TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Sten Mattias Oksaar

Teoreem pöördfunktsioonist

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: dots Märt Põldvere, *PhD*

Tartu 2016

Teoreem pöördfunktsioonist

Bakalaureusetöö
Sten Mattias Oksaar

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös esitatakse teoreemile pöördfunktsioonist funktsionaalanalüüsi elementidele toetuv detailne tõestus. Teoreemist pöördfunktsioonist järeldatakse teoreem ilmutamata funktsioonist ning, vastupidi, esitatakse teoreemi pöördfunktsioonist tõestus järeldusena teoreemist ilmutamata funktsioonist.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.

Märksõnad: Funktsiooni diferentseeruvus, teoreem pöördfunktsioonist, teoreem ilmutamata funktsioonist.

Inverse function theorem

Bachelor's thesis
Sten Mattias Oksaar

Abstract. In this bachelor's thesis, a detailed proof of the inverse function theorem basing on elements of functional analysis is given. The implicit function theorem is proven as a corollary and, vice versa, the inverse function theorem is shown to follow from the implicit function theorem.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.

Keywords: Differentiability of a function, inverse function theorem, implicit function theorem.

Sisukord

Sissejuhatus

Teoreem pöördfunktsioonist mängib matemaatilises analüüsis väga olulist rolli, näiteks muutuja vahetuse valemi tõestuses kordse integraali jaoks.

Teoreem pöördfunktsioonist (vt teoreemi 3.1)**.** *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk, olgu funktsioon $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ pidevalt diferentseeruv ning olgu punkt $a \in U$ selline, et tuletis $f'(a)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on pööratav operaator. Siis leidub punkti a lahtine ümbrus $S \subset U$ nii, et*

(1) *ahend $f|_S$ on üksühene;*

(2) *tuletis $f'(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on pööratav operaator iga $x \in S$ korral;*

(3) *kujutishulk $T := f(S)$ on lahtine;*

(4) *funktsiooni $f|_S\colon S \to T$ pöördfunktsioon $g\colon T \to S$ on pidevalt diferentseeruv hulgas T, kusjuures*

$$g'(y) = f'\big(g(y)\big)^{-1} \quad \text{iga } y \in T \text{ korral.}$$

Tartu Ülikooli endises matemaatika instituudis ja tema eelkäijates loetud matemaatilise analüüsi kursustes on vähemalt viimase 30 aasta jooksul teoreem pöördfunktsioonist (juhul, kui ta on üldse eraldi välja toodud) järeldatud teoreemist ilmutamata funktsioonist. Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on, toetudes W. Rudini õpikule [R], esitada teoreemile pöördfunktsioonist iseseisev, funktsionaalanalüüsi elementidele (Banachi püsipunkti printsiibile ja teoreemile pööratavale operaatorile lähedase operaatori pööratavusest) toetuv tõestus. Juhime veel tähelepanu, et meie instituudis loetavates vastavates kursustes on antud kontekstis käsitletud võrrandite süsteemiga määratud (ilmutamata) funktsioon(id)e (süsteeme), kusjuures nende funktsioonide osatuletiste leidmisel on üheks olulisemaks tööriistaks Crameri reegel; funktsionaalanalüütilisema lähenemise puhul aga võimalusel hoidutakse (vektor)funktsioonide koordinaatide kaupa "lahtipudistamisest", mis võimaldab esitada teooriat olulisemalt kompaktsemal kujul.

Bakalaureusetöö koosneb neljast paragrahvist.

Esimeses paragrahvis toome sisse funktsiooni $U \to \mathbb{R}^m$, kus $U \subset \mathbb{R}^n$, diferentseeruvuse mõiste, veendume selle mõiste kooskõlas matemaatilise analüüsi kursusest tuntud ("mitme muutuja") funktsiooni $U \to \mathbb{R}$ diferentseeruvuse mõistega, selgitame funktsiooni $U \to \mathbb{R}^m$ ja teda määravate koordinaatfunktsionaalide $U \to \mathbb{R}$ diferentseeruvuse vahekorda ning tõestame diferentseeruvate funktsioonide ja tuletise olulisemad omadused

Teises osas toome välja järgmistes paragrahvides (teoreemi pöördfunktsioonist ja selle järeldusena teoreemi ilmutamata funktsioonist tõestustes) vajamineva funktsionaalanalüütilisemat laadi aparatuuri: me selgitame funktsiooni $U \to \mathbb{R}^m$, kus $U \subset \mathbb{R}^n$, pideva diferentseeruvuse vahekorda teda määravate koordinaatfunktsioonide $U \to \mathbb{R}$ pideva diferentseeruvusega, tõestame Lagrange'i keskväärtushinnangu funktsioonide $U \to \mathbb{R}^m$ jaoks, sõnastame Banachi püsipunkti printsiibi ning tõestame teoreemi pööratavale operaatorile $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lähedase operaatori pööratavusest.

Kolmandas paragrahvis tõestame käesoleva töö keskse tulemuse – teoreemi pöördfunktsioonist.

Neljandas paragrahvis sõnastame matemaatilise analüüsi kursusest tuttava teoreemi ilmutamata funktsioonist (täpsemalt, tema versiooni võrrandite süsteemiga määratud ilmutamata funktsioonide süsteemidest) ning, andes teoreemile ilmutamata funktsioonist kompaktsema kuju, tõestame ta järeldusena teoreemist pöördfunktsioonist. Töö lõpetuseks tõestame teoreemi pöördfunktsioonist omakorda järeldusena teoreemist ilmutamata funktsioonist.

Töös on kasutatud järgnevaid tähistusi.

Kõikjal käesolevas töös on n, m ja l fikseeritud naturaalarvud, s.t $n, m, l \in \mathbb{N}$. Punkti $x \in \mathbb{R}^n$ korral me eeldame, et tema koordinaadid on $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, s.t $x = (x_1, \ldots, x_n) =: (x_j)_{j=1}^n$, ning, teiselt poolt, etteantud arvude $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ korral me kasutame tähistust (ilma seda tähistust eraldi sisse toomata) $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. (Analoogilisi tähistusi me kasutame ka ruumide $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^l$ jms punktide y, z, h, k, u, v, w, a, b jms jaoks.) Ruumi $\mathbb{R}^n$ elementi $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tõlgendame me sobival juhul ka üheveerulise maatriksina

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

ja, vastupidi, üheveerulist maatriksit (0.1) tõlgendame sobival juhul järjendina $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Punkti $x \in \mathbb{R}^n$ ja reaalarvu $t \neq 0$ korral me kasutame kirjaviisi

$$\frac{x}{t} := \frac{1}{t}\, x = \Big(\frac{x_1}{t}, \ldots, \frac{x_n}{t}\Big).$$

Eukleidilist normi ruumis $\mathbb{R}^n$ tähistame sümboliga $|\cdot|$, s.t

$$|x| := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Lahtist ja kinnist kera ruumis $\mathbb{R}^n$ keskpunktiga $a \in \mathbb{R}^n$ ja raadiusega $r > 0$ tähistame me vastavalt sümbolitega $B(a,r)$ ja $\overline{B}(a,r)$, s.t

$$B(a,r) := \{x \in X\colon\ |x-a| < r\} \qquad \text{ja} \qquad \overline{B}(a,r) := \{x \in X\colon\ |x-a| \leqslant r\}.$$

Funktsiooni $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, kus $U \subset \mathbb{R}^n$, korral on $f_1, \ldots, f_m\colon U \to \mathbb{R}^m$ alati funktsiooni f määravad nn *koordinaatfunktsioonid*, s.t

$$f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\big) \quad \text{iga } x \in U \text{ korral,} \tag{0.2}$$

ja, vastupidi, etteantud funktsioonide $f_1, \ldots, f_m\colon U \to \mathbb{R}^m$ korral loeme funktsiooni $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ defineerituks võrdusega (0.2).

Kirjutades funktsioonide $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ ja $\phi\colon U \to \mathbb{R}$ korral

$$f(x) = o\big(\phi(x)\big) \quad \text{antud piirprotsessis,}$$

mõistame me selle all, et

$$\frac{f(x)}{\phi(x)} \longrightarrow 0 \quad \text{selles piirprotsessis.}$$

1. Funktsiooni $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ $(U \subset \mathbb{R}^n)$ diferentseeruvus

1.1. Funktsiooni $U \to \mathbb{R}^m$ $(U \subset \mathbb{R}^n)$ diferentseeruvuse mõiste

Definitsioon 1.1 (vt nt [R, lk 212])**.** Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk, olgu $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ ning olgu $x \in U$. Öeldakse, et funktsioon f on *diferentseeruv* punktis x, kui leidub lineaarne kujutus $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nii, et

$$\frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{|h|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0. \tag{1.1}$$

Kujutust A nimetatakse seejuures funktsiooni f *tuletiseks* punktis x ja tähistatakse sümboliga $f'(x)$ (allpool veendume, et operaatori f tuletis punktis x on üheselt määratud):

$$f'(x) := A.$$

Tähistades $W := \big\{h \in \mathbb{R}^n\colon\ x + h \in U\big\}$ ja defineerides funktsiooni $\alpha\colon W \to \mathbb{R}^m$,

$$\alpha(h) = f(x+h) - f(x) - Ah, \quad h \in W,$$

võime valemi (1.1) kirjutada kujul

$$f(x+h) - f(x) = Ah + \alpha(h), \quad \text{kus } \alpha(h) = o(|h|) \text{ protsessis } h \to 0. \tag{1.2}$$

Märkus 1.1. Märgime, et siin hulk W on lahtine. Tõepoolest $W \neq \varnothing$, sest hulk U on lahtine ja seega x on tema sisepunkt. Fikseerime vabalt $h \in W$. Hulga W lahtisuseks piisab näidata, et h on hulga W sisepunkt, s.t mingi $r > 0$ korral $B(h, r) \subset W$. Hulga W definitsiooni põhjal $x + h \in U$. Kuna U on lahtine, siis $x + h$ on hulga U sisepunkt, seega leidub $r > 0$ nii, et $B\big(x + h, r\big) \subset U$. Väite tõestuseks jääb nüüd näidata, et $B(h, r) \subset W$. Selleks, fikseerides vabalt punkti $z \in B(h, r)$, piisab näidata, et $z \in W$, s.t $x + z \in U$, milleks omakorda piisab näidata, et $x + z \in B\big(x + h, r\big)$, s.t $\big|x + z - (x + h)\big| < r$. Veendume selles:

$$\big|x + z - (x + h)\big| = \big|x + z - x - h\big| = |z - h| < r$$

(sest kuna $z \in B(h, r)$, siis $|z - h| < r$), nagu soovitud.

Teine võimalus hulga W lahtisuse tõestamiseks on panna tähele, et $W = -x + U$ ja kasutada fakti, et lahtise hulga nihe on lahtine.

Järgnev lause 1.1 ütleb, et operaator A eelnevast definitsioonist (s.t funktsiooni f tuletis $f'(x)$ punktis x) on üheselt määratud. (Sellise operaatori ühesus järeldub ka lausest 1.2 allpool, mille tõestus ei kasuta lauset 1.1.)

Lause 1.1. *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk, olgu $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ ning olgu $x \in U$. Siis leidub ülimalt üks tingimust* (1.1) *rahuldav lineaarne kujutus $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

Tõestus. Rahuldagu lineaarsed kujutused $A, B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vastavalt tingimusi (1.2) ja

$$f(x+h) - f(x) = Bh + \beta(h), \quad \text{kus } \beta(h) = o(|h|) \text{ protsessis } h \to 0.$$

Lause tõestuseks piisab näidata, et $A = B$, milleks, fikseerides vabalt $z \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, piisab näidata, et $Az = Bz$. Selleks märgime, et "piisavalt väikeste" $t > 0$ korral (täpsemalt, selliste $t > 0$ korral, mis rahuldavad tingimust $x + tz \in U$)

$$A(tz) + \alpha(tz) = B(tz) + \beta(tz),$$

seega ka

$$\frac{A(tz)}{|tz|} + \frac{\alpha(tz)}{|tz|} = \frac{B(tz)}{|tz|} + \frac{\beta(tz)}{|tz|},$$

millest, arvestades, et operaatorite A ja B lineaarsuse tõttu

$$\frac{A(tz)}{|tz|} = \frac{tA(z)}{t|z|} = \frac{Az}{|z|} \qquad \text{ja} \qquad \frac{B(tz)}{|tz|} = \frac{tB(z)}{t|z|} = \frac{Bz}{|z|},$$

saame, et

$$\frac{Az}{|z|} + \frac{\alpha(tz)}{|tz|} = \frac{Bz}{|z|} + \frac{\beta(tz)}{|tz|}. \tag{1.3}$$

Kuna $tz \xrightarrow[t \to 0+]{} 0$, siis tehtud eelduste põhjal

$$\frac{\alpha(tz)}{|tz|} \xrightarrow[t \to 0+]{} 0 \qquad \text{ja} \qquad \frac{\beta(tz)}{|tz|} \xrightarrow[t \to 0+]{} 0;$$

seega järeldub võrdusest (1.3) protsessis $t \to 0+$, et $\dfrac{Az}{|z|} = \dfrac{Bz}{|z|}$, millest $Az = Bz$, nagu soovitud. $\square$

1.2. Funktsiooni $U \to \mathbb{R}^m$ ($U \subset \mathbb{R}^n$) diferentseeruvuse mõiste kooskõla funktsiooni $U \to \mathbb{R}$ diferentseeruvuse mõistega

Selles punktis veendume, et ülaltoodud diferentseeruvuse definitsioon 1.1 on kooskõlas funktsiooni $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (st tavalise mitme muutuja funksiooni) diferentseeruvuse traditsioonilise definitsiooniga (nagu me tunneme seda matemaatilise analüüsi kursusest).

