid tähtedega B ja C. Punkti P ümber joonestatud kaar peab olema vähemalt niisama pikk nagu A ümber joonestatud kaar ja ta peab lõikama sirget PN. Olgu see lõikepunkt D. Nüüd võtame sirklihaarade vahe nii pika, nagu on punktide B ja C vaheline kaugus. Selle sirklihaarade vahega joonestame väikese kaarekese punkti D ümber, nii et ta lõikuks punkti P ümber joonestatud kaarega punktis E. Lõpuks joonestame kiire PE. Uus nurk DPE on kongruentne nurgaga α:

$$D\hat{P}E \equiv B\hat{A}C$$

Nurkade summa.



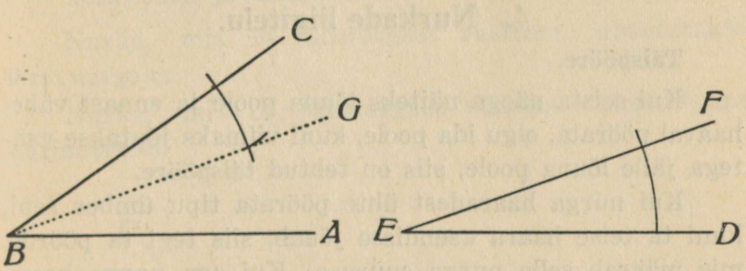
13. joonis.

Antud on nurgad $\widehat{ABC}$ ja $\widehat{DEF}$ (13. joonis). Kui nüüd nurgale $\widehat{DEF}$ joonestada kongruentne nurk $\widehat{CBG}$ nurga $\widehat{ABC}$ juurde, nii et neil tipp B ja külg BC on ühised ja BG oleks väljaspool nurka ABC, siis saame uue nurga ABG. See uus nurk on antud nurkade summa. Seega

$$\widehat{ABC} + \widehat{DEF} = \widehat{ABG}.$$

Nurkade vahe.

Nurgad $\widehat{ABC}$ ja $\widehat{DEF}$ on antud (14. joonis). Kui nurgale $\widehat{DEF}$ joonestada kongruentne nurk $\widehat{CBG}$ nurga $\widehat{ABC}$



14. joonis.

sisse, nii et neil tipp B ja külg BC on ühised ja BG on nurga $\widehat{ABC}$ sees, siis saame uue nurga $\widehat{ABG}$. See uus nurk on antud nurkade vahe. Seega

$$\widehat{ABC} - \widehat{DEF} = \widehat{ABG}.$$

Konstruktsioone.

14. Joonesta silma järgi kaks ühesuurust nurka α ja β! Proovi sirkli abil, kumb neist on suurem!

15. Joonesta kolm väikest isesuguse suurusega nurka α, β ja γ ja ehita nende järgi siis järgmised nurgad!

1) $\alpha + \beta$ 3) $\beta + \gamma$
2) $\alpha + \gamma$ 4) $\alpha + \beta + \gamma$

16. Võta kolm nurka α, β ja γ nii, et $\alpha > \beta > \gamma$, ja joonesta nende järgi nurgad!

1) $\alpha - \beta$
2) $\alpha - \gamma$
3) $\alpha + \beta - \gamma$
4) $\alpha + \gamma - \beta$

17. Antud on nurgad α, β ja γ. Joonesta nurgad!

1) $2\alpha - \beta$
2) $2\alpha - \beta - \gamma$
3) $2\alpha + \beta$
4) $3\alpha - 2\beta + \gamma$

4. Nurkade liigitelu.

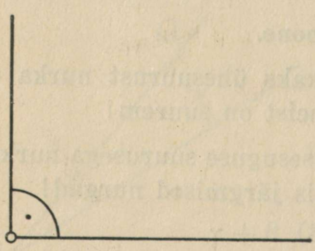
Täispööre.

Kui seista näoga näiteks lõuna poole ja ennast vähehaaval pöörata, olgu ida poole, kuni viimaks jõutakse vaatega jälle lõuna poole, siis on tehtud **täispööre.**

Kui nurga haaradest ühte pöörata tipu ümber seni, kuni ta teise haara asendisse jõuab, siis tegi ta pöörde, mis määrab selle nurga suuruse. Kui aga nurga haara pöörata tipu ümber seni, kuni ta algasendisse tagasi jõuab, siis on toimunud t ä i s p ö ö r e.

Täisnurk.

N u r k a, m i l l e s u u r u s o n v e e r a n d t ä i s p ö ö r d e s t, n i m e t a t a k s e **täisnurgaks.** Näit. on selle raamatu lehe nurgad täisnurgad. Klassitoast võib leida väga palju täisnurki. Näita mõnd!



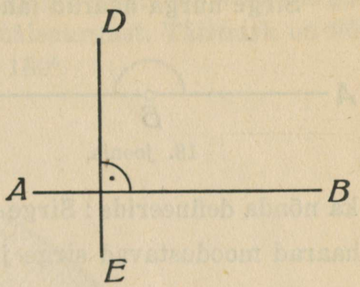
15. joonis.

Et joonisel täisnurka teiste nurkade hulgas hästi nähtavaks teha, tehakse täisnurga sisse kaar ja punkt (15. joonis).

Täisnurga haarasid nimetatakse teineteise suhtes **ristjoonteks.** Kui sirged AB ja DE on risti (muidugi moodustavad nad siis täisnurga, 16. joonis), siis kirjutatakse seda nõnda:

$$AB \perp DE.$$

Märk $\perp$ on ristseisu ehk perpendikulaarsuse sümboliks.

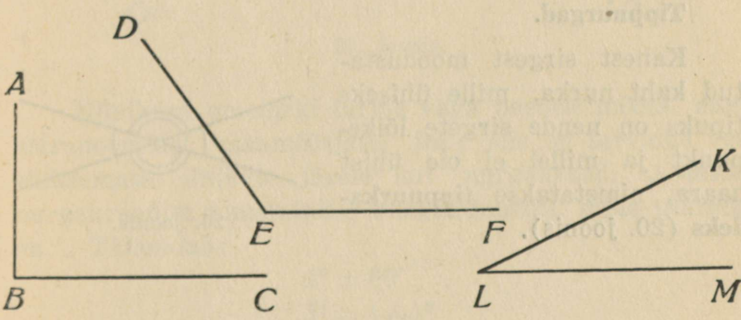


16. joonis.

Teravnurk ja nürinurk.

Nurka, mis on täisnurgast väiksem, nimetatakse **teravnurgaks.**

Nurka, mis on täisnurgast suurem, nimetatakse **nürinurgaks.**



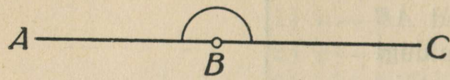
17. joonis.

Teravnurga ja nürinurga haarasid nimetatakse teineteise suhtes **kaldjoonteks** (17. joonis).

Sirge nurk.

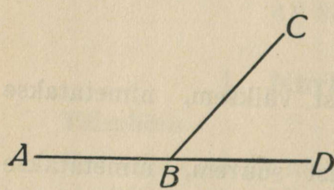
Nurka, mille suurus on pool täispöördest, nimetatakse **sirgeks nurgaks.**

Sirge nurga haarad lähevad teineteisele vastassuunas ja moodustavad sellega sirge joone (18. joonis). Viimast asjaolu arvestades võiks sirget nurka ka nõnda defineerida: Sirge nurk on niisugune nurk, mille haarad moodustavad sirge joone. $\widehat{ABC}$ on sirge nurk.



18. joonis.

Kõrvunurgad.

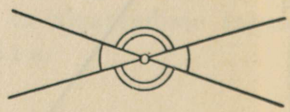


19. joonis.

Kaht nurka, millel on ühine tipp ja ühine haar ja mille teised haarad moodustavad sirge joone, nimetatakse **kõrvunurkadeks.** 19. joonisest on näha, et kõrvunurkade summa on sirge nurk.

Tippnurgad.

Kahest sirgest moodustatud kaht nurka, mille ühiseks tipuks on nende sirgete lõikepunkt ja millel ei ole ühist haara, nimetatakse **tippnurkadeks** (20. joonis).



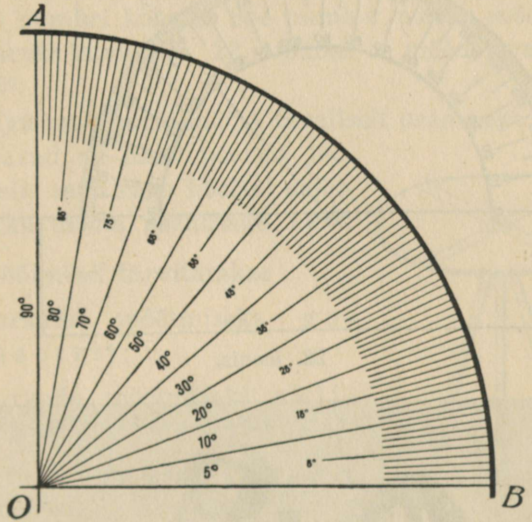
20. joonis.

5. Nurga mõõtmine.

Nurgakraad, -minut ja -sekund.

Nurga mõõtmisel tarvitatakse ühikuks õige väikest nurka, nimelt $\frac{1}{360}$ täispöördest. Seda väikest nurka nimetatakse **nurgakraadiks.** Nurgakraadi märgiks on ^{0}, mis kirjutatakse kraadide arvu järele üles. Nii on täispööre 360^{0}.

Et täisnurk on veerand täispöördest, siis võib nurgakraadi defineerida ka kui $\frac{1}{90}$ täisnurgast. Täisnurk on 90^0 (21. joonis). Sirge nurk on 180^0.



21. joonis.

Mõnikord on nurki tarvis väga peenelt mõõta, nagu astronoomidel, maamõõtjatel jm.; siis on tarvidus veel väiksemate ühikute järele kui nurgakraad. $\frac{1}{60}$-dikku nurgakraadist nimetatakse nurgaminutiks, mille tähiseks on $'$. Tähendab:

$$1^0 = 60'$$
$$1' = (\tfrac{1}{60})^0$$

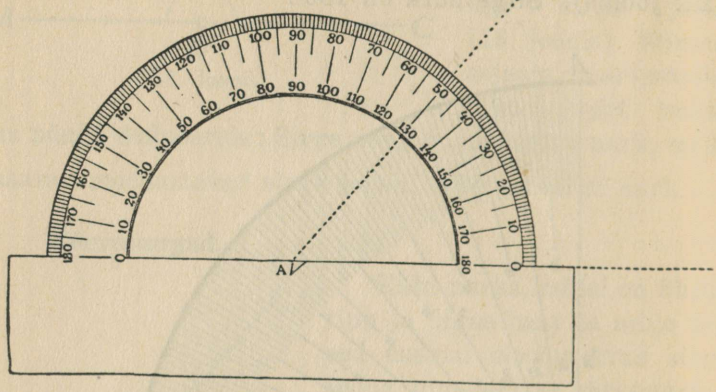
Nurgaminuti $\frac{1}{60}$-dikku nimetatakse nurgasekundiks, mille tähiseks on $''$. Seega

$$1' = 60''$$
$$1'' = (\tfrac{1}{60})'$$

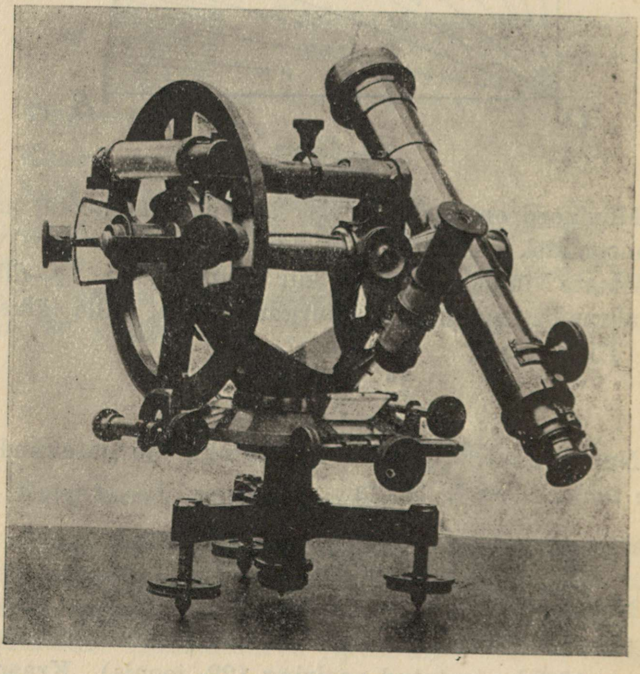
Nurgamõõtmisriistu.

1) Joonisel tarvitatakse nurga mõõtmiseks **malli.** Mall on 180^0-ks jaotatud poolring (22. joonis). Kraadide

arvud 0; 10; 20; 30; ..... 180 on mõõtmise hõlbustuseks mallile tehtud kahes reas — üks rida algab paremalt, teine



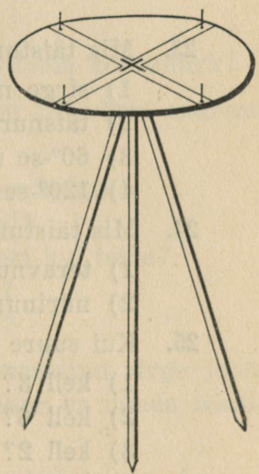
22. joonis.



23. joonis. Teodoliit.

vasakult. Nurga mõõtmisel asetatakse malli poolringi keskpunkt *A* mõõdetava nurga tipule. Poolringi raadius, mille otsa juures seisab arv 0 (ja 180), juhitakse nurga ühte haara mööda. Nurga teine haar peab jääma mingi kraadi — numbri kohale. See number näitab mõõdetava nurga suurust kraadides. 22. joonisel on mõõdetava nurga suurus 50^0.

Malliga saab nurki mõõta tavaliselt peenusega 1^0. Kui nurga haarad on hästi peenelt joonestatud, siis saab väga hoolsal mõõtmisel nurka mõõta peenusega $(\frac{1}{2})^0$.



24. joonis. Ekker.

2) Maamõõtmisel tarvitatakse

a) rõhtnurkade mõõtmiseks g o n i o m e e t r i t;

b) püstnurkade mõõtmiseks e k l i m e e t r i t;

c) ristsihtide ajamiseks e k k e r i t (24. joonis);

d) täpsemateks nii rõht- kui püstnurkade mõõtmiseks t e o d o l i i t i (23. joonis).

Ülesandeid.

18. Teisenda kraadideks ja minutiteks!

1) $23\frac{1}{2}^0$; $18\frac{2}{3}^0$; $29\frac{3}{4}^0$; $7\frac{4}{5}^0$

2) $49\frac{5}{6}^0$; $25\frac{5}{12}^0$; $31\frac{11}{15}^0$; $9\frac{17}{20}^0$

3) $16{,}3^0$; $27{,}8^0$; $3{,}7^0$; $37{,}15^0$

4) $8{,}35^0$; $72{,}45^0$; $9{,}65^0$; $41{,}95^0$

19. Teisenda kraadideks, minutiteks ja sekunditeks!

$12\frac{3}{8}^0$; $23\frac{5}{9}^0$; $50{,}28^0$; $19{,}46^0$

20. Arvuta järgmiste nurkade summa!

1) $19^0 25' 48'' + 27^0 56' 16'' + 9^0 32' 29''$

2) $3^0 45' 37'' + 47^0 56' 44'' + 12^0 5' 29''$

21. Arvuta!

1) $72^0\,35'\,12'' - 53^0\,49'\,38''$
2) $105^0\,13'\,25'' - 69^0\,54'\,36''$

22. Teisenda!

1) 5^0 minutiteks
2) $75'$ kraadideks
3) $3'$ sekunditeks
4) $7380''$ kraadideks ja minutiteks.

---

23. Mis täistunni ajal moodustavad osutid

1) sirge nurga?
2) täisnurga?
3) 60^0-se nurga?
4) 120^0-se nurga?

24. Mis täistunni aegadel moodustavad osutid

1) teravnurga?
2) nürinurga?

25. Kui suure nurga moodustavad osutid

1) kell 3?
2) kell 6?
3) kell 2?
4) kell 5?

26. Määra ilmakaarestikul kaks ilmakaart, mille sihid moodustavad

1) sirge nurga!
2) täisnurga!

27. Kui suures ajavahemikus pöördub kella minutiosuti 360^0? Mitu kraadi pöördub samas ajavahemikus tunniosuti?

28. Ühe punkti ümber on 3, 4, 5, 6 kongruentset nurka, mis moodustavad täispöörde. Kui suur on iga nurk?

29. Kahe nurga summa on 137^0; üks nurk on teisest 25^0 võrra suurem. Kui suur on kumbki nurk?

30. Kahe nurga summa on 148°; üks nurk on kolm korda nii suur kui teine. Kui suur on kumbki?

31. Kolme nurga summa on 180°. Kaks neist on ühesuurused ja kumbki neist on kaks korda nii suur kui kolmas nurk. Kui suur on iga nurk?

32. Kolme nurga summa on 180°. Kahe esimese nurga summa on 3 korda nii suur kui kolmas nurk ja nende vahe on võrdne kolmanda nurgaga. Kui suur on iga nurk?

33. Nurk $\alpha = 47^0$. Kui suur on tema kõrvunurk?

34. Nurk β on oma kõrvunurgast 28° võrra suurem. Kui suur on kumbki?

35. Kui suur on kumbki kõrvunurk, kui
1) mõlemad on ühesuurused?
2) üks on kaks korda suurem kui teine?
3) nad suhtuvad nagu 4 : 5?
4) nad suhtuvad nagu 3 : 7?

36. Läbi täisnurga tipu on joonestatud sirge joon, mis on täisnurgast väljaspool. Kui suur on nõnda tekkinud kahe uue teravnurga summa?

37. Kui suure nurga moodustavad tippnurkade poolitajad?

Nurga mõõtmine.

38. Joonesta teravnurk ja nürinurk ja mõõda malliga nende suurus!

39. Joonesta nurk, mille suurus on
1) 30°; 2) 45°; 3) 80°; 4) 120°; 5) 150°!

40. Joonesta teravnurk ja poolita ta malli abil!

41. Suurenda nurk $\alpha = 70^0$ nurga $\beta = 50^0$ võrra!

42. Vähenda nurk $\alpha = 150^0$ nurga $\beta = 80^0$ võrra!

43. Joonesta sirge joon *s*, võta sellel punkt *P*! Joonesta sellele sirgele punkti *P* juurde nurk, mille suurus on

1) 30^0; 2) 75^0; 3) 120^0; 4) 160^0!

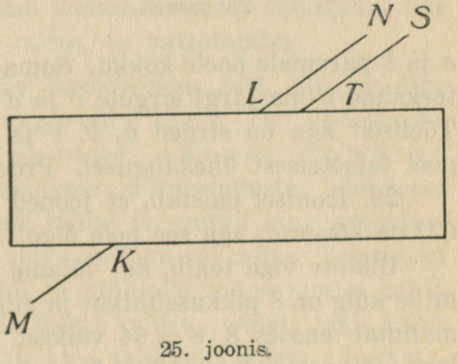
44. Joonesta täisnurk!

45. Joonesta sirge nurk ja jaota ta 3-ks, 4-ks, 5-ks võrdseks osaks!

III. Tõestus ja selle vajadus.

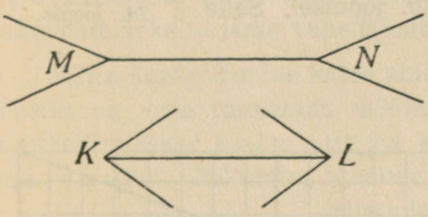
1. Otsustamine silmanägemise järgi.

Mõnikord on joonisest silmanägemise järgi võimalik kujundite omaduste kohta otsustusi teha, nagu me seda tegime näiteks kõrvunurkade puhul. Me tegime joonisest silmanägemise järgi otsuse, et „kõrvunurkade summa on sirgenurk ehk 180°“.



25. joonis.

