OTT RÜNK JA HILDA ROOS

MATEMAATIKA ÕPIK

V KLASSILE

I VIHK

RK „PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

O. RÜNK JA H. ROOS

Matemaatika

ÕPIK JA HARJUTUSTIK

V ÕPPEAASTA

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“
TALLINN 1948

ARITMEETIKA.

I. Seniste teadmiste kordamine ja laiendamine ning arvutamisoskuse arendamine.

§ 1. Loendamine, loetlemine ja järjestamine.

1. Loendamine.

a. Igapäevases elus tuleb meil väga sagedasti kindlaks teha, mitu üksik-eset on mingis esemete kogus. Koolielus tuleb lausa iga päev vastata näiteks järgmistele küsimustele:

Mitu õpilast on täna klassis?
Mitu õpilast täna puudub?
Mitu pioneeri on selles klassis?
Mitu korda on keegi hilinenud?

Niisugustele küsimustele vastuse saamiseks tuleb küsimuse all olevaid esemeid (õpilased, hilinemised jm.) loendada.

Esemete loendamine tähendab kõikide esemete nimetamist ükshaaval järjestikuste arvsõnadega: üks, kaks, kolm, neli, viis, kuus, seitse jne.

Arv, millega loendamisel nimetatakse viimast eset kogus, on selle kogu esemete loendamise tulemus.

Loendamise tulemus on alati täisarv.

Täisarvude real pole lõppu.

Loendamise kiiremaks teostamiseks loendatakse väiksemaid esemeid, nagu munad, õunad, nööbid, metallrahad jm., harilikult paarikaupa, nimetades võetud paare järjestikuste paarisarvudega: kaks, neli, kuus, kaheksa, kümme, kaksteist jne.

1. Esemeid paarikaupa loendades on jõutud arvuni 102; viimane ese, mis osutub üksikuks, on veel loendamata. Mis tuleb siis loendamise tulemuseks?

2. Loendada:

1) lehed oma matemaatika vihikus;
2) oma isiklikud raamatud;
3) üksikud riietusesemed oma praeguses riietuses;
4) rukkiterad ühes rukkipeas;
5) aastaringid mõne puukännu peal või palgi otsas.

3. Loendada oma sammude arv teel kodust kooli (või koolist koju). Võrreldes klassi kõigi õpilaste sammude arvu kodu ja kooli vahelisel teel otsustada, kellel on koolitee arvatavasti kõige lühem ja kellel kõige pikem.

4. Loendada eraldi kõik kahetähelised, kolmetähelised, neljatähelised jne. sõnad selle raamatu sellel leheküljel. Missuguse tähtede arvuga sõnu näib esinevat eesti keeles kõige sagedamini?

5. Loendada kõik käepigistused, mis leiavad aset nelja (viie, kuue) sõbra kohtumisel, kui kõik sõbrad teretavad üksteist kättpidi. (Korraldada kaasõpilastega vastav katse!)

6. Mida võib öelda loendamise tulemuse kohta, kui loendamisel on üks ese vahele jäänud, aga mingit teist eset on arvestatud kaks korda?

7. Mitme võrra erineb loendamise tulemus esemete tõelisest arvust, kui loendamisel on üht eset arvestatud kolm korda ja viis eset on jäänud arvestamata?

b. Kui esemeid on palju ja need paiknevad läbisegi või koguni liiguvad (näit. kooliõpilased vahetunni ajal, lendav linnuparv), siis osutub nende loendamine üsna keeruliseks toiminguks, mistõttu loendamisel võib kergesti eksida — mõni ese võib tulla arvestamisele mitu korda ja mõni võib jääda arvestamata. Raskus seisab siin selles, et loendamise jooksul ei saa lahus hoida juba loendatud esemeid nendest, mis on veel loendamata. Väikeste ja paigalpüsivate esemete loendamisel saadakse sellest raskusest üle nii, et loendamisel tõstetakse esemeid ühest kohast teise; suuremad esemed aga, kui võimalik, seatakse ritta. Reastatud esemeid on hõlpus loendada ka nende liikumisel (näiteks rivis lendavaid lennukeid, sõitva rongi vaguneid, kurgi rändlennul jm.).

8. Kehalise kasvatuse tunnis klass ühte viirgu rivistatud õpilasi loendab ennast harilikult ise vastava käskluse peale. Kuidas see toimub?

9. Kas riigis rahvaloendust korraldades on mõeldav inimeste reastamine?

10. Suure loomakarja loendamisel lastakse loomad minna ükshaaval läbi kitsa värava. Mispärast?

11. Kas õunu on mõistlikum loendada enne või pärast puu otsast võtmist? Põhjendada oma arvamust.

12. *Miks pardikarjus otsustas hakata hanekarjuseks? [1]

2. **Loetlemine ja esemete järjekord.**

a. Tuleb vahet teha loendamise ja loetlemise vahel. Loendamine tähendab esemete nimetamist arvsõnadega; **loetlemine** aga on esemete nimetamine nende õigete nimedega. Loendamine annab vastuse küsimusele: mitu eset on kogus? Loetelu aga vastab küsimusele: misnimelised esemed nimelt on kogus?

Näiteks maailmajagude loeteluks on:

Aafrika, Aasia, Ameerika, Austraalia ja *Euroopa;*

maailmajagude loenduseks aga on:

üks, kaks, kolm, neli, viis.

b. Loendamisel pole oluline tähele panna esemete järje-

---

[1] Tähekesega märgitud ülesanded kas kalduvad sisult kõrvale matemaatika valdkonnast või on küll matemaatilist laadi, aga nõuavad lahendamisel erilist taibukust või võtteid väljaspool selle õpikuga antud teadmiste raame.

korda, sest loendamise tulemus ilmselt ei sõltu sellest, millises järjekorras esemeid loendatakse. Seevastu esemeid loetellakse aga harilikult mingis kindlas järjekorras. Järjestamise aluseks võib võtta näiteks esemete tähtsuse, suuruse, vanuse, väärtuse jm.

Kirjutatud loetelu kutsutakse nimekirjaks ehk nimistuks. Nimistud koostatakse sageli nimede tähestikulises järjekorras. Kas maailmajagude loetelu eespool on antud tähestikulises järjekorras? Pikemate nimistute korral kirjutatakse järjestikused nimed üksteise alla (veergu), mitte üksteise kõrvale (ritta). Kui nimede ette on kirjutatud ka järjestikused arvud, siis nimistu loetleb ja ühtlasi loendab mingi kogu liikmeid.

13. Loetella kõik praegu käibel olevad rahad nende suuruse järjekorras, alustades kõige väiksemast.

14. Koostada oma perekonna (lapsed, vanemad ja vanavanemad) elusolevate liikmete nimistu liikmete vanuse järjekorras, alustades kõige nooremast. Iga inimese kohta kirjutada järjekorranumber, perekonnanimi, nimi ja vanus (aastates).

15. Koostada tänavuste õppeainete nimistu esialgu vabas järjekorras ja korrastada see siis tähestikulisse järjekorda.

16. Vastavalt oma eelarvamustele ja kogemustele loetella kõik tänavused õppeained esiteks nende tähtsuse, siis raskuse ja lõpuks huvitavuse järjekorras.

17. Koostada oma klassi õpilaste nimistu esialgu õpilaste klassis istumise plaani järgi ja korrastada see siis tähestikulisse järjekorda.

18. Eesti NSV suuremate jõgede pikkused kilomeetrites on järgmised: Emajõgi — 96, Jägala — 91, Kasari — 105, Keila — 96, Pirita — 91, Piusa — 93, Pärnu — 145, Väike-Emajõgi — 79.

Kontrollida, kas see jõgede nimistu on koostatud jõgede tähestikulises järjekorras. Korrastada see nimistu ümber nii, et jõed esineksid oma pikkuse järjekorras, alustades kõige pikemast.

19. Raamatukogu kataloogid (raamatute nimistud) koostatakse harilikult raamatute autorite tähestikulises järjekorras, raamatud ise aga seisavad riiulis raamatute numbrite suuruse järjekorras. Põhjendada seda, et just niisugused järjestused on raamatukogus otstarbekohased.

20. Loetella neid omadusi, mis sobiksid hästi võtta õpilaste järjestamise aluseks. Loendada need omadused oma loetelus.

§ 2. Kümnendsüsteem ja meetermõõdustik.

1. Kümnendsüsteem.

a. Kõik arvud, kuitahes suured või väikesed, on kirjutatavad ainult kümmet numbrimärki kasutades:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

See osutub võimalikuks järgmiselt toimides.

Üks ehk üheline on **põhiühik.** Üheksale järgneva arvu nimetame **kümneks** ja võtame selle uute ühikute moodustamise aluseks.

Moodustame esmalt põhiühikust suuremaid ühikuid nii, et iga järgmine koosneb kümnest eelmisest, ja anname igale uuele ühikule oma nime. Nende ühikute loetelu kasvavas suuruse järjekorras, alustades põhiühikust üks, on järgmine:

üks, kümme, sada,
tuhat, kümme tuhat, sada tuhat,
miljon, kümme miljonit, sada miljonit,
miljard ehk biljon, kümme miljardit, sada miljardit,
triljon, kümme triljonit, sada triljonit jne.[1]

---

[1] Füüsikas ja astronoomias nimetatakse miljonist suuremaid ühikuid teisiti; siin antud nimetusi kasutatakse kaubanduslikus praksises. Ka esineb suurte ühikute nimetustes lahkuminekuid üksikute riikide vahel.

Veel suuremaid ühikuid võib sama põhimõtte järgi kuitahes palju juurde moodustada; neile igaühele nime andmiseks on aga vaja juurde luua järjest uusi arvsõnu.

Kõiki neid põhiühikust suuremaid ühikuid koos põhiühiku endaga nimetatakse ühiselt **täisühikuteks.** Täisühikuid üks, kümme, sada jne. nimetatakse teisiti ka üheliseks, kümneliseks, sajaliseks jne., ühiselt täisühikulisteks.

b. Moodustame nüüd põhiühikust väiksemaid ühikuid nii, et iga uus ühik oleks eelmisest kümme korda väiksem, ja anname jälle igale uuele ühikule nime. Nende ühikute loetelu kahanevas suuruse järjekorras, alustades sellest, mis põhiühikule vahetult järgneb, on niisugune:

kümnendik, sajandik, tuhandik,
kümne-tuhandik, saja-tuhandik, miljondik,
kümne-miljondik, saja-miljondik, miljardik jne.

Kõiki neid põhiühikust väiksemaid ühikuid nimetatakse ühiselt **murdühikuteks.** Täis- ja murdühikuid nimetatakse ühiselt ka **ühikarvudeks.**

21. Koostada kümnendsüsteemi ühikarvude tabel, kirjutades arvude juurde ka nende nimed.

c. Kui täisühikud ja murdühikud on eespool kirjeldatud viisil loodud, siis selgub kohe, et

mingeid ühikuid võtma hakates saame neid võtta kõige rohkem üheksa, sest kümnendaga koos oleme võtnud juba ühe uue ühiku — nimelt selle, mis parajasti koosneb võetud kümnest ühikust.

Võttes näiteks kümme sajalist, saame juba ühe tuhandelise; võttes kümme sajandikku, saame ühe kümnendiku jne. Sellest selgubki, et numbrimärke pole tõesti rohkem vaja kui üheksa.

On otsustatud paigutada arvu kirjutises samanimeliste ühikute arv (s. o. ülimalt 9) nii, et tema asukoht näitab ühtlasi, missuguseid ühikuid ta loendab. Lihtsamalt öeldud: igal ühikuliigil olgu arvu kirjutises oma kindel koht.

Et murdühikulised oleksid täisühikulistest selgesti eraldatud, kirjutame nende vahele koma. Komast suunaga vasakule paigutame kõik täisühikulised, kasvavas suuruse järjekorras. Komast suunaga paremale paigutame kõik murdühikulised, kahanevas suuruse järjekorras.

Kui mingile kohale vastavaid ühikuid parajasti pole, siis kirjutatakse sellele kohale null.

Kui murdühikulisi ei esine, siis jätakse koma ära.

Kui täisühikulisi ei esine, siis koma kirjutatakse, ja üheliste koht täidetakse nulliga.

Näiteks kirjutis 3002,57 näitab, et tuhandelisi on 3, sajalisi ega kümnelisi pole, ühelisi on 2, kümnendikke 5 ja sajandikke 7. Loeme seda arvu nii: *kolm tuhat kaks koma viiskümmend seitse.*

Kirjutis 150 000 000 näitab, et saja-miljonilisi on 1, kümne-miljonilisi 5 ja muid ühikuid polegi; seda arvu loeme nii: *sada viiskümmend miljonit.*

Kirjutis 0,000 821 näitab, et kümne-tuhandikke on 8, sajatuhandikke 2 ja miljondikke 1; seda arvu loeme kas nii: *null koma null null null kaheksasada kakskümmend üks,* või nii: *null koma kolm nulli kaheksasada kakskümmend üks,* või ka nii: *kaheksasada kakskümmend üks miljondikku.*

Ühikute moodustamist ja arvude kirjutamist eespool kirjeldatud viisil nimetatakse **kümnendsüsteemiks.**

d. Parema ülevaate saamiseks arvude pikkadest kirjutistest jaotatakse arvu numbrikohad kolmekohalisteks salkadeks, alustades komast, nii vasakule kui ka paremale poole. Neid salku nimetatakse **klassideks.** Igas klassis on kolm **järku.** Arvude kirjutamisel eraldatakse klassid üksteisest suurema vahemaaga numbrite vahel.

Täisühikuliste klassid, komast vasakule poole, paiknemise järjekorras loeteldult, on järgmised: lihtühikuliste klass, tuhandeliste klass, miljoniliste klass, miljardiliste klass jne.:

$$\underbrace{39}_{\text{miljardilised}}\quad\underbrace{142}_{\text{miljonilised}}\quad\underbrace{706}_{\text{tuhandelised}}\quad\underbrace{850}_{\text{lihtühikulised}}$$

Nagu lihtühikuliste klassis on järgud: ühelised, kümnelised ja sajalised, nii on tuhandeliste klassis — ühe-, kümne- ja saja-tuhandelised, miljoniliste klassis — ühe-, kümne- ja saja-miljonilised jne.

Ka murdühikulisi võib jaotada kolmekohalisteks klassideks, alustades komast ja liikudes paremale.

Märkus. Sageli nimetatakse arvu kirjutises mingil kohal esinevat numbrit ennast ka kohaks. Näiteks arvus 2563 seisab esimesel kohal number 2; öeldakse aga ka, et selle arvu esimene koht on 2. Samuti öeldakse ka, et näiteks arvu 2,56 teine koht peale koma on 6.

e. Arvu, milles esineb murdühikulisi, nimetatakse ka **kümnendmurruks.** Koma jaotab kümnendmurru kirjutise **täisosaks** ja **murdosaks.**

Nihutades arvus koma ühe koha võrra paremale, muutub arv 10 korda suuremaks, sest kõik tema numbrid tähendavad siis 10 korda suuremaid ühikuid kui enne. Samuti suureneb arv 100, 1000 jne. korda, kui koma nihutatakse paremale kahe, kolme jne. koha võrra.

Samuti võib toimetada arvu vähendamist 10, 100, 1000 jne. korda, nihutades temas koma vasakule ühe, kahe, kolme jne. koha võrra.

Täisarvus mõeldakse seejuures koma paiknevat üheliste koha järel.

22. Kirjutada numbritega järgmised arvud:

1) kaheksa miljardit kuussada tuhat viiskümmend kuus;
2) kaks koma null kolmkümmend üks;
3) kaks tervet ja viisteist sajandikku;
4) nelikümmend kaheksa kümne-miljondikku;

23. Kirjutada järgmine tekst ümber nii, et selles esinevad arvud oleksid kirjutatud sõnadega. (Arvsõnade kokku- ja lahkukirjutamist jälgida eelmisest ülesandest.)

a. Päikese kaugus Maakerast on 150 000 000 km ja Kuu kaugus 380 000 km. Maakeral elab kokku ümmarguselt 2 000 000 000 inimest, neist umbes 500 000 000 elab Euroopas.

b. Viie aasta plaani seaduse järgi toodab Eesti NSV aastal 1950 tähtsamaid ehitusmaterjale järgmiselt: tsementi — 160 000 tonni, telliseid — 136 000 000 tükki, katusekive — 6 120 000 tükki, saetud metsamaterjali — 271 600 m³ ja aknaklaasi — 1 400 000 m².

24. Lugeda järgmised arvud:

1) 73 800 024
212 045 900
5 666 000 000
64 405 936 740
300 768 005 005

2) 3,141 6
2,718 282
57,050 5
0,000 04
0,000 003 25

25. Missugused arvud on järgmistest arvudest a) kümme, sada, tuhat korda suuremad, b) kümme, sada, tuhat korda väiksemad:

42; 5,4; 62,3; 7,248; 0,004; 5462; 405,28 ?

26. Suurendada järgmisi arve

a) kümme korda:

1) 37; 56,2; 7,68; 43,74; 0,8; 175; 1210,5;

2) 0,156; 6786; 300; 0,0657; 346,81; 3,0078;

b) sada korda:

1) 545; 12,54; 1,164; 28,35; 25; 18,6; 192,2;

2) 0,67; 6326; 7300; 0,10451; 126,505; 0,001;

c) tuhat korda:

1) 251; 37,4; 0,0756; 0,606; 16; 21,36; 11,714;

2) 0,0452; 41518; 54,8; 7,105; 0,5; 0,000012.

27. Vähendada järgmisi arve

a) kümme korda:

1) 6700; 540; 68; 7; 141,5; 640,3; 38,25; 5,37;

2) 0,3; 0,1; 0,44; 0,156; 8,07; 16,106; 0,459;

b) sada korda:

1) 4700; 230; 56; 9; 9520; 836; 46,4; 8,7; 0,156;

2) 0,607; 5,631; 7,049; 526,7; 894,69; 0,2; 0,004;

c) tuhat korda:

1) 67000; 8600; 720; 84; 7624,5; 364,07; 95,6;

2) 95,6; 8; 1647,75; 0,17; 3,055; 560000; 0,0045.

2. Meetermõõdustik.

a. Kümnendsüsteemi eeskujul on loodud ka meetermõõdustik. Meetermõõdustikus on pikkuse põhiühikuks **meeter** (m). Meetri pikkus on saadud nii, et Maakera veerand ümbermõõdust on võetud 1 kümne-miljondik.

Meetrist moodustatakse suuremaid ja väiksemaid ühikuid täpselt samuti, nagu seda tehakse arvude puhul, ainult ühikute nimed on teistsugused. Ühikud

meeter, dekameeter, hektomeeter ja kilomeeter (km)

vastavad täisühikutele

üks, kümme, sada ja tuhat.

Ühikud

detsimeeter (dm), sentimeeter (cm) ja millimeeter (mm)

vastavad murdühikutele

kümnendik, sajandik ja tuhandik.

b. Pikkusühikutest tuletatakse ka pindalaühikud ehk ruutühikud ja ruumalaühikud ehk kuupühikud.

Pindala põhiühikuks on **ruutmeeter** (m^2), s. o. niisuguse ruudu pindala, mille külje pikkus on 1 meeter.

Kõik suuremad ja väiksemad ühikud pindala jaoks saadakse, võttes ühikruudu küljeks meetrist suuremad ja väiksemad pikkusühikud.

Nii on ruutdekameeter ehk **aar** niisuguse ruudu pindala, mille külje pikkus on 1 dekameeter ehk 10 meetrit; ruuthektomeeter ehk **hektaar** (ha) on niisuguse ruudu pindala, mille külje pikkus on 1 hektomeeter ehk 100 meetrit. Hektaarist suurem pindalaühik, mida veel tegelikus elus tarvitatakse, on **ruutkilomeeter** (km^2). Mitu ruutmeetrit on üks aar? üks hektaar? üks ruutkilomeeter?

Ruutmeetrist väiksemad pindalaühikud on **ruutdetsimeeter** (dm^2), **ruutsentimeeter** (cm^2) ja **ruutmillimeeter** (mm^2).

$$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10\,000\ cm^2 = 1\,000\,000\ mm^2.$$

Ruumala põhiühikuks on **kuupmeeter** (m^3), s. o. niisuguse kuubi ruumala, mille serva pikkus on 1 meeter.

Kuupmeetrist väiksemad ruumalaühikud on **kuupdetsimeeter** (dm^3), **kuupsentimeeter** (cm^3) ja **kuupmillimeeter** (mm^3).

$$1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1\,000\,000\ cm^3 = 1\,000\,000\,000\ mm^3.$$

Kuupdetsimeetri teine nimi on **liiter** (l). Liitri nime kasutatakse peamiselt vedelikkude ruumala mõõtmisel.

Liitrit põhiühikuks võttes saadakse temast kümnendsüsteemi alusel järgmised suuremad ja väiksemad ühikud:

- **dekaliiter** (s. o. 10 l), **hektoliiter** (s. o. 100 l) ja **kiloliiter** (s. o. 1000 l);
- **detsiliiter** (s. o. 0,1 l), **sentiliiter** (s. o. 0,01 l) ja **milliliiter** (s. o. 0,001 l).

Kiloliiter tähendab sama, mis m^3; milliliiter sama, mis cm^3.

Puitmassi mõõduühikuna nimetatakse kuupmeetrit **tihumeetriks.**

c. Kaalu põhiühikuks on **gramm** (g), s. o. ühe kuupsentimeetri vee kaal. Grammist suuremad kaaluühikud on

dekagramm, hektogramm ja **kilogramm** (kg)

ning grammist väiksemad kaaluühikud on

detsigramm, sentigramm ja **milligramm** (mg).

1 kg = 1000 g = 1 000 000 mg, 1 g = 1000 mg.

Kilogrammile järgnev suurem kaaluühik (10 kg) pole saanud endale erinime, küll aga on oma nimed veel temale järgneval kahel suuremal ühikul; need on **tsentner** (ehk kvintaal) = 100 kg ja **tonn** (t) = 1000 kg.

Kilogramm on liitri vee kaal, sest 1 l on 1000 cm^3 ja 1 kg on 1000 g.

Tonn on kuupmeetri vee kaal, sest 1 m^3 on 1000 l ja 1 t on 1000 kg.

d. Keha **erikaal** on selle keha aine ühe kuupsentimeetri kaal grammides ehk ühe kuupdetsimeetri (liitri) kaal kilogrammides ehk ühe kuupmeetri kaal tonnides.

Järgmine tabel näitab mõningate tähtsamate ainete erikaalusid:

Aine	Erikaal	Aine	Erikaal
Õhk	0,0013	Alumiinium	2,7
Kork	0,2	Inglistina	7,3
Piiritus, petrooleum	0,8	Raud	7,8
		Vask	8,9
Jää	0,9	Hõbe	10,5
Vesi	1,0	Elavhõbe	13,6
Liiv (kuiv)	1,4	Kuld	19,3
Klaas	2,6	Plaatina	21,4

28. Eespool antud meetermõõdustiku kirjelduse põhjal koostada tabel eraldi pikkus-, pindala-, ruumala- ja kaaluühikute võrdlemiseks vastava põhiühikuga.

Näide: Pikkusühikud.

1 m = 1000 mm	1 mm = 0,001 m
1 m = 100 cm	1 cm = 0,01 m
1 m = dm	1 dm = m
1 m = dekam.	1 dekam. = m
1 m = hektom.	1 hektom. = m
1 m = km	1 km = m

29. Teades, et meeter on 0,000 000 1 Maakera veerandümbermõõdust, avaldada Maakera ümbermõõt kilomeetrites.

30. Apteegis kaalutakse milligrammidega, aga sadamas tonnidega. Mitu korda on tonn milligrammist raskem?

31. Avaldada sentimeetrites pikkused: 23 m; 3 km 75 m; 7 dm 5 cm; 1 m 6 dm 7 cm 9 mm; 534,4 m.

32. Avaldada kilomeetrites pikkused: 75 km 250 m 95 cm; 12 dm 8 cm 5 mm; 8456 cm; 0,431 m.

33. Ülesande nr. 23 andmeil avaldada Päikese ja Kuu kaugus Maakerast sentimeetrites.

34. Avaldada kilogrammides järgmised kaalud: 7200 g; 53,6 g; 78 kg 15 g 325 mg; 5 t 6 kg; 0,00045 t.

35. Mitu ruutmeetrit on üks aar, üks hektaar, üks ruutkilomeeter? Mitu aari on üks hektaar? Mitu hektaari on üks ruutkilomeeter?

36. Järve suurus on 17,4 hektaari; avaldada selle järve suurus ruutkilomeetrites.

37. Avaldada hektaarides pindalad: 0,25 km^2; 0,9 aari; 1455 m^2; 1 km^2 73 ha 7 a.

38. Viie aasta plaani seaduse järgi pannakse Eesti NSV põllupinnast 1950. a. 100 000 ha kartuli alla ja saadakse hektaarilt 135 tsentnerit kartuleid. Arvutada Eesti NSV 1950. a. kartulisaak tonnides.

39. Kumb kaalub rohkem, kas dekaliiter (s. o. umbes üks pang) vett või liiter elavhõbedat?

40. Mitu kuupsentimeetrit on üks kuupmeeter? Mitu kuupmillimeetrit on üks liiter? Mitu liitrit on üks kuupsentimeeter?

41. Palgis on 0,898 tihumeetrit puitu. Mitu dm³ see on?

42. Teades, et õhu erikaal on 0,0013, avaldada ühe kuupmeetri õhu kaal grammides.

43. Kas veoautole kandejõuga 4,5 tonni tohib panna koormaks ühe kuupmeetri rauda?

44. Kas jaksan korgist kuupmeetrit tõsta?

45. Kas ajaühikud (sekund, minut, tund, ööpäev) on loodud kümnendsüsteemi alusel? — Ja rahaühikud (kopik, rubla)?

46. *Kumb on raskem, kas 1 kg tina või 1 kg villu?

§ 3. Liitmine ja summa omadusi.

1. Liitmistehte selgitus.

Kolhoosil on ühes tallis 12 hobust, teises 7 hobust. Mitu hobust on kolhoosil?

Vastuse võiksime siin saada loendamisega:

$$\underbrace{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ 10,\ 11,\ 12,}_{\text{ühe talli hobused}} \text{ ja } \underbrace{13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19.}_{\text{teise talli hobused}}$$

Loendamisel viimasena nimetatud arv on siin 19, seega on mõlemas tallis kokku 19 hobust.

Niisugune mitme hulga esemete ühisloendamine on aluseks **liitmise** tehtele.

Arve, mis saadakse hulki eraldi loendades, nimetatakse **liidetavateks**; ühisloendamisel saadud arv on **summa.** Liitmistehte märgiks on liidetavate vahele kirjutatav ristikujuline märk, nimega **pluss.**

$$\underset{\text{liidetav}}{12} \;\underset{\text{pluss}}{+}\; \underset{\text{liidetav}}{7} \;\underset{\text{võrdusmärk}}{=}\; \underset{\text{summa}}{19}$$

Võrdusmärki loetakse harilikult sõnaga „on”.

2. Veergu kirjutatud liidetavate liitmine.

Liidetavaid võib olla kuitahes palju. Kui liidetavaid on palju ja need on pealegi suured arvud, siis ei kirjutata neid mitte ritta, vaid veergu, samanimelised ühikud kohakuti. Liitmist alustatakse kõige parempoolsemast numbriveerust, s. t. kõige väiksemaist ühikuist. Veeru numbrite summa võib tulla nii suur, et selles leidub juba kõrgema järgu ühikuid; need kantakse üle järgmise veeru numbrite hulka, kirjutades need väikeselt ja kaarekesega eraldatult järgmise veeru kohale üles. Näiteid:

$$\begin{array}{lrcrl}
 & \underset{\smile}{1}\,\underset{\smile}{3}\,\underset{\smile}{2}\,\underset{\smile}{1} & \longleftarrow \text{ülekande-numbrid} \longrightarrow & \underset{\smile}{2}\;\;\underset{\smile}{2}\,\underset{\smile}{1} & \\
(1) & 4\,868 & & 0{,}435 & (2) \\
 & 12\,932 & & 2{,}506 & \\
 & 96\,915 & & 0{,}094 & \\
 & 4\,390 & & 1{,}990 & \\
\cline{2-2}\cline{4-4}
 & 119\,105 & & 5{,}025 &
\end{array}$$

Märkus: Kui veergu kirjutatud arve liideti suunaga ülalt alla, siis liitmist kontrollides liidetakse neid suunaga alt üles, või ümberpöördult.