Definitsioon 1.2 (vt nt [ИП$_1$, lk 479] või [K$_2$, lk 173] või [Φ$_1$, lk 382])**.** Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk, olgu $f\colon\ U \to \mathbb{R}$ ning olgu $x \in U$. Öeldakse, et funktsioon f on *diferentseeruv* punktis x, kui leiduvad arvud $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ nii, et

$$f(x+h)-f(x) = a_1h_1+\cdots+a_nh_n+\alpha(h), \quad \text{kus } \alpha(h) = o(|h|) \text{ protsessis } h \to 0. \tag{1.4}$$

Märgime (vt nt vt nt [ИП$_1$, lk 480, teoreem 14.9] või [K$_2$, lk 174] või [Φ$_1$, lk 381–382]), et *kui funktsioon $f\colon\ U \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis $x \in U$, siis sellel funktsioonil eksisteerivad punktis x kõik esimest järku osatuletised, kusjuures need osatuletised on lõplikud; seejuures definitsioonis 1.2*

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, a_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x).$$

Veendume definitsioonide 1.1 ja 1.2 samaväärsuses juhul $m = 1$.

Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk.

Ühelt poolt, oletame, et funktsioon $f\colon\ U \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv definitsiooni 1.2 mõttes. See tähendab, et leiduvad arvud $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ nii, et kehtib (1.4). Defineerime kujutuse $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$Ah = a_1h_1 + \cdots + a_nh_n, \quad h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n; \tag{1.5}$$

siis A on lineaarne operaator, kusjuures kehtib (1.2). Seega f on diferentseeruv definitsiooni 1.1 mõttes.

Teiselt poolt, olgu funktsioon $f\colon\ U \to \mathbb{R}$ diferentseeruv definitsiooni 1.1 mõttes. See tähendab, et leidub lineaarne kujutus $A\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nii, et kehtib (1.2). Algebra kursusest teame, et leiduvad üheselt määratud arvud $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ nii, et kehtib (1.5), niisiis kehtib (1.4). Seega f on diferentseeruv definitsiooni 1.2 mõttes.

1.3. Funktsiooni $U \to \mathbb{R}^m$ ($U \subset \mathbb{R}^n$) ja teda määravate funktsioonide $U \to \mathbb{R}$ diferentseeruvuse vahekord

Lause 1.2. *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk, olgu $f\colon\ U \to \mathbb{R}^m$ ning olgu $x \in U$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on diferentseeruv punktis x;*

(ii) *funktsiooni f defineerivad funktsioonid $f_1, \ldots, f_m\colon\ U \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\big), \quad x \in U,$$

on diferentseeruvad punktis x.

Seejuures

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

TÕESTUS. (i)$\Rightarrow$(ii). Olgu funktsioon f diferentseeruv punktis $x \in U$, s.t (definitsiooni 1.1 põhjal) leidub lineaarne operaator $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nii, et kehtib (1.2). Algebra kursusest teame, et lineaarne operaator $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on üheselt määratud (reaal)arvmaatriksiga

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kus iga $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ korral

$$Ah = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}h_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}h_j \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}h_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj}h_j \right).$$

Olgu $\alpha_1, \dots, \alpha_m\colon W = \big\{h \in \mathbb{R}^n\colon\ x + h \in U\big\} \to \mathbb{R}^m$ funktsiooni $\alpha\colon W \to \mathbb{R}$ määravad funktsioonid (tingimuses (1.2)), s.t

$$\alpha(h) = \big(\alpha_1(h), \dots, \alpha_m(h)\big), \quad h = (h_1, \dots, h_n) \in W. \tag{1.7}$$

Tingimus $\alpha(h) = o(|h|)$ protsessis $h \to 0$ tähendab, et

$$\frac{\alpha(h)}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

ehk

$$\left(\frac{\alpha_1(h)}{|h|}, \dots, \frac{\alpha_m(h)}{|h|} \right) \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

s.t iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral

$$\frac{\alpha_i(h)}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

ehk, teisisõnu,

$$\alpha_i(h) = o(|h|) \quad \text{protsessis } h \to 0. \tag{1.8}$$

Kuna iga $h \in W$ korral

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \big(f_1(x+h), \dots, f_m(x+h)\big) - \big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big) \\ &= \big(f_1(x+h) - f_1(x), \dots, f_m(x+h) - f_m(x)\big) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} Ah + \alpha(h) &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}h_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}h_j\right) + \big(\alpha_1(h), \ldots, \alpha_m(h)\big) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}h_j + \alpha_1(h), \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}h_j + \alpha_m(h)\right), \end{aligned}$$

siis tingimus (1.2) tähendab, et iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral

$$f_i(x+h) - f_i(x) = a_{i1}h_1 + \cdots + a_{in}h_n + \alpha_i(h), \quad \text{kus } \alpha_i(h) = o(|h|) \text{ protsessis } h \to 0. \tag{1.9}$$

Tingimus (1.9) tähendab, et funktsioon $f_i\colon U \to \mathbb{R}^m$ on diferentseeruv punktis x; seejuures

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \quad \text{iga } j \in \{1, \ldots, n\} \text{ korral,}$$

s.t kehtib (1.6).

(ii)⇒(i). Eeldame, et funktisoonid $f_1, \ldots, f_m$ on diferentseeruvad punktis x, s.t iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral leiduvad arvud $a_{i1}, \ldots a_{in} \in \mathbb{R}$ nii, et

$$f_i(x+h) - f_i(x) = a_{i1}h_1 + \cdots + a_{in}h_n + \alpha_i(h) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}h_j + \alpha_i(h),$$

kus funktsioon $\alpha_i\colon W := \big\{h \in \mathbb{R}^n\colon\ x + h \in U\big\} \to \mathbb{R}$ rahuldab tingimust $\alpha_i(h) = o(|h|)$ protsessis $h \to 0$. Nüüd

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \big(f_1(x+h), \ldots, f_m(x+h)\big) - \big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\big) \\ &= \big(f_1(x+h) - f_1(x), \ldots, f_m(x+h) - f_m(x)\big) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}h_j + \alpha_1(h), \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}h_j + \alpha_m(h)\right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}h_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}h_j\right) + \big(\alpha_1(h), \ldots, \alpha_m(h)\big) \\ &= Ah + \alpha(h), \end{aligned}$$

kus

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ja funktsioon $\alpha\colon W \to \mathbb{R}^m$ on defineeritud võrdusega (1.7).

Funktsiooni f diferentseeruvuseks punktis x jääb näidata, et

$$\alpha(h) = o(|h|) \quad \text{protsessis } h \to 0.$$

Viimane tingimus on implikatsiooni (i)⇒(ii) tõestuses sisaldunud arutelu põhjal samaväärne tingimusega (1.8) iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral, mis kehtib eespool tehtud eelduse põhjal. □

1.4. Diferentseeruvate funktsioonide ja tuletise omadusi

Lause 1.3. (a) *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk ning olgu funktsioon $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ diferentseeruv punktis $x \in U$. Siis f on pidev punktis x.*

(b) *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk ning olgu $v \in \mathbb{R}^m$. Siis (konstantne) funktsioon $f\colon U \to \mathbb{R}^m$,*

$$f(x) = v, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

on diferentseeruv igas punktis $x \in U$, kusjuures

$$f'(x) = 0 \quad \textit{iga } x \in U \textit{ korral.}$$

(c) *Lineaarne operaator $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on diferentseeruv, kusjuures*

$$A'(x) = A \quad \textit{iga } x \in \mathbb{R}^n \textit{ korral.}$$

(d) *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $V \subset \mathbb{R}^m$ lahtised hulgad. Kui funktsioon $f\colon U \to V$ on diferentseeruv punktis $x_0 \in U$ ning funktsioon $g\colon V \to \mathbb{R}^l$ on diferentseeruv punktis $y := f(x_0) \in V$, siis liitfunktsioon $h = gf\colon V \to \mathbb{R}^l$,*

$$h(x) = (gf)(x) = g\big(f(x)\big), \quad x \in U,$$

on diferentseeruv punktis x_0, kusjuures

$$h'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0). \tag{1.10}$$

(e) *Olgu $U \subset \mathbb{R}^m$ lahtine hulk, olgu funktsioonid $f, g\colon U \to \mathbb{R}^n$ diferentseeruvad punktis $x_0 \in U$ ning olgu $\alpha \in \mathbb{R}$. Siis*

(e1) *funktsioon $f + g\colon U \ni x \longmapsto f(x) + g(x) \in \mathbb{R}^m$ on diferentseeruv punktis x_0, kusjuures*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

(e2) *funktsioon* $\alpha f\colon U \ni x \longmapsto \alpha f(x) \in \mathbb{R}^m$ *on diferentseeruv punktis* x_0, *kusjuures*

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0).$$

TÕESTUS. (a). Funktsiooni f diferentseeruvuse tõttu punktis x leidub lineaarne operaator $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nii, et

$$f(x+h) - f(x) = Ah + \alpha(h), \quad \text{kus } \alpha(h) = o(|h|) \text{ protsessis } h \to 0.$$

Kuna $Ah \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ (sest iga lineaarne operaator lõplikumõõtmelisel ruumil $\mathbb{R}^n$ on pidev – vt nt [OO, lk 122, järeldus]) ja $\alpha(h) = \dfrac{\alpha(h)}{|h|}\,|h| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, siis $f(x+h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$, mis tähendabki funktsiooni f pidevust punktis x.

(b). Olgu $x \in U$. Väite tõestuseks piisab (definitsiooni 1.1 põhjal) näidata, et

$$\frac{f(x+h) - f(x) - 0h}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Veendume selles:

$$\frac{f(x+h) - f(x) - 0h}{|h|} = \frac{f(x+h) - f(x)}{|h|} = \frac{v - v}{|h|} = \frac{0}{|h|} = 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

(c). Olgu $x \in U$. Väite tõestuseks piisab (definitsiooni 1.1 põhjal) näidata, et

$$\frac{A(x+h) - Ax - Ah}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Veendume selles:

$$\frac{A(x+h) - Ax - Ah}{|h|} = \frac{Ax + Ah - Ax - Ah}{|h|} = \frac{0}{|h|} = 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

(d). Olgu funktsioon $f\colon U \to V$ diferentseeruv punktis $x_0 \in U$ ning olgu funktsioon $g\colon V \to \mathbb{R}^l$ diferentseeruv punktis $y := f(x_0) \in V$. Näitame, et liitfunktsioon $h = gf\colon V \to \mathbb{R}^l$,

$$h(x) = (gf)(x) = g\big(f(x)\big), \quad x \in U,$$

on diferentseeruv punktis x_0, kusjuures kehtib (1.10).