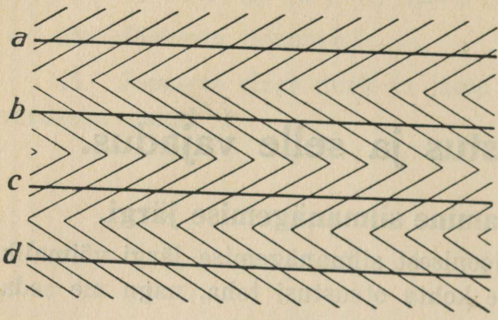
Niisama kergesti võib otsustada, et väide: „mida suurem on nurk, seda väiksem on tema kõrvunurk“ on õige. Ja võib kahtluseta öelda, et väide: „iga nurk on täisnurk“ on vale.



26. joonis.

Silmanägemise järgi otsustades võime mõnikord aga kergesti ka vigu teha. Nii mõnigi vaatleja otsustab, et *MKLN* on sirge joon (25. joonis), kuid see on viga. *MKTS* on sirge joon, mida võib joonlauaga kontrollida.

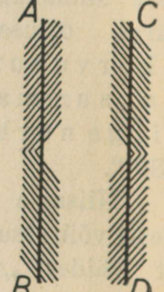
Vaadeldes 26. joonist kaldume kergesti otsustama, et sirglõik KL on lühem kui sirglõik MN või et nad on ühepikkused. Tegelikult aga on sirglõik KL pikem sirglõigust MN, nagu sirkliga või mõõtlauaga kontrollides selgub.



27. joonis.

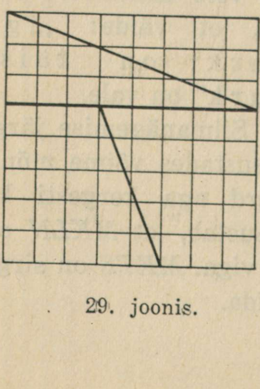
27. joonisel paistab, nagu läheksid sirged a ja b paremale poole kokku. Sama otsuse teeksime silma järgi sirgete c ja d kohta. Tõeliselt aga on sirged a, b, c ja d igal pool teineteisest ühekaugusel. Proovi!

28. joonisel paistab, et jooned AB ja CD on kõverad, aga see pole õige.

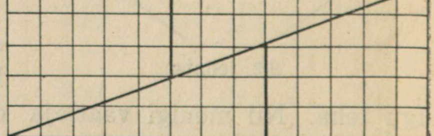


28. joonis.

Üllatav viga tekib, kui võtame ruudu, mille külg on 8 pikkuseühikut ja mis seega mahutab eneses $8 \cdot 8 = 64$ väikest ruudukest; lõikame selle ruudu 4-ks osaks, nagu näha 29. joonisel, ja seame neist osadest kokku ristküliku, nagu 30. joonisel. Selle



29. joonis.



30. joonis.

ristküliku pikkus on $8 + 5 = 13$ pikkuseühikut ja laius 5 pikkuseühikut. Seega on ristkülikus $5 \cdot 13 = 65$ väikest ruudukest.

Nii peaksime otsustama, et $8 \cdot 8 = 65$! Me teame, et siin on viga, kuid millest viga tekkis, seda ei saa silmanägemise abil öelda, me vajame selleks täpsemat vahendit.

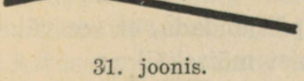
Ülaltoodud näidetest selgub, et on küsimusi, mille lahendamiseks on silmanägemine puudulik abiriist.

2. Otsustamine katsete järgi.

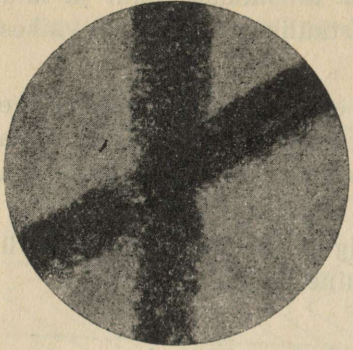
Teiseks viisiks, peale silmanägemise, otsustada, kas mõni väide on õige või mitte, on katsetamine.

Näitena kontrollime katsetamise teel, kas on õige väide: *tahkkeha tippude arv ja tahkude arv kokku on servade arvust 2 võrra suurem.* Selleks loendame mitmesuguste käepärast olevate tahkkehade tipud, tahud ja servad ning proovime iga kord, kas mainitud väide on õige või mitte. Selgub, et kuubi, prisma, püramiidi ja võib-olla mõne muugi tahkkeha kohta on see väide tõesti kehtiv. Ometi jääb kahtlus, kas see väide kehtib *iga* tahkkeha kohta. Katsetamine jätab lahendamata küsimuse, miks *peab* see väide *iga* tahkkeha kohta kehtiv olema. Küsimuse lõplikuks lahendamiseks vajame vahedamat riista kui katsetamine.

Väite kontrollimine katse abil teeb erilisi raskusi, kui selleks on vaja toimetada mõõtmisi, nagu näiteks väite kontrollimiseks: *kolmnurga sisenurkade summa on* 180^0. Mõõtmise tulemus oleneb nimelt mõõtmisriistade täpsusest ja mõõtja vilumusest. Kui tuleb esile väike erinevus katsesaaduse ja väite vahel, siis on sageli raske öelda, kas erinevus on tingitud mitte



31. joonis.



32. joonis.

küllalt täpsest mõõtmisest või sellest, et väide on vale.

Kui nurga haarad on joonestatud jämedalt, siis on nurga täpne mõõtmine võimatu (31. joonis).

Ka peenelt joonestatud joon paistab jämedana, kui teda vaadelda mikroskoobi all (32. joonis).

Ülesandeid.

Kontrolli katse teel, kas on õiged järgmised väited!

1. Kahe täringuga visates saame silmade summa 6 sagedamini kui 12.

2. Tippnurgad on võrdsed.

3. Ringjoon on läbimõõdust 3,14 korda pikem.

4. Ruudu külgede summa on ruudu diagonaalist 2,83 korda suurem.

3. Tõestus.

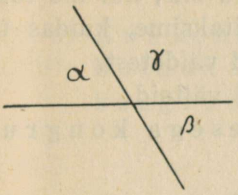
Katselise kontrolliga seotud raskused langevad ära, kui õnnestub näidata, et uuritav väide on varemini tunnustatud tõdede järeldus, teiste sõnadega, kui meil õnnestub t õ e s t a d a, et väide on kehtiv.

N ä i d i s: Tõestame, et

t i p p n u r g a d o n k o n g r u e n t s e d.

Tõestamiseks tuleb veenvalt põhjendada, et see väide on õige. Selleks tarvitame järgmist mõttekäiku:

Vaatleme 33. joonist, kus α ja β on tippnurgad; α ja γ on kõrvunurgad, samuti on β ja γ kõrvunurgad. Et kõrvunurkade summa on 180^0, siis on $\alpha + \gamma = 180^0$ ja $\beta + \gamma = 180^0$. Et mõlemad need summad on 180^0, siis on nad omavahel võrdsed, nii



33. joonis.

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma.$$

Kui kummastki summast ühepalju, nimelt γ, ära võtta, siis peavad jäägid võrdsed olema. Peale γ lahutamist jääb esimesest summast järele α, teisest β; need peavadki ühtivad ehk kongruentsed olema: $\alpha = \beta$. Sellega on meie väide tõestatud.

Iga väite tõestamisele asudes tuleb kindlasti selgusele jõuda selle kohta, mis on teada ja mida saab andmetest otseselt järeldada. Nimetame selle, mis andmetest teada, eelduseks. Praegusel juhul on eelduseks nurkade α ja β kohta see, et nad on tippnurgad.

On otstarbekohane tõestusekäik lühendatult üles kirjutada. Käesoleval juhul teeme nii:

Eeldus: α ja β on tippnurgad.

Väide: $a = \beta$.

Tõestus:

$$\begin{array}{c} \alpha + \gamma = 180^0 \\ \beta + \gamma = 180^0 \\ \hline \alpha + \gamma = \beta + \gamma \\ -\gamma \quad\;\; -\gamma \\ \hline \alpha = \beta \end{array}$$

4. Aksioom ja teoreem.

Aksioom. Tõestamisel tuleb alati toetuda varemini õigeks tunnistatud väidetele. Seepärast ei ole võimalik kõiki väiteid tõestada, vaid tuleb paratamatult ilma tõestuseta tunnustada mõningaid põhilauseid. Niisuguseid põhilauseid nimetatakse võõrkeelse sõnaga **aksioomideks.**

Aksioomiks peame väidet iga kord siis, kui me tunnustame tema kehtivust, ilma et näitaksime, kuidas ta järgneb teistest, varemini tunnustatud väidetest.

Aksioomidena tarvitame järgmisi väiteid:

1) Iga suurus on iseenesega kongruentne.

$$a \equiv a$$

2) Terve suurus on igast oma osast suurem.

3) Kui kaks suurust on kongruentsed ühe ja sama kolmandaga, siis on need kaks suurust kongruentsed.

Sümboolselt: kui $a \equiv c$

$b \equiv c$

siis $a \equiv b$

4) Kui kaks suurust on kongruentsed omavahel kongruentsete suurustega, siis on need kaks suurust kongruentsed.

$$\begin{array}{c} a \equiv b \\ c \equiv d \\ b \equiv d \\ \hline a \equiv c \end{array}$$

Sellest põhilausest järgneb:

Kui võrduste paremad pooled on omavahel võrdsed, siis on omavahel võrdsed ka nende vasakud pooled.

5) Kui kongruentsed suurused liita kongruentsetega, siis on summad kongruentsed.

$$\begin{array}{c} a \equiv b \\ c \equiv d \\ \hline a + c \equiv b + d \end{array}$$

6) Kui kongruentsetest suurustest lahutada kongruentsed, siis on vahed kongruentsed.

$$\begin{array}{c} a \equiv b \\ c \equiv d \\ \hline a - c \equiv b - d \end{array}$$

7) Kui kongruentsed suurused korrutada kongruentsetega, siis on korrutised kongruentsed.

$$\begin{array}{c} a \equiv b \\ c \equiv d \\ \hline a \cdot c \equiv b \cdot d \end{array}$$

8) Kui kongruentsed suurused jagada kongruentsete suurustega, siis on jagatised kongruentsed.

$$\begin{array}{c} a \equiv b \\ c \equiv d \\ \hline \frac{a}{c} \equiv \frac{b}{d} \end{array}$$

9) Läbi kahe punkti saab ainult ühe sirge joonestada.

10) Kahe punkti vahele joonestatud joontest on sirglõik kõige lühem.

Teoreem. Kui mõni väide ei ole aksioom, siis ta peab järgnema aksioomidest. Väidet, mis on aksioomidest või varemini tõestatud väidetest järeldatud, nimetatakse **teoreemiks** ehk (matemaatiliseks) lauseks.

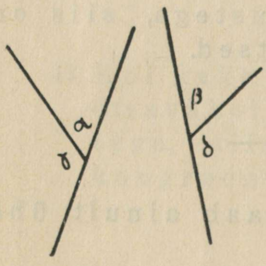
Teoreemis esineb eeldus ja väide. Eeldus esineb enamasti kõrval- või kiillausena, kuna väide esineb pealausena. Näiteks on teoreemis „kaks antud nurka, kui nad on tippnurgad, on kongruentsed“ eelduseks see, et „nad on tippnurgad“, kuna väiteks on see, et „on kongruentsed“.

Nagu iga lause, nii võib ka teoreem lühendatud kujuga olla. Äsja mainitud teoreem kõlab lühendatult: „tippnurgad on kongruentsed“. Teoreemi olulisimaks tunnuseks on õige väite esinemine.

Teoreemi püütakse võimalikult lühidalt ja tabavalt sõnastada.

Teoreemi tõestamisele asumisel tuleb kõige esmalt täielikule selgusele jõuda teoreemis esineva eelduse ja väite kohta ja peab täpselt avestama temas esinevate mõistete definitsioone.

Teoreem: Kongruentsete nurkade kõrvunurgad on kongruentsed (34. joonis).



34. joonis.

Eeldus $\alpha \equiv \beta$

α ja γ on kõrvunurgad

β ja δ „ „

Väide: $\gamma \equiv \delta$

Tõestus: $\alpha + \gamma = 180^0$

$\beta + \delta = 180^0$

$\alpha + \gamma \equiv \beta + \delta$ (4. aksioomi põhjal)

$-\alpha \qquad -\beta$

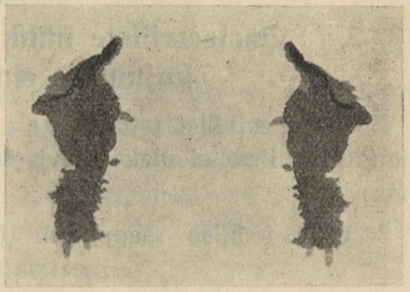
$\gamma \equiv \delta$

Otsusta, missugune alljärgnevatest ütlustest on teoreem, missugune definitsioon.

1) Tippnurkade poolitajad moodustavad sirge joone.
2) Kolmnurka, mille nurkadest üks on täisnurk, nimetatakse täisnurkseks kolmnurgaks.
3) Ristjoonteks teineteise suhtes nimetatakse niisuguseid sirgeid, mis moodustavad täisnurga.
4) Ruudu nurkade summa on 360^0.
5) Kõrvunurkade poolitajad moodustavad täisnurga.

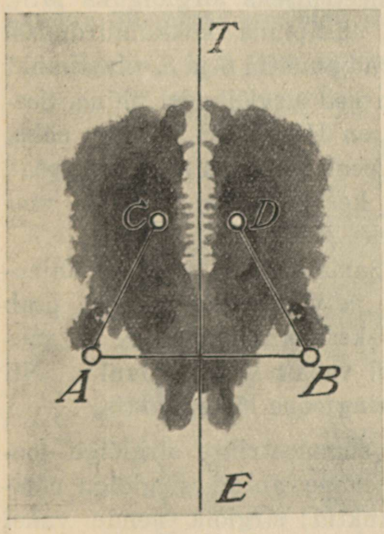
IV. Teljeline sümmeetria tasapinnal.

1. Sümmeetria mõiste.



35. joonis.

Kui paber, millele on tindiga joonis tehtud, kokku murda, enne kui tint kuivab, siis tekib samal lehel veel teine joonis. Paberi uuesti lahtilöömisel asetsevad endine ja uus joonis teineteise suhtes s ü m m e e t r i l i s e s a s e n d i s (35. joonis). Murdesirget nimetatakse seejuures **sümmeetriateljeks.**



36. joonis.

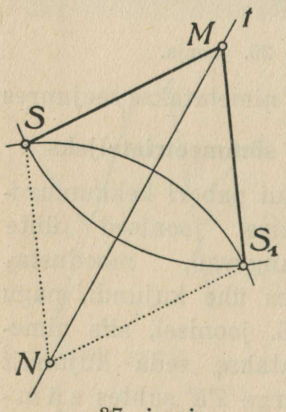
Kui paberi kokkumurdmisel joonised ühte langevad, moodustades ühe kujundi, nagu 36. joonisel, siis nimetatakse seda kujundit sirge TE suhtes s ü m m e e t r i l i s e k s. Paberi kahekorra murdmisel ühtivaid punkte, sirglõike, nurki jne. nimetatakse s ü m m e e t r i l i s t e k s p u n k t i d e k s, s i r g l õ i k u d e k s, n u r k a d e k s jne. 36. joonisel on TE sümmeetriatelg; punkt A on sümmeetriline punktiga B; AC ja BD on sümmeetrilised sirglõigud ja nurgad OAC ning OBD on sümmeetrilised nurgad.

Aksioom. Igal punktil on antud telje suhtes sümmeetriline punkt, ja nimelt üks ainus.

2. Sümmeetriliste punktide, sirglõikude ja kujundite ehitamine.

Sümmeetrilist punkti saab joonestada sirkli ja joonlaua abil, ilma et oleks tarvis tasapinda tegelikult kokku murda.

Olgu joonise tasapinnal (37. joonis) antud sümmeetriatelg t ja punkt S. Tarvis on leida sümmeetriline punkt S_1. Valime sümmeetriateljel t vabalt punkti M. Sirglõigule MS on siis sümmeetriliseks sirglõiguks MS_1, kuna tasapinna kokkumurdmisel ühtivad punktid S ja S_1 ning punkt M on neil sirglõikudel ühine. Seetõttu on $MS \equiv MS_1$. Siit on näha, et S_1 peab asetsema ringjoone peal, mille keskpunktiks on M ja raadiuseks MS.



37. joonis.

Samal viisil saame põhjendada ja väita, et punkt S_1 peab olema ringjoone peal, mille keskpunktiks on N ja raadiuseks NS, kus N on teljel vabalt valitud punkt. Nii peab S_1 asuma nende kahe ringjoone lõikepunktis.

Antud sirglõigule saab sümmeetrilise sirglõigu joonestada sel teel, et konstrueerime antud sirglõigu otsapunktide sümmeetrilised punktid; sirglõik nende vahel ongi otsitav.

Antud kolmnurgale saab ehitada sümmeetrilise kolmnurga, konstrueerides selle kolmnurga tippude sümmeetrilised punktid.

Konstruktsioone.

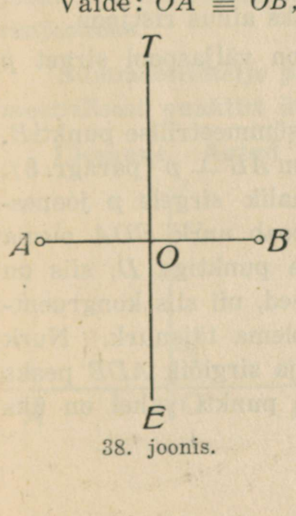
1. Joonesta mõni sirglõik ja sirge t! Joonesta sellele sirglõigule sümmeetriline sirglõik!
2. Joonesta mingi kolmnurk ja sirge t! Leia kolmnurga tippude sümmeetrilised punktid ja nende järgi sümmeetriline kolmnurk!
3. Joonesta kolmnurk ja sirge t nii, et see läheks kolmnurgast läbi, ja ehita siis sümmeetriline kolmnurk!
4. Missuguses asendis tuleks võtta antud kolmnurga suhtes sümmeetriatelg t, et sümmeetrilise kolmnurga joonestamist teha eriti lihtsaks? Tee vastav konstruktsioon!

3. Sümmeetriliste punktide asetus telje suhtes.

Teoreem. Sümmeetriatelg poolitab sümmeetrilisi punkte ühendava sirglõigu ja on temaga risti (38. joonis).

Eeldus: A ja B on sümmeetrilised TE suhtes.

Väide: $OA \equiv OB$; $TE \perp AB$.



38. joonis.

Tõestus: Kahekorra murdmisel TE mööda ühtib punkt A punktiga B, sest nad on sümmeetrilised TE suhtes; punkt O ühtib iseendaga; järelikult ühtib ka sirglõik OA sirglõiguga OB. Nii on $OA \equiv OB$.

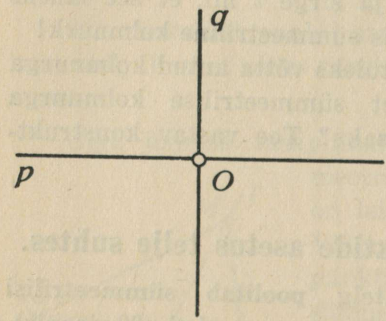
Nurk TOA ühtib nurgaga TOB; nii siis on sirge nurk AOB jagatud kaheks võrdseks nurgaks TOA ja TOB; seega on need nurgad täisnurgad. Nii on $TE \perp AB$.

4. Teoreem sirge ristsirgest.

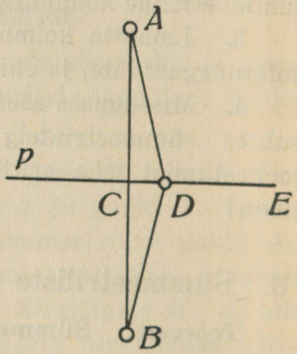
Läbi antud punkti saab antud sirgele ühe ainsa ristjoone joonestada.

Antud punkt võib olla kas antud sirge peal või väljaspool teda. Vaatleme neid mõlemaid juhtumeid eraldi.

