4503. 4504. 4505.

Est. A-11616

Lehrbuch

der

demonstrativen gemeinen Arithmetik.

Für

Schul-Unterricht und Selbst-Studium.

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
90391

Von

Johann Friedrich Heinrichsen,
ehemaligem Kreisschul-Lehrer.

(Preis für das Lehrbuch sammt den Aufgaben und Resultaten, jedes besonders brochirt, 1 Rub. 20 Kop. S..)

Eigenthum des Verfassers.

Dorpat.

Gedruckt bei J. C. Schünmann's Wittwe und C. Mattiesen.

1855.

Der Druck dieser Schrift wird unter der Bedingung gestattet, daß nach Beendigung desselben der Abgetheilten Censur in Dorpat die vorschriftmäßige Anzahl Exemplare zugestellt werde.

Dorpat, den 19. April 1855. Abgetheilter Censor de la Croix.

Est. A
Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
18493

Den Manen

seines hochverehrten Lehrers und Freundes,

weil. Lehrers der reinen und angewandten Mathematik
an der Ritter- und Domschule zu Reval,

Georg Adolph Blasche,

geb. zu Jena am 25. April 1758,
gest. zu Reval am 21. April 1831,

der ihm unvergeßlich geblieben ist, wie allen Denen,
die, bei Eifer für die Sache, das Glück gehabt haben,
seine Zuhörer zu sein,

widmet dieses Buch

als Denkmal seiner innigen Dankbarkeit,
Verehrung und Liebe

der Verfasser.

Vorbericht.

Als ich vor mehr denn 40 Jahren den öffentlichen Unterricht in der gemeinen Arithmetik übernahm, sah ich mich vergeblich nach einem Lehrbuche um, welches die gemeine Arithmetik als Wissenschaft behandelte. Ich mußte mir also selbst ein Lehrbuch erst schaffen; und so ist dieses Buch, nach vielfältigen Umarbeitungen im Ganzen wie im Einzelnen, aus meinem eignen dringenden Bedürfnisse hervorgegangen.

Mein bei diesem in der Schule und durch die Schule entstandenen Buche nie aus den Augen gelassener Zweck war, ein zwar möglichst compendiöses, aber doch vollständiges, durchaus klar gehaltenes, und ungeachtet der nie mangelnden Gründlichkeit und mathematischen Schärfe leicht verständliches Lehrbuch für die gemeine Arithmetik zu verfassen, welches, auf jede an dasselbe gestellte Frage eines wißbegierigen und selbstdenkenden Schülers, diesem völlig genügende Auskunft ertheile; wie man solches alles mit Recht von einem Buche verlangen darf, das auf den Namen eines Lehrbuches Anspruch machen will. — Die Grundlage dieses Buches sollte rein mathematisch, die Tendenz rein practisch sein. Und darum habe ich dieses mein Buch Lehrbuch der demonstrativen, d. i. der beweisenden, gemeinen Arithmetik genannt.

Daß es ein schädliches Vorurtheil ist, wenn man etwa meint, eine vollständige Entwickelung und Auseinandersetzung der aus Beispielen hergenommenen Gründe, auf welche man eine tüchtige practische Übung folgen läßt, halte den Schüler beim Unterrichte im Rechnen nur auf, der eigentlich bloß darin bestehen müsse, daß man, die Gründe nur beiläufig erwähnend, den Lernenden nur recht viele Exempel rechnen lasse — davon habe ich mich durch 30-jährige Schul-Erfahrung auf das Vollständigste überzeugt, denn meine, auf die angedeutete Weise von mir unterrichtete Schüler wurden, neben erlangten gründlichen Kenntnissen, sehr tüchtige Rechner. Das

Denken-Lernen hält übrigens nie auf, sondern im Gegentheil, es fördert — und warum sollte denn nicht auch die gemeine Arithmetik als das was sie wirklich ist, als Bildungsmittel für den Verstand angesehen, und beim Unterrichte dem gemäß behandelt werden, um so mehr, da höhere mathematische Studien sich auf dieselbe gründen; ein Fundament aber muß vest sein, wenn das Gebäude selbst haltbar sein soll. — Ein späteres Nachholen der dahin gehörigen Gründe ist, bei der natürlichen Einrichtung der Schulen, die stets weiter gehen, theils unstatthaft, theils trägt sie überhaupt, auch bei einem etwanigen nachholen sollenden Privat-Unterricht — wie ich auch davon mich mehrfach überzeugt habe — keine Frucht, da der Schüler bereits an Oberflächlichkeit gewöhnt ist.

Der Unterricht nach diesem Buche wäre, nach vorhergegangener gehöriger Einübung der vier Species in unbenannten und benannten ganzen Zahlen, sogleich mit meiner Lehre von den gemeinen Brüchen zu beginnen. Die vorläufigen neun Capitel wären zum Theil am bequemsten bei gelegentlichem Bedürfnisse vorzutragen.

Den Unterricht im dekadischen Zahlen-System, so wie in den vier Species in ganzen Zahlen habe ich weggelassen: den ersteren, weil er denn doch im Allgemeinen in den Schulen so ertheilt wird, wie er nicht anders zu ertheilen ist; und nur, weil ich aus dem Elementar-Unterrichte aufgenommene Knaben im Numeriren oft habe schwanken sehen, habe ich nicht für überflüssig gehalten, eine leichte und sichere Methode dafür (§ 3) anzugeben, und diese an einigen Beispielen zu erläutern — imgleichen die vier Species, denn wer diese bereits kennt, würde sie in meinem Buche nicht nachlesen, wer sie aber nicht kennt, würde sie nicht danach lernen. Die Gründe aber, worauf die vier Species beruhen, durften hier nicht fehlen.

Ganz umgehen konnte ich die Rechnung mit Buchstaben nicht, wie namentlich bei dem Beweise für den größten gemeinen Theiler zweier Zahlen (§ 31). Doch sind dieß nur leicht verständliche Ausdrücke durch Buchstaben; und meine Schüler haben sie, ohne alle hörere mathematische Kenntnisse, nach meiner hier ebenfalls angegebenen Erläuterung, alle Mal vollkommen wohl begriffen.

Hinsichtlich der Berechnung von Regel-detri-Exempeln mittels der Reduction will ich nicht gesagt haben, daß man so rechnen *solle*, sondern bloß, daß man so rechnen *könne*. Eine demonstrative Anweisung zum arithmetischen Verfahren muß allgemeine Ansicht gewähren, also auch diese Methode lehren. Jeden Falles giebt die bisweilige Anwendung derselben dem Schüler Gewandtheit im Rechnen, und er erkennt auch in diesem Falle die Wahrheit, daß man auf mehren Wegen einen und denselben Zweck erreichen kann.

Das eigentliche kaufmännische Rechnen gehört nicht in ein zum Gebrauch für Schulen bestimmtes Buch. Da dieses Rechnen sich aber nur auf die hier gegebenen Lehren gründet, so ist dasselbe zu seiner Zeit leicht daran geknüpft.

Die Anzahl der Beispiele im Exempel-Buche und in den Resultaten desselben ist mehr als völlig genügend zur vesten Einübung der im Lehrbuch gegebenen Regeln, wenn gleich nicht, wie bisweilen vielleicht verlangt werden möchte, um, ohne gründlichen wissenschaftlichen Vortrag des Lehrers nach dem Lehrbuche, die Schüler mit Ausrechnung von kaum verstandenen Exempeln die Lehrstunden hinbringen zu lassen; oder wohl gar, ihnen Exempel zum Ausrechnen nach Hause mitzugeben, so daß sie, um ihre übrigen Schul-Arbeiten nicht zu versäumen, oft genöthigt werden, diese Exempel von Andern sich ausrechnen zu lassen. Nach dieser, bereits oben von mir, meiner Erfahrung gemäß, als fehlerhaft getadelten Unterrichtsweise konnte eine größere von mir zu gebende Exempel-Menge nicht in dem durch den zweiten Absatz dieses Vorberichts bedingten Plane meines Lehrbuches liegen. Ein gewissenhafter Lehrer wird, wegen Stoffhaltigkeit des Lehrbuches, gar nicht die Zeit finden, um übermäßig viel Exempel rechnen zu lassen, da nach diesem Lehrbuche die Arithmetik in der Weise gelehrt werden soll wie jede andere mathematische Wissenschaft, für welche die Beispiele bloß Mittel, ganz und gar nicht aber Haupt-Zweck sind.

Im Exempel-Buche habe ich größere Multiplicationen und Divisionen ganzer Zahlen gegeben, weil man dieselben in den gewöhnlichen Exempel-Büchern meistens vermißt, und solche doch zur Erlangung von Fertigkeit unentbehrlich sind. Ein und dasselbe Exempel kann zu verschiedenen Zeiten zwei und mehrmals gerechnet werden. — Auch für Wurzel-Ausziehungen habe ich mehr große als kleine Exempel gegeben, sie aber durch Angabe der Wurzel-Reste je nach den correspondirenden Wurzel-Stellen, so eingerichtet, daß man aufhören kann, noch ehe das Exempel völlig bis zu seinem Ende, in so weit dieses hier angegeben, gerechnet ist. Überdieß kann ein solcher Gestalt nur zum Theil berechnetes Exempel der Wurzel-Ausziehung, nach geschehener Angabe der Decimal-Stellen, bis zu welchen bereits gerechnet worden, so wie nach Angabe des übrig gebliebenen Wurzel-Restes, in der folgenden Lehrstunde wieder aufgenommen werden, um es weiter rechnen zu lassen.

Zur Einübung der umgekehrten Regel detri habe ich mit Sorgsamkeit die verschiedenen Fälle gewählt, in denen diese Rechnungs-Art vorkommt, und absichtlich nicht zwei Exempel einerlei Art gegeben: die in den Resultaten dabei angegebene Erläuterung dieser Fälle in Beziehung auf das Zu- oder Abnehmen des einen Verhältnisses gegen das Ab- oder Zu-

nehmen des andern macht die später folgende zusammengesetzte Regel detri um so faßlicher.

Die Exempel für die Vermischungs-Rechnung sind ebenfalls mit Fleiß von mir gesammelt, um für die darin vorkommenden im gemeinen Leben nutzbaren Präparate die besten Zusammensetzungen angeben zu können. Auch habe ich dabei, wie bisweilen sich als nöthig zeigt, das Medicinal-Gewicht auf das Civil-Gewicht zurückführen gelehrt (s. Resultate Nr. 69, 71.)

Um mehr Mannigfaltigkeit in die Rechnungen zu bringen, habe ich neben den inländischen Münzen, Maaßen und Gewichten auch ausländische genommen. Jeden Falles aber bleibt der Unterricht nach dem Lehrbuche mit den darin enthaltenen arithmetischen Lehren für Inland eben so wohl wie für Ausland die Hauptsache.

Verwickelte und künstlich verschränkte, dem Anfänger absichtlich dunkel gemachte, die Einübung der arithmetischen Lehren ohne Noth erschwerende Aufgaben zu stellen, habe ich für unangemessen gehalten, da ich der Meinung bin, daß Anfänger vor allen Dingen erst das arithmetische Verfahren recht kennen lernen müssen. Das Übrige findet sich später von selbst, wenn ihr Verstand reifer und geübter geworden — man kann nicht zwei verschiedene Wege nach einem und demselben Ziel zu gleicher Zeit verfolgen. Und schon in dem wissenschaftlichen arithmetischen Unterrichte findet sich Verstandes-Übung genug.

Die Exempel für die gerade Regel detri, für die Zins-Rechnung, die einfache Gewinst und Verlust-Rechnung, wie auch einige andere für das bürgerliche Rechnen, so weit sie reichen, habe ich aus dem Exempel-Buche von Christian Karl Ludwig Klee (Reval 1803) nach angewandter, bisweilen nöthiger Correctur und Kritik, genommen; einige wenige, z. B. die drei Exempel für die zusammengesetzte Regel detri mit Zwischen-Verhältnissen, von andern Seiten her, von wo, weiß ich nicht mehr; alle übrigen mir nöthigen Exempel aber habe ich selbst angefertigt, so wie ich sie brauchte.

Dorpat,
am 15. Mai 1853.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Vorläufiges, § 1 — § 31.

I. Das Numeriren, § 1 — § 3.

II. Die vier Species, § 4 — § 17.

III. Die Neuner-Probe, § 18 — § 19.

IV. Reduction und Resolution, § 20 — § 21.

V. Zusammengesetzte Zahlen. Primzahlen und Primzahlen zu einander, § 22 — § 24.

VI. Messen. Zahl. Einheit. Theiler oder Maaß. Gemeines Maaß. Größtes gemeines Maaß, § 25 — § 27.

VII. Methode, alle einfachen und zusammengesetzten Factoren einer gegebenen Zahl zu finden, § 28.

VIII. Die Kennzeichen von der Theilbarkeit der Zahlen, § 29 — § 30.

IX. Den größten gemeinen Theiler zweier Zahlen zu finden, § 31.

Zweiter Abschnitt.

Die Lehre von den gemeinen Brüchen, § 32 — § 63.

Dritter Abschnitt.

Die Lehre von den Decimal-Brüchen, § 64 — § 95.

Abgekürzte Multiplication und Division, § 96 — § 102.

Vierter Abschnitt.

Die (Quadrat- und Cubik-)Wurzel-Ausziehung, § 103 — § 120.

Fünfter Abschnitt.

Die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen, § 121 — § 144.

Das arithmetische und geometrische Mittel, § 145 — § 146.

Sechster Abschnitt.

Die Anwendungen der Lehre von den Verhältnissen und Proportionen auf das häusliche und bürgerliche Rechnen, § 147 — § 244.

I. Die gerade Regel detri, § 147 — § 164.

II. Die umgekehrte Regel detri, § 165 — § 167.

III. Die Ketten-Regel, § 168 — § 174.

IV. Die zusammengesetzte Regel detri,
A. ohne Zwischen-Verhältnisse, § 175 — § 183.
B. mit Zwischen-Verhältnissen, § 184 — § 186.
V. Die einfache Zins-Rechnung, § 187 — § 218.
Die eigentliche einfache Zins-Rechnung, § 187 — § 198.
Rabatt und Disconto, § 199 — § 202.
Rabatt-Rechnung auf und in 100, § 203 — § 205.
Berechnung von Spesen, § 206.
Provisions-Rechnung, § 207.
Disconto-Rechnung, § 208 — § 209.
Disconto beim Wechsel-Geschäft, § 210.
Capitalien, die auf gleiche Zeit, aber zu verschiedenem Zinsfuße ausgeliehen sind, auf ihren durchschnittlichen Zinsfuß zu reduciren, § 211 — § 212.
Capitalien von gleichem Zinsfuße zahlbar zu verschiedenenen Zeiten, auf eine mittlere Zeit zu reduciren, oder die sogenannte Zeit-Rechnung (reductio terminorum), § 213 — § 217.
Licitations-Rechnung, § 218.
VI. Die Theilung einer Zahl nach gewissen vorgeschriebenen Verhältnissen, § 219 — § 233.
Die Gesellschafts-Rechnung mit ihren verschiedenen Anwendungen und Benennungen, § 219.
Gewinst- und Verlust-Rechnung bei gleichen Zeiten, aber ungleichen Capitalien, § 220 — § 223.
Gesellschafts-Rechnung mit Verhältniß-Theilen, welche durch Brüche angegeben sind,
die erste Art, § 224,
die zweite Art, § 225 — § 226.
Gesellschafts-Rechnung mit unzusammenhängenden Verhältnissen, § 227.
Gewinst- und Verlust-Rechnung bei gleichen Capitalien, aber ungleichen Zeiten, § 228.
Zusammengesetzte Gewinst- und Verlust-Rechnung, § 229 — § 230.
Die Vermischungs-Rechnung, § 231.
Die Durchschnitts-Regel, § 232.
Ihre Verwandtschaft mit der Vermischungs-Rechnung, § 233.
VII. Die Alligations-Regel, § 234 — § 244.
Diese von der Vermischungs-Regel unterschieden, § 234.
Die Regel selbst, § 235 — § 239.
Die Beschickung des Schmelz-Tiegels, § 240 — § 244.

Verbesserungen.

Jeder der sechs Abschnitte des Lehrbuches hätte mit einer neuen Seite beginnen sollen.

S. 2, Zeile 11 v. u.. Am Ende des Absatzes setze nach dem f und seinem abkürzenden Puncte noch einen beschließenden Punct.

— —, — 4 v. u., statt „Ebenso“ in einem Worte lies „Eben so“

— 5, — 12, st. „Punkt“ l. „Punct“

— —, — 3 v. u., st. „Einer mit Zehnern“ l. „Zehner mit Einern“

— 7, — 6 v. u., st. „Zwei Punkte“ l. „Zwei Puncte“

— 8, — 2 v. u., st. „im Quotienten“ l. „im Quotient“

— 9, — 4, st. „dem Quotienten“ l. „dem Quotient“

— —, — 5, st. „dieses Quotienten“ l. „dieses Quotients“

— —, — 9 v. u., } st. „des Quotienten“ l. „des Quotients“
— 11, — 4 v. u., }

— 15, — 14 v. u., st. „darin“ l. „darein“

— —, — 12, 10, 7, 3 v. u., st. „Quotienten“ l. „Quotient“

— 17, — 22 bis 23, st. „sowohl mit rein positiven, als auch mit abwechselnd positiven und negativen Resten“ l. „sowohl mit solchen Resten, denen bloß das Additions-Zeichen vorgesetzt ist, als auch mit solchen, die abwechselnd die Zeichen + und — vor sich haben beides in Beziehung auf irgend eine Zahl, für welche“ u. s. f..

— —, st. Zle 29 bis 32 l.: Instructive Proben, außer der Neuner-Probe mit den Nenner-Resten + 1, + 1, + 1, + 1 u. s. f., welche die in Beziehung auf die 9 zerlegten Potenzen von 10 enthalten, sind noch die Eilfer-Probe mit den Eilfer-Resten der 10 und ihrer Potenzen, in denen die Zeichen + und — wechseln: + 1, — 1, + 1, — 1 u. s. f., ferner die Sieben- und dreißiger-Probe u. s. f..

— 19, — 12 v. u., st. „der rein positiven Eilfer-Reste aus“ u. s. w. l. „der allein mit dem Zeichen + versehenen Eilfer-Reste aus“ u. s. w..

— 20, — 13 v. u., st. „dem Quotienten“ l. „dem Quotient“

— 21, — 6, st. „in den Quotienten“ l. „in den Quotient“

— 24, — 11 v. u., bei „$\frac{15:5}{20:5}$“ muß der Nennerstrich ganz durchgehen; eben so in den ähnlichen Fällen S. 27 und folgg..

— 32, — 10, l. „des Julianischen Jahres“

— 42, — 19, setze nach „die Ganzen“ statt des Komma ein Semicolon.

— 46, — 14, fehlt ein dem Reste vorgesetztes +

— 47, — 17, st. „Millon-Theilen“ l. „Million-Theilen“

— 65, — 7, st. „(s. Exempel- und Resultaten-Buch,“ l. „(s. die Aufgaben und deren Resultate,“

— 68, — 15, st. „des geometrischen Verhältnisses“ l. „des geometrischen Verhältnisses“

— 76, — 10 v. u., st. „Dinstage“ l. „Dinstage“

— 82, — 2 v. u., st. „$\frac{52 \cdot 32}{128}$ Lt.“ l. „$\frac{53 \cdot 32}{128}$ Lt.“

S. 83, Zeile 8. Unter „581½ gGr.“ ziehe einen Strich, und setze unter diesen Strich den Bruch $\frac{1}{3}$ gGr..

— 89. Der Strich zwischen Zle 26 und 27 sollte nicht, wie ein Folgerungsstrich, ganz durchgehen; er soll nur eine andere Abtheilung anzeigen, und sollte daher kürzer sein.

Elle Länge. Elle Breite. Elle Länge. Elle Breite.

— 96, letzte Zeile: st. $15:30=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{16}{15}:x$; l. $15:30=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{16}{15}:x$;

— 100, Zeile 12, st. „5 Rub.“ l. „5 Thlr.“

— 105, — 6, st. „Analyse“ l. „Angabe“

— 106, — 8 v. u., st. „in Waare“ l. „in Waaren“

— 112, — 13, st. „also von 6 pCt. ½“ l. „also von 6 pCt. jährlich ½, d. i. $\frac{11}{12}\cdot 6=\frac{11}{2}$ pCt.;“

— 114, — 6, nach „B“ setze ein Komma.

— 116. Im Exempel des § 212 wären die vier einzelnen Ergebnisse des Exempels mit den dazu gehörigen Bestimmungen dieser Ergebnisse durch Puncte zu verbinden gewesen.

— 118, — 12, setze nach der Parenthese einen beschließenden Punct.

— 120, — 28, nach 105 : 100 setze ein Komma; eben so Zle 33, nach 110 : 100; und Zle 39, nach 120 : 100

— —, — 29, die 8 Pf. wären genau über die darunter stehenden ganzen Pf. zu stellen gewesen.

— 122, — 19, st. „dergleiche“ l. „dergleichen“

— 125, — 14, nach „70 fl. rhnl.“ setze ein Komma; und das darauf folgende „Also“ mit dem kleinen „a“

— —, — 24, nach „600 fl. rhnl.“ setze noch einen Punct.

— 127, — 18 v. u., nach „2782½ Rthlr.“ noch einen Punct.

— —, — 6 v. u., nach „Rthlr.“ noch einen Punct, und dann unter dem Exempel einen Strich.

— 131, — 7 v. u., nach „600“ ist ausgelassen „Rub.“

— 135, — 2 v. u., nach „werden“ setze ein Kolon.

— 138, — 15. Das Komma zwischen „zusammenschmelzen“ und „heißt“ fällt weg, und wird nach „heißt“ gesetzt.

Erster Abschnitt.

Vorläufiges.

I. Das Numeriren.

§ 1. Zahl (Anzahl) bedeutet die Menge einzelner Dinge von einerlei Art, die man sich bei einander denken soll. Ziffer ist so viel als Zahlzeichen, deren es, die Null mit eingerechnet, zehn giebt. Die Ziffern dienen dazu, um die Anzahl der Einheiten in einer Stelle, oder auch deren Mangel in einer gewissen Stelle der Zahl schriftlich anzugeben. Zahl und Ziffer sind also von einander wohl zu unterscheiden. Z. B. 8 ist eine Ziffer, d. h. ein Zahlzeichen, kann aber auch eine Zahl oder Anzahl bedeuten, z. B. 8 (Bäume). Eine, oder mehre mit einander in gewisse Verbindung gebrachte Ziffern drücken eine Zahl schriftlich aus.

§ 2. Das zehntheilige oder dekadische Zahlen-System, auch Decimal-System genannt, dessen Grundzahl oder Basis 10 ist, wird hier als bekannt vorausgesetzt.

§ 3. Um auf leichte und sichere Art nach dem dekadischen Zahlen-System zu numeriren, d. h. dekadische Zahlen zu schreiben und auszusprechen, dient Nachstehendes:

1. Alle Mal auf die Millionen folgen zwei Classen von drei Ziffern. In die erste dieser Classen kommt dasjenige, was man vor dem Worte „tausend" hört, also die Hundert-Tausender, Zehntausender und Tausender. Auf das Wort „tausend" folgt noch eine Classe von drei Ziffern, für die Hunderter, Zehner und Einer.
2. Eine einziffrige Zahl, wie z. B. 6 (Einer), wenn man sie als dreiziffrige Classe schriftlich ausdrücken will, wird geschrieben: ‚006‚, eine zweiziffrige Zahl, wie z. B. 60, als dreiziffrige Classe hingeschrieben, ist ‚060‚. — 6 Hunderter können nicht anders geschrieben werden als so: ‚600‚.

Es sei hinzuschreiben die Zahl 2 Million 60 tausend 7 hundert und 3.

Man schreibe hin, was man vor dem Worte „Million" hört, also 2,;
hierauf kommt, als erste dreiziffrige Classe, das, was man vor dem Worte „tausend" hört, also ‚060‚;

endlich die zweite dreiziffrige Classe ‚703.

Die Zahl steht daher so: 2,060,703.

Ferner: 7 Million 8 hundert 9 tausend und 5.

Man schreibe 7 Million, also 7,; darauf folgen noch zwei Classen von drei Ziffern.

Vor dem Worte „tausend" hört man ferner 8 hundert und 9, schreibe also ‚809,.

Nun hört man „tausend"; es folgt also, als zweite dreiziffrige Classe, 5, nämlich ‚005.

Demnach steht die Zahl nunmehr so: 7,809,005.

Imgleichen: 5 hundert 8 tausend 5 hundert und 8.

Wiederum schreibe man, was man vor dem Worte „tausend" hört, also 508.,

und hierauf die zweite dreiziffrige Classe ‚508,; so hat man 508,508.

Endlich: 60 tausend und 80.

Vor dem Worte „tausend" hört man 60, schreibe also 60,, worauf als dreiziffrige Classe 80, d. i. ‚080;

und man hat 60,080.

Im Deutschen ist es Sprachgebrauch, die Einer jeder Classe vor ihren Zehnern zu nennen.

3. Um Zahlen der höheren Ordnung, nämlich der Billionen, hinzuschreiben, betrachte man die Millionen als die Einer dieser Ordnung, und schreibe dem gemäß nach dem Worte „Billion" die zwei Classen von drei Ziffern hin genau so, wie vorher nach dem Worte „Million" geschah, bis man das Wort „Million" hört.

Eben so schreibe man die Trillionen bis zu den Billionen, und von da weiter bis zu den Millionen, auf welche noch die zwei Classen von drei Ziffern folgen. — Eben so auch die Quatrillionen, die Quintillionen u. s. f.

Umgekehrt, hat man eine hingeschriebene Zahl auszusprechen, so denke man sich dieselbe von der Rechten nach der Linken zu in dreiziffrige Classen getheilt, und merke, daß nach den Einheiten in der 7. Stelle, von den Einern an gezählt, das Wort „Million", von den in der 4. „tausend" zu sprechen ist. Die beiden dreiziffrigen Classen nach den Millionen und nach den Tausendern werden so ausgesprochen, wie man sie findet. — Ebenso muß man nach den ausgesprochenen Einheiten in der 13. Stelle das Wort „Billion", nach den in der 10. Stelle den Ausdruck „tausend Million" hören lassen. — Imgleichen nach den Einheiten in der

19. Stelle spricht man „Trillion", nach den in der 16. „tausend Billion."

So geht es weiter.

Große Zahlen sind leicht ausgesprochen, selten aber denkt man dabei an ihre oft ungeheure Bedeutung. So z. B. ist eine Secunde eine gar kleine Zeit, und eine Million Secunden auch nur wenig mehr als 11 Tage; aber schon eine Billion Secunden beträgt mehr als 31,709 Jahre, eine Zeit, die bei weitem mehr denn 5 Mal so lang ist, als, unsern Nachrichten zufolge, die Welt gestanden hat. Eine Trillion Secunden aber ist mehr als 31 tausend 709 Million, 791 tausend, 983 Jahre.

II. Die vier Species.

§ 4. Die vier Rechnungs-Arten: Addition, Subtraction, Multiplication und Division, weil sie, entweder eine oder mehre derselben, jeder Rechnung zum Grunde liegen, also für das Rechnen unentbehrlich sind, nennt man Grund-Rechnungsarten, schlechtweg Species (Arten).

Da das Rechnen überhaupt lehrt, aus gewissen bekannten Größen eine noch unbekannte finden, so ist das Numeriren keine Species.

Die Verfahrungs-Art bei diesen Rechnungs-Arten, so wie die gewöhnliche Probe für dieselben, werden hier als bekannt angenommen.

Alle diese Rechnungs-Arten beruhen auf den Grundsatz: Das Ganze ist seinen Theilen gleich; alle Theile des Ganzen zusammengenommen, machen das Ganze aus.

§ 5. Addiren heißt Zahlen von einerlei Art zusammenzählen. Die zu addirenden Größen heißen Posten, Addenden oder Summanden; das Resultat heißt die Summe, das Aggregat, auch wohl das Collect. Das Zeichen für die Addition ist ein zwischen seine Posten gesetztes stehendes Kreuz (+, gelesen „mehr" oder „plus"), z. B. $5 + 3 = 8$.

Da man nur Zahlen einerlei Art, also nur Einer zu Einern, Zehner zu Zehnern u. s. f. zu einander addiren kann, so muß man, Behufs der Addition, die Einer unter die Einer, die Zehner unter die Zehner u. s. f. schreiben. Man hätte zu addiren

316
63
185
564.

Das Ganze, 564, besteht aus seinen Theilen, 316 + 63 + 185, und diese Theile wiederum aus ihren Einern, 6 + 3 + 5, welche zusammen ein Ganzes betragen, das 14 Einer groß ist;

ferner aus ihren Zehnern, 1 + 6 + 8, welche ein Ganzes von 15 Zehnern bilden; endlich aus ihren Hundertern, 3 + 1, d. i. 4 Hunderter.

Diese Partial-Summen
14 Einer, oder . . . . 1 Zehner 4 Einer
15 Zehner, oder . 1 Hunderter 5 Zehner
4 Hunderter, oder 4 Hunderter,
betragen die Total-Summe 5 Hunderter 6 Zehner 4 Einer, d. i. 564.

§ 6. Subtrahiren heißt, eine Zahl aus einer andern, die mit ihr von einerlei Art ist, herauszählen oder abziehen. Die herauszuzählende Zahl heißt der Subtrahendus, diejenige, aus welcher herausgezählt wird, der Minuendus; das Resultat der Subtraction heißt der Rest, Unterschied, die Differenz. Das Zeichen der Subtraction ist ein dem Subtrahendus vorgesetzter liegender Strich (—, gelesen „weniger" oder „minus"), z. B. 5 — 3 = 2.

Wenn man die einzelnen Theile des Subtrahendus von den einzelnen Theilen des Minuendus, die Einer von den Einern, die Zehner von den Zehnern u. s. w. subtrahirt, so erhält man die Einer, Zehner u. s. w. des Restes, mithin erhält man, weil alle Theile des Ganzen das Ganze ausmachen, aus dem ganzen Minuendus weniger dem ganzen Subtrahendus den ganzen Rest.

Ist hiebei eine Ziffer des Subtrahendus größer als die ihr entsprechende Ziffer des Minuendus, so borgt man von der nächst höheren Stelle des Minuendus eine Einheit, und trägt diese, als 10 Einheiten der niederen Stelle, zu den daselbst etwa schon vorhandenen Einheiten; von der beiderseitigen Summe ziehe man nunmehr den bezüglichen Subtrahendus ab.

Kommen im Minuendus mehre Nullen hinter einander vor, wie z. B. in folgendem Exempel

70000
23456
46544,

und man soll nun zuerst 6 Einer von 0 Einern abziehen, so geht man, um zu borgen, im Minuendus weiter, bis man auf eine bedeutliche Ziffer (7) trifft. Von den 7 Zehntausendern borge man 1 Zehntausender, und trage ihn, als 10 Tausender, zu der Stelle der Tausender im Minuend. Da man aber noch von den niederen Stellen des Minuendus zu subtrahiren haben wird, so läßt man von diesen 10 Tausendern nur 9 Tausender in der Stelle der

Tausender, den zehnten Tausender aber trägt man als 10 Hunderter zu der Stelle der Hunderter, bei welcher man wiederum nur 9 Hunderter läßt, den zehnten Hunderter aber als 10 Zehner zu der Stelle der Zehner trägt u. s. w.. So werden diese Nullen in allen höheren Stellen des Minuendus zu Neunen, die letzte aber zu einer Zehn.

§ 7. Multipliciren oder vervielfältigen heißt, eine gegebene Zahl, den Multiplicandus, so viel Mal nehmen, als eine andere gegebene Zahl, der Multiplicator, Einheiten enthält. Beide heißen sie Factoren; ihr Resultat heißt das Product oder Factum. Das Zeichen der Multiplication ist ein zwischen die Factoren gesetztes liegendes Kreuz oder ein Punkt (× oder ., gelesen „Mal“).

Stellt man irgend ein Product, z. B. 2.4, und 4.2 (d. i. 8) durch Striche dar, welche Einheiten bedeuten, so ist ersteres |||| ||||, nach welchem die 4 (der Multiplicandus) 2 (der Multiplicator) Mal genommen wird; letzteres ist || || || ||, nach welchem die 2 (der Multiplicandus) vier Mal genommen wird. In den Ausdrücken 2 . 4 und 4 . 2 steht also der Multiplicator voran.

Die Multiplication ist im Grunde weiter nichts als eine wiederholte Addition eines und desselben Postens, nämlich 2 . 4 = 4 + 4, und 4 . 2 = 2 + 2 + 2 + 2. Sie dient sehr zur Abkürzung; denn ohne sie müßte man z. B. bei 375 . 298 die 298 drei hundert fünf und siebzig Mal unter einander schreiben und dann addiren.

§ 8. Man multiplicirt, indem man zuerst die Einer, darauf die Zehner u. s. f. des Multiplicandus mit den Einern des Multiplicators, also diesen einen Theil des Multiplicators mit allen Theilen des Multiplicandus multiplicirt. Da man zuerst Einer mit Einern multiplicirt hat, und diese in niedrigster Stelle Einer ergeben, weil 1 . 1 = 1 ist, so setzt man das hieraus resultirende erste Product, das Product der Einer mit den Einern, unter die Einer des Multiplicators. Für die folgende Stelle werden Zehner mit Einern multiplicirt; das Product giebt also Zehner, weil 1 . 10 zehn ist. So geben auch die Hunderter mit Einern multiplicirt Hunderter, weil 1 . 100 = 100, u. s. f..

Ferner multiplicirt man alle einzelnen Theile des Multiplicandus, also den ganzen Multiplicandus, mit den Zehnern des Multiplicators, und da man zuerst Einer mit Zehnern multiplicirt hat, also in der niedrigsten Stelle Zehner erhält, weil 10 . 1 = 10, so setze man die niedrigste Ziffer des Partial-Products unter die

Zehner des Multiplicators. Hierauf werden die Zehner des Multiplicandus mit den Zehnern des Multiplicators multiplicirt, und dieses Product ergiebt Hunderter, weil $10 \times 10 = 100$. Die Hunderter des Multiplicandus mit den Zehnern des Multiplicators ergeben Tausender, weil $10 \times 100 = 1000$ u. s. f.

Darauf: der Multiplicandus von seinen Einern an mit den Hundertern des Multiplicators multiplicirt, giebt Hunderter, die also unter die Hunderter des Multiplicators geschrieben werden, dann folgen die Tausender, weil $100 \times 10 = 1000$.

So schließe man weiter.

Darum fängt man alle Mal an, die Partial-Producte unter diejenige Ziffer des Multiplicators zu setzen, mit welcher man multiplicirt.

Des Products Total-Summe, und zwar der Einer zu den Einern, der Zehner zu den Zehnern u. s. f. muß der Summe der Partial-Producte aller einzelnen Theile des Multiplicators in alle einzelnen Theile des Multiplicandus gleich sein.

§ 9. Die Stellen-Anzahl des Total-Products richtet sich nach der Anzahl sowohl wie nach der Beschaffenheit der in beiden Factoren enthaltenen Stellen. — Das Total-Product hat nämlich so viel Stellen, als beide Factoren deren zusammen haben, falls die höchste Stelle des Multiplicators, in die höchste Stelle des Multiplicandus multiplicirt, Zehner eben dieser Stelle ergiebt; bringen sie aber mit dem, was aus dem Sinne etwa noch hinzu zu zählen ist, nur Einer hervor, so hat das Total-Product eine Stelle weniger als beide Factoren deren zusammen haben; z. B.

839	und	239	
75		34	
4195		956	
5873		717	
62925		8126	

Im ersten Falle nämlich hat man $7 \times 8 = 56$, im zweiten $3 \times 2 = 6$.

§ 10. Ein Vielfaches einer Zahl entsteht, wenn man diese in irgend eine andere multiplicirt, so z. B. ist 8 ($= 4 . 2$) ein Vielfaches von 2, oder 8 ($= 2 . 4$) ein Vielfaches von 4.

§ 11. Eine Potenz, auch Potestät oder Dignität, nennt man diejenige Zahl, in welcher eine und dieselbe Größe zwei oder drei u. s. f. Mal als Factor vorkommt; so ist $25 = 5 . 5 = 5^2$ die zweite, $125 = 5 . 5 . 5 = 5^3$ die dritte, $625 = 5 . 5 . 5 . 5 = 5^4$

die vierte Potenz von 5. Und so kann man auch sagen, daß 5 die erste Potenz von 5, also 5^1, ist, weil in ihr der Factor 5 ein Mal vorhanden ist. Die Potenzen von 2 sind nach der Ordnung 2, 4, 8, 16, 32, 64 u. s. f.; von 3 sind sie 3, 9, 27, 81, 243 u. s. f.; von 10 sind sie 10, 100, 1000, 10000 u. s. f..

Zu merken: 2 . 5, das Zweifache von 5, ist nicht 5 . 5, nämlich die zweite Potenz von 5; eben so 3 . 5 ist nicht 5 . 5 . 5, nämlich das Dreifache von 5 ist nicht die dritte Potenz von 5; allgemein na ist nicht a^n.

(Übungs-Exempel für die Multiplication unbenannter Zahlen I, Nr. 1—34.)

§ 12. Dividiren heißt

1) eine gegebene Zahl, z. B. 9, den Dividend, in so viel gleiche Theile theilen, als eine andere gegebene Zahl, z. B. 2, der Divisor, Einheiten hat; der Quotient giebt an, wie groß jeder Theil ist, der Divisions-Rest aber, wie viel von den Einheiten des Dividends noch ungetheilt bleiben.

Das Exempel $2 | 9 | 4$

$\underline{8}$

1

ist hienach auf folgende Weise zu erläutern: |||| |||| |. Hier sind 9 Einheiten getheilt worden in 2 gleiche Theile; jeder dieser Theile enthält 4, beide zusammen 8 Einheiten; diese 8 Einheiten von den 9 Einheiten subtrahirt, lassen 1 Einheit, und diese bleibt ungetheilt.

2) untersuchen, wie viel Mal der Divisor (2) im Dividend (9) enthalten ist; der Quotient (4) zeigt solches an; als Divisions-Rest bleibt 1. Wie viel Mal nämlich eine Zahl (2) in einer andern (9) enthalten ist, so viel Mal kann man jene von dieser wegnehmen oder abziehen; der Quotient giebt alsdann an, wie viel Mal dieses allmählige Abziehen des Divisors vom Dividend möglich ist; der Divisions-Rest muß sonach immer kleiner sein als der Divisor.

Darum ist die Division eine wiederholte Subtraction eines und desselben Subtrahendus.

Zwei Punkte über einander, die zwischen den vorhergehenden Dividend und den nachfolgenden Divisor gesetzt werden, sind das Zeichen für die Division, z. B. 12 : 3 (gelesen „12 dividirt durch 3"). Auch wird die Division angedeutet, wenn man unter den Dividend einen liegenden Strich zieht, und unter diesen den Divisor setzt, z. B. $\frac{12}{3}$ (= 4).

§ 13. Man hätte folgendes Divisions-Exempel:

36 | 5832 | 162
36
223
216
72
72
(0)

Hier waren (nach 1, im § 12) zuerst 58 Hunderter (oder 5800 Einer) in 36 gleiche Theile zu theilen; jeder Theil war 1 Hunderter (oder 100 Einer), daher abgezogen 36 . 100 (oder 3600) Einer; übrig bleiben 22 Hunderter (die, als Hunderter, durch 36 nicht weiter dividirt werden können, und demnach als Zehner dargestellt werden müssen), oder 2200 Einer.

Für die folgende Operation waren 223 Zehner (oder 2230 Einer) in 36 gleiche Theile zu theilen; jeder Theil war 6 Zehner (oder 60 Einer), daher abgezogen 36 . 6 Zehner, d. i. 216 Zehner (oder 2160 Einer); übrig blieben 7 Zehner (die, als Zehner, durch 36 nicht weiter dividirt werden können, und demnach als Einer dargestellt werden müssen), oder 70 Einer.

Endlich waren 72 Einer in 36 gleiche Theile zu theilen; jeder Theil war 2 Einer; daher abgezogen 36 × 2, oder 72 Einer. — Die Division geht nunmehr auf.

Also wurden vom Dividend, 5832, nach einander abgezogen die Subtrahenden 3600 + 2160 + 72, welche, da die Division aufgeht, genau den Dividend ausmachen müssen.

Der ganze Quotient, 162, ist gleich seinen Theilen, 100+60+2. Der erste dieser Theile, 100, aber war gleich $\frac{3600}{36}$, der zweite, 60, war gleich $\frac{2160}{36}$, der dritte Theil, 2, war gleich $\frac{72}{36}$; da man nun für 100, 60 und 2 ihre Werthe setzen kann, so ist auch $162 = \frac{3600}{36} + \frac{2160}{36} + \frac{72}{36} = \frac{5832}{36}$; also ist der ganze Quotient, 162, gleich dem ganzen Dividend 5832, dividirt durch seinen Divisor, 36.

Beim Dividiren untersucht man (nach 2, in § 12), wie viel Mal der Divisor im Dividend enthalten ist; man muß also den Divisor vom jedesmaligen Dividend so viel Mal wegnehmen, als solches möglich ist, so daß der jedesmalige Rest kleiner werden muß als der Divisor. Wenn man aber im Quotienten weniger genommen hätte, als solches möglich ist, so daß der Rest größer

würde als der Divisor, so wäre darum die Rechnung doch nicht als falsch zu verwerfen; man dürfte aber keine neue Ziffer des Dividends zum Rest herunterziehen, und müßte das, was dem Quotienten dieser Stelle noch mangelt, nicht hinter, sondern unter den schon angegebenen Theil dieses Quotienten setzen, um solches nachher zu demselben zu addiren. Man nehme obiges Beispiel:

```
36 | 5832 | 131
   36      21
   ---     1
   223     ---
   108     162
   ---
   115
    72
   ---
    43
    36
   ---
     72
     36
   ---
     36
     36
   ---
```

§ 14. Weil, wie beim obigen Exempel, die höchste Stelle des Dividendus größer war als die höchste Stelle des Divisors, so konnte man 36 in 58 ein Mal nehmen. Findet aber der umgekehrte Fall Statt, wie z. B. in

```
96 | 5832 | 60
   576
   ---
    72,
```

so muß man sagen: 96 in 58, oder (der leichteren Übersicht wegen) 9 in 5 nehme man 0 Mal, und darauf die 58 Hunderter mit Zuziehung der 3 Zehner als 583 Zehner ausdrücken. Man läßt also die Null für die Stelle der Hunderter zu Anfange des Quotienten weg, da Nullen vor einer ganzen Zahl in ihrem Werthe nichts ändern, und nimmt sogleich, auf die Anzahl der Stellen des Divisors, im Dividend eine Stelle mehr.

§ 15. Wird in irgend einer gegebenen Division, z. B. in 32 : 8, der Divisor, 8, selbst dividirt durch irgend eine Zahl, 2, so wird eben dadurch der Dividend, mithin auch der Quotient, durch die Zahl, 2, multiplicirt; denn $32 : 8 = 4$, aber $32 : \frac{8}{2}$ (d. i. $32 : 4$) $= 8$, eben so wie $(32 \times 2) : 8$, d. i. $64 : 8 = 8$ ist.

§ 16. Wird aber der Divisor, 8, mit einer Zahl, 2, multiplicirt, so wird dadurch der Dividend, 32, dividirt, nämlich $32 : 8 = 4$, aber $32 : 8 \times 2$ (d. i. $32 : 16$) $= 2$, eben so wie $\frac{32}{2} : 8$, d. i. $16 : 8$.

§ 17. Es kann bisweilen verlangt werden, eine nicht aufgehende Division zu einer aufgehenden zu machen, falls es nicht gerade auf eine genaue Größe des Dividends ankommt. In diesem Falle zieht man vom Dividend den erlangten Divisions-Rest ab.

(Übungs-Exempel II, Nr. 1—40.)

III. Die Neuner-Probe.

§ 18. Der Werth jeder Ziffer einer dekadischen Zahl, nämlich 1, 10, 100, 1000, 10000 u. s. f., oder, was dem gleich ist, $1, 9+1, 99+1, 999+1, 9999+1$ u. s. f. ergiebt, wenn man die 9 und alle Vielfachen der 9 daraus wegläßt, für jeden dieser Werthe, sei die Stelle welche sie sei, als Neuner-Rest eine 1. Demnach ergiebt eine jede vorgegebene Zahl, z. B. $4857 = 4000 + 800 + 50 + 7 = 4 . 1000 + 8 . 100 + 5 . 10 + 7 = 4 (999 + 1) + 8 (99 + 1) + 5 (9 + 1) + 7 = 4 . 999 + 4 + 8 . 99 + 8 + 5 . 9 + 5 + 7$, als Summe ihrer Neuner-Reste $4 + 8 + 5 + 7$, als welche Summe die Quersumme der vorgegebenen Zahl ist. Auch von dieser Summe (24), so oft man im Addiren derselben eine 9 voll hat, diese abgeworfen, giebt einen Neuner-Rest 6, welcher den in der vorgegebenen Zahl vorkommenden Ziffern 4, 8, 5, 7 eigenthümlich ist, gleich viel in welcher Ordnung sie stehen, sei diese nun 4857, oder 5874, oder 8547, oder 7845, oder irgend eine andere. Da in der vorhabenden Beziehung die Neunen nicht in Betracht kommen, so vertritt der durch diese Zahl entstehende Neuner-Rest (6) die vorgegebene Zahl selbst, so daß es gewisser Maaßen einerlei wird, ob man mit den vorgegebenen Zahlen selbst, oder mit ihren Neuner-Resten arithmetisch verfährt.

Es versteht sich nach Diesem aber von selbst, daß, wenn man sich irgend wo im Exempel gerade um 9 oder um irgend ein Vielfaches von 9 versehen hat, solches auf den Neuner-Rest, mithin auch auf die Neuner-Probe, durchaus keinen Einfluß hat; in diesem Falle wird die Probe zutreffen, wenn gleich das Exempel falsch gerechnet ist.

Wendet man neben der Neuner-Probe auch die Eilfer-Probe an (welche letztere Entwickelungs-Art im § 29, Anm. 1 wird angedeutet werden), so könnte, bei zutreffenden beiden Proben, das Exempel nur dann

falsch gerechnet sein, wenn man sich gerade um das Product von 9 und 11, also um 99, versehen hätte. Hat man aber aufmerksam gerechnet, und es trifft dann nur eine dieser Proben zu, so kann man wohl sicher sein, daß das Exempel richtig gerechnet ist.

§ 19. Bei der Addition müssen alle Posten zusammen ihrer Summe gleich sein; also muß auch der Neuner-Rest aller Posten, d. i. die Probezahl, dem Neuner-Rest der Summe gleich sein. Es ist hiebei nicht nöthig, daß man den Neuner-Rest jedes Postens besonders suche, sondern da die Summanden alle zusammen eigentlich nur ein Ganzes bilden, so ist die Probezahl als Neuner-Rest aus sämmtlichen Summanden zu suchen, in welcher Ordnung der sämmtlichen Ziffern dieser Summanden man will.

Ein Beispiel für die Neuner-Probe bei jeder der vier Species wird das Verfahren für die Neuner-Probe deutlich machen.

Gegeben zu addiren:

329
856
719
1904

$3 + 2 = 5$; 9 nicht beachtet; $5 + 8 = 13$, Neuner-Rest 4; $4 + 5 = 9$, diese abgeworfen; $6 + 7 = 13$, Neuner-Rest 4; $4 + 1 = 5$, und, da die folgende 9 abgeworfen wird, so hat man den Neuner-Rest 5 der sämmtlichen Summanden als Probezahl. Dieser Probezahl ist der Neuner-Rest (5) der Summe gleich.

Bei der Neuner-Probe für die Subtraction hätte man, um die Probezahl zu finden, den Neuner-Rest des Subtrahendus vom Neuner-Rest des Minuendus zu subtrahiren, und, falls letzterer nicht zureichte, zu demselben noch 9 zu addiren, da es beim Neuner-Rest auf die Neunen nicht ankommt (§ 18.): doch ist die gewöhnliche Subtractions-Probe, nach welcher man den Rest zum Subtrahendus addirt, um den Minuendus zu erhalten, viel zu leicht und bequem, um eine andere Probe ihr vorzuziehen.

Für die Multiplication muß das Product aus den Neuner-Resten der Factoren, d. i. die Probezahl, gleich sein dem Neuner-Reste des Products.

Für die Division ist, nach Anleitung der gewöhnlichen Probe, der Neuner-Rest des Quotienten in den Neuner-Rest des Divisors zu multiplicíren, und der Neuner-Rest des etwanigen Divisions-Restes hinzu zu addiren, um die Probezahl zu erhalten; welcher Probezahl denn der Neuner-Rest des Dividends gleich sein muß.

Besonders bei größeren Multiplicationen und Divisionen (obgleich man sich auch bei geringeren versehen kann) ist die Anwendung der Neuner-Probe wichtig, um zu erfahren, ob und bis wie weit im Exempel man richtig gerechnet habe. Man kann nämlich bei beiden Rechnungs-Arten, noch vor Beendigung der ganzen Rechnung, und nachdem man in derselben bis zu einem gewissen Ruhepuncte gekommen ist (bei der Multiplication, wenn man mit einer Ziffer des Multiplicators den Multiplicandus durchmultiplicirt hat; bei der Division, nachdem man subtrahirt hat), die Neuner-Probe bis zu diesem Ruhepuncte, und endlich im Ganzen veranstalten. — Auf ähnliche Weise macht man es bei den partialen Proben der Wurzel-Ausziehung.

IV. Reduction und Resolution.

§ 20. Reduciren heißt, eine Größe niederer Benennung (z. B. Loth) in eine Größe der höheren Benennung (Pfund) verwandeln. Solches geschieht, indem man die Größe der niederen Benennung durch die Eintheilungs- oder Reductions-Zahl (hier, von Loth zu Pfund, d. i. 32) dividirt; in den Quotient kommt die Größe der höheren Benennung; ein etwaniger Rest enthält die noch übrige Größe der gegebenen Benennung. Z. B. 68 Lt. = ? ℔.

32 | 68 Lt. | 2 ℔.
64
4 Lt.

Denn 32 Loth ist 1 ℔.; so viel Mal also 32 Loth in 68 Lt. enthalten sind, so viel einzelne Pfunde sind darin enthalten. Da ferner von 68 Lt. weggenommen wurden 2 . 32, d. i. 64 Lt., so kann der Rest, 4, nichts anders als Loth sein.

Resolviren heißt, eine Größe der höheren Benennung (z. B. Pfund) in eine Größe der niederen Benennung (Loth) verwandeln. Dieß geschieht, indem man die Größe der höheren Benennung mit der Eintheilungszahl multiplicirt, die etwa dabei befindliche Größe der niederen Benennung aber hinzu addirt; z. B. 2 ℔. 4 Lt. = ? Lt.

2 ℔. 4 Lt.
32
68 Lt.

Denn 1 ℔. ist 1 Mal 32 Lt., folglich 2 ℔. sind 2 Mal 32 Lt.. Das Wort „Mal" zeigt an, daß die 2 ℔. mit der Eintheilungszahl 32 zu multipliciren sind, um die Lothe zu ergeben. Zu den so erhaltenen Lothen nimmt man die mit denselben gleichartige Größe, 4 Lt., hinzu.

Der für Eintheilungs- oder Reductions-Zahl ebenfalls übliche Aus-

druck Verhältniß-Zahl kann an diesem Orte, wo von Verhältnissen noch nichts gelehrt worden, nicht gebraucht werden. Man reicht aber auch mit jenen beiden.

Wenn von Reduction oder Resolution die Rede ist, so hört man bisweilen sagen: „die Loth müssen mit 32 dividirt werden"; oder: „die Pfund müssen mit 32 multiplicirt werden". Dividiren oder multipliciren ist aber etwas ganz anderes als mit der Eintheilungszahl dividiren oder mit derselben multipliciren, d. h. als reduciren oder resolviren. Denn wenn man z. B. 64 Loth mit 32 dividirt, so erhält man nicht, wie durch die Reduction, 2 *ℓ.*, sondern man erhält 2 Loth; eben so, wie, wenn man 2 *ℓ.* mit 32 multiplicirt, man nicht 64 Loth, sondern 64 *ℓ.* erhält. Bei der Reduction und Resolution bleibt nämlich der Werth der zu reducirenden oder zu resolvirenden Größe unverändert, nicht aber bei der Division und Multiplication.

§ 21. Reductionen und Resolutionen kommen in den vier Species überall vor, ohne daß dieses, wegen des dekadischen Zahlen-Systems, gerade sehr augenfällig ist. Überall nämlich, wo Einer in Zehner, Zehner in Hunderter u. s. f. verwandelt werden, geschieht solches nur durch Reduction, wie z. B. 14 Einer, wenn man sie mit der Eintheilungszahl von Zehnern zu Einern, d. i. mit 10 dividirt, sind 4 Einer und 1 Zehner: und überall, wo Zehner in Einer, Hunderter in Zehner u. s. f. verwandelt werden, geschieht solches durch Resolution. Das Decimal-System macht diese Reductionen und Resolutionen gar leicht. So werden Kopeken, deren 100 auf einen Rubel gehen, in Rubel, und umgekehrt Rubel in Kopeken bei weitem leichter verwandelt, als z. B. Groschen in Thaler, und umgekehrt.

Die vier Species in benannten Zahlen beruhen auf eben denselben Grundsätzen wie die in unbenannten Zahlen; den einzigen Unterschied machen die dabei vorkommenden Reductionen und Resolutionen.

(Übungs-Exempel für Multiplication III, Nr. 1—33, und Division IV, Nr. 1—28.)

V. Zusammengesetzte Zahlen, Primzahlen und Primzahlen zu einander.

§ 22. Es giebt Zahlen, die, den Factor 1 abgerechnet, keine Factoren enthalten, und Zahlen, die aus Factoren bestehen. Letztere heißen darum auch zusammengesetzte Zahlen, und können, ohne daß man diese Zahlen selbst nennt, durch bloße Angabe ihrer Factoren vollkommen kenntlich gemacht werden. So geben die Factoren 2, 3, 5 den Begriff der zusammengesetzten Zahl 30, auch wenn letztere nicht ausdrücklich genannt wird. — Diejenigen Zahlen aber, die nicht aus Factoren bestehen, also nur durch sich selbst kenntlich gemacht werden können, heißen Primzahlen, so viel als Primitiv-Zahlen, d. i. Stammzahlen, durch deren Multi-

plication unter einander eben die zusammengesetzten Zahlen entstehen.

§ 23. Wiederum unterscheidet man diese eigentlichen Primzahlen von den Primzahlen zu einander, die, wenn gleich sie, wie z. B. 4 und 9, jede für sich, Factoren enthalten, doch keinen Factor haben, der ihnen gemeinschaftlich wäre.

§ 24. Wenn man in der Reihe der natürlichen Zahlen von der 2 zwei Schritte, von der 3 drei Schritte, von der 5 fünf Schritte, von der 7 sieben Schritte, von der 11 eilf Schritte, von der 13 dreizehn Schritte u. s. f. fortgeht, und die daselbst vorgefundenen Zahlen ausstreicht, so fallen alle Vielfachen dieser Zahlen weg, und es bleiben nur die Primzahlen stehen, nämlich 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103 u. s. f..

Eratosthenes von Cyrene, geb. 275 vor Chr., als Bibliothekar des Königs Ptolemäus Euergetes nach Alexandrien berufen, gab eine Primzahlen-Tafel, das so genannte cribrum Eratosthenis. Er hatte die Reihe der natürlichen Zahlen auf eine Tafel geschrieben, und hat diese, nachdem er alle Vielfachen derselben herausgeschnitten, τὸ κόσκινον (das Sieb, cribrum) genannt.

VI. Messen. Zahl. Einheit. Theiler oder Maaß. Gemeines Maaß. Größtes gemeines Maaß.

§ 25. Bestimmen, ob eine Größe das Einfache, Zweifache, Dreifache u. s. f. einer andern sei, heißt im Allgemeinen messen. Jede Größe, in so fern sie mit einer andern gemessen wird, heißt Zahl, Anzahl. Diejenige Größe, welche zum Maaß gebraucht, oder womit die andere gemessen wird, ist die Einheit. Daher ist auch die Eins eben so gut eine Zahl als zwei oder drei u. s. w.. Fragt z. B. der Kaufmann nach der Zahl der Ellen Tuch, die ich verlange, und ich sage ihm eine Elle, so versteht er mich, und mißt mir die verlangte eine Elle ab. Doch ist diese eine Elle immer von der Einheit, dem Ellenmaaße des Kaufmanns, zu unterscheiden, weil jene durch diese erst bestimmt gemessen wird.

§ 26. Eine Zahl, die in eine vorgegebene Zahl aufgeht, ist ein Theiler (Divisor) derselben. Dieser Theiler kann auch das Maaß der vorgegebenen Zahl genannt werden, weil, wenn man diesen Theiler als die Einheit annimmt, er in der vorgegebenen Zahl gewisse Mal genau enthalten ist, d. h. sie ausmißt. 1″ (d. i. 1 Zoll) ist z. B. das Maaß für eine gewisse gegebene Länge. Ist diese aber von einer bedeutenderen Größe, so nimmt man, um sich kürzer zu fassen, und einen kleineren Ausdruck für diese Länge

zu erhalten, 12 dieser Einheiten zusammen. So wird nunmehr 1′ (d. i. 1 Fuß) das Maaß oder die Einheit, nach welcher man zählt. Nimmt man eine Länge von 2′ als die Einheit an, nach welcher man zählt, und fragt, wie viel Mal sind 2′ in der gegebenen Länge enthalten, so ist 2′ das Maaß. Für noch größere Längen sind 7 (russ.) Fuß oder 1 (russ.) Faden (= 3 russischen Arschinen) das Maaß, und wiederum für noch größere, 500 (russ.) Faden oder 1 Werst, deren 104 (= 15 geographischen Meilen) auf einen Grad des Aequators gehen. Die Entfernung der Erde zum Monde wird nach (60) Erdhalbmessern (zu 859½ geogr. Meilen) angegeben.

§ 27. Wenn zwei Zahlen, jede für sich, durch eine dritte ohne Rest dividirt werden können, so wird diese dritte Zahl ein gemeinschaftlicher oder gemeiner Theiler, ein gemeinschaftliches oder gemeines Maaß jener beiden Zahlen genannt. Z. B. 3 geht sowohl in 48 als auch in 54 auf, folglich ist 3 ein gemeiner Theiler oder ein gemeines Maaß der 48 und 54. Aber für 48 und 54 ist auch 6 ein gemeiner Theiler, und da es für diese beiden Zahlen kein größeres gemeines Maaß giebt, so ist 6 der größte gemeine Theiler von 48 und 54.

VII. Methode, alle einfachen und zusammengesetzten Factoren einer Zahl zu finden.

§ 28. Aus einer gegebenen Zahl findet man alle einfachen und zusammengesetzten Factoren derselben folgender Maaßen:

Man schreibe die vorgegebene Zahl (330) hin, und ziehe rechts neben sie einen Strich herunter, dividire sie durch die darin aufgehende kleinste Primzahl, also durch 2, die man rechts vom Striche, neben die gegebene Zahl, hinschreibt; den Quotienten 165, schreibe man unter die 330.

Diesen Quotienten, 165, dividire man nun wieder durch die darein aufgehende kleinste Primzahl, 3, welche man unter den Factor 2 schreibt. Den durch die Division mit diesem Factor 3 entstandenen Quotienten, 55, setze man unter die 165; den letztgefundenen Divisor, 3, multiplicire man mit dem vorher gefundenen Factor, 2; das Product aus beiden, 6, schreibe man neben den Factor 3.

Wiederum dividire man die 55 durch 5; den Quotienten, 11, schreibe man unter die 55, den Factor 5 neben sie: darauf multiplicire man diese 5 mit allen früheren einfachen und zusammen-

gesetzten Factoren, 2, 3, 6, welches die Factoren 10, 15, 30 giebt, die man neben die 5 setzt.

So verfahre man weiter.

Die Divisoren zunächst dem Striche 2, 3, 5, 11 sind die einfachen Factoren der vorgegebenen Zahl, die übrigen die zusammengesetzten. Außer diesen Factoren hat die vorgegebene Zahl keine mehr.

330	2
165	3, 6
55	5, 10, 15, 30
11	11, 22, 33, 66, 55, 110, 165, 330.
1	

(Übungs-Exempel V, Nr. 1—6.)

VIII. Die Kennzeichen von der Theilbarkeit der Zahlen.

§ 29. Eine Zahl geht durch 2 auf, ist eine gerade Zahl, oder eine Paar-Zahl, wenn die letzte Ziffer durch 2 aufgeht; denn alle höheren Stellen enthalten den Factor 10, in welchen die 2 aufgeht, so daß es hier nur auf die letzte Ziffer ankommt, z. B. $3738 = 3730 + 8 = 373 \cdot 10 + 8$.

Eine Zahl geht durch 4 auf, wenn die beiden letzten Ziffern durch 4 aufgehen. Alle höheren Stellen enthalten nämlich den Factor 100, in welchen 4 aufgeht, und es kommt nur auf die beiden letzten Stellen an. So ist z. B. $5324 = 5300 + 24 = 53 \cdot 100 + 24$. Der erste Theil, $53 \cdot 100$, muß wegen des Factors 100, oder, mit andern Worten, als ein Vielfaches (§ 10) von 100, durch 4 aufgehen; da nun auch der andere Theil, 24, durch 4 aufgeht, so geht die ganze gegebene Zahl durch 4 auf.

Eine Zahl geht auf durch 8, wenn die drei letzten Ziffern durch 8 aufgehen. In $54928 = 54000 + 928 = 54 \cdot 1000 + 928$ geht 8 in den ersten Theil, $54 \cdot 1000$, auf, weil 8 in 1000 aufgeht, und es kommt also nur auf die drei letzten Stellen an.

Ist aber hiebei die drittletzte Stelle, die Stelle der Hunderter, eine gerade Zahl, wie in 27632 die 6, so braucht man nur auf die Theilbarkeit der beiden letzten Ziffern durch 8 zu sehen. Denn jedes einzelne Hundert durch 8 dividirt, läßt den Rest 4, folglich würden alle Mal zwei Hunderter den Rest $4 + 4$ lassen, d. i. (§ 12, 2) vielmehr 0. Es ist also $27632 = 27000 + 600 + 32 = 27 \cdot 1000 + 3 \cdot 200 + 32$; die ersten beiden Theile der letzten

Zerlegung, der erste nach der Haupt-Regel, der zweite als 3 doppelte Hunderter, gehen durch 8 auf, daher kommt es hier nur auf den dritten Theil, d. i. auf die beiden letzten Ziffern (32) an.

Auch geht eine Zahl durch 8 auf, wenn deren einfache Einer, doppelte Zehner, vierfache Hunderter eine Summe ergeben, die durch 8 aufgeht. In der Zahl 54928 ist nämlich $1.8+2.2+4.9=8+4+36=48$; diese 48 ist durch 8 theilbar, folglich ist auch die gegebene Zahl durch 8 theilbar. — Man stelle nämlich die 1, 10, 100, 1000 als Vielfache der 8 dar mit ihren Überresten, und darauf die entsprechenden Stellen der vorgegebenen Zahl als Factoren der beiderseitigen Summen, so ist

$$\begin{aligned} 1 &= 8.0 + 1 \\ 10 &= 8.1 + 2 \\ 100 &= 8.12 + 4 \\ 1000 &= 8.125 + 0; \end{aligned}$$

also in 54928 ist

$$\begin{aligned} 8 &= 8 \times 0 + 1 \times 8 \\ 20 &= 2 \times 8.1 + 2 \times 2 \\ 900 &= 9 \times 8.12 + 4 \times 9 \\ 4000 &= 4 \times 8.125 + 0 \end{aligned}$$

Die nach ähnlicher Weise wie die obige vorgenommene Zerlegung der 10 und ihrer Potenzen sowohl mit rein positiven, als auch mit abwechselnd positiven und negativen Resten in Beziehung auf irgend eine Zahl, für welche man entweder ein Kennzeichen der Theilbarkeit sucht, oder um damit eine Probe, wie etwa die Neuner-Probe (§§ 18, 19), zu veranstalten, liefert für die Zahlen-Theorie interessante Resultate. Die 2, 4, 8, 5, 10 sammt deren Potenzen eignen sich nicht zu Zahlen für Proben, da nicht sämmtliche Ziffern einer zur Prüfung vorgegebenen Zahl einen Rest durch sie lassen können, sondern nur die letzten Stellen derselben. — Instructive Proben sind, außer der Neuner-Probe mit ihren positiven Neuner-Resten der Potenzen von 10: + 1, + 1, + 1, + 1 u. s. f., noch die Eilfer-Probe mit den abwechselnd positiven und negativen Eilfer-Resten + 1, − 1, + 1, − 1 u. s. f., ferner die Sieben- und -dreißiger-Probe mit ihren Sieben- und -dreißiger-Resten + 1, + 10, + 100, + 1, + 10, + 100, + 1 u. s. f., die Hundert-und-einer-Probe mit ihren Hundert-und-einer-Resten + 1, + 10, − 1, − 10, + 1, + 10, − 1, − 10 u. s. f., die Tausend-und-einer-Probe mit den Tausend-und-einer-Resten + 1, + 10, + 100, − 1, − 10, − 100, + 1, + 10, + 100, − 1, u. s. f..

Eine Zahl geht durch 5 auf, wenn die letzte Ziffer eine 5 oder 0 ist. Z. B. in $375=370+5=37.10+5$ enthalten alle höheren Stellen den Factor 10, in welchen die 5 aufgeht, so daß es nur auf die letzte Stelle (5) ankommt. — Eine Zahl, wie 370 (= 37. 10) ist schon selbst ein Vielfaches von 10, und daher auch von 5.

Eine Zahl geht durch 25 auf, wenn deren beide letzte Ziffern durch 25 aufgehen, wenn diese also sind entweder 00, oder 25, oder 50, oder 75, also 0. 25, oder 1. 25, oder 2. 25, oder 3. 25. Alle höheren Stellen haben den Factor 100, in welchen die 25 aufgeht.

Eine Zahl, wie $5730 = 573 . 10$, geht auf durch 10, wenn die letzte Ziffer eine Null ist, weil 10 in 10, und daher auch in ein jedes Vielfaches von 10, in $573 . 10$, aufgeht.

Eine Zahl (4758) geht durch 3 auf, wenn die Quer-Summe der Zahl, d. i. $4+7+5+8$, durch 3 aufgeht.

Man zerlege die vorgegebene Zahl (4758) nach dem Werthe, den jede Ziffer in Folge des dekadischen Zahlen-Systems hat $(4000+700+50+8)$. Darauf zerfälle man jeden dieser Theile in zwei Factoren, wovon der eine die Ziffer, der andere aber der Werth der Ziffer nach dem zehntheiligen Zahlen-System ist $(4.1000+7.100+5.10+8)$. Diese Werthe jeder Ziffer zerlege man in zwei Theile, wovon der eine alle Vielfachen der 3, der andere den Überrest enthält $[4(999+1)+7(99+1)+5(9+1)+8]$. Endlich multiplicire man den je ersten Factor in die beiden zugehörigen Theile

$$4 . 999+4+7 . 99+7+5 . 9+5+8.$$

Die 3 geht in 999 auf, folglich auch in deren Vielfaches $4 . 999$, und es bleibt 4; ferner geht 3 in 99 auf, folglich auch in $7 . 99$, und es bleibt 7; endlich geht 3 in 9 auf, folglich auch in $5 . 9$, und es bleibt 5. Demnach sind die von der vorgegebenen Zahl 4758 noch übrigen Theile folgende $4+7+5+8$; gehen auch diese durch 3 auf, so geht die ganze vorgegebene Zahl durch 3 auf. Diese zuletzt übrig gebliebenen Theile sind aber nichts anders als die Quer-Summe der vorgegebenen Zahl.

Eine Zahl, z. B. 5283, geht durch 9 auf, wenn die 9 in die Quer-Summe aufgeht.

Nachdem die verschiedenen Zerlegungen der vorgegebenen Zahl ganz auf die vorige Weise, wie bei der 3, Statt gefunden, erhält man folgende Theile derselben:

$$5 . 999+5+2 . 99+2+8 . 9+8+3.$$

9 geht in die ersten Theile dieser Zerlegung auf, und es bleiben die anderen Theile $(5+2+8+3)$; gehen nun auch diese durch 9 auf, so geht die vorgegebene Zahl durch 9 auf: diese andern Theile aber bilden die Quer-Summe.

Um zu finden, ob eine Zahl durch 11 theilbar sei, theile man dieselbe von der Rechten nach der Linken zu in Classen von zwei Ziffern, wobei für die letzte Classe auch nur eine einzige Ziffer übrig bleiben kann. Von jeder dieser Classen subtrahire man das nächst niedere Vielfache von 11, und summire die Reste; geht nun die

Summe dieser Reste durch 11 auf, so geht auch die vorgegebene Zahl durch 11 auf. Es sei gegeben 753929.

75	39	29
66	33	22
9	6	7

$9 + 6 + 7 = 22$;

da nun 22 durch 11 theilbar ist, so ist auch 753929 durch 11 theilbar.

Man zerlege die vorgegebene Zahl 753929 nach den durch die Regel angegebenen Classen, und drücke den Werth jeder dieser Classen nach dem zehntheiligen Zahlen-System aus: $75\,00\,00 + 39\,00 + 29$; zerfälle darauf jeden dieser Theile in zwei Factoren, wovon der eine die Ziffern der Classe, der andere der Werth der Classe ist: $75 . 100\,00 + 39 . 100 + 29$; zerlege darauf den Werth jeder Classe in zwei Theile, wovon der eine alle Vielfachen der 11, der andere den Überrest enthält: $75 (99\,99 + 1) + 39 (99 + 1) + 29$; endlich multiplicire man den je ersten Factor in die zugehörigen beiden Theile der 10000 und 100:

$$75 . 99\,99 + 75 + 39 . 99 + 39 + 29.$$

11 geht in 99 99 auf, folglich auch in ihr Vielfaches, 75 . 99 99, und es bleibt 75; 11 geht in 99 auf, folglich auch in 39 . 99, und es bleibt 39: man hat demnach bloß noch die Zahlen 75, 39, 29, welches die durch die Regel angegebenen Classen sind. Von der 29 gehen 22 durch 11 auf, und es bleiben noch 7; von der 39 gehen 33 durch 11 auf, und es bleiben 6; von der 75 gehen 66 durch 11 auf, und es bleiben 9. Aber diese 7, 6 und 9 zusammen betragen 22, welche durch 11 aufgehen. Da nun alle Theile der Zahl 753929 durch 11 aufgehen, so muß auch die Zahl selbst durch 11 aufgehen.

Obiges Kennzeichen für die 11 ist im Grunde einerlei mit demjenigen, welches, aber nur anders ausgedrückt, man durch Entwickelung der rein positiven Eilfer-Reste aus 1, 10, 100, 1000 u. s. f. erhält (welche Entwickelungs-Art in der ersten Anmerkung dieses § angedeutet worden), nämlich $+1, +10, +1, +10, +1, +10$ u. s. f.; nach Anleitung welcher Reihe man die einfachen ungeraden Stellen zu den zehnfachen geraden addirt.

Hinsichtlich der oben dargethanen Regel könnte man auch die Classen, wie sie sind, zu einander addiren $29 + 39 + 75$, oder $75 + 39 + 29 = 143$, welche Zahl durch 11 theilbar ist; die Abwerfung der Vielfachen von 11 aus jeder Classe geschieht bloß, um das Kennzeichen für den Gebrauch bequemer zu machen.

§ 30. Wenn zwei Primzahlen zu einander, jede für sich, in eine vorgegebene Zahl aufgehen, so geht auch ihr Product in die

vorgegebene Zahl auf. Z. B. sowohl 2 als auch 3 gehen in 18 auf, folglich geht auch 2 . 3, d. i. 6, in 18 auf.

Wären Zahlen, deren Product in eine vorgegebene Zahl dividirt werden soll, nicht Primzahlen zu einander, wie z. B. 3 und 4 es sind, und man nähme statt dessen Factoren wie 6 × 2, um zu untersuchen, ob das Product 12 (= 3 . 4 oder 6 . 2) z. B. in 18 aufgeht, so wird zwar die 6 sowohl als die 2, jede für sich, in 18 aufgehen, ohne daß man daraus schließen darf, daß auch 6 × 2, d. i. 12, in 18 aufgehe, da in 18 der Factor 2 nur ein Mal vorkommt, während die Factoren 6 und 2 ihn zwei Mal verlangen.

Es möchte anzurathen sein, daß man den Schüler nach diesen Kennzeichen größere Zahlen ausführen lasse, die, nachdem der Lehrer die höchsten Stellen dieser Zahlen selbst hingeschrieben, der Schüler so einzurichten habe, daß sie divisibel seien durch Producte aus den oben vorgekommenen Zahlen, wie z. B. durch 72 (= 8 . 9), 24 (= 3 . 8), 88 (= 8 . 11), 66 (= 2 . 3 . 11), 45 (= 5 . 9), 36 (= 4 . 9), 15 (= 3 . 5), 44 = (4 . 11), 99 (= 9 . 11).

IX. Den größten gemeinen Theiler zweier Zahlen zu finden.

§ 31. Der größte gemeine Theiler zweier Zahlen wird gefunden, wenn man die kleinere in die größere dividirt; der Rest wird der neue Divisor, der vorige Divisor wird Dividend, so lange, bis die Division aufgeht. Der letzte Divisor wird der verlangte größte gemeine Theiler der beiden vorgegebenen Zahlen.

Es stelle nämlich $\frac{d \mid D \mid Q}{\begin{array}{r} d.Q \\ \hline R \end{array}}$ ein nicht aufgehendes Divisions-Exempel vor, wo d der Divisor, D der Dividend, Q der Quotient, und R der Rest ist. Wird nun davon die gewöhnliche Probe gemacht, indem man den Divisor d mit dem Quotienten Q multiplicirt, und den Rest R zum Producte addirt, so ist

$$d . Q + R = D.$$

Aus dem bloßen Anblicke dieses Satzes ergiebt sich Folgendes:

1) Wenn der Divisor d und der Rest R irgend einen gemeinen Theiler n hat, so ist dieser auch ein Theiler von d . Q + R, also auch von D, dem Dividend; und die Zahl n ist ein gemeiner Theiler vom Divisor d und dem Dividend D.

2) Wenn n der größte gemeine Theiler vom Divisor d und vom Rest R ist, so muß n auch der größte gemeine Theiler vom Divisor d und vom Dividend D sein. — Hätten nämlich d und D einen noch größeren gemeinen Theiler, N, so müßte sich offenbar auch R damit dividiren lassen, weil sonst d.Q+R, mithin auch D

nicht theilbar sein könnten durch N. Es wäre also, der Voraussetzung zuwider, n nicht der größte gemeine Theiler von d und R.

In den Zahlen $d = 9$, $D = 24$ ergiebt sich der Quotient $Q = 2$, und der Rest $R = 6$. Da nun 3 ein gemeiner Theiler des Divisors 9 und des Restes 6, so muß 3 auch ein gemeiner Theiler vom Product dieses Divisors in den Quotienten, d. i. von $9 . 2$ sein; und ob die 3 auch in den andern Theil des Dividendus, mithin in den ganzen Dividend, aufgeht, hängt davon ab, ob auch sein Rest durch 3 aufgeht, da ja eben dieser Rest der andere Theil des Dividends $(9.2+6)$ ist. Weil ferner der Divisor 9 und der Rest 6 keinen noch größeren gemeinen Theiler, N, haben können, so ist 3 $(= n)$ der größte gemeine Theiler vom Divisor 9 und vom Dividend 24.

Nun betrachte man das erste beste hieher gehörige Exempel:

$$\begin{array}{r|l|l} 264 & 312 & 1 \\ & 264 & \\ \hline & 48 & 264 \mid 5 \\ & & 240 \\ \hline & & 24 \mid 48 \mid 2 \\ & & \quad 48 \\ \hline & & \quad (0) \end{array}$$

Man schließe also: Da 24 in 48 aufgeht, so ist gewiß 24 der größte gemeine Theiler von 24 und 48.