Kui ühes veerus kaks või kolm järjestikust numbrit annavad summaks 10, siis liidetakse need kohe korraga, sest kümne liitmine on lihtsam. Ka niisuguseid numbripaare, mis annavad summaks 11 või 12 (näiteks 4 ja 7, 3 ja 9), on hõlpsam liita kohe summana. Näiteks liitmist

$$\underbrace{4+6}+\underbrace{8}+\underbrace{9+1}+\underbrace{5+6}+\underbrace{3+7}=49$$

$$10 \rightarrow 18 \rightarrow 28 \rightarrow 39 \rightarrow 49$$

on väga hõlpus teostada, kui liidetavad rühmitatakse liitmisel nii, nagu näidatud.

47. Teostada järgmised liitmised, otsides numbriveergudest kümneid andvaid numbripaare või -kolmikuid:

1)	85 439	2)	113,42	3)	14,352
	345 071		53,68		6,125
	112 802		9,27		0,007
	40 278		26,03		1,190
	19 763		0,08		192,816

48. Teostada järgmised liitmised, liidetavaid enne ühte veergu kirjutades:

1) $106\,420 + 39 + 4508 + 10\,233 + 9065$

2) $12\,086\,530 + 5\,006\,840 + 270\,068\,000$

3) $5{,}867 + 0{,}036 + 239{,}202 + 0{,}555 + 0{,}363$

3. Liidetavate järjekorra muutmine liitmisel.

Et loendamine ei olene esemete loendamise järjekorrast, siis ka

summa ei olene liidetavate järjekorrast;

sest on ju liitmine mitme esemetehulga koosloendamine. See asjaolu võimaldab mõnikord liitmist hõlbustada sel teel, et muudetakse antud liidetavate järjekorda. Näide:

$$482 + 57 + 18 = 482 + 18 + 57 = 500 + 57 = 557$$

Liidetavate järjekorra muutmisel on mõtet muidugi ainult siis, kui leidub sääraseid liidetavaid, mis liituvad ümmarguseks arvuks või mingiks eriliseks lihtsakujuliseks arvuks.

49. Liita peast, liidetavate järjekorda enne mõttes sobivalt muutes:

1) $13 + 69 + 7$ 2) $11 + 238 + 89$
$48 + 37 + 12$ $154 + 39 + 46$
$22 + 16 + 8$ $87 + 94 + 106$

3) $85 + 77 + 15 + 23 + 21$
$205 + 18 + 400 + 42 + 95$
$6{,}65 + 0{,}75 + 15{,}52 + 7{,}35 + 0{,}48$

50. Liita peast järjestikused täisarvud ühest kuni kümneni.

4. Summa muutumine liidetavate suurenemisel ja vähenemisel.

Liitmine on hõlpsam, kui üks liidetav on ümmargune arv (lõpeb ühe või mitme nulliga). Uurime, kuidas muutub summa, kui üht liidetavat suurendame või vähendame mingi arvu võrra. Suurendust või vähendust sobivalt valides võime muuta ühe liidetava ümmarguseks arvuks, mistõttu liitmine muutub lihtsamaks.

Näiteid:

(1) $68 + 27 = 95$ (2) $7{,}3 + 1{,}8 = 9{,}1$
$70 + 27 = 97$ $7{,}0 + 1{,}8 = 8{,}8$
$70 + 25 = 95$ $7{,}0 + 2{,}1 = 9{,}1$

Esimeses näites on esiteks üht liidetavat (68) kahe võrra suurendatud; summa on ka kahe võrra suurenenud. Endise summa (95) saame, kui teist liidetavat (27) kahe võrra vähendame.

Teises näites on esiteks üht liidetavat (7,3) 0,3 võrra vähendatud; summa on vähenenud sama võrra. Endise summa (9,1) saame, kui teist liidetavat (1,8) 0,3 võrra suurendame.

Kokkuvõttes:

1) **kui suurendame üht liidetavat mingi arvu võrra, siis suureneb summa sama arvu võrra;**

2) **kui vähendame üht liidetavat mingi arvu võrra, siis väheneb summa sama arvu võrra;**

3) **kui suurendame üht liidetavat mingi arvu võrra ja vähendame teist liidetavat sama arvu võrra, siis summa ei muutu.**

51. Kasutades summa omadusi liita peast:

1) 29 + 65
42 + 79
38 + 47
93 + 68
28 + 99

2) 88 + 45
17 + 49
69 + 56
71 + 84
83 + 79

3) 167 + 225
302 + 487
293 + 368
407 + 569
628 + 186

4) 206 + 348
1003 + 888
987 + 369
553 + 274
681 + 344

5) 4,6 + 7,9
0,9 + 4,7
8,4 + 0,8
5,9 + 3,7
7,2 + 5,8

6) 14,8 + 5,7
3,1 + 16,8
18,9 + 0,7
24,8 + 14,2
35,4 + 0,9

7) 0,97 + 1,03
3,70 + 5,46
0,68 + 0,05
9,92 + 0,38
2,17 + 1,93

52. Liita peast:

1) 49 + 25 + 15
38 + 19 + 22
47 + 26 + 44
85 + 12 + 15
127 + 44 + 16

2) 16 + 88 + 12
23 + 29 + 11
43 + 78 + 27
56 + 47 + 44
37 + 43 + 51

3) 294 + 17 + 53
188 + 90 + 22
603 + 78 + 19
592 + 48 + 66
996 + 29 + 14

4) 1 + 10 + 100 + 1000 + 10000
1 + 11 + 111 + 1111 + 11111
1234 + 4321 + 1133 + 3311
99999 + 9999 + 999 + 99 + 9
4445 + 5554 + 1111 + 1

53. *Kõrval on teostatud üks liitmine „salakirjas”. Tähtede asemele tuleb siin panna numbrid nii, et sama tähe kohal esineks ikka sama number ja et liitmine saaks õige.

$$\boxed{\begin{array}{r} \text{k u h u} \\ \text{l a s i} \\ \hline \text{k a h u r} \end{array}}$$

§ 4. Lahutamine ja vahe omadusi.

1. Lahutamistehte selgitus.

Kui summa ja üks liidetav on antud, siis saab teist liidetavat määrata.

Näide. Mis arv tuleb liita arvuga 17, et saada summaks 23?

$$17 + \square = 23.$$

Loendamise teel saame oma küsimusele vastuse järgmiselt. Loendame arvust 17 edasi, kuni jõuame antud summani 23:

18, 19, 20, 21, 22, 23.

Nüüd loendame, mitu arvu oli seejuures vaja nimetada:

1, 2, 3, 4, 5, 6.

Järelikult otsitav liidetav on 6. Tõesti:

$$17 + 6 = 23.$$

Niisugust tehet, kus antud summa ja ühe liidetava järgi määratakse teine liidetav, nimetatakse **lahutamiseks.** Antud summat nimetatakse seejuures **vähendatavaks,** antud üht liidetavat **lahutatavaks** ja määratavat teist liidetavat **vaheks.** Näiteks arv 6 on arvude 23 ja 17 vahe. Edaspidi kirjutame lahutamistehet harilikult nii:

$$\underset{\text{vähendatav}}{\mathbf{23}} \quad \underset{\text{miinus}}{\mathbf{—}} \quad \underset{\text{lahutatav}}{\mathbf{17}} \quad \mathbf{=} \quad \underset{\text{vahe}}{\mathbf{6}}$$

Märk „—" vähendatava ja lahutatava vahel on lahutamismärk ehk **miinus.**

Peame meeles, et

vahe on arv, mis lahutatavaga liites annab vähendatava.

Seda asjaolu kasutame eriti peastlahutamisel; näiteks

$$15 - 6 = 9, \text{ sest } 9 + 6 = 15.$$

2. Mõttekäike kirjalikul lahutamisel.

Suuremate arvude lahutamist teostatakse kirjalikult, kusjuures lahutatav kirjutatakse vähendatava alla nii, et samanimelised ühikud jäävad kohakuti; lahutatava ette kirjutatakse miinusmärk. Lahutamist alustatakse kõige väiksemaist ühikuist. Kui mingis veerus lahutamine pole otseselt võimalik sel põhjusel, et lahutada tuleks suurem number väiksemast, siis võetakse vähendatava järgmise koha ühikuist üks suurem ühik ja lisandatakse see (kümneks peenestatult) käsiloleva veeru ühikuile; järgmises veerus lahutamist toimetades tuleb siis muidugi seda võttu arvestada. Et see ei ununeks, võib võtmise märkida punktiga selle numbri kohale, millest võeti.

Näide:
$$\begin{array}{r} \dot{4}\dot{5}27 \\ -\,653 \\ \hline 3874 \end{array}$$

Mõttekäik:
$$\begin{array}{r} 7 - 3 = 4 \\ {}^{1}2 - 5 = 7 \\ {}^{1}4 - 6 = 8 \\ 3 - 0 = 3 \end{array}$$

Kui esineb vajadus võtta järgmise kõrgema koha ühikuist üks lisaks, aga järgmine koht on ühikuist tühi (s. t. sinna on kirjutatud null), siis võtame veel kõrgema koha ühikuist, kust juba võtta on. Võetud ühikut peenestades saame temast täita ka kõik need madalamad kohad, kust enne midagi võtta ei olnud (s. t. kus esinevad nullid).

Näiteid:

(1)
$$\begin{array}{r} \dot{4}\dot{0}\,\dot{3}\dot{0}5 \\ -\ \ 8\,579 \\ \hline 31\,726 \end{array}$$

Mõttekäik:
$$\begin{array}{r} \overset{1}{\smile}5 - 9 = 6 \\ 9 - 7 = 2 \\ \overset{1}{\smile}2 - 5 = 7 \\ 9 - 8 = 1 \\ 3 - 0 = 3 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} \dot{2}\dot{3}\,\dot{0}\dot{0}0 \\ -17\,564 \\ \hline 5\,436 \end{array}$$

Mõttekäik:
$$\begin{array}{r} \overset{1}{\smile}0 - 4 = 6 \\ 9 - 6 = 3 \\ 9 - 5 = 4 \\ \overset{1}{\smile}2 - 7 = 5 \end{array}$$

Lahutamise kontrollimiseks liidetakse leitud vahe lahutatavaga, et näha, kas summaks tuleb vähendatav. Kontroll-liitmiseks ei kirjutata arvusid ümber, vaid kasutatakse sedasama lahutamise kirjapanekut, liites suunaga alt ülespoole.

54.

1) $\begin{array}{r} 12\,745\,000 \\ -\ \ 9\,846\,700 \\ \hline \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 4\,660\,090 \\ -3\,998\,092 \\ \hline \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 267{,}504 \\ -\ \ 69{,}615 \\ \hline \end{array}$

55. Statistika andmeil vähenes kodanlikus Eestis elanikkude arvu juurdekasv aastast aastasse, nagu see nähtub ka järgnevast tabelist. Täita selle tabeli neljas veerg!

Aasta	Sündis	Suri	Juurdekasv
1932	19 742	16 641	
1933	18 208	16 472	
1934	17 305	15 853	

56. Enne Suurt Isamaasõda oli Eesti NSV-s 2 088 700 m² elamispinda. Pärast sõda oli sellest järele jäänud 1 107 000 m². 1947. a. lõpuks oli elamispinda juurde ehitatud 312 700 m².

Mitu m² elamispinda on jäänud järgnevateks aastateks ehitada kuni ennesõjaaegse taseme saavutamiseni?

57. Läti NSV pindala on 64 500 ruutkilomeetrit, Eesti NSV pindala aga 45 000 ruutkilomeetrit. Mitme ruutkilomeetri võrra on Läti pindala Eesti pindalast suurem?

58. Pääsmete müügist spordivõistlusele laekus spordiseltsile summa 3234,75 rubla. Pileteid müüdi neljast kassast. Esimene kassa andis 983,25 rubla, teine 1034,75 rubla, kolmas 532,25 rubla. Mitu rubla andis neljas kassa?

59. Jalanõudetööstus valmistas jalanõusid jaanuaris 1840 paari, veebruaris 2375 ja märtsis 2963 paari. Kvartaaliplaanis oli normina ette nähtud 6000 paari. Mitme paariga ületas see jalanõudetööstus oma kvartaaliplaani?

60. Käitise kulud möödunud aastal olid kokku 244 600 rubla. Mitmesuguste otstarbekate uuenduste tagajärjel vähenesid sel aastal tootmiskulud 32 950 rubla ja juhtimiskulud 9785 rubla võrra. Arvutada käitise kulud käesoleval aastal.

61. Kas vähendatav ja lahutatav on vahetatavad?

62. *Laual on kolm tikku. Võtta kaks tikku ära ja panna üks tikk juurde nii, et laual oleks jälle kolm tikku.

3. Lahutamine täiendamisvõttega (ehk saldeerimine).

Ostjal tuleb kauba eest maksta 53 kopikat. Ostja annab rublase raha. Mitu kopikat peab müüja talle tagasi andma?

Tagasiantav raha on siin ostja poolt antud summa (100 kopikat) ja ostuarve vahe, s. o. 100 — 53 kopikat.

Et vahe on arv, mis lahutatavaga liites annab vähendatava, võime kirjutada:

$$53 + ? = 100.$$

Siit nähtub, et ostuarvele tagasiantavat raha juurde loendades seni, kuni jõutakse ostja poolt antud summani, saadaksegi kätte otsitav vahe. Nii toimivadki harilikult müüjad ostjale raha tagasi andes. Niisugust võtet lahutamisel nimetatakse täiendamisvõtteks.

Vaatame nüüd, kuidas tuleks mõelda, kui seda võtet kasutada kirjalikul lahutamisel.

Eelharjutus:
$$\begin{array}{r} 86 \\ -54 \\ \hline 32 \end{array}$$
Mõttekäik: 4 ja 2 on 6;
5 ja 3 on 8.

Ülesande lahendus:
$$\begin{array}{r} 100 \\ -\ 53 \\ \hline 47 \end{array}$$
Mõttekäik: 3 ja 7 on $\overset{1}{\smile}0$;
6 ja 4 on 10.
$\overbrace{\overset{1}{\smile}+5}$

Täiendamisvõttega saab lahutada ühest vähendatavast ka mitu lahutatavat ühekorraga, nende summat üldse määramata. Näide:

$$\begin{array}{r} 6216 \\ -\left\{\begin{array}{r} 745 \\ 862 \\ 374 \end{array}\right. \\ \hline 4235 \\ \overset{3}{\smile}\overset{2}{\smile}\overset{1}{\smile} \end{array}$$

Mõttekäik:
5, 7, 11 ja 5 on $\overset{1}{\smile}6$;
4, 10, 17, 18 ja 3 on $\overset{2}{\smile}1$;
7, 15, 18, 20, ja 2 on $\overset{2}{\smile}2$;
2 ja 4 on 6.

63. Leida kirjutamata jäänud liidetav igas järgmises liitmises:

1) $\begin{array}{r} 3457 \\ \\ \hline 12689 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 2942 \\ \\ \hline 3046 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 8527 \\ \\ \hline 29403 \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} 18{,}005 \\ \\ \hline 23{,}001 \end{array}$

5) $\begin{array}{r} 4{,}23 \\ 15{,}87 \\ \\ \hline 29{,}43 \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} 1742 \\ 2548 \\ \\ \hline 5094 \end{array}$ 7) $\begin{array}{r} 2486 \\ 309 \\ \\ \hline 16222 \end{array}$

8) $\begin{array}{r} 4509 \\ \\ 3568 \\ 1149 \\ \hline 10000 \end{array}$ 9) $\begin{array}{r} 1846 \\ 3500 \\ \\ 26604 \\ \hline 38400 \end{array}$ 10) $\begin{array}{r} 5{,}483 \\ 10{,}560 \\ 9{,}041 \\ \\ \hline 36{,}042 \end{array}$

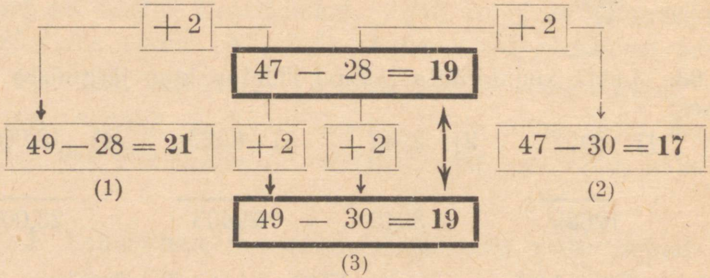
64. Teostada järgmised lahutamised:

$$1)\ \begin{array}{r} 16723 \\ -\left\{\begin{array}{r}2\,641\\3\,078\end{array}\right. \\ \hline \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} 29\,450 \\ -\left\{\begin{array}{r}8\,498\\13\,056\end{array}\right. \\ \hline \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r} 1{,}063 \\ -\left\{\begin{array}{r}0{,}704\\0{,}091\end{array}\right. \\ \hline \end{array} \qquad 4)\ \begin{array}{r} 19\,324 \\ -\left\{\begin{array}{r}2\,862\\5\,010\\3\,670\end{array}\right. \\ \hline \end{array}$$

4. Vahe omadusi.

Peastlahutamise hõlbustamiseks õpime tundma vahe omadusi. Uurime, kuidas muutub vahe, kui vähendatavat või lahutatavat suurendada või vähendada mingi arvu võrra. Suurendust või vähendust sobivalt valides võime vähendatava või lahutatava muuta ümmarguseks arvuks, mistõttu lahutamine muutub lihtsamaks.

Jälgides skeemi



vastame järgmistele küsimustele: Kas ja kuidas on muutunud vahe, kui

(1) vähendatav on suurenenud kahe võrra?
(2) kui lahutatav on suurenenud kahe võrra?
(3) kui vähendatav ja lahutatav mõlemad on suurenenud kahe võrra?

Kasutades arvu 2 asemel mistahes muud arvu, märkame samu seaduspärasusi. Nimelt:

1) kui vähendatav suureneb mingi arvu võrra, siis suureneb ka vahe sama arvu võrra;

2) kui lahutatav suureneb mingi arvu võrra, siis vahe väheneb sama arvu võrra;

3) kui vähendatav ja lahutatav korraga suurenevad sama arvu võrra, siis vahe ei muutu.

Viimast asjaolu kasutatakse peastlahutamise hõlbustamiseks. Näide:

$$243 - 95 = \underbrace{248 - 100}_{\text{jäetakse kirjutamata!}} = 148$$

65. Arvutada peast:

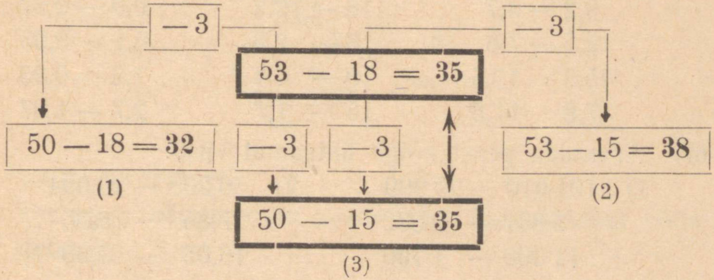
1) 83 — 37
91 — 48
75 — 29
68 — 19
96 — 47

2) 78 — 49
52 — 27
63 — 38
76 — 57
92 — 44

3) 211 — 86
143 — 97
652 — 189
303 — 187
496 — 299

4) 738 — 491
561 — 267
447 — 378
814 — 675
930 — 288

Uurime ka, kuidas muutub vahe siis, kui vähendatavat või lahutatavat vähendada. Jälgides skeemi



on hõlpus vastata järgmistele küsimustele:

Kas ja kuidas muutub vahe, kui

(1) vähendatav väheneb kolme võrra?
(2) kui lahutatav väheneb kolme võrra?
(3) kui vähendatav ja lahutatav mõlemad vähenevad kolme võrra?

Vastates neile küsimustele selguvad järgmised tõsiasjad:

1) kui vähendatav väheneb mingi arvu võrra, siis väheneb ka vahe sama arvu võrra;
2) kui lahutatav väheneb mingi arvu võrra, siis vahe suureneb sama arvu võrra;
3) kui vähendatav ja lahutatav korraga vähenevad sama arvu võrra, siis vahe ei muutu.

Viimast tõsiasja võib ka kasutada peastlahutamise hõlbustamiseks. Näiteid:

$$1)\ 183 - 25 = 178 - 20 = 158$$

$$2)\ 183 - 25 = \underbrace{180 - 22}_{\text{jäetakse kirjutamata!}} = 158$$

Vahe olulised omadused peame meeles järgmisel kokkuvõtlikul kujul:

vahe ei muutu, kui vähendatav ja lahutatav korraga kas suurenevad või vähenevad sama arvu võrra.

66. Kasutades vahe omadusi arvutada peast:

1) 10,1 — 3,8
9,2 — 4,7
12,5 — 7,6
15,3 — 13,5
17,8 — 11,5

2) 20 — 11,1
16 — 12,2
8 — 2,3
10 — 6,4
15 — 1,7

3) 0,6 — 0,42
0,9 — 0,57
0,1 — 0,03
1,2 — 0,95
2,7 — 1,07

67. Arvutada peast kõige lihtsamal viisil:

1) 101 010 — 99 999
8 831 — 2 832
11 000 — 1 100

2) 50,203 — 20,094
27,85 — 19,96
16,05 — 15,35

68. *Laual põleb kolm küünalt. Kui üks küünal kustutatakse, mitu küünalt jääb siis järele?

§ 5. Täisarvude korrutamine.

1. Korrutamistehte selgitus.

Sageli esineb vajadus liita terve hulk võrdseid liidetavaid. Kui neid on väga palju, siis osutub nende otsene liitmine üsna tülikaks. Seda liitmist saab aga teostada lihtsamalt.

Võrdsete liidetavate liitmist nimetatakse üksikliidetava korrutamiseks ja saadud summat üksikliidetava kordseks ehk **korrutiseks.**

Näiteks summa

$$7+7+7+7+7$$

puhul ütleme, et see on *viis korda seitse* ehk *seitsme korrutis viiega*, ja kirjutame tema asemel lühemalt **5 · 7.**

Võrdsete liidetavate arvu (5) nimetatakse seejuures **korrutajaks** ja üksikliidetavat **(7) korrutatavaks.** Korrutamistehte märgiks on rea poolele kõrgusele kirjutatav punkt, mida loetakse harilikult sõnaga „korda”.

Otsese liitmisega leides, et $7+7+7+7+7=35$, võime kirjutada:

$$\underbrace{\underset{\text{korrutaja}}{5}\ \overset{\text{korrutamismärk}}{\cdot}\ \underset{\text{korrutatav}}{7}}_{\text{tegurid}} = \underset{\text{korrutis}}{35}$$

Peame meeles, et

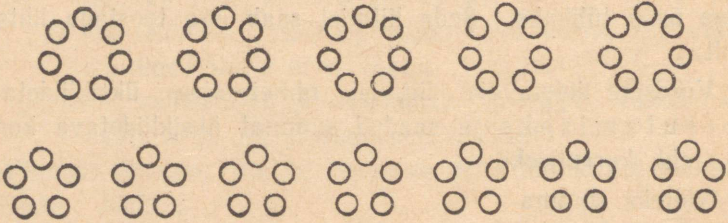
korrutaja näitab, mitu korda tuleb korrutatavat võtta liidetavana.

2. Tegurite vahetatavus.

Näitame, et korrutaja ja korrutatava vahetamisel korrutis ei muutu. Summa

$$7+7+7+7+7 \text{ ehk } 5 \cdot 7$$

tähendab loendamise tulemust esemete kogus, milles on 5 seitsmeliikmelist rühma (joon. 1). Moodustame uued rühmad nii, et igasse uude rühma võetakse üks ese igast endisest rühmast; saame 7 viieliikmelist rühma. Loendamise tulemuseks saame nüüd summa



Joon. 1.

$$5+5+5+5+5+5+5 \text{ ehk } 7 \cdot 5.$$

Et ümberrühmitamine ei saanud muuta esemete arvu, peab olema tõesti

$$5 \cdot 7 = 7 \cdot 5.$$

Samuti on see ka iga muu arvupaari puhul.

Et korrutaja ja korrutatav on vahetatavad, polegi tähtis neid alati eristada; seepärast ongi pandud neile veel ühine nimi — **tegur.**

Niisiis leidsime, et

korrutis ei olene tegurite järjekorrast.

3. Mõttekäike kirjalikul korrutamisel.

Korrutised ühekohalistest teguritest peavad olema peas; need moodustavad nn. „ükskordühe”.

Vaatleme nüüd lähemalt korrutamistehte sooritamist. Olgu esialgu korrutajaks ühekohaline arv, näiteks 5, ja korrutatav kuitahes suur arv, näiteks 783.

Korrutis 5 · 783 tähendab summat, milles on 5 liidetavat, igaüks 783. Kirjutame need liidetavad esialgu veergu ja liidame harilikul viisil.

$$\begin{array}{r}
783\\
783\\
783\\
783\\
\underline{783}\\
15\\
40\\
\underline{35}\\
3915
\end{array}$$

Üheliste veeru summa $3+3+3+3+3$ on korrutis $5\cdot 3$ ehk 15 (ühelist). Kümneliste veeru summaks tuleb korrutis $5\cdot 8$ ehk 40 (kümnelist) ja sajaliste veeru summaks korrutis $5\cdot 7$ ehk 35 (sajalist). Saadud korrutised kirjutame üksteise alla nii, et samanimelised ühikud on kohakuti, ja liidame siis need; tulemus 3915 ongi meie korrutise $5\cdot 783$ väärtus. Tema arvutamisel kasutatud vahepealsete korrutamiste tulemusi ($5\cdot 3=15$; $5\cdot 8=40$; $5\cdot 7=35$) nimetame **osakorrutisteks.**

Et ühekohalise korrutajaga korrutamisel osakorrutised ei saa tulla suuremad kui kahekohalised arvud (miks?), siis toimetatakse nende liitmine (õieti üksteise alla kirjutatult) harilikult peast, järgmise mõttekäigu kohaselt:

$$5\cdot 783 = 3\overset{4}{\breve{9}}\overset{1}{\breve{1}}5; \qquad \text{mõttekäik: } \begin{array}{l} 5\cdot 3 = \overset{1}{\smile}\mathbf{5}\\ 5\cdot 8 + \overset{1}{\smile} = \overset{4}{\smile}\mathbf{1}\\ 5\cdot 7 + \overset{4}{\smile} = \mathbf{39}. \end{array}$$

Nii tulebki ühekohalise korrutajaga korrutamisel kirjutada korrutis välja otsekohe, tema osakorrutisi kirjutamata.

Olgu nüüd ka korrutaja mitmekohaline arv, näiteks 245. Korrutis $245\cdot 783$ koosneb 245-st liidetavast, igaüks 783.

Moodustame neist liidetavaist kolm rühma nii, et esimeses rühmas on 5 liidetavat, teises 40 ja kolmandas 200.

Liidetavaid nii moodustatud rühmades eraldi liites saame

esimesest rühmast $5 \cdot 783 = \quad = 3915 \cdot 1$;
teisest „ $40 \cdot 783 = 4 \cdot 783 \cdot 10 = 3132 \cdot 10$;
kolmandast „ $200 \cdot 783 = 2 \cdot 783 \cdot 100 = 1566 \cdot 100$.