1. juhtum: Antud punkt O on antud sirgjoone p peal. Kui läbi O minev sirge p jagab O ümber oleva täispöörde pooleks (39. joonis), siis on olemas üks ainus



39. joonis.



40. joonis.

sirge q, mis jagab selle täispöörde neljaks täisnurgaks. Seega on läbi O sirgele p olemas üks ainus ristjoon.

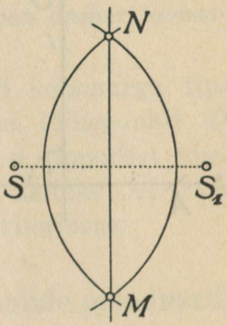
2. juhtum: Antud punkt A on väljaspool sirget p (40. joonis).

Tõestus: Leiame A-le p suhtes sümmeetrilise punkti B. Ühendame A ja B sirglõiguga, siis on $AB \perp p$ (paragr. 3). Eeldame, et punktist A on võimalik sirgele p joonestada veel üks ristjoon AD. Siis peab nurk EDA olema täisnurk. Kui punkt B ühendada punktiga D, siis on nurgad ADE ja BDE sümmeetrilised, nii siis kongruentsed. Nõnda peab ka nurk BDE olema täisnurk. Nurk ADB peaks olema siis sirge nurk ja sirglõik ADB peaks ühtima sirglõiguga AB, sest kahe punkti vahel on üks ainus sirglõik olemas.

5. Kahe punkti sümmeetriatelje ehitamine.

Lõigu poolitamine.

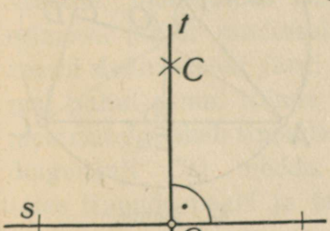
Paragr. 2-s oli antud sümmeetriatelg ja punkt S. Sellele punktile oli tarvis joonestada sümmeetriline punkt S_1. Lahenduseks valisime sümmeetriateljel vabalt kaks punkti M ja N ja nende ümber joonestasime ringjooned. Nüüd lahendame vastupidise ülesande: sümmeetrilised punktid S ja S_1 on antud (41. joonis), tarvis on joonestada sümmeetriatelg, s. t. on tarvis leida sirge, millel asetsevad M ja N. Punktist M on teada, et ta on punktidest S ja S_1 ühekaugusel. Joonestame S ja S_1 ümber sama raadiusega ringjooned, siis nende ringjoonte lõikepunkt määrabki punkti M. Need ringjooned lõikuvad kahes punktis, nii määravad nad korraga ka punkti N. Sirge joon MN on nõutav sümmeetriatelg. Sama konstruktsioon võimaldab ka lõigu SS_1 poolitamise, sest sümmeetriatelg poolitab sümmeetrilisi punkte ühendava sirglõigu. Sirget joont MN nimetatakse sellepärast ka sirglõigu SS_1 **keskristjooneks.**



41. joonis.

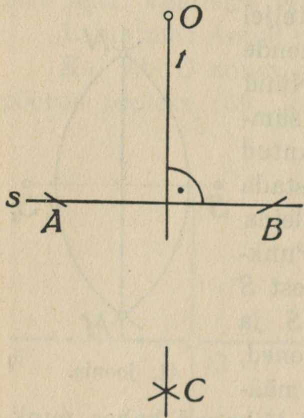
Sümmeetriatelje punktid on kahest teineteisega sümmeetrilisest punktist ühekaugusel.

Ülesanne. Antud sirgele joonestada selle sirge peal pool olevast punktist ristjoon.



42. joonis.

K o n s t r u k t s i o o n. Antud sirge on s ja antud punkt sellel O (42 joonis). Sirkliga märgime sirgel s vabalt kaks punkti A ja B, mis oleksid punktist O ühekaugusel. Kui punktidele A ja B konstrueerime sümmeetriatelje t, siis $t \perp s$ ja ülesanne on lahendatud. Põhjenda! Sümmeetriatelje t konstrueerimiseks on seekord tarvis leida ainult üks tema punkt C, kuna teine tema punkt on O.



43. joonis.

Ülesanne. Antud sirgele joonestada sellest sirgest väljaspool olevast punktist ristjoon.

Konstruktsioon on samalaadne eelmise konstruktsiooniga (43. joonis). Põhjenda!

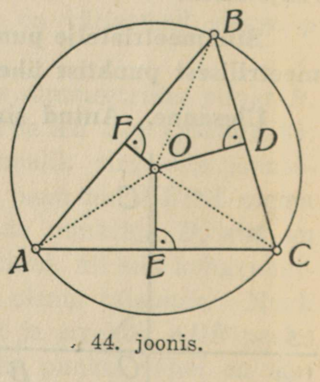
6. Kolmnurga tippude sümmeetriateljed ja ümberjoonestatud ringjoon.

Teoreem. Kolmnurga tippude sümmeetriateljed (külgede keskristjooned) lõikuvad kõik ühes punktis, mis on kõigist kolmest tipust ühekaugusel (44. joonis).

Tõestus: FO on tippude A ja B sümmeetriatelg, seega on $OA \equiv OB$.

DO on tippude B ja C sümmeetriatelg, sellepärast on $OC \equiv OB$.

$$\begin{array}{c} OA \equiv OB \\ OC \equiv OB \\ \hline OA \equiv OC \end{array}$$



44. joonis.

Et $OA \equiv OC$, siis on punkt O punktide A ja C sümmeetriatelje punkt, teiste sõnadega, tippude A ja C sümmeetriatelg läheb punktist O läbi. Seega on punkt O kõigi kolme sümmeetriatelje lõikepunkt. Ühtlasi on selge, et $OA \equiv OB \equiv OC$. Nii on punkt O kõigist kolmest tipust ühekaugusel.

D e f i n i t s i o o n: Ringjoont, mis läheb kolmnurga kõigist kolmest tipust läbi, nimetatakse selle kolmnurga **ümber joonestatud ringjooneks.**

Ülesanne. Antud kolmnurgale ringjoon ümber joonestada.

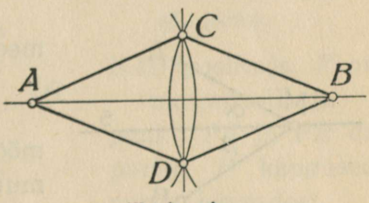
Konstruktsioon: Joonestame antud kolmnurga tippude sümmeetriateljed. Saame nende lõikepunkti O (44. joonis). Et see punkt on kõikidest tippudest ühekaugusel, siis võtame ühe kauguslõigu, näiteks OA, raadiuseks ja joonestame punkti O ümber ringjoone.

7. Romb, tema nurkade ja diagonaalide omadused.

D e f i n i t s i o o n i d:

Romb on kongruentsete külgedega nelinurk.

Hulknurga diagonaaliks nimetatakse sirglõiku, mis ühendab hulknurga kaht mitte ühel küljel asetsevat tippu.



45. joonis.

45. joonisel on sirglõigud AB ja CD rombi $ACBD$ diagonaalid.

Rombi tippudele A ja B võib sümmeetriatelje joonestada, joonestades ringjooned A ja B ümber, võttes esimesel puhul raadiuseks AC, teisel puhul BC; et aga rombi definitsiooni järgi $AC \equiv BC$, siis on raadius mõlemal puhul sama. Nõnda selgub, et tippude A ja B sümmeetriatelg läheb tippudest C ja D läbi, teiste sõnadega — diagonaali CD mööda. Kõike sedasama võib öelda teise tippude paari ja teise diagonaali kohta. Nii saame teoreemi:

Rombi diagonaalid on tema sümmeetriatelgedeks.

Rombil on seega kaks sümmeetriatelge. Kui rombi tasapind diagonaali mööda kokku murda, siis ühtib üks rombi pool teisega täielikult. Seetõttu on kehtivad rombi kohta järgmised teoreemid:

Rombi vastasnurgad on võrdsed.

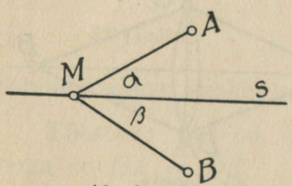
Rombi diagonaalid poolitavad vastasnurki.

Kui üht diagonaali vaadelda sümmeetrilisi punkte ühendava sirglõiguna, teist diagonaali sümmeetriateljena nendele punktidele, siis saame teoreemi:

Rombi diagonaalid on risti ja poolitavad teineteist.

8. Nurga poolitamine.

Teoreem: Nurga sümmeetriateljeks on selle nurga poolitaja (46. joonis).



46. joonis.

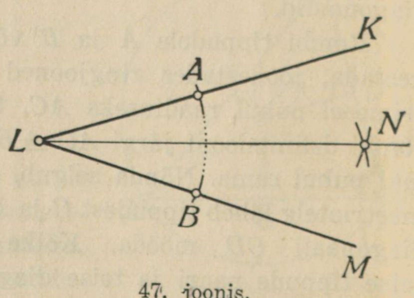
Eeldus: Nurga AMB sümmeetriatelg on sirge joon s.

Väide: $\alpha \equiv \beta$.

Tõestus: Kui sirget s mööda nurga tasapind kokku murda, siis ühtib nurk α nurgaga β, kuna s on sümmeetriatelg, seega $\alpha \equiv \beta$.

Ülesanne. Poolitada antud nurk.

Konstruktsioon: Märgime nurga KLM haaradel sümmeetrilised punktid A ja B (47. joonis), joonestades vabalt võetud raadiusega nurga tipu L ümber kaare. Nüüd ehitame punktidele A ja B sümmeetriatelje. Üks punkt süm-

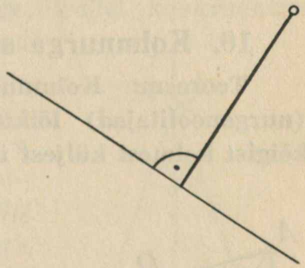


47. joonis.

meetriateljel, nimelt punkt L, on juba teada. Lisaks on tarvis konstrueerida ainult üks punkt N; selle saame, nagu paragr. 5-s juhatatud, joonestades A ja B ümber sama raadiusega kaared. Nende kaarte lõikepunkt on sümmeetriatelje punkt N.

9. Nurgapoolitaja punkti kaugus haaradest.

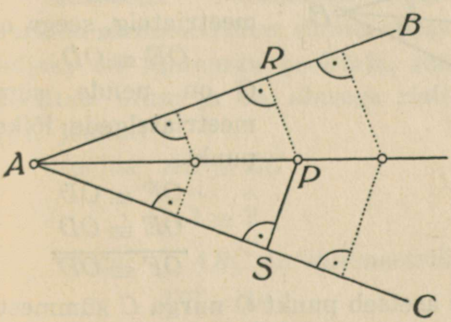
Märkus. Punkti kaugust sirgest mõõdetakse ristjoont mööda, mis on sellest punktist sirgele joonestatud (48. joonis).



48. joonis.

Teoreem: Nurgapoolitaja punkt on nurga haaradest ühekaugusel (49. joonis).

Eeldus: AP on nurga BAC poolitaja. P on nurgapoolitaja punkt. PS ja PR on punkti P kaugused nurga haaradest.



49. joonis.

Väide: $PS \equiv PR$.

Tõestus: Olgu punktist P haarale AC joonestatud ristjoon PS. $\widehat{PSA} = 90^0$. Kui nurga tasapind sümmeetriatelge AP mööda kokku murda, siis langeb punkt S kokku oma sümmeetrilise punktiga; paneme sellele nimeks R. Nurk PRA on sümmeetriline nurgaga PSA, seega ka $\widehat{PRA} = 90^0$ ja $PR \perp AR$. Nii on PR punkti P kaugus haarast AR. PR ja PS on sümmeetrilised sirglõigud, seepärast

$$PS \equiv PR.$$

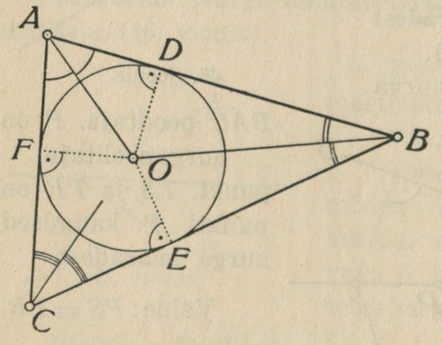
Seda oligi tarvis tõestada.

Loomulikult kehtib see ka kõikide teiste nurgapoolitaja punktide kohta.

Nurga sümmeetriast järgneb ka vastupidine teoreem: Kui mingi punkt on nurga haaradest ühekaugusel, siis asub see punkt nurga sümmeetriateljel.

10. Kolmnurga sisse joonestatud ringjoon.

Teoreem: Kolmnurga nurkade sümmeetriateljed (nurgapoolitajad) lõikuvad kõik ühes punktis, mis on kõigist kolmest küljest ühekaugusel (50. joonis).



50. joonis.

Tõestus: OA on nurga A sümmeetriatelg, seega on

$$OF \equiv OD.$$

OB on nurga B sümmeetriatelg, seega on

$$OE \equiv OD.$$

O on nende sümmeetriatelgede lõikepunkt.

$$\begin{array}{c} OF \equiv OD \\ OE \equiv OD \\ \hline OF \equiv OE \end{array}$$

Et $OF \equiv OE$, siis asetseb punkt O nurga C sümmeetriateljel, teiste sõnadega — nurga C sümmeetriatelg läheb punktist O läbi. Sellega on tõestatud, et kõik nurkade sümmeetriateljed lõikuvad ühes punktis. Samuti on selge, et selle punkti kaugused külgedest on kongruentsed:

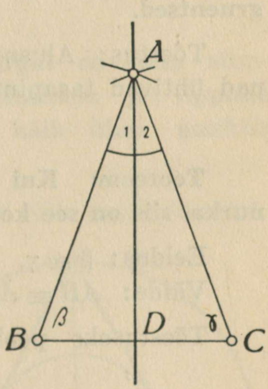
$$OF \equiv OD \equiv OE.$$

Kui punkti O kaugus kolmnurga küljest võtta raadiuseks ja selle raadiusega punkti O ümber joonestada ringjoon, siis see ringjoon läheb punktidest D, E ja F

läbi. Sellel ringjoonel on kolmnurga iga küljega üks ühine punkt. Seesugust ringjoont nimetatakse kolmnurga **sisse joonestatud ringjooneks.**

11. Võrdhaarse ja võrdkülgse kolmnurga omadused.

Võrdhaarse kolmnurga külge, millel kongruentset ei ole, nimetatakse selle kolmnurga **aluseks.** Nurki, mille üheks haaraks on alus, nimetatakse alusnurkadeks, kuna nurka, mis on aluse vastas, nimetatakse tipunurgaks. 51. joonisel on BC alus, β ja γ on alusnurgad, nurk BAC on tipunurk.



51. joonis.

Teoreem. Võrdhaarne kolmnurk on sümmeetriline; sümmeetriateljeks on tipunurga poolitaja, see poolitab aluse ja on alusega risti (51. joonis).

Eeldus: $AB \equiv AC$

$\hat{1} \equiv \hat{2}$

Väide: $\triangle\ ABC$ on sümmeetriline.

$DB \equiv DC$

$AD \perp BC$

Tõestus: Murrame kolmnurga tasapinna nurgapoolitajat DA mööda kahekorra, siis ühtib nurk $\hat{1}$ nurgaga $\hat{2}$, sest nad on kongruentsed. Samuti ühtivad haarad AB ja AC, sest $AB \equiv AC$. Seega ühtib kolmnurga üks pool teisega täielikult. Nii on tõestatud, et võrdhaarne kolmnurk on sümmeetriline. On näha, et alustipud B ja C on sümmeetrilised punktid; sellepärast

$$AD \perp BC \text{ ja}$$
$$DB \equiv DC.$$

Selle teoreemi võiks sõnastada ka nii: Võrdhaarse kolmnurga sümmeetriateljeks on alustippude sümmeetriatelg (aluse keskristjoon); see läheb tipust läbi ja poolitab tipunurga.

Teoreem: Võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on kongruentsed.

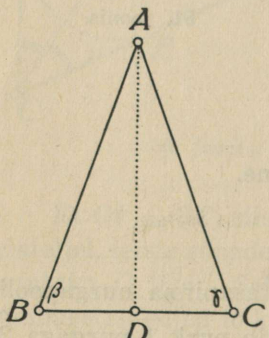
Tõestus: Alusnurgad β ja γ on sümmeetrilised — nad ühtivad tasapinna kokkumurdmisel; seepärast

$$\beta \equiv \gamma.$$

Teoreem: Kui kolmnurgal on kaks kongruentset nurka, siis on see kolmnurk võrdhaarne (52. joonis).

Eeldus: $\beta \equiv \gamma$.
Väide: $AB \equiv AC$.

Tõestuseks poolitame kolmnurga ABC külje BC; saadud punktist D joonestame ristjoone küljele BC. Et kolmnurga nurgad β ja γ on kongruentsed, siis on kolmnurga küljed AB ja AC keskristjoone suhtes sümmeetrilised ja nende lõikepunkt A peab asuma sümmeetriateljel AD.



52. joonis.

Seega

$$AB \equiv AC$$

kui sümmeetrilised sirglõigud. Järelikult, kolmnurk ABC on võrdhaarne.

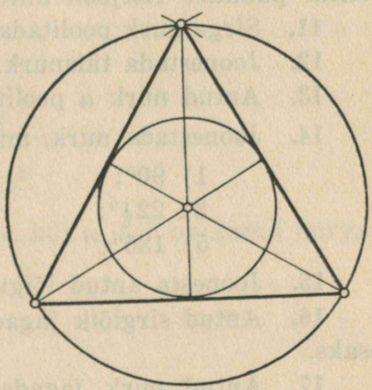
Me paneme tähele, et kui kolmnurgas ABC on küljed AB ja AC kongruentsed, siis on kongruentsed ka nende külgede vastasnurgad β ja γ (alusnurgad). Kui me aga teame kolmnurgast, et tal on kaks kongruentset nurka β ja γ, siis on see kolmnurk võrdhaarne, s. t. nende nurkade vastasküljed AB ja AC on kongruentsed.

Ülemal-öeldu võetakse lühemalt kokku teoreemi: **Kolmnurgas on kongruentsete külgede vastas kongruentsed nurgad ja kongruentsete nurkade vastas kongruentsed küljed.**

Sellest järgneb: **Võrdkülgses kolmnurgas on kõik nurgad kongruentsed.**

Teoreem: Võrdkülgsel kolmnurgal on kolm sümmeetriatelge, mis ühtivad tema nurkade ja tippude sümmeetriatelgedega ja lõikuvad kõik ühes punktis (53. joonis).

Tõestus: Võrdkülgset kolmnurka võib vaadelda võrdhaarse kolmnurgana, võttes aluseks mistahes külje. Seega on iga tipupaari sümmeetriatelg ühe nurga sümmeetriateljeks; kokku on sümmeetriatelgi kolm. Nurkade sümmeetriatelgedest teame, et nad lõikuvad kõik ühes punktis. Samuti teame, et tippude sümmeetriateljed kolmnurgas lõikuvad ühes punktis. Võrdkülgses kolmnurgas langevad need punktid ühte. Võrdkülgse kolmnurga sümmeetriatelgede lõikepunkt on kõikidest tippudest ühekaugusel, samuti on ta ühekaugusel kõikidest külgedest. Järelikult on see punkt nii ümberjoonestatud kui ka sissejoonestatud ringjoonte ühiseks keskpunktiks. See punkt on võrdkülgse kolmnurga keskpunktiks.



53. joonis.

Konstruktsioone.

5. Antud punktidele A ja B joonestada sümmeetriatelg!

6. Antud sirglõik a poolitada sirkli ja joonlaua abil!

7. Antud on sirge joon ja temast väljaspool punkt. Joonesta sellest punktist ristjoon antud sirgele!

8. Joonesta mingi kõver joon! Märgi sellel hulk punkte! Konstrueeri neile punktidele sümmeetrilised punktid antud telje suhtes ja saadud punktide järgi joonesta sümmeetriline kõver!

9. Antud punktile A joonestada antud telje suhtes sümmeetriline punkt, arvestades teoreemi: sümmeetrilisi punkte ühendav sirglõik on sümmeetriateljega risti ja jagub pooleks.