In der nächst vorhergehenden Division ist 48 der Divisor, und 24 der Rest, folglich ist 24 auch der größte gemeine Theiler vom Divisor 48 und dem Dividend 264.

Nun haben wiederum in der vorhergehenden Division der Divisor 264 und der Rest 48 den größten gemeinen Theiler 24; welcher also auch der größte gemeine Theiler vom Divisor 264 und dem Dividend 312 sein muß.

Ergiebt sich aber bei diesem Verfahren der letzte Divisor $= 1$, so haben die vorgegebenen beiden Zahlen kein anderes gemeines Maaß als die Einheit, sind Primzahlen zu einander, z. B. 3587 u. 5891.

(Übungs-Exempel VI, Nr. 1—16.)

Zweiter Abschnitt.

Die Lehre von den gemeinen Brüchen.

§ 32. Ein Bruch, wie etwa $\frac{3}{4}$ (gelesen „drei Viertel") entsteht, wenn man das Ganze in mehre (hier 4) gleiche Theile theilt, und davon einen oder mehre (hier 3) Theile nimmt.

Die angehängte Sylbe „tel" ist zusammengezogen aus „Theil", denn „ein Fünftel" heißt so viel als „ein Fünftheil". Endigt sich aber die durch den Nenner ausgedrückte Zahl auf ein „g", so wird dem Nenner die Sylbe „stel" angehängt, Zwanzigstel, Dreißigstel; eben so, wenn der Nenner sich auf „t" oder „d" endigt, denn aus „hundert", „tausend" wird „Hundertstel", „Tausendstel", wovon ausgenommen sind „Drittel", „Achtel", falls man nicht lieber „Drittheil", „Achtheil" sagen will.

§ 33. Auch kann man einen Bruch ($\frac{3}{4}$) als eine ganze Zahl (3) betrachten, welche aber, im Vergleich mit der größeren Einheit, aus welcher sie entstanden ist, zu einer so viel Mal kleineren Einheit gehört, als die Zahl (4) unter dem Strich angiebt. Diese Zahl, da sie die Art der gebrauchten Einheit benennt, heißt der Nenner. Die Zahl über dem Striche heißt der Zähler, weil sie die durch den Nenner gemeinte Art der Einheiten zählt oder angiebt. Eben so wie 3 Ganze nach der Einheit 1 gezählt sind, so ist auch der Bruch $\frac{3}{4}$ nach der Einheit $\frac{1}{4}$ gezählt; denn $\frac{3}{4}$ ist so viel als $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, wie 3 Ganze so viel ist als $1+1+1$; $\frac{3}{4}$ ist also die Einheit $\frac{1}{4}$ drei Mal genommen.

Ein Bruch, dessen Zähler 1 ist, heißt ein aliquoter Theil (ein Aliquotum) des dazu gehörigen Ganzen. Das Aliquotum ist also das Maaß eines jeden andern Bruchs von gleichem Nenner.

§ 34. Endlich kann man einen Bruch ($\frac{3}{4}$) auch noch als eine angezeigte Division ganzer Zahlen betrachten, in welcher der Zähler der Dividend, der Nenner aber der Divisor ist. Es seien nämlich z. B. 11 Ganze durch 4 zu dividiren gewesen, so hätte man: 4 in 11 Ganze 2 Mal, also 2 Ganze, und es blieben Rest 3 Ganze, welche 3 Ganze als Dividend noch durch 4 zu theilen sind. Man erhält demnach dasselbe Resultat ($\frac{3}{4}$), wenn man (nach § 32) das Ganze in vier gleiche Theile theilt und drei nimmt, oder wenn man (nach diesem §) drei Ganze in vier gleiche Theile theilt.

§ 35. Es giebt echte oder eigentliche, und unechte oder uneigentliche Brüche, auch Afterbrüche genannt. Die echten Brüche sind kleiner als 1 oder als das Ganze, die unechten Brüche sind entweder gleich 1, oder sie sind größer als 1. Sind

Brüche kleiner als 1, so muß (§ 32) ihr Zähler kleiner sein als der Nenner; sind sie gleich 1, so muß ihr Zähler dem Nenner gleich sein; sind sie größer als 1, so muß der Zähler größer sein als der Nenner. Im letzteren Falle denkt man sich zwei oder mehr gleiche Ganze, jedes in die vom Nenner verlangte Anzahl gleicher Theile getheilt, und überhaupt so viel Theile genommen, als der Zähler bestimmt.

Außerdem giebt es noch gemischte Zahlen, nämlich ganze Zahlen, jede mit einem angehängten Bruche, z. B. $2\frac{3}{4}$.

Der Ausdruck „gemischter Bruch" möchte wohl nicht gut gewählt sein, weil die dabei vorkommende ganze Zahl kein Bruch ist; wohl aber ist auch ein Bruch eine Zahl, nämlich eine gebrochene; beiden Theilen des Bruches kommt also der Name einer Zahl zu.

§ 36. Ein unechter Bruch ($\frac{11}{4}$) wird in eine gemischte Zahl verwandelt, wenn man den Nenner (4) in den Zähler (11) dividirt. In den Quotient kommen die Ganzen, unter den etwanigen Rest setze man den Divisor als Nenner. So ist z. B. $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$.

Um nämlich aus $\frac{11}{4}$ verlangter Maaßen die Ganzen zu ziehen, nehme man aus dem Zähler eine Zahl, die dem Nenner gleich ist; welches damit übereinkommt, daß man den Nenner vom Zähler abzieht. So viel Mal aber dieses möglich ist, so viel Ganze sind im Bruch enthalten (§ 35). Die auf diese Weise durch Subtraction nach und nach erlangte Anzahl der im Bruch enthaltenen Ganzen ergiebt die Division des Nenners in den Zähler auf ein Mal (§ 12, 2). So ist $\frac{11}{4} = \frac{4}{4} + \frac{7}{4} = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 1 + 1 + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4}$; und eben so, aber kürzer: 4 in 11 zwei Mal (also 2 Ganze), mit dem Reste 3; welche 3, da sie entsteht, wenn $\frac{8}{4}$ von $\frac{11}{4}$ abgezogen wird, nach keiner andern Einheit als auch nach Vierteln gezählt sein kann.

§ 37. Umgekehrt: eine gemischte Zahl ($2\frac{3}{4}$) wird in einen unechten Bruch verwandelt, wenn man die ganze Zahl (2) mit dem Nenner (4) multiplicirt, den Zähler (3) dazu addirt, und den Nenner (4) darunter setzt.

Man hat nämlich, der Aufgabe gemäß, die Ganzen als einen Bruch auszudrücken, welcher eben denselben Nenner habe, wie der bei diesen Ganzen befindliche Bruch. So z. B. ist ein auf den Nenner 4 gebrachtes Ganzes $= 1 \cdot \frac{4}{4}$, zwei Ganze $= 2 \cdot \frac{4}{4}$; da nun der echte Bruch $\frac{3}{4}$ nach eben derselben Einheit wie die Ganzen, d. i. nach Vierteln, gezählt ist, so hat man zu den 2 Ganzen oder den $2 \cdot \frac{4}{4}$, welches (§ 35) gleich sein muß $\frac{2 \cdot 4}{4}$, noch $\frac{3}{4}$ zu addiren, erhält also $\frac{2 \cdot 4}{4} + \frac{3}{4}$, d. i. $\frac{2 \cdot 4 + 3}{4}$ $(= \frac{11}{4})$; aus welcher Formel die obige Regel folgt.

§ 38. Wird, bei unverändertem Nenner, der Zähler eines Bruches größer (oder kleiner), so wird auch der Werth des Bruches größer (oder kleiner): so z. B. ist $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$, weil man im letzteren Falle (§ 32) mehr von den gleichen Theilen hat, in welche das Ganze getheilt ist, als im ersteren. — Wird aber, bei unverändertem Zähler, der Nenner größer (oder kleiner), so wird der Werth des Bruches kleiner (oder größer). So z. B. ist $\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$, weil man bei $\frac{3}{5}$ (§ 32) das Ganze in mehr, also in kleinere Theile getheilt hat als bei $\frac{3}{4}$, ohne deshalb mehr Theile zu nehmen.

§ 39. Da es vorzüglich zwei Arten der Vermehrung, Addition und Multiplication (eine dritte ist die Potentiirung), welche letztere, die Multiplication, eine wiederholte Addition eines und desselben Postens ist (§ 7): so muß das, was § 38 von Vergrößerung des Zählers so wie des Nenners durch Addition gelehrt worden, auch für die Vergrößerung des Zählers und Nenners durch Multiplication gelten. Wird demnach der Zähler (3) eines Bruches ($\frac{3}{4}$) einige Mal, etwa 5 Mal, größer, so wird der Bruch selbst ($5 \cdot \frac{3}{4}$ oder $\frac{5 \cdot 3}{4}$, d. i. $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$, also $\frac{15}{4}$) 5 Mal größer. — Wird aber hinwiederum der Nenner (4) eines Bruches ($\frac{3}{4}$) 5 Mal größer, so wird der Bruch selbst (nämlich $\frac{3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$) 5 Mal kleiner.

§ 40. Wenn man also Zähler und Nenner eines Bruches ($\frac{3}{4}$) mit einer und derselben Zahl (5) multiplicirt, so bleibt der Werth des Bruchs ($\frac{3}{4}$) unverändert: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$.

Aus eben diesen Gründen, und weil die Division eine wiederholte Subtraction eines und desselben Subtrahendus ist (§ 12, 2) [eine dritte Art der Verminderung ist die Wurzel-Ausziehung], wird der Werth eines Bruches nicht verändert, wenn man seinen Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl dividirt; z. B. $\frac{15}{20} = \frac{15 : 5}{20 : 5} = \frac{3}{4}$.

§ 41. Um Brüche auf gleiche Benennung, d. i. auf gleichen Nenner zu bringen, welcher Nenner demnach auch der allgemeine Nenner oder der General-Nenner heißt, multiplicire man, als wodurch (§ 40) der Werth der Brüche nicht verändert wird, Zähler und Nenner jedes Bruchs mit allen übrigen Nennern, oder, mit andern Worten, mit dem Producte der übrigen Nenner, z. B.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{144}{288}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{192}{288}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8}{6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8} = \frac{240}{288}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6}{8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{252}{288}$$

Der Nenner jedes Bruchs wird hienach multiplicirt mit dem Producte aller übrigen Nenner, und muß daher das Product aller Nenner überall gleich sein. Da nun aber der Bruch hiedurch so viel Mal kleiner geworden ist, als das Product der übrigen Nenner groß ist, so muß er, um unverändert zu bleiben, auch eben so viel Mal größer gemacht werden, welches geschieht, indem auch sein Zähler mit dem Product aller übrigen Nenner multiplicirt wird. Es besteht demnach der neue Zähler jedes Bruches aus dem ursprünglichen Zähler, multiplicirt in das Product aller übrigen Nenner.

§ 42. Zur Abkürzung dieses Verfahrens kann man den allgemeinen Nenner (288) ein für alle Mal bestimmen, indem man alle Nenner 2, 3, 6, 8 in einander multiplicirt. Da nun (§ 41) der jedesmalige neue Zähler gefunden wird, wenn man das Product der übrigen Nenner mit dem ursprünglichen Zähler multiplicirt, so hat man zuvor das Product aller übrigen Nenner aus dem allgemeinen Nenner ($288 = 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 8$) zu bestimmen. Solches aber geschieht, wenn man den jedesmaligen Nenner in den allgemeinen Nenner dividirt; denn es fällt ja durch diese Division, aus dem Producte aller Nenner, der jedesmalige Nenner als Factor weg. So ist z. B., in dem obigen Exempel, für den Bruch $\frac{1}{2}$ das Product aller übrigen Nenner $\frac{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 8}{2} = 3 \cdot 6 \cdot 8$, wie oben (§ 41) u. s. f.. Die Rechnung kommt also so zu stehen:

	288	
$\frac{1}{2}$	144	144
$\frac{2}{3}$	96	192
$\frac{5}{6}$	48	240
$\frac{7}{8}$	36	252

§ 43. Der General-Nenner braucht ferner nicht gerade das Product aller Nenner zu enthalten; es genügt, wenn er nur so beschaffen ist, daß alle Nenner in ihn aufgehen, da man überhaupt nur bestimmen will, wie viel Theile von einer gewissen Zahl, sei diese nun 288 oder eine größere oder geringere, auf einen Bruch mit gegebenem Zähler und Nenner, hier auf $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$, gehen. Nun geht, in obigem Beispiele, der Nenner 2 in den Nenner 8 auf, man braucht also auf den Nenner 2 nicht Rücksicht zu nehmen. Von dem Nenner 6 ($= 2 \cdot 3$) geht ebenfalls der Factor 2 in den Nenner 8 auf: also bleiben 8 . 3 . 3 als Factoren zum Nenner übrig. Da aber die 3 zum kleinsten Nenner offenbar nur ein Mal nöthig ist, so sind 8 . 3 ($= 24$), als Primzahlen zu einander, die

Factoren des kleinsten General-Nenners. — Schriftlich findet man diese Factoren desselben, wenn man alle Nenner neben einander schreibt, und sie, um Irrungen zu vermeiden, nur durch Primzahlen dividirt, und zwar nur durch solche Primzahlen, die wenigstens in zwei Factoren oder Quotienten derselben aufgehen; auch dieses so lange fortsetzt, als irgend zwei Nenner oder Quotienten der Nenner noch ein gemeines Maaß (§ 27) haben. Die Divisoren und übrig bleibenden Quotienten der Nenner sind die Factoren des kleinsten allgemeinen Nenners.

Die durch Division der Nenner oder Quotienten der Nenner sich als Einheiten ergebenden Factoren 1 . 1 . 1 u. s. w. sind nicht zu berücksichtigen, weil 1 nicht multiplicirt. Das Verfahren selbst ist, in Beziehung auf obige Nenner, folgendes:

2) 2, 3, 6, 8

3) 3, 3, 4

4

Es nützt nicht, den zuletzt allein bleibenden Quotienten 4 ausdrücklich unter die Divisoren zu bringen, man sieht ihn aber als Divisor an; folglich ist der kleinste allgemeine Nenner 2.3.4=24; und es kommt das obige Exempel nun so zu stehen:

	24	
$\frac{1}{2}$	12	12
$\frac{2}{3}$	8	16
$\frac{5}{6}$	4	20
$\frac{7}{8}$	3	21

Der kleinste allgemeine Nenner (24), weil alle Nenner in ihn aufgehen, ist anzusehen als das Product aller Nenner. Dividirt man nun in diese 24 den jedesmaligen Nenner, so erhält man bei jedem Bruche, wenn auch nicht das wirkliche Product aller übrigen Nenner, doch eine Zahl, welche man ansehen kann als das Product aller übrigen Nenner, in welche als Product der übrigen Nenner anzunehmende Zahl man darauf den jedesmaligen Zähler zu multipliciren hat.

§ 44. Ist überhaupt der allgemeine Nenner einmal ausgemittelt, so darf man nur, um überall gleichen Nenner zu erhalten, Nenner und Zähler jedes Bruches mit demjenigen Factor multipliciren, welcher dem Nenner jedes Bruchs zum allgemeinen Nenner noch abgeht. Wenn also für die Nenner $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ der

kleinste allgemeine Nenner 24 ist, so kommt die Rechnung so zu stehen:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \div \frac{12}{12} = \frac{12}{24}$$
$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \div \frac{8}{8} = \frac{16}{24}$$
$$\frac{5}{6} = \frac{5}{6} \div \frac{4}{4} = \frac{20}{24}$$
$$\frac{7}{8} = \frac{7}{8} \div \frac{3}{3} = \frac{21}{24}$$

Das Verfahren, um Brüche auf gleiche Benennung zu bringen, liefert ein Mittel, um die Größe zweier Brüche zu vergleichen. Es wird z. B. gefragt: Welcher Bruch ist größer, $\frac{3}{4}$ oder $\frac{2}{3}$, und um wie viel?

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \div \frac{3}{3} = \frac{9}{12}$$
$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{4} = \frac{8}{12};$$

also ist $\frac{3}{4}$ um $\frac{1}{12}$ größer als $\frac{2}{3}$. — Ferner

$$\frac{106}{333} = \frac{106}{333} \div \frac{355}{355} = \frac{37630}{118215}$$
$$\frac{113}{355} = \frac{113}{355} \div \frac{333}{333} = \frac{37629}{118215};$$

jener Bruch ist also um $\frac{1}{118215}$ größer als dieser.

§ 45. Einen Bruch abkürzen heißt, demselben ohne Veränderung seines Werthes eine kleinere Gestalt geben. Solches geschieht, wenn man (§ 40) sowohl den Zähler als den Nenner durch eine und dieselbe Zahl dividirt. Die Kennzeichen für die Theilbarkeit der Zahlen (§§ 29, 30) und die Methode, den größten gemeinen Theiler zweier Zahlen, oder des Zählers und Nenners eines Bruches, zu finden (§ 31), geben diejenigen Zahlen an, welche zur Abkürzung eines Bruches dienen.

Man sage in diesem Falle nicht „einen Bruch verkleinern"; „verkleinern" heißt „kleiner machen"; der Bruch soll aber seinen Werth unvermindert behalten: man sage also „man gebe dem Bruch eine kleinere Gestalt", oder „man kürze ihn ab", oder auch wohl, wie die Rechenmeister sagen, „man hebe den Bruch" oder „man hebe ihn auf".

Wenn man Brüche auf den kleinsten gemeinen Nenner zu bringen hat, so sehe man vorher zu, daß jeder Bruch gehörig abgekürzt sei. Denn z. B. für die Brüche $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{9}$ wäre der kleinste gemeine Nenner 180, da, wenn aus diesen Brüchen durch Abkürzung die Brüche $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{9}$ hergestellt werden, man als kleinsten Nenner nur 15 bekommt. — Überhaupt muß, wenn nicht Umstände es anders verlangen, jeder Bruch, mit dem man operiren will, oder den man als Resultat erhält, gehörig abgekürzt werden.

§ 46. Brüche mit gleichen Nennern werden, da diese Brüche nach gleicher Einheit (§ 33) gezählt sind, addirt, wenn man die Zähler addirt, und den Nenner unter diese Summe setzt; z. B. $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$ $(= 1\frac{1}{4})$.

Haben die Brüche aber nicht gleiche Nenner, so müssen sie vorher auf gleiche Benennung gebracht werden; z. B. $\frac{3}{5} + \frac{7}{8} = \frac{3}{5} \div \frac{8}{8} + \frac{7}{8} \div \frac{5}{5} = \frac{24}{40} + \frac{35}{40} = \frac{59}{40} = 1\frac{19}{40}$.

Kommen hiebei gemischte Zahlen vor, so addire man zuerst die Brüche, verwandle deren Summe, falls diese ein unechter Bruch geworden, in eine gemischte Zahl, und zähle dann zu den aus den Brüchen sich etwa ergeben habenden Ganzen jene Ganzen hinzu.

(Übungs-Exempel VII, Nr. 1—21.)

§ 47. Brüche mit gleichen Nennern werden von einander subtrahirt, wenn man den Zähler des Subtrahendus vom Zähler des Minuendus subtrahirt, und unter den Rest den gemeinschaftlichen Nenner setzt; z. B. $\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8} (= \frac{1}{2})$.

Haben aber die Brüche nicht gleiche Nenner, so müssen sie vorher auf gleiche Benennung gebracht werden; z. B. $\frac{8}{9} - \frac{3}{5} = \frac{8}{9} \div \frac{5}{5} - \frac{3}{5} \div \frac{9}{9} = \frac{40}{45} - \frac{27}{45} = \frac{13}{45}$.

Sind mehre Subtrahenden von einem Minuendus abzuziehen, so stellt man am bequemsten aus allen Subtrahenden einen einzigen her, indem man sie, vor der Subtraction vom Minuendus, addirt. Um diese Rechnung noch mehr abzukürzen, ziehe man, wenn man die Subtrahenden auf gleiche Benennung bringt, den Nenner des Minuendus mit hinzu.

(Übungs-Exempel der Subtraction mehrer Subtrahenden sowohl von einem echten Bruche, als von einer ganzen Zahl, auch von einer gemischten Zahl, VIII, Nr. 1—8.)

§ 48. 1. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man, bei unverändertem Nenner, den Zähler mit derselben multiplicirt, z. B. $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{6}{4} (= \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2})$. Denn da man den Bruch $\frac{3}{4}$ zwei Mal nehmen soll, so muß man ja die drei Einheiten desselben: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ (§ 33) zwei Mal nehmen (§ 39).

2. Auch kann man, wenn es angeht, bei unverändertem Zähler, den Nenner durch die ganze Zahl dividiren; z. B. $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4 : 2} = \frac{3}{2}$, weil dadurch jeder dieser Theile doppelt so groß wird (§ 38).

3. Hieraus folgt der Satz: Ein Bruch $(\frac{3}{4})$ mit seinem Nenner (4) multiplicirt, giebt den Zähler (3) als ganze Zahl.

§ 49. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man, bei unverändertem Zähler, den Nenner durch dieselbe multiplicirt; z. B. $\frac{8}{9} : 2 = \frac{8}{9 \cdot 2} = \frac{8}{18} (= \frac{4}{9})$, weil man hiedurch zwei Mal so kleine Theile erhält (§ 38).

Falls es aber angeht, so kann man auch den Zähler durch die ganze Zahl dividiren; z. B. $\frac{8}{9} : 2 = \frac{8 : 2}{9} = \frac{4}{9}$, weil man dadurch halb so viel Theile erhält (§ 38).

§ 50. Eine ganze oder gebrochene Zahl mit einem Aliquotum (§ 33) multipliciren, heißt, sie mit dem Nenner des aliquoten

Theiles dividiren; z. B. $5 \times \frac{1}{7} = 5 : 7 = \frac{5}{7}$; $\frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \cdot 5}$ (§ 49) $= \frac{3}{20}$; denn man soll ja die ganze Zahl 5 ein Siebentel Mal, oder den Bruch $\frac{3}{4}$ ein Fünftel Mal nehmen.

§ 51. Ein jeder Bruch ($\frac{5}{7}$), dessen Zähler nicht 1 ist, kann angesehen werden, als ein Product des Zählers (5) multiplicirt mit einem Aliquotum ($\frac{1}{7}$), das zum Nenner den Nenner des vorgegebenen Bruchs hat (vergl. § 50).

§ 52. Zwei Brüche, echte oder unechte, werden in einander multiplicirt, wenn man Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multiplicirt; z. B. $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$. Es ist nämlich $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times 5 \cdot \frac{1}{7}$ (§ 51) $= \frac{3 \cdot 5}{4} \times \frac{1}{7}$ (§ 48) $= \frac{3 \cdot 5}{4} : 7$ (§ 50) $= \frac{3}{4} \div \frac{5}{7}$ (§ 49).

Gemischte Zahlen sind zuvor in unechte Brüche zu verwandeln.

Der Lehrer würde wohl thun, diesen Beweis, so wie später den Beweis für die Division der Brüche (§ 55) mit Anführung der Gründe, die jeder Schlußfolge mittels der Paragraphen-Zahl beigefügt sind, durch die Schüler mehrfach an andern Beispielen wiederholen zu lassen, bis der Beweis völlig gefaßt ist.

Um einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, geben Einige folgende sonderbare Regel: Man setze unter die ganze Zahl eine 1 als Nenner, und multiplicire alsdann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner; z. B. $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{1}$. Aber eine ganze Zahl, wie solches doch nach § 32 geschehen soll, in einen gleichen Theil zu theilen, wie wäre das wohl anzustellen? — Mag auch bisweilen ein solcher Mechanismus nöthig werden, so ist er (durch § 48) wenigstens hier nicht nöthig.

§ 53. Das Product zweier unechter Brüche muß größer sein als jeder der beiden Factoren für sich allein, z. B. $\frac{4}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$; und $\frac{5}{3} > \frac{4}{3}$, $\frac{5}{3} > \frac{5}{4}$; denn multiplicirte man den Factor $\frac{4}{3}$ oben und unten mit 4, dem Nenner des andern Bruches, so bliebe der Bruch $\frac{4}{3}$ unverändert; man multiplicirt aber den Zähler mit einer größeren Zahl (5) als den Nenner (mit 4), es wird also das Product durch Multiplication des Zählers mehrmals größer als es durch Multiplication des Nenners kleiner wird; folglich wird das Product ($\frac{5}{3}$), nach § 38, überhaupt größer.

Eben so kann gezeigt werden, daß das Product $\frac{5}{3}$ größer als der andere Factor $\frac{5}{4}$ sein müsse.

Das Product zweier echten Brüche ist kleiner als jeder der Factoren; z. B. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$; und $\frac{8}{15} < \frac{2}{3}$, $\frac{8}{15} < \frac{4}{5}$. Denn wenn man $\frac{2}{3}$ oben und unten mit 5 multipliciren würde, so bliebe der Bruch unverändert; man multiplicirt aber den Nenner mit einer größeren Zahl (5) als den Zähler (mit 4), folglich wird das Product $\frac{8}{15}$ kleiner sein müssen als der Factor $\frac{2}{3}$.

Eben so wird gezeigt, daß das Product $\frac{8}{15}$ kleiner sein müsse als der andere Factor $\frac{2}{3}$.

Endlich ist das Product eines unechten und eines echten Bruches kleiner als der unechte, und größer als der echte Bruch; z. B. $\frac{4}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$; und $\frac{8}{15} < \frac{4}{3}$, so wie $\frac{8}{15} > \frac{2}{5}$. — Der Grund davon erhellet wie oben.

§ 54. Zwei Brüche von gleichen Nennern werden in einander dividirt, wenn man, ohne die Nenner zu berücksichtigen, den Zähler des Dividends durch den Zähler des Divisors dividirt; z. B. $\frac{8}{7} : \frac{2}{7} = 8 : 2 = \frac{8}{2} (= 4)$, ferner $\frac{5}{3} : \frac{2}{3} = 5 : 2 = \frac{5}{2}$; denn da die Brüche nach gleicher Einheit gezählt sind, so ist die Division dieser Brüche nichts anders als eine Division der Zähler als ganzer Zahlen; oder beispielsweise: 2 Einheiten von einer gewissen, gleich viel welcher Art sind in 8 Einheiten eben derselben Art vier Mal enthalten.

§ 55. Zwei Brüche, echte oder unechte, werden in einander dividirt, wenn man den Divisor umkehrt, und multiplicirt, z. B. $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{3}{4} \div \frac{7}{5} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$.

Denn

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \div \frac{7}{7} : \frac{4}{4} \div \frac{5}{7} \text{ (§ 41)} = \frac{3 \cdot 7}{28} : \frac{4 \cdot 5}{28} = 3 \,.\, 7 : 4 \,.\, 5 \text{ (§ 54)}$$
$$= \frac{3}{4} \div \frac{7}{5} \text{ (§ 34)} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} \text{ (§ 52)}.$$

Hienach ist also, wie aufgegeben war, bewiesen, daß man zum Quotient erhält $\frac{3}{4} \times \frac{7}{5}$, d. i. ein Product zweier Brüche, wovon der Multiplicator der vorgegebene Dividend $(\frac{3}{4})$, der Multiplicandus $(\frac{7}{5})$ der umgekehrte Divisor $(\frac{5}{7})$ ist.

Einige geben die obige Regel so: „Um zwei Brüche in einander zu dividiren, multiplicire man in's Kreuz." Man ist dann aber doch nicht sicher, ob man dadurch nicht vielleicht den umgekehrten Quotient, statt des wahren, erhalten hat; denn $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$ könnte hienach eben so wohl sein $\frac{21}{20}$ als $\frac{20}{21}$.

Gemischte Zahlen sind zuvor in unechte Brüche zu verwandeln.

§ 56. Ist der Zähler des Dividends vom Zähler des Divisors, und eben so der Nenner des Dividends vom Nenner des Divisors ein Vielfaches, so verrichtet man die Division, wenn man den Zähler des Dividends durch den Zähler des Divisors, und eben so die Nenner dividirt; z. B. $\frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{8:2}{15:3} = \frac{4}{5}$. Denn durch die Umkehrung des Divisors wird der Zähler des Divisors für den Quotient Factor des Nenners, und der Nenner des Divisors Factor des Zählers. Diese Factoren von Zähler und Nenner aber lassen sich, der Voraussetzung nach, gegen Zähler und Nenner des Dividends abkürzen; daher die Regel. Es ist nämlich $\frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{8}{15} \times \frac{3}{2} = \frac{8 \cdot 3}{15 \cdot 2} = \frac{4}{5}$.

Die gebrochenen Brüche,

als Anhang zur Division der gemeinen Brüche.

§ 57. Wenn man (nach § 34) einen Bruch, $\frac{1}{2}$, selbst als ein Ganzes betrachtet, und dieses wiederum in eine gewisse Anzahl, 4, gleicher Theile theilt, so hat man, im Gegensatz eines einfachen Bruches, den gebrochenen, oder unreinen, zusammengesetzten Bruch, Doppelt-Bruch, auch wohl Bruch aus einem Bruche oder Bruch eines Bruches $\frac{\frac{1}{2}}{4}$ (zu lesen „ein halb Viertel"). Demnach ist $\frac{1}{2}$ der Zähler dieses Bruches, und der Nenner ist 4. Zähler und Nenner des gebrochenen Bruches müssen jedoch, um Mißverständnisse zu vermeiden, augenfällig von einander unterschieden werden; denn $\frac{\frac{1}{2}}{4}$ könnte bedeuten $\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$, oder $1 : \frac{2}{4} = 1 : \frac{1}{2} = 2$. Zu dem Ende setze man zwischen den Zähler, $\frac{1}{2}$, und den Nenner, 4, einen dickeren und längeren Strich $\frac{\frac{1}{2}}{4}$, oder noch besser, wie auch oben geschehen, einen Doppeltstrich $\frac{1}{2}$.

§ 58. Ein gebrochener Bruch ist demnach nur eine angedeutete Division. Wenn derselbe zum Zähler einen echten oder unechten Bruch, zum Nenner aber eine ganze Zahl hat, so verwandelt man ihn in einen einfachen Bruch, indem man beide darin vorkommende Nenner in einander multiplicirt (§ 49), und dieses Product unter den Zähler im engern Sinne setzt, so ist $\frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$, da $\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{2 \cdot 4}$ (§ 49) $= \frac{1}{8}$; $\frac{\frac{2}{3}}{2}$ (zu lesen „zwei Drittel halb" oder „ein Halbes aus zwei Dritteln") $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\frac{\frac{3}{4}}{5}$ (gelesen „drei Viertel Fünftel" oder „ein Fünftel aus drei Vierteln") $= \frac{3}{20}$.

§ 59. Zu diesen Brüchen aus Brüchen gehören ferner Ausdrücke wie folgende: $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$ (d. i. $\frac{3}{4}$ aus einem Halben), $\frac{7\frac{2}{3}}{18}$ (d. i. der achtzehnte Theil von $7\frac{2}{3}$), $\frac{8}{4\frac{2}{3}}$ (der $4\frac{2}{3}$te Theil aus 8), $\frac{4\frac{2}{7}}{9\frac{1}{3}}$ ($9\frac{1}{3}$ aus $4\frac{2}{7}$), in welchem 1) sowohl Zähler als Nenner echte Brüche, oder 2) und 3) der eine eine gemischte, der andere eine ganze Zahl, oder 4) jener sowohl als dieser eine gemischte Zahl ist. Dergleichen Brüche werden als einfache Brüche dargestellt nach den für die Division der gemeinen Brüche gegebenen Regeln. So ist

1) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$;

2) $\frac{7\frac{2}{3}}{18} = \frac{\frac{23}{3}}{18} = \frac{23}{54}$;

3) $\frac{8}{4\frac{2}{3}} = \frac{8}{\frac{14}{3}} = 8 : \frac{14}{3} = 8 \times \frac{3}{14} = 4 \times \frac{3}{7} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$;

4) $\frac{4\frac{2}{7}}{9\frac{1}{3}} = \frac{\frac{30}{7}}{\frac{28}{3}} = \frac{30}{7} : \frac{28}{3} = \frac{30}{7} \times \frac{3}{28} = \frac{15}{7} \div \frac{3}{14} = \frac{45}{98}$.

§ 60. Doppelt-Brüche, deren Zähler gemischte Zahlen oder unechte Brüche, und deren Nenner ganze Zahlen sind, ergeben sich bei der Reduction, wenn nämlich eine Größe niederer Benennung, z. B. Loth, sammt einer Größe noch niederer Benennung, Quentchen, als Bruch der höheren Benennung, Pfund, ausgedrückt werden soll, so ist z. B.

$$8 \text{ Lt. } 3 \text{ Qt.} = 8\tfrac{3}{4} \text{ Lt.} = \frac{8\frac{3}{4}}{32} \text{ Ctr.} = \frac{\frac{35}{4}}{32} \text{ Ctr.} \left(= \tfrac{35}{128} \text{ Ctr.}\right);$$

$$10 \text{ ßl. Sterl. } 8 \text{ d.} = 10\tfrac{2}{3} \text{ ßl. Sterl.} = \frac{10\frac{2}{3}}{20} \text{ L. Sterl.} = \frac{\frac{32}{3}}{20} \text{ L. Sterl.}$$

$$\left(= \tfrac{32}{60} = \tfrac{8}{15} \text{ L. Sterl.}\right)$$

Doppelt-Brüche, die zum Zähler einen echten Bruch, zum Nenner eine gemischte Zahl oder einen unechten Bruch haben, ergeben sich in der Anwendung folgender Maaßen:

Wenn 1 holl. Ducaten $= 3\frac{12}{91}$ Thlr. preuß., und 1 fl. österr. $= \frac{65}{91}$ Thlr. preuß., so ist

$$1 \text{ fl. österr.} = \frac{\frac{65}{91}}{3\frac{12}{91}} \text{ Duc.} = \frac{\frac{65}{91}}{\frac{285}{91}} \text{ Duc.} \left(= \tfrac{65}{91} : \tfrac{285}{91} \text{ Duc.}\right.$$

$$\left. = \tfrac{65}{91} \times \tfrac{91}{285} \text{ Duc.} = \tfrac{13}{57} \text{ Duc.}\right)$$

$$1 \text{ Stunde} = \frac{\frac{1}{24}}{365\frac{1}{4}} \text{ des Jul. Jahres} \left(= \tfrac{1}{24} : 365\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{24} : \tfrac{1461}{4}\right.$$

$$\left. = \tfrac{1}{24} \times \tfrac{4}{1461} = \tfrac{1}{8766} \text{ des Jul. Jahres}\right).$$

§ 61. Um einen einfachen Bruch, $\frac{3}{4}$, ohne Veränderung seines Werthes, in einen andern mit gegebenem Nenner, 7, zu verwandeln, multiplicire man den gegebenen Nenner, 7, mit dem Zähler, 3, und setze den ursprünglichen Nenner, 4, darunter, $\frac{3 \cdot 7}{4}$. Diesen Ausdruck dividire man durch den gegebenen Nenner, 7, so ist $\frac{\frac{3 \cdot 7}{4}}{7} = \frac{\frac{21}{4}}{7}$ der verlangte Bruch, und dieser muß dem gegebenen Bruche, $\frac{3}{4}$, gleich sein, da selbiger zuerst mit 7 multiplicirt, darauf mit 7 dividirt wurde (§ 40).

Ferner $\frac{3}{4} = \frac{\frac{3 \cdot 5}{4}}{5} = \frac{\frac{15}{4}}{5}$, und dieses ist wiederum nichts anders als $\frac{15}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4}$.

Eben so, $\frac{x}{24}$ soll gleich sein $\frac{3}{8}$; darum ist $\frac{3}{8} = \frac{\frac{3 \cdot 24}{8}}{24} = \frac{\frac{72}{8}}{24}$ und der zum gegebenen Nenner 24 gehörige Zähler ist $\frac{72}{8}$, also der Bruch $\frac{\frac{72}{8}}{24}$ $(= \frac{9}{24} = \frac{3}{8})$.

§ 62. Um einen Bruch, $\frac{3}{4}$, ohne Veränderung seines Werthes in einen andern mit gegebenem Zähler, 7, zu verwandeln, dividire man den gegebenen Zähler, 7, durch das Product dieses Zählers in den Nenner, 4 . 7, und dividire diesen neuen Nenner durch den ehemaligen Zähler, 3, man erhält demnach

$\frac{3}{4} = \frac{\frac{7}{4 \cdot 7}}{3} = \frac{\frac{7}{28}}{3}$; denn es ist ja $7 : \frac{28}{3} = 7 \times \frac{3}{28} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$.

§ 63. Um Doppelt-Brüche zu addiren, zu subtrahiren, zu multipliciren, zu dividiren, verwandle man selbige zuerst in einfache Brüche, und verfahre alsdann nach den für die Addition, Subtraction, Multiplication, Division angegebenen Regeln:

1) Addition: $\frac{\frac{3}{4}}{7} + \frac{5\frac{5}{8}}{6\frac{2}{3}} + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} + \frac{6}{1\frac{3}{7}} = \frac{3}{28} + \frac{27}{37} + \frac{3}{8} + \frac{21}{5}$
$= \frac{6189}{1120} = 5\frac{589}{1120}$.

2) Subtraction: $\frac{9}{2\frac{5}{8}} - \frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{24}{7} - \frac{3}{20} = \frac{459}{140} = 3\frac{39}{140}$.

3) Multiplication: $\frac{2\frac{1}{6}}{4\frac{3}{8}} \times \frac{6}{\frac{5}{8}} = \frac{52}{105} \times \frac{3}{20} = \frac{13}{175}$.

4) Division: $\frac{3\frac{1}{4}}{8} : \frac{5}{3\frac{5}{8}} = \frac{13}{32} : \frac{40}{29} = \frac{13}{32} \times \frac{29}{40} = \frac{377}{1280}$.

Dritter Abschnitt.

Die Lehre von den Decimal-Brüchen.

§ 64. Wenn man in einer dekadischen Zahl von der Linken nach der Rechten zu, d. h. von den zehn Mal höheren Stellen zu den zehn Mal niedrigeren fortgeht, und so auf die Einer gekommen ist, so steht nichts im Wege, nach eben diesem Gesetze noch

weiter fortzuschreiten. Die nächste Stelle nach den Einern wird demnach eine Größe einnehmen, die zehn Mal weniger bedeutet als eben so viel Einer, nämlich die Stelle der Zehntheile einer Einheit; in die darauf folgende Stelle kommen die zehn Mal kleineren Größen als eben so viel Zehntheile, d. i. die Hundert-Theile einer Einheit, dann die Tausend-Theile, die Zehntausend-Theile u. s. w.. Wenn man z. B. weiß, daß in der Zahl 267893 die 2 die Einer sind, so giebt die nun folgende 6 die Zehntheile, die 7 die Hundert-Theile, die 8 die Tausend-Theile u. s. w. an. Die Stelle von der 6 an, diese mit eingerechnet, sind Decimal- oder zehntheilige Brüche.

§ 65. Ein Decimal-Bruch hat demnach zum Nenner 10 oder eine Potenz von 10 (§ 11). Der Nenner ist also alle Mal 1 mit einer oder mehren angehängten Nullen.

§ 66. Ein Komma hinter den Ganzen dient als Zeichen, daß die Ganzen aufhören, und rechtshin die Decimal-Brüche oder Decimal-Stellen anfangen. Decimal-Brüche wie die obigen, 2,67893, enthalten eine gemischte Zahl. Echte Decimal-Brüche haben demnach das Zeichen 0, vor ihren Decimal-Stellen.

§ 67. Nullen hinter einem Decimal-Bruche ändern an seinem Werthe nichts, wie sie vor ganzen Zahlen an deren Werthe nichts ändern. So ist 0,6 = 0,60 = 0,600 u. s. w., eben wie 365 = 00365.

§ 68. Um Decimal-Brüche auf gleichen, und zugleich auf den kleinsten Nenner zu bringen, sehe man zu, welcher Bruch am meisten Decimal-Stellen hat, und hänge den andern Brüchen so viel Nullen an, daß alle Brüche gleich viel Stellen erhalten. Es sind demnach in 0,67893 die Brüche

$$0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{6 \cdot 10\,000}{100\,000} = \frac{60\,000}{100\,000} = 0{,}60\,000$$

$$0{,}07 = \frac{7}{100} = \frac{7 \cdot 1\,000}{100\,000} = \frac{7\,000}{100\,000} = 0{,}07\,000$$

$$0{,}008 = \frac{8}{1000} = \frac{8 \cdot 100}{100\,000} = \frac{800}{100\,000} = 0{,}00\,800$$

$$0{,}0009 = \frac{9}{10000} = \frac{9 \cdot 10}{100\,000} = \frac{90}{100\,000} = 0{,}00\,090$$

$$0{,}00003 = \frac{3}{100000} = \frac{3}{100\,000} = \frac{3}{100\,000} = 0{,}00\,003$$

beiderseits addirt $\frac{67\,893}{100\,000} = 0{,}67\,893.$

Hienach können nunmehr die obigen Brüche 0,6; 0,07; 0,008; 0,0009; 0,00003 auch zusammen ausgesprochen werden folgender Maaßen: sieben und sechzig tausend, acht hundert drei und neunzig Hundert-Tausendstel, sind demnach als ein einziger Decimal-Bruch anzusehen.

§ 69. Hienach wird ein Decimal-Bruch ein solcher Bruch sein, der zum Nenner 1 mit so viel daran gehängten Nullen hat, als im Zähler Decimal-Stellen vorhanden sind.

§ 70. Das Zeichen 0, da, wo die Ganzen des Decimal-Bruches aufhören und der Bruch anfängt, macht überflüssig, dem Decimal-Bruch seinen Nenner unterzusetzen: geschieht dieß aber, so muß auch das Komma sammt den etwanigen Nullen vor den bedeutlichen Ziffern des Zählers wegfallen. So ist

$2{,}5 = \frac{25}{10}$; $32{,}78 = \frac{3278}{100}$; $0{,}37 = \frac{37}{100}$; $0{,}003 = \frac{3}{1000}$.

§ 71. Um einen dictirten Decimal-Bruch hinzuschreiben, achte man auf den Nenner; so viel Nullen in diesem vorkommen, so viel Decimal-Stellen gebe man dem Zähler.

I. Sind genau so viel Decimal-Stellen vorhanden, als man Nullen im Nenner hört, so folgt unmittelbar auf die 0, der gehörte Zähler z. B. $\frac{3657}{10000} = 0{,}3657$.

II. Sind im Zähler mehr Ziffern, als man Nullen im Nenner hört, so schneide man, von der Rechten nach der Linken zu, so viel Decimal-Stellen ab, daß die Anzahl der Decimal-Stellen gleich komme der Anzahl der im Nenner gehörten Nullen; z. B. $\frac{2186397}{1000} = 2186{,}397$.

III. Sind im dictirten Zähler weniger Ziffern als Nullen im Nenner, so setze man vor die bedeutlichen Ziffern des Decimal-Bruchs so viel Nullen, daß die Anzahl der Stellen im Zähler gleich werde der Anzahl der im Nenner gehörten Nullen, z. B. $\frac{43}{10000000} = 0{,}0000043$.

Beispiele zum Dictiren an der Tafel.

$\frac{4768}{10000} = 0{,}4768$; $\frac{357}{100000} = 0{,}00357$; $\frac{278057392}{1000000} = 278{,}057392$;
$\frac{5399850870}{100000000} = 53{,}99850870 = 53{,}9985087$;
$\frac{5}{1000000} = 0{,}000005$; $\frac{6800}{10000} (= \frac{68}{100}) = 0{,}6800 (= 0{,}68)$;
$\frac{72208740}{10000000} (= \frac{7220874}{1000000}) = 7{,}2208740 = (7{,}220874)$;
$\frac{54382}{100000} = 0{,}54382$; $\frac{97854390}{100000} = 978{,}5439$;
$\frac{5324279}{1000} = 5324{,}279$; $\frac{825}{10} = 82{,}5$; $\frac{850}{100} = 8{,}5$;
$\frac{1270350}{100000} = 12{,}70350 = 12{,}7035$; $\frac{305}{100000} = 0{,}00305$;
$\frac{9285}{1000} = 9{,}285$; $\frac{580}{10000000} = 0{,}000058$; $\frac{7}{1000000} = 0{,}000007$;
$\frac{29}{100000} = 0{,}00029$; $\frac{8025}{1000} = 8{,}025$; $\frac{4}{10000} = 0{,}0004$;
$\frac{8430}{10000} = 0{,}843$; $\frac{277705}{10000} = 27{,}7705$; $\frac{298530}{1000} = 298{,}53$.

§ 72. Ein Decimal-Bruch wird mit 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicirt oder dividirt, je nachdem man das Komma eine, oder

zwei, oder drei u. s. w. Stellen weiter rechts- oder linkshin stellt; es erhält nämlich dadurch jede Stelle in jenem Falle einen 10-, oder 100-, oder 1000-fach größeren, in diesem Falle aber kleineren Werth als sie vorher hatte. So ist 0,3657, mit 10 multiplicirt = 3,657, mit 100 multiplicirt = 36,57 u. s. w.; und 0,3657 mit 10 dividirt = 0,03657, mit 100 dividirt = 0,003657 u. s. w..

§ 73. Ein gemeiner Bruch wird in einen Decimal-Bruch verwandelt, wenn man die durch die Bruchform bloß angezeigte Division ausführt (§ 34). — Ist der gegebene Bruch ein unechter, so ergeben sich bei der Division zuerst die durch ein Komma abzusondernden Ganzen, und übrig bleibt ein echter Bruch, z. B. $\frac{35}{16} = 2\frac{3}{16}$.

Obgleich man die durch den Zähler (3) des echten Bruches ($\frac{3}{16}$) ausgedrückten Ganzen durch den Nenner (16) nicht weiter dividiren kann, so kann man doch, beständig durch die Eintheilungszahl 10 der Ganzen für die Zehntheile, der Zehntheile für die Hundert-Theile u. s. w., mittels jedesmaliger Anhängung einer Null resolvirend, sie zuerst als Zehntheile dividiren, als wodurch man im Quotient die Zehntheile erhält, darauf den Rest als Hundert-Theile, welches im Quotient die Hundert-Theile ergiebt, wiederum den Rest als Tausend-Theile u. s. w.; wie für den Bruch $\frac{3}{16}$ die Dividenden nach der Ordnung sein werden $3 = \frac{30}{10}$; $\frac{14}{10} = \frac{140}{100}$; $\frac{12}{100} = \frac{120}{1000}$; $\frac{8}{1000} = \frac{80}{10000}$. Das Exempel selbst kommt so zu stehen:

16 | 3 | 0,1875
30
16
140
128
120
112
80
80
(0)

Geht hiebei eine Division nicht auf, so nimmt man von den Decimal-Stellen des Quotients, nach Maaßgabe der für eine Rechnung erforderlichen Genauigkeit, so viel Stellen als nöthig, und bezeichnet die Unvollständigkeit des Decimal-Bruchs durch einige demselben angehängte Puncte, z. B. $\frac{13}{7} = 0{,}621621\ldots$.

§ 74. Ein zweites Mittel, um die Größe der gemeinen Brüche zu vergleichen (das erste ist, sie auf gleiche Benennung zu bringen,

vergl. Anm. zu § 44) giebt ihre Verwandlung in Decimal-Brüche an die Hand, so z. B. ist

$$\frac{106}{333} = 0{,}318318\ldots.$$
$$\frac{113}{355} = 0{,}318309\ldots.$$

Demnach ist $\frac{106}{333}$ um 0,000009 .... größer als $\frac{113}{355}$.

§ 75. Man verwandle folgende gemeine Brüche in Decimal-Brüche:

1) $\frac{1}{2} = 0{,}5$; 2) $\frac{3}{4}\ (= \frac{3}{2^2}) = 0{,}75$; 3) $\frac{1}{8}\ (= \frac{1}{2^3}) = 0{,}125$;
4) $\frac{2}{5} = 0{,}4$; 5) $\frac{7}{25}\ (= \frac{7}{5^2}) = 0{,}28$; 6) $\frac{8}{125}\ (= \frac{8}{5^3}) = 0{,}064$;
7) $\frac{1}{10} = 0{,}1$; 8) $\frac{3}{40}\ (= \frac{3}{10 \cdot 2^2}) = 0{,}075$; 9) $\frac{7}{100}\ (= \frac{7}{10^2}) = 0{,}07$.

Vorstehende gemeine Brüche geben vollständige Decimal-Brüche. Alle Mal ergeben vollständige Decimal-Brüche diejenigen gemeinen Brüche, deren Nenner 2 oder eine Potenz von 2; 5 oder eine Potenz von 5; oder beliebige Producte aus diesen beiden Zahlen-Reihen sind: weil, bei Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimal-Brüche, dem Zähler oder Dividend alle Mal Nullen angehängt werden, derselbe also dadurch den Factor 10 erhält, und die 10 sowohl durch 2 als auch durch 5 (§ 29), so wie durch 2 . 5 (= 10) [§ 30] theilbar ist. Die eben so vielte Potenz der 2, oder der 5, oder des Products von 2 und 5 ein Nenner ist, eben so viel Nullen muß man dem Zähler anhängen, bevor die Division aufgeht, falls nämlich Zähler und Nenner des gemeinen Bruchs Primzahlen zu einander sind. Weil z. B. 8 die dritte Potenz von 2 ist, so erhält der in einen Decimal-Bruch zu verwandelnde gemeine Bruch $\frac{1}{8}$, bevor er aufgeht, drei Stellen, aber $\frac{5}{8}$, da 6 und 8 nicht Primzahlen zu einander sind, giebt, durch Abkürzung zu $\frac{3}{4}$, nur zwei Stellen, so wie $\frac{4}{8}\ (= \frac{1}{2})$ nur eine Stelle ergiebt.

§ 76. Ferner verwandle man folgende gemeine Brüche in Decimal-Brüche:

10) $\frac{2}{3}$ = 0,6666...., 1stellige Periode;
11) $\frac{7}{11}$ = 0,63 63 63...., 2stellige Periode;
12) $\frac{23}{37}$ = 0,621 621...., 3stellige Periode;
13) $\frac{65}{101}$ = 0,6435 6435...., 4stellige Periode;
14) $\frac{5}{41}$ = 0,12195 12195...., 5stellige Periode;
15) $\frac{7}{13}$ = 0,538461 538461...., 6stellige Periode;
16) $\frac{4}{7}$ = 0,571428 571428...., 6stellige Periode;
17) $\frac{3}{7}$ = 0,428571 428571...., 6stellige Periode;
18) $\frac{829}{2339}$ = 0,8326359 8326359...., 7stellige Periode;

19) $\frac{523}{46\,49} = 0{,}1124973\,1124973\ldots.$, 7stellige Periode;

20) $\frac{41}{73} = 0{,}56164383\,561\ldots.$, 8stellige Periode;

21) $\frac{69}{137} = 0{,}50364963\,503\ldots.$, 8stellige Periode;

22) $\frac{25}{31} = 0{,}806451\,612903\,225\ldots.$, 15stellige Periode;

23) $\frac{5}{17} = 0{,}294117\,647058\,8235\ldots.$, 16stellige Periode;

24) $\frac{18}{19} = 0{,}947368\,421052\,631578\ldots.$, 18stellige Periode;

25) $\frac{6}{43} = 0{,}139534\,883720\,930232\,558\ldots.$, 21stell. Per.;

26) $\frac{22}{23} = 0{,}956521\,739130\,434782\,6086\ldots.$, 22stell. Per.

27) $\frac{1}{29} = 0{,}034482\,758620\,689655\,172413\,7931\ldots.$, 28stell.

28) $\frac{15}{49} = 0{,}306120\,244897\,959183\,673469\,387755\,102040\,816326\,5\ldots.$, 43stellige Periode;

29) $\frac{13}{47} = 0{,}276595\,744680\,851063\,829787\,234042\,553191\,489361\,7021\ldots.$, 46stellige Periode;

30) $\frac{135}{221} = 0{,}610859\,728506\,787330\,316742\,081447\,963800\,904977\,375565\ldots.$, 48stellige Periode.

Vorstehende Brüche, deren Decimal-Ziffern endlos in derselben Ordnung wiederkehren, so bald der anfängliche Dividend, d. h. der Zähler des zu verwandelnden gemeinen Bruches, wiederkehrt, heißen, weil eine wiederkehrende Reihe eine Periode genannt wird, reinperiodische Decimal-Brüche, zum Unterschiede von den weiterhin (§ 78) vorkommenden gemischt-periodischen. Diese Wiederkehr der Perioden muß spätestens bei erlangtem (n—1)ten Divisions-Reste Statt finden, wenn n die Einheiten-Anzahl des Nenners bedeutet; doch kann der anfängliche Rest auch früher erfolgen. Es wäre nämlich 7 der Nenner des in einen Decimal-Bruch zu verwandelnden gemeinen Bruches, mit welchem man in den Zähler zu dividiren hat. Von der ersten Division an mußte man jedes Mal einen verschiedenen Rest erhalten, weil sonst, mit demselben Reste, auch derselbe Quotient wiederkehren, also die Periode schon früher beginnen würde. Der Rest mußte aber auch alle Mal kleiner sein als der Divisor (7), ohne jedoch = 0 sein zu dürfen, weil der Bruch in diesem Falle ein vollständiger Decimal-Bruch hätte sein müssen, wider die obigen Lehren. In Absicht auf den Nenner 7 sind demnach die für den jedesmaligen Rest möglichen Grenzen 6 und 1, beide mitgerechnet; weshalb man spätestens in dem siebenten Reste den anfänglichen Dividend, und mithin von da an die früheren Quotienten in eben der Ordnung wieder erhalten muß. Bei den Nennern 7, 17, 19, 23, 29, 47 kehrt derselbe Rest nach der (n—1)ten Division wieder, bei andern Nen-

nern wie 3, 11, 37, 101, 41, 13, 239, 4649, 73, 137, 31, 43, 49, 221 tritt ein bereits vorgekommener Rest ein, noch ehe man so viel Quotienten erhalten hat, als der um 1 verminderte Nenner groß ist. Siehe darüber die vorstehend in Decimal-Brüche verwandelten gemeinen Brüche. — Übrigens, vom Nenner des gemeinen Bruches hängt die Stellen-Anzahl der Periode, vom Zähler aber die Größe der Periode ab. So z. B. zu dem Nenner 11 gehören Decimal-Brüche, welche alle Mal zweistellige Perioden haben, diese zweistelligen Perioden aber für den Zähler 1 sind 0909...., für den Zähler 2 sind sie 1818...., für den Zähler 3 sind sie 2727...., für 4 sind sie 3636...., u. s. w..

§ 77. Folgende Untersuchung, um zu bestimmen, welche Nenner gemeiner Brüche 1, 2, 3 u. s. w.-stellige Perioden ergeben, ist nach Egen's Handbuch der allgemeinen Arithmetik, 1. Theil.

1. Der Bruch $\frac{1}{9} = 0{,}1111....$, folglich $\frac{2}{9} = 0{,}2222....$, $\frac{3}{9} = 0{,}3333....$, $\frac{4}{9} = 0{,}4444....$, u. s. w. bis $\frac{8}{9} = 0{,}8888....$; folglich erhält man einstellige Perioden, wenn der Nenner des gemeinen Bruches 9 ist. Sind aber Zähler und Nenner nicht Primzahlen zu einander, wie namentlich $\frac{3}{9}$, $\frac{6}{9}$, so wird man, statt dieser Brüche, durch Abkürzung vielmehr die Brüche $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ haben; und es wird auch der Nenner 3, da er auf den Nenner 9 gebracht werden kann, nur einstellige Perioden ergeben.

2. Der Bruch $\frac{1}{99} = 0{,}010101....$, folglich $\frac{2}{99} = 0{,}020202....$, $\frac{3}{99} (= \frac{1}{33}) = 0{,}0303....$, $\frac{4}{99} = 0{,}0404....$, $\frac{5}{99} = 0{,}0505....$, $\frac{6}{99} (= \frac{2}{33}) = 0{,}0606....$, $\frac{7}{99} = 0{,}0707....$, $\frac{8}{99} = 0{,}0808....$, $\frac{9}{99} (= \frac{1}{11}) = 0{,}0909....$, bis $\frac{98}{99} = 0{,}9898....$; man erhält demnach zweistellige Perioden, nicht allein wenn der Nenner des gemeinen Bruchs 99, sondern auch, wenn er irgend ein Factor derselben ist, jedoch mit Ausnahme der 3 und 9, als welche (nach 1.) einstellige Perioden liefern müssen, mithin wenn er 33 oder 11 ist.

3. Der Bruch $\frac{1}{999} = 0{,}001001....$, also ist $\frac{2}{999} = 0{,}002....$, $\frac{3}{999} (= \frac{1}{333}) = 0{,}003....$, bis $\frac{998}{999} = 0{,}998998....$; darum entstehen dreistellige Perioden aus allen gemeinen Brüchen, deren Nenner sowohl 999, als auch diejenigen Factoren von 999 sind, die nicht in 1. und 2. vorkommen, nämlich 333, 111, 37 und 27 (vergl. § 28).

4. Da der Bruch $\frac{1}{9999} = 0{,}0001....$, $\frac{2}{9999} = 0{,}0002....$, $\frac{3}{9999} (= \frac{1}{3333}) = 0{,}0003....$, bis $\frac{9998}{9999} = 0{,}9998....$, so müssen, um vierstellige Perioden zu erhalten, die Nenner der gemeinen Brüche entweder 9999, oder die in 1., 2., 3., nicht ein-

begriffenen Factoren dieser Zahl sein, nämlich 3333, 1111, 909, 303, 101.

5. Aus eben den Gründen werden die Nenner 99999, 33333, 11111, 2439, 813, 271, 369, 123, 41 fünfstellige Perioden ergeben.

So schließe man weiter.

§ 78. Endlich verwandle man noch folgende gemeine Brüche in Decimal-Brüche:

31) $\frac{4}{15}$ $(= \frac{4}{5 \cdot 3})$ = 0,2666....;
32) $\frac{7}{12}$ $(= \frac{7}{2^2 \cdot 3})$ = 0,58333....;
33) $\frac{5}{6}$ $(= \frac{5}{2 \cdot 3})$ = 0,8333....;
34) $\frac{1}{288}$ $(= \frac{1}{2^5 \cdot 9})$ = 0,003472222....;
35) $\frac{141}{550}$ $(= \frac{141}{10 \cdot 5 \cdot 11})$ = 0,25 63 63....;
36) $\frac{165}{296}$ $(= \frac{165}{2^3 \cdot 37})$ = 0,557 432 432....;
37) $\frac{237}{925}$ $(= \frac{237}{5^2 \cdot 37})$ = 0,25 621 621....;
38) $\frac{25}{216}$ $(= \frac{25}{2^3 \cdot 27})$ = 0,115 740 740....;
39) $\frac{3}{22}$ $(= \frac{3}{2 \cdot 11})$ = 0,1 36 36 36....;
40) $\frac{7}{1500}$ $(= \frac{7}{10^2 \cdot 5 \cdot 3})$ = 0,004 666....;
41) $\frac{9}{28}$ $(= \frac{9}{2^2 \cdot 7})$ = 0,32 142857 1428....;
42) $\frac{7}{3000}$ $(= \frac{7}{10^3 \cdot 3})$ = 0,002 333....;
43) $\frac{5}{44}$ $(= \frac{5}{2^2 \cdot 11})$ = 0,11 36 36 36....;
44) $\frac{7}{44}$ $(= \frac{7}{2^2 \cdot 11})$ = 0,15 90 90 90....;
45) $\frac{23}{104}$ $(= \frac{23}{2^3 \cdot 13})$ = 0,221 153846 153...;
46) $\frac{1169}{2750}$ $(= \frac{1169}{10 \cdot 5^2 \cdot 11})$ = 0,425 09 09 09....

Vorstehende Decimal-Brüche heißen gemischt-periodische. Brüche dieser Art, denen vor ihrer Periode Decimal-Stellen vorhergehen, welche von derselben abweichen, erhält man, wenn der gegebene gemeine Bruch eine Summe ist aus zwei Brüchen, wovon der eine einen vollständigen Decimal-Bruch ergiebt, der andere aber wiederkehrende Reihen. Stellen-Anzahl des vollständigen Decimal-Bruchs, wie Stellen-Anzahl in der Periode des reinperiodischen Decimal-Bruchs bleiben hiebei, falls Zähler und Nenner Primzahlen zu einander sind, dieselben; nur die Größe der Decimal-Stellen richtet sich nach dem Zähler. So z. B. ist in $\frac{1}{288}$ der Nenner $288 = 32 \cdot 9 = 2^5 \cdot 9$; also wird im Decimal-Bruche auf die fünf ersten Stellen, als welche der eine Factor 2^5 verlangt (§ 75), eine einstellige Periode, wie die 9 sie ergiebt (§ 77), folgen; in $\frac{25}{216}$ ist der Nenner $216 = 8 \cdot 27 = 2^3 \cdot 27$, also wird

auf die drei ersten Stellen eine dreistellige Periode folgen, wie der Nenner 27 (§ 77) sie giebt.

Besteht aber ein gemeiner Bruch aus einer Summe zweier Brüche, so muß, falls die Nenner beider kein gemeines Maaß haben, der Nenner dieses gemeinen Bruches aus dem Producte der Nenner beider Summanden bestehen (§ 41). So z. B. ist (Nr. 32) $\frac{7}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \div \frac{3}{3} + \frac{1}{3} \div \frac{4}{4} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12}$. Also ergiebt der Nenner 12 (= 4 . 3) wegen seines Factors 4 als der zweiten Potenz von 2, den vollständigen Decimal-Bruch von zwei Stellen, so wie der Factor 3 eine einstellige Periode ergiebt.

Es müssen aber in diesem Falle Zähler und Nenner des gegebenen gemeinen Bruches, wie in $\frac{7}{12}$ der Fall ist, Primzahlen zu einander sein, denn obgleich ein Bruch wie $\frac{3}{12}$ den Nenner 4 . 3 hat, so giebt er durch Abkürzung doch nur den vollständigen Decimal-Bruch $\frac{1}{4}$, so wie ein Bruch, wie $\frac{4}{12}$, wegen der Abkürzung zu $\frac{1}{3}$, ein bloß periodischer Bruch ist.

§ 79. Ein vollständiger Decimal-Bruch wird in den zugehörigen gemeinen Bruch verwandelt, wenn man, nach Weglassung des 0,, den bedeutlichen Ziffern ihren Werth unterſetzt, und alsdann, falls es angeht, abkürzt. Z. B. $0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; $0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$; $0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$; $0{,}075 = \frac{75}{1000} = \frac{3}{40}$.

§ 80. Ein reinperiodischer Decimal-Bruch wird in den zugehörigen gemeinen Bruch verwandelt, wenn man eine Periode herausnimmt, darunter so viel Neunen zum Nenner setzt, wie viel Stellen die Periode hat, und dann abkürzt; z. B. aus 0,636363.... bilde man $\frac{63}{99} = \frac{7}{11}$ (vergl. § 76, Nr. 11).

Beweis.

Der gesuchte gemeine Bruch, oder, was diesem gleich ist, die Summe aller Decimal-Stellen des unendlichen Decimal-Bruches sei S, so ist $S = 0{,}63\,63\,63\ldots$;
macht man nun eine Periode zu Ganzen, indem man die obige Gleichung mit 1 und so viel angehängten Nullen multiplicirt, als die Periode Stellen hat, so erhält man (§ 72)

$$100\,S = 63{,}63\,63\,63\,63\ldots;$$

subtrahirt man ferner beiderseits 1 S, so bleibt auf der einen Seite 99 S, auf der andern fällt die unendliche Reihe weg, und man erhält

$$99\,S = 63$$

$$S = \frac{63}{99} \left(= \frac{7}{11}\right).$$

§ 81. Ein gemischt-periodischer Decimal-Bruch wird folgender Maaßen in den zugehörigen gemeinen Bruch verwandelt: Man

sondere die ersten und von der späteren Reihe abweichenden Stellen durch ein Komma ab, da dann letztere einen reinperiodischen Bruch ausmachen, den man (§ 80) in einen gemeinen Bruch verwandelt. Die so entstandene gemischte Zahl verwandle man in einen unechten Bruch, hänge dem Nenner desselben so viel Nullen an als der Periode abweichende Stellen vorangingen, und kürze ab.

Z. B. $0{,}583333\ldots.$

hieraus wird zuerst $58{,}3333\ldots. = 58\frac{1}{3} = \frac{175}{3}$,

darauf $\frac{175}{300} = \frac{7}{12}$ (vergl. § 78, Nr. 32).

Beweis.

Der gesuchte Bruch oder

$$S = 0{,}583333\ldots.$$

$$100\,S = 58{,}3333\ldots. = 58\tfrac{1}{3} = \tfrac{175}{3}$$

$$S = \tfrac{175}{3} \cdot \tfrac{1}{100} = \tfrac{175}{300} = \tfrac{7}{12}.$$

Bei einem gemischten Decimal-Bruch dieser Art, z. B. $8{,}256363\ldots.$, läßt man am bequemsten zuerst die Ganzen außer Acht, behandelt den echten Decimal-Bruch in obiger Weise, und setzt zu dem gefundenen Werthe des echten Decimal-Bruchs die Ganzen, nämlich $8{,}256363\ldots. = 8 + 0{,}256363\ldots.$

$$25{,}6363\ldots. = 25\tfrac{7}{11} = \tfrac{282}{11}$$

$\frac{282}{1100} = \frac{141}{550}$ (vergl. § 78, Nr. 35),

demnach ist der gegebene Bruch $8{,}256363\ldots. = 8\frac{141}{550}$.

§ 82. Endlich giebt es noch unvollständige Decimal-Brüche, die weder zu Anfange noch späterhin Perioden enthalten. Ein solcher Decimal-Bruch entsteht, wenn man bis in's Unendliche fort zum schon vorhandenen Aggregat noch eine Größe fügt, ohne irgend eine andere Ordnung oder Regel, als welche das dekadische System vorschreibt. Beispiele solcher Decimal-Brüche sind unter andern die Quadrat-Wurzeln aus den Zahlen 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17 u. s. w., und die Cubik-Wurzeln aus 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 u. s. w.. Dergleichen Decimal-Brüche pflegt man Irrational-Zahlen, d. h. solche Zahlen zu nennen, deren Verhältniß zu der Zahl, aus welcher sie entstanden sind, weder durch eine ganze Zahl, noch durch einen Bruch vollständig und bestimmt angegeben werden kann.

§ 83. Der Werth eines solchen Decimal-Bruchs kann demnach nie genau gefunden werden; man nähert sich demselben nur, je weiter hinaus man die Decimal-Ziffern desselben bestimmt. Je nachdem nun für irgend eine aufgegebene Rechnung größere oder

mindere Genauigkeit nöthig ist, je nachdem behält man von dem Decimal-Bruch mehr oder minder Decimal-Stellen bei, so daß alles Übrige ohne erheblichen Fehler wegbleiben kann. Damit jedoch dieser an sich schon geringe Fehler noch unbedeutender werde — wenn gleich durch das anzugebende Verfahren der Bruch überhaupt um ein Weniges wird größer werden als der wahre Bruch — pflegt man die letzte beibehaltene Ziffer um eine Einheit zu vermehren, falls die darauf folgende Stelle größer als 5 ist, wohl auch schon, wenn sie = 5 ist. Z. B. 0,0008.... ist nahezu = 0,0010 = 0,001; es fehlen weniger als 0,0002 daran. — Man habe ferner den Decimal-Bruch 0,1419...., dessen letzte Stelle größer ist als 5. Streicht man nun die 9 weg sammt den auf dieselbe folgenden Stellen, so hätte man den Bruch verkleinert um etwas mehr als $\frac{9}{10000}$; setzte man aber dann in die nächsthöhere Stelle statt der 1 eine 2, so hätte man den Bruch um etwas weniger als $\frac{10}{10\,000}$, d. i. als $\frac{1}{1000}$ vergrößert. Es ist also der nun nicht mehr unvollständige, sondern überhaupt um etwas größer gemachte Decimal-Bruch 0,142 nahezu = 0,1419..... Dieß Verfahren nennt man, einen Decimal-Bruch abbreviren (besser als corrigiren).

(Übungen im Abbreviren der Irrational-Zahlen finden sich unter IX, bei den Resultaten für die Division der Decimal-Brüche.)

Addition der Decimal-Brüche.

§ 84. Da die Decimal-Brüche nach eben dem Gesetze fortschreiten wie die ganzen Zahlen, so wird die Addition der Decimal-Brüche verrichtet wie die Addition der ganzen Zahlen. Nämlich, so wie zu Einern nur Einer, zu Zehnern nur Zehner u. s. w. addirt werden können, eben so können auch nur Zehntheile zu Zehntheilen, Hundert-Theile zu Hundert-Theilen u. s. w. addirt werden; woraus denn die Regel folgt: Man setze die Kommata unter einander, und addire dann, wie man ganze Zahlen addirt. In der Summe muß begreiflich das Komma unter die Kommata der Summanden zu stehen kommen; z. B.

0,25
75,2345
1,8
0,836

78,1205

Ferner: $(\frac{2}{3} =)$ 0,6666....
$(\frac{1}{3} =)$ 0,3333....

0,9999....

$\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ giebt 1; eben so viel beträgt auch (§ 80) die Reihe 0,9999...., da $\frac{3}{3} = 1$ ist. Es versteht sich jedoch von selbst, daß eine Reihe von Neunen nur dann genau gleich 1 ist, wenn sie unendlich, nicht aber wenn sie endlich ist, da bei

0,9999

zum Ganzen noch 0,0001, d. h. $\frac{1}{10000}$ fehlt.

Ferner: $(\frac{1}{2} =)$ 0,5
$(\frac{2}{3} =)$ 0,6666666....
$(\frac{5}{6} =)$ 0,8333333....
$(\frac{7}{8} =)$ 0,875

2,8749999....

welches (§ 81) genau = 2,875 oder $2\frac{7}{8}$. (Vergleiche damit § 43, nach welchem, wenn man die auf gleiche Benennung gebrachten gemeinen Brüche addirt, man dasselbe Resultat erhalten hat, wie dieses.)

§ 85. Die letzte Ziffer in der Summe unvollständiger Decimal-Brüche ist nur dann zuverlässig richtig, wenn diejenigen Partial-Posten, welche die nächst niedere, aber weggelassene Ziffer der Summe ergeben hätten, zusammen kleiner gewesen wären als 10, weil nur in diesem Falle nichts weggelassen wird, das eigentlich aus dem Sinne auf die letzte beibehaltene Stelle überzutragen gewesen wäre. Daher ergiebt das oben gegebene zweite Additions-Exempel ein völlig richtiges Resultat; nicht so aber folgendes:

$(\frac{2}{3} =)$ 0,66666....
$(\frac{8}{9} =)$ 0,88888....

1,55554....

in welchem offenbar die letzte Stelle ebenfalls 5 sein müßte. — Ferner

$(\frac{4}{7} =)$ 0,571428....
$(\frac{4}{15} =)$ 0,266666....

$(\frac{88}{105} =)$ 0,838094....;

der wahre Werth des Bruchs $\frac{88}{105}$, diesen als Decimal-Bruch ausgedrückt, ergiebt sich = 0.838095.....

§ 86. Hat man gemeine Brüche zu Decimal-Brüchen zu addiren, so verwandle man vorher jene in Decimal-Brüche, oder diese in gemeine Brüche.

Subtraction der Decimal-Brüche.

§ 87. Auch subtrahirt werden die Decimal-Brüche, wie man ganze Zahlen subtrahirt; zu dem Ende werden die Kommata ebenfalls unter einander gesetzt; z. B.

8,2374	8,37591	6,27	25
0,9561	2,839	2,3894632	0,637902
7,2813	5,53691	3,8805368	24,362098

In den Exempeln 3. und 4., in denen die fehlenden Ziffern des Minuendus in Gedanken durch Nullen auszufüllen waren, hatte man bloß die niedrigste Ziffer des Subtrahendus von 10, hingegen alle übrigen höheren Ziffern des Minuendus bis zu den bedeutlichen von 9 zu subtrahiren.

§ 88. Ist aber der Subtrahendus unendlich, so sind sämmtliche Decimal-Ziffern des Subtrahendus bis zu den bedeutlichen Ziffern des Minuend, die niedrigste mit eingerechnet, von 9 zu subtrahiren, hiebei aber das Fortlaufen der Reihe auch im Rest durch Puncte zu bezeichnen; es ist nämlich

13,
3,6666....
9,3333....;

da $13 - 3\frac{2}{3} = 9\frac{1}{3}$ ist, so kann der erhaltene Decimal-Bruch unmöglich = 9,3334.... sein; auch wären ja vom Minuendus die noch übrigen, aber weggelassenen Stellen des Subtrahendus zu subtrahiren gewesen.

Die Subtraction unvollständiger Decimal-Brüche ergiebt demnach alle Mal dann ein in seiner niedrigsten Stelle unrichtiges Resultat, wenn die erste der aus dem Subtrahendus weggelassenen Stellen, falls sie beibehalten wäre, die niedrigste beibehaltene Ziffer des Minuendus durch Borgen um 1 vermindert hätte, z. B. aus

$(1\frac{1}{11} =)$ 1,090909....
$(\frac{1}{3} =)$ 0,333333....
erhält man $(\frac{2}{3}\frac{5}{3} =)$ 0,757576....

da doch die wahre Differenz = 0,757575....; hingegen in

$(\frac{2}{3} =)$ 0,666666....
$(\frac{23}{37} =)$ 0,621621....
$(\frac{5}{111} =)$ 0,045045....

müssen alle Stellen der Differenz unbezweifelt richtig sein.

§ 89. Ist entweder Minuend oder Subtrahend ein gemei-

ner Bruch, so wird dieser vor der Subtraction in einem Decimal-Bruch verwandelt.

§ 90. Sind von einer ganzen Zahl, oder einem unechten oder echten Decimal-Bruche mehre Brüche zu subtrahiren, so hat man, um am bequemsten zu rechnen, zuvor die Subtrahenden zu addiren (vergl. § 47); z. B.

$$\begin{array}{r} +\ 9{,}0027 \\ \hline -\ 2{,}93 \\ -\ 0{,}06 \\ -\ 1{,}5 \\ -\ 0{,}345968 \\ -\ 0{,}25 \\ \hline -\ 5{,}085968 \\ \hline 3{,}916732. \end{array}$$

Multiplication der Decimal-Brüche.

§ 91. Hat man echte oder unechte Decimal-Brüche mit andern Decimal-Brüchen, auch mit ganzen Zahlen zu multipliciren, so multiplicire man, wie man ganze Zahlen multiplicirt. Das Komma des Products erhält seine Stelle nach folgender Regel: Im Producte schneide man von der Rechten nach der Linken zu so viel Decimal-Stellen ab, als in beiden Factoren zusammen Decimal-Stellen vorkommen, z. B.

$$\begin{array}{r} 23{,}467 \\ 0{,}84 \\ \hline 93\ 868 \\ 1877\ 36 \\ \hline 19{,}71228 \end{array}$$

Es hat der obige Multiplicandus drei, der Multiplicator zwei Decimal-Stellen; weshalb das Product fünf Decimal-Stellen haben wird.

Man multiplicirt hier nämlich (§ 52) Hundertstel in Tausendstel; dieß giebt zum Nenner des Products Hunderttausendstel, d. i. fünf Nullen mit der vorgesetzten 1, also für den Zähler (§ 69) fünf Decimal-Stellen, nachdem man, um das Product der Zähler zu erhalten, ebenfalls in Folge des § 52, zuvor die Zähler multiplicirt hat, als wären sie ganze Zahlen. — Ferner

$$\begin{array}{r} 0{,}00083 \\ 0{,}002 \\ \hline 0{,}00000166 \end{array}$$

Hier geben die fünf und drei Decimal-Stellen beider Factoren für das Product der Nenner acht Decimal-Stellen; denn da man Tausendtheile mit Hunderttausend-Theilen multiplicirt hat, so ergiebt das Product, zum Nenner des Products, Hundert-Million-Theile. Da ferner das Product der Zähler, für den Zähler des Products, nur die drei bedeutlichen Ziffern, 166, enthält, so ersetzt man diesen Abgang an Decimal-Stellen durch vorgesetzte Nullen. — Endlich

0,763752
321
763752
15 27504
229 1256
245,164392

Der eine Factor hat sechs Decimal-Stellen, der andere aber, als ganze Zahl, keine. Das Product bekommt demnach auch sechs Decimal-Stellen, da Einer, mit Millon-Theilen multiplicirt, Million-Theile ergeben (§ 48, 1).