Korrutised 3915, 3132 ja 1566, mis on saadud meie korrutatava 783 korrutamisel korrutaja üksikute numbritega (5, 4 ja 2), on meie otsitava korrutise osakorrutised. Näeme, et esimene osakorrutis loendab meie otsitava korrutise ühelisi, teine kümnelisi ja kolmas sajalisi. See otsitav korrutis ise on siis oma (õieti üksteise alla kirjutatud) osakorrutiste summa:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{\overleftarrow{}} \\ \multicolumn{2}{c}{245 \cdot 783} \\ \hline 3915 & \\ 3132 & \leftarrow \\ 1566 & \longleftarrow \\ \hline 191835 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{c}{\overrightarrow{}} \\ \multicolumn{2}{c}{245 \cdot 783} \\ \hline 1566 & \\ 3132 & \rightarrow \\ 3915 & \longrightarrow \\ \hline 191835 & \end{array}$$

On ükskõik, kas korrutamist alustatakse korrutaja kõige väiksemaist ühikuist (meie näites ühelistest) või kõige suuremaist (meie näites sajalistest), sest osakorrutised tulevad ju ikka samad, ainult ümberpöördud järjekorraga. Vastavalt sellele erinevad ka pildid nende õieti üksteise alla kirjutamisel. Võttes korrutaja numbreid järjekorras paremalt vasakule, nihkuvad ka järjekordsed osakorrutised kohthaaval paremalt vasakule; võttes neid aga vasakult paremale, nihkuvad ka osakorrutised vasakult paremale.

Ühikarvudega 10, 100, 1000 jne. korrutades saadakse korrutis korrutatavast, temale üht, kaht, kolme jne. nulli üheliste järele kirjutades.

Tegur 0 muudab korrutise alati nulliks, olgu siis teine tegur milline tahes. Näiteks $0 \cdot 7 = 0$, samuti $1890 \cdot 0 = 0$.

Kui korrutajas mingil kohal esineb 0, siis selle nulliga ei korrutatagi, sest vastav osakorrutis tuleks ju ka null ja see ei lisandaks korrutisele mitte midagi; järgmist osakorrutist tuleb aga siis nihutada eelmise suhtes juba kahe koha võrra (vaadata järgnevaid näiteid 1 ja 3).

Kui üks või mõlemad tegurid lõpevad nullidega, siis korrutamise ajal jäetakse need nullid tähele panemata; nii saadud tulemuse lõppu aga kirjutatakse nulle niimitu, kuimitu neid on kokku tegurite lõpus (näited 2 ja 4).

Korrutajaks valitakse alati see tegur, milles on vähem nullist erinevaid numbreid (näide 3).

Kui korrutaja algab või lõpeb numbriga 1, siis võib jätta korrutatava enda üheks osakorrutiseks; sel juhul tegurite alla joont ei tõmmata (näited 3 ja 4).

N ä i t e i d.

1	2	3	4
205 · 488 2440 976 100040	3400 · 470 188 141 1598000	4672 · 2001 9344 9349672	170 · 365 2555 62050

69.

1) 800 · 3526
9000 · 409
70 · 58880
400 · 6700
55860 · 3000

2) 7468 · 105
501 · 6704
34869 · 81
1002 · 546
75060 · 304

3) 841 · 56904
165 · 74380
471 · 30003
211 · 54380
756 · 10130

70. Korrutada arv 12 345 679 kõigi ühekohaliste arvude üheksakordsetega (need on $1 \cdot 9 = 9$; $2 \cdot 9 = 18$; $3 \cdot 9 = 27$ jne.).

71. Artelli töölistest 17 teenisid kuus igaüks 635 rubla, 12 teenisid igaüks 742 rubla ja 2 eesrindlast teenisid kumbki 925 rubla. Kui palju palka maksis see artell ühes kuus oma kõigile töölistele kokku?

72. Mitu tonni leiba söövad Tallinna elanikud päevas, kui eeldada, et Tallinna elanike arv on 135 000 ja iga elanik sööb päevas 500 g leiba?

73. Mitu tihumeetrit puitu sisaldavad kokku 13 neljakandilist prussi pikkusega 6 m ja otsa mõõtmetega 5 ja 12 cm?

74. Arvutada ristküliku-kujulise põllutüki pindala hektaarides, teades, et pikkus on laiuse kolmekordne ja laius on 27 meetrit.

75. Otsustada, kumb korrutis on suurem, kas

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \quad \text{või} \quad 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \;\; 5 \cdot 5 \cdot 5 \; \cdot 5 \cdot 5$$

76. Seada järgmised kolm korrutist kasvavasse suuruse järjekorda:

$$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9, \quad 99 \cdot 99 \quad \text{ja} \quad 9 \cdot 999.$$

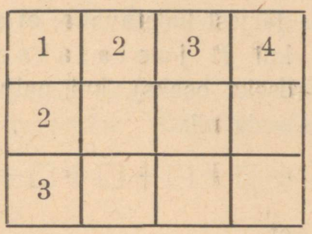
77. Arvutada sekundite arv aastas (365 ööpäeva).

78. Arvutada korrutis $729\,435\,678 \cdot 1\,930\,481\,659 \cdot 0$.

4. Kaudne loendamine.

Korrutamistehet tundes muutub loendamistoiming üsna lihtsaks, kui loendatavad esemed on korrastatud ühesuurusteks salkadeks. Siis on vaja loendada esemed ühes salgas, loendada salgad ja tulemused korrutada. Kui näiteks tahame loendada sõdureid möödamarssivas rivis, siis loendame, mitu neist kõnnib kõrvuti ja mitu niisugust kõrvuti kõndivat rida meist möödub. Neid loendamise tulemusi korrutades saamegi möödamarssinud sõdurite arvu.

Niisugust esemete arvu kindlakstegemist arvutamise teel, kus otsese loendamise tulemused võetakse arvutusandmeiks, nimetatakse kaudseks loendamiseks. Näiteks tähendab ristküliku pindala arvutamine (tema pikkust ja laiust korrutades) tegelikult tema pinnale mahtuvate ruutühikute kaudset loendamist; sest pikkus on ju ühes reas olevate ruutühikute loendamise tulemus ja laius ridade loendamise tulemus (joon. 2).



Joon. 2.

§ 6. Täisarvude jagamine.

1. Jagamistehte selgitus.

Kui korrutis ja tema üks tegur on teada, siis saab teist tegurit leida. Olgu näiteks teada, et korrutis on 21 ja tema üks tegur on 7; küsitakse teist tegurit.

Oletame esiteks, et tundmatu tegur on korrutaja, ja kirjutame tema kohale esialgu tühja kastikese:

$$\square \cdot 7 = 21.$$

See kirjutis esitab meile küsimuse: mitu seitset tuleb liita, et saada summaks 21? Teiste sõnadega: mitu seitset mahub 21-sse? (Näiteks — mitu korda saab valada vett 7-liitrise nõuga 21-liitrisesse anumasse?)

Katsetades leiame, et

$$1 \cdot 7 = 7 \text{ (on vähem kui 21)},$$
$$2 \cdot 7 = 7 + 7 = 14 \text{ (on vähem kui 21)},$$
$$3 \cdot 7 = 7 + 7 + 7 = 21,$$

s. t. otsitav korrutaja on 3.

Oletame nüüd, et korrutatav on tundmatu tegur, ning kirjutame seepärast nii:

$$7 \cdot \square = 21.$$

See kirjutis seab meile küsimuse järgmisel kujul: mis arv tuleb võtta 7 korda järjest liidetavana, et saada summaks 21? Teiste sõnadega: kui 21 jaotatakse ühetasa seitsmele (ehk seitsmeks võrdseks osaks), kui palju saab siis igaüks? Üles märkida võiks seda nii:

$$\square + \square + \square + \square + \square + \square + \square = 21.$$

Katsetades leiame, et

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 \cdot 1 = 7$ (on vähem kui 21),

$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 7 \cdot 2 = 14$ (on vähem kui 21),

$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 7 \cdot 3 = 21$,

järelikult otsitav korrutatav on 3.

Antud korrutise ja korrutatava järgi korrutaja leidmist nimetatakse mahutamiseks; antud korrutise ja korrutaja järgi korrutatava leidmist nimetatakse jaotamiseks.

Et korrutaja ja korrutatav on vahetatavad (mõlemad on lihtsalt tegurid), siis arvutamisel polegi tarvilik vahet teha mahutamise ja jaotamise vahel; nende ühiseks nimeks on jagamine. Niisiis:

jagamine on tehe, mille kaudu antud korrutise ja ühe teguri järgi leitakse teine tegur. Antud korrutist nimetatakse seejuures jagatavaks, antud tegurit jagajaks ja otsitavat tegurit jagatiseks.

Jagamistehet kirjutatakse nii:

$$\underset{\text{jagatav}}{21} \quad \underset{\text{jagamis-märk}}{:} \quad \underset{\text{jagaja}}{7} \quad = \quad \underset{\text{jagatis}}{3}$$

Jagamistehte märgiks on kaks punkti, mida loetakse harilikult sõnaga „jagatud". Esitatud jagamise kirjutist loetakse kas nii: *21 jagada 7-ga on 3* või ka nii: *3 on arvude 21 ja 7 jagatis.*

Mõttekäigust, mille kaudu jõudsime jagamistehtele, selgub, et

kui jagatist korrutame jagajaga, siis saame tulemuseks jagatava.

See asjaolu võimaldab jagamist korrutamise kaudu kontrollida. Näiteks jagamine $420 : 12 = 35$ on õige, sest $35 \cdot 12 = 420$.

2. Jääk.

Jagatavat ja jagajat vabalt ette valides võib juhtuda, et jagaja ei mahu jagatavasse parajasti mingi täisarvu kordselt. Näiteks jagatise $43 : 8$ leidmisel selgub, et $5 \cdot 8$ on kõigest 40, aga $6 \cdot 8$ on juba 48; seega 43-st esemest saame moodustada kas 5 kaheksaliikmelist rühma või 8 viieliikmelist rühma, aga ikka jääb 3 eset üle, mis ei moodusta enam tervet rühma. Jagatiseks ei kõlba siin arv 5 ega ka arv 6. Täpne jagatis ei saa siin olla täisarv; ta võib olla murdarv, mis on 5-st suurem, aga 6-st väiksem. Kui me murdühikulisi veel ei tunneks, siis peaksime oma jagamisülesande lõpetama siin järgmise tulemusega:

$$43 : 8 = 5, \text{ jääk } 3$$

(lühendatult võiks tulemuse kirjutada ka nii: 5, j. 3).

Seda kirjutist loeme nii: *43 jagatud 8-ga on 5 ja jääk on 3*; seda mõistame aga nii: oleks jagatav kolme võrra väiksem, tuleks jagatiseks parajasti 5. See 5 on ühtlasi täisosaks veel määramata täpsele jagatisele. Selgub järgmine tõsiasi:

kui jagatise täisosa korrutame jagajaga ja tulemusega liidame jäägi, siis saame jagatava.

See asjaolu võimaldab ka jäägiga jagamist korrutamise kaudu kontrollida (vaadata näidet järgmises punktis).

3. Mõttekäike kirjalikul jagamisel.

Vaatleme nüüd jagamistehte sooritamist kuitahes suurte täisarvude puhul. Jagame näiteks arvu 5687 arvuga 84.

$$\begin{array}{r} 5687 : 84 = 67,\ \text{jääk } 59 \\ -504\phantom{7 : 84 = 67,\ \text{jääk } 59} \\ \hline 647\phantom{: 84 = 67,\ \text{jääk } 59} \\ -588\phantom{: 84 = 67,\ \text{jääk } 59} \\ \hline 59\phantom{: 84 = 67,\ \text{jääk } 59} \end{array}$$

Kontroll:

$$\begin{array}{rl} 67 \cdot 84 & \\ \hline 588 & \\ 504 & \\ 59 & (\text{jääk}) \\ \hline 5687 & (\text{jagatav}) \end{array}$$

Mõttekäik seejuures on järgmine. 5687 eset tuleb jaotada 84-ks võrdseks rühmaks. Tuhat ega ka sada eset igasse rühma anda ei saa, sest tuhandelisi on ju ainult 5 ja sajalisigi kõigest 56. Küll aga on kümnelisi käepärast juba niipalju (568), et neist jätkub iga rühma jaoks. Proovimisega leiame, et 84 mahub 568-sse 6 korda ja jääk on 64, sest 6 · 84 = 504 ja 568 — 504 = 64. Seega kümnelisi saab anda igasse rühma 6. Kümneliste jääk koos antud ühelistega on kokku 647 ühelist. 84 mahutamisega 647-sse leiame, et ühelisi saab igasse rühma anda 7 ja 59 jääb veel üle; tõesti: 7 · 84 = 588 ja 647 — 588 = 59. Nii saame igasse rühma anda 6 kümnelist ja 7 ühelist ning 59 ühelist jääb üle. Seega osutub meie jagamise tulemuseks 67, jääk 59.

Eespool on näha selle jagamise kirjapanek kõige otstarbekohasemal kujul. Kõrval on teostatud ka kontrollkorrutamine. Võttes korrutajaks nimelt jagatise, tulevad sel korrutamisel osakorrutiseks samad arvud, mis esinesid juba mahutamisel jagamise juures. Ka jagamisel nimetatakse neid arvusid osakorrutisteks.

Kui jagaja on ühekohaline arv, siis toimetatakse jagamisel kõik vajalikud arvutused peast ja jagatise numbrid kirjutatakse välja otsekohe, ilma igasuguste lisakirjutisteta, näiteks:

50 496 : 7 = **7 213**, jääk 5.

Mõttekäik:

50 : 7 = **7**, jääk 1	tuhandelised
$^{1}4$: 7 = **2**	sajalised
9 : 7 = **1**, jääk 2	kümnelised
$^{2}6$: 7 = **3**, jääk **5**	ühelised

Sobivate arvude korral saab mõnikord ka kahe- või rohkemagi-kohalise arvuga jagamist teostada ilma lisakirjutisteta, näiteks:

3620 : 18 = 201, jääk 2.

Mõttekäik:

36 : 18 = **2**	sajalised
20 : 18 = **1**, jääk **2**	ühelised

79. Teostada järgmised jagamised ilma lisakirjutisteta:

1) 5642 : 7
1299 : 8
2253 : 3

2) 6465 : 64
2639 : 13
7728 : 11

3) 505 303 : 101
846 450 : 423
264 400 : 132

80. Teostada järgmised jagamised:

1) 55 821 : 69
88 886 : 98
74 360 : 38

2) 582 163 : 709
841 602 : 348
400 500 : 504

81. Kui auto katab tunnis 42 km, mitu meetrit katab ta siis minutis?

82. Maakera ümbermõõt on 40 000 km. Mitu täispäeva kuluks jala ümber Maakera käimiseks, kui iga päev käia keskmiselt 30 km? Mitu aastat ja mitu päeva see on? Mitu täispäeva kuluks ümber Maakera lendamiseks lennukil, mis vahetpidamata lendaks kiirusega 240 km tunnis?

83. Ülesande nr. 23 andmeil arvutada, mitu minutit ja mitu sekundit kulub valgusel Päikeselt Maakerale jõudmiseks, teades, et valgus levib kiirusega 300 000 km sekundis.

84. Ristküliku-kujulise väljaku pindala on 0,2444 ha ja laius 47 m. Arvutada pikkus meetrites.

85. Riikliku viie aasta plaani seaduse järgi toodab Eesti NSV aastal 1950 võid 9000 tonni. Mitu täisgrammi teeb see välja iga elaniku kohta, kui Eesti NSV elanike arvuks võtta ümmarguselt 1 000 000?

86. Üks süld on 7 jalga ja üks jalg on 12 tolli. Mitu sülda, jalga ja tolli on 158 tolli?

87. Kuus on 25 tööpäeva à 8 töötundi. Mitu kuud, päeva ja töötundi on 268 töötundi?

88. Inglise rahaühik 1 naelsterling (£) sisaldab 20 šillingit ja iga šilling 12 penni. Mitu šillingit, naelsterlingit ja penni on 2763 penni?

89. *Leida jagatav ja jagaja järgmise jagamispildi põhjal:

$$\begin{array}{l} XXXXX : XX = 908,\ \text{jääk } 1. \\ \underline{XXX} \\ XX \\ \underline{XX} \\ 1 \end{array}$$

4. Jäägi edasijagamine.

Uurime nüüd, kas on võimalik arvutada täisarvude jagatist täpselt ka siis, kui jagamisel saame üheliste jäägi. Näiteks jagades andmeil 61 : 8 saame tulemuseks 7, jääk 5. Üheliste jäägi võime aga peenestada kümnendikeks: saame 50 kümnendikku. Jagades edasi neid kümnendikke, saame ka jagatises kümnendikud. Kui sel jagamisel saame kümnendike jäägi (nagu meie juhtumilgi — see jääk on 2), siis peenestame selle sajandikeks; jagades neid sajandikke saame jagatises sajandikud jne. Arvutamist jätkatakse seni, kuni jagamine kas lõpeb (nagu meie näites), või kuni on leitud juba küllaldasel arvul jagatise kümnendkohti.

61 : 8 = 7,625
56
50
48
20
16
40
40

Kui jagatav on jagajast väiksem (näiteks jagamisel 8 : 125), siis jagatisse muidugi ei saa tulla täisühikulisi ning seepärast algab jagatise kirjutis nulliga ja komaga tema järel. Peenestame ühelised kümnendikeks; antud juhtumil saame neid 80. Selgub, et neistki ei piisa jaotamiseks 125-le, järelikult tuleb jagatises kümnendike kohale kirjutada null. Alles kümnendikke sajandikeks peenestades saame viimaseid juba niipalju, nimelt 800, et neist piisab jaotamiseks 125-le. Arvutamine jätkub eelmise näite eeskujul.

8 : 125 = 0,064
80
800
750
500
500

5. Perioodiline kümnendmurd jagatisena.

Mõnede andmete puhul jagamine osutub lõpmatuks. Teostades näiteks jagamist 100 : 33 hakkavad jagamisel numbrid paratamatu järjekindlusega korduma ja jagamine ei lõpegi. Niisugusel korral öeldakse, et jagatis on **perioodiline** kümnendmurd. Perioodilist kümnendmurdu kirjutatakse lühemalt nii, et tema murdosas korduvalt esinev numbrisalk (periood) kirjutatakse ainult üks kord, aga sulgudes.

$$\begin{array}{l}
100 : 33 = 3{,}030303\ldots = 3{,}(03) \\
\underline{99} \\
100 \\
\underline{99} \\
100 \\
99
\end{array}$$

On kasulik meeles pidada, et ühekohalistest jagajatest ainult 3, 6, 7 ja 9 võivad anda perioodilisi jagatisi, 2, 4, 5 ja 8 aga mitte kunagi.

90. Jagada, kuni jagamine lõpeb:

1) 297 : 15
477 : 24
693 : 56
495 : 72
319 : 88

2) 660 : 264
784 : 224
2313 : 514
1379 : 788
3249 : 912

3) 8778 : 3192
6498 : 5472
9009 : 8008
7182 : 1368
3591 : 3420

4) 1 : 32
5 : 16
2 : 25
7 : 56
9 : 64

5) 10 : 64
3 : 96
17 : 544
19 : 608
43 : 688

6) 90 : 1280
27 : 6400
1 : 5120
44 : 1024
3 : 1250

91. Jagada, kuni selgub jagatise periood, ja kirjutada jagatis välja perioodilise kümnendmurru kujul:

1) 2 : 3
1 : 9
5 : 6
7 : 6
8 : 7

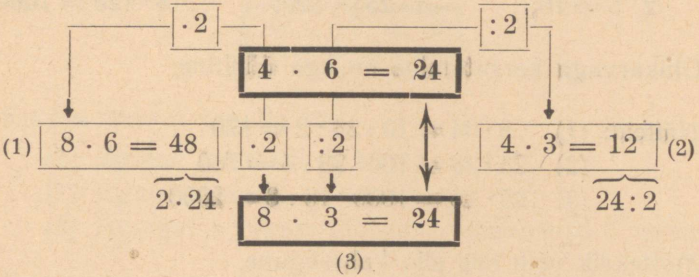
2) 64 : 21
25 : 11
54 : 35
35 : 54
71 : 15

3) 163 : 495
170 : 33
257 : 600
11223 : 900
2519 : 999

§ 7. Korrutise ja jagatise omadusi.

1. Korrutise omadusi.

Uurime, kuidas muutub korrutis, kui tema tegureid suurendada või vähendada mingi arv korda. Olgu esialgu teguriteks arvud 4 ja 6; korrutis on siis $4 \cdot 6 = 24$. Uurimist teostame järgmise skeemi abil:



Selle skeemi põhjal on hõlpus vastata küsimustele:

Kuidas muutub korrutis, kui

(1) üht tegurit suurendame 2 korda?

(2) üht tegurit vähendame 2 korda?

(3) üht tegurit suurendame 2 korda ja teist tegurit vähendame 2 korda? Miks viimasel juhtumil korrutis ei muutu?

Õppijale olgu soovitatud koostada samasugune skeem, lähtudes teguritest 5 ja 12 ning toimetades tegurite suurendamist ja vähendamist 3 korda. Vastata jälle samasugustele küsimustele nagu eespool!

Vastustest kujunevad korrutise järgmised omadused:

1) **kui suurendame üht tegurit mingi arv korda, siis suureneb ka korrutis sama arv korda;**

2) **kui vähendame üht tegurit mingi arv korda, siis väheneb ka korrutis sama arv korda.**

3) kui üht tegurit korrutame ja teist tegurit jagame ühe ja sama arvuga, siis korrutis ei muutu.

Neid korrutise omadusi saab kasutada korrutamise hõlbustamiseks siis, kui üks tegur on 5 või 25 või 125. Nimelt on neid tegureid hõlpus muuta ühikarvudeks, korrutades neid vastavalt 2-ga, 4-ga või 8-ga. Tõesti:

$$2 \cdot 5 = 10; \qquad 4 \cdot 25 = 100; \qquad 8 \cdot 125 = 1000.$$

Ühikarvuga korrutamine on aga ülilihtne.

Näiteid: (1) $5 \cdot 34 = 10 \cdot 34 : 2 = 170$

(2) $25 \cdot 28 = 100 \cdot 28 : 4 = 700$

(3) $125 \cdot 16 = 1000 \cdot 16 : 8 = 2000$

Mõttekäik võib olla siin kahesugune.

I viis: Korrutades $5 \cdot 34$ asemel $10 \cdot 34$ saame (esimese omaduse põhjal) õigest korrutisest 2 korda suurema korrutise, nimelt 340; õige korrutis on siis $340 : 2 = 170$.

II viis: Korrutades $5 \cdot 34$ asemel $10 \cdot 17$ saame (kolmanda omaduse põhjal) otsekohe õige korrutise 170.

92. Arvutada peast järgmised korrutised:

1) $5 \cdot 18$
$5 \cdot 22$
$5 \cdot 68$
$5 \cdot 116$
$5 \cdot 234$

2) $25 \cdot 36$
$25 \cdot 16$
$25 \cdot 84$
$25 \cdot 72$
$25 \cdot 164$

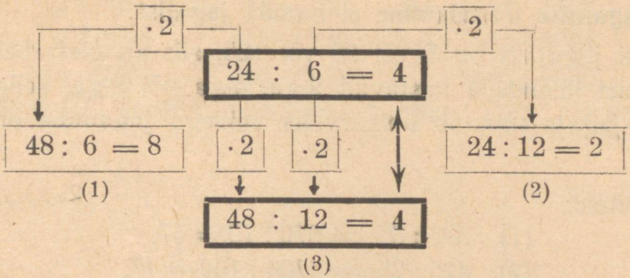
3) $125 \cdot 24$
$125 \cdot 32$
$125 \cdot 88$
$125 \cdot 96$
$125 \cdot 872$

4) $5 \cdot 748$
$25 \cdot 532$
$125 \cdot 944$
$25 \cdot 1624$
$125 \cdot 8048$

2. Jagatise omadusi.

Uurime nüüd, kuidas muutub jagatis, kui jagatavat ja jagajat suurendada või vähendada mingi arv korda.

Lähtume jagamisest **24 : 6 = 4** ja skeemi kasutades vastame järgmistele küsimustele:



Kuidas muutub jagatis, kui

(1) jagatav suureneb 2 korda?
(2) jagaja suureneb 2 korda?
(3) jagatav ja jagaja mõlemad suurenevad 2 korda?

Esimese ja teise küsimuse vastamisel võib kasutada ka järgmisi ilmseid tõdesid: 1) kuimitu korda rohkem on esemeid jagada, niimitu korda rohkem ka igaüks saab; 2) kuimitu korda rohkem on esemete saajaid, niimitu korda vähem igaüks saab. Kui nüüd esemete hulk ja saajate hulk mõlemad kasvavad samakordseks, siis muidugi igaüks saab jälle endisel määral.

Neid mõttekäike kokku võttes saame järgmised jagatise omadused:

1) **kui jagatavat suurendame mingi arv korda, siis suureneb ka jagatis sama arv korda;**
2) **kui jagajat suurendame mingi arv korda, siis jagatis väheneb sama arv korda;**
3) **kui jagatavat ja jagajat korraga suurendame mingi arv korda, siis jagatis ei muutu.**

Jagatava ja jagaja korrutamist ühe ja sama arvuga nimetatakse jagamise **laiendamiseks**; arvu, millega korrutame, nimetatakse **laiendajaks.** Jagatise kolmanda omaduse võiksime sõnastada lühemalt järgmiselt:

jagamise laiendamine ei muuda jagatist.

Kui jagajaks on 5 või 25 või 125, siis on otstarbekohane jagamist laiendada vastavalt 2-ga, 4-ga või 8-ga; selle tagajärjel jagaja muutub ühikarvuks, millega jagamine on väga lihtne.

Näiteid:

(1) 335 : 5 = 670 : 10 = 67,
(2) 425 : 25 = 1700 : 100 = 17,
(3) 52 : 125 = 416 : 1000 = 0,416.

93. Laiendades jagamist 2-ga arvutada peast:

1) 75 : 5
115 : 5
135 : 5
240 : 5
425 : 5

2) 815 : 5
730 : 5
905 : 5
845 : 5
980 : 5

3) 1105 : 5
2310 : 5
2445 : 5
3105 : 5
9900 : 5

94. Laiendades jagamist 4-ga teostada järgmised jagamised:

1) 225 : 25
375 : 25
550 : 25
472 : 25
643 : 25

2) 1575 : 25
2425 : 25
6150 : 25
5645 : 25
7482 : 25

3) 20 475 : 25
56 425 : 25
89700 : 25
48350 : 25
78496 : 25

95. Laiendades jagamist 8-ga teostada järgmised jagamised:

1) 2250 : 125
5375 : 125
3500 : 125
7120 : 125
1990 : 125

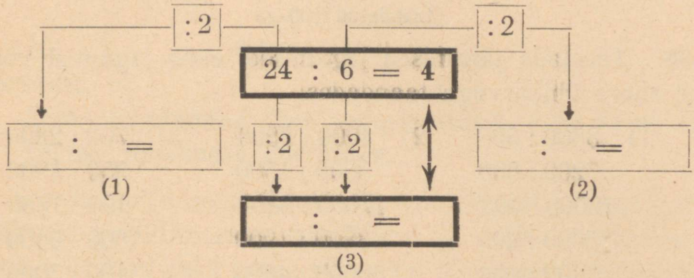
2) 4375 : 125
3625 : 125
6750 : 125
8875 : 125
9400 : 125

3) 4 : 125
13 : 125
27 : 125
1 : 125
101 : 125

96. Teostada järgmised jagamised võimalikult otstarbekohasel viisil:

1) 2 : 250 2) 42 : 500 3) 148 : 1250
3 : 1250 75 : 1250 564 : 2500
111 : 500 188 : 2500 2485 : 5000

97. Eelmist skeemi eeskujuks võttes täita järgmine skeem:



ja vastata selle põhjal küsimustele: Kuidas muutub jagatis, kui

(1) jagatav väheneb 2 korda?
(2) jagaja väheneb 2 korda?
(3) jagatav ja jagaja korraga vähenevad 2 korda?

