

Mag. ALBERT BORKVELL.

Matemaatilise analüüsi

põhimõisted ja rakendused.

**Õpperaamat
kesk- ja kutsekoolidele.**

K. O.-Ü. „LOODUS“ Tartus 1927.

Mag. Albert Borkvell.

Matemaatilise analüüsi põhimõisted ja rakendused.

Õpperaamat
kesk- ja kutsekoolidele.

23245

2



K. O.-Ü. „Looduse“ korrektor H. Pürkop.

A 4882 I



H. Laakmanni trükk, Tartus 1927

Eessõna.

Käesolev raamat on määratud koolidele ja iseõppijaile. Olen varustanud raamatu näidete ja ülesannetega ning teoreetiliste paladega niisuguses ulatuses, et ta mitmetüübiliste koolide õppekavadele vastaks. Mis puutub raamatus ettetulevatesse näidetesse, siis olen neid niisuguses ulatuses käsitlenud, et neile järgnevate ülesannete lahendamine raskusi ei tekitaks. Teoreetilisi palasid olen katsunud väljendada, kus vähegi võimalik, praktiliste näidete kaudu, mõnes kohas meelega kõrvale kaldudes puht-teoreetilistest tõestusviisidest, mis peaks märksa kergendama niihästi õpetaja kui ka õpilase tööd ning kokku hoidma nende aega. Peale selle on käesolev raamat varustatud ülesannete vastustega ja matemaatilise analüüsi rakendustes tarvisminevate valemite- ja mõnede teiste tabelitega.

Sisuliselt on materjal raamatus nõnda korraldatud, et teda võib järkjärguliste lisandustega — ilma et midagi vahele tuleks jätta — tarvitada keskkooli humanitaar- ja reaalharudes, tehnikagümnaasiumides, sõjakooli spetsiaalklassides, merekadettide klassis ja merekoolis, käsiraamatuna Tallinna tehnikumis ja Vabariigi kõrgemas sõjakoolis. §§ 1—12 oleks määratud keskkooli humanitaarharule, §§ 1—31 reaalharule ja tehnikagümnaasiumile, §§ 1—39 — sõjakooli spetsiaalklassidele, §§ 1—47 — tehnikumile ja kõrgemale sõjakoolile. Sellega ei tuleks ühes või teises õppeasutises õpetamisel midagi materjalist vahele jätta, kuid ainult piirduda teatud paragraafide hulgaga.

Täna kõiki ametivendi, kes mulle üht või teist viisi raamatu kokku-seadmisel kaasa on aidanud. Eriti tänu võlgnen koolide peainspektorile J. Kiivetile, kes käsikirja läbi luges ja asjalikke märkusi tegi, Tallinna II tütarlastegümnaasiumi inspektorile J. Grüntalile korrektuuri ja J. Vogtile graafikute valmistamise eest.

A. Borkvell.

I peatükk. Funktsionaalne olenevus.

§ 1. Konstantsed ja muutuvad suurused.

Suuruste väärtusi matemaatilises analüüsis väljendatakse arvudena, kusjuures suurused ise võivad olla konstantsed või muutuvad. Kui suurus tema uurimisel oma väärtust ei muuda, s. o. ta jääb alati muutumatuks, siis nimetatakse teda **konstantseks suuruseks**; kui aga suurus tema uurimisel omab mitmesuguseid väärtusi, siis nimetatakse teda **muutuvaks suuruseks**.

Konstantseid suurusi tähistatakse alfabeedi esimeste tähtedega

a, b, c, d, \dots

või

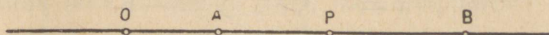
$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

$b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$

ja muutuvaid suurusi alfabeedi viimaste tähtedega

x, y, z, t, u, \dots

Konstantsete ja muutuvate suuruste väärtusi võime geomeetriliselt ära määrata sirgjoonel joonlõikudes viimaste otsapunktide kaudu, kui sellel sirgjoonel võtta algpunktiks ehk 0-punktiks (nullpunktiks) mõni kindel punkt. Ühele poole, näit. paremale poole 0-punktist võetud väärtusi loeme positiivseteks, teisele poole — negatiivseteks. Mõõtuksused võivad vabalt valitud olla.

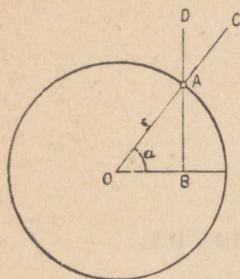


1. joonis.

Olgu 1. joon. joonlõigud $OA = a$, $OP = x$ ja $OB = b$, kus punktidele A , P ja B vastavad väärtused a , x ja b . Olgu a ja b konstantsed suurused ja x muutuv, mis võib omada iga väärtuse vahemikus a -st kuni b -ni; sellega x -i väärtused peituvad vahemikus a -st kuni b -ni ja punkt P võib muuta oma asendit sirgjoonel A -st kuni B -ni.

Kui muutuv suurus x võib omada igasuguseid väärtusi nii positiivseid kui ka negatiivseid, s. o. kui ta üks piir a läheneb $-\infty$ -le ja teine piir b läheneb $+\infty$ -le, siis ütleme, et x -i väärtused peituvad vahemikus $-\infty$ -st kuni $+\infty$ -ni. Sel juhul iga punkt sirgjoonel rahuldab x -i väärtust.

Konstantsete ja muutuvate suuruste suhtes tuleb tähele panna, et nende iseloom oleneb tihti nähtuse käigust: suurus, mis ühe nähtuse käigu juures on konstantne, võib teise nähtuse käigu juures olla muutuv ja ümberpöörduvalt. Näit., oletame, et punkt A (2. joon.) liigub tasapinnal. Kui punkt A liigub ringjoont mööda, siis on ringi raadius r konstantne suurus ja nurk α muutuv. Kui punkt A liigub sirgjoont OC mööda, siis on r muutuv ja α konstantne suurus. Liigub aga punkt A sirgjoont BD mööda, on r ja α mõlemad muutuvad suurused, kuid korrutis $r \cdot \cos \alpha = OB$ on konstantne suurus. Sarnane on ka elliptiline liikumine, kus raadiusvektorid on teatud vahemikus muutuvad suurused, kuid nende summa jääb alati konstantseks suuruseks.



2. joonis.

§ 2. Funktsiooni mõiste.

Kui kaks muutuvat suurust x ja y on võrrandina üksteisega ühenduses, siis on need muutuvad suurused üksteisega vastavas olenevuses ehk rippuvuses: nad on üksteisega funktsionaalselt seotud, nii et igale vabalt valitud ühe muutuja väärtusele vastab üks või rohkem teise muutuja väärtusi.

Näiteks, olgu niisugune võrrandi kuju

$$y = 6 - x - x^2,$$

kus igale üksikule x -i väärtusele vastab üks ja ainult üks y -i väärtus:

kui	$x = -4$,	siis	$y = -6$,
"	$x = -3$,	"	$y = 0$,
"	$x = -2$,	"	$y = 4$,
"	$x = -1$,	"	$y = 6$,
"	$x = 0$,	"	$y = 6$,
"	$x = 1$,	"	$y = 4$,
"	$x = 2$,	"	$y = 0$,
"	$x = 3$,	"	$y = -6$.

Ümberpöörduvalt, iga vabalt võetud y -i väärtus määrab ka vastava x -i väärtuse kindlaks, kuid siin tuleb tähele panna, et antud avaldus on x -i suhtes teiseastmeline, sellepärast teda x -i suhtes ilmutades

$$x = \frac{-1 + \sqrt{25 - 4y}}{2}$$

näeme, et igale üksikule y -i väärtusele vastab kaks (reaalset või imaginaarset) x -i väärtust:

kui $y = 0$, siis $x = 2$ ja $x = -3$

" $y = 4$, " $x = 1$ ja $x = -2$

" $y = 8$, " mõlemad x -i väärtused on imaginaarsed.

Kui avalduses $y = 6 - x - x^2$ x omandab vabalt võetud väärtusi, siis nimetatakse x **rippumatuks muutujaks** ehk **argumendiks**; teise muutuja y -i väärtused olenevad siis x -ist, sellepärast nimetatakse y **rippuvaks muutujaks** ehk **funktsiooniks**. Nii siis y on x -i funktsioon.

Definitsioon. Muutuv suurus y nimetatakse muutuva suuruse x -i funktsiooniks vahemikus a -st kuni b -ni, kui igale üksikule x -i väärtusele selles vahemikus vastab üks või rohkem y -i väärtusi.

Näiteks, ringi pikkus ja ringi pind on ringi raadiuse funktsioonid

$$y = 2\pi r, S = \pi r^2;$$

sarnaselt on ka kera pind ja maht ringi raadiuse funktsioonid

$$S = 4\pi r^2, V = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

kus r on argument, mille muutumine muudab ühtlasi funktsioonide y , S ja V väärtusi.

Kui ringi raadius on konstantne suurus, siis võime ringis sektorit, segmenti ja kaart vaadelda kui vastava kesknurga funktsioone (3. joon.), sest argumendi (kesknurga) kasvamisel kasvab ka vastav funktsioon ja ümberpöördukt.

Sarnaselt on valguse intensiivsus valgustava allika kauguse funktsioon, temperatuur — aja funktsioon, kellapendli võnkumise aeg on pendli pikkuse funktsioon j. n. e.

Kui funktsionaalne olenevus x -i ja y -i vahel on sarnaselt kujundatud, et võrrand on lahendatud ühe muutuja, näit. y -i suhtes, siis nimetatakse niisugust kuju **ilmutatud kujuks** ehk **ilmutatud funktsiooniks**, s. o. y on x -i ilmutatud funktsioon; kui aga võrrand ei ole x -i ega y -i suhtes ilmutatud, siis nimetatakse seda kuju **ilmutamatuks kujuks**, näit.,

$$x^2 + y^2 - 16 = 0,$$

$$2x + 4y^2 - 3 = 0.$$

Neil juhtudel y on x -i ilmutamatu funktsioon, ehk ümberpöördukt: x on y -i ilmutamatu funktsioon. Kuid paljudel juhtudel võib ilmutamatule funktsioonile anda ikka ilmutatud kuju, näit. eelmistele:

$$y = \sqrt{16 - x^2},$$

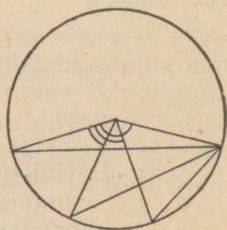
$$y = \frac{\sqrt{3 - 2x}}{2}.$$

Üldjuhtudel, kui kindlat funktsiooni antud ei ole, tähistatakse ilmutatud funktsioone sümboolselt

$$y = f(x), \text{ ehk } y = F(x), \text{ ehk } y = \varphi(x), \text{ jne.}$$

Kui on tegemist paljude üksteisest erinevate funktsioonidega, siis tähistatakse neid järgmiselt (indeksitega)

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x).$$



3. joonis.

Ilmutamatuid funktsioone tähistatakse

$$f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0, \text{ jne.}$$

Viimaste tähiste all mõistetakse ikka niisugust ilmutamatu funktsiooni kuju, mille parempoolne osa võrdub nulliga.

Ülalpool toodud näidetest selgub, et vabalt võetud x -i väärtus ei piirdu alati mitte ühe y -i väärtusega, vaid neid võib ka kaks või rohkem olla. Selle tõttu jaotatakse funktsioonid ühe-, kahe-, kolme- jne. väärtuselisteks. Ülalpool nägime ka, et mitte üksi x ei pruugi olla rippumatu muutuja, vaid seda võib olla ka y , kus siis x on rippuv muutuja ehk funktsioon. Kui y on mõni x -i funktsioon, siis võime ka alati x -i lugeda y -i funktsiooniks: võib ilmutada üht või teist funktsioonina, näit.:

$$\text{kui } y = x^2, \text{ siis } x = \sqrt{y},$$

$$, \quad y = 10^x, \quad , \quad x = \log y;$$

ehk üldiselt

$$\text{kui } y = f(x), \text{ siis } x = \varphi(y),$$

mis kujutavad ikka üht ja sama nähtuse käiku.

§ 3. Funktsioonide liigid.

- a) **Definitsioon.** Kui funktsioon on moodustatud rippumatust muutujast ja konstantsetest suurustest liitmise, lahutamise või korrutamise teel, siis nimetatakse seda **ratsionaalseks täisfunktsiooniks**.

Jagamine rippumatu muutujaga ja selle juurimine ei või siin esineda.

$$y = a_0x + a_1$$

on esimese astme ratsionaalne täisfunktsioon, sest x esineb esimeses astmes;

$$y = a_0x^2 + a_1x + a_2$$

on teise astme ratsionaalne täisfunktsioon; analoogiliselt edasi arendades saame üldiselt

$$(1) \quad y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

mis on n -astme ratsionaalne täisfunktsioon, kus

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$$

on konstantsed suurused (negatiivsed või positiivsed, täis- või murdarvud, võivad olla ka irratsionaalsed).

x -i ratsionaalne täisfunktsioon oleks

$$y = 3x^5 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6,$$

mis on moodustatud x -ist ja konstantsetest suurustest $3, \frac{4}{3}, \frac{1}{2}$ ja 6 liitmise, lahutamise ja korrutamise teel.

Sarnaselt oleks x -i ratsionaalne täisfunktsioon

$$y = 2 [(3x - 2x^2 + 4) (1 - x^2) - 3 (2 - x)] - 4x,$$

sest sulgusid avades ja liikmeid korraldades saame üldkujule (1) vastava avalduse

$$y = 4x^4 - 6x^3 - 12x^2 + 8x - 4.$$

b) **Definitsioon.** Kui funktsioon on moodustatud rippumatust muutujast ja konstantsetest suurustest liitmise, lahutamise või korrutamise ja jagamise teel, kusjuures rippumatu muutuja esineb jagajas, siis nimetatakse seda **ratsionaalseks murdfunktsiooniks**.

Rippumatu muutuja suhtes juurimine ei või siin esineda.

Funktsioonid

$$y = \frac{ax+b}{c+ax}, \quad y = \frac{3}{x-1} - \frac{4x-5}{2x}, \quad y = \frac{4x^2-2 + \frac{1-x+x^2}{2-x}}{\frac{5x^2-2}{4x} + 3x^3 - 2x + 8}$$

on ratsionaalsed murdfunktsioonid. Siin võrreldes ratsionaalsete täisfunktsioonidega esineb veel jagamine rippumatu muutujaga.

Ratsionaalseid murdfunktsioone on ikka võimalik ümber korraldada nõnda, et esineks ainult üks jagamine, s. o. iga ratsionaalset murdfunktsiooni on võimalik teisendada alati kahe ratsionaalse täisfunktsiooni jagatiseks. Sellega võime igale ratsionaalsele murdfunktsioonile anda kuju

$$(2) \quad y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_{m-1}x + b_m},$$

kus $n \geq m$. Näiteks: funktsiooni

$$y = \frac{4x^2 - 2 + \frac{1-x+x^2}{x-2}}{\frac{5x^2-2}{4x} + 3x^3 - 2x + 8}$$

korraldades saame kuju (2)

$$\begin{aligned} y &= \frac{(4x^2 - 2)(x - 2) + 1 - x + x^2}{\frac{5x^2 - 2 + (3x^3 - 2x + 8)4x}{4x}} = \frac{4x(4x^3 - 7x^2 - 3x + 5)}{(x - 2)(12x^4 - 3x^2 + 32x - 2)} = \\ &= \frac{16x^4 - 28x^3 - 12x^2 + 20x}{12x^5 - 24x^4 - 3x^3 + 38x^2 - 66x + 4}. \end{aligned}$$

Kui funktsioonis (2) $n < m$, siis on ta **lihtratsionaalne murdfunktsioon**; kui aga $n \geq m$, siis on ta **liigratsionaalne murdfunktsioon**, mida on ikka võimalik kujundada ratsionaalse täisfunktsiooni ja lihtratsionaalse murdfunktsiooni summaks. Olgu ratsionaalne murdfunktsioon

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

kus $n > m$; jagamise teel on ikka võimalik eraldada tema täisosa, s. o.

$$y = f_1(x) + \frac{f_2(x)}{\varphi(x)},$$

kus $f_1(x)$ on ratsionaalne täisfunktsioon ja $\frac{f_2(x)}{\varphi(x)}$ on lihtratsionaalne murdfunktsioon. Eespool-olev näide on lihtratsionaalne murdfunktsioon, nagu lõpusaadusest näeme, on $n < m$, s. o. $4 < 5$; kuid

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^3 - 4x^2 + 6x - 8}{x^2 - 2x + 1}$$

on liigratsionaalne murdfunktsioon, sest $n > m$ ($3 > 2$). Jagades

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + 6x - 8 & x^2 - 2x + 1 \\ \underline{x^3 - 2x^2 + x} & x - 2 \\ -2x^2 + 5x - 8 & \\ \underline{-2x^2 + 4x - 2} & \\ x - 6 & \end{array}$$

saame, et

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = x - 2 + \frac{x - 6}{x^2 - 2x + 1},$$

kus

$$f_1(x) = x - 2 \text{ ja } f_2(x) = x - 6.$$

- c) **Definitsioon.** Kui funktsioon on moodustatud rippumatust muutujast ja konstantsetest suurustest liitmise, lahutamise, korrutamise või jagamise ja juurimise teel, kusjuures rippumatu muutuja esineb juure all, siis nimetatakse seda **irratsionaalseks funktsiooniks**.

Funktsioonid

$$y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt[5]{x^2},$$

$$y = 2x - \sqrt{3x^2 - x + 6},$$

$$y = \frac{\sqrt[3]{2 - x^2} - 4x}{3x^2 + \sqrt{1 - x}}$$

on irratsionaalsed funktsioonid. Siin näeme, et rippumatul muutujal vähemalt üheks astmenäitajaks on murdarv:

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad y = \sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}};$$

vastasel korral ei ole funktsioon mitte irratsionaalne, vaid ratsionaalne, näit.:

$$y = \sqrt{x^4} = x^2, \quad y = \sqrt[3]{8x^6} = 2x^2, \quad y = \sqrt{3x^8} = x^4\sqrt{3}.$$

Ratsionaalseid ja irratsionaalseid funktsioone nimetatakse ühiselt **algebraalisteks funktsioonideks**.

Neid moodustatakse algebraliste tehete: liitmise, lahutamise, korrumtamise, jagamise ja juurimise abil. Need olid ilmutatud algebralised funktsioonid. Kuid, nagu teame, võivad nad esineda ilmutamatus kujus

$$F(x, y) = 0,$$

mida on võimalik ikka algebralisel teel y -i suhtes ilmutada, kui astmenäitaja n ei ole suurem kui 4. Kui aga $n \geq 5$, siis on see võimalik ainult mõnel erijuhul. Edaspidi käsitleme peamiselt funktsioone ilmutatud kujus.

d) Peale algebraliste funktsioonide esinevad veel nõndanimetatud **transsendentsed funktsioonid**. Nende hulka kuuluvad:

1. **eksponentfunktsioonid**

$$y = a^x,$$

kus a on konstant,

2. **logaritmifunktsioonid**

$$y = \log x,$$

3. **trigonomeetrised** ehk **nurgafunktsioonid**

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \tan x, \quad y = \cot x,$$

4. **tsüklomeetrised** ehk **arkusfunktsioonid**

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \arctan x, \quad y = \operatorname{arccot} x.$$

Nurgafunktsioonide $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ kohta olgu tähendatud, et siin x -i suhtes ei tarvitata nurgamõõtu mitte kraadides, minutites ja sekundites, vaid radiaalmõõdus, s. o. ringi kesknergale vastava kaarepikkuse suhet ringiraadiusega. Kui ringiraadiuse võtame üksuseks, siis x mõõdetakse ringi kaarepikkusega. 360° nurgale vastab sellega terve ringi pikkus, s. o. 2π , 1° nurgale vastab kaar

$$\frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} = 0,01745 \dots$$

ja nurgale, milles a° , vastab kaar

$$\frac{\pi a}{180} = a \cdot 0,01745 \dots;$$

kaares, mille pikkus on sama kui ringiraadius, on

$$a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 45''.$$

See nurk nimetatakse **radiaaniks**; see on üksusnurk, mille kaudu teisi nurki ringis ära määratakse. Olgu ringis (4. joon.) nurk

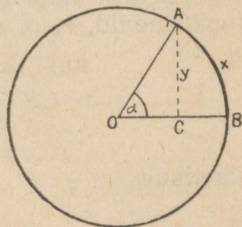
$$\widehat{AOB} = a$$

ja raadius

$$\overline{AO} = 1,$$

siis nurgale a vastav kaar

$$\widehat{AB} = x = \frac{\pi a}{180}.$$



4. joonis.

Sellest välja minnes on funktsiooni

$$y = \sin x$$

mõte selles, et x on kaar (arcus), mille siinus (AC) on võrdne y -ga; sel juhul kirjutatakse seda ümberpöörduvalt järgmiselt

$$x = \arcsin y,$$

x on arkus siinus y , s. o. x on niisugune kaar, mille siinus on y . Analoogiliselt võime kirjutada:

$$y = \cos x, \quad x = \arccos y, \quad y = \tan x, \quad x = \arctan y, \quad y = \cot x, \quad x = \operatorname{arccot} y.$$

Funktsioonid $y = \arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$ saadakse nurgafunktsioonidest ümberpööramise teel — muutujaid ümber vahetades, ja nimetatakse tsüklomeetristeks ehk arkusfunktsioonideks. Nad on nurgafunktsioonide ümberpöörduvad funktsioonid, sellepärast nimetatakse neid ka **pöördfunktsioonideks**.

Sarnaselt on logaritmifunktsioon

$$y = \log_a x$$

eksponentfunktsiooni

$$y = a^x$$

pöördfunktsioon, sest kui $y = a^x$, siis ümberpöörduvalt $x = \log_a y$ ja muutujaid ümber vahetades saame $y = \log_a x$.

Nurgafunktsioonide

$$y = \sin x \quad \text{ja} \quad y = \cos x$$

väärtused ei muutu, kui rippumatu muutuja x -i väärtus kasvab või kahaneb 2π ehk üldiselt $2n\pi$ võrra, kus n on positiivne täisarv; tähendab

$$\sin(x \pm 2n\pi) = \sin x, \quad \cos(x \pm 2n\pi) = \cos x.$$

Siin $\sin x$ ja $\cos x$ väärtused korduvad perioodiliselt; sellepärast nimetatakse $\sin x$ ja $\cos x$ **perioodilisteks funktsioonideks**. Nende periood on 2π .

Samuti on ka

$$y = \tan x \quad \text{ja} \quad y = \cot x$$

perioodilised funktsioonid, sest

$$\tan(x \pm n\pi) = \tan x, \quad \cot(x \pm n\pi) = \cot x,$$

kus perioodiks on π .

Sellest välja minnes näeme, et nurgafunktsioonide ümberpöörduvad funktsioonid, s. o. arkusfunktsioonid, on üldiselt mitmeväärtuselised, sest

$$\begin{aligned} \text{kui } y &= \sin(x \pm 2n\pi), & \text{siis } x \pm 2n\pi &= \arcsin y, \\ \text{„ } y &= \cos(x \pm 2n\pi), & \text{„ } x \pm 2n\pi &= \arccos y, \\ \text{„ } y &= \tan(x \pm n\pi), & \text{„ } x \pm n\pi &= \arctan y, \\ \text{„ } y &= \cot(x \pm n\pi), & \text{„ } x \pm n\pi &= \operatorname{arccot} y; \end{aligned}$$

järelikult

$$\begin{aligned} \arcsin x &= y \pm 2n\pi, \\ \arccos x &= y \pm 2n\pi, \\ \arctan x &= y \pm n\pi, \\ \operatorname{arccot} x &= y \pm n\pi, \end{aligned}$$

kus n võib olla mistahes positiivne täisarv. Argumendi x igale üksikule väärtusele vastab määramata hulk funktsiooniväärtusi. Nurgafunktsioonid on perioodilised, kuid nende pöördfunktsioonid — arkusfunktsioonid — ei ole perioodilised, vaid mitmeväärtuselised.

Arkusfunktsioone on võimalik kujutada üheväärtuselistena siis, kui y -väärtusi piirata teatud vahemikuga.

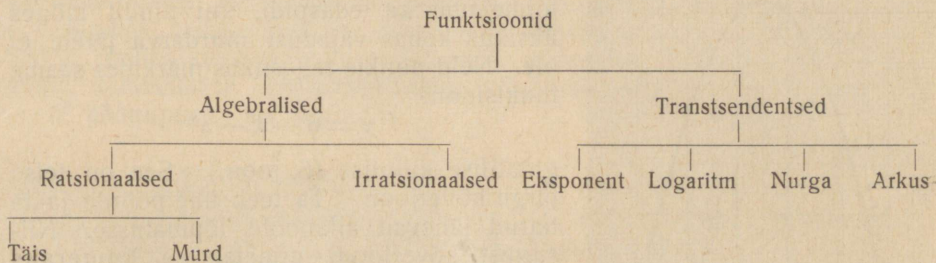
$$y = \arcsin x \text{ ja } y = \arctan x$$

on üheväärtuselised funktsioonid siis, kui y muutuks piirides $-\frac{\pi}{2}$ kuni $+\frac{\pi}{2}$;

$$y = \arccos x \text{ ja } y = \text{arccot } x$$

on üheväärtuselised funktsioonid jälle siis, kui y muutuks piirides 0-ist kuni π -ni.

Funktsioonide liike kokku võttes saame järgmise skeemi:



§ 4. Funktsioonide graafiline kujutamine.

Funktsioonide muutumist võime kujutada kahel teel: esiteks, argumendi ja temale vastavaid funktsiooni väärtusi üles märkides, s. o. nende väärtuste tabelit kokku seades ja, teiseks, koordinaadistikus graafilisel teel, märkides argumendi muutumist üht telge mööda ja funktsiooni muutumist teist telge mööda.

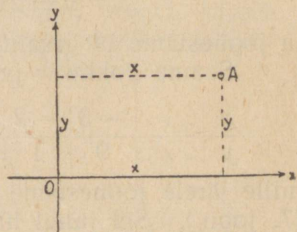
Meil on edaspidi tegemist kahe muutuva suurusega, sellepärast tarvitame kaht perpendikulaarset telge, s. o. teljestikku tasapinnal, mille lõikepunkti võtame 0-punktiks. Täisnurksete koordinaatide süsteemi võtame selleks, et funktsioonide uurimist, nende kõverate käiku ja muutumist oleks lihtsam arvutada.

Kui on punkti A (5. joon.) asend teada, siis võime leida tema koordinaadid x ja y , ja ümberpöörduvalt, kui on punkti A koordinaadid x ja y antud, siis võime punkti A asendi tasapinnal ära märkida.

Punkti analüütiliselt kujutame järgmiselt

$$A \equiv (x|y).$$

Argumendi ja temale vastavaid funktsiooni väärtusi võime saada määramata palju; igale niisugusele väärtusepaarile vastab tasapinnal



5. joonis.

teatud punkt. Nende punktide äramärgimisega võime funktsiooni graafilise kju tasapinnal üles joonestada. Mida tihedamalt võtame punkte, seda täpsamaks kujuneb funktsiooni graafiline kju.

1. näide. Võtame teise järgu funktsiooni

$$y = 6 - x - x^2,$$

ja seame kokku x ja y vastavate väärtuste tabeli ehk n. n. x ja y väärtuste redeli:

kui	$x =$...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
siis	$y =$...	-6	0	4	6	6	4	0	-6	...

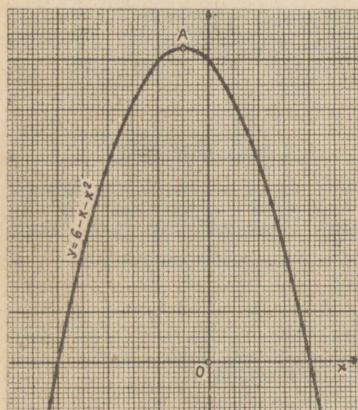
See tabel määrab ära punktid, mille koordinaadid on

$$(-4|6), (-3|0), (-2|4), (-1|6), (0|6), (1|4), (2|0), (3|-6).$$

x -ile on siin antud ainult täisarvulised väärtused, et lihtsam oleks arvutada. Nõnda toimetame ka edaspidi, kui ainult mõnes üksikus kohas vajadust murdarvu järele ei ole. Neid punkte teljestikus märkides saame funktsiooni

$$y = 6 - x - x^2$$

graafilise kujutise (6. joon.). See on teise järgu kõverjoon. Ta teeb ühe pöörde ja ta harud lähevad allapoole lõpmatuse. Niisugust kõverjoont nimetatakse **kumeraks kõverjooneks**. Kumer kõverjoon hakkab tulema altpoolt lõpmatusest ja tõuseb punktini A , mida nimetatakse **kõverjoone** ehk **funktsiooni maksimumpunktiks**; siis hakkab langema ja läheb allapoole lõpmatuse.



6. joonis.

Märkus. Argumendile x tuleb ikka niisuguseid väärtusi anda, et saada punkte, mille järele oleks võimalik kõverjoone pöoret joonestada. Sellega oleks meil kõverjoone käik enam või vähem teada.

2. näide. Võtame veel teise järgu funktsiooni

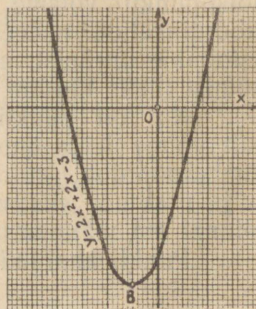
$$y = 2x^2 + 2x - 3$$

ja joonestame ta graafilise kju.

Seame kokku x ja y väärtuste tabeli:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	...
y	...	9	1	-3	-3	1	9	...

mille järele joonestame funktsiooni graafilise kju (7. joon.). Sel juhul hakkab üks kõverjoone haru tulema ülevalt poolt lõpmatusest ja langeb punktini B , mida nimetatakse **kõverjoone** ehk **funktsiooni miinimumpunktiks**, siis hakkab ta tõusma ja läheb ülespoole lõpmatuse. Niisugust kõverjoont nimetatakse **nõgusaks kõverjooneks**.



7. joonis.

1. ja 2. näidet kõverju seades näeme, et kumer kõverjoon annab maksimumpunkti ja nõgus kõverjoon — miinimumpunkti.

3. näide. Leida funktsiooni

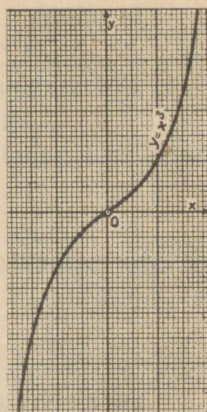
$$y = x^3$$

graafiline kuju.

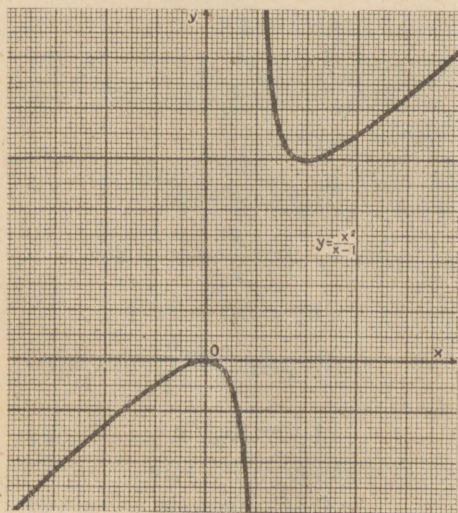
Funktsiooni väärtuste tabel on:

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-8	-1	0	1	8	...

Sellest tabelist näeme, et kõverjoon läheb läbi 0-punkti (8. joon.). Siin ei ole ei maksimum- ega miinimumpunkti. Kõverjoon teeb käänaku 0-punktis: ta omandab selles punktis teise kõverusesuuna. Punkti, milles kõverjoon omandab teise kõverusesuuna, nimetatakse **käänupunktiks**. Funktsiooni $y = x^3$ käänupunkt on 0-punktis.



8. joonis



9. joonis

4. näide. Leida ratsionaalse murdfunktsiooni

$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

graafiline kuju.

Selle funktsiooni väärtuste tabeli kokkuseadmisel tuleb punkti $x=1$ ümbruses võtta argumentide väärtusteks murdarve, sest vastasel korral ei saaks meie kõverjoone õiget käiku ära määrata, sest et argumentide väärtuse $x=1$ juures funktsiooni väärtus muutub määramata suureks. Tähen­dab:

x	...	-4	-3	-2	-1	0	0,3	0,6	0,8	0,9	1
y	...	-3,2	-2,2	-1,3	-0,5	0	-0,1	-0,9	-3,2	-8,1	$-\infty$

x	...	5	4	3	2	1,7	1,4	1,2	1
y	...	6,2	5,3	4,5	4	4,1	4,9	7,2	$+\infty$

Neid väärtusi teljestikku kandes saame kaheharulise kõverjoone (9. joon.).

5. näide. Leida eksponentfunktsiooni

$$y = 10^x$$

ja ta pöördfunktsiooni (logaritmfunksiooni)

$$y = \log x$$

graafilised kujud. Nende väärtuste tabelid on: eksponentfunktsioonil

x	...	-2	-1	0	0,3	0,6	0,8	1	...
y	...	0,01	0,1	1	2	3,98	6,31	10	...

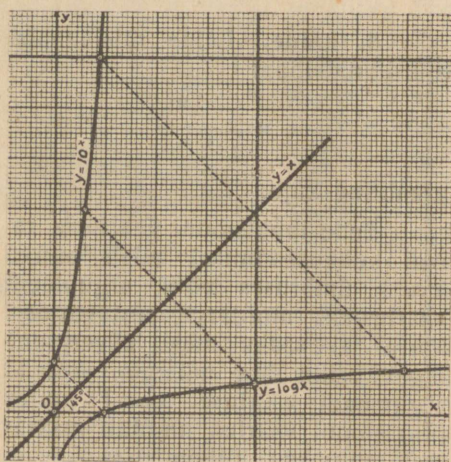
ja logaritmfunksioonil

x	...	0	0,1	0,5	1	2	3	4	...	10	...
y	...	$-\infty$	-1	-0,3	0	0,3	0,48	0,6	...	1	...

mille järele võime joonestada nende graafikud (10. joon.).

Jooniselt näeme, et pöördfunktsioon on algfunktsiooni peegelduskuju. Kui tõmbame läbi 0-punkti 45° all sirgjoone, siis selle sirgjoone suhtes algfunktsiooni igale punktile vastab pöördfunktsiooni graafikul vastav sümmeetriline punkt.

Ülesanded. Kujutada graafiliselt funktsioonid:



10. joonis.

1) $y = x^2$

2) $y = \sqrt{x}$

3) $y = \frac{1}{x}$

4) $y = \sqrt[2]{x}$

5) $y = x^2 - 2$

6) $y = \frac{x^2}{2} + x + 2$

7) $y = x^3 - 3x + 1$

8) $y = \frac{x+2}{x^2+1}$

9) $y = \log \sqrt{x}$

10) $y = 2^x - 2x$

11) $y = 2^x - x^2$

12) $y = \sqrt{x^2 - x}$

§ 5. Funktsiooni piiri mõiste.

a) Piiri mõistega oleme tutvunud juba geometrias. Seal nägime, et ringipikkus on ringi sisse- või ümberjoonestatud korrapärase hulknurga perimeetri piir, kus hulknurga külgede arv lõpmata kasvab; ringipind on ringi sisse- või ümberjoonestatud korrapärase hulknurga pinna piir, kui hulknurga külgede arv lõpmata kasvab, jne.

Ümberpöördult, argumendi väärtuse kahanemisel funktsiooni väärtus kasvab: ta võib suuremaks saada igast kui suurest tahes etteantud arvust, s. o. ta võib saada nii suureks kui meie iganes soovime. Sel juhul nimetatakse funktsiooni **lõpmata kasvavaks** ja kirjutatakse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} = \infty.$$

Muutub aga funktsioon nõnda, et on võimalik nimetada kaks niisugust arvu, et kõik selle funktsiooni väärtused jäävad nendest arvudest piiratud vahemikku, siis omandab funktsioon ainult lõplikke väärtusi ning teda nimetatakse sel juhul **lõplikuks**.

d) **1. lause.** Kahe muutuva suuruse algebralise summa (vahe) piir võrdub nende suuruste piiride summaga (vahega).

Kui meil on kaks muutuvat suurust u ja v , mille piirid on a ja b , s. o.

$$\lim u = a, \quad \lim v = b,$$

siis võime kirjutada

$$u - a = h_1, \quad v - b = h_2,$$

kus h_1 ja h_2 on lõpmata kahanevad suurused. Liites (lahutades) viimaseid saame

$$(u \pm v) - (a \pm b) = h_1 \pm h_2 = h,$$

kus $h = h_1 \pm h_2$ on ka lõpmata kahanev suurus. Tähen dab, võime kirjutada piiri definitsiooni põhjal

$$\lim (u \pm v) = a \pm b = \lim u \pm \lim v.$$

2. lause. Kahe muutuva suuruse korrutise piir võrdub nende suuruste piiride korrutisega.

Kui

$$\lim u = a, \quad \lim v = b,$$

siis

$$u = a + h_1, \quad v = b + h_2;$$

korrutades viimaseid saame

$$uv = ab + ah_2 + bh_1 + h_1h_2$$

ehk

$$uv - ab = ah_2 + bh_1 + h_1h_2 = h,$$

kus h on lõpmata kahanev suurus, sest kui h_1 ja h_2 on lõpmata kahanevad suurused, siis on ka ah_2 , bh_1 ja h_1h_2 lõpmata kahanevad suurused. Järelikult, piiri definitsiooni põhjal võime kirjutada

$$\lim uv = ab = \lim u \cdot \lim v.$$

3. lause. Kahe muutuva suuruse jagatise piir võrdub nende suuruste piiride jagatisega (kui jagaja on lõplik suurus).

Kui

$$\lim u = a, \quad \lim v = b,$$

siis

$$u = a + h_1, \quad v = b + h_2;$$

neid jagades saame

$$\frac{u}{v} = \frac{a + h_1}{b + h_2} = \frac{a}{b} + \frac{bh_1 - ah_2}{b(b + h_2)} = \frac{a}{b} + h,$$

kus h on lõpmata kahanev suurus, kui $b \neq 0$, sest bh_1 , ah_2 ja h_2 on lõpmata kahanevad suurused. Piiri definitsiooni põhjal saame

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{\lim u}{\lim v}.$$

e) Võtame algebralise murdfunktsiooni

$$y = \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}$$

ja vaatame, missugune on selle funktsiooni väärtus, kui $x \rightarrow 2$.
 $x = 2$ väärtust asemele pannes saaksime

$$y = \frac{4 - 7 \cdot 2 + 10}{4 - 4} = \frac{0}{0},$$

mida nimetatakse **määramatuks** kujuks: funktsioonil pole niisuguses kujus mõtet. Et leida funktsiooni tõelikku väärtust, kui $x \rightarrow 2$, selleks oletame, et $x \neq 2$; lahutame funktsiooni algteguriteks ja koondame teda ühise teguriga

$$y = \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-5}{x+2}.$$

Laseme nüüd $x \rightarrow 2$, võime kirjutada

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-5}{x+2} = \frac{2-5}{2+2} = -\frac{3}{4}.$$

$-\frac{3}{4}$ on antud funktsiooni tõelik väärtus, kui $x \rightarrow 2$.

f) Võtame näite

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

ja vaatame, missugune on ta tõelik väärtus, kui $x \rightarrow 0$. Kui paigutaksime x -i asemele 0, saaksime jälle määramatu kuju $\frac{0}{0}$, mille tõeliku väärtuse

leiame aga piirile mineku abil.

Võtame ringi raadiusega 1 ja selles ringis mõne nurga x , millele vastab kaar $AD = x$ (12. joon.). Siin esinevad $\triangle OAB$, sektor OAD ja $\triangle OCD$, mis erinevad üksteisest pindadega, s. o.

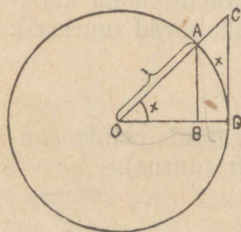
$$S_{(OAB)} < S_{(\text{sektor})} < S_{(OCD)};$$

siit järgneb

$$OB \cdot AB < \overset{D}{\text{sektor}} AD < OD \cdot CD,$$

ja kui $OD = 1$, siis

$$\cos x \cdot \sin x < x < \tan x;$$



12. joonis.

jagades $\sin x$ -iga

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

ja võttes ümberpööratud väärtused, saame

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Siit näeme, et $\frac{\sin x}{x}$ väärtus peitub kahe väärtuse $\frac{1}{\cos x}$ ja $\cos x$ vahel.

Laseme x minna 0-iks, siis näeme, et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1;$$

tähendab, kui funktsiooni väärtus argumendi muutumisel püsib kahe suurus vahel, mis lähenevad ühele ja samale piirile, siis on ka funktsioonil sama piir, s. o.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

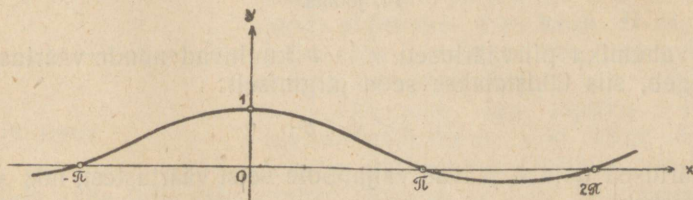
Funktsiooni

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

tõeliku väärtuse võime leida ka graafilisel teel, kui anname x -ile rea alanevaid väärtusi, niikaua kui $x \rightarrow 0$. Kui $x = 0$, siis peab funktsiooni väärtus olema y -teljel. Selle väärtuse leiame, kui vaatame, missugusele punktile y -teljel läheneb seda funktsiooni kujutav kõverjoon.

x	\dots	$\pm 2\pi$	$\pm \frac{3\pi}{2}$	$\pm \pi$	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\pm \frac{\pi}{3}$	$\pm \frac{\pi}{4}$	$\pm \frac{\pi}{10}$	\dots
y	\dots	0	-0,21	0	0,64	0,83	0,90	0,99	\dots

Sellest arvutusest näeme, et kui $x \rightarrow 0$, siis $y \rightarrow 1$, s. o. kõverjoon lõikab y -telge punktis $y = 1$ (13. joon.).



13. joonis.

Graafiku järele võime samuti kirjutada, et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Analoogiliselt võime arutada, et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Ülesanded. Leida piirväärtused:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{2x^3 + 1}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{5x^3 + 3}$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2}{x + 2}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$

4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 7x + 10}$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\tan 3x}$

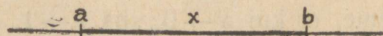
5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$

10) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}$

§ 6. Funktsioonide pidevus ja katkevus.

Funktsiooni pidevuse mõiste on ligidalt seotud funktsiooni muutuvuse mõistega. Funktsioon võib muutuda pidevalt või katkevalt. Funktsioon võib olla pidev teatud punktis. Funktsioon võib olla pidev teatud vahemikus.

Meie nimetame, et x muutub pidevalt vahemikus a -st kuni b -ni (14. joon.), kui x kulgeb kõik väärtused, ratsionaalsed ja irratsionaalsed, mis peituvad selles vahemikus a -st kuni b -ni.



14. joonis.

Kui vahemiku piirväärtused a ja b kuuluvad nende väärtuste hulka, mis x kulgeb, siis tähistatakse seda järgmiselt:

$$a \leq x \leq b;$$

kui piirväärtused a ja b jäävad väljapoole neist väärtustest, mis x kulgeb, siis tähistatakse

$$a < x < b;$$

kui aga muutuv suurus x kulgeb mistahes positiivsed või negatiivsed väärtused, siis muutub x pidevalt $-\infty$ -st kuni $+\infty$ -ni, s. o.

$$-\infty < x < +\infty.$$

Et x muutuks pidevalt, siis ei tohi ta kulgemisel esineda mingisuguseid hüppeid. Näiteks, kui x kulgeb vahemikus -1 -st kuni $+1$ -ni kõik ratsionaalsed (ainult ratsionaalsed) väärtused, siis ei ole x -i muutmine mitte pidev, kuigi x võib sel juhul omada väärtusi, mille vahe on väga väike, kuid nende vahel puuduvad ikkagi irratsionaalsed väärtused.

Olgu meil antud funktsioon

$$y = f(x)$$

ja ta geomeetiline kuju (15. joon.).

Võtame sellel kõverjoonel punkti A , mille koordinaadid olgu

$$(x_1 | y_1)$$

ja temale ligidal oleva mõne teise punkti B , mille koordinaadid olgu

$$(x_2 | y_2).$$

Kui punkt B läheneb punktile A , siis saab abstsisside vahe $x_2 - x_1$ väga väikeseks: see vahe läheneb 0-ile, s. o.

$$x_2 - x_1 \rightarrow 0 \text{ ehk } x_2 \rightarrow x_1.$$

Kui abstsisside vahe $x_2 - x_1 \rightarrow 0$, siis sellega ühtlasi saab ka ordinaatide vahe $y_2 - y_1$ väga väikeseks, s. o.

$$y_2 - y_1 \rightarrow 0 \text{ ehk } y_2 \rightarrow y_1.$$

Peale selle, nagu näeme, on argumentil x_1 punktis A lõplik väärtus ja sellega ühtlasi omab ka funktsioon $y = f(x)$ selles punktis vastavat lõplikku väärtust.

Neil tingimustel öeldakse, et kõverjoon, mida väljendab funktsioon

$$y = f(x),$$

on **punktis A pidev**.

Kui argument muutub piirides a -st kuni b -ni (16. joon.), siis nimetatakse kõverjoont **pidevaks A -st kuni B -ni**, kui ta on pidev iga punkti suhtes, mis peitub vahemikus A -st kuni B -ni.

Tähendab, iga lõpliku x -i väärtuse juures vahemikus a -st kuni b -ni omab funktsioon vastavat lõplikku väärtust ning

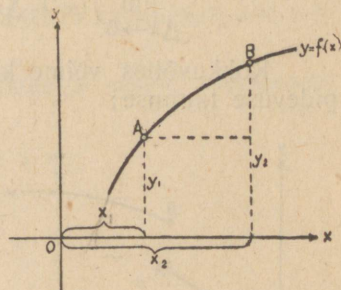
argumentide vahe 0-ile lähenemisel läheneb ka 0-ile funktsioonide vahe.

Argumentide ja funktsioonide vahed

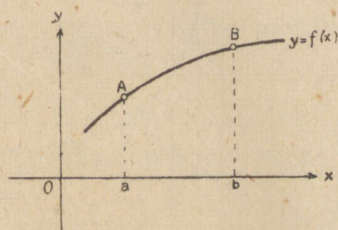
$$x_2 - x_1 \text{ ja } y_2 - y_1$$

on väikesed arvud; neid vahesid tähistame lihtsuse mõttes sümboolselt Δx ja Δy (delta x ja delta y), need on vahed (differentsid), s. o.

$$x_2 - x_1 = \Delta x, \quad y_2 - y_1 = \Delta y,$$



15. joonis.



16. joonis.

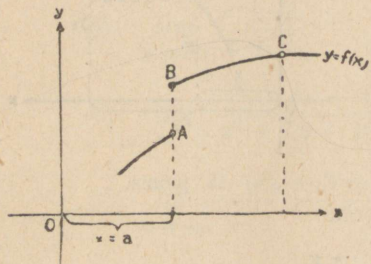
kus Δx nimetatakse **argumendi kasvaks** ja Δy **funktsiooni kasvaks** (17. joon.). Sellepärast võime kirjutada, et kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis peab ka, et funktsioon oleks pidev, $\Delta y \rightarrow 0$, s. o.

$$f(x + \Delta x) - f(x) \rightarrow 0,$$

ehk

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x).$$

Kokkuvõttes võime kirjutada funktsiooni pidevuse tunnuse:



18. joonis.

0-ile, vaid läheneb mõnele teisele väärtusele, või omab määramatut kuju, või saab määramata suureks, — siis on kõverjoon selles punktis **katkev**.

Katkev funktsioon annab katkeva kõverjoone (18. joon.).

Punktis $x = a$ teeb kõverjoon hüppe punktist A punkti B. Argument muutub pidevalt, kuid funktsioon teeb hüppe: ta muutub katkevalt.

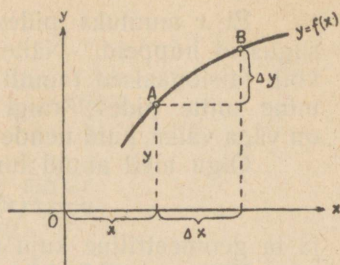
Argumenti väärtuse $x = a$ juures katkeb funktsioon, kuid edasi punkti C juures on funktsioon jälle pidev.

Võtame kaks näidet, mis selgitaks katkevuse tunnust.

1. näide. Olgu esimese näitena

$$y = \frac{2}{x-3},$$

mille geomeetriline kuju on 19. joon.

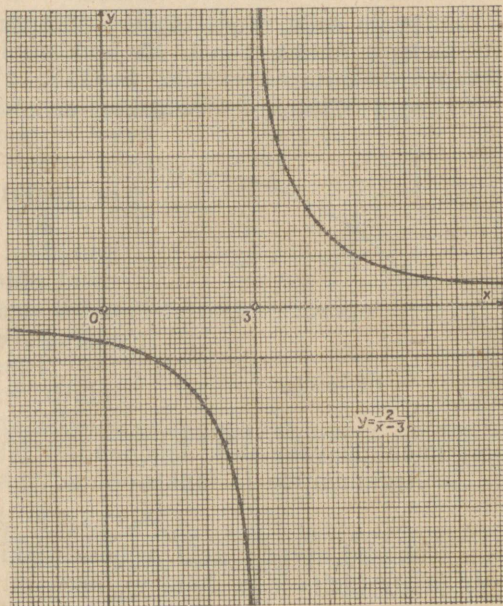


17. joonis.

a) Funktsioon $y = f(x)$ on pidev punktis $x = a$, kui $f(a)$ on lõplik suurus ja kui argumendi kasvu Δx lähenemisel 0-ile läheneb ka 0-ile funktsiooni kasv Δy .

b) Funktsioon $y = f(x)$ on pidev vahemikus a -st kuni b -ni, kui argumendi kasvu Δx lähenemisel 0-ile läheneb ka 0-ile funktsiooni kasv Δy iga x -i väärtuse juures, mis peitub selles vahemikus.

Kui aga argumendi kasvu Δx lähenemisel 0-ile funktsiooni kasv Δy ei saa mõnes punktis väga väikeseks, ei lähene



19. joonis.

Niikaua, kui x jääb vähemaks kui 3, on funktsioon pidev ja negatiivne. Saab aga x -i ja 3 vahe väga väikeseks, s. o. kui x läheneb 3-le, siis läheneb funktsiooni väärtus $-\infty$ -le, ja teeb hüppe $-\infty$ -st $+\infty$ -sse, kui x 3-st mööda läheb. Kui x jääb suuremaks kui 3, on funktsioon jälle pidev, kuid positiivne.

Kui x läheneb kasvavalt 3-le, s. o.

$$x \rightarrow 3,$$

siis funktsiooni väärtus läheneb $-\infty$ -le; kui x läheneb kahanevalt 3-le, s. o.

$$3 \leftarrow x,$$

siis funktsiooni väärtus läheneb $+\infty$ -le. Sellega võime funktsiooni katkevust punktis $x=3$ tähistada järgmiselt:

$$\lim_{x \rightarrow 3} y = -\infty, \quad \lim_{3 \leftarrow x} y = +\infty,$$

ehk

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ 3 \leftarrow x}} y = \pm \infty.$$

1. märkus. Analooiline juht on tangens- ja kootangensfunktsioonidega

$$y = \tan x \quad \text{ja} \quad y = \cot x.$$

Tangensfunktsiooni

$$y = \tan x$$

juures, kui x kasvab 0-ist kuni $\frac{\pi}{2}$ -ni, kasvab funktsioon 0-ist kuni $+\infty$ -ni, siis teeb ta hüppe $-\infty$ -sse ja on niikaua negatiivne, kui x omab väärtust π , edasi on funktsioon jälle positiivne ja saab $+\infty$ -ks, kui x läheb $\frac{3\pi}{2}$; edaspidisel x -i kasvamisel teeb funktsioon uue hüppe $-\infty$ -sse, jne. Siin esineb n. n. **perioodiline katkevus**. Periood on π .
Vahemikus

$$-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$$

on tangensfunktsioon pidev. Katkevus tekib punktides

$$x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ja} \quad x = +\frac{\pi}{2},$$

tähendab

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} y = +\infty, \quad \lim_{\frac{\pi}{2} \leftarrow x} y = -\infty,$$

ja

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} y = +\infty, \quad \lim_{-\frac{\pi}{2} \leftarrow x} y = -\infty.$$

Üldiselt on tangensfunktsioon katkev punktides

$$x = \frac{(2k-1)\pi}{2},$$

kus

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

mille põhjal võime kirjutada tangensfunktsiooni katkevuse

$$\lim_{x \rightarrow \frac{(2k-1)\pi}{2}} y = +\infty, \quad \lim_{\frac{(2k-1)\pi}{2} \leftarrow x} y = -\infty.$$

Sarnaselt võime arvutada kootangensfunktsiooni

$$y = \cot x$$

suhtes. Ta katkevus tekib punktides

$$x = k\pi,$$

kus

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

s. o.