§ 92. Die in einem benannten echten Decimal-Bruche etwa vorkommenden Einheiten niederer Benennung werden gefunden, wenn man ihn mit der Eintheilungszahl (§ 20) multiplicirt. Im Producte schneide man von der Rechten nach der Linken zu so viel Decimal-Stellen ab, als deren im Multiplicandus vorher waren. Die so erhaltenen Ganzen sind eben die verlangten Einheiten der niederen Benennung; z. B. 2,36 Tag = 2 Tage 8 Stunden 38 Minuten 24 Secunden; denn

2,36 Tag
24
1 44
7 2
8,64 Stunden
60
38,40 Min. = 38,4 Min.
60
24,0 Sec. = 24 Sec..

Man hätte ferner 2,36 Rub. = ? Kop.. 0,36 Rub. durch 100 resolvirt, ist 36 Kop., also 2,36 Rub. = 2 Rub. 36 Kop..

Ferner 5,7875 Rub. = 5 Rub. 78,75 Kop. = 5 Rub. 78¾ Kop.

§ 93. Soll ein Decimal-Bruch mit einem gemeinen Bruche multiplicirt werden, so verrichte man die Multiplication als wäre der Decimal-Bruch eine ganze Zahl, nur weise man im Product dem Komma seinen ihm zukommenden Platz an, z. B. $38{,}25 \times \frac{3}{5} = \frac{38{,}25 \times 3}{5} = \frac{114{,}75}{5} = 22{,}95$;

oder man verwandle den gemeinen Bruch in einen Decimal-Bruch, und multiplicire dann die beiden Decimal-Brüche in einander: $38{,}25 \times \frac{3}{5} = 38{,}25 \times 0{,}6 = 22{,}950 = 22{,}95$;

oder endlich, man verwandle den Decimal-Bruch in einen gemeinen Bruch, und das Product, wenn solches nöthig ist, in einen Decimal-Bruch: $38{,}25 \times \frac{3}{5} = 38\frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{459}{20} = 22\frac{19}{20} (= 22{,}95)$.

Division der Decimal-Brüche.

§ 94. Um zwei Decimal-Brüche in einander zu dividiren, mache man sie am bequemsten vorher zu ganzen Zahlen; alsdann erhält man durch die angezeigte Division des Dividends und des Divisors einen gemeinen Bruch, den man in einen Decimal-Bruch zu verwandeln hat (§ 73).

Des Dividends und Divisors Verwandlung in ganze Zahlen geschieht folgender Maaßen:

Haben Dividend und Divisor gleich viel Decimal-Stellen, so läßt man bloß die Kommata aus beiden weg, und hat dadurch Dividend und Divisor (d. i. Zähler und Nenner des in einen Decimal-Bruch zu verwandelnden gemeinen Bruches) jeden mit seinem Nenner multiplicirt (§§ 40; 48, 3). Nämlich

0,287 | 67,732 |

oder Dividend und Divisor, jeden mit 1000 multiplicirt:

287 | 67732 | 236

(0)

Ferner 5,37 | 2,78 |

oder

537 | 278 | 0,51769....

Rest 47

Haben aber Dividend und Divisor nicht gleich viel Decimal-Stellen, so sehe man zu, welcher deren am meisten hat. Mit dem Nenner des letzteren multiplicire man sowohl Dividend als Divisor. Der Bruch mit den meisten Decimal-Stellen ist dadurch eben nur eine ganze Zahl geworden; dem andern Bruche werden so viel

Nullen angehängt, als jener mehr Decimal-Stellen hatte denn dieser. Hierauf endlich wird der Dividend und sein Divisor, die beide zusammen einen gewöhnlichen gemeinen Bruch ausmachen, in einen Decimal-Bruch verwandelt; z. B. 0,00058 | 36,5 |

Weil der Divisor zum Nenner 100 000 hat, so multiplicire man die beiden in einander zu dividirenden Decimal-Brüche mit 100 000. Der Divisor wird dadurch zu Ganzen gemacht; der Dividend, welcher eine Decimal-Stelle hat, wird dadurch, folgender 36,5 × 100 000, d. i. 36,5 × 10 × 10 000 = 365 × 10 000 = 3650000; also werden dem Dividend 5 — 1, d. i. vier Nullen angehängt, und das Exempel kommt so zu stehen:

58 | 3650000 | 62931,034482

Rest 44

0,347 | 0,8793298 |

Hier hat der Dividend sieben, der Divisor drei Decimal-Stellen, also sind letzterem 7 — 3, d. i. vier Nullen anzuhängen, und der Dividend wird dadurch eben nur eine ganze Zahl. Man hat nämlich beiderseits mit 10 000 000 zu multipliciren; der Divisor wird also 0,347 × 10 000 000, d. i. 0,347 × 1000 × 10 000, also 347 × 10 000 = 3470000. Demnach

3470000 | 879 3298 | 2,530409016....

Rest 148 0000

8 | 0,00005732 |

oder

800 000 000 | 5732 |

demnach

800 000 000 | 5732 000 000 | 0,000 007 165

(0)

In diesem Falle jedoch, da man einen Decimal-Bruch bloß durch eine ganze Zahl (8) zu dividiren hat, bedarf es obiger Vorbereitung nicht; man kann nämlich die Division des Dividends durch den Divisor sogleich vornehmen, da man von den Hunderttausendsteln (5), den Million-Theilen (7), den Zehnmillion-Theilen (3), und den Hundertmillion-Theilen (2) des Dividends, von jedem bloß den achten Theil anzugeben hat. Also

8 | 0,00005732 | 0,000 007 165

(0)

0,00287 | 94 |

beiderseits mit 100 000 multiplicirt, also dem Dividend 5 — 0, d. i. 5 Nullen angehängt: 287 | 9400000 | 32752,6132....

Rest 116

0,53 | 0,8597037 |

beiderseits mit 10 000 000 multiplicirt, also dem Divisor als ganzer Zahl 7 — 2, d. i. fünf Nullen angehängt:

5300000 | 8597037 | 1,62208024....

Rest 2800000

0,000 467 | 0,000 000 23 |

beiderseits mit 100 000 000 multiplicirt, also dem Divisor als ganzer Zahl 8 — 6, d. i. zwei Nullen angehängt:

46700 | 23 |

46700 | 230000 | 0,0004925....

Rest 2500

4,3210123 | 1 |

beiderseits mit 10 000 000 multiplicirt, also dem Dividend 7 — 0, d. i. sieben Nullen angehängt:

43210123 | 10 000 000 |

43210123 | 10 000 0000 | 0,231427....

Rest 10864479

(Fernere Übungen, IX, Nr. 1—18.)

§ 95. Soll man

1. einen Decimal-Bruch durch einen gemeinen Bruch, oder
2. einen gemeinen Bruch durch einen Decimal-Bruch dividiren,

so sehe man den Decimal-Bruch als eine ganze Zahl an, und verfahre nach den Regeln für die Division der gemeinen Brüche, gebe aber dem Komma jedes Mal seinen richtigen Platz.

1) $28{,}584 : 1\frac{7}{8} = 28{,}584 \times \frac{8}{127} = \frac{28.584 \times 8}{127} = \frac{228672}{127000} =$ 1,8005669....

Rest 37000

2) $1\frac{7}{8} : 28{,}584 = \frac{127}{8 \times 28.584} = \frac{127}{228.672} = 0{,}55538....$

Rest 14464

Oder

3) man verwandle den gemeinen Bruch vorher in einen Decimal-Bruch:

$1\frac{7}{8} : 28{,}584 = 15{,}875 : 28{,}584 = 15875 : 28584 = 0{,}55538....$

Rest 1808.

§ 96. Die abgekürzte Multiplication und Division kommen vor, wenn man unvollständige Decimal-Brüche, vorzüglich Irrational-Zahlen, mit einander zu multipliciren, so wie zu dividiren hat.

Hätte man folgende beide unvollständige Decimal-Brüche mit einander zu multipliciren

$$\begin{array}{r} (\tfrac{1}{3} =)\ 0{,}3333\ldots. \\ (\tfrac{2}{3} =)\ 0{,}6666\ldots. \\ \hline 19998\ldots. \\ 19998\ldots. \\ 19998\ldots. \\ 19998\ldots. \\ \hline (\tfrac{2}{9} =)\ 0{,}22217778\ldots., \end{array}$$

so ist jedes dieser Partial-Producte in seiner niedrigsten Stelle um eine Einheit zu klein. Der dadurch im Total-Product entstehende Fehler erstreckt sich so weit, als diese niedrigsten Stellen der Partial-Producte im Total-Product reichen, auch noch bis auf die nächst höhere Stelle, und da der Fehler sich bisweilen auch auf die zweit-höhere Stelle erstreckt, so wird auch diese unsicher. Es ist also dieser Theil der Rechnung vergebliche Arbeit. Eben so bei der Division.

Die abgekürzte Multiplication.

§ 97. Die abgekürzte Multiplication lehrt, das Product zweier unvollständiger Decimal-Brüche ohne diejenigen Decimal-Ziffern finden, welche entweder ganz unrichtig oder nicht zuverlässig sind.

§ 98. Es ist einerlei, ob man die Multiplication zweier ganzen Zahlen verrichtet, indem man die Einer des Multiplicators mit dem Multiplicandus von dessen niedrigster Stelle an bis zu dessen höchster Ziffer multiplicirt, dann es eben so mit den Zehnern des Multiplicators, darauf mit den Hundertern u. s. w. desselben macht, und jedes Mal um eine Stelle weiter einrückt; oder ob man zuerst mit der höchsten Ziffer des Multiplicators den Multiplicandus von seiner niedrigsten Stelle an multiplicirt, dann mit den niederen Stellen des Multiplicators, wie selbige auf einander folgen, es eben so macht, aber jedes Mal um eine Stelle weiter ausrückt: wie solches aus folgendem auf beiderlei Weise berechneten Multiplications-Exempel hervorgeht:

3518	3518
1216	1216
21108	3518
3518	7036
7036	3518
3518	21108
4277888	4277888

Die ersten Partial-Producte in der ersten Berechnung des Exempels werden, in umgekehrter Ordnung, die letzten Partial-Producte in der zweiten Berechnung.

Auf eben die letztere Weise multiplicire man die beiden unvollständigen Decimal-Brüche mit einander:

$$
\begin{array}{rl}
(8\tfrac{1}{24} =) & 8{,}0\,4\,1\,6\,6\,6\ldots. \\
(\tfrac{7}{12} =) & 0{,}5\,8\,3\,3\,3\,3\ldots. \\
\hline
 & 4\,0\,2\,0\,8\,3|3\,0|\ldots. \\
 & 6\,4\,3\,3\,3|3\,2|8\ldots. \\
 & 2\,4\,1\,2|4\,9|9\,8\ldots. \\
 & 2\,4\,1|2\,4|9\,9\,8\ldots. \\
 & 2\,4|1\,2|4\,9\,9\,8\ldots. \\
 & 2|4\,1|2\,4\,9\,9\,8\ldots. \\
\hline
 & 4{,}6\,9\,0\,9\,6|9\,1|5\,2\,7\,7\,8\ldots.
\end{array}
$$

Die Stelle rechts vom herabgehenden Striche rechter Hand sind völlig unrichtig; die Columne der nächst höheren Stellen ist, wegen des meistens nicht vollständig in den Sinn Gekommenen und zu diesen Stellen Addirten, nicht zuverlässig, und da dieser Fehler bisweilen noch auf die nächst folgende höhere Stelle des Resultats Einfluß hat, so ist auch diese nicht mit Sicherheit als richtig anzunehmen; weshalb beide zwischen den stehenden Strichen befindlichen Stellen als unrichtig, und zwar, wegen der beiden verminderten Factoren, als zu klein aus der Acht zu lassen sind.

Zur Probe: $8\frac{1}{24} \times \frac{7}{12} = \frac{193}{24} \times \frac{7}{12} = \frac{1351}{288} = 4{,}690972222\ldots.$

Dieses unbezweifelt richtige Resultat sollte nach Obigem mit dem vorhergefundenen (4,69096....) bis auf die fünfte Decimal-Stelle übereinstimmen; da aber dort in der sechsten Decimal-Stelle eine 9 war, so hat sich der Fehler gar wohl noch auf die nächst höhere Stelle, die fünfte, erstrecken können.

§ 99. Um nun die Multiplication unvollständiger Decimal-Brüche so zu verrichten, daß die ohnehin unrichtigen Decimal-Stellen nicht mit erhalten werden, verfahre man folgender Maaßen:

Man multiplicire

1. die höchste Stelle des Multiplicators mit dem Multiplicandus von seiner niedrigsten Stelle an, und beobachte hiebei gehörig das Komma. Im obigen Exempel hat man nämlich 8 Ganze mit 5 Zehnteln multiplicirt; dieß giebt ($8 \cdot \frac{5}{10} = \frac{40}{10} =$) 4 Ganze. Die höchste Ziffer des Multiplicators streiche man nunmehr weg, eben so die niedrigste Ziffer des Multiplicandus.

2. Darauf multiplicire man die nächst niedere Ziffer des Multiplicators mit der nächst höheren des Multiplicandus, rechne aber, damit der Fehler wegen des Weggelassenen kleiner werde, zu der niedrigsten Stelle dieses Partial-Products dasjenige hinzu, was durch die zweite Ziffer des Multiplicators mit der eben weggestrichenen ersten Ziffer des Multiplicandus im Sinne verbleibt, als welches im Sinn Verbleibende man um noch eine Einheit vermehrt, falls der erste Theil desjenigen Products, dessen zweiter Theil eben das aus dem Sinne hinzu zu Zählende ist, 5 oder größer als 5 ist (§ 83). Hierauf streiche man aus Multiplicator und Multiplicandus die beiden zweiten Ziffern weg.

3. Ferner multiplicire man die dritt-niedere Stelle des Multiplicators mit der dritt-höheren des Multiplicandus, addire das, was von der weggestrichenen zweit-höheren Stelle des Multiplicandus mit der dritt-niederen des Multiplicators im Sinne verblieben ist, hinzu, und streiche darauf die beiden Stellen weg.

So verfährt man weiter.

§ 100. Beispiele.

Vorbemerkung. Das bei jedem Partial-Producte Abgeklammerte ist dasjenige, was wegen des Products der nten Stelle des Multiplicators in die $(n-1)$te des Multiplicandus zum Partial-Product hinzu zu zählen ist.

$(8\frac{1}{24} =)$	8,0466666....	3,4778080404....
$(7\frac{1}{12} =)$	0,5833333....	4,5606060603....
	4,0208330	13,90321284
	6433333 (5	1 73790161 (1
	241250 (2	20854819 (1
	24125 (2	(0
	2412 (0	(0
	241 (1	20855 (5
		(0
		104 (2
	4,69096(91	15,849872(23

$(\frac{1}{288}$ [§ 78, Nr. 34] =) 0,00347222222....
$(\frac{1}{29}$ [§ 76, Nr. 27] =) 0,03448275862....

0,000104166666
1388889 (1
138889 (1
27778 (2
694 (0
243 (5
17 (2

0,000119731(76

Das Komma d. Products, $\frac{34}{10000} \times \frac{34}{10000} = \frac{1156}{100000000} = 0{,}0001156$.

Probe, $\frac{1}{288} \times \frac{1}{29} = \frac{1}{8352} = 0{,}0001197318007....$

$(\frac{42}{13}$ =) 3,23076923....
$(\frac{19}{17}$ =) 1,11764705....

3,23076923
32307692 (0
3230769 (0
2261538 (6
193846 (4
12923 (3
2261 (0
(0
16 (1

3,610859(68....

Das Komma, 3 Ganze × 1 = 3 Ganze.

Probe: $\frac{42}{13} \times \frac{19}{17} = \frac{798}{221} = 3{,}61085972....$

$(\frac{23}{104}$ [§ 78, Nr. 45] =) 0,2211538461....
$(\frac{25}{31}$ [§ 76, Nr. 22] =) 0,8064516129....

0,17692307688
(0
132692308 (4
8846154 (2
1105769 (4
22115 (0
13269 (3
221 (0
44 (0
20 (2

0,178349875(88

Das Komma, $\frac{2}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{16}{100} = 0{,}16.$

Probe: $\frac{23}{104} \times \frac{25}{31} = \frac{575}{3224} = 0{,}17834987593\ldots.$

(Fernere Übungs-Exempel, x, Nr. 1—8.)

Die abgekürzte Division.

§ 101. Bei der abgekürzten Division bestimme man dem Komma des Quotients seinen Platz, entweder wie es bei der abgekürzten Multiplication geschah, oder nachdem man Dividend und Divisor zu ganzen Zahlen gemacht hat (§ 94), dividire ferner wie gewöhnlich, streiche aber, nach jedesmaliger Multiplication, ehe man zur folgenden Operation übergeht, aus dem Divisor die niedrigste Stelle ab, da es einerlei ist, ob man zum Dividend eine Null herunterzieht, oder vom Divisor die letzte Decimal-Stelle abstreicht. Bei jeder folgenden Multiplication addire man zu der niedrigsten Stelle das vom Producte der weggestrichenen Stelle in den darauf folgenden Quotienten im Sinn Verbliebene hinzu; welches man, falls der erste Theil dieses Products 5 oder größer als 5 ist, noch um eine Einheit vermehrt (§ 83). Ist irgendwo im Quotient 0 zu nehmen, so hänge man dem Dividend ebenfalls keine Null an, wie sonst bei den Divisionen der Decimal-Brüche, sondern streiche dafür aus dem Divisor die niedrigste Stelle weg, und gehe sogleich zur folgenden Operation über.

Bei der abgekürzten Division werden gemeinhin die beiden letzten Stellen des Quotients, häufig auch nur die letzte allein, zu groß, weil der Divisor, durch Abwerfung seiner letzten Stelle nach einer jeden Operation, immer kleiner, der Quotient daher (§ 15) größer wird.

§ 102. Beispiele.

7,4285714.... | 26,5306122.... |

Das Komma des Quotients wird bestimmt entweder so: 7 Ganze in 26 Ganze 3 Mal, also 3 Ganze; oder indem man die Brüche zu ganzen Zahlen macht (§ 94).

7 4 2 8 5 7 1 4 | 265306122 | 3,571428[6
222857142
42448980
37142857 (2
5306123
5200000 (1
106123
74286 (1
31837
29714 (2
2123
1486 (2
637
593 (1
44
44 (2

Probe:

Da nämlich

$26{,}5306122\ldots. = 26\frac{477\,881}{900\,000} = \frac{2387\,751}{900\,000}$,

und

$7{,}4285714\ldots. = 7\frac{3}{7} = \frac{52}{7}$,

so hat man

$\frac{2387\,751}{900\,000} : \frac{52}{7} = \frac{2387\,751}{900\,000} \times \frac{7}{52}$

$= \frac{167142857}{46800000} = 3{,}5714285\ldots.$,

welches Resultat mit dem oben gefundenen Quotient in den ersten sechs Decimal-Stellen übereinstimmt.

$\frac{23}{37}$ [§ 76, Nr. 12] $\quad \frac{141}{550}$ [§ 78, Nr. 35]

0,621621621.... | 0,256363636.... |

Das Komma des Quotients ergiebt sich $\frac{25}{100} : \frac{62}{100} = \frac{25}{62} = 0{,}4$; oder auch durch Verwandlung des Dividends und Divisors in ganze Zahlen:

621 621 621 | 25 63 63 63 6 | 0,41241107
24 86 48 64 8 (0
7714988
6216216 (0
1498772
1243243 (1
255529
248648 (1
6881
6216 (0
665
622 (1
43
43 (1

Probe, $\frac{141}{550} : \frac{23}{37} = \frac{141}{550} \times \frac{37}{23} = \frac{5217}{12650} = 0{,}4124110[6\ldots.$

(Fernere Übungs-Exempel, XI, Nr. 1—8.)

Vierter Abschnitt.
Die Wurzel-Ausziehung.

§ 103. Ein Quadrat oder eine Quadrat-Zahl entsteht, wenn eine Zahl mit sich selbst multiplicirt wird. Die mit sich selbst multiplicirte Zahl nennt man die Wurzel, welche für das Quadrat die Quadrat-Wurzel heißt.

§ 104. Demnach kommt die Quadrat-Wurzel in ihrem Quadrate zwei Mal als Factor vor. So z. B. ist 25 ein Quadrat, weil es gleich 5 . 5 ist; und die Wurzel dieses Quadrats ist der einmalige Factor 5.

§ 105. Aus einer gegebenen Zahl die Quadrat-Wurzel ziehen heißt demnach, diejenige Zahl finden, welche, mit sich selbst multiplicirt, die gegebene Zahl, diese als Quadrat betrachtet, ergiebt.

Einige sagen, eine Quadrat-Wurzel ausziehen, heißt, eine Zahl in zwei gleiche Factoren zerlegen. Dieses ist dem Sinne nach vollkommen wahr, kann aber zu dem Irrthum verleiten, daß man bei Wurzel-Ausziehung an die analytische Operation denkt, welche die Zerlegung eines algebraischen Ausdruckes in seine Factoren zum Gegenstande hat, auch an die dahin gehörige Operation der gemeinen Arithmetik (§ 28), die beide von dem vorhabenden Verfahren gar sehr verschieden sind.

§ 106. Von den Quadrat-Zahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 u. s. f. sind die Wurzeln sogleich angegeben, nicht aber von denjenigen Quadrat-Zahlen, welche zwischen je zwei dieser Zahlen fallen. Es ist nämlich die Wurzel aus 4 gleich 2, und die Wurzel aus 9 gleich 3, folglich sind auch die Wurzeln aus allen dazwischen fallenden Zahlen, 5, 6, 7, 8, sämmtlich größer als 2 und kleiner als 3; so wie für die 10, 11, 12, 13, 14, 15 die Wurzeln zwischen 3 und 4; für 17 bis 24 zwischen 4 und 5 fallen, u. s. f., wobei aber immer, je mehr die Zahlen, welche zwischen je zwei auf einander folgende Quadrat-Zahlen 1, 4, 9, 16 u. s. w. fallen, sich dem größeren Quadrate nähern, auch die dazu gehörigen Wurzeln größer werden müssen.

§ 107. Da also die Wurzeln dieser zwischen die Quadrate fallenden Zahlen nicht ganze Zahlen sind, so müssen sie als Decimal-Brüche durch Näherung angegeben werden; und je nachdem in einer Rechnung größere oder geringere Genauigkeit verlangt wird, behält man auch mehr oder weniger Decimal-Ziffern bei. Die Wurzeln dieser Zahlen sind demnach Irrational-Zahlen (s. § 82).

§ 108. Obiges auf die dritte Potenz angewandt:

Der Cubus oder die dritte Potenz einer Zahl ist da vorhanden, wo diese Zahl drei Mal als Factor vorkommt. Dieser gleiche Factor heißt, in Beziehung auf den zugehörigen Cubus, die Cubik-Wurzel oder die dritte Wurzel. So z. B. ist 125 $(= 5 . 5 . 5) = 5^3$, ein Cubus, dessen Wurzel 5 ist. Die Zahl (3), welche anzeigt, wie viel Mal die Wurzel (5) als Factor vorkommt, heißt der Exponent der Potenz. Die Zahl 125, oder $5 . 5 . 5$, oder 5^3 heißt die Potenz, Potestät, Dignität.

§ 109. Eine Cubik-Wurzel ausziehen heißt demnach diejenige Zahl finden, welche, drei Mal mit sich selbst multiplicirt, den Cubus oder die dritte Potenz ergeben wird. Wie das Zeichen für die auszuziehende Quadrat-Wurzel ein vor die Quadrat-Zahl gesetztes $\sqrt{}$ ist (ein verzogenes r, von radix, Wurzel), so ist das Zeichen für die Cubik-Wurzel: $\sqrt[3]{}$. Für die am häufigsten vorkommende Quadrat-Wurzel wird nämlich die 2, die eigentlich auch im Wurzel-Zeichen stehen sollte, weggelassen; man schreibt z. B. nicht $\sqrt[2]{8}$, sondern $\sqrt{8}$.

§ 110. Die Cubik-Wurzeln der Zahlen 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000 u. s. f. sind vollständige; die Cubik-Wurzeln derjenigen Zahlen aber, welche zwischen je zwei dieser Zahlen fallen, sind unvollständige Wurzeln, sind Irrational-Zahlen (§ 82), die man, eben wie bei der Quadrat-Wurzel, durch Näherung bestimmen muß.

Es wird nämlich der Exponent des Verhältnisses einer Rational-Zahl zu ihrer Wurzel, z. B. der 8 zur Cubik-Wurzel aus 8, d. i. $8 : \sqrt[3]{8}$, vollständig ausgedrückt durch die ganze Zahl 2; nicht so aber der Exponent einer Irrational-Zahl, z. B. 7 zu ihrer Cubik-Wurzel, oder $7 : \sqrt[3]{7}$, da der Exponent dieses Verhältnisses sich als bis in's Unendliche fortlaufend ergiebt, und zwar $= 1{,}912931\,18277\ldots\ldots$

§ 111. Man lerne folgendes Wurzel-Täflein auswendig:

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

§ 112. Das Quadrat eines Binomium, d. i. einer zweitheiligen oder zweigliedrigen Größe, worin a den ersten, b den zweiten Theil bedeutet, besteht (falls beide Glieder positiv sind, d. h. das Additionszeichen + vor sich haben; welches Zeichen übrigens, als sich von selbst verstehend, vor der ersten Größe weggelassen wird), also es besteht $(a+b)^2$ aus dem Quadrate des ersten Theils, ferner aus dem doppelten Producte des ersten Theils in den zweiten, und aus dem Quadrate des zweiten Theils. Es ist nämlich

$$(a+b)^1 \text{ oder } a+b = a+b$$
$$a+b = a+b$$
$$a^2+ab$$
$$+ab+b^2$$
$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2;$$

oder in Zahlen, z. B. 8 besteht unter andern aus den beiden Theilen 5+3, daher $8 = 5+3$

$$8 = 5+3$$
$$5^2+5.3$$
$$+5.3+3^2$$
$$8^2 = 5^2+2\times5.3+3^2 = 25+30+9 = 64.$$

§ 113. Die Ausziehung der Quadrat-Wurzel geschieht nach der obigen binomischen Formel für das Quadrat der zweitheiligen Größe $a+b$: $a^2+2ab+b^2$ folgender Maaßen:

Nachdem man den ersten Theil (a) nach dem Wurzel-Täflein bestimmt, und dessen Quadrat von der dazu bestimmten Zahl abgezogen hat, so bestimme man, aus dem zweiten Gliede (2ab) der Formel, den zweiten Theil (b), indem man das gefundene a verdoppelt, und dieses Product in die für 2ab bestimmte Zahl dividirt, ziehe auch dieses 2ab, und endlich von der wiederum dafür bestimmten Zahl auch das dritte Glied der Formel (b^2) ab: sehe darauf alles bereits Gefundene, als von welchem man das Quadrat, d. i. $a^2+2ab+b^2$, bereits abgezogen hat, wiederum als a an, zu welchem man, ganz auf die vorige Weise, b sucht, u. s. f..

Es wäre nämlich (man sehe das nachstehend berechnete Exempel) das anfängliche, aus dem Wurzel-Täflein bestimmt gewordene $a = 3$, und das darauf gefundene $b = 4$, so ist jene 3 und diese 4 zusammen nicht 7, sondern, da beide Theile nach dem dekadischen Zahlen-System mit einander verbunden sein müssen, weil ja auch die Zahlen, aus denen sie entstanden sind (12 und 02, vielmehr

1200 und 02), es waren, 30 + 4, d. i. 34. Auch ergiebt die Probe auf gedoppelte Weise, daß man solcher Gestalt wirklich das Quadrat von 34, nämlich 1156, abgezogen hat, so daß von 1202 (als womit man es von der ganzen gegebenen Zahl bis jetzt nur zu thun gehabt hat) noch 46 übrig sind.

Sieht man nun die 34 (Einer, da keine andere Ziffer darauf folgt) als den ersten Theil (a) an, zu welchem man den zweiten (b) sucht, und dieses b ergäbe sich gleich 6, so ist jene 34 (nämlich 34 Zehner, da ja noch eine Ziffer, die 6, darauf folgt) 340 Einer, und die 6, als zweiter Theil dazu, ist 6 Einer: dieß giebt 340 + 6 = 346, u. s. f..

Nachdem man, in Gemäßheit der Formel, a^2 abgezogen hat, bleiben von der Formel noch zwei Glieder übrig; für jedes dieser Glieder hat man eine Ziffer herunter zu ziehen, für beide zusammen also zwei Ziffern; woraus die Regel folgt: Man theile die zur Quadrat-Wurzel-Ausziehung vorgegebene Zahl von der Rechten nach der Linken zu in Classen von zwei Ziffern, wobei für die letzte Classe auch eine einzige Ziffer nur übrig bleiben kann. — Das 2a, wodurch 2ab gebildet werden wird, setze man unter die erste Ziffer der heruntergezogenen Classe, und klammere es, als nicht zur Rechnung gehörig, ein; eben dahin setze man auch das Glied, welches durch 2ab ausgedrückt wird; den Werth von b^2 setze man unter die zweite Ziffer der heruntergezogenen Classe.

Einige setzen das 2a als Divisor vor den von a^2 nachgebliebenen Rest sammt den beiden herunter gezogenen Ziffern, wie sie z. B. im nachfolgenden Exempel setzen würden:

6 | 302;

das aber ist verwirrend; denn es kann dadurch das Mißverständniß veranlaßt werden, als sei die 6 nicht in die 30, sondern, nach Art der Division, in 302 zu dividiren. Wozu aber dasjenige verwirrt darstellen, was eben so leicht klar dargestellt ist!

Formel: $a^2 + 2ab + b^2$.

$\sqrt{12|02|75|71|95|02|41} = 3\,4\,6\,8\,0\,7\,9$

$a^2 = 9 \quad (= 3^2)$

302

$2a = (6) \quad (= 2 \times 3)$

$2ab = 24 \quad (= 2 \times 3.4)$

$b^2 = 16 \quad (= 4^2)$

256

4675

$2a = (68) \quad (= 2 \times 34)$

$2ab = 408 \quad (= 2 \times 34.6)$

$b^2 = 36 \quad (= 6^2)$

$2ab + b^2 = 4116$

55971

$2a = (692) \quad (= 2 \times 346)$

$2ab = 5536 \quad (= 2 \times 346.8)$

$b^2 = 64 \quad (= 8^2)$

$2ab + b^2 = 55424$

5479502

$2a = (69360) \quad (= 2 \times 34680)$

$2ab = 485520 \quad (= 2 \times 34680.7)$

$b^2 = 49 \quad (= 7^2)$

$2ab + b^2 = 4855249$

62425341

$2a = (693614) \quad (= 2 \times 346807)$

$2ab = 6242526 \quad (= 2 \times 346807.9)$

$b^2 = 81 \quad (= 9^2)$

$2ab + b^2 = 62425341$

(0)

Von der 12 wurde abgezogen das nächst niedere Quadrat 9; blieb Rest 3.

Von der 1202 war vorher abgezogen 900, nun wurde abgezogen 240 und 16, zusammen 256. Überhaupt also sind abgezogen worden 1156; blieb 46. — Auch ist $34 \times 34 + 46 = 1156 + 46 = 1202$. Dieß letztere Verfahren ist die eigentliche Probe für die Quadrat-Wurzel-Ausziehung.

Von der Zahl 120275 war abgezogen worden 115600. Darauf wurde abgezogen $4080 + 36$, d. i. 4116; zusammen ist abgezogen worden 119716; blieb Rest 559. — Auch ist (zur Probe) $346 \times 346 + 559 = 119716 + 559 = 120275$.

Darauf, von der Zahl 12027571 war abgezogen worden 11971600; nun wurde abgezogen $55360 + 64$, zusammen 55424. Überhaupt sind abgezogen worden 12027024, blieb Rest 547. — Auch ist $3468 \times 3468 + 547 = 12027571$. U. s. f..

§ 114. Es ist, nach Obigem, nicht gerade nothwendig, bei Ausziehung der Quadrat-Wurzel die vorgeschriebene Theilung der vorgegebenen Zahl von der Rechten nach der Linken zu in Classen von zwei Ziffern zu veranstalten, nur muß dafür gesorgt werden, daß, statt wie oben mit den Classen 12, und 02 u. s. w., man nicht mit den Classen 1, und 20 u. s. w. zu thun bekomme. Ist diese Vorsicht beobachtet, so braucht man für jedes Glied der Formel nur eine einzige Ziffer herunter zu ziehen; welches Verfahren aber die Operation unnöthig verlängern würde. So wäre

$\sqrt{12} = 3$;	$\sqrt{1202} = 34$;	$\sqrt{120275} = 346$
$a^2 = 9$	$a^2 = 9$	$a^2 = 9$
3	30	30
u. s. f.	$2a = (6)$	$2a = (6)$
	$2ab = 24$	$2ab = 24$
	62	62
	$b^2 = 16$	$b^2 = 16$
	46	467
	u. s. f.	$2a = (68)$
		$2ab = 408$
		595
		$b^2 = 36$
		559
		u. s. f..

§ 115. Sind, bei der Wurzel-Ausziehung aus Irrational-Zahlen, keine Classen von bedeutlichen Ziffern mehr herunter zu ziehen, so ziehe man, statt dessen, Classen von Nullen herunter. Will man endlich mit der Rechnung aufhören, so bestimmt man den Werth des Restes, indem man die nach und nach heruntergezogenen Decimal-Stellen zählt, dem Rest eben so viel Decimal-Stellen von der Rechten nach der Linken zu giebt, und dann, falls

im Rest keine Ganzen mehr bleiben, das 0, demselben vorsetzt. Bei der Probe muß begreiflich dieser Rest der bezüglichen Potenz der Wurzel zugezählt werden, um die gegebene Irrational-Zahl vollständig zu machen.

$\sqrt{23|45|67|89|01} = 48432{,}2\ldots.$

```
16
745                          Probe:
 (8)                              48432,2....
 64                               48432,2....
  64                          2345677996,84
 704                 Hiezu den Wurzel-Rest 904,16
  4167                        2345678901.
   (96)
   384
     16
   31189
    (968)
   29049
    214001
     (9686)
     193724
      2027700
       (96864)
       1937284
        904,16
```

§ 116. Wenn es nicht gerade auf die bestimmte Größe der Zahl ankommt, aus der die Wurzel zu ziehen ist, und man überhaupt nur aus einer Irrational-Zahl eine Rational-Zahl herstellen will, so subtrahire man den sich ergeben habenden Wurzel-Rest von der gegebenen Irrational-Zahl. Da, nach dem vorigen Exempel,

2345678901 irrational,
und 904,16 der Wurzel-Rest ist,
so muß 2345677996,84 rational sein;

wie sich durch die Ausführung der Rechnung ergeben wird.

§ 117. Ist aus einem gemischten Decimal-Bruche, z. B. aus 58973,2 die Wurzel zu ziehen, so darf die Theilung der Zahl von der Rechten nach der Linken zu nicht schon von der 2, diese mit

eingerechnet, sondern nur von der 3, als den Einern, an beginnen, und die eingetheilte Zahl ist demnach 5|89|73,2. Die letzte Classe muß alsdann zur weiteren Rechnung noch durch eine Null vervollständigt werden, nämlich 5|89|73,20. — Wollte man ferner z. B. aus 8,5 (= $8\frac{1}{2}$) die Wurzel ziehen, und die Rechnung schon mit der 5, als wären es Einer, anfangen, so wäre ja aus 8,5 die Wurzel 9; als welches unmöglich ist.

Da die Eintheilung in zweiziffrige Classen von der Rechten nach der Linken zu überhaupt nur für die Stellen von den Einern an gilt, so folgt für die Decimal-Brüche daraus, daß man diese Eintheilung nur von dem Komma aus, als wo nämlich die Ganzen aufhören, rechts und links hin zu veranstalten habe. — Ganz eben so ist es mit den echten Decimal-Brüchen, z. B. mit 0,0005671; hier ergeben sich vom Komma rechtshin folgende Classen: 00,05,67,10. Die Berechnung dieses Exempels ist folgende:

$\sqrt{0,00|05|67|10} = 0,0238....$

4

167

(4)

129

3810

(46)

368

64

3744

66

Probe:

0,0238....

0,0238....

0,00056644

Hierzu d. Wurzel-Rest = 66

Die gegebene Irrational-Zahl = 0,0005671.

§ 118. Ein Product zweier Zahlen wird in eine gewisse Potenz erhoben, wenn jeder der Factoren in diese Potenz erhoben wird, z. B. $(5 . 3)^2 = 5^2 . 3^2 = 25 . 9 = 225$; und eben so groß ist auch 15^2. Daher wird

aus einem Producte eine gewisse Wurzel gezogen, wenn man aus jedem seiner Factoren diese Wurzel zieht; z. B. $\sqrt{25 . 9} = \sqrt{25} . \sqrt{9} = 5 . 3$.

§ 119. Ein Bruch wird in eine gewisse Potenz erhoben, wenn man sowohl Zähler als Nenner in diese Potenz erhebt, z. B. $(\frac{3}{4})^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$; denn $(\frac{3}{4})^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$. — Daher wird

aus einem Bruche eine gewisse Wurzel gezogen, wenn man aus Zähler und Nenner diese Wurzel zieht, z. B. $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$.

Wenn man aus einer gemischten Zahl (z. B. aus $8\frac{1}{2}$) eine Wurzel ziehen will, so verwandle man jene in einen unechten Bruch ($\frac{17}{2}$), ziehe aus Zähler und aus Nenner die Wurzel, und dividire die Wurzel des ersteren durch die Wurzel des letzteren auf abgekürzte Weise; oder man verwandle den unechten Bruch in einen Decimal-Bruch (8,5) und ziehe aus diesem die Wurzel (s. Exempel- und Resultaten-Buch, XII, Nr. 32, 33, 34).

(Übungs-Exempel XII, Nr. 1—37.)

§ 120. Zur Ausziehung der Cubik-Wurzel dient die dritte Potenz des Binomii, d. i. $(a+b)^3$. Es ist nämlich

$$\begin{array}{rl} (a+b)^2 = & a^2 + 2ab + b^2 \\ a+b = & a + b \\ \hline & a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ & \quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline (a+b)^3 = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

So wie bei der Ausziehung der Quadrat-Wurzel, nachdem man a^2 abgezogen hatte, man in der Formel noch zwei Glieder behält, die jedes von der zur Wurzel-Ausziehung vorgegebenen Zahl eine herunter zu ziehende Stelle erfordert, zu welchem Ende man also die vorgegebene Zahl von der Rechten nach der Linken zu in Classen von zwei Ziffern theilt: so theilt man die Zahl, aus welcher die Cubik-Wurzel gezogen werden soll, von der Rechten nach der Linken zu in Classen von drei Ziffern, da, nach Abziehung des ersten Gliedes der Formel (a^3), noch die Summe der drei Glieder $3a^2b$, $3ab^2$, b^3 abzuziehen bleibt.

Nachdem man nun a^3 subtrahirt hat, so ziehe man die nächste dreiziffrige Classe herunter, mache zuvörderst $3a^2$, setze dieses unter die erste Ziffer der heruntergezogenen Classe, und suche, nach dem zweiten Gliede der Formel, b, indem man $3a^2$ in das Darüberstehende, für das Glied $3a^2b$ Gehörige dividirt; das $3a^2$, wie vorher bei der Quadrat-Wurzel das 2a, wird, als nicht zur Rechnung gehörig, eingeklammert. Darauf mache man $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3, wobei man jedes der beiden letzten Glieder um eine Stelle weiter rechtshin ausrückt, und ziehe deren Summe ab. Die beiden nunmehr gefundenen Stellen der Cubik-Wurzel sehe man als a (dessen Cubus bereits abgezogen worden) an, und suche nach diesem a das b, u. s. f..

Sind aus Decimal-Brüchen die Cubik-Wurzeln zu ziehen, so theile man die dreiziffrigen Classen nach Anleitung von § 117 ab,

und zwar bei gemischten Zahlen vom Komma links und rechts hin, bei echten Brüchen vom Komma rechts hin, und ergänze den etwanigen Mangel der letzten Classe durch zwei oder eine Null.

Formel: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\sqrt[3]{870|773|214|211|128|467} = 9\,5\,4\,9\,2\,3$

$a^3 = 729 = 9^3$ — a b

141773 — a b

$3a^2 = (243) = 3 \times 9^2$ — a b

$3a^2b = 1215 = 3 \times 9.5$ — a b

$3ab^2 = 675 = 3 \times 9.5^2$ — a b

$b^3 = 125 = 5^3$ — a b

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 128375$

13398214

$3a^2 = (27075) = 3 \times 95^2$

$3a^2b = 108300 = 3 \times 95^2.4$

$3ab^2 = 4560 = 3 \times 95.4^2$

$b^3 = 64 = 4^3$

10875664

2522550211

$3a^2 = (2730348) = 3 \times 954^2$

$3a^2b = 24573132 = 3 \times 954^2.9$

$3ab^2 = 231822 = 3 \times 954.9^2$

$b^3 = 729 = 9^3$

2459632149

62918062128

$3a^2 = (273550203) = 3 \times 9549^2$

$3a^2b = 547100406 = 3 \times 9549^2.2$

$3ab^2 + b^3 = 1145888 = 3 \times 9549.2^2 + 2^3$

54711186488

8206875640467

$3a^2 = (27356166192) = 3 \times 95492^2$

$3a^2b = 82068498576 = 3 \times 95492^2.3$

$3ab^2 = 2578284 = 3 \times 95492.3^2$

$b^3 = 27 = 3^3$

8206875640467

(0)

Probe:

954923
954923
911877935929
954923
870773214211128467

Es ist, wenn man Exempel mit Sicherheit will berechnet haben, besonders bei Ausziehung der Cubik-Wurzel sehr anzurathen, die Neuner- (§ 18, 19) oder Eilfer-Probe nach jeder Partial-, wie Total-Multiplication anzuwenden, und, nachdem eine Stelle gefunden, alle dahin gehörigen Glieder berechnet, auch deren Summe subtrahirt worden, die Probe durch Potenziirung der Wurzel, mit Hinzufügung des Wurzel-Restes, zu machen, so daß der vorgegebene Cubus nach und nach und endlich ganz sich ergebe. Es ist dieß für den, der nicht ganz sicher im Rechnen ist, besonders bei größeren Exempeln ein zwar weiterer, aber, worauf es am Ende doch allein ankommt, zweifellos sicherer Weg. Unzuverlässig rechnen ist um nichts besser als gar nicht rechnen.

(Übungs-Exempel XIII, Nr. 1—19.)

Fünfter Abschnitt.

Die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen.

§ 121. Ein Verhältniß ist die Vergleichung zweier gleichartiger Größen mit einander, um zu bestimmen, entweder um wie viel Einheiten des angenommenen gemeinschaftlichen Maaßes, oder wie viel Mal die eine Größe größer oder kleiner ist als die andere. Jene Art des Verhältnisses heißt ein arithmetisches oder Unterschieds-Verhältniß, dieses ein geometrisches. Das erste Glied des Verhältnisses heißt sein Vorderglied, das zweite sein Hinterglied.

Man darf sich durch diese Benennung der Verhältnisse nicht zu dem Irrthum verleiten lassen, als käme das arithmetische Verhältniß blos in der Arithmetik, das geometrische bloß in der Geometrie vor. Beide Ausdrücke sind Kunst-Ausdrücke, die dem Sinne, nicht der Wortbedeutung nach zu nehmen sind.

§ 122. Die Größe des arithmetischen Verhältnisses wird also durch Subtraction des Hintergliedes vom Vorderglied gefunden, z. B. $8 \overset{6}{-} 2$; 6 heißt demnach sein Unterschied: die Größe des geometrischen aber mittels Division des Vorderglied

durch das Hinterglied, z. B. $8 : 2 = 4$. Diese Größe (4) des geometrischen Verhältnisses heißt sein Exponent.

Man verwechsele nicht so geradezu „Exponent des Verhältnisses" mit „Quotient der Division". Bei einer Division nämlich denkt man nicht so wohl an den Dividend und seinen Divisor, an jeden besonders, sondern vielmehr an das Resultat, welches beide ergeben; nicht so aber bei dem Verhältnisse. Wären z. B. 30 Einheiten gleicher Art unter zwei Personen dergestalt zu vertheilen, daß A zwei erhält, während B acht bekommt, so wird A seine zwei Einheiten 3 Mal erhalten können, während auch B seine acht Einheiten 3 Mal erhält. Und überhaupt hat dann A bekommen 6, während B bekommen hat 24. — Wenn aber bloß gefragt wird, wie viel Mal hat B mehr bekommen als A, so giebt freilich der Quotient sowohl aus dem Verhältnisse 8 : 2, wie aus 24 : 6 die Antwort darauf.

§ 123. Wenn man nicht so wohl an die Natur des geometrischen Verhältnisses (von welchem in der Folge vorzüglich wird gehandelt werden) als an das Resultat desselben denkt, so kann man das geometrische Verhältniß als eine Division des Vorderliedes durch das Hinterglied ansehen, und für das Verhältniß kann man sich seinen Exponenten denken. Man kann daher Vorder- und Hinterglied eines Verhältnisses mit einer und derselben Zahl multipliciren oder dividiren, wie man das mit dem Zähler und Nenner eines Bruches (§ 40) kann, ohne daß die Größe, dort des Bruches, hier des Verhältnisses, dadurch verändert wird. Es ist z. B. das Verhältniß $7 : 2$ gleich dem Verhältnisse $7 \times 5 : 2 \times 5$, und dieses Verhältniß ist gleich $35 : 10$, da sein Exponent $\frac{7}{2} = \frac{7 \times 5}{2 \times 5}$. Umgekehrt ist $35 : 10$ so viel als $\frac{35}{5} : \frac{10}{5}$, d. i. als $7 : 2$.

§ 124. Ein Verhältniß heißt fallend, wenn sein Vorderglied größer ist als sein Hinterglied, z. B. $8 : 2$, steigend, wenn sein Vorderglied kleiner ist als sein Hinterglied, z. B. $2 : 8$. In jenem Falle ist sein Exponent entweder eine ganze Zahl, wie z. B. in $8 : 2$ die 4, oder ein unechter Bruch, wie z. B. in $5 : 2$ der Exponent $\frac{5}{2}$; in diesem Falle, wie z. B. in $2 : 8$, ist der Exponent ein echter Bruch, $\frac{1}{4}$.

§ 125. Weil der Exponent eines Verhältnisses gleich ist dem Vorderliede, dividirt durch das Hinterglied, so ist, nach der gewöhnlichen Probe der Division, das Vorderglied anzusehen als das Product des Exponenten in das Hinterglied; das Hinterglied ist der Quotient des Vorderliedes durch den Exponenten. So ist in dem Verhältnisse $8 : 2$ der Exponent $\frac{8}{2} = 4$, das Vorderglied ist $= 4 \cdot 2 = 8$, das Hinterglied $= \frac{8}{4} = 2$.

§ 126. Verhältnisse sind unzusammenhängend, wenn im zweiten Verhältnisse das Vorderglied gegen sein Hinterglied durch eine andere Zahl ausgedrückt werden muß, als wodurch im ersten Verhältnisse eben dieses Vorderglied des zweiten Verhältnisses, als Hinterglied des ersten Verhältnisses, ausgedrückt wurde. Es soll z. B. eine Geld-Summe unter mehre Personen so vertheilt werden, daß A zwei Theile derselben erhält, während B drei bekommt. Wenn man nun diese 3 Theile des B sich in 8 gleiche Theile getheilt denkt, so sollen auf C sieben solcher Theile fallen. Dieß giebt die unzusammenhängenden Verhältnisse 2 : 3, 8 : 7.

§ 127. Diese Verhältnisse sollen zusammenhängend gemacht werden. Zu dem Ende multiplicire man Vorderglied des nachfolgenden Verhältnisses mit Vorder- und Hinterglied des vorhergehenden, und Hinterglied des vorhergehenden Verhältnisses mit Vorder- und Hinterglied des nachfolgenden; durch welches Verfahren beide Verhältnisse (§ 40) nicht verändert werden. Nämlich

$$\begin{array}{r} 2 : 3 \\ 8 : 7 \\ \hline 8 \,.\, 2 : 8 \,.\, 3 \\ 3 \,.\, 8 : 3 \,.\, 7 \\ \hline 8 \,.\, 2 : 8 \,.\, 3 : 3 \,.\, 8 : 3 \,.\, 7 \end{array}$$

Hiedurch aber bekommt man das mittlere Glied zwei Mal, da es doch offenbar nur ein Mal nöthig ist; darum multiplicirt man das Hinterglied des vorhergehenden Verhältnisses bloß mit dem Hintergliede des nachfolgenden:

$$\begin{array}{r} 2 : 3 \\ 8 : 7 \\ \hline 8 \,.\, 2 : 8 \,.\, 3 : 3 \,.\, 7 \end{array}$$

d. i.

$$16 : 24 : 21,$$

und die Geld-Summe ist unter A, B, C so zu vertheilen, daß der Erste jedes Mal 16 erhält, während der Zweite 24, der Dritte 21 empfängt.

Zur Probe: Die Exponenten der beiden Verhältnisse 16 : 24, 24 : 21 sind $\frac{16}{24}, \frac{24}{21}$, d. i. $\frac{2}{3}, \frac{8}{7}$,

und daher die Verhältnisse selbst 2 : 3, 8 : 7, wie gegeben war.

Kommt zu jenen beiden noch ein drittes Verhältniß, 5 : 9, hinzu, so bekümmert man sich, nachdem man die beiden ersten Verhältnisse zusammenhängend gemacht, vor der Hand nicht um

die erste Verhältnißzahl, und verfährt mit den beiden letzten Verhältnissen wie oben, multiplicirt aber darauf mit dem Vordergliede (5) des hinzugekommenen Verhältnisses das frühere Verhältnißglied, weil dieses das hinzugekommene Vorderglied noch nicht als Factor enthält; nämlich

$$8 . 2 : 8 . 3 : 3 . 7$$
$$5 : 9$$
$$5 . 8 . 3 : 5 . 3 . 7 : 3 . 7 . 9$$
$$5 . 8 . 2 : 5 . 8 . 3 : 5 . 3 . 7 : 3 . 7 . 9$$

d. i.

$$80 : 120 : 105 : 189.$$

Zur Probe: Die Exponenten der drei Verhältnisse 80 : 120, 120 : 105, 105 : 189 sind $\frac{80}{120}$, $\frac{120}{105}$, $\frac{105}{189}$, oder $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{5}{9}$; demnach die Verhältnisse selbst 2 : 3, 8 : 7, 5 : 9, wie gegeben war.

(Übungs-Exempel XIV, Nr. 1 — 8.)

§ 128. Wenn zwei geometrische Verhältnisse gleichen Exponenten haben, so kann man selbige einander gleich setzen, und erhält dadurch eine geometrische Proportion, z. B. 8 : 2 = 12 : 3, gelesen „es verhält sich 8 zu 2, wie sich verhält 12 zu 3"; und der Sinn der Proportion ist: Es ist die 8 so viel Mal größer denn die 2, so viel Mal die 12 größer ist denn die 3. Dieß auf die steigende Proportion 2 : 8 = 3 : 12 angewandt: die 2 ist so viel kleiner denn die 8, so viel Mal die 3 kleiner ist denn die 12. Überhaupt ist bei jener Proportion die 3 in der 12, bei dieser die 12 in der 3 so viel Mal enthalten, als bei jener Proportion die 2 in der 8, bei dieser die 8 in der 2.

Der Lehrer verweile dabei, seinen Schülern den Sinn und die Wichtigkeit der geometrischen Proportion recht anschaulich zu machen. Wegen ihres weit verbreiteten Nutzens sowohl in der Mathematik als im bürgerlichen und häuslichen Leben nannten ältere Mathematiker sie regula aurea, neuere, die Seele der Mathematik.

§ 129. In der Proportion heißen erstes und drittes Glied Vorderglieder, zweites und viertes Glied Hinterglieder. Vorderglied und Vorderglied, wie Hinterglied und Hinterglied einer und derselben Proportion sind gleichnamige oder homologe Glieder.

Die Proportion 8 : 2 = 12 : 3 ist fallend, und 2 : 8 = 3 : 12 steigend.

1. Bei einer fallenden wie bei einer steigenden Proportion findet man den Exponenten, z. B. bei 8 : 2 = 12 : 3, wenn man

eines der beiden Vorderglieder durch das zugehörige Hinterglied dividirt, $\frac{8}{2} = 4 = \frac{12}{3}$.

2. Ein Vorderglied ergiebt sich, wenn man den Exponenten in das zugehörige Hinterglied multiplicirt; so ist in obiger Proportion $4 : 2 = 8$, und $4 . 3 = 12$.

3. Ein Hinterglied ergiebt sich, wenn man den Exponenten in das zugehörige Vorderglied dividirt. In obiger Proportion ist nämlich $\frac{8}{4} = 2$, und $\frac{12}{4} = 3$.

Hier sind Übungen anzustellen, aus Vordergliedern, Hintergliedern, und den Exponenten das in einer Proportion Fehlende eines nach dem andern herzustellen, in ganzen Zahlen wie in Brüchen. Man ergänze z. B. folgende Proportionen $x : 9 = \frac{8}{4} : y$; $\frac{8}{4} : y = \frac{2}{3} : x$; $x = y : \frac{2}{3}$; $\frac{3}{7} : \frac{4}{21} = 5 : x$.

§ 130. Ein zweites Kennzeichen für die Richtigkeit einer geometrischen Proportion ist, daß das Product der beiden äußeren Glieder dem Producte der beiden mittleren gleich sei, z. B. in $6 : 2 = 9 : 3$ ist $6 \times 3 = 2 \times 9$ $(= 18)$.

Beweis.

In der vorstehenden Proportion ist der Exponent oder Bruch $\frac{6}{2} = \frac{9}{3}$. Wenn man nun jeden dieser gleichen Brüche mit dem Producte der darin vorkommenden Nenner $(2 . 3)$, also Gleiches mit Gleichem, multiplicirt, so wird $\frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 6 = \frac{2 \cdot 3}{3} \cdot 9$, oder $3 . 6 = 2 . 9$. Eben so schließt man bei jeder andern Proportion.

Folgender Beweis möchte noch anschaulicher sein.

Nennt man allgemein

im ersten Verhältnisse das Vorderglied V, das Hinterglied H,

im zweiten Verhältnisse das Vorderglied v, das Hinterglied h,

den Exponenten aber, der (§ 128) für beide Verhältnisse ein und derselbe ist, e:

so erhält man als allgemeine Form einer geometrischen Proportion

$$V : H = v : h,$$

nun aber ist (§ 129, 2) $V = e . H$, $v = e . h$

erhält man $e . H : H = e . h : h$.

Macht man nun hievon das Product der beiden äußeren und mittleren Glieder, $e . H . h$, $H . e . h$, so zeigt die Gleichheit der beiderseitigen Factoren, daß die Producte gleich sein müssen. Also ist $e . H . h = H . e . h$.

§ 131. Nach diesem Lehrsatze findet man das unbekannte Glied (x) der geometrischen Proportion oder die vierte geometrische Proportional-Zahl,

I. im Fall diese ein äußeres Glied ist, wenn man die beiden mittleren Glieder in einander multiplicirt, und dieses Product durch das bekannte äußere Glied dividirt; denn

1) in

$$\frac{6 : 2 = 9 : x}{6x = 2 . 9}$$

und dieses Gleiche mit dem Gleichen (6) beiderseits dividirt:

$$x = {}^{2 . 9}/_{6} = 3,$$

und 2) in

$$\frac{x : 2 = 9 : 3}{x = {}^{2 . 9}/_{3} = 6.}$$

II. Ist aber das unbekannte Glied ein mittleres, so ergiebt sich dasselbe durch Multiplication der äußeren Glieder, und Division mit dem bekannten mittleren Gliede; denn

1) in

$$\frac{6 : x = 9 : 3}{9x = 6 . 3}$$

$$x = {}^{6 . 3}/_{9} = 2,$$

und 2) in

$$\frac{6 : 2 = x : 3}{x = {}^{6 . 3}/_{2} = 9.}$$

§ 132. In jeder geometrischen Proportion, $8 : 2 = 12 : 3$, kann man die beiden mittleren Glieder verwechseln, das zweite Glied zum dritten, das dritte zum zweiten machen (alternando oder permutando schließen) d. i. $8 : 12 = 2 : 3$.

Es stelle nämlich wiederum $V : H = v : h$, mithin $e . H : H = e . h : h$ die Proportion vor; schließt man nun alternando, und nimmt davon das Product der äußern und mittlern Glieder, so erhält man beiderseits die Producte $e . H . h$, welche, weil sie gleich sind, zeigen, daß man richtig verfahren habe.

§ 133. Auch kann man beide Verhältnisse einer Proportion umkehren, indem man beide Vorderglieder zu Hintergliedern, und beide Hinterglieder zu Vordergliedern macht (invertendo schließt); aus $8 : 2 = 12 : 3$ wird invertendo $2 : 8 = 3 : 12$.

Wenn nämlich aus $V : H = v : h$, demnach aus $e . H : H = e . h : h$ folgen soll $H : eH = h : eh$, so müssen $H . e . h$ und $e . H . h$ beiderseits gleich seyn; wie auch der Fall ist.

§ 134. Aus der Proportion $8 : 2 = 12 : 3$ mit dem Exponenten 4 wurde alternando $8 : 12 = 2 : 3$, deren Exponent $\frac{3}{4}$ ist: aus $8 : 2 = 12 : 3$ mit dem Exponenten 4 wurde invertendo $2 : 8 = 3 : 12$, mit dem Exponenten $\frac{1}{4}$; durch letztere Schluß-Art wird eine fallende Proportion steigend, eine steigende fallend. Wenn demnach durch die Schluß-Arten alternando und invertendo die Exponenten auch verändert werden, so bleiben doch immer, für jede so veränderte Proportion, die Exponenten gleich.

§ 135. Mit Hilfe dieser beiden Schluß-Arten kann man, wenn man will, eine vorgegebene Proportion, deren unbekanntes Glied das vierte nicht ist, so ordnen, daß selbiges das vierte werde.

Hätte man nämlich $8 : 2 = x : 3$, so folgt invertendo $2 : 8 = 3 : x$.

Aus $8 : x = 12 : 3$ folgt zuerst alternando $8 : 12 = x : 3$, darauf invertendo $12 : 8 = 3 : x$; auf kürzerem Wege aber erhält man die Proportion, verlangter Maaßen geordnet, wenn man das zweite Verhältniß zum ersten, das erste zum zweiten macht.

Aus $x : 2 = 12 : 3$ folgt zuerst invertendo $2 : x = 3 : 12$, dann, indem man das erste Verhältniß zum zweiten, das zweite zum ersten macht, $3 : 12 = 2 : x$; welches zugleich die vorgegebene Proportion rückwärts gelesen ist.

§ 136. Die vierte geometrische Proportional-Zahl, d. h. das gesuchte Glied (x) einer Regel detri, ist gleich einem Bruche, dessen Zähler ein Product ist aus dem zweiten und dritten Gliede, und dessen Nenner das erste Glied ist (vergl. § 131).

Man thut wohl daran, vor Ausführung der Berechnung, diesen Nenner gegen seinen Zähler durch gemeinschaftliche Theiler aufzuheben, als wodurch (§ 40) der Werth des Bruches nicht verändert wird. Man hätte z. B. die Proportion $1350 : 120 = 225 : x$, so ist

$$x = \frac{\overset{4}{\cancel{120}} \cdot \overset{45}{\cancel{225}}}{\underset{27}{\underset{3}{\cancel{1350}}}} = 4 \cdot 5 = 20.$$

Doch kann man auch, ohne x als Bruch anzusetzen, in der Proportion das erste Glied gegen das zweite, und ebenfalls das erste Glied gegen das dritte durch gemeine Theiler abkürzen, da beide Glieder eines Verhältnisses durch eine und dieselbe Zahl dividirt werden dürfen; und weil nicht allein das erste und zweite Glied ein Verhältniß ausmachen, sondern, wegen der Schluß-Art alternando, auch das erste und dritte Glied als ein Verhältniß angesehen werden können. So ist

$$\begin{array}{c} \underset{27}{\underset{3}{\cancel{1350}}} : \overset{4}{\cancel{120}} = \overset{45}{\cancel{225}} : x \\ \hline x = 4 \cdot 5 = 20. \end{array}$$

Man hätte ferner $18 : 2 = 3 : x$, so folgt daraus $x = \frac{x \cdot 3}{18} = \frac{3}{3} = 1$. Denn wenn, durch Abkürzung des Zählers gegen den Nenner, aus ersterem, wie hier, auch alles verschwindet, so kann daraus doch nicht der Factor 1 verschwinden, da der Zähler ja $1 \cdot 2 \times 1 \cdot 3$, d. i. 6, nicht aber $0 \cdot 2 \times 0 \cdot 3$, d. i. 0 war, indem eine Zahl, auch eine Reihe von Factoren einer Zahl, durch Multiplication mit 0, selbst 0 wird.

§ 137. Kommen in einer geometrischen Proportion Brüche vor, so verwandle man

1. die etwa vorhandenen gemischten Zahlen in unechte Brüche, und bestimme darauf x, indem man die drei bekannten Glieder als Brüche multiplicirt und dividirt, z. B. $\frac{8}{9} : \frac{4}{3} = 7 : x$, folglich $x = \frac{4}{3} \times 7 : \frac{8}{9} = \frac{4 \cdot 7}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 9}{3 \cdot 8} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$; oder

2. man multiplicire das Verhältniß des ersten und zweiten Gliedes, oder, wegen der Schluß-Art alternando, allgemeiner, ein äußeres und ein mittleres Glied (§ 136) mit dem Producte der vorkommenden Nenner, als wodurch man, statt der Brüche, ganze Zahlen erhält; z. B.

$\frac{8}{9} : \frac{4}{3} = 7 : x$

$8 \cdot 3 : 4 \cdot 9 = 7 : x$

d. i.

$24 : 36 = 7 : x$

$x = \frac{36 \cdot 7}{24} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{6}{7} : x$

$2 \cdot 5 \cdot 7 : 4 \cdot 3 = 6 : x$

d. i.

$70 : 12 = 6 : x$

$x = \frac{12 \cdot 6}{70} = \frac{36}{35} = 1\frac{1}{35}$

Beispiele der Art zur Einübung kann der Lehrer auch ohne Exempel-Buch leicht geben.

§ 138. Brüche mit gleichen Nennern verhalten sich zu einander wie ihre Zähler; denn z. B. das Verhältniß $\frac{3}{8} : \frac{5}{8}$ ist gleich dem Verhältnisse $3 : 5$ (§ 54).

§ 139. Brüche mit gleichen Zählern verhalten sich zu einander umgekehrt wie ihre Nenner; da z. B. das Verhältniß $\frac{3}{4} : \frac{3}{7} = \frac{21}{28} : \frac{12}{28} = 21 : 12$ (§ 54) $= 7 : 4$.

§ 140. Hat man eine Gleichung, wie z. B. $8 \cdot 3 = 2 \cdot 12$, deren Theile jeder aus wenigstens zwei Factoren bestehet, so kann man daraus eine geometrische Proportion herstellen, indem man die beiden Theile der Gleichung, den einen als das Product der beiden äußern, den andern als das Product der beiden mittlern Glieder ansieht; aus $8 \cdot 3 = 2 \cdot 12$ ergiebt sich demnach

I. wenn aus dem Producte $8 \cdot 3$ die äußern, aus $2 \cdot 12$ die mittlern Glieder werden, und zwar

1. wenn 8 das erste, und 3 das vierte Glied wird:
$8 : 2 = 12 : 3$, und $8 : 12 = 2 : 3$;
2. wenn 3 das erste, und 8 das vierte Glied wird:
$3 : 2 = 12 : 8$, und $3 : 12 = 2 : 8$;

II. wenn aus dem Producte $2 . 12$ die äußern, aus $8 . 3$ die mittlern Glieder werden, und zwar

1. wenn 2 das erste, und 12 das vierte Glied wird:
$2 : 8 = 3 : 12$, und $2 : 3 = 8 : 12$,
2. wenn 12 das erste, und 2 das vierte Glied wird:
$12 : 8 = 3 : 2$, und $12 : 3 = 8 : 2$.

§ 141. Für die arithmetische Proportion, z. B. $12 - 10 = 8 - 6$, gelten sämmtliche Regeln, welche für die geometrische Proportion gegeben worden, mit dem einzigen Unterschiede, daß überall, wo bei der geometrischen Proportion multiplicirt oder dividirt wurde, hier addirt oder subtrahirt wird.

§ 142. Eine Proportion heißt an einander hängend oder stetig (im Gegensatze der abgesonderten Proportion) wenn in ihr die beiden mittleren Glieder gleich sind. So ist $18 : 6 = 6 : 2$ (welches auch so kann geschrieben werden $18 : 6 : 2$) eine stetige geometrische Proportion; und $10 - 7 = 7 - 4$ eine stetige arithmetische Proportion.

§ 143. Da auch in einer stetigen geometrischen Proportion $18 : 6 = 6 : 2$, das Product der beiden mittlern Glieder, $6 . 6$, gleich ist dem Producte der beiden äußern, $18 . 2$, jenes Product aber aus zwei gleichen Factoren besteht, folglich (§ 103) ein Quadrat ist, und, da ferner aus gleichen Größen die gleichvielte Wurzel gezogen, Gleiches ergeben muß, so ist das eine mittlere Glied der stetigen geometrischen Proportion gleich der Quadrat-Wurzel aus dem Producte der beiden äußern Glieder.

§ 144. Man findet demnach dieses mittlere Glied der stetigen geometrischen Proportion oder das geometrische Mittel, die mittlere geometrische Proportional-Zahl, falls diese ein unbekanntes Glied ist, wenn man aus dem Producte des ersten und vierten Gliedes, d. i. aus $18 . 2$, die Quadrat-Wurzel (6) zieht. Demnach, aus der Proportion $a : x = x : c$ ergiebt sich $x^2 = a . c$, und daraus wiederum (aus gleichen Größen gleiche Wurzeln gezogen) $x = \sqrt{a . c}$. — Wenn z. B. eines Rechteckes Grundlinie $= 100$, seine Höhe $= 81$, beides in einem und demselben Längen-Maaße ist, so ist der Flächen-Inhalt dieses Rechteckes $= 81 . 100$ im Quadrat-Maaß derselben Einheit, und das geo-

metrische Mittel aus diesem Producte der Grundlinie in die Höhe, d. h. aus dem Flächen-Inhalte des Rechteckes, ergiebt die Seite desjenigen Quadrats, welches dem Rechtecke an Flächen-Inhalte gleich ist. Diese Seite ist demnach $= \sqrt{81 \cdot 100} = \sqrt{8100} = 90$. — Dieß nennt man, ein Rechteck arithmetisch (d. h. durch Rechnung) quadriren, während die geometrische Quadratur des Rechteckes lehrt, die Seite desjenigen Quadrats, welches einem gegebenen Rechtecke an Flächen-Inhalte gleich ist, durch Zeichnung zu finden.

(Übungs-Exempel XV, Nr. 1—3.)

§ 145. In einer stetigen arithmetischen Proportion, $10 - 7 = 7 - 4$, ist die Summe der beiden mittlern Glieder, $7 + 7$ oder $2 \cdot 7$, gleich der Summe der beiden äußeren, $10 + 4$, folglich ist das eine mittlere Glied (7) gleich der Summe der beiden äußeren Glieder, diese dividirt durch 2; und dieses mittlere Glied der stetigen arithmetischen Proportion heißt das arithmetische Mittel, im gemeinen Leben der Durchschnitt genannt; wofür man auch wohl den Ausdruck braucht: Eines in's Andere gerechnet.

§ 146. Die aus der allgemeinen Form der stetigen arithmetischen Proportion, $a - x = x - b$, abgeleitete Gleichung ist $2x = a + b$, woher für das arithmetische Mittel die allgemeine Formel: $x = \frac{a+b}{2}$. Demnach findet man den Durchschnitt für zwei Posten, indem man diese addirt und durch 2 dividirt. Kommt noch ein dritter Posten hinzu, so addirt man die drei Posten und dividirt durch 3, d. i. durch die Anzahl der Posten. Der Ausdruck dafür ist $\frac{a+b+c}{3}$. Überhaupt addire man sämmtliche Posten, und dividire diese Summe durch die Anzahl der Posten. Der Quotient giebt den Durchschnitt an, und heißt die Durchschnittszahl.

Durch seine Mühewaltungen hat Jemand an den beiden ersten Wochentagen, am Montage 4 Rubel, am Dinstage 10 Rubel eingenommen; wie viel im Durchschnitt an jedem dieser beiden Tage? Antwort: $\frac{4+10}{2} = 7$ Rub.. Wollte nun aber er den Ertrag aus diesen seinen Mühewaltungen hienach für das ganze Jahr berechnen, so würde er gar sehr irren, denn Feiertage, Krankheit, so wie andere Umstände, z. B. wenn Kunden ausbleiben, vermindern zum öfteren diesen Betrag gar sehr. — Eben so schwanken auch die jährlichen Einkünfte aus einer Landwirthschaft, der jährliche Ertrag aus einer Handlung oder Fabrik, der Miethe eines Obstgartens, die Anzahl der jährlich Gebornen, Gestorbenen, die Tiefe

eines zu ziehenden Canals, von welchem die mittlere Tiefe anzugeben ist, u. s. w.. Darum findet man einen möglichst richtigen Durchschnitt, wenn man recht viele der dahin gehörigen Posten addirt, und deren Summe durch die Anzahl dieser Posten dividirt.

Es wären die Einkünfte aus einer Landwirthschaft in 6 auf einander folgenden Jahren gewesen: 3120 Rub., 3396 Rub., 2968 Rub., 3551 Rub., 2580 Rub., 2823 Rub.. Die Summe beträgt für diese 6 Jahre 18438 Rub., also im Durchschnitt auf 1 Jahr 3073 Rub..

(Beispiele, XVI, Nr. 1—5.)

Sechster Abschnitt.

Die Anwendungen der Lehre von den Verhältnissen und Proportionen auf das häusliche und bürgerliche Rechnen.

I. Die gerade Regel detri.

§ 147. Die Regel detri, d. h. die Regel von drei Gliedern (regula trium terminorum, seu de tribus terminis, woraus, durch Abkürzung, der Name entstanden) ist die Vorschrift, nach welcher man das fehlende Glied einer geometrischen Proportion findet.

§ 148. Die gerade Regel detri wird angewandt, wo zwei Größen verschiedener Art, z. B. Waaren und Geld, die eine in eben demselben Verhältnisse zu- oder abnimmt, in welchem auch die andere zu- oder abnimmt. Man wendet also bei der geraden Regel detri die Schlußform an: Je mehr (oder je weniger) von dem Einen, desto mehr (oder desto weniger) von dem Andern.

§ 149. Die meisten Dinge, die in Rechnungsverhandlungen des häuslichen und bürgerlichen Lebens vorkommen, sind durch geometrische Verhältnisse mit einander verbunden, als z. B. die Waaren von einerlei Art und die Preise dafür, ferner die Arbeit und die dazu gehörige Zeit, und dgl.; wer nämlich zwei oder drei Mal so viel an Waare kauft, muß auch zwei oder drei Mal so viel bezahlen; zu einer sechsfachen Arbeit braucht man sechs Mal so viel Zeit, oder muß sechs Mal so viel Arbeiter anstellen.

Anfänger sind sehr daran gewöhnt, wenn von Regel detri die Rede ist, immer nur an eine Verbindung von Waare und Geld zu denken.

Die Schlußform aber „je mehr — desto mehr" findet in noch vielen andern Fällen ihre Anwendung, unter andern bei folgenden Exempeln: Wenn 20 Mann einen Graben täglich 5 Fuß fortführen, wie viel Arbeiter werden erfordert, um ihn täglich 28 Fuß fortzuführen? Antwort 112 Arbeiter. — Eben so: Es braucht Jemand zu seiner Wirthschaft auf 9 Monat 600 Rub., wie viel wird er auf 6 Monat brauchen? Antwort: 400 Rub.. U. dgl. mehr.

Es können bisweilen auch zweierlei Arten von Größen aufgeführt werden, die aber dennoch in keine geometrische Proportion zu setzen sind, weil unter ihnen nicht der dazu nöthige natürliche Zusammenhang Statt findet. Z. B. Wenn ein Gespann von 2 Pferden in einer gewissen Zeit 5 Meilen läuft, so wird man nicht annehmen, daß ein Gespann von doppelt so viel Pferden in derselben Zeit doppelt so weit laufe. — Oder wird der Preis der Gerste um die Hälfte wohlfeiler, so kann man darum von dem Brauer das Bier, wenn gleich immer wohlfeiler als früher, doch nicht für die Hälfte des ehemaligen Preises verlangen; es wäre denn, daß auch seine anderweiten Unkosten, z. B. für Brennmaterial, Arbeitslohn u. s. w., gleichfalls die Hälfte betrügen. — Eben so, wenn ein Körper in der ersten Secunde durch einen Raum von 15′ 1″ Pariser Maaß gefallen ist, so wird er in den beiden ersten Secunden zusammen nicht durch einen doppelt so großen Raum (30′ 2″), sondern durch einen vierfachen Raum (60′ 4″) fallen. — Auch, wenn Jemand angefangen hat einen Brunnen zu graben, und dabei in einem Tage zu einer Tiefe von 3 Fuß gelangt ist, so läßt sich nicht schließen, daß er unter denselben Umständen in 10 Tagen den Brunnen auf 30′ werde ausgegraben haben, da, je tiefer er kommt, das Graben sowohl als auch die Herausschaffung der losgegrabenen Erde immer mühsamer wird.

§ 150. Man weiß, daß z. B. eine gewisse Quantität (9 *U.*) irgend einer Waare eine gewisse Summe (6 Rub.) kostet, will aber eine andere Quantität (3 *U.*) von derselben Waare kaufen, jedoch so, daß für diese 3 *U.* im Verhältniß genau so viel bezahlt werde, wie für jene 9 *U.*; demnach, da 3 *U.* der dritte Theil ist von 9 *U.*, so muß auch der gesuchte Preis für die 3 *U.* der dritte Theil sein von dem Preise für 9 *U.* (nämlich von 6 Rubeln), d. i. 2 Rubel. Man wird demnach folgende Regel detri mit dem Exponenten 3 haben:

$$9\ U. : 3\ U. = 6\ \text{Rub.} : x\ \text{Rub.},$$

zu lesen: „es verhält sich 9 *U.* zu 3 *U.*, wie sich verhält 6 Rub. zu x Rub.", oder „9 *U.* zu 3 *U.*, wie 6 Rub. zu x Rub."; und das bedeutet denn: 9 *U.* ist so viel Mal größer als 3 *U.*, so viel Mal 6 Rub. größer ist als x Rub.; woraus sich denn das Hinterglied $x = 2$ ergeben wird mittels Division des Vordergliedes 6 durch den Exponenten 3.

§ 151. Eben so wie das ursprüngliche Kennzeichen für die Richtigkeit einer Regel detri, die Gleichheit der Exponenten, kann man das zweite, aus ersterem abgeleitete Kennzeichen für die Rich-

tigkeit der geometrischen Proportion, nämlich den Lehrsatz anwenden, daß das Product der beiden äußeren Glieder gleich ist dem Producte der beiden mittleren. So erhält man (§ 131, I. 1.) $x = \frac{3 \cdot 6}{9} = 2$ Rub.. — Auf beiderlei Weise also, sowohl mittels des Exponenten, als auch mittels des eben angeführten Lehrsatzes, sind Regel-detri-Exempel zu berechnen.