10. Antud on sirge joon ja selle peal punkt. Joonesta sellest punktist ristjoon antud sirgele!

11. Sirge nurk poolitada.

12. Joonestada täisnurk.

13. Antud nurk α poolitada.

14. Joonestada nurk, mille suurus on:

1) 90^0;	2) 45^0;
3) $22\frac{1}{2}^0$;	4) $67\frac{1}{2}^0$;
5) 135^0;	6) $157\frac{1}{2}^0$.

15. Joonesta antud lõigule keskristjoon!

16. Antud sirglõik jagada 2-ks, 4-ks, 8-ks võrdseks osaks.

17. Antud nurk jagada 2-ks, 4-ks, 8-ks võrdseks osaks.

18. Rombi diagonaalid on e ja f. Joonesta nende järgi romb!

19. Ehita võrdhaarne kolmnurk!

20. Ehita võrdkülgne kolmnurk!

21. Joonesta mingi kolmnurk! Leia selle kolmnurga
   1) tippude sümmeetriatelgede lõikepunkt!
   2) nurkade sümmeetriatelgede lõikepunkt!

22. Joonesta mingi kolmnurk! Ehita sellele kolmnurgale

1) ümberjoonestatud ringjoon!

2) sissejoonestatud ringjoon!

23. Joonesta kolmnurk, millel on üks nurk nüri! Konstrueeri sellele kolmnurgale

1) tippude sümmeetriateljed!

2) ümberjoonestatud ringjoon!

24. Joonesta kolmnurk, millel on üks nurk nüri! Konstrueeri selle kolmnurga

1) nurkade sümmeetriateljed!

2) sissejoonestatud ringjoon!

---

25. Konstrueeri sirglõik x, kui a ja b on antud sirglõigud ($a > b$)!

1) $x = \frac{a+b}{2}$

2) $x = \frac{a-b}{2}$

3) $x = 3 : \frac{a+b}{4}$

4) $x = a + \frac{a-b}{2}$

26. Konstrueeri nurk x, kui α ja β on antud nurgad ($\alpha > \beta$)!

1) $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$

2) $x = \frac{\alpha-\beta}{2}$

3) $x = \alpha - \frac{\alpha+\beta}{2}$

4) $x = \alpha - \frac{\alpha-\beta}{2}$

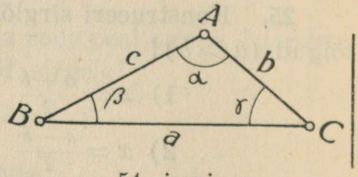
5) $x = 180^0 - \frac{\alpha+\beta}{4}$

Ex bibl. univ. Tart.

V. Kolmnurgad ja nende kongruentsus.

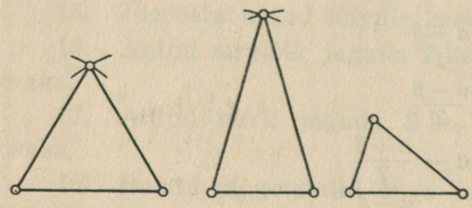
1. Kolmnurga elemendid. Kolmnurkade liigitelu nurkade ja külgede järgi.

Kolmnurga külgi ja nurki nimetatakse kolmnurga elementideks. Sageli tähistatakse kolmnurga tippe tähtedega A, B, C, külgi a, b, c, nurki α, β, γ; seejuures valitakse tähised nõnda, et a oleks tipu A ja nurga α vastas, b oleks tipu B ja nurga β vastas, c oleks tipu C ja nurga γ vastas. Niisugust tähistusviisi nimetame n o r m a a l t ä h i s t u s e k s (54. joonis).



54. joonis.

Normaaltähistus kergendab kirjutamist; näiteks võiks teoreemi „võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on kongruentsed“ normaaltähistuse abil nii kirjutada: Kui $b \equiv c$, siis $\beta \equiv \gamma$. Teoreemi „kui kolmnurgal on kaks kongruentset nurka, siis on see kolmnurk võrdhaarne“ võiks lühendatult nii kirjutada: Kui $\beta \equiv \gamma$, siis $b \equiv c$.



55. joonis.

Külgede järgi liigitatakse kolmnurgad (55. joonis):

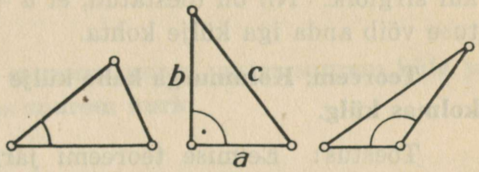
a) võrdkülgseiks, kui kõik küljed on kongruentsed;

b) võrdhaarseiks, kui kaks külge on kongruentsed;

c) iseküIgseiks, kui kongruentseid külgi ei ole.

Nurkade järgi liigitatakse kolmnurgad (56. joon.):

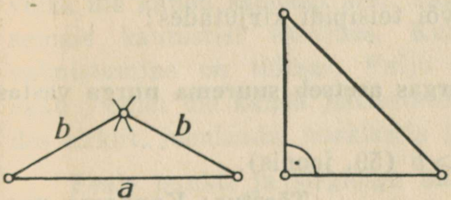
a) teravnurkseiks, kui kõik nurgad on teravad;



56. joonis.

b) täisnurkseiks, kui kolmnurgal on täisnurk;

c) nürinurkseiks, kui kolmnurgal on nüri nurk.



57. joonis.

Kui arvestada nii külgi kui nurki, siis võib kolmnurka nimetada (57. joon.):

a) võrdhaarseks nürinurkseks;

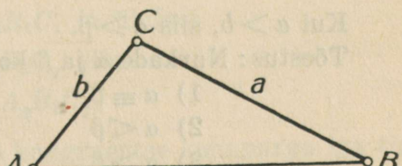
b) võrdhaarseks täisnurkseks jne.

Täisnurkse kolmnurga külgedel on erinimed: täisnurga lähisküIgi a ja b nimetatakse **kaatetiteks,** täisnurga vastasküIge c — **hüpotenuusiks.**

2. Kahe külje summa ja vahe. Suurem nurk ja tema vastaskülg.

Teoreem: Kolmnurga kahe külje summa on suurem kui kolmas külg.

Tõestus: Tarvis on näidata, et $a + b > c$ (58. joonis). Punktid A ja B on ühendatud sirglõiguga c ja murtud joonega ACB, mille pik-



58. joonis.

kus on $b + a$ ehk $a + b$. Aksioomi järgi on sirglõik kahe punkti vahel kõige lühem, seepärast on murtud joon pikem kui sirglõik. Nii on tõestatud, et $a + b > c$. Sama tõestuse võib anda iga külje kohta.

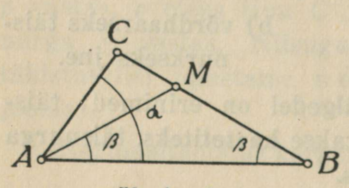
Teoreem: Kolmnurga kahe külje vahe on väiksem kui kolmas külg.

Tõestus: Eelmise teoreemi järgi võime kirjutada: $a + b > c$. Kui nüüd summast $a + b$ ja c-st ühepalju lahutada, siis jääb rohkem sinna järele, mis enne suurem oli. Lahutame kummastki b:

$$a + b > c$$
$$-b \quad -b$$
$$a > c - b \text{ või teisipidi kirjutades:}$$
$$c - b < a.$$

Teoreem: Kolmnurgas asetseb suurema nurga vastas suurem külg.

Kui $\alpha > \beta$, siis $a > b$ (59. joonis).



59. joonis.

Tõestus: Kanname nurga β tipu A juurde üle, nagu joonisel näha. Siis on $\triangle AMB$ võrdhaarne, seega $MA \equiv MB$.

Esimese teoreemi põhjal: $CM + MA > AC$.

Kongruentsuse tõttu võime MA asemel kirjutada MB, nii et $CM + MB > AC$, s. o. $CB > AC$ ehk $a > b$.

Teoreem: Kolmnurgas on suurema külje vastas suurem nurk.

Kui $a > b$, siis $\alpha > \beta$.

Tõestus: Nurkade α ja β kohta on kolm võimalust:

1) $\alpha \equiv \beta$
2) $\alpha < \beta$
3) $\alpha > \beta$

Praegusel juhul ei saa esimene võimalus esineda, sest siis peaks $a \equiv b$, kuid $a > b$. Teine ei saa esineda, sest siis peaks $a < b$. Jääb ainsa võimalusena $\alpha > \beta$.

Kaks viimast teoreemi sõnastatakse harilikult koos ühe lausena nõnda:

Kolmnurgas on suurema nurga vastas suurem külg ja suurema külje vastas suurem nurk.

3. Kolmnurga ehitamine ja vastavad kongruentsuslaused.

Märkus. Mõnikord on vajadus joonist üle kanda kas samal lehel teisele kohale või teisele lehele. Joonist võiks üle kanda šablooni abil, nagu seda teevad maalrid seinale kaunistisi värvides. Kuid igakordne šablooni valmistamine on tülikas. Palju lihtsamalt ja täpsemalt saab joonist üle kanda joonestamisriistade abil, kasustades sirklit, joonlauda, nurklauda jne.

Peale punkti ja sirglõigu on lihtsaimaks kujundiks kolmnurk. Kui oskame üle kanda või ehitada kolmnurga, siis oskame seda teha ka keerulisemate kujunditega, mis koosnevad kolmnurkadest. Seepärast taanduvad kujundite võrdlemise ja ülekandmise küsimused peaaegu kõik kolmnurkade võrdlemise ja ehitamise küsimusteks. Täpselt ülekantud joonist ja esialgset joonist nimetatake kongruentseteks.

Kui $\triangle ABC$ ja $\triangle A_1B_1C_1$ on kongruentsed, siis kirjutame seda nii:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1 \text{ ehk } \triangle A_1B_1C_1 \equiv ABC.$$

Kui $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$ ja ühtlasi

$\triangle ABC \equiv \triangle A_2B_2C_2$, siis

$\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle A_2B_2C_2$.

Ülekandmisel langeb kongruentse kolmnurga iga tipp kongruentse kolmnurga vastava tipu kohale; sel puhul langeb ka iga külg kongruentse kolmnurga vastava külje peale ning iga nurk vastava nurga peale. Tarvitame edaspidigi normaaltähistust, lisades tarbe korral, nagu eespool juba nägime, vahetegemiseks tähtede allosa juurde väikesed numbrid, indeksid, nii et näiteks a_1 tähendab tipu A_1 vastaskülge jne.

a, b, α ja β all võib mõista kas külgede ja nurkade nimetusi või nende suurusi. Kui a ja b on kongruentsed sirglõigud, ja a ja b all mõistame nimetusi, siis kirjutame:

$$a \equiv b;$$

mõistame aga a ja b all nende sirglõikude pikkusi, siis kirjutame:

$$a = b,$$

kõneldes „a on võrdne b-ga".

See käib ka nurkade kohta.

Kongruentsete kolmnurkade kõik vastavad elemendid on kongruentsed, nii et kui

$$\triangle ABC \equiv A_1B_1C_1, \text{ siis}$$

$$\overline{}$$

$$a \equiv a_1;\ b \equiv b_1;\ c \equiv c_1$$

$$\alpha \equiv \alpha_1;\ \beta \equiv \beta_1;\ \gamma \equiv \gamma_1$$

$$\text{või ka } a = a_1 \ldots \alpha = \alpha_1 \ldots$$

Nõnda on kongruentsete kolmnurkade definitsioon järgmine:

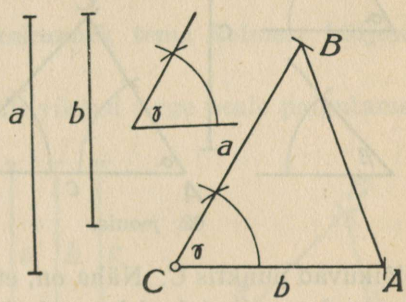
Kolmnurgad on kongruentsed, kui nende vastavad elemendid on kongruentsed.

Kui on antud kaks kolmnurka, mille kohta pole veel teada, kas nad on kongruentsed või mitte, siis pole selle otsustamiseks tarvis kõigi kuue elemendi mõõtmist mõlemas kolmnurgas, vaid piisab 3-st otstarbekohaselt valitud elemendist kummaski kolmnurgas. Seda selgitavad alamaljärgnevad kolmnurkade kongruentsusteoreemid ehk kongruentsuslaused.

Ülesanne. Ehitada kolmnurk kahest küljest ja nende vahel olevast nurgast (60. joonis).

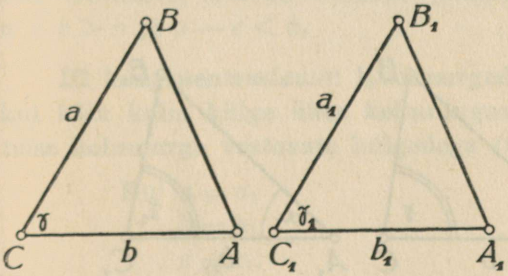
Konstruktsioon: Vabalt võetud sirgel ehitame punkti C juurde nurga γ. Selle nurga ühe haara peale asetame a ja teise haara peale b. Saame punktid B ja A; need ühendame sirglõigu abil. $\triangle ABC$ on nõutav.

Neist andmeist ei saa teissuguse kujuga ning suurusega kolmnurka ehitada.



60. joonis.

I kongruentsuslause: Kolmnurgad on kongruentsed, kui kaks külge ja nende vahel olev nurk ühes kolmnurgas on kongruentsed teise kolmnurga vastavate elementidega (61. joonis).



61. joonis.

Eeldus:

$a \equiv a_1$

$b \equiv b_1$

$\gamma \equiv \gamma_1$

Väide:

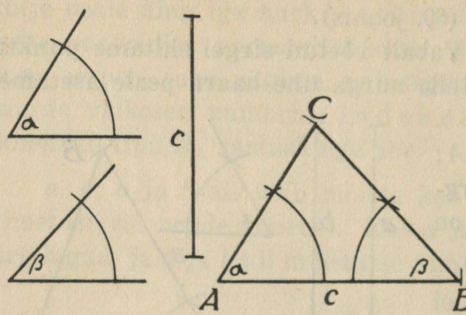
$\triangle ABC \equiv$

$\equiv \triangle A_1B_1C_1$.

Tõestus: Kanname kolmnurga $A_1B_1C_1$ kolmnurga ABC peale nii, et C_1 langeks C peale, b_1 läheks b mööda; a_1 läheb siis a mööda ja A_1 langeb A-le ning B_1 langeb B-le. Nii ühtivad need kolmnurgad täielikult ja lause on tõestatud.

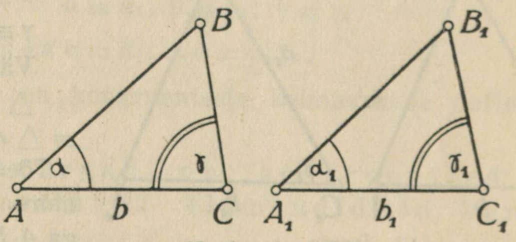
Ülesanne. Ehitada kolmnurk kahest nurgast ja nende vahel olevast küljest (62. joonis).

Konstruktsioon: Vabalt võetud sirgele paigutame külje c; saame punktid A ja B. Sellele sirgele punkti A juurde ehitame nurga α ja punkti B juurde nurga β. Nende nurkade ühiseks haaraks on AB. Teised haarad pikendame, kuni nad lõikuvad punktis C. Näha on, et α ja β ei või olla kuitahes suured, — siis teised haarad ei lõiku. $\triangle\ ABC$ on nõutav. Teise kuju ja suurusega kolmnurka ei saa neist andmeist ehitada.



62. joonis.

II kongruentsuslause: Kolmnurgad on kongruentsed, kui kaks nurka ja nende vahel olev külg ühes kolmnurgas on kongruentsed teise kolmnurga vastavate elementidega (63. joonis).



63. joonis.

Eeldus: $\alpha \equiv \alpha_1$

$\gamma \equiv \gamma_1$

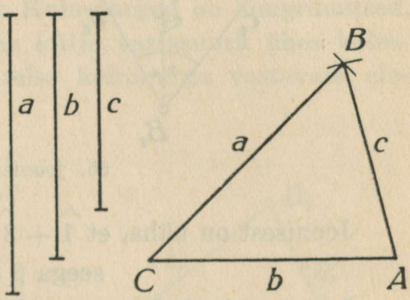
$b \equiv b_1$

Väide: $\triangle\ ABC \equiv \triangle\ A_1B_1C_1$.

Tõestus: Paigutame külje b_1 külje b peale nii, et nende otsapunktid ühtiksid. Siis ühtib nurk α_1 nurgaga α, sest $\alpha \equiv \alpha_1$, ja γ_1 ühtib γ-ga, sest $\gamma \equiv \gamma_1$. Siis läheb C_1B_1 külge CB ja A_1B_1 külge AB mööda. Sel puhul peavad C_1B_1 ja A_1B_1 lõikuma sealsamas, kus lõikuvad CB ja AB. Lause on tõestatud.

Ülesanne. Ehitada kolmnurk tema kolmest küljest (64. joonis).

Konstruktsioon: Vabalt võetud sirge peale paigutame külje b, saame punktid A ja C. Punkti C ümber joonestame kaare raadiusega a, punkti A ümber joonestame kaare, võttes raadiuseks c. Need kaared lõikuvad punktis B. $\triangle ABC$ on nõutav, teissugust kolmnurka ei saa neist andmeist ehitada. Et kaared lõikuksid, peavad külgede pikkused nii olema, et $a + c > b$ ja $a - c < b$.



64. joonis.

III kongruentsuslause: Kolmnurgad on kongruentsed, kui kõik kolm külge ühes kolmnurgas on kongruentsed teise kolmnurga vastavate külgedega (65. joonis).

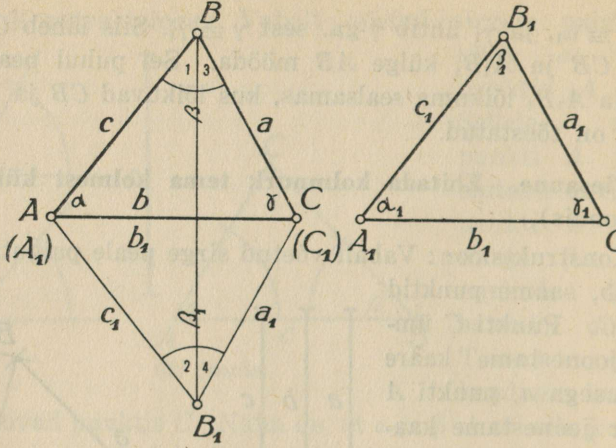
Kui $a \equiv a_1$
$b \equiv b_1$
$c \equiv c_1$,
siis $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.

Tõestuseks paneme $\triangle A_1B_1C_1$ $\triangle ABC$ külge nii, et küljed b ja b_1 ühtivad, nagu näha 65. joonisel; siis on $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle AB_1C$; ühendame tipud B ja B_1.

$\triangle$-gas ABB_1 on $\underline{AB \equiv AB_1}$, $\triangle$-gas BCB_1 on $\underline{BC \equiv B_1C}$

$$\hat{1} \equiv \hat{2} \qquad\qquad \hat{3} \equiv \hat{4}$$

$$\overline{\hat{1} + \hat{3} \equiv \hat{2} + \hat{4}}$$



65. joonis.

Joonisest on näha, et $\hat{1} + \hat{3} = \beta$ ja $\hat{2} + \hat{4} = \beta_1$,

$$\text{seega } \beta \equiv \beta_1.$$

I kongruentsuslause järgi on siis

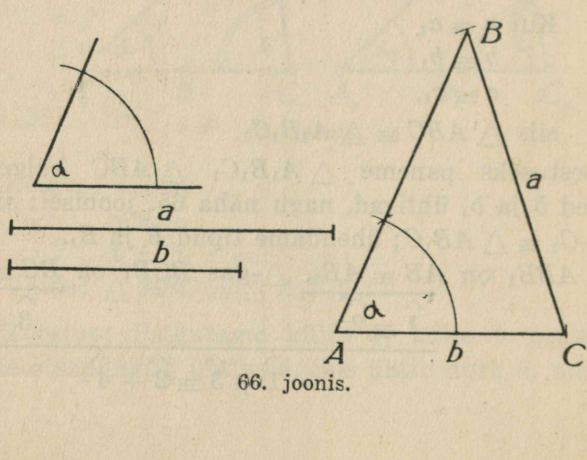
$$\triangle ABC \equiv \triangle AB_1C.$$

Varemini on teada, et $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle AB_1C$.