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} y = -\infty, \quad \lim_{k\pi \leftarrow x} y = +\infty.$$

Vahemikus

$$0 < x < \pi$$

on kootangensfunktsioon pidev. Katkevus tekib punktides

$$x = 0 \text{ ja } x = \pi.$$

Kootangensfunktsiooni juures on ka perioodiline katkevus, perioodiga π .

2. märkus. Funktsioonid

$$y = \sin x \text{ ja } y = \cos x$$

on pidevad iga x -i väärtuse juures.

3. märkus. Funktsiooni katkevus ei pruugi alati olla

$$\lim_{x \rightarrow a} y = \pm \infty, \\ a \leftarrow x$$

vaid on olemas funktsioone, mille katkevust võime tähistada

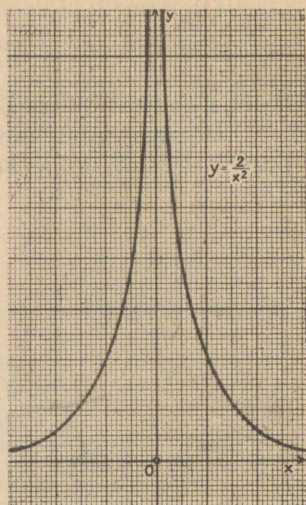
$$\lim_{x \rightarrow a} y = m, \quad \lim_{a \leftarrow x} y = n,$$

kus m ja n on lõplikud suurused, nagu näeme üldarvutamisest (18. joon.)

2. näide. Võtame selgituseks veel näite

$$y = \frac{2}{x^2}.$$

Siin jääb y alati positiivseks, olgu x positiivne või negatiivne. x -i absoluutse väärtuse vähenemisega kasvab funktsiooni väärtus määramata suureks (20. joon.). x -i 0-ist üleminekul ei teki graafikus mingit hüpet, nagu eelmises näites; sellepärast peaksime seda funktsiooni punktis $x=0$ lugema pidevaks. Kuid siin tekib kohe kahtlus, kas punkti $x=0$ ümbruses on täidetud pidevuse tingimus, s. o. kas Δy on väga väike, kui meie Δx -i väga väikeseks teeme. Et siin küll mingit hüpet ei paista olevat, kuid meil on siin tegemist lõpmatusse mineva funktsiooni väärtusega, kusjuures $y \rightarrow \infty$, kui $x \rightarrow 0$, mispärast funktsiooni punktis $x=0$ tuleb lugeda katkevaks. Pideval funktsioonil peab iga x -i väärtuse juures ikka esinema mingisugune lõplik väärtus; kuid siin punkti $x=0$ juures on funktsiooni väärtus määramata suur. Tähendab funktsioon



20. joonis.

$$y = \frac{2}{x^2}$$

on katkev punktis $x=0$.

Ülesanded. Missugused järgmistest funktsioonidest on pidevad ja missugused katkevad? Kui katkevad, siis näidata, missuguse x -i väärtuse juures tekib funktsiooni katkevus:

$x_1 = 1$

$$1) y = \frac{x^3}{3} - x + 6$$

$$5) y = \frac{x^3}{3+x}$$

$x_2 = 2$

$$2) y = \frac{2}{x^2} + 2$$

$$6) y = \frac{x^2}{9-x^2}$$

$$3) y = \frac{x}{x+1}$$

$$7) y = \frac{x}{1+2^x}$$

$$4) y = \frac{x^2}{4-x}$$

$$8) y = \frac{1-2^x}{x}$$

II peatükk. Funktsioonide differentsimine.

§ 7. Funktsiooni tuletis ja differentsiaal.

Eespool nägime, et väga väikeste, lõpmata kahanevate muutuvate suuruste suhe võib omada lõplikku (konstantset) väärtust, mida meie nimetasime muutuva suuruse piiriks, nagu seda nägime juhul

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

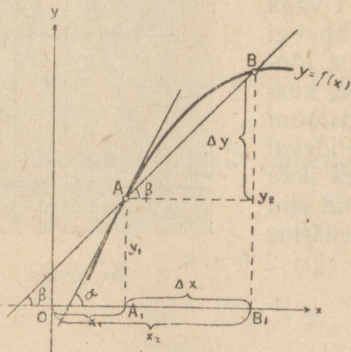
Olgu meil üldiselt mõni funktsioon

$$y = f(x),$$

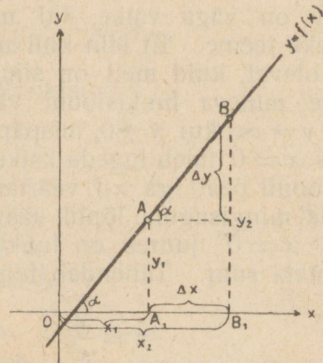
mille geomeetiline kuju on kõver- või sirgjoon (21. ja 22. joonis).

Võtame kõverjoonel (21. joonis) kaks teineteisele ligidal seisvat punkti A ja B , mille koordinaadid olgu

$$(x_1 | y_1) \text{ ja } (x_2 | y_2).$$



21. joonis.



22. joonis.

Ühendame neid sirgjoonega, mis moodustab x -teljega nurga β . Nurk β on teada, kui on antud punktide A ja B koordinaadid, s. o.

$$\tan \beta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ehk

$$\tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

kus jagatist $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nimetatakse **vahede jagatiseks**.

Läheneb punkt B punktile A , siis läheneb ka punkt B_1 punktile A_1 , Δx -i väärtus läheneb sellega 0-ile, s. o. Δx on lõpmata kahanev suurus; temaga ühes läheneb siis ka 0-ile Δy , mis samuti on lõpmata kahanev suurus. Mõlemad suurused Δx ja Δy võivad saada nii väikes-teks kui iganes soovime; nad kahanevad pidevalt. Langeb punkt B punktiga A ühte, siis saab lõikjoon puutujaks punktis A ; puutuja on sellega lõikjoone piir, kui $B \rightarrow A$. Lõikjoone ja x -telje vaheline nurk β saab nurgaks α , mille moodustab puutuja x -teljega positiivses sihis. Tähendab

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha = m.$$

Siit näeme, et avaldise $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ piirväärtus ei ole muud kui puutuja tõus (nurga tangens), mis puutuja läheb läbi punkti $A \equiv (x_1 | y_1)$ ja mille võrrand on

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ehk

$$y - y_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} (x - x_1),$$

kus x_1 ja y_1 on puutepunkti koordinaadid ning x ja y jooksvad koordinaadid.

Kui funktsioon

$$y = f(x)$$

kujutab sirgjoont, siis jääb Δx -i ja Δy -i muutumisel nende suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ muutumatuks (22. joon.), s. o. sirgjoone iga punkti suhtes

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan a = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ piirväärtus on sellega määratud suurus, kui $\Delta x \rightarrow 0$.

Kui vahed Δx ja Δy saavad väga väikesteks, kui nad lõpmata kahanevad, siis nimetatakse seda piirväärtust, millele läheneb vahede jagatis, **differentsiaaljagatiseks** ja tähistatakse sümboolselt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

kus sümboleid dx ja dy nimetatakse **differentsiaalideks**;

$$\begin{aligned} dx &= \text{argumendi differentsiaal,} \\ dy &= \text{funktsiooni differentsiaal.} \end{aligned}$$

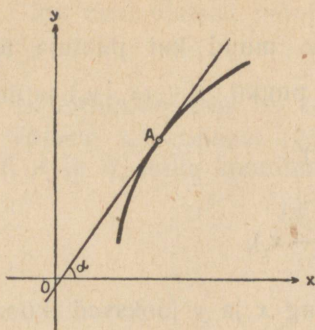
Funktsiooni ja argumendi differentsiaalide jagatis on differentsiaaljagatis. Tähendab, **differentsiaaljagatis on selle nurga tangens, mis läbi punkti A minev puutuja moodustab x -teljega positiivses sihis.**

Kui on tõusev kõverjoon (23. joon.), siis puutuja moodustab nurga $\alpha < \frac{\pi}{2}$, mille tangens on positiivne, s. o.

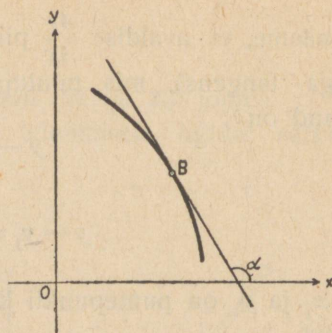
$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} > 0.$$

Kui on aga langev kõverjoon (24. joon.), siis puutuja moodustab nurga $\alpha > \frac{\pi}{2}$, mille tangens on negatiivne, s. o.

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} < 0.$$



23. joonis.



24. joonis.

Punktis A (23. joon.) on differentsiaaljagatis positiivne, punktis B (24. joon.) — negatiivne.

Tähendab: Kui funktsioon $y=f(x)$ x -i kasvamisel kasvab, siis on $\frac{dy}{dx} > 0$; kui funktsioon $y=f(x)$ x -i kasvamisel kahaneb, siis on $\frac{dy}{dx} < 0$. Ja ümberpöördult: kui $\frac{dy}{dx} > 0$, siis x -i kasvamisel funktsioon kasvab; kui $\frac{dy}{dx} < 0$, siis x -i kasvamisel funktsioon kahaneb.

Niisuguste differentsiaalidega ja differentsiaaljagatistega tuleb meil tegemist teha differentsiaalrvtamises; neil on määramata suur tähtsus vigade teoorias ja igasuguste mehaaniliste, füüsiliste jne. nähtuste muutuvuse uurimisel.

- 1. märkus.** Sümbolid Δx ja Δy , dx ja dy on lahutamatud tähised: siin ei ole, näiteks, tegemist Δ ja x korrutisega, vaid puhtsümbolse tähisega, mille all mõistame argumendi x kasvu; samuti Δy on funktsiooni kasv.
- 2. märkus.** Tuleb hoiduda sellest, et sümboleid dx ja dy ei kirjutataks ∂x ja ∂y ; pärastpoole (§ 40.) näeme, et viimastel sümbolitel on isetähendused.

Vahede jagatist ja differentsiaaljagatist võime kujundada veel teises vormis, nimelt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Kui võtame kõverjoonel (25. joon.) vabalt mõne punkti A koordinaatidega $(x|y)$ ja ta ümbruses kõverjoonel mõne teise punkti B , mille koordinaadid on $(x + \Delta x|y + \Delta y)$, siis (arvestades 21. joonist)

$$x_1 = x, \quad x_2 = x + \Delta x, \quad f(x_1) = f(x), \quad f(x_2) = f(x + \Delta x),$$

ja

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

mis on maksev iga vabalt võetud x -i väärtuse juures, kui funktsioon on igas punktis ainult pidev. Tähendab, funktsiooni $y = f(x)$

differentsiaalagatis $\frac{dy}{dx}$ on piirväärtus, millele läheneb murd

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

kui Δx lõpmata kahaneb.

Kui funktsioon on pidev, siis avaldis $\frac{dy}{dx}$ on maksev iga x -i väärtuse juures; järelikult $\frac{dy}{dx}$ on siis ka ühtlasi x -i funktsioon. Et ta mõni teine x -i funktsioon on, siis tähistatakse teda järgmiselt:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

kus $f'(x)$ nimetatakse algfunktsiooni $f(x)$ -i **tuletatud funktsiooniks** ehk lihtsalt $f(x)$ -i **tuletiseks**.

Tuletatud funktsiooni jaoks maksab sellega avaldis

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

ja sarnaselt ka mõne teise funktsiooni suhtes

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x},$$

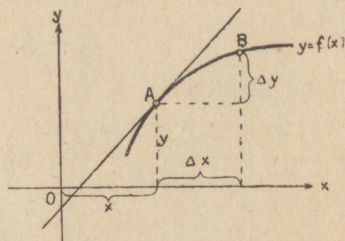
ehk

$$F'(u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u}.$$

dx ja dy on argumendi ja funktsiooni differentsiaalid: avaldisest

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$ välja minnes võime funktsiooni differentsiaali kirjutada kujus

$$dy = f'(x) dx.$$



25. joonis.

Funktsiooni tuletise või differentsiaali leidmine on oluliselt üks ja sama tehe, mida nimetatakse funktsiooni **differentsimiseks**. Funktsiooni tuletis on üldiselt lõplik suurus, kuid ta differentsiaal on lõpmata kahanev.

Meil esines siin Δx positiivse suurusena, kuid ta võib olla ka negatiivne. Mõlemad piirväärtused, olgu Δx positiivne või negatiivne, on üldiselt ikka üks ja sama $f'(x)$, kui ainult funktsioon teatud x -i väärtuse juures on pidev.

Kui

$$x_2 = x + \Delta x, f(x_2) = f(x + \Delta x),$$

siis

$$x_2 - \Delta x = x, f(x_2 - \Delta x) = f(x);$$

võime kirjutada

$$\frac{f(x_2 - \Delta x) - f(x_2)}{-\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_2 - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

ja

$$\lim_{-\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_2 - \Delta x) - f(x_2)}{-\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

millest näeme, et

$$\lim_{x_2 \rightarrow x} f'(x_2) = f'(x),$$

kui funktsioon ainult määratud punktis on pidev.

Eespool-olevat kokku võttes võime kirjutada:

kui a on nurk, mille kõverjoone puutuja moodustab x -teljega positiivses sihis, siis

$$\tan a = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

kus $y = f(x)$ on kõverjoone võrrand ja x ja y — puutepunkti koordinaadid.

On $y = f(x)$ pidev funktsioon, siis on suuremalt jaolt ikka võimalik leida $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ piirväärtust, s. o. algfunktsiooni tuletatud funktsiooni. Kuid on siiski funktsioone, kus üksikute x -ide või ka iga x -i väärtuse juures seda leida ei ole võimalik, s. o. tulevad ette juhud, kus $\frac{dy}{dx}$ mingit kindlat väärtust ei ole: nad jäävad määramatuiks. Niisuguseid funktsioone meie ei käsitte. Edaspidi vaatleme ainult neid funktsioone, mis on pidevad ja millel on tuletis, s. o. mida võime differentsida.

Näide. Võtame kolmanda järgu kõverjoone

$$y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 7.$$

Kui anname argumendile kasvu Δx , siis omab ka funktsioon kasvu Δy , s. o.

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 - \frac{3}{2}(x + \Delta x)^2 - 6(x + \Delta x) + 7$$

ehk

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - \frac{3}{2}(x + \Delta x)^2 - 6(x + \Delta x) + 7 - (x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 7) =$$

$$= (3x^2 - 3x - 6)\Delta x + (3x - \frac{3}{2})\Delta x^2 + \Delta x^3;$$

jagades Δx -ga saame

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 - 3x - 6 + (3x - \frac{3}{2})\Delta x + \Delta x^2;$$

kui $\Delta x \rightarrow 0$, võime kirjutada tuletatud funktsiooni

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 - 3x - 6$$

ehk

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3x - 6$$

ja funktsiooni diferentsiaali

$$dy = (3x^2 - 3x - 6) dx.$$

Võtame sellel kõverjoonel mõne punkti $P \equiv (x_0 | y_0)$ ja puutuja ning normaali selles punktis, siis kõverjoone tõus selles punktis on

$$\tan \alpha = 3x_0^2 - 3x_0 - 6$$

ja puutuja ning normaali võrrandid

$$y - y_0 = (3x_0^2 - 3x_0 - 6)(x - x_0),$$

$$y - y_0 = -\frac{x - x_0}{3x_0^2 - 3x_0 - 6}.$$

Olgu punktis P (26. joon.)

$$x_0 = -1,5,$$

siis

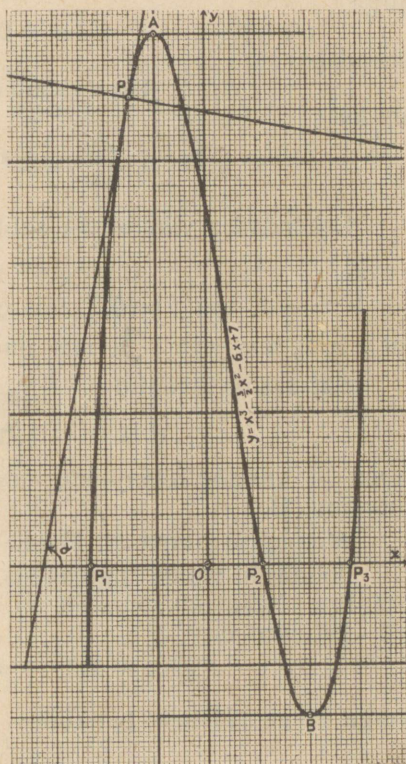
$$y_0 = (-1,5)^3 - \frac{3}{2}(-1,5)^2 - 6(-1,5) + 7 = 9,25,$$

s. o.

$$P \equiv (-1,5 | 9,25).$$

Sellega kõverjoone tõus punktis P on

$$\tan \alpha = 3(-1,5)^2 - 3(-1,5) - 6 = 5,25;$$



26. joonis.

puutuja ja normaali vörrandid

$$y - 9,25 = 5,25(x + 1,5) \text{ ehk } 42x - 8y + 137 = 0,$$

$$y - 9,25 = -\frac{x + 1,5}{5,25} \text{ ehk } 16x + 84y - 753 = 0.$$

Missuguses punktis on kõverjoone maksimum või miinimum?

Jooniseks on näha, et maksimum- ja miinimumpunktides läheb puutuja paralleelselt x -teljega: puutuja moodustab neis punktides x -teljega nurga

$$\alpha = 0^\circ \text{ ehk } 180^\circ;$$

tähendab

$$\tan \alpha = \tan 0^\circ = \tan 180^\circ = 0,$$

siis ka

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3x - 6 = 0.$$

Lahendades viimast x -i suhtes leiame, et

$$x = -1, x = 2.$$

Kui $x = -1$, siis $y = 10,5$, mis on joonise järele funktsiooni maksimum, kui $x = 2$, siis $y = -3$, mis on joonise järele funktsiooni miinimum.

Siit saame punktid

$$A \equiv (-1 \mid 10,5) \text{ ja } B \equiv (2 \mid -3);$$

punkt A vastab kõverjoone maksimumpunktile ja punkt B — miinimumpunktile.

Missuguse nurga all lõikab kõverjoon x -telge?

Jooniselt võime ligikaudu välja lugeda kõverjoone lõikepunktid x -teljega. Need lõikepunktid on P_1, P_2 ja P_3 , mille abstsisside ligikaudsed väärtused on

$$x_1 = -2,3, \quad x_2 = 1,1, \quad x_3 = 2,8.$$

Nurga tangensid neis punktides

$$\tan \alpha_1 = 3x_1^2 - 3x_1 - 6 = 16,77$$

$$\tan \alpha_2 = 3x_2^2 - 3x_2 - 6 = -5,67$$

$$\tan \alpha_3 = 3x_3^2 - 3x_3 - 6 = 9,12$$

ja neile tangensitele vastavad nurgad

$$\alpha_1 = 86^\circ 35',$$

$$\alpha_2 = 100^\circ,$$

$$\alpha_3 = 83^\circ 45',$$

millede all kõverjoon lõikab x -telge punktides P_1, P_2 ja P_3 .

§ 8. Mõned diferentsimislused.

1. lause. Astme funktsiooni

$$y = x^n$$

tuletisfunktsioon on

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1},$$

kus n on mistahes reaalarv.

a) Olgu n positiivne täisarv, siis

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^n - x_1^n}{x_2 - x_1} = \\ &= x_2^{n-1} + x_2^{n-2} x_1 + x_2^{n-3} x_1^2 + \dots + x_2 x_1^{n-2} + x_1^{n-1}; \end{aligned}$$

piirile minnes saame

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \rightarrow x \leftarrow x_2} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} = nx^{n-1};$$

tähendab, tuletis

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

1. näide. Leida funktsioonide

$$y = x^t \text{ ja } y = x^{1-m}$$

tuletised ja diferentsiaalid.

Tarvitades saadud valemit, võime kirjutada

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3, \quad \frac{dy}{dx} = (1-m)x^{-m} = \frac{1-m}{x^m};$$

diferentsiaalid on

$$dy = 4x^3 dx, \quad dy = \frac{1-m}{x^m} dx.$$

Ülesanded. Leida järgmiste funktsioonide tuletised ja diferentsiaalid:

1) $y = x^3$

4) $y = x^a$

7) $y = x^{m+1}$

2) $y = x^{24}$

5) $y = x^{a+b}$

8) $y = x^{2-m}$

3) $y = x^{100}$

6) $y = x^{4m}$

9) $y = x^{2m-3}$.

10) Leida kõverjoonele $y = x^2$ puutuja, kui puutepunkti abstsiss $x = -2$.

b) Oletame, et astmenäitaja on negatiivne täisarv, s. o. $n = -m$, siis

$$y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

ja

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{x_2^m} - \frac{1}{x_1^m}}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2^m - x_1^m}{x_1^m x_2^m (x_2 - x_1)} = \\ &= -\frac{1}{x_1^m x_2^m} (x_2^{m-1} + x_2^{m-2} x_1 + x_2^{m-3} x_1^2 + \dots + x_1^{m-1}),\end{aligned}$$

millest piirile minnes saame tuletise

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x \leftarrow x_2} \left[-\frac{1}{x_1^m x_2^m} (x_2^{m-1} + x_2^{m-2} x_1 + x_2^{m-3} x_1^2 + \dots + x_1^{m-1}) \right] = \\ &= -\frac{1}{x^{2m}} (x^{m-1} + x^{m-1} + x^{m-1} + \dots + x^{m-1}) = \\ &= -\frac{1}{x^{2m}} \cdot mx^{m-1} = -mx^{m-1-2m} = -m x^{-m-1}.\end{aligned}$$

tähendab

$$\frac{dy}{dx} = -mx^{-m-1},$$

millest näeme, et negatiivse astmenäitaja suhtes jääb tuletise valemis maksma sama reegel, mis oli maksev positiivse astmenäitaja suhtes, s. o. astmenäitaja tuleb korrutada funktsiooniga, mille astmenäitaja on ühe võrra vähem algfunktsiooni astmenäitajast.

2. näide. Leida funktsiooni

$$y = \frac{1}{x}$$

tuletis ja diferentsiaal.

Siin $y = x^{-1}$; astme tuletise valemit tarvitades võime kirjutada

$$\frac{dy}{dx} = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

diferentsiaal on

$$dy = -\frac{dx}{x^2}.$$

Ülesanded.

✓ 11) $y = \frac{1}{x^3}$

✓ 14) $y = \frac{1}{x^{n-2}}$

✓ 12) $y = \frac{1}{x^6}$

✓ 15) $y = \frac{1}{x^{1-n}}$

✓ 13) $y = \frac{1}{x^{33}}$

✓ 16) $y = \frac{1}{x^{n-m}}$

17) Leida kõverjoonele $y = \frac{1}{x^2}$ normaal, mis läheb läbi kõverjoone punkti, milles $x = -1$.

c) Olgu astmenäitaja n murdarv, s. o. $n = \frac{k}{m}$, siis

$$y = x^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{x^k},$$

kus k ja m on täisarvud, ja

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt[m]{x_2^k} - \sqrt[m]{x_1^k}}{x_2 - x_1} = \frac{(\sqrt[m]{x_2})^k - (\sqrt[m]{x_1})^k}{(\sqrt[m]{x_2})^m - (\sqrt[m]{x_1})^m},$$

kusjuures tähistame lühidalt

$$\sqrt[m]{x_1} = z_1 \text{ ja } \sqrt[m]{x_2} = z_2,$$

võime kirjutada

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{z_2^k - z_1^k}{z_2^m - z_1^m};$$

korrutades lugejat ja nimetajat $(z_2 - z_1)$ -ga saame

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{z_2^k - z_1^k}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_2 - z_1}{z_2^m - z_1^m} = \\ &= \frac{z_2^{k-1} + z_2^{k-2}z_1 + z_2^{k-3}z_1^2 + \dots + z_1^{k-1}}{z_2^{m-1} + z_2^{m-2}z_1 + z_2^{m-3}z_1^2 + \dots + z_1^{m-1}}; \end{aligned}$$

võtame piirväärtuse

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{z_1 \rightarrow z \leftarrow z_2} \frac{z_2^{k-1} + z_2^{k-2}z_1 + z_2^{k-3}z_1^2 + \dots + z_1^{k-1}}{z_2^{m-1} + z_2^{m-2}z_1 + z_2^{m-3}z_1^2 + \dots + z_1^{m-1}} = \\ &= \frac{z^{k-1} + z^{k-1} + z^{k-1} + \dots + z^{k-1}}{z^{m-1} + z^{m-1} + z^{m-1} + \dots + z^{m-1}} = \frac{kz^{k-1}}{mz^{m-1}} = \frac{k}{m} \cdot z^{k-m}; \end{aligned}$$

kui $z_1 \rightarrow z \leftarrow z_2$, siis $x_1 \rightarrow x \leftarrow x_2$, järelkult

$$z = \sqrt[m]{x},$$

paigutades selle väärtuse z -i asemele saame

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k}{m} \left(\sqrt[m]{x} \right)^{k-m} = \frac{k}{m} \cdot x^{\frac{k-m}{m}} = \frac{k}{m} x^{\frac{k-1}{m}};$$

tähendab

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{m} x^{k-1},$$

millest näeme, et murrulise astmenäitaja korral maksab eelmise tuletise valemi põhimõte, s. o. astmenäitaja tuleb korrutada funktsiooniga, mille astmenäitaja on ühe võrra vähem algfunktsiooni astmenäitajast.

3. näide. Leida funktsiooni

$$y = \sqrt{x}$$

tuletis ja diferentsiaal.

Siin $y = x^{\frac{1}{2}}$; tarvitades viimast valemit, võime kirjutada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

diferentsiaal on

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

4. näide. Leida funktsiooni

$$y = x\sqrt{x\sqrt{x}}$$

tuletis.

Siin $y = x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{4}}$; diferentsides saame

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{4} x^{\frac{7}{4}-1} = \frac{7}{4} x^{\frac{3}{4}} = \frac{7}{4} \sqrt[4]{x^3}.$$

Ülesanded.

$$\times 18) y = \sqrt[3]{x} \quad \times 20) y = x\sqrt{x} \quad \times 22) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$\times 19) y = \sqrt[5]{x^2} \quad \times 21) y = x^2\sqrt[3]{x} \quad \times 23) y = \sqrt{\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}}.$$

2. lause. Funktsiooni konstantne tegur jääb diferentsimisel tuletise märgi ette.

Olgu konstantse teguriga funktsioon

$$y = a \cdot f(x),$$

kus $a = \text{konst.}$ Kasvab argument Δx -i võrra, siis muutub ka funktsioon Δy -i võrra, nõnda et

$$y + \Delta y = a \cdot f(x + \Delta x),$$

kust

$$\Delta y = a \cdot f(x + \Delta x) - y$$

ehk y -i väärtust asemele pannes

$$\Delta y = a \cdot f(x + \Delta x) - a \cdot f(x);$$

jagades viimase avaldise mõlemaid pooli Δx -ga saame vahede jagatise

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

millest saame funktsiooni tuletise

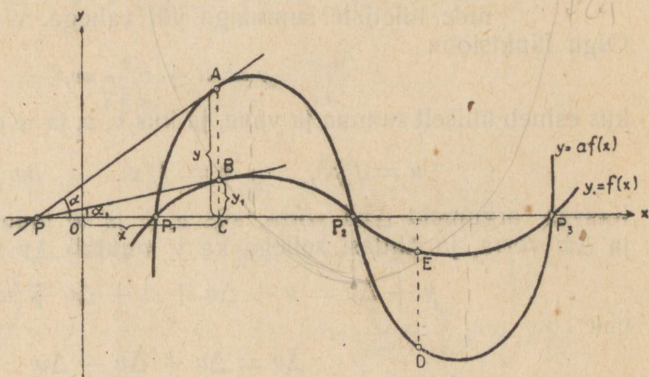
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = a \cdot f'(x)$$

(sest konstantse suuruse piir on ikka sama konstantne suurus).

Funktsioon $y = a \cdot f(x)$ tähendab geomeetriliselt, et kõverjoonte

$$y = a \cdot f(x) \text{ ja } y_1 = f(x)$$

ordinaadid võrdsete abstsissidega punktides erinevad üksteisest a korda (27. joon.). Punkti A ordinaat y on a korda pikem kui punkti B ordinaat y_1 . Punkti D ordinaat on a korda pikem kui punkti E ordinaat. Punktides P_1, P_2 ja P_3 ordinaat on mõlema kõverjoone suhtes 0, sest kui $f(x) = 0$, siis ka $a \cdot f(x) = a \cdot 0 = 0$.



27. joonis.

Puutuja punktist $B \equiv (x | y_1)$ lõikab x -telge punktis P ja moodustab nurga α_1 , kus

$$\tan \alpha_1 = \frac{BC}{PC} = \frac{dy_1}{dx} = f'(x).$$

Punktis $A \equiv (x | y)$ on ordinaat a korda pikem kui punktis B , siis

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{dy_1}{dx} = a \cdot f'(x) = a \cdot \frac{BC}{PC} = \frac{AC}{PC} = \tan \alpha,$$

millest näeme, et puutuja punktist A lõikab x -telge samas punktis P .

5. näide. Leida funktsioonide

$$y = 3x^4 \text{ ja } y = \frac{x}{a}$$

tuletised.

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} \cdot x^0 = \frac{1}{a}.$$

Ülesanded.

$$\begin{array}{lll} \downarrow 24) y = 6x^5 & \swarrow 27) y = \frac{2}{3}x^3 & 30) y = \frac{5a}{x^3} \\ \downarrow 25) y = ax & \swarrow 28) y = \frac{m}{x} & 31) y = \frac{a}{4x^2} \\ \downarrow 26) y = 2ax^3 & \swarrow 29) y = \frac{1}{ax^2} & 32) y = \sqrt{ax} \end{array}$$

33) Leida kõverjoontele $y^2 = x$ ja $y^2 = 4x$ puutuja ja normaal kui mõlema kõverjoone puutepunktide abstsiss $x = 4$.

3. lause. Funktsioonide summa või vahe tuletis võrdub funktsioonide tuletiste summaga või vahega.

Olgu funktsioon

$$y = u + v - w,$$

kus esineb ühiselt summa ja vahe, ja kus u , v , ja w on x -i funktsioonid, s. o.

$$u = f_1(x), \quad v = f_2(x), \quad w = f_3(x).$$

Kasvab argument Δx -i võrra, siis u , v ja w muutuvad vastavalt Δu , Δv ja Δw võrra, ja ühtlasi sellega ka y muutub Δy võrra, s. o.

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - (w + \Delta w)$$

ehk

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$$

ja

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x},$$

millest saame funktsiooni tuletise

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

ehk

$$f'(x) = f'_1(x) + f'_2(x) - f'_3(x).$$

6. näide. Leida funktsiooni

$$y = 2x^3 - x^2 + 3x$$

tuletis.

1. ja 2. lause ning saadud valemi põhjal võime kirjutada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(2x^3)}{dx} - \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(3x)}{dx} = 2 \cdot 3x^2 - 2x + 3x^0 = 6x^2 - 2x + 3.$$

7. näide. Leida funktsiooni

$$y = 2x - a\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2}$$

tuletis.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(2x)}{dx} - \frac{d(a\sqrt{x})}{dx} + \frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{b}{x^2}\right)}{dx} = \\ &= 2 \frac{d(x)}{dx} - a \frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{dx} + \frac{d(x^{-\frac{1}{2}})}{dx} - b \frac{d(x^{-2})}{dx} = \\ &= 2x^0 - a \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} - (-2)x^{-3} = \\ &= 2 - \frac{a}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

Ülesanded.

34) $y = x^{10} - x^6 \neq x^2$

38) $y = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}$

35) $y = 2x^3 - 4x^2 - 5x$

39) $y = x^2 - x^{-2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

36) $y = x^3 + 9x^2 + ax$

40) $y = \frac{4}{5x^2} + \frac{3}{4}x^4 + 2\sqrt{x}$

37) $y = 3a^2x^2 - bx^3 - 2cx$

41) $y = x\sqrt{x} + \sqrt{x^2}$

42) Missuguste nurkade all kõverjoon $y = x^2 - 3x$ lõikab x -telge?

4. lause. Funktsiooni konstantsed liikmed kaovad diferentsimisel ära.

Olgu konstantse liikmega funktsioon

$$y = f(x) + c,$$

kus $c =$ konstant. Kui argument kasvab Δx -i võrra, siis muutub ka funktsioon Δy -i võrra, s. o.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) + c,$$

ehk

$$\Delta y = f(x + \Delta x) + c - [f(x) + c] = f(x + \Delta x) - f(x);$$

jagades Δx -ga ja piirile minnes saame

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

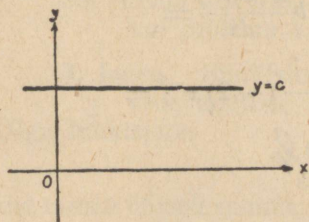
Eelmist lauset arvestades võime kirjutada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[f(x) + c]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dc}{dx} = f'(x),$$

millest näeme, et

$$\frac{dc}{dx} = 0,$$

s. o. konstantse liikme tuletis on 0.



28. joonis.

Funktsioon $y = c$ kujutab geomeetriselt sirgjoont, mis on paralleelne x -teljega (28. joon.) ja mille tõus on 0, s. o.

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = 0.$$

Funktsioon $y = f(x) + c$ tähendab geomeetriselt, et kõverjoonte

$$y = f(x) + c \text{ ja } y_1 = f(x)$$

ordinaadid võrdsete abstsissidega punktides erinevad üksteisest c võrra (29. joon.). Neis (võrdsete abstsissidega) punktides on puutujad paralleelsed, sest nende nurga tangensid on võrdsed, s. o.

ordinaadid võrdsete abstsissidega punktides erinevad üksteisest c võrra (29. joon.). Neis (võrdsete abstsissidega) punktides on puutujad paralleelsed, sest nende nurga tangensid on võrdsed, s. o.

$$\frac{d[f(x) + c]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \tan \alpha.$$

8. näide. Leida funktsiooni

$$y = x^4 - 4x^2 - 3$$

tuletis.

Differentsides võime kirjutada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^4)}{dx} - \frac{d(4x^2)}{dx} - \frac{d(3)}{dx} = 4x^3 - 8x.$$

9. näide. Leida funktsiooni

$$y = \frac{x^3 - 2}{x} + x(1 - x)$$

tuletis.

Jagades ja korrutades saame

$$y = x^2 - 2x^{-1} + x - x^2 = x - 2x^{-1};$$

viimast differentsides leiame

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 + 2}{x^2}.$$

Ülesanded.

- 43) $y = x^2 - 2x - 2$ 51) $y = x(x^2 - 2)^2$
44) $y = x^3 + 3x + a^2$ 52) $y = (x - a)^2 - 2x^2$
45) $y = a^3 - x^3 - b^3$ 53) $y = \frac{2x - 1}{x^4}$
46) $y = (a + x)(a - x)$ 54) $y = \frac{3x^5 + 5x^2 - 2}{3x^2}$
47) $y = (1 - x)(x^2 - 2)$ 55) $y = \frac{(x - 1)(x - 2)}{x^2}$
48) $y = (4 - 3x^2)(3x - 5)$
49) $y = (mx - nx^2)^2$
50) $y = (a + x)^3$ 56) $y = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$
57) Leida kõverjoonele $y = x^2 + 2x - 3$ puutuja ja normaalpunktis $x = -4$.
58) Missugused nurgad moodustavad kõverjoone $y = x^3 - 5x^2 - 2$ puutuja ja normaal y -teljega, kui puutepunkti abstsiss $x = 5$.

§ 9. Nurgafunktsioonide tuletised.

a) Leida siinusfunktsiooni

$$y = \sin x$$

tuletis.

Kui

$$y = f(x) = \sin x,$$

siis

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x),$$

kust

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

ja vahede jagatis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

piirile minnes, kui $\Delta x \rightarrow 0$, saame

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x,$$

sest § 5 järele

$$\lim_{\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

ja

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x.$$

Tähendab, kui $y = \sin x$, siis

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

ja

$$dy = \cos x \, dx.$$

b) Leida koosinusfunktsiooni

$$y = \cos x$$

tuletis.

Kui

$$y = f(x) = \cos x,$$

siis

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \cos(x + \Delta x),$$

kust

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = - \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right);$$

piirile minnes, kui $\Delta x \rightarrow 0$, saame

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \lim_{\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = - \sin x.$$

Tähendab, kui $y = \cos x$, siis

$$\frac{dy}{dx} = - \sin x$$

ja

$$dy = - \sin x \, dx.$$

c) Leida tangensfunktsiooni

$$y = \tan x$$

tuletis.

Kui

$$y = f(x) = \tan x,$$

siis

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \tan(x + \Delta x),$$

kust

$$\Delta y = \tan(x + \Delta x) - \tan x = \frac{\sin \Delta x}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x}$$

ja

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \Delta x}{\Delta x \cdot \cos(x + \Delta x) \cos x} = \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x};$$

piirile minnes, kui $\Delta x \rightarrow 0$, saame

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Tähendab, kui $y = \tan x$, siis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ja

$$dy = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

d) Leida kootangensfunktsiooni

$$y = \cot x$$

tuletis.

Kui

$$y = f(x) = \cot x,$$

siis

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \cot(x + \Delta x),$$

kust

$$\Delta y = \cot(x + \Delta x) - \cot x = -\frac{\sin \Delta x}{\sin(x + \Delta x) \cdot \sin x}$$

ja

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \Delta x}{\Delta x \sin(x + \Delta x) \cdot \sin x} = -\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\sin(x + \Delta x) \cdot \sin x};$$

laseme $\Delta x \rightarrow 0$, saame

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(x + \Delta x) \cdot \sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Tähendab, kui $y = \cot x$, siis

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

ja

$$dy = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

1. näide. Leida funktsiooni

$$y = \tan x - \cot x$$

tuletis.

Differentsides saame

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\tan x)}{dx} - \frac{d(\cot x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

2. näide. Leida funktsiooni

$$y = x^2 - \frac{\sin x}{3} + \cos x - 2 \tan x + a \cot x$$

tuletis.

Differentsides saame

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(x^2)}{dx} - \frac{1}{3} \frac{d(\sin x)}{dx} + \frac{d(\cos x)}{dx} - 2 \frac{d(\tan x)}{dx} + \\ &+ a \frac{d(\cot x)}{dx} = 2x - \frac{\cos x}{3} - \sin x - \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{a}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

Ülesanded. Leida tuletised:

1) $y = a + \sin x$

4) $y = \sin x - \cos x$

2) $y = \tan x - x + a$

5) $y = a - \cot x - b$

3) $y = a + 2x - 2 \tan x$

6) $y = x^3 - 2 \cot x + 3 \cos x$

7) Leida kõverjoone $y = \sin x$ puutujate ja normaalide võrrandid

punktides: $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \pi$.

§ 10. Liitfunktsioonid.

Olgu meil y mõni z -i funktsioon

$$y = f(z),$$

kus z on omakorda mõni x -i funktsioon

$$z = \varphi(x),$$

siis on ka y ühtlasi x -i funktsioon, s. o.

$$y = f[\varphi(x)].$$

y -i olenemine x -st ei ole siin otsene, vaid kaudne: y oleneb x -ist z -i kaudu. z on sel juhul abisuurus, abimuutuja. Niisugust kaudset olene- mist nimetatakse **liitfunktsiooniks** ehk **funktsiooniks funktsioonist**.

Näiteks:

$$y = (a + bx)^2, y = \sin 4x, y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

on liitfunktsioonid, mis olenevad argumentidest x kaudselt. Funktsioonid (abimuutuja z), mille kaudu see olenemine sünnib, on siin vastavalt

$$z = a + bx, z = 4x, z = a^2 - x^2.$$

Kui liitfunktsioonis argument x kasvab Δx -i võrra, siis omab abimuutuja z kasvu Δz ja sellega ühtlasi omab ka funktsioon y kasvu Δy ; tähendab, kui

$$y = f(z), z = \varphi(x),$$

siis

$$y + \Delta y = f(z + \Delta z), z + \Delta z = \varphi(x + \Delta x),$$

kust funktsiooni ja abimuutuja kasvud on

$$\Delta y = f(z + \Delta z) - f(z), \Delta z = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x);$$

jagades esimest Δz -ga ja teist Δx -ga saame

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x},$$

mille põhjal võime kirjutada vahede jagatise kujus

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}.$$

Kui laseme $\Delta x \rightarrow 0$, siis ka $\Delta z \rightarrow 0$ ja $\Delta y \rightarrow 0$ (muidugi oletades, et funktsioon on pidev), saame liitfunktsiooni tuletise

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \\ &= f'(z) \cdot \varphi'(x), \end{aligned}$$

tähendab

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = f'(z) \cdot \varphi'(x).$$

Et liitfunktsiooni diferentsida, tuleb teda diferentsida abimuutuja suhtes, siis abimuutajat diferentsida argumenti suhtes ja lõpuks saadud tuletised korrutada, s. o. liitfunktsiooni tuletis võrdub mõlema funktsiooni tuletiste korrutisega.

Liitfunktsiooni tuletise valemist väljudes võime kirjutada funktsiooni diferentsiaali

$$dy = f'(z) \cdot \varphi'(x) \cdot dx,$$

$$dz = \varphi'(x) dx,$$

siis

$$dy = f'(z) dz,$$

s. o. liitfunktsiooni differentsiaali saame, kui abimuutujat loeme rippu-
matuks muutujaks.

Laiendame kaudset olenevust: kui y on z -i funktsioon, z on u funktsioon ja u on x -i funktsioon, s. o.

$$y = f(z), \quad z = \varphi(u), \quad u = \psi(x),$$

siis

$$dy = f'(z) dz, \quad dz = \varphi'(u) du, \quad du = \psi'(x) dx$$

ehk

$$dy = f'(z) dz = f'(z) \cdot \varphi'(u) du = f'(z) \cdot \varphi'(u) \cdot \psi'(x) dx,$$

millest funktsiooni tuletis

$$\frac{dy}{dx} = f'(z) \cdot \varphi'(u) \cdot \psi'(x).$$

Analoogiliselt võime edasi arvutada, ükskõik kui palju abimuutu-
jaid ka ei esineks.

1. näide. Leida funktsiooni

$$y = (x^2 - a^2)^3$$

tuletis.

See on liitfunktsioon, sest siin

$$y = f(z) = z^3, \quad z = \varphi(x) = x^2 - a^2;$$

tarvitades liitfunktsiooni tuletise valemit võime kirjutada

$$\frac{dy}{dx} = f'(z) \cdot \varphi'(x) = \frac{d(z^3)}{dz} \cdot \frac{d(x^2 - a^2)}{dx} = 3z^2 \cdot 2x = 6xz^2;$$

z -i väärtuse $z = x^2 - a^2$ asemele pannes saame

$$\frac{dy}{dx} = 6x(x^2 - a^2)^2.$$

2. näide. Leida funktsiooni

$$y = \sin(ax + bx^2)$$

tuletis.

Siin

$$y = f(z) = \sin z, \quad z = \varphi(x) = ax + bx^2;$$

differentsime

$$\frac{dy}{dx} = f'(z) \cdot \varphi'(x) = \frac{d(\sin z)}{dz} \cdot \frac{d(ax + bx^2)}{dx} =$$

$$= \cos z \cdot (a + 2bx)$$

ja abimuutujat x -i kaudu väljendades saame

$$\frac{dy}{dx} = \cos(ax + bx^2) \cdot (a + 2bx) = (a + 2bx) \cos(ax + bx^2).$$

3. näide. Leida funktsiooni

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

tuletis.

Siin

$$y = \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}, \quad z = a^2 - x^2;$$

differentsides

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{z^2}\right)}{dz} \cdot \frac{d(a^2 - x^2)}{dx} = \frac{1}{2} \cdot z^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{z}}$$

ja z -i asemele ta väärtust pannes saame

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Märkus. Nagu eespool-olevatest näidetest näeme, on

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dz}$ ja $\frac{dz}{dx}$ üldiselt isesuurused avaldised.

Ülesanded. Leida liitfunktsioonide tuletised:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1) $y = (x - 3)^3$ | 8) $y = \sin 6x$ |
| 2) $y = (2 - 3x^2)^2$ | 9) $y = \cos(2x - 3)$ |
| 3) $y = 2a(a^2 - x^2)^2$ | 10) $y = \sin^3 x$ |
| 4) $y = \sqrt{1 + x}$ | 11) $y = \cos x^3$ |
| 5) $y = \sqrt{4 - x^2}$ | 12) $y = 4 \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ |
| 6) $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ | 13) $y = \sin^2 2x$ |
| 7) $y = \sqrt{(a - x)^2}$ | 14) $y = \sqrt{\cos 3x}$ |

§ 11. Kõrgema järgu tuletised.

Nagu eespool nägime, on funktsiooni $y = f(x)$ tuletis

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

omakorda jälle mõni x -i funktsioon. Me nimetame seda **esimeseks tuletatud funktsiooniks** ehk **esimeseks tuletiseks**.

Et $f'(x)$ on mõni x -i funktsioon, siis võime teda omakorda x -i suhtes differentsida, saame **teise tuletatud funktsiooni** ehk **teise tuletise**, mis tähistatakse järgmiselt

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Viimane avaldis tähendab, et funktsiooni on kaks korda x -i suhtes differentsitud.

Kui viimane avaldis on ikka veel mõni x -i funktsioon, võime edasi differentsida, s. o. võime saada kolmanda, neljanda jne. tuletise, mis tähistatakse järgmiselt:

$$f'''(x) = \frac{df''(x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{df'''(x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4},$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{df^{(4)}(x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)}{dx} = \frac{d^5y}{dx^5} \text{ j. n. e.}$$

funktsiooni n -järgu tuletis on

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Vastavad funktsiooni esimene, teine, kolmas j. n. e. differentsiaalid on siis

$$\begin{aligned} dy &= f'(x) dx, \\ d^2 y &= f''(x) dx^2, \\ d^3 y &= f'''(x) dx^3, \\ d^4 y &= f^{(4)}(x) dx^4, \\ &\dots\dots\dots \\ d^n y &= f^{(n)}(x) dx^n \end{aligned}$$

Märkus. Sümbolit dx^2 , mis tähendab argumenti teise järgu differentsiaali, mitte ära vahetada avaldisega $d(x^2)$, sest viimane $d(x^2) = 2x dx$!

1. näide. Leida funktsiooni

$$y = x^4 - 2x^3 + 4x - 5$$

teine tuletis.

Esimene tuletis on

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 6x^2 + 4$$

ja teine tuletis

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 12x^2 - 12x.$$

2. näide. Leida funktsiooni

$$y = \frac{1}{x}$$

kolmas tuletis.

Esimene tuletis on

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^{-1})}{dx} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$

teine tuletis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(-x^{-2})}{dx} = -(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

ja kolmas

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d(2x^{-3})}{dx} = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}.$$

3. näide. Leida funktsiooni

$$y = \sin x$$

n -järgu tuletis.

1. arvutus.

$$\frac{dy}{dx} = \cos x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \sin x,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \cos x, \text{ j. n. e.}$$

Siit näeme, et funktsiooni väärtused korduvad perioodiliselt, mille põhjal võime üldiselt kirjutada

$$\frac{d^{4n}y}{dx^{4n}} = \sin x, \quad \frac{d^{4n+1}y}{dx^{4n+1}} = \cos x,$$

$$\frac{d^{4n+2}y}{dx^{4n+2}} = -\sin x, \quad \frac{d^{4n+3}y}{dx^{4n+3}} = -\cos x.$$

2. arvutus. Kui

$$y = \sin x,$$

siis

$$\frac{dy}{dx} = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x = \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right),$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \sin x = \sin\left(\frac{4\pi}{2} + x\right),$$

.....

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right).$$

4. näide. Leida funktsiooni

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

teine tuletis.

See on liitfunktsioon, mille esimene tuletis on meil teada eelmisest §-st (3. näide), s. o.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

ehk

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1}},$$

mis on omakorda liitfunktsioon. Siin tähistame

$$z = \left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1 = a^2 x^{-2} - 1,$$

siis

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{z}} = -z^{-\frac{1}{2}};$$

liitfunktsiooni tuletise valemi järele saame

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d(-z^{-\frac{1}{2}})}{dz} \cdot \frac{d(a^2 x^{-2} - 1)}{dx} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot z^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2a^2 x^{-3}) = -\frac{a^2}{x^3 z^{\frac{3}{2}}} = \\ &= -\frac{a^2}{x^3 z \sqrt{z}} = -\frac{a^2}{x^3 (a^2 x^{-2} - 1) \sqrt{a^2 x^{-2} - 1}} = \\ &= -\frac{a^2}{x (a^2 - x^2) \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{x^2}}} = -\frac{a^2}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Sellega funktsiooni

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

teine tuletis on

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2}{(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Ülesanded. Leida funktsioonide teine tuletis:

1) $y = 3x - 4$

5) $y = \frac{1}{x^2}$

9) $y = \sin 3x$

2) $y = x^2 - 5x - 7$

6) $y = \sqrt{x}$

10) $y = a \cos ax$

3) $y = x^3 - 2x + 3$

7) $y = \sqrt{1-x}$

11) $y = \tan x$

4) $y = (x-1)(x-2)$

8) $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

12) $y = \cot x.$

Leida funktsioonide kolmas, neljas, jne. tuletised:

$$13) y = x^3 - 3x^2 + x + 2$$

$$16) y = \frac{3}{x^3}$$

$$14) y = x^6 - 5x^3 - 2x - 5$$

$$17) y = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$$

$$15) y = x(a^2 - x^2)$$

$$18) y = \cos x.$$

§ 12. Maksimum, miinimum ja käänupunkt.

Kui meil on funktsioon

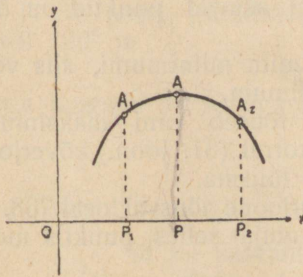
$$y = f(x)$$

mis kujutab mingisugust kõverjoont, siis teame, et ta kumer osa annab maksimumpunkti, nõgus osa miinimumpunkti ja kui kõverjoone kõverus muudab oma suunda, saame käänupunkti (§ 4).

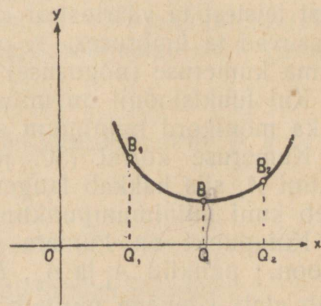
A) Kui on kumer kõverjoon (30. joon.), siis nimetatakse kõverjoone seda punkti, mis on teiste ta ümbruses olevate punktidega võrreldes kõige kõrgemal, **maksimumpunktiks** ja sellele punktile vastavat ordinaati — **funktsiooni maksimumiks**. Maksimumpunkt antud kõverjoonel on A, mis on kõrgemal ta ümbruses olevatest punktidest A_1 ja A_2 .

Funktsiooni maksimum on ordinaat

$$y_{\max} = f(x) = AP.$$



30. joonis.



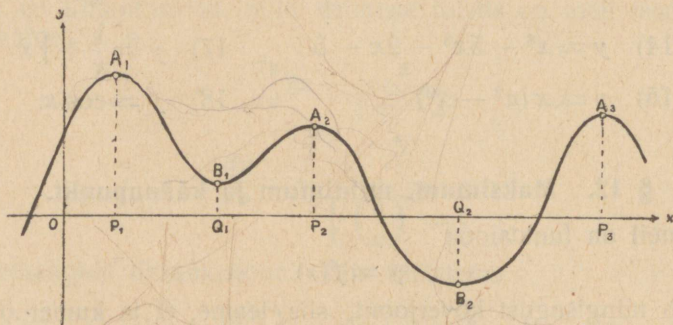
31. joonis.

Kui on nõgus kõverjoon (31. joon.), siis nimetatakse kõverjoone seda punkti, mis on teiste ta ümbruses olevate punktidega võrreldes kõige madalamal, **miinimumpunktiks** ja sellele punktile vastavat ordinaati — **funktsiooni miinimumiks**. Miinimumpunkt antud kõverjoonel on B, mis on madalamal ta ümbruses olevatest punktidest B_1 ja B_2 .