§ 152. Geometrische Proportion ist, ihrem Wesen nach, Regel detri, so wie Regel detri weiter nichts ist als geometrische Proportion. Beide, ihrer Bedeutung nach gleiche Ausdrücke unterscheiden sich von einander nur darin, daß der Ausdruck „Regel detri" von der auf das gemeine Leben angewandten Proportion gebraucht wird, und der Ausdruck „Proportion" bloß in wissenschaftlicher Hinsicht; da wohl Keiner z. B. die zwischen zwei Paar homologer Seiten in zwei ähnlichen Dreiecken Statt findende Proportion eine Regel detri nennen wird.

§ 153. Wie in der Proportion kann man auch in der Regel detri die beiden mittleren Glieder verwechseln, demnach schließen, 9 Ct. : 6 Rub. = 3 Ct. : x Rub., woraus, als viertes Glied, sich ebenfalls 2 Rub. ergeben wird. Man hüthe sich aber, hiebei an ein Verhältniß zwischen Pfunden und Rubeln zu denken, da Pfunde und Rubel, Gewicht und Geld, nicht gleichartig sind, mithin auch Pfunde nicht in Rubeln enthalten sein können: man hat es hier bloß mit den vier in geometrischer Proportion stehenden Zahlen, 9 : 6 = 3 : x, zu thun. Es muß also der so geordnete Ansatz des obigen Exempels folgender Maaßen gelesen werden: „9 Ct. kosten 6 Rubel, demnach 3 Ct. kosten x Rubel".

§ 154. Die Fragezahl ist dasjenige Glied der Regel detri, auf welches das vierte Glied (oder die Frage) die Antwort geben wird, also in der auf die erste Weise geordneten Regel detri das zweite, in der auf die zweite Weise geordneten das dritte Glied.

§ 155. Bei Ausübung dieser Regel ist auch der so genannte gespaltene Ansatz zu merken. Links von einem herabgehenden Strich setze man die Frage, daneben, auf die andere Seite des Striches, das Glied, welches zur Frage gehört, oder die Fragezahl, wiederum links das mit dem vorigen gleichartige, daneben rechts das zugehörige und mit der Frage gleichartige Glied; bei welchem Ansatze die gleichartigen Glieder einander kreuzweis gegenüber zu stehen kommen. Das was durch diesen Ansatz rechts zu stehen kommt, den Zähler des Resultats, kürze man darauf ab gegen das was links zu stehen kommt, gegen den Nenner, und dividire endlich diesen Nenner in den Zähler.

Gegeben z. B. die Aufgabe: 4 ℔. kosten 4 Rub. 50 Kop., was kosten 10 ℔.?; woraus der Ansatz:

? Kop.	10 ℔.
4 ℔.	450 Kop.,

welches zu lesen ist: Wie viel Kopeken kosten 10 ℔., wenn 4 ℔. kosten 450 Kop., nach folgendem Schema  . Die Berechnung ist folgende:

$$\begin{array}{r|l} ? & \cancel{10}\ 5 \\ \cancel{2}\ \cancel{4} & \cancel{450}\ 225 \\ \hline \end{array}$$

1125 Kop. = 11 Rbl. 25 Kop..

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergiebt sich daraus, daß das gesuchte Resultat oder der Bruch $\frac{10 \cdot 450}{4}$ aus eben demselben Zähler (10 . 450), und eben demselben Nenner (4) besteht, wie das gesuchte vierte Glied der aus obiger Aufgabe folgenden Proportion, 4 ℔. : 450 Kop. = 10 ℔. : x Kop..

Der Nutzen des gespaltenen Ansatzes wird sich weiterhin vorzüglich bei der Ketten-Regel und der zusammengesetzten Regel detri zeigen.

§ 156. Ist bei diesem Ansatze das, was links von dem herabgehenden Striche steht, oder der Divisor, ein echter oder unechter Bruch, so schaffe man den Nenner desselben als Factor auf die Seite des Dividends, weil alles was den Divisor dividirt, den Bruch multiplicirt (§ 15). Umgekehrt, aus dem Dividend schaffe man die Nenner der Brüche in den Divisor als Factoren desselben, weil alles, was den Dividend dividirt, auch den Bruch dividirt (§ 16). — Gemischte Zahlen sind, wie immer, zuvor in unechte Brüche zu verwandeln; z. B.

? Rthlr.	2 ℔.
$1\frac{3}{8}$ ℔.	$4\frac{3}{16}$ Rthlr.

$$\begin{array}{r|l} ? & 2 \\ \cancel{16}.11 & 67.\cancel{8} \\ \cancel{8} & \cancel{16} \\ \hline 11 & 67 \end{array} \quad \Big| \; 6\tfrac{1}{11} \text{ Rthlr.}$$

Sind indessen, wie in obigem Beispiele, die Nenner im Divisor und Dividend nicht Primzahlen zu einander, so kann man diese Nenner als solche mit ihrem gemeinschaftlichen Maaße dividiren, und nur die so entstandenen Quotienten der Nenner als Factoren hinüber und herüber setzen, nämlich

$$\begin{array}{r|l} ? & \cancel{2} \\ \cancel{2}\ .\ 11 & 67 \\ \cancel{8} & \cancel{16}.\cancel{2} \\ \hline 11 & 67 \end{array}$$

Hier wurden die Nenner 8, 16 mit ihrem größten gemeinen Maaße, 8, dividirt, als wodurch der Nenner, 8, des Divisors

ganz wegfiel, hingegen, statt des Nenners 16 im Dividend, nur der hinüber zu setzende Quotient 2 als Nenner verblieb.

§ 157. Da die gleichartigen Glieder der Regel detri ein Verhältniß ausmachen, so müssen sie, um in jeder Hinsicht gleichartig zu sein, falls sie ungleiche Benennung haben, gleiche Benennung erhalten. Hätte man nämlich das Verhältniß 6 Loth : 2 ℔., so möchte wohl niemand schließen: Weil 6 drei Mal so groß ist als 2, so ist auch 6 Loth drei Mal so groß als 2 ℔. Das wahre Verhältniß von 6 Loth : 2 ℔. ist 6 Loth : 64 Loth, oder $\frac{3}{16}$ ℔. : 2 ℔. Diese nothwendiger Weise völlig gleiche Benennung erhalten demnach die gleichartigen Glieder durch Resolution oder Reduction derselben.

Es sei gegeben 24 Lt. : 9 gGr. = 19 ℔. : x Rthlr.

1. Durch Resolution. Bei der Berechnung eines Exempels durch Resolution verrichte man die Multiplication der Größe höherer Benennung (19 ℔.) in die Eintheilungszahl noch nicht sogleich, sondern deute sie für's erste bloß an, indem man dieser Größe die Eintheilungszahl als Factor zusetzt, weil man doch bisweilen den Dividend gegen den Divisor vorher abkürzen kann.

24 Lt. : 9 gGr. = 19 ℔. : x Rthlr.

24 Lt. : 9 gGr. = 19 . 32 Lt. : x Rthlr.

$x = \frac{9 \cdot 19 \cdot 32}{24} = 3.19.4 = 228$ gGr. = 9 Rthlr. 12 gGr..

2. Durch Reduction:

24 Lt. : 9 gGr. = 19 ℔. : x Rthlr.

$\frac{24}{32}$ ℔. : $\frac{9}{24}$ Rthlr. = 19 ℔. : x Rthlr.

$\frac{3}{4}$ ℔. : $\frac{3}{8}$ Rthlr. = 19 ℔. : x Rthlr.

$x = \frac{19 \cdot 3 \cdot 4}{8 \cdot 3} = \frac{19}{2}$ Rthlr. = 9 Rthlr. $\frac{24}{2}$ gGr. = 9 Rthlr. 12 gGr..

§ 158. Sind neben der Größe höherer Benennung noch Größen niederer Benennung vorhanden, so verfahre man entweder nach 1, oder nach 2.

Nach 1, wobei zu merken, daß man, in der Vorbereitung der Glieder, von den Größen der höheren Benennung zu den Größen der niederen herabgehend, alle Mal den resolvirten Größen die etwa vorkommende Größe derselben Benennung hinzu zu addiren hat, wie z. B. 24 Rthlr. 5 gGr. = 24 . 24 gGr. + 5 gGr. = 581 gGr..

24 Rthlr. 5 gGr. 4 Pfennige : 27 ℔. 8 Lt. = 8 gGr. 10 Pf. : x Lt.

24	32	12
581 gGr.	872 Lt.	106 Pf.
12	106	
6976 Pfennige	6976 | 92432 | 13 Lt.	
	Rest 1744	

Das vierte Glied (13) ist weder ℔. noch Quentchen, sondern Lt. zu benennen, weil im gleichartigen Gliede alles zu Lt. gemacht war. Dem Rest (1744) ist der Divisor (6976) als Nenner unterzusetzen, und dieser Bruch ist ein Bruch derjenigen Benennung, die das Resultat ergeben hat. Demnach

Rest 1744 Lt., folglich ist der Bruch $\frac{1744}{6976}$ Lt. = $\frac{1744 \cdot 4}{6976}$ Qt. = 1 Qt..

Auch so: Rest 1744 Lt.

4

6976 | 6976 Qt. | 1 Qt..

Nach 2, wobei zu merken ist, daß man, bei Vorbereitung der einzelnen Glieder, alle Mal von der Größe niedrigster Benennung zu den Größen der höheren Benennung hinaufgeht, und nach geschehener Abkürzung, wo solche möglich, zu der reducirten Größe die schon vorhandene Größe der höheren Benennung hinzufügt. Die dadurch entstandene gemischte Zahl verwandle man in einen unechten Bruch, und reducire darauf weiter.

24 Rthlr. 5 gGr. 4 Pf. : 27 ℔. 8 Lt. = 8 gGr. 10 Pf. : x ℔.

Vorbereitung des ersten Gliedes:

4 Pf. = $\frac{4}{12}$ gGr. = $\frac{1}{3}$ gGr.,

$5\frac{1}{3}$ gGr. = $\frac{16}{3}$ gGr. = $\frac{16}{3 \cdot 24}$ Rthlr. = $\frac{2}{3}$ Rthlr. = $\frac{2}{9}$ Rthlr.

$24\frac{2}{3}$ Rthlr. = $\frac{218}{9}$ Rthlr.;

Vorbereitung des zweiten Gliedes:

8 Lt. = $\frac{8}{32}$ ℔. = $\frac{1}{4}$ ℔.,

$27\frac{1}{4}$ ℔. = $\frac{109}{4}$ ℔.

Vorbereitung des dritten Gliedes:

10 Pf. = $\frac{10}{12}$ gGr. = $\frac{5}{6}$ gGr.

$8\frac{5}{6}$ grG. = $\frac{53}{6}$ gGr. = $\frac{53}{6 \cdot 24}$ Rthlr.

folglich ist

$x = \frac{109}{4} \times \frac{53}{6 \cdot 24} : \frac{218}{9} = \frac{109 \cdot 53 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 218} = \frac{53}{128}$ ℔. = $\frac{52 \cdot 32}{128}$ Lt.

= $\frac{53}{4}$ Lt. = 13 Lt. 1 Qt..

§ 159. Bisweilen ist es in der Rechnung vortheilhaft, in einem und demselben Exempel Größen niederer Benennung in Größen höherer, und umgekehrt, zu verwandeln. In der folgenden Berechnung sind die Pfennige zu Groschen, auch die Reichsthaler zu Groschen zu machen.

24 Rthlr. 8 gGr. 4 Pf. : 27 ℔. 8 Lt. = 8 gGr. 10 Pf. : x Lt.
24 4 Pf. = $\frac{4}{12}$ gGr. = $\frac{1}{3}$ gGr. 32 10 Pf. = $\frac{10}{12}$ gGr. = $\frac{5}{6}$ gGr.
$581\frac{1}{3}$ gGr. 872 Lt. $8\frac{5}{6}$ gGr. = $\frac{53}{6}$ gGr.;

also ist

$$x = \frac{872 \cdot 53 \cdot 3}{6 \cdot 1744} = \frac{53}{4} \text{ Lt.} = 13\frac{1}{4} \text{ Lt.} = 13 \text{ Lt. } 1 \text{ Qt.}.$$

Das vierte Glied ist schon gleich anfänglich „Loth" benannt worden, nicht etwa „Pfund" oder „Quentchen". Der bequemeren Berechnung wegen wird nämlich die Benennung dieses Gliedes durch vorläufigen Überschlag voraus bestimmt. Denn man erkennt leicht, daß, da man für ungefähr 24 Rthlr. kauft ungefähr 27 ℔., demnach für 1 Rthlr. etwas mehr als 1 ℔., man für 8 gGr. oder $\frac{1}{3}$ Rthlr. weder ganze Pfunde, noch bloße Quentchen, sondern Lothe kaufen wird.

§ 160. Dieses Überschlagen eines Regel-detri-Exempels dient auch, um zu beurtheilen, ob Möglichkeit vorhanden ist, daß ein erlangtes Resultat richtig sei. Erhielte man nämlich auf irgend eine Weise als Resultat des obigen Exempels 30 Lt., mithin beinahe 1 ℔., so muß die Berechnung falsch sein, weil man für ungefähr 8 gGr. oder $\frac{1}{3}$ Rthlr. nicht fast eben so viel bekommen kann als für einen ganzen Rthlr.. — Die eigentliche Probe für die Regel detri besteht darin, daß man, nach gefundenem vierten Gliede, irgend ein anderes Glied als unbekannt annimmt und sucht. Doch muß die Vorbereitung der Glieder mit in die Probe gezogen werden, weil sonst ein in der Vorbereitung begangener Fehler bei der durch eben diese Vorbereitung hergestellten Proportion nicht zur Sprache kommen würde. Hat man daher eine Regel detri mittels Resolution berechnet, so wende man bei der Probe die Reduction an, und umgekehrt.

§ 161. Es ist übrigens zu merken, daß überall, wo man durch die Vorbereitung der Glieder Brüche erhalten hat, oder auch, wo solche sich ursprünglich ergeben hatten, man die erlangte Regel detri in Brüchen zu einer Regel detri in ganzen Zahlen machen kann, wenn man ein äußeres und ein mittleres Glied mit dem Producte der darin vorkommenden Nenner multiplicirt (§ 137, 2).

§ 162. Wegen der leichteren Übersicht für die Anordnung

des Ansatzes ist noch anzuführen: Will man den Ansatz so stellen, daß „Geld" und „Waare" (oder allgemein, wenn man das Eine nennt Ursache oder Angabe, das Andere aber Wirkung oder Folge) „Angabe" und „Folge" mit einander wechseln, so fängt man die Regel detri mit „Waare" („der Angabe") an, falls man „Geld" („die Folge") sucht; und mit „Geld" („der Angabe") an, falls man „Waare" („die Folge") sucht.

§ 163. Regel-detri-Exempel, deren erstes Glied 1 ist, sind anzusehen als bloße Multiplications-Exempel; so wie umgekehrt jede Multiplication als eine Regel detri dargestellt werden kann, deren erstes Glied 1 ist; z. B. 1 *A.* : 7 Rub. = 8 *A.* : x Rub.; x = 7 . 8 = 56 Rub..

Regel-detri-Exempel, deren zweites oder drittes Glied = 1 ist, sind anzusehen als bloße Divisions-Exempel, z. B. 3 *A.* : 8 Rub. = 1 *A.* : x Rub.; x = $\frac{8}{3}$ Rub. = $2\frac{2}{3}$ Rub..

§ 164. An dem Exempel

14 *A.* 4 Lt. : 44 Rthlr. 17 gGr. 6 Pf. = $\frac{3}{4}$ *A* : x Rthlr.

vergegenwärtige man sich sämmtliche für die Regel detri gegebene Hauptlehren durch die Berechnung jedes dieser Glieder

I. mittels Reduction der darin vorkommenden Größen:

Vorbereitung des ersten Gliedes:

4 Lt. = $\frac{4}{32}$ *A.* = $\frac{1}{8}$ *A.*,

$14\frac{1}{8}$ *A.* = $\frac{113}{8}$ *A.*;

Vorbereitung des zweiten Gliedes:

6 Pf. = $\frac{6}{12}$ gGr. = $\frac{1}{2}$ gGr.

$17\frac{1}{2}$ gGr. $\frac{35}{2}$ gGr. = $\frac{35}{2 \cdot 24}$ Rthlr. = $\frac{35}{48}$ Rthlr.,

$44\frac{35}{48}$ Rthlr. = $\frac{2147}{48}$ Rthlr.;

Das dritte Glied $\frac{3}{4}$ *A.* bleibt ungeändert.

Demnach hat man die obige Regel detri nun folgender Maaßen:

$\frac{113}{8}$ *A.* : $\frac{2147}{48}$ Rthlr. = $\frac{3}{4}$ *A.* : x Rthlr.

1) Mittels des Exponents sucht man zuerst das IV., dann das III., das II., und endlich das I. Glied.

Für das IV. u. III. Glied findet man den Exponent $(\frac{6}{19})$ aus dem bekannten Verhältnisse des ersten und zweiten Gliedes:

e = $\frac{113}{8}$: $\frac{2147}{48}$ = $\frac{113}{8} \times \frac{48}{2147}$ = $\frac{6}{19}$; demnach ist

das IV. Glied = $\frac{3}{4} : \frac{6}{19} = \frac{3}{4} \times \frac{19}{6} = \frac{19}{8}$ = 2 Rthlr. 9 gGr.,

das III. Glied = $\frac{6}{19} \times \frac{19}{8} = \frac{3}{4}$ *A.*.

Zur Bestimmung des II. und darauf des I. Gliedes aus den drei übrigen suche man zuerst den Exponent $(\frac{6}{19})$ aus dem bekannten Verhältnisse des III. und IV. Gliedes:

$e = \frac{3}{4} : \frac{19}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{19} = \frac{6}{19}$; demnach ist

das II. Glied $= \frac{113}{8} : \frac{6}{19} = \frac{113}{8} \times \frac{19}{6} = \frac{2147}{48}$ Rthlr. = 44 Rthlr. 17 gGr. 6 Pf.,

das I. Glied $= \frac{6}{19} \times \frac{2147}{48} = \frac{113}{8}$ Ct. $= 14\frac{1}{8}$ Ct. $= 14$ Ct. 4 Lt..

2) Nach dem Lehrsatze für das Product der beiden äußeren und mittleren Glieder ergiebt sich

das IV. Glied $= \frac{2147}{48} \times \frac{3}{4} : \frac{113}{8} = \frac{2147 \cdot 3 \cdot 8}{48 \cdot 4 \cdot 113} = \frac{19}{8}$ Rthlr. = 2 Rthlr. 9 gGr.,

das III. Glied $= \frac{113}{8} \times \frac{19}{8} : \frac{2147}{48} = \frac{113 \cdot 19 \cdot 48}{8 \cdot 8 \cdot 2147} = \frac{3}{4}$ Ct.,

das II. Glied $= \frac{113}{8} \times \frac{19}{8} : \frac{3}{4} = \frac{113 \cdot 19 \cdot 4}{8 \cdot 8 \cdot 3} = \frac{2147}{48}$ Rthlr. = 44 Rthlr. 17 gGr. 6 Pf.,

Das I. Glied $= \frac{2147}{48} \times \frac{3}{4} : \frac{19}{8} = \frac{2147 \cdot 3 \cdot 8}{48 \cdot 4 \cdot 19} = \frac{113}{8}$ Ct. $= 14$ Ct. 4 Lt..

Die durch Verwandlung der in Brüchen gefundenen Regel detri

$\frac{113}{8}$ Ct. : $\frac{2147}{48}$ Rthlr. $= \frac{3}{4}$ Ct. : x Rthlr.

zu einer Regel detri in ganzen Zahlen (§ 137, 2):

113 . 48 . 4 Ct. : 2147 . 8 Rthlr. = 3 Ct. : x Rthlr.;

woraus folgt:

$x = \frac{2147 \cdot 8 \cdot 3}{113 \cdot 48 \cdot 4}$ Rthlr. $= \frac{19}{8}$ Rthlr. $= 2\frac{3}{8}$ Rthlr. = 2 Rthlr. 9 gGr..

II. mittels Resolution der in der gegebenen Regel detri vorkommenden Größen.

Vorbereitung:

14 Ct. 4 Lt. :	44 Rthlr. 17 gGr. 6 Pf.	$= \frac{3}{4}$ Ct. : x Rthlr.
32	24	$\frac{3}{4}$ Ct. $= \frac{3 \cdot 32}{4}$ Lt. $= 3 \cdot 8 = 24$ Lt.
452 Lt.	1073 gGr.	
	12	
	12882 Pf.	

Die Regel detri steht demnach so:

452 Lt. : 12882 Pf. = 24 Lt. : x Pf.

1) Mit dem Exponent gerechnet:

Für das IV. u. III. Glied erhält man den Exponent aus dem ersten Verhältnisse $= \frac{452}{12882} = \frac{2}{57}$; demnach ist

Das IV. Glied $= 24 : \frac{2}{57} = 24 \times \frac{57}{2} = 12 \times 57$ Pf. $= 684$ Pf. $= 57$ gGr. $= 2$ Rthlr. 9 gGr.,

Das III. Glied $= 684 \cdot \frac{2}{57} = \frac{1368}{57}$ Lt. $= 24$ Lt. $= \frac{24}{32}$ Ct. $= \frac{3}{4}$ Ct.;

Für das II. und I. Glied erhält man den Exponent aus dem zweiten Verhältnisse $\frac{24}{684} = \frac{2}{57}$; demnach ist

Das II. Glied $= 452 : \frac{2}{57} = 452 \times \frac{57}{2} = 226 \cdot 57 = 12882$ Pf. $= 44$ Rthlr. 17 gGr. 6 Pf.,

Das I. Glied $= \frac{2}{57} \times 12882 = 452$ Lt. $= 14$ Ct. 4 Lt.

2) Nach dem Lehrsatze für das Product der beiden äußeren und mittleren Glieder erhält man

Das IV. Glied $= \frac{12882 \cdot 24}{452} = 684$ Pf. $= 57$ gGr. $= 2$ Rthlr. 9 gGr.,

Das III. Glied $= \frac{452 \cdot 684}{12882}$ Lt. $= 24$ Lt. $= \frac{24}{32}$ Ct. $= \frac{3}{4}$ Ct.,

Das II. Glied $= \frac{452 \cdot 684}{24} = 12882$ Pf. $= 44$ Rthlr. 17 gGr. 6 Pf.,

Das I. Glied $= \frac{12882 \cdot 24}{684}$ Lt. $= 452$ Lt. $= 14$ Ct. 4 Lt..

(Übungs-Exempel XVII, Nr. 1—142.)

III. Die umgekehrte Regel detri.

§ 165. Zweierlei Größen verschiedener Art stehen in umgekehrtem Verhältnisse zu einander, wenn sie eine solche Beziehung auf einander haben, daß die eine in eben dem Maaße zu- oder abnimmt, als die andere ab- oder zunimmt. Hat man nämlich folgende Aufgabe: „8 Arbeiter vollenden ein gewisses Werk in 10 Tagen; wie viel Tage werden 16 Arbeiter dazu brauchen", so gäbe die vorige Regel 20 Tage. Es ist aber an sich klar, daß, bei gleichem Grade der Tüchtigkeit und Thätigkeit, noch ein Mal so viel Arbeiter nicht noch ein Mal so viel, sondern nur halb so viel Zeit, also nicht 20, sondern nur 5 Tage brauchen werden. Eine solche Regel detri, in welcher, seiner Natur nach, das eine Verhältniß wächst, während das andere abnimmt, nennt man eine umgekehrte Regel detri. Die Umkehrung betrifft aber nur die Anordnung des Ansatzes; ist dieser gemacht, so geschieht die Rechnung wie bei der geraden Regel detri.

Eine gegebene Regel detri ist umgekehrt, wenn das erste Verhältniß auf das zweite durch die Schlußform zu beziehen ist: Je mehr von dem Einen (z. B. Tage), desto weniger von dem Andern (z. B. Arbeiter).

Diese Umkehrung des einen Verhältnisses, während das andere bleibt wie es war, ist wohl zu unterscheiden von der bei der geraden Regel detri vorkommenden Schluß-Art invertendo (§ 133), nach welcher beide Verhältnisse umgekehrt wurden, so daß eben dadurch die Regel detri eine gerade blieb.

Statt „umgekehrte Regel detri" sagen Einige „verkehrte Regel detri". Das aber ist ein verkehrter Ausdruck; den „umgekehrt" ist keines Weges „verkehrt".

§ 166. Für obige Aufgabe ist das gesuchte Glied $= 5$; und man findet dasselbe durch folgendes Verfahren. Die Regel detri, wie man sie hört, ordne man so, daß die gleichartigen Glieder je zwei in ein Verhältniß kommen, wobei die Frage das vierte

Glied werde; darauf kehre man das erste Verhältniß um, und verfahre alsdann nach der gewöhnlichen Regel detri, nämlich

8 Arb. : 10 Tage = 16 Arb. : x Tage

8 Arb. : 16 Arb. = 10 Tage : x Tage

16 Arb. : 8 Arb. = 10 Tage : x Tage

$x = \frac{8 \cdot 10}{16} = 5$ Tage.

§ 167. Da es beim gespaltenen Ansatze für die umgekehrte Regel detri so einzurichten ist, daß sein Dividend aus eben denselben Factoren (8 . 10) bestehe, wie obiger Regel-detri-Ansatz, und er denselben Divisor (16) habe, so verfährt man damit folgender Maaßen. Auf die linke Seite des herabgehenden Striches setze man die Frage, darunter das auf die Frage sich beziehende Glied oder die Fragezahl, daneben das damit gleichartige Glied, und darüber das zugehörige, mit der Frage gleichartige Glied, nämlich

? Tage | 10 Tage
16 Arb. | 8 Arb.,

und wird solches gelesen: „Wie viel Tage brauchen 16 Arbeiter, um eine gewisse Arbeit zu vollenden, wenn 8 Arbeiter dazu brauchen 10 Tage", nach folgendem Schema: ⁞ | ⁞. Darauf verfahre man ganz nach den früheren Regeln.

? | $x \varnothing 5$
$x \,.\, x6$ | 8

5 Tage.

(Übungs-Exempel XVIII, Nr. 1—21.)

III. Die Ketten-Regel.

§ 168. Man hätte folgende Aufgabe: 20 *U.* preußisch kosten 8 Rubel, was kosten 25 *U.* russisch? Um diese Aufgabe zu lösen, muß man zwei Regel-detri-Ansätze machen. Da es die preußischen Pfunde sind, für welche der Preis angegeben ist, so muß zuvor berechnet werden, wie viel preußische Pfund die 25 russischen ausmachen; und hiezu muß man wissen, daß 10 *U.* russisch = 9 *U.* preußisch.

? *U.* pr. | 25 *U.* russ.
10 *U.* russ. | 9 *U.* pr.

$\frac{45}{2}$ (= $22\frac{1}{2}$) *U.* pr..

Nachdem man hiedurch gefunden, daß die 25 russ. Pfunde = $22\frac{1}{2}$ preußischen, so suche man, wie viel diese $\frac{45}{2}$ *U.* preuß., d. h. 25 *U.* russ., kosten:

? Rub.	$4\frac{5}{2}$ *A.* pr.
20 *A.* pr.	8 Rbl.

9 Rubel.

Diese beiden Ansätze, und soviel ihrer sonst auch sein mögen, lassen sich folgender Maaßen in einen einzigen verbinden. Man setze links von einem herabgehenden Striche die Frage, daneben rechts das zugehörige Glied, wiederum links das mit diesem gleichartige, rechts das zugehörige, und immer so fort; dann erhält das letzte Glied gleiche Benennung mit der Frage. So kommt also bei diesem Ansatze jede Benennung zwei Mal vor. — Wegen der gleichen Benennung, wodurch die verschiedenen Verhältnisse, gleichsam wie die Glieder einer Kette, an einander geknüpft sind, heißt diese Regel die Ketten-Regel. — Der Ketten-Ansatz für obiges Exempel ist demnach folgender:

? Rbl.	25 *A.* ruff.
10 *A.* ruff.	9 *A.* preuß.
20 *A.* pr,	8 Rbl.;

welches gelesen wird: „Wie viel Rubel kosten 25 *A.* russisch, wenn 10 *A.* ruff. sind 9 *A.* preuß., und 20 *A.* preuß. kosten 8 Rubel.“

Dieser Ansatz enthält die vorigen zwei Ansätze in sich; denn die beiden ersten Ketten-Sätze geben $4\frac{5}{2}$ ($= 22\frac{1}{2}$), wie der erste der beiden Regel-detri-Ansätze, weil hier dieselben Factoren (25 . 9) den Zähler, und derselbe Divisor (10) den Nenner ausmachen. Demnach kann statt dieses ersten Regel-detri-Exempels, d. h. statt der beiden ersten Ketten-Sätze, deren Resultat ($4\frac{5}{2}$) auf die Seite des Zählers gesetzt, dienen. Dann findet sich im Ketten-Ansatze wiederum derselbe Zähler ($4\frac{5}{2}$. 8) und derselbe Nenner (20), wie im zweiten Regel-detri-Ansatze; also muß auch das Resultat des zweiten Regel-detri-Ansatzes erhalten werden, nämlich 9 Rubel. — Auch hier, wie überall, müssen Zähler gegen Nenner gehörig abgekürzt werden.

Aufgaben der Ketten-Regel obiger Art würden, wenn man sie, wie oben geschehen, auf Regel-detri-Exempel zurückführte, einen Regel-detri-Ansatz mehr ergeben, als Zwischen-Verhältnisse sind; im obigen Exempel nämlich einen Ansatz wegen des vorkommenden Zwischen-Verhältnisses, und einen für das Regel-detri-Exempel selbst.

Da bei Exempeln der Ketten-Regel nur Waaren und Geld, ferner, wie sich weiterhin zeigen wird, Länge und Länge, überhaupt Maaß und Maaß, Gewicht und Gewicht, auch bloß Geld und Geld, mit einander zu Verhältnissen verbunden werden, und diese Größen alle Mal in geradem Verhältnisse zu einander stehen, so kann in der Kettenrechnung nur gerade, nie aber umgekehrte Regel detri vorkommen.

Ein Holländer, Namens van Rees, gab in der ersten Hälfte des 18. Jahrh. ein Rechenbuch in holländischer Sprache heraus, in welchem er auch die von ihm aufgefundene Methode des gespaltenen Ansatzes, die so genannte Reesische Regel, lehrte. Da in der Folge sein Buch auch in's Deutsche übersetzt wurde, so kam der Verfasser bei Personen, denen die Gründe des Rechnens fremd waren, als Erfinder einer vermeintlich ganz neuen Art des Rechnens, in gar großes Ansehen, obgleich immer sein Verdienst um bequemeres Rechnen unläugbar ist; und auf mehr als auf dieses mag er selbst wohl nicht Anspruch gemacht haben. Durch diese seine Methode hat man, unter andern, nun nicht mehr, wie früher, zwischen regula quinque, oder septem, novem, undecim u. s. w., oder zwischen der Regel von 5, 7, 9, 11 u. s. w. Gliedern, als wozu das 6., 8., 10., 12., u. s. w. Verhältniß-Glied gesucht wird, zu unterscheiden — man hat es allein nur mit zusammengesetzter Regel detri zu thun, einerlei, wie viel Verhältnisse, ob 3, 4, 5, 6 u. s. w. (worin ein Glied unbekannt ist und gesucht wird) darin vorkommen.

§ 169. Es sei ferner folgendes Exempel gegeben: Wenn 46 Brabanter Ellen kosten 195 fl. holl. 10 Stv., wie viel Rubel Silber kostet 1 Arschin (die russische Elle)?

Es sind nämlich 10 Brab. Ellen = 13 (ehemalige) livländische Ellen, 3 Arschinen = 4 livländische Ellen; $2\frac{1}{2}$ fl. holl. = 135 Kop. S., 1 Rub. S. = 100 Kop. Silb.

Man setze an

46 Brab. Ell. : 195 fl. 10 Stv. = 1 Arschin : x Rbl. Silb.
10 Brab. Ell. = 13 livl. Ell.
4 livl. Ell. = 3 Arschin.

$2\frac{1}{2}$ fl. holl. = 135 Kop. S.
demnach 100 Kop. S. = 1 Rbl. Silb.

		?	1
? Rbl. S.	1 Arschin	3	4
3 Arschin.	4 Ell. livl.	13	10
13 Ell. livl.	10 Brab. Ell.	46	391
46 Brab. Ell.	$195\frac{1}{2}$ fl. holl.	5	135
$2\frac{1}{2}$ fl. holl.	135 Kop. S.	100	1
100 Kop. S.	1 Rbl. S.	65	153

$2\frac{23}{65}$ Rbl. S. = 2 Rbl. $35\frac{5}{13}$ Kop. S..

§ 170. Aus vorstehender Aufgabe der Kettenregel (46 Brab. Ell. : 195 fl. 10 Stv. = 1 Arschin : x Rub. S., oder alternando, 46 Brab. Ell. : 1 Arschin = 195 fl. 10 Stv. : x Rub. S.) geht hervor, daß selbige im Grunde nur eine Regel-detri-Aufgabe war, jedoch mit dem Unterschiede, daß bei der eigentlichen Regel detri zwischen den gleichartigen Gliedern einerlei Einheit des Maaßes, des Gewichts, der Münze zum Grunde liegt, bei dieser

Regel detri aber nicht, da hier Brabanter Ellen-Maaß und russisches Ellen-Maaß, holländisches Geld und russisches Geld in Verhältniß gesetzt sind. Hätte man mittels der gegebenen Zwischen-Verhältnisse diese verschiedenen Maaße sowohl als auch Münz-Sorten auf gleiche Einheit zurückgeführt, so würde man ein ganz gewöhnliches Regel-detri-Exempel erhalten haben. Nämlich

1. das Verhältniß der verschiedenen Maaße (Brab. Ellen und Arschinen) auf Arschinen reducirt:

? Arschin.	46 Brab. Ell.
10 Brab. Ell.	13 livl. Ell.
4 livl. Ell.	3 Arschin.

20 | 897 | $44\frac{17}{20}$ Arschin.;

2. eben so das Verhältniß der Münz-Sorten (fl. holl. und Silber-Rubel) auf Silber-Rubel gebracht:

? Rbl. S.	195 fl. 10 Stw. = $195\frac{1}{2}$ fl. holl.
$2\frac{1}{2}$ fl. holl.	135 Kop. S.
100 Kop. S.	1 Rbl. S.

100 | 10557 | 105,57, d. i. 105 Rbl. 57 Kop. Silb..

Beides ergiebt nunmehr folgende gewöhnliche Regel detri:

$44\frac{17}{20}$ Arschin : 1 Arschin = 105 Rbl. 57 Kop. Silb. : x Rbl. S.

$\frac{897}{20}$ Arschin. 10557 Kop. Silb.

$x = \frac{10557 \cdot 20}{897}$ Rbl. Silb. = 2 Rbl. $35\frac{5}{13}$ Kop. Silb.,

wie oben (§ 169) beim Exempel der Ketten-Rechnung.

§ 171. Das Wesen der Ketten-Regel kann demnach unmöglich in der Regel detri liegen; die Ketten-Regel an sich muß von dieser völlig unabhängig sein. Vielmehr besteht das Wesentliche derselben darin, daß sie das unbekannte Verhältniß zweier Größen aus bekannten Zwischen-Verhältnissen bestimmen lehrt.

§ 172. Dergleichen bekannte Verhältnisse zweier Größen einerlei Art, aber von verschiedenen Einheiten werden so bezeichnet:

Brab. Ell. : livl. Ell. = 10 : 13,

d. i. die Brabanter Elle verhält sich zur livländischen, wie die Zahlen 10 : 13; doch können selbige auch, wie oben (§§ 168, 169) bereits geschehen, als Gleichungen so ausgedrückt werden:

10 Brab. Ell. = 13 livl. Ellen.

Bei dem Ketten-Ansatze tritt alle Mal der eine Theil dieser Gleichung auf die Seite des Divisors, der andere (ihm entweder

durch Größe selbst oder durch den Preis gleiche) Theil auf die Seite des Dividends, so daß ein Verhältniß, wie z. B. das Verhältniß von 10 Brab. Ellen zu 13 livländischen, durch die hinzukommenden Verhältnisse nicht verändert wird, eben wie, nach der Lehre von den Verhältnissen (§ 123), beide Glieder eines Verhältnisses mit einer und derselben Zahl multiplicirt werden konnten, ohne daß dieses Verhältniß dadurch wäre verändert worden. — Was aber von einem bereits ausgemittelten Verhältnisse, wie z. B. der Brabanter Ellen zu den livländischen gilt, das muß auch von dem noch unausgemittelten, ? Arschinen = 46 Brabanter Ellen, gelten.

§ 173. Doch können auch unbekannte Verhältnisse bestimmt werden, ohne daß man die Ketten-Rechnung mit einer Frage anfängt; z. B. Wenn 3 Arschin. = 4 livl. Ell., 13 livl. Ell. = 10 Brab. Ell.; wie groß ist das Verhältniß der Arschinen zu den Brab. Ellen?

3 Arschin.	4 livl. Ell.
13 livl. Ell.	10 Brab. Ell.

39 Arschin. = 40 Brab. Ell.,

folglich, Gleiches mit Gleichem (mit 39) dividirt:

1 Arschin = $\frac{40}{39}$ Brab. Ellen,

auch, obige Gleichung beiderseits mit 40 dividirt:

$\frac{39}{40}$ Arschin. = 1 Brab. Elle.

Zur Vergleichung des Obigen mit dem vorhin (§ 170) Erhaltenen:

40 Brab. Ell. : 39 Arschin. = 46 Brab. Ell. : x Arschin.

46

40 | 1794 | $44\frac{17}{20}$ Arschin., wie oben.

Doch kann hier auch, wie vorher, der Anfang des Ansatzes eine Frage sein: Wie viel Arschinen sind 40 Brab. Ellen?, wenn 10 Brab. Ell. = 13 livl. Ell., und 4 livl. Ell. = 3 Arschinen.

? Arschin.	40 Brab. Ell.
10 Brab. Ell.	13 livl. Ell.
4 livl. Ell.	3 Arschin.

39 Arschinen.

§ 174. Eine Probe der Ketten-Rechnung kann veranstaltet werden, indem man entweder aus der Aufgabe selbst oder aus den Zwischen-Verhältnissen irgend ein anderes Glied als unbekannt annimmt und sucht, z. B.: Wie viel livländische Ellen sind gleich 10 Brab. Ellen, wenn 46 Brab. Ell. = $44\frac{17}{20}$ Arschinen, und 3 Arschin. = 4 livl. Ellen.

? livl. Ell.	10 Brab. Ell.
46 Brab. Ell.	$8\frac{97}{20}$ Arschin.
3 Arschin.	4 livl. Ell.

13 livl. Ell..

(Übungs-Exempel XIX, Nr. 1—9.)

IV. Die zusammengesetzte Regel detri

A. ohne Zwischen-Verhältnisse.

§ 175. Nach den Lehren für die Regel detri, sowohl für die gerade als für die umgekehrte, hat man das Verhäliniß des dritten und noch unbekannten vierten Gliedes einer Regel detri nur auf ein Verhältniß, auf das Verhältniß des ersten und zweiten Gliedes, zu beziehen, um zu bestimmen, welche Veränderung dadurch mit dem dritten Gliede vorgeht, um das vierte zu ergeben.

Wenn aber das Verhältniß des dritten und vierten Gliedes der Regel detri nicht auf ein, sondern auf mehre Verhältnisse zu beziehen ist, so wird das dritte Glied, um das gesuchte vierte zu ergeben, durch alle Verhältnisse, so viel ihrer vorhanden sind, verändert werden. Man habe z. B.

$$\left.\begin{matrix} 3 : 5 \\ 6 : 9 \end{matrix}\right\} = 4 : x,$$

so wird das dritte Glied (4) durch die beiden Verhältnisse 3 : 5, und 6 : 9 verändert werden, um das vierte Glied zu ergeben. Nämlich vermöge des Verhältnisses 3 : 5 ist (nach der Regel detri 3 : 5 = 4 : x) das gesuchte Glied x so viel Mal größer denn 4, so viel Mal 5 größer ist denn 3; dieß giebt $x = 4 . \frac{5}{3}$. Da nun dieses erste Verhältniß, 3 : 5, solcher Gestalt seinen Einfluß auf das dritte Glied (4) bereits ausgeübt hat, so wird man mit demselben nichts weiter zu thun haben, wenn man das eben gefundene vierte Glied ($4 . \frac{5}{3}$) nunmehr, als drittes Glied, in die Proportion $6 : 9 = 4 . \frac{5}{3} : x$, setzt, um diejenige Veränderung zu bestimmen, die mit dem schon vorhandenen ersten Resultate ($4 . \frac{5}{3}$) wegen des zweiten bestimmenden Verhältnisses, 6 : 9, noch vorgehen muß. Nach dieser zweiten Proportion ist nämlich x so viel Mal größer denn $4 . \frac{5}{3}$, so viel Mal 9 größer ist denn 6, d. h. $\frac{9}{6}$ Mal, und das gesuchte x ist demnach $= 4 . \frac{5}{3} . \frac{9}{6} = 4 . \frac{45}{18}$ (§ 52). Eben so würde man schließen, wenn mehr Verhältnisse gegeben wären.

§ 176. Statt der beiden Verhältnisse 3 : 5, 6 : 9 kann man also auch das Verhältniß 18 : 45 nehmen, und das Exem-

pel nunmehr als einfaches Regel-detri-Exempel ansetzen, 18 : 45 = 4 : x; hienach ist $x = 4 . \frac{45}{18} = 10$.

§ 177. Das Verhältniß 18 : 45 heißt zusammengesetzt aus den Verhältnissen 3 : 5, 6 : 9.

§ 178. Ein Verhältniß wird demnach aus zwei oder mehren andern zusammengesetzt, wenn man das Product aller Vorderglieder zum Vordergliede, und das Product aller Hinterglieder zum Hintergliede macht, folgender Maaßen:

3 : 5
6 : 9
18 : 45.

§ 179. Der Exponent des zusammengesetzten Verhältnisses 18 : 45, welcher $\frac{18}{45} = \frac{2}{5}$ ist, muß sich auch ergeben, wenn man die Exponenten der einfachen Verhältnisse 3 : 5, 6 : 9 in einander multiplicirt, nämlich $\frac{3}{5} \times \frac{6}{9} = \frac{18}{45} (= \frac{2}{5})$.

§ 180. Obige Lehren auf folgendes Beispiel angewandt:

Wenn 3 Arbeiter für 6 Tage 4 Rub. Lohn empfangen, wie viel werden 5 Arbeiter für 9 Tage erhalten?

Dieses Exempel kommt für die Berechnung so zu stehen:

3 Arbeiter 6 Tage 4 Rbl. Lohn
5 „ 9 „ ? Rbl. „

Die obere dieser beiden Zeilen heißt die Ursache oder Angabe, die untere heißt die Wirkung oder Folge.

Nunmehr setze man das Verhältniß, worin die unbekannte Größe vorkommt, als drittes und viertes Glied hin, so daß die unbekannte Größe das vierte Glied werde (4 Rub. Lohn : x Rub. Lohn), beziehe ferner dieses Verhältniß auf jedes der andern Verhältnisse einzeln, sowohl auf das Verhältniß der Arbeiter, 3 : 5, als auf das Verhältniß der Tage, 6 : 9 (ganz als hätte man jedes Mal nichts als ein einfache Regel-detri-Exempel vor sich), um zu finden, ob es gegen das letztere gerade oder umgekehrt sei; im ersteren Falle setze man das Glied der Angabe zum ersten Gliede der Regel detri, das Glied der Folge zum zweiten Gliede; im letzteren Falle wird das Glied der Folge erstes, das Glied der Angabe zweites Glied der Regel detri. Alsdann wird das Exempel so zu stehen kommen.

$$\left.\begin{array}{l} 3 \text{ Arb.} : 5 \text{ Arb.} \\ 6 \text{ Tage} : 9 \text{ Tage} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Rbl. Lohn.} \\ = 4 : x \end{array}$$

Setzt man nun die beiden Verhältnisse 3 : 5, 6 : 9 zusammen, wodurch man, statt dieser beiden, das neue Verhältniß 18 : 45

erhält, so hat man aus der zusammengesetzten Regel detri eine einfache hergestellt, nämlich 18 : 45 = 4 Rub Lohn : x Rub. Lohn; dieses giebt 10 Rub. Lohn.

Zum Verständniß obiger Aufgabe ist hinsichtlich des Zusammenhanges der einzelnen Verhältnisse unter einander noch hinzu zu fügen, daß die 5 Arbeiter den durch die erste Regel detri (3 : 5 = 4 Rub. Lohn : x Rub. Lohn) sich ergebenden Lohn (4 . $\frac{5}{3}$) für die Zeit von 6 Tagen erhalten, weil auch die drei Arbeiter ihre 4 Rub. für 6 Tage bekommen. Alsdann, durch die zweite Regel detri (6 Tage : 9 Tage = 4 . $\frac{5}{3}$ Rub. : x Rub.) wird gesucht, wie viel die 5 Arbeiter in 9 Tagen empfangen werden.

Übrigens ist zu merken, daß man, bei Zusammensetzung der Verhältnisse, die Multiplication der Vorderglieder in einander so wie der Hinterglieder vor der Hand noch nicht ausführen müsse, damit man den Zähler gegen den Nenner desto leichter abkürzen könne. Zu dem Ende ziehe man zwischen Vorder- und Hinterglieder einen Strich, und setze das dritte Glied auf die Seite des Zählers. Das Exempel stehet nun so:

$$\begin{array}{rr|l} & 3 & 5 \\ x & 6 & 9 \\ \hline & & 4\ 2 \end{array}$$

10 Rub. Lohn.

Es kann ein Verhältniß gegen ein anderes umgekehrt, gegen ein gegebenes drittes aber gerade sein. So ist z. B. das Verhältniß der Zeiten gegen das Verhältniß von Arbeitern umgekehrt, aber das Verhältniß der Bezahlung ist gegen beide gerade, da man schließt: Je mehr Arbeiter man bei irgend einem Werke anstellt, in desto weniger Zeit wird es vollendet werden; und je längere Zeit man arbeiten läßt, oder je mehr Arbeiter man dingt, desto mehr muß man, in jenem Falle bei gleich viel Arbeitern, in diesem bei gleicher Zeit, bezahlen. — Eben so: Man will einen Graben ziehen; je mehr lang dieser Graben werden soll, desto weniger tief kann er, bei gleicher Breite, werden, desto mehr Arbeiter gehören dazu, u. s. w..

Der Lehrer thut wohl daran, den Schüler bei den Exempeln der zusammengesetzten Regel detri (wie in dem nachstehenden erläuterten Exempel (§ 183) geschehen wird) jede dieser Beziehungen vollständig aussprechen zu lassen, da sonst leicht Irrthümer vorfallen können; auch wird der Schüler dadurch von einem Vor-sich-hinsprechen ohne Nachdenken zurückgehalten.

§ 181. Das Ansetzen von Angabe und Folge in zwei unter einander stehenden Zeilen mit allem, was für die zusammengesetzte Regel detri daraus folgt, gilt auch für die einfache, sowohl für die gerade, als auch für die umgekehrte Regel detri, ist demnach für die Regel detri ganz allgemein; nämlich

1. Gerade Regel detri: Wenn 5 Ell. kosten 3 Rub., wie viel kosten 8 Ell.?

Angabe, 5 Ell. 3 Rub.;
Folge, 8 Ell. ? Rub..

Nun zuerst das dritte und vierte Glied (3 Rub. : x Rub.) hingesetzt, und dieses Verhältniß auf das erste bezogen: Je mehr Geld ich zahle, desto mehr Waare erhalte ich, also gerade Regel detri, und Angabe (5 Ell.) wird erstes, Folge (8 Ell.) zweites Glied:

5 Ell. : 8 Ell. = 3 Rub. : x Rub.

$x = 4\frac{4}{5}$ Rub. $= 4\frac{80}{100}$ Rub. = 4 Rub. 80 Kop..

2. Umgekehrte Regel detri: Wenn Jemand braucht von $\frac{11}{4}$ breitem Tuche 5 Ellen, wie viel wird er $\frac{10}{4}$ breites brauchen?

Angabe, $\frac{11}{4}$ Ell. breit 5 Ell. lang;
Folge, $\frac{10}{4}$ Ell. breit ? Ell. lang.

Nun, wie vorhin, das zuerst hingeschriebene Verhältniß des 3. und 4. Gliedes (5 Ell. L. : x Ell. L.) auf das andere Verhältniß bezogen: Je mehr lang das Tuch ist, desto weniger braucht man davon in die Breite; also umgekehrte Regel detri; die Folge ($\frac{10}{4}$ Ell. Breite) wird erstes, die Angabe ($\frac{11}{4}$ Ell. Breite) zweites Glied:

$\frac{10}{4}$ Ell. Breite : $\frac{11}{4}$ Ell. Breite = 5 Ell. Länge : x Ell. Länge

10 Ell. Br. : 11 Ell. Br. = 5 Ell. Länge : x Ell. Länge

$x = \frac{5 \cdot 11}{10} = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$ Ell. Länge.

§ 182. Auch für die zusammengesetzte Regel detri wird die Probe gemacht, indem man irgend ein anderes Glied entweder aus der Angabe oder aus der Folge als unbekannt annimmt und sucht. Sucht man aber ein Glied aus der Angabe, so wird die vorige Folge jetzt natürlich Angabe, die vorige Angabe wird Folge. Beide Zeilen für diesen Zweck umzuschreiben, ist jedoch nicht nöthig. — Zugleich giebt das Aufsuchen aller Glieder einer zusammengesetzten Regel detri dem Lehrer, wenn er dieselben in der Schule seinen Schülern im Wechsel, jedes Mal als ein besonderes Exempel, aufgiebt, eine Menge Übungs-Exempel für die zusammengesetzte Regel detri an die Hand.

§ 183. Ein Exempel der zusammengesetzten Regel detri, nebst Erläuterung desselben.

8 Weber weben 16 Stück Zeug, jedes 30 Ellen lang, $1\frac{1}{2}$ Ellen breit, in 6 Wochen, wenn sie wöchentlich 5 Tage, täglich 12 Stunden arbeiten;

wie breit werden 15 Stück von 15 Ellen Länge werden, wenn 5 Weber 5 Wochen, wöchentlich 4 Tage, täglich 9 Stunden daran arbeiten?

Angabe, 8 Weber 16 Stck. 30 Ell. l. $\frac{3}{2}$ Ell. br. 6 Woch. 5 Tage 12 St.
Folge, 5 „ 15 „ 15 „ „ ? „ „ 5 „ 4 „ 9 „

Nun zuerst das Verhältniß des 3. und 4. Gliedes hingestellt, und dieses auf die andern Verhältnisse bezogen:

Je mehr breit das Zeug werden soll,

1. desto mehr Arbeiter gehören dazu — gerade Regel detri; also Angabe erstes, Folge zweites Glied, 8 : 5;
2. desto weniger Stück können die Arbeiter liefern — umgekehrte Regel detri, also Folge erstes, Angabe zweites Glied, 15:16;
3. desto weniger lang kann jedes Stück werden — umgekehrte Regel detri, also Folge erstes, Angabe zweites Glied, 15 : 30;
4. desto mehr Wochen sind erforderlich — gerade Regel detri, also Angabe erstes, Folge zweites Glied, 6 : 5;
5. desto mehr Tage wöchentlich werden die Weber arbeiten müssen — gerade Regel detri, also Angabe erstes, Folge zweites Glied, 5 : 4;
6. desto mehr Stunden täglich muß gearbeitet werden — gerade Regel detri, also Angabe erstes, Folge zweites Glied, 12:9.

Nun sondere man die ersten Glieder von den zweiten durch einen Strich, setze das dritte Glied ($\frac{3}{2}$) auf die Seite des Zählers, und kürze ab.

$$\left.\begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ 15 & 16 \\ 15 & 30 \\ 6 & 5 \\ 5 & 4 \\ 12 & 9 \\ & \frac{3}{2} \end{array}\right\} \text{Ell. breit} = \frac{3}{2} : x$$

Hier geht Alles auf, daher ist das Resultat 1 Elle Breite, da im Zähler sowohl als im Nenner der Factor 1 nicht verschwindet (vergl. § 136).

Berechnung des vorstehenden Exempels durch einfache Regel detri:

Weber Ell. Br.
$8 : 5 = \frac{3}{2} : x; \ldots\ldots\ldots x = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{8} \left(= \frac{15}{16}\right)$ Ell. Br.,
Stück Ell. Breite
$15 : 16 = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{8} : x; \ldots\ldots x = \frac{3}{2} \cdot \frac{5 \cdot 16}{8 \cdot 15} (= 1)$ Ell. Br.,
Ell. lang Ell. Breite
$15 : 30 = \frac{3}{2} \cdot \frac{5 \cdot 16}{8 \cdot 15} : x; \ldots x = \frac{3}{2} \cdot \frac{5 \cdot 16 \cdot 30}{8 \cdot 15 \cdot 15} (= 2)$ Ell. Br.,

Wochen Ellen Breite
$6 : 5 = \frac{3}{2} \cdot \frac{5 \cdot 16 \cdot 30}{8 \cdot 15 \cdot 15} : x$; $x = \frac{3}{2} \cdot \frac{5 \cdot 16 \cdot 30 \cdot 5}{8 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 6} (= \frac{5}{3})$ Ell. Br.,
Tage Ellen Breite
$5 : 4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{5 \cdot 16 \cdot 30 \cdot 5}{8 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 6} : x$; $x = \frac{3}{2} \cdot \frac{5 \cdot 16 \cdot 30 \cdot 5 \cdot 4}{8 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 5} (= \frac{4}{3})$ Ell. Br.,
Stunden Ellen Breite
$12 : 9 = \frac{3}{2} \cdot \frac{5 \cdot 16 \cdot 30 \cdot 5 \cdot 4}{8 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 5} : x$; $x = \frac{3}{2} \cdot \frac{5 \cdot 16 \cdot 30 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9}{8 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 12} (= 1)$ Ell. Br.,
wie oben.

Probe obigen Exempels der zusammengesetzten Regel detri mittels Auffindung eines andern Gliedes, z. B. der 8 Weber aus der Angabe. Der Ansatz ist

$$\left.\begin{array}{r} 15 : 16 \\ 15 : 30 \\ 1 : \frac{3}{2} \\ 6 : 5 \\ 5 : 4 \\ 12 : 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Weber} \\ = 5 : x;\ x = 8 \text{ Weber.} \end{array}$$

Vorstehende Aufgabe läßt sich dadurch vereinfachen, daß man die Wochen, Tage und Stunden auf Stunden bringt, und demnach das Exempel so ausdrückt:

8 Weber weben 16 Stück Zeug, jedes 30 Ellen lang, $1\frac{1}{2}$ Ellen breit in 360 Arbeitsstunden;

wie breit werden 15 Stück Zeug von 15 Ellen Länge werden, welche 5 Weber in 180 Arbeitsstunden liefern können.

Einige lehren für die zusammengesetzte Regel detri folgendes Verfahren:

Nachdem eine Aufgabe, wie z. B. die nachstehende, —

Um einen Graben 4 Fuß tief im Mittel, 5 Fuß breit zu ziehen, brauchen 16 Arbeiter 20 Tage;

wie viel Tage werden 36 Arbeiter für 6 Fuß mittlerer Tiefe 8′ Breite nöthig haben?, wenn die Länge des Grabens dieselbe bleiben soll.

— für die Berechnung als Angabe und Folge hingeschrieben worden:

Angabe, 4′ tief 5′ breit 16 Arb. 20 Tage
Folge, 6′ „ 8′ „ 36 „ ? „

setzen sie aus dem Verhältniß, worin die unbekannte Größe vorkommt, das bekannte Glied (20, nämlich Tage) als ersten Factor des zu bildenden Zählers. Darauf sehen sie zu, ob das Verhältniß des 3. und 4. Gliedes gegen jedes der andern Verhältnisse gerade oder umgekehrt sei, und statt nun sogleich die Angabe in den Nenner, die Folge in den Zähler, oder umgekehrt zu setzen, so reduciren sie jedes Verhältniß zuvörderst auf die Einheit, namentlich in diesem Falle:

Je mehr Tage Zeit ist, desto mehr tief kann der Graben werden — gerade Regel detri, demnach: Bei 4′ Tiefe sind 20 Tage nöthig, also bei 1′ Tiefe der vierte Theil, d. i. $\frac{20}{4}$ Tage, und bei 6′ Tiefe sechs Mal so viel, d. i. $\frac{20 \cdot 6}{4}$ Tage. Also wird in dieser geraden Regel detri die

Angabe (4) das erste Glied der zugehörigen Regel detri, in den Nenner, die Folge (6) als zweites Glied der Regel detri, in den Zähler des Bruches gesetzt.

Eben so: für 5 Fuß Breite $\frac{20 \cdot 6}{4}$ Tage, also für 1′ Breite der fünfte Theil davon, nämlich $\frac{20 \cdot 6}{4 \cdot 5}$ Tage, und für 8 Fuß Breite 8 Mal so viel, also $\frac{20 \cdot 6 \cdot 8}{4 \cdot 5}$ Tage — ebenfalls die Angabe (5) in den Nenner, die Folge (8) in den Zähler des Bruchs gesetzt.

Endlich, je mehr Tage man arbeiten läßt, desto weniger Arbeiter sind nöthig — umgekehrte Regel detri. Nunmehr das Verhältniß der Arbeiter auf die Einheit reducirt: 16 Arbeiter brauchen $\frac{20 \cdot 6 \cdot 8}{4 \cdot 5}$ Tage, also 1 Arbeiter wird 16 Mal so viel Zeit brauchen, d. i. $\frac{20 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 16}{4 \cdot 5}$ Tage, und 36 Arbeiter den 36. Theil davon, nämlich $\frac{20 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 16}{4 \cdot 5 \cdot 36}$ Tage, also die Angabe (16) in den Zähler, die Folge (36) in den Nenner des Bruchs gesetzt.

Diese Schlußfolgen sind, falls man sie nicht etwa für eine besondere Verstandes-Übung halten will, völlig müssig. Sobald sich nämlich ergeben hat, daß man es entweder mit gerader oder umgekehrter Regel detri zu thun hat, so ist es ja eben dadurch schon bestimmt, daß die Angabe in den Nenner, die Folge in den Zähler, oder umgekehrt, komme; wozu denn nun noch die oben angegebenen langweiligen und nichts bezweckenden Schlußfolgen! — Ich meinerseits hätte es nicht der Mühe werth geachtet, dieses der mathematischen Bündigkeit so sehr ermangelnde Verfahren anzuführen, wenn nicht vielleicht Mancher dann gemeint hätte, ich hätte eine wesentliche Methode ausgelassen.

(Übungs-Exempel XX, Nr. 1—14.)

B. mit gegebenen Zwischen-Verhältnissen.

§ 184. So wie man einfache Regel detri mit Zwischen-Verhältnissen hat (s. oben bei der Ketten-Regel), so kommt auch bei der zusammengesetzten Regel detri bisweilen der Fall vor, daß einem und demselben Verhältnisse nicht einerlei Einheit des Maaßes, der Münze, des Gewichts zum Grunde liegt. Ein solches Verhältniß muß also, ganz wie bei der Ketten-Rechnung in der einfachen Regel detri, aus anderweit bekannten Zwischen-Verhältnissen auf einerlei Einheit zurückgeführt werden. Diese Rechnungs-Art, eine Verbindung der zusammengesetzten Regel detri mit der Ketten-Regel, kann man daher am bequemsten zusammengesetzte Regel mit gegebenen Zwischen-Verhältnissen nennen, wie man jene Exempel der Ketten-Regel eigentlich einfache Regel detri mit gegebenen Zwischen-Verhältnissen nennen sollte.

§ 185. Es sei folgendes Exempel gegeben:

1. Ein Fuhrmann führt 3 Centner für 12 Thaler preuß. cour. 5 Postmeilen weit; wie viel Centner wird er für 10 Thlr. Gold 6 geographische Meilen weit führen, wenn 8 Thlr. preuß. cour. = 7 Thlr. Gold, und 10 Postmeilen = 9 geographischen Meilen.

Angabe, 3 Ctn. 12 Thlr. pr. cour. 5 Postmeilen
Folge, ? „ 10 Thlr. Gold 6 geogr. Meilen

12 Thlr. pr. cour. : 10 Thlr. Gold
6 geogr. Meilen : 5 Postmeilen
} = 3 : x Ctn.

Mittels der Zwischen-Verhältnisse nun sind die Thaler Gold auf Thlr. pr. cour. zu reduciren, so daß das zweite Glied des ersten Verhältnisses mit dem ersten Gliede des zweiten Verhältnisses gleiche Benennung erhalte; eben so sind die Postmeilen auf geographische Meilen zurück zu führen. Der Ansatz kommt demnach so zu stehen:

12 Thlr. pr. cour. : 10 Thlr. Gold,
wenn 7 Thlr. Gold = 8 Thlr. pr. cour.
ferner
6 geogr. Meilen : 5 Postmeilen,
wenn 10 Postmeilen = 9 geogr. Meilen
} = 3 : x; Ctn.

man wird mithin haben:

12	10
7	8
6	5
10	9
	3

7 | 15 | $2\frac{1}{7}$ Cntn..

2. Es kann eine gewisse Anzahl Armer von 70 Berl. Scheffeln 6 Wochen lang mit Brod versehen werden, wenn man Jedem täglich $1\frac{3}{4}$ Berl. Pfund giebt; wie viel Wochen werden für dieselbe Armen-Anzahl 50 Dresdn. Scheffel ausreichen, wenn Jeder täglich 2 Dresdner Pfund Brod erhält. — Es sind 15 Dresdn. Scheffel = 29 Berl. Scheffel, und 276 Berl. Ll. = 277 Leipz. Ll.

Angabe, 70 Berl. Scheffel 6 Wochen $1\frac{3}{4}$ Berl. Ll.
Folge, 50 Dresdn. Scheff. ? „ 2 Lpz. Ll.

70 Berl. Scheffel : 50 Dresdn. Scheffel,
wenn 15 Dresdn. Scheff. = 29 Berl. Scheff.
2 Lpz. Ll. : $1\frac{3}{4}$ Berl. Ll.,
wenn 276 Berl. Ll. = 277 Lpz. Ll.
} = 6 : x; Wochen

folglich

70	50
15	29
2	$\frac{7}{4}$
276	277
	6

1104 | 8033 | $7\frac{305}{1104}$ Wochen = 7 Wochen $1\frac{1031}{1104}$ Tage.

§ 186. Falls dem Verhältnisse des dritten und des zu suchenden vierten Gliedes der zusammengesetzten Regel detri nicht einerlei Einheit des Maaßes, der Münze, des Gewichts zum Grunde liegt, so wird man dieses Verhältniß genau so, wie von den andern Verhältnissen gelehrt worden, auf gleiche Einheit zu bringen, das Resultat aus den drei ersten Gliedern aber noch mit dem Product der zu dem 4. Gliede x gehörenden Factoren zu dividiren haben, da, wie in der Proportions-Lehre (§ 131) gezeigt worden, wenn $6x = 2 . 9$, x gleich sein muß $\frac{2}{6}^{9}$. Darum setze man diese Factoren von x in der Berechnung auf die Seite des Nenners.

Z. B. Wenn 100 Thlr. Gold in 1 Jahre an Zins 5 Rub. Gold einbringen, wie viel Thaler Münze erhält man als Zins einer Woche von 8000 Thalern in Golde? — 1 Thlr. cour. = 26 Groschen Münze; 6 Thlr. Gold = 7 Thlr. cour..

Angabe, 100 Thlr. Gold Cap. 1 Jahr 5 Thlr. Gold Zins,
Folge, 8000 Thlr. Gold Cap. 1 Woche x Thlr. Münze Zins;

100 Thlr. Gold Cap.	:	8000 Thlr. Gold Cap.	=	5 Thlr. Gold Zins : x Thlr. Mz. Zins
1 Jahr	:	1 Woche	=	1 Thlr. Münze = 24 Gr. Münze
52 Wochen	=	1 Jahr	=	26 Gr. Münze = 1 Thlr. cour.
			=	7 Thlr. cour. = 6 Thlr. Gold

erstes Glied	100	8000	zweites Glied
	1	1	
	52	1	
		5	
die Factoren des vierten Gliedes	24	1	drittes Glied
	1	26	
	6	7	

18 | 175 | $9\frac{13}{18}$ Thlr. Mz. = 9 Thlr. $\frac{13}{18}^{24}$ Gr. = 9 Thlr. 17 Gr. 4 Pf. Mz..

V. Die einfache Zins-Rechnung.

§ 187. Wenn A sein baares Geld dem B hingiebt, damit dieser eine gewisse vestgesetzte Zeit lang davon beliebigen Gebrauch mache, so wird B dem A für jedes als Darlehn empfangene Capital irgend einen gewissen Zins geben; welcher Zins (oder Ertrag des ausgeliehenen Capitals) auch das Interesse genannt wird. Dieses Interesse wird von jedem Hundert des Capitals für den Zeitraum eines vollen Jahres bezahlt. So bedeutet der Ausdruck 5 p. Ct. (5 pro Cent, 5 für 100), daß jedes 100 Rub. Capital in einem Jahre 5 Rub. an Zins einbringt. Die 5 wird der Zinsfuß genannt, unter welchem demnach auch Interesse oder Ertrag des Capitals zu verstehen ist, aber nur falls, wie schon be-

merkt, das Capital genau 100 ist, und die Zeit 1 Jahr. — Der Ausdruck „1 p. Ct. monatlich" heißt nichts anders als „12 p. Ct. jährlich", oder „12 p. Ct." schlechtweg.

§ 188. Wenn von einem auf ein oder mehre Jahre ausgeliehenen Capitale alljährlich der Zins erhoben wird, so daß, beim Anfange des folgenden Jahres, der Schuldschein des B nichts über die in demselben verschriebene Summe gilt, und die Anfangs ausgeliehene Summe von neuem anfängt, Zinsen zu tragen, so erhält man Aufgaben der einfachen oder gemeinen Zins-Rechnung. Laufen aber die Zinsen von Jahr zu Jahr fort, so tragen im folgenden Jahre, neben dem Capital, auch die Zinsen vom vorigen Jahre ihren Zins u. s. f.. Rechnungen dieser Art gehören zu der zusammengesetzten Zins-Rechnung (Anatocismus), nach welcher Zins auf Zins gerechnet wird.

Z. B. 1000 Rub. Cap. zu 5 pCt. giebt am Schlusse des ersten Jahres 50 Rub. Zins, und dieser beträgt mit dem Capital zusammen 1050 Rub..

Zu Anfange des 2. Jahres: Diese 1050 Rub. Cap. geben bis zum Schluß des Jahres 52½ Rub. Zins, und dieser beträgt mit dem Capital zusammen 1102½ Rub..

Zu Anfange des 3. Jahres: Diese 1102½ Rub. Cap. geben bis zum Schluß des Jahres 55⅛ Rub. Zins, und dieser beträgt mit dem Capital zusammen 1157⅝ Rub.. U. s. f..

Diese Berechnungen von Zins und Zinseszins kommen nur bei öffentlichen Banken vor, in welchen ein von anderer Seite her eingegangener Zins sogleich wieder als Zinsen tragendes Capital genutzt wird. Auch läßt die Bank sich für Capitalien, die von ihr entlehnt werden, um bestehen zu können, ein Gewisses an Zins mehr zahlen, als sie selbst zahlt. — Eine vollständige Belehrung in der zusammengesetzten Zins-Rechnung setzt höhere Kenntnisse voraus.

§ 189. Bei der Zins-Rechnung kommt es auf folgende drei Größen an:

1) Größe des Zins tragenden Capitals,
2) Zinsfuß,
3) Länge der Zeit, da das Capital ausstehet.

Aus diesen drei Größen entsteht die vierte: Ertrag des Capitals in der bestimmten Zeit und zu dem bestimmten Zinsfuße, d. h. das Interesse, der Zins.

§ 190. Ist von dem Interesse, dem Capital, und dem Zinsfuße eine Größe unbekannt, so wird diese durch die gerade Regel detri gefunden aus dem Verhältnisse eines vorgegebenen Capitals zu seinen Zinsen, wobei die Zeit als gleich angenommen wird; z. B.

100 Rb. Cap. : 5 Rb. Zins = 1500 Rb. Cap. : x Rb. Zins; x = 75,
5 Rb. Zins : 100 Rb. Cap. = 75 Rb. Zins : x Rb. Cap.; x = 1500,
1500 Rb. Cap. : 75 Rb. Zins = 100 Rb. Cap. : x Rb. Zins; x = 5.

§ 191. So wie bei der geraden Regel detri meistens Waare und Waare, Geld und Geld die gleichartigen Glieder waren, so sind in der Zins-Rechnung Capital und Capital, Zins und Zins die gleichartigen Glieder.

§ 192. Ferner, wenn man in Regel-detri-Exempeln Geld als viertes Glied suchte, so fing man den Ansatz mit Waare an, und umgekehrt; eben so, sucht man, in der Zins-Rechnung, Zins, so fängt man den Ansatz mit Capital an, und umgekehrt.

§ 193. Wird nach den Zinsen für mehr oder weniger Zeit als 1 Jahr gefragt, so müssen zuvor die Zinsen eines Jahres ausgemittelt werden; weshalb für ein jedes solches Exempel sich zwei Ansätze als nöthig ergeben.

§ 194. Wenn nur die Zeit und eine von den übrigen drei oben genannten Größen gegeben sind, so lassen die beiden andern sich daraus nicht finden, weil jene beiden von diesen völlig unabhängig sind.

1. Zeit und Interesse sind gegeben; z. B. Wenn ein gewisses Capital zu einem gewissen Zinsfuße in 1 Jahr 4 Monaten trägt 360 Rub. Interesse, wie viel wird es in 3 Jahren 2 Monaten tragen?

Bemerkung. Je längere Zeit ein Capital ausstehet, desto mehr erhält man Zins — gerade Regel detri.

1 Jahr 4 Monat : 360 Rub. Zins = 3 Jahr 2 Mon. : x Rub. Zins.

16 Mon. x = 855 Rub. Zins. 38 Mon.

2. Zeit und Capital sind gegeben; z. B. Wenn 1200 Rub. Cap. zu einem gewissen Zinsfuße in 9 Monat ein gewisses Interesse tragen, in wie langer Zeit werden 2000 Rub. zu demselben Zinsfuße dasselbe Interesse tragen?

Bemerkung. Je längere Zeit man ein Capital ausstehen läßt, desto kleiner kann das Capital sein, um einen gewissen Zins einzubringen — umgekehrte Regel detri.

? Mon. | 9 Mon.
2000 Rub. Cap. | 1200 Rub. Cap.

$5\frac{2}{3}$ Mon. = 5 Mon. 12 Tage.

In dergleichen Berechnungen, namentlich des Interesse, der Gehalte u. s. w. wird der Monat zu 30 Tagen gerechnet. Will man nach Wochen rechnen, so hat das Jahr 52 Wochen.

3. Zeit und Zinsfuß sind gegeben, z. B. Wenn ein gewisses Capital zum Zinsfuße 5 muß 8 Monat stehen, um einen gewissen Zins zu tragen; in wie viel Zeit würde dasselbe Capital denselben Zins einbringen, wenn 6 der Zinsfuß wäre.

Bemerkung. Je längere Zeit ein Capital ausstehet, desto weniger braucht man, um eben denselben Zins zu erhalten, p Ct. zu nehmen, demnach

? Mon.	8 Mon.
6 pCt.	5 pCt.

$6\frac{2}{3}$ Mon. = 6 Mon. 20 Tage.

§ 195. Wenn vom Capital, dessen Zinsfuße, von der Zeit, da es ausgestanden hat, und von dessen Zins für diese Zeit eine Größe unbekannt ist, so ergiebt sich diese unbekannte Größe mittels zweier Regel-detri-Ansätze, durch deren ersten man (§ 193) zuvor die Zinsen eines Jahres zu finden hat.

1. Gegeben der Zinsfuß, die Zeit, der Zins für diese Zeit, gesucht das Capital. Z. B. Von einem Capital, das zu 6 p. Ct. ausgeliehen war, hat man für 8 Monat an Interesse erhalten 93 Rub. 80 Kop.; wie groß war das Capital?

Monat Zins
8 : 12 = 93 Rb. 80 Kp. : x Rb.; x = 140 Rb. 70 Kp. Zins für 1 Jahr;
darauf setze man an:
6 Rb. Zins : 100 Rb. Cap. = 140 Rb. 70 Kp. Zins : x Rb. Cap.

x = 2345 Rub. Cap..

2. Gegeben das Capital, die Zeit, das Interesse des Capitals für diese Zeit; wie groß der Zinsfuß? Z. B. 500 Rub. Cap. geben in 8 Monat 20 Rub. Interesse; zu wie viel p. Ct. war das Capital ausgeliehen?

8 Mon.; 20 Rb. Int. = 12 Mon. : x Rb. Int.; x = 30 Rb. Int. f. 1 Jahr
500 Rub. Cap. : 30 Rub. Int. = 100 Rub. Cap. : x Rub. Int.

x = 6 pCt..

3. Gegeben Capital, Zinsfuß, Interesse, gesucht die Länge der Zeit; z. B. 1200 Rub. Cap. zu 6 p. Ct. geben 60 Rub. Int., in wie langer Zeit?

100 Rub. Cap. : 6 Rub. Int. = 1200 Rub. Cap. : x Rub. Int.

x = 72 Rub., die Zinsen eines Jahres.
72 Rub. Zins : 12 Mon. = 60 Rub. Zins : x Mon.

x = 10 Monat.

4. Gegeben das Capital, der Zinsfuß, die Zeit; gesucht das In-

tereſſe für dieſe Zeit; z. B. 25000 Rub. Cap. zu 5½ p. Ct. geben in 15 Monat wie viel Zins?

100 Rub. Cap. : ½ Rub. Zins = 25000 Rub. Cap. : x Rub. Zins.

x = 1375 Rub. Int. in 1 Jahr,

12 Mon. : 15 Mon. = 1375 Rub. Int. : x Rub. Int.

x = 1718 Rub. 75 Kop., Int. in 15 Monat.

§ 196. Wenn von der Zeit und dem Intereſſe, der Zeit und dem Capital, der Zeit und dem Zinsfuß, — oder vom Capital und der Zeit, dem Capital und dem Zinsfuß, dem Capital und dem Intereſſe, — oder vom Intereſſe und der Zeit, dem Intereſſe und dem Capital, dem Intereſſe und dem Zinsfuße, — oder von dem Zinsfuße und der Zeit, dem Zinsfuße und dem Capital, dem Zinsfuße und dem Intereſſe, eine Größe unbekannt iſt und geſucht wird: ſo erhält man Aufgaben entweder der geraden oder der umgekehrten Regel detri, wie zum Theil ſchon oben vorgekommen, und mit Beiſpielen belegt worden.

§ 197. Wenn aber, von dem Zinsfuße, Capitale, der Zeit und dem Intereſſe, eine dieſer Größen gleich, die übrigen verſchieden ſind, und eine von den letzteren geſucht wird, ſo hat man Aufgaben der zuſammengeſetzten Regel detri:

1. Für gleiches Capital, z. B. In 5 Jahren trägt ein gewiſſes Capital zu 6 p. Ct. 560 Rub.; in wie viel Jahren wird es zu 4 p. Ct. eintragen 1120 Rub.? — Antwort: in 15 Jahren.

Das gleiche Capital kommt deshalb nicht in Betracht, weil es, in der Berechnung, ſowohl auf die Seite des Zählers als des Nenners geſetzt, ſich gegenſeitig aufhebt, und daher im Exempel verſchwiegen wird. Willkürlich aber kann es darum doch nicht angenommen werden; es geht vielmehr aus den Bedingungen der Aufgabe, und zwar aus der Angabe, nach den oben gegebenen Lehren aus den zwei Anſätzen hervor:

5 Jahr : 560 Rub. Int. = 1 Jahr : x Rub. Int.

x = 112 Rub., die jährlichen Zinſen.