Selle ülesande vastustest kujundame endisele kolmikule lisaks veel kolm jagatise omadust:

4) **kui jagatavat vähendame mingi arv korda, siis väheneb ka jagatis sama arv korda;**
5) **kui jagajat vähendame mingi arv korda, siis jagatis suureneb sama arv korda;**
6) **kui jagatavat ja jagajat korraga vähendame mingi arv korda, siis jagatis ei muutu.**

Jagatava ja jagaja jagamist ühe ja sama arvuga nimetatakse jagamise **taandamiseks**; arvu, millega jagame, nimetatakse **taandajaks.** Jagatise kuuenda omaduse võiksime sõnastada lühemalt järgmiselt:

jagamise taandamine ei muuda jagatist.

Jagamise taandamist kasutame hiljem ulatuslikult harilikkude murdude peatükis. Siinkohal aga rakendame teda ainult neil puhkudel, kus jagatis ja jagaja mõlemad lõpevad nullidega. Taandajaks valitakse siis võimalikult suur ühikarv.

Näide:

$$\underbrace{56000 : 700 = 560 : 7}_{\text{taandatud 100-ga}} = 80$$

98. Teostada järgmised jagamised, enne jagamist võimalikult suure ühikarvuga taandades:

1) 3500 : 500	2) 4000 : 2500	3) 700 : 2800
7200 : 800	5000 : 1500	950 : 1900
12000 : 400	17000 : 6800	490 : 1880
5600 : 200	3800 : 1900	1600 : 6400
3000 : 600	50000 : 4000	100 : 7000

§ 8. Kümnendmurdude korrutamine.

1. Kümnendmurdude korrutamise juhis.

Näitame, et kümnendmurdude korrutamist saab teostada täisarvude korrutamise kaudu.

***Ülesanne.** Mitu kg kaalub 4 cm³ rauda?*

Teame, et raua erikaal on 7,8, s. t. et 1 cm³ rauda kaalub 7,8 g ehk 1 dm³ rauda kaalub 7,8 kg. 4 cm³ rauda kaalub seega (grammides):

$$4 \cdot 7{,}8 = 7{,}8 + 7{,}8 + 7{,}8 + 7{,}8 = 31{,}2;$$

$$\begin{array}{r} \overset{3}{\smile} \\ 7{,}8 \\ 7{,}8 \\ 7{,}8 \\ \underline{7{,}8} \\ 31{,}2 \end{array}$$

Märkame, et kümnendmurdu täisarvuga korrutades saadakse korrutis, millel on peale koma niisama palju kohti kui korrutataval (antud juhtumil nimelt üksainus koht).

Ülesanne nõudis vastust kilogrammides: 31,2 g = = 0,0312 kg.

Leitud vastuse võiksime arvutada ka otsekohe kilogrammides. Teame, et 4 $cm^3 = 0{,}004\,dm^3$ ning kaal kilogrammides saadakse, kui ruumala dm^3-tes korrutatakse erikaaluga; seega

$$0{,}004 \cdot 7{,}8 \text{ peab olema } 0{,}0312.$$

Võrreldes arvutusi

$$4 \cdot 78 = 312$$
$$4 \cdot 7{,}8 = 31{,}2$$
$$0{,}004 \cdot 7{,}8 = 0{,}0312$$

märkame, et

koma nihutamine ühes teguris kutsub esile koma samasuguse nihkumise korrutises.

Samale tulemusele jõuaksime ka rakendades eelmisest §-st tuttavaid korrutise omadusi. Tõesti — koma nihutamine ühes teguris näiteks kaks kohta paremale tähendab selle teguri suurendamist 100 korda; selle tagajärjel suureneb ka korrutis 100 korda, s. t. tema koma nihkub samuti 2 kohta paremale.

Kui nüüd oleks antud korrutada tegurid 0,004 ja 7,8, siis võiksime talitada nii, et suurendame mõlemad tegurid täisarvudeks. Selleks tuleb esimest tegurit suurendada 1000 korda ja teist tegurit 10 korda. Esimese teguri suurendamine 1000 korda suurendab ka korrutist 1000 korda; teise teguri suurendamine 10 korda suurendab korrutist veel 10 korda. Seega korrutis suureneb kokku $10 \cdot 1000 = 10\,000$ korda. See tähendab, et korrutis $4 \cdot 78 = 312$ on õigest korrutisest 10 000 korda suurem ja teda tuleb seepärast 10 000 korda vähendada, et saada õiget korrutist. Niisiis õige korrutis on $312 : 10\,000 = 0{,}0312$.

Sellest mõttekäigust selgub, et kümnendmurdude korrutisel on kohti peale koma just niipalju, kuipalju neid on teguritel ühtekokku:

$$0{,}\underbrace{004}_{} \cdot 7{,}\underbrace{8}_{} = 0{,}\underbrace{0312}_{}$$

3 kohta + 1 koht = 4 kohta

Kümnendmurdude korrutamise üldine juhis kujuneb järgmiseks:

kümnendmurdude korrutamisel jäetakse esialgu tegurite komad tähele panemata ja korrutatakse tegureid kui täisarve; tulemuses paigutatakse koma nii, et korrutisel oleks kohti peale koma niisama palju kui teguritel kokku.

99.
3 · 4,2
5 · 25,4
14 · 17,35
25 · 0,324
400 · 5,187

2) 7 · 0,18
15 · 2,34
600 · 7,1324
16 · 0,25
200 · 0,14

3) 0,365 · 14
0,304 · 21
1,05 · 46
2,007 · 54
3,008 · 49

100. 1) 6,03 · 8,4
5,42 · 7,5
4,67 · 8,09
8,02 · 9,25
7,06 · 8,9

2) 5,2 · 3,42
6,43 · 9,8
7,28 · 3,1
12,7 · 18,63
5,72 · 12,9

3) 72,6 · 82,45
0,04 · 73,6
9,72 · 12,2
8,45 · 9,6
0,48 · 8,56

101. 1) 7,86 · 19,2
4,20 · 6,42
46,50 · 17,8
46,76 · 4,120
72,8 · 6,256

2) 42,75 · 18,6
10,17 · 8,6
260,80 · 45,5
9,78 · 8,90
2,42 · 6,18

3) 5,2 · 7,38
15,8 · 4,65
720,8 · 92,60
10,25 · 8,19
5,32 · 12,70

102. 1) 2,4 · 5,1
6,07 · 7,2
205 · 3,04
5,26 · 2,75
2,605 · 3,20

2) 3,31 · 0,07
17,45 · 20,03
25,90 · 13,20
3400 · 0,005
260 · 0,0705

3) 0,29 · 0,012
0,01 · 0,107
0,04 · 0,550
1800 · 0,0305
7,007 · 0,108

103. 1) 0,04 · 6345
0,605 · 3,20
0,72 · 0,004
4,56 · 3,05
0,106 · 304

2) 4,07 · 250
3,8 · 2,09
348 · 0,1005
5006 · 3,47
4,28 · 0,005

3) 0,002 · 3864
56,42 · 1,120
86 481 · 0,045
49,42 · 145,3
666,6 · 0,666

2. Korrutamine ühikarvuga.

Korrutamine on eriti hõlpus siis, kui üks tegur on ühikarv.

Arvu korrutamine täisühikulistega 10, 100, 1000 jne. tähendab arvu suurendamist 10, 100, 1000 jne. korda; seda suurendamist saab aga teha lihtsalt arvu koma nihutamisega paremale, vastavalt ühe, kahe, kolme jne. koha võrra.

Näiteid:

(1) $10 \cdot 5{,}08 = 50{,}8$

(2) $23{,}485 \cdot 100 = 2348{,}5$

(3) $1000 \cdot 0{,}0047 = 4{,}7$

Korrutamisel murdühikulistega 0,1; 0,01; 0,001 jne. aga tuleb teise teguri koma nihutada vasakule, vastavalt ühe, kahe, kolme jne. koha võrra, et saada korrutises kohti peale koma niisama palju kui teguritel kokku.

Näiteid:

(1) $0{,}1 \cdot 24{,}5 = 2{,}45$

(2) $5{,}2 \cdot 0{,}01 = 0{,}052$

(3) $40 \cdot 0{,}001 = 0{,}040$

104. Korrutada peast:

1) $45 \cdot 100$
$0{,}52 \cdot 10$
$0{,}0386 \cdot 100$
$542{,}3 \cdot 1000$
$700 \cdot 100$

2) $400 \cdot 10$
$50{,}05 \cdot 1000$
$100 \cdot 0{,}642$
$0{,}1 \cdot 10000$
$1000 \cdot 0{,}03$

3) $0{,}000125 \cdot 10$
$100000 \cdot 5{,}2$
$4444{,}04 \cdot 1$
$386497 \cdot 0$
$1000000 \cdot 0{,}002$

1) $7 \cdot 0{,}1$
$5 \cdot 0{,}01$
$3 \cdot 0{,}001$
$2 \cdot 0{,}0001$
$9 \cdot 0{,}00001$

2) $17 \cdot 0{,}01$
$24 \cdot 0{,}1$
$6{,}5 \cdot 0{,}01$
$543 \cdot 0{,}001$
$0{,}1 \cdot 0{,}001$

3) $0{,}0001 \cdot 1002$
$247 \cdot 0{,}01$
$5164 \cdot 0{,}001$
$0{,}002 \cdot 0{,}1$
$0{,}001 \cdot 0{,}001$

105. Ruudu külje pikkus on 29,17 m. Arvutada ruudu ümbermõõt meetrites ja pindala ruutmeetrites.

106. Arvutada ristküliku pindala, kui tema laius on 13,4 cm ja pikkus 4 korda suurem.

107. Arvutada ristküliku-kujulise põllu pindala, kui pikkus on 1,72 km ja laius 0,34 km. Vastus anda hektaarides.

108. Ülikonnariide meeter maksab 225,6 rubla ja voodririide meeter 45,25 rubla. Osteti 3,2 m ülikonnariiet ja 2,4 m voodririiet. Arvutada ostuarve.

109. Vagun-platvorm, mille pikkus oli 6,4 m, laius 2,74 m ja kõrgus 0,76 m, laaditi ääretasa täis kivisütt. Teades, et 1 m^3 kivisütt kaalub 1,3 tonni, arvutada platvormile laaditud kivisöe kaal tonnides.

110. NSV Liidus teostus 1947. a. lõpul suur rahareform. Suhkru kilogramm maksis enne reformi 50 rubla, aga pärast reformi kõigest 12 rubla. Inimene vajab päevas keskmiselt 45 grammi suhkrut. Kui palju kulub 3-liikmelisel perekonnal kuus (30 päeva) suhkru peale raha nüüd vähem kui enne rahareformi?

111. Basseini saab täita kahe kraani kaudu. Üks kraan annab minutis 2,35 ämbrit vett, teine 1,4 korda rohkem. Kui mõlemad kraanid korraga avatakse, siis täitub tühi bassein 3 tunni 20 minutiga. Mitu ämbritäit mahutab bassein?

112. Vedur kaalub 52,82 tonni, tender 32,74 tonni ja täislaaditud vagun 22,45 tonni. Arvutada rongi kogukaal, kui koosseisus on 29 ühesuguselt laaditud vagunit.

113. Kooli seinalehe aluse mõõtmed on 1,45 m ja 1,13 m. Seinalehe järjekordne number sisustati kirjutistega 9-l lehel à 30 × 21 cm ja 6 fotoga à 13 × 18 cm. Kui suur pindala seinalehe alusest jäi kirjutiste ja fotode alt vabaks, vaheruumideks?

§ 9. Kümnendmurdude jagamine.

1. Kümnendmurru jagamine täisarvuga.

Arvu jagamisel täisühikulistega 10, 100, 1000 jne. peab arv muidugi vastavalt 10, 100, 1000 jne. korda vähenema. Säärast vähendamist saab aga teostada lihtsalt arvu koma nihutamisega vasakule, vastavalt ühe, kahe, kolme jne. koha võrra.

Näiteid:

$$(1)\quad 724{,}5 : 10 = 72{,}45$$
$$(2)\quad 24{,}35 : 100 = 0{,}2435$$
$$(3)\quad 7050 : 1000 = 7{,}050$$

Kümnendmurru jagamisel täisarvuga talitatakse täpselt samuti nagu täisarvu jagamisel täisarvuga. Arvutame näiteks jagatise andmeil 185,64 : 52.

$$\begin{array}{l}
185{,}64 : 52 = 3{,}57 \\
156 \\ \hline
\;\;296 \\
\;\;260 \\ \hline
\;\;\;\;364 \\
\;\;\;\;364 \\ \hline
\end{array}$$

Jagatava täisosa jagamisel saame siin jagatise täisosana 3 ja üheliste jäägi 29. See üheliste jääk kümnendikeks peenestatult annab 290 kümnendikku; koos jagatava kümnendikega (6) saame 296 kümnendikku; neist saab anda 52-le igaühele 5, kusjuures 36 kümnendikku jääb üle; tõesti — $5 \cdot 52 = 260$; $296 - 260 = 36$. Selle kümnendike jäägi peenestame sajandikeks ja lisandame neile jagatava sajandikud; saame 364 sajandikku; neist saab jagatis parajasti 7 sajandikku; sellega jagamine lõpebki, andes täpseks jagatiseks arvu 3,57.

114. Jagada peast:

1) 8,07 : 10
526,3 : 10
74,2 : 100
30 : 1000
0,8 : 100

2) 4700 : 100
720 : 1000
346,07 : 100
0,004 : 10
99,8 : 1000

3) 0,01 : 1000
56,3 : 10000
72480 : 100
1 : 100000
0 : 1000

115. Teostada järgmised jagamised ilma lisakirjutisteta:

1) 31,75 : 5
50,8 : 4
89,2 : 8
59,08 : 7
47,52 : 6

2) 37,44 : 4
98,4 : 3
30,443 : 7
2,562 : 6
3,456 : 9

3) 29,96 : 8
27,3 : 5
3,834 : 6
61,1 : 5
51,38 : 7

4) 1,036 : 7
28,221 : 3
71,3 : 5
12,3 : 4
25,3 : 11

116. Jagada, kuni jagamine lõpeb:

1) 118,16 : 14
60,886 : 28
10,248 : 48
29,96 : 16
29,70 : 15

2) 122,2 : 25
13,65 : 50
0,1917 : 96
0,713 : 80
0,693 : 56

3) 843,5 : 56
649,6 : 224
285,94 : 493
343,546 : 530
71,82 : 1368

2. Jagamine kümnendmurruga.

Näitame, et jagamist kümnendmurruga saab taandada jagamisele täisarvuga.

Ülesanne. *Kooli pioneerid otsustasid Suure Oktoobrirevolutsiooni aastapäevaks saata Eesti NSV Ministrite Nõukogu esimehele tervitustelegrammi. Sideasutis nõudis telegrammi kohaletoimetamise eest 27,2 rubla. Selle summa jagamisel pioneeride arvuga selgus, et igaühel tuleb maksta 0,85 rubla. Mitu pioneeri oli klassis?*

On selge, et pioneeride arvu siin saame, jagades rahasumma 27,2 rubla rahasummaga 0,85 rubla, sest otsitava arvu ja arvu 0,85 korrutis peab olema 27,2. Rahasummad võime aga väljendada enne jagamist kopikates; siis peaksime saama sama pioneeride arvu ka arvude 2720 ja 85 jagatisena:

27,2 : 0,85 = 2720 : 85 = 32 (pioneeri).
255
170
170

Nii veendume, et jagatis ei muutu, kui jagatava ja jagaja korraga suurendame 100-kordseks. Tulemus on täiesti kooskõlas juba §-st 7 tuttava jagatise omadusega: jagatis ei muutu, kui jagatavat ja jagajat korraga suurendame sama arv korda, või lühemalt — jagatis ei muutu jagamise laiendamisel.

See asjaolu võimaldab kümnendmurruga jagamist laiendada sobiva ühikarvuga nii, et jagaja muutub täisarvuks. Peale seda toimub jagamine juba eelmise punkti põhjal. Näide:

$$41{,}552 : 5{,}6 = 415{,}52 : 56 = 7{,}42$$

$$\begin{array}{r} 392 \\ \hline 235 \\ 224 \\ \hline 112 \\ 112 \\ \hline \end{array}$$

Enne arvutamist on siin jagamist laiendatud 10-ga.
Eriti lihtsaks osutub jagamine murdühikutega.

Näide: $1{,}536 : 0{,}01 = 153{,}6 : 1 = 153{,}6$.

Selgub, et jagamisel murdühikuga saadakse jagatis jagatavast, kui viimases nihutatakse koma paremale niimitme koha võrra, kuimitu kohta on jagajal (murdühikul) peale koma.

Kokkuvõttes saame kümnendmurruga jagamiseks järgmise juhise:

kui jagaja on kümnendmurd, siis kõigepealt laiendame jagamist niisuguse ühikarvuga, mis muudab jagaja täisarvuks; peale seda jagame harilikul viisil (jagatises paneme koma pärast seda, kui jagatava ühelised on jagatud).

117.

1) 18 : 0,4
16 : 0,5
18 : 0,9
64 : 3,2
49 : 0,7

2) 6 : 0,8
1 : 0,05
9 : 0,36
11 : 0,22
33 : 0,03

3) 24 : 6,25
32 : 1,28
225 : 0,625
40 : 0,025
124 : 0,031

118. Jagada peast:

1) 8,2 : 4,1
90 : 4,5
77 : 0,11
69 : 2,3
10,5 : 3,5

2) 6,6 : 0,06
18,4 : 0,4
10 : 0,25
92 : 4,6
114 : 5,7

3) 84 : 0,21
72 : 1,2
81 : 0,09
45 : 2,25
21 : 0,003

4) 0,42 : 0,1
3,72 : 0,1
15,63 : 0,01
0,327 : 0,001
2,56 : 0,001

119.

1) 67,14 : 7,9
10,58 : 2,3
23,68 : 64
29,842 : 8,6
5,376 : 7,68

2) 41,8 : 5,5
2,832 : 4,8
8,415 : 0,86
20,64 : 43
1,7316 : 7,4

3) 2,288 : 6,5
43,0794 : 5,46
1,0134 : 1,126
1,3192 : 0,0136
48,816 : 864

120.

1) 213,08 : 3,044
4485,6 : 800
198,03 : 246
24,5676 : 34,7
0,06953 : 1,7

2) 2453,28 : 80,7
4,65 : 0,186
4,3878 : 246
0,01036 : 0,148
43,8 : 584

3) 9,9954 : 3,702
7,53 : 0,15
53,238 : 76
71,0124 : 23,6
2,45004 : 0,6005

121. Leida arv, mille korrutamisel arvuga 0,027 saadakse korrutiseks 2,43.

122. Ratas tegi 115 tiiru ja veeres seejuures edasi 264,5 m. Arvutada ratta ümbermõõt.

123. Mitu hektaari saab väetada 19,44 tsentnerist superfosfaadist, kui iga hektaar vajab seda väetist 2,7 kg?

124. Õhk on 769 korda kergem kui vesi, aga elavhõbe on 10 461,5 korda raskem kui õhk. Mitu korda on elavhõbe raskem kui vesi?

125. Nõu piimaga kaalub 3200 g. On teada, et tühi nõu kaalub 655 g ja piima erikaal on 1,03. Mitu liitrit piima on nõus?

126. Ehitati 26,65 km uut raudteed. Pandi maha rööpad, mille iga lüli pikkus oli 10,65 m; lülide otste vahele jäeti 1 cm paisumisruumi. Mitu üksik-lüli asetati maha?

127. Kruvi, mida keerati 5 pööret, liikus mutris edasi 3 mm. Mitme pöördega liigub see kruvi edasi 4,5 cm?

128. Vankri esimene ratas teeb 24 tiiru samal ajal, kui tagumine teeb 16,5 tiiru. Esimese ratta ümbermõõt on 2,2 m. Arvutada tagumise ratta ümbermõõt.

§ 10. Arvude ümardamine.

Tegelikus elus esinevad arvud on kas loendamise või mõõtmise tulemused. Nii ühtedel kui ka teistel pole sageli sisuliselt täpset ega püsivat väärtust. Mõned näited selle kohta:

(1) Viimane, aastal 1934 korraldatud rahvaloendus andis Eesti elanike arvuks 1 126 413. Ilmselt ei ole mõtet seda arvu meeles pidada täielikult, kuni viimase numbrini, sest selle viimastel numbritel pole kaaluvat tähtsust. Tõesti, riigis ju inimesi alatasa sünnib juurde ja sureb, rändab sisse ja välja; seetõttu ka elanike arv päevast päeva muutub. Elanike arvu esimesed numbrid on aga üsna püsiva loomuga, sest väga suured muutused rahvaarvus on võimalikud ainult aastasadade jooksul. Igatahes aitab sellest, kui teame, et Eestis elas 1934. aastal ligikaudu 1 130 000 inimest. See ümardatud arv esindab küllalt hästi ka Eesti NSV elanike arvu tänapäeval.

(2) Riidekanga pikkuse mõõtmisel võiks saada tulemuseks näiteks 35,27 m. Ka selle tulemuse viimastel numbrilistel kohtadel (detsimeetrid ja sentimeetrid) pole erilist tähtsust. Tõesti, riiet mõõtmise ajal rohkem või vähem pingule tõmmates võiks saada tulemuse lõpukohtadele ka muud numbrid. Oleme täiesti rahuldatud, kui teame, et kangas on ligikaudu 35 m riiet.

Arvutamise kaudu võib päris loomulikkudest andmetest saada tulemusi, mis oma täpsuselt kaugelt ületavad tegeliku elu vajadusi. Näitame seda järgmise ülesandega.

Ülesanne. *Kilo leiba maksab 2,75 rubla. Kui palju tuleb maksta 250 grammi leiva eest?*

250 g = 0,25 kg;

$$\begin{array}{r l} 0{,}25\cdot 2{,}75 & \\ \hline 550 & \\ 1375 & \\ \hline 0{,}6875 & \text{rbl.} = 68{,}75\text{ kop.} \approx 69\text{ kop.} \end{array}$$

Vastus: 69 kopikat.

Et väikseim käibelolev rahaühik on kopik, siis kopika murdosadel pole elus mingit tähtsust. Arvutamisel saadud rahasumma 68,75 kopikat ümardatakse täiskopikateks: leiva eest tuleb maksta 69 kopikat.

Märkus. Märk „≈" tähendab ligikaudset võrdumist.

Arvude ümardamisel arvestatakse alati järgmist üldist juhist:

> **viimast allesjäetavat numbrit 5 suurendatakse ühe võrra, kui temale järgnev esimene ärajäetav number on 5 või suurem kui 5.**

Nõue ümardada (näiteks) sajandikeni tähendab seda, et sajandikud tuleb veel säilitada, aga kõik väiksemad ühikud juba kustuvad. Sama nõude esitab ka väljendus: *täpselt (kuni) sajandikeni*, samuti väljendus: *täpsusega 0,01.*

Kui peale ümardamist arvu murdosa lõpeb nulliga, siis seda nulli ei jäeta kunagi kirjutamata. Ümardamisel ärajäetavate täisühikuliste kohad muidugi täidetakse nullidega.

Näiteks arvu 2745,045 ümardamisel on võimalik saada järgmisi tulemusi:

$2745{,}045 \approx 2745{,}05$ (täpselt kuni 0,01)
$2745{,}045 \approx 2745{,}0$ („ „ 0,1)
$2745{,}045 \approx 2745$ („ „ 1)
$2745{,}045 \approx 2750$ („ „ 10)
$2745{,}045 \approx 2700$ („ „ 100)
$2745{,}045 \approx 3000$ („ „ 1000)

Arvutamisel tuleb alati kaaluda, kas ja kuivõrd ulatuslik tulemuse ümardamine on parajasti tarvilik. Kui ülesanne ei sea nõuet vastuse täpsuse kohta, siis antakse vastus

(1) numbriliste ülesannete puhul täpselt,

(2) tekstülesannete puhul tulemusele sobiva, paraja täpsusega või andmete täpsusega.

129. Ümardada kaks järgmist arvu esiteks ühelisteni, siis kümnendikeni, siis sajandikeni jne.

3,141 592 654 2,718 281 828

130. Ümardada arv 74 526 840 esiteks tuhandelisteni, siis miljonilisteni.

131. Arvutada järgmised korrutised ja ümardada tulemused ühelisteni esimeses tulbas, kümnendikeni teises tulbas ja sajandikeni kolmandas tulbas:

1) $740{,}5 \cdot 0{,}84$ 2) $657 \cdot 0{,}0025$ 3) $1{,}94 \cdot 0{,}515$
$0{,}43 \cdot 25{,}6$ $0{,}405 \cdot 24{,}7$ $0{,}404 \cdot 8{,}2$

132. Arvutada järgmised jagatised täpselt kuni kümnendikeni esimeses tulbas, kuni sajandikeni teises tulbas ja kuni tuhandikeni kolmandas tulbas:

1) 900 : 88 2) 0,074 : 1,4 3) 1 : 96
3,74 : 19 2 : 2,489 72,4 : 0,13

133. Allpool on antud mõned endised mõõduühikud oma suurusega kümnendsüsteemi ühikutes:

1 toll = 2,54 cm;
1 toop = 1,229 l;
1 puud = 16,38 kg.

Teades, et 1 jalg on 12 tolli ja üks süld on 7 jalga, avaldada 1 jalg ja 1 süld täis-sentimeetrites.

Teades, et üks puud on 40 naela, avaldada 1 nael täisgrammides.

134. Kasutades eelmise ülesande andmeid, avaldada 1 cm tollides täpselt kuni sajandikeni, 1 liiter toopides täpselt kuni tuhandikeni ja üks tonn puudades täpselt kuni ühelisteni.

135. Laualaeka pikkus, laius ja sügavus on vastavalt 0,42 m, 0,35 m ja 0,08 m. Arvutada selle laeka ruumala esialgu m^3-tes ja väljendada tulemus siis täis-kuupdetsimeetrites.

136. Teades kulla erikaalu (19,3) ja enda kaalu arvutada, kui suure ruumalaga kullatükk kaalub niisama palju kui kaalud sina.

137. Volga pikkus on 3694 km, Doonau pikkus 2860 km ja Suur-Emajõe pikkus 96 km. Arvutada (täpsusega 0,1), mitu korda on Volga pikem kui Doonau, Volga pikem kui Emajõgi.

Laadoga järve pindala on ümmarguselt 18 000 km^2, Baikali pindala 34 200 km^2 ja Peipsi pindala 3500 km^2. Mitu korda on Peipsi järv väiksem kui Baikal? väiksem kui Laadoga?

Mitu korda on Baikal suurem kui Laadoga? (Vastused anda täpselt kuni ühelisteni.)

138. Vihiks keritud traadi ligikaudset pikkust määratakse sageli nii, et loendatakse traadikeermed vihis ja mõõdetakse ühe keerme pikkus. Kuidas saab neil andmeil arvutada traadi pikkust?

Olgu loendamise tulemuseks 58 ja mõõtmise tulemuseks 86 cm. Mitu meetrit traati on siis vihis?

139. Võttes vajalikud andmed erikaalude tabelist (§ 2), arvutada (vastust täisarvuks ümardades), mitu korda on

1) õhk kergem kui vesi;
2) kuld raskem kui kork;
3) piiritus kergem kui elavhõbe;
4) raud raskem kui liiv;
5) klaas raskem kui õhk.