Funktsiooni miinimum on ordinaat

$$y_{\min} = f(x) = BQ.$$

Kuid siin tuleb tähele panna, et kõverjoonel võib olla mitu kumerat ja mitu nõgusat osa; sellega on siis ka kõverjoonel kas mitu maksimumpunkti või mitu miinimumpunkti — kas võrdsete või isesuuruste ordinaatidega.



32. joonis.

32. joonisel näeme, et siin esineb kolm maksimumpunkti A_1, A_2, A_3 ja kaks miinimumpunkti B_1 ja B_2 . Maksimumpunktidele A_1, A_2 ja A_3 vastavad funktsiooni maksimumid

$$y_{\max} = A_1 P_1, \quad y_{\max} = A_2 P_2, \quad y_{\max} = A_3 P_3$$

ja miinimumpunktidele B_1 ja B_2 vastavad funktsiooni miinimumid

$$y_{\min} = B_1 Q_1, \quad y_{\min} = B_2 Q_2.$$

Funktsiooni maksimum (miinimum) ei ole mitte ta väärtus, mis kõigist teistest ta väärtustest kõige suurem (vähem), vaid ainult nendest, mis asuvad ta ümbruses, s. o. kui kõverjoonel asuvad punktid on ühe ja sama kumeruse (nõgususe) osal.

Kui funktsioonil on mitu maksimumi ja mitu miinimumi, siis võib olla ka mõnikord miinimum suurem kui maksimum.

Kumeruse korral (30. joon.) kõverjoon tõuseb kuni maksimumpunktini A , siis hakkab langema. Nõgususe korral (31. joon.) kõverjoon langeb kuni miinimumpunktini B , siis hakkab tõusma.

Kui punkt on kumera või nõgusa kõverjoone tõusval osal (33. ja 34. joon.; punktid A_1 ja A_2, B_3 ja B_4), siis puutuja selles punktis moodustab alati x -teljega nurga $< 90^\circ$, s. o.

$$\begin{aligned} 0^\circ < \alpha_1 < 90^\circ, & \quad 0^\circ < \alpha_2 < 90^\circ, \\ 0^\circ < \beta_3 < 90^\circ, & \quad 0^\circ < \beta_4 < 90^\circ; \end{aligned}$$

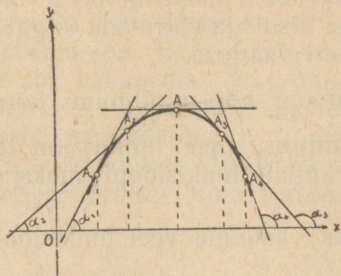
tähendab

$$\begin{aligned} \tan \alpha_1 > 0, & \quad \tan \alpha_2 > 0, \\ \tan \beta_3 > 0, & \quad \tan \beta_4 > 0. \end{aligned}$$

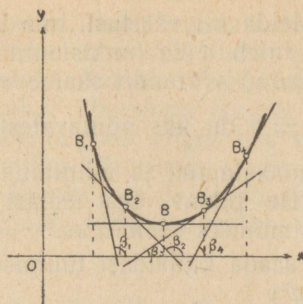
Nurga tangens on sellega positiivne tõusva kõverjoone igas punktis, s. o.

$$\frac{dy}{dx} > 0,$$

ja nagu jooniselt näeme, argumendi kasvamisel funktsioon kasvab.



33. joonis.



34. joonis.

Kui punkt on kumera või nõgusa kõverjoone langeval osal (33. ja 34. joon., punktid A_3 ja A_4 , B_1 ja B_2), siis puutuja selles punktis moodustab x -teljega nurga $> 90^\circ$, s. o.

$$90^\circ < \alpha_3 < 180^\circ, \quad 90^\circ < \alpha_4 < 180^\circ,$$

$$90^\circ < \beta_1 < 180^\circ, \quad 90^\circ < \beta_2 < 180^\circ;$$

tähendab

$$\tan \alpha_3 < 0, \quad \tan \alpha_4 < 0,$$

$$\tan \beta_1 < 0, \quad \tan \beta_2 < 0.$$

Nurga tangens on sellega negatiivne langeva kõverjoone igas punktis, s. o.

$$\frac{dy}{dx} < 0,$$

ja argumenti kasvamisel funktsioon kahaneb.

Kui puutepunkt langeb ühte maksimum- või miinimumpunktiga (33. ja 34. joon., punktid A ja B), siis puutuja moodustab x -teljega nurga 0° või 180° ja

$$\tan 0^\circ = \tan 180^\circ = 0.$$

Nurga tangens on sellega maksimum- või miinimumpunktis 0, s. o.

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Tähendab: a) kui $\frac{dy}{dx} > 0$, siis asub punkt kõverjoone tõusval osal ja x -i kasvamisel y kasvab ning ümberpöörduvalt;

b) kui $\frac{dy}{dx} < 0$, siis asub punkt kõverjoone langeval osal ja x -i kasvamisel y kahaneb ning ümberpöörduvalt;

c) kui $\frac{dy}{dx} = 0$, siis on funktsioon kas maksimum või miinimum.

Ümberpöörduvalt: a) kui x -i kasvamisel y kasvab, siis $\frac{dy}{dx} > 0$;

b) „ x -i „ y kahaneb, „ $\frac{dy}{dx} < 0$;

c) „ on maksimum või miinim., „ $\frac{dy}{dx} = 0$.

Et leida x -i väärtust, mis teeb funktsiooni maksimumiks või miinimumiks, tuleb leida funktsiooni esimene tuletis ja võrrutada 0-iga; lahendades saadud võrrandit saame vastava x -i väärtuse.

$\frac{dy}{dx} = 0$ on üks nõutavatest maksimumi või miinimumi tunnustest.

See on maksimumi ja miinimumi **üldtunnus**. See tunnus on **tarvillik**, kuid **mitte piisav**, sest temast ei ole küllalt funktsiooni maksimumiks või miinimumiks saamiseks.

Et saada küllaldast tunnust, selleks vaatleme veel funktsiooni teist tuletist $\frac{d^2y}{dx^2}$, mille võime kirjutada kujus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d(\tan \alpha)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx},$$

kus α on puutuja ja x -telje vaheline nurk. Siin $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ on alati positiivne, sest $\cos^2 \alpha > 0$. Sellega funktsiooni teise tuletise $\frac{d^2y}{dx^2}$ märk oleb avaldise $\frac{d\alpha}{dx}$ märgist.

Kui punkt on kumeral kõverjoonel (33. joon.), siis x -i kasvamisel nurk α (joonisel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ja α_4) kahaneb; tähendab (arvestades eelolevat)

$$\frac{d\alpha}{dx} < 0, \text{ siis on ka } \frac{d^2y}{dx^2} < 0.$$

Kui punkt on nõgusal kõverjoonel (34. joon.), siis x -i kasvamisel nurk α (joonisel $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ja β_4) kasvab; tähendab

$$\frac{d\alpha}{dx} > 0, \text{ siis on ka } \frac{d^2y}{dx^2} > 0.$$

Sellega kumera kõverjoone juures, mis annab maksimumpunkti, on

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0,$$

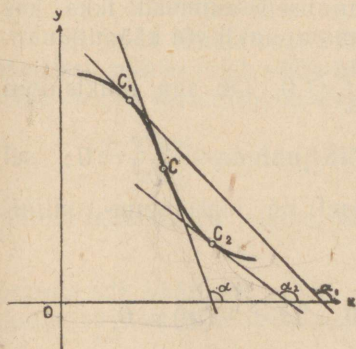
ja nõgusa kõverjoone juures, mis annab miinimumpunkti, on

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0.$$

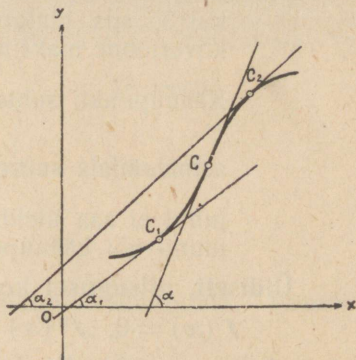
See on maksimumi ja miinimumi **eritunnus**. Tähendab:

- a) kui $\frac{dy}{dx} = 0$ ja $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, siis on maksimum,
 b) „ $\frac{dy}{dx} = 0$ „ $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, „ „ miinimum.

B) Kui punkt on niisugusel kõverjoonel, mis muudab oma kõveruse suunda, siis x -i kasvamisel nurk α kahaneb teatud piirini ja hakkab siis kasvama (35. joon.) või ümberpöörduvalt: kasvab teatud piirini ja hakkab siis kahanema (36. joon.). Sel juhul kõverjoon langeb või tõuseb kogu aeg: kõverjoone kumerale osale järgneb nõgus osa või nõgusale osale järgneb kumer osa. Punkt C , milles kõverjoone kõveruse suund muutub, s. o. milles lõpeb kõverjoone kumer osa ja algab nõgus osa või ümberpöörduvalt, nimetatakse kõverjoone **käänupunktiks**.



35. joonis.



36. joonis.

Käänupunktile vastava argumendi väärtuse juures peab funktsiooni teine tuletis oma märki muutma, sest, nagu nägime, kui punkt on kumeral kõverjoonel, siis $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, ja kui punkt on nõgusal kõverjoonel, siis $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$. Käänupunktis on üleminek ühest kõverusest teise kõverusse. Sellepärast käänupunktile vastava x -i väärtuse juures on

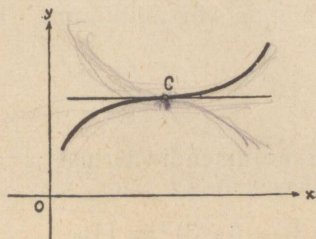
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

See on funktsiooni käänupunkti tunnus.

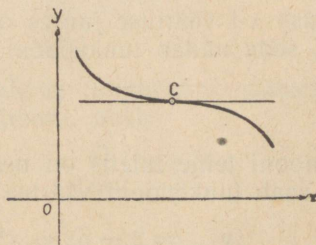
Erijuhul võib käänupunktis funktsiooni esimene tuletis

$$\frac{dy}{dx} = 0;$$

see on sel korral, kui käänupunktist läbiminev puutuja on paralleelne x -teljega (37. ja 38. joon.).



37. joonis.



38. joonis.

Tähendab :

a) kui $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, siis on käänupunkt;

b) kui $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ja $\frac{dy}{dx} = 0$, siis on käänupunkt, millest

läbiminev puutuja on paralleelne x -teljega.

Märkus. Kui algebralise täisfunktsiooni astmenäitaja ei ole suurem kui 3, siis ülalpool vaadeldud tunnused annavad ikka kas kõverjoone maksimumpunkti, miinimumpunkti või käänupunkti.

Käänupunkti suhtes on siis ikka $\frac{d^3y}{dx^3} \geq 0$. On aga funktsiooni

astmenäitaja suurem kui 3, siis võib juhtuda, et $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$; sel

juhul ei saa ütelda, kas kõverjoonel on maksimum-, miinimum- või käänupunkt.

Üldiselt, niisugusel korral kui

$$f'(x) = 0, f''(x) = 0, f'''(x) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x) = 0,$$

on maksimumpunkt siis, kui

$f^{(n)}(x) < 0$ ja n on paarisarv,
miinimumpunkt, kui

$f^{(n)}(x) > 0$ ja n on paarisarv,
ja käänupunkt, kui

$$f^{(n)}(x) \leq 0 \text{ ja } n \text{ on paaritu arv.}$$

1. näide. Leida funktsiooni

$$y = 2 - 6x - x^2$$

maksimum- või miinimumpunkt.

Funktsiooni maksimumi või miinimumi leidmiseks peab ta esimene tuletis võrduma nulliga, s. o.

$$\frac{dy}{dx} = -6 - 2x = 0,$$

millest leiame, et

$$x = -3.$$

Niisuguse x -i väärtuse juures on kas maksimum või miinimum. Kumb nimelt, seda näitab funktsiooni teine tuletis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2.$$

Funktsiooni teine tuletis on negatiivne, siis argumendi väärtuse $x = -3$ juures saab funktsiooni väärtus maksimumiks, s. o.

$$y_{\max} = 2 - 6x - x^2 = 2 - 6(-3) - (-3)^2 = 11.$$

Järelikult,

$$A \equiv (-3 | 11)$$

on funktsiooni $y = 2 - 6x - x^2$ maksimumpunkt (39. joon.).

2. näide. Leida funktsiooni

$$y = x^3 - 6x^2 + 4x - 2$$

käänupunkt.

Et leida funktsiooni käänupunkti abstsissi, selleks tuleb võtta funktsiooni teine tuletis ja võrutada 0-iga, s. o.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 4,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12 = 0,$$

millest lahendades leiame, et

$$x = 2.$$

Argumendi väärtuse $x = 2$ juures on funktsiooni käänupunkt. Funktsiooni väärtus käänupunktis on

$$y_{x=2} = x^3 - 6x^2 + 4x - 2 = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 2 = -10.$$

Tähendab,

$$C \equiv (2 | -10)$$

on funktsiooni $y = x^3 - 6x^2 + 4x - 2$ käänupunkt (40. joon.).

3. näide. Leida funktsiooni

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 5$$

maksimum, miinimum ja käänupunkt.

Differentsides saame

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x - 3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 2,$$

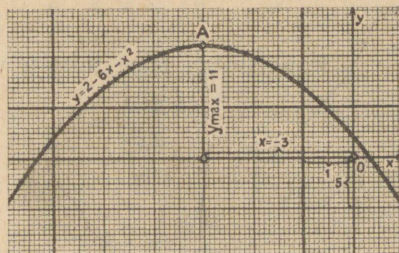
$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2.$$

Et leida funktsiooni maksimumi ja miinimumi, peab

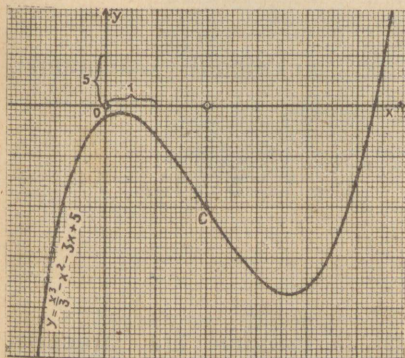
$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

s. o.

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$



39. joonis.



40. joonis.

Lahendades viimast x -i suhtes leiame, et

$$x_1 = 3 \text{ ja } x_2 = -1.$$

Funktsiooni teise tuletise väärtus, kui $x_1 = 3$, on

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x_1 - 2 = 2 \cdot 3 - 2 = 4 > 0,$$

ja kui $x_2 = -1$, siis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x_2 - 2 = 2 \cdot (-1) - 2 = -4 < 0.$$

Argumendi $x_1 = 3$ juures on funktsiooni teine tuletis positiivne, tähendab, selle x -i väärtuse juures on funktsiooni miinimum, s. o.

$$\begin{aligned} y_{\min} &= \frac{x_1^3}{3} - x_1^2 - 3x_1 + 5 = \\ &= \frac{3^3}{3} - 3^2 - 3 \cdot 3 + 5 = -4. \end{aligned}$$

Sellega miinimumpunkt on

$$B \equiv (3 \mid -4).$$

Argumendi $x_2 = -1$ juures on funktsiooni teine tuletis negatiivne, tähendab, selle x -i väärtuse juures on funktsiooni maksimum, s. o.

$$y_{\max} = \frac{x_2^3}{3} - x_2^2 - 3x_2 + 5 = \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 5 = 6\frac{2}{3}.$$

Sellega maksimumpunkt on

$$A \equiv (-1 \mid 6\frac{2}{3}).$$

Et leida funktsiooni käänupunkti, selleks peab

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 2 = 0,$$

mida lahendades leiame, et

$$x = 1.$$

Argumendi väärtuse $x = 1$ juures on funktsiooni käänupunkt, sest $\frac{d^3y}{dx^3} = 2 > 0$. Funktsiooni väärtus käänupunktis on

$$y_{x=1} = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 5 = \frac{1}{3} - 1 - 3 + 5 = 1\frac{1}{3}.$$

Sellega käänupunkt on

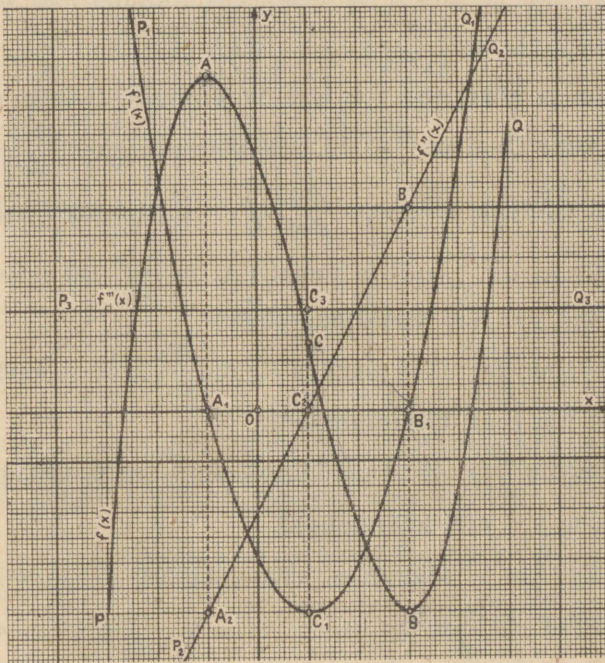
$$C \equiv (1 \mid 1\frac{1}{3}).$$

Vaatleme seda graafiliselt.

Anname argumendile x rida väärtusi ja märgime ära järgnevas tabelis vastavad algfunktsiooni, esimese ja teise tuletatud funktsiooni väärtused.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	$-20\frac{1}{3}$	-4	$4\frac{1}{4}$	$6\frac{2}{3}$	5	$1\frac{1}{3}$	$-2\frac{1}{3}$	-4	$-1\frac{2}{3}$	$5\frac{2}{3}$	23
$\frac{dy}{dx}$		12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12	
$\frac{d^2y}{dx^2}$			-6						+6		

Paigutame argumendi x väärtused üht telge mööda (x -telg) ja funktsiooni, esimese ja teise tuletise väärtused teist telge mööda (y -telg), saame 41. joonise.



41. joonis.

Lõpmatuse minevate kõverjoonte ja sirgjoonte otsad tähistame tähtedega

P ja Q , P_1 ja Q_1 , P_2 ja Q_2 , P_3 ja Q_3 .

Et näha tegelikult funktsiooni ja ta tuletise vahekorda, selleks on kujutatud joonisel korraga funktsioon $y=f(x)$ ja ta tuletised

$$\frac{dy}{dx}=f'(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}=f''(x) \quad \text{ja} \quad \frac{d^3y}{dx^3}=f'''(x).$$

41. jooniselt näeme:

1) P_1 -st kuni A_1 -ni on $\frac{dy}{dx} > 0$, sellepärast kõverjoon $y=f(x)$ **tõuseb** P -st kuni A -ni.

A_1 -st kuni B_1 -ni on $\frac{dy}{dx} < 0$, sellepärast kõverjoon $y=f(x)$ **langeb** A -st kuni B -ni.

B_1 -st kuni Q_1 -ni on $\frac{dy}{dx} > 0$, sellepärast kõverjoon $y=f(x)$ **tõuseb** B -st kuni Q -ni.

2) P_2 -st kuni C_2 -ni on $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, sellepärast kõverjoon $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ **langeb** P_1 -st kuni C_1 -ni ja kõverjoon $y=f(x)$ on **kumer** P -st kuni C -ni.

C_2 -st kuni Q_2 -ni on $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, sellepärast kõverjoon $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ **tõuseb** C_1 -st kuni Q_1 -ni ja kõverjoon $y=f(x)$ on **nõgus** C -st kuni Q -ni.

3) P_3 -st kuni Q_3 -ni on $\frac{d^3y}{dx^3} > 0$, sellepärast sirgjoon $\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)$ **tõuseb** P_2 -st kuni Q_2 -ni ja kõverjoon $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ on **nõgus** P_1 -st kuni Q_1 -ni.

4) Punktis A_1 on $\frac{dy}{dx}=0$ ja punktis A_2 on $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, sellepärast punkt A on kõverjoone $y=f(x)$ **maksimumpunkt**.

Punktis B_1 on $\frac{dy}{dx}=0$ ja punktis B_2 on $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, sellepärast punkt B on kõverjoone $y=f(x)$ **miinimumpunkt**.

Punktis C_2 on $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ ja punktis C_3 on $\frac{d^3y}{dx^3} > 0$, sellepärast punkt C on kõverjoone $y=f(x)$ **käänupunkt**.

Punktis C_1 $\frac{dy}{dx} \neq 0$, sellepärast käänupunktist C läbiminev puutuja **ei ole paralleelne** x -teljega.

5) Punktis C_2 on $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ ja punktis C_3 on $\frac{d^3y}{dx^3} > 0$, sellepärast punkt C_1 on kõverjoone $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ **miinimumpunkt**.

4. näide. Leida funktsiooni

$$y = \cos 2x - 2 \cos x$$

maksimum, miinimum ja käänupunkt.

Kõverjoonel on maksimum või miinimum, kui $\frac{dy}{dx} = 0$, s. o.

$$\frac{dy}{dx} = -2 \sin 2x + 2 \sin x = 0$$

ehk

$$-\sin 2x + \sin x = -2 \sin x \cdot \cos x + \sin x = 0,$$

millest saame

$$\sin x (2 \cos x - 1) = 0.$$

Kui

$$\sin x = 0,$$

siis

$$x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$$

ehk

$$x = n\pi,$$

kus $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$

Kui

$$2 \cos x - 1 = 0,$$

millest

$$\cos x = 0,5,$$

siis

$$x = \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{5\pi}{3}, \pm \frac{7\pi}{3}, \pm \frac{11\pi}{3}, \pm \frac{13\pi}{3}, \dots$$

ehk

$$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

kus

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$$

Niisuguste x -i väärtuste juures on funktsioon kas maksimum või miinimum. Kumma x -i rea juures funktsioon saab maksimumiks või miinimumiks, selleks uurime funktsiooni teist tuletist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4 \cos 2x + 2 \cos x.$$

Argumendi väärtuse $x = n\pi$ juures näeme, et ikka on $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

($\frac{d^2y}{dx^2} = -2$ või -6). Tähendab, need x -i väärtused annavad funktsiooni maksimumid. Paigutades neid x -i väärtusi algfunktsiooni näeme, et kui

$$x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \dots$$

siis

$$y_{\max} = \cos 2x - 2 \cos x = -1;$$

ja kui

$$x = \pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \pm 7\pi, \dots$$

siis

$$y_{\max} = \cos 2x - 2 \cos x = 3.$$

Argumendi väärtuste $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ juures näeme, et ikka on $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ ($\frac{d^2y}{dx^2} = 3$). Järelikult, need x -i väärtused teevad funktsiooni miinimumiks. Paigutades neid x -i väärtusi algfunktsiooni näeme, et iga $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ väärtuse juures on

$$y_{\min} = \cos 2x - 2 \cos x = -1,5.$$

Funktsiooni maksimumid ja miinimumid korduvad siin perioodiliselt.

Võtame vahemiku 0-st kuni 2π -ni nõnda, et

$$0 \leq x < 2\pi,$$

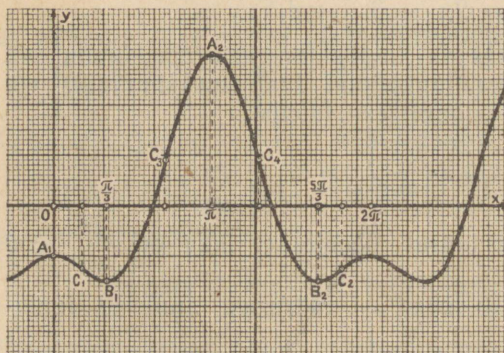
siis selles vahemikus on funktsioonil kaks maksimumi

$$y_{x=0} = \cos 2x - 2 \cos x = -1, \quad y_{x=\pi} = \cos 2x - 2 \cos x = 3$$

ja kaks miinimumi

$$y_{x=\frac{\pi}{3}} = \cos 2x - 2 \cos x = -1,5, \quad y_{x=\frac{5\pi}{3}} = \cos 2x - 2 \cos x = -1,5;$$

järelikult ka kaks maksimumpunkti ja kaks miinimumpunkti (42. joon.).



42. joonis.

Maksimumpunktid vahemikus $0 \leq x < 2\pi$ on

$$A_1 \equiv (0 | -1) \text{ ja } A_2 \equiv (\pi | 3),$$

ja miinimumpunktid selles vahemikus

$$B_1 \equiv \left(\frac{\pi}{3} | -1,5\right) \text{ ja}$$

$$B_2 \equiv \left(\frac{5\pi}{3} | -1,5\right).$$

Et leida funktsiooni käänupunkte, selleks peab $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$,

s. o.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4 \cos 2x + 2 \cos x = 0,$$

kust

$$2 \cos x - 4 \cos 2x = 2 \cos x - 4 (\cos^2 x - \sin^2 x) = \\ = 2 \cos x - 4 (2 \cos^2 x - 1) = 2 \cos x - 8 \cos^2 x - 4 = 0$$

ehk

$$4 \cos^2 x - \cos x + 2 = 0,$$

millest saame

$$\cos x = \frac{1 + \sqrt{33}}{8} = \frac{1 \pm 5,7446}{8},$$

s. o.

$$\cos x = 0,8431 \text{ ja } \cos x = -0,5933,$$

kust

$$x = 2n\pi \pm \frac{\pi \cdot 32^\circ 32'}{180^\circ} = 2n\pi \pm 0,57,$$

$$x = 2n\pi \pm \frac{\pi \cdot 126^\circ 23'}{180^\circ} = 2n\pi \pm 2,21.$$

Niisuguste x -i väärtuste juures on käänupunktid, sest nende väärtuste juures $\frac{d^3y}{dx^3} = 8 \sin 2x - 2 \sin x \neq 0$. Vastavad funktsiooni väärtused saame algfunktsioonist. Vahemikus 0-st kuni 2π -ni on sellega neli käänupunkti, sest esimesest reast

$$x_1 = 0,57 \text{ ja } x_2 = 2\pi - 0,57 = 5,71,$$

ja teisest reast

$$x_3 = 2,21 \text{ ja } x_4 = 2\pi - 2,21 = 4,07.$$

Vastavad funktsiooni väärtused on:

kui $x_1 = 0,57$ ehk $32^\circ 32'$, siis

$$y_1 = \cos 2x_1 - 2 \cos x_1 = \cos 65^\circ 4' - 2 \cos 32^\circ 32' = \\ = 0,4216 - 1,6862 = -1,26;$$

kui $x_2 = 5,71$ ehk $327^\circ 28'$, siis

$$y_2 = \cos 2x_2 - 2 \cos x_2 = \cos 654^\circ 56' - 2 \cos 327^\circ 28' = \\ = \cos 65^\circ 4' - 2 \cos 32^\circ 32' = -1,26;$$

kui $x_3 = 2,21$ ehk $126^\circ 23'$, siis

$$y_3 = \cos 2x_3 - 2 \cos x_3 = \cos 252^\circ 46' - 2 \cos 126^\circ 23' = \\ = -\sin 17^\circ 14' + 2 \cos 53^\circ 37' = 0,89;$$

kui $x_4 = 4,07$ ehk $233^\circ 37'$, siis

$$y_4 = \cos 2x_4 - 2 \cos x_4 = \cos 467^\circ 14' - 2 \cos 233^\circ 37' = \\ = -\sin 17^\circ 14' - 2 \cos 53^\circ 37' = 0,89.$$

Tähendab, käänupunktid vahemikus 0-st kuni 2π -ni on :

$$C_1 \equiv (0,57 | -1,26), \quad C_2 \equiv (5,71 | -1,26), \quad C_3 \equiv (2,21 | 0,89) \\ \text{ja } C_4 \equiv (4,07 | 0,89).$$

5. näide. Missuguses punktis on funktsiooni

$$y = x^2 - 6ax + b^2$$

maksimum või miinimum?

Siin funktsiooni esimene tuletis

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 6a = 0,$$

kust

$$x = 3a.$$

Funktsiooni teine tuletis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 > 0,$$

sellepärast argumendi väärtus $x = 3a$ teeb funktsiooni miinimumiks, s. o.

$$y_{\min} = x^2 - 6ax + b^2 = 9a^2 - 18a^2 + b^2 = b^2 - 9a^2.$$

Sellega funktsiooni miinimum on punktis

$$B_{\min} \equiv (3a | b^2 - 9a^2).$$

6. näide. Kujundada koonusesse maksimaalse mahuga silinder, kui koonuse kõrgus on h ja põhja raadius r .

Olgu otsitava silindri kõrgus x ja põhja raadius y (43. joon.), siis ta maht

$$V = \pi xy^2.$$

Siin esinevad kolm muutuvat suurust V , x ja y . Kaotame ühe neist ära, näit. x -i

$$\frac{y}{r} = \frac{h-x}{h}, \quad x = h - \frac{hy}{r}.$$

Pannes x -i väärtuse mahu valemisse $V = \pi xy^2$ saame

$$V = \pi \left(h - \frac{hy}{r} \right) y^2 = \pi hy^2 - \frac{\pi h}{r} \cdot y^3.$$

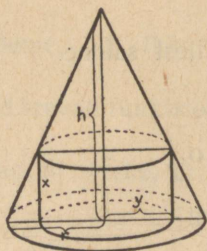
Et nüüd saada maksimaalset mahtu, tuleb võtta esimene tuletis, s. o. silindri mahtu tuleb differentsida ta raadiuse y -i suhtes:

$$\frac{dV}{dy} = 2\pi hy - \frac{3\pi h}{r} \cdot y^2 = 0,$$

millest leiame, et

$$y_1 = 0 \text{ ja } y_2 = \frac{2r}{3}.$$

Jooniselt on näha, kui $y_1 = 0$, siis ei ole mahtu olemas; see on mahu minimaalsuse juhtum. Järelikult, kui $y = \frac{2r}{3}$, saame selle raadiuse väärtuse juures maksimaalse mahu V .



43. joonis.

Tõesti, kui võtame teise tuletise

$$\frac{d^2V}{dy^2} = 2\pi h - \frac{6\pi h}{r}y,$$

ja paigutame y -i asemele korra 0, saame

$$\frac{d^2V}{dy^2} = 2\pi h > 0,$$

mis on minimaalsuse juhtum; ja paigutame teine kord y -i asemele $\frac{2r}{3}$, saame

$$\frac{d^2V}{dy^2} = 2\pi h - \frac{6\pi h}{r} \cdot \frac{2r}{3} = -2\pi h < 0,$$

mis on maksimaalsuse juhtum.

Kui maksimaalse mahu juures silindri raadius $y = \frac{2r}{3}$, siis ta kõrgus

$$x = h - \frac{hy}{r} = h - \frac{h}{r} \cdot \frac{2r}{3} = \frac{h}{3}.$$

Sellega maksimaalne silindri maht on

$$V = \pi xy^2 = \pi \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{4r^2}{9} = \frac{4}{27} \pi hr^2, \quad V_{\max} = \frac{4}{27} \pi r^2 h,$$

mis moodustab $\frac{4}{9}$ osa koonuse mahust.

Ülesanded. Leida kõverjoonte maksimum, miinimum ja käänupunkt:

- | | |
|------------------------------|--|
| 1) $y = x^2 - 3$ | 9) $y = 2 - 3x + 3x^2 - x^3$ |
| 2) $y = x^2 - 2x$ | 10) $y = 2x^3 + 3x^2 - \frac{9}{2}x + 3$ |
| 3) $y = 2 - 3x - x^2$ | 11) $y = \sin x + \cos x$ |
| 4) $y = 1 + 6x - 3x^2$ | 12) $y = \sin x - \cos x$ |
| 5) $y = 3x^2 - 12x + 1$ | 13) $y = \sin x + 2 \sin 2x$ |
| 6) $y = x^3 - 9x + 5$ | 14) $y = 2 \cos x + \cos 2x$ |
| 7) $y = x^3 - 4x + 4$ | |
| 8) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$ | |

15) Ehitada (nelinurkne) maja kolmnurksele maatükile, mille üks külg $a = 60$ m ja sellele küljele vastasnurka kaugus $h = 40$ m, võimalikult suure aluspinnaga (vundamenti üks serv asugu küljel a).

16) Ehitada nelinurkne platvorm täiskolmnurksele maatükile, mille kaatetid $a = 88$ m ja $b = 62$ m, võimalikult suure pinnaga (platvormi kaks serva asugu kaatetitel a ja b).

17) Nelinurkse akna übermõõt $2p = 6$ m; kui suur peaks olema akna kõrgus, et temast võimalikult palju valgust läbi tungiks?

18) Nelinurkse akna pind $S = 3$ m²; missugused peaksid olema akna mõõded, et ta übermõõt oleks võimalikult väike?

19) Kolmnurga kaks külge on a ja b ; kui suur tuleb valida nende vaheline nurk, et kolmnurk oleks maksimaalse pinnaga?

20) Missugused peavad olema liitri mõõted, et ta valmistamiseks võimalikult vähe plekki kuluks?

21) Välja lõigata kerast, mille raadius $R = 20$ cm, maksimaalse mahuga a) silinder, b) koonus, c) korrapärase parallelelepipeed.

22) Välja lõigata koonusest, mille põhja raadius $r = 8$ cm ja kõrgus $h = 20$ cm, maksimaalse külgpinnaga silinder.

23) Koonusesse, mille põhja raadius $r = 25$ cm ja kõrgus $h = 1$ m, kujundada teine koonus nõnda, et tema tipp asuks esimese koonuse põhja keskpunktis ja maht oleks võimalikult suur.

24) Toa ruumala $V = 216$ m³; kui suur peaks olema toa kõrgus, et seinte, põranda ja lae pind kokku oleks võimalikult väike; oletades, et põranda pind on ruut.

25) Kanali ristlõige $S = 120$ m² ja nõlvnurk $d = 60^\circ$. Missugune peab olema kanali sügavus, et kanali ristlõike perimeeter oleks võimalikult väike?

III peatükk. Funktsioonide integrimine.

§ 13. Integraali mõiste.

Funktsiooni $f(x)$ integraaliks nimetatakse funktsiooni $F(x)$, mille tuletis $F'(x)$ on võrdne antud funktsiooniga $f(x)$, s. o.

$$F'(x) = f(x).$$

Meie otsime algfunktsiooni, kui on antud ta tuletis. Antud funktsiooni järgi tema integraali leidmist nimetatakse **funktsiooni integrimiseks**.

Teame, et funktsiooni $F(x)$ differentsiaal võrdub ta tuletise $F'(x)$ ja argumendi differentsiaali dx korrutisega, s. o.

$$dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx,$$

mille põhjal võime ka ütelda, et integrimine on funktsiooni leidmine, mille differentsiaal on teada; sellepärast nimetatakse integraali leidmist ka **differentsiaali integrimiseks**.

Sümboolselt tähistatakse seda

$$\int dF(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x),$$

kus \int nimetatakse **integraali märgiks** (\int on pikaks venitatud täht S).

Kui $y = x^2$, siis $dy = 2x dx$, järelikult selle integraal on

$$\int 2x dx = x^2.$$

Kui $y = \sin x$, siis $dy = \cos x dx$, mille integraal on

$$\int \cos x dx = \sin x.$$

Integrimine on sellega vastupidine tehe differentsimisele ja nimelt differentsiaali leidmisele. Kui funktsioon on korra differentsitud ~~korra~~ ja integritud, siis jääb ta muutumatuks. Nagu nägime

$$\int dF(x) = F(x),$$

kus mõlemad tehted (differentsimine ja integrimine) hävivad ühes koos. Selle põhjal võime kontrollida, kas oleme õieti integrinud: integraali differentsides peame saama integraali märgi all oleva avaldise.

Kui meil on mistahes konstantse liikmega funktsioon

$$y = F(x) + c,$$

siis kaob konstantne liige diferentsimisel, s. o.

$$dy = dF(x) = F'(x) dx.$$

Nagu näeme, pole $F'(x)dx$ ainult funktsiooni $F(x)$ diferentsiaal, vaid üldiselt $F(x) + c$ diferentsiaal, kus c on mistahes konstantne suurus; siis võime kirjutada, et

$$\int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + c.$$

$F(x) + c$ on funktsiooni $f(x)$ **üldine integraal**, kus c nimetatakse **integrimiskonstandiks**.

Üldisel integraalil on määramata palju väärtusi; ta väärtuste arv ei ole määratud (c on määramatu), sellepärast nimetatakse ka integraali

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

määramatuks integraaliks.

Tähendab, kui oleme mistahes funktsiooni integraali leidnud, tuleb temale ikka määramatu suurus, s. o. integrimiskonstant c , juurde lisada.

Integraali geomeetriline tähendus.

Olgu meil funktsioon

$$y = f(x),$$

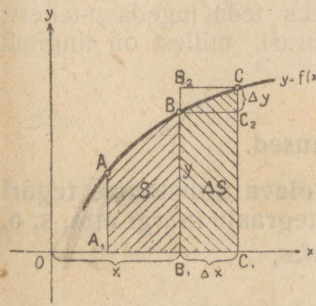
mis kujutab mingisugust kõverjoont (44. joon.). Võtame pinna osa

$$S = A_1B_1BA,$$

mis on piiratud ühelt poolt kõverjoonega ja x -teljega ning teiselt poolt ordinaatidega AA_1 ja BB_1 .

Loeme esimese ordinaadi AA_1 konstantseks, kuid teise BB_1 muutuvaks; siis on arusaadav, et see pinnaosa muutub, kui kasvab või kahaneb argument x ; tähendab pind S on sellega mingisugune x -i funktsioon, s. o.

$$S = f(x) \cdot F(x) \quad S = F(x) \cdot f(x) \quad ?$$



44. joonis.

Meie ülesanne seisab selles, et leida antud funktsioonist $f(x)$ funktsiooni $F(x)$, mis väljendaks nimetatud pinda, s. o. antud funktsioonist leida pinnafunktsioon.

Olgu kõverjoonel punkt B vabalt võetud, mille koordinaadid on $(x|y)$. Kui nüüd argument x kasvab Δx -i võrra, siis muutub ordinaat y Δy -i võrra ja sellega ühtlasi muutub ka pind S väikese pinna osa ΔS võrra, mis asub ordinaatide y ja $y + \Delta y$ vahel.

ΔS nimetatakse **pinnakasvuks** ehk **pinnaelemendiks**. Pinnaelement ΔS , nagu jooniselt näeme, on suurem kui siseristkülik $B_1C_1C_2B$ ja

vähem kui välisristkülik $B_1C_1CB_2$; sellepärast, võrreldes pinnaelemendi ΔS nende ristkülikute pindadega, võime kirjutada

$$y \cdot \Delta x < \Delta S < (y + \Delta y) \cdot \Delta x;$$

jagades võrratust Δx -ga

$$y < \frac{\Delta S}{\Delta x} < y + \Delta y$$

ja piirile minnes, lastes $\Delta x \rightarrow 0$, saame

$$y \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (y + \Delta y)$$

ehk

$$y \leq \frac{dS}{dx} \leq y;$$

tähendab

$$\frac{dS}{dx} = y = f(x),$$

mille differentsiaal on

$$dS = f(x) dx;$$

viimast integrides leiame pinnafunktsiooni

$$S = \int f(x) dx = F(x) + c.$$

Siit näeme, et funktsiooni $y = f(x)$ integraal väljendab pinda, mis on piiratud kahe ordinaadiga, x -teljega ja kõverjoonega $y = f(x)$.

Integraali geomeetrilise tähenduse juures märkame, mispärast integraalile juurde lisatakse määramatut integrimiskonstant c : ordinaat AA_1 , mis ühelt poolt piirab pinnaosa, on vabalt võetud, mille kohta meie pole üles seadnud tingimust, kui kaugelt tuleks teda lugeda y -teljest; tema edasi tagasi nihkumine muudab pinna suurust, millest on tingitud integrimiskonstandi c väärtus.

§ 14. Mõned integrimislaused.

1. lause. Integritava funktsiooni ees oleva konstantse teguri võime tuua integraali märgi alt integraali märgi ette, s. o.

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx,$$

kus a on konstant.

Differentsime neid mõlemaid pooli üksikult, saame

$$\frac{d \int a f(x) dx}{dx} = a f(x),$$

$$\frac{d a \int f(x) dx}{dx} = a \cdot \frac{d \int f(x) dx}{dx} = a f(x),$$

millest järeldame, et

$$\frac{d \int a f(x) dx}{dx} = \frac{d a \int f(x) dx}{dx},$$

siis on ka

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

2. lause. Summa (vahe) integraal võrdub üksikute funktsioonide integraalide summaga (vahega), s. o.

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx - \int f_3(x) dx.$$

Differentsides mõlemaid pooli üksikult saame

$$\frac{d \int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx}{dx} = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x),$$

$$\frac{d \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx - \int f_3(x) dx}{dx} = \frac{d \int f_1(x) dx}{dx} + \frac{d \int f_2(x) dx}{dx} - \frac{d \int f_3(x) dx}{dx} = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x),$$

millest näeme, et

$$\frac{d \int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx}{dx} = \frac{d \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx - \int f_3(x) dx}{dx},$$

siis on ka

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx - \int f_3(x) dx.$$

Integraali põhimõtte järele, s. o.

$$\int f(x) dx = \int f'(x) dx = F(x) + c,$$

võime saada differentsimisvalemite ümberpööramiseks neile vastavad integrimisvalemid.

Kui

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad (\text{kus } c = \text{konst.})$$

siis

$$F'(x) = x^n$$

tähendab, võime võtta ümberpöörduvalt ja kirjutada astme integraali

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$$

kus n on mistahes reaalarv, peale $n = -1$, mis annaks

$$\frac{1}{0} + c = \infty + c,$$

millel selles kujus pole mingit mõtet. See juhtum esineb § 25-s.

Sellela võime tarvitada saadud valemit iga astmenäitaja suhtes peale juhtumi, kui $n = -1$.

Kui $n = 0$, siis on

$$\int dx = x + c.$$

Sarnaselt võime võtta nurgafunktsioonide diferentsiaalvalemid ja kirjutada ümberpöörduvalt nende integraalid:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c, \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + c,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c.$$

1. näide. $\int x^5 \, dx = ?$

$$\int x^5 \, dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{x^6}{6} + c.$$

2. näide. $\int 3x^2 \, dx = ?$

$$\int 3x^2 \, dx = 3 \int x^2 \, dx = 3 \frac{x^3}{3} + c = x^3 + c.$$

3. näide. $\int (3 - 2x + 4x^3) \, dx = ?$

$$\begin{aligned} \int (3 - 2x + 4x^3) \, dx &= \int 3 \, dx - \int 2x \, dx + \int 4x^3 \, dx = \\ &= 3 \int dx - 2 \int x \, dx + 4 \int x^3 \, dx = 3x + c_1 - 2 \frac{x^2}{2} + c_2 + \\ &+ 4 \frac{x^4}{4} + c_3 = 3x - x^2 + x^4 + c_1 + c_2 + c_3 = 3x - x^2 + x^4 + c. \end{aligned}$$

c_1 , c_2 ja c_3 on vabalt võetud konstantsed suurused, sellepärast võime tähistada nende summat ühise konstantse suurusega c .

4. näide. $\int \sqrt[3]{x} \, dx = ?$

$$\int \sqrt[3]{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + c.$$

5. näide. $\int \left(x^2 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \sin x - \frac{4}{\cos^2 x} \right) dx = ?$

$$\begin{aligned} \int \left(x^2 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \sin x - \frac{4}{\cos^2 x} \right) dx &= \int x^2 \, dx + \int x^{-3} \, dx - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx + \\ &+ \int \sin x \, dx - 4 \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{-2}}{2} - \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \cos x - 4 \tan x + c = \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2x^2} - 4\sqrt{x} - \cos x - 4 \tan x + c. \end{aligned}$$

Siin on viis integrimiskonstanti koondatud üheks integrimiskonstandiks c .

Ülesanded. Leida integraalid:

1) $\int x^2 dx$

2) $\int 12 x^5 dx$

3) $\int \frac{3}{4} x^7 dx$

4) $\int ax^2 dx$

5) $\int \frac{dx}{x^2}$

6) $\int \frac{adx}{x^4}$

7) $\int \sqrt{x} dx$

8) $\int \sqrt[3]{ax} dx$

9) $\int (3x^2 - 2) dx$

10) $\int (3x^5 - 3x + 1) dx$

11) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} \right) dx$

12) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$

13) $\int (x^2 - a^2)^2 dx$

14) $\int (1-x)(1-2x) dx$

15) $\int \frac{4x^5 - 5x^2 + 3}{2x^2} dx$

16) $\int \frac{(x-2)^2}{4x^4} dx$

17) $\int (5 \cos x - 2 \sin x + 1) dx$

18) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x} \right) dx$

19) $\int \frac{a \sin^3 x - b \sin^2 x + c}{\sin^2 x} dx$

20) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

§ 15. Määramatu integraali graafiline kujutamine.

Teame, et funktsiooni tuletis määrab ära nurga tangensi, millise nurga puutuja moodustab x -teljega.

Kui meil on antud nurga tangens funktsiooni tuletisena ja tarvis leida temale vastav kõverjoone võrrand ehk algfunktsioon, siis saame seda integrimise teel

$$\int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + c.$$

Sellega määramatu integraal tähendab graafiliselt ordinaati niisugusest punktist kõverjoonel, mille puutuja moodustab selles punktis x -teljega niisuguse nurga a , et selle tangens rahuldab tingimust

$$\tan a = F'(x).$$

Sellel ordinaadil $F(x) + c$, kus c on mistahes positiivne või negatiivne suurus, on määramata palju väärtusi; sellepärast peab olema ka määramata palju kõverjooni, mis vastavad sellele tingimusele.

Kui anname üldises integraalis

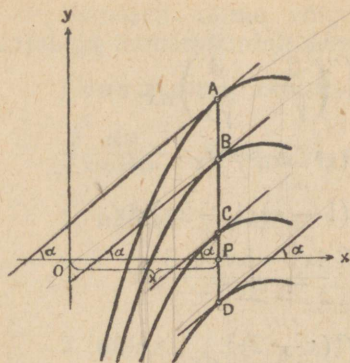
$$y = F(x) + c$$

integrimiskonstandile c rida eriväärtusi

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \dots,$$

siis saame vastavad võrrandid

$$y = F(x) + c_1, \quad y = F(x) + c_2, \quad y = F(x) + c_3, \dots$$



45. joonis.

mis nimetatakse **osaintegraalideks**. Iga ühele neist vastab teatud kõverjoon (45. joon.). Need kõverjooned nimetatakse **integraalkõverateks**. Võime graafiliselt saada nii palju kõverjooni, kui iganes soovime. Kuid need kõik peavad rahuldama tingimust

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = F'(x),$$

s. o., kui ühe ja sama abstsissi $OP = x$ väärtuse juures tõmbame puutujad vastavatest kõverjoone punktidest A, B, C, D , siis peavad need olema paralleelsed, sest et

$$\tan \alpha = F'(x).$$

Näide. Kujutada graafiliselt määramatu integraal

$$\int (x^2 - 4) dx = \frac{x^3}{3} - 4x + c.$$

Siin on

$$F'(x) = x^2 - 4$$

ja

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x.$$

Võtame x , $F'(x)$ ja $F(x)$ väärtuste tabeli

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$F'(x)$...	21	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12	21	...
$F(x)$...	$-21\frac{2}{3}$	$-5\frac{1}{3}$	3	$5\frac{1}{3}$	$3\frac{2}{3}$	0	$-3\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{3}$	-3	$5\frac{1}{3}$	$-21\frac{2}{3}$...

Märgime x -i väärtused üht telge mööda ja $F'(x)$ ning $F(x)$ väärtused teist telge mööda. Peale selle võtame rea osa integraale ja joonestame nende graafilised kujud, saame joonisel rea integraalkõveraid (46. joon.). Need on määramatu integraali

$$F(x) + c = \frac{x^3}{3} - 4x + c$$

graafilised kujud. Integraalkõveraid võime joonestada määramata palju.

Ülesanded. Kujutada graafiliselt määramatud integraalid:

1) $\int (x^2 - 4x + 3) dx$

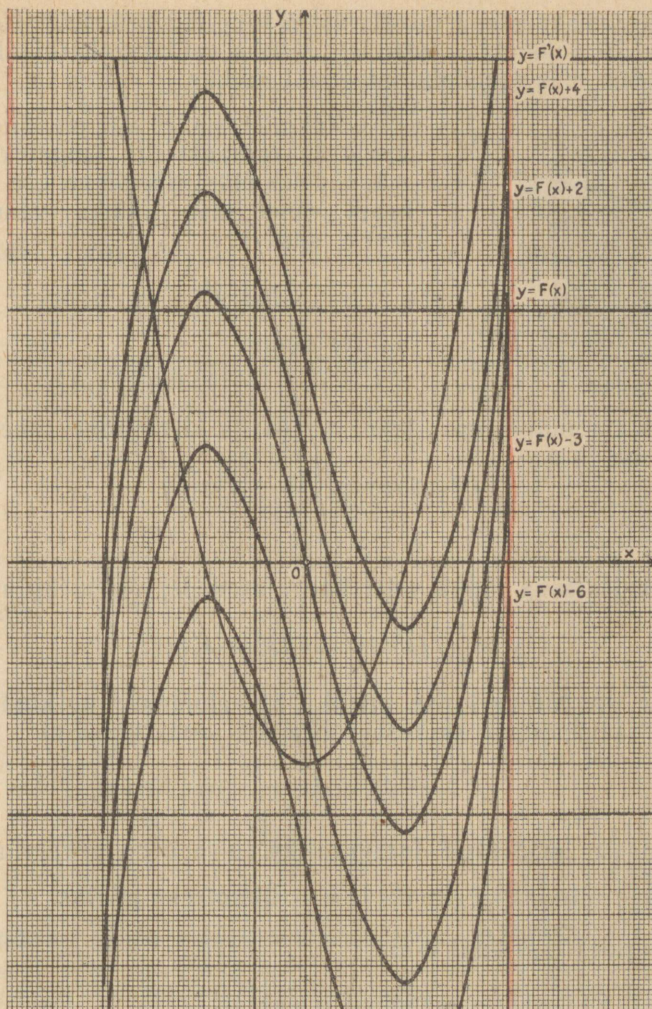
4) $\int \sqrt{x} dx$

2) $\int (2x^2 - 3x - 2) dx$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

3) $\int (4x^2 - 4x - 1) dx$

6) $\int (\sqrt{x} - x) dx$



46. joonis.

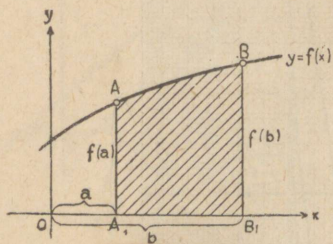
7) Missuguste nurkade all lõikab 0-punktist läbiminev integraalkõver $\int (x^2 - x - 3) dx$ x -telge?

§ 16. Määratud integraal.

§ 13-s nägime, et pind, mis asub kahe ordinaadi, x -telje ja kõverjoone $y = f(x)$ vahel, on x -i funktsioon, ja nimelt

$$S = \int f(x) dx = \int F'(x) dx = F(x) + c,$$

milles integrimiskonstandi c väärtus on tingitud ordinaadi AA_1 asendist (47. joon.). Et määrata c väärtust, selleks valitakse harilikult x -ile niisugune väärtus, mis muudaks integraali nulliks.



47. joonis.

Kui oletame, et x -il on kindel väärtus $x=a$ ja ordinaat BB_1 langeb ordinaadiga $AA_1=f(a)$ ühte, siis pinna osa kahe ordinaadi vahel saab nulliks; tähendab, kui $x=a$, siis

$$\int f(x) dx = F(a) + c = 0,$$

millest saame

$$c = -F(a),$$

mis määrab ära pinna osa y -telje, a , $f(a)$ ja kõverjoone vahel, sest kui $x=0$, siis on

$$\int f(x) dx = F(0) + c = 0,$$

s. o.

$$c = 0.$$

Paigutades seda pinna valemisse c asemele, võime kirjutada

$$S = \int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a),$$

kus a ja x on **integrimise piirid**. Kui anname x -ile kindla väärtuse $x=b$, siis saame pinna suuruse vahemikus a -st kuni b -ni

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

mis nimetatakse **määratud integraaliks**. a ja b on integrimise piirid: a nimetatakse **alumiseks piiriks** ja b — **ülemiseks piiriks**. \int_a^b loetakse: integraal piirides a -st kuni b -ni.