Järelikult $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.

Seega on lause tõestatud.

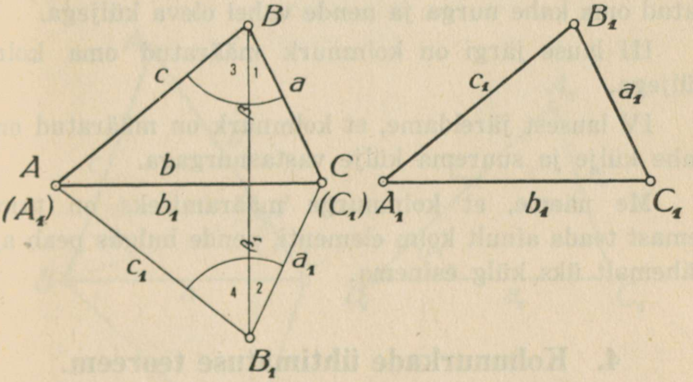
Ülesanne. Ehitada kolmnurk kahest küljest ja suurema külje vastasnurgast (66. joonis).



66. joonis.

Konstruktsioon: Vabalt võetud sirgele paigutame külje b; saame punktid A ja C. Sellele sirgele ehitame punkti A juurde nurga α; selle nurga üheks haaraks on b, teist haara pikendame. Punkti C ümber joonestame raadiusega a kaare, mis lõikuks nurga α haara pikendisega punktis B. Et $a > b$, siis lõikub see kaar α haara pikendisega ainult ühes punktis. $\triangle ABC$ on nõutav. Nende tingimuste järgi ei saa teissugust kolmnurka ehitada.

IV kongruentsuslause: Kolmnurgad on kongruentsed, kui kaks külge ja suurema külje vastasnurk ühes kolmnurgas on kongruentsed teise kolmnurga vastavate elementidega (67. joonis).



67. joonis.

Kui $a \equiv a_1$

$b \equiv b_1$

$b > a,\ b_1 > a_1$

$\beta \equiv \beta_1,$

siis $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.

Tõestuseks asetame kolmnurga $A_1B_1C_1$ kolmnurga ABC külge nii, et kongruentsetest külgedest suuremad ühtiksid, nagu näha joonisel.

$\triangle$-gas BCB_1 on $\underline{a \equiv a_1}$ Teada on: $\beta \equiv \beta_1$.

$$\underline{\hat{1} \equiv \hat{2}}$$

$$\underline{\beta - \hat{1} \equiv \beta_1 - \hat{2}}$$

$$\underline{\hat{3} \equiv \hat{4}}$$

$$c \equiv c_1$$

I kui ka III kongruentsuslause järgi on siis

$$\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$$

Kokkuvõte: I kongruentsuslausest järgneb, et kolmnurk on määratud oma kahe külje ja nende vahel oleva nurgaga.

II kongruentsuslausest järgneb, et kolmnurk on määratud oma kahe nurga ja nende vahel oleva küljega.

III lause järgi on kolmnurk määratud oma kolme küljega.

IV lausest järeldame, et kolmnurk on määratud oma kahe külje ja suurema külje vastasnurgaga.

Me näeme, et kolmnurga määramiseks on tarvis temast teada ainult kolm elementi, nende hulgas peab aga vähemalt üks külg esinema.

4. Kolmnurkade ühtimatuse teoreem.

Kui kolmnurga kaks külge on kongruentsed teise kolmnurga kahe küljega, aga nende külgede vahel olevad nurgad ei ole kongruentsed, siis on suurem selle kolmnurga kolmas külg, mis asetseb vastu suuremat nurka.

Normaaltähistuses võime selle kirjutada nii:

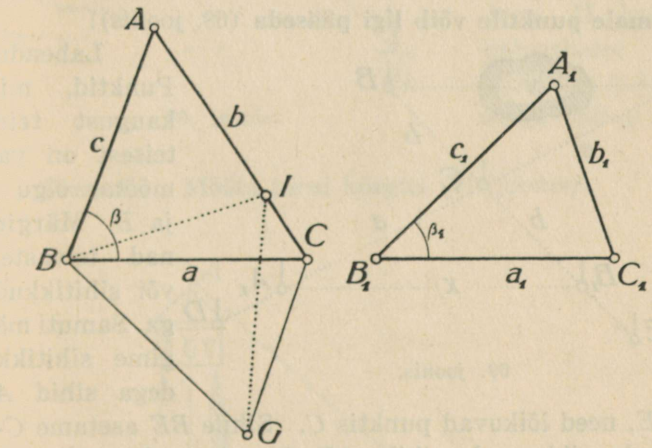
Kui $a \equiv a_1$
$c \equiv c_1$
$\beta > \beta_1$,
siis $b > b_1$.

Tõestus: Paigutame $\triangle A_1B_1C_1$ $\triangle ABC$ külge nii, et B_1C_1 ühtib BC-ga ja $\triangle A_1B_1C_1$ asetub $\triangle BCG$ kohale.

Poolitame nurga ABG. Et $\beta > \beta_1$, siis läheb nurgapoolitaja nurga β sisse asendisse BI. Et

$$\begin{array}{rl}
BG \equiv AB & \\
BI \equiv BI & \\
\widehat{ABI} \equiv \widehat{IBG}, & \text{siis} \\
\hline
\triangle IBG \equiv \triangle ABI & \\
GI \equiv AI & \\
\hline
\end{array}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{array}{lr}
\triangle\text{-gas } IGC & GI + IC > CG; \\
\text{et aga} & GI = AI, \\
\hline
\text{siis} & AI + IC > CG \\
\text{ehk} & AC > CG, \\
\text{seega} & b > b_1
\end{array}$$

Ü m b e r p ö ö r d u l t: Kui kolmnurga kaks külge on kongruentsed teise kolmnurga kahe küljega, aga kolman-



68. joonis.

dad küljed ei ole teineteisega kongruentsed, siis ei ole ka nende külgede vastasnurgad omavahel kongruentsed, nimelt on suurema küljega kolmnurgas nimetatud nurk suurem. Lühidalt: Kui $a \equiv a_1$

$$\begin{aligned} c &\equiv c_1 \\ b &> b_1, \\ \text{siis } \beta &> \beta_1, \end{aligned}$$

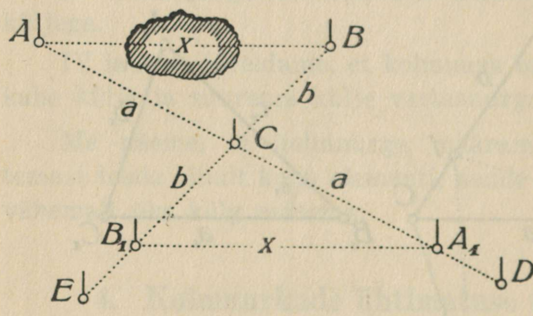
sest kui oleks $\beta \equiv \beta_1$, siis oleksid kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ kongruentsed I kongr. lause järgi, seega oleks ka $b \equiv b_1$; aga eeldusest teame, et $b > b_1$. Teiseks ei saa ka olla $\beta_1 > \beta$, sest siis oleks viimase teoreemi põhjal $b_1 > b$.

Nii peab olema

$$\beta > \beta_1.$$

5. Kauguste ja kõrguste kaudne mõõtmine kongruentsete kolmnurkade abil.

Ülesanne. Mõõta maapinnal kahe punkti vaheline kaugus, kui punktide vahel asetseb mõni takistus, aga mõlemale punktile võib ligi pääseda (69. joonis)!



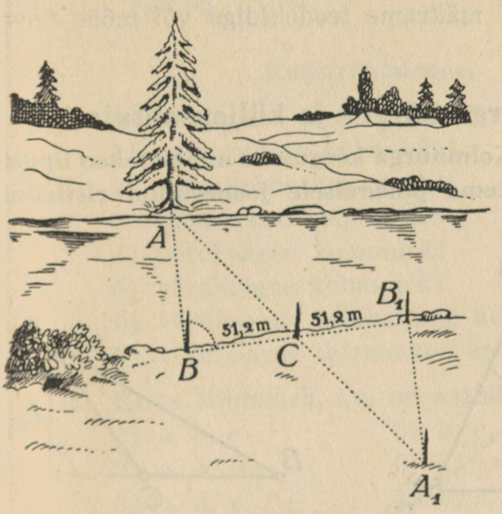
69. joonis.

Lahendus: Punktid, mille kaugust teineteisest on vaja mõõta, olgu A ja B. Märgime nad teivastega või sihitikkudega. Samuti märgime sihitikkudega sihid AD ja BE, need lõikuvad punktis C. Sihile BE asetame C-st E poole pikkuse b, sihile AD C-st D poole pikkuse a; saame punktid B_1 ja A_1.

$$\text{Et } AC \equiv CA_1$$
$$BC \equiv CB_1$$
$$\widehat{ACB} \equiv \widehat{B_1CA_1}$$
$$\triangle ABC \equiv \triangle A_1CB_1 \text{ (I kongr. lause)}$$

$AB \equiv A_1B_1$, A_1B_1 pikkuse mõõdame maapinnal otseselt.

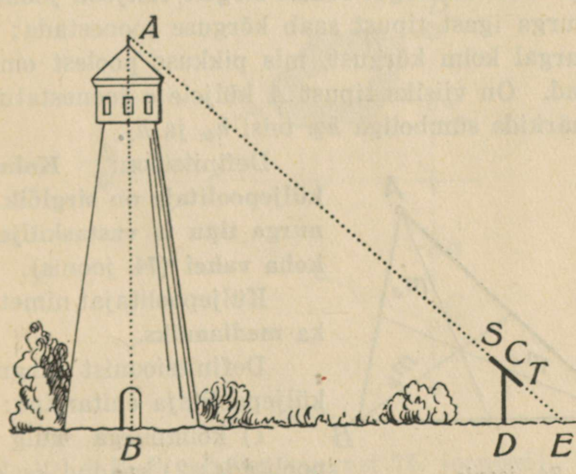
Ülesanne. Mõõta kahe punkti vaheline kaugus, kui ainult ühele neist on võimalik ligi pääseda (70. joonis).



70. joonis.

Lahendus: Mõõdetavate punktide kaugus on AB. Pikkuse CB_1 võtame võrdseks pikkusega CB. Nurga B ja temaga kongruentse $\widehat{B_1}$, määrame nurgamõõtjaga. II kongruentsuslause järgi $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C$; seega $AB \equiv A_1B_1$.

Ülesanne. Mõõta torni kõrgus (71. joonis)!

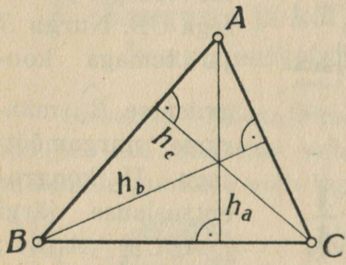


71. joonis.

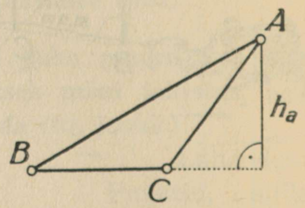
Lahendus: $\triangle$-le ABE ehitame maapinnal kongruentse kolmnurga külje BE ja nurkade B ning E järgi. $\hat{B} = 90^0$, nurga E määrame teodoliidiga või mõne teise nurgamõõtja abil.

6. Kolmnurga kõrgus ja küljepoolitaja.

Definitsioon: **Kolmnurga kõrguseks nimetatakse tipust vastasküljele või tema pikendisele joonestatud ristlõiku** (72. ja 73. joonis).

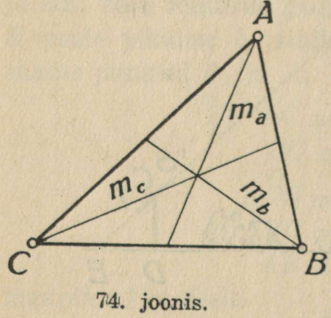


72. joonis.



73. joonis.

Definitsioonist selgub, et kolmnurga kõrguse ehitamine vastab täiesti konstruktsioonile: antud punktist väljaspool antud sirget sellele sirgele ristjoon joonestada. Kolmnurga igast tipust saab kõrguse joonestada; nii on kolmnurgal kolm kõrgust, mis pikkuse poolest omavahel erinevad. On viisiks tipust A küljele a joonestatud kõrgust märkida sümboliga h_a, teisi h_b ja h_c.



74. joonis.

Definitsioon: **Kolmnurga küljepoolitaja on sirglõik kolmnurga tipu ja vastaskülje keskkoha vahel** (74. joonis).

Küljepoolitajat nimetatakse ka **mediaaniks.**

Definitsioonist järgneb ka küljepoolitaja ehitamine: 1) kolmnurga külg tuleb poolitada; 2) saadud keskpunkt tuleb selle külje vastastipuga ühendada. Kolmnurgal on kolm küljepoolitajat. On viisiks külje a poolitajat märkida m_a, teisi m_b ja m_c.

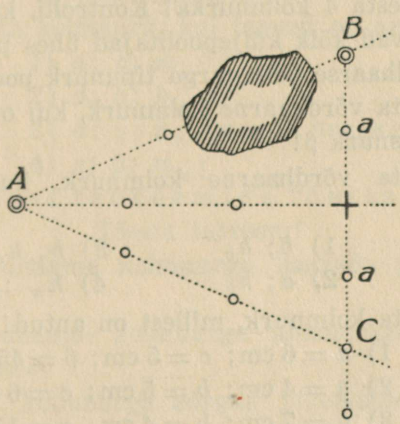
Konstruktsioone.

1. Konstrueeri:
   1) teravnurkne kolmnurk!
   2) nürinurkne kolmnurk!
   3) täisnurkne kolmnurk!
   4) võrdhaarne kolmnurk!
   5) võrdkülgne kolmnurk!
   6) võrdhaarne nürinurkne kolmnurk!
   7) võrdhaarne täisnurkne kolmnurk!

2. Ehita kolmnurk, kui on antud

1) a, b, c	5) b, c, α
2) a, b, γ	6) β, γ, a
3) α, β, c	7) $b, c, \beta;\ b > c$
4) $a, b, \alpha;\ a > b$	8) $a, c, \gamma;\ a < c$

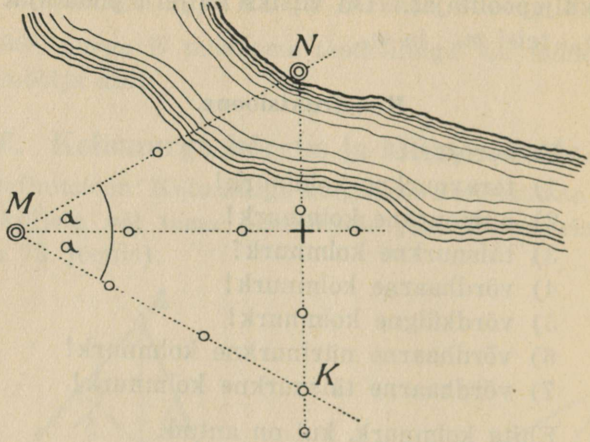
3. Seleta ligiolevate jooniste järgi, kuidas saab mõõta punktide



75. joonis.

1) A ja B vahelist kaugust 75. joonisel!

2) M ja N vahelist kaugust 76. joonisel!



76. joonis.

4. Antud on $\triangle ABC$. Ehita tema kõrgused!

5. Joonesta nürinurkse kolmnurga kõrgused!

6. Joonesta 4 kolmnurka! Kontrolli, kas igas kolmnurgas lõikuvad kõik kõrgused ühes punktis!

7. Antud on $\triangle ABC$. Ehita tema küljepoolitajad!

8. Joonesta 4 kolmnurka! Kontrolli, kas igas kolmnurgas lõikuvad kõik küljepoolitajad ühes punktis!

9. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk poolitada!

10. Ehita võrdhaarne kolmnurk, kui on antud tema alus a ja alusnurk β!

11. Ehita võrdhaarne kolmnurk, kui temast on antud:

1) b; h_b	3) b; h_a
2) a; h_b	4) h_a ; α

12. Ehita kolmnurk, millest on antud!

1) $a = 6$ cm; $c = 5$ cm; $\beta = 45^0$
2) $a = 4$ cm; $b = 5$ cm; $c = 6$ cm
3) $a = 7$ cm; $b = 4$ cm; $\alpha = 135^0$
4) $a = 5$ cm; $\beta = 90^0$; $\gamma = 67\frac{1}{2}\,^0$

13. Ehita võrdkülgne kolmnurk, kui tema külg

1) $a = 4$ cm!

2) $a = 3{,}5$ cm!

14. Ehita täisnurkne võrdhaarne kolmnurk, kui tema kaatet

1) $a = 5$ cm!

2) $a = 4{,}2$ cm!

15. Ehita täisnurkne kolmnurk, kui

1) $a = 3$ cm; $b = 4$ cm!

2) $a = 4{,}5$ cm; $c = 5{,}2$ cm!

16. Ehita täisnurkne kolmnurk, kui on antud kaatet a ja hüpotenuus c!

1) $a = 5$ cm; $c = 6$ cm

2) $a = 3{,}5$ cm; $c = 5{,}8$ cm

17. Ehita täisnurkne kolmnurk tema kaatetist ja nurgast!

1) $a = 4$ cm; $\beta = 45^0$

2) $a = 5$ cm; $\alpha = 22\frac{1}{2}^0$

18. Ehita täisnurkne kolmnurk tema hüpotenuusist ja nurgast!

1) $c = 5$ cm; $\alpha = 67\frac{1}{2}^0$

2) $c = 8$ cm; $\beta = 22\frac{1}{2}^0$

19. Ehita kolmnurk, kui temast on antud

1) a; c; m_c

2) a; b; h_c

3) a; γ; n_γ (n_γ on nurga γ poolitaja)

4) c; β; m_a!

Harjutusi teoreemide tõestamiseks.

Tõesta teoreem!

20. Võrdhaarse kolmnurga haarade poolitajad on kongruentsed.

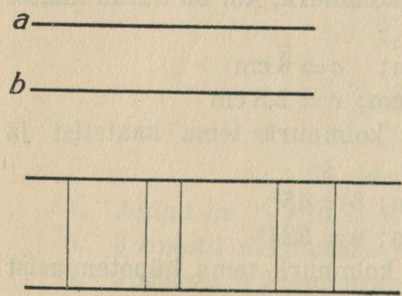
21. Võrdhaarse kolmnurga alusnurkade poolitajad on kongruentsed.

22. Kui kolmnurga kõrgus pikendada külje poole kahekordseks ja ühendada otsapunkt tippudega, siis tekib esialgsele kolmnurgale kongruentne kolmnurk.

23. Kõrvunurkade poolitajad moodustavad täisnurga.

VI. Paralleelsed sirged ja parallelogrammid.

1. Paralleelide aksioom.



77. joonis.

Definitsioon: Kaht tasapinnal asetsevat sirget, mis ei lõiku, nimetatakse paralleelseteks sirgeteks ehk p a r a l l e e l i d e k s või ka r ö ö b i k u t e k s (77. joonis). Kui sirged a ja b on paralleelsed, siis kirjutatakse seda nii:

$$a \parallel b.$$

Paralleelid on teineteisest igal pool ühekaugusel.

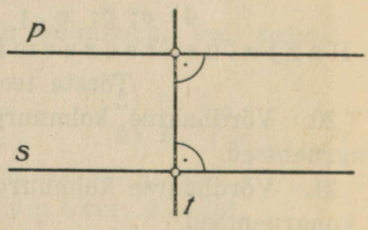
Teoreem: Sirged on paralleelsed, kui nad on risti ühe ja sama sirge joonega (78. joonis).