140. Tigu liigub kiirusega 1 cm sekundis. Kui palju aega kulub tal 1 km läbimiseks?

141. Jagada (täpselt kuni kümnendikeni):

1) 24,8 : 15
36,9 : 75
90,5 : 37
50,4 : 17
30,5 : 16

2) 420 : 0,15
136 : 28
785 : 25,2
172 : 0,342
345 : 4,72

3) 26,7 : 9,25
62,8 : 4,85
40,4 : 0,15
94,8 : 62,5
72,6 : 56,4

4) 0,32 : 0,7
3,49 : 0,15
9,78 : 3,6
8,96 : 7,5
7,43 : 9,4

142. Jagada (täpselt kuni sajandikeni):

1) 52,6 : 7,8
49,32 : 9,4
6,49 : 2,8
17,52 : 3,9
47,60 : 5,7

2) 38,5 : 0,16
5,96 : 0,45
17,80 : 1,75
8,12 : 3,05
0,74 : 0,69

3) 0,135 : 0,72
2,378 : 6,7
5,272 : 8,40
3,456 : 0,42
1,112 : 1,22

4) 9,42 : 2,7
0,936 : 0,38
5,42 : 1,9
12,32 : 5,8
0,47 : 9,70

§ 11. Tehete järjekord ja sulud.

1. Tehete teostamise järjekord.

Kui numbriline ülesanne sisaldab mitu tehet, siis pole alati mitte ükskõik, mis järjekorras me teostame need tehted. Olgu näiteks vaja arvutada andmeil:

$$\overbrace{10 - 6}^{4}\!\!\!\!\!\underbrace{ : 2}_{3} =$$

Kui siin enne lahutame 10 — 6 = 4 ja siis jagame 4 : 2, tuleb vastuseks 2; kui aga enne jagame 6 : 2 = 3 ja siis lahutame 10 — 3, saame vastuseks 7. Et tulemused on erinevad, siis on vaja kokku leppida, millises järjekorras tuleb tehteid teostada. Ongi kokku lepitud järgmiselt:

kui ülesanne sisaldab ainult arve ja tehtemärke, siis teostatakse enne korrutamised ja jagamised (vabas järjekorras) ning peale seda liitmised ja lahutamised selles järjekorras, milles nad esinevad.

Kumba vastust tuleb meie ülesandele selle kokkuleppe järgi õigeks pidada?

Sellest kokkuleppest selgub ka, et siis, kui ülesanne sisaldab ainult liitmisi ja lahutamisi, teostatakse tehted antud järjekorras.

Eestpoolt (§-st 3) teame juba, et summa ei olene liidetavate järjekorrast. Tähendab — kui ülesanne sisaldab ainult liitmisi, siis võib need liitmised teostada ükskõik mis järjekorras.

Näiteid:

(1) $45 + 17 + 5 = 50 + 17 = 67$

(2) $51 - 6 + 12 = 45 + 12 = 57$

(3) $512 - 42 : 6 - 12 \cdot 8 =$
$= 512 - 7 - 96 =$
$= 505 - 96 = 409$

143.

1) $4{,}96 : 10 + 35{,}8 : 100 - 0{,}0042$
2) $0{,}25 : 4 + 15{,}3 : 5 - 12{,}4 : 8 + 0{,}15 : 30$
v 3) $3{,}14 \cdot 2{,}65 - 0{,}78 \cdot 1{,}9 + 3{,}5 \cdot 1{,}8$
4) $0{,}091 \cdot 100 + 6{,}15 - 0{,}12 \cdot 8{,}5$
5) $96{,}7 : 10 - 0{,}045 \cdot 5 + 140{,}4 : 12 + 0{,}72$
v 6) $15{,}2 : 1{,}9 + 0{,}51 : 0{,}17 + 0{,}48 : 0{,}08$
7) $5 : 4 - 4 : 5 + 0{,}5 : 0{,}4 - 0{,}4 : 0{,}5$
8) $1{,}98 \cdot 0{,}11 + 0{,}68 : 0{,}17 - 9{,}2 : 2{,}3$
9) $34{,}8 - 1 : 12 + 15 \cdot 0{,}04 - 7{,}52$
10) $5{,}632 - 5{,}632 : 51{,}2 + 4{,}256 : 3{,}8 - 3{,}8$

2. Sulgude kasutamine.

Ülesanne. *Ema andis kahele lapsele kokku 10 õuna. Lapsed panid 6 õuna seisma ja ülejäänud õunad sõid kohe ära, kumbki ühepalju. Mitu õuna sõi kumbki?*

Lahendus on lihtne: 10-st õunast tuleb 6 lahutada ja ülejäänud õunte arv jagada 2-ga.

Kui paneksime nüüd lahenduskäigu kirja lihtsalt nii:

$$10 - 6 : 2$$

ja arvutaksime eelmises punktis sõnastatud kokkuleppe järgi, siis saaksime vastuseks 7 õuna; see tulemus on ilmselt väär. Viga tuleb sellest, et ülesande sisu nõuab siin teistsugust tehete järjekorda — nimelt enne lahutamist ja siis jagamist. Selle äranäitamiseks tuleb kasutada **sulgusid.** Lahenduse õige kirjapanek on siin järgmine:

$$(10 - 6) : 2 = 4 : 2 = 2 \text{ (õuna).}$$

Sulgude tarvitamisel on kokku lepitud nii, et

sulgudes olevad tehted teostatakse kõigepealt.

Pärast sulgudes olnud tehete sooritamist jäävad sulud ära ja ülejäänud tehted teostatakse eespool kokkulepitud järjekorras. Näide:

$$43 - 42 : (15 + 6) = 43 - 42 : 21 = 43 - 2 = 41.$$

144.

1) $3 - 4{,}4 : 5{,}5 + 0{,}7 \cdot (5{,}8 - 2{,}9)$
$(5{,}3 - 4{,}8) : 2{,}5 - 0{,}3 \cdot 0{,}3$
$6{,}8 - 0{,}2 \cdot (1{,}8 + 3{,}2) - 3 : 0{,}6$
$8{,}4 \cdot 1{,}5 - 4 : (11{,}2 - 10{,}7) + 0{,}4$

2) $75 \cdot 3{,}42 - 18{,}4 \cdot 0{,}55 + 3{,}14 \cdot (0{,}061 - 0{,}061)$
$0{,}28 \cdot 15{,}5 + 168 \cdot (0{,}2 - 0{,}1) \cdot 0{,}1$
$220 \cdot (0{,}05 - 0{,}038) + 0{,}25 \ (1680 + 700{,}2)$
$2{,}15 \cdot (204{,}6 - 186{,}32) - 1{,}5 \cdot (0{,}8 - 0{,}08)$

3) $576 : 18 - 12 \cdot 0{,}5 + 1$
$576 : (18 - 12 \cdot 0{,}5) + 1$
$576 : 18 - (12 \cdot 0{,}5 + 1)$
$(576 : 18 - 12) \cdot 0{,}5 + 1$
$576 : (18 - 12 \cdot 0{,}5 + 1)$
$576 : 18 - 12 \cdot (0{,}5 + 1)$

145. Allpool leidub igas reas kaks arvutusülesannet kõrvuti. Kui need kaks ülesannet annavad ühe ja sama vastuse, siis panna nende vahele võrdusmärk, vastasel korral aga võrratusmärk (s. o. „mahatõmmatud võrdusmärk": $\neq$.

1)	$(300 : 15) : 5$	$300 : (15 : 5)$
2)	$(300 : 15) \cdot 5$	$300 : (15 \cdot 5)$
3)	$(300 \cdot 15) : 5$	$300 \cdot (15 : 5)$
4)	$(300 \cdot 15) \cdot 5$	$300 \cdot (15 \cdot 5)$

3. Kahed sulud.

Keerukamate ülesannete puhul ei piisa ainult üht tüüpi sulgudest. Tarvitatakse veel nn. nurgelisi sulgusid: [ ]. On kokku lepitud nii, et enne teostatakse tehted harilikes sulgudes ja pärast tehted nurgelistes sulgudes.

Näide:

$$286 : [18 - (12 \cdot 0,5 + 1)] =$$
$$= 286 : [18 - (6 + 1)] =$$
$$= 286 : [18 - 7] =$$
$$= 286 : 11 = 26.$$

146.

$$(7,63 - 5,13) : [0,4 + 0,25 \cdot (4,73 - 2,33)]$$
$$(20,15 - 6,05 + 6,3) : [(0,2 + 11,8) \cdot 0,5]$$
$$[1 : (1 - 0,99) - 99] : (1 - 0,999) - 999$$

§ 12. Arvutamist hõlbustavaid võtteid ja peastarvutamise tehnikat.

1. Pöördarvud.

Kaht arvu, millede korrutis on 1, nimetatakse teineteise **pöördarvudeks.** Nii on näiteks arvud 4 ja 0,25 teineteise pöördarvud, sest $4 \cdot 0,25 = 1$. Igal arvul (välja arvatud arv 0) on üks ja ainult üks pöördarv. Selgub, et

antud arvu pöördarvu saame arvu 1 jagamisel selle antud arvuga.

Nii on näiteks arvu 0,35 pöördarvuks jagamise 1 : 0,35 tulemus, s. o. ümardatult 2,857 (kontrollida seda!).

Arv 0 on ainuke arv, millel pöördarv puudub. Tõesti — ei leidu arvu, mis nulliga korrutatult annaks arvu 1; sest iga arv nulliga korrutatult annab korrutiseks nulli.

Samal põhjusel ei või ühtki arvu 0-ga jagada. Peame meeles, et

null ei kõlba jagajaks!

147. Arvutada pöördarvud täisarvudele 1 kuni 12, täpselt kuni 0,001. Tulemused paigutada järgmisse tabelisse:

Arv	Pöördarv	Arv	Pöördarv
1	1,000	7	
2	0,500	8	
3	0,333	9	
4		10	
5		11	
6		12	

148. Arvutada arvu 0,1024 pöördarvu täpne väärtus ja kontrollida oma tulemust korrutamise teel.

149. Teades, et 1 : 11 = 0,0909, arvutada korrutamise teel jagatised 2 : 11, 3 : 11, 4 : 11 jne. kuni 10 : 11. (*Mõttekäik:* 2 : 11 on 2 korda suurem kui 1 : 11, järelikult 2 : 11 = = 2 · 0,0909 = 0,1818.)

2. Pöördarvude kasutamine korrutamise hõlbustamiseks.

Kasutades pöördarve ning korrutise omadusi (§ 7) on mõnikord kasulik korrutamist muuta jagamiseks. Olgu näiteks vaja teostada korrutamine 32 · 0,125. Korrutame teise teguri 8-ga (s. o. arvu 0,125 pöördarv), esimese teguri aga jagame 8-ga; korrutis siis teatavasti ei muutu:

$$\underset{\overset{\uparrow}{\text{arv}}}{\boxed{32\cdot 0{,}125}} = (32:8)\cdot\underbrace{(8\cdot 0{,}125)}_{1} = \underset{\overset{\uparrow}{\text{pöörd-arv}}}{\boxed{32:8}} = 4.$$

Näeme, et korrutamine arvuga 0,125 on muutunud jagamiseks pöördarvuga 8. Üldiselt:

kui korrutise ühe teguri asendame tema pöördarvuga, siis teist tegurit peame sellesama pöördarvuga jagama (et saada endist tulemust).

Üleminek korrutamiselt jagamisele on otstarbekohane ainult siis, kui pöördarvu näol saame väga lihtsa (ainult ühenumbrilise kohaga) jagaja. Arvutamist hõlbustavad eriti järgmised teineteise pöördarvudeks osutuvad arvupaarid (tabelis on näidatud ka, et nende korrutis on 1):

$0{,}5 \cdot 2 = 1$	$0{,}25 \cdot 4 = 1$	$0{,}125 \cdot 8 = 1$
$5 \cdot 0{,}2 = 1$	$2{,}5 \cdot 0{,}4 = 1$	$1{,}25 \cdot 0{,}8 = 1$
$50 \cdot 0{,}02 = 1$	$25 \cdot 0{,}04 = 1$	$12{,}5 \cdot 0{,}08 = 1$
$500 \cdot 0{,}002 = 1$	$250 \cdot 0{,}004 = 1$	$125 \cdot 0{,}008 = 1$

Eriti peame meeles, et

0,5-ga korrutamise asemel võib teist tegurit 2-ga jagada;
0,25-ga „ „ „ „ „ 4-ga „
0,125-ga „ „ „ „ „ 8-ga „

150. Arvutada peast järgmised korrutised:

1) $0{,}5 \cdot 0{,}21$
$0{,}5 \cdot 1{,}46$
$0{,}5 \cdot 923$
$0{,}5 \cdot 73{,}2$
$0{,}5 \cdot 34{,}5$

2) $0{,}25 \cdot 0{,}76$
$0{,}25 \cdot 968$
$0{,}25 \cdot 12{,}4$
$0{,}25 \cdot 8{,}44$
$0{,}25 \cdot 0{,}42$

3) $0{,}125 \cdot 8016$
$0{,}125 \cdot 33{,}68$
$0{,}125 \cdot 0{,}092$
$0{,}125 \cdot 4{,}856$
$0{,}125 \cdot 72{,}04$

Peastkorrutamise hõlbustamiseks peame veel meeles järgmised juhised:

1) 5-ga korrutamise asemel korrutame 10-ga ja jagame tulemuse 2-ga (või enne jagame 2-ga ja siis korrutame 10-ga);

2) 50-ga korrutamise asemel korrutame 100-ga ja jagame tulemuse 2-ga (või enne jagame 2-ga ja siis korrutame 100-ga);

3) **2,5**-ga korrutamise asemel korrutame 10-ga ja jagame tulemuse 4-ga (või enne jagame 4-ga ja siis korrutame 10-ga);

4) **25**-ga korrutamise asemel korrutame 100-ga ja jagame tulemuse 4-ga (või enne jagame 4-ga ja siis korrutame 100-ga);

5) **1,25**-ga korrutamise asemel korrutame 10-ga ja jagame tulemuse 8-ga (või enne jagame 8-ga ja siis korrutame 10-ga);

6) **12,5**-ga korrutamise asemel korrutame 100-ga ja jagame tulemuse 8-ga (või enne jagame 8-ga ja siis korrutame 100-ga);

7) **125**-ga korrutamise asemel korrutame 1000-ga ja jagame tulemuse 8-ga (või enne jagame 8-ga ja siis korrutame 1000-ga).

Näiteid:

(1) $5 \cdot 4{,}8 = (4{,}8 : 2) \cdot 10 = 2{,}4 \cdot 10 = 24$
(2) $50 \cdot 2{,}76 = 276 : 2 = 138$
(3) $84{,}4 \cdot 2{,}5 = 844 : 4 = 211$
(4) $25 \cdot 0{,}64 = 64 : 4 = 16$
(5) $1{,}25 \cdot 3{,}2 = 32 : 8 = 4$
(6) $0{,}64 \cdot 12{,}5 = 64 : 8 = 8$
(7) $125 \cdot 0{,}024 = 24 : 8 = 3$

151. Arvutada peast järgmised korrutised:

1) $72 \cdot 1{,}25$
$120 \cdot 2{,}5$
$0{,}44 \cdot 12{,}5$
$0{,}125 \cdot 0{,}136$
$0{,}88 \cdot 125$

2) $420 \cdot 0{,}125$
$140 \cdot 25$
$161 \cdot 50$
$0{,}164 \cdot 250$
$3{,}04 \cdot 500$

3) $0{,}088 \cdot 125$
$0{,}994 \cdot 500$
$8808 \cdot 12{,}5$
$1250 \cdot 0{,}072$
$0{,}025 \cdot 23{,}6$

3. Muid võtteid korrutamise hõlbustamiseks.

Arvutamisel on kasulik teada peast peale tavalise „ükskordühe" veel muid täisarvude korrutisi saja piirides. Suur osa neist on üleviidavad „ükskordühele" sel teel, et väiksemat tegurit korrutatakse ja suuremat jagatakse kahega. Nii on näiteks

$$4 \cdot 18 = 8 \cdot 9 = 72 \text{ ja } 3 \cdot 16 = 6 \cdot 8 = 48.$$

Niisuguseid „ükskordühele" viidavaid korrutamisi polegi mõtet pähe õppida. Neid ja veel mõningaid muid lihtsamaid korrutamisi kõrvale jättes saame lõpuks päheõppimiseks alljärgnevad korrutamised saja piirides. Nende peastteadmine niisama kindlasti, kui teatakse peast „ükskordühte", tasub ennast tulevikus arvutamisel tuhandekordselt.

$3 \cdot 13 = 39$ $3 \cdot 15 = 45$ $3 \cdot 17 = 51$ $3 \cdot 19 = 57$	$4 \cdot 13 = 52$ $4 \cdot 15 = 60$ $4 \cdot 17 = 68$ $4 \cdot 19 = 76$	$5 \cdot 13 = 65$ $5 \cdot 15 = 75$ $5 \cdot 17 = 85$ $5 \cdot 19 = 95$
$6 \cdot 12 = 72$ $6 \cdot 13 = 78$ $6 \cdot 15 = 90$ $6 \cdot 17 = 102$	$7 \cdot 12 = 84$ $7 \cdot 13 = 91$ $7 \cdot 14 = 98$ $7 \cdot 15 = 105$	$8 \cdot 12 = 96$ $8 \cdot 13 = 104$ $8 \cdot 15 = 120$ $9 \cdot 12 = 108$

Üks näide selle kohta, kuidas korrutamine mõnikord erakordselt lihtsaks võib muutuda, kui see tabelike korrutajal peas on:

$543 \cdot 1713$	Mõttekäik:
5139	$3 \cdot 13 = 39$
6852	$3 \cdot 17 = 51$
8565	$4 \cdot 13 = 52$
930159	jne.

Säärane „kahe numbri korraga haaramine” vähendab korrutamisel töövaeva sageli tunduvalt. Esitatud näite puhul mõttes leitud korrutised $3 \cdot 13 = 39$ jne. kirjutatakse ka kohe loomulikul kujul oma kohale, mitte aga numberhaaval paremalt vasakule, nagu see toimub harilikul viisil korrutades ($3 \cdot 3 = 9$; $3 \cdot 1 = 3$ jne.).

152. Teostada peast järgmised korrutamised, viies need enne üle „ükskordühele”.

1) $2 \cdot 14$
$3 \cdot 14$
$4 \cdot 14$

2) $2 \cdot 16$
$3 \cdot 16$
$4 \cdot 16$

3) $2 \cdot 18$
$3 \cdot 18$
$4 \cdot 18$

4) $4{,}5 \cdot 16$
$3{,}5 \cdot 18$
$5{,}5 \cdot 14$

153. Lähtudes korrutamisest $1 \cdot 144 = 144$, leida kõik täisarvupaarid korrutisega 144.

154. Korrutada, võimalikult „kaht numbrit korraga haarates”:

1) $234 \cdot 1512$
$425 \cdot 1613$
$253 \cdot 1314$

2) $354 \cdot 21{,}17$
$432 \cdot 12{,}15$
$8{,}54 \cdot 13{,}12$

3) $34{,}6 \cdot 141{,}5$
$9{,}43 \cdot 1{,}217$
$5{,}24 \cdot 191{,}5$

Kirjaliku korrutamise viisi tuletamisel (§ 5, p. 3) jaotasime ühe teguri võimalikult ümmargusteks liidetavateks, korrutasime teise teguriga kõiki neid liidetavaid ja liitsime tulemused. Nii toimime ka peastkorrutamisel, kui tegurid on peastkorrutamiseks küllalt lihtsad. Näiteid:

$$4 \cdot 13 = 4 \cdot (10 + 3) = 4 \cdot 10 + 4 \cdot 3 = 40 + 12 = 52$$
$$7 \cdot 24 = 7 \cdot (20 + 4) = 7 \cdot 20 + 7 \cdot 4 = 140 + 28 = 168$$
$$12 \cdot 36 = (10 + 2) \cdot 36 = 10 \cdot 36 + 2 \cdot 36 = 360 + 72 = 432$$
$$101 \cdot 49 = 100 \cdot 49 + 49 = 4900 + 49 = 4949$$

Mõnusaks kujuneb selle põhjal korrutamine teguriga 15, sest viiekordne on parajasti 2 korda väiksem kui kümnekordne. Näide:

$$15 \cdot 46 = (10 + 5) \cdot 46 = \underbrace{460 + 230}_{\boxed{:2}} = 690.$$

Veel mõnusam on sel võttel korrutamine teguriga 1,5. Näide:

$$1{,}5 \cdot 78 = \underbrace{78 + 39}_{\boxed{:2}} = 117.$$

Korrutamisel teguriga 9 võib teguri 9 asemel kasutada vahet 10 — 1. Näiteid:

$$9 \cdot 46 = (10 - 1) \cdot 46 = 10 \cdot 46 - 1 \cdot 46 = 460 - 46 = 414.$$
$$9 \cdot 75 = 750 - 75 = 675.$$

Samal viisil võib toimetada korrutamist ka teguritega 99, 999 jne.

Näiteid: $99 \cdot 24 = (100 - 1) \cdot 24 = 2400 - 24 = 2376.$

$999 \cdot 52 = 52000 - 52 = 51948.$

155. Korrutada peast:

1) $3 \cdot 62$
$5 \cdot 35$
$7 \cdot 57$
$8 \cdot 49$
$9 \cdot 55$

2) $12 \cdot 16$
$13 \cdot 14$
$14 \cdot 14$
$12 \cdot 26$
$13 \cdot 13$

3) $15 \cdot 42$
$15 \cdot 22$
$15 \cdot 76$
$48 \cdot 15$
$58 \cdot 15$

4) $1{,}5 \cdot 64$
$2{,}44 \cdot 1{,}5$
$1{,}5 \cdot 56{,}2$
$0{,}76 \cdot 1{,}5$
$1{,}5 \cdot 2{,}3$

5) $9 \cdot 68$
$9 \cdot 32$
$145 \cdot 9$
$9 \cdot 580$
$642 \cdot 9$

6) $101 \cdot 61$
$101 \cdot 43$
$102 \cdot 33$
$5{,}7 \cdot 101$
$3{,}5 \cdot 102$

7) $99 \cdot 18$
$99 \cdot 22$
$999 \cdot 45$
$999 \cdot 63$
$98 \cdot 14$

8) $9 \cdot 4{,}6$
$9 \cdot 0{,}75$
$99 \cdot 4{,}5$
$101 \cdot 0{,}09$
$102 \cdot 0{,}38$

Lõpuks väärib veel märkimist kahekohaliste arvude korrutamine teguriga 11. Jälgides näiteks korrutamisi

$$\begin{array}{r} 11 \cdot 43 \\ 43 \\ \hline 473 \end{array} \quad \text{ja} \quad \begin{array}{r} 11 \cdot 58 \\ 58 \\ \hline 638 \end{array}$$

märkame, et kui 11-ga korrutatava arvu numbrite summa on 9 või väiksem kui 9, siis korrutise äärmised numbrid on samad mis korrutataval ja keskmine number on nende summa; teisel juhul aga sellest summast saadav üks kümneline teeb korrutise esimese numbri ühe võrra suuremaks korrutatava esimesest numbrist. Selle põhjal võib 11-ga korrutamisel mõttes nihutada korrutatava numbrid teineteisest pisut eemale ja paigutada nende vahele nende summa, vajaduse korral kümnelise ülekandega. Piltlikult:

$$11 \cdot 43 = 4\overset{\overset{7}{\downarrow}}{}3 = 473 \qquad 11 \cdot 58 = \overset{\overset{1}{\smile}}{5}\overset{\overset{3}{\downarrow}}{}8 = 638$$

M ä r k u s. Muidugi võib 11-ga peastkorrutamist toimetada ka eespool selgitatud viisil; näiteks

$$11 \cdot 48 = 10 \cdot 48 + 1 \cdot 48 = 480 + 48 = 528.$$

156. Korrutada peast:

1) $11 \cdot 41$	2) $1{,}1 \cdot 4{,}1$	3) $88 \cdot 0{,}11$
$27 \cdot 11$	$11 \cdot 5{,}2$	$7{,}5 \cdot 1{,}1$
$49 \cdot 11$	$45 \cdot 0{,}11$	$630 \cdot 0{,}011$
$11 \cdot 85$	$11 \cdot 270$	$110 \cdot 1{,}1$
$99 \cdot 11$	$1{,}1 \cdot 87$	$1100 \cdot 99$

4. Pöördarvude kasutamine jagamise hõlbustamiseks.

Kasutades pöördarve ning jagatise omadusi (§ 7) on mõnikord kasulik jagamist muuta korrutamiseks. Olgu näiteks vaja teostada jagamine 18 : 0,25. Laiendame jagamist jagaja pöördarvuga 4, siis saame uueks jagajaks arvu 1 (sest arvu ja tema pöördarvu korrutis on 1):

$$\boxed{18 : 0{,}25} = (18 \cdot 4) : \underbrace{(0{,}25 \cdot 4)}_{1} = \boxed{18 \cdot 4} = 72.$$

Näeme, et jagamine arvuga 0,25 on muutunud korrutamiseks pöördarvuga 4. Üldiselt:

kui jagaja asendame tema pöördarvuga, siis jagatavat peame sellesama pöördarvuga korrutama (et saada endist tulemust).

Eriti peame meeles, et

0,5-ga jagamise asemel võib 2-ga korrutada;
0,25-ga „ „ „ 4-ga „
0,125-ga „ „ „ 8-ga „

Näiteid:

(1) $17{,}2 : 0{,}5 = 17{,}2 \cdot 2 = 34{,}4$
(2) $27{,}84 : 0{,}25 = 27{,}84 \cdot 4 = 111{,}36$
(3) $0{,}046 : 0{,}125 = 0{,}046 \cdot 8 = 0{,}368$

157. Jagada peast:

1) 43 : 0,5
79 : 0,5
108 : 0,5
6,7 : 0,5
0,1 : 0,5

2) 23 : 0,25
68 : 0,25
106 : 0,25
5,2 : 0,25
0,9 : 0,25

3) 16 : 0,125
40 : 0,125
120 : 0,125
1,5 : 0,125
0,05 : 0,125

Peastjagamise hõlbustamiseks peame veel meeles järgmised juhised:

1) 5-ga jagamise asemel jagame 10-ga ja korrutame tulemuse 2-ga (või enne korrutame 2-ga ja siis jagame 10-ga);

2) **50**-ga jagamise asemel jagame 100-ga ja korrutame tulemuse · 2-ga (või enne korrutame 2-ga ja siis jagame 100-ga);

3) **2,5**-ga jagamise asemel jagame 10-ga ja korrutame tulemuse 4-ga (või enne korrutame 4-ga ja siis jagame 10-ga);

4) **25**-ga jagamise asemel jagame 100-ga ja korrutame tulemuse 4-ga (või enne korrutame 4-ga ja siis jagame 100-ga);

5) **1,25**-ga jagamise asemel jagame 10-ga ja korrutame tulemuse 8-ga (või enne korrutame 8-ga ja siis jagame 10-ga);

6) **12,5**-ga jagamise asemel jagame 100-ga ja korrutame tulemuse 8-ga (või enne korrutame 8-ga ja siis jagame 100-ga);

7) **125**-ga jagamise asemel jagame 1000-ga ja korrutame tulemuse 8-ga (või enne korrutame 8-ga ja siis jagame 1000-ga).