Tähistame $A := f'(x_0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $B := g'\big(f(x_0)\big)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ ning $C := g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0) = BA\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$. Peame näitama, et $C = h'(x_0)$, s.t

$$h(x_0+h) - h(x_0) = Ch + \gamma(h), \quad \text{kus } \gamma(h) = o(|h|) \text{ protsessis } h \to 0.$$

Kuna $A = f'(x_0)$ ja $B := g'\big(f(x_0)\big)$, siis

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \alpha(h), \quad \text{kus } \alpha(h) = o(|h|) \text{ protsessis } h \to 0,$$

ja

$$g\big(f(x_0) + \kappa\big) - g\big(f(x_0)\big) = B\kappa + \beta(\kappa), \quad \text{kus } \beta(\kappa) = o(|\kappa|) \text{ protsessis } \kappa \to 0.$$

Nüüd, tähistades $\kappa(h) := f(x_0 + h) - f(x_0)$, saame

$$\begin{aligned} h(x_0 + h) - h(x_0) &= g\big(f(x_0 + h)\big) - g\big(f(x_0)\big) \\ &= g\big(f(x_0) + \kappa(h)\big) - g\big(f(x_0)\big) = B\kappa(h) + \beta\big(\kappa(h)\big) \\ &= B\big(f(x_0 + h) - f(x_0)\big) + \beta\big(\kappa(h)\big)\big) = B\big(Ah + \alpha(h)\big) + \beta\big(\kappa(h)\big) \\ &= B(Ah) + B\big(\alpha(h)\big) + \beta\kappa(h) = Ch + \gamma(h), \end{aligned}$$

kus $\gamma(h) = B\big(\alpha(h)\big) + \beta\big(\kappa(h)\big)$. Väite tõestuseks jääb näidata, et $\gamma(h) = o(|h|)$, s.t

$$\frac{\gamma(h)}{|h|} = \frac{B\big(\alpha(h)\big) + \beta\big(\kappa(h)\big)}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Kuna $\alpha(h) = o(|h|)$ protsessis $h \to 0$, siis $\dfrac{\alpha(h)}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, järelikult arvestades, et operaator B on lineaarne ja pidev (sest iga lineaarne operaator lõplikumõõtmelisel ruumil $\mathbb{R}^m$ on pidev – vt nt [OO, lk 122, järeldus]),

$$\frac{B\big(\alpha(h)\big)}{|h|} = B\left(\frac{\alpha(h)}{|h|}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Jääb näidata, et

$$\frac{\beta\big(\kappa(h)\big)}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

milleks, fikseerides vabalt $h^k \in W$, $k \in \mathbb{N}$, nii, et $h^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, piisab näidata, et

$$\frac{\beta\big(\kappa(h^k)\big)}{|h^k|} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \tag{1.11}$$

Iga $h \in W$ korral

$$\frac{\beta\big(\kappa(h)\big)}{|h|} = \begin{cases} \dfrac{\beta\big(\kappa(h)\big)}{|\kappa(h)|}\dfrac{|\kappa(h)|}{|h|}, & \text{kui } \kappa(h) \neq 0, \\ \beta(0) = 0, & \text{kui } \kappa(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) = 0. \end{cases}$$

Seega võime üldisust kitsendamata eeldada, et $\kappa(h^k) \neq 0$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Kuna

$\kappa(h) = o(|h|)$ protsessis $h \to 0$, s.t $\dfrac{\kappa(h)}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, siis $\dfrac{\kappa(h^k)}{|h^k|} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Kuna $\beta(\kappa) = o(|\kappa|)$ protsessis $\kappa \to 0$, s.t $\dfrac{\beta(\kappa)}{|\kappa|} \xrightarrow[\kappa\to 0]{} 0$, siis ka $\dfrac{\beta\big(\kappa(h^k)\big)}{\kappa(h^k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ (sest $\kappa(h^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$). Seega kehtib (1.11) ja sellega on väide tõestatud.

(e1). Väite tõestuseks piisab (definitsiooni 1.1 põhjal) näidata, et

$$\frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0) - \big(f'(x_0) + g'(x_0)\big)h}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Veendume selles: definitsiooni 1.1 põhjal

$$\begin{aligned}
&\frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0) - \big(f'(x_0) + g'(x_0)\big)h}{|h|} \\
&\quad = \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0) - f'(x_0)h - g'(x_0)h}{|h|} \\
&\quad = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{|h|} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0) - g'(x_0)h}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

(e2). Väite tõestuseks piisab (definitsiooni 1.1 põhjal) näidata, et

$$\frac{(\alpha f)(x_0+h) - (\alpha f)(x_0) - \big(\alpha f'(x_0)\big)h}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Veendume selles: definitsiooni 1.1 põhjal

$$\begin{aligned}
&\frac{(\alpha f)(x_0+h) - (\alpha f)(x_0) - \big(\alpha f'(x_0)\big)h}{|h|} \\
&\quad = \frac{\alpha f(x_0+h) - \alpha f(x_0) - \alpha f'(x_0)h}{|h|} \\
&\quad = \alpha\,\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} \alpha\, 0 = 0.
\end{aligned}$$

$\square$

2. Abiteoreemid

Kõigil selles paragrahvis esitatavatel teoreemidel on ka iseseisev teoreetiline tähtsus, kuid käesoleva töö seisukohalt on nad eelkõige abitulemused teoreemi pöördfunktsioonist tõestamiseks.

Funktsionaalanalüüsi sissejuhatavast kursusest teame (vt nt [OO, lk 123–124]), et kui X ja Y on normeeritud ruumid, siis kõigi pidevate lineaarsete operaatorite $X \to Y$ vektorruum $L(X,Y)$ on normeeritud ruum järgmise normi suhtes:

$$\begin{aligned} \|A\| := \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\leqslant 1}} \|Ax\| &= \inf\big\{M \geqslant 0\colon\ \|Ax\| \leqslant M\|x\| \text{ iga } x \in X \text{ korral}\big\} \\ &= \min\big\{M \geqslant 0\colon\ \|Ax\| \leqslant M\|x\| \text{ iga } x \in X \text{ korral}\big\}, \quad A \in L(X,Y); \end{aligned}$$

niisiis, kui $A \in L(X,Y)$, siis

$$\|Ax\| \leqslant \|A\|\,\|x\| \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Edasises kasutame korduvalt järgmist kergestikontrollitavat hinnangut (vt nt [OO, lk 125, lause]): kui X, Y ja Z on normeeritud ruumid ning $A \in L(X,Y)$ ja $B \in L(Y,Z)$, siis $BA \in L(X,Z)$, kusjuures

$$\|BA\| \leqslant \|B\|\,\|A\|.$$

Märgime veel (vt nt [OO, lk 122, järeldus]), et kui X ja Y on normeeritud ruumid, kusjuures ruum X on lõplikumõõtmeline, siis iga lineaarne operaator $X \to Y$ on pidev, niisiis $L(X,Y)$ koosneb kõikvõimalikest lineaarsetest operaatoritest $X \to Y$.

2.1. Pidevalt diferentseeruvad funktsioonid

Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk ning olgu funktsioon $f\colon\ U \to \mathbb{R}^n$ diferentseeruv hulgas U. Siis on hulgas U määratud *tuletisoperaator* (millele me edasises viitame ka lihtsalt kui operaatori f *tuletisele*)

$$f'\colon\ U \ni x \longmapsto f'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m). \tag{2.1}$$

Definitsioon 2.1. Öeldakse, et funktsioon $f\colon\ U \to \mathbb{R}^m$ on *pidevalt diferentseeruv* (hulgas U), kui tuletisoperaator (2.1) on pidev hulgas U.

Osutub, et funktsiooni f pidev diferentseeruvus on samaväärne teda määravate funktsioonide $f_1, \ldots, f_m \colon U \to \mathbb{R}$ pideva diferentseeruvusega.

Lause 2.1. *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk, olgu $f \colon U \to \mathbb{R}^m$ ning olgu $f_1, \ldots, f_m \colon U \to \mathbb{R}$ funktsiooni f defineerivad funktsioonid, s.t*

$$f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\big), \quad x \in U.$$

(a) *Olgu $x \in U$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on diferentseeruv punkti x mingis ümbruses, kusjuures tuletis(operaator)* (2.1) *on pidev punktis x;*

(ii) *funktsioonid $f_1, \ldots, f_m$ on diferentseeruvad punkti x mingis ümbruses, kusjuures osatuletised*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \qquad i = 1, \ldots, m, \;\; j = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

on pidevad punktis x.

(b) *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on pidevalt diferentseeruv hulgas U;*

(ii) *funktsioonid $f_1, \ldots, f_m$ on diferentseeruvad hulgas U, kusjuures osatuletised* (2.2) *on pidevad hulgas U.*

Lause 2.1 tõestus toetub oluliselt funktsionaalanalüüsi sissejuhatavast kursusest tuntud tulemusele, mille kohaselt mis tahes kaks normi lõplikumõõtmelises vektorruumis on ekvivalentsed.

Definitsioon 2.2 (vt nt [OO, lk 87])**.** Öeldakse, et normid $\|\cdot\|$ ja $|||\cdot|||$ vektorruumis X on *ekvivalentsed,* kui leiduvad arvud $\alpha, \beta > 0$ nii, et

$$\alpha\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant \beta\|x\| \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Lause 2.2 (vt nt [OO, lk 88, järeldus])**.** *Kui jada vektorruumis koondub mingi normi suhtes, siis ta koondub samaks elemendiks ka mis tahes selle normiga ekvivalentse normi suhtes.*

Teoreem 2.3 (vt nt [OO, lk 91, järeldus 2])**.** *Lõplikumõõtmelises vektorruumis on kõik normid paarikaupa ekvivalentsed.*

LAUSE 2.1 TÕESTUS. (b) on vahetu järeldus väitest (a).

(a). Defineerime ruumis $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ normi

$$|||A||| = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} |a_{ij}|, \quad A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),$$

kus $(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ on operaatorit A esitav maatriks, s.t iga $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ korral

$$Ah = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} h_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} h_j \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} h_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{mj} h_j \right).$$

Kuna ruum $L(X, Y)$ on lõplikumõõtmeline, siis norm $|||\cdot|||$ on ekvivalentne "tavalise" normiga $\|\cdot\|$ selles ruumis, s.t normiga

$$\|A\| = \sup_{\substack{h \in \mathbb{R}^n \\ |h| \leqslant 1}} |Ah|, \quad A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

(i)$\Rightarrow$(ii). Kehtigu (i). Siis funktsioon f on diferentseeruv punkti x mingis ümbruses, seega lause 1.2 põhjal ka funktsioonid $f_1, \ldots, f_m$ on diferentseeruvad punkti x sellessamas ümbruses; niisiis jääb implikatsiooni tõestuseks näidata, et osatuletised (2.2) on pidevad punktis x.

Olgu punktid $x^k \in U$, $k \in \mathbb{N}$, sellised, et $x^k \xrightarrow[k \to \infty]{} x$ ruumis $\mathbb{R}^n$. Osatuletiste (2.2) pidevuseks piisab näidata, et

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^k) \xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \qquad \text{kõikide } i \in \{1, \ldots, m\} \text{ ja } j \in \{1, \ldots, n\} \text{ korral.} \tag{2.3}$$

Kuna operaatorite $f'(x^k)$, $k \in \mathbb{N}$, ja $f'(x)$ esitus maatrikskujul on (lause 1.2 põhjal) vastavalt

$$f'(x^k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^k) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^k) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{ja} \quad f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix},$$

siis iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$f'(x^k) - f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^k) - \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^k) - \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^k) - \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^k) - \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

ning järelikult

$$|||f'(x^k) - f'(x)||| = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} \left|\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^k) - \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x)\right|; \tag{2.4}$$

niisiis on tingimus (2.3) samaväärne tingimusega

$$|||f'(x^k) - f'(x)||| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \tag{2.5}$$

mis normide $|||\cdot|||$ ja $\|\cdot\|$ ekvivalentsuse tõttu on (lause 2.2 põhjal) samaväärne tingimusega

$$\|f'(x^k) - f'(x)\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \tag{2.6}$$

Viimane tingimus järeldub tuletisoperaatori (2.1) pidevusest punktis x.

(ii)⇒(i). Kehtigu (ii). Siis funktsioonid $f_1, \dots, f_m$ on diferentseeruvad punkti x mingis ümbruses, seega lause 1.2 põhjal ka funktsioon f on diferentseeruv punkti x sellessamas ümbruses; niisiis jääb implikatsiooni tõestuseks näidata, et tuletisoperaator (2.1) on pidev punktis x.