Lühemalt:

kui $p \perp t$ ja

$s \perp t$,

siis $p \parallel s$.



78. joonis.

Tõestus: p ja s ei saa lõikuda, sest kui nad lõikuksid, siis oleks nende lõikepunktist sirgele t kaks ristjoont joonestatud, see on aga vastuolus varemtõestatud teoreemiga.

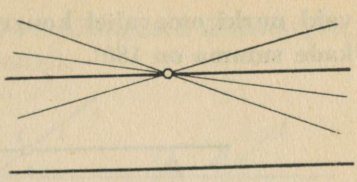
Paralleelide aksioom: Igal sirgel on olemas üks ainus rööpsirge, mis läbib antud punkti (79. joonis).

Teoreem: Kui sirge joon on risti ühe rööbikuga kahest, siis on ta risti ka teisega (80. joonis).

Eeldus: $p \parallel s$

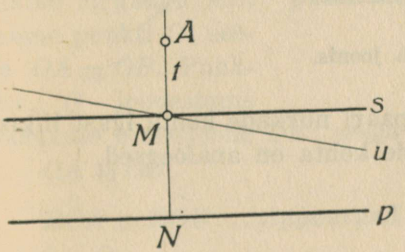
$t \perp p$

Väide: $t \perp s$



79. joonis.

Tõestus: Punktist A joonestame p-le ristjoone t. See lõikub s-ga punktis M. Kui s ei ole risti t-ga, siis joonestame t-le punktist M ristjoone u. Et $u \perp t$ ja $p \perp t$, siis peab olema $u \parallel p$; see pole aga võimalik, sest punktist M on p-le juba paralleel olemas, nimelt s. Seega on lause tõestatud. Ühise ristlõigu MN pikkus on paralleelide kaugus teineteisest.



80. joonis.

2. Kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekkivad nurgad.

Kui kaht sirget p ja s lõigata kolmanda sirgega t, siis tekib 8 nurka, mis 81. joonisel on märgitud numbritega 1, 2, 3, ... 8.

Neist nimetatakse paariviisi

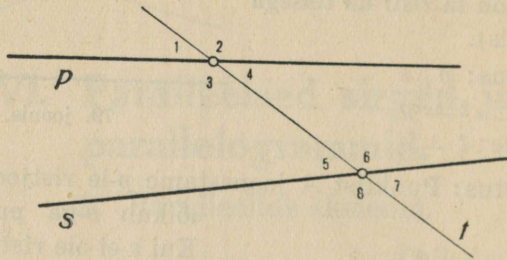
v a s t a v a t e k s nurkadeks järgmisi: $\hat{1}$ ja $\hat{5}$; $\hat{2}$ ja $\hat{6}$; $\hat{3}$ ja $\hat{8}$; $\hat{4}$ ja $\hat{7}$;

p õ i k n u r k a d e k s: $\hat{4}$ ja $\hat{5}$; $\hat{3}$ ja $\hat{6}$; $\hat{1}$ ja $\hat{7}$; $\hat{2}$ ja $\hat{8}$;

l ä h i s n u r k a d e k s: $\hat{3}$ ja $\hat{5}$; $\hat{4}$ ja $\hat{6}$; $\hat{1}$ ja $\hat{8}$; $\hat{2}$ ja $\hat{7}$.

Teoreem: Kui üks paar põiknurki on omavahel kongruentsed, siis on iga paar põiknurki ja iga paar vasta-

vaid nurki omavahel kongruentsed ja iga paari lähisnurkade summa on 180⁰.



81. joonis.

Tõestuse toome ühe paari nurkade kohta igast liigist — tõestused teiste paaride kohta on analoogsed.

Eeldus: $\hat{4} \equiv \hat{5}$.

Väide: 1) $\hat{3} \equiv \hat{6}$

2) $\hat{1} \equiv \hat{5}$

3) $\hat{4} + \hat{6} = 180^0$.

Tõestus: 1)

$$\begin{array}{r} \hat{4} + \hat{3} = 180^0 \\ \hat{5} + \hat{6} = 180^0 \\ \hline - \left\{ \begin{array}{l} \hat{4} + \hat{3} \equiv \hat{5} + \hat{6} \\ \hat{4} \equiv \hat{5} \end{array} \right. \\ \hline \hat{3} \equiv \hat{6} \end{array}$$

2)

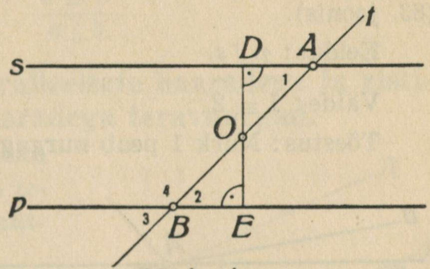
$$\begin{array}{l} \hat{4} \equiv \hat{5} \ldots \text{eeldus} \\ \hat{4} \equiv \hat{1} \ldots \text{tippnurgad} \\ \hline \hat{1} \equiv \hat{5} \end{array}$$

3)

$$\begin{array}{l} \hat{5} + \hat{6} = 180^0 \ldots \text{kõrvunurgad} \\ \hat{5} \equiv \hat{4} \ldots\ldots\ldots \text{eeldus} \\ \hline \hat{4} + \hat{6} = 180^0. \end{array}$$

Teoreem: Kaks sirget on rööbikud, kui nende lõikumisel kolmandaga tekivad kongruentsed põiknurgad, või

kongruentsed vastavad nurgad, või niisugused lähisnurgad, millede summa on 180⁰ (82. joonis).



82. joonis.

Eeldus: 1) $\widehat{1} \equiv \widehat{2}$

või 2) $\widehat{1} \equiv \widehat{3}$ või

3) $\widehat{1} + \widehat{4} = 180^0$.

Väide: $s \parallel p$.

Tõestus: 1) Poolitame sirglõigu AB, saame punkti O; seega $OA \equiv OB$. Punktist O joonestame rööbikule p ristjoone DE; seega $\widehat{OEB} = 90^0$.

$$OA \equiv OB$$

$$\widehat{DOA} \equiv \widehat{EOB} \text{ ... tippnurgad}$$

$$\widehat{1} \equiv \widehat{2} \text{ ... eeldus}$$

$$\triangle DOA \equiv \triangle EOB \text{ ... II kongr. ls.}$$

$$\widehat{ODA} \equiv \widehat{OEB};\ \widehat{OEB} = 90^0$$

$$\widehat{ODA} = 90^0$$

$$DE \perp s;\ DE \perp p \text{ konstruktsiooni järgi}$$

$s \parallel p$. Nii siis: kui $\widehat{1} \equiv \widehat{2}$, siis $s \parallel p$.

2) $\widehat{1} \equiv \widehat{3}$ ... eeldus

$$\widehat{2} \equiv \widehat{3}$$

$$\widehat{1} \equiv \widehat{2}$$

$$s \parallel p$$

3) $\widehat{1} + \widehat{4} = 180^0$ ... eeldus

$$\widehat{2} + \widehat{4} = 180^0 \text{ ... kõrvun.}$$

$$\widehat{1} + \widehat{4} \equiv \widehat{2} + \widehat{4}$$

$$-\widehat{4} \qquad -\widehat{4}$$

$$\widehat{1} \equiv \widehat{2}$$

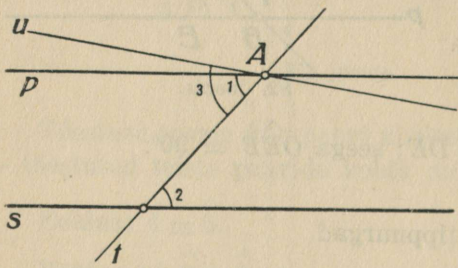
$$s \parallel p$$

Teoreem: Rööpsirgete lõikumisel sirgega tekivad kongruentsed põiknurgad, kongruentsed vastavad nurgad ja niisugused lähisnurgad, millede summa on 180⁰ (83. joonis).

Eeldus: $p \parallel s$.

Väide: $\hat{1} \equiv \hat{2}$.

Tõestus: Nurk 1 peab nurgaga 2 kongruentne olema, sest kui ta seda ei oleks, siis võiks punktist A joonestada sirge u nii, et see moodustaks t-ga nurga 3, mis oleks kongruentne nurgaga 2.



83. joonis.

Kui $\hat{3} \equiv \hat{2}$, siis peab eelmise teoreemi põhjal olema $u \parallel s$. Kuid u ei saa s-ga rööpne olla, sest siis peaks võimalik olema punktist A tõmmata sirgele s kaks rööpjoont. Nii peab

$$\hat{1} \equiv \hat{2}.$$

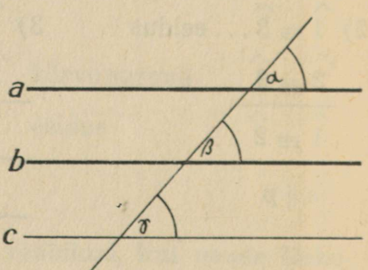
Kui aga üks paar põiknurki on kongruentsed, siis on iga paar põiknurki ja iga paar vastavaid nurki kongruentsed ja iga paari lähisnurkade summa on 180^0. Lause on sellega tõestatud.

Teoreem: Kaks sirget on isekeskis rööbikud, kui kumbki neist on kolmandaga rööbik (84. joonis).

Lühidalt:

kui $a \parallel c$ ja $b \parallel c$,

siis $a \parallel b$.



84. joonis.

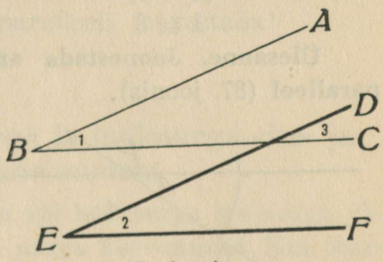
Tõestus: $\dfrac{\dfrac{a \parallel c}{\alpha \equiv \gamma} \quad \dfrac{b \parallel c}{\beta \equiv \gamma}}{\dfrac{\alpha \equiv \beta}{a \parallel b.}}$

3. Vastastikku paralleelsete haaradega ja ristiseisvate haaradega teravnurgad.

Teoreem: Vastastikku paralleelsete haaradega teravnurgad on kongruentsed (85. joonis).

Eeldus: $AB \parallel DE$; $CB \parallel FE$; $\widehat{1} < 90^0$; $\widehat{2} < 90^0$.

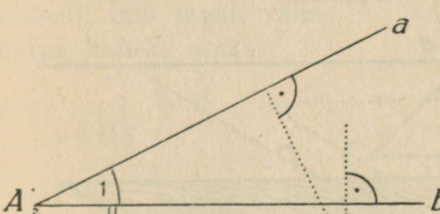
Väide: $\widehat{1} \equiv \widehat{2}$.



85. joonis.

Tõestus: $\dfrac{\dfrac{AB \parallel DE}{\widehat{1} \equiv \widehat{3}} \quad \dfrac{BC \parallel EF}{\widehat{2} \equiv \widehat{3}}}{\widehat{1} \equiv \widehat{2}.}$

Teoreem: Vastastikku ristiseisvate haaradega teravnurgad on kongruentsed (86. joonis).



86. joonis.

Lühidalt: kui $a \perp d$ ja $b \perp c$; $\widehat{1} < 90^0$; $\widehat{2} < 90^0$, siis $\widehat{1} \equiv \widehat{2}$.

Tõestus: Joonestame punktist A c-le ja d-le paralleelid.

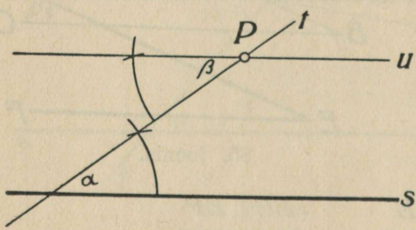
$$\frac{e \parallel c; \quad f \parallel d; \quad \widehat{3} < 90^0}{\widehat{2} \equiv \widehat{3}}$$

$$\begin{array}{c} d \perp a \\ d \parallel f \\ \hline f \perp a \\ \hline \hat{1} + \hat{4} = 90^0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} c \perp b \\ c \parallel e \\ \hline e \perp b \\ \hline \hat{3} + \hat{4} = 90^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \hat{1} + \hat{4} \equiv \hat{3} + \hat{4} \\ \hline \hat{1} \equiv \hat{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \hat{2} \equiv \hat{3} \\ \hat{1} \equiv \hat{3} \\ \hline \hat{1} \equiv \hat{2} \end{array}$$ mida oli tarvis tõestada.

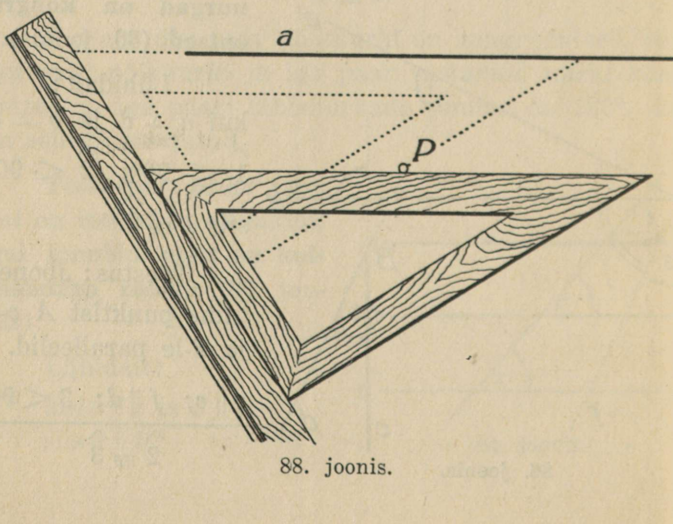
Ülesanne. Joonestada antud sirgele antud punktis paralleel (87. joonis).



87. joonis.

Konstruktsioon: Antud on sirge s ja punkt P. Punktist P joonestame vabalt sirge t, mis lõikudes s-ga moodustab nurga α. Konstrueerime sirge t külge tipuga punktis P α-ga kongruentse nurga β, nii et α ja β jääksid põiknurkadeks. Siis on $u \parallel s$.

Rööplüke.



88. joonis.

Kui kujund tasapinnal ühest kohast teise viia, nii et kõik tema punktid liiguvad sirgeid jooni mööda, siis kõneleme, et selle kujundiga on toimunud **rööplüke.** Nimetus põhineb sellel, et rööplükke puhul kõik kujundi sirglõigud jäävad rööbikukuks oma sirglõikudega esialgses asendis.

Ülesanne. Seleta alljärgneva joonise järgi, kuidas saab joonlaua ja nurklaua abil antud sirgele väljaspool seda sirget antud punktis paralleeli joonestada!

Joonesta nii paralleele!

4. Kolmnurga, nelinurga ja hulknurga sise- ja välisnurkade summa.

Definitsioon: **Kolmnurga või hulknurga iga nurga välisnurgaks nimetatakse selle nurga kõrvunurka.** Kui tegemist on nii nurkade kui välisnurkadega, siis kõneldakse sise- ja välisnurkadest.

Teoreem: Kolmnurga kahe sisenurga summa on võrdne nendega mitte kõrvuoleva välisnurgaga (89. joonis).

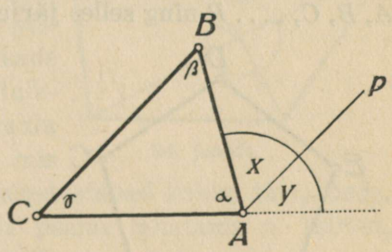
Tõestus: Punktist A joonestame küljele BC paralleeli, mis jagab välisnurga kaheks osaks:

$\hat{x}$ ja $\hat{y}$.

$p \parallel CB$

$\beta = \hat{x}; \ \gamma = \hat{y}$

$\beta + \gamma = \hat{x} + \hat{y}$



89. joonis.

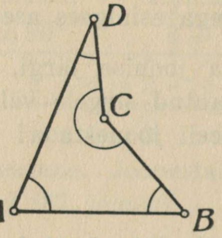
Teoreem: Kolmnurga sisenurkade summa on võrdne sirge nurgaga.

$$\alpha + \hat{x} + \hat{y} = 180^0$$

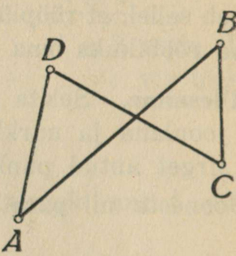
$$\hat{x} + \hat{y} = \beta + \gamma$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

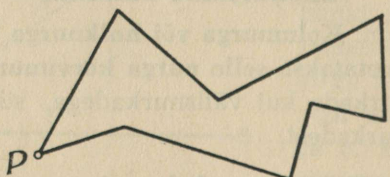
Järeldusi: **Võrdkülgse kolmnurga nurk võrdub 60^0-ga. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga teravnurk on 45^0. Kolmnurgas võib ainult üks täis- või nürinurk olla.**



90. joonis.
Mitte-kumer nelinurk.

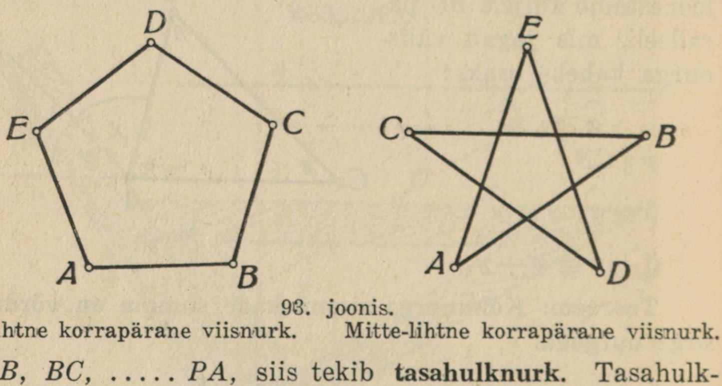


91. joonis.
Mitte-lihtne nelinurk.



92. joonis. Mitte-kumer hulknurk.

Hulknurgad. Kui tasapinnal märkida punktid *A, B, C, ... P* ning selles järjekorras ühendada lõikudega



93. joonis.
Lihtne korrapärane viisnurk. Mitte-lihtne korrapärane viisnurk.

AB, BC, ... PA, siis tekib **tasahulknurk.** Tasahulknurka nimetatakse l i h t s a k s, kui ta kahel küljel ei leidu ühiseid punkte, peale tippude, kus kohtuvad kaks lähiskülge.

Lihtsat tasahulknurka nimetatakse **kumeraks**, kui ta sisenurgad on kõik väiksemad kui 180°. Kui hulknurgal on n tippu, siis nimetatakse teda n-nurgaks.

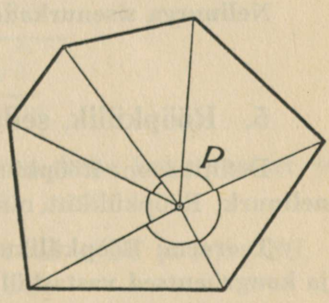
Tasahulknurka nimetatakse korrapäraseks, kui ta küljed on kõik ühepikkused ja sisenurgad kõik ühesuurused.

Varrastest saab kergesti valmistada mitte-tasanelinurga või mitte-tasahulknurga mudeli. Kolmnurk ei saa olla mitte-tasane, mitte-lihtne ega mitte-kumer.

Edaspidi on sõnaga „hulknurk“, kui pole teisiti öeldud, mõistetud tasast, lihtsat ja kumerat hulknurka (n-nurka).

Teoreem: n-nurga sisenurkade summa on võrdne $(n-2) \cdot 180^0$.

Tõestus: Valime hulknurga (94. joonis) sees vabalt mingi punkti P, ühendame selle kõikide tippudega, saame n kolmnurka. Iga kolmnurga sisenurkade summa on 180°, seega kõikide kolmnurkade sisenurkade summa kokku on $n \cdot 180^0$. Hulknurga nurkade hulka ei kuulu need kolmnurkade nurgad, mis on punkti P ümber; need moodustavad kokku täispöörde, s. o. 360° või $2 \cdot 180^0$; selle peame lahutama $n \cdot 180^0$-st, et saada hulknurga sisenurkade summa:



94. joonis.

$$n \cdot 180^0 - 2 \cdot 180^0 = (n-2) \cdot 180^0.$$

Viimasest teoreemist järeldame kergesti järgmise teoreemi: **Hulknurga välisnurkade summa on võrdne 360°-ga.**

Tõestus: n-nurgal on n välisnurka, millest igaüks koos oma sisenurgaga moodustab sirge nurga, s. o. 180°; kõik välisnurgad koos sisenurkadega on siis $n \cdot 180^0$.