Üldiselt tähistatakse määratud integraali

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = \left| F(x) \right|_a^b = F(b) - F(a).$$

Et leida määratud integraali väärtust, selleks tuleb integritud funktsiooni argumendi asemele paigutada enne integraali ülemise piiri väärtus ja pärast alumise piiri väärtus, siis funktsiooni esimesest väärtusest lahutada funktsiooni teine väärtus.

Sellest näeme, et määratud integraal ei ole enam x -i funktsioon, vaid mingisugune **arvuline suurus**.

1. näide. $\int_{-2}^3 (3 - 2x + 9x^2) dx = ?$

Integrides ja tarvitades määratud integraali valemit võime kirjutada

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^3 (3 - 2x + 9x^2) dx = \left[3x - x^2 + 3x^3 \right]_{-2}^3 = \\ & = [3 \cdot 3 - 3^2 + 3 \cdot 3^3] - [3(-2) - (-2)^2 + 3(-2)^3] = \\ & = (9 - 9 + 81) - (-6 - 4 - 24) = 115. \end{aligned}$$

2. näide. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = ?$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (\sin \pi) - \left(\sin \frac{\pi}{2} \right) = -1;$$

tähendab

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = -1.$$

3. näide. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = ?$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = \left(-\frac{1}{\infty} \right) - \left(-\frac{1}{1} \right) = 1,$$

s. o.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

mu -

Ülesanded. Leida määratud integraalide väärtused:

✓ 1) $\int_1^2 4x dx$

✓ 5) $\int_{-1}^3 (3x^2 - 4x) dx$

9) $\int_0^{\pi} \sin x dx$

✓ 2) $\int_{-2}^2 2x dx$

○ 6) $\int_{-3}^2 (2x^2 - x + 3) dx$

○ 10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cos x dx$

✓ 3) $\int_0^1 5x^3 dx$

7) $\int_0^2 (x^2 + x + 1) dx$

○ 11) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$

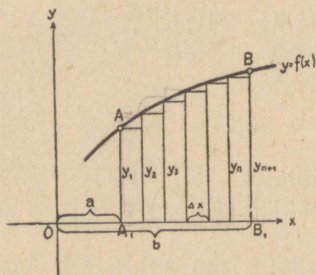
✓ 4) $\int_0^a ax^4 dx$

○ 8) $\int_{-a}^a (a+x)^2 dx$

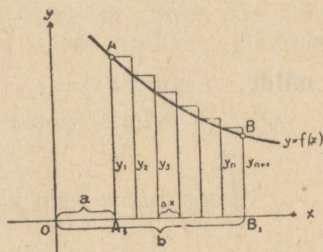
○ 12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx$

§ 17. Määratud integraali omadused.

1. lause. Määratud integraal on lõpmata kahanevate suuruste summa piir, kui nende arv lõpmata kasvab.



48. joonis.



49. joonis.

Eelmise §-i põhjal teame, et pinna osa A_1B_1BA (48. ja 49. joon.), mille kõverjoon $y=f(x)$ moodustab enda ja x -telje vahel piirides a -st kuni b -ni, on

$$S = \text{pind } (A_1B_1BA) = \int_a^b f(x) dx.$$

Teisest küljest pinda A_1B_1BA arvutades, jagame integrimisvahemiku (a, b) n võrdseks osaks, kus iga osa olgu Δx ; tõmbame jaotuspunktidest y -teljele paralleelsed jooned

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, y_{n+1},$$

siis sellega pind A_1B_1BA jaguneb n kitsaks ribaks. Kõverjoone jaotuspunktidest tõmbame x -teljele paralleelsed joonlõigud, saame igas ribas ristküliku, mille aluseks on Δx ja kõrgusteks

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n.$$

Võtame ristkülikute pindade summa ja tähistame seda järgmiselt

$$\begin{aligned} & y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + y_3 \Delta x + \dots + y_n \Delta x = \\ & = (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n) \Delta x = \sum_{k=1}^{k=n} y_k \cdot \Delta x, \end{aligned}$$

kus viimane sümbol tähendab n ristküliku pindade summat. (Σ on kreeka keelne täht „sigma“).

Mida kitsamaks teeme ribad, seda ligemale saab ristkülikute pindade summa ribade pindade summale, s. o. pinnale S . Ristkülikute pindade summa võib saada pinnale S nii ligidale, kui iganes soovime.

Oletame, et n lõpmata kasvab, siis ribad lõpmata vähenevad, sest $\Delta x \rightarrow 0$ ja püstkülikute pindade summa piir

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{k=n} y_k \cdot \Delta x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{k=\infty} y_k \cdot \Delta x = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{k=\infty} f(x_k) \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} f(x) \Delta x \end{aligned}$$

on sellega pind S (kui ainult $y=f(x)$ on pidev).

Tähendab

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} f(x) \Delta x = \int_a^b f(x) dx.$$

Sellega määratud integraal

$$\int_a^b f(x) dx$$

tähendab korrutiste $f(x) \cdot \Delta x$ summa piiri, kus x kulgeb kõik väärtused vahemikus a -st kuni b -ni.

Integraali märk \int , nagu näeme, on „summat“ tähendav märk ja kujundatud selle sõna esimesest tähest.

Siit näeme ka mispärast kirjutatakse diferentsiaali $f(x) dx = F'(x) \cdot \Delta x$ integraal, aga mitte tuletise $F'(x)$ integraal.

Siin esines kõverjoon (48. ja 49. joon.) positiivsete ordinaatidega, $y > 0$, sellepärast on ka

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} f(x) \Delta x > 0.$$

See on positiivne pind. Kui aga kõverjoon on allpool x -telge (50. joon.), siin on $y < 0$, ja

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} f(x) \cdot \Delta x < 0.$$

Sel juhul saaksime negatiivse pinna, kuid pinna suuruse arvutamisel edaspidi arvestame ainult pinna absoluutset väärtust.

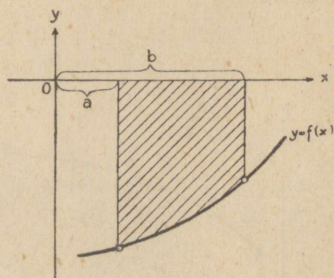
2. lause. Võrdsete piiridega integraal = 0.

Määratud integraali valemi põhjal

$$\int_a^a f(x) dx = \int_a^a F'(x) dx = F(a) - F(a) = 0,$$

s. o. (märkides lühidalt)

$$\int_a^a f = 0.$$



50. joonis.

3. lause. Integraali alumist ja ülemist piiri võib ümber vahetada, kui muuta integraali ees olev märk.

Kui integreerime piirides a -st kuni b -ni, siis

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a),$$

ja kui integreerime piirides b -st kuni a -ni, siis

$$\int_b^a f(x) dx = \int_b^a F'(x) dx = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)];$$

tähendab

$$\int_a^b = - \int_b^a.$$

Märkus. Sellest näeme, et pinna osa, mis asub allpool x -telge, ei saaks mitte negatiivset väljendust, võime niisuguse pinna arvutamise juures integraali märgid ümber vahetada.

4. lause. Integraali väärtus piirides a -st kuni b -ni võrdub kahe integraali summa väärtusega, kui esimest integreerida piirides a -st kuni c -ni ja teist c -st kuni b -ni, kus $a < c < b$.

Integreerime piirides a -st kuni b -ni

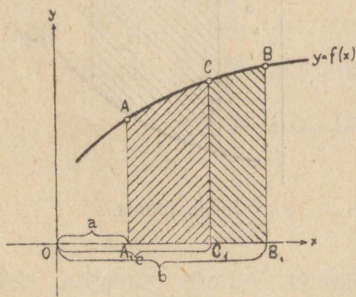
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a),$$

integreerime sama funktsiooni piirides a -st kuni c -ni ja c -st kuni b -ni

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx &= \int_a^c F'(x) dx + \int_c^b F'(x) dx = \\ &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a); \end{aligned}$$

tähendab

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b.$$



51. joonis.

Vaatame seda geomeetriliselt. Kui funktsioon

$$y = f(x)$$

kujutab kõverjoont (51. joon.), siis pind

$$(A_1 B_1 B A) = \int_a^b f(x) dx.$$

Kui võtame a ja b vahel punkti $x = c$ ja tõmbame ordinaadi $C C_1$, siis jaguneb pind $(A_1 B_1 B A)$ kaheks, nimelt pinnaks $(A_1 C_1 C A) = \int_a^c f(x) dx$ ja pinnaks $(C_1 B_1 B C) = \int_c^b f(x) dx$ mille summa on integraalide summa, s. o.

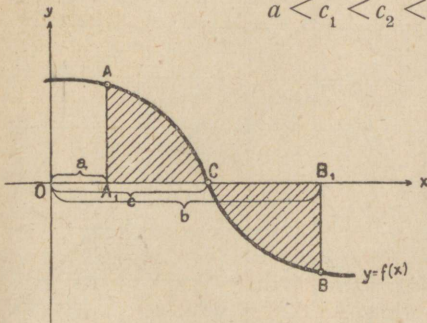
$$S = \text{pind } (A_1 C_1 C A) + \text{pind } (C_1 B_1 B C) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Sääraselt võime tõestada, et

$$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \int_{c_2}^{c_3} f + \dots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f + \int_{c_n}^b f,$$

kus

$$a < c_1 < c_2 < c_3 < \dots < c_n < b.$$



52. joonis.

Kui aga esineb pind, mille kõverjoon $y=f(x)$ moodustab x -teljega piirides a -st kuni b -ni ja mille üks osa on ülevalpool ja teine osa allpool x -telge (52. joon.), siis võime ta suuruse leidmiseks 3. lause põhjal kirjutada

$$S = \text{pind } (A_1 AC) + \text{pind } (CB_1 B) = \int_a^c f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

§ 18. Kvadratuur.

Tasapindade suurust, mis on piiratud

- 1) kõverjoonega $y=f(x)$,
- 2) x -teljega ja
- 3) ordinaatidega piirides $x=a$ ja $x=b$,

võime leida, nagu eelpool nägime, määratud integraali valemi

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} y \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

põhjal.

Niisugust tasapindade arvutamist antud kõverjoone $y=f(x)$ kaudu nimetatakse **kvadratuuriks**.

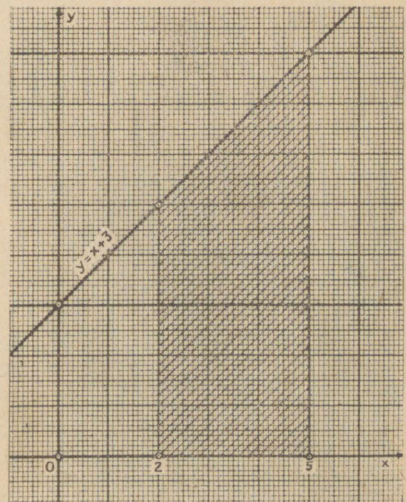
1. näide. Leida pinna osa sirgjoone

$$y = x + 3$$

ja x -telje vahel piirides $x=2$ kuni $x=5$ (53. joon.).

Tarvitades pinna integraali võime kirjutada

$$S = \int_2^5 (x+3) dx = \left| \frac{x^2}{2} + 3x \right|_2^5 = \left(\frac{25}{2} + 15 \right) - (2 + 6) = 19,5.$$

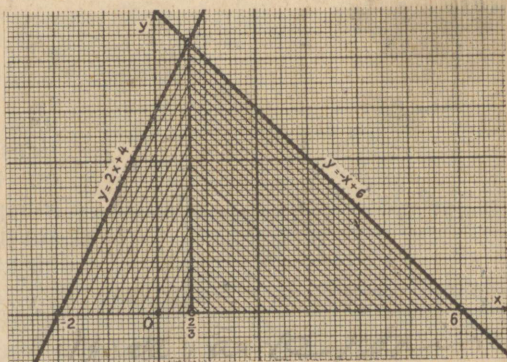


53. joonis.

2. näide. Leida pinna osa kahe sirgjoone

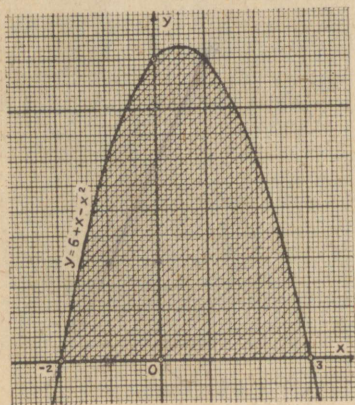
$y = 2x + 4$ ja $y = -x + 6$ ja x -telje vahel (54. joon.).

Lahendades sirgjoonte võrrandeid leiame nende lõikepunkti abstsissi $x = \frac{2}{3}$. Et saada nimetatud pinda, tuleb võtta kahe integraali summa, s. o. pinna osa, mis asub sirgjoone $y = 2x + 4$ ja x -telje vahel piirides -2 -st kuni $\frac{2}{3}$ -ni ja pinna osa, mis asub sirgjoone $y = -x + 6$ ja x -telje vahel piirides $\frac{2}{3}$ -st kuni 6 -ni (sest sirgjooned lõikavad x -telge punktides $x = -2$ ja $x = 6$). Saame



54. joonis.

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^{\frac{2}{3}} (2x + 4) dx + \int_{\frac{2}{3}}^6 (-x + 6) dx = \\
 &= \left| x^2 + 4x \right|_{-2}^{\frac{2}{3}} + \left| -\frac{x^2}{2} + 6x \right|_{\frac{2}{3}}^6 = \\
 &= \left(\frac{4}{9} + \frac{8}{3} - 4 + 8 \right) + \left(-18 + 36 + \frac{2}{9} - 4 \right) = 19\frac{5}{9} \quad 21\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

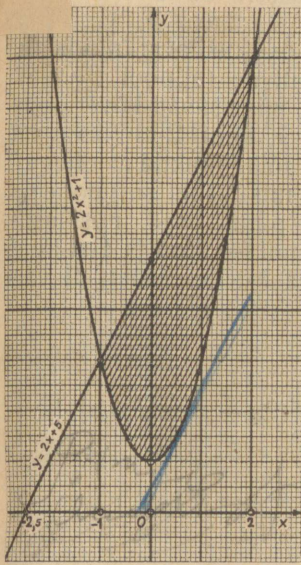


55. joonis.

3. näide. Leida pinna osa kõverjoone $y = 6 + x - x^2$ ja x -telje vahel (55. joon.).

Kõverjoon lõikab x -telge punktides $x = -2$ ja $x = 3$. Integrimise piir on sellega -2 -st kuni 3 -ni. Saame pinna

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^3 (6 + x - x^2) dx = \left| 6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_{-2}^3 = \\
 &= \left(18 + \frac{9}{2} - 9 \right) - \left(-12 + 2 + \frac{8}{3} \right) = 20\frac{5}{6}
 \end{aligned}$$



56. joonis.

4. näide. Leida pinna osa kõverjoone $y = 2x^2 + 1$ ja sirgjoone $y = 2x + 5$ vahel (56. joon.).

Lahendades kõverjoone ja sirgjoone võrrandeid leiame lõikepunktide abstsissid $x = -1$ ja $x = 2$.

Kui integrimise sirgjoont kujutavat funktsiooni, saame pinna, mis asub sirgjoone ja x -telje vahel piirides -1 -st kuni 2 -ni. Kui integrimise kõverjoont kujutavat funktsiooni, saame pinna, mis asub kõverjoone ja x -telje vahel piirides -1 -st kuni 2 -ni. Otsitava pinna saame, kui lahutame esimesest pinnast teise, s. o.

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (2x + 5) dx - \int_{-1}^2 (2x^2 + 1) dx = \\ &= \left| x^2 + 5x \right|_{-1}^2 - \left| \frac{2}{3} x^3 + x \right|_{-1}^2 = \\ &= \left(4 + 10 - 1 + 5 \right) - \left(\frac{16}{3} + 2 + \frac{2}{3} + 1 \right) = 10. \end{aligned}$$

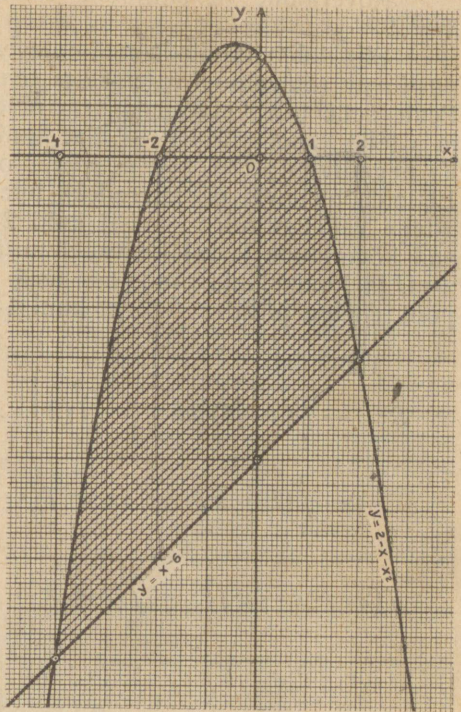
5. näide. Leida pinna osa kõverjoone

$$y = 2 - x - x^2$$

ja sirgjoone

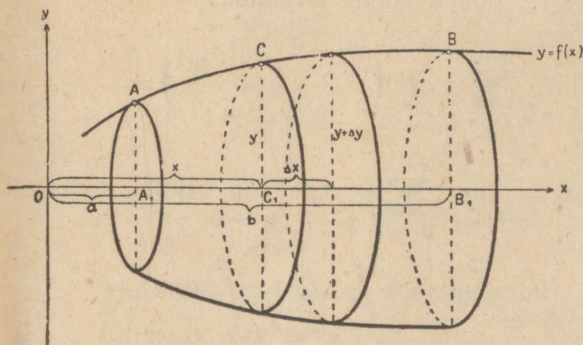
$$y = x - 6$$

vahel (57. joon.).



57. joonis.

Ühendagu kõverjoont ordinaadid AA_1 ja BB_1 , siis saame tasapinna osa $ABB_1 A_1$ pöörlemisel ümber x -telje keha, mis on piiratud ühelt poolt kumera (58. joon.) või nõgusa (59. joon.) pinnaga ja teiselt poolt kahe paralleelse ringi pinnaga, mille mahtu V katsume leida.



58. joonis.

Kui loeme ringi pinna, mis ordinaat AA_1 moodustab pöörlemisel ümber x -telje, konstantseks kindla $x=a$ juures, kuid mõnda teist ringi pinda, näit. mis muutuv ordinaat $y=CC_1$ moodustab samasel pöörlemisel, muutuvaks, siis on arusaadav, et pöördkeha maht V on argumendiga x funktsionaalses olenevuses, s. o. maht V on mingisugune x -i funktsioon.

Meie ülesanne seisab selles, et antud funktsioonist $y=f(x)$ leida mahu funktsioon, mis määraks ära mahu V väärtuse.

Kui kõverjoonel piirkonnas A -st kuni B -ni on vabalt võetud punkt C , mille koordinaadid on $(x|y)$, siis argumendi kasvamisel Δx -i võrra muutub ordinaat Δy -i võrra ja sellega ühtlasi muutub ka maht väikese mahu osa ΔV võrra, mida nimetatakse **mahukasvuks** ehk **mahuelemendiks**.

Mahuelemendile ΔV vastav tüvikoonuse maht

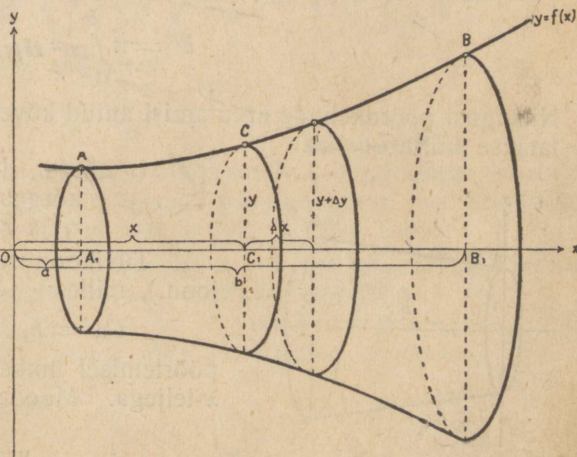
$$\frac{\pi \Delta x}{3} \left[y^2 + (y + \Delta y)^2 + y(y + \Delta y) \right] = \pi \Delta x \left(y^2 + y \Delta y + \frac{\Delta y^2}{3} \right)$$

on kumera pöördkeha juures vähem kui ΔV ja nõgusa pöördkeha juures suurem kui ΔV .

Terve pöördkeha mahu vahemikus a -st kuni b -ni võime jaotada väga kitsasteks kihtideks, s. o. mahuelementideks, nõnda, et võime kirjutada

$$V = \sum_{x=b}^{x=a} \Delta V,$$

mis on ühtlasi neile kitsastele kihtidele vastavate tüvikoonuste mahtude



59. joonis.

summa piir, kui nende arv lõpmata kasvab. Tüvikoonuste mahtude kahanemisel ja nende arvu kasvamisel võib nende mahtude summa saada pöördkeha mahule V nii ligidale, kui meie iganes soovime. Pöördkeha maht V on sellega piirväärtus, millele läheneb lõpmata kahanevate tüvikoonuste mahtude summa, kui nende arv lõpmata kasvab. Tähendab, kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis § 17. põhjal võime kirjutada:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{x=a}^{x=b} \Delta V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} \pi \cdot \Delta x \left(y^2 + y \Delta y + \frac{\Delta y^2}{3} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} \pi y^2 \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} \pi y \Delta x \cdot \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta y + \\ &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} \frac{\pi}{3} \Delta x \cdot \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta y^2 = \pi \int_a^b y^2 dx + \pi \int_a^b y dx \cdot 0 + \\ &+ \frac{\pi}{3} \int_a^b dx \cdot 0 = \pi \int_a^b y^2 dx. \end{aligned}$$

Sellega kõverjoone $y=f(x)$ pöörlemisel ümber x -telje piirides $x_a^y=a$ ja $x=b$ saame pöördkeha mahu väärtuse

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

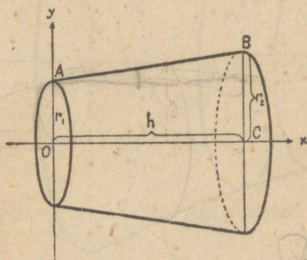
Analoogiliselt saame pöördkeha mahu kõverjoone

$$y=f(x)$$

pöörlemisel ümber y -telje piirides $y=a$ ja $y=b$

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy.$$

Niisugust pöördkehade arvutamist antud kõverjoone $y=f(x)$ kaudu nimetatakse **kubatuuriks**.



60. joonis.

1. näide. Leida tüvikoonuse maht, mille kõrgus on h ja põhjade raadiused r_1 ja r_2 .

Tüvikoonuse saame trapetsi $ABCO$ (60. joon.), milles

$$OC = h, \quad AO = r_1 \text{ ja } BC = r_2,$$

pöörlemisel ümber külje OC , mis langeb ühte x -teljega. Moodustaja AB võrrand on

$$y = \frac{r_2 - r_1}{h} \cdot x + r_1.$$

Sellega tüvikoonuse maht

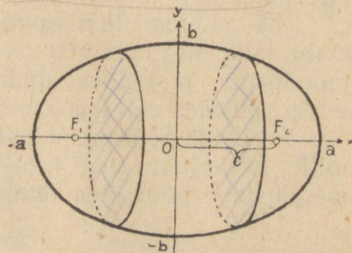
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^h y^2 dx = \pi \int_0^h \left[\frac{(r_2 - r_1)^2}{h^2} \cdot x^2 + \frac{2r_1(r_2 - r_1)}{h} \cdot x + r_1^2 \right] dx = \\
 &= \pi \left| \frac{(r_2 - r_1)^2 x^3}{3h^2} + \frac{r_1(r_2 - r_1)x^2}{h} + r_1^2 x \right|_0^h = \\
 &= \pi \left[\frac{(r_2 - r_1)^2 h}{3} + r_1 h (r_2 - r_1) + r_1^2 h \right] = \\
 &= \frac{\pi h}{3} \left[(r_2 - r_1)^2 + 3r_1(r_2 - r_1) + 3r_1^2 \right] = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2).
 \end{aligned}$$

2. näide. Leida ellipsoidi maht.

Ellipsoidi saame ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pöörlemisel ümber x -telje (61. joon.). Lihtsuse mõttes võtame integrimise piirideks $x=0$ ja $x=a$, siis saame pool ellipsoidi mahtu. Terve ellipsoidi maht on



61. joonis.

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^a y^2 dx = \frac{2\pi b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2\pi b^2}{a^2} \left| a^2 x - \frac{x^3}{3} \right|_0^a = \\
 &= \frac{2\pi b^2}{a^2} \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi a b^2.
 \end{aligned}$$

Pööreldes ümber y -telje saaksime

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

3. näide. Leida sektori maht, mille x -teljest, sirgjoonest $y=x$ ja ringi $x^2 + y^2 = 16$ kaarest piiratud pinna osa moodustab pöörlemisel ümber x -telje (62. ja 62-a. joon.).

Ringi ja sirgjoone lõikepunkti abstsiss $x = \sqrt{8} \approx 2,8$. Kera sektori maht võrdub koonuse ja kerasegmendi mahtude summaga, s. o.

$$\begin{aligned}
 V_{\text{sek}} &= V_{\text{koon}} + V_{\text{seg}} = \pi \int_0^{2,8} x^2 dx + \pi \int_{2,8}^4 (16 - x^2) dx = \\
 &= \pi \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^{2,8} + \pi \left| 16x - \frac{x^3}{3} \right|_{2,8}^4 \approx 39.
 \end{aligned}$$

Ülesanded. 1) Leida koonuse maht, mille kõrgus on h ja põhja raadius r .

2) Leida silindri maht, mille kõrgus on h ja põhja raadius r .

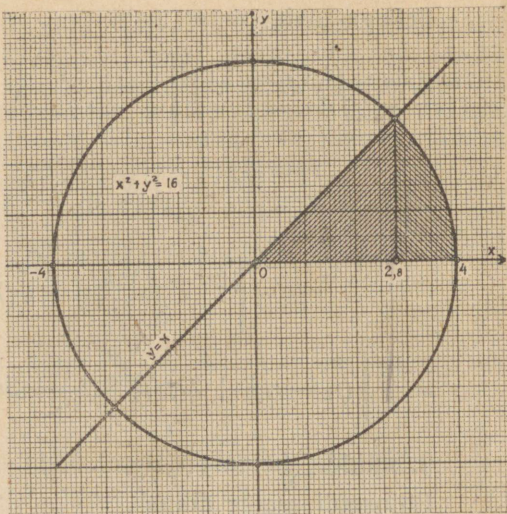
3) Leida kera maht, kui kera raadius $R = 6$ cm.

4) Leida kera segmendi maht, kui kera raadius $R = 8$ cm ja segmendi kõrgus $h = 3$ cm.

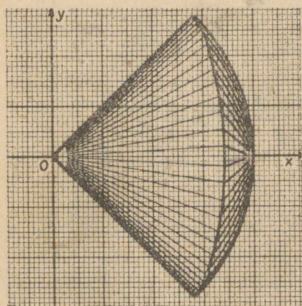
5) Leida silindri maht, mille sirgjoon $y = 4$ moodustab pöörelde ümber x -telje piirides $x = 2$ ja $x = 7$.

6) Leida tüvikoonuse maht, mille sirgjoon $y = x + 2$ moodustab pöörelde ümber x -telje piirides $x = 1$ ja $x = 5$.

7) Leida pöördkeha maht mille kõverjoon $y = 4x^2 + 1$ moodustab pöörelde ümber x -telje piirides $x = -1$ ja $x = 1$.



62. joonis.



62a. joonis.

8) Leida pöördkeha maht, mis saadakse kõverjoonest $y = \frac{x^2}{2} + 1$ ja sirgjoonest $y = 3$ piiratud pinna osa pöörlemisel ümber x -telje.

9) Leida pöördkeha maht, mis saadakse kõverjoontest $y = \frac{x^2}{2} - x + 2$ ja $y = 1 - x - x^2$ piiratud pinna osa pöörlemisel ümber x -telje.

10) Kolmnurga külgede võrrandid on: $x - 3y - 12 = 0$, $x + y - 2 = 0$ ja $y = -6$; leida maht, mis saadakse kolmnurga pöörlemisel ümber a) x -telje, b) y -telje.

§ 20. Integrimise asendamismetod.

Kui funktsiooni ei ole võimalik leida antud integrimisvalemite abil, siis tarvitatakse tihti meetodit, kus juures muutuja x -i asemele võetakse uus muutuja z nõnda, et integritav funktsioon omaks kuju, mille jaoks võiks tarvitada teatud integrimisvalemit. z on sellega mõni x -i funktsioon

$$z = f(x),$$

või ümberpöörduvalt, x on mõni z -i funktsioon

$$x = \varphi(z),$$

mille differentsiaal

$$dx = \varphi'(z) dz;$$

siis

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(z)] \cdot \varphi'(z) dz,$$

kus funktsiooni

$$f[\varphi(z)] \cdot \varphi'(z)$$

on võimalik integrida teatud valemi abil, s. o.

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(z)] \varphi'(z) dz = \int \psi'(z) dz = \psi(z) + c = F(x) + c,$$

kus $\psi(z)$ on mõni z -i funktsioon.

See on n. n. **integrimise asendamismeetod**. x -i asemele võetakse uus integrimismuutuja z . z on abimuutuja, mis tuleb valida nõnda, et ta võimaldaks integrimist teatud valemite järele. Seda valikut selgitavad järgmised näited.

1. näide. $\int (a + x)^2 dx = ?$

Tähistame

$$a + x = z,$$

mida differentsides saame

$$dx = dz;$$

asendades võime kirjutada

$$\int (a + x)^2 dx = \int z^2 dz = \frac{z^3}{3} + c_1 = \frac{(a + x)^3}{3} + c_1 = \frac{(a + x)^3 + c}{3},$$

kus

$$c = 3c_1.$$

2. näide. $\int x \sin(x^2 + a^2) dx = ?$

Tähistame

$$x^2 + a^2 = z,$$

siis

$$2x dx = dz$$

ja

$$x dx = \frac{dz}{2};$$

asendades saame

$$\begin{aligned} \int x \sin(x^2 + a^2) dx &= \int \sin z \cdot \frac{dz}{2} = \frac{1}{2} \int \sin z \cdot dz = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \cos z + c_1 = c_1 - \frac{1}{2} \cos(x^2 + a^2) = \frac{c - \cos(x^2 + a^2)}{2}. \end{aligned}$$

3. näide.

$$\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ?$$

Tähistame siin (et ei esineks murrulist astmenäitajat)

$$a^2 - x^2 = z^2,$$

kust

$$x^2 = a^2 - z^2,$$

siis

$$2x dx = -2z dz$$

ja

$$x dx = -z dz;$$

võime kirjutada

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int \frac{z dz}{z} = -\int dz = -z + c = c - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

4. näide.

$$\int \sin^3 x dx = ?$$

Teisendame integritavat funktsiooni

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \\ &= \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x dx = -\cos x - \int \cos^2 x \sin x dx; \end{aligned}$$

nüüd tähistame

$$\cos x = z,$$

mille diferentsiaal on

$$\sin x dx = -dz;$$

aselele paigutades võime kirjutada

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= -\cos x + \int z^2 dz = -\cos x + \frac{z^3}{3} + c_1 = \\ &= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c_1 = \frac{c + \cos^3 x - 3 \cos x}{3}. \end{aligned}$$

5. näide.

$$\int_0^3 \sqrt{1+x} dx = ?$$

Tähistame

$$\sqrt{1+x} = z$$

ehk

$$1+x = z^2,$$

diferentsides saame

$$dx = 2z dz.$$

Kui võtame uue muutuja, siis muutuvad ka integrimise piirid

$$\text{kui } x = 0, \text{ siis } z = \sqrt{1+x} = 1,$$

$$\text{„ } x = 3, \text{ „ } z = \sqrt{1+x} = 2;$$

võime kirjutada

$$\int_0^3 \sqrt{1+x} dx = 2 \int_1^2 z^2 dz = \frac{2}{3} \left| z^3 \right|_1^2 = \frac{2}{3} (8 - 1) = 4 \frac{2}{3}.$$

6. näide.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x} = ?$$

Tähistame

$$\sin x = z,$$

mille differentsiaal

$$\cos x \, dx = dz;$$

piirid:

$$\text{kui } x = \frac{\pi}{6}, \text{ siis } z = \sin x = \frac{1}{2},$$

$$\text{„ } x = \frac{\pi}{2}, \text{ „ } z = \sin x = 1.$$

Sellega määratud integraali väärtus on

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dz}{z^2} = \left| -\frac{1}{z} \right|_{\frac{1}{2}}^1 = -1 + 2 = 1.$$

Ülesanded.

$$1) \int (a-x)^3 \, dx$$

$$7) \int_{-1}^1 \frac{x \, dx}{(3-x^2)^2}$$

$$13) \int \cos^3 x \, dx$$

$$2) \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$8) \int_{-3}^2 \sqrt{9-2x} \, dx$$

$$14) \int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x} \, dx$$

$$3) \int \frac{dx}{(a+x)^2}$$

$$9) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+2}}$$

$$15) \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \, dx$$

$$4) \int \frac{dx}{(m-nx)^3}$$

$$10) \int_{-a}^+ \frac{dx}{\sqrt[3]{(a-x)^2}}$$

$$16) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin x} \cos x \, dx$$

$$5) \int x(1+x^2) \, dx$$

$$11) \int \sin x \cos x \, dx$$

$$17) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx$$

$$6) \int_0^a x \sqrt{a^2-x^2} \, dx$$

$$12) \int \frac{dx}{\sin^2 4x}$$

$$18) \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2(\pi-5x)}$$

IV peatükk. Korrutis- ja murdfunktsioonid.

§ 21. Korrutisfunktsiooni tuletis.

Olgu antud korrutisfunktsioon

$$y = uv,$$

kus u ja v on x -i funktsioonid, s. o.

$$u = f_1(x) \text{ ja } v = f_2(x).$$

Kui anname argumendile kasvu Δx , siis muutuvad kõik temast olevad suurused u , v ja y vastavalt Δu , Δv ja Δy võrra, s. o.

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v,$$

kust

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v$$

ja

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + (v + \Delta v) \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Laseme $\Delta x \rightarrow 0$, siis, kui funktsioon on pidev, lähenevad 0-le ka Δu ja Δv , s. o.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} (v + \Delta v) \frac{\Delta u}{\Delta x} = \\ &= u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta v \rightarrow 0} (v + \Delta v) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \end{aligned}$$

ehk

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} = f_1(x) \cdot f_2'(x) + f_2(x) \cdot f_1'(x).$$

Tähendab, korrutise tuletis = esimene tegur, korrutatud teise teguri tuletisega + teine tegur, korrutatud esimese teguri tuletisega.

Kui on kolme teguriga korrutisfunktsioon

$$y = uvw,$$

siis saadud valemi põhjal võime kirjutada

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= u \frac{d(vw)}{dx} + vw \frac{du}{dx} = \\ &= u \left(v \frac{dw}{dx} + w \frac{dv}{dx} \right) + vw \frac{du}{dx} = \\ &= uv \frac{dw}{dx} + uw \frac{dv}{dx} + vw \frac{du}{dx}. \end{aligned}$$

Sääraselt võime arvutada, kui tegureid on veel rohkem.

1. näide. Leida funktsiooni

$$y = (2 + 5x)(1 - 2x)$$

tuletis.

Saadud valemi põhjal võime kirjutada

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (2 + 5x) \frac{d(1 - 2x)}{dx} + (1 - 2x) \frac{d(2 + 5x)}{dx} = \\ &= (2 + 5x)(-2) + (1 - 2x) \cdot 5 = 1 - 20x. \end{aligned}$$

Seda näidet võime ka lahendada avades sulud

$$y = (2 + 5x)(1 - 2x) = 2 + x - 10x^2,$$

millest saame

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 20x.$$

2. näide. Leida funktsiooni

$$y = x \cos x$$

teine tuletis.

Esimene tuletis on

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x \frac{d(\cos x)}{dx} + \cos x \frac{d(x)}{dx} = \\ &= x(-\sin x) + \cos x \cdot 1 = \cos x - x \sin x; \end{aligned}$$

ja teine tuletis

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d(\cos x)}{dx} - x \frac{d(\sin x)}{dx} - \sin x \frac{dx}{dx} = \\ &= -\sin x - x \cos x - \sin x = -2 \sin x - x \cos x. \end{aligned}$$

Ülesanded. Leida esimene tuletis:

- | | |
|---|-----------------------------|
| 1) $y = x^2(x^3 - a^3)$ | 6) $y = x \sin x$ |
| 2) $y = x\sqrt{a^2 + x^2}$ | 7) $y = x^2 \cot x$ |
| 3) $y = (a - x)\sqrt{a - x}$ | 8) $y = \sin 2x \cos 2x$ |
| 4) $y = (a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}$ | 9) $y = x + \sin x \cos x$ |
| 5) $y = (1 - x)\sqrt{1 - x}\sqrt[3]{1 - x}$ | 10) $y = x \cos x - \sin x$ |

Leida teine tuletis:

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------|
| 11) $y = x(a + x)$ | 14) $y = \sin x \cos x$ |
| 12) $y = x^2(a - x)^2$ | 15) $y = \sin x \sin 2x$ |
| 13) $y = (x - 1)(x^2 - 2)(x^3 - 3)$ | 16) $y = \sin x \tan x$ |

17) Välja raiuda ümmargusest palgist, mille diameeter $d = 33$ cm, neljakandiline palk nõnda, et temal oleks võimalikult suur painduvus. Neljakandilise palgi painduvus on võrdeline korrutisega xy^2 , kus x ja y on palgi paksus ja laius.

18) Ristkülik, perimeetriga $2p = 24$ cm, pöörleb ümber ühe külje. Missugusel tingimusel on saadud silindril maksimaalne külgpind ja missugusel tingimusel maksimaalne maht.

19) Valmistada ringikujulisest riidest, mille suurus $S = 9$ cm², (koonusekujuline) telk maksimaalse mahutusega. a) Missugused on telgi mõõded? b) Mitu kraadi riidest tuleb kokku keerata?

20) Nelinurkse pleki serv $a = 18$ cm. Missugused ruudukesed peab välja lõikama ta nurkadest, et ülejäänud plekist saaks võimalikult suure mahuga karbi.

§ 22. Ositi integrimine.

Eelmises §-is nägime, kui

$$y = u v,$$

kus u ja v olid x -i funktsioonid, et

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx},$$

millest funktsiooni differentsiaal

$$dy = u dv + v du.$$

Integrides mõlemaid pooli saame

$$y = uv = \int u dv + \int v du$$

ehk

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Selle valemi järele võime avaldise $u dv$ integrimist lihtsustada avaldise $v du$ integrimise kaudu, kui valida kohaliselt tegurid u ja dv . Sel teel integraali leidmist nimetatakse **ositi integrimiseks**.

1. näide.

$$\int x \sin x dx = ?$$

Olgu siin

$$\begin{array}{l|l} u = x, & \text{siis } du = dx, \\ dv = \sin x dx, & \text{,, } v = -\cos x; \end{array}$$

tarvitades ositi integrimise valemit võime kirjutada

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= u v - \int v du = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c. \end{aligned}$$

Saadust differentsides

$$\begin{aligned} - \left[x \frac{d(\cos x)}{dx} + \cos x \frac{d(x)}{dx} \right] + \frac{d(\sin x)}{dx} + \frac{d(c)}{dx} &= \\ = x \sin x + \cos x - \cos x &= x \sin x \end{aligned}$$

saame integritava funktsiooni.

Märkus. Osadeks u ja dv jaotamine tuleb valida nõnda, et avaldise $v du$ integrimine oleks läbiviidav meil teadaolevate valemite järele. Näiteks, ei või eelolevas näites tähistada $u = \sin x$ ja $dv = x dx$, mis teeks integrimise keerulisemaks.

2. näide. $\int x^2 \cos x \, dx = ?$

Tähistame siin

$$\begin{array}{l|l} u = x^2, & \text{siis } du = 2x \, dx, \\ dv = \cos x \, dx, & \text{„ } v = \sin x; \end{array}$$

võime kirjutada

$$\int x^2 \cos x \, dx = uv - \int v du = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx;$$

integraali $\int x \sin x \, dx$ kohta tuleks tarvitada veel kord ositi integrimist, kuid see on meil juba eelmises näites läbi viidud, seepärast

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx = \\ &= x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x + c_1) = \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c. \end{aligned}$$

3. näide. $\int \sin^2 x \, dx = ?$

Tähistame

$$\begin{array}{l|l} u = \sin x, & \text{siis } du = \cos x \, dx, \\ dv = \sin x \, dx, & v = -\cos x; \end{array}$$

võime kirjutada

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx;$$

paremal pool esinev f ei ole siin lihtsam, kui otsitav f , kuid siin võime võtta

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

saame

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + \int dx - \int \sin^2 x \, dx = \\ &= -\sin x \cos x + x + c - \int \sin^2 x \, dx, \end{aligned}$$

kus nüüd parempoolse f -i võime üle viia teisele poole

$$2 \int \sin^2 x \, dx = x - \sin x \cos x + c$$

ja jagades 2-ga mõlemaid pooli saame otsitava f -i väärtuse

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x - \sin x \cos x + c}{2}.$$

4. näide. $\int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx = ?$

Tähistame

$$\begin{array}{l|l} u = \sin^3 x, & \text{siis } du = 3 \sin^2 x \cos x \, dx, \\ dv = \sin x \, dx, & v = -\cos x; \end{array}$$

võime kirjutada

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx &= \int_0^{\pi} \sin^3 x \sin x \, dx = \left| \sin^3 x \cos x \right|_0^{\pi} + 3 \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \\ &= 0 + 3 \int_0^{\pi} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \, dx = 3 \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx - 3 \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx; \end{aligned}$$

$3 \int_0^{\pi} \sin^4 x dx$ üle viies saame

$$4 \int_0^{\pi} \sin^4 x dx = 3 \int_0^{\pi} \sin^2 x dx;$$

$\int \sin^2 x dx$ on 3. näitest teada, sellepärast

$$4 \int_0^{\pi} \sin^4 x dx = \frac{3}{2} \left| x - \sin x \cos x \right|_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi$$

ja

$$\int_0^{\pi} \sin^4 x dx = \frac{3}{8} \pi.$$

Ülesanded.

1) $\int x \cos x dx$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx$

2) $\int x^2 \sin x dx$

6) $\int_0^{\pi} \sin x \cos^2 x dx$

3) $\int \cos^2 x dx$

7) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$

4) $\int \cos^4 x dx$

8) $\int_{-2\pi}^{2\pi} \cos^3 x dx.$

9) Leida pöördkeha maht, mis saadakse sinusoidi $y = \sin x$ ühe haru pöörlemisel ümber x -telje.

§ 23. Murdfunktsiooni tuletis.

Olgu antud murdfunktsioon

$$y = \frac{u}{v},$$

kus u ja v on x -i funktsioonid, s. o.

$$u = f_1(x) \text{ ja } v = f_2(x).$$

Korrutades antud funktsiooni mõlemaid pooli v -ga

$$u = yv$$

ja x -i suhtes differentsides

$$\frac{du}{dx} = y \frac{dv}{dx} + v \frac{dy}{dx}$$

leiam, et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} - y \frac{dv}{dx}}{v} = \frac{\frac{du}{dx} - \frac{u}{v} \cdot \frac{dv}{dx}}{v} =$$

$$= \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

ehk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x) \cdot f_1'(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{[f_2(x)]^2},$$

kust

$$dy = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

3(1 + sin x cos x) / 2

1. näide. Leida funktsiooni

$$y = \frac{a+x}{a-x}$$

tuletis.

Lahendades:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a-x) \frac{d(a+x)}{dx} - (a+x) \frac{d(a-x)}{dx}}{(a-x)^2} =$$

$$= \frac{(a-x) + (a+x)}{(a-x)^2} = \frac{2a}{(a-x)^2}.$$

2. näide. Leida funktsiooni

$$y = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

tuletis.

Siin

$$u = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$v = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

siis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{a^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{a^2 + x^2} =$$

$$= \frac{-x(a^2 + x^2) - x(a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^4 - x^4}} = -\frac{a^2 x}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^4 - x^4}}.$$

3. näide. Leida tangensfunktsiooni

$$y = \tan x$$

teine tuletis.

Esimene tuletis (tarvitades murdfunktsiooni tuletise valemit)

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \frac{d(\sin x)}{dx} - \sin x \frac{d(\cos x)}{dx}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

teine tuletis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0 - \frac{d(\cos^2 x)}{dx}}{\cos^4 x} = \frac{2 \cos x \sin x}{\cos^4 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}.$$

Ülesanded.

1) $y = \frac{1+x}{1-x}$

5) $y = \frac{(x-1)^3}{4-x^2}$

9) $y = \frac{x - \sin x}{\cos x}$

2) $y = \frac{a+x}{\sqrt{a-x}}$

6) $y = \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{\sqrt{1-x-x^2}}$

10) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

3) $y = \frac{3-4x^2}{2-3x}$

7) $y = \frac{\sin x}{x}$

11) $y = \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$

4) $y = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^3}}$

8) $y = \frac{\cos 2x}{\cos x}$

12) $y = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x \cdot \cos x}$

13) Kujundada ellipsisse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ maksimaalse pinnaga ristkülik.

14) Välja lõigata kerast, mille raadius $R = 20$ cm, maksimaalse külgpinnaga a) silinder, b) koonus, c) korrapärane parallelepiped.

15) Välja lõigata kerast, mille raadius $R = 12$ cm, maksimaalse täispinnaga korrapärane parallelepiped.

16) Korrapärase nelinurkse püramiidi külje serv $a = 4$ m; kui suur tuleb võtta püramiidi põhja serv, et ta maht oleks võimalikult suur?

17) Leida maksimaalse mahuga koonus, kui ta täispind $S = \pi a^2$.

18) Sirgjoonelisel teel on pistetud iga meetri kaugusel üksteisest maa sisse odad. Üks sportlane seisab sellest teest 90 m ja teine 60 m kaugusel; sportlaste kaugus üksteisest on 90 m. Missuguse oda juurde peab minema otsejoones esimene sportlane, et seda viia jälle otsejoones teise sportlase kätte, nii et ärakäidud tee oleks kõige lühem?

19) Küla asub raudteest 30 km kaugusel, kust linnani veel 50 km. Kui kaugel linnast tuleb asutada jaam, et külamees jõuaks rutem linna, kui ta sõidab hobusega külast jaamani 10 km kiirusega tunnis ja siis rongiga linnani 40 km kiirusega tunnis.

20) Kujundada kera ümber koonus, millel oleks a) minimaalne külgpind, b) minimaalne maht. Kera raadius $R = 10$ m.

21) Kui kõrgele ringikujulise tee keskkoha peaks asetama elektrilambi, et tee oleks võimalikult tugevamini valgustatud, kui tee kaugus keskkohast $r = 64$ m.

22) Missugune seadus valitseb valgusekiire peegeldumisel?

23) Missugune seadus valitseb valgusekiire murdumisel ühest keskkonnast teise keskkonda?

24) Kas funktsioonil $y = \frac{x^2}{x-1}$ on maksimum või miinimum?

V peatükk. Transsendentsed funktsioonid.

§ 24. Arv e .

Võtame funktsiooni

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

ja vaatame, missugune on ta piirväärtus, kui x lõpmata kasvab.

Oletame, et x on lõplik positiivne täisarv, siis Newtoni binoomi põhjal

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1 + x \cdot \frac{1}{x} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{x^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{x(x-1)(x-2) \dots (x-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \cdot \frac{1}{x^m} + \dots =$$

$$= 2 + \frac{1 - \frac{1}{x}}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{3!} + \dots$$

$$\dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{2}{x}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{x}\right)}{m!} + \dots$$

Paremal pool x -i lõpmatul kasvamisel kasvab ka lõpmata liikmete arv, mille juures arvud

$$1 - \frac{1}{x}, 1 - \frac{2}{x}, 1 - \frac{3}{x}, \dots, 1 - \frac{m-1}{x}$$

lähenevad 1-le. Sellepärast võime kirjutada

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1 - \frac{1}{x}}{2!} + \frac{(1 - \frac{1}{x})(1 - \frac{2}{x})}{3!} + \dots\right) = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

Siin on kõik liikmed positiivsed, sellepärast on selle rea summa suurem kui 2, s. o.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 2.$$

Teiselt poolt võime näidata, et selle rea summa on vähem kui 3. Selleks suurendame murdusid

$$\frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!}, \frac{1}{6!}, \dots$$

nõnda, et saaksime lõpmata kahaneva geomeetrilise rea

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^5}, \dots$$

kusjuures nüüd

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 1 = 3,$$

sest et $2^n \leq (n+1)!$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < 3.$$

Sellega antud funktsiooni otsitav piirväärtus on lõplik arv, mis peitub 2 ja 3 vahel. Seda piirväärtust tähistatakse lihtsuse mõttes tähega e ja võetakse logaritmid aluseks, milliseid logaritme nimetatakse **loomulikkudeks** ehk **naturaalseteks logaritmideks**.

Otsekohele arvutamisel oleksime saanud kuju

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^\infty = 1^\infty,$$

millel pole selles kujus mõtet; see kuju ei väljenda funktsiooni tõeliku väärtust, kui $x \rightarrow \infty$, sellepärast nimetatakse niisugust kuju määramatuks kujuks. Funktsiooni tõelik väärtus on, kui $x \rightarrow \infty$

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots,$$

kus

$$2 < e < 3;$$

e väärtust teatud täpsusega arvutades saame

$$2 + \frac{1}{2!} = 2,500000$$

$$\frac{1}{3!} = 0,166667$$

$$\frac{1}{4!} = 0,041667$$

$$\frac{1}{5!} = 0,008333$$

$$\frac{1}{6!} = 0,001389$$

$$\frac{1}{7!} = 0,000198$$

$$\frac{1}{8!} = 0,000025$$

$$\frac{1}{9!} = 0,000003$$

$$e = 2,718282$$

Arvutamisest näeme, et e ei ole ratsionaalne, vaid transsendentne arv. Meelespidamiseks on küllalt kolmest kümnendkohast

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \approx 2,718.2818$$

Matemaatilises analüüsis tarvitatakse harilikult loomulikke logaritme, mille aluseks on e , sest et niisugusel logaritmidel alusel lihtsustuvad paljud matemaatilise analüüsi valemid ja arvutused, ja tähistatakse $\ln x$.

Loomulikkudelt logaritmidelt üle minna kümnendlogaritmidele, ja ümberpöörduvalt, ei tee raskust. Näiteks, kui

$$y = \ln x, \text{ siis } e^y = x,$$

ja kui

$$z = \log x, \text{ siis } 10^z = x,$$

millest järgneb, et

$$e^y = 10^z.$$

Logaritmidel (alusel e) saame

$$y \ln e = z \ln 10$$

ehk

$$\ln x = \log x \ln 10, \text{ (sest } \ln e = 1)$$

kust

(1)

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Logaritmides (alusel 10) võime kirjutada

$$y \log e = z \log 10$$

ehk

$$\ln x \log e = \log x \quad (\text{sest } \log 10 = 1)$$

kust

$$(2) \quad \log x = \ln x \log e.$$

Võrreldes (1) ja (2) näeme, et

$$\log e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,4343,$$

mis nimetatakse **kümnendlogaritmi mooduliks**.

Et üle minna loomulikult logaritmit künendlogaritmile, tuleb loomuliku logaritmi väärtus korrutada kümnendlogaritmi mooduliga.

§ 25. Logaritmifunktsioon.

Võtame logaritmifunktsiooni

$$y = \ln x$$

ja katsume teda differentseada.

Kui argument kasvab Δx -i võrra, siis muutub ka funktsioon Δy -i võrra, s. o.

$$y + \Delta y = \ln(x + \Delta x),$$

kust

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

jagades Δx -iga saame

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Et leida parema poole piirväärtust, kui $\Delta x \rightarrow 0$, selleks tähistame lõpmata kahaneva suuruse

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{m},$$

kus nüüd $m \rightarrow \infty$; siit

$$\frac{1}{\Delta x} = \frac{m}{x}.$$

Piirile minnes võime kirjutada

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}{x} = \\ &= \frac{\ln e}{x} = \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

sest eelmise §-i järele

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e \text{ ja } \ln e = 1.$$

Tähendab kui

$$y = \ln x,$$

siis ta tuletis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot (x)'$$

Ümberpöörduvalt differentsiaali $dy = \frac{dx}{x}$ üldine integraal on siis

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c.$$

1. näide. Leida funktsiooni

$$y = \ln(a^2 + x^2) - \ln(a^2 - x^2)$$

tuletis.