Olgu punktid $x^k \in U$, $k \in \mathbb{N}$, sellised, et $x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$ ruumis $\mathbb{R}^n$. Tuletisoperaatori (2.1) pidevuseks punktis x piisab näidata, et $f'(x^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f'(x)$ ruumis $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, s.t kehtib (2.6), mis normide $\|\cdot\|$ ja $|||\cdot|||$ ekvivalentsuse tõttu on (lause 2.2 põhjal) samaväärne tingimusega (2.5), mis implikatsiooni (i)⇒(ii) tõestuses põhjendatud võrduste (2.4) põhjal on samaväärne tingimusega (2.3), mis järeldub eeldusest osatuletiste (2.2) pidevuse kohta punktis x. □

2.2. Lagrange'i keskväärtushinnang

Tähistame vektorite $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ skalaarkorrutise (ruumis $\mathbb{R}^n$) sümboliga $x \cdot z$, s.t

$$x \cdot z := \sum_{j=1}^{n} x_j\, z_j = x_1\, z_1 + \cdots + x_n\, z_n.$$

Kehtib *Cauchy–Bunjakovski–Schwarzi võrratus* (vt nt [K, lk 264, lause 9.1.4])

$$|x \cdot z|^2 \leqslant |x|\,|z| \quad \text{kõikide } x, z \in \mathbb{R}^n \text{ korral}$$

(siin $|x \cdot z|$ tähistab elementide x ja z skalaarkorrutise absoluutväärtust ning $|x|$ ja $|z|$ vastavalt elementide x ja z (eukleidilisi) norme ruumis $\mathbb{R}^n$).

Teoreem 2.4 (vt nt [R, lk 113, teoreem 5.19]). *Olgu pidev funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ diferentseeruv vahemikus (a,b). Siis leidub $\xi \in (a,b)$ nii, et*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant |f'(\xi)|(b-a)$$

(siin tõlgendame tuletist $f'(\xi)$ (mis on tõlgendatav m-realise üheveerulise maatriksina) ruumi $\mathbb{R}^m$ elemendina).

Tõestus. Tähistame $z := f(b) - f(a) \in \mathbb{R}^m$ ja defineerime funktsiooni $\varphi\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = z \cdot f(t), \quad t \in [a,b].$$

Paneme tähele, et $\varphi = gf$ (s.t iga $t \in [a,b]$ korral $\varphi(t) = g\big(f(t)\big)$), kus funktsioon $g\colon\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ on defineeritud võrdusega

$$g(y) = z \cdot y, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Funktsioon g on lineaarne, seega igas punktis $y \in \mathbb{R}^m$ diferentseeruv ning järelikult ka pidev, kusjuures lause 1.3, (c), põhjal $g'(y) = g$, s.t iga $v \in \mathbb{R}^m$ korral $g'(y)v = g(v) = z \cdot v$. Kuna funktsioon f on lõigus $[a,b]$ pidev, siis ka liitfunktsioon $\varphi = gf\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on lõigus $[a,b]$ pidev; kuna funktsioon f on diferentseeruv igas punktis $t \in (a,b)$, siis ka liitfunktsioon $\varphi = gf$ on diferentseeruv igas punktis $t \in (a,b)$, kusjuures lause 1.3, (d), põhjal $\varphi'(t) = g'\big(f(t)\big)f'(t) = gf'(t)$, s.t iga $h \in \mathbb{R}$ korral

$$\varphi'(t)h = g\big(f'(t)h\big) = z \cdot f'(t)h.$$

Olgu funktsioonid $f_1, \ldots, f_m\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sellised, et $f(t) = \big(f_1(t), \ldots, f_m(t)\big)$ iga $t \in [a,b]$ korral; siis lause 1.2 põhjal on funktsioonid $f_1, \ldots, f_m$ diferentseeruvad vahemikus (a,b), kusjuures igas punktis $t \in (a,b)$

$$f'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_m'(t) \end{pmatrix},$$

s.t $f'(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ on defineeritud võrdusega

$$f'(t)h = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_m'(t) \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} f_1'(t)h \\ \vdots \\ f_m'(t)h \end{pmatrix} = \big(f_1(t)h, \ldots, f_m(t)h\big), \quad h \in \mathbb{R};$$

niisiis (tõlgendades sobival juhul tuletist $f'(t)$ järjendina $f'(t) = \big(f_1(t), \ldots, f_m(t)\big) \in \mathbb{R}^m$)

$$\begin{aligned}\varphi'(t)h &= z \cdot f'(t)h = z \cdot \big(f_1'(t)h, \ldots, f_m'(t)h\big) = z \cdot h\big(f_1'(t), \ldots, f_m'(t)\big)\\ &= h\Big(z \cdot \big(f_1'(t), \ldots, f_m'(t)\big)\Big) = h\big(z \cdot f'(t)\big) = \big(z \cdot f'(t)\big)h,\end{aligned}$$

s.t

$$\varphi'(t) = z \cdot f'(t).$$

Lagrange'i keskväärtusteoreemi põhjal leidub $\xi \in (a, b)$ nii, et

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)\,(b-a) = \big(z \cdot f'(\xi)\big)(b-a).$$

Teiselt poolt,

$$\varphi(b) - \varphi(a) = z \cdot f(b) - z \cdot f(a) = z \cdot \big(f(b) - f(a)\big) = z \cdot z = |z|^2.$$

Cauchy–Bunjakovski–Schwarzi võrratuse põhjal

$$|z|^2 = \big(z \cdot f'(\xi)\big)(b-a) = \big|z \cdot f'(\xi)\big|(b-a) \leqslant |z|\,|f'(\xi)|\,(b-a),$$

seega $|z| \leqslant |f'(\xi)|(b-a)$, nagu soovitud. □

Definitsioon 2.3 (vt nt [OO, lk 79]). Olgu X vektorruum. Öeldakse, et hulk $A \subset X$ on *kumer,* kui mis tahes $x, y \in A$ ja $\lambda \in (0,1)$ korral

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in A.$$

Geomeetriliselt tõlgendatuna moodustavad punktid $(1-\lambda)x+\lambda y$, $\lambda \in [0,1]$, punkte x ja y ühendava sirglõigu. Seega tähendab hulga kumerus, et hulk sisaldab koos iga kahe oma punktiga ka nendevahelise sirglõigu.

Teoreem 2.5 (Lagrange'i keskväärtushinnang; vt nt [R, lk 218, teoreem 9.19]). *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk, olgu funktsioon $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ diferentseeruv hulgas U ning olgu $K \subset U$ kumer hulk, kusjuures eksisteerib reaalarv $M \geqslant 0$, nii, et*

$$\|f'(x)\| \leqslant M \quad \textit{iga } x \in K \textit{ korral.}$$

Siis

$$|f(z) - f(y)| \leqslant M|z-y| \quad \textit{kõikide } y, z \in K \textit{ korral.}$$

TÕESTUS. Olgu $y, z \in K$. Järgnevas tõestuses tõlgendame vahet $z - y \in \mathbb{R}^n$ vajadusel vastavale olukorrale sobivalt üheveerulise maatriksina

$$z - y = \begin{pmatrix} z_1 - y_1 \\ \vdots \\ z_n - y_n \end{pmatrix}.$$

Defineerime funktsiooni $\gamma\colon\ [0,1] \to U$,

$$\gamma(t) = (1-t)y + tz = y + t(z-y), \quad t \in [0,1],$$

(märgime, et hulga K kumeruse tõttu $\gamma(t) \in K \subset U$ iga $t \in [0,1]$ korral) ja funktsiooni $g\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}^m$,

$$g(t) = f\big(\gamma(t)\big), \quad t \in [0,1].$$

Vaatleme funktsiooni

$$\varphi(t) = y + t(z-y), \quad t \in \mathbb{R};$$

siis φ esitub summana $\varphi = c + A$, kus $c, A\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ on vastavalt konstantne funktsioon $c(t) = y$, $t \in \mathbb{R}$, ja lineaarne funktsioon

$$At = t(z-y) = \begin{pmatrix} (z_1 - y_1)t \\ \vdots \\ (z_n - y_n)t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - y_1 \\ \vdots \\ z_n - y_n \end{pmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R};$$

seega funktsioon φ on diferentseeruv igas punktis $t \in \mathbb{R}$, kusjuures

$$\varphi'(t) = A = z - y \quad \text{iga } t \in \mathbb{R} \text{ korral.}$$

Paneme tähele, et $\gamma = \varphi|_{[0,1]}$. Siit järeldub, et γ on diferentseeruv vahemikus $(0,1)$, kusjuures

$$\gamma'(t) = \varphi'(t) = A = z - y \quad \text{iga } t \in (0,1) \text{ korral,}$$

seega lause 1.3, (d), põhjal on ka funktsioon g diferentseeruv vahemikus $(0,1)$, kusjuures iga $t \in (0,1)$ korral

$$g'(t) = f'\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t) = f'\big(\gamma(t)\big)(z-y)$$

ning järelikult (tõlgendades tuletist $g'(t)$ ruumi $\mathbb{R}^m$ elemendina)

$$|g'(t)| = \big|f'\big(\gamma(t)\big)(z-y)\big| \leqslant \big\|f'\big(\gamma(t)\big)\big\|\,|z-y| \leqslant M|z-y|.$$

Teoreemi 2.4 põhjal leidub $\xi \in (0,1)$ nii, et

$$|g(1) - g(0)| \leqslant |g'(\xi)|\,(1-0) = |g'(\xi)| \leqslant M|z-y|.$$

Kuna $g(1) = f\big(\gamma(1)\big) = f(z)$ ja $g(0) = f\big(\gamma(0)\big) = f(y)$, siis järeldub siit, et

$$|f(z) - f(y)| \leqslant M|z - y|,$$

nagu soovitud. $\square$

2.3. Banachi püsipunkti printsiip

Definitsioon 2.4. Olgu X meetriline ruum, olgu $Z \subset X$ ning olgu $f\colon Z \to X$. Öeldakse, et

- element $x \in Z$ on operaatori f *püsipunkt,* kui $f(x) = x$;
- operaator f on *ahendav,* kui leidub reaalarv $q \in (0, 1)$ nii, et

$$\rho\big(f(x), f(z)\big) \leqslant q\rho(x, z) \quad \text{kõikide } x, z \in Z \text{ korral.} \tag{2.7}$$

Lause 2.6. *Olgu X meetriline ruum, olgu $Z \subset X$ ning olgu $f\colon Z \to X$ ahendav operaator. Siis operaatoril f on ülimalt üks püsipunkt. Niisiis, ahendaval operaatoril on ülimalt üks püsipunkt.*

TÕESTUS. Olgu $u, w \in Z$ operaatori f püsipunktid, s.t $f(u) = u$ ja $f(w) = w$. Lause tõestuseks piisab näidata, et $u = w$.

Operaatori f ahendavuse tõttu leidub $q \in (0, 1)$ nii, et kehtib (2.7). Nüüd

$$0 \leqslant \rho(u, w) = \rho\big(f(u), f(w)\big) \leqslant q\rho(u, w),$$

millest (arvestades, et $0 \leqslant q < 1$) järeldub, et $\rho(u, w) = 0$ ehk, teisisõnu, $u = w$, nagu soovitud. $\square$

Järeldus 2.7. *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk, olgu funktsioon $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ diferentseeruv hulgas U ning olgu $K \subset U$ kumer hulk, kusjuures eksisteerib reaalarv $q \in (0, 1)$, nii, et*

$$\|f'(x)\| \leqslant q \quad \textit{iga } x \in K \textit{ korral.}$$

Siis

(a) *ahend $f|_K\colon K \to \mathbb{R}^n$ on ahendav;*

(b) *funktsioonil f on hulgas K ülimalt üks püsipunkt (s.t ahendil $f|_K\colon K \to \mathbb{R}^n$ on ülimalt üks püsipunkt).*

TÕESTUS. (a) järeldub vahetult Lagrange'i keskväärtushinnangust (teoreemist 2.5).

(b) järeldub vahetult väitest (a) ja lausest 2.6. $\square$

Järgnev teoreem on meile tuttav funktsionaalanalüüsi sissejuhatavast kursusest.

Teoreem 2.8 (Banachi püsipunkti printsiip; vt nt [OO, lk 64, teoreem] või [R, lk 220, teoreem 9.23])**.** *Kui X on täielik meetriline ruum ja $\varphi\colon X \to X$ on ahendav operaator, siis eksisteerib üks ja ainult üks $x \in X$ nii, et $\varphi(x) = x$. Teisisõnu, ahendaval operaatoril täielikus meetrilises ruumis on parajasti üks püsipunkt.*

2.4. Teoreem pööratavale operaatorile lähedase operaatori pööratavusest

Teoreem 2.9 (vt nt [R, lk 209, teoreem 9.8])**.** (a) (Teoreem pööratavale operaatorile lähedase operaatori pööratavusest.) *Kui $A, B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on lineaarsed operaatorid, kusjuures A on pööratav ja*

$$\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}, \tag{2.8}$$

siis ka operaator B on pööratav.

(b) *Tähistame kõigi pööratavate lineaarsete operaatorite $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hulga sümboliga Ω. Siis Ω on ruumi $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ lahtine alamhulk, kusjuures kujutus $\Omega \ni A \mapsto A^{-1} \in \Omega$ on pidev.*

Märkus. Kujutus eelneva teoreemi väitest (b) on ilmselt bijektsioon.