6 Rub. Zins : 100 Rub. Cap. = 112 Rub. Zins : x Rub. Cap.

x = 1866 Rub. 66⅔ Kop..

2. Für gleichen Zinsfuß, z. B. 5000 Rub. Cap. tragen in 1½ Jahren 375 Rub. Zins; wie viel werden 6400 Rub. Cap. in 4¼ Jahren an Zins einbringen? — Antwort: 1360 Rub..

Der gleiche Zinsfuß iſt in dieſem Falle 5 pCt.; dieſe ergeben ſich aus der Angabe durch die zwei Anſätze:

½ Jahr : 375 Rub. Zins = 1 Jahr : x Rub. Zins

x = 250 Rub., die Zinſen für 1 Jahr.

5000 Rub. Cap. : 250 Rub. Zins = 100 Rub. Cap. : x Rub. Zins

x = 5 pCt..

3. Für gleiche Zeit, z. B. 5000 Rub. Cap. zu 6 p. Ct. tragen 700 Rub.; zu wie viel p. Ct. werden, in eben der Zeit, 7500 Rub. Cap. einbringen an Interesse 1140 Rub.? — Antwort: zu 8 p. Ct..

Die gleiche Zeit ist hier 2 Jahr 4 Mon., und sie ergiebt sich aus der Analyse durch die beiden Ansätze:

100 Rub. Cap. : 6 Rub. Zins = 5000 Rub. Cap. : x Rub. Zins

x = 300 Rub., die Zinsen eines Jahres.

300 Rub. Zins : 12 Mon. = 700 Rub. Zins : x Mon.

x = 28 Monat = 2 Jahr 4 Mon..

4. Für gleichen Ertrag; z. B. 3000 Rub. Cap. tragen zu 4 p. Ct. in 5 Jahren einen gewissen Zins; wie groß muß das Capital sein, das zu 8 p. Ct. in 2 Jahren eben diesen Zins tragen wird. — Antwort: 3750 Rub..

Dieser gleiche Ertrag ergiebt sich aus der Angabe = 600 Rub.; denn

100 Rub. Cap. : 4 Rub. Zins = 3000 Rub. Cap. : x Rub. Zins

x = 120 Rub., der Zins für 1 Jahr;

folglich der Zins für 5 Jahr = 5 . 120 = 600 Rub..

§ 198. Wären aber Capital, Zinsfuß, Zeit und Interesse, alle verschieden, dann hätte man nicht wie vorher eine, sondern in der Angabe sowohl als in der Folge zwei von einander ganz unabhängige Aufgaben: z. B. 6500 Rub. Cap. zu 7 p. Ct. tragen in 5 Jahren 2275 Rub. Zins; wie viel Rub. Zins werden 7000 Rub. Cap. zu 6 p. Ct. in 3 Jahren einbringen?

Die 2275 Rub. Zins in der Angabe ergeben sich durch folgende Regel detri:

100 Rub. Cap. : 7 Rub. Zins = 6500 Rub. Cap. : x Rub. Zins

$x = \frac{6500 \cdot 7}{100} = 65 \cdot 7 = 455$ Rub. für 1 Jahr,

und für 5 Jahr an Zins das Fünffache, nämlich 2275 Rub..

Die Zinsen in der Folge ergeben sich wiederum, ohne daß man die Angabe dazu nöthig hätte, durch folgende Regel detri:

100 Rub. Cap. : 6 Rub. Zins = 7000 Rub. Cap. : x Rub. Zins

$x = \frac{7000 \cdot 6}{100} = 420$ Rub. für 1 Jahr,

und für 3 Jahr das Dreifache, nämlich 1260 Rub..

Doch hindert das nicht, dieses Exempel auch nach den Lehren für die zusammengesetzte Regel detri zu berechnen, ganz als wäre es eine einzige Aufgabe:

Angabe, 6500 Rub. Cap. 7 pCt. 5 Jahr 2275 Rub. Zins

Folge, 7000 „ „ 6 „ 3 „ ? „ „

6500	7000
7	6
5	3
	2275

1260 Rub. Zins.

§ 199. Zur Zins-Rechnung gehört auch die Rabatt-Rechnung, weil die durch letztere zu suchenden Summen gleichfalls nach p. Ct. zu bestimmen sind.

Der Rabatt (vom italienischen Rabatto, Abzug, Kürzung), die Differenz zwischen der ganzen Schuld, und der vom Schuldner zu leistenden wirklichen Zahlung, d. i. der rabattirten Summe, der Netto-Summe, der baaren oder contanten Zahlung, ist nichts anders als ein Interesse, welches der Gläubiger, der das Geld erst nach der bestimmten Frist zu fordern hat, seinem Schuldner zahlt, falls dieser entweder früher oder sogleich die Schuld berichtigen will.

Der Rabatt wird entweder auf oder in 100 gerechnet. Hat nämlich der Kaufmann B von dem Großhändler A 12 p. Ct. Rabatt auf 100, so bezahlt er dem A für jede in Waaren empfangenen 112 Rub. nur 100; weshalb, in dem dahin gehörigen Regel-detri-Ansatze, der Rabatt zuzuzählen ist dem 100 im ersten Gliede, so daß daraus das Verhältniß der ganzen Schuld zur rabattirten Summe, 112 : 100, entsteht. Hat aber B von A 12 p. Ct. Rabatt in 100, so bezahlt er dem A für jedes 100 nur 88; woraus sich 100 : 88 als das Verhältniß der ganzen Schuld zur rabattirten Summe ergiebt.

§ 200. Genau genommen und nach Recht und Billigkeit ist ein Rabatt nur auf, nicht in 100 zu berechnen. Denn so wie bei der Interesse-Rechnung der Schuldner dem Gläubiger das Interesse auf jedes von letzterem baar und voll empfangene und zu seinem Nutzen verwandte 100 zahlt, also ist es auch bei der Rabatt-Rechnung allem Rechte gemäß, daß der Schuldner das Interesse, d. i. den Rabatt, auf jedes in Waare empfangene 100 zahle. Wollte nämlich in der Interesse-Rechnung der Gläubiger, z. B. bei 5 p. Ct., diese vorher von jedem 100 abziehen, so würde der Schuldner, statt eines jeden 100, nur 95 bekommen, folglich auch nur von 95 Nutzen ziehen können, gegen Absicht und Zweck der Anleihe. Weil ein Rabatt die Differenz ist zwischen der ganzen Schuld und der baaren Zahlung, also der Rabatt und die baare Zahlung zusammen die ganze Schuld betragen müssen, so folgt

daraus, daß die gegebene Summe, z. B. zu 5 p. Ct., nur von 105 zu rabattiren sei (nach dem Ansatzes-Anfange, 105 : 100) nicht aber von 100 (nach dem Ansatzes-Anfange 100 : 95); denn es könnten ja diese 95, wenn sie vom Schuldner empfangen, und zu 5 p. Ct. jährlich sogleich wieder anderweit als Capital ausgeliehen würden, nicht die vollen 100 wieder ergeben, weil 95 à 5 p. Ct. (nach dem Ansatze 100 : 5 = 95 : x) nur 99¾, nicht aber 100 hervorbringen. Ganz in dieser Lage befindet sich derjenige, welcher Waaren auf Zeit verkauft; denn dieser stellt mit allem Rechte den Preis der Waare um so viel höher, als der Zins für diese Zeit beträgt.

Wenn ferner Jemand, z. B. nach 20 Jahren, 1000 Rub. mit 5 p. Ct. Rabatt zu zahlen hätte, aber seinen Gläubiger schon jetzt befriedigen wollte, so wäre beim Rabatt auf 100 (weil, für ein Capital von 100, der 20-jährige Zins auch 100 ist, also dieses Capital und sein Zins zusammen = 200 Rub. wäre, man demnach die Regel detri erhielte: 200 Rub. nach 20 Jahren zahlbar verhält sich zu 100 Rub. baarer Zahlung, wie 1000 Rub. nach 20 Jahren zu x Rub. baarer Zahlung) die baare Zahlung = 500 Rub.; und es würde, liese die Schuld auch so viele Jahre als sie wollte, doch immer noch eine baare Zahlung übrig bleiben. Hingegen, beim Rabatt in 100, da man 5 p. Ct. so viel Mal rabattirt als Jahre sind, würde man für 20 Jahr 20 . 5 (d. i. 100) von 100 einbehalten, also dem Gläubiger gar nichts zu zahlen haben. Sollte diese Schuld mit 5 p. Ct. jährlichem Rabatt in 100 gar noch länger fortlaufen, so müßte, falls sofort regulirt werden sollte, der Gläubiger vom Schuldner nicht allein nichts empfangen, sondern noch ihm für jedes Jahr 5 p. Ct., also, wegen der 1000 Rub. Cap., noch 50 Rub. jährlich zuzahlen.

§ 201. Wenn man aber auf den Ursprung und den Zweck des dem Käufer verstatteten Rabatts sieht, so erweisen sich alle über diesen Gegenstand erhobenen Streitigkeiten als nichtig.

Ohne allen Zweifel rührt der Rabatt daher, daß Käufer sich gegen ihre Verkäufer beschwert hatten, wie sie die von ihnen erkauften Waaren nicht wohl eher bezahlen könnten, als bis sie selbst diese Waaren, wenigstens zum Theil, abgesetzt hätten. Noch größere Schwierigkeiten fanden sich bei den rauhen Waaren, welche erst in den Fabriken zu Handelsgegenständen verarbeitet werden mußten, ehe sie zum Verkauf gebracht werden konnten. Darum wurde den Käufern, nach Beschaffenheit der Waaren, eine gewisse Frist zur Zahlung gelassen. Damit aber die Käufer zu früherer

Zahlung bewogen würden, so gestatteten die Verkäufer Denjenigen, welche die Zahlung früher oder baar leisten wollten, einen so bedeutenden Rabatt (wenigstens 8 p. Ct. auf ein Jahr), daß es für den Käufer vortheilhafter wurde, die dem Verkäufer schuldige Summe anderweit zu 5 oder weniger p. Ct. aufzunehmen, um mit derselben den Verkäufer baldigst zu befriedigen, und den überschüssigen Vortheil für sich zu behalten. Nunmehr ist der Rabatt ein allgemeiner Gebrauch geworden, und Käufer wie Verkäufer richten sich bei Bestimmung der Waarenpreise danach.

Da nun aber der beim Waarenhandel eingeführte Rabatt auf willkürliche Abmachung zwischen Verkäufern und Käufern beruhet, und es beiden freistand, sich entweder auf weniger oder wohl auf noch mehr als 8 p. Ct. jährlich zu vergleichen, so ist der Leipziger und italienische Gebrauch, der dem Käufer z. B. 8 pCt. Rabatt in 100 bestimmt, eben so richtig als die Amsterdamer und Hamburger Weise, die nur Rabatt auf 100 gestattet. Und es ist der Rabatt in 100 auch als ein Rabatt auf 100 (namentlich in diesem Falle bei 8 p. Ct., nach der Regel detri $92 : 100 = 100 : x$; $x = 108\frac{1}{23}$) zu betrachten, aber so als wäre man nicht auf 8, sondern auf $8\frac{1}{23}$ p. Ct. (nach der Regel detri $108\frac{1}{23} : 100 = 100 : x$; $x = 92$) übereingekommen; was auf keine Weise für den Verkäufer, dem es, wie oben bemerkt, frei stand, den Rabatt so hoch zu stellen als er selbst wollte, beeinträchtigend war, um so weniger, da es beinahe auf eines hinausläuft, ob man von jedem Hundert rabattirt 8, und 92 bezahlt, oder von jedem $108\frac{1}{23}$ rabattirt $8\frac{1}{23}$, und 100 bezahlt.

Da zu Amsterdam (wo aber, wie bemerkt, Rabatt auf 100 üblich ist) vor allen andern Örtern die längste Zahlungsfrist, 33 Monat, gestattet wird, und nirgends eine längere, so kann der von müssigen Rechenmeistern herausgeklügelte Fall einer durch Rabatt in 100 gänzlich annullirten Schuld nie eintreten. Man würde also in jeder Hinsicht offenbar zu weit gehen, wenn man den nur um ein Weniges größeren Rabatt in 100, als gar zu beeinträchtigend für den Verkäufer, durchaus verwerfen wissen wollte.

§ 202. In Vorstehendem ist das Wort „Rabatt" mit dem Worte „Disconto", welches ebenfalls ein italienisches ist und „Abzug" bedeutet, als gleichbedeutend genommen. Üblich aber ist es, einen Rabatt wegen früherer Zahlung Disconto, und eine Schuld nach Abzug des Disconto eine discontirte Schuld oder baare Zahlung zu nennen, welche mit dem Disconto zusammen die ganze Schuld betragen muß, die nach Ablauf des Termins zu zahlen gewesen

wäre: so wie man unter Rabatt einen Abzug versteht, der von Kaufleuten, namentlich von Buchhändlern bei bedeutendem Absatze ertheilt wird, ohne Rücksicht darauf, ob der Käufer früher zahlt, falls er seine Schuld nur zu derjenigen Zeit abträgt, welche auch dem Verkäufer als Zahlungstermin gesetzt ist.

§ 203. Es werde das anfänglich (§ 199) begonnene Exempel der eigentlichen Rabatt-Rechnung nunmehr wieder aufgenommen.

1. Bei 12 p. Ct. Rabatt auf 100 bezahlt B dem A für jede in Waaren empfangenen 112 Rub. nur 100 Rub.; hat er nun von A für 12850 Rub. Waaren empfangen, so wird die dem A zu leistende baare Zahlung sich durch folgende Regel detri ergeben:

Statt wird gezahlt also statt wird gezahlt
112 Rub. : 100 Rub. = 12850 Rub. : x Rub.

x = 11473 Rub. $21\frac{3}{7}$ Kop..

Also zahlt B dem A 1376 Rub. $78\frac{4}{7}$ Kop. weniger als die Rechnung des A angiebt.

Der Rabatt, die Differenz der baaren Zahlung von der ganzen Schuld, wird sich auch ergeben durch den Ansatz:

Für ist Rabatt was ist Rabatt für Antwort
112 Rub. : 12 Rub. = 12850 Rub. : x Rub.

x = 1376 Rub. $78\frac{4}{7}$ Kop..

2. Hat aber B von A 12 p. Ct. Rabatt in 100, so wird er für jede in Waaren empfangenen 100 Rub. zahlen 88 Rub.; hat er nun ebenfalls für 12850 Rub. Waaren genommenen, so wird die rabattirte Summe durch den Ansatz gefunden:

Statt wird gezahlt also statt wird gezahlt
100 Rub. : 88 Rub. = 12850 Rub. : x Rub.

x = 11308 Rub..

Der Rabatt wird gefunden sowohl durch Subtraction der rabattirten Summe (11308) von der ganzen Schuld, als auch durch den Ansatz:

Für ist Rabatt was ist Rabatt für Antwort
100 Rub. : 12 Rub. = 12850 Rub. : x Rub.

x = 1542 Rub..

§ 204. Bei der Rabatt-Rechnung kommen bisweilen die Ausdrücke vor: $\frac{1}{12}$ Rabatt, $\frac{1}{10}$ Rabatt, $\frac{1}{8}$ Rabatt, $\frac{1}{5}$ Rabatt, $\frac{1}{4}$ Rabatt, und solche mehr. — Diese Brüche sind Aliquota des Ganzen, nämlich der zu kürzenden Summe; doch kann dieser Rabatt auch durch andere Brüche, durch vervielfältigte Aliquota, angegeben

werden, z. B. $\frac{2}{5}$ Rabatt. Es müssen demnach diese Brüche mit der ganzen Schuld multiplicirt werden, um die Netto-Summe zu ergeben. Überhaupt nennt man Brüche, welche aus dem Verhältnisse des Capitals zu seinen Zinsen, der ganzen Schuld zu seinem Rabatt, entstehen, Procent-Brüche. Es enthält nämlich der Ausdruck „$\frac{1}{4}$ Rabatt" das Verhältniß „100 Rub. Cap. : 25 Rub. Zins", oder abgekürzt „4 Rub. Cap. : 1 Rub. Zins" mit dem Exponenten $\frac{1}{4}$ in sich (wonach das dritte Glied der Regel detri, nämlich das gegebene Capital, mit dem Bruche $\frac{1}{4}$ zu multipliciren ist, um das 4. Glied zu ergeben); woraus denn folgt, daß man die obigen Brüche auch nach p. Ct. bestimmen könne. Es ist nämlich:

$$\left.\begin{matrix}\frac{1}{12}\\ \frac{1}{10}\\ \frac{1}{6}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{2}{5}\end{matrix}\right\} \text{Rabatt, so viel als} \left\{\begin{matrix}\frac{1}{12}\cdot 100 = 8\frac{1}{3}\ \text{pCt.}\\ \frac{1}{10}\cdot 100 = 10\ \text{pCt.}\\ \frac{1}{6}\cdot 100 = 16\frac{2}{3}\ \text{pCt.}\\ \frac{1}{5}\cdot 100 = 20\ \text{pCt.}\\ \frac{1}{4}\cdot 100 = 25\ \text{pCt.}\\ \frac{2}{5}\cdot 100 = 40\ \text{pCt.}\end{matrix}\right.$$

Ein auf solche Weise angegebener Rabatt ist Rabatt in 100, da man ja z. B. $\frac{1}{6}$ des 100 (nämlich $16\frac{2}{3}$) aus dem 100 herausnimmt, von welchem 100 demnach nur $\frac{5}{6}$, d. i. $83\frac{1}{3}$, werden auszuzahlen sein.

Um hienach $\frac{1}{6}$ Rabatt von 763 Rub. 20 Kop. zu berechnen, so wäre

der Rabatt	$\frac{1}{6}$. 763 Rub.	20 Kop.	= 127 Rub. 20 Kop.
die Netto-Summe	$\frac{5}{6}$. 763 „	20 „	= 636 „ „
zusammen	$\frac{6}{6}$. 763 Rub.	20 Kop.	= 763 Rub. 20 Kop.

Die Netto-Summe (636) muß sich aber auch ergeben durch Subtraction des = 127 Rub. 20 Kop. gefundenen Rabatts von der ganzen Schuld 763 Rub. 20 Kop..

§ 205. Vorstehendes Exempel nach pCt. berechnet:

Statt	wird gezahlt	was statt	Antwort
100 Rub. :	$83\frac{1}{3}$ Rub. =	763 Rub. 20 Kop. :	x Rub.
10000 Kop.	25000 Kop.	7632ø Kop.	
3øøøø Kop.	25øøø Kop.		

x = 63600 Kop. = 636 Rub..

Der Rabatt, 127 Rub. 20 Kop., ergiebt sich, wie oben, als Differenz der Netto-Summe von der ganzen Schuld, auch durch den Ansatz:

Für	ist Rabatt	was ist Rabatt für	Antwort
100 Rub.	: $16\frac{2}{3}$ Rub.	= 763 Rub. 20 Kop.	: x Rub.
3ø Kp.	: 5ø Kp.	= 7632ø Kop.	: x Kop.

x = 12720 Kop. = 127 Rub. 20 Kop..

§ 206. An die Rabatt-Rechnung schließt sich die Aufgabe an, da man von der an einem fremden Orte angekauften Waare Spesen, d. h. Unkosten bis an Ort und Stelle, nach pCt. zu bezahlen hat, und darüber beim Handel noch gewisse pCt. gewinnen will.

Es kauft nämlich Jemand am Verkaufs-Orte das Liespfund einer gewissen Waare für 40 Thlr. an; die Spesen betragen 8 pCt. auf 100; wie theuer muß das Liespfund verkauft werden?, damit man 18 pCt. auf 100 gewinne.

Man setze an:

1)

Ohne Spesen	Mit Spesen	Ohne Spesen	Mit Spesen
100 Thlr.	: 108 Thlr.	= 40 Thlr.	: x Thlr.

x = $43\frac{1}{5}$ Thlr. mit den Spesen.

2)

Mit den Spesen im Einkauf	Mit den Spesen im Verkauf	Mit den Spesen im Einkauf	Mit den Spesen im Verkauf
100 Thlr.	: 118 Thlr.	= $43\frac{1}{5}$ Thlr.	: x Thlr.

x = $50\frac{22}{25}$ Thlr..

§ 207. Zur Rabatt-Rechnung gehört ferner die Provisions-Rechnung, da man nämlich einem Geschäftsträger, der das Einnehmen oder Ausgeben gewisser Gelder übernommen hat, für seine Mühewaltung etwas Gewisses pCt., sei es nun auf oder in 100, gestattet hat, das er nach beendigtem Geschäft von der übrig gebliebenen Summe abziehen wird, oder dessen Ertrag ihm zu übersenden sein wird. Die Provisions-Rechnung wird dem gemäß ganz nach den Lehren für die Rabatt-Rechnung veranstaltet.

§ 208. Hat B von A Waaren gekauft mit der Bestimmung, diese erst nach Ablauf eines gewissen vestgesetzten Termins zu bezahlen, so ist dieses in so fern zum Schaden des A, als dieser, im Fall sofortiger Zahlung, das Geld sogleich hätte verzinsen, oder in seinem Handel fruchtbar machen können. Darum wird A zu seiner Waaren-Rechnung noch die Zinsen bis zum vestgesetzten Termin als Schuld hinzuschlagen.

Will aber hinwiederum B vor dem anfänglich vestgesetzten Termin zahlen, so kann seinerseits A diese Zinsen nicht bis zum völligen Ablauf des angesetzten Termins verlangen. A muß sich daher einen Abzug gefallen lassen, welchen man, wie schon oben

(§ 202) bemerkt, das Disconto nennt. Die Disconto-Rechnung selbst ist ein Fall der Termin-Rechnung.

§ 209. Es sei der Zahlungs-Termin 1 Jahr, der jährliche Zinsfuß 6 pCt., die ganze Schuld 1000 Rub.; wie groß ist die sogleich zu bezahlende Schuld?

Schuld Disconto Schuld Disconto
100 Rub. : 6 Rub. = 1000 Rub. : x Rub.

x = 60 Rub., das jährliche Disconto,
und die discontirte Schuld = 954 Rub.

1000 Rub., die ganze Schuld.

Zahlt B die nach einem Jahre fällige Schuld (1000 Rub.) nach einem Monate, so gebührt dem B ein 11-monatliches Disconto, also von 6 pCt. $\frac{11}{12}$, d. i. $\frac{11 \cdot 6}{12} = \frac{11}{2}$ pCt.; und man hat

Für Schuld ist Disconto was für Disconto
100 Rub. : $\frac{11}{2}$ Rub. = 1000 Rub. : x Rub.

x = 55 Rub., d. Disconto für 11 Mon.,
B zahlt demnach 1000 — 55 Rub., d. i. 945 Rub., die discontirte Schuld.

Will B nach 2 Monaten zahlen, so kommt ihm ein 10-monatliches Disconto zu, also, von den 6 pCt. für das ganze Jahr, $\frac{10}{12}$, d. i. $\frac{10 \cdot 6}{12}$, d. i 5 pCt.; daher

Schuld Disconto Schuld Disconto
100 Rub. : 5 Rub. = 1000 Rub. : x Rub.

x = 50 Rub., Disconto für 10 Mon..

Will B nach 3 Monaten zahlen, so kommen ihm von den 6 p. Ct. jährlich $\frac{9}{12}$ oder $\frac{3}{4}$ zu, d. i. $\frac{6 \cdot 3}{4}$, d. i. $\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ p. Ct., also

100 : $4\frac{1}{2}$ = 1000 : x

x = 45 Rub., 9-monatliches Disconto.

1200 Rub., nach 18 Monaten zahlbar, was ist, zu 15 p. Ct. Disconto, die sofortige baare Zahlung?

(Anm.. Das Disconto gilt immer von der Zielzeit, also hier, 15 p. Ct. für 18 Monat. — In den vorigen Exempeln war die Zielzeit 1 Jahr.)

100 Rub. : 15 Rub. = 1200 Rub. : x Rub.

x = 180 Rub., 18-monatliches Disconto,
also 1020 Rub., die discontirte Schuld.

4000 Rub. zu 8 p. Ct., Ziel 9 Monat, werden bezahlt nach 5 Monaten, wie viel ist Disconto wegen der um 4 Monat früheren Zahlung?

9 Monat : 8 p. Ct. = 4 Mon. : x p. Ct.

x = $3\frac{5}{9}$ p. Ct. Disconto wegen der 4 Monat.

Schuld	Disconto	Schuld	Disconto
100 Rub.	: $3\frac{5}{9}$ Rub.	= 4000 Rub.	: x Rub.

x = 142 Rub. $22\frac{2}{9}$ Kop., Disconto wegen d. 4 Mte.

3500 Rub. zu $4\frac{1}{2}$ p. Ct., Ziel 10 Mon., bezahlt nach 2 Monaten, wie viel ist Disconto wegen 8 Monat?

10 Mon. : $4\frac{1}{2}$ p. Ct. = 8 Mon. : x p. Ct.

x = $\frac{18}{5}$ p. Ct. Disconto wegen der 8 Monat

100 Rub. : $\frac{18}{5}$ Rub. = 3500 Rub. : x Rub.

x = 126 Rub. Disconto wegen der 8 Monate.

Um nämlich zuerst das Disconto für die abzurechnende Zeit zu erhalten, setze man an: Die Zielzeit (10 Mon.) zu dem Zinsfuß für diese Zielzeit ($4\frac{1}{2}$ p. Ct.), wie die Zeit, für welche discontirt wird (8 Mon.) zu dem dazu gehörigen Disconto ($\frac{18}{5}$ p. Ct.). — Dieses Disconto wird darauf der Zinsfuß, um dasjenige Disconto zu bestimmen, das von dem gegebenen Capital abzuziehen ist.

§ 210. Auch beim Wechsel-Geschäft kommt das Disconto vor. Es verkauft nämlich A dem B einen Wechsel, der nach 80 Tagen, d. i nach $2\frac{2}{3}$ Monaten, fällig ist, und dann, außer der verschriebenen Summe, noch die einjährigen Zinsen einbringen wird. Diese aber gebühren dem Verkäufer mit Ausschluß der Zinsen für die letzten $2\frac{2}{3}$ Monat; welche letztgenannten Zinsen dem B zu Gute kommen werden.

Das im Wechselbrief verschriebene Capital sei 3500 Rub., der Zinsfuß 6, so ergeben sich die Zinsen für das volle Jahr

100 Rub. Cap. : 6 Rub. Zins = 3500 Rub. Cap. : x Rub. Zins

x = 210 Rb.

hievon ab das Disconto für $2\frac{2}{3}$ Monat:

12 Mon. : 210 Rb. = $2\frac{2}{3}$ Mon. : x Rb.,

x = 46 Rub. $66\frac{2}{3}$ Kop.

Außerdem, da B diese $2\frac{2}{3}$ Monat über, von den 3500 Rub. keinen andern Nutzen ziehen kann, als die bloßen Zinsen, auf welche allein ein Kaufmann doch nicht Geld leiht, so muß A sich von der ganzen Wechsel-Schuld (3500 Rub.) noch ein monatliches Disconto gefallen lassen, entweder $\frac{1}{2}$, oder $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$ pCt. monatlich. Angenommen hier $\frac{1}{2}$ pCt. monatlich, so ist

100 Rub. Cap. : $\frac{1}{2}$ pCt. monatl. Disconto = 3500 Rub. Cap. : x Rb. monatl. Disconto

x = 17 Rub. 50 Kop.,

also für $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ Monat, bis der Wechsel präsentirt werden kann, 17 Rub. 50 Kop. × $\frac{8}{3}$ 46 Rub. $66\frac{2}{3}$ Kop.

zusammen 93 Rub. $33\frac{1}{3}$ Kop.

Rest 116 Rub. $66\frac{2}{3}$ Kop.;

der discontirte Wechsel ist demnach zu bezahlen mit 3500 Rub. + 116 Rub. $66\frac{2}{3}$ Kop. = 3616 Rub. $66\frac{2}{3}$ Kop..

Ein auf ein Jahr ausgestellter Wechsel, groß 1800 Rub. zu 6 pCt., um 4 Monat zahlbar, wird mit $\frac{3}{4}$ pCt. monatlichem (9 pCt. jährlichem) Disconto verkauft, ? die baare Zahlung.

100 Rub. Cap. : 6 pCt. = 1800 Rub. Cap. : x Rub. Int.

x = 108 Rub. Int.,

also der Werth des Wechsels nach einem Jahr . . 1908 Rub.
Hievon ab
1) die Zinsen für 4 Monat:
12 Mon. : 108 Rub. = 4 Mon. : x Rub.

x = 36 Rub.

2) das viermonatliche Disconto à $\frac{3}{4}$ pCt.
d. i. 3 pCt.
100 Rub. Cap. : 3 Rub. Disconto
= 1800 Rub. : x Rub.

x = 54 Rub. 90 Rub.

also ist der discontirte Wechsel groß . . . . . 1818 Rub..

§ 211. Es sind mehre Capitalien auf gleiche Zeit, aber zu verschiedenem Zinsfuße ausgeliehen; man will wissen, zu wie viel pCt. im Durchschnitt die Summe der sämmtlichen Capitalien ausgeliehen ist.

Man bestimme zuvörderst (nach der umgekehrten Regel detri), wie groß jedes Capital sein müßte, wenn es zu dem Zinsfuße 1 eben denselben Zins einbringen sollte, als jedes Capital zu dem für dasselbe angegebenen Zinsfuße; z. B. Es tragen

600 Rb. Cap.	zu 5 pCt.	so viel als	600 × 5 Rb.,	d. i. 3000 Rb. Cap.	1 pCt.
1100 „	zu 4 „		1100 × 4 „	d. i. 4400 „	
1500 „	zu 6 „		1500 × 6 „	d. i. 9000 „	
2000 „	zu $5\frac{1}{2}$ „		2000 × $5\frac{1}{2}$ „	d. i. 11000 „	

oder abgekürzt:

6 Rb. Cap.	zu 5 pCt.	so viel als	6 . 5 Rb.,	d. i. 30 Rb. Cap.	1 pCt.
11 „ „	zu 4 pCt.	„	11 . 4 „	d. i. 44 „	
15 „ „	zu 6 pCt.	„	15 . 6 „	d. i. 90 „	
20 „ „	zu $5\frac{1}{2}$ pCt.	„	20 . $5\frac{1}{2}$ „	d. i. 110 „	
52 Rb. Cap.				274 R. Cap. z. 1 pCt.	

Je mehr Capital man auf Zinsen giebt, desto weniger braucht man pCt. zu nehmen, um einen gewissen Zins zu erlangen — umgekehrte Regel detri, also

? pCt.	1 pCt.
52 Rub. Cap.	274 Rub. Cap.

$5\frac{7}{26}$ pCt..

Da aber hier, wie in dieser Rechnung immer, das eine der mittleren Glieder = 1 ist, so ergiebt sich folgende practische Regel: Man dividire die Summe der gegebenen Capitalien in die

Summe der (für 1 pCt.) reducirten; der Quotient ergiebt für die Summe der gegebenen Capitalien den Zinsfuß im Durchschnitt.

§ 212. Man kann für ein solches Exempel eine Probe anstellen, wenn man aus jedem gegebenen Capital für irgend eine, jedoch bei allen Capitalien gleiche Zeit, z. B. für 1 Jahr, die Zinsen berechnet, und darauf nachsieht, ob die Summe der Capitalien zu dem gefundenen durchschnittlichen Zinsfuße den für die angenommene Zeit gefundenen Zins auch wirklich ergiebt. Also, es geben in 1 Jahre

600 Rub.	zu 5 pCt.	30 Rub.	Zins
1100 „	„ 4 pCt.	44 „	„
1500 „	„ 6 pCt.	90 „	„
2000 „	„ $5\frac{1}{2}$ pCt.	110 „	„
5200 Rub.	Cap.	274 Rub.	Zins.

Eben denselben Zins (274 Rub.) tragen aber auch 5200 Rub. Cap. zu $5\frac{7}{26}$ pCt. in einem Jahre, nach dem Ansatze:
100 Rub. Cap. : $5\frac{7}{26}$ Rub. Zins = 5200 Rub. Cap. : x Rub. Zins.

§ 213. So wie, in Obigem, verschiedener Zinsfuß auf einen und denselben Zinsfuß reducirt wurde, falls die Zeiten gleich waren, so kann man auch verschiedene Zeiten auf eine und dieselbe Zeit reduciren, falls der Zinsfuß gleich ist. — Hat nämlich B von A zwei oder mehr Capitalien, die zu verschiedenen Terminen zahlbar werden, will sie aber auf ein Mal bezahlen, so wird B sämmtliche Capitalien länger als bis zum ersten Zahlungs-Termin nutzen können, hinwiederum aber auch früher zahlen müssen als im Zahlungs-Termin für den letzten Schuldposten. Die so genannte Zeit-Rechnung (reductio terminorum), die alle Termine auf einen einzigen zurückführt, und einen andern Fall der Termin-Rechnung (vergl. § 208) ausmacht, lehrt diesen mittleren Zahlungs-Termin finden, d. h. diejenige Zeit, zu welcher etwas, das zu verschiedenen Zeiten zu leisten ist, ohne Abbruch auf ein Mal geleistet werden kann.

§ 214. Man bestimme nämlich zuvörderst, wie groß jeder der Schuldposten sein müßte, um in einer und derselben Zeit (sei es nun Jahre oder Monate) so viel Zins zu tragen, als jeder gegebene Schuldposten in der gegebenen Zeit an Zinsen einbringen wird. Dieses geschieht nach der umgekehrten Regel detri, da z. B. ein dreifaches Capital eine drei Mal kürzere Zeit brauchen wird, um eben denselben Zins zu tragen, den das einfache bringt. Der Zinsfuß kommt hiebei nicht in Betracht, da er bei allen Capitalien gleich ist.

Beispiel.

B ist dem A zu zahlen schuldig

nach 1 Jahre . . .	800 Rub.	macht so viel als nach 1 J.	800 Rub. Cap.
nach 1 Jahre 6 Mon.	660 Rub.		990 „ „
nach 2 Jahren 1 Mon.	1500 Rub.		3125 „ „
nach 3 Jahren . . .	1000 Rub.		3000 „ „
	3960 Rub. Cap.		7915 Rub. Cap.;

und ebenfalls: Je kürzer die Zeit ist, da ein Capital aussteht, desto größer muß das Capital sein, um eben denselben Zins zu ergeben — umgekehrte Regel detri:

? Jahr	1 Jahr
3960 Rub. Cap.	7915 Rub. Cap.

Die Antwort lautet: $1\frac{3955}{3960} = 1\frac{791}{792}$ Jahr = 1 Jahr 11 Mon. $29\frac{6}{11}$ Tag, d. h. die genannten Capitalien werden am letzten Tage des zweiten Jahres zu bezahlen sein. — Aus diesem Verfahren, und da ein mittleres Glied alle Mal 1 ist, geht folgende practische Regel hervor: Man dividire die Summe der gegebenen Capitalien (3960 Rub.) in die Summe der auf eine gewisse Zeit (entweder 1 Jahr oder 1 Monat) reducirten Capitalien (7915 Rub.); der Quotient ergiebt den verlangten mittleren Zahlungs-Termin, und zwar in Jahren oder in Monaten, je nachdem die gegebenen Capitalien auf 1 Jahr oder auf 1 Monat reducirt waren.

§ 215. Bei dieser Berechnung kam die Zinses-Zahlung nicht in Betracht. Dieselbe aber geschieht natürlich für jedes einzelne Capital bis zum mittleren Zahlungs-Termin, da denn Alles aufhört. Es sei nämlich für obiges Exempel der Zinsfuß = 5, folglich ist der aus dem Verhältnisse 100 : 5 entstehende Procent-Bruch (s. § 204) $\frac{100}{5} = 20$, mit welchem man die einzelnen Capitalien, 800 Rub., 660 Rub., 1500 Rub., 1000 Rub. zu dividiren hat, um die Zinsen eines Jahres zu finden. Demnach

$\frac{800}{20} = 40$ Rub. Int.	für 1 Jahr, also für 2 Jahr	80 Rub.
$\frac{660}{20} = 33$ „ „		66 „
$\frac{1500}{20} = 75$ „ „		150 „
$\frac{1000}{20} = 50$ „ „		100 „
		396 Rub..

§ 216. Von dieser Rechnung kann dadurch eine Probe veranstaltet werden, daß man zu dem angegebenen Zinsfuße, von jedem Capital besonders, mit Hinsicht auf seine Zeit, den Zins berechnet.

Die Summe der Zinsen für die einzelnen Capitalien muß zugleich der Zins sein für die Summe der Capitalien in der gefundenen Zeit; demnach zu 5 pCt. jährlich tragen an Zins

800 Rb. Cap.	in 1 Jahr	40 Rb.	
600 „ „	in 1 Jahr 6 Mon., so viel als 990 Rb. Cap. in 1 Jahr, nämlich	49 „	50 Kp.
1500 „ „	in 2 Jahr 1 Mon., so viel als 3125 Rb. Cap. in 1 Jahr, nämlich	156 „	25 „
1000 „ „	in 3 Jahren, so viel als 3000 Rb. Cap. in 1 Jahr, nämlich	150 „	
		395 Rb.	75 Kp.
		(= 395¾ Rb.)	

Wenn nun das zu probirende Exempel richtig sein soll, so muß 3960 Rub. Cap. in 1 Jahr 11 Monaten $29\frac{6}{11}$ Tagen (oder in $\frac{7915}{3960}$ Jahren) eben so viel an Zins einbringen als 7915 Rub. Cap. in 1 Jahr. Man wird also haben (§ 197, 2):

Angabe, 7915 Rub. Cap. 1 Jahr $395\frac{3}{4}$ Rub. Zins
Folge, 3960 „ „ $\frac{7915}{3960}$ „ ? „ „ ,

und es wird sich daraus ebenfalls als Zins ergeben x = 395 Rub. 75 Kop.. — Der Unterschied von 25 Kop. in den beiden Resultaten entsteht durch den bei obiger Zinsen-Berechnung als 2 Jahr angenommenen, in der That aber nur $1\frac{7}{8}\frac{9}{2}$ betragenden Termin.

§ 217. Fernere Exempel der Zeit-Rechnung.

Es tragen Zins

2500 Rub.	in	3	Monaten	so viel als	7500 Rub.	in	1 Monat
3000 „	„	6	„	„	18000 „	in	1 Monat
2000 „	„	8	„	„	16000 „	in	1 Monat
2500 „	„	12	„	„	30000 „	in	1 Monat

100.5 abgekürzt:

25øø	5 Rub.	in	3	Monaten	so viel als	15 Rub.		
30øø	6 „	„	6	„	„	36 „		in 1 Monat
20øø	4 „	„	8	„	„	32 „		
25øø	5 „	„	12	„	„	60 „		
	20 Rub.					143 Rub.		

demnach

143 : 20 = $7\frac{3}{20}$ Monat, der mittlere Zahlungs-Termin.

Es sind zu zahlen
100 . 5

30øø Rub.	6 Rub.	baar, d. i. nach 0 Mon.	— —
25øø	5 „	nach 4 Mon. . . .	20 Rub.
15øø	3 „	„ 6 Mon. . . .	18 „
10øø	2 „	„ 9 Mon. . . .	18 „
20øø	4 „	„ 12 Mon. . . .	48 „
20øø	4 „	„ 18 Mon. . . .	72 „
	24 Rub.		176 Rub.,

mithin $176 : 24 = 7\frac{1}{3}$ Monat, der mittlere Zahlungs-Termin.

Auch in andern Fällen als da, wo es auf mittleren Zahlungs-Termin für mehre zu verschiedenen Zeiten ausgeliehene Capitalien ankommt, verfährt man, in Gemäßheit des § 213, nach den für die Zeit-Rechnung gegebenen Regeln. Nämlich

Eine Gemeinde ist durch Accord verpflichtet, 200 Mann auf 4 Monat, und darauf 150 Mann auf 3 Monat zu unterhalten, will aber die 350 Mann auf ein Mal besorgen, wie lange wird sie dieselben zu erhalten haben?

200 Mann auf 4 Monat ist 800 Mann
150 „ „ 3 „ „ 450 „ } auf 1 Monat
350 Mann 1250 Mann auf 1 Monat.

Je mehr Mann Einquartirung man nimmt, desto kürzere Zeit braucht man dieselbe zu unterhalten — auch hier umgekehrte Regel detri; also $x = \frac{1250}{350} = \frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$ Monat $= 3$ Mon. $17\frac{1}{7}$ Tag.

Ferner:

Es sind bei einem Fabrikanten 200 Ellen Zeug bestellt worden, nämlich 36 Ellen zu $1\frac{1}{4}$ Ell. Breite, 50 Ellen zu $1\frac{1}{8}$ Ell. Breite, 60 Ellen zu 1 Ell. Breite, und 54 Ellen zu $1\frac{5}{16}$ Ell. Br.; wenn nun, unter unveränderten Bedingungen der Zahlung, der Fabrikant einwilligen soll, daß alle 200 Ellen gleich breit seien, wie groß wird diese Breite sein?

Man bringe zuvörderst alle gegebenen Breiten auf gleichen Nenner (16):

36 Ell. Länge zu $(1\frac{1}{4} = \frac{5}{4} =)$	$\frac{20}{16}$ Ell. Br., ist	$\frac{720}{16}$ Ell. Länge	zu 1 Ell. Br.
50 Ell. Länge zu $(1\frac{1}{8} = \frac{9}{8} =)$	$\frac{18}{16}$ Ell. Br., ist	$\frac{900}{16}$ Ell. Länge	
60 Ell. Länge zu $(1 \quad = \quad)$	$\frac{16}{16}$ Ell. Br., ist	$\frac{960}{16}$ Ell. Länge	
54 Ell. Länge zu $(1\frac{5}{16} = \quad)$	$\frac{21}{16}$ Ell. Br., ist	$\frac{1134}{16}$ Ell. Länge	
200 Ell. Länge zu den verschiedenen Breiten;		$\frac{3714}{16}$ Ell. Länge zu 1 Ell. Breite;	

demnach 200 dividirt in $\frac{37}{16}\frac{14}{}$, giebt $\frac{18\frac{57}{100}}{16}$, also etwas mehr als $\frac{18\frac{1}{2}}{16}$, d. i. als $\frac{\frac{37}{2}}{16} = \frac{37}{32} = 1\frac{5}{32}$ Ell. Breite.

§ 218. Noch ein Fall der Termin-Rechnung (vergl. §§ 208, 213) endlich ist der bei Subhastationen vorkommende, da der Eine eine gewisse Summe etwa baar, der Andere eine zwar größere Summe, jedoch auf Termine bietet; man soll entscheiden, welcher Bot der vortheilhafteste ist, wenn man nicht Zins auf Zins rechnet. Rechnungen dieser Art könnte man füglich Licitations-Rechnungen nennen.

Ein Landgut wird subhastirt. A bietet 18,300 Rthlr. baar; B bietet 20,000 Rthlr., davon 4000 baar und 16,000 Rthlr. auf jährliche Termine zu 4000 Rthlr.; C bietet 21,000 Rthlr., nämlich 3000 Rthlr. baar, und 18,000 Rthlr. ebenfalls auf jährliche Termine zu 3000 Rthlr.. Wessen Bot ist der beste? Der übliche Zinsfuß ist 5 pCt..

Jede einzelne Termin-Summe ist auf denjenigen Werth zu reduciren, den sie an demjenigen Tage hat, an welchem der Bot verlautbart und angenommen wird. Hiebei müssen, wie in der Natur der Sache liegt, die Zinsen, eines, zweier, dreier u. s. w. Jahre, als Rabatt auf 100, dem ersten Gliede der Regel detri hinzugesetzt werden. Es muß daher der Werth jeder folgenden, wenn auch an sich gleichen Termin-Zahlung, je länger, je mehr abnehmen.

Der Bot des B ist

1) baar	4000 Rth.		
2) für den ersten Termin, da er für jede 105 Rth., die er nach 1 Jahre zahlen sollte, nur 100 nach 1 Jahre zahlt, 105:100 od. 21:20 = 4000 Rthlr. : x Rthlr.; x =	3809 Rth.	12 gGr.	8 Pf.
3) für den zweiten Termin, da er für 110 Rub., die er nach zwei Jahren zahlen sollte, nach 2 Jahren nur 100 zahlt, 110 : 100 od. 11:10 = 4000 Rth. : x Rth.; x =	3636 Rth.	8 gGr.	$8\frac{8}{11}$ Pf.
4) für den dritten Termin: 115 : 100, od. 23 : 20 = 4000 Rth. : x Rth.; . . . . x =	3478 Rth.	6 gGr.	$3\frac{3}{23}$ Pf.
5) für den vierten Termin: 120 : 100 oder 6 : 5 = 4000 Rth. : x Rth.; . . . x =	3333 Rth.	8 gGr.	
Der Bot des B beträgt demnach die als baar anzusehende Summe	18257 Rth.	11 gGr.	$7\frac{217}{253}$ Pf..

Der Bot des C ist

1) baar . . . . . 3000 Rth.
2) für den ersten Termin:
   21:20 = 3000 Rth. : x Rth.; x = 2857 Rth. 3 gGr. $5\frac{1}{7}$ Pf.
3) für den zweiten Termin:
   11:10 = 3000 Rth. : x Rth.; x = 2727 Rth. 6 gGr. $6\frac{6}{11}$ Pf.
4) für den dritten Termin:
   23:20 = 3000 Rth. : x Rth.; x = 2608 Rth. 16 gGr. $8\frac{8}{23}$ Pf.
5) für den vierten Termin:
   6:5 = 3000 Rth. : x Rth.; x = 2500 Rth.
6) für den fünften Termin:
   5:4 = 3000 Rth. : x Rth.; x = 2400 Rth.
7) für den sechsten Termin:
   13:10 = 3000 Rth. : x Rth.; x = 2307 Rth. 16 gGr. $7\frac{3}{15}$ Pf.

Der Bot des C ist demnach so viel als die jetzt gleich baare Summe 18400 Rth. 19 gGr. $3\frac{2687}{2302}\frac{3}{3}$ Pf.

Also haben geboten baar

A . . . 18300 Rth.,
B . . . 18257 Rth. 11 gGr. 7 Pf.,
C . . . 18400 Rth. 19 gGr. 3 Pf.;

woraus hervorgeht, daß, falls nicht Zins auf Zins gerechnet wird, der Bot des C der höchste ist.

(Übungs-Exempel XXI. Nr. 1—127.)

VI. Die Theilung einer Zahl nach einem gewissen vorgeschriebenen Verhältnisse.

§ 219. Die hieher gehörige Aufgabe ist: Man soll ein gewisses gegebenes Ganzes in zwei oder mehr Theile theilen, die ein bestimmtes Verhältniß unter einander haben.

Diese Rechnungs-Art kommt vor bei Bereitung von Arznei-Mitteln und andern Zusammensetzungen, deren Ingredienzien nach einem bestimmten Verhältnisse zu nehmen sind, und heißt alsdann die Mischungs- oder Vermischungs-Rechnung; bei Repartition der Grundsteuern, als welche nach Verhältniß der Größe und des Werthes der liegenden Gründe, bei Vertheilung von Steuern überhaupt, bei Contributionen, die nach Verhältniß des sämmtlichen Vermögens von jedem Einzelnen zu erheben sind; bei Einquartirung, die nach der Größe der Häuser vertheilt wird; bei Concursen, da das nach dem Bankerot noch vorhandene Vermögen unter die Gläubiger, nach Verhältniß der Größe ihrer Schuldfor-

derungen, zu vertheilen ist; bei einem nach Verhältniß der Einlagen unter mehre Theilnehmer zu vertheilenden Gewinst oder Verlust im Handel oder in einer andern Unternehmung, z. B. in einer Lotterie, so daß, falls nicht Alles verloren geht, derjenige, welcher mehr eingelegt, auch mehr gewinne oder verliere, welche Rechnung die Gewinst- oder Verlust-Rechnung heißt. Bezieht sich dieser Verlust auf eine vom Schiffer unterweges in einem Hafen-Orte erborgte Geld-Summe nebst den Zinsen dafür, wodurch die Ausbesserung des Schiffes und die Ergänzung des Proviants bezweckt wird, in so fern selbiger während des Stille-Liegens abgenommen hat, und daher bis zur Beendigung der Seereise nicht ausreichen würde, so entsteht daraus die Bodmerei-Rechnung, und führt solche den Namen von der auf den Boden des Schiffes als Unterpfand geborgten Summe; betrifft der Schaden aber beides, das Schiff und die geladenen Kaufmannsgüter, oder auch letztere allein, so vergleichen sich die Schiffs-Eigenthümer oder Schiffs-Rheder und die Theilnehmer an der Befrachtung des Schiffes um diesen Schiffsschaden (franz. l'avarie) durch die Haverei-Rechnung. — Für alle dergleiche Aufgaben indeß, welche verlangen, daß eine Zahl nach vorgeschriebenem Verhältnisse, nämlich so getheilt werde, daß diese Zahl, als gegebenes Ganzes, sich verhalte zu ihren noch zu bestimmenden Theilen, wie ein anderes gegebenes Ganzes zu seinen durch die Aufgabe bereits angegebenen Theilen, paßt, wenn man die Vermischungs-Rechnung ausnimmt, der Name Gesellschafts-Rechnung.

Wollte man, um beliebter Kürze willen, die Vermischungs-Rechnung ebenfalls unter den Namen Gesellschaftsrechnung begreifen, so müßte man wenigstens zugeben, daß z. B. Ammonium aceticum, Radix Valerianae und Moschus, lege artis zur Tinctur zusammengethan, eine gar drollige, aus allen drei Natur-Reichen zusammengeholte Gesellschaft bilden.

§ 220. Es sei folgendes Exempel der Gewinst- und Verlust-Rechnung gegeben.

Drei Kaufleute haben gemeinschaftlich Waaren angekauft für 7000 Rub., und zwar hat dazu gegeben A: 950 Rub., B: 2380 Rub., C: 3670 Rub.; ihr Gewinst ist 4000 Rub., wie viel davon erhält Jeder?

Das gegebene, in seine noch zu bestimmenden Theile zu theilende Ganze ist hier 4000 Rub., der zu vertheilende Gewinst; das andere gegebene Ganze, die Einlage Aller, ist 7000 Rub., wovon die durch die Aufgabe bereits angegebenen Theile die Posten 950 Rub., 2380 Rub., 3670 Rub. sind.

Demnach muß die Einlage Aller (E) sich verhalten zu der Einlage jedes Einzelnen (e), wie der Gewinst (G) oder der Verlust (V) Aller zu dem Gewinst (g) oder dem Verlust (v) jedes Einzelnen, d. i. E : e = G (oder V) : g (oder v), oder alternando: Die Einlage Aller zum Gewinst oder Verlust Aller, wie die Einlage jedes Einzelnen zum Gewinst oder Verlust jedes Einzelnen, d. i. E : G (od. V) = e : g (od. v). Dieß erste und bei allen in dem gegebenen Exempel vorkommenden Regel-detri-Ansätzen bleibende Verhältniß der Einlage Aller zum Gewinst oder Verlust Aller, oder E : G (oder V) kürze man, wenn es angeht, ein für alle Mal ab; auch braucht man, durch Hilfe der Subtraction, ein Exempel weniger anzusetzen, als Verhältniß-Theile vorhanden sind.

Demnach

$$E : G = 7000 : 4000 = 7 : 4,$$

also

E : G =	e	: g		
7 : 4 =	950 Rub.	: x;	x =	542 Rub. $85\frac{5}{7}$ Kop.
7 : 4 =	2380	: x;	x =	1360 —
7 : 4 =	3670	: x;	x =	2097 $14\frac{2}{7}$

Summe der Gewinste 4000 Rub., Gewinst Aller, wie oben gegeben war.

Den Gewinst des C erhält man gleicher Maaßen, wenn man den Gewinst des A und B addirt, und diese Summe vom gegebenen Gewinst Aller abzieht.

Bei diesem Geschäfte ist pCt. gewonnen:

$$7 : 4 = 100 : x$$

$$x = 57\frac{1}{7} \text{ pCt.}.$$

§ 221. In dem vorigen Exempel wurde g (oder v) gesucht aus E, G, e (oder E, V, e), nach der Proportion E : G = e : g; es können aber auch die andern Größen G, e, E (oder V, e, E) gesucht werden aus den übrigen.

Gesucht G (oder V) aus E, e, g (oder v), nach der Proportion e : g (od. v) = E : G (od. V).

Z. B. Es geben A: 603, B: 1000, C: 1405, D: 1760 Mklb.. Bei der Zurückzahlung erhält B nur 645 Mk. 13 ßl. 4 Pf.. Was ist im Ganzen verloren? Was erhält Jeder zurück? Wie viel ist pCt. verloren?

A hat gegeben 603 Mklb.
B „ „ 1000 „
C „ „ 1405 „
D „ „ 1760 „
4768 Mklb.

B hat gegeben 1000 Mk.
erhält zurück 645 „ 13 ßl. 4 Pf.,
hat also verloren 354 Mk. 2 ßl. 8 Pf. = $2\frac{125}{6}$ Mk..

Es ist also e : v = 1000 : $2\frac{125}{6}$ = 6000 Mk. : 2125 Mk. = 48 Mk. : 17 Mk.; demnach ist

e : v = E : V
48 : 17 = 4768 : x

x = 1688 Mk. 10 ßl. 8 Pf., der Verlust Aller, V.

Was A, C, D zurückerhalten, findet man, wenn man zuerst ihre Verluste berechnet, und diese von ihren Einlagen abzieht.

e : v e′ v′
48 : 17 = 603 Mk. : x Mk.

Verlust des A 213 Mk. 9 ßl.
die Einlage des A war 603 „

A erhält zurück 389 Mk. 7 ßl.
B erhielt zurück 645 „ 13 „ 4 Pf.

48 : 17 = 1405 Mk. : x Mk.

Verlust des C 497 Mk. 9 ßl. 8 Pf.
hatte gegeben 1405 „

C erhält zurück 907 „ 6 „ 4 „

48 : 17 = 1760 Mk. : x Mk.

Verlust des D 623 Mk. 5 ßl. 4 Pf.
seine Einlage war 1760 „

D erhält zurück 1136 „ 10 „ 8 „

zusammen erhalten sie zurück 2079 Mk. 5 ßl. 4 Pf.
sie hatten gegeben . . . 4768 „

Verlust Aller 1688 Mk. 10 ßl. 8 Pf.,

wie oben gefunden.

Wie viel ist pCt. verloren?

48 : 17 = 100 Mk. : x Mk.

x = $35\frac{5}{12}$ pCt..

§ 222. Gesucht e aus E, G, g (oder E, V, v) mittels der Proportion V : E = v : e.

Z. B. Es verliert A: 14, B: $11\frac{2}{3}$, C: $11\frac{1}{5}$, D: $9\frac{4}{5}$, E: $9\frac{1}{10}$, F: $8\frac{2}{5}$, G: $5\frac{5}{6}$ fl. rhnl.; die ganze Einlage betrug 600, und der Verlust daran 70 fl.. Wie groß ist demnach eines Jeden Einlage gewesen, und was ist pCt. verloren?

A	verliert	14 fl. rhnl.
B	„	$11\frac{2}{3}$
C	„	$11\frac{1}{5}$
D	„	$9\frac{4}{5}$
E	„	$9\frac{1}{10}$
F	„	$8\frac{2}{5}$
G	„	$5\frac{5}{6}$
	zusammen	70 fl. rhnl.

Also verhält sich 70 : 600 = 7 : 60. Demnach ergiebt sich die Einlage des

A	7 : 60 =	14	: x;	x =	120 fl. rhnl.
B		$11\frac{2}{3}$	: x;	x =	100
C		$11\frac{1}{5}$	: x;	x =	96
D		$9\frac{4}{5}$	: x;	x =	84
E		$9\frac{1}{10}$	: x;	x =	78
F		$8\frac{2}{5}$	: x;	x =	72
G		$5\frac{5}{6}$	: x;	x =	50
					600 fl. rhnl.

Was ist pCt. verloren?

60 : 7 = 100 fl. : x fl.

x = $11\frac{2}{3}$ pCt..

§ 223. Gesucht E aus e, g, G (oder e, v, V). Die Proportion ist g : e = G : E.

Z. B. A hat eingelegt 7500 Rthlr.. Die sechs Theilnehmer gewinnen

A :	113	Rthlr.						113	Rthlr.
B :	120	„	12	gGr.	$9\frac{3}{5}$	Pf.	. .	$120\frac{8}{15}$	= $\frac{1808}{15}$
C :	60	„	6	„	$4\frac{4}{5}$	„	. .	$60\frac{4}{15}$	= $\frac{904}{15}$
D :	22	„	14	„	$4\frac{4}{5}$	„	. .	$22\frac{3}{5}$	= $\frac{113}{5}$ = $\frac{339}{15}$
E :	90	„	9	„	$7\frac{1}{7}$	„	. .	$90\frac{2}{5}$	= $\frac{452}{5}$ = $\frac{1356}{15}$
F :	45	„	4	„	$9\frac{3}{5}$	„	. .	$45\frac{1}{5}$	= $\frac{226}{5}$ = $\frac{678}{15}$
	452	Rthlr.							

Man soll aus diesen Angaben berechnen die Einlage Aller, und darauf die Einlage jedes Einzelnen; auch, wie viel pCt. gewonnen ist. g : e = G : E

113 Rthlr. : 7500 Rthlr. = 452 Rthlr. : x Rthlr.

x = 30,000 Rthlr., die Einlage Aller.

Zur Beantwortung der zweiten Frage, nach der Einlage jedes Einzelnen, dienen die Proportionen:

des A des B des C

g : e = g′ : e′ = g″ : e″ u. s. w.

113 : 7500 = $\frac{1808}{15}$: x

1695 : 7500 = 1808 : x

113 : 500 = = 1808 : x; x = 8000 Rthlr., Einlage des B,
= 904 : x; x = 4000 „ „ „ C,
= 339 : x; x = 1500 „ „ „ D,
= 1356 : x; x = 6000 „ „ „ E,
= 678 : x; x = 3000 „ „ „ F,

Hiezu die Einlage des A . . . 7500 „ ,

30,000 Rthlr..

Aus dem Ansatze, 7500 : 113 = 100 : x, ergiebt sich endlich, daß das Capital $1\frac{38}{75}$ pCt. getragen hat.

§ 224. Zur einfachen Gesellschafts-Rechnung gehören auch Aufgaben, in welchen die Verhältniß-Theile angegeben sind durch Brüche, deren Inbegriff oder Summe, wie groß diese auch sein möge, als dasjenige Ganze (E) angesehen wird, nach dessen Verhältniß-Theilen das gegebene Ganze (G) zu theilen ist.

Beispiel.

Es will Jemand eine Summe von 3500 Rthlrn., als Vermächtniß etwa, dergestalt unter 4 Personen vertheilt wissen, daß B $\frac{1}{2}$ Mal, C $1\frac{1}{4}$ Mal so viel als A, D aber noch ein Mal so viel bekomme als C. Wie groß sind die Antheile des A, B, C, D?

Die hier Statt findenden Verhältniß-Theile, deren Inbegriff das eine Ganze (E) ausmacht, nach welchem das andere Ganze (G, hier 3500 Rthlr.) zu vertheilen sein wird, sind:

für A = 1 = $\frac{4}{4}$ = 4
„ B = $\frac{1}{2}$ = $\frac{2}{4}$ = 2
„ C = $1\frac{1}{4}$ = $\frac{5}{4}$ = 5
„ D = $2\frac{1}{2}$ = $\frac{10}{4}$ = 10

zusammen 21 Theile (E),

also für die zu vertheilen vorgegebene Summe, 3500 Rthlr., d. i. G, überhaupt 21 (E) Verhältniß-Theile, woraus sich folgende Ansätze ergeben. Da 21 : 3500 = 3 : 500, so ist

$$3 : 500 = \begin{cases} 4 : x;\ x = 666 \text{ Rthlr. } 16 \text{ gGr., der Antheil des A,} \\ 2 : x;\ x = 333 \text{ " } 8 \text{ " " " " " B,} \\ 5 : x;\ x = 833 \text{ " } 8 \text{ " " " " " C,} \\ 10 : x;\ x = 1666 \text{ " } 16 \text{ " " " " " D.} \end{cases}$$

zusammen 3500 Rthlr..

Einige lösen Aufgaben dieser Art dadurch, daß sie irgend eine Zahl völlig willkürlich, also ohne allen Zweifel unrichtig, als Antheil des Einen, annehmen, danach die andern Verhältniß-Antheile berechnen, selbige alsdann sämmtlich summiren, und aus diesen unrichtigen, entweder größeren oder kleineren Antheilen der einzelnen Theilhaber und aller zusammen, die wahren Antheile eines Jeden finden.

Dieses so wenig mathematische Verfahren nennen sie regula falsi, d. h. die Regel, aus dem Falschen das Richtige zu finden, und zwar die einfache regula falsi oder die doppelte, je nachdem eine oder zwei falsch angenommene Größen dabei vorkommen. Da aber ein an sich mangelhaftes Verfahren kennen zu lernen, bisweilen auch von Nutzen sein kann, so möge die obige Aufgabe als Beispiel für diese so genannte einfache regula falsi dienen.

Angenommen, A bekäme auf seinen Antheil			530	Rthlr.,
so würde B erhalten $\frac{1}{2}$. 530	"	"	265	"
C würde erhalten $1\frac{1}{4}$. 530	"	"	$662\frac{1}{2}$	"
D bekäme $2\frac{1}{2}$. 530	"	"	1325	"
		zusammen	$2782\frac{1}{2}$	Rthlr.

Nun schließe man weiter: So viel Mal die wirklich zu vertheilende Summe (3500 Rthlr.) größer (oder kleiner) ist als die angenommene ($2782\frac{1}{2}$ Rthlr.), so viel Mal ist 1) der wahre Antheil des A größer (oder kleiner) als der angenommene, 530 Rthlr., 2) der wahre Antheil des B größer (oder kleiner) als der angenommene, 265 Rthlr. u. s. w.,

woraus sich folgende Ansätze ergeben:

Es ist $2782\frac{1}{2} : 3500 = 159 : 200$, demnach

$$\left.\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\right\} 159 : 200 = \begin{cases} 530 : x;\ x = 666 \text{ Rthlr. } 16 \text{ gGr.} \\ 265 : x;\ x = 333 \text{ " } 8 \text{ " } \\ 662\frac{1}{2} : x;\ x = 833 \text{ " } 8 \text{ " } \\ 1325 : x;\ x = 1666 \text{ " } 16 \text{ " } \end{cases}$$

zusammen 3500 Rthlr.

Die folgende Aufgabe scheint der vorigen (s. § 224 u. Beispiel dazu) ähnlich zu sein, ist es aber nicht, da bei ihr die Verhältniß-Theile zusammengenommen nicht bloß als ein Ganzes gedacht werden, sondern an sich wirklich ein Ganzes sind. Sie gehört ganz eigentlich zur Bruch-Rechnung, namentlich zur Multiplication der Brüche.

Das Vermögen eines Verstorbenen, groß 4628 Rthlr., soll laut Testaments unter fünf Erben dergestalt vertheilt werden, daß der erste $\frac{1}{4}$, der zweite $\frac{1}{12}$, der dritte $\frac{1}{36}$, der vierte $\frac{3}{8}$, der fünfte das Übrige ($\frac{19}{72}$ des Ganzen) empfange.

Hienach wird erhalten

A	"	"	$\frac{1}{4}$. 4628 Rthlr.	=	1157	Rthlr.			
B	"	"	$\frac{1}{12}$. 4628 "	=	385	"	16	gGr.	
C	"	"	$\frac{1}{36}$. 4628 "	=	128	"	13	"	4 Pf.
D	"	"	$\frac{3}{8}$. 4628 "	=	1735	"	12	"	
E	"	"	$\frac{19}{72}$. 4628 "	=	1221	"	6	"	8 "
			zusammen		4628	Rthlr.			

Hier sind die Verhältniß-Theile $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{3}{8} + \frac{19}{72} = 1$.

Zu Aufgaben der letzten Art gehören auch folgende:

Zu einer Handls-Unternehmung hat A $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{4}$, C $\frac{1}{8}$ des Ganzen, und D 8400 Rub. gegeben; den wie vielten Theil hat D an der Unternehmung, und wie viel haben A, B, C hergegeben, auch, wie viel haben dem gemäß Alle zusammen gegeben?

A, B, C haben gegeben $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{8}{24} + \frac{6}{24} + \frac{3}{24} = \frac{17}{24}$ des Ganzen, folglich hat D gegeben $\frac{7}{24}$ des Ganzen, welches gleich sein muß 8400 Rub..

Ferner, da die Verhältniß-Theile für A, B, C, D in ganzen Zahlen sind 8, 6, 3, 7, so hat man die Ansätze:

Verhältniß-Theile für D
7 : 8400 =
8 : x; x = 9600 Rub.
6 : x; x = 7200
3 : x; x = 3600
D hat gegeben 8400

demnach war überhaupt eingelegt 28800 Rub..

Wiederum legen zusammen A 4230, B 2485 Rub.. Hiezu will C so viel beitragen, daß sein Antheil $\frac{5}{12}$ des Ganzen sei. Wie viel muß demnach C hergeben?

Hier ist das Ganze $\frac{12}{12}$; davon $\frac{5}{12}$, die Einlage des C, subtrahirt, läßt $\frac{7}{12}$ als die Antheile des A und B zusammen, welche gleich sind 4230 + 2485 = 6715 Rub.. Den Antheil des C erfährt man durch die Regel detri $\frac{7}{12} : \frac{5}{12}$, oder 7 : 5 = 6715 Rub. : x Rub.; x = 4796$\frac{3}{7}$ Rub..

§ 225. Die vorige Aufgabe der Gesellschafts-Rechnung kann auch folgender Maaßen modificirt werden.

Es sollen 19600 Thlr. unter vier Personen dergestalt vertheilt werden, daß A $\frac{2}{3}$ des Ganzen + 150 Thlr., B $\frac{1}{4}$ + 270 Thlr., C $\frac{5}{6}$ — 120 Thlr., und D $\frac{7}{8}$ — 230 Thlr. erhalten; wie groß wird der Antheil eines Jeden sein.

Die Verhältniß-Theile sind $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, oder auf gleichen Nenner gebracht $\frac{16}{24}$, $\frac{6}{24}$, $\frac{20}{24}$, $\frac{21}{24}$, und in ganzen Zahlen 16, 6, 20, 21, zusammmen also 63 Theile.

Aber 150 Thlr. + 270 Thlr. — 120 Thlr. — 230 Thlr.

ergeben zusammen 70 Thlr. Überschuß über die 63 Verhältniß-Theile; wecher Überschuß daher von der zu vertheilenden Geld-Summe abzuziehen ist, nämlich 19600 — 70 = 19530 Thlr.. Es sind demnach 63 und 19530 in Verhältniß zu setzen, daraus die verschiedenen Antheile zu berechnen, und diese, der Aufgabe gemäß, zu vermehren oder zu vermindern.

Das Verhältniß 63 : 19530 giebt das abgekürzte 1 : 310; man hat demnach

1) 1 : 310 = 16 : x; x = 4960 Thlr.
Antheil des A = 4960 + 150 Thlr. = 5110 Thlr.

2) 1 : 310 = 6 : x; x = 1860 Thlr.
Antheil des B = 1860 + 270 Thlr. = 2130 Thlr.

3) 1 : 310 = 20 : x; x = 6200 Thlr.
Antheil des C = 6200 — 120 Thlr. = 6080 Thlr.

4) 1 : 310 = 21 : x; x = 6510 Thlr.
Antheil des D = 6510 — 230 Thlr. = 6280 Thlr.

zusammen 19600 Thlr.

§ 226. Wenn hingegen der Überschuß der Posten, die noch über die Summe der Verhältniß-Theile den Theilhabern zu verabreichen sind, nicht das Zeichen +, sondern das Zeichen — hat, also die auszuzahlende Summe kleiner sein würde als die Summe der Verhältniß-Theile angiebt, so ist diese auszuzahlende Summe um das ihr in Gemäßheit der Verhältniß-Theile Fehlende zu vermehren.

Beispiel. Es sollen 15140 Thlr. unter drei Personen so vertheilt werden, daß wenn A $\frac{4}{5}$ — 400 Thlr. erhält, B $\frac{2}{3}$ — 250 Thlr., und C $\frac{2}{9}$ + 550 Thlr. erhalte; wie viel hat Jeder zu bekommen?

Die Verhältniß-Theile sind $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, d. h. $\frac{36}{45}$, $\frac{30}{45}$, $\frac{10}{45}$, also 36, 30, 10, deren Summe 76. Die hinzu zu fügenden und abzuziehenden Posten sind — 400, — 250, + 550 = — 100.

Die Geld-Summe ist daher zu vertheilen nach dem Verhältnisse 76 : 15240, oder 19 : 3810.

1) $19 : 3810 = 36 : x$; $x = 7218\frac{18}{19}$ Thlr.

Antheil des A $= 7218\frac{18}{19} - 400$ Thlr. $= 6818\frac{18}{19}$ Thlr.

2) $19 : 3810 = 30 : x$; $x = 6015\frac{15}{19}$ Thlr.

Antheil des B $= 6015\frac{15}{19} - 250$ Thlr. $= 5765\frac{15}{19}$ Thlr.

3) $19 : 3810 = 10 : x$; $x = 2005\frac{5}{19}$ Thlr.

Antheil des C $= 2005\frac{5}{19} + 550$ Thlr. $= 2555\frac{5}{19}$ Thlr.

zusammen 15140 Thlr.

§ 227. Folgende Aufgabe der einfachen Gesellschafts-Rechnung verlangt, daß man eine vorgegebene Zahl nicht nach einem vorgeschriebenen Verhältnisse allein, sondern nach mehren unter einander nicht zusammenhängenden Verhältnissen theile. Diese Verhältnisse mache man zuvörderst (§§ 126, 127) zusammenhängend, und verfahre sodann nach den für die Gesellschafts-Rechnung gegebenen Regeln.

Z. B. Es sollen 4032 Rub. unter drei Personen so vertheilt werden, daß der Antheil des A sich zum Antheil des B verhalte, wie 2 : 3, und der Antheil des B zum Antheil des C, wie 8 : 7. Diese Verhältnisse, selbige zusammenhängend gemacht, sind 16 : 24, und 24 : 21. Die Verhältniß-Theile sind also 16, 24, 21; deren Summe ist 61, folglich wird sich verhalten

$$61 : 4032 = \begin{cases} 16 : x; & x = 1057 \text{ Rub. } 57\frac{3}{61} \text{ Kop.} \\ 24 : x; & x = 1586 \text{ Rub. } 36\frac{4}{61} \text{ Kop.} \\ 21 : x; & x = 1388 \text{ Rub. } 6\frac{3}{61} \text{ Kop.} \end{cases}$$

zusammen 4032 Rub..

§ 228. Bei den bisherigen Exempeln der Gewinst- und Verlust-Rechnung waren die Zeiten gleich, die eingesetzten Capitalien aber ungleich: eben so wohl aber können die Capitalien sämmtlich gleich, die Zeiten hingegen ungleich sein.

So wie sich in jenem Falle der Gewinst eines Jeden nach der Größe der Capitalien richtet, so richtet sich in diesem Falle der Gewinst nach der Länge der Zeit, nämlich: Die Summe der Jahre, Monate oder Tage, da die Capitalien des A, B, C u. s. w. zusammen ausgestanden, verhält sich zu der Zeit, da eines Jeden Capital ausgestanden, wie der ganze Gewinst zum Antheil eines Jeden.

Z. B. A giebt am 1. Februar, B am 15. April, C am 8. August jeder 625 Rub.; wie viel bekommt Jeder am letzten November von 200 Rub. Ertrag?

Des A Capital steht 10, des B $7\frac{1}{2}$, des C $3\frac{3}{4}$ Monat, zusammen $21\frac{1}{4}$ Monat, in welcher Zeit die gesammten Capitalien 200 Rub. eingebracht haben; darum findet man die Antheile des A, B, C durch die Ansätze:

Monat Rub. Ertrag.

$21\frac{1}{4} : 10 = 200 : x;\ x = 94$ Rub. $11\frac{3}{17}$ Kop.

$21\frac{1}{4} : 7\frac{1}{2} = 200 : x;\ x = 70$ Rub. $58\frac{4}{17}$ Kop.

$21\frac{1}{4} : 3\frac{3}{4} = 200 : x;\ x = 35$ Rub. $29\frac{7}{17}$ Kop.

überhaupt 200 Rub..

Um das bleibende Verhältniß der Summe der Monate für A, B, C zum ganzen Gewinst ein für alle Mal abzukürzen, kann man alternando schließen, $21\frac{1}{4} : 200$, d. i. $\frac{85}{4} : 200$, oder 85 : 800, und endlich 17 : 160.

Die Größe der Capitalien (wie oben 625 Rub.) braucht, weil die Capitalien sämmtlich gleich sind, und deshalb in keine Betrachtung kommen, auch im Exempel nicht angegeben zu werden; eben wie, bei den Exempeln der Gesellschafts-Rechnung, in denen die Zeit gleich, die Capitalien aber verschieden waren, die gleichen Zeiten nicht zur Sprache kamen.

§ 229. Wenn aber die eingesetzten Capitalien sowohl, als auch die Zeiten, da diese Capitalien ausgestanden, ungleich sind, so steht der Gewinst oder Verlust im zusammengesetzten Verhältnisse der Einlagen und der Zeiten; weshalb auch Aufgaben dieser Art Aufgaben der zusammengesetzten Gewinst- und Verlust-Rechnung heißen.

§ 230. Man bringe zuvörderst sämmtliche Capitalien auf eine gleiche Zeit, indem man bestimmt, wie groß jedes der Capitalien sein müßte, um in einer gewissen Zeit, z. B. in einem Jahre oder in einem Monate, eben so viel Zins zu tragen, wie das gegebene Capital in der gegebenen Zeit trägt. Diese Berechnung geschieht nach der umgekehrten Regel detri; denn je kürzer die Zeit ist, da ein Capital ausstehet, desto größer muß dieses sein, um eben denselben Zins einzubringen.

Beispiel.

A giebt am 1. März 1275 Rub., B am 15. April 600, C am 1. October 3900 Rub., am letzten December sollen 1850 Rub. Gewinst vertheilt werden.

Des A Capital hat demnach 10, des B $8\frac{1}{2}$, des C 3 Monat gestanden.

Es ist gleich viel, ob 1275 Rub. stehen 10 Monat, oder ob ein 10 größeres Capital (12750 Rub.) eine 10 Mal kürzere Zeit

(1 Monat) ausstehe; gleicher Maaßen trägt 600 Rub. in $8\frac{1}{2}$ Mon. eben so viel als $8\frac{1}{2} \cdot 600 = \frac{17}{2} \cdot 600 = 5100$ Rub. in 1 Monat; und 3900 Rub. für 3 Monat trägt so viel als das dreifache Capital (11700 Rub.) in 1 Monat.

Man multiplicire demnach jedes gegebene Capital in die gegebene zugehörige Zeit, um das Capital für die Einheit derjenigen Zeit zu bestimmen, welche mit jener Zeit gleichen Namen hat (hier 1 Monat), und setze darauf an: Die Einlage Aller für 1 Monat zum Gewinst Aller, wie die Einlage eines Jeden für 1 Monat zum Gewinst eines Jeden, also, da das Verhältniß von E : G, nämlich 29550 : 1850 das abgekürzte 591 : 37 giebt:

$$591 : 37 = \begin{cases} 12750 : x; & x = 798 \text{ Rub. } 22\frac{66}{197} \text{ Kop.} \\ 5100 : x; & x = 319 \text{ Rub. } 28\frac{184}{197} \text{ Kop.} \\ 11700 : x; & x = 732 \text{ Rub. } 48\frac{144}{197} \text{ Kop.} \end{cases}$$

überhaupt 1850 Rub..