See on liitfunktsioon, kus

$$z_1 = a^2 + x^2 \text{ ja } z_2 = a^2 - x^2;$$

tähendab

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{z_1} \cdot \frac{dz_1}{dx} - \frac{1}{z_2} \cdot \frac{dz_2}{dx} = \frac{1}{a^2 + x^2} \cdot 2x - \frac{1}{a^2 - x^2} \cdot (-2x) = \\ &= \frac{2x}{a^2 + x^2} + \frac{2x}{a^2 - x^2} = \frac{4a^2 x}{a^4 - x^4}. \end{aligned}$$

2. näide. $\int \ln x \, dx = ?$

Siin tuleb tarvitada ositi integrimist.

Tähistame

$$\begin{array}{l|l} u = \ln x, & \text{siis } du = \frac{dx}{x}, \\ dv = dx, & v = x; \end{array}$$

võime kirjutada

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$$

3. näide. $\int_0^a \frac{x \, dx}{a^2 + x^2} = ?$

Siin tuleb tarvitada integrimise asendamismeetodit.

Tähistame

siis

$$a^2 + x^2 = z,$$

$$2x \, dx = dz,$$

kust

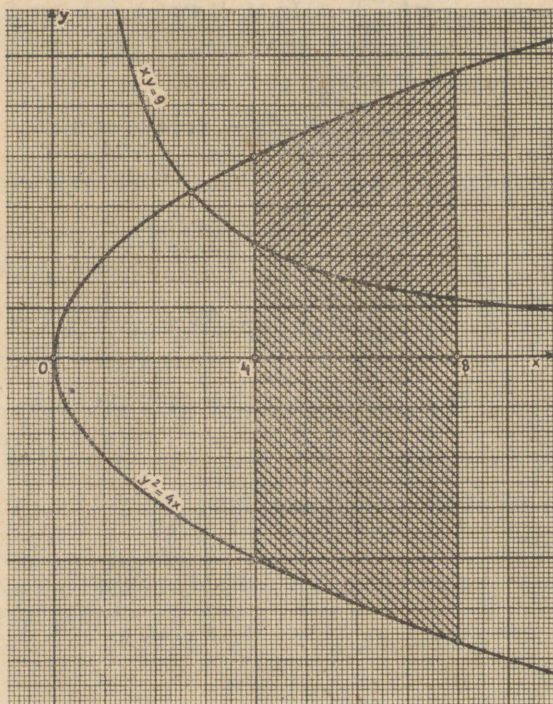
$$x dx = \frac{dz}{2};$$

piirid:

$$\begin{array}{ll} \text{kui } x = 0, & \text{siis } z = a^2 + x^2 = a^2, \\ \text{„ } x = a, & \text{„ } z = a^2 + x^2 = 2a^2; \end{array}$$

integrides saame

$$\int_0^a \frac{x dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{2a^2} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \left| \ln z \right|_{a^2}^{2a^2} = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}.$$



63. joonis.

4. näide. Leida pind, mis asub kahe kõverjoone

$$y^2 = 4x \text{ ja } xy = 9$$

vahel piirides $x = 4$ ja $x = 8$ (63. joon.).

Siin, nagu jooniselt näeme, esinevad kaks juhtu: võime arvutada pinda, mis asub parabooli (esimese kõverjoone) ülemise haru ja hüperbooli (teise kõverjoone) vahel, või parabooli alumise haru ja hüperbooli vahel.

Esimesel juhul saame, kui

$$y = 2\sqrt{x} \text{ ja } y = \frac{9}{x},$$

et

$$\begin{aligned} S &= \int_4^8 2\sqrt{x} dx - \int_4^8 \frac{9}{x} dx = \left| \frac{4}{3} x\sqrt{x} \right|_4^8 - \left| 9 \ln x \right|_4^8 = \left| \frac{4}{3} x\sqrt{x} - 9 \ln x \right|_4^8 \\ &= 19,6 - 9 \ln 2 = 13,4. \end{aligned}$$

Teisel juhul

$$S = \int_4^8 2\sqrt{x} dx + \int_4^8 \frac{9}{x} dx = \left| \frac{4}{3} x\sqrt{x} + 9 \ln x \right|_4^8 = 19,6 + 9 \ln 2 = 25,8.$$

Märkus. Kui esineb integraal kujus

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx,$$

kus lugeja on nimetaja diferentsiaal, siis integraal võrdub nimetaja loomuliku logaritmi väärtusega, sest kui tähistame

$$f(x) = z, \text{ siis } f'(x) dx = dz$$

ja

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{dz}{z} = \ln z + c = \ln f(x) + c.$$

5. näide. $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+3} dx = ?$

Märkuse põhjal võime kirjutada

$$\int \frac{2x-5}{x^2-5x+3} dx = \ln(x^2-5x+3) + c.$$

6. näide. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = ?$

Teisendades integritavat avaldist võime (eeloleva märkuse põhjal) kirjutada

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\tan x} = \int \frac{d(\tan x)}{\tan x} = \ln(\tan x) + c.$$

7. näide. $\int \frac{dx}{\sin x} = ?$

Tähistame siin

$$x = 2a, \text{ siis } dx = 2da$$

ja

$$\sin x = \sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

Asetades ja kasutades eelmist näidet võime kirjutada

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{\sin a \cos a} = \ln(\tan a) + c = \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) + c.$$

8. näide. $\int \frac{dx}{\cos x} = ?$

Tähistame siin

$$x = \frac{\pi}{2} - a, \text{ siis } dx = -da$$

ja

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a.$$

Asetades ja kasutades eelmist näidet võime kirjutada

$$\int \frac{dx}{\cos x} = - \int \frac{da}{\sin a} = - \ln\left(\tan \frac{a}{2}\right) + c = c - \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right].$$

9. näide. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = ?$

Teisendades integritavat funktsiooni saame

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{dx}{\sin x};$$

esimene integraal (tarvitades asendamismeetodit)

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = - \int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{z} + c_1 = \frac{1}{\cos x} + c_1,$$

ja teine integraal (7. näite järele)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) + c_2;$$

tähendab

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) + c.$$

10. näide. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = ?$

Tarvitame siin ositi integrimist, tähistades

$$\begin{array}{l|l} u = \frac{\sin x}{\cos^3 x}, & \text{siis } du = \frac{\cos^2 x + 3 \sin^2 x}{\cos^4 x} dx, \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x; \end{array}$$

võime kirjutada

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx &= -\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \int \frac{\cos^2 x + 3 \sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \\ &= -\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\cos x} + 3 \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx; \\ \int \frac{dx}{\cos x} &= -\ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right] + c_1, \quad (8. \text{ näide}) \end{aligned}$$

viimase integraali, kui sarnase otsitava integraaliga, viime pahemale poole, saame

$$-2 \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right] + c_1,$$

millest

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right] + c.$$

11. näide. $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = ?$

Teisendades integritavat funktsiooni ja kasutades eelmisi näiteid võime kirjutada

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^3 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx + \int \frac{dx}{\cos x} = \\ &= \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right] - \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right] + c = \\ &= \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right] + c. \end{aligned}$$

12. näide. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = ?$

Tähistame

$$x + \sqrt{x^2 + a^2} = z,$$

mida differentsides saame

$$\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) dx = dz$$

ehk

$$\frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = dz, \quad \frac{z}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = dz,$$

kust

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{dz}{z};$$

tähendab

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{dz}{z} = \ln z + c = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c.$$

Ülesanded. Leida tuletised:

- 1) $y = \ln ax$ 5) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$
2) $y = \ln x^2$ 6) $y = \ln \sin x$
3) $y = \ln^2 x$ 7) $y = \ln \tan x$
4) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$ 8) $y = \ln \ln x.$

Leida üldised integraalid:

- 9) $\int \frac{dx}{ax + b}$ 12) $\int \frac{\sin x dx}{a + b \cos x}$ 15) $\int \frac{2x dx}{x^2 + 4}$
10) $\int \frac{xdx}{a^2 - x^2}$ 13) $\int \tan x dx$ 16) $\int \frac{(2x + 1) dx}{x^2 + x}$
11) $\int \frac{x^2 dx}{a^3 - x^3}$ 14) $\int \cot x dx$ 17) $\int \frac{(x-1) dx}{x^2 - 2x + 3}$

18) Leida pinna osa kõverjoone $y = \frac{x}{1+x^2}$ ja x -telje vahel piirides $x=0$ ja $x=3$.

19) Leida pinna osa kõverjoone $y = \frac{x^3 + 1}{x}$ ja x -telje vahel piirides $x=2$ ja $x=4$.

20) Leida pinna osa kõverjoone $y = 4a^2 \frac{2a-x}{x}$ ja ta asümptoodi $x=2a$ vahel.

21) Leida pöördkeha maht, mis saadakse kõverjoone $xy^2 = 4a(2a-x)$ pöörlemisel ümber asümptoodi $x=2a$.

22) Kas funktsioon $y = x \ln x$ saab lõplikus piirkonnas maksimumiks või miinimumiks?

§ 26. Eksponentfunktsioon.

a) Kui kaks muutuvat suurust x ja y on üksteisega funktsionaalselt seotud

$$F(x, y) = 0,$$

siis on ikka võimalik rippumatut muutujat vabalt määrata. Kui valime rippumatuks muutujaks x -i, siis funktsioon omab kuju

$$y = f(x);$$

kui aga valime rippumatuks muutujaks y -i, siis saame ümberpöörduvalt kuju

$$x = \varphi(y).$$

Funktsioonid $y = f(x)$ ja $x = \varphi(y)$ kujutavad geomeetriliselt üht ja sama kõverjoont (või sirgjoont).

Differentsides funktsiooni $y = f(x)$ x -i suhtes saame puutujast ja x -teljest moodustatud nurga α tangensi (64. joon.).

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \tan \alpha;$$

differentsides funktsiooni $x = \varphi(y)$ y -i suhtes saame puutujast ja y -teljest moodustatud nurga β tangensi

$$\frac{dx}{dy} = \varphi'(y) = \tan \beta.$$

Jooniselt näeme et

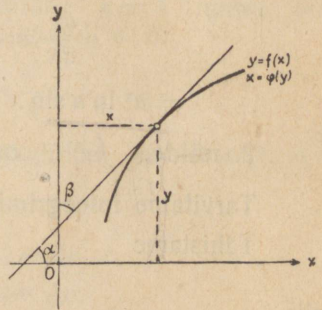
$$\alpha = 90^\circ - \beta,$$

siis

$$\tan \alpha = \tan (90^\circ - \beta) = \cot \beta = \frac{1}{\tan \beta};$$

tähendab

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \text{ ehk } f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$



64. joonis.

b) Eksponentfunktsiooni üldkuju on

$$y = a^x,$$

kus a on konstant.

Logaritmid

$$\ln y = x \ln a, \quad x = \frac{\ln y}{\ln a}$$

ja differentsides y -i suhtes

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y \ln a} = \frac{1}{a^x \ln a}$$

saame (a) põhjal ^{eksponentsida funktsiooni} logaritmifunktsiooni tuletise

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a.$$

Erijuhul, kui $a = e$, s. o.

$$y = e^x,$$

siis

$$\frac{dy}{dx} = e^x,$$

sest $\ln e = 1$.

Ümberpöördult, eksponentfunktsioonide integraalid on:

$$\int e^x dx = e^x + c,$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c.$$

1. näide. Leida funktsiooni

$$y = a^x \sin x$$

tuletis.

Differentsides saame

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \frac{d(a^x)}{dx} + a^x \frac{d(\sin x)}{dx} =$$
$$= a^x \ln a \sin x + a^x \cos x = a^x (\ln a \sin x + \cos x).$$

2. näide. $\int e^{\sin x} \cos x dx = ?$

Tarvitame integrimise asendamismeetodit.

Tähistame

$$\sin x = z,$$

siis

$$\cos x dx = dz;$$

võime kirjutada

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^z dz = e^z + c = e^{\sin x} + c.$$

3. näide. Leida funktsiooni

$$y = \frac{e^x}{x}$$

maksimum- või miinimumpunkt.

Võtame funktsiooni esimese tuletise ja võrrutame 0-ga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = 0.$$

Et

$$\frac{e^x x - e^x}{x^2} = 0$$

siis

$$e^x x - e^x = e^x (x - 1) = 0,$$

kust

$$x = 1.$$

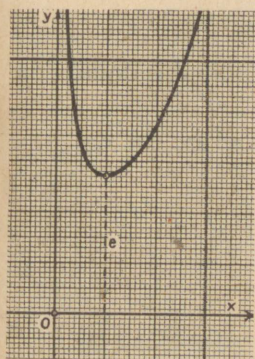
Selle x -i väärtuse juures on funktsioon kas maksimum või miinimum. Uurime funktsiooni teist tuletist, kas ta on $x=1$ juures positiivne või negatiivne.

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{(e^x + e^x x - e^x) x^2 - 2x(e^x - x e^x)}{x^4} = \\ &= \frac{x^2 e^x + 2x e^x - 2e^x}{x^3} = \frac{e^x (x^2 + 2x - 2)}{x^3}, \end{aligned}$$

kui $x = 1$, siis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e = 2,718 \dots > 0;$$

tähendab argumenti väärtuse $x=1$ juures on funktsiooni miinimum (65. joon.), s. o.



65. joonis.

$$y_{\min} = \frac{e^x}{x} = e.$$

Kõverjoone miinimumpunkt on $B \equiv (1|e)$.

Ülesanded

1) $y = a^{3x}$

2) $y = e^{x^2}$

3) $y = 2^x x^2$

4) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

5) $y = 10^{\ln x}$

6) $y = a^x \ln x$

7) $y = x e^{\sin x}$

8) $y = 2^{2x} \cdot 3^{3x} \cdot 4^{4x}$

9) $\int x e^x dx$

10) $\int a^{2x} dx$

11) $\int a^x (1 + a^x) dx$

12) $\int (x + 1) e^{5x} dx$

13) $\int x^2 e^{x^3} dx$

14) $\int \frac{e^x}{a + e^x} dx$

15) $\int a^{\cos x} \sin x dx$

16) Kas funktsioon $y = 2^{\ln x}$ saab lõplikus piirkonnas maksimumiks või miinimumiks?

17) Kas funktsioonil $y = 2^{x-2}$ on lõplikus piirkonnas käänupunkt?

18) Leida pinna osa kõverjoone $y = 2e^{\frac{x}{2}}$ ja x -telje vahel piirides $x = -3$ ja $x = 1$.

19) Leida pinna osa kõverjoone $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ ja x -telje vahel piirides $x = -4$ ja $x = 2$.

20) Kui suur pinna osa asub kõverjoonte $y = x^2$ ja $y = e e^{\frac{x}{2}}$ ja sirgjoone $y = e$ vahel?

21) Leida pöördkeha maht, mis saadakse kõverjoone $y = 2e^{\frac{x}{2}}$ pöörlemisel ümber y -telje piirides $y = 2$ ja $y = 2e$.

§ 27. Arkusfunktsioonid.

Trigonomeetriliste ehk nurgafunktsioonide pöördfunktsioonid on tsükloomeetrilised ehk arkusfunktsioonid

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \arctan x, \quad y = \operatorname{arccot} x.$$

a) Olgu

$$y = \arcsin x,$$

mida ümber pöördes võime kirjutada

$$x = \sin y.$$

Differentsides viimast y -i suhtes saame

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

millest saame \arcsin tuletise

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Tähendab, kui

$$y = \arcsin x,$$

siis ta tuletis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ja

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

b) Kui

$$y = \arccos x,$$

siis

$$x = \cos y$$

ja

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1 - \cos^2 y} = -\sqrt{1 - x^2},$$

millest

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ja

$$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

c) Kui

$$y = \arctan x,$$

siis

$$x = \tan y$$

ja

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2,$$

millest

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

ja

$$dy = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

d) Ja lõpuks, kui

$$y = \operatorname{arccot} x,$$

siis

$$x = \cot y$$

ja

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin^2 y} = -(1 + \cot^2 y) = -(1 + x^2),$$

millest saame

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

ja

$$dy = -\frac{dx}{1 + x^2}.$$

Sellega näeme, et arkusfunktsioonide tuletised on algebraised funktsioonid. Võttes neid ümberpöörduvalt võime kirjutada nende algebraiste funktsioonide üldised integraalid

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c,$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c.$$

1. näide. Leida funktsiooni

$$y = \arccos\left(\frac{a}{x}\right)$$

tuletis.

See on liitfunktsioon, kus

$$y = \arccos z \text{ ja } z = \frac{a}{x};$$

differentiides saame

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(\arccos z)}{dz} \cdot \frac{d\left(\frac{a}{x}\right)}{dx} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \cdot \left(-\frac{a}{x^2}\right) = \frac{a}{x^2 \sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}} = \frac{a}{x \sqrt{x^2-a^2}}. \end{aligned}$$

2. näide. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-a^2}} = ?$

Tähistame

$$x = \frac{a}{z},$$

siis

$$dx = -\frac{a dz}{z^2}$$

ja

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-a^2}} &= -\int \frac{a dz}{z^2 \cdot \frac{a}{z} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{z^2}-a^2}} = -\frac{1}{a} \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \\ &= \frac{1}{a} \arccos z + c = \frac{1}{a} \arccos\left(\frac{a}{x}\right) + c. \end{aligned}$$

3. näide. $\int \arctan x dx = ?$

Siin tuleb ositi integrida. Olgu

$$\begin{array}{l|l} u = \arctan x, & \text{siis } du = \frac{dx}{1+x^2}, \\ dv = dx, & v = x; \end{array}$$

võime kirjutada

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x dx}{1+x^2};$$

viimase integraali suhtes tarvitame integrimise asendamismeetodit, tähistades

$$1+x^2 = z,$$

siis

$$2x \, dx = dz,$$

kust

$$x \, dx = \frac{dz}{2};$$

saame

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln z + c =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} + c.$$

4. näide. Kui kaugel vertikaalsest postist peab olema vaatleja, et näha posti kõige suurema nurga all, kui posti pikkus on h ja vaatleja silma kõrgus a , kusjuures post on lühem kui vaatleja? Kui vaatleja läheb vastu posti, saab vaatenurk nulliks, läheb aga vaatleja postist lõpmata kaugemale, läheneb vaatenurk jälle 0-ile.

Olgu maksimaalne vaatenurk α ja vaatleja kaugus postist x (66. joon.) Abinurkadeks võtame β ja γ , mille vahe

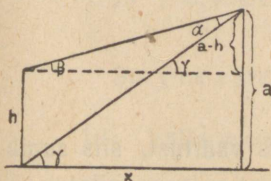
$$\gamma - \beta = \alpha$$

ja tangensid

$$\tan \gamma = \frac{a}{x}, \quad \tan \beta = \frac{a-h}{x},$$

kust

$$\gamma = \arctan \left(\frac{a}{x} \right), \quad \beta = \arctan \left(\frac{a-h}{x} \right),$$



66. joonis.

ja

$$\alpha = \gamma - \beta = \arctan \left(\frac{a}{x} \right) - \arctan \left(\frac{a-h}{x} \right).$$

Et nurk α oleks maksimaalne, selleks diferentsime teda argumenti x suhtes, s. o. leiame esimese tuletise, mis peab võrduma nulliga

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{1}{1+\frac{a^2}{x^2}} \cdot \frac{a}{x^2} + \frac{1}{1+\frac{(a-h)^2}{x^2}} \cdot \frac{a-h}{x^2} = 0,$$

$$\frac{a-h}{x^2 + (a-h)^2} - \frac{h}{x^2 + h^2} = 0,$$

$$(a-h)(x^2 + h^2) - h[x^2 + (a-h)^2] = 0,$$

$$hx^2 - a^2h + ah^2 = 0,$$

$$x^2 = a^2 - ah,$$

$$x = \sqrt{a(a-h)}.$$

Niisuguses kauguses postist peaks seisma vaatleja, et nurk α oleks maksimaalne. Siin ei ole vaja teist tuletist enam uurida, sest et jooniselt on selge, kui nurk oleks minimaalne, peaks x olema kas 0 või $\rightarrow \infty$. Kuid $\sqrt{a(a-h)}$ on lõplik positiivne suurus.

Kui $\sqrt{a(a-h)}$ lugeda negatiivseks, siis mõistaksime meie selle all, et vaatleja seisab sama kaugel, kuid teisel pool posti.

Kui posti pikkus $h = 1 \text{ m}$ ja vaatleja silma kõrgus $a = 1,6 \text{ m}$, siis kaugus on

$$x = \sqrt{a(a-h)} = \sqrt{1,6 - 0,6} = \sqrt{0,96} \approx 0,9798 \text{ m}$$

ja maksimaalne nurk

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \arctan \frac{1,6}{0,9798} - \arctan \frac{0,6}{0,9798} = \\ &= \arctan 1,635 - \arctan 0,613 = \\ &= 58^\circ 33' - 31^\circ 30' = 27^\circ 3'. \end{aligned}$$

5. näide. $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = ?$

Tähistame siin

$$x = a \tan \alpha, \text{ siis } dx = \frac{a d\alpha}{\cos^2 \alpha};$$

nii võib ikka tähistada, sest kui x omab mistahes väärtust, siis sama väärtust võib omada ka $a \tan \alpha$.

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = a^2 \int \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\cos^2 \alpha} d\alpha = a^2 \int \frac{d\alpha}{\cos^3 \alpha};$$

§ 25, 11. näite järele

$$\int \frac{d\alpha}{\cos^3 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha} - \frac{1}{2} \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right] + c_1,$$

siis

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx &= \frac{a^2 \sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha} - \frac{a^2}{2} \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right] + c = \\ &= \frac{a^2 \sin \left(\arctan \frac{x}{a} \right)}{2 \cos^2 \left(\arctan \frac{x}{a} \right)} - \frac{a^2}{2} \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\arctan \frac{x}{a}}{2} \right) \right] + c, \end{aligned}$$

sest kui $x = a \tan \alpha$, siis $\alpha = \arctan \frac{x}{a}$.

Ülesanded.

$$1) y = \arcsin \left(\frac{x-1}{2} \right)$$

$$2) y = \arccos(x^2)$$

$$3) y = \arctan \sqrt{x}$$

$$4) y = \operatorname{arccot}(a^x)$$

$$5) y = \frac{\arccos x}{x}$$

$$6) y = e^{\arcsin 2x}$$

$$7) y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$8) y = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}$$

$$9) \int \arcsin x \, dx$$

$$10) \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$$

$$11) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$12) \int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}$$

$$13) \int_{\frac{a}{2}}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$14) \int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1-x^6}}$$

$$15) \int_0^1 \ln(1+x^2) \, dx.$$

16) Välja arvata pinna suurus, mis asub kõverjoone $y = \frac{1}{1+x^2}$ ja x -telje vahel piirides $x = -2$ ja $x = 2$.

17) Välja arvata pinna suurus, mis asub sinosoidi $y = \sin x$ haru ja y -telje vahel piirides $y = 0$ ja $y = 1$.

18) Missugusel tingimusel on prismast läbimineva valguse kiire kaldumisnurk kõige vähem?

§ 28. Ratsionaalsete murdfunktsioonide integrimine.

Nagu § 3-s nägime, võib iga ratsionaalset murdfunktsiooni kujutada kahe ratsionaalse täisfunktsiooni jagatisena järgmiselt

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_m},$$

kus n ja m on positiivsed täisarvud, $n \geq m$, ja

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n,$$

$$b_0, b_1, b_2, \dots, b_m,$$

on konstantsed koeffitsiendid.

Kui meil on liigratsionaalne murdfunktsioon, s. o. kui $n > m$, siis on teda jagamise teel ikka võimalik kirjutada kujus

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = f_1(x) + \frac{f_2(x)}{\varphi(x)},$$

kus $f_1(x)$ on ratsionaalne täisfunktsioon ja $\frac{f_2(x)}{\varphi(x)}$ on lihtratsionaalne murdfunktsioon.

Tähendab, et liigratsionaalset murdfunktsiooni integrida, tuleb integrida ratsionaalse täisfunktsiooni ja lihtratsionaalse murdfunktsiooni summat, s. o.

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = \int f_1(x) dx + \int \frac{f_2(x)}{\varphi(x)} dx = F_1(x) + c + \int \frac{f_2(x)}{\varphi(x)} dx,$$

milles ratsionaalsete täisfunktsioonide integrimine on meil juba teada. Sellepärast käsitleme allpool ainult lihtratsionaalsete murdfunktsioonide integrimise võtet.

Lihtratsionaalsete murdfunktsioonide integrimise võte seisab selles, et integritav murdfunktsioon jaotatakse niisuguste lihtsamate murdfunktsioonide summaks, s. o. $o s a m u r d u d e k s$, mille integrimise võtted on meil varemini teada.

Võtame niisuguse lihtratsionaalse murdfunktsiooni, kus $m=2$, s. o.

$$y = \frac{a_0 x + a_1}{b_0 x^2 + b_1 x + b_2} = \frac{mx + n}{x^2 + px + q} = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

ja jaotame nimetaja algteguriteks

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta),$$

kus α ja β on võrrandi

$$\varphi(x) = x^2 + px + q$$

juured.

Siin võib esineda kolm juhtu: a) juured α ja β on reaalsed ja isesuurused, b) juured α ja β on reaalsed ja võrdsed ja c) juured α ja β on imaginaarsed.

a) Olgu juured α ja β reaalsed ja isesuurused. Siin võime kirjutada, kujutades murdfunktsiooni kahe osamurruna,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{mx + n}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta},$$

kus A ja B on osamurdude konstantsed lugejad, mida saadud võrranditest leitakse järgmiselt:

$$\frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} = \frac{A(x - \beta) + B(x - \alpha)}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{(A + B)x - (A\beta + B\alpha)}{(x - \alpha)(x - \beta)},$$

võrreldes viimast antud murdfunktsiooniga võime kirjutada

$$(A + B)x - (A\beta + B\alpha) = mx + n,$$

kust

$$\begin{aligned} A + B &= m, \\ A\beta + B\alpha &= -n; \end{aligned}$$

neid lahendades A ja B suhtes leiame

$$A = \frac{m\alpha + n}{\alpha - \beta}, \quad B = \frac{m\beta + n}{\beta - \alpha}.$$

Tähendab

$$\begin{aligned} \int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{mx + n}{(x - \alpha)(x - \beta)} dx = \\ &= \int \frac{A}{x - \alpha} dx + \int \frac{B}{x - \beta} dx = \\ &= A \ln(x - \alpha) + B \ln(x - \beta) + c, \end{aligned}$$

kus

$$A = \frac{m\alpha + n}{\alpha - \beta} \quad \text{ja} \quad B = \frac{m\beta + n}{\beta - \alpha}.$$

1. näide.

$$\int \frac{2x^3 - 7x^2 - 10x + 41}{x^2 - x - 6} dx = ?$$

Integraali märgi all esineb siin liigratsionaalne murdfunktsioon. Kujutame seda täisfunktsiooni ja liht-murdfunktsiooni summana, ning tarvitame viimase suhtes eespool antud võtet :

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 7x^2 - 10x + 41}{x^2 - x - 6} dx &= \int \left(2x - 5 + \frac{7x + 11}{x^2 - x - 6} \right) dx = \\ &= x^2 - 5x + \int \frac{7x + 11}{(x - 2)(x + 3)} dx = x^2 - 5x + \int \frac{A}{x - 2} dx + \int \frac{B}{x + 3} dx = \\ &= x^2 - 5x + A \ln(x - 2) + B \ln(x + 3) + c, \end{aligned}$$

kus

$$A(x + 3) + B(x - 2) = 7x + 11$$

ehk

$$(A + B)x + 3A - 2B = 7x + 11$$

kust

$$A + B = 7, \quad 3A - 2B = 11$$

ja

$$A = 5, \quad B = 2.$$

Tähendab

$$\int \frac{2x^3 - 7x^2 - 10x + 41}{x^2 - x - 6} dx = \\ = x^2 - 5x + 5 \ln(x - 2) + 2 \ln(x + 3) + c.$$

b) Olgu võrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

juured reaalsed ja võrdsed, s. o. $\beta = a$. Sel juhul võime kirjutada murdfunktsiooni osamurdudena järgmiselt

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{mx + n}{x^2 + px + q} = \frac{mx + n}{(x - a)^2} = \frac{A}{(x - a)^2} + \frac{B}{x - a},$$

kus nüüd

$$mx + n = A + B(x - a)$$

ehk

$$mx + n = Bx + A - Ba,$$

millest võime kirjutada

$$B = m,$$

$$A - Ba = n,$$

ehk

$$A = ma + n \text{ ja } B = m.$$

Tähendab integraal on

$$\int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{mx + n}{(x - a)^2} dx = \int \frac{A}{(x - a)^2} dx + \int \frac{B}{x - a} dx = \\ = -\frac{A}{x - a} + B \ln(x - a) + c,$$

kus

$$A = ma + n \text{ ja } B = m.$$

2. näide. $\int \frac{3x - 5}{x^2 - 4x + 4} dx = ?$

Integritav funktsioon on lihtratsionaalne murdfunktsioon, mille nimetaja

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2.$$

Tarvitades eespool antud juhtnööri võime kirjutada

$$\int \frac{3x - 5}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \frac{3x - 5}{(x - 2)^2} dx = \int \frac{A}{(x - 2)^2} dx + \int \frac{B}{x - 2} dx = \\ = -\frac{A}{x - 2} + B \ln(x - 2) + c,$$

kus

$$A + B(x - 2) = Bx + A - 2B = 3x - 5,$$

kust

$$B = 3, A = 1.$$

Sellega integraal on

$$\int \frac{3x - 5}{x^2 - 4x + 4} dx = -\frac{1}{x - 2} + 3 \ln(x - 2) + c.$$

c) Kui võrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

juured on imaginaarsed, siis toimitakse järgmiselt: murdfunktsioon $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ kujutatakse kahe osamurruna nõnda, et esimese lugejaks eraldatakse lugejast $f(x)$ see osa, mis kujutab nimetaja $\varphi(x)$ tuletist; teise osamuru lugejaks jääb siis lugeja $f(x)$ ülejäänud konstantne osa, kuid nimetaja $\varphi(x)$ teisendatakse kahe ruutliikme summaks, s. o.

$$x^2 + px + q = (x + a)^2 + k^2.$$

Niisugune teisendus on alati võimalik ja see võimaldab meile lihtsa asendamise teel teatud integrimisvalemeid tarvitada.

Sel juhul võime üldiselt kirjutada

$$\int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} dx = c_1 \int \frac{(2x + p) + c_2}{x^2 + px + q} dx,$$

kus c_1 ja c_2 on nimetaja tuletise $2x + p$ eraldamisel võimalikud esinevad konstantsed suurused. Edasi võime kirjutada

$$\begin{aligned} \int &= c_1 \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + c_1 c_2 \int \frac{dx}{(x + a)^2 + k^2} = \\ &= c_1 \ln(x^2 + px + q) + \frac{c_1 c_2}{k^2} \int \frac{kd \left(\frac{x + a}{k}\right)}{\left(\frac{x + a}{k}\right)^2 + 1} = \\ &= c_1 \ln(x^2 + px + q) + \frac{c_1 c_2}{k} \arctan\left(\frac{x + a}{k}\right) + c. \end{aligned}$$

3. näide.

$$\int \frac{6x - 1}{x^2 - 2x + 5} dx = ?$$

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

ei ole reaaluuri, sellepärast kirjutame

$$\begin{aligned} \int \frac{6x-1}{x^2-2x+5} dx &= 3 \int \frac{2x-2+\frac{5}{3}}{x^2-2x+5} dx = \\ &= 3 \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5} dx + 5 \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \\ &= 3 \ln(x^2-2x+5) + \frac{5}{2} \int \frac{d\left(\frac{x-1}{2}\right)}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1} = \\ &= 3 \ln(x^2-2x+5) + \frac{5}{2} \operatorname{arc} \tan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c. \end{aligned}$$

Ülesanded.

1) $\int \frac{x^2 dx}{x-1}$

10) $\int \frac{x^3+1}{(x-1)^2} dx$

2) $\int \frac{x+2}{x+1} dx$

11) $\int \frac{x^2 dx}{x^2-4x+4}$

3) $\int \frac{x^2-3x-4}{x-2} dx$

12) $\int \frac{x^2 dx}{9x^2+6x+1}$

4) $\int \frac{x^2-1}{3-x} dx$

13) $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$

5) $\int \frac{3x+2}{x^2+x-2} dx$

14) $\int \frac{4x+2}{x^2+4x+8} dx$

6) $\int \frac{x+2}{x^2-6x+5} dx$

15) $\int \frac{x-2}{x^2-2x+10} dx$

7) $\int \frac{x^3-7x+18}{x^2-3x+2} dx$

16) $\int \frac{x^4+x^2+2500}{x^2+10x+50} dx$

8) $\int \frac{x^8-x^5+x^3-1}{x^2-1} dx$

17) $\int \frac{3e^{2x}+2e^x}{e^{2x}+e^x-2} dx.$

9) $\int \frac{4x-5}{(x+1)^2} dx$

§ 29. Ringi-integraal.

Ilmutades ringi võrrandit

$$x^2 + y^2 = r^2$$

y -i suhtes saame

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Selle funktsiooni integraali

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

lahendus aitab kaasa paljude irratsionaalsete funktsioonide integreerimisele.

Märgime

$$x = r \sin a,$$

siis

$$dx = r \cos a da$$

kus a on uus muutuja. Meil on teada, et x -i piirväärtused on $\pm r$ ja $\sin a$ piirväärtused on ± 1 , sellepärast niisugune asendamine on ikka võimalik.

Võime kirjutada

$$\begin{aligned} \int \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 a} \cdot r \cos a da = \\ &= r^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 a} \cdot \cos a da = r^2 \int \cos^2 a da = \end{aligned}$$

$$= r^2 \int \frac{1 + \cos 2a}{2} da =$$

$$= \frac{r^2}{2} [\int da + \int \cos 2a da] =$$

$$= \frac{r^2}{2} \left[a + \frac{\sin 2a}{2} + c_1 \right] =$$

$$= \frac{r^2}{2} \left[\arcsin \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{x}{r^2} \sqrt{r^2 - x^2} + c_1 \right] =$$

$$= \frac{r^2}{2} \arcsin \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + c.$$

$$\text{sest } \cos a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}};$$

$$\text{kui } 2a = z, \text{ siis } da = \frac{dz}{2} \text{ ja}$$

$$\int \frac{\cos z}{2} dz = \frac{\sin z}{2} = \frac{\sin 2a}{2};$$

$$\text{sest } \sin 2a = 2 \sin a \cos a =$$

$$= 2 \sin a \sqrt{1 - \sin^2 a} =$$

$$= 2 \frac{x}{r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = \frac{2x}{r^2} \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Sellega ringi üldine integraal on

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{r^2}{2} \arcsin \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + c.$$

Kui meil on ellipsi võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ehk

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

siis võime ringi-integraali põhjal kirjutada elliptilise integraali

$$\int \frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a} dx = \frac{b}{a} \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{b}{a} \left[\frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + c_1 \right] = \frac{ab}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{bx}{2a} \sqrt{a^2-x^2} + c.$$

1. näide.

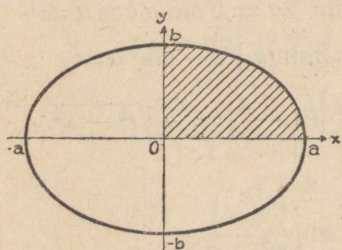
$$\int_0^a \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = ?$$

Märgime siin (ositi integrides)

$$\begin{array}{l|l} u = x, & \text{siis } du = dx, \\ dv = \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}} & v = -\sqrt{a^2-x^2}; \text{ (§ 20, 3. näide)} \end{array}$$

võime kirjutada

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \left| -x\sqrt{a^2-x^2} \right|_0^a + \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx = \\ &= \left| -x\sqrt{a^2-x^2} \right|_0^a + \left| \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} \right|_0^a = \\ &= \left| \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} \right|_0^a = \frac{\pi a^2}{4}. \end{aligned}$$



67. joonis

2. näide. Leida ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pinda.

Integrides 0-st kuni a -ni saame vee-
rand ellipsi

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2}$$

pinda (67. joon.). Kasutades ringi-integraali ja korrutades neljaga saame ellipsi pinna väärtuse

$$S = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{4b}{a} \left| \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} \right|_0^a = \pi ab.$$

Ülesanded.

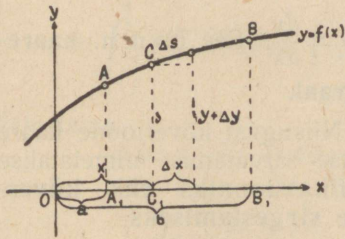
- 1) Leida ellipsi $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ pinna osa, mis asub ringis $x^2 + y^2 = 25$.
- 2) Missuguse osa hüperbool $xy = 4$ lahutab ringi $x^2 + y^2 = 25$ pinnast?
- 3) Kui suur pinnaosa asub kõverjoonte $x^2 + y^2 = 2a^2$ ja $x^2 = ay$ vahel?
- 4) Leida rõnga maht, mis saadakse ringi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ pöörlemisel ümber x -telje; oletades, et $b \geq r$.
- 5) Leida pöördkeha maht, mille moodustab ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pööreldes ümber sirgjoone $y = d$; oletades, et $d \geq b$.

§ 30. Rektifikatsioon.

Olgu funktsiooni

$$y = f(x)$$

geomeetriline kuju 68. joonisel. Võtame kõverjoone kaare $AB = s$ ja katsume leida ta pikkuse.



68. joonis.

Tõmbame punktidest A ja B ordinaadid AA_1 ja BB_1 , millele vastavad abtsissid $x = a$ ja $x = b$. Kui loeme punkti A konstantseks kindla $x = a$ juures ja mõnda teist punkti C , koordinaatidega $(x|y)$, muutvaks, siis muutub ka kaare pikkus, kui kasvab või kahaneb argument x , s. o. kaar s on argumentiga x funktsionaalses olenevuses: ta on mingisugune x -i funktsioon. Meie peame antud funktsioonist $y = f(x)$ leidma

kaarefunktsiooni, mis määraks ära kaare s pikkuse.

Kui punkt C on kõverjoonel piirkonnas A -st kuni B -ni vabalt võetud ja argument x kasvab Δx -i võrra, siis muutub ordinaat Δy -i võrra ja sellega ühtlasi ka kaar väikese kaare osa Δs võrra mis nimetatakse **kaarekasvuks** ehk **kaare-elementiks**.

Kaare elementidele Δs vastab kõõlupikkus

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x.$$

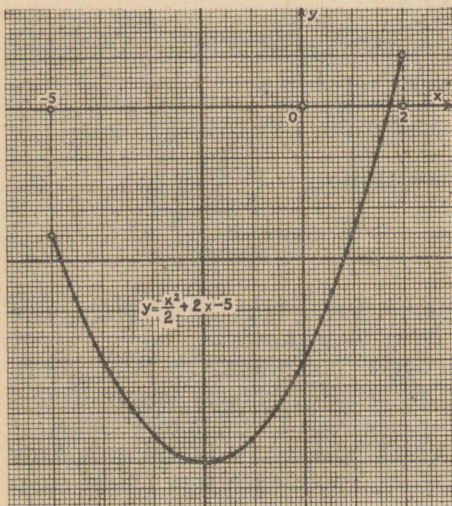
Kui kaare s pikkuse jaotame kaare-elementideks, siis

$$s = \sum_{x=a}^{x=b} \Delta s,$$

mis on kaare-elementidele vastavate kõõlude summa piir, kui nende arv lõpmata kasvab. Kõõlude kahanemisel ja nende arvu kasvamisel võib nende summa saada kaarele s nii ligidale kui meie iganes soovime.

Sellega kaare s pikkus on piirväärtus, millele läheneb lõpmata kahanevate kõõlude summa, kui nende arv lõpmata kasvab. Tähen­dab, kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis § 17. põhjal võime kirjutada

$$s = \sum_{x=a}^{x=b} \Delta s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$



69. joonis.

Sellega kõverjoone $y=f(x)$ pikkus piirides $x=a$ ja $x=b$ on

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

ehk lühidalt

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + p^2} dx,$$

kus $p = \frac{dy}{dx}$. See on n. n. **kaare­integraal**.

Niisugust kõverjoone kaare pikkuse arvutamist nimetatakse **rektifikatsiooniks** ehk **kõver­joone sirgestamiseks**.

1. näide. Leida kõverjoone

$$y = \frac{x^2}{2} + 2x - 5$$

pikkus piirides $x = -5$ ja $x = 2$ (69. joon.).

Siin

$$\frac{dy}{dx} = p = x + 2$$

ja kaareintegraal

$$s = \int_{-5}^2 \sqrt{1 + p^2} dx = \int_{-5}^2 \sqrt{1 + (x + 2)^2} dx.$$

Tähistame

$$x + 2 = z, \text{ siis } dx = dz;$$

piirid: kui $x = 2$, siis $z = x + 2 = 4$,

„ $x = -5$, siis $z = x + 2 = -3$.

Selle integraali väärtus on (§ 27, 5. näite järele)

$$s = \int_{-3}^4 \sqrt{1+z^2} dz = \left| \frac{\sin(\arctan z)}{2 \cos^2(\arctan z)} - \frac{1}{2} \ln \left[\tan \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\arctan z}{2} \right) \right] \right|_{-3}^4 =$$

$$= \left(\frac{0,97}{0,117} - \frac{1}{2} \ln 0,113 \right) - \left(-\frac{0,949}{0,2} - \frac{1}{2} \ln 5,172 \right) =$$

$$= 8,3 + 1,09 + 4,745 + 0,872 \approx 15.$$

2. näide. Leida kõverjoone

$$y = 2e^{\frac{x}{2}}$$

pikkus piirides $x = -2$ ja $x = 3$ (70. joon.).

Funktsiooni tuletis

$$p = e^{\frac{x}{2}}$$

ja kaare s pikkus

$$s = \int_{-2}^3 \sqrt{1+p^2} dx = \int_{-2}^3 \sqrt{1+e^x} dx.$$

Tähistame

$$e^x = z, \text{ siis } e^x dx = dz$$

ja

$$dx = \frac{dz}{e^x} = \frac{dz}{z};$$

piirid: kui $x = 3$, siis $z = e^x = e^3$,

„ $x = -2$, siis $z = e^x = e^{-2}$.

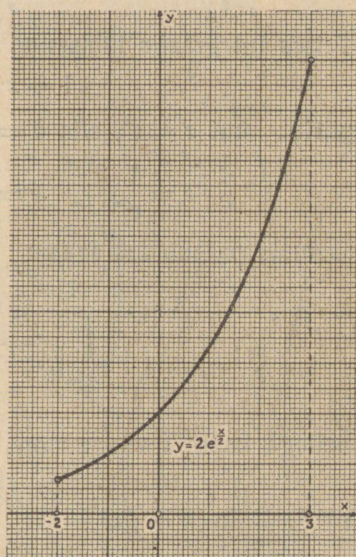
Paigutame saadud väärtused kaareintegraali

$$s = \int_{e^{-2}}^{e^3} \sqrt{1+z} \cdot \frac{dz}{z} = \int_{e^{-2}}^{e^3} \frac{1+z}{z \sqrt{1+z}} dz =$$

$$= \int_{e^{-2}}^{e^3} \frac{dz}{z \sqrt{1+z}} + \int_{e^{-2}}^{e^3} \frac{dz}{\sqrt{1+z}}.$$

Esimeses integraalis tähistame

$$z = \frac{1}{u^2}, \text{ siis } dz = -\frac{2 du}{u^3};$$



70. joonis.

piirid: kui $z = e^3$, siis $u = \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{e\sqrt{e}}$,

kui $z = \frac{1}{e^2}$, siis $u = \frac{1}{\sqrt{z}} = e$;

võime kirjutada (kasutades § 25, 12. näidet)

$$\int_{e^{-2}}^{e^3} \frac{dz}{z\sqrt{1+z}} = -2 \int_e^{\frac{1}{e\sqrt{e}}} \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = -2 \left| \ln(u + \sqrt{u^2+1}) \right|_e^{\frac{1}{e\sqrt{e}}}.$$

Teises integraalis tähistame

$$1+z = v^2, \text{ siis } dz = 2v dv;$$

piirid: kui $z = e^3$, siis $v = \sqrt{1+z} = \sqrt{1+e^3}$,

" $z = \frac{1}{e^2}$, " $v = \sqrt{1+z} = \frac{\sqrt{1+e^2}}{e}$;

asemele paigutades saame

$$\int_{e^{-2}}^{e^3} \frac{dz}{\sqrt{1+z}} = 2 \int_{\frac{\sqrt{1+e^2}}{e}}^{\sqrt{1+e^3}} dv = 2 \left| v \frac{\sqrt{1+e^3}}{\sqrt{1+e^2}} \right|.$$

Sellega kaare s väärtus on

$$\begin{aligned} s &= -2 \left| \ln(u + \sqrt{u^2+1}) \right|_e^{\frac{1}{e\sqrt{e}}} + 2 \left| v \frac{\sqrt{1+e^3}}{\sqrt{1+e^2}} \right| \\ &= -2 \ln \left(\frac{1}{e\sqrt{e}} + \sqrt{\frac{1}{e^3} + 1} \right) + \\ &\quad + 2 \ln(e + \sqrt{e^2+1}) + 2\sqrt{1+e^3} - 2\frac{\sqrt{1+e^2}}{e} = \\ &= -0,43 + 3,45 + 9,16 - 2,14 \approx 10. \end{aligned}$$

Ülesanded.

- 1) Leida kõverjoone $y = x^2$ kaare pikkus piirides $x=0$ ja $x=2$.
- 2) Leida kõverjoone $y = 2 - x^2$ kaare pikkus ülevalpool x -telge.
- 3) Leida kõverjoone $2y = 2 - x^2$ kaare pikkus piirides $x = -3$ ja $x = 1$.
- 4) Leida kõverjoone $y = \ln \sin x$ kaare pikkus piirides $x = \frac{\pi}{3}$ ja $x = \frac{\pi}{2}$.
- 5) Leida kõverjoone $y^2 = 4x^3$ kaare pikkus piirides $x = -1$ ja $x = 4$.
- 6) Leida kõverjoone $y = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}$ kaare pikkus piirides $x = -2$ ja $x = 2$.
- 7) Leida kõverjoone $9y^2 = x(x-3)^2$ kinnise osa pikkus.

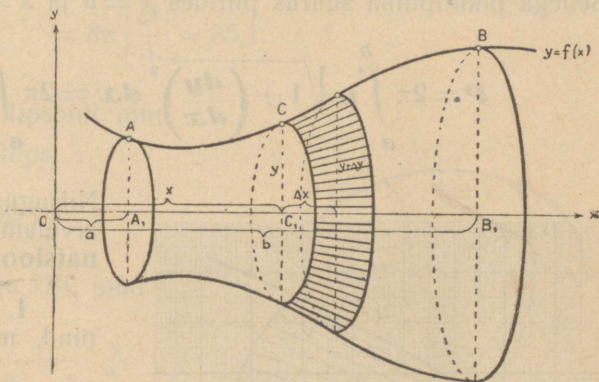
§ 31. Komplanatsioon.

Kui kõverjoon

$$y = f(x)$$

pöörleb ümber x või y -telje, siis moodustab ta pöörlemisel kumera või nõgusa pinna — pöördpinna.

Oletame, et kõverjoon $y = f(x)$ pöörleb ümber x -telje ja moodustab pöördpinna, millel esineb nii kumer kui ka nõgus osa (71. joon.). Võtame kõverjoone osa AB ja katsume leida temast moodustatud pöördpinna P suurust. Punktidest A ja B tõmmatud ordinaatidele AA_1 ja BB_1 vastaku abstsissid $x = a$ ja $x = b$. Kui loeme ringjoone, mille punkt A moodustab pöörlemisel ümber x -telje, konstantseks kindla $x = a$ juures ja mõne teise ringjoone, näit. selle, mis punkt C , koordinaatidega $(x|y)$, moodustab pöörlemisel ümber x -telje, muutuvaks, siis muutub ka pöördpinna suurus, kui kasvab või kahaneb argument x . Sellega pöördpind P on mingisugune x -i funktsioon.



71. joonis.

Meil tuleb leida antud funktsioonist $y = f(x)$ niisugune funktsioon, mis võimaldaks pöördpinna P suuruse määramist. Kui punkt C on kõverjoonel piirkonnas A -st kuni B -ni vabalt võetud, siis, lastes argumenti x kasvada Δx -i võrra, muutuvad ordinaat ja kaar vastavalt Δy -i ja Δs -i võrra, ja sellega muutub ühtlasi ka pöördpind väikese pöördpinna osa AP võrra, mida nimetatakse **pöördpinna-kasvuks** ehk **pöördpinna-elementideks**.

Pöördpinna-elementidele AP vastab tükikoonuse külgpind

$$\pi (y + y + \Delta y) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \pi (2y + \Delta y) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x.$$

Kui pöördpinna P jaotame elementideks siis

$$P = \sum_{x=a}^{x=b} \Delta P,$$

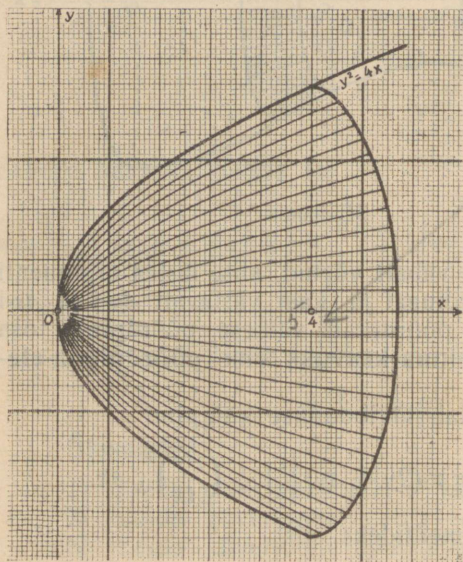
mis on pöördpinna elementidele vastavate tükikoonuste külgpindade summa piir, kui nende arv lõpmata kasvab. Sellega võime pöördpinna P suurust vaadelda, kui piirväärtust, millele läheneb tükikoonuste külgpindade summa, kui $\Delta x \rightarrow 0$

Tähendab

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{x=a}^{x=b} \Delta P = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} \pi (2y + \Delta y) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} \pi \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \cdot \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta y = \\
 &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx + \pi \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \cdot 0 = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.
 \end{aligned}$$

Sellega pöördpinna suurus piirides $x = a$ ja $x = b$ on

$$P = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + p^2} dx.$$



72. joonis.

Niisugust pöördpindade suuruse arutamist nimetatakse **komplantsiooniks**.

1. näide. Leida paraboloidi pind, mis saadakse parabooli

$$y^2 = 4x$$

pöörlemisel ümber x -telje piirides 0-ist kuni 4-ni (72. joon.).

Parabooli võrrandit

$$y = 2\sqrt{x}$$

diferentsides saame

$$p = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Kasutame pöördpinna valemist ja integreime selleks määratud funktsiooni piirides 0-ist kuni 4-ni, saame

$$P = 2\pi \int_0^4 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = 4\pi \int_0^4 \sqrt{1+x} dx.$$

Tähistame siin

$$1 + x = z^2, \text{ siis } dx = 2z dz;$$

piirid:

$$\text{kui } x = 0, \text{ siis } z = \sqrt{1+x} = 1,$$

$$\text{„ } x = 4, \text{ „ } z = \sqrt{1+x} = \sqrt{5}.$$

Asetades võime leida paraboloidi pinna

$$\begin{aligned} P &= 4\pi \int_0^4 \sqrt{1+x} dx = 4\pi \int_1^{\sqrt{5}} z \cdot 2z dz = 8\pi \int_1^{\sqrt{5}} z^2 dz = \\ &= 8\pi \left[\frac{z^3}{3} \right]_1^{\sqrt{5}} \approx 85,1. \end{aligned}$$

2. näide. Leida ellipsoidi pind.

Ellipsoidi saame ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pöörlemisel ümber x -telje (73. joon.).

Ellipsi võrrandit

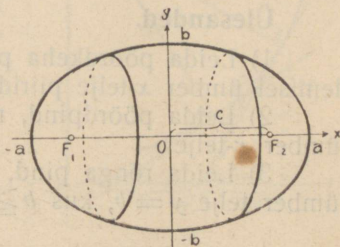
$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

differentsides saame

$$p = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Integrides antud funktsiooni piirides 0-ist kuni a -ni saame pool ellipsoidi pinda. Et saada tervet ellipsoidi pinda, korrutame integraali 2-ga, siis

$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot 2\pi \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} dx = \\ &= 4\pi \int_0^a \frac{b \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2}}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ &= \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} dx = \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - c^2 x^2} dx, \end{aligned}$$



73. joonis.

sest $a^2 - b^2 = c^2$, kus c on ellipsi lineaarne ekstsentriskus. Viimane integraal on ringi-integraal, kus r -i asemel esineb a^2 ja x -asemel cx . Tarvitades ringi-integraali väärtust võime kirjutada

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - c^2 x^2} dx = \frac{4\pi b}{a^2 c} \int_0^a \sqrt{a^4 - (cx)^2} d(cx) = \\
 &= \frac{4\pi b}{a^2 c} \left[\frac{a^4}{2} \arcsin\left(\frac{cx}{a}\right) + \frac{cx}{2} \sqrt{a^4 - c^2 x^2} \right]_0^a = \\
 &= \frac{4\pi b}{a^2 c} \left[\frac{a^4}{2} \arcsin\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{ca}{2} \sqrt{a^4 - c^2 a^2} \right] = \\
 &= \frac{4\pi b}{a^2 c} \left[\frac{a^4}{2} \arcsin\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{ca}{2} \cdot ab \right] = \\
 &= \frac{2\pi a^2 b}{c} \arcsin\left(\frac{c}{a}\right) + 2\pi b^2.
 \end{aligned}$$

Ülesanded.