Näiteid:

(1) $64 : 5 = 6{,}4 \cdot 2 = 12{,}8$
(2) $42 : 50 = 0{,}42 \cdot 2 = 0{,}84$
(3) $130 : 2{,}5 = 13 \cdot 4 = 52$
(4) $16 : 25 = 64 : 100 = 0{,}64$
(5) $2{,}4 : 1{,}25 = 0{,}24 \cdot 8 = 1{,}92$
(6) $4{,}5 : 12{,}5 = 36 : 100 = 0{,}36$
(7) $340 : 125 = 0{,}34 \cdot 8 = 2{,}72$

158. Jagada peast:

1) 13 : 5
26 : 5
29 : 5
38 : 5
47 : 5

2) 15 : 25
16 : 25
17 : 25
18 : 25
19 : 25

3) 8 : 125
9 : 125
10 : 125
11 : 125
12 : 125

4) 45 : 25
14 : 125
234 : 5
1700 : 25
60 : 125

159. Jagada peast:

1) 130 : 2,5
240 : 2,5
180 : 2,5
510 : 2,5
620 : 2,5

2) 60 : 1,25
400 : 1,25
15 : 1,25
35 : 12,5
42 : 12,5

3) 0,4 : 2,5
0,2 : 12,5
0,3 : 1,25
1,5 : 12,5
7,1 : 1,25

4) 17 : 50
12 : 250
3 : 500
4 : 1250
6 : 2500

160.

1) 5,6 : 2,5
7,8 : 25
34,2 : 250
0,63 : 0,125
0,11 : 1,25

2) 4,1 : 50
0,04 : 0,025
52,3 : 1250
0,2 : 250
0,75 : 12,5

3) 8,5 : 0,125
1,5 : 12,5
9,02 : 2,5
0,09 : 0,0125
73,5 : 250

5. Muid võtteid jagamise hõlbustamiseks.

Kui täisarvuline jagaja lõpeb nullidega, siis taandame jagamist niisuguse ühikarvuga, millel on niisama palju nulle kui jagajal. See väldib jagamisel ülearuste nullide kirjutamist. Näide:

$$\begin{array}{l} 494{,}4 : 2400 = 4{,}944 : 24 = 0{,}206 \\ \phantom{494{,}4 : 2400 = 4{,}9}\underline{48} \\ \phantom{494{,}4 : 2400 = 4{,}9}144 \end{array}$$

161. Arvutada järgmised jagatised (täpselt kuni kümnetuhandikeni):

1) 423 : 5600
76,5 : 340
14,92 : 190

2) 501,4 : 78000
189,6 : 5490
0,601 : 1200

Kui jagaja numbrilises koostises esineb (peale nullide) veel ainult üks ja seesama number korduvalt, siis on kasulik selle numbriga jagamist taandada; jagajas saadakse sel teel ainult ühed ja nullid, mistõttu mahutamine tunduvalt lihtsustub.

Näide:

$$\begin{array}{l} 490 : 50{,}55 = 98 : 10{,}11 = 9{,}69 \\ \underline{9099} \\ 7010 \\ \underline{6066} \\ 9440 \end{array}$$

162. Jagamist enne sobivalt taandades arvutada pöördarvud järgmistele arvudele (täpselt kuni kümne-tuhandikeni):

0,44; 8,88; 66,6; 550,5; 0,909.

163. Arvutada järgmised jagatised täpselt kuni tuhandikeni, jagamist enne sobivalt taandades:

1) 1245 : 333 2) 0,455 : 0,707
496 : 888 23,4 : 4,44

164. Pomm lõhkeb sõdurist 2,4 km eemal. Heli levib kiirusega 333 m sekundis. Mitu sekundit pärast pommi lõhkemist kuuleb sõdur pauku?

165. *Õpilane jagas arvu 88 nii pooleks, et mõlemad pooled läksid kaduma. Kuidas ta seda tegi?

Lihtsamate arvude peastjagamisel on mõnikord kasulik teha jagatav summaks nii, et üks liidetav annaks ennast hõlpsasti jagada. Näiteks:

$$135 : 12 = (120 + 15) : 12 = 10 + 1, \text{ jääk } 3 =$$
$$= 11, \text{ jääk } 3.$$

Üldiselt:

summa jagamisel võib jagada liidetavad eraldi ja tulemused liita.

166. Teostada peast järgmised jagamised, määrates iga kord jagatise täisosa ja jäägi:

1) 95 : 8
103 : 9
76 : 6
102 : 8
115 : 7

2) 842 : 41
703 : 35
659 : 32
468 : 22
990 : 45

3) 146 : 13
254 : 24
477 : 43
385 : 17
531 : 25

§ 13. Mitmesuguseid ülesandeid kordamiseks.

167. Arvutada peast:

1) 298 + 163
60 : 0,125
5,16 · 0,5
6,5 — 2,08
3037 + 646

2) 15 · 0,62
0,28 : 0,7
697 + 75
0,1 · 0,1
4,35 — 4,07

3) 18,9 + 34,8
0,5 · 17,8
3,5 : 0,7
10,1 + 0,09
20 — 12,06

4) 0,08 : 0,2
16,4 — 9,88
0,4 · 125
394 + 247
6,4 : 25

5) 0,25 · 128
5 — 2,71
16,2 : 0,5
13,8 + 69,5
15 · 1,2

6) 26,3 — 19,7
2,05 + 1,5
0,5 · 240,6
17 : 0,25
51 — 39,4

7) 15 : 0,125
1,5 · 0,24
460 — 329,9
3,07 + 28,35
3,31 : 0,5

8) 60,7 + 38,9
3,1 : 2,5
9 · 46
16,7 — 6,93
21,6 + 47,8

9) 20 — 4,01
25 · 3,28
1,3 : 0,125
640,7 + 231,5
6,4 — 0,202

10) 1,5 · 0,64
240 : 25
1,60 — 101,6
2,5 · 41,6
98,7 + 68,4

11) 7,2 + 0,85
9,6 — 4,19
12,5 · 3,28
0,81 : 0,5
49,7 + 16,8

12) 3,7 : 5
25 · 1,84
80,4 + 19,7
4,4 — 0,04
0,125 · 30,4

13) 3,5 : 0,7
4,8 : 0,6
6,4 : 1,6
10,8 : 1,2
6,5 : 1,3

14) 0,32 : 0,08
0,56 : 0,07
0,42 : 0,06
1,08 : 0,09
64,2 : 3,21

15) 24 : 0,3
12 : 0,6
4,6 : 0,23
72 : 0,09
5,1 : 0,17

168. Asendada järgmistes arvutustes iga tärnike sobiva numbriga:

$$\begin{array}{r} 36{*}8 \\ 274{*} \\ 3{*}20 \\ \hline {*}143 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 56{*}7 \\ 9341 \\ {*}{*}32 \\ \hline 1518{*} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 51{*}8 \\ -2{*}1{*} \\ \hline {*}083 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4{*}23 \\ -12{*}{*} \\ \hline {*}205 \end{array}$$

169. Suur Isamaasõda algas 22. juunil 1941. a. ja lõppes 8. mail 1945. a. Mitu aastat ja kuud kestis Suur Isamaasõda?

170. Kuulus vene poeet Aleksandr Puškin sündis 7. juunil 1799. a. ja suri 10. veebruaril 1837. a. Mitu aastat ja kuud elas Puškin?

171. Arvutada päeva pikkus ja öö pikkus, kui päike tõuseb kell 6.35, loojub kell 20.14 ja tõuseb uuesti kell 6.32.

172. Eesti NSV-s oli 1. jaanuaril 1947. a. stahhaanovlasi 9201 ja löököölisi 14 698. Sama aasta 1. oktoobril aga oli stahhaanovlasi juba 11 218 ja lööktöölisi 15 387. Mitme isiku võrra oli kasvanud selle aja jooksul stahhaanovlaste arv rohkem kui lööktööliste arv?

173. Veoauto võttis peale 5 kasti kaupa, igaüks 32,8 kg raske, ja 25 kasti kaupa, igaüks 20,4 kg raske. Kui raske tuli auto koorem?

174. Jalanõudetööstus valmistas kuus 486 paari saapaid hinnaga 150 rubla paar, 84 paari kingi hinnaga 125 rubla paar ja 58 paari töösaapaid hinnaga 110 rubla paar. Arvutada selle käitise kuutoodangu koguväärtus.

175. Arvutada peast:

1) Meeter köit kaalub 0,12 kg. Kui palju kaalub 12,5 m sama köit?

2) 25 ühesugust raamatut kaalub 5,5 kg. Kui palju kaalub üks raamat?

3) 3,5 m pikkune traat lõigati 0,25 meetri pikkusteks tükkideks. Mitu tükki saadi?

176. Arvutada pöördarv arvule 1,82 täpselt kuni 0,000001, selleks vajalikku jagamist enne arvuga 550 laiendades.

177. Arvutada järgmised jagatised (täpsusega 0,001):

1) 2 : 3
0,8 : 7
9 : 0,5
16 : 1,7
0,4 : 70

2) 1,2 : 2,12
5,2 : 30
40 : 0,7
50 : 4,5
6 : 190

3) 2,5 : 0,19
5,42 : 3,7
0,45 : 9,6
0,09 : 0,5
0,07 : 0,06

4) 0,25 : 0,9
5,29 : 0,7
6,4 : 0,38
100 : 2,4
10 : 11,1

II. Algarvud ja kordarvud.

§ 14. Algarv ja kordarv. Jaguvuse tunnused.

1. Algarvud ja kordarvud.

Selles ja käesoleva peatüki järgnevates paragrahvides tähendab sõna arv nimelt täisarvu.

Täisarvude jagamise puhul (§ 6) selgus, et täisarvude jagatis on ainult siis täisarv, kui jagamisel ei teki üheliste jääki.

Kui kahel arvul on täisarvuline jagatis, siis öeldakse, et esimene arv **jagub** teisega ehk teine arv on esimesele **jagajaks,** ehk teine arv on esimese **tegur.** Näiteks arvudest 42 ja 7 on arv 7 arvu 42 jagajaks, sest jagamine 42 : 7 annab täisarvulise jagatise 6.

Pole kahtlust, et iga arv jagub arvuga 1, sest mistahes arvu ühega jagades saame jagatiseks arvu enese; näiteks:

$$4 : 1 = 4; \quad 10 : 1 = 10; \quad 235 : 1 = 235.$$

Samuti pole kahtlust, et iga arv jagub arvu enesega, sest mistahes arvu tema enesega jagades saame jagatiseks arvu 1; näiteks:

$$4 : 4 = 1; \quad 10 : 10 = 1; \quad 235 : 235 = 1.$$

On arve, milledel peale nende kahe jagaja enam muid jagajaid polegi. Niisugune on näiteks arv 13. Proovides arvu 13 jagada arvudega 2 kuni 12 saame igal juhul jäägi. Niisugust arvu nimetatakse **algarvuks.** Niisiis:

algarv jagub ainult 1-ga ja enesega.

Arvu 1 ei loeta algarvude hulka.

Proovimise teel võib kindlaks teha, et vahemikus 1 kuni 100 leiduvad järgmised algarvud:

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41
43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 ja 97

Selle raamatu lõpus leidub ulatuslikum algarvude tabel.

Arve, mis pole algarvud, nimetatakse **kordarvudeks.** Igal kordarvul peab leiduma ka muid jagajaid peale arvu enese ja arvu ühe. Edaspidi mõtlemegi kordarvu jagajate all peamiselt just neid muid jagajaid. Näiteks arv 12 on kordarv; tema jagajateks on arvud 2, 3, 4 ja 6, aga muidugi ka veel arvud 1 ja 12.

2. Jaguvuse tunnused.

Küsimust, kas antud arv jagub mõne teise arvuga või mitte, on igal juhul võimalik nii otsustada, et tegelikult jagatakse antud arv selle teisega. Näiteks arv 351 ei jagu arvuga 17, sest jagamisel tekib jääk 11.

Jagamise tegelik läbiviimine on küllaltki tülikas. Paljude sageli esinevate jagajate puhul, nagu 2, 3, 4, 5, 9, saame jaguvuse küsimust otsustada tunduvalt väiksema vaevaga, rakendades vastavaid jaguvuse tunnuseid.

Jaguvuse tunnuste leidmisel toetume järgmistele seadustele:

1) **kui kumbki kahest liidetavast jagub mingi arvuga, siis jagub ka summa selle arvuga;**
2) **kui üks liidetav jagub mingi arvuga, teine aga mitte, siis ei jagu ka summa selle arvuga.**

Nende seaduste sisu selgitamiseks kujutleme, et isa ja ema jagavad oma kolmele lapsele õunu. Olgu esialgu isal 21 õuna ja emal 15 õuna. Kui isa on oma õunad ära jaganud, siis on iga laps saanud ühepalju, sest isa õunte arv 21 jagub kolmega. Ka ema saab anda igale lapsele ühepalju, sest ka tema õunte arv 15 jagub kolmega. On selge, et iga laps saab isalt ja emalt kokku sama palju õunu. See tähendab aga seda, et ka õunte koguarv 36 peab olema kolmega jaguv; tõesti: 36 : 3 = 12.

Olgu nüüd isal endiselt 21 õuna, emal aga 14. Isa saab nagu ennegi anda igale lapsele ühepalju. Kui ka ema on andnud igale lapsele võrdselt ja niipalju kui võimalik, siis on tal 2 õuna veel järel, sest 14 : 3 = 4 (jääk 2). Nüüd on õunte koguarvust iga laps saanud ühepalju, aga 2 õuna on jäänud üle. See tähendab aga, et õunte koguarv pole nüüd kolmega jaguv; tõesti: 21 + 14 = 35; 35 : 3 = 11 (jääk 2).

Arve, mis jaguvad kahega, nimetame **paarisarvudeks,** ja arve, mis kahega ei jagu, — **paarituteks arvudeks.** Paaris- ja paaritud arvud esinevad vaheldumisi täisarvude reas: 1 on paaritu, 2 on paaris-, 3 on paaritu, 4 on paarisarv jne. Selgub, et 10 on paarisarv.

Et 10 kui paarisarv jagub kahega, peab ka 20 = 10 + 10 jaguma kahega (esimese seaduse põhjal). Siis peab aga ka 30 = 20 + 10 jaguma kahega, samuti 40 = 30 + 10 jne. Selgub, et iga arv, mis lõpeb nulliga, on kindlasti paarisarv.

Ükskõik millise numbriga lõppev arv aga laseb ennast avaldada nulliga lõppeva arvu ja oma viimase numbri summana. Näiteks 2453 = 2450 + 3. Eespool sõnastatud seaduste põhjal aga otsustab niisuguse summa kahega jaguvuse küsimuse ainult see, kas tema teine liidetav, s. o. arvu viimane number, jagub kahega või mitte. Selle põhjal arv 2453 ei jagu kahega, sest ta lõpeb paaritu arvuga 3. Üldiselt võime öelda, et

arv jagub 2-ga, kui ta lõpeb 0-ga või paarisnumbriga.

Samal viisil arutades leiame, et

arv jagub 5-ga, kui ta lõpeb 0-ga või 5-ga.

Kolmega jagumise tunnuse leidmiseks veendume kõigepealt selles, et iga arv, mille numbriteks on ainult 9-d, jagub kolmega. Tõesti:

$$9 : 3 = 3; \quad 99 : 3 = 33; \quad 999 : 3 = 333 \text{ jne.}$$

Võtame näiteks arvu 2453 ja teeme kindlaks, kas ta jagub kolmega või mitte. Selleks lõhume ta kõigepealt ühikarvude summaks järgmiselt:

$$\begin{aligned} 2453 = {} & 1000 + 1000 + \\ & + 100 + 100 + 100 + 100 + \\ & + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + \\ & + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

Kui nüüd eraldame igast ühikarvust ühe ühelise, siis saame:

$$2453 = \left\{ \begin{array}{l} 999 + 999 + \\ + 99 + 99 + 99 + 99 + \\ + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + \\ + 0 + 0 + 0 \end{array} \right\} + 2 + 4 + 5 + 3$$

Märkame, et eraldatud üheliste summa osutub antud arvu numbrite summaks.

Arvu numbrite summat nimetatakse tema **ristsummaks.** Meie tulemuses jagub kolmega kindlasti see summa, mis seisab sulgudes, sest kõik liidetavad jaguvad kolmega.

Niisiis selgub, et iga antud arv laseb ennast avaldada summana järgmiselt:

antud arv = 3-ga jaguv arv + antud arvu ristsumma.

Antud arvu kolmega jagumise küsimuse otsustab nüüd see, kas tema ristsumma jagub kolmega või mitte. Tõesti: kui ristsumma jagub kolmega, siis jagub ka antud arv kolmega (esimese seaduse põhjal); kui ta aga ei jagu kolmega, siis ei jagu ka antud arv kolmega (teise seaduse põhjal).

Arvu 2453 ristsumma $2 + 4 + 5 + 3 = 14$ ei jagu kolmega, järelikult see arv ise ka ei jagu kolmega. Üldiselt võime öelda, et

arv jagub 3-ga, kui tema ristsumma jagub 3-ga.

Iga arv, mille numbriteks on ainult 9-d, jagub kahtlemata üheksaga. Tõesti:

$9 : 9 = 1$; $99 : 9 = 11$; $999 : 9 = 111$ jne.

Eelmise mõttekäigu eeskujul saame siis iga antud arvu avaldada summana ka järgmiselt:

antud arv = üheksaga jaguv arv + antud arvu ristsumma.

Seega ka üheksaga jagumist saab otsustada ristsumma kaudu:

arv jagub 9-ga, kui tema ristsumma jagub 9-ga.

Näiteks arv 2453 pole üheksaga jaguv, sest tema ristsumma on 14 ja 14 ei jagu üheksaga. Arv 75465 aga jagub üheksaga, sest tema ristsumma 27 jagub üheksaga.

Neljaga jagumise tunnuse leidmiseks lähtume sellest, et 100 jagub kindlasti neljaga. Tõesti: $100 : 4 = 25$. Siis on aga $100 + 100$ ehk 200 neljaga jaguv (esimese seaduse põhjal), samuti $200 + 100$ ehk 300 jne. Selgub, et iga arv, mis lõpeb kahe nulliga, on neljaga jaguv.

Kui arv ei lõpe kahe nulliga, näit. 5742, siis esitame ta summana nii, et esimene liidetav lõpeb kahe nulliga:

$$5742 = 5700 + 42.$$

Esimene liidetav jagub siis kindlasti neljaga. Eespool sõnastatud seaduse põhjal otsustab nüüd summa jagumise neljaga see, kas teine liidetav jagub neljaga või mitte. Seega neljaga jagumise tunnus on järgmine:

arv jagub 4-ga, kui tema kirjutise kaks viimast numbrit kujutavad 4-ga jaguvat arvu (või on mõlemad nullid)

Samal viisil arutades leiaksime ka, et

arv jagub 25-ga, kui tema kirjutise kaks viimast numbrit kujutavad 25-ga jaguvat arvu (või on mõlemad nullid)

Ilma pikemata on selge, et jaguvus ühikarvudega 10, 100, 1000 jne. nõuab, et arv peab lõppema vähemalt niisama paljude nullidega kui vastav ühikarvgi.

178. Kirjutada välja kõik kordarvud vahemikust 1 kuni 50.

179. Kirjutada järgmistest arvudest välja paarisarvud eraldi ja paaritud arvud eraldi:

30; 45; 121; 182; 189; 694; 1246; 2754; 7549; 40 505.

180. Otsustada, millised järgmistest arvudest jaguvad kolmega:

44; 57; 111; 347; 458; 748; 1436; 1896; 8488; 9996.

181. Otsustada, millised järgmistest arvudest jaguvad neljaga:

256; 112; 554; 526; 932; 996; 1728; 2452; 7113; 9318.

182. Otsustada, millised järgmistest arvudest jaguvad viiega; millised 25-ga:

55; 83; 75; 185; 270; 684; 450; 555; 2749; 100 005.

183. Otsustada, millised järgmistest arvudest jaguvad üheksaga: 792; 1265; 6309; 954; 5319; 8020; 17 825; 90 333; 34 201; 487 568; 1 135 674.

184. On antud arvud: 825; 3672; 85 481; 94 641. Missugused neist jaguvad kahega, missugused kolmega, missugused neljaga, missugused viiega, missugused üheksaga ja missugused 25-ga?

185. On antud arvud: 729 484 756; 749 250; 107 811; 648 000. Missugused neist jaguvad kahega? kolmega? neljaga? viiega? üheksaga? kümnega? sajaga?

186. Missuguste arvudega reast

2, 3, 4, 5, 9, 10, 25

jagub arv 137 610?

187. Kirjutada kolm neljakohalist arvu, mis jaguvad kolmega, aga ei jagu üheksaga.

188. Kas iga arv, mis jagub üheksaga, jagub ka kolmega?

189. Kui aastanumber jagub neljaga, siis aasta on lisapäeva-aasta. Kas käesolev aasta on liht- või lisapäeva-aasta? Mis numbriga on järgmine lisapäeva-aasta? Mis numbriga oli eelmine lisapäeva-aasta?

190. Otsustada, kas summa 555 + 321 jagub 3-ga või mitte, ilma summat ennast arvutamata.

191. Otsustada, kas summa 56 + 432 jagub 4-ga või mitte, ilma summat ennast arvutamata.

192. Otsustada, kas summa 486 + 728 jagub 9-ga või mitte, ilma summat ennast arvutamata.

193. Jagamist teostamata otsustada, missugune jääk saadakse arvu 27 346 jagamisel viiega, üheksaga, kümnega ja 25-ga. Otsustada samad küsimused ka arvu 591 427 kohta.

194. Leida arvu 1497 kõik jagajad, mis on väiksemad kui 20.

195. Leida arvu 1673 kõik jagajad, mis on väiksemad kui 20.

§ 15. Arvu algtegurid ja jagajad.

1. Arvu algtegurid.

1. Iga kordarv laseb ennast avaldada algarvude korrutisena. Kordarvud kuni 25-ni esinevad algarvude korrutistena järgmiselt:

$4 = 2 \cdot 2$
$6 = 2 \cdot 3$
$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
$9 = 3 \cdot 3$
$10 = 2 \cdot 5$
$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
$14 = 2 \cdot 7$
$15 = 3 \cdot 5$
$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$
$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$
$21 = 3 \cdot 7$
$22 = 2 \cdot 11$
$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
$25 = 5 \cdot 5$

Kordarvu algarvulisi tegureid nimetatakse selle kordarvu **algtegureiks.**

Leiame näiteks arvu 420 algtegurid. Selleks uurime kõigepealt, kas väikseim algarv 2 on antud arvu jagajaks või mitte.

Jaguvuse tunnuse järgi peab 420 jaguma 2-ga. Jagamegi arvu 420 kahega; saame 210; seega

$$420 = 2 \cdot 210.$$

Edasi uurime, kas tegur 210 jagub ka arvuga 2. Selgub, et jagubki. Jagame arvu 210 kahega; saame 105; seega

$$210 = 2 \cdot 105 \text{ ja } 420 = 2 \cdot 2 \cdot 105.$$

Edasi uurime, kas ehk tegur 105 jagub ka veel arvuga 2. Selgub, et ei jagu. Siis uurime, kas ta jagub järgmise algarvuga, s. o. 3-ga. Selgub, et jagub (sest arvu 105 ristsumma 6 jagub kolmega). Jagame 105 kolmega; saame 35; seega

$$105 = 3 \cdot 35 \quad \text{ja} \quad 420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 35.$$

Saadud tegur 35 enam kolmega ei jagu. Järgmine algarv on 5. Viiega jagumise tunnuse järgi jagub 35 viiega. Jagame ta viiega; saame 7; seega

$$35 = 5 \cdot 7 \quad \text{ja} \quad 420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Saadud viimane tegur 7 on juba algarv, temal enam jagajaid pole. Nii ongi leitud arvu 420 kõik algtegurid.

Arvu algtegurite leidmist teostatakse kirjalikult harilikult nii:

Näide 1.		Näide 2.	
420	2	396	2
210	2	198	2
105	3	99	3
35	5	33	3
7	7	11	11
$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$		$396 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$	

Olgu nüüd nõutud leida arvu 173 algtegurid. Selgub, et algarvud 2, 3, 5, 7, 11 ega ka 13 pole selle arvu jagajaks. Tekib küsimus, kui kaugele on mõtet minna proovimisega. Võib-olla 173 on koguni algarv; kas selle kindlakstegemiseks peaks proovima teda jagada kõigi algarvudega, mis on temast väiksemad? Ei — see pole tarvilik! On mõtet minna proovimisega ainult kuni selle algarvuni, mille korrutis iseendaga on juba suurem kui antud arv. Sest kui see algarv või temast veel suuremgi algarv oleks antud arvu jagajaks, siis temaga antud arvu jagades peaksime saama jagatiseks temast väiksema arvu ja ka see peaks olema antud arvu jagajaks. Viimane aga oleks pidanud siis juba varem proovimisel välja tulema.

Arvu 173 puhul on selleks kõige suuremaks algarvuks, millega veel jagamist proovida maksab, arv 13, sest $13 \cdot 13 = 169$ on antud arvust veel väiksem, $17 \cdot 17$ aga on juba temast suurem. Kuna proovimisel selgub, et 173 ei jagu ühegi algarvuga, mis on väiksem kui 17, siis on 173 ise algarv.

Siit selgub, et arvu algtegurite määramisel on väga tähtis proovida jaguvust alati **kõigi** järjestikuste algarvudega, ühtki neist vahele jätmata. Sest vahele võib jääda juhuslikult just see algarv, mis osutub antud arvu algteguriks. Selle tagajärjeks võib olla väär otsus, et antud arv on algarv, kui ta tegelikult on siiski kordarv.

Võtame näiteks arvu 1027, mis avaldub algtegurite korrutisena järgmiselt: $1027 = 13 \cdot 79$. Kui siin jagumine 13-ga jääks esialgu selgitamata, siis hiljem see enam välja ei tulegi, sest siin on mõtet jaguvust proovida ainult algarvuni 31; võib karta, et arvutaja jagajat 79 ei leia ja otsustabki siis ekslikult, et 1027 on algarv.

2. Arvu jagajad.

Kui arvu algtegurid on teada, siis saab kergesti leida kõik tema jagajad, võttes arvu algtegurid esiteks üksikult, siis korrutades neid paarikaupa, siis kolmekaupa jne.

Näiteks on arvu

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

jagajateks arvud:

2	3	5	
$2 \cdot 2$	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 5$	$3 \cdot 5$
$2 \cdot 2 \cdot 3$	$2 \cdot 2 \cdot 5$	$2 \cdot 3 \cdot 5$	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

ehk 2, 3, 5; 4, 6, 10, 15; 12, 20, 30 ja 60. Neile lisandub veel endastmõistetavalt jagaja 1.

Üldiselt:

arvu jagajaks on iga arv, mille kõik algtegurid leiduvad antud arvu algtegurite hulgas.

196. Esitada algtegurite korrutisena kõik kordarvud vahemikust 25 kuni 50.

197. Leida järgmiste arvude algtegurid:

1)	51	2)	100	3)	1500	4)	1001
	54		300		7000		1111
	66		216		1024		1495
	72		360		1147		13 489
	108		613		2383		111 111

198. Iga kuuekohaline arv, mis tekib üht ja sama kolmekohalist arvu kaks korda järjestikku kirjutades (näiteks 273 273), jagub arvudega 7, 11 ja 13. Uurida, miks on see nii. (Näpunäide: korrutada nimetatud arvude korrutist kolmekohalise arvuga!)

199. Kas arvudel 475, 570 ja 741 leidub ühiseid algtegureid?

200. Leida kõik jagajad arvudele:

12; 56; 72; 75; 84; 108; 120.

201. Leida arvude 44 ja 100 kõik ühised jagajad.

202. Leida arvude 48, 40 ja 24 kõik ühised jagajad.

§ 16. Suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne.

1. Arvude suurima ühisteguri leidmine.

1. Olgu antud kaks arvu, näiteks 30 ja 42; esitame mõlemad oma algtegurite korrutisena:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

Leiame kummagi arvu kõik jagajad:

30 → 1 2 3 5 6 — 10 — 15 — 30 —
42 → 1 2 3 — 6 7 — 14 — 21 — 42

Nagu näeme, leidub arvudel 30 ja 42 ühiseid jagajaid, nimelt arvud

1, 2, 3 ja 6.