§ 231. Die Mischungs- oder Vermischungs-Rechnung geschieht nach den für die einfache Gewinst- oder Verlust-Rechnung ertheilten Regeln. Auch hier kann man, der leichteren Übersicht wegen, die Summe der gegebenen Verhältniß-Theile einer anzufertigenden Mischung mit E, den Verhältniß-Antheil jedes einzelnen Ingrediens mit e, die überhaupt anzufertigende Quantität der Mischung mit G, und die Quantitäten der zu dieser Mischung erforderlichen einzelnen Ingredienzien mit g bezeichnen, so daß auch für diesen Fall der Theilung einer gegebenen Zahl nach gewissen vorgeschriebenen Verhältnissen, wie auf alle zu Anfange dieses Capitels (§ 219) angegebenen Fälle, wo diese Theilung vorkommt, jene für die Gewinst- und Verlust-Rechnung angegebene Proportion

$$E : e = G : g$$

oder

$$E : G = e : g$$

anzuwenden ist.

Wenn zu feinem rothem Siegel-Lack 1 Theil Kreide, 4 Theile dicker Terpenthin, 6 Theile Zinnober und 6 Theile Schellack, zusammen 17 Theile gehören; wie viel von jedem kommt auf 85 ℔. Siegel-Lack?

17 : 85, oder 1 : 5, also

1 : 5 = 1 : x; x = 5 ℔. Kreide
1 : 5 = 4 : x; x = 20 „ Terpenthin
1 : 5 = 6 : x; x = 30 „ Zinnober
30 „ Schellack

zusammen 85 ℔. Siegel-Lack.

Wenn Ingredienzien sich nicht völlig zu wenigstens scheinbar homogenen Theilen (wie z. B. verschiedene Thee-Sorten), oder zu einem wirklich homogenen Stoffe (z. B. Kreide, Terpenthin, Zinnober und Schellack zu rothem Siegel-Lack) verbinden lassen, so macht eine solche Verbindung keine Mischung, sondern ein Gemenge aus; wie z. B. die Ingredienzien für Räucher-Pulver nach der Berliner Pharmakopöe; nämlich (ohne die noch hinzu zu setzenden Öle) Styrax, Benzoe-Harz, Bernstein, Cascarillen-Rinde, Veilchen-Wurzel, Zimmet, Rosenblätter, welche alle im Räucher-Pulver besonders aufgefunden werden können.

§ 232. Die Durchschnitts-Regel ist im Wesentlichen nur ein anderer Fall der Mischungs-Rechnung, da nämlich bestimmte Quantitäten mehrer Waaren einerlei Art von verschiedenen Preisen gemischt werden. Weil die ganze Mischung so viel kostet, als alle zu einander gemischten Theile einzeln gekostet hätten, so wird man die zu mischenden Theile, wie die Preise dafür, beiderseits zu addiren haben, und dann durch eine einfache Regel detri, deren drittes Glied 1 ist, also durch eine bloße Division sämmtlicher zu mischender Theile in die Summe ihrer verschiedenen Preise, den Preis einer Einheit der Mischung erhalten.

Man mischt nämlich

25 ℔. Thee	à 350 Kop.,	macht	87 Rub.	50 Kop.
18 „ „	à 325 „	„	58 „	50 „
16 „ „	à 285 „	„	45 „	60 „
8 „ „	à 220 „	„	17 „	60 „
67 ℔. Thee		„	209 Rub.	20 Kop.;

demnach:

$$67\ ℔. : 209\ \text{Rub. } 20\ \text{Kop.} = 1\ ℔. : x\ \text{Rub.}$$

$$x = 3\ \text{Rub. } 12\tfrac{6}{17}\ \text{Kop.}.$$

§ 233. Aus einem Exempel der Vermischungs-Rechnung entsteht alle Mal ein Exempel der Durchschnitts-Rechnung, wenn man der Quantität, die von jedem Ingrediens zu einer Mischung genommen ist, ihren Preis per Einheit des Maaßes oder Gewichts beisetzt, danach den Preis für die ganze Quantität dieses Ingrediens berechnet, und die Summe von den Preisen sämmtlicher, die Mischung ausmachenden Ingredienzien durch die Anzahl der Einheiten dividirt, welche in der Mischung enthalten sind.

So für obiges Exempel der Vermischungs-Rechnung:

5 ℔. feingestoßene Kreide à 4 Kop. kosten	— Rub.	20 Kop.
20 „ Terpenthin à 16 Kop. kosten . . .	3 „	20 „
30 „ Zinnober à 150 Kop. kosten . .	45 „	— „
30 „ Schellack à 25 Kop. kosten . . .	7 „	50 „
85 ℔. Siegel-Lack kosten	55 Rub.	90 Kop.,

folglich kostet 1 ℔. Siegel-Lack $65\tfrac{1}{17}$ Kop..

Indessen kommt die Durchschnitts-Rechnung auch in Fällen vor, wo von einer eigentlichen Vermischung nicht die Rede sein kann, sondern wo man nur nach dem Durchschnittspreise einer Waare fragt. Es hat z. B. Jemand Flachs angekauft: 5 Ltl. à 190 Kop., 8 Ltl. à 185 Kop., 10 Ltl. à 182 Kop., 11 Ltl. à 176 Kop., 6 Ltl. à 150 Kop., 5 Ltl. à 145 Kop., 12 Ltl. à 135 Kop.. — Im Durchschnitt kostet also das Ltl. 1 Rub. $65\frac{6}{7}$ Kop..

(Übungs-Exempel, XXII, Nr. 1—79.)

VII. Die Alligations-Regel.

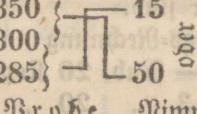
§ 234. Der gründliche Karsten sagt in seinem Lehrbegriff der gesammten Mathematik § 249:

„Mit der Vermischungs-Rechnung steht die Alligations-Rechnung in einer ziemlich nahen Verwandtschaft; nur besteht „der Unterschied darin, daß bei jener das Verhältniß der „gesuchten Theile des Ganzen gegen einander schon gegeben „ist, und bei dieser erst gesucht werden muß, bevor man „die Theile selbst finden kann;" als welches nach den Lehren für die Vermischungs-Rechnung geschieht.

§ 235. Die Aufgabe der Alligations-Rechnung ist im Allgemeinen folgende: Zwischen den Preisen für zwei gleiche Quantitäten mischbarer Waare von einerlei Art, aber von verschiedenen Sorten wird der Preis von derselben Quantität einer Mittel-Sorte festgesetzt; man soll finden, in welchem Verhältnisse jene beiden Sorten zu mischen sind, damit die Mischung nicht mehr und nicht weniger werth sei, als der Mittelpreis groß ist.

Auflösung. Die Differenz des niedrigsten Preises vom mittleren zeigt an, wie viel Theile von der besseren, und die Differenz des Mittelpreises vom größten Preise, wie viel Theile von der schlechteren Sorte zu nehmen sind.

Exempel. Thee zu 350 Kop. und anderer zu 285 Kop. das Pfund sollen zu 300 Kop. das Pfund gemischt werden; wie viel Theile sind dazu von jeder der beiden Sorten zu nehmen?



3 Theile von der besseren Sorte,

10 Theile von der schlechteren Sorte.

Probe. Nimmt man nämlich 3 Ltl. des besseren Thee's, so hat man in jedem Pfunde an Werth 50 Kop. mehr als in einem Pfunde zum Mittelpreise; das macht 150 Kop.: nimmt man hiezu 10 Ltl. der schlechteren Sorte, so hat man in jedem Pfunde an

Werth 15 Kop. weniger als in jedem Pfunde zum Mittelpreise; dieses macht auch 150 Kop..

So wird für den Mittelpreis die im letzten Falle mangelnde Summe (150 Kop.) ersetzt durch diejenige Summe (150 Kop.), welche, wegen des größeren Preises, im ersten Falle zu groß ist; weshalb 3 *U.* à 350 Kop. + 10 *U.* à 285 Kop. eben den Werth haben müssen, den 3 *U.* à 300 Kop. + 10 *U.* à 300 Kop. haben.

Mittels einer Rechnungs-Probe untersucht man, ob in der geschehenen Berechnung eines Exempels ein Fehler vorgefallen oder nicht; ein Beweis hingegen giebt in der gehörigen Ordnung die Gründe an für die Richtigkeit irgend eines Verfahrens oder einer besonderen Lehre. Probe und Beweis sind daher beide wohl von einander zu unterscheiden, und eine Probe macht einen Beweis keines Weges überflüssig, da selbige, wie im obigen Falle, bloß anzeigt, daß die Regel bei einem berechneten Exempel zutrifft, während der Beweis darthut, daß die Regel in allen Fällen zutreffen muß. Doch müssen Anfänger hinsichtlich der Alligations-Regel mit der Probe, die sie, wenn sie wollen, für jedes von ihnen berechnete Exempel anstellen können, sich begnügen, bis sie diejenigen Kenntnisse erlangt haben, die nöthig sind, um den dahin gehörigen Beweis zu fassen, nämlich die ersten Elemente der Buchstaben-Rechenkunst und der Algebra. Darum wird es gut sein, wenn der Schüler den Beweis zu seiner Zeit hier findet.

Beweis für die Alligations-Regel. Man nehme x Theile, nämlich Pfund, Stof u. s. w. von der besseren, y Theile von der schlechteren Sorte. Wenn nun eine Einheit oder ein Theil der besseren Sorte kostet p Rubel, Thaler u. s. w., so kosten x Theile px Rub., Thlr. u. s. w., und wenn ein Theil der schlechteren Sorte kostet q Rub., Thlr. u. s. w., so kosten y Theile qy Rub., Thlr.. Also kostet die ganze Mischung, d. i. x + y Pfund, Stof u. s. w., so viel als die zusammengemischten Theile einzeln kosten, px + qy Rub., Thlr. u. s. w., und eine Einheit der Mischung (1 Pfund, Stof u. s. w.), wegen der Regel detri $x + y : px + qy = 1 : ?$, kostet $\frac{px + qy}{x + y}$. Dieses aber ist zugleich der vestgesetzte Mittelpreis. Nennt man denselben m, so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{px + qy}{x + y} = m;$$

den Nenner weggeschafft:

$$px + qy = m(x + y) = mx + my.$$

Hierauf die Größen mit x auf die eine Seite, die Größen mit y auf die andere Seite gesetzt:

$$px - mx = my - qy,$$

und aus jedem Theile dieser Gleichung die gleichen Factoren gezogen:

$$x(p - m) = y(m - q);$$

endlich aus dieser Gleichung (§ 140) eine Proportion gebildet, indem aus x (p — m) die äußeren, aus y (m — q) die mittleren Glieder hergestellt werden

$$x : y = m - q : p - m.$$

Demnach verhält sich die Menge x der besseren Sorte zu der Menge y der schlechteren Sorte, wie die Differenz des niedrigsten Preises q vom Mittelpreise m zu der Differenz des Mittelpreises m vom höheren Preise p; oder wie oben mit andern Worten: Die Differenz des niedrigsten Preises q vom Mittelpreise m giebt an, wie viel Theile von der besseren Sorte, und die Differenz des Mittelpreises m von dem höheren, p, zeigt an, wie viel Theile von der schlechteren Sorte zu nehmen sind.

Man wende diesen Beweis auf das oben gegebene Exempel an:

Thee zu 350 Kop. (p) und anderer zu 285 Kop. (q), sollen zu 300 Kop. (m) das Pfund gemischt werden; wie viel Theile sind dazu von jeder der beiden Sorten zu nehmen (d. i., wie groß ist sowohl x als y?)?

Nach obiger Proportion findet man das Verhältniß von $x : y = 300 - 285 : 350 - 300 = 15 : 50 = 3 : 10$.

Dies kann man, nach dem zuerst angegebenen Ausdrucke der Regel, so ansetzen:

350	15	3 Theile von der besseren,
300		
285	50	10 Theile von der schlechteren Sorte.

Zusammen sind dieß 13 (oder x + y) Theile, d. h. hier Pfunde, welche $3 \times 350 + 10 \times 285$ Kop. (px + qy Kop.) kosten; also kostet 1 Ø. der Mischung $\frac{3 \times 350 + 10 \times 285}{13}$ (d. i. $\frac{px + qy}{x + y}$) $= \frac{1050 + 2850}{13}$ $= 300$ Kop., welches zugleich der festgesetzte Mittelpreis, m, ist.

§ 236. Wenn bei der Alligations-Rechnung, nachdem die Verhältniß-Theile gefunden worden, zugleich die Quantität der Mischung vorgeschrieben ist, so ist (§ 234) die fernere Rechnung eine Aufgabe der Mischungs-Rechnung. Sollen nämlich von diesem Thee zu 300 Kop. oder 3 Rubeln 32 Ø. gemischt werden, so hat man

13 Ø.: 3 Ø. = 32 Ø.: x Ø.; $x = 7\frac{5}{13}$ Ø. = 7 Ø. 12 Lt. $1\frac{3}{13}$ Qt. v. besseren,
13 „ : 10 „ = 32 „ : x „; $x = 24\frac{8}{13}$ „ = 24 „ 19 „ $2\frac{10}{13}$ „ v. schlechteren.
zusammen 32 Ø.

Zur Probe dieses Exempels der Vermischungs-Rechnung die folgende Durchschnitts-Rechnung (nach § 233):

Diese 32 Ø. à 3 Rub. kosten 3×32 Rub., d. i. 96 Rub; eben dasselbe kosten auch

$7\frac{5}{13}$ Ø. à 350 Kop.	. .	25 Rub. $84\frac{8}{13}$ Kop.
$24\frac{8}{13}$ „ à 285 „	. .	70 „ $15\frac{5}{13}$ „
32 Ø.	. . . . .	96 Rub.,

also kostet 1 Ø. der Mischung 3 Rub., wie verlangt war.

§ 237. Aus zwei Sorten Wein, wovon 1 Stof des besseren 180 Kop., 1 Stof des schlechteren 135 Kop. kostet, soll eine Mittelsorte gemischt werden, wovon der Anker (30 Stof) 48 Rubel werth sei.

Der gegebene Mittelpreis ist demnach für 1 Stof 160 Kop..

180	25	5 Theile vom besseren
160		
135	20	4 Theile vom schlechteren,

zusammen 9 Theile von beiden Sorten, also

$9 : 5 = 30 : x$; $x = 16\frac{2}{3}$ Stof.
$9 : 4 = 30 : x$; $x = 13\frac{1}{3}$ Stof.

zusammen 30 Stof der Mischung.

Probe mittels Durchschnitts-Rechnung: Denn

$16\frac{2}{3}$ Stof à 180 Kop. kosten 30 Rub.
$13\frac{1}{3}$ „ à 135 „ kosten 18 „

30 Stof kosten . . . . . 48 Rub.,

also kostet, der Bedingung gemäß, 1 Anker oder 30 Stof der Mischung 48 Rub.; welches genau übereinkommt mit dem Preise der 30 Stof à 160 Kop..

§ 238. Haben die gegebenen Preise, aus denen das Verhältniß der zu mischenden Theile gefunden werden soll, nicht einerlei Benennung, so müssen sie vor allen Dingen solche erhalten; z. B.

Wein zu 2 Rthlrn. und anderer zu 20 gGr. soll zu einem Weine für 1 Rthlr. gemischt werden; wie viel Theile von jedem?

2 Rthlr. — —	48 gGr.	4	1 Theil der besseren,
1 Rthlr. — —	24 „		
— 20 gGr.	20 „	24	6 Theile der schlechteren Sorte.

§ 239. Wollte man drei- oder mehrerlei Sorten einer Waare mit einander mischen, z. B. aus einem Wein zu 160 Kop., einem andern zu 100 Kop., einem dritten zu 80 Kop. eine Mischung zu 120 Kop. machen, so hat man zuerst diejenigen Sorten, zwischen welche der aufgegebene Mittelpreis *nicht* fällt, nämlich die Sorten, zu 100 und zu 80 Kop. zu mischen, welches *auf unzählig verschiedene Weise*, in ganzen Stöfen wie in Brüchen derselben, nach der Durchschnitts-Regel geschehen kann. Demnach wird man auch *unzählige Sorten* zu irgend einem Durchschnitts-Preise herausbringen. Man mische nämlich den Wein zu 100 und zu 80 Kop. in irgend einem Verhältnisse. Nimmt man von jedem 1 Stof, so hat man 2 Stof : 1 Rub. 80 Kop. = 1 Stof : x Kop.; $x = 90$ Kop.; nimmt man von der besseren Sorte 2 Stof und von der schlechteren 1 Stof, so hat man 3 Stof : 280 Kop. = 1 Stof : x Kop.; $x = 93\frac{1}{3}$ Kop.; nimmt man von der besseren Sorte Wein 1 Stof, und von der schlechteren 2 Stof, so hat man

3 Stof : 260 Kop. = 1 Stof : x Kop.; x = $86\frac{2}{3}$ Kop., und so bis in's Unendliche fort. Eine solche Aufgabe, die eine unbestimmte Anzahl Auflösungen zuläßt, wird eine unbestimmte Aufgabe genannt.

Ist solcher Gestalt der Durchschnitts-Preis vestgestellt, so sucht man aus diesem und aus dem Preise für diejenige Sorte, die von den drei anfänglich gegebenen noch übrig ist, nach der Alligations-Regel die verlangte Mischung zum Mittelpreise 120 Kop..

Gesetzt, man wolle zwischen 100 Kop. und 80 Kop. die Mischung zum Durchschnitts-Preise 90 Kop., so hat man die beiden Preise 160 Kop. und 90 Kop., so wie den angesetzten Mittel-Preis 120 Kop.. Hieraus findet man, daß von der besseren Sorte 3, von der schlechteren 4 Theile zu nehmen sind.

Die Beschickung des Schmelz-Tiegels.

§ 240. Metalle mit einander zusammenschmelzen, heißt sie legiren.

Gold mit Silber legirt, giebt weiße, Gold mit Kupfer giebt rothe, Gold mit Silber und Kupfer gemischte Legirung. Eine Mark (ein halbes Pfund cölnischen Handelsgewichts) reinen Goldes oder Silbers heißt eine feine Mark, eine Mark legirten Goldes oder Silbers eine rauhe Mark.

Das dem edleren Metalle beigemischte unedlere, sei es nun Silber oder Kupfer, wird, weil es keinen Gehalt des edleren hat, in den dahin gehörigen Exempeln der Alligations-Rechnung, vielmehr der Beschickungs-Rechnung, als 0 aufgeführt, obgleich sein Werth in der That keines Weges 0 ist; weshalb dieser Werth des unedleren Metalles, zumal bei bedeutenderen Werken, sehr zu berücksichtigen, und daher nothwendig in der Berechnung aufzuführen ist; als worüber weiter unten (§ 244) ein Beispiel.

Je nachdem Silber sowohl als Gold mehr oder weniger Zusatz des unedleren Metalles, des Silbers an Kupfer, des Goldes an Silber oder Kupfer, enthalten, sind auch beide, jedes für sich, an Werth verschieden. Um in einer Mischung diesen innern Gehalt an dem edleren Metalle, oder dessen Feingehalt, zu bestimmen, theilt man das halbe Pfund cölnischen Handelsgewichts, genannt die cölnische Mark, Silber in 16, Gold in 24 gleiche Theile; jene nennt man Loth, diese Karat.

Dieser Eintheilung gemäß ist reines oder feines Gold 24-karatiges, ein Karat Zusatz des unedleren Metalles giebt 23-kara-

tiges, zwei Karat Zusatz giebt 22-karatiges, u. s. f.. — Reines oder feines Silber ist 16-löthiges, ein Loth Zusatz des unedleren Metalles ist 15-löthiges, zwei Loth Zusatz 14-löthiges u. s. f.. Hiebei ist jedoch zu bemerken, daß das so genannte feine Gold oder Silber, wie es unter diesem Namen aus den Bergwerken kommt, nicht eigentlich völlig reines Gold oder Silber ist (jenes ist meistens nur $23\frac{1}{2}$-karatig, dieses $15\frac{7}{8}$-löthig), und müssen selbige, wenn man sie zu besonderem Gebrauche völlig rein haben will, noch chemisch geläutert werden. Für den gewöhnlichen Gebrauch kann man durch Legirung desselben mit den niederen Graden jeden verlangten Mittel-Grad hervorbringen.

Außerdem wird ein Karat Goldes in 12 Grän, ein Loth Silbers in 18 Grän getheilt, so daß eine Mark Goldes hat $24 . 12 = 288$ Grän, und 1 Loth Silbers $16 . 18$, d. i. ebenfalls 288 Grän. — Ein Grän ist ferner $227\frac{5}{9}$ Richtpfennigs-Theile; darum enthält ein Karat Goldes $12 \times 227\frac{5}{9} = 2730\frac{2}{3}$ Richtpfennigs-Theile, und 1 Loth Silbers $= 18 \times 227\frac{5}{9} = 4096$ Richtpfennigs-Theile.

Dieses Gold- und Silber-Gewicht, das cölnische Mark-Gewicht, hat Kaiser Karl V. im Jahr 1524 für das ganze deutsche Reich als allgemeines Münz-Gewicht bestimmt, und gilt solches in Deutschland noch heutiges Tages für die Gold- und Silber-Probe.

Das für Rußland geltende Münzgewicht ist darum natürlicher als das cölnische Mark-Gewicht, weil zu jenem nicht ein halbes, sondern ein ganzes Pfund als einzutheilendes Gewicht genommen wird, und hat dadurch eine einfachere Einrichtung, daß sowohl für Gold als für Silber die Eintheilung gleich ist. Wie überhaupt, auch im Handel, 1 ℳ. (russisch) in 96 Solotnik (d. i. 32 Loth russisch) eingetheilt wird, so wird auch für das Münz-Gewicht 1 ℳ. Gold wie 1 ℳ. Silber in 96 Solotnik getheilt, und beide, feines Gold wie feines Silber, nennt man alsdann Gold oder Silber von der 96-er Probe. Jedes dieser Metalle, z. B. von der 84-er Probe hat in einem Pfunde 84 Solotnik des edleren Metalles und an Zusatz 12 Solotnik des unedleren. Beide edlen Metalle von der Probe $83\frac{1}{3}$ haben in einem Pfunde $83\frac{1}{3}$ Solotnik des edleren, $12\frac{2}{3}$ Solotnik des unedleren Metalles, u. s. w.. Ein Solotnik wird ferner im Münz-Gewicht wiederum in 96 gleiche Theile (Doli, Theile, Antheile vom Solotnik) getheilt, so daß auf 1 Pfund 9216 Doli kommen.

Weil demnach das Verhältniß der Löthigkeit zur Probehaltigkeit ist wie 16 : 96, d. i. wie 1 : 6, so hat man, um Löthigkeit in

Probehaltigkeit zu verwandeln, diejenige Zahl, welche die Löthigkeit einer Silber-Masse ausdrückt, mit 6 zu multipliciren; so z. B. das 14-löthige Silber ist Silber von der 84-er Probe, nach der Regel detri 16 : 96, d. i. 1 : 6 = 14 : x; x = 84; ferner $15\frac{1}{16}$-löthiges Silber ist Silber von der Probe $95\frac{2}{3}$; 13-löthiges Silber ist von der 78-er Probe; $13\frac{3}{8}$-löthiges hat die Probe $83\frac{1}{3}$ u. s. f..

Umgekehrt wird Probehaltigkeit in Löthigkeit verwandelt, wenn man die Zahl, welche die Probe angiebt, mit 6 dividirt. So ist für Silber der 84-er Probe die Löthigkeit = 84 : 6 = 14, nach der Regel detri 96 : 16, d. i. 6 : 1 = 84 : 14, u. s. w..

So wie beim Silber das Verhältniß der Löthigkeit zur Probehaltigkeit 16 : 96, d. i. 1 : 6 war, eben so ist beim Golde das Verhältniß der Karat-Haltigkeit zur Probehaltigkeit wie 24 : 96, d. i. wie 1 : 4. Man verwandelt also erstere in letztere durch Multiplication mit 4, letztere in erstere aber durch Division mit 4.

Bei diesen Reductionen darf jedoch nicht aus der Acht gelassen werden, daß das russische Pfund nicht dem cölnischen, mithin das russische halbe Pfund nicht der cölnischen Mark gleich ist. Beiderlei Gewichte müßten mittels der Ketten-Regel auf gleiche Einheit zurückgeführt werden, damit das Verhältniß nicht blos ungefähr, sondern vollkommen richtig werde. Es ist aber die cölnische Mark gleich dem preußischen halben Pfunde.

Im russischen Reiche ist gegenwärtig die gesetzliche Silber-Probe 84; Gold dürfen die Goldschmiede nach der 56-er, 72-er, 84-er und 94-er Probe (d. i. 14-, 18-, 21-, $23\frac{1}{2}$-karatiges) verarbeiten.

Der Feingehalt des Goldes oder Silbers ist in der Tiegel-Beschickung gewisser Maaßen das, was für die Waare der Preis ist, da ja aus dem Feingehalte zweier verschiedener Metalle gleicher Art, wie oben aus den Preisen, das Verhältniß bestimmt wird, nach welchem die Theile des feineren und des rauheren Metalles zu nehmen sind.

§ 241. Aus der Karat-Haltigkeit oder Löthigkeit eines gegebenen Gewichtes legirten edlen Metalles läßt sich alle Mal sein Feingehalt bestimmen, z. B.

1 Dutzend Eßlöffel aus 13-löthigem Silber wiegt 56 Lt.; wie viel fein Silber ist darin enthalten? Man setze an:

16 Lt. (d. rauhe Mark) : 13 Lt. (Feingehalt) = 56 Lt. (rauh) : x Lt. (fein)

x = $45\frac{1}{2}$ Lt. fein Silber.

§ 242. Umgekehrt findet man aus dem Feingehalt einer gegebenen Masse Goldes oder Silbers deren Karat-Haltigkeit oder Lö-

thigkeit; z. B. in $7\frac{1}{4}$ Mark (d. i. in $7\frac{1}{4} \times 16$ Lt.) Silbers sind $101\frac{1}{2}$ Lt. fein Silber enthalten; wie-viel-löthig wird das Silber sein?

116 Lt. (rauh) : $101\frac{1}{2}$ Lt. (fein) = 16 Lt. (rauh) : x Lt. (fein)

x = 14 Lt. (fein); das Silber ist also 14-löthig.

§ 243. Alligations-Exempel der nachfolgenden Art nennen die Münzmeister, auch Gold- und Silber-Arbeiter, die Beschickung des Tiegels, und verstehen darunter, den Schmelztiegel dergestalt mit Metallen von verschiedenem Gehalt zu beschicken, daß ein verlangter Gehalt daraus entstehe.

Es braucht Jemand zu einem Werke 13-löthiges Silber, hat aber nur 15- und 10-löthiges; wie viel wird er von dem feineren und wie viel von dem rauheren Silber in den Schmelztiegel legen, um 13-löthiges zu erhalten?

15	3 Mark von dem feineren,
13	
10	2 Mark von dem rauheren.

Probe. In 3 Mark des 15-löthigen Silbers sind 45 Lt. feines Silber, und in 2 Mark des 10-löthigen 20 Lt., überhaupt also in den 5 Mark sind 65 Lt., demnach in 1 Mark 13 Lt. fein Silber, wie verlangt war.

Doch braucht man nicht alle Mal, wie hier, 3 und 2 Mark zu nehmen; nach Maaßgabe des Werkes kann man auch kleinere Theile, z. B. 3 und 2 Lt., nehmen; das Verhältniß bleibt dasselbe.

Sollen 30 Mark des 13-löthigen Silbers gemacht werden, so ergeben sich die Antheile nach der Mischungs-Rechnung:

5 : 30, d. i 1 : 6 = 3 : x; x = 18 Mk.
1 : 6 = 2 : x; x = 12 „
zusammen 30 Mk..

Aus $13\frac{1}{2}$-löthigem Silber will man durch bloßen Zusatz von Kupfer 12-löthiges herstellen; wie viel hat man von jedem zu nehmen?

$13\frac{1}{2}$	12	24	8 Theile des $13\frac{1}{2}$löthigen Silbers,
12			
0	$1\frac{1}{2}$	3	1 Theil Kupfer.

Einer hat 37 Mark 8 Loth Silber, das $14\frac{1}{2}$ Lt. in's Feine hält, und will dasselbe mit 9-löthigem Silber beschicken, damit es

$12\frac{1}{2}$-löthig werde; wie viel muß er von beiderlei Silber zu den 37 Mark 8 Lt. setzen?

$14\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	7 Mark vom feineren,
$12\frac{1}{2}$			
9	2	2	4 Mark vom rauheren.

also kommen auf $37\frac{1}{2}$ Mark

$11 : 37\frac{1}{2} = 7 : x$; $x = 23\frac{19}{22}$ Mk. $= 23$ Mk. 15 Grän $124\frac{4}{33}$ Richtpfenn.-Theile.

$11 : 37\frac{1}{2} = 4 : x$; $x = 13\frac{14}{22}$ „ $= 13$ „ 11 „ $103\frac{3}{99}$ „

zusammen $37\frac{1}{2}$ Mk. $37\frac{1}{2}$ Mk..

Probe nach der Durchschnitts-Rechnung:

$23\frac{19}{22}$ Mk. à $14\frac{1}{2}$ Lt. fein Silber, macht $346\frac{1}{44}$ Lt. fein Silber,

$13\frac{14}{22}$ „ à 9 „ fein Silber, macht $122\frac{32}{44}$ „ fein Silber,

$37\frac{1}{2}$ Mk. $468\frac{3}{4}$ Lt. fein Silber;

demnach

$468\frac{3}{4} : 37\frac{1}{2} = \frac{1875}{4} : \frac{75}{2} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$ Lt. Feingehalt,

wie verlangt war.

Wollte man aber aus obigen $37\frac{1}{2}$ Mk. $14\frac{1}{2}$-löthigen Silbers durch bloßen Zusatz von Kupfer $12\frac{1}{2}$-löthiges hervorbringen, so käme die Rechnung so zu stehen:

$14\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	$\frac{25}{2}$	25 Mark Silbers,
$12\frac{1}{2}$			
0	2	2	4 Mark Kupfer.

25 Mk. Silber : 4 Mk. Kupfer $=$ $37\frac{1}{2}$ Mk. Silber : x Mk. Kupfer

$x = 6$ Mk. Kupfer;

so viel Kupfer muß zugesetzt werden.

Probe nach der Durchschnitts-Rechnung:

$37\frac{1}{2}$ Mk. Silber à $14\frac{1}{2}$ Lt. fein, machen $543\frac{3}{4}$ Lt. fein,

6 „ Kupfer à 0 Lt. fein, machen 0 „ fein,

$43\frac{1}{2}$ Mk. $543\frac{3}{4}$ Lt. fein.

demnach

$\frac{2175}{4} : \frac{87}{2} = \frac{2175}{4} \times \frac{2}{87} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$ Lt. fein Silber,

wie beabsichtigt war.

---

§ 244. Wenn gleich man bei Beschickungs-Rechnungen, die auf den Silber-Gehalt gestellt sind, das Kupfer, weil es keinen Grad von Silber hat, als 0 in Rechnung führt, so muß doch, wenn man auf den Werth des hinzu zu setzenden Kupfers sieht,

für dasselbe nicht 0, sondern sein eigentlicher Preis in die Berechnung gesetzt werden, da die Kosten für das Kupfer, zumal bei größeren Werken, keines Weges unbedeutend sind; wie aus folgendem Beispiele hervorgeht.

Einer hat $560\frac{3}{4}$ ℳ. Silbers, rechnet das Pfund zu 20 Rub. 80 Kop. (welches der Preis für Silber von der 90-er Probe, d. i. des 15-löthigen, 65 Kop. pr. Lt. russisch à 3 Solotnik ist), will dieses Silber mit Kupfer beschicken, als von welchem das Pfund 25 Kop. kostet, damit das Pfund Silber auf 19 Rub. 20 Kop. (als welches der Preis für Silber von der 84-er Probe, d. i. für 14-löthiges, 60 Kop. pr. Lt., à 3 Solotnik, ist) komme; wie viel Kupfer ist hinzu zu setzen?

20 80	1895	379 ℳ. Silber,
19 20		
25	160	32 „ Kupfer;

demnach

379 ℳ. Silb. : 32 ℳ. Kupfer = $560\frac{3}{4}$ ℳ. Silb. : x ℳ. Kupfer

$$x = 47\frac{131}{379} \text{ Pfund},$$

so viel Kupfer ist hinzu zu setzen, damit das Pfund des Silbers den Werth von 19 Rub. 20 Kop. erhalte. Damit man aber dieses Kupfer genau abwägen könne, gebe man den bei den 47 Pfunden befindlichen Bruch nach Solotnik und Theilen an; er beträgt 33 Solotnik $17\frac{81}{379}$ Doli oder Theile.

Probe mittels der Durchschnitts-Rechnung:

$560\frac{3}{4}$ $(= \frac{2243}{4})$ ℳ. Slb. à 20 Rb. 80 Kp., macht 11663 Rb. 60 Kop.

$47\frac{131}{379}$ $(= \frac{17944}{379})$ ℳ. Kupfer à 25 Kp., macht 11 Rb. 83 $\frac{243}{379}$ K.

$608\frac{145}{1516}$ Pfund der Mischung . . . . macht 11675 Rb. 43 $\frac{243}{379}$ K.

$\frac{221873}{1516}$ Pfund der Mischung . . . . kosten $\frac{442499040}{379}$ K.,

demnach

$\frac{442499040}{379} : \frac{221873}{1516} = \frac{442499040}{379} \times \frac{1516}{221873} = 480.4 = 1920$ K. $= 19$ Rb. 20 K.

wie beabsichtigt war.

Noch viel bedeutender werden die Kosten für das Kupfer, wenn man obiges Silber von der 90-er Probe, d. i. das 15-löthige Silber, beschickt zu Silber von der 78-er Probe, d. i. zu 13-löthigem (wovon das Pfund 12 Rub. 80 Kop., d. i. 40 Kop. pr. Lt. à 3 Solotnik kommt); oder zu Silber von der 72-er Probe, d. i. dem 12-löthigen (wovon das Pfund 11 Rub. 20 Kop., d. i. 35 Kop. pr. Lt. à 3 Solotnik kostet); oder zu 11-löthigem (wovon das Pfund 9 Rub. 60 Kop., 30 Kop. pr. Lt. à 3 Solotnik kostet).

Zugleich erhält man dadurch jedes Mal ein besonderes Alligations-Exempel; nämlich

20 80	1255	251	20 80	1095	219	20 80	935	187
12 80			11 20			9 60		
25	800	160	25	960	192	25	1120	224

Der Sprung von dem Preise des Silber der 84-er Probe (des 14-löthigen) zum Preise des Silbers der 78-er Probe (des 13-löthigen) rührt daher, daß, da ersteres allein die gesetzliche Probe hat, es dasjenige Silber ist, welches der Beschickung nicht erst bedarf. Der Preis für das feine (eigentlich nur für das Silber von der Probe $95\frac{2}{3}$, d. i. für das $15\frac{17}{18}$-löthige) ist Silber zu 80 Kop. p. Lt. à 3 Solotnik, und wird solches, wie schon oben bemerkt, von den Silber-Arbeitern als Zusatz gebraucht, um Silber von einer minderen Probe auf die gesetzliche zu bringen.

Sind Gold oder Silber von mehr als zweierlei Proben zu legiren, so verfahre man wie oben nach der Alligations-Rechnung bei der Mischung der Weine aus mehr als zwei Sorten (§ 239).

Aufgaben

zu

dem Lehrbuch der demonstrativen gemeinen Arithmetik.

Von

Johann Friedrich Heinrichsen,

ehemaligem Kreisschul-Lehrer.

Dorpat.

Gedruckt bei J. C. Schünmann's Wittwe und C. Mattiesen.

1855.

Der Druck dieser Schrift wird unter der Bedingung gestattet, daß nach Beendigung desselben der Abgetheilten Censur in Dorpat die vorschriftmäßige Anzahl Exemplare zugestellt werde.

Dorpat, den 19. April 1855. Abgetheilter Censor de la Croix.

I. Multiplicationen unbenannter Zahlen.

Nr.

1. 853 × 5 346 823.
2. 732 × 36 473 894.
3. 943 × 899 876 932.
4. 654 × 54 721 004.
5. 709 × 369 708.
6. 999 × 987 654 321.
7. 7 008 × 568 004.
8. 10 406 × 1 235 703.
9. 86 973 × 100 642 844.
10. 7 538 × 9 450 062 070.
11. 4 679 × 130 871 057.
12. 27 340 080 × 85 796 342.
13. 6 835 × 7 947 478 031.
14. 837 996 × 10 739 774.
15. 91 038 009 × 7 568 403.
16. 435 536 × 84 669 305.
17. 4 132 576 × 8 396 401.

Nr.

18. 7 954 × 48 373 828 526.
19. 8 397 × 1 152 661 811.
20. 5 807 × 1 015 385 858.
21. 59 871 × 72 465 734 981.
22. 100 002 433 × 36 976.
23. 7 468 × 6 789 012 345.
24. 8 365 × 186 101 595.
25. 8 956 × 51 003 686 059.
26. 5 408 × 117 021 996.
27. 9 876 × 15 962 261 004.
28. 6 957 × 28 410 855 399.
29. 9 785 × 658 731 429.
30. 64 835 × 723 968 874.
31. 795 463 × 125 142 590.
32. 300 000 000 001 326 × 70 548 936.
33. 20 000 000 984 × 64 679 256.
34. 58 297 × 6 144 583 645.

II. Divisionen unbenannter Zahlen.

Nr.

1. 28 693 299 : 4 791.
2. 846 771 965 : 8 749.
3. 243 441 461 : 8 463.
4. 713 278 440 : 9 018.
5. 14 419 906 246 : 720 347.
6. 418 195 493 : 148 877.
7. 2 706 784 157 : 456 533.
8. 2 887 174 368 : 474 552.
9. 3 939 040 643 : 6 889.
10. 5 584 059 449 : 7 921.
11. 9 659 883 693 : 804 357.
12. 17 249 876 309 : 707 281.
13. 71 234 567 890 123 : 7 538.
14. 8 753 210 123 456 : 86 973.
15. 612 345 678 901 : 4 679.

Nr.

16. 8 999 887 652 904 : 837 996.
17. 54 321 012 345 678 : 6 835.
18. 2 345 678 901 234 568 : 85 796 342.
19. 384 765 432 095 804 : 7 954.
20. 689 012 340 429 627 : 7 568 403.
21. 36 876 530 422 480 : 435 536.
22. 34 698 765 258 976 : 8 396 401.
23. 3 697 689 962 608 : 36 976.
24. 4 338 596 019 047 451 : 59 871.
25. 9 678 901 226 967 : 8 397.
26. 5 896 345 677 406 : 5 807.
27. 456 789 012 345 678 : 8 956.
28. 50 700 344 192 460 : 7 468.
29. 632 854 956 789 : 5 408.
30. 1 556 739 842 175 : 8 365.

Nr.
31. 197 654 321 012 345 : 6 957.
32. 157 643 289 675 506 : 9 876.
33. 6 445 687 032 765 : 9 785.
34. 46 938 521 987 563 : 64 835.
35. 358 210 792 758 937 : 58 297.
36. 1 293 585 183 654 321 674 : 64 679 256.

Nr.
37. 984 876 378 901 234 : 98 487 633.
38. 584 376 543 210 123 : 58 436.
39. 21 164 680 800 093 586 763 456 : 70 548 936.
40. 99 546 300 112 233 : 795 463.

III. Multiplicationen benannter Zahlen.

Nr.
1. 8 fl. holl. 10 Stv. 14 Pf. × 12.
2. 1 Twt. 5 Twk. 6 Grz. × 12.
3. 1 Lt. 15 M. 16 Lt. × 12.
4. 3 Rub. 60 Kop. × 52.
5. 14 Rth. 21 gGr. 8 Pf. × 52.
6. 5 fl. holl. 13 Stv. 10 Pf. × 52.
7. 15 Mk. 8 ßl. 9 Pf. × 52.
8. 21 „ 14 „ 8 „ × 52.
9. 13 M. 16 Lt. 2 Qt. × 52.
10. 11 Lt. 2 Qt. × 365.
11. 1 M. 6 Lt. 3 Qt. × 365.
12. 1 Rth. 4 gGr. 9 Pf. × 365.
13. 18 Stf. × 365, ? Orh..
14. 2 Mk. 12 ßl. 8 Pf. × 365.

Nr.
15. 1 fl. holl. 15 Stv. 14 Pf. × 365.
16. 3 sh. Sterl. 6 d × 365.
17. 5 Lt. 18 M. 23 Lt. 2 Qt. × 75.
18. 8 „ — „ 17 „ 3 „ × 45.
19. 35 St. 8 Lt. 9 M. 17 Lt. 2 Qt. × 7.
20. 18 „ 17 „ — „ — „ 3 „ × 96.
21. 12 „ 13 „ 14 „ 15 „ 1 „ × 365.
22. — „ — „ 2 „ 31 „ 3 „ × 730.
23. 18 „ — „ — „ — „ 3 „ × 315.
24. 3 „ 19 „ 17 „ 30 „ 3 „ × 28.
25. 3 „ 3 „ 3 „ 3 „ 3 „ × 95.
26. — „ 17 „ 18 „ — „ 3 „ × 15.
27. 33 „ 19 „ — „ 31 „ 3 „ × 48.
28. 345 Rth. 17 gGr. 9 Pf. × 512.
29. 143 St. — Lt. 18 M. 31 Lt. 3 Qt. × 365.
30. 19 „ 19 „ 19 „ 19 „ — „ × 258.
31. 24 „ 14 „ 4 „ 19 „ 2 „ × 38.
32. 538 Rth. 11 Pf. × 414.
33. 19 Lt. 19 M. 31 Lt. 3 Qt. × 475.

VI. Divisionen benannter Zahlen.

Nr.
1. 46 Orh. 3 Ank. 23 Stof. : 109.
2. 12 Brkw. 4 Pud 38 M. 84 Sol. : 14.
3. 871 „ — „ 34 „ 11 „ : 25.
4. 3239 „ 9 „ 1 „ 18 „ : 54.
5. 1938 „ 8 „ 23 „ 52 „ : 68.
6. 78 „ 9 „ 19 „ 93 „ : 99.
7. 1700 Twt. 2 Twk. : 24.
8. 359 Twt. 2 Twk. 3 Grz. : 365.
9. 7 Stb — Ltb 14 ℔ 21 Lt. : 12.
10. 474 „ 19 „ 16 „ 9 „ 1 Qt. : 475.

Nr.													
11.	939	Stb	—	Lth	15	℔	5	Lt.	:	38.
12.	5 159	„	14	„	15	„	6	„	:	258.
13.	222 747	Rth.	19	gGr.	6	Pf.			:	414.
14.	177 018	„	16	„	—	„			:	512.
15.	52 212	Stb	6	Lth	12	℔	4	Lt.	3	Qt.	:	365.
16.	1 629	„	14	„	7	„	20	„	—	„	:	48.
17.	13	„	8	„	10	„	11	„	1	„	:	15.
18.	299	„	19	„	16	„	4	„	1	„	:	95.
19.	111	„	17	„	2	„	29	„	—	„	:	28.
20.	5	„	9	„	4	„	9	„	2	„	:	730.
21.	4 630	„	9	„	3	„	30	„	1	„	:	365.
22.	1 809	„	12	„	2	„	8	„	—	„	:	96.
23.	22	„	5	„	5	„	2	„	2	„	:	75.
24.	18	„	1	„	4	„	30	„	3	„	:	45.
25.	247	„	19	„	6	„	26	„	2	„	:	7.
26.	312	„	16	„	19	„	21	„	—	„	:	36.
27.	537	„	16	„	15	„	5	„	—	„	:	94.
28.	575	Brkw.	6	Pud	24	℔	5	Sol.	:	73.

V. Alle einfachen und zusammengesetzten Factoren einer Zahl zu finden.

Welches sind, in der vorgeschriebenen Ordnung, diese von den Zahlen

Nr.	
1.	3 465.
2.	360.
3.	2 520 (d. i. 360×7).
4.	1 155.
5.	99 999 (Hiezu wird die Tabelle der Primzahlen nothwendig sein.)
6.	999 999.

VI. Größte gemeine Theiler zweier Zahlen.

Nr.		Nr.	
1.	569 386, 1 138 772.	9.	33 955 000, 50 362 056.
2.	347 265, 902 889.	10.	184 065, 694 188.
3.	47 704, 125 223.	11.	8 345, 10 014.
4.	113 778, 9 879 723.	12.	32 991, 241 934.
5.	171, 399.	13.	37 416, 54 565.
6.	2 209 680, 4 143 150.	14.	118 930, 168 201.
7.	14 040, 18 720.	15.	47 184, 240 835.
8.	4 827 160, 26 066 664.	16.	209 370, 829 504.

VII. Addition der Brüche.

Nr.

1. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{4}{15} + \frac{1}{9} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$.
2. $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{2}{3} + \frac{3}{10} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{27} + \frac{5}{12}$.
3. $\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \frac{5}{8} + \frac{4}{9} + \frac{2}{15} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{7}{10} + \frac{5}{12}$.

Nr.

4. $\frac{3}{8} + \frac{5}{24} + \frac{1}{6} + \frac{5}{21} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{3}{7}$.
5. $3\frac{3}{4} + 4\frac{4}{5} + 5\frac{5}{12} + \frac{7}{8} + \frac{2}{9} + 1\frac{5}{12} + 12\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2} + \frac{5}{18} + 7\frac{1}{10}$.
6. $\frac{6}{28} + \frac{2}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} + \frac{1}{16} + \frac{3}{14}$.
7. $2\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + 1\frac{7}{8} + \frac{1}{6} + \frac{5}{9} + \frac{7}{18} + \frac{7}{10} + 4\frac{11}{15} + \frac{8}{27} + \frac{33}{36} + \frac{11}{24}$.
8. $\frac{1}{30} + \frac{1}{8} + \frac{5}{6} + \frac{1}{2} + \frac{5}{12} + \frac{3}{8} + \frac{5}{24} + \frac{3}{5} + \frac{7}{10} + \frac{119}{120} + \frac{7}{18} + \frac{35}{60} + \frac{3}{4}$.
9. $\frac{3}{7} + \frac{5}{8} + \frac{7}{12} + \frac{5}{28} + \frac{3}{10} + \frac{2}{5} + \frac{1}{9} + \frac{8}{21}$.
10. $\frac{2}{9} + \frac{2}{7} + \frac{2}{3} + \frac{2}{11} + \frac{2}{21} + \frac{2}{15} + \frac{2}{5} + \frac{2}{77} + \frac{2}{27}$.
11. $\frac{2}{13} + \frac{1}{26} + \frac{1}{8} + \frac{2}{9} + \frac{1}{10} + \frac{2}{15} + \frac{2}{21}$.
12. $\frac{11}{16} + \frac{5}{32} + \frac{7}{15} + \frac{5}{27} + \frac{11}{12} + \frac{1}{77} + \frac{2}{11} + \frac{3}{7}$.
13. $\frac{7}{8} + \frac{5}{9} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{11} + \frac{11}{24} + \frac{13}{16} + \frac{5}{12} + \frac{13}{35} + \frac{1}{2} + \frac{15}{44}$.
14. $\frac{1}{6} + \frac{4}{9} + \frac{5}{7} + \frac{8}{5} + \frac{8}{21} + \frac{7}{45} + \frac{5}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{7}{12} + \frac{1}{3}$.
15. $\frac{5}{7} + \frac{7}{9} + \frac{17}{18} + \frac{10}{21} + \frac{62}{63} + \frac{9}{28} + \frac{3}{14} + \frac{1}{4} + \frac{3}{6} + \frac{1}{2} + \frac{14}{42}$.
16. $\frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{8} + \frac{7}{15} + \frac{5}{12} + \frac{8}{25} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{11}{30} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$.
17. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{8}{9} + \frac{9}{10} + \frac{10}{11} + \frac{11}{12} + \frac{14}{15} + \frac{17}{18} + \frac{21}{22} + \frac{23}{24} + \frac{35}{36}$.
18. $\frac{3}{8} + \frac{2}{5} + \frac{7}{88} + \frac{5}{21} + \frac{11}{24} + \frac{7}{36} + \frac{5}{66} + \frac{7}{22} + \frac{11}{35} + \frac{4}{9} + \frac{6}{7} + \frac{5}{77} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{3}{11}$.
19. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{9} + \frac{53}{54} + \frac{17}{18} + \frac{6}{11} + \frac{1}{27} + \frac{1}{6} + \frac{3}{77} + \frac{1}{11} + \frac{3}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{7}$.
20. $\frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{7} + \frac{3}{8} + \frac{6}{49} + \frac{7}{96} + \frac{8}{45} + \frac{2}{21} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{5}{18} + \frac{3}{25} + \frac{1}{6} + \frac{3}{28} + \frac{1}{35} + \frac{1}{36}$.
21. $\frac{1}{11} + \frac{3}{22} + \frac{29}{792} + \frac{7}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{9}$.

VIII. Subtraction mehrer Subtrahenden.

Nr.

1. $\frac{999}{1000} - (\frac{2}{7} + \frac{1}{5} + \frac{3}{8} + \frac{1}{9})$.
2. $1718 - (5\frac{1}{4} + 3\frac{2}{5} + 4\frac{8}{9} + 5 + 6\frac{1}{3}) = 1718 - (5 + 3 + 4 + 5 + 6 + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{8}{9} + \frac{1}{3})$.
3. $5 - (\frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{7}{10} + \frac{1}{6})$.
4. $128 - (\frac{6}{7} + \frac{3}{14} + \frac{5}{9} + 7\frac{5}{6} + 82\frac{1}{2})$.
5. $356 - (5\frac{2}{9} + 4\frac{1}{3} + 12\frac{7}{8} + \frac{3}{4} + 16\frac{5}{6} + \frac{7}{15} + 8\frac{2}{3})$.
6. $26\frac{3}{8} - (2\frac{1}{9} + 3\frac{5}{8} + \frac{6}{11} + 5\frac{3}{4} + \frac{5}{6})$.
7. $14\frac{25}{36} - (2\frac{7}{8} + \frac{5}{9} + 1\frac{2}{3} + 2\frac{4}{15} + \frac{7}{12})$.
8. $153\frac{7}{5} - (5\frac{3}{4} + 16\frac{2}{5} + \frac{7}{9} + 2\frac{5}{8} + 3\frac{1}{6} + \frac{4}{15})$.

IX. Division der Decimal-Brüche.

Nr.		Nr.	
1.	0,037 | 0,8 |	10.	3,8 | 8,72 905 |
2.	5 | 0,1 978 |	11.	6,78 | 54,93 705 |
3.	41 | 0,0 008 |	12.	0,0065 | 678,00 538 |
4.	81,5 | 350,7 825 |	13.	3,6 | 7,7 834 |
5.	0,0 085 | 0,39 012 |	14.	5,738 | 0,6 385 762 |
6.	9,937 | 8,5 |	15.	0,00 057 382 | 0,6 385 762 |
7.	8,25 | 7,35 |	16.	67,89 345 | 4,25 |
8.	0,00 004 | 3,56 |	17.	2,99 856 | 705,3456 |
9.	0,076 | 4,2 276 |	18.	28,35 | 66 594 |

X. Abgekürzte Multiplication.

Nr.

1. 8,99 875 477 . . . . × 0,43 429 448 . . . .

$\sqrt{34}$: π:

2. 5,830 951 894 . . . . × 3,141 592 653 . . . .

$\frac{5}{41}$ (§ 76, Nr. 14): × $\frac{7}{113}$ (§ 76, Nr. 15):

3. 0,12195 1219 . . . . × 0,538461 538 . . . .

4. 0,23 090 567 . . . . × 8,70 005 321 . . . .

$5\frac{69}{137}$ (§ 76, Nr. 21): × $2\frac{7}{13}$ (§ 76, Nr. 15):

5. 5,50364963 5 . . . . × 2,538461 538 . . . .

$\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{9}{9}$ (§ 76, Nr. 18): × $\frac{23}{37}$ (§ 76, Nr. 12):

6. 0,8226359 8 . . . . × 0,621 621 62 . . . .

7. 8,20 058 703 . . . . × 2,00 004 089 . . . .

$5\frac{9}{28}$ (§ 78, Nr. 41): × $\frac{4}{15}$ (§ 78, Nr. 31):

8. 5,32 142857 . . . . × 0,26666666 . . . .

XI. Abgekürzte Division.

Nr.

$8,2\frac{25}{15}$ (§ 78, Nr. 38): $\frac{4}{15}$ (§ 78, Nr. 31):

1. 8,115 740 74 . . . . | 0,26666666 . . . . |

$\frac{9}{28}$ (§ 78, Nr. 41): $\frac{5}{44}$ (§ 78, Nr. 43):

2. 0,32 142857 . . . . | 0,11 36 36 36 . . . . |

$\frac{65}{101}$ (§ 76, Nr. 13): $9\frac{1}{7}\frac{4}{3}$ (§ 76, Nr. 20):

3. 0,6435 6435 . . . . | 9,56164383 . . . . |

$\frac{2}{2}\frac{2}{3}$ (§ 76, Nr. 26): $\frac{7}{300}$ (§ 78, Nr. 42):

4. 0,95 652 173 913 . . . . | 0,00233333333 . . . . |

$\frac{1}{4}\frac{16}{50}$ (§ 78, Nr. 46): $\frac{7}{1500}$ (§ 78, Nr. 40):

5. 0,425 09 09 09 . . . . | 0,004666666 . . . . |

$\frac{23}{104}$ (§ 78, Nr. 45): $\frac{135}{221}$ (§ 76, Nr. 30):

6. 0,221 153846 . . . . | 0,610 859 728 . . . . |

Der Divisor $\frac{23}{104}$ als Decimal-Bruch hat auf seine drei ersten Stellen eine 6-stellige Periode, welche neun Stellen wohl für den Divisor genügend wären; der Dividend $\frac{135}{221}$ aber als Decimal-Bruch besteht (§ 76, Nr. 30) aus einer 48-stelligen Periode, deren erste neun Stellen auf keinen Fall genügend sein können, wie solches auch aus der bei den Resultaten dieses Exempel-Buches befindlichen Probe hervorgeht. Darum werde dieses Exempel hier noch ein Mal gerechnet mit sechs Decimal-Stellen mehr sowohl im Divisor als im Dividend:

7. 0,221 153846 153846 . . . . | 0,610 859 728 506 787 . . . . |

$\frac{69}{137}$ (§ 76, Nr. 21): $6\frac{1}{4}\frac{4}{3}$ (§ 76, Nr. 20):

8. 0,50364963 503 . . . . | 6,56164383 561 . . . . |

XII. Quadrat-Wurzel-Ausziehung.

Nr.		Nr.	
1.	$\sqrt{}$34 070 569.	9.	$\sqrt{}$229 715 069 796.
2.	$\sqrt{}$3 328 482 249.	10.	$\sqrt{}$349 740 716 238 736.
3.	$\sqrt{}$4 235 276 241.	11.	$\sqrt{}$372 171 144 040 289 344.
4.	$\sqrt{}$476 849 634 849.	12.	$\sqrt{}$900 035 683 613 693 067 841.
5.	$\sqrt{}$784 978 280 100.	13.	$\sqrt{}$593 257 554 620 641.
6.	$\sqrt{}$911 877 935 929.	14.	$\sqrt{}$331 240 206 533 632 194 276.
7.	$\sqrt{}$8 063 321 616.	15.	$\sqrt{}$138 238,958 025.
8.	$\sqrt{}$347 856 962 436.	16.	$\sqrt{}$0,000 000 072 676 611 396.

17. $\sqrt{}$335 682 276 862 435 443 556 225.
18. $\sqrt{}$334 885 045 536 985 256 005 291 226 774 651 521.

Irrationale Quadrat-Wurzeln.

19. $\sqrt{}$0,76 393 203, auf 4 Decimal-Stellen zu berechnen.
20. $\sqrt{}$0,0 385 729 = $\sqrt{}$0,03|85|72|9 = $\sqrt{}$0,03|85|72|90, auf 8 Decimal-Stellen. — $\sqrt{}$4 = 2, und $\sqrt{}$9 = 3, folglich sind die Quadrat-Wurzeln aller Zahlen zwischen 4 und 9 größer als 2, und kleiner als 3, jedoch um so größer, je mehr die Zahlen sich der 9 nähern.
21. $\sqrt{}$5, auf 10 Decimal-Stellen.
22. $\sqrt{}$8, auf 10 Decimal-Stellen.
    $\sqrt{}$36 = 6, also kommen $\sqrt{}$34 und $\sqrt{}$35 der 6 nahe, jedoch $\sqrt{}$35 näher als $\sqrt{}$34.
23. $\sqrt{}$34, auf 9 Decimal-Stellen.
24. $\sqrt{}$35, auf 12 Decimal-Stellen.
    $\sqrt{}$36 = 6, u. $\sqrt{}$49 = 7, folglich sind die Quadrat-Wurzeln aller Zahlen zwischen 36 und 49 größer als 6, und kleiner als 7.
25. $\sqrt{}$37, auf 11 Decimal-Stellen.
26. $\sqrt{}$48, auf 11 Decimal-Stellen.
    $\sqrt{}$81 = 9, u. $\sqrt{}$100 = 10, weshalb die Quadrat-Wurzeln aller Zahlen zwischen 81 und 100 größer sind als 9, und kleiner als 10.
27. $\sqrt{}$82, auf 10 Decimal-Stellen.
28. $\sqrt{}$99, auf 11 Decimal-Stellen.
29. $\sqrt{}$3, auf 12 Decimal-Stellen.
30. $\sqrt{}$7, auf 11 Decimal-Stellen.
31. $\sqrt{}$5500, auf 12 Decimal-Stellen.
32. $\sqrt{}$17, auf 10 Decimal-Stellen.
33. $\sqrt{}$2, auf 18 Decimalstellen.

Nr.

$\sqrt{8\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{4,1\ 231\ 056\ 256\ (\text{s. Nr. 32})}{1,4\ 142\ 135\ 623\ (\text{s. Nr. 33})} = 2,9\,154\,759\,476..$
Es ist aber auch ferner $8\frac{1}{2} = 8.5 = 8{,}50$.

34. $\sqrt{8.50}$, wie groß bis auf 10 Decimal-Stellen? Das hiedurch erlangte Resultat ist das genauere, weil zur Erlangung des vorigen Resultats drei arithmetische Operationen mit Irrational-Zahlen, hier aber nur eine Statt gefunden.

35. $\sqrt{7\,523}$, auf 15 Decimal-Stellen.
$\sqrt{9\,801} = 99$, u. $\sqrt{10\,000} = 100$, folglich sind die Quadrat-Wurzeln aller Zahlen zwischen 9 801 und 10 000 größer als 99, und kleiner als 100.

36. $\sqrt{9\,802}$, auf 22 Decimal-Stellen.

37. $\sqrt{9\,999}$, auf 19 Decimal-Stellen.

XIII. Cubik-Wurzel-Ausziehung.

Nr.

1. $\sqrt[3]{198\,869\,911\,253}$.

2. $\sqrt[3]{51\,397\,935,788\,485\,125}$.

3. $\sqrt[3]{275\,627\,542\,488\,039}$.

4. $\sqrt[3]{192\,030\,126\,391\,557}$.

5. $\sqrt[3]{724\,054\,027\,830\,336}$.

6. $\sqrt[3]{205\,163\,949\,302\,978\,184}$.

7. $\sqrt[3]{104\,432\,905\,541\,582\,581\,860\,496\,872}$.

8. $\sqrt[3]{8\,225}$, auf 9 Decimal-Stellen.
$\sqrt[3]{1} = 1$, u. $\sqrt[3]{8} = 2$, folglich sind die Cubik-Wurzeln aller Zahlen zwischen 1 u. 8 größer als 1, u. kleiner als 2.

9. $\sqrt[3]{2}$, auf 11 Decimal-Stell..

10. $\sqrt[3]{3}$, auf 13 Decimal-Stell..

11. $\sqrt[3]{4}$, auf 12 Decimal-Stell..

Nr.

12. $\sqrt[3]{5}$, auf 10 Decimal-Stellen.

13. $\sqrt[3]{6}$, auf 12 Decimal-Stellen.

14. $\sqrt[3]{7}$, auf 11 Decimal-Stellen.
$\sqrt[3]{8} = 2$, u. $\sqrt[3]{27} = 3$, folglich sind die Cubik-Wurzeln aller Zahlen zwischen 8 u. 27 größer als 2 und kleiner als 3.

15. $\sqrt[3]{9}$, auf 11 Decimal-Stellen.

16. $\sqrt[3]{26}$, auf 12 Decimal-Stellen.
$\sqrt[3]{729} = 9$, u. $\sqrt[3]{1000} = 10$; folglich sind die Cubik-Wurzeln aller Zahlen zwischen 729 und 1000 größer als 9, und kleiner als 10.

17. $\sqrt[3]{730}$, auf 9 Decimal-Stellen.

18. $\sqrt[3]{999}$, auf 9 Decimal-Stellen.

19. $\sqrt[3]{193\,795\,474\,625\,303\,497\,754\,414\,164\,780\,258\,436\,001\,845\,438\,055\,365\,569}$.

XIV. Unzusammenhängende Verhältnisse zusammenhängend zu machen, und daraus wiederum die ursprünglichen Verhältnisse herzustellen.

Nr.
1. 3 : 5, 8 : 7;
2. 2 : 3, 4 : 5, 6 : 7;
3. 4 : 5, 3 : 8, 6 : 7;
4. 3 : 4, 5 : 6, 7 : 8, 2 : 9;

Nr.
5. 2 : 5, 3 : 7, 4 : 9, 1 : 8, 6 : 11;
6. 1 : 2, 3 : 4, 5 : 6, 7 : 8;
7. 2 : 3, 5 : 7, 8 : 9, 10 : 11;
8. 5 : 6, 9 : 4, 11 : 3,8 : 9.

XV. Geometrisches Mittel.

1. Es sei eines Rechteckes Grundlinie = 6 725,42, die Höhe = 5 179,3. Wie groß ist a) dessen Flächen-Inhalt, b) die Seite des dem Rechtecke gleichen Quadrates?

2. Eine russische Deßjätine ist ein Rechteck, dessen eine Seite 60, die andere 40 russische (7-fußige) Faden lang ist. Wie groß ist a) ihr Flächen-Inhalt in russischen Quadrat-Faden, b) die Seite des diesem Rechtecke gleichen Quadrates?

3. Ein Morgen Landes ist lang 240 Fuß rhnl., und breit 120 Fuß. Wie groß ist a) sein Flächen-Inhalt, b) die Seite des diesem Rechtecke gleichen Quadrates?

XVI. Arithmetisches Mittel.

1. Der Durchmesser vom untern Stamm-Ende eines Baumes ist 2 Fuß $9\frac{1}{2}$ Zoll, vom obern ist er 2 Fuß $4\frac{2}{3}$ Zoll; wie groß ist der mittlere Durchmesser?

2. Die Spund-Tiefe eines Fasses ist 5′ $10\frac{1}{4}$″, der Durchmesser des Bodens 4′ $6\frac{1}{3}$″; wie groß der mittlere Durchmesser des Fasses?

3. An einem Orte sind, nach den Sterblisten, in 10 Jahren 35624 Menschen gestorben; wie viel jährlich im Durchschnitte?

4. Folgende Barometer-Höhen sind an einem Orte in gleichen Zeiträumen beobachtet worden: 27″ 6‴,54; 27″ 3‴,05; 27″ 10‴,5; 26″ 0‴,45; 27″ 11‴; 28″ 0‴,2; 28″ 2‴,25; 28″ 6‴,7; 28″ 8‴,4. Wie groß ist der mittlere Stand des Barometers für diesen Ort?

5. Beim Versuchen eines Bomben-Pöllers hat man unter einerlei Umständen fünf Probewürfe gemacht; mit dem ersten hat man 2260, mit dem zweiten 2510, mit dem dritten 2365, mit dem vierten 2475, und mit dem fünften 2380 Schritte erreicht; wie groß wird unter eben diesen Umständen ohne merklichen Fehler die mittlere Wurfweite anzunehmen sein?

XVII. Die gerade Regel detri.

Nr.

1. 1 ℔. : 69 Kop. = 17 ℔. : ? Rub..
2. 1 ℔. : 95 Kop. = 49 ℔. : ? Rub..
3. 1 ℔. : 1 Rub. 25 Kop. = 171 ℔. : ? Rub..
4. 1 Elle : 3 Rub. 68 Kop. = 23 Elle : ? Rub..
5. 1 ℔. : 2 gGr. = 35 ℔. : ? Rthlr..
6. 1 Lt. : 8 Pf. = 17 Lt. : ? gGr..
7. 1 Ell. : 45 Krz. = 38 Ell. : ? fl. rhnl..
8. 1 ℔. : 18 Stv. = 28 ℔. : ? fl. holl..
9. 1 Elle : 1 Rthlr. 18 gGr. = 25 Elle : ? Rthlr..
10. 1 Elle : 4 Rthlr. 5 gGr. = 21 Elle : ? Rthlr..
11. 1 Stof : 24 Kop. = 2 Ank. 12 Stof : ? Rub..
12. 1 Stof : 32 Kop. = 1 Orh. : ? Rub..
13. 1 Stof : 1 Rub. 10 Kop. = 1 Orh. 1 Ank. 12 Stof : ? Rub..
14. 1 Ot. : 5 Kop. = 2 ℔. 16 Lt. 2 Ot : ? Rub..
15. 1 Grz. : 15 Kop. = 7 Twk. : ? Rub..
16. 1 Grz. : 25 Kop. = 3 Twt. 4 Twk. 6 Grz. : ? Rub..
17. 1 Buch : 8 gGr. = 1 Ballen 5 Rieß : ? Rthlr..

---

18. 16 ℔ : 7 Rub. 20 Kop. = 1 ℔. : ? Rub..
19. 122 ℔. : 32 Rub. 94 Kop. = 1 ℔. : ? Rub..
20. 19 Elle : 46 Rub. 55 Kop. = 1 Elle : ?Rub..
21. 29 Lt. : 21 gGr. 9 Pf. = 1 Lt. : ? Pf..
22. 17 Stof. : 12 Rthlr. 18 gGr. = 1 Stof : ? gGr..
23. 29 Elle : 28 fl. rhnl. 2 Krz. = 1 Elle : ? Krz..
24. 38 Elle : 49 Rthlr. 2 gGr. = 1 Elle : ? Rthlr..
25. 15 Elle : 37 Mk. 8 ßl. = 1 Elle : ? Mk..
26. 34 Elle : 27 Mk. 1 ßl. 6 Pf. = 1 Elle : ? ßl..
27. 48 Elle : 35 Mk. 4 ßl. = 1 Elle : ? ßl..
28. 8 ℔. : 24 Rthlr. 21 gGr. 4 Pf. = 1 Lt. : ? gGr..
29. 7 ℔. 24 Lt. : 25 Rthlr. 20 gGr. = 1 Lt. : ? gGr..
30. 2 ℔. 8 Lt. : 9 fl. holl. 9 Stv.. = 1 Lt. : ? Stv..
31. 2 ℔. 16 Lt. : 3 Mk. 5 ßl. 4 Pf. = 1 Lt. : ? Pf..
32. 1 Orh. : 57 Rub. 60 Kop. = 1 Stof : ? Kop..
33. 1 Orh. 2 Ank. 20 Stof : 117 Rub. = 1 Stof : ? Kop..
34. 7 Twk. : 8 Rub. 40 Kop. = 1 Grz. : ? Kop..
35. 25 Orh. 3 Ank. 10 Stof : 966 Rub. = 1 Stof : ? Kop..
36. 26 Pud 24 ℔. : 1117 Rub. 20 Kop. = 1 ℔. : ? Kop..
37. 14 Pud 19 ℔. : 2316 Rub. = 1 ℔. : ? Rub..

---

38. 96 ℔. : 160 Rub. = 246 ℔. : ? Rub..
39. 738 ℔. : 1230 Rub. = 45 ℔. : ? Rub..

Nr.

40. 369 Ct. : 615 Rub. = 27 Ct. : ? Rub..
41. 675 Ct. : 1215 Rub. = 45 Ct. : ? Rub..
42. 192 Elle : 336 Rub. = 864 Elle : ? Rub..
43. 5 Ct. : 6Rub. = 8 Lt. : ? Rub..
44. 12 Lt. : 288 Rub. = 15 Ct. : ? Rub..
45. 8 Lt. : 2 Rub. = 7 Ct. : ? Rub..
46. 20 Lt. : 5 Rub. = 18 Ct. : ? Rub..
47. 12 Stof : 16 Rub. = 4 Ank. : ? Rub..
48. 4 Lt. : 6 gGr. = 15 Ct. : ? Rthlr..
49. 37 Ct. : 74 Rthlr. = 19 Lt. : ? Rthlr..
50. 3 Ank. : 120 Rub. = 27 Stof : ? Rub..
51. 12 Lt. : 72 Kop. = 18 Ct. : ? Rub..
52. 15 Ct. : 3 Rub. = 2 Sct. : ? Rub..
53. 2 Elle : 8 Stv. = 15 Elle : ? fl. holl..
54. 3 Elle : 40 Krz. = 18 Elle : ? fl. rhnl..
55. 4 Elle : 12 ßl. = 38 Elle : ? Mklb..
56. 3 Lt. : 10 Pf. = 6 Ct. : ? Mklb..

---

57. 16 Lt. : 1 Rthlr. 8 gGr. = 14 Ct. 24 Lt. : ? Rthlr..
58. 324 Ct. : 40 Rthlr. 12 gGr. = 75 Ct. : ? Rthlr..
59. 399 Ct. : 49 Rthlr. 21 gGr. = 85 Ct. : ? Rthlr..
60. 348 Ct. : 116 Rthlr. = 35 Ct. 8 Lt : ? Rthlr..
61. 213 Ct. 8 Lt: : 71 Rthlr. 2 gGr. = 349 Ct. 16 Lt. : ? Rthlr..
62. 426 Ct. 12 Lt. : 142 Rthlr. 3 gGr. = 174 Ct. 24 Lt. : ? Rthlr..
63. 96 Ct. 20 Lt. : 32 Rthlr. 5 gGr. = 241 Ct. 26 Lt. : ? Rthlr..
64. 246 Ct. 4 Lt. : 82 Rthlr. 1 gGr. = 77 Ct. 19 Lt. : ? Rthlr..
65. 511 Ct. : 127 Rthlr. 18 gGr. = 87 Ct. 16 Lt. : ? Rthlr..
66. 175 Ct. 16 Lt. : 43 Rthlr. 21 gGr. = 78 Ct. 8 Lt. : ? Rthlr..
67. 17 Ct. 16 Lt. : 21 Rthlr. 21 gGr. = 146 Ct. : ? Rthlr..
68. 139 Ct. : 173 Rub. 75 Kop. = 754 Ct. : ? Rub..
69. 49 Ct. 14 Lt. : 79 Rub. 10 Kop. = 763 Ct. 8 Lt. : ? Rub..
70. 18 Ct. : 4 fl. holl. 10 Stv. = 127 Ct. 16 Lt. : ? fl. holl..
71. 255 Ct. : 63 fl. holl. 15 Stv. = 1 Ct. 8 Lt. : ? Stv..
72. 2 Ct. 24 Lt. : 13 Stv. 12 Pf. = 87 Ct. : ? fl. holl..
73. 873 Ct. 16 Lt. : 174 Rub. 70 Kop. = 73 Ct. 8 Lt. : ? Rub..
74. 176 Ct. : 193 Rub. 60 Kop. = 298 Ct. 16 Lt. : ? Rub..
75. 239 Ct. : 298 fl. holl. 15 Stv. = 28 Ct. 16 Lt. : ? fl. holl..

---

76. $2\frac{1}{2}$ Lt. : $1\frac{2}{3}$ gGr. = $2\frac{1}{8}$ Ct. : ? Rthlr..
77. $7\frac{1}{4}$ Lt. : $4\frac{5}{6}$ gGr. = $9\frac{3}{8}$ Ct. : ? Rthlr..
78. $18\frac{3}{4}$ Ct. : $16\frac{2}{3}$ Rthlr. = $11\frac{1}{2}$ Lt. : ? gGr..
79. $26\frac{1}{2}$ Lt. : $17\frac{2}{3}$ gGr. = $13\frac{5}{8}$ Ct. : ? Rthlr..

Nr.

80. $27\frac{1}{4}$ Ct. : $24\frac{3}{8}$ Rthlr. = $13\frac{1}{4}$ Lt. : ? gGr..
81. 8 Elle : $1\frac{1}{8}$ fl. holl. = $40\frac{3}{4}$ Elle : ? fl. holl..
82. $6\frac{1}{2}$ Elle : $11\frac{3}{8}$ fl. holl. = $125\frac{3}{4}$ Elle : ? fl. holl..
83. $5\frac{1}{2}$ Ank. : $41\frac{1}{4}$ fl. holl. = $3\frac{1}{4}$ Ank. : ? fl. holl..
84. $4\frac{3}{5}$ Ank. : $34\frac{1}{2}$ fl. holl. = $1\frac{1}{3}$ Drh. : ? fl. holl..
85. $1\frac{4}{5}$ Drh. : 65 fl. holl. = 5 Stof : ? fl. holl..
86. $1\frac{1}{2}$ Stof : $7\frac{1}{2}$ Stv. = $8\frac{7}{8}$ Drh. : ? fl. holl..
87. $4\frac{1}{2}$ Ct. : $1\frac{1}{2}$ Mklb. = $1\frac{3}{4}$ Ct. : ? ßl. lb..
88. $31\frac{1}{2}$ Ct. : $10\frac{1}{2}$ Mklb. = $28\frac{1}{4}$ Ct. : ? Mklb..
89. $5\frac{1}{2}$ Lt. : $1\frac{5}{6}$ ßl. = $6\frac{1}{2}$ Ct. : ? Mklb..
90. $\frac{1}{2}$ Ct. : $5\frac{1}{3}$ ßl. = $13\frac{1}{4}$ Ct. : ? Mklb..