TÕESTUS. (a). Olgu $A, B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineaarsed operaatorid, kusjuures A on pööratav. Operaatori B pööratavuseks piisab näidata, et tema tuum $\ker B = \{0\}$ (sest sel juhul on B üksühene ning teatavasti on lineaarne operaator $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pööratav parajasti siis, kui ta on üksühene). Mis tahes $x \in \mathbb{R}^n$ korral

$$\begin{aligned}|Bx| &= |(B-A)x + Ax| \geqslant |Ax| - |(B-A)x| \geqslant \frac{1}{\|A^{-1}\|}\,\|A^{-1}\|\,|Ax| - \|B-A\|\,|x| \\ &\geqslant \frac{1}{\|A^{-1}\|}\,|A^{-1}Ax| - \|B-A\|\,|x| = \frac{1}{\|A^{-1}\|}\,|x| - \|B-A\|\,|x| \\ &= \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B-A\|\right)|x|,\end{aligned} \tag{2.9}$$

Siit järeldub, et tingimuse (2.8) kehtides $\ker B = \{0\}$ ning järelikult on operaator B pööratav.

(b). Olgu $A \in \Omega$. Väitest (a) järeldub, et $B\Big(A, \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}\Big) \subset \Omega$, seega A on hulga Ω sisepunkt. Kuna operaator A oli kitsendusteta valitud, siis hulga Ω iga punkt on tema sisepunkt, s.t Ω on lahtine.

Kujutuse $\Omega \ni C \mapsto C^{-1} \in \Omega$ pidevuseks piisab näidata, et see kujutus on pidev punktis A, s.t

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \xrightarrow[B \to A]{} 0. \tag{2.10}$$

Iga $B \in \Omega$ korral $B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1}$, järelikult

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| = \|B^{-1}(A - B)A^{-1}\| \leqslant \|B^{-1}\|\,\|A - B\|\,\|A^{-1}\|;$$

kuna mis tahes $y \in \mathbb{R}^n$ korral, võttes hinnangus (2.9) $x = B^{-1}y$,

$$|B^{-1}y| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|B - A\|}\,|BB^{-1}y| = \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|B - A\|}\,|y|,$$

siis

$$\|B^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|B - A\|},$$

seega

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|^2\,\|B - A\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|B - A\|},$$

millest, arvestades, et $\|B - A\| \xrightarrow[B \to A]{} 0$, järeldub (2.10). $\square$

3. Teoreem pöördfunktsioonist

Selles paragrahvis tõestame *teoreemi pöördfunktsioonist*, mis, veidi lihtsustalt, väidab, et pidevalt diferentseeruv funktsioon f on pööratav iga punkti x ümbruses, kus tema tuletis $f'(x)$ on pööratav (lineaarne operaator).

Teoreem 3.1 (teoreem pöördfunktsioonist; vt nt [R, lk 221, teoreem 9.24])**.** *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk, olgu funktsioon $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ pidevalt diferentseeruv ning olgu punkt $a \in U$ selline, et tuletis $f'(a)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on pööratav operaator. Siis leidub punkti a lahtine ümbrus $S \subset U$ nii, et*

(1) *ahend $f|_S$ on üksühene;*

(2) *tuletis $f'(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on pööratav operaator iga $x \in S$ korral;*

(3) *kujutishulk $T := f(S)$ on lahtine;*

(4) *funktsiooni $f|_S\colon S \to T$ pöördfunktsioon $g\colon T \to S$ on pidevalt diferentseeruv hulgas T, kusjuures*

$$g'(y) = f'\big(g(y)\big)^{-1} \quad \text{iga } y \in T \text{ korral.} \tag{3.1}$$

Enne teoreemi 3.1 tõestamist toome välja ühe olulise järelduse temast.

Järeldus 3.2 (vt nt [R, lk 223])**.** *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk ning olgu funktsioon $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ pidevalt diferentseeruv, kusjuures operaator $f'(x)$ on pööratav iga $x \in U$ korral. Siis f on lahtine kujutus, s.t kujutishulk $f(W)$ on ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtine alamhulk iga lahtise alamhulga $W \subset U$ korral.*

TÕESTUS. Olgu $W \subset U$ lahtine hulk. Peame näitama, et kujutishulk $f(W)$ on lahtine. Selleks, fikseerides vabalt punkti $y \in f(W)$, piisab näidata, et y on hulga $f(W)$ sisepunkt. Olgu $x \in W$ selline, et $f(x) = y$. Ahend $f|_W\colon W \to \mathbb{R}^n$ on pidevalt diferentseeruv, kusjuures tuletis $(f|_W)'(x) = f'(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on pööratav operaator. Teoreemi 3.1 põhjal leidub punkti x lahtine ümbrus $S \subset W$ nii, et $(f|_W)(S) = f(S)$ on lahtine hulk ruumis $\mathbb{R}^n$. Nüüd $y = f(x) \in f(S) \subset f(W)$; niisiis $f(S)$ on punkti y lahtine ümbrus, mis sisaldub hulgas $f(W)$; seega y on hulga $f(W)$ sisepunkt. $\square$

Märkus 3.1. Järelduse 3.2 tõestuseks pole vaja eelnevalt tõestada kogu teoreemi 3.1 pöördfunktsioonist – selle järelduse tõestuseks piisab vaid tõestada tingimust (3) rahuldava hulga S olemasolu teoreemi 3.1 eeldustel.

Teoreem 3.1 on vahetu järeldus tema järgnevast tugevamast versioonist.

Teoreem 3.3. *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk, olgu funktsioon $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ diferentseeruv hulgas U ning olgu tuletis f' pidev punktis $a \in U$, kusjuures operaator $f'(a)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on pööratav. Siis leidub punkti a lahtine ümbrus S, nii, et kehtivad teoreemi 3.1 väited* (1)–(3) *ja*

(4') *ahendi $f|_S\colon S \to T$ pöördfunktsioon $g\colon T \to S$ on diferentseeruv hulgas T, kusjuures kehtib* (3.1)*; seejuures tuletis g' on pidev punktis $b := f(a) \in T$.*

Teoreemi 3.3 tõestus toetub oluliselt järgnevale lemmale.

Lemma 3.4. *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$, olgu $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ ning olgu $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pööratav operaator. Defineerime vastavalt igale punktile $y \in \mathbb{R}^n$ funktsiooni $\varphi_y\colon U \to \mathbb{R}^n$,*

$$\varphi_y(x) = x + A^{-1}\big(y - f(x)\big), \quad x \in U. \tag{3.2}$$

(a) *Olgu $y \in \mathbb{R}^n$ ja $x \in U$. Võrdus $y = f(x)$ kehtib parajasti siis, kui $\varphi_y(x) = x$, s.t x on funktsiooni φ_y püsipunkt.*

(b) *Olgu $S \subset U$. Ahend $f|_S$ on üksühene parajasti siis, kui iga $z \in S$ korral on funktsioonil $\varphi_{f(z)}$ ülimalt üks püsipunkt hulgas S, s.t ahendil $\varphi_{f(z)}|_S$ on ülimalt üks püsipunkt.*

(c) *Olgu $y \in \mathbb{R}^n$. Kui funktsioon f on diferentseeruv punktis $x \in U$, siis ka funktsioon* (3.2) *on diferentseeruv punktis x, kusjuures*

$$\varphi_y'(x) = A^{-1}\big(A - f'(x)\big).$$

Tõestus. (a). Pööratava lineaarse operaatori A^{-1} üksühesuse tõttu

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\Longleftrightarrow \quad y - f(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad A^{-1}\big(y - f(x)\big) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_y(x) = x. \end{aligned} \tag{3.3}$$

(b). *Tarvilikkus.* Olgu ahend $f|_S$ üksühene, olgu $z \in S$ ning olgu $u, w \in S$ sellised, et

$$\varphi_{f(z)}(u) = u \quad \text{ja} \quad \varphi_{f(z)}(w) = w. \tag{3.4}$$

Veendumaks, et funktsioonil $\varphi_{f(z)}$ on ülimalt üks püsipunkt hulgas S, piisab näidata, et $u = w$. Võrdustest (3.4) järeldub samaväärsuste (3.3) põhjal (võttes seal $y = f(z)$ ja vastavalt $x = u$ ja $x = w$), et $f(u) = f(z) = f(w)$, järelikult ahendi $f|_S$ üksühesuse tõttu $u = w$, nagu soovitud.

Piisavus. Eksisteerigu iga $z \in S$ korral funktsioonil $\varphi_{f(z)}$ ülimalt üks püsipunkt hulgas S. Peame näitama, et funktsioon f on üksühene hulgas $S \subset U$. Eeldades, et

$u, w \in S$, $y := f(u) = f(w)$, piisab selleks näidata, et $u = w$. Samaväärsuste (3.3) põhjal (võttes seal vastavalt $x = u$ ja $x = w$)

$$\varphi_y(u) = u \quad \text{ja} \quad \varphi_y(w) = w,$$

s.t u ja w on funktsiooni φ_y püsipunktid, millest tehtud eelduse põhjal järeldub, et $u = w$, nagu soovitud.

(c). Mis tahes $x \in U$ korral

$$\begin{aligned}\varphi_y(x) &= x + A^{-1}\big(y - f(x)\big) = Ix + A^{-1}y - A^{-1}f(x)\\ &= Ix + c(x) - (A^{-1}f)(x),\end{aligned}$$

kus $c(x) = A^{-1}y$ on konstantne funktsioon. Seega, kui funktsioon f on diferentseeruv punktis $x \in U$, siis lause 1.3 põhjal ka funktsioon φ_y on diferentseeruv punktis x, kusjuures (arvestades, et samasusteisendus $Ix = x$ on lineaarne kujutus)

$$\begin{aligned}\varphi_y'(x) &= I'(x) + c'(x) - (A^{-1}f)'(x) = I + 0 - (A^{-1})'\big(f(x)\big)f'(x)\\ &= I - A^{-1}f'(x) = A^{-1}A - A^{-1}\,f'(x)\\ &= A^{-1}\big(A - f'(x)\big).\end{aligned}$$

$\square$

TEOREEMI 3.3 TÕESTUS. Tähistame $f'(a) =: A$ ja defineerime vastavalt igale punktile $y \in \mathbb{R}^n$ funktsiooni $\varphi_y\colon\ U \to \mathbb{R}^n$ võrdusega (3.2). Tuletise f' pidevuse tõttu punktis a leidub $r > 0$ nii, et,

$$\|f'(x) - A\| = \|f'(x) - f'(a)\| < \frac{1}{2\|A^{-1}\|} \quad \text{iga } x \in B(a, r) =: S \text{ korral.} \tag{3.5}$$

Mis tahes $y \in \mathbb{R}^n$ korral on funktsioon φ_y lemma 3.4, (c), põhjal diferentseeruv igas punktis $x \in S$, kusjuures

$$\|\varphi_y'(x)\| = \big\|A^{-1}\big(A - f'(x)\big)\big\| \leqslant \|A^{-1}\|\,\|A - f'(x)\| < \|A^{-1}\|\,\frac{1}{2\|A^{-1}\|} = \frac{1}{2},$$

s.t.

$$\|\varphi_y'(x)\| \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{kõikide } y \in \mathbb{R}^n \text{ ja } x \in S \text{ korral.} \tag{3.6}$$

Hinnangust (3.6) järeldub Lagrange'i keskväärtushinnangu (teoreemi 2.5) põhjal, et

$$|\phi_y(x) - \phi_y(z)| \leqslant \frac{1}{2}|x - z| \qquad \text{kõikide } y \in \mathbb{R}^n \text{ ja } x, z \in S \text{ korral.} \tag{3.7}$$

(1). Hinnangu (3.6) ja (Lagrange'i keskväärtushinnangu) järelduse 2.7 põhjal on mis tahes $y \in \mathbb{R}^n$ korral funktsioonil φ_y ülimalt üks püsipunkt hulgas S; niisiis lemma 3.4, (b), põhjal on ahend $f|_S$ üksühene.

(2). Tuletise $f'(x)$ pööratavus iga $x \in S$ korral järeldub võrratusest (3.5) teoreemi 2.9, (a), põhjal (s.t teoreemi pööratavale operaatorile lähedase operaatori pööratavusest põhjal).