- 1) Leida pöördkeha pind, mis saadakse kõverjoone $y = 2e^{\frac{x}{2}}$ pöörlemisel ümber x -telje piirides $x = -2$ ja $x = 2$.
- 2) Leida pöördpind, mille moodustab sinusoidi üks haru pöörelde ümber x -telje.
- 3) Leida rõnga pind, mis saadakse ringi $x^2 + y^2 = r^2$ pöörlemisel ümber telje $y = b$, kus $b \geq r$.

VI peatükk. Joonte kõverus.

§ 32. Joone kõverus ja kõveruseraadius.

Ringi kõveruseks nimetatakse suhet

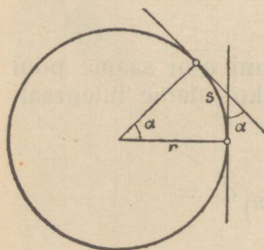
$$\frac{\alpha}{s},$$

kus α on kesknurk ja s on temale vastav kaar, mille väärtus radiaalmõõdus on

$$s = \alpha \cdot r.$$

Paigutades s väärtuse eelmisse avaldise saame ringi kõveruse kujus

$$\frac{\alpha}{\alpha \cdot r} = \frac{1}{r},$$



74. joonis.

kus r on ringi raadius (74. joon). Ringi kõverus on vastuvõrdeline ringi raadiusega. Mida väikesem ring, seda suurem ta kõverus, ja ümberpöördult: mida suurem ring, seda väikesem kõverus. Ringi raadius on konstantne suurus, sellega on ringi kõverus igas ta punktis muutumatu suurus.

Kui meil ei ole ring, vaid mõni muu kõverjoon, siis on sellel kõverjoonel igas punktis isesugune kõverus. Kui võtame kõverjoonel mingisuguse punkti, teame, et läbi selle punkti on võimalik kujutada määrata palju ringe, mis puutuvad kõverjoont selles punktis. Et mõõta kõverjoone kõverust selles punktis, selleks on tarvis võtta kõigist neist ringidest see ring, millel on kõverjoonega antud punktis kõige rohkem ühist, see tähendab: tuleb valida niisugune ring, mis läheb läbi antud punkti ja ühtlasi ka läbi kahe teise punkti, mis lõpmata lähenevad antud punktile. See on n. n. **kõverjoone kõverusering antud punktis**.

Olgu üldiselt funktsioon

$$y = f(x),$$

mis kujutab mingisugust kõverjoont (75. joon.). Võtame sellel kõverjoonel mõne punkti A , mille koordinaadid olgu $(x | y)$, ja punkti A ümbruses mõne teise punkti B , mille koordinaadid on siis $(x + \Delta x | y + \Delta y)$. Joonestame neis punktides puutujad T ja T_1 ning normaalid N ja N_1 , mis lõikuvad punktis K . Punkt K nimetatakse **kaare AB kõveruse keskpunktiks**. Nii puutujad, kui ka normaalid moodustavad enda vahel väikese nurga $\Delta\alpha$; see on n. n. **kooldumisnurk**. Märgime kaare AB pikkuse Δs -ga ja normaali AK pikkuse r_k -ga. Võime kirjutada

$$r_k = \frac{\Delta s}{\Delta\alpha} \text{ ja } \frac{1}{r_k} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s},$$

kus r_k nimetatakse kaare AB **keskmiseks kõveruseraadiuseks** ja $\frac{1}{r_k}$ kaare AB **keskmiseks kõveruseks**.

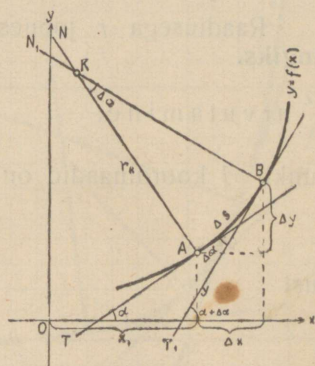
Punkti B lähenemisel punktile A läheneb $\frac{\Delta s}{\Delta\alpha}$ piirväärtusele; siis kõveruse keskpunkt K nihkub edasi ja kaare BA keskmine kõveruseraadius r_k omab lõplikku väärtust r .

Tähendab

$$r_k = \frac{\Delta s}{\Delta\alpha} = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}}$$

ja

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} r_k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta\alpha} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta x}} = \frac{ds}{dx} = r,$$



75. joonis.

kus

$$r = \frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{d\alpha}{dx}}$$

on kõverusraadius punktis A ja

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{ds}{dx}}$$

on kõverjoone kõverus punktis A .

Raadiusega r joonestatud ring nimetatakse punkti A kõveruse-ringiks.

$\frac{d\alpha}{dx}$ arvutamine:

punkti A koordinaadid on $(x|y)$; funktsiooni tuletis selles punktis on

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha,$$

kust

$$\alpha = \arctan \frac{dy}{dx};$$

viimast x -i suhtes diferentsides saame

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{1}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

$\frac{ds}{dx}$ arvutamine:

kui Δs on väga väike, siis maksab ligikaudu võrdus

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2};$$

piirile minnes, kui $\Delta x \rightarrow 0$, siis $\Delta y \rightarrow 0$ ja $\Delta s \rightarrow 0$ saame

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

$$r = \frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{du}{dx}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ja

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

ehk

$$r = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} \text{ ja}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{q}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

kus

$$p = \frac{dy}{dx} \text{ ja } q = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Kui $q=0$, siis $r \rightarrow \infty$ ja

$\frac{1}{r}=0$; sel juhul funk-

tsioon kujutab sirgjoont või kõverjoone punkt on käänupunkt.

1. näide. Leida kõverjoone

$$y = e^x$$

kõverus ja kõveruseraadius punktides

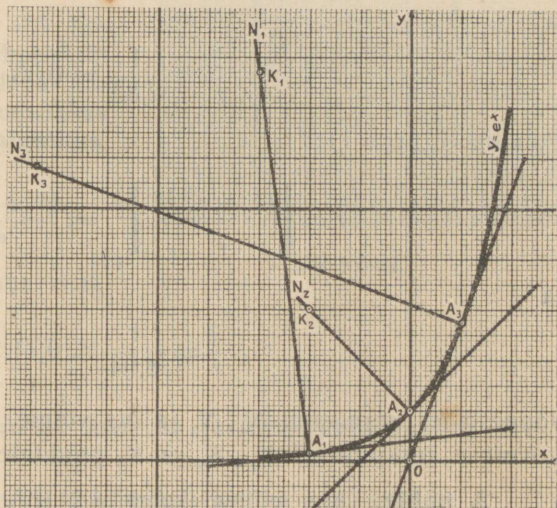
a) $x = -2$, b) $x = 0$ ja c) $x = 1$ (76. joon.).

Siin

$$p = e^x \text{ ja } q = e^x.$$

Punktis A_1 ($x = -2$):

$$\begin{aligned} r &= \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \left[\frac{(1 + e^{2x})^{\frac{3}{2}}}{e^x} \right]_{x=-2} = \frac{(1 + e^{-4})^{\frac{3}{2}}}{e^{-2}} = \frac{(1 + 0,0182)^{\frac{3}{2}}}{0,135} = \\ &= \frac{(1,0182)^{\frac{3}{2}}}{0,135} \approx 7,63 \end{aligned}$$



76. joonis.

ja

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{7,63} \approx 0,13.$$

Punktis $A_2 (x=0)$:

$$r = \left[\frac{(1 + e^{2x})^{\frac{3}{2}}}{e^x} \right]_{x=0} = \frac{(1+1)^{\frac{3}{2}}}{1} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$$

ja

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2,83} \approx 0,35.$$

Punktis $A_3 (x=1)$:

$$r = \left[\frac{(1 + e^{2x})^{\frac{3}{2}}}{e^x} \right]_{x=1} = \frac{(1 + e^2)^{\frac{3}{2}}}{e} \approx 8,94$$

ja

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{8,94} \approx 0,11.$$

Joonestades normaalid N_1, N_2 ja N_3 võime märkida kõverjoone $y = e^x$ kõveruse keskpunktid K_1, K_2 ja K_3 punktide A_1, A_2 ja A_3 suhtes.

2. näide. Kas ellipsi kaart AB (77. joon.) on võimalik sirkliga joonestada?

Et ellipsi kaart AB või mõnda ta osa võiks sirkliga joonestada, selleks peaks kaare AB mõnedes punktides olema ühesuurused kõverused ja järelikult ka võrdsed kõveruseraadiused.

Ellipsi võrrandit

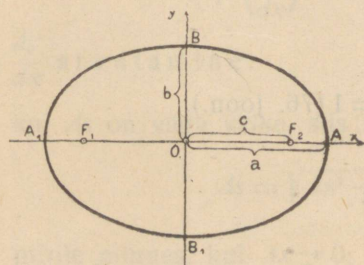
$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

differentseides saame

$$p = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad q = -\frac{ab}{(a - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}},$$

kus nüüd ellipsi kõveruseraadius

$$r = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \frac{(a^4 - c^2 x^2)\sqrt{a^4 - c^2 x^2}}{a^4 b},$$



77. joonis.

millest näeme, et kui x muutub vahemikus 0-st kuni a -ni, siis muutub ka ellipsi kõveruseraadius r pidevalt $\frac{a^2}{b}$ -st kuni $\frac{b^2}{a}$ -ni. Sellepärast on kaarel AB igas punktis isesugune kõveruseraadius ja järelikult ka ise-

sugune kõverus. Punktis A (niisama punktis A_1) on ellipsi kõverus kõige suurem, s. o. $\frac{a}{b^2}$, ja punktis B (samuti

punktis B_1) — kõige väikesem, s. o. $\frac{b}{a^2}$.

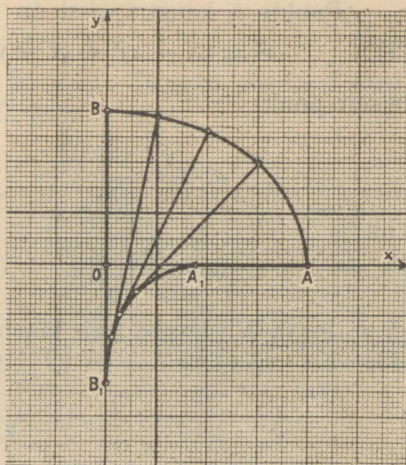
Tähendab, sirkliga joonestada kaart AB või mõnda ta osa ei ole võimalik.

Märkus. Ellipsi kaare AB kõveruseraadiuste keskpunktid asuvad sellega pideval kõverjoonel, mis nimetatakse ellipsi kaare AB **evoluudiks**.

Ellipsi

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

kaare AB evoloot on kõverjoon A_1B_1 (78. joon.).



78. joonis.

Ülesanded.

- 1) Leida kõverjoone $y = 2e^{\frac{x}{2}}$ kõverus ja kõveruseraadius punktides a) $x = 0$, b) $x = 1$.
- 2) Leida sinusoidi kõverus ja kõveruseraadius punktides a) $x = \frac{\pi}{2}$, b) $x = \pi$.
- 3) Leida parabooli $y^2 = 2px$ kõveruseraadius punktides a) $x = 0$, b) $x = p$.
- 4) Kui suured on kõverjoone $y = x^3 + x^2 - x - 1$ maksimum- ja miinimumpunkti kõveruseraadiused?
- 5) Missuguses punktis on kõverjoonel $y = x^2 - 6x + 10$ kõige suurem kõverus?
- 6) Missuguse x -i väärtuse juures on kõverjoone $y = x^3$ kõverus kõige suurem?

§ 33. Kõveruse keskpunkti koordinaadid.

Kõveruse keskpunkt antud punkti suhtes asub normaalil ja on ühtlasi selle punkti kõveruseringi keskpunkt, mis asub kõverjoone nõgususe poolel.

Võtame kõverjoonel $y = f(x)$ (79. joon.) mõne punkti A , mille koordinaadid on $(x | y)$, ja punktist A tõmmatud normaalil N kõveruse keskpunkti K , mille koordinaadid olgu $(X | Y)$.

Punkti K kaugus A -st on ühelt poolt

$$(1) \quad r^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2,$$

teiselt poolt

$$r = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

ehk

$$(2) \quad r^2 = \frac{(1+p^2)^3}{q^2}$$

ja normaali N võrrand [mis läheb läbi punktide $A \equiv (x | y)$ ja $K \equiv (X | Y)$] on

$$Y-y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X-x)$$

ehk

$$(3) \quad X-x = -\frac{dy}{dx}(Y-y) = -p(Y-y).$$

Paigutame (2) ja (3) väärtused (1)-sse, siis

$$[-p(Y-y)]^2 + (Y-y)^2 = \frac{(1+p^2)^3}{q^2}$$

ehk

$$(Y-y)^2(1+p^2) = \frac{(1+p^2)^3}{q^2}, \quad (Y-y)^2 = \frac{(1+p^2)^2}{q^2}, \quad Y-y = \frac{1+p^2}{q},$$

ja lõpuks

$$Y = y + \frac{1+p^2}{q}.$$

Kõrvaldades (3)-st Y saame

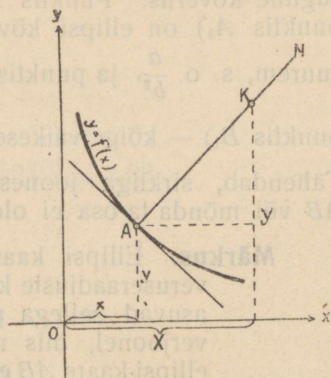
$$X-x = -p\left(y + \frac{1+p^2}{q} - y\right), \quad X = x - p\frac{1+p^2}{q}.$$

Nii saime kõveruse keskpunkti koordinaatide X ja Y jaoks järgmised valemid

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} - p\frac{1+p^2}{q}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{y} + \frac{1+p^2}{q},$$

kus

$$p = \frac{dy}{dx} \quad \text{ja} \quad q = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

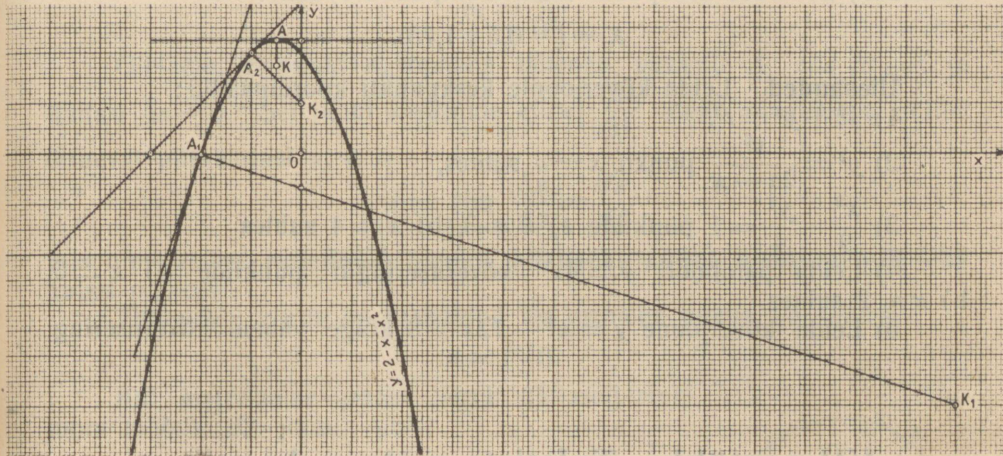


79. joonis.

Näide. Leida kõverjoone

$$y = 2 - x - x^2$$

kõveruse keskpunktid punktide a) $x = -2$ ja b) $x = -1$ ning c) maksimumpunkti suhtes (80. joonis.).



80. joonis.

Siin

$$p = -1 - 2x \text{ ja } q = -2.$$

Punkti A_1 suhtes (kui $x = -2$, siis $y = 0$)

$$X = x - p \frac{1 + p^2}{q} = -2 - (-1 + 4) \frac{1 + (-1 + 4)^2}{-2} = 13,$$

$$Y = y + \frac{1 + p^2}{q} = 0 + \frac{1 + (-1 + 4)^2}{-2} = -5,$$

s. o. kõveruse keskpunkt punkti A_1 suhtes on

$$K_1 \equiv (13 \mid -5).$$

Punkti A_2 suhtes (kui $x = -1$, siis $y = 2$)

$$X = -1 - \frac{1 + 1}{-2} = 0,$$

$$Y = 2 + \frac{1 + 1}{-2} = 1,$$

s. o. kõveruse keskpunkt punkti A_2 suhtes on

$$K_2 \equiv (0 \mid 1).$$

Maksimumpunkti A koordinaadid on $(-0,5 \mid 2,25)$,

siis

$$X = -0,5,$$

$$Y = 2,25 + \frac{1}{-2} = 1,75;$$

tähendab, kõveruse keskpunkt maksimumpunkti A suhtes on

$$K \equiv (-0,5 \mid 1,75).$$

Ülesanded. Leida kõverjoonte keskpunkti koordinaadid:

1) $x^2 + y^2 = r^2$,

2) $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ punkti $x = a$ suhtes,

3) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ punktide a) $x = 3$, b) $x = 4$ suhtes.

4) Leida parabooli $y = 4x^2$ kõveruseringid punktide a) $x = 0$,
b) $x = 2$ suhtes.

5) Leida kõverjoone $y = x^3 - 12x + 3$ kõige vähem kõverusering.

VII peatükk. Tuletiste mõte mehaanikas.

§ 34. Kiirus ja kiirendus.

a) Ühtlasel sirgjoonelisel liikumisel on ära käidud tee s , liikumise kiiruse c ja aja t suhtes järgmine funktsionaalne side

$$s = ct,$$

s. o. ära käidud tee pikkus s oleneb ajast t : ta on aja funktsioon

$$s = f(t).$$

Oletame, et materiaalne punkt liigub ühtlaselt sirgjoont mööda (81. joon). Jõudes t sek jooksul punkti A , siis

$$s = ct$$

ja t_1 sek jooksul punkti A_1 , siis

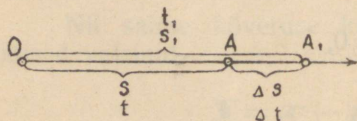
$$s_1 = ct_1.$$

Ajavahemikus $t_1 - t$ on ära käidud tee

$$s_1 - s = c(t_1 - t),$$

kus ühtlasel liikumisel kiirus

$$c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



81. joonis.

on konstantne suurus: ta ei olene $t_1 - t$ suurusest, sest aja kasvamisega kasvab otsevõrdeliselt ära käidav tee, s. o. nende suhe jääb muutumatuks.

Kui aga kiirus ei ole ühtlane, s. o. kui materiaalne punkt võrdsetes ajavahemikkudes ei sünnita võrdseid ärakäidud tee osasid, siis nimetatakse suhet $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ materiaalse punkti **keskmiseks kiiruseks** ajavahemikus Δt ja tähistatakse

$$v_k = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Oletame, et punkt A_1 lõpmata läheneb punktile A , siis $\Delta t \rightarrow 0$ ja ühtlasi $\Delta s \rightarrow 0$. Sel juhul keskmine kiirus $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ omab mingisugust nullist erinevat piirväärtust v , s. o.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

mis nimetatakse materiaalse punkti **kiiruseks antud ajamomendil** (ehk antud punktis).

Tähendab, kiirus on ärakäidud tee esimene tuletis aja suhtes

$$v = f'(t).$$

Kui materiaalne punkt liigub ühtlaselt ringjoont mööda (82. joon.), siis

$$a = ct,$$

kus a on pöördenurk ja c nurkkiirus. Siin nurk a oleneb ainult ajast t , sellega on ta aja funktsioon

$$a = \varphi(t).$$

Ajavahemikus $t_1 - t = \Delta t$ on pöördenurga suurus

$$a_1 - a = c(t_1 - t),$$

kus ühtlasel ringjoonelisel liikumisel

$$c = \frac{a_1 - a}{t_1 - t} = \frac{\Delta a}{\Delta t}.$$

Kui ringjooneline liikumine ei ole ühtlane, siis nimetatakse $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ **keskmiseks nurkkiiruseks** ajavahemikus Δt ja tähistatakse

$$\Theta_k = \frac{\Delta a}{\Delta t}.$$

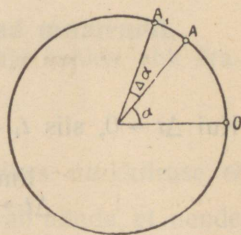
Kui $\Delta t \rightarrow 0$, siis keskmine nurkkiirus läheneb piirväärtusele Θ , s. o.

$$\Theta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{da}{dt},$$

mis nimetatakse **nurkkiiruseks antud ajamomendil**.

Tähendab, nurkkiirus on nurga a esimene tuletis aja suhtes

$$\Theta = \varphi'(t).$$



82. joonis.

b) Vabal langemisel äraäidud tee

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

kus maakera gravitatiivne kiirendus $g = 9,8 \text{ m/sek.}$

Kui vabal langemisel materiaalne keha jõuab punkti A (83. joon.), siis

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

ja jõudes punkti A_1 , siis

$$s_1 = \frac{1}{2}gt_1^2,$$

kust saame keskmise kiiruse ajavahemikus Δt

$$s_1 = \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$-s = \frac{1}{2}gt^2$$

$$s_1 - s = \frac{1}{2}g(t_1^2 - t^2) = \frac{1}{2}g(t_1 + t)(t_1 - t),$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{1}{2}g(t_1 + t).$$

Kui $\Delta t \rightarrow 0$, siis $t_1 \rightarrow t$ ja sellega

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{1}{2}g(t_1 + t) = \frac{1}{2}g \cdot 2t = gt$$

ehk

$$v = \frac{ds}{dt} = gt,$$

mis on kiirus antud momendil t , mida saaksime sarnaselt differentsides avaldist $s = \frac{1}{2}gt^2$ aja t suhtes

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}gt^2\right)}{dt} = gt.$$

Antud ajamomendil t kiirus

$$v = gt$$

ja mõnel teisel ajamomendil t_1 kiirus

$$v_1 = gt_1,$$

siis ajavahemikus $t_1 - t$ on kiirus

$$v_1 - v = g(t_1 - t),$$



83. joonis.

kust gravitatiivne kiirendus

$$g = \frac{v_1 - v}{t_1 - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

See on ühtlane kiirendus, kus aja t kasvamisel kasvab kiirus v nõnda, et nende suhe jääb muutumatuks, s. o. kiirus omab igas sekundis konstantset kasvu.

Kui kiirendus ei ole ühtlane, s. o. kui materiaalse keha kiirus võrdsetes ajavahemikkudes ei oma võrdset kasvu, siis nimetatakse suhet $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ materiaalse keha **keskmiseks kiirenduseks** ajavahemikus Δt ja tähistatakse

$$w_k = \frac{v_1 - v}{t_1 - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Kui $\Delta t \rightarrow 0$, siis $\Delta v \rightarrow 0$ ja me saame keskmise kiirenduse piirväärtuse w , s. o.

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

mida nimetatakse materiaalse keha **kiirenduseks antud momendil**.

Tähendab, kiirendus on kiiruse esimene tuletis aja suhtes ehk ära-
käidud tee teine tuletis aja suhtes

$$w = f''(t).$$

Ühtlaseks nurkkiirenduseks nimetatakse mehaanikas nurkkiiruse Θ ja aja t suhet $\frac{\Theta}{t}$, kus aja t kasvamisel nurkkiirus kasvab nõnda, et nende suhe jääb muutumatuks, s. o. nurkkiirus omab igas sekundis konstantset kasvu, sellega $\frac{\Delta \Theta}{\Delta t}$ väärtus ei muutu.

Kui nurkkiirus võrdsetes ajavahemikkudes ei oma võrdset kasvu, siis nurkkiirendus ei ole ühtlane; see on **keskmine nurkkiirendus** ajavahemikus Δt ja tähistatakse

$$w_k = \frac{\Delta \Theta}{\Delta t}.$$

Kui $\Delta t \rightarrow 0$, siis

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Theta}{\Delta t} = \frac{d\Theta}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

nimetatakse **nurkkiirenduseks antud momendil**.

Tähendab, nurkkiirendus on nurkkiiruse esimene tuletis aja suhtes ehk nurga α teine tuletis aja suhtes

$$w = \varphi''(t).$$

§ 35. Kiiruse ja kiirenduse komponendid.

a) Olgu kiiruse v komponent x -telge mööda v_x ja y -telge mööda v_y (84. joon.) ja nurgad

$$(v, x) = \alpha, (v, y) = \beta,$$

siis

$$v_x = v \cdot \cos \alpha, v_y = v \cdot \cos \beta,$$

kus

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Punktis A

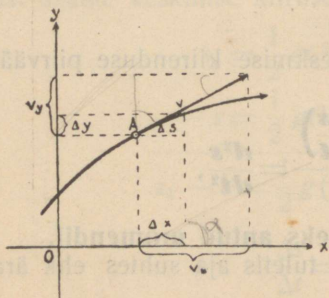
$$\cos \alpha = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{dx}{ds},$$

$$\cos \beta = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{dy}{ds}.$$

Asetades võime kirjutada

$$v_x = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt},$$

$$v_y = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt},$$



84. joonis.

ja kiirus

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

b) Olgu kiirenduse w komponent x -telge mööda w_x ja y -telge mööda w_y , võime kirjutada (arvestades eelmist §-i)

$$w_x = \frac{dv_x}{dx} = \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$w_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

ja kiirendus

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}.$$

Näide. Leida kuuli lennukiirus ja lennuaeg.

Olgu laskenurk α , algkiirus v_0 ja aeg t . Kui ei oleks maakera gravitatiivset kiirendust g ja õhutakistust, siis lendaks kuul sirgjoont OA mööda ühtlase algkiirusega v_0 (85. joon.); t sekundi järel oleks ta punktis A ja

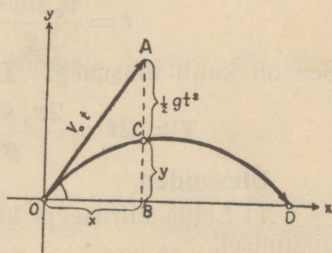
$$OA = v_0 t.$$

Sel juhul on kuuli lennu tee sirgjoon ja punkti A koordinaadid oleksid

$$OB = OA \cos \alpha = v_0 t \cos \alpha,$$

$$AB = OA \sin \alpha = v_0 t \sin \alpha.$$

Maakera külgetõmbe mõjul on aga kuul t sek. järel punktis C , mille koordinaadid olgu x ja y , siis saame



85. joonis.

$$OB = x = v_0 t \cos \alpha,$$

$$CB = y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

kus x ja y , nagu näeme on aja t funktsioonid.

Differentsime mõlemaid aja t suhtes, saame kiiruse komponendid x ja y telge mööda

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha,$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Neid väärtusi kiiruse valemisse paigutades leiame

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} = \\ &= \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha - 2v_0 gt \sin \alpha + g^2 t^2} = \\ &= \sqrt{v_0^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2g(v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2)} = \\ &= \sqrt{v_0^2 - 2gy}. \end{aligned}$$

Tähendab, kuuli lennukiirus

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy},$$

mis oleneb algkiirusest ja lennukõrgusest.

Kui $y = 0$, siis $v = v_0$, s. o. alguspunktis O ja lõpp-punktis D on kuuli lennukiirused võrdsed.

Maksimumpunktis A (86. joon.) on kiiruse vektor perpendikulaarne y -teljega, sellepärast on kiiruse komponent y -telge mööda 0, s. o.

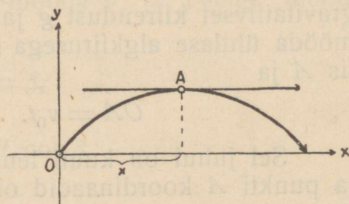
$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt = 0,$$

kust

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

See on kuuli tõusuaeg. Täis lennuaeg on

$$T = 2t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$



86. joonis.

Ülesanded.

1) Leida kiiruse ja kiirenduse komponendid ühtlasel ringjoonelisel liikumisel.

2) Keha liikumine tasapinnal sünnib valemite $x = a \cos^2 t$ ja $y = a \sin^2 t$ järele. Leida liikumise kiirus ja kiirendus.

3) Välja arvata lendjoone kõige kõrgema punkti kõveruseraadius, kui kuul lastakse 30° nurga all algiirusega 500 m/sek .

4) Punkt A liigub sirgjoont mööda, kusjuures ta kaugus s mõnest teisest kindlast punktist B väljendatakse valemiga $s = at^3 + bt + c$. Punkt A hakkab liikuma punktist C , mille kaugus punktist B on 1 m , ühe sekundi liikumise järel on punkti A liikumise kiirus $0,14 \text{ m/sek}$ ja kiirendus kolmanda sekundi algul $0,48 \text{ m/sek}^2$. Leida liikumise seadus ja ta graafik.

5) Harmooniline võnkumine sünnib valemi $s = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$ järele, kus s on võnkumise tee, a amplituud, t aeg, millest oleneb võnkumine, ning T terve võnkumise aeg. Missugustel aja momentidel omab kiirus ja kiirendus maksimaalset või minimaalset väärtust?

VIII peatükk. Read ja nende rakendused.

§ 36. Ridade koonduvus ja hajuvus.

Olgu meil muutuv suurus x , mis omab väärtusi

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

Moodustame neist uue muutuva suuruse neid järk-järgult liites

$$s_1 = x_1$$

$$s_2 = x_1 + x_2$$

$$s_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$s_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$\dots$$

$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n$$

$$\dots$$

Nii saame me muutuva suuruse s , mis omab väärtusi

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$$

Kui n on lõplik arv, on ka rea summa

$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$$

lõplik arv. See on **lõplik rida**.

Kui $n \rightarrow \infty$, s. o. kui rea liikmete arv lõpmata kasvab, siis nimetatakse rida **lõpmatuks reaks** ja kirjutatakse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots$$

Lõpmatu rea liikmed võivad kasvada või kahaneda. Esimesel juhul nimetatakse teda **lõpmata kasvavaks** ja teisel juhul — **lõpmata kahanevaks reaks**. Lõpmata kasvava rea summa on ikka lõpmata kasvav suurus. Kuid lõpmata kahaneva rea suhtes võib esineda kaks juhtu:

a) rea summal on lõplik väärtus, tal on kindel piirväärtus s , millest ta suuremaks ei või saada, s. o.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s;$$

b) rea summa on lõpmata kasvav suurus, tal ei ole lõplikku piirväärtust, ta võib suuremaks saada igast kui tahes suurest etteantud arvust, s. o.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty.$$

Esimesel juhul, kui rea summal on lõplik piirväärtus, nimetatakse rida **koonduvaks reaks**, s. o. rida koondub. Teisel juhul, kui rea summa läheneb ∞ -le, nimetatakse rida **hajuvaks reaks**, s. o. rida hajub.

Kui koonduva rea liikmete summa piirväärtus on s , s. o.

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) = \\ &= x_1 + x_2 + x_3 + \dots = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} x_n, \end{aligned}$$

siis nimetatakse arvu s rea summaks ja

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} x_n$$

reaks.

Võtame eksponentrea

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

ja uurime, missuguse x -i väärtuse juures ta koonduks või hajuks.

See on geomeetriline rida; ta summa

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

a) Kui $|x| < 1$, siis $x^{n+1} \rightarrow 0$ ja

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1}$$

on lõplik suurus. Sel juhul rida koondub.

b) Kui $x > 1$, siis $x^{n+1} \rightarrow \infty$ ja

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \infty,$$

s. o. rida hajub.

c) Kui $x = 1$, siis avaldisel

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

selles kujus pole mõtet ja tuleb arvutada teisiti; nimelt

$$\begin{aligned} s = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n) &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

s. o. rida hajub, kui $x = 1$.

Tähendab, lõpmatu geomeetriline rida

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

koondub, kui rea teguri q väärtus peitub vahemikus $0 < q < 1$, ja hajub, kui rea tegur $q \geq 1$.

1. näide. Kas rida

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

koondub või hajub?

See on n. n. **harmooniline rida**. Teda võime järgmiselt arvutada:

$$\begin{aligned} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9}) + (\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{99}) + (\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{999}) + \dots > \\ > \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n}{10} = \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 1 > \frac{1}{10} & \frac{1}{10} > \frac{1}{100} \\
 \frac{1}{2} > \frac{1}{10} & \frac{1}{11} > \frac{1}{100} \\
 \dots & \dots \\
 \dots & \dots \\
 \frac{1}{9} > \frac{1}{10} & \frac{1}{99} > \frac{1}{100} \\
 \hline
 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{9} > \frac{9}{10}; & \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{99} > \frac{90}{100} = \frac{9}{10};
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \frac{1}{100} > \frac{1}{1000} \\
 \frac{1}{101} > \frac{1}{1000} \\
 \dots \\
 \dots \\
 \frac{1}{999} > \frac{1}{1000} \\
 \hline
 \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{999} > \frac{900}{1000} = \frac{9}{10}; \text{ j. n. e.}
 \end{array}$$

Tähendab, kui vähema rea summa $\rightarrow \infty$, siis läheneb seda rutem harmoonilise rea summa ∞ -le, s. o. harmooniline rida hajub.

2. näide. Kas rida

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots$$

koondub või hajub?

Kui selles reas võtta $k = 1$, siis saame harmoonilise rea, see on eelmine näide.

Vaatleme juhtusid, kui $k \geq 1$. Arvutame analoogiliselt eelmise näitega:

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{9^k}\right) + \left(\frac{1}{10^k} + \dots + \frac{1}{99^k}\right) + \left(\frac{1}{100^k} + \dots + \frac{1}{999^k}\right) + \dots < \\
 & < 9 + \frac{9}{10^{k-1}} + \frac{9}{10^{2(k-1)}} + \frac{9}{10^{3(k-1)}} + \dots,
 \end{aligned}$$

$1 = 1$	$\frac{1}{10^k} = \frac{1}{10^k}$
$\frac{1}{2^k} < 1$	$\frac{1}{11^k} < \frac{1}{10^k}$
$\frac{1}{3^k} < 1$	$\frac{1}{12^k} < \frac{1}{10^k}$
.....
.....
$\frac{1}{9^k} < 1$	$\frac{1}{99^k} < \frac{1}{10^k}$
$1 + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{9^k} < 9;$	$\frac{1}{10^k} + \frac{1}{11^k} + \dots + \frac{1}{99^k} < \frac{90}{10^k} = \frac{9}{10^{k-1}};$

$\frac{1}{100^k} = \frac{1}{100^k}$
$\frac{1}{101^k} < \frac{1}{100^k}$
$\frac{1}{102^k} < \frac{1}{100^k}$
.....
.....
$\frac{1}{999^k} < \frac{1}{100^k}$
$\frac{1}{100^k} + \frac{1}{101^k} + \dots + \frac{1}{999^k} < \frac{900}{100^k} = \frac{9}{10^{2(k-1)}}$

See on lõpmata kahanev geomeetriline rida teguriga $\frac{1}{10^{k-1}}$, mille summa

$$s = \frac{9}{1 - \frac{1}{10^{k-1}}}$$

a) Kui $k > 1$, siis $\frac{9}{1 - \frac{1}{10^{k-1}}}$ on lõplik suurus, mis peitub vahemikus

$$9 < s < 10;$$

k kasvamisel s läheneb 9-le. Sel juhul rida koondub.

b) Kui $k < 1$, s. o. $1 > k > -\infty$, siis $\frac{9}{1 - \frac{1}{10^{k-1}}}$ on lõplik suurus,

mis peitub vahemikus

$$-9 < s < 0;$$

sel juhul samuti rida koondub.

§ 37. Taylor'i ja Mac-Laurin'i read.

Olgu meil ratsionaalne täisfunktsioon

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n,$$

mis kujutab lõplikku rida.

Kui anname x -le kasvu Δx , siis

$$f(x + \Delta x) = a_0 + a_1(x + \Delta x) + a_2(x + \Delta x)^2 + \dots + a_n(x + \Delta x)^n,$$

avades sulud ja korraldades liikmed Δx -i astmete järjekorras võime kirjutada

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) = & [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n]_0 + \\ & + [a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots + na_n x^{n-1}]_1 \cdot \Delta x + \\ & + [a_2 + 3a_3 x + 6a_4 x^2 + 10a_5 x^3 + \dots + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_n x^{n-2}]_2 \cdot \Delta x^2 + \\ & + [a_3 + 4a_4 x + 10a_5 x^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_n x^{n-3}]_3 \cdot \Delta x^3 + \\ & + \dots + [a_{n-1} + na_n x]_{n-1} \cdot \Delta x^{n-1} + \\ & + [a_n]_n \cdot \Delta x^n. \end{aligned}$$

Sama resultaadi saame, kui diferentsime funktsiooni $f(x)$, s. o.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots + na_n x^{n-1},$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + \dots + (n-1)na_n x^{n-2},$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 x + 3 \cdot 4 \cdot 5a_5 x^2 + \dots + (n-2)(n-1)na_n x^{n-3},$$

$$f^{(n-1)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) a_{n-1} + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) na_n x,$$

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) na_n,$$

$$[]_0 = f(x),$$

$$[]_1 = f'(x),$$

$$[]_2 = \frac{f''(x)}{1 \cdot 2},$$

$$[]_3 = \frac{f'''(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

.....

$$[]_n = \frac{f^{(n)}(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

Paigutades need väärtused eelmiste asemele saame

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\Delta x^n.$$

Kui meil on lõpmatu rida

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots,$$

mis koondub, siis

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots$$

nimetatakse **Taylor'i reaks**.

Kui Taylor'i reas märgime $x=0$ ja $\Delta x=x$, siis võime kirjutada selle rea kujus

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

mida nimetatakse **Mac-Laurin'i reaks**. Mac-Laurin'i rida võime tarvitada funktsioonide ridadeks arendamisel.

1. näide. Arendada reaks $f(x) = e^x$.

Selle funktsiooni tuletised on

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = \dots = e^x,$$

millest, pannes x -i asemele 0, saame

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = e^0 = 1.$$

Paigutades need väärtused Mac-Laurin'i ritta

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

saame

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Olgu selle arendusrea üksikud funktsioonid

$$f_1(x) = 1 + x,$$

$$f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

$$f_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24},$$

.....

ja nende väärtuste tabel

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_1(x)$	-4								4
$f_2(x)$	8,5	5	2,5	1	0,5	1	2,5	5	8,5
$f_3(x)$	-12,33	-5,67	-2	-0,33	0,33	1	2,67	6,33	13
$f_4(x)$	14,67	5	1,38	0,33	0,38	1	2,71	7	16,38

mille järele on 87. joonisel graafiliselt kujutatud nimetatud arendusrea üksikud kõverjooned, mis järk-järgult lähenevad kõverjoonele $y = e^x$, kui rea liikmete arv kasvab.

Kui

$$f_1(x) = 1 + x,$$

saame sirgjoone, mis puutub kõverjoont $y = e^x$ punktis $A \equiv (0 | 1)$.

Kui

$$f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

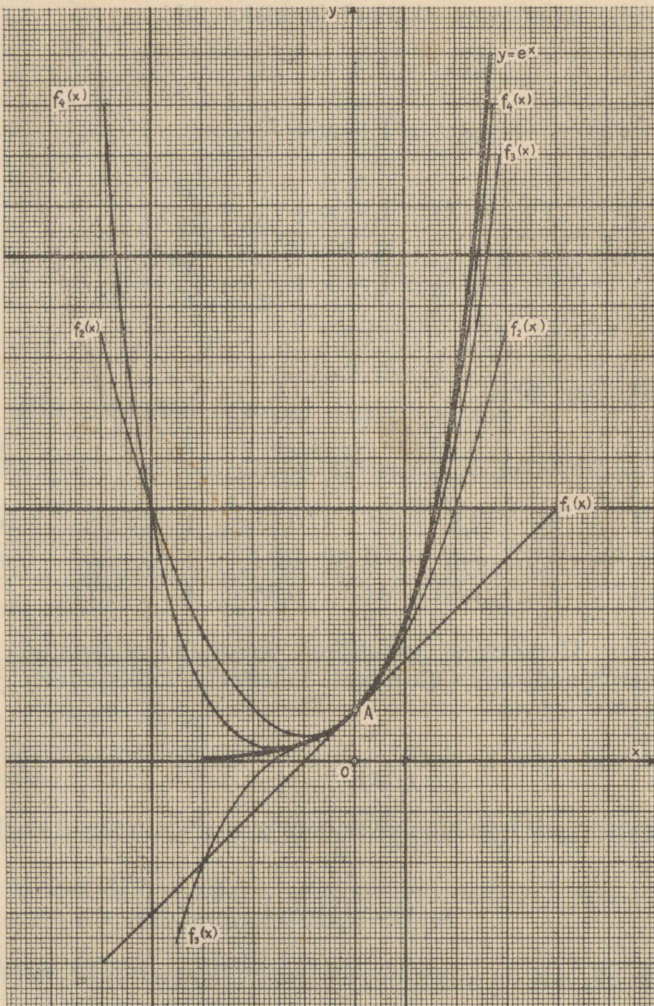
saame parabooli, mis on kõverjoonele $y = e^x$ ligemal kui eelmine sirgjoon.

Kui

$$f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

saame kolmanda järgu kõverjoone, mis on kõverjoonele $y = e^x$ veel ligemal kui eelmine parabool, j. n. e.

Mida rohkem võtame liikmeid reas, seda ligemale saame õigele kõverjoonele. On liikmete arv määramata suur, võime saada õigele kõverjoonele nii ligedale kui iganes soovime. On aga liikmete arv piiratud, siis näeme, et mida vähem on argumendi väärtus, seda õigem on vastav funtsiooni väärtus. Kui liikmete arv reas on lõpmata kasvav suurus, siis peame iga argumendi väärtuse juures saama õige funktsiooni väärtuse.



87. joonis.

2. näide. Arendada reaks $f(x) = \sin x$.

kui $f(x) = \sin x$,	siis $f(0) = 0$,
„ $f'(x) = \cos x$,	„ $f'(0) = 1$,
„ $f''(x) = -\sin x$,	„ $f''(0) = 0$,
„ $f'''(x) = -\cos x$,	„ $f'''(0) = -1$,
„ $f^{(4)}(x) = \sin x$,	„ $f^{(4)}(0) = 0$,
.....

Paigutades need väärtused Mac-Laurin'i ritta, saame

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

3. näide. Leida viimase rea abil $\sin 14^\circ 40'$ loomulik väärtus. x -i väärtus radiaalmõõdus on

$$x = \frac{14^\circ 40' \cdot \pi}{180^\circ} = 0,255982,$$

siis

$$\frac{x^3}{3!} = 0,002795, \quad \frac{x^5}{5!} = 0,000009.$$

Järgnevad liikmed ei muuda enam $\sin 14^\circ 40'$ loomuliku väärtuse viiendat kümnendkohta; sellepärast arvestades ainult neid võime kirjutada

$$\sin 14^\circ 40' = 0,255982 - 0,002795 + 0,000009 - \dots = 0,25319$$

ehk

$$\sin 14^\circ 40' \approx 0,2532.$$

4. näide. Arendada reaks logaritmfunksioon.

Kui võtame logaritmfunksiooni kujus

$$f(x) = \ln x,$$

siis ei saa tema suhtes tarvitada Mac-Laurin'i rida, sest et $f(x)$ ja selle tuletiste väärtused saavad määramata suureks, kui $x = 0$. Sellepärast võtame logaritmfunksiooni kujus

$$f(x) = \ln(1 + x).$$

$$\text{Kui } f(x) = \ln(1 + x), \quad \text{siis } f(0) = 0,$$

$$, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad , \quad f'(0) = 1,$$

$$, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad , \quad f''(0) = -1,$$

$$, \quad f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}, \quad , \quad f'''(0) = 1 \cdot 2,$$

$$, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad , \quad f^{(4)}(0) = -1 \cdot 2 \cdot 3,$$

.....

Tarvitades Mac-Laurin'i rida võime kirjutada

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Selle rea abil võime leida arvude loomulikke logaritme, kui x on väike arv, piirides $-1 < x \leq 1$.

Kui võtta $x > 1$, siis tuleks võtta väga palju reaaliikmeid, et saada logaritmi loomuliku väärtuse jaoks vähemalt esimene õige kümnendkoht.

Kui $x = 1$, siis

$$\ln(1+x) = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

isegi siin reas, kui $x = 1$, et saada õiget esimest kümnendkohta, tuleb võtta vähemalt 70 reaaliiget. Et saada kolm õiget kümnendkohta, tuleb arvestada vähemalt tuhandet reaaliiget.

Et jõuda rutem eesmärgile, selleks muudame rida järgmiselt:
kui

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

siis, pannes x -i asemele $-x$, saame

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots;$$

neid lahutades võime kirjutada:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right).$$

Tähistame

$$x = \frac{1}{2z+1},$$

siis

$$1+x = \frac{2z+2}{2z+1} \text{ ja } 1-x = \frac{2z}{2z+1};$$

asetades näeme, et

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \frac{z+1}{z} = \ln(z+1) - \ln z$$

ja logaritmfunksiooni arendusrea teisendus on siis

$$\ln(z+1) - \ln z = 2 \left[\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3(2z+1)^3} + \frac{1}{5(2z+1)^5} + \dots \right]$$

ehk

$$\ln(z+1) = \ln z + 2 \left[\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3(2z+1)^3} + \frac{1}{5(2z+1)^5} + \dots \right].$$

Kui nüüd $z = 1$, siis

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \ln 1 + 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots \right) = \\ &= \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} + \frac{1}{7 \cdot 3^6} + \dots \right). \end{aligned}$$

Et saada selle rea abil õiget esimest kümnendkohta, selleks on küllalt ühest ainsast reaaliikmest, ja kolme õige kümnendkoha saamiseks on küllalt kolmest esimesest reaaliikmest, s. o.

$$\ln 2 = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} \right) \approx 0,693.$$

On $\ln 2$ teada, võime leida $\ln 3$, s. o.

$$\begin{aligned} \ln 3 &= \ln 2 + 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right) = \\ &= 0,693 + 2(0,2 + 0,0026 + 0,000064 + \dots) = 1,098. \end{aligned}$$

Kolme õige kümnendkoha leidmiseks on küllalt kahest reaaliikmest. Sellega

$$\ln 3 \approx 1,098.$$

Liitavvu logaritmi leiame ta algtegurite logaritmide kaudu, kui need teada on, näiteks:

$$\ln 6 = \ln 2 + \ln 3 \approx 1,791.$$

Murru logaritmi suhtes võime toimetada sarnaselt, näiteks:

$$\ln \frac{16}{9} = 4 \ln 2 - 2 \ln 3 \approx 0,595.$$

Ülesanded. Arendada ridadeks:

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $y = e^{-x}$ | <input checked="" type="checkbox"/> 7) $y = \frac{1}{1+x}$ | <input checked="" type="checkbox"/> 10) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ |
| 2) $y = e^{2x}$ | <input checked="" type="checkbox"/> 8) $y = \frac{1}{(1-x)^2}$ | <input checked="" type="checkbox"/> 11) $y = e^{\sin x}$ |
| 3) $y = a^x$ | | <input checked="" type="checkbox"/> 12) $y = e^{\cos x}$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 4) $y = \cos x$ | <input checked="" type="checkbox"/> 9) $y = \sqrt{1+x}$ | <input checked="" type="checkbox"/> 13) $y = e^{\tan x}$ |
| 5) $y = \arcsin x$ | | |
| 6) $y = \arctan x$ | | |

14) Leida π väärtus kuue kümnendkohaga.

Leida trigonomeetriliste funktsioonide loomulikud väärtused:

- | | | |
|---|---|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> 15) $\sin 42^\circ 6'$ | <input checked="" type="checkbox"/> 17) $\cos 23^\circ 14'$ | <input checked="" type="checkbox"/> 19) $\tan 20^\circ 10'$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 16) $\sin 18^\circ 18'$ | <input checked="" type="checkbox"/> 18) $\cos 6^\circ 52'$ | <input checked="" type="checkbox"/> 20) $\cot 56^\circ 36'$ |

Leida logaritmide väärtused:

- | | | | |
|--|---|--|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> 21) $\ln 8$ | 23) $\ln \frac{1}{8}$ | <input checked="" type="checkbox"/> 25) $\log 8$ | 27) $\log 0,25$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> 22) $\ln 12$ | <input checked="" type="checkbox"/> 24) $\ln \frac{16}{25}$ | <input checked="" type="checkbox"/> 26) $\log 9$ | <input checked="" type="checkbox"/> 28) $\log 1\frac{1}{4}$ |

§ 38. Newton'i lähenemismeetod.

Võrrandi

$$f(x) = 0$$

realjuuri on ikka võimalik leida graafilisel teel. Kuid graafilisel teel võime leida ainult ligikaudsed juurte väärtused. Neid juurte väärtusi on võimalik parandada n. n. **Newton'i lähenemismeetodi** abil, mis põhineb Taylor'i real.

Olgu võrrandi $f(x) = 0$ üks juur graafiliselt leitud ja ta ligikaudne väärtus a .

Viga, mille võrra leitud juur õigest juurest x lahku läheb, olgu Δa , siis õige juur

$$x = a + \Delta a.$$

Tarvitades Taylor'i valemit võime kirjutada

$$f(x) = f(a + \Delta a) = f(a) + f'(a) \Delta a + \frac{f''(a)}{2!} \Delta a^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \Delta a^3 + \dots = 0.$$

Viga Δa on muidugi väga väike arv, sellepärast jätame Taylor'i reas need liikmed välja, milles esinevad Δa^2 , Δa^3 , Δa^4 , jne. ja võtame ainult

$$f(a) + f'(a) \Delta a = 0,$$

millest

$$\Delta a = -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

kus Δa ei ole enam õige viga.

Sellega võrrandi $f(x) = 0$ õigem juur, kui a , on

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

a_1 on õigele juurele lähemal kui a . Et saada õigele juurele veel lähemale, selleks märgime

$$x = a_1 + \Delta a_1,$$

kus Δa_1 on nüüd õige viga, siis Taylor'i rea järele

$$f(x) = f(a_1 + \Delta a_1) = f(a_1) + f'(a_1) \Delta a_1 + \frac{f''(a_1)}{2!} \Delta a_1^2 + \frac{f'''(a_1)}{3!} \Delta a_1^3 + \dots = 0.$$

Et Δa_1 on veel vähem kui Δa , siis jätame ära Taylor'i reas jälle need liikmed, milles esinevad Δa_1^2 , Δa_1^3 , Δa_1^4 , jne. ja võtame ainult

$$f(a_1) + f'(a_1) \Delta a_1 = 0,$$

millest

$$\Delta a_1 = -\frac{f(a_1)}{f'(a_1)},$$

kus Δa_1 jälle ei ole enam õige viga. Sellega võrrandi $f(x) = 0$ veel õigem juur, kui a_1 , on

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}.$$

Selkombel edasi arvutades võime võrrandi $f(x) = 0$ õigele juurele nii ligidale saada, kui iganes soovime.

1. näide. Leida graafilisel teel võrrandi

$$x^4 - 3x^3 + x + 2 = 0$$

reaaljuured ja parandada neid Newton'i lähenemismeetodi abil.