---

91. 241 Ct. 26 Lt. : 80 Rthlr. 14 gGr. 6 Pf. = 96 Ct. 20 Lt. : ? Rthlr..
92. 3 Lst. 17 Ct. 19 Lt. : 25 Rth. 20 gGr. 9 Pf. = 3 Lst. 1 Ct. 17 Lt. : ? Rth..
93. 3 Lst. 18 Ct. 8 Lt. : 19 Rth. 13 gGr. 6 Pf. = 8 Lst. 15 Ct. 16 Lt. : ? Rth..
94. 1 Lst. 8 Ct. 16 Lt. : 35 fl. holl. 12 Stv. 8 Pf. = 11 Lst. 19 Ct. : ? fl. holl..
95. 28 Stof : 2 Rub. 10 Kop. = 5 Ank. 21 Stof : ? Rub..
96. 2 Drh. 1 Ank. 27 Stof : 278 Rub. = $10\frac{1}{2}$ Stof : ? Rub..
97. 14 Drh. : 1296 Rthlr. 16 gGr. 10 Pf. = 6 Drh. : ? Rthlr..
98. 4 Drh. 5 Ank. : 149 Rth. 3 gGr. 2 Pf. = 19 Drh. 2 Ank. : ? Rth..
99. 12 Lst. 2 Ct. : 21 Rth. 20 gGr. 4 Pf. = 5 Ct. : ? Rth..
100. 15 Ct. : 4 Rthlr. 16 gGr. 6 Pf. = 33 Lst. 8 Ct. : ? Rthlr..
101. $5\frac{1}{2}$ Lt. : 4 gGr. 7 Pf. = 1 Lst. 17 Ct. 16 Lt. : ? Rthlr..
102. 13 Ct. 8 Lt. : 8 Mklb. 13 ßl. 4 Pf. = 16 Lt. : ? ßl. lb..
103. 6 Ct. 16 Lt. : 4 Mklb. 5 ßl. 4 Pf. = 5 Lt. 2 Qt. : ? ßl. lb..
104. 28 Ct. 8 Lt. : 9 Mklb. 6 ßl. 8 Pf. = 31 Ct. 16 Lt. : ? Mklb..
105. $125\frac{3}{4}$ Elle : 220 fl. holl. 1 Stv. 4 Pf. = $6\frac{1}{2}$ Elle : ? fl. holl..
106. 1 fl. holl. 16 Stv. : 8 Elle = 9 fl. 3 Stv. 6 Pf. : ? Elle.
107. 4 fl. holl. 3 Stv. 4 Pf. : $18\frac{1}{2}$ Elle = 2 Stv. 4 Pf. : ? Elle.
108. 12 Rthlr. 2 gGr. 8 Pf. : 13 Ct. 20 Lt. = 17 gGr. 8 Pf. : ? Lt..
109. 11 Lt. 2 Qt. : 7 gGr. 8 Pf. = 18 Ct. 24 Lt. : ? Rthlr..
110. 7 Lt. 1 Qt. : 4 gGr. 10 Pf. = 9 Ct. 12 Lt. : ? Rthlr..
111. 1 Rthlr. 21 gGr. 4 Pf. : 2 Ct. 4 Lt. = 1 gGr. 8 Pf. : ? Lt..
112. 3 Lst. 17 Ct. 19 Lt. : 25 Rth. 20 gGr. 9 Pf. = 6 Lst. 3 Ct. 2 Lt. : ? Rthlr..
113. 12 Lst. 1 Ct. 26 Lt. : 80 Rth. 14 gGr. 6 Pf. = 2 Lst. 8 Ct. 10 Lt. : ? Rth..
114. 19 Rth. 13 gGr. 6 Pf. : 3 Lst. 18 Ct. 8 Lt. = 43 Rth. 21 gGr. : ? Ct.
115. 12 Ct. 6 Lt. : 6 Mklb. 12 ßl. 4 Pf. = 9 Lt. : ? ßl..
116. 6 Pud 31 Ct. 48 Solotn. : 135 Rub. 75 Kop. = 3 Ct. 48 Solotn. : ? Rub..
117. 4 Pud 29 Ct. 72 Solotn. : 37 Rub. 95 Kop. = 11 Ct. 24 Solotn. : ? Rub..
118. 15 Lst. 18 Ct. : 523 Rthlr. 9 gGr. = 7 Ct. 16 Lt. : ? Rthlr..
119. 5 Lst. 12 Ct. : 150 Mklb. 8 ßl. = 4 Ct. 24 Lt. : ? Mklb..
120. 20 Lst. 18 Ct. : 714 Rthlr. 2 gGr. = 4 Ct. 8 Lt. : ? Rthlr..

Nr.
121. 10 Ltr. 16 tr. : 2460 Rthlr. = 3 tr. 24 Lt. : ? Rthlr..
122. 5 Ltr 16 ℔ : 1827 Mklb. = 1 ℔ 16 Lt. : ? Mklb..
123. 15 Ltr 14 ℔ : 1138 Mklb. 4 ßl. = 1 ℔ 4 Lt. : ? Mklb..
124. 9 Ltr 6 ℔ : 138 Rthlr. 5 gGr. = 3 ℔ 16 Lt. : ? Rthlr..
125. 18 Pud 14 ℔ : 528 Rub. 48 Kop. = 2 ℔ 84 Solotn. : ? Rub..
126. 2 Pud 29 ℔ : 143 Rub. 88 Kop. = 1 ℔ 48 Solotn. : ? Rub..
127. 4 Pud 8 ℔ : 235 Rub. 20 Kop. = 5 ℔ 24 Solotn. : ? Rub..
128. 2 ℔ 24 Solotn. : 3 Rub. 78 Kop. = 3 Pud 22 ℔ : ? Rub..
129. 5½ Elle : 4 Rub. 84 Kop. = 117¾ Elle : ? Rub..
130. 7⅜ Elle : 17 Rub. 70 Kop. = 237⅝ Elle : ? Rub..
131. 106 Elle : 143 fl. holl. 2 Stv. = 2½ Elle : ? fl. holl..
132. 15¾ Elle : 40 Rub. 95 Kop. = 183½ Elle : ? Rub..
133. 7 Pud 32 ℔ : 46 Rub. 80 Kop. = 1 Pud 12 ℔ : ? Rub..
134. 35 ℔ 27 Lt. : 53 Mklb. 12 ßl. 3 Pf. = 2 ℔ 24 Lt. : ? Mklb..
135. 4 Ltr 17 ℔ 24 Lt. : 113 Rub. 39 Kop. = 2 Ltr 10 ℔ : ? Rub..
136. 8 ℔ 8 Lt. : 104 Mklb. 2 ßl. 6 Pf. = 3 ℔ 24 Lt. : ? Mklb..
137. 4 ℔ 16 Lt. : 115 Mklb. 14 ßl. = 20 Lt. : ? Mklb..
138. 8 ℔ 16 Lt. : 4 Rthlr. 1 gGr. 9 Pf. = 24 Lt. : ? gGr..
139. 1 Kuhl (zu 10 Twk.) 6 Twk. : 9 Rub. 60 Kop. = 5 Twk. 4 Grz. : ? Rub..
140. 1 Kuhl 2 Twk. 4 Grz. : 10 Rub. = 3 Kuhl 5 Twk. 6 Grz. : ? Rub..
141. 5 Kuhl 7 Twk. 4 Grz. : 13 Rub. 80 Kop. = 1 Kuhl 6 Grz. : ? Rub..
142. 7 Kuhl 3 Twk. 6 Grz. : 44 Rub. 25 Kop. = 1 Twk. 5⅓ Grz. : ? Rub..

XVIII. Die umgekehrte Regel detri.

1. Wenn Jemand 6 Meilen täglich reist, und so in 10 Tagen das Ziel seiner Reise erreicht; wie viel Meilen täglich wird Derjenige machen müssen, welcher in 8 Tagen eben diesen Weg zurücklegen will.

2. Ein Fuhrmann führt für ein bestimmtes Frachtgeld 20 Pud 180 Werst weit; wie viel Pud wird er für eben dieses Frachtgeld 96 Werst weit führen können?

3. Führt nun dieser Fuhrmann für das bestimmte Frachtgeld 20 Pud 180 Werst weit, wie weit kann er 37½ Pud führen?

4. Um ein Zimmer mit Papier-Tapeten zu bekleiden, braucht man 270 Elle 1 Elle breiter Tapeten; wie viel Elle würde man brauchen, wenn die Tapeten 1¼ Elle breit wären?

5. Um eine Kleidung anzufertigen, sind 8 Elle $\frac{10}{4}$ breiten Tuches gefordert worden; mit wie viel Elle würde man ausreichen, wenn das Tuch $\frac{12}{4}$ Elle breit wäre?

6. Von den Zinsen einer Stiftung für die Witwen einer Stadt bekommen 48 Witwen, jede auf ihren Antheil, 100 Rub; wie viel wird jede bekommen, wenn ihre Anzahl auf 45 gefallen ist?

7. Die Felder eines Landstückes können durch 15 Pflüger in 12 Tagen gepflügt sein; wie viel Pflüger wird man nehmen müssen, wenn man diese Arbeit in 10 Tagen will beendigt haben?

8. Wenn Jemand 45 Kop. täglich ausgiebt, so reicht er mit seinem Gelde 48 Tage; wie viel darf er täglich ausgeben, wenn er mit seinem Gelde 50 Tage ausreichen muß?

9. Wenn Jemand von einer gepachteten Wiese auf 60 Pud Heu rechnet, das Pud zu 20 Kop., wie hoch wird ihm das Pud zu stehen kommen, da er nur 50 Pud erntet?

10. Man hat einen Acker von 50 Faden (zu 6 Fuß) und 5 Fuß Länge, und von 32 Faden 4 Fuß Breite, und will einen andern Acker von 70 Faden Länge abstecken, der jenem an Flächen-Inhalte gleich sei; wie breit wird dieser Acker werden?

11. Aus einer Quantität Garn kann man 180 Elle 1 Elle breiter Leinewand haben; man verlangt aber die Leinewand von $\frac{3}{4}$ Elle Breite, wie viel Elle wird das Garn ausgeben?

12. Pflasterer haben in einer Woche an einer Straße, die 6 Faden breit ist, eine Länge von 45 Fuß gepflastert; wie groß wird die Länge sein, die sie in eben der Zeit pflastern können, wenn eine Straße $4\frac{1}{2}$ Faden breit ist?

13. Es leiht Jemand einem Freunde 1000 Rub. ohne Zinsen auf 3 Monat; nachher borgt ersterer wieder von letzterem 600 Rub.. Wie lange kann er selbige behalten, damit Dienst und Gegendienst gleich werden?

14. Wenn Jemand täglich 4 Stunden auf eine Arbeit verwendet, so wird sie in 6 Wochen fertig; arbeitet er aber täglich 9 Stunden daran, in wie viel Wochen wird sie dann fertig werden?

15. Wenn das Loof Roggen 1 Rub. 80 Kop. kostet, so wiegt ein Brot für 10 Kop. 6 ℔.; wie viel kann ein Brot für eben so viel wiegen, wenn das Loof kostet 1 Rub. 20 Kop.?

16. Ein Magazin (oder eine Vestung) hat Proviant auf 10 Monat für 8000 Mann, auf wie lange wird dieser Vorrath für 15000 Mann ausreichen?

17. Der Proviant einer Vestung reicht auf $5\frac{1}{3}$ Monat (5 Monate 10 Tage) aus, wenn jeder Soldat täglich 3 ℔. Brod erhält; wie lange wird derselbe Proviant vorhalten, wenn jeder nur $2\frac{1}{2}$ ℔. Brod bekommt?

18. Zu einem Baumgange, dessen Bäume 10 Fuß von einander abstehen, braucht man 336 Bäume; wie viel wird man deren brauchen bei 12 Fuß Entfernung der Bäume von einander?

Vorbemerkung. Über die zum Verständnisse der folgenden drei Aufgaben nöthige Kenntniß des cölnischen Mark-Gewichts, und der Eintheilung der edlen Metalle nach demselben findet man das Nöthige im Lehrbuch unter dem Abschnitt „Alligations-Regel", und namentlich unter „Beschickung des Schmelztiegels."

19. Ein Goldschmied hat 8 Mark 14-löthigen Silbers, wozu er so viel Kupfer setzt, daß er $10\frac{2}{3}$ Mark Silbers erhält; wieviel-löthig wird dieses Silber sein?

20. Ein Goldschmied hat 8 Mark 14-löthigen Silbers, und will daraus $10\frac{1}{2}$-löthiges machen; wie viel muß er an Kupfer zusetzen? (Dieses Exempel dient zugleich dem vorigen zur Probe.)

21. 280 Lt. Silber zu 40 Kop. das Lt. bekommen einen Zusatz, so daß das Lt. nur 35 Kop. an Werth hat; wie viel wiegt nun die Masse?

XIX. Die Ketten-Regel.

1. Ein Kaufmann in Rußland erhält aus Preußen 155 Elle Tuch; wenn er nun für je 26 Elle 80 Thaler preußisch zahlt, wie viel Silber-Rubel wird er für die 155 Elle zahlen, wenn 100 Thlr. preußisch = 91 Silber-Rubel?

2. Wenn $4\frac{1}{2}$ Centner brutto (oder sporco oder unlauter), d. h. mit der Emballage, beim Einkauf 75 Thaler preußisch kosten; wie theuer muß 1 ℔. netto (oder lauter), d. h. ohne Emballage, in sächsischem Gelde verkauft werden, um 36 pCt. zu gewinnen? Das Tara (die Emballage) sei 8 ℔. vom Centner, den Centner (Preußen und Leipzig) zu 110 ℔. gerechnet; der Thaler preußisch = 91 Kop. S., der sächsische Thaler = 128 Kop. S.. (Hiebei aber sind die Spesen, d. h. die Unkosten, nicht mit in Rechnung gebracht worden.)

3. Es hat Jemand nach Hamburg zu zahlen 560 Mark Hamb. Bco., und will dazu einen Wechsel in Leipzig kaufen; wie viel will er in Leipziger Thalern zahlen, wenn 1 Wechsel-Thaler = 2 Mark Hamburger Bco., ein Leipziger Thaler = 38 Stüver Amsterd. courant, ein Wechsel-Thaler nach dem Cours = $33\frac{1}{2}$ Stüver Amsterd. Bco.. Amsterd. cour. ist 5 pCt. schlechter als Amsterd. Bco..

4. Wie viel Thaler preußisch ist a) ein sächsischer Thaler, wenn ersterer gleich 91 Kop. Silber, letzterer 128 Kop. Silb. ist, und b) ein preußischer Thaler ist wie viel Thaler sächsisch?

5. Wie viel Centner preußisch sind 11 Berkowez, wenn 9 ℔. preußisch = 10 ℔. russisch, und der Berliner Centner = 110 ℔.

6. Wenn 3 Yard (englische Ellen) = 4 Brab. Ell., 5

Brab. Ell. = 6 Leipziger Elle, 8 Leipz. Ell. = 7 Nürnberger Ell.; wie groß ist das Verhältniß der Yard zu den Nürnberger Ellen, und wie groß ist die eine Elle gegen die andere?

7. Wenn 20 Brab. Ell. = 21 Nürnb. Ell., 5 Yard = 7 Nürnb. Ell., und 9 russische Arschin = 7 Yard; welches ist das Verhältniß der Arschinen zu den Brabanter Ellen, und wie groß ist das eine Maaß gegen das andere?

8. Wie groß ist das Verhältniß der Arschinen zu den Leipziger Ellen, wenn 3 Yard = 4 Brab. Ell., 9 Arschin = 7 Yard, 6 Leipz. Ell. = 5 Brab. Elle.

9. Wie verhält sich der Hamburger Fuß zum französischen Fuß?, wenn 16 englische Fuß = 17 Hamb. Fuß, 14 englische Fuß = 15 Amsterd. Fuß, und 8 Amsterdamer Fuß = 7 französische Fuß.

XX. Die zusammengesetzte Regel detri.

1. Fünf Arbeiter haben für 23 Tage 34½ Rub. Lohn bekommen; wie lange kann man demnach 13 Arbeiter mit 78 Rub. ablohnen?

2. Wenn 20 Arbeiter, welche täglich 6 Stunden arbeiten, in 5 Wochen 98 Rub. erhalten haben; wie viel Arbeiter kann man 10 Wochen hindurch mit 196 Rubeln ablohnen?, wenn solche täglich 8 Stunden arbeiten.

3. 15 Arbeiter fällen 200 Faden Holz in 5 Wochen, wenn sie wöchentlich 4 Tage, und täglich 8 Stunden arbeiten; in wie viel Wochen werden 50 Arbeiter 800 Faden fällen?, wenn sie wöchentlich 6 Tage, und täglich 10 Stunden arbeiten.

4. 120 Arbeiter haben in 3 Tagen, in einer Länge von 125 Fuß, 48 Fuß breit und 6 Fuß hoch, Erde aufgedämmt. Wenn nun 460 Fuß in der Länge, 45 Fuß in der Breite, und 4 Fuß in der Höhe in einem Tage aufgedämmt werden sollen, wie viel Arbeiter sind nöthig?

5. Es haben 2000 Mann in einer Vestung auf 4 Wochen Proviant, wenn jeder täglich 2¼ ℔. Brod erhält. Es kommen aber noch 400 Mann hinzu, und doch soll man sich 5 Wochen lang zu halten suchen; wie viel Brod kann also Jedem nur gegeben werden?

6. 15 Arbeiter fällen 60 Faden Brennholz in 5 Wochen, wenn sie wöchentlich 4 Tage, täglich 8 Stunden arbeiten; wie viel Stunden müssen 20 Arbeiter täglich arbeiten?, um 100 Faden Holz in 6 Wochen zu fällen, wenn sie 2 Tage wöchentlich arbeiten.

7. Wenn 6 Weber in 16 Wochen, da sie wöchentlich 5 Tage, täglich 8 Stunden arbeiten, 6 Stücke Zeug von 36 Elle Länge, $1\frac{2}{4}$ Elle Breite befertigen; wie lang werden 4 Stücke $1\frac{0}{4}$ Ell. breites Zeug werden?, welche 2 Weber in 50 Wochen weben können, wenn sie 6 Tage wöchentlich, 6 Stunden täglich arbeiten.

8. 15 000 Mann ziehen einen Canal von 30 Fuß Breite, 36 000 Fuß Länge, 42 Fuß mittlerer Tiefe in 70 Wochen, wenn sie wöchentlich 6 Tage, und täglich 10 Stunden arbeiten; wie breit kann der Canal werden?, den 18 500 Mann 39 960 Fuß lang und im Mittel 45 Fuß tief ziehen können in 105 Wochen, wenn sie wöchentlich 5 Tage, und täglich 9 Stunden arbeiten.

9. Zu einem Stück Tischzeug, das $49\frac{1}{2}$ Elle lang und $1\frac{3}{4}$ Elle breit ist, wird 36 ℔. 24 Lt. Garn gebraucht; wie viel Elle lang muß ein anderes Stück werden?, das $2\frac{1}{2}$ Elle breit sein soll, und zu welchem man 83 ℔. 4 Lt. Garn giebt.

10. Wenn, nach der Stadt-Taxe, ein Brot von 3 ℔. zu 2 Kop. verkauft worden ist, bei dem Preise von 36 Rubeln für die Last Roggen; welcher Preis wird für ein Brot von 8 ℔. anzusetzen sein?, wenn man die Last Roggen für 45 Rub. kauft.

11. 18 Wagen beendigen eine Arbeit (z. B. die Dünger-Fuhre) in 12 Tagen, wenn sie täglich 5 Mal fahren; wie viel Tage werden zu einer gleichen Arbeit 15 Wagen brauchen?, die jeder 4 Mal täglich fahren.

Vorbemerkung. Bei den bis jetzt nach dieser Regel berechneten Aufgaben waren, in der Angabe wie in der Folge, die Größe sowohl als die Güte oder Beschaffenheit, ferner die Kräfte und Leistungen der Arbeiter, wenigstens im Durchschnitt, gleich. Falls aber in einem dieser Dinge Verschiedenheit Statt findet, so ist der nach Angabe und Folge zur Berechnung eingerichteten Aufgabe noch das Verhältniß der Zahlen, welches diese Verschiedenheit angeben, beizufügen, so daß dasjenige dieser Verhältniß-Glieder, welches zur Angabe gehört, auch in die Zeile der Angabe, dasjenige, welches zur Folge gehört, in die Zeile der Folge zu setzen ist.

I. Die Größe des Werkes sei verschieden:

12. Es arbeiten 12 Arbeiter 3 Tage lang, täglich 9 Stunden an einem gewissen Werke; in wie viel Tagen werden 4 Arbeiter ein doppelt so großes Werk befertigen können?, wenn sie täglich 6 Stunden daran arbeiten.

II. Die Beschaffenheit der Sache sei verschieden:

13. Ein Acker von 100 Faden Länge, 40 Faden Breite wird verkauft für 200 Rub.; für wie viel wird ein Acker von 80 Faden Länge, 48 Faden Breite zu verkaufen sein?, wenn die Güte

von dem Boden des ersteren sich zu der Güte des zweiten verhält, wie 2 : 3.

III. Die Leistungen der Arbeiter seien verschieden:

14. 8 Arbeiter verrichten ein Werk in 12 Tagen bei 10-stündiger täglicher Arbeit; wie viel Tage werden 9 Arbeiter bei 8-stündiger Arbeit dazu brauchen?, wenn letztere $\frac{5}{4}$ Mal mehr leisten als erstere.

XXI. Die einfache Zins-Rechnung.

Nr.	Wie viel trägt Interesse	Nr.	Wie viel trägt Interesse
1.	1870 Rub. zu 5 pCt. in 1 Jahr	30.	1750 Rub. zu 6 pCt. in 1½ Mon.
2.	380 „ „ 5 „ „ 1 „	31.	500 „ „ 6 „ „ 45
3.	750 „ „ 6 „ „ 1 „	32.	420 „ „ 5 „ „ 30
4.	1150 „ „ 6 „ „ 1 „	33.	720 „ „ 4 „ „ 40
5.	1280 „ „ 7 „ „ 1 „	34.	216 „ „ 4½ „ „ 80
6.	2050 „ „ 7½ „ „ 1 „	35.	372 „ „ 6 „ „ 72
7.	800 „ „ 6½ „ „ 1 „	36.	1500 „ „ 6 „ „ 18
8.	950 „ „ 8 „ „ 1 „	37.	1200 „ „ 6 „ „ 15
9.	720 „ „ 8 „ „ 1 „	38.	750 „ „ 6 „ „ 60
10.	1175 „ „ 8½ „ „ 1 „	39.	840 „ „ 6 „ „ 70
11.	270 „ „ 5 „ „ 1 Mon.	40.	1000 „ „ 6 „ „ 42
12.	330 „ „ 4 „ „ 3 „	41.	1140 „ „ 6 „ „ 50
13.	580 „ „ 5 „ „ 6 „	42.	1700 „ „ 6 „ „ 90
14.	975 „ „ 4½ „ „ 4 „	43.	1800 „ „ 7 „ „ 45
15.	460 „ „ 6 „ „ 3½ „	44.	1920 „ „ 7½ „ „ 39
16.	420 „ „ 6 „ „ 2½ „	45.	600 „ „ 8 „ „ 36
17.	780 „ „ 3¾ „ „ 3⅓ „	46.	540 „ „ 9 „ „ 40
18.	225 „ „ 5¼ „ „ 2 „	47.	240 „ „ 10 „ „ 45
19.	364 „ „ 6½ „ „ 6 „	48.	960 „ „ 12 „ „ 48
20.	1000 „ „ 6 „ „ 5 „	49.	1350 „ „ 6 „ „ 14
21.	1200 „ „ 7 „ „ 9 „	50.	1470 „ „ 6 „ „ 17
22.	1350 „ „ 7½ „ „ 8 „	51.	2580 „ „ 5 „ „ 1 Jahr
23.	1575 „ „ 6 „ „ 7 „	52.	17680 „ „ 5 „ „ 1½ „
24.	1660 „ „ 6¼ „ „ 3 „	53.	480 „ „ 6 „ „ 1 Mon.
25.	1780 „ „ 8 „ „ 4½ „	54.	3775 „ „ 6 „ „ 8 „
26.	2700 „ „ 8½ „ „ 4 „	55.	25000 „ „ 5½ „ „ 15 „
27.	2400 „ „ 12 „ „ 6½ „	56.	760 Rb. zu 6 pCt. in 1 J. 6 Wch.
28.	1385 „ „ 10 „ „ 3 „	57.	1500 Rb. zu 12 pCt. in 3 Mon.
29.	2760 „ „ 8 „ „ 4½ „	58.	2470 Rb. zu 6 pCt. in 70 Tagen.

Tage, das Jahr zu 360 Tagen.

59. Für 1 Jahr 8 Monat von einem Capital zu 5 pCt. 55 Rub. Interesse, ? das Capital.

60. Für $1\frac{1}{2}$ Jahr von einem Capital zu $7\frac{1}{2}$ pCt. 91 Rub. $12\frac{1}{2}$ Kop. Interesse, ? das Capital.

61. Für 80 Tage (1 Jahr = 365 Tage) zu $4\frac{1}{2}$ pCt. 223 Rub. 65 Kop. Interesse, ? groß das Capital.

62. Für 10 Monat zu 6 pCt. 4 Rub. $52\frac{1}{2}$ Kop. Interesse, ? groß das Capital.

63. Für 90 Tage zu 6 pCt. 11 Rub. $71\frac{1}{2}$ Kop. Interesse, ? das Capital.

64. Für 72 Tage zu $6\frac{1}{2}$ pCt. 13 Rub. 65 Kop. Interesse, ? das Capital.

65. 850 Rub. Cap. geben in 9 Monaten 35 Rub. $6\frac{1}{4}$ Kop. Int., zu ? pCt..

66. 4 500 Rub. Cap. geben in 144 Tagen 135 Rub. Int., zu ? pCt..

67. 1 100 Rub. Cap. geben in 2 Monaten 9 Rub. 90 Kop. Int., zu ? pCt..

68. 2 880 Rub. Cap. geben in $8\frac{1}{2}$ Monaten 128 Rub. 52 Kop. Int., zu ? pCt..

69. 800 Rub. Cap. zu 5 pCt. geben 30 Rub. Interesse, in ? Monat.

70. 3 120 Rub. Cap. zu 5 Rub. 75 Kop. pCt. geben 67 Rub. $27\frac{1}{2}$ Kop. Interesse, in ? Mon..

71. 3 000 Rub. Cap. zu 6 Rub. 20 Kop. pCt. geben 186 Rub. Int., in ? Tagen.

72. 1 080 Rub. Cap. zu 5 Rub. 80 Kop. pCt. geben 17 Rub. 40 Kop. Int., in ? Tagen.

73. 24 000 Rub. Cap. zu 6 Rub. 40 Kop. pCt. geben 64 Rub. Int., in ? Tagen.

74. 8 000 Rub. Cap. zu $6\frac{1}{2}$ pCt. geben in 9 Monat, ? Int..

75. 18 500 Rub. Cap. zu $4\frac{1}{2}$ pCt. geben in 1 Jahr 1 Monat, ? Interesse.

76. 7 500 Rub. Cap. zu 7 pCt. geben in 5 Mon. ? Int..

77. 4 875 Rub. Cap. zu $7\frac{1}{2}$ pCt. geben in 1 Jahr 7 Monat ? Interesse.

78. Ein Capital trägt 650 Rub. Int. in 2 Jahr 3 Monat; in wie viel Jahren wird es (zu demselben Zinsfuße) einbringen 750 Rubel?

79. Damit ein Capital 480 Rub. Interesse einbringe, muß es $3\frac{3}{4}$ Jahr ausstehen; wie lange wird es dauern?, bis es 920 Rub. eingebracht hat.

80. Wenn ein Capital, welches 2 Jahr 8 Monat ausstehet,

360 Rub. Int. bringt, wie viel wird es, unter übrigens gleichen Umständen, in 7½ Jahren einbringen?

81. Wenn 2 400 Rub. Cap. in 3 Jahr 4 Monat einen gewissen Zins einbringt, in wie viel Zeit wird 4 000 Rub. Cap. eben denselben Zins einbringen?

82. Wenn man 1 600 Rub. Cap. auf 2 Jahr 3 Monat ausleihen muß, um einen gewissen Zins zu erhalten; wie viel Capital wird man ausleihen müssen?, um, bei übrigens gleichen Umständen, in 4 Jahren eben denselben Zins zu erhalten.

83. Wenn ein Capital zum Zinsfuß 6 muß 8 Monat stehen, um einen gewissen Zins zu tragen; wie lange muß es ausstehen?, wenn der Zinsfuß 4½ sein soll.

84. Zu welchem Zinsfuß muß ein Capital 1 Jahr 4 Monat ausstehen?, wenn es, um eben denselben Zins zu tragen, zu 5 pCt., 1 Jahr 6 Monat ausstehen muß.

Zusammengesetzte Regel detri in der Zins-Rechnung.

a. bei gleichem Capital:

85. Wenn ein Capital zu 4½ pCt. in 8 Jahren einbringt 360 Rub.; in wie viel Jahren wird es zu 5 pCt. 400 Rub. Interesse tragen?

86. Wenn ein Capital zu 8 pCt. in 5 Jahren 1 200 Rub. Zins trägt, in wie viel Jahren werden von diesem Capital zu 7 pCt. 910 Rub. Int. einkommen?

87. Wenn ein Capital zu 6 pCt. in 2 Jahren trägt 720 Rub. Zins; zu ? pCt. wird es in 2½ Jahren einbringen 500 Rub..

88. Wenn ein Capital zu 5 pCt. in 6 Jahren 832 Rub. einbringt; wie ? Interesse zu 6 pCt. in 1½ Jahren.

b. bei gleichem Zinsfuß:

89. 6 400 Rub. Cap. trägt in 1¼ Jahren 580 Rub. Interesse, ? Rub. Interesse wird 2 500 Rub. Cap. in 2 Jahren tragen.

90. Wenn 800 Rb. Cap. in 1½ Jahren an Int. 240 Rb. einbringt, in ? Jahren wird 1 600 Rb. Cap. 720 Rub. Int. bringen.

91. Wenn 960 Rub. Cap. in 5 Jahren 270 Rub. Int. trägt, ? Rb. Cap. wird in 10 Monaten 820 Rb. Int. einbringen.

92. Wenn 750 Rub. Cap. in 8 Monat 96 Rub. Interesse bringt, ? Rub. Interesse werden von 2 345 Rub. Cap. in 15 Monat einkommen.

c. bei gleicher Zeit:

93. Wenn 3 900 Rub. Cap. zu 5½ pCt. 440 Rub. Int. trägt, ? Rub. Interesse 2 600 Rub. Cap. zu 6 pCt..

94. Wenn 570 Rub. Cap. zu 4 pCt. tragen 380 Rub. Int., zu ? pCt. werden 1 120 Rub. 560 Rub. Int. einbringen.

95. Wenn 5 400 Rub. Cap. zu 7 pCt. 630 Rub. Int. tragen, ? Rub. Cap. werden zu $6\frac{3}{4}$ pCt. 300 Rub. einbringen.

96. 2 800 Rub. Cap. zu $4\frac{1}{4}$ pCt. trägt 700 Rub. Int., ? Rub. Int. wird zu 5 pCt. 780 Rub. Cap. einbringen.

d. bei gleichem Interesse.

97. 4 200 Rub. Cap. steht zu 6 pCt. 8 Jahr aus, um ein gewisses Interesse einzubringen; wie viel Jahr werden 12 800 Rub. Cap. zu $5\frac{1}{4}$ pCt. ausstehen?, um eben denselben Zins zu tragen.

98. Wenn 2 400 Rub. Cap. zu 6 pCt. 9 Monat ausstehen, um einen gewissen Zins einzubringen; zu wie viel pCt. werden 3 600 Rub. Cap. 1 Jahr lang ausstehen müssen?, um eben denselben Zins zu tragen.

99. Wenn 460 Rub. Cap. zu 8 pCt. 3 Jahr ausstehen müssen, um einen gewissen Zins einzubringen, ? Rub. Cap. müssen zu 6 pCt. 5 Jahr stehen, um eben denselben Zins zu tragen.

100. 880 Rub. Cap. zu 4 pCt. stehen 6 Mon. aus, um einen gewissen Zins einzubringen, ? Monat müssen 1 200 Rub. Cap. zu $5\frac{1}{2}$ pCt. ausstehen, um eben denselben Zins zu geben.

Rabatt-Rechnung a) auf, b) in 100.

101. Es hat Jemand eine Buchhändler-Rechnung von 256 Rub. zu bezahlen, von welcher ihm 15 pCt. Rabatt bewilligt worden; wie viel beträgt die Zahlung a) auf, b) in 100?, eben so bei den folgenden fünf Aufgaben.

102. 375 Rub. mit 25 pCt. Rabatt.

103. 420 Rthlr. „ $12\frac{1}{2}$ „ „

104. 365 Rthlr. 20 gGr. mit $16\frac{2}{3}$ pCt. Rabatt.

105. 417 „ 12 „ „ $33\frac{1}{3}$ „ „

106. 2 116 „ 16 „ „ 20 „ „

Disconto-Rechnung.

107. 2 380 Rub. zu 12 pCt., Ziel 15 Mon.; ? das 4-monatliche Disconto.

108. 1 975 „ „ 7 „ „ 8 „ ; ? „ 6 „ „

109. 2 780 „ „ 4 „ „ 5 „ ; ? „ 1 „ „

110. 2 300 „ „ 14 „ „ 16 „ ; ? „ 12 „ „

111. 1 000 Rthlr. „ 8 „ „ 15 „ ; ? Disc. bei baarer Zahlung.

112. 2 000 Mrlb. „ $5\frac{1}{2}$ „ „ 7 „ ; ? das 2-monatliche Disconto.

Disconto-Rechnung im Wechsel-Geschäft.

113. Ein Wechsel auf 2 500 Rub. zu $5\frac{1}{2}$ pCt. jährlich, nach 2 Monaten zahlbar, mit $\frac{2}{3}$ pCt. monatlichem (8 pCt. jährlichem) Disconto, ? viel wird bezahlt.

114. Ein Wechsel auf 3200 Rub. zu 6 pCt., nach 9 Monaten zahlbar, mit $\frac{3}{4}$ pCt. monatlich discontirt, ? viel ist zu zahlen.

115. Ein Wechsel auf 3 000 Rb. zu 5 pCt., nach 3 Monaten zahlbar, mit $\frac{2}{3}$ pCt. monatlichem Disconto, ? viel ist zu zahlen.

Durchschnittlicher Zinsfuß.

116. 2 000 Rub. Cap. zu 5 pCt., 800 Rub. Cap. zu 6 pCt., 1 200 Rub. Cap. zu $5\frac{1}{2}$ pCt., 3 000 Rub. Cap. zu 4 pCt.; zu wie viel pCt. im Durchschnitt?

117. 900 Rub. Cap. zu 5 pCt., 2 300 Rub. Cap. zu 6 pCt., 1 000 Rub. Cap. zu $4\frac{1}{2}$ pCt., 1 500 Rub. Cap. zu $5\frac{1}{2}$ pCt., 3 000 Rub. Cap. zu 4 pCt.; zu ? pCt. im Durchschnitt.

118. 5 000 Rub. zu 6 pCt., 3 000 Rub. zu $5\frac{1}{2}$ pCt., 2 000 Rub. zu 5 pCt., 1 800 Rub. zu $4\frac{1}{2}$ pCt., 1 500 Rub. zu 4 pCt.; zu wie viel pCt. im Durchschnitt?

Zeit-Rechnung.

119. 1 000 Rub. Cap. in 1 Jahr, und 500 Rub. in 2 Jahren; welcher ist der mittlere Zahlungs-Termin?

120. Nach 2 Jahren 300 Rub., nach 2 Jahren 6 Monaten 200 Rub., nach 3 Jahren 250 Rub.; welcher ist der mittlere Zahlungs-Termin?

121. Es sind 200 Rub. in 8 Monaten, 400 Rub. in 1 Jahr, und 500 Rub. in $1\frac{1}{2}$ Jahren zahlbar; welcher ist der mittlere Zahlungs-Termin?

122. 250 Rub. in 6 Monaten, 350 Rub. in 9 Mon., 875 Rub. in 10 Mon., 150 Rub. in 14 Mon.; welcher ist der mittlere Zahlungs-Termin?

123. 400 Mk. in 4 Mon., 250 Mk. in 7 Mon., 350 Mk. in 9 Mon. zahlbar; welcher ist der mittlere Zahlungs-Termin?

124. 2 000 Rub. in 9 Mon., 3 000 Rub. in 18 Mon., 3 000 in 27 Mon. zahlbar; wenn nun diese 8 000 Rub. auf ein Mal gezahlt werden sollten, wann müßte es geschehen?

125. A verkauft dem B Waaren für 12 000 Thaler, und verlangt von letzterem baar 3 000 Thlr., nach 3 Mon. 2500, nach 6 Monaten 3 000, und nach 8 Mon. 3 500 Thlr.. Wenn aber B seine Schuld auf ein Mal bezahlen will, so fragt sich, welcher wird der mittlere Zahlungs-Termin für die übrigen Schuldposten sein?

Licitations-Rechnung.

126. Ein Haus wird subhastirt. A bietet 8 950 Rub. baar; B bietet 2 000 Rub. baar, und 2 000 Rub. in 4 jährlich auf einander folgenden Terminen; C bietet 1 500 Rub. baar, und in

6 auf einander folgenden Terminen jährlich 1 500 Rub.. Der Zinsfuß ist 6; man soll nicht Zins auf Zins rechnen. Wie groß ist jeder Bot, und welcher ist der höchste?

127. Ein Landgut wird subhastirt. A bietet 10 000 Rub. baar, und 10 000 Rub. um 1 Jahr; B bietet 8 000 Rub. baar, und in zwei jährlichen Terminen, in jedem 6 500 Rub.; C bietet 5 000 Rub. baar, und in drei jährlichen Terminen, in jedem zu 5 500 Rub.. Der Zinsfuß ist 5, und es wird nicht Zins auf Zins gerechnet. Wie groß ist der Bot eines Jeden, und welcher Bot ist demnach der vortheilhafteste?

XXIII. Die Theilung einer Zahl nach einem gewissen vorgeschriebenen Verhältnisse.

1. Gewinst- und Verlust-Rechnung bei gleichen Zeiten aber ungleichen Capitalien.

1. Es geben zu einer gemeinschaftlichen Handelsunternehmung A 9 600, B 6 000, C 4 800 und D 3 600 Rub.. Nach einiger Zeit sind 1 000 Rub. Gewinst zu vertheilen. Wie viel davon erhält Jeder? Was ist pCt. gewonnen?

2. Es geben A 482, B 308, C 510, D 450, E 375, F 275, G 1 000 Rub.; der zu vertheilende Gewinst ist 680 Rub.. Wie viel erhält Jeder? Was ist pCt. gewonnen?

3. Es geben A 241, B 564, C 490, D 470, E 325, F 285, G 625, zusammen 3 000 Rub.. Daran werden verloren 300 Rub.; wie viel bekommt Jeder zurück? Wie viel ist pCt. verloren?

4. Es legen zusammen A 150 Rthlr., B 210 Rthlr. 16 gGr., C 324 Rthlr. 20 gGr., D 94 Rthlr. 8 gGr., E 120 Rth. 4 gGr.. Am Schlusse des Geschäftes erhält C nur 284 Rthlr. 5 gGr. 6 Pf. von seiner Einlage zurück. Wie viel muß demnach vom ganzen Capital verloren sein, und welches ist der Verlust eines Jeden. Wie viel pCt. verloren?

5. Vier Kaufleute versenden Flachs, A 180 Stk., B 105 Stk. 10 Ltk., C 90 Stk. 15 Ltk., D 183 Stk. 15 Ltk., zusammen 560 Stk.. Es werden daran gewonnen 7 000 Rub.; wie groß ist eines Jeden Antheil an diesem Gewinst?

6. Die in der vorigen Aufgabe erwähnten Personen haben ihren Einkauf gemacht A zu 40, B zu 39, C zu 43, D zu 38 Rub. pr. Stk.; wie viel pCt. gewinnt Jeder?

7. Bei einem Fallissement sind die Schulden: A 5 000, B 14 000, C 6 950, D 21 000, E 11 700, F 2 500, und G 10 850

Rub.. Die Masse beträgt nach Abzug aller Unkosten 48 960 Rub.. Wie viel wird für jeden obigen Posten bezahlt, und wie viel wird pCt. gezahlt?

8. Es geben A 4 403, B 3 652, C 7 731, D 4 214 fl. holl.; das Capital ist angewachsen auf 24 062 fl. 10 Stw.. Wie viel gewinnt Jeder, und wie viel pCt.?

9. Es geben A $145\frac{3}{4}$, B $51\frac{1}{2}$, C 50, D 41, E $37\frac{1}{2}$, F $34\frac{1}{4}$ Rthlr.. Bei der Zurückzahlung bekommt F 47 Rthlr. 13 gGr. 8 Pf. Wie viel bekommt Jeder, und was ist pCt. gewonnen?

10. A, B und C haben zusammen 24 000 Alberts-Thaler (à 90 Groschen) eingelegt. Daran sind 875 Thlr. 30 Gr. gewonnen worden, von denen A zu seinem Antheile 583 Thlr. 50 Gr. und C 109 Thlr. $37\frac{1}{2}$ Gr. erhalten. Wie viel hat demnach B erhalten, und wie groß ist eines Jeden Einlage gewesen? Wie viel ist pCt. gewonnen?

11. Die Forderungen verschiedener Creditoren sind: A 1 500, B 1 000, C 1 200, D 5 400, E 6 300, F 700, G 800, H 5 000, I 6 000, K 4 100 Mlb.. Von der zu vertheilenden Fallit-Masse erhält B 73 Mk. 4 ßl. 9 Pf.. Wie viel hat Jeder erhalten, und wie groß war demnach die Masse? Wie viel wird pCt. gezahlt?

12. Es haben fünf Personen in eine Lotterie gesetzt. Der ganze Einsatz betrug 3 Rthlr. 1 gGr. 4 Pf.. Dazu gaben A 16 gGr., B 1 Rthlr. 4 gGr., C 13 gGr. 4 Pf., D 10 gGr. 8 Pf., E 5 gGr. 4 Pf.. Der Gewinst war 2 550 Rthlr.. Wie viel bekam davon ein Jeder?

13. Aus einem von vier Personen eingelegten Capitale ist ein Gewinst herausgekommen, welcher folgender Maaßen vertheilt wurde: A erhielt 1 500, B 600, C 1 440, D 1 860 Rub.. Man soll berechnen, wie groß das ganze Capital und die einzelnen Einlagen gewesen sind, da der Gewinst 15 pCt. beträgt?

14. Die Forderungen mehrer Creditoren sind: A 45 000, B 9 000, C 3 000, D 2 000, E 1 000, F 24 000, G 16 000, H 20 000 fl. holl.. Die zu vertheilende Masse beträgt nur 14 500 fl. holl.; wie viel erhält ein Jeder, und was ist pCt. zurückgegeben worden?

15. Von einem zu vertheilenden Gewinst erhält A $4\,010\frac{5}{12}$, B $687\frac{1}{2}$, C $3\,151\frac{1}{24}$, D $1\,432\frac{7}{24}$, E $1\,604\frac{1}{6}$, F $572\frac{11}{12}$, G $2\,062\frac{1}{2}$, H $2\,864\frac{7}{12}$, I $2\,234\frac{3}{8}$, K $2\,692\frac{17}{24}$, L $859\frac{3}{8}$, M $5\,328\frac{1}{8}$ Pfd. Sterl.. Das ganze Capital ist 480 000 Pfd. Sterl.; wie groß ist die Einlage eines Jeden, und was ist pCt. gewonnen worden?

16. Verschiedene Creditoren haben zu fordern: A 21 000, B 17 000, C 16 000, D 12 000, E 10 000, F 7 000, G 3 200, H 2 100, I 2 000, K 1 400, L 1 300, M 1 200, N 800 Rub.. Die zu vertheilende Masse beträgt 12 500 Rub.. Wie viel erhält Jeder zurück, und wie viel ist pCt. gezahlt worden?

2. Gesellschafts-Rechnung mit Verhältniß-Theilen, welche durch Brüche angegeben sind.

A. die erste Art:

17. Es hinterläßt Jemand ein Vermögen von 22 950 Rubeln und verordnet, daß von diesem seinen fünf Kindern zukommenden Vermögen, die jüngeren als die bedürftigeren mehr bekommen sollen, denn die älteren. Die Vertheilung soll geschehen nach Verhältniß der Brüche $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$.

18. Vier Erben sollen ein Vermögen von 27 710 Rthlrn. dergestalt unter sich theilen, daß A $\frac{2}{5}$, B $\frac{3}{8}$, C $\frac{1}{3}$, D $\frac{1}{4}$ erhalte; wie viel bekommt Jeder?

19. 20 000 Rub. sind unter fünf Personen nach den Verhältniß-Theilen $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{9}$, $1\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $5\frac{1}{2}$ zu vertheilen; wie viel erhält Jeder?

20. 58 296 Rub. sind nach den vier Verhältniß-Theilen $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}$ zu vertheilen; wie groß ist jeder dieser Antheile?

21. 86 715 Rub. sind nach den vier Verhältniß-Theilen $1\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$ zu vertheilen.

22. 30 972 Rub. sind nach Verhältniß der Antheile $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ zu vertheilen.

23. 36 060 Rub. sind nach Verhältniß von $1\frac{1}{6}$, $\frac{5}{8}$, $2\frac{1}{9}$, $1\frac{1}{7}$, $\frac{11}{12}$ zu vertheilen.

24. 15 448 Rub. sind nach Verhältniß von $2\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{5}{9}$ zu vertheilen.

25. 67 374 Rub. sind nach Verhältniß von $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{28}$, 1, $\frac{7}{18}$ zu vertheilen.

B. die zweite Art:

26. Es sind unter drei Personen zu vertheilen 56 804 Rub., nach den Verhältniß-Theilen $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{6}$, wobei jedoch A über sein Fünftheil noch 300 Rub., B über seine $\frac{3}{8}$ noch 250 Rub. erhalte, dem C aber von seinen $\frac{5}{6}$ abzuziehen seien 530 Rub..

27. 29 720 Rub. sind nach den Verhältniß-Theilen $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$ zu vertheilen, jedoch so, daß A über sein $\frac{1}{2}$ noch 30, B sein $\frac{3}{4}$ weniger 50, C sein $\frac{5}{9}$ weniger 70 erhalte.

28. Es sind 58789 Rub. zu vertheilen, und zwar so, daß A $\frac{2}{3}$ + 280 Rub., B $\frac{5}{8}$ — 100 Rub., und C $\frac{5}{6}$ — 120 Rub. erhalte; wie viel wird Jeder bekommen?

29. Es sind 58988 Rub. zu vertheilen, und zwar so, daß A $\frac{3}{5}$ + 200, B $\frac{5}{6}$ — 600, C $\frac{3}{4}$ — 125, D $\frac{5}{8}$ + 350 erhalte; wie groß ist der Antheil eines Jeden?

30. 6981 Rub. sind nach den Verhältniß-Theilen $\frac{6}{7}$, $1\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{12}$ zu vertheilen, so daß außerdem von A abgezogen werden 55, und von B 1000 Rub., dem C aber noch 824, dem D 231 Rub. hinzugefügt werden.

31. 17409 Rub. sind so zu vertheilen, daß A $\frac{1}{2}$ des Ganzen + 180, B $\frac{7}{9}$ — 75, C $\frac{5}{6}$ + 50, D $\frac{5}{12}$ — 120 Rub. erhalte. Wie groß die Antheile?

32. 36840 Rub. sind unter vier Personen so zu vertheilen, daß A $2\frac{2}{3}$ des Ganzen (d. h. sämmtlicher Verhältniß-Theile) — 1000, B $\frac{7}{9}$ — 85, C $\frac{7}{12}$ + 450, D $\frac{5}{6}$ + 300 Rub. erhalte; wie viel wird Jeder bekommen?

33. 25669 Rub. sind zu vertheilen. A erhält $\frac{1}{8}$ + 357, B $\frac{2}{7}$ + 523, C $\frac{3}{5}$ — 500, D $\frac{4}{9}$ — 380 Rub.; wie viel wird Jeder bekommen?

3. Gesellschafts-Rechnung mit unzusammenhängenden Verhältnissen.

34. 5000 Rub. sind unter vier Personen so zu vertheilen, daß A bekomme 4, während B bekommt 5 Theile, und, wenn man die 5 Theile des B in 7 gleiche Theile theilt, C deren 8 erhalte, so auch, wenn man die 8 Theile des C in 6 gleiche Theile theilt, D deren 7 erhalte; d. i. daß der Antheil des A sich verhalte zu dem Antheile des B, wie 4 : 5, der Antheil des B zu dem Antheile des C, wie 7 : 8, der Antheil des C zum Antheil des D, wie 6 : 7. Wie viel wird Jeder erhalten?

35. 7405 Rub. sind unter fünf Personen nach den Verhältnissen 2 : 3, 4 : 7, 5 : 9, 6 : 11 zu vertheilen; wie viel bekommt Jeder?

36. 4512 Rub. sind nach den Verhältnissen 5 : 7, 3 : 2, 5 : 9 unter vier Personen zu vertheilen; wie viel erhält Jeder?

37. 5829 Rub. sind nach den Verhältnissen 3 : 4, 3 : 2, 5 : 7 unter vier Personen zu vertheilen; wie viel erhält Jeder?

38. 9729 Rub. unter vier Personen zu vertheilen nach den Verhältnissen 1 : 7, 3 : 5, 6 : 5; wie viel erhält Jeder?

39. 7865 Rub. nach den Verhältnissen 1 : 2, 3 : 4, 8 : 9 unter vier Personen zu vertheilen.

40. 8 792 Rub. sind nach den Verhältnissen 2 : 5, 3 : 1, 5 : 9 unter vier Personen zu vertheilen.

41. 8 901 Rub. nach den Verhältnissen 3 : 8, 5 : 7, 6 : 5 zu theilen.

4. Gewinst- und Verlust-Rechnung bei gleichen Capitalien, aber ungleichen Zeiten.

42. Zu einem kaufmännischen Geschäft giebt A am 1. Januar, B am 15. Junius, C am 1. November, und im folgenden Jahre D am 1. Februar, jeder 3 000 Rub.; zum 1. October dieses 2. Jahres sind 3 000 Rub. zu vertheilen. Wie viel davon erhält Jeder?

43. A, B, C geben Jeder eine gewisse gleiche Summe, und gewinnen damit 1 800 Rub.. Des A Capital hat 36, des B 27, des C 9 Monat gestanden. Wie viel erhält Jeder vom Gewinst?

44. A, B, C, D, E geben Jeder eine gleiche Summe. Nachdem des A Capital 6 Jahr, des B 5 Jahr, des C $4\frac{1}{2}$ Jahr, des D $3\frac{3}{4}$ Jahr, des E $3\frac{1}{4}$ Jahr gestanden, ergiebt sich ein Gewinst von 3 300 Rubeln; was ist der Antheil eines Jeden?

45. A, B, C, D legen zusammen Einer so viel wie der Andere, und verlieren dabei überhaupt 1 600 Rub.. Des A Capital hatte 26, des B 20, des C 15, des D 11 Monat ausgestanden; wie viel wird Jeder zurück erhalten?

46. A, B, C, D legen zusammen alle gleich viel. Nachdem des A Capital 25, des B 23, des C 17, des D 5 Monat ausgestanden, wie viel erhält Jeder von 1 400 Rubeln Gewinst.

5. Zusammengesetzte Gewinst- u. Verlust-Rechnung.

47. A legt ein 3 050 Rub., 1 Jahr darauf giebt B 4 565 Rub., und wiederum ein Jahr darauf C 5 800 Rub.; nach 3 Jahren sind 1 980 Rub. zu vertheilen.

48. A legt ein 2 800 Rub., ein halbes Jahr darauf giebt B 3 600 Rub., wiederum ein halbes Jahr darauf giebt C 5 000 Rub., endlich 1 Jahr darauf giebt D 3 500 Rub.; nach 4 Jahren sind 3 600 Rub. Gewinst zu vertheilen.

49. A legt ein 3 000 Rub., 6 Monat darauf B dazu 2 500 Rub., 2 Monat darauf C 3 400 Rub., und wiederum nach 3 Monaten D 2 000 Rub.. Bei Beendigung des Geschäfts nach 18 Monaten findet sich ein Gewinst von 2 580 Rub..

50. A legt ein 5 000 Rub., 3 Monat darauf giebt B dazu 2 800 Rub., 4 Monat darauf C 4 000 Rub., und nach 5 Mon. D 2 780 Rub.. Nach 23 Monaten sind 4 820 Rub. gewonnen.

51. A legt ein 4 000 Rub., zwei Monat darauf giebt B 2 275 Rub. dazu, noch 6 Monat später giebt C 3 225 Rub., und wiederum einen Monat darauf D 1 000 Rub.. Nach 2 Jahren sind 4 500 Rub. Gewinst zu vertheilen.

52. A legt ein 500, B nach 8 Monaten 950, C nach 4 Monaten 220, D nach 3 Monaten 640, und E nach 6 Monaten 1 000 Rub.. Nach $2\frac{1}{2}$ Jahren sind 800 Rub. damit gewonnen.

53. A legt ein 3 300, B nach 3 Mon. 2 500, C nach 8 Mon. 2 000, D nach 7 Mon. 7 500 Rub.; nach 2 Jahren sind 2 400 Rub. Gewinst zu vertheilen.

54. A legt ein 1 000, B nach 5 Mon. 1 500, C von da ab nach 7 Mon. 1 800, D nach 9 Mon. 8 000 Rub.. Nach $2\frac{3}{4}$ Jahren sind gewonnen 1 620 Rub..

55. A legt ein 300, B nach einem Monat 400, C nach einem Monat 500, D nach einem Monat 600 Rub.. Nach einem Jahre haben sie zusammen 400 Rub. gewonnen.

56. A legt ein 800, B nach 2 Mon. 900, C nach 6 Mon. 1 200, D nach 4 Mon. 1 300, und E abermals nach 4 Mon. 2 000 Rb.. Nach 2 Jahren sind 1 000 Rb. Gewinst zu vertheilen.

6. Vermischungs-Rechnung.

57. Wenn man zu Kanonen-Pulver 6 Theile Kohlen, 1 Theil Schwefel, 1 Theil Salpeter nimmt; wie viel von jedem Ingrediens ist nöthig zu 1 000 ℔. Pulver.

58. Wenn man zu gutem Jagd-Pulver 3 Theile Kohlen, 2 Theile Schwefel, 16 Theile Salpeter nimmt, ? von jedem Ingrediens zu 2 800 ℔. Pulver.

59. Recept zu einem Anker scharfen Wasser-Essigs: Auf 27 Stof gekochtes Fluß-, Regen- oder Schnee-Wasser 3 Stof Branntwein, $\frac{1}{2}$ Stof Honig, 1 ℔. Weinstein (oder, falls im Anker schon vorher Essig gewesen, nur $\frac{1}{2}$ ℔. Weinstein), $\frac{1}{2}$ ℔. zerriebene Rosinen oder Rosinen-Stängel. Das Wasser wird milchwarm aufgestellt. Wie viel von jedem Ingrediens auf 1 Oxhoft.

60. Recept zu 5 Stof Tinte: Auf $1\frac{1}{2}$ ℔. fein gestoßener Galläpfel 4 Lt. pulverisirten arabischen Gummi, $\frac{3}{4}$ ℔. fein gestoßenen grünen Eisenvitriols werden 4 Stof kochendes Regen- oder Schnee-Wasser, und nach ein Paar Stunden 1 Stof durch Löschpapier filtrirter scharfer Wasser-Essig gegossen. Diese Mischung wird an einen warmen Ort gestellt, und täglich mit einem Stock gut durchgerührt. Nach 14 Tagen muß die Tinte, nachdem sie, um klar zu werden, zuvor 24 Stunden ungerührt gestanden hat,

auf Flaschen gefüllt und gut verkorkt werden. — Auf den nachgebliebenen Satz wird die Hälfte des Wassers und Essigs gegossen mit Hinzusetzung von 2 Lt. arabischen Gummi's, und diese Mischung täglich 2 bis 3 Mal umgerührt. Nach 6 bis 8 Wochen ist auch diese Tinte schwarz, und auf Flaschen abzufüllen.

Obiger 5 Stof Tinte ergebender Satz von Ingredienzien soll zu einem Satze für 20 Stof eingerichtet werden; wie viel nimmt man dazu von jedem Ingrediens?

61. Der Satz zu Leuchtkugeln besteht aus Salpeter 24, Schwefel 16, Mehlpulver 4 und Antimonium 3 Theile; wie viel von jedem zu einer Masse von 235 *U.*?

62. Zu einer geringeren Sorte Siegel-Lack (eine bessere Sorte s. im Lehrbuch § 231) nimmt man 12 Lt. dicken Terpenthin, 8 Lt. Zinnober, 16 Lt. Schellack, 4 Lt. Kreide, und ½ Quentchen Storax; wie viel von jedem zu 214 *U.* Siegel-Lack?

63. Zu grobem Siegel-Lack nimmt man 1 *U.* dicken Terpenthin, 1 *U.* Mennig, 3 *U.* Colophonium und 4½ *U.* Kreide; wie viel von jedem zu 114 *U.* Siegel-Lack?

64. Zu weichem Messing nimmt man 3 Theile Kupfer, 1 Theil Zink; wie viel von jedem kommt auf 480 *U.* Messing?

65. Zu hartem Messing kommen 10 *U.* Kupfer, 6 *U.* Zink, ¼ *U.* englisch Zinn; wie viel von jedem zu 1560 *U.* Messing?

66. Zu Baumwachs nimmt man ¼ *U.* gelbes Wachs, ½ *U.* Schaafs- oder Bockstalg, ½ *U.* weißes Fichtenharz, 4 Lt. Baum-Öl, 1 Lt. dicken Terpenthin; wie viel von jedem zu 3 *U.*?

67. Vorschrift zur Anfertigung von Phosphor-Salbe: Phosphor ʒjj unter Wasser in kleine Stücke zerschnitten und in kochend Wasser ℥vjjj gethan, und dieß so lange geschüttelt, bis der Phosphor feine Körnchen bildet, dann mit Weizenmehl ℥vjjj verrieben; darauf Schweinefett oder ausgewaschene Butter ℥vj, und endlich feinen Zucker ʒjj hinzugethan und verrieben. — Hievon soll ½ *U.* Medicinal-Gewicht (*U.*ß) angefertigt werden.

68. Vorschrift zur Anfertigung von Schuhwichse: Gebrannten Elfenbeins *U.*jv mit kaltem Wasser zu einem dicken Brei angerührt, dann Schwefelsäure *U.*ß (½ *U.*), und darauf Salzsäure ʒß zugesetzt; arabisches Gummi ʒjjj in Wasser gelöst, und alles mit Syrup *U.*jv, und Schweinefett ℥vjj verrieben. Wie viel von jedem Ingrediens ist auf 20 *U.* Medicinal-Gewicht nöthig?

69. Vorschrift zur Anfertigung von goldfarbigem Möbel-Lack: Schellack ℥j ʒjj, Benzoe-Harz ʒß ʒj, Drachenblut ʒjjj, Safran gr. xxx werden in Alkohol ℥vjjj geschüttet, und 24 Stunden lang di-

gerirt, darauf filtrirt. Wie viel von jedem kommt auf 15 ℔. Handels-Gewicht?

70. Dauerhafte rothe Tinte: Carmin ℈j, aufgelöst in Salmiak-Geist (Riech-Spiritus) ℥ß, und darauf arabisches Gummi ℈j hinzugethan und gelöst. Von dem Bodensatze, welcher aus den schlechteren Theilen des Carmins besteht, ist die rothe Tinte abzugießen. — Wie viel von jedem zu 4 Unzen?

71. Vorschrift, um Glas- und Porzellan-Kitt zu machen: Hausenblase ℥ß in ℥jv starken Branntwein gelöst; Mastix ʒjj in Alkohol ℥jß gelöst. Beides durchgeseiht, dann zusammengethan, und reines Ammoniak-Harz ʒjj hinzugesetzt. Darauf alles in Fläschchen gefüllt. Beim Gebrauch wird der Kitt im Wasserbade flüssig gemacht, und die zerbrochenen erwärmten Gegenstände damit verkittet. Von dieser Masse sind 12¾ Unzen zu bereiten.

72. Merkwasser: Kohlensaures Natron ℥jx; darauf kochend heiß gegossen destillirten Wassers ℔jj. Endlich, nach Lösung des Salzes, hinzugesetzt arabisches Gummi ℥jß. Es ist 1 ℔. Merkwasser zu machen.

73. Merktinte: Salpetersaures Silber (so genannter Höllenstein) ʒj und arabisches Gummi ʒj wird, jedes besonders, das erste in kaltem, das zweite in heißem destillirtem Wasser ℥j gelöst, so daß diese eine Unze Wasser zur Lösung beider Substanzen verwendet werde. Hiezu werden gr. x in Wasser fein zu einem dicken Brei zerriebener Tusche zugesetzt. Es sollen 2 Unzen gemacht werden.

Durchschnitts-Rechnung.

74. 960 ℔. Kupfer à 25 Kop., 576 ℔. Zink à 15 Kop., 24 ℔. Zinn à 28 Kop.; was kostet 1 ℔. der Mischung (des Messings)? (Vgl. Nr. 65.)

75. 360 ℔. Kupfer à 25 Kop., 120 ℔. Zink à 15 Kop.; was kostet 1 ℔. der Mischung (des Messings)? (Vgl Nr. 64.)

76. 12 ℔. dicken Terpenthin à 16 Kop., 12 ℔. Mennig à 10 Kop., 36 ℔. Colophonium à 4 Kop., 54 ℔. fein gestoßene Kreide à 4 Kop.; was kostet 1 ℔. der Mischung (des groben Siegel-Lacks)? (Vergl. Nr. 63.)

77. 64 ℔. Terpenthin à 16 Kop., 42⅔ ℔. Zinnober à 150 Kop., 85⅓ ℔. Schellack à 25 Kop., 21⅓ ℔. Kreide à 4 Kop., ⅔ ℔. Storax à 40 Kop.; was kostet 1 ℔. der Mischung (des Siegel-Lacks)? (Vergl. Nr. 62.)

78. Ein Goldschmied hat 18 Mark 15-löthigen, 10 Mark 14-löthigen, 14 Mark 13-löthigen, 10 Mark 12-löthigen, 20 Mark

10-löthigen Silbers; wie groß ist der Feingehalt sämmtlichen Silbers, und, wenn alles zusammengeschmolzen wird, wie-viel-löthig wird die Masse werden?

79. Es hat Jemand Leinsamen eingekauft: 8 Twt. 6 Twk., 750 Kop. pr. Twt.; 12 Twt. 7 Twk., 720 Kop. pr. Twt.; 13 Twt., 675 Kop. pr. Twt.; 15 Twt. 5 Twk., 6 Rub. pr. Twt.; 15 Twt. 3 Twk., 540 Kop. pr. Twt.. Was ist der Durchschnittspreis für 1 Twt.?

XXIII. Die Alligations-Regel,

namentlich die Beschickung des Schmelz-Tiegels.

Berechnung des Feingehalts:

1. Ein Silber-Service von der 85-Probe wiegt 15 *Pf.*, ? der Feingehalt.

2. Ein Armleuchter aus 14-löthigem Silber wiegt 40 *Pf.*, ? der Feingehalt.

Berechnung der Löthigkeit.

3. Obiges Silber-Service von 15 *Pf.* enthält 1275 Solotnik fein Silber; von welcher Probe ist es?

4. Obiger Armleuchter von 40 *Pf.* Gewicht enthält 35 *Pf.* fein Silber; wie groß die Löthigkeit?

5. Aus feinem und 10-löthigem Silber sollen 12 Mark 13-löthigen Silbers gemacht werden; wie viel ist von jedem zu nehmen?

6. Aus 14- und 8-löthigem Silber sollen 15 Lt. 12-löthigen Silbers gemacht werden, ? von jedem.

7. Aus 23- und 19-karatigem Golde sollen 8 Lt. 20-karatiges Gold gemacht werden, ? von jedem.

8. Man will aus 14-, 10- u. 8-löthigem Silber 13-löthiges machen; wenn man nun von dem 10- und 8-löthigen Silber, von jedem eine Mark nimmt, wie ist das Verhältniß der drei Sorten zu einander, und wie viel Theile sind von der besseren, wie viel von der schlechteren Sorte zu nehmen?

Anm.. Es ist nicht gerade nöthig, daß man zur Mischung von jeder Sorte 1 Mark nehme; man kann auch Loth, Quentchen oder beliebige andere Theile nehmen, wenn nur das Verhältniß dieser Theile unter einander bleibt, wie das Verhältniß der Mark unter einander.

9. Silber von der 84-er, 60-er und 48-er Probe will man zu Silber von der 78-er Probe beschicken. Wenn man nun von

der 60=er und 48=er Probe, von jeder 1 ℳ. nimmt, wie ist das Verhältniß der drei Sorten zu einander, und wie viel Theile sind vom besseren, wie viel vom schlechteren Silber zu nehmen?

Anmerkung. Dieses Exempel ist ganz das vorige, nur Probehaltigkeit statt Löthigkeit genommen.

10. Man will feines, 14=, 12= und 10=löthiges Silber zu 13=löthigem beschicken. Wenn man nun von dem feinen und 14=löthigen Silber, von jedem 1 Mark nimmt, und eben so von dem 12= und 10=löthigen 1 Mark, wie ist das Verhältniß der drei zu mischenden Sorten, und wie viel ist von der besseren, wie viel von der schlechteren Sorte zu nehmen?

11. Mit Gold von der 80=er und anderem von der 60=er Probe ist der Tiegel so zu beschicken, daß sich daraus die 72=er Probe ergebe; wie viel Loth, Solotnik und Doli sind von jeder Sorte zu 18 Loth der Mischung zu nehmen?

Verzeichniß

der in diesem Buche vorkommenden

Münz-, Maaß- und Gewichts-Verhältnisse.

Münzen.

1 Rubel Silber = 100 Kopeken Silber.
1 Gulden holländisch (fl. holl.) (= 54 Kop. S.) = 20 Stüver (Stv.), 1 Stüver = 16 Pfennige (Pf.).
1 Reichs-Thaler, d. i. 1 österreichischer Thaler (Rthlr.) (= 128 Kop. S.) = 24 gute Groschen (gGr.), 1 gGr. = 12 Pfennige (Pf.).
1 Mark lübisch (Mklb.) (= 38 Kop. S.) = 16 Schillinge (ßl.), 1 ßl. = 12 Pfennige (Pf.).
1 Pfund Sterling (L. Sterl.) (= 6 Rub. 17 Kop. S.) = 20 Schilling Sterl. (sh. Sterl.), 1 sh. Sterl. = 12 Pence (d).
1 Gulden rheinisch (fl. rhn.) (= 54 Kop. S.) = 60 Kreuzer (Krzr.), 1 Kreuzer = 4 Pfennige (Pf.).
1 Mark Hamburger Banco (Mk. Hamb. Bco.) (= 48 Kop. S.) = 16 Schillinge (ßl.).
1 Thaler preußisch (= 91 Kop. S.) = 30 Silber- oder Neugroschen (Sgr., Ngr.).

Maaße für Flüssigkeiten (ehemalige in den Ostsee-Provinzen).

1 Oxhoft (Oxh.) = 6 Anker (Ank.), 1 Anker = 30 Stof.
2 Oxh. = 3 Ahm.

Jetzt überall in Rußland geltende:

1 Sorokowoi = 40 Wedro (Eimer oder Spann), 1 Wedro = 10 Kruschken (Stöf).

Getreide-Maaße.

1 Tschetwert (Twt.) = 8 Tschetwerik, ersterer beinahe = 3 ehemaligen rigischen Lof.
1 Tschetwerik (Twk.) = 8 Garnitz (Grz.).
1 Kuhl = 10 Tschetwerik.

Papier-Maaße.

1 Ballen = 10 Rieß, 1 Rieß = 20 Buch, 1 Buch = 24 Bogen Schreibpapier oder 25 Bogen Druckpapier.

Längen-Maaße.

104 russische Werst = 1° des Äquators = 15 geographischen Meilen.
1 Werst (russische Meile) = 500 Szaschen (russische Faden, von 7 russischen Fußen à 12 Zoll).
1 Szaschen = 3 Arschin (russischen Ellen).
1 Arschin = 16 Werschok.
1 livländische Elle (ehemalige = 12 Werschok) = $\frac{3}{4}$ Arschin.
Der russische Fuß ist dem englischen vollkommen gleich.

Gewichte (ehemalige).

1 Schiffpfund (Sℳ.) = 20 Lies-Pfund (Lℳ.), 1 Lℳ. = 20 Pfund (ℳ.), 1 ℳ. = 32 Loth (Lt.), 1 Loth = 4 Quentchen (Qt.).

Jetzt geltende:

1 Berkowez (Brkwz.) = 10 Pud (Pd.), 1 Pud = 40 Pfund (ℳ.), 1 ℳ. = 96 Solotnik (Solotn.).

Apotheker-Gewicht.

1 Medicinal-Pfund = 12 Unzen, 1 Unze (℥) = 8 Drachmen, 1 Drachme (ʒ) = 3 Scrupel, 1 Scrupel (℈) = 20 Gran (gr.).
1 ℳ. russisches Handelsgewicht an Apotheker-Gewicht = 13 Unzen 5 Drachmen 10 Gran = 6550 Gran,
1 ℳ. Medicinal-Gewicht = 5760 Gran,
folglich ist das Verhältniß des Medicinal-Gewichts zum Civil-Gewicht wie 576 : 655; demnach ist
1 ℳ. Medicinal-Gewicht = $\frac{576}{655}$ = 0,879 389.... ℳ. Civil-Gewicht, und
1 ℳ. Civil-Gewicht = $\frac{655}{576}$ = 1,13 715 277.... ℳ. Medicinal-Gewicht.

Anmerkung. Durch diejenige Abkürzung, welche die Lehre von den Ketten-Brüchen an die Hand giebt, erhält man aus dem Bruche $\frac{576}{655}$ = 0,879 389.... für das Verhältniß des Medicinal-Pfundes zum bürgerlichen folgende Brüche $\frac{7}{8}$, $\frac{22}{25}$, $\frac{51}{58}$, $\frac{175}{199}$, wovon der erste und dritte ein wenig zu klein, der zweite und vierte ein wenig zu groß ist, jedoch so, daß sie dem wahren Werthe immer näher kommen;

wie aus deren Verwandlung in Decimal-Brüche und aus der Vergleichung mit dem Werthe des Bruches $\frac{875}{555}$ als Decimal-Bruch hervorgeht. Dieser ist nämlich, wie oben gefunden, = 0,879 389....

Von dem Bruche $\frac{7}{8} = 0{,}875$ stimmen die zwei ersten Decimal-Stellen, vom Bruch $\frac{22}{25} = 0{,}88$ stimmt zwar nur die erste Decimal-Stelle allein, doch ist der Bruch, wenn gleich etwas zu groß, genauer als der erste; bei $\frac{51}{58} = 0{,}8790$ stimmen die drei ersten Decimal-Stellen, bei $\frac{175}{199}$ freilich auch nur die drei ersten, aber der Bruch ist darum genauer als der vorige, weil hier in der vierten Decimal-Stelle eine 4, im wahren Bruche aber eine 3 steht.

Eine lichtvolle Darstellung der Lehre von den Ketten-Brüchen, mittels welcher man Verhältnisse, die durch große Zahlen, und zwar Primzahlen zu einander, ausgedrückt sind, ohne erhebliche Veränderung des Werthes als kleinere Zahlen ausdrückt, findet sich in Vega's mathematischen Vorlesungen.

Ungeachtet aller in den Correcturen der Aufgaben und Resultate bewiesenen Sorgfalt haben sich, nach geschehenem Drucke, dennoch folgende vor dem Gebrauch des Buches zu verbessernde Stellen gefunden

in den Aufgaben:

S. 4, Zeile 11, st. VI. l. IV.
— 9, — 1, auf „$\sqrt{1\frac{7}{2}}$“ folgt $= \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$
— —, — 2, st. „85“ l. 8,5
— 10, — 3 v. u., st. „Schritte“ l. Schritt
— 16, — 11 v. u., st. „will“ l. wird
— 31, — 11, st. „Ammoniak-Harz“ l. Ammoniac-Harz

in den Resultaten:

S. 12, Zeile 4 v. u., fehlt nach der ersten und letzten 169 das Zeichen (') für „Fuß“
— 15, — 16, st. „um eben denselben Zins zu tragen“ l. damit es eben denselben Zins trage
— 18, — 7 v. u., st. „32 Rub. $5\frac{5}{7}$ Kop.“ l. 32 Rub. $5\frac{5}{6}$ Kop.
— 22, — 12, st. „C $432\frac{1}{7}$ Rb.“ l. D $432\frac{1}{37}$ Rub.

Resultate der Aufgaben

zu

dem Lehrbuch der demonstrativen gemeinen Arithmetik.

Von

Johann Friedrich Heinrichsen,

ehemaligem Kreisschul-Lehrer.

Dorpat.

Gedruckt bei J. C. Schünmann's Wittwe und C. Mattiesen.

1855.

Der Druck dieser Schrift wird unter der Bedingung gestattet, daß nach Beendigung desselben der Abgetheilten Censur in Dorpat die vorschriftmäßige Anzahl Exemplare zugestellt werde.

Dorpat, den 19. April 1855. Abgetheilter Censor de la Croix.

I. Multiplicationen unbenannter Zahlen.

Nr.	
1.	4 560 840 019.
2.	26 698 890 408.
3.	848 583 946 876.
4.	35 787 536 616.
5.	262 122 972.
6.	9 875 555 555 679.
7.	3 980 572 032.
8.	12 858 725 418.
9.	8 753 210 071 212.
10.	71 234 567 883 660.
11.	612 345 675 703.
12.	2 345 678 853 987 360.
13.	54 321 012 341 885.
14.	8 999 887 652 904.
15.	689 012 340 429 627.
16.	36 876 530 422 480.
17.	34 698 765 258 976.
18.	384 765 432 095 804.
19.	9 678 901 226 967.
20.	5 896 345 677 406.
21.	4 338 596 019 047 451.
22.	3 697 689 962 608.
23.	50 700 344 192 460.
24.	1 556 739 842 175.
25.	456 789 012 344 404.
26.	632 854 954 368.
27.	157 643 289 675 504.
28.	197 654 321 010 843.
29.	6 445 687 032 765.
30.	46 938 521 945 790.
31.	99 546 300 069 170.
32.	21 164 680 800 093 547 889 136.
33.	1 293 585 183 644 387 904.
34.	358 210 792 752 565.

II. Divisionen unbenannter Zahlen.

Nr.	
1.	5 989.
2.	96 785.
3.	28 765; Rest 3266.
4.	79 094; Rest 8748.
5.	20 018.
6.	2 809.
7.	5 929.
8.	6 084.
9.	571 787.
10.	704 969.
11.	12 009; Rest 360480.
12.	24 389.
13.	9 450 062 070; Rest 6463.
14.	100 642 844; Rest 52244.
15.	130 871 057; Rest 3198.
16.	10 739 774.
17.	7 947 478 031; Rest 3793.
18.	27 340 080; Rest 47247208.
19.	48 373 828 526.
20.	91 038 009.
21.	84 669 305.
22.	4 132 576.
23.	100 002 433.
24.	72 465 734 981.
25.	1 152 661 811.
26.	1 015 385 858.
27.	51 003 686 059; Rest 1274.
28.	6 789 012 345.
29.	117 021 996; Rest 2421.
30.	186 101 595.

Nr.
31. 28 410 855 399; Rest 1502.
32. 15 962 261 004; Rest 2.
33. 658 731 429.
34. 723 968 874; Rest 41773.
35. 6 144 583 645; Rest 6372.

Nr.
36. 20 000 000 984; Rest 9933770.
37. 10 000 000; Rest 48901234.
38. 10 000 283 099; Rest 36959.
39. 300 000 000 001 326; R. 38874320.
40. 125 142 590; Rest 43063.

III. Multiplicationen benannter Zahlen.

Nr.
1. 102 fl. holl. 10 Stv. 8 Pf..
2. 20 Twt. 5 Twk..
3. 1 Sc. 1 Lc. 6 c.
4. 187 Rub. 20 Kop..
5. 774 Rth. 22 gGr. 8 Pf..
6. 295 fl. holl. 8 Stv. 8 Pf..
7. 808 Mlb. 7 ßl..
8. 1139 Mlb. 10 ßl. 8 Pf..
9. 1 Sc. 15 Lc. 2 c. 26 Lt..
10. 6 Lc. 11 c. 5 Lt. 2 Qt..
11. 1 Sc. 2 Lc. 1 c. 31 Lt. 3 Qt..
12. 437 Rth. 5 gGr. 9 Pf..
13. 36 Orh. 3 Ank..
14. 1018 Mlb. 15 ßl. 4 Pf..
15. 654 fl. holl. 14 Stv. 6 Pf..
16. 63 L. Sterl. 17 ßl. 6 d.
17. 22 Sc. 5 Lc. 5 c. 2 Lt. 2 Qt..

Nr.
18. 18 Sc. 1 Lc. 4 c. 30 Lt. 3 Qt.
19. 247 Sc. 19 Lc. 6 c. 26 Lt. 2 Qt..
20. 1809 Sc. 12 L c. 2 c. 8 Lt..
21. 4630 Sc. 9 Lc. 3 c. 30 Lt. 1 Qt..
22. 5 Sc. 9 Lc. 4 c. 9 Lt. 2 Qt..
23. 5670 Sc. 7 c. 12 Lt. 1 Qt..
24. 111 Sc. 17 Lc. 2 c. 29 Lt..
25. 299 Sc. 19 Lc. 16 c. 4 Lt. 1 Qt..
26. 13 Sc. 8 Lc. 10 c. 11 Lt. 1 Qt..
27. 1629 Sc. 14 Lc. 7 c. 20 Lt..
28. 177018 Rth. 16 gGr..
29. 52212 Sc. 6 Lc. 12 c. 4 Lt. 3 Qt..
30. 5159 Sc. 14 Lc. 15 c. 6 Lt..
31. 939 Sc. 15 c. 5 Lt.
32. 222747 Rth. 19 gGr. 6 Pf..
33. 474 Sc. 19 Lc. 16 c. 9 Lt. 1 Qt..