(3). Tähistame $T := f(S)$ ja fikseerime vabalt $y_0 \in T$. Hulga T lahtisuseks piisab näidata, et y_0 on hulga T sisepunkt, s.t mingi $\varepsilon > 0$ korral $B(y_0, \varepsilon) \subset T$. Olgu $x_0 \in S$ selline, et $y_0 = f(x_0)$. Valime $\delta > 0$ nii, et $\overline{B}(x_0, \delta) \subset S$. Väite tõestuseks piisab nüüd näidata, et

$$B(y_0, \varepsilon) \subset T, \quad \text{kus } \varepsilon := \frac{\delta}{2\|A^{-1}\|}. \tag{3.8}$$

Fikseerime vabalt $y \in B(y_0, \varepsilon)$. Sisalduvuseks (3.8) piisab näidata, et $y = f(x)$ mingi $x \in S$ korral, milleks samaväärsuste (3.3) põhjal piisab näidata, et funktsioonil φ_y leidub püsipunkt hulgas $B := \overline{B}(x_0, \delta) \subset S$. Selleks omakorda piisab Banachi püsipunkti printsiibi põhjal (arvestades, et B kui ruumi $\mathbb{R}^n$ kinnine alamhulk on täielik) näidata, et

(I) $\varphi_y(B) \subset B$;

(II) $\varphi_y|_B \colon B \to B$ on ahendav operaator.

Olgu $x \in B$. Sisalduvuseks $\varphi_y(B) \subset B$ piisab näidata, et $\varphi_y(x) \in B$, s.t

$$|\varphi_y(x) - x_0| \leqslant \delta.$$

Veendume selles: kuna

$$\begin{aligned} |\varphi_y(x_0) - x_0| &= \big|A^{-1}\big(y - f(x_0)\big)\big| = |A^{-1}(y - y_0)| \\ &\leqslant \|A^{-1}\|\,|y - y_0| < \|A^{-1}\|\,\varepsilon = \|A^{-1}\|\,\frac{\delta}{2\|A^{-1}\|} = \frac{\delta}{2}, \end{aligned}$$

siis hinnangu (3.7) põhjal

$$\begin{aligned} |\varphi_y(x) - x_0| &\leqslant |\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0)| + |\varphi_y(x_0) - x_0| < \frac{1}{2}|x - x_0| + \frac{\delta}{2} \\ &\leqslant \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

Operaatori $\varphi_y|_B \colon B \to B$ ahendavus järeldub hinnangust järelduse 2.7 põhjal.

(4). Fikseerime vabalt $y \in T$. Tähistame $x := g(y) \in S$ (siis $f(x) = y$) ja $M := f'(x)^{-1} = f'\big(g(y)\big)^{-1}$. Võrduseks (3.1) peame näitama, et

$$\frac{|g(y+k) - g(y) - Mk|}{|k|} \xrightarrow[k \to 0]{} 0. \tag{3.9}$$

Olgu $k \in \mathbb{R}^n$ selline, et $y+k \in T$. Tähistame $h := g(y+k) - g(y)$; siis $x+h = g(y+k) \in S$, kusjuures $f(x+h) = y+k$. Olgu funktsioon $\varphi_y \colon U \to \mathbb{R}^n$ defineeritud võrdusega (3.2); siis

$$\begin{aligned}\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x) &= \Big(x + h + A^{-1}\big(y - f(x+h)\big)\Big) - \Big(x + A^{-1}\big(y - f(x)\big)\Big) \\ &= h + A^{-1}\big(f(x) - f(x+h)\big) = h + A^{-1}\big(y - (y+k)\big) = h - A^{-1}k.\end{aligned}$$

Tagurpidi kolmnurga võrratuse ja hinnangu (3.7) põhjal

$$|h| - |A^{-1}k| \leqslant |h - A^{-1}k| = \big|\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x)\big| \leqslant \frac{1}{2}|h|,$$

millest $\frac{1}{2}|h| \leqslant |A^{-1}k|$ ning järelikult

$$|h| \leqslant 2\|A^{-1}\||k|. \tag{3.10}$$

Kuna

$$\begin{aligned} g(y+k) - g(y) - Mk &= x + h - x - Mk = h - Mk \\ &= Mf'(x)h - M\big(f(x+h) - f(x)\big) \\ &= -M\big(f(x+h) - f(x) - f'(x)h\big), \end{aligned}$$

siis

$$\frac{|g(y+k) - g(y) - Mk|}{|k|} \leqslant 2\|A^{-1}\|\,\|M\| \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|}. \tag{3.11}$$

Kuna võrratuse (3.10) põhjal $h \xrightarrow[k \to 0]{} 0$, siis võrratuse (3.11) parem pool läheneb nullile protsessis $k \to 0$; seega ka võrratuse (3.11) vasak pool läheneb nullile protsessis $k \to 0$, s.t kehtib (3.9).

Jääb näidata, et tuletis g' on pidev punktis b. Olgu punktid $y^j \in T$, $j \in \mathbb{N}$, sellised, et $y^j \xrightarrow[j \to \infty]{} b$. Tuletise g' pidevuseks punktis b piisab näidata, et

$$g'(y^j) \xrightarrow[j \to \infty]{} g'(b)$$

ehk (võrduse (3.1) põhjal)

$$f'\big(g(y^j)\big)^{-1} \xrightarrow[j\to\infty]{} f'\big(g(b)\big)^{-1}. \tag{3.12}$$

Kuna g on pidev funktsioon (sest ta on diferentseeruv), siis $g(y^j) \xrightarrow[j\to\infty]{} g(b)$, seega tuletise f' pidevuse tõttu punktis $a = g(b)$

$$f'\big(g(y^j)\big) \xrightarrow[j\to\infty]{} f'\big(g(b)\big),$$

järelikult teoreemi 2.9, (b), põhjal kehtib (3.12). $\square$

4. Teoreem ilmutamata funktsioonist

4.1. Võrrandite süsteemiga määratud ilmutamata funktsioonid

Sisaldagu $n + m$ muutuja funktsioonide

$$u_i = F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m), \quad i = 1, \dots, m, \tag{4.1}$$

määramispiirkond risttahukat

$$\mathcal{D} := J_1 \times \cdots \times J_n \times I_1 \times \cdots \times I_m,$$

kus $J_1, \dots, J_n, I_1, \dots, I_m \subset \mathbb{R}$ on mingid intervallid. Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Definitsioon 4.1. Öeldakse, et süsteem (4.2) määrab risttahukas $\mathcal{D}$ muutujad $y_1, \dots, y_m$ muutujate $x_1, \dots, x_n$ (üheste) funktsioonidena:

$$y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n), \quad \dots\dots, \quad y_m = y_m(x_1, \dots, x_n), \tag{4.3}$$

kui mis tahes fikseeritud $x_1 \in J_1, \dots, x_n \in J_n$ korral süsteemil (4.2) eksisteerib risttahukas $I_1 \times \cdots \times I_m$ parajasti üks lahend $(y_1, \dots, y_m)$.

Kõnealused funktsioonid (4.3)

$$J_1 \times \cdots \times J_n \ni (x_1, \dots, x_n) \longmapsto y_i(x_1, \dots, x_n) \in I_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

on määratud võrdustega

$$F_i\big(x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)\big) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

s.t. iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral funktsioon $y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)$ seab punktile $(x_1, \dots, x_n)$

$\in J_1 \times \cdots \times J_n$ vastavusse muutuja y_i väärtuse süsteemi (4.2) ainsast lahendist $(y_1, \ldots, y_m) \in I_1 \times \cdots \times I_m$.

Seejuures öeldakse, et funktsioonid (4.3) on antud süsteemiga (4.2) *ilmutamata kujul.*

Teoreem 4.1 (teoreem ilmutamata funktsioonist; vt nt [ИП$_1$, lk 537, teoreem 15.2, ja lk 541–542], [K$_2$, lk 207, teoreem 5, ja lk 209, teoreem 6] või [Φ_1, lk 455–456, teoreem IV, ja lk 462–463])**.** *Eeldame, et*

(1) *($n+m$ muutuja) funktsioonid* (4.1) *on määratud punkti* $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ *mingis ümbruses, kusjuures*

$$F_i(P_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, m;$$

(2) *osatuletised* $\dfrac{\partial F_k}{\partial x_j}$ *ja* $\dfrac{\partial F_k}{\partial y_i}$, $k, i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, *eksisteerivad ja on pidevad punkti* P_0 *mingis ümbruses;*

(3) $$\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(P_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(P_0) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}(P_0) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}(P_0) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}(P_0) & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}(P_0) & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m}(P_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}(P_0) & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2}(P_0) & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}(P_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Siis

(a) *leidub punkti* P_0 *risttahukakujuline ümbrus, milles süsteem* (4.2) *määrab muutujad* $y_1, \ldots, y_m$ *muutujate* $x_1, \ldots, x_n$ *(üheste) funktsioonidena* (4.3)*, kusjuures*

$$y_i(x_1^0, \ldots, x_n^0) = y_i^0, \quad i = 1, \ldots, m;$$

(b) *funktsioonidel* (4.3) *eksisteerivad punkti* $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ *teatavas ümbruses pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, kusjuures selles ümbruses kõikide* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *ja* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *korral*

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_j, y_{i+1} \ldots, y_m)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}} \tag{4.4}$$

(siin võrdusmärgist paremal olevates determinantides arvutatakse osatuletised $\dfrac{\partial F_k}{\partial x_j}$ *ja* $\dfrac{\partial F_k}{\partial y_i}$ *punktis* $\big(x_1, \ldots, x_n, y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n)\big)$*).*

4.2. Veel tähistusi

Maatriksite märkimiseks kasutame me järgmisi tähistusi: kui $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ning $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m_1,n_1}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{m_1,n_2}$, $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{m_2,n_1}$ ja $D = (d_{ij})_{i,j=1}^{m_2,n_2}$ (niisiis, A, B, C ja D on vastavalt $m_1 \times n_1$-, $m_1 \times n_2$-, $m_2 \times n_1$- ja $m_2 \times n_2$-maatriks), siis me tähistame

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n_1} & b_{11} & \dots & b_{1n_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m_1 1} & \dots & a_{m_1 n_1} & b_{m_1 1} & \dots & b_{m_1 n_2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m_1 1} & \dots & a_{m_1 n_1} \\ c_{11} & \dots & c_{1n_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m_2 1} & \dots & c_{m_2 n_1} \end{pmatrix}$$

ja

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n_1} & b_{11} & \dots & b_{1n_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m_1 1} & \dots & a_{m_1 n_1} & b_{m_1 1} & \dots & b_{m_1 n_2} \\ c_{11} & \dots & c_{1n_1} & d_{11} & \dots & d_{1n_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m_2 1} & \dots & c_{m_2 n_1} & d_{m_2 1} & \dots & d_{m_2 n_2} \end{pmatrix}.$$

Punktide $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ korral tähistame

$$(x, y) := (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m};$$

siis funktsiooni $f\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^l$ korral

$$f(x, y) = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^l.$$

Iga operaatori $A \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^l)$ korral defineerime kujutused $A_X\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ ja $A_Y\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ võrdustega

$$A_X h = A(h, 0), \quad h \in \mathbb{R}^n, \qquad \text{ja} \qquad A_Y k = A(0, k), \quad k \in \mathbb{R}^m;$$

siis $A_X \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$ ja $A_Y \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, kusjuures mis tahes $h \in \mathbb{R}^n$ ja $k \in \mathbb{R}^m$ korral

$$A(h, k) = A\big((h, 0) + (0, k)\big) = A(h, 0) + A(0, k) = A_X h + A_Y k.$$

Märgime, et kui operaator $A \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^l)$ esitub maatriksina

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} & \dots & a_{1n+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} & a_{ln+1} & \dots & a_{ln+m} \end{pmatrix},$$

siis operaatorid $A_X \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$ ja $A_Y \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ esituvad vastavalt maatriksitena

$$A_X = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad A_Y = \begin{pmatrix} a_{1n+1} & \dots & a_{1n+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ln+1} & \dots & a_{ln+m} \end{pmatrix},$$

sest mis tahes $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ korral, tähistades $z = (h, 0)$,

$$A_X h = A(h,0) = Az = \left(\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} z_j\right)_{i=1}^{l} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_j\right)_{i=1}^{l} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},$$

ning mis tahes $k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{R}^m$ korral, tähistades $z = (0, k)$,

$$\begin{aligned} A_Y k &= A(0,k) = Az \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} z_j\right)_{i=1}^{l} = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,n+j} k_j\right)_{i=1}^{l} = \begin{pmatrix} a_{1n+1} & \dots & a_{1n+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ln+1} & \dots & a_{ln+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Kehtib järgmine kergesti kontrollitav

Lause 4.2. (a) *Olgu $m, n_1, n_2, n \in \mathbb{N}$ ning olgu A ja B ning C ja D vastavalt $m \times n_1$- ja $m \times n_2$- ning $n_1 \times n$- ja $n_2 \times n$-maatriksid. Siis*

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = AC + BD.$$

(b) *Olgu $m_1, m_2, n_1, n_2, p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ ning olgu kõikide $i, j, k \in \{1, 2\}$ korral A_{ij} ja B_{jk} vastavalt $m_i \times n_j$- ja $n_j \times p_k$-maatriksid. Siis*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

Selle punkti lõpetuseks tõestame ühe lemma, mida me järgmises punktis kasutame teoreemi ilmutamata funktsioonist tõestuses. Juhime tähelepanu, et käesolevas punktis sissetoodud tähistused muudavad selle lemma tõestuse oluliselt kompaktsemaks ja paremini jälgitavaks.