Siin

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 2,$$

mille graafiline kuju on 88. joon. ja ta tuletis

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 1.$$

Jooniselt näeme, et võrrandil on kaks reaalkjuurt, mille ligikaudsed väärtused on

$$a = 1,2 \text{ ja } b = 2,8.$$

Võtame esimese ligikaudse juure $a = 1,2$, milles peitugu viga Δa , mis võrdub

$$\begin{aligned} \Delta a &= -\frac{f(1,2)}{f'(1,2)} = -\frac{(1,2)^4 - 3 \cdot (1,2)^3 + 1,2 + 2}{4 \cdot (1,2)^3 - 9 \cdot (1,2)^2 + 1} = \\ &= -\frac{0,0896}{-5,048} = 0,0177. \end{aligned}$$

Sellega õigem juur, kui $a = 1,2$, on

$$a_1 = 1,2 + 0,0177 = 1,2177.$$

Juure $b = 2,8$ suhtes olgu viga Δb , siis

$$\Delta b = -\frac{f(2,8)}{f'(2,8)} = -\frac{(2,8)^4 - 3 \cdot (2,8)^3 + 2,8 + 2}{4 \cdot (2,8)^3 - 9 \cdot (2,8)^2 + 1} = -\frac{0,4096}{8,248} = -0,0497.$$

Sellega õigem juur, kui $b = 2,8$, on

$$b_1 = 2,8 - 0,0497 = 2,7503.$$

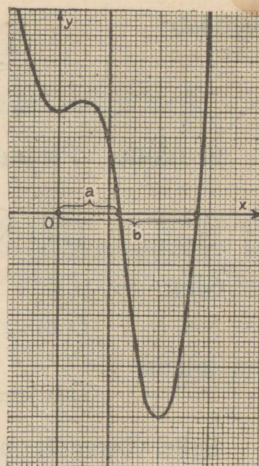
Teeme veel teisekordse paranduse, kus nüüd juurte a_1 ja b_1 vead olgu Δa_1 ja Δb_1 , siis õigemad juured, kui a_1 ja b_1 , on

$$a_2 = a_1 + \Delta a_1 \text{ ja } b_2 = b_1 + \Delta b_1.$$

Leiame Δa_1 ja Δb_1 :

$$\Delta a_1 = -\frac{f(1,2177)}{f'(1,2177)} = -\frac{(1,2177)^4 - 3 \cdot (1,2177)^3 + 1,2177 + 2}{4 \cdot (1,2177)^3 - 9 \cdot (1,2177)^2 + 1} = 0,0031;$$

$$\Delta b_1 = -\frac{f(2,7503)}{f'(2,7503)} = -\frac{(2,7503)^4 - 3 \cdot (2,7503)^3 + 2,7503 + 2}{4 \cdot (2,7503)^3 - 9 \cdot (2,7503)^2 + 1} = 0,0275.$$



88. joonis.

Tähendab:

$$a_2 = 1,2177 + 0,0031 = 1,2208;$$

$$b_2 = 2,7503 + 0,0275 = 2,7778.$$

2. näide. Parandada võrrandi

$$3^x - 3x - 3 = 0$$

juuri Newton'i lähenemismeetodi abil.

Siin

$$f(x) = 3^x - 3x - 3$$

ja ta tuletis

$$f'(x) = 3^x \ln 3 - 3.$$

Sellel võrrandil on kaks reaalselt juurt (89. joon.), mille ligikaudsed väärtused on

$$a = 2 \text{ ja } b = -0,8.$$

Juure $a = 2$ viga

$$\Delta a = -\frac{f(2)}{f'(2)} = -\frac{3^2 - 3 \cdot 2 - 3}{3^2 \ln 3 - 3} = 0;$$

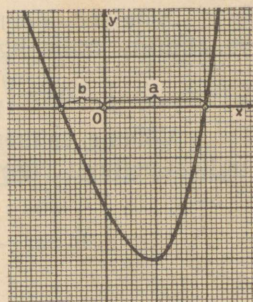
tähendab, juur $a = 2$ on täppis juur, milles ei ole mingisugust viga.

Juure $b = -0,8$ viga

$$\Delta b = -\frac{f(-0,8)}{f'(-0,8)} = -\frac{3^{-0,8} - 3(-0,8) - 3}{3^{-0,8} \ln 3 - 3} = -\frac{-0,185}{-2,544} = -0,0727$$

Sellega õigem, kui $b = -0,8$, on

$$b_1 = -0,8 - 0,0727 = -0,8727.$$



89. joonis.

Ülesanded. Leida graafiliselt võrrandite reaaluured ja teha ühekordne parandus:

⊗ 1) $x^2 - 2x - 11 = 0$

⊗ 4) $x^3 - 2x - 5 = 0$

2) $x^2 + 3x - 3 = 0$

5) $e^x - x - 2 = 0$

⊗ 3) $x^2 - 4x + 1 = 0$

× 6) $x - \cos x = 0$.

Leida graafiliselt võrrandite reaaluured ja teha kahekordne parandus:

× 7) $x^2 - x - 1 = 0$

9) $4^x = x - 2$

8) $\frac{x^3}{3} + x - 3 = 0$

10) $x^4 + 2x - 5 = 0$.

§ 39. Määramatud kujud.

Kui funktsioon $F(x)$ omab mõne x -i väärtuse juures kuju

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty,$$

siis on funktsioon selle x -i väärtuse juures määramatu: tal ei ole niisugustes kujudes mõtet. Sellepärast nimetatakse neid **määramatuteks kujudeks**. Et leida määramatu kaju tõelist väärtust, selleks kasutame Taylor'i valemit.

a) Olgu meil murdfunktsioon

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

mis $x=a$ väärtuse juures omab määramatu kaju $\frac{0}{0}$, s. o.

$$\left. \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right|_{x=a} = \frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{0}{0}.$$

Laseme x -i kasvada mõne väikese arvu Δx võrra, siis $|F(x + \Delta x)|_{x=a}$ ei ole enam määramatu, mille võime arendada Taylor'i reaks

$$\begin{aligned} \left. F(x + \Delta x) \right|_{x=a} &= \left. \frac{f(x + \Delta x)}{\varphi(x + \Delta x)} \right|_{x=a} = \\ &= \left. \frac{f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \dots}{\varphi(x) + \varphi'(x)\Delta x + \frac{\varphi''(x)}{2!}\Delta x^2 + \dots} \right|_{x=a} = \\ &= \frac{f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{f''(a)}{2!}\Delta x^2 + \dots}{\varphi(a) + \varphi'(a)\Delta x + \frac{\varphi''(a)}{2!}\Delta x^2 + \dots} = \end{aligned}$$

$$= \frac{f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}\Delta x + \frac{f'''(a)}{3!}\Delta x^2 + \dots}{\varphi'(a) + \frac{\varphi''(a)}{2!}\Delta x + \frac{\varphi'''(a)}{3!}\Delta x^2 + \dots} = \frac{f(a + \Delta x)}{\varphi(a + \Delta x)} = F(a + \Delta x),$$

sest võime koondada Δx -ga, kui $f(a) = 0$ ja $\varphi(a) = 0$.

Kui nüüd $\Delta x \rightarrow 0$, siis

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(a + \Delta x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x)}{\varphi(a + \Delta x)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}\Delta x + \frac{f'''(a)}{3!}\Delta x^2 + \dots}{\varphi'(a) + \frac{\varphi''(a)}{2!}\Delta x + \frac{\varphi'''(a)}{3!}\Delta x^2 + \dots} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}, \end{aligned}$$

$$F(a) = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)},$$

millest näeme, et kui leida murdfunktsiooni

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

tõelist väärtust, kui argumendi $x = a$ juures funktsioon omab kuju $\frac{0}{0}$, peab lugejat ja nimetajat eraldi differentsima ja nende tuletiste jagatisse paigutama $x = a$

Kui ka $f'(a) = 0$ ja $\varphi'(a) = 0$, siis võime lugejas ja nimetajas esinevaid Taylor'i ridu koondada $\frac{\Delta x^2}{2}$ -ga, saaksime

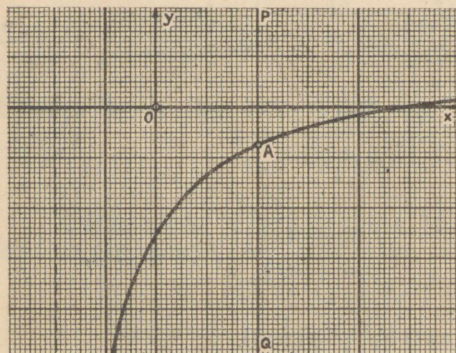
$$\left| F(x + \Delta x) \right|_{x=a} = \frac{f''(a) + \frac{f'''(a)}{3} \Delta x + \frac{f^{(4)}(a)}{3 \cdot 4} \Delta x^2 + \dots}{\varphi''(a) + \frac{\varphi'''(a)}{3} \Delta x + \frac{\varphi^{(4)}(a)}{3 \cdot 4} \Delta x^2 + \dots};$$

ja kui nüüd $\Delta x \rightarrow 0$, siis

$$F(a) = \frac{f''(a)}{\varphi''(a)}.$$

Sarnaselt võime edasi arvutada, kuni määramatus ära kaob, s. o.

$$F(a) = \frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{f''(a)}{\varphi''(a)} = \frac{f'''(a)}{\varphi'''(a)} = \dots$$



90. joonis.

1. näide. Leida funktsiooni

$$y = \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}$$

väärtus, kui $x = 2$

Paigutades otsekohe x -i asemele 2, saaksime määramatu kuju $\frac{0}{0}$. Graafiliselt tähendab

see, et funktsiooni väärtus, kui $x = 2$, kujutab ordinaati mingisugusest punktist, mis asub sirgjoonel PQ (90. joon.). Et leida graafiliselt seda punkti, selleks võtame väärtuste tabeli:

x	...	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	...
y	...	-1,33	-1	$\frac{0}{0}$	-0,56	-0,4	-0,17	0	0,125	...

Lähenev argumendi väärtusega nii ühelt kui ka teiselt poolt punktile, milles $x=2$. Punkt A sirgjoonel PQ , millele kõverjoon läheneb mõlemalt poolt sirgjoont PQ , määrab ära funktsiooni tõelise väärtuse kui $x=2$.
Teiselt poolt: differentsides lugejat ja nimetajat võime kirjutada

$$y = \left| \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} \right|_{x=2} = \frac{0}{0} = \left| \frac{2x - 7}{2x} \right|_{x=2} = -0,75,$$

mis on funktsiooni väärtus punktis $x=2$.

2. näide. Leida funktsiooni

$$y = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

väärtus, kui $x=0$.

Siin

$$y = \left| \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \right|_{x=0} = \frac{0}{0};$$

differentsides lugejat ja nimetajat saame

$$y = \left| -\frac{x \sin x}{2x} \right|_{x=0} = \frac{0}{0};$$

differentsime veel kord, siis

$$y = \left| \frac{x \cos x - \sin x}{2} \right|_{x=0} = \frac{0}{2} = 0.$$

Tähendab kui $x=0$, siis funktsiooni väärtus on 0, s. o. $y=0$.

b) Kui murdfunktsioon

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

omab $x=a$ väärtuse juures määramatut kuju $\frac{\infty}{\infty}$, siis võime seda funktsiooni kirjutada kujus

$$F(x) = \frac{1}{\frac{\varphi(x)}{f(x)}} = \frac{0}{0}.$$

Määramatu kuju $\frac{\infty}{\infty}$ võime kirjutada eelmise määramatu kujuna $\frac{0}{0}$.

Differentsime lugejat ja nimetajat, saame

$$\left| F(x) \right|_{x=a} = \left| \frac{-\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}}{-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}} \right|_{x=a} = \left| \frac{[f(x)]^2 \cdot \varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2 \cdot f'(x)} \right|_{x=a} = \left[F(a) \right]^2 \cdot \frac{\varphi'(a)}{f'(a)},$$

millest

$$F(a) = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

3. näide. Leida funktsiooni

$$y = \frac{\ln(x-5)}{\ln(e^x - e^5)},$$

väärtus, kui $x=5$.

Siin esineb määramatu kuju $\frac{\infty}{\infty}$; differentsides järk-järgult lugejat ja nimetajat võime kirjutada

$$\begin{aligned} y &= \left. \frac{\ln(x-5)}{\ln(e^x - e^5)} \right|_{x=5} = \frac{\infty}{\infty} = \left. \frac{\frac{1}{x-5}}{\frac{e^x}{e^x - e^5}} \right|_{x=5} = \left. \frac{e^x - e^5}{e^x(x-5)} \right|_{x=5} = \frac{0}{0} = \\ &= \left. \frac{e^x}{e^x + e^x(x-5)} \right|_{x=5} = \left. \frac{1}{x-4} \right|_{x=5} = 1. \end{aligned}$$

c) Korrutisfunktsiooni

$$F(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$$

väärtust, kui ta omab $x=a$ juures määramatu kuju $0 \cdot \infty$, on võimalik arvutada määramatute kujude $\frac{0}{0}$ või $\frac{\infty}{\infty}$ kaudu:

kui

$$|f(x)|_{x=a} = f(a) = 0$$

ja

$$|\varphi(x)|_{x=a} = \varphi(a) \rightarrow \infty,$$

siis

$$|F(x)|_{x=a} = |f(x) \varphi(x)|_{x=a} = \left. \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} \right|_{x=a} = \frac{0}{0}$$

ehk

$$|F(x)|_{x=a} = |f(x) \varphi(x)|_{x=a} = \left. \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}} \right|_{x=a} = \frac{\infty}{\infty},$$

s. o. määramatu kuju $0 \cdot \infty$ tuleb üle viia määramatute kujude $\frac{0}{0}$ või $\frac{\infty}{\infty}$ peale ja siis toimida nagu punktis a) või b).

4. näide. $y = |2x \cot x|_{x=0} = ?$

Siin

$$\begin{aligned} y &= |2x \cot x|_{x=0} = 0 \cdot \infty = \left. \frac{2x \cos x}{\sin x} \right|_{x=0} = \frac{0}{0} = \\ &= \left. \frac{2 \cos x - 2x \sin x}{\cos x} \right|_{x=0} = 2 \end{aligned}$$

d) Kui funktsioon

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)}$$

omab $x = a$ juures kuju 0^0 , ∞^0 või 1^∞ , siis võime punkt c) kaudu leida ta logaritmilise väärtuse

$$\ln y = \varphi(x) \cdot \ln f(x).$$

Kui $|f(x)|_{x=a} = 0$ ja $|\varphi(x)|_{x=a} = 0$, siis

$$|[f(x)]^{\varphi(x)}|_{x=a} = 0^0 \quad \text{ja} \quad |\varphi(x) \ln f(x)|_{x=a} = 0 \cdot (-\infty);$$

kui $|f(x)|_{x=a} = \infty$ ja $|\varphi(x)|_{x=a} = 0$, siis

$$|[f(x)]^{\varphi(x)}|_{x=a} = \infty^0 \quad \text{ja} \quad |\varphi(x) \ln f(x)|_{x=a} = 0 \cdot \infty;$$

ja kui $|f(x)|_{x=a} = 1$ ja $|\varphi(x)|_{x=a} \rightarrow \infty$, siis

$$|[f(x)]^{\varphi(x)}|_{x=a} = 1^\infty \quad \text{ja} \quad |\varphi(x) \ln f(x)|_{x=a} = \infty \cdot 0.$$

Sel juhul, et leida y -i väärtust, kui $x = a$ väärtuse juures ta omab määramatu kuju 0^0 , ∞^0 või 1^∞ , tuleb enne leida $\ln y$ väärtus. On $\ln y$ väärtus leitud, võime antilogaritmides saada y -i tõeliku väärtuse, kui $x = a$.

5. näide. $y = |x^{\sin x}|_{x=0} = ?$

Siin esineb määramatu kuju 0^0 . Logaritmides leiame, et

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x,$$

kus

$$\ln y = |\sin x \ln x|_{x=0} = -0 \cdot \infty = \left| \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \right|_{x=0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \left| \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin^2 x}} \right|_{x=0} = \left| -\frac{\sin^2 x}{x \cos x} \right|_{x=0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \left| \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x - x \sin x} \right|_{x=0} = \frac{0}{1} = 0;$$

kui $\ln y = 0$, siis $y = e^0 = 1$.

6. näide.

$$y = \left| x^{\frac{a}{x}} \right|_{x \rightarrow \infty} = ?$$

See on määramatu kuju ∞^0 , mida logaritmides saame

$$\ln y = \frac{a}{x} \cdot \ln x,$$

kus

$$\begin{aligned}\ln y &= \left| \frac{a}{x} \ln x \right|_{x \rightarrow \infty} = \left| \frac{a \ln x}{x} \right|_{x \rightarrow \infty} = \frac{\infty}{\infty} = \\ &= \left| \frac{\frac{a}{x}}{1} \right|_{x \rightarrow \infty} = \left| \frac{a}{x} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0,\end{aligned}$$

s. o. kui $\ln y = 0$, siis $y = 1$.

7. näide.

$$y = \left| \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right|_{x \rightarrow \infty} = ?$$

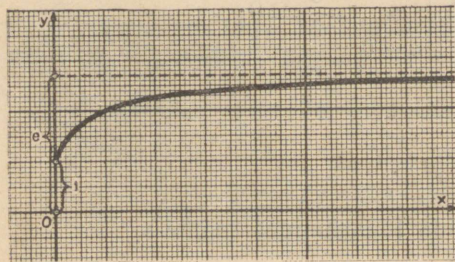
Siin esineb määratu kuju 1^∞ . Logaritmime

$$\ln y = x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

kus

$$\begin{aligned}\ln y &= \left| x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right|_{x \rightarrow \infty} = \infty \cdot 0 = \left| \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right|_{x \rightarrow \infty} = \frac{0}{0} = \\ &= \left| \frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} \right|_{x \rightarrow \infty} = \left| \frac{x}{x+1} \right|_{x \rightarrow \infty} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{1} = 1;\end{aligned}$$

kui $\ln y = 1$, siis $y = e$ (91. joon.).



91. joonis.

8. näide.

$$y = \left| \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right|_{x=0} = ?$$

Siin esineb määratu kuju ∞^0 . Logaritmime

$$\ln y = x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

kus

$$\begin{aligned} \ln y &= \left| x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right|_{x=0} = 0 \cdot \infty = \left| \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \right|_{x=0} = \frac{0}{0} \\ &= \left| \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \right|_{x=0} = \left| \frac{x}{x+1} \right|_{x=0} = 0; \end{aligned}$$

kui $\ln y = 0$, siis $y = 1$ (91. joon.).

Ülesanded.

- 1) $y = \left| \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3} \right|_{x=1}$
- 2) $y = \left| \frac{\sin x}{x} \right|_{x=0}$
- 3) $y = \left| \frac{1 - \cos x}{x^2} \right|_{x=0}$
- 4) $y = \left| \frac{\ln x}{x^2} \right|_{x \rightarrow \infty}$
- 5) $y = \left| \frac{e^x}{x^3} \right|_{x \rightarrow \infty}$
- 6) $y = \left| \frac{\ln x}{e^x} \right|_{x \rightarrow \infty}$
- 7) $y = \left| (1 - \sin x) \tan x \right|_{x=\frac{\pi}{2}}$
- 8) $y = \left| x \cot \left(\frac{x}{2} \right) \right|_{x=0}$
- 9) $y = \left| x^2 \ln x \right|_{x=0}$
- 10) $y = \left| x^{\sin x} \right|_{x=0}$
- 11) $y = \left| (\tan x)^{\tan x} \right|_{x=0}$
- 12) $y = \left| \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x} \right|_{x=0}$

IX peatükk. Funktsioonide osaline ja täieline muutumine.

§ 40. Osatuletised.

Funktsioon võib oleneda rohkem kui ühest muutuvast suurus-
sest, näit.

$$z = 5x^2 + 4xy - 8y^2,$$

kus z on x -i ja y -i funktsioon; z oleneb siin kahest muutuvast suurus-
sest x -st ja y -st. z võib siin muutuda, kui muutub x , kus juures y võib
jääda konstantseks suuruseks, või muutub y ja x jääb konstantseks

suuruseks, või lõpuks — z muutub mõlema x -i ja y -i muutumisel. Esi-
mesel ja teisel juhul sünnib osaline, kuid viimasel juhul täieline funk-
tsiooni muutumine.

Näiteks, gaasi ruumala V on nii temperatuuri T kui ka rõhumise p
(mille all seisab gaas) funktsioon

$$V = f(T, p) = c \frac{T}{p},$$

kus c on konst.

Kui temperatuur T ei muutu, siis gaasi ruumala V on ainult rõhu-
mise p funktsioon

$$V = c \frac{T}{p} = \frac{c_1}{p} \text{ ehk } Vp = c_1,$$

mis väljendab Mariotte'i seadust: gaasi ruumala ja rõhumise korrutis on
konst. Tema graafiline kuju on hüperbool, n. n. Mariotte'i kõverjoon.

Kui rõhumine p on konst., siis gaasi ruumala V on ainult tempera-
tuuri T funktsioon

$$V = c \frac{T}{p} = c_2 T;$$

see on Gay-Lussac'i seadus.

Mõlemal juhul sünnib siin osaline gaasi ruumala muutumine.
Täielik gaasi ruumala muutumine sünnib siis, kui ta on korraga
mõlemast muutujast, s. o. temperatuurist T ja rõhumisest p .

Kui üldiselt z on kahe muutuja x -i ja y -i pidev funktsioon

$$z = f(x, y)$$

ja y -t loeme konstantseks suuruseks, siis z -i võime vaadelda ainult
kui x -i funktsiooni ja moodustada differentsiaaljärgatise ja ühtlasi ka
funktsiooni tuletise x -i suhtes. Niisugust tuletist nimetatakse funktsiooni
osatuletiseks x -i suhtes ja tähistatakse järgmiselt

$$\frac{\partial z}{\partial x},$$

sest et siin ainult x -i vaadeldakse kui muutuvat suurust, millest on
oleb ka z -i muutumine. Funktsiooni osatuletis x -i suhtes oleks eespool oleva
näite puhul

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10x + 4y.$$

Sääraselt võime toimida y -i suhtes, vaadeldes y -t kui muutu-
vat ja x -i kui konstantset suurust, ja kirjutada funktsiooni **osatuletise**
 y -i suhtes

$$\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Antud näite puhul oleks funktsiooni osatuletis y -i suhtes

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x - 16y.$$

Analoogiliselt võime kirjutada gaasi ruumala suhtes, et

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{c}{p} \text{ ja } \frac{\partial V}{\partial p} = -c \frac{T}{p^2}.$$

Kui z on kahe muutuva funktsioon

$$z = f(x, y),$$

siis võime selle funktsiooni osatuletised x -i ja y -i suhtes kirjutada järgmiselt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Osatuletised

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ ja } \frac{\partial z}{\partial y}$$

on omakorda jälle x -i ja y -i funktsioonid, mida võime edasi differentsida.

On tuletis võetud funktsioonist $\frac{\partial z}{\partial x}$ x -i suhtes, tähistatakse

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

mis nimetatakse teiseks osatuletiseks. See on funktsiooni teine osatuletis, võetud kaks korda x -i suhtes. Samuti

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

on funktsiooni teine osatuletis, võetud kaks korda y -i suhtes. Ja lõpuks

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

on funktsiooni teine osatuletis, võetud üks kord x -i suhtes ja teine kord y -i suhtes.

1. näide. $z = xy.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1.$$

2. näide. $z = \frac{x}{y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2}.$$

3. näide. $z = \ln x - \ln y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Ülesanded. Leida esimese ja teise järgu osatuletised.

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1) $z = x^2 + y^2$ | 6) $z = \sin x - \cos y$ |
| 2) $z = x^2 + xy$ | 7) $z = xy - e^x$ |
| 3) $z = x^2 y^2$ | 8) $z = \sqrt{x - y}$ |
| 4) $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ | 9) $z = x \ln y$ |
| 5) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ | 10) $z = \cot\left(\frac{x}{y}\right)$. |

§ 41. Täistuletis ja täisdiferentsiaal.

a) Olgu meil niisugune funktsioon

$$z = f(u, v),$$

kus u ja v on omakorda x -i funktsioonid

$$u = \varphi(x) \text{ ja } v = \psi(x),$$

s. o. z , u ja v muutumine oleneb ainult x -i muutumisest. Tähendab, seda funktsiooni võime kirjutada ka järgmiselt

$$z = f[\varphi(x), \psi(x)].$$

Oletame, et $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x)$ ja $v = \psi(x)$ on pidevad funktsioonid; x -i muutumisel muutuvad ka z , u ja v pidevalt. Kui x omab kasvu Δx , siis nimetatud funktsioonide asemele võime kirjutada

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x), \quad v + \Delta v = \psi(x + \Delta x),$$

$$z + \Delta z = f(u + \Delta u, v + \Delta v),$$

millest

$$\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - u, \quad \Delta v = \psi(x + \Delta x) - v,$$

$$\Delta z = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - z,$$

ehk

$$\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x), \quad \Delta v = \psi(x + \Delta x) - \psi(x),$$

$$\Delta z = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v) = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v) + f(u, v + \Delta v) - f(u, v);$$

jagades Δx -ga saame

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x},$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z}{\Delta x} &= \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta x} + \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta x} = \\ &= \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \\ &\quad + \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}; \end{aligned}$$

piirile minnes, lastes Δx läheneda 0-ile, siis lähenevad 0-ile funktsiooni pidevuse tõttu ka Δu , Δv ja Δz , s. o.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx},$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} = \frac{dv}{dx},$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \\ &\quad + \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \\ &= \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}, \end{aligned}$$

sest et

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} = \\ &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \left[\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} \right] = \\ &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\partial f(u, v + \Delta v)}{\partial u} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u}. \end{aligned}$$

Avaldis

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

nimetatakse funktsiooni $z = f(u, v)$ tälstuletiseks, kus $u = \varphi(x)$ ja $v = \psi(x)$.

Korrutades täistuletise mõlemaid pooli Δx -ga, saame

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

mis nimetatakse funktsiooni $z = f(u, v)$ täisdiferentsiaaliks.

Märkus. Täistuletise ja täisdiferentsiaali rakendus esineb olulise osana vigade teoorias, kus täistuletist vaadeldakse kui relatiivset viga ja täisdiferentsiaali kui absoluutset viga.

1. näide. $z = u + v$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 1,$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx},$$

$$dz = du + dv;$$

see on summa diferentsiaal.

2. näide. $z = u \cdot v$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u,$$

$$\frac{dz}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx},$$

$$dz = v du + u dv;$$

See on korrutise diferentsiaal.

3. näide. $z = \frac{u}{v}$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{v} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2} \cdot \frac{dv}{dx},$$

$$dz = \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2} = \frac{v du - u dv}{v^2};$$

see on jagatise diferentsiaal.

Ülesanded.

1) $z = \ln u - \ln v$

3) $z = u^v$

2) $z = u^2 \ln v$

4) $z = \sin(uv)$.

b) Meil oli funktsioon

$$z = f(u, v),$$

kus u ja v olid omakorda x -i funktsioonid, siis oli

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

Oletame, et $u = x$ ja $v = y$, siis

$$z = f(x, y),$$

kus ainult x oleks rippumatu muutuja, kuid y oleks omakorda olenev x -st (see on erijuht eelmisest), s. o.

$$y = \varphi(x) \text{ ja } z = f[x, \varphi(x)].$$

Siis võime kirjutada

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

ehk

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

kus nüüd z oleneb otsekohe x -ist ja kaudselt y -st, sest et y on omakorda x -i funktsioon. $\frac{dz}{dx}$ on funktsiooni täistuletis võetud x -i suhtes.

Funktsiooni $y = f(x, y)$, kus $y = \varphi(x)$, täisdiferentsiaal oleks

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

4. näide. $z = x^y$, $y = \ln x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{dz}{dx} = yx^{y-1} + x^y \ln x \cdot \frac{1}{x} = yx^{y-1} + x^{y-1} \ln x =$$

$$= x^{y-1}(y + \ln x) = x^{\ln x - 1}(\ln x + \ln x) =$$

$$= 2x^{\ln x - 1} \ln x.$$

5. näide. $z = x^3 - 2y - y^2$, $y = \sin x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2 - 2y, \quad \frac{dy}{dx} = \cos x,$$

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 + (-2 - 2y) \cos x = 3x^2 - 2 \cos x -$$

$$- 2 \sin x \cos x = 3x^2 - 2 \cos x - \sin 2x.$$

Ülesanded.

5) $z = x^2 + y^2$, $y = \sin x$

7) $z = y^2 \tan x$, $y = \cos x$

6) $z = x^2 + xy$, $y = e^x$

8) $z = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$, $y = \ln x$

c) Kui meil on funktsioon ilmutamatus kujus

$$f(x, y) = 0,$$

siis ei ole vajadust seda alati y -i suhtes ilmutada, mis tihti arvutamise juures sünnitaks raskusi. Selleks võime kasutada valemit

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Kui

$$f(x, y) = 0,$$

siis on ikkagi võimalik ilmutada sellest y , s. o.

$$y = \varphi(x);$$

paigutades seda eelmisse, saame

$$f[x, \varphi(x)] = 0,$$

mis võrdub 0-iga iga x -i väärtuse juures; sellepärast ka

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \frac{df[x, \varphi(x)]}{dx} = 0$$

ehk

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

ehk lühidalt

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

kust

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

mis on ilmutamatu funktsiooni $f(x, y) = 0$ täistuletis.

6. näide. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, ellipsi võrrand.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}} = - \frac{b^2 x}{a^2 y},$$

mis on ellipsi puutuja ja x -telje vahelise nurga tangens.

7. näide. $x^2 - \sin x + \cos y = 0$;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \cos x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin y, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x - \cos x}{\sin y}.$$

Ülesanded.

- 9) $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ 11) $y^2 - 2px = 0$
10) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ 12) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$
13) $x - \tan y = 0.$

X peatükk. Differentsiaalvõrrandid.

§ 42. Differentsiaalvõrrandi mõiste.

Võrrand, milles esinevad peale muutuvate suuruste veel nende differentsiaalid (tuletised), nimetatakse **differentsiaalvõrrandiks**.

Differentsiaalvõrrand, milles esineb rida muutuvaid suurusi, millest loeme ainult üht rippumatuks muutujaks, kuid kõiki teisi selle funktsioonideks, ja milles esinevad ainult selle ühe muutuja suhtes võetud tuletised, nimetatakse **harilikuks differentsiaalvõrrandiks**.

Kui võrrandis esinevad osatuletised, näiteks,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

siis nimetatakse seda **osa-differentsiaalvõrrandiks**.

Võrrandites esinevate tuletiste järgu suhtes liigitatakse differentsiaalvõrrandeid esimese, teise, kolmanda jne. järgu differentsiaalvõrranditeks. Näit.

$$(2x - 3y) dx - (x - 5y) dy = 0$$

ehk

$$(2x - 3y) - (x - 5y) \frac{dy}{dx} = 0$$

on esimese järgu differentsiaalvõrrand;

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x}{9}$$

ja

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = x$$

on teise järgu differentsiaalvõrrandid.

Need on esimese ja teise järgu **lineaarsed differentsiaalvõrrandid**, sest

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2},$$

on esimeses astmes. Kuid

$$y^2 = 4x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

ja

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

on teise astme võrrandid: esimene on esimese järgu ja teine on teise järgu ruut-differentsiaalvõrrand, sest et esinevad teised astmed

$$y^2 \text{ ja } \left(\frac{dy}{dx} \right)^2.$$

n -järgu lineaarset differentsiaalvõrrandit võime kirjutada järgmiselt:

$$f_0(x) \frac{d^ny}{dx^n} + f_1(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + f_2(x) \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + f_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + f_n(x)y = \varphi(x),$$

kus

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

on esimeses astmes ja

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \varphi(x)$$

on mistahes x -i funktsioonid.

Meie käsitleme siin ainult neid harilikke differentsiaalvõrrandeid, milles esinevad ainult kaks muutuvat suurust x ja y , ja kus y esineb x -i funktsioonina.

Märkus. Differentsiaalvõrrandite rakendus esineb olulise osana füüsikas, hüdrodünaamikas, elektrodünaamikas, elastiliste kehade liikumise juures, jne.

§ 43. Differentsiaalvõrrandite lahendamine.

Olgu meil võrrand

$$f(x, y, c) = 0,$$

milles esinevad muutujad x ja y ja mistahes konstantne suurus c , n. n. **parameeter**. Andes c -le teatud väärtusi, võime saada võrrandi järele geomeetriliselt rea analoogilisi kõverjooni. Järelikult, võrrand $f(x, y, c) = 0$ kujutab **kõverate süsteemi** ehk **kõverate parve**.

Leiame niisuguse differentsiaalvõrrandi, mida rahuldaks kõverate parv

$$f(x, y, c) = 0;$$

differentsides saame

$$\frac{\partial f(x, y, c)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y, c)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0;$$

kõrvaldades neist võrranditest konstantse suuruse c , saame differentsiaalvõrrandi

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

mille lahendus on kõverate parv

$$f(x, y, c) = 0.$$

Sellega võrrand $f(x, y, c) = 0$ on diferentsiaalvõrrandi $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ üldlahendus ehk üldine integraal. Tähendab, diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

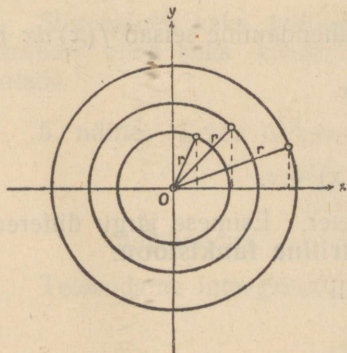
üldlahenduseks nimetatakse niisugust funktsiooni $y = \varphi(x)$, millel y ja $\frac{dy}{dx}$ rahuldavad diferentsiaalvõrrandit.

Iga üksik lahendus, mis saadakse üldlahendusest, nimetatakse **diferentsiaalvõrrandi osalahenduseks** ehk **osaintegraaliks**.

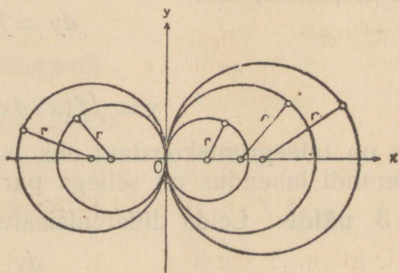
1. näide. Võtame ringide, millede keskpunktid on 0-punktis, võrrandi,

$$f(x, y, r) = x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

kus raadius r on mistahes konstantne suurus (92. joon.). Vaatame misugune on vastav diferentsiaalvõrrand, mille üldlahendus oleks antud ringide võrrand.



92. joonis.



93. joonis.

Diferentsides

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

saame diferentsiaalvõrrandi

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

ehk

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0.$$

2. näide. Olgu meil niisuguste ringide, mis lähevad läbi 0-punkti ja millede keskpunktid asuvad x -teljel, võrrand (93. joon.).

$$f(x, y, r) = (x - r)^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Avades sulud

$$x^2 - 2rx + y^2 = 0$$

ja differentsides

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2r, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

saame

$$2x - 2r + 2y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Kõrvaldame konstantse suuruse r ; selleks korrutame viimast võrrandit x -iga ja lahutame temast ringide võrrandi, saame

$$x^2 - y^2 + 2xy \frac{dy}{dx} = 0,$$

mis on vastav differentsiaalvõrrand.

Kõige lihtsam harilikudest esimese järgu lineaarsetest differentsiaalvõrranditest oleks

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

kus $f(x)$ on ainult x -i funktsioon. Selle lahendamine seisab $f(x) dx$ integraali leidmises, sest

$$dy = f(x) dx$$

ja

$$y = \int f(x) dx = F(x) + c,$$

kus c on integrimiskonstant ehk parameeter. Esimese järgu differentsiaalvõrrandi lahendus on sellega **parameetriline funktsioon**.

3. näide. Leida differentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

üldlahendus.

Siin

$$dy = \frac{dx}{x}$$

ja

$$y = \int \frac{dx}{x} = \ln x + \ln c = \ln cx,$$

milles lihtsuse mõttes on võetud integrimiskonstandiks $\ln c$. Saadud võrrand kujutab logaritmilisi kõverjooni.

4. näide. Leida differentsiaalvõrrandi

$$(x^2 + 1) dy - (2x^3 + 2x + 1) dx = 0$$

üldlahendus.

Siin

$$dy = \frac{2x^3 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx$$

ja

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = 2 \int x dx + \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= x^2 + c_1 + \arctan x + c_2 = x^2 + \arctan x + c, \end{aligned}$$

kus $c_1 + c_2 = c$.

Kui diferentsiaalvõrrandis esineb veel teise järgu tuletis, näit.

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

siis nimetatakse seda teise järgu diferentsiaalvõrrandiks, mille üldine integraal oleks

$$f(x, y, c_1, c_2) = 0.$$

Siin esineb kaks konstantset suurust c_1 ja c_2 , sest et diferentsiaalvõrrandit tuleb kaks korda integrida, kui tahame diferentsiaale ära kaotada.

5. näide. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6x + 2 = 0$$

üldlahendus.

Teisendame integritavat võrrandit:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 6x - 2$$

ehk

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = (6x - 2) dx,$$

millest

$$\frac{dy}{dx} = \int (6x - 2) dx = 3x^2 - 2x + c_1;$$

viimasest

$$dy = (3x^2 - 2x + c_1) dx$$

ja

$$y = \int (3x^2 - 2x + c_1) dx = x^3 - x^2 + c_1 x + c_2.$$

n -järgu differentsiaalvõrrand oleks

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

ja ta üldine integraal

$$f(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0.$$

Et lahendada differentsiaalvõrrandit, selleks on tarvis teda integrida. s. o. leida ta üldine integraal.

§ 44. Muutujate eraldamine.

Kui differentsiaalvõrrand

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

esineb kujus

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

milles on võimalik eraldada muutujaid nõnda, et saaksime kuju

$$f_1(x) + f_2(y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

kus y ja $\frac{dy}{dx}$ on x -i funktsioonid, siis seda integrides saame

$$\int \left[f_1(x) + f_2(y) \frac{dy}{dx} \right] dx = c_1,$$

$$\int f_1(x) dx + \int f_2(y) dy = c_1,$$

$$F_1(x) + c_2 + F_2(y) + c_3 = c_1$$

ehk

$$F_1(x) + F_2(y) = c,$$

mis on differentsiaalvõrrandi üldlahendus, kus $F_1(x)$ ja $F_2(y)$ on funktsioonide $f_1(x)$ ja $f_2(y)$ integraalid ja

$$c_1 - c_2 - c_3 = c.$$

Siin esinevad kõik lahendused. Need esitavad kõverate parve.

1. näide. Leida differentsiaalvõrrandi

$$xdy - ydx = 0$$

üldlahendus.

Jagame võrrandi mõlemad pooled xy -ga

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$

ja integreime

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} = \ln y - \ln x = \ln c,$$

kust

$$y = cx,$$

mis kujutab 0-punktist läbiminevaid sirgjooni.

2. näide. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$$

üldlahendus.

Eraldame muutujad

$$\frac{ydy}{1+y^2} + \frac{xdx}{1+x^2} = 0$$

ja integreime

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} + \int \frac{xdx}{1+x^2} = c_1, \quad \frac{1}{2} \ln(1+y^2) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = \frac{1}{2} \ln c,$$

$$\ln(1+y^2)(1+x^2) = \ln c,$$

$$(1+y^2)(1+x^2) = c.$$

3. näide. Keha, mille mass on m , liigub horisontaalsel tasapinnal algiirusega v_0 . Leida liikumise seadus, kui õhu takistus on otsevõrdeline keha kiirusega, s. o. takistus on kv , kus $k = \text{konst.}$

Keha liikumisel horisontaalsel tasapinnal on tung P vastupidi sihitud õhu takistusele, s. o.

$$P = m \frac{d^2s}{dt^2} = -kv,$$

ehk

$$m \frac{dv}{dt} = -kv,$$

kus m on liikuva keha mass.

Eraldades viimases võrrandis muutujad ja integrides leiame keha liikumise kiiruse v , mis muutub v_0 -st kuni v -ni, kui aeg muutub 0-ist kuni t -ni (sest algiiruse on v_0 ja liikumise algul $t=0$):

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt, \quad \left| \ln v \right|_{v_0}^v = -\frac{k}{m} \left| t \right|_0^t,$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{k}{m} t,$$

$$\frac{v}{v_0} = e^{-\frac{k}{m} t}$$

ehk

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m} t}.$$

Et leida keha liikumisel ära kaidud tee pikkust väljendavat funktsiooni, selleks tuleb integrida differentsiaalvõrrand

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 e^{-\frac{k}{m}t},$$

kusjuures tee pikkus muutub 0-st kuni s -ni, kui aeg muutub 0-st kuni t -ni:

$$ds = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} dt, \quad \int_0^s ds = v_0 \int_0^t e^{-\frac{k}{m}t} dt,$$

$$\left| s \right|_0^s = -v_0 \frac{m}{k} \left| e^{-\frac{k}{m}t} \right|_0^t,$$

$$s = v_0 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right),$$

milles konstantne suurus k leitakse eksperimentaalsel teel.

4. näide. Vedru otsas võngub kehake, mille mass on m . Missugune seadus valitseb vedru võnkumist, kui ta pikkus tasakaalus olles on s_0

Kehakese võnkumise korral tekib vedru deformatsioon $s - s_0$ (94. joon.). Sellega ühtlasi tekib ka vedru pikkuse muutumisel vastupidi sihitud elastiline tung P , mis püüab vedru tasakaalustada, ja mis on otsevõrdeline deformatsiooniga, s. o.

$$P = m \frac{d^2s}{dt^2} = -k(s - s_0),$$

kus k on konstantne ja $>$ kui 0.

Teisendades seda differentsiaalvõrrandit võime kirjutada

$$m \frac{ds}{dt} d\left(\frac{ds}{dt}\right) = -k(s - s_0) ds$$

ehk

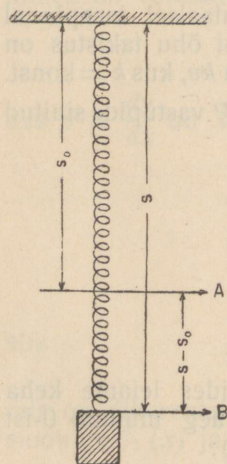
$$mv dv = -k(s - s_0) ds,$$

mida integrides leiame vedru võnkumise kiiruse v , mis muutub v_0 -st kuni v -ni, kui deformatsioon muutub 0-st kuni $(s - s_0)$ -ni ehk kui vedru pikkus muutub s_0 -st kuni s -ni (sest võnkumismomendil, mil kehake

tasakaalu punktist A läbi läheb, on deformatsioon 0 ja $v = v_0$):

$$m \int_{v_0}^v v dv = -k \int_{s_0}^s (s - s_0) ds, \quad \frac{m}{2} \left| v^2 \right|_{v_0}^v = -\frac{k}{2} \left| (s - s_0)^2 \right|_{s_0}^s,$$

$$m(v^2 - v_0^2) = -k(s - s_0)^2,$$



94. joonis.

millest

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}(s - s_0)^2}.$$

Sellest valemist näeme, et kiirus v ei või saada iialgi suuremaks kui v_0 : seda maksimaalväärtust $v = v_0$ omab kiirus siis, kui keha läheb läbi tasakaalu punkti A , s. o. kui deformatsioon on 0.

Vedru võnkumisel äraکیدud tee pikkuse saame, kui lahendame (eraldades muutujad) differentsiaalvõrrandi

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}(s - s_0)^2},$$

kusjuures vedru pikkus muutub s_0 -st kuni s -ni, kui võnkumise aeg muutub 0-st kuni t -ni:

$$\int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}(s - s_0)^2}} = \int_0^t dt,$$

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \left| \arcsin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{s - s_0}{v_0} \right) \right|_{s_0}^s = \left| t \right|_0^t,$$

$$\arcsin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{s - s_0}{v_0} \right) = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t$$

ehk

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{s - s_0}{v_0} = \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right),$$

millest

$$s = s_0 + v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right)$$

ehk

$$s = s_0 + a \cdot \sin \left(2\pi \frac{t}{T} \right).$$

See on harmooniline võnkumine (vt. § 35, 5. ülesanne), kus amplituud

$$a = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$$

ja terve võnkumise aeg

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Kõige suurem deformatsioon on siis, kui

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t = \frac{\pi}{2} \quad \text{ehk} \quad t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{T}{4},$$

siis

$$s - s_0 = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} = a.$$

Differentsides saadud harmoonilise võnkumise valemit aja suhtes saame kiiruse

$$v = \frac{2\pi a}{T} \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right),$$

ja differentsides kiiruse valemit aja suhtes saame kiirenduse

$$w = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right).$$

5. näide. Leida õhu takistuse tegur k langeva keha vaatlusel.

Oletame, et mingisugune kerakujuline keha langeb alla teatud kõrgusest s . Õhk avaldab selle juures ta peale vastusurvet ja ta langemine selle tõttu ei sünni mitte lihtsa õhuta ruumis langemise seaduse järele.

Vabalt langeva keha liikumine, kui ta langemist takistab õhu vastusurve, mis oleneb keha suuruselt ning vormist, sünnib kahe tungi mõjul: esiteks, raskustungi mg , mis on sihitud allapoole, ja teiseks, takistustungi R , mis teotseb eelmisele vastusihis, mõjul. Sellega

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = mg - R,$$

kus m on langeva keha mass ja R õhu takistus.

Õhu takistus on väikeste kiiruste juures, mis $< 0,1 \text{ m/sek}$, otsevõrdeline keha langemise kiirusega; suuremate kiiruste juures aga otsevõrdeline keha langemise kiiruse ruuduga. Oletame, et

$$R = k \frac{QS}{g} v^2,$$

kus S on katsekeha diametraalse läbilõike pindala, Q kuupmeetri õhu kaal katse ajal ja k otsitav õhu takistuse tegur.

Tähendab

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = mg - k \frac{QS}{g} v^2$$

ehk

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = 1 - \frac{kQS}{mg^2} v^2,$$

kus tähistame

$$c^2 = \frac{kQS}{mg^2} = \text{konst.}$$

Siis

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = 1 - c^2 v^2$$

ehk

$$\frac{dv}{1 - c^2 v^2} = g dt$$

ja integraal

$$\int_0^v \frac{dv}{1 - c^2 v^2} = g \int_0^t dt,$$

sest langemise algul $v=0$ ja $t=0$. Tarvitades ratsionaalsete murdfunktsioonide integrimisvõtet võime kirjutada

$$\frac{1}{2} \int_0^v \frac{dv}{1 + cv} + \frac{1}{2} \int_0^v \frac{dv}{1 - cv} = gt,$$

$$\frac{1}{2c} \ln(1 + cv) - \frac{1}{2c} \ln(1 - cv) = gt,$$

$$\ln \frac{1 + cv}{1 - cv} = 2cgt, \quad \frac{1 + cv}{1 - cv} = e^{2cgt},$$

millest

$$v = \frac{1}{c} \cdot \frac{e^{2cgt} - 1}{e^{2cgt} + 1},$$

mis määrab ära keha kiiruse igal langemismomendil.

Et leida keha langemise tee pikkust väljendavat funktsiooni, selleks lahendame differentsiaalvõrrandi

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{c} \cdot \frac{e^{2cgt} - 1}{e^{2cgt} + 1} = \frac{1}{c} \cdot \frac{e^{cgt} - e^{-cgt}}{e^{cgt} + e^{-cgt}}.$$

Integreime langemise teed piirides 0-st kuni s -ni, kui langemise aeg muutub 0-st kuni t -ni:

$$\int_0^s ds = \frac{1}{c} \int_0^t \frac{e^{cgt} - e^{-cgt}}{e^{cgt} + e^{-cgt}} dt = \frac{1}{g} \int_0^t \frac{d(e^{cgt} + e^{-cgt})}{e^{cgt} + e^{-cgt}},$$

$$s = \frac{1}{g} \left| \ln(e^{cgt} + e^{-cgt}) \right|_0^t, \quad s = \frac{1}{g} \ln \frac{e^{cgt} + e^{-cgt}}{2}$$

ehk

$$e^{sg} = \frac{e^{cgt} + e^{-cgt}}{2}.$$

Katset (vaatluse teel) on meil teada s ja t . Teades s ja t , võime leida viimast avaldisest c väärtuse. Selle väärtuse võime leida graafilisel teel. Ja lõpuks õhu takistuse teguri k väärtuse saame avaldisest

$$k = \frac{c^2 m g^2}{a s}$$

Ülesanded. Leida differentsiaalvõrrandite üldlahendused:

- 1) $e^x dx + y dy = 0$ 4) $x^2 dy - \sqrt{1+y} dx = 0$
 2) $x - a + y \frac{dy}{dx} = 0$ 5) $(x^2 + 1) dy + (y - 1) dx = 0$
 3) $x^2 dy + (y - a) dx = 0$ 6) $\sin x \cos y dx + \cos x \sin y dy = 0$.

7) Päikese pinnal on gravitatiivne kiirendus 28 korda tugevam kui maakera pinnal. Mõne plahvatuse tagajärjel tekkinud protuberants tõuseb 5000 km kõrgusele. Kui suur oli esialgne protuberantsi kiirus, kui päikese raadius $R = 700\,000$ km.

8) Keha, mille mass on m , liigub horisontaalsel tasapinnal algkiirusega v_0 . Leida liikumise seadus, kui õhu takistus on otsevõrdeline keha kiiruse ruuduga, s. o. õhu takistus on kv^2 .

9) Missugune seadus valitseb liikumist, kui keha, mille mass on m , liigub tõuketungi mõjul ($m \frac{d^2 s}{dt^2} = ks$).

10) Missugune seadus valitseb keha vaba langemist õhus, kui õhu takistus on otsevõrdeline keha kiirusega?

11) Leida kõverate võrrand, millel on puutuja projektsioon x -teljel konstantne suurus a .

12) Leida kõverate võrrand, millel on puutuja projektsioon x -teljel kaks korda suurem kui puutepunkti abstsiss.

§ 45. Homogeensed differentsiaalvõrrandid.

Kui differentsiaalvõrrand

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

esineb kujus

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

siis nimetatakse teda **homogeenseks**.

Homogeenseid differentsiaalvõrrandeid lahendatakse järgmiselt: märgime

$$y = xt,$$

mille tuleks on

$$\frac{dy}{dx} = t + x \frac{dt}{dx}.$$

Asetades neid väärtusi homogeensesse võrrandisse saame

$$t + x \frac{dt}{dx} = f(t)$$

ehk

$$\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x},$$

milles muutujad on üksteisest eraldatud. Seda integrides

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \ln x + \ln c = \ln cx$$

leiame t

$$t = \varphi(x, c),$$

ja lõpuks

$$y = xt = x \cdot \varphi(x, c).$$

See on täieline homogeense differentsiaalvõrrandi lahendus.

1. näide. Leida differentsiaalvõrrandi

$$(x - y) dx - x dy = 0$$

üldlahendus.

Tähistame

$$y = xt,$$

siis

$$\frac{dy}{dx} = t + x \frac{dt}{dx}$$

ehk

$$dy = t dx + x dt.$$

Paigutades y ja dy väärtused võrrandisse saame

$$(x - xt) dx - x(t dx + x dt) = 0$$

ehk

$$\frac{dt}{1 - 2t} = \frac{dx}{x},$$

mida integrides leiame

$$\int \frac{dt}{1 - 2t} = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{2} \ln(1 - 2t) = \ln x - \frac{1}{2} \ln c,$$

$$\ln(1 - 2t) = \ln c - 2 \ln x = \ln \frac{c}{x^2},$$

$$1 - 2t = \frac{c}{x^2},$$

kust

$$t = \frac{x^2 - c}{2x^2}$$

ja

$$y = xt = \frac{x^2 - c}{2x}.$$

Saadud võrrand kujutab hüperboolide parve, kui $c \neq 0$.

2. näide. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$(2x - y) dx - (x - 5y) dy = 0$$

üldlahendus.

Kui

$$y = xt \text{ ja } dy = t dx + x dt,$$

siis võrrand omab kuju

$$(2x - xt) dx - (x - 5xt)(t dx + x dt) = 0$$

ehk

$$\frac{5t - 1}{5t^2 - 2t + 2} dt = -\frac{dx}{x},$$

mida integrides võime kirjutada

$$\int \frac{5t - 1}{5t^2 - 2t + 2} dx = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2} \ln(5t^2 - 2t + 2) = -\ln x + \frac{1}{2} \ln c,$$

$$\ln(5t^2 - 2t + 2) + \ln x^2 = \ln c, \quad 5x^2 t^2 - 2x^2 t + 2x^2 = c.$$

Paigutades $t = \frac{y}{x}$ ja $t^2 = \frac{y^2}{x^2}$ väärtused asemele saame

$$5y^2 - 2xy + 2x^2 = c,$$

mis kujutab ellipsite parve, kui $c > 0$.

Ülesanded.

1) $(x + y) dx - (x - y) dy = 0$

4) $(x^2 - y^2) dx + 2xy dy = 0$

2) $(2x - y) dx - (2y - x) dy = 0$

5) $(x^2 + xy + y^2) dx + x^2 dy = 0$

3) $(10x + 8y) dx + (7x + 5) dy = 0$

6) $(y - \sin x) dx + (x + 1) dy = 0$

7) Leida kõverate võrrand, millel raadius-vektori ja vastava abstsissi summa võrduks puutuja projektsiooniga x -teljel.

§ 46. Differentiaalvõrrandid, mis taanduvad homogeenseteks.