IV. Divisionen benannter Zahlen.

Nr.
1. 2 Ank. 17 Stof.
2. 8 Pud 37 c. 6 Solotn.
3. 34 Brk. 8 Pd. 17 c. 35 Solotn.
4. 59 Brk. 9 Pd. 39 c. 27 Solotn.
5. 28 Brk. 5 Pd. 5 c. 5 Solotn.
6. 7 Pud 38 c. 95 Solotn.
7. 70 Twt. 6 Twk. 6 Grz..
8. 7 Twk. 7 Grz...
9. 11 Lc. 14 c. 17 Lt. 3 Qt..
10. 19 Lc. 19 c. 31 Lt. 3 Qt..
11. 24 Sc. 14 Lc. 4 c. 19 Lt. 2 Qt..
12. 19 Sc. 19 Lc. 19 c. 19 Lt..
13. 538 Rthlr. 11 Pf..
14. 345 Rth. 17 gGr. 9 Pf..

Nr.
15. 143 Sc. 18 c. 31 Lt. 3 Qt..
16. 33 Sc. 19 Lc. 31 Lt. 3 Qt..
17. 17 Lc. 18 c. 3 Qt..
18. 3 Sc. 3 Lc. 3 c. 3 Lt. 3 Qt..
19. 3 Sc. 19 Lc. 17 c. 30 Lt. 3 Qt..
20. 2 c. 31 Lt. 3 Qt..
21. 12 Sc. 13 Lc. 14 c. 15 Lt. 1 Qt..
22. 18 Sc. 17 Lc. 3 Qt..
23. 5 Lc. 18 c. 23 Lt. 2 Qt..
24. 8 Lc. 17 Lt. 3 Qt.
25. 35 Sc. 8 Lc. 9 c. 17 Lt. 2 Qt..
26. 8 Sc. 13 Lc. 16 c. 3 Lt. 1 Qt..
27. 5 Sc. 14 Lc. 8 c. 21 Lt. 2 Qt..
28. 7 Brk. 8 Pd. 34 c. 29 Solotn..

V. Alle einfachen und zusammengesetzten Factoren einer gegebenen Zahl zu finden.

1. 3465 hat, den Factor 1 abgerechnet, die einfachen Factoren 3, 3, 5, 7, 11, und außerdem die zusammengesetzten 9, 15, 45, 21, 63, 35, 105, 315, 33, 99, 55, 165, 495, 77, 231, 693, 385, 1 155, 3 465.

2. 360 hat, den Factor 1 abgerechnet, die einfachen Factoren 2, 2, 2, 3, 3, 5, und außerdem die zusammengesetzten 4, 8, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.

3. 2 520 (= 7 . 360) hat, außer dem Factor 1, die einfachen Factoren 2, 2, 2, 3, 3, 5, 7, und außerdem die zusammengesetzten 4, 8, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360, 14, 28, 56, 21, 42, 84, 168, 63, 126, 252, 504, 35, 70, 140, 280, 105, 210, 420, 840, 315, 630, 1 260, 2 520.

4. 1 155 hat, ohne den Factor 1, die einfachen Factoren 3, 5, 7, 11, und die zusammengesetzten 15, 21, 35, 105, 33, 55, 165, 77, 231, 385, 1155.

5. 99 999 hat, ohne den Factor 1, die einfachen Factoren 3, 3, 41, 271, und die zusammengesetzten 9, 123, 369, 813, 2 439, 11 111, 33 333, 99 999.

6. 999 999 hat die einfachen Factoren 3, 3, 3, 7, 11, 13, 37, und die zusammengesetzten 9, 27, 21, 63, 189, 33, 99, 297, 77, 231, 693, 2 079, 39, 117, 351, 91, 273, 819, 2 457, 143, 429, 1 287, 3 861, 1 001, 3 003, 9 009, 27 027, 111, 333, 999, 259, 777, 2 331, 6 993, 407, 1 221, 3 663, 10 989, 2 849, 8 547, 25 641, 76 923, 481, 1 443, 4 329, 12 987, 3 367, 10 101, 30 303, 90 909, 5 291, 15 873, 47 619, 142 857, 37 037, 111 111, 333 333, 999 999.

VI. Größte gemeine Theiler zweier Zahlen.

Nr.		die dadurch dividirten Zahlen sind:	Nr.		die dadurch dividirten Zahlen sind:	Nr.		die dadurch dividirten Zahlen sind:
1.	569 386;	1,2;	7.	4 680;	3,4;	12.	10 997;	3,22;
2.	69 453;	5,13;	8.	965 432;	5,27;	13.	1 559;	24,35;
3.	5 963;	8,21;	9.	54 328;	625,927;	14.	1 699;	70,99;
4.	18 963;	6,521;	10.	5 259;	35,132;	15.	983;	48,245;
5.	57;	3,7;	11.	1 669;	5,6;	16.	1 994;	105,416.
6.	276 210;	8,15;						

VII. Addition der Brüche.

Nr.	kleinster gem. Nenn.	die Summe.	Nr.	kleinster gem. Nenn.	die Summe.
1.	360	$\frac{1369}{360} = 3\frac{289}{360}$.	4.	504	$\frac{1484}{504} = 2\frac{17}{18}$.
2.	540	$\frac{1868}{540} = 3\frac{62}{135}$.	5.	360	$33 + \frac{1959}{360} = 33 + 5\frac{53}{120}$.
3.	1080	$\frac{4633}{1080} = 4\frac{313}{1080}$.	6.	1680	$\frac{2405}{1680} = 1\frac{163}{336}$.

Nr.	kleinster gem. Nenner.	die Summe.
7.	1 080	$7+\frac{7142}{1080}=7+6\frac{331}{540}$ $=13\frac{331}{540}$.
8.	120	$\frac{815}{120}=6\frac{19}{24}$.
9.	2520	$\frac{7579}{2520}=3\frac{19}{2520}$.
10.	10 395	$\frac{21674}{10395}=2\frac{884}{10395}$.
11.	32 760	$\frac{28439}{32760}$.
12.	332 640	$\frac{1009777}{332640}=3\frac{11857}{332640}$.
13.	1 584	$\frac{10411}{1584}=6\frac{907}{1584}$.
14.	2 520	$\frac{15759}{2520}=6\frac{71}{280}$.
15.	252	$\frac{1582}{252}=6\frac{5}{18}$.
16.	600	$\frac{2927}{600}=4\frac{527}{600}$.
17.	3 960	$\frac{50698}{3960}=12\frac{1589}{1980}$.
18.	27 720	$\frac{157345}{27720}=5\frac{3749}{5544}$.
19.	83 160	$\frac{522571}{83160}=6\frac{23611}{83160}$.
20.	352 800	$\frac{2522481}{352800}=7\frac{17627}{117600}$.
21.	792	$\frac{792}{792}=1$.

VIII. Subtraction mehrer Subtrahenden.

Nr.	kleinster gem. Nenn.	die Differenz.
1.	63 000	$\frac{214}{7875}$.
2.	180	$1693\frac{23}{180}$.
3.	120	$2\frac{5}{24}$.
4.	126	$36\frac{5}{126}$.
5.	360	$307\frac{43}{360}$.
6.	792	$13\frac{101}{198}$.
7.	360	$6\frac{263}{360}$.
8.	360	$124\frac{8}{9}$.

IX. Division der Decimal-Brüche.

1. 37 | 800 | 21,621 621 621.... $=21\frac{23}{37}$ (vergl. § 76, Nr. 12).
2. 50 000 | 1 978 | , oder auch, ohne Weiteres: 5 | 0,1 978 | 0,03 956.
3. 410 000 | 8 |, oder auch, ohne Weiteres: 41 | 0,0 008 | 0,0 000 195 121 951 219 512.... $=\frac{1}{51250}$.
4. 815 000 | 3 507 825 | 4,3 040 797..., abbrevirt 4,30 408.
5. 850 | 39 012 | 45,89 647 005...., abbr. 45,8 965.
6. 9 937 | 8 500 | 0,8 553 889 ...., abbr. 0,855 389, oder 0,85 539, oder 0,8554.
7. 825 | 735 | 0,8 90 90 90 9 .... $=\frac{42}{55}$, oder abbr.: 0,891.
8. 4 | 356 000 | 89 000.
9. 760 | 42 276 | 55,626 315 789...., abbr. 55,62 631 579, od. 55,6 263 158, oder 55,626 316, oder 55,62 632.
10. 380 000 | 872 905 | 2,297 118...., abbr. 2,29 712.
11. 678 000 | 5 493 705 | 8,1 028...., abbr. 8,103, welches um nicht voll $\frac{1}{1000}$ größer ist als der wahre Werth.
12. 650 | 67 800 538 | 104 308,52.
13. 36 000 | 77 834 | 2,16 205 555...., abbr. 2,16206, od. 2,1621.
14. 57 380 000 | 6 385 762 | 0,111 288 985...., abbr. 0,111 289, oder 0,11 129, oder 0,1 113.
15. 57 382 | 63 857 620 | 1 112,851 068...., wenig mehr als 1 112,851.
16. 6 789 345 | 425 000 | 0,06 259 808...., abbr. 0,0 626.
17. 299 856 | 70 534 560 | 235,228 109...., abbr. 235,22 811, od. 235,23.
18. 2 835 | 6 659 400 | 2 348,99 470 899 470 899 470 .... $=2\,348\frac{188}{189}$.

X. Abgekürzte Multiplication.

Nr.

1. 3,9 081 095 [22.
2. $\pi \sqrt{34} = 18{,}3\,184\,756$ [30.
3. 0,06 566 604 [10; das Komma des Products: $\frac{1}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{5}{100} = 0{,}05$.
   Probe: $\frac{5}{41} \times \frac{7}{13} = \frac{35}{533} = 0{,}065\,666\,041\,2\ldots.$
4. 2,008 891 [62; das Komma: $\frac{2}{10} \times 8 = \frac{16}{10} = 1{,}6$.
5. 13,9 708 029 [17; Probe: $5\frac{69}{137} \times 2\frac{7}{13} = \frac{754}{137} \times \frac{33}{13} = \frac{24882}{1781}$
   $= 13{,}970\,802\,919\ldots.$
6. 0,5 175 845 [27; Probe: $\frac{199}{239} \times \frac{23}{37} = \frac{4577}{8843} = 0{,}5\,175\,845$ [30.
7. 16,401 349 [38.
8. 1,4 190 475 [81; das Komma: $5 \times \frac{2}{10} = \frac{10}{10} = 1$. — Probe: $5\frac{9}{28} \times \frac{4}{15}$
   $= \frac{149}{28} \times \frac{4}{15} = \frac{149}{105} = 1{,}4\,190\,476\ldots.$

XI. Abgekürzte Division.

Nr.

1. 0,03 285 795; Probe, $\frac{4}{15} : 8\frac{25}{216} = \frac{4}{15} : \frac{1753}{216} = \frac{4}{15} \times \frac{216}{1753} = \frac{864}{26295}$
   $= 0{,}03\,285\,795\ldots.$
2. 0,35 35 35 3; Probe, $\frac{5}{44} : \frac{9}{28} = \frac{5}{44} \times \frac{28}{9} = \frac{5}{11} \div \frac{7}{9} = \frac{35}{99} = 0{,}35\,35\,35\,3\ldots.$
3. 14,857 323 [6; Probe, $9\frac{41}{73} : \frac{65}{101} = \frac{698}{73} \times \frac{101}{65} = \frac{70\,498}{4745}$
   $= 14{,}857\,323\,498\ldots.$
4. 0,0 024 39 39 39; Probe, $\frac{7}{3000} : \frac{23}{23} = \frac{7}{3000} \times \frac{23}{22} = \frac{161}{66000} =$
   $0{,}0\,024\,39\,39\,39\ldots.$
5. 0,01 097 804; Probe, $\frac{7}{1500} : \frac{1169}{2750} = \frac{7}{1500} \times \frac{2750}{1169} = \frac{11}{1002} =$
   $0{,}010\,978\,043\ldots.$
6. 2,762 150 287; Probe, $\frac{135}{221} : \frac{23}{104} = \frac{135}{221} \times \frac{104}{23} = \frac{135 \cdot 8}{17 \cdot 23} = \frac{1080}{391} =$
   $2{,}76\,214\,833\,759\,590\ldots.$
7. 2,76 214 833 759 591.
8. 13,028 191 383 [9; Probe, $64\frac{1}{73} : \frac{69}{137} = \frac{479}{73} : \frac{69}{137} = \frac{65623}{5037} =$
   $13{,}0\,281\,913\,837\ldots.$

XII. Quadrat-Wurzel-Ausziehung.

Nr.		Nr.		Nr.	
1.	5 837.	7.	89 796.	13.	24 356 879.
2.	57 693.	8.	589 794.	14.	18 200 005 674.
3.	65 079.	9.	479 286.	15.	371,805.
4.	690 543.	10.	18 701 356.	16.	0,000 269 586.
5.	885 990.	11.	610 058 312.	17.	579 380 942 785.
6.	954 923.	12.	30 000 594 721.	18.	578 692 531 087 956 289.

Nr.

19. 0,8740 = 0,874, Rest 5603, d. i. Rest 0,00 005 603.
20. 0,19 639 984, Rest 0,0 000 000 028 479 744.
21. 2,2 360 679 774....
    Rest nach der 8. Decimal-Stelle 0,0 000 000 335 400 791.
    Rest nach der 10. Decimal-Stelle 0,00 000 000 044 627 308 924.

Nr.

22. 2,8 284 271 247...., Rest nach der
8. Decimal-Stelle 0,0 000 000 268 485 056,
10. Decimal-Stelle 0,00 000 000 026 129 064 991.

23. 5,830 951 894...., Rest nach der
7. Decimal-Stelle 0,00 000 110 607 676,
9. Decimal-Stelle 0,000 000 009 857 812 764.

24. 5,916 079 783 099...., Rest nach der
8. Decimal-Stelle 0,0 000 000 366 751 516,
12. Decimal-Stelle 0,000 000 000 007 289 113 956 199.

25. 6,08 276 253 029...., Rest nach der
8. Decimal-Stelle 0,0 000 000 036 279 991,
11. Decimal-Stelle 0,0 000 000 000 999 968 325 159.

26. 6,92 820 323 027...., Rest nach der
8. Decimal-Stelle 0,0 000 000 038 175 671,
11. Decimal-Stelle 0,0 000 000 000 763 373 557 271.

27. 9,0 553 851 381...., Rest nach der
8. Decimal-Stelle 0,0 000 001 473 748 831,
10. Decimal-Stelle 0,00 000 000 067 764 392 839.

28. 9,94 987 437 106...., Rest nach der
7. Decimal-Stelle 0,00 000 141 419 951,
11. Decimal-Stelle 0,0 000 000 001 233 694 344 764.

29. 1, 732 050 807 568...., Rest nach der
10. Decimal-Stelle 0,00 000 000 023 859 794 375,
12. Decimal-Stelle 0, 000 000 000 003 039 033 925 376.

30. 2,64 575 131 106...., Rest nach der
7. Dec.-Stelle 0,00 000 005 854 831,
11. Dec.-Stelle 0,0 000 000 000 242 911 216 764.

31. 74, 161 984 870 956...., Rest nach der
7. Dec.-St. 0,00 001 052 456 896,
10. Dec.-St. 0,00 000 000 839 951 033 319,
12. Dec.-St. 0, 000 000 000 093 368 027 646 064.

32. 4,1 231 056 256...., Rest 0,00 000 000 014 563 262 464.

33. 1, 414 213 562 373 095 048...., Rest nach der
8. Dec.-St. 0,0 000 000 067 121 264,
10. Dec.-St. 0,00 000 000 020 674 401 871,
12. Dec.-St. 0, 000 000 000 000 268 838 608 871,
15. Dec.-St. 0, 000 000 000 000 000 138 032 020 120 975,
18. Dec.-St. 0, 000 000 000 000 000 002 267 518 133 157 877 696.

34. 2,9 154 759 474...., Rest nach der
7. Dec.-St. 0,00 000 027 651 919,
10. Dec.-St. 0,00 000 000 013 207 243 324.

Nr.
35. 86, 735 229 290 064 138...., Rest nach der
6. Dec.-St. 0, 000 050 317 559,
8. Dec.-St. 0,0 000 000 111 260 959,
12. Dec.-St. 0, 000 000 000 023 986 550 875 904,
15. Dec.-St. 0, 000 000 000 000 047 627 591 846 316 956.
36. 99,0 050 503 762 308 077 135 983...., Rest nach der
10. Dec.-St. 0,00 000 000 610 023 847 356,
16. Dec.-St. 0,00 000 000 000 000 269 260 933 740 562 071,
22. D.-St. 0,00 000 000 000 000 000 000 858 434 342 192 512 126 623 711.
37. 99,9 949 998 749 937 496 093...., Rest nach der
5. Dec.-St. 0,0 019 748 999,
9. Dec.-St. 0, 000 000 198 739 984 124,
13. Dec.-St. 0,00 000 000 000 992 137 342 496 031,
19. Dec.-St. 0,00 000 000 000 000 000 953 036 325 761 609 735 351.

XIII. Cubik-Wurzel-Ausziehung.

Nr.
1. 5 837, Rest 0.
2. 371,805, Rest 0.
3. 65 079, Rest 0.
Nr.
4. 57 693, Rest 0.
5. 89 796, Rest 0.

Nr.
6. 589 794, Rest 0.
Aus den 4 ersten Classen der gegebenen Cubik-Zahl, d. i. aus 205 163 949 302 ist die Cubik-Wurzel 5 897, mit dem Reste 98 080 029.
7. 470 918 538, Rest 0.
Aus den 5 ersten Classen der gegebenen Cubik-Zahl 104 432 905 541 582 ist die Cubik-Wurzel = 47 091, mit dem Reste 5 680 167 011;
aus den 6 ersten Classen der gegebenen Cubik-Zahl, d. i. aus 104 432 905 541 582 581 ist die Cubik-Wurzel 470 918, mit dem Reste 357 927 121 949;
aus den 7 ersten Classen 104 432 905 541 582 581 860 ist die Cubik-Wurzel 4 709 185, mit dem Reste 25 281 124 675 235;
aus den 8 ersten Classen ist die Cubik-Wurzel 47 091 853, mit dem Reste 5 322 342 375 953 019.
8. 20, 185 769 148...., Rest nach der
4. D.-St. 0,84 526 830 207,
5. D.-St. 0, 011 183 364 993 024,
6. D.-St. 0, 000 181 807 604 888 391,
7. D.-St. 0, 000 059 568 023 246 409 629,
8. D.-St. 0, 000 010 672 190 250 496 160 056,
9. D.-St. 0, 000 000 893 023 628 059 460 230 208.

Nr.

9. 1,25 992 104 989...., Rest nach der
4. D.-St. 0, 000 100 242 201,
5. D.-St. 0, 000 004 999 808 512,
6. D.-St. 0, 000 000 237 609 513 039,
8. D.-St. 0, 000 000 047 121 395 842 459 136,
9. D.-St. 0, 000 000 004 261 567 806 361 919 351,
10. D.-St. 0, 000 000 000 451 805 284 631 045 974 008,
11. D.-St. 0, 000 000 000 023 207 000 633 563 690 886 331.

Probe nach der 11. Decimal-Stelle:

1,25 992 104 989....
1,25 992 104 989....
1,5 874 010 519 559 198 690 121....
1,25 992 104 989....
1, 999 999 999 976 792 999 366 436 309 113 669....
R. n. d. 11. D.-St. 0, 000 000 000 023 207 000 633 563 690 886 331....

2.

10. 1,4 422 495 703 074...., Rest nach der
4. D.-St. 0, 000 309 320 552,
5. D.-St. 0, 000 059 720 728 576,
6. D.-St. 0, 000 003 558 860 235 751,
7. D.-St. 0, 000 000 438 735 887 062 625,
8. D.-St. 0, 000 000 001 918 305 609 004 507,
10. D.-St. 0, 000 000 000 046 230 168 666 433 206 073,
12. D.-St. 0, 000 000 000 002 548 408 382 579 967 902 275 557,
13. D.-St. 0, 000 000 000 000 052 307 794 918 404 259 192 710 776.

11. 1, 587 401 051 968...., Rest nach der
4. D.-St. 0, 000 007 952 376,
6. D.-St. 0, 000 000 392 854 957 799,
8. D.-St. 0, 000 000 014 878 655 673 342 375,
10. D.-St. 0, 000 000 000 515 555 722 966 537 371 641,
12. D.-St. 0, 000 000 000 001 507 934 631 578 739 552 288 768.

12. 1,7 099 759 466...., Rest nach der
5. D.-St. 0, 000 052 164 383 027,
7. D.-St. 0, 000 000 409 450 458 697 521,
10. D. St. 0, 000 000 000 058 746 346 983 109 076 061 037.

13. 1, 817 120 592 832...., Rest nach der
5. D.-St. 0, 000 005 872 463 872,
7. D.-St. 0, 000 000 919 574 867 559 875,
9. D.-St. 0, 000 000 008 242 993 839 961 485 312,
12. D.-St. 0, 000 000 000 001 383 430 495 327 419 250 248 632.

Nr.

14. 1,91 293 118 277...., Rest nach der
5. D.-St. 0, 000 012 984 369 243,
7. D.-St. 0, 000 000 908 668 388 892 769,
8. D.-St. 0, 000 000 030 435 057 761 160 968,
10. D.-St. 0, 000 000 000 794 681 554 054 004 633 717,
11. D.-St. 0, 000 000 000 026 227 354 979 220 181 680 067.

15. 2,08 008 382 305...., Rest nach der
6. D.-St. 0, 000 010 683 412 068 213,
8. D.-St. 0, 000 000 039 614 466 522 081 032,
11. D.-St. 0, 000 000 000 024 715 875 265 092 304 977 375.

16. 2, 962 496 068 407...., Rest nach der
4. D.-St. 0, 002 529 317 376,
6. D.-St. 0, 000 001 801 107 800 064,
9. D.-St. 0, 000 000 010 725 718 764 991 173 568,
12. D.-St. 0, 000 000 000 009 755 178 009 192 612 524 184 857.

17. 9, 004 113 346...., Rest nach der
6 D.-St. 0, 000 084 177 658 329 103,
9. D.-St. 0, 000 000 022 790 243 687 560 854 264.

18. 9,996 665 554...., Rest nach der
3. D.-St. 0, 199 520 064,
4. D.-St. 0, 019 653 239 304,
6. D.-St. 0, 000 166 370 342 620 375,
8. D.-St. 0, 000 001 480 370 196 730 096 125,
9. D.-St. 0, 000 000 281 170 330 827 574 548 536.

19. 578 692 531 087 956 289, Rest 0.
Aus den fünf ersten Classen der Zahl 193 795 474 625 303 497 754 414 164 780 258 436 001 845 438 055 365 569 ist die Cubik-Wurzel 57 869 mit dem Wurzel-Reste 2 542 859 394;
aus den sieben ersten Classen derselben ist die Cubik-Wurzel 5 786 925, mit dem Reste 31 232 673 294 629;
aus den neun ersten Classen derselben ist die Cubik-Wurzel 578 692 531, mit dem Reste 88 365 737 527 656 873 780;
aus den zwölf ersten Classen derselben ist die Cubik-Wurzel 578 692 531 087, mit dem Reste 960 740 655 932 966 657 182 933.

XIV. Unzusammenhängende Verhältnisse an einander hängend zu machen, und daraus wiederum die ursprünglichen Verhältnisse herzustellen.

1. 24 : 40 : 35; die Exponenten sind $\frac{24}{40}$, $\frac{40}{35}$, d. i. $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{7}$, also die Verhältnisse selbst 3 : 5, 8 : 7.

2. 16 : 24 : 30 : 35; die Exponenten $\frac{16}{24}$, $\frac{24}{30}$, $\frac{30}{35}$, d. i. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, also die Verhältnisse selbst 2 : 3, 4 : 5, 6 : 7.

3. 72 : 90 : 240 : 280, abgekürzt 36 : 45 : 120 : 140. — Die Exponenten: $\frac{36}{45}$, $\frac{45}{120}$, $\frac{120}{140}$, d. i. $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{6}{7}$; und daraus die Verhältnisse selbst 4 : 5, 3 : 8, 6 : 7.

4. 210 : 280 : 336 : 384 : 1728, abgekürzt 105 : 140 : 168 : 192 : 864. — Die Exponenten sind: $\frac{210}{280}$, $\frac{280}{336}$, $\frac{336}{384}$, $\frac{384}{1728}$, d. i. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{9}$; und die Verhältnisse selbst sind: 3 : 4, 5 : 6, 7 : 8, 2 : 9.

5. 144 : 360 : 840 : 1890 : 15120 : 27720, abgekürzt 24 : 60 : 140 : 315 : 2520 : 4620. — Die Exponenten sind $\frac{24}{60}$, $\frac{60}{140}$, $\frac{140}{315}$, $\frac{315}{2520}$, $\frac{2520}{4620}$, d. i. $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{6}{11}$; und die Verhältnisse selbst sind 2 : 5, 3 : 7, 4 : 9, 1 : 8, 6 : 11.

6. 105 : 210 : 280 : 336 : 384. — Die Exponenten sind $\frac{105}{210}$, $\frac{210}{280}$, $\frac{280}{336}$, $\frac{336}{384}$, d. i. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$; und die Verhältnisse selbst 1 : 2, 3 : 4, 5 : 6, 7 : 8.

7. 800 : 1200 : 1680 : 1890 : 2079; die Exponenten $\frac{800}{1200}$, $\frac{1200}{1680}$, $\frac{1680}{1890}$, $\frac{1890}{2079}$, d. i. $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{10}{11}$; und die Verhältnisse selbst 2 : 3, 5 : 7, 8 : 9, 10 : 11.

8. 1320 : 1584 : 704 : 192 : 216, abgekürzt 165 : 198 : 88 : 24 : 27. — Die Exponenten sind $\frac{165}{198}$, $\frac{198}{88}$, $\frac{88}{24}$, $\frac{24}{27}$, d. i. $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{8}{9}$; und die Verhältnisse selbst 5 : 6, 9 : 4, 11 : 3, 8 : 9.

XV. Geometrisches Mittel.

Nr.

1. a) der Flächen-Inhalt = 34 832 967,806;
   b) die Seite des Quadrats = 5 901,946 103 278.... (etwas mehr als 5 901,946, auch nahezu 5 901,95). Der Rest der obigen Wurzel nach der 9. Decimal-Stelle ist 0,000 001 631 357 654 716.
2. a) der Flächen-Inhalt = 2 400 russische □Faden.
   b) die Seite des Quadrats = 48, 989 794 855 663.... Faden, mit dem Wurzel-Reste 0, 000 000 000 055 060 996 830 431. Die Seite des Quadrats abbrevirt, für gröbere Rechnungen: 49 Faden, für genauere 48,99, oder: 48,9 898 Faden. — Die oben gefundene Seite des Quadrats in russischen Faden, Fußen und Zollen = 48 Faden 6 Fuß 11 Zoll und 0,1 427 678.... Zoll, welches letztere nahezu gleich ist 0,143 Zoll.
3. a) der Flächen-Inhalt = 28 800□′.
   b) die Seite des Quadrats = 169′,70 562 748 477...., mit dem Wurzel-Reste 0,0 000 000 004 771 634 180 471. Die Seite des Quadrats abbrevirt, für gröbere Rechnungen: 170′; für feinere ist sie 169,7, oder 169′,71, oder 169′,706, oder 169′,70 563.— Die oben gefundene Seite des Quadrats in Fußen, Zollen und Linien rhnl. = 169′ 8″ 5‴,61 035 780 688...., also ungefähr 169′ 8″ 5‴,6.

XVI. Arithmetisches Mittel.

Nr.
1. $2'\,7\frac{1}{12}''$
2. $5'\,2\frac{7}{24}''$
3. $3562\frac{4}{10}$ Menschen.

Nr.
4. 27″ 9‴,45.
5. 2398 Schritt.

XVII. Die gerade Regel detri.

Nr.
1. 11 Rub. 73 Kop.
2. 46 Rub. 55 Kop.
3. 213 Rub. 75 Kop.
4. 84 Rub. 64 Kop.
5. 2 Rth. 22 gGr.
6. 11 gGr. 4 Pf.
7. 28 fl. rhn. 30 Krzr.
8. 25 fl. holl. 4 Stv.
9. 43 Rthlr. 18 gGr.
10. 88 Rthlr. 9 gGr.
11. 17 Rub. 28 Kop.
12. 57 Rub. 60 Kop.
13. 244 Rub. 20 Kop.
14. 16 Rub. 10 Kop.
15. 8 Rub. 40 Kop.
16. 57 Rub. 50 Kop.
17. 100 Rthlr.
18. 45 Kop.
19. 27 Kop.
20. 2 Rub. 45 Kop.
21. 9 Pf.
22. 18 gGr.
23. 58 Krzr.
24. 1 Rth. 7 gGr.
25. 2 Mklb. 8 ßl.
26. 12 ßl. 9 Pf.
27. 11 ßl. 9 Pf.
28. 2 gGr. 4 Pf.
29. 2 gGr. 6 Pf.
30. 2 Stv. 10 Pf.
31. 8 Pf. lb.
32. 32 Kop.
33. 45 Kop.
34. 15 Kop.

Nr.
35. 21 Kop.
36. 1 Rub. 5 Kop.
37. 4 Rub.

38. 410 Rub.
39. 75 Rub.
40. 45 Rub.
41. 81 Rub.
42. 1512 Rub.
43. 192 Rub.
44. 18 Rub.
45. 56 Rub.
46. 144 Rub.
47. 160 Rub.
48. 30 Rthlr.
49. 1 Rth. 4 gGr. 6 Pf.
50. 36 Rub.
51. 34 Rub. 56 Kop.
52. 160 Rub.
53. 3 fl. holl.
54. 4 fl. rhnl.
55. 7 Mklb. 2 ßl.
56. 3 Mklb. 5 ßl. 4 Pf.

57. 39 Rth. 8 gGr.
58. 9 Rth. 9 gGr.
59. 10 Rth. 15 gGr.
60. 11 Rth. 18 gGr.
61. 116 Rth. 12 gGr.
62. 58 Rth. 6 gGr.
63. 80 Rth. 14 gGr. 6 Pf.
64. 25 Rth. 20 gGr. 9 Pf.
65. 21 Rth. 21 gGr.
66. 19 Rth. 13 gGr. 6 Pf.
67. 182 Rth. 12 gGr.

Nr.
68. 942 Rub. 50 Kop.
69. 1221 Rub. 20 Kop.
70. 31 fl. h. 17 Stv. 8 Pf.
71. 6 Stv. 4 Pf.
72. 21 fl. holl. 15 Stv.
73. 14 Rub. 65 Kop.
74. 328 Rub. 35 Kop.
75. 35 fl. holl. 12 Stv. 8 Pf.

76. 1 Rth. 21 gGr. 4 Pf.
77. 8 Rth. 8 gGr.
78. 7 gGr. 8 Pf.
79. 12 Rth. 2 gGr. 8 Pf.
80. 8 gGr. 10 Pf.
81. 9 fl. holl. 3 Stv. 6 Pf.
82. 220 fl. h. 1 Stv. 4 Pf.
83. 24 fl. holl. 7 Stv. 8 Pf.
84. 60 fl. holl.
85. 1 fl. holl. 5 Stv.
86. 395 fl. holl.
87. 9 ßl. 4 Pf.
88. 9 Mklb. 6 ßl. 8 Pf.
89. 4 Mklb. 5 ßl. 4 Pf.
90. 8 Mklb. 13 ßl. 4 Pf.

91. 32 Rth. 5 gGr.
92. 20 Rth. 12 gGr. 3 Pf.
93. 43 Rth. 21 gGr.
94. 298 fl. holl. 15 Stv.
95. 12 Rub. 82½ Kop.
96. 7 Rub.
97. 555 Rth. 17 gGr. 6 Pf.
98. 596 Rth. 12 gGr. 8 Pf.
99. 10 gGr. 10 Pf.
100. 208 Rth. 18 gGr.

Nr.
101. 41 Rth. 16 gGr.
102. 5 ßl. lb. 4 Pf.
103. 1 ßl. lb. 10 Pf.
104. 10 Mklb. 8 ßl.
105. 11 fl h. 7 Stv. 8 Pf.
106. $40\frac{3}{4}$ Elle.
107. $\frac{1}{2}$ Elle.
108. $26\frac{1}{2}$ Lt.
109. 16 Rth. 16 gGr.
110. 8 Rth. 8 gGr.
111. 2 Lt. 2 Qt.
112. 41 Rthlr. 6 Pf.
113. 16 Rth. 2 gGr. 6 Pf.
114. 8 Lt. 15 Lt. 16 Lt.

Nr.
115. 2 ßl. 6 Pf.
116. 1 Rub. 75 Kop.
117. 2 Rub. 25 Kop.
118. 12 Rth. 8 gGr. 3 Pf.
119. 6 Mklb. 6 ßl. $1\frac{1}{2}$ Pf.
120. 7 Rth. 6 gGr. 3 Pf.
121. 42 Rth. 17 gGr.
122. 23 Mklb. 10 ßl.
123. 4 Mklb. 1 ßl. 3 Pf.
124. 2 Rth. 14 gGr. 5 Pf.
125. 2 Rub. 7 Kop.
126. 1 Rub. 98 Kop.
127. 7 Rub. 35 Kop.
128. 238 Rub. 56 Kop.

Nr.
129. 103 Rub. 62 Kop.
130. 570 Rub. 30 Kop.
131. 3 fl. holl. 7 Stv. 8 Pf.
132. 477 Rub. 10 Kop.
133. 7 Rub. 80 Kop.
134. 4 Mklb. 2 ßl.
135. 58 Rub.
136. 47 Mklb. 5 ßl. 6 Pf.
137. 16 Mklb. 1 ßl. 6 Pf.
138. 8 gGr. $7\frac{1}{2}$ Pf.
139. 3 Rub. 30 Kop.
140. 28 Rub. 60 Kop.
141. 2 Rub. 58 Kop.
142. 1 Rub.

XVIII. Die umgekehrte Regel detri.

1. $7\frac{1}{2}$ Meile. — Bemerkung: Je mehr Meilen täglich der Reisende zurücklegt, in desto weniger Zeit wird er seinen Weg vollenden.

Auch ohne umgekehrte Regel detri: Da der Reisende 10 Tage hindurch täglich 6 Meilen macht, und dann zur Stelle ist, so beträgt der ganze Weg $6 \cdot 10 = 60$ Meilen. Denselben Weg soll man aber in 8 gleiche Tagereisen theilen, folglich wird jede sein $= \frac{60}{8} = 7\frac{1}{2}$ Meile.

2. $37\frac{1}{2}$ Pud. — Bemerkung: Je mehr Pud der Fuhrmann führen soll, desto weniger Werst weit wird er sie führen können.

3. 96 Werst. — Bemerkung: Je mehr Werst weit der Fuhrmann die Fracht führen soll, desto weniger darf dieselbe an Gewicht haben.

4. 216 Elle Länge. — Je mehr breit die Tapeten sind, desto weniger wird davon an Länge nöthig sein, um denselben Raum zu bedecken.

5. $6\frac{2}{3}$ Elle Länge. — Bemerkung wie bei Nr. 4.

6. 106 Rub. $66\frac{2}{3}$ Kop.. — Bemerkung: Unter je weniger Personen eine vorhandene Summe vertheilt wird, um so größer müssen die Antheile ausfallen.

Auch ohne umgekehrte Regel detri: Zu vertheilen sind $48 \cdot 100 = 4800$ Rub., die man unter 45 Witwen zu theilen hat; also erhält jede $\frac{4800}{45} = 106$ Rub. $66\frac{2}{3}$ Kop..

7. 18 Pflüger. — Bemerkung: Je mehr Pflüger man anstellt, in desto weniger Tagen wird das Feld gepflügt sein.

8. $43\frac{1}{3}$ Kop.. — Bemerkung: Je weniger Jemand täglich ausgiebt, desto längere Zeit wird er mit einer bestimmen Summe auskommen.

Auch ohne umgekehrte Regel detri: Da er 45 Kop. 48 Mal ausgeben kann, so besitzt er 48 . 45 Kop., d. i. 21 Rub. 60 Kop.. Diese in 50 gleiche Theile getheilt, geben 43⅕ Kop..

9. 24 Kopeken. — Bemerkung: Je weniger Heu geerntet wird, um so theurer kommt es dem Pächter zu stehen.

Auch ohne umgekehrte Regel detri: 60 Pud zu 20 Kop. betragen 12 Rub.; diese durch 50 dividirt giebt ebenfalls 24 Kop..

10. 23 Faden 4⅓ Fuß Breite. — Bemerkung: Je größer die Länge eines Ackers ist, desto geringer wird die Breite eines andern Ackers sein, der jenem an Flächen-Inhalte gleich ist.

11. 240 Elle. — Bemerkung: Je weniger breit die Leinwand werden soll, desto mehr in die Länge muß das Garn ausgeben.

12. 60 Fuß Länge. — Bemerkung: In je größerer Länge gepflastert werden soll, desto geringer wird die Breite sein.

13. 5 Monat. — Bemerkung: Je kleiner das Capital ist, um so längere Zeit muß es ausstehen, um eben denselben Zins zu tragen als ein größeres.

14. 2⅔ Wochen. — Bemerkung: In je weniger Wochen Jemand mit einer Arbeit fertig werden will, desto mehr Stunden muß er täglich daran arbeiten.

15. 9 ℔. — Je weniger das Lof Roggen kostet, desto mehr Pfund muß das zu diesem Preise zu verkaufende Brod wiegen.

16. 5⅓ Monat (5 Monat 10 Tage). — Bemerkung: Je mehr Zehrer da sind, desto kürzere Zeit wird der Proviant vorhalten.

17. 6⅖ Monat (6 Mon. 12 Tage). — Bemerk.: Je weniger Brod Jeder täglich erhält, desto längere Zeit wird der Vorrath ausreichen.

18. 280 Bäume. — Bemerkung: In je größerer Entfernung von einander die Bäume gepflanzt werden sollen, mit desto weniger Bäumen wird man ausreichen.

19. 10½-löthig. — Bemerkung: Je mehr Kupfer dem Silber zugesetzt wird, desto weniger-löthig wird letzteres sein.

20. 10⅔ Mark. — Bemerkung: Je mehr Mark Silbers der Goldschmied erhält, desto weniger-löthig wird letzteres sein.

Da der Goldschmied 10⅔ Mark erhält, vorher aber 8 Mark hatte, so beträgt der Zusatz an Kupfer 2⅔ Mark (à 16 Lt.) = 1 ℔ 10⅔ Lt..

21. 320 Lt.. — Bemerkung: Je mehr Loth Silbers herauskommt, desto geringer muß der Werth dieses Silbers sein.

XIX. Die Ketten-Regel.

Nr.

1. 434 Silber-Rubel.
2. 3$\frac{12}{24}$ Groschen sächsisch.

Nr.

3. 259$\frac{7}{8}$ Leipziger Thlr.
4. a) 1$\frac{7}{11}$ preuß. Thlr.; b) $\frac{9}{128}$ Thlr. sächs..

Nr.
5. 36 Centner preuß..
6. 5 Yard = 7 Nürnb. Ell., d. h. 1 Yard = $\frac{7}{5}$ Nürnb. Ell., und 1 Nürnb. Elle = $\frac{5}{7}$ Yard.
7. 27 Arschin = 28 Brab. Ell., d. h. 1 Arschin = $\frac{28}{27}$ Brab. Ell., und 1 Brab. Ell. = $\frac{27}{28}$ Arschin.
8. 45 Arschin = 56 Leipz. Elle.
9. 17′ Hamb. = 15′ französ..

XX. Die zusammengesetzte Regel detri.

Nr.
1. 20 Tage.
2. 15 Arbeiter.
3. $3\frac{1}{5}$ Woche.
4. 828 Arbeiter.
5. $1\frac{1}{2}$ Ct. Brod.
6. $\frac{50}{3}$ Stunden = 16 Std. 40 Min..
7. 27 Elle lang.
8. 35 Fuß breit.

Anm.: Genau genommen steht die Tiefe nicht eigentlich im umgekehrten Verhältnisse der Breite, denn, je tiefer man gräbt, desto mehr Mühe wird erfordert, um die aufgegrabene Erde wegzuschaffen.

9. $78\frac{3}{8}$ Ell. lang.
10. $6\frac{2}{3}$ Ct.
11. 18 Tage.
12. 27 Tage. — Bemerkung: Das Verhältniß der Größe dieser Werke ist 1 : 2; die 1 gehört in die Angabe, die 2 in die Folge.
13. 288 Rub.. — Bemerkung: Das Verhältniß der Güte des Bodens dieser Äcker ist wie 2 : 3, wovon die erste Verhältniß-Zahl zur Angabe, die zweite zur Folge gehört.
14. $10\frac{2}{3}$ Tage. — Bemerkung: Das Verhältniß der Leistungen jener 8 Arbeiter zu den Leistungen dieser 9 ist 1 : $\frac{3}{4}$, d. i. 4 : 5. Je mehr Tage man zu einer Arbeit Zeit hat, desto weniger bedarf es tüchtiger Leistungen.

XXI. Die einfache Zins-Rechnung.

Nr.
1. 93 Rub. 50 Kop..
2. 19 Rub..
3. 45 Rub..
4. 69 Rub..
5. 89 Rub. 60 Kop..
6. 153 Rub. 75 Kop..
7. 52 Rub..
8. 76 Rub..
9. 57 Rub. 60 Kop..
10. 99 Rub. $87\frac{1}{2}$ Kop..
11. 1 Rub. $12\frac{1}{2}$ Kop..
12. 3 Rub. 30 Kop..
13. 14 Rub. 50 Kop..
14. 44 Rub. $62\frac{1}{2}$ Kop..
15. 8 Rub. 5 Kop..
16. 5 Rub. 25 Kop..
17. 8 Rub. $12\frac{1}{2}$ Kop..
18. 1 Rub. $96\frac{7}{8}$ Kop..
19. 11 Rub. 83 Kop..
20. 25 Rub..
21. 63 Rub..
22. 67 Rub. 50 Kop..
23. 55 Rub. $12\frac{1}{2}$ Kop..
24. 25 Rub. $93\frac{3}{4}$ Kop..
25. 53 Rub. 40 Kop..
26. 76 Rub. 50 Kop..
27. 156 Rub..
28. 34 Rub. $62\frac{1}{2}$ Kop..
29. 82 Rub. 80 Kop..
30. 13 Rub. $12\frac{1}{2}$ Kop..
31. 3 Rub. 75 Kop..
32. 1 Rub. 75 Kop..
33. 3 Rub. 20 Kop..
34. 2 Rub. 16 Kop..
35. 4 Rub. $46\frac{2}{3}$ Kop..
36. 4 Rub. 50 Kop..
37. 3 Rub..
38. 7 Rub. 50 Kop..
39. 9 Rub. 80 Kop..
40. 7 Rub..
41. 9 Rub. 50 Kop..
42. 25 Rub. 50 Kop..
43. 15 Rub. 75 Kop..
44. 15 Rub. 60 Kop..
45. 4 Rub. 80 Kop..
46. 5 Rub. 40 Kop..
47. 3 Rub..
48. 15 Rub. 36 Kop..

Nr.
49. 3 Rub. 15 Kop..
50. 4 Rub. $16\frac{1}{2}$ Kop..
51. 129 Rub..
52. 1326 Rub..
53. 2 Rub. 40 Kop..
54. 151 Rub..
55. 1718 Rub. 75 Kop..
56. 50 Rub. $86\frac{2}{3}$ Kop..
6 Wochen als $1\frac{1}{2}$ Mon. angesehen, gäbe eine nicht ganz unbedeutende Differenz; denn man erhielte dann 51 Rub. 30 Kop..
57. 45 Rub..
58. 28 Rub. $81\frac{2}{3}$ Kop..
59. 660 Rub..
60. 810 Rub..
61. 22675 Rb. $62\frac{1}{2}$ Kp..
62. 90 Rub. 50 Kop..
63. 791 Rb. $84\frac{13}{18}$ Kp..
Zu 360 Tagen das J., wären es 781 Rub..
64. 1064 Rb. $58\frac{1}{3}$ Kp..
Zu 360 Tagen das J., wären es 1050 Rub..
65. $5\frac{1}{2}$ pCt..

Nr.
66. $7\frac{29}{48}$ pCt.. Zu 360 Tagen das Jahr, wären es $7\frac{1}{2}$ pCt..
67. $5\frac{2}{5}$ pCt..
68. $6\frac{3}{10}$ pCt..
69. 9 Monat.
70. $4\frac{1}{2}$ Monat.
71. 365 Tage, od. 1 Jahr.
72. $101\frac{17}{18}$ Tag. Zu 360 Tagen das Jahr, wären es gerade 100 Tage.
73. $15\frac{5}{24}$. Zu 360 Tagen das Jahr, wären es 15 Tage.
74. 390 Rub..
75. 901 Rub. $87\frac{1}{2}$ Kp..
76. 218 Rub. 75 Kop..
77. 1157 Rb. $81\frac{1}{4}$ Kp..
78. In 2 Jahren 7 Mon. $4\frac{8}{13}$ Tagen, d. i. nach 2 Jahren, am 5. Tage des 8. Monats.
79. 7 J. 2 Mon. $7\frac{1}{2}$ Tag.
80. $1012\frac{1}{2}$ Rb. Interesse.
81. In 2 Jahren.
82. 900 Rub. Cap..
83. $10\frac{2}{3}$ Monat.

Nr.
84. $5\frac{5}{8}$ pCt..

Zusammengesetzte Regel detri in der Zins-Rechnung.

a. bei gleichem Capital:
85. Ebenfalls in 8 J..
86. 4 Jahr 4 Monat.
87. $3\frac{1}{3}$ pCt.
88. 249 Rub. 60 Kop..

b. bei gleichem Zinsfuße:
89. 362 Rub. 50 Kop..
90. 2 Jahr 3 Monat.
91. 1749 Rb. $33\frac{1}{3}$ Kp..
92. 562 Rub. 80 Kop..

c. bei gleicher Zeit:
93. 320 Rub..
94. 3 pCt..
95. 2666 Rb. $66\frac{2}{3}$ Kp..
96. 229 Rb. $41\frac{3}{17}$ Kp..

d. bei gleichem Interesse:
97. 3 Jahr.
98. 3 pCt..
99. 368 Rub. Capital.
100. $5\frac{1}{3}$ Monat.

Rabatt-Rechnung a) auf, b) in 100.

101. a) 222 Rub. $60\frac{20}{23}$ Kop., b) 217 Rub. 60 Kop..
102. a) 300 Rub., b) 281 Rub. 25 Kop..
103. a) 373 Rthlr. 8 gGr., b) 367 Rthlr. 12 gGr..
104. a) 313 Rthlr. 13 gGr. $8\frac{4}{7}$ Pf., b) 304 Rthlr. 20 gGr. 8 Pf..
105. a) 313 Rthlr. 3 gGr., b) 278 Rthlr. 8 gGr..
106. a) 1763 Rthlr. 21 gGr. 4 Pf., b) 1693 Rthlr. 8 gGr..

Disconto-Rechnung.

107. 76 Rub. 16 Kop..
108. 103 Rub. $68\frac{3}{4}$ Kop..
109. 22 Rub. 24 Kop..
110. 241 Rub. 50 Kop..
111. 80 Rthlr..
112. 31 Mklb. 6 ßl. $10\frac{2}{7}$ Pf..

Disconto-Rechnung im Wechsel-Geschäft.

Nr.
113. 2581 Rub. 25 Kop..
114. 3032 Rub..
115. 3052 Rub. 50 Kop..

Durchschnittlicher Zinsfuß.

116. $4\frac{27}{35}$ pCt..
117. $4\frac{55}{58}$ pCt..
118. $5\frac{41}{133}$ pCt..

Zeit-Rechnung.

Nr.
119. 16 Monat.
120. 2 Jahr 5 Mon. 18 Tage.
121. 14 Monat.
122. $9\frac{7}{13}$ Mon. = 9 Mon. $16\frac{2}{13}$ Tag, d. i. am 17. Tage des 10 Monats.

Nr.
123. $6\frac{1}{2}$ Monat = 6 Mon. 15 Tage.
124. Nach $19\frac{1}{8}$ Mon. = 19 Mon. $3\frac{3}{4}$ Tag, d. i. am 4. Tage des 20. Mts..
125. $5\frac{17}{18}$ Mon. = 5 Mon. $28\frac{1}{3}$ Tag, d. i. am 29. Tage des 6. Monats.

Licitations-Rechnung.

126. Der Bot des A war baar 8 950 Rub.; des B — 8980 Rub. $32\frac{354\,112}{678\,559}$ Kop.; des C — 8 992 Rub. $3\frac{18\,659\,083}{149\,961\,539}$ Kop.; folglich der Bot des C der höchste.

127. Der Bot des A ist baar 19 523 Rub. $80\frac{20}{21}$ Kop., des B ist 20 099 Rub. $56\frac{164}{231}$ Kop., des C ist 20 020 Rub. $70\frac{190}{483}$. Also ist der Bot des B der vortheilhafteste.

XXII. Die Theilung einer Zahl nach gewissen vorgeschriebenen Verhältnissen.

1. Gewinst- und Verlust-Rechnung bei gleichen Zeiten aber ungleichen Capitalien.

1. A erhält 400, B 250, C 200, D 150, zusammen 1000 Rub.; es ist gewonnen $4\frac{1}{6}$ pCt..

2. A erhält $96\frac{2}{5}$, B $61\frac{3}{5}$, C 102, D 90, E 75, F 55, G 200, zusammen 680 Rub.. Gewonnen sind 20 pCt..

3. A verliert 24,1, B 56,4, C 49, D 47, E 32,5, F 28,5, G 62,5, zusammen 300 Rub.; A erhält demnach zurück 216 Rub. 90 Kop., B 507 Rub. 60 Kop., C 441 Rub., D 423 Rub., E 292 Rub. 50 Kop., F 256 Rub. 50 Kop., G 562 Rub. 50 Kop., zusammen 2700 Rub.. Verloren sind 10 pCt..

4. Im Ganzen sind verloren 112 Rthlr. 12 gGr.. A hat verloren $18\frac{3}{4}$, B $26\frac{1}{3}$, C $40\frac{29}{48}$, D $11\frac{19}{24}$, E $15\frac{1}{48}$ Rthlr., zusammen $112\frac{1}{2}$ Rthlr. = 112 Rthlr. 12 gGr.. Verloren sind $12\frac{1}{2}$ pCt..

5. A erhält 2 250 Rub., B 1 318 Rub. 57 Kop., C 1 134 Rub. $37\frac{1}{2}$ Kop., D 2 296 Rub. $87\frac{1}{2}$ Kop., zusammen 7000 Rub..

6. A gewinnt $31\frac{1}{4}$ pCt., B $32\frac{2}{9}$ pCt. = 32 Rub. $5\frac{5}{37}$ Kop. für je Hundert, C $29\frac{3}{43}$ pCt. = 29 Rub. $6\frac{42}{43}$ Kop. für je Hundert, D $32\frac{17}{19}$ pCt. = 32 Rub. $89\frac{9}{19}$ Kop. für je Hundert.

7. A erhält 3 400, B 9 520, C 4 726, D 14 280, E 7 956, F 1 700, G 7 378, zusammen 48 960 Rub.. Es ist 68 pCt. gezahlt worden.

8. A gewinnt 894 fl. 7 Stv. 3 Pf., B 741 fl. 16 Stv. 4 Pf., C 1 570 fl. 7 Stv. 3 Pf., D 855 fl. 19 Stv. 6 Pf.. Zuwachs für

alle Theilnehmer 4062 fl. 10 Stv., anfängliches Capital 20000 fl., demnach das herangewachsene Capital 24062 fl. 10 Stv..

9. A bekommt 202 Rthlr. 10 gGr. 4 Pf., B 71 Rthlr. 12 gGr. 8 Pf., C 69 Rthlr. 10 gGr. 8 Pf., D 56 Rthlr. 22 gGr. 8 Pf., E 52 Rhlr. 2 gGr., F 47 Rthlr. 13 gGr. 8 Pf.. Gewonnen ist $38\frac{8}{9}$ pCt..

10. B gewinnt 182 Thlr. Alb. $32\frac{1}{2}$ Gr.. — Die Einlage des A war 16000 Thlr. Alb., des B 5000 Thlr., des C 3000 Thlr.. — pCt. ist gewonnen $3\frac{33}{80}$.

11. A bekommt zurück 109 Mark 15 ßl. $1\frac{1}{2}$ Pf.; C 87 Mark 15 ßl. $3\frac{3}{5}$ Pf.; D 395 Mark 12 ßl. $10\frac{1}{5}$ Pf.; E 461 Mk. 12 ßl. $3\frac{9}{10}$ Pf.; F 51 Mk. 4 ßl. $11\frac{1}{10}$ Pf.; G 58 Mk. 10 ßl. $2\frac{2}{5}$ Pf.; H 366 Mk. 7 ßl. 9 Pf.; I- 439 Mk. 12 ßl. 6 Pf.; K 300 Mk. 8 ßl. $3\frac{3}{10}$ Pf.; hiezu, was B zurückerhielt 73 Mark 4 ßl. 9 Pf.; demnach die Fallit-Masse groß 2345 Mk. 8 ßl.. — pCt. ist gezahlt worden $7\frac{11}{40}$.

12. A erhält 556 Rthlr. 8 gGr. $8\frac{8}{11}$ Pf.; B 973 Rthlr. 15 gGr. $3\frac{3}{11}$ Pf., C 463 Rthlr. 15 gGr. $3\frac{3}{11}$ Pf.; D 370 Rthlr. 21 gGr. $9\frac{9}{11}$ Pf.; E 185 Rthlr. 10 gGr. $10\frac{10}{11}$ Pf.; zusammen 2550 Rthlr..

13. Es war die Einlage des A 10000, des B 4000, des C 9600, des D 12400; das ganze Capital 36000 Rub..

14. A erhält zurück $5437\frac{1}{2}$, B $1087\frac{1}{2}$, C $362\frac{1}{2}$, D $241\frac{2}{3}$, E $120\frac{5}{6}$, F 2900, G $1933\frac{1}{3}$, H $2416\frac{2}{3}$, zusammen 14500 fl. holl.. — Es ist $12\frac{1}{2}$ pCt gezahlt worden.

15. A 70000, B 12000, C 55000, D 25000, E 28000, F 10000, G 36000, H 50000, I- 39000, K 47000, L 15000, M 93000; zusammen 480000 L. Sterl.. — Gewonnen sind $5\frac{35}{48}$ pCt..

16. A erhält zurück 2763 Rub. $15\frac{15}{19}$ Kop., B 2236 Rub. $84\frac{4}{19}$ Kop., C 2105 Rub. $26\frac{6}{19}$ Kop., D 1578 Rub. $94\frac{14}{19}$ Kop., E 1315 Rub. $78\frac{18}{19}$ Kop., F 921 Rub. $5\frac{5}{19}$ Kop., G 421 Rub. $5\frac{5}{19}$ Kop., H 276 Rub. $31\frac{11}{19}$ Kop., I- 263 Rub. $15\frac{15}{19}$ Kop., K 184 Rub. $21\frac{1}{19}$ Kop., L 171 Rub. $5\frac{5}{19}$ Kop., M 157 Rub. $89\frac{9}{19}$ Kop., N 105 Rub. $26\frac{6}{19}$ Kop., zusammen 12500 Rub.. — Es ist gezahlt worden $13\frac{3}{19}$ pCt.

2. Gesellschafts-Rechnung mit Verhältniß-Theilen, welche durch Brüche angegeben sind.

A. die erste Art:

17. 459 Verhältniß-Theile. A erhält 3000, B 3500, C 4200, D 5250, E 7000 Rub., zusammen 22950 Rub..

18. 163 Verhältniß-Theile. A bekommt 8160, B 7650, C 6800, D 5100 Rthlr., zusammen 27710 Rthlr.

19. 529 Verhältniß-Theile. A erhält 340 Rub. $26\frac{246}{529}$ Kop.; B 604 Rub. $91\frac{261}{529}$ Kop.; C 3629 Rub. $48\frac{508}{529}$ Kop.; D 453 Rub. $68\frac{332}{529}$ Kop.; E 14971 Rub. $64\frac{744}{529}$ Kop..

20. Verhältniß-Theile 347. Der erste Antheil ist 2520, der zweite 13440, der dritte 12096, der vierte 30240 Rub., zusammen 58296 Rub..

21. Die Summe der Verhältniß-Theile ist 45. Erster Antheil: 40467, zweiter Antheil: 11562, dritter Antheil: 19270, vierter Antheil: 15416 Rub., zusammen 86715 Rub..

22. Die Summe der Verhältniß-Theile ist 87, das abgekürzte Verhältniß daher 1 : 356. Der erste Antheil: 4272, der zweite: 5696, der dritte: 6408, der vierte: 7120, der fünfte: 7476 Rub., zusammen 30972 Rub..

23. Der Verhältniß-Theile sind 3005, und die Antheile nach der Ordnung 7056, 3780, 12768, 6912, 5544 Rub..

24. Der Verhältniß-Theile sind 1931; die Antheile nach der Ordnung: 5040, 7560, 1728, 1120 Rub..

25. Der Verhältniß-Theile sind 591; die Antheile 22344, 5130, 28728, 11172.

B. die zweite Art:

26. Die Summe der Verhältniß-Theile ist 169, und der von der gegebenen Geld-Summe 56804 abzuziehende Überschuß = 20, folglich das der Rechnung zum Grunde liegenden Verhältniß 169 : 56784, d. i. 13 : 4368; und der Antheil des A ist 8064 + 300 = 8364 Rub., der Antheil des B = 15120 + 250 = 15370 Rub., und der Antheil des C 33600 — 530 = 33070 Rub., zusammen 56804 Rub..

27. Der Verhältniß-Theile sind 65, und das zur gegebenen Summe 29720 hinzu zu Fügende, daran Mangelnde ist 90, folglich ist das der Rechnung zum Grunde liegende Verhältniß 65 : 29810, d. i. 13 : 5962; und der Antheil des A ist $8255\frac{1}{13}$ + 30 = $8285\frac{1}{13}$ Rub., der Antheil des B $12382\frac{8}{13}$ — 50 = $12332\frac{8}{13}$ Rub., und der Antheil des C $9172\frac{4}{13}$ — 70 Rub. = $9102\frac{4}{13}$ Rub., zusammen 29720 Rub..

28. Der Verhältniß-Theile sind 121, und das von der zu vertheilenden Summe Abzuziehende ist 60, folglich ist das der Rechnung zum Grunde liegende Verhältniß 121 : 58729, d. i. 11 : 5339; und der Antheil des A ist $7765\frac{9}{11}$ + 280 Rub. = $8045\frac{9}{11}$ Rub., des B $21841\frac{4}{11}$ — 100 = $21741\frac{4}{11}$ Rub., des C $29121\frac{9}{11}$ — 120 = $29001\frac{9}{11}$ Rub., zusammen 58789 Rub..

29. Der Verhältniß-Theile sind 481, und das zur vertheilenden Geld-Summe 58988 Rub. hinzu zu Fügende ist 175 Rub., folglich das der Rechnung zum Grunde liegende Verhältniß 481 : 59163, od. 1 : 123; und der Antheil des A ist 26568 + 200 Rub. = 26768 Rub., des B = 12300 — 600 Rub. = 11700 Rub., des C = 11700 — 125 = 10945 Rb., des D 9225 + 350 = 9575 Rb., zusammen 58988 Rb..

30. Der Verhältniß-Theile sind 895, folglich das der Rechnung zum Grunde liegende Verhältniß 895 : 6981, oder 5 : 39, und der Antheil

des A ist $1684\frac{4}{5} - 55 = 1629\frac{4}{5}$ Rub., des B $= 3276 - 1000 = 2276$ Rub., des C $873\frac{3}{5} + 824 = 1697\frac{3}{5}$ Rub., des D $= 1146\frac{3}{5} + 231 = 1377\frac{3}{5}$ Rub., zusammen 6981 Rub..

31. Das zu vertheilende Ganze hat 182 gleiche Verhältniß-Theile. Von der zu vertheilenden Summe 17409 ist abzuziehen der Überschuß 35, demnach ist das der Rechnung zum Grunde liegende Verhältniß 182 : 17374, oder 13 : 1241, und der Antheil des A $= 3436\frac{8}{13} + 180 = 3616\frac{8}{13}$ Rub., des B $5345\frac{11}{13} - 75$ Rub. $= 5270\frac{11}{13}$ Rub., des C $= 5727\frac{9}{13} + 50$ Rub. $= 5777\frac{9}{13}$ Rub., des D $= 2863\frac{11}{13} - 120$ Rub. $= 2743\frac{11}{13}$ Rub., zusammen 17409 Rub..

32. Das zu vertheilende Ganze hat 175 Verhältniß-Theile. Zu der zu vertheilenden Summe ist hinzu zu fügen 335 Rub., und dieß giebt das Verhältniß 175 : 37175, oder 7 : 1487. Der Antheil des A ist $20393\frac{1}{7} - 1000 = 19393\frac{1}{7}$ Rub., des B $5948 - 85 = 5863$ Rub., des C $= 4461 + 450 = 4911$ Rub., des D $6372\frac{6}{7} + 300 = 6672\frac{6}{7}$ Rub., zusammen 36840 Rub..

33. Die Verhältniß-Theile sind 3667. Das der Rechnung zum Grunde liegende Verhältniß ist demnach 3667 : 25669, d. i. 1 : 7, und der Antheil des A $= 2205 + 357 = 2562$ Rub., des B $= 5040 + 523 = 5563$ Rub., des C $= 10584 - 500 = 10084$ Rub., des D $7840 - 380 = 7460$ Rub., zusammen 25669 Rub..

3. Gesellschafts-Rechnung mit unzusammenhängenden Verhältnissen.

34. Die Verhältniß-Theile sind 84, 105, 120, 140, und deren Summe 449. Der Antheil des A $= 935\frac{185}{449}$, des B $= 1169\frac{119}{449}$, des C $= 1336\frac{136}{449}$, des D $= 1559\frac{9}{449}$ Rub., zusammen 5000 Rub..

35. Die Verhältniß-Theile sind 80, 120, 210, 378, 693, deren Summe 1481. Die Antheile: des A $= 400$, des B $= 600$, des C $= 1050$, des D $= 1890$, des E $= 3465$ Rub., zusammen 7405 Rub..

36. Die Verhältniß-Theile sind 75, 105, 70, 126, deren Summe 376, also das der Rechnung zum Grunde liegende Verhältniß 376 : 4512, oder 1 : 12. Der Antheil des A $= 900$, des B $= 1260$, des C $= 840$, des D $= 1512$ Rub., zusammen 4512 Rub..

37. Die Verhältniß-Theile sind 45, 60, 40, 56, deren Summe 201, also das der Rechnung zum Grunde liegende Verhältniß 201 : 5829, oder 1 : 29. Die Antheile: des A $= 1305$, des B $= 1740$, des C $= 1160$, des D $= 1624$ Rub., zusammen 5829 Rub..

38. Das Verhältniß, welches der Rechnung zum Grunde liegt, ist 529 : 9729, oder 23 : 423. Die Antheile sind: des A $= 331\frac{1}{23}$, des B $= 2317\frac{7}{23}$, des C $= 3862\frac{4}{23}$, des D $= 3218\frac{11}{23}$ Rub., zusammen 9729 Rub..

39. Die Verhältniß-Theile sind 3, 6, 8, 9, deren Summe 26, und das der Rechnung zum Grunde liegende Verhältniß 26 : 7865, oder 2 : 605. Die Antheile sind: des A = 907½, des B = 1815, des C = 2420, des D = 2722½ Rub., zusammen 7865 Rub..

40. Die Verhältniß-Theile sind 6, 15, 5, 9, deren Summe 35, also das der Rechnung zum Grunde liegende Verhältniß ist 35 : 8792, oder 5 : 1256. Die Antheile sind: des A = 1507⅕, des B = 3768, des C = 1256, des D = 2260⅘ Rub., zusammen 8792 Rub..

41. $846\frac{9}{11}$, B $2258\frac{2}{11}$, C $3161\frac{5}{11}$, D $2634\frac{6}{11}$ Rub..

4. Gewinst- und Verlust-Rechnung bei gleichen Capitalien, aber ungleichen Zeiten.

42. A $1135\frac{5}{37}$, B $837\frac{31}{37}$, C $594\frac{22}{37}$, C $432\frac{16}{37}$ Rb., zusammen 3000 Rb..

43. A 900, B 675, C 225 Rub., zusammen 1800 Rub..

44. A 880, B $733\frac{1}{3}$, C 660, D 550, E $476\frac{2}{3}$ Rb., zusammen 3300 Rb..

45. A $3422\frac{2}{9}$, B $3555\frac{5}{9}$, C $3666\frac{2}{3}$, D $3755\frac{5}{9}$ Rub., zusammen 14400 Rub..

46. A 500, B 460, C 340, D 100 Rub., zusammen 1400 Rub..

5. Zusammengesetzte Gewinst- u. Verlust-Rechnung.

47. A erhält 752 Rub. $36\frac{214}{301}$ Kop., B 750 Rub. $72\frac{78}{301}$ Kop., C 476 Rub. $91\frac{9}{301}$ Kop., zusammen 1980 Rub..

48. A empfängt davon 880 Rub. $34\frac{214}{229}$ Kop., B 990 Rub. $39\frac{69}{229}$ Kop., C 1179 Rub. $3\frac{213}{229}$ Kop., D 550 Rub. $21\frac{191}{229}$ Kop., zusammen 3600 Rub..

49. A erhält davon $1055\frac{5}{11}$, B $586\frac{4}{11}$, C $664\frac{6}{11}$, D $273\frac{7}{11}$ Rub., zusammen 2580 Rub..

50. A bekommt $2087\frac{17277}{132779}$, B $1016\frac{45336}{132779}$, C $1161\frac{70819}{132779}$, D $554\frac{13224}{132779}$ Rub., zusammen 4820 Rub..

51. A erhält 2031 Rub. $50\frac{3050}{42553}$ Kop., B 1059 Rub. $13\frac{20011}{42553}$ Kop., C 1091 Rub. $93\frac{21711}{42553}$ Kop., D 317 Rub. $42\frac{12774}{42553}$ Kop., zusammen 4500 Rub..

52. A erhält 208 Rub. $47\frac{11677}{14389}$ Kop., B 290 Rub. $47\frac{13677}{14389}$ Kop., C 55 Rub. $3\frac{11833}{14389}$ Kop., D 133 Rub. $42\frac{88629}{14389}$ Kop., E 112 Rub. $57\frac{11773}{14389}$ Kop., zusammen 800 Rub..

53. A erhält davon 937 Rub. $74\frac{102}{20227}$ Kop., B 621 Rub. $60\frac{16890}{20227}$ Kop., C 307 Rub. $84\frac{83329}{20227}$ Kop., D 532 Rub. $80\frac{14409}{20227}$ Kop., zusammen 2400 Rub..

54. A erhält 256 Rub. $3\frac{13}{29}$ Kop., B 325 Rub. $86\frac{6}{29}$ Kop., C 293 Rub. $27\frac{17}{29}$ Kop., D 744 Rub. $82\frac{22}{29}$ Kop., zusammen 1620 Rub..

55. A erhält davon 78 Rub. $26\frac{2}{3}$ Kop., B 95 Rub. $65\frac{5}{3}$ Kop., C 108 Rub. $69\frac{13}{3}$ Kop., D 117 Rub. $39\frac{3}{3}$ Kop., zusammen 400 Rub..

56. A erhält davon 213 Rub. $80\frac{3809}{4489}$ Kop., B 220 Rub. $48\frac{4489}{4489}$

Kop., C 213 Rub. $80\frac{380}{449}$ Kop., D 173 Rub. $71\frac{421}{449}$ Kop., E 178 Rub. $17\frac{187}{449}$ Kop., zusammen 1000 Rub..

6. Vermischungs-Rechnung.

57. 750 *U.* Kohlen, 125 *U.* Schwefel, und 125 *U.* Salpeter.

58. 400 *U.* Kohlen, $266\frac{2}{3}$ *U.* Schwefel, und $2133\frac{1}{3}$ *U.* Salpeter.

59. $151\frac{7}{8}$ Stof Wasser, $16\frac{7}{8}$ Stof Branntwein, $2\frac{1}{16}\frac{3}{8}$ Stof Honig, $5\frac{5}{8}$ *U.* Weinstein, $2\frac{1}{16}\frac{3}{8}$ *U.* zerriebene Rosinen, in allem 180 Theile.

60. 6 *U.* Galläpfel, 16 Lt. arabisches Gummi, 3 *U.* Vitriol, 16 Stof Wasser, 4 Stof Essig.

61. Salpeter 120 *U.*, Schwefel 80 *U.*, Mehlpulver 20 *U.*, Antimonium 15 *U.*.

62. 64 *U.* Terpenthin, $42\frac{2}{3}$ *U.* Zinnober, $85\frac{1}{3}$ *U.* Schellack, $21\frac{1}{3}$ *U.* Kreide, $\frac{2}{3}$ *U.* Storax, zusammen 214 *U.* Siegel-Lack.

63. 12 *U.* Terpenthin, 12 *U.* Mennig, 36 *U.* Colophonium, 54 *U.* Kreide, zusammen 114 *U.*.

64. 360 *U.* Kupfer, 120 *U.* Zink, zusammen 480 *U.* Messing.

65. 960 *U.* Kupfer, 576 *U.* Zink, 24 *U.* Zinn, zusammen 1560 *U.* Messing.

66. 17 Lt. $\frac{4}{15}$ Ot. Wachs, 34 Lt. $\frac{8}{15}$ Ot. Talg, eben so viel Harz, 8 Lt. $2\frac{2}{15}$ Ot. Baum-Öl, 2 Lt. $\frac{8}{15}$ Ot. dicken Terpenthin.

67. Phosphor 1 ℈ $9\frac{67}{97}$ gr., Wasser 47 ℈ $10\frac{10}{97}$ gr., Weizenmehl eben so viel, Schweinefett oder Butter 35 ℈ $12\frac{56}{97}$ gr., Zucker 11 ℈ $17\frac{51}{97}$ gr., zusammen $\frac{1}{2}$ *U.* (6 ℥) Medicinal-Gewicht.

68. Elfenbein 8 *U.* 6 ℥ 3 ʒ — ℈ 12 gr., Schwefelsäure 1 *U.* — ℥ 6 ʒ 1 ℈ 4 gr., Salzsäure 8 ʒ 1 ℈ 12 gr., arab. Gummi 6 ℥ 3 ʒ — ℈ 12 gr., Syrup so viel wie Elfenbein, Schweinefett 1 *U.* 2 ℥ 7 ʒ 1 ℈ 8 gr., zusammen 20 *U.* Medicinal-Gewicht.

69. Die Verhältniß-Theile sind: Schellack 10 ʒ, Benzoe-Harz 5 ʒ, Drachenblut 3 ʒ, Safran $\frac{1}{2}$ ʒ, Alkohol 64 ʒ; oder in ganzen Zahlen: Schellack 20 ʒ, Benzoe-Harz 10 ʒ, Drachenblut 6 ʒ, Safran 1 ʒ, Alkohol 128 ʒ. Nimmt man nun, statt Drachmen, Lothe (überhaupt Theile), so müssen dieselben Verhältniß-Theile bleiben. Demnach, auch in Handelsgewicht: Schellack 20 Lt., Benzoe-Harz 10 Lt., Drachenblut 6 Lt., Safran 1 Lt., Alkohol 128 Lt., und auf 15 *U.* (Handelsgewicht) Goldlack kommen Schellack 1 *U.* 26 Lt. $\frac{8}{11}$ Ot., Benzoe-Harz 29 Lt. $\frac{4}{11}$ Ot., Drachenblut 17 Lt. $1\frac{9}{11}$ Ot., Safran 2 Lt. $3\frac{7}{11}$ Ot., Alkohol 11 *U.* 20 Lt. $1\frac{5}{11}$ Ot..

70. Carmin 3 ℈ $8\frac{4}{7}$ gr., Salmiak-Geist 41 ℈ $2\frac{6}{7}$ gr., arab. Gummi 3 ℈ $8\frac{4}{7}$ gr., zusammen ℥jv.

71. Alle auf Drachmen gebracht, sind die Verhältniß-Theile folgende: Hausenblase 4 ʒ, starker Branntwein 32 ʒ, Mastix 2 ʒ, Alkohol

12 ʒ, Ammoniac-Harz 1 ʒ, zusammen 51 ʒ. — Zu den überhaupt anzufertigenden $12\frac{3}{4}$ Unzen kommen demnach Hausenblase 8 ʒ, starker Branntwein 64 ʒ, Mastix 4 ʒ, Alkohol 24 ʒ, Ammoniac-Harz 2 ʒ. — Braucht man für „Drachmen" die Benennung „Theile", so wird die Sache allgemeiner; man kann alsdann darunter Unzen, Lothe u. s. w. verstehen (Vergl. das Resultat des Exempels Nr. 69.).

72. Die Summe der Verhältniß-Theile ist 72 ʒ + 192 ʒ + 12 ʒ = 276 ʒ. Zu einem Pfunde kommt demnach mineralisches Laugensalz (kohlensaures Natron) 3 ℥, 1 ʒ $2\frac{1}{23}$ gr., heißes Wasser 8 ℥ 2 ʒ 2 ℈ $6\frac{2}{23}$ gr., arabisches Gummi 4 ʒ $10\frac{19}{23}$ gr..

73. Salpetersaures Silber 1 ʒ 1 ℈ 16 gr., arabisches Gummi eben so viel, destillirtes Wasser 1 ℥ 4 ʒ 2 ℈ 8 gr., zusammen 2 Unzen.

Durchschnitts-Rechnung.

Nr.
74. $21\frac{33}{65}$ Kop..
75. $22\frac{1}{2}$ Kop..
76. $5\frac{17}{19}$ Kop..

Nr.
77. $45\frac{59}{321}$ Kop..
78. 921 Lt. fein Silber; $12\frac{3}{4}$-löthig.
79. 6 Rub. $44\frac{12}{25}$ Kop..

XXIII. Die Alligations-Regel, namentlich die Beschickung des Schmelz-Tiegels.

Berechnung des Feingehalts:

1. 1275 Solotnik, oder 13 *M.* 27 Solotn..
2. 35 *M.*.

Berechnung der Löthigkeit.

3. Von der 85-er Probe.
4. 14-löthig.

5. 6 Mark von jedem.
6. 10 Lt. vom besseren, 5 Lt. vom schlechteren.
7. 2 Lt. vom 23-karatigen, und 6 Lt. vom 19-karatigen Golde.
8. Das Verhältniß der drei Sorten ist 14, 13, 9; von dem besseren Silber sind 4, von dem schlechteren 1 Theil zu nehmen.
9. Die Verhältniß-Zahlen der drei Sorten sind 84, 78, 54, oder abgekürzt 14, 13, 9; von dem besseren Silber sind 4, von dem schlechteren 1 Theil zu nehmen.
10. Das Verhältniß der drei Sorten ist 15, 13, 11; beide Sorten sind zu gleichen Theilen zu nehmen.
11. Die Verhältniß-Theile sind: 3 Theile vom besseren, 2 Theile vom schlechteren Golde. Auf 18 Lt. kommen 10 Lt. 76 Solotn. $76\frac{4}{5}$ Doli vom besseren, 7 Lt. 19 Solotn. $19\frac{1}{5}$ Doli vom schlechteren.