Lemma 4.3. *Olgu $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ lahtine hulk ning olgu $c \in \mathbb{R}^m$.*

(a) *Hulk $T := \{x \in \mathbb{R}^n \colon\ (x,c) \in W\}$ on lahtine.*

(b) *Olgu $\Phi\colon\ W \to \mathbb{R}^l$ pidevalt diferentseeruv funktsioon ning olgu $T \neq \varnothing$. Siis funktsioon $h\colon\ T \to \mathbb{R}^l$,*

$$h(x) = \Phi(x,c), \quad x \in T,$$

on pidevalt diferentseeruv, kusjuures

$$h'(x) = \Phi'(x,c)_X \quad \text{iga } x \in T \text{ korral.}$$

Tõestus. (a). Kui $T = \varnothing$, siis T on lahtine, sest tühi hulk $\varnothing$ on lahtine.

Vaatleme nüüd juhtu, kus $T \neq \varnothing$. Fikseerime vabalt $u \in T$. Hulga T lahtisuseks piisab näidata, et u on hulga T sisepunkt, s.t mingi $r > 0$ korral $B(u,r) \subset T$. Hulga T definitsiooni põhjal $(u,c) \in W$. Kuna W on lahtine, siis (u,c) on hulga W sisepunkt, seega leidub $r > 0$ nii, et $B\big((u,c),r\big) \subset W$. Väite tõestuseks piisab nüüd näidata, et $B(u,r) \subset T$. Selleks, fikseerides vabalt punkti $x \in B(u,r)$, piisab näidata, et $x \in T$, s.t $(x,c) \in W$, milleks omakorda piisab näidata, et $(x,c) \in B\big((u,c),r\big)$, s.t $\big|(x,c)-(u,c)\big| < r$. Veendume selles:

$$\big|(x,c)-(u,c)\big| = \big|(x-u,0)\big| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - u_j|^2} = |x-u| < r$$

(sest kuna $x \in B(u,r)$, siis $|x-u| < r$), nagu soovitud.

(b). Paneme tähele, et $h = \Phi\phi$, kus funktsioon $\phi\colon\ T \to W$ on defineeritud võrdusega

$$\phi(x) = (x,c), \quad x \in T.$$

Kuna funktsioon ϕ on igas punktis $x \in T$ diferentseeruv, kusjuures

$$\phi'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n \\ 0_{m\times n} \end{pmatrix},$$

kus E_n on $n \times n$-ühikmaatriks ja $0_{m\times n}$ on $m \times n$-nullmaatriks, siis lause 1.3, (d), põhjal ka funktsioon h on diferentseeruv igas punktis $x \in T$, kusjuures

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \Phi'\big(\phi(x)\big)\,\phi'(x) = \Phi'(x,c)\,\phi'(x) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(x,c) & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n}(x,c) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}(x,c) & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_m}(x,c) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_1}(x,c) & \dots & \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_n}(x,c) & \frac{\partial \Phi_l}{\partial y_1}(x,c) & \dots & \frac{\partial \Phi_l}{\partial y_m}(x,c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n \\ 0_{m\times n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Phi'(x,c)_X & \Phi'(x,c)_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n \\ 0_{m\times n} \end{pmatrix} = \Big(\Phi'(x,c)_X\, E_n + \Phi'(x,c)_Y\, 0_{m\times n}\Big) \\
&= \Phi'(x,c)_X .
\end{aligned}
$$

□

4.3. Teoreem ilmutamata funktsioonist kui järeldus teoreemist pöördfunktsioonist

Eelmises punktis sissetoodud tähistused võimaldavad meil esitada nii ilmutamata funktsiooni mõiste kui ka teoreemi ilmutmata funktsioonist oluliselt kompaktsemal kujul.

Sisaldagu $\mathbb{R}^m$-väärtuselise ($n + m$ muutuja) funktsiooni

$$u = F(x, y)$$

määramispiirkond risttahukat

$$\mathcal{D} := \big\{(x, y)\colon\ x \in J,\ y \in I\big\} = J \times I, \quad \text{kus } J \subset \mathbb{R}^n \text{ ja } I \subset \mathbb{R}^m \text{ on risttahukad.}$$

Definitsioon 4.2. Öeldakse, et võrrand

$$F(x, y) = 0 \tag{4.5}$$

määrab risttahukas $\mathcal{D}$ muutuja y muutuja x (ühese) funktsioonina:

$$y = y(x), \tag{4.6}$$

kui mis tahes fikseeritud $x \in J$ korral eksisteerib võrrandil (4.5) risttahukas I parajasti üks lahend y.

Kõnealune funktsioon (4.6)

$$J \ni x \longmapsto y(x) \in I$$

on määratud võrdusega

$$F\bigl(x, y(x)\bigr) = 0,$$

s.t funktsioon $y = y(x)$ seab punktile $x \in J$ vastavusse võrrandi (4.5) ainsa lahendi $y \in I$.

Seejuures öeldakse, et funktsioon (4.6) on antud võrrandiga (4.5) *ilmutamata kujul.*

Teoreemi 4.1 ilmutamata funktsioonist võime nüüd esitada järgmisel, teoreemiga 4.1 samaväärsel kujul.

Teoreem 4.4 (teoreem ilmutamata funktsioonist; vt nt [R, lk 224])**.** *Olgu $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ lahtine hulk, olgu $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ hulgas U pidevalt diferentseeruv funktsioon ning olgu $a \in \mathbb{R}^n$ ja $b \in \mathbb{R}^m$ sellised, et $(a, b) \in U$ ja $F(a, b) = 0$. Olgu $A = F'(a, b)$ ning olgu A_Y pööratav operaator. Siis leiduvad lahtised risttahukad $J \subset \mathbb{R}^n$ ja $I \subset \mathbb{R}^m$, nii, et*

(a) *$(a, b) \in J \times I$ (s.t $a \in J$ ja $b \in I$) ning iga $x \in J$ korral leidub parajasti üks $y \in I$ nii, et $F(x, y) = 0$;*

(b) *defineerides funktsiooni $f\colon J \ni x \mapsto y \in I$, kus element $y = f(x)$ on määratud võrdusega $F(x, y) = 0$, on funktsioon f pidevalt diferentseeruv; seejuures*

$$f'(x) = -\Bigl(F'\bigl(x, f(x)\bigr)_Y\Bigr)^{-1} F'\bigl(x, f(x)\bigr)_X \quad \text{iga } x \in J \text{ korral;} \tag{4.7}$$

muuhulgas

$$f'(a) = -\bigl(F'(a, b)_Y\bigr)^{-1} F'(a, b)_X = -(A_Y)^{-1} A_X.$$

Veendumaks teoreemide 4.1 ja 4.4 samaväärsuses, ühtlustame nende teoreemide tähistused: võtame $P_0 := (a, b)$, loeme teoreemis 4.1 punkti P_0 risttahukakujuliseks ümbruseks, milles kehtivad tema väited (a) ja (b) risttahuka $J \times I$, kus $J \subset \mathbb{R}^n$ ja $I \subset \mathbb{R}^m$ on vastavalt punktide a ja b risttahukakujulised ümbrused, kusjuures osatuletiste $\dfrac{\partial F_k}{\partial x_j}$ ja $\dfrac{\partial F_k}{\partial y_i}$, $k, i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, pidevuse tõttu punktis P_0 võime üldisust kitsendamata eeldada, et igas punktis $P \in J \times I$

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(P) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(P) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}(P) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}(P) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}(P) & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}(P) & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m}(P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}(P) & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2}(P) & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}(P) \end{vmatrix} \neq 0,$$

ning tähistame $y(x) = f(x)$ iga $x \in J$ korral. Teoreemide 4.1 ja 4.4 samaväärsuseks jääb veenduda, et valemitega (4.4) ja (4.7) antud tuletised on samad.

Selleks märgime, et ükskõik kumma teoreemi (4.1 või 4.4) kehtides iga $k \in \{1, \ldots, m\}$ korral

$$\begin{aligned} u_k(x) : &= F_k\big(x, f(x)\big) \\ &= F_k\big(x_1, \ldots, x_n, y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m(x_1, \ldots, x_n)\big) = 0 \qquad \text{iga } x \in J \text{ korral;} \end{aligned}$$

seega risttahukas J iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}\big(x, f(x)\big) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_i}\big(x, f(x)\big)\, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x) = 0;$$

niisiis risttahukas J iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_i}\big(x, f(x)\big)\, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x) = -\frac{\partial F_k}{\partial x_j}\big(x, f(x)\big), \quad k = 1, \ldots, m. \tag{4.8}$$

s.t

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\big(x, f(x)\big)\, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_j}(x) + \cdots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\big(x, f(x)\big)\, \dfrac{\partial y_m}{\partial x_j}(x) = -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_j}\big(x, f(x)\big), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}\big(x, f(x)\big)\, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_j}(x) + \cdots + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\big(x, f(x)\big)\, \dfrac{\partial y_m}{\partial x_j}(x) = -\dfrac{\partial F_m}{\partial x_j}\big(x, f(x)\big). \end{cases} \tag{4.9}$$

Leides süsteemist (4.9) (iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral) osatuletised $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}(x)$, $i = 1, \ldots, m$, Crameri reegli järgi, saame valemid (4.4). Jääb näidata, et valem (4.7) esitab süsteemide (4.9), $j = 1, \ldots, n$, lahendid maatrikskujul. (Märgime, et kui $x \in J$, siis süsteemide (4.9) determinant erineb nullist ning seega on neil süsteemidel täpselt üks lahend.)

Süsteemidest (4.8), $j = 1, \ldots, n$, kirja panduna maatrikskujul, saame, et iga $x \in J$ korral

$$\begin{aligned} -F'\big(x, f(x)\big)_X &= \left(-\frac{\partial F_k}{\partial x_j}\big(x, f(x)\big)\right)_{k,j=1}^{m,n} = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_i}\big(x, f(x)\big)\, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x)\right)_{k,j=1}^{m,n} \\ &= \left(\frac{\partial F_k}{\partial y_i}\big(x, f(x)\big)\right)_{k,i=1}^{m} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j=1}^{m,n} = F'\big(x, f(x)\big)_Y\, f'(x), \end{aligned}$$

järelikult (arvestades, et $F'\big(x, f(x)\big)_Y$ on pööratav, kui $x \in J$),

$$\begin{aligned} f'(x) &= E_m\, f'(x) = \left(\Big(F'\big(x, f(x)\big)_Y\Big)^{-1} F'\big(x, f(x)\big)_Y\right) f'(x) \\ &= \Big(F'\big(x, f(x)\big)_Y\Big)^{-1} \Big(F'\big(x, f(x)\big)_Y\, f'(x)\Big) = \Big(F'\big(x, f(x)\big)_Y\Big)^{-1} \Big(-F'\big(x, f(x)\big)_X\Big) \\ &= -\Big(F'\big(x, f(x)\big)_Y\Big)^{-1} F'\big(x, f(x)\big)_X \end{aligned}$$

(siin E_m on $m \times m$-ühikmaatriks), s.t valem (4.7) esitab süsteemide (4.9), $j = 1, \ldots, n$, lahendid.