Kui differentiaalvõrrand

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

on kujus

$$f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy = 0,$$

mis ei ole homogeenne, siis on võimalik teisendada teda telgede paralleel-lükkega

$$x = u + a, \quad y = v + b$$

nõnda, et ta saaks homogeenneks. a ja b on konstantsed suurused, mida võib ikka nii valida, et võrrand saaks homogeenneks. Kuidas seda toimetada, selgitavad järgmised näited.

1. näide. Leida differentiaalvõrrandi

$$(x + y - 2) dx + (x - y + 4) dy = 0$$

üldlahendus.

Olgu

$$x = u + a, \quad y = v + b,$$

siis

$$dx = du, \quad dy = dv.$$

Paigutame need väärtused võrrandisse

$$(u + a + v + b - 2) du + (u + a - v - b + 4) dv = 0,$$

$$(u + v + a + b - 2) du + (u - v + a - b + 4) dv = 0.$$

Et viimane võrrand oleks homogeenne, seks tulevad a ja b valida niisugused, et

$$a + b - 2 = 0,$$

$$a - b + 4 = 0;$$

lahendades neid a ja b suhtes leiame, et

$$a = -1, \quad b = 3;$$

tähendab

$$x = u - 1, \quad y = v + 3,$$

ja võrrand saab sellega homogeenneks

$$(u + v) du + (u + v) dv = 0.$$

Tähistame nüüd

$$v = ut,$$

siis

$$dv = t du + u dt.$$

Edasi lahendame kui homogeenet võrrandit

$$(u + ut) du + (u - ut)(t du + u dt) = 0,$$

$$\frac{1-t}{1+2t-t^2} dt = -\frac{du}{u},$$

$$\int \frac{1-t}{1+2t-t^2} dt = -\int \frac{du}{u},$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+2t-t^2) = -\ln u + \frac{1}{2} \ln c_1$$

$$1+2t-t^2 = \frac{c_1}{u^2};$$

kõrvaldame t :

$$1 + 2\frac{v}{u} - \frac{v^2}{u^2} = \frac{c_1}{u^2},$$

$$u^2 + 2uv - v^2 = c_1,$$

ja lõpuks, asetame u ja v asemele nende väärtused $u = x + 1$ ja $v = y - 3$, saame

$$(x+1)^2 + 2(x+1)(y-3) - (y-3)^2 = c_1,$$

ehk

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = c,$$

kus $c = c_1 + 14$. See võrrand kujutab hüperboolide parve.

2. näide. Leida differentsiaalvõrrandi

$$(3y - 7x + 7) dx + (7y - 3x + 3) dy = 0$$

üldlahendus.

Märgime

$$x = u + a, \quad y = v + b,$$

$$dx = du, \quad dy = dv,$$

saame homogeenise differentsiaalvõrrandi

$$(3v - 7u + 3b - 7a + 7) du + (7v - 3u + 7b - 3a + 3) dv = 0.$$

Kui

$$3b - 7a + 7 = 0,$$

$$7b - 3a + 3 = 0,$$

siis

$$a = 1, \quad b = 0,$$

ja

$$u = x - 1, \quad v = y.$$

Edasi lahendame homogeenet võrrandit

$$(3v - 7u) du + (7v - 3u) dv = 0,$$

märkides

$$v = ut \text{ ja } dv = t du + u dt,$$

siis

$$(3ut - 7u) du + (7ut - 3u) (t du + u dt) = 0,$$

$$\frac{7t - 3}{t^2 - 1} dt = -7 \frac{du}{u},$$

$$\int \frac{7t - 3}{t^2 - 1} dt = -7 \int \frac{du}{u},$$

$$2 \int \frac{dt}{t-1} + 5 \int \frac{dt}{t+1} = -7 \int \frac{du}{u},$$

$$2 \ln(t-1) + 5 \ln(t+1) = -7 \ln u + \ln c,$$

$$(t-1)^2 (t+1)^5 u^7 = c,$$

$$\left(\frac{v}{u} - 1\right)^2 \left(\frac{v}{u} + 1\right)^5 u^7 = c,$$

$$\left(\frac{y}{x-1} - 1\right)^2 \left(\frac{y}{x-1} + 1\right)^5 (x-1)^7 = c,$$

$$(y-x+1)^2 (y+x-1)^5 = c.$$

3. näide. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$(x+y+1) dx + (2x+2y-1) dy = 0$$

üldlahendus.

Siin võib märkida

$$x+y=t,$$

siis

$$dx+dy=dt.$$

Asetades

$$(t+1) dx + (2t-1) (dt-dx) = 0,$$

$$\frac{2t-1}{t-2} dt = -dx;$$

integrides

$$\int \frac{2t-1}{t-2} dt = 2 \int dt + 3 \int \frac{dt}{t-2} = - \int dx,$$

$$2t + 3 \ln(t-1) = -x + c$$

ja pannes t asemele $x + y$ saame

$$2(x + y) + 3 \ln(x + y - 1) = -x + c$$

ehk

$$3x + 2y + 3 \ln(x + y - 1) = c.$$

Ülesanded.

- 1) $(2x - y + 1) dx + (2y - x - 1) dy = 0$
- 2) $(3y - 2x - 7) dx + (4x - 5y + 13) dy = 0$
- 3) $(x + 7y + 2) dx - (3x + 5y + 6) dy = 0.$

§ 47. Bernoulli'i meetod.

Olgu differentsiaalvõrrand kujus

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = \varphi(x),$$

mis on esimese järgu lineaarne differentsiaalvõrrand, kus $f(x)$ ja $\varphi(x)$ on pidevad x -i funktsioonid.

Niisuguse võrrandi lahendamiseks on mitu meetodit. Käsitleme ühte neist, ja nimelt Bernoulli'i lahendusviisi.

Tähistame

$$y = uv,$$

mida differentsides saame

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Paigutame y ja $\frac{dy}{dx}$ jaoks saadud väärtused differentsiaalvõrrandisse

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + uv f(x) = \varphi(x)$$

ehk

$$u \frac{dv}{dx} + v \left[\frac{du}{dx} + u f(x) \right] = \varphi(x),$$

milles u olgu nõnda valitud, et

$$\frac{du}{dx} + u f(x) = 0;$$

siis

$$\frac{du}{u} = -f(x) dx$$

ja selle integraal

$$\ln u = -\int f(x) dx = -F(x).$$

Integrimiskonstanti ei tarvitse võtta, sest et meil tuleb anda u -le siin niisugune väärtus, et võrrandis $[\] = 0$; sellepärast

$$u = e^{-\int f(x) dx} = e^{-F(x)}.$$

Vastava u valiku juures võime differentsiaalvõrrandi kirjutada kujus

$$u \frac{dv}{dx} = \varphi(x)$$

ehk

$$dv = \frac{\varphi(x)}{u} dx = \varphi(x) e^{\int f(x) dx} dx,$$

millest integrides leiame

$$v = \int \varphi(x) e^{\int f(x) dx} dx = \Phi(x) + c$$

ja

$$y = uv = e^{-\int f(x) dx} \cdot \left[\int \varphi(x) \cdot e^{\int f(x) dx} dx \right]$$

ehk

$$y = e^{-F(x)} [\Phi(x) + c].$$

Märkus. Kui $\varphi(x) = 0$, siis on homogeenne differentsiaalvõrrand

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = 0,$$

mida lahendatakse muutujate eraldamisega, s. o.

$$\frac{dy}{y} = -f(x) dx,$$

$$\ln y = -\int f(x) dx = -F(x) + \ln c,$$

$$y = c e^{-F(x)}.$$

1. näide. Leida differentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$$

üldlahendus.

Kui

$$y = uv$$

ja

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx},$$

siis võime võrrandi kirjutada kujus

$$u \frac{dv}{dx} + v \left[\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} \right] = x,$$

kus

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0.$$

Viimast integrides saame u väärtuse:

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}, \quad \begin{aligned} \ln u &= \ln x, \\ u &= x. \end{aligned}$$

v leiame võrrandist

$$u \frac{dv}{dx} = x$$

integrimise teel:

$$dv = \frac{x}{u} dx = dx,$$

$$v = \int dx = x + c.$$

Sellega differentsiaalvõrrandi üldlahendus on

$$y = uv = x(x + c) = x^2 + cx,$$

mis kujutab 0-punkti läbi minevate paraboolide parve.

2. näide. Leida differentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$$

üldlahendus.

Tarvitame Bernoulli'i valemit

$$y = e^{-\int f(x) dx} \cdot \left[\int \varphi(x) \cdot e^{\int f(x) dx} dx \right],$$

kus

$$f(x) = -\frac{2}{x+1}, \quad \varphi(x) = (x+1)^2.$$

Siin

$$\int f(x) dx = -2 \int \frac{dx}{x+1} = -2 \ln(x+1),$$

$$e^{-\int f(x) dx} = e^{2 \ln(x+1)} = e^{\ln(x+1)^2} = (x+1)^2,$$

$$e^{\int f(x) dx} = \frac{1}{(x+1)^2},$$

$$\int \varphi(x) \cdot e^{\int f(x) dx} dx = \int (x+1)^2 \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx = x + c.$$

Tähendab, differentsiaalvõrrandi lahendus on

$$y = (x+1)^2 (x+c).$$

Katsume kas see lahendus on õige. Differentsime:

$$\frac{dy}{dx} = 2(x+1)(x+c) + (x+1)^2;$$

paigutame y ja $\frac{dy}{dx}$ väärtused algvõrrandisse, saame

$$2(x+1)(x+c) + (x+1)^2 - \frac{2(x+1)^2(x+c)}{x+1} = (x+1)^2$$

ehk

$$2(x+c) + (x+1) - 2(x+c) = (x+1),$$

millest näeme, et

$$0 = 0,$$

s. o. lahendus on õige.

3. näide. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sin x$$

üldlahendus.

Siin

$$f(x) = \tan x,$$

$$\varphi(x) = \sin x.$$

Integrides saame

$$\int f(x) dx = \int \tan x dx = \ln(\cos x),$$

$$e^{\int f(x) dx} = e^{\ln(\cos x)} = \cos x,$$

$$e^{-\int f(x) dx} = \frac{1}{\cos x},$$

$$\int \varphi(x) \cdot e^{\int f(x) dx} dx = \int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x + c}{2}$$

ja

$$y = \frac{\sin^2 x + c}{2 \cos x}.$$

Ülesanded.

$$1) \frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2} \cdot y = \frac{ax}{1-x^2}$$

$$3) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \sin 2x - y \cos x$$

$$2) \frac{dy}{dx} = ay + \cos x$$

$$4) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$5) (x^2 - 4) dy + (4xy - 1) dx = 0.$$

Ülesannete vastused.

§ 5.

- 1) $\frac{1}{2}$. 2) 0. 3) ∞ . 4) 0. 5) $\frac{1}{2}$. 6) 1. 7) $\frac{3}{2}$. 8) 2. 9) $\frac{1}{3}$. 10) $\frac{1}{\cos^2 a}$.

§ 6.

- 1) Pidev. 2) Pidev. 3) Katkev, kui $x = -1$. 4) Katkev, kui $x = 4$.
5) Katkev, kui $x = -3$. 6) Katkev, kui $x = 3$. 7) Pidev.

§ 8.

- 1) $3x^2$. 2) $24x^{23}$. 3) $100x^{99}$. 4) ax^{a-1} . 5) $(a+b)x^{a+b-1}$. 6) $4mx^{4m-1}$.
7) $(m+1)x^m$. 8) $(2-m)x^{1-m}$. 9) $(2m-3)x^{2m-4}$. 10) $4x + y + 4 = 0$.
11) $-\frac{3}{x^4}$. 12) $-\frac{6}{x^7}$. 13) $-\frac{33}{x^{34}}$. 14) $(2-n)x^{1-n}$. 15) $(n-1)x^{n-2}$.
16) $(m-n)x^{m-n-1}$. 17) $x + 2y - 1 = 0$. 18) $\frac{1}{3\sqrt{x^2}}$. 19) $\frac{2}{3\sqrt{x}}$. 20) $\frac{3\sqrt{x}}{2}$.
21) $\frac{7}{3}x^{\frac{3}{5}}$. 22) $-\frac{2}{3x\sqrt{x^2}}$. 23) $\frac{7}{12\sqrt{x^5}}$. 24) $30x^4$. 25) a . 26) $6ax^2$.
27) $2x^2$. 28) $-\frac{m}{x^2}$. 29) $-\frac{2}{ax^3}$. 30) $-\frac{15a}{x^4}$. 31) $-\frac{a}{2x^3}$. 32) $\frac{\sqrt{ax}}{2x}$.
33) Esimese kõverjoone üks normaal on $4x - y - 16 = 0$.
34) $10x^9 - 6x^5 + 2x$. 35) $6x^2 - 8x - 5$. 36) $3x^2 + 18x + a$.
37) $6a^2x - 3bx^2 - 2c$. 38) $\frac{3}{x^4} - \frac{5}{x^6} - \frac{1}{x^2}$. 39) $2x + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$.
40) $3x^3 - \frac{8}{5x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}$. 41) $\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{3\sqrt{x}}$. 42) Üks nurk on $71^\circ 34'$.
43) $2x - 2$. 44) $3x^2 + 3$. 45) $-3x^2$. 46) $-2x$. 47) $2 + 2x - 3x^2$.
48) $12 + 30x - 27x^2$. 49) $2m^2x - 6mnx^2 + 4n^2x^3$. 50) $3a^2 + 6ax + 3x^2$.
51) $5x^4 - 12x^2 + 4$. 52) $-x(x + 2a)$. 53) $\frac{2(x-3)}{x^5}$. 54) $\frac{9x^5 + 4}{3x^3}$.
55) $\frac{3x-4}{x^3}$. 56) $2(x+1)$. 57) Puutuja on $6x + y + 19 = 0$. 58) Üks
nurk on $2^\circ 18'$.

§ 9.

- 1) $\cos x$. 2) $\tan^2 x$. 3) $-2 \tan^2 x$. 4) $\sin x + \cos x$. 5) $\frac{1}{\sin^2 x}$.
6) $3x^2 + \frac{2}{\sin^2 x} - 3 \sin x$. 7) Ühe puutuja võrrand on $y - 1 = 0$.

§ 10.

- 1) $3(x-3)^2$. 2) $12x(3x^2-2)$. 3) $8ax(x^2-a^2)$. 4) $\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$. 5) $-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.
 6) $-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$. 7) $-\frac{2}{3\sqrt[3]{a-x}}$. 8) $6 \cos 6x$. 9) $-2 \sin(2x-3)$.
 10) $3 \sin^2 x \cos x$. 11) $-3x^2 \sin x^3$. 12) $\frac{2}{\cos^2(\frac{x}{2})}$. 13) $2 \sin 4x$.
 14) $-1,5 \sqrt{\sin 3x \tan 3x}$.

§ 11.

- 1) 0. 2) 2. 3) $6x$. 4) 2. 5) $\frac{6}{x^4}$. 6) $-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$. 7) $-\frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$.
 8) $-\frac{ab}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$. 9) $-9 \sin 3x$. 10) $-a^3 \cos ax$. 11) $-\frac{2}{\cos^3 x}$.
 12) $\frac{2}{\sin^3 x}$. 13) $f''(x) = 6x - 6$. 14) $f^{(7)}(x) = 0$. 15) $f'''(x) = -6$.
 16) $f''(x) = \frac{36}{x^5}$. 17) $f'''(x) = \frac{3x\sqrt{x} - 48}{8x^4}$. 18) $f^{(n)}(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$.

§ 12.

- 1) $B \equiv (0 | -3)$. 2) $B \equiv (1 | -1)$. 3) $A \equiv (-1,5 | 4,25)$. 4) $A \equiv (1 | 4)$.
 5) $B \equiv (2 | -11)$. 6) $C \equiv (0 | 5)$. 7) $C \equiv (0 | 4)$. 8) $C \equiv (1 | -8)$.
 9) $C \equiv (1 | 1)$. 10) $y_{\min} = -0,5$. 11) $y_{\max} = \sqrt{2}$. 12) $C \equiv (\frac{\pi}{4} | 0)$.
 13) $A \equiv (0,867 | 2,736)$. 14) $B \equiv (\frac{\pi}{3} | \frac{1}{2})$. 15) Aluspind = 600 m^2 .
 16) Platvormi pind = 1364 m^2 . 17) $h = 1,5 \text{ m}$. 18) Vöördsed. 19) 90° .
 20) $h = r \approx 6,8 \text{ cm}$. 21) a) $r \approx 16,3 \text{ cm}$; b) $r \approx 18,8 \text{ cm}$; c) kuup
 servaga $\approx 23,1 \text{ cm}$. 22) külgpind $\approx 252 \text{ cm}^2$. 23) $V_{\max} = \frac{4}{81} \pi r^2 h$.
 24) 6 m . 25) $h \approx 8,32 \text{ m}$.

§ 14.

- 1) $\frac{x^3}{3} + c$. 2) $2x^6 + c$. 3) $\frac{3}{32}x^8 + c$. 4) $\frac{ax^3}{3} + c$. 5) $c - \frac{1}{x}$. 6) $\frac{cx^3 - a}{3x^3}$.
 7) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$. 8) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{ax} + c$. 9) $x^3 - 2x + c$. 10) $0,5x^6 - 1,5x^2 + x + c$.

- 11) $c - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$. 12) $4\sqrt{x} - 4,5\sqrt[3]{x^2} + c$. 13) $\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}a^2x^3 + a^4x + c$.
 14) $x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + c$. 15) $\frac{x^4}{2} - \frac{5x}{2} - \frac{3}{2x} + c$. 16) $c - \frac{1}{4x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}$.
 17) $-5 \sin x + 2 \cos x + x + c$. 18) $2 \tan x + 3 \cot x + c$.
 19) $c - bx - a \cos x - c \cot x$. 20) $\tan x - \cot x + c$.

§ 16.

- 1) 6. 2) 8. 3) 1,25. 4) $\frac{a^6}{5}$. 5) 20. 6) $40\frac{5}{6}$. 7) $6\frac{2}{3}$. 8) $\frac{8}{3}a^3$. 9) 2.
 10) 2a. 11) 1. 12) 1.

§ 18.

- 1) $10\frac{2}{3}$. 2) $\frac{1}{2}$. 3) $11\frac{1}{8}$. 4) 18. 5) 3. 6) 36. 7) 1,5.

§ 19.

- 1) $\frac{\pi r^2 h}{3}$. 2) $\pi r^2 h$. 3) 288π . 4) 63π . 5) 80π . 6) $105\frac{1}{3}\pi$. 7) $8\frac{13}{15}\pi$.
 8) $23\frac{7}{15}\pi$. 9) Mahtu ei ole võimalik moodustada. 10) $V \approx 237\pi$.

§ 20.

- 1) $\frac{4c - (a - x)^4}{4}$. 2) $c + \sqrt{x^2 - 4}$. 3) $c - \frac{1}{a + x}$. 4) $\frac{1}{2n(m - nx)^2} + c$.
 5) $\frac{(1 + x^2) + 4c}{4}$. 6) $\frac{a^3}{3}$. 7) 0. 8) 2,84. 9) 0,68. 10) $3\sqrt[3]{2a}$.
 11) $\frac{\sin^2 x + 2c}{2}$. 12) $\frac{4c - \cot 4x}{4}$. 13) $\frac{3 \sin x - \sin^3 x + 3c}{3}$.
 14) $\frac{\tan^4 x + 4c}{4}$. 15) 2. 16) $\frac{3}{4}$. 17) -1,5. 18) 0.

§ 21.

- 1) $x(5x^3 - 2a^2)$. 2) $\frac{a^2 + 2x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$. 3) $\frac{3(x - a)}{2\sqrt{a - x}}$. 4) $\frac{3x(x^2 - a^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.
 5) $-\frac{11}{6}\sqrt[6]{(1 - x)^5}$. 6) $\sin x + x \cos x$. 7) $\frac{x(\sin 2x - x)}{\sin^2 x}$. 8) $2 \cos 4x$.
 9) $2 \cos^2 x$. 10) $-x \sin x$. 11) 2. 12) $2(a^2 - 6ax + 6x^2)$.
 13) $2(15x^4 - 10x^3 - 12x^2 - 3x + 3)$. 14) $-2 \sin 2x$.

- 15) $\cos x (3 \cos^2 x - 13 \sin^2 x)$. 16) $f'(x) = f''(x) = 0$. 17) Palgi paksus $\approx 19,05$ cm. 18) Maksimaalne külgpind, kui $r = h = 6$ cm; maksimaalne maht, kui $r = 2h = 8$ cm. 19) $r \approx 138$ cm, $h \approx 98$ cm; $\alpha \approx 66^\circ$. 20) 9 cm^2 .

§ 22.

- 1) $x \sin x + \cos x + c$. 2) $2x \sin x - x^2 \cos x + 2 \cos x + c$.
 3) $\frac{\sin x \cos x + x + c}{2}$. 4) $\frac{\cos^3 x \sin x}{2} + \frac{3}{8}(\sin x \cos x + x) + c$. 5) $\frac{1}{2}$.
 6) $\frac{2}{3}$. 7) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$. 8) 0. 9) π^2 .

§ 23.

- 1) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{(1-x)^3}$. 2) $\frac{dy}{dx} = \frac{3a-x}{2(a-x)}$. 3) $\frac{dy}{dx} = \frac{12x^2 - 16x + 9}{(2-3x)^2}$.
 4) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x(4+3x^3+2x^6)}{(1+x^3)^2}$. 5) $\frac{dy}{dx} = \frac{(2-x)(6+x)}{(2+x)^2}$.
 6) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+2x}{(1-x-x^2)\sqrt{(1-x-x^2)(1+x+x^2)}}$.
 7) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2-x^2)\sin x - 2x\cos x}{x^3}$. 8) $\frac{dy}{dx} = -\sin x \cdot (3 + \tan^2 x)$.
 9) $\frac{dy}{dx} = \frac{x \sin x}{\cos^2 x}$. 10) $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sin 2x - 1}$. 11) $\frac{d^2y}{dx^2} = 4 \cos 2x$.
 12) $\frac{dy}{dx} = \frac{(\sin x + \cos x)(1 - \sin 2x)}{\sin^2 x \cos^2 x}$. 13) $S_{\max} = 24 \text{ cm}^2$.

- 14) a) $S_{\max} \approx 3077 \text{ cm}^2$; b) $S_{\max} \approx 616 \text{ cm}^2$; c) $S_{\max} \approx 2263 \text{ cm}^2$;
 15) $S_{\max} = 1152 \text{ cm}^2$. 16) Põhjaserv $\approx 4,62$ m. 17) $V_{\max} = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$.
 18) 24. õda, lugedes tee sellest punktist, mis on esimesele sportlasele kõige ligemal. 19) 32,68 km. 20) a) Koonuse kõrgus $\approx 34,14$ cm; b) koonuse kõrgus = 40 cm. 21) 45 m (ligikaudu). 22) Langemisnurk = peegeldumisnurk. 23) $\frac{\text{Langemisnurk}}{\text{Murdumisnurk}} = \text{konst.}$ 24) On max ja min.

§ 25.

- 1) $\frac{1}{x}$. 2) $\frac{2}{x}$. 3) $\frac{\ln x}{x}$. 4) $\frac{2}{x^2 - 1}$. 5) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$. 6) $\cot x$.

- 7) $\frac{1}{\sin x \cos x}$. 8) $\frac{1}{x \ln x}$. 9) $\frac{1}{a} \ln(ax + b) + c$. 10) $c - \ln \sqrt{a^2 - x^2}$.
 11) $c - \ln \sqrt[3]{a^3 - x^3}$. 12) $c - \frac{1}{b} \ln(a + b \cos x)$. 13) $c - \ln(\cos x)$.
 14) $c + \ln(\sin x)$. 15) $\ln(x^2 + 4) + c$. 16) $\ln(x^2 + x) + c$.
 17) $\ln \sqrt{x^2 - 2x + 3} + c$. 18) $\ln \sqrt{10}$. 19) $18 \frac{2}{3} + \ln 2$. 20) $4\pi a^2$.
 21) $4\pi^2 a^3$. 22) $y_{\max} = -e^{-1}$.

§ 26.

- 1) $3a^{3x} \ln a$. 2) $2x e^{x^2}$. 3) $2^x \cdot x(x \ln 2 + 2)$. 4) $\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$
 5) $\frac{10^{\ln x} \cdot \ln 10}{x}$. 6) $\frac{a^x}{x}(x \ln x \ln a + 1)$. 7) $e^{\sin x}(x \cos x + 1)$.
 8) $2^{2x} \cdot 3^{3x} \cdot 4^{4x}(10 \ln 2 + 3 \ln 3)$. 9) $e^x(x-1) + c$. 10) $\frac{a^{2x} + c}{2 \ln a}$.
 11) $\frac{a^x(a^x + 2) + c}{2 \ln a}$. 12) $\frac{e^{5x}(5x + 4) + c}{25}$. 13) $\frac{e^{x^3} + c}{3}$.
 14) $\ln c(a + e^x)$. 15) $\frac{c - a^{\cos x}}{\ln a}$. 16) Ei saa. 17) Ei ole.
 18) $4 \left(\frac{1}{e\sqrt{e}} + \sqrt{e} \right)$. 19) $2(e^2 + e - e^{-1} - e^{-2})$. 20) $\frac{2}{3}e^3 - e^2 - \frac{2}{3}e\sqrt{e}$.
 21) $8\pi(e - 2)$.

§ 27.

- 1) $\frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$. 2) $-\frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$. 3) $\frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}$. 4) $-\frac{\ln a}{a^x + a^{-x}}$
 5) $-\frac{x + \arccos x \cdot \sqrt{1 + x^2}}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}$. 6) $\frac{2e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1 - 4x^2}}$. 7) $\arcsin x$.
 8) $\arctan x$. 9) $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$. 10) $x - \arctan x + c$.
 11) $\frac{(\arcsin x)^2 + c}{2}$. 12) $\frac{\pi}{4a}$. 13) $\frac{\pi}{6}$. 14) $\frac{\pi}{6}$. 15) $\frac{\pi}{2} + \ln 2 - 2$.
 16) $2 \arctan 4$. 17) $\frac{\pi}{2} - 1$. 18) Siis kui sisemine murdumisnurk =
 sisemine langemisnurk.

§ 28.

- 1) $\frac{x^2}{2} + x - \ln(x-1) + c$. 2) $\frac{x^2}{2} + \ln(x+1) + c$. 3) $\frac{x^2}{2} - x - 6\ln(x-2) + c$.
 4) $8 \ln(x-3) + 3x - \frac{x^2}{2} + c$. 5) $\frac{4}{3} \ln(x+2) + \frac{5}{4} \ln(x-1) + c$.
 6) $\ln c (x-5) \sqrt[4]{\left(\frac{x-5}{x-1}\right)^3}$. 7) $\frac{x^2}{2} + 3x - 12 \ln \frac{x-1}{x-2} + c$.
 8) $\frac{x^7}{7} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x + \ln(x^2-1) + c$. 9) $\frac{9}{x+1} + 4\ln(x+1) + c$.
 10) $\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{2}{x-1} + 3\ln(x+1) + c$. 11) $\ln(x-2) - \frac{2}{x-1} + c$.
 12) $\frac{1}{9} \left[\frac{3x^2 + x - 3}{3x + 1} - 2\ln(3x+1) + c \right]$. 13) $\arctan(x-3) + c$.
 14) $2 \ln(x^2 + 4x + 8) - 3 \arctan\left(\frac{x+2}{2}\right) + c$. 15) $\ln \sqrt{x^2 + 2x + 10} -$
 $-\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) + c$. 16) $\frac{x^3}{3} - 5x^2 + 51x - 5 \ln(x^2 + 10x + 50) + c$.
 17) $\ln \left[c (e^x - 1)(e^x + 2) \sqrt[3]{(e^x - 1)^2 (e^x + 2)} \right]$.

§ 29.

- 1) 44 (ligikaudu). 2) 14 (ligikaudu). 3) $a^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6} \right)$. 4) $2\pi^2 r^2 b$.
 5) $2\pi^2 abd$.

§ 30.

- 1) 4,7 (ligikaudu). 2) 5,2 (ligikaudu). 3) 6,8 (ligikaudu). 4) $\frac{1}{2} \ln 3$
 5) $\frac{2}{27} (28\sqrt{28} - 1) \approx 10,9$. 6) $2(e - e^{-1})$. 7) $4\sqrt[3]{3}$.

§ 31.

- 1) 74 (ligikaudu). 2) $2\pi \left(2\sqrt{2} + \ln \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \right) \approx 14$. 3) $4\pi^2 rb$.

§ 32.

- 1) a) 5,7 (ligikaudu); b) 8,7 (ligikaudu). 2) a) 1; b) ∞ .
 3) a) p ; b) $3p\sqrt{3}$. 4) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$. 5) $(3|1) \equiv$ maksimumpunkt.
 6) $\pm 0,386$ (ligikaudu).

§ 33.

- 1) $(0|0)$. 2) $(a - 5\sqrt{a}|a + 2,5\sqrt{a})$. 3) a) $(4\frac{1}{3}|0)$; b) $(10,27|\pm 2,64)$.
 4) a) $64x^2 + (8y - 1)^2 = 1$; b) $64(x + 64)^2 + (8y - 97)^2 = 65^3$.
 5) $(x - 2)^2 + (y + 13)^2 = \frac{1}{144}$ ehk $(x + 2)^2 + (y - 19)^2 = \frac{1}{144}$.

§ 35.

- 1) $v_x = -r\theta \sin \alpha$, $v_y = r\theta \cos \alpha$; $w_x = -r\theta^2 \cos \alpha$, $w_y = r\theta^2 \sin \alpha$.
 2) $v = a\sqrt{2} \sin 2t$; $w = 2a\sqrt{2} \cos 2t$. 3) 19,13 km. 4) $s = 0,04t^3 + 0,02t + 1$. 5) Kui $t = 0$ vöi $\frac{T}{2}$, siis $v = \max$ ja $w = \min$; kui $t = \frac{T}{4}$, siis $v = \min$ ja $w = \max$.

§ 37.

- 1) $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ 2) $1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \dots$
 3) $1 + x \ln a + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + \dots$ 4) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
 5) $x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 5} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots$ 6) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$
 7) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$ 8) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots$
 9) $1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^4}{8} + \dots$ 10) $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$ 11) $1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} + \frac{13x^6}{6!} - \dots$
 12) $e \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} - \dots \right)$ 13) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
 14) 3,141593 15) 0,6704. 16) 0,3140. 17) 0,9189. 18) 0,9928.
 19) 0,3673. 20) 0,6594. 21) 2,0794. 22) 2,4849. 23) -2,0794.
 24) -0,4463. 25) 0,9031. 26) 0,9542. 27) -0,6021. 28) 0,0969.

§ 39.

- 1) $\frac{3}{5}$. 2) 1. 3) $\frac{1}{2}$. 4) 0. 5) ∞ . 6) 0. 7) 0. 8) 2. 9) 0. 10) 1.
11) 1. 12) 1.

§ 40.

- 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 1$. 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy$. 4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}$. 5) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y$.
6) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$. 7) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -e^x$. 8) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{4(x-y)\sqrt{x-y}}$. 9) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y}$.
10) $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y^3 \sin^3\left(\frac{x}{y}\right)}$.

§ 41.

- 1) $dz = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}$. 2) $dz = 2u \ln v du + \frac{u^2}{v} dv$. 3) $dz = vu^{v-1} du + u^v \ln u dv$.
4) $dz = (vdu + u dv) \cos(uv)$. 5) $2x + \sin 2x$. 6) $2x + e^x(x+1)$. 7) $\cos 2x$.
8) $\frac{(\ln x - x) \cos\left(\frac{x}{\ln x}\right)}{\ln^2 x}$. 9) $-\frac{x}{y}$. 10) $\frac{b^2 x}{a^2 y}$. 11) $\frac{p}{y}$. 12) $\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$. 13) $\cos y$.

§ 44.

- 1) $2e^x + y^2 = c$. 2) Ringide võrrand, mille keskpunkt $\equiv (a | 0)$. 3) $y = a + c\sqrt{x}e^{-x}$.
4) $\frac{(c^2 - 4)x^2 - 2cx + 1}{4x^2}$. 5) $y = 1 + ce^{\arctan x}$. 6) $\cos x \cos y = c$. 7) 52,3 km.
8) $v = \frac{mv_0}{m + kv_0 t}$; $s = \frac{m}{k} \ln\left(1 + \frac{k}{m} v_0 t\right)$. 9) $\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot s + \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m} s^2} = v_0 e^{\sqrt{\frac{k}{m}} t}$.
10) $v = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt})$; $s = \frac{g}{k} \left(t - \frac{1 - e^{-kt}}{k}\right)$. 11) $y = c\sqrt[3]{e^x}$. 12) Parabol parameetriga $p = \frac{c}{2}$.

§ 45.

- 1) $x^2 + y^2 = ce^{2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$. 2) $y = x(cx^2 - 1)$. 3) $(x+y)^2(2x+y)^3 = c$.
4) $x^2 + y^2 = cx$. 5) $y = (x+y) \ln cx$. 6) $y = \frac{c - \cos x}{x+1}$. 7) $y^2 = 2cx + c^2$.

§ 46.

1) $x^2 - xy + y^2 + x - y = c.$ 2) $(y - x - 3)(5y - 2x - 9)^2 = c.$

3) $x + 5y + 2 = c(x - y + 2)^4.$

§ 47.

1) $y = a + c\sqrt{1-x^2}.$ 2) $y = ce^{ax} + \frac{\sin x - a \cos x}{a^2 + 1}.$ 3) $y = ce^{-\sin x} + \sin x - 1.$

4) $y = (x + \sqrt{1+x^2})(\arcsin x + c).$ 5) $y = \frac{x^3 - 12x + c}{3(x^2 - 4)^2}.$

Valemite tabel.

Piirväärtused:

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, kui $|x_n - a| < h$, kus h on lõpmata kahanev suurus.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0.$$

$$\lim (u \pm v) = \lim u \pm \lim v.$$

$$\lim (u \cdot v) = \lim u \cdot \lim v.$$

$$\lim \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{\lim u}{\lim v}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \approx 2,718.$$

Funktsiooni pidevuse tunnus:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |f(x + \Delta x) - f(x)| = 0, \quad \left| f(x) \right|_{x=a} = \text{lõplik.}$$

Funktsiooni katkevuse tunnus:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = m, \quad \lim_{a \leftarrow x} f(x) = n.$$

Funktsiooni tuletis:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \tan \alpha.$$

Differentsimisvalemid:

$$y = u \pm v \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$y = u \pm c \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$y = c \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = u \cdot v \quad \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$y = a \cdot u \quad \frac{dy}{dx} = a \frac{du}{dx}$$

$$y = \frac{u}{v} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$y = x \quad \frac{dy}{dx} = 1$$

$$y = x^n \quad \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$y = \sin x \quad \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$y = \cos x \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$y = \tan x \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \cot x \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$y = \ln x \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$y = \log x \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x}$$

$$y = e^x \quad \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$y = a^x \quad \frac{dy}{dx} = a^x \ln a$$

$$y = \arcsin x \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arccos x \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arctan x \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \operatorname{arccot} x \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Kümnendlogaritmi moodul:

$$M = \frac{1}{\ln 10} = \log e \approx 0,4343;$$

$$\log x = 0,4343 \cdot \ln x; \ln x = 2,3026 \cdot \log x.$$

Liitfunktsiooni tuletis:

kui $y = f(z)$ ja $z = \varphi(x)$, siis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = f'(z) \cdot \varphi'(x)$$

Kõrgema järgu tuletised :

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4 y}{dx^4}$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Maksimumi tunnus :

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ ja } \frac{d^2 y}{dx^2} < 0$$

$[f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n-1)}(x) = 0 \text{ ja } f^{(n)}(x) < 0, \text{ kus } n \text{ on paaris arv}]$

Miinumumi tunnus :

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ ja } \frac{d^2 y}{dx^2} > 0$$

$[f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n-1)}(x) = 0 \text{ ja } f^{(n)}(x) > 0, \text{ kus } n \text{ on paaris arv}]$

Käänupunkti tunnus :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \text{ ja } \frac{d^3 y}{dx^3} > 0$$

$[f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n-1)}(x) = 0 \text{ ja } f^{(n)}(x) \leq 0, \text{ kus } n \text{ on paaritu arv}]$

Kõverus ja kõveruseraadius :

$$\frac{1}{r} = \frac{q}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad r = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

$$\left[\text{kus } p = \frac{dy}{dx} \text{ ja } q = \frac{d^2 y}{dx^2} \right]$$

Kõveruse keskpunkti koordinaadid :

$$X = x - p \frac{1+p^2}{q}$$

$$Y = y + \frac{1+p^2}{q}$$

Kiirus :

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Nurkkiirus:

$$\Theta = \frac{d\alpha}{dt}$$

Kiirendus:

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Nurkkiirendus:

$$\omega = \frac{d\Theta}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

Kiiruse komponendid:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Kiirenduse komponendid:

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$$

Taylor'i rida:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \Delta x + \frac{f''(x)}{2!} \Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!} \Delta x^3 + \dots$$

Mac-Laurin'i rida:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Newton'i lähenemismeetod:

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad a_2 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}, \text{ jne.}$$

Määramatu kuju väärtus:

$$F(a) = \frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{f''(a)}{\varphi''(a)} = \dots$$

Osatuletised, täistuletis ja täisdifferentiaal:

kui $z = f(x, y)$, siis

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy;$$

kui $f(x, y) = 0$, siis

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Integrimisvalemid:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c$$

Ositi integrimine:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Ringi-integraal:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{r^2}{2} \arcsin \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + c$$

Ratsionaalsete murdfunktsioonide integrimine:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{mx+n}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{mx+n}{(x-a)(x-\beta)} dx = \\ &= \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{x-\beta} dx = A \ln(x-a) + B \ln(x-\beta) + c, \end{aligned}$$

$$\text{kus } A = \frac{ma+n}{a-\beta} \text{ ja } B = \frac{m\beta+n}{\beta-a}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{mx+n}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{mx+n}{(x-a)^2} dx = \\ &= \int \frac{A}{(x-a)^2} dx + \int \frac{B}{x-a} dx = -\frac{A}{x-a} + B \ln(x-a) + c, \end{aligned}$$

$$\text{kus } A = ma+n \text{ ja } B = m.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \frac{mx+n}{x^2+px+q} dx &= c_1 \int \frac{(2x+p)+c_2}{x^2+px+q} dx = \\ &= c_1 \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + c_1 c_2 \int \frac{dx}{(x+a)^2+k^2} = \\ &= c_1 \ln(x^2+px+q) + \frac{c_1 c_2}{k} \arctan\left(\frac{x+a}{k}\right) + c. \end{aligned}$$

Määratud integraal:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^{x=b} f(x) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx = \left| F(x) \right|_a^b = F(b) - F(a);$$

$$\int_a^a = 0; \quad \int_a^b = -\int_b^a; \quad \int_a^b = \int_a^c + \int_c^b, \quad (\text{kui } a < c < b)$$

Kvadratuur:

$$S = \int_a^b y dx$$

Kubatuur:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Rektifikatsioon:

$$s = \int_a^b \sqrt{1+p^2} dx, \quad (\text{kus } p = \frac{dy}{dx})$$

Komplanatsioon :

$$P = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + p^2} dx$$

Bernoulli'i meetod :

kui $\frac{dy}{dx} + yf(x) = \varphi(x)$, siis

$$y = e^{-\int f(x) dx} \cdot \left[\int \varphi(x) \cdot e^{\int f(x) dx} dx \right]$$

Harmoniline võnkumine :

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -k(s - s_0)$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}(s - s_0)^2}$$

$$s = s_0 + v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) = s_0 + a \cdot \sin \left(2\pi \frac{t}{T} \right)$$

$$v = \frac{2\pi a}{T} \cdot \cos \left(2\pi \frac{t}{T} \right)$$

$$w = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \cdot \sin \left(2\pi \frac{t}{T} \right)$$

Keha liikumine tasapinnal :

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -kv \quad v = v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$$

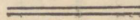
$$s = v_0 \cdot \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

Keha langemine õhus :

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg - R, \quad (R = \text{õhu takistus})$$

$$v = \frac{1}{c} \cdot \frac{e^{2cgt} - 1}{e^{2cgt} + 1}, \quad \left(c^2 = \frac{R}{mgv^2} \right)$$

$$e^{sg} = \frac{e^{cgt} + e^{-cgt}}{2}$$



Loomulikkude logaritmide ja juurte tabel 1 kuni 100.

n	$\ln n$	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	n	$\ln n$	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$
1	0,0000	1,0000	1,0000	51	3,9318	7,1414	3,7084
2	6931	4142	2599	52	9512	2111	7325
3	1,0986	7320	4422	53	9703	2801	7563
4	3863	2,0000	5874	54	9890	3485	7798
5	6094	2361	7100	55	4,0073	4162	8030
6	7918	4495	8171	56	0254	4833	8259
7	9459	6458	9129	57	0431	5498	8485
8	2,0794	8284	2,0000	58	0604	6158	8709
9	1972	3,0000	0801	59	0775	6811	8930
10	3026	1623	1544	60	0943	7460	9149
11	3979	3166	2240	61	1109	8102	9365
12	4849	4641	2894	62	1271	8740	9579
13	5649	6056	3513	63	1431	9373	9791
14	6391	7417	4101	64	1589	8,0000	4,0000
15	7081	8730	4662	65	1744	0623	0207
16	7726	4,0000	5198	66	1897	1240	0412
17	8332	1231	5713	67	2047	1854	0615
18	8904	2426	6207	68	2195	2462	0817
19	9444	3589	6684	69	2341	3066	1016
20	9957	4721	7144	70	2485	3666	1213
21	3,0445	5826	7589	71	2627	4261	1408
22	0910	6904	8020	72	2767	4853	1602
23	1355	7958	8439	73	2905	5440	1793
24	1781	8990	8845	74	3041	6023	1983
25	2189	5,0000	9240	75	3175	6603	2172
26	2581	0990	9625	76	3307	7178	2358
27	2958	1962	3,0000	77	3438	7750	2543
28	3322	2915	0366	78	3567	8318	2727
29	3673	3852	0723	79	3694	8882	2908
30	4012	4772	1072	80	3820	9443	3089
31	4340	5678	1414	81	3944	9,0000	3267
32	4657	6569	1748	82	4067	0554	3445
33	4965	7446	2075	83	4188	1104	3621
34	5264	8310	2396	84	4308	1652	3795
35	5553	9161	2711	85	4427	2195	3968
36	5835	6,0000	3019	86	4543	2736	4140
37	6109	0828	3322	87	4659	3274	4310
38	6376	1644	3620	88	4773	3808	4480
39	6636	2450	3912	89	4886	4340	4647
40	6889	3246	4200	90	4998	4868	4814
41	7136	4031	4482	91	5109	5394	4979
42	7377	4807	4760	92	5218	5917	5144
43	7612	5574	5034	93	5326	6437	5307
44	7842	6332	5303	94	5433	6954	5468
45	8067	7082	5569	95	5539	7468	5629
46	8286	7823	5830	96	5643	7980	5789
47	8501	8557	6088	97	5747	8489	5947
48	8712	9282	6342	98	5850	8995	6104
49	8918	7,0000	6593	99	5951	9499	6261
50	9120	0711	6840	100	6052	10,0000	6416
n	$\ln n$	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$	n	$\ln n$	\sqrt{n}	$\sqrt[3]{n}$

Nurgafunktsioonide loomulikkude väärtuste ja kaarepikkuste tabel 1^o kuni 90^o.

α°	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$	$\frac{\alpha \pi}{180}$	α°	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$	$\frac{\alpha \pi}{180}$
1	0,0175	0,0175	0,0175	46	0,7193	1,0355	0,8028
2	0349	0349	0349	47	7314	0724	8203
3	0523	0524	0524	48	7431	1106	8377
4	0698	0699	0698	49	7547	1504	8552
5	0872	0875	0873	50	7660	1918	8726
6	1045	1051	1047	51	7771	2349	8901
7	1219	1228	1222	52	7880	2799	9076
8	1391	1405	1396	53	7986	3270	9250
9	1564	1584	1571	54	8090	3764	9425
10	1736	1768	1745	55	8192	4281	9599
11	1908	1944	1920	56	8290	4826	9774
12	2079	2126	2094	57	8387	5399	9948
13	2250	2309	2269	58	8480	6003	1,0123
14	2419	2493	2443	59	8572	6643	0297
15	2588	2679	2618	60	8660	7321	0472
16	2756	2867	2793	61	8746	8040	0646
17	2924	3057	2967	62	8829	8807	0821
18	3090	3249	3142	63	8910	9626	0995
19	3256	3443	3316	64	8988	2,0503	1170
20	3420	3640	3491	65	9063	1445	1345
21	3584	3839	3665	66	9135	2460	1519
22	3746	4040	3840	67	9205	3559	1694
23	3907	4245	4014	68	9272	4751	1868
24	4067	4452	4185	69	9336	6051	2043
25	4226	4663	4363	70	9397	7475	2217
26	4384	4877	4538	71	9455	9042	2392
27	4540	5095	4712	72	9511	3,0777	2566
28	4695	5317	4887	73	9563	2709	2741
29	4848	5543	5061	74	9613	4874	2915
30	5000	5774	5236	75	9659	7321	3090
31	5150	6009	5411	76	9703	4,0108	3265
32	5299	6249	5585	77	9744	3315	3439
33	5446	6494	5759	78	9781	7046	3614
34	5592	6745	5934	79	9816	5,1446	3788
35	5736	7002	6108	80	9848	6713	3963
36	5878	7265	6283	81	9877	6,3138	4137
37	6018	7536	6457	82	9903	7,1154	4312
38	6157	7813	6632	83	9925	8,1443	4486
39	6293	8098	6807	84	9945	9,5144	4661
40	6428	8391	6981	85	9962	11,4301	4835
41	6561	8693	7156	86	9976	14,3007	5010
42	6691	9004	7331	87	9986	19,0811	5184
43	6820	9325	7505	88	9994	28,6363	5359
44	6947	9657	7679	89	9998	57,2900	5534
45	7071	1,0000	7854	90	1,0000	∞	5708
α°	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$	$\frac{\alpha \pi}{180}$	α°	$\sin \alpha$	$\tan \alpha$	$\frac{\alpha \pi}{180}$

Sin ja tan loomulikkude väärtuste ja kaarepikkuste tabel 1' kuni 1°.

α'	sin, tan, arcus.	α'	sin, tan, arcus.	α'	sin, tan, arcus.	α'	sin, tan, arcus.
1	0,0003	16	0,0047	31	0,0090	46	0,0134
2	0006	17	0049	32	0093	47	0137
3	0009	18	0052	33	0096	48	0140
4	0012	19	0055	34	0099	49	0143
5	0015	20	0058	35	0102	50	0145
6	0017	21	0061	36	0105	51	0148
7	0020	22	0064	37	0108	52	0151
8	0023	23	0067	38	0111	53	0154
9	0026	24	0070	39	0113	54	0157
10	0029	25	0073	40	0116	55	0160
11	0032	26	0076	41	0119	56	0163
12	0035	27	0079	42	0122	57	0166
13	0038	28	0081	43	0125	58	0169
14	0041	29	0084	44	0128	59	0172
15	0044	30	0087	45	0131	60	0175
α'	sin, tan, arcus.	α'	sin, tan, arcus.	α'	sin, tan, arcus.	α'	sin, tan, arcus.

SISU.

I peatükk. Funktsionaalne olenevus.

§ 1.	Konstantsed ja muutuvad suurused	5
§ 2.	Funktsiooni mõiste	6
§ 3.	Funktsioonide liigid	8
§ 4.	Funktsioonide graafiline kujutamine	13
§ 5.	Funktsiooni piiri mõiste	16
§ 6.	Funktsioonide pidevus ja katkevus	22

II peatükk. Funktsioonide differentsimine.

§ 7.	Funktsiooni tuletis ja differentsiaal	27
§ 8.	Mõned differentsimislauseid	35
§ 9.	Nurgafunktsioonide tuletised	43
§ 10.	Liitfunktsioonid	46
§ 11.	Kõrgema järgu tuletised	49
§ 12.	Maksimum, miinimum ja käänupunkt	53

III peatükk. Funktsioonide integreerimine.

§ 13.	Integraali mõiste	68
§ 14.	Mõned integreerimislauseid	70
§ 15.	Määramatu integraali graafiline kujutamine	73
§ 16.	Määratud integraal	75
§ 17.	Määratud integraali omadused	78
§ 18.	Kvadratuur	81
§ 19.	Kubatuur	84
§ 20.	Integreerimise asendamismeetod	88

IV peatükk. Korrutis- ja murdfunktsioonid.

§ 21.	Korrutisfunktsiooni tuletis	92
§ 22.	Ositi integreerimine	94
§ 23.	Murdfunktsiooni tuletis	96

V peatükk. Transsendentsed funktsioonid.

§ 24.	Arv e	99
§ 25.	Logaritmifunktsioon	102
§ 26.	Eksponentfunktsioon	109
§ 27.	Arkusfunktsioonid	112
§ 28.	Ratsionaalsete murdfunktsioonide integreerimine	117
§ 29.	Ringi-integraal	123
§ 30.	Rektifikatsioon	125
§ 31.	Komplanatsioon	129

VI peatükk. Joonte kõverus.

§ 32. Joone kõverus ja kõverusraadius	132
§ 33. Kõveruse keskpunkti koordinaadid	137

VII peatükk. Tuletiste mõte mehaanikas.

§ 34. Kiirus ja kiirendus	140
§ 35. Kiiruse ja kiirenduse komponendid	144

VIII peatükk. Read ja nende rakendused.

§ 36. Ridade koondumus ja hajumus	146
§ 37. Taylor'i ja Mac-Laurin'i read	151
§ 38. Newton'i lähenemismeetod	158
§ 39. Määramatud kujud	161

IX peatükk. Funktsioonide osaline ja täieline muutumine.

§ 40. Osatuletised	167
§ 41. Täistuletis ja täisdiferentsiaal	170

X peatükk. Diferentsiaalvõrrandid.

§ 42. Diferentsiaalvõrrandi mõiste	175
§ 43. Diferentsiaalvõrrandite lahendamine	176
§ 44. Muutujate eraldamine	180
§ 45. Homogeensed diferentsiaalvõrrandid	186
§ 46. Diferentsiaalvõrrandid, mis taanduvad homogeenseteks	189
§ 47. Bernoulli'i meetod	192
Ülesannete vastused	196
Valemite tabel	205
Loomulikkude logaritmid ja juurte tabel 1 kuni 100	212
Nurgafunktsioonide loomulikkude väärtuste ja kaarepikkuste tabel 1^0 kuni 90^0	213
Sin ja tan loomulikkude väärtuste ja kaarepikkuste tabel $1'$ kuni 1^0	214

Parametrisoid $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$

Köörvi keskpunkti koordinaatid: $\xi = x - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}}$; $\eta = y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}}$

raadius: $r = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}}$

köörvi: $k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$

Köörvi p. koordinaadid: $\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y'$; $\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$
 $r = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$

Polaarkoordinaadid: $x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$.

Pindala: $S = \frac{1}{2} \int_a^b (y\dot{x} - x\dot{y}) dt$; $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi$

Kinnise joontingimus $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$
 $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$

Osane pikkus: $S = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$; $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$

Keermeala: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f^2(\varphi) + f'^2(\varphi)} d\varphi$

param. $V = \pi \int_a^b y^2 \dot{x} dt$

polaarkoordinaadid: $V = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha}^{\beta} y(\dot{x}y - x\dot{y}) d\varphi$

$V = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha}^{\beta} f^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi$

Pindala kehtel:

$S = 2\pi \int_a^b y ds$

param.: $2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$

$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$

Polaark:

$2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi) \sin \varphi \sqrt{f^2(\varphi) + f'^2(\varphi)} d\varphi$

Abeli int. asendus: $x = \frac{b - 2\sqrt{c}t}{t^2 - a}$; $y = t \frac{b - 2\sqrt{c}t}{t^2 - a} + \sqrt{c}$
 $y^2 = ax^2 + bx + c$

c. hnt. lim $\sqrt[n]{a_n} = l$ $\begin{cases} l < 1 & \text{hooldus} \\ l > 1 & \text{hajuv} \end{cases}$

d'Alemberti $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ $\begin{cases} l < 1 & \text{hooldus} \\ l > 1 & \text{hajuv} \end{cases}$

e. int. hnt. $\int f(x) dx$ $\begin{cases} \text{olemas} & - \text{hooldus} \\ \text{ei ole} & - \text{hajuv} \end{cases}$

Rasbi t. $\lim n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = l$ $\begin{cases} l > 1 & \text{hooldus} \\ l < 1 & \text{hajuv} \end{cases}$

Hind 440 mk.

hind 440 mk.