Et saada välisnurkade summa, tuleb $n \cdot 180^0$-st lahutada sisenurkade summa $(n - 2) \cdot 180^0$. Nii saame:

$$n \cdot 180^0 - (n - 2) \cdot 180^0 = n \cdot 180^0 -$$
$$- (n \cdot 180^0 - 2 \cdot 180^0) = n \cdot 180^0 -$$
$$- n \cdot 180^0 + 2 \cdot 180^0 = 2 \cdot 180^0 = 360^0.$$

Nii on n-nurga välisnurkade summa 360^0, olgu n kui suur tahes.

5. Otsese järeldusena viimasest lausest saame:

Kolmnurga välisnurkade summa võrdub 360^0-ga.

Nelinurga välisnurkade summa võrdub 360^0ga.

Nelinurga sisenurkade summa saame arvutada, tarvitades valemit $(n - 2) \cdot 180^0$, võttes $n = 4$:

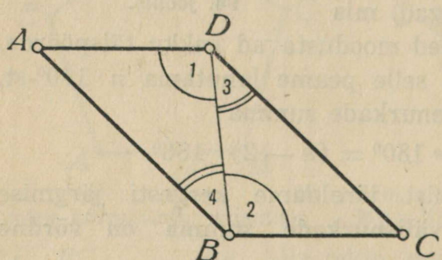
$$(4 - 2) \cdot 180^0 = 360^0.$$

Nelinurga sisenurkade summa on võrdne 360^0-ga.

5. Rööpkülik, selle omadused ja erikujud.

Definitsioon: **Rööpkülik on rööbikute vastasküljedega nelinurk.** Rööpkülikut nimetatakse ka **parallelogrammiks.**

Teoreem: Rööpkülikul on kongruentsed vastasnurgad ja kongruentsed vastasküljed (95. joonis).



95. joonis.

Eeldus: $AD \parallel BC$
$AB \parallel DC$

Väide: $\hat{A} \equiv \hat{C}$
$\hat{D} \equiv \hat{B}$
$AD \equiv BC$
$AB \equiv DC.$

Tõestus: Tipud B ja D ühendame diagonaaliga; saame kolmnurgad ADB ja BDC, millede kohta saab tõestada, et nad on kongruentsed.

$$\frac{\dfrac{AD \parallel BC}{\hat{1} \equiv \hat{2} \ldots \text{ põiknurgad}} \qquad \dfrac{AB \parallel DC}{\hat{3} \equiv \hat{4}} \qquad DB \equiv DB}{\dfrac{\triangle ADB \equiv \triangle CBD}{\begin{array}{c} AD \equiv BC \\ AB \equiv DC \\ \hat{A} \equiv \hat{C} \end{array}} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\hat{1} \equiv \hat{2} \\ \hat{3} \equiv \hat{4}\end{array}}{\hat{1} + \hat{3} \equiv \hat{2} + \hat{4}}}{\hat{D} \equiv \hat{B}.}}$$

Teoreem: Kongruentsete vastaskülgedega nelinurk on rööpkülik (95. joonis).

Eeldus: $AD \equiv BC$ $\quad$ Väide: $AD \parallel BC$

$AB \equiv DC.$ $\quad$ $AB \parallel DC.$

Tõestus: Ühendame tipud B ja D diagonaaliga, saame kolmnurgad ADB ja BDC, mis on III kongr.-lause järgi kongruentsed: $\triangle ADB \equiv \triangle CBD$

$$\frac{\triangle ADB \equiv \triangle CBD}{\dfrac{\hat{1} \equiv \hat{2}}{AD \parallel BC} \qquad \dfrac{\hat{3} \equiv \hat{4}}{AB \parallel DC.}}$$

Teoreem: Nelinurk, millel on kaks kongruentset ja rööbikut külge, on rööpkülik (95. joonis).

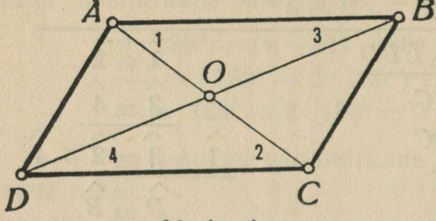
Sama lause lühendatult: kui $AD \equiv BC$ ja $AD \parallel BC$, siis $AB \parallel DC$.

Tõestus: Jaotame nelinurga $ABCD$ diagonaaliga BD kaheks kolmnurgaks ja näitame, et need kolmnurgad on kongruentsed.

$$\frac{\dfrac{AD \parallel BC.}{\hat{1} \equiv \hat{2};} \quad \begin{array}{c} DB \equiv DB \\ AD \equiv BC \end{array}}{\dfrac{\triangle BAD \equiv \triangle DCB \ldots \text{ I kongr. ls.}}{\dfrac{\hat{3} \equiv \hat{4}}{AB \parallel DC;}}}$$

seda oligi tarvis tõestada.

Teoreem: Rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist (96. joonis).



96. joonis.

Lüh.: Kui $AB \parallel DC$ ja
$AD \parallel BC$,
siis $AO \equiv OC$
ja $DO \equiv BO$.

Tõestus: Näitame, et kolmnurgad AOB ja DOC on kongruentsed.

Me teame juba, et rööpkülikul on kongruentsed vastasküljed, seega $AB \equiv DC$.

$$\frac{\text{Et } AB \parallel DC.}{\hat{1} \equiv \hat{2};\ \hat{3} \equiv \hat{4}}$$

$$\triangle AOB \equiv \triangle DOC \text{ .... II kongr. ls.}$$

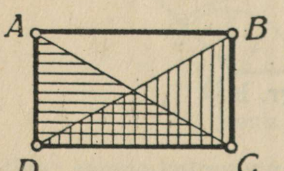
$AO \equiv OC$ ja $OB \equiv DO$, mis oli tarvis tõestada.

Ristkülik. Definitsioon: **Ristkülik on kongruentsete nurkadega rööpkülik.**

Et ristkülik on rööpkülik, siis on tal kõik rööpküliku omadused.

Et nelinurga sisenurkade summa on 360^0, siis on ristkülikus iga nurk 90^0.

Teoreem: Ristküliku diagonaalid on kongruentsed (97. joonis).



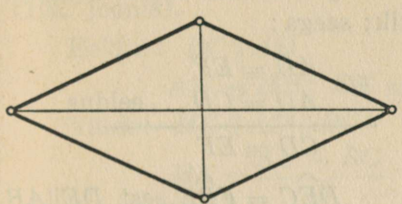
97. joonis.

Tõestus: $AD \equiv BC$
$DC \equiv DC$
$A\hat{D}C \equiv B\hat{C}D$

$$\triangle ADC \equiv \triangle BCD$$

$$AC \equiv BD$$

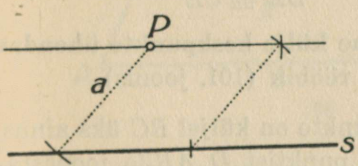
Romb. Nagu varemalt defineerisime, on romb kongruentsete külgedega nelinurk. Sellest definitsioonist ja rööpküliku omadusist järgneb rombi uus definitsioon: **romb on kongruentsete külgedega rööpkülik** (98. joonis). Seega on rombil kõik rööpküliku omadused. Peale selle on, nagu teada varemalt, rombi diagonaalid risti teineteisega ja nad on rombi sümmeetriatelgedeks.



98. joonis.

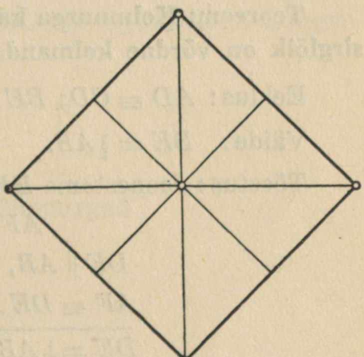
Ülesanne. Antud sirgele *s* ehitada paralleel antud punktis *P*.

Konstruktsioon: Vabalt valitud küljest *a* ehitame rombi, lähtudes tipust *P* (99. joonis).



99. joonis.

Ruut. Definitsioon: **Ruut on korrapärane nelinurk** (100. joonis). Sellest järgneb, et ruut on nii rööpkülik, ristkülik kui ka romb; ruudul on seega nende kõikide omadused. Kerge on näidata, et ruudul on 4 sümmeetriatelge, mis kõik lõikuvad ühes punktis, — see on ruudu keskpunkt.



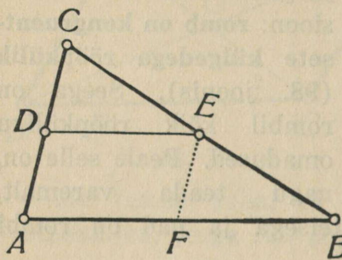
100. joonis.

6. Trapets.

Teoreem: Kolmnurga külje keskpunktist teisele küljele joonestatud rööpsirge poolitab kolmanda külje (101. joonis).

Eeldus: $AD \equiv CD$; $DE \parallel AB$. Väide: $BE \equiv CE$.

Tõestus: Kui punktis E joonestame AC-le rööbiku EF, siis on $AFED$ rööpkülik; seega:



101. joonis.

$$\begin{array}{l} AD \equiv EF \\ AD \equiv CD \ldots \text{eeldus} \\ \hline CD \equiv EF \\ \widehat{DEC} \equiv \widehat{FBE}, \text{sest } DE \parallel AB \\ \widehat{DCE} \equiv \widehat{FEB}, \text{sest } AC \parallel FE \\ \hline \triangle DCE \equiv \triangle FEB \\ \hline BE \equiv CE \end{array}$$

Teoreem: Kolmnurga kahe külje keskpunkte ühendav sirglõik on kolmanda küljega rööbik (101. joonis).

Tõestus: Et poolitamispunkte on küljel BC üks ainus, siis peab DE kokku langema punktist D AB-le joonestatud rööbikuga.

Teoreem: Kolmnurga kahe külje keskpunkte ühendav sirglõik on võrdne kolmanda külje poolega (101. joonis).

Eeldus: $AD \equiv CD$; $BE \equiv CE$.

Väide: $DE = \frac{1}{2} AB$.

Tõestus: Joonestame $EF \parallel CA$, siis on

$$AF \equiv BF = \tfrac{1}{2} AB$$

$$DE \parallel AB, \text{ seepärast on}$$

$$\begin{array}{l} AF \equiv DE \\ \hline DE = \tfrac{1}{2} AB. \end{array}$$

Definitsioon: **Trapets on ühe paari rööbikute küljedega nelinurk.**

Mitte-rööbikute külgede keskpunkte ühendavat sirglõiku nimetatakse trapetsi **kesklõiguks**. Rööbikuid külgi nimetatakse alusteks.

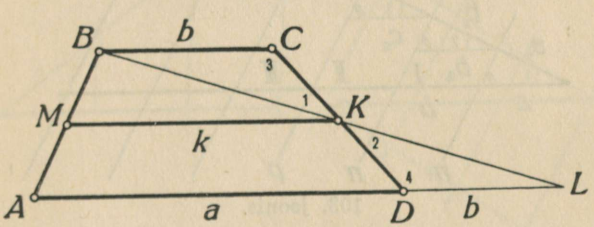
Teoreem: Trapetsi kesklõik on alustega rööbiti ja tema pikkus on aluste pikkuste aritmeetiline keskmine (102. joonis).

Eeldus: $BC \parallel AD$

$AM \equiv MB$; $DK \equiv KC$

Väide: $MK \parallel AD \parallel BC$

$$MK = \frac{AD + BC}{2}$$



102. joonis.

Tõestus: Joonestame sirge BK; see lõikub AD pikendisega punktis L.

Nüüd näitame, et $\triangle KBC$ ja $\triangle KDL$ on kongruentsed.

Et $BC \parallel AD$

$\widehat{3} \equiv \widehat{4}$,

$\widehat{1} \equiv \widehat{2}$, sest nad on tippnurgad

$CK \equiv KD$ ... eeldus

$\triangle BKC \equiv \triangle DKL$

$BC \equiv DL$; $BK \equiv KL$

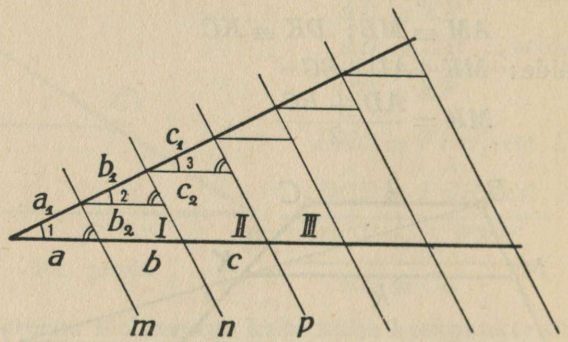
$\triangle$-st ABL võime kirjutada: $MK \parallel AL$ ja sellega $MK \parallel BC$;

peale selle $MK = \frac{1}{2} AL = \dfrac{AD + DL}{2}$

Asendades DL BC-ga saame: $MK = \dfrac{AD + BC}{2}$, lühemalt

$$k = \frac{a + b}{2}$$

Teoreem: Kui paralleeljoonte parv jaotab võrdseteks lõikudeks nurga ühe haara, siis jaotab ta võrdseteks lõikudeks ka teise (103. joonis).



103. joonis.

Eeldus: $a = b = c = \ldots.$; $m \parallel n \parallel p \parallel \ldots..$

Väide: $a_1 = b_1 = c_1 = \ldots.$

Tõestus: Joonestame $b_2 \parallel b$; $c_2 \parallel c$; ..., siis on kujundid I, II, III.... rööpkülikud, seega

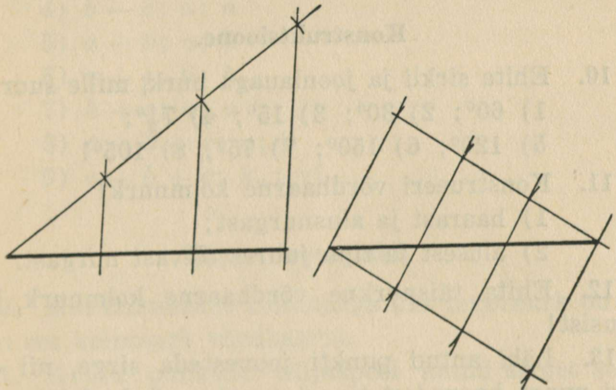
$$\begin{array}{l} b_2 = b;\ c_2 = c, \ldots\ldots \\ a = b = c = \ldots\ldots \\ \hline a = b_2 = c_2 = \ldots\ldots \end{array}$$

II kongr. ls. järgi on siis kolmnurgad 1, 2, 3... kongruentsed, ja järelikult vastavad küljed a_1, b_1, c_1... ühepikkused.

Ülesanne. Antud sirglõik jagada *n* võrdseks osaks (104. joonis).

Konstruktsioon: 1) Antud sirglõigu otsast joonestame vabalt sirge, nii et tekib nurk. Vabalt võetud haarale paneme sirklihaarade vaba vahega n võrdset lõiku. Viimase lõigu otsapunkti ühendame antud sirglõigu otsaga ja joonestame sellele ühendusjoonele siis paralleelid, mis jagavad antud sirglõigu n võrdseks osaks.

2) Teisiti võib nii teha: läbi antud sirglõigu otsapunktide joonestame kaks vaba paralleelsirget, nendele paralleelidele paigutame n võrdset lõiku, ja ühendame jaotuspunktid, nagu näha joonisel.



104. joonis.

Ülesandeid.

1. Võrdhaarse kolmnurga tippnurk on 1) 25^0; 2) $89^0\,40'$; 3) $48{,}3^0$. Kui suured on alusnurgad?

2. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on 1) 13^0; 2) 55^0; 3) $142^0\,26'$; 4) $27{,}6^0$. Kui suur on nurk tipu juures?

3. Võrdhaarse kolmnurga tipu juures olev välisnurk on 1) 55^0; 2) $142^0\,26'$. Kui suured on sisenurgad?

4. Võrdhaarse kolmnurga aluse juures olev välisnurk on 1) 119^0; 2) $146^0\,59'$. Kui suured on selle kolmnurga nurgad?

5. Täisnurkses kolmnurgas on üks teravnurk 36^0. Kui suur on teine teravnurk?

6. Kui suur on 1) 5-nurga; 2) 6-nurga; 3) 7-nurga; 4) 8-nurga sisenurkade summa?

7. Kui suur on iga nurk korrapärases 1) 5-nurgas; 2) 6-nurgas; 3) 7-nurgas; 4) 8-nurgas; 5) 9-nurgas; 6) 12-nurgas?

8. Kui suur on rööpkülikus ühe külje lähisnurkade summa?

9. Rööpkülikus on üks nurk 90^0, kui suured on teised?

Konstruktsioone.

10. Ehita sirkli ja joonlauaga nurk, mille suurus on
1) 60^0; 2) 30^0; 3) 15^0; 4) $7\frac{1}{2}^0$;
5) 120^0; 6) 150^0; 7) 75^0; 8) 105^0!

11. Konstrueeri võrdhaarne kolmnurk!
1) haarast ja alusnurgast;
2) alusest ja tipu juures olevast nurgast.

12. Ehita täisnurkne võrdhaarne kolmnurk hüpotenuusist!

13. Läbi antud punkti joonestada sirge, nii et ta antud nurga haaradest tipust arvates võrdsed lõigud ära lõikaks.

14. Ehita rööpkülik!
1) lähisküIgedest ja nurgast;
2) lähisküIgedest ja diagonaalist;
3) küljest, diagonaalist ja nurgast;
4) diagonaalidest ja nende vahel olevast nurgast;
5) diagonaalidest ja küljest.

15. Ehita ristkülik küljest ja diagonaalide vahel olevast nurgast!

16. Ehita romb
1) küljest ja diagonaalist;
2) diagonaalidest!

17. Jaga antud sirglõik 5-ks võrdseks osaks!

18. Konstrueeri sirglõik x, kui a ja b on antud sirglõigud $(a > b)$!

1) $x = \frac{4a}{3}$; 2) $x = \frac{a+2b}{5}$; 3) $x = \frac{4a-b}{5}$;
4) $x = \frac{1}{3}(a-b)$; 5) $x = 1\frac{1}{3}(a+2b)$.

19. Ehita kolmnurk, kui on antud

1) $a + b$; c; α
2) $a - b$; c; α
3) $b + c$; a; γ
4) $b - c$; a; α
5) $a + b$; α; β
6) $a + c$; b; h_c
7) $b + c$; a; α
8) $a + b + c$; α; β
9) $a + b + c$; h_a; γ!

Tõesta teoreemid!

20. Kui täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on 45^0, siis on see kolmnurk võrdhaarne.

21. Antud punktist väljaspool antud sirget sellele sirgele joonestatud ristlõik on lühem kui kaldlõik.

22. Võrdhaarse trapetsi alusnurgad on kongruentsed.

23. Kui kahes võrdhaarses kolmnurgas on tipu juures olevad nurgad kongruentsed, siis on ka alusnurgad kongruentsed.

24. Kui võrdhaarse kolmnurga haara pikendada tipu poole ta enese pikkuse võrra ja otsapunkt ühendada teise haara otsaga, siis on see ühendusjoon risti alusega.

25. Võrdhaarse kolmnurga tipu juures oleva välisnurga poolitaja on alusega rööbik.

26. Kui võrdhaarses kolmnurgas joonestada alusele paralleelsirge, siis on äralõigatud kolmnurk võrdhaarne.

27. Kui võrdhaarse kolmnurga tipu juures olev nurk on 36^0, siis jagab alusnurga poolitaja selle kolmnurga kaheks võrdhaarseks kolmnurgaks.