Kõige suurem neist on antud juhul arv 6. Seega arv 6 on arvude 30 ja 42 suurim ühine jagaja ehk **suurim ühistegur.** Kirjutatakse seda järgmiselt:

süt. (30; 42) = 6.

Samuti võib leida suurima ühisteguri ka rohkem kui kahele arvule. Üldiselt:

> **antud arvude suurim ühistegur on suurim arv, millega jagub igaüks neist arvudest.**

Selgitame nüüd arvude suurima ühisteguri leidmist kõige hõlpsamal viisil. Olgu näiteks antud arvud 420 ja 2700. Leiame kõigepealt nende algtegurid. Märgime kastikestega ära nende ühised algtegurid; need on antud juhul 2; 2; 3; 5. Iga korrutis neist ühiseist algtegureist (ükskõik mitmest) on antud arvudele ühiseks jagajaks. Suurimaks neist osutub korrutis kõigist ühiseist algtegureist, s. o. $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ ehk 60.

$$
\begin{array}{r|l}
420 & \boxed{2} \\
210 & \boxed{2} \\
105 & \boxed{3} \\
35 & \boxed{5} \\
7 & 7 \\
 & \\
 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
2700 & \boxed{2} \\
1350 & \boxed{2} \\
675 & \boxed{3} \\
225 & 3 \\
75 & 3 \\
25 & \boxed{5} \\
5 & 5
\end{array}
$$

$$\text{süt.} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Samal viisil saab leida ka rohkem kui kahe arvu suurimat ühistegurit. Leiame näiteks arvude 1764, 4095 ja 6930 suurima ühisteguri.

$$
\begin{array}{r|l}
1764 & 2 \\
882 & 2 \\
441 & \boxed{3} \\
147 & \boxed{3} \\
49 & \boxed{7} \\
7 & 7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
4095 & \boxed{3} \\
1364 & \boxed{3} \\
455 & 5 \\
91 & \boxed{7} \\
13 & 13 \\
 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
6930 & 2 \\
3465 & \boxed{3} \\
1155 & \boxed{3} \\
385 & 5 \\
77 & \boxed{7} \\
11 & 11
\end{array}
$$

$$\text{süt.} = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 63$$

Üldine juhis kujuneb järgmiseks:

arvude suurima ühisteguri saamiseks leiame nende arvude algtegurid, nopime välja kõigi arvude ühised algtegurid ja korrutame need.

203. Määrata järgmiste arvupaaride ja arvukolmikute suurimad ühistegurid:

1) 9 ja 12
10 ja 15
21 ja 14
15 ja 35
39 ja 52

2) 54 ja 63
27 ja 48
65 ja 85
63 ja 81
72 ja 96

3) 6, 12 ja 20
9, 18 ja 45
7, 14 ja 24
10, 35 ja 50
18, 30 ja 42

4) 112 ja 176
132 ja 364
308 ja 392
360 ja 450
468 ja 624

5) 121, 154 ja 165
102, 136 ja 170
144, 162 ja 198
264, 360 ja 600
104, 525 ja 712

204. Ühe nööri pikkus on 250 m, teise oma 180 m. Kui suur on kõige pikem nööritükk, mis mahub nii esimese kui ka teise nööri pikkusesse täisarv korda?

205. Ühes klassis on 24 õpilast, teises 40. Kui suured on rühmad, milledeks saab jaotada nii esimese kui ka teise klassi õpilasi nii, et kõigis rühmades oleks võrdpalju õpilasi? Mitu õpilast on suurimais niisugustes rühmades?

2. Kahe arvu väikseima ühiskordse leidmine.

Olgu antud arvud 12 ja 15. Nende ühe-, kahe-, kolme-, jne. kordsed on vastavalt

12, 24, 36, 48, **60**, 72, 84, 96, 108, **120**,...
15, 30, 45, **60**, 75, 90, 105, **120**, 135, 150,...

Märkame, et neis kordsete ridades leidub samu arve, näiteks 60 ja 120; kaugemal leidub neid veel kuitahes palju, sest esimese rea arvudest iga viies on sama, mis teise rea arvudest iga neljas. Neist ühiseist kordseist on 60 antud juhul kõige väiksem. Seega arv 60 on arvude 12 ja 15 **väikseim ühiskordne.** Seda kirjutame lühidalt järgmiselt:

vük. (12; 15) = 60.

Samuti võib leida väikseimat ühiskordset ka rohkem kui kahele arvule. Üldiselt:

antud arvude väikseim ühiskordne on väikseim arv, mis jagub igaühega neist arvudest.

Selgitame nüüd arvude väikseima ühiskordse leidmist kõige lihtsamal viisil. Olgu näiteks antud arvud 126 ja 56.

Leiame kõigepealt nende algtegurid. Märgime ära ühised algtegurid; need on antud juhul 2 ja 7.

$$\begin{array}{r|l} 126 & \boxed{2} \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & \boxed{7} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 56 & \boxed{2} \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & \boxed{7} \end{array}$$

Tegurid, mis esimeses arvus puuduvad

$$\text{vük.} = 126 \cdot 2 \cdot 2 = 504$$

Võttes nüüd ühe arvu algtegurid kõik, on vaja neile teisest arvust juurde kirjutada veel ainult need, mis esimese arvu tegurite hulgas ei leidu, s. t. teise arvu märkimata algtegurid; siis saadaksegi kõik algtegurid väikseima ühiskordse jaoks. On päris ükskõik, kumma arvu algtegurid võtame kõik, sest neile teisest arvust märkimata tegureid juurde kirjutades saame kokku ikkagi needsamad tegurid, ainult teises järjekorras; tõesti:

$$\underbrace{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}_{126} \cdot 2 \cdot 2 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7}_{56} \cdot 3 \cdot 3 = 504.$$

Arvuks, mille tegurid võetakse kõik, eelistame võtta suurema antud arvudest.

Selle mõttekäigu alusel sõnastame järgmise juhise:

kahe antud arvu väikseima ühiskordse saamiseks leiame nende arvude algtegurid ja korrutame ühe antud arvu teise arvu nende algteguritega, mis esimeses puuduvad.

Märkusi:

1) Kui kahest antud arvust esimene jagub teisega, siis esimene on ühtlasi nende arvude väikseim ühiskordne; näiteks

$$\text{vük.}\ (65;\ 13) = 65.$$

2) Kui mõlemad antud arvud on algarvud, siis nende väikseim ühiskordne on nende arvude korrutis; näiteks

$$\text{vük. } (13;\ 29) = 13 \cdot 29 = 377.$$

3) Kahe arvu suurima ühisteguri ja väikseima ühiskordse korrutis võrdub nende arvude korrutisega. Seda asjaolu võib kasutada kontrollimiseks. Näide:

$$\begin{array}{l|l} \text{süt. } (42;\ 105) = 21 & 21 \cdot 210 = 4410 \\ \text{vük. } (42;\ 105) = 210 & 42 \cdot 105 = 4410 \end{array}$$

206. Leida peast järgmiste arvupaaride väikseimad ühiskordsed:

1) 8 ja 12
12 ja 15
21 ja 14
33 ja 22
100 ja 24

2) 3 ja 11
4 ja 10
12 ja 18
15 ja 25
27 ja 21

3) 14 ja 35
10 ja 15
9 ja 18
9 ja 25
18 ja 20

207. Leida järgmiste arvupaaride väikseimad ühiskordsed:

1) 25 ja 20
11 ja 24
50 ja 80
45 ja 55
60 ja 90

2) 108 ja 216
110 ja 231
360 ja 540
130 ja 312
212 ja 218

3) 5 ja 955
13 ja 3809
233 ja 699
97 ja 101
373 ja 421

208. Leida lühima nööri pikkus, mida saab lõigata nii 12 cm kui ka 15 cm pikkusteks tükkideks.

209. Leida kaks arvu, millede väikseim ühiskordne on 100.

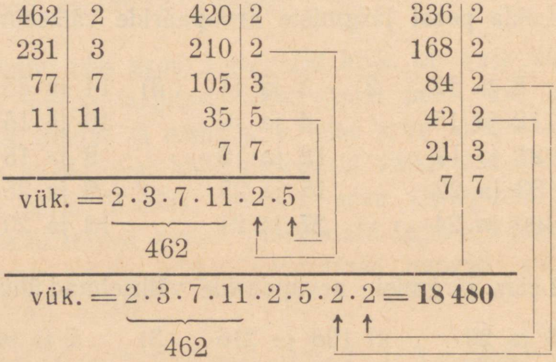
3. Rohkem kui kahe arvu väikseima ühiskordse leidmine.

Kolme arvu väikseima ühiskordse saamiseks leitakse esmalt kahe arvu vük. ja korrutatakse seda kolmanda arvu nende algteguritega, mis pole temas veel esindatud.

Nelja arvu väikseima ühiskordse saamiseks leitakse niisamuti kõigepealt kahe arvu vük., selle kaudu kolme arvu vük. ja korrutatakse seda siis neljanda arvu nende algteguritega, mis pole temas veel esindatud.

Sama mõttekäigu jätkates võib leida väikseima ühiskordse kuitahes paljude arvude jaoks.

Leiame väikseima ühiskordse näiteks arvudele 462, 420 ja 336.



$$\begin{array}{r|l} 462 & 2\\ 231 & 3\\ 77 & 7\\ 11 & 11 \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} 420 & 2\\ 210 & 2\\ 105 & 3\\ 35 & 5\\ 7 & 7 \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} 336 & 2\\ 168 & 2\\ 84 & 2\\ 42 & 2\\ 21 & 3\\ 7 & 7 \end{array}$$

$$\text{vük.} = \underbrace{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11}_{462}\cdot \overset{\uparrow}{2}\cdot \overset{\uparrow}{5}$$

$$\text{vük.} = \underbrace{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11}_{462}\cdot 2\cdot 5\cdot \overset{\uparrow}{2}\cdot \overset{\uparrow}{2} = \mathbf{18\,480}$$

Kontroll:

18480 : 462 = 40

18480 : 420 = 44

18480 : 336 = 55

210. Leida väikseimad ühiskordsed järgmistele arvukolmikutele:

1) 4, 8 ja 12
5, 14 ja 35
32, 36 ja 48
42, 56 ja 98
54, 72 ja 126

2) 112, 124 ja 420
250, 320 ja 490
475, 570 ja 741
1009, 2018 ja 3027
3443, 349 ja 500

211. Leida järgmistele arvuridadele väikseimad ühiskordsed:

1) 14, 28, 35, ja 77
2) 12, 20, 36, 54 ja 63
3) 504, 686, 720 ja 1890
4) 17, 29, 31 ja 37
5) 32, 128, 512 ja 1024
6) 1021, 1031 ja 1051

§ 17. Kordamisülesandeid.

212. Kuidas muutub kümnendmurd, kui koma jäetakse ära ja koma järel seisab üks koht? kaks kohta? kolm kohta?

213. Ühel teguril on kaks ja teisel kolm kümnendkohta. Mis sünnib korrutisega, kui teguritel komad ära jäetakse?

214. Ma valisin arvu, lahutasin sellest 13, korrutasin tulemuse 6-ga, liitsin saaduga 10 ja sain arvu 52. Mis arvu ma valisin?

215. Kuidas muutub jagatis, kui jagatavat suurendame kaks korda, jagajat aga vähendame kaks korda?

216. Kuidas muutub korrutis, kui mõlemaid tegureid vähendame kolm korda?

217. Kuidas muutub vahe, kui vähendatavat suurendame 5 võrra, lahutatavat aga vähendame 3 võrra?

218. Kuidas tuleb muuta liidetavaid, et summa jääks endiseks?

219. Kolhoos „Võit” otsustas külvata 11,25 ha nisu. Seemet kulus hektaari kohta 160 kg. Lõikus andis 7,5 seemet. Mitu kg nisu sai kolhoos sügisel?

220. Väljendada täiskilomeetrites pikkused (õieti ümardatult): 3200 m, 8110 m, 24 237 m, 9900 m, 47 623 m.

221. Ühe hobulaenutuspunkti aastaaruanne näitab, et aasta jooksul on punkti 11 hobust teinud kokku 15 000 hobutöötundi; teise punkti 13 hobust aga on teinud sama aja jooksul 17 000 hobutöötundi. Kumb hobulaenutuspunkt töötas keskmiselt edukamalt?

222. Atsil on 37 viiekopikalist ja 13 15-kopikalist raha; Jütsil aga on 14 25-kopikalist ja 23 viiekopikalist. Kummal on raha rohkem ja kui palju?

223. Arvutada peast:

1) 10 — 9,8
1,4 : 2,5
3,98 + 2,7
15 · 0,24
5,03 — 1,7

2) 5,8 + 4,6
8,5 — 6,08
5 · 6,08
610 : 25
6,7 + 2,03

3) 3,6 : 0,4
0,3 · 0,2
14,9 + 3,5
23 — 7,9
6,2 : 5

4) 1,5 · 0,036
2,4 : 0,8
60 — 49,05
4,91 + 13,2
0,125 · 63,2

5) 14,6 · 0,5
7,4 : 0,1
9 — 8,99
29,3 + 47,8
0,28 · 2,5

6) 6 — 0,75
4,13 : 0,5
6,7 + 2,9
0,25 · 136
1,6 — 0,05

7) 72,4 + 0,6
0,125 · 16
80 — 59,02
2,1 : 0,3
39,2 + 60,8

8) 2,2 : 0,25
9,07 + 0,93
7 — 6,97
1,5 · 4,6
607 — 348

224. Kas arv 74 567 843 jagub 3-ga?

225. Ilma ristsummat arvutamata otsustada, kas arv 66 666 666 jagub 3-ga.

226. Missugune on suurim algarv, millega on veel mõtet proovida arvu 5501 jaguvust?

227. Otsustada, missugused järgmistest arvudest jaguvad 4-ga: 1946, 83 648, 335 004, 99 438, 657 092.

228. Iga paarisarv, mis jagub 3-ga, jagub ka 6-ga. Otsustada, missugused järgmistest arvudest jaguvad 6-ga: 743, 5648, 9432, 6006, 1945, 24 540.

229. Iga arv, mis jagub 3-ga ja 5-ga, jagub ka 15-ga. Otsustada, missugused järgmistest arvudest jaguvad 15-ga: 285, 2745, 3520, 31 545, 7775, 195.

230. Missugustega arvudest 1 kuni 15 jagub arv 1 504 830?

231. Järjestada numbrid 1, 6, 2, 5 neljakohaliseks 4-ga jaguvaks arvuks. Mitu niisugust võimalust leidub?

232. Kas numbreid 2, 5, 7, 6 saab järjestada 3-ga jaguvaks arvuks? 4-ga jaguvaks arvuks? 5-ga jaguvaks arvuks?

233. Leida arvude 531 441 ja 48 828 125 algtegurid.

234. Leida süt. ja vük. järgmisele arvupaarile ja arvukolmikule:

616 ja 784 208, 1050 ja 1424.

235. Ühes korvis on 56 õuna, teises 84 pirni. Mitmele isikule saaks neid jaotada nõnda, et igaüks saaks võrdpalju õunu ja võrdpalju pirne? Kui suur on kõige suurem isikute hulk, mille puhul on säärane jaotamine võimalik?

236. Leida lühima traadi pikkus, mida saab lõigata nii 10 kui ka 12 cm pikkusteks tükkideks.

237. Kirjutada kolm arvu (kõik väiksemad kui 1000), millede väikseim ühiskordne on 1000.

238. *Haug ja tursk, kaks tuntud röövkala, kohtusid jõesuus ja nende vahel tekkis järgmine „südamlik" kahekõne:

Tursk havile: „Kui mina sinust poole ära sööksin, siis kaaluksin ma täpselt 1 kg."

Havi tursale: „Kui mina sinust poole ära sööksin, siis saaksin ma niisama raskeks kui sina oled praegu."

Kui palju kaalus kumbki röövel?

III. Harilikud murrud.

§ 18. Osa väljendamine hariliku murru abil.

1. a) Kui kannutäiest piimast saab ääreni täita 11 ühesugust tassi nii, et piima kannu järele ei jää, siis mahub igasse tassi parajasti üks üheteistkümnendik osa kogu piimast.

Üks üheteistkümnendik kirjutatakse nii: $\frac{1}{11}$.

Kahte tassi kokku mahub siis kaks üheteistkümnendikku ehk $\frac{2}{11}$ kogu piimast.

Kui palju piima mahub kolme, nelja, viide, kuude ja seitsmesse tassi?

b) Ema jaotas kausitäie maasikaid oma nelja tütre ja kolme poja vahel nii, et igaüks sai ühepalju. Missuguse osa maasikaist sai iga laps? Missuguse osa maasikaist said tütred kokku? Missuguse osa maasikaist said pojad kokku?

c) Nädalas on 7 päeva. 1 päev on siis $\frac{1}{7}$ nädalat. Mitu nädalat on 2, 3, 4, 5, 6 päeva?

d) Liiter on 4 klaasitäit. Mitu liitrit on 1, 2, 3 klaasitäit?

Arvusid, nagu $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{7}$ jne. nimetatakse **harilikkudeks murdudeks** ehk lühemalt lihtsalt **murdudeks.**

Peale harilikkude murdude, nagu teame, on olemas veel kümnendmurrud. Harilikkude ja kümnendmurdude lähemat vahekorda selgitame hiljem.

2. Harilikku murdu kirjutatakse kahe täisarvu ja sirglõigukese abil. Sirglõiku nimetatakse **murrujooneks.** Arvu, mis murru kirjutises asetseb murrujoone peal, nimetatakse

murru **lugejaks**; arvu, mis asetseb murrujoone all, aga **nimetajaks**:

$$\boxed{\begin{array}{r}\text{lugeja}\\ \text{nimetaja}\end{array}\ \dfrac{3}{7}\,\text{murrujoon}}$$

Peame meeles, et

murru nimetaja näitab, mitmeks võrdseks osaks on jaotatud tervik, aga lugeja — mitu niisugust osa on võetud.

239. Kirjutada numbritega:

1) seitse kaheksandikku
   viis üheksandikku
   kolm kümnendikku
   üksteist kolmandikku
   viisteist kuueteistkümnendikku

2) neli kolmekümnendikku
   üks kahekümneviiendik
   seitse sajandikku
   kolmteist üheksandikku
   viis viiendikku

240. Kirjutada murrud, mille lugejateks on arvud 4, 7, 12, 1, 13, 40 ja 15, aga nimetajateks on vastavalt arvud 9, 15, 25, 12, 4, 40 ja 6.

241. 2 brigaadi niitsid koos sooheinamaa. Kui palju heinamaast niitis iga brigaadiliige, kui esimene brigaad koosnes 10-st, teine aga 13-st inimesest ning kõik töötasid ühesuguse jõudlusega?

Kui palju heinamaast niitis esimene ja kui palju teine brigaad?

§ 19. Võrdsete lugejatega ja võrdsete nimetajatega murdude võrdlemine.

1. Võrdsete lugejatega murdude võrdlemine.

Ülesanne. *Ühes perekonnas oli 5 last, teises 7 last. Mõlemas perekonnas jaotas ema hommikueineks ühe liitri piima nii, et kummaski perekonnas iga laps sai ühepalju* *piima. Kui palju piima sai iga laps esimeses perekonnas? kui palju teises? Kumma perekonna laps sai hommikueineks rohkem piima?*

Kui palju piima said 2 last kokku esimeses perekonnas? kui palju teises? Kummas perekonnas said 2 last kokku rohkem piima?

Vastata samasugustele küsimustele 3, 4 ja 5 lapse kohta kummaski perekonnas.

Märkame järgmist:

kui kahel murrul on võrdsed lugejad, siis on neist see murd suurem, kumma nimetaja on väiksem.

242. Seada kasvavasse suuruse järjekorda järgmised murrud:

1) $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{5}{7}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{5}{8}$ 3) $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{3}{11}$ 4) $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{4}{11}$ $\frac{4}{13}$

2. Võrdsete nimetajatega murdude võrdlemine.

Murdusid, milledel nimetajad on võrdsed, kutsutakse **samanimelisteks murdudeks.** Näiteks

$\frac{1}{11}$, $\frac{3}{11}$ ja $\frac{6}{11}$ on samanimelised murrud.

243. Rühmitada järgmised murrud nii, et igas rühmas esineksid ainult samanimelised murrud:

$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{2}{8} \quad \frac{3}{11} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{7}{3} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{5}{11} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{9}{8}$$

244. Mittetäieliku keskkooli kolme viimase klassi pioneeridest moodustati brigaad, kes hakkas kevadel aiamaad harima tingimusel, et saak sügisel jaotatakse võrdselt kõigi brigaadi liikmete vahel. Kui palju saagist langes igale brigaadi liikmele, kui brigaad koosnes 9-st V kl. poneerist, 7-st VI kl. pioneerist ja 4-st VII kl. pioneerist? Kui palju saagist langes V klassi pioneeridele, kui palju VI klassi pioneeridele ja kui palju VII kl. pioneeridele? Missuguse klassi pioneerid said kõige enam, missuguse klassi pioneerid kõige vähem saagist?

Selgub, et

samanimelistest murdudest on see murd suurem, mille lugeja on suurem.

245. Seada murrud kasvavasse suuruse järjekorda igas järgnevas reas:

1) $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{6}{7}$ 2) $\frac{9}{13}$ $\frac{11}{13}$ $\frac{8}{13}$ $\frac{5}{13}$ $\frac{10}{13}$ $\frac{2}{13}$ $\frac{12}{13}$ 3) $\frac{6}{9}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{7}{9}$
4) $\frac{3}{17}$ $\frac{5}{17}$ $\frac{4}{17}$ $\frac{9}{17}$ $\frac{2}{17}$ $\frac{6}{17}$

246. Sovhoosi 14 löööktöölise vahel jaotati preemiaks 40 kg jahu, 35 kg tangu, 20 kg võid ja 30 kg suhkrut nii, et igaüks sai iga ainet sama palju. Mitu kg iga ainet sai iga tööline? Mis ainet sai iga tööline kõige rohkem? Mis ainet kõige vähem?

247. Kioskisse tuuakse karastusjookide tehasest iga päev 100 liitrit morssi. Ühe nädala jooksul (alates puhkepäevaga) müüs kiosk iga päev kõik 100 liitrit morssi läbi, kusjuures ostjate arv on üksikutel päevadel järgmine: 151, 138, 109, 138, 159, 121, 120. Mitu liitrit morssi sai keskmiselt üks ostja igal päeval? Järjestada nädalapäevad ühe ostja keskmise morsihulga järgi, alustades päevaga, mil see hulk oli suurim.

§ 20. Harilik murd kui jagatis.

1. a) Kuidas saaks kõige lihtsamalt jaotada 3 ühesuurust õuna 4 inimese vahel nii, et igaüks saaks ühepalju? Mitu õuna saaks igaüks?

Kõige lihtsam oleks iga õun 4-ks võrdseks tükiks lõigata. Igaüks saaks siis igast õunast ühe neljandiku, kokku $\frac{3}{4}$ õuna.

b) Kuidas saaks 3 m riiet jaotada 4 inimese vahel nii, et kõik saaksid sama palju? Mitu meetrit riiet saaks igaüks?

Eelmise ülesande eeskujul võiks iga meetri lõigata 4-ks võrdseks tükiks, igaüks saaks siis igast meetrist ühe neljandiku, kokku meetrites

$$\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{3}{4}.$$

Niisugune jaotamisviis pole aga otstarbekohane (miks?). Parem oleks terve 3 meetri pikkune riidetükk lõigata 4-ks võrdseks tükiks, igaüks saaks siis ühe katkilõikamata riidetüki. Niisuguse riidetüki pikkus meetrites tuleks aga arvutada jagamise 3 : 4 kaudu. Et üks isik saab kummalgi jaotusviisil kahtlemata sama palju riiet, siis peab olema

$$3:4=\tfrac{3}{4} \quad \text{ehk} \quad \tfrac{3}{4}=3:4.$$

Selgub, et harilik murd pole midagi muud kui jagamistehte teine kirjutusviis; seejuures murrujoon tähendab jagamismärki.

Peame meeles, et

jagatis tähendab murdu, mille lugejaks on jagatav ja nimetajaks on jagaja.

Ümberpöördult:

iga murd tähendab jagatist, milles jagatavaks on lugeja ja jagajaks on nimetaja.

248. Kirjutada järgmised jagatised murru kujul:

1) 3 : 4
5 : 6
4 : 9
7 : 8
3 : 10

2) 8 : 21
9 : 9
1 : 8
14 : 14
1 : 30

3) 6 : 11
1 : 5
5 : 3
11 : 20
12 : 5

4) 20 : 4
13 : 2
27 : 13
59 : 49
123 : 19

249. Kirjutada järgmised murrud jagatise kujul ja kui võimalik, anda vastus täisarvuna:

Näiteks: $\frac{5}{9} = 5 : 9$, aga $\frac{44}{11} = 44 : 11 = 4$.

1) $\frac{2}{8}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{6}{10}$ $\frac{30}{5}$

2) $\frac{27}{13}$ $\frac{11}{17}$ $\frac{7}{7}$ $\frac{12}{2}$

3) $\frac{13}{19}$ $\frac{24}{3}$ $\frac{13}{13}$ $\frac{5}{5}$

4) $\frac{28}{4}$ $\frac{63}{9}$ $\frac{31}{3}$ $\frac{35}{5}$

5) $\frac{6}{6}$ $\frac{17}{17}$ $\frac{30}{30}$ $\frac{179}{179}$

Märkame järgmisi tõsiasju:

1) **kui murru lugeja ja nimetaja on võrdsed, siis murd võrdub ühega;**

2) **kui murru lugeja on täisarv korda suurem nimetajast, siis murd võrdub sellesama täisarvuga.**

250. Kirjutada arv 2 mingi murru kujul. Mitu niisugust murdu on võimalik kirjutada?

251. Kirjutada viis murdu, mis kõik võrduvad arvuga 9.

252. Kirjutada kümme murdu, mis kõik võrduvad arvuga 1.

253. Kirjutada kõik ühekohalised arvud samanimeliste murdude kujul, võttes nimetajaks alati arvu 3.

§ 21. Algmurd, lihtmurd, liigmurd ja segaarv.

1. Algmurd.

Kui kangas riiet lõigata 20-ks võrdseks tükiks, siis iga tükk on $\frac{1}{20}$ tervest kangast.

Kui preemia jaotada võrdselt 7 stahhaanovlase vahel, siis igaüks saab $\frac{1}{7}$ kogu preemiast.

Üldiselt:

kui mingi tervik jaotada võrdseteks osadeks, siis iga osa suurus on väljendatav murruga, mille lugeja on 1.

Murdu, mille lugejaks on arv 1, nimetatakse algmurruks.

Iga muu murd on mingist algmurrust saadav liitmise kaudu. Näiteks murd $\frac{3}{4}$ on summa $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.

254. Kõige suurem algmurd on $\frac{1}{1}$, suuruse poolest temale järgnev väiksem algmurd on $\frac{1}{2}$. Miks see nii on?

255. Kirjutada kümme suuruse poolest murrule $\frac{1}{2}$ järgnevat algmurdu.

Algmurdudel $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{4}$ on veel oma erinimed; need on pool ja veerand.

2. Lihtmurd.

Murdu, mille lugeja on väiksem kui nimetaja, kutsutakse lihtmurruks.

Lihtmurrud on näiteks

$$\frac{1}{6},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{16},\ \frac{3}{25} \text{ ja } \frac{16}{17}.$$

Iga lihtmurd on väiksem kui 1, sest ta on jagatis, milles jagatav on väiksem kui jagaja.

Lihtmurrul $\frac{3}{4}$ on veel oma erinimi — kolmveerand.

Kõik algmurrud (välja arvatud $\frac{1}{1}$) on lihtmurrud.