Teoreemi 4.4 tõestus. Defineerime funktsiooni $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^{n+m}$ võrdusega

$$\Phi(x, y) = \big(x, F(x, y)\big), \quad (x, y) \in U; \tag{4.10}$$

siis, arvestades, et

$$\Phi(x, y) = \big(x_1, \ldots, x_n, F_1(x, y), \ldots, F_m(x, y)\big), \quad (x, y) \in U,$$

funktsioon Φ on (lause 2.1 põhjal) pidevalt diferentseeruv hulgas U, kusjuures iga $(x, y) \in U$ korral

$$\begin{aligned} \Phi'(x, y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x, y) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x, y) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x, y) & \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x, y) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(x, y) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x, y) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(x, y) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x, y) & \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(x, y) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_n & 0_{n\times m} \\ F'(x, y)_X & F'(x, y)_Y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kus E_n on $n \times n$-ühikmaatriks ja $0_{n\times m}$ on $n \times m$-nullmaatriks. Seejuures operaator $\Phi'(a, b) \in L(\mathbb{R}^{n+m})$ on pööratav, sest tema determinant

$$\det \Phi'(a, b) = (\det E_n)\big(\det F'(a, b)_Y\big) = \det F'(a, b)_Y = \det A_Y \neq 0.$$

Niisiis võime funktsioonile Φ rakendada teoreemi 3.1 pöördfunktsioonist, mille kohaselt leidub punkti (a, b) lahtine ümbrus $S \subset U$ nii, $\Phi|_S$ on üksühene, $W := \Phi(S)$ on lahtine, $\Phi'(x, y)$ on pööratav iga $(x, y) \in S$ korral ning ahendi $\Phi|_S\colon\ S \to W$ pöördfunktsioon

$\Psi\colon W \to S$ on pidevalt diferentseeruv, kusjuures

$$\Psi'(w) = \Phi'\big(\Psi(w)\big)^{-1} \quad \text{iga } w \in W \text{ korral.} \tag{4.11}$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $S = J_0 \times I$ mingite punkti a lahtise ümbruse $J_0 \subset \mathbb{R}^n$ ja punkti b lahtise risttahukakujulise ümbruse $I \subset \mathbb{R}^m$ korral, sest järelduse 3.2 põhjal teisendab Φ hulga S lahtised alamhulgad ruumi $\mathbb{R}^{n+m}$ lahtisteks alamhulkadeks.

Tähistame

$$T := \big\{x \in \mathbb{R}^n : (x,0) \in W\big\};$$

siis $T \subset \mathbb{R}^n$ on lemma 4.3, (a), põhjal lahtine hulk, kusjuures $a \in T$, sest kuna $(a,b) \in S$ ja $F(a,b) = 0$, siis

$$(a,0) = \big(a, F(a,b)\big) = \Phi(a,b) \in \Phi(S) = W.$$

Paneme tähele, et

(•) $T \subset J_0$, kusjuures iga $x \in T$ korral leidub parajasti üks $y \in I$ nii, et $F(x,y) = 0$,

Tõepoolest, olgu $x \in T$. Siis $(x,0) \in W = \Phi(S)$, seega mingi punkti $(u,y) \in S$ (s.t $u \in J_0$ ja $y \in I$) korral $(x,0) = \Phi(u,y) = \big(u, F(u,y)\big)$; järelikult $x = u \in J_0$ (siit järeldub, et $T \subset J_0$) ja $0 = F(u,y) = F(x,y)$; niisiis $F(x,y) = 0$ mingi $y \in I$ korral. Teiselt poolt, olgu $v \in I$ selline, et $F(x,v) = 0$. Väite (•) tõestuseks jääb näidata, et $v = y$. Kuna

$$\Phi(x,v) = \big(x, F(x,v)\big) = (x,0) = \big(x, F(x,y)\big) = \Phi(x,y),$$

siis, arvestades, et $(x,y), (x,v) \in J_0 \times I = S$ ja $\Phi|_S$ on üksühene, $v = y$, nagu soovitud.

Võttes nüüd risttahukaks J punkti a mis tahes lahtise risttahukakujulise ümbruse, mis sisaldub hulgas T, kehtib väide (a).

Tõestame nüüd väite (b), s.t näitame, et f on pidevalt diferentseeruv, kusjuures iga $x \in J$ korral kehtib (4.7).

Iga $x \in J$ korral $\big(x, f(x)\big) \in S$ ja $F\big(x, f(x)\big) = 0$, seega

$$\Phi\big(x, f(x)\big) = \Big(x, F\big(x, f(x)\big)\Big) = (x,0) \in W;$$

järelikult $\Psi(x,0) = \big(x, f(x)\big)$. Defineerime funktsiooni $h\colon J \to \mathbb{R}^{n+m}$,

$$h(x) = \Psi(x,0) = \big(x, f(x)\big), \quad x \in J.$$

Lemma 4.3, (b), põhjal on funktsioon h pidevalt diferentseeruv hulgas J, kusjuures võrduse (4.11) põhjal

$$h'(x) = \Psi'(x,0)_X = \Big(\Phi'\big(\Psi(x,0)\big)^{-1}\Big)_X = \Big(\Phi'\big(x,f(x)\big)^{-1}\Big)_X \quad \text{iga } x \in J \text{ korral.}$$

Paneme tähele, et mis tahes $x \in J$ korral

$$\begin{aligned}\Phi'\big(x,f(x)\big)^{-1} &= \begin{pmatrix} E_n & 0_{n\times m} \\ F'\big(x,f(x)\big)_X & F'\big(x,f(x)\big)_Y \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} E_n & 0_{n\times m} \\ -\Big(F'\big(x,f(x)\big)_Y\Big)^{-1} F'\big(x,f(x)\big)_X & \Big(F'\big(x,f(x)\big)_Y\Big)^{-1} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

kus E_m on $m \times m$-ühikmaatriks ja $0_{n\times m}$ on $n \times m$-nullmaatriks, sest, tähistades $C := F'\big(x,f(x)\big)_X$ ja $D := F'\big(x,f(x)\big)_Y$,

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} E_n & 0_{n\times m} \\ F'\big(x,f(x)\big)_X & F'\big(x,f(x)\big)_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0_{n\times m} \\ -\Big(F'\big(x,f(x)\big)_Y\Big)^{-1} F'\big(x,f(x)\big)_X & \Big(F'\big(x,f(x)\big)_Y\Big)^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_n & 0_{n\times m} \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0_{n\times m} \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n\,E_n + 0_{n\times m}\,(-D^{-1}C) & E_n\,0_{n\times m} + 0_{n\times m}\,D^{-1} \\ C\,E_n + D\,(-D^{-1}C) & C\,0_{n\times m} + D\,D^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_n & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & E_m \end{pmatrix} = E_{n+m};\end{aligned}$$

seega iga $x \in J$ korral

$$h'(x) = \Big(\Phi'\big(x,f(x)\big)^{-1}\Big)_X = \begin{pmatrix} E_n \\ -\Big(F'\big(x,f(x)\big)_Y\Big)^{-1} F'\big(x,f(x)\big)_X \end{pmatrix}.$$

Arvestades, et iga $x \in J$ korral $h(x) = \big(x,f(x)\big)$, järeldub funktsiooni h pidevalt diferentseeruvusest (lause 2.1 põhjal), et funktsioon f on pidevalt diferentseeruv, kusjuures iga $x \in J$ korral

$$h'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n \\ f'(x) \end{pmatrix}.$$

Seega iga $x \in J$ korral

$$\begin{pmatrix} E_n \\ f'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n \\ -\Big(F'\big(x, f(x)\big)_Y\Big)^{-1} F'\big(x, f(x)\big)_X \end{pmatrix};$$

niisiis kehtib (4.7). □

4.4. Teoreem pöördfunktsioonist kui järeldus teoreemist ilmutamata funktsioonist

Eelmises punktis järeldasime teoreemi ilmutamata funktsioonist teoreemist pöördfunktsioonist. Selles punktis veendume, et teoreem pöördfunktsioonist järeldub omakorda hõlpsasti teoreemist ilmutamata funktsioonist, s.t me esitame teoreemile pöördfunktsioonist tõestuse, kus me järeldame ta teoreemist ilmutamata funktsioonist. Tõestuse parema jälgitavuse huvides sõnastame teoreemi pöördfunktsioonist siinkohal uuesti.

Teoreem pöördfunktsioonist (vt teoreemi 3.1)**.** *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk, olgu funktsioon $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ pidevalt diferentseeruv ning olgu punkt $a \in U$ selline, et tuletis $f'(a)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on pööratav operaator. Siis leidub punkti a lahtine ümbrus $S \subset U$ nii, et*

(1) *ahend $f|_S$ on üksühene;*

(2) *tuletis $f'(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on pööratav operaator iga $x \in S$ korral;*

(3) *kujutishulk $T := f(S)$ on lahtine;*

(4) *funktsiooni $f|_S\colon S \to T$ pöördfunktsioon $g\colon T \to S$ on pidevalt diferentseeruv hulgas T, kusjuures*

$$g'(y) = f'\big(g(y)\big)^{-1} \quad \text{iga } y \in T \text{ korral.}$$

Tõestus järeldusena teoreemist ilmutamata funktsioonist. Tähistame $b := f(a) \in \mathbb{R}^n$ ja defineerime funktsiooni $F\colon \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$,

$$F(y, x) = y - f(x), \quad (y, x) \in \mathbb{R}^n \times U;$$

siis $(b, a) \in \mathbb{R}^n \times U$, kusjuures

$$F(b, a) = b - f(a) = f(a) - f(a) = 0.$$

Kuna $F(x,y) = y - f(x) = \big(y_1 - f_1(x), \dots, y_n - f_n(x)\big)$, siis funktsioon F on pidevalt diferentseeruv hulgas $\mathbb{R}^n \times U$, kusjuures mis tahes $(y,x) \in \mathbb{R}^n \times U$ korral

$$F'(y,x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(y,x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(y,x) & \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(y,x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(y,x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}(y,x) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(y,x) & \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(y,x) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(y,x) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & -\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \dots & -\frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & -\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & -\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & -f'(x) \end{pmatrix};$$

muuhulgas

$$F'(b,a) = \begin{pmatrix} E_n & -f'(a) \end{pmatrix}.$$

Kuna eelduse põhjal on $f'(a)$ pööratav operaator, siis saame funktsioonile F rakendada teoreemi 4.4 ilmutamata funktsioonist, mille kohaselt

(a) leiduvad lahtised risttahukad $I \subset \mathbb{R}^n$ ja $J \subset \mathbb{R}^n$, nii, et $(b,a) \in I \times J$ (s.t $b \in I$ ja $a \in J$) ning iga $y \in I$ korral leidub parajasti üks $x \in J$ nii, et $F(y,x) = y - f(x) = 0$ ehk, teisisõnu, $y = f(x)$;

(b) defineerides funktsiooni $g\colon I \ni y \mapsto x \in J$, kus element $x = g(y)$ on määratud võrdusega $F(x,y) = 0$ ehk, teisisõnu, $y = f(x)$, on funktsioon g pidevalt diferentseeruv; seejuures iga $y \in I$ korral

$$g'(y) = -\Big(\big(F'(y,g(y))\big)_X\Big)^{-1}\big(F'(y,g(y))\big)_Y = -\big(-f'\big(g(y)\big)^{-1}\big)E_n = f'\big(g(y)\big)^{-1}.$$

Tähistame $S := J \cap f^{-1}(I)$, siis $a \in S$ (sest $a \in J$, kusjuures $f(a) = b \in I$); seejuures hulk S on lahtine (sest J on lahtine ning lahtise hulga I originaal $f^{-1}(I)$ pideva funktsiooni f suhtes on samuti lahtine); niisiis hulk S on punkti a lahtine ümbrus. Ahend $f|_S$ on üksühene (sest kui $x_1, x_2 \in S$ on sellised, et $f(x_1) = f(x_2) =: v$, siis, arvestades, et $v \in I$, leidub täpselt üks $u \in J$, mille korral $v = f(u)$, ning järelikult $x_1 = x_2 = u$), s.t väide (1) kehtib. Hulk $T := f(S) = I$ on lahtine, s.t väide (3) kehtib. Väide (4) ning muuhulgas ka väide (2) kehtivad väite (b) põhjal, sest väites (b) kirjeldatud funktsioon g on funktsiooni $f|_S$ pöördfunktsioon (selle erinevusega, et väites (b) on funktsiooni g sihthulgana vaadeldud hulgast S suuremat hulka J). $\square$

Kirjandus

[K] M. Kilp, *Algebra I,* Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2005.

[K_2] G. Kangro, *Matemaatiline analüüs II,* Valgus, Tallinn, 1968.

[R] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis,* Third Edition, McGraw–Hill, Tokyo, 1976.

[OO] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs,* Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[ИП$_1$] В. А. Ильин, Э. Г. Позняк, *Основы математического анализа, часть I,* издание третье, Наука, Москва, 1971.

[Ф$_1$] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления I,* шестое издание, Наука, Москва, 1966.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Sten Mattias Oksaar (sünnikuupäev: 24.02.1993),

(i) annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

"Teoreem pöördfunktsioonist",

mille juhendaja on Märt Põldvere,

(a) reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

(b) üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

(ii) olen teadlik, et punktis (i) nimetatud õigused jäävad alles ka autorile;

(iii) kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **12.05.2016**