28. Võrdhaarse kolmnurga haaradele joonestatud kõrgused on kongruentsed.

29. Kongruentsete kolmnurkade vastavad küljepoolitajad on kongruentsed.

30. Kongruentsete kolmnurkade vastavad kõrgused on kongruentsed.

31. Kongruentsete kolmnurkade vastavad nurgapoolitajad on kongruentsed.

32. Kolmnurga külgede keskpunkte ühendavad sirglõigud jagavad kolmnurga neljaks kongruentseks kolmnurgaks.

33. Rööpküliku nurgapoolitajad moodustavad ristküliku.

34. Ristküliku nurgapoolitajad moodustavad ruudu.

35. Ristküliku külgede keskpunktid on rombi tippudeks.

36. Rombi külgede keskpunktid on ristküliku tipud.

37. Nelinurk, mille diagonaalid teineteist poolitavad, on rööpkülik.

38. Nelinurk, mille diagonaalid on risti ja teineteist poolitavad, on romb.

39. Nelinurk, mille diagonaalid on kongruentsed ja teineteist poolitavad, on ristkülik.

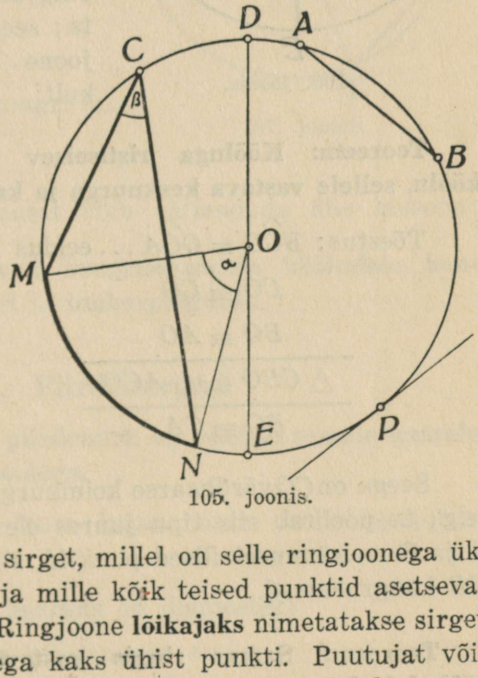
40. Tippnurkade poolitajad moodustavad sirge joone.

VII. Ringjoon.

1. Definitsioone.

Ringjoone kahte punkti ühendavat sirglõiku AB nimetatakse **kõõluks** (105. joonis). Keskpunkti läbivat kõõlu DE nimetatakse **diameetriks.** Nurka kahe raadiuse vahel nimetatakse **kesknurgaks** (α). **Piirdenurgaks** (β) nimetatakse nurka, mille tipp asetseb ringjoonel ja mille haaradeks on kõõlud.

Kaare kohta, mis on piirdenurga või kesknurga haarade vahel, kõneldakse, et piirdenurk või kesknurk t o e t u b temale. Joonisel toetuvad nurgad α ja β ühele ja samale kaarele MN.

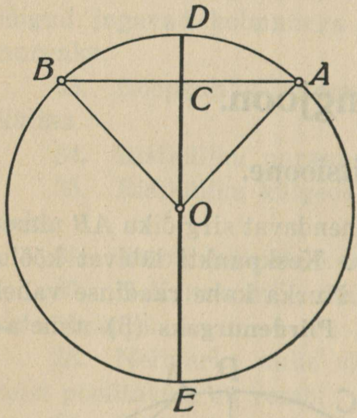


105. joonis.

Ringjoone **puutujaks** nimetatakse sirget, millel on selle ringjoonega üks ainus ühine punkt ja mille kõik teised punktid asetsevad ringist väljaspool. Ringjoone **lõikajaks** nimetatakse sirget, millel on ringjoonega kaks ühist punkti. Puutujat võib vaadelda kui lõikajat, mille lõikepunktid ühtivad.

2. Ringjoone sümmeetria.

Teoreem: Ringjoone sümmeetriateljeks on diameeter (106. joonis).



106. joonis.

Tõestus: Kui ringi tasapind diameetrit DE mööda kahekorra murda, siis langeb mistahes ringjoone punkt A kindlasti ühte ringjoone mõne teisel pool diameetrit asuva punktiga B, sest ringjoone punktid asuvad keskpunktist O kõik ühekaugusel. See on kehtiv ringjoone iga punkti kohta; seega kattub üks ringjoone pool teisega täielikult.

Teoreem: Kõõluga ristiseisev diameeter poolitab kõõlu, sellele vastava kesknurga ja kaare (106. joonis).

$$\text{Tõestus: } \widehat{BCO} \equiv \widehat{OCA} \ldots \text{eeldus}$$

$$CO \equiv CO$$

$$BO \equiv AO$$

$$\overline{\triangle\, CBO \equiv \triangle\, ACO}$$

$$\overline{BC \equiv CA.}$$

Seega on CO võrdhaarse kolmnurga BOA sümmeetriatelg; ta poolitab siis tipu juures oleva nurga BOA. Et A ja B on sümmeetrilised punktid, siis on kaared DA ja DB kongruentsed.

Teoreem: Samas ringis vastavad kongruentsetele kõõludele kongruentsed kesknurgad (107. joonis).

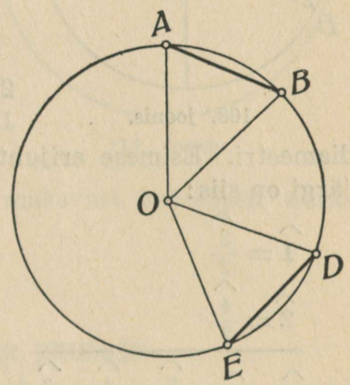
Eeldus: $AB \equiv DE$

Väide: $\widehat{AOB} \equiv \widehat{EOD}$

Tõestus: $\triangle AOB \equiv \triangle EOD$.... III kongr. ls.

$$\widehat{AOB} \equiv \widehat{EOD}.$$

Teoreem: Samas ringis vastavad kongruentsetele kesknurkadele kongruentsed kõõlud (107. joonis).



107. joonis.

Tõestus:

$\widehat{AOB} \equiv \widehat{EOD}$.... eeldus

$OA \equiv OE$

$OB \equiv OD$

$\triangle AOB \equiv \triangle EOD$....

I kongr. ls.

$$AB \equiv ED.$$

Kaht viimast lauset võib väljendada ühe lausena:

Samas ringis vastavad kongruentsetele kõõludele kongruentsed kesknurgad ja ümberpöördult.

3. Piirdenurgad.

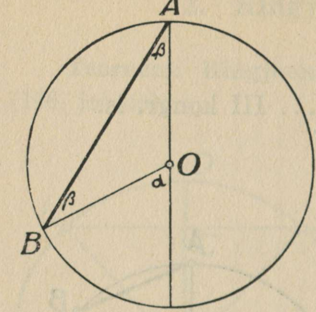
Teoreem: Ringi piirdenurk on võrdne samale kaarele toetuva kesknurga poolega.

Tõestame selle lause kolmes osas, vaadeldes kolme erijuhtumit:

1) piirdenurga haaraks on diameeter;

2) keskpunkt on piirdenurga sees;

3) keskpunkt on piirdenurgast väljas.



108. joonis.

1. e r i j u h t u m (108. joonis).

$$\overline{OB \equiv OA}$$

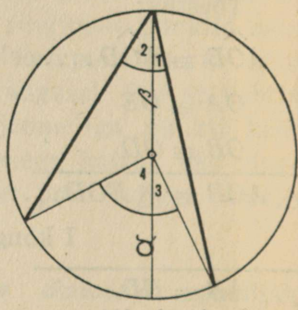
$$\widehat{OAB} \equiv \widehat{OBA} \equiv \beta$$

$$\beta + \beta = \alpha$$

$$2\beta = \alpha$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2}.$$

2. e r i j u h t u m (109. joonis). Joonestame piirdenurga tipust diameetri. Esimese erijuhtumi järgi on siis:



109. joonis.

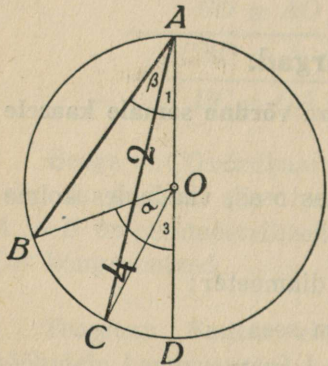
$$\widehat{1} = \frac{\widehat{3}}{2}$$

$$\widehat{2} = \frac{\widehat{4}}{2}$$

$$\widehat{1} + \widehat{2} = \frac{\widehat{3}}{2} + \frac{\widehat{4}}{2} = \frac{\widehat{3} + \widehat{4}}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

3. e r i j u h t u m (110. joonis). Antud piirdenurk on $BAC = \beta$, samale kaarele BC toetuv kesknurk on $BOC = \alpha$. Piirdenurga tipust A joonestame diameetri AD.



110. joonis.

Märgime nurga CAD 1-ga, nurga BAD 2-ga, nurga COD 3-ga, nurga BOD 4-ga.

$$\widehat{2} = \frac{\widehat{4}}{2}$$

$$\widehat{1} = \frac{\widehat{3}}{2}$$

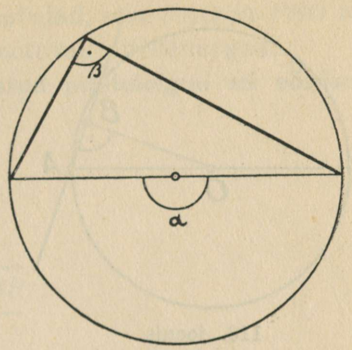
$$\widehat{2} - \widehat{1} = \frac{\widehat{4}}{2} - \frac{\widehat{3}}{2} = \frac{\widehat{4} - \widehat{3}}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

Teoreem (Thales'e lause): Diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk (111. joonis).

Tõestus :

$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$
$$\alpha = 180^0$$
$$\overline{\beta = 90^0.}$$

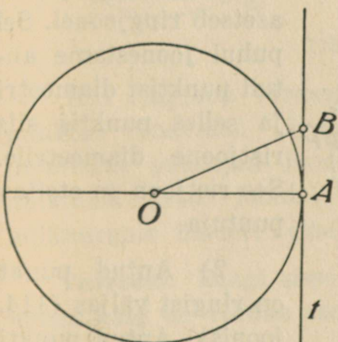


111. joonis.

Kontrolli Thales'e lause maksvust katseliselt nurklaua abil!

4. Ringjoone puutuja.

Teoreem: Diameetri otsapunktis temaga risti seisev sirge on ringi puutuja (112. joonis).



112. joonis.

Tõestus: Olgu A sirge t ja ringjoone ühine punkt:

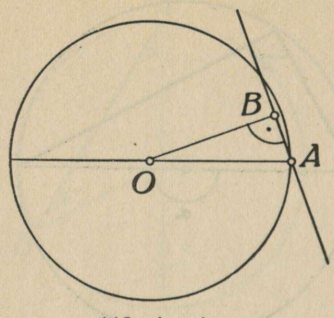
$$t \perp OA.$$

Valime sirgel peale A mistahes punkti B, siis on

$$OB > OA, \text{ sest } \hat{A} > \hat{B};$$

seega ei saa punkt B olla ringjoonel. A on siis ainus sirge t ja ringjoone ühine punkt; järelikult on t puutuja.

Teoreem: Diameetri otsapunktis diameetriga kaldu seisev sirge on ringjoone lõikaja (113. joonis).



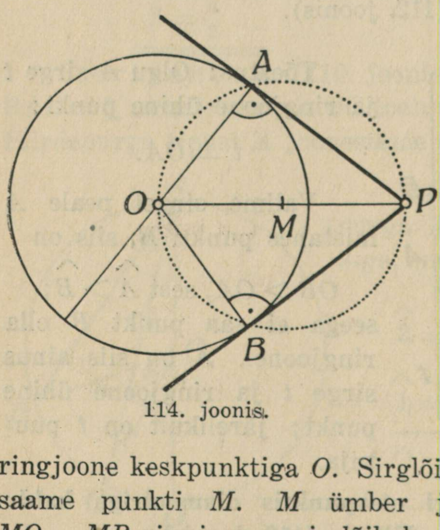
113. joonis.

Tõestus: Joonestame $OB \perp AB$, siis on $OB < OA$, seega on punkt B ringi sees. Kui sirget AB jätkata B poole, siis peab ta ringjoonega peale A veel teises punktis lõikuma.

Teoreem: Ringi puutuja on risti puutepunktist lähtuva diameetriga.

Tõestus: Kui puutuja ei oleks risti, vaid kaldu diameetriga, siis peaks ta olema ringjoone lõikaja.

Ülesanne. Antud punktis ringjoonele puutuja joonestada.



114. joonis.

Konstruktsioon:

1) Antud punkt asetseb ringjoonel. Sel puhul joonestame antud punktist diameetri ja selles punktis siis ristjoone diameetrile. See ristjoon on otsitav puutuja.

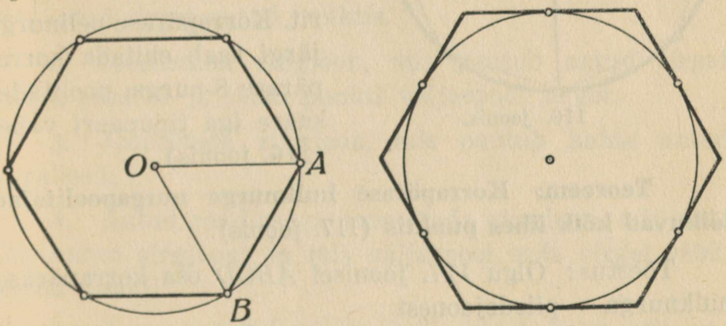
2) Antud punkt on ringist väljas (114. joonis). Antud punkti P ühendame antud ringjoone keskpunktiga O. Sirglõigu OP jagame pooleks, saame punkti M. M ümber joonestame raadiusega $MO \equiv MP$ ringjoone, mis lõikab antud ringjoont punkti-

des A ja B. PA ja PB on puutujad, sest PAO ja PBO on täisnurgad, kui diameetrile toetuvad piirdenurgad.

Punktist ringile joonestatud puutelõigud on võrdsed (114. joonis).

Tõestus:
$$\begin{array}{c} OA \equiv OB \\ OP \equiv OP \\ \widehat{OAP} \equiv \widehat{OBP} \\ \hline \triangle OAP \equiv \triangle OBP \\ \hline AP \equiv BP. \end{array}$$

5. Ringjoon ja korrapärane hulknurk.



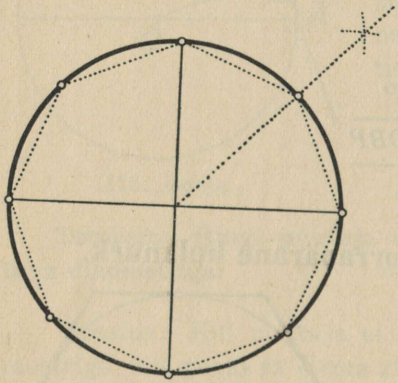
115. joonis.

Kui ringjoon võrdseteks osadeks jagada ja jaotuspunktid omavahel järgemööda ühendada või jaotuspunktides puutujad joonestada, siis tekib korrapärane hulknurk (115. joonis). Esimesel juhul on ringjoon hulknurgale ümber, teisel juhul sisse joonestatud.

Teoreem: Ringi sisse joonestatud korrapärase kuusnurga külg on võrdne raadiusega.

Tõestus: $\triangle OBA$ on võrdhaarne, sest $OA \equiv OB$. $\widehat{O} = 60^0$, sest ta on $\frac{1}{6}$ täispöördest, siis peavad ka nurgad A ja B olema 60^0. Sellega on $\triangle OAB$ võrdkülgne. Nii on
$$AB = OA.$$

Korrapärase kuusnurga joonestamine ringi sisse on nii siis väga kerge. Korrapärase kolmnurga joonestamiseks ühendame kuusnurga tipud üle ühe.



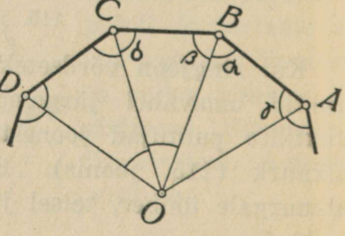
116. joonis.

Korrapärase 12-nurga joonestamiseks jaotame iga kaare kuusnurga tippude vahel pooleks, joonestades kuusnurga igale tipupaarile sümmeetriatelje.

Korrapärase nelinurga ehitamiseks konstrueerime kaks ristiseisvat diameetrit. Korrapärase nelinurga järgi saab ehitada korrapärase 8-nurga, poolitades kaare iga tipupaari vahel (116. joonis).

Teoreem: Korrapärase hulknurga nurgapoolitajad lõikuvad kõik ühes punktis (117. joonis).

Tõestus: Olgu 117. joonisel $ABCD$ osa korrapärase hulknurga piirdejoonest ning AO ja BO selle hulknurga kahest naabertipust joonestatud nurgapoolitajad. O on nende lõikepunkt. Ühendame selle lõikepunkti järgmise tipuga C.



117. joonis.

Et hulknurk on korrapärane, siis $AB \equiv BC$; et BO on nurgapoolitaja, siis $\alpha \equiv \beta$, $OB \equiv OB$. Järelikult $\triangle\, OAB \equiv \triangle\, OCB$ (I kongr. lause). $\triangle\, OAB$ on võrdhaarne, sest $\alpha \equiv \gamma$, kui pooled kongruentsetest nurkadest. Sel põhjusel on siis ka $\triangle\, OCB$ võrdhaarne ning $\delta \equiv \beta$, järelikult on δ samuti pool hulknurga sisenurgast. Seega on ka *CO* nurgapoolitaja, teiste sõnadega, kaks järjest võetud nurgapoolitajat lõikuvad punktis, kuhu tuleb ka järgmine nurgapoolitaja. Sellest järeldame, et korrapärase hulknurga k õ i k nurgapoolitajad lõikuvad ühes punktis.

See punkt on kõigist tippudest ühekaugusel ja kõigist külgedest ühekaugusel, ta on nii ümber- kui sissejoonestatud ringjoone keskpunktiks. Teda nimetatakse hulknurga keskpunktiks.

Konstruktsioone.

1. Antud raadiusega joonestada ringjoon, mis puutub antud sirget antud punktis.

2. Joonestada ringjoon, mis puutub antud sirget antud punktis ja läbib punkti väljaspool sirget.

3. Joonestada ringjoon, mis puutub kahte antud paralleeli.

4. Antud raadiusega joonestada ringjoon, mis puutub antud sirgjoont ja mis väljaspool seda sirget läbib antud punkti.

5. Joonestada ringjoon, mis puutub kahte lõikuvat sirgjoont, ühte neist antud punktis.

6. Antud raadiusega joonestada ringjoon, mis puutub antud sirget ja mille keskpunkt on teisel antud sirgel.

7. Antud raadiusega joonestada ringjoon, mis puutub kahte lõikuvat sirget.

8. Antud ringjoonele joonestada kaks puutujat, mis moodustavad nurga 1) 60^0; 2) 90^0; 3) 120^0; 4) 45^0.

9. Antud ringjoonele joonestada puutuja, mis
   1) on antud sirgega rööbik;
   2) on antud sirgega risti;
   3) antud sirgega moodustab antud nurga.

10. Antud ringis joonestada antud pikkusega kõõl, mis
1) on antud sirgega rööbik;
2) on antud sirgega risti;
3) antud sirgega moodustab antud nurga.

11. Leia ringjoone keskpunkt!

12. Ehita korrapärane sissejoonestatud
1) 3-nurk; 2) 12-nurk;
3) 8-nurk; 4) 16-nurk!

13. Ehita korrapärane ümberjoonestatud
1) 6-nurk; 2) 12-nurk;
3) 4-nurk; 4) 8-nurk!

SISUKORD.

Esimene osa.

I. Geomeetrilisi kujundeid.

II. Kujundite omadusi.

III. Tõestus ja selle vajadus.

IV. Teljeline sümmeetria tasapinnal.

V. Kolmnurgad ja nende kongruentsus.

VI. Paralleelsed sirged ja parallelogrammid.

VII. Ringjoon.

Jhv

TÜ RAAMATUKOGU
10300014982542

A-11079

Hind 1 kr. 35 senti