256. Missugused murdudest

$$\frac{5}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{10}{7},\ \frac{3}{11},\ \frac{13}{9},\ \frac{5}{3},\ \frac{2}{13},\ \frac{7}{8}$$

on lihtmurrud?

3. Liigmurd.

Murdu, mille lugeja on suurem nimetajast või võrdne nimetajaga, kutsutakse liigmurruks.

Liigmurrud on näiteks

$$\frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{6}{6},\ \frac{100}{3},\ \frac{64}{8} \text{ ja } \frac{1}{1}.$$

Iga liigmurd on suurem 1-st või võrdne 1-ga, sest ta on jagatis, milles jagatav on kas jagajast suurem või võrdne sellega.

257. Eraldada ühte rühma lihtmurrud ja teise rühma liigmurrud järgmistes murdude ridades:

1) $\frac{4}{7}$; $\frac{8}{11}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{9}{9}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{14}{5}$; $\frac{15}{15}$; $\frac{16}{25}$; $\frac{20}{7}$; $\frac{22}{25}$;

2) $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{6}{6}$; $\frac{10}{9}$; $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{11}{11}$; $\frac{14}{15}$.

258. Kirjutada lihtmurde, võttes nende lugejateks järgmised arvud: 1; 2; 5; 7; 9; 15; 16; 18; 40; 60.

259. Kirjutada liigmurde, võttes nende nimetajateks eelmises ülesandes loeteldud arvud.

260. Kirjutada 10 murdu, mis on väiksemad kui 1.

261. Kirjutada 10 murdu, mis on suuremad kui 1.

262. Missugune arvudest $\frac{21}{23}$, $\frac{11}{11}$ ja $\frac{41}{42}$ on kõige suurem?

263. Missugune arvudest $\frac{7}{6}$, $\frac{59}{60}$ ja $\frac{29}{29}$ on kõige väiksem?

264. Esitada järgmised murrud algmurdude summana:

$\frac{2}{7}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{3}{11}$.

4. Segaarv.

Täisarvu ja murru summat on kombeks kirjutada lühemalt nii, et plussmärk jäetakse ära ja liidetavad kirjutatakse teineteise ligi, täisarv ettepoole. Näiteid:

$$5 + \frac{2}{3} = 5\frac{2}{3}; \quad \frac{1}{4} + 2 = 2\frac{1}{4}.$$

Nii kirjutatud arvu kutsutakse **segaarvuks.** Näiteks toodud segaarvudest esimest tuleb lugeda nii: *viis ja kaks kolmandikku;* teist segaarvu võib lugeda kahel viisil: *kaks ja üks neljandik* ehk *kaks ja veerand.*

Täisarvuline liidetav moodustab segaarvu täisosa ja murruline liidetav — murdosa.

Segaarvul $1\frac{1}{2}$ (s. o. üks ja üks kahendik ehk üks ja pool) on ka veel oma erinimi: pooltteist.

265. Kirjutada järgmised summad segaarvudena:

1)	$2+\frac{1}{7}$	2)	$5+\frac{7}{8}$	3)	$4+\frac{5}{6}$
	$1+\frac{3}{4}$		$4+\frac{9}{10}$		$26+\frac{2}{3}$
	$9+\frac{1}{3}$		$1+\frac{1}{2}$		$259+\frac{100}{111}$
	$10+\frac{12}{17}$		$1+\frac{3}{5}$		$999+\frac{999}{1000}$

266. Kirjutada järgmised segaarvud täisarvu ja lihtmurru summana:

$$1\frac{7}{8},\ 2\frac{5}{11},\ 121\frac{4}{9},\ 7\frac{21}{37},\ 5\frac{1}{6},\ 91\frac{3}{8},\ 56\frac{17}{25},\ 3\frac{7}{100}.$$

267. Kleidi õmblemiseks kulub 2 m riiet ja pluusi õmblemiseks $\frac{3}{4}$ m. Kui palju riiet kulub kokku kleidi ja pluusi õmblemiseks?

268. Kolhoosnik müüs turul 125 l piima, kusjuures tal $\frac{1}{2}$ liitrit piima veel järele jäi. Kui palju piima tõi kolhoosnik turule?

269. Töölisel kulub tööle minekuks ja töölt tulekuks kokku $\frac{5}{6}$ tundi; tööaeg töökohal on 8 tundi. Mitu tundi viibib tööline oma kutsetöö tõttu päeva jooksul kodust eemal? Mis kellaajal jõuab ta õhtul koju, kui ta hommikul väljub kodust kell 7.20?

5. Liigmurru teisendamine segaarvuks.

Et liigmurd on suurem kui 1, siis võib liigmurdu teisendada kas täisarvuks (kui lugeja on jaguv nimetajaga) või segaarvuks (kui lugeja ei ole jaguv nimetajaga).

Liigmurru teisendamisel segaarvuks tuleb liigmurru lugeja jagada nimetajaga. Saadud jagatise täisosa tuleb võtta segaarvu täisosaks ja jääk murdosa lugejaks; murdosa nimetajaks jääb aga antud liigmurru nimetaja.

Näiteid:

1) $$\begin{array}{l} \frac{25}{7}=25:7=3\frac{4}{7}\leftarrow \\ \underline{21}\qquad\uparrow \\ \;\;4 \end{array}$$

2) $\frac{104}{9}=104:9=11\frac{5}{9}$

Selgituseks: kui jagamisel on saadud jagatise täisosa ja jääk, siis jääk on ju veel jagamata; tema jagamisel saadava jagatise kirjutame aga leitud täisosale lisaks, murru kujul.

Peame meeles, et ülesande vastust ei anta liigmurru kujul, vaid teisendatakse see ikka segaarvuks.

270. Kasutades 5-ga, 10-ga ja 25-ga jagumise tunnuseid otsustada, missugune tuleb järgmiste liigmurdude murdosa, ilma täisosa leidmata:

$$\frac{124}{10};\ \frac{243}{5};\ \frac{1049}{10};\ \frac{552}{5};\ \frac{268}{25};\ \frac{981}{5};\ \frac{642}{10};\ \frac{1864}{25}.$$

271. Teisendada segaarvudeks järgmised liigmurrud:

1) $\frac{3}{2};\ \frac{4}{4};\ \frac{5}{4};\ \frac{6}{6};\ \frac{20}{5};\ \frac{14}{3};\ \frac{150}{100};\ \frac{245}{10};\ \frac{25}{6};\ \frac{7}{5};\ \frac{12}{3};\ \frac{24}{5};\ \frac{36}{5};\ \frac{40}{8};\ \frac{72}{15};\ \frac{12}{10}$

2) $\frac{28}{5};\ \frac{39}{10};\ \frac{43}{6};\ \frac{29}{5};\ \frac{55}{4};\ \frac{19}{6};\ \frac{24}{5};\ \frac{76}{10};\ \frac{20}{7};\ \frac{22}{7};\ \frac{314}{100};\ \frac{22}{10};\ \frac{125}{400};$
$\frac{13}{7};\ \frac{72}{6};\ \frac{1256}{1000}.$

3) $\frac{91}{4};\ \frac{99}{5};\ \frac{219}{7};\ \frac{143}{8};\ \frac{148}{6};\ \frac{191}{15};\ \frac{471}{25};\ \frac{527}{16};\ \frac{658}{15};\ \frac{1371}{25};\ \frac{1781}{132};$
$\frac{2781}{127};\ \frac{5847}{431}.$

§ 22. Murru põhiomadus ja murru teisendamised.

1. Murru põhiomadus.

§-s 7 nägime, et jagatis ei muutu, kui jagatavat ja jagajat ühe ning sama arvuga korrutada või jagada. Et harilik murd on kahe täisarvu (lugeja ja nimetaja) jagatis, siis on nimetatud jagatise omadus kehtiv ka murru kohta:

$$\frac{7}{8}=\frac{7\cdot3}{8\cdot3}=\frac{21}{24},$$

$$\frac{21}{24}=\frac{21:3}{24:3}=\frac{7}{8}.$$

Seda murru omadust nimetatakse murru **põhiomaduseks** ja teda võib sõnastada nii:

kui murru lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama arvuga, siis murru suurus ei muutu.

Murru põhiomadus lubab muuta murru välist kuju (s. t. tema lugeja ja nimetaja suurust) nii, et murru enda suurus seejuures endiseks jääb. Toimingut, mis muudab ainult murru kuju, aga mitte tema suurust, nimetatakse murru **teisendamiseks.** Mõnd teisendamist me juba tunneme — nimelt liigmurru teisendamist segaarvuks.

2. Murru laiendamine.

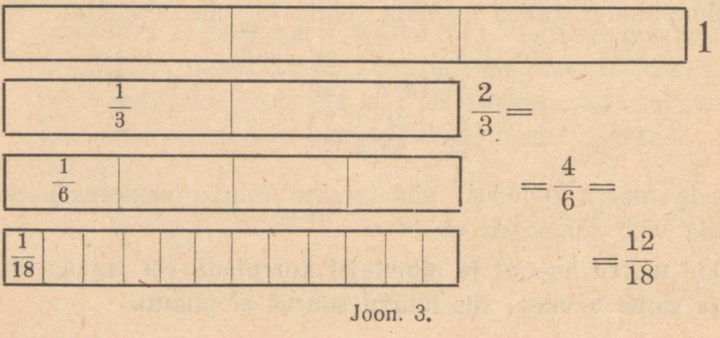
Murru üheks teisendamise võimaluseks on tema **laiendamine,** s. o. tema lugeja ja nimetaja korrutamine ühe ning sama täisarvuga. Seda täisarvu nimetatakse murru **laiendajaks.** Laiendaja märgitakse (kuid ainult vajaduse korral) lähtemurru kohale kaarekesega.

$$\text{Näide: } \overset{\overset{2}{\smile}}{\frac{3}{7}} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}.$$

Iga murdu võib kuitahes palju kordi laiendada ükskõik kas kogu aeg sama laiendajaga või ka erinevate laiendajatega.

$$\text{Näide: } \overset{\overset{2}{\smile}}{\frac{1}{3}} = \overset{\overset{2}{\smile}}{\frac{2}{6}} = \overset{\overset{5}{\smile}}{\frac{4}{12}} = \overset{\overset{3}{\smile}}{\frac{20}{60}} = \frac{60}{180}.$$

272. Uurida ja selgitada murru $\frac{2}{3}$ laiendamist joonise 3 põhjal.



Joon. 3.

273. Laiendada järgmised murrud esimeses reas 3-ga, teises reas 4-ga:

1) $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{6}{11}$; $\frac{5}{13}$; $\frac{10}{11}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{2}{15}$; $\frac{3}{16}$;
2) $\frac{4}{9}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{13}{14}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{16}{17}$; $\frac{15}{16}$; $\frac{14}{15}$.

274. Laiendada järgmised murrud esiteks 45-ga ja tulemused siis veel 3-ga:

$\frac{2}{17}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{6}{7}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{7}{11}$.

275. Sobivat laiendajat kasutades määrata järgmiste murdude puuduvad lugejad või nimetajad:

1) $\frac{1}{2} = \frac{5}{\quad}$
$\frac{2}{3} = \frac{\quad}{6}$
$\frac{2}{3} = \frac{6}{\quad}$
$\frac{3}{4} = \frac{\quad}{100}$
$\frac{3}{5} = \frac{\quad}{10}$

2) $\frac{2}{5} = \frac{8}{\quad}$
$\frac{1}{3} = \frac{3}{\quad}$
$\frac{2}{7} = \frac{\quad}{21}$
$\frac{5}{8} = \frac{\quad}{24}$
$\frac{6}{11} = \frac{18}{\quad}$

3) $\frac{4}{9} = \frac{16}{\quad}$
$\frac{2}{11} = \frac{8}{\quad}$
$\frac{5}{6} = \frac{15}{\quad}$
$\frac{7}{8} = \frac{\quad}{32}$
$\frac{1}{4} = \frac{\quad}{100}$

4) $\frac{1}{2} = \frac{\quad}{100}$
$\frac{1}{4} = \frac{250}{\quad}$
$\frac{5}{7} = \frac{20}{\quad}$
$\frac{4}{13} = \frac{\quad}{26}$
$\frac{4}{5} = \frac{80}{\quad}$

3. Murru taandamine.

Teiseks teisendamise võimaluseks on murru **taandamine,** s. o. tema lugeja ja nimetaja jagamine ühe ning sama arvuga. Seda täisarvu nimetatakse murru **taandajaks.**

Taandajaks saab kasutada ainult lugeja ja nimetaja ühiseid jagajaid.

Kui murru lugejal ja nimetajal pole muid ühiseid jagajaid kui arv 1, siis nimetatakse teda **taandumatuks murruks.** Näiteks kõik algmurrud on taandumatud murrud; peale nende aga on taandumatud veel näiteks murrud $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{3}{100}$

Kui murru lugejal ja nimetajal leidub ühiseid jagajaid, siis nimetatakse teda **taanduvaks murruks.**

Tuletame meelde, kuidas leiti arvu jagajad (vt. § 15). Selleks tuli leida arvu algtegurid. Võtame näiteks murru

$\frac{210}{315}$ ja teisendame selle taandumatuks murruks. Esitame lugeja ja nimetaja kõigepealt algtegurite korrutisena; siis taandamine võib toimuda nii, et lugejast ja nimetajast kustutatakse kõik nende **ühised** algtegurid. Sellega jagame murru lugejat ja nimetajat nende suurima ühisteguriga.

$$\begin{array}{r|l}210 & 2\\105 & 3\\35 & 5\\7 & 7\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}315 & 3\\105 & 3\\35 & 5\\7 & 7\end{array}$$

$$\text{süt.} = 3\cdot5\cdot7 = 105$$

$$\frac{210}{315}=\frac{2\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{7}}{3\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{7}}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{210}{315}=\frac{210:105}{315:105}=\frac{2}{3}$$

Seega

murru suurimaks taandajaks on lugeja ja nimetaja suurim ühistegur; see taandab murru ühekorraga taandumatuks murruks.

Murru taandamisel harilikult ei hakata otsima lugeja ja nimetaja suurimat ühist jagajat, sest hõlpsam on taandamist teostada järk-järgult; seejuures võetakse taandajaks iga kord lugeja ja nimetaja niisugune ühine tegur, mis arvude jaguvustunnuste põhjal parajasti silma torkab. Nii toimitakse seni, kuni saadakse taandumatu murd. Näide:

$$\frac{210}{315}=\underbrace{\frac{210:5}{315:5}}=\frac{42}{63}=\underbrace{\frac{42:3}{63:3}}=\frac{14}{21}=\underbrace{\frac{14:7}{21:7}}=\frac{2}{3}.$$

Jäetakse kirjutamata!

Taandamisel vajalik jagamine toimub seejuures peast. Näiteks veel üks taandamine (uurida, missuguseid taandajaid on seejuures kasutatud):

$$\frac{665}{1295}=\frac{133}{259}=\frac{19}{37}.$$

Nõue — taandada murd — tähendab, et taandada tuleb seni, kuni saadakse taandumatu murd.

Lõpuks peame veel meeles, et

ülesande vastus antakse alati taandumatu murru kujul.

276. Uurida ja selgitada murru $\frac{12}{18}$ taandamist joonise 3 põhjal.

277. Otsustada, missugused järgmistest murdudest on taandumatud:

$\frac{6}{4}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{18}{15}$, $\frac{15}{18}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{16}{17}$, $\frac{12}{21}$, $\frac{45}{95}$.

278. Taandada järgmised murrud:

1) $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{3}{21}$;
2) $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{12}{20}$, $\frac{2}{22}$, $\frac{6}{20}$.

279. Taandada järgmised murrud:

1) $\frac{8}{12}$ $\frac{12}{18}$ $\frac{20}{24}$ $\frac{18}{27}$ $\frac{16}{20}$
2) $\frac{24}{30}$ $\frac{12}{36}$ $\frac{24}{30}$ $\frac{16}{28}$ $\frac{16}{24}$
3) $\frac{12}{28}$ $\frac{28}{42}$ $\frac{30}{75}$ $\frac{21}{63}$ $\frac{32}{44}$
4) $\frac{36}{54}$ $\frac{27}{34}$ $\frac{48}{60}$ $\frac{18}{45}$ $\frac{81}{96}$
5) $\frac{36}{15}$ $\frac{40}{25}$ $\frac{64}{40}$ $\frac{48}{44}$ $\frac{32}{18}$
6) $\frac{60}{45}$ $\frac{70}{42}$ $\frac{90}{63}$ $\frac{72}{27}$ $\frac{99}{66}$

280. Taandada järgmised murrud:

1) $\frac{16}{34}$; $\frac{10}{22}$; $\frac{14}{30}$; $\frac{18}{50}$; $\frac{20}{54}$; $\frac{26}{82}$; $\frac{70}{96}$.
2) $\frac{3}{12}$; $\frac{6}{15}$; $\frac{12}{24}$; $\frac{18}{48}$; $\frac{90}{99}$; $\frac{72}{135}$; $\frac{225}{252}$.
3) $\frac{10}{25}$; $\frac{15}{20}$; $\frac{25}{40}$; $\frac{30}{85}$; $\frac{25}{75}$; $\frac{200}{225}$; $\frac{175}{300}$.
4) $\frac{27}{36}$; $\frac{36}{45}$; $\frac{90}{126}$; $\frac{63}{72}$; $\frac{144}{270}$; $\frac{108}{150}$; $\frac{243}{432}$.
5) $\frac{10}{20}$; $\frac{20}{30}$; $\frac{40}{70}$; $\frac{500}{800}$; $\frac{400}{900}$; $\frac{250}{450}$; $\frac{35000}{40000}$.

281. Taandada järgmised murrud:

1) $\frac{64}{72}$ $\frac{80}{96}$ $\frac{72}{108}$ $\frac{124}{136}$ $\frac{84}{150}$
2) $\frac{98}{144}$ $\frac{64}{300}$ $\frac{180}{288}$ $\frac{144}{192}$ $\frac{315}{360}$
3) $\frac{98}{210}$ $\frac{84}{150}$ $\frac{135}{240}$ $\frac{324}{500}$ $\frac{81}{108}$
4) $\frac{60}{225}$ $\frac{150}{250}$ $\frac{45}{120}$ $\frac{75}{210}$ $\frac{180}{144}$
5) $\frac{168}{369}$ $\frac{455}{1675}$ $\frac{940}{5600}$ $\frac{4750}{5960}$ $\frac{1000}{1024}$

282. Ühes käitises jaotati 18 kg võid võrdselt 15-le inimesele, teises käitises aga 24 kg võid 20-le inimesele. Kummas käitises sai üks isik rohkem võid?

4. Murdude samanimeliseks teisendamine.

Võrrelda kaht murdu tähendab otsustada, kumb neist on suurem. Seda on eriti kerge otsustada, kui antud murdudel on kas lugejad võrdsed või nimetajad võrdsed.

283. Otsustada, kumb igast kahest antud murrust on suurem:

1) $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{8}$ ja $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$ ja $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$ ja $\frac{5}{7}$; $\frac{7}{10}$ ja $\frac{7}{12}$.
2) $\frac{3}{5}$ ja $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{8}$ ja $\frac{7}{8}$; $\frac{7}{12}$ ja $\frac{8}{12}$; $\frac{14}{18}$ ja $\frac{15}{18}$.

Vaatame nüüd, kuidas saab võrrelda murde, millel pole võrdsed ei lugejad ega ka nimetajad.

Olgu näiteks vaja seada murrud

$$\frac{7}{8},\ \frac{3}{4} \text{ ja } \frac{15}{16}$$

kasvavasse suuruse järjekorda.

Laiendame neid murde nii, et nimetajad saaksid võrdseks. On kohe näha, et esimest murdu 2-ga ja teist murdu 4-ga laiendades saame kõik murrud kuueteistkümnendike kujul:

$$\frac{14}{16},\ \frac{12}{16} \text{ ja } \frac{15}{16}.$$

Nüüd on ka otsekohe selge, et teine murd on kõige väiksem ja kolmas murd kõige suurem. Seda märgime nii:

$$\frac{12}{16} < \frac{14}{16} < \frac{15}{16}, \text{ seega } \frac{3}{4} < \frac{7}{8} < \frac{15}{16}.$$

Märk „<”, samuti „>”, on suurem-väiksem-olemise märk; tema tipu poole kirjutatakse alati väiksem suurus. Loetakse seda märki sõnadega „on väiksem kui” või „on suurem kui”, vastavalt sellele, mis pidi ta parajasti kirjutatud on. Näiteks kirjutist $2 < 3$ loetakse nii: *kaks on väiksem kui kolm*, aga kirjutist $3 > 2$ loetakse: *kolm on suurem kui kaks*.

Murdude samanimeliseks teisendamisel tuleb kõigepealt murrud taandada, kui see on vajalik, ja siis valida ühine nimetaja. Selleks sobib antud nimetajate iga ühiskordne. Eelistame aga tarvitada väikseimat neist, sest siis saame läbi võimalikult väikeste arvudega. Eelmises näites oleks ju saanud võtta ühiseks nimetajaks ka arvud 32, 48, 64 jne., aga nende kasutamine pole otstarbekohane. Võttes eelmises näites ühiseks nimetajaks arvu 64, tuleks laiendajad valida järgmiselt:

$$\overbrace{\tfrac{7}{8}}^{8};\ \overbrace{\tfrac{3}{4}}^{16};\ \overbrace{\tfrac{15}{16}}^{4}\ \text{ehk}\ \tfrac{56}{64};\ \tfrac{48}{64};\ \tfrac{60}{64},$$

kust samuti selguks, et $\frac{3}{4} < \frac{7}{8} < \frac{15}{16}$.

Teisendame veel samanimeliseks näiteks murrud $\frac{5}{12}$ ja $\frac{4}{9}$.

$$\begin{array}{l} 12 = 2\cdot 2\cdot 3\\ \ \ 9 = 3.3\\ \hline \text{vük. }(12;\ 9) = 12\cdot 3 = 36\end{array} \qquad \left.\begin{array}{l}36:12=3\\ 36:\ \ 9=4\end{array}\right\}\ \text{laiendajad}$$

Sobivad laiendajad leiame, kui ühist nimetajat 36 jagame kummagi antud nimetajaga; saame 3 ja 4. Seega

$$\tfrac{5}{12} = \tfrac{15}{36}\ \text{ja}\ \tfrac{4}{9} = \tfrac{16}{36}.$$

Nüüd on selgunud ühtlasi ka, et $\frac{5}{12} < \frac{4}{9}$.

Kokkuvõttes:

murdude samanimeliseks laiendamisel võetakse ühiseks nimetajaks antud nimetajate väikseim ühiskordne; sobivad laiendajad saadakse ühist nimetajat antud nimetajatega jagades.

284. Teisendada samanimeliseks järgmised murrupaarid:

1) $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{6}$
$\frac{1}{5}$ ja $\frac{3}{10}$
$\frac{3}{4}$ ja $\frac{4}{8}$
$\frac{1}{4}$ ja $\frac{5}{12}$
$\frac{1}{3}$ ja $\frac{7}{9}$.

2) $\frac{3}{4}$ ja $\frac{1}{12}$
$\frac{4}{5}$ ja $\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$ ja $\frac{5}{9}$
$\frac{5}{6}$ ja $\frac{1}{3}$
$\frac{3}{8}$ ja $\frac{5}{16}$

3) $\frac{1}{4}$ ja $\frac{2}{3}$
$\frac{3}{4}$ ja $\frac{1}{8}$
$\frac{1}{6}$ ja $\frac{2}{3}$
$\frac{2}{5}$ ja $\frac{7}{10}$
$\frac{1}{2}$ ja $\frac{5}{9}$

4) $\frac{1}{3}$ ja $\frac{5}{6}$
$\frac{2}{3}$ ja $\frac{1}{6}$
$\frac{3}{4}$ ja $\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{5}$
$\frac{1}{8}$ ja $\frac{4}{5}$

285. Teisendada samanimeliseks järgmised murruread:

1) $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{12}$
$\frac{2}{5}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{6}{10}$; $\frac{17}{30}$
$\frac{3}{8}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{11}{16}$
$\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{3}$

2) $2\frac{1}{8}$; $2\frac{1}{4}$; $1\frac{3}{4}$; $2\frac{5}{16}$; $2\frac{3}{8}$
$\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{8}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{5}{6}$
$\frac{1}{3}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{10}$; $\frac{7}{30}$
$\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{16}$; $\frac{3}{8}$

286. Seada kasvavasse suuruse järjekorda murrud igas järgmises murrukolmikus:

1) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{4}$
$\frac{1}{6}$, $\frac{1}{15}$ ja $\frac{1}{5}$
$\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$ ja $\frac{2}{3}$
$\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ ja $\frac{2}{5}$
$\frac{5}{6}$, $\frac{4}{9}$ ja $\frac{1}{2}$

2) $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{3}$ ja $\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ ja $\frac{3}{4}$
$\frac{1}{9}$, $\frac{2}{3}$ ja $\frac{5}{8}$
$\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$ ja $\frac{1}{10}$
$\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$ ja $\frac{7}{10}$

3) $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$ ja $\frac{5}{12}$
$\frac{5}{14}$, $\frac{2}{7}$ ja $\frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}$, $\frac{3}{10}$ ja $\frac{1}{3}$
$\frac{5}{8}$, $\frac{3}{16}$ ja $\frac{1}{4}$
$\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$ ja $\frac{3}{20}$

287. Üks tööline võib valmistada 3 kuube 5 päevaga, teine aga võib teha 5 samasugust kuube 8 päevaga. Kumb tööline on osavam?

288. 2 grammi ühte rohtu maksab 3 kopikat, 5 grammi teist rohtu — 9 kopikat. Kumb rohi on kallim?

289. Kumb murdudest $\frac{5}{6}$ ja $\frac{21}{25}$ on teisest suurem?

290. Kumb murdudest $\frac{3}{100}$ ja $\frac{19}{625}$ on teisest väiksem?

Seada kahanevasse suuruse järjekorda murrud igas järgmises reas:

1) $\frac{2}{13}$; $\frac{5}{18}$; $\frac{7}{24}$; $\frac{11}{36}$; $\frac{9}{26}$; $\frac{13}{18}$
2) $\frac{3}{22}$; $\frac{2}{11}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{6}{77}$; $\frac{9}{42}$; $\frac{13}{154}$
3) $\frac{5}{48}$; $\frac{9}{16}$; $\frac{7}{240}$; $\frac{11}{30}$; $\frac{13}{60}$; $\frac{11}{16}$
4) $\frac{19}{60}$; $\frac{3}{20}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{17}{360}$; $\frac{23}{72}$; $\frac{25}{36}$

291. Ühes käitises kudus 24 töölist 69 m riiet sama aja jooksul kui 42 töölist 119 m teises käitises. Kummas käitises oli tööjõudlus suurem?

292. Kaks noortebrigaadi võistles linna taastamisel tingimusel, et võitjaks tuleb see brigaad, kumma ühe liikme kohta tuleb kvartaali kohta rohkem taastamistööl oldud päevi. 15-liikmeline brigaad andis 82 üksikmehe-tööpäeva, 21-liikmeline brigaad aga 115 tööpäeva. Kumb brigaad tuli võitjaks?

Sisukord.

Aritmeetika.

I. Seniste teadmiste kordamine ja laiendamine ning arvutamisokuse arendamine.

II. Algarvud ja kordarvud.

Teine, parandatud ja täiendatud trükk.

Vastutav toimetaja P. Parts.
Keeleline toimetaja E. Kindlam.

Ladumisele antud 18. V 1948. Trükkimisele antud 9. VIII 1948. Trükiarv 17.000. Paber 56×79, 1/16. Trükipoognaid 7,5. Trükitähti trükipoognas 34.665. Arvutuspoognaid 6,5. MB-06684. Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartu, Vallikraavi 4. Tellimise nr. 1007.

На эстонском языке.
О. Рюнк и Х. Роос. Математика для V класса.

RBL. 